



HAL
open science

Réduction de modèle, observation et commande prédictive d'une station d'épuration d'eaux usées

Ali Assaf

► **To cite this version:**

Ali Assaf. Réduction de modèle, observation et commande prédictive d'une station d'épuration d'eaux usées. Autre. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : 2012LORR0282 . tel-01749454

HAL Id: tel-01749454

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749454>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

ÉCOLE DOCTORALE RP2E N°410

T H È S E

présentée et soutenue publiquement le 12 décembre 2012

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine
Spécialité : Génie des procédés et des produits

par

ALI ASSAF

**Réduction de modèle et commande
prédictive d'une station d'épuration
d'eaux usées**

préparée au Laboratoire Réactions et Génie des Procédés
(LRGP)

Composition du jury :

<i>Encadrant :</i>	Jean-Pierre CORRIOU	-	LRGP (Nancy)
<i>Président :</i>		-	
<i>Rapporteurs :</i>	Catherine CADET	-	GIPSA-LAB (Grenoble)
	Christophe DAGOT	-	GRESE (Limoges)
<i>Examineurs :</i>	Abderrazak LATIFI	-	LRGP (Nancy)
	Sami OTHMAN	-	LAGEP (Lyon)
	Marie-Noëlle PONS	-	LRGP (Nancy)

Table des matières

1	Présentation du Benchmark BSM1	11
1.1	Introduction	11
1.2	Traitement d'eaux usées	14
1.2.1	Pré-traitement	14
1.2.2	Traitement par voie biologique	14
1.2.3	Traitement du carbone et de l'azote	15
1.3	Benchmark Simulation Model 1 (BSM1)	17
1.3.1	Bilan matière du BSM1	20
1.3.2	Clarificateur	21
1.3.3	Les influents	22
1.3.4	Variables d'entrée et de sorties du benchmark <i>BSM1</i>	23
1.3.5	Etat de l'art sur la commande des BSM1	25
1.4	Conclusion	26
2	Introduction à la théorie de la commande dans l'espace d'état	29
2.1	Résumé	29
2.2	Introduction	29
2.3	Représentation d'état	30
2.4	Stabilité	31
2.5	Commandabilité	33
2.6	Observabilité	33
2.7	Changement de base	33
2.8	Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert d'un système	34
2.8.1	D'une représentation de transfert vers une représentation d'état . .	34
2.8.2	D'une représentation d'état vers une représentation de transfert . .	37
2.9	Conclusion	38
3	Identification	39
3.1	Introduction	39
3.2	Principes de Base de l'identification	40
3.2.1	Définition d'une Classe de Modèles	41

3.2.2	Acquisition des entrées/sorties sous un protocole d'expérimentation	42
3.2.3	Choix ou estimation de la complexité du modèle	43
3.2.4	Estimation des paramètres du modèle	43
3.2.5	Validation du modèle identifié	44
3.3	Méthodes d'identification	44
3.3.1	Identification basée sur l'erreur de prédiction	44
3.3.2	Identification basée sur l'erreur de sortie	46
3.4	Identification en boucle ouverte d'une station d'épuration d'eaux usées. . .	48
3.5	Conclusion	56
4	Commande prédictive	61
4.1	Résumé	61
4.2	Introduction	61
4.3	Historique	62
4.4	Méthodologie de la commande prédictive	64
4.5	Éléments de la commande prédictive	65
4.6	Commande prédictive dans l'espace d'état	67
4.6.1	En absence de contraintes	67
4.6.2	En présence de bruit (avec observateur d'état)	72
4.6.3	En présence de contraintes	75
4.6.4	En présence de perturbations mesurées (FeedForward)	77
4.6.5	En présence de perturbations non mesurées	81
4.6.6	En présence d'une erreur de modélisation	82
4.7	Stabilité et robustesse	84
4.8	Conclusion	86
5	Commande prédictive : résultats	89
5.1	Introduction	89
5.2	Commande prédictive DMC et QDMC	90
5.3	Résultats des simulations	94
5.3.1	Modèle linéaire des réponses en boucle ouverte du benchmark . . .	95
5.3.2	Caractéristiques générales de la simulation	97
5.3.3	Résumé des stratégies de simulation	98
5.3.4	Critères statistiques de comparaison	99
5.3.5	Commande sans Feedforward	100
5.3.6	Commande avec Feedforward	102
5.3.7	Comparaison de l'ensemble des résultats	103
5.4	Conclusion	103

Appendices

A	Identification	111
A.1	Introduction	111
A.2	Réponses indicielles pour les entrées manipulées	112
A.2.1	Introduction	112
A.2.2	Modèles des réponses à des échelons des entrées	112
A.3	Réponses indicielles pour les perturbations	152
A.3.1	Introduction	152
A.3.2	Modèles des réponses à des échelons des perturbations	152

REMERCIEMENTS

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du Laboratoire Réactions et Génie des Procédés (LRGP). Il a été financé par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche (MESR). Je remercie Messieurs les Professeurs Michel SARDIN et Gabriel WILD successivement Directeurs LRGP (anciennement LSGC), de m'avoir accueilli et intégré au sein du laboratoire.

Je tiens à remercier tout particulièrement et à exprimer toute ma profonde gratitude à Monsieur Jean-Pierre CORRIOU, Directeur de thèse. J'ai beaucoup appris à son côté, j'ai eu le grand privilège de bénéficier de ses compétences scientifiques. Je le remercie pour toute la confiance qu'il m'a accordée. Ses précieux conseils et sa bienveillance m'ont grandement aidé et accompagné tout au long de cette thèse.

Je remercie chaleureusement Madame Catherine CADET et Monsieur Christophe DAGOT d'avoir accepté de juger ce travail et d'en être les rapporteurs, qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance. Je remercie énormément Madame Marie-Noëlle PONS et Messieurs Abderrazak LATIFI et Sami OTHMAN de m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail lors de la soutenance de thèse.

Je tiens également à remercier toutes les personnes du laboratoire LRGP de Nancy, de l'ENSIC avec qui j'ai eu l'occasion d'échanger sur diverses thématiques de recherches et/ou qui m'ont fait l'honneur d'assister à ma soutenance de thèse.

Merci à mes chers collègues et amis qui ont tant contribué à créer une bonne ambiance au LRGP et qui ont fait de chaque jour passé en Lorraine. Une agréable journée remplie de bonne humeur et, de joie de vivre : Paola, Sara, Meryem, Nouceiba, Ahmad, Salim, Aziz, Shahid, Mahmoud, Alexandre, Lei, Ibrahim, Rado, Dine, . . . , la liste est loin d'être exhaustive.

Je dédie cette thèse à ma mère et à mes amis, je les remercie de m'avoir accompagné tout au long de ces années et de m'avoir soutenu dans les moments les plus difficiles.

Résumé

Les installations d'épuration des eaux usées sont des systèmes de grande dimension, non linéaires, sujets à des perturbations importantes en flux (débit) et en charge. Leur commande est difficile à cause de leur comportement complexe, fortement non linéaire, de la présence de perturbations importantes, de leur caractère multivariable et de contraintes. Plusieurs stratégies de commande ont été proposées dans la littérature mais leur évaluation et leur comparaison restent une tâche difficile à réaliser. Cela est dû à plusieurs facteurs : La variabilité des eaux usées à traiter, la complexité des réactions biologiques et biochimiques mises en jeu, le spectre large des constantes de temps et le manque de critères standards d'évaluation.

Une commande prédictive (MPC) a été appliquée au Benchmark BSM1 qui est un environnement de simulation qui définit une installation d'épuration.

Une identification en boucle ouverte d'une station d'épuration d'eaux usées a été réalisée pour déterminer un modèle linéaire en se basant sur un ensemble de mesures entrée-sortie du Benchmark BSM1. Les réponses indicielles en boucle ouverte ont été obtenues à partir de variations échelon des entrées autour de leurs valeurs stationnaires. L'influence de l'amplitude des échelons montre l'importante non-linéarité du procédé. Le modèle tient compte des non-linéarités à travers des paramètres variables.

Les réponses indicielles obtenues permettent de déterminer par optimisation les fonctions de transfert continues correspondantes. Ces fonctions de transfert peuvent être regroupées en cinq modèles mathématiques. Des fonctions de transfert continues de premier ordre, de premier ordre avec un intégrateur, des réponses inverses, de second ordre et de second ordre avec zéro représentant les réponses indicielles ont été identifiées. Les valeurs numériques des coefficients de chaque modèle choisi ont été calculées par un critère des moindres carrés. La commande prédictive (MPC) utilise le modèle obtenu comme un modèle interne pour commander le procédé.

Deux stratégies de la commande prédictive DMC et QDMC d'une station d'épuration avec ou sans compensation par anticipation (feedforward) ont été testées. La commande par anticipation est utilisée pour réduire l'effet de deux perturbations mesurées, le débit entrant et la concentration entrante en ammonium, sur le système. L'utilisation de la commande par anticipation a apporté une amélioration des performances pour la compensation de la concentration entrante en ammonium beaucoup plus importante que le cas de la compensation du débit entrant seul. Les simulations ont montré que la meilleure per-

formance de traitement a été obtenue par la compensation simultanée de la concentration entrante en ammonium et du débit entrant.

Abstract

Wastewater treatment processes are large scale, non linear systems, submitted to important disturbances of influent flow rate and load. Their control is difficult because of their complex and nonlinear behaviour, the presence of important disturbances, the multivariable character and constraints. Several control strategies have been proposed in the literature for wastewater treatment plants but their evaluation is a real problem due to the variability of waste waters, the complexity of the physical and biochemical phenomena and to the range of time constants (from few minutes to several days) inherent in the activated sludge process, the lack of standard evaluation criteria. Model predictive control (MPC) widely used industrial technique for advanced multivariable control, has been applied to the Benchmark Simulation Model 1 (BSM1) simulation benchmark of wastewater treatment process.

An open loop identification method has been developed to determine a linear model for a set of input-output measurements of the process. All the step responses have been obtained in open loop from step variations of the manipulated inputs and measured disturbances around their steady state values. The influence of the amplitude of the steps demonstrates the important non linearity of the process. The non-linearities of the model are taken into account by variable parameters.

The step responses coefficient obtained make it possible to determine by optimization the corresponding transfer functions. That functions are classified by five mathematical models, such as : first order, first order with integrator, inverse response, second order and second order with zero. The numerical values of coefficients of each model selected were calculated using a least squares criterion. Model predictive control (MPC) uses the resulting model as an internal model to control the process. Dynamic matrix control DMC and quadratic dynamic matrix control QDMC predictive control strategies, in the absence and presence of feedforward compensation, have been tested. Two measured disturbances have been used for feedforward control, the influent flow rate and ammonium concentration. It is shown that the performance of feedforward regarding the influent ammonium concentration is better than for the feedforward concerning the influent flow rate. The best performance is obtained by combining both feedforward controllers with respect to the influent ammonium concentration and flow rate.

Introduction générale

L'eau est un bien précieux et une ressource essentielle pour l'être humain, son activité et son environnement. Longtemps considérée comme abondante, elle est aujourd'hui perçue comme un bien limité à la qualité menacée. L'augmentation continue de la population mondiale, sa concentration dans les villes et l'industrialisation ont eu pour effet d'augmenter continuellement les besoins en eau. L'eau subit diverses pollutions et dégradations : les écosystèmes et la santé des personnes en sont directement impactés. Les pollutions présentes dans l'eau sont d'origines diverses : industrielle, domestique ou agricole. L'utilisation de stations d'épuration a permis de réduire l'impact des eaux usées sur le milieu naturel en les dépolluant. Les procédés de traitement des eaux sont composés de plusieurs phases, chacune traitant un type particulier de pollution (organique, chimique, minérale). De par ses excellentes performances, la phase de traitement biologique par boues activées représente la phase clé de la chaîne globale de traitement. Cependant, son fonctionnement repose sur le développement de populations bactériennes et est également le plus difficile à maîtriser. Le but de ces différents traitements est de diminuer suffisamment la quantité de substances polluantes contenues dans les eaux usées pour que l'eau finalement rejetée dans le milieu naturel ne dégrade pas ce dernier.

La réglementation sur la qualité des eaux rejetées est de plus en plus drastique en ce qui concerne le dépassement des normes. Cette qualité est exprimée notamment en termes d'azote ou de phosphore et pour cela le parfait fonctionnement des stations d'épuration est impératif. Les systèmes de traitement par boues activées sont les plus répandus dans le monde pour l'épuration des affluents domestiques et industriels. Ils permettent d'atteindre de très bons niveaux de dépollution en ce qui concerne la pollution carbonée et les nutriments.

Afin de continuer à améliorer la qualité de traitement d'eaux usées, de nouveaux procédés plus compacts et plus performants sont inventés pour remplacer les procédés traditionnels très extensifs. Les procédés actuellement utilisés sont optimisés afin d'améliorer leurs performances, aussi bien du point de vue de la qualité de l'eau rejetée que de la consommation d'énergie et de réactifs. La réduction de ces consommations énergétiques est aussi importante que l'amélioration de la qualité d'eau rejetée car elle permet de réduire l'impact environnemental global et le coût de fonctionnement des

procédés de traitement.

Le recours à l'automatisation à l'aide de capteurs est de plus en plus courant et nécessaire pour améliorer les procédés existants. Ces derniers permettent d'avoir un suivi en continu de la pollution présente dans les procédés. Il est ainsi possible d'ajuster le traitement à son juste niveau grâce à des lois de commande de plus en plus sophistiquées. Avant de mettre en place ces lois de commande, il est néanmoins nécessaire d'évaluer leurs performances afin de choisir celle qui sera optimale pour l'usine considérée. Ceci est très difficile à réaliser sur des procédés réels à cause du coût financier du test de ces lois de commande et des longues périodes d'évaluation qui sont nécessaires pour chacune d'entre elle.

Pour résoudre les difficultés de comparaison de diverses lois de commande et pour évaluer la performance des différentes stratégies de commande proposées pour les installations d'épuration des eaux résiduaires urbaines, le développement d'un modèle de référence nommé Benchmark a été réalisé.

Le Benchmark Simulation Model n°1 (BSM1) de l'IWA/COST est le résultat d'un travail débuté dans deux Actions (624 et 682) du programme COST (European Cooperation in the field of Scientific and Technical Research) 624 et 682 entre 1998 et 2004. Ce travail se poursuit encore actuellement dans un groupe de travail de l'IWA (Task Group Benchmarking of Control Strategies for Wastewater Treatment Plants). Le BSM1 est un environnement de simulation qui définit une installation d'épuration, un modèle de simulation et l'ensemble des paramètres du modèle, les caractéristiques des eaux usées, les tests de protocoles et les critères d'évaluation. Il est ainsi maintenant possible de simuler le fonctionnement d'une usine de traitement. Ces simulations permettent d'évaluer de façon rigoureuse les performances de diverses lois de commande et de divers paramétrages de ces lois.

Le Benchmark utilise le modèle ASM1 (Activated Sludge Model 1) pour la prédiction des phénomènes biologiques dans le réacteur. Il y a quelques années, afin d'homogénéiser les différents concepts apparus pour représenter les processus biologiques mis en jeu dans les boues activées, plusieurs scientifiques et experts se sont réunis dans un groupe de travail, dans le cadre de l'International Water Association (IWA). De ce travail est né l'Activated Sludge Model N°1 (ASM1), qui représente les phénomènes d'oxydation du carbone, de nitrification et de dénitrification en formalisant la cinétique et la stoechiométrie de chaque réaction. Les discussions et études pour lever certaines limitations et restrictions de l'ASM1 ont abouti au développement de deux autres modèles : ASM2 et ASM3. Les modèles ASM constituent un résumé compact et élégant de l'état de l'art de la modélisation des systèmes par boues activées.

La comparaison des lois de commande sur un seul critère global n'est en général pas satisfaisante. En effet, la plupart des lois développées ont un domaine d'application précis dans lequel elles sont les plus performantes.

Dans notre travail, différentes stratégies de la commande prédictive basée sur le modèle sont étudiées avec pour application le modèle BSM1. Le modèle linéaire servant de base à la commande prédictive a été obtenu par identification en boucle ouverte à partir des variations des entrées autour de leurs valeurs stationnaires. La commande prédictive basée sur les réponses indicielles a été utilisée en tenant compte des contraintes sur les entrées et les variations des entrées. Une commande par anticipation (Feedforward) a été aussi développée pour réduire l'effet de perturbations mesurées (la concentration entrante en ammonium et débit entrant). Pour le réglage et la comparaison de ces stratégies de commande, trois objectifs ont été considérés : les concentrations moyennes en ammoniacque et en azote total dans l'effluent ainsi que la consommation énergétique (somme des énergies utilisées pour le pompage et pour l'aération).

On a trouvé que certaines stratégies ne permettent pas d'atteindre des niveaux de qualité d'eau très élevés, c'est-à-dire de faibles concentrations moyennes en ammoniacque et en azote total dans l'effluent, tandis que certaines stratégies permettent d'atteindre une meilleure performance de traitement pour des concentrations dans l'effluent d'ammoniacque et d'azote total au prix d'une consommation énergétique plus importante. Un compromis entre la qualité d'eau et l'énergie consommée est généralement souhaité.

Ce travail est présenté en cinq chapitres :

- le premier chapitre décrit plusieurs aspects concernant le domaine des eaux usées. Le chapitre présente de manière générale les principes fondamentaux du traitement biologique et les aspects liés à la modélisation des systèmes d'épuration par boues activées des eaux usées. Les Modèles pour les Systèmes à Boues Activées (ASM) sont présentés afin de mieux comprendre le fonctionnement du procédé BSM1 qui est considéré comme un modèle réaliste de station de traitement d'eaux usées.
- le second chapitre est consacré au rappel de notions essentielles de la théorie de la commande dans l'espace d'état, comme la stabilité, l'observabilité, la commandabilité d'un système linéaire, les représentations des systèmes.
- le troisième chapitre présente brièvement les aspects principaux de la procédure d'identification des systèmes. Par la suite, nous présentons une identification en boucle ouverte d'une station d'épuration d'eaux usées qui a été réalisée à partir du benchmark BSM1. Les non linéarités présentes dans le modèle théorique du benchmark sont mises en évidence à travers les caractéristiques complexes des

réponses en boucle ouverte. En dépit de ces non linéarités, un modèle linéaire est extrait pour être ensuite utilisé comme modèle interne pour la commande prédictive afin de commander le procédé.

- le quatrième chapitre décrit la méthodologie de la commande prédictive dans l'espace d'état. Cette commande est traitée comme un problème d'optimisation d'une fonction de coût ou critère. Des exemples simples illustrent la commande prédictive dans l'espace d'état. Dans ce chapitre, nous présentons aussi la commande par anticipation (feedforward) dans le cas de présence des perturbations mesurables.
- le cinquième chapitre décrit les stratégies de commande prédictive appliquées au benchmark BSM1 de la station d'épuration. Les résultats de simulations sont explicités. Principalement, deux stratégies de la commande prédictive DMC (Dynamic Matrix Control) et QDMC (Quadratic Dynamic Matrix Control) sont présentées avec ou sans compensation de l'effet de perturbations mesurées (le débit entrant q_0 et la concentration entrante en ammonium $[\text{NH}]_0$).

Chapitre 1

Présentation du Benchmark BSM1

1.1 Introduction

Les eaux usées sont toutes les eaux qui sont de nature à contaminer les milieux dans lesquelles elles sont déversées. On classe généralement les eaux usées selon leur provenance et leurs caractéristiques en :

- **Eaux usées urbaines** : La pollution urbaine provient principalement des différents usages domestiques de l'eau. On trouve les eaux des toilettes chargées en matières organiques et azotées, les eaux ménagères provenant des salles de bains, des cuisines et des eaux de lavages, chargées en détergents, graisses, solvants et débris organiques. A ceux-ci, s'ajoutent les rejets des petites industries, des commerces et de l'artisanat, et enfin les eaux pluviales susceptibles de lessiver les toits et les bitumes chargés en hydrocarbures et graisses.
- **Eaux usées industrielles** : Les eaux usées industrielles résultent principalement des industries agro-alimentaires, papetières, chimiques, textiles, des cuirs et des peaux, des industries extractives, des industries minérales, mécaniques et de traitement de surfaces, de production d'énergie, des industries sidérurgiques et métallurgiques. Leurs caractéristiques varient d'une industrie à l'autre. L'industrie est responsable d'une grande partie des rejets polluants organiques, azotés ou phosphorés. Certaines d'entre elles doivent faire l'objet d'un prétraitement de la part des industriels avant d'être rejetées dans les réseaux de collecte.

Les eaux polluées sont des eaux contaminées avec des produits de nature organique, minérale ou métallique. On parle de pollution lorsque la présence de ces produits dans un milieu entraîne sa modification. Les substances polluantes sont également classées selon leur toxicité et leur impact sur la faune et la flore.

Au premier rang (en termes de quantités), les éléments polluants riches en carbone, azote constituent la pollution la plus abondante. Ces substances n'ont pas d'effet toxique direct sur les êtres vivants. Toutefois, à forte concentration, elles peuvent s'avérer dangereuses pour les écosystèmes.

La pollution organique riche en carbone et azote existe sous forme de plusieurs molécules. Pour pouvoir les caractériser, des unités de mesure ont été adoptées pour chaque composant. Les molécules carbonées représentent la plus grande partie de la pollution. On mesure la pollution carbonée par la Demande Chimique en Oxygène (*DCO*). C'est la quantité d'oxygène nécessaire pour oxyder chimiquement une quantité de matière organique donnée (Greenberg et al., 1985). La *DCO* est l'unité de mesure de pollution carbonée la plus utilisée en modélisation des procédés biologiques car elle permet de faire des bilans de matière regroupant des produits organiques biodégradables et non biodégradables.

La pollution azotée vient au second rang après la pollution carbonée. Cet élément, s'il est organique, est caractérisé par la mesure de l'Azote Kjeldal (*NTK*). Cette mesure donne la masse d'azote contenue dans les différentes molécules organiques. Sinon, s'il est sous forme ionique simple : Azote Ammoniacal NH_4^+ , Nitrite NO_2^- , ou Nitrate NO_3^- , il est mesuré par la masse contenue dans ces ions.

Un autre élément très important à évaluer est la quantité de matières en suspension présente dans l'eau. Les matières en suspension sont de nature organique ou minérale. Pour les caractériser, deux mesures sont utilisées :

- Les Matières En Suspension ou MES : Dans le traitement biologique par boues activées, cette mesure représente la masse de toutes les matières solides (non dissoutes) contenues dans l'eau.
- Les Matières Volatiles en Suspension ou MVS : cette mesure donne la masse de matière organique présente dans les MES. La différence avec les MES représente la matière minérale. Très souvent, la quantité de biomasse (par définition solide et composée de matière organique) est assimilée à la mesure de MVS.

L'élément déclencheur d'une réaction biologique est la présence de micro-organismes dans un environnement favorable à leur croissance. Pour permettre le bon fonctionnement de son métabolisme et assurer sa croissance, une cellule bactérienne a besoin principalement d'une source d'énergie et d'une source de carbone. D'autres éléments chimiques comme l'oxygène, l'azote et l'hydrogène sont nécessaires pour la croissance cellulaire et sont assimilés lors de la biosynthèse (Gerhard, 1987).

D'une manière générale, on distingue deux sources d'énergie pour les êtres vivants : l'énergie lumineuse (plantes et bactéries phototrophes) et l'énergie chimique (animaux et bactéries chimiotrophes).

Les bactéries chimiotrophes tirent leur énergie de la dégradation des molécules organiques complexes. Dans un premier temps, les molécules complexes sont dégradées par hydrolyse en molécules plus petites susceptibles d'entrer dans la cellule. Les étapes de dégradation successives en molécules simples à l'intérieur des micro-organismes permettent une libération d'énergie et la production de pouvoir réducteur. L'énergie libérée est utilisée pour effectuer des réactions de biosynthèse ou est stockée sous forme de liaisons chimiques riches en énergies comme la liaison phosphate de l'*ATP*. Le devenir des molécules simples va dépendre du type de micro-organismes et de la présence ou non

d'oxygène dans le milieu. Les réactions chimiques qui sont mises en oeuvre par la suite sont soit des réactions d'oxydation, soit des réactions de fermentation (Gerhard, 1987).

Au cours de la réaction d'oxydation (appelée également respiration), les molécules organiques (donneurs d'électrons) perdent des électrons qui vont être captés par d'autres molécules (accepteurs d'électrons). Cette réaction est réalisée en présence de bactéries aérobies. On distingue deux familles de bactéries aérobies : les Hétérotrophes $X_{B,H}$ et les Autotrophes $X_{B,A}$.

Les bactéries hétérotrophes utilisent le carbone organique, à la fois comme source d'énergie et comme source de carbone. Dans des conditions particulières, certaines bactéries hétérotrophes remplacent l'oxygène par des oxydants moins forts comme NO_3^- et leurs produits réduits lors de l'oxydation. Par contre, les bactéries Autotrophes utilisent le dioxyde de carbone CO_2 comme source de carbone.

Du point de vue de l'automatique, les procédés de traitement des eaux usées sont des systèmes non linéaires complexes de grande dimension. Ces derniers sont soumis à d'importantes perturbations sur le flux d'effluent et la charge de polluant, en plus des incertitudes concernant la composition de l'eau usée entrante. Ces procédés doivent fonctionner de manière continue, ce qui exige des régulations de certaines variables à des consignes désirées, et le rejet des effets des perturbations.

Plusieurs stratégies de commande ont été proposées pour la commande d'un procédé de traitement des eaux usées, mais leur comparaison ou l'évaluation des performances de chaque stratégie, par simulation ou pratiquement, est difficile. Les difficultés sont dues à plusieurs raisons :

- la variabilité de l'influent,
- les variations des débits et des compositions d'entrée,
- la complexité des phénomènes biologiques et biochimiques d'où la difficulté de modélisation,
- le procédé est caractérisé par des constantes de temps d'ordres de grandeur très différents variant de quelques minutes à plusieurs jours,
- l'absence de critères standard pour l'évaluation des performances,
- la complexité du modèle du procédé qui est multivariable et non linéaire rend le problème de synthèse d'un système de commande très difficile.

Il existe plusieurs types de procédés de traitement des eaux usées. La dynamique de chaque type est caractérisée par un modèle mathématique généralement obtenu par modélisation mathématique ou par modélisation expérimentale (identification). De 1998 à 2004, des benchmarks ont été développés pour la simulation et l'évaluation des performances d'une stratégie de commande. Un benchmark est un environnement de simulation où l'on décrit la structure du procédé, le modèle de simulation, les charges de l'influent, des procédures pour différents tests et des critères d'évaluation. Ainsi, une fois le modèle du procédé validé, on peut tester un type de commande et évaluer ses performances par un ensemble défini de critères.

Ce chapitre est consacré à la présentation du benchmark BSM1 qui sert de référence à de nombreuses équipes de recherche et est considéré comme un modèle réaliste de station de traitement d'eaux usées. On commence par la présentation du principe et les différentes étapes de traitement des eaux usées, ensuite les Modèles pour les Systèmes à Boues Actives (ASM) sont décrits afin de mieux comprendre le fonctionnement du procédé BSM1.

1.2 Traitement d'eaux usées

Le traitement des eaux usées est réalisé dans les stations d'épuration. La plupart des stations d'épuration fonctionnent selon les mêmes processus de base, mais des différences plus ou moins importantes peuvent exister dans la manière de mettre en place ces processus. Le traitement se divise généralement en plusieurs étapes.

1.2.1 Pré-traitement

Il consiste en trois étapes principales et permet de supprimer de l'eau les éléments qui gêneraient les phases suivantes de traitement. Ces étapes sont :

Dégrillage et tamisage : Cette étape permet de retirer de l'eau les déchets insolubles (les branches, les plastiques et serviettes hygiéniques...). On parle d'une élimination mécanique, car ces déchets ne peuvent pas être éliminés par un traitement biologique ou physico-chimique. Par conséquent, l'eau usée traverse une ou plusieurs grilles dont les mailles sont de plus en plus serrées.

Dessablage : Par décantation, cette étape permet de retirer les sables mélangés dans les eaux par ruissellement ou amenés par l'érosion des canalisations. Cette étape est importante pour éviter une usure prématurée des éléments mécaniques tels que les pompes.

Dégraissage : Dans cette étape, le principe de la flottation est utilisé pour l'élimination des huiles. Il est basé sur l'injection de fines bulles d'air dans le bassin de déshuilage, et comme les graisses sont hydrophobes, elles remontent rapidement en surface et sont éliminées par raclage de la surface.

1.2.2 Traitement par voie biologique

Une décantation primaire a lieu avant que les eaux usées soient traitées par la voie biologique. Cette décantation permet de supprimer une grande partie des matières en suspension qui sont responsables du trouble des eaux usées. La voie biologique est la plus utilisée pour l'épuration des eaux usées contenant des polluants biodégradables de nature organique ou chimique. Les procédés de traitement des eaux usées ont pour principe de mettre en contact des micro-organismes et les polluants dans des enceintes (réacteurs) dont il est possible de contrôler les conditions environnementales (J.Arundel, 2000). Les

réactions biologiques font intervenir trois entités essentielles qu'il est important de distinguer :

- **La biomasse** regroupe des micro-organismes qui participent aux chaînes de dégradation.
- **Les substrats** sont les composants nutritifs qui sont dégradés par les micro-organismes.
- **Les produits** sont les composants résultant de la dégradation des substrats par les micro-organismes. A noter que lorsque plusieurs réactions s'enchaînent, le produit d'une réaction peut être considéré comme le substrat d'une autre.

Les biomasses peuvent être considérées comme faisant partie de la phase solide. Les substrats et les produits sont majoritairement présents en phase liquide ou gazeuse. Les procédés biologiques de traitement des eaux transfèrent la pollution d'une forme liquide et la concentrent sous une forme solide. La biomasse (forme solide) est séparée de la phase liquide par décantation (phénomène physique) et le surnageant dépollué est rejeté dans le milieu naturel.

Dans certains cas, la séparation solide-liquide est améliorée ou accélérée par centrifugation, filtration par membrane ou par ajout de coagulants. L'excès de biomasse, produit de la croissance cellulaire, est retiré. En d'autres termes, les procédés biologiques de traitement des eaux usées transfèrent la pollution d'une forme liquide et la concentrent sous une forme solide.

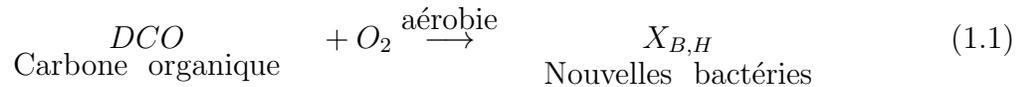
Les eaux usées contiennent notamment du carbone, de l'azote et du soufre sous diverses formes de composés qui peuvent être traités chimiquement par divers procédés. Tous les traitements physico-chimiques consistent à séparer les composés de ces éléments d'une phase liquide pour les concentrer dans une autre phase. Ce sont notamment les procédés de strippage (élimination de gaz dans l'eau au moyen d'un gaz d'entraînement), d'osmose inverse, de distillation, de précipitation chimique ou d'oxydation catalytique dont les coûts de mise en oeuvre et d'exploitation sont élevés. L'élimination par voie biologique de ces composés constitue une solution différente et intéressante de traitement.

1.2.3 Traitement du carbone et de l'azote

Le carbone est un élément polluant qui peut être traité seul (au sens où son traitement nécessite une seule condition environnementale). En revanche, le processus d'élimination de l'azote nécessite plusieurs étapes (plusieurs conditions environnementales). Au début de l'année 80, (Ekama and Marais, 1986) a posé les bases fondamentales pour l'élimination de l'azote. Par la suite, les efforts pour fédérer la connaissance pour une mise en oeuvre pratique du traitement simultané du carbone et de l'azote ont été réalisés au travers de la production d'un rapport de l'International Association on Water Pollution Research and Control (IAWPRC) (Henze et al., 1987).

Elimination du carbone

La matière organique carbonée est oxydée en milieu aéré par des micro-organismes, principalement des bactéries hétérotrophes $X_{B,H}$. Ces micro-organismes utilisent la matière organique carbonée et la convertissent soit en gaz soit en biomasse.



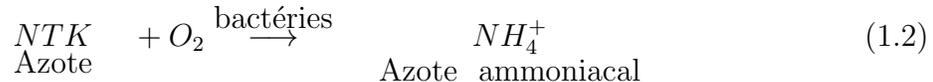
Notons que, dans le schéma réactionnel, seule la biomasse produite lors de la réaction est représentée dans l'équation comme un produit et que la présence d'une quantité initiale de biomasse est nécessaire pour que la réaction biologique ait lieu.

Elimination de l'azote

L'azote peut être séparé des eaux usées par différents mécanismes : physique (par décantation lorsqu'il est lié aux matières en suspension), physico-chimique (stripping sous forme de gaz ammoniac NH_3 lorsque le pH est basique supérieur à 9, oxydations et réductions chimiques) et enfin biologique (incorporation aux bactéries produites, transformation en nitrates NO_3^- puis en azote gazeux lors des processus de nitrification et de dénitrification).

La transformation biologique passe par plusieurs étapes :

Ammonification L'azote organique des eaux urbaines est principalement formé d'acides aminés. Que le milieu soit oxydant ou non, l'ammonification se réalise par hydrolyse sous l'action des bactéries selon la réaction suivante :



La vitesse de cette réaction est suffisamment rapide pour qu'un séjour de quelques heures dans le réseau de collecte réduise de plus de moitié la concentration en azote organique.

Nitrification biologique

La réaction de nitrification de l'azote ammoniacal NH_4^+ par les bactéries autotrophes $X_{B,A}$ en présence de l'oxygène dissous est représentée par la réaction suivante :

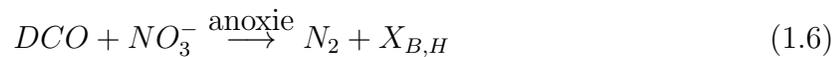


En réalité, cette réaction s'effectue en deux étapes successives : la nitritation et la nitrata-tion selon les schémas suivants :



Ces schémas sont simplificateurs dans la mesure où des nombreuses étapes d'oxydation intermédiaires très rapides interviennent.

Dénitrification biologique En environnement anoxique, certaines bactéries hétérotrophes consomment les nitrates, à la place de l'oxygène, et le carbone pour se développer et produire de l'azote gazeux (N_2). La réaction d'assimilation est représentée par :



A noter que, dans le cas où les deux oxydants (l'oxygène dissous et le nitrate) sont disponibles, les bactéries hétérotrophes utilisent préférentiellement l'oxydant le plus fort, c'est-à-dire l'oxygène dissous.

1.3 Benchmark Simulation Model 1 (BSM1)

Les installations d'épuration des eaux usées sont des systèmes de grande dimension, non linéaires et sujets à des variations importantes en flux (débit) et en charge. Plusieurs stratégies de commande ont été proposées dans la littérature mais leur évaluation et comparaison restent une tâche difficile à réaliser. Cela est dû à plusieurs facteurs : La variabilité des eaux usées à traiter, la complexité des réactions biologiques et biochimiques mises en jeu, la variation de temps de réponse (le comportement hydrodynamique) et le manque de critères standards d'évaluation (Sotomayor et al., 2002).

Toutefois, un modèle de référence comme le simulateur Benchmark rend possible l'évaluation de la performance des différentes stratégies de commandes avancées dans le traitement des eaux usées à partir des simulations (Sotomayor et al., 2001).

L'utilisation du Benchmark sert notamment pour l'estimation de la performance du procédé, l'évaluation d'algorithmes ou de stratégies qui sont développés dans la communauté scientifique. Le succès du BSM1 (Benchmark Simulation Model 1) de l'IWA/COST est attesté par plusieurs publications scientifiques dans le domaine des eaux usées (Jeppsson and Pons, 2004).

Ce Benchmark a été développé par des chercheurs des groupes de travail du programme COST (European Cooperation in the field of Scientific and Technical Research) 682 et 624 (de 1998 à 2004) qui ont regroupé leurs connaissances dans ce domaine. Actuellement, le groupe de l'IWA continue à développer ce Benchmark.

Le Benchmark est un environnement de simulation qui définit une installation d'épuration, un modèle de simulation et l'ensemble des paramètres du modèle, les caractéristiques des eaux usées, les tests de protocoles et les critères d'évaluation (Copp, 2001).

Le BSM1 combine les processus de nitrification avec dénitrification fréquemment appliqués dans la dégradation biologique de l'azote.

La configuration standardisée de l'installation de traitement par boues activées utilisée dans le Benchmark est constituée d'un réacteur biologique et d'un décanteur secondaire (figure 1.1).

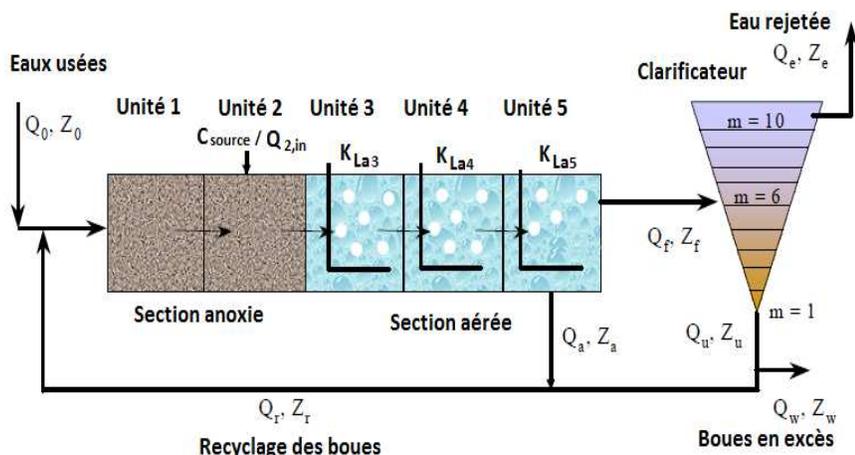


Figure 1.1 – Schéma du benchmark

Le réacteur biologique est composé de cinq compartiments parfaitement agités où les deux premiers sont maintenus en anoxie (volume de chacun 1000 m^3) et les trois derniers en aérobie (volume de chacun 1333 m^3), ce qui donne comme volume total du réacteur 6000 m^3 . Le décanteur secondaire est représenté comme un système non réactif et unidimensionnel divisé en 10 couches horizontales, selon le modèle de vitesse de décantation exponentielle double proposé par (Takács et al., 1991). Son volume total est égal à 6000 m^3 .

Les eaux usées subissent d'abord un traitement anoxique (unités 1 et 2) par voie biologique en cultures libres selon lequel, dans une première étape, le carbone organique (*DCO*) est essentiellement éliminé par des bactéries hétérotrophes. L'effluent sortant de la première étape est soumis à un traitement biologique aérobie en cultures libres pour la transformation de l'ammonium en nitrates.

Une fraction de l'effluent qui a subi le traitement biologique aérobie et qui contient des nitrates, est renvoyée vers la première étape du traitement anoxique pour éliminer l'azote.

Le Benchmark utilise le modèle *ASM1* (Activated Sludge Model 1) pour la prédiction des phénomènes biologiques dans le réacteur. Le modèle *ASM1* simule au sein d'un système à boues activées les phénomènes tels que l'oxydation du carbone, la nitrification et la dénitrification en quantifiant la cinétique et la stoechiométrie de chaque réaction. Il a été présenté (Henze et al., 1987), afin de formaliser les différentes connaissances accumulées pendant la vingtaine d'années précédentes sur la modélisation mathématique du traitement des eaux usées par voie biologique. Le modèle *ASM1* (Henze et al., 1987) constitue un modèle général capable de représenter de façon précise le comportement du procédé lors du traitement d'un effluent chargé en matières azotées et carbonées.

A ce niveau, le modèle comporte 13 variables d'état (liées aux phénomènes biologiques), 8 processus et 19 différents paramètres cinétiques et stoechiométriques.

Variabes d'état

L'ensemble des réactions décrites lors de la présentation du schéma réactionnel est pris en compte dans ce modèle (figure 1.2) :

- la croissance de la biomasse au travers de la réaction d'oxydation de la matière carbonée et des réactions de nitrification et de dénitrification ;
- la mort de la biomasse ;
- l'ammonification de l'azote organique ;
- l'hydrolyse de la matière organique en suspension (azotée ou carbonée).

L'hydrolyse représentant un ensemble de réactions complexes, une unique expression globale a été proposée afin de simplifier sa modélisation. Cette modélisation suppose que seule la partie rapidement biodégradable de la matière organique biodégradable peut être utilisée par la biomasse. L'expression de l'hydrolyse permet donc d'introduire une dynamique lente pour l'utilisation de la partie lentement biodégradable.

Ces phénomènes biologiques font appel à différents types de composés représentés par treize variables d'état. La lettre X est proposée pour les composés particulaires et la lettre S pour les composés solubles. Nous pouvons classer ces variables d'état en cinq groupes :

- les substrats : le substrat rapidement biodégradable SS ($\text{mg}_{\text{O}_2} \cdot \text{l}^{-1}$) et le substrat lentement biodégradable X_S ($\text{mg}_{\text{O}_2} \cdot \text{l}^{-1}$).
- les biomasses : la biomasse hétérotrophe X_{BH} ($\text{mg}_{\text{O}_2} \cdot \text{l}^{-1}$), responsable de l'oxydation des matières organiques et de la dénitrification, et la biomasse autotrophe X_{BA} ($\text{mg}_{\text{O}_2} \cdot \text{l}^{-1}$), responsable de la nitrification. La croissance des biomasses est décrite par la loi de Monod. Une troisième variable d'état, notée XP ($\text{mg}_{\text{O}_2} \cdot \text{l}^{-1}$), représente les produits issus de la mort de la biomasse ;
- les composés azotés : l'azote organique biodégradable particulaire X_{ND} ($\text{mg}_N \cdot \text{l}^{-1}$), l'azote organique biodégradable soluble S_{ND} ($\text{mg}_N \cdot \text{l}^{-1}$), l'azote ammoniacal S_{NH} ($\text{mg}_N \cdot \text{l}^{-1}$) et les nitrates-nitrites S_{NO} ($\text{mg}_N \cdot \text{l}^{-1}$) ;
- l'oxygène dissous S_O ($\text{mg}_{\text{O}_2} \cdot \text{l}^{-1}$) ;
- les états biologiquement inertes : les composés organiques inertes solubles S_I ($\text{mg}_{\text{O}_2} \cdot \text{l}^{-1}$) et particulaires X_I ($\text{mg}_{\text{O}_2} \cdot \text{l}^{-1}$), l'alcalinité S_{alk} ($\text{mol} \cdot \text{l}^{-1}$).

La liste des processus

Les équations du modèle sont présentées sous forme d'une matrice (tableau 1.1). La première ligne de cette matrice contient les variables d'état du modèle. La première colonne indique le nom des cinétiques biologiques dont l'expression est donnée dans la dernière colonne. Dans chaque case (i, j) , le taux de conversion $Y_{i,j}$ apparaît. Pour chaque réaction biologique, les vitesses de consommation et de production des composés impliqués sont données par le produit $Y\rho$, précédé respectivement du signe $-$ s'il y a consommation et du signe $+$ s'il y a production. L'ensemble des vitesses agissant sur le composé j est appelé la vitesse biologique globale, notée r_j , et est donc décrite par la colonne associée qui indique l'ensemble des réactions intervenant sur cette variable d'état. Son expression est :

$$r_j = \sum Y_{i,j} \rho_{i,j} \quad (1.7)$$

Le tableau présente les valeurs des paramètres stoechiométriques et cinétiques sug-

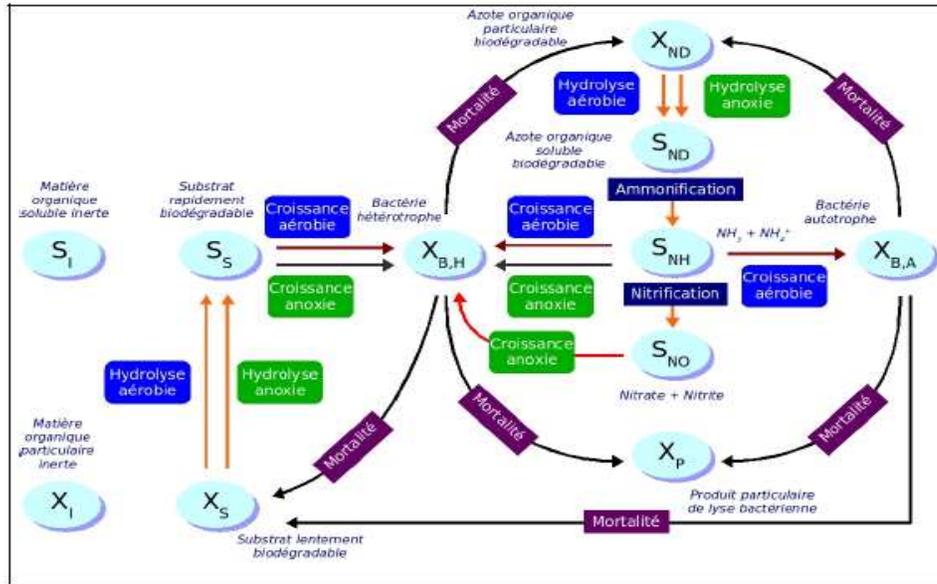


Figure 1.2 – Schéma conceptuel du modèle *ASM1* (Chachuat et al., 2001).

gérées par le groupe de l'*IWA*. Ces valeurs sont données à titre indicatif et peuvent varier en fonction des conditions environnementales. La sélection des valeurs pour les coefficients stoechiométriques et cinétiques d'un modèle mathématique est la phase de calibration du modèle. Dans le cas des modèles des boues activées, la calibration est réalisée à partir d'expériences spécifiques et bien contrôlées dans des réacteurs de laboratoire dans des conditions définies.

1.3.1 Bilan matière du BSM1

Cinq réacteurs en série sont considérés et indicés par k .

Pour $k = 1$ (premier réacteur)

$$\frac{dZ_{1,i}}{dt} = \frac{1}{V_1} (Q_a Z_{a,i} + Q_r Z_{r,i} + Q_0 Z_{0,i} - Q_1 Z_{1,i} + r_i V_1) \quad (1.8)$$

avec :

V_1 : Volume du premier réacteur,

Q_a : Débit de recyclage interne,

$Z_{a,i}$: Concentration du composant i en sortie du cinquième réacteur,

Q_r : Débit de recyclage externe,

$Z_{r,i}$: Concentration du composant i en sortie du clarificateur,

Q_0 : Débit entrant des effluents,

$Z_{0,i}$: Concentration initiale du composant i dans l'effluent d'entrée.

Q_1 : Débit sortant du premier réacteur,

$Z_{1,i}$: Concentration du composant i à l'intérieur du réacteur, cette concentration est la même en tout point du réacteur (réacteur homogène et parfaitement agité),

r_i : Vitesse biologique globale du composant i (variable d'état i). Le processus de croissance ou de disparition des composants est proportionnel au volume du réacteur.

Dans chaque réacteur, le volume est constant, donc le débit d'entrée est égal au débit de sortie :

$$Q_k = Q_{k-1} \text{ pour } k = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (1.9)$$

Pour $k = 2, 3, 4, 5$

$$\frac{dZ_i}{dt} = \frac{1}{V_k}(Q_{k-1}Z_{k-1,i} - Q_k Z_{k,i} + r_i V_k) \quad (1.10)$$

Cas spécial de l'oxgène dissous (S_O) :

$$\frac{dS_{O_k}}{dt} = \frac{1}{V_k}(Q_{k-1}S_{O_{k-1}} - Q_k S_{O_k} + r_i V_k + (k_{la})_k V_k \cdot (S_O^* - S_{O_k})) \quad (1.11)$$

avec k_{la} le coefficient de transfert gaz-liquide pour l'oxgène et S_O^* la concentration de saturation d'oxygène dans l'eau et en présence de biomasse, égal à 8mg.l^{-1} .

1.3.2 Clarificateur

Après le traitement biologique, l'effluent est dirigé vers le clarificateur (ou décanteur secondaire) pour séparer l'eau à traiter de la biomasse en suspension. La croissance de la biomasse au sein des bioréacteurs n'est pas suffisante pour compenser la perte engendrée par le débit de sortie Q_f du dernier réacteur aérobie (unité 5). Pour conserver une concentration en biomasse constante dans les réacteurs, une partie des boues du clarificateur est recyclée vers le premier réacteur anoxie (unité 1).

Une faible concentration de biomasse est extraite et subira un traitement spécifique, avec les boues issues du traitement primaire.

Le décanteur secondaire est représenté comme un système non réactif et unidimensionnel divisé en 10 couches horizontales, selon le modèle de vitesse de décantation exponentielle double proposé par (Takács et al., 1991) :

$$V_s(X) = V_{max}(e^{-r_h(X-X_{min})} - e^{-r_p(X-X_{min})}) \quad (1.12)$$

avec V_s vitesse de décantation (m.h^{-1}),

V_{max} vitesse maximum de décantation de Vesilind (m.h^{-1}),

r_h coefficient associé à la décantation ($\text{m}^3.\text{gMES}^{-1}$),

X concentration en MES,

X_{min} concentration en MES minimale au-dessous de laquelle il n'y a plus de décantation

possible,

r_p coefficient associé à la séparation de phase ($m^3.gMES^{-1}$).

Ce modèle est basé sur le concept du flux matière : un bilan massique est calculé dans chaque couche. Cinq groupes différents de couches, selon leur position par rapport au point d'arrivée des effluents dans le décanteur (6^{ème} couche), ont une contribution particulière dans le bilan de matière. Le flux de matières dû au mouvement du volume liquide peut être dirigé vers le haut ou vers le bas selon sa position par rapport à la couche d'alimentation. Ceci est montré schématiquement sur la figure 1.3.

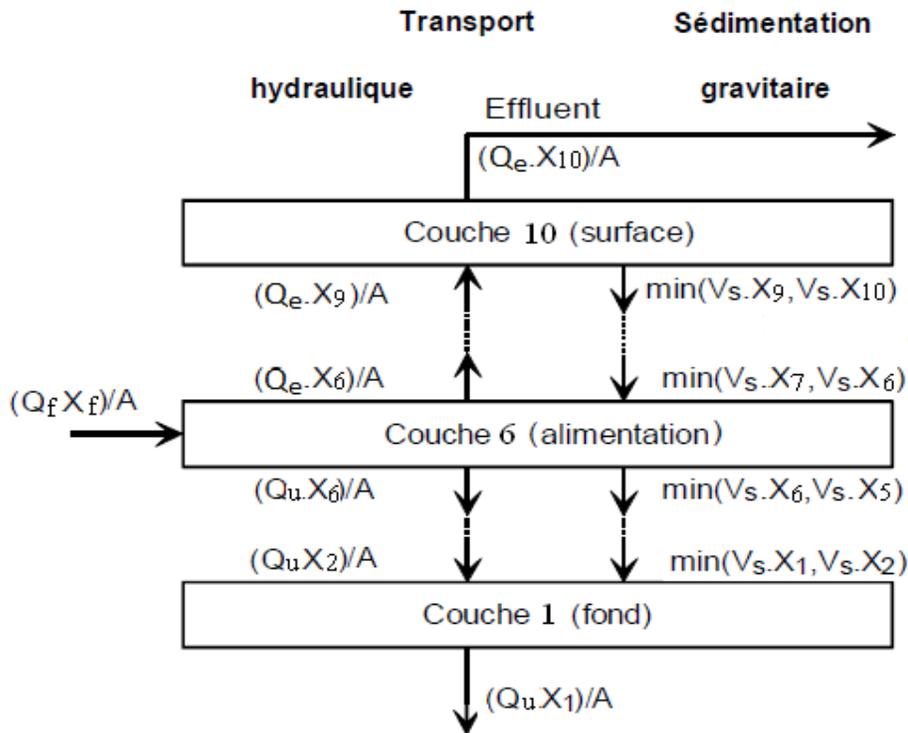


Figure 1.3 – Equilibre massique autour des couches du décanteur secondaire, A est la surface de la couche.

A la sortie des clarificateurs, un traitement physico-chimique est réalisé pour éliminer les phosphates avant que l'effluent ne soit rejeté dans le milieu naturel.

1.3.3 Les influents

Les influents n'ont pas un flux constant et uniforme au cours de la journée. Les eaux usées présentent un comportement très variable, qui peut changer d'une heure à l'autre sous l'effet de plusieurs facteurs externes. La variabilité des eaux usées peut être due

aux fluctuations en débit Q_0 et en concentration Z_0 selon des périodicités journalières, hebdomadaires et saisonnières.

La variabilité du débit et de la composition des eaux usées est liée également à des caractéristiques météorologiques, comme les événements pluvieux ou orageux qui peuvent entraîner une augmentation de débit. Pour cela, face à cette augmentation de débit, les stations d'épuration sont équipées par des bassins d'orage pour stocker les eaux de pluie.

Un atout important du Benchmark *BSM1* réside dans les fichiers permettant de représenter les variations en fonction du temps des variables décrivant la composition de l'eau usée entrant dans le système ainsi que son débit. Trois fichiers (temps sec, temps pluvieux et orage), d'une durée de deux semaines, ont été bâtis à partir des diverses données et ne sont pas spécifiques d'un site particulier (Figure 1.4). Compte tenu du fait que l'installation représentée dans *BSM1* se limite à l'étage biologique, ces fichiers décrivent une eau usée après une décantation primaire. Les détails de la construction de ces fichiers sont décrits par (Vanhooren and Nguyen, 1996). Les effluents dans ces fichiers sont donnés dans l'ordre suivant :

$S_I, S_S, X_I, X_S, X_{B,H}, X_{B,A}, X_P, S_O, S_{NO}, S_{NH}, S_{ND}, X_{ND}, S_{ALK}, Q_0$.

La valeur de S_O est nulle à l'entrée du réacteur biologique. Pour cela, dans les réacteurs, on apporte l'oxygène suffisant (S_O). Une agitation permanente a lieu dans chaque réacteur afin de favoriser le contact entre bactéries et pollution et d'avoir une concentration élevée en bactéries pour augmenter l'efficacité du traitement.

1.3.4 Variables d'entrée et de sorties du benchmark *BSM1*

De manière générale, pour un système dans l'espace d'état, on distingue trois types de variables : entrées, états et sorties. Les variables d'entrée agissent sur le système et peuvent être classées en entrée manipulées et en perturbations. Les variables d'état décrivent l'évolution du système, donc le contenu des bassins (systèmes de traitement). Les états sont calculés à partir des équations algébriques et différentielles de bilans, connaissant les variables d'entrée. Les variables de sortie décrivent l'effluent sortant et la boue extraite et sont calculées à partir des variables d'état.

Variables d'entrée :

- q_a : débit de recyclage interne ($\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$),
- q_r : débit de recyclage externe ($\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$),
- q_w : débit de rejet ($\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$),
- kla_3 : coefficient de transfert de matière d'oxygène 3^{ème} unité (h^{-1}),
- kla_4 : coefficient de transfert de matière d'oxygène 4^{ème} unité (h^{-1}),
- kla_5 : coefficient de transfert de matière d'oxygène 5^{ème} unité (h^{-1}),
- q_{2in} : débit d'ajout en source carbonée ($\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$),

Variables de sortie :

DCO (Demande Chimique en Oxygène en $\text{mg} \cdot \text{l}^{-1}$) :

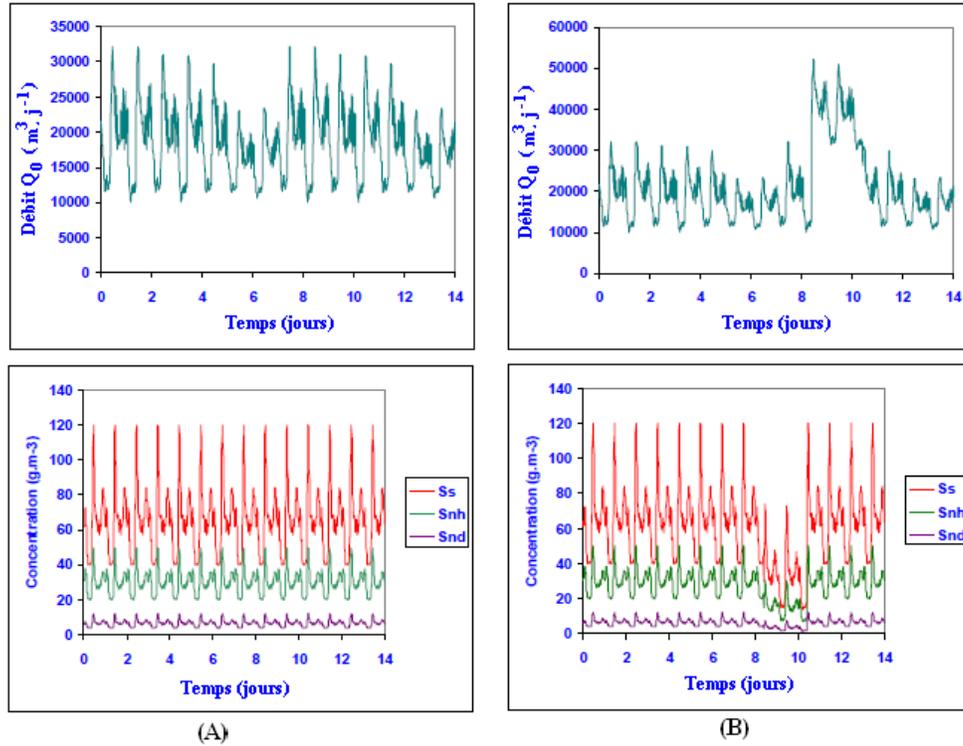


Figure 1.4 – Variations du débit Q_0 et les concentrations pour un temps sec (A) et un temps pluvieux (B).

$$S_S + S_I + X_S + X_I + X_{B,H} + X_{B,A} + X_P$$

BDO_5 (Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours en mg.l⁻¹) :

$$0.65(S_S + X_S + (1-f_p) \cdot (X_{B,H} + X_{B,A}))$$

$[SS]$ (Solides en suspension en mg.l⁻¹) :

$$0.75(X_S + X_I + X_{B,H} + X_{B,A} + X_P)$$

$[NH]$ (Azote en mg.l⁻¹) :

$$S_{NH} + S_{ND} + X_{ND} + i_{XB}(X_{B,H} + X_{B,A}) + i_{XP}(X_P + X_I)$$

$[N]_{tot}$ (Nitrogène total en mg.l⁻¹) :

$$[NH] + S_{NO}$$

Les valeurs numériques des coefficients stoechiométriques f_p , i_{XB} et i_{XP} se trouvent dans le tableau 1.2.

La DCO (Demande Chimique en Oxygène) ne donne qu'une indication de la possible oxydation de la matière organique carbonée (biodégradables et inertes). La DCO est une analyse qui quantifie la pollution totale dans un échantillon d'eau usée, sans faire de distinction entre ses composantes biodégradables et inertes.

La BDO_5 (Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours) traduit la quantité d'oxygène nécessaire pour dégrader les molécules carbonées (La matière organique carbonée utilisée

par les micro-organismes hétérotrophes).

1.3.5 Etat de l'art sur la commande des BSM1

La commande d'un système de traitement des eaux usées est très difficile à cause des changements fréquents de qualité et de débit de la charge, et aussi à cause de la présence des phénomènes biologiques fondamentaux pour le fonctionnement du procédé. Plusieurs stratégies de commande ont été proposées dans la littérature pour les procédés de traitement des eaux usées (Cadet et al., 2004; Steffens and Lant, 1999). Néanmoins leur comparaison et leur évaluation sont deux tâches délicates. Ceci est dû en partie à la variabilité de l'effluent, à la complexité des phénomènes physiques et biochimiques, et aux constantes de temps très différentes, parfois élevées. De plus, les stratégies de commande proposées diffèrent entre elles par les objectifs visés et les méthodes utilisées. Théoriquement, le modèle de commande du benchmark ne doit pas être utilisé en tant que tel dans la commande proposée, il doit servir uniquement comme une représentation fidèle de la station sur laquelle la stratégie de commande est appliquée.

Les objectifs de commande sont généralement limités à la commande de l'oxygène dissous (Brdys et al., 2008; Holendan et al., 2007) et la commande de nitrate (Barros and Carlsson, 1998; Zhao et al., 1995). Parmi les méthodes de commande, on retrouve la commande simple (Vrecko et al., 2002), la commande par retour d'état et anticipation (Vrecko et al., 2003), la commande optimale (Anderson et al., 2000; Chachuat et al., 2005; Kim et al., 2000), la commande non linéaire (Cadet et al., 2004; Lindberg and Carlsson, 1996), la commande floue (Marsi-Libelli and Giunti, 2002), la commande supervisée (Ayesa et al., 2006), la commande prédictive (Brdys et al., 2008; Holendan et al., 2007; Steffens and Lant, 1999; Weijers et al., 1997). Notons que peu d'applications pratiques des techniques de commande ont été rapportées dans la littérature (Ayesa et al., 2006). Ceci est dû à l'absence des capteurs (matériels ou logiciels) et actionneurs adéquats alors que ce type de système nécessite une très bonne instrumentation et technique de commande. (Carlsson and Rehnstrom, 2002) décrivent un certain nombre de stratégies appliquées et comparent leurs performances. D'après (Ayesa et al., 2006) qui a réalisé des applications pratiques, l'objectif principal d'une commande supervisée est d'optimiser la capacité du procédé existant, d'améliorer la qualité du procédé et la qualité de l'effluent avec un coût minimal.

La dynamique du système de traitement des eaux usées est complexe, et le choix de la structure de commande est très important. De plus, les contraintes opératoires, le comportement non linéaire du procédé et le caractère multivariable justifient la nécessité d'utilisation d'une commande multivariable performante. Ainsi, la commande du procédé de traitement des eaux usées constitue un axe de recherche actif.

1.4 Conclusion

Les notions de base sur le procédé biologique *ASM1* et le Benchmark *BSM1* ont été présentées dans ce chapitre, seules les variables *DCO* et *BDO₅* ont été définies comme mesurables.

Le modèle *ASM1* était largement utilisé pour simuler le comportement des stations d'épuration des eaux usées, et est également utilisé dans notre Benchmark *BSM1*. Il a subi des modifications importantes qui ont donné naissance aux modèles *ASM2* et *ASM3*. Ces modèles sont plus complexes que le modèle original et incluent les réactions biologiques liées au phosphate (comme le modèle *ASM2*).

La simulation du *BSM1* a été réalisée à l'aide d'un programme en FORTRAN développé par M.N. Pons selon (Copp, 2001).

Il contient quatre étapes principales : l'initialisation, le calcul des dérivées par rapport au temps, la résolution du système d'équations différentielles et la gestion des données de sortie.

Par la suite, on utilise les réponses du procédé *BSM1* à des échelons pour constituer un modèle qui sera un modèle linéaire discret dans l'espace d'état. Le benchmark remplace ainsi le procédé réel de la station d'épuration sur laquelle des échelons des variables d'entrée pourraient être réalisés. Ce modèle doit être utilisé ensuite dans le cadre d'une commande prédictive qui sera appliquée au benchmark *BSM1*.

Tableau 1.1 – Matrice des processus du modèle ASM1

Concentrations j		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
		S_I	S_S	X_I	X_S	X_{BH}	X_{BA}	X_P	S_0	S_{NO}	S_{NH}	S_{ND}	X_{ND}	S_{alk}	...
i	Réactions ρ_i														
1	Croissance aérobie des hétérotrophes		$-\frac{1}{Y_H}$			1			$-\frac{1-Y_H}{Y_H}$		$-i_{XB}$			$-\frac{i_{XB}}{14}$...
2	Croissance hétérotrophe anoxique		$-\frac{1}{Y_H}$			1				$-\frac{1-Y_H}{2.68Y_H}$	$-i_{XB}$			$-\frac{1-Y_H}{14 \times 2.86Y_H}$...
3	Croissance autotrophe aérobie						1		$-\frac{4.57-Y_A}{Y_A}$	$\frac{1}{Y_A}$	$-i_{XB} - \frac{1}{Y_A}$			$-\frac{i_{XB}}{14} - \frac{1}{7Y_A}$...
4	Mortalité des bactéries hétérotrophe				$1-f_p$	-1		f_p					$i_{XB} - f_p i_{XP}$...
5	Mortalité des bactéries autotrophe				$1-f_p$		-1	f_p					$i_{XB} - f_p i_{XP}$...
6	Ammonification										1	-1		$\frac{1}{14}$...
7	Hydrolyse du carbone organique		1		-1										...
8	Hydrolyse de l'azote organique											1	-1		...

...	Cinétique
...	de la réaction
...	$\hat{\mu}_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_0}{K_{OH} + S_0}$
...	$\hat{\mu}_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_0} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \eta_g X_{B,H}$
...	$\hat{\mu}_A \frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \frac{S_0}{K_{OA} + S_0} X_{B,A}$
...	$b_H X_{B,H}$
...	$b_A X_{B,A}$
...	$k_a S_{ND} X_{B,H}$
...	$k_h \frac{X_S/X_{B,H}}{K_X + X_S/X_{B,H}} \left[\left(\frac{S_0}{K_{OH} + S_0} \right) + \eta_h \left(\frac{K_0 H}{K_{OH} + S_0} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right] X_{B,H}$
...	$\rho_7 (X_{ND}/X_S)$

	Notation	Signification	Valeur	Unité
<i>Coefficients Stoechiométriques</i>	Y_A	Taux de conversion substrat / biomasse autotrophe	0.24	$g_{O_2-X_{ba}} \cdot g_N^{-1}$
	Y_H	Taux de conversion substrat / biomasse hétérotrophe	0.67	$g_{O_2-X_{bh}} \cdot g_{O_2-S_S}^{-1}$
	f_P	Fraction de DCO inertes générés par la biomasse morte	0.08	-
	i_{XB}	Fraction d'azote dans la biomasse hétérotrophe	0.08	$g_N \cdot g_{O_2}^{-1}$
<i>Coefficients cinétiques</i>	$\hat{\mu}_H$	Taux de croissance maximal de la biomasse hétérotrophe	4	j^{-1}
	$\hat{\mu}_A$	Taux de croissance maximal de la biomasse autotrophe	0.5	j^{-1}
	b_H	Coefficient de mortalité de la biomasse hétérotrophe	0.3	j^{-1}
	b_A	Coefficient de mortalité de la biomasse autotrophe	0.05	j^{-1}
	K_S	Coefficient de demi-saturation en substrat rapidement biodégradable	10	$mg_{O_2} \cdot l^{-1}$
	K_{OH}	Coefficient de demi-saturation de l'oxygène pour la biomasse hétérotrophe	0.2	$mg_{O_2} \cdot l^{-1}$
	K_{NO}	Coefficient de demi-saturation du nitrate pour la biomasse hétérotrophe	0.5	$mg_{NO_3-N} \cdot l^{-1}$
	K_{NH}	Coefficient de demi-saturation de l'azote ammoniacal pour la biomasse autotrophe	1.0	$mg_{NH_3-N} \cdot l^{-1}$
	K_{OA}	Coefficient de demi-saturation de l'oxygène pour la biomasse autotrophe	0.4	$mg_{O_2} \cdot l^{-1}$
	K_X	Coefficient de demi-saturation pour l'hydrolyse du substrat lentement biodégradable	0.1	$g_{O_2-X_S} \cdot (g_{O_2-X_{bh}} \cdot j)^{-1}$
	η_g	Facteur de correction pour $\hat{\mu}_H$ sous condition anoxie	0.8	-
	η_h	Facteur de correction pour l'hydrolyse sous condition anoxie	0.8	-
	k_h	Taux maximal pour l'hydrolyse	3.0	$g_{O_2-X_S} \cdot (g_{O_2-X_{bh}} \cdot j)^{-1}$
	k_a	Taux d'ammonification	0.05	$m^3 \cdot (g_{O_2} \cdot j)^{-1}$

Tableau 1.2 – Valeurs des paramètres stoechiométriques et des paramètres cinétiques du modèle *ASM1*

Chapitre 2

Introduction à la théorie de la commande dans l'espace d'état

2.1 Résumé

La représentation d'état des systèmes est un outil puissant permettant de modéliser le fonctionnement de systèmes linéaires ou non linéaires. Ce chapitre est consacré à rappeler quelques notions essentielles de la théorie de la commande dans l'espace d'état, comme la stabilité, l'observabilité et la commandabilité d'un système linéaire. Ces notions seront utiles pour mieux comprendre les chapitres suivants. Ce chapitre concerne donc la présentation mathématique de ces notions, en développant particulièrement le cas des systèmes linéaires en temps discret.

2.2 Introduction

L'évolution d'un processus à partir d'un instant t_0 ne dépend pas uniquement de l'influence immédiate de son environnement, mais aussi des données internes que l'on regroupe en général dans un vecteur d'état x . Les variables exprimant la communication avec l'extérieur correspondent aux variables d'entrée u et de sortie y . Lorsque le système comporte une seule entrée u , il est dit mono-entrée SI (Single Input). Dans le cas des plusieurs entrées, le système est dit multi-entrée MI (Multiple Input). De la même façon, un système qui comporte une seule sortie, est appelé système mono-sortie SO (Single Output). Dans le cas des plusieurs sorties, le système est dit multi-sortie MO (Multiple Output). Un système à une seule entrée et une seule sortie est dit monovisible SISO et dans le cas contraire multivisible MIMO. En général, le nombre n de composantes du vecteur état x est choisi minimal, c'est-à-dire que la connaissance complète de l'état initial est nécessaire pour assurer l'unicité du comportement du processus pendant la suite de l'expérience. Le vecteur d'état x représente dans ce cas la mémoire minimale du passé du

système. Ce nombre n est appelé l'ordre du système. Sous forme générale non linéaire, le modèle dans l'espace d'état s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) \quad ; \quad x(0) = x_0 \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

L'évolution de système peut être représentée au moyen des trajectoires d'état, lieu dans l'espace d'état du point M de coordonnées $x(t)$ dans le repère considéré. L'écriture dépendant du repère choisi, la représentation d'état n'est pas unique. Toute combinaison linéaire des composantes d'un vecteur état est appelée variable d'état. Un intérêt majeur de la notion d'état est de renseigner l'utilisateur sur le nombre maximum n de variables indépendantes qu'il aura à mesurer ou reconstituer pour générer la meilleure commande possible d'un système. Certains états qui sont directement accessibles à la mesure sont dits états mesurables, par l'intermédiaire de capteurs classiques (de température, position, vitesse,...), et pourraient être considérées comme des sorties. Par contre, d'autres peuvent influencer les sorties sans que leur mesure directe soit possible, ils sont dits états observables. De plus, il existe des états non observables, c'est-à-dire qu'ils n'agissent pas sur les sorties de processus et ne sont donc pas perceptibles à la mesure.

2.3 Représentation d'état

Lorsqu'un système est modélisé sous la forme d'une représentation d'état, il est possible d'exprimer l'état du système à un instant donné en fonction des entrées à ce même instant et en fonction de l'état précédent. Dans le cas du temps continu, la notion d'état précédent n'existe pas vraiment. En revanche, ce concept est à rapprocher de l'évolution du système, autrement dit des variations de chaque variable d'état. Cela signifie que, d'une manière générale, on peut exprimer l'évolution du système par un vecteur constitué des dérivées premières des composantes du vecteur d'état, en fonction du vecteur d'état du système. L'objet qui lie ces deux vecteurs est appelé matrice de commande du système A ($n \times n$) (n dimension de l'état). Le vecteur d'état dépend bien évidemment aussi du signal d'entrée par la matrice B ($n \times m$) (m nombre d'entrées) appelée matrice de commande. La forme générale pour un système multivariable MIMO des équations d'état en temps continu correspond donc à :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

C ($p \times n$) (p nombre de sorties) est appelée matrice d'observation et D ($p \times m$) appelée matrice directe représente une relation directe entre les entrées et les sorties. Dans la représentation d'état en temps discret, la possibilité d'exprimer l'état du système à un instant donné en fonction du signal d'entrée et en fonction de son état précédent prend tout son sens :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (2.3)$$

La représentation d'état constitue une alternative intéressante pour la modélisation, elle permet de mettre en évidence des informations internes au processus qui n'apparaissent pas nécessairement dans la description par fonction (ou matrice) de transfert.

2.4 Stabilité

Le problème de la stabilité est un problème général de la commande des systèmes. Dans la conception des systèmes de commande, il est évident que l'une des exigences les plus importantes à vérifier est celle de la stabilité. En 1892, M Lyapunov a formulé de manière précise le concept de stabilité, et ses travaux ont constitué le point de départ pour établir d'autres variantes du concept.

Pour mieux comprendre la notion de la stabilité et, à titre d'exemple, il est d'usage de considérer le mouvement d'une balle qui se déplace sous l'action de la gravité sur différentes surfaces comme dans la figure 2.1. Dans les trois cas, la balle se trouve dans une position d'équilibre, mais quel sera le mouvement résultant si la balle est écartée un peu de son état d'équilibre? Dans le cas (a), la balle se maintiendra près de sa position d'équilibre en oscillant autour de celle-ci, et tendra à revenir à cette position d'équilibre, si l'on admet d'existence de frottements, phénomènes dissipateurs d'énergie mécanique (stabilité dite asymptotique). Dans ce cas, l'équilibre est dit asymptotiquement stable. Dans le cas (b), pour une toute petite perturbation de la balle, celle-ci restera près de la position d'équilibre mais ne tendra pas à s'approcher de cette position, on parlera alors de stabilité (non asymptotique). Finalement en (c), une toute petite perturbation entraînera la balle à s'éloigner de sa position d'équilibre, dans ce cas l'équilibre est alors instable. Dans la représentation d'état, un système linéaire est dit stable si, au bout d'un temps

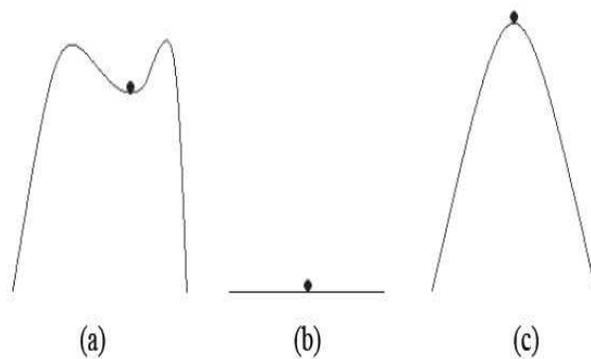


Figure 2.1 – (a) asymptotiquement stable, (b) stable, (c) instable .

suffisamment long, l'état ne dépend plus des conditions initiales et ceci, quelles que soient ces dernières. Cela revient à dire que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A^k = 0_n \quad (2.4)$$

Pour cela, le critère de la stabilité ne dépendant que de la matrice A , on démontre que pour qu'un système linéaire à temps discret soit stable, il faut que toutes les valeurs propres de A soient strictement dans le cercle unité. Les valeurs propres de la matrice A sont les racines de son polynôme caractéristique défini par :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \quad (2.5)$$

Une autre méthode pour étudier la stabilité d'un système a été présentée par Lyapunov. En fait, un système est stable si son énergie totale (une fonction définie positive) est continuellement décroissante (ce qui signifie que la dérivée temporelle de l'énergie totale doit être définie négative) jusqu'à atteindre un état d'équilibre. La méthode de Lyapunov est basée sur une généralisation de ce fait, toutefois, pour des systèmes purement mathématiques, il n'y a pas de manière simple permettant de définir une fonction énergie. Lyapunov a ainsi introduit ce qui est appelé fonction de Lyapunov, qui peut être vue comme une fonction d'énergie fictive. Soit l'équation différentielle autonome :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (2.6)$$

et soit $V(x)$, appelée fonction de Lyapunov qui satisfait les conditions suivantes :

- $V(x)$ est continue et différentiable
- $V(0) = 0$
- $V(x) > 0, \forall x \neq 0$

L'état d'équilibre $x = 0$ de l'équation (2.6) est stable dans le sens de Lyapunov si $\dot{V}(x)$ est semi-définie négative, et asymptotiquement stable si $\dot{V}(x)$ est définie négative. Dans le cas du système autonome en temps discret décrit par :

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (2.7)$$

on choisit une fonction de Lyapunov

$$V(x(k)) = x(k)^T P x(k) \quad (2.8)$$

où $P \in R^{n \times n}$ est une matrice symétrique, définie positive. L'accroissement de $V(x(k))$ est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x(k)^T A^T P A x(k) - x(k)^T P x(k) \\ &= x(k)^T (A^T P A - P) x(k) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Comme $V(x(k))$ a été choisie positive définie, pour avoir la stabilité asymptotique, il faut que $\Delta V(x(k))$ soit définie négative. Par conséquent :

$$\Delta V(x(k)) = x(k)^T (A^T P A - P) x(k) = -x(k)^T Q x(k) \quad (2.10)$$

avec $Q = -(A^T P A - P)$ symétrique définie positive. Alors dans le cas de systèmes en temps discret décrits par l'équation (2.7), une condition nécessaire et suffisante pour que

l'état d'équilibre $x = 0$ soit asymptotiquement stable est que, étant donnée une matrice $Q \in R^{n \times n}$ symétrique définie positive, il existe une matrice $P \in R^{n \times n}$ symétrique définie positive satisfaisant :

$$Q = -(A^T P A - P) \quad (2.11)$$

2.5 Commandabilité

Il existe de multiples définitions équivalentes pour la commandabilité des systèmes linéaires. Une définition simple pour la commandabilité est la suivante : un système est dit à état entièrement commandable si, par action sur l'entrée, il est possible d'atteindre en un temps fini n'importe quel point de l'espace d'état. Pour cela, le critère de la commandabilité dépendant de la matrice A et B , on démontre qu'un système linéaire à temps discret est commandable si et seulement si les vecteurs $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ sont linéairement indépendants, autrement dit :

$$\text{rang}([B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B]) = n \quad (2.12)$$

2.6 Observabilité

Un système est dit observable à l'instant $k_2 T_e$, si la connaissance du signal d'entrée et du signal de sortie sur un intervalle de temps $[k_1 T_e, k_2 T_e]$ permet de calculer l'état du système à l'instant $k_2 T_e$. Un système est complètement observable si et seulement si les matrices $C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T$ sont linéairement indépendantes. Autrement dit :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C^T \\ A^T C^T \\ \vdots \\ (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = n \quad (2.13)$$

2.7 Changement de base

Soit \bar{x} est un vecteur transformé de x_k par une matrice régulière P :

$$\bar{x} = Px, \quad \det(P) \neq 0 \quad (2.14)$$

Le système (2.3) devient :

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= PAP^{-1}\bar{x}(k) + PBu(k) \\ y(k) &= CP^{-1}\bar{x}(k) + Du(k) \\ \bar{x}(0) &= Px(0) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ainsi \bar{x} est aussi un vecteur d'état du système, déduit de x par changement de base P . La matrice PAP^{-1} est dite semblable à A , et le système $S(A, B, C, D)$ est semblable à $S(PAP^{-1}, PB, CP^{-1}, D)$ pourvu que P soit régulière.

2.8 Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert d'un système

2.8.1 D'une représentation de transfert vers une représentation d'état

Forme modale

Ce type de représentation, encore appelée représentation parallèle, convient particulièrement bien à la représentation d'un système possédant plusieurs pôles réels distincts. Soit $G(z)$ sa fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\alpha_1}{z - p_1} + \frac{\alpha_2}{z - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{z - p_n} \quad (2.16)$$

Cette écriture fait apparaître la somme de n fonctions de transfert et peut être matérialisée, sous forme de représentation d'état, par le schéma de la figure 2.2 en faisant apparaître n blocs élémentaires placés en parallèle. On lit immédiatement :

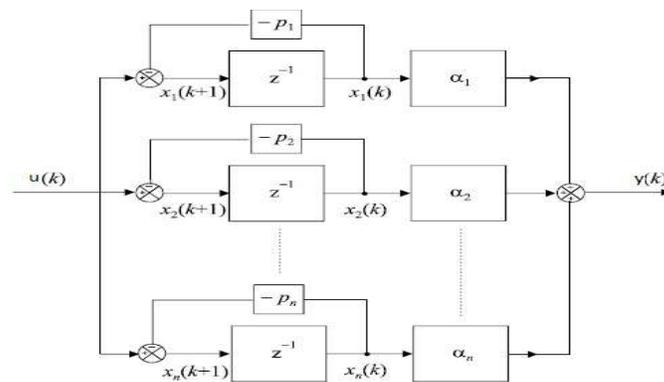


Figure 2.2 – Représentation modale d'un système à temps discret.

$$x_i(k + 1) = p_i x_i + u(k) \quad (2.17)$$

d'où

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\
 y(k) &= (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) x(k)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

La matrice de commande A est diagonale et ses valeurs propres sont les pôles de la fonction de transfert.

Forme série

Soit

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\alpha_1}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)} \tag{2.19}$$

Cette écriture fait apparaître le produit de n fonctions de transfert et peut être matérialisée par la mise en cascade de n blocs élémentaires. La figure 2.3 propose une représentation

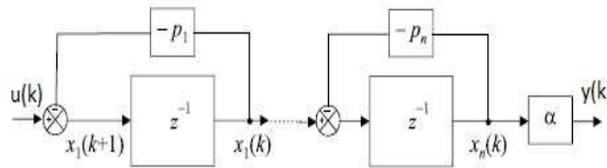


Figure 2.3 – Représentation d'état d'un système discret sous forme série.

d'état cohérente avec cette forme en cascade de la fonction de transfert. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & p_n \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\
 y(k) &= (00 \dots \alpha) x(k)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Forme canonique commandable

On suppose que la fonction de transfert n'est pas factorisée, soit :

$$G(z) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}} \tag{2.21}$$

Les équations d'état se déduisent naturellement de la figure 2.4 :

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= x_2(k) \\
 x_2(k+1) &= x_3(k) \\
 &\vdots \\
 x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) \\
 x_n(k+1) &= -a_0x_1(k) - a_1x_2(k) - \dots - a_{n-1}x_n(k) + u(k)
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

d'où :

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{2.23}$$

$$y(k) = (b_0 \dots b_m \dots 0 \dots 0)x(k)$$

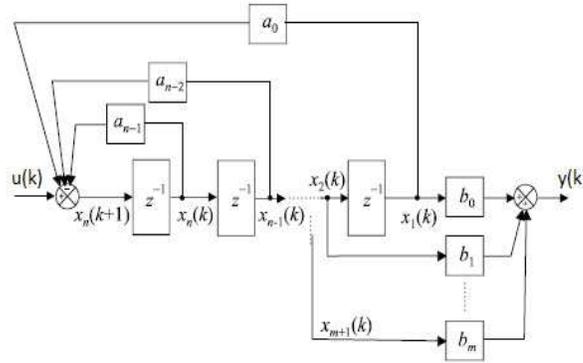


Figure 2.4 – Représentation d'état du système sous forme compagne commandable.

Forme canonique observable

La représentation compagne observable peut être mise en évidence à partir de la forme de $G(z)$ déjà transformée dans le paragraphe précédent :

$$G(z) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}} \tag{2.24}$$

Les équations d'état se déduisent naturellement de la figure 2.5 :

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\
 y(k) &= (0 \dots 0 1)x(k)
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

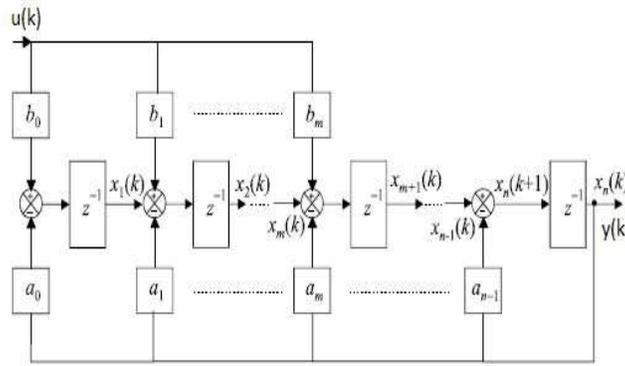


Figure 2.5 – Représentation d'état du système sous forme compagne observable.

2.8.2 D'une représentation d'état vers une représentation de transfert

Si on applique la transformation en z aux équations d'état et si on suppose que les conditions initiales sont nulles, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} zX(z) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) \end{array} \right\} \tag{2.26}$$

On a donc :

$$X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) \tag{2.27}$$

On tire l'expression de $Y(z)$:

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1}BU(z) \tag{2.28}$$

La fonction de transfert du système SISO est donc :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1}B \quad (2.29)$$

Dans le cas d'un système MIMO, $Y(z)$ et $U(z)$ sont reliés par une matrice de fonctions de transfert.

L'inverse d'une matrice carrée étant égale à sa matrice adjointe divisée par son déterminant, nous pouvons en déduire que les pôles de la fonction de transfert sont les valeurs de z qui sont solutions de l'équation :

$$\det(A - zI) = 0 \quad (2.30)$$

donc ce sont les valeurs propres de la matrice A .

2.9 Conclusion

Face à la complexité des systèmes, la fonction de transfert peut parfois sembler ne pas être le modèle le plus approprié pour décrire les comportements considérés. Pour cette raison, d'autres modèles sont utilisés et apparaissent comme une alternative à la fonction de transfert. Le plus adapté d'entre eux est la représentation d'état ou modèle d'état. Dans ce chapitre, la relation entre le modèle d'état et la fonction de transfert en z a été présentée. Les concepts de stabilité, de commandabilité et d'observabilité ont été également brièvement abordés.

Chapitre 3

Identification

3.1 Introduction

Toute méthode de commande de processus nécessite la connaissance d'un modèle mathématique du système. L'identification consiste à déterminer les paramètres caractéristiques d'un modèle externe ou d'un modèle interne à partir d'un ensemble de mesures entrée-sortie du processus (Borne et al., 1992). Les problèmes d'identification sont généralement résolus à l'aide de trois ensembles :

- **données issues de l'expérience** : le problème consiste à choisir une expérience donnant le maximum d'information.
- **modèles** : le choix d'un modèle candidat peut se faire à partir des lois physiques régissant le système dont les paramètres sont peu connus ou mal connus (boîtes grises), ou bien à partir du résultat de l'expérience sans connaissance a priori (boîtes noires)
- **algorithmes d'identification** : ils permettent à partir des données de préciser les paramètres du modèle candidat.

Le choix d'un élément dans chacun de ces ensembles conduit à une identification d'un système qui se déroule en trois étapes :

- **estimation structurelle** : cette étape, liée au choix d'un modèle, consiste à déterminer les paramètres de structure.
- **estimation paramétrique** : il faut déterminer les valeurs numériques des coefficients de la structure choisie. Le choix d'un critère que l'algorithme d'identification doit minimiser permet de juger de la confiance à attribuer à ces valeurs.
- **validation du modèle** : le modèle mathématique obtenu n'est valable en toute rigueur que pour l'expérience utilisée. Il faut donc vérifier s'il est compatible avec l'utilisation que l'on en fera.

L'identification d'un système est donc une procédure interactive où les choix doivent être remis en question lors d'un échec de la validation du modèle. La plupart des méthodes demandent la résolution d'un système linéaire dont les coefficients dépendent des données.

L'identification des systèmes a longtemps été envisagée dans le cadre de la boucle ouverte. Pourtant, de nombreux systèmes sont contraints de fonctionner en boucle fermée. Souvent, il n'est pas possible de conduire des expérimentations en boucle ouverte sur des procédés industriels, soit pour des raisons de production, soit pour des problèmes d'instabilité. Dans ce cas, il est possible, sous certaines conditions, d'identifier ces systèmes à partir des signaux acquis en boucle fermée.

Dans la pratique, deux démarches sont possibles pour l'obtention du modèle d'un système. La première approche est analytique et la deuxième est expérimentale. La modélisation analytique utilise les équations physico-chimiques qui régissent le comportement dynamique du système. La modélisation expérimentale traite le système comme une boîte noire et utilise les mesures expérimentales pour extraire le modèle. Bien que la modélisation analytique offre une description précise facilitant la compréhension du comportement des procédés, elle est souvent complexe et peu utilisée pour la commande. Les automatismes utilisent surtout la modélisation expérimentale car elle présente une grande souplesse lors de la synthèse des régulateurs. Cette dernière modélisation comporte les modèles de type entrée-sortie, appelés aussi modèles de fichiers (Landau, 1988). Le travail présenté dans ce chapitre concerne l'analyse de techniques d'identification des systèmes en boucle ouverte. Nous nous intéressons plus particulièrement à l'identification d'une station d'épuration d'eaux usées par la méthode des moindres carrés. Ce chapitre résume brièvement la procédure d'identification des systèmes en boucle ouverte. La section suivante illustre les principes de base pour l'identification en boucle ouverte.

3.2 Principes de Base de l'identification

L'identification d'un modèle est une étape fondamentale de chaque procédure qui a comme objectif la commande performante d'un système. L'identification est la procédure qui fournit un modèle dynamique du système à partir des données expérimentales. Les modèles dynamiques identifiés sont groupés en deux catégories fondamentales :

- modèles paramétriques ;
- modèles non paramétriques.

Les modèles paramétriques sont décrits univoquement par un ensemble de coefficients relatifs à une structure de modèle donnée (représentation d'état, polynômes d'une fonction de transfert, représentation avec gain, zéros et pôles). Les modèles non paramétriques, au contraire, ne sont pas décrits par un ensemble fini de valeurs. Ces modèles sont des fonctionnelles d'une variable fréquentielle ou temporelle (gain et phase de la fonction de transfert, réponse impulsionnelle). Une opération complète d'identification doit nécessairement comporter les quatre étapes suivantes :

- acquisition des entrées/sorties sous un protocole d'expérimentation,
- choix ou estimation de la complexité du modèle,
- estimation des paramètres du modèle,

– validation du modèle identifié.

Les méthodes spécifiques utilisées dans chaque étape dépendent du type de modèle recherché (par exemple : paramétrique ou non paramétrique, continu ou échantillonné...), ainsi que des conditions d'expérimentation (par exemple : identification en boucle ouverte ou en boucle fermée...). La validation est le point de passage obligé pour décider de l'acceptation ou le rejet du modèle identifié. Les techniques de validation doivent permettre de qualifier la qualité du modèle obtenu (Ljung and Söderström, 1986).

3.2.1 Définition d'une Classe de Modèles

La structure choisie pour les modèles discrets linéaires et invariants dans le temps (LTI) est

$$G(q^{-1}) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (3.1)$$

avec :

$$A(q^{-1}) = a_{-1}q^{-1} + \dots + a_{n_A}q^{-n_A} \quad ; \quad B(q^{-1}) = b_{-1}q^{-1} + \dots + b_{n_B}q^{-n_B} \quad (3.2)$$

d est le retard pur entier du système. $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sont des polynômes en q^{-1} (opérateur retard) d'ordre n_A et n_B respectivement. Un modèle de ce type exprime la relation entre l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$ du système qu'on désire estimer en faisant l'hypothèse qu'une perturbation additive est présente selon :

$$y(t) = G(q^{-1})u(t) + H(q^{-1})e(t) \quad (3.3)$$

Ce modèle est qualifié de modèle à erreur d'équation. Deux choix typiques pour la fonction de transfert $H(q^{-1})$ sont :

$$H(q^{-1}) = \frac{1}{A(q^{-1})} \quad (3.4)$$

où

$$H(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (3.5)$$

avec $C(q^{-1})$ polynôme d'ordre n_c . Le premier cas correspond à l'hypothèse d'une perturbation équivalente au bruit blanc filtré par la dynamique du système. La relation 3.1 devient :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + e(t) \quad (3.6)$$

correspond à la structure des modèles ARX (Auto Régressif avec entrée eXogène). Le deuxième cas correspond à la structure des modèles ARMAX (Auto Régressif à Moyenne Mobile et entrée eXogène) dans lesquels le bruit est modélisé à l'aide d'un filtre $C(q^{-1})$:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad (3.7)$$

Une autre description du système est donnée par la structure de modèle à erreur de sortie :

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + w(t) \quad (3.8)$$

où $w(t)$ est une perturbation quelconque, indépendante de $u(t)$, à valeur moyenne nulle et variance finie. L'équation 3.3 peut en effet être réécrite en mettant en évidence la dépendance du vecteur des paramètres θ :

$$y(t) = G(q^{-1}, \theta)u(t) + H(q^{-1}, \theta)e(t) \quad (3.9)$$

avec :

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_{n_A} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_B} \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n_C}] \quad (3.10)$$

dans le cas du modèle ARMAX. Sous l'hypothèse que le système soit décrit par :

$$y(t) = G(q^{-1}, \theta^*)u(t) + H(q^{-1}, \theta^*)e(t) \quad (3.11)$$

le vecteur θ , appartenant à \mathfrak{R}^m , définit un ensemble de modèles M . La phase d'identification devra permettre de retrouver le vecteur $\hat{\theta}$ qui se rapproche le plus de θ^* (idéalement $\hat{\theta} = \theta^*$).

3.2.2 Acquisition des entrées/sorties sous un protocole d'expérimentation

L'acquisition des données entrée/sortie, qui doit fournir les informations suffisantes pour déterminer un modèle significatif du système, est la première étape de la procédure d'identification. Etant donné que le modèle résultant à l'issue de la procédure dépend essentiellement des données utilisées, le protocole d'acquisition (et sa mise en oeuvre) conditionne la qualité de l'identification (Zhu and Backx, 1993). Pour cela, il s'agit de choisir un signal d'excitation avec une densité spectrale homogène couvrant l'ensemble de la bande passante du procédé à identifier. Par ailleurs, il y a toujours des contraintes très fortes sur l'amplitude des variations des signaux d'identification autorisés en pratique. Les signaux les plus utilisés pour l'identification sont :

- **signal harmonique** : L'entrée est sinusoïdale de type $u = A \sin(\omega t)$. Cette expérience est réalisée pour différentes pulsations. On relève ensuite, sur les enregistrements, le gain et le déphasage de l'objet aux diverses pulsations. Ces points, reportés dans le plan de Bode ou de Nyquist, après interpolation permettent d'obtenir un tracé continu constituant un modèle "non paramétrique". Ce n'est pas une identification industrielle classique et par conséquent elle est difficile à mettre en oeuvre (Richalet, 1998).
- **échelon** : Le spectre est correct, la commande est facile à implanter car c'est une identification classique. C'est la méthode la plus utilisée.

- **impulsion** : Parfait du point de vue théorique, mais il est impossible de réaliser un Dirac correct.
- **SBPA (Séquence binaire pseudo-aléatoire)** : Ses propriétés fréquentielles sont faciles à caractériser (elles sont proches de celles d'un bruit blanc) et s'agissant d'une succession d'impulsions rectangulaires d'amplitude maximale (voir Landau and con Voda (2001) pour plus de détails).

3.2.3 Choix ou estimation de la complexité du modèle

Le problème typique rencontré dans le cas des modèles paramétriques est le choix de l'ordre des polynômes (numérateur, dénominateur) de la fonction de transfert pouvant caractériser le modèle ou la taille de la représentation d'état et les valeurs des indices d'observabilité associés à chaque sortie (dans le cas multivariable). Pendant de nombreuses années, le choix de la complexité se faisait par une procédure essais/erreur. Ces derniers temps des progrès significatifs dans ce domaine ont été effectués. On dispose maintenant d'algorithmes fiables qui estiment à partir des données la complexité des modèles (Van Overschee and Moor, 1996)

3.2.4 Estimation des paramètres du modèle

La phase centrale de la procédure d'identification est l'estimation des paramètres du modèle appartenant à la classe M des modèles choisie. Lorsque les signaux d'excitation sont de faible amplitude, il en résulte des mesures fortement entachées par le bruit de mesure. Le bruit de mesure peut introduire une erreur d'estimation paramétrique (appelée aussi biais). Malheureusement, il n'existe pas un algorithme unique d'estimation paramétrique qui donne des estimations non biaisées pour tous les types de bruit. Il faut donc chaque fois faire une hypothèse sur la structure du bruit, choisir un algorithme d'estimation approprié et faire passer un test de validation au modèle obtenu. Ce test pourra donc indiquer si la structure du bruit de mesure a été correctement choisie (Landau and con Voda, 2001). Les algorithmes d'identification en boucle ouverte utilisent l'ensemble des données entrée/sortie pour déterminer les paramètres du modèle qui se rapprochent le plus du modèle optimal en minimisant un critère donné de performance. On distingue deux types d'algorithmes d'estimation paramétrique : algorithmes de type non récursif, qui traitent un ensemble de données entrées/sorties obtenues sur un horizon de temps et les algorithmes récursifs, qui traitent les paires de données entrées/sorties à chaque instant et produisent ainsi une estimation paramétrique au fur et à mesure de l'acquisition des données ou de la lecture du fichier de données entrées/sorties (voir Landau et al. (1997) pour plus de détails).

3.2.5 Validation du modèle identifié

L'étape de validation consiste à tester la capacité du modèle identifié à simuler le comportement du procédé avec un jeu de données d'entrée-sorties autre que celui utilisé lors de l'identification. Plusieurs points de vue peuvent être considérés pour la mise en place d'une procédure de validation. Les procédures les plus courantes sont de type statistique. L'objectif est de montrer que la sortie du modèle excité par le même signal que le procédé reproduit les variations de la sortie causées par les variations du signal d'identification en s'affranchissant de l'effet du bruit de mesure.

3.3 Méthodes d'identification

3.3.1 Identification basée sur l'erreur de prédiction

Dans cette méthode, le modèle obtenu est un prédicteur, il permet de calculer la sortie à l'instant i en fonction des entrées u_{i-k} et des sorties réelles y_{i-k} aux instants précédents.

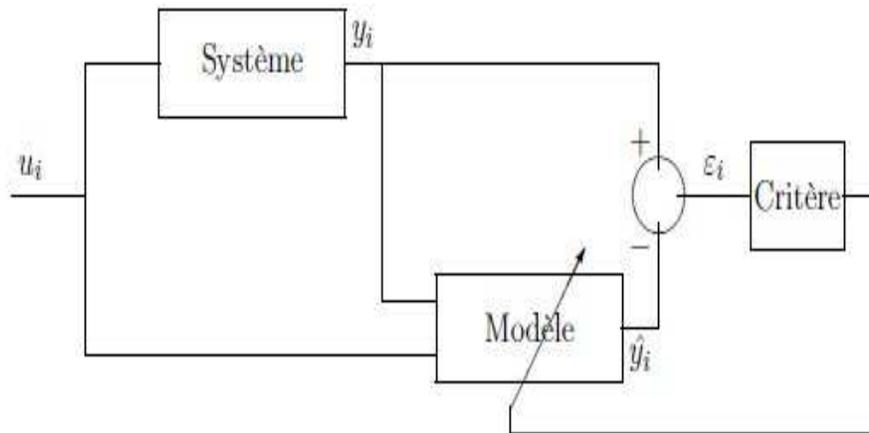


Figure 3.1 – Principe des méthodes à erreur de prédiction.

Méthode des moindres carrés simples

Soit un système décrit par l'équation suivante :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + w(t) \quad (3.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_{-1}q^{-1} + \dots + a_{n_A}q^{-n_A} = 1 + q^{-1}A^*(q^{-1}) \\ B(q^{-1}) &= b_{-1}q^{-1} + \dots + b_{n_B}q^{-n_B} = q^{-1}B^*(q^{-1}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} y(t) &= -A^*(q^{-1})y(t-1) + B^*(q^{-1})u(t-d-1) + w(t) \\ &= \theta^T \phi(t-1) + w(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

θ est le vecteur des paramètres et $\phi(t)$ le vecteur des observations donnés par :

$$\begin{aligned} \theta^T &= [a_1 \dots a_{n_A} \quad b_1 \dots b_{n_B}] \\ \phi^T(t-1) &= [-y(t-1) \dots -y(t-n_A) \quad u(t-d-1) \dots u(t-d-n_B)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si les paramètres du modèle sont connus, on peut définir la prédiction de la sortie calculée à partir des mesures disponibles jusqu'à l'instant $t-1$:

$$\hat{y}(t|\theta) = \theta^T \phi(t-1) \quad (3.16)$$

Supposons que les données entrées/sorties sont disponibles sur un horizon de mesure égal à N .

$$z^N = \{u(1)y(1) \dots u(N)y(N)\} = \{Y^T(N) U^T(N)\} \quad (3.17)$$

où

$$\begin{aligned} Y^T(N) &= [y(N)y(N-1) \dots y(1)] \\ U^T(N) &= [u(N)u(N-1) \dots u(1)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Supposons que les valeurs des paramètres θ sont inconnus. Définissons pour chaque valeur du vecteur de paramètres estimés $\hat{\theta}$ une sortie prédite :

$$\hat{y}(t|\hat{\theta}) = \hat{\theta}^T \phi(t-1) \quad (3.19)$$

L'erreur de prédiction est égale à :

$$\epsilon(t, \hat{\theta}) = y(t) - \hat{y}(t|\hat{\theta}) \quad (3.20)$$

La norme choisie qui devra être minimisée est :

$$J_N(\hat{\theta}, z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon^2(t, \hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[y(t) - \hat{\theta}^T(N) \phi(t-1) \right]^2 \quad (3.21)$$

Le rapport $1/N$ peut être omis sans modifier les résultats. Le terme $\hat{\theta}^T(N) \phi(t-1)$ correspond à la prédiction de la sortie à l'instant t basée sur l'estimation du vecteur des paramètres à l'instant N . Cette norme est une fonction quadratique de θ . Il suffit d'exprimer que la condition de minimum de la norme implique la nullité du vecteur gradient à l'extremum, donc que les dérivées partielles par rapport à θ sont nulles. On déduit l'estimateur du vecteur de paramètres selon le critère des moindres carrés :

$$\hat{\theta}^{MC} = \left[\sum_{t=1}^N \phi(t-1) \phi^T(t-1) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \phi(t-1) y(t) \quad (3.22)$$

Dans le cas où $w(t) = e(t)$ est un bruit blanc, on obtiendra des estimations paramétriques non biaisées. Par contre si $\phi(t-1)$ et $w(t)$ sont des bruits colorés, l'estimateur sera biaisé. Il reste donc à trouver une méthode comme la méthode des moindres carrés généralisés et la méthode de la matrice instrumentale (Söderström and Stoica, 1989) qui permettent de rendre ce biais nul (Pour plus de détails voir (Corriou, 1996)).

3.3.2 Identification basée sur l'erreur de sortie

Ces algorithmes sont connus sous l'appellation générique de méthode du modèle (Richalet, 1998). Ils se caractérisent fondamentalement par la simulation de la sortie à partir de la seule connaissance de l'excitation et du modèle (et de ses paramètres). Grâce à cette procédure, la sortie simulée est indépendante de la perturbation affectant le système, s'il n'y a pas de bouclage (Bachir et al., 2008; Grospeaud, 2000; Landau and Karimi, 1997; Trigeassou and Poinot, 2001).

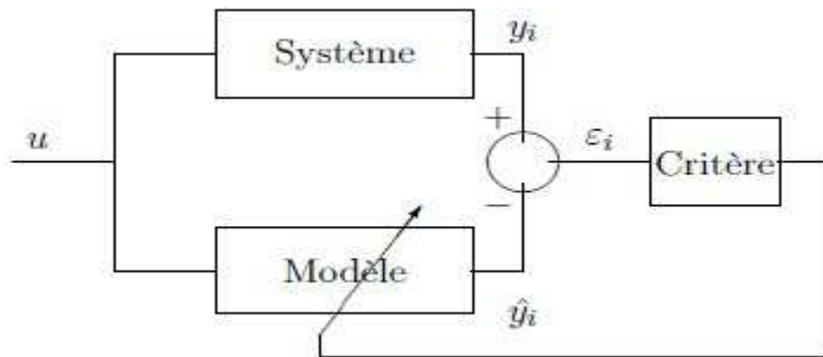


Figure 3.2 – Principe des méthodes à erreur de sortie.

Le principe de cette méthode d'identification est illustré en figure 3.2. Le modèle est une fonction de n paramètres θ_k , k variant de 1 à n . Il s'agit de déterminer les paramètres θ_i tels que le critère soit minimum. Le critère est en général choisi de la forme :

$$J = \sum \epsilon^2 \quad (3.23)$$

avec

$$\epsilon = y_i(t) - \hat{y}_i(\theta, t) \quad (3.24)$$

et

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T \quad (3.25)$$

La recherche des paramètres optimaux $\hat{\theta}_i$ se fait par programmation non linéaire. Il s'agit d'utiliser un algorithme qui donne les paramètres $\hat{\theta}_k$ à partir des paramètres non optimaux θ_k et un critère J . Ces algorithmes sont nombreux, à titre d'exemple voici les plus utilisés :

- gradient,

- quasi-Newton,
- algorithmes génétiques

Les méthodes à erreur de sortie reposent sur la définition d'un modèle paramétrique, fonction d'un certain nombre de paramètres auxquels on peut attribuer une signification plus ou moins physique, que l'on compare au système. Pour converger, ces algorithmes nécessitent :

- une entrée persistante afin d'exciter toutes les dynamiques du système,
- une bonne initialisation pour accélérer la convergence.

Cependant, on pourrait croire que l'on utilise une bonne initialisation comme information a priori pour accélérer la convergence auprès de l'optimum principal : en fait, l'algorithme d'optimisation ne conserve aucune trace de cette information initiale. Au mieux, cela évite de converger vers des optima secondaires. Malgré toutes les précautions numériques, ces algorithmes peuvent dans certaines situations fournir des estimations aberrantes. Il faut chercher la cause de ces anomalies dans le mécanisme d'optimisation ; en effet, celui-ci cherche le jeu de paramètres qui permet au modèle retenu d'approcher au mieux les données, sans contrainte physique. Il s'agit fondamentalement d'un problème de sensibilité paramétrique ; bien que théoriquement identifiables, les paramètres concernés sont quasiment non identifiables et on peut constater des phénomènes de compensation. Le réflexe traditionnel devant un tel problème est de proposer d'enrichir l'excitation (Ljung, 1987) ; toutefois, dans de nombreuses cas, cette excitation optimale peut s'avérer irréaliste en pratique, une solution proposée consiste à introduire explicitement la connaissance physique afin qu'elle se substitue pour partie à l'excitation insuffisante ou qu'elle contribue à enrichir l'excitation (pour plus de détails, voir (Zhu and Backx, 1993)). Dans la présentation des méthodes d'estimation paramétrique, il est important de distinguer d'une part le choix de la structure du prédicteur et le choix des vecteurs d'observations qui permettent potentiellement d'obtenir des estimations non biaisées des paramètres pour un type de perturbations et d'autre part la procédure de minimisation du critère d'erreur. S'il s'agit d'indentification hors ligne, le choix des procédures d'optimisation itératives ou récursives n'est pas fondamental. Par contre, s'il s'agit d'identification en ligne et pour des systèmes susceptibles de varier dans le temps (identification en temps réel), les algorithmes de type récursif s'imposent. Plusieurs approches peuvent être considérées pour engendrer des algorithmes récursifs :

- transformations d'algorithmes non récursifs en algorithmes récursifs,
- utilisation de la technique d'optimisation du gradient dans le domaine temporel,
- utilisation de la théorie des systèmes adaptatifs,
- rapprochement avec le filtre de Kalman.

Pour une présentation exhaustive des différentes approches, voir (Forssell and Ljung, 1999; Söderström and Stoica, 1983; Söderström et al., 1978). Dans le contexte de l'identification en boucle fermée, un grand nombre de méthodes ont été proposées dans les deux dernières décennies. On peut citer les travaux de (Landau, 1988) et (Van Den Hof and Schrama, 1995) où différentes techniques d'identification utilisables en boucle fermée sont proposées.

Le problème typique de l'identification en boucle fermée réside dans la corrélation entre les bruits de sortie et le signal de commande, du fait de la boucle fermée. Un autre problème causé par des données recueillies en boucle fermée est qu'elles comportent généralement moins d'information que celles recueillies en boucle ouverte.

3.4 Identification en boucle ouverte d'une station d'épuration d'eaux usées.

L'objectif de cette section est de présenter une méthode d'identification pour déterminer un modèle linéaire dans l'espace d'état en se basant sur un ensemble de "mesures" entrée-sortie du Benchmark BSM1 (figure 3.3) constitué de 7 entrées manipulées (q_a , q_r , q_w et q_{2in} , respectivement débits de recyclage interne, de recyclage externe, de rejet et d'ajout en source carbonée ; kla_3 , kla_4 , kla_5 coefficients de transfert de matière d'oxygène dans les réacteurs 3, 4 et 5), 5 sorties commandées (ammonium $[NH]$, azote total $[N]_{tot}$, solides en suspension $[SS]$, demande biochimique en oxygène à 5 jours $[BOD_5]$ et demande chimique en oxygène COD) et deux perturbations mesurées (débit entrant q_0 et concentration entrante en ammonium $[NH]_0$). Le modèle BSM1 a été présenté en détail dans la section 1.3 du premier chapitre.

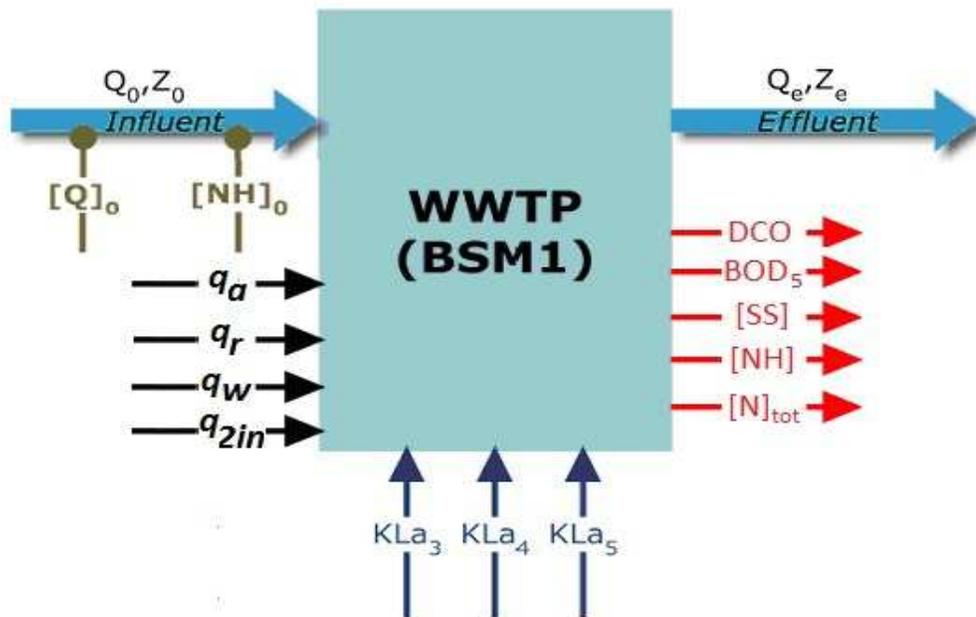


Figure 3.3 – Schéma représentatif du modèle BSM1.

En cas d'absence des perturbations mesurées (débit entrant q_0 et concentration entrante en ammonium $[NH]_0$), des réponses indicielles en boucle ouverte ont été obtenues

à partir des variations des entrées autour de leurs valeurs stationnaires (Tableau 3.1) pour une durée de simulation égale à 24h et une période d'échantillonnage T_s égale à 0,5 h. Ensuite, les coefficients des réponses indicielles normalisées ont été obtenues comme (Shen et al., 2009) :

$$h_{i,j} = \frac{y_i(k) - y_i^{ss}}{u_j^\infty - u_j^{ss}} \quad (3.26)$$

où u_j , ($j = 1, \dots, n_u$) et y_i , ($i = 1, \dots, n_y$) sont respectivement les entrées et les sorties du système. La lettre supérieure *ss* réfère à la valeur stationnaire et ∞ réfère à la valeur asymptotique à la fin de chaque échelon. Les 35 réponses indicielles normalisées (7 entrées \times 5 sorties) obtenues permettent de déterminer par optimisation les fonctions de transfert continues correspondantes. Ces fonctions de transfert peuvent être regroupées en cinq modèles mathématiques (voir Tableau 3.2). Ce modèle tient compte des non-linéarités à travers des paramètres variables.

Tableau 3.1 – Valeurs stationnaires, amplitudes et durée des échelons des entrées manipulées et perturbations mesurées

Entrées manipulées	Valeurs stationnaires	Amplitude de l'échelon	Durée
Débit de recyclage interne q_a (m ³ /h)	2306	+10%	24h
Débit de recyclage externe q_r (m ³ /h)	769	+10%	24h
Débit de rejet q_w (m ³ /h)	16	+10%	24h
Coefficient de transfert de matière d'oxygène 3 ^{ème} unité kla_3 (1/h)	10	+10%	24h
Coefficient de transfert de matière d'oxygène 4 ^{ème} unité kla_4 (1/h)	10	+10%	24h
Coefficient de transfert de matière d'oxygène 5 ^{ème} unité kla_5 (1/h)	3.5	+10%	24h
Perturbations mesurées	Valeurs stationnaires	Amplitude de l'échelon	Durée
Perturbations mesurées			
Débit entrant q_0 (m ³ /h)	768.583	+1%	24h
Concentration entrante en ammonium $[NH]_0$ (mg/l)	31.56	+1%	24h

Après avoir choisi le modèle mathématique adéquat pour chaque fonction de transfert, il faut déterminer les valeurs numériques des coefficients de chaque modèle choisi. Pour cela, nous avons choisi le critère des moindres carrés comme critère à minimiser :

$$f = \sum (h_{exp} - h_{mod})^2 \quad (3.27)$$

où h_{mod} est le coefficient de la réponse indicielle du modèle et h_{exp} le coefficient expérimental de la réponse indicielle. Pour chaque modèle mathématique choisi, une figure d'une

réponse indicielle expérimentale sera présentée, en faisant aussi la comparaison entre la réponse indicielle expérimentale normalisée et la fonction de transfert du modèle obtenue par l'identification.

Les différentes structures utilisées pour l'identification des réponses indicielles normalisées sont détaillées dans la suite.

Système de premier ordre

Dans la figure 3.4, la réponse indicielle de la demande biochimique en oxygène à 5 jours [BOD_5] au débit de recyclage externe q_r est présentée et modélisée comme un système de premier ordre.

$$h_{mod} = \frac{K}{\tau s + 1} \exp(-rs) \quad (3.28)$$

Valeurs numériques : $K = 0.0002$, $\tau = 1.7891$ et $r = 1$

On remarque que les valeurs numériques des coefficients du modèle choisi (h_{mod}) ont été bien calculées et que les réponses indicielles du modèle et de l'expérience sont très proches.

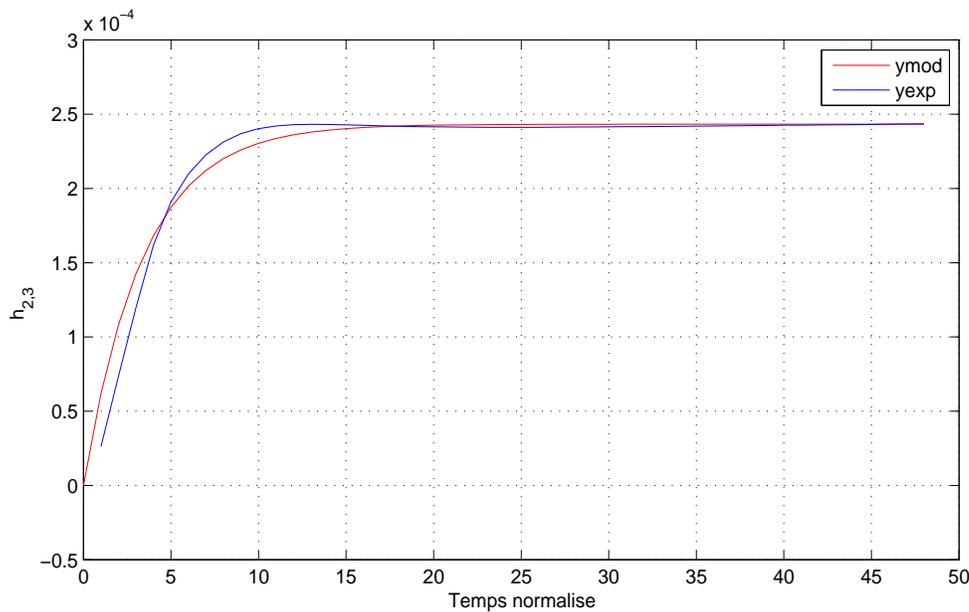


Figure 3.4 – h_{exp} est la réponse indicielle BOD_5/q_r normalisée et h_{mod} est la réponse indicielle du modèle.

Système de second ordre avec avance

Dans la figure 3.5, la réponse indicielle de la demande biochimique en oxygène à 5 jours [BOD_5] au débit de recyclage interne q_a est présentée et modélisée selon un système

de second ordre avec un terme d'avance (numérateur de la fonction de transfert). On remarque que l'accord est moins bon que pour la figure 3.4.

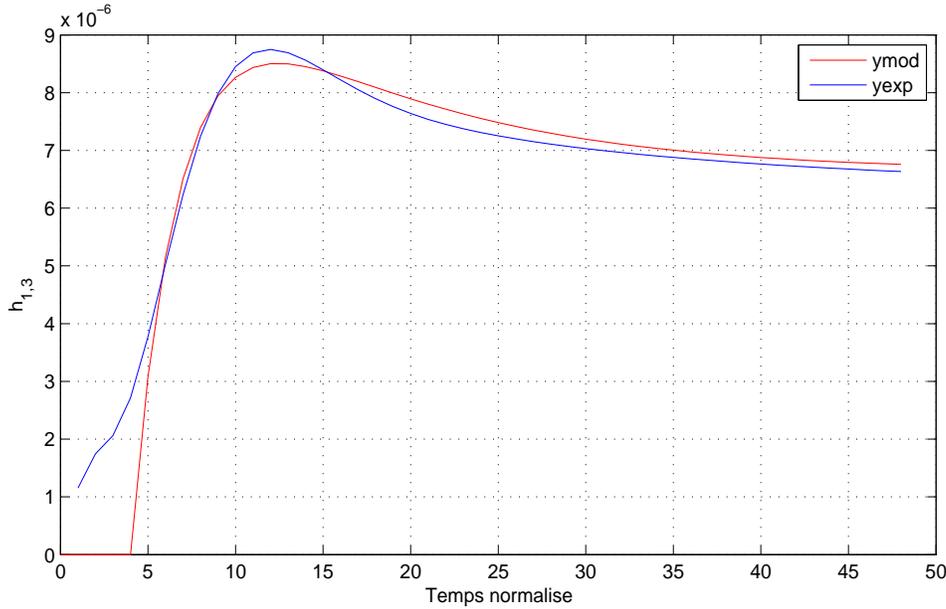


Figure 3.5 – h_{exp} est la réponse indicielle BOD_5/q_a normalisée et h_{mod} est la réponse indicielle du modèle.

$$h_{mod} = K \frac{\alpha_1 s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \exp(-rs) \quad (3.29)$$

Valeurs numériques : $K = 6.6323 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_1 = 4$, $\tau_1 = 0.9972$, $\tau_2 = 0.984$ et $r = 4$.

Système de second ordre

Dans la figure 3.6, la réponse indicielle de la demande biochimique en oxygène à 5 jours [BOD_5] au coefficient de transfert de matière dans le 4ème réacteur kla_4 est présentée et modélisée selon un système de second ordre. La réponse indicielle et la réponse indicielle du modèle choisie h_{mod} sont à peu près identiques.

$$h_{mod} = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs) \quad (3.30)$$

Valeurs numériques : $K = -0.0017$, $\tau = 3.8495$ et $r = 1$.

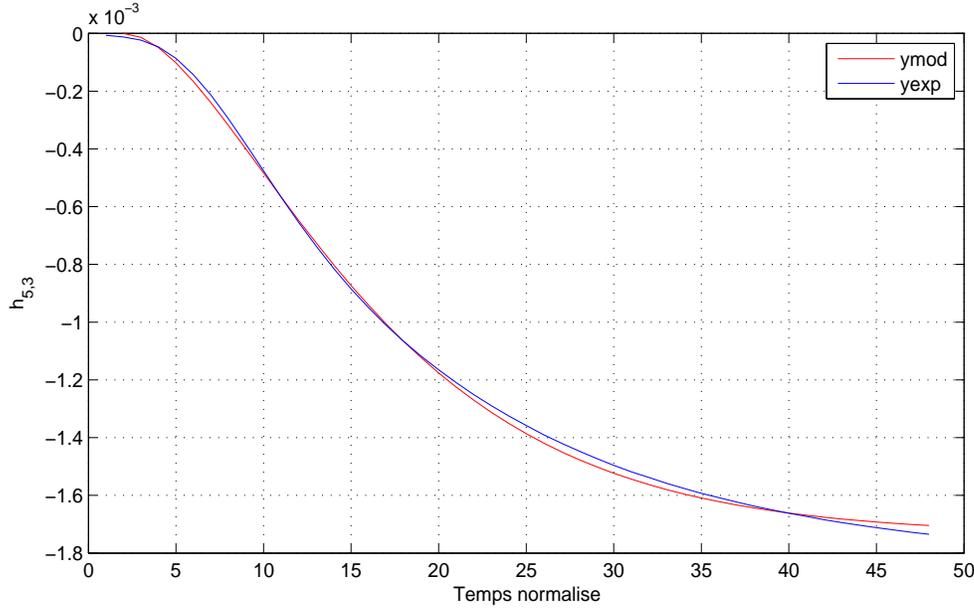


Figure 3.6 – h_{exp} est la réponse indicielle $BDO5/kl a_4$ normalisée et h_{mod} est la réponse indicielle du modèle.

Système avec réponse inverse

Dans la figure 3.7, la réponse indicielle de l'azote total $[N]_{tot}$ au débit de recyclage externe q_a est présentée et modélisée selon un système à réponse inverse.

$$h_{mod} = \left(\frac{K_1}{\tau_1 s + 1} + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} \right) \exp(-rs) \quad (3.31)$$

Valeurs numériques : $K_1 = 0.0021$, $\tau_1 = 3$, $K_2 = -0.0029$, $\tau_2 = 5$ et $r = 1$.

Système de premier ordre avec intégrateur

Dans la figure 3.8, la réponse indicielle de solides en suspension $[SS]$ au coefficient de transfert de matière dans le 5ème réacteur $kl a_5$ est présentée et modélisée selon un système de premier ordre avec un intégrateur. Le résultat est beaucoup moins bon que celui des cas précédents. Le critère des moindres carrés ne permet pas avoir les valeurs numériques convenables.

$$h_{mod} = \frac{K_1}{s} \exp(-rs) + \frac{K_2}{\tau s + 1} \quad (3.32)$$

Valeurs numériques : $K_1 = 2.2135 \cdot 10^{-5}$, $K_2 = -3.3306 \cdot 10^{-4}$, $\tau = 11.0495$ et $r = 5$.

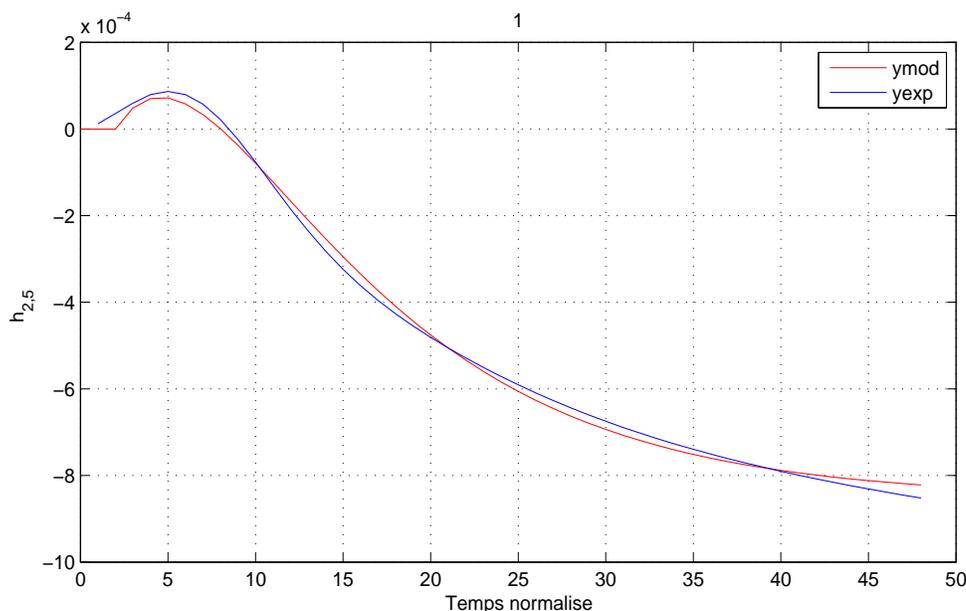


Figure 3.7 – h_{exp} est la réponse indicielle $[N]_{tot}/q_r$ normalisée et h_{mod} est la réponse indicielle du modèle.

Dans le tableau 3.2, les 35 réponses indicielles normalisées ont été classées d'après leurs modèles mathématiques. Dans certains cas (RI : Réponse Inverse, S2Z : Second ordre avec avance et P1I : premier ordre avec un intégrateur), afin d'obtenir des valeurs numériques convenables pour les coefficients de la structure choisie, à cause de l'absence probable de minimum global, plusieurs itérations étaient nécessaires durant l'algorithme d'identification, en partant de différentes valeurs initiales pour atteindre une valeur raisonnable du critère final.

Pour mettre en évidence la non-linéarité du système pour un couple {entrée, sortie} donné, nous avons étudié l'influence de l'amplitude des variations des entrées sur les coefficients des réponses indicielles. A titre d'exemple, l'influence de l'amplitude de la variation de l'entrée q_r sur la sortie ammonium $[NH]$ est montrée dans la Figure 3.9. Il est très clair que l'amplitude de variations des entrées joue un rôle très important durant la phase d'identification des modèles en boucle ouverte.

Une autre forme de non-linéarité a été également trouvée durant l'identification. En effet, certaines réponses indicielles changent de forme en fonction de l'amplitude des variations des entrées. Les figures 3.10, 3.11, 3.12 et 3.13 montrent ce type de non-linéarité.

Dans la figure 3.10, la réponse indicielle de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de débit de recyclage interne q_a est présentée. On remarque que pour des variations positives de débit de recyclage interne q_a autour sa valeur stationnaire ($amp = 0.05 = +5\%$, $amp = 0.1 = +10\%$, $amp = 0.15 = +15\%$ et $amp = 0.2 = +20\%$), la réponse indicielle se

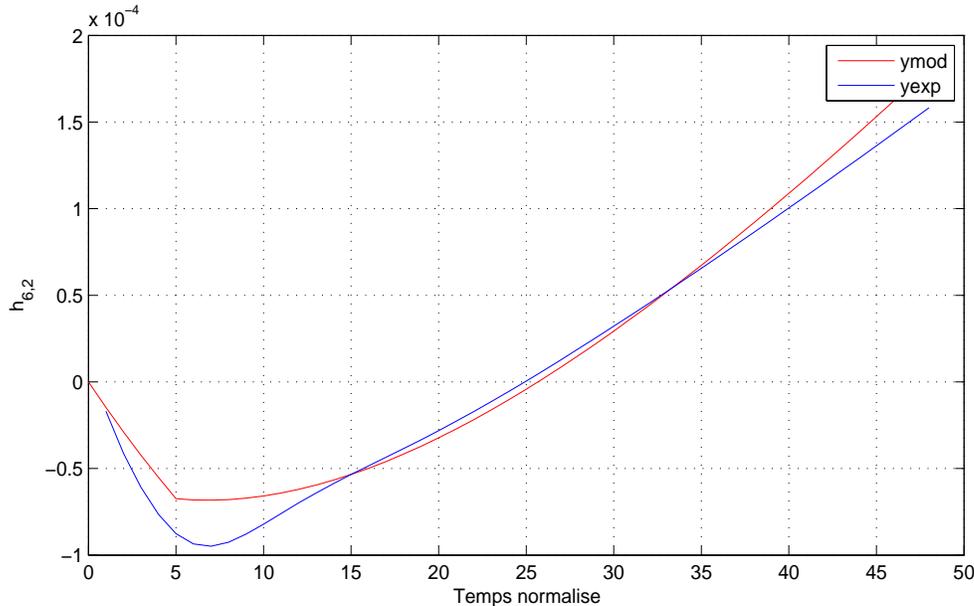


Figure 3.8 – h_{exp} est la réponse indicielle $[SS]/kla_5$ normalisée et h_{mod} est la réponse indicielle du modèle.

comporte comme un système de second ordre et pour des variations négatives de débit de recyclage interne q_a autour sa valeur stationnaire ($amp = -0.1 = -10\%$, $amp = -0.15 = -15\%$ et $amp = -0.2 = -20\%$), la réponse indicielle se comporte comme un système avec réponse inverse.

Dans la figure 3.11, la réponse indicielle de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de coefficient de transfert de matière dans le 3ème réacteur kla_3 est présentée. On remarque que pour des variations positives de coefficient de transfert de matière dans le 3ème réacteur kla_3 autour sa valeur stationnaire ($amp = 0.05 = +5\%$, $amp = 0.1 = +10\%$, $amp = 0.15 = +15\%$ et $amp = 0.2 = +20\%$), la réponse indicielle se comporte comme un système de second ordre et pour des variations négatives de débit de recyclage interne q_a autour sa valeur stationnaire ($amp = -0.1 = -10\%$, $amp = -0.15 = -15\%$ et $amp = -0.2 = -20\%$), la réponse indicielle se comporte comme un système avec réponse inverse. Dans le même cas, pour la réponse indicielle de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de coefficient de transfert de matière dans le 4ème réacteur kla_4 (figure 3.12) et la réponse indicielle de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de coefficient de transfert de matière dans le 5ème réacteur kla_5 (figure 3.13).

Les figures 3.11, 3.12 et 3.13 montrent que la réponse indicielle dans le 5ème réacteur est 4 fois plus grande que les autres réacteurs.

De la même manière, en ce qui concerne les perturbations mesurées, les réponses indicielles ont été obtenues en boucle ouverte à partir des variations de $[NH]_0$ et q_0 autour

Tableau 3.2 – Classification des modèles des réponses indicielles normalisées. P1 : Premier ordre, P1I : Premier ordre avec intégrateur, RI : Réponse Inverse, S2 : Second ordre et S2Z : Second ordre avec avance.

Fonctions de Transfert	P1	P1I	RI	S2	S2Z
$h_{1,1} \ h_{1,2} \ h_{1,3} \ h_{1,4}$					X
$h_{2,1} \ h_{2,5}$			X		
$h_{4,1} \ h_{5,1} \ h_{6,1} \ h_{7,1} \ h_{4,3} \ h_{5,3} \ h_{6,3}$ $h_{4,4} \ h_{5,4} \ h_{6,4} \ h_{1,5} \ h_{4,5} \ h_{5,5} \ h_{6,5} \ h_{7,5}$				X X	
$h_{3,1}$		X			
$h_{3,2} \ h_{4,2} \ h_{5,2} \ h_{6,2} \ h_{7,2} \ h_{3,3} \ h_{7,3} \ h_{3,4} \ h_{7,4} \ h_{3,5}$		X			
$h_{2,2} \ h_{2,3} \ h_{2,4}$	X				

des valeurs stationnaires (Tableau 3.1). Ensuite les coefficients indicielles normalisées ont été obtenues à partir de la formule suivante :

$$\acute{h}_{i,j} = \frac{y_i(k) - y_i^{ss}}{d_j^\infty - d_j^{ss}} \tag{3.33}$$

où d_j ($j = 1, \dots, n_u$) et y_i ($i = 1, \dots, n_y$) sont respectivement les perturbations mesurées et les sorties du système. La lettre supérieure *ss* se réfère à la valeur stationnaire et ∞ se réfère à la valeur asymptotique à la fin de chaque échelon. L'amplitude de l'échelon des perturbations utilisée pour calculer les coefficients des réponses indicielles en boucle ouverte a été choisie de $\pm 1\%$ à $\pm 7\%$ (Tableau 3.1), soit des valeurs assez faibles dues à l'influence notable des perturbations sur certaines des sorties. Pour montrer l'influence des perturbations, quelques réponses indicielles normalisées sont fournies. Les principales influences des perturbations sont l'influence du débit entrant q_0 sur la concentration en ammonium $[NH]$ (figure 3.14) et l'influence de la concentration entrante en ammonium $[NH]_0$ sur la concentration en ammonium $[NH]$ (figure 3.15) et la concentration en azote total $[N]_{tot}$ (figure 3.16).

L'influence de l'amplitude (cette dernière relativement faible) des variations des perturbations sur les coefficients des réponses indicielles est également nette (figures 3.14-3.16), ce qui montre aussi la non-linéarité de notre système.

Toutes les fonctions de transfert continues des modèles sont obtenues par identification en boucle ouverte à partir des réponses indicielles "expérimentales" (d'après le modèle non linéaire BSM1). Chaque fonction de transfert continue a été discrétisée avec une période d'échantillonnage T_s ($T_s = 0,5$ h) en utilisant la fonction Matlab `c2d`, et en tenant compte du retard, parce que `c2d` ne prend pas en compte le retard dans le système. Ensuite, chaque fonction de transfert discrète a été transformée en un système linéaire discret équivalent dans l'espace d'état à l'aide de la fonction Matlab `tf2ss`. Le système final multivariable est

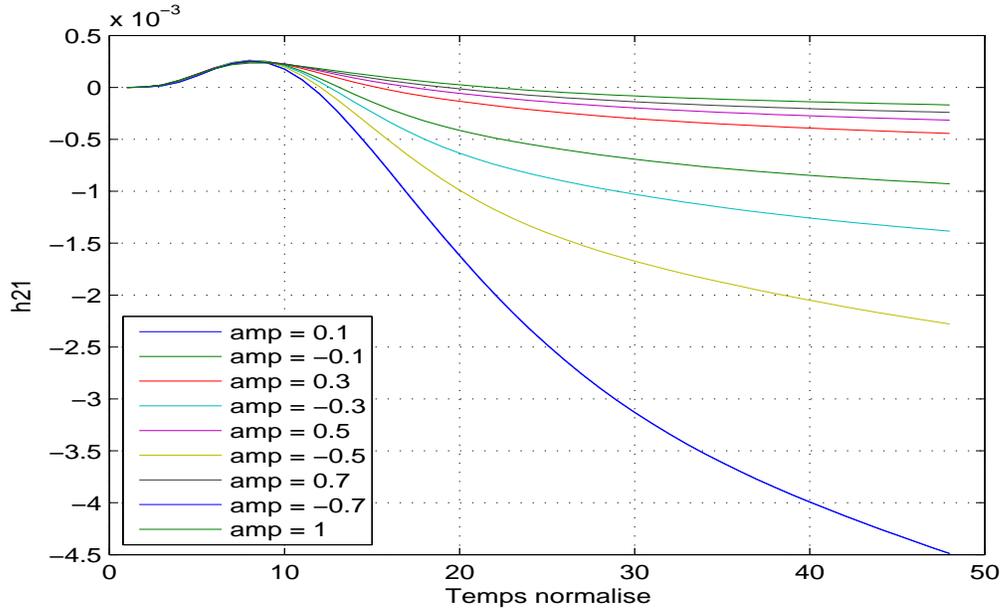


Figure 3.9 – Variation des réponses indicielles normalisées de $[NH]$ en fonction de l'amplitude de la variation de q_r .

formé de plusieurs sous-systèmes discrets dans l'espace d'état qui ont été connectés par la fonction Matlab connect en respectant l'ordre des entrées et des sorties afin de former le modèle linéaire discret dans l'espace d'état du procédé complet. Le système complet obtenu dans l'espace d'état est le suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(\Delta \mathbf{u}) \mathbf{x} + \mathbf{B}(\Delta \mathbf{u}) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(\Delta \mathbf{u}) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.34)$$

tel que les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} dépendent de l'amplitude du vecteur d'entrées $\Delta \mathbf{u}$. Le système multivariable linéaire discret ainsi obtenu doit être utilisé ensuite dans le cadre d'une commande prédictive qui sera appliquée au benchmark BSM1.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les aspects principaux de la procédure d'identification des systèmes ont été brièvement présentés. Une identification en boucle ouverte d'une station d'épuration d'eaux usées a été réalisée à partir du benchmark BSM1. Des réponses indicielles à des échelons des entrées d'amplitude variable autour du régime stationnaire ont été déterminées. Des fonctions de transfert continues de premier et second ordre avec retard, des réponses inverses, avec parfois des intégrateurs, représentant les réponses indicielles ont

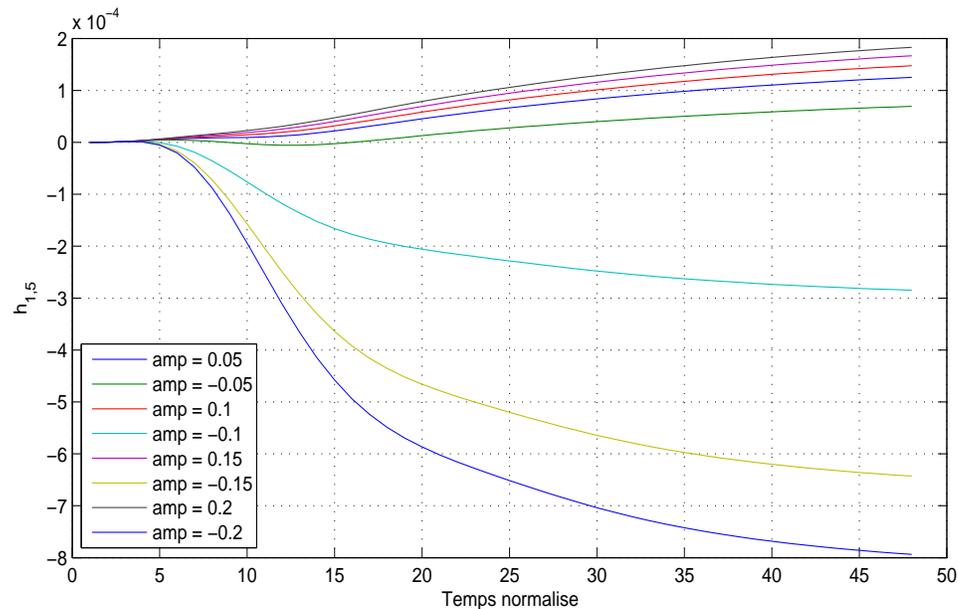


Figure 3.10 – Réponse indicielle normalisée de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de débit de recyclage interne q_a

été identifiées. Sachant que, dans le cas d'un système linéaire, l'amplitude de l'entrée n'a aucune influence sur les coefficients de la réponse indicielle, ce qui n'était pas notre cas, nous avons montré que la station d'épuration d'eaux usées constitue un système fortement non linéaire qui pose des problèmes certains de représentation par un modèle simplifié et ensuite probablement par conséquent sur la performance de la commande prédictive et sa robustesse lorsqu'elle sera appliquée sur le procédé non linéaire.

L'ensemble des résultats obtenus a été rassemblé dans l'annexe A. On pourra y constater que dans l'ensemble les constantes de temps peuvent être considérées comme fixes, mais que les gains sont fortement influencés par l'amplitude de l'échelon d'entrée.

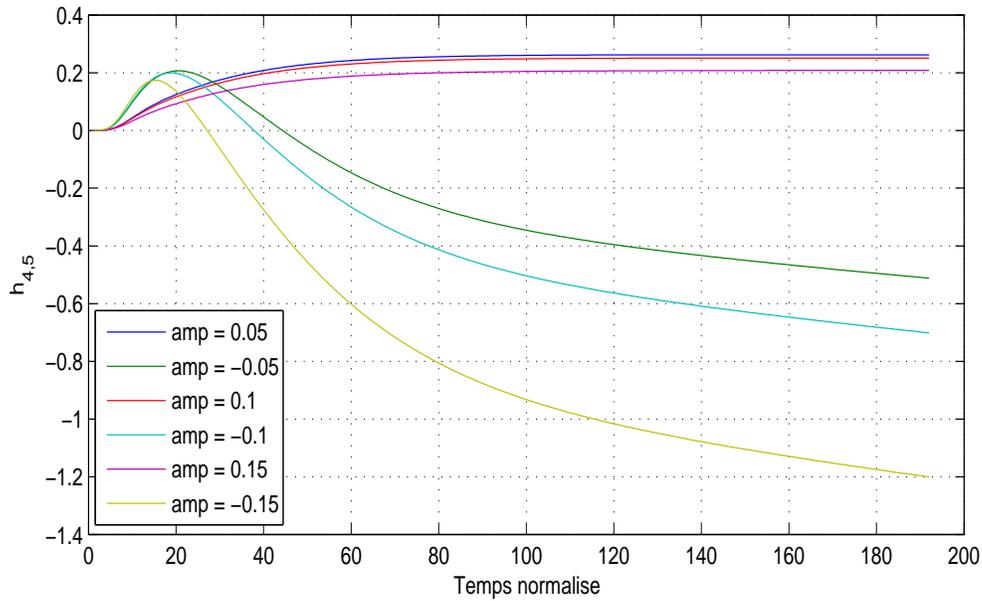


Figure 3.11 – Réponse indicielle normalisée de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de coefficient de transfert de matière dans le 3ème réacteur kla_3

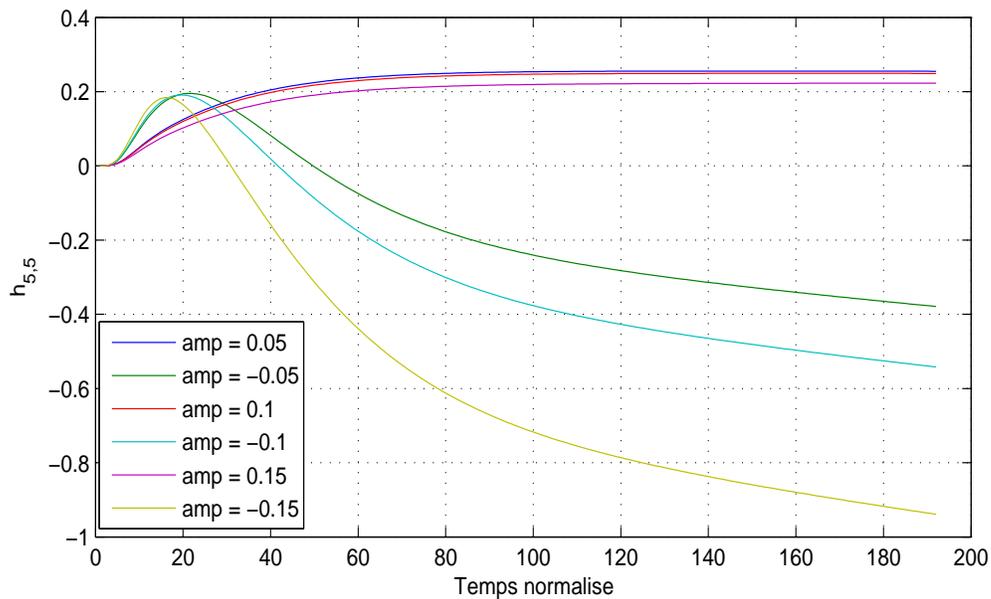


Figure 3.12 – Réponse indicielle normalisée de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de coefficient de transfert de matière dans le 4ème réacteur kla_4

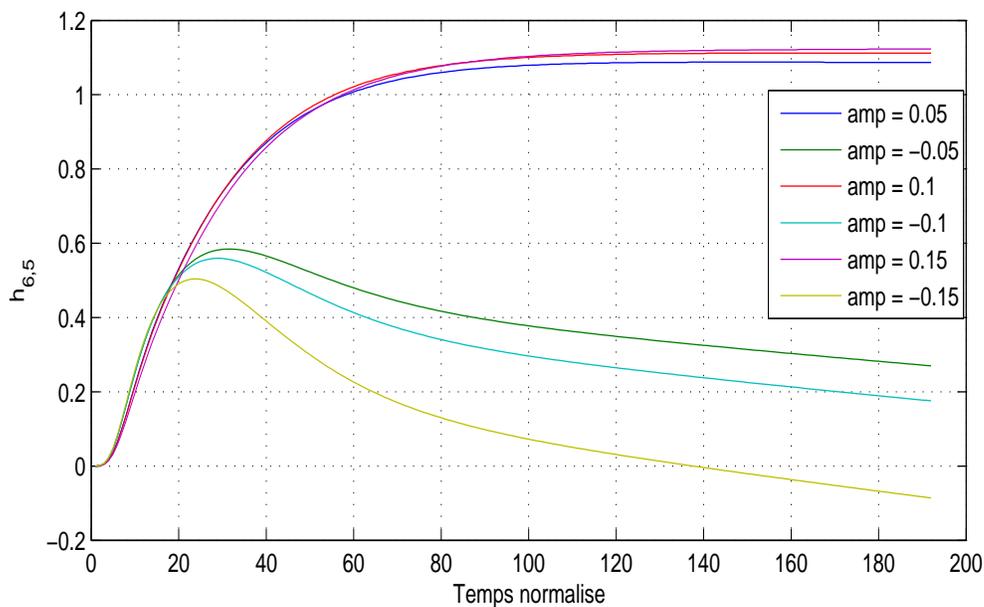


Figure 3.13 – Réponse indicielle normalisée de l’azote total $[N]_{tot}$ à des variations de coefficient de transfert de matière dans le 5ème réacteur kla_5

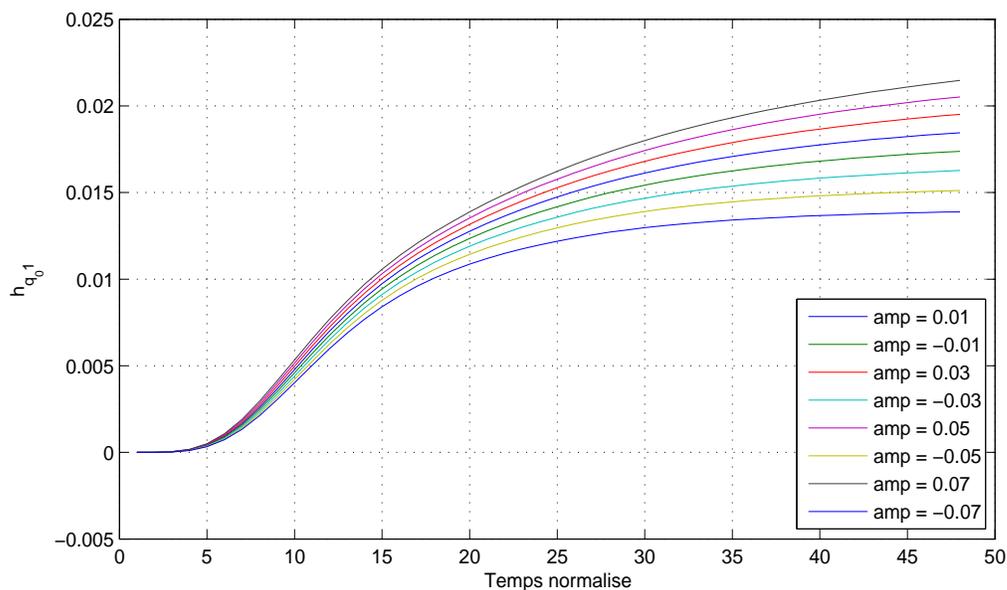


Figure 3.14 – Variations des réponses indicielles normalisées de la concentration d’ammonium $[NH]$ en fonction de l’amplitude de la variation de q_0 .

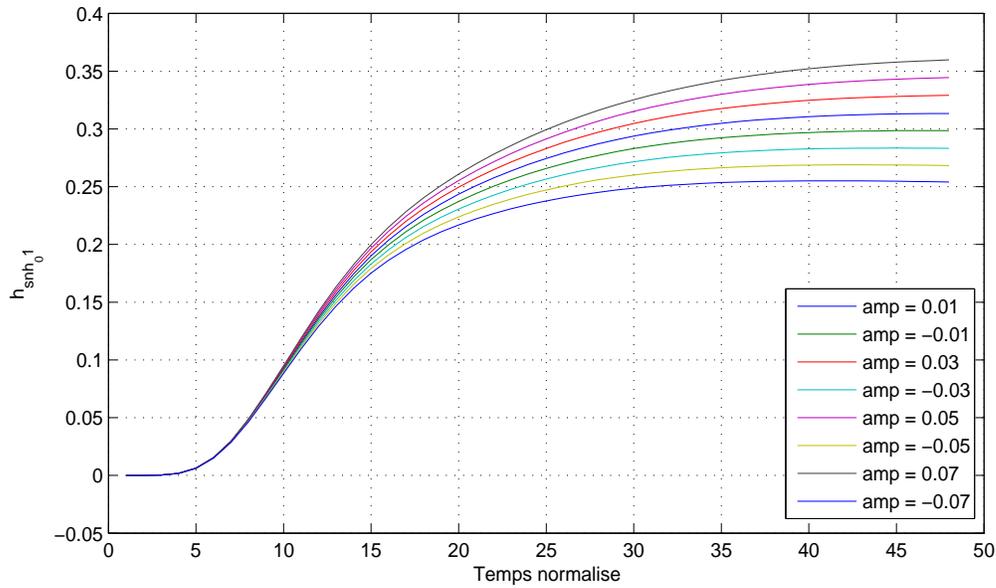


Figure 3.15 – Variations des réponses indicielles normalisées de la concentration d'ammonium $[NH]$ en fonction de l'amplitude de la variation de $[NH]_0$.

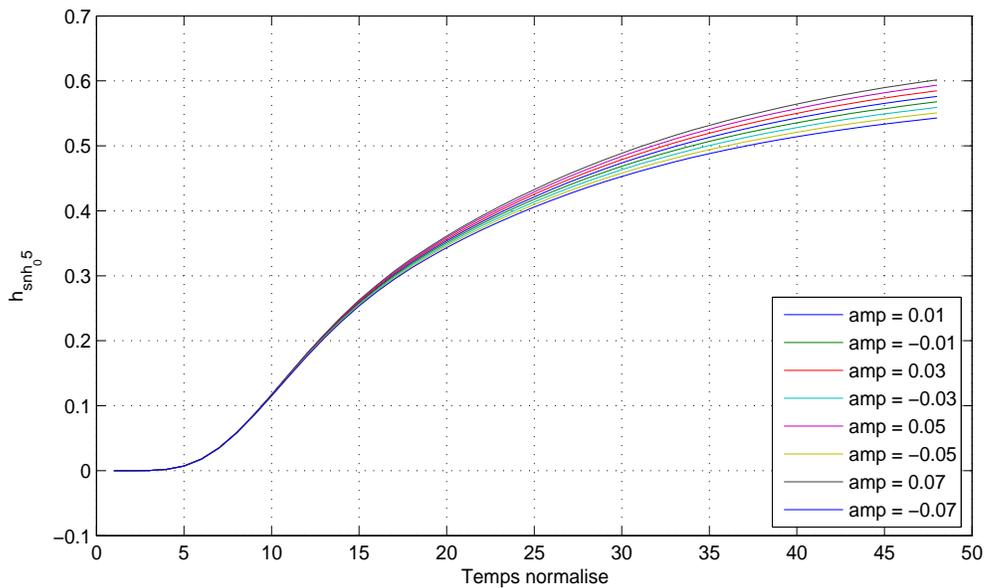


Figure 3.16 – Variations des réponses indicielles normalisées de la concentration d'ammonium $[N]_{\text{tot}}$ en fonction de l'amplitude de la variation de $[NH]_0$.

Chapitre 4

Commande prédictive

4.1 Résumé

Dans ce chapitre, nous décrivons la méthodologie de la commande prédictive dans l'espace d'état. Cette commande est traitée comme un problème d'optimisation d'une fonction de coût ou critère par rapport aux entrées manipulées ou à leurs variations. Nous présentons aussi la commande par anticipation (feedforward) dans le cas de présence des perturbations mesurables. Une étude comparative des caractéristiques les plus importantes pourra être ajoutée à ce chapitre pour présenter les principales méthodes de commande prédictive comme DMC (Dynamic Matrix Control), GPC (Generalized Predictive Control) et PFC (Predictive Functional Control) ... Un programme général de commande prédictive dans l'espace d'état a été développé sous Fortran. Ce programme permet de choisir entre deux cas d'anticipation et de non-anticipation de la consigne.

4.2 Introduction

Le but principal de la commande des systèmes est de satisfaire les objectifs définis par le cahier des charges, de la manière la plus performante possible. Il s'agit par exemple de contrôler certains signaux (de sortie) par actions sur d'autres signaux (d'entrée) de manière à satisfaire les objectifs en présence d'incertitudes et changements des caractéristiques du processus (modèle) et de contraintes sur les variables opérationnelles. Il s'agit là d'un problème pratique, car bien des processus réels présentent ces caractéristiques.

Les actionneurs ont souvent un champ limité d'opération (position totalement ouverte ou fermée). Des considérations de sécurité, d'environnement ou de limitations des capteurs, des limites sur les variables des processus, (e.g. des niveaux, des flux, des températures et des pressions) entrent en compte. Tout ceci rend nécessaire de considérer des contraintes dans l'étape de conception et d'implantation du contrôleur pour obtenir une meilleure performance du système.

Les techniques de commande prédictive (MPC) (Model Predictive Control) constituent des outils puissants pour affronter le problème de commande avec contraintes. La commande prédictive peut être employée pour contrôler une grande variété de processus, des systèmes avec un comportement relativement simple aussi bien que d'autres qui présentent un comportement dynamique peu habituel comme ceux avec de grands retards, oscillant fortement, de phase non minimale ou instables. Également, les systèmes multivariables et non linéaires rentrent dans le domaine d'application d'une telle approche. Elle possède aussi la compensation par anticipation (Feedforward) de perturbations mesurables.

Malgré tous ses avantages, la commande prédictive possède quelques inconvénients. L'un d'eux est la charge nécessairement élevée de calcul : la résolution des algorithmes numériques en ligne nécessite un volume et un temps de calcul, toutefois de moins en moins notables en raison des progrès considérables des ordinateurs. Un autre inconvénient est dû au fait qu'il est nécessaire d'avoir un modèle approprié du processus. L'approche de la commande prédictive est basée sur la connaissance d'un modèle et donc les performances obtenues dépendront des écarts existants entre le vrai processus et le modèle utilisé.

La MPC est une méthodologie développée autour de certaines idées communes. Les principes qui apparaissent dans toutes les classes de la commande prédictive sont les suivants :

- Utilisation du modèle du système pour prévoir la sortie du système à des instants futurs.
- Calcul des actions optimales de commande basé sur la minimisation d'une ou plusieurs fonctions de coût en tenant compte de contraintes sur les variables du processus.
- Stratégie de l'horizon mobile : à chaque itération et en se servant d'un modèle du processus, des consignes futures sur un certain horizon, d'une fonction objectif, les futurs changements de la commande sont calculés en prenant en compte des contraintes qui agissent sur le processus. Finalement, seul le premier signal de commande est appliqué au système, le reste est non utilisé et l'horizon déplacé vers le futur, puis les calculs sont répétés pour la période d'échantillonnage suivante.

4.3 Historique

Depuis la fin des années 70, de nombreuses catégories et dénominations de la commande prédictive ont été proposées. La liste ci-dessous propose un aperçu non exhaustif des plus connues :

- MPHC (Model Predictive Heuristic Control) (Richalet et al., 1978), connue ensuite sous le nom de MAC (Model Algorithmic Control). Cette approche, appliquée aux systèmes industriels multivariables, basée sur des prédictions sur un horizon temporel long, impose des trajectoires de référence pour les sorties et minimise la variance de l'erreur ;

- DMC (Dynamic Matrix Control) proposée par Shell (Cutler and Ramaker, 1979) utilise l'incrément de commande à la place de la commande dans le critère de performance pour un horizon fini de prédiction ; cet algorithme est appliqué aux systèmes multivariables linéaires sans contraintes ; l'erreur de poursuite est minimisée en spécifiant le comportement futur des sorties ; les commandes optimales sont calculées par la méthode des moindres carrés ;
- EHAC (Extended Horizon Adaptive Control) (Ydstie, 1984), stratégie de commande prédictive pour les systèmes monovariables, utilise des modèles E/S pour maintenir la sortie future (calculée via la résolution d'une équation diophantienne) le plus près possible de la consigne pendant une période donnée au-delà du retard pur du système ;
- EPSAC (Extended Prediction Self-Adapted Control) (Keyser et al., 1988) introduit une commande constante pour un système non linéaire (en linéarisant le système) et utilise un prédicteur sous-optimal à la place de la résolution de l'équation diophantienne ; l'article [KC85] fournit également une démonstration de stabilité ;
- GPC (Generalized Predictive Control) présentée par (Clarke et al., 1987). Cette méthode la plus connue, basée sur un modèle de type CARIMA, introduit un horizon de prédiction sur la commande, agit conformément au principe de l'horizon fuyant et peut être appliquée aux systèmes à non minimum de phase, aux systèmes instables en boucle ouverte, aux systèmes avec retards purs variables ;
- PFC (Predictive Functional Control) (Richalet et al., 1987) est un algorithme prédictif simple, utilisé surtout pour des systèmes SISO industriels rapides et/ou non linéaires, s'avérant pratique pour l'ingénieur en permettant le réglage direct des paramètres (par exemple la constante de temps) associées au temps de montée ; pour garder la simplicité, un manque de rigueur en performance et surtout dans la garantie des contraintes est associée avec cet algorithme ;
- CRHPC (Constrained Receding Horizon Predictive Control) (Clarke, 1994) propose de prendre en compte des contraintes terminales sous forme d'égalité sur la sortie sur un horizon fini au-delà de l'horizon de prédiction ;
- MPC (Model Predictive Control) formulée dans l'espace d'état par (Lunström et al., 1995) utilise le formalisme de la représentation d'état pour faciliter l'analyse de la stabilité et de la robustesse ;

En fait, toutes ces variantes de stratégies de commande prédictive sont aujourd'hui regroupées sous le terme générique MPC, illustrant ainsi le rôle fondamental du modèle. Ce bref rappel historique a permis de donner une idée de l'évolution de la commande prédictive, depuis les stratégies classiques bien connues maintenant jusqu'aux développements les plus récents en termes de robustesse et d'application à des systèmes non linéaires. En fait, seule la commande MPC sous forme de représentation d'état sera examinée dans ce chapitre.

4.4 Méthodologie de la commande prédictive

La philosophie de la commande prédictive (MPC pour Model Predictive Control) se résume à utiliser le modèle pour prédire le comportement du système et choisir la meilleure décision au sens d'un certain coût tout en respectant les contraintes. La commande prédictive calcule une variable manipulée $u(t)$ (la commande) sur un horizon de commande telle que la variable régulée $y(t)$ (la sortie) suive sur un horizon de prédiction une trajectoire $r(t)$, dite de référence. Cette trajectoire, initialisée sur la mesure actuelle de la variable régulée, tend vers la consigne $s(t)$ (constante ou variable), d'une façon prédéfinie (Camacho and Bordons, 1995). Soit ϵ l'écart entre la consigne $s(t)$ et la sortie mesurée

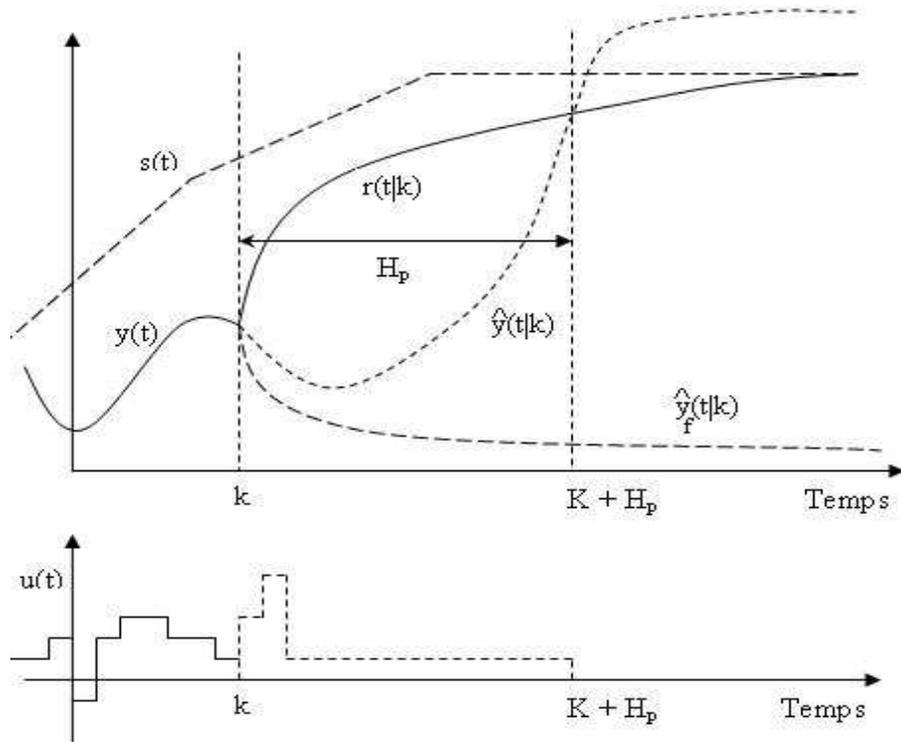


Figure 4.1 – Principe de base de la commande prédictive.

$y(t)$:

$$\epsilon(k) = s(k) - y(k) \quad (4.1)$$

La trajectoire de référence est choisie de forme exponentielle, le décrement de l'écart $\epsilon(k)$ entre la consigne $s(t)$ et la sortie $y(t)$ est donné par :

$$\epsilon(k+i) = e^{-iT_s/T_{ref}} \epsilon(k) = \lambda^i \epsilon(k) \quad (4.2)$$

avec $\lambda = e^{-T_s/T_{ref}}$, T_{ref} représente la constante de temps de la trajectoire de référence et T_s

est la période d'échantillonnage. La trajectoire de référence est définie par :

$$r(k+i|k) = s(k+i) - \epsilon(k+i) = s(k+i) - e^{-iT_s/T_{ref}} \epsilon(k) \quad (4.3)$$

La commande u doit être calculée pour que la sortie y soit la plus proche possible de la trajectoire de référence (Corriou, 1996), (Maciejowski, 2002). Pour avoir un seul point de coïncidence entre la sortie y et la trajectoire de référence à l'instant $k + H_p$ (H_p horizon de prédiction), c'est-à-dire $y(k+i|k) = r(k+H_p)$, plusieurs variables manipulées $\hat{u}(k|k), \hat{u}(k+1|k), \hat{u}(k+2|k), \dots, \hat{u}(k+H_p-1|k)$ doivent être déterminées. $\hat{u}(k+i|k)$ est l'estimation de la valeur de $u(k+i)$ à l'instant k . Dans la figure 4.1, l'horizon de commande est égal à 3, d'où le calcul correspondant de $\hat{u}(k|k), \dots, \hat{u}(k+H_c-1|k)$ (H_c horizon de commande), où $\hat{u}(k+H_c|k) = \dots = \hat{u}(k+H_p-1|k)$, ce qui signifie que les variations de l'entrée sont nulles aux instants supérieurs ou égal à l'horizon de commande. Seul, le premier élément $u(k)$ du vecteur du signal de commande optimale $\{u(k+i|k), i = 0, 1, \dots, H_c - 1\}$ est appliqué au système et le reste est non utilisé car, à l'instant suivant, la nouvelle sortie $y(k+1)$ est disponible et, par conséquent, l'étape 1 est répétée. Ceci est connu comme le concept de l'horizon glissant.

4.5 Éléments de la commande prédictive

Dans la figure 4.2, on montre la structure commune à toutes les stratégies de commande prédictive.

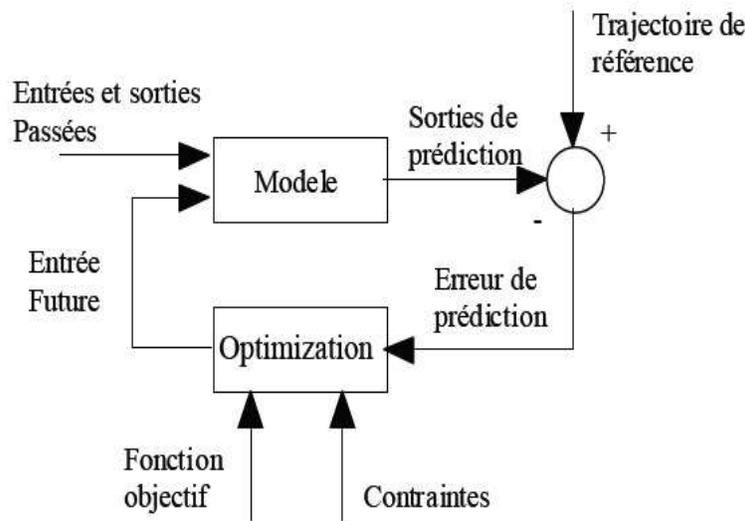


Figure 4.2 – Le schéma fonctionnel de la structure de base des algorithmes MPC.

Tous les algorithmes MPC ont :

- Un modèle de prédiction
- Une fonction objectif pour calculer la stratégie optimale de commande.

Les différences entre les algorithmes MPC portent sur le type de la fonction objectif, le traitement de l'erreur de prédiction et le modèle de prédiction.

- Le modèle de prédiction ou modèle de commande intervient directement dans la stratégie de commande prédictive. Il traduit l'évolution prévisible du comportement du procédé en fonction des entrées appliquées. L'établissement du modèle peut se faire à partir d'un ensemble de couples entrées-sorties. Il s'agit de choisir une représentation (Fonction de Transfert, Réponse Impulsionnelle, Réponse Indicielle, Espace des états ...) de la sortie en fonction de l'entrée et d'effectuer une identification des paramètres du modèle. Fréquemment, le modèle dynamique obtenu est donc purement mathématique et a priori n'a aucune signification physique. Cette méthode devient plus difficile à mettre en oeuvre dans le cas des systèmes multivariables ou de fortes non-linéarités. Il existe une autre méthode pour établir un modèle de prédiction en prenant en compte des phénomènes physiques, chimiques, biologiques, etc., du procédé à partir des bilans de matière, d'énergie, de population, etc. Cette modélisation donne lieu à des équations dynamiques, souvent non linéaires. Cette approche permet d'arriver à une représentation plus proche de la réalité. La complexité de cette méthode réside dans la difficulté de simuler le comportement du procédés et de l'analyser formellement.
- La sélection du modèle à utiliser pour représenter les perturbations affectant le système est aussi importante que la sélection du modèle du processus. En commande prédictive généralisée monovariable, le modèle utilisé est le modèle auto-régressif de moyenne mobile avec intégrateur ARIMAX (Auto-Regressive Integrated Moving Average eXogeneous input), où les perturbations qui sont la différence entre la sortie mesurée et la sortie calculée, sont prises en compte dans le modèle (Clarke et al., 1987) :

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta(z^{-1})}e(k) \quad (4.4)$$

où $B(z^{-1})/A(z^{-1})$ est la fonction de transfert du système, le polynôme $C(z^{-1})$ influe sur le bruit, le polynôme $\Delta(z^{-1})$ est un intégrateur et $e(k)$ est un bruit blanc de moyenne nulle. Il est important de noter que l'inclusion de l'intégrateur élimine l'erreur stationnaire. Le filtre $C(z^{-1})/\Delta(z^{-1})$ peut également être choisi pour éliminer les perturbations de fréquence définie (Eaton and Rawlings, 1992; Froisy, 1994).

- Le problème d'optimisation se traduit mathématiquement par une certaine fonction V . Le plus souvent, il s'agit de minimiser ou de maximiser cette fonction (appelée critère de performance ou fonction de coût). Ce critère est défini comme la somme pondérée d'un terme portant sur les carrés des erreurs de prédiction (terme de performance) et d'un terme portant sur les carrés des incréments de commande

(terme d'énergie) (Garcia et al., 1989; Maciejowski, 2002) :

$$V(N_1, H_p, H_c) = \sum_{i=N_1}^{H_p} [\hat{y}(k+i|k) - w(k+i|k)]^2 + \sum_{i=1}^{H_c} \lambda(i) [\Delta u(k+i-1|k)]^2 \quad (4.5)$$

$\hat{y}(k+i|k)$ est la prédiction de la sortie à l'instant k ($1 \leq k \leq H_p$) en supposant que la sortie $y(k)$ est mesurée. Dans les processus avec un retard égal à d , la valeur de N_1 est différente de 1 et est égale à d . H_p est l'horizon de prédiction. H_c est l'horizon de la commande. λ sont des poids portant sur la variation de la commande.

L'objectif de l'optimisation est de calculer la séquence : $\{\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+H_c-1)\}$, avec $\Delta u(k+j) = 0$, $j \geq H_c$, qui minimise le critère V éventuellement soumis à des contraintes portant sur les entrées, les variations des entrées et les sorties.

4.6 Commande prédictive dans l'espace d'état

4.6.1 En absence de contraintes

Un système est défini dans l'espace d'état sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ z(k) &= C_z x(k) \\ y(k) &= C_y x(k) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le vecteur x est appelé état du système. Le vecteur u est l'entrée (ou commande) du système. Les vecteurs z et y sont respectivement la mesure effective et la sortie du système. Les matrices A , B , C_z et C_y sont appelées matrices d'évolution, de commande et d'observation.

Soit H_c et H_p respectivement les horizons de commande et de prédiction. En appliquant des itérations sur notre système, on obtient les équations de prédiction suivantes (Maciejowski, 2002) :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k) &= Ax(k) + B\hat{u}(k|k) \\ \hat{x}(k+2|k) &= A\hat{x}(k+1) + B\hat{u}(k+1|k) \\ &= A^2x(k) + AB\hat{u}(k|k) + B\hat{u}(k+1|k) \\ &\vdots \\ \hat{x}(k+H_p|k) &= A\hat{x}(k+H_p-1) + B\hat{u}(k+H_p-1|k) \\ &= A^{H_p}x(k) + A^{H_p-1}B\hat{u}(k|k) + \dots + B\hat{u}(k+H_p-1|k) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$\hat{x}(k+i|k)$ est l'estimation de la valeur de $x(k+i)$ à l'instant k . On suppose, en accord avec (Maciejowski, 2002), que, à l'instant k , $u(k-1)$ est connue et la mesure $x(k)$ est

effectuée, $u(k)$ n'est pas connue. On peut alors parler de la prédiction de l'état $\hat{x}(k+1|k)$ (prédiction de $x(k+1)$ supposant que $x(k)$ est connue à l'instant k) et utiliser la notation $\hat{u}(k|k)$. Les commandes futures $\hat{u}(k+i|k)$ sont bien sûr notées de la même manière.

Par contre, l'horizon de la commande étant égal à H_c , ceci implique que :

$$\hat{u}(k+i|k) = \hat{u}(k+H_u-1|k) \quad \text{pour } H_u \leq i \leq H_p-1 \quad (4.8)$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \hat{u}(k|k) &= \Delta\hat{u}(k|k) + u(k-1) \\ \hat{u}(k+1|k) &= \Delta\hat{u}(k+1|k) + \Delta\hat{u}(k|k) + u(k-1) \\ &\vdots \\ \hat{u}(k+H_c-1|k) &= \Delta\hat{u}(k+H_c-1|k) + \dots + \Delta\hat{u}(k|k) + u(k-1) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Les équations de prédiction deviennent sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k) &= Ax(k) + B[\Delta\hat{u}(k|k) + u(k-1)] \\ \hat{x}(k+2|k) &= A^2x(k) + AB[\Delta\hat{u}(k|k) + u(k-1)] \\ &\quad B[\Delta\hat{u}(k+1|k) + \Delta\hat{u}(k|k) + u(k-1)] \\ &= A^2x(k) + (A+I)B\Delta\hat{u}(k|k) + B\Delta\hat{u}(k+1|k) + (A+I)Bu(k-1) \\ &\vdots \\ \hat{x}(k+H_c|k) &= A^{H_c}x(k) + (A^{H_c-1} + \dots + A + I)B\Delta\hat{u}(k|k) + \dots \\ &\quad + B\Delta\hat{u}(k+H_c-1|k) + (A^{H_c-1} + \dots + A + I)Bu(k-1) \end{aligned}$$

Pour $i > H_c$

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+H_c+1|k) &= A^{H_c+1}x(k) + (A^{H_c} + \dots + A + I)B\Delta\hat{u}(k|k) + \dots \\ &\quad + (A+I)B\Delta\hat{u}(k+H_c-1|k) + (A^{H_c} + \dots + A + I)Bu(k-1) \\ &\vdots \\ \hat{x}(k+H_p|k) &= A^{H_p}x(k) + (A^{H_p-1} + \dots + A + I)B\Delta\hat{u}(k|k) \\ &\quad + \dots + (A^{H_p-H_c} + \dots + A + I)B\Delta\hat{u}(k+H_c-1|k) \\ &\quad + (A^{H_p-1} + \dots + A + I)Bu(k-1) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Le système peut alors s'écrire sous la forme vectorielle-matricielle :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_c|k) \\ \hat{x}(k+H_c+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ A^{H_c} \\ A^{H_c+1} \\ \vdots \\ A^{H_p} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_c-1} A^i B \\ \sum_{i=0}^{H_c} A^i B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B \end{bmatrix} u(k-1)}_{\text{passé}} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} B & \dots & 0 \\ AB + B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_c-1} A^i B & \dots & B \\ \sum_{i=0}^{H_c} A^i B & \dots & AB + B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B & \dots & \sum_{i=0}^{H_p-H_c} A^i B \end{bmatrix}}_{\text{futur}} \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k + H_c - 1|k) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \hat{z}(k + 1|k) \\ \vdots \\ \hat{z}(k + H_p|k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_z & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k + 1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k + H_p|k) \end{bmatrix} \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

A l'instant k , la mesure $z(k)$ est connue.

Si on introduit l'équation (4.11) dans l'équation (4.12), on obtient l'équation matricielle suivante :

$$Z(k) = \Psi x(k) + \Upsilon u(k-1) + \Theta \Delta U(k) \quad (4.13)$$

Pour calculer la commande, on doit minimiser le critère suivant :

$$V(k) = \|Z(k) - \Gamma(k)\|_Q^2 + \|\Delta U(k)\|_R^2 \quad (4.14)$$

Q et R sont des matrices symétriques définies positives et $\Gamma(k)$ est la matrice des références. En remplaçant chaque matrice par son équation matricielle dans le critère (4.14), on obtient la forme suivante :

$$V(k) = -\Delta U(k)^T G + \Delta U(k)^T H \Delta U(k) \quad (4.15)$$

où $H = \Theta^T Q \Theta + R$ et $G = 2\Theta^T Q \epsilon(k)$, tel que :

$$\epsilon(k) = \Gamma(k) - \Psi x(k) - \Upsilon u(k-1) \quad (4.16)$$

En absence de contraintes, le minimum de V correspond au gradient nul de $V(k)$ par rapport à $\Delta U(k)$. On calcule le gradient de $V(k)$ pour trouver $\Delta U(k)$ optimal :

$$\nabla_{\Delta U(k)} V = -G + 2H \Delta U(k) \quad (4.17)$$

$$\nabla_{\Delta U(k)} V = 0 \longrightarrow \Delta U(k)_{opt} = \frac{1}{2} H^{-1} G \quad (4.18)$$

La figure 4.3 représente l'ensemble des concepts utilisés dans les équations de la commande prédictive sans contraintes.

Soit ℓ , m et n respectivement les nombres d'entrées, de sorties et d'états du système (Table 4.1).

Afin de montrer les caractéristiques et l'efficacité de la commande prédictive, nous considérons maintenant un certain nombre d'exemples.

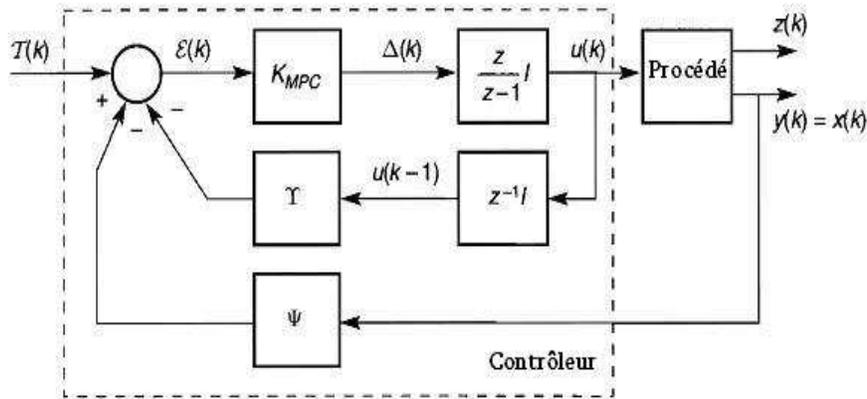


Figure 4.3 – Structure générale de la commande prédictive (Sans Contraintes).

Matrices	Dimensions
Q	$m.H_p \times m.H_p$
R	$l.H_c \times l.H_c$
Ψ	$m.H_p \times n$
Υ	$m.H_p \times l$
Θ	$m.H_p \times l.H_c$
ϵ	$m.H_p \times 1$
G	$l.H_c \times 1$
H	$l.H_c \times l.H_c$

Tableau 4.1 – Dimensions des matrices de la commande prédictive

Exemple 1

Cette partie propose l'application de la commande prédictive sous forme d'état à un système multivariable. Il s'agit d'un exemple académique (Camacho and Bordons, 1998) d'un réacteur simplifié (Figure 4.4) que l'on retrouvera par ailleurs tout au long de ce chapitre pour illustrer les résultats théoriques présentés.

Le système est donné par sa matrice de transfert multivariable :

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+0.7s} & \frac{5}{1+0.3s} \\ \frac{1}{1+0.5s} & \frac{2}{1+0.4s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

où les états x_i sont respectivement, x_1 concentration d'un composé dans le réacteur, x_2 température de la double enveloppe, x_3 température du réacteur et x_4 volume du réacteur. Les entrées manipulées sont le débit d'alimentation U_1 et le débit de refroidissement U_2 ,

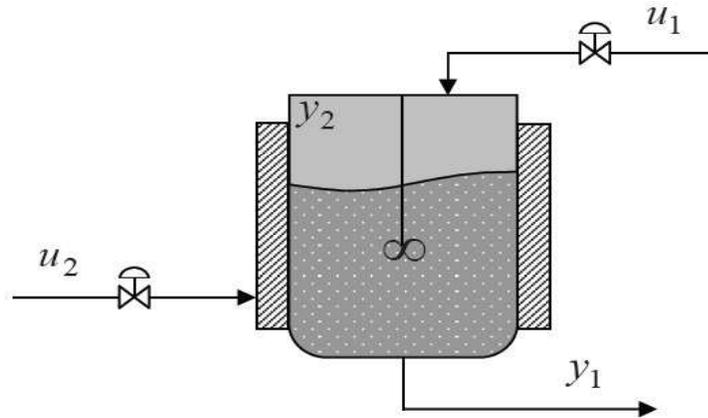


Figure 4.4 – Schéma du réacteur.

et les sorties, la concentration du composé Y_1 et la température Y_2 . Les mesures sont notées z_i . Ce système est discrétisé avec une période d'échantillonnage T_e égale à 0.05s et transformé ensuite sous la forme de représentation d'état S_1 ¹ suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(k) \\ z(k) &= C_z \mathbf{x}(k) \\ y(k) &= C_y \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$\ell = 2$; $m = 2$; $n = 4$. Les matrices du système linéaire dans l'espace d'état sont :

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} 0.9311 & 0 & 0.049 & 0 \\ 0.099 & 0.8465 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0.2 & 0.0948 & 0 \\ 0.0149 & 0 & 0 & 0.08825 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_z = \mathbf{C}_y = \begin{pmatrix} 0.0689 & 0.7676 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0952 & 0.2350 \end{pmatrix}$$

Les horizons de prédiction H_p et de commande H_c sont choisis respectivement égaux à 25 et 3. Les consignes prennent les valeurs 0.8 et 0.4 au début de la simulation, ces valeurs changent durant la simulation en passant de 0.8 à 0.6 à $t = 20$ s jusqu'à 40s et de 0.4 à 0.6 à $t = 60$ s jusqu'à 80s. En absence de contraintes, les sorties Y_1 et Y_2 rejoignent leurs consignes très vite. La simulation en boucle fermée (Figure 4.5) montre que les commandes U_1 et U_2 varient respectivement dans les intervalles $[-0.3, 0.4]$ et $[-0.5, 0.3]$ en constatant que l'interaction (l'influence du changement d'une consigne d'une sortie sur l'autre sortie) entre les sorties est faible. D'après la figure 4.5, on constate que nous n'avons pas dans cet exemple une anticipation de la consigne car les sorties changent seulement après le changement des consignes, c'est-à-dire que la consigne n'est pas connue d'avance.

1. S_1 est un système commandable et observable.

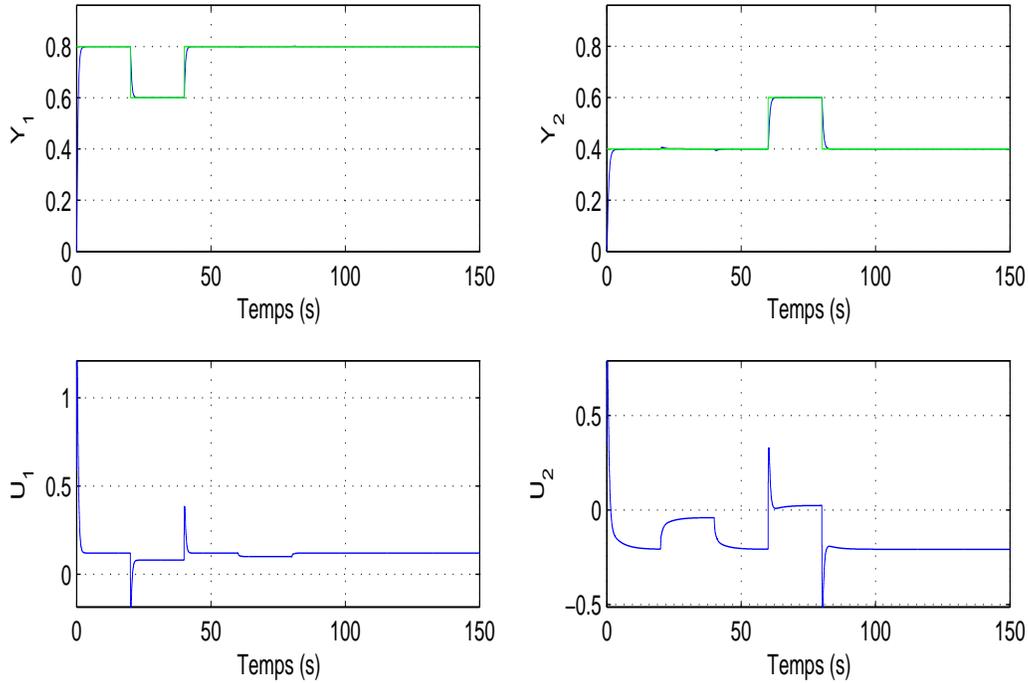


Figure 4.5 – Commande prédictive d'un système académique : Y_1 et Y_2 sont les sorties du système (haut), U_1 et U_2 sont les entrées (bas).

4.6.2 En présence de bruit (avec observateur d'état)

Dans le cas où certains états x_i du système ne sont pas mesurables, il est nécessaire d'estimer les états à l'aide d'un observateur (Figure 4.6). Les équations d'un observateur de type Luenberger sont (Luenberger, 1966) :

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + L[y(k) - \hat{y}(k|k-1)] \quad (4.21)$$

$$\hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k|k) + Bu(k) \quad (4.22)$$

$$\hat{y}(k|k-1) = C\hat{x}(k|k-1) \quad (4.23)$$

où L est la matrice de gain de Luenberger, définie par l'utilisateur. $y(k)$ est la mesure disponible à l'instant k .

Si on introduit les équations (4.21) et (4.23) dans l'équation (4.22), on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k) &= A(I - LC)\hat{x}(k|k-1) + Bu(k) + ALy(k) \\ &= (A - L_p C)\hat{x}(k|k-1) + Bu(k) + L_p y(k) \end{aligned} \quad (4.24)$$

avec $L_p = AL$.

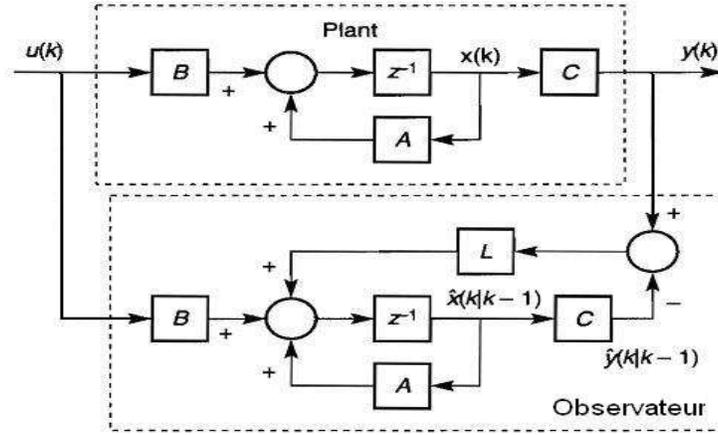


Figure 4.6 – Observateur d'état.

Ce système est stable lorsque toutes les valeurs propres de la matrice $A - L_p C$ se trouvent à l'intérieur du cercle unité. On considère que la sortie du système est soumise à un bruit qui est supposé être un bruit blanc. Dans ce cas, le système est défini sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_c x(k) + B_c u(k) \\ z(k) &= C_z x(k) \\ y(k) &= C_y x(k) + d(k) \end{aligned} \quad (4.25)$$

La dynamique du bruit s'écrit sous la forme suivante :

$$d(k+1) = d(k) + \epsilon(k) \quad (4.26)$$

où $d(k)$ et $\epsilon(k)$ sont des bruits blancs. La combinaison des équations du système et de la dynamique du bruit nous donne :

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ d(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \epsilon(k) \quad (4.27)$$

$$y(k) = [C \quad I] \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Les équations de l'observateur sont :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k|k) \\ \hat{d}(k|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}(k|k-1) \\ \hat{d}(k|k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ L_d \end{bmatrix} \left[y(k) - [C \quad I] \begin{bmatrix} \hat{x}(k|k-1) \\ \hat{d}(k|k-1) \end{bmatrix} \right] \quad (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \hat{d}(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k|k) \\ \hat{d}(k|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (4.30)$$

où $\tilde{L} = [L^T L_d^T]^T$ est le gain de l'observateur. En mettant (4.29) dans (4.30), on obtient l'équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \hat{d}(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k|k-1) \\ \hat{d}(k|k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (4.31)$$

$$+ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ L_d \end{bmatrix} \left[y(k) - [C \ I] \begin{bmatrix} \hat{x}(k|k-1) \\ \hat{d}(k|k-1) \end{bmatrix} \right]$$

Nous avons :

$$\hat{d}(k|k) = y(k) - C\hat{x}(k|k-1) \quad (4.32)$$

On suppose que les perturbations sont constantes, soit $\hat{d}(k+1|k) = \hat{d}(k|k)$ alors :

$$\hat{d}(k+1|k) = y(k) - C\hat{x}(k|k-1) \quad (4.33)$$

Pour $L_d = I$, l'observateur a la même forme que l'équation (4.31) (Luenberger, 1971). Par contre, si on suppose que $L = 0$, les équations de l'observateur (4.31) se réduisent à la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \hat{d}(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k|k-1) \\ \hat{d}(k|k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} y(k) \quad (4.34)$$

La structure du contrôleur sans contraintes et avec un observateur d'état est présentée dans la figure 4.7.

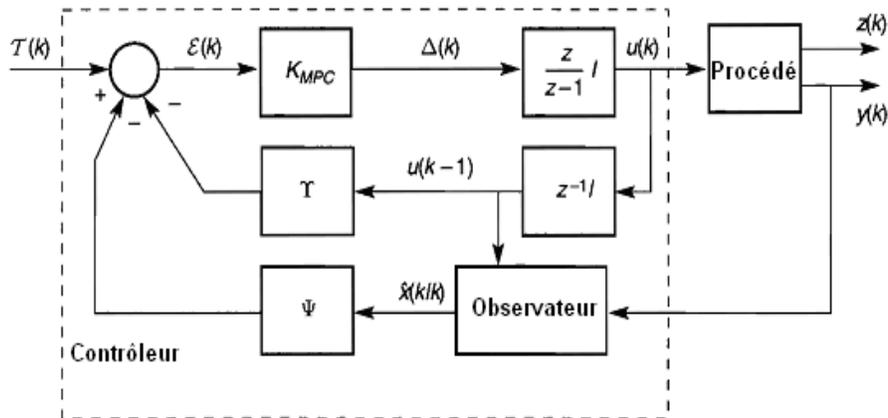


Figure 4.7 – Structure du contrôleur sans contraintes et avec observateur d'état.

Exemple 2, en présence de bruit

Nous avons considéré le même système que celui décrit dans l'exemple 1 avec un bruit gaussien de moyenne nulle, d'écart-type 0.2, sur les sorties. On constate que malgré ce bruit, les sorties suivent leurs consignes sans problème (Figure 4.8). En revanche, si on compare les allures de U_1 et U_2 dans cet exemple avec le précédent, on observe des fluctuations qui sont liées à la présence du bruit.

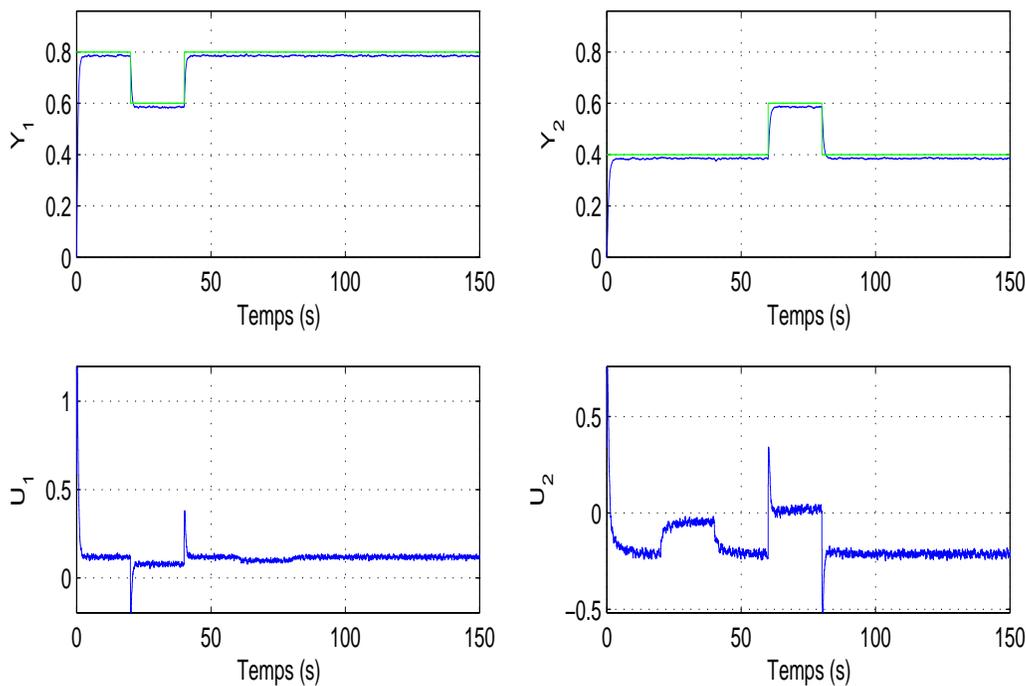


Figure 4.8 – Influence du bruit de mesure : Y_1 et Y_2 sont les sorties du système (haut), U_1 et U_2 sont les entrées (bas).

4.6.3 En présence de contraintes

En pratique, les entrées, les variations des entrées et les sorties sont souvent soumises à des contraintes de la forme suivante (Mayne et al., 2000) :

$$E \begin{bmatrix} \Delta U(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.35)$$

$$F \begin{bmatrix} U(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.36)$$

$$G \begin{bmatrix} Z(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.37)$$

Les inégalités (4.35), (4.36) et (4.37) doivent être remplacées par une seule inégalité dépendant seulement de $\Delta U(k)$ pour être cohérente avec le critère de minimisation (4.14) :

$$\Omega \Delta U(k) \leq \sigma \quad (4.38)$$

Dans l'inégalité (4.36), $U(k) = [\hat{u}(k|k)^T, \hat{u}(k+1|k)^T \dots \hat{u}(k+H_c-1|k)^T]^T$ et $F = [F_1, F_2 \dots F_{H_c} f]$, chaque F_i a la dimension $q \times m$ et f a la dimension $q \times 1$.

On peut écrire l'inégalité (4.36) sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{H_c} F_i \hat{u}(k+i-1|k) + f \leq 0 \quad (4.39)$$

avec $\hat{u}(k+i-1|k) = u(k-1) + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta \hat{u}(k+j|k)$. L'inégalité (4.39) devient :

$$\sum_{j=1}^{H_c} F_j \Delta \hat{u}(k|k) + \sum_{j=2}^{H_c} F_j \Delta \hat{u}(k+1|k) + \dots + F_{H_c} \Delta \hat{u}(k+H_c-1|k) + \sum_{j=1}^{H_c} F_j u(k-1) + f \leq 0 \quad (4.40)$$

On définit $M_i = \sum_{j=i}^{H_c} F_j$ avec $M = [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_{H_c}]$, l'inégalité (4.36) s'écrit sous la forme suivante :

$$M \Delta U(k) \leq -M_1 u(k-1) - f \quad (4.41)$$

En prenant l'inégalité (4.37) et en remplaçant $Z(k)$ par la forme (4.13), l'inégalité (4.37) devient :

$$G \begin{bmatrix} \Psi x(k) + \Upsilon u(k-1) + \Theta \Delta U(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.42)$$

Soit g la dernière colonne de la matrice G , avec :

$$G = [\Gamma \ g] \Rightarrow \Gamma [\Psi x(k) + \Upsilon u(k-1) + \Theta \Delta U(k)] + g \leq 0$$

Alors :

$$\Gamma \Theta \Delta U(k) \leq -\Gamma [\Psi x(k) + \Upsilon u(k-1)] - g \quad (4.43)$$

On pose w égal à la dernière colonne de la matrice E dans l'inégalité (4.35), $E = [W \ w]$. L'inégalité (4.35) s'écrit sous la forme :

$$W \Delta U(k) \leq w \quad (4.44)$$

On remplace les inégalités (4.41), (4.43) et (4.44) par une seule inégalité :

$$\begin{bmatrix} M \\ \Gamma \Theta \\ W \end{bmatrix} \Delta U(k) \leq \begin{bmatrix} -M_1 u(k-1) - f \\ -\Gamma [\Psi x(k) + \Upsilon u(k-1)] - g \\ w \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

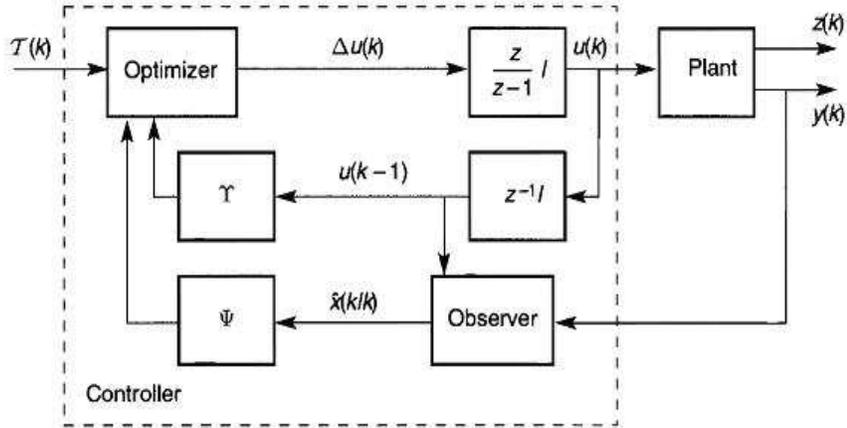


Figure 4.9 – Structure générale de la commande prédictive (avec contraintes).

Exemple 3, en présence de contraintes

On considère le même système que dans l'exemple 1 en appliquant des contraintes sur l'entrée u_1 et la sortie y_2 :

$$0.08 \leq u_1 \leq 0.15$$

$$0 \leq y_2 \leq 0.5$$

D'après la figure 4.10, on constate que l'entrée U_1 et la sortie Y_2 respectent les contraintes posées au début de la simulation. On peut remarquer que la contrainte proposée sur U_1 a une influence sur le comportement du système. La deuxième contrainte a empêché la sortie Y_2 de rejoindre sa consigne qui vaut 0.6 lorsque le temps varie de 60s à 80s.

4.6.4 En présence de perturbations mesurées (FeedForward)

L'idée de la commande par anticipation (Feedforward) est de mesurer les perturbations et de prendre une décision avant que les perturbations aient un effet sur le procédé (Figure 4.11).

En cas de présence de perturbations d mesurées, le système devient :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Dd(k) \\ z(k) &= Cx(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (4.46)$$

où la matrice D d'influence des perturbations sur l'état est connue.

Soit la variation $\Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$. En introduisant $\Delta x(k)$ dans le système, le système prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \Delta x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} \Delta u(k) + \begin{bmatrix} D \\ CD \end{bmatrix} \Delta d(k) \quad (4.47)$$

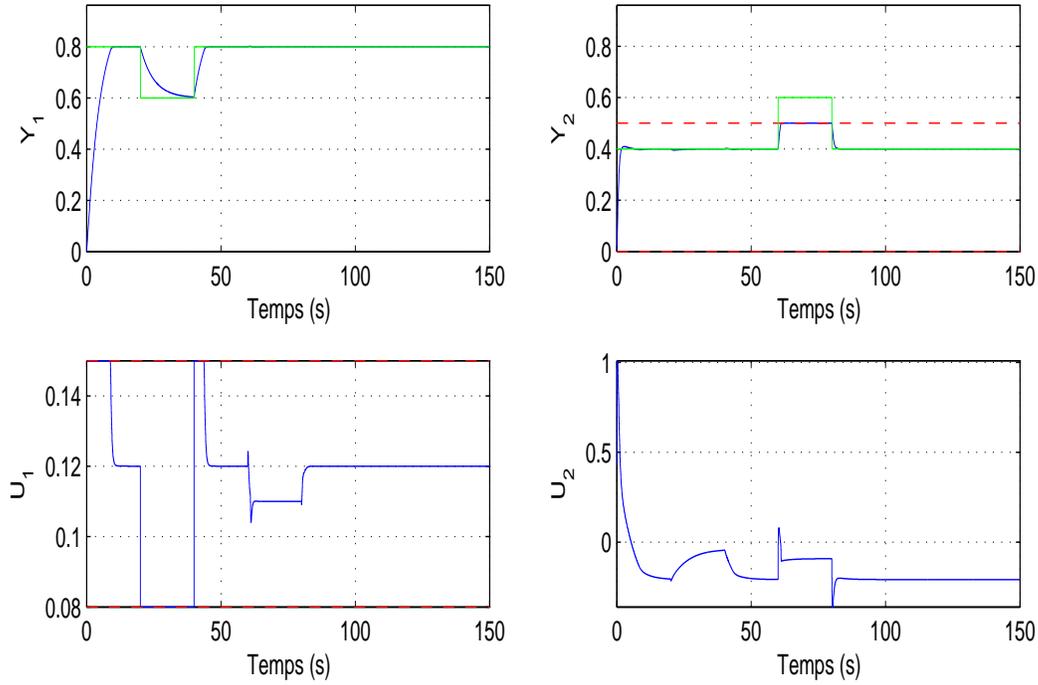


Figure 4.10 – Etude en présence de contraintes (en pointillés rouge), Y_1 et Y_2 sont les sorties du système (haut), U_1 et U_2 sont les entrées (bas).

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$z(k) = y(k) \quad (4.49)$$

En notant : $\bar{x} = \begin{bmatrix} \Delta x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix}$ $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix}$ $\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix}$

$\bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ CD \end{bmatrix}$ et $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$

le système s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}\Delta u(k) + \bar{D}\Delta d(k) \\ y(k) &= \bar{C}\bar{x}(k) \\ z(k) &= y(k) \end{aligned} \quad (4.50)$$

On définit $U(k)$ et $Y(k)$ sous les formes suivantes :

$$U(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ \vdots \\ u(k+H_c-1) \end{bmatrix} \text{ et } Y(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ \vdots \\ y(k+H_p-1) \end{bmatrix}$$

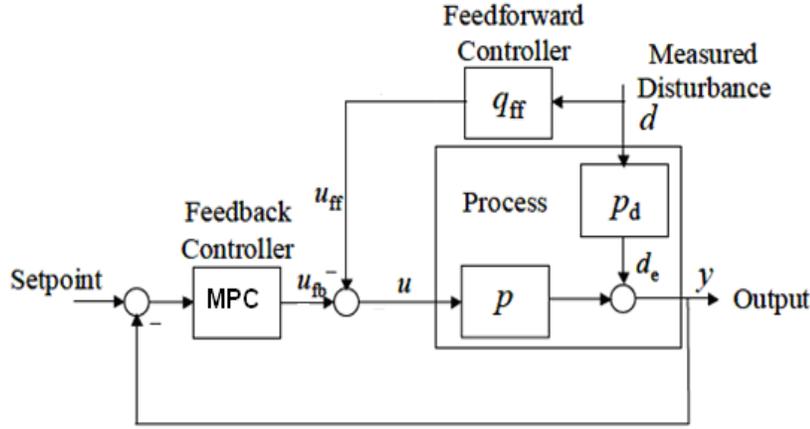


Figure 4.11 – Principe général de la commande Feedforward.

De manière semblable :

$$\hat{Y}(k+1|k) = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+H_p|k) \end{bmatrix}$$

On trouve :

$$\hat{Y}(k+1|k) = \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{A} \\ \bar{C}\bar{A}^2 \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^p \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{B} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{C}\bar{A}\bar{B} & \bar{C}\bar{B} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{p-1}\bar{B} & \dots & \dots & \bar{C}\bar{A}^{p-H_c}\bar{B} \end{bmatrix} \Delta u(k) + \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{D} \\ \bar{C}\bar{A}\bar{D} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{p-1}\bar{D} \end{bmatrix} \Delta d(k) \quad (4.51)$$

Alors, on peut écrire $\hat{Y}(k+1|k)$ sous la forme suivante :

$$\hat{Y}(k+1|k) = S_x \bar{x}(k) + S_u \Delta U(k) + S_d \Delta d(k) \quad (4.52)$$

Soit $T_{ref} = T_{ref1} + T_{ref2}$ (théorème de superposition). On définit :

$$\epsilon_1(k) = T_{ref1} - S_x \bar{x}(k) \quad (4.53)$$

$$\epsilon_2(k) = T_{ref2} - S_d \Delta d(k) \quad (4.54)$$

$$\epsilon(k) = \epsilon_1(k) + \epsilon_2(k) \quad (4.55)$$

où ϵ_2 marque l'influence des perturbations.

Le critère de minimisation est :

$$\begin{aligned}
V(k) &= \left\| \hat{Y}(k+1|k) - \Gamma(k) \right\|_Q^2 + \|\Delta U(k)\|_R^2 \\
&= \|S_u \Delta U(k) - \epsilon(k)\|_Q^2 + \|\Delta U(k)\|_R^2 \\
&= [\Delta U(k)^T \cdot S_u^T - \epsilon(k)^T] Q [S_u \cdot \Delta U(k) - \epsilon(k)] + \Delta U(k)^T \cdot R \cdot \Delta U(k) \\
&= \epsilon(k)^T \cdot Q \cdot \epsilon(k) - 2\Delta U(k)^T \cdot S_u^T \cdot Q \cdot \epsilon(k) + \Delta U(k)^T [S_u^T \cdot Q \cdot S_u + R] \cdot \Delta U(k) \\
&= \text{const} - \Delta U(k)^T \cdot [2S_u^T \cdot Q \cdot \epsilon(k)] + \Delta U(k)^T \cdot H \cdot \Delta U(k)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

avec $H = S_u^T \cdot Q \cdot S_u + R$. En absence de contraintes, la condition de minimum du critère est la nullité du gradient de $V(k)$. En calculant ce gradient, on obtient :

$$\nabla_{\Delta U(k)} V(k) = - [2 \cdot S_u^T \cdot Q \cdot \epsilon(k)] + 2H \Delta U(k) \tag{4.57}$$

Pour $\nabla V(k) = 0$, on trouve :

$$\Delta U(k) = \frac{1}{2} H^{-1} [2 \cdot S_u^T \cdot Q \cdot \epsilon(k)] \tag{4.58}$$

En remplaçant $\epsilon(k)$ par l'équation (4.55), l'équation (4.58) devient :

$$\begin{aligned}
\Delta U(k) &= \frac{1}{2} H^{-1} [2 \cdot S_u^T \cdot Q \cdot (\epsilon_1(k) + \epsilon_2(k))] \\
&= \frac{1}{2} H^{-1} [2 \cdot S_u^T \cdot Q \cdot \epsilon_1(k)] + \frac{1}{2} H^{-1} [2 \cdot S_u^T \cdot Q \cdot \epsilon_2(k)]
\end{aligned} \tag{4.59}$$

De ce fait, $\Delta U(k)$ apparaît comme la superposition de deux effets, la commande par feedback ΔU_{fb} , et la commande feedforward ΔU_{ff} :

$$\Delta U(k) = \Delta U_{fb}(k) + \Delta U_{ff}(k) \tag{4.60}$$

avec $\Delta U_{fb}(k) = H^{-1} S_u^T \cdot Q \cdot \epsilon_1(k)$ (commande FeedBack)
et $\Delta U_{ff}(k) = H^{-1} S_u^T \cdot Q \cdot \epsilon_2(k)$ (commande FeedForward).

Exemple 4, commande feedforward

On considère le même système que dans l'exemple 1. On implémente sur les deux sorties de notre système une perturbation mesurée de type impulsion ayant la forme suivante :

$$0.4 [u(k-110) - u(k-160)]$$

Dans la figure (4.12), on constate bien que la commande FeedForward a presque éliminé l'effet de cette perturbation sur les deux sorties du système.

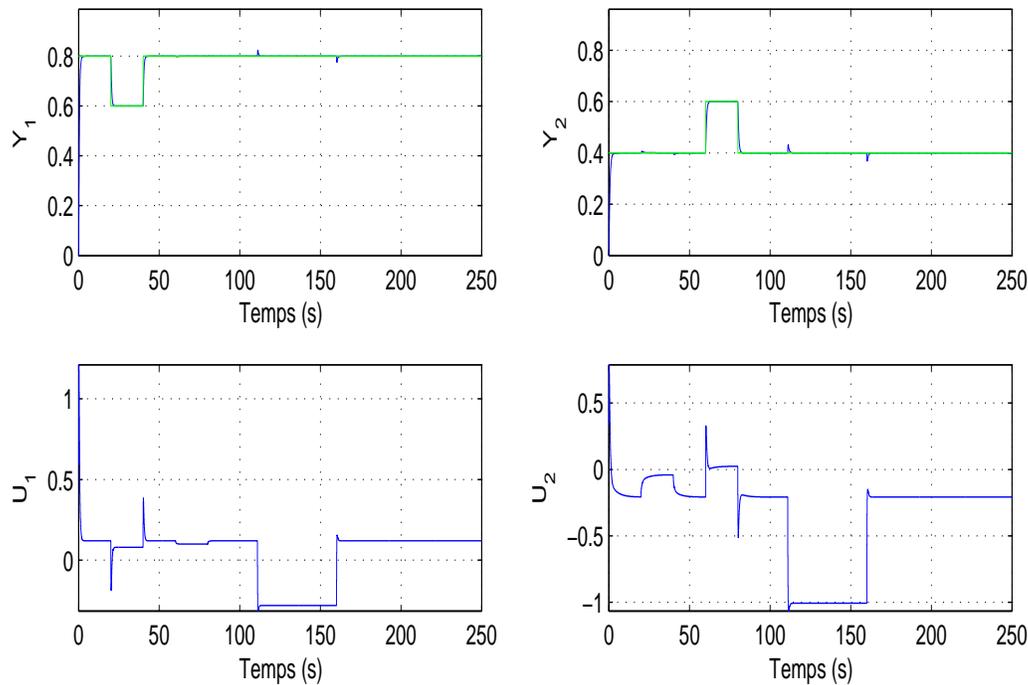


Figure 4.12 – Commande feedforward : Y_1 et Y_2 sont les sorties du système (haut), U_1 et U_2 sont les entrées (bas).

4.6.5 En présence de perturbations non mesurées

Parfois les perturbations ne sont pas mesurables. Dans ce cas, le système prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_w v(k) \\
 z(k) &= C_z x(k) \\
 y(k) &= C_y x(k)
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

où $v(k)$ représente les perturbations non mesurées. Pour calculer la commande dans ce genre du système, on doit suivre la démarche déjà décrite dans les sections précédentes. Pour cela, l'objectif de cette partie était de faire une comparaison entre le cas de perturbations non mesurées et celui de perturbations mesurées. On considère le même système que dans l'exemple 1 et nous allons implanter deux sortes des perturbations mesurées et non mesurées telles que les perturbations mesurées soient de type impulsion et en décalant ces perturbations de $100T_s$, on obtient les perturbations non mesurées. Les perturbations mesurées ont la forme suivante : $0.2 [u(k-110) - u(k-160)]$ et $0.2 [u(k-210) - u(k-260)]$ pour les perturbations non mesurées avec $T_s = 0.05$ s.

Les horizons H_c et H_p sont choisis égaux respectivement à 3 et 25. La simulation

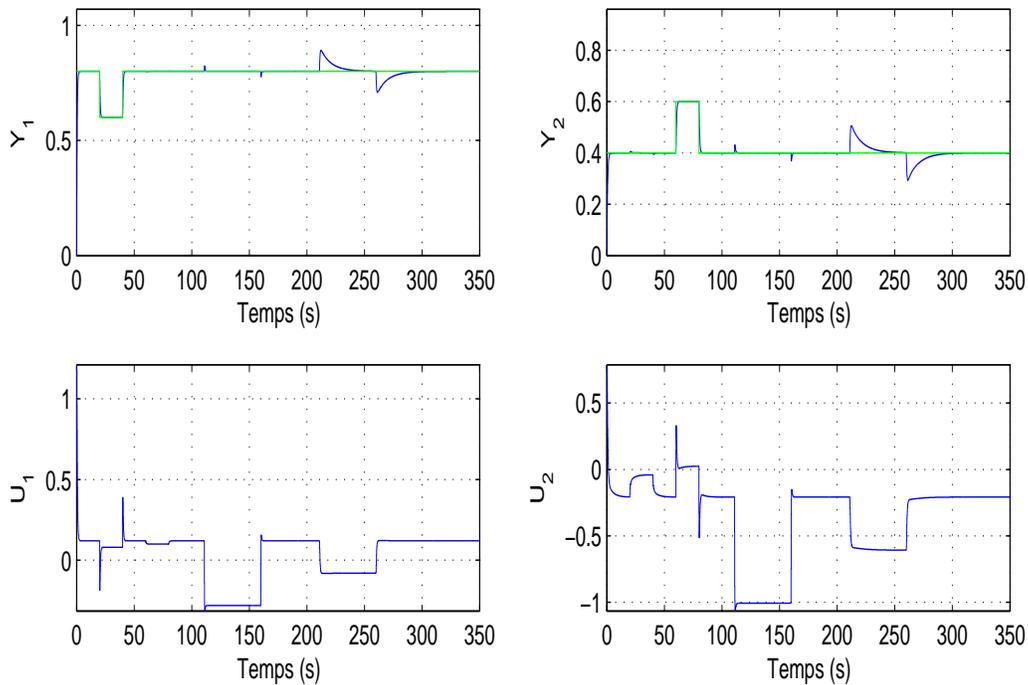


Figure 4.13 – Comparaison entre les Perturbations non mesurées et les perturbations mesurées : Sorties Y_1 et Y_2 (haut), entrées U_1 et U_2 (bas).

en boucle fermée (Figure 4.13) montre que le système n'élimine pas parfaitement les perturbations non mesurées. Par contre, les perturbations mesurées sont pratiquement complètement éliminées en utilisant la commande FeedForward. Si on examine les commandes U_1 et U_2 , on remarque que ces deux commandes réagissent plus vite dans le cas des perturbations mesurées que dans les perturbations non mesurées.

4.6.6 En présence d'une erreur de modélisation

On considère souvent qu'il existe une erreur de modélisation dans le système. Pour cela, on représente cette erreur sous forme d'un bruit blanc $w(k)$ dans le vecteur d'état (de même que dans le modèle de la commande linéaire quadratique gaussienne) :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ z(k) &= C_z x(k) \\ y(k) &= C_y x(k) \end{aligned} \quad (4.62)$$

d'où l'on tire :

$$w(k) = x(k) - [Ax(k-1) + Bu(k-1)] \quad (4.63)$$

On suppose que les bruits futurs sont constants, égaux au bruit à l'instant k :

$$\hat{w}(k+1|k) = \dots = \hat{w}(k+H_p-1|k) = w(k) \quad (4.64)$$

En calculant les équations de prédiction (voir section 4.6.1), on obtient l'équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_c|k) \\ \hat{x}(k+H_c+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ A^{H_c+1} \\ \vdots \\ A^{H_p} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_c-1} A^i B \\ \sum_{i=0}^{H_c} A^i B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B \end{bmatrix} u(k-1) + \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_c-1} A^i \\ \sum_{i=0}^{H_c} A^i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i \end{bmatrix} w(k)}_{\text{passé}} \quad (4.65)$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} B & \dots & 0 \\ AB+B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_c-1} A^i B & \dots & B \\ \sum_{i=0}^{H_c} A^i B & \dots & AB+B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B & \dots & \sum_{i=0}^{H_p-H_c} A^i B \end{bmatrix}}_{\text{futur}} \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+H_c-1|k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{z}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{z}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_z & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+H_p|k) \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

On introduit l'équation (4.65) dans l'équation (4.66), on obtient :

$$Z(k) = \Psi x(k) + \Upsilon u(k-1) + \Lambda w(k) \Theta \Delta U(k) \quad (4.67)$$

On en déduit $\Delta U(k)_{opt}$:

$$\Delta U(k)_{opt} = \frac{1}{2} H^{-1} G \quad (4.68)$$

où $H = \Theta^T Q \Theta + R$ et $G = 2\Theta^T Q \epsilon(k)$, avec

$$\epsilon(k) = \Gamma(k) - \Psi x(k) - \Upsilon u(k-1) - \Lambda w(k) \quad (4.69)$$

Exemple 5, en présence d'une erreur de modélisation

On considère le même système que celui décrit dans l'exemple 1, en ajoutant un bruit blanc de moyenne nulle sur le vecteur d'état. Dans la figure 4.14, on constate bien que malgré ce bruit, les sorties suivent toujours leurs consignes.

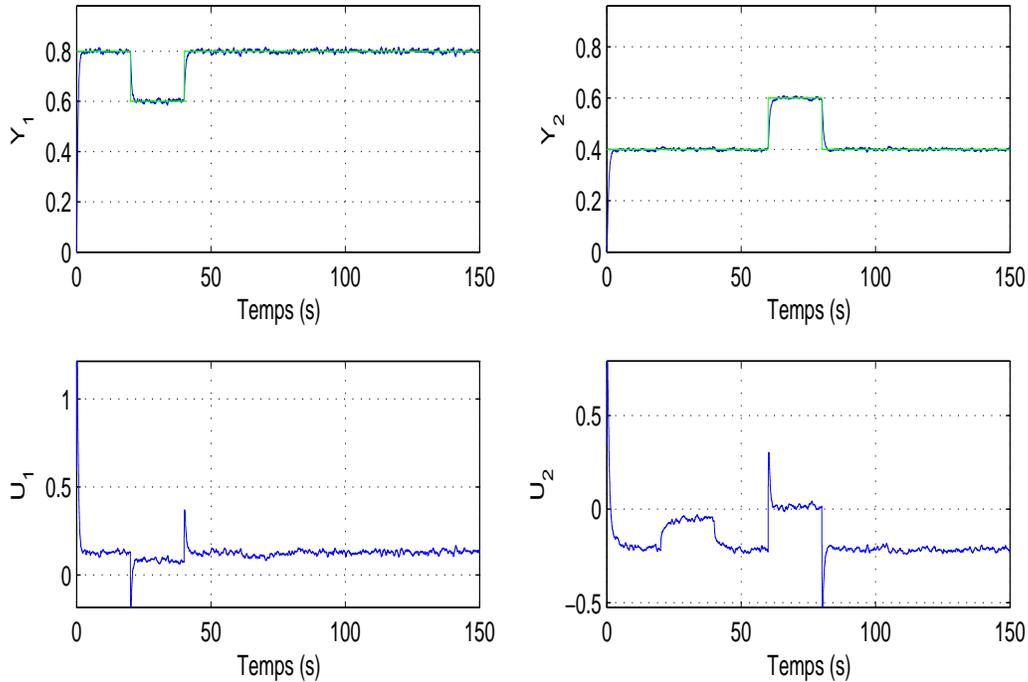


Figure 4.14 – Présence d'un bruit blanc dans le vecteur d'état (erreur de modélisation) : Sorties Y_1 et Y_2 (haut), entrées U_1 et U_2 (bas).

4.7 Stabilité et robustesse

Stabilité

Pour toute loi de commande, une étude de stabilité est toujours abordée. L'étude de stabilité est liée à certaines hypothèses, la convergence de l'algorithme d'optimisation, la fonction coût et le choix des pondérations, l'ajout de contraintes, les paramètres de l'algorithme (horizons de prédiction et de commande, ...), les erreurs de modélisation et les perturbations qu'il est nécessairement difficile de prendre en compte dans la prédiction, alors elles font partie des éléments susceptibles de nuire à la stabilité du système. De nombreux travaux existent dans la littérature sur l'étude de la stabilité de la commande

prédictive. Une méthode pour assurer la stabilité en commande prédictive généralisée (Clarke, 1994) consiste à introduire une contrainte d'égalité sur la sortie finale atteinte par le système. Cette stratégie est connue comme CRHPC (Constrained Receding Horizon Predictive Control), il s'agit de forcer la sortie prédite à coïncider avec la référence après un nombre fini d'instantanés d'échantillonnages (horizon de prévision). On obtient une solution sous-optimale en réduisant l'espace admissible et cela peut entraîner des problèmes de faisabilité. On pourrait essayer d'atténuer ce problème en choisissant un long horizon de prévision ce qui augmente le nombre des variables de décision et par conséquent rend plus difficile la solution du problème d'optimisation. En supposant qu'il n'existe pas de perturbations, ni de bruits qui affectent le système, la solution du problème de commande dans ce cas consiste à minimiser la fonction coût :

$$V(H_p, H_c) = \sum_{i=1}^{H_p} [\hat{y}(k+i|k) - w(k+i|k)]^2 + \sum_{i=1}^{H_c} \lambda(i) [\Delta \hat{u}(k+i-1|k)]^2 \quad (4.70)$$

soumise aux contraintes :

$$\Delta \hat{u}(k + H_c + i|k) = 0, \quad i > 0 \quad (4.71)$$

$$\hat{y}(k + H_p + i|k) = \hat{w}(k + H_p + 1|k) \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ (horizon de prévision)} \quad (4.72)$$

Une autre méthode utilise un horizon de prédiction infini (Muske and Rawlings, 1993). Les preuves de stabilité sont basées en principe sur l'utilisation de la fonction coût comme fonction de Lyapunov et en transformant le problème associé à l'horizon de prédiction infini en un problème équivalent d'horizon fini (Rawlings et al., 1994). La littérature montre que les résultats obtenus par cette technique sont plus simples en théorie et irréalisables pratiquement (Mayne et al., 2000).

Robustesse

Le but de la commande robuste est de concevoir des contrôleurs qui préservent la stabilité et les performances du système malgré les erreurs de modèle et les incertitudes. La théorie de la commande robuste est largement étudiée par la communauté scientifique afin de réviser les techniques de commande prédictive en y incluant des caractéristiques de robustesse. Diverses stratégies ont été développées, visant à l'amélioration des caractéristiques de robustesse en stabilité face à plusieurs types d'incertitudes, face à certaines contraintes imposées, face à des spécifications de performance nominale ou de robustesse vis-à-vis des perturbations ou des bruits de mesure. Deux classes importantes de procédures de robustification ont émergé : des techniques en ligne et des approches hors-ligne.

Les méthodologies en ligne nécessitent le calcul de la loi de commande optimale à chaque période d'échantillonnage, avec la minimisation du critère de performance à chaque pas. La commande prédictive peut naturellement prendre en compte des contraintes imposées au système et cet aspect a été conservé par la plupart des techniques de synthèses de lois de commande prédictive robuste. Généralement, les techniques de commande MPC

robuste sont formulées comme des problèmes min-max sous contraintes. La maximisation est réalisée pour un ensemble borné d'incertitudes ou de perturbations. La minimisation est effectuée dans le cas le plus défavorable en termes de critère de performance. Des outils d'inégalités linéaires matricielles (LMIs) sont adoptés afin de transformer le problème min-max classique en un problème d'optimisation convexe (Alamo et al., 2007; Bemporad and Morari, 2002; Morari and Lee, 1999). Une autre technique en ligne de commande MPC robuste sous contraintes, en présence d'incertitudes de modèle et perturbations bornées est présentée dans (Fukushima and Bitmead, 2005). Cette technique utilise un modèle de comparaison supplémentaire non contraint pour reformuler le problème MPC robuste comme un problème nominal sans termes incertains. Dès lors que la contrainte terminale est décrite par des contraintes linéaires, l'optimisation de la commande est transformée en un problème quadratique. Dans (Clarke and Scatollini, 1991), la stabilité nominale est aussi garantie en respectant des contraintes terminales.

Une charge importante en termes de calculs à effectuer (surtout dans le cas des incertitudes de modèle, du bruit de mesure et des perturbations), peut devenir un facteur de limitation des méthodes de robustification en ligne. Afin de surmonter cette surcharge de calculs et la limitation liée au temps réel, et dans le but de pouvoir appliquer des lois de commande prédictive robuste à des processus industriels rapides ou des systèmes de grande taille, des méthodes de robustification hors-ligne ont été développées.

(Wan and Kothare, 2002) propose une formulation hors-ligne de la commande MPC robuste. Cette méthode fournit une séquence de lois de commande optimales qui correspond aux ensembles invariants asymptotiquement stables, construits hors-ligne. Cette technique offre une garantie de robustesse en stabilité pour des modèles incertains et réduit le temps de calcul face aux solutions en ligne. Cependant, les performances nominales du système corrigé peuvent être dégradées (Wan and Kothare, 2003).

Une technique mixte de commande prédictive robuste basée sur les espaces invariants a été élaborée également dans (Kouvaritakis et al., 1999). Cette approche permet le calcul hors-ligne d'un gain du correcteur garantissant la robustesse en performance en absence des contraintes et minimise en ligne un critère quadratique.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le principe de la commande prédictive qui est très efficace et répandue dans le milieu industriel. La commande prédictive permet de résoudre selon le principe de l'horizon glissant les problèmes de commande optimale en boucle ouverte sur un horizon fini. Par sa description temporelle, elle facilite la prise en compte des limitations des systèmes physiques, autorise la formulation des spécifications en termes de contraintes sur la trajectoire prédite et donne la liberté d'imposer un comportement stable au système asservi par l'ajout de contraintes auxiliaires au sein du problèmes d'optimisation. Néanmoins la présence des contraintes dégrade les performances globales du

système bouclé. Dès lors, la synthèse des lois prédictives nécessite une phase de validation hors ligne, au cours de laquelle le choix de paramètres classiques, tels que les horizons et les pondérations intervenant dans la fonction de coût, est intimement lié à la validité même de la stratégie de commande. En effet, la présence des contraintes modifie la nature de la loi de commande prédictive, évoluant d'une structure linéaire initiale à une fonction non linéaire de l'état du système (Bemporad and Morari, 2002), même si le système en lui-même reste linéaire. Des exemples ont illustré les principales stratégies exposées.

Chapitre 5

Commande prédictive d'une station d'épuration d'eaux usées : résultats des simulations

5.1 Introduction

Les stations d'épurations sont des systèmes non linéaires multivariables soumis à des perturbations très importantes à la fois en débit et en qualité de charge. Ces caractéristiques constituent pose un problème difficile pour leur commande. Plusieurs stratégies de commande de stations d'épurations ont été proposées dans la littérature (Brdys et al., 2008; Cadet et al., 2004; Chotkowski et al., 2005; Steffens and Lant, 1999). Les stratégies de commande proposées diffèrent par leurs objectifs et leurs méthodes. Parfois les objectifs sont limités à la commande de l'oxygène dissous (Holendan et al., 2007), ou la commande de nitrate (Barros and Carlsson, 1998; Zhao et al., 1995), parfois les objectifs sont beaucoup plus larges comme dans le cas de la commande hiérarchique de la station d'épuration et le décanteur (Brdys et al., 2008). Les méthodes peuvent être une commande simple (Vrecko et al., 2002), une commande avec feedback et feedforward (Vrecko et al., 2003), une commande linéarisée optimale (Anderson et al., 2000; Kim et al., 2000), une commande non linéaire (Cadet et al., 2004; Lindberg and Carlsson, 1996) ou une commande prédictive (Shen et al., 2008, 2009; Weijers et al., 1997). Peu de validations expérimentales ont été proposées pour différentes raisons, comprenant le manque de capteurs physiques ou logiciels, d'actionneurs ou de systèmes de commande.

L'identification effectuée sur le benchmark BSM1 a montré des comportements très fortement non linéaires, avec de plus la présence d'intégrateurs. Malgré un effort important pour appliquer la commande prédictive dans l'espace d'état précédemment développée (Chapitre 4), nos recherches n'ont pas été couronnées de succès. Pour cette raison, les résultats présentés ci-dessous ont été obtenus par le programme de commande prédictive basé sur les réponses indicielles développé par J.P. Corriou en Fortran90 et non pas dans

l'espace d'état. Ces résultats ont été exposés dans les deux articles (Shen et al., 2008, 2009).

Dans la suite, plusieurs stratégies de la commande prédictive d'une station d'épuration sont présentées. La première stratégie est la DMC (Dynamic Matrix Control) appliquée aux systèmes multi-variables linéaires sans contraintes et qui représente la première génération de la MPC. La deuxième stratégie est la QDMC (Quadratic Dynamic Matrix Control) qui représente la deuxième génération de la MPC et qui prend en compte les contraintes sur les entrées et les sorties (Corriou, 2004, 2012). Une commande par anticipation (Feedforward) a aussi été utilisée pour réduire l'effet de perturbations mesurées (q_0 débit entrant et $[NH]_0$ concentration entrante en ammonium) sur le système.

5.2 Commande prédictive DMC et QDMC

Cette commande est exposée dans (Corriou, 2004, 2012). Un bref rappel est effectué dans cette section. Le cadre présenté est monovarié mais s'étend aisément au cas multivarié comme cela est montré dans les références précédentes.

Le système est représenté par son modèle de réponse indicielle tronqué :

$$y(j+1) = y_{ss} + \sum_{i=1}^{H_M} h_i \Delta u(j+1-i) + d(j+1) \quad (5.1)$$

où h_i sont les coefficients de réponse indicielle unitaire au $i^{\text{ème}}$ instant, y_{ss} est la sortie initiale stationnaire (ici, y n'est pas une variable d'écart) et \mathbf{d} représente les facteurs non modélisés affectant les sorties. D'autre part $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$. H_M est l'horizon du modèle.

A l'instant $k+l$, la prédiction de sortie basée sur les entrées passées et futures est décomposée selon :

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+l|k) = & \underbrace{y_{ss} + \sum_{i=l+1}^{M-1} h_i \Delta u(k+l-i) + h_M (u(k+l-M) - u_{ss})}_{\text{effet des entrées passées}} \\ & + \underbrace{\sum_{i=1}^l h_i \Delta u(k+l-i)}_{\text{effet des entrées futures}} + \underbrace{\hat{d}(k+l|k)}_{\text{effet des perturbations prédites}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

où H_p est l'horizon de prédiction.

Sur un horizon de prédiction donné H_p , et en supposant $M > H_c$, le vecteur des

prédictions de sortie peut être décomposé comme :

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^*(k+1|k) \\ \vdots \\ y^*(k+H_p|k) \end{bmatrix} + \mathcal{A} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+H_c-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{d}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{d}(k+H_p|k) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

avec la prédiction de la sortie basée sur les variations des entrées passées :

$$y^*(k+l|k) = y_{ss} + \sum_{i=l+1}^{M-1} h_i \Delta u(k+l-i) + h_M (u(k+l-M) - u_{ss}) \quad (5.4)$$

D'autre part, \mathcal{A} est la matrice de dimension $H_p \times H_c$ (appelée Matrice Dynamique de Commande, d'où Dynamic Matrix Control DMC) du système égale à :

$$\mathcal{A} = \left. \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ h_{H_c} & h_{H_c-1} & \dots & h_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_M & h_{M-1} & \dots & h_{M-H_c+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_M & h_M & \dots & h_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_M & h_M & \dots & h_M \end{bmatrix} \right\} \begin{array}{l} H_c \text{ lignes} \\ (M-1) \text{ lignes} \\ (H_p - H_c - M + 1) \text{ lignes} \end{array} \quad (5.5)$$

Du point de vue des perturbations, on suppose :

$$d(k) = y(k) - y^*(k|k) \quad (5.6)$$

et l'estimation de $d(k)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{d}(k+l|k) &= \hat{d}(k|k) = y^m(k) - y^*(k|k) \quad \forall l = 1, \dots, H_p \\ &= y^m(k) - [y_{ss} + \sum_{i=1}^{M-1} h_i \Delta u(k-i) + h_M (u(k-M) - u_{ss})] \end{aligned} \quad (5.7)$$

• **Commande DMC :**

En considérant un critère quadratique prenant en compte uniquement la différence entre la sortie estimée et la référence sur l'horizon de prédiction selon :

$$J = \sum_{i=1}^{H_p} (\hat{y}(k+i|k) - y^{\text{ref}}(k+i))^2 \quad (5.8)$$

la solution au sens des moindres carrés est :

$$\Delta \mathbf{u}(k) = (\mathcal{A}^T \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T \mathbf{e}(k+1) \quad (5.9)$$

et seule la première variation du vecteur d'entrée (5.9) est implantée réellement. La solution (5.9) est dans ce cas de type analytique.

Dans le cas d'un système multivariable, une paire entrée-sortie $i - j$ quelconque peut être représentée par une matrice \mathcal{A}_{ij} et la matrice dynamique \mathcal{A} est composée par les sous-matrices \mathcal{A}_{ij} .

De même que dans la commande linéaire quadratique, il est possible d'introduire dans le critère un terme de pondération des entrées selon :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{y}^{ref}(k)]^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma} [\hat{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{y}^{ref}(k)] + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T(k) \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda} \Delta \mathbf{u}(k) \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{A} \Delta \mathbf{u}(k) - \mathbf{e}(k+1)]^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma} [\mathcal{A} \Delta \mathbf{u}(k) - \mathbf{e}(k+1)] + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T(k) \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda} \Delta \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$\mathbf{\Gamma}$ et $\mathbf{\Lambda}$ sont des matrices de pondération. En absence de contraintes, la solution de (5.10) est :

$$\Delta \mathbf{u}(k) = (\mathcal{A}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma} \mathcal{A} + \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathcal{A}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}(k+1) \quad (5.11)$$

• Commande QDMC :

Fréquemment, des contraintes sur les entrées manipulées et les variations des entrées sont présentes qui peuvent être mises sous la forme linéaire générale :

$$\mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(k) \leq \mathbf{c}(k+1) \quad (5.12)$$

En présence de contraintes (5.12), le problème peut alors être formulé du point de vue programmation quadratique (Quadratic Programming : QP) comme :

$$\min_{\Delta \mathbf{u}(k)} \left[\frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}(k)^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}(k) - \mathbf{g}(k+1)^T \Delta \mathbf{u}(k) \right] \quad (5.13)$$

dont la solution ne peut être que numérique (Corriou, 2004, 2012). La commande est alors nommée QDMC.

Les contraintes sur les sorties peuvent plus difficilement être mises sous la forme (5.12) et les contraintes sur les sorties sont alors incluses dans un terme de pénalité adjoint au critère (5.13) selon :

$$0.5 w_{py} [(|y_{max} - \hat{y}| - (y_{max} - \hat{y}))^2 + (|\hat{y} - y_{min}| - (\hat{y} - y_{min}))^2] \quad (5.14)$$

Le terme de pénalité est nul lorsque la sortie prédite \hat{y} est située entre les limites des sorties y_{min} et y_{max} et la fonction de pénalité pénalise les écarts au-dessus du maximum et en-dessous du minimum permis pour les sorties commandées. Le problème n'est plus quadratique et la solution peut être obtenue par optimisation non linéaire, par exemple par

programmation quadratique successive. Dans ce cas, le code d'optimisation non linéaire NLPQL (Schittkowski, 1985) est utilisé.

• **Commande QDMC avec feedforward :**

Il est nécessaire de modifier l'équation du prédicteur pour prendre en compte les termes de perturbations mesurées. Ainsi, l'équation (5.2) de la sortie prédite $\hat{y}(k+l|k)$ est modifiée comme la somme d'un terme stationnaire, un terme effet des entrées passées, un terme effet des entrées futures, un terme effet des perturbations mesurées passées d_m et un terme de perturbations inconnues d_u :

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+l|k) = & y_{ss} + \sum_{i=l+1}^{H_m-1} h_i \Delta u(k+l-i) + h_{H_m} (u(k+l-H_m) - u_{ss}) \\ & + \sum_{i=1}^l h_i \Delta u(k+l-i) \\ & + \sum_{i=l}^{H_{ff}-1} h'_i \Delta d_m(k+l-i) + \hat{d}_u(k+l|k) \end{aligned} \quad (5.15)$$

où H_{ff} est l'horizon feedforward, pas nécessairement égal à l'horizon du modèle H_m . Dans l'équation (5.15), pour l'action feedforward, le rôle des perturbations mesurées d_m est semblable à celui des entrées passées Δu , tandis que le terme \hat{d}_u tient compte seulement des perturbations non mesurées ou non modélisées. Les perturbations futures sont considérées comme des perturbations non mesurées estimées comme :

$$\hat{d}_u(k+l|k) = \hat{d}_u(k|k) = y(k) - \hat{y}^*(k|k) \quad (5.16)$$

avec la sortie prédite basée sur les entrées passées :

$$\hat{y}^*(k|k) = y_{ss} + \sum_{i=1}^{H_m-1} h_i \Delta u(k-i) + h'_{H_m} (d_m(k) - d_{m,ss}) \quad (5.17)$$

incorporant les perturbations présentes mesurées $d_m(k)$ et leurs valeurs stationnaires $d_{m,ss}$.

Ainsi, la sortie prédite $y^*(k+l|k)$ basée sur les entrées passées et les perturbations mesurées est définie par :

$$\begin{aligned} y^*(k+l|k) = & y_{ss} + \sum_{i=l+1}^{H_m-1} h_i \Delta u(k+l-i) + h_{H_m} (u(k+l-H_m) - u_{ss}) \\ & + \sum_{i=l+1}^{H_{ff}-1} h'_i \Delta d_m(k+l-i) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Maintenant, les erreurs futures peuvent être définies par :

$$e(k+l) = y^{\text{ref}}(k+l) - y^*(k+l|k) - \hat{d}_u(k|k) \quad (5.19)$$

Globalement, l'équation (5.3) est modifiée comme :

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^*(k+1|k) \\ \vdots \\ y^*(k+H_p|k) \end{bmatrix} + \mathcal{A} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+H_c-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{d}_u(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{d}_u(k+H_p|k) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

où une séparation des perturbations mesurées et non mesurées a été introduite.

5.3 Résultats des simulations

Les différentes phases de la simulation sont présentées dans la figure 5.1. Une période de stabilisation en boucle ouverte commence sur $[0, 500]$ h, suivie par une période de stabilisation en boucle fermée sans perturbation sur $[500, 1200]$ h et en présence des perturbations (temps sec) $[1200, 1872]$ h qui représente une durée de 28 jours. La dernière phase de la simulation est divisée en 2 périodes de durée 14 jours pour chacune. La première période $[1200, 1534]$ h est utilisée pour la stabilisation dynamique et la deuxième $[1534, 1872]$ h pour l'évaluation des performances de la commande.

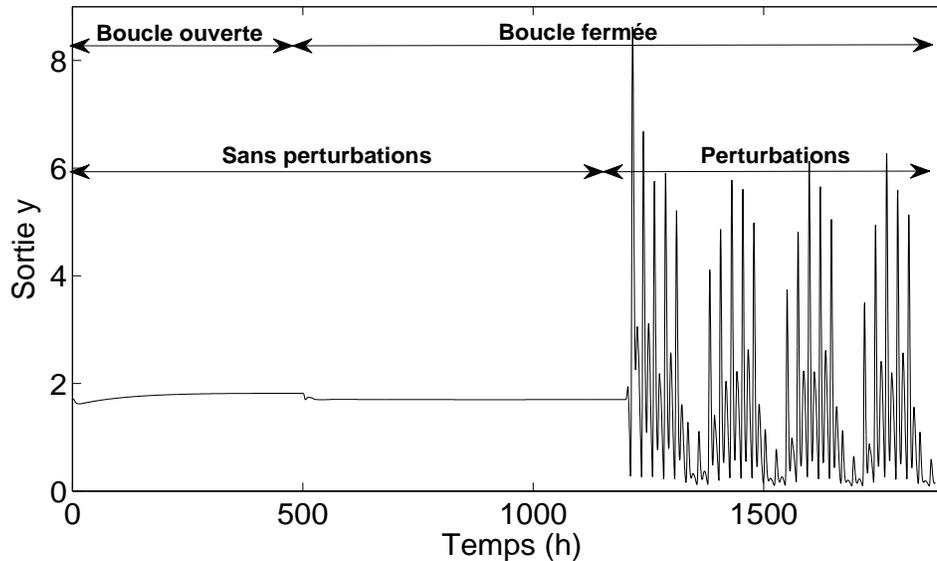


Figure 5.1 – Différentes phases de la simulation. La sortie y est la concentration d'ammonium $[\text{NH}]$.

Les entrées manipulées, sorties, perturbations sont rassemblées dans le Tableau 5.1. De manière générale, les entrées manipulées sont notées u , les perturbations d , les sorties y , les consignes y_{sp} .

Entrée manipulée (u)	Symbole
Débit de recyclage interne (m^3/h)	q_a
Débit de recyclage externe (m^3/h)	q_r
Débit de rejet (m^3/h)	q_w
Coefficient de transfert de matière de l'oxygène 3 ^{ème} réacteur (1/h)	kla_3
Coefficient de transfert de matière de l'oxygène 4 ^{ème} réacteur (1/h)	kla_4
Coefficient de transfert de matière de l'oxygène 5 ^{ème} réacteur (1/h)	kla_5
Débit d'ajout supplémentaire en source carbonée (m^3/h)	q_{2in}
Perturbation (d)	Symbole
Concentration en ammonium à l'entrée (mg/l)	$[NH]_0$
Débit d'entrée (m^3/h)	q_0
Sortie commandée (y)	Symbole
Ammonium [NH]	[NH]
Azote total	$[N]_{tot}$
Solides en suspension	[SS]
Demande biochimique en oxygène à 5 jours	[BOD5]
Demande chimique en oxygène	COD

Tableau 5.1 – Récapitulatif des entrées manipulées, perturbations, sorties commandées.

5.3.1 Modèle linéaire des réponses en boucle ouverte du benchmark

Les réponses en boucle ouverte du benchmark ont été obtenues par des variations échelon des entrées manipulées et des perturbations au voisinage de l'état stationnaire. L'amplitude de l'échelon et sa durée pour chaque entrée manipulée et perturbation sont indiquées dans les Tableaux 5.2 et 5.3. L'identification a été réalisée à partir de $t = 1200\text{h}$ en imposant successivement des signaux sur chaque entrée manipulée $u_i (i = 1, \dots, n_u)$ et chaque perturbation $u_d (d = 1, \dots, n_d)$ avec une phase intermédiaire de 200h nécessaire pour la stabilisation. Il faut noter que l'ensemble des réponses utilisées constitue un modèle considéré par la suite comme linéaire issu de 7×5 couples entrées-sorties et 2×5 couples perturbations-sorties.

Quelques exemples typiques de réponses utilisées sont fournis dans les figures 5.2, 5.3 et 5.4.

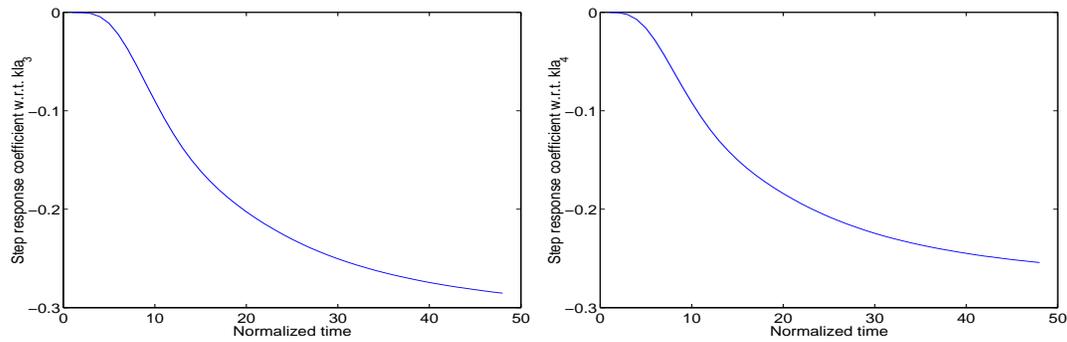


Figure 5.2 – Réponse indicielle normalisée de la concentration en ammonium de l’effluent au coefficient de transfert de matière dans les troisième (gauche) et quatrième (droite) réacteurs.

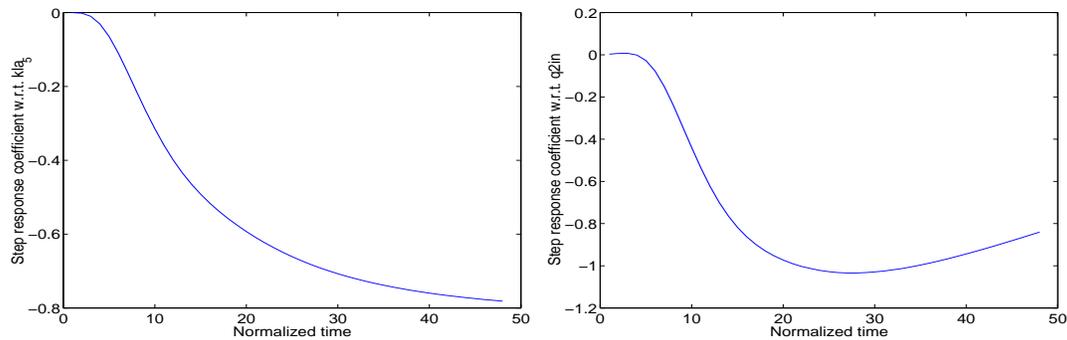


Figure 5.3 – Réponse indicielle normalisée de la concentration en ammonium de l’effluent au coefficient de transfert de matière dans le cinquième réacteur (gauche) et au débit d’ajout de source carbonée (droite).

Entrée manipulée	Etat stationnaire (valeur)	Echelon (amplitude)	Durée (heure)
Débit de recyclage interne (m ³ /h)	2306	+10%	24
Débit de recyclage externe (m ³ /h)	769	+10%	24
Débit de rejet (m ³ /h)	16	+10%	24
Coefficient de transfert de matière de l'oxygène 3 ^{ème} unité (1/h)	10	-4%	24
Coefficient de transfert de matière de l'oxygène 4 ^{ème} unité (1/h)	10	-4%	24
Coefficient de transfert de matière de l'oxygène 5 ^{ème} unité (1/h)	3.5	+4%	24
Débit d'ajout supplémentaire en source carbonée (m ³ /h)	0.083	+10%	24

Tableau 5.2 – Identification en boucle ouverte : Valeur stationnaire, amplitude et durée de l'échelon pour les entrées manipulées.

	Perturbation mesurée	Echelon (amplitude)	Durée (heure)
Cas 1	Concentration en ammonium à l'entrée (mg/l)	+3%	24
Cas 2	Concentration en ammonium à l'entrée (mg/l)	+100%	168
Cas 3	Débit d'entrée (m ³ /h)	+3%	24
Cas 4	Débit d'entrée (m ³ /h)	+200%	168

Tableau 5.3 – Identification en boucle ouverte : Amplitude et durée de l'échelon pour les perturbations.

5.3.2 Caractéristiques générales de la simulation

Les limites de saturation des entrées sont présentées dans le Tableau 5.4. Ce sont des contraintes dures pour les commandes, c'est-à-dire qu'elles doivent être absolument respectées à tout instant.

Des normes sont imposées sur les effluents : ammonium [NH], azote total [N]_{tot}, solides en suspension [SS], demande biochimique en oxygène à 5 jours [BOD5] et demande chimique en oxygène COD (Tableau 5.5).

En fait, du point de vue de la commande, il est possible de considérer ces normes sur les effluents comme des contraintes sur les sorties qui devraient être respectées. Toutefois, ce ne peut être que des contraintes douces car elles ne peuvent être respectées tout le temps. Nous avons préféré remplacer ces normes par des consignes qui sont choisies largement inférieures aux valeurs maximales (Tableau 5.6) et qui permettent le plupart du temps de

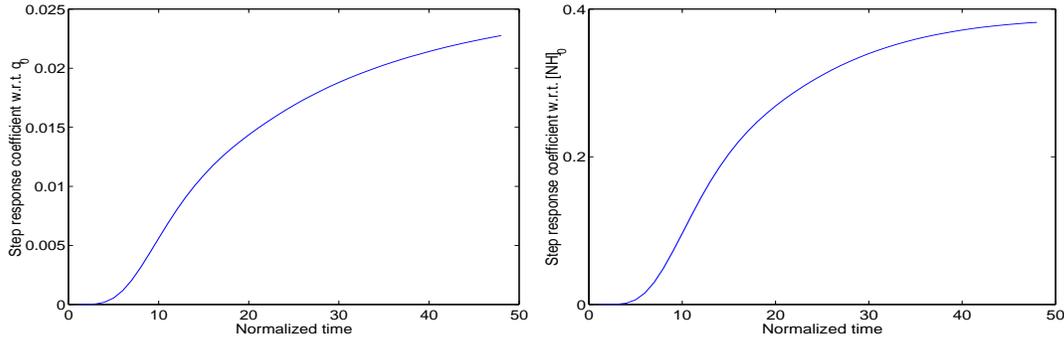


Figure 5.4 – Réponse indicielle normalisée de la concentration en ammonium de l’effluent à la perturbation du débit entrant (gauche) et à la perturbation de la concentration en ammonium entrante (droite).

respecter les valeurs maximales. La concentration en ammonium $[\text{NH}]$ et l’azote total $[\text{N}]_{\text{tot}}$ sont les deux effluents les plus sensibles et réagissent très fortement aux perturbations. Pour cela, la discussion portera principalement sur la concentration d’ammonium $[\text{N}]_{\text{tot}}$ qui varie en général de la même manière que l’azote $[\text{N}]_{\text{tot}}$.

5.3.3 Résumé des stratégies de simulation

Différentes stratégies ont été testées (Tableau 5.7). La période d’échantillonnage était égale à $T_s = 0,5\text{h}$. Dans tous les cas, l’horizon de prédiction H_p était égal à la différence entre l’horizon du modèle et l’horizon de commande :

$$H_p = H_m - H_c$$

L’horizon de prédiction H_p est le plus important paramètre de la commande prédictive. Pour illustrer l’influence de H_p sur la commande, on fixe la valeur de l’horizon de commande H_u (qui a peu d’influence sur les performances de la commande), puis on considère des valeurs différentes pour l’horizon de prédiction (Tableau 5.7).

La commande DMC minimise le critère (5.10) en tenant compte à la fois des sorties par rapport aux consignes et des variations des entrées manipulées, mais sans contraintes.

”DMC-FB-24” signifie commande DMC avec FeedBack et un horizon de modèle $H_m = 24$, soit 24 périodes d’échantillonnage, donc 12h. Des horizons de modèle supérieurs à 48 ont été testés comme $H_m = 96$, $H_m = 144$, avec une dégradation des performances et ne sont pas montrés ici.

Par rapport à la commande DMC, la commande QDMC minimise le critère (5.13) en tenant compte de contraintes dures.

Enfin, différentes stratégies en boucle fermée ont été réalisées en rajoutant une commande par anticipation (Feedforward) pour réduire l’effet des deux perturbations princi-

Entrée	Valeur inférieure	Valeur supérieure
Débit de recyclage interne q_a (m ³ /h)	1000	4000
Débit de recyclage externe q_r (m ³ /h)	200	1000
Débit de rejet q_w (m ³ /h)	10	40
Coefficient de transfert de matière d'oxygène 3 ^{ème} unité kla_3 (1/h)	0	15
Coefficient de transfert de matière d'oxygène 4 ^{ème} unité kla_3 (1/h)	0	15
Coefficient de transfert de matière d'oxygène 5 ^{ème} unité kla_3 (1/h)	0	15
Débit d'ajout en source carbonée q_{2in} (m ³ /h)	0	0.2

Tableau 5.4 – Limites de saturation des entrées

Variable	Valeur maximale
Ammonium [NH]	< 4 (mg/l)
Azote total [N] _{tot}	< 18 (mg/l)
Solides en suspension [SS]	< 30 (mg/l)
[BOD ₅]	< 10(mg/l)
COD	< 100 (mg/l)

Tableau 5.5 – Normes imposées sur les effluents

pales, soit le débit d'entrée q_0 , soit la concentration en ammonium à l'entrée $[NH]_0$.

5.3.4 Critères statistiques de comparaison

Des statistiques ont été calculées concernant les concentrations moyennes en effluent pendant la période de test ([1536, 1872] h) avec la période d'échantillonnage $T_s = 0,5$ h. Les sorties indiquées dans les tableaux seront données par rapport à leur valeur moyenne. Ce sont principalement les concentrations en ammonium et azote total. Leurs valeurs relatives devraient être discutées avec la valeur du critère de valeur absolue de l'erreur (IAE) défini par rapport à la définition de la qualité de l'effluent et fourni dans le même tableau. De plus, trois indicateurs statistiques recommandés dans une version récente du benchmark ont été utilisés. La qualité de l'effluent \mathcal{Q}_e est donnée par :

$$\mathcal{Q}_e = \frac{1}{1000 \Delta t_{obs}} \int_0^{t_{obs}} \{2[SS] + [COD] + 2[BOD]_5 + [NH] + [N]\} dt \quad (5.21)$$

Variable	Limite supérieure	Consigne
Ammonium [NH]	4 (mg/l)	1.7
Azote total [N] _{tot}	18 (mg/l)	14
Solides en suspension [SS]	30 (mg/l)	12.5
[BOD5]	10 (mg/l)	2.7
COD	100 (mg/l)	47.5

Tableau 5.6 – Consignes et limites supérieures d’effluents

Stratégie	Description	H _c	H _p
DMC-FB-24	DMC sans Feedforward	3	45
DMC-FB-48		3	93
QDMC-FB-24	QDMC sans Feedforward	3	45
QDMC-FB-48		3	93
DMC-FF- <i>q</i> ₀ -24	DMC avec Feedforward pour <i>q</i> ₀	3	45
QDMC-FF- <i>q</i> ₀ -24	QDMC avec Feedforward pour <i>q</i> ₀	3	45
DMC-FF-[NH] ₀ -24	DMC avec Feedforward pour [NH] ₀	3	45
DMC-FF- <i>q</i> ₀ -[NH] ₀ -24	DMC avec Feedforward pour <i>q</i> ₀ et [NH] ₀	3	45

Tableau 5.7 – Différentes stratégies de la commande prédictive

où $[0, t_{obs}]$ est l’intervalle d’observation, ici $[1536, 1872]$ h. L’énergie de pompage E_p est :

$$E_p = \frac{1}{\Delta t_{obs}} \int_0^{t_{obs}} \{0.0004 q_a + 0.008 q_r + 0.05 q_w\} dt \quad (5.22)$$

L’énergie d’aération E_a est :

$$E_a = \frac{[O]_{sat}}{1800 \Delta t_{obs}} \int_0^{t_{obs}} \{V_3 kla_3 + V_4 kla_4 + V_5 kla_5\} dt \quad (5.23)$$

où $[O]_{sat}$ est la concentration de saturation en oxygène. V_i est le volume du réacteur i .

5.3.5 Commande sans Feedforward

La figure 5.5 présente le principe de la commande DMC appliquée au benchmark BSM1 de la station d’épuration sans compenser l’effet des perturbations.

La figure 5.6 nous fournit une comparaison de la commande DMC avec Feedback pour deux horizons de modèle respectivement égaux à 24 et 48. Avec DMC-FB-24, la valeur maximale de la concentration de l’ammonium dans l’effluent (4 mg/l) a été dépassée 12 fois dans la période d’évaluation $[1534, 1872]$ h et pour une durée de 43 heures qui

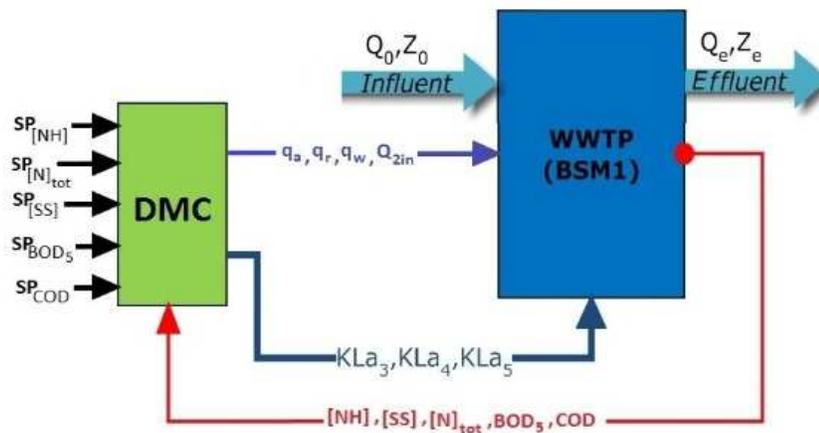


Figure 5.5 – Schéma de principe de la commande DMC sans compensation des perturbations.

représente 12.8% de la période d'évaluation. Avec DMC-FB-48, la valeur maximale de la concentration de l'ammonium $[NH]$ dans l'effluent a été dépassée 12 fois pour une durée de 47 heures qui représente 13.9% de la durée en présence des perturbations. L'augmentation de l'horizon de prédiction au-delà de 48 (par exemple, 96) dégrade les performances.

Durant la période $[500,1200]h$, en absence de perturbations, la commande en boucle fermée fonctionne très bien. La commande DMC amène la sortie $[NH]$ très proche de sa consigne. Durant la période $[1200,1872]h$, les perturbations sont nettement présentes dans le système. Les sorties sont sensibles et réagissent très fortement aux perturbations et dans ce cas la commande devient plus difficile. Les perturbations provoquent aussi une grave détérioration de la qualité des effluents (Figure 5.6).

Les 7 entrées manipulées du système, q_a , q_r , q_w , kla_3 , kla_4 , kla_5 et q_{2in} sont représentées dans la Figure 5.7. On remarque que ces variables manipulées atteignent souvent leurs valeurs maximales.

Pour assurer que les commandes ne dépassent pas des valeurs minimales et maximales imposées, la commande QDMC (Quadratic Dynamic Matrix Control) a été utilisée. Une simulation en boucle fermée sans Feedforward (Figure 5.8) a montré une légère différence entre DMC-FB-24 et QDMC-FB-24.

Dans la figure 5.8, la valeur maximale de la concentration de l'ammonium $[NH]$ dans l'effluent a été dépassée 12 fois dans la période d'évaluation $[1534,1872]h$ et pour une durée de 42 heures qui représente 12.4% de la la période d'évaluation pour QDMC-FB-24.

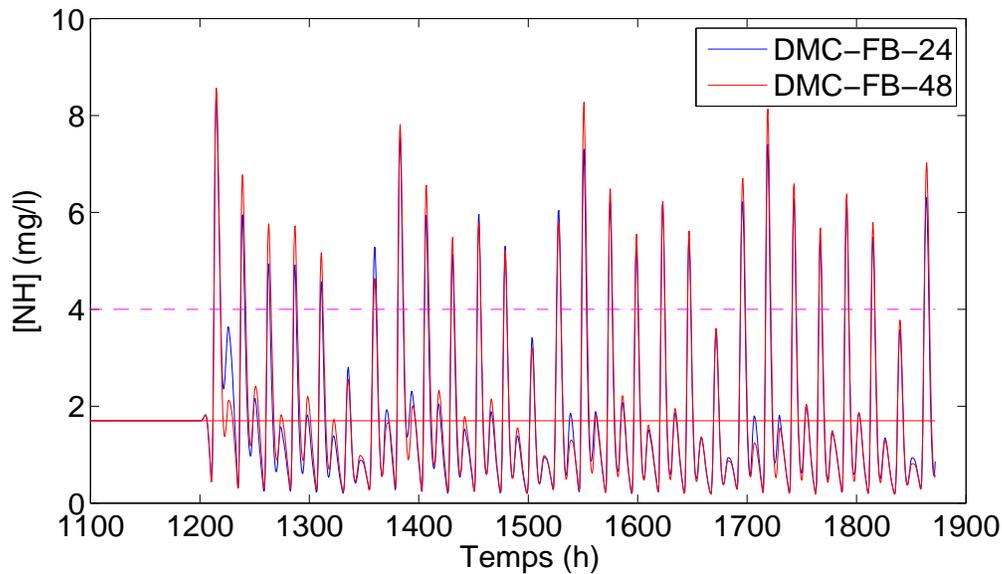


Figure 5.6 – Comparaison entre DMC-FB-24 et DMC-FB-48. La sortie y est la concentration d'ammonium $[NH]$ dans l'effluent. La ligne pointillée indique la limite supérieure et la ligne rouge représente la consigne.

5.3.6 Commande avec Feedforward

Pour améliorer la performance de la commande multivariable, une commande par anticipation FF (Feedforward) a été mise en place pour éliminer l'effet des perturbations mesurées (soit le débit entrant q_0 , soit la concentration entrante en ammonium $[NH]_0$, soit les deux) sur le système (Figure 5.9).

La figure 5.10 montre que l'utilisation de la commande par anticipation (Feedforward) pour réduire l'effet des perturbations mesurées a abouti à une amélioration remarquable sur la concentration d'ammonium $[NH]$ dans l'effluent pour DMC-FF- $[NH]_0$ -24 et DMC-FF- q_0 - $[NH]_0$ -24 et une légère amélioration pour DMC-FF- q_0 -24.

Malgré cette amélioration, la valeur maximale de la concentration de l'ammonium dans l'effluent a été parfois dépassée. Dans DMC-FF- q_0 -24, la valeur maximale de la concentration de l'ammonium dans l'effluent a été dépassée 10 fois dans la période d'évaluation et pour une durée de 36 heures qui représente 10.5% de la période d'évaluation [1534,1872]h. Pour DMC-FF- $[NH]_0$ -24, la valeur maximale de la concentration de l'ammonium $[NH]$ dans l'effluent a été dépassée 10 fois dans la période d'évaluation et pour une durée de 27 heures qui représente 7.98% de la période d'évaluation. Dans DMC-FF- q_0 - $[NH]_0$ -24, la valeur maximale de la concentration de l'ammonium dans l'effluent a été dépassée 8 fois dans la période d'évaluation et pour une durée de 23 heures qui représente 6.9% de la période d'évaluation.

Les variables manipulées du système (q_a débit de recyclage interne, q_r débit de recyclage externe, q_w débit de rejet, kla_3 , kla_4 , kla_5 coefficients de transfert de matière d'oxygène dans les réacteurs 3, 4 et 5 et q_{2in} débit d'ajout en source carbonée) atteignent plus souvent leurs valeurs maximales pour DMC-FF- q_0 -[NH]₀-24 que pour DMC-FB-24 (Figure 5.11). On peut facilement remarquer que les variations de kla_5 sont considérables pour DMC-FF- q_0 -[NH]₀-24 pour réduire la concentration moyenne de l'ammonium dans l'effluent. Ceci augmente la consommation énergétique, surtout l'énergie pour l'aération.

5.3.7 Comparaison de l'ensemble des résultats

La recherche d'une qualité d'eau de sortie la plus propre possible engendre des surcoûts énergétiques qui ne sont généralement pas souhaitables du point de vue global de l'impact environnemental et du coût de fonctionnement du procédé de traitement. Un compromis entre ces deux objectifs est généralement souhaité.

Les résultats statistiques pour les principales différentes stratégies testées sont rassemblés dans le Tableau 5.3.7.

Pour toute concentration moyenne d'ammonium $\overline{[NH]}$ dans l'effluent supérieure à 4 (mg/l) ou toute concentration moyenne d'azote total $\overline{[N]}_{tot}$ dans l'effluent supérieure à 18 (mg/l), le système n'est pas écologique. Dans le Tableau 5.3.7, la meilleure performance de traitement notamment pour la concentration moyenne d'ammonium $\overline{[NH]}$ ainsi que pour la qualité d'eau de sortie (effluent) est obtenue par la stratégie DMC-FF- q_0 -[NH]₀-24. La stratégie DMC-FF- q_0 -[NH]₀-24 permet d'atteindre des niveaux de qualité d'eau très élevés mais au prix d'une consommation énergétique plus importante (énergie de l'aération). La consommation d'énergie de l'aération est augmentée en moyenne de 16% par rapport à la stratégie DMC-FB-24.

La stratégie DMC-FB-24 permettra d'économiser 6% d'énergie par rapport à la stratégie DMC-FF- q_0 -24 pour une même qualité d'effluent. La stratégie DMC-FB-48 donne la meilleure performance pour la concentration moyenne d'azote total $\overline{[N]}_{tot}$. La stratégie DMC-FF-[NH]₀-24 donne presque la même concentration d'azote total $\overline{[N]}_{tot}$ obtenue en DMC-FB-48 avec 10% d'augmentation d'énergie consommée, par contre la qualité d'effluent est de meilleure qualité.

5.4 Conclusion

Afin de continuer à améliorer la qualité de traitement d'eaux usées, deux solutions sont principalement utilisées. Tout d'abord, de nouveaux procédés plus compacts et plus performants sont inventés pour remplacer les procédés traditionnels très extensifs. D'autre part, les procédés actuellement utilisés sont optimisés afin d'améliorer leurs performances, aussi bien du point de vue de la qualité de l'eau rejetée que de la consommation d'énergie et de réactifs. La réduction de ces consommations est aussi importante que l'amélioration

Stratégie	$\overline{[NH]}$ (mg/l)	$\overline{[N]}_{tot}$ (mg/l)	$\overline{[SS]}$ (mg/l)	$\overline{BOD_5}$ (mg/l)	\overline{COD} (mg/l)	Qualité de l'effluent (kg pollution /j)	Energie de pompage (kwh/j)	Energie de l'aération (kwh/j)
DMC-FB-24	1.76	14.64	14.18	2.88	49.77	214.6	409.4	4326
DMC-FB-48	1.82	14.48	14.35	2.90	50.00	215.3	433.2	4285
QDMC-FB-24	1.94	16.25	13.00	2.78	48.20	226.6	405.8	5339
QDMC-FB-48	1.91	15.22	13.55	2.82	48.94	219.93	430.8	4627
DMC-FF- q_0 -24	1.72	14.73	14.36	2.89	50.00	214.79	404.4	4631
QDMC-FF- q_0 -24	1.92	15.77	13.06	2.78	48.28	222.5	399.7	5259
DMC-FF- $[NH]_0$ -24	1.30	14.51	14.60	2.93	50.31	204.48	394.0	4720
DMC-FF- q_0 - $[NH]_0$ -24	1.26	14.64	14.75	2.93	50.50	204.98	410.8	5022

Tableau 5.8 – Résultats statistiques obtenus par les différentes stratégies.

de la qualité de l'effluent car elle permet de réduire l'impact environnemental global et le coût de fonctionnement des procédés de traitement.

Le recours à l'automatisation à l'aide de capteurs permet d'améliorer les procédés existants. Ces capteurs permettent d'avoir un suivi en continu de la pollution présente dans les procédés. Il est ainsi possible d'amener le traitement à son meilleur niveau grâce à des lois de commande de plus en plus sophistiquées.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats des simulations d'une commande prédictive appliquée au benchmark BSM1 de la station d'épuration. Les deux stratégies utilisées de commande prédictive DMC et QDMC d'une station d'épuration ont été présentées avec ou sans compensation de l'effet de perturbations mesurées (le débit entrant q_0 et la concentration entrante en ammonium $[NH]_0$). L'utilisation de la commande par anticipation (Feedforward) a apporté une amélioration des performances pour la compensation de q_0 , mais elle n'était pas très importante, tandis que l'amélioration des performances pour la compensation de $[NH]_0$ était plus importante mais avec une consommation d'énergie plus élevée pour l'aération.

Pour la comparaison des stratégies, quatre critères ont été considérés : les concentrations moyennes en ammoniacque $\overline{[NH]}$ et en azote total $\overline{[N]}_{tot}$ dans l'effluent et la consommation énergétique (somme des énergies utilisées pour le pompage et pour l'aération) ainsi que la qualité d'effluent qui est liée à la concentration moyenne en ammonium $\overline{[NH]}$. Toutes les concentrations moyennes de l'effluent dans le tableau 5.3.7 ont été calculées durant la période de l'évaluation [1534,1872]h. Les simulations ont montré que la meilleure performance de traitement pour la concentration moyenne d'ammonium $\overline{[NH]}$ a été obtenue en DMC-FF- q_0 - $[NH]_0$ -24 au prix d'une consommation énergétique élevée. Cela montre que la prise en compte des perturbations mesurées est importante. La stratégie DMC-FB-48 permet d'économiser de l'énergie, mais elle ne permet pas d'atteindre des niveaux de qualité d'eau très élevés, c'est-à-dire de faible concentration moyenne en ammoniacque $\overline{[NH]}$ dans l'effluent.

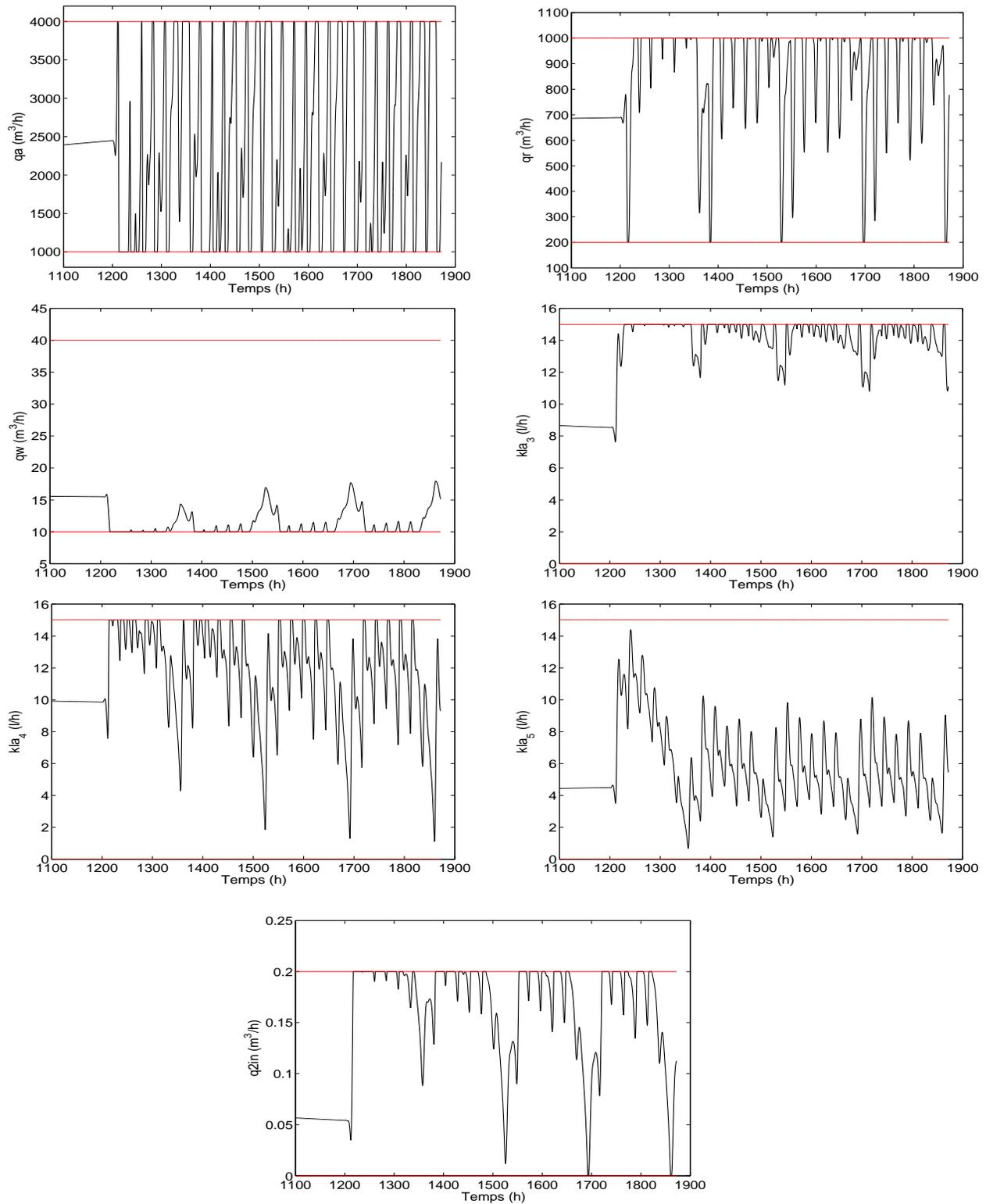


Figure 5.7 – Variables manipulées dans le cas de la commande DMC sans Feedforward. q_a débit de recyclage interne. q_r débit de recyclage externe. q_w débit de rejet. kla_3 , kla_4 , kla_5 coefficients de transfert de matière d'oxygène dans les réacteurs 3, 4 et 5. q_{2in} débit d'ajout en source carbonée.

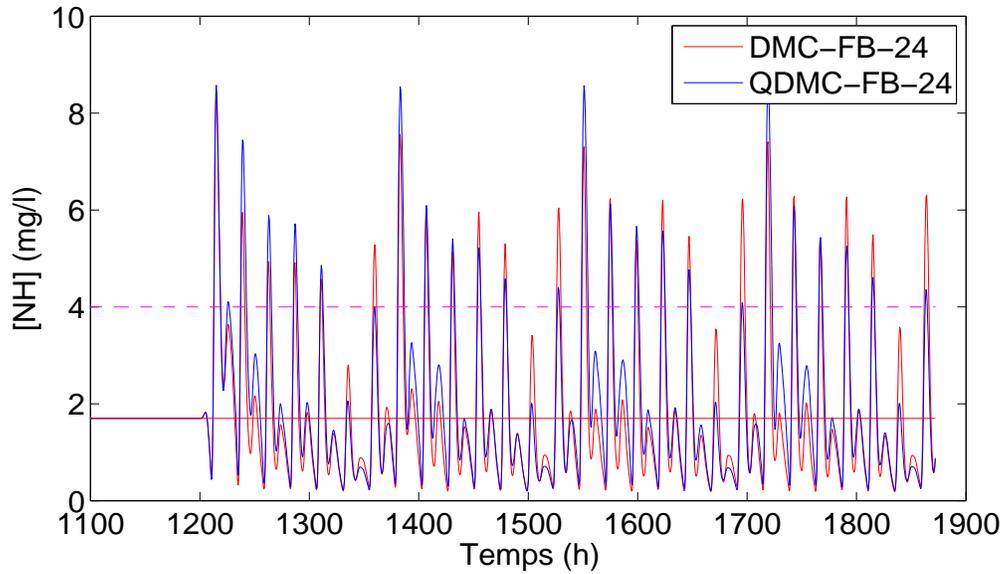


Figure 5.8 – Comparaison entre DMC-FB-24 et QDMC-FB-24. La sortie y est la concentration d'ammonium $[NH]$ dans l'effluent. La ligne pointillée indique la limite supérieure et la ligne rouge représente la consigne.

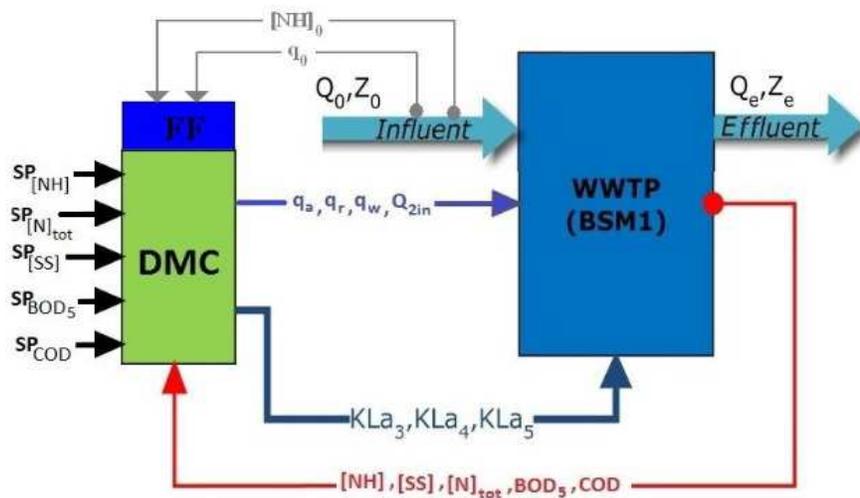


Figure 5.9 – Schéma de principe de la commande DMC avec compensation des perturbations.

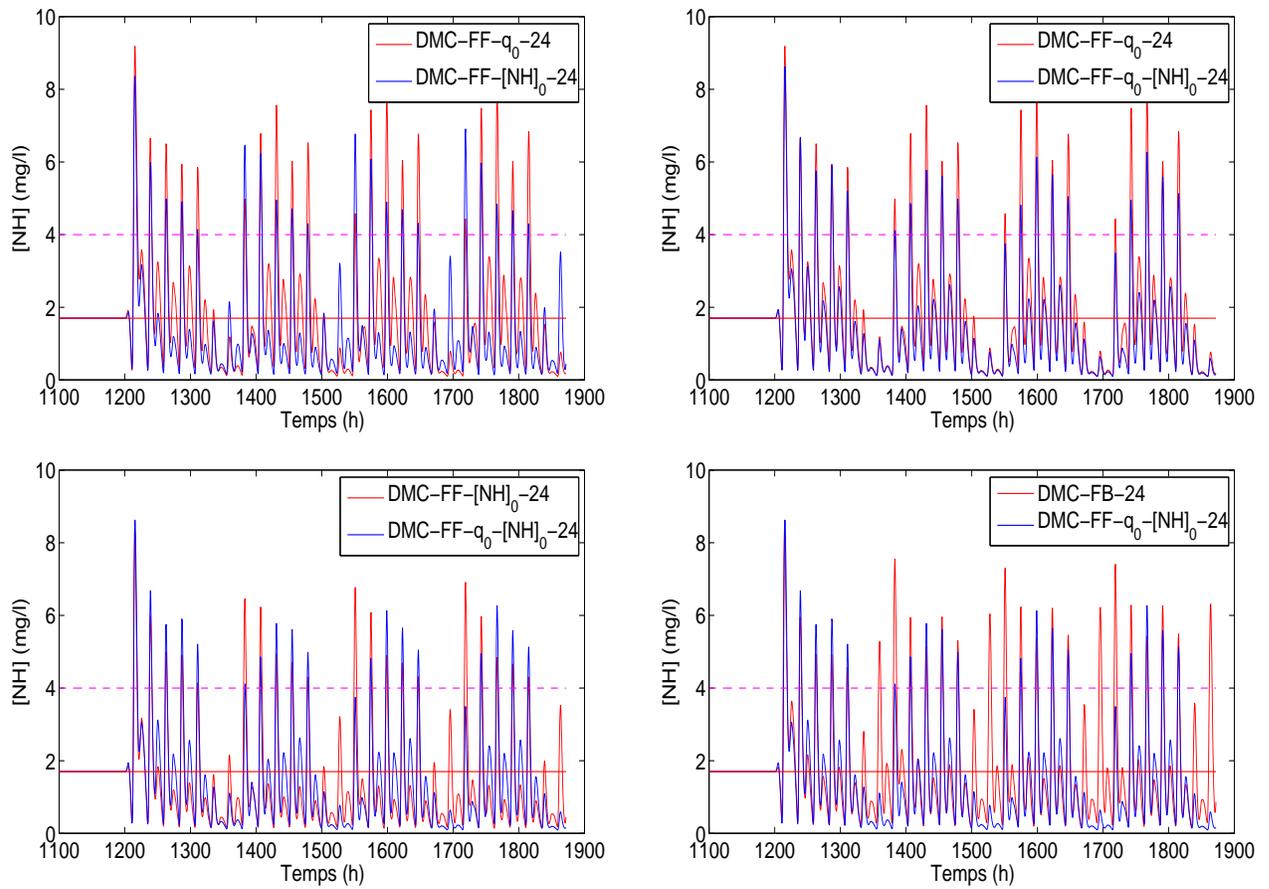


Figure 5.10 – Comparaison entre DMC-FF- q_0 -24, DMC-FF- $[NH]_0$ -24, DMC-FF- q_0 - $[NH]_0$ -24 et DMC-FB-24. La sortie y est la concentration d'ammonium [NH] dans l'effluent. La ligne pointillée indique la limite supérieure et la ligne rouge représente la consigne.

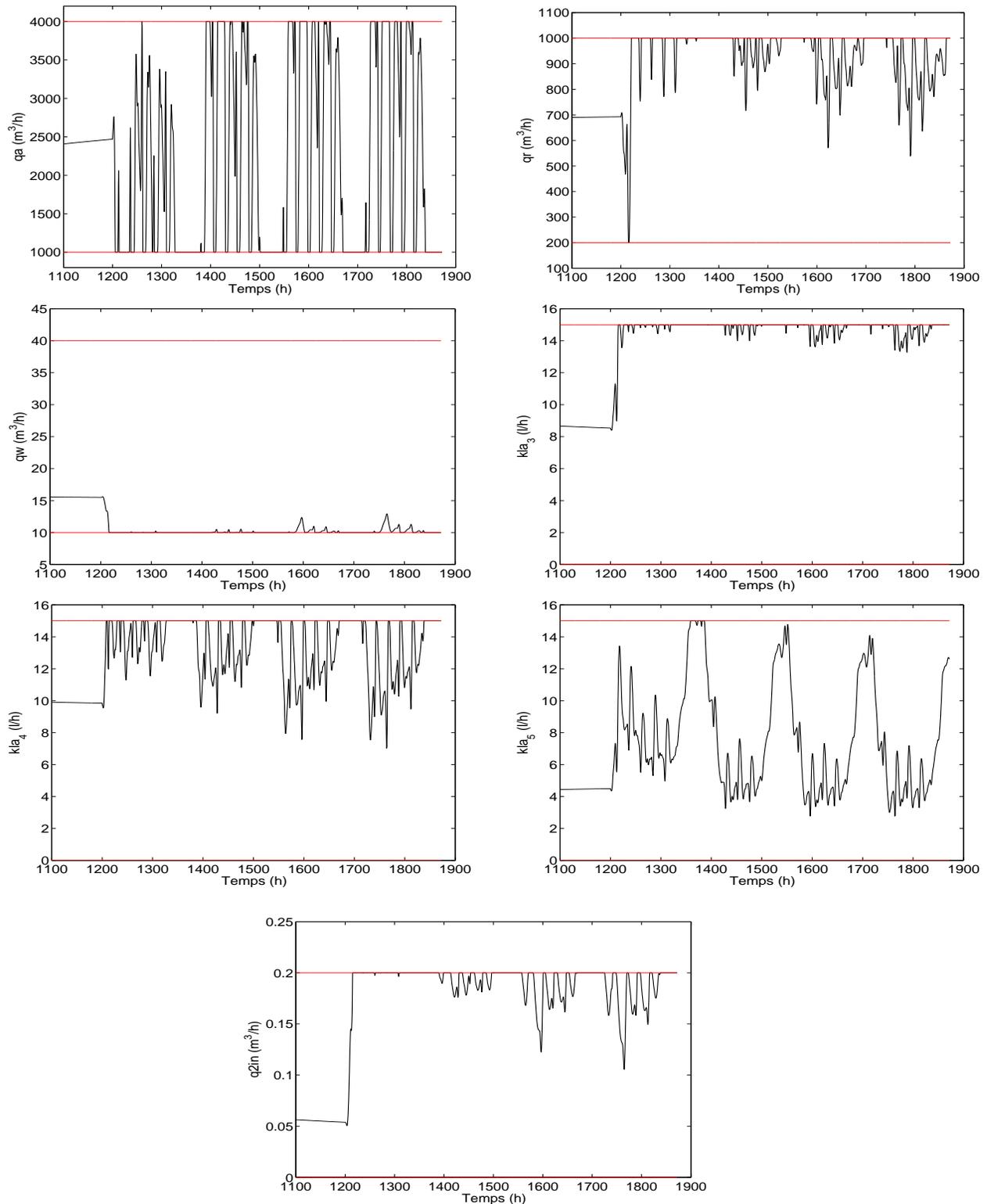


Figure 5.11 – Variables manipulées dans le cas de la commande DMC avec Feedforward. q_a débit de recyclage interne. q_r débit de recyclage externe. q_w débit de rejet. kla_3 , kla_4 , kla_5 , coefficients de transfert de matière d'oxygène dans les réacteurs 3, 4 et 5. q_{2in} débit d'ajout en source carbonée.

Conclusion générale et perspectives

Les stations d'épurations d'eaux usées ont fait l'objet d'un modèle complexe (169 états) mis au point dans le cadre d'un programme européen COST. La complexité du modèle est liée à la variété des types d'opérations unitaires mis en jeu, mais aussi à la variété des représentations de la matière biologique. De plus, ces unités sont soumises à des variations des débits et des compositions d'entrée considérables, pouvant fluctuer de plus de 100% en une journée. Les variations du débit d'eaux usées et de sa composition, combinées avec des réactions variant dans le temps dans une culture mélangée de micro-organismes, font que ce processus est non linéaire et pose un problème difficile pour la commande.

Le benchmark (BSM1) existant sert de référence à de nombreuses équipes de recherche et est considéré comme un modèle réaliste de la station. Il comprend la définition complète du cas d'étude, avec un modèle de station d'épuration virtuelle, des critères de performances à étudier et des jeux de données à simuler.

Plusieurs stratégies des commandes ont été proposées dans la littérature des stations d'épurations. Ces stratégies se distinguent par leurs limites, objectifs et méthodes utilisées. La commande prédictive est la méthode de commande multivariable la plus utilisée dans l'industrie et en particulier dans les industries de procédés.

Un modèle linéaire pour appliquer la commande prédictive a été obtenu en se basant sur un ensemble de réponses du Benchmark BSM1. L'identification d'une station d'épuration d'eaux représentée par le Benchmark a été réalisée en boucle ouverte. Des réponses indicielles à des échelons des entrées d'amplitude variable autour du régime stationnaire ont été déterminées. Des fonctions de transfert continues regroupées en cinq modèles mathématiques, de premier et second ordre avec retard, des réponses inverses, avec parfois des intégrateurs, représentant les réponses indicielles ont été identifiées.

Dans le cas d'un système linéaire, l'amplitude de l'entrée n'a aucune influence sur les coefficients de la réponse indicielle, ce qui était loin d'être vérifié dans notre cas, les gains en particulier étant largement influencés par les amplitudes des entrées. Ainsi, nous avons montré que la station d'épuration d'eaux usées constitue un système fortement

non linéaire qui pose des problèmes certains de représentation par un modèle simplifié et ensuite sur la performance de la commande prédictive.

Plusieurs stratégies de la commande prédictive d'une station d'épuration ont été présentées et pour améliorer la performance de la commande, deux perturbations mesurables ont été considérées dans le système, qui sont le débit entrant et la concentration entrante en ammonium.

Plusieurs simulations avec différentes valeurs de l'horizon de prédiction ont été effectuées pour observer son influence sur les performances de la commande. Nous avons remarqué que pour une valeur plus grande que 45 (périodes d'échantillonnage), le résultat sera dégradé. Par contre, les variables manipulées atteignent la plupart du temps leurs valeurs maximales. Pour assurer que les variables manipulées restent dans une zone de fonctionnement des contraintes physiques, une commande prédictive QDMC (Quadratic Dynamic Matrix Control) a été utilisée où les limites de saturations ont été considérées comme des contraintes.

Une commande par anticipation (Feedforward) a été utilisée pour réduire l'effet des perturbations mesurées (le débit entrant et la concentration entrante en ammonium). L'utilisation de la commande par anticipation a abouti à une amélioration peu importante dans le cas de compensation du débit entrant et une amélioration remarquable dans le cas de compensation de la concentration entrante en ammonium et le cas des deux perturbations mesurées compensées simultanément.

Les résultats des simulations de différentes stratégies de la commande prédictive appliquées au benchmark BSM1 de la station d'épuration nous ont montré que les stratégies qui possèdent une consommation énergétique acceptable ne permettent pas d'atteindre des niveaux de qualité d'eau très élevés, c'est-à-dire de faibles concentrations moyennes en ammoniac et en azote total dans l'effluent. Au contraire, les stratégies qui permettent d'atteindre une meilleure performance de traitement pour des concentrations dans l'effluent d'ammoniac et d'azote total présentent une consommation énergétique plus importante. Un compromis entre la qualité d'eau et l'énergie consommée est généralement souhaité qui résulterait nécessairement en une diminution des performances.

Annexe A

Identification

A.1 Introduction

Les entrées manipulées, sorties commandées et perturbations pour le modèle dans l'espace d'état du benchmark BSM1 sont recensées ci-dessous.

- **Entrées manipulées (u_i) :**

- u_1 : q_a , débit de recyclage interne ($\text{m}^3.\text{h}^{-1}$),
- u_2 : q_r , débit de recyclage externe ($\text{m}^3.\text{h}^{-1}$),
- u_3 : q_w , débit de rejet ($\text{m}^3.\text{h}^{-1}$),
- u_4 : kla_3 , coefficient de transfert de matière d'oxygène du 3^{ème} réacteur (h^{-1}),
- u_5 : kla_4 , coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur (h^{-1}),
- u_6 : kla_5 , coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur (h^{-1}),
- u_7 : q_{2in} , débit d'ajout en source carbonée ($\text{m}^3.\text{h}^{-1}$),

- **Sorties commandées y_i :**

- y_1 : $[NH]$, Concentration d'ammonium (mg.l^{-1}),
- y_2 : $[SS]$, Solides en suspension (mg.l^{-1}),
- y_3 : BDO_5 , Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours (mg.l^{-1}),
- y_4 : DCO , Demande Chimique en Oxygène (mg.l^{-1}),
- y_5 : $[N]_{tot}$, Azote total (mg.l^{-1}),

- **Perturbations :**

- d_1 : q_0 : Débit entrant, ($\text{m}^3.\text{h}^{-1}$),
- d_2 : snh_0 : Concentration entrante en ammonium (mg.l^{-1})

A.2 Réponses indicielles pour les entrées manipulées

A.2.1 Introduction

Le système est modélisé à l'aide de ses réponses à des échelons des entrées manipulées en vue d'obtenir les coefficients h_i des réponses indicielles définis par :

$$h_{ij} = \frac{\delta y_j}{\delta u_i} \quad (\text{A.1})$$

avec $i = 1, \dots, 7$; $j = 1, \dots, 5$; $\delta u_i = u_i - u_i^{ss}$; $\delta y_j = y_j - y_j^{ss}$.

Dans cet appendice, les coefficients des réponses indicielles sont nommés comme réponse indicielle normalisée, qui correspondrait à un échelon unité.

L'ensemble des réponses indicielles normalisées a été systématiquement rassemblé dans l'appendice afin que les chercheurs puissent trouver les informations nécessaires en particulier en vue de la conception d'une commande linéaire tout en tenant compte de non linéarités.

Chaque couple $\{u_i, y_j\}$ est caractérisé par un type de fonction de transfert :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_u(s) \quad (\text{A.2})$$

et les non linéarités sont représentées graphiquement.

A.2.2 Modèles des réponses à des échelons des entrées

h_{11} : Influence du débit de recyclage interne q_a sur la concentration d'ammonium $[NH]$.

Le couple $\{u_1, y_1\}$ est modélisé par un second ordre apparent, en fait un premier ordre relatif, avec un coefficient d'avance α avec un retard égal à 1,5 :

$$G_{u,11}(s) = K \frac{\alpha s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = 12.1^{-5}$, $\alpha = 20$, $\tau_1 = 3.2$, $\tau_2 = 3.1$, $r = 1.5$.

Le numérateur $(\alpha s + 1)$ constitue un terme d'avance pour le système formé par le couple. Lorsque α est négatif, le couple présente une réponse inverse.

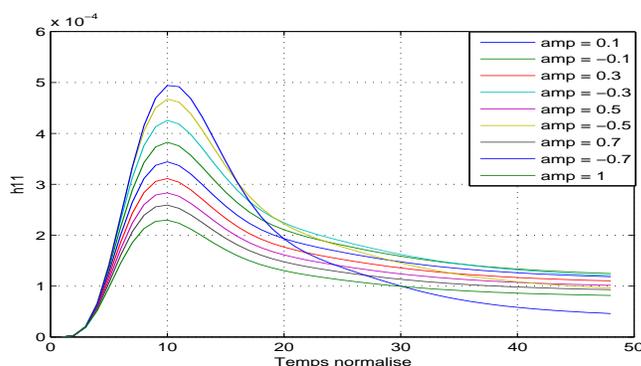


Figure A.1 – Réponse indiciale normalisée de la concentration d'ammonium $[NH]$ à des variations du débit de recyclage interne q_a

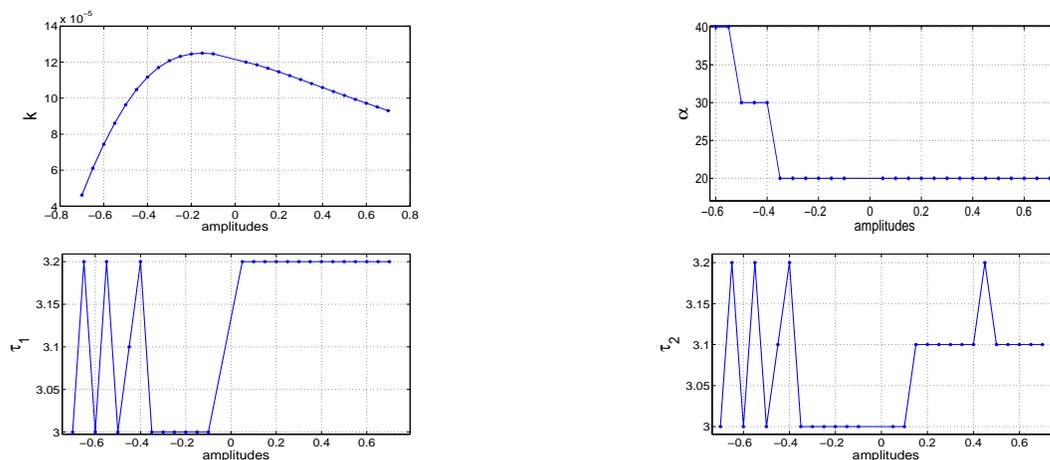


Figure A.2 – Gain K , α , τ_1 et τ_2 de h_{11} en fonction des différentes amplitudes de q_a .

Les variations positives de q_a autour de sa valeur stationnaire entraînent une croissance de la biomasse hétérotrophe X_{bh} . Lors de l'absence de l'oxygène (réacteurs anoxies),

la biomasse X_{bh} utilise les nitrates pour l'ammonification de l'azote organique soluble S_{ND} (dénitrification). La dénitrification est inhibée par la présence de l'oxygène dissous S_O surtout dans le réacteur anoxie 1. Pour cette raison, la non-linéarité de la réponse indicielle normalisée h_{11} (figure A.1) est conditionnée par les variations liées aux réactions biologiques incluant la conversion et la dégradation des substrats en sous-produits, mais elle dépend également des variations liées aux flux d'entrée et de sortie incluant l'hydrodynamique.

L'optimisation selon les moindres carrés rencontre des difficultés dans le cas où il est nécessaire de calculer plus de deux paramètres du modèle mathématique (figure A.2). En fait, τ_1 et τ_2 peuvent être considérés comme constants.

h_{21} : Influence du débit de recyclage externe q_r sur la concentration d'ammonium $[NH]$.

Réponse inverse avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,21}(s) = \left(\frac{K_1}{\tau_1 s + 1} + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} \right) \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 0.01$, $K_2 = -0.01$, $\tau_1 = 3.5$, $\tau_2 = 4.2$, $r = 1$.

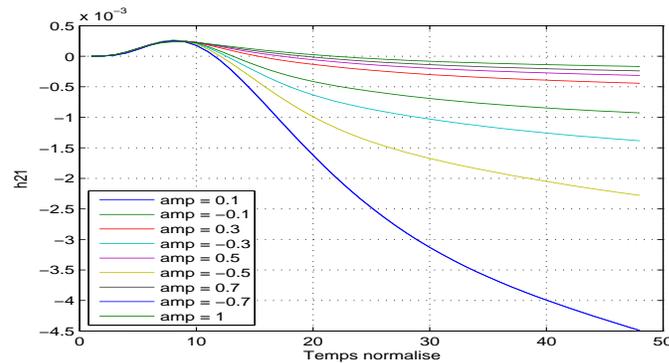


Figure A.3 – Réponse indicielle normalisée de la concentration d'ammonium $[NH]$ à des variations de débit de recyclage externe q_r

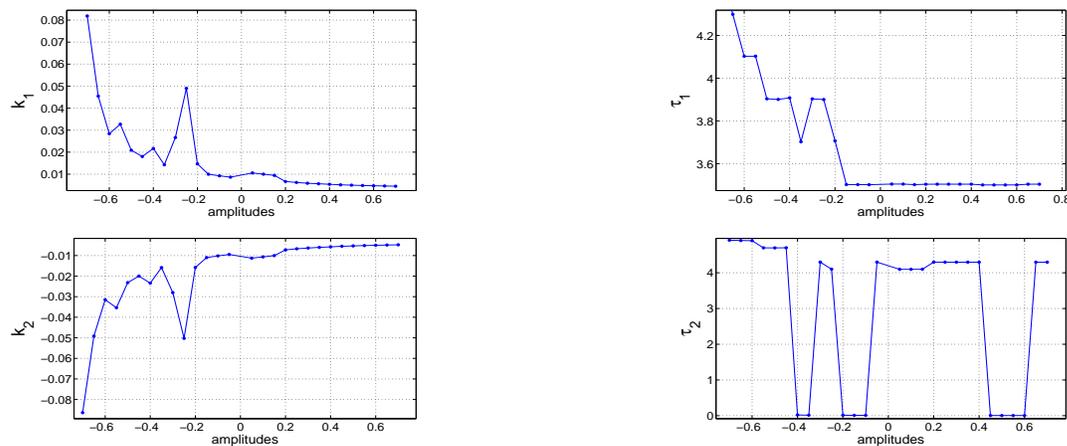


Figure A.4 – k_1 , τ_1 , k_2 et τ_2 de h_{21} en fonction des différentes amplitudes de q_r .

Les variations positives de q_r autour sa valeur stationnaire entraînent une augmentation importante de la quantité de biomasses autotrophe X_{ba} et hétérotrophe X_{bh} . En revanche, le bon fonctionnement de leur métabolisme et leur croissance n'est pas assuré

ce qui provoque une mortalité des biomasses hétérotrophe et autotrophe assez importante. Les cellules mortes sont transformées ensuite en matière particulaire inerte X_I et en substrat lentement biodégradable X_S .

h_{31} : Influence du débit de rejet q_w sur la concentration d'ammonium $[NH]$.

Premier ordre + Intégrateur avec un retard égal à 7 :

$$G_{u,31}(s) = \frac{K_1}{s} \exp(-rs) + \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 0.8 \cdot 10^{-3}$, $K_2 = -7.1 \cdot 10^{-3}$, $\tau = 7.43$, $r = 7$.

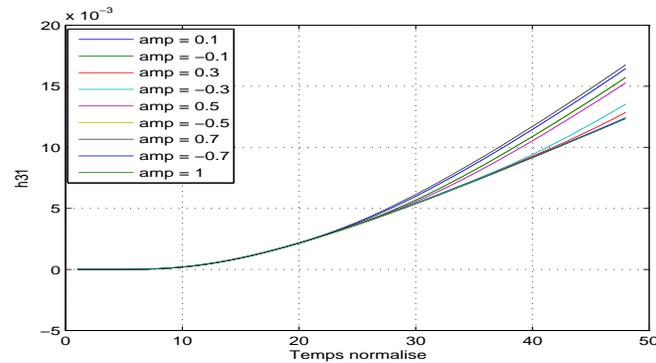


Figure A.5 – Réponse indicielle normalisée de la concentration d'ammonium $[NH]$ à des variations du débit de rejet q_w .

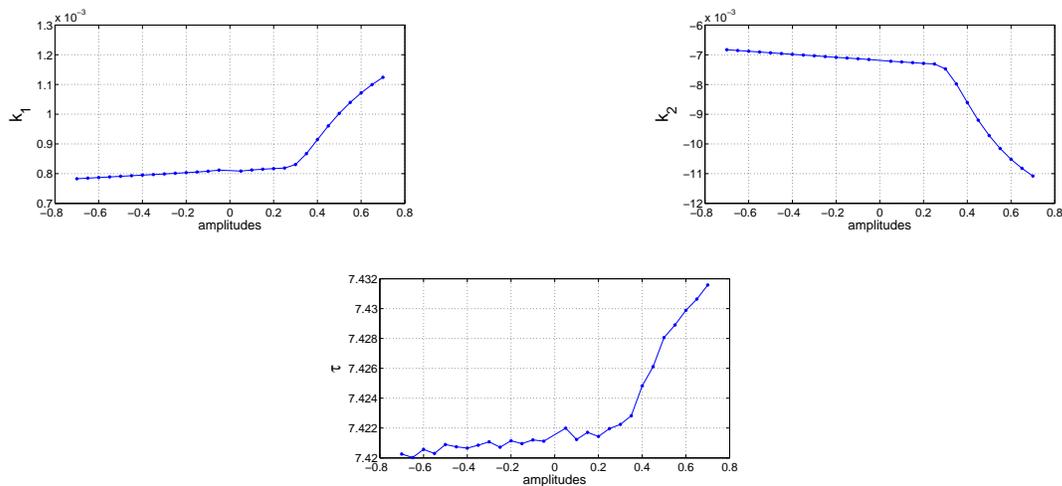


Figure A.6 – k_1 , k_2 et τ de h_{31} en fonction des différentes amplitudes de q_w .

Les variations positives de q_w autour sa valeur stationnaire diminuent la quantité de biomasse autotrophe X_{ba} et hétérotrophe X_{bh} . Pour une variation de q_w supérieure à 20% autour de sa valeur stationnaire (figure A.6), le gain k_2 (négatif) augmente en valeur absolue. La constante de temps τ est quasiment constante.

h_{41} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 3^{ème} réacteur kla_3 sur la concentration d'ammonium $[NH]$.

Second ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,41}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = -0.25$, $\tau = 4$, $r = 1$.

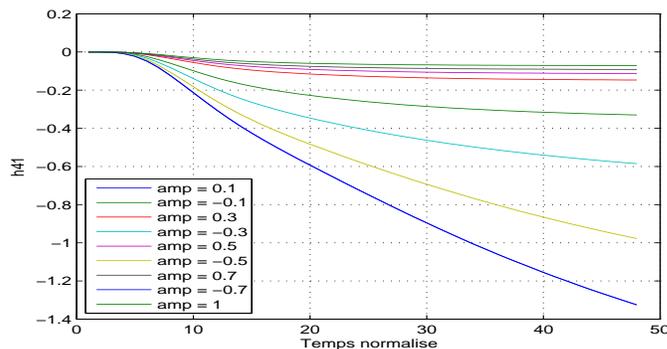


Figure A.7 – Réponse indicielle normalisée de la concentration d'ammonium $[NH]$ à des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 3^{ème} réacteur kla_3 .



Figure A.8 – k et τ de h_{41} en fonction des différentes amplitudes de kla_3 .

Les variations positives de kla_3 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O du réacteur aérobie 3. Une partie de l'oxygène dissous est utilisée pour l'élimination du carbone. La dégradation du substrat rapidement dégradé S_S est utilisée pour assurer la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Une partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) d'où une production des bactéries autotrophes X_{ba} . Les valeurs du gain k et de la constante de temps τ changent rapidement dans le cas de variations négatives de kla_3 autour sa valeur stationnaire alors que leurs valeurs changent lentement dans le cas de variations positives (figure A.8).

h_{51} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4 sur la concentration d'ammonium $[NH]$.

Second ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,51}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = -0.25$, $\tau = 4$, $r = 1$.

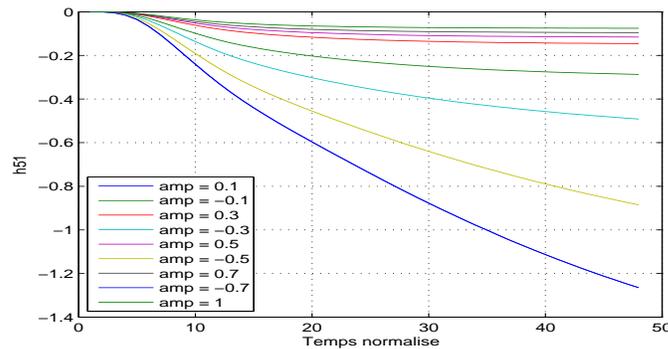


Figure A.9 – Réponse indicielle normalisée de la concentration d'ammonium $[NH]$ à des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4 .



Figure A.10 – k et τ de h_{51} en fonction des différentes amplitudes de kla_4 .

Les variations positives de kla_4 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 4. Une partie de l'oxygène dissous est utilisée pour l'élimination du carbone ce qui assure la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} et l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) entraînant la production des bactéries autotrophes X_{ba} . Les valeurs du gain k et de la constante de temps τ changent rapidement pour des variations négatives de kla_4 autour sa valeur stationnaire alors qu'elles changent plus lentement pour des variations positives de kla_4 (figure A.10).

h_{61} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5 sur la concentration d'ammonium $[NH]$.

Second ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,61}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = -0.82$, $\tau = 3$, $r = 1$.

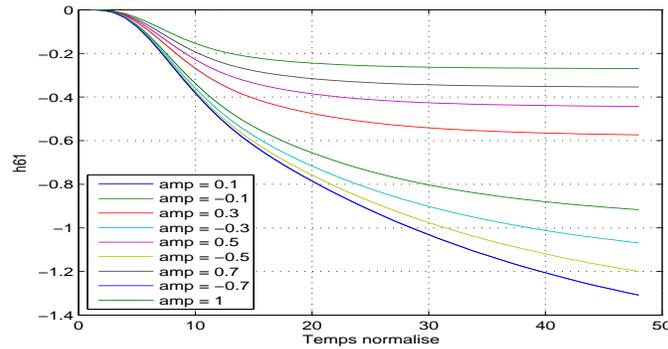


Figure A.11 – Réponse indicielle normalisée de la concentration d'ammonium $[NH]$ à des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5 .



Figure A.12 – k et τ de h_{61} en fonction des différentes amplitudes de kla_5 .

Les variations positives de kla_5 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 5. Une partie de l'oxygène dissous est utilisée pour l'élimination du carbone ce qui assure la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} et l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) d'où la production des bactéries autotrophes X_{ba} . Le gain k et la constante de temps τ changent de valeur pour chaque variation de kla_5 autour sa valeur stationnaire (figure A.12).

h_{71} : Influence du débit d'ajout en source carbonée q_{2in} sur la concentration d'ammonium $[NH]$.

Second ordre avec un retard égal à 5 :

$$G_{u,71}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = -1.01$, $\tau = 1.65$, $r = 5$.

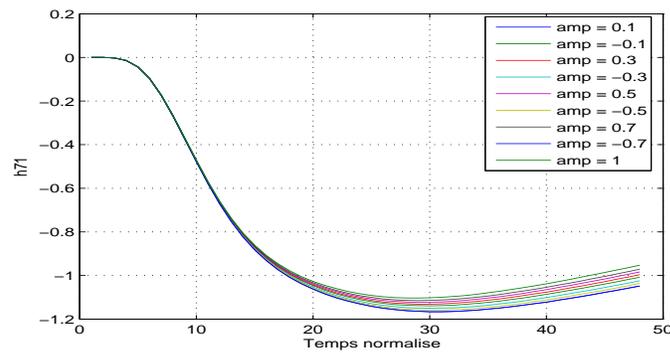


Figure A.13 – Réponse indicielle normalisée de la concentration d'ammonium $[NH]$ à des variations du débit d'ajout en source carbonée q_{2in}



Figure A.14 – k et τ de h_{71} en fonction des différentes amplitudes de q_{2in} .

L'ajout de carbone dans le réacteur 2 (anoxie) provoque une légère production des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Pour chaque variation de débit d'ajout en source carbonée q_{2in} , le gain k et la constante de temps τ changent (figure A.14).

h_{12} : Influence du débit de recyclage interne q_a sur les solides en suspension [SS].

Second ordre avec une avance (terme $\alpha s + 1$) :

$$G_{u,12}(s) = K \frac{\alpha s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Valeurs des paramètres : $K = 1.3$, $\tau_1 = 1.1$, $\tau_2 = 1.1$, $\alpha = 5$.

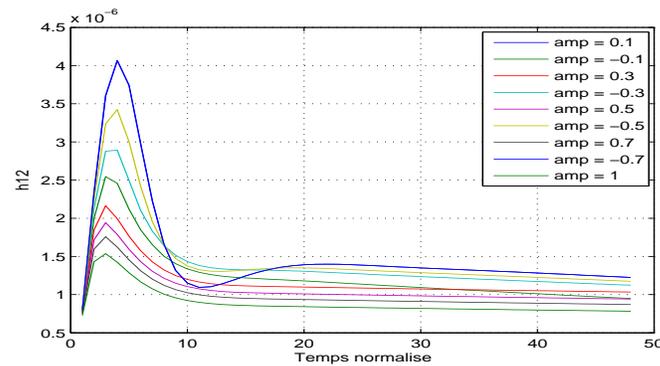


Figure A.15 – Réponse indicielle normalisée des solides en suspension [SS] à des variations de débit de recyclage interne q_a

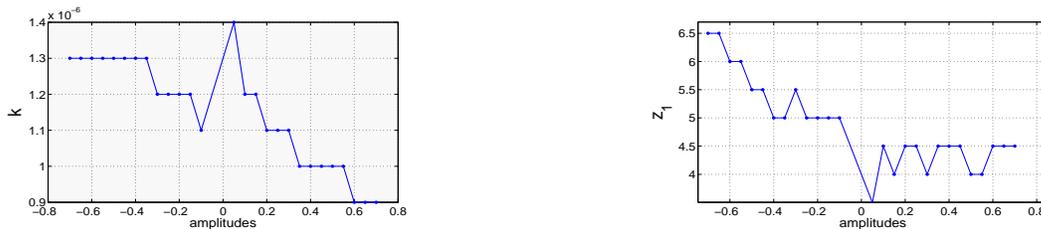


Figure A.16 – gain K , coefficient d'avance α de h_{12} en fonction des différentes amplitudes de q_a .

Les variations positives de q_a réduisent la quantité de substrat lentement biodégradable X_S . Le substrat lentement biodégradable X_S est dégradé en produisant le substrat rapidement biodégradable S_S disponible aux biomasses pour la croissance (hydrolyse de la matière organique). Il faut noter que l'optimisation selon les moindres carrés est difficile pour le calcul des valeurs des coefficients K , α (figure A.16). Les constantes de temps τ_1 et τ_2 ne dépendent pas de l'amplitude.

h_{22} : Influence du débit de recyclage externe q_r sur les solides en suspension [SS].

Premier ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,22}(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = 1.5 \cdot 10^{-3}$, $\tau = 1.75$, $r = 1$.

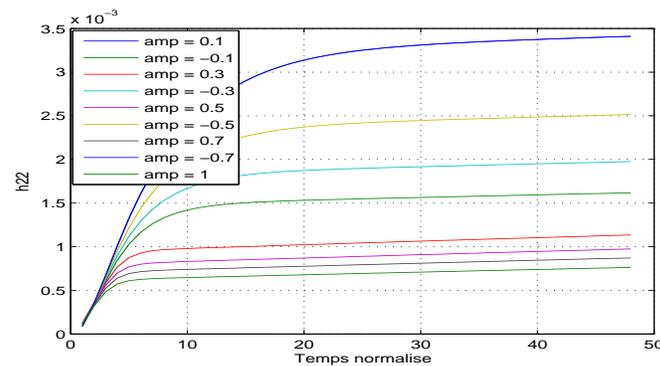


Figure A.17 – Réponse indicielle normalisée des solides en suspension [SS] à des variations du débit de recyclage externe q_r



Figure A.18 – K et τ_1 de h_{22} en fonction des différentes amplitudes de q_r .

Les variations positives de q_r résultent en une augmentation des biomasses autotrophe X_{ba} et hétérotrophe X_{bh} dans le réacteur 1 (anoxie). La croissance des biomasses n'est pas assurée, la quantité des substrats biodégradables n'est pas suffisante. Les bactéries mortes X_P sont transformées ensuite en matière particulaire inerte X_I et en substrat lentement biodégradable X_S . Le gain du système de premier ordre K (figure A.18) dépend des variations de débit de recyclage externe q_r autour de sa valeur stationnaire.

h_{32} : Influence du débit de rejet q_w sur les solides en suspension [SS].

Premier ordre + Intégrateur avec un retard égal à 4 :

$$G_{u,32}(s) = \frac{K_1}{s} \exp(-rs) + \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = -7 \cdot 10^{-4}$, $K_2 = -0.0128$, $\tau = 3.5$, $r = 4$.

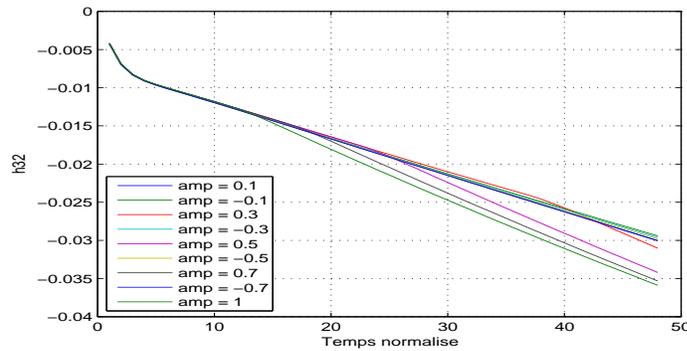


Figure A.19 – Réponse indiciale normalisée des solides en suspension [SS] à des variations du débit de rejet q_w



Figure A.20 – k_1 , k_2 de h_{32} en fonction des différentes amplitudes de q_w .

Les variations positives de q_w réduisent la quantité des biomasses autotrophe X_{ba} et hétérotrophe X_{bh} dans les réacteurs. Les gains k_1 , k_2 (figure A.20) dépendent des variations du débit de recyclage externe q_r autour de sa valeur stationnaire, tandis que τ est inchangé.

h_{42} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 3^{ème} réacteur kla_3 sur les solides en suspension $[SS]$.

Premier ordre + Intégrateur avec un retard égal à 5 :

$$G_{u,42}(s) = \frac{K_1}{s} \exp(-rs) + \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 10^{-6}$, $K_2 = -0.4 \cdot 10^{-4}$, $\tau = 1.25$, $r = 5$.

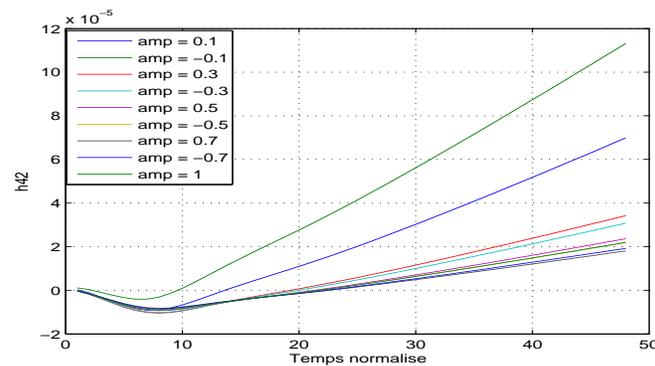


Figure A.21 – Réponse indicielle normalisée des solides en suspension $[SS]$ à des variations de coefficient de transfert de matière d'oxygène du 3^{ème} réacteur kla_3



Figure A.22 – k_1 , k_2 de h_{42} en fonction des différentes amplitudes de kla_3 .

Les variations positives de kla_3 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 3. Une partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) d'où une production des bactéries autotrophes X_{ba} . Une autre partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour la dégradation du substrat rapidement dégradable S_S . Cette dégradation assure la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} . On remarque bien que les valeurs de k_1 , k_2 dépendent des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 3^{ème} réacteur kla_3 (figure A.22). La constante de temps τ est indépendante de l'amplitude.

h_{52} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4 sur les solides en suspension $[SS]$.

Premier ordre + Intégrateur avec un retard égal à 5 :

$$G_{u,52}(s) = \frac{K_1}{s} \exp(-rs) + \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 0.3 \cdot 10^{-5}$, $K_2 = -0.3 \cdot 10^{-4}$, $\tau = 1.25$, $r = 5$.

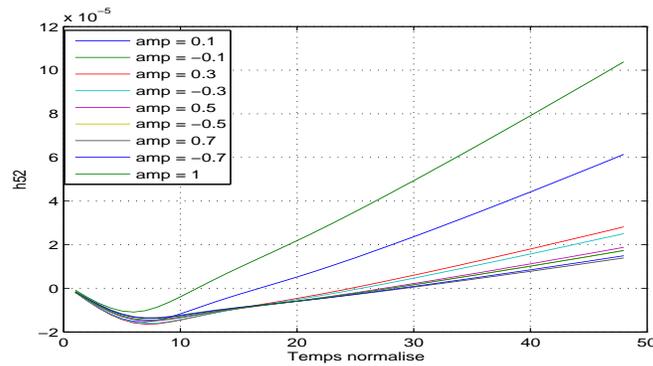


Figure A.23 – Réponse indicielle normalisée des solides en suspension $[SS]$ à des variations de coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4

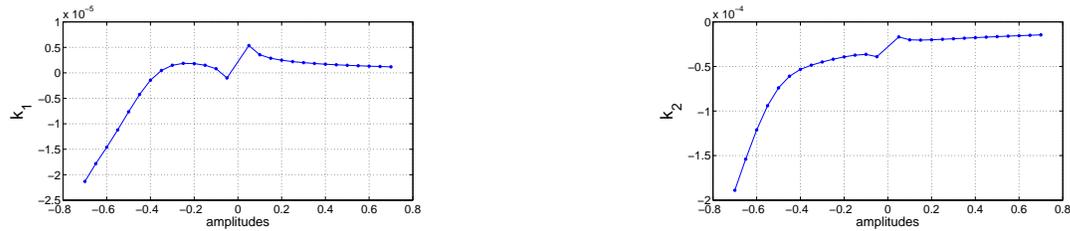


Figure A.24 – k_1 , k_2 de h_{52} en fonction des différentes amplitudes de kla_4 .

Les variations positives de kla_4 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 4. Une partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour la dégradation du substrat rapidement dégradable S_S . Cette dégradation assure la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Une autre partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) d'où une production des bactéries autotrophes X_{ba} . Les valeurs de k_1 , k_2 dépendent des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4 (figure A.24). La constante de temps τ est indépendante de l'amplitude.

h_{62} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5 sur les solides en suspension $[SS]$.

Premier ordre + Intégrateur avec un retard égal à 5 :

$$G_{u,62}(s) = \frac{K_1}{s} \exp(-rs) + \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 2 \cdot 10^{-5}$, $K_2 = -4 \cdot 10^{-4}$, $\tau = 11.5$, $r = 5$.

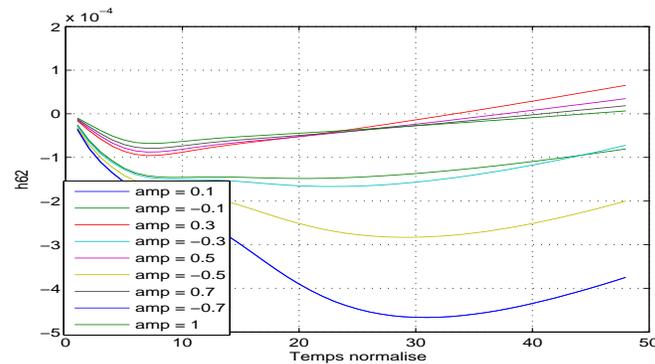


Figure A.25 – Réponse indicielle normalisée des solides en suspension $[SS]$ à des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5

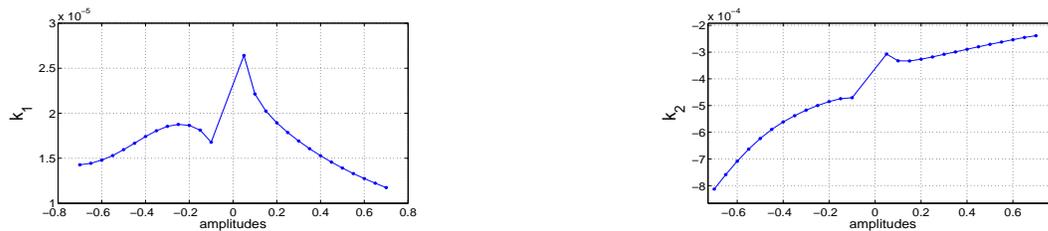


Figure A.26 – k_1 , k_2 de h_{62} en fonction des différentes amplitudes de kla_4 .

Les variations positives de kla_5 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 5. Une partie de l'oxygène dissous est utilisée pour l'élimination du carbone ce qui assure la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} et l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) d'où la production des bactéries autotrophes X_{ba} . Les valeurs de k_1 , k_2 (Figure A.26) dépendent des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5 . La constante de temps τ est indépendante de l'amplitude.

h_{72} : Influence du débit d'ajout en source carbonée q_{2in} sur les solides en suspension $[SS]$.

Premier ordre + Intégrateur avec un retard égal à 5 :

$$G_{u,72}(s) = \frac{K_1}{s} \exp(-rs) + \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 2.8 \cdot 10^{-3}$, $K_2 = 0.08$, $\tau = 11.0$, $r = 5$.

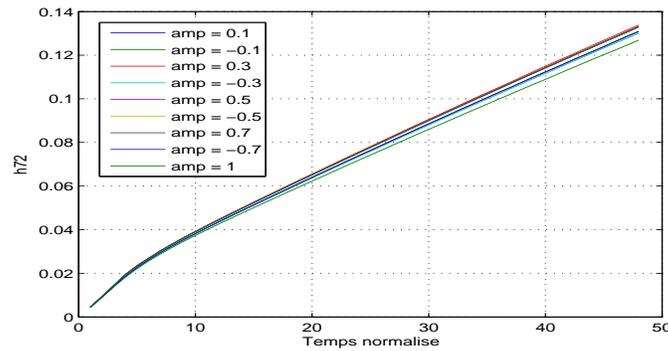


Figure A.27 – Réponse indicielle normalisée des solides en suspension $[SS]$ à des variations du débit d'ajout en source carbonée q_{2in}



Figure A.28 – k_1 , k_2 de h_{72} en fonction des différentes amplitudes de q_{2in} .

L'ajout de carbone dans le réacteur 2 (anoxie) provoque une légère production des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Les valeurs de k_1 , k_2 dépendent des variations du débit d'ajout en source carbonée q_{2in} (figure A.28). La constante de temps τ est indépendante de l'amplitude.

h_{13} : Influence du débit de recyclage interne q_a sur la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 .

Second ordre avec une avance et un retard égal à 2 :

$$G_{u,13}(s) = K \frac{\alpha s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = 6 \cdot 10^{-6}$, $\alpha = 10$, $\tau_1 = 1.8$, $\tau_2 = 5$, $r = 2$.

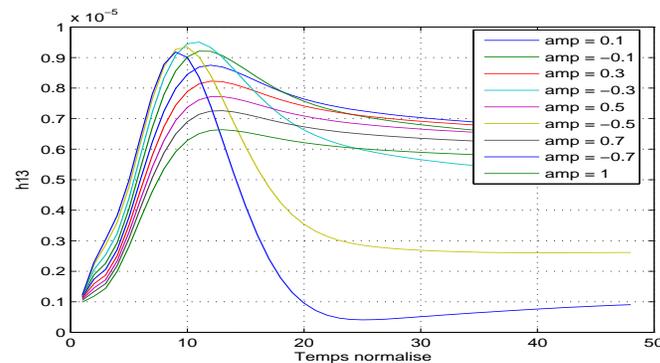


Figure A.29 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 à des variations du débit de recyclage interne q_a .

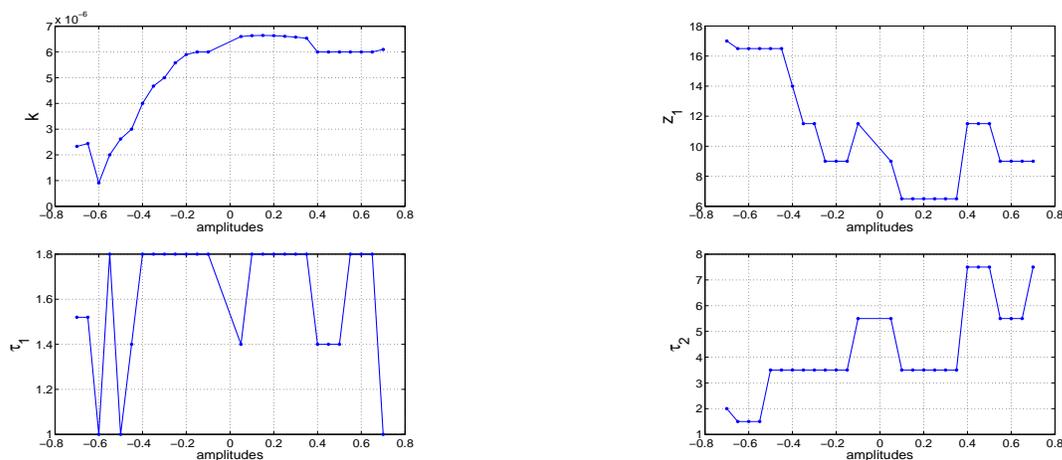


Figure A.30 – gain K , coefficient d'avance z_1 , τ_1 et τ_2 de h_{13} en fonction des différentes amplitudes de q_a .

Pour assurer la croissance, les biomasses X_{bh} utilisent les nitrates avec S_S comme substrat. Le substrat lentement biodégradable X_S est dégradé en produisant le substrat rapidement biodégradable S_S . L'optimisation selon les moindres carrés n'arrive pas à calculer facilement les valeurs des coefficients K , α , τ_1 et τ_2 (figure A.30).

h_{23} : Influence du débit de recyclage externe q_r sur la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 .

Premier ordre sans retard :

$$G_{u,23}(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K = 2.6 \cdot 10^{-4}$, $\tau = 1.75$.

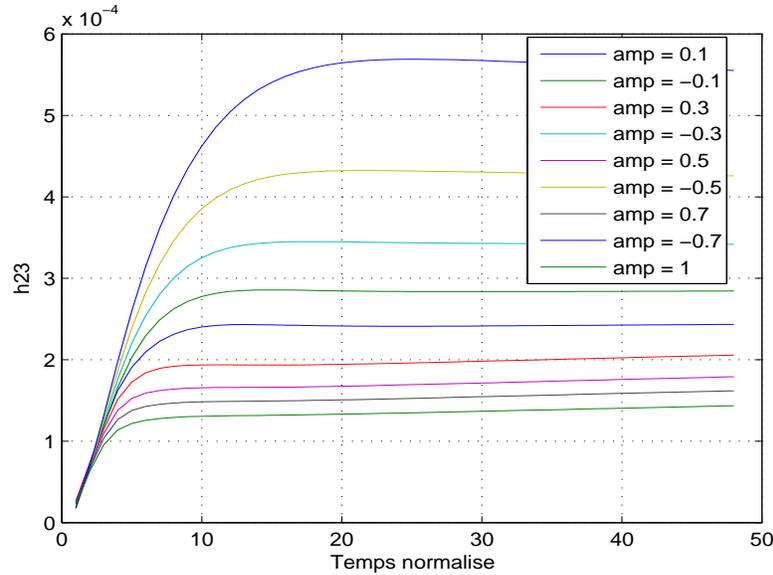


Figure A.31 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 à des variations du débit de recyclage externe q_r .



Figure A.32 – K et τ_1 de h_{23} en fonction des différentes amplitudes de q_r .

Les variations positives de q_r augmentent la quantité des biomasses X_{bh} et X_{ba} dans le réacteur anoxie 1. Cette augmentation des biomasses a pour conséquence plus de consommation des substrats rapidement biodégradable S_S et lentement biodégradable X_S . Le gain K et la constante de temps τ_1 du modèle mathématique dépendent des variations du débit de recyclage externe q_r , toutefois la constante de temps τ_1 varie plus faiblement que le gain.

h_{33} : Influence du débit de rejet q_w sur la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 .

Premier ordre + Intégrateur avec un retard égal à 4 :

$$G_{u,33}(s) = \frac{K_1}{s} \exp(-rs) + \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = -1.15 \cdot 10^{-4}$, $K_2 = -2.55 \cdot 10^{-3}$, $\tau = 3.9$, $r = 4$.

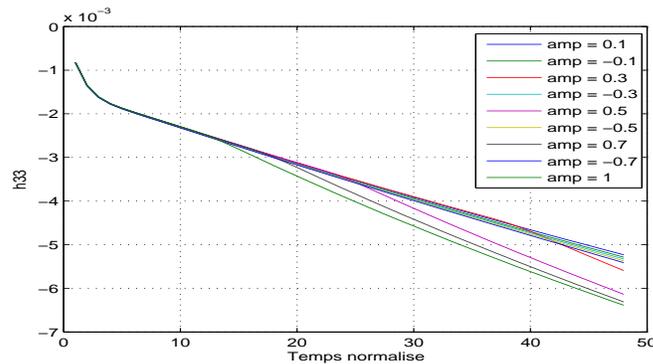


Figure A.33 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 à des variations du débit de rejet q_w .



Figure A.34 – k_1 , k_2 de h_{33} en fonction des différentes amplitudes de q_w .

Les variations de q_w autour sa valeur stationnaire ont une influence directe sur les quantités de biomasses autotrophe X_{ba} et hétérotrophe X_{bh} qui se trouvent dans le système. Les variations positives de q_w réduisent ces quantités des biomasses dans les réacteurs. Pour des variations inférieures à 20% de la valeur stationnaire, les gains k_1 de l'intégrateur et k_2 du système du premier ordre ont des valeurs négatives respectivement de l'ordre $-1.1 \cdot 10^{-4}$ et $-2.55 \cdot 10^{-4}$ ce qui n'est pas le cas pour des variations de q_w supérieures à 20% de la valeur stationnaire (figure A.34). La constante de temps τ est indépendante de l'amplitude.

h_{43} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 3^{ème} réacteur kla_3 sur la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 .

Second ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,43}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = -0.003$, $\tau = 4$, $r = 1$.

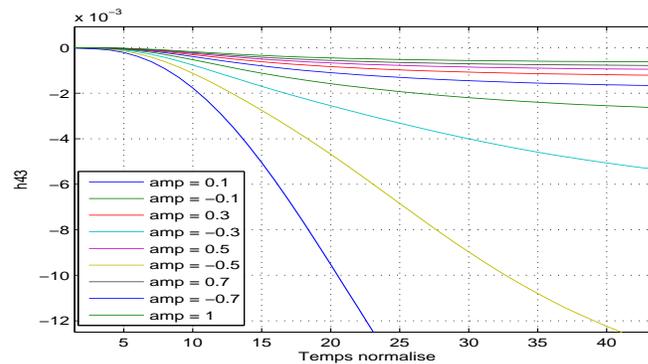


Figure A.35 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 à des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 3^{ème} réacteur kla_3 .



Figure A.36 – K et τ de h_{43} en fonction des différentes amplitudes de kla_3 .

Les variations positives de kla_3 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 3. Une partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) entraînant une production des bactéries autotrophes X_{ba} . Une autre partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour la dégradation du substrat rapidement dégradable S_S . Cette dégradation assure la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} . La constante de temps τ est égale à 4 et ne dépend pas des variations de kla_3 autour sa valeur stationnaire. Par contre, le gain K dépend des variations de kla_3 (figure A.36).

h_{53} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4 sur la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 .

Second ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,53}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = -0.003$, $\tau = 4.5$, $r = 1$.

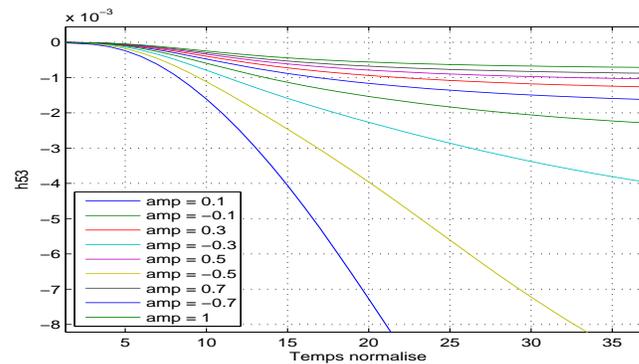


Figure A.37 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 à des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4 .



Figure A.38 – K et τ de h_{53} en fonction des différentes amplitudes de kla_4 .

Les variations positives de kla_4 augmente la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 4. L'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) provoque la production des biomasses autotrophes X_{ba} et la consommation de l'oxygène dissous. La dégradation du substrat rapidement dégradables S_S assure la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Le gain K et la constante de temps τ (figure A.38) dépendent des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4 .

h_{63} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5 sur la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 .

Second ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,63}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = -0.008$, $\tau = 3.85$, $r = 1$.

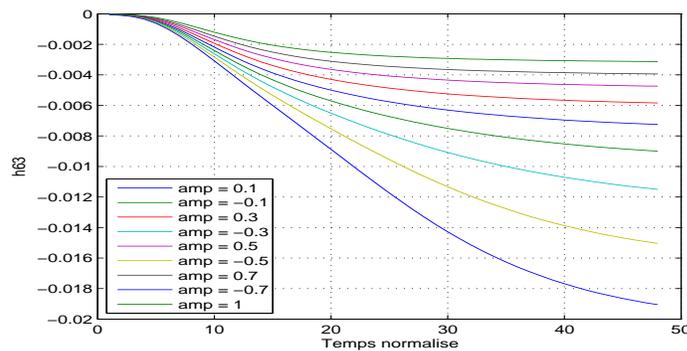


Figure A.39 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 à des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5 .

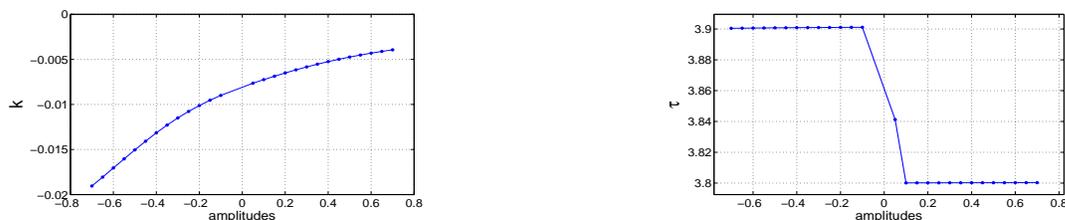


Figure A.40 – K et τ de h_{63} en fonction des différentes amplitudes de kla_5 .

Les variations positives de kla_5 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 5. Une partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) entraînant une production des bactéries autotrophes X_{ba} . Une autre partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour la dégradation du substrat rapidement dégradables S_S . Cette dégradation assure la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Le gain K (figure A.40) dépend des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5 autour sa valeur stationnaire. La constante de temps τ peut être considérée comme fixe.

h_{73} : Influence du débit d'ajout en source carbonée q_{2in} sur la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 .

Premier ordre + Intégrateur avec un retard égal à 5 :

$$G_{u,73}(s) = \frac{K_1}{s} \exp(-rs) + \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 2.9 \cdot 10^{-3}$, $K_2 = 0.0369$, $\tau = 11.04$, $r = 5$.

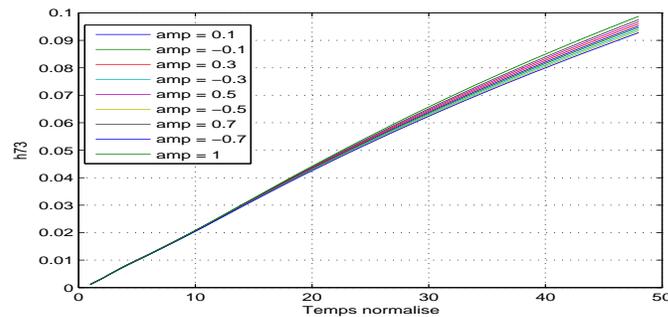


Figure A.41 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 à des variations du débit d'ajout en source carbonée q_{2in}

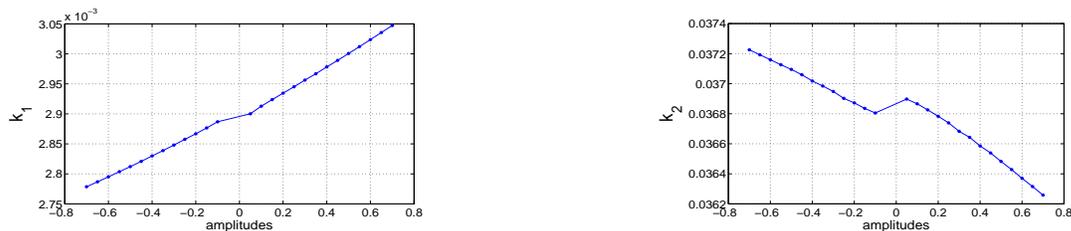


Figure A.42 – k_1 , k_2 de h_{73} en fonction des différentes amplitudes de q_{2in} .

Les variations positives de débit d'ajout en source carbonée q_{2in} augmentent la quantité du substrat rapidement biodégradable S_S dans le réacteur anoxie 2. Le gain k_1 de l'intégrateur dépend des variations du débit d'ajout en source carbonée q_{2in} autour de sa valeur stationnaire (figure A.42), ainsi que le gain k_2 du système du premier ordre. La constante de temps τ du système du premier ordre est indépendante de l'amplitude.

h_{14} : Influence du débit de recyclage interne q_a sur la Demande Chimique en Oxygène DCO .

Second ordre avec une avance et un retard égal à 2 :

$$G_{u,14}(s) = K \frac{\alpha s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = 2.5 \cdot 10^{-5}$, $\tau_1 = 2.2$, $\tau_2 = 2.4$, $r = 2$. $\alpha = 7.5$

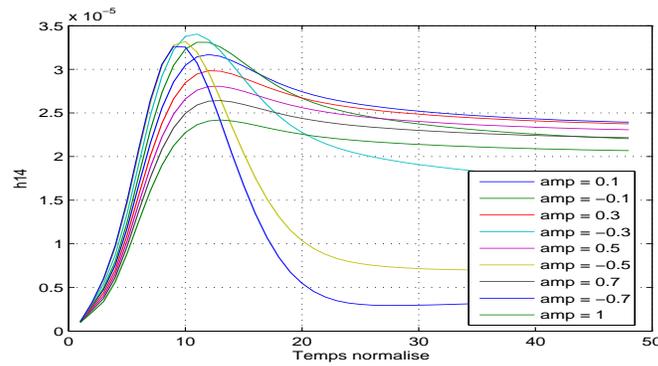


Figure A.43 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Chimique en Oxygène DCO à des variations du débit de recyclage interne q_a .

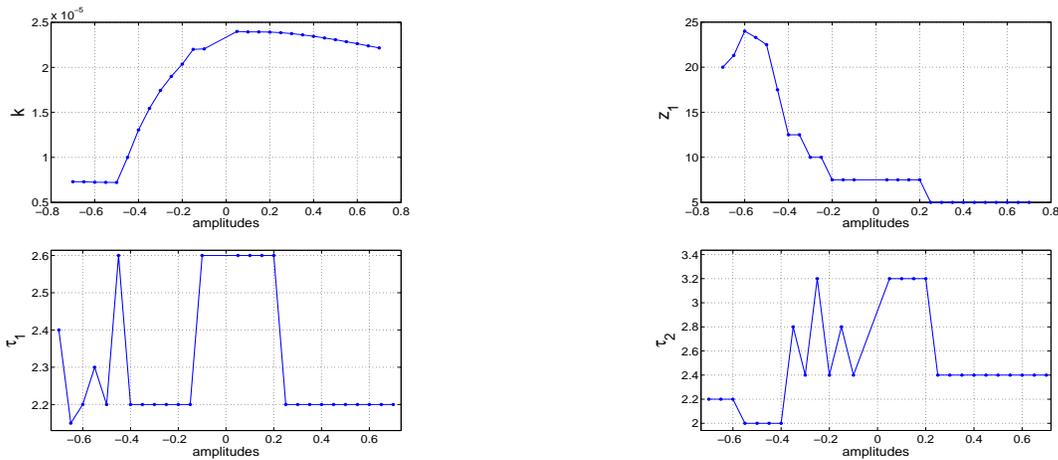


Figure A.44 – gain K , coefficient d'avance α , τ_1 et τ_2 de h_{14} en fonction des différentes amplitudes de q_a .

Les variations positives de q_a autour de sa valeur stationnaire correspondent à une croissance de la biomasse hétérotrophe X_{bh} . Lors de l'absence de l'oxygène (réacteurs anoxies), la biomasse X_{bh} est capable d'utiliser les nitrates avec S_S comme substrat pour

assurer sa croissance. L'optimisation a rencontré des difficultés pour calculer les valeurs numériques de K , α , τ_1 et τ_2 (figure A.44). D'après les autres optimisations, il est probable qu'il aurait mieux valu considérer les constantes de temps constantes afin d'estimer les autres paramètres.

h_{24} : Influence du débit de recyclage externe q_r sur la Demande Chimique en Oxygène DCO .

Premier ordre sans retard :

$$G_{u,24}(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K = 2 \cdot 10^{-3}$, $\tau = 1.7$.

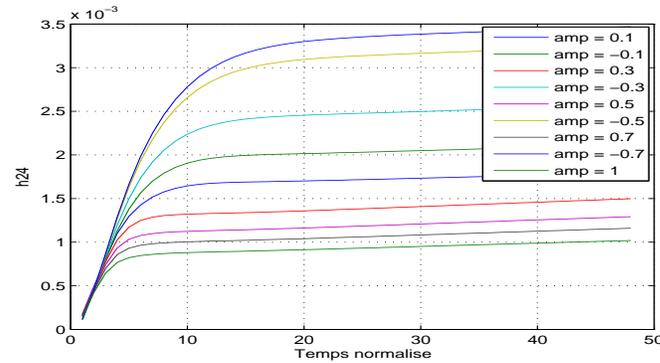


Figure A.45 – Réponse indiciale normalisée de la Demande Chimique en Oxygène DCO à des variations du débit de recyclage externe q_r .



Figure A.46 – K et τ_1 de h_{24} en fonction des différentes amplitudes de q_r .

Les variations positives de q_r augmentent la quantité des biomasses X_{bh} et X_{ba} dans le réacteur anoxie 1. Cette augmentation des biomasses entraîne plus de consommation des substrats rapidement biodégradables S_S et lentement biodégradables X_S . Lors de l'absence de l'oxygène en quantité suffisante, la croissance des biomasses n'est pas assurée. Les bactéries mortes X_P sont transformées ensuite en matière particulaire inerte X_I . La constante de temps τ_1 varie faiblement, elle est égale à 1.7 pour les variations de q_r autour sa valeur stationnaire entre $[-40\% +70\%]$ et égale à 1.9 pour des variations entre $[-70\% -40\%]$. Au contraire, le gain K dépend toujours fortement des variations de q_r autour sa valeur stationnaire (figure A.46).

h_{34} : Influence du débit de rejet q_w sur la Demande Chimique en Oxygène DCO .

Premier ordre + Intégrateur avec un retard égal à 4 :

$$G_{u,34}(s) = \frac{K_1}{s} \exp(-rs) + \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = -0.9 \cdot 10^{-3}$, $K_2 = -0.017$, $\tau = 3.53$, $r = 4$.

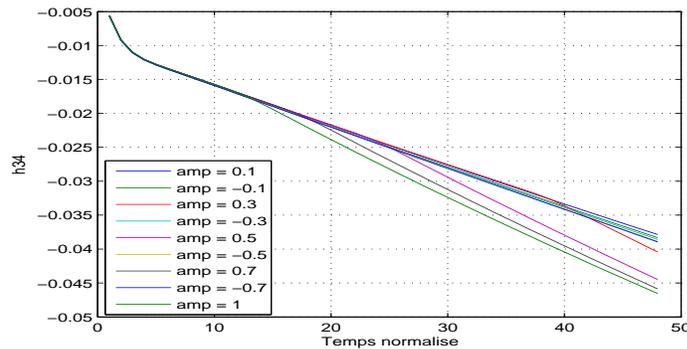


Figure A.47 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Chimique en Oxygène DCO à des variations du débit de rejet q_w .



Figure A.48 – k_1 , k_2 de h_{34} en fonction des différentes amplitudes de q_w .

Les variations de q_w autour sa valeur stationnaire ont une influence directe sur les quantités de biomasses autotrophe X_{ba} et hétérotrophe X_{bh} qui se trouvent dans le système. Les variations positives de q_w réduisent ces quantités des biomasses dans les réacteurs. Cette diminution de la quantité de biomasse entraîne une baisse de la quantité des composés particuliers inertes X_I et des composés produits de décomposition de la biomasse X_P dans le système. Les gains k_1 et k_2 (figure A.48) pour des variations de q_w autour sa valeur stationnaire plus petites que 20%, sont respectivement de l'ordre de $-0.9 \cdot 10^{-3}$ et -0.017 . Le gain k_2 varie plus faiblement que k_1 . La constante de temps est indépendante des variations de q_w .

h_{44} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 3^{ème} réacteur kla_3 sur la Demande Chimique en Oxygène DCO .

Second ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,44}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = -0.01$, $\tau = 4$, $r = 1$.

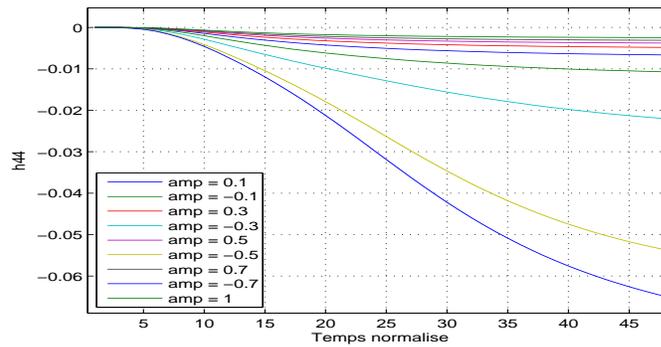


Figure A.49 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Chimique en Oxygène DCO à des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 3^{ème} réacteur kla_3 .



Figure A.50 – K et τ de h_{44} en fonction des différentes amplitudes de kla_3 .

Les variations positives de kla_3 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 3. L'oxygène dissous est utilisé pour l'élimination du carbone. La dégradation du substrat rapidement dégradé S_S est utilisée pour assurer la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Une partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée aussi pour l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) d'où une production des bactéries autotrophes X_{ba} . La constante de temps (figure A.50) est égale à 4 pour des variations de kla_3 autour sa valeur stationnaire entre [-40% +70%]. Par contre, le gain K change rapidement pour des variations de kla_3 négatives et lentement pour des variations de kla_3 positives.

h_{54} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4 sur la Demande Chimique en Oxygène DCO .

Second ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,54}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = -0.01$, $\tau = 4.5$, $r = 1$.

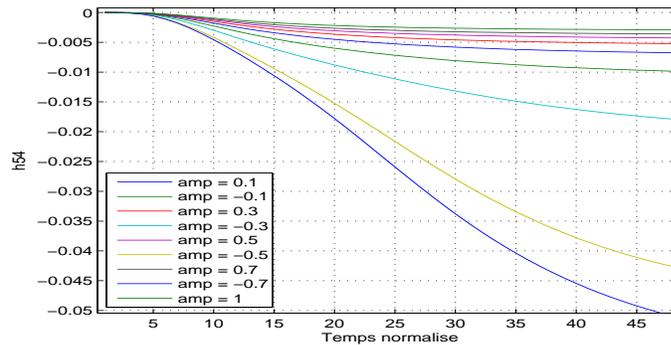


Figure A.51 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Chimique en Oxygène DCO à des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4 .



Figure A.52 – k et τ de h_{54} en fonction des différentes amplitudes de kla_4 .

Les variations positives de kla_4 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 4. Une partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour la dégradation du substrat rapidement dégradable S_S . Cette dégradation assure la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Une autre partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) d'où une production des bactéries autotrophes X_{ba} . Le gain k et la constante de τ dépendent des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4 .

h_{64} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5 sur la Demande Chimique en Oxygène DCO .

Second ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,64}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = -0.03$, $\tau = 4$, $r = 1$.

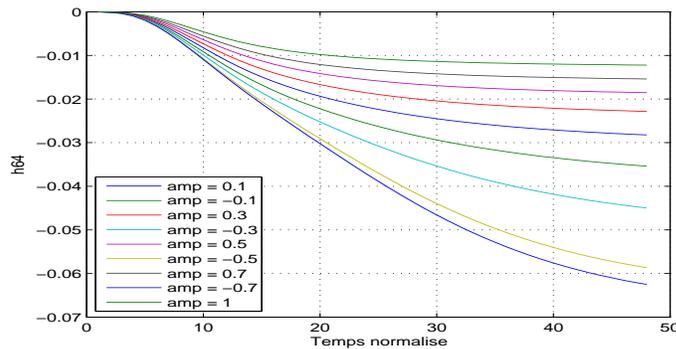


Figure A.53 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Chimique en Oxygène DCO à des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5 .



Figure A.54 – K et τ de h_{64} en fonction des différentes amplitudes de kla_5 .

Pour des variations positives de kla_5 autour de sa valeur stationnaire, l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) provoque la production des biomasses autotrophes X_{ba} . La dégradation du substrat rapidement dégradable S_S assure aussi la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Les valeurs de gain K et de la constante de temps τ dépendent des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5 (figure A.54).

h_{74} : Influence du débit d'ajout en source carbonée q_{2in} sur la Demande Chimique en Oxygène DCO .

Premier ordre + Intégrateur avec un retard égal à 5 :

$$G_{u,74}(s) = \frac{K_1}{s} \exp(-rs) + \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 5.6 \cdot 10^{-3}$, $K_2 = 0.1$, $\tau = 11.03$, $r = 5$.

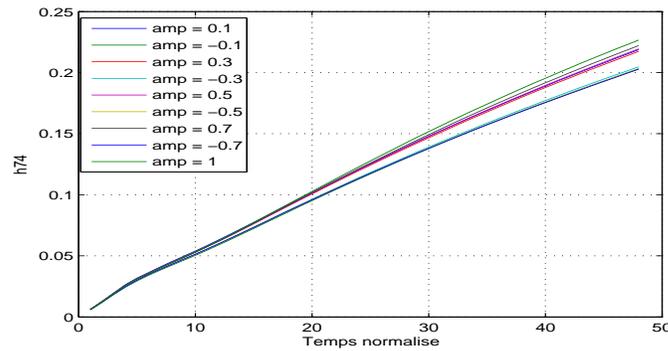


Figure A.55 – Réponse indiciale normalisée de la Demande Chimique en Oxygène DCO à des variations du débit d'ajout en source carbonée q_{2in} .



Figure A.56 – k_1 , k_2 de h_{74} en fonction des différentes amplitudes de q_{2in} .

Les variations positives de débit d'ajout en source carbonée q_{2in} augmentent la quantité du substrat rapidement biodégradable S_S dans le réacteur anoxie 2. Les valeurs de k_1 , k_2 dépendent des variations du débit d'ajout en source carbonée q_{2in} autour sa valeur stationnaire (figure A.56). La constante de temps τ est indépendante des variations de q_{2in} .

h_{15} : **Influence du débit de recyclage interne q_a sur l'Azote total $[N]_{tot}$.**
 Second ordre avec retard égal à 1 :

$$G_{u,15}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = 10^{-4}$, $\tau = 7$, $r = 1$.

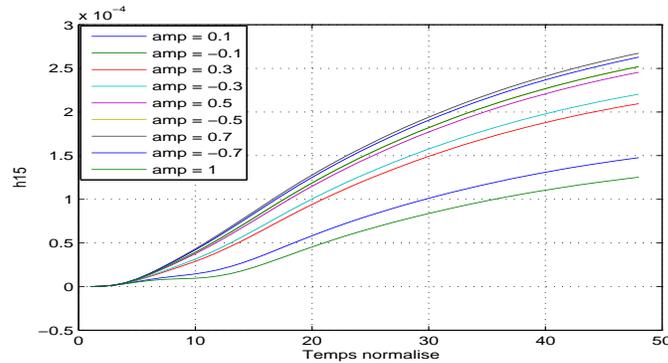


Figure A.57 – Réponse indicielle normalisée de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de débit de recyclage interne q_a .

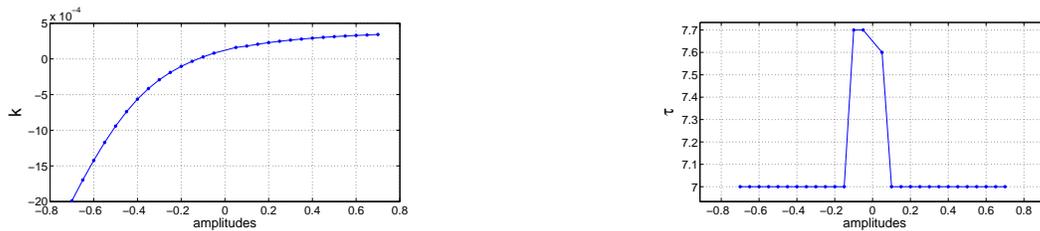


Figure A.58 – k et τ de h_{15} en fonction des différentes amplitudes de q_a .

Les variations positives de q_a autour de sa valeur stationnaire correspondent à une croissance de la quantité de nitrate S_{no} dans le réacteur 1. Lors de l'absence de l'oxygène (réacteurs anoxies), la biomasse X_{bh} utilise les nitrates pour l'ammonification de l'azote organique soluble S_{ND} (dénitrification). La constante de temps τ (figure A.58) ne dépend pas des variations de q_a autour de sa valeur stationnaire et est égale à 7, sauf le cas des petites variations de q_a entre $[-10\% +10\%]$. Au contraire, le gain k dépend toujours des variations de q_a autour de sa valeur stationnaire.

h_{25} : Influence du débit de recyclage externe q_r sur l'Azote total $[N]_{tot}$.
Réponse inverse avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,25}(s) = \left(\frac{K_1}{\tau_1 s + 1} + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} \right) \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 0.0024$, $K_2 = -0.003$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$, $r = 1$.

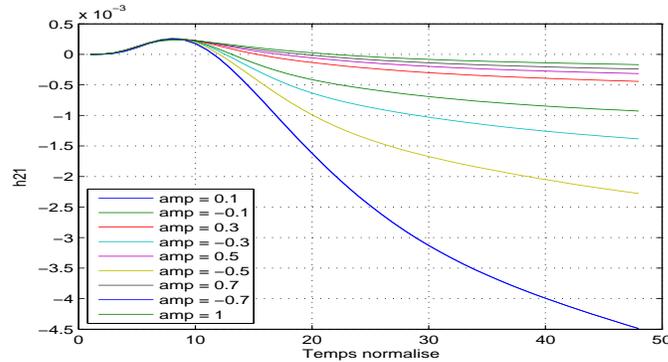


Figure A.59 – Réponse indicielle normalisée de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de débit de recyclage externe q_r

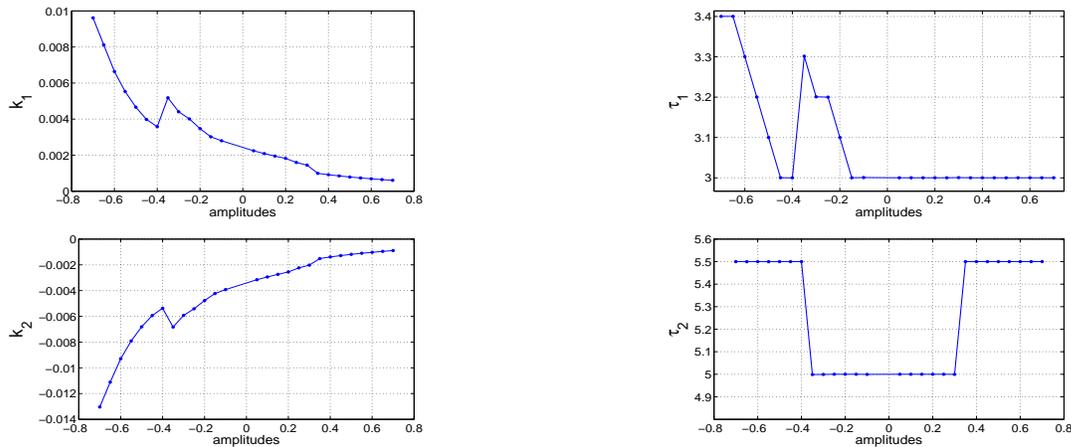


Figure A.60 – k_1 , τ_1 , k_2 et τ_2 de h_{25} en fonction des différentes amplitudes de q_r .

Les variations positives de q_r autour sa valeur stationnaire correspondent à une augmentation importante de la quantité de biomasses autotrophe X_{ba} et hétérotrophe X_{bh} . En revanche, le bon fonctionnement de leur métabolisme et leur croissance n'est pas assurée, ce qui entraîne une mortalité des biomasses hétérotrophe et autotrophe assez importante. Les cellules mortes sont transformées ensuite en matière particulaire inerte X_I

et en substrat lentement biodégradable X_S . Pour des variation de q_r entre [-40% +70%] autour sa valeur stationnaire, les valeurs de k_1 , τ_1 , k_2 et τ_2 restent constantes et égales respectivement à 0.01, 3, -0.02 et 5 (figure A.60). Les variations erratiques de τ_1 et τ_2 lors de l'optimisation entraînent des variations erratiques de k_1 et k_2 et il aurait mieux valu supposer les constantes de temps fixes.

h_{35} : Influence du débit de rejet q_w sur l'Azote total $[N]_{tot}$.

Premier ordre + Intégrateur avec un retard égal à 2 :

$$G_{u,35}(s) = \frac{K_1}{s} \exp(-rs) + \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 8.5 \cdot 10^{-4}$, $K_2 = -6.4 \cdot 10^{-3}$, $\tau = 3.82$, $r = 2$.

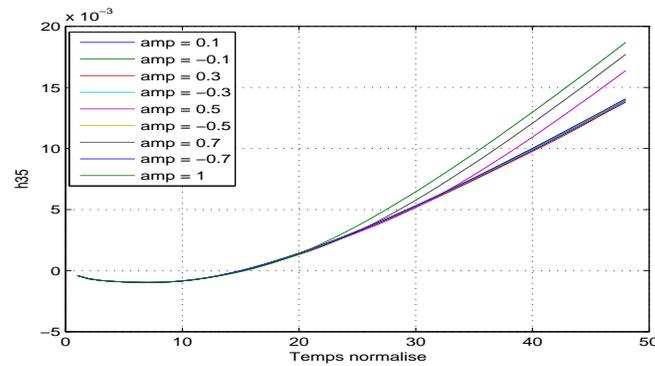


Figure A.61 – Réponse indicielle normalisée de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations du débit de rejet q_w .



Figure A.62 – k_1 , k_2 de h_{35} en fonction des différentes amplitudes de q_w .

Les variations positives de q_w autour sa valeur stationnaire diminuent la quantité des biomasses autotrophe X_{ba} et hétérotrophe X_{bh} . Pour des variations de q_w entre $[-70\% +30\%]$, les gains k_1 , k_2 sont égaux respectivement à $8.6 \cdot 10^{-4}$ et $6.4 \cdot 10^{-3}$ (figure A.62), ensuite ils varient assez fortement. La constante de temps τ égale à 3.81 est indépendante des variations de q_w .

h_{45} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 3^{ème} réacteur kla_3 sur l'Azote total $[N]_{tot}$.

Second ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,45}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = 0.25$, $\tau = 4.2$, $r = 1$.

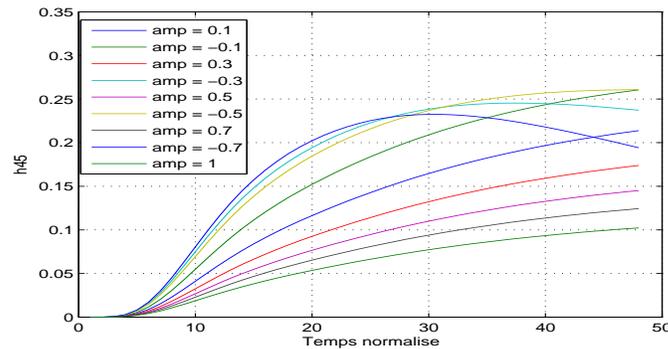


Figure A.63 – Réponse indicielle normalisée de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de coefficient de transfert de matière d'oxygène du 3^{ème} réacteur kla_3 .



Figure A.64 – K et τ de h_{45} en fonction des différentes amplitudes de kla_3 .

Les variations positives de kla_3 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 3. Une partie de l'oxygène dissous est utilisée pour l'élimination du carbone. La dégradation du substrat rapidement dégradable S_S est utilisée pour assurer la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Une partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) d'où la production des bactéries autotrophes X_{ba} . le gain K et la constante de temps τ (figure A.64) dépendent des variations de kla_3 autour sa valeur stationnaire. Toutefois, il faut remarquer les difficultés de l'optimisation aux variations les plus négatives de kla_3 .

h_{55} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4 sur l'Azote total $[N]_{tot}$.

Second ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,55}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = 0.24$, $\tau = 4.5$, $r = 1$.

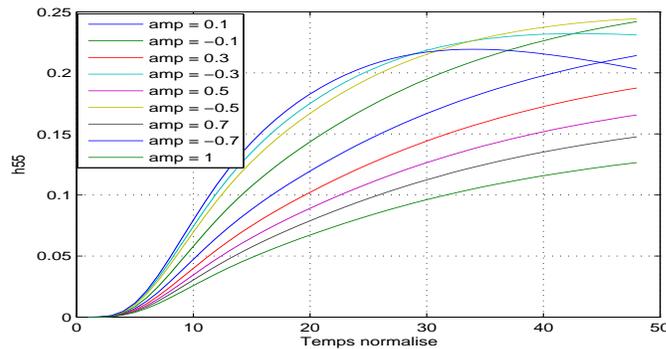


Figure A.65 – Réponse indicielle normalisée de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 4^{ème} réacteur kla_4 .



Figure A.66 – K et τ de h_{55} en fonction des différentes amplitudes de kla_4 .

Les variations positives de kla_4 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 4. Une partie de l'oxygène dissous est utilisée pour l'élimination du carbone. La dégradation du substrat rapidement dégradable S_S est utilisée pour assurer la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Une partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) d'où la production des bactéries autotrophes X_{ba} . Le gain K et la constante de temps τ (figure A.66) dépendent des variations de kla_4 autour sa valeur stationnaire. On peut, comme pour kla_3 , les difficultés de l'optimisation dans le même domaine de variation.

h_{65} : Influence du coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5 sur l'Azote total $[N]_{tot}$.

Second ordre avec un retard égal à 1 :

$$G_{u,65}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = 0.9$, $\tau = 4.3$, $r = 1$.

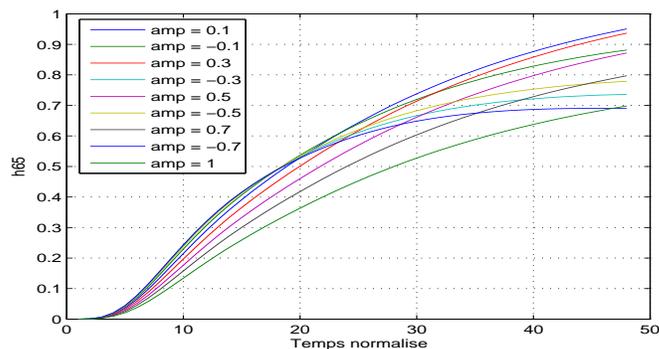


Figure A.67 – Réponse indicielle normalisée de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de coefficient de transfert de matière d'oxygène du 5^{ème} réacteur kla_5 .



Figure A.68 – k et τ de h_{65} en fonction des différentes amplitudes de kla_5 .

Les variations positives de kla_5 augmentent la concentration en oxygène dissous S_O dans le réacteur aérobie 5. Une partie de l'oxygène dissous est utilisée pour l'élimination du carbone. La dégradation du substrat rapidement dégradé S_S est utilisée pour assurer la croissance des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Une partie de l'oxygène dissous S_O est utilisée pour l'oxydation de l'ammoniaque en nitrates (nitrification) d'où la production des bactéries autotrophes X_{ba} . Le gain K et la constante de temps τ (figure A.68) dépendent des variations de kla_5 autour sa valeur stationnaire.

h_{75} : Influence du débit d'ajout en source carbonée q_{2in} sur l'Azote total $[N]_{tot}$.
Second ordre avec un retard égal à 2 :

$$G_{u,75}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = -9.1$, $\tau = 3.9$, $r = 2$.

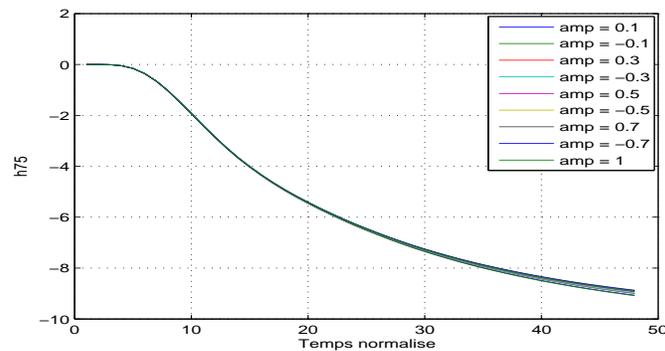


Figure A.69 – Réponse indicielle normalisée de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de débit d'ajout en source carbonée q_{2in} .



Figure A.70 – K et τ de h_{75} en fonction des différentes amplitudes de q_{2in} .

L'ajout de carbone dans le réacteur 2 (anoxie) provoque une légère production des bactéries hétérotrophes X_{bh} . Le gain K et la constante de temps τ (figure A.70) dépendent des variations du débit d'ajout en source carbonée q_{2in} autour sa valeur stationnaire.

A.3 Réponses indicielles pour les perturbations

A.3.1 Introduction

Le système est modélisé à l'aide de ses réponses à des échelons des perturbations supposées mesurées en vue d'obtenir les coefficients h_i des réponses indicielles définis par :

$$h_{ij} = \frac{\delta y_j}{\delta d_i} \quad (\text{A.3})$$

avec $i = 1, \dots, 7$; $j = 1, \dots, 5$; $\delta d_i = d_i - d_i^{ss}$; $\delta y_j = y_j - y_j^{ss}$. Deux perturbations sont concernées, le débit d'entrée q_0 et la concentration en ammonium à l'entrée $[NH]_0$.

Les courbes des coefficients des réponses indicielles sont appelées dans la suite réponses indicielles normalisées.

A.3.2 Modèles des réponses à des échelons des perturbations

D'après les courbes des réponses indicielles normalisées aux deux types de perturbations, les modèles de ces réponses indicielles normalisées sont notés :

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = G_d(s) \quad (\text{A.4})$$

A travers les réponses indicielles normalisées (figures A.71-A.87), il faut remarquer d'une part que l'influence de q_0 est très importante sur la concentration en ammonium $[NH]$ et très faible sur les autres sorties, d'autre part que l'influence de $[NH]_0$ est très importante sur la concentration en ammonium $[NH]$ et la concentration en azote total $[N]_{tot}$ et très faible sur les autres sorties.

h_{81} : Influence du débit d'entrée q_0 sur la concentration d'ammonium $[NH]$.

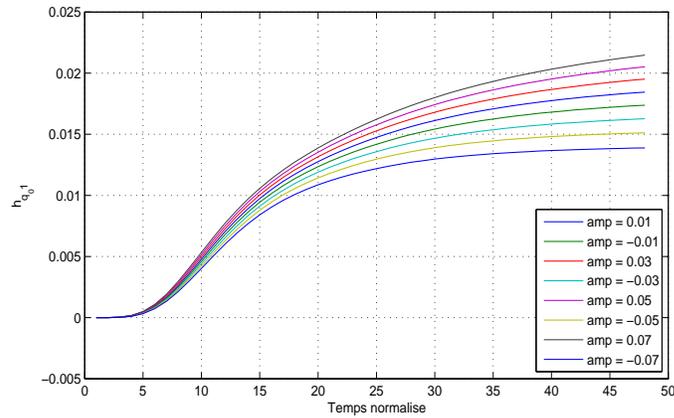


Figure A.71 – Réponse indicielle normalisée de la concentration d'ammonium $[NH]$ à des variations du débit d'entrée q_0 .

Second ordre avec retard égal à 1 :

$$G_{d,81}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = 0.018$, $\tau = 3.85$, $r = 1$.

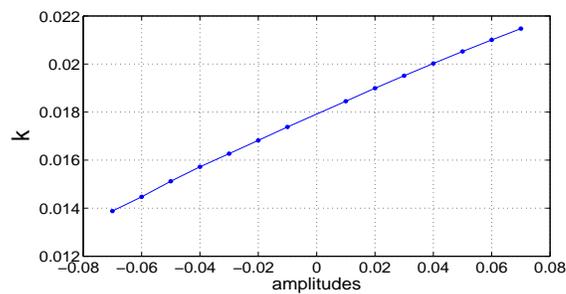


Figure A.72 – Gain K en fonction des différentes amplitudes de q_0 .

h_{91} : Influence de la concentration en ammonium à l'entrée $[NH]_0$ sur la concentration d'ammonium $[NH]$.

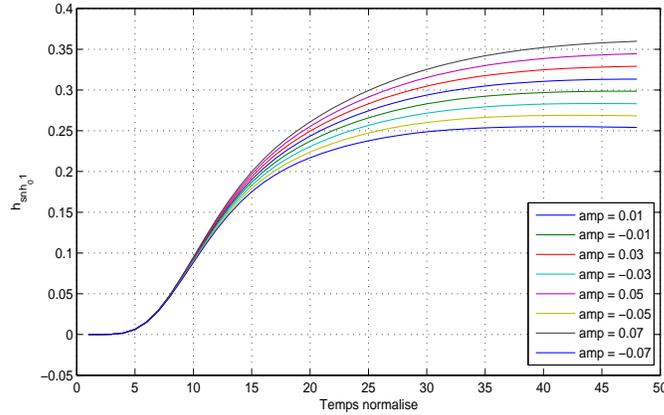


Figure A.73 – Réponse indicielle normalisée de la concentration d'ammonium $[NH]$ à des variations de la concentration en ammonium à l'entrée $[NH]_0$.

Second ordre avec retard égal à 2 :

$$G_{d,91}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K = 0.306$, $\tau = 2.35$, $r = 2$.

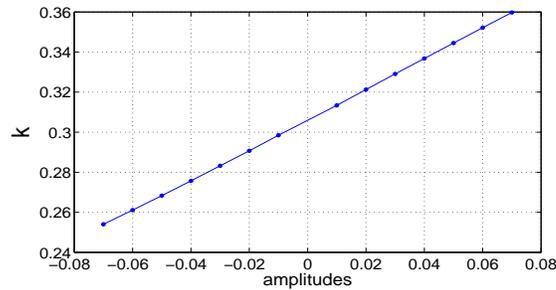


Figure A.74 – Gain K en fonction des différentes amplitudes de $[NH]_0$.

h_{82} : Influence du débit d'entrée q_0 sur les solides en suspension $[SS]$.

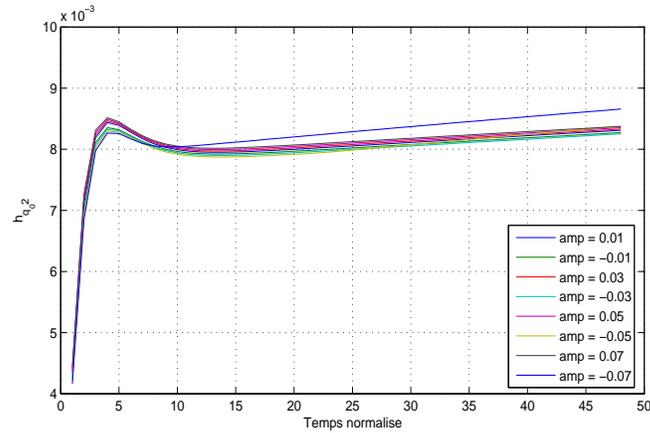


Figure A.75 – Réponse indiciale normalisée de la concentration de solides en suspension $[SS]$ à des variations du débit d'entrée q_0 .

Second ordre avec avance :

$$G_{d,82}(s) = \frac{K(\alpha s + 1)}{(\tau s + 1)^2}$$

Valeurs des paramètres : $K = 8.3 \cdot 10^{-3}$, $\alpha = 4$, $\tau = 2.25$, $r = 2$.

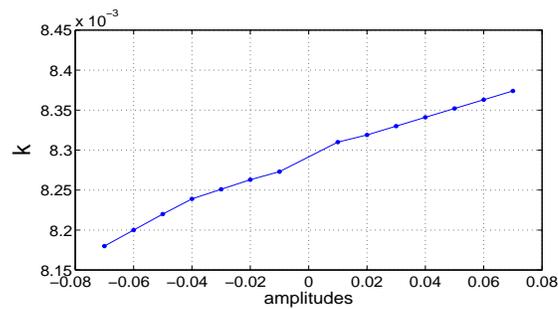


Figure A.76 – Gain K en fonction des différentes amplitudes de q_0 .

h_{92} : Influence de la concentration en ammonium à l'entrée $[NH]_0$ sur les solides en suspension $[SS]$.

L'influence est négligeable.

h_{83} : Influence du débit d'entrée q_0 sur la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 .

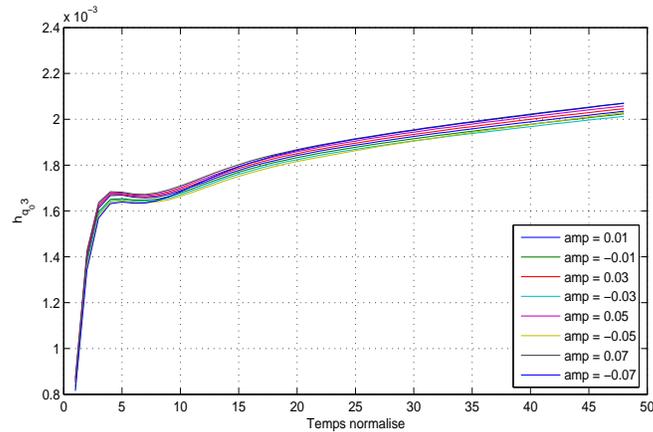


Figure A.77 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 à des variations du débit d'entrée q_0 .

Premier ordre + Intégrateur avec retard égal à 5 :

$$G_{d,83}(s) = \frac{K_1}{\tau s + 1} + \frac{K_2}{s} \exp(-rs)$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 1.85 \cdot 10^{-5}$, $K_2 = 1.65 \cdot 10^{-3}$, $\tau = 0.295$, $r = 5$.

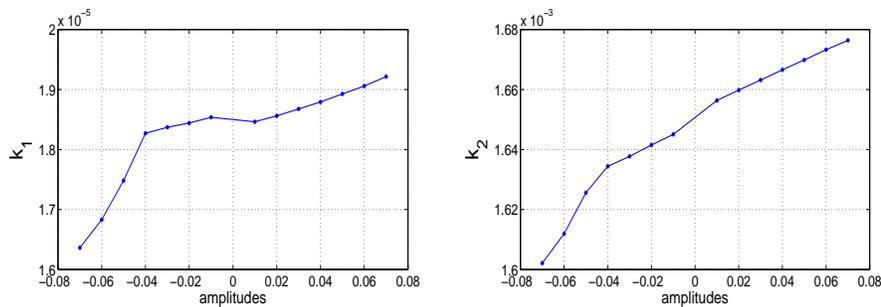


Figure A.78 – Gains K_1 et K_2 en fonction des différentes amplitudes de q_0 .

h_{93} : Influence de la concentration en ammonium à l'entrée $[NH]_0$ sur la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 .

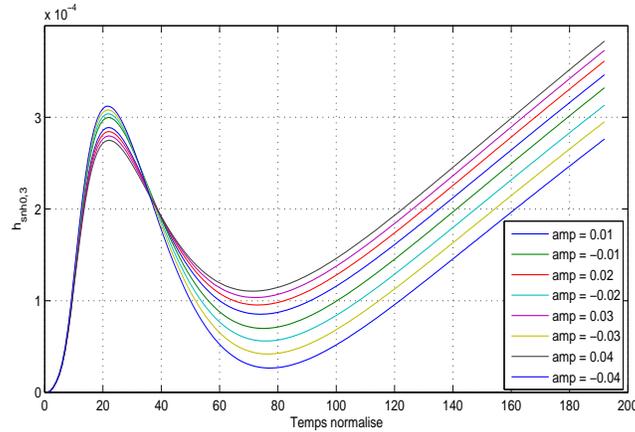


Figure A.79 – Réponse indicielle normalisée de la Demande Biochimique en Oxygène à 5 jours BDO_5 à des variations de la concentration en ammonium à l'entrée $[NH]_0$.

Réponse inverse :

$$G_{d,93}(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 0.04$ (pour $amp < 0$) et $K_1 = 0.008$ (pour $amp > 0$), $K_2 = -0.009$, $\tau_1 = 0.045$, $\tau_2 = 0.076$.

Normalement, étant donné la réponse A.79, un intégrateur devrait être ajouté, mais cette tendance a été négligée.

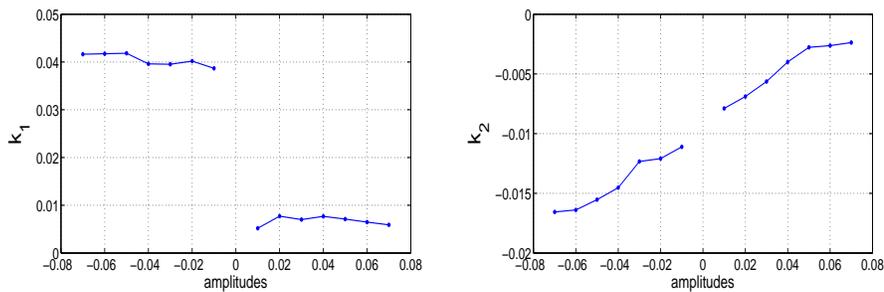


Figure A.80 – Gains K_1 et K_2 en fonction des différentes amplitudes de $[NH]_0$.

h_{84} : Influence du débit d'entrée q_0 sur la Demande Chimique en Oxygène DCO .

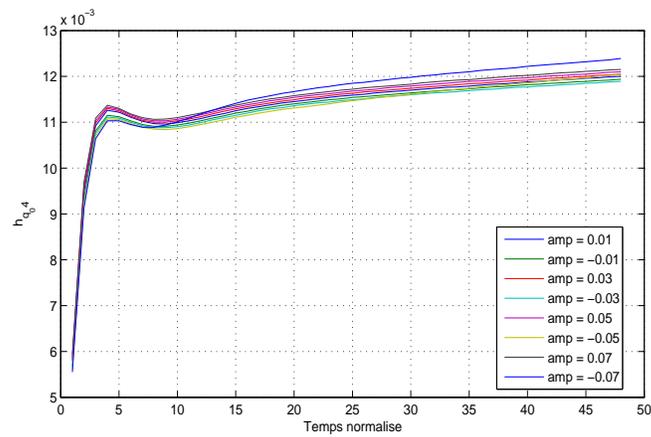


Figure A.81 – Réponse indiciale normalisée de la Demande Chimique en Oxygène DCO à des variations du débit d'entrée q_0 .

Premier ordre :

$$G_{d,84}(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K = 0.0115$, $\tau = 5$.

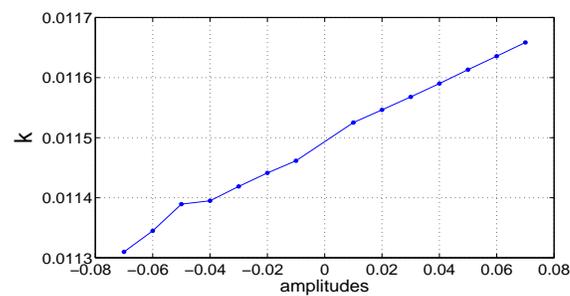


Figure A.82 – Gain K en fonction des différentes amplitudes de q_0 .

h_{94} : Influence de la concentration en ammonium à l'entrée $[NH]_0$ sur la Demande Chimique en Oxygène DCO .

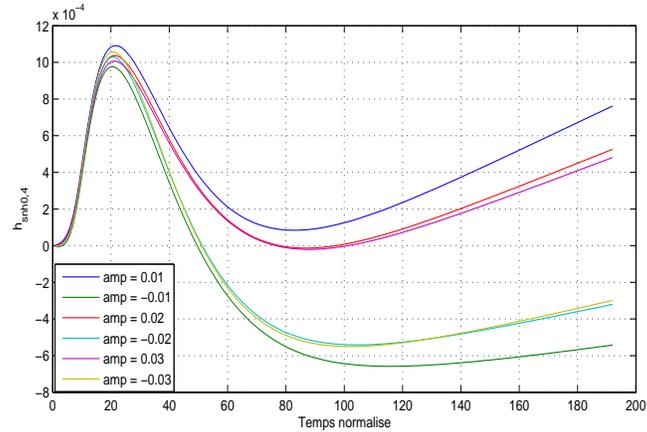


Figure A.83 – Réponse indicelle normalisée de la Demande Chimique en Oxygène DCO à des variations de la concentration en ammonium à l'entrée $[NH]_0$.

Réponse inverse :

$$G_{d,94}(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 0.021$, $K_2 = -0.035$ (pour $amp < 0$), $K_1 = 0.011$, $K_2 = -0.008$ (pour $amp > 0$), $\tau_1 = 0.032$, $\tau_2 = 0.063$.

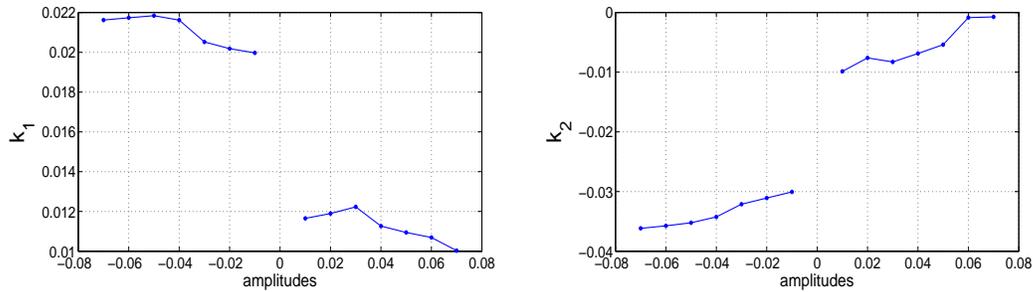


Figure A.84 – Gains K_1 et K_2 en fonction des différentes amplitudes de $[NH]_0$.

h_{85} : Influence du débit d'entrée q_0 sur l'azote total $[N]_{tot}$.

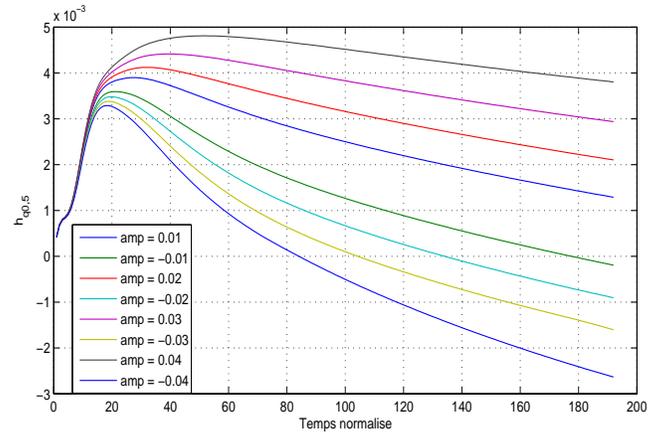


Figure A.85 – Réponse indiciale normalisée de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations du débit d'entrée q_0 .

Réponse inverse :

$$G_{d,85}(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}$$

Valeurs des paramètres : $K_1 = 8.5 \cdot 10^{-3}$, $K_2 = -8.5 \cdot 10^{-3}$, $\tau_1 = 7.56$, $\tau_2 = 2.24$.

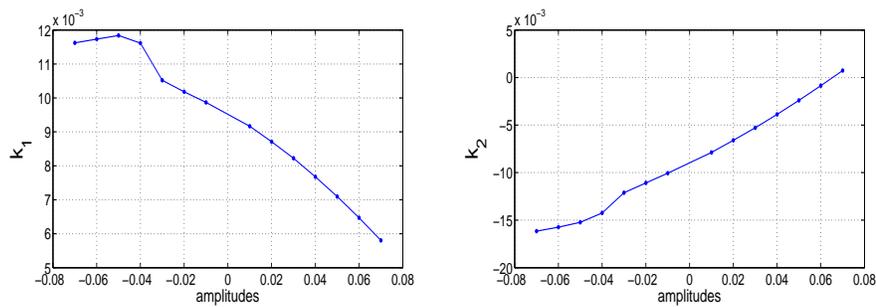


Figure A.86 – Gains K_1 et K_2 en fonction des différentes amplitudes de q_0 .

h_{95} : Influence de la concentration en ammonium à l'entrée $[NH]_0$ sur l'azote total $[N]_{tot}$.

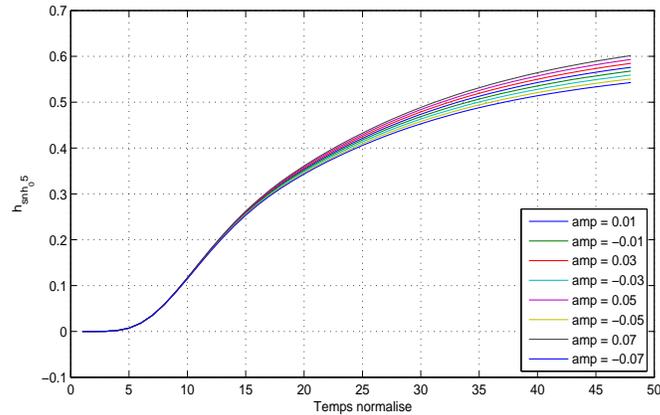


Figure A.87 – Réponse indiciale normalisée de l'azote total $[N]_{tot}$ à des variations de la concentration en ammonium à l'entrée $[NH]_0$.

Second ordre :

$$G_{d,95}(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2}$$

Valeurs des paramètres : $K = 0.57$, $\tau = 3.9$.

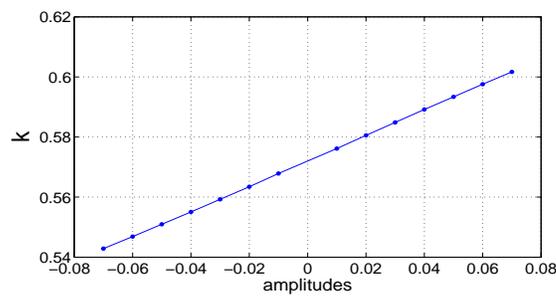


Figure A.88 – Gain K en fonction des différentes amplitudes de $[NH]_0$.

Références

- T. Alamo, D.R. Ramirez, D. Muñoz de la Peña, and E.F. Camacho. Min-max MPC using a tractable QP problem. *Automatica*, 43 :693–700, 2007.
- J. S. Anderson, H. Kim, T. J. McAvoy, and O. J. Hao. Control of an alternating aerobic-anoxic activated sludge system- part 1 : development of a linearization-based modeling approach. *Control Eng. Pract.*, 8 :271–278, 2000.
- E. Ayesa, A. De la Sota, P. Grau, J.M. Sagarna, A. Salterain, and J. Suescun. Supervisory control strategies for the new wwtp of galido-bilbao : the long run from the conceptual design to the full-scale experimental validation. *Water Sci. Technol.*, 53(4-5) :193–201, 2006.
- S. Bachir, I. Bazine, T. Poinot, and J. Trigeassou. Estimation paramétrique pour le diagnostic des processus : Application à la bobine à noyau de fer. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 42, 2008.
- P.R. Barros and R. Carlsson. Iterative design of a nitrate controller using an external carbon source in an activated sludge process. *Water Sci. Technol.*, 37(12) :95–101, 1998.
- A. Bemporad and M. Morari. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, 38 :3–20, 2002.
- P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, and I. Zambetakis. *Modélisation et Identification des Processus*, volume 1, 2. Technip, Paris, 1992.
- M.A. Brdys, M. Grochowski, T. Gminski, K. Konarczak, and M. Drewa. Hierarchical predictive control of integrated wastewater treatment systems. *Control Eng. Pract.*, 16 (6) :751–767, 2008.
- C. Cadet, J.F. Beteau, and S. Carlos Hernandez. Multicriteria control strategy for cost-quality compromise in wastewater treatment plants. *Control Eng. Pract.*, 12 :335–347, 2004.

- E.F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive Control in the Process Industry*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- E.F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- B. Carlsson and A. Rehnstrom. Control of an activated sludge process with nitrogen removal—a benchmark study. *Water Sci. Technol.*, 45(4-5) :135–142, 2002.
- B. Chachuat, N. Roche, and M.A. Latifi. Nouvelle approche pour la gestion optimale de l'aération des petites stations d'épuration boues activées. *L'Eau, L'Industrie, Les Nuisances*, 240 :53–59, 2001.
- B. Chachuat, N. Roche, and M.A. Latifi. Optimal aeration control of industrial alternating activated sludge plants. *Biochem. Eng. J.*, 23 :277–289, 2005.
- W. Chotkowski, M.A. Brdys, and K. Konarczak. Dissolved oxygen control for activated sludge process. *Int. J. Syst. Sci.*, 36(12) :727–737, 2005.
- D.W. Clarke. *Advances in Model-Based Predictive Control*. Oxford University Press, Oxford, 1994.
- D.W. Clarke and R. Scatollini. Constrained receding horizon predictive control. *IEE Proceedings, Pt. D*, 138(1) :347–354, 1991.
- D.W. Clarke, C. Mohtadi, and P.S. Tuffs. Generalized predictive control - Part I. The basic algorithm. *Automatica*, 23(2) :137–148, 1987.
- J.B. Copp, editor. *The COST Simulation Benchmark : description and simulator manual*. European Cooperation in the Field of Scientific and Technical Research, 2001.
- J. P. Corriou. *Process Control - Theory and applications*. Springer, London, 2004.
- J.P. Corriou. *Commande des Procédés*. Lavoisier, Tec. & Doc., Paris, 1996.
- J.P. Corriou. *Commande des Procédés*. Lavoisier, Tec. & Doc., Paris, 3ème edition, 2012.
- C.R. Cutler and B.L. Ramaker. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. In *AIChE Annual Meeting*, Houston, Texas, 1979.
- J.W. Eaton and J.B. Rawlings. Model predictive control of chemical processes. *Chem. Eng. Sci.*, 47(4) :705–, 1992.
- G. Ekama and G. Marais. Procedures for determining influent cod fractions and the maximum specific growth rate of heterotrophs in activated sludge systems. *Water Science Technology*, 18 :91–114, 1986.

- U. Forssell and L. Ljung. Closed-loop identification revisited. *Automatica*, 35(7) :1215–1241, 1999.
- J.B. Froisy. Model predictive control : past, present and future. *ISA Transactions*, 33 : 235–243, 1994.
- H. Fukushima and R.R. Bitmead. Robust constrained predictive control using comparison model. *Automatica*, 41 :97–106, 2005.
- C.E. Garcia, D.M. Prett, and M. Morari. Model predictive control : Theory and practice - a survey. *Automatica*, 25(3) :335–348, 1989.
- G. Gerhard, editor. *Bacterial Metabolism*. Springer-Verlag, 1987.
- A. E. Greenberg, R. R. Trussell, and L. S. Clesceri, editors. *Standard methods for the examination of water and wastewater*. American public health association, 1985.
- O. Grospeud. *Contribution à l'identification en boucle fermée par erreur de sortie*. Phd thesis, Université de Poitiers., France, 2000.
- M. Henze, J. Grady, and W. E. A. Gujer, editors. *Activated Sludge Model N.1 (ASM1), IAWPRC Scientific and Technical Report N.1*. IWAPRC Publishing, London, 1987.
- B. Holendán, E. Domokos, A. Redey, and J. Fazakas. Dissolved oxygen control of the activated sludgewastewater treatment process using model predictive control. *Comp. Chem. Eng.*, 32(6) :1270–1278, 2007.
- J. Arundel, editor. *Sewage and Industrial Effluent Treatment*. Blackwell Publishing., 2000.
- U. Jeppsson and M.N. Pons. The COST Benchmark simulation model - current state and future perspective. *Control Engineering Practice*, 12 :299–304, 2004.
- R.M.C. De Keyser, G.A. Van de Velde, and F.A.G. Dumortier. A comparative study of self-adaptive long-range predictive control methods. *Automatica*, 24(2) :149–163, 1988.
- H. Kim, T. J. McAvoy, J. S. Anderson, and O. J. Hao. Control of an alternating aerobic-anoxic activated sludge system- part 2 : optimization using a linearized model. *Control Eng. Pract.*, 8 :279–289, 2000.
- B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, and J. Schuurmans. Efficient robust predictive control. *IEE Proceedings of ACC*, 230(1) :4283–4287, 1999.
- I.D. Landau. *Identification et Commande des Systèmes*. Hermès, Paris, 1988.
- I.D. Landau and A. Besançon Voda, editors. *Identification des Systèmes*. Hermès, Paris, 2001.

- I.D. Landau and A. Karimi. Recursive algorithms for identification in closed loop - a unified approach and evaluation. *Automatica*, 33(8) :1499–1523, 1997.
- I.D. Landau, R. Lozano, and M. M'Saad, editors. *Adaptive Control*. Springer-Verlag, London, 1997.
- C. F. Lindberg and B. Carlsson. Nonlinear and set-point control of the dissolved oxygen concentration in an activated sludge process. *Water Sci. Technol.*, 34(3-4) :135–142, 1996.
- L. Ljung. *System Identification. Theory for the User*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- L. Ljung and T. Söderström. *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- D.G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-11(2) :190–197, 1966.
- D.G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16(6) :596–602, 1971.
- P. Lunström, J.H. Lee, M. Morari, and S. Skogestad. Limitations of dynamic matrix control. *Comp. Chem. Engng.*, 19(4) :409–421, 1995.
- J.M. Maciejowski. *Predictive Control*. Pearson Education, Harlow, England, 2002.
- S. Marsi-Libelli and L. Giunti. Fuzzy predictive control for nitrogen removal in biological wastewater treatment. *Water Sci. Technol.*, 45(4-5) :37–44, 2002.
- D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao, and P.O.M. Scokaert. Constrained model predictive control : Stability and optimality. *Automatica*, 36 :789–814, 2000.
- M. Morari and J.H. Lee. Model predictive control : past, present and future. *Comp. Chem. Engng.*, 23 :667–682, 1999.
- K.R. Muske and J.B. Rawlings. Model predictive control with linear models. *AIChE. J.*, 39(2) :262–287, 1993.
- J.B. Rawlings, E.S. Meadows, and K.R. Muske. Nonlinear model predictive control : A tutorial and survey. In *Advanced Control of Chemical Processes*, pages 203–224, Kyoto (Japan), 1994. IFAC.
- J. Richalet. *Pratique de l'Identification*. Hermès, Paris, 2nd edition, 1998.

- J. Richalet, A. Rault, J.L. Testud, and J. Papon. Model predictive heuristic control : Applications to industrial processes. *Automatica*, 14 :413–428, 1978.
- J. Richalet, A. Jacubasch, and W. Schill. Predictive functional control. application to fast and accurate robots. IFAC 10th World Congress Munich, 1987.
- K. Schittkowski. NLPQL : A Fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems. *Ann. Oper. Res.*, 5 :485–500, 1985.
- W. Shen, X. Chen, and J.P. Corriou. Application of model predictive control to the BSM1 benchmark of wastewater treatment process. *Computers & Chemical Engineering*, 32 (12) :2839–2848, 2008.
- W. Shen, X. Chen, M.N. Pons, and J.P. Corriou. Model predictive control for wastewater treatment process with feedforward compensation. *Chemical Engineering Journal*, 155 :161–174, 2009.
- T. Söderström and P. Stoica. *System Identification*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- T. Söderström and P. Stoica. *System Identification*. Prentice Hall, New York, 1989.
- T. Söderström, L. Ljung, and I. Gustavsson. A theoretical analysis of recursive identification methods. *Automatica*, 14 :231–244, 1978.
- O.A.Z. Sotomayor, S.W. Park, and C. Garcia. A simulation benchmark to evaluate the performance of advanced control techniques in biological wastewater treatments plants. *Brazilian Journal Of Chemical Engineering*, 18 :81–101, 2001.
- O.A.Z. Sotomayor, S.W. Park, and C. Garcia. A reference model for evaluating control strategies in activated sludge waste treatments plants. *Revue de sciences de l'Eau*, 15 :543–556, 2002.
- M.A. Steffens and P.A. Lant. Multivariable control of nutrient-removing activated sludge systems. *Water Res.*, 33(12) :2864–2878, 1999.
- I. Takács, G.G. Patry, and D. Nolasco. A dynamic model of the clarification-tchikening process. *Water Science Technology*, 25(10) :1263–1271, 1991.
- J. Trigeassou and T. Poinot. *Identification des systèmes*. Hermès, Paris, 2001.
- P. Van Den Hof and R. Schrama. Identification and control, closed-loop issues. *Automatica*, 31(12) :1751–1770, 1995.
- P. Van Overschee and B. De Moor. *Subspace Identification for Linear Systems : Theory, Implementation, Applications*. Kluwer Academic, Dordecht, 1996.

- H. Vanhooren and K. Nguyen, editors. *Development of a simulation protocol for evaluation of respirometry-based control strategies*. BIOMATH Université de Gand, 1996.
- D. Vrecko, N. Hvala, and J. Kocijan. Wastewater treatment benchmark : what can be achieved with simple control? *Water Science and Technology*, 45(4-5) :127–134, 2002.
- D. Vrecko, N. Hvala, and B. Carlsson. Feedforward-feedback control of an activated sludge process : a simulation study. *Water Science and Technology*, 47(12) :19–26, 2003.
- Z. Wan and M. Kothare. Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 12 :763–774, 2002.
- Z. Wan and M. Kothare. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 39 :837–846, 2003.
- S. R. Weijers, G. L. Engelen, H. A. Preisig, and K. Van Schagen. Evaluation of model predictive control of nitrogen removal with a carousel type wastewater treatment plant-model using different control laws. In *Proceedings of the 7th IAWQ Work-shop on Instrumentation, Control and Automation of Water and Wastewater Treatment and Transport Systems*, 1997.
- B.E. Ydstie. Extended horizon adaptive control. pages 911–915, Oxford, 1984. IFAC 9th World Congress Budapest Hungary, Pergamon.
- H. Zhao, S.H. Isaacs, H. Soerberg, and M. Kummel. An analysis of nitrogen removal and control strategies in an alternating activated sludge process. *Water Res.*, 29(2) : 535–544, 1995.
- Y. Zhu and T. Backx. *Identification of Multivariable Industrial Processes*. Springer-Verlag, London, 1993.

Réduction de modèle et commande prédictive d'une station d'épuration d'eaux usées

Résumé

Les installations d'épuration des eaux usées sont des systèmes de grande dimension, non linéaires, sujets à des perturbations importantes en flux (débit) et en charge. Leur commande est difficile à cause de leur comportement complexe, fortement non linéaire, de la présence de perturbations importantes, de leur caractère multivariable et de contraintes. Plusieurs stratégies de commande ont été proposées dans la littérature mais leur évaluation et leur comparaison restent une tâche difficile à réaliser. Cela est dû à plusieurs facteurs : La variabilité des eaux usées à traiter, la complexité des réactions biologiques et biochimiques mises en jeu, le spectre large des constantes de temps et le manque de critères standards d'évaluation.

Une commande prédictive (MPC) a été appliquée au Benchmark BSM1 qui est un environnement de simulation qui définit une installation d'épuration.

Une identification en boucle ouverte d'une station d'épuration d'eaux usées a été réalisée pour déterminer un modèle linéaire en se basant sur un ensemble de mesures entrée-sortie du Benchmark BSM1. Les réponses indicielles en boucle ouverte ont été obtenues à partir de variations échelon des entrées autour de leurs valeurs stationnaires. L'influence de l'amplitude des échelons montre l'importante non-linéarité du procédé. Le modèle tient compte des non-linéarités à travers des paramètres variables.

Les réponses indicielles obtenues permettent de déterminer par optimisation les fonctions de transfert continues correspondantes. Ces fonctions de transfert peuvent être regroupées en cinq modèles mathématiques. Des fonctions de transfert continues de premier ordre, de premier ordre avec un intégrateur, des réponses inverses, de second ordre et de second ordre avec zéro représentant les réponses indicielles ont été identifiées. Les valeurs numériques des coefficients de chaque modèle choisi ont été calculées par un critère des moindres carrés. La commande prédictive (MPC) utilise le modèle obtenu comme un modèle interne pour commander le procédé.

Deux stratégies de la commande prédictive DMC et QDMC d'une station d'épuration avec ou sans compensation par anticipation (feedforward) ont été testées. La commande par anticipation est utilisée pour réduire l'effet de deux perturbations mesurées, le débit entrant et la concentration entrante en ammonium, sur le système. L'utilisation de la commande par anticipation a apporté une amélioration des performances pour la compensation de la concentration entrante en ammonium beaucoup plus importante que le cas de la compensation du débit entrant seul. Les simulations ont montré que la meilleure performance de traitement a été obtenue par la compensation simultanée de la concentration entrante en ammonium et du débit entrant.

Mots-clés : Benchmark BSM1, identification, commande prédictive.

Model Reduction and predictive control of a wastewater treatment station

Abstract

Wastewater treatment processes are large scale, non linear systems, submitted to important disturbances of influent flow rate and load. Their control is difficult because of their complex and nonlinear behaviour, the presence of important disturbances, the multivariable character and constraints. Several control strategies have been proposed in the literature for wastewater treatment plants but their evaluation is a real problem due to the variability of waste waters, the complexity of the physical and biochemical phenomena and to the range of time constants (from few minutes to several days) inherent in the activated sludge process, the lack of standard evaluation criteria. Model predictive control (MPC) widely used industrial technique for advanced multivariable control, has been applied to the Benchmark Simulation Model 1 (BSM1) simulation benchmark of wastewater treatment process.

An open loop identification method has been developed to determine a linear model for a set of input-output measurements of the process. All the step responses have been obtained in open loop from step variations of the manipulated inputs and measured disturbances around their steady state values. The influence of the amplitude of the steps demonstrates the important non linearity of the process. The non-linearities of the model are taken into account by variable parameters.

The step responses coefficient obtained make it possible to determine by optimization the corresponding transfer functions. That functions are classified by five mathematical models, such as : first order, first order with integrator, inverse response, second order and second order with zero. The numerical values of coefficients of each model selected were calculated using a least squares criterion. Model predictive control (MPC) uses the resulting model as an internal model to control the process. Dynamic matrix control DMC and quadratic dynamic matrix control QDMC predictive control strategies, in the absence and presence of feedforward compensation, have been tested. Two measured disturbances

have been used for feedforward control, the influent flow rate and ammonium concentration. It is shown that the performance of feedforward regarding the influent ammonium concentration is better than for the feedforward concerning the influent flow rate. The best performance is obtained by combining both feedforward controllers with respect to the influent ammonium concentration and flow rate.

Key-words : Benchmark BSM1, identification, predictive control.