



**HAL**  
open science

# Études des actions des forces magnétiques volumiques créées par un champ magnétique intense sur des fluides à seuil - possibilités de transition solide-gel

Laurent Heyrendt

► **To cite this version:**

Laurent Heyrendt. Études des actions des forces magnétiques volumiques créées par un champ magnétique intense sur des fluides à seuil - possibilités de transition solide-gel. Autre [cond-mat.other]. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : 2012LORR0224 . tel-01749621v1

**HAL Id: tel-01749621**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749621v1>**

Submitted on 29 Mar 2018 (v1), last revised 12 Mar 2013 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

École doctorale IAEM  
Informatique, Automatique, Électronique - Électrotechnique, Mathématiques  
Département de formation doctorale Électronique et Électrotechnique

## Thèse

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

en Génie Électrique

par Laurent HEYRENDT

# **Études des actions des forces magnétiques volumiques créées par un champ magnétique intense sur des fluides à seuil — possibilités de transition solide–gel**

Soutenue publiquement le 4 décembre 2012 devant le jury composé de

Président	M. Abdelmounaïm TOUNZI	Professeur de l'Université Lille 1
Rapporteurs	M. Frédéric BOUILLAULT M. Gérard MEUNIER	Professeur de l'Université Paris-Sud Directeur de recherche au CNRS – Université de Grenoble
Examineurs	M. Abderrezak REZZOUG M. Salaheddine SKALI-LAMI	Professeur de l'Université de Lorraine Maître de conférences – HDR de l'Université de Lorraine
Directeur de thèse	M. Denis NETTER	Professeur de l'Université de Lorraine



---

## Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du Groupe de Recherche en Électrotechnique et Électronique de Nancy. Je tiens à remercier son directeur, M. Shahrokh Saadate.

Je souhaite également remercier les membres de mon jury de thèse qui ont accepté d'analyser ce travail. Je remercie MM. Frédéric Bouillault et Gérard Meunier d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit et MM. Abdelmounaïm Tounzi et Salaheddine Skali-Lami pour leur participation à ce jury.

Je souhaite à exprimer ma profonde reconnaissance et mes remerciements à M. Abderrezak Rezzoug. Il m'a accueilli au sein du laboratoire et participe aujourd'hui à mon jury de thèse. Ses qualités scientifiques et humaines m'ont beaucoup apporté. Sa présence, sa bienveillance et sa sollicitude sont à la hauteur de ses compétences et de son expérience dans le domaine du génie électrique.

Ce travail a été possible grâce à la participation de Denis Netter, mon directeur de thèse. Je suis très content d'avoir travaillé avec toi durant ces années. La pertinence de tes remarques et de ta direction ainsi que ta gentillesse et ton attention ont énormément contribué à rendre mes années de doctorat très enrichissantes aussi bien sur le plan scientifique que sur le plan humain. Je garde un très bon souvenir de nos discussions animées autour d'un tableau ou devant un résultat de simulation, cherchant à comprendre comment chahuter ces fluides complexes. J'ai beaucoup apprécié partager ton enthousiasme et ton approche passionnée des sciences.

Je remercie Jean Lévêque pour son aide et le temps passé pour la mise en place de la partie expérimentale. Même si nous n'avons pas obtenu de résultats, nous avons essayé. Je remercie également l'ensemble des membres du GREEN avec qui il fait bon travailler. Merci à Thierry Lubin, Smail Mezani, Francis Weinachter, Bruno Douine, Kévin Berger, Gaëtan Didier, Stéphanie Lamane, Melika Hinaje, Rachid Ibtouen, Nathalie Cadario, Francine Antoine, Julien Fontchastagner et les doctorants présents ou passés du 6<sup>e</sup> Gaël Malé et Sofiane Bendali (aka Pik et Pok), Renaud Moulin, Abelin Kameni, Rada Alhasan, Lamia Belguerras, Julien Leclerc, Bastien Dolisy, Charles-Henri Bonnard, Arnaud Gaillard, Thê Cuong Hoàng, Mahmoud Shahbazi, Hakim Bensaïdane, Raphaël Linares, Qunxu Lin, Bashar Gony, Eshan Jamshidpour et Armand Boyette.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance aux enseignants qui durant ma scolarité m'ont donné l'envie d'apprendre et d'enseigner. Merci également à mes étudiants qui me donnent toujours l'envie d'apprendre.

Un grand merci aux handballeurs qui m'ont permis de garder la forme durant ces années de thèse. J'ai également une pensée pour les ensemiers de l'époque : Pierre, Renaud, Jérémie, Fabien et leurs familles.

Je remercie ma famille et mes proches pour leurs soutiens indéfectibles et leurs encouragements. Merci à Catherine, Edmund, Béatrice, Dominique, Doc, Capucine, Soline, Julien, Marin, Quitterie, Laëtitia, Lionel, Lenny, Jean-Claude, Philippe, Marie, Flo, Églantine, Aline, Julien, Jeanne. Merci à mes parents pour votre présence, votre éducation et votre amour.

Enfin, les remerciements les plus précieux sont pour ma fille Colombe dont le sourire est une source de bonheur intarissable et pour ma femme Clothilde, pour son soutien merveilleux, son aide inestimable et son amour.

\*

À ma femme Clothilde,  
à ma fille Colombe





---

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Les fluides sous champs magnétiques intenses</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction à la magnéto-science . . . . .	7
1.1.1 Magnétisme de la matière . . . . .	7
1.1.2 Les effets des champs magnétiques intenses sur les matériaux . . . . .	10
1.1.3 Pourquoi et comment générer des champs magnétiques intenses? . . . . .	12
1.2 Les forces volumiques magnétiques . . . . .	13
1.2.1 Matériau faiblement magnétique, linéaire, homogène et isotrope . . . . .	13
1.2.2 Hypothèse des milieux continus . . . . .	14
1.2.3 Énergie magnétique volumique d'aimantation . . . . .	14
1.2.4 Force magnétique volumique . . . . .	15
1.3 Fluides et interactions magnéto-mécaniques . . . . .	16
1.3.1 Utilisation d'éléments ferromagnétiques . . . . .	16
1.3.1.1 Séparation magnétique . . . . .	17
1.3.1.2 Ferrofluides . . . . .	17
1.3.1.3 Fluides magnétorhéologiques . . . . .	18
1.3.2 Utilisation de fluides conducteurs . . . . .	18
1.3.2.1 Magnétohydrodynamique . . . . .	18
1.3.2.2 Magnétohydrostatique . . . . .	20
1.3.3 Cas des fluides dia- ou paramagnétiques non conducteurs . . . . .	20
1.3.3.1 Lévitiation magnétique . . . . .	20
1.3.3.2 Magnétoaérodynamique . . . . .	22
1.3.3.3 Effet Moïse . . . . .	22
1.4 Des supraconducteurs pour les applications sur des matériaux faiblement magné- tiques . . . . .	23
1.4.1 Écoulement de liquides dia- ou paramagnétiques non conducteurs sous champ magnétique intense . . . . .	24
1.4.2 Différences de problématiques entre la lévitation magnétique et l'action des forces volumiques sur un fluide dia- ou paramagnétique en écoulement . . . . .	24
1.4.2.1 Aperçu des problématiques en lévitation magnétique . . . . .	26
1.4.2.2 Aperçu des problématiques des liquides dia- ou paramagné- tiques en écoulement sous champ magnétique intense . . . . .	27
1.5 Conclusion . . . . .	29

Références bibliographiques du chapitre 1 . . . . .	31
<b>2 Actions des champs magnétiques intenses sur des fluides à seuil</b>	<b>35</b>
2.1 Étude mécanique de l'écoulement d'un fluide dia- ou paramagnétique soumis à des forces volumiques magnétiques . . . . .	37
2.1.1 Conservation de la masse et évolution de la quantité de mouvement . . . . .	37
2.1.2 Le fluide parfait : un premier modèle simplifié . . . . .	39
2.1.2.1 Théorème de Bernoulli modifié . . . . .	40
2.1.2.2 Discussion sur l'effet des forces magnétiques volumiques . . . . .	41
2.1.3 $Ne$ : nouveau nombre adimensionnel . . . . .	41
2.1.3.1 Étude adimensionnelle . . . . .	41
2.1.3.2 Influence de $Ne$ . . . . .	43
2.1.3.3 Conséquence sur le nombre de Reynolds . . . . .	45
2.1.4 Tenseur des actions magnétiques . . . . .	46
2.2 Comportement des fluides à seuil . . . . .	46
2.2.1 Fluide newtonien . . . . .	47
2.2.1.1 Viscosité et tenseur des contraintes visqueuses . . . . .	47
2.2.1.2 Équation de Navier-Stokes . . . . .	47
2.2.1.3 Comparaison avec le comportement des solides élastiques . . . . .	48
2.2.2 Fluide non-newtonien . . . . .	49
2.2.2.1 Thixotropie . . . . .	50
2.2.2.2 Fluides rhéofluidifiants ou rhéoépaississants . . . . .	50
2.2.2.3 Fluides à seuil . . . . .	50
2.2.2.4 Fluides viscoélastiques . . . . .	51
2.2.3 Problématique des fluides à seuil . . . . .	52
2.2.3.1 Modèle de Herschel-Bulkley . . . . .	52
2.2.3.2 Comparaison de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide newtonien et d'un fluide à seuil . . . . .	52
2.2.3.3 Les difficultés pour caractériser les fluides à seuil . . . . .	53
2.2.3.4 Les actions possibles des forces magnétiques volumiques sur les fluides à seuil . . . . .	54
2.3 Modélisation multiphysique . . . . .	55
2.3.1 Problème mécanique . . . . .	56
2.3.1.1 Fluide newtonien . . . . .	56
2.3.1.2 Fluide non-newtonien . . . . .	56
2.3.2 Problème magnétique . . . . .	57
2.3.3 Expression des forces volumiques magnétiques et du tenseur des actions magnétiques en fonction du potentiel-vecteur . . . . .	58
2.3.3.1 Coordonnées cartésiennes . . . . .	58
2.3.3.2 Coordonnées cylindriques . . . . .	60
2.4 Conclusion . . . . .	61
Références bibliographiques du chapitre 2 . . . . .	63
<b>3 Configurations magnétiques et actions mécaniques</b>	<b>65</b>
3.1 Démarche générale . . . . .	68

3.1.1	Étude analytique préliminaire . . . . .	68
3.1.1.1	Équations à résoudre . . . . .	68
3.1.1.2	Objectifs . . . . .	68
3.1.2	Choix des configurations magnétiques . . . . .	69
3.2	Deux nappes de courant parallèles infinies . . . . .	69
3.2.1	Présentation de la configuration choisie . . . . .	69
3.2.2	Configuration à une nappe infinie de courant . . . . .	71
3.2.2.1	Potentiel-vecteur créé par une nappe infinie . . . . .	71
3.2.2.2	Expression du champ magnétique . . . . .	74
3.2.2.3	Expression du champ de forces volumiques . . . . .	76
3.2.2.4	Expression du tenseur des actions magnétiques . . . . .	77
3.2.3	Configuration à deux nappes parallèles infinies parcourues par la même densité de courant . . . . .	78
3.2.3.1	Expression du champ magnétique . . . . .	79
3.2.3.2	Expression du champ de forces volumiques . . . . .	82
3.2.3.3	Expression du tenseur des actions magnétiques . . . . .	84
3.2.4	Étude paramétrique . . . . .	85
3.2.4.1	Influence de $J_0$ . . . . .	86
3.2.4.2	Influence de $D$ . . . . .	87
3.2.4.3	Influence de $n_k$ . . . . .	87
3.2.4.4	Synthèse . . . . .	87
3.3	Solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale . . . . .	90
3.3.1	Présentation de la configuration choisie . . . . .	90
3.3.2	Potentiel-vecteur créé par le solénoïde . . . . .	92
3.3.3	Champ de force et tenseur des actions magnétiques . . . . .	95
3.3.4	Étude paramétrique . . . . .	98
3.3.4.1	Influence de $J_0$ . . . . .	98
3.3.4.2	Influence de $R$ . . . . .	98
3.3.4.3	Influence de $k$ . . . . .	99
3.3.4.4	Synthèse . . . . .	101
3.4	Solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale . . . . .	104
3.4.1	Présentation de la configuration choisie . . . . .	104
3.4.2	Potentiel-vecteur créé par le solénoïde . . . . .	105
3.4.3	Champ de force et tenseur des actions magnétiques . . . . .	108
3.4.4	Étude paramétrique . . . . .	109
3.4.4.1	Influence de $J_0$ . . . . .	109
3.4.4.2	Influence de $p$ . . . . .	110
3.4.4.3	Cas particulier $p=1$ . . . . .	112
3.4.4.4	Influence de $R$ . . . . .	112
3.5	Conclusion . . . . .	115
	Références bibliographiques du chapitre 3 . . . . .	117

## 4 Études des contraintes de cisaillement 119

4.1	Mise en œuvre de la simulation multiphysique par la méthode des éléments finis	122
4.1.1	Modélisation du fluide à seuil . . . . .	122
4.1.1.1	Fluide à seuil . . . . .	122

4.1.1.2	Comportement avant seuil : solide élastique parfait . . . . .	122
4.1.1.3	Comportement en écoulement : modèle régularisé . . . . .	123
4.1.2	Simulation numérique multiphysique par la méthode des éléments finis .	125
4.1.2.1	Méthode des éléments finis . . . . .	125
4.1.2.2	Éléments clés de la simulation . . . . .	126
4.2	Étude de la transition gel–liquide par l’action des forces magnétiques volumiques pour un fluide à seuil en statique . . . . .	127
4.2.1	Actions des différentes configurations magnétiques . . . . .	127
4.2.1.1	Étude paramétrique avec deux nappes de courant . . . . .	127
4.2.1.2	Étude paramétrique dans le cas d’un solénoïde parcouru par un courant orthoradial . . . . .	134
4.2.1.3	Étude paramétrique dans le cas d’un solénoïde parcouru par un courant longitudinal . . . . .	136
4.2.2	Analyse des études paramétriques . . . . .	142
4.3	Actions des forces magnétiques volumiques sur l’écoulement d’un fluide à seuil .	144
4.3.1	Conditions nécessaires à la modification de l’écoulement . . . . .	144
4.3.2	Exemple de modifications . . . . .	145
4.3.2.1	Profil de vitesse sans forces magnétiques . . . . .	146
4.3.2.2	Profil de vitesse avec forces magnétiques . . . . .	146
4.3.3	Possibilités expérimentales . . . . .	148
4.4	Conclusion . . . . .	151
	Références bibliographiques du chapitre 4 . . . . .	153
	<b>Conclusions générales et perspectives</b>	<b>155</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>159</b>
	<b>Notations</b>	<b>165</b>
	<b>Liste des figures</b>	<b>169</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>173</b>

---

# Introduction générale

Jeudi 22 mars 2012, Los Alamos, Nouveaux Mexique, États-Unis

Une dizaine de scientifiques impatients du Los Alamos National Laboratory attendent l'annonce d'un résultat : l'intensité du champ magnétique pulsé produit par leur dispositif électromagnétique non destructif. Ce sera 100,75 teslas (T), et une première mondiale [1] au-delà de la barre mythique des 100 T. « This is our moon shot » confiera le directeur du Pulsed Field Facility. Et pourtant, cette nouvelle est passée de façon anecdotique dans la communauté scientifique et inaperçue pour le grand public. Un champ magnétique deux millions de fois plus intense que le champ magnétique terrestre n'impressionne pas, ou tout du moins, pas encore. La mise à disposition de champs magnétiques intenses pulsés ou fixes (supérieurs à 5 ou 10 T) en laboratoires se démocratise et les domaines d'applications se multiplient. Les effets des champs magnétiques intenses sur la matière sont en effet multiples et aiguissent la curiosité des chercheurs. Des effets quantiques [2], thermodynamiques [3], mécaniques [4, 5] imperceptibles à bas champ sont observés dans la matière sous fort champ magnétique. Le terme de magnéto-science est parfois employé pour regrouper l'ensemble des domaines d'application.

Un des domaines de la magnéto-science est l'étude des fluides sous champ magnétique intense. Les applications marquantes concernent généralement la magnétohydrodynamique et la lévitation magnétique. Dans le premier cas, le fluide est nécessairement conducteur. Les courants qui parcourent le fluide placé dans des champs magnétiques intenses engendrent des forces de Laplace permettant la mise en mouvement du fluide. Dans le second cas, le fluide utilisé n'a pas de propriétés magnétique ou électrique particulières. Les forces magnétiques volumiques créées par des dispositifs magnétiques permettent de compenser localement la gravité et donc de maintenir en lévitation un fluide sur un volume donné. Les sources de champ magnétique offrant ces possibilités sont le plus souvent des électroaimants hybrides composés d'une bobine interne résistive refroidie à l'eau et d'une bobine externe supraconductrice. Les zones utiles sont les extrémités de l'électroaimant car les forces magnétiques volumiques sont proportionnelles au gradient du carré du champ magnétique. D'importants travaux ont été menés depuis la lévitation de l'eau [6] en 1991. De nouvelles configurations magnétiques sont apparues [7, 8] et les domaines concernés se sont par exemple élargis à la biologie pour la croissance cristalline en apesanteur [9, 10] et au comportement des propergols sous microgravité [11, 12]. Les potentiels d'application se développent avec l'accessi-

bilité des champs magnétiques intenses. Les problèmes rencontrés sont généralement multiphysiques.

Nous avons choisi de nous intéresser au comportement sous champ magnétique intense de fluides sans propriétés magnétique ou électrique particulières, mais avec des propriétés mécaniques étonnantes. Le cœur de notre thèse est la rencontre d'un problème de mécanique des fluides complexes et de magnétostatique. Les fluides complexes sont des fluides dont le comportement n'est pas correctement décrit par les lois usuelles de mécanique des fluides. Leur comportement n'est pas celui d'un fluide newtonien. Il est par exemple impossible de leur attribuer une viscosité car celle-ci change en fonction de l'écoulement, des contraintes extérieures ou encore en fonction du temps. Nous avons retenu une famille particulière de fluide complexe : les fluides à seuil. Ces fluides ont la propriété de se comporter comme des solides lorsque les sollicitations extérieures ne dépassent pas une certaine contrainte dite contrainte seuil. Au-delà de ce seuil, ces fluides s'écoulent comme des fluides visqueux, des gels. Les exemples du quotidien sont la pâte dentifrice, la sauce tomate ou la mayonnaise. Dans le monde industriel, ces fluides sont des gels en cosmétique, des peintures ou des boues de forage. Notre objectif est de trouver des configurations magnétiques originales capables d'agir sur les fluides à seuil en réalisant la transition solide-gel ou bien en modifiant l'écoulement de ces fluides. Les forces magnétiques sont, comme pour la lévitation magnétique, sans contact. Cela offre la possibilité de modifier l'écoulement d'un fluide situé dans un espace fermé.

Notre approche s'inscrit dans une démarche exploratoire : les dispositifs magnétiques ont aujourd'hui les capacités de produire et de supporter des champs magnétiques intenses limités. Nous souhaitons nous placer au niveau des limites actuelles de la production de champ magnétique. En continu, les configurations magnétiques associent généralement des bobines supraconductrices et résistives. Nous avons la volonté de mettre en évidence les opportunités offertes par ces dispositifs d'exception et par ceux à venir.

Ce manuscrit se divise en quatre parties. La première consiste en un état de l'art des connaissances et des applications actuelles sur les fluides sous champ magnétique intense. Elle permet de présenter les problématiques de notre sujet. La deuxième partie permet de poser le problème mécanique et le problème magnétique. Nous nous intéresserons notamment au couplage entre les équations de mécanique des fluides et les forces magnétiques volumiques. Nous présenterons également les caractéristiques des fluides à seuil et leurs comportements. Les forces magnétiques volumiques devront exercer des contraintes de cisaillement sur le fluide pour réaliser la transition solide-gel. La troisième partie s'intéresse aux configurations magnétiques susceptibles d'agir sur les fluides à seuil, c'est-à-dire de cisailier au mieux le fluide. Nous mènerons une étude analytique qui permettra en particulier de comparer l'influence des différents paramètres des configurations magnétiques retenues. Enfin, la quatrième et dernière partie se focalise sur la simulation du problème multiphysique de magnéto-mécanique. Nous montrerons la possibilité qu'offrent certaines configurations magnétiques de dépasser la contrainte seuil au sein du fluide. Nous concluons ce mémoire en présentant les

---

principaux apports de notre travail et en indiquant les développements possibles liés à l'étude des fluides à seuil sous champ magnétique intense.

\*





# Les fluides sous champs magnétiques intenses

<b>1.1</b>	<b>Introduction à la magnéto-science</b>	<b>7</b>
1.1.1	Magnétisme de la matière	7
1.1.2	Les effets des champs magnétiques intenses sur les matériaux	10
1.1.3	Pourquoi et comment générer des champs magnétiques intenses ?	12
<b>1.2</b>	<b>Les forces volumiques magnétiques</b>	<b>13</b>
1.2.1	Matériau faiblement magnétique, linéaire, homogène et isotrope	13
1.2.2	Hypothèse des milieux continus	14
1.2.3	Énergie magnétique volumique d'aimantation	14
1.2.4	Force magnétique volumique	15
<b>1.3</b>	<b>Fluides et interactions magnéto-mécaniques</b>	<b>16</b>
1.3.1	Utilisation d'éléments ferromagnétiques	16
1.3.1.1	Séparation magnétique	17
1.3.1.2	Ferrofluides	17
1.3.1.3	Fluides magnétorhéologiques	18
1.3.2	Utilisation de fluides conducteurs	18
1.3.2.1	Magnétohydrodynamique	18
1.3.2.2	Magnétohydrostatique	20
1.3.3	Cas des fluides dia- ou paramagnétiques non conducteurs	20
1.3.3.1	Lévitiation magnétique	20
1.3.3.2	Magnétoaérodynamique	22
1.3.3.3	Effet Moïse	22
<b>1.4</b>	<b>Des supraconducteurs pour les applications sur des matériaux faiblement magnétiques</b>	<b>23</b>
1.4.1	Écoulement de liquides dia- ou paramagnétiques non conducteurs sous champ magnétique intense	24
1.4.2	Différences de problématiques entre la lévitation magnétique et l'action des forces volumiques sur un fluide dia- ou paramagnétique en écoulement	24
1.4.2.1	Aperçu des problématiques en lévitation magnétique	26
1.4.2.2	Aperçu des problématiques des liquides dia- ou paramagnétiques en écoulement sous champ magnétique intense	27

## 1. LES FLUIDES SOUS CHAMPS MAGNÉTIQUES INTENSES

---

<b>1.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>Références bibliographiques du chapitre 1</b> . . . . .	<b>31</b>

---

## Introduction

L'objectif de cette première partie est de présenter le cadre général et la problématique scientifique de notre thèse. Nous proposons un nouveau domaine d'application des champs magnétiques intenses qu'il est important de situer dans le cadre actuel de la recherche. Nous allons tout d'abord présenter les effets possibles des champs magnétiques intenses sur les fluides et les domaines d'applications liés.

### 1.1 Introduction à la magnéto-science

Les effets des champs magnétiques intenses sur la matière ont été largement étudiés, notamment depuis les années 1970 grâce au développement de dispositifs expérimentaux permettant la production de champs intenses. Ces études forment un domaine de recherche parfois appelé magnéto-science. Les effets des champs magnétiques intenses peuvent être physiques, chimiques ou biologiques. Les principes fondamentaux et les principales applications de la magnéto-science sont décrits par Yamaguchi et Tanimoto dans [13].

#### 1.1.1 Magnétisme de la matière

La plupart des atomes possèdent un moment magnétique lié à la précession de leurs électrons autour de leur noyau et à une contribution intrinsèque de ces électrons, leur spin. Cependant, la plupart des matériaux ne sont pas magnétiques. En effet, l'environnement électronique des atomes de la matière est modifié à cause de l'effet du champ cristallin pour les solides ou de l'agitation moléculaire pour les fluides, si bien qu'ils perdent généralement leurs propriétés magnétiques. Les atomes doivent posséder, en réalité, des sous-couches électroniques incomplètes suffisamment profondes pour former un matériau magnétique. Ce dernier est alors caractérisé par son moment magnétique ou son aimantation (moment par unité de volume). La compréhension complète du magnétisme s'explique par la physique quantique. Nous nous limiterons à la physique classique qui permet de caractériser simplement différents comportements magnétiques : trois comportements permettent généralement de décrire le comportement de la matière.

### **Le diamagnétisme**

Lorsque toutes les couches atomiques ou moléculaires sont saturées, le moment magnétique résultant est nul. Le matériau est alors dit diamagnétique. Ces matériaux présentent néanmoins un effet magnétique lorsqu'on les soumet à un champ magnétique : ils seront repoussés par un champ intense. C'est le cas de l'eau, du carbone, du cuivre, des supraconducteurs. . . Les orbitales électroniques sont modifiées sous l'effet d'un champ magnétique appliqué, et un moment magnétique est induit parallèlement au champ appliqué, en sens opposé, avec un module proportionnel à l'excitation magnétique. L'état magnétique des matériaux diamagnétiques ne varie pas avec la température car l'agitation thermique n'intervient pas dans leur état magnétique.

### **Le paramagnétisme**

Dans le cas où l'atome possède une couche électronique incomplète, l'atome possède un moment magnétique non nul. Lorsque l'énergie thermique est plus forte que l'énergie d'interaction de ces moments magnétiques, ou bien lorsqu'ils n'interagissent pas entre eux, le matériau est dit paramagnétique. En champ nul, les directions des moments sont aléatoires, et le matériau ne possède pas d'aimantation résultante. C'est le cas de l'aluminium, du magnésium, du dioxygène, du sodium. . . Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, les moments tendent à être orientés par le champ magnétique. Un corps paramagnétique sera ainsi attiré par un champ intense, mais cette attraction est faible et l'aimantation revient à zéro lorsque le champ extérieur est annulé. L'aimantation varie linéairement avec le champ (en champ faible). D'après la loi de Curie, le paramagnétisme diminue lorsque la température augmente (l'énergie thermique l'emporte sur l'énergie d'interaction des moments magnétiques).

### **Le ferromagnétisme**

Lorsque les moments magnétiques d'un matériau paramagnétique interagissent entre eux, l'état magnétique résultant du système résulte de la compétition entre deux facteurs :

- le désordre thermique favorisant un état paramagnétique ;
- les interactions, qui favorisent une configuration ordonnée des moments entre eux. Ces interactions ne sont pas d'origine dipolaire (trop faible) mais sont d'origine électrostatique et sont appelées interactions d'échange.

Dans le cas des matériaux ferromagnétiques, la structure parallèle des moments magnétiques est favorisée. L'état paramagnétique à haute température cède ainsi la place à un état ordonné avec alignement des moments magnétiques à une température de transition appelée température de Curie. C'est le cas du fer, nickel, cobalt. . . Pour le fer, cette température est de  $770^{\circ}\text{C}$ .

Les matériaux magnétiques durs, communément appelés aimants, présentent un fort phénomène d'hystérésis. Lorsque l'excitation magnétique extérieure est retirée, un matériau dur garde un champ magnétique dit rémanent : c'est désormais une source de champ magnétique, un aimant. Tous les matériaux ferromagnétiques sont fortement attirés par les zones de champs intenses.

## Modélisation en physique classique

L'aimantation magnétique  $\vec{M}$  qui apparaît sur un volume élémentaire d'un matériau est produite par le champ magnétique présent  $\vec{B}$ . Le comportement des substances isotropes est assez bien décrit (c'est l'expérience qui le confirme) par une relation de proportionnalité :

$$\vec{M} \propto \vec{B} \quad (1.1)$$

Pour des raisons historiques et expérimentales, l'aimantation des matériaux isotropes est étudiée à partir d'une relation de proportionnalité entre l'aimantation magnétique et  $\vec{H}$ , l'excitation magnétique :

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (1.2)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (1.3)$$

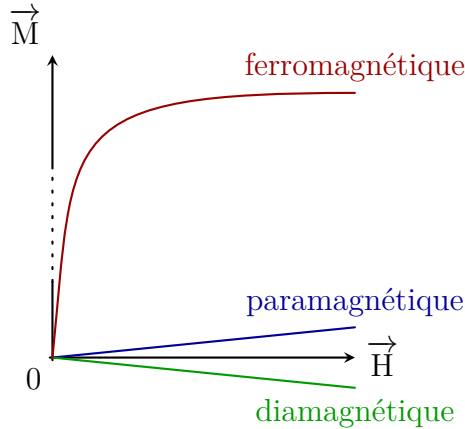
$\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide et  $\chi$  est la susceptibilité magnétique du matériau étudié. Remarquons que la définition de  $\chi$  dans l'équation (1.2) page 9 est discutable car c'est le champ magnétique  $\vec{B}$  qui est à l'origine de l'aimantation en agissant sur les moments magnétiques microscopiques. La plupart des ouvrages utilisent cette définition que nous reprenons avec prudence en ajoutant cette remarque. Alors que  $\chi$  est de l'ordre de  $-10^{-5}$  pour les matériaux diamagnétiques et de  $10^{-3}$  pour les substances paramagnétiques, on observe des susceptibilités qui peuvent atteindre  $10^6$  pour les matériaux ferromagnétiques. Nous pouvons donc observer dans le tableau 1.1 page 9, un écart de près d'un milliard de l'ordre de grandeur de la susceptibilité magnétique d'un matériau à un autre.

Substance	Comportement magnétique	Susceptibilité magnétique $\chi$
eau	diamagnétique	$-9,1.10^{-6}$
cuivre		$-9,4.10^{-6}$
bismuth		$-16,7.10^{-6}$
air	paramagnétique	$3,7.10^{-7}$
aluminium		$2,1.10^{-5}$
dioxygène (liq.) à $-183^\circ\text{C}$		$3,1.10^{-3}$
nickel	ferromagnétique	$1,1.10^2$
fer		$2,0.10^2$

**Tableau 1.1** Différents ordres de grandeur de la susceptibilité magnétique  $\chi$  à  $20^\circ\text{C}$  (sauf  $\text{O}_2$ ), 1 atm et sous champ magnétique nul

Remarquons également que la susceptibilité des matériaux diamagnétiques est négative, car leur aimantation est opposée à l'excitation magnétique. En génie électrique, il est usuel de considérer les aimantations des matériaux dia- et paramagnétiques négligeables devant les autres phénomènes magnétiques. Les habitudes sont plus souvent

de considérer la perméabilité infinie des matériaux ferromagnétiques pour les calculs analytiques dans les machines électriques par exemple [14].



**Figure 1.1** Comparaison de l'évolution de l'aimantation  $\vec{M}$  des trois principaux types de matériaux magnétiques en fonction de l'excitation  $\vec{H}$

### 1.1.2 Les effets des champs magnétiques intenses sur les matériaux

La notion de champ magnétique intense nécessite d'être commenté. Il est généralement choisi de parler de champ magnétique intense lorsque la norme du champ est supérieure à une limite d'environ 5 T. Cette valeur est à placer dans l'échelle des champs magnétiques qui part de l'activité électrique du cerveau  $10^{-13}$  T aux étoiles à neutrons où règne un champ de l'ordre de  $10^{11}$  T. Dans des échelles plus courantes, l'intensité du champ magnétique terrestre est de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-5}$  T et les aimants permanents les plus performants (alliage de néodyme, fer, bore) permettent d'obtenir environ 1,5 T.

Les champs magnétiques agissent globalement de cinq façons sur la matière :

- un effet quantique,
- un effet magnéto-thermodynamique,
- un effet mécanique via des forces magnétiques volumiques,
- un effet mécanique d'alignement magnétique,
- un effet mécanique lié aux forces de Lorentz sur les particules chargées.

Ces effets permettent ainsi trois types d'applications :

- sonder la matière à partir de l'effet quantique ;
- créer un nouvel état de la matière par des effets magnéto-thermodynamiques ;
- manipuler, c'est-à-dire utiliser les effets mécaniques d'origines magnétiques.

Les principales découvertes de la magnéto-science sont présentées dans le tableau 1.2 page 11. Notons que les principales applications des champs intenses sur les fluides<sup>1</sup> sont la magnétohydrodynamique [4] (voir au 1.3.2.1 page 18), la lévitation magnétique [6] (voir au 1.3.3.1 page 20), la séparation magnétique (voir au 1.3.1.1 page 17), l'alignement magnétique et l'effet Moïse [15] (voir au 1.3.3.3 page 22). Au sein du laboratoire du GREEN, plusieurs thématiques de magnéto-science ont été abordées :

- la séparation magnétique à haut gradient de champ SMHG [16] par Nava [17] en 1996 — un dispositif technique est utilisé pour extraire des particules paramagnétiques de tailles microscopiques d'un fluide ou d'un gaz. Le principe de base du séparateur est la capture de particules magnétiques sur des fils ferromagnétiques.
- la séparation magnétique à haute intensité SMHI [18] par Sido [19] en 2002 — à partir d'aimants permanents, des mécanismes magnéto-hydrodynamiques permettent la séparation des particules magnétiques entre les plaques rainurées formant la matrice d'extraction du séparateur.
- la conception de systèmes supraconducteurs de lévitation magnétique par Vincent-Viry [20] en 2002, Quettier [21] en 2003 et Lorin [22] en 2008.

Année	Chercheurs	Effet	Mécanisme	Réf.
1974	A. Matzuki, S. Nagakura	Extinction magnétique de fluorescence	Effet quantique	[2]
1975	R. Aogaki	Effet MHD en électrolyse	Forces de Lorentz	[4]
1981	J. Torbet	Alignement magnétique de fibrine	Alignement magnétique	[5]
1985	T. Kakeshita	Transformation martensitique par champ magnétique	Magnéto-thermodynamique	[3]
1987	M. Yamaguchi	Effets du champ magnétique sur l'équilibre chimique	Magnéto-thermodynamique	[23]
1991	E. Beaunon, R. Tournier	Lévitation diamagnétique	Forces magnétiques volumiques	[6]
1994	S. Ueno	Effet Moïse	Forces magnétiques volumiques	[15]
1996	T. Kimura, M. Yamato	Alignement magnétique de polymères cristallins	Alignement magnétique	[24]
2004	S. Nakabayashi	Modifications de l'indice de réfraction de l'eau sous champ magnétique intense	Multiples	[25]

**Tableau 1.2** Principales découvertes en magnéto-science d'après [13]

1. Les ferrofluides et les fluides magnétorhéologiques sont généralement étudiés sous champ faible (inférieur à 5 T) voir au 1.3.1.2 et au 1.3.1.3 page 17.

### 1.1.3 Pourquoi et comment générer des champs magnétiques intenses ?

La physique des particules a joué un rôle essentiel dans le développement des champs magnétiques intenses. Ce domaine porte sur l'étude de particules élémentaires de la matière détectés lors de la collision entre particules à haut niveau d'énergie. Les outils expérimentaux nécessaires sont les accélérateurs de particules à très haute énergie ; le plus puissant au monde est le Large Hadron Collider (LHC), lancé en septembre 2008 au CERN. L'objectif de ces essais expérimentaux est de déterminer les origines de l'univers en recréant les premiers états de la matière après le Big-Bang.

Un autre domaine de recherche essentiel qui a permis le développement des champs magnétiques intenses est la physique des plasmas. Cela a conduit à la possibilité d'un confinement magnétique qui est utilisé pour rassembler et confiner des particules ensemble (voir au 1.3.2.1 page 18). Ce procédé est notamment nécessaire pour maîtriser la réaction thermonucléaire de fusion. Le programme ITER, en cours de réalisation à Cadarache, est une expérience scientifique à très grande échelle qui doit démontrer la faisabilité scientifique et technologique de l'énergie de fusion. Ce projet devrait ouvrir la voie à son exploitation industrielle et commerciale. Le concept de confinement magnétique appelé « tokamak » consiste à enfermer le plasma dans une chambre en forme d'anneau. Le combustible, un mélange de deutérium et de tritium (deux isotopes de l'hydrogène), est chauffé à des températures supérieures à 150 millions de degrés Celsius afin d'obtenir un plasma chaud. Des champs magnétiques intenses maintiennent le plasma à distance des parois. ITER ne produira pas d'électricité mais permettra de valider les principes physique et la faisabilité d'un tel dispositif. L'énergie récupérée lors de la fusion pourrait être utilisée pour produire de la vapeur et, au moyen de turbines et d'alternateurs, de l'électricité.

Le domaine du biomédical a également encouragé le développement des dispositifs créant des champs magnétiques intenses. En effet, la possibilité d'explorer la matière à partir d'effets quantiques par résonance magnétique nucléaire RMN a permis la mise en œuvre de l'imagerie par résonance magnétique IRM. Afin de magnétiser les tissus, un aimant supraconducteur est utilisé : il produit un champ stationnaire et uniforme dont l'intensité est comprise selon les appareils entre 0,1 et 7 T. Cette méthode d'imagerie est sans aucun traumatisme et sans injection de produits radioactifs. La qualité de l'image obtenue étant liée à la valeur de l'intensité du champ magnétique dans lequel sont placés les tissus à observer (augmentation du rapport signal à bruit), de nombreux projets de recherche sont effectués dans ce domaine : au CEA à Saclay, le centre NeuroSpin mettra en service en 2014 un scanner IRM clinique de 11,7 T et actuellement, au National High Magnetic Field Laboratory de Floride, l'IRM le plus puissant au monde produit un champ magnétique de 21,1 T.

Pour générer des champs magnétiques intenses, ce sont des électro-aimants qui sont utilisés. Leur principe de fonctionnement est basé sur les lois de l'électromagnétisme. Notons la possibilité de créer des configurations à base d'aimants permanents jusqu'à environ 5 T sur quelques millimètres cubes [26]. Cette solution présente cependant



une limite en valeur de champ magnétique obtenu et en volume actif disponible. Trois dispositifs sont envisageables pour obtenir un champ magnétique intense permanent :

- des bobines supraconductrices (jusqu'à 34 T) refroidies à l'hélium liquide ;
- des bobines purement résistives (jusqu'à 36 T) ;
- des bobines hybrides avec un mélange des deux technologies (jusqu'à 45 T).

Les valeurs indiquées sont les records détenus par le National High Magnetic Field Laboratory de Floride [1].

Ces systèmes génèrent des champs statiques limités par la pression magnétique, l'effet Joule pour les bobines résistives, la valeur du couple champ magnétique – courant critique du supraconducteur utilisé et le coût tant financier qu'énergétique très important du fait de la puissance électrique mise en jeu.

Pour réaliser des expériences à des champs plus intenses, il faut travailler en régime transitoire. Les champs magnétiques pulsés permettent d'atteindre de manière fiable des champs magnétiques supérieurs à 60 T en envoyant une impulsion de courant de plusieurs dizaines de milliers d'ampères dans une bobine résistive. Des valeurs supérieures sont même possibles en utilisant des bobines gigognes. La quête des 100 T en champ pulsé non destructif vient d'aboutir au National High Magnetic Field Laboratory de Floride avec un record en mars 2012 de 100,75 T. En général, le champ magnétique créé varie beaucoup plus lentement (quelques millisecondes) que les phénomènes étudiés. On considère alors que le champ obtenu est quasi-statique. Il existe également des systèmes permettant de dépasser la centaine de tesla pendant quelques microsecondes mais en détruisant soit la bobine utilisée (système monospire ou single turn coil), soit tout le montage expérimental (montage à compression de flux par explosion).

## 1.2 Les forces volumiques magnétiques

Les forces volumiques magnétiques agissent sur tous les matériaux mais sont généralement très faibles pour les matériaux paramagnétiques ou diamagnétiques. Ces forces dérivent d'une énergie magnétique volumique acquise par le matériau en présence d'un champ magnétique appliqué.

### 1.2.1 Matériau faiblement magnétique, linéaire, homogène et isotrope

Considérons un matériau homogène, isotrope, dia- ou paramagnétique dont le comportement magnétique est linéaire. Placé dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$ , ce matériau s'aimante faiblement. Il crée alors son propre champ magnétique  $\vec{B}'$ . Le champ magnétique total en un point du matériau est

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \quad (1.4)$$

L'excitation magnétique  $\vec{H}$  est liée à  $\vec{B}$  par l'équation (1.3) page 9, ce qui permet d'écrire

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} \quad (1.6)$$

Comme  $|\chi| \ll 1$  pour un matériau dia- ou paramagnétique, nous pouvons écrire au 1<sup>er</sup> ordre et en tout point du matériau

$$\vec{B} \simeq \mu_0 \vec{H} \quad (1.7)$$

soit

$$\vec{B} \simeq \vec{B}_0 \quad (1.8)$$

Le champ propre du matériau peut donc être négligé pour un matériau faiblement magnétique. Cette hypothèse nous accompagnera tout au long du mémoire, ce qui nous permet de confondre  $\vec{B}$  et  $\vec{B}_0$  en chaque point d'un matériau faiblement magnétique, homogène, linéaire et isotrope.

### 1.2.2 Hypothèse des milieux continus

Afin de décrire le comportement du matériau, nous nous plaçons à une échelle mésoscopique afin de vérifier l'hypothèse des milieux continus. Nous raisonnons sur un volume élémentaire suffisamment petit pour décrire localement le comportement du matériau mais suffisamment grand pour s'affranchir du comportement moléculaire du matériau.

Cette hypothèse permet d'assurer au sein du matériau la continuité des grandeurs physiques intensives qui le décrivent.

### 1.2.3 Énergie magnétique volumique d'aimantation

Considérons une particule élémentaire dia- ou paramagnétique de volume élémentaire  $dV$  placée dans un champ magnétique et dans le vide. L'énergie magnétique volumique d'aimantation acquise par cette particule est égale à la différence entre l'énergie magnétique volumique de la particule et celle du vide

$$\mathcal{E}_m = -\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} - \left( -\frac{\mu_0}{2} H^2 \right) \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un matériau linéaire, homogène et isotrope, nous obtenons d'après l'équation (1.3) page 9

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\chi \mu_0}{2} H^2 \quad (1.10)$$

ou encore au 1<sup>er</sup> ordre d'après (1.7) page 14

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\chi}{2\mu_0} B^2 \quad (1.11)$$

Une particule cherchant toujours à minimiser son énergie, son comportement va varier selon la nature de son magnétisme : d'après (1.11) page 14, une particule paramagnétique ( $\chi > 0$ ) sera attirée par les champs intenses alors qu'une particule diamagnétique ( $\chi < 0$ ) sera attirée vers les zones de champ faible.

### 1.2.4 Force magnétique volumique

La force magnétique volumique d'un corps dia- ou paramagnétique est conservative. La force volumique associée à l'énergie magnétique volumique d'aimantation dérive donc de cette énergie par la relation

$$\vec{f}_{\text{mv}} = - \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_m \quad (1.12)$$

Dans le cas d'un matériau linéaire, homogène et isotrope, nous obtenons

$$\vec{f}_{\text{mv}} = \frac{\chi \mu_0}{2} \overrightarrow{\text{grad}} H^2 \quad (1.13)$$

Il est possible d'exprimer l'énergie magnétique volumique d'aimantation en levant l'hypothèse de linéarité du matériau. Cette approche thermodynamique détaillée par [27] conduit à

$$\vec{f}_{\text{mv}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} \left[ H^2 \rho \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{\text{T}} \right] - \frac{1}{2} H^2 \overrightarrow{\text{grad}} \mu \quad (1.14)$$

avec la perméabilité magnétique  $\mu$  définie telle que  $\mu = \mu_0 (1 + \chi)$  et  $\chi = \chi_g \rho$  où  $\chi_g$  est la susceptibilité magnétique massique ou spécifique exprimée en  $\text{m}^3/\text{kg}$ .

Les deux termes de la différence du membre de droite de (1.14) page 15 s'écrivent respectivement

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} \left[ H^2 \rho \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{\text{T}} \right] = \frac{1}{2} \mu_0 \chi \overrightarrow{\text{grad}} H^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \overrightarrow{\text{grad}} \chi \quad (1.15)$$

et

$$\frac{1}{2} H^2 \overrightarrow{\text{grad}} \mu = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \overrightarrow{\text{grad}} \chi \quad (1.16)$$

L'expression de la différence entre ces deux termes conduit au même résultat que (1.13) page 15.

Analysons à présent les formulations de la force magnétique volumique exprimée en fonction de  $B$ , la norme du champ magnétique

$$\vec{f}_{\text{mv}} = \frac{\chi}{2\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} B^2 \quad (1.17)$$

ou encore en utilisant une propriété du gradient

$$\vec{f}_{\text{mv}} = \frac{\chi}{\mu_0} B \overrightarrow{\text{grad}} B \quad (1.18)$$

Plusieurs points sont remarquables :

- la norme de la force magnétique volumique est proportionnelle à la valeur absolue de la susceptibilité magnétique du matériau ;
- la force magnétique volumique est normale aux isovaleurs de  $B^2$  d'après (1.17) page 15 et donc aux isovaleurs de  $\mathcal{E}_m$ , l'énergie magnétique volumique d'aimantation d'après (1.11) page 14 ;
- pour un matériau paramagnétique ( $\chi > 0$ ), la force magnétique volumique est orientée dans la direction où la norme du champ magnétique augmente ;
- pour un matériau diamagnétique ( $\chi < 0$ ), la force magnétique volumique est orientée dans la direction où la norme du champ magnétique diminue ;
- la norme de la force magnétique volumique est proportionnelle à la norme du champ magnétique ainsi qu'à la norme de son gradient d'après (1.18) page 15 ;
- la distribution de forces volumiques créée par un dispositif magnétique peut être réalisée sans contact avec la matière, c'est une interaction à distance ;
- le champ de force volumique magnétique est à rotationnel nul,  $\vec{\text{rot}} \vec{f}_{mv} = \vec{0}$ , d'après (1.17) page 15 et la propriété  $\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} B^2 = \vec{0} \forall B$ .

Ces forces volumiques sont généralement négligeables dans les matériaux faiblement magnétiques. En effet,  $|\chi|$  étant inférieur à  $10^{-3}$ , il est inhabituel d'atteindre des forces volumiques du même ordre de grandeur par exemple que la force volumique de pesanteur  $\rho \vec{g}$ . Un exemple : pour l'eau (à  $20^\circ\text{C}$  et 1 atm), la force volumique de pesanteur est de l'ordre de  $10^4 \text{ N.m}^{-3}$  ce qui demande une valeur de  $\vec{\text{grad}} B^2$  d'environ  $2,8.10^3 \text{ T}^2.\text{m}^{-1}$ . Ces valeurs dépassent largement les capacités des dispositifs magnétiques usuels : il est nécessaire d'utiliser des champs magnétiques intenses pour que la force volumique magnétique ait un effet observable. Nécessaire mais pas suffisant car une autre contrainte est liée à un gradient de champ magnétique intense. La force magnétique volumique sera significative dans les cas de dispositifs à haut gradient et haut champ. Nous y reviendrons au 1.3.3.1 page 20.

Les premières expériences impliquant les forces volumiques magnétiques se sont développées dans les laboratoires de champs magnétiques intenses. Ainsi, à Grenoble en 1991, Beaugnon et Tournier [6] utilisent une bobine solénoïdale hybride de 30 T et réalisent la lévitation de l'eau, de l'éthanol, etc..

## 1.3 Fluides et interactions magnéto-mécaniques

### 1.3.1 Utilisation d'éléments ferromagnétiques

De nombreuses applications sont basées sur ce principe de haut gradient et haut champ mais elles utilisent généralement des matériaux ferromagnétiques (matrice d'extraction pour la séparation magnétique ou des particules pour les ferrofluides et les fluides magnétorhéologiques) afin d'augmenter les effets des forces volumiques magnétiques.

### 1.3.1.1 Séparation magnétique

La séparation magnétique à haut gradient et haut champ SMHG utilise une matrice d'extraction ferromagnétique placée dans le champ intense produit par un bobinage ou un aimant supraconducteur [28]. La matrice est plongée dans un champ magnétique uniforme. Les filaments de la matrice sont saturés magnétiquement et vont créer à leur voisinage proche des valeurs de gradient de  $B^2$  considérables : avec un champ magnétique de 5 T et des filaments en fer Armco de 0,1 mm de rayon, on obtient un gradient de plus de  $2 \cdot 10^5 \text{ T}^2 \cdot \text{m}^{-1}$  à la surface du filament mais décroissant très rapidement lorsque l'on s'éloigne du fil.

Dans la matrice, les matériaux à traiter (généralement des minerais, notamment le kaolin) sont soumis à des gradients d'énergie magnétique suffisants pour séparer des particules de faible susceptibilité magnétique et de faible granulométrie. La séparation s'effectue en voie humide. Le liquide porteur des particules solides est généralement l'eau. Les phénomènes, qui se produisent au sein de la matrice d'extraction des séparateurs à haute intensité du champ magnétique et haut gradient, conduisent dans une première phase à la rétention d'une partie des particules transportées par le liquide porteur. Au cours du temps, la matrice se sature progressivement et perd de son efficacité, limitant ainsi les performances du séparateur. Les matrices généralement employées ont une forme de plaques dentées, de billes, de mousse ou de laine de fer. Des exemples récents de séparation magnétique ont été mis en œuvre avec des fluides visqueux comme liquide porteur [29] ou pour la purification des eaux usées [30].

### 1.3.1.2 Ferrofluides

Les ferrofluides sont des solutions colloïdales de nanoparticules ferromagnétiques d'une taille de l'ordre de 10 nm dans un solvant ou de l'eau. Les particules magnétiques de ferrofluide sont recouvertes d'une couche de surfactant afin d'éviter leur agglomération. Les ferrofluides sont le plus souvent composés de nanoparticules d'oxyde de fer (magnétite ou de maghémite).

Lorsque le fluide n'est soumis à aucun champ magnétique, les moments magnétiques portés par les nanoparticules sont orientés aléatoirement. L'aimantation totale du fluide est nulle. Lorsque le ferrofluide est soumis à un champ magnétique, le fluide présente une aimantation non nulle. Les moments magnétiques des particules s'alignent sur le champ auquel elles sont soumises.

En 1965, Rosensweig propose un procédé de synthèse d'un ferrofluide stable et magnétique. Par la suite, la technologie de synthèse des ferrofluides s'est perfectionnée et de nouvelles applications sont apparues dans l'hydraulique et la médecine. Les ferrofluides sont actuellement utilisés dans des enceintes audio ou des amortisseurs de voitures haut de gamme.

Généralement, les ferrofluides ne sont pas utilisés sous champ magnétique intense. Il existe des exceptions notamment dans le domaine du biomédical qui utilise des ferrofluides sous champ magnétique intense pour la manipulation magnétique de nanoaimants (des nanoparticules magnétiques). Il s'agit d'utiliser la force magnétique pour conduire un vecteur thérapeutique jusqu'à sa cible. On utilise des liposomes magnétiques encapsulant des nanoparticules magnétiques [31, 32].

### 1.3.1.3 Fluides magnétorhéologiques MR

Les fluides magnétorhéologiques MR sont des suspensions de particules magnétiques d'une taille voisine de  $1 \mu\text{m}$  dans un fluide suspendant. Afin d'éviter une sédimentation et une agrégation des particules, il est stabilisé par des polymères. Les particules de fluide MR sont suffisamment grosses pour être constituées de plusieurs domaines de Weiss adjacents alors que les particules de ferrofluides peuvent être considérées comme étant monodomaines.

En l'absence de champ magnétique, ces particules ne présentent pas de moment magnétique global : chaque monodomaine d'une particule est orienté de façon différente de son voisin, et l'aimantation qui en résulte est nulle. L'énergie d'interaction magnétique est alors négligeable devant les autres énergies de liaison. D'autre part, ces particules ne sont que très peu sensibles à l'agitation thermique, car elles sont suffisamment grosses pour ne pas se disperser au sein du liquide porteur. Lorsque l'on applique un champ magnétique, chaque domaine de Weiss d'une particule de fluide MR s'oriente dans la direction du champ imposé. L'agrégation des particules est alors possible. L'expérience montre que des structures en chaînes se forment. En revanche, en l'absence de champ magnétique, les structures formées se rompent et le fluide reprend sa forme originelle.

L'effet magnétorhéologique consiste donc en une augmentation brusque des propriétés mécaniques (viscosité, plasticité, élasticité) du fluide MR sous l'effet du champ magnétique. Cet effet a été découvert en 1948 par Rabinow. Ces fluides MR sont utilisés dans des applications de contrôle du mouvement. Les applications incluent différents types de freins dans les mécanismes rapides (amortisseurs, machines d'impression, machines à tisser, etc.) ainsi que différents dispositifs de prothèses à résistance variable dans le secteur biomédical.

Une récente publication [33] indique également la possibilité de fluidifier le sang grâce à un champ magnétique important. Sous champ magnétique (1,3 T pendant 1 min), les globules rouges se regroupent en petits chapelets, ce qui diminue la viscosité du sang d'environ 25%. Le comportement serait donc en partie semblable à des fluides MR avec des globules rouges comme particules magnétiques.

## 1.3.2 Utilisation de fluides conducteurs

### 1.3.2.1 Magnétohydrodynamique MHD

Certains fluides peuvent être conducteurs par la nature de leur composition ou peuvent le devenir comme dans le cas des plasmas. Dans ce cas, c'est la force volumique de Laplace qui intervient dans les équations du mouvement. La force volumique magnétique vue au 1.2.4 page 15 est alors négligée devant la force volumique de Laplace qui s'écrit

$$\vec{f}_{L_v} = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (1.19)$$

où  $\vec{j}$  est le vecteur densité de courant au sein du fluide étudié.

Les équations de Maxwell pour l'électromagnétisme sont couplées aux équations de Navier-Stokes pour la mécanique des fluides.

Dans le cadre de l'ARQS (Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires), les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases} \quad (1.20)$$

avec  $\vec{E}$  le champ électrique,  $\rho_e$  la densité volumique de charge et  $\varepsilon_0$  la permittivité du vide.

Pour un fluide newtonien dans un référentiel galiléen, l'écoulement d'un fluide est régi par l'équation de Navier-Stokes qui est l'application du principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \operatorname{grad}) \vec{u} \right) = -\operatorname{grad} P + \eta \Delta \vec{u} + \vec{j} \wedge \vec{B} + \vec{f}_v \quad (1.21)$$

avec  $\rho$  la masse volumique,  $\vec{u}$  le champ de vitesse du fluide,  $P$  le champ de pression au sein du fluide,  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide et  $\vec{f}_v$  les autres forces volumiques (poids par exemple, la force électrique volumique  $\rho_e \vec{E}$  est négligeable devant la force de Laplace volumique).

Ces équations couplées et non-linéaires sont généralement étudiées numériquement. Des problèmes de MHD sont étudiés en géophysique (effet dynamo à l'origine du champ magnétique terrestre [34]), en astrophysique (vent solaire, éruption solaire, etc.) et plus généralement pour l'étude des plasmas comme par exemple dans le confinement magnétique vu au 1.1.3 page 12.

Plus original, des accélérateurs MHD ont été développés. Il s'agit de mettre en mouvement un fluide conducteur, grâce à un champ électrique et un champ magnétique. Le liquide conducteur peut être de l'eau salée ce qui offre la possibilité de propulsion marine basée sur la MHD. Le Yamato 1 est un démonstrateur technologique civil japonais de navire à propulsion électromagnétique réalisé au début des années 1990. Il se déplace jusqu'à une vitesse de 8 nœuds, sans émission sonore, par réaction et sans hélice. De façon plus classique, les accélérateurs MHD sont principalement utilisés dans l'industrie sous forme de pompe électromagnétique.

### 1.3.2.2 Magnétohydrostatique

Dans le cas d'un fluide au repos ( $\vec{u} = \vec{0}$ ) et en régime permanent, le problème de MHD précédent se simplifie. Les équations de Maxwell (1.20) page 19 deviennent

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases} \quad (1.22)$$

L'équation de Navier-Stokes (1.21) page 19 s'écrit

$$-\operatorname{grad} P + \vec{j} \wedge \vec{B} + \vec{f}_v = \vec{0} \quad (1.23)$$

Ces équations permettent d'étudier la stabilité du confinement magnétique dans les tokamaks par exemple mais aussi de contrôler les surfaces libres des métaux liquides dans des procédés industriels. Des études théoriques et pratiques ont été menées par Hinaje [35] en 2005 au GREEN sur l'action d'un champ magnétique variable sur une couche mince de métal liquide statique.

### 1.3.3 Cas des fluides dia- ou paramagnétiques non conducteurs

#### 1.3.3.1 Lévitiation magnétique

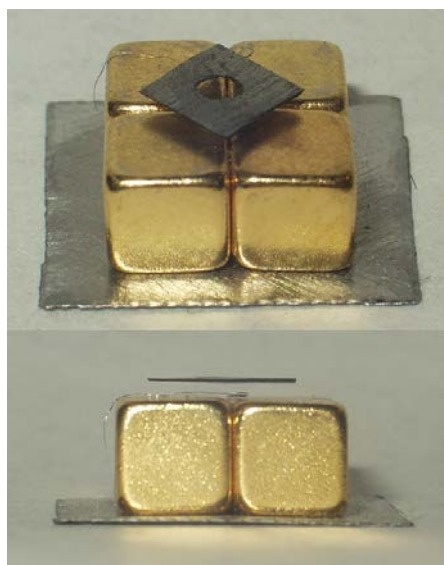
La lévitation magnétique est un phénomène étonnant consistant à compenser de façon stable les effets de la pesanteur pour un solide ou un liquide, sans contact mécanique, dans le vide ou dans un environnement gazeux monophasique homogène de pression quasi-uniforme (afin de s'affranchir de la poussée d'Archimède ou d'un phénomène de tension superficielle).

Nous ne présenterons que la lévitation magnétique par champs statiques permettant de simuler les conditions d'apesanteur pour des fluides dia- ou paramagnétiques non conducteurs.

S. Earnshaw démontre en 1847 que la lévitation statique utilisant des forces gravitationnelles, électrostatiques et/ou magnéto-statiques est impossible. Seules deux exceptions ont été découvertes pour obtenir une lévitation stable et sans apport d'énergie : le diamagnétisme et la supraconductivité.

En 1939, W. Braunbeck montre expérimentalement que la lévitation stable et passive est accessible aux matériaux diamagnétiques (lévitation d'un morceau de bismuth dans un électroaimant de 2,4 T). Cette exception repose sur le fait que l'énergie magnétique volumique d'un matériau diamagnétique ( $\chi < 0$ ) est positive (voir 1.2.3 page 14) et qu'il peut ainsi exister une position stable correspondant à un puits de potentiel. Suite à la découverte dans les années 60 d'un matériau fortement diamagnétique (le





**Figure 1.2** Plaque de graphite pyrolytique en lévitation stable et passive au-dessus d'aimants permanents

carbone pyrolytique), cette expérience est aujourd'hui simple à réaliser : une plaque de graphite pyrolytique lévite au-dessus d'aimants permanents sur la figure 1.2 page 21.

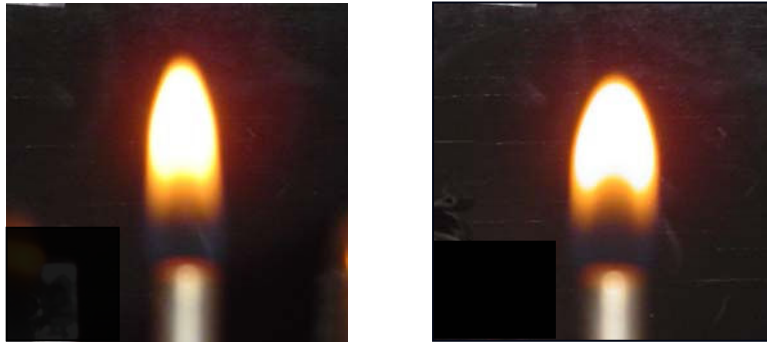
À partir des années 1990, des liquides ont alors été mis sous champ magnétique et notamment de l'eau [6]. La voie de la lévitation magnétique s'est alors ouverte sur de nouvelles perspectives : croissance cristalline de matériau en conditions d'apesanteur [9, 10], comportement des propergols sous microgravité [11, 12]. En 1997, Berry et Geim [36] réalise la lévitation du premier être vivant, une grenouille (voir figure 1.3 page 21), à l'aide d'une bobine Bitter générant un champ magnétique de plus de 16 T.



**Figure 1.3** Grenouille en lévitation magnétique dans un solénoïde de 16 T d'après [36]

### 1.3.3.2 Magnétoaérodynamique

L'air est composé principalement d'azote, faiblement diamagnétique et de dioxygène, fortement paramagnétique : globalement, l'air est paramagnétique. Des écoulements d'air ou de gaz sous champ magnétique intense ont été étudiés : par exemple, il est possible de réaliser des rideaux magnétiques pour bloquer un écoulement [37], d'étudier la combustion d'une flamme sous champ magnétique [38, 39] comme sur la figure 1.4 page 22 ou de s'intéresser au phénomène de convection sous champ magnétique [40].



**Figure 1.4** Combustion d'une flamme sans champ magnétique à gauche et sous un champ magnétique de 2,8 T à droite d'après [39]

### 1.3.3.3 Effet Moïse

En statique des fluides, il est facilement possible de prévoir la déformation d'un liquide dia- ou paramagnétique soumis à des forces volumiques magnétiques. Dans un référentiel galiléen, nous écrivons le principe fondamental de la dynamique à une particule de liquide (linéaire, homogène et isotrope) de volume  $d\tau$

$$\vec{0} = \left( -\vec{\text{grad}} P + \rho \vec{g} + \frac{\chi}{2\mu_0} \vec{\text{grad}} B^2 \right) d\tau \quad (1.24)$$

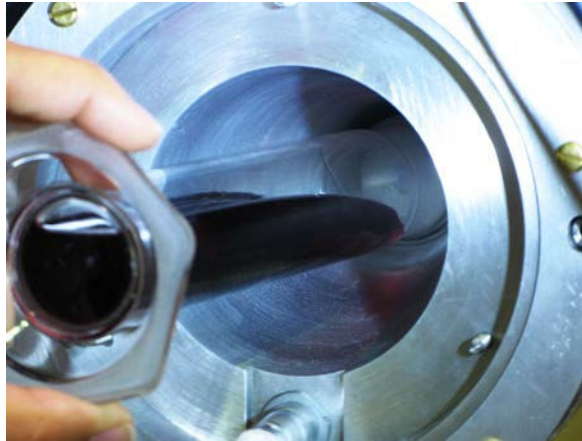
Ainsi, en définissant un axe  $Oz$  vertical ascendant et en supposant  $\vec{g}$  uniforme, nous obtenons en tout point du fluide

$$\vec{\text{grad}} \left( P + \rho g z + \frac{\chi}{2\mu_0} B^2 \right) = \vec{0} \quad (1.25)$$

soit, en tout point du fluide

$$P + \rho g z + \frac{\chi}{2\mu_0} B^2 = C^{\text{te}} \quad (1.26)$$

Connaissant le champ magnétique présent, on en déduit facilement l'allure de la surface libre du liquide. Dans le cas d'un solénoïde, à ses extrémités, l'eau sera repoussée (voir figure 1.5 page 23) d'où le nom d'effet Moïse.



**Figure 1.5** Effet Moïse à l'extrémité d'un solénoïde horizontal de 16 T – Université de Birmingham

## 1.4 Des supraconducteurs pour les applications sur des matériaux faiblement magnétiques

Les forces magnétiques volumiques sont proportionnelles à la susceptibilité magnétique, au champ magnétique et à son gradient d'après l'équation (1.18) page 15. Afin d'augmenter l'effet de ses forces et de les rendre significatives sur des matériaux faiblement magnétiques, plusieurs approches ont été étudiées :

- augmenter le champ magnétique à l'aide de matériaux supraconducteurs ;
- augmenter le gradient du champ magnétique en modifiant la répartition des sources de champ magnétique ;
- augmenter le gradient en ajoutant des inserts (ferromagnétiques ou supraconducteurs) ;
- augmenter le gradient en effectuant une réduction d'échelle [41] ;
- augmenter la susceptibilité apparente en plongeant le matériau à étudier dans un milieu fortement paramagnétique (dioxygène liquide par exemple), on parle alors de poussée d'Archimède magnétique.

Nous souhaitons dans ce mémoire traiter le cas de liquides non conducteurs sous champ magnétique intense. Nous allons étudier les possibilités offertes par les deux premiers points cités : augmenter le champ magnétique et modifier la topologie des sources de champ magnétiques. Avant de réaliser cette étude, il est essentiel d'aller plus en avant dans la présentation du sujet pour préciser le cadre de notre étude. Notamment, nous allons montrer que notre objectif n'est pas de maximiser les forces volumiques ou de les uniformiser comme en lévitation magnétique.

### 1.4.1 Écoulement de liquides dia- ou paramagnétiques non conducteurs sous champ magnétique intense

Reprenons l'équation de Navier-Stokes, dans un référentiel terrestre supposé galiléen, pour un liquide incompressible, newtonien, linéaire d'un point de vue magnétique, homogène et isotrope, plongé dans un champ magnétique

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} \right) = - \text{grad} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{u} + \frac{\chi}{2\mu_0} \text{grad} B^2 \quad (1.27)$$

avec  $\rho$  la masse volumique,  $\vec{u}$  le champ de vitesse du fluide,  $P$  le champ de pression au sein du fluide,  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide.

La force volumique magnétique va pouvoir agir sur l'écoulement du liquide à condition que le terme associé aux forces volumiques magnétiques soit du même ordre de grandeur que les autres termes de l'équation (1.27) page 24. Nous réaliserons une étude adimensionnelle de ce problème au 2.1.3.1 page 41 du chapitre suivant pour montrer qu'il est possible d'agir sur l'écoulement du liquide. Notre étude bibliographique a révélé que seuls des problèmes de liquides en écoulement sous champs magnétiques intenses ont été étudiés lorsque le liquide est chargé de particules (dépollution ou ciblage médicamenteux). Les applications concernent des dispositifs de séparation magnétique. Seul [42] étudie expérimentalement l'allure de la déformation de l'écoulement de l'eau sous champ magnétique intense.

Nous souhaitons nous intéresser aux effets que peuvent avoir les forces volumiques sur l'écoulement d'un liquide. Les premières questions qui nous ont guidés vers cet axe de recherche sont :

- pourquoi agir sans contact sur un fluide en écoulement ?
- sur quel type d'écoulements et sur quel type de fluides peut-on agir ?
- quels sont les apports en mécanique des fluides d'une force volumique supplémentaire ?
- comment concevoir un dispositif magnétique agissant sur un fluide en mouvement ?

Afin de répondre à ces premières questions, il est nécessaire d'étudier la manière dont les liquides ou la matière s'écoulent. C'est la rhéologie en mécanique des fluides que nous aborderons au 2.1 page 37. Auparavant, nous allons nous intéresser aux méthodes de conception de dispositifs existant dans le domaine qui se rapproche le plus de notre étude, la lévitation magnétique. Les fluides utilisés sont dia- ou paramagnétiques et non conducteurs mais les problématiques sont différentes.

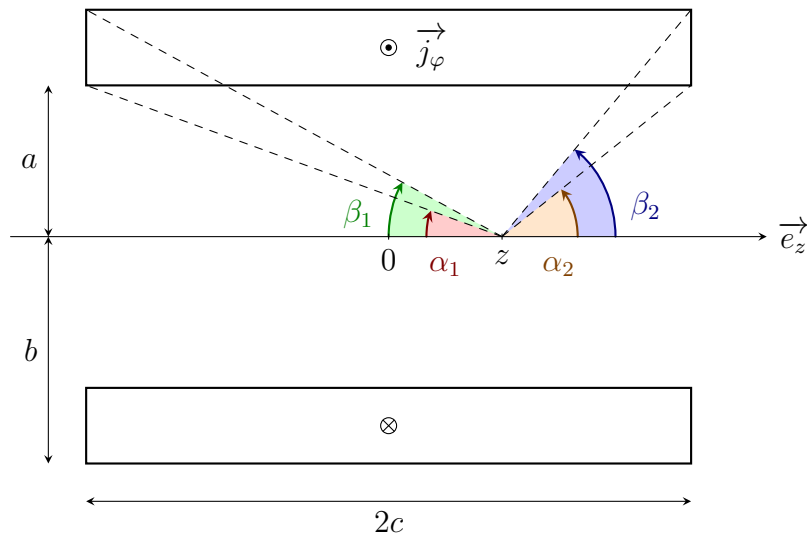
### 1.4.2 Différences de problématiques entre la lévitation magnétique et l'action des forces volumiques sur un fluide dia- ou paramagnétique en écoulement

Les dispositifs supraconducteurs existants qui agissent sur des liquides dia- ou paramagnétiques non conducteurs sont des conceptions de systèmes pour la lévitation

magnétique. Ils résultent le plus souvent d'un problème de synthèse inverse : à partir d'un champ de force voulu (l'uniformité du champ de force sur le plus grand volume est souvent le principal objectif), le champ magnétique est déterminé ainsi que les sources de champ magnétiques associées.

De nombreux dispositifs ont été conçus à partir d'un solénoïde principal auquel sont venues s'ajouter des modifications pour améliorer l'homogénéité du champ de force. Lors des premières expériences de lévitation de l'eau, Beaugnon et Tournier [6] utilisent une bobine solénoïdale hybride produisant une induction maximale de 30 T. La zone utile en lévitation d'un solénoïde est située aux extrémités puisque que c'est le gradient du champ magnétique au carré qui intervient dans l'expression du champ de force d'après (1.17) page 15.

Prenons l'exemple d'un solénoïde épais et fini figure 1.6 page 25.



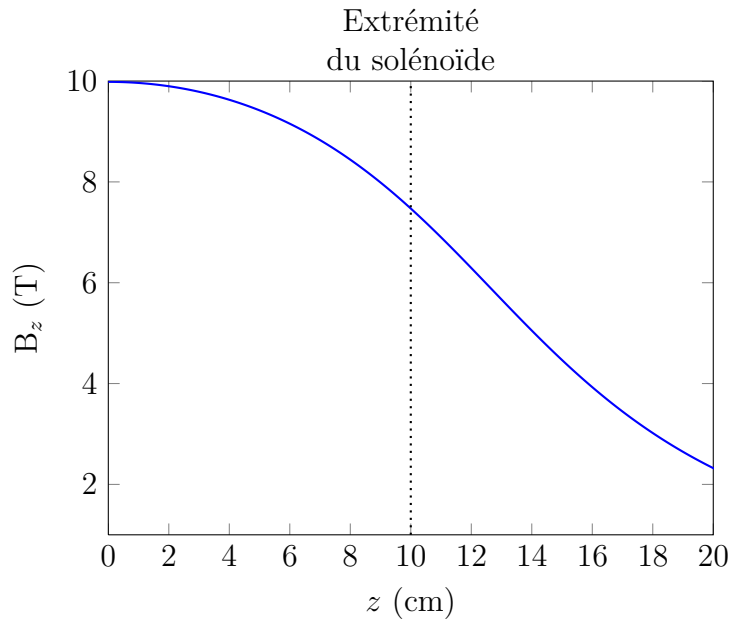
**Figure 1.6** Caractéristiques d'un solénoïde épais et fini

Parcouru par une densité de courant uniforme  $\vec{j}_\varphi$  orthoradiale, le champ magnétique créé sur l'axe  $\vec{e}_z$  s'exprime pour  $z > 0$  d'après [43]

$$\begin{aligned} \vec{B}_z = & \frac{\mu_0 \|\vec{j}_\varphi\|}{4} \left( (z + c) \ln \left( \frac{(1 + \sin \beta_1)(1 - \sin \alpha_1)}{(1 - \sin \beta_1)(1 + \sin \alpha_1)} \right) \right. \\ & \left. + (c - z) \ln \left( \frac{(1 + \sin \beta_2)(1 - \sin \alpha_2)}{(1 - \sin \beta_2)(1 + \sin \alpha_2)} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

L'allure du champ magnétique en fonction de  $z$  est représentée sur la figure 1.7 page 26. Avec les caractéristiques « usuelles » d'un solénoïde supraconducteur, nous obtenons un champ maximal de 10 T.

Dans ce cas simple, nous pouvons calculer et représenter l'évolution du gradient de  $B^2$  créé sur l'axe, figure 1.8 page 27. Remarquons que la zone utile de travail se



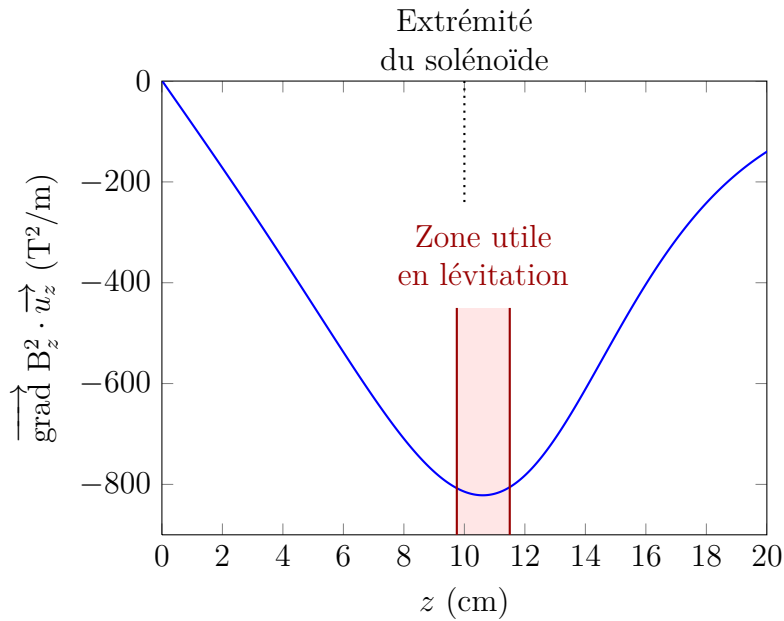
**Figure 1.7** Évolution du champ magnétique  $B_z$  sur l'axe d'un solénoïde épais et fini : rayon interne 6 cm, rayon externe 15 cm, densité de courant  $115 \text{ A/mm}^2$  produisant un maximum de 10 T

trouve en dehors du solénoïde. La direction du champ de force dépendra du signe de la susceptibilité magnétique et donc de la nature dia- ou paramagnétique du matériau à léviter. Dans notre exemple, la valeur atteinte de  $822 \text{ T}^2/\text{m}$  ne suffit pas pour permettre la lévitation de l'eau qui se situe à  $2\mu_0\rho g/\chi \approx 2,8 \cdot 10^3 \text{ T}^2/\text{m}$ . En revanche, cette valeur est suffisante pour assurer la lévitation pour quelques  $\text{mm}^3$  d'autres matériaux (mélange de poudres de graphite avec de l'époxy par exemple).

#### 1.4.2.1 Aperçu des problématiques en lévitation magnétique

La méthode usuelle de résolution de problème inverse de synthèses de sources en magnéto-statique repose le plus souvent sur un problème d'optimisation. Une fonction « objectif » est définie, regroupant plusieurs critères (maximum local, uniformité mais aussi dimensions des sources, densité de courant limite, etc.). La résolution de tels problèmes est le plus souvent délicate du fait de la fonction « objectif » qui peut ne pas être différentiable, ni même convexe. De plus, ces problèmes résolus par des méthodes numériques déterministes ou stochastiques [44] sont généralement coûteux en temps de calcul mais permettent avec efficacité l'optimisation de systèmes magnéto-statiques.

Ces méthodes usuelles présentent une autre difficulté : le point de départ de l'optimisation repose sur une structure existante que l'on cherche à optimiser. Ce choix est donc guidé empiriquement, par expérience ou bien à partir d'une démarche analytique permettant de dégager les grandes tendances nécessaires pour valider le choix de départ de l'optimisation.

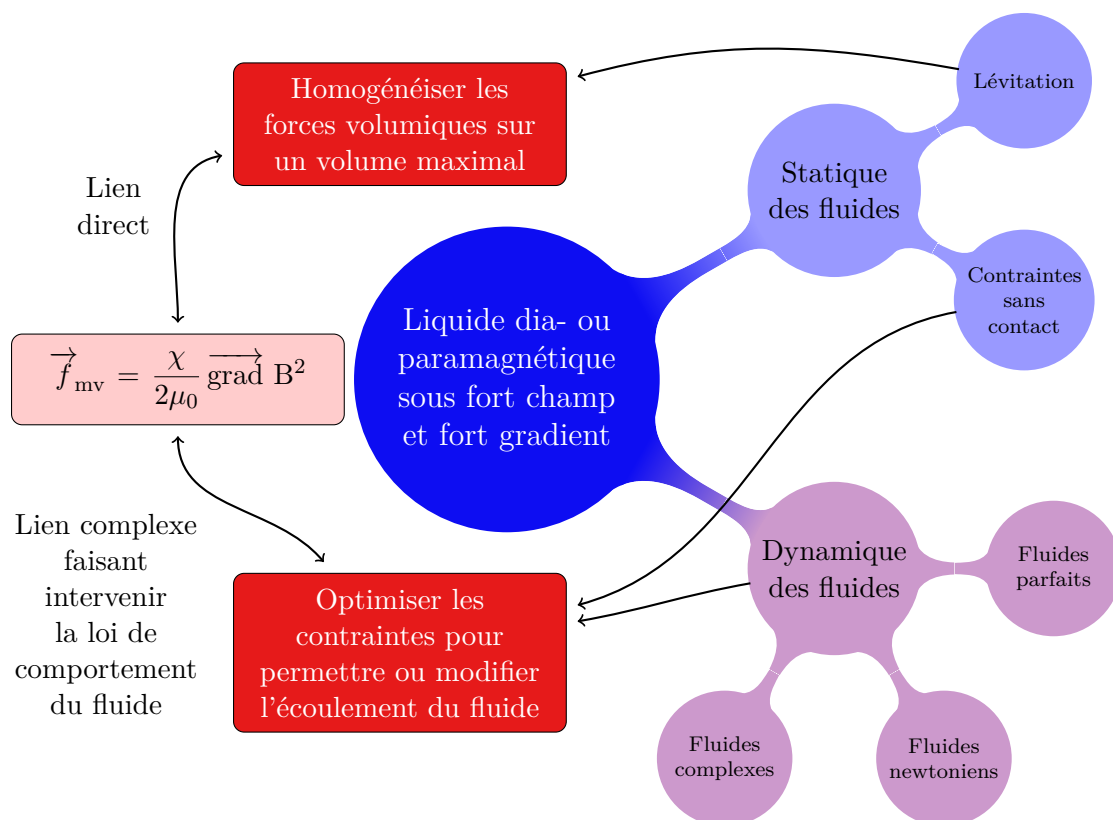


**Figure 1.8** Évolution du gradient de  $B_z^2$  sur l'axe d'un solénoïde épais et fini : rayon interne 6 cm, rayon externe 15 cm, densité de courant  $115 \text{ A}/\text{mm}^2$  produisant un minimum de  $-822 \text{ T}^2/\text{m}$

Des outils existent pour la résolution analytique de problème inverse des champs de forces dans le cas de la lévitation magnétique. Les objectifs sont généralement fixés sur le champ de forces et il est possible de déterminer les sources de champ magnétique par des méthodes de décomposition harmonique des champs de forces [21, 22]. Les problèmes sont alors d'agrandir le volume lévité en maintenant des conditions d'uniformité du champ de forces qui doit compenser en tout point le fluide lévité. Différentes approches sont possibles en utilisant des inserts ferromagnétiques ou supraconducteurs afin de modifier le champ magnétique et donc le champ de force volumique. De nombreuses publications s'intéressent au choix et aux emplacements privilégiés des inserts [7, 8].

#### 1.4.2.2 Aperçu des problématiques des liquides dia- ou paramagnétiques en écoulement sous champ magnétique intense

Les problématiques sont largement différentes de la lévitation magnétique : la mise en mouvement ou la modification de l'écoulement ne sont pas directement liées aux forces volumiques créées sur le fluide mais aux contraintes appliquées. La figure 1.9 page 28 représente les problématiques des deux domaines. Nous allons dans notre mémoire nous intéresser aux liens entre les sources de champ magnétique, les contraintes appliquées sur les liquides et les effets de ces contraintes. Pour les connaître, il est nécessaire de décrire le comportement du fluide à partir de sa loi de comportement. Nous présenterons au 2.2 page 46 les différents types de fluide et nous étudierons au 2.2.3 page 52 une famille particulièrement intéressante pour notre étude : les fluides complexes, et plus particulièrement les fluides à seuil.



**Figure 1.9** Carte heuristique présentant les principales problématiques des liquides (non conducteurs et non chargés) dia- ou paramagnétiques soumis à de forts champs et forts gradients de champ magnétique



## 1.5 Conclusion

La magnéto-science regroupe des domaines de recherche extrêmement variés, de la physique des plasmas à la physique de la matière et nous concernant, au génie électrique et à la mécanique des fluides. Notons la diversité des applications et les distinctions nécessaires pour présenter notre sujet : les phénomènes mis en jeu sont bien différents selon l'étude des interactions magnéto-mécaniques pour des fluides chargés magnétiquement, des fluides conducteurs ou des fluides dia- ou paramagnétiques non conducteurs.

Notre mémoire s'intéresse à l'écoulement de fluides dia- ou paramagnétiques non conducteurs soumis à des forces magnétiques avec les problématiques suivantes :

- les effets des forces magnétiques peuvent agir sur l'écoulement d'un liquide [42] mais il faut établir les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces forces aient un effet observable : nous allons nous lancer dans cette étude au 2.1 page 37 avec des conditions différentes de la lévitation magnétique car nous étudions un fluide en mouvement. La dynamique implique la prise en compte des lois de comportement du fluide qui peuvent être particulières dans le cas de fluides complexes comme nous le verrons au 2.2.2 page 49 ;
- quels sont les intérêts d'agir avec des forces magnétiques sur l'écoulement d'un fluide ? Ces forces sont sans contact : c'est l'élément qui est le plus singulier. Dans la plupart des cas, en mécanique des fluides, la présence de forces avec contact ne pose pas de problèmes particuliers pour la simulation et la prévision de l'écoulement. Seul le cas des fluides complexes pose une difficulté : la présence de contraintes de glissement hétérogènes indéterminées au niveau du contact introduit une inconnue au problème. Les rhéomètres nécessitent la connaissance du champ de contrainte appliqué : la présence de contraintes de glissement entraîne une incertitude dans la détermination expérimentale de la loi de comportement des fluides complexes comme nous le verrons au 2.2.3.3 page 53 ;
- certains fluides appelés fluides à seuil décrits au 2.2.3 page 52 nécessitent une contrainte seuil pour passer de l'état de solide à l'état liquide : l'apport d'une contrainte supplémentaire à partir des forces magnétiques volumiques est une possibilité que nous allons étudier dans ce mémoire. La transition entre ces états est liée aux contraintes appliquées au fluide. Nous allons montrer que la transition solide-gel est possible à partir d'un champ magnétique intense : c'est un nouveau domaine d'application des champs magnétiques intenses. L'utilisation des fluides à seuil est suffisamment répandue dans le monde industriel (cosmétique, boue de forage, etc.) pour justifier une exploration des capacités d'action de dispositifs magnétiques exceptionnels en terme de niveau de champ atteint et supporté.



---

## Références bibliographiques du chapitre 1

- [1] *National High Magnetic Field Laboratory - Mag Lab World Records*. En ligne. National High Magnetic Field Laboratory. 2011. URL : <http://www.magnet.fsu.edu/mediacenter/factsheets/records.html> (visité le 12 mars 2012) (cf. p. 1, 13).
- [2] A. MATSUZAKI et S. NAGAKURA. « Magnetic quenching of fluorescence observed with carbon disulfide and glyoxal ». Dans : *Journal of Luminescence* 12–13 (mar. 1976), p. 787–791. ISSN : 0022-2313 (cf. p. 1, 11).
- [3] T. KAKESHITA et al. « Composition dependence of magnetic field-induced martensitic transformations in Fe–Ni alloys ». Dans : *Acta Metallurgica* 33.8 (1985), p. 1381–1389 (cf. p. 1, 11).
- [4] R. AOGAKI, K. FUEKI et T. MUKAIBO. « Application of Magnetohydrodynamic Effect to the Analysis of Electrochemical Reactions. 2. Diffusion Process in MHD Forced Flow of Electrolyte solution ». Dans : *Denki Kagaku* 43.9 (1975), p. 509–514 (cf. p. 1, 11).
- [5] J. TORBET, J.-M. FREYSSINET et G. HUDRY-CLERGEON. « Oriented fibrin gels formed by polymerization in strong magnetic fields. » Dans : *Nature* 289.5793 (1981), p. 91 (cf. p. 1, 11).
- [6] E. BEAUGNON et R. TOURNIER. « Levitation of organic materials ». Dans : *Nature* 349.6309 (fév. 1991), p. 470–470. ISSN : 0028-0836 (cf. p. 1, 11, 16, 21, 25).
- [7] L. QUETTIER et al. « Magnetic compensation of gravity forces in liquid/gas mixtures : surpassing intrinsic limitations of a superconducting magnet by using ferromagnetic inserts ». Dans : *European Physical Journal - Applied Physics* 32.3 (déc. 2005), p. 167–175. ISSN : 1286-0042 (cf. p. 1, 27).
- [8] J. LEVEQUE et al. « Design of a superconducting insert to obtain a high and quasi-uniform magnetic force field ». Dans : *Superconductor Science & Technology* 18.10 (oct. 2005), p. 1266–1270. ISSN : 0953-2048 (cf. p. 1, 27).
- [9] S. MAKI, Y. ODA et M. ATAKA. « High-quality crystallization of lysozyme by magneto-Archimedes levitation in a superconducting magnet ». Dans : *Journal of crystal growth* 261.4 (2004), p. 557–565 (cf. p. 1, 21).
- [10] M. HAMAI et al. « Crystal growth of ammonium chloride in magnetic levitation conditions ». Dans : *Journal of crystal growth* 209.4 (2000), p. 1013–1017 (cf. p. 1, 21).

- [11] D. BEYSENS et al. « High-frequency driven capillary flows speed up the gas-liquid phase transition in zero-gravity conditions ». Dans : *Physical review letters* 95.3 (2005), p. 34502 (cf. p. 1, 21).
- [12] D. CHATAIN et al. « Study of fluid behaviour under gravity compensated by a magnetic field ». Dans : *Microgravity Science and Technology* 18.3 (2006), p. 196–199 (cf. p. 1, 21).
- [13] M. YAMAGUCHI et Y. TANIMOTO, édés. *Magneto-Science – Magnetic Field Effects on Materials : Fundamentals and Applications*. 1<sup>re</sup> éd. Springer, 2006. ISBN : 3540370617 (cf. p. 7, 11).
- [14] T. LUBIN, S. MEZANI et A. REZZOUG. « 2D Analytical Calculation of Magnetic Field and Electromagnetic Torque for Surface-Inset Permanent Magnet Motors ». Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* PP.99 (déc. 2011), p. 1–1. ISSN : 0018-9464 (cf. p. 10).
- [15] S. UENO et M. IWASAKA. « Parting of water by magnetic fields ». Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 30.6 (1994), p. 4698–4700 (cf. p. 11).
- [16] G. GILLET. *Séparation magnétique haut gradient (SMHG) et haut champ. J3222*. En ligne. Techniques de l'Ingénieur. Mar. 2004. URL : <http://www.techniques-ingenieur.fr> (visité le 6 mars 2012) (cf. p. 11).
- [17] E. NAVA. « Modèle de piégeage de particules ultrafines sous champ magnétique intense. Application à l'épuration de fluide ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1996 (cf. p. 11).
- [18] G. GILLET. *Séparation magnétique à basse et haute intensité. J3221*. En ligne. Techniques de l'Ingénieur. Juin 2003. URL : <http://www.techniques-ingenieur.fr> (visité le 6 mars 2012) (cf. p. 11).
- [19] N. M. SIDO. « Modélisation et analyse des mécanismes de séparation magnétique : conception d'un modèle de séparateur ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2002 (cf. p. 11).
- [20] O. VINCENT-VIRY. « Contribution méthodologique à la synthèse de sources en magnétostatique : application au stockage magnétique d'énergie, et à la lévitation magnétique ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2002 (cf. p. 11).
- [21] L. QUETTIER. « Contribution méthodologique à la conception de systèmes supraconducteurs de lévitation magnétique ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2003 (cf. p. 11, 27).
- [22] C. LORIN. « Théorie de la microgravité magnétique. Conception, dimensionnement et contrôle d'environnement microgravitationnel ». Thèse de doct. INPL, nov. 2008 (cf. p. 11, 27).
- [23] M. YAMAGUCHI et al. « Effect of a strong magnetic field on the chemical equilibrium of the ferromagnetic hydride-hydrogen system ». Dans : *Physics Letters A* 126.2 (1987), p. 133–135 (cf. p. 11).
- [24] H. SATA et al. « Magnetic orientation of poly (ethylene-2, 6-naphthalate) ». Dans : *Polymer* 37.10 (1996), p. 1879–1882 (cf. p. 11).

- 
- [25] H. HOSODA et al. « Refractive indices of water and aqueous electrolyte solutions under high magnetic fields ». Dans : *The Journal of Physical Chemistry A* 108.9 (2004), p. 1461–1464 (cf. p. 11).
- [26] F. BLOCH et al. « Approches novatrices à la génération de champs magnétiques intenses : optimisation d'une source de flux à aimants permanents ». Dans : *The European Physical Journal - Applied Physics* 5.01 (1999), p. 85–89 (cf. p. 12).
- [27] L. LANDAU et al. *Electrodynamics of continuous media*. T. 364. Pergamon press Oxford, 1960 (cf. p. 15).
- [28] T. OHARA, H. KUMAKURA et H. WADA. « Magnetic separation using superconducting magnets ». Dans : *Physica C : Superconductivity* 357-360, Part 2 (août 2001), p. 1272–1280. ISSN : 0921-4534 (cf. p. 17).
- [29] S. HAYASHI et al. « Study on High Gradient Magnetic Separation for Selective Removal of Impurity From Highly Viscous Fluid ». Dans : *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 21.3 (juin 2011), p. 2055–2058. ISSN : 1051-8223 (cf. p. 17).
- [30] S. NISHIJIMA et S. TAKEDA. « Superconducting High Gradient Magnetic Separation for Purification of Wastewater From Paper Factory ». Dans : *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 16.2 (juin 2006), p. 1142–1145. ISSN : 1051-8223 (cf. p. 17).
- [31] Y. YOSHIDA et al. « Ex vivo investigation of magnetically targeted drug delivery system ». Dans : *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 310.2, Part 3 (mar. 2007), p. 2880–2882. ISSN : 0304-8853 (cf. p. 17).
- [32] F. MISHIMA et al. « Development of control system for magnetically targeted drug delivery ». Dans : *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 310.2, Part 3 (mar. 2007), p. 2883–2885. ISSN : 0304-8853 (cf. p. 17).
- [33] R. TAO et K. HUANG. « Reducing blood viscosity with magnetic fields ». Dans : *Phys. Rev. E* 84 (1 juil. 2011), p. 011905 (cf. p. 18).
- [34] M. BERHANU et al. « Dynamo regimes and transitions in the VKS experiment ». Dans : *European Physical Journal B* 77.4 (oct. 2010), p. 459–468. ISSN : 1434-6028 (cf. p. 19).
- [35] M. HINAJE. « Modélisation de l'action d'un champ électromagnétique variable sur un métal liquide disposé en nappe peu épaisse ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2005 (cf. p. 20).
- [36] M. BERRY et A. GEIM. « Of flying frogs and levitrons ». Dans : *European Journal of Physics* 18 (1997), p. 307 (cf. p. 21).
- [37] S. UENO et al. « Dynamic behavior of gas flow in gradient magnetic fields ». Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 29.6 (1993), p. 3264–3266 (cf. p. 22).
- [38] W. NI et al. « Magnetic support of combustion in diffusion flames under microgravity ». Dans : *Combustion and flame* 107.1-2 (1996), p. 187–188 (cf. p. 22).
- [39] S. SWAMINATHAN. « Effects of Magnetic Field on Micro Flames ». Thèse de doct. Louisiana State University, 2005 (cf. p. 22).

- [40] L. YANG et al. « Free convection of a gas induced by a magnetic quadrupole field ». Dans : *Journal of magnetism and magnetic materials* 261.3 (2003), p. 377–384 (cf. p. 22).
- [41] C. PIGOT et al. « Diamagnetic Levitation of Solids at Microscale ». Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 44.11 (nov. 2008), p. 4521–4524. ISSN : 0018-9464 (cf. p. 23).
- [42] S. UENO et M. IWASAKA. « Properties of diamagnetic fluid in high gradient magnetic fields ». Dans : *Journal of Applied Physics* 75.10 (1994), p. 7177–7179 (cf. p. 24, 29).
- [43] DURAND. *Magnétostatique*. Dunod, jan. 1968. ISBN : 2225594996 (cf. p. 25, 74).
- [44] P. NEITTAANMÄKI, M. RUDNICKI et A. SAVINI. *Inverse Problems and Optimal Design in Electricity and Magnetism*. Oxford University Press, Oxford, 1996 (cf. p. 26).

# Actions des champs magnétiques intenses sur des fluides à seuil

<b>2.1</b>	<b>Étude mécanique de l'écoulement d'un fluide dia- ou paramagnétique soumis à des forces volumiques magnétiques</b>	<b>37</b>
2.1.1	Conservation de la masse et évolution de la quantité de mouvement	37
2.1.2	Le fluide parfait : un premier modèle simplifié	39
2.1.2.1	Théorème de Bernoulli modifié	40
2.1.2.2	Discussion sur l'effet des forces magnétiques volumiques	41
2.1.3	$Ne$ : nouveau nombre adimensionnel	41
2.1.3.1	Étude adimensionnelle	41
2.1.3.2	Influence de $Ne$	43
2.1.3.3	Conséquence sur le nombre de Reynolds	45
2.1.4	Tenseur des actions magnétiques	46
<b>2.2</b>	<b>Comportement des fluides à seuil</b>	<b>46</b>
2.2.1	Fluide newtonien	47
2.2.1.1	Viscosité et tenseur des contraintes visqueuses	47
2.2.1.2	Équation de Navier-Stokes	47
2.2.1.3	Comparaison avec le comportement des solides élastiques	48
2.2.2	Fluide non-newtonien	49
2.2.2.1	Thixotropie	50
2.2.2.2	Fluides rhéofluidifiants ou rhéoépaississants	50
2.2.2.3	Fluides à seuil	50
2.2.2.4	Fluides viscoélastiques	51
2.2.3	Problématique des fluides à seuil	52
2.2.3.1	Modèle de Herschel-Bulkley	52
2.2.3.2	Comparaison de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide newtonien et d'un fluide à seuil	52
2.2.3.3	Les difficultés pour caractériser les fluides à seuil	53
2.2.3.4	Les actions possibles des forces magnétiques volumiques sur les fluides à seuil	54
<b>2.3</b>	<b>Modélisation multiphysique</b>	<b>55</b>

## 2. ACTIONS DES CHAMPS MAGNÉTIQUES INTENSES SUR DES FLUIDES À SEUIL

---

2.3.1	Problème mécanique . . . . .	56
2.3.1.1	Fluide newtonien . . . . .	56
2.3.1.2	Fluide non-newtonien . . . . .	56
2.3.2	Problème magnétique . . . . .	57
2.3.3	Expression des forces volumiques magnétiques et du tenseur des actions magnétiques en fonction du potentiel-vecteur . .	58
2.3.3.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	58
2.3.3.2	Coordonnées cylindriques . . . . .	60
<b>2.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>61</b>
	<b>Références bibliographiques du chapitre 2 . . . . .</b>	<b>63</b>

---



## Introduction

Nous souhaitons dans ce chapitre présenter le comportement de différents fluides dia- ou paramagnétiques non conducteurs et non chargés soumis à un champ magnétique intense. Quand elles sont présentes, les forces volumiques magnétiques agissent sans contact sur le fluide à certaines conditions. Pour un fluide newtonien, nous verrons que la modification du profil des vitesses et du champ de pression est possible. Le comportement du fluide pourra être non linéaire dans le cas des fluides non-newtonien au 2.2.2 page 49.

L'étude mécanique est réalisée à partir de [45, 46, 47, 48]. L'originalité de notre étude repose sur la prise en compte des forces volumiques magnétiques dans l'équation d'évolution de la quantité de mouvement au 2.1.1 page 37 et sur la mise en évidence de deux grandeurs : un nombre adimensionnel au 2.1.3 page 41 et le tenseur des actions magnétiques au 2.1.4 page 46.

Le nouveau domaine d'application des champs magnétiques intenses sera particulier dans le cas de fluides à seuil. Nous le détaillerons au 2.2.3.4 page 54.

## 2.1 Étude mécanique de l'écoulement d'un fluide dia- ou paramagnétique soumis à des forces volumiques magnétiques

Nous rappelons que le fluide étudié est non conducteur et non chargé de particules. Dans toute cette étude, nous ferons également les hypothèses que le fluide est homogène et isotrope d'un point de vue mécanique et homogène, isotrope et linéaire d'un point de vue magnétique.

### 2.1.1 Conservation de la masse et évolution de la quantité de mouvement

Considérons un fluide en mouvement en description eulerienne en notant  $\vec{u}$  son champ de vitesse et  $\rho$  sa masse volumique. Une première forme de la loi de conservation de la masse est donnée par un bilan global effectué sur le volume  $\Omega$  du fluide délimité

par une surface fermée  $\Sigma$ . Le fait que la masse de ce domaine reste constante s'écrit

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iint_{\Sigma} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.1)$$

Dans le cas d'écoulements permanents, tous les champs euleriens sont indépendants du temps

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0} \quad (2.2)$$

et nous obtenons

$$\iint_{\Sigma} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.3)$$

Cette équation correspond à la conservation du débit massique dans un tube de courant.

L'équation (2.1) page 38 peut s'exprimer localement. Le bilan local de transport de masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.4)$$

La plupart du temps, nous nous intéressons à des liquides qui sont des fluides que l'on considère incompressibles et homogènes. La loi locale de conservation de la masse s'écrit alors

$$\text{div} \vec{u} = 0 \quad (2.5)$$

Introduisons la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \iiint_{\Omega} \rho \vec{u} d\tau \quad (2.6)$$

puis sa dérivée temporelle

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \iiint_{\Omega} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} d\tau \quad (2.7)$$

Afin d'appliquer le principe fondamental de la dynamique au fluide, ou loi d'évolution de la quantité de mouvement, nous nous plaçons dans un référentiel galiléen de façon à ne pas considérer d'éventuelles forces d'inertie.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R} = \text{somme des forces extérieures appliquées} \quad (2.8)$$

Parmi les forces extérieures appliquées, nous distinguons

- les forces volumiques à distance : le poids et les forces magnétiques volumiques (1.17) page 15 qui s'expriment par

$$\vec{R}_{\text{poids}} = \iiint_{\Omega} \rho \vec{g} d\tau \quad \text{et} \quad \vec{R}_{\text{fmv}} = \iiint_{\Omega} \frac{\chi}{2\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} B^2 d\tau$$

- les forces surfaciques de contact : le postulat de Cauchy permet d'exprimer ces forces dans un premier temps à l'aide d'un vecteur contrainte  $\vec{T}$

$$\vec{R}_{\text{surf}} = \iint_{\Sigma} \vec{T} dS \quad (2.9)$$

La composante normale de ces forces surfaciques permet de définir le champ de pression  $P$  au sein du fluide. Dans un premier temps, nous nous intéressons au cas général de l'évolution de la quantité de mouvement pour un milieu continu.

Le bilan (2.8) page 38 s'écrit

$$\iiint_{\Omega} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} d\tau = \iiint_{\Omega} \rho \vec{g} d\tau + \iint_{\Sigma} \vec{T} dS + \iiint_{\Omega} \frac{\chi}{2\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} B^2 d\tau \quad (2.10)$$

Afin de pouvoir établir une forme locale de l'évolution de la quantité de mouvement, nous introduisons le tenseur des contraintes de Cauchy  $\overline{\sigma}$  à l'aide du vecteur unitaire  $\vec{n}$ , normal à  $dS$  et dirigé vers le milieu extérieur à  $\Omega$

$$\vec{R}_{\text{surf}} = \iint_{\Sigma} \overline{\sigma} \cdot \vec{n} dS \quad (2.11)$$

ce qui permet à partir du théorème de Green-Ostrogradski d'écrire

$$\vec{R}_{\text{surf}} = \iiint_{\Omega} \text{div} \overline{\sigma} d\tau \quad (2.12)$$

Ainsi, la forme locale de l'évolution de la quantité de mouvement s'écrit à partir de l'équation (2.10) page 39 en identifiant les intégrands

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{g} + \text{div} \overline{\sigma} + \frac{\chi}{2\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} B^2 \quad (2.13)$$

Cette loi peut s'exprimer de deux façons. En description lagrangienne adaptée aux solides, en petits déplacements et petites transformations, nous introduisons le champ de déplacement  $\vec{d}$ , ce qui permet d'exprimer la loi d'évolution sous la forme

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = \rho \vec{g} + \text{div} \overline{\sigma} + \frac{\chi}{2\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} B^2 \quad (2.14)$$

Dans une description eulerienne adaptée aux fluides, l'équation (2.13) page 39 s'écrit en tenant compte de la dérivée particulaire du champ de vitesse

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left( \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{u} \right) = \rho \vec{g} + \text{div} \overline{\sigma} + \frac{\chi}{2\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} B^2 \quad (2.15)$$

### 2.1.2 Le fluide parfait : un premier modèle simplifié

Un fluide parfait est un fluide newtonien (2.2.1 page 47) de viscosité nulle. Le seul exemple concret de fluide parfait est l'hélium 4 à très basse température (inférieure à 2,2 K). Malgré cette hypothèse peu réaliste de viscosité nulle, la notion de fluide parfait s'applique avec succès pour mettre en évidence certains phénomènes de mécanique des fluides. Physiquement, cela revient à négliger le terme visqueux de l'évolution de quantité de mouvement du fluide devant le terme d'inertie. L'équation de Navier-Stokes devient l'équation d'Euler. Dans le cas d'un fluide non conducteur et non chargé soumis à un champ de pesanteur  $\vec{g}$  et à un champ magnétique  $\vec{B}$ , l'équation d'Euler s'écrit

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = - \overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} + \frac{\chi}{2\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} B^2 \quad (2.16)$$

Plaçons nous dans le cas d'un fluide incompressible, homogène et isotrope plongé dans un champ de pesanteur uniforme. En choisissant un axe Oz vertical ascendant, nous écrivons

$$\rho \vec{g} = -\vec{\text{grad}}(\rho g z) \quad (2.17)$$

Ainsi, l'équation d'Euler (2.16) page 39 s'écrit

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\text{grad}}\left(P + \rho g z - \frac{\chi}{2\mu_0} B^2\right) \quad (2.18)$$

### 2.1.2.1 Théorème de Bernoulli modifié

Nous pouvons réécrire l'équation (2.18) page 40 afin d'établir le théorème de Bernoulli modifié [48]. En écrivant la dérivée particulaire de la vitesse, nous obtenons

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left( \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} \right) \vec{u} \right) = -\vec{\text{grad}}\left(P + \rho g z - \frac{\chi}{2\mu_0} B^2\right) \quad (2.19)$$

L'accélération convective s'écrit aussi

$$\left( \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} \right) \vec{u} = \vec{\text{grad}}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \vec{\text{rot}} \vec{u} \wedge \vec{u} \quad (2.20)$$

Ainsi, pour un fluide

- parfait,
- homogène et incompressible,
- dans le cas d'un axe Oz vertical ascendant
- en régime stationnaire  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,
- dans le cas d'un écoulement irrotationnel  $\vec{\text{rot}} \vec{u} = \vec{0}$ ,

nous établissons que

$$\rho \vec{\text{grad}}\left(\frac{u^2}{2}\right) = -\vec{\text{grad}}\left(P + \rho g z - \frac{\chi}{2\mu_0} B^2\right) \quad (2.21)$$

soit

$$\vec{\text{grad}}\left(P + \rho g z + \rho \frac{u^2}{2} - \frac{\chi}{2\mu_0} B^2\right) = \vec{0} \quad (2.22)$$

Le théorème de Bernoulli comporte un terme supplémentaire à l'énoncé usuel. Il montre qu'en tout point du fluide, nous avons

$$P + \rho g z + \rho \frac{u^2}{2} - \frac{\chi}{2\mu_0} B^2 = C^{\text{te}} \quad (2.23)$$

### 2.1.2.2 Discussion sur l'effet des forces magnétiques volumiques

À partir de l'équation (2.23) page 40, nous pouvons commencer une première discussion sur les effets des forces volumiques magnétiques sur un liquide dia- ou paramagnétique non conducteur et non chargé. Le terme supplémentaire présent dans l'équation de Bernoulli modifiée permet de mettre en évidence la possibilité d'un phénomène équivalent au phénomène de Venturi. En l'absence de champ magnétique, une augmentation de vitesse de l'écoulement d'un fluide entraîne une diminution de la pression pour une valeur de  $z$  donnée. C'est ce que l'on constate expérimentalement lors de la réduction de la section d'un écoulement horizontal par exemple.

Il est possible de trouver un phénomène analogue au phénomène de Venturi pour le terme associé aux forces magnétiques volumiques. En effet, en présence d'un champ magnétique, pour une valeur de  $z$  donnée, nous observerons une modification de vitesse de l'écoulement et/ou une modification de pression. Prenons l'exemple d'un écoulement à  $z$  donné. Supposons la pression constante au cours de l'écoulement. La différentielle de (2.23) page 40 permet d'établir

$$\frac{du}{u} = \frac{\chi B^2}{\mu_0 \rho u^2} \frac{dB}{B} \quad (2.24)$$

Posons

$$Ne = \frac{\chi B^2}{\mu_0 \rho u^2} \quad (2.25)$$

Nous obtenons ainsi

$$\boxed{\frac{du}{u} = Ne \frac{dB}{B}} \quad (2.26)$$

Cette équation représentant la variation relative de vitesse en fonction de la variation relative de champ magnétique fait apparaître un nombre adimensionnel  $Ne$ . Ce nombre apparaît également lors de l'étude d'un fluide quelconque en écoulement instationnaire et irrotationnel comme nous le verrons au 2.1.3.1 page 41. L'étude de l'influence de  $Ne$  sur l'écoulement sera menée dans le cas général au 2.1.3.2 page 42.

À partir de l'équation (2.26) page 41, il est déjà possible de prévoir que l'écoulement pourra être modifié par un champ magnétique si la variation relative de vitesse de l'écoulement est grande devant la variation relative de champ magnétique, soit

$$\boxed{|Ne| \gg 1} \quad (2.27)$$

## 2.1.3 Ne : nouveau nombre adimensionnel

### 2.1.3.1 Étude adimensionnelle

Nous présentons l'analyse dimensionnelle de l'équation d'évolution de la quantité de mouvement d'un fluide dia- ou paramagnétique non conducteur soumis au champ

de pesanteur  $\vec{g}$  et à un champ magnétique  $\vec{B}$  à partir de l'équation (2.15) page 39. Elle s'écrit

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left( \vec{u} \cdot \text{grad} \right) \vec{u} \right) = \rho \vec{g} + \text{div} \vec{\sigma} + \frac{\chi}{2\mu_0} \text{grad} B^2 \quad (2.15)$$

avec  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $\vec{u}$  le champ de vitesse, et  $\vec{\sigma}$  le tenseur des contraintes.

Nous choisissons des grandeurs caractéristiques afin de rendre adimensionnelles les différentes variables du problème :

- une longueur caractéristique  $\ell_0$ ,
- une fréquence caractéristique  $f_0$ ,
- une vitesse caractéristique  $u_0$ ,
- un champ magnétique caractéristique  $B_0$ .

Nous introduisons alors les grandeurs adimensionnelles suivantes

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{\ell_0} & y^* &= \frac{y}{\ell_0} & z^* &= \frac{z}{\ell_0} & t^* &= f_0 t \\ \vec{u}^* &= \frac{\vec{u}}{u_0} & \vec{\sigma}^* &= \frac{\vec{\sigma}}{\rho u_0^2} & \vec{g}^* &= \frac{\vec{g}}{\ell_0 f_0^2} & \vec{B}^* &= \frac{\vec{B}}{B_0} \end{aligned}$$

L'équation d'évolution de la quantité de mouvement devient ainsi

$$\rho \left( u_0 f_0 \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \frac{u_0^2}{\ell_0} \left( \vec{u}^* \cdot \text{grad}^* \right) \vec{u}^* \right) = \rho \ell_0 f_0^2 \vec{g}^* + \frac{\rho u_0^2}{\ell_0} \text{div}^* \vec{\sigma}^* + \frac{\chi B_0^2}{2\mu_0 \ell_0} \text{grad}^* B^{*2}$$

Finalement, divisons par  $\rho u_0^2 / \ell_0$  (terme représentant les forces d'inertie) afin de faire apparaître les nombres adimensionnels du problème

$$\frac{f_0 \ell_0}{u_0} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \left( \vec{u}^* \cdot \text{grad}^* \right) \vec{u}^* = \left( \frac{f_0 \ell_0}{u_0} \right)^2 \vec{g}^* + \text{div}^* \vec{\sigma}^* + \frac{\chi B_0^2}{2\mu_0 \rho u_0^2} \text{grad}^* B^{*2} \quad (2.28)$$

Nous mettons en évidence deux nombres adimensionnels :

- le nombre de Strouhal, décrivant les mécanismes de circulation oscillante

$$\text{St} = \frac{f_0 \ell_0}{u_0} \quad (2.29)$$

- un nombre adimensionnel que l'on notera  $\text{Ne}$  [49], qui correspond au rapport entre les forces magnétiques et les forces d'inertie

$$\text{Ne} = \frac{\chi B_0^2}{\mu_0 \rho u_0^2} \quad (2.30)$$

L'équation d'évolution de la quantité de mouvement (2.28) page 42 s'écrit alors

$$\text{St} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \left( \vec{u}^* \cdot \text{grad}^* \right) \vec{u}^* = \text{St}^2 \vec{g}^* + \text{div}^* \vec{\sigma}^* + \frac{\text{Ne}}{2} \text{grad}^* B^{*2} \quad (2.31)$$

Dans le cas d'un fluide newtonien incompressible, la divergence du tenseur des contraintes s'écrit

$$\text{div}^* \vec{\sigma}^* = - \text{grad}^* P + \eta \Delta^* \vec{u}^*$$

avec  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide.

Le terme adimensionnel  $\text{div}^* \vec{\sigma}^*$  est alors modifié dans (2.31) page 43, ce qui permet d'introduire le nombre de Reynolds  $\text{Re}$

$$\text{St} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \left( \vec{u}^* \cdot \text{grad}^* \right) \vec{u}^* = \text{St}^2 \vec{g}^* - \text{grad}^* P^* + \frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \vec{u}^* + \frac{\text{Ne}}{2} \text{grad}^* B^{*2} \quad (2.32)$$

$$\text{avec } \text{Re} = \frac{\rho u_0 \ell_0}{\eta}.$$

### 2.1.3.2 Influence de Ne

L'objectif de notre étude est de modifier l'écoulement du fluide à l'aide de forces magnétiques volumiques : il est donc nécessaire d'obtenir le nombre adimensionnel  $\text{Ne}$  le plus grand possible car  $\text{Ne}$  traduit le rapport entre les forces magnétiques et les forces d'inertie.

$$|\text{Ne}| \gg 1 \quad (2.33)$$

soit

$$\frac{|\chi| B_0^2}{\mu_0 \rho u_0^2} \gg 1 \quad (2.34)$$

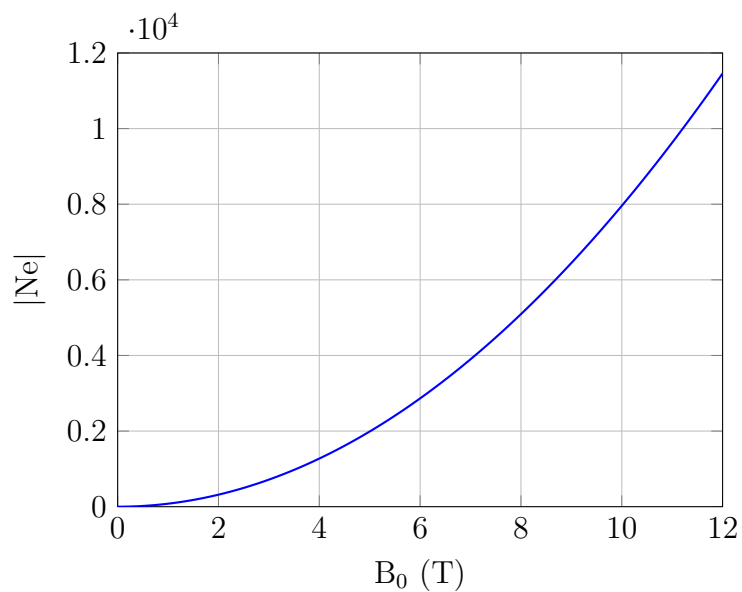
Prenons l'exemple d'un fluide comme l'eau pour évaluer l'ordre de grandeur de  $\text{Ne}$ . Nous avons

$$\chi \approx -10^{-5} \quad \rho \approx 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

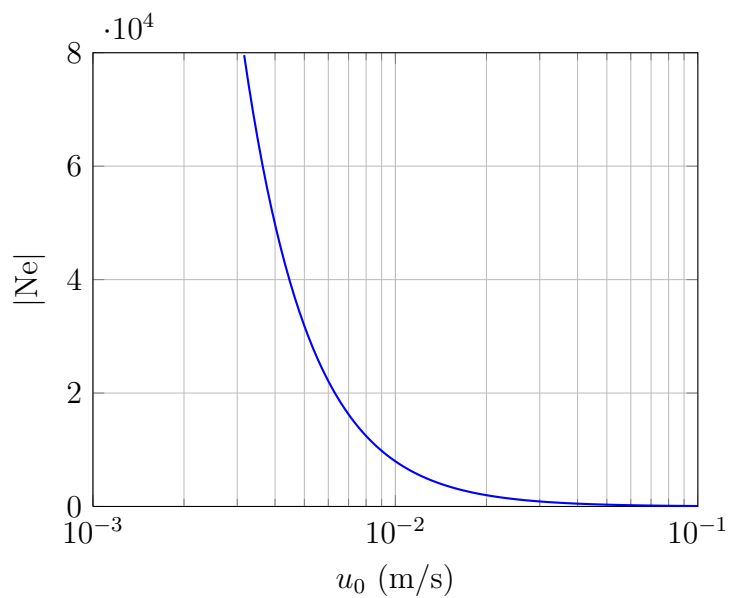
Nous allons mener une étude paramétrique de  $|\text{Ne}|$ . La tendance est facilement établie à partir de (2.34) page 43 : afin d'obtenir  $|\text{Ne}|$  le plus grand possible, il est nécessaire d'avoir  $B_0$  le plus grand possible et  $u_0$  le plus petit possible.

Prenons le cas d'un écoulement avec  $u_0 = 1 \text{ cm/s}$ . La figure 2.1 page 44 montre l'évolution de  $|\text{Ne}|$  en fonction de  $B_0$ . Dans ce cas, nous obtenons  $|\text{Ne}| > 10^4$  pour un champ magnétique de l'ordre de 11,2 T. Une action des forces magnétiques volumiques n'est donc envisageable qu'à fort champ.

Étudions à présent l'influence de la vitesse de l'écoulement pour un champ magnétique caractéristique donné  $B_0 = 10 \text{ T}$ . La figure 2.2 page 44 montre l'évolution de  $|\text{Ne}|$



**Figure 2.1** Évolution de  $|Ne|$  en fonction de  $B_0$  pour une vitesse caractéristique  $u_0$  de 1 cm/s



**Figure 2.2** Évolution de  $|Ne|$  en fonction de  $u_0$  pour un champ magnétique caractéristique  $B_0$  de 10 T (échelle semi-logarithmique)



en fonction de  $u_0$  avec une échelle semi-logarithmique. Nous établissons ainsi un critère de vitesse  $u_0 < 1$  cm/s pour observer des effets significatifs des forces magnétiques sur l'écoulement.

Même si ces résultats sont établis dans le cas de l'eau, ils sont tout à fait généralisables à de nombreux liquides dont les ordres de grandeur de la susceptibilité magnétique et de la masse volumique sont identiques. En conclusion de cette étude adimensionnelle, nous obtenons deux critères fondamentaux pour le choix des écoulements et des fluides qui seront impactés par les forces magnétiques volumiques

$$B_0 > 10 \text{ T} \quad (2.35)$$

$$u_0 < 1 \text{ cm/s} \quad (2.36)$$

Ces conditions sont nécessaires mais pas suffisantes car l'action des forces magnétiques est proportionnelle au champ magnétique et au gradient du champ magnétique d'après (1.18) page 15. L'étude adimensionnelle permet uniquement de donner des ordres de grandeurs pour les principales caractéristiques de l'écoulement. Remarquons que  $Ne$  ne fait pas intervenir de longueur caractéristique de l'écoulement.

Les valeurs de champ magnétique exigées nécessitent l'emploi de bobines supraconductrices ou de bobines hybrides. Nous avons ainsi une problématique essentielle : quelle configuration magnétique va permettre de modifier au mieux l'écoulement du fluide ? Nous le verrons aux chapitres suivants mais il faut encore aller plus loin dans notre étude. En effet, la modification de l'écoulement va dépendre du fluide utilisé : nous avons ainsi besoin de faire appel à la rhéologie pour prévoir le comportement des fluides sous champs intenses.

### 2.1.3.3 Conséquence sur le nombre de Reynolds

Avant de s'intéresser aux différents types de fluides, nous souhaitons connaître les caractéristiques des écoulements susceptibles d'être modifiés par un champ magnétique intense. Nous nous intéressons ainsi au nombre de Reynolds des écoulements sur lesquels nous allons travailler afin de prévoir le caractère laminaire ou turbulent de ceux-ci.

Le nombre de Reynolds est donné par

$$Re = \frac{\rho u_0 \ell_0}{\eta} \quad (2.37)$$

Évaluons l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds dans le cas de l'eau pour des écoulements respectant le critère (2.36) page 45. Nous choisissons une grandeur caractéristique  $\ell_0$  de 10 cm (ce choix est arbitraire et guidé par notre volonté de trouver un compromis entre microfluidique et « grands » écoulements).

Nous obtenons

$$Re < 10^3 \quad \Rightarrow \quad \text{écoulement laminaire} \quad (2.38)$$

ce qui nous permet de prévoir un régime laminaire pour des fluides newtoniens dont l'écoulement pourra être modifié par des forces volumiques magnétiques.

### 2.1.4 Tenseur des actions magnétiques

Nous cherchons à définir un tenseur  $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$  associé aux actions magnétiques. Ce tenseur doit vérifier

$$\overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\mathbf{T}}} = \frac{\chi}{2\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} B^2 \quad (2.39)$$

Nous proposons l'expression suivante pour  $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \frac{\chi}{\mu_0} \overrightarrow{\mathbf{B}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{B}} \quad (2.40)$$

Montrons que ce tenseur vérifie 2.39 page 46. Comme  $\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\mathbf{B}} = 0$  pour tout champ magnétique, nous utilisons la propriété suivante

$$\overrightarrow{\text{div}} \left( \overrightarrow{\mathbf{B}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{B}} \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{B^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\mathbf{B}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{B}} \quad (2.41)$$

Le fluide est supposé non conducteur ce qui impose  $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\mathbf{B}} = \overrightarrow{0}$  d'après l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'ARQS. Ainsi, nous montrons que

$$\overrightarrow{\text{div}} \left( \frac{\chi}{\mu_0} \overrightarrow{\mathbf{B}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{B}} \right) = \frac{\chi}{2\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} B^2 \quad (2.42)$$

Nous obtenons ainsi le tenseur des actions magnétiques

$$\boxed{\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \frac{\chi}{\mu_0} \overrightarrow{\mathbf{B}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{B}}} \quad (2.43)$$

Le tenseur des actions magnétiques est donc un tenseur symétrique faisant intervenir le produit tensoriel  $\overrightarrow{\mathbf{B}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{B}}$ . L'équation (2.15) page 39 de l'évolution de la quantité de mouvement peut alors s'écrire

$$\rho \left( \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + \left( \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \overrightarrow{u} \right) = \rho \overrightarrow{g} + \overrightarrow{\text{div}} \left( \overline{\overline{\sigma}} + \frac{\chi}{\mu_0} \overrightarrow{\mathbf{B}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{B}} \right) \quad (2.44)$$

## 2.2 Comportement des fluides à seuil

Nous souhaitons dans cette partie présenter les grandes familles de fluides et leurs caractéristiques afin d'une part, de prévoir le comportement des différents fluides sous champs magnétiques intenses et d'autre part, de mettre en évidence un comportement intéressant pour notre étude : les fluides à seuil. En effet, nous souhaitons appliquer sans contact des contraintes à des fluides pour modifier leur écoulement ou bien changer leur état.

## 2.2.1 Fluide newtonien

### 2.2.1.1 Viscosité et tenseur des contraintes visqueuses

Nous nous intéressons à des fluides isotropes et incompressibles. Afin de tenir compte des composantes tangentielles des forces appliquées par l'extérieur à une particule de fluide (liées aux forces de frottement), il est légitime d'ajouter un terme de contraintes visqueuses  $\bar{\bar{\tau}}$  au tenseur des contraintes hydrostatiques liée au champ de pression P

$$\bar{\bar{\sigma}} = -P \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \quad (2.45)$$

Le tenseur des taux de déformation  $\bar{\bar{D}}$  est défini à partir du tenseur gradient de vitesse  $\bar{\bar{K}} = \bar{\nabla} \vec{u}$

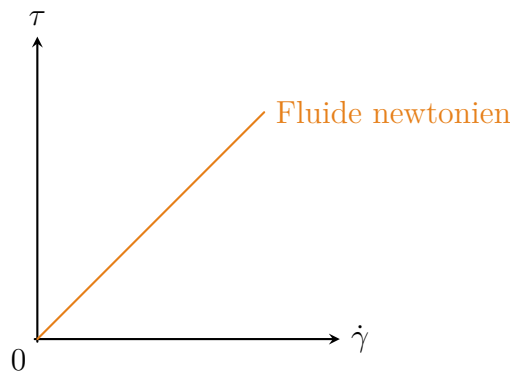
$$\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2} (\bar{\bar{K}} + \bar{\bar{K}}^T) \quad (2.46)$$

La loi de comportement des fluides newtoniens est donnée par

$$\bar{\bar{\sigma}} = -P \bar{\bar{I}} + 2\eta \bar{\bar{D}} \quad (2.47)$$

avec  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide et  $\bar{\bar{D}}$  le tenseur des taux de déformation.

La relation de proportionnalité entre  $\bar{\bar{\tau}}$  et  $\bar{\bar{D}}$  est caractéristique des fluides newtoniens (figure 2.3 page 47).



**Figure 2.3** Loi de comportement pour un fluide newtonien : proportionnalité entre la contrainte de cisaillement  $\tau$  et le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$

Nous indiquons dans le tableau 2.1 page 48 des valeurs usuelles de viscosité dynamique  $\eta$ .

### 2.2.1.2 Équation de Navier-Stokes

En injectant la loi de comportement (2.47) page 47 dans l'équation d'évolution de la quantité de mouvement (2.15) page 39, nous obtenons l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} \right) = -\text{grad} P + \rho \vec{g} + \eta \vec{\Delta} \vec{u} + \frac{\chi}{2\mu_0} \text{grad} B^2 \quad (2.48)$$

Fluide	Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Viscosité dynamique $\eta$ (Pa.s)
eau	1 000	$1,00 \cdot 10^{-3}$
huile	890	0,1
air	1,20	$1,82 \cdot 10^{-5}$

**Tableau 2.1** Valeurs courantes de viscosité dynamique  $\eta$

Pour rappel, cette équation est vraie pour un fluide incompressible qui vérifie

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (2.49)$$

La résolution d'un problème de mécanique des fluides dans le cas d'un fluide newtonien est alors possible. Nous dénombrons quatre inconnues :

- le champ scalaire de pression,
- le champ vectoriel de vitesse.

Nous disposons de deux équations :

- l'équation vectorielle de Navier-Stokes,
- l'équation scalaire de conservation de la masse.

Le problème est donc mathématiquement bien posé. Les conditions limites au bord du domaine fluide permettront de déterminer les constantes d'intégration du problème. On distingue deux types de condition limite :

- vitesse donnée sur tout le bord,
- pression donnée au minimum en un point du bord.

Un exemple de condition limite en vitesse correspond au cas où un bord est une paroi solide fixe. À cause de l'existence de frottements visqueux, il y a adhérence à la paroi du fluide  $\vec{u} = \vec{0}$ . Un exemple de condition limite en pression correspond au cas où un bord est en contact avec l'air atmosphérique : pour des raisons de continuité de pression, on aura  $P = P_{\text{atm}}$  sur le bord.

### 2.2.1.3 Comparaison avec le comportement des solides élastiques

De manière analogue au fluide newtonien, nous pouvons étudier le comportement des solides élastiques. Cette étude nous sera utile pour modéliser le comportement des fluides à seuil.

Nous pouvons exploiter l'équation d'évolution de la quantité de mouvement (2.14) page 39 dans le cas des solides, en petits déplacements et petites transformations. Les inconnues principales d'un problème d'élasticité linéaire sont

- le champ de déplacement  $\vec{d}$ ,
- le champ de tenseur des contraintes de Cauchy  $\bar{\sigma}$ .

Nous introduisons le tenseur des déformations linéarisé en utilisant le tenseur du gradient de déplacement  $\overline{\nabla} \vec{d}$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \overline{\nabla} \vec{d} + \overline{\nabla} \vec{d}^T \right) \quad (2.50)$$

C'est la loi de Hooke qui est la loi de comportement du solide élastique isotrope en régime linéaire

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \overline{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \overline{\sigma}) \overline{\mathbb{1}} \quad (2.51)$$

avec  $E$  le module d'Young du matériau,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $\text{tr } \overline{\sigma}$  la trace du tenseur des contraintes.

Cette loi s'écrit également à l'aide des coefficients de Lamé en exprimant le tenseur des contraintes à partir du tenseur des déformations

$$\overline{\sigma} = \lambda (\text{tr } \overline{\varepsilon}) \overline{\mathbb{1}} + 2G \overline{\varepsilon} \quad (2.52)$$

avec

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.53)$$

$G$  correspond au module de cisaillement du matériau et caractérise les déformations causées par des contraintes de cisaillement.

Nous indiquons dans le tableau 2.2 page 49 des valeurs usuelles de module de cisaillement  $G$ , de coefficient de Poisson  $\nu$  et de module d'Young  $E$  d'après [50].

Solide	$G$ (Pa)	$\nu$	$E$ (Pa)
gels viscoélastiques	100 à 500	0,5	300 à 1500
gomme naturelle	$3 \cdot 10^4$ à $3 \cdot 10^5$	0,49	$10^5$ à $10^6$
aluminium	$28 \cdot 10^9$	0,34	$72 \cdot 10^9$
acier	$80 \cdot 10^9$	0,28	$210 \cdot 10^9$

**Tableau 2.2** Valeurs courantes du module de cisaillement  $G$ , du coefficient de Poisson  $\nu$  et du module d'Young  $E$

## 2.2.2 Fluide non-newtonien

Les fluides sont dits non-newtoniens ou complexes lorsque le tenseur des contraintes visqueuses n'est pas une fonction linéaire du tenseur des déformations. C'est le cas de la majorité des fluides réels : mousses, crèmes, savons, peintures, gels, boues, etc. La viscosité ne peut plus être définie comme pour un fluide newtonien car le comportement du fluide varie en fonction des sollicitations extérieures ou même en fonction du temps. Le domaine de la physique qui étudie ces fluides est la rhéologie [50, 51, 52, 53].

La viscosité est une propriété intrinsèque du fluide qui résulte des interactions mutuelles des éléments constitutifs du fluide : atomes, molécules, bulles, chaînes de polymères. Le comportement mécanique du fluide traduit les déplacements relatifs de ces

éléments constitutifs. Finalement, beaucoup de comportements différents sont observés. Nous allons présenter les principaux types de comportement des fluides en leur associant une loi de comportement.

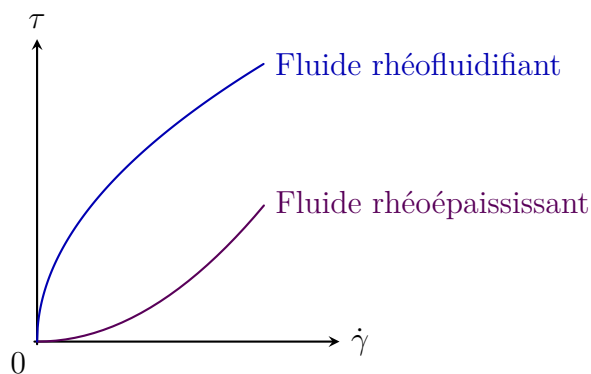
### 2.2.2.1 Thixotropie

La notion de thixotropie traduit l'évolution du comportement du fluide au cours du temps alors que les conditions aux limites sont fixées. Cette non-linéarité est analogue au phénomène d'hystérésis que l'on peut observer dans les cycles d'aimantation des matériaux. La viscosité évolue au cours du temps et l'état à un instant donné d'un fluide thixotrope dépend donc de l'historique du fluide.

Certains matériaux thixotropes donnent l'impression de se liquéfier au cours d'un écoulement. C'est le cas des mélanges eau-bentonite ou eau-laponite (des argiles naturelles ou de synthèses) qui peuvent avoir l'aspect d'un gel compact après quelques heures de repos et en revanche couler comme une huile peu visqueuse après une légère agitation.

### 2.2.2.2 Fluides rhéofluidifiants ou rhéoépaississants

De nombreux fluides ont une viscosité apparente  $d\tau/d\dot{\gamma}$  qui varie avec le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  comme représenté sur la figure 2.4 page 50.  $\tau$  correspond à la contrainte de cisaillement imposée au fluide.



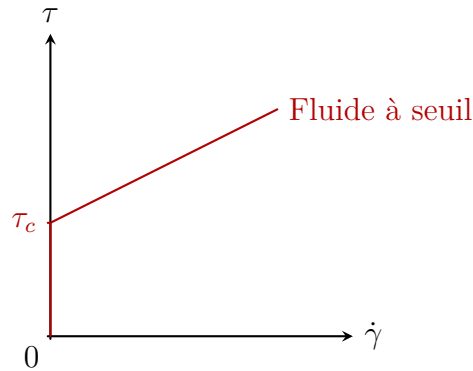
**Figure 2.4** Lois de comportement non-linéaires pour des fluides rhéofluidifiants et rhéoépaississants

La plupart des suspensions sont rhéofluidifiantes : leur viscosité apparente, qui est liée à la dérivée de la courbe représentée, diminue avec le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Le rhéoépaississement est plus rarement observé. Il s'agit le plus souvent de suspensions très concentrées (concentrations volumiques supérieures à 50%).

### 2.2.2.3 Fluides à seuil

Les fluides à seuil sont des fluides qui ne s'écoulent pas tant que la contrainte appliquée est inférieure à une contrainte seuil, notée  $\tau_c$ . La contrainte seuil est due, au niveau

microscopique, aux liaisons entre les éléments constitutifs du matériau. [54] dressent une liste de matériaux présentant une contrainte seuil d'écoulement. La liste des fluides à seuil va des boues de forage au sang, en passant par les produits cosmétiques. Au delà de la contrainte seuil, le matériau se comporte presque comme un fluide newtonien. Nous pouvons ainsi résumer son comportement sur la figure 2.5 page 51.



**Figure 2.5** Loi de comportement non-linéaire pour un fluide à seuil

Au repos, le matériau se comporte comme un gel solide. Mis sous contraintes, sa déformation est principalement élastique jusqu'à la contrainte seuil et la transition vers un état liquide. Le tableau 2.3 page 51 donne des valeurs caractéristiques de contraintes seuil.

Fluide	$\tau_c$ (Pa)
sauce tomate	15
yaourt	80
dentifrice	110
beurre de cacahuète	1900

**Tableau 2.3** Valeurs courantes de contraintes seuil  $\tau_c$

#### 2.2.2.4 Fluides viscoélastiques

Les fluides viscoélastiques ont une loi de comportement qui évolue au cours du temps : lorsqu'une sollicitation d'une très courte durée leur est imposée, leur réponse est principalement élastique mais si cette sollicitation est assez longue, leur réponse est principalement visqueuse. C'est le cas de certaines pâtes silicones qui se comportent comme des balles en caoutchouc solides lorsqu'on les fait rebondir et qui s'étalent sur leur support si on les abandonne à la seule sollicitation de la pesanteur.

## 2.2.3 Problématique des fluides à seuil

### 2.2.3.1 Modèle de Herschel-Bulkley

Plusieurs modèles existent dans la littérature pour décrire le comportement des fluides à seuil [51]. Nous avons retenu le modèle de Herschel-Bulkley qui généralise le modèle de Bingham ( $n = 1$ ) avec :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0 & \text{lorsque } |\tau| < \tau_c \\ |\tau| = \tau_c + \mu |\dot{\gamma}|^n & \text{lorsque } \dot{\gamma} \neq 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

avec  $\tau_c$  la contrainte seuil,  $\mu$  et  $n$  deux paramètres du matériau.

Remarquons également que des modèles régularisés existent pour s'affranchir de la distinction  $|\tau| < \tau_c$  ou  $|\tau| > \tau_c$ . Ces modèles consistent à remplacer le comportement solide indéformable par un comportement newtonien correspondant à un fluide de très grande viscosité. Parmi les modèles utilisés, citons le modèle de Papanastasiou [55]

$$\tau = \left( \mu + \tau_c \frac{(1 - e^{-m|\dot{\gamma}|})}{|\dot{\gamma}|} \right) \dot{\gamma} \quad (2.55)$$

où  $m$  est un paramètre qui prend des valeurs très élevées ( $m > 10$  s) permettant de se rapprocher le plus possible du modèle de Bingham.

### 2.2.3.2 Comparaison de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide newtonien et d'un fluide à seuil

Un écoulement de Poiseuille est un écoulement laminaire dans une conduite cylindrique en régime stationnaire. C'est un cas simple d'écoulement qui permet d'obtenir analytiquement le profil de vitesse dans la conduite. Nous allons comparer les solutions obtenues pour un fluide newtonien et pour un fluide à seuil. Nous négligerons l'effet de la pesanteur et supposerons des conditions de non-glissement aux parois. Le référentiel est supposé galiléen et nous utilisons les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Le tube de rayon  $R$  est supposé infini selon  $z$ . L'étude est menée en l'absence de champ magnétique et donc de forces volumiques magnétiques.

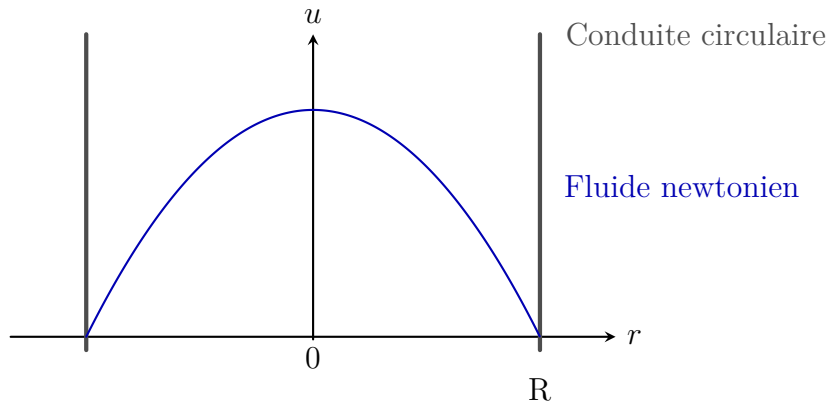
Pour un fluide newtonien, nous montrons que le profil de vitesse  $u$  est de la forme

$$u(r) = u_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (2.56)$$

L'allure est donc une parabole représentée sur la figure 2.6 page 53.

Dans le cas d'un fluide à seuil, le modèle de Herschel-Bulkley accompagné des conditions limites d'adhérence aux parois et de continuité des contraintes à l'interface





**Figure 2.6** Profil de vitesse d'un fluide newtonien dans le cas d'un écoulement de Poiseuille

solide-gel donne

$$\begin{cases} u_{\max} = \frac{R}{1 + \frac{1}{n}} \left( \frac{\tau_p}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \left( 1 - \frac{r_0}{R} \right)^{1 + \frac{1}{n}} & \text{lorsque } 0 \leq r < r_0 \\ u(r) = u_{\max} \left( 1 - \left( \frac{r - r_0}{R - r_0} \right)^{1 + \frac{1}{n}} \right) & \text{lorsque } r_0 \leq r \leq R \end{cases} \quad (2.57)$$

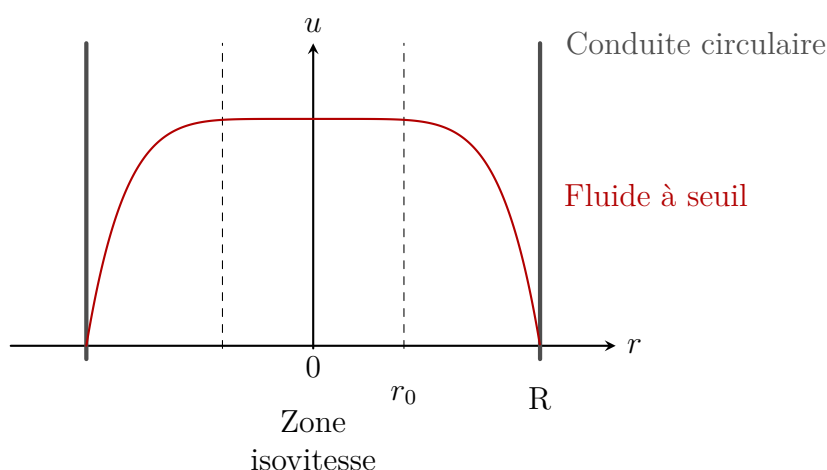
avec  $\tau_p$  la contrainte pariétale et  $r_0 = \frac{\tau_c}{\tau_p} R$  la dimension de la zone isovitesse.

L'écoulement de Poiseuille d'un fluide à seuil est caractérisé par la présence de deux phases comme le montre la figure 2.7 page 54 : une phase liquide où  $|\tau| > \tau_c$  au contact avec la paroi et une phase solide ou gel où  $|\tau| \leq \tau_c$  dans la partie centrale de la conduite. A l'interface entre les deux zones, nous avons  $|\tau| = \tau_c$ . De part et d'autre de la zone isovitesse, le fluide est cisailé. La viscosité diminue de l'interface à la paroi. En outre, la viscosité apparente tend vers l'infini au voisinage de l'interface.

### 2.2.3.3 Les difficultés pour caractériser les fluides à seuil

Deux points essentiels compliquent la détermination expérimentale des caractéristiques des fluides à seuil :

- l'hypothèse de non glissement aux parois n'est pas toujours vérifiée : il peut exister des contraintes de glissements hétérogènes aux parois [56]. Le profil de vitesse de l'écoulement présente une discontinuité près de la paroi [51]. Cela entraîne une incertitude de mesure lors de la caractérisation des fluides à seuil. Le plus souvent des plans sablés sont utilisés pour minimiser ces glissements.
- la détermination de la contrainte seuil se révèle particulièrement délicate [57, 58]. Selon le protocole expérimental, des valeurs de contrainte seuil très différentes ont été mesurées sur un même fluide. Néanmoins, le plus souvent, le seuil d'écoulement est assez net et peut être défini à un facteur 2 ou 3 près.



**Figure 2.7** Profil de vitesse d'un fluide à seuil dans le cas d'un écoulement de Poiseuille

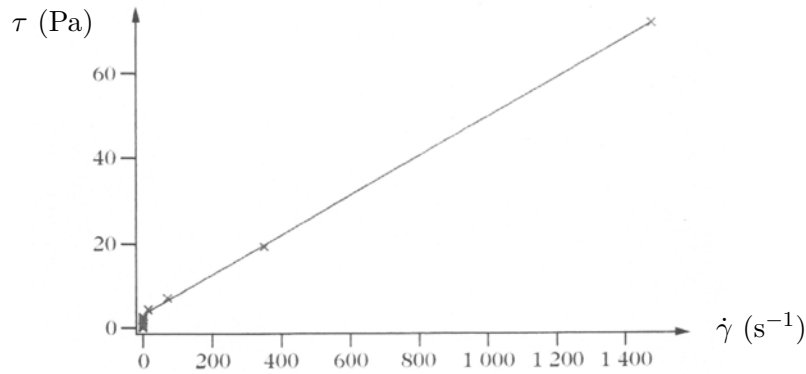
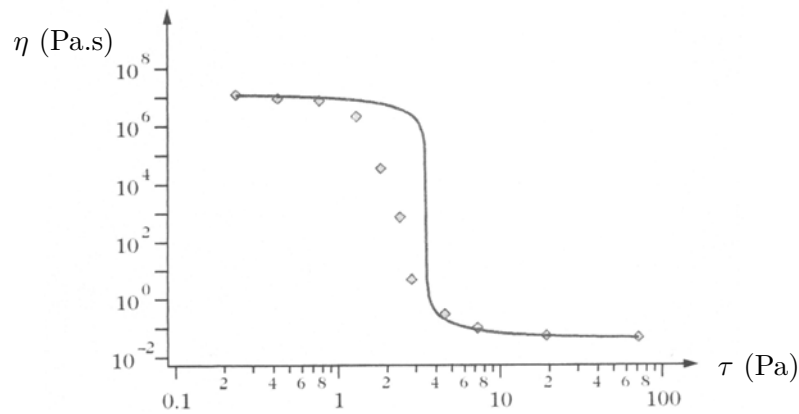
L'exemple typique de la transition solide-gel d'une solution aqueuse de bentonite (argile naturelle) à 10% en masse est représenté sur la figure 2.8 page 55. Ce fluide se comporte comme un fluide à seuil et est en accord avec le modèle de Bingham qui est le modèle de Herschel-Bulkley vu au 2.2.3.1 page 52 avec  $n = 1$ . Dans ce cas, la contrainte seuil vaut environ  $\tau_c = 3$  Pa.

#### 2.2.3.4 Les actions possibles des forces magnétiques volumiques sur les fluides à seuil

Les fluides à seuil ont une propriété de non-linéarité qui se traduit par un changement plus ou moins brutal de comportement : ils passent de l'état solide à l'état de gel dès que la contrainte seuil est dépassée. Nous nous proposons d'étudier les possibilités d'agir sur ces fluides à partir des forces volumiques magnétiques. Les actions des forces volumiques pourront être à l'origine du changement de comportement ou tout du moins permettre le passage du seuil à partir d'un état pré-contraint. Nous envisageons deux possibilités :

- en statique, nous pouvons envisager de trouver une configuration magnétique qui permettra de dépasser la contrainte seuil en un ou plusieurs points du fluide ;
- en dynamique, nous pouvons agir sur l'écoulement du fluide et modifier le profil de vitesse, et notamment modifier la zone isovitesse. Au niveau de l'interface solide-gel, la contrainte est égale à la contrainte seuil  $|\tau| = \tau_c$ . En agissant sans contact, il serait possible de localement dépasser la contrainte seuil.

Les intérêts sont divers. Une action sans contact connue est intéressante car elle n'entraîne pas de contrainte de glissement. Ces contraintes de glissement sont généralement des inconnues qui entraînent des incertitudes sur la détermination des lois de comportement du fluide comme nous l'avons noté au 2.2.3.3 page 53. Cela pourrait donc offrir des solutions pour réduire les incertitudes lors de la détermination expérimentale de la loi de comportement des fluides complexes. Une autre action à envisager serait

(a) Contrainte  $\tau$  en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ (b) Viscosité  $\eta$  en fonction de la contrainte de cisaillement  $\tau$  en échelle log-log

**Figure 2.8** Mise en évidence de la transition gel-liquide (courbe théorique en trait plein et points expérimentaux) pour une solution de bentonite à 10% en masse d'après [52]

la réduction des pertes de charge localement ou la possibilité de modifier localement la pression en un point d'un écoulement fermé et inaccessible.

## 2.3 Modélisation multiphysique

Nous allons nous intéresser à la modélisation de l'écoulement d'un fluide newtonien ou d'un fluide complexe sous champ magnétique intense. Ce problème est multiphysique : mécanique des fluides ou des solides pour les fluides à seuil et magnétostatique pour la distribution de courant qui crée le champ magnétique. Ces problèmes sont dans notre cas découplés car nous ne tenons pas compte de la modification du champ magnétique due à l'aimantation du fluide ( $|\chi| \ll 1$ ).

La résolution de nos problèmes se fera donc dans l'ordre suivant :

- à partir de la distribution de courant, nous déterminons le champ magnétique en tout point du fluide ou du solide,
- nous résolvons ensuite la partie mécanique en tenant compte des forces magnétiques volumiques trouvées précédemment.

Avant d'étudier au chapitre suivant différentes configurations de champ magnétique, nous allons dans cette partie donner la démarche pour « bien poser » au sens mathématique les problèmes mécaniques et magnétiques.

### 2.3.1 Problème mécanique

#### 2.3.1.1 Fluide newtonien

Comme nous l'avons vu au 2.2.1.2 page 47, le problème est mathématiquement bien posé avec quatre inconnues

- le champ scalaire de pression,
- le champ vectoriel de vitesse,

et deux équations

- l'équation vectorielle de Navier-Stokes,
- l'équation scalaire de conservation de la masse.

Les conditions aux limites permettront de garantir l'unicité de la solution. En vitesse, ces conditions se traduisent par :

- vitesse nulle au niveau des parois fixes en raison des forces visqueuses,
- vitesse imposée sur les autres bords du problème.

En pression, un ou plusieurs points de l'écoulement en contact avec l'extérieur permet de déterminer par continuité une condition limite en pression en un ou plusieurs points du bord du fluide.

#### 2.3.1.2 Fluide non-newtonien

Le tenseur des contraintes, qui est symétrique, définit 6 inconnues. Par exemple, dans un repère cartésien, nous avons

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\sigma}}, \{ \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \} \right\} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

En ajoutant le champ de vitesse et le champ de pression, nous obtenons 10 inconnues et 3 équations

- l'équation vectorielle d'évolution de la quantité de mouvement,
- l'équation scalaire de conservation de la masse,
- la loi de comportement du fluide (loi tensorielle).

Le problème est donc correctement posé si l'on fournit les conditions aux limites. En vitesse, ces conditions se traduisent par :

- vitesse nulle au niveau des parois fixes en raison des forces visqueuses,
- vitesse imposée sur les autres bords du problème.

En pression, un ou plusieurs points de l'écoulement en contact avec l'extérieur permet de déterminer par continuité une condition limite en pression en un ou plusieurs points du bord du fluide.

### 2.3.2 Problème magnétique

À partir des équations de Maxwell, nous posons le problème magnétique de la résolution du champ magnétique créé par une distribution de courant dans le vide. Nous utiliserons une distribution de courant stationnaire. Le fluide placé dans le champ magnétique s'aimante mais comme il est très faiblement magnétique, la carte de champ magnétique n'est pas modifiée. Le problème multiphysique associe de la dynamique des fluides à de la magnétostatique. Au sein du fluide, nous avons

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{0} \end{cases} \quad (2.59)$$

Nous utilisons le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  défini tel que

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (2.60)$$

Nous avons ainsi

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{0} \quad (2.61)$$

soit

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \vec{0} \quad (2.62)$$

La condition de jauge de Lorentz en régime stationnaire impose  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ . L'équation de Maxwell-Ampère se simplifie alors en

$$\Delta \vec{A} = \vec{0} \quad (2.63)$$

Cette équation est valable en tout point de l'espace sauf au niveau de la distribution de courant. Les conditions de passage et les conditions aux limites permettent de déterminer les constantes d'intégration qui apparaissent lors de la résolution de l'équation 2.63 page 57.

### 2.3.3 Expression des forces volumiques magnétiques et du tenseur des actions magnétiques en fonction du potentiel-vecteur

Afin de réaliser la simulation numérique, nous allons poser notre problème magnétique à l'aide des variables utilisées par le logiciel COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>. Ce dernier utilise en magnétostatique une formulation en potentiel-vecteur pour résoudre le problème par la méthode des éléments finis. Les éléments d'arêtes utilisés ne permettent pas de calculer les forces volumiques à partir du champ magnétique. Les dérivées secondes du champ magnétique sont nulles lorsqu'elles sont calculées numériquement par le logiciel. Il est donc nécessaire d'établir une formulation en potentiel-vecteur pour le problème magnétique.

#### 2.3.3.1 Coordonnées cartésiennes

Nous allons établir les expressions des forces volumiques en coordonnées cartésiennes dans un repère  $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ . Afin de simplifier l'expression des forces volumiques, nous écrivons sous une autre forme les forces volumiques magnétiques décrites au 1.2.4 page 15

$$\vec{f}_{mv} = \frac{\chi}{\mu_0} \left( \vec{B} \cdot \text{grad} \right) \vec{B} \quad (2.64)$$

Cette relation est vraie car

$$\left( \vec{B} \cdot \text{grad} \right) \vec{B} = \text{grad} \left( \frac{B^2}{2} \right) + \text{rot} \vec{B} \wedge \vec{B} \quad (2.65)$$

et  $\text{rot} \vec{B} = \vec{0}$  d'après 2.59 page 57.

Dans cette partie, nous noterons les dérivées partielles  $\partial_x$ ,  $\partial_y$  et  $\partial_z$  afin de ne pas rendre les écritures mathématiques trop chargées. Les dérivées composées seront notées par exemple  $\partial_{xy}$ .

Le champ magnétique  $\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z$  s'exprime en fonction du potentiel-vecteur  $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$  en utilisant 2.60 page 57

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

L'équation 2.64 page 58 permet d'écrire

$$\vec{f}_{mv} = \frac{\chi}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x \partial_x B_x + B_y \partial_y B_x + B_z \partial_z B_x \\ B_x \partial_x B_y + B_y \partial_y B_y + B_z \partial_z B_y \\ B_x \partial_x B_z + B_y \partial_y B_z + B_z \partial_z B_z \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

Nous obtenons ainsi l'expression des forces volumiques en fonction du potentiel-vecteur

$$\vec{f}_{\text{mv}} = \frac{\chi}{\mu_0} \begin{pmatrix} (\partial_y A_z - \partial_z A_y) (\partial_{yx} A_z - \partial_{zx} A_y) + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) (\partial_{yy} A_z - \partial_{zy} A_y) + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) (\partial_{yz} A_z - \partial_{zz} A_y) \\ (\partial_y A_z - \partial_z A_y) (\partial_{zx} A_x - \partial_{xx} A_z) + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) (\partial_{zy} A_x - \partial_{xy} A_z) + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) (\partial_{zz} A_x - \partial_{xz} A_z) \\ (\partial_y A_z - \partial_z A_y) (\partial_{xx} A_y - \partial_{yx} A_x) + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) (\partial_{xy} A_y - \partial_{yy} A_x) + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) (\partial_{xz} A_y - \partial_{yz} A_x) \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

De la même façon, nous exprimons le tenseur des actions magnétiques vu au 2.1.4 page 46

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \frac{\chi}{\mu_0} \vec{\mathbf{B}} \otimes \vec{\mathbf{B}} \quad (2.69)$$

La matrice associée à  $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$  s'écrit

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{T}}}, \{ \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \} \right\} = \frac{\chi}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_y B_x & B_y^2 & B_y B_z \\ B_z B_x & B_z B_y & B_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Le tenseur est bien symétrique. Nous pouvons à partir de cette expression commenter l'effet possible du tenseur des actions magnétiques. Les termes sur la diagonale correspondent à un équivalent de la pression hydrostatique. Ce sont les termes en dehors de la diagonale qui vont avoir une action sur les contraintes de cisaillement. Dans le cas des coordonnées cartésiennes, les actions sur les fluides à seuil seront possibles en trouvant une distribution de courant maximisant les termes croisés. Dans le chapitre 3, nous allons étudier différentes configurations de distributions de courants. L'objectif est donc de trouver les paramètres des distributions de courant qui agiront le plus efficacement sur le fluide. Il faut cependant avoir en tête que les conditions aux limites modifieront le champ de contrainte. L'optimisation ne porte donc pas sur les termes croisés du tenseur des actions magnétiques mais sur l'optimisation des contraintes de cisaillement du tenseur des contraintes comme nous le verrons au chapitre 4.

Nous pouvons exprimer le tenseur des actions magnétiques en fonction du potentiel-vecteur

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{T}}}, \{ \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \} \right\} = \frac{\chi}{\mu_0} \begin{pmatrix} (\partial_y A_z - \partial_z A_y)^2 & (\partial_y A_z - \partial_z A_y) (\partial_z A_x - \partial_x A_z) & (\partial_y A_z - \partial_z A_y) (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ \dots & (\partial_z A_x - \partial_x A_z)^2 & (\partial_z A_x - \partial_x A_z) (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ \dots & \dots & (\partial_x A_y - \partial_y A_x)^2 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

Le tenseur étant symétrique, les pointillés correspondant aux termes symétriques permettent d'alléger l'écriture de la matrice. Ces formules nous serviront dans le chapitre 3 pour établir les expressions analytiques des champs de force magnétique et du tenseur des actions magnétiques.

### 2.3.3.2 Coordonnées cylindriques

L'étude en coordonnées cylindriques dans un repère  $\{O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$  ne permet pas d'utiliser l'opérateur  $(\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{B}$ . L'expression des forces magnétiques volumiques doit donc être déterminée à partir de l'équation

$$\vec{f}_{\text{mv}} = \frac{\chi}{2\mu_0} \text{grad} B^2 \quad (2.72)$$

$B^2$  s'exprime facilement à partir du potentiel-vecteur. Nous avons

$$B^2 = \left( \frac{1}{r} \partial_\theta A_z - \partial_z A_\theta \right)^2 + (\partial_z A_r - \partial_r A_z)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_r r A_\theta - \partial_\theta A_r)^2 \quad (2.73)$$

La matrice associée au tenseur des actions magnétiques s'écrit

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{T}}}, \{ \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z \} \right\} = \frac{\chi}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_r^2 & B_r B_\theta & B_r B_z \\ B_\theta B_r & B_\theta^2 & B_\theta B_z \\ B_z B_r & B_z B_\theta & B_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

ou en utilisant le potentiel-vecteur

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{T}}}, \{ \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z \} \right\} = \frac{\chi}{\mu_0} \begin{pmatrix} \left( \partial_\theta \frac{A_z}{r} - \partial_z A_\theta \right)^2 & \left( \partial_\theta \frac{A_z}{r} - \partial_z A_\theta \right) (\partial_z A_r - \partial_r A_z) & \left( \partial_\theta \frac{A_z}{r} - \partial_z A_\theta \right) \left( \partial_r A_\theta - \partial_\theta \frac{A_r}{r} \right) \\ \dots & (\partial_z A_r - \partial_r A_z)^2 & (\partial_z A_r - \partial_r A_z) \left( \partial_r A_\theta - \partial_\theta \frac{A_r}{r} \right) \\ \dots & \dots & \left( \partial_r A_\theta - \partial_\theta \frac{A_r}{r} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

Les pointillés indiquent la symétrie de la matrice.



## 2.4 Conclusion

Cette partie nous a permis de poser les bases de notre étude à venir. Les équations des problèmes mécaniques et magnétiques ont été posées.

Le couplage entre les deux problèmes vu au 2.1.1 page 37 a permis de mettre en évidence le nombre adimensionnel  $Ne$  traduisant le rapport entre les forces volumiques magnétiques et les forces d'inertie

$$Ne = \frac{\chi B_0^2}{\mu_0 \rho u_0^2}$$

Ce nombre adimensionnel étudié au 2.1.3.2 page 43 détermine les critères de l'écoulement sur lequel les forces volumiques magnétiques pourront agir

$$|Ne| > 10^4$$

$$\text{Champ magnétique } B_0 > 10 \text{ T}$$

$$\text{Vitesse d'écoulement } u_0 < 1 \text{ cm/s}$$

$$\text{Écoulement laminaire } Re < 10^3$$

Les conditions correspondent particulièrement à des écoulements de fluides non-newtoniens de type gel, boue, etc. Ces fluides présentés au 2.2.2 page 49 ont des lois de comportement non-linéaires. Le cas des fluides à seuil vu au 2.2.3.3 page 53 suscite un intérêt particulier : il est notamment possible d'envisager la transition entre l'état solide et l'état gel uniquement par les effets des forces volumiques magnétiques.

Les écoulements seront donc modifiés uniquement sous champs magnétiques intenses. Les dispositifs nécessaires pour créer ces champs magnétiques pourront être des bobines supraconductrices uniquement ou des bobines hybrides comme en lévitation. Rien ne nous oblige à nous limiter à ces configurations : nous allons explorer au chapitre 3 différentes configurations à base de supraconducteurs permettant d'agir sur l'écoulement d'un fluide dia- ou paramagnétique non conducteur et non chargé.

Le dernier point abordé au 2.3.3 page 58 dans cette partie prépare la formulation en potentiel-vecteur du problème magnétique qui sera utile pour mener les simulations numériques au chapitre 4.

Passons à présent aux études de dispositifs magnétiques permettant d'agir sur les fluides dia- ou paramagnétiques non conducteurs et non chargés.



---

## Références bibliographiques du chapitre 2

- [45] E. PLAUT. *Cours de mécanique des milieux continus*. Cours de l'école nationale supérieure des Mines de Nancy. 2012. URL : <http://www.mines.inpl-nancy.fr/emmanuel.plaut/mmc/pol.pdf> (visité le 15 juillet 2012) (cf. p. 37, 122).
- [46] E. PLAUT. *Cours de mécanique des fluides*. Cours de l'école nationale supérieure des Mines de Nancy. 2012. URL : <http://www.mines.inpl-nancy.fr/emmanuel.plaut/mf/pol.pdf> (visité le 15 juillet 2012) (cf. p. 37).
- [47] S. FOREST. *Cours de mécanique des milieux continus*. Cours de l'école nationale supérieure des Mines de Paris. 2012. URL : [http://mms2.ensmp.fr/mmc\\_paris/poly/MMC.pdf](http://mms2.ensmp.fr/mmc_paris/poly/MMC.pdf) (visité le 15 juillet 2012) (cf. p. 37).
- [48] R. E. ROSENSWEIG. *Ferrohydrodynamics*. Dover Publications, juil. 1997. ISBN : 0486678342 (cf. p. 37, 40).
- [49] L. HEYRENDT et D. NETTER. « Des bobines supraconductrices en rhéologie : étude des contraintes de cisaillement créées sans contact sur un écoulement de fluide complexe ». Dans : *9<sup>e</sup> Journées de Cryogénie et de Supraconductivité*. Aussois, France, 25-27 mar. 2009 (cf. p. 42).
- [50] T. G. MEZGER. *The Rheology Handbook*. 2<sup>nd</sup> revised edition. Vincentz, 2006. ISBN : 3878701748 (cf. p. 49).
- [51] P. COUSSOT et C. ANCEY. *Rhéophysique des pâtes et des suspensions*. EDP Sciences, 1999. ISBN : 2868834019 (cf. p. 49, 52, 53, 122).
- [52] P. OSWALD. *Rhéophysique : Ou comment coule la matière*. Belin, sept. 2005. ISBN : 2701139694 (cf. p. 49, 55, 123).
- [53] S. AMIROUDINE et J.-L. BATTAGLIA. *Mécanique des fluides - Cours et exercices corrigés*. Dunod, sept. 2011. ISBN : 2100549332 (cf. p. 49).
- [54] R. BYRON-BIRD, G. DAI et B. YARUSSO. « The rheology and flow of viscoplastic materials ». Dans : *Reviews in Chemical Engineering* 1.1 (jan. 1983), p. 1–70 (cf. p. 51).
- [55] T. C. PAPANASTASIOU. « Flows of Materials with Yield ». Dans : *Journal of Rheology* 31.5 (1987), p. 385–404 (cf. p. 52, 123, 146).
- [56] H. TANG et D. KALYON. « Estimation of the parameters of Herschel-Bulkley fluid under wall slip using a combination of capillary and squeeze flow viscometers ». Dans : *Rheologica acta* 43.1 (2004), p. 80–88 (cf. p. 53).

- [57] P. MØLLER, J. MEWIS et D. BONN. « Yield stress and thixotropy : on the difficulty of measuring yield stresses in practice ». Dans : *Soft matter* 2.4 (2006), p. 274–283 (cf. p. 53).
- [58] H. BARNES. « The yield stress – a review or ‘*παντα ρει*’ – everything flows? » Dans : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 81.1-2 (1999), p. 133–178 (cf. p. 53, 122, 123).

# Configurations magnétiques et actions mécaniques

<b>3.1 Démarche générale</b>	<b>68</b>
3.1.1 Étude analytique préliminaire	68
3.1.1.1 Équations à résoudre	68
3.1.1.2 Objectifs	68
3.1.2 Choix des configurations magnétiques	69
<b>3.2 Deux nappes de courant parallèles infinies</b>	<b>69</b>
3.2.1 Présentation de la configuration choisie	69
3.2.2 Configuration à une nappe infinie de courant	71
3.2.2.1 Potentiel-vecteur créé par une nappe infinie	71
3.2.2.2 Expression du champ magnétique	74
3.2.2.3 Expression du champ de forces volumiques	76
3.2.2.4 Expression du tenseur des actions magnétiques	77
3.2.3 Configuration à deux nappes parallèles infinies parcourues par la même densité de courant	78
3.2.3.1 Expression du champ magnétique	79
3.2.3.2 Expression du champ de forces volumiques	82
3.2.3.3 Expression du tenseur des actions magnétiques	84
3.2.4 Étude paramétrique	85
3.2.4.1 Influence de $J_0$	86
3.2.4.2 Influence de $D$	87
3.2.4.3 Influence de $n_k$	87
3.2.4.4 Synthèse	87
<b>3.3 Solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale</b>	<b>90</b>
3.3.1 Présentation de la configuration choisie	90
3.3.2 Potentiel-vecteur créé par le solénoïde	92
3.3.3 Champ de force et tenseur des actions magnétiques	95
3.3.4 Étude paramétrique	98
3.3.4.1 Influence de $J_0$	98
3.3.4.2 Influence de $R$	98
3.3.4.3 Influence de $k$	99

### 3. CONFIGURATIONS MAGNÉTIQUES ET ACTIONS MÉCANIQUES

---

3.3.4.4 Synthèse . . . . .	101
<b>3.4 Solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale . . . . .</b>	<b>104</b>
3.4.1 Présentation de la configuration choisie . . . . .	104
3.4.2 Potentiel-vecteur créé par le solénoïde . . . . .	105
3.4.3 Champ de force et tenseur des actions magnétiques . . . . .	108
3.4.4 Étude paramétrique . . . . .	109
3.4.4.1 Influence de $J_0$ . . . . .	109
3.4.4.2 Influence de $p$ . . . . .	110
3.4.4.3 Cas particulier $p=1$ . . . . .	112
3.4.4.4 Influence de $R$ . . . . .	112
<b>3.5 Conclusion . . . . .</b>	<b>115</b>
<b>Références bibliographiques du chapitre 3 . . . . .</b>	<b>117</b>

---

---

## Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à des configurations magnétiques susceptibles d’agir sur un fluide à seuil dia- ou paramagnétique non chargé. Ce fluide pourrait, sous le seul effet du tenseur des actions magnétiques, passer de l’état solide à l’état de gel. Nous pouvons également envisager une modification du profil de vitesse de l’écoulement. Avant de nous intéresser au problème de mécanique des fluides qui sera l’objet du chapitre 4, étudions différents dispositifs magnétiques. Il n’y a aucun précédent à l’application que nous proposons et nous devons par conséquent explorer plusieurs configurations magnétiques.

Nous allons mener notre étude en utilisant des configurations magnétiques « classiques ». L’objectif est de réaliser des calculs analytiques simples facilitant l’analyse des résultats et permettant de dégager des tendances pour le choix d’un dispositif magnétique pouvant agir sur un fluide à seuil. Nous allons détailler trois configurations :

- deux nappes de courant infinies parallèles au 3.2 page 69 ;
- un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale au 3.3 page 90 ;
- un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique dirigée selon l’axe de révolution du solénoïde au 3.4 page 104.

Dans ces trois configurations, nous allons déterminer

- le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  ;
- le champ magnétique  $\vec{B}$  ;
- le champ de forces magnétiques volumiques  $\vec{f}_{mv}$  ;
- la matrice associée au tenseur des actions magnétiques  $\overline{\overline{T}}$ .

Les densités de courant surfaciques seront choisies sinusoïdales dans l’espace afin d’étudier l’influence des harmoniques sur le champ de forces volumiques et le tenseur des actions magnétiques. L’objectif est de déterminer s’il est possible de modifier les écoulements de fluides complexes et où placer ces fluides selon les configurations.

Nous mènerons alors, pour ces trois configurations, une étude paramétrique afin de déterminer les configurations magnétiques les plus pertinentes pour l’application que nous proposons.

## 3.1 Démarche générale

### 3.1.1 Étude analytique préliminaire

#### 3.1.1.1 Équations à résoudre

Notre étude se fait à partir de configurations magnétiques simples qui permettront de poser analytiquement les expressions essentielles des champs de forces et du tenseur des actions magnétiques. Cette approche est possible car l'équation magnétique à résoudre est simple. Comme nous l'avons vu au 2.3.2 page 57, nous avons à résoudre dans tout l'espace

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \vec{0} \quad (3.1)$$

avec  $\vec{A}$  le potentiel-vecteur.

La détermination du champ magnétique est possible par dérivation

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (3.2)$$

Le champ de forces volumiques est donné par la relation (1.18) vue au 1.2.4 page 15

$$\vec{f}_{\text{mv}} = \frac{\chi}{\mu_0} \left( \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{B} \quad (3.3)$$

ou grâce à la formulation en potentiel-vecteur établie au 2.3.3 page 58.

Enfin, le tenseur des actions magnétiques est déterminé à partir de sa définition vue au 2.1.4 page 46

$$\overline{\overline{T}} = \frac{\chi}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B} \quad (3.4)$$

ou également grâce à la formulation en potentiel-vecteur établie au 2.3.3 page 58.

#### 3.1.1.2 Objectifs

Nous souhaitons étudier différentes sources de champ magnétique afin de comparer les forces volumiques créées et les tenseurs des actions magnétiques générés. Nous choisirons des configurations simples afin de rendre le calcul analytique possible. Les dispositifs choisis seront parcourus par des densités de courant surfaciques stationnaires et sinusoïdales dans l'espace. Nous ne souhaitons pas faire varier ces densités dans le temps car nous avons choisi de réaliser notre étude en mécanique des fluides en régime stationnaire.

Nous ne chercherons pas à optimiser les configurations magnétiques trouvées car cela paraît trop précoce. Beaucoup de tendances peuvent être dégagées des expressions analytiques comme nous le verrons par la suite. La simulation numérique pourrait



également permettre de rendre l'étude plus flexible et plus précise mais nous avons choisi de mettre en évidence les expressions analytiques des forces volumiques et du tenseur des actions magnétiques qui n'ont jamais été étudiées.

L'approche analytique permettra également de réaliser une étude paramétrique des configurations choisies. Nous allons faire en sorte de comparer des configurations avec un nombre similaire de paramètres afin de pouvoir les comparer les unes aux autres.

### 3.1.2 Choix des configurations magnétiques

Nous cherchons des configurations magnétiques capables d'agir efficacement sur des fluides et particulièrement sur des fluides à seuil. Notre idée est de proposer trois configurations magnétiques différentes et d'analyser pour chacune d'elles les résultats obtenus pour les forces magnétiques volumiques et le tenseur des actions magnétiques.

Nous sommes dans une démarche très générale et ne nous soucierons pas notamment d'effet de bord ou de surfaces finies dans nos configurations. Nous souhaitons mener à terme des calculs analytiques donc nos choix devront être simples, classiques et limités. L'originalité est pour l'instant dans l'utilisation du tenseur des actions magnétiques plutôt que dans le choix des configurations magnétiques. Notre étude se veut préalable à d'éventuels essais d'optimisations ou de configurations originales.

Comme premier choix, nous avons choisi un système à deux nappes de courant infinies parcouru par deux densités de courant colinéaires (cf. 3.2 page 69). Ces nappes auront une épaisseur nulle et seront parcourues par des densités surfaciques de courant harmoniques afin de limiter la difficulté des calculs et d'étudier l'influence des harmoniques sur les forces volumiques et le tenseur des actions magnétiques. Cette étude se fera en coordonnées cartésiennes avec deux variables d'espace et six paramètres liés à la géométrie du dispositif (distance inter-nappes) et aux densités de courant surfaciques (valeur maximale, harmonique et déphasage).

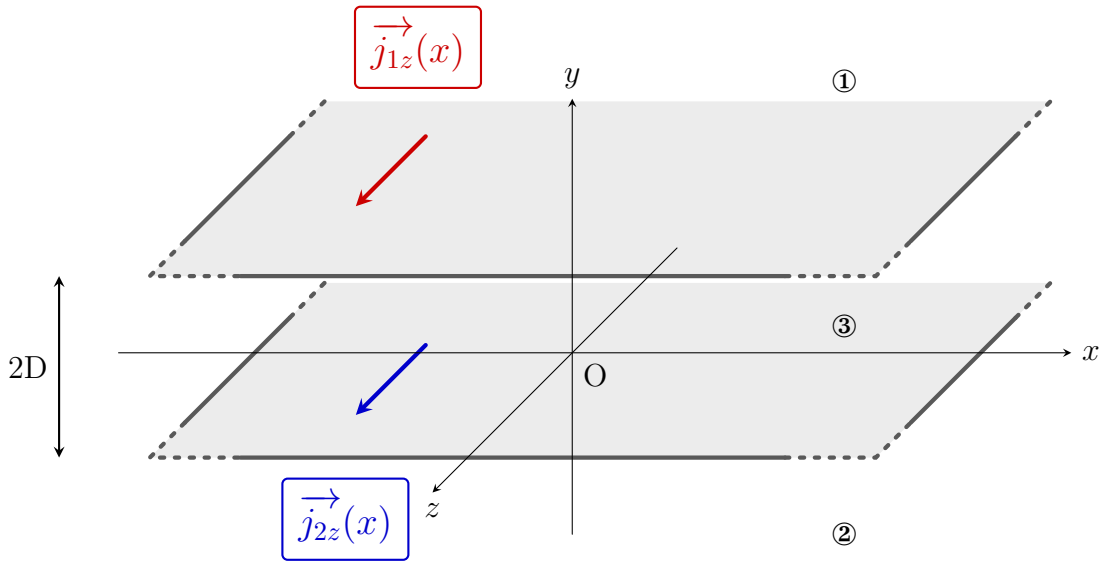
Ensuite, nous étudierons au 3.3 page 90 un solénoïde infini et d'épaisseur nulle parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale. Cette étude se fera en coordonnées cylindriques avec deux variables d'espace ( $r, z$ ) et trois paramètres liés à la géométrie (rayon) et à la densité de courant surfacique (valeur maximale, harmonique).

Enfin, au 3.4 page 104, nous nous intéresserons à un solénoïde infini et d'épaisseur nulle parcouru par une densité de courant surfacique dirigée selon l'axe du solénoïde. Cette étude se fera en coordonnées cylindriques avec deux variables d'espace ( $r, \theta$ ) et trois paramètres liés à la géométrie (rayon) et à la densité de courant surfacique (valeur maximale, harmonique).

## 3.2 Deux nappes de courant parallèles infinies

### 3.2.1 Présentation de la configuration choisie

Dans un repère  $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ , nous étudions la configuration représentée sur la figure 3.1 page 70 constituée de deux nappes infinies de courant parallèles. Ces nappes



**Figure 3.1** Deux nappes de courant parallèles

sont parcourues par des densités de courant surfaciques notées  $\vec{j}_{1z}(x)$  pour la nappe supérieure et  $\vec{j}_{2z}(x)$  pour la nappe inférieure. Elles sont orientées selon  $\vec{e}_z$  et ne dépendront que de  $x$ . Nous avons choisi de nous limiter au cas où les densités de courant sont sinusoïdales de la forme

$$\vec{j}_{1z}(x) = J_1 \sin(n_1 k x) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{j}_{2z}(x) = J_2 \sin(n_2 k x + \varphi) \vec{e}_z$$

Cette configuration est invariante par translation selon  $\vec{e}_z$ . Les grandeurs magnétiques et mécaniques ne dépendront donc que de  $x$  et  $y$ . Tout plan parallèle au plan  $xOy$  est un plan d'antisymétrie. Le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  est perpendiculaire aux plans d'antisymétries et sera donc selon  $\vec{e}_z$  uniquement. Nous le noterons donc  $\vec{A}_z$ . Le champ magnétique appartient aux plans d'antisymétries et aura par conséquent des composantes selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ .

L'espace inter-nappes noté ③ est d'une longueur  $2D$ , délimité par les deux nappes infinies d'équation  $y = \pm D$ . L'espace supérieur  $y > D$  sera noté ①. L'espace inférieur  $y < -D$  sera noté ②.

Cette configuration a donc deux variables d'espace  $x$  et  $y$  et six paramètres : la distance inter-nappes  $2D$ , les valeurs maximales des densités de courant  $J_1$  et  $J_2$ , leurs nombres d'onde  $n_1 k$  et  $n_2 k$  et le déphasage  $\varphi$ . Dans le cas où les densités de courant sont identiques pour les deux nappes, le nombre de paramètres est réduit à trois. Nous nous limiterons à ce cas dans la partie analytique mais nous traiterons la configuration avec des densités de courant différentes au chapitre 4.

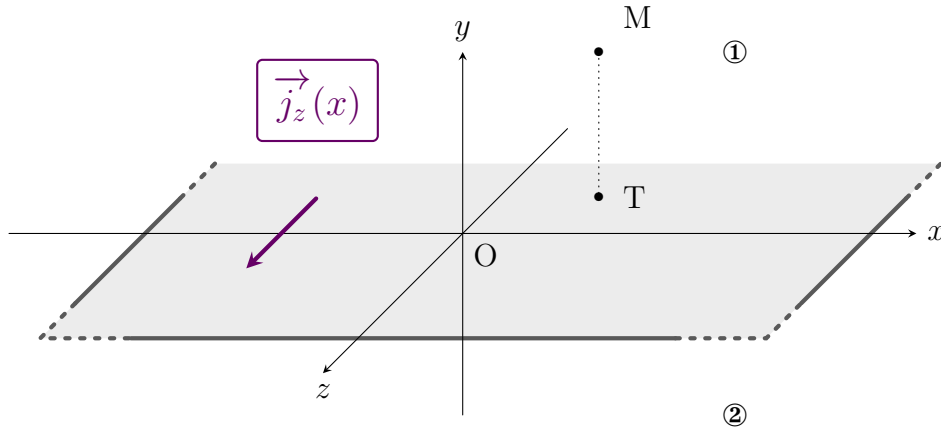
Cette structure correspond à la configuration magnétique d'un moteur linéaire lorsque  $n_1 = n_2$ .

Nous résoudrons ce problème en utilisant le principe de superposition. Intéressons nous dans un premier temps à une nappe infinie (cf. 3.2.2 page 71). Nous pourrons étudier ensuite la configuration à deux nappes au 3.2.3 page 78.

## 3.2.2 Configuration à une nappe infinie de courant

### 3.2.2.1 Potentiel-vecteur créé par une nappe infinie

Dans un premier temps, nous allons déterminer le potentiel-vecteur  $\vec{A}_z$  créé par une nappe de courant infinie représentée sur la figure 3.2 page 71. Dans un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , considérons une plaque confondue avec le plan  $y = 0$  dont l'épaisseur est négligeable devant la distance  $TM$  où  $M$  est le point de coordonnées  $(x, y, z)$  où l'on va déterminer  $\vec{A}_z(M)$  et  $T$  le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $y = 0$ . Cette plaque est parcourue par une densité surfacique de courant  $\vec{j}_z = j(x) \vec{e}_z$ . On note ① le demi-espace  $y > 0$  et ② le demi-espace  $y < 0$ .



**Figure 3.2** Nappe de courant infinie en  $y = 0$  parcourue par une densité surfacique de courant  $\vec{j}_z(x)$

Le problème est invariant par translation selon  $\vec{e}_z$ . D'après le principe de Curie, le potentiel-vecteur  $\vec{A}_z$ , le champ magnétique  $\vec{B}$ , l'excitation magnétique  $\vec{H}$  et le champ de force que l'on va déterminer ne dépendront donc pas de  $z$ . Tout plan parallèle au plan  $xOy$  est un plan d'antisymétrie pour notre problème. Le potentiel-vecteur  $\vec{A}_z$  est perpendiculaire aux plans d'antisymétries et sera donc selon  $\vec{e}_z$  uniquement.

Nous avons ainsi

$$\vec{A}_z(x, y, z) = A_z(x, y) \vec{e}_z \quad (3.5)$$

et l'équation à résoudre en tout point des espaces ① et ② est celle vue au 2.3.2 page 57

$$\vec{\Delta} \vec{A}_z = \vec{0} \quad (3.6)$$

Nous obtenons ainsi selon  $\vec{e}_z$  l'équation

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = 0 \quad (3.7)$$

La résolution de cette équation aux dérivées partielles se mène classiquement par une séparation de variables où nous posons

$$A_z(x,y) = f(x) g(y) \quad (3.8)$$

En introduisant cette expression dans (3.7) et en divisant par  $f(x) g(y)$ , nous obtenons

$$\frac{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}}{f(x)} = -\frac{\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}}{g(y)} \quad (3.9)$$

Le terme de gauche de l'équation ne dépendant que de  $x$  et celui de droite que de  $y$ , nous posons

$$\frac{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}}{f(x)} = -\frac{\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}}{g(y)} = -\beta^2 \text{ avec } -\beta^2 \in \mathbb{R}_-^* \quad (3.10)$$

Le corps  $\mathbb{R}_-^*$  de la constante sera justifié par la suite.

Le système à résoudre est alors

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \beta^2 f(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} - \beta^2 g(y) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Ces équations admettent pour solution

$$\begin{cases} f(x) = F \cos(\beta x) + F' \sin(\beta x) \\ g(y) = G e^{-\beta y} + G' e^{\beta y} \end{cases} \quad (3.12)$$

avec  $F, F', G$  et  $G'$  des constantes d'intégration dans  $\mathbb{R}$ .

On cherche à résoudre un problème avec une densité surfacique de courant périodique de la forme

$$\vec{j}_z(x) = J_0 \sin(n k x) \vec{e}_z \quad (3.13)$$

avec  $k = 2\pi/\lambda$  le nombre d'onde ( $\lambda$  est la longueur d'onde),  $n$  le rang de l'harmonique considéré et  $J_0$  l'amplitude de  $\|\vec{j}_z\|$ . Le potentiel-vecteur présente la même périodicité spatiale que la distribution de courant et sera donc nécessairement périodique selon  $x$ , ce qui justifie le choix d'une constante réelle négative  $-\beta^2$  dans (3.10) page 72.

Les conditions aux limites et les conditions de passage permettent de déterminer les quatre constantes d'intégration. La résolution s'effectue par demi-espace. Nous noterons

$\vec{A}_{z1}(x,y,z) = A_{z1}(x,y) \vec{e}_z$  le potentiel-vecteur dans ①,

$\vec{A}_{z2}(x,y,z) = A_{z2}(x,y) \vec{e}_z$  le potentiel-vecteur dans ②.

Dans le demi-espace supérieur ①, nous avons

$$\begin{cases} f_1(x) = F_1 \cos(\beta x) + F'_1 \sin(\beta x) \\ g_1(y) = G_1 e^{-\beta y} + G'_1 e^{\beta y} \end{cases} \quad (3.14)$$

La norme du potentiel-vecteur  $A_{z1}$  doit rester finie lorsque  $y \rightarrow +\infty$ . Cela impose

$$G'_1 = 0 \quad (3.15)$$

Dans le demi-espace inférieur ②, nous notons

$$\begin{cases} f_2(x) = F_2 \cos(\beta x) + F'_2 \sin(\beta x) \\ g_2(y) = G_2 e^{-\beta y} + G'_2 e^{\beta y} \end{cases} \quad (3.16)$$

La norme du potentiel-vecteur  $A_{z2}$  doit rester finie lorsque  $y \rightarrow -\infty$ . Ainsi,

$$G_2 = 0 \quad (3.17)$$

Les autres constantes sont déterminées à partir des équations de passage du champ magnétique.

Comme  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}_z$ , nous avons pour ① et ②

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z(x,y)}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

La continuité de la composante normale  $B_y \vec{e}_y$  du champ magnétique en  $y = 0$  s'écrit

$$\left( \frac{\partial A_{z1}(x,y)}{\partial x} \right)_{y=0} = \left( \frac{\partial A_{z2}(x,y)}{\partial x} \right)_{y=0} \quad (3.19)$$

soit

$$G_1 \left( \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{y=0} = G'_2 \left( \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} \right)_{y=0} \quad (3.20)$$

La discontinuité de la composante tangentielle  $B_x \vec{e}_x$  du champ magnétique en  $y = 0$  impose

$$\left( \frac{\partial A_{z1}(x,y)}{\partial y} \right)_{y=0} - \left( \frac{\partial A_{z2}(x,y)}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu_0 \left( \vec{j}_z \wedge \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_x \quad (3.21)$$

d'où

$$f_1(x) \left( \frac{\partial g_1(y)}{\partial y} \right)_{y=0} - f_2(x) \left( \frac{\partial g_2(y)}{\partial y} \right)_{y=0} = -\mu_0 \vec{j}_z \cdot \vec{e}_z \quad (3.22)$$

Comme  $\vec{j}_z = J_0 \sin(nkx) \vec{e}_z$ , nous avons

$$F_1 = F_2 = 0 \text{ et } \beta = nk$$

En développant (3.22), la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique impose

$$G_1 F'_1 + G'_2 F'_2 = \frac{\mu_0 J_0}{nk} \quad (3.23)$$

En utilisant (3.20), nous obtenons

$$G_1 F'_1 = G'_2 F'_2 \quad (3.24)$$

En tout point de l'espace, la solution pour le potentiel-vecteur  $\vec{A}_z(x,y)$  s'écrit :

– dans ①

$$\vec{A}_{z1}(x,y) = \frac{\mu_0 J_0}{2nk} \sin(nkx) e^{-nky} \vec{e}_z \quad (3.25)$$

– dans ②

$$\vec{A}_{z2}(x,y) = \frac{\mu_0 J_0}{2nk} \sin(nkx) e^{nky} \vec{e}_z \quad (3.26)$$

À partir de ce résultat, nous allons utiliser le théorème de superposition au 3.2.3 page 78 pour déterminer dans un premier temps le champ magnétique d'une configuration à deux nappes, et dans un second temps l'allure du champ de force créé. Notons que la continuité du potentiel-vecteur au niveau de la nappe de courant est vérifiée [43].

### 3.2.2.2 Expression du champ magnétique

Le champ magnétique créé est déterminé à partir de l'équation (3.18) page 73.

Dans ①, nous avons

$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 J_0}{2} \sin(nkx) e^{-nky} \\ -\frac{\mu_0 J_0}{2} \cos(nkx) e^{-nky} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

et dans ②

$$\vec{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 J_0}{2} \sin(n k x) e^{n k y} \\ -\frac{\mu_0 J_0}{2} \cos(n k x) e^{n k y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Les lignes de champ magnétique sont déterminées à partir de

$$\vec{B} \wedge d\vec{\ell} = \vec{0} \quad (3.29)$$

avec  $d\vec{\ell}$  un déplacement élémentaire.

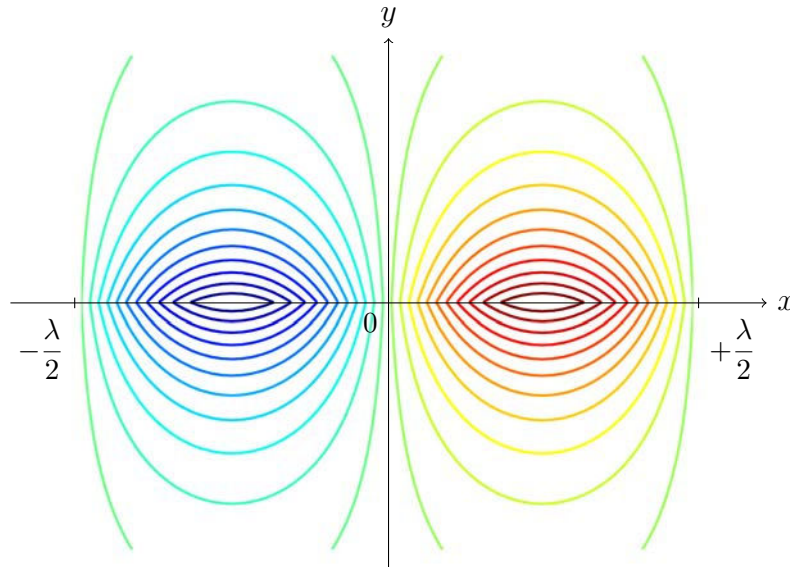
Dans notre cas, cette équation se résume à

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} dx + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy = 0 \quad (3.30)$$

Le terme de gauche correspond à la différentielle totale exacte de  $A_z$ . Les lignes de champ magnétique sont donc des isovaleurs de  $A_z$  en coordonnées cartésiennes d'après [59].

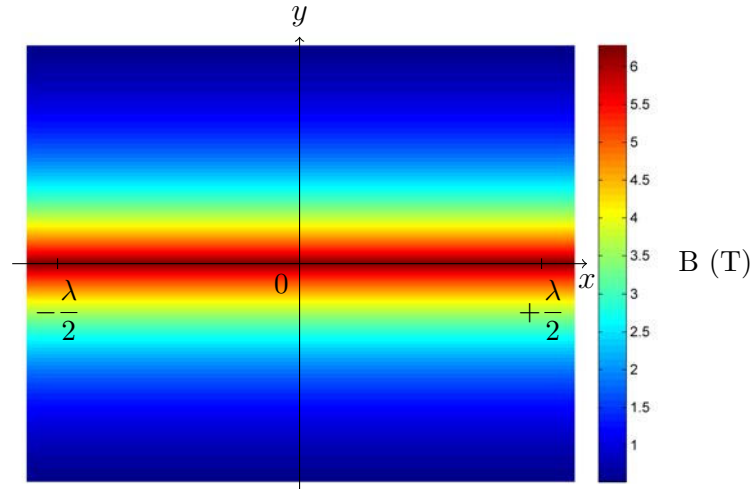
$$\text{lignes de champ magnétique} \Leftrightarrow dA_z = 0 \text{ soit } A_z = C^{\text{te}} \quad (3.31)$$

Dans le cas la nappe infinie de courant, les lignes de champ magnétique sont représentées sur la figure 3.3 page 75 pour une longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{n k}$ .



**Figure 3.3** Lignes de champ magnétique pour une nappe de courant infinie sur une longueur d'onde

D'après les expressions (3.27) et (3.28) pages 74 et 75 du champ magnétique, nous remarquons que la norme du champ magnétique ne dépend que de  $y$ . La carte de champ magnétique est représentée sur la figure 3.4 page 76 avec  $J_0 = 10^4$  A/mm.



**Figure 3.4** Carte de champ magnétique pour une nappe de courant infinie sur une longueur d'onde

### 3.2.2.3 Expression du champ de forces volumiques

Nous utilisons les formules établies au 2.3.3.1 page 58 pour déterminer le champ de forces volumiques créé par la distribution de courant.

En tout point de l'espace, nous avons

$$\vec{f}_{mv} = \frac{\chi}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x \partial_x B_x + B_y \partial_y B_x \\ B_x \partial_x B_y + B_y \partial_y B_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Le calcul des dérivées partielles conduit à l'expression suivante pour le champ de forces volumiques dans ①

$$\vec{f}_{mv1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 \chi}{4} n k J_0^2 e^{-2nk y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

et ②

$$\vec{f}_{mv2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu_0 \chi}{4} n k J_0^2 e^{2nk y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Les forces volumiques sont uniquement selon  $\vec{e}_y$  et ne dépendent que de  $y$ . Cette configuration serait donc particulièrement favorable à la lévitation magnétique d'une



nappe de fluide car le champ de force créé s'oppose à la gravité lorsque la nappe est horizontale et ne dépend pas de  $x$ . En fonction du signe de  $\chi$ , l'espace utile serait ① ou ②. Cependant, les ordres de grandeur des forces volumiques créées par ce dispositif sont inadaptées pour la lévitation magnétique. En prenant,

$$\chi = -10^{-6} \quad J_0 = 10^4 \text{ A/mm} \quad k = 1 \text{ m}^{-1} \quad n = 1$$

nous obtenons une force volumique maximale de l'ordre de  $30 \text{ N/m}^3$  très inférieure à la force volumique de pesanteur pour les liquides dia- ou paramagnétiques. Pour cet application, il serait intéressant de déterminer la longueur d'onde optimale qui permettrait d'augmenter la force volumique maximale. Un compromis est à trouver avec le terme décroissant exponentiel. Il faudrait tenir compte des contraintes liées à la cryogénie notamment qui ne permettent pas d'être à proximité de la nappe de courant lorsque des supraconducteurs sont utilisés.

### 3.2.2.4 Expression du tenseur des actions magnétiques

À partir de l'expressions du tenseur des actions magnétiques établie au 2.3.3.1 page 58 et de celle du champ magnétique créé par la distribution vue au 3.2.2.2 page 74, nous établissons l'expression du tenseur des actions magnétiques. La matrice associée au tenseur  $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$  s'écrit

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{T}}}, \left\{ \vec{e}_x, \vec{e}_y \right\} \right\} = \frac{\chi}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x^2 & B_x B_y \\ B_y B_x & B_y^2 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

soit, dans notre cas, pour ①

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{T}}}_1, \left\{ \vec{e}_x, \vec{e}_y \right\} \right\} = \frac{\mu_0 \chi}{8} J_0^2 e^{-2nk y} \begin{pmatrix} 2 \sin^2(nk x) & \sin(2nk x) \\ \sin(2nk x) & 2 \cos^2(nk x) \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

et pour ②

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{T}}}_2, \left\{ \vec{e}_x, \vec{e}_y \right\} \right\} = \frac{\mu_0 \chi}{8} J_0^2 e^{2nk y} \begin{pmatrix} 2 \sin^2(nk x) & -\sin(2nk x) \\ -\sin(2nk x) & 2 \cos^2(nk x) \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Nous nous intéressons au terme croisé  $T_{xy}$  de ces matrices

$$T_{xy} = -\frac{\mu_0 \chi}{8} J_0^2 e^{2nk y} \sin(2nk x) \quad (3.38)$$

qui est susceptible de générer des contraintes de cisaillement au sein d'un fluide.

La valeur maximale atteinte par  $|T_{xy}|$  est

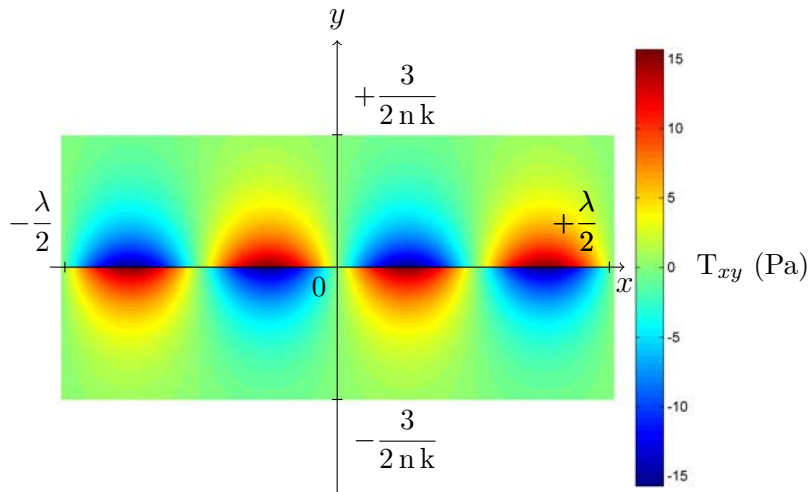
$$\frac{\mu_0 |\chi|}{8} J_0^2 \quad (3.39)$$

Son ordre de grandeur avec

$$\chi = -10^{-6} \quad J_0 = 10^4 \text{ A/mm}$$

est d'environ 15 Pa. Cette valeur est du même ordre de grandeur que la contrainte seuil de nombreux fluides notamment les mélanges eau-bentonite comme nous l'avons vu au 2.2.3.3 page 53.

La figure 3.5 page 78 représente la carte des valeurs du terme croisé  $T_{xy}$  du tenseur des actions magnétiques sur une longueur d'onde avec  $\chi = -10^{-6}$  et  $J_0 = 10^4$  A/mm. La zone d'action est limitée par la décroissance de  $e^{-2nk y}$ . Les valeurs de  $T_{xy}$  sont donc réduites à 5% de leur maximum lorsque  $y$  a atteint trois fois la longueur caractéristique  $\frac{1}{2nk}$ .



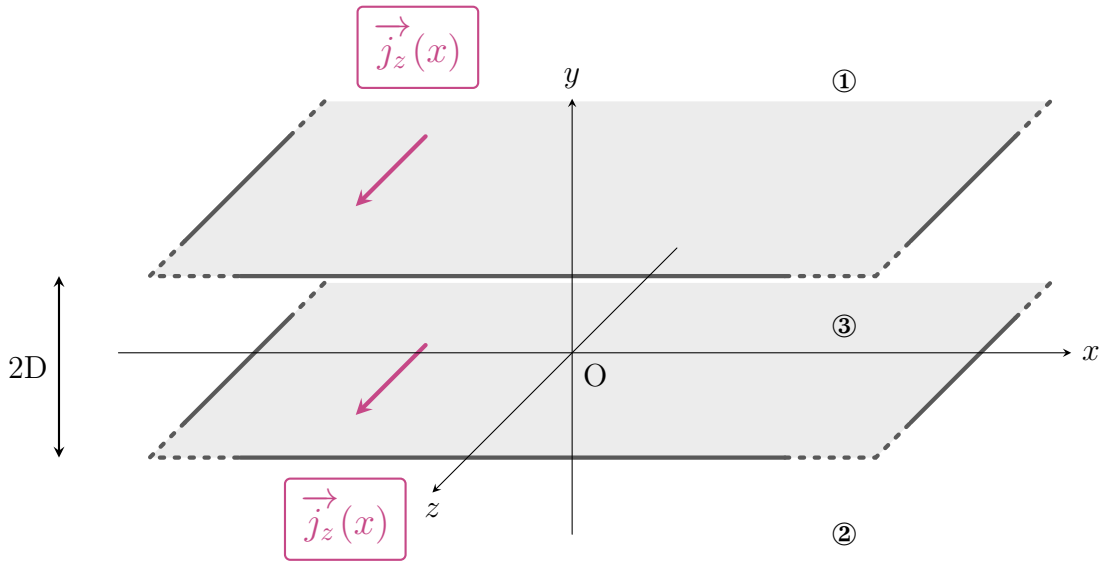
**Figure 3.5** Terme croisé  $T_{xy}$  du tenseur des actions magnétiques pour une nappe de courant infinie sur une longueur d'onde

### 3.2.3 Configuration à deux nappes parallèles infinies parcourues par la même densité de courant

Reprenons la configuration à deux nappes infinies correspondant à des surfaces d'équation  $y = \pm D$  et parcourues par des densités surfaciques de courant  $\vec{j}_{1z}$  et  $\vec{j}_{2z}$  comme représenté sur la figure 3.1 page 70.

Dans cette partie, afin de rendre le calcul analytique accessible, nous utilisons la même densité surfacique de courant pour les deux nappes  $\vec{j}_z$  illustré sur la figure 3.6 page 79. L'étude avec des harmoniques différents sur les deux nappes sera réalisée au chapitre 4 en simulation numérique sous COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>.

Nous allons appliquer le théorème de superposition à notre configuration pour déterminer le champ magnétique dans l'espace inter-nappes ③ entre les plans d'équations  $y = \pm D$ .



**Figure 3.6** Deux nappes de courant parallèles parcourues par la même densité surfacique de courant

Le potentiel-vecteur  $\vec{A}_z$  dans l'espace inter-nappes ③ est déterminé à partir des équations (3.25) et (3.26) page 74 en appliquant le principe de superposition (les équations de Maxwell sont linéaires).

$$\vec{A}_{z3}(x,y) = \vec{A}_{z1}(x,y + D) + \vec{A}_{z2}(x,y - D) \quad (3.40)$$

Nous obtenons

$$\vec{A}_{z3}(x,y) = \frac{\mu_0 J_0}{2nk} \sin(nkx) \left( e^{-nk(y+D)} + e^{nk(y-D)} \right) \vec{e}_z \quad (3.41)$$

soit

$$\vec{A}_{z3}(x,y) = \frac{\mu_0 J_0}{nk} e^{-nkD} \sin(nkx) \operatorname{ch}(nky) \vec{e}_z \quad (3.42)$$

Pour compléter l'étude, nous déterminons le potentiel-vecteur créé dans ① et ②

$$\vec{A}_{z1}(x,y) = \frac{\mu_0 J_0}{nk} e^{-nky} \sin(nkx) \operatorname{ch}(nkD) \vec{e}_z \quad (3.43)$$

et

$$\vec{A}_{z2}(x,y) = \frac{\mu_0 J_0}{nk} e^{nky} \sin(nkx) \operatorname{ch}(nkD) \vec{e}_z \quad (3.44)$$

### 3.2.3.1 Expression du champ magnétique

Le champ magnétique est déterminé à partir de l'équation (3.18) page 73.

Dans l'espace inter-nappes ③, nous avons

$$\vec{B}_3 = \begin{pmatrix} \mu_0 J_0 e^{-nkD} \sin(nkx) \operatorname{sh}(nky) \\ -\mu_0 J_0 e^{-nkD} \cos(nkx) \operatorname{ch}(nky) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Dans ①

$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} -\mu_0 J_0 e^{-nky} \sin(nkx) \operatorname{ch}(nkD) \\ -\mu_0 J_0 e^{-nky} \cos(nkx) \operatorname{ch}(nkD) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

et dans ②

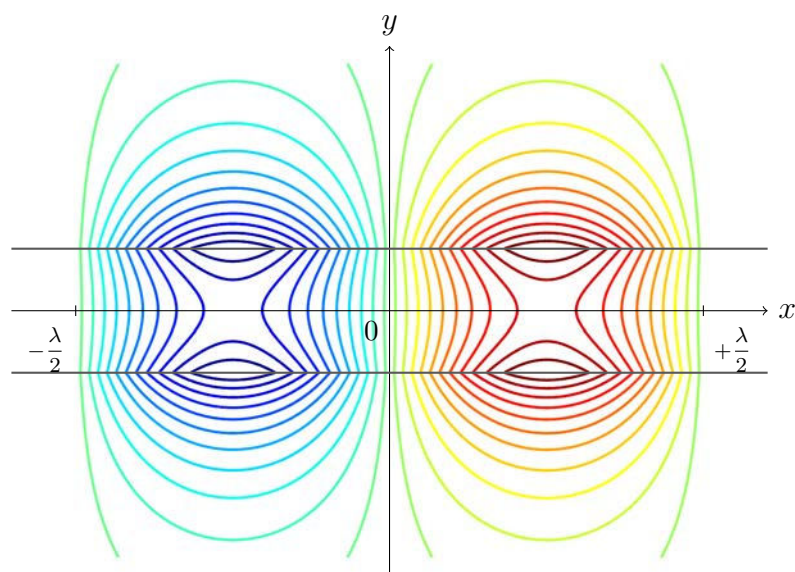
$$\vec{B}_2 = \begin{pmatrix} \mu_0 J_0 e^{nky} \sin(nkx) \operatorname{ch}(nkD) \\ -\mu_0 J_0 e^{nky} \cos(nkx) \operatorname{ch}(nkD) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Les figures 3.7 et 3.8 pages 81 et 81 représentent respectivement les lignes de champ magnétique et la carte de la norme du champ magnétique dans le cas suivant

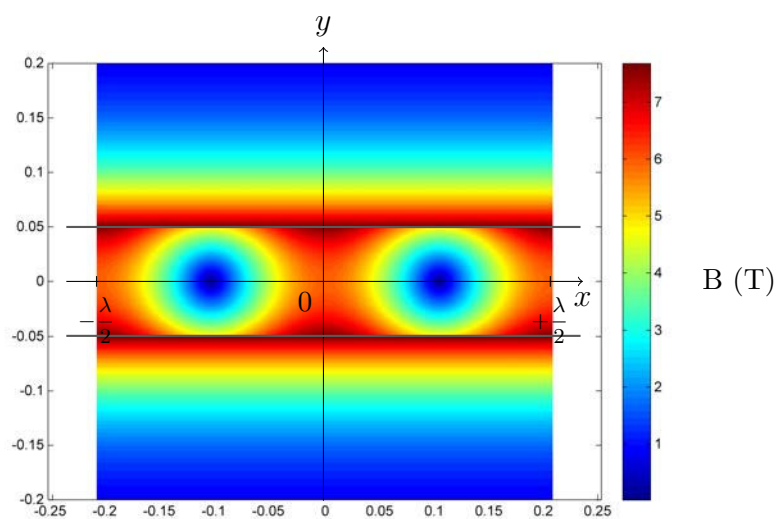
$$J_0 = 10^4 \text{ A/mm} \quad nk = 15 \text{ m}^{-1} \quad D = 5 \text{ cm}$$

Plusieurs points sont remarquables :

- le champ maximum atteint pour cette configuration est de 8 T à proximité des nappes de courant. Il est impensable de pouvoir placer le fluide à proximité de cette nappe compte tenu de la cryogénie nécessaire pour maintenir en froid la nappe composée de rubans ou de fils supraconducteurs. Il est nécessaire de prévoir plusieurs centimètres avant de placer l'écoulement de fluide ;
- le champ magnétique est obtenu avec une densité de courant et un champ sur fil correspondant aux performances actuelles d'un dispositif supraconducteur. Par exemple, un fil de niobium–titane supporte ces contraintes électriques et magnétiques avec une épaisseur d'environ 7 mm pour atteindre l'équivalent de  $J_0 = 10^4 \text{ A/mm}$ . Bien évidemment, une simulation numérique avec une épaisseur non nulle serait nécessaire pour concevoir un dispositif supraconducteur. Ce n'est pas notre objectif. Nous cherchons à dégager des tendances et à faire une première étude analytique. La conception serait une étape ultérieure ;
- il est imaginable de placer le fluide dans l'espace inter-nappe ③ ou bien à l'extérieur des deux nappes. Afin de choisir, il est nécessaire d'étudier le tenseur des actions magnétiques de cette configuration magnétique.



**Figure 3.7** Lignes de champ magnétique pour deux nappes de courant infinies sur une longueur d'onde



**Figure 3.8** Norme du champ magnétique pour deux nappes de courant infinies sur une longueur d'onde

### 3.2.3.2 Expression du champ de forces volumiques

Une fois l'expression du potentiel-vecteur établie, nous nous servons des formules établies au 2.3.3.1 page 58 pour déterminer le champ de forces volumiques créé par la distribution de courant.

En tout point de l'espace, nous avons

$$\vec{f}_{mv} = \frac{\chi}{\mu_0} \begin{pmatrix} \partial_y A_z \partial_{yx} A_z - \partial_x A_z \partial_{yy} A_z \\ -\partial_y A_z \partial_{xx} A_z + \partial_x A_z \partial_{xy} A_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Le calcul des dérivées partielles conduit à l'expression suivante pour le champ de forces volumiques dans ③

$$\vec{f}_{mv3} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 \chi}{2} n k J_0^2 e^{-2nkD} \sin(2nkx) \\ \frac{\mu_0 \chi}{2} n k J_0^2 e^{-2nkD} \operatorname{sh}(2nky) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Il est remarquable de noter que la composante selon  $\vec{e}_x$  ne dépend que de  $x$  et que la composante selon  $\vec{e}_y$  ne dépend que de  $y$ . De ce fait, nous vérifions que  $\vec{f}_{mv3}$  est à rotationnel nul comme le prévoyait l'équation (1.17) page 15.

Dans ①, nous avons

$$\vec{f}_{mv1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu_0 \chi n k J_0^2 e^{-2nky} \operatorname{ch}^2(nkD) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

et dans ②

$$\vec{f}_{mv2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 \chi n k J_0^2 e^{2nky} \operatorname{ch}^2(nkD) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Les lignes de champ de forces sont données par la résolution de l'équation

$$\vec{F} \wedge d\vec{\ell} = \vec{0} \quad (3.52)$$

Dans ① et ②, les lignes de champ de force sont des droites selon  $\vec{e}_y$  compte tenu des expressions (3.50) et (3.51) page 82. Cette configuration serait donc potentiellement pertinente pour la lévitation magnétique. Par rapport à la configuration à une nappe, l'intensité de la force a été multipliée par quatre. On pourrait donc proposer une configuration multinappes pour augmenter cette force et atteindre une force nécessaire pour la lévitation. De plus, il est envisageable d'augmenter le paramètre  $nk$ .

Dans l'espace inter-nappes ③, l'équation (3.52) page 82 conduit à

$$\frac{dy}{\text{sh}(2nk y)} = -\frac{dx}{\sin(2nk x)} \quad (3.53)$$

En intégrant, nous trouvons

$$\ln(\tanh(nk y)) = \ln(\tan(nk x)) + \xi \quad (3.54)$$

avec  $\xi$  une constante  $\in \mathbb{R}$ .

Déterminons à présent l'équation des lignes de champs de forces

$$\tanh(nk y) = \kappa \tan(nk x) \quad (3.55)$$

avec  $\kappa$  une constante  $\in \mathbb{R}^+$ . Nous en déduisons l'équation

$$y = \frac{\kappa}{nk} \text{Argth}(\tan(nk x)) \quad (3.56)$$

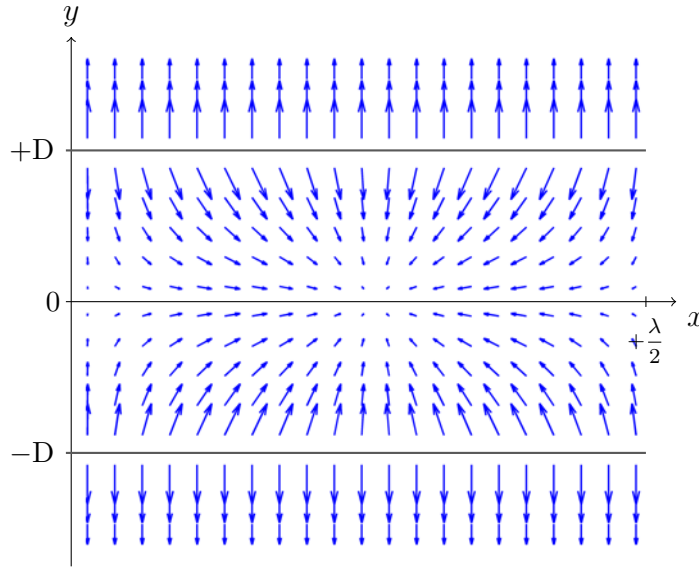
Comme

$$\text{Argth}(x) = 1/2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \forall x \quad (3.57)$$

nous obtenons l'équation des lignes de champ de forces

$$y = \frac{\kappa}{2nk} \ln\left(\frac{1 + \tan(nk x)}{1 - \tan(nk x)}\right) \quad \text{avec } \kappa \in \mathbb{R}^+ \quad (3.58)$$

L'allure du champ de forces volumiques est représentée sur la figure 3.9 page 84 avec  $\chi$  négatif. Nous avons limité la représentation à une demie longueur d'onde qui correspond à la périodicité du champ de forces. Nous observons dans l'espace supérieur la zone intéressante pour la lévitation avec des forces purement verticale et dont la norme est constante pour une valeur de  $y$  donnée. Dans l'espace inter-nappes, il existe des zones de champ nul en  $y = 0$  tous les quarts de longueur d'onde.



**Figure 3.9** Champ de forces volumiques pour deux nappes de courant infinies sur une demie longueur d'onde

### 3.2.3.3 Expression du tenseur des actions magnétiques

À partir de l'expression du tenseur des actions magnétiques établie au 2.3.3.1 page 58 et de celle du champ magnétique créé par la distribution vue au 3.2.3.1 page 79, nous pouvons donner l'expression analytique du tenseur des actions magnétiques. Dans notre cas, la matrice associée au tenseur  $\overline{\overline{\mathbb{T}}}$  s'écrit

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbb{T}}}, \left\{ \vec{e}_x, \vec{e}_y \right\} \right\} = \frac{\chi}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x^2 & B_x B_y \\ B_y B_x & B_y^2 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Son expression analytique est pour l'espace inter-nappes ③

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbb{T}}}_3, \left\{ \vec{e}_x, \vec{e}_y \right\} \right\} = \frac{\mu_0 \chi}{4} J_0^2 e^{-2nkD} \begin{pmatrix} 4 \sin^2(nkx) \text{sh}^2(nky) & -\sin(2nkx) \text{sh}(2nky) \\ -\sin(2nkx) \text{sh}(2nky) & 4 \cos^2(nkx) \text{ch}^2(nky) \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Pour ①, nous avons

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbb{T}}}_1, \left\{ \vec{e}_x, \vec{e}_y \right\} \right\} = \frac{\mu_0 \chi}{2} J_0^2 e^{-2nkD} \text{ch}^2(nkD) \begin{pmatrix} 2 \sin^2(nkx) & \sin(2nkx) \\ \sin(2nkx) & 2 \cos^2(nkx) \end{pmatrix} \quad (3.61)$$



et pour ②

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{T}}_2, \left\{ \vec{e}_x, \vec{e}_y \right\} \right\} = \frac{\mu_0 \chi}{2} J_0^2 e^{2nk y} \text{ch}^2(nk D) \begin{pmatrix} 2 \sin^2(nk x) & -\sin(2nk x) \\ -\sin(2nk x) & 2 \cos^2(nk x) \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Les termes sur la diagonale correspondent à des modifications de la pression au sein du fluide alors que les termes en dehors de la diagonale participent à un effort de cisaillement au sein du fluide. Les actions des forces magnétiques volumiques consistent donc en

- une augmentation ou une diminution locale la pression au sein du fluide ;
- la création d'une contrainte de cisaillement au sein du fluide.

Pour des fluides à seuil, une transition solide-gel sera possible si la contrainte seuil est dépassée. Cette condition s'écrit

- si le fluide est dans ③

$$\frac{\mu_0 |\chi|}{4} J_0^2 e^{-2nk D} |\sin(2nk x) \text{sh}(2nk y)| > \tau_c \quad (3.63)$$

- si le fluide est dans ① ou ②

$$\frac{\mu_0 |\chi|}{2} J_0^2 e^{-2nk y} |\sin(2nk x)| \text{ch}^2(nk D) > \tau_c \quad (3.64)$$

La figure 3.10 page 86 représente le terme croisé  $T_{xy}$  du tenseur des actions magnétiques dans le cas suivant

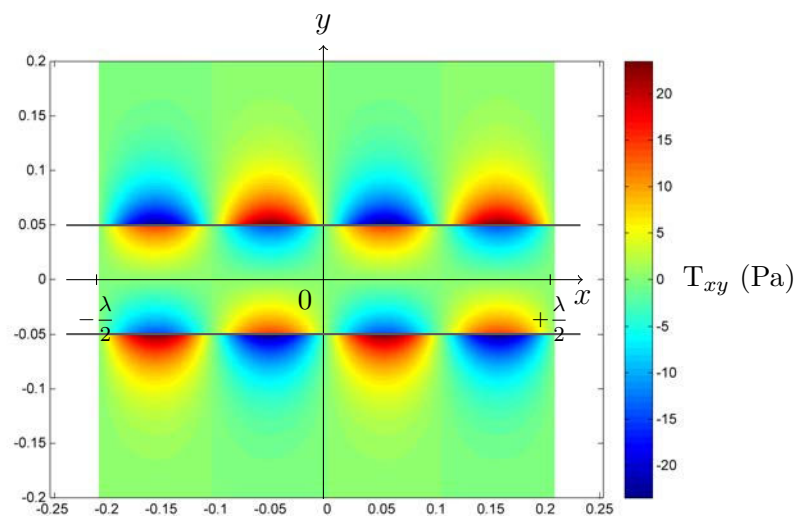
$$J_0 = 10^4 \text{ A/mm} \quad nk = 15 \text{ m}^{-1} \quad D = 5 \text{ cm} \quad \chi = -10^{-6}$$

Nous remarquons que les zones utiles sont situées de part et d'autre des nappes. Nous obtenons environ 10 Pa à quelques centimètres des nappes, ce qui est du même ordre de grandeur que les contraintes seuils de certains fluides à seuil vus au 2.2.3.3 page 53.

Le paramètre  $nk$  lié aux harmoniques d'espace va être déterminant pour définir la zone de travail utile. Nous allons donc mener une étude paramétrique afin de déterminer la configuration magnétique la mieux appropriée pour dépasser la contrainte seuil.

### 3.2.4 Étude paramétrique

Nous nous intéressons à l'étude paramétrique du tenseur des actions magnétiques lorsque les deux nappes de courant sont parcourues par la même densité de courant surfacique. L'expression analytique de la matrice associée au tenseur est donnée par les équations (3.60), (3.61) et (3.62) page 84.



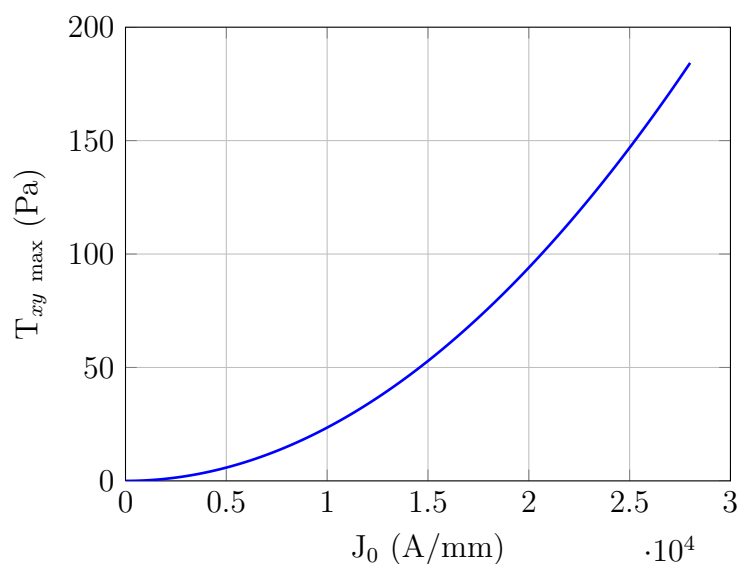
**Figure 3.10** Terme croisé  $T_{xy}$  du tenseur des actions magnétiques pour deux nappes de courant infinies sur une longueur d'onde

#### 3.2.4.1 Influence de $J_0$

Pour un jeu de paramètres donné

$$nk = 15 \text{ m}^{-1} \quad D = 5 \text{ cm} \quad \chi = -10^{-6}$$

nous observons sur la figure 3.11 page 86 l'augmentation du maximum du terme croisé  $T_{xy}$  du tenseur des actions magnétiques lorsque  $J_0$  augmente.



**Figure 3.11** Évolution du maximum du terme croisé  $T_{xy}$  du tenseur des actions magnétiques

Notons que le maximum se situe toujours dans ① ou ② en  $y = \pm D$ . Il serait donc inaccessible expérimentalement si l'on envisage un dispositif supraconducteur. Cependant la décroissance de  $|T_{xy}|$  étant identique en fonction de  $J_0$  à  $nk$  et  $D$  fixé, la tendance reste la même pour le maximum « utile » situé à quelques centimètres de la plaque.

### 3.2.4.2 Influence de $D$

Avec

$$nk = 15 \text{ m}^{-1} \quad J_0 = 10^4 \text{ A/mm} \quad \chi = -10^{-6}$$

nous avons représenté l'évolution du terme croisé  $T_{xy}$  du tenseur des actions magnétiques pour six configurations et sur une demie longueur d'onde pour des raisons de symétrie. Nous distinguons sur la figure 3.12 page 88 trois étapes dans l'évolution de  $T_{xy}$  lorsque  $D$  augmente

- dans un premier temps, aux faibles valeurs de  $D$ , l'influence entre les plaques est totale et  $T_{xy}$  est présent dans ① et ② uniquement. La valeur maximale atteinte au niveau de la nappe de courant est de 40 Pa ;
- lorsque  $D$  augmente,  $T_{xy}$  apparaît progressivement dans la zone inter-nappes ;
- enfin, lorsque  $D > 7$  cm, il n'y a plus d'interaction entre les nappes et  $T_{xy}$  est présent de façon antisymétrique de part et d'autre des nappes. La valeur maximale atteinte au niveau de la nappe de courant n'est plus que de 15 Pa.

### 3.2.4.3 Influence de $nk$

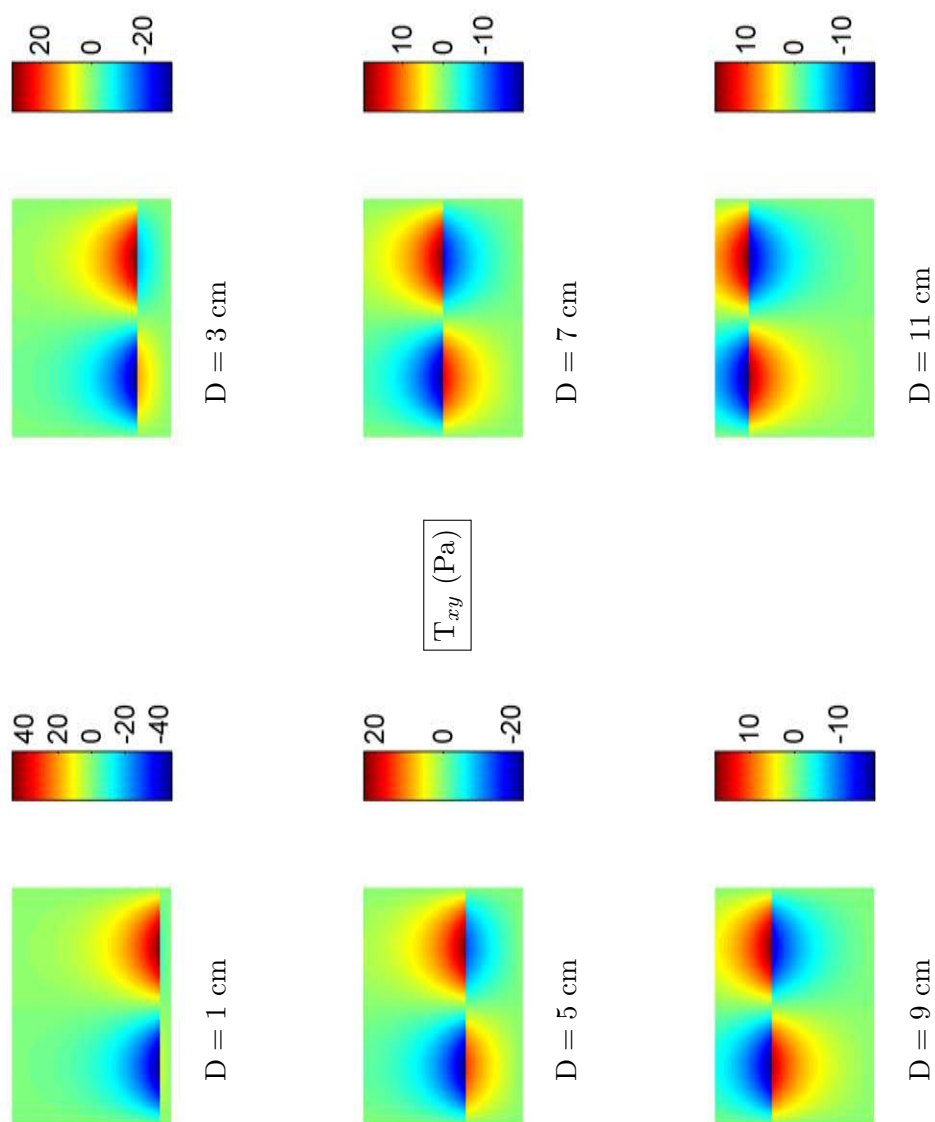
Nous avons représenté sur la figure 3.13 page 89 l'évolution du terme croisé  $T_{xy}$  du tenseur des actions magnétiques. Il est tracé pour six valeurs du produit  $nk$  sur une demie longueur d'onde et entre  $y = 0$  et  $y = 4D$  pour des raisons de symétrie. Nous avons fixé  $J_0 = 10^4$  A/mm,  $D = 5$  cm et  $\chi = -10^{-6}$ . Nous constatons que

- pour les faibles valeurs de  $nk$  les contraintes se situent quasi exclusivement dans ① et ② et la zone « utile » s'étend jusqu'à  $4D$  avec une valeur maximale de 40 Pa ;
- lorsque  $nk$  augmente,  $T_{xy}$  apparaît dans l'espace inter-nappes. À partir de  $nk = 30 \text{ m}^{-1}$ ,  $T_{xy}$  est présent de façon antisymétrique de part et d'autre des nappes de courant. Le maximum a diminué à environ 15 Pa et la zone « utile » s'étend sur  $D/2$  de part et d'autre des nappes.

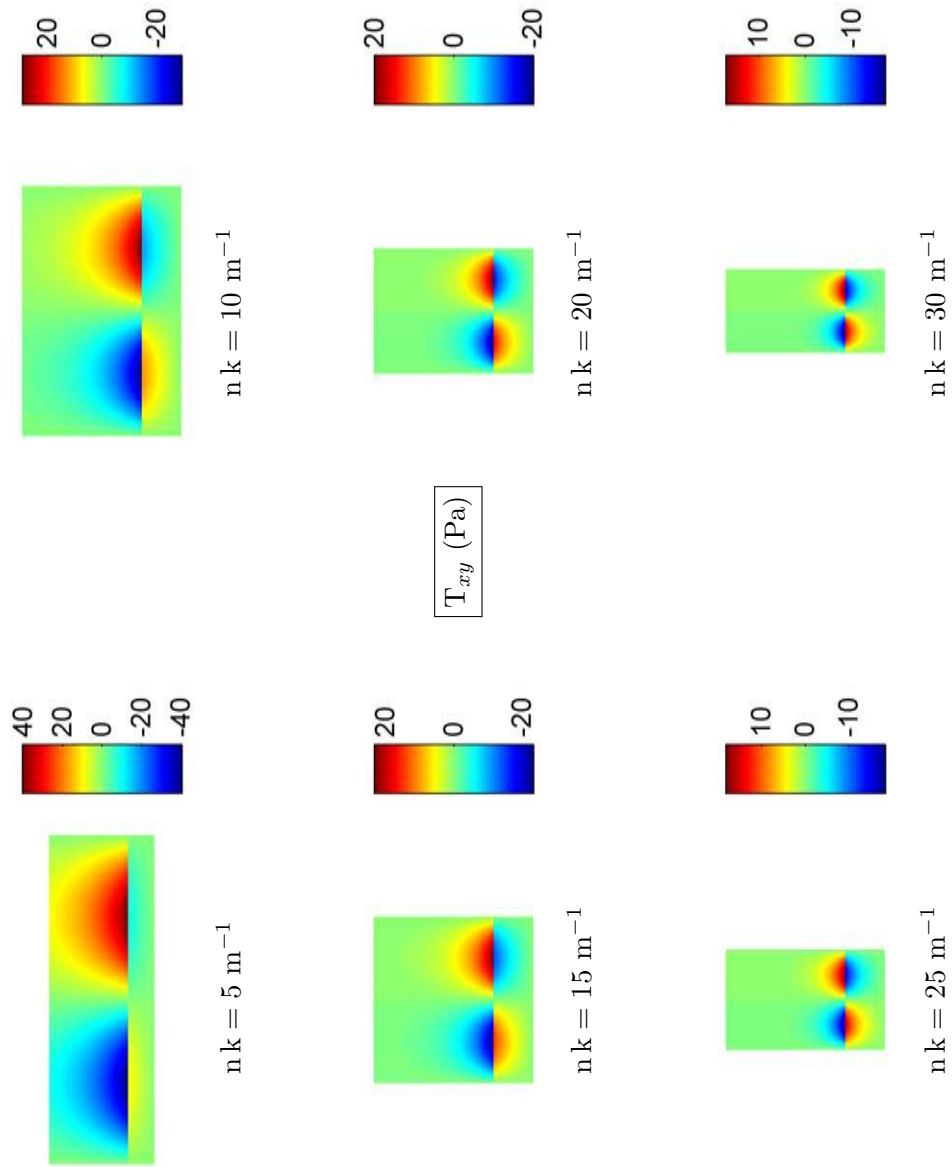
### 3.2.4.4 Synthèse

Nous pouvons conclure sur l'utilisation de deux plaques infinies parcourues par la même densité de courant pour engendrer des contraintes de cisaillement sur un fluide. Plusieurs points sont remarquables et les conclusions diffèrent selon que le fluide est à l'extérieur ou à l'intérieur des nappes :

- il est essentiel dans tous les cas d'avoir  $J_0$  le plus grand possible ;



**Figure 3.12** Étude paramétrique du terme croisé  $T_{xy}$  du tenseur des actions magnétiques pour deux nappes infinies sur une demie longueur d'onde pour différentes valeurs de  $D$  entre  $y = 0$  et  $y = 14$  cm



**Figure 3.13** Étude paramétrique en fonction de  $nk$  du terme croisé  $T_{xy}$  du tenseur des actions magnétiques pour deux nappes infinies sur une demie longueur d'onde entre  $y = 0$  et  $y = 4D$

- si le fluide circule à l’extérieur de la nappe, il est plus intéressant d’avoir  $D$  le plus petit possible et  $nk$  faible ;
- si le fluide circule dans l’espace inter-nappes, il faut trouver un compromis entre  $D$  et  $nk$  pour obtenir la valeur la plus grande possible de  $T_{xy}$  dans une zone la plus grande possible.

Le maximum de  $T_{xy}$  se situe toujours à proximité des nappes dans ① et ②. Lorsque les plaques sont suffisamment éloignées ( $D > 7$  cm dans notre cas), le maximum est situé de part et d’autre des nappes. Même si ce maximum n’est pas dans une zone accessible expérimentalement (présence de la cryogénie par exemple), nous pouvons prévoir son évolution. Son expression est déterminée à partir des équations (3.60), (3.61) et (3.62) page 84

- dans ③

$$T_{xy \text{ max3}} = \frac{\mu_0 |\chi|}{8} J_0^2 \left(1 - e^{-4nkD}\right) \quad (3.65)$$

- dans ① ou ②

$$T_{xy \text{ max12}} = \frac{\mu_0 |\chi|}{8} J_0^2 \left(1 + 2e^{-2nkD} + e^{-4nkD}\right) \quad (3.66)$$

La figure 3.14 page 91 représente l’évolution de  $T_{xy \text{ max12}}$  et  $T_{xy \text{ max3}}$  en fonction du produit  $nk$  pour  $D = 5$  cm. Selon que l’on place le fluide dans l’espace inter-nappes ou à l’extérieur, le choix de  $nk$  sera nettement différent. Il faut associer à cette figure l’évolution de la zone utile de  $T_{xy}$  qui est un critère essentiel dans le choix de la configuration magnétique. Nous ne cherchons pas uniquement une valeur maximale de  $T_{xy}$ . Notons que le rôle de  $nk$  et  $D$  est similaire dans l’évolution des maxima et que l’étude à  $nk$  fixé en fonction de  $D$  donnerait des courbes aux allures identiques.

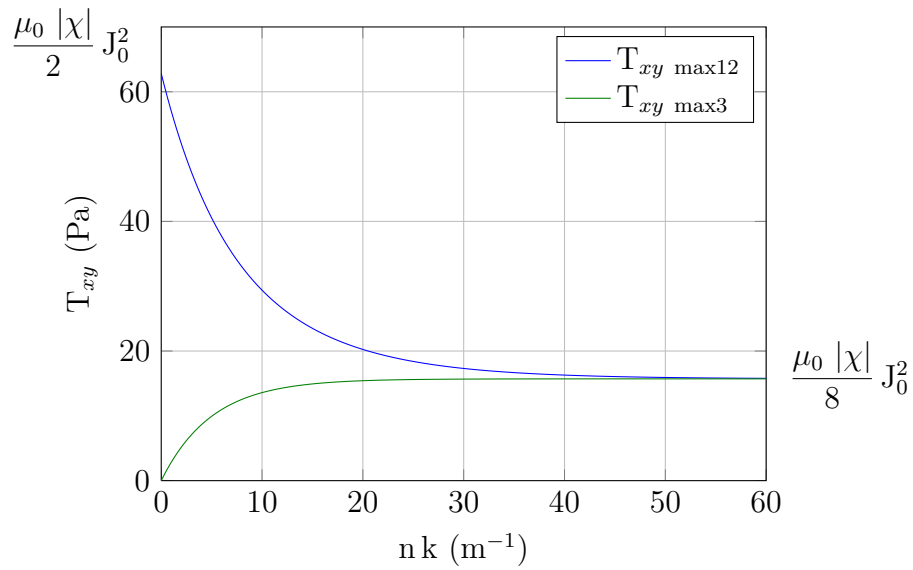
## 3.3 Solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale

### 3.3.1 Présentation de la configuration choisie

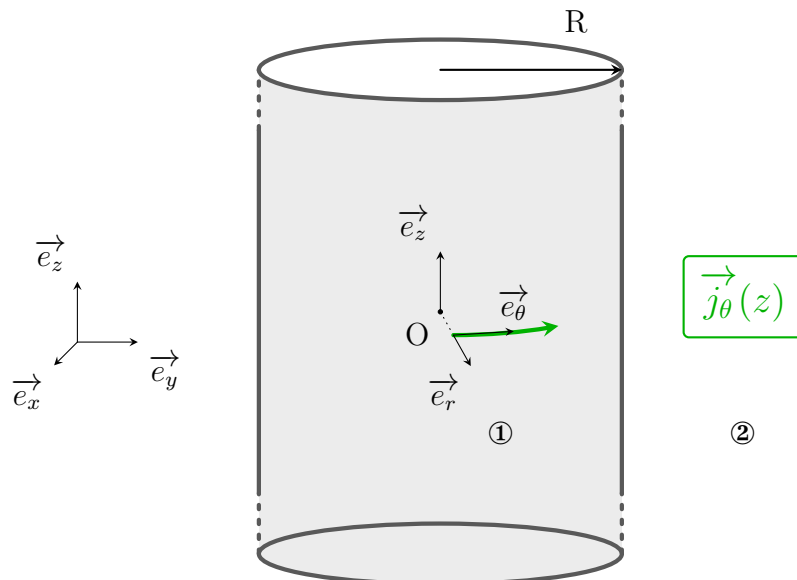
Dans un repère cylindrique  $\{O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ , nous étudions le solénoïde infini représenté sur la figure 3.15 page 91, infiniment mince et parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale  $\vec{j}_\theta(z)$ . Ce solénoïde est de rayon  $R$  et la densité de courant surfacique est de la forme

$$\vec{j}_\theta(z) = J_0 \sin(kz) \vec{e}_\theta \quad (3.67)$$

Le problème est invariant par rotation autour de  $\vec{e}_z$ . Les grandeurs magnétiques et mécaniques ne dépendront donc que de  $r$  et  $z$ . Tout plan contenant  $\vec{e}_z$  et  $\vec{e}_r$  est un plan d’antisymétrie. Le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  est perpendiculaire aux plans d’antisymétries et sera donc selon  $\vec{e}_\theta$  uniquement. Nous le noterons  $\vec{A}_\theta$ . Le champ magnétique appartient aux plans d’antisymétries et aura par conséquent des composantes selon  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_z$ .



**Figure 3.14** Évolution des maxima du terme croisé  $T_{xy}$  du tenseur des actions magnétiques en fonction de  $nk$  à  $D$  fixé



**Figure 3.15** Solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale

Cette configuration fait intervenir deux variables d'espace  $r$  et  $z$  et trois paramètres : le rayon du solénoïde  $R$ , la valeur maximale de la densité de courant  $J_0$  et la longueur d'onde  $k$ .

L'intérieur du solénoïde est noté ① et l'extérieur ②.

Cette structure correspond à la configuration magnétique d'un moteur linéaire tubulaire.

#### 3.3.2 Potentiel-vecteur créé par le solénoïde

D'après l'étude préliminaire des symétries et des invariances, nous avons

$$\vec{A}_\theta = A_\theta(r, z) \vec{e}_\theta \quad (3.68)$$

et l'équation à résoudre en tout point des espaces ① et ② est celle vue au 2.3.2 page 57

$$\vec{\Delta} \vec{A}_\theta = \vec{0} \quad (3.69)$$

En coordonnées cylindriques, comme le potentiel vecteur ne dépend que de  $r$  et  $z$ , nous obtenons pour son unique composante selon  $\vec{e}_\theta$

$$\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{A_\theta}{r^2} = 0 \quad (3.70)$$

Comme  $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}_\theta$ , nous avons dans ① et ②

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Nous noterons

$$\vec{A}_{\theta 1}(r, z) = A_{\theta 1}(r, z) \vec{e}_\theta \text{ le potentiel-vecteur dans ①,}$$

$$\vec{A}_{\theta 2}(r, z) = A_{\theta 2}(r, z) \vec{e}_\theta \text{ le potentiel-vecteur dans ②.}$$

Nous noterons  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  les champs magnétiques respectivement dans ① et dans ②.

Intéressons-nous aux relations de passage. La continuité de la composante normale du champ magnétique en  $r = R$  s'écrit

$$\left( \frac{\partial A_{\theta 1}}{\partial z} \right)_{r=R} = \left( \frac{\partial A_{\theta 2}}{\partial z} \right)_{r=R} \quad (3.72)$$



La discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique en  $r = R$  impose

$$\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) \cdot \vec{e}_z = \mu_0 J_0 \sin(kz) \quad (3.73)$$

soit

$$\frac{A_{\theta 1}}{R} + \left(\frac{\partial A_{\theta 1}}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{A_{\theta 2}}{R} + \left(\frac{\partial A_{\theta 2}}{\partial r}\right)_{r=R} + \mu_0 J_0 \sin(kz) \quad (3.74)$$

Les conditions aux limites imposent pour la norme du potentiel-vecteur de rester finie lorsque  $r$  tend vers 0 et nous choisissons un potentiel-vecteur nul lorsque  $r$  tend vers l'infini.

La résolution se fait en passant à la notation complexe. Nous cherchons un potentiel-vecteur de la forme

$$\vec{A}_{\theta 1} = A_1(r) \sin(kz) \vec{e}_\theta \text{ dans } \textcircled{1},$$

$$\vec{A}_{\theta 2} = A_2(r) \sin(kz) \vec{e}_\theta \text{ dans } \textcircled{2}.$$

Nous posons donc les fonctions complexes

$$\underline{A}_{\theta 1} = \underline{A}_1 e^{jkz} \vec{e}_\theta \quad (3.75)$$

$$\underline{A}_{\theta 2} = \underline{A}_2 e^{jkz} \vec{e}_\theta \quad (3.76)$$

Nous avons ainsi

$$\vec{A}_{\theta 1} = \text{Im} \left( \underline{A}_{\theta 1} \right) \quad (3.77)$$

$$\vec{A}_{\theta 2} = \text{Im} \left( \underline{A}_{\theta 2} \right) \quad (3.78)$$

L'équation (3.70) page 92 s'écrit dans  $\textcircled{1}$

$$r^2 \frac{d^2 \underline{A}_1}{dr^2} + r \frac{d \underline{A}_1}{dr} - (1 + k^2 r^2) \underline{A}_1 = 0 \quad (3.79)$$

et de même dans  $\textcircled{2}$

$$r^2 \frac{d^2 \underline{A}_2}{dr^2} + r \frac{d \underline{A}_2}{dr} - (1 + k^2 r^2) \underline{A}_2 = 0 \quad (3.80)$$

Ces équations sont des équations de Bessel modifiées d'ordre 1 [60]. Elles admettent comme solution

$$\underline{A}_1 = \beta I_1(kr) + \gamma K_1(kr) \quad (3.81)$$

$$\underline{A}_2 = \alpha I_1(kr) + \delta K_1(kr) \quad (3.82)$$

### 3. CONFIGURATIONS MAGNÉTIQUES ET ACTIONS MÉCANIQUES

---

avec  $I_1$  la fonction de Bessel de 1<sup>re</sup> espèce modifiée d'ordre 1 et  $K_1$  la fonction de Bessel de 2<sup>e</sup> espèce modifiée d'ordre 1.  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  et  $\delta$  sont des constantes d'intégration.

Les propriétés suivantes des fonctions de Bessel modifiées aux limites sont

$$\lim_{r \rightarrow 0} K_1(k r) = +\infty \quad (3.83)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} I_1(k r) = +\infty \quad (3.84)$$

Compte tenu du comportement aux limites du potentiel-vecteur, cela permet de déterminer que

$$\gamma = 0 \quad (3.85)$$

$$\alpha = 0 \quad (3.86)$$

Les conditions de passage s'écrivent

$$\underline{A}_1(R) = \underline{A}_2(R) \quad (3.87)$$

$$\frac{\underline{A}_1}{R} + \left( \frac{d\underline{A}_1}{dr} \right)_{r=R} = \frac{\underline{A}_2}{R} + \left( \frac{d\underline{A}_2}{dr} \right)_{r=R} + \mu_0 J_0 \quad (3.88)$$

Après calcul et en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel modifiées [60, 61], nous obtenons les expressions des constantes d'intégration

$$\beta = \frac{C}{k} K_1(k R) \quad (3.89)$$

$$\delta = \frac{C}{k} I_1(k R) \quad (3.90)$$

avec  $C$  une constante

$$C = \frac{\mu_0 J_0}{I_0(k R) K_1(k R) + I_1(k R) K_0(k R)} \quad (3.91)$$

où  $I_0$  et  $K_0$  sont respectivement la fonction de Bessel de 1<sup>re</sup> espèce modifiée d'ordre 0 et la fonction de Bessel de 2<sup>e</sup> espèce modifiée d'ordre 0.

Les expressions des potentiels-vecteur complexes sont donc

$$\underline{A}_1 = \frac{C}{k} K_1(k R) I_1(k r) \quad (3.92)$$

$$\underline{A}_2 = \frac{C}{k} I_1(k R) K_1(k r) \quad (3.93)$$

Nous obtenons ainsi dans ① et ②

$$\vec{A}_{\theta 1} = \frac{C}{k} K_1(k R) I_1(k r) \sin(k z) \vec{e}_\theta \quad (3.94)$$

$$\vec{A}_{\theta 2} = \frac{C}{k} I_1(k R) K_1(k r) \sin(k z) \vec{e}_\theta \quad (3.95)$$

Le champ magnétique  $\vec{B}_1$  à l'intérieur du solénoïde a donc pour expression

$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} -C K_1(k R) I_1(k r) \cos(k z) \\ 0 \\ C K_1(k R) I_0(k r) \sin(k z) \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

et à l'extérieur

$$\vec{B}_2 = \begin{pmatrix} -C I_1(k R) K_1(k r) \cos(k z) \\ 0 \\ -C I_1(k R) K_0(k r) \sin(k z) \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

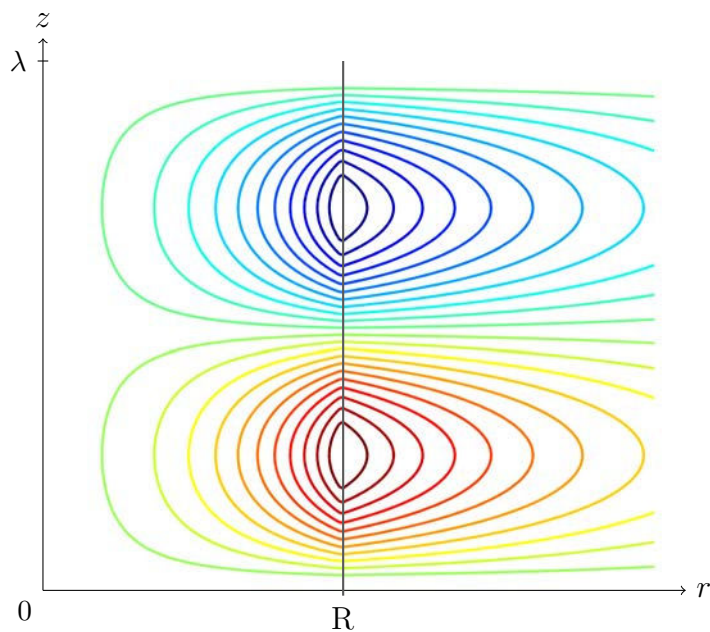
Les figures 3.16 et 3.17 page 96 représentent respectivement les lignes de champ magnétique (isovaleurs de  $r A_\theta$  d'après [59]) et la carte de la norme du champ magnétique dans le cas suivant

$$J_0 = 10^4 \text{ A/mm} \quad k = 15 \text{ m}^{-1} \quad R = 10 \text{ cm}$$

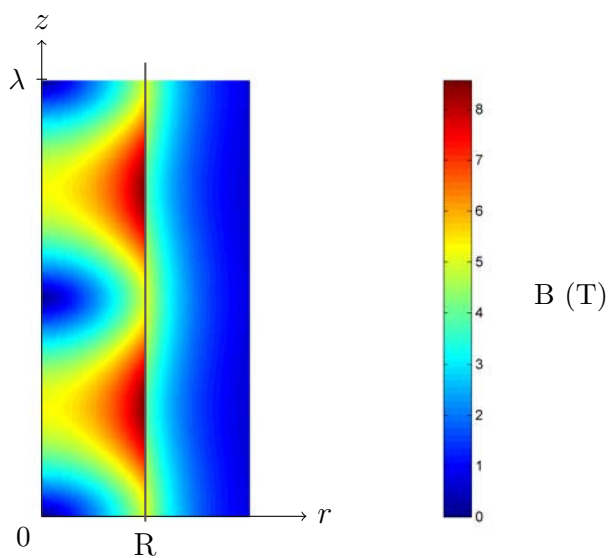
### 3.3.3 Champ de force et tenseur des actions magnétiques

À partir des expressions du champ magnétique, nous calculons les forces magnétiques volumiques. Dans ①, nous obtenons

$$\vec{f}_{\text{mv}1} = \begin{pmatrix} \frac{\chi}{\mu_0} C^2 I_1(k r) K_1(k R)^2 \left( k I_0(k r) - \frac{\cos^2(k z) I_1(k r)}{r} \right) \\ 0 \\ \frac{\chi}{2 \mu_0} C^2 k \sin(2 k z) K_1(k R)^2 (I_0(k r)^2 - I_1(k r)^2) \end{pmatrix} \quad (3.98)$$



**Figure 3.16** Lignes de champ magnétique pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale sur une longueur d'onde

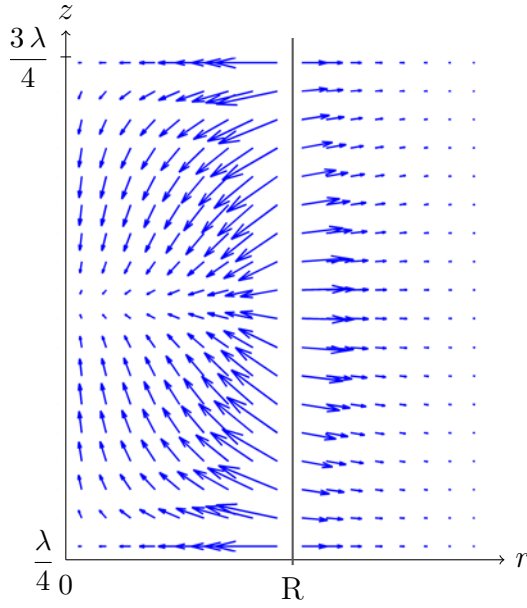


**Figure 3.17** Norme du champ magnétique pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale sur une longueur d'onde

et dans ②

$$\vec{f}_{mv2} = \begin{pmatrix} -\frac{\chi}{\mu_0} C^2 K_1(kr) I_1(kR)^2 \left( k K_0(kr) + \frac{\cos^2(kz) K_1(kr)}{r} \right) \\ 0 \\ \frac{\chi}{2\mu_0} C^2 \sin(2kz) k I_1(kR)^2 (K_0(kr)^2 - K_1(kr)^2) \end{pmatrix} \quad (3.99)$$

Le champ de force volumique est représenté sur la figure 3.18 page 97 pour  $\chi$  négatif. Compte tenu de sa périodicité, il est représenté sur une demie longueur d'onde.



**Figure 3.18** Champ de forces volumiques créé par un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale sur une demie longueur d'onde

Le tenseur des actions magnétiques est déterminé à partir de l'expression (2.74) page 60. Dans ①, nous obtenons

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{T}}_1, \{ \vec{e}_r, \vec{e}_z \} \right\} = \frac{\chi C^2 K_1(kR)^2}{2\mu_0} \begin{pmatrix} 2 I_1(kr)^2 \cos^2(kz) & -I_1(kr) I_0(kr) \sin(2kz) \\ -I_1(kr) I_0(kr) \sin(2kz) & 2 I_0(kr)^2 \sin^2(kz) \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

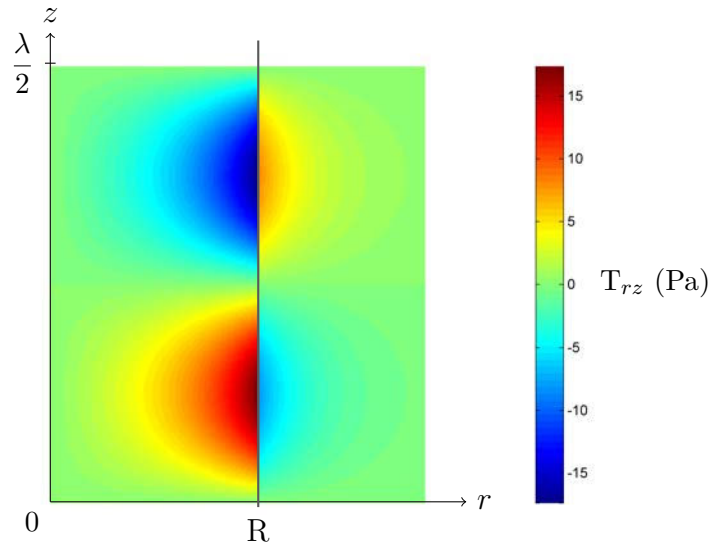
et dans ②

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{T}}_2, \{ \vec{e}_r, \vec{e}_z \} \right\} = \frac{\chi C^2 I_1(kR)^2}{2\mu_0} \begin{pmatrix} 2 K_1(kr)^2 \cos^2(kz) & K_1(kr) K_0(kr) \sin(2kz) \\ K_1(kr) K_0(kr) \sin(2kz) & 2 K_0(kr)^2 \sin^2(kz) \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

La figure 3.19 page 98 représente le terme croisé  $T_{rz}$  du tenseur des actions magnétiques dans le cas suivant

$$J_0 = 10^4 \text{ A/mm} \quad k = 15 \text{ m}^{-1} \quad R = 10 \text{ cm} \quad \chi = -10^{-6}$$

Nous remarquons que les zones utiles sont situées de part et d'autre du solénoïde. Nous obtenons environ 10 Pa à quelques centimètres du solénoïde, ce qui est du même ordre de grandeur que les contraintes seuils de certains fluides à seuil vus au 2.2.3.3 page 53.



**Figure 3.19** Terme croisé  $T_{rz}$  du tenseur des actions magnétiques pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale sur une demie longueur d'onde

### 3.3.4 Étude paramétrique

#### 3.3.4.1 Influence de $J_0$

Les forces volumiques magnétiques ainsi que tous les termes de la matrice associée au tenseur des actions magnétiques sont proportionnels à  $C^2$  donc à  $J_0^2$ . Pour un jeu de paramètres donné

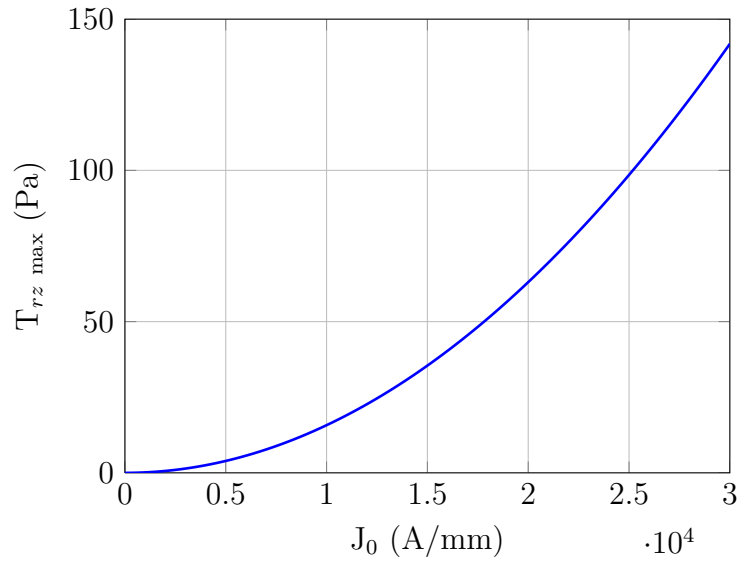
$$k = 15 \text{ m}^{-1} \quad R = 10 \text{ cm} \quad \chi = -10^{-6}$$

nous observons sur la figure 3.20 page 99 l'augmentation du maximum du terme croisé  $T_{rz}$  du tenseur des actions magnétiques en fonction de  $J_0$ . Le maximum se situe à l'intérieur du solénoïde comme nous le verrons au 3.3.4.2 page 98.

#### 3.3.4.2 Influence de $R$

Avec

$$k = 15 \text{ m}^{-1} \quad J_0 = 10^4 \text{ A/mm} \quad \chi = -10^{-6}$$



**Figure 3.20** Évolution du maximum du terme croisé  $T_{rz}$  du tenseur des actions magnétiques en fonction de  $J_0$

nous avons représenté l'évolution du terme croisé  $T_{rz}$  du tenseur des actions magnétiques pour six configurations et sur une demie longueur d'onde pour des raisons de symétrie. Nous distinguons sur la figure 3.21 page 100 deux étapes dans l'évolution de  $T_{rz}$  lorsque  $R$  augmente

- aux faibles valeurs de  $R$ ,  $T_{rz}$  est principalement à l'intérieur du solénoïde ;
- avec l'augmentation de  $R$ ,  $T_{rz}$  est présent de part et d'autre de la densité de courant surfacique.

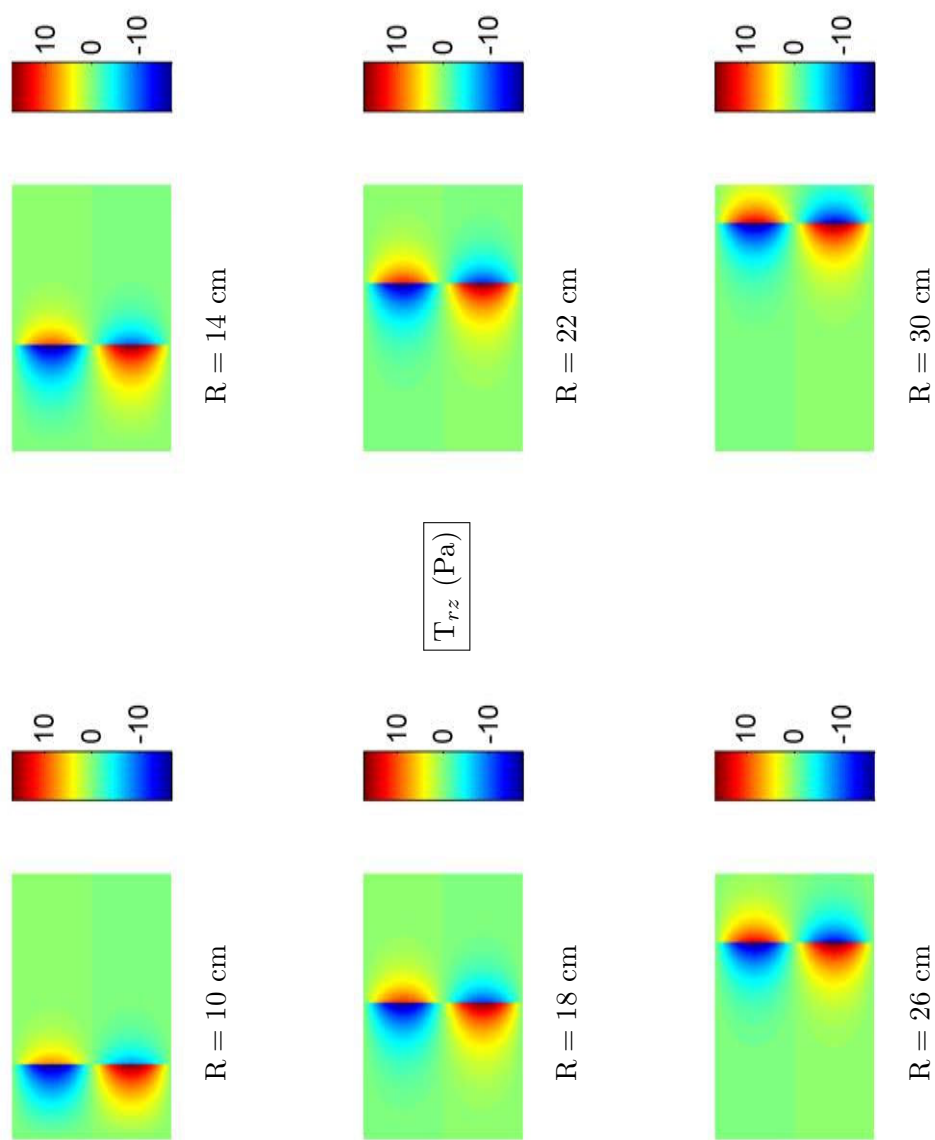
Il est remarquable de noter sur la figure 3.22 page 101 que le maximum de  $T_{rz}$  passe par un maximum. Nous verrons que  $k$  et  $R$  ont des rôles identiques dans l'expression du maximum de  $T_{rz}$  au 3.3.4.4 page 101.

### 3.3.4.3 Influence de $k$

Lorsque  $R = 13$  cm,  $J_0 = 10^4$  A/mm et  $\chi = -10^{-6}$  sont fixés, nous nous intéressons à l'évolution de  $T_{rz}$  en fonction de  $k$  sur la figure 3.23 page 102.

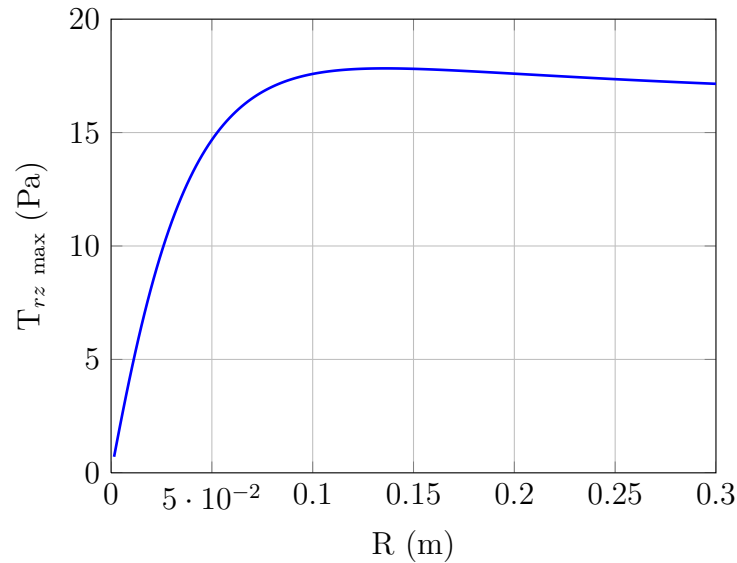
Aux faibles valeurs de  $k$ ,  $T_{rz}$  est présent uniquement à l'intérieur du solénoïde. Lorsque  $k$  augmente,  $T_{rz}$  est présent de part et d'autre de la densité de courant. Le maximum de  $T_{rz}$  passe par un maximum. L'étude est identique à celle menée sur l'influence de  $R$  car le rôle de  $k$  et  $R$  est identique pour le maximum de  $T_{rz}$ . En effet, son expression est

$$T_{rz \max} = \frac{|\chi|}{2\mu_0} C^2 K_1(kR)^2 I_1(kR) I_0(kR) \quad (3.102)$$



**Figure 3.21** Étude paramétrique du terme croisé  $T_{rz}$  du tenseur des actions magnétiques pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale sur une demie longueur d’onde pour différentes valeurs de  $R$





**Figure 3.22** Évolution du maximum du terme croisé  $T_{rz}$  du tenseur des actions magnétiques en fonction du rayon  $R$  du solénoïde

et en remplaçant  $C$  par son expression 3.91 page 94, nous obtenons

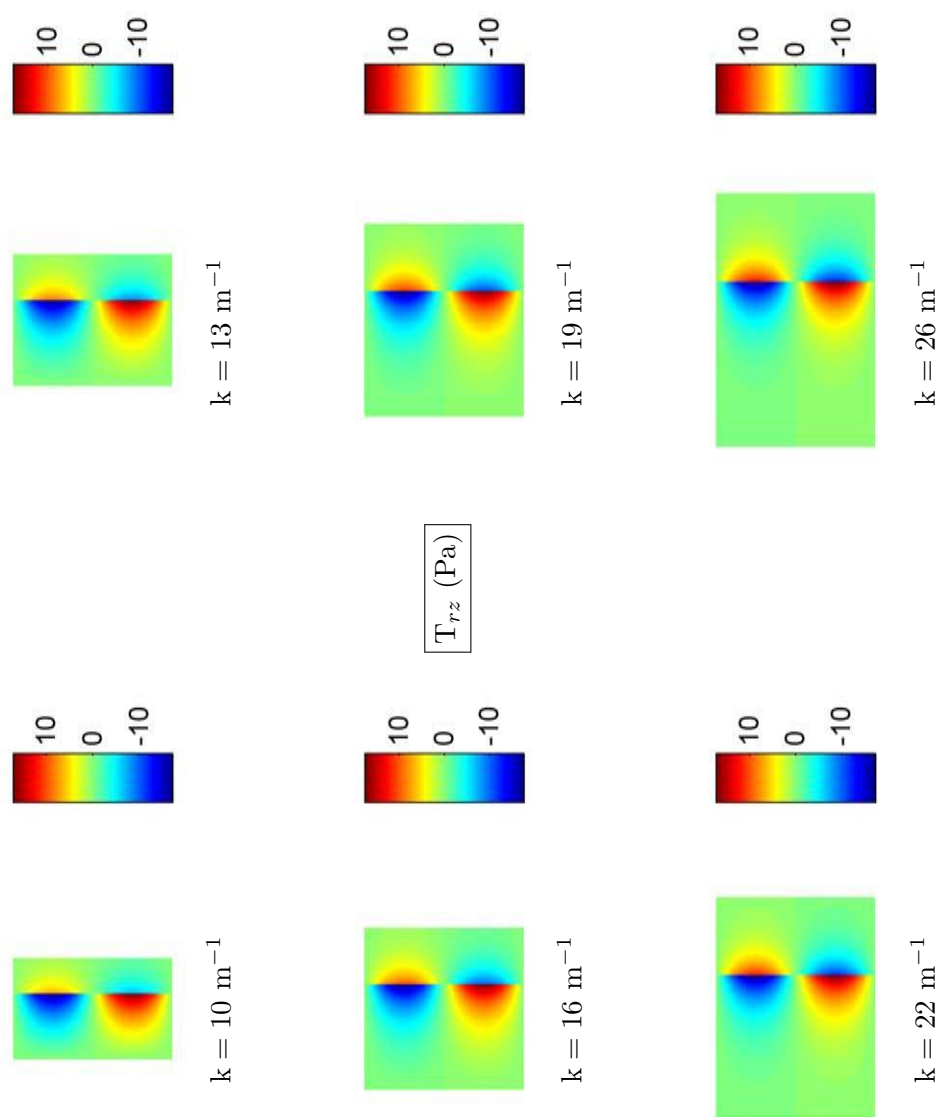
$$T_{rz \max} = \frac{|\chi| \mu_0}{2} J_0^2 \frac{K_1(kR)}{\frac{I_0(kR) K_1(kR)}{I_1(kR)} + 2K_0(kR) + \frac{I_1(kR) K_0(kR)}{I_0(kR)}} \quad (3.103)$$

La figure 3.24 page 103 représente l'évolution du maximum en fonction de  $k$ . L'allure est identique à la figure 3.22 page 101 représentant l'évolution du maximum en fonction de  $R$ .

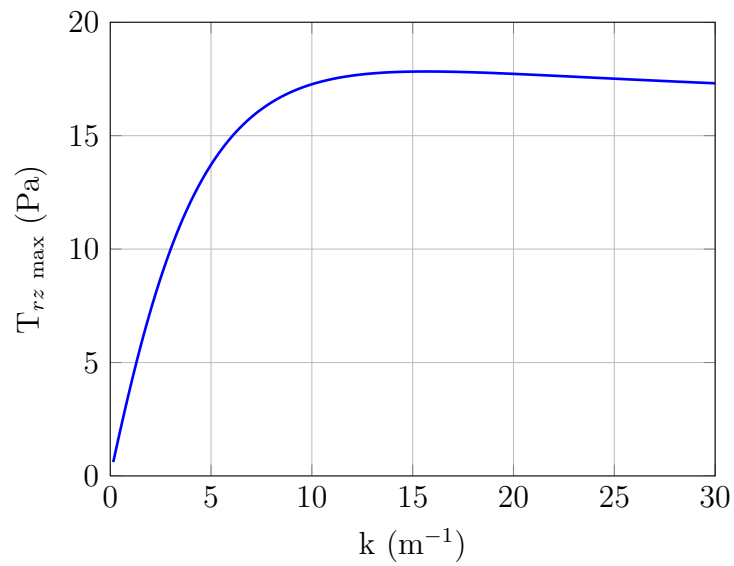
#### 3.3.4.4 Synthèse

L'étude paramétrique a montré l'évolution du terme croisé  $T_{rz}$  de la matrice associée au tenseur des actions magnétiques en fonction de  $J_0$ ,  $R$  et  $k$ . Une valeur de  $J_0$  très élevée (au moins  $10^4$  A/mm) est nécessaire pour avoir  $T_{rz}$  le plus grand possible et potentiellement actif sur des fluides à seuil.

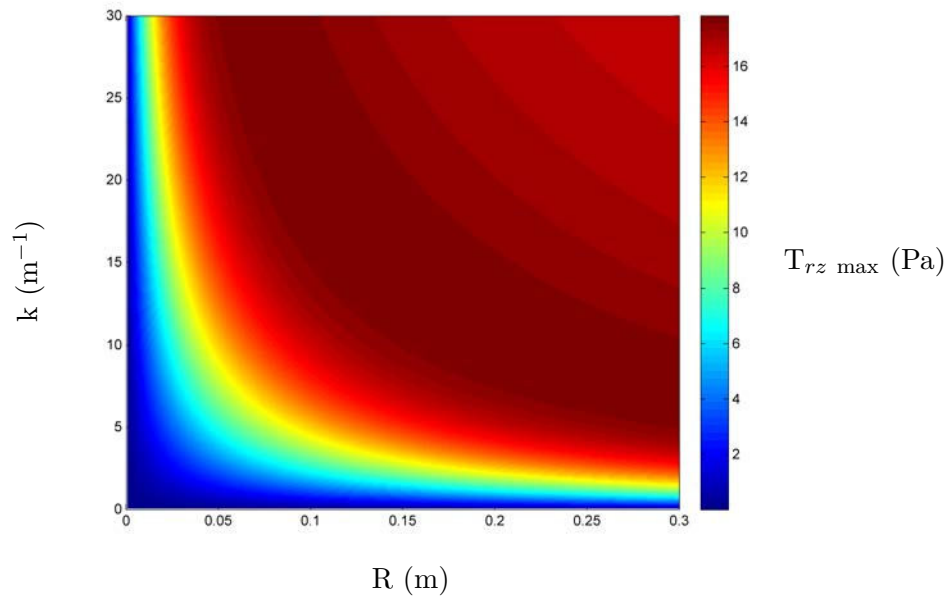
Nous remarquons que la zone utile est à l'intérieur du solénoïde pour toutes les configurations et que sa taille ne varie pas beaucoup lorsque  $R$  et  $k$  varient. Dans tous les cas, la zone de travail se situe le long des parois du solénoïde, au maximum à quelques centimètres. Retenons la présence d'un optimum entre les valeurs du rayon  $R$  et du nombre d'onde  $k$  permettant d'obtenir la plus grande valeur pour  $T_{rz}$  à  $J_0$  fixé. D'après (3.103) page 101, le rôle de  $R$  et  $k$  est identique dans l'évolution du maximum. La figure 3.25 page 103 représente l'évolution du maximum de  $T_{rz}$  dans un plan  $(R,k)$ . Notons par exemple que pour un solénoïde de 15 cm de rayon, le nombre d'onde optimal  $k$  se situe dans une plage comprise 10 et 20  $m^{-1}$ .



**Figure 3.23** Étude paramétrique du terme croisé  $T_{rz}$  du tenseur des actions magnétiques pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale sur une demie longueur d'onde pour différentes valeurs de  $k$



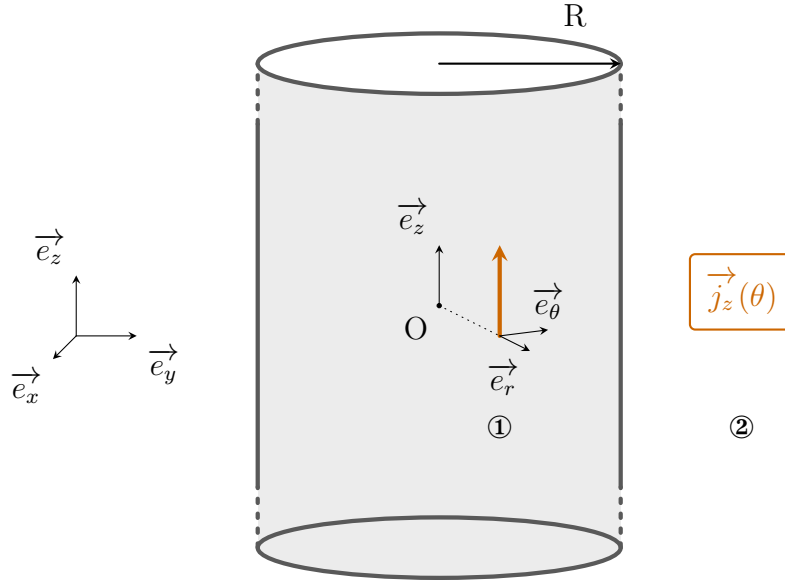
**Figure 3.24** Évolution du maximum du terme croisé  $T_{rz}$  du tenseur des actions magnétiques en fonction du nombre d'onde  $k$



**Figure 3.25** Évolution du maximum du terme croisé  $T_{rz}$  du tenseur des actions magnétiques dans un plan  $(R,k)$  à  $J_0$  fixé

## 3.4 Solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale

### 3.4.1 Présentation de la configuration choisie



**Figure 3.26** Solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale

Dans un repère cylindrique  $\{O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ , nous étudions le solénoïde infini représenté sur la figure 3.26 page 104, infiniment mince et parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale  $\vec{j}_z(\theta)$ . Ce solénoïde est de rayon  $R$  et la densité de courant surfacique est de la forme

$$\vec{j}_z(\theta) = J_0 \sin(p\theta) \vec{e}_z \quad (3.104)$$

Le problème est invariant par translation suivant  $\vec{e}_z$ . Les grandeurs magnétiques et mécaniques ne dépendront donc que de  $r$  et  $\theta$ . Tout plan contenant  $\vec{e}_z$  et  $\vec{e}_\theta$  est un plan d'antisymétrie. Le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  est perpendiculaire aux plans d'antisymétries et sera donc selon  $\vec{e}_z$  uniquement. Ainsi, nous le noterons  $\vec{A}_z$ . Le champ magnétique appartient aux plans d'antisymétries et aura par conséquent des composantes selon  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ .

Cette configuration fait intervenir deux variables d'espace  $r$  et  $\theta$  et trois paramètres : le rayon du solénoïde  $R$ , la valeur maximale de la densité de courant  $J_0$  et le nombre de paires de pôles  $p$ .

L'intérieur du solénoïde est noté ① et l'extérieur ②.

Cette configuration est « classique » dans le domaine de l'électrotechnique car elle correspond à la modélisation du bobinage d'une machine électrique cylindrique.

### 3.4.2 Potentiel-vecteur créé par le solénoïde

D'après l'étude préliminaire des symétries et des invariances, nous avons

$$\vec{A}_z = A_z(r, \theta) \vec{e}_z \quad (3.105)$$

et l'équation à résoudre en tout point des espaces ① et ② est celle vue au 2.3.2 page 57

$$\vec{\Delta} \vec{A}_z = \vec{0} \quad (3.106)$$

En coordonnées cylindriques, comme le potentiel vecteur ne dépend que de  $r$  et  $\theta$ , nous obtenons pour son unique composante selon  $\vec{e}_z$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.107)$$

La résolution de cette équation aux dérivées partielles se fait par la méthode de séparation de variables en posant

$$A_z(r, \theta) = f(r) g(\theta) \quad (3.108)$$

Comme  $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}_z$ , nous avons dans ① et ②

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

Nous noterons

$$\vec{A}_{z1}(r, \theta) = A_{z1}(r, \theta) \vec{e}_z \text{ le potentiel-vecteur dans ①,}$$

$$\vec{A}_{z2}(r, \theta) = A_{z2}(r, \theta) \vec{e}_z \text{ le potentiel-vecteur dans ②.}$$

Nous noterons  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  les champs magnétiques respectivement dans ① et dans ②.

Concernant les relations de passage, la continuité de la composante normale du champ magnétique en  $r = R$  s'écrit

$$\left( \frac{\partial A_{z1}}{\partial \theta} \right)_{r=R} = \left( \frac{\partial A_{z2}}{\partial \theta} \right)_{r=R} \quad (3.110)$$

La discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique en  $r = R$  impose

$$\left( \vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right) \cdot \vec{e}_\theta = \mu_0 J_0 \sin(p \theta) \quad (3.111)$$

soit

$$\left(\frac{\partial A_{z1}}{\partial r}\right)_{r=R} - \left(\frac{\partial A_{z2}}{\partial r}\right)_{r=R} = \mu_0 J_0 \sin(p\theta) \quad (3.112)$$

Les conditions aux limites imposent pour la norme du potentiel-vecteur de rester finie lorsque  $r$  tend vers 0 et nous choisissons un potentiel-vecteur nul lorsque  $r$  tend vers l'infini.

À partir de (3.107) page 105, nous montrons que le potentiel-vecteur est de la forme

$$A_z = (\alpha r^p + \beta r^{-p}) (\gamma \cos(p\theta) + \delta \sin(p\theta)) \quad (3.113)$$

avec  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions limites et des relations de passage.

Tous calculs faits, nous obtenons dans ① et ②

$$\vec{A}_{z1} = \frac{\mu_0 J_0}{2p} \frac{r^p}{R^{p-1}} \sin(p\theta) \vec{e}_z \quad (3.114)$$

$$\vec{A}_{z2} = \frac{\mu_0 J_0}{2p} \frac{R^{p+1}}{r^p} \sin(p\theta) \vec{e}_z \quad (3.115)$$

Le champ magnétique  $\vec{B}_1$  à l'intérieur du solénoïde a donc pour expression

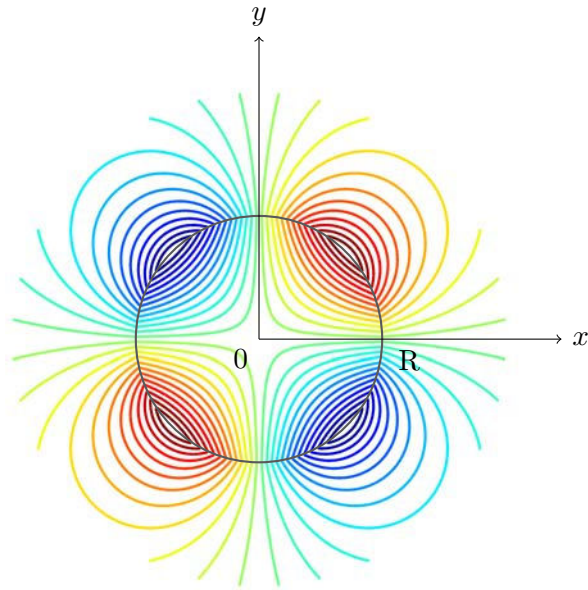
$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 J_0}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^{p-1} \cos(p\theta) \\ -\frac{\mu_0 J_0}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^{p-1} \sin(p\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

et à l'extérieur

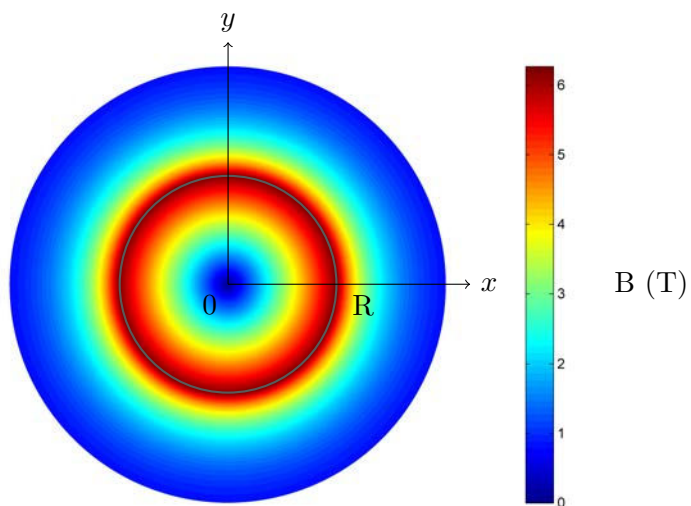
$$\vec{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 J_0}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^{p+1} \cos(p\theta) \\ \frac{\mu_0 J_0}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^{p+1} \sin(p\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

Les figures 3.27 et 3.28 page 107 représentent respectivement les lignes de champ magnétique (isovaleurs du potentiel-vecteur) et la carte de la norme du champ magnétique dans le cas suivant

$$J_0 = 10^4 \text{ A/mm} \quad p = 2 \quad R = 10 \text{ cm}$$



**Figure 3.27** Lignes de champ magnétique pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale



**Figure 3.28** Norme du champ magnétique pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale

### 3.4.3 Champ de force et tenseur des actions magnétiques

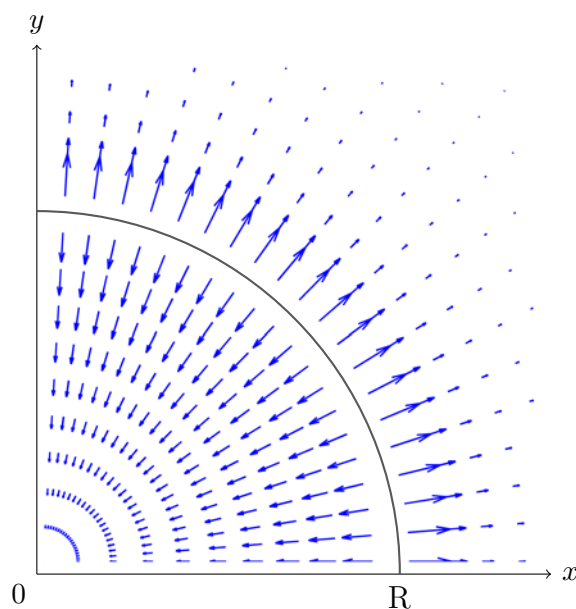
À partir des expressions du champ magnétique, nous calculons les forces magnétiques volumiques. Dans ①, nous obtenons

$$\vec{f}_{\text{mv1}} = \begin{pmatrix} \frac{\chi \mu_0 J_0^2 (p-1)}{4r} \left(\frac{r}{R}\right)^{2p-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

et dans ②

$$\vec{f}_{\text{mv2}} = \begin{pmatrix} -\frac{\chi \mu_0 J_0^2 (p+1)}{4r} \left(\frac{R}{r}\right)^{2p+2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.119)$$

Nous remarquons que ces forces volumiques ne dépendent que de  $r$  et sont purement radiales. L'allure du champ de force volumique est représentée sur la figure 3.29 page 108 pour  $\chi$  négatif et pour un quart du plan pour des raisons de symétries.



**Figure 3.29** Champ de forces volumiques créé par un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale



### 3.4. Solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale

Le tenseur des actions magnétique est déterminé à partir de l'expression (2.74) page 60. Dans ①, nous obtenons

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{T}}_1}, \{ \vec{e}_r, \vec{e}_\theta \} \right\} = \frac{\mu_0 \chi}{8} J_0^2 \left( \frac{r}{R} \right)^{2p-2} \begin{pmatrix} 2 \cos^2(p\theta) & -\sin(2p\theta) \\ -\sin(2p\theta) & 2 \sin^2(p\theta) \end{pmatrix} \quad (3.120)$$

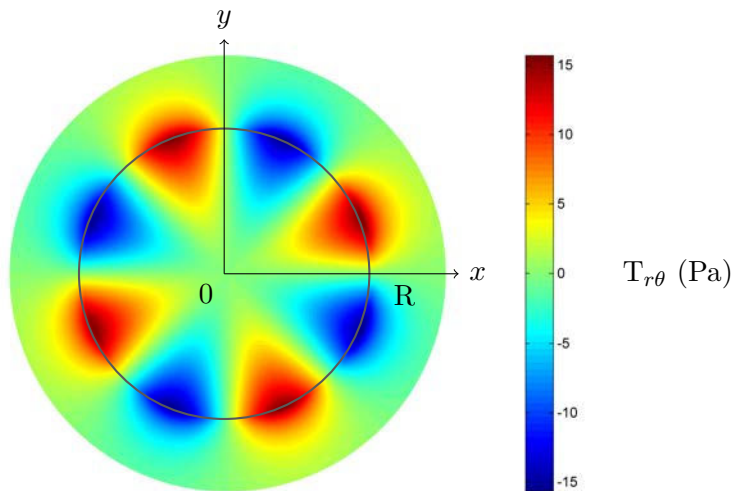
et dans ②

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{T}}_2}, \{ \vec{e}_r, \vec{e}_\theta \} \right\} = \frac{\mu_0 \chi}{8} J_0^2 \left( \frac{R}{r} \right)^{2p+2} \begin{pmatrix} 2 \cos^2(p\theta) & \sin(2p\theta) \\ \sin(2p\theta) & 2 \sin^2(p\theta) \end{pmatrix} \quad (3.121)$$

La figure 3.30 page 109 représente le terme croisé  $T_{r\theta}$  du tenseur des actions magnétiques dans le cas suivant

$$J_0 = 10^4 \text{ A/mm} \quad p = 2 \quad R = 10 \text{ cm} \quad \chi = -10^{-6}$$

Nous remarquons que les zones utiles sont situées de part et d'autre du solénoïde. Nous obtenons environ 10 Pa à quelques centimètres du solénoïde, ce qui est du même ordre de grandeur que les contraintes seuils de certains fluides à seuil vus au 2.2.3.3 page 53.



**Figure 3.30** Terme croisé  $T_{r\theta}$  du tenseur des actions magnétiques pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale

#### 3.4.4 Étude paramétrique

##### 3.4.4.1 Influence de $J_0$

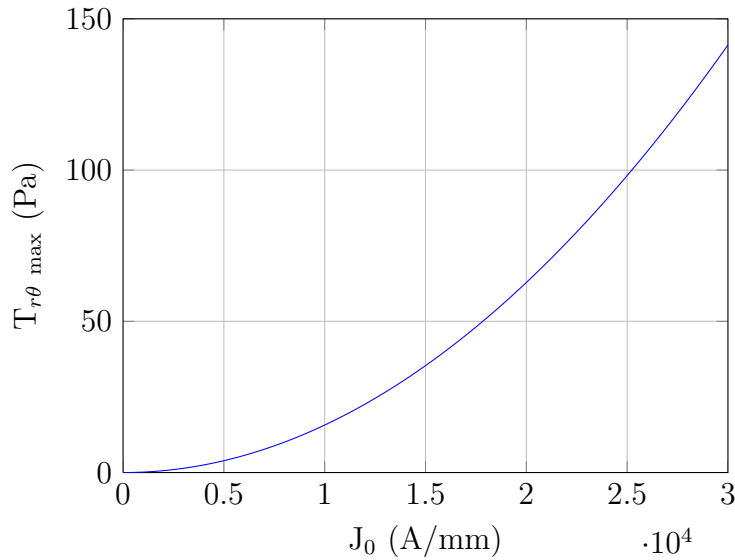
Comme dans les autres cas, tous les termes de la matrice associée au tenseur des actions magnétiques sont proportionnels à  $J_0^2$ . Il est donc essentiel d'obtenir la plus

grande valeur possible de  $J_0$  afin d'augmenter la zone utile où l'écoulement du fluide pourra être modifiée. Retenons que l'ordre de grandeur de  $J_0$  nécessaire pour observer d'éventuels effets sur le fluide est de  $10^4$  A/mm.

La valeur maximale du terme croisé  $T_{r\theta}$  du tenseur des actions magnétiques est situé en  $r = R$  et vaut

$$T_{r\theta \max} = \frac{\mu_0 |\chi|}{8} J_0^2 \quad (3.122)$$

Il ne dépend ni de  $R$ , ni de  $p$ . Pour  $\chi = -10^{-6}$ , nous observons sur la figure 3.31 page 110 l'augmentation du maximum du terme croisé  $T_{r\theta}$  du tenseur des actions magnétiques en fonction de  $J_0$ .

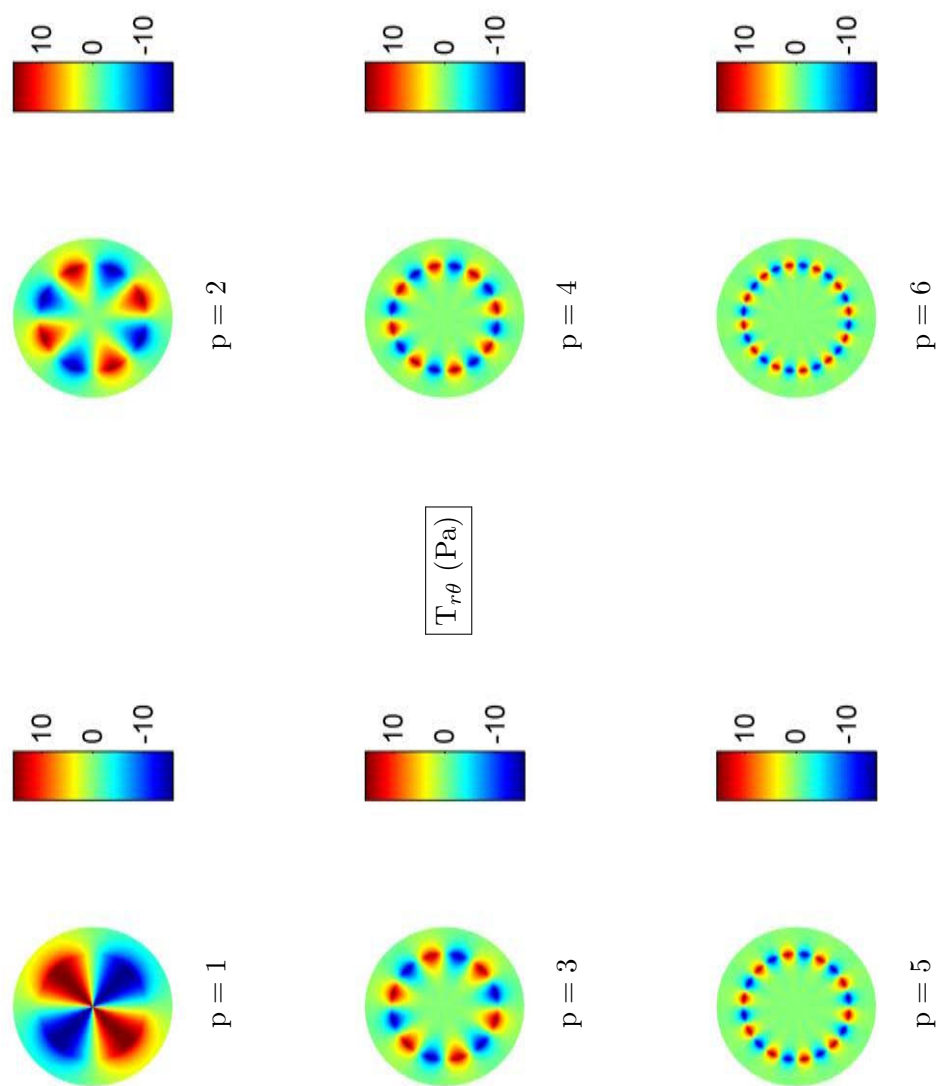


**Figure 3.31** Évolution du maximum du terme croisé  $T_{r\theta}$  du tenseur des actions magnétiques en fonction de  $J_0$

Nous allons à présent nous intéresser à l'influence de  $R$  et  $p$  sur la zone utile du terme croisé  $T_{r\theta}$  du tenseur des actions magnétiques puisque le maximum sera identique quelques soient  $R$  et  $p$ .

#### 3.4.4.2 Influence de $p$

Pour  $J_0 = 10^4$  A/mm,  $R = 10$  cm et  $\chi = -10^{-6}$ , nous observons sur la figure 3.32 page 111 l'évolution dans le plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  du terme croisé  $T_{r\theta}$  du tenseur des actions magnétiques pour  $p$  variant de 1 à 6. Nous remarquons que seules les configurations à  $p = 1$  et  $p = 2$  sont exploitables car dans les autres cas la zone utile est trop proche de la densité de courant pour pouvoir être exploitée.



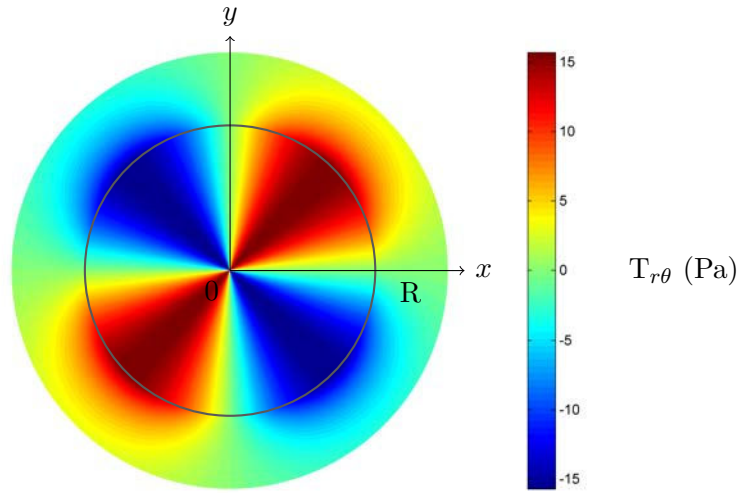
**Figure 3.32** Étude paramétrique du terme croisé  $T_{r\theta}$  du tenseur des actions magnétiques pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale pour différentes valeurs de  $p$

### 3.4.4.3 Cas particulier $p = 1$

Le cas  $p = 1$  semble intéressant car l'expression du tenseur des actions magnétiques dans ① devient

$$\text{Mat} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{T}}}_1, \{ \vec{e}_r, \vec{e}_\theta \} \right\}_{p=1} = \frac{\mu_0 \chi}{8} J_0^2 \begin{pmatrix} 2 \cos^2(\theta) & -\sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & 2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.123)$$

Remarquons que cette expression est indépendante de  $r$  et  $R$ . Avec cette configuration, nous atteignons la valeur maximale  $T_{r\theta \text{ max}}$ , donnée par l'équation (3.122) page 110, au niveau de l'axe central  $Oz$  du solénoïde. Nous pouvons l'observer sur la figure 3.33 page 112.



**Figure 3.33** Terme croisé  $T_{r\theta}$  du tenseur des actions magnétiques créé par un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale avec  $p = 1$

Cependant, cette configuration attrayante est un cas particulier. Elle est inutilisable car si l'on se réfère à l'équation (3.118) page 108 donnant le champ de forces volumiques, nous avons avec  $p = 1$

$$\vec{f}_{mv1 \text{ } p=1} = \vec{0} \quad (3.124)$$

Sans champ de force, il n'y a pas d'action possible sur le fluide. Nous sommes dans le cas particulier où le tenseur est non nul alors que sa divergence l'est. La configuration à retenir est donc  $p = 2$  avec le fluide circulant à l'intérieur du solénoïde.

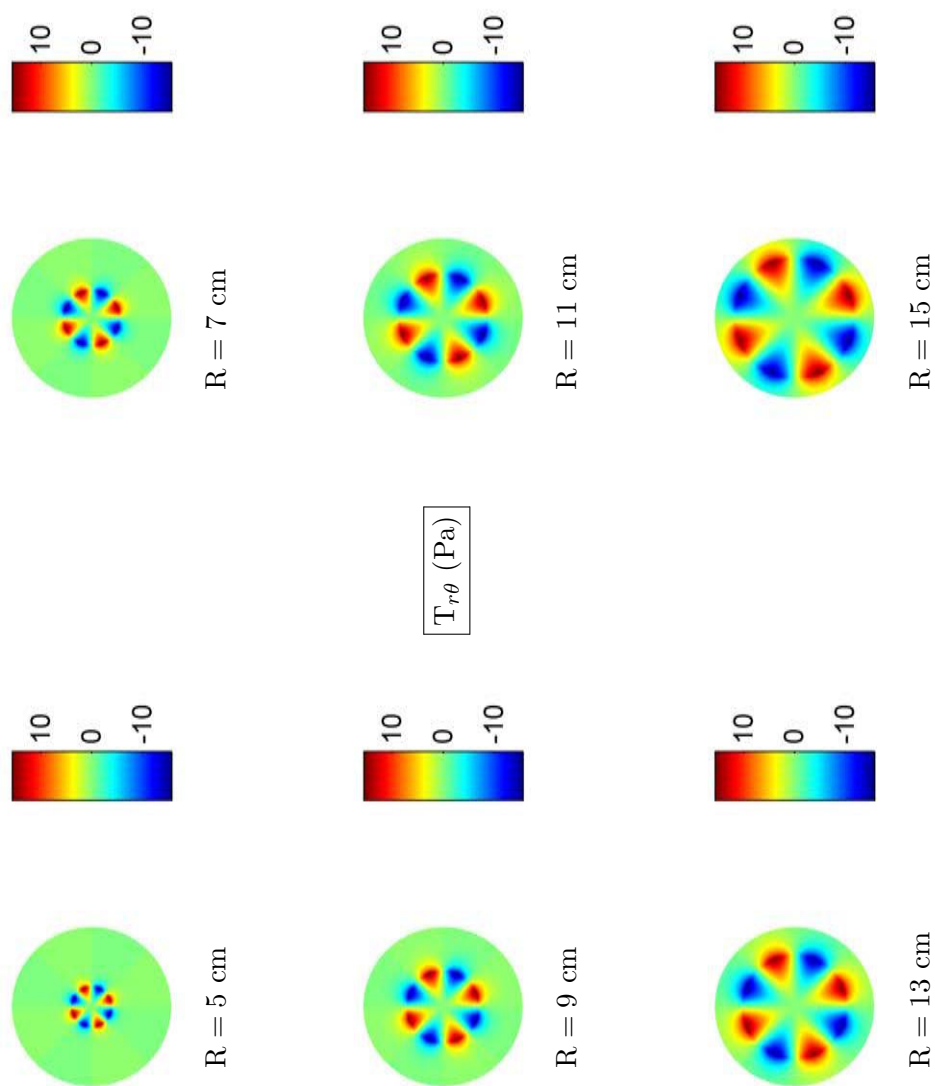
### 3.4.4.4 Influence de $R$

Le cas  $p = 1$  est à part comme nous venons de l'étudier au 3.4.4.3 page 112. Nous nous plaçons donc à  $p = 2$  avec  $J_0 = 10^4$  A/mm et  $\chi = -10^{-6}$ . La figure 3.34 page 114

### 3.4. Solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale

---

montre l'évolution de  $T_{r\theta}$  en fonction de  $R$ . Nous constatons que l'augmentation du rayon du solénoïde entraîne une augmentation de la zone utile. Cependant, ces zones restent confinées à proximité de la densité de courant. Le choix  $p = 2$  semble donc essentiel afin d'obtenir une zone utile la plus éloignée du solénoïde.



**Figure 3.34** Étude paramétrique du terme croisé  $T_{r\theta}$  du tenseur des actions magnétiques pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale pour différentes valeurs de  $R$

## 3.5 Conclusion

Les différentes configurations étudiées permettent d'avoir un aperçu de leurs actions potentielles sur l'écoulement d'un fluide ou sur la possibilité de dépasser la contrainte seuil de fluides complexes. L'étude du tenseur des actions magnétiques permet de distinguer la partie qui va changer la pression au sein du fluide et celle qui va modifier les contraintes de cisaillement.

La première configuration vue au 3.2 page 69 constituée de deux nappes de courant parallèles est celle qui a permis d'obtenir les plus grandes valeurs du terme croisé du tenseur des actions magnétiques. Nous avons montré qu'il serait avantageux de placer le fluide à l'extérieur des nappes. Il conviendrait de poursuivre l'étude avec des densités de courant différentes dans les deux nappes pour rechercher éventuellement une meilleure configuration. L'étude analytique devient alors trop complexe. Il est nécessaire de passer à la simulation numérique pour poursuivre les investigations.

Au 3.3 page 90, la deuxième configuration est constituée d'un solénoïde mince parcouru par une densité de courant orthoradiale. Avec ce dispositif, le fluide serait à l'intérieur du solénoïde. Nous avons montré la présence d'un optimum entre le rayon du solénoïde et le nombre d'onde de la densité surfacique de courant.

La troisième configuration, au 3.4 page 104, reprend le solénoïde mince avec une densité de courant longitudinale. Le choix de deux paires de pôles avec le fluide situé à l'intérieur du solénoïde semble être la configuration la mieux adaptée.

Dans tous les cas, les densités de courant utilisées sont très élevées et la conception de ces dispositifs serait particulière notamment avec l'utilisation de fils ou de rubans supraconducteurs. Nos études restent insuffisantes pour se lancer dans la conception d'un dispositif car elles prennent uniquement en compte des densités de courant surfaciques. La simulation numérique serait indispensable pour tenir compte de l'épaisseur des configurations que l'on a étudiées. Cela permettrait également de corriger le tenseur des actions magnétiques que nous avons déterminé lorsque l'on est à proximité de la densité de courant.

D'un point de vue mécanique, les contraintes de cisaillement ne peuvent pas directement être liées au terme croisé du tenseur des actions magnétiques. En effet, il est nécessaire de prendre en compte les conditions aux limites mécaniques ainsi que la loi de comportement du fluide pour trouver le champ de contrainte présent au sein du fluide. La résolution du problème ne peut pas se faire analytiquement et nous allons avoir recours à la simulation numérique au chapitre 4. L'outil sera le logiciel COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup> adapté à la simulation numérique multiphysique par la méthode des éléments finis.





---

## Références bibliographiques du chapitre 3

- [43] DURAND. *Magnétostatique*. Dunod, jan. 1968. ISBN : 2225594996 (cf. p. 25, 74).
- [59] B. LAPORTE. *Machines électriques tournantes : Conception, dimensionnement, fonctionnement*. Ellipses, nov. 2007. ISBN : 2729836586 (cf. p. 75, 95).
- [60] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN, éd. *Handbook of Mathematical Functions : with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, juin 1965. ISBN : 0486612724 (cf. p. 93, 94).
- [61] F. BOWMAN. *Introduction to Bessel Functions*. Dover Publications, oct. 2010. ISBN : 0486604624 (cf. p. 94).



---

## Études des contraintes de cisaillement

---

<b>4.1</b>	<b>Mise en œuvre de la simulation multiphysique par la méthode des éléments finis</b>	<b>122</b>
4.1.1	Modélisation du fluide à seuil	122
4.1.1.1	Fluide à seuil	122
4.1.1.2	Comportement avant seuil : solide élastique parfait	122
4.1.1.3	Comportement en écoulement : modèle régularisé	123
4.1.2	Simulation numérique multiphysique par la méthode des éléments finis	125
4.1.2.1	Méthode des éléments finis	125
4.1.2.2	Éléments clés de la simulation	126
<b>4.2</b>	<b>Étude de la transition gel–liquide par l’action des forces magnétiques volumiques pour un fluide à seuil en statique</b>	<b>127</b>
4.2.1	Actions des différentes configurations magnétiques	127
4.2.1.1	Étude paramétrique avec deux nappes de courant	127
4.2.1.2	Étude paramétrique dans le cas d’un solénoïde parcouru par un courant orthoradial	134
4.2.1.3	Étude paramétrique dans le cas d’un solénoïde parcouru par un courant longitudinal	136
4.2.2	Analyse des études paramétriques	142
<b>4.3</b>	<b>Actions des forces magnétiques volumiques sur l’écoulement d’un fluide à seuil</b>	<b>144</b>
4.3.1	Conditions nécessaires à la modification de l’écoulement	144
4.3.2	Exemple de modifications	145
4.3.2.1	Profil de vitesse sans forces magnétiques	146
4.3.2.2	Profil de vitesse avec forces magnétiques	146
4.3.3	Possibilités expérimentales	148
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>
	<b>Références bibliographiques du chapitre 4</b>	<b>153</b>

---



---

## Introduction

Nous souhaitons étudier les effets de champs magnétiques intenses, plus précisément l'effet des forces magnétiques volumiques, sur des fluides à seuil. Comme nous l'avons présenté au 2.2 page 46, ces fluides ont des propriétés étonnantes. En l'absence de contraintes et jusqu'à une contrainte dite contrainte seuil, ils se comportent comme des solides. Au-delà de la contrainte seuil, ils s'écoulent comme des liquides ou des gels. Cette propriété est notamment utile pour le transport de particules en empêchant la sédimentation (comme les boues de forage par exemple) et se rencontre fréquemment comme dans les pâtes dentifrices, le ketchup et les peintures non-coulantes.

Ce chapitre est l'aboutissement de nos études : il s'agit de réaliser la simulation de l'interaction entre une configuration magnétique et un fluide à seuil dia- ou paramagnétique non chargé. Nous avons choisi d'utiliser les configurations magnétiques détaillées au chapitre 3 et de les associer à deux études mécaniques :

- le fluide à seuil sera étudié dans un premier temps au 4.2 page 127 en dessous de la contrainte seuil, comme un solide élastique parfait ;
- nous verrons ensuite au 4.3 page 144 les modifications possibles d'un écoulement de fluide à seuil dans un cas particulier.

Le chapitre 3 a permis de déterminer analytiquement les possibilités des configurations magnétiques choisies afin de modifier le champ de contraintes au sein des fluides. L'étude paramétrique a révélé les évolutions du tenseur des actions magnétiques en fonction des paramètres des différentes configurations magnétiques. Cependant, il est nécessaire d'y associer le problème mécanique dans son intégralité (notamment les conditions limites et les lois de comportements) pour connaître l'effet des forces magnétiques volumiques sur le fluide. L'enjeu majeur est en particulier de dépasser la contrainte seuil au sein du fluide afin d'offrir la possibilité de réaliser la transition solide–gel sans contact.

Le logiciel COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup> sera notre outil pour mener à bien la simulation multiphysique par la méthode des éléments finis.

## 4.1 Mise en œuvre de la simulation multiphysique par la méthode des éléments finis

### 4.1.1 Modélisation du fluide à seuil

#### 4.1.1.1 Fluide à seuil

La rhéologie des fluides à seuil suscite de nombreux intérêts [58], liés à leurs propriétés et leurs utilisations fréquentes dans le monde industriel. Ce type de comportement est typique des suspensions concentrées. Le modèle mathématique le plus simple décrivant le comportement des fluides à seuil est le modèle de Bingham, qui est un modèle simplifié du modèle d’Herschel-Bulkley vu au 2.2.3.1 page 52

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0 & \text{lorsque } |\tau| < \tau_c \\ |\tau| = \tau_c + \mu |\dot{\gamma}| & \text{lorsque } \dot{\gamma} \neq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $\tau_c$  la contrainte seuil et  $\mu$  la viscosité de Bingham du fluide.

En dessous de la contrainte seuil, ce modèle considère qu’il n’y a aucune déformation. À partir de la contrainte seuil, le fluide s’écoule comme un fluide newtonien. Cette description correspond relativement bien à l’écoulement des boues de forages. Les autres fluides à seuil ont généralement un comportement rhéofluidifiant une fois la contrainte seuil passée [51]. De plus, beaucoup d’entre eux sont thixotropes : la viscosité évolue au cours du temps alors que les conditions aux limites sont fixées.

Du point de vue de la simulation numérique, cette non-linéarité complique l’utilisation du modèle de Bingham. Nous avons choisi deux approches différentes selon nos objectifs pour palier cette difficulté :

- dans un premier temps, nous souhaitons décrire un fluide à seuil en statique et dépasser la contrainte seuil à l’aide des forces magnétiques volumiques. Son comportement sera alors celui d’un solide élastique parfait ;
- dans une deuxième partie au 4.3 page 144, nous utiliserons un modèle régularisé adapté à la simulation numérique car il permet de s’affranchir des conditions  $|\tau| < \tau_c$  ou  $|\tau| > \tau_c$  pour décrire le fluide à seuil.

#### 4.1.1.2 Comportement avant seuil : solide élastique parfait

Nous avons choisi de modéliser le comportement du fluide avant seuil comme un solide élastique parfait incompressible. Ce modèle correspond au comportement macroscopique du fluide qui est essentiellement élastique. Cependant, il peut être assez différent de celui observé localement compte-tenu de l’hétérogénéité du réseau formé par les suspensions contenues dans la plupart des fluides à seuil et des transitions solide-gel particulières [62].

La loi de comportement du solide élastique parfait est la loi de Hooke [45]

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2G} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \bar{\sigma}) \bar{\mathbb{1}} \quad (4.2)$$

#### 4.1. Mise en œuvre de la simulation multiphysique par la méthode des éléments finis

avec  $\bar{\epsilon}$  le tenseur des déformations,  $\bar{\sigma}$  le tenseur des contraintes,  $G$  le module de cisaillement,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $E$  le module d'élasticité. Le module de cisaillement  $G$  est communément utilisé en rhéologie et est lié au module d'élasticité ou module d'Young  $E$  par la relation

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.3)$$

Nous supposons le fluide incompressible ce qui impose  $\nu = 0,5$  et donc

$$G = \frac{E}{3} \quad (4.4)$$

Notons que pour des raisons numériques, il est nécessaire de choisir  $\nu$  légèrement inférieur à 0,5 (nous avons utilisé  $\nu = 0,495$ ) afin d'éviter des erreurs dans la résolution du problème. Par exemple, le taux de compression n'est pas défini si  $\nu = 0,5$ .

Compte-tenu de la multiplicité des fluides à seuil, nous avons opté pour des valeurs caractéristiques du module de cisaillement et de la masse volumique qui correspondent par exemple à un mélange eau–bentonite à une concentration massique de 10% [58, 63].

$$G = 10^3 \text{ Pa} \quad (4.5)$$

$$\rho = 1,05 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad (4.6)$$

Le modèle reste valable tant que  $|\tau| < \tau_c$ . Si  $|\tau| > \tau_c$ , le solide se liquéfie : il y a transition solide–gel. Notre objectif de simulation est donc de montrer qu'il existe des zones où  $|\tau| > \tau_c$ , c'est-à-dire qu'il est possible de réaliser la transition solide–gel à partir des forces magnétiques volumiques. Notons que nos résultats ne permettront pas de prévoir le comportement du fluide à seuil après la contrainte seuil car nous ne prenons pas en compte la non-linéarité de sa loi de comportement. Les valeurs caractéristiques de la contrainte seuil  $\tau_c$  pour des suspensions de bentonite vont de 0,1 à 50 Pa en fonction de la concentration des suspensions et également en fonction des méthodes expérimentales de caractérisation. Nous choisirons la valeur correspondant à un mélange eau–bentonite de concentration massique 10% [52]

$$\tau_c = 3 \text{ Pa} \quad (4.7)$$

##### 4.1.1.3 Comportement en écoulement : modèle régularisé

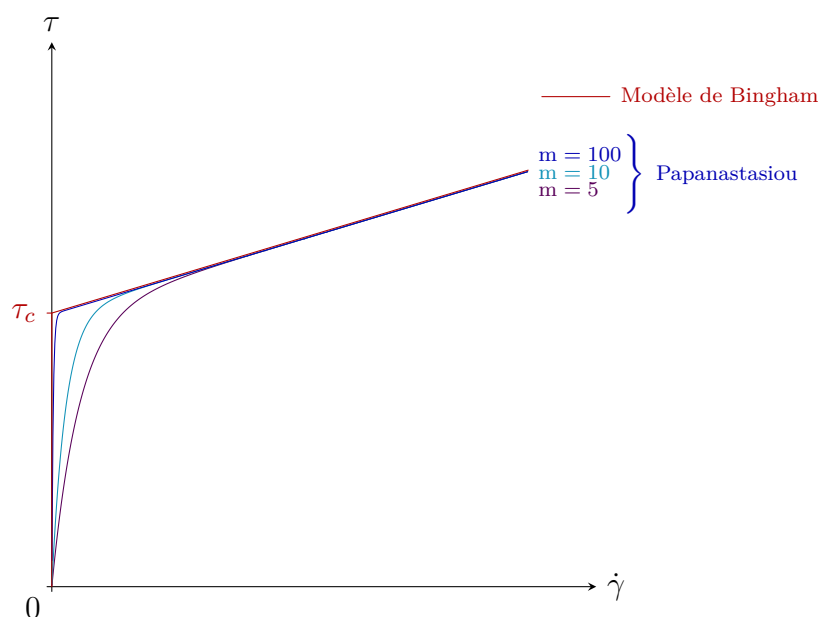
Le modèle régularisé permet de s'affranchir de la condition sur  $|\tau|$  présente dans le modèle de Bingham (4.1) page 122 peu commode à insérer dans la simulation numérique.

Le modèle régularisé retenu pour notre étude est celui de Papanastasiou [55] introduit au 2.2.3.1 page 52

$$\tau = \left( \mu + \tau_c \frac{(1 - e^{-m|\dot{\gamma}|})}{|\dot{\gamma}|} \right) \dot{\gamma} \quad (4.8)$$

où  $m$  est un paramètre qui prend des valeurs très élevées ( $m > 10$  s) permettant de se rapprocher le plus possible du modèle de Bingham. Ce modèle est utilisé avec succès en simulation numérique [64, 65].

Nous avons représenté sur la figure 4.1 page 124 l'allure des lois de comportement du fluide à seuil avec le modèle de Bingham et avec le modèle de Papanastasiou pour trois valeurs de  $m$ . Comme [66], nous observons un bon accord entre les deux modèles pour  $m > 100$  s.



**Figure 4.1** Comparaison des modèles de Bingham et Papanastasiou pour un fluide à seuil

D'après la bibliographie et notamment [67], les valeurs caractéristiques d'un fluide à seuil (mélange eau-bentonite à 10%) sont

$$\mu = 0,05 \text{ Pa}\cdot\text{s} \quad (4.9)$$

$$\tau_c = 3 \text{ Pa} \quad (4.10)$$

$$m = 100 \text{ s} \quad (4.11)$$

Le nombre de Bingham  $B_n$  est un nombre adimensionnel traduisant le rapport entre les contraintes élastiques et les contraintes visqueuses.

$$B_n = \frac{\tau_c L}{\mu u_0} \quad (4.12)$$

avec  $L$  une longueur caractéristique de l'écoulement et  $u_0$  la vitesse moyenne de l'écoulement. Plus le nombre de Bingham augmente, plus la zone isovitesse du profil de vitesse de l'écoulement est grande. Cette zone isovitesse présentée au chapitre 2 sur



la figure 2.7 page 54 est caractéristique de l'écoulement des fluides à seuil. Lorsque le nombre de Bingham tend vers 0, l'écoulement est celui d'un fluide newtonien (profil de vitesse parabolique représenté sur la figure 2.6 page 53).

Dans notre cas, compte-tenu de notre étude menée au 2.1.3.2 page 43 et des configurations magnétiques présentées au chapitre 3,  $u_0$  est de l'ordre de 1 cm/s et  $L$  est de l'ordre du centimètre (nous prendrons 4 cm). Avec les valeurs caractéristiques du mélange eau–bentonite choisi, nous travaillerons donc avec un nombre de Bingham de l'ordre de

$$B_n \simeq 250 \tag{4.13}$$

### 4.1.2 Simulation numérique multiphysique par la méthode des éléments finis

Avant de se lancer dans la modélisation, nous allons brièvement présenter la méthode des éléments finis. Nous verrons ensuite sa mise en œuvre avec notre problème d'élasticité linéaire, de magnétostatique et de mécanique des fluides. Nous testerons les différentes configurations magnétiques vues au chapitre 3 et comparerons les résultats des simulations.

#### 4.1.2.1 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est apparue dans les années 1950 pour traiter des problèmes de mécanique des structures. Depuis, elle s'est développée et est présente dans de nombreux domaines d'application : mécanique, physique, chimie, mais aussi finance et biologie. La plupart des logiciels de modélisation et de simulation numérique utilisent la méthode des éléments finis. Nous utiliserons le logiciel COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup> adapté à la simulation multiphysique via la présence de modules spécifiques à différents domaines de la physique. Dans une première partie au 4.2 page 127, nous utiliserons les modules de magnétostatique et de mécanique des solides avec différentes géométries. Dans un second temps au 4.3 page 144, nous emploierons le module de mécanique des fluides.

Deux techniques principales de discrétisation existent [68] :

- la méthode des différences finies utilisant la formulation forte du problème ;
- la méthode des éléments finis basée sur la formulation variationnelle.

La formulation variationnelle consiste à introduire des fonctions dite « tests » dont l'espace est de dimension infinie dans la formulation forte du problème. La méthode des éléments finis consiste à remplacer l'espace de dimension infinie des fonctions tests de la formulation variationnelle par un espace de fonctions tests approchées et de dimension finie. L'espace approché est généralement inclus dans l'espace initial. La réalisation d'un code d'éléments finis consiste tout d'abord à générer un maillage du domaine de calcul. Sur chaque domaine, il faut ensuite construire et assembler les matrices élémentaires issues de la formulation variationnelle. Après avoir éliminé les conditions aux limites essentielles de la formulation variationnelle du problème, il faut

résoudre le système matriciel linéaire. Les systèmes sont généralement de grandes tailles et la structure des matrices est particulière (matrices « creuses », présentant un très grand nombre de termes nuls). Il existe donc plusieurs types de solveurs utilisant des techniques différentes de résolution de systèmes linéaires. Il existe des méthodes de résolution dites directes, conduisant à la solution en un nombre fini d'opérations et les méthodes qualifiées d'itératives, générant une suite qui converge vers la solution du système linéaire.

Notre ambition n'est pas d'exposer avec précision la méthode des éléments finis mais de donner un bref aperçu de la méthode. Le lecteur pourra se référer à [68, 69] pour plus de détails et notamment pour connaître les fondements mathématiques théoriques associés à la méthode des éléments finis.

### 4.1.2.2 Éléments clés de la simulation

Notre problème est relativement simple à poser. La facilité de prise en main et d'utilisation de COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup> ne nécessite pas de présentation particulière. Nous souhaitons cependant attirer l'attention du lecteur sur quelques points essentiels de notre simulation.

Nous avons fait le choix de ne pas utiliser les expressions analytiques des champs de forces afin de prendre en compte les effets de bord des configurations magnétiques. Notre choix se justifie également par la rapidité de la simulation de la partie magnétique par rapport à la partie mécanique.

Dans une géométrie 2D, notre problème se décompose uniquement en un problème de magnétostatique et un problème d'élasticité linéaire. Il faut cependant adapter le type d'éléments finis utilisé pour la résolution du problème de magnétostatique. La formulation utilisée est en potentiel-vecteur et le champ de forces magnétiques volumique que nous allons calculer fait intervenir les dérivées première et seconde du potentiel-vecteur. Par défaut, COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup> utilise des éléments finis de Lagrange quadratiques en magnétostatique. Par conséquent, nous trouvons des forces nulles lorsque nous les calculons à partir du champ magnétique. Il est impératif d'utiliser la formulation en potentiel-vecteur vue au 2.3.3 page 58. Afin d'obtenir une précision suffisante sur le champ de forces, nous imposerons des éléments finis de Lagrange cubiques.

La résolution de notre problème nécessite un réglage particulier du solveur. Le problème de magnétostatique est tout d'abord résolu. Les résultats des forces magnétiques volumiques sont enregistrés et utilisés pour le problème d'élasticité. En effet, les deux problèmes sont découplés. Comme nous l'avons indiqué au 1.2.1 page 13, nous négligeons l'aimantation du matériau devant le champ magnétique créé par les densités de courant.

Nos simulations ont été menées sur les versions 3.5a et 4.2a de COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>. L'ordinateur utilisé est équipé d'un processeur Intel® Xeon® cadencé à 2,4 GHz et équipé de 12 Go de mémoire vive. Cette configuration est bien adaptée

pour la simulation de géométries en 2D sous COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>. Pour une simulation, l'ordre de grandeur de la durée des calculs de la partie magnétique est de la seconde alors que celle de la résolution du problème de mécanique des fluides est de la minute.

## 4.2 Étude de la transition solide–gel par l'action des forces magnétiques volumiques pour un fluide à seuil en statique

### 4.2.1 Actions des différentes configurations magnétiques

#### 4.2.1.1 Étude paramétrique avec deux nappes de courant

Nous reprenons la configuration magnétique étudiée au 3.2 page 69. Il s'agit de deux nappes infinies de courant parallèles, distantes de  $2D$  et parcourues par des densités de courant surfaciques notées  $\vec{j}_{1z}(x)$  pour la nappe supérieure et  $\vec{j}_{2z}(x)$  pour la nappe inférieure. Pour rappel, la configuration est représentée sur la figure 3.1 page 70. Les densités de courant surfaciques ont pour expression

$$\vec{j}_{1z}(x) = J_1 \sin(n_1 k x) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{j}_{2z}(x) = J_2 \sin(n_2 k x + \varphi) \vec{e}_z$$

La simulation nécessite l'utilisation de l'expression des forces magnétiques volumiques en coordonnées cartésiennes. À l'aide de l'équation (2.68) page 59, nous avons

$$\vec{f}_{mv} = \frac{\chi}{\mu_0} \begin{pmatrix} \partial_y A_z \partial_{yx} A_z - \partial_x A_z \partial_{yy} A_z \\ -\partial_y A_z \partial_{xx} A_z + \partial_x A_z \partial_{xy} A_z \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

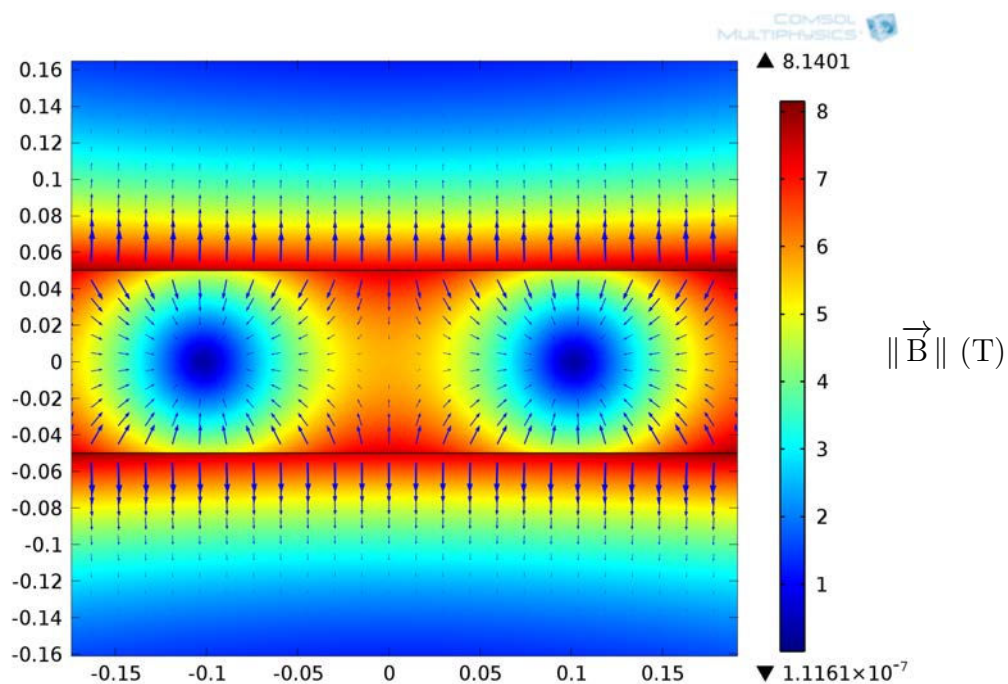
Nous représentons sur la figure 4.2 page 128 le champ magnétique et le champ de forces magnétiques volumiques obtenus en simulation. L'allure est identique aux résultats des calculs analytiques des figures 3.8 et 3.9 pages 81 et 84.

Pour vérifier plus précisément nos expressions analytiques, nous avons choisi de représenter l'expression de la norme de la force volumique magnétique en  $x = \lambda/8$  en fonction de  $y$  pour le jeu de paramètres suivant

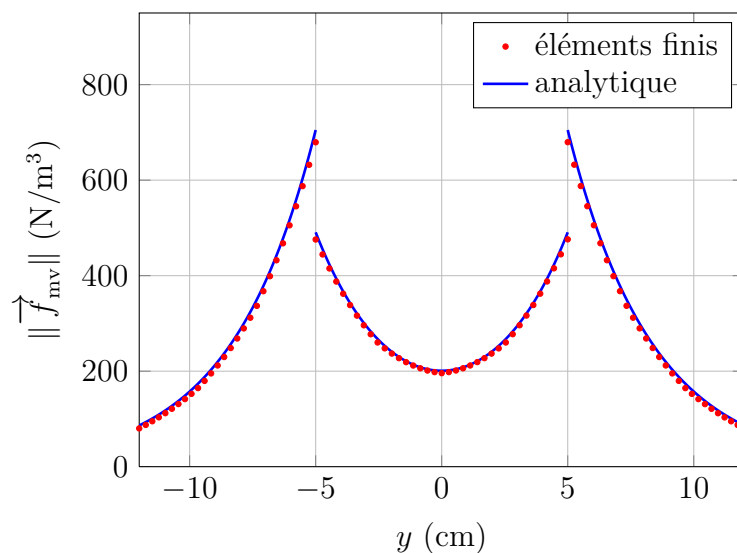
$$n_1 k = n_2 k = 15 \text{ m}^{-1} \quad J_0 = J_1 = J_2 = 10^4 \text{ A/mm} \quad \varphi = 0 \quad \chi = -10^{-6} \quad D = 5 \text{ cm}$$

La figure 4.3 page 128 montre un bon accord entre l'expression analytique et la simulation numérique par éléments finis.

Nous étudions le dispositif présenté sur la figure 4.4 page 129. La nappe de courant supérieure est représentée en bleu et la nappe de courant inférieure en rouge. Nous avons placé autour de cette configuration magnétique trois solides (les rectangles) représentant des fluides à seuil à l'état solide. Nous souhaitons observer les effets des

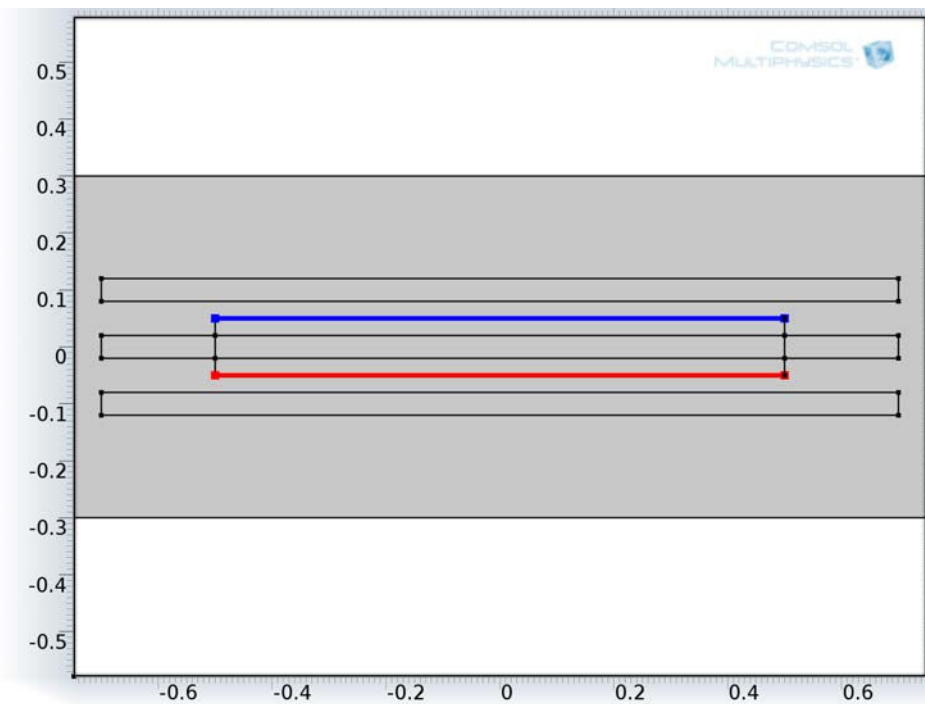


**Figure 4.2** Norme du champ magnétique et champ de forces magnétiques volumiques obtenus en simulation pour deux nappes de courant infinies sur une longueur d'onde



**Figure 4.3** Comparaison entre les résultats de la simulation et l'expression analytique de la norme de la force volumique magnétique en  $x = \lambda/8$  pour  $D = 5$  cm

forces magnétiques volumiques pour trois positions d'un même fluide. Les conditions aux limites du problème mécanique sont des contraintes liées aux déplacements : nous supposons que les fluides sont placés dans des contenants ne permettant pas de déplacements suivant l'axe vertical pour les parties inférieures et suivant l'axe horizontal pour les parois latérales. Les parties supérieures sont supposées libres. Nous laissons 2 cm entre les nappes de courant et le fluide à seuil. Il s'agit de prendre en compte les éventuelles contraintes expérimentales comme l'épaisseur des nappes de courant par exemple. Dans le cas d'un système supraconducteur, il faudrait également insérer la partie cryogénique autour des nappes. Nous imposons un potentiel magnétique nul sur un rectangle extérieur qui n'apparaît pas intégralement sur la figure. Nous vérifions pour chaque simulation que le champ magnétique est quasiment nul sur ces frontières.



**Figure 4.4** Configuration magnétique à deux nappes de courant (en bleu et en rouge) et trois fluides à seuil à l'état solide (trois rectangles)

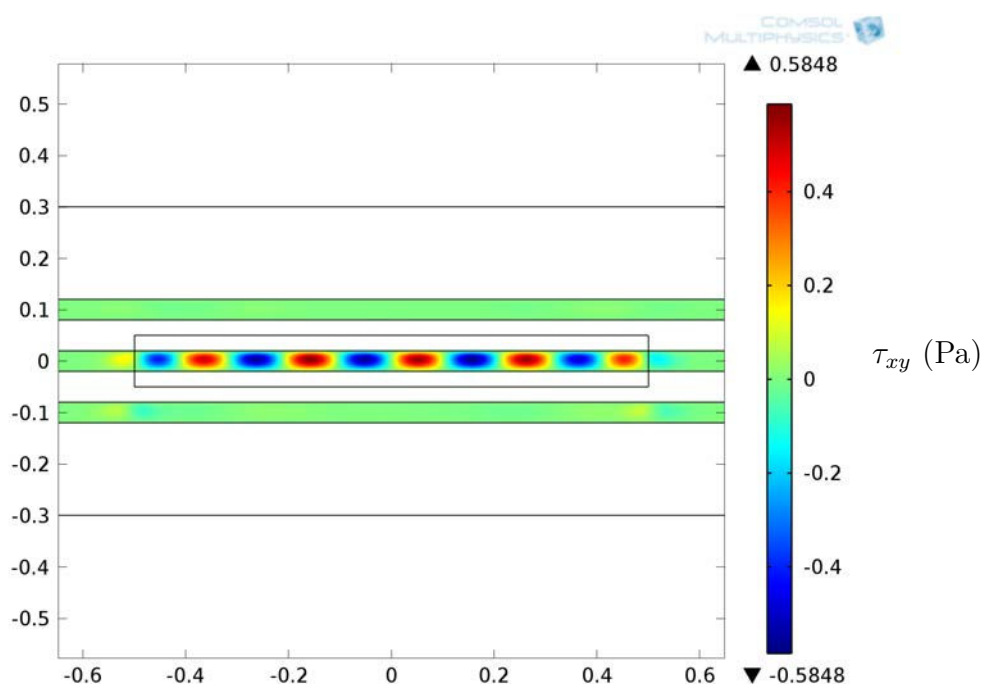
Avec les paramètres

$$n_1 k = n_2 k = 15 \text{ m}^{-1} \quad J_0 = 10^4 \text{ A/mm} \quad \varphi = 0 \quad \chi = -10^{-6} \quad D = 5 \text{ cm}$$

nous simulons l'action des forces magnétiques volumiques et nous obtenons les résultats présentés sur la figure 4.5 page 130 pour la contrainte de cisaillement  $\tau$ .

Remarquons que :

- les contraintes de cisaillement sont quasi-exclusivement dans l'espace inter-nappes ;
- le niveau de contrainte de cisaillement maximum atteint pour cette configuration est de 0,58 Pa. Cela correspond aux valeurs minimales de la plage des



**Figure 4.5** Contrainte de cisaillement dans les fluides à seuil pour une configuration à deux nappes de courant identiques

contraintes seuils des fluides à seuil. Nous devons augmenter  $J_0$  pour augmenter la contrainte de cisaillement maximale. Elle est proportionnelle à  $J_0^2$  donc pour atteindre  $\tau_c = 3$  Pa, il faudrait que  $J_0 = 2,3 \cdot 10^4$  A/mm ;

- nous observons un motif périodique pour les contraintes de cisaillement de longueur d'onde  $\lambda/2$  avec  $\lambda = 2\pi/(n_1 k)$  ;
- au centre du dispositif, le motif est régulier. Les effets de bord peuvent être négligés pour la configuration choisie. Cela valide les dimensions choisies pour la simulation ;
- l'effet Moïse décrit au 1.3.3.3 page 22 est très peu marqué dans notre cas compte-tenu du comportement solide du fluide à seuil ;
- les conditions limites mécaniques et la loi de comportement du fluide jouent un rôle essentiel dans la présence ou non de contraintes de cisaillement. Par rapport à notre étude analytique sur le terme croisé  $T_{xy}$  du tenseur des actions magnétiques, les zones de cisaillement au sein du fluide sont bien différentes de celles liées à  $T_{xy}$  sur la figure 3.10 page 86. Il est ainsi fondamental d'associer le problème mécanique au problème magnétique pour déterminer les zones de cisaillement. Nous avons abordé ce point dès le chapitre 1 au 1.4.2 page 24 lors de la présentation des différences de problématiques entre la lévitation magnétique et notre sujet ;
- nous trouvons une valeur maximale 0,58 Pa de la contrainte de cisaillement petite devant les valeurs maximales de  $T_{xy}$  obtenues au chapitre 3. Cela s'explique,

comme le point précédent, par la prise en compte des conditions limites mécaniques et de la loi de comportement du fluide ;

- la configuration choisie n’est peut-être pas optimale. La simulation numérique nous offre la possibilité d’explorer le cas où  $n_1 \neq n_2$ . Cette étude nous donne une nouvelle approche : nous nous écartons de la configuration associée au moteur linéaire et nous allons étudier les effets des harmoniques d’espace généralement liés aux vibrations dans l’approche « machines ». Nous pourrions mener une étude paramétrique sur  $n_1$  et  $n_2$  afin d’observer l’évolution de la contrainte seuil.

Plusieurs simulations nous ont permis de noter que les résultats sont peu sensibles aux variations de  $\varphi$  et du module d’Young  $E$ . Les résultats sont plus sensibles à la variation du coefficient de Poisson  $\nu$ . Cependant, la grande majorité des fluides à seuil est essentiellement composée d’eau et ces fluides ont donc un coefficient de Poisson proche de 0,5.

**Cas où  $n_1 \neq n_2$**  Ce cas est un problème que seule la simulation numérique nous permet de traiter. Nous utilisons les possibilités d’études paramétriques de la version 4.2a de COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>. Notre étude sur  $n_1$  et  $n_2$  a été menée avec

$$k = 2\pi \text{ m}^{-1} \quad J_0 = J_1 = J_2 = 10^4 \text{ A/mm} \quad \varphi = 0 \quad \chi = -10^{-6} \quad D = 5 \text{ cm}$$

Le choix de  $k = 2\pi \text{ m}^{-1}$  s’explique par le fait que nous avons simulé des nappes de courant de longueur 1 m. Ainsi,  $n_1$  et  $n_2$  correspondent directement aux nombres de longueurs d’onde des nappes de courant supérieure et inférieure. Nous prendrons pour les densités de courant surfaciques

$$\vec{j}_{1z}(x) = J_0 \cos(n_1 k x) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{j}_{2z}(x) = J_0 \cos(n_2 k x) \vec{e}_z$$

afin de donner des densités de courant uniformes pour  $n_1 = 0$  et  $n_2 = 0$ .

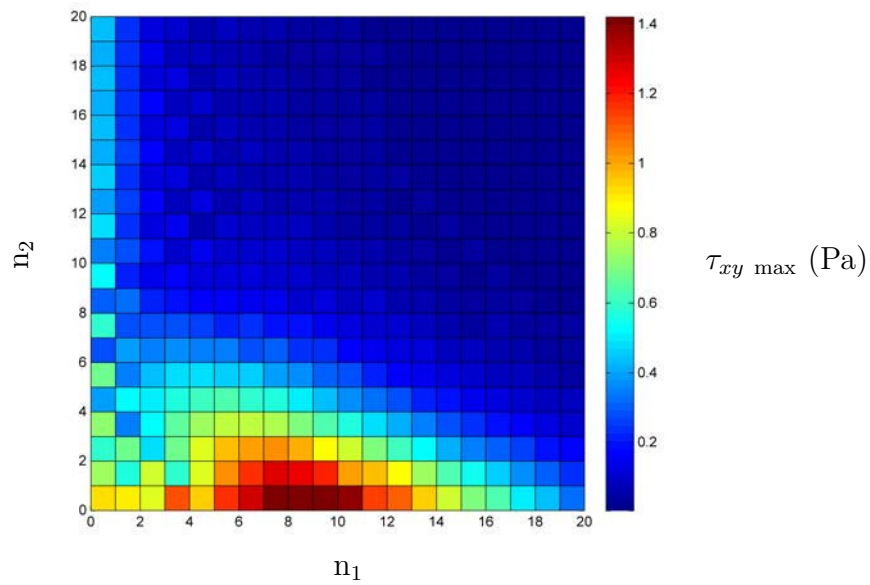
Sur la figure 4.6 page 132, nous avons représenté dans un plan  $(n_1, n_2)$  les valeurs maximales de la contrainte de cisaillement lorsque le fluide est placé dans l’espace inter-nappes.

Nous observons la présence d’un maximum  $\tau_{xy \text{ max}} = 1,41 \text{ Pa}$  pour  $n_1 = 8$  et  $n_2 = 0$ . Nous sommes quasiment au niveau de la contrainte seuil permettant la transition solide–gel pour le fluide. Les simulations que nous avons menées sur différentes configurations magnétiques et mécaniques nous montrent qu’il existe toujours un couple  $(n_1, n_2)$  optimum qui maximise la contrainte de cisaillement au sein du fluide. Nous représentons sur la figure 4.7 page 132 la configuration permettant d’atteindre la contrainte seuil de 3 Pa. Les paramètres sont

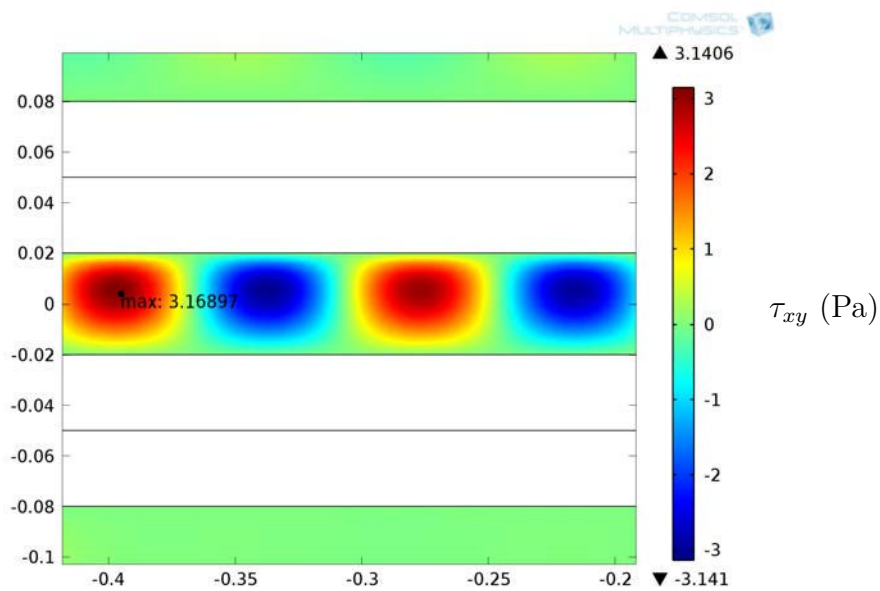
$$n_1 = 8 \quad n_2 = 0 \quad k = 2\pi \text{ m}^{-1} \quad J_0 = 1,5 \cdot 10^4 \text{ A/mm} \quad \chi = -10^{-6} \quad D = 5 \text{ cm}$$

Nos résultats offrent des possibilités pour des problèmes d’optimisation. Pour chaque configuration mécanique étudiée, il est envisageable de déterminer le couple



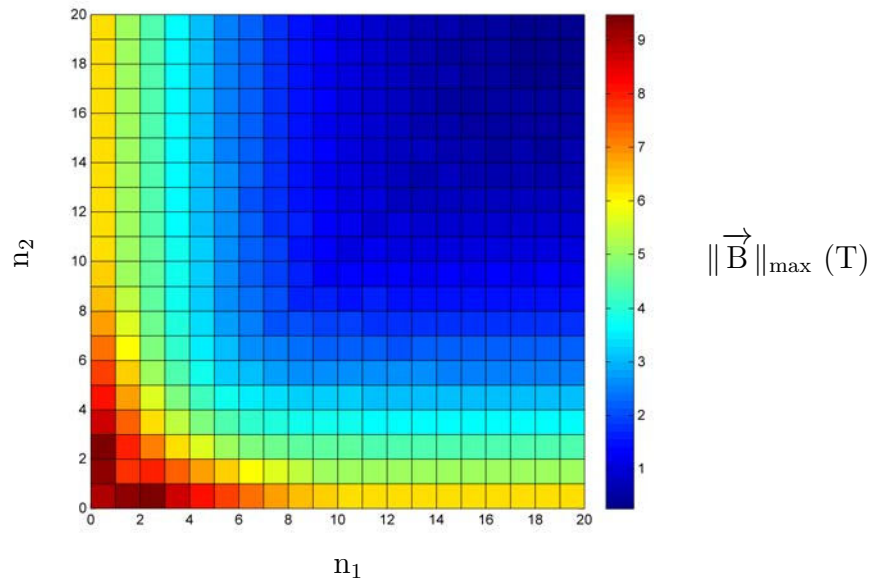


**Figure 4.6** Maxima des contraintes de cisaillement pour l'étude paramétrique en fonction de  $n_1$  et  $n_2$  dans le cas où le fluide est placé dans l'espace inter-nappes



**Figure 4.7** Configuration à deux nappes de courant avec  $J_0 = 1,5 \cdot 10^4$  A/mm,  $n_1 = 8$  et  $n_2 = 0$  permettant de dépasser la contrainte seuil dans le cas où le fluide est placé dans l'espace inter-nappes





**Figure 4.8** Maxima du champ magnétique au sein du fluide pour l'étude paramétrique en fonction de  $n_1$  et  $n_2$  dans le cas où le fluide est placé dans l'espace inter-nappes

$(n_1, n_2)$  qui maximise la contrainte de cisaillement au sein du fluide. Nos études ont été relativement limitées compte-tenu du nombre élevé de simulations (441) à réaliser pour chaque problème mécanique. De façon générale, le choix  $n_1 = n_2$  ne s'est jamais révélé être un optimum. Nous avons observé la tendance suivante : l'optimum est généralement atteint avec un harmonique plus faible pour la nappe inférieure et un harmonique plus élevé pour la nappe supérieure. Notre problème reste cependant ouvert à de futures simulations.

Le fluide est le plus souvent cisailé de façon périodique et le maximum de cisaillement est atteint pour la même valeur de  $y$ . Une mise en œuvre expérimentale est envisageable : l'idée serait de placer un fluide à seuil sur un plan incliné, le fluide se comportant comme un solide. Il existe actuellement des rhéomètres à plans inclinés qui consistent à détecter quand reprend l'écoulement du fluide lorsque l'on augmente l'inclinaison du plan. Cela permet d'en déduire la contrainte seuil du fluide. Notre idée serait de remplacer l'élévation qui permet l'écoulement du fluide par un dispositif magnétique avec le même objectif de faire reprendre l'écoulement grâce aux contraintes de cisaillement des forces magnétiques volumiques.

Remarquons que le maximum de contrainte seuil atteint ne correspond pas au maximum de champ magnétique. En effet, sur la figure 4.8 page 133, nous remarquons qu'il n'y a pas de corrélation entre un fort champ et le maximum de contrainte de cisaillement. Les configurations où le champ magnétique est le plus élevé correspondent à des valeurs de  $n_1$  et  $n_2$  inférieures à 6.

#### 4.2.1.2 Étude paramétrique dans le cas d'un solénoïde parcouru par un courant orthoradial

Nous reprenons la configuration magnétique étudiée au 3.3 page 90. Il s'agit d'un solénoïde infini, infiniment mince et parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale. Pour rappel, la configuration est représentée sur la figure 3.15 page 91. La densité de courant surfacique a pour expression

$$\vec{j}_\theta(z) = J_0 \sin(kz) \vec{e}_\theta \quad (4.15)$$

La simulation nécessite l'utilisation de l'expression des forces magnétiques volumiques en coordonnées cylindriques. À l'aide de l'équation (2.72) page 60, nous avons

$$\vec{f}_{\text{mv}} = \frac{\chi}{\mu_0} \begin{pmatrix} \partial_z A_\theta \partial_{zr} A_\theta - \left( \partial_{rr} A_\theta + \frac{1}{r} \left( \partial_r A_\theta - \frac{A_\theta}{r} \right) \right) \left( \partial_r A_\theta + \frac{A_\theta}{r} \right) \\ 0 \\ \partial_z A_\theta \partial_{zz} A_\theta + \left( \partial_{rz} A_\theta + \frac{\partial_z A_\theta}{r} \right) \left( \partial_r A_\theta + \frac{A_\theta}{r} \right) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Nous représentons sur la figure 4.9 page 135 le champ magnétique et le champ de forces magnétiques volumiques obtenus en simulation. L'allure est identique aux résultats des calculs analytiques des figures 3.17 et 3.18 pages 96 et 97.

Sur la figure 4.10 page 135, nous comparons les valeurs analytiques et simulées de la norme des forces magnétiques volumiques pour  $z$  fixé à  $\lambda/3$ . Nous concluons à un bon accord entre ces deux grandeurs.

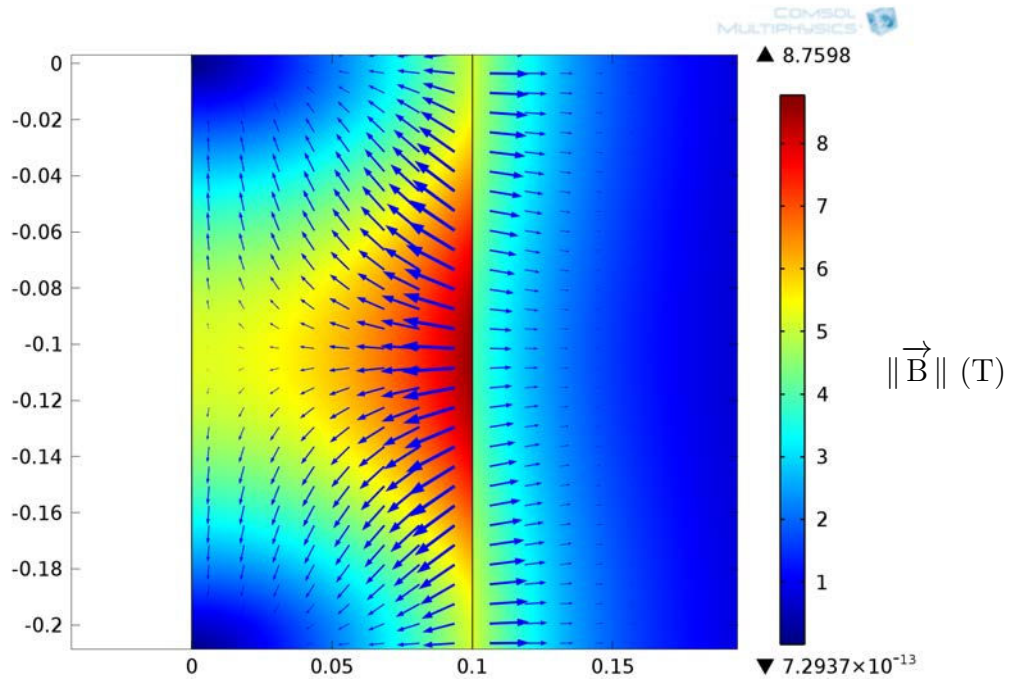
Sur la figure 4.11 page 136, nous avons la configuration axisymétrique correspondant à notre problème. La densité de courant surfacique est représentée en bleu sur la figure. Le fluide à seuil est représenté par le rectangle à l'intérieur du solénoïde. Nous fixons comme conditions aux limites du problème mécanique que la surface du fluide en regard de la densité de courant soit libre et que le déplacement soit nul pour les autres frontières. Le problème mécanique posé ne correspond pas à une réalité physique : un cylindre de fluide avec une surface extérieure libre n'est pas réalisable. Le choix d'une configuration ne respectant pas la symétrie cylindrique entraîne le passage à une simulation 3D plus lourde en temps de calcul. La configuration se rapprochant le plus de celle présentée serait une cuve parallélépipédique placée à l'intérieur du solénoïde. L'axe horizontal serait la droite  $r = 0$  représentée en rouge sur la figure.

Avec les paramètres

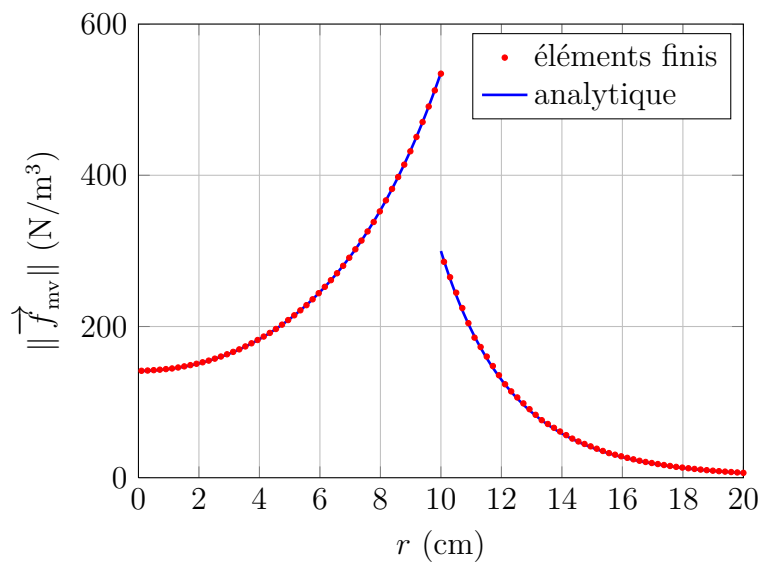
$$k = 2\pi \text{ m}^{-1} \quad J_0 = 10^4 \text{ A/mm} \quad \chi = -10^{-6} \quad R = 10 \text{ cm}$$

nous simulons le problème multiphysique pour une densité de courant prenant différentes valeurs de longueur d'onde. Nous introduisons le paramètre  $n$  avec

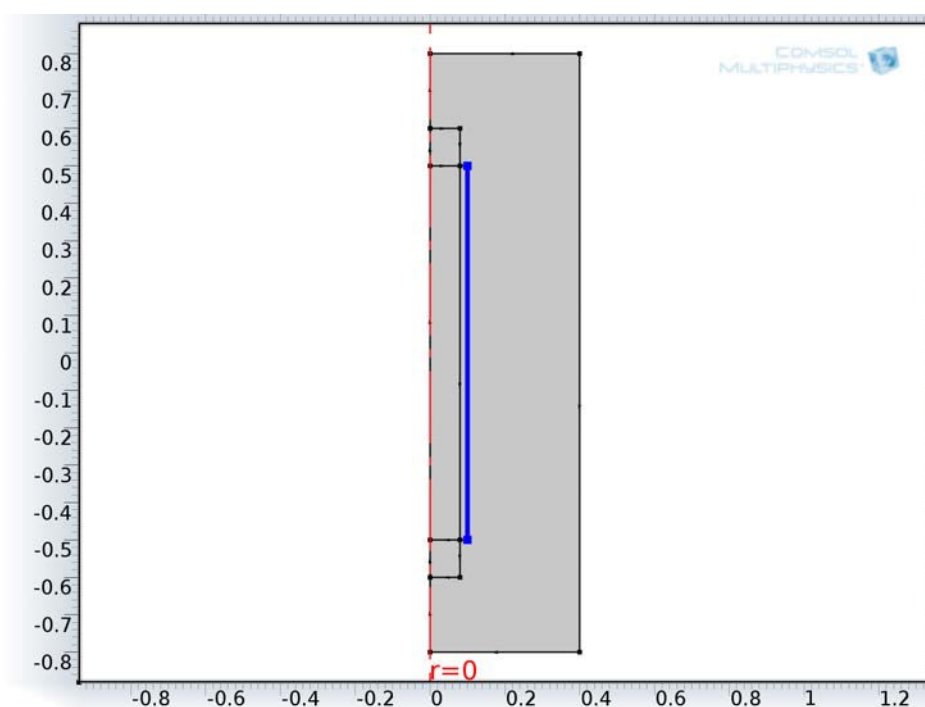
$$\vec{j}_\theta(z) = J_0 \cos(nkz) \vec{e}_\theta \quad (4.17)$$



**Figure 4.9** Norme du champ magnétique et champ de forces magnétiques volumiques obtenus en simulation pour un solénoïde mince parcouru par une densité de courant orthoradiale



**Figure 4.10** Comparaison entre les résultats de la simulation et l'expression analytique de la norme de la force volumique magnétique en  $z = \lambda/3$  pour  $R = 10$  cm



**Figure 4.11** Configuration axisymétrique correspondant à un solénoïde fini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale (en bleu) dans lequel est placé un fluide à seuil (rectangle intérieur)

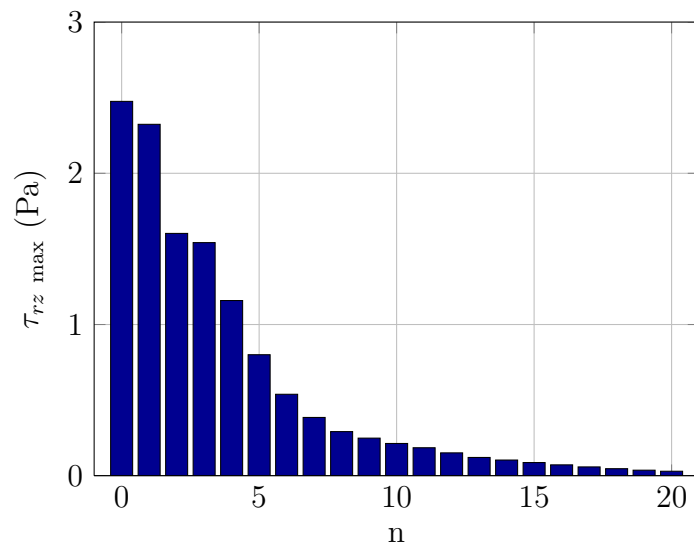
Nous obtenons sur la figure 4.12 page 137 l'évolution en fonction de  $n$  du maximum des contraintes de cisaillement  $\tau_{rz \text{ max}}$ . Nous observons que ce maximum est du même ordre de grandeur que la contrainte seuil caractéristique 3 Pa des fluides à seuil lorsque  $n \leq 2$ .

Comme nous le remarquons sur la figure 4.13 page 137, nous obtenons des valeurs du maximum de la norme du champ magnétique au sein du fluide de l'ordre de 12 T pour  $n = 0$ .

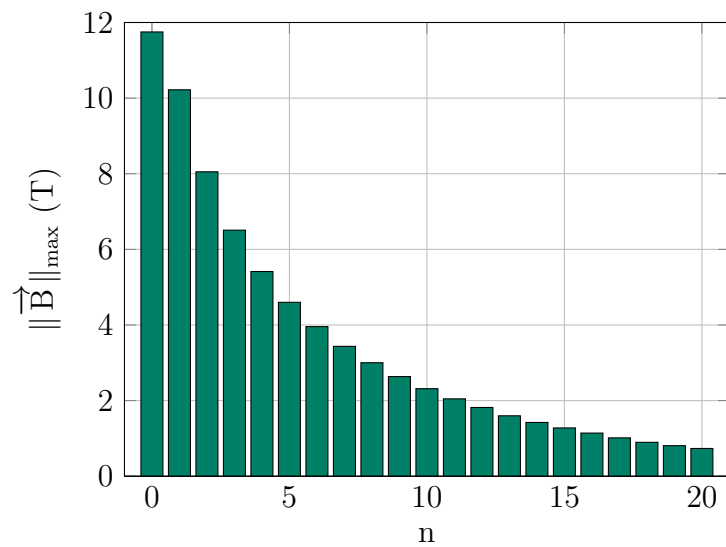
Les valeurs  $n = 0$ ,  $n = 1$  et  $n = 2$  correspondent à un maximum situé aux extrémités du solénoïde. Cela correspond à des effets de bord que nous n'avons pas pris en compte dans notre étude analytique. À partir de  $n = 3$ , le maximum se situe à l'intérieur du solénoïde et se répète de façon périodique. Avec une densité de courant de  $J_0 = 1,5 \cdot 10^4$  A/mm et  $n = 3$ , nous dépassons la contrainte seuil de 3 Pa du fluide. La transition solide-gel est possible. Nous l'avons représenté sur la figure 4.14 page 138.

#### 4.2.1.3 Étude paramétrique dans le cas d'un solénoïde parcouru par un courant longitudinal

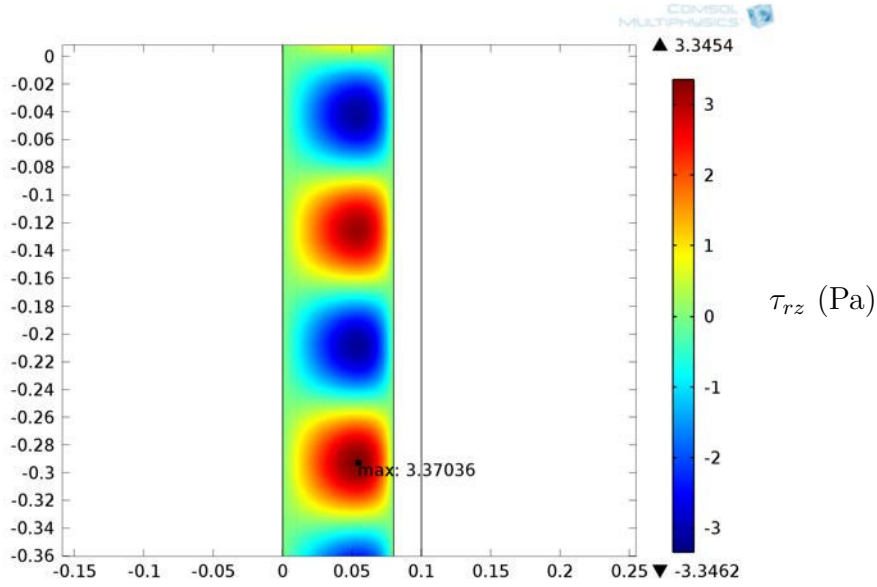
Nous reprenons la configuration magnétique étudiée au 3.4 page 104. Il s'agit d'un solénoïde infini, infiniment mince et parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale. Pour rappel, la configuration est représentée sur la figure 3.26 page 104.



**Figure 4.12** Évolution en fonction de  $n$  du maximum des contraintes de cisaillement au sein du fluide placé dans un solénoïde parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale



**Figure 4.13** Évolution en fonction de  $n$  du maximum du champ magnétique au sein du fluide placé dans un solénoïde parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale



**Figure 4.14** Configuration avec un solénoïde parcouru par une densité de courant orthoradiale avec  $J_0 = 1,5 \cdot 10^4$  A/mm et  $n = 3$  permettant de dépasser la contrainte seuil dans le fluide

La densité de courant surfacique a pour expression

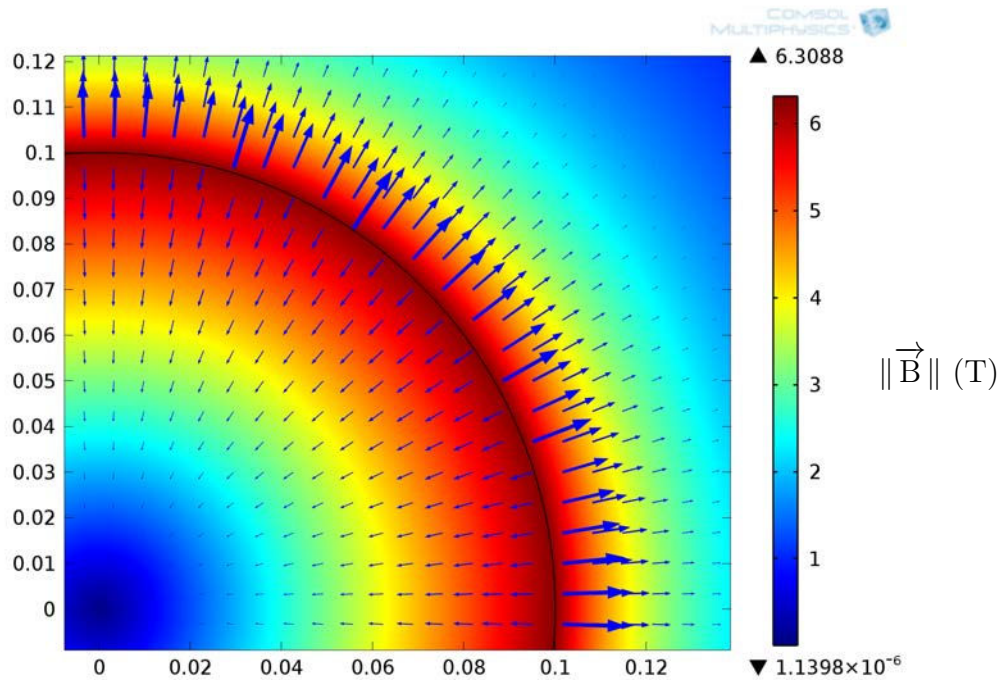
$$\vec{j}_z(\theta) = J_0 \sin(p\theta) \vec{e}_z \quad (4.18)$$

Nous avons choisi de simuler cette configuration dans un repère cartésien 2D  $(O, x, y)$ . Le potentiel-vecteur est selon  $\vec{e}_z$  uniquement dans cette configuration. Les expressions des forces magnétiques volumiques sont donc calculées à partir des expressions de l'équation (4.14) page 127.

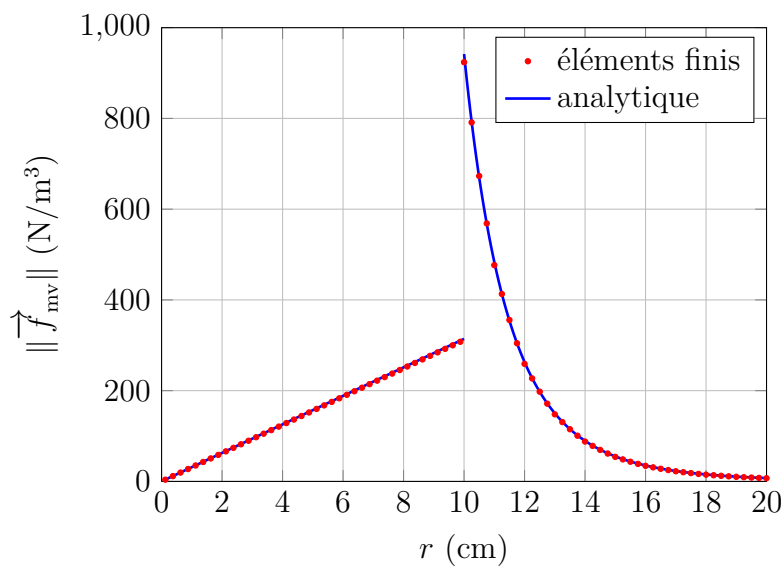
Nous représentons sur la figure 4.15 page 139 le champ magnétique et le champ de forces magnétiques volumiques obtenus en simulation. L'allure est identique aux résultats des calculs analytiques des figures 3.28 et 3.29 pages 107 et 108.

Nous vérifions que les forces magnétiques volumiques sont purement radiales. Nous vérifions l'expression analytique de la norme de ces forces en fonction de  $r$ . La figure 4.16 page 139 montre un bon accord entre les résultats analytiques et les résultats issus de la simulation.

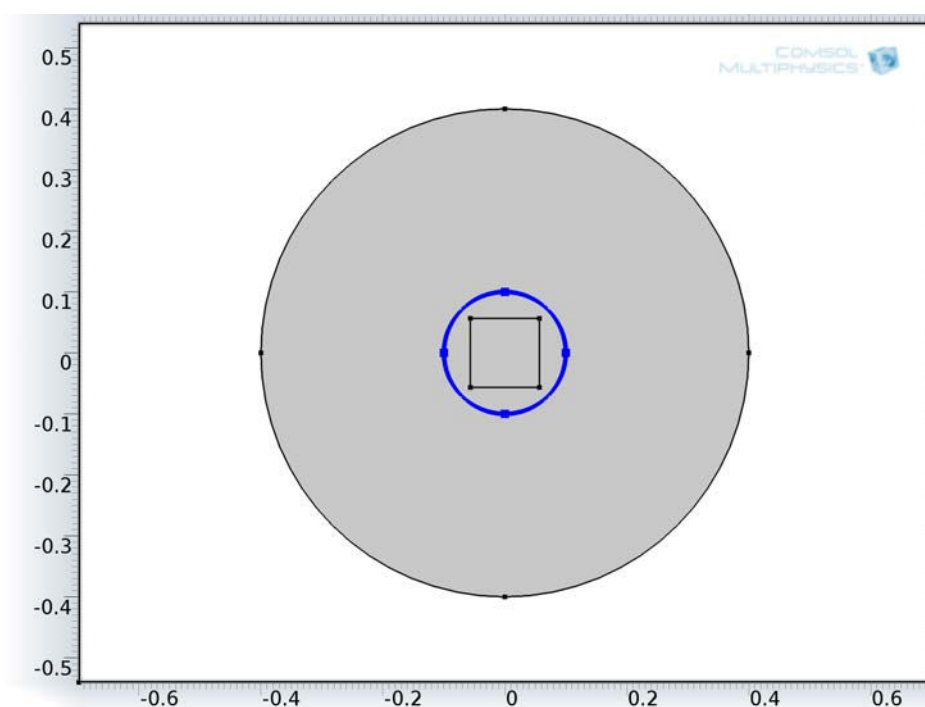
Nous menons l'étude des contraintes de cisaillement au sein d'un fluide placé à l'intérieur du solénoïde. Le fluide est placé dans une cuve à section carrée éloignée d'au moins 2 cm de la densité de courant. Sur la figure 4.17 page 140, nous présentons la configuration magnétique et mécanique dans un plan  $(O, x, y)$ . La densité de courant surfacique est représentée en bleu sur la figure. Les conditions aux limites mécaniques



**Figure 4.15** Norme du champ magnétique et champ de forces magnétiques volumiques obtenus en simulation pour un solénoïde mince parcouru par une densité de courant longitudinale



**Figure 4.16** Comparaison entre les résultats de la simulation et l'expression analytique de la norme de la force volumique magnétique pour  $R = 10$  cm et  $p = 2$



**Figure 4.17** Configuration correspondant à un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale (en bleu) dans lequel est placé un fluide à seuil (carré intérieur)

consistent à empêcher les déplacements horizontaux sur les parois droite et gauche de la cuve, et les déplacements verticaux sur la paroi inférieure.

Avec les paramètres

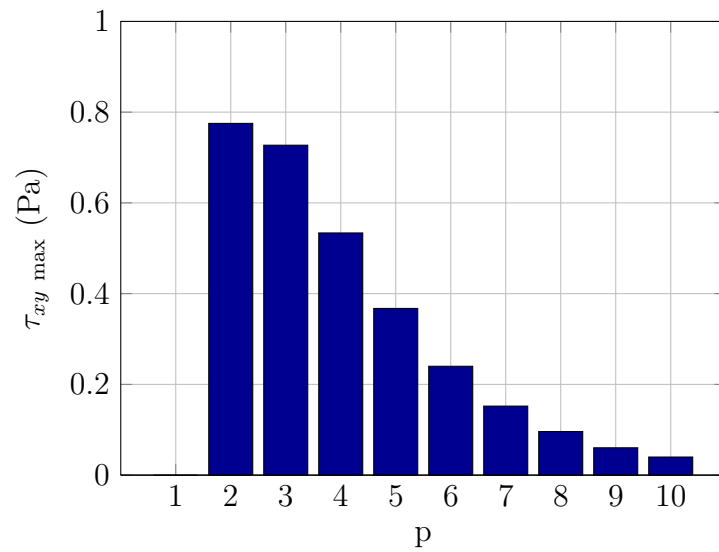
$$J_0 = 10^4 \text{ A/mm} \quad \chi = -10^{-6} \quad R = 10 \text{ cm}$$

nous simulons le problème multiphysique pour différentes valeurs du nombre de paires de pôle  $p$ . Nous obtenons sur la figure 4.18 page 141 l'évolution en fonction de  $p$  du maximum des contraintes de cisaillement  $\tau_{xy \text{ max}}$ . Nous trouvons des contraintes de cisaillement nulles dans le cas  $p = 1$ . Dans ce cas, le champ magnétique est uniforme et le champ de forces volumiques magnétiques est nul. Nous l'avions noté lors de l'étude théorique au 3.4.4.3 page 112.

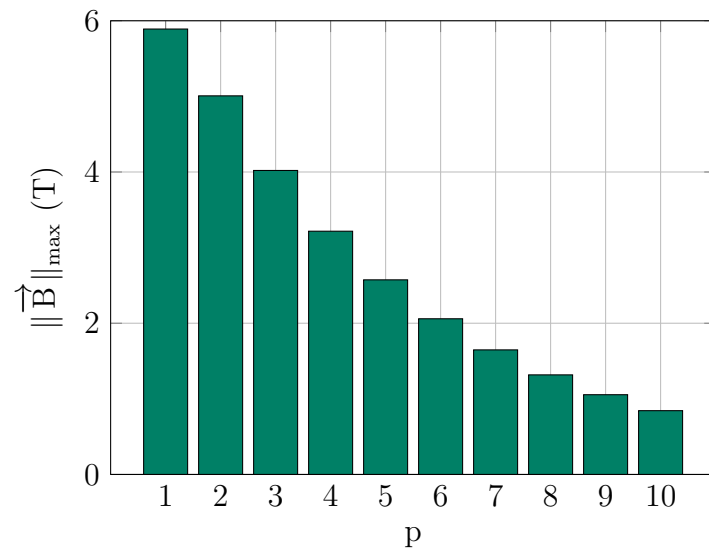
Comme nous le remarquons sur la figure 4.19 page 141, nous obtenons des valeurs du maximum de la norme du champ magnétique au sein du fluide de l'ordre de 6 T pour  $p = 1$  et qui diminue lorsque  $p$  augmente.

Le niveau de contrainte de cisaillement maximum atteint est de 0,78 Pa lorsque  $p = 2$ . Lorsque  $p$  augmente, le maximum des contraintes de cisaillement diminue et devient très faible (inférieur à 0,1 Pa) lorsque  $p \geq 8$ . La transition solide-gel à 3 Pa est possible dans le cas  $p = 2$  et  $J_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ A/mm}$ . Nous le présentons sur la figure 4.20 page 142.

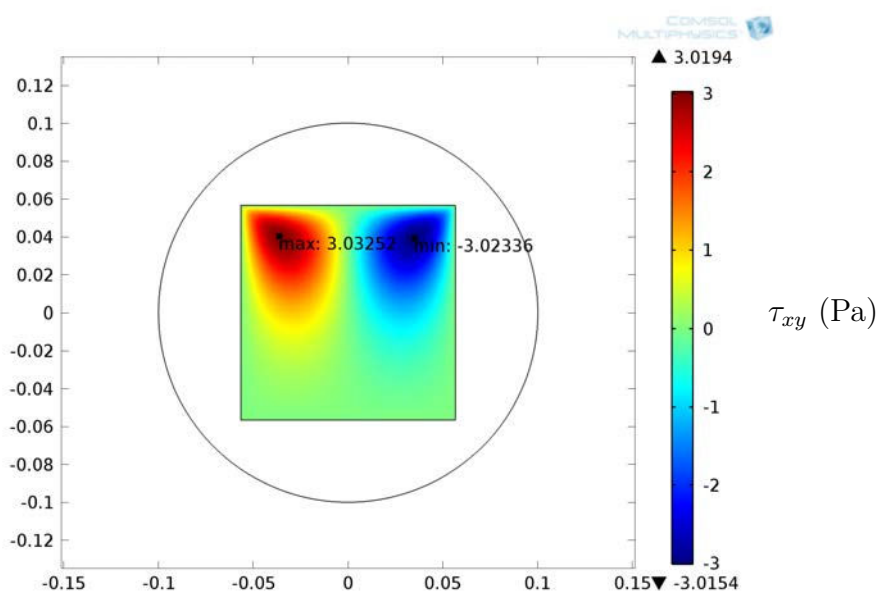




**Figure 4.18** Évolution en fonction de  $p$  du maximum des contraintes de cisaillement au sein du fluide placé dans un solénoïde parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale



**Figure 4.19** Évolution en fonction de  $p$  du maximum du champ magnétique au sein du fluide placé dans un solénoïde parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale



**Figure 4.20** Configuration avec un solénoïde parcouru par une densité de courant longitudinale avec  $J_0 = 2.10^4$  A/mm et  $p = 2$  permettant de dépasser la contrainte seuil dans le fluide

### 4.2.2 Analyse des études paramétriques

Le principal apport de notre étude est la mise en évidence de configurations magnétiques et mécaniques particulières pour maximiser la contrainte de cisaillement. Dans chaque cas, le choix des différents paramètres est primordial pour atteindre la contrainte seuil de 3 Pa.

Nous pouvons conclure à partir des résultats précédents sur les configurations les mieux adaptées à la transition solide–gel dans les fluides à seuil : les nappes de courants ainsi que le solénoïde parcouru par une densité de courant orthoradiale semblent être les meilleures solutions. Elles permettent, sous certaines conditions et avec des paramètres précis, de dépasser la contrainte seuil pour une densité de courant surfacique de  $1,5.10^4$  A/mm. Nos meilleures configurations sont :

- deux nappes parallèles parcourues par des densités de courant possédant des harmoniques différents. Avec la configuration mécanique que nous avons choisie, nous avons trouvé  $n_1 = 8$  et  $n_2 = 0$  (densité de courant uniforme) ;
- un solénoïde parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale et, dans notre cas, pour un longueur d’onde  $\lambda = \frac{2\pi}{3k} = 33$  cm.

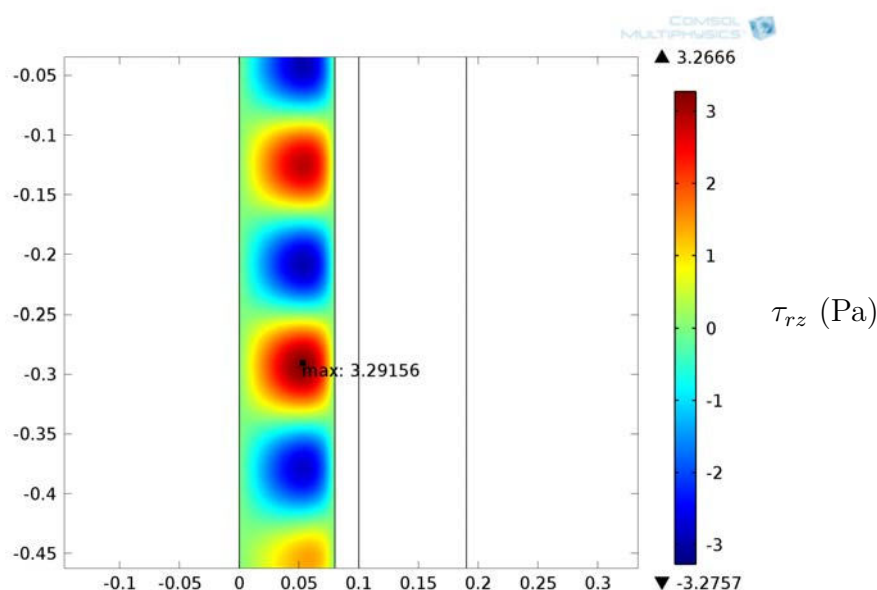
Suite aux simulations, nous constatons que le choix de la configuration mécanique modifie la contrainte de cisaillement maximale atteinte. Le choix de la géométrie semble influencer davantage que la loi de comportement du fluide. Cela permet d’envisager la possibilité de transition solide–gel sur un grand nombre de fluides à seuil à condition

de trouver la géométrie permettant d’optimiser la contrainte de cisaillement. Notons également que nous partons d’un état où le fluide n’est pas contraint. Les actions des forces magnétiques volumiques pourraient être de réaliser la transition solide–gel à partir d’un état pré-contraint. Les niveaux de contraintes de cisaillement nécessaires seraient alors plus faibles.

Pour toutes les configurations, les valeurs des contraintes seuils atteintes sont très inférieures aux valeurs du terme croisé du tenseur des actions magnétiques étudié au chapitre 3. Cela s’explique par la prise en compte du problème mécanique (géométrie, conditions aux limites) et à la loi de comportement du fluide (module d’Young, coefficient de Poisson). Des études complémentaires seraient nécessaires pour déterminer la configuration mécanique la mieux adaptée. Il serait notamment intéressant de déterminer la position et la géométrie qui permet d’obtenir la plus grande contrainte seuil pour chaque configuration magnétique. En diagonalisant le tenseur des actions magnétiques, il est possible de déterminer les contraintes principales et leurs directions principales. Le fluide devra être placé en fonction de ces directions afin de maximiser la contrainte de cisaillement.

L’objectif de dépasser la contrainte seuil de 3 Pa est atteinte pour un minimum de densité de courant surfacique de  $1,5 \cdot 10^4$  A/mm. La valeur de densité de courant surfacique nécessaire est particulièrement élevée et ne correspond pas à des dispositifs magnétiques ayant des épaisseurs de courant permettant de faire l’hypothèse d’un courant surfacique. Avec une densité de courant de 300 A/mm<sup>2</sup> (performances actuelles limites pour un fil supraconducteur sous 12 T à 4 K [70]), l’épaisseur de nos dispositifs seraient au minimum de 5 cm. Compte-tenu des dimensions des configurations présentées, l’hypothèse de densité de courant surfacique n’est pas vérifiée. Cependant, notre objectif n’était pas de concevoir un dispositif magnétique mais de faire le lien entre l’approche théorique du chapitre 3 et les résultats de simulation. En reprenant la deuxième configuration, nous avons simulé le cas d’un solénoïde de 9 cm d’épaisseur, parcouru par une densité de courant de 300 A/mm<sup>2</sup> et permettant de dépasser la contrainte seuil de 3 Pa. Les résultats sont présentés sur la figure 4.21 page 144. Le champ maximum sur fil atteint est d’environ 12 T et correspond aux limites actuelles des fils supraconducteurs en alliage de niobium–étain existant pour les applications en fort champ. Nous souhaitons insister sur le caractère exploratoire de notre thèse : notre objectif est de démontrer la possibilité de réaliser la transition solide–gel à l’aide de champs magnétiques intenses. Le dimensionnement et la réalisation d’un dispositif magnétique le permettant est un autre travail qui reste à mener.

Des études complémentaires seraient nécessaires pour mettre en œuvre un dispositif expérimental optimisé. L’utilisation du régime impulsionnel pour générer un champ magnétique intense serait une solution adaptée pour créer le champ de force nécessaire à la transition solide–gel.



**Figure 4.21** Configuration avec un solénoïde de 9 cm d'épaisseur et parcouru par une densité de courant orthoradiale avec  $J_0 = 300 \text{ A/mm}^2$  et  $n = 3$  permettant de dépasser la contrainte seuil dans le fluide

### 4.3 Actions des forces magnétiques volumiques sur l'écoulement d'un fluide à seuil

#### 4.3.1 Conditions nécessaires à la modification de l'écoulement

Nos simulations ont débuté avec l'action des forces magnétiques volumiques sur un fluide newtonien [71, 72]. Les modifications des profils de vitesse et du champ de pression sont possibles lorsque les conditions établies au chapitre 2 sur le nombre adimensionnel  $|Ne|$  sont vérifiées. Pour des fluides à seuil, les simulations ne montrent aucune modification des écoulements pour les valeurs caractéristiques choisies du fluide au 4.1.1.3 page 123 et pour les valeurs des densités de courant surfaciques utilisées pour la partie statique au 4.2 page 127. En augmentant d'un ordre de grandeur les densités de courant (en les multipliant par 10, les forces sont multipliées par 100), nous n'avons toujours pas d'effets sur l'écoulement du fluide à seuil.

Nous avons donc mené une étude en faisant varier le nombre de Bingham de l'écoulement. Nous observons la possibilité de modifier l'écoulement en trouvant un compromis entre les valeurs du nombre de Bingham  $B_n$  et du nombre adimensionnel introduit dans ce mémoire  $Ne$  au 2.1.3.1 page 41. Pour rappel, nous avons

$$B_n = \frac{\tau_c L}{\mu u_0} \quad (4.19)$$

et

$$\text{Ne} = \frac{\chi B^2}{\mu_0 \rho u_0^2} \quad (4.20)$$

La variable commune à ces deux expressions est la vitesse moyenne de l'écoulement  $u_0$ . Nous avons observé à partir des simulations numériques que les modifications de l'écoulement sont possibles pour des faibles valeurs du nombre de Bingham. Cependant, nous avons montré à partir de l'analyse dimensionnelle menée au 2.1.3.1 page 41 que la modification d'écoulement est possible pour des faibles valeurs de  $u_0$ . Nous avons conclu à la nécessité d'avoir  $u_0 < 1$  cm/s.

Nous introduisons le nombre adimensionnel correspondant au rapport entre  $|\text{Ne}|$  et  $B_n^2$  avec la volonté de ne plus faire apparaître la vitesse moyenne de l'écoulement

$$\boxed{\frac{|\text{Ne}|}{B_n^2} = \frac{|\chi|}{\mu_0 \rho} \left( \frac{\mu B}{L \tau_c} \right)^2} \quad (4.21)$$

Les actions des forces magnétiques volumiques sur l'écoulement seront possibles pour des valeurs élevées de ce nombre adimensionnel. Le fluide à seuil devra donc avoir la contrainte seuil  $\tau_c$  la plus faible possible et la viscosité de Bingham la plus grande possible. Physiquement, cela correspond à un fluide dont le comportement visqueux l'emporte sur le comportement plastique. Ce comportement est observé pour des solutions de polymères de type Carbopol® et souvent utilisé en rhéologie. Notons également que la distance caractéristique  $L$  intervient au carré et au dénominateur. Les écoulements de faibles dimensions seront donc plus sensibles aux actions des forces magnétiques volumiques. Ce résultat est favorable car il réduit la zone de champ intense nécessaire et par conséquent la taille de la source de champ magnétique.

### 4.3.2 Exemple de modifications

Nous souhaitons montrer avec un exemple particulier les modifications qui peuvent être observées sur l'écoulement d'un fluide à seuil. Nous avons retenu la configuration à deux nappes de courant parallèles et gardé la meilleure configuration agissant sur la transition solide-gel (maximum de contrainte de cisaillement au sein du fluide) correspondant à la figure 4.7 page 132.

Les paramètres choisis pour la simulation sont pour le fluide

$$\mu = 0,05 \text{ Pa.s} \quad \tau_c = 0,1 \text{ Pa} \quad m = 100 \text{ s} \quad u_0 = 1 \text{ cm/s} \quad B_n \simeq 10$$

et pour la configuration magnétique

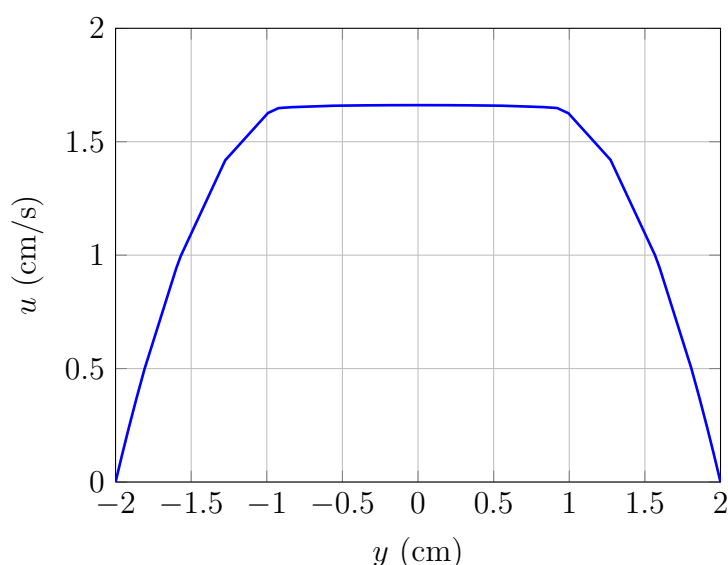
$$n_1 = 8 \quad n_2 = 0 \quad k = 2\pi \text{ m}^{-1} \quad J_0 = 10 \cdot 10^4 \text{ A/mm} \quad \chi = -10^{-6} \quad D = 5 \text{ cm}$$

La densité de courant a été multipliée par 10 par rapport à l'étude menée en statique.

### 4.3.2.1 Profil de vitesse sans forces magnétiques

En l'absence de champ magnétique, nous vérifions que le profil de vitesse de l'écoulement est similaire à celui présenté sur la figure 2.7 page 54 caractéristique des fluides à seuil. Pour la simulation, nous avons utilisé le module dédié à la mécanique des fluides de COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>. Nous avons cependant introduit le modèle régularisé en définissant une variable correspondant à la viscosité apparente évoluant selon le modèle de Papanastasiou [55].

Le profil de vitesse pour l'écoulement est présenté sur la figure 4.22 page 146. Nous observons une zone isovitesse caractéristique des fluides à seuil. Dans cette zone, la contrainte de cisaillement  $|\tau|$  est inférieure à  $\tau_c$ .



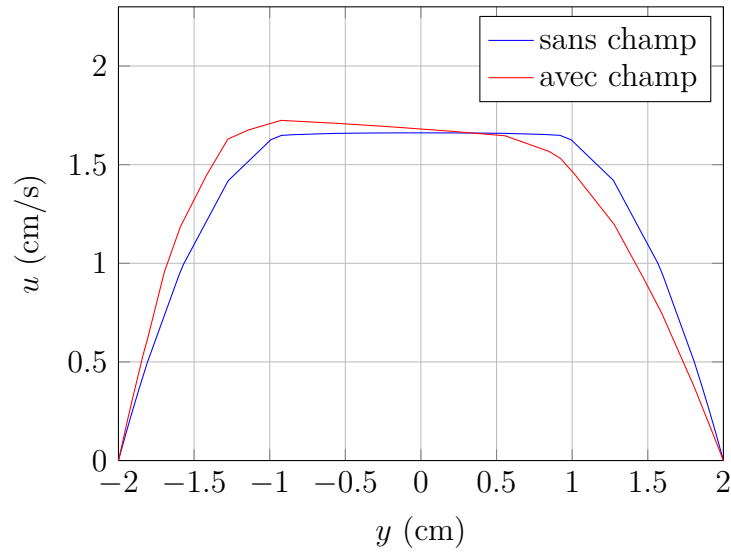
**Figure 4.22** Profil de vitesse de l'écoulement du fluide à seuil sans forces magnétiques volumiques

### 4.3.2.2 Profil de vitesse avec forces magnétiques

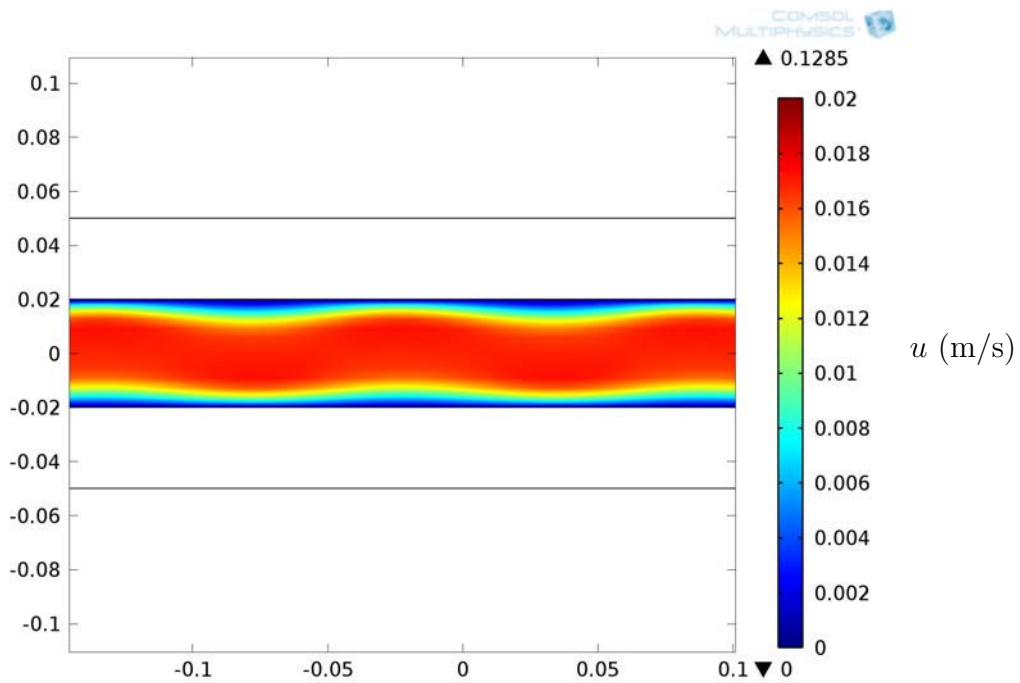
L'objectif est donc d'agir au niveau des extrémités de la zone isovitesse afin de modifier l'état du fluide en dépassant localement la contrainte seuil du fluide. L'écoulement est modifié en présence du champ de forces magnétiques volumiques. Nous observons sur la figure 4.23 page 147 les profils de l'écoulement avec et sans champ magnétique.

Nous observons une déformation et un décalage de la zone isovitesse de l'écoulement. Cette déformation varie le long de l'écoulement. Nous représentons sur la figure 4.24 page 147 le champ de vitesse le long de l'écoulement. Nous observons des ondulations du fluide liées à la longueur d'onde de la densité de courant de la nappe supérieure. Le motif se répète tant que le fluide est dans l'espace inter-nappes.

Les conséquences sur l'écoulement sont multiples. Le champ de vitesse et le champ de pression du fluide sont modifiés. Compte-tenu de la complexité du comportement



**Figure 4.23** Comparaison des profils de vitesse de l'écoulement du fluide à seuil avec et sans forces magnétiques volumiques



**Figure 4.24** Champ de vitesse pour un fluide à seuil soumis au champ de forces magnétiques volumiques

des fluides à seuil (généralement rhéofluidifiants et thixotropes), nous ne pouvons pas évaluer précisément les effets des champs magnétiques intenses sur les fluides à seuil. Le problème devient alors spécifique à la mécanique des fluides complexes et s'ouvre vers une mise en œuvre expérimentale. Rappelons que notre objectif est de montrer la possibilité d'agir sur l'écoulement et de donner les conditions nécessaires à l'action des forces magnétiques volumiques.

La convergence vers la solution lors de la résolution de notre problème par la méthode des éléments finis n'est pas toujours assurée. Beaucoup de paramètres entrent en jeu : le maillage, la loi de comportement du fluide, la géométrie. Afin d'assurer la convergence, il est parfois nécessaire d'entrer comme condition initiale la solution du problème avec un fluide newtonien sans champ magnétique. Ensuite, la solution avec un fluide newtonien et les sources de champ magnétique sert de condition initiale à la résolution du problème avec un fluide à seuil.

Les niveaux de champ magnétique nécessaires pour obtenir ces modifications sont extrêmement élevés. Plusieurs dizaines de teslas sont nécessaires. Le régime impulsif devient incontournable pour générer ces champs intenses. Le choix du fluide est également primordial : il est nécessaire de choisir les conditions telles que le nombre adimensionnel défini par l'équation (4.21) page 145 soit le plus grand possible. La seule condition géométrique qui apparaît dans ce nombre adimensionnel est la distance caractéristique  $L$ . Elle intervient au carré et au dénominateur. Ce résultat est largement favorable car il encourage des écoulements de faibles dimensions et donc des champs intenses sur des volumes réduits. Un changement de géométrie entraîne cependant la modification de la configuration magnétique optimale pouvant agir sur le fluide. La réduction d'échelle mécanique a des conséquences sur les sources de champ magnétique. L'étude du fluide en statique a été pour cela très bénéfique pour notre étude en dynamique. Elle donne une configuration permettant de cisailer efficacement le fluide. De plus, l'étude paramétrique en statique est plus rapide et plus stable en terme de convergence que l'étude en dynamique.

### 4.3.3 Possibilités expérimentales

Nous souhaitons présenter brièvement l'exemple du dispositif expérimental que nous avons mis en œuvre au laboratoire. Les valeurs de champ magnétique accessibles n'ont pas permis de rendre observables les modifications sur l'écoulement d'un fluide à seuil. Le lecteur trouvera dans ces quelques lignes les détails de notre dispositif. La mise en place de la partie expérimentale a pris six mois.

Le circuit hydraulique représenté sur la figure 4.25 page 149 est composé de tubes de PVC transparents et alimenté en circuit fermé par une pompe péristaltique adaptée aux fluides complexes de type gels. Une partie du circuit est fixée et la partie utile est amovible de telle sorte à modifier la section du tube par exemple. Nous avons placé sur le tube utile un capteur de pression affleurant. D'après l'étude en simulation, des variations de pressions importantes ont lieu au sein du fluide. Nous le représentons sur la figure 4.26 page 149.





Figure 4.25 Photographie annotée du montage expérimental

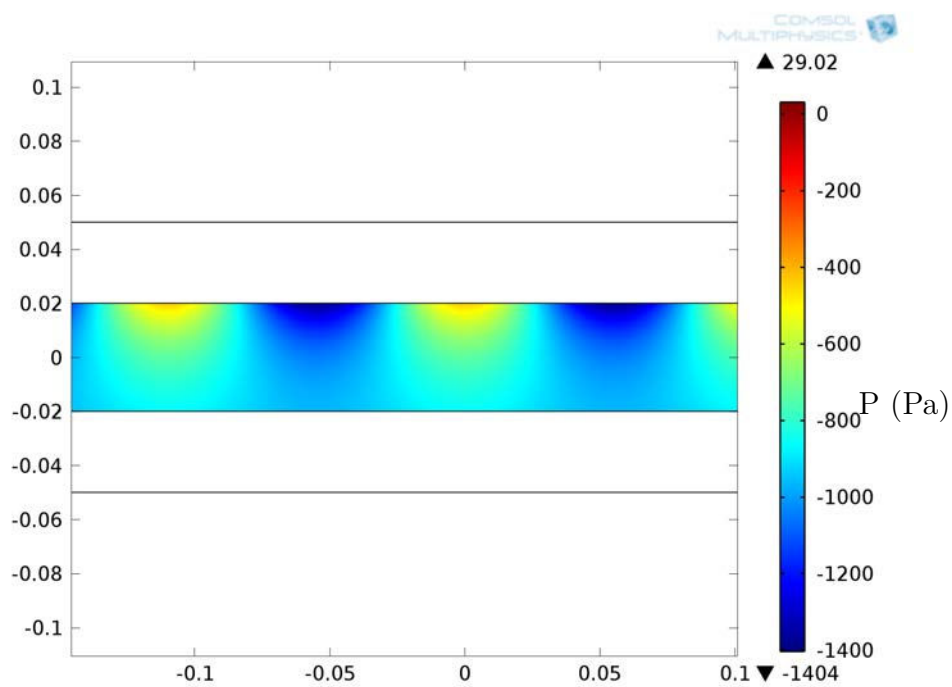
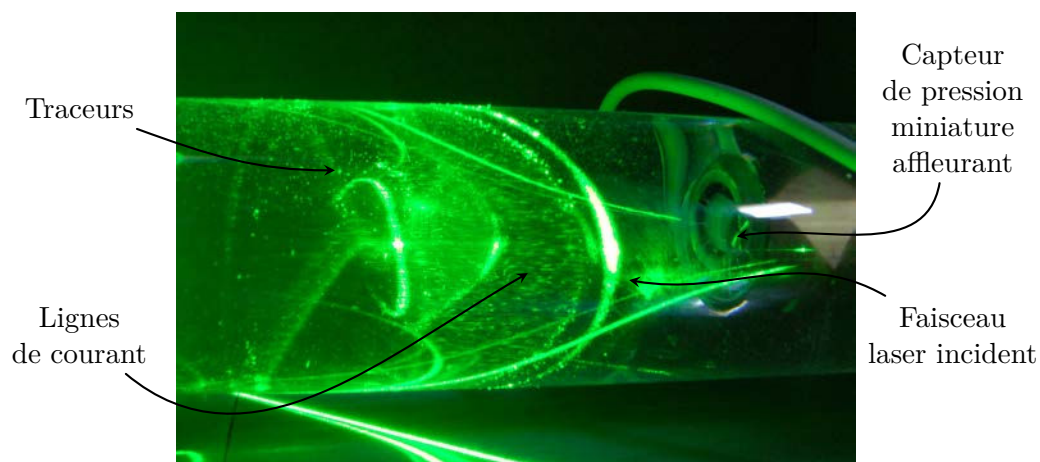


Figure 4.26 Champ de pression (pression relative) pour un fluide à seuil soumis au champ de forces magnétiques volumiques

Enfin, un dispositif de visualisation du profil de vitesse de l'écoulement a été mis en place. Il s'agit d'une méthode PIV (Particle Image Velocimetry) consistant à observer la réflexion d'un faisceau laser par de fines particules (des traceurs) mélangées au fluide. L'enregistrement d'une vidéo ou d'une photographie permet d'observer les lignes de courant de l'écoulement. Nous avons testé cette méthode avec succès sur un écoulement d'eau comme illustré sur la figure 4.27 page 150.

Nous avons utilisé une bobine résistive en régime impulsionnel (décharge d'un banc de condensateurs). Nous estimons à 8 T la valeur maximale de la norme du champ magnétique créée lors de la décharge. Cette valeur reste insuffisante pour détecter des variations de pression ou des modifications pour les lignes de courant de l'écoulement.



**Figure 4.27** Photographie annotée de la mesure de pression et de la visualisation des lignes de courant par la méthode PIV

## 4.4 Conclusion

Pour la partie statique, nous avons atteint l'objectif de dépasser à l'aide des forces magnétiques volumiques la contrainte seuil de 3 Pa au sein du fluide. Il est donc possible de réaliser sans contact la transition solide-gel pour un fluide à seuil. Au cours de notre étude, nous avons montré que le choix de la configuration magnétique est très important et très précis et qu'il conduit à des niveaux de contraintes de cisaillement très différents. L'utilisation de dispositifs magnétiques existants comme des bobines hybrides fort champ n'est pas une configuration optimale. Les forces sont proportionnelles au gradient du carré du champ magnétique ce qui nécessite un champ non uniforme en un maximum de points de l'espace. De plus, le facteur déterminant est le tenseur des actions magnétiques qui permet de maximiser la contrainte de cisaillement au sein du fluide.

La configuration mécanique (géométrie, conditions aux limites et loi de comportement) est également essentielle pour obtenir la plus grande contrainte de cisaillement. Les possibilités de transition solide-gel requièrent une étude couplée du problème mécanique et du problème magnétique. Nous avons posé les équations du problème de façon séparée mais il apparaît que le choix de la configuration optimale doit se faire en tenant compte des problèmes mécaniques et magnétiques. La configuration mécanique devra avoir des surfaces libres le plus proche possible des zones de fort cisaillement. Ces zones devront être déterminées à partir du tenseur des actions magnétiques et des directions principales des contraintes.

Concernant la partie dynamique, nous sommes parvenus à visualiser les modifications possibles sur l'écoulement d'un fluide à seuil. Nous avons mis en évidence le nombre adimensionnel  $|Ne|/B_n^2$  qui permet de donner des informations sur le choix du fluide à seuil et de la configuration mécanique et magnétique susceptibles de modifier le plus efficacement le fluide.

$$\frac{|Ne|}{B_n^2} = \frac{|\chi|}{\mu_0 \rho} \left( \frac{\mu B}{L \tau_c} \right)^2$$

La modification sera d'autant plus efficace que ce nombre adimensionnel est grand. Les fluides à seuil devront donc avoir une faible contrainte seuil et une forte viscosité de Bingham. Les écoulements de petites tailles ( $L$  faible) seront plus sensibles aux forces magnétiques volumiques. C'est un point positif pour le dimensionnement de la source de champ magnétique.



---

## Références bibliographiques du chapitre 4

- [45] E. PLAUT. *Cours de mécanique des milieux continus*. Cours de l'école nationale supérieure des Mines de Nancy. 2012. URL : <http://www.mines.inpl-nancy.fr/emmanuel.plaut/mmc/pol.pdf> (visité le 15 juillet 2012) (cf. p. 37, 122).
- [51] P. COUSSOT et C. ANCEY. *Rhéophysique des pâtes et des suspensions*. EDP Sciences, 1999. ISBN : 2868834019 (cf. p. 49, 52, 53, 122).
- [52] P. OSWALD. *Rhéophysique : Ou comment coule la matière*. Belin, sept. 2005. ISBN : 2701139694 (cf. p. 49, 55, 123).
- [55] T. C. PAPANASTASIOU. « Flows of Materials with Yield ». Dans : *Journal of Rheology* 31.5 (1987), p. 385–404 (cf. p. 52, 123, 146).
- [58] H. BARNES. « The yield stress – a review or ‘παντα ρει’ – everything flows? » Dans : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 81.1-2 (1999), p. 133–178 (cf. p. 53, 122, 123).
- [62] P. COUSSOT et al. « Avalanche Behavior in Yield Stress Fluids ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 88 (17 avr. 2002), p. 175501 (cf. p. 122).
- [63] F. MAHAUT et al. « Yield stress and elastic modulus of suspensions of noncolloidal particles in yield stress fluids ». Dans : *Journal of Rheology* 52.1 (2008), p. 287–313 (cf. p. 123).
- [64] Y. DIMAKOPOULOS et J. TSAMOPOULOS. « Transient displacement of a viscoplastic material by air in straight and suddenly constricted tubes ». Dans : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 112.1 (2003), p. 43–75 (cf. p. 124).
- [65] M. CHATZIMINA et al. « Cessation of Couette and Poiseuille flows of a Bingham plastic and finite stopping times ». Dans : *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 129.3 (2005), p. 117–127 (cf. p. 124).
- [66] E. MITSOULIS. « On creeping drag flow of a viscoplastic fluid past a circular cylinder : wall effects ». Dans : *Chemical Engineering Science* 59.4 (2004), p. 789–800. ISSN : 0009-2509 (cf. p. 124).
- [67] N. CHAFE et J. R. de BRUYN. « Drag and relaxation in a bentonite clay suspension ». Dans : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 131.1–3 (2005), p. 44–52. ISSN : 0377-0257 (cf. p. 124).
- [68] P. CIARLET et E. LUNÉVILLE. *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique : Tome 1, Concepts généraux*. Les Presses de l'ENSTA, fév. 2009. ISBN : 2722509172 (cf. p. 125, 126).

- [69] J.-C. CUILLIÈRE. *Introduction à la méthode des éléments finis - Cours et exercices corrigés*. Dunod, août 2011. ISBN : 2100564382 (cf. p. 126).
- [70] *Nb<sub>3</sub>Sn Superconducting Wires*. Supercon Inc. 2012. URL : [http://www.supercon-wire.com/products\\_nb3sn.html](http://www.supercon-wire.com/products_nb3sn.html) (visité le 8 septembre 2012) (cf. p. 143).
- [71] L. HEYRENDT et al. « Shear stress generated by a superconducting system on a complex fluid flow ». Dans : *2008 Applied Superconductivity Conference*. Chicago, USA, 17-22 août 2008 (cf. p. 144).
- [72] L. HEYRENDT, J. LÉVÊQUE et D. NETTER. « Thixotropic gel flow under superconducting magnets : analytical and numerical studies, experimental project ». Dans : *2010 Applied Superconductivity Conference*. Washington D.C., USA, 1-6 août 2010 (cf. p. 144).

---

## Conclusions générales et perspectives

Cette thèse se concentre sur l'étude des fluides à seuil soumis à des champs magnétiques intenses.

La première approche de cette thèse consiste à comprendre les effets possibles des champs magnétiques intenses sur les fluides à seuil. En examinant le couplage entre ces fluides et les forces magnétiques volumiques, nous avons successivement mis en évidence les conditions nécessaires à la modification de l'écoulement. Tout d'abord, nous avons montré à partir du nombre adimensionnel  $Ne$  que les forces magnétiques volumiques pourront agir uniquement sur des écoulements à faibles vitesses, soumis à des champs magnétiques intenses dépassant 10 T. Ces champs ne pourront pas être uniformes car les forces sont proportionnelles au gradient du carré du champ magnétique. Ensuite, il est nécessaire de créer des forces agissant sur les contraintes de cisaillement au sein du fluide. En effet, la loi de comportement du fluide à seuil est directement exprimée en fonction de sa contrainte de cisaillement. Nous ne cherchons pas nécessairement des modifications de pression (termes de la diagonale du tenseur des contraintes) mais des modifications de contraintes de cisaillement (termes croisés du tenseur des contraintes). Enfin, notre étude magnétique a permis de mettre en évidence le tenseur des actions magnétiques qui est une grandeur fondamentale pour prédire les contraintes imposées au fluide.

Les conditions que nous venons d'énoncer sont nécessaires mais non suffisantes pour agir sur un fluide à seuil. La seconde approche de notre travail consiste à étudier des configurations magnétiques susceptibles d'agir efficacement sur ces fluides. Nous avons réalisé les calculs analytiques de champs magnétiques, de champs de forces volumiques et de tenseurs des actions magnétiques pour trois distributions de courants surfaciques. Nos résultats montrent l'importance du choix des paramètres de ces configurations pour maximiser le terme croisé du tenseur des actions magnétiques. Le choix des harmoniques d'espace de la configuration magnétique se révèle capital car il détermine à la fois la taille de la zone utile et le niveau de contrainte atteint dans cette zone.

Finalement, nous nous sommes intéressés au couplage du problème mécanique et des différentes configurations magnétiques. La simulation numérique par la méthode des éléments finis a permis de résoudre notre problème dans différentes situations. Dans un premier temps, nous avons montré qu'il était possible de dépasser la contrainte seuil d'un fluide à seuil initialement statique à partir des forces magnétiques volumiques

créées par les configurations magnétiques étudiées. Dans ce cas, le fluide à seuil est modélisé par un solide élastique parfait. Des zones de cisaillement apparaissent nettement au sein du fluide. Il est ainsi possible de réaliser sans contact la transition solide–gel. Le principal apport de cette méthode réside dans l’absence de contact entre la source de champ magnétique et le fluide. Dans un second temps, nous avons observé la modification de l’écoulement d’un fluide à seuil sous champ magnétique intense. Des conditions particulières sont requises. Un compromis est à trouver entre un faible nombre de Bingham, inversement proportionnel à la vitesse moyenne de l’écoulement, et une valeur élevée du nombre adimensionnel  $|\text{Ne}|$ , proportionnelle au carré de la vitesse. Nous concluons sur un lien complexe entre le choix de la configuration magnétique et de la configuration mécanique pour agir efficacement sur le fluide. À chaque configuration magnétique, il est nécessaire d’étudier la configuration mécanique (géométrie, conditions aux limites, vitesse d’écoulement, loi de comportement du fluide) permettant d’obtenir les contraintes de cisaillement les plus importantes ou les volumes cisailés les plus importants au sein du fluide.

\*

Les perspectives de ce nouveau domaine d’application sont nombreuses tant sur le plan théorique que pratique. Nous développons deux points en particulier.

Sur le plan expérimental, il reste à valider notre étude. Le plus aisé serait la mise sous champ magnétique intense d’un fluide à seuil statique pour observer la transition solide–gel. Cette étude peut se faire avec des champs magnétiques pulsés. Afin d’observer facilement la transition, il serait intéressant d’utiliser un rhéomètre à plan incliné. Cette technique de rhéométrie consiste à étudier l’écoulement du fluide à seuil sur un plan incliné. Le fluide stoppe son écoulement lorsque son épaisseur n’est plus suffisante pour dépasser la contrainte seuil. Dans ce cas, les contraintes de cisaillement sont dues aux forces de pesanteur. La reprise de l’écoulement suite à l’application d’un champ magnétique intense illustrerait la possibilité de réaliser la transition solide–gel à partir des forces magnétiques volumiques. Le choix du plan incliné permet de « pré-contraindre » le fluide à seuil. Les forces magnétiques volumiques n’ont plus qu’à dépasser la contrainte seuil ce qui nécessite des niveaux de contraintes magnétiques plus faibles et une action possible sur une large gamme de fluides à seuil. La configuration magnétique n’a donc pas besoin d’être particulièrement adaptée au problème mécanique ce qui offre l’opportunité d’utiliser des dispositifs magnétiques classiques.

Sur le plan théorique, nous sommes confrontés au lien fort existant entre le choix de la configuration magnétique et le choix de la configuration mécanique. Pour agir efficacement sur le fluide, nous sommes à présent capables de donner les pistes théoriques permettant d’adapter la configuration mécanique à une configuration magnétique donnée. L’idée est de partir de l’expression du tenseur des actions magnétiques et de trouver les valeurs de contraintes de cisaillement maximales et les directions principales de ces contraintes. Le problème mécanique serait défini à partir de ces directions principales afin que les forces magnétiques cisailent le plus ou le mieux possible le fluide. Cette démarche devrait conduire à un dispositif mécanique adapté à la source magnétique.



L'inverse est aussi possible mais plus complexe : à partir d'un dispositif magnétique donné, et en utilisant une méthode de synthèse de source, il est envisageable de déterminer la source de champ magnétique adaptée au problème mécanique.

\*



---

## Références bibliographiques

- [1] *National High Magnetic Field Laboratory - Mag Lab World Records*. En ligne. National High Magnetic Field Laboratory. 2011. URL : <http://www.magnet.fsu.edu/mediacenter/factsheets/records.html> (visité le 12 mars 2012) (cf. p. 1, 13).
- [2] A. MATSUZAKI et S. NAGAKURA. « Magnetic quenching of fluorescence observed with carbon disulfide and glyoxal ». Dans : *Journal of Luminescence* 12–13 (mar. 1976), p. 787–791. ISSN : 0022-2313 (cf. p. 1, 11).
- [3] T. KAKESHITA et al. « Composition dependence of magnetic field-induced martensitic transformations in Fe–Ni alloys ». Dans : *Acta Metallurgica* 33.8 (1985), p. 1381–1389 (cf. p. 1, 11).
- [4] R. AOGAKI, K. FUEKI et T. MUKAIBO. « Application of Magnetohydrodynamic Effect to the Analysis of Electrochemical Reactions. 2. Diffusion Process in MHD Forced Flow of Electrolyte solution ». Dans : *Denki Kagaku* 43.9 (1975), p. 509–514 (cf. p. 1, 11).
- [5] J. TORBET, J.-M. FREYSSINET et G. HUDRY-CLERGEON. « Oriented fibrin gels formed by polymerization in strong magnetic fields. » Dans : *Nature* 289.5793 (1981), p. 91 (cf. p. 1, 11).
- [6] E. BEAUGNON et R. TOURNIER. « Levitation of organic materials ». Dans : *Nature* 349.6309 (fév. 1991), p. 470–470. ISSN : 0028-0836 (cf. p. 1, 11, 16, 21, 25).
- [7] L. QUETTIER et al. « Magnetic compensation of gravity forces in liquid/gas mixtures : surpassing intrinsic limitations of a superconducting magnet by using ferromagnetic inserts ». Dans : *European Physical Journal - Applied Physics* 32.3 (déc. 2005), p. 167–175. ISSN : 1286-0042 (cf. p. 1, 27).
- [8] J. LEVEQUE et al. « Design of a superconducting insert to obtain a high and quasi-uniform magnetic force field ». Dans : *Superconductor Science & Technology* 18.10 (oct. 2005), p. 1266–1270. ISSN : 0953-2048 (cf. p. 1, 27).
- [9] S. MAKI, Y. ODA et M. ATAKA. « High-quality crystallization of lysozyme by magneto-Archimedes levitation in a superconducting magnet ». Dans : *Journal of crystal growth* 261.4 (2004), p. 557–565 (cf. p. 1, 21).
- [10] M. HAMAI et al. « Crystal growth of ammonium chloride in magnetic levitation conditions ». Dans : *Journal of crystal growth* 209.4 (2000), p. 1013–1017 (cf. p. 1, 21).

- [11] D. BEYSENS et al. « High-frequency driven capillary flows speed up the gas-liquid phase transition in zero-gravity conditions ». Dans : *Physical review letters* 95.3 (2005), p. 34502 (cf. p. 1, 21).
- [12] D. CHATAIN et al. « Study of fluid behaviour under gravity compensated by a magnetic field ». Dans : *Microgravity Science and Technology* 18.3 (2006), p. 196–199 (cf. p. 1, 21).
- [13] M. YAMAGUCHI et Y. TANIMOTO, édés. *Magneto-Science – Magnetic Field Effects on Materials : Fundamentals and Applications*. 1<sup>re</sup> éd. Springer, 2006. ISBN : 3540370617 (cf. p. 7, 11).
- [14] T. LUBIN, S. MEZANI et A. REZZOUG. « 2D Analytical Calculation of Magnetic Field and Electromagnetic Torque for Surface-Inset Permanent Magnet Motors ». Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* PP.99 (déc. 2011), p. 1–1. ISSN : 0018-9464 (cf. p. 10).
- [15] S. UENO et M. IWASAKA. « Parting of water by magnetic fields ». Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 30.6 (1994), p. 4698–4700 (cf. p. 11).
- [16] G. GILLET. *Séparation magnétique haut gradient (SMHG) et haut champ*. J3222. En ligne. Techniques de l'Ingénieur. Mar. 2004. URL : <http://www.techniques-ingenieur.fr> (visité le 6 mars 2012) (cf. p. 11).
- [17] E. NAVA. « Modèle de piégeage de particules ultrafines sous champ magnétique intense. Application à l'épuration de fluide ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1996 (cf. p. 11).
- [18] G. GILLET. *Séparation magnétique à basse et haute intensité*. J3221. En ligne. Techniques de l'Ingénieur. Juin 2003. URL : <http://www.techniques-ingenieur.fr> (visité le 6 mars 2012) (cf. p. 11).
- [19] N. M. SIDO. « Modélisation et analyse des mécanismes de séparation magnétique : conception d'un modèle de séparateur ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2002 (cf. p. 11).
- [20] O. VINCENT-VIRY. « Contribution méthodologique à la synthèse de sources en magnétostatique : application au stockage magnétique d'énergie, et à la lévitation magnétique ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2002 (cf. p. 11).
- [21] L. QUETTIER. « Contribution méthodologique à la conception de systèmes supraconducteurs de lévitation magnétique ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2003 (cf. p. 11, 27).
- [22] C. LORIN. « Théorie de la microgravité magnétique. Conception, dimensionnement et contrôle d'environnement microgravitationnel ». Thèse de doct. INPL, nov. 2008 (cf. p. 11, 27).
- [23] M. YAMAGUCHI et al. « Effect of a strong magnetic field on the chemical equilibrium of the ferromagnetic hydride-hydrogen system ». Dans : *Physics Letters A* 126.2 (1987), p. 133–135 (cf. p. 11).
- [24] H. SATA et al. « Magnetic orientation of poly (ethylene-2, 6-naphthalate) ». Dans : *Polymer* 37.10 (1996), p. 1879–1882 (cf. p. 11).

- [25] H. HOSODA et al. « Refractive indices of water and aqueous electrolyte solutions under high magnetic fields ». Dans : *The Journal of Physical Chemistry A* 108.9 (2004), p. 1461–1464 (cf. p. 11).
- [26] F. BLOCH et al. « Approches novatrices à la génération de champs magnétiques intenses : optimisation d'une source de flux à aimants permanents ». Dans : *The European Physical Journal - Applied Physics* 5.01 (1999), p. 85–89 (cf. p. 12).
- [27] L. LANDAU et al. *Electrodynamics of continuous media*. T. 364. Pergamon press Oxford, 1960 (cf. p. 15).
- [28] T. OHARA, H. KUMAKURA et H. WADA. « Magnetic separation using superconducting magnets ». Dans : *Physica C : Superconductivity* 357-360, Part 2 (août 2001), p. 1272–1280. ISSN : 0921-4534 (cf. p. 17).
- [29] S. HAYASHI et al. « Study on High Gradient Magnetic Separation for Selective Removal of Impurity From Highly Viscous Fluid ». Dans : *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 21.3 (juin 2011), p. 2055–2058. ISSN : 1051-8223 (cf. p. 17).
- [30] S. NISHIJIMA et S. TAKEDA. « Superconducting High Gradient Magnetic Separation for Purification of Wastewater From Paper Factory ». Dans : *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 16.2 (juin 2006), p. 1142–1145. ISSN : 1051-8223 (cf. p. 17).
- [31] Y. YOSHIDA et al. « Ex vivo investigation of magnetically targeted drug delivery system ». Dans : *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 310.2, Part 3 (mar. 2007), p. 2880–2882. ISSN : 0304-8853 (cf. p. 17).
- [32] F. MISHIMA et al. « Development of control system for magnetically targeted drug delivery ». Dans : *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 310.2, Part 3 (mar. 2007), p. 2883–2885. ISSN : 0304-8853 (cf. p. 17).
- [33] R. TAO et K. HUANG. « Reducing blood viscosity with magnetic fields ». Dans : *Phys. Rev. E* 84 (1 juil. 2011), p. 011905 (cf. p. 18).
- [34] M. BERHANU et al. « Dynamo regimes and transitions in the VKS experiment ». Dans : *European Physical Journal B* 77.4 (oct. 2010), p. 459–468. ISSN : 1434-6028 (cf. p. 19).
- [35] M. HINAJE. « Modélisation de l'action d'un champ électromagnétique variable sur un métal liquide disposé en nappe peu épaisse ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2005 (cf. p. 20).
- [36] M. BERRY et A. GEIM. « Of flying frogs and levitrons ». Dans : *European Journal of Physics* 18 (1997), p. 307 (cf. p. 21).
- [37] S. UENO et al. « Dynamic behavior of gas flow in gradient magnetic fields ». Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 29.6 (1993), p. 3264–3266 (cf. p. 22).
- [38] W. NI et al. « Magnetic support of combustion in diffusion flames under microgravity ». Dans : *Combustion and flame* 107.1-2 (1996), p. 187–188 (cf. p. 22).
- [39] S. SWAMINATHAN. « Effects of Magnetic Field on Micro Flames ». Thèse de doct. Louisiana State University, 2005 (cf. p. 22).

- [40] L. YANG et al. « Free convection of a gas induced by a magnetic quadrupole field ». Dans : *Journal of magnetism and magnetic materials* 261.3 (2003), p. 377–384 (cf. p. 22).
- [41] C. PIGOT et al. « Diamagnetic Levitation of Solids at Microscale ». Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 44.11 (nov. 2008), p. 4521–4524. ISSN : 0018-9464 (cf. p. 23).
- [42] S. UENO et M. IWASAKA. « Properties of diamagnetic fluid in high gradient magnetic fields ». Dans : *Journal of Applied Physics* 75.10 (1994), p. 7177–7179 (cf. p. 24, 29).
- [43] DURAND. *Magnétostatique*. Dunod, jan. 1968. ISBN : 2225594996 (cf. p. 25, 74).
- [44] P. NEITTAANMÄKI, M. RUDNICKI et A. SAVINI. *Inverse Problems and Optimal Design in Electricity and Magnetism*. Oxford University Press, Oxford, 1996 (cf. p. 26).
- [45] E. PLAUT. *Cours de mécanique des milieux continus*. Cours de l'école nationale supérieure des Mines de Nancy. 2012. URL : <http://www.mines.inpl-nancy.fr/emmanuel.plaut/mmc/pol.pdf> (visité le 15 juillet 2012) (cf. p. 37, 122).
- [46] E. PLAUT. *Cours de mécanique des fluides*. Cours de l'école nationale supérieure des Mines de Nancy. 2012. URL : <http://www.mines.inpl-nancy.fr/emmanuel.plaut/mf/pol.pdf> (visité le 15 juillet 2012) (cf. p. 37).
- [47] S. FOREST. *Cours de mécanique des milieux continus*. Cours de l'école nationale supérieure des Mines de Paris. 2012. URL : [http://mms2.ensmp.fr/mmc\\_paris/poly/MMC.pdf](http://mms2.ensmp.fr/mmc_paris/poly/MMC.pdf) (visité le 15 juillet 2012) (cf. p. 37).
- [48] R. E. ROSENSWEIG. *Ferrohydrodynamics*. Dover Publications, juil. 1997. ISBN : 0486678342 (cf. p. 37, 40).
- [49] L. HEYRENDT et D. NETTER. « Des bobines supraconductrices en rhéologie : étude des contraintes de cisaillement créées sans contact sur un écoulement de fluide complexe ». Dans : *9<sup>e</sup> Journées de Cryogénie et de Supraconductivité*. Aussois, France, 25-27 mar. 2009 (cf. p. 42).
- [50] T. G. MEZGER. *The Rheology Handbook*. 2<sup>nd</sup> revised edition. Vincentz, 2006. ISBN : 3878701748 (cf. p. 49).
- [51] P. COUSSOT et C. ANCEY. *Rhéophysique des pâtes et des suspensions*. EDP Sciences, 1999. ISBN : 2868834019 (cf. p. 49, 52, 53, 122).
- [52] P. OSWALD. *Rhéophysique : Ou comment coule la matière*. Belin, sept. 2005. ISBN : 2701139694 (cf. p. 49, 55, 123).
- [53] S. AMIROUDINE et J.-L. BATTAGLIA. *Mécanique des fluides - Cours et exercices corrigés*. Dunod, sept. 2011. ISBN : 2100549332 (cf. p. 49).
- [54] R. BYRON-BIRD, G. DAI et B. YARUSSO. « The rheology and flow of viscoplastic materials ». Dans : *Reviews in Chemical Engineering* 1.1 (jan. 1983), p. 1–70 (cf. p. 51).
- [55] T. C. PAPANASTASIOU. « Flows of Materials with Yield ». Dans : *Journal of Rheology* 31.5 (1987), p. 385–404 (cf. p. 52, 123, 146).

- [56] H. TANG et D. KALYON. « Estimation of the parameters of Herschel-Bulkley fluid under wall slip using a combination of capillary and squeeze flow viscometers ». Dans : *Rheologica acta* 43.1 (2004), p. 80–88 (cf. p. 53).
- [57] P. MØLLER, J. MEWIS et D. BONN. « Yield stress and thixotropy : on the difficulty of measuring yield stresses in practice ». Dans : *Soft matter* 2.4 (2006), p. 274–283 (cf. p. 53).
- [58] H. BARNES. « The yield stress – a review or ‘*παντα ρει*’ – everything flows ? ». Dans : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 81.1-2 (1999), p. 133–178 (cf. p. 53, 122, 123).
- [59] B. LAPORTE. *Machines électriques tournantes : Conception, dimensionnement, fonctionnement*. Ellipses, nov. 2007. ISBN : 2729836586 (cf. p. 75, 95).
- [60] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN, édés. *Handbook of Mathematical Functions : with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, juin 1965. ISBN : 0486612724 (cf. p. 93, 94).
- [61] F. BOWMAN. *Introduction to Bessel Functions*. Dover Publications, oct. 2010. ISBN : 0486604624 (cf. p. 94).
- [62] P. COUSSOT et al. « Avalanche Behavior in Yield Stress Fluids ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 88 (17 avr. 2002), p. 175501 (cf. p. 122).
- [63] F. MAHAUT et al. « Yield stress and elastic modulus of suspensions of noncolloidal particles in yield stress fluids ». Dans : *Journal of Rheology* 52.1 (2008), p. 287–313 (cf. p. 123).
- [64] Y. DIMAKOPOULOS et J. TSAMOPOULOS. « Transient displacement of a viscoplastic material by air in straight and suddenly constricted tubes ». Dans : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 112.1 (2003), p. 43–75 (cf. p. 124).
- [65] M. CHATZIMINA et al. « Cessation of Couette and Poiseuille flows of a Bingham plastic and finite stopping times ». Dans : *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 129.3 (2005), p. 117–127 (cf. p. 124).
- [66] E. MITSOULIS. « On creeping drag flow of a viscoplastic fluid past a circular cylinder : wall effects ». Dans : *Chemical Engineering Science* 59.4 (2004), p. 789–800. ISSN : 0009-2509 (cf. p. 124).
- [67] N. CHAFE et J. R. de BRUYN. « Drag and relaxation in a bentonite clay suspension ». Dans : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 131.1–3 (2005), p. 44–52. ISSN : 0377-0257 (cf. p. 124).
- [68] P. CIARLET et E. LUNÉVILLE. *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique : Tome 1, Concepts généraux*. Les Presses de l’ENSTA, fév. 2009. ISBN : 2722509172 (cf. p. 125, 126).
- [69] J.-C. CUILLIÈRE. *Introduction à la méthode des éléments finis - Cours et exercices corrigés*. Dunod, août 2011. ISBN : 2100564382 (cf. p. 126).
- [70] *Nb<sub>3</sub>Sn Superconducting Wires*. Supercon Inc. 2012. URL : [http://www.supercon-wire.com/products\\_nb3sn.html](http://www.supercon-wire.com/products_nb3sn.html) (visité le 8 septembre 2012) (cf. p. 143).

- [71] L. HEYRENDT et al. « Shear stress generated by a superconducting system on a complex fluid flow ». Dans : *2008 Applied Superconductivity Conference*. Chicago, USA, 17-22 août 2008 (cf. p. [144](#)).
- [72] L. HEYRENDT, J. LÉVÊQUE et D. NETTER. « Thixotropic gel flow under superconducting magnets : analytical and numerical studies, experimental project ». Dans : *2010 Applied Superconductivity Conference*. Washington D.C., USA, 1-6 août 2010 (cf. p. [144](#)).



---

## Notations

$a, b, c$	dimensions d'un solénoïde épais et fini (m)
$\vec{A}$	potentiel-vecteur (Wb/m)
$\vec{B}$	champ magnétique (T)
$B$	norme du champ magnétique (T)
$B_n$	nombre de Bingham (-)
$C$	constante (T)
$\vec{d}$	champ de déplacement (m)
$\overline{D}$	tenseur des taux de déformation ( $s^{-1}$ )
$D$	demie-distance inter-nappes (m)
$d\vec{\ell}$	déplacement élémentaire (m)
$d\vec{S}$	vecteur surface élémentaire ( $m^2$ )
$d\tau$	volume élémentaire ( $m^3$ )
$\vec{E}$	champ électrique (V/m)
$E$	module d'Young (Pa)
$\mathcal{E}_m$	énergie magnétique volumique d'aimantation ( $J/m^3$ )
$f_0$	fréquence caractéristique (Hz)
$\vec{f}_{Lv}$	force volumique de Laplace ( $N/m^3$ )
$\vec{f}_{mv}$	force magnétique volumique ( $N/m^3$ )
$\vec{f}_v$	autres forces volumiques ( $N/m^3$ )
$F_1, F'_1$	constantes d'intégration
$F_2, F'_2$	constantes d'intégration
$\vec{g}$	accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ )

$G$	module de cisaillement (Pa)
$G_1, G'_1$	constantes d'intégration
$G_2, G'_2$	constantes d'intégration
$\vec{H}$	excitation magnétique (A/m)
$H$	norme de l'excitation magnétique (A/m)
$I_0$	fonction de Bessel de 1 <sup>re</sup> espèce modifiée d'ordre 0
$I_1$	fonction de Bessel de 1 <sup>re</sup> espèce modifiée d'ordre 1
$\vec{j}$	densité de courant (A/m <sup>2</sup> )
$J_0, J_1, J_2$	densités de courant surfaciques (A/m)
$\vec{j}_z$	densité de courant surfacique (A/m)
$\vec{j}_{1z}$	densité de courant surfacique (A/m)
$\vec{j}_{2z}$	densité de courant surfacique (A/m)
$\vec{j}_\theta$	densité de courant surfacique (A/m)
$k$	nombre d'onde (m <sup>-1</sup> )
$K_0$	fonction de Bessel de 2 <sup>e</sup> espèce modifiée d'ordre 0
$K_1$	fonction de Bessel de 2 <sup>e</sup> espèce modifiée d'ordre 1
$\bar{\bar{K}}$	tenseur gradient de vitesse (s <sup>-1</sup> )
$\ell_0$	longueur caractéristique (m)
$\vec{M}$	aimantation magnétique (A/m)
$m$	paramètre du modèle de Papanastasiou (s)
$n$	harmonique d'espace
$n_1, n_2$	harmoniques d'espace
$Ne$	nouveau nombre adimensionnel (-)
$(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$	base orthonormée en coordonnées cartésiennes
$(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$	base orthonormée en coordonnées cylindriques
$\vec{p}$	quantité de mouvement (kg.m/s)
$p$	nombre de paires de pôles
$P$	champ de pression (Pa)

---

$(r, \theta, z)$	coordonnées cylindriques
$\vec{R}$	force extérieure (N)
R	rayon (m)
Re	nombre de Reynolds (-)
St	nombre de Strouhal (-)
$\bar{T}$	tenseur des actions magnétiques (Pa)
$t$	temps (s)
$T_{xy}$	terme croisé du tenseur des actions magnétiques (Pa)
$T_{rz}$	terme croisé du tenseur des actions magnétiques (Pa)
$T_{r\theta}$	terme croisé du tenseur des actions magnétiques (Pa)
$\vec{u}$	champ de vitesse (m/s)
$u_0$	vitesse caractéristique (m/s)
$(x, y, z)$	coordonnées cartésiennes
$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$	angles (rad)
$\beta$	constante d'intégration
$\chi$	susceptibilité magnétique (-)
$\chi_g$	susceptibilité magnétique massique ou spécifique (m <sup>3</sup> /kg)
$\bar{\epsilon}$	tenseur des déformations linéarisé (-)
$\epsilon_0$	permittivité du vide (F/m)
$\eta$	viscosité dynamique (Pa.s)
$\varphi$	déphasage (rad)
$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement (s <sup>-1</sup> )
$\lambda$	1 <sup>er</sup> coefficient de Lamé (Pa)
$\mu$	viscosité de Bingham (Pa.s)
$\mu_0$	perméabilité du vide (H/m)
$\nu$	coefficient de Poisson (-)
$\rho$	masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )
$\rho_e$	densité volumique de charge (C/m <sup>3</sup> )

$\bar{\sigma}$	tenseur des contraintes de Cauchy (Pa)
$\tau$	contrainte de cisaillement (Pa)
$\tau_c$	contrainte seuil (Pa)
$\tau_p$	contrainte pariétale (Pa)
$\bar{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses (Pa)
$\xi, \kappa$	constantes d'intégration
$   $	valeur absolue
$\  \ $	norme
$\cdot$	produit scalaire
$\wedge$	produit vectoriel
$\otimes$	produit tensoriel
$\text{div}$	opérateur divergence ( $\text{m}^{-1}$ )
$\overrightarrow{\text{div}}$	opérateur divergence tensoriel ( $\text{m}^{-1}$ )
$\overrightarrow{\text{grad}}$	opérateur gradient ( $\text{m}^{-1}$ )
$\overrightarrow{\text{rot}}$	opérateur rotationnel ( $\text{m}^{-1}$ )
$\text{tr}$	opérateur trace
$\overrightarrow{\Delta}$	opérateur laplacien vectoriel ( $\text{m}^{-2}$ )
$\overline{\nabla}$	opérateur gradient tensoriel ( $\text{m}^{-1}$ )

## Liste des figures

1.1	Aimantation en fonction de l'excitation magnétique . . . . .	10
1.2	Plaque de graphite pyrolytique en lévitation stable et passive au-dessus d'aimants permanents . . . . .	21
1.3	Grenouille en lévitation magnétique dans un solénoïde de 16 T . . . . .	21
1.4	Combustion d'une flamme sous un champ magnétique de 2,8 T . . . . .	22
1.5	Effet Moïse à l'extrémité d'un solénoïde horizontal de 16 T . . . . .	23
1.6	Caractéristiques d'un solénoïde épais et fini . . . . .	25
1.7	Évolution du champ magnétique $B_z$ sur l'axe d'un solénoïde épais et fini . . . . .	26
1.8	Évolution du gradient de $B_z^2$ sur l'axe d'un solénoïde épais et fini . . . . .	27
1.9	Carte heuristique présentant les principales problématiques des liquides (non conducteurs et non chargés) dia- ou paramagnétiques soumis à de forts champs et forts gradients de champ magnétique . . . . .	28
2.1	Évolution de $ Ne $ en fonction de $B_0$ pour une vitesse caractéristique $u_0$ de 1 cm/s . . . . .	44
2.2	Évolution de $ Ne $ en fonction de $u_0$ pour un champ magnétique caractéristique $B_0$ de 10 T . . . . .	44
2.3	Loi de comportement pour un fluide newtonien : proportionnalité entre la contrainte de cisaillement $\tau$ et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ . . . . .	47
2.4	Lois de comportement non-linéaires pour des fluides rhéofluidifiants et rhéoépaississants . . . . .	50
2.5	Loi de comportement non-linéaire pour un fluide à seuil . . . . .	51
2.6	Profil de vitesse d'un fluide newtonien dans le cas d'un écoulement de Poiseuille . . . . .	53
2.7	Profil de vitesse d'un fluide à seuil dans le cas d'un écoulement de Poiseuille . . . . .	54
2.8	Mise en évidence de la transition gel-liquide (courbe théorique en trait plein et points expérimentaux) pour une solution de bentonite à 10% en masse d'après [52] . . . . .	55
	(a) Contrainte $\tau$ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ . . . . .	55
	(b) Viscosité $\eta$ en fonction de la contrainte de cisaillement $\tau$ en échelle log-log . . . . .	55
3.1	Deux nappes de courant parallèles . . . . .	70
3.2	Nappe de courant infinie en $y = 0$ parcourue par une densité surfacique de courant . . . . .	71

3.3	Lignes de champ magnétique pour une nappe de courant infinie sur une longueur d'onde . . . . .	75
3.4	Carte de champ magnétique pour une nappe de courant infinie sur une longueur d'onde . . . . .	76
3.5	Terme croisé $T_{xy}$ du tenseur des actions magnétiques pour une nappe de courant infinie sur une longueur d'onde . . . . .	78
3.6	Deux nappes de courant parallèles parcourues par la même densité surfacique de courant . . . . .	79
3.7	Lignes de champ magnétique pour deux nappes de courant infinies sur une longueur d'onde . . . . .	81
3.8	Norme du champ magnétique pour deux nappes de courant infinies sur une longueur d'onde . . . . .	81
3.9	Champ de forces volumiques pour deux nappes de courant infinies sur une demie longueur d'onde . . . . .	84
3.10	Terme croisé $T_{xy}$ du tenseur des actions magnétiques pour deux nappes de courant infinies sur une longueur d'onde . . . . .	86
3.11	Évolution du maximum du terme croisé $T_{xy}$ du tenseur des actions magnétiques . . . . .	86
3.12	Étude paramétrique du terme croisé $T_{xy}$ du tenseur des actions magnétiques pour deux nappes infinies sur une demie longueur d'onde pour différentes valeurs de $D$ entre $y = 0$ et $y = 14$ cm . . . . .	88
3.13	Étude paramétrique en fonction de $n k$ du terme croisé $T_{xy}$ du tenseur des actions magnétiques pour deux nappes infinies sur une demie longueur d'onde entre $y = 0$ et $y = 4D$ . . . . .	89
3.14	Évolution des maxima du terme croisé $T_{xy}$ du tenseur des actions magnétiques en fonction de $n k$ à $D$ fixé . . . . .	91
3.15	Solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale	91
3.16	Lignes de champ magnétique pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale sur une longueur d'onde . . . . .	96
3.17	Norme du champ magnétique pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale sur une longueur d'onde . . . . .	96
3.18	Champ de forces volumiques créé par un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale sur une demie longueur d'onde . . . . .	97
3.19	Terme croisé $T_{rz}$ du tenseur des actions magnétiques pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale sur une demie longueur d'onde . . . . .	98
3.20	Évolution du maximum du terme croisé $T_{rz}$ du tenseur des actions magnétiques en fonction de $J_0$ . . . . .	99
3.21	Étude paramétrique du terme croisé $T_{rz}$ du tenseur des actions magnétiques pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale sur une demie longueur d'onde pour différentes valeurs de $R$ . . . . .	100
3.22	Évolution du maximum du terme croisé $T_{rz}$ du tenseur des actions magnétiques en fonction du rayon $R$ du solénoïde . . . . .	101
3.23	Étude paramétrique du terme croisé $T_{rz}$ du tenseur des actions magnétiques pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale sur une demie longueur d'onde pour différentes valeurs de $k$ . . . . .	102

3.24	Évolution du maximum du terme croisé $T_{rz}$ du tenseur des actions magnétiques en fonction du nombre d'onde $k$ . . . . .	103
3.25	Évolution du maximum du terme croisé $T_{rz}$ du tenseur des actions magnétiques dans un plan $(R,k)$ à $J_0$ fixé . . . . .	103
3.26	Solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale	104
3.27	Lignes de champ magnétique pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale . . . . .	107
3.28	Norme du champ magnétique pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale . . . . .	107
3.29	Champ de forces volumiques créé par un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale . . . . .	108
3.30	Terme croisé $T_{r\theta}$ du tenseur des actions magnétiques pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale . . . . .	109
3.31	Évolution du maximum du terme croisé $T_{r\theta}$ du tenseur des actions magnétiques en fonction de $J_0$ . . . . .	110
3.32	Étude paramétrique du terme croisé $T_{r\theta}$ du tenseur des actions magnétiques pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale pour différentes valeurs de $p$ . . . . .	111
3.33	Terme croisé $T_{r\theta}$ du tenseur des actions magnétiques créé par un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale avec $p = 1$	112
3.34	Étude paramétrique du terme croisé $T_{r\theta}$ du tenseur des actions magnétiques pour un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale pour différentes valeurs de $R$ . . . . .	114
4.1	Comparaison des modèles de Bingham et Papanastasiou pour un fluide à seuil . . . . .	124
4.2	Norme du champ magnétique et champ de forces magnétiques volumiques obtenus en simulation pour deux nappes de courant infinies sur une longueur d'onde . . . . .	128
4.3	Comparaison entre les résultats de la simulation et l'expression analytique de la norme de la force volumique magnétique en $x = \lambda/8$ pour $D = 5$ cm .	128
4.4	Configuration magnétique à deux nappes de courant (en bleu et en rouge) et trois fluides à seuil à l'état solide (trois rectangles) . . . . .	129
4.5	Contrainte de cisaillement dans les fluides à seuil pour une configuration à deux nappes de courant identiques . . . . .	130
4.6	Maxima des contraintes de cisaillement pour l'étude paramétrique en fonction de $n_1$ et $n_2$ dans le cas où le fluide est placé dans l'espace inter-nappes	132
4.7	Configuration à deux nappes de courant avec $J_0 = 1,5.10^4$ A/mm, $n_1 = 8$ et $n_2 = 0$ permettant de dépasser la contrainte seuil dans le cas où le fluide est placé dans l'espace inter-nappes . . . . .	132
4.8	Maxima du champ magnétique au sein du fluide pour l'étude paramétrique en fonction de $n_1$ et $n_2$ dans le cas où le fluide est placé dans l'espace inter-nappes . . . . .	133
4.9	Norme du champ magnétique et champ de forces magnétiques volumiques obtenus en simulation pour un solénoïde mince parcouru par une densité de courant orthoradiale . . . . .	135

4.10	Comparaison entre les résultats de la simulation et l'expression analytique de la norme de la force volumique magnétique en $z = \lambda/3$ pour $R = 10$ cm	135
4.11	Configuration axisymétrique correspondant à un solénoïde fini parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale (en bleu) dans lequel est placé un fluide à seuil (rectangle intérieur)	136
4.12	Évolution en fonction de $n$ du maximum des contraintes de cisaillement au sein du fluide placé dans un solénoïde parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale	137
4.13	Évolution en fonction de $n$ du maximum du champ magnétique au sein du fluide placé dans un solénoïde parcouru par une densité de courant surfacique orthoradiale	137
4.14	Configuration avec un solénoïde parcouru par une densité de courant orthoradiale avec $J_0 = 1,5 \cdot 10^4$ A/mm et $n = 3$ permettant de dépasser la contrainte seuil dans le fluide	138
4.15	Norme du champ magnétique et champ de forces magnétiques volumiques obtenus en simulation pour un solénoïde mince parcouru par une densité de courant longitudinale	139
4.16	Comparaison entre les résultats de la simulation et l'expression analytique de la norme de la force volumique magnétique pour $R = 10$ cm et $p = 2$	139
4.17	Configuration correspondant à un solénoïde infini parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale (en bleu) dans lequel est placé un fluide à seuil (carré intérieur)	140
4.18	Évolution en fonction de $p$ du maximum des contraintes de cisaillement au sein du fluide placé dans un solénoïde parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale	141
4.19	Évolution en fonction de $p$ du maximum du champ magnétique au sein du fluide placé dans un solénoïde parcouru par une densité de courant surfacique longitudinale	141
4.20	Configuration avec un solénoïde parcouru par une densité de courant longitudinale avec $J_0 = 2 \cdot 10^4$ A/mm et $p = 2$ permettant de dépasser la contrainte seuil dans le fluide	142
4.21	Configuration avec un solénoïde de 9 cm d'épaisseur et parcouru par une densité de courant orthoradiale avec $J_0 = 300$ A/mm <sup>2</sup> et $n = 3$ permettant de dépasser la contrainte seuil dans le fluide	144
4.22	Profil de vitesse de l'écoulement du fluide à seuil sans forces magnétiques volumiques	146
4.23	Comparaison des profils de vitesse de l'écoulement du fluide à seuil avec et sans forces magnétiques volumiques	147
4.24	Champ de vitesse pour un fluide à seuil soumis au champ de forces magnétiques volumiques	147
4.25	Photographie annotée du montage expérimental	149
4.26	Champ de pression (pression relative) pour un fluide à seuil soumis au champ de forces magnétiques volumiques	149
4.27	Photographie annotée de la mesure de pression et de la visualisation des lignes de courant par la méthode PIV	150



---

## Liste des tableaux

1.1	Différents ordres de grandeur de la susceptibilité magnétique $\chi$ . . . . .	9
1.2	Principales découvertes en magnéto-science d'après [13] . . . . .	11
2.1	Valeurs courantes de viscosité dynamique $\eta$ . . . . .	48
2.2	Valeurs courantes du module de cisaillement $G$ , du coefficient de Poisson $\nu$ et du module d'Young $E$ . . . . .	49
2.3	Valeurs courantes de contraintes seuil $\tau_c$ . . . . .	51





# **Études des actions des forces magnétiques volumiques créées par un champ magnétique intense sur des fluides à seuil — possibilités de transition solide–gel**

## **Résumé**

Les fluides à seuil ont des propriétés mécaniques étonnantes : en dessous d'une certaine contrainte, appelée contrainte seuil, le fluide se comporte comme un solide. Au-delà de la contrainte seuil, ils s'écoulent comme un gel. Ce mémoire porte sur l'étude des actions des forces magnétiques volumiques sur ces fluides. Nous étudions la possibilité de réaliser la transition solide–gel à partir des forces magnétiques volumiques créées par différents dispositifs magnétiques. Ces fluides n'ont pas de propriétés magnétiques particulières. Il est donc nécessaire de créer des champs magnétiques intenses pour agir sans contact sur ces fluides. Nous étudions différentes configurations magnétiques capables de dépasser la contrainte seuil au sein du fluide. L'influence des différents paramètres des configurations magnétiques est explorée, notamment à l'aide d'études paramétriques. Notre travail mêle des équations de magnétostatique et de mécanique des fluides non-newtoniens. Les calculs de magnétostatique sont menés de façon analytique alors que la partie mécanique et le couplage magnéto-mécanique sont traités par un logiciel de simulation numérique par la méthode des éléments finis. Les conditions magnétiques et mécaniques nécessaires à la transition solide–gel et à la modification d'écoulements de fluides à seuil sont discutées, notamment à l'aide de simulations numériques et de nombres adimensionnels.

## **Mots-clés**

champ magnétique intense, magnéto-science, forces magnétiques volumiques, fluides à seuil, contrainte seuil, simulation numérique.

---

## **Study of the effects of magnetic volume forces generated by a high magnetic field on yield stress fluids — opportunities of solide–gel transition**

## **Summary**

Yield stress fluids have amazing mechanical properties: below a particular shear stress, called yield stress, the fluid behaves like a solid. Once the yield stress is exceeded, they flow like a viscous fluid or a gel. This thesis deals with the effects of magnetic volume forces on these fluids. We study the opportunity of the solid–gel transition from magnetic volume forces created by various magnetic devices. These fluids have no special magnetic properties. It is therefore necessary to create intense magnetic fields to act without contact on these fluids. We study different magnetic configurations that are able to exceed the yield stress in the fluid. The influences of different parameters of the magnetic configurations is explored, including using parametric studies. Our work combine equations of magnetostatic and non-newtonian fluid mechanics. Magnetostatic calculations are carried out analytically, while the mechanical and magneto-mechanical coupling are processed by a finite element analysis software. Magnetic and mechanical conditions required to the solid–gel transition and to the modification of yield stress fluids flows are discussed, using numerical simulations and dimensionless numbers.

## **Keywords**

high magnetic field, magneto-science, magnetic volume forces, yield stress fluids, yield stress, numerical simulation.