



**HAL**  
open science

# Observation et commande des systèmes de grande dimension

Mejda Mansouri

► **To cite this version:**

Mejda Mansouri. Observation et commande des systèmes de grande dimension. Autre. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : 2012LORR0303 . tel-01749648

**HAL Id: tel-01749648**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749648v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Observation et Commande des Systèmes de Grande Dimension

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 08 Décembre 2012

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Lorraine – France**

(spécialité Automatique)

et

**Doctorat de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir – Tunisie**

(spécialité Génie Electrique)

par

Mejda MANSOURI

### Composition du jury

<i>Président :</i>	A. DOUIK	Maître de Conférences, ENIM, Tunisie
<i>Rapporteurs :</i>	M. MALABRE D. SOUDANI	Professeur, DR CNRS IRCCYN, Ecole centrale de Nantes Professeur, ENIT, Tunisie
<i>Examineurs :</i>	G. GARCIA M. DAROUACH H. MESSAOUD L. BOUTAT BADDAS	Professeur, LAAS, Université de Toulouse Professeur, CRAN, Université de Lorraine Professeur, ENIM, Tunisie Maître de Conférences, CRAN, Université de Lorraine

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués dans le cadre d'une cotutelle internationale entre l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir (ENIM) - Tunisie et l'Université de Lorraine - France, sous la responsabilité scientifique de Monsieur Hassani MESSAOUD Professeur à l'ENIM et de Monsieur Mohamed DAROUACH Professeur à l'Université de Lorraine. Le lieu de travail a été l'unité de Recherche en Automatique Traitement de Signal et Image (ATSI) à l'ENIM, dirigé par Monsieur le Professeur Hassani MESSAOUD et le Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN, CNRS, UMR 7039) dirigé par Monsieur le Professeur Alain RICHARD, plus particulièrement au sein de l'équipe de Longwy du CRAN, dirigée par Monsieur le Professeur Mohamed DAROUACH.

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à ce travail Monsieur Dhaou SOUDANI, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (Tunisie) et Monsieur Michel MALABRE, Professeur, docteur CNRS IRCCYN, Ecole centrale de Nantes. Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire.

Que Monsieur Germain GARCIA, Professeur à l'Université de Toulouse, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour avoir accepté de juger mon travail et d'être parmi le jury d'examen.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Mohamed DAROUACH, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et membre de l'équipe de Longwy du CRAN et Monsieur Hassani MESSAOUD, Professeur et Responsable de l'unité de Recherche en Automatique traitement de Signal et Image (ATSI) à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir (Tunisie), mes directeurs de thèse, pour leurs disponibilités, leurs encouragements et surtout leurs soutiens permanents.

Que Monsieur Ali DOUIK Maître de conférences à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir (Tunisie), soit remercié pour avoir accepté de juger mon travail et pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant d'examiner mon travail.

Mes remerciements vont également à Madame Latifa BOUTAT-BADDAS, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et membre de l'équipe de Longwy du CRAN, pour avoir co-encadré mes travaux de recherche et surtout pour ses conseils judicieux et nos discussions fructueuses.

Je tiens à remercier spécialement Madame Nathalie CLEMENT, secrétaire de l'équipe de Longwy du CRAN, pour son aide et son soutien de tous les instants.

J'adresse un grand merci à tous les membres de l'unité de recherche ATSI à Monastir-Tunisie (Ilyés ELAISSI, Kais BOUZRARA, Khaled OUNI, Asma BARBATA, Nabiha SAIDI,...) et de l'équipe de Longwy du CRAN (Michel ZASADINSKI, Harouna SOULEY ALI, Ali ZEMOUCHE, Mohamed ZERROUGUI, Ibrahima N'DOYE, Lama HASSAN, Bertrand GRANVALLET,...) que j'ai eu le plaisir de côtoyer pendant la durée de ma thèse. Ils ont tous, de près ou de loin, contribué, par les nombreuses discussions que nous avons pu tenir, leur conseils ou leur bonne humeur, à l'excellent déroulement de ma thèse.

Je tiens à remercier toute ma famille et surtout mes parents pour tous leurs encouragements, leurs sacrifices et surtout leur compréhension. Merci PAPA, Merci MAMAN.

En dernier lieu, j'adresse toute ma reconnaissance à mon Mari Montassar qui m'a toujours soutenu et n'a jamais douté de moi. Si le présent manuscrit existe, c'est en partie grâce à lui.

BISOUS A LOULOU LINA

*Je dédie cette thèse  
à mes parents  
à mes frères et soeurs  
à mon mari  
à ma fille  
à toute ma famille,  
et à tous mes amis.*





# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Symboles et abréviations</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction Générale</b>	
<b>Chapitre 1</b>	
<b>Définitions et problématique liées aux systèmes de grande dimension</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Quelques définitions . . . . .	5
1.3 Problèmes lié à la grande dimension . . . . .	7
1.4 Description des grands systèmes linéaires dynamiques invariants . . . . .	8
1.4.1 Les modèles non interconnectés . . . . .	8
1.4.2 Les modèles interconnectés . . . . .	8
1.5 Décomposition des systèmes dynamiques linéaires non-interconnectés . . . . .	10
1.5.1 Décomposition par les modes d'un système linéaire non interconnecté : . . . . .	11
1.5.2 Décomposition par les sorties d'un système linéaire non interconnecté : . . . . .	11
1.6 Outils de structuration des systèmes . . . . .	12
1.6.1 Outils de structuration pour les systèmes Toeplitz . . . . .	13
1.6.2 Outils de structuration basés sur une approche entrée/sortie . . . . .	13
1.6.3 Outils de structuration basés sur la modélisation dans l'espace d'état . . . . .	14
1.6.4 Transformation directe . . . . .	16
1.6.5 Exploitation de la "Théorie des Graphes" . . . . .	17
1.6.6 Recherche de recouvrements . . . . .	17
1.6.7 Le principe d'inclusion . . . . .	19
1.7 Décentralisation des grands systèmes . . . . .	21

1.7.1	Décomposition temporelle ou verticale . . . . .	22
1.7.2	Décomposition horizontale ou spatiale . . . . .	25
1.7.3	Décentralisation par transfert de modèle . . . . .	26
1.8	Structure décentralisée à orthogonalisations successives . . . . .	27
1.9	Outil d'analyse des systèmes de grande dimension . . . . .	27
1.10	Conclusion . . . . .	28

**Chapitre 2**

**Observateur décentralisé des systèmes de grande dimension à interconnexions inconnues 31**

2.1	Introduction . . . . .	31
2.2	Observateur décentralisé pour les systèmes standards . . . . .	32
2.2.1	Position du problème . . . . .	32
2.2.2	Synthèse d'observateurs décentralisés . . . . .	34
2.2.3	Exemples numériques . . . . .	39
2.3	Observateur décentralisé pour les systèmes singuliers . . . . .	45
2.3.1	Position du problème . . . . .	45
2.3.2	Observateur global pour les systèmes interconnectés . . . . .	47
2.3.3	Observateur décentralisé . . . . .	49
2.3.4	Exemple numérique . . . . .	52
2.4	Filtrage $H_\infty$ des systèmes singuliers de grande dimension . . . . .	56
2.4.1	Résultats préliminaires . . . . .	56
2.4.2	Position du problème . . . . .	59
2.4.3	Filtrage $H_\infty$ décentralisé . . . . .	59
2.4.4	Le filtre $H_\infty$ décentralisé : cas continu . . . . .	62
2.4.5	Le filtre $H_\infty$ décentralisé : cas des systèmes discrets . . . . .	63
2.4.6	Exemple numérique . . . . .	67
2.5	Observateurs décentralisés ayant certaines des interconnexions inconnues . . . . .	71
2.5.1	Position du problème . . . . .	71
2.5.2	Synthèse d'observateur décentralisé . . . . .	74
2.5.3	Détermination des paramètres de l'observateur . . . . .	76
2.5.4	Observateur décentralisé : cas des systèmes continus . . . . .	79
2.5.5	Observateur décentralisé : cas des systèmes discrets . . . . .	80
2.5.6	Exemple numérique . . . . .	82

---

2.6	Observateur interconnecté des systèmes de grande dimension . . . . .	85
2.6.1	Résultats préliminaires . . . . .	85
2.6.2	Position du problème . . . . .	86
2.6.3	Observateur interconnecté pour les systèmes de grande dimension .	87
2.6.4	Exemple numérique . . . . .	91
2.7	Conclusion . . . . .	96

<b>Chapitre 3</b>
-------------------

<b>Commande décentralisée des systèmes de grande dimension</b>	<b>99</b>
--	-----------

3.1	Introduction . . . . .	99
3.2	Commande basée sur un filtre pour les systèmes non singuliers de grande dimension . . . . .	100
3.2.1	Problème et hypothèses de base . . . . .	101
3.2.2	Synthèse d'une commande basée sur un filtre . . . . .	102
3.2.3	Simulation . . . . .	113
3.3	Commande décentralisée basée sur un filtre $H_\infty$ pour les systèmes singuliers de grande dimension . . . . .	118
3.3.1	Position du problème . . . . .	118
3.3.2	Synthèse du gain par retour d'état . . . . .	119
3.3.3	Synthèse d'une commande basée sur un filtre $H_\infty$ . . . . .	122
3.3.4	Principe de séparation . . . . .	128
3.3.5	Exemple Numérique . . . . .	128
3.4	Conclusion . . . . .	132

<b>Conclusion Générale</b>
----------------------------

<b>133</b>
------------

<b>Bibliographie</b>
----------------------

<b>137</b>
------------



# Table des figures

1.1	Structure d'un système interconnecté découplé dynamiquement . . . . .	9
1.2	Structure décentralisée naturelle d'un système interconnecté découplé par les sorties. . . . .	10
1.3	Groupement des capteurs sur un même site . . . . .	22
1.4	Dispersion des capteurs sur plusieurs sites . . . . .	22
1.5	Vue d'ensemble d'un système de grande dimension avec une commande hiérarchisée . . . . .	23
1.6	Structure décentralisée hiérarchique pour des systèmes creux . . . . .	24
1.7	Décomposition horizontale ou spatiale du système S et de l'observateur K . . . . .	25
1.8	Décentralisation par " transfert de modèle " . . . . .	26
2.1	Les composantes de l'erreur $e_1$ relative au 1er sous système . . . . .	41
2.2	Les composantes de l'erreur $e_2$ relative au 2ème sous système . . . . .	42
2.3	Les composantes de l'erreur $e_3$ relative au 3ème sous système . . . . .	42
2.4	Pendules inverses couplées . . . . .	43
2.5	Evolution des composante de l'erreur d'estimation du sous système 1 . . . . .	44
2.6	Evolution des composante de l'erreur d'estimation du sous système 2 . . . . .	44
2.7	Les trois composante de l'erreur relative au 1er sous système . . . . .	55
2.8	Les trois composante de l'erreur relative au 2ème sous système . . . . .	55
2.9	Les trois composante de l'erreur relative au 3ème sous système . . . . .	55
2.10	L'état réel $x_1$ du système global et son estimée . . . . .	69
2.11	L'état réel $x_2$ du système global et son estimée . . . . .	69
2.12	L'état réel $x_3$ du système global et son estimée . . . . .	69
2.13	L'état réel $x_4$ du système global et son estimée . . . . .	70
2.14	L'état réel $x_5$ du système global et son estimée . . . . .	70
2.15	L'état réel $x_6$ du système global et son estimée . . . . .	70
2.16	L'erreur d'estimation entre les états du système global et leurs estimées . . . . .	71
2.17	Les états $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ du système global (en trait continu) comparé aux états estimés $\hat{x}_{11}(t), \hat{x}_{12}(t), \hat{x}_{13}(t)$ (en trait interrompu) . . . . .	83
2.18	Les états $x_4(t), x_5(t), x_6(t)$ du système global (en trait continu) comparé aux états estimés $\hat{x}_{21}(t), \hat{x}_{22}(t), \hat{x}_{23}(t)$ (en trait interrompu) . . . . .	84
2.19	L'erreur entre l'état du système global et l'état estimé du sous-système 1 . . . . .	84
2.20	L'erreur entre l'état du système global et l'état estimé du sous-système 2 . . . . .	84
2.21	La première composante du système global $x_1(t)$ (en trait continu) comparé à son estimée (en pointillé) . . . . .	94

2.22	La deuxième composante du système global $x_2(t)$ (en trait continu) comparé à son estimée (en pointillé) . . . . .	94
2.23	La troisième composante du système global $x_3(t)$ (en trait continu) comparé à son estimée (en pointillé) . . . . .	94
2.24	La quatrième composante du système global $x_4(t)$ (en trait continu) comparé à son estimée (en pointillé) . . . . .	95
2.25	La cinquième composante du système global $x_5(t)$ (en trait continu) comparé à son estimée (en pointillé) . . . . .	95
2.26	La sixième composante du système global $x_6(t)$ (en trait continu) comparé à son estimée (en pointillé) . . . . .	95
2.27	L'erreur d'estimation de l'état entre les 3 première composantes du système global et les composantes du sous-système 1 . . . . .	96
2.28	L'erreur d'estimation de l'état entre les 3 dernière composantes du système global et les composantes du sous-système 2 . . . . .	96
3.1	Système électrique composé de trois générateurs . . . . .	115
3.2	La perturbation du système . . . . .	117
3.3	L'erreur d'estimation du système 1 . . . . .	117
3.4	L'erreur d'estimation du système 2 . . . . .	117
3.5	L'allure de la perturbation utilisée $w_i(t)$ . . . . .	131
3.6	L'évolution de l'erreur d'estimation $e_1(t)$ . . . . .	131
3.7	L'évolution de l'erreur d'estimation $e_2(t)$ . . . . .	131

# Symboles et abréviations

## Ensembles

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	Ensemble des nombres réels (resp. complexes)
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	Espace réel (resp. complexe) euclidien de dimension $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $n \times m$
$\mathbb{R}[s]$	Ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}(s)$	Ensemble des matrices de transfert rationnelles strictement propres
$s$	Variable de la transformée de Laplace d'un signal continu ( $s \in \mathbb{C}$ )

## Normes

$\ \cdot\ $	Norme euclidienne d'un vecteur ou norme spectrale d'une matrice
$\ x\ _2$	Norme $L_2$ du signal $x \in L_2[0, \infty)$ ou $x \in l_2[0, \infty)$
$\ G\ _\infty$	Norme $H_\infty$ du système continu $G(s)$ ou du système discret $G(z)$
$\ G\ _2$	Norme $H_2$ du système continu $G(s)$ ou du système discret $G(z)$ .

## Matrices, opérations et relations matricielles

$I, 0$	Matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée
$I_n, 0_{n \times m}$	Matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times n$ (resp. $n \times m$ )
$\exp(A)$	Exponentiel de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\det(A)$	Déterminant de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{rang}(A)$	Rang de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$\text{Re}(A)$	Partie réelle de $A$
$\text{Im}(A)$	Partie imaginaire de $A$
$\lambda_{\max}(A)$	La valeur propre maximale de $A$
$\lambda_{\min}(A)$	La valeur propre minimale de $A$
$A^T, A^{-T}$	Transposée de $A$ (resp. de l'inverse de $A$ ) $\in \mathbb{R}^{n \times m}$
$A^{-1}$	Inverse de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , $\det(A) \neq 0$
$A^+$	Inverse généralisée de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vérifiant $AA^+A = A$
$A^\perp$	Une matrice telle que $A^\perp A^{+T} > 0$ et $A^\perp A = 0$ , lorsque $A$ est de rang plein par les lignes alors $A^\perp = 0$
$\mathfrak{G}(s) = [ A, B, H, D ]$	Une matrice de transfert vérifiant $\mathfrak{G}(s) = H(sI - A)^{-1}B + D$ .

## **Abréviations**

LBT	<i>Lower Block Triangular</i> - Block Triangulaire Inférieur
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> - Inégalité Matricielle Linéaire
LSS	<i>Large Scale System</i> - Système de grande dimension
LTI	<i>Linear Time Invariant</i> - Linéaire à Temps Invariant
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i> - Décomposition en valeurs singulières
UBT	<i>Upper Block Triangular</i> - Block Triangulaire Supérieur



# Introduction Générale

Les systèmes physiques sont généralement de grande dimension et géographiquement distribués. Des réseaux d'énergie aux systèmes socio-économiques, en passant par les réseaux de transport urbain, ces systèmes ont la particularité d'avoir des modèles complexes, caractérisés souvent par un grand nombre de variables, une forte et complexe interaction entre différents sous-systèmes. Les problèmes liés à ces systèmes ont commencé à être traités vers les années 1970 avec l'avènement de la thématique de l'analyse et de la commande des systèmes de grande dimension et des systèmes complexes, comme le souligne un grand nombre d'articles liés à cet axe à cette époque. Certains auteurs cherchent à appliquer à la loi de commande des "grands systèmes" des techniques classiques de décomposition et de résolution de problèmes numériques complexes développées en mathématiques appliquées et en analyse numérique [MMT70], [Pea71], [Sin80]. D'autres cherchent à développer le thème de la commande dite "décentralisée" comme le montre l'article de synthèse [SVAS78]. Après une baisse d'intérêt pour cette thématique pendant les années 1980, l'émergence des LMI (Inégalités Linéaires Matricielles) dans les années 1990 a permis de réouvrir de nouvelles perspectives sur la thématique de la commande structurée. En effet, des efforts particuliers de recherche se sont intéressés à l'étude des grands systèmes en s'appuyant sur le savoir faire et le retour d'expérience. En revanche, peu de travaux insistent sur la nécessité de définir les grandes lignes d'une méthodologie. Les travaux considérés comme pionniers dans ce domaine, sont surtout ceux présentés dans [BT82] puis dans [Sil91], car ils proposent une stratégie complète allant de l'analyse préliminaire du système à la validation a posteriori de la loi de commande.

En ce qui concerne l'estimation de l'état des systèmes de grande dimension, la plupart des travaux se sont basés sur le filtre de Kalman pour l'estimation de l'état des systèmes stochastiques, ([Men71], [Bie77], [Bas92], [BD92]...) en raison de son intérêt pratique. Nombreuses sont les applications qui utilisent le filtre de Kalman on peut citer : la poursuite des cibles, le contrôle de navigation, la détection de défauts dans l'industrie nucléaire... Toutefois sa divergence numérique pour certains systèmes de grande dimension rend son application extrêmement délicate, chose qui a motivé les chercheurs à trouver d'autres variantes du filtre qui assurent la robustesse numérique sous certaines conditions restrictives. On peut citer parmi ces travaux, le filtre information à racine carrée [Men71], le filtre décentralisé à orthogonalisation successive [HSST78] qui offre une optimalité au filtre de Kalman décentralisé malgré sa complexité. Pour l'estimation de l'état des systèmes singuliers ou algèbro-différentiels très peu de travaux sur les grands systèmes existent, les plus intéressants sont ceux présentés dans [Bas92], où il développe des estimateurs optimaux séquentiels en résolvant certains problèmes de singularité des

matrices de covariances. Ces filtres couvrent une plus large gamme de systèmes et assurent l'optimalité et une meilleure robustesse numérique. Toutefois, ces estimateurs nécessitent un grand nombre d'opérations et peuvent diverger si la dimension des sous-systèmes est très grande, ou si les mesures ne sont pas scalaires, de plus, ils ne sont applicables que sur des sous-systèmes suffisamment creux. Le filtre de Kalman possède entre autre l'inconvénient de nécessiter la connaissance préalable des propriétés statiques sur le bruit du système, ce qui n'est pas toujours le cas en pratique. De ce fait, on a cherché dans ce mémoire à construire des observateurs complètement décentralisés, qui ne nécessitent pas de connaissance préalable sur le bruit et qui satisfont les performances globales à moindre coût.

En effet, les travaux relatifs à cette thèse, s'inscrivent dans le cadre de l'observation et de la commande basée observateur des systèmes linéaires de grande dimension, où on a proposé de nouvelles méthodes pour l'estimation d'état décentralisée des grands systèmes aussi bien pour le cas des systèmes singuliers que pour le cas non singulier. La stabilité de ces observateurs et les conditions de leur existence sont aussi discutées. Les gains des observateurs utilisés sont déterminés en utilisant l'approche LMI. L'intérêt d'utiliser les méthodes basées sur des LMI vient du fait que ces dernières peuvent être résolues en utilisant la programmation convexe. La résolution de ces inégalités, donne des solutions faisables, dans un domaine plus vaste que celui généré par la recherche de solutions analytiques. Pour une inégalité, il est possible d'employer des degrés de liberté supplémentaires pour inclure d'autres objectifs que ceux initialement retenus par une équation.

Ce document est organisé comme suit : on commence dans le premier chapitre par la problématique des systèmes de grande dimension où on donne quelques définitions relatives aux systèmes de grande dimension interconnectés et non interconnectés. Les outils de structuration et de décentralisation des systèmes sont aussi présentés tels que la méthode des graphes, les techniques de recouvrements [Sil91]...

Le chapitre 2 est consacré à l'estimation de l'état des systèmes de grande dimension standards et singuliers, où on propose des méthodes de synthèse d'observateurs décentralisés et de filtrage  $H_\infty$  pour ces systèmes. La synthèse de l'observateur est basée sur les inégalités matricielles linéaires (LMIs), permettant de déterminer la matrice de gain du dit observateur. La formulation LMI est obtenue en transformant l'équation de la dynamique de l'erreur en système singulier, et ce afin de contourner le problème de la dérivée du bruit qui apparaît dans cette dynamique. On a proposé ensuite une approche unifiée au problème de synthèse des observateurs décentralisés qui couvre les observateurs d'ordre plein, d'ordre réduit et d'ordre minimal. Cette méthode est basée sur une nouvelle paramétrisation de l'équation de Sylvester généralisée. Les inégalités matricielles linéaires (LMIs) sont également utilisées pour le calcul du gain de l'observateur et l'approche est validée par un exemple numérique. Dans la dernière partie de ce chapitre, on a proposé une nouvelle méthode pour la synthèse des observateurs interconnectés connectivement stables pour les systèmes singuliers de grande dimension. L'approche est testée sur un exemple numérique. Le troisième chapitre peut être vu comme une application des différentes méthodes d'estimation de l'état à la commande. On traite alors dans ce chapitre le problème de la commande basée observateur pour les systèmes standards et singuliers. Les résultats développés dans ce chapitre constituent une extension des travaux de Kalsi

---

et al. [KLZ08], [KLZ09b], [KLZ10] aux systèmes standards affectés par une perturbation à énergie bornée et aux systèmes singuliers. L'approche développée conduit à des conditions de solvabilité moins restrictives que celles introduites dans les travaux de Kalsi et al. L'approche consiste à synthétiser un gain par retour d'état qui stabilise la boucle fermée du système objet d'étude. Un filtre  $H_\infty$  est proposé par la suite afin de reconstruire ce retour d'état. Les inégalités matricielles linéaires sont utilisées pour le calcul du gain par retour d'état et du gain du filtre.

Les résultats développés sur le système standard sont validés sur un système électrique composé de trois machines interconnectées.

Toutes les approches développées le long de ce travail sont récapitulées par un algorithme résumant les différentes étapes de synthèse.



# Chapitre 1

## Définitions et problématique liées aux systèmes de grande dimension

### 1.1 Introduction

Dans la littérature, les termes "système complexe" [Sil91], "système de grande dimension" [BT82], "système interconnecté", "système structuré" [Sil78] sont utilisés pour caractériser un système à grand nombre de variables d'état et/ou un système à grand nombre d'entrées et de sorties, mais aussi un système constitué de sous systèmes interconnectés mais distincts. Si ces différentes terminologies semblent désigner les mêmes types de systèmes sans réelle objectivité, elles n'adoptent pas toutes le même point de vue. Ainsi, le problème de la commande est lié surtout à la notion de "grands systèmes" et de "systèmes complexes" d'après [Sil91] et [BT82], quant aux "systèmes interconnectés" et "systèmes structurés", ils se réfèrent plutôt aux caractéristiques intrinsèques des systèmes considérés. En l'absence de définition universelle, nous reprenons dans ce chapitre quelques définitions existantes dans la littérature. Ces définitions nous conduisent à rechercher dans la suite de ce chapitre, les problèmes liés aux grands systèmes traduisant la complexité à les décomposer en sous problèmes. Nous proposons au final un aperçu sur quelques outils d'analyse de stabilité des systèmes de grande dimension que nous utiliserons dans la suite du document.

### 1.2 Quelques définitions

**Définition 1** : *Système de grande dimension*

*C'est un système qui pour des raisons conceptuelles ou de mise en oeuvre sur ordinateur, nécessite une décomposition en un nombre fini de sous systèmes interconnectés [Sil78], [HM76]. C'est aussi un système qui, décrit par les outils mathématiques classiques, peut aboutir à un modèle de grande taille (caractérisé par un grand nombre de variables d'états pour une représentation d'état), dans [BT82] les auteurs ont suggéré que ce nombre soit supérieur à 100. Le dit modèle est généralement caractérisé par une répartition spatiale, ce qui rend plus complexe sa gestion, son analyse et son pilotage. Pour d'autres auteurs comme [Mah77], c'est un système ayant une dimension suffisamment grande pour que*

les techniques conventionnelles de modélisation, de commande ou d'implémentation ne puissent pas donner des résultats satisfaisants.

Dans [Cla05], un système de grande dimension est un système caractérisé par un grand nombre de dynamiques, mais aussi un grand nombre de variables d'entrées et de variables de sorties qui ne s'accompagnent pas obligatoirement d'une structuration du système, ou d'une répartition spatiale étendue.

**Définition 2** : *Système complexe*

C'est un système ayant une grande dimension (nombre d'entrées/ états /sorties) délicat à manipuler du point de vue analyse et commande à cause de la présence des incertitudes et des contraintes sur la structure des flux d'information [Sil91]. C'est un système difficile à modéliser moyennant les outils mathématiques classiques, ou bien, c'est un système caractérisé par des modèles mathématiques complexes (équations aux dérivées partielles, des équations fortement non linéaires...) [BT82] Un système complexe est présenté dans [Cla05] comme tout système présentant les caractéristiques d'un système de grande dimension et/ou d'un système interconnecté dont toutes ou certaines des interconnexions sont incertaines. Une répartition spatiale étendue se joint potentiellement à ces caractéristiques.

**Définition 3** : *Système interconnecté*

C'est un système pouvant être décomposé en  $N$  systèmes élémentaires  $S_i$  et une interconnexion  $I$  [Sco97]. C'est aussi selon [Cla05], un système représenté par une réalisation partitionnée Entrée, Etat, Sortie ( $E/Et/S$ ) comme suit. Soit un système découplé composé de  $N$  sous-systèmes définis par le sous-système  $S_i$  suivant :

$$\dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_iu_i(t) \tag{1.1a}$$

$$z_i(t) = H_ix_i(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \tag{1.1b}$$

Où  $x_i$  est le vecteur d'état du  $i$ -ème sous système,  $u_i$  et  $z_i$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système et  $A_{ii}$ ,  $B_i$  et  $H_i$  sont respectivement la matrice de la dynamique, la matrice d'entrée et la matrice de sortie.

Une réalisation partitionnée ( $E/Et/S$ ) du sous système  $S_i$  s'écrit sous la forme :

$$\dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_iu(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N (e_{ij}^{-xx}A_{ij}x_j(t) + e_{ij}^{-xu}B_{ij}u_j(t)) \tag{1.2a}$$

$$z_i(t) = H_{ii}x_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N (e_{ij}^{-yx}H_{ij}x_j(t)), \quad i \in \{1 \dots N\} \tag{1.2b}$$

Où la matrice  $A_{ij}$ , définit l'interconnexion entre l'état du système  $j$  et celle du système  $i$ , la matrice  $B_{ij}$  définit l'interconnexion entre l'entrée du système  $j$  et l'état du système  $i$  et la matrice  $H_{ij}$  définit l'interconnexion entre l'état du système  $j$  et la sortie du système  $i$ . Les quantités  $e_{ij}^{-xx}$ ,  $e_{ij}^{-xu}$  et  $e_{ij}^{-yx}$  quantifient l'ampleur de l'interconnexion, ces quantités valent 1 si l'interconnexion est significative et 0 dans le cas contraire.

**Définition 4** : *Système structuré*

*Un système structuré selon [DCW03] est un système qui dans sa par représentation d'état par un quadruplet de matrice  $(A, B, H, D)$  a certaines composantes strictement nulles (système creux). La "structure" du système est donc définie par la disposition des coefficients invariablement nuls dans les 4 matrices de la représentation d'état.*

Si l'on se limite à ces définitions, on constate que l'absence de définition universelle réside dans la grande variété des ces systèmes. En effet, selon la nature des systèmes et les objectifs visés par leurs études, on opte pour l'une ou l'autre des définitions citées dans la littérature. On peut par exemple avoir recours aux définitions proposées par [Sil91] ou par [BT82] si on veut les aborder du point de vue commande. Par contre, si on s'intéresse plutôt aux caractéristiques intrinsèques du système, [DCW03] ou [Sco97] se sont référés d'avantage au concept de "système structuré" et "système interconnecté" qui n'est pas nécessairement le même concept de système interconnecté évoqué par Siljak dans [Sil91]. Même les notions de "complexe" et de "grand" dans les définitions 1 et 2 sont très subjectives, d'ailleurs les auteurs eux mêmes reconnaissent cette subjectivité, car elles dépendent des capacités des outils utilisés pour la mise en oeuvre de la loi de commande. C'est pour cela qu'on ne peut parler de système complexe ou interconnectés en toute rigueur que lorsqu'on travaille sur un système donné. Ainsi, pour résoudre un problème donné lié à un système de grande dimension, l'idée est de décomposer, dans la mesure du possible, les structures qui peuvent être mises en oeuvre dans un environnement multitâches ou/et multiprocesseurs. En effet, les modèles de grande dimension décrivent en général des processus réels de vie quotidienne : les réseaux électriques, les réseaux informatiques, les processus industriels, l'aérospatiale, etc... Ils sont généralement caractérisés par des modèles mathématiques complexes et une dispersion géographique, ce qui nous mène à examiner les problèmes de coût, mais aussi la fiabilité des voies de communication et des informations qui y transitent.

### 1.3 Problèmes lié à la grande dimension

Bien que la définition d'un système de grande dimension diffère d'un auteur à l'autre, on retrouve trois caractéristiques fondamentales exprimant sa complexité dans les publications scientifiques :

- La dimension.
- Les incertitudes et/ou perturbations.
- Les informations sur les contraintes structurelles.

Les problèmes liés à la dimension sont dus à la répartition géographique de ces systèmes. Ceci nécessite pour leurs traitements non seulement de considérer les coûts mais aussi la fiabilité des voies de communication donc la validité des informations qui y transitent. L'ampleur de ces informations évoque le problème de mémorisation de données et par conséquent le problème de la capacité du calculateur, bien qu'on commence à donner moins d'importance à ce problème avec l'avènement des nouvelles technologies de calculateurs ayant de grandes capacités. Le temps d'exécution est défini par le nombre d'opérations élémentaires effectuées par un algorithme pour avoir un résultat, ce temps qui ne dépend pas du calculateur employé, croît très rapidement avec la dimension du système

et peut être contraignant dans certaines applications. Ces caractéristiques peuvent rendre difficile la résolution des problèmes liés à la grande dimension (d'observation et/ou de commande...), si l'on prend le système tel qu'il est. Donc, il est primordial de décomposer un système de grande dimension en plusieurs sous systèmes. Cette décomposition qui peut être physique ou mathématique peut aboutir à des structures plus faciles à gérer. Cela implique la mise en oeuvre d'algorithmes décentralisés sur un environnement multi-processeurs pouvant réduire considérablement le temps de calcul : c'est l'un des objectifs principaux de la décomposition des systèmes et de la décentralisation des calculs.

## 1.4 Description des grands systèmes linéaires dynamiques invariants

Dans la suite, on fera une distinction entre modèles interconnectés et modèles non interconnectés. En effet, on appelle modèle interconnecté tout modèle faisant apparaître un ensemble de sous-systèmes faiblement ou fortement couplés par des relations d'interconnexions explicites. C'est la représentation naturelle des systèmes physiquement interconnectés qui n'admettent pas forcément une représentation d'état globale [SL73]. Cependant, les modèles qui ne sont pas naturellement interconnectés peuvent être transformés en modèles interconnectés par un changement de base adéquat dans l'espace d'état [Bas92].

### 1.4.1 Les modèles non interconnectés

Considérons un système dynamique linéaire, invariant et singulier décrit dans le cas le plus général par les équations suivantes :

$$E\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (1.3a)$$

$$Z(t) = HX(t) \quad (1.3b)$$

où les matrices  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et les vecteurs  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^q$  et  $Z \in \mathbb{R}^m$  représentent le semi état, l'entrée et la sortie (ensemble des observations issues des différents capteurs de l'installation).

Ces modèles peuvent être qualifiés de grande dimension lorsque le nombre de variables d'état est suffisamment grand pour que le traitement global sur ordinateur devienne inabordable.

### 1.4.2 Les modèles interconnectés

Les modèles interconnectés peuvent se présenter sous une grande variété de formes qui dépendent soit de la nature du système physique qu'ils décrivent (systèmes interconnectés), soit de la nature du problème à résoudre. Dans ce dernier cas, on cherche un modèle interconnecté approprié à la résolution d'un problème donné. Pour des systèmes physiques naturellement interconnectés, l'idéal serait de développer des outils d'analyse et des systèmes de commande qui tiennent compte de cette structure, ce qui met le concepteur face



à des difficultés d'ordre pratique liées à la dimension et à la topologie du système. On distingue deux classes de modèles : les modèles relatifs aux systèmes découplés dynamiquement et les modèles relatifs aux systèmes découplés par les observations (ou par les sorties).

### Les modèles interconnectés découplés dynamiquement

Un système dynamique est représenté par un modèle découplé dynamiquement s'il s'écrit sous la forme suivante :

$$E_i \dot{x}_i(t) = A_{ii} x_i(t) + B_i u(t) \quad (1.4a)$$

$$Z(t) = H X(t) \quad (1.4b)$$

avec :  $E_i, A_{ii} \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in \mathbf{R}^{n_i \times q_i}$ ,  $H \in \mathbf{R}^{m_i \times n}$ ,  $x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$  et  $X \in \mathbf{R}^n$  c'est l'état du système globale, avec  $n = \sum_{i=1}^N n_i$ .

Sous la forme (1.4), le système est constitué de  $N$  sous-systèmes dont la dynamique est décrite par l'équation (1.4a) et qui ne sont liés que par l'intermédiaire de l'équation algébrique de mesure (1.4b) (figure 1.1). Le modèle donné par (1.4) est dit singulier si  $E_i$  est singulière pour au moins un  $i \in \{1 \dots N\}$ . Dans le cas où tous les sous-systèmes sont non singuliers on prendra  $E_i = I_{n_i}$  et on aura :

$$\dot{x}_i(t) = A_{ii} x_i(t) + B_i u(t) \quad (1.5a)$$

$$Z(t) = H X(t) \quad (1.5b)$$

Les systèmes physiques ayant un centre d'observation commun peuvent être représentés par un modèle du type (1.5) appelé modèle interconnecté de la classe 1.1 [Bas92].

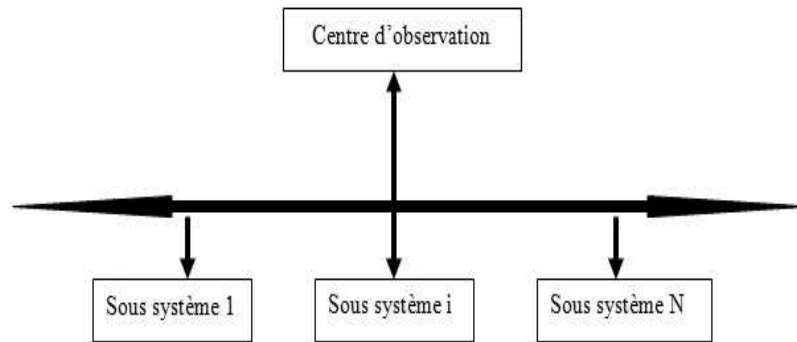


FIG. 1.1 – Structure d'un système interconnecté découplé dynamiquement

### Les modèles interconnectés découplés par les sorties

Un système dynamique découplé par les sorties, est un système dont les équations dynamiques sont couplés mais dont les observations sont strictement locales. Il est représenté

par :

$$E_i \dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_i u(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}x_j(t) \quad (1.6a)$$

$$z_i(t) = H_i x_i(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (1.6b)$$

avec :  $E_i, A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i}$ ,  $H_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$  et les vecteurs  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  et  $z_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ . Le système (1.6) est dit singulier si  $E_i$  est singulière pour au moins un  $i \in \{1 \dots N\}$ . Dans le cas où tous les sous-systèmes sont non singuliers on prendra  $E_i = I_{n_i}$  et on aura :

$$\dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_i u(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}x_j(t) \quad (1.7a)$$

$$z_i(t) = H_i x_i(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (1.7b)$$

Les systèmes physiques ayant un centre d'observation commun (figure 1.2), peuvent être représentés par un modèle du type (1.7) appelé modèle interconnecté de la classe 1.2 [Bas92].

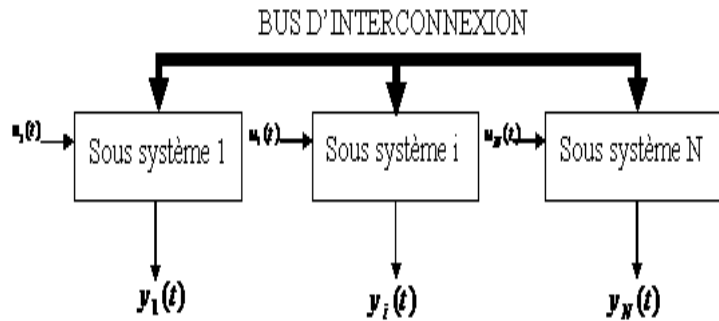


FIG. 1.2 – Structure décentralisée naturelle d'un système interconnecté découpé par les sorties.

## 1.5 Décomposition des systèmes dynamiques linéaires non-interconnectés

Les systèmes dynamiques complexes peuvent être vus comme des interconnexions de sous-systèmes. Ces derniers pourront être connus soit comme des entités physiques, soit comme des sous-ensembles mathématiques à identifier par un algorithme de partitionnement. De nombreuses configurations d'interconnexion existent. D'un côté, ces interconnexions peuvent être absentes ou en nombre réduit et facilement identifiables (au sens repérable). À l'opposé, il existe des systèmes complexes composés d'un enchevêtrement de sous-systèmes complexes, rendant l'isolement physique de sous-systèmes difficile, voire

impossible. De plus on doit tenir compte pour chaque méthode de résolution de la nature du problème à résoudre. L'algorithme de partitionnement mathématique pourra être un outil utile pour trouver une bonne combinaison d'entités de type entrées sorties ou représentation d'état permettant d'isoler des sous-systèmes afin de faciliter l'étape de synthèse d'observateurs et/ou de commande. Dans ce qui suit, on présentera quelques méthodes de décomposition de systèmes de grande dimension.

### 1.5.1 Décomposition par les modes d'un système linéaire non interconnecté :

On considère le système non singulier défini par le système d'équation (1.3), où  $E = I$  :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (1.8a)$$

$$Z(t) = HX(t) \quad (1.8b)$$

La méthode qui permet de transformer un système non interconnecté en un système interconnecté consiste à trouver une transformation de similarité  $S$  permettant de mettre la matrice  $A$  de l'équation (1.8) sous forme diagonale sinon diagonale par bloc dans l'espace d'état tel que :

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}, \quad N \leq n \quad (1.9)$$

Le système décrit par le système d'équations (1.8) est alors équivalent à un modèle interconnecté donné par :

$$\dot{\mathcal{X}}_i(t) = \mathcal{A}_i \mathcal{X}_i(t) + \mathcal{B}_i u(t) \quad (1.10)$$

$$Z(t) = \mathcal{H} \mathcal{X}, \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (1.11)$$

$$\text{avec : } \mathcal{X} = S^{-1}X = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{X}_N \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} = HS, \quad \mathcal{B} = S^{-1}B = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_N \end{bmatrix}.$$

### 1.5.2 Décomposition par les sorties d'un système linéaire non interconnecté :

Si la paire  $(H, A)$  du système d'équation (1.8) est observable, elle peut être mise sous forme canonique observable par la transformation de Luenberger  $S$  [FGS87] :

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & 0 & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}, \quad HS = \mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{H}_m \end{bmatrix},$$

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0_{(n_i-1)1} & I_{n_i-1} \\ * & * \end{bmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} 0_{(n_i-1)n_j} \\ * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}, \quad \mathcal{H}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1(n_i-1)} \end{bmatrix}.$$

Où l'astérisque (\*) représente une matrice ayant des dimensions appropriées. Le système décrit par le système d'équation (1.8) est alors équivalent à un modèle interconnecté de la classe 1.2 [Bas92] donné par :

$$\dot{\mathcal{X}}_i(t) = \mathcal{A}_{ii}\mathcal{X}_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}\mathcal{X}_j(t) + \mathcal{B}_i u(t) \quad (1.12)$$

$$z_i(t) = \mathcal{H}_i \mathcal{X}, \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (1.13)$$

avec :  $\mathcal{X} = S^{-1}X = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{X}_m \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{H} = HS$ ,  $\mathcal{B} = S^{-1}B = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_m \end{bmatrix}$ ,  $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$

**Remarque 1** 1. Dans le cas où la matrice  $A$  est diagonalisable, la transformation  $S$  peut être prise comme étant la matrice de passage formée par les vecteurs propres de  $A$ . Dans le cas contraire ( $A$  n'est pas diagonalisable) on peut opter pour une diagonalisation par blocs en utilisant la forme canonique réelle de Jordan ou à partir de la forme réelle de Shur [HJ90].

2. Dans le cas où la dimension du système est très grande, la décomposition ci-dessus n'est significative que si le nombre de mesures est assez grand. Cependant, si les matrices  $H$  et  $A$  sont mal conditionnées, cette décomposition peut être affectée par de grosses erreurs de calcul et peut provoquer la divergence numérique de l'algorithme de calcul. Dans la littérature, on peut trouver des formes canoniques observables, numériquement stables basées sur la forme de Hessenberg mais elles ne permettent pas de transformer un modèle non interconnecté en un système de classe 1.2.
3. Dans certains cas, la décomposition par les modes et la décomposition par les sorties ne permettent pas seules de réduire la dimension du système d'une manière significative, mais elles peuvent être combinées pour obtenir une forte réduction de la dimension du système. On peut dans ce cas appliquer d'abord la décomposition par les sorties puis la décomposition par les modes au sous-système donné par (1.12). On peut également avoir recours aux outils de structuration des systèmes pour ramener le système à une forme particulière, qui peut simplifier la synthèse de la commande ou de l'observateur décentralisé. Ces outils feront l'objet du paragraphe suivant.

## 1.6 Outils de structuration des systèmes

L'objectif de la structuration d'un système est de faire ressortir l'une des structures cibles pour le modèle du système (telles que par exemple la structure LBT ou de Toeplitz...) et ce afin de simplifier le problème de synthèse. En se basant sur des considérations physiques et /ou mathématiques, la structuration consiste concrètement à distinguer au sein du modèle du système  $N$  sous-systèmes, le reste du modèle étant alors considéré

comme des termes d'interconnexion. Cette tâche peut être décomposée en trois étapes méthodologiques :

1. Une étape d'analyse du modèle.
2. Une étape de mise en forme : partant du résultat obtenu lors de l'analyse, des transformations (e.g. un changement de coordonnées) seront nécessaires pour faire ressortir la structure du système.
3. Une étape de simplification : qui consiste principalement en la troncature de certains termes conduisant à l'une des structures cibles. Il est important alors de savoir quels termes d'interconnexion peuvent être négligés au sein du modèle d'origine pour atteindre un nouveau modèle ayant une structuration intéressante, tout en restant proche du modèle d'origine. Cette dernière étape n'est pas nécessaire dans certains cas, on parle ici de transformation exacte, dans le cas contraire la transformation est dite approchée.

### 1.6.1 Outils de structuration pour les systèmes Toeplitz

Cet outil présenté dans les travaux de B. Bamieh et al. [Bam97], [BPD02], est très utile lors de la phase d'analyse, il est dédié à l'analyse des systèmes à paramètres distribués spatialement invariants et présentant à la base une structure de type Toeplitz, par exemple un train infini de véhicules [MK71]. L'objectif étant l'obtention d'un modèle qui après mise en forme et simplification sera davantage structuré. Dans le cas d'une stratégie de commande, cet outil permet d'évaluer l'influence des sous-systèmes pour la commande d'un sous-système donné, cela par analyse de la structure intrinsèque du régulateur centralisé (solution du problème de commande optimisée associé au système Toeplitz étudié). Cependant, cet outil de structuration présente l'inconvénient de nécessiter un caractère grand système pour le processus objet d'étude, pour assurer la convenance de l'analyse d'une part, mais impose la synthèse d'un régulateur centralisé d'autre part, ce qui est délicat dans le cas d'un système de grande dimension.

### 1.6.2 Outils de structuration basés sur une approche entrée/sortie

Le développement de cet outil a été motivé par la commande des processus chimiques, il consiste à partitionner les vecteurs d'entrées  $u$  et de sorties  $Z$  du système global en  $N$  sous-vecteurs :

$$u^T \equiv [ u_1^T \quad u_2^T \quad \dots \quad u_N^T ] \quad (1.14)$$

$$Z \equiv [ z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_N^T ] \quad (1.15)$$

Ensuite, selon certaines règles, on peut associer tous les sous-vecteurs  $u_j$  et  $z_i$  afin de constituer des paires  $(u_j, z_i)$  en identifiant les paires en moindre interaction. Une phase de simplification structurelle vient après afin de nous permettre d'extraire le modèle décentralisé. La pseudo-structure recherchée avant simplification doit présenter les termes d'interconnexions les plus faibles possibles. Toutefois, il nous paraît légitime de nous écarter de cette démarche classique, afin de chercher une autre structure donnée par une

transformation exacte. Dans ce qui suit, nous illustrerons une autre manière de présenter les choses, elle consiste à structurer le système en lui associant la phase de simplification de modèle, permettant notamment de résoudre localement le problème de commande et/ou d'observation globale d'un système. On s'intéressera dans la suite à quelques outils de structuration basés sur la modélisation dans l'espace d'état.

### 1.6.3 Outils de structuration basés sur la modélisation dans l'espace d'état

Nous nous intéressons ici aux outils de simplification structurelle des systèmes qui exploitent la modélisation dans l'espace d'état. Dans ce contexte, la stratégie de structuration consiste à faire une analyse directe des coefficients des matrices (A, B et H) constituant la représentation d'état, déterminant à la fois la réalisation structurée atteignable pour le modèle et le changement de base permettant de l'obtenir. Cela nécessite la mise en forme et la simplification de la structuration. La mise en forme consiste en un changement de base, menant parfois directement à la structure cible envisagée ; dans ce cas la phase de simplification n'est pas nécessaire. Sont retenus dans ce paragraphe trois approches :

- Structuration par identification de la réalisation [BDRRZ92].
- L'analyse du modèle du système via la "Théorie des Graphes" [Sil91].
- La recherche de recouvrements (overlapping) entre sous-systèmes [IS80]

#### Structuration par identification de la réalisation

Nous présentons ici une première stratégie de simplification structurelle basée sur l'identification de deux réalisations pour le modèle du système : la réalisation d'origine, et la réalisation mettant en exergue une structure cible désirée, cherchant à obtenir les structures bloc triangulaires (LBT) ou bloc diagonale (D) de la matrice A de (1.3).

Nous présentons ici la méthode développée dans [BDRRZ92] pour un système S présentant uniquement un vecteur d'état partitionné en deux parties et cherchant à obtenir les structures (LBT) et (D) de la matrice A de l'équation suivante :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (1.16a)$$

$$Z(t) = HX(t) \quad (1.16b)$$

où  $\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ ,  $H = [ H_1 \ H_2 ]$ .

**Recherche de la structure LBT :** Considérons le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \tilde{T} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

où  $\tilde{T} = \begin{bmatrix} I & L \\ 0 & I \end{bmatrix}$  est une transformation appliquée à (1.16) qui conduit à la structure LBT suivante :

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \tilde{A}\tilde{X}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (1.18a)$$

$$Z(t) = \tilde{H}\tilde{X}(t) \quad (1.18b)$$

Ce qui est équivalent à la représentation suivante :

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{Q}_1(L) \\ A_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \tilde{X}(t) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.19a)$$

$$Z(t) = \begin{bmatrix} H_1 & \tilde{H}_2 \end{bmatrix} \tilde{X}(t) \quad (1.19b)$$

où  $\tilde{A}_{11} = A_{11} - LA_{21}$ ,  $\tilde{A}_{22} = A_{22} - A_{21}L$ ,  $\tilde{B}_1 = B_1 - LB_2$ ,  $\tilde{H}_2 = H_2 - H_1L$ ,  $\tilde{Q}_1(L) = A_{12} + A_{11}L - LA_{22} - LA_{21}L$ .

**Proposition 1** Condition de "triangularisation" [Cla05] :

Soit l'équation de Riccati :

$$\tilde{Q}_1(L) = A_{12} + A_{11}L - LA_{22} - LA_{21}L = 0 \quad (1.20)$$

S'il existe une solution  $L$  à l'équation (1.20), alors il existe une réalisation  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{H})$  de (1.19) pour laquelle la matrice  $\tilde{A}$  est de structure LBT.

**Preuve 1** Si on annule l'équation (1.20) on aura bien une structure LBT pour  $A$  dans (1.23).

**Remarque 2** La procédure précédente peut se généraliser par récurrence pour un vecteur d'état partitionné en  $N$  sous-vecteurs

**Recherche de la structure D :** De la même façon que pour la condition de "triangularisation" (par blocs) pour la réalisation d'origine, nous pouvons définir une condition de "diagonalisation" (par blocs) pour la réalisation.

On considère le nouveau changement de coordonnées défini comme suit.

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \bar{T} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \text{ avec } \bar{T} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ M & I \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Sa mise en oeuvre sur (1.19) conduit à la nouvelle réalisation suivante :

$$\dot{\tilde{x}} = \bar{A}\tilde{x} + \bar{B}u \quad (1.22a)$$

$$y = \bar{H}\tilde{x} \quad (1.22b)$$

avec  $\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \tilde{Q}_1(L) \\ \bar{Q}_2(M) & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$ ,  $\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 & \bar{H}_2 \end{bmatrix}$

où

$$\bar{A}_{11} = \tilde{A}_{11} + \tilde{Q}_1(L)M = A_{11} - LA_{21} + \tilde{Q}_1(L)M \quad (1.23)$$

$$\bar{A}_{22} = \tilde{A}_{22} - M\tilde{Q}_1(L) = A_{22} + A_{21}L - M\tilde{Q}_1(L) \quad (1.24)$$

$$\bar{B}_1 = \tilde{B}_1 = B_1 - LB_2 \quad (1.25)$$

$$\bar{B}_2 = B_2 - M\tilde{B}_1 = B_2 - M(B_1 - LB_2) \quad (1.26)$$

$$\bar{H}_1 = H_1 + \tilde{H}_2M = H_1 + (H_2 + H_1L)M \quad (1.27)$$

$$\bar{H}_2 = \tilde{H}_2 = H_2 + H_1L \quad (1.28)$$

$$\bar{Q}_2(M) = A_{21} + \tilde{A}_{22}M - M\tilde{A}_{11} - M\tilde{Q}_1(L)M \quad (1.29)$$

ou  $\bar{Q}_2(M) = A_{21} + (A_{22} + A_{21}L)M - M(A_{11} - LA_{21}) - M\tilde{Q}_1(L)M$  avec  $\tilde{Q}_1(L)$  définie dans le système (1.19).

### Hypothèse 1 : Condition de "diagonalisation"

Soit les équations de Riccati suivantes :

$$\tilde{Q}_1(L) = A_{12} + A_{11}L - LA_{22} - LA_{21}L = 0 \quad (1.30)$$

et

$$\bar{Q}_2(M) = A_{21} + (A_{22} + A_{21}L)M - M(A_{11} - LA_{21}) - M\tilde{Q}_1(L)M = 0 \quad (1.31)$$

S'il existe une solution  $L$  à l'équation (1.30), et une solution  $M$  à l'équation (1.31), alors il existe une réalisation  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{H})$  du système (1.22) pour laquelle la matrice  $\bar{A}$  est de structure  $D$ .

**Preuve 2** L'annulation de  $\tilde{Q}_1(L)$  et  $\bar{Q}_2(M)$  mène dans (1.22a) à une structure  $D$  pour  $\bar{A}$ .

#### 1.6.4 Transformation directe

Cette démarche en deux étapes fait apparaître une hiérarchie dans le traitement. La transformation globale pour passer de la réalisation 1.16 à la réalisation 1.22 est donnée par :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + LM & L \\ M & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -L \\ -M & I + LM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

**Remarque 3** Une démarche similaire est possible en passant en première étape de "triangularisation" par une réalisation structurée UBT [BDRRZ92].



### 1.6.5 Exploitation de la "Théorie des Graphes"

La seconde stratégie de structuration s'appuie elle aussi sur la recherche d'un changement de coordonnées pour atteindre une réalisation structurée du système, mais la phase d'analyse est caractérisée par la définition d'un graphe orienté associé au système. Les différents algorithmes proposés dans la littérature [SS86], [Sil91], [SZ95] permettent d'atteindre les structures cibles (D), (LBT) ou autre. Nous présenterons le principe d'un seul de ces algorithmes, leur présentation détaillée nécessite l'introduction de trop nombreux principes de la "Théorie des Graphes".

#### Algorithme de structuration sous forme décentralisée

M.E. Sezer et D.D. Siljak dans [SS86], [Sil91], [SZ95] proposent un algorithme permettant d'atteindre une structure décentralisée pour le modèle du système. Cet algorithme s'appuie sur la constatation suivante : les variables mises en jeu au sein d'un système complexe sont fortement ou faiblement interconnectées. L'algorithme proposé permet la classification des interconnexions en connexions fortes et connexions faibles, afin de les organiser et au final structurer le système en sous-systèmes. Le principe de cet algorithme est le suivant :

1. Associer un graphe (orienté) au système considéré
2. Déconnecter au sein de ce graphe tous les arcs associés à un coefficient de la matrice d'état qui traduit la connexion entre deux variables et qui soit inférieur à un seuil  $\epsilon$ .
3. Identifier les sous-graphes résultants de la déconnexion comme nouveaux sous-systèmes.

Nous obtenons ainsi un modèle de système interconnecté, constitué de sous-systèmes couplés par des termes de gain inférieur à  $\epsilon$ .

Les phases d'analyse et de mise en forme sont ainsi menées en parallèle, avec la réorganisation interne des matrices de la représentation d'état au fur et à mesure que l'on décompose le graphe associé. La simplification consiste simplement à fixer à zéro tous les termes d'interconnexions "faibles", i.e. inférieurs au seuil fixé.

Toutefois, la négligence des couplages existants entre les divers sous-systèmes, peut conduire, dans le cas de couplages forts, à l'instabilité du système bouclé lors d'une stratégie de commande. La prise en compte des couplages entre sous-systèmes adjacents a été réalisée par la méthode du recouvrement de sous-systèmes [Sil91].

### 1.6.6 Recherche de recouvrements

Le concept de recherche de "recouvrements" ("overlapping") entre sous-systèmes permet de définir dans le cadre mathématique du "Principe de l'Inclusion" [IS80], un modèle équivalent via une transformation introduisant des redondances : l'idée est que deux correcteurs consécutifs partagent quelques entrées et sorties. En effet, si on considère le système  $S$  partitionné donné par :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (1.34a)$$

$$Z(t) = HX(t) \quad (1.34b)$$

avec une partition en 3 blocs :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (1.35a)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1.35b)$$

On peut adopter une démarche classique et distinguer 3 sous-systèmes interconnectés définis par  $(x_1, x_2, x_3)$ , mais aussi, on peut opter pour une répartition qui possède un recouvrement et qui distingue deux sous systèmes comme par exemple :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.36a)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.36b)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{22} & B_{23} \\ B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (1.37a)$$

$$\begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{22} & H_{23} \\ H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1.37b)$$

Cette transformation permettant d'étendre des états ou même des entrées et des sorties, fait apparaître des sous-systèmes dont les interconnexions apparaissent uniquement dans les blocs non nuls extra diagonaux. Par exemple, de la transformation menant aux deux sous systèmes (1.36) et (1.37), on reconstruit le système global suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{23} \\ \hline A_{21} & 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & 0 & B_{23} \\ \hline B_{21} & 0 & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & 0 & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (1.38a)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & 0 & H_{23} \\ \hline H_{21} & 0 & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & 0 & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1.38b)$$

Comme on peut le remarquer la transformation du système (1.35) en système (1.38), met au point une configuration du système où on garde uniquement les interconnexions les plus faibles. On peut alors envisager les stratégies classiques de commande basée observateur pour le système (1.38) en restant fidèle au système initial et sans sacrifier certaines informations, tel que cela été présenté dans la théorie des graphes. Ceci est rendu possible grâce à ce principe dit "d'inclusion" qui garde les fortes interconnexions dans la matrice d'état et écarte les faibles par le biais de blocs de faibles dimensions en dehors de la diagonale de la matrice d'état. Ce principe fera l'objet de la partie suivante.

### 1.6.7 Le principe d'inclusion

Ce principe, qui constitue le cadre mathématique permettant de définir exactement la transformation menant du système (1.35) au système (1.38) a été introduit par M. Ikeda et D.D. Siljak au début des années 80 [IS80]. Des conditions ont été définies pour conserver certaines caractéristiques entre les deux sous systèmes (1.35) et (1.38) telles que la stabilité, l'optimalité [Sil91], [Ift93], l'observabilité et la commandabilité [BRRR01], [SS02].

Pour mieux introduire ce principe, on considère deux systèmes linéaires  $S$  et  $\tilde{S}$  donnés par :

$$S \quad \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ z &= Hx \end{cases}$$

$$\tilde{S} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{z} &= \tilde{H}\tilde{x} \end{cases}$$

avec :  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^q$  et  $z \in \mathbb{R}^m$  sont les états, les entrées, et les sorties du système  $S$  à l'instant  $t \in T$ , où  $T$  est un intervalle temps donné,  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ ,  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{\tilde{q}}$  et  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$  étant associées à  $\tilde{S}$ . On suppose que les dimensions des vecteurs d'entrées, états et sorties des deux systèmes vérifient les inégalités suivantes :  $n \leq \tilde{n}$ ,  $q \leq \tilde{q}$ ,  $m \leq \tilde{m}$ .  $x(t; x_0, u)$  et  $z(t)$  représentent respectivement la trajectoire unique de l'état associé à  $S$  et de sa sortie, pour un signal de commande  $u(t)$  fixé, et pour l'état initial  $x_0 = x(0)$ .  $\tilde{x}(t; \tilde{x}_0, \tilde{u})$  et  $\tilde{z}(t)$  caractérisent la trajectoire de l'état et de la sortie de  $\tilde{S}$ . La transformation assurant le passage entre les systèmes  $S$  et  $\tilde{S}$  est donnée par les matrices suivantes :

$$\tilde{x} = Vx, \quad x = \tilde{V}\tilde{x} \quad (1.39)$$

$$\tilde{u} = Qu, \quad u = \tilde{Q}\tilde{u} \quad (1.40)$$

$$\tilde{z} = Oz, \quad z = \tilde{O}\tilde{z} \quad (1.41)$$

où  $V$ ,  $Q$ , et  $O$  sont des matrices constantes, de rang plein colonnes, de dimensions appropriées et  $\tilde{V}$ ,  $\tilde{Q}$ , et  $\tilde{O}$  sont des matrices constantes, de rang plein lignes vérifiant :

$$\tilde{V}V = I_n, \quad \tilde{Q}Q = I_q, \quad \tilde{O}O = I_m \quad (1.42)$$

Dans ce cas, si  $\tilde{S}$  inclut  $S$ ,  $\tilde{S}$  est une "expansion" de  $S$ , et  $S$  est une "contraction" de  $\tilde{S}$ . Le théorème suivant donne la condition nécessaire et suffisante pour l'inclusion :

**Théorème 1** : Première approche du "Principe de l'Inclusion"

Le système  $\tilde{S}$  inclut le système  $S$  si et seulement s'il existe un quadruplet  $(V, \tilde{V}, Q, \tilde{O})$  tel que :

$$\begin{aligned} A^i &= \tilde{V}\tilde{A}^iV, \quad A^iB = \tilde{V}\tilde{A}^i\tilde{B}Q \\ HA^i &= \tilde{O}\tilde{H}\tilde{A}^iV, \quad HA^iB = \tilde{O}\tilde{H}\tilde{A}^i\tilde{B}Q \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.43)$$

**Preuve 3** : voir [ISW84].

Si l'on s'intéresse plus précisément à la décomposition avec recouvrement, les moyens de générer des expansions du type  $\tilde{S}$  à partir de  $S$  sont comme suit : si les paires  $(\tilde{V}, V)$ ,  $(\tilde{Q}, Q)$  et  $(\tilde{O}, O)$  sont spécifiées, alors les matrices  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ , et  $\tilde{H}$  peuvent être exprimées comme suit :

$$\tilde{A} = VA\tilde{V} + M, \quad \tilde{B} = VB\tilde{Q} + N, \quad \tilde{H} = OH\tilde{V} + L \quad (1.44)$$

où  $M$ ,  $N$  et  $L$  sont des matrices complémentaires de dimensions appropriées. Ces matrices doivent être choisies comme l'indique le théorème suivant.

**Théorème 2** : Deuxième approche du "Principe de l'Inclusion"

Le système  $\tilde{S}$  inclut le système  $S$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} \tilde{V}M^iV &= 0, \quad \tilde{V}M^{i-1}NQ = 0 \\ \tilde{O}LM^iV &= 0, \quad \tilde{O}LM^{i-1}N\tilde{O} = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \dots \tilde{n} \end{aligned} \quad (1.45)$$

**Preuve 4** voir [ISW84].

Ainsi, le choix des matrices de transformation  $(\tilde{V}, V)$ ,  $(\tilde{Q}, Q)$ , et  $(\tilde{O}, O)$ , et des matrices complémentaires  $M$ ,  $N$  et  $L$  qui a permis de générer une expansion  $\tilde{S}$  donnée par (1.38) du système  $S$  exprimé par l'équation (1.35) est un choix classique donné par les matrices suivante :

$$V = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} I_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{q_2} & 0 \\ 0 & I_{q_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{q_3} \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_2} & 0 \\ 0 & I_{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_3} \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

avec  $n_i$ ,  $q_i$  et  $m_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  représentent les dimensions respectivement de  $x_i$ ,  $u_i$  et  $y_i$ .

Le théorème suivant propose une autre manière de choisir les matrices  $M$ ,  $N$  et  $L$  offrant plus de degrés de liberté.

**Théorème 3** Le système  $\tilde{S}$  donné par (1.38) est une expansion du système  $S$  défini en (1.35) (c'est à dire  $\tilde{S}$  induit  $S$ ) et généré par le triplet de transformation  $(V, Q, O)$  donné par (1.46) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

pour tout  $i = 2, \dots, \tilde{n}$  on a

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{23} + M_{33} \\ M_{42} \end{bmatrix} [M_{22} + M_{33}]^{i-2} \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} + M_{23} & M_{24} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.47)$$

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{23} + M_{33} \\ M_{42} \end{bmatrix} [M_{22} + M_{33}]^{i-2} \begin{bmatrix} N_{21} & N_{22} + N_{23} & N_{24} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.48)$$

$$\begin{bmatrix} L_{12} \\ L_{23} + L_{33} \\ L_{42} \end{bmatrix} [M_{22} + M_{33}]^{i-2} \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} + M_{23} & M_{24} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.49)$$

et pour tout  $i = 2, \dots, \tilde{n} + 1$  on a :

$$\begin{bmatrix} L_{12} \\ L_{23} + L_{33} \\ L_{42} \end{bmatrix} [M_{22} + M_{33}]^{i-2} \begin{bmatrix} N_{21} & N_{22} + N_{23} & N_{24} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.50)$$

où

$$M = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & -M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ -M_{21} & -(M_{22} + M_{23} + M_{33}) & M_{33} & -M_{24} \\ 0 & M_{42} & -M_{42} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

$N$  et  $L$  présentent la même structure que  $M$ .

**Preuve 5** voir par exemple [BRRR01].

**Corrolaire 1** En supposant le théorème précédent vérifié, les matrices  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ , et  $\tilde{H}$  de  $\tilde{S}$  (1.39) sont données par,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \frac{1}{2}A_{21} + M_{12} & \frac{1}{2}A_{12} - M_{12} & A_{13} \\ A_{21} + M_{21} & \frac{1}{2}A_{22} + M_{22} & \frac{1}{2}A_{22} + M_{23} & A_{23} + M_{24} \\ A_{21} - M_{21} & \frac{1}{2}A_{22} - (M_{22} + M_{23} + M_{33}) & \frac{1}{2}A_{22} + M_{33} & A_{23} - M_{24} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32} + M_{42} & \frac{1}{2}A_{32} - M_{42} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

les matrices  $\tilde{B}$  ou  $\tilde{H}$  étant déduites de  $\tilde{A}$ , en remplaçant respectivement  $\tilde{A}_{ij}$  par  $\tilde{B}_{ij}$  ou  $\tilde{H}_{ij}, M_{ij}$  par  $N_{ij}$  ou  $L_{ij}$ , pour  $i = 1, \dots, 4$  et  $j = 1, \dots, 4$ .

**Preuve 6** Pour  $\tilde{A}$ , considérer (1.44), la définition de  $A$  dans (1.35a) et de  $M$  dans (1.51). Idem pour  $\tilde{B}$ , et  $\tilde{C}$ .

Dans ce qui suit, on s'intéressera au problème de décentralisation des grands systèmes.

## 1.7 Décentralisation des grands systèmes

Dans ce paragraphe, on va aborder le problème de la commande des systèmes de grande dimension. Nous rappelons ici que les systèmes considérés sont des systèmes linéaires. La synthèse d'une loi de commande pour un système de grande dimension est connue pour être difficile. Elle doit satisfaire non pas un seul objectif de commande, mais plusieurs sous-objectifs, puisqu'elle nécessite par nature une décomposition (physique ou mathématique) en plusieurs sous-systèmes. D'autres difficultés viennent s'ajouter à la précédente, à savoir :

- La difficulté de trouver une modélisation parfaite du système, à cause de la présence des incertitudes sur les sous-systèmes et sur les interconnexions les liant.
- La synthèse d'une loi de commande pour des systèmes de grande dimension débouche sur un problème numérique de grande taille, confronté par conséquent à des limitations d'espace mémoire, de capacité de calcul et de précision.
- Finalement, la grande taille à la fois du système et du problème numérique, combinée aux performances exigées, impose à l'automaticien le choix d'observateur et/ou de commande décentralisée. C'est pour cela, que nous avons choisi de traiter le système en le décomposant en plusieurs sous-systèmes.

La disposition des capteurs dans les installations d'un système de grande dimension constitue aussi un élément important dans la recherche des structures d'estimation dans le cas d'une commande basée observateur. Lorsque plusieurs capteurs, en général différents, observent un même système dynamique, il est courant que chacun d'entre eux soit associé localement à un processeur, lequel est chargé de mettre en forme les mesures et de les transmettre vers un centre de traitement. La plupart des algorithmes d'estimation suppose le synchronisme des prises de mesures sur l'installation, ce qui veut dire que toutes les mesures parviennent au centre de traitement au même instant. Cette hypothèse pourrait être vérifiée lorsque les capteurs sont concentrés sur un même site, en revanche, elle est difficile à justifier dans le cas où ils sont dispersés à travers les installations distantes du système. La disposition de ces capteurs dans les systèmes présente trois cas de figures :

1. Tous les capteurs sont situés sur un même site (figure 1.3) : dans ce cas on peut faire l'hypothèse de synchronisme entre sous-systèmes.

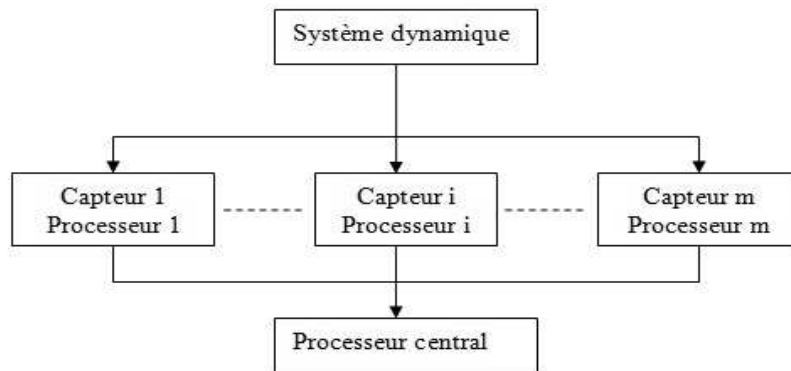


FIG. 1.3 – Groupement des capteurs sur un même site

2. Les capteurs sont dispersés dans des sites différents (figure (1.4)) : dans ce cas, il est naturel de considérer que les mesures sont prises séquentiellement les unes après les autres de façon cyclique.

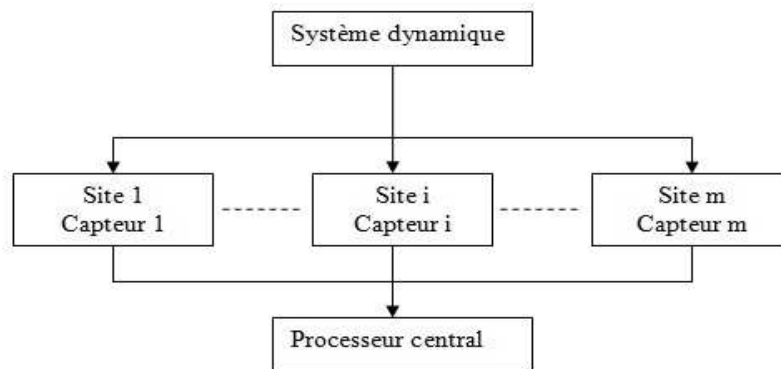


FIG. 1.4 – Dispersion des capteurs sur plusieurs sites

3. Les capteurs peuvent se présenter dans l'installation sous forme de groupements dispersés, combinant les deux structures précédentes.

Plus généralement, l'objectif fondamental est la simplification du problème d'observation et de commande, trop complexe pour être résolu en employant les résultats classiques (centralisé). J. Bernussou et A. Titli dans [BT82] distinguent différentes stratégies de décomposition du problème numérique, verticale ou horizontale.

### 1.7.1 Décomposition temporelle ou verticale

La décomposition concerne ici la difficulté de synthèse. La première apparition de cette technique de décomposition a eu lieu en 1980 sous le nom de " multi-couches " (en anglais, multilayer). Un schéma classique de commande " hiérarchisée " est donné dans la figure 1.5 [Sch02].

Comme on peut le voir, c'est bien la commande qui est hiérarchisée dans cette stratégie. Le système de pilotage se compose de quatre niveaux hiérarchiques qui communiquent entre eux.

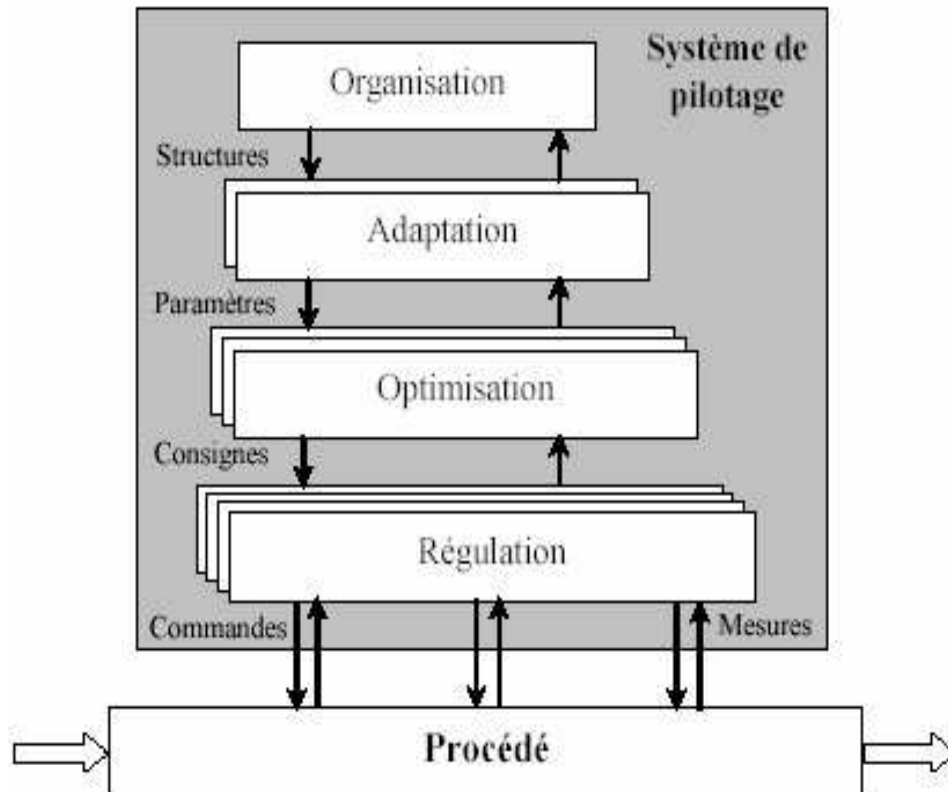


FIG. 1.5 – Vue d'ensemble d'un système de grande dimension avec une commande hiérarchisée

Le niveau le plus bas est celui de la "régulation" qui est l'organe en contact direct avec le procédé, duquel il reçoit les mesures  $y(t)$  et à qui il envoie les commandes  $u(t)$  permettant de satisfaire le cahier des charges imposé. Le niveau d'optimisation fournit quant à lui au régulateur les consignes permettant d'optimiser un certain nombre de critères de performances, en se basant sur un modèle dynamique ou statique, ou sur plusieurs modèles de référence dans le cas d'une commande multi-modèles ou d'une gestion de situations d'urgence (commande fiable, détection de pannes, diagnostic de commande...). Le niveau d'adaptation a pour rôle d'adapter les paramètres des modèles de référence et/ou du régulateur. Le niveau d'organisation, enfin, fait intervenir directement l'opérateur et consiste à choisir les différentes méthodes et à les traduire en algorithmes transmis aux niveaux inférieurs. Schématiquement, à chacun de ces niveaux peuvent être associées différentes techniques et méthodologies :

- Niveau 1 : les outils de la commande.
- Niveau 2 : l'optimisation (programmation linéaire, non linéaire...), et la génération de la trajectoire
- Niveau 3 : l'identification et la reconnaissance de formes.
- Niveau 4 : la recherche opérationnelle (gestion de fichiers, de données...)

Soulignons qu'en fait, dans la littérature, ce que l'on désigne usuellement par régulateur ou contrôleur classiquement dans le monde de la commande, ne fait référence implicitement qu'au premier niveau, voire parfois au second et troisième mais selon un point de vue particulier. Dans

le cas de contraintes structurelles sur la loi de commande recherchée, il faudra donc envisager la structuration du premier niveau, mais aussi celui des niveaux supérieurs. Cela n'implique pas forcément les mêmes capacités de calcul à mettre en oeuvre localement. S'agissant de l'estimation de l'état, la décentralisation hiérarchique a été développée surtout pour les systèmes creux. Pichai et al (1983), ont présenté une méthode basée sur la théorie des graphes, permettant de transformer de tels systèmes en une structure bloc-triangulaire. Ceci nous permettra de décomposer le système selon une hiérarchie descendante (figure 1.6) dans laquelle les interconnexions sont unilatérales.

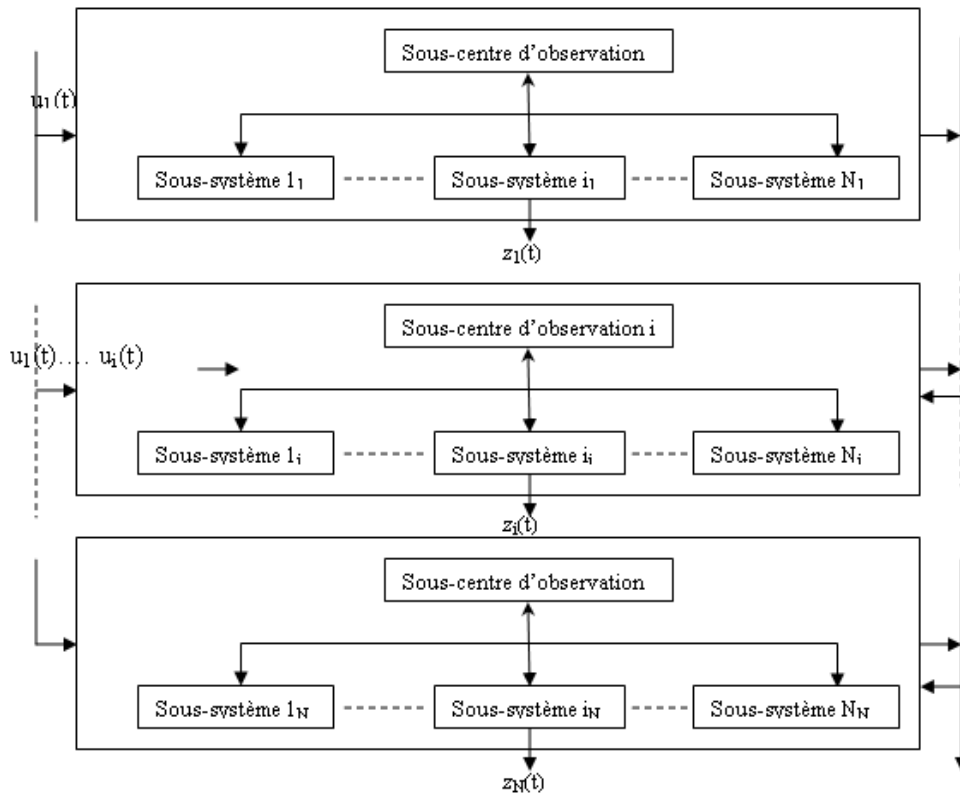


FIG. 1.6 – Structure décentralisée hiérarchique pour des systèmes creux

L'approche développée par Hodzic et Siljak (1983) pour estimer l'état de ce sous-système consiste à construire l'estimateur global comme une union d'estimateurs locaux associés à chaque niveau de hiérarchie. Les estimateurs locaux obtenus à partir du filtre de Kalman dans lequel les séquences d'innovation sont remplacées par des séquences de "quasi-innovation", combinant les mesures locales et les estimées précédemment obtenues dans les niveaux supérieurs de la hiérarchie.

En résumé, P. Bertrand dans [Ber88] suggère que cette approche par hiérarchisation mène à une analyse plus structurée et rigoureuse du problème de commande que l'on se pose, en obligeant à examiner les divers problèmes aux différents niveaux, à les ordonner, à tenir compte dès le départ de leurs interrelations et des moyens de les coordonner et à répartir les efforts (conception et communication des niveaux, moyen de calcul...) entre ces divers niveaux, permettant une meilleure utilisation des moyens. Notons de plus que l'architecture hiérarchisée du système de commande, associée à la rigueur méthodologique suggérée par les trois points précédents, doit



permettre de prendre en compte des modifications éventuelles du système, avec l'adjonction ou le retrait de sous-systèmes par exemple, ce qui est fréquent pour un système industriel complexe. De plus, on peut espérer avoir avec une telle loi de commande hiérarchisée la possibilité d'une mise en route progressive des diverses parties du système. Nous aimerions au final souligner le peu de supports théoriques disponibles pour les techniques de décomposition verticale, contrairement au cas des techniques de décomposition horizontale. Ceci peut s'expliquer par la difficulté de formuler mathématiquement le problème de décomposition verticale, avec la gestion des périodes d'intervention de chacun des niveaux, la répartition des capacités de calcul à chaque niveau, ou bien encore la gestion des modes de fonctionnement normaux et anormaux, qui fait appel dans ce cadre à un ensemble de savoir-faire de l'automatique au sens large dépassant le seul cadre du contrôle /commande. Un autre inconvénient de cette méthode est l'absence d'une formulation mathématique. Il existe une autre manière de décomposer le problème de commande dans le cas d'un système de grande dimension, méthode qui sera exposée au paragraphe suivant.

### 1.7.2 Décomposition horizontale ou spatiale

Dans les procédés industriels comportant un grand nombre d'actionneurs et/ou de capteurs, il peut être préférable d'employer des observateurs décentralisés plutôt qu'un observateur multi-variable centralisé, ou global (figure 1.7).

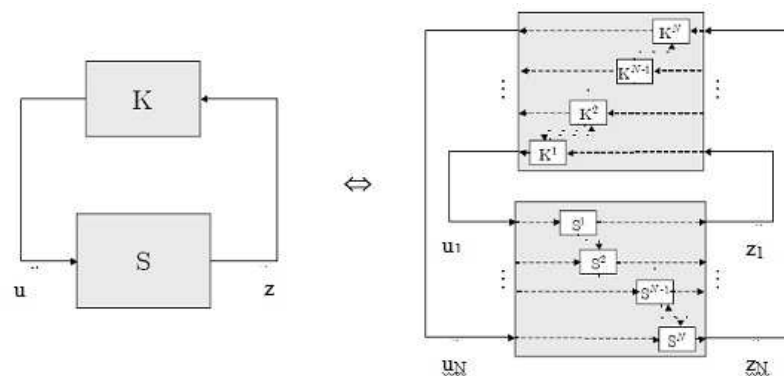


FIG. 1.7 – Décomposition horizontale ou spatiale du système S et de l'observateur K

On distingue deux méthodes de décomposition horizontale, également appelée décomposition spatiale [BT82]. La première méthode est la méthode dite " sans recouvrement " et la deuxième méthode est appelée " avec recouvrement " (en anglais, overlapping control). La première ne prend pas en compte les interconnexions entre les sous-systèmes, à la différence de la deuxième. Dans ce qui suit on présentera en bref le principe de ces deux méthodes.

- Méthode sans recouvrement : Il s'agit donc d'une décentralisation par blocs. On pourra alors appliquer à chacun des sous-systèmes les techniques de synthèse multivariables. Le choix de la taille des sous-systèmes résulte d'un compromis entre leur taille et leur nombre : un petit nombre de sous-systèmes diminue par voie de conséquence le nombre de correcteurs, ce qui garantit une bonne performance du système global en terme de poursuite de trajectoire et de rejet de perturbation. A l'inverse, un grand nombre de sous-systèmes, augmente le nombre de correcteurs, ce qui rend le système plus robuste face aux éventuelles défaillances de capteurs ou d'actionneurs. C'est d'ailleurs une commande strictement décentralisée qui est le plus souvent utilisée dans l'industrie, ainsi que dans les travaux des

chercheurs qui traitent la fiabilité des systèmes de grande dimension. Bien entendu, en dehors de ces considérations, on peut toujours s'appuyer sur les résultats des outils mathématiques, comme la diagonalisation par blocs de la matrice d'état dans le cas d'une structure décentralisée par blocs, ou la transformation de Toeplitz...

- Méthode avec recouvrement : La négligence des couplages existant entre les divers sous-systèmes, peut conduire, dans le cas de couplages forts, à l'instabilité du système bouclé. La prise en compte des couplages entre sous-systèmes adjacents a été réalisée par la méthode du recouvrement de sous-systèmes [Sil91] : l'idée est que deux correcteurs consécutifs partagent quelques entrées et sorties.

### 1.7.3 Décentralisation par transfert de modèle

La décentralisation par "transfert de modèle" consiste à "transférer" le modèle global du procédé vers les centres d'observation, encore appelés "noeuds d'observation". Elle relève du souci d'attribuer, à chaque noeud d'observation, des moyens de calcul propres. Les différents noeuds d'observation peuvent alors, dans un premier temps, mettre en oeuvre les équations du filtre de Kalman en utilisant leurs propres mesures et ce, d'une manière parfaitement indépendante. Les estimées partielles ainsi obtenues sont sous-optimales mais, par une procédure d'assimilation qui diffère selon les auteurs, ces estimées peuvent être ajustées à leurs valeurs optimales (c'est le processus d'optimisation). En effet, plusieurs méthodes de mise en oeuvre ont été proposées pour traiter les équations d'optimisation. La plus récente, et la plus intéressante, est celle proposée par [Rao et Dur 91]. L'optimisation est traitée localement à chaque noeud recevant, qui obtient tous les termes qui lui manquent par le biais d'un réseau de communication : à la fin de ce processus d'optimisation, les estimées obtenues sont identiques et optimales pour chaque noeud. L'architecture décentralisée proposée par [Rao et Dur 91] pour la mise en oeuvre de l'algorithme est illustrée dans la figure 1.8.

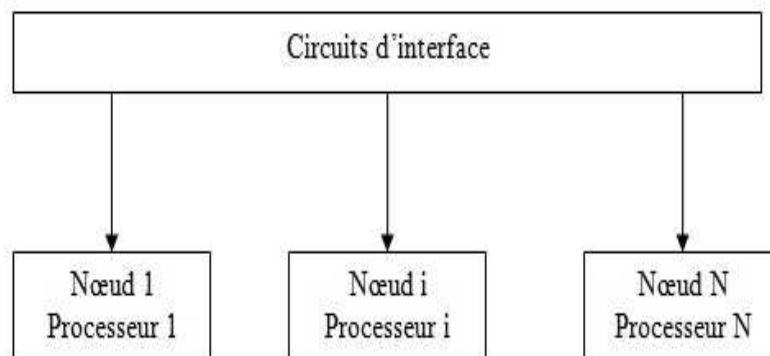


FIG. 1.8 – Décentralisation par " transfert de modèle "

Les avantages de l'estimateur décentralisé relatifs à cette approche sont la simplicité, l'optimalité et la réduction du temps calcul global, lorsque le nombre de processeurs est assez grand. Ses inconvénients résident dans le fait que dans cette structure décentralisée, seule l'équation de mesure est décomposée. L'équation d'état est prise globalement avec la même dimension pour tous les noeuds d'observation. Par conséquent, il n'y a pas vraiment une réduction de la dimension du système. On peut par ailleurs, sans difficulté, montrer qu'il y a globalement une augmentation

substantielle du nombre d'opérations et de l'espace-mémoire nécessaires à la mise en oeuvre de l'algorithme. Malgré un degré de parallélisme élevé en apparence et malgré l'apparente réduction des échanges de données, cette approche ne répond pas aux questions fondamentales de la stabilité numérique et de la réduction du coût global d'implémentation.

## 1.8 Structure décentralisée à orthogonalisations successives

Le premier véritable estimateur décentralisé optimal, effectuant une décomposition du système dans l'espace d'état et un traitement décentralisé des mesures est, sans doute, celui développé par [HSST78] et utilisant le filtre de Kalman. Cet estimateur exploite le lemme de projection orthogonale caractérisant les estimateurs qui minimisent la norme de l'erreur. Ce lemme stipule que l'erreur d'estimation est orthogonale à l'espace des observations, autrement dit, la meilleure estimée de l'état  $x$  est sa projection orthogonale sur l'espace  $\mathbf{Z}$  des observations du système qui est un espace de Hilbert.

Les avantages : lorsque la dimension du système est grande et lorsque les sous-systèmes ont un même nombre d'échantillon de mesures (notamment lorsque ces mesures sont scalaires), les propriétés numériques du filtre décentralisé ainsi construit sont plus intéressantes que celles du filtre de Kalman global. En effet, les auteurs ont montré qu'il y a une amélioration de la stabilité numérique et une réduction du nombre d'opérations et de l'espace-mémoire nécessaire à l'implémentation.

L'approche par orthogonalisations successives a le mérite d'avoir ouvert la voie à la véritable décentralisation optimale dans les espaces d'état et des observations. Cependant, sa formulation est de nature à décourager toute personne désireuse de l'appliquer. En effet, d'une part, les notations choisies ne sont pas homogènes. De plus, programmer de tels algorithmes conduirait à une redondance de calculs (par exemple dans l'évaluation des termes)

Dans ce qui suit, on présentera un outil d'analyse spécifique aux "grands systèmes" qui porte sur stabilité et la stabilisation de ces systèmes, cet outil n'est autre que le concept de stabilité connective.

Dans la dernière partie du chapitre, on tient à présenter quelques outils d'analyse de stabilité de stabilisabilité des systèmes de grande dimensions.

## 1.9 Outil d'analyse des systèmes de grande dimension

L'objectif de ce paragraphe est de présenter quelques outils d'analyse de stabilité et de stabilisabilité spécifiques aux "grands systèmes - systèmes complexes". Ces outils se présentent sur deux volets :

- La recherche de modes fixes : où le système considéré peut-il être stabilisé dans le cadre de la structure envisagée pour la loi de commande. Même si cet outil paraît simple, il est très difficile à mettre en oeuvre étant donné le nombre important de variables à manipuler, Il est d'autant plus difficile à utiliser que l'on traite de la stabilité d'un système structuré, c'est à dire d'un système décomposé en sous-systèmes interconnectés entre eux [Ben07].

- L'utilisation du concept de stabilité connective : c'est une technique qui permet de garantir à la fois la stabilité locale du système au niveau de chaque sous-système et sa stabilité globale en tenant compte des interactions.

D'autres outils et méthodes peuvent être trouvés dans la littérature (tel que la recherche de modes fixes structurels [Sil91]), mais seule la seconde technique citée ci-dessus sera présentée dans ce rapport. Son choix étant motivé par sa capacité à illustrer les idées développées durant ces travaux de thèse.

**Concept de stabilité connective :**

Un système de grande dimension peut être assimilé à un ensemble de sous-systèmes interconnectés, il est donc impératif de vérifier sa stabilité en examinant principalement deux aspects :

- La stabilité locale : au niveau de chaque sous-système.
- La stabilité globale : en tenant compte des interactions.

De ce fait, assurer la stabilité d'un système de grande dimension en dépit des incertitudes structurelles sur le modèle objet d'étude revient à exploiter la notion de "stabilité connective" du système. Ce concept introduit par D.D. Siljak [Sil78], [Sil91] fait appel au vecteur de Lyapunov pour l'étude de stabilité des systèmes de grande dimension. Chaque composante de ce vecteur est une fonction scalaire associée à l'un des sous-systèmes, permettant de conclure sur sa stabilité. L'idée consiste alors à déduire la stabilité du système global de l'analyse conjointe de chaque fonction scalaire constitutive du vecteur. Une fois la stabilité du système global assurée, celle de tous les sous-systèmes est assurée également par voie de conséquence.

Cette notion définie initialement dans le cadre général des grands systèmes, sera introduite dans ce document pour étudier la stabilité d'une nouvelle forme d'observateurs interconnectés permettant d'estimer l'état d'un système de grande dimension qui fera l'objet du chapitre 2.

**Définition 5 Stabilité connective**

*Un système de grande dimension vérifie la propriété de stabilité connective si chacun de ses sous-systèmes est stable et s'il est stable au sens de Lyapunov.*

**Définition 6 [CL98]**

*Un système  $S$  formé par  $N$  sous systèmes et donné par :*

$$\dot{X}_i(t) = A_{ii}X_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}X_j(k) \tag{1.53}$$

*est dit connectivement asymptotiquement stable si l'équilibre  $X_i^* = 0$  du système est asymptotiquement stable.*

En d'autres termes, nous allons nous intéresser à la stabilité asymptotique globale des observateurs interconnectés, pour le point d'équilibre  $X_i^* = 0$ , où  $X_i$  est l'erreur d'estimation de l'état, sous les perturbations structurelles. On peut donc définir la propriété de stabilité connective comme étant la capacité de l'observateur interconnecté à être stable de manière robuste vis-a-vis des incertitudes sur les interconnexions entre les sous systèmes qui le forment. Plus de détails concernant la stabilité connective peuvent être trouvés dans l'ouvrage [Sil91].

## 1.10 Conclusion

Nous avons présenté dans ce premier chapitre quelques problèmes liés à la grande dimension des systèmes, où on a présenté quelques outils d'analyse de structuration et de décomposition cherchant à expliciter les caractéristiques du modèle du système de grande dimension. Ces différents outils qui diffèrent selon les objectifs visés (observation et/ou commande) permettent

de chercher une transformation exacte ou approchée mettant en oeuvre des moyens algébriques [BDRRZ92], ou reposant sur la théorie des graphes [Sil91] du fait de leur avantage numérique. Cependant, dans certains cas, la négligence des couplages existants entre les sous-systèmes, peut conduire, dans le cas de fortes interconnexions, à l'instabilité du système. La prise en compte de ces couplages entre sous-systèmes adjacents a été réalisée par la méthode du recouvrement de sous-systèmes [Sil91] : l'idée est que deux sous systèmes consécutifs partagent quelques entrées et sorties, voire quelques états. Cette méthode nous sera utile dans les chapitres suivants pour la synthèse par de nouvelles méthodes des observateurs décentralisés et de la commande décentralisée. Enfin, nous avons présenté un outil d'analyse de stabilité et de stabilisation de système de grande dimension : on parle ici de la notion de "stabilité connective" qui sera reprise dans le chapitre 2 afin d'étudier la stabilité d'une nouvelle forme d'observateur interconnecté. En effet, le chapitre suivant traite des observateurs décentralisés des systèmes de grande dimension à interconnexions inconnues.



# Chapitre 2

## Observateur décentralisé des systèmes de grande dimension à interconnexions inconnues

### 2.1 Introduction

L'automatique moderne repose sur la description des systèmes et des phénomènes physiques de plus en plus complexes. Cela nécessite que l'information a priori sur le système (structure du modèle ou valeurs des paramètres) et l'information a posteriori sur la réponse du système (ensemble des mesures provenant des différents capteurs) soient disponibles en même temps. Cette hypothèse est plutôt irréaliste dans le cas de systèmes à grande dimension. Ces systèmes caractérisés par une dispersion géographique et/ou un nombre élevé de variables d'états, ne peuvent être traités de manière efficace que s'ils sont décomposés en sous-systèmes interconnectés de dimensions plus faibles. Ceci mène à une structure décentralisée beaucoup plus simple à manipuler pour une commande basée observateur. La plupart des stratégies de commande développées suppose que les états des sous-systèmes sont disponibles ([GS89], [GWM96]...). Cependant, cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée en pratique. L'utilisation des modèles de systèmes de grande dimension pour estimer tous ses états, et ceci à partir des mesures d'une partie seulement de ses états a permis d'économiser l'utilisation d'un grand nombre de capteurs. En effet, une partie de ces derniers a été remplacée par ce qu'on appelle les capteurs logiciels ou observateurs (appelé aussi estimateur d'état), d'où l'intérêt économique dans l'industrie de synthétiser des observateurs. L'estimation de l'état pour les systèmes de grande dimension est aussi d'une grande importance pour le diagnostic et pour la commande. En effet, durant les dernières décennies beaucoup de travaux en automatique ont été menés sur la conception d'observateurs pour les systèmes de grande dimension, la plupart sont basées sur le filtre de Kalman et ses différentes variantes ([Bas92], [HSST78]...) qui ne présente pas de bonnes propriétés de convergence quand la dimension du système augmente. La méthode de synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour les "petits systèmes" est due à Darouach et al [DZX94] par la résolution de l'équation de Sylvester sous contrainte, en utilisant les inverses généralisés. Dans ce travail, une extension de cette méthode aux grands systèmes est présenté.

De ce fait, dans ce chapitre, on propose des approches pour la synthèses des observateurs décentralisés pour les systèmes de grande dimension à interconnexions indisponibles. Ces interconnexions seront considérées comme des entrées inconnues. La synthèse d'observateur à entrées

inconnues pour les systèmes de faible dimension a suscité l'intérêt de la communauté automatique ces dernières années ([YW88], [GS91], [HM92], [Bas92], [DZX94] et [DZB95]...), lorsque la perturbation du système ou une partie de ses entrées n'est pas accessible. Toutefois, très peu de travaux traitent la synthèse des observateurs des grands systèmes. Dans ce chapitre, on propose de nouvelles méthodes pour la synthèse des observateurs décentralisés relatifs aux systèmes de grande dimension avec et sans perturbation [MBDH09], [MBDH10], [MBDH10a]...

On commencera au début de ce chapitre par synthétiser un observateur décentralisé pour les systèmes non singuliers, puis on étendra notre approche au cas de systèmes plus généraux ou singuliers. Le cas du filtre  $H_\infty$  décentralisé sera également traité [MBDH], [MBDH10c], [MBDHd]. Chaque méthode de synthèse proposée est validée par un exemple numérique.

## 2.2 Observateur décentralisé pour les systèmes standards

### 2.2.1 Position du problème

Considérons le système linéaire de grande dimension formé de  $N$  sous-systèmes et décrit par le modèle d'état suivant :

$$\sigma X(t) = AX(t) + Bu(t) + Fw(t) \quad (2.1a)$$

$$Z(t) = HX(t) + Rw(t) \quad (2.1b)$$

Où  $\sigma X(t) = X(t+1)$  pour les systèmes à temps discret,  $t \in \mathbb{N}$  et  $\sigma X(t) = \dot{X}(t)$  pour les systèmes à temps continu,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^l$ ,  $Z(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  sont respectivement l'état, l'entrée connue, la sortie et la perturbation. Considérons la partition des vecteurs  $X(t)$  et  $Z(t)$  suivante [Bas92] :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}, \quad Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

et les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $F$ ,  $H$  et  $R$  sont des matrices réelles et constantes telles que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times q}$ . Ces matrices sont partitionnées selon  $X(t)$  comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & H_N \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix} \quad (2.4)$$



**Remarque 4** Rappelons que la décomposition ci-dessus ne présente pas de contrainte, car comme on l'a signalé dans le premier chapitre, on peut toujours se ramener à cette forme en utilisant des transformations de similarité ( voir par exemple [Bas92], [Dal76], [FGS87], [PCK91]...)

Le système (2.1) peut alors s'écrire sous sa forme décentralisée, en  $N$  sous-systèmes interconnectés, chaque sous-système est décrit par :

$$\sigma x_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_i u(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}x_j(t) + F_i w(t) \quad (2.5a)$$

$$z_i(t) = H_i x_i(t) + R_i w(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.5b)$$

où

$$A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}, B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l}, F_i \in \mathbb{R}^{n_i \times q}, H_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}, R_i \in \mathbb{R}^{m_i \times q}$$

et  $n = n_1 + \dots + n_N$ .

Les vecteurs  $x_i(t)$  et  $z_i(t)$  sont l'état et la sortie du  $i$ -ème sous-système respectivement et  $x_j(t)$ ,  $j \in \{1 \dots N\}$  avec  $j \neq i$  représente les interconnexions du sous-système  $i$  avec les sous-systèmes  $j$  et qui sont considérées comme inconnues.

Soient maintenant les matrices suivantes :

$$D_i = \begin{bmatrix} A_{i1} & \dots & A_{i(i-1)} & A_{i(i+1)} & \dots & A_{iN} \end{bmatrix}$$

et

$$v_i(t) = \begin{bmatrix} x_1(t)^T & \dots & x_{i-1}(t)^T & x_{i+1}(t)^T & \dots & x_N(t)^T \end{bmatrix}^T$$

Le système (2.5) devient :

$$\sigma x_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_i u(t) + D_i v_i(t) + F_i w(t) \quad (2.6a)$$

$$z_i(t) = H_i x_i(t) + R_i w(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.6b)$$

Dans cette partie, on se propose de synthétiser un observateur décentralisé pour chaque sous-système  $i$  donné par (2.6) qui satisfait les performances globales obtenues avec un observateur centralisé appliqué au système (2.1).

Pour cela, on commence par transformer le système (2.6) en un système équivalent plus adapté à la synthèse d'observateurs à interconnexions inconnues. En effet, on répartit les mesures  $z_i(t)$  en deux classes, celles qui sont affectées par les perturbations notées  $z_{i_1}(t)$  et celles qui ne le sont pas notées  $z_{i_2}(t)$ . L'idée est d'extraire les mesures  $z_{i_2}(t)$  libres des perturbations à partir des mesures réelles.

Soit  $q_{i_1}$  le rang de  $R_i$ , il existe alors deux matrices non singulières  $\mathfrak{U}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  et  $\mathfrak{V}_i \in \mathbb{R}^{q \times q}$  telles que :

$$\mathfrak{U}_i R_i \mathfrak{V}_i = \begin{bmatrix} I_{q_{i_1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

donc le système (2.5) s'écrit alors pour  $i \in \{1 \dots N\}$  :

$$\sigma x_i(t) = \bar{A}_{ii}x_i(t) + B_i u(t) + D_i v_i(t) + F_{i_1} w_1(t) + F_{i_2} w_2(t) \quad (2.8a)$$

$$z_{i_1}(t) = H_{i_1} x_i(t) + w_1(t) \quad (2.8b)$$

$$z_{i_2}(t) = H_{i_2} x_i(t) \quad (2.8c)$$

avec :  $z_{i_1} \in \mathbb{R}^{m_{i_1}}$ ,  $z_{i_2} \in \mathbb{R}^{m_{i_2}}$ ,  $F_{i_1} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_{i_1}}$ ,  $F_{i_2} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_{i_2}}$ ,  $w_1 \in \mathbb{R}^{q_{i_1}}$ ,  $w_2 \in \mathbb{R}^{q_{i_2}}$  avec  $q = q_{i_1} + q_{i_2}$  et  $m_i = m_{i_1} + m_{i_2}$  telles que :

$$\begin{bmatrix} z_{i_1} \\ z_{i_2} \end{bmatrix} = \mathfrak{U}_i z_i, \quad \begin{bmatrix} H_{i_1} \\ H_{i_2} \end{bmatrix} = \mathfrak{U}_i H_i, \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \mathfrak{V}_i^{-1} w, \quad \bar{A}_{ii} = A_{ii} - F_{i_1} H_{i_1}$$

et  $F_i \mathfrak{V}_i = \begin{bmatrix} F_{i_1} & F_{i_2} \end{bmatrix}$ .

Avant d'aborder la synthèse des observateurs, on introduit pour cette section l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 2** Pour le système interconnecté dans sa forme décentralisée décrit par les équations (2.8) on suppose que :

$$\text{rang}(H_{i_2} \begin{bmatrix} D_i & F_{i_2} \end{bmatrix}) = \text{rang} \begin{bmatrix} D_i & F_{i_2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

## 2.2.2 Synthèse d'observateurs décentralisés

On considère maintenant le nouveau système interconnecté (2.8), le but est de synthétiser un observateur asymptotiquement stable pour chaque sous-système  $i$ ,  $i \in \{1 \dots N\}$  de la forme :

$$\sigma \xi_i(t) = N_i \xi_i(t) + L_{i_1} z_{i_1}(t) + L_{i_2} z_{i_2}(t) + M_i u(t) \quad (2.10a)$$

$$\hat{x}_i(t) = \xi_i(t) - G_i z_{i_2}(t) \quad (2.10b)$$

où  $\xi_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$  est l'état de l'observateur et les matrices  $N_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $M_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l}$ ,  $L_{i_1} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_{i_1}}$ ,  $L_{i_2} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_{i_2}}$  et  $G_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m_{i_2}}$  sont des matrices constantes qui sont à déterminer telles que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - \hat{x}_i(t)) = 0$ .

La proposition suivante donne les conditions d'existence et de stabilité d'un tel observateur.

**Proposition 2** Le système (2.10) est un observateur asymptotiquement stable i.e :  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_i(t) - \hat{x}_i(t)) = 0$  si :

- i)  $N_i$  est stable.
- ii)  $P_i \bar{A}_{ii} - N_i P_i - L_{i_2} H_{i_2} = 0$
- iii)  $P_i D_i = 0$
- iv)  $P_i F_{i_2} = 0$
- v)  $P_i B_i - M_i = 0$
- vi)  $P_i F_{i_1} - L_{i_1} = 0$ , où  $P_i = I_{n_i} + G_i H_{i_2}$

**Preuve 7** soit  $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$  l'erreur d'estimation, alors :

$$e_i(t) = x_i(t) - \xi_i(t) + G_i z_{i_2}(t)$$

sa dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma e_i(t) &= N_i e_i(t) + (P_i \bar{A}_{ii} - N_i P_i - L_{i_2} H_{i_2}) x_i(t) + (P_i B_i - M_i) u(t) + (P_i F_{i_1} - L_{i_1}) z_{i_1}(t) \\ &+ P_i F_{i_2} w_{i_2}(t) + P_i D_i v_i(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

où  $P_i = I_{n_i} + G_i H_{i_2}$ .

$e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$  est non biaisée si elle ne dépend pas explicitement de l'entrée, des sorties  $z_{i_1}$  des interconnexions inconnues et des perturbations. Ainsi, en utilisant (2.11) on obtient :

$$P_i \bar{A}_{ii} - N_i P_i - L_{i_2} H_{i_2} = 0 \quad (2.12)$$

$$P_i D_i = 0 \quad (2.13)$$

$$P_i F_{i_2} = 0 \quad (2.14)$$

$$P_i B_i - M_i = 0 \quad (2.15)$$

$$P_i F_{i_1} - L_{i_1} = 0 \quad (2.16)$$

Dans ce cas,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$  si  $N_i$  est stable ce qui correspond à la condition i). ■

La méthode de synthèse d'observateurs à entrée inconnues d'ordre plein qui suit, est due à Darouach [Dar09] pour la résolution de l'équation de Sylvester sous contrainte en utilisant les inverses généralisés.

L'équation (2.12) peut s'écrire en tenant compte de l'expression de  $P_i$ , comme suit :

$$N_i = P_i \bar{A}_{ii} - \mathfrak{K}_i H_{i_2} \quad (2.17)$$

où

$$\mathfrak{K}_i = L_{i_2} + N_i G_i \quad (2.18)$$

$$L_{i_2} = \mathfrak{K}_i (I + H_{i_2} G_i) - P_i \bar{A}_{ii} G_i \quad (2.19)$$

Alors l'équation régissant la dynamique de l'observateur (2.10) devient

$$\sigma \xi_i(t) = (P_i \bar{A}_{ii} - \mathfrak{K}_i H_{i_2}) \xi_i(t) + L_{i_1} z_{i_1}(t) + L_{i_2} z_{i_2}(t) + M_i u(t) \quad (2.20)$$

où les matrices  $M_i$ ,  $L_{i_1}$  et  $L_{i_2}$ , sont obtenues respectivement à partir de (2.15), (2.16) et (2.19). D'autre part, en utilisant (2.13) et (2.14) on a :

$$P_i \begin{pmatrix} D_i & F_{i_2} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.21)$$

ce qui est équivalent à :

$$G_i H_{i_2} \begin{pmatrix} D_i & F_{i_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} D_i & F_{i_2} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

La matrice  $G_i$ , solution de (2.22) existe si et seulement si :

$$\text{rang} (H_{i_2} \begin{pmatrix} D_i & F_{i_2} \end{pmatrix}) = \text{rang} \begin{pmatrix} D_i & F_{i_2} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Cette condition n'est autre que l'hypothèse donnée par l'égalité (2.9). Dans le cas où la condition (2.23) est vérifiée, la solution générale de (2.22) est donnée par :

$$G_i = - \begin{pmatrix} D_i & F_{i_2} \end{pmatrix} \Sigma_i^+ + \mathcal{Z}_i (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \quad (2.24)$$

où  $\mathcal{Z}_i$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée et

$$\Sigma_i = H_{i_2} \begin{pmatrix} D_i & F_{i_2} \end{pmatrix}$$

$\Sigma_i^+$  est une inverse généralisée de  $\Sigma_i$  vérifiant  $\Sigma_i \Sigma_i^+ \Sigma_i = \Sigma_i$ .

Dans ce cas  $N_i$  devient :

$$N_i = \Lambda_{N_i} + \mathcal{Z}_i \Delta_{N_i} - \mathfrak{K}_i H_{i_2} \quad (2.25)$$

avec :

$$\Lambda_{N_i} = \bar{A}_{ii} - (D_i \ F_{i_2}) \Sigma_i^+ H_{i_2} \bar{A}_{ii} \quad (2.26)$$

$$\Delta_{N_i} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) H_{i_2} \bar{A}_{ii} \quad (2.27)$$

Le problème de synthèse de l'observateur décentralisé se réduit alors à trouver une matrice  $G_i$  qui satisfait (2.24) et une matrice  $\mathfrak{K}_i$  telle que  $(P_i \bar{A}_{ii} - \mathfrak{K}_i H_{i_2})$  soit stable. Ce problème est équivalent au problème standard de synthèse d'observateurs quand toutes les entrées sont connues. Les valeurs propres de  $(P_i \bar{A}_{ii} - \mathfrak{K}_i H_{i_2})$  peuvent être fixées arbitrairement, par un choix convenable de  $\mathfrak{K}_i$ , si et seulement si la paire  $(P_i \bar{A}_{ii}, H_{i_2})$  est observable. Si  $(P_i \bar{A}_{ii}, H_{i_2})$  ne l'est pas, alors on peut trouver une matrice  $\mathfrak{K}_i$  de façon à assurer la stabilité asymptotique de l'observateur si et seulement si  $(P_i \bar{A}_{ii}, H_{i_2})$  est détectable.

**Remarque 5** Si  $(P_i A_{ii}, H_i)$  est observable, alors on a un placement arbitraire des pôles par un choix judicieux de  $\mathfrak{K}_i$ . Cette condition peut être relaxée par la détectabilité de la paire  $(P_i A_{ii}, H_i)$ . Donc on peut trouver une matrice  $\mathfrak{K}_i$  assurant la stabilité asymptotique de l'observateur si et seulement si la paire  $(P_i \bar{A}_{ii}, H_{i_2})$  est détectable, dans ce cas, les poles fixes de l'observateur sont les zeros invariants du système.

Les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité sont données par le théorème suivant :

**Théorème 4** [MBDH10] Pour le système (2.8), l'observateur (2.10) existe si et seulement si :

- i)  $\text{rang}(H_{i_2} (D_i \ F_{i_2})) = \text{rang}(D_i \ F_{i_2}) = d_i$ ,
- ii)  $\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda P_i - P_i \bar{A}_{ii} \\ H_{i_2} \end{pmatrix} = n_i \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ , avec  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$  pour le cas continu et  $|\lambda| \geq 1$  pour le cas discret.

**Preuve 8** la condition i) est nécessaire pour l'existence de  $G_i$  et par conséquent de l'observateur, cela peut se déduire de l'équation (2.23). D'autre part, de (2.22) on peut trouver une matrice  $\mathfrak{K}_i$  telle que (2.17) soit asymptotiquement stable si et seulement si  $(P_i \bar{A}_{ii}, H_{i_2})$  est détectable ce qui conduit à :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I_{n_i} - P_i \bar{A}_{ii} \\ H_{i_2} \end{pmatrix} = n_i$$

c'est à dire  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  avec  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$  pour le cas continue et  $|\lambda| \geq 1$  pour le cas discret,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} I_{n_i} & \lambda G_i \\ 0 & I_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_{n_i} - P_i \bar{A}_{ii} \\ H_{i_2} \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda P_i - P_i \bar{A}_{ii} \\ H_{i_2} \end{pmatrix}$$

Ce qui complète la démonstration. ■

Le théorème suivant donne la condition ii) en fonction des zéros invariants du sous-système i.

**Théorème 5** [MBDH10] On suppose que  $\text{rang}(H_{i_2} \ D_{f_i}) = d_i$ , avec  $D_{f_i} = (D_i \ F_{i_2})$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $(P_i \bar{A}_{ii} - \mathfrak{K}_i H_{i_2})$  est détectable,
- ii)  $\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda P_i - P_i \bar{A}_{ii} \\ H_{i_2} \end{pmatrix} = n_i \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ , avec  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$  pour le cas continue et  $|\lambda| \geq 1$  pour le cas discret.

iii)  $\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I_{n_i} - \bar{A}_{ii} & D_i & F_{i2} \\ H_i & 0 & 0 \end{pmatrix} = n_i + d_i, \forall \lambda \in \mathbb{C},$  avec  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$  pour le cas continue et  $|\lambda| \geq 1$  pour le cas discret.

**Preuve 9** Les relations i) et ii) sont équivalentes grâce au Théorème 4. Afin de montrer que iii) est équivalente à ii), définissons les deux matrices :

$$S_i = \begin{pmatrix} P_i & 0 \\ D_{f_i}^+ & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, T_i = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -(\lambda D_{f_i}^+ - D_{f_i}^+ \bar{A}_{ii}) & I \end{pmatrix},$$

où  $S_i$  est de rang plein colonne et  $T_i$  une matrice non singulière et  $D_{f_i}^+$  est l'inverse généralisé de  $D_{f_i}$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I_{n_i} - \bar{A}_{ii} & D_{f_i} \\ H_{i2} & 0 \end{pmatrix} &= \text{rang} \left[ S_i \begin{pmatrix} \lambda I_{n_i} - \bar{A}_{ii} & D_{f_i} \\ H_{i2} & 0 \end{pmatrix} T_i \right] = \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda P_i - P_i \bar{A}_{ii} & 0 \\ 0 & I_{d_i} \\ H_{i2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= d_i + \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda P_i - P_i \bar{A}_{ii} \\ H_{i2} \end{pmatrix} = d_i + n_i \\ &= \text{rang}(D_{f_i}) + n_i \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème. ■

L'observateur (2.10) est complètement déterminé si l'on trouve le paramètre  $Z_i$  (voir équation (2.24)).

En effet, il existe deux méthodes pour la détermination du paramètre  $Z_i$  :

1. Soit par placement de pôle.
2. Soit par les inégalités matricielles linéaires LMI.

Dans la suite, on ne présentera que la deuxième méthode, basée sur les LMI, la première méthode est évidente et ne nécessite pas de démonstration. Par ailleurs, les conditions d'existence du paramètre  $Z_i$  tel que l'observateur (2.10) est stable sont données par le théorème 6. Seul le cas discret est traité, le cas des systèmes à temps continu peut être calculé de manière analogue.

Avant d'annoncer nos résultats, on propose de rappeler un lemme très utile relatif à la résolution de ces inégalités matricielles linéaires. Ce lemme connu sous le nom de lemme de Schur est très important pour la suite de ce travail du fait que la majorité de nos résultats repose sur l'utilisation des LMIs.

**Lemme 1 (Lemme de Schur)** [BGFB94]

Etant données trois matrices  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{S}$  ( $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$  et  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ ), les deux propositions suivantes sont équivalentes

(i)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.28)$$

(ii)

$$\mathbf{S} < 0 \text{ et } \mathbf{Q} - \mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}^T < 0. \quad (2.29)$$

La matrice  $\mathbf{Q} - \mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}^T$  est aussi appelée complément de Schur de  $\mathbf{S}$ . Il faut remarquer également que l'inégalité peut changer de sens. ■

Le théorème suivant donne une méthode de calcul de la matrice  $\mathcal{Z}_i$  paramétrant toute les matrices de l'observateur.

**Théorème 6** [MBDH10a]

Pour le système à temps discret (2.8), on suppose que l'hypothèse 2 est vérifiée et que la paire  $(P_i \bar{A}_{ii}, H_i)$  soit détectable alors il existe un observateur asymptotiquement stable de la forme (2.10), s'il existe une matrice symétrique  $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i^T > 0$ , et deux matrices  $\Omega_{K_i}$  et  $\Omega_{Z_i}$  satisfaisant l'inégalité matricielle linéaire (LMI) suivante :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X}_i & \Lambda_{N_i}^T \mathbf{X}_i + \Delta_{N_i}^T \Omega_{Z_i}^T - H_{i2}^T \Omega_{K_i}^T \\ \mathbf{X}_i \Lambda_{N_i} + \Omega_{Z_i} \Delta_{N_i} - \Omega_{K_i} H_{i2} & -\mathbf{X}_i \end{bmatrix} < 0 \quad (2.30)$$

où  $\Lambda_{N_i}$  et  $\Delta_{N_i}$  sont données respectivement par les équations (2.26) et (2.27) et les matrices  $\mathcal{Z}_i$  et  $\mathfrak{K}_i$  sont données par :

$$\mathcal{Z}_i = \mathbf{X}_i^{-1} \Omega_{Z_i} \quad (2.31)$$

$$\mathfrak{K}_i = \mathbf{X}_i^{-1} \Omega_{K_i} \quad (2.32)$$

**Preuve 10** D'après la proposition 2, l'erreur d'estimation relative au système discret (2.7) est donnée par :

$$e_i(t+1) = N_i e_i(t)$$

On peut alors en déduire que la condition nécessaire de stabilité de l'observateur est en fait la stabilité de  $N_i$  ou de manière équivalente la détectabilité de la paire  $(P_i \bar{A}_{ii}, H_{i2})$ .

Maintenant, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_i(t) = e_i^T(t) \mathbf{X}_i e_i(t)$$

où  $\mathbf{X}_i > 0$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} \Delta V_i &= V_i(t+1) - V_i(t) \\ &= e_i^T(t+1) \mathbf{X}_i e_i(t+1) - e_i^T(t) \mathbf{X}_i e_i(t) \\ &= e_i^T(t) N_i^T \mathbf{X}_i N_i e_i(t) - e_i^T(t) \mathbf{X}_i e_i(t) \\ &= e_i^T(t) [N_i^T \mathbf{X}_i N_i - \mathbf{X}_i] e_i(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Si  $\Delta V_i < 0$ , quand  $e_i(t) \neq 0$  alors  $e_i(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  et la condition i) de la proposition 2 est remplie. De l'équation (2.33),  $\Delta V_i < 0$  si

$$N_i^T \mathbf{X}_i N_i - \mathbf{X}_i < 0$$

et en utilisant le lemme de Schur [BGFB94] on obtient :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X}_i & N_i^T \mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_i N_i & -\mathbf{X}_i \end{bmatrix} < 0$$

En substituant  $N_i$  par sa valeur donnée en (2.25), et en posant  $\Omega_{K_i} = \mathbf{X}_i \mathfrak{K}_i$  et  $\Omega_{Z_i} = \mathbf{X}_i \mathcal{Z}_i$ , on obtient le résultat du théorème 6.

La résolution de la LMI (2.30) permet de déterminer  $\mathbf{X}_i$ ,  $\Omega_{K_i}$  et  $\Omega_{Z_i}$ , d'où on peut déduire  $\mathfrak{K}_i$  et  $Z_i$  en utilisant respectivement les relations suivantes :

$$\mathfrak{K}_i = \mathbf{X}_i^{-1} \Omega_{K_i} \quad (2.34)$$

$$Z_i = \mathbf{X}_i^{-1} \Omega_{Z_i} \quad (2.35)$$

■

**Remarque 6** On peut reconstruire l'observateur global relatif au système donné par (2.1) qui apparaît sous la forme suivante :

$$\sigma \xi(t) = N \xi(t) + L_1 Z_1(t) + L_2 Z_2(t) + M u(t) \quad (2.36a)$$

$$\hat{X}_i(t) = \xi(t) - G Z_2(t) \quad (2.36b)$$

où  $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état de l'observateur et les matrices  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $L_1 \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$ ,  $L_2 \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$  et  $G \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$  sont des matrices constantes telles que

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & N_N \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & L_{N_1} \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} L_{12} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & L_{N_2} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_N \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & G_N \end{pmatrix}.$$

Dans ce qui suit, on illustrera les résultats développés précédemment par deux exemples. Dans le premier exemple le paramètre  $Z_i$  est déterminé par placement de pôle tandis que dans le deuxième il est déterminé par la formulation LMI. Pour la méthode de placement de pôle, les valeurs des pôles sont fixés à  $-0.015$ ,  $-0.02$  et  $-0.07$ .

### 2.2.3 Exemples numériques

**Exemple 1** : Considérons le système interconnecté à temps discret décrit par les équations (2.1) tel que :

$$A = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right), B = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), F = \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)$$

$$H = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ce système peut être décomposé en trois sous-systèmes interconnectés comme suit :

**Le sous-système 1 :**

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, F_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ F_{11} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Le sous-système 2 :**

$$\begin{aligned} A_{22} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ F_{21} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Le sous-système 3 :**

$$\begin{aligned} A_{33} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, A_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, H_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_{32} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ F_{31} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



**L'observateur décentralisé :**

Pour le **sous-système 1** on obtient :

$$N_1 = \begin{pmatrix} -0.015 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & -0.07 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 0.4787 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1276 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{1_2} = \begin{pmatrix} 0.0187 & -0.0145 & -0.1262 \\ 0.0122 & -0.0124 & -0.09103 \\ -0.0033 & 0.0034 & 0.08873 \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour le **sous-système 2** on obtient :

$$N_2 = \begin{pmatrix} -0.015 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & -0.07 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.222 & -0.222 & 0 \\ 0 & 0.208 & -0.222 & 0 \\ 0 & -0.326 & 0.666 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{2_2} = \begin{pmatrix} 0.0444 & 0.133 & -0.0887 \\ 0.0416 & 0.098 & -0.0706 \\ -0.0652 & -0.01044 & 0.0547 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour le **sous-système 3** on obtient :

$$N_3 = \begin{pmatrix} -0.015 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & -0.07 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0555 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00042 \\ 0 & 0 & 0 & 0.222 \end{pmatrix},$$

$$L_{3_2} = \begin{pmatrix} 0.118 & -0.0405 & 0.110 \\ 0.021 & 0.443 & -0.000514 \\ -0.015 & -0.191 & -0.444 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les figures 2.1, 2.2 et 2.3 donnent l'évolution des composantes de l'erreur pour les trois sous-systèmes où on compare les différentes composantes de l'état du système global par rapport aux états estimés et qui sont donnés par l'observateur décentralisé. Il est clair que la méthode présentée permet la convergence de l'estimateur décentralisé vers l'état du système global.

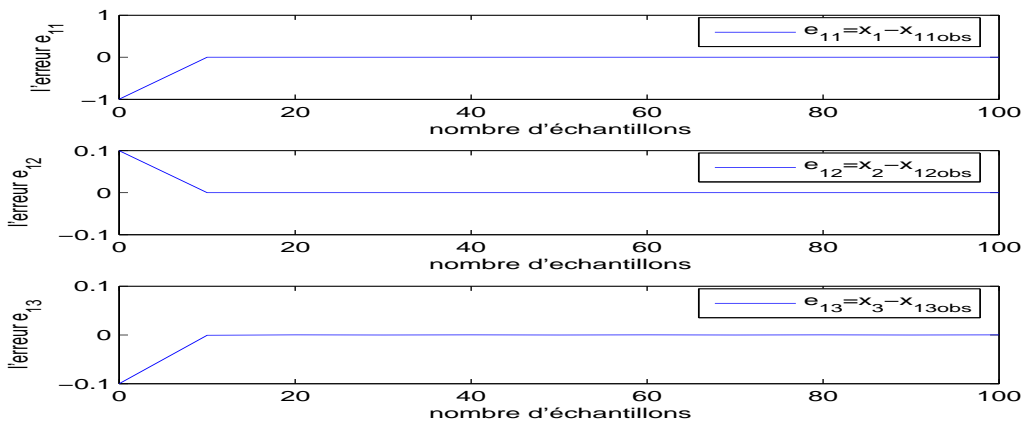


FIG. 2.1 – Les composantes de l'erreur  $e_1$  relative au 1er sous système

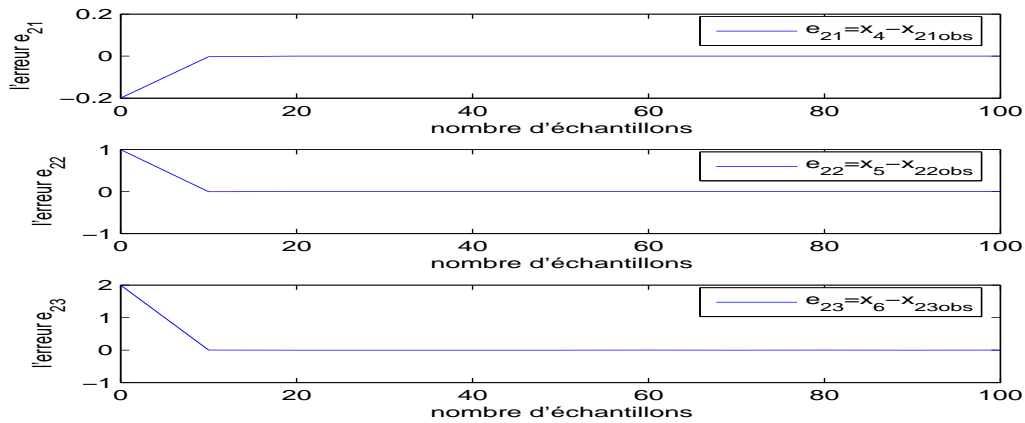


FIG. 2.2 – Les composantes de l'erreur  $e_2$  relative au 2ème sous système

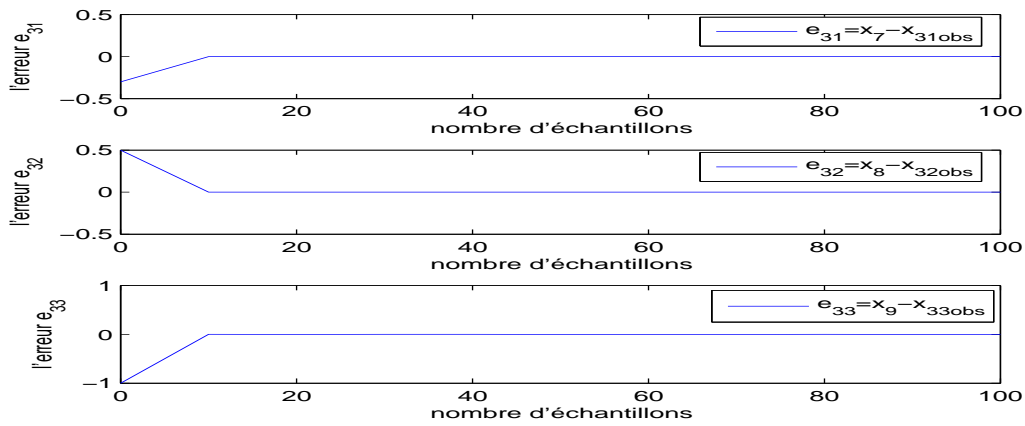


FIG. 2.3 – Les composantes de l'erreur  $e_3$  relative au 3ème sous système

**Exemple 2 :**

On considère un système formé de deux pendules identiques couplés par un ressort de constante de raideur  $k$  et soumis à une perturbation  $w$  comme le montre la Figure 2.4. Cette perturbation agit simultanément sur le sous-système 1 et sous-système 2. On choisit les vecteurs d'état comme suit :

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \end{bmatrix}, x_2(t) = \begin{bmatrix} \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}$$

Pour le sous-système 1, on obtient le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} - \frac{ka^2}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{ka^2}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} x_2(t) \\ z_1(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_1(t) \end{aligned}$$

Pour le sous-système 2, on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} - \frac{ka^2}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{ka^2}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} x_1(t) \\ z_2(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_2(t) \end{aligned}$$

La position du ressort peut changer en fonction de la longueur  $l$  du pendule et les incertitudes sur les interconnexions sont présentées en prenant  $a(t)$  une fonction du temps comme inconnue avec  $a(t)/l \in [0, 1]$  ([GS89], [SS93]). Pour cette simulation, on a considéré les paramètres suivants [Wu07] :

$$g/l = 1, \quad 1/ml^2 = 1, \quad k/m = 2, \quad a/l = 0.5.$$

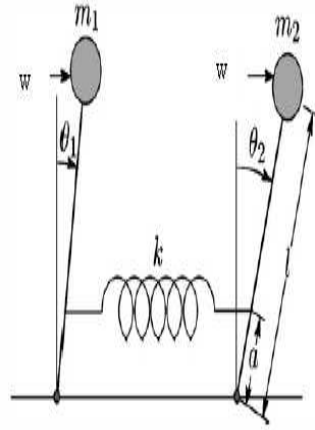


FIG. 2.4 – Pendules inverses couplées

Le modèle en temps continu est discrétisé en utilisant l'approximation "forward rectangular" (fonction 'bilinear' avec en option 'FwdRec' dans Matlab) avec une période  $T = 0.001s$ . on obtient les modèles à temps discret suivants :

**Le sous-système 1 :**

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} x_2(t) \\ z_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_1(t) \end{aligned}$$

**Le sous-système 2 :**

$$\begin{aligned} x_2(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} x_1(t) \\ z_2(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_2(t) \end{aligned}$$

**L'observateur décentralisé :**

La résolution de la LMI du théorème (2.30) permet de déduire les matrices de l'observateur telles

que :

Pour le **sous-système 1** on a :

$$N_1 = \begin{bmatrix} -0.2775 & 0 \\ 0 & -0.10 \end{bmatrix}, L_{12} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.49 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour le **sous-système 2** on a

$$N_2 = \begin{bmatrix} -0.2775 & 0 \\ 0 & -0.10 \end{bmatrix}, L_{22} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.49 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les Figures 2.5 et 2.6 donnent les résultats de simulations obtenus où l'on trace les formes d'onde des composantes des erreurs d'estimation obtenues pour les différents sous-systèmes. Sur les figures 2.5 et 2.6 les états  $x_{11}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{21}$  et  $x_{22}$  représentent respectivement  $\theta_1$ ,  $\hat{\theta}_1$ ,  $\theta_2$  et  $\hat{\theta}_2$ . Les états  $x_{11obs}$ ,  $x_{12obs}$ ,  $x_{21obs}$ ,  $x_{22obs}$  sont respectivement les estimées de  $x_{11}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{21}$ ,  $x_{22}$ . La méthode présentée permet la convergence de l'estimateur décentralisé vers le système réel.

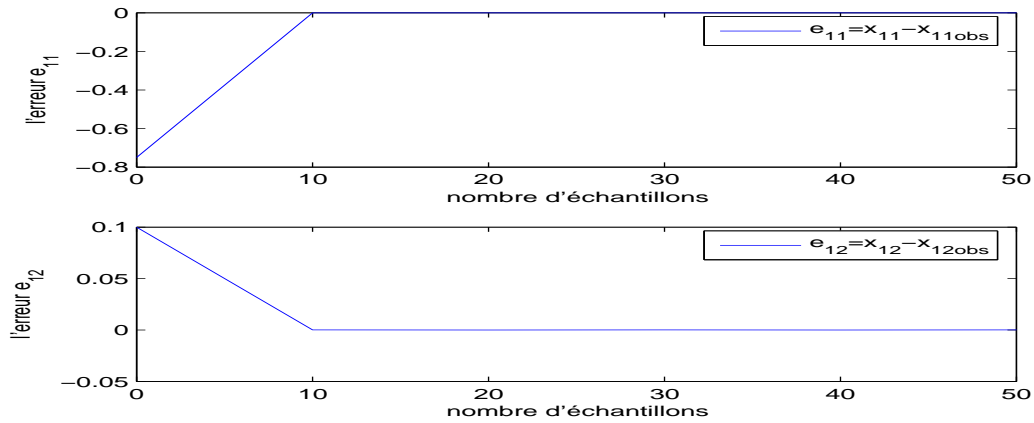


FIG. 2.5 – Evolution des composante de l'erreur d'estimation du sous système 1

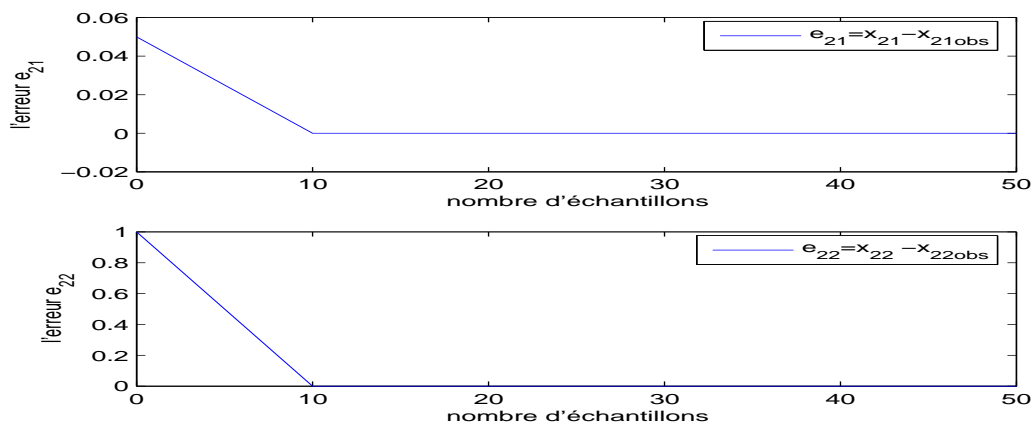


FIG. 2.6 – Evolution des composante de l'erreur d'estimation du sous système 2

## 2.3 Observateur décentralisé pour les systèmes singuliers

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'observation des systèmes singuliers de grande dimension. Comme nous le savons tous, ces systèmes représentent un des éléments essentiels dans notre société. On peut citer à titre d'exemple, les systèmes de transport, de communication informatique, les systèmes d'énergie, les systèmes économique ... C'est pour cela que les problèmes d'estimation de l'état relative à de tels systèmes sont soulevés dans ce paragraphe, surtout lorsque ces états ne sont pas tous accessibles ou n'ont pas pu être mesurés pour des raisons techniques et / ou économique.

Dans ce qui suit, on va présenter notre travail relatif à la synthèse d'un observateur décentralisé pour les systèmes singuliers de grande dimension [MBDH10b]. L'approche proposée est validée sur un exemple numérique.

### 2.3.1 Position du problème

Considérons le système singulier de grande dimension composé de  $N$  sous-systèmes et décrit par le modèle suivant :

$$E\sigma X(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (2.37a)$$

$$Z(t) = HX(t) \quad (2.37b)$$

Où  $\sigma x(t) = x(t+1)$  pour les systèmes à temps discret,  $t \in \mathbb{N}$  et  $\sigma x(t) = \dot{x}(t)$  pour les systèmes à temps continu,  $t \in \mathbb{R}$ .

Les vecteurs  $X(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^l$  et  $Z(t) \in \mathbb{R}^m$  sont respectivement l'état, l'entrée connue et la mesure connue du système.

Les vecteurs  $X(t)$  et  $Z(t)$  et les matrices  $A$ ,  $B$  et  $H$  sont partitionnés de la même manière que celle présentée dans le paragraphe 2.2.1 par les équations (2.2), (2.3) et (2.4). La matrice  $E$  est singulière réelle constante de dimension appropriée telle que :

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & E_N \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Le système de grande dimension donné par (2.37) peut s'écrire sous la forme de  $N$  sous-systèmes interconnectés comme suit :

$$E_i \sigma x_i(t) = A_{ii} x_i(t) + B_i u(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j(t) \quad (2.39a)$$

$$z_i(t) = H_i x_i(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.39b)$$

avec  $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l}$ ,  $H_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$  et  $n = n_1 + \dots + n_N$ . Les vecteurs  $x_i(t)$  et  $z_i(t)$  sont respectivement l'état du  $i$ -ème sous-système de dimension  $n_i$  et sa sortie de dimension  $m_i$ .

L'objectif de ce paragraphe est de synthétiser un observateur décentralisé pour chaque sous-système donné par (2.39) qui satisfait les performances globales obtenues avec les observateurs

centralisés. En effet, pour résoudre le problème de l'estimation décentralisée, on va considérer que les interconnexions du sous-système  $i$  avec les sous-systèmes  $j \in \{1 \dots N\}$  et  $j \neq i$ , sont inconnues. Le système (2.39) peut s'écrire de la forme suivante :

$$E_i \sigma x_i(t) = A_{ii} x_i(t) + B_i u(t) + D_i v_i(t) \quad (2.40a)$$

$$z_i(t) = H_i x_i(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.40b)$$

avec :

$$D_i = [ A_{i1} \quad \dots \quad A_{i(i-1)} \quad A_{i(i+1)} \quad \dots \quad A_{iN} ]$$

$$v_i(t) = [ x_1(t)^T \quad \dots \quad x_{i-1}(t)^T \quad x_{i+1}(t)^T \quad \dots \quad x_N(t)^T ]^T$$

Le but de ce travail est de synthétiser un observateur complètement décentralisé pour chaque sou-système  $i$  qui converge vers l'état du systèmes global. Pour cela on introduit les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 3** Pour le système global on suppose que la matrice  $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$  est de rang plein colonne.

sous cette hypothèse, il existe une matrice non singulière  $J$  telle que :  $J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix}$  et

$$J_1 E + J_2 H = I_n \quad (2.41)$$

$$J_3 E + J_4 H = 0 \quad (2.42)$$

**Hypothèse 4** Pour le système décentralisé, on suppose que les matrices  $\begin{bmatrix} E_i \\ H_i \end{bmatrix}$  sont de rangs pleins colonnes.

Sous cette hypothèse, il existe une matrice non singulière  $J_i$  telle que :  $J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & J_{i2} \\ J_{i3} & J_{i4} \end{bmatrix}$  et

$$J_{i1} E_i + J_{i2} H_i = I_{n_i} \quad (2.43)$$

$$J_{i3} E_i + J_{i4} H_i = 0 \quad (2.44)$$

Les deux hypothèses (3) et (4) ne sont pas restrictives, elles respectivement sont liées à l'observabilité du système global donné par (2.37) et aux sous-systèmes décentralisés donnés par (2.40). On introduit également le lemme suivant qui nous sera utile dans la suite de ce travail

**Lemme 2** Soient  $X$  une matrice de dimension  $m \times n$  et  $Y$  une matrice de dimension  $n \times p$  alors  $\text{rang}(XY) = \text{rang}(Y)$ , si et seulement si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} X \\ I - YY^+ \end{bmatrix} = n.$$

On présentera en premier lieu la synthèse d'observateur pour le système global, puis on enchaînera par l'observateur décentralisé.

### 2.3.2 Observateur global pour les systèmes interconnectés

L'observateur global relatif au système (2.37) :

$$\begin{cases} \sigma\xi(t) &= N\xi(t) + Mu(t) + \Gamma Z(t) \\ \hat{X}(t) &= \xi(t) + (J_2 - KJ_4)Z(t) \end{cases} \quad (2.45)$$

où  $\hat{X}$  est l'estimée  $X$ ,  $\xi$  est le vecteur d'état de l'observateur, les matrices  $N$ ,  $M$ ,  $\Gamma$  et  $K$  sont inconnues de dimensions appropriées et qui seront déterminées telle que l'erreur  $e(t) = X(t) - \hat{X}(t)$  soit non biaisée, (i.e sa dynamique est indépendante explicitement de  $u(t)$  et  $X(t)$ , et converge vers zero quand  $t \rightarrow \infty$ ).

Dans la suite, on présente la Proposition 3 qui donne les conditions d'existence et de stabilité de l'observateur (2.45) sous l'hypothèse 3.

**Proposition 3** *Sous l'hypothèse 3, le système (2.45) est asymptotiquement stable (i.e :  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) - \hat{X}(t) = 0$ ) si :*

- i)  $N$  est stable.
  - ii)  $\Psi A - N\Psi E - \Gamma H = 0$
  - iii)  $\Psi B - M = 0$
- avec  $\Psi = (J_1 - KJ_3)$

**Preuve 11** *Soit  $e(t) = X(t) - \hat{X}(t)$  l'erreur entre l'état réel et l'état estimé, en utilisant la matrice  $J$  définie par les relations (2.41 – 2.42), on obtient l'erreur de l'estimation suivante :*

$$e(t) = (J_1 - KJ_3)EX(t) - \xi(t) \quad (2.46)$$

sa dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma e(t) &= (J_1 - KJ_3)E\sigma X(t) - \sigma\xi(t) \\ &= (J_1 - KJ_3)(AX(t) + Bu(t)) - N\xi(t) - Mu(t) - \Gamma Z(t) \\ &= Ne(t) + (\Psi A - N\Psi E - \Gamma H)X(t) + (\Psi B - M)u(t) \end{aligned} \quad (2.47)$$

L'erreur  $e(t)$  est indépendante de  $X(t)$  et  $u(t)$  si

$$(\Psi A - N\Psi E - \Gamma H) = 0 \quad (2.48)$$

$$\Psi B - M = 0 \quad (2.49)$$

Dans ce cas  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  si et seulement la matrice  $N$  est stable, ce qui correspond à la condition i), ce qui complète la démonstration. ■

Maintenant, pour résoudre les équations ii) et iii) de la proposition 3, sous l'hypothèse 3, et en utilisant la matrice  $J$  définie par les relations (2.41 – 2.42) et l'expression de  $\Psi$ , on peut réécrire l'équation (2.48) de la manière suivante :

$$J_1 A - KJ_3 A - NJ_1 E - LH = 0 \quad (2.50)$$

avec  $L = NKJ_4 + \Gamma$ .

L'équation (2.50) peut s'écrire de la façon suivante :

$$Y\Sigma = \Omega \quad (2.51)$$

où  $Y = [ N \quad K \quad L ]$ ,  $\Sigma = \begin{bmatrix} J_1E \\ J_3A \\ H \end{bmatrix}$  et  $\Omega = J_1A$ .

Sous l'hypothèse 3, il existe une solution à (2.51), si et seulement si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \Sigma \\ \Omega \end{bmatrix} = \text{rang}(\Sigma) \quad (2.52)$$

En utilisant l'expression de  $J$  et les relations donnée par (2.41) et (2.42) , on obtient

$$\begin{aligned} \text{rang}(\Sigma) &= \text{rang} \begin{bmatrix} J_1E \\ J_3A \\ H \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} I - J_2H \\ J_3A \\ H \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} I_n & 0 & -J_2 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ J_3A \\ H \end{bmatrix} = n \end{aligned}$$

ce qui garantie que (2.51) a une solution donnée par

$$Y = \Omega\Sigma^+ - \mathcal{Z}(I - \Sigma\Sigma^+) \quad (2.53)$$

où  $\mathcal{Z}$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée et  $\Sigma^+$  est une inverse généralisé de  $\Sigma$  qui satisfait  $\Sigma\Sigma^+\Sigma = \Sigma$ .

Ainsi on peut déduire les matrices  $N$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  et  $\Gamma$  comme suit :

$$N = [ \Omega\Sigma^+ - \mathcal{Z}(I - \Sigma\Sigma^+) ] \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$K = [ \Omega\Sigma^+ - \mathcal{Z}(I - \Sigma\Sigma^+) ] \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$L = [ \Omega\Sigma^+ - \mathcal{Z}(I - \Sigma\Sigma^+) ] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\Gamma = L - NKJ_4 \quad (2.57)$$

$$M = \Psi B \quad (2.58)$$

La stabilité de l'observateur est garantie par le théorème suivant :

**Théorème 7** [MBDH10b] *Sous l'hypothèse 3, le système (2.45) est un observateur asymptotique au système (2.39) si et seulement si  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  ,  $Re(\lambda) \geq 0$  pour le cas continue et  $|\lambda| \geq 1$  pour le cas discret on a :*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ H \end{bmatrix} = n, \quad (2.59)$$



**Preuve 12** De l'équation (2.50) on peut déduire que la matrice  $N$  s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} N &= \mathfrak{F} + \mathfrak{K}\mathfrak{G} \\ \mathfrak{F} &= J_1 A \\ \mathfrak{K} &= [ G \quad \mathfrak{P} ] \\ \mathfrak{P} &= N(J_2 - GJ_4) - \Gamma \\ \mathfrak{G} &= \begin{bmatrix} -J_3 A \\ H \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dans ce cas, la matrice  $N$  est stable si la paire  $(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$  est détectable [Kail80] et [Kuc91], ce qui est équivalent à :

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , avec  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$  pour le cas continue et  $|\lambda| \geq 1$  pour le cas discret, on a

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I - \mathfrak{F} \\ \mathfrak{G} \end{bmatrix} = n$$

Maintenant, on doit montrer que la détectabilité de la paire  $(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$  est équivalente à la condition (2.59). Cela peut être obtenu grâce à la l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ H \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ \lambda H \\ H \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & 0 \\ J_3 & J_4 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ \lambda H \\ H \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I - J_1 A \\ -J_3 A \\ H \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I - \mathfrak{F} \\ \mathfrak{G} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème. ■

### 2.3.3 Observateur décentralisé

On considère le système suivant :

$$\sigma \xi_i(t) = N_i \xi_i(t) + M_i u(t) + \Gamma_i z_i(t) \quad (2.60a)$$

$$\hat{x}_i(t) = \xi_i(t) + (J_{i2} - G_i J_{i4}) z_i(t) \quad (2.60b)$$

où  $\hat{x}_i$  est l'estimée de  $x_i$ ,  $\xi_i$  est le vecteur d'état de l'observateur. Le système (2.60) est un observateur asymptotique pour le système (2.40) si  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - \hat{x}_i(t)) = 0$ . Le problème de l'observateur décentralisé revient à déterminer les matrices  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $\Gamma_i$  et  $G_i$  telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - \hat{x}_i(t)) = 0$ . Les matrices  $J_{i2}$  et  $J_{i3}$  sont données par les relations (2.43) et (2.44).

La proposition suivante donne les conditions qui garantissent la convergence de l'erreur d'estimation  $x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ .

**Proposition 4** Sous l'hypothèse 4, le système (2.60) est un observateur asymptotique pour le système (2.40). i.e :  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - \hat{x}_i(t) = 0$  si :

- i)  $N_i$  est une matrice stable .
- ii)  $\Psi_i A_{ii} - N_i \Psi_i E_i - \Gamma_i H_i = 0$
- iii)  $\Psi_i D_i = 0$
- iv)  $\Psi_i B_i - M_i = 0$   
où  $\Psi_i = J_{i1} - G_i J_{i3}$

**Preuve 13** Soit  $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$  l'erreur d'estimation donnée par :

$$e_i(t) = (J_{i1} - G_i J_{i3}) E_i x_i(t) - \xi_i(t) \quad (2.61)$$

sa dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma e_i(t) &= (J_{i1} - G_i J_{i3}) E_i \sigma x_i(t) - \sigma \xi_i(t) \\ &= (J_{i1} - G_i J_{i3}) (A_{ii} x_i(t) + B_i u(t) + D_i v_i(t)) - N_i \xi_i(t) - M_i u(t) - \Gamma_i z_i(t) \\ &= N_i e_i(t) + (\Psi_i A_{ii} - N_i \Psi_i E_i - \Gamma_i H_i) x_i(t) + (\Psi_i B_i - M_i) u(t) + \Psi_i D_i v_i(t) \end{aligned} \quad (2.62)$$

avec  $\Psi_i = (J_{i1} - G_i J_{i3})$ .

Dans ce cas, l'erreur d'estimation  $e_i(t)$  est indépendante de  $x_i(t)$ ,  $u(t)$  et des interconnexions inconnues si :

$$\Psi_i A_{ii} - N_i \Psi_i E_i - \Gamma_i H_i = 0 \quad (2.63)$$

$$\Psi_i D_i = 0 \quad (2.64)$$

$$\Psi_i B_i - M_i = 0 \quad (2.65)$$

donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$  si  $N_i$  est une matrice stable. ■

La synthèse de l'observateur (2.60) est réduite à trouver les matrices  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $\Gamma_i$  and  $G_i$  telles que (2.63) – (2.64) et (2.65) soient satisfaites et  $N_i$  est stable.

Maintenant, en utilisant l'expression des matrices  $J_i$  et  $\Psi_i$ , les relations (2.63) et (2.64) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} N_i + G_i J_{i3} A_{ii} + L_i H_i &= J_{i1} A_{ii} \\ (J_{i1} - G_i J_{i3}) D_i &= 0 \end{aligned}$$

et  $L_i = -(N_i (J_{i2} - G_i J_{i4}) + \Gamma_i)$ .

Cette expression est équivalente à la forme compacte suivante :

$$Y_i \Sigma_i = \Omega_i \quad (2.66)$$

$$\text{où : } Y_i = \begin{bmatrix} N_i & G_i & L_i \end{bmatrix}, \Sigma_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ J_{i3} A_{ii} & J_{i3} D_i \\ H_i & 0 \end{bmatrix}, \Omega_i = \begin{bmatrix} J_{i1} A_{ii} & J_{i1} D_i \end{bmatrix} .$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution à (2.66) sont données par le lemme suivant :

**Lemme 3** [MBDH10b] *Sous l'hypothèse donnée par (4), il existe une solution à (2.66) si et seulement si*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_i & D_i \\ H_i & 0 \end{bmatrix} = n_i + \text{rang}(D_i) \quad (2.67)$$

**Preuve 14** *La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution à (2.66) est*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \Sigma_i \\ \Omega_i \end{bmatrix} = \text{rang}(\Sigma_i) + \text{rang}(D_i) = n_i + \text{rang}(D_i) \quad (2.68)$$

ou de manière équivalente

$$\Omega_i \Sigma_i^+ \Sigma_i = \Omega_i$$

et en utilisant l'Hypothèse 4 et la Définition de la matrice  $J_i$  on aura :

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} E_i & D_i \\ H_i & 0 \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} J_{i1} & J_{i2} \\ J_{i3} & J_{i4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i & D_i \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} I & J_{i1}D_i \\ 0 & J_{i3}D_i \end{bmatrix} = n_i + \text{rang}J_{i3}D_i \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \text{rang}(J_{i3}D_i) &= \text{rang} \begin{bmatrix} J_{i1}D_i \\ J_{i3}D_i \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} J_{i1} & J_{i2} \\ J_{i3} & J_{i4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rang}(D_i) \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. ■

Sous l'Hypothèse 4 et la condition (2.67), une solution générale à (2.66) peut être donnée par :

$$Y_i = \Omega_i \Sigma_i^+ - \mathcal{Z}_i (I - \Sigma_i \Sigma_i^+)$$

où les  $\mathcal{Z}_i$  sont des matrices arbitraires de dimensions appropriées. Comme pour le cas des systèmes non singuliers, ces matrices seront déterminées ultérieurement par placement de pôle, puis par LMI.

On définit maintenant les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i1} &= \Omega_i \Sigma_i^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{i1} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{i2} = \Omega_i \Sigma_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{i2} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{i3} &= \Omega_i \Sigma_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \text{et } \mathbf{B}_{i3} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

alors les matrices  $N_i$ ,  $K_i$ ,  $L_i$ ,  $\Gamma_i$  et  $M_i$  sont données par :

$$N_i = \mathbf{A}_{i1} - \mathcal{Z}_i \mathbf{B}_{i1} \quad (2.69)$$

$$G_i = \mathbf{A}_{i2} - \mathcal{Z}_i \mathbf{B}_{i2} \quad (2.70)$$

$$L_i = \mathbf{A}_{i3} - \mathcal{Z}_i \mathbf{B}_{i3} \quad (2.71)$$

$$\Gamma_i = L_i + (N_i (J_{i2} - G_i J_{i4})) \quad (2.72)$$

$$M_i = \Psi_i B_i \quad (2.73)$$

La stabilité de l'observateur est garantie par le théorème suivant :

**Théorème 8** [MBDH10b] Sous l'Hypothèse 4 et la condition (2.67), le système (2.60) est un observateur asymptotique pour le système (2.40) si et seulement si  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ , avec  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$  pour le cas continu et  $|\lambda| \geq 1$  pour le cas discret

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda E_i - A_i & -D_i \\ H_i & 0 \end{bmatrix} = n_i + \text{rang} D_i \quad (2.74)$$

**Preuve 15** De la relation (2.69) on peut voir que  $N_i$  est stable si et seulement si la paire  $(\mathbf{B}_{i1}, \mathbf{A}_{i1})$  est détectable, i.e  $\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \lambda I - \mathbf{B}_{i1} \\ \mathbf{A}_{i1} \end{bmatrix} \right) = n_i, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1$ .

D'autre part de (2.74), pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , avec  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$  pour le cas continue et  $|\lambda| \geq 1$  pour le cas discret, on a :

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda E_i - A_{ii} & -D_i \\ H_i & 0 \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda E_i - A_{ii} & -D_i \\ \lambda H_i & 0 \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} J_{i1} & J_{i2} & 0 \\ J_{i3} & J_{i4} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda E_i - A_{ii} & -D_i \\ \lambda H_i & 0 \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I - J_{i1} A_{ii} & -J_{i1} D_i \\ -J_{i3} A_{ii} & -J_{i3} D_i \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda [I \ 0] - [J_{i1} A_{ii} \ J_{i1} D_i] & -J_{i3} D_i \\ -J_{i3} A_{ii} & 0 \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda \Sigma_i - \begin{bmatrix} \Omega_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.75)$$

comme  $\Omega_i \Sigma_i^+ \Sigma_i = \Omega_i$  et en utilisant le Lemme 2 on a :

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda \Sigma_i - \begin{bmatrix} \Omega_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I - \begin{bmatrix} \Omega_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Sigma_i^+ \\ I - \Sigma_i \Sigma_i^+ \end{bmatrix} \Sigma_i \\ &= \text{rang}(\Sigma_i) \\ &= n_i + \text{rang}(D_i) \end{aligned} \quad (2.76)$$

■

### 2.3.4 Exemple numérique

On considère le système de grande dimension à temps discret régi par les équations (2.37) où  $E, A, B$  et  $H$  sont données par :

$$E = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$B = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad H = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ce système est composé de trois sous-systèmes interconnectés tels que :

**Pour le sous-système 1 :**

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour ce sous-système on a :

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{12} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$J_{13} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & -0.6 \\ 0.2 & 0 & -0.77 \\ -0.6 & 0 & 0.16 \end{bmatrix}, \quad J_{14} = \begin{bmatrix} 0.47 & -0.47 & -0.053 \\ -0.4 & 0.4 & 0.2 \\ -0.12 & 0.12 & 0.74 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, les matrices  $\mathcal{Z}_i$  sont déterminées par placement de pôle, ces pôles sont fixés à  $-0.015$ ,  $-0.070$  et  $-0.001$ . En utilisant les résultats de la section 2.3, on obtient :

$$N_1 = \begin{bmatrix} -0.015 & 0 & 0 \\ 0 & -0.070 & 0 \\ 0 & 0 & -0.001 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0.088 & 0 & 0 & 0 \\ -0.022 & 0 & 0 & 0 \\ -0.111 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} -0.068 & -0.088 & -0.090 \\ -0.119 & 0.060 & 0.176 \\ -0.116 & 0.111 & 0.272 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1.999 & -0.999 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -0.999 & 1.999 & -2 \end{bmatrix}$$

**Pour le sous-système 2 :**

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice  $J_2$  est définie par :

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_{22} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$J_{23} = \begin{bmatrix} -0.61 & 0 & 0.16 \\ 0.2 & 0 & -0.77 \\ -0.41 & 0 & -0.61 \end{bmatrix}, J_{24} = \begin{bmatrix} 0.74 & 0.12 & -0.12 \\ 0.2 & 0.4 & -0.4 \\ -0.053 & -0.47 & 0.47 \end{bmatrix}.$$

Les paramètres de l'observateur sont donnés par :

$$N_2 = \begin{bmatrix} -0.015 & 0 & 0 \\ 0 & -0.070 & 0 \\ 0 & 0 & -0.001 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.044 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.044 & 0 \\ 0 & 0.090 & -0.133 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} -0.046 & -0.048 & 0.110 \\ 0.208 & 0.026 & -0.115 \\ -0.259 & -0.129 & 0.173 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -0.999 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Pour le sous-système 3 :**

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, A_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$J_{31} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_{32} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$J_{33} = \begin{bmatrix} -0.41 & 0 & -0.61 \\ 0.2 & 0 & -0.77 \\ -0.61 & 0 & 0.16 \end{bmatrix}, J_{34} = \begin{bmatrix} 0.47 & -0.47 & -0.053 \\ -0.4 & 0.4 & 0.2 \\ -0.126 & 0.126 & 0.74 \end{bmatrix}.$$

Les paramètres de l'observateur sont :

$$N_3 = \begin{bmatrix} -0.015 & 0 & 0 \\ 0 & -0.070 & 0 \\ 0 & 0 & -0.01 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.666 \\ 0 & 0 & 0 & -0.666 \\ 0 & 0 & 0 & -0.999 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0.527 & 0.388 & 0.222 \\ -0.526 & -0.388 & -0.222 \\ 0.947 & 0.444 & 0.555 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 0.999 & 0 & 1 \\ -0.999 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La figure 2.9 trace l'évolution de l'erreur entre les différentes composantes de l'état du système global et de l'état estimé moyennant l'observateur décentralisé. On remarque bien qu'il y a convergence de l'erreur vers 0.

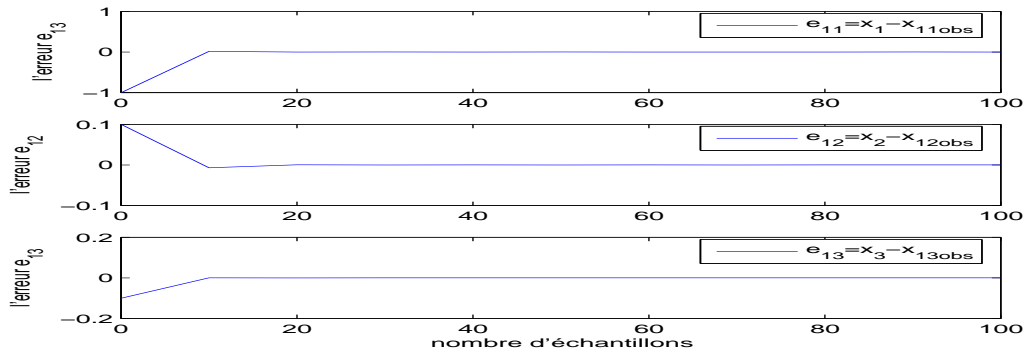


FIG. 2.7 – Les trois composante de l'erreur relative au 1er sous système

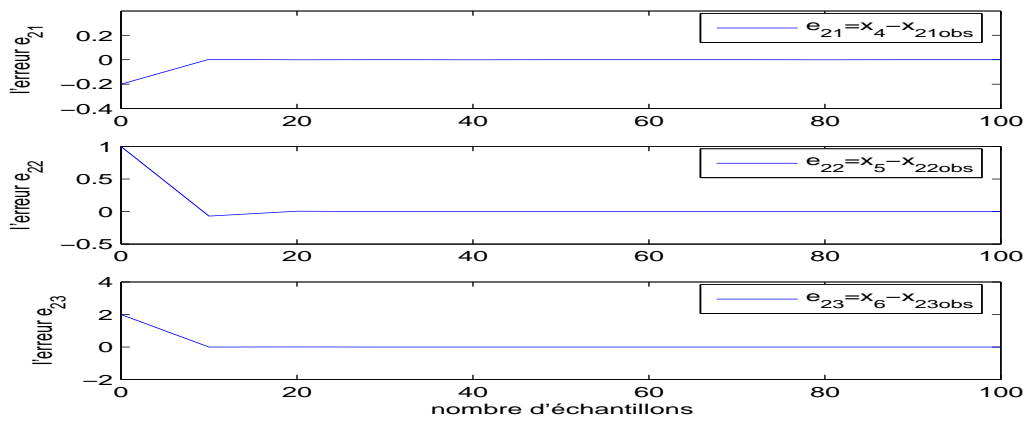


FIG. 2.8 – Les trois composante de l'erreur relative au 2ème sous système

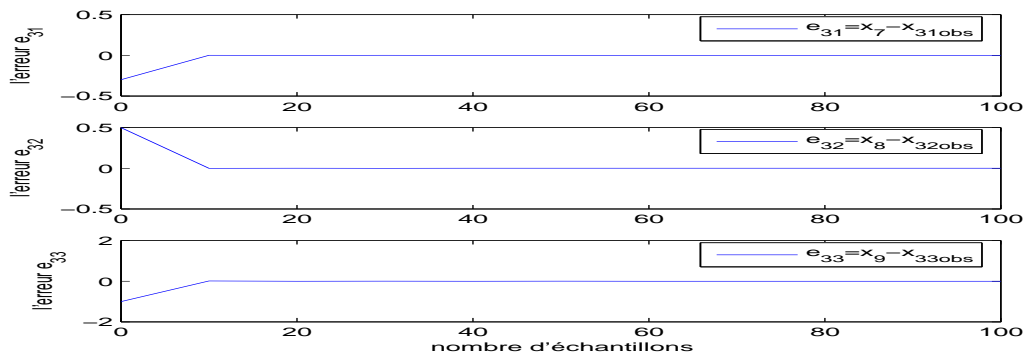


FIG. 2.9 – Les trois composante de l'erreur relative au 3ème sous système

## 2.4 Filtrage $H_\infty$ des systèmes singuliers de grande dimension

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au problème de filtrage  $H_\infty$  des grands systèmes sujets à des perturbations à énergie finie. Pour cela on considère que l'Hypothèse 4 citée dans la section précédente est vérifiée. Mais avant d'aborder ce volet, on introduit quelques résultats préliminaires dont on aura besoin pour la suite de ce chapitre.

### 2.4.1 Résultats préliminaires

Avant de commencer ce chapitre, nous donnons ici quelques définitions et un rappel qui nous seront utiles dans la suite.

Considérons le système LTI décrit par

$$\sigma x(t) = Ax(t) + Bw(t) \quad (2.77a)$$

$$z = Hx(t) + Dw(t) \quad (2.77b)$$

où  $x(t)$  est le vecteur d'état,  $z(t)$ , le vecteur de sortie et  $w(t)$  celui de l'entrée.

**Définition 7 (Norme  $H_\infty$ )** [Fra87]

La norme  $H_\infty$  du système (2.77), stable ou instable, est définie par

$$\|\mathfrak{G}\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \lambda_{\max}(\mathfrak{G}(j\omega)\mathfrak{G}^T(-j\omega)) \quad (2.78)$$

où  $\mathfrak{G}(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ H & D \end{bmatrix}$  est la matrice de transfert  $\mathfrak{G}(s) = H(sI - A)^{-1}B + D$ .

Dans le cas où le système (2.77) est continu et n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire, avec  $\lambda_{\max}$  la valeur propre du module maximale de  $(\mathfrak{G}(j\omega)\mathfrak{G}^T(-j\omega))$ , on peut écrire :

$$\|\mathfrak{G}\|_\infty := \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \bar{\sigma}(\mathfrak{G}(\exp(j\theta))\mathfrak{G}^T(\exp(-j\theta))) \quad (2.79)$$

Dans le cas où le système (2.77) est discret et n'a pas de pôle sur le cercle unité, on utilise  $\bar{\sigma}$  est la valeur singulière maximale de  $(\mathfrak{G}(\exp(j\theta))\mathfrak{G}^T(\exp(-j\theta)))$ .

**Définition 8 (Energie d'un signal)** L'énergie  $\mathfrak{E}_0$  d'un signal  $w(t)$  est l'intégrale de sa puissance, et elle est donnée par

$$\mathfrak{E}_0 = \int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt \quad (2.80)$$

La norme  $H_\infty$  d'une fonction de transfert représente le maximum sur toute la bande de fréquence de la valeur singulière maximale ( $\bar{\sigma}$ ) de la réponse fréquentielle du système considéré. Elle est recommandée pour traiter les problèmes de robustesse.

Que le système soit stable ou instable, la norme  $H_\infty$  est définie par (2.78), tant que le système ne possède pas de pôles sur l'axe imaginaire. En effet,  $\|\frac{1}{s+1}\|_\infty = \|\frac{1}{s-1}\|_\infty = 1$ , tandis que  $\|\frac{1}{s}\|_\infty = \infty$ . Toutefois, pour une entrée bornée, le système  $\frac{1}{s+1}$  possède une sortie bornée, ce qui n'est pas vrai pour le système  $\frac{1}{s-1}$ . Il est donc nécessaire de définir le gain  $L_2$ .



**Définition 9 (Gain  $L_2$ )** [GNLC93]

Si le système (2.77) est asymptotiquement stable, alors,  $w(t) \in L_2$  implique  $z(t) \in L_2$  et, pour  $x(0) = 0$ , le gain  $L_2$  du système (2.77) est donné par

$$\|G\|_\infty = \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}, \quad \|w\|_2 \neq 0 \quad (2.81)$$

dans le cas continu et par

$$\|G\|_\infty = \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}, \quad \|w\|_2 \neq 0 \quad (2.82)$$

dans le cas discret.

La notion de gain  $L_2$  est utile pour quantifier la façon dont le système rejette les perturbations externes. En effet, il sert à mesurer la quantité d'énergie transmise par le système.

**Remarque 7 (Norme  $H_\infty$  et gain  $L_2$ )** La relation (2.81) peut être vue comme un gain sur les signaux (la norme  $L_2$  d'un signal temporel est la même que la norme  $L_2$  de la transformée de Laplace de ce même signal). Ainsi, pour un système stable, la norme  $H_\infty$  de la fonction de transfert est la norme induite  $L_2$  de l'opérateur d'entrée-sortie associé au système, c'est donc le gain  $L_2$  du système.

Considérons maintenant le système singulier suivant :

$$E\sigma x(t) = Ax(t) + Bw(t) \quad (2.83a)$$

$$z(t) = Hx(t) \quad (2.83b)$$

où  $\sigma x(t) = x(t+1)$  pour les systèmes discrets,  $t \in \mathbb{N}$  et  $\sigma x(t) = \dot{x}(t)$  pour les systèmes à temps continu,  $t \in \mathbb{R}$ .

Dans ce qui suit, on utilisera le symbole  $E^\perp$  pour désigner une matrice  $E$  vérifiant  $E^\perp E^{\perp T} > 0$  et  $E^\perp E = 0$ . Lorsque  $E$  est de rang plein alors  $E^\perp = 0$ .

Pour  $w(t) = 0$  on a :

**Définition 10** Le système donné par (2.83) est dit régulier ou la paire  $(E, A)$  est dite régulière s'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\det(\lambda E - A)$  est différent de zero.

**Définition 11** Le système donné par (2.83) ou la paire  $(E, A)$  est sans impulsions pour le cas continu (causal pour le cas discret) s'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\deg(\det(\lambda E - A)) = \text{rang}(E)$ .

**Définition 12** Le système (2.83) est dit admissible, (ou encore la paire  $(E, A)$  est dite admissible) s'il est régulier, sans impulsions et stable (régulier, causal et stable pour le cas discret).

Dans la suite de ce travail on va considérer pour le système à temps continu, l'indice de performance  $H_\infty J_{zw}$  qui est donné par :

$$J_{zw} = \int_0^\infty (z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t)) dt$$

Pour un  $\gamma > 0$  donné. On considère entre autre les lemmes suivants

**Lemme 4** [MKOS97]

Pour les systèmes à temps continu de la forme (2.83) : la paire  $(E, A)$  est admissible si et seulement s'il existe une matrice non singulière  $\mathbf{P}$  telle que :

- i)  $E^T \mathbf{P} = \mathbf{P}^T E \geq 0$
- ii)  $A^T \mathbf{P} + \mathbf{P}^T A < 0$ .

**Lemme 5** [MKOS97]

Pour les systèmes à temps continu de la forme (2.83) : la paire  $(E, A)$  est admissible et  $\|T(\lambda) = H(\lambda E - A)^{-1}B\|_\infty < \gamma$  si et seulement s'il existe une matrice  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que :

- i)  $E^T \mathbf{P} = \mathbf{P}^T E \geq 0$
- ii)  $A^T \mathbf{P} + \mathbf{P}^T A + H^T H + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{P}^T B B^T \mathbf{P} < 0$ .

**Lemme 6** [MOS98]

Pour les systèmes à temps continu de la forme (2.83) le critère  $H_\infty, J_{zv}^c < 0$  est satisfait pour un  $\gamma_c > 0$  si et seulement si il existe une matrice symétrique  $\mathbf{P}_c = \mathbf{P}_c^T > 0$  telle que la LMI suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}_c A - A^T \mathbf{P}_c & \mathbf{P}_c B & H^T \\ B^T \mathbf{P}_c & \gamma_c I & -\mathcal{D}^T \\ H & -\mathcal{D} & \gamma_c I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.84)$$

**Lemme 7** [MOS98]

Pour les systèmes à temps discret de la forme (2.83), le critère  $H_\infty J_{zv}^c < 0$  est satisfait pour un  $\gamma_c > 0$  si et seulement si il existe une matrice symétrique  $\mathbf{P}_d = \mathbf{P}_d^T > 0$  telle que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_d & 0 & \mathbf{P}_d A & \mathbf{P}_d B \\ 0 & \gamma_d I & H & \mathcal{D} \\ A^T \mathbf{P}_d & H^T & \mathbf{P}_d & 0 \\ B^T \mathbf{P}_d & \mathcal{D}^T & 0 & \gamma_d I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.85)$$

Pour les systèmes à temps discret, l'indice  $J_{zw}$  de performance  $H_\infty$  est donné par :

$$J_{zw} = \sum_{t=0}^{\infty} (z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t))$$

Pour les systèmes singuliers on aura besoin du lemme suivant [ZXS08] :

**Lemme 8** [ZXS08]

On considère le système discret singulier donné par (2.83). La paire  $(E, A)$  est admissible et la matrice de transfert  $T_{yw}(\lambda) = H(\lambda E - A)^{-1}B$  est à norme  $\mathcal{H}_\infty$  bornée par un réel positif  $\gamma$  (i.e.  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ ), si et seulement s'il existe une matrice définie positive  $\mathbf{P}$  et une matrice symétrique  $\mathbf{S}$  telles que :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A^T (\mathbf{P} - E^{\perp T} \mathbf{S} E^{\perp}) A - E^T \mathbf{P} E + H^T H \\ \Phi_{12} &= A^T (\mathbf{P} - E^{\perp T} \mathbf{S} E^{\perp}) B \\ \Phi_{22} &= -\gamma^2 I + B^T (\mathbf{P} - E_i^{\perp T} \mathbf{S} E^{\perp}) B \end{aligned}$$

## 2.4.2 Position du problème

On considère le système de grande dimension composé de  $N$  sous-systèmes interconnectés et décrit par les équations suivantes

$$E\sigma X(t) = AX(t) + Bu(t) + Fw(t) \quad (2.86a)$$

$$Z(t) = HX(t) + Rw(t) \quad (2.86b)$$

Les  $X(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^l$  et  $Z(k) \in \mathbb{R}^m$  sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée connue et de la sortie mesurée.  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  est la perturbation à énergie finie associée au système

Les vecteurs  $X(t)$  et  $Z(t)$  sont partitionnés comme suit :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}, Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $F$  et  $R$  sont réelles de dimensions appropriées dont la partition est donnée par (2.3) et (2.4) quand à la partition de la matrice  $E$ , elle est donnée par (2.38) ( $E$  bloc diagonal). Le système (2.86) peut s'écrire comme l'interconnection de  $N$  sous-systèmes comme suit :

$$E_i\sigma x_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_iu(t) + D_iv_i(t) + F_iw(t) \quad (2.87a)$$

$$z_i(t) = H_ix_i(t) + R_iw(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.87b)$$

où :

$$D_i = [ A_{i1} \quad \dots \quad A_{i(i-1)} \quad A_{i(i+1)} \quad \dots \quad A_{iN} ] \quad (2.88)$$

$$v_i(t) = [ x_1(t)^T \quad \dots \quad x_{i-1}(t)^T \quad x_{i+1}(t)^T \quad \dots \quad x_N(t)^T ]^T \quad (2.89)$$

avec  $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l}$ ,  $H_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$  et  $n = n_1 + \dots + n_N$ . Les vecteurs  $x_i(t)$  et  $z_i(t)$  sont l'état et la sortie du sous-système  $i$ .

Dans cette partie, on suppose que l'hypothèse 4 citée précédemment est vérifiée.

## 2.4.3 Filtrage $H_\infty$ décentralisé

Pour le système (2.87), on propose le filtre suivant :

$$\sigma \xi_i(t) = N_i \xi_i(t) + M_i u(t) + \Gamma_i z_i(t) \quad (2.90a)$$

$$\hat{x}_i(t) = \xi_i(t) + (J_{i2} - G_i J_{i4}) z_i(t) \quad (2.90b)$$

où  $\hat{x}_i$  est l'estimée de  $x_i$  et  $\xi_i$  est le vecteur d'état du filtre. Le problème de la synthèse du filtre décentralisé consiste à déterminer les matrices  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $\Gamma_i$  et  $G_i$  telles que l'erreur d'estimation satisfait  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - \hat{x}_i(t)) = 0$ , quand  $w(t) = 0$  et  $\|e_i(t)\|_2 < \gamma_i \|w(t)\|_2$ , quand  $w(t) \neq 0$  avec  $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ .

Sous l'hypothèse 4, et en utilisant la définition de la matrice  $J_i$  et les relations (2.43) et (2.44), l'erreur d'estimation  $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$  est donnée par :

$$e_i(t) = (J_{i1} - G_i J_{i3}) E_i x_i(t) - \xi_i(t) - (J_{i2} - G_i J_{i4}) R_i w(t) \quad (2.91)$$

sa dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma e_i(t) &= N_i e_i(t) + (\Psi_i A_{ii} - N_i \Psi_i E_i - \Gamma_i H_i) x_i(t) + (\Psi_i B_i - M_i) u(t) + \Psi_i D_i v_i(t) \\ &+ (\Psi_i F_i + N_i (J_{i2} - G_i J_{i4}) R_i) w(t) - \Gamma_i R_i w(t) - (J_{i2} - G_i J_{i4}) R_i \sigma w(t) \end{aligned} \quad (2.92)$$

où  $\Psi_i = (J_{i1} - G_i J_{i3})$ .

La synthèse du filtre est réduite à déterminer les matrices  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $\Gamma_i$  et  $G_i$  telles que le système (2.90) soit stable pour  $w(t) = 0$  et  $\|e_i(t)\|_2 < \gamma_i \|w(t)\|_2$ .

De l'équation (2.92), on peut déduire la proposition suivante qui donne les conditions d'existence et de stabilité du filtre (2.90) pour  $w(t) = 0$ .

**Proposition 5** *Le système (2.90) est un filtre asymptotique i.e. :  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - \hat{x}_i(t)) = 0$ , lorsque  $w(t) = 0$  si :*

i)  $N_i$  est stable.

ii) l'équation de Sylvester généralisée suivante est satisfaite :

$$\Psi_i A_{ii} - N_i \Psi_i E_i - \Gamma_i H_i = 0 ,$$

sous la contrainte  $\Psi_i D_i = 0$ .

iii)  $\Psi_i B_i - M_i = 0$ , où  $\Psi_i = (J_{i1} - G_i J_{i3})$ .

**Remarque 8** *La condition ii) est équivalente à la forme compacte suivante*

$$Y_i \Sigma_i = \Omega_i \quad (2.93)$$

où :

$$Y_i = [ N_i \quad G_i \quad L_i ], \Sigma_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ J_{i3} A_{ii} & J_{i3} D_i \\ H_i & 0 \end{bmatrix}, \Omega_i = [ J_{i1} A_{ii} \quad J_{i1} D_i ]$$

et

$$L_i = -(N_i (J_{i2} - G_i J_{i4}) + \Gamma_i), \quad \Psi_i B_i = M_i.$$

Les conditions d'existence de la solution à (2.93) ont été déjà discutées dans le paragraphe 2.3.3, elles sont données par le Lemme 3, quand à la stabilité elle est donnée par le Théorème 8. Donc sous l'Hypothèse 4, les conditions du Lemme 3 et celles du Théorème 8, la solution générale à (2.93) est donnée par :

$$[ N_i \quad G_i \quad L_i ] = \Omega_i \Sigma_i^+ - \mathcal{Z}_i (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \quad (2.94)$$

où  $\mathcal{Z}_i$  sont des matrices arbitraire de dimensions appropriées et  $\Sigma^+$  est l'inverse généralisée de  $\Sigma$  qui satisfait  $\Sigma \Sigma^+ \Sigma = \Sigma$ .

De (2.94), on peut déduire  $N_i$ ,  $G_i$ ,  $L_i$ ,  $\Gamma_i$  et  $M_i$  :

$$N_i = \mathbf{A}_{i1} - \mathcal{Z}_i \mathbf{B}_{i1} \quad (2.95)$$

$$G_i = \mathbf{A}_{i2} - \mathcal{Z}_i \mathbf{B}_{i2} \quad (2.96)$$

$$L_i = \mathbf{A}_{i3} - \mathcal{Z}_i \mathbf{B}_{i3} \quad (2.97)$$

$$\Gamma_i = -(L_i + (N_i (J_{i2} - G_i J_{i4}))) \quad (2.98)$$

$$M_i = (J_{i1} - G_i J_{i3}) B_i \quad (2.99)$$

où :

$$\mathbf{A}_{i1} = \Omega_i \Sigma_i^+ \quad (2.100)$$

$$\mathbf{B}_{i1} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \quad (2.101)$$

$$\mathbf{A}_{i2} = \Omega_i \Sigma_i^+ \quad (2.102)$$

$$\mathbf{B}_{i2} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \quad (2.103)$$

$$\mathbf{A}_{i3} = \Omega_i \Sigma_i^+ \quad (2.104)$$

$$\mathbf{B}_{i3} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \quad (2.105)$$

La dynamique de l'erreur (2.92) devient alors :

$$\sigma e_i(t) = N_i e_i(t) + U_i w(t) + \mathcal{V}_i \sigma w(t) \quad (2.106)$$

où

$$U_i = \alpha_{i1} - \mathcal{Z}_i \beta_{i1} \quad (2.107)$$

$$\mathcal{V}_i = \alpha_{i2} - \mathcal{Z}_i \beta_{i2} \quad (2.108)$$

$$\alpha_{i1} = J_{i1} F_i - \Omega_i \Sigma_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ J_{i3} F_i \\ R_i \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

$$\alpha_{i2} = -J_{i2} R_i + \Omega_i \Sigma_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ J_{i4} R_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

$$\beta_{i1} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} 0 \\ J_{i3} F_i \\ R_i \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

$$\text{et } \beta_{i2} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} 0 \\ J_{i4} R_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

**Remarque 9** *Beaucoup de travaux, qui s'adressent au problème de la dynamique de l'erreur qui dépend de la dérivée de la perturbation  $\sigma w(t)$ , ont pu résoudre ce problème en introduisant une contrainte additionnelle ou en utilisant un autre type de filtre tel que le filtre de Kalman, ([Bas92]...). Mais, ce filtre nécessite la connaissance préalable des propriétés statiques du bruit. Ici, et afin de contourner le problème de l'apparition de la dérivée de la perturbation dans la dynamique de l'erreur, on propose une autre méthode qui consiste à réécrire cette dynamique sous une forme singulière.*

En effet, l'équation (2.106) est équivalente à :

$$\mathcal{E}_i \sigma \chi_i(t) = \mathcal{A}_i \chi_i(t) + \mathcal{B}_i w(t) \quad (2.113a)$$

$$e_i(t) = \mathcal{C}_i \chi_i(t) \quad (2.113b)$$

où

$$\mathcal{E}_i = \begin{bmatrix} I & -\mathcal{V}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

$$\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} N_i & U_i \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

$$\mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

$$\mathcal{C}_i = [I \ 0] \quad (2.117)$$

$$\chi_i(t) = \begin{bmatrix} e_i(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

avec  $e_i(t)$  est l'erreur d'estimation et  $\eta_i(t)$  est un état fictif tel que  $\eta_i(t) = w_i(t)$ .

Dans ce qui suit on va utiliser les résultats précédents pour définir le filtre  $H_\infty$  pour les cas discrets et continus. On utilisera les notations  $Z_{ic}$  et  $Z_{id}$  comme suit :

- $Z_{ic} = Z_i$ , pour le cas continu et
- $Z_{id} = Z_i$  pour le cas discret.

#### 2.4.4 Le filtre $H_\infty$ décentralisé : cas continu

Dans ce paragraphe, on représente le Théorème 9 qui donne les solutions du filtre  $H_\infty$  décentralisé pour les systèmes à temps continu :

$$E_i \dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_i u(t) + F_i v_i(t) + D_i w(t) \quad (2.119a)$$

$$z_i(t) = H_i x_i(t) + R_i w(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.119b)$$

**Théorème 9** [MBDH10c] *Sous l'hypothèse 4, il existe un paramètre  $Z_i$  tel que le filtre :*

$$\dot{\xi}_i(t) = N_i \xi_i(t) + M_i u(t) + \Gamma_i z_i(t)$$

$$\hat{x}_i(t) = \xi_i(t) + (J_{i2} - G_i J_{i4}) z_i(t)$$

soit non biaisé et permet de résoudre le problème du filtrage  $H_\infty$  pour le système singulier (2.119), si et seulement s'il existe deux matrices définies positives  $\mathbf{P}_{i1}^c$  et  $\mathbf{P}_{i2}^c$  et une matrice  $\Omega_{Z_{ic}}$  telles que les inégalités matricielles linéaires suivantes soit satisfaites :

1)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i1}^c & \mathbf{P}_{i1}^c \mathbf{O}_i^T \\ \mathbf{O}_i \mathbf{P}_{i1}^c & -\mathbf{O}_i \mathbf{P}_{i1}^c \alpha_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i1}^c & \mathbf{P}_{i1}^c \mathbf{O}_i^T \\ -\alpha_{i2}^T \mathbf{P}_{i1}^c & -\alpha_{i2}^T \mathbf{P}_{i1}^c \mathbf{O}_i \end{bmatrix} \geq 0$$

2)

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & -\mathbf{P}_{i1}^c \alpha_{i2} & I \\ (1,2)^T & (2,2) & \mathbf{P}_{i2}^c & 0 \\ (-\mathbf{P}_{i1}^c \alpha_{i2})^T & (\mathbf{P}_{i2}^c)^T & -\gamma I & 0 \\ I & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

où

$$(1,1) = \mathbf{A}_{i1}^T \mathbf{P}_{i1}^c - \bar{\mathbf{B}}_{i1}^T \Omega_{Z_{ic}}^T + \mathbf{P}_{i1}^c \mathbf{A}_{i1} - \Omega_{Z_{ic}} \bar{\mathbf{B}}_{i1}$$

$$(1,2) = -\mathbf{A}_{i1}^T \mathbf{P}_{i1}^c \alpha_{i2} - \bar{\mathbf{B}}_{i1}^T \Omega_{Z_{ic}}^T \alpha_{i2} + \mathbf{P}_{i1}^c \alpha_{i1} - \Omega_{Z_{ic}} \bar{\beta}_{i1} + \mathbf{P}_{i1}^c \alpha_{i2}$$

$$(2,2) = -\alpha_{i2}^T \mathbf{P}_{i1}^c \alpha_{i1} + \alpha_{i2}^T \Omega_{Z_{ic}} \bar{\beta}_{i1} + (-\alpha_{i2}^T \mathbf{P}_{i1}^c \alpha_{i1} + \alpha_{i2}^T \Omega_{Z_{ic}} \bar{\beta}_{i1})^T - 2\mathbf{P}_{i2}^c$$

avec

$$\bar{\mathbf{B}}_{i1} = (I - \beta_{i2} \beta_{i2}^+) \mathbf{B}_{i1}$$

$$\bar{\beta}_{i1} = (I - \beta_{i2} \beta_{i2}^+) \beta_{i1}$$

et  $\Omega_{Z_{ic}} = \mathbf{P}_{i1}^c \bar{\mathcal{Z}}_{ic}$  avec  $\bar{\mathcal{Z}}_{ic}$  vérifiant

$$\mathcal{Z}_{ic} = \bar{\mathcal{Z}}_{ic}(I - \beta_{i2}\beta_{i2}^+) \quad (2.120)$$

**Preuve 16** Pour pouvoir étudier le système (2.113), il faut que la matrice  $\mathcal{E}_i$  soit indépendante du paramètre  $\mathcal{Z}_{ic}$ . Cela peut s'obtenir en choisissant la matrice gain de l'observateur comme suit :

$$\bar{\mathcal{Z}}_{ic} = \bar{\mathcal{Z}}_{ic}(I - \beta_{i2}\beta_{i2}^+) \quad (2.121)$$

Dans ce cas, on aura :

$$\begin{aligned} N_i &= \mathbf{A}_{i1} - \bar{\mathcal{Z}}_{ic}\bar{\mathbf{B}}_{i1} \\ U_i &= \alpha_{i1} - \bar{\mathcal{Z}}_{ic}\bar{\beta}_{i1} \\ \mathcal{V}_i &= \alpha_{i2} \\ \bar{\mathbf{B}}_{i1} &= (I - \beta_{i2}\beta_{i2}^+) \mathbf{B}_{i1} \\ \bar{\beta}_{i1} &= (I - \beta_{i2}\beta_{i2}^+)\beta_{i1} \end{aligned}$$

En utilisant les résultats du Lemme 4 pour les systèmes singuliers à temps continu, le critère  $H_\infty$  est satisfait s'il existe une matrice définie positive  $\mathbf{P}_i^c$  telle que :

$$\mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i^c = \mathbf{P}_i^c \mathcal{E}_i \geq 0 \quad (2.122)$$

$$\mathcal{A}_i^T \mathbf{P}_i^c + \mathbf{P}_i^c \mathcal{A}_i + \bar{\mathcal{C}}_i^T \mathcal{C}_i + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{X}_i \mathcal{B}_i \mathcal{B}_i^T \mathbf{X}_i < 0 \quad (2.123)$$

et en appliquant le lemme de Schur [BGF94] à l'inégalité (2.123), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i^T \mathbf{P}_i^c + \mathbf{P}_i^c \mathcal{A}_i & \mathbf{P}_i^c \mathcal{B}_i & \mathcal{C}_i^T \\ (\mathbf{P}_i^c \mathcal{B}_i)^T & -\gamma I & 0 \\ \mathcal{C}_i & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

On pose maintenant

$$\mathbf{P}_i^c = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i1}^c & \mathbf{P}_{i1}^c \mathbf{O}_i^T \\ \mathbf{O}_i \mathbf{P}_{i1}^c & \mathbf{P}_{i2}^c \end{bmatrix}, \quad (2.124)$$

où  $\mathbf{P}_{i1}^c$  et  $\mathbf{P}_{i2}^c$  sont des matrices définies positive à déterminer et  $\mathbf{O}_i = -\alpha_{i2}^T$ .

Notons que la matrice  $\mathbf{P}_i^c$  n'est pas diagonale, la structure diagonale très utilisée dans la littérature est conservatrice. On relaxe cette condition en optant pour la structure non diagonale.

En remplaçant les matrices  $\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{B}_i$ ,  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathbf{P}_i^c$  par leurs expressions respectivement en (2.114), (2.115), (2.116), (2.117) et (2.124) et en posant où  $\Omega_{Z_{ic}} = \mathbf{P}_{i1}^c \bar{\mathcal{Z}}_{ic}$  on obtient les LMIs du théorème 9. ■

## 2.4.5 Le filtre $H_\infty$ décentralisé : cas des systèmes discrets

De cette partie, on va développer la synthèse du filtre  $H_\infty$  pour les systèmes à temps discret donné par (2.87), elle est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 10** [MBDH10c]

Sous l'hypothèse 4, il existe une matrice paramètre  $\bar{\mathcal{Z}}_{id}$  telle que le filtre :

$$\begin{aligned}\xi_i(t+1) &= N_i \xi_i(t) + M_i u(t) + \Gamma_i z_i(t) \\ \hat{x}_i(t) &= \xi_i(t) + (J_{i2} - G_i J_{i4}) z_i(t)\end{aligned}$$

est non biaisé et qui permet de résoudre le problème du filtre  $H_\infty$  pour le système singulier (2.125) sous sa forme discrète, si et seulement si il existe une matrice  $\Omega_{Z_{id}}$  et des matrices définies positives  $\mathbf{P}_{i1}$  et  $\mathbf{P}_{i2}$ , et une matrice symétrique  $\mathbf{S}_i$  telles que l'inégalité matricielle linéaire stricte est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}_{i1} + I & \alpha_{i2} & 0 & (1,4) & (1,5) \\ \alpha_{i2}^T & -S_i + \alpha_{i2}^T \alpha_{i2} & S_i & \mathbf{Q}_i \mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i2} \\ 0 & \mathbf{S}_i & -\mathbf{S}_i - \gamma_i^2 I & (3,4) & (3,5) \\ (1,4)^T & (\mathbf{Q}_i \mathbf{P}_{i1})^T & (3,4)^T & -\mathbf{P}_{i1} & -\mathbf{P}_{i1} \mathbf{Q}_i^T \\ (1,5)^T & \mathbf{P}_{i2}^T & (3,5)^T & -\mathbf{Q}_i \mathbf{P}_{i1} & -\mathbf{P}_{i2} \end{bmatrix} < 0$$

où :

$$\begin{aligned}(1,4) &= \mathbf{A}_{i1}^T \mathbf{P}_{i1} - \bar{\mathbf{B}}_{i1}^T (\Omega_{Z_{id}})^T \\ (1,5) &= \mathbf{A}_{i1}^T \mathbf{P}_{i1} \mathbf{Q}_i^T - \bar{\mathbf{B}}_{i1}^T \Omega_{Z_{id}}^T \mathbf{Q}_i^T \\ (3,4) &= (\alpha_{i2}^T \mathbf{A}_{i1}^T + \alpha_{i1}^T - \mathbf{Q}_i) \mathbf{P}_{i1} - (\bar{\mathbf{B}}_{i1} \alpha_{i2} + \bar{\beta}_{i1})^T \Omega_{Z_{id}}^T \\ (3,5) &= (\alpha_{i2}^T \mathbf{A}_{i1}^T + \alpha_{i1}^T) \mathbf{P}_{i1} \mathbf{Q}_i^T - \mathbf{P}_{i2} - (\bar{\mathbf{B}}_{i1} \alpha_{i2} + \bar{\beta}_{i1})^T \Omega_{Z_{id}}^T \mathbf{Q}_i^T \\ \mathbf{Q}_i &= \alpha_{i2}^T \mathbf{A}_{i1}^T + \alpha_{i1}^T\end{aligned}$$

Le gain  $\bar{\mathcal{Z}}_{id}$  est donné par :

$$\bar{\mathcal{Z}}_{id} = \mathbf{P}_{i1}^{-1} \Omega_{Z_{id}}$$

**Preuve 17** Avant d'entamer la démonstration du théorème on va transformer le système singulier (2.113) décrit par  $(\mathcal{E}_i, \mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i)$  en un système singulier équivalent décrit par  $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{\mathcal{A}}_i, \bar{\mathcal{B}}_i, \bar{\mathcal{C}}_i)$  tel que :

$$\bar{\mathcal{E}}_i \sigma \chi_i(t) = \bar{\mathcal{A}}_i \chi_i(t) + \bar{\mathcal{B}}_i w(t) \quad (2.125a)$$

$$e_i(t) = \bar{\mathcal{C}}_i \chi_i(t) \quad (2.125b)$$

où :

$$\bar{\mathcal{E}}_i = \Theta_i \mathcal{E}_i \Lambda_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_i = \Theta_i \mathcal{A}_i \Lambda_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_i = \Theta_i \mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} N_i \mathcal{V}_i + U_i \\ -I \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_i = \mathcal{C}_i \Lambda_i = [I \quad \mathcal{V}_i] \quad (2.129)$$

et  $\Theta_i$  et  $\Lambda_i$  sont des matrices non-singulière définies par :

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} I & N_i \mathcal{V}_i + U_i \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{bmatrix} I & \mathcal{V}_i \\ 0 & I \end{bmatrix}$$



Comme on peut le remarquer dans la définition de la matrice  $\bar{\mathbf{B}}_i$  donnée par l'équation (2.128), l'existence du terme  $N_i \mathcal{V}_i$  représente une non linéarité en  $\mathcal{Z}_{id}$ . Pour remédier à ce problème, on définit la matrice  $\mathcal{Z}_{id}$  comme suit :

$$\mathcal{Z}_{id} = \bar{\mathcal{Z}}_{id}(I - \beta_{i2}\beta_{i2}^+) \quad (2.130)$$

il s'en suit :

$$\begin{aligned} N_i &= \mathbf{A}_{i1} - \bar{\mathcal{Z}}_{id}\bar{\mathbf{B}}_{i1} \\ U_i &= \alpha_{i1} - \bar{\mathcal{Z}}_{id}\bar{\beta}_{i1} \\ \mathcal{V}_i &= \alpha_{i2} \\ \bar{\mathbf{B}}_{i1} &= (I - \beta_{i2}\beta_{i2}^+) \mathbf{B}_{i1} \\ \bar{\beta}_{i1} &= (I - \beta_{i2}\beta_{i2}^+)\beta_{i1} \end{aligned}$$

Pour le système (2.125) et en utilisant le lemme 8 et le lemme de Schur [BGFB94],  $\|T_{we_i}\|_\infty < \gamma_i$  si et seulement s'il existe une matrice définie positive  $\mathbf{P}_i$  et une matrice symétrique  $\mathbf{S}_i$  telles que :

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Phi_{i11} & \Phi_{i12} \\ \Phi_{i12}^T & \Phi_{i22} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.131)$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_{i11} &= \bar{\mathcal{A}}_i^T (\mathbf{P}_i - \bar{\mathcal{E}}_i^{\perp T} \mathbf{S}_i \bar{\mathcal{E}}_i^\perp) \bar{\mathcal{A}}_i - \bar{\mathcal{E}}_i^T \mathbf{P}_i \bar{\mathcal{E}}_i + \bar{\mathcal{C}}_i^T \bar{\mathcal{C}}_i \\ \Phi_{i12} &= \bar{\mathcal{A}}_i^T (\mathbf{P}_i - \bar{\mathcal{E}}_i^{\perp T} \mathbf{S}_i \bar{\mathcal{E}}_i^\perp) \bar{\mathcal{B}}_i \\ \Phi_{i22} &= -\gamma_i^2 I + \bar{\mathcal{B}}_i^T (\mathbf{P}_i - \bar{\mathcal{E}}_i^{\perp T} \mathbf{S}_i \bar{\mathcal{E}}_i^\perp) \bar{\mathcal{B}}_i \end{aligned}$$

En utilisant les expressions de  $\bar{\mathcal{E}}_i$ ,  $\bar{\mathcal{A}}_i$  et  $\bar{\mathcal{B}}_i$  données respectivement par (2.126), (2.127) et (2.128), on a :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_i^\perp &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} = \bar{\mathcal{E}}_i^\perp \bar{\mathcal{A}}_i \\ \bar{\mathcal{E}}_i^\perp \bar{\mathcal{B}}_i &= -I \end{aligned}$$

Les matrices  $\Phi_{i11}$ ,  $\Phi_{i12}$  et  $\Phi_{i22}$  deviennent alors :

$$\begin{aligned} \Phi_{i11} &= \bar{\mathcal{A}}_i^T \mathbf{P}_i \bar{\mathcal{A}}_i - \bar{\mathcal{E}}_i^{\perp T} \mathbf{S}_i \bar{\mathcal{E}}_i^\perp - \bar{\mathcal{E}}_i^T \mathbf{P}_i \bar{\mathcal{E}}_i + \bar{\mathcal{C}}_i^T \bar{\mathcal{C}}_i \\ \Phi_{i12} &= \bar{\mathcal{A}}_i^T \mathbf{P}_i \bar{\mathcal{B}}_i + \bar{\mathcal{E}}_i^{\perp T} \mathbf{S}_i \\ \Phi_{i22} &= -\gamma_i^2 I + \bar{\mathcal{B}}_i^T \mathbf{P}_i \bar{\mathcal{B}}_i - \mathbf{S}_i \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Schur, l'inégalité (2.131) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{E}}_i^{\perp T} \mathbf{S}_i \bar{\mathcal{E}}_i^\perp - \bar{\mathcal{E}}_i^T \mathbf{P}_i \bar{\mathcal{E}}_i + \bar{\mathcal{C}}_i^T \bar{\mathcal{C}}_i & \bar{\mathcal{E}}_i^{\perp T} \mathbf{S}_i & \bar{\mathcal{A}}_i^T \mathbf{P}_i \\ \mathbf{S}_i \bar{\mathcal{E}}_i^\perp & -\mathbf{S}_i - \gamma_i^2 I & \bar{\mathcal{B}}_i^T \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_i \bar{\mathcal{A}}_i & \mathbf{P}_i \bar{\mathcal{B}}_i & -\mathbf{P}_i \end{bmatrix} < 0$$

En posant

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i1} \mathbf{Q}_i^T \\ \mathbf{Q}_i \mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i2} \end{bmatrix}, \quad (2.132)$$

où  $\mathbf{P}_{i1} = \mathbf{P}_{i1}^T > 0$  et  $\mathbf{P}_{i2} = \mathbf{P}_{i2}^T > 0$  sont à déterminer et  $\mathbf{Q}_i = (\alpha_{i2}^T \mathbf{A}_{i1}^T + \alpha_{i1}^T)$ .

En remplaçant les matrices  $\bar{\mathcal{E}}_i$ ,  $\bar{\mathcal{A}}_i$ ,  $\bar{\mathcal{B}}_i$ ,  $\bar{\mathcal{C}}_i$  et  $\mathbf{P}_i$  par leurs expressions définies respectivement par les équations (2.126), (2.127), (2.128), (2.129) et (2.132) en utilisant le fait que  $\bar{\mathcal{E}}_i^\perp = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$ , on obtient la LMI du théorème 10, où  $\Omega_{\mathcal{Z}_{id}} = \mathbf{P}_{i1} \bar{\mathcal{Z}}_{id}$ . ■

**Remarque 10**

1. Dans le Théorème 10 (respectivement le Théorème 9) une inégalité matricielle linéaire pour un système de grande dimension singulier discret (respectivement continu) a été définie, où toutes les matrices sont constantes, donc en utilisant la "LMI Control Toolbox" dans Matlab, le paramètre  $\Omega_{Z_{id}}$  est donné et la solution admissible  $\bar{\mathcal{Z}}_{id}$  est déterminée en utilisant l'expression  $\bar{\mathcal{Z}}_i = \mathbf{P}_{i1}^{-1}\Omega_{Z_{id}}$ , par suite le filtre est complètement déterminé.
2. on peut reconstruire l'observateur global de la forme :

$$\begin{aligned}\sigma\xi(t) &= N\xi(t) + Mu(t) + \Gamma Z(t) \\ \hat{X}(t) &= \xi(t) + (J_2 - GJ_4)Z(t)\end{aligned}$$

où  $\hat{X}$  est l'estimée de  $X$ ,  $\xi$  est le vecteur d'état du filtre et

$$\begin{aligned}N &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & N_N \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & \Gamma_N \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & G_N \end{bmatrix}, \\ J_2 &= \begin{bmatrix} J_{12} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & J_{N2} \end{bmatrix}, J_4 = \begin{bmatrix} J_{14} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & J_{N4} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & E_N \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

La procédure de synthèse du filtre  $H_\infty$  décentralisé est résumée dans ce qui suit :

- i) Etape 1 : On calcule  $\Sigma_i$  et  $\Omega_i$ .
- ii) Etape 2 : On en déduit toutes les matrices nécessaires pour la résolution de la LMI à savoir :  $\mathbf{A}_{i1}$ ,  $\mathbf{B}_{i1}$ ,  $\alpha_{i1}$ ,  $\beta_{i1}$ ,  $\alpha_{i2}$ ,  $\beta_{i2}$  dont les expressions sont données respectivement par : (2.100) , (2.101), (2.109), (2.110), (2.111), (2.112).
- iii) Etape 3 : On résoud la LMI du Théorème 9 pour le cas des systèmes de grande dimension à temps continu (la LMI du Théorème 10 pour le cas des systèmes à temps discret), pour obtenir le gain  $\Omega_{Z_{ic}}$  (respectivement  $\Omega_{Z_{id}}$ ) qui conduit à  $\bar{\mathcal{Z}}_{ic} = \mathbf{X}_{i1}^{-1}\Omega_{Z_{ic}}$  (respectivement  $\bar{\mathcal{Z}}_{id} = \mathbf{P}_{i1}^{-1}\Omega_{Z_{id}}$  pour le cas discret). Par conséquent la matrice  $\mathcal{Z}_i$  paramétrant toutes les matrices du filtre est déterminée.
- iv) Etape 4 : On calcule les matrices du filtre  $N_i$ ,  $G_i$  et  $M_i$  en utilisant respectivement (2.95), (2.96) et (2.99).
- v) Etape 5 : Finalement le filtre (2.90) est complètement déterminé en calculant  $L_i$ , et  $\Gamma_i$  en utilisant respectivement (2.97) et (2.98).

Dans la suite, on considère un exemple discret pour la simulation.

## 2.4.6 Exemple numérique

On considère le système de grande dimension à temps discret donné par (2.86), tel que :

$$E = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1.6 & 0 & 0 & 0.96 & 0.58 & 0.06 \\ 0 & 1.3 & 0 & 0.96 & 0.58 & 1.01 \\ 0 & 0 & -2.42 & -2.82 & 0.88 & 1.65 \\ \hline 2.05 & -0.91 & 2.18 & 1.4 & 0 & 0 \\ 0.17 & 0.24 & -1.14 & 0 & -1.9 & 0 \\ 0.1 & -0.24 & 0.08 & 0 & 0 & -2.2 \end{array} \right]$$

$$B = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad F = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \quad R = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \quad H = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ce système peut être partitionné comme suit :

**Sous-système 1 :**

$$E_1 = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad A_{11} = \left[ \begin{array}{ccc} -1.6 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & -2.42 \end{array} \right], \quad A_{12} = \left[ \begin{array}{ccc} 0.96 & 0.58 & 0.06 \\ 0.96 & 0.58 & 1.01 \\ -2.82 & 0.88 & 1.65 \end{array} \right],$$

$$B_1 = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad H_1 = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad F_1 = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \quad R_1 = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right]$$

Pour ce sous système on a :

$$J_{11} = \left[ \begin{array}{ccc} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad J_{12} = \left[ \begin{array}{ccc} 0.2 & -0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & -0.2 \end{array} \right], \quad J_{13} = \left[ \begin{array}{ccc} 0.419 & 0 & -0.61 \\ 0.2 & 0 & -0.774 \\ -0.619 & 0 & 0.163 \end{array} \right],$$

$$J_{14} = \left[ \begin{array}{ccc} 0.473 & -0.473 & -0.053 \\ -0.4 & 0.4 & 0.2 \\ -0.126 & 0.126 & 0.746 \end{array} \right].$$

Dans ce cas, on obtient :

$$N_1 = \left[ \begin{array}{ccc} -0.6867 & 0.0780 & -0.5023 \\ 0.3734 & -0.4253 & 0.1294 \\ 0.6544 & -0.8813 & 0.0136 \end{array} \right], \quad M_1 = \left[ \begin{array}{ccc} -0.1110 & -0.0666 & -0.0888 \\ -0.0964 & -0.0888 & -0.0597 \\ -0.1443 & -0.1332 & -0.0222 \end{array} \right],$$

$$\Gamma_1 = \left[ \begin{array}{ccc} 0.2415 & 0.1085 & 0.1676 \\ -0.01793 & 0.0420 & 0.0665 \\ -0.2277 & -0.0317 & -0.0167 \end{array} \right], \quad G_1 = \left[ \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{array} \right].$$

**Sous-système 2 :**

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 1.4 & 0 & 0 \\ 0 & -1.9 & 0 \\ 0 & 0 & -2.2 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 2.05 & -0.91 & 2.18 \\ 0.17 & 0.24 & -1.14 \\ 0.1 & -0.24 & 0.08 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

il en découle que la matrice  $J_2$  est telle que :

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_{22} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & -0.2 \end{bmatrix}, J_{23} = \begin{bmatrix} 0.419 & 0 & -0.61 \\ 0.2 & 0 & -0.774 \\ -0.619 & 0 & 0.163 \end{bmatrix},$$

$$J_{24} = \begin{bmatrix} 0.473 & -0.473 & -0.053 \\ -0.4 & 0.4 & 0.2 \\ -0.126 & 0.126 & 0.746 \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $N_2, M_2, \Gamma_2, G_2$  de l'observateur sont données par :

$$N_2 = \begin{bmatrix} -0.1873 & -0.3443 & 0.0753 \\ -0.0893 & 0.0349 & -0.0157 \\ -0.0557 & 0.2044 & -0.0496 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.2442 & -0.5551 \\ 0 & -0.0815 & -0.1037 \\ 0 & 0.0444 & 0.1332 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0.3613 & -0.5085 & -0.1383 \\ 0.0722 & -0.0096 & -0.2159 \\ -0.0678 & 0.2474 & -0.3182 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Les figures (2.10)-(2.15) comparent les états estimés et les états du système global. La figure (2.16) donne l'évolution de l'erreur  $e_i$  entre la  $i$ -ème composante du système global et son estimée  $\hat{x}_i$  relative au  $i$ -ème sous-système. Comme on peut le remarquer la méthode proposée assure la convergence de l'état estimée vers l'état du système réel.

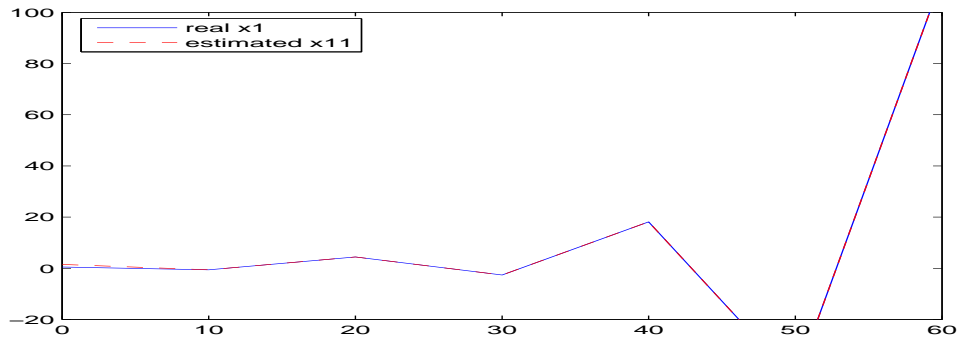


FIG. 2.10 – L'état réel  $x_1$  du système global et son estimée

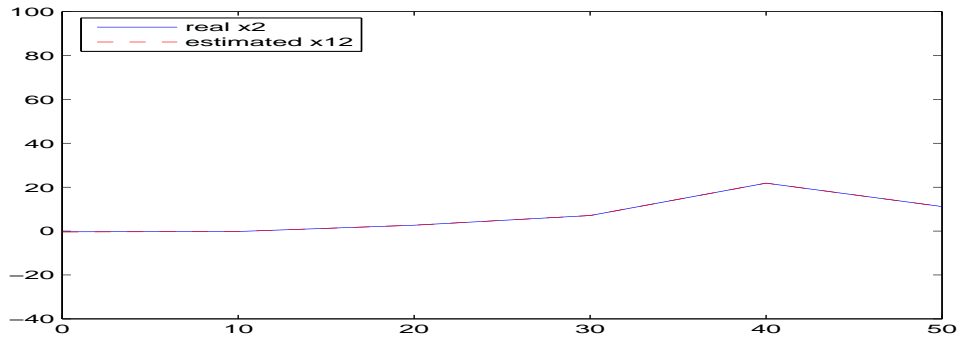


FIG. 2.11 – L'état réel  $x_2$  du système global et son estimée

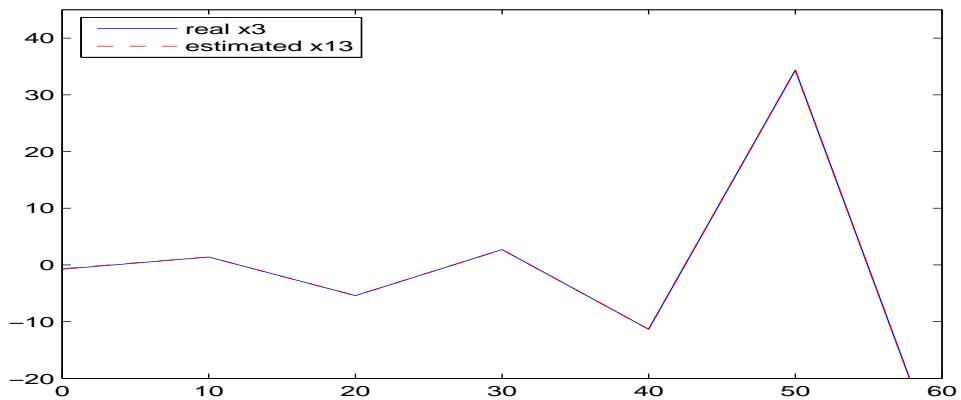


FIG. 2.12 – L'état réel  $x_3$  du système global et son estimée

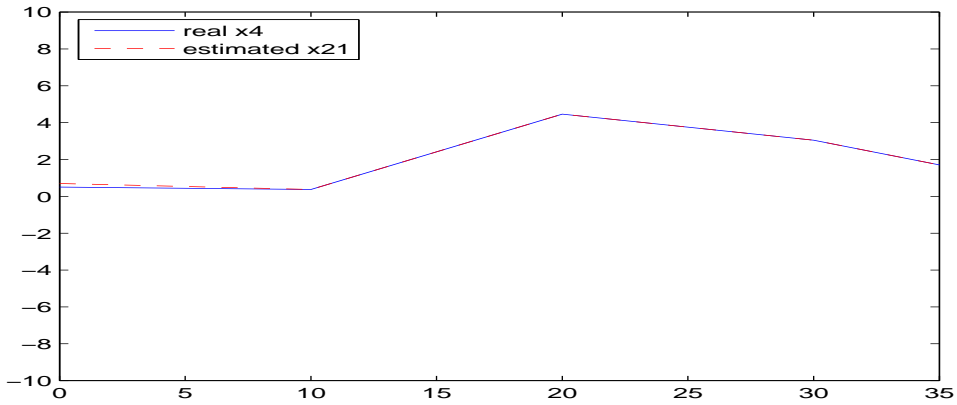


FIG. 2.13 – L'état réel  $x_4$  du système global et son estimée

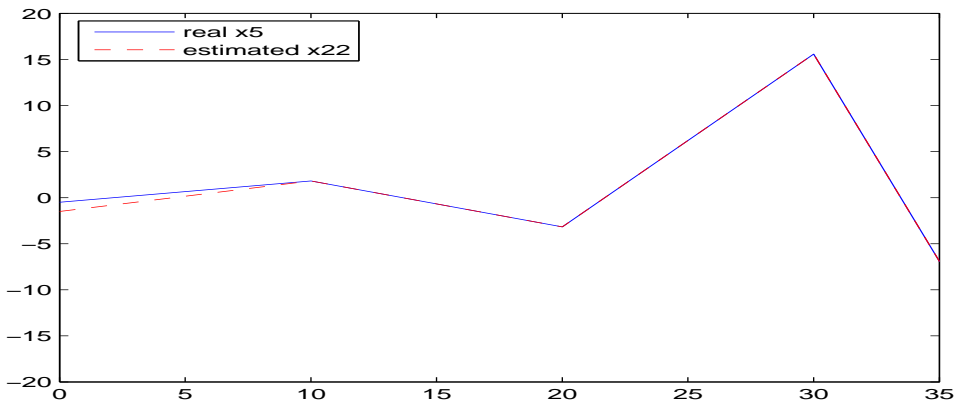


FIG. 2.14 – L'état réel  $x_5$  du système global et son estimée

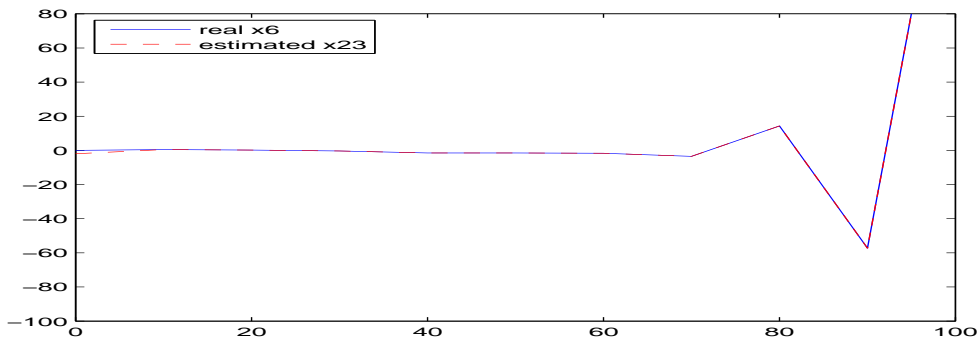


FIG. 2.15 – L'état réel  $x_6$  du système global et son estimée

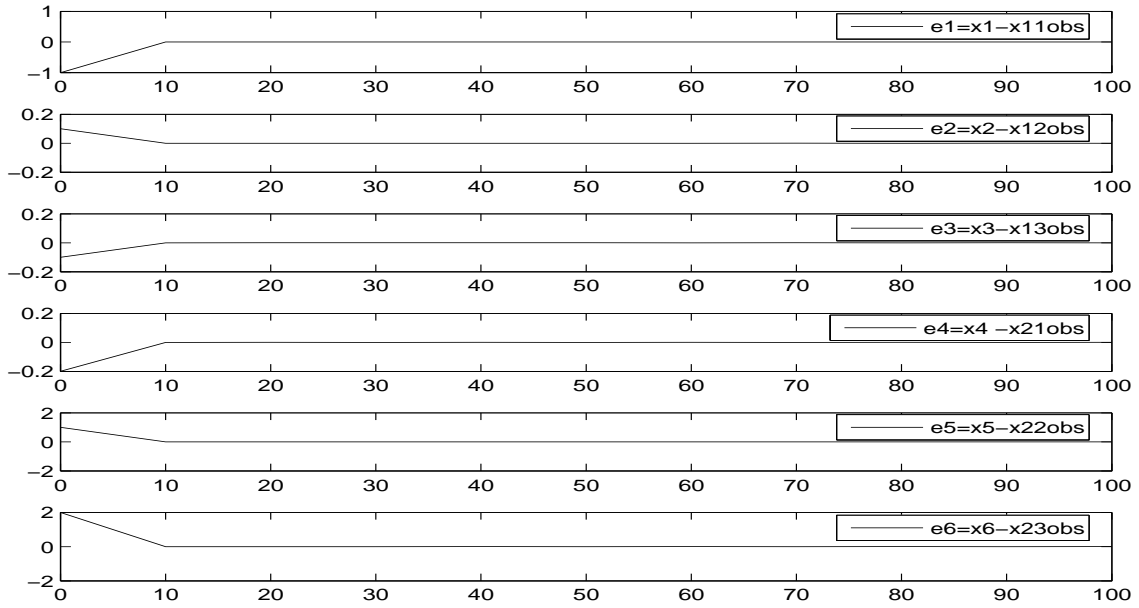


FIG. 2.16 – L’erreur d’estimation entre les états du système global et leurs estimées

Dans la suite du chapitre, on propose une nouvelle méthode de synthèse d’observateurs décentralisés dont certaines interconnexions sont supposées inconnues [MBDH].

## 2.5 Observateurs décentralisés ayant certaines des interconnexions inconnues

Dans ce paragraphe on s’intéresse à l’étude des observateurs décentralisés des systèmes singuliers de grande dimension, mais cette fois-ci on présente une autre méthode où on n’utilise pas la décomposition en valeurs singulière de la matrice  $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$  tel que l’on a fait dans le paragraphe précédent. En effet, l’approche est basée sur une nouvelle méthode de paramétrage d’une équation de Sylvester généralisée, qui permet d’unifier la synthèse d’observateur d’ordre plein, d’ordre réduit et d’ordre minimal pour les grands systèmes. Les conditions d’existence de l’observateur décentralisé sont données à l’aide des LMIs. Un exemple est donné pour valider l’approche proposée.

### 2.5.1 Position du problème

On considère le système linéaire singulier de grande dimension composé de  $N$  sous-systèmes décrit par :

$$E\sigma X(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (2.133a)$$

$$Z(t) = HX(t) \quad (2.133b)$$

Les vecteurs  $X(t)$  et  $Z(t)$  sont définis respectivement par (2.2) et les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $H$  et  $E$  sont définies respectivement (2.3), (2.4), (2.38). Le système partitionné (2.133) peut s’écrire sous

la forme de  $N$  sous-systèmes interconnectés comme suit :

$$E_i \sigma x_i(t) = A_{ii} x_i(t) + B_i u(t) + D_i v_i(t) \quad (2.134a)$$

$$z_i(t) = H_i x_i(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.134b)$$

où  $D_i$  et  $v_i$  sont donnés respectivement par (2.88) et (2.89). L'objectif de ce paragraphe est de synthétiser un observateur décentralisé pour chaque sous-système donné par (2.134) qui satisfait les performances globales obtenues avec les observateurs centralisés.

On se propose de partitionner la matrice  $D_i$  et le vecteur  $v_i$  comme suit :

$$D_i v_i = \begin{bmatrix} D_{i1} & D_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{bmatrix} \text{ telle que la matrice } D_{i1} \text{ soit de rang plein colonne.}$$

Donc, selon la partition de  $D_i$ , le système interconnecté (2.134), devient :

$$E_i \sigma x_i(t) = A_{ii} x_i(t) + B_i u(t) + D_{i1} v_{i1}(t) + D_{i2} v_{i2}(t) \quad (2.135a)$$

$$z_i(t) = H_i x_i(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.135b)$$

où  $v_{i1}$  est l'ensemble des interconnexions supposées inconnues et  $v_{i2}$  interconnexions à énergie finie. Par conséquent, pour la matrice  $D_{i1}$ , il existe donc une matrice de rang plein ligne  $\mathbf{E}_{D_i}^\perp \in \mathbb{R}^{\overline{r}_i \times n_i}$  telle que  $\mathbf{E}_{D_i}^\perp \begin{bmatrix} E_i & D_{i1} \end{bmatrix} = 0$ .

**Remarque 11** Si  $\begin{bmatrix} E_i & D_{i1} \end{bmatrix}$  de rang plein colonne alors  $\mathbf{E}_{D_i}^\perp = 0$ .

Le but de ce travail est de synthétiser un observateur complètement décentralisé dont l'état global converge vers l'état du système global. Pour cela on introduit l'hypothèse suivante qui correspond à la condition d'existence d'un observateur interconnecté à interconnexions inconnues :

**Hypothèse 5**

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_i & D_{i1} \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} & 0 \\ H_i & 0 \end{bmatrix} = n_i + \text{rang } D_{i1}.$$

**Remarque 12** L'Hypothèse 5 est une généralisation de la condition d'existence d'un observateur à entrées inconnues au cas des systèmes singuliers. Pour le cas des systèmes non singuliers, i.e.  $E_i = I_{n_i}$ , on a  $\mathbf{E}_{D_i}^\perp = 0$  l'hypothèse 5 devient :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} I_{n_i} & D_{i1} \\ H_i & 0 \end{bmatrix} = n_i + \text{rang } D_{i1}.$$

ce qui est équivalent à  $\text{rang } H_i D_{i1} = \text{rang } D_{i1}$  (voir par exemple [DZX94]).

Pour le système singulier (2.135), on propose de synthétiser un observateur de la forme suivante :

$$\sigma \xi_i(t) = N_i \xi_i(t) + M_i u(t) + \Gamma_i z_i(t) \quad (2.136a)$$

$$\hat{x}_i(t) = P_i \xi_i(t) - Q_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp B_i u(t) + G_i z_i(t) \quad (2.136b)$$

où  $\hat{x}_i$  est l'estimée de  $x_i$ ,  $\xi_i$  est le vecteur d'état de l'observateur, les matrices  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $\Gamma_i$ ,  $P_i$ ,  $Q_i$  et  $G_i$  sont des matrices inconnues de dimension appropriée et doivent être déterminées telle que l'erreur d'estimation  $e_i(t) = \hat{x}_i(t) - x_i(t)$  est non biaisée, i.e sa dynamique est indépendante de  $u(t)$  et  $x_i(t)$  si  $v_{i2} = 0$ , converge vers zéro pour  $t \rightarrow \infty$ .



**Remarque 13** Pour la matrice singulière  $\begin{bmatrix} E_i & D_{i1} \end{bmatrix}$  il existe toujours deux matrices non singulière  $\bar{\mathbf{M}}_i$  et  $\bar{\mathbf{N}}_i$  telles que [Dar06] :

$$\begin{bmatrix} E_i & D_{i1} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{M}}_i \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_i \quad (2.137)$$

Dans ce cas,  $\mathbf{E}_{D_i}^\perp$  peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{E}_{D_i}^\perp = \bar{\mathbf{L}}_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_i^{-1} \quad (2.138)$$

avec  $\bar{\mathbf{L}}_i$  une matrice arbitraire non singulière de dimension appropriée. Donc de l'équation (2.138), on peut voir que  $\mathbf{E}_{D_i}^\perp$  n'est pas unique.

**Remarque 14** (Unicité de l'observateur)

A partir de (2.138) de la Remarque 13 sur  $\mathbf{E}_{D_i}^\perp$ , on peut déduire que la matrice  $\bar{\mathbf{L}}_i$  n'est pas unique. Soit  $\bar{\mathbf{L}}_{i1}$  une autre matrice inversible telle que

$$\bar{\mathbf{E}}_{D_i}^\perp = \bar{\mathbf{L}}_{i1} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_i^{-1} \quad (2.139)$$

et

$$\bar{\mathbf{E}}_{D_i}^\perp \begin{bmatrix} E_i & D_{i1} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.140)$$

Donc, il existe une matrice  $\Phi_i$  de dimension appropriée telle que

$$\Phi_i \bar{\mathbf{L}}_{i1} = \bar{\mathbf{L}}_i \quad (2.141)$$

$\bar{\mathbf{L}}_i$  étant la matrice définie dans l'équation (2.138). D'autre part, en utilisant l'expression de l'estimée de l'état donnée par l'équation (2.136b) on aura :

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(t) &= P_i \xi_i(t) - Q_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp B_i u(t) + G_i z_i(t) \\ &= P_i \xi_i(t) - Q_i (\bar{\mathbf{L}}_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_i^{-1}) B_i u(t) + G_i z_i(t) \\ &= P_i \xi_i(t) - Q_i (\Phi_i \bar{\mathbf{L}}_{i1} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_i^{-1}) B_i u(t) + G_i z_i(t) \\ &= P_i \xi_i(t) - Q_i \Phi_i \bar{\mathbf{E}}_{D_i}^\perp B_i u(t) + G_i z_i(t) \end{aligned} \quad (2.142)$$

Par conséquent, le problème de synthèse d'observateur est indépendant du choix de  $\mathbf{E}_{D_i}^\perp$ .

**Remarque 15** Du système donné par (2.136), on peut reconstruire l'observateur global pour le système (2.133) tel que :

$$\sigma \xi(t) = N \xi(t) + M u(t) + \Gamma Z(t) \quad (2.143)$$

$$\hat{X}(t) = P \xi(t) - Q \mathbf{E}^\perp B u(t) + G Z(t) \quad (2.144)$$

où :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & N_N \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & \Gamma_N \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & P_N \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & Q_N \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & G_N \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \mathbf{E}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^\perp & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 \dots & \mathbf{E}_N^\perp \end{bmatrix} \text{ est telle que } \mathbf{E}^\perp \mathbf{E} = 0$$

Dans ce qui suit, on procédera à la synthèse d'un observateur décentralisé de la forme (2.136) pour le système singulier (2.134) qui satisfait le critère  $H_\infty$ , c'est à dire :

$$J_{z_i v_{i2}}^c = \int_0^\infty (z_i^T(t) z_i(t) - \gamma_{ci}^2 v_{i2}^T(t) v_{i2}(t)) dt < 0 \quad (2.145)$$

pour les systèmes à temps continu et pour  $\gamma_{ci} > 0$  et

$$J_{z_i v_{i2}}^d = \sum_{t=0}^\infty (z_i^T(t) z_i(t) - \gamma_{di}^2 v_{i2}^T(t) v_{i2}(t)) \quad (2.146)$$

pour les systèmes à temps discret et pour  $\gamma_{di} > 0$ .

## 2.5.2 Synthèse d'observateur décentralisé

Dans ce paragraphe, on considère le problème d'estimation de l'état du système singulier (2.134), l'observateur décentralisé à synthétiser est donné par le système (2.136). La proposition suivante donne les conditions d'existence et de stabilité de l'observateur (2.136)

**Proposition 6** Pour  $v_{i2}(t) = 0$  le système (2.136) est un observateur asymptotique (i.e. :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}_i(t) - x_i(t) = 0$ ) si :

- i)  $\sigma \epsilon_i(t) = N_i \epsilon_i(t)$  est asymptotiquement stable.
- ii)  $N_i T_i E_i - T_i A_i + \Gamma_i H_i = 0$
- iii)  $T_i D_{i1} = 0$
- iv)  $M_i = T_i B_i$

$$v) \begin{bmatrix} P_i & Q_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i E_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_i \\ H_i \end{bmatrix} = I_{n_i}$$

$T_i$  est une matrice arbitraire à déterminer.

**Preuve 18** Soit

$$\epsilon_i(t) = \xi_i(t) - T_i E_i x_i(t) \quad (2.147)$$

l'écart entre  $\xi_i(t)$  et  $T_i E_i x_i(t)$ , sa dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma \epsilon_i(t) &= \sigma \xi_i(t) - T_i E_i \sigma x_i(t) \\ &= N_i \xi_i(t) + M_i u_i(t) + \Gamma_i H_i x_i(t) - T_i A_{ii} x_i(t) \\ &\quad - T_i B_i u_i(t) - T_i D_{i1} v_{i1}(t) - T_i D_{i2} v_{i2}(t) \end{aligned} \quad (2.148)$$

en utilisant (2.147), l'équation (2.148) devient :

$$\begin{aligned}\sigma\epsilon_i(t) &= N_i\epsilon_i(t) + (N_iT_iE_i + \Gamma_iH_i - T_iA_{ii})x_i(t) \\ &+ (M_i - T_iB_i)u(t) - T_iD_{i1}v_{i1}(t) - T_iD_{i2}v_{i2}(t)\end{aligned}\quad (2.149)$$

la dynamique de l'erreur  $\epsilon_i(t)$  est indépendante de l'état  $x_i(t)$ , de l'entrée  $u(t)$  et des interconnexions inconnues  $v_{i1}(t)$ , et l'observateur (2.136) est asymptotiquement stable pour  $v_{i2}(t) = 0$ , si

$$\sigma\epsilon_i(t) = N_i\epsilon_i(t) \quad (2.150)$$

est asymptotiquement stable et l'équation de Sylvester généralisée sous contrainte ci-dessous est satisfaite :

$$\begin{aligned}N_iT_iE_i - T_iA_{ii} + \Gamma_iH_i &= 0 \\ T_iD_{i1} &= 0 \\ M_i &= T_iB_i\end{aligned}$$

Ceci correspond aux conditions i), ii), iii) et iv) de la Proposition 6.

D'autre part, de l'équation (2.144) on peut écrire

$$\hat{x}_i(t) = P_i\epsilon_i(t) - Q_i\mathbf{E}_{D_i}^\perp B_i u(t) + G_i H_i x_i(t) \quad (2.151)$$

de l'équation (2.134a) et en utilisant le fait que  $\mathbf{E}_{D_i}^\perp E_i = 0$ , on peut déduire :

$$-\mathbf{E}_{D_i}^\perp B_i u(t) = \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} x_i(t) + \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} v_{i2}(t) \quad (2.152)$$

donc en utilisant l'équation (2.152), on peut écrire l'équation (2.151) comme suit :

$$\hat{x}_i(t) = P_i\epsilon_i(t) + Q_i\mathbf{E}_i^\perp D_{i2} v_{i2}(t) + \begin{bmatrix} P_i & Q_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i E_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix} x_i(t) \quad (2.153)$$

On définit maintenant l'erreur  $e_i(t)$  comme suit :

$$\begin{aligned}e_i(t) &= \hat{x}_i(t) - x_i(t) \\ &= P_i\epsilon_i(t) + Q_i\mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} v_{i2}(t) + \left( \begin{bmatrix} P_i & Q_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i E_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix} - I_{n_i} \right) x_i(t)\end{aligned}\quad (2.154)$$

Donc, pour  $v_{i2}(t) = 0$ , l'erreur  $e_i(t)$  est non biaisée si :

$$\begin{bmatrix} P_i & Q_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i E_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix} = I_{n_i} \quad (2.155)$$

et on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}_i(t) - x_i(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i\epsilon_i(t) = 0$ , car  $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_i(t) = 0$  ce qui complète la démonstration de la proposition. ■

**Remarque 16** Pour  $v_{i2}(t) \neq 0$ , et si les équations  $ii)$ ,  $iii)$ ,  $iv)$  et  $v)$  de la Proposition 6 sont satisfaites on obtient :

$$\sigma\epsilon_i(t) = N_i\epsilon_i(t) - T_i D_{i2} v_{i2}(t) \quad (2.156a)$$

$$e_i(t) = P_i\epsilon_i(t) + Q_i \mathbf{E}_i^\perp D_{i2} v_{i2}(t) \quad (2.156b)$$

Donc les conditions d'existence de l'observateur (2.136) seront déterminées par l'étude du système (2.156) ci-dessus qui conduit à la résolution d'une LMI.

Dans ce qui suit, on déterminera les paramètres de l'observateur par la résolution des équations  $ii)$ ,  $iii)$  et  $iv)$  de la Proposition 6.

### 2.5.3 Détermination des paramètres de l'observateur

Dans ce paragraphe on va déterminer les paramètres de l'observateur à savoir les matrices inconnues  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $\Gamma_i$ ,  $P_i$ ,  $Q_i$  et  $G_i$ . Pour cela on doit résoudre les équations  $ii)$ ,  $iii)$ ,  $iv)$  et  $v)$  de la proposition 6. On commence par résoudre les équations  $ii)$ ,  $iii)$  et  $iv)$ , pour cela on définit la matrice  $T'_i$  telle que

$$T'_i = T_i + \Psi_i \Phi_i \quad (2.157)$$

où  $\Psi_i$  est une matrice arbitraire. Sous l'Hypothèse 5, et en utilisant le fait que  $\mathbf{E}_{D_i}^\perp E_i = 0$  on peut réécrire les équations  $ii)$  et  $v)$  de la Proposition 6 comme suit :

$$\begin{bmatrix} N_i & \Psi_i & \Gamma_i \\ P_i & Q_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T'_i E_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_i A_{ii} \\ I_{n_i} \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

D'autre part, comme  $\mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i1} = 0$ , l'équation  $iii)$  de la proposition 6 est équivalente à  $T'_i D_{i1} = 0$ , qui a pour solution générale

$$T'_i = \bar{T}_i (I_{n_i} - D_{i1} D_{i1}^+) \quad (2.159)$$

où  $\bar{T}_i$  est une matrice arbitraire à déterminer. D'où, l'équation (2.158) devient :

$$\begin{bmatrix} N_i & \Psi_i & \Gamma_i \\ P_i & Q_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_i \bar{E}_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_i \bar{A}_{ii} \\ I_{n_i} \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

où

$$\bar{E}_i = (I_{n_i} - D_{i1} D_{i1}^+) E_i \text{ et } \bar{A}_{ii} = (I_{n_i} - D_{i1} D_{i1}^+) A_{ii}.$$

Par conséquent, la synthèse de l'observateur décentralisé donné par (2.136) est réduite à trouver les matrices  $\bar{T}_i$ ,  $N_i$ ,  $\Psi_i$ ,  $\Gamma_i$ ,  $P_i$ ,  $Q_i$ ,  $G_i$  et  $M_i$  satisfaisant la condition (2.160).

Dans ce qui suit, on va donner la solution à l'équation de Sylvester généralisée donnée par (2.160), mais avant on présente le Lemme suivant qui donne la relation entre l'Hypothèse 5 et le

rang de la matrice  $\begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix}$ .

**Lemme 9** Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$1) \text{rang} \begin{bmatrix} E_i & D_{i1} \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} & 0 \\ H_i & 0 \end{bmatrix} = n_i + \text{rang } D_{i1}$$

$$2) \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix} = n_i.$$

**Preuve 19** Soient  $\bar{\mathfrak{U}}_i = \begin{bmatrix} I - D_{i1}D_{i1}^+ & 0 \\ D_{i1}D_{i1}^+ & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  une matrice de rang plein colonne et  $\bar{\mathfrak{V}}_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D_{i1}^+ E_i & I \end{bmatrix}$  une matrice non singulière, on a alors

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} E_i & D_{i1} \\ \Phi_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} & 0 \\ H_i & 0 \end{bmatrix} &= \text{rang} \left( \bar{\mathfrak{U}}_i \begin{bmatrix} E_i & D_{i1} \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} & 0 \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathfrak{V}}_i \right) \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E}_i & 0 \\ 0 & D_{i1} \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} & 0 \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix} + \text{rang } D_{i1} \\ &= n_i + \text{rang } D_{i1} \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. ■

Soient  $R_i$  une matrice de rang plein ligne et  $\Sigma_i = \begin{bmatrix} R_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix}$  telle que  $\text{rang } \Sigma_i = n_i$ . Sous l'Hypothèse 5, il existe deux matrices  $\bar{T}_i$  et  $G_i$ , telles que [DB09] :

$$[\bar{T}_i \quad G_i] \begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix} = R_i \quad (2.161)$$

L'équation (2.161) admet une solution si et seulement si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \\ R_i \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix} = n_i. \quad (2.162)$$

Cette condition est vérifiée sous l'Hypothèse 5 car  $\text{rang } \Sigma_i = n_i$ .

Dans ce cas, une solution de (2.161) est donnée par :

$$\bar{T}_i = R_i \begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

et

$$G_i = R_i \begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.164)$$

On a aussi sous l'Hypothèse 5, la solution générale à (2.160) est donnée par

$$\begin{bmatrix} N_i & \Psi_i & \Gamma_i \\ P_i & Q_i & G_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_i \bar{A}_{ii} \\ I_{n_i} \end{bmatrix} \Omega_i^\dagger - \begin{bmatrix} Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} (I - \Omega_i \Omega_i^\dagger) \quad (2.165)$$

$\Omega_i = \begin{bmatrix} \bar{T}_i \bar{E}_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_i+r_{\varphi_i}+m_i) \times n_i}$ , et  $\begin{bmatrix} Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée.  
on obtient alors

$$N_i = \Lambda_{N_i} - Y_i \Delta_{N_i} \quad (2.166)$$

$$\Psi_i = \Lambda_{\Psi_i} - Y_i \Delta_{\Psi_i} \quad (2.167)$$

$$\Gamma_i = \Lambda_{\Gamma_i} - Y_i \Delta_{\Gamma_i} \quad (2.168)$$

$$P_i = \Lambda_{P_i} - Z_i \Delta_{P_i} \quad (2.169)$$

$$Q_i = \Lambda_{Q_i} - Z_i \Delta_{Q_i} \quad (2.170)$$

$$G_i = \Lambda_{G_i} - Z_i \Delta_{G_i} \quad (2.171)$$

avec :

$$\Lambda_{N_i} = \bar{T}_i \bar{A}_{ii} \Omega_i^\dagger \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.172)$$

$$\Delta_{N_i} = (I - \Omega_i \Omega_i^\dagger) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.173)$$

$$\Lambda_{\Psi_i} = \bar{T}_i \bar{A}_{ii} \Omega_i^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.174)$$

$$\Delta_{\Psi_i} = (I - \Omega_i \Omega_i^\dagger) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.175)$$

$$\Lambda_{\Gamma_i} = \bar{T}_i \bar{A}_{ii} \Omega_i^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.176)$$

$$\Delta_{\Gamma_i} = (I - \Omega_i \Omega_i^\dagger) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.177)$$

$$\Lambda_{P_i} = \Omega_i^\dagger \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.178)$$

$$\Delta_{P_i} = (I - \Omega_i \Omega_i^\dagger) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.179)$$

$$\Lambda_{Q_i} = \Omega_i^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.180)$$

$$\Delta_{Q_i} = (I - \Omega_i \Omega_i^\dagger) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.181)$$

$$\Lambda_{G_i} = \Omega_i^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.182)$$

$$\Delta_{G_i} = (I - \Omega_i \Omega_i^\dagger) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.183)$$

**Remarque 17** On peut présenter une méthode qui permet de déterminer la matrice  $R_i$  telle que  $\Sigma_i$  est de rang plein colonne [DB09] :

Soit la décomposition en valeurs singulières de  $\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix}$  comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix} = \tilde{\mathfrak{U}}_i^T \begin{bmatrix} \Pi_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathfrak{V}}_i$$

où  $\tilde{\mathfrak{U}}_i$  et  $\tilde{\mathfrak{V}}_i$  sont des matrices unitaires et  $\Pi_i$  est une matrice diagonale avec des éléments et rang  $\Pi_i = \text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix}$ , alors un des choix pour la matrice  $R_i$  est  $\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \tilde{\mathfrak{V}}_i$ . En effet  $\Sigma_i$  peut

s'écrire comme  $\Sigma_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\mathfrak{U}}_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Pi_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathfrak{V}}_i$ , qui est de rang plein colonne.

Les conditions d'existence des matrices  $Y_i$  et  $Z_i$  telle que le système (2.156) soit asymptotiquement stable pour  $v_{i2}(t) = 0$ , et telle que pour  $v_{i2}(t) \neq 0$  le critère  $H_\infty$  soit satisfait (c'est à dire  $J_{z_i v_{i2}}^c < \gamma_{ci}$  pour le cas des systèmes continus et  $J_{z_i v_{i2}}^d < \gamma_{di}$  pour le système à temps discret).

Dans la suite, on présente une solution au problème d'observation décentralisé aussi bien pour le cas continu qu discret.

## 2.5.4 Observateur décentralisé : cas des systèmes continus

**Théorème 11** [MBDH]

Sous l'hypothèse 5 et pour un  $\gamma_{ci} > 0$  donné, il existe un observateur de la forme (2.136) telle que l'erreur  $e_i(t)$  donné par (2.156) est asymptotiquement stable pour  $v_{i2}(t) = 0$  et  $\|e_i(t)\|_2 <$

$\gamma_{c_i} \|v_{i2}(t)\|_2$  pour  $v_{i2}(t) \neq 0$ , s'il existe une matrice  $\mathbf{X}_{c_i} = \mathbf{X}_{c_i}^T > 0$  et une matrice  $\Omega_{Y_i}$  telle que la LMI suivante soit satisfaite

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (\Lambda_{P_i} - Z_i \Delta_{P_i})^T \\ (1,2)^T & \gamma_{c_i} I & (2,3)^T \\ \Lambda_{P_i} - Z_i \Delta_{P_i} & (2,3) & \gamma_{c_i} I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.184)$$

où :

$$\begin{aligned} (1,1) &= -\mathbf{X}_{c_i} N_i - N_i^T \mathbf{X}_{c_i} = -\mathbf{X}_{c_i} \Lambda_{N_i} + \Omega_{Y_i} \Delta_{N_i} - \Lambda_{N_i}^T \mathbf{X}_{c_i} + \Delta_{N_i}^T \Omega_{Y_i}^T \\ (1,2) &= -\mathbf{X}_{c_i} T_i D_{i2} = -\mathbf{X}_{c_i} \left( T_i' - \Psi_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp \right) D_{i2} \\ &= -\mathbf{X}_{c_i} \bar{T}_i (I_{n_i} - D_{i1} D_{i1}^+) D_{i2} + \mathbf{X}_{c_i} \Lambda_{\Psi_i} \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} - \Omega_{Y_i} \Delta_{\Psi_i} \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} \\ (2,3) &= -Q_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} = -\Lambda_{Q_i} \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} + Z_i \Delta_{Q_i} \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} \end{aligned}$$

où  $\Omega_{Y_i} = \mathbf{X}_{c_i} Y_i$ .

**Preuve 20** En utilisant *i*) de la proposition 6 et en utilisant le fait que  $T_i = \bar{T}_i (I - D_{i1} D_{i1}^+) - \Psi_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_i(t) &= N_i \epsilon_i(t) - T_i D_{i2} v_{i2}(t) \\ &= N_i \epsilon_i(t) - (\bar{T}_i \bar{D}_{i2} - \Psi_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2}) v_{i2}(t) \end{aligned} \quad (2.185)$$

où  $\bar{D}_{i2} = (I - D_{i1} D_{i1}^+) D_{i2}$ .

et en utilisant l'équation (2.153) on obtient

$$e_i(t) = P_i \epsilon_i(t) + Q_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} v_{i2}(t) \quad (2.186)$$

et en appliquant le lemme 6 au système donné par les équations (2.185) - (2.186) et en remplaçant  $\bar{T}_i$ ,  $N_i$ ,  $\Psi_i$ ,  $P_i$  et  $Q_i$  par leurs valeurs respectives données par (2.163) - (2.166) - (2.167) - (2.169) et (2.170) et en posant  $\Omega_{Y_i} = \mathbf{X}_{c_i} Y_i$ , on obtient la LMI du théorème 11. ■

## 2.5.5 Observateur décentralisé : cas des systèmes discrets

**Théorème 12** [MBDH]

Sous l'hypothèse 5 et pour un  $\gamma_{d_i} > 0$  donné, il existe un observateur de la forme (2.136) telle que l'erreur  $e_i(t)$  donnée par (2.156) soit asymptotiquement stable pour  $v_{i2}(t) = 0$  et  $\|e_i(t)\|_2 < \gamma_{d_i} \|v_{i2}(t)\|_2$  pour  $v_{i2}(t) \neq 0$ , s'il existe une matrice  $\mathbf{X}_{d_i} = \mathbf{X}_{d_i}^T > 0$  et une matrice  $\Omega_{Y_i}$  telle que la LMI suivante soit satisfaite

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{d_i} & 0 & (1,3) & (1,4) \\ 0 & \gamma_{d_i} I & \Lambda_{P_i} - Z_i \Delta_{P_i} & (2,4) \\ (1,3)^T & (\Lambda_{P_i} - Z_i \Delta_{P_i})^T & \mathbf{X}_{d_i} & 0 \\ (1,4)^T & (2,4)^T & 0 & \gamma_{d_i} I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.187)$$



où

$$\begin{aligned}
 (1, 3) &= \mathbf{X}_{\mathbf{d}_i} N_i = \mathbf{X}_{\mathbf{d}_i} \Lambda_{N_i} - \mathbf{X}_{\mathbf{d}_i} Y_i \Delta_{N_i} \\
 &= \mathbf{X}_{\mathbf{d}_i} \Lambda_{N_i} - \Omega_{Y_i} \Delta_{N_i} \\
 (1, 4) &= -\mathbf{X}_{\mathbf{d}_i} T_i D_{i2} \\
 &= -\mathbf{X}_{\mathbf{d}_i} \bar{T}_i (I_{n_i} - D_{i1} D_{i1}^+) D_{i2} + \mathbf{X}_{\mathbf{d}_i} \Lambda_{\Psi_i} \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} - \Omega_{Y_i} \Delta_{\Psi_i} \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} \\
 (2, 4) &= Q_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} = \Lambda_{Q_i} \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} - Z_i \Delta_{Q_i} \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2}
 \end{aligned}$$

où  $\Omega_{Y_i} = \mathbf{X}_{\mathbf{d}_i} Y_i$ .

**Preuve 21** De la relation  $i)$  de la proposition 6 et en utilisant le fait que  $T_i = T_i' - \Psi_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \epsilon_i(t+1) &= N_i \epsilon_i(t) - T_i D_{i2} v_{i2}(t) \\
 &= N_i \epsilon_i(t) - (\bar{T}_i D_{i2} - \Psi_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp) v_{i2}(t)
 \end{aligned} \tag{2.188}$$

où  $\bar{D}_{i2} = (I - D_{i1} D_{i1}^+) D_{i2}$ .

En utilisant l'équation (2.153) on a :

$$e_i(t) = P_i \epsilon_i(t) + Q_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp D_{i2} v_{i2}(t) \tag{2.189}$$

Par suite, en appliquant le lemme 7 au système donné par les équations (2.188) - (2.189), et en substituant les matrices  $\bar{T}_i$ ,  $N_i$ ,  $\Psi_i$ ,  $P_i$  et  $Q_i$  par leurs valeurs on obtient la LMI du Théorème 12. ■

Un avantage très important de la méthode proposée peut être illustré par la remarque suivante.

**Remarque 18** On remarque que l'observateur (2.136a – 2.136b) a une dimension  $\beta_i \leq n_i$ , donc la méthode présentée donne une approche unifiée au problème de synthèse d'observateur. L'observateur d'ordre plein s'obtient lorsque  $\beta_i = n_i$ , l'observateur d'ordre réduit obtenu pour  $\beta_i = n_i - m_i$  et l'observateur d'ordre minimal obtenu pour  $\beta_i = n_i - r_{\varphi_i} - m_i$ .

On résume dans la suite dans un algorithme, les différents étapes de synthèse de l'observateur décentralisé proposé :

- **Etape 1** : Trouver la matrice  $R_i$  telle que  $\Sigma_i = \begin{bmatrix} R_i \\ \mathbf{E}_{D_i}^\perp A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix}$  de rang plein colonne.
- **Etape 2** : Calculer la matrice  $\bar{T}_i$  en utilisant (2.163), et déduire  $T_i'$  de l'équation  $T_i' = \bar{T}_i (I_{n_i} - D_{i1} D_{i1}^+)$ .
- **Etape 3** : Résoudre la LMI du Théorème 11 pour le système à temps continu et le Théorème 12 pour les systèmes à temps discret, pour calculer les matrices de paramètres  $Y_i$  et  $Z_i$ .
- **Etape 4** : Calculer  $N_i$ ,  $\Psi_i$ ,  $\Gamma_i$ ,  $P_i$ ,  $Q_i$  et  $G_i$  et en utilisant les équations (2.166), (2.167), (2.168), (2.169), (2.170) et (2.171) respectivement.
- **Etape 5** : Calculer  $T_i$  et en utilisant le fait que  $T_i = T_i' - \Psi_i \mathbf{E}_{D_i}^\perp$ , on peut déduire  $M_i$  en utilisant  $M_i = T_i B_i$ .

Dans le paragraphe suivant, on va appliquer les résultats développés précédemment à un exemple numérique.

## 2.5.6 Exemple numérique

On considère le système interconnecté de la forme (2.133) avec

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}.$$

**Sous système 1 :**

Il est composé des matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{11} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, A_{12} = D_1 = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & -0.002 & 0 \\ 0 & 0 & -0.003 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.002 & 0 \\ 0 & -0.003 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour ce système  $\mathbf{E}_{D_{i1}}^\perp = [0 \ 0 \ 1]$ . Dans ce cas, il est facile de voir que l'hypothèse 5 est vérifiée. Pour l'observateur d'ordre réduit (pour  $\beta_1 = 1$ ), soit

$$R_1 = [0 \ 1 \ 0]$$

La solution à la LMI du Théorème 12 est donnée par

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -222.04 & -0.40 & -67.98 & 67.98 & 135.97 \\ 0 & -0.002 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = [0.44 \ 0.0008 \ 0.13 \ -0.13 \ 0 \ -0.27] \text{ et}$$

$$\mathbf{X}_{d1} = 1.3705.$$

Les matrices de l'observateur sont

$$N_1 = -0.0020, M_1 = [0 \ 0 \ 1], \Gamma_1 = 10^{-12} [-0.58 \ 0.58], P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 \mathbf{E}_{D_1}^\perp B_1 = 10^{-12} \begin{bmatrix} 111 & 111 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ -222 & -222 & 0 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.33 \\ -0.33 & 0.33 \end{bmatrix}.$$

**Sous système 2 :**

Il est composé des matrices suivantes :

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{22} = 10^{-4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = D_2 = \begin{bmatrix} -0.0005 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0002 \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} -0.0005 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0008 & 0 \\ 0 & -0.0002 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour ce système  $\mathbf{E}_{D_{i1}}^\perp = [0 \ 0 \ 1]$ . Dans ce cas, il est facile de voir que l'hypothèse 5 est vérifiée. Pour l'observateur d'ordre réduit (pour  $\beta_1 = 1$ ), soit

$$R_1 = [0 \ 1 \ 0]$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 \\ -222.04 & -0.15 & -157 & 157 & 0 \\ 0 & -0.001 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = [0.0888 \ 0.0001 \ 0.0628 \ -0.0628 \ 0] \text{ et}$$

$$X_2 = 2.3705.$$

Les matrices de l'observateur sont alors données par :

$$N_2 = -0.0004, M_2 = 10^{-20} [ -2 \ -2 \ 0 ],$$

$$\Gamma_2 = 10^{-18} [ -12.73 \ -6.9 ],$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_2 \mathbf{E}_{D_2}^\perp B_2 = 10^{-15} \begin{bmatrix} 12.5 & 12.5 & 0 \\ -0.03 & -0.03 & 0 \\ -25 & -25 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les figures (2.17), (2.18), (2.19) et (2.20) montrent les résultats de simulation obtenus et par conséquent l'efficacité de l'approche proposée.

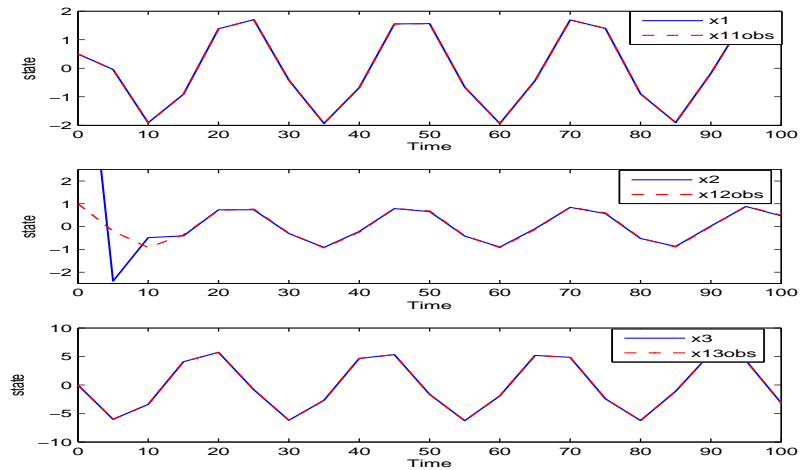


FIG. 2.17 – Les états  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  du système global (en trait continu) comparé aux états estimés  $\hat{x}_{11}(t)$ ,  $\hat{x}_{12}(t)$ ,  $\hat{x}_{13}(t)$  (en trait interrompu)

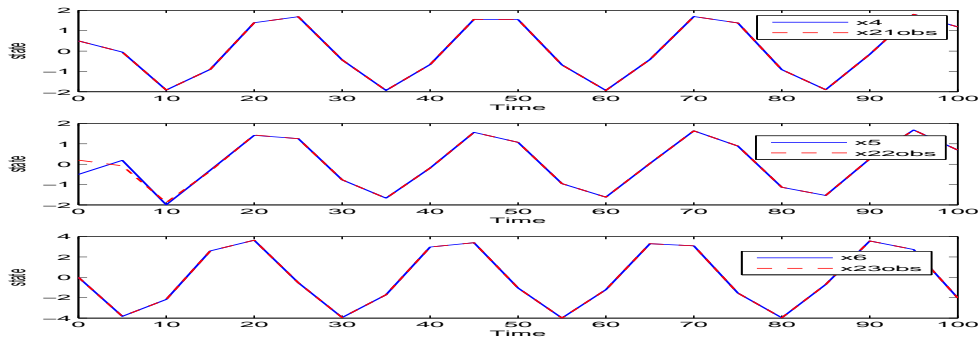


FIG. 2.18 – Les états  $x_4(t)$ ,  $x_5(t)$ ,  $x_6(t)$  du système global (en trait continu) comparé aux états estimés  $\hat{x}_{21}(t)$ ,  $\hat{x}_{22}(t)$ ,  $\hat{x}_{23}(t)$  (en trait interrompu)

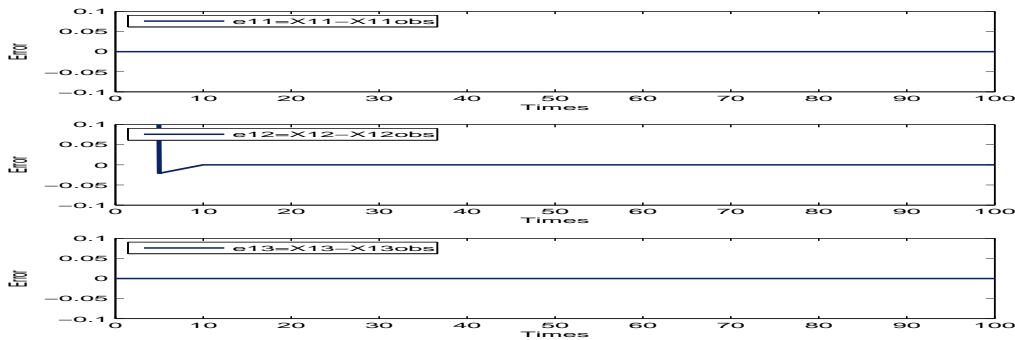


FIG. 2.19 – L'erreur entre l'état du système global et l'état estimé du sous-système 1

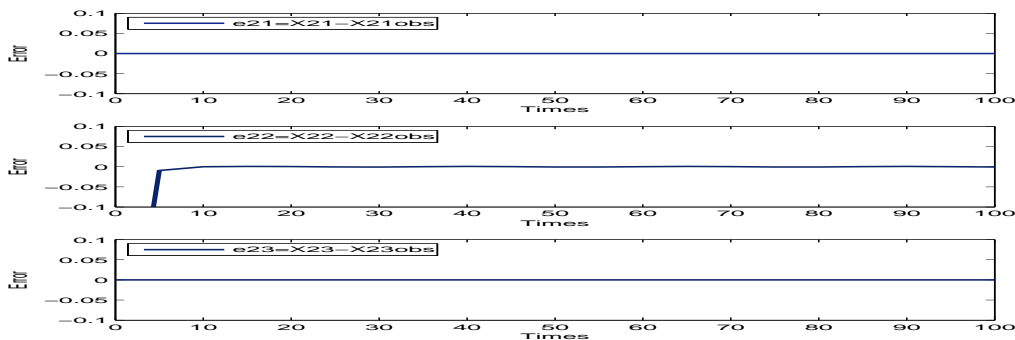


FIG. 2.20 – L'erreur entre l'état du système global et l'état estimé du sous-système 2

L'étude des observateurs interconnectés pour les systèmes de grande dimension, fera l'objet de la dernière partie du chapitre.

## 2.6 Observateur interconnecté des systèmes de grande dimension

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude des observateurs interconnectés pour les systèmes singuliers de grande dimension. Cette étude est motivée par le fait que les estimateurs d'état de ces systèmes se présentent dans certains cas comme un ensemble constitué de sous-observateurs interconnectés. Dans ce cas, on doit garantir en même temps la stabilité locale et globale du "grand observateur". Pour assurer la stabilité locale, on doit l'étudier au niveau de chaque sous-observateur, quant à la stabilité globale elle doit être étudiée en tenant compte des interactions qui en général présentent des incertitudes. L'idée est proposer une nouvelle méthode permettant de synthétiser une nouvelle forme d'observateurs interconnectés connectivement stable.

La méthode consiste à :

1. Décomposer l'observateur global en sous-observateurs localement stables.
2. Associer des fonctions de Lyapunov à chaque sous-observateur.
3. Montrer, la stabilité de l'observateur global en utilisant la notion de stabilité connective.

Avant d'entamer la synthèse de l'observateur, quelques définitions et résultats préliminaires sont à rappeler.

### 2.6.1 Résultats préliminaires

#### Définition 13

Une matrice  $W = (w_{ij})_{(1 \leq i, j \leq N)}$  de dimension  $N \times N$  est dite "M-matrice" (ou matrice de Metzler) quand tous ses éléments extra-diagonaux vérifient  $w_{ij} \leq 0$  pour  $i \neq j$  et tous ses mineurs principaux sont positifs c'est à dire :

$$\Delta_k(W) = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1k} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{k1} & w_{k2} & \dots & w_{kk} \end{vmatrix} > 0, \forall k \in \mathbf{N}$$

On utilisera aussi dans la suite le lemme suivant :

#### Lemme 10 [CL98]

Soient  $X_i, Y_i$  deux vecteurs appartenant à  $\mathbb{R}^n$ ,  $R_i$  une matrice définie positive et  $\rho_i$  une constante strictement positive, alors on a :

$$X_i^T R_i Y_i + Y_i^T R_i X_i \leq \rho_i X_i^T R_i X_i + \rho_i^{-1} Y_i^T R_i Y_i \quad (2.190)$$

**Théorème 13** On considère une matrice  $C \in \mathcal{R}^{N \times N}$  telle que  $C$  est une  $(-M)$ -matrice (ie :  $-C$  est une  $(M)$ -matrice), alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\lambda(C) \subset \mathcal{C}^-$  (stabilité asymptotique)
- $(-1)^k \Delta_k(C) > 0$  : (condition de Sevastyanov-Kotelyanski)
- Il existe un  $y \in \mathcal{R}^n$  tel que  $y > 0$  et  $Cy < 0$

**Preuve 22** voir par exemple [FP62].

Dans la suite de ce chapitre, on présentera une méthode de synthèse d'un observateur interconnecté pour les systèmes de grande dimension et on s'intéressera à la capacité d'un tel observateur à être stable de manière robuste vis-a-vis des incertitudes sur les interconnexions entre les sous observateurs qui les forment.

## 2.6.2 Position du problème

Soit le système de grande dimension suivant composé de  $N$  sous-systèmes interconnectés à temps continu :

$$E\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (2.191a)$$

$$Z(t) = HX(t) \quad (2.191b)$$

Où le vecteur  $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{l \times 1}$  et  $Z(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  sont respectivement l'état, l'entrée connue et la sortie mesurée. Les matrices  $E$ ,  $A$ ,  $B$  et  $H$  sont constantes réelles de dimension appropriée.

Considérons la partition suivante pour les vecteurs  $X(t)$  et  $Z(t)$  :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}, Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $E$ ,  $A$ ,  $B$  et  $H$  sont partitionnées selon  $X(t)$  de manière suivante :

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & E_N \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & H_N \end{bmatrix}.$$

Le système de grande dimension (2.191) peut s'écrire comme l'ensemble de  $N$  sous-systèmes interconnectés de la forme :

$$E_i \dot{x}_i(t) = A_{ii} x_i(t) + B_i u(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j(t) \quad (2.192a)$$

$$z_i(t) = H_i x_i(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.192b)$$

où :  $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l}$ ,  $H_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$  et  $n = n_1 + \dots + n_N$ .

Les vecteurs  $x_i(t)$  et  $z_i(t)$  sont respectivement l'état et la sortie du  $i$ -ème sous-système.

**Hypothèse 6** Pour le système décentralisé (2.192), on suppose que les matrices  $\begin{bmatrix} E_i \\ H_i \end{bmatrix}$  sont de rang plein colonne.

Il existe alors une matrice non singulière  $J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & J_{i2} \\ J_{i3} & J_{i4} \end{bmatrix}$  telle que,

$$J_{i1} E_i + J_{i2} H_i = I_{n_i} \quad (2.193)$$

$$J_{i3} E_i + J_{i4} H_i = 0 \quad (2.194)$$

### 2.6.3 Observateur interconnecté pour les systèmes de grande dimension

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'étude de l'observateur interconnecté relatif au système (2.192). Cet observateur peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\xi}_i(t) = N_i \xi_i(t) + M_i u(t) + \Gamma_i z_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N N_{ij} \xi_j(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_{ij} z_j(t) \quad (2.195a)$$

$$\hat{x}_i(t) = \xi_i(t) + (J_{i2} - G_i J_{i4}) z_i(t) \quad (2.195b)$$

où  $\hat{x}_i$  est l'estimé de  $x_i$ ,  $\xi_i$  est l'état de l'observateur, les matrices  $N_i$ ,  $N_{ij}$ ,  $M_i$ ,  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_{ij}$  et  $G_i$  sont inconnues et doivent être déterminées telles que l'erreur d'observation  $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$  soit non biaisée, (i.e sa dynamique est indépendante de  $u(t)$  et  $x_i(t)$ , et converge à zéro quand  $t \rightarrow \infty$ ).

L'observateur isolé relatif au sous-système  $i$ , obtenu quand toutes les interconnexions sont nulles, est donné par :

$$\dot{\xi}_i(t) = N_i \xi_i(t) + M_i u(t) + \Gamma_i z_i(t) \quad (2.196a)$$

$$\hat{x}_i(t) = \xi_i(t) + (J_{i2} - G_i J_{i4}) z_i(t) \quad (2.196b)$$

Sous la condition de l'hypothèse 6 et en utilisant la définition de la matrice  $J_i$ , l'erreur d'estimation de l'état  $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ , relative à l'observateur interconnecté est donnée par :

$$e_i(t) = (J_{i1} - G_i J_{i3}) E_i x_i(t) - \xi_i(t) \quad (2.197)$$

sa dynamique obéit à :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= N_i e_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N N_{ij} e_j(t) + (\Psi_i B_i - M_i) u(t) + (\Psi_i A_{ii} - N_i \Psi_i E_i - \Gamma_i H_i) x_i(t) \\ &+ \sum_{j=1, j \neq i}^N (\Psi_i A_{ij} - N_{ij} \Psi_j E_j - \Gamma_{ij} H_j) x_j(t) \end{aligned} \quad (2.198)$$

où  $\Psi_i = (J_{i1} - G_i J_{i3})$  et  $\Psi_j = (J_{j1} - G_j J_{j3})$ .

La synthèse de l'observateur interconnecté consiste à trouver les matrices  $N_i$ ,  $N_{ij}$ ,  $M_i$ ,  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_{ij}$  et  $G_i$  telles que l'observateur (2.195) est asymptotiquement connectivement stable. Puis, de l'équation (2.198) on peut déduire la proposition suivante qui donne les conditions d'existence et de stabilité de l'observateur (2.195).

**Proposition 7** *Le système (2.195) est un observateur asymptotique pour le système (2.192) (i.e :  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - \hat{x}_i(t)) = 0$ ) si :*

- i)  $\dot{e}_i(t) = N_i e_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N N_{ij} e_j(t)$  est asymptotiquement connectivement stable.
- ii)  $\Psi_i A_{ii} - N_i \Psi_i E_i - \Gamma_i H_i = 0$
- iii)  $\Psi_i B_i - M_i = 0$ .
- iv)  $(\Psi_i A_{ij} - N_{ij} \Psi_j E_j - \Gamma_{ij} H_j) = 0, \forall j \in \{1, \dots, N\}$  et  $j \neq i$

Pour résoudre les équations *ii*) et *iii*) de la Proposition 7, sous l'Hypothèse 6, on va réécrire l'équation *ii*) comme suit :

$$J_{i1}A_{ii} - G_i J_{i3}A_{ii} - N_i J_{i1}E_i - L_i H_i = 0 \quad (2.199)$$

avec  $L_i = N_i G_i J_{i4} + \Gamma_i$ , où on a utilisé l'expression de  $\Psi_i$ .  
Ceci est équivalent à l'équation algébrique suivante :

$$Y_i \Sigma_i = \Omega_i \quad (2.200)$$

où  $Y_i = \begin{bmatrix} N_i & G_i & L_i \end{bmatrix}$ ,  $\Sigma_i = \begin{bmatrix} J_{i1}E_i \\ J_{i3}A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix}$  et  $\Omega_i = J_{i1}A_{ii}$ .

Cette équation admet toujours des solutions car  $\Sigma_i$  est de rang plein colonne (voir paragraphe 2.3.3).

Ces solutions sont de la forme

$$Y_i = \Omega_i \Sigma_i^+ - \mathcal{Z}_i (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \quad (2.201)$$

où  $\mathcal{Z}_i$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée.

Les matrices  $N_i$ ,  $G_i$ ,  $L_i$ ,  $M_i$  et  $\Gamma_i$  sont alors données par :

$$N_i = (\Omega_i \Sigma_i^+ - \mathcal{Z}_i (I - \Sigma_i \Sigma_i^+)) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.202)$$

$$G_i = (\Omega_i \Sigma_i^+ - \mathcal{Z}_i (I - \Sigma_i \Sigma_i^+)) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.203)$$

$$L_i = (\Omega_i \Sigma_i^+ - \mathcal{Z}_i (I - \Sigma_i \Sigma_i^+)) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.204)$$

$$\Gamma_i = L_i - N_i G_i J_{i4} \quad (2.205)$$

$$M_i = \Psi_i B_i \quad (2.206)$$

D'autre part l'équation *iv*) de la proposition 7, s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_{ij} & L_{ij} \end{bmatrix} \Theta_j = \gamma_{ij} \quad (2.207)$$

où  $\Theta_j = \begin{bmatrix} J_{j1}E_j \\ H_j \end{bmatrix}$ ,  $\gamma_{ij} = \Psi_i A_{ij}$  et  $L_{ij} = N_{ij} G_j J_{j4} + \Gamma_{ij}$ .

L'équation (2.207) admet une solution si et seulement si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \Theta_j \\ \gamma_{ij} \end{bmatrix} = \text{rang} (\Theta_j) \quad (2.208)$$

Sous l'hypothèse 6 et en utilisant la matrice  $J_j$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \text{rang}(\Theta_j) &= \text{rang} \begin{bmatrix} J_{j1}E_j \\ H_j \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} I - J_{j2}H_j \\ H_j \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} J_{j1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j \\ H_j \end{bmatrix} = n_j \end{aligned}$$



donc,

$$N_{ij} = (\gamma_{ij}\Theta_j^+ - \mathcal{Z}_{ij}(I - \Theta_j\Theta_j^+)) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.209)$$

$$L_{ij} = (\gamma_{ij}\Theta_j^+ - \mathcal{Z}_{ij}(I - \Theta_j\Theta_j^+)) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.210)$$

et

$$\Gamma_{ij} = L_{ij} - N_{ij}G_jJ_{j4} \quad (2.211)$$

Les matrices  $G_j$  sont calculées par :

$$G_j = (\Omega_j\Sigma_j^+ - \mathcal{Z}_j(I - \Sigma_j\Sigma_j^+)) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall j \neq i. \quad (2.212)$$

Dans ce qui suit, on va s'intéresser à l'étude de stabilité de l'observateur interconnecté, on donnera les conditions pour lesquelles l'observateur (2.195) est asymptotiquement connectivement stable. En effet, en utilisant les fonctions de comparaisons [Sil91], on démontre que sous des conditions relativement simples la stabilité de l'observateur découplé (2.196) obtenu quand les interconnexions sont nulles implique la stabilité de l'observateur interconnecté (2.195). Ces conditions sont données par le théorème suivant.

**Théorème 14** *Pour le système (2.192), l'observateur interconnecté (2.195) est asymptotiquement connectivement stable, si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *L'observateur découplé (2.196) est asymptotiquement stable.*
2. *Pour l'observateur interconnecté, il existe un nombre positif  $\Lambda_{ij}$ , tel que :*

$$\|N_{ij}\| \leq \Lambda_{ij}, \quad \forall j \neq i \quad (2.213)$$

3. *Il existe deux matrices de Lyapunov  $\mathbf{P}_i$  et  $\mathbf{R}_i$  et une matrice  $C = (c_{ij})_{N \times N}$ , telle que  $C$  est une  $(-M)$ -matrice, avec :*

$$\begin{cases} c_{ii} = \frac{-\lambda_m(\mathbf{P}_i) + \lambda_M(\mathbf{R}_i)}{\lambda_M(\mathbf{R}_i)} & \forall i = j \\ c_{ij} = \Lambda_{ij} & \forall i \neq j \end{cases}$$

**Preuve 23** *Soit,  $e_{i_{decp}}$  l'erreur d'observation relative à l'observateur découplé (2.196). Sa dynamique est donnée par :*

$$\dot{e}_{i_{decp}}(t) = N_i e_{i_{decp}}(t) \quad (2.214)$$

*Cette erreur converge vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$  si  $N_i$  est une matrice de Hurwitz. Donc, il existe une matrice définie positive  $\mathbf{R}_i$  telle que :*

$$N_i^T \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i N_i = -\mathbf{P}_i \quad (2.215)$$

avec  $\mathbf{P}_i > 0$ .

Maintenant, on définit la fonction de Lyapunov suivante :

$$v_i(t, e_i) = e_i^T(t) \mathbf{R}_i e_i(t) \quad (2.216)$$

On a alors :

$$\lambda_{\min}(\mathbf{R}_i) \|e_i\|^2 \leq v_i(e_i) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{R}_i) \|e_i\|^2, \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.217)$$

En utilisant (2.214) et (2.215) on a :

$$\dot{v}_i(t, e_i) \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{P}_i) \|e_i\|^2, \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.218)$$

D'autre part, on a :

$$\dot{e}_i = N_i e_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N N_{ij} e_j(t) \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.219)$$

On définit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_i(t, e_i) = \sum_{i=1}^N y_i v_i(e_i, t) \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.220)$$

où  $y_i > 0$ . La fonction  $V_i(e_i, t)$  satisfait l'inégalité suivante :

$$\mu_1 \|e\|_\infty \leq V_i(e_i, t) \leq \mu_2 \|e\|_\infty, \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (2.221)$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont définis par :

$$\mu_1 = \min(y_i, \lambda_{\min}(\mathbf{R}_i)) > 0 \quad (2.222)$$

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^N y_i \lambda_{\max}(\mathbf{R}_i) > 0 \quad (2.223)$$

Pour  $i, j \in \{1 \dots N\}$ , la dérivée de  $V_i(t, e_i)$  le long des solutions de (2.219) est donnée par :

$$\dot{V}_i(t, e_i) = \sum_{i=1}^N y_i e_i^T [N_i^T \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i N_i] e_i + \sum_{i=1}^N y_i \sum_{j=1, j \neq i}^N e_j^T N_{ij}^T \mathbf{R}_i e_i + \sum_{i=1}^N y_i e_i^T \mathbf{R}_i \sum_{j=1, j \neq i}^N N_{ij} e_j$$

en utilisant le Lemme 10 on peut déduire :

$$\dot{V}_i(t, e_i) \leq \sum_{i=1}^N y_i \dot{v}_i + \sum_{i=1}^N y_i e_i^T \mathbf{R}_i e_i + \sum_{i=1}^N y_i \mathbf{R}_i \sum_{j=1, j \neq i}^N e_j^T N_{ij}^T \sum_{j=1, j \neq i}^N N_{ij} e_j$$

et pour définir les bornes des interconnexions entre les sous-observateurs, on utilise les valeurs propres de  $(N_{ij} N_{ij}^T)$  telles que  $\Lambda_{ij} = \lambda_{\max}(N_{ij} N_{ij}^T)$ , on a alors

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t, e_i) &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -y_i \lambda_{\min}(\mathbf{P}_i) \|e_i\|^2 + y_i \lambda_{\max}(\mathbf{R}_i) \|e_i\|^2 + y_i \lambda_{\max}(\mathbf{R}_i) \sum_{j=1, j \neq i}^N \Lambda_{ij} \|e_j\|^2 \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^N y_i \left\{ \frac{-\lambda_{\min}(\mathbf{P}_i) + \lambda_{\max}(\mathbf{R}_i)}{\lambda_{\max}(\mathbf{R}_i)} \|e_i\|^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^N \Lambda_{ij} \|e_j\|^2 \right\} \\ &\leq y^T C \phi(\|e\|) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 y^T &= [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n] \\
 C &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & \dots & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \\
 \phi^T(\|e\|) &= [ \|e_1\|^2 \quad \|e_2\|^2 \quad \dots \quad \|e_n\|^2 ] \\
 c_{ii} &= \frac{-\lambda_{\min}(\mathbf{P}_i) + \lambda_{\max}(\mathbf{R}_i)}{\lambda_{\max}(\mathbf{R}_i)} \\
 c_{ij} &= \Lambda_{ij}
 \end{aligned}$$

Comme toutes les composantes de  $\phi(\|e\|)$  sont non négatives et  $C$  satisfait la condition 3) du Théorème 14, alors toutes les valeurs propres de  $C$  sont à parties réelles négatives (voir Théorème 13) et  $V_i$  est une fonction bornée comme l'indique la relation (2.221) alors en utilisant le principe de comparaison [Sil91],  $\dot{V}_i(e_i, t) \leq 0$  donc l'erreur d'estimation de l'état est asymptotiquement connectivement stable. ■

**Remarque 19** Le terme d'interconnection  $N_{ij}$  entre les sous-observateurs est donnée par :

$$N_{ij} = (\gamma_{ij}\Theta_j^+ - Z_{ij}(I - \Theta_j\Theta_j^+)) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.224)$$

où  $Z_{ij}$  est une matrice arbitraire à déterminer telle que l'observateur (2.195) soit asymptotiquement connectivement stable, où on utilise les résultats du théorème 14 (le fait que  $C$  est une  $(-M)$ -matrice). En pratique, on peut choisir la matrice  $Z_{ij}$  telle que  $\lambda_{\max}(N_{ij}N_{ij}^T) > 0$ , en particulier pour  $Z_{ij} = 0$

## 2.6.4 Exemple numérique

On considère le système de grande dimension à temps continu décrit par (2.191), tel que :

$$\begin{aligned}
 E &= \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Les sous-systèmes sont composées des matrices suivantes :

**Pour le sous-système 1 :**

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.3 & 0 \\ -0.5 & 0.8 & -0.42 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.58 & 0.06 \\ 0.96 & 0.58 & 1.01 \\ -2.82 & 0.88 & 1.65 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

**Pour le sous-système 2**

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} -0.40 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.9 & 0.1 \\ -0.3 & -0.7 & -0.2 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 2.05 & -0.91 & 2.18 \\ 0.17 & 0.24 & -1.14 \\ 0.1 & -0.24 & 0.08 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il s'en suit que :

**Pour le sous-système 1**, on obtient :

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_{12} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, J_{13} = \begin{bmatrix} -0.61 & 0 & 0.16 \\ -0.41 & 0 & -0.61 \\ 0.2 & 0 & -0.77 \end{bmatrix}$$

et

$$J_{14} = \begin{bmatrix} 0.74 & -0.12 & 0.12 \\ -0.05 & 0.47 & -0.47 \\ 0.2 & -0.4 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas on a :

$$N_1 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

qui est déterminée par placement de pôles avec

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0.101 & -0.028 & 0.024 \\ -0.016 & 0.501 & 0.008 \\ 0.024 & 0.014 & 0.197 \\ -0.003 & -0.138 & 0.004 \\ -0.016 & 0.358 & 0.010 \\ -0.013 & 0.497 & 0.006 \\ -0.017 & -0.097 & 0.015 \\ -0.004 & -0.180 & 0.005 \\ 0.012 & -0.082 & -0.009 \end{bmatrix}$$

On a aussi

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.36 & 0 & 0 \\ 0.009 & 1 & -0.5 \\ -0.183 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} -0.10 & -0.05 & 0.05 \\ 0.03 & 0.12 & 0.08 \\ 0.047 & 0.02 & -0.02 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -0.038 & -0.02 & 0.012 \\ 0.091 & -0.29 & -0.39 \\ 0.016 & 0.011 & -0.005 \end{bmatrix}, N_{12} = \begin{bmatrix} 0.102 & 0.038 & 0.294 \\ 0.038 & 0.044 & 0.181 \\ 0.294 & 0.181 & 1.173 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{12} = \begin{bmatrix} 1.24 & 0 & -1.35 \\ -0.083 & 0 & 0.084 \\ -1.82 & 0 & 3.20 \end{bmatrix}.$$

où  $\lambda_{max}(N_{12}N_{12}^T) = 1.277$

Pour le sous-système 2, on a :

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.33 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_{22} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & -0.33 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0.66 \end{bmatrix},$$

$$J_{23} = \begin{bmatrix} -0.471 & 0 & -0.57 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & -0.81 \end{bmatrix}, J_{24} = \begin{bmatrix} 0.471 & 0 & -0.47 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.33 & 0 & 0.33 \end{bmatrix}.$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.62 & 0 \\ 0 & 0.122 & 1 \\ 0 & -0.314 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} -0.155 & 0 & 0.155 \\ 0.622 & 0 & -0.465 \\ 0.0598 & 0 & -0.059 \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} -0.0562 & 0 & 0.039 \\ 0.007 & 0 & -0.355 \\ 0.0213 & 0 & -0.015 \end{bmatrix}.$$

pour,

$$Z_2 = \begin{bmatrix} -0.0049 & 0.312 & 0.077 \\ 0.0217 & 0.0435 & -0.0108 \\ 0.0774 & -0.1561 & 0.1712 \\ -0.006 & -0.119 & 0.0097 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.033 & 0.0083 & 0.012 \\ 0.0348 & -0.215 & 0.00049 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0285 & 0.227 & -0.003 \end{bmatrix}$$

$$N_{21} = \begin{bmatrix} -0.846 & -0.564 & 0.466 \\ 0.449 & 0.197 & -0.346 \\ 0.361 & 0.286 & -0.41 \end{bmatrix}, \Gamma_{21} = \begin{bmatrix} 0.662 & 1.007 & 0.345 \\ 0.408 & -0.244 & -0.652 \\ -0.341 & -0.513 & -0.172 \end{bmatrix}$$

avec  $\lambda_{max}(N_{21}N_{21}^T) = 1.956$ .

Les figures (2.21)-(2.26) comparent les composantes de l'état du système global (en trait continu) et leurs estimées moyennant l'observateur interconnecté (en pointillé) et les figures (2.27) et (2.28) tracent l'évolution de l'erreur d'observation. On peut bien remarquer la convergence des résultats de la méthode proposée.

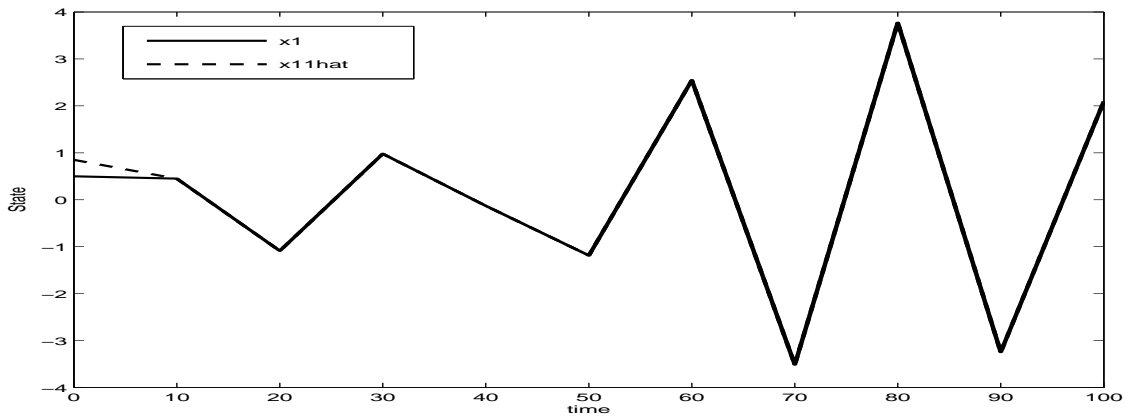


FIG. 2.21 – La première composante du système global  $x_1(t)$  (en trait continu) comparé à son estimée (en pointillé)

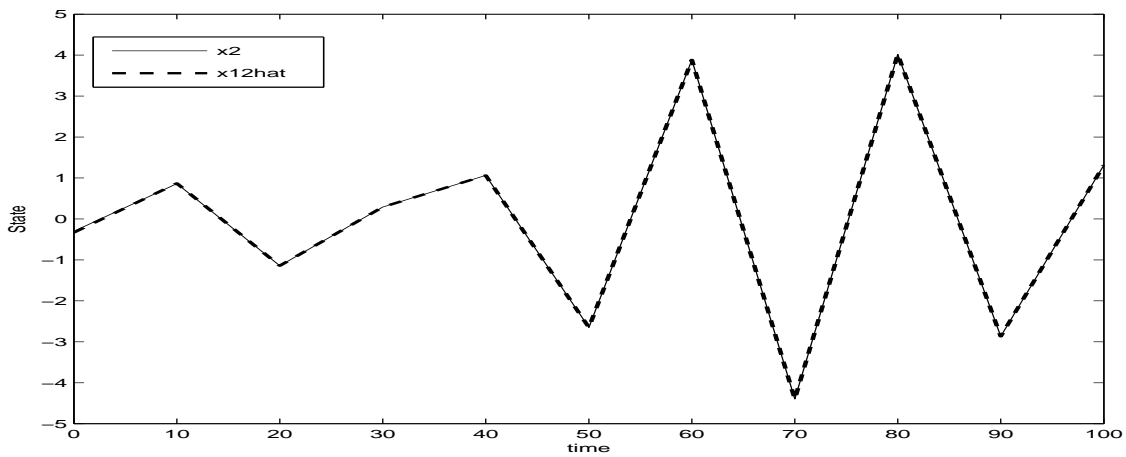


FIG. 2.22 – La deuxième composante du système global  $x_2(t)$  (en trait continu) comparé à son estimée (en pointillé)

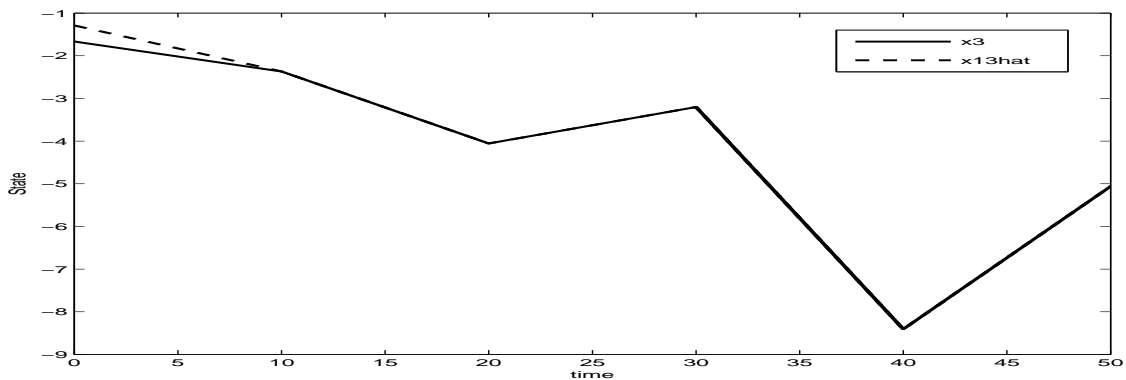


FIG. 2.23 – La troisième composante du système global  $x_3(t)$  (en trait continu) comparé à son estimée (en pointillé)

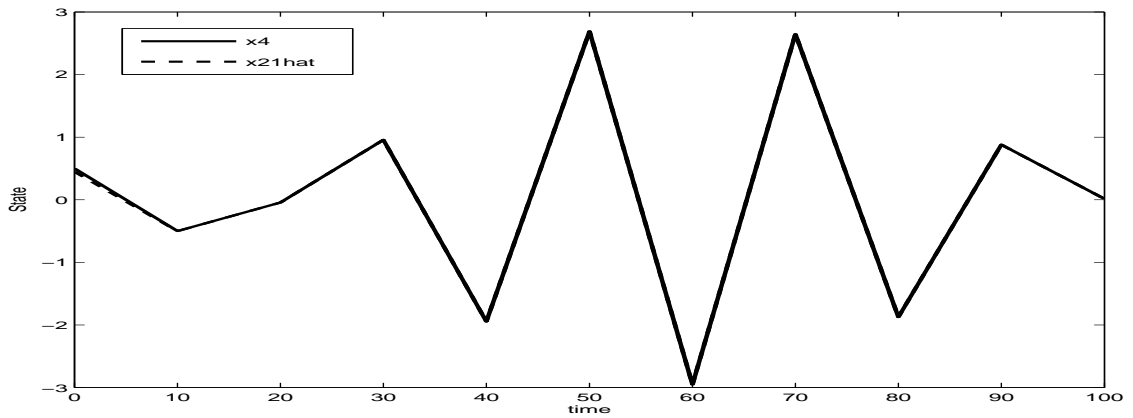


FIG. 2.24 – La quatrième composante du système global  $x_4(t)$  (en trait continu) comparé à son estimée (en pointillé)

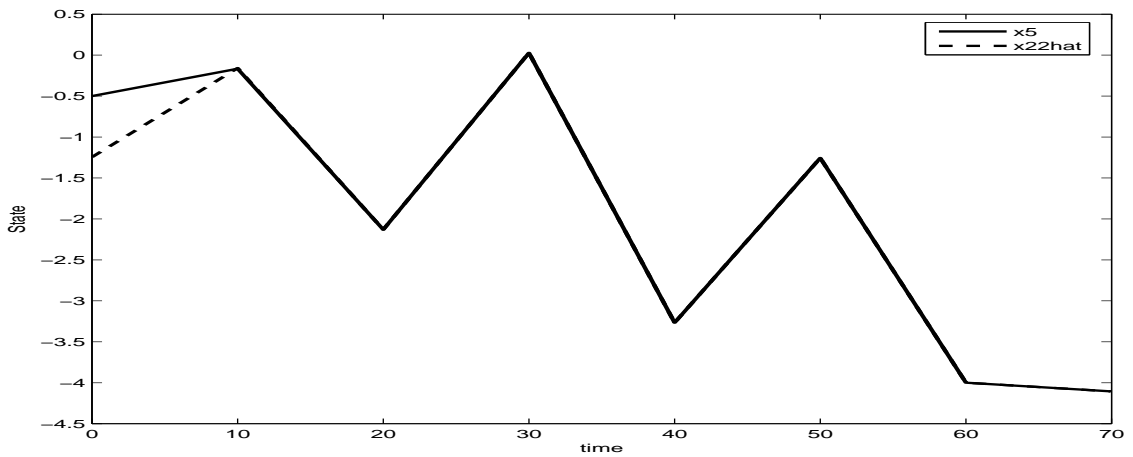


FIG. 2.25 – La cinquième composante du système global  $x_5(t)$  (en trait continu) comparé à son estimée (en pointillé)

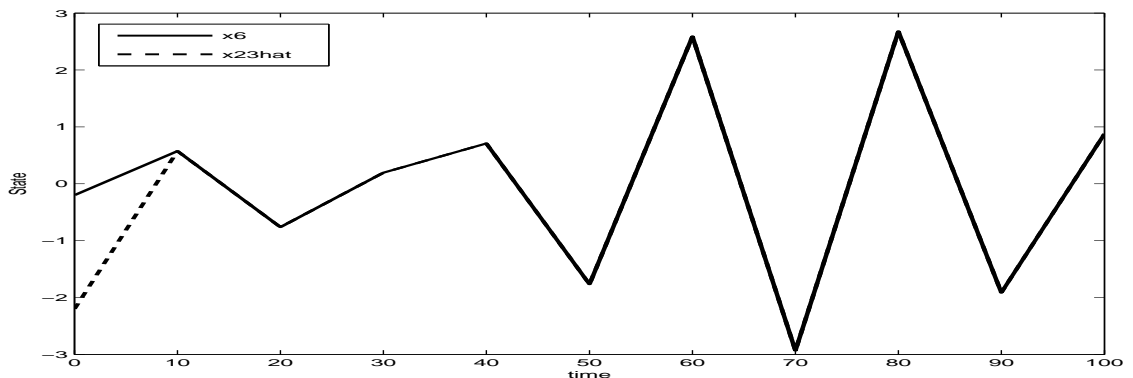


FIG. 2.26 – La sixième composante du système global  $x_6(t)$  (en trait continu) comparé à son estimée (en pointillé)

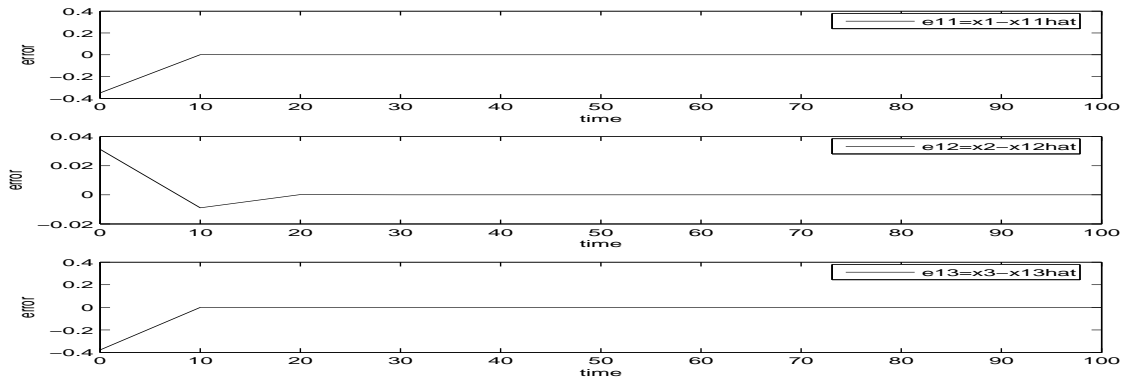


FIG. 2.27 – L’erreur d’estimation de l’état entre les 3 première composantes du système global et les composantes du sous-système 1

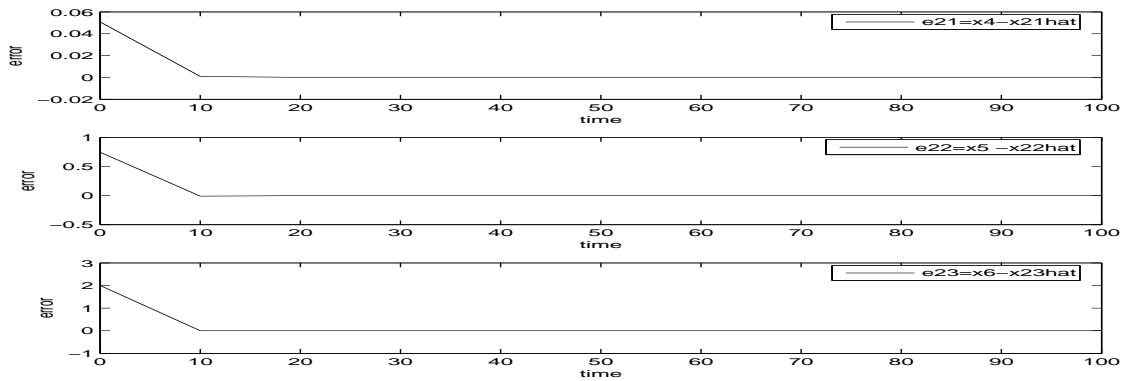


FIG. 2.28 – L’erreur d’estimation de l’état entre les 3 dernière composantes du système global et les composantes du sous-système 2

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté des méthodes de synthèses d’observateurs et de filtrage  $H_\infty$  décentralisés pour les systèmes de grande dimension aussi bien pour le cas continu que pour le cas discret. La complexité des observateurs centralisés et /ou la dispersion géographique de ses composantes constituent une motivation à l’étude de la structure décentralisée de ces estimateurs d’état.

Dans une première étape, on s’est intéressé à l’étude des observateurs décentralisés pour les systèmes standard de grande dimension ou les interconnexions sont considérées comme inconnues. On a fait des transformations sur le modèle initial afin d’extraire la partie des mesures libres des entrées inconnues. On a illustré les conditions d’existence relatifs à ces observateurs et on a présenté deux méthodes de calcul de la matrice de gain de l’observateur ; la première utilise le placement de pôle et la deuxième est basée sur les inégalités matricielles linéaires (LMIs). Les deux méthodes précédentes ont été testées sur deux exemples numériques.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on s’est intéressé à la synthèse des observateurs et des filtres  $H_\infty$  pour les systèmes singuliers de grande dimension continus et discrets. Les interconnexions sont considérés comme entrée inconnues et les perturbations du système sont inconnues mais à énergie bornée. On a proposé dans ce contexte, une méthode de détermination



---

de la matrice gain  $Z_i$  du filtre basée sur les LMIs. Cette méthode assure aussi bien la stabilité du filtre décentralisé que l'atténuation des perturbations. La formulation LMI est obtenue en transformant l'équation de la dynamique de l'erreur en système singulier, et ce afin de contourner le problème de la dérivée du bruit qui apparaît dans cette dynamique. Une application numérique permettant d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

La suite de ce chapitre, a été consacrée à l'étude d'une nouvelle forme d'observateur décentralisé pour les systèmes singuliers de grande dimension. On a proposé une approche unifiée au problème de synthèse d'observateur décentralisé qui couvre les observateurs d'ordre plein, d'ordre réduit et d'ordre minimal. Cette méthode est basée sur une nouvelle paramétrisation de l'équation de Sylvester généralisée. Les inégalités matricielles linéaires (LMIs) sont utilisées pour le calcul de la matrice gain de l'observateur et l'approche est validée par un exemple numérique.

Dans la dernière partie de ce chapitre, on a proposé une nouvelle méthode pour la synthèse des observateurs interconnectés pour les systèmes singuliers de grande dimension. Cette méthode consiste à synthétiser un observateur interconnecté connectivement stable. Cette stabilité est assurée non seulement en la présence ou non des interconnexions entre sous-observateurs, mais aussi pour certains types de non-linéarité au niveau de ces interconnexions. L'analyse de stabilité est basée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov quadratiques et l'approche de la stabilité connective. Il faut noter que vue la similitude de l'approche pour le cas continu et pour le cas discret, on a choisi de traiter uniquement le cas des systèmes continus. La méthode proposée est testée sur un exemple numérique. Toutes les approches développées le long de ce chapitre sont récapitulées par un algorithme résumant les différentes étapes de synthèse.

La suite de ce travail sera consacré à la commande basée-observateur pour les systèmes de grande dimension standards et singuliers, ceci fera l'objet du chapitre 3.



# Chapitre 3

## Commande décentralisée des systèmes de grande dimension

### 3.1 Introduction

Pour les systèmes de grande dimension, la mise en oeuvre de lois de commande présente un intérêt croissant. La satisfaction des performances spécifiques est tributaire d'un choix judicieux du correcteur, chose qui nécessite la disponibilité des états et des entrées du système. Cependant, devant l'impossibilité d'installer un grand nombre de capteurs à cause de leurs coûts ou à cause de contraintes liées au système, la disponibilité de l'état n'est que partielle. De plus, les mesures peuvent être affectées par des bruits de mesure. Dans ce cas, le défi à relever est de trouver un correcteur performant en se basant sur des mesures partielles et qui sont aussi affectées par du bruit. La synthèse de ce type de correcteur est souvent basée sur des observateurs ou des filtres qui estiment soit l'intégralité du vecteur d'état, soit la partie non mesurée de ce vecteur, soit une combinaison linéaire des coordonnées de celui-ci. Le vecteur de commande pourrait être vu comme l'estimation d'une combinaison des composantes du vecteur d'état.

Ce chapitre, peut être vu comme une validation des différentes méthodes d'estimation proposées précédemment sur la commande. On aborde alors le problème de la commande basée observateur pour les systèmes de grande dimension standards mais aussi pour les systèmes plus généraux ou singuliers. L'approche est une extension des travaux de Kalsi et al ([KLZ08], [KLZ09a] et [KLZ09b]...) développés pour les systèmes déterministes au cas des systèmes standards perturbés et aux systèmes singuliers. Le but est de synthétiser une commande basée sur un filtre  $H_\infty$  pour les systèmes standards et singuliers de grande dimension ayant des interconnexions non linéaires, considérées comme quadratiquement bornées [KLZ09b]. Dans un premier temps, on commence dans ce chapitre par la synthèse de la commande basée sur un filtre pour les systèmes standards de grande dimension affectés par une perturbation exogène. Le gain par retour d'état et le gain du filtre sont paramétrés à l'aide des inégalités matricielles linéaires (LMIs). Une validation de l'approche proposée sera réalisée sur un exemple pratique de système électrique composé de trois générateurs interconnectés. Le choix de cet exemple est motivé par sa particularité de satisfaire la contrainte quadratique sur les interconnexions.

Dans le second volet de ce chapitre, on s'intéresse aux systèmes singuliers de grande dimension, dont les mesures et l'état sont affectées par une perturbation exogène. Le but est de déterminer une loi de commande en utilisant un filtre qui satisfait un critère de performance  $H_\infty$  dont la perturbation est supposée être inconnue mais à énergie finie. Notons que le fait de

considérer les systèmes singuliers permet de couvrir la classe la plus générale des systèmes et qu'on peut retrouver le cas standard étudié par Kalsi et al en prenant la matrice  $E = I$ . De plus, le fait d'introduire un bruit exogène à énergie finie dans l'équation d'état, permet d'étudier la commande basée sur un filtre  $H_\infty$ , contrairement aux travaux réalisés par Kalsi et al où l'étude porte sur la commande basée sur un filtre pour un système déterministe et standard. Le gain du filtre est paramétré en utilisant les conditions de non biais sur la dynamique de l'erreur d'estimation. Les conditions d'existence du filtre sont obtenues à l'aide des inégalités matricielles linéaires (LMIs). Ce qui génère des conditions de solvabilité moins restrictives que celles introduites dans [KLZ08]. Dans ce chapitre, contrairement aux études de Kalsi et al. (voir [KLZ08] par exemple), on n'impose aucune condition sur la distance entre la paire de matrices formée par la matrice d'état et la matrice d'entrée et l'ensemble de paires de matrices incontrôlables. De plus, on tient compte de la maximisation des bornes de l'interconnexion inconnue, ce qui est très important en pratique.

Le problème à résoudre dans cette partie peut être défini comme suit :

- Synthétiser un gain par retour d'état qui stabilise la boucle fermée du système objet d'étude.
- Ce même système augmenté par l'erreur d'estimation doit être admissible et l'erreur d'estimation doit satisfaire le critère de performance  $H_\infty$ .

La synthèse de la commande décentralisée basée sur un filtre  $H_\infty$  proposée [MBDHa], [MBDHb] opère en deux étapes :

- La première étape consiste à trouver le gain par retour d'état qui permet d'atteindre les objectifs de commande (stabilité, atténuation de perturbation...).
- La deuxième étape porte sur la synthèse de la commande basée sur le filtre  $H_\infty$ , qui nous permettra de reconstruire cette loi de commande à travers un observateur (filtre).

Les inégalités matricielles linéaires sont utilisées pour le calcul du gain par retour d'état et les paramètres du filtre. L'avantage de la méthode proposée est de construire un filtre qui a la même dimension que la commande, donc d'ordre réduit. Dans ce cas, la commande est exprimée en fonction de l'état (une fonctionnelle de l'état) à savoir  $u_i = K_i x_i$ . Notons que l'avantage majeur de l'approche proposée dans ce chapitre est d'utiliser un filtre  $H_\infty$  qui permet d'estimer la loi de commande sans pour autant passer par l'estimation de tous les états du système. Cela permet donc de réduire l'ordre du correcteur via un filtre  $H_\infty$  du fait que le filtre et la loi de commande synthétisée sont du même ordre. Une application numérique permettant d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée à la fin de ce chapitre.

Il est à noter que vu la similitude de l'approche entre le cas continu et le cas discret, seul le cas des systèmes continu de grande dimension est traité.

## 3.2 Commande basée sur un filtre pour les systèmes non singuliers de grande dimension

Considérons une classe de systèmes interconnectés perturbée décrite par le modèle suivant :

$$\dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_i u_i(t) + D_i v_i(X) + F_i w_i(t) \quad (3.1a)$$

$$z_i(t) = H_i x_i(t) + R_i w_i(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (3.1b)$$

avec  $A_{ii}, B_i, D_i, F_i, H_i$  and  $R_i$  sont des matrices constantes de dimension appropriées. Les vecteurs  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u_i(t) \in \mathbb{R}^{l_i}$ ,  $z_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  et  $w_i(t) \in \mathbb{R}^{q_i}$  sont respectivement l'état, l'entrée, la sortie et la perturbation du système, qui est supposée à énergie finie.

La variable  $X(t)$  est l'état du système global donnée par  $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$  représente le

vecteur d'état du système globale, avec  $n = \sum_{i=1}^N n_i$ .

$v_i(X)$  représente l'interconnection du  $i$ -ème sous système qui est supposée globalement bornée, avec  $\|v_i(X)\| \leq \rho_i$  pour  $\rho_i > 0$  [KLZ10] et satisfait la contrainte quadratique donnée par l'Hypothèse 7 citée ci-après.

**Remarque 20** *On peut déduire que pour  $F_i = 0$  et  $R_i = 0$ , on obtient le système déterministe standard considéré dans [KLZ08], [KLZ09a] et [KLZ09b].*

Dans la suite de ce chapitre, on présentera la procédure de synthèse de la commande décentralisée basée sur un filtre pour les systèmes non singuliers de grande dimension. On commence par introduire les hypothèses de travail.

### 3.2.1 Problème et hypothèses de base

Dans la suite, on pose les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 7** *On suppose que les interconnections du système vérifient la même contrainte quadratique que dans [KLZ08], [KLZ09b] et [KLZ10], c'est à dire :*

$$(D_i v_i)^T D_i v_i \leq \alpha_i^2 X^T \tau_i^T \tau_i X \quad (3.2)$$

où  $\alpha_i$  est une constante positive connue et  $\tau_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$  est une matrice connue de dimension appropriée.

**Hypothèse 8** *La matrice d'entrée  $B_i$  est de rang plein colonne.*

**Remarque 21** *Les Hypothèses 7 et 8 ne sont pas restrictives car la condition (3.2) est généralement satisfaite en pratique comme on peut le voir dans [KLZ09c] par exemple et la condition imposée par l'hypothèse 8 est une condition standard et nécessaire pour le calcul de la loi de commande.*

On propose maintenant la structure suivante du correcteur basé sur un filtre  $H_\infty$  donné par [MBDHb] :

$$\dot{\xi}_i(t) = N_i \xi_i(t) + M_i u_i(t) + J_i z_i(t) \quad (3.3a)$$

$$u_i(t) = \xi_i(t) + G_i z_i(t) \quad (3.3b)$$

avec  $\xi_i \in \mathbb{R}^{l_i}$  est le vecteur d'état du filtre,  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $J_i$  et  $G_i$  sont des matrices inconnues de dimensions appropriées, qu'on déterminera dans la suite de ce chapitre.

Avant de présenter la méthode de synthèse proposée, on donne quelques définitions et quelques résultats préliminaires qui nous seront utiles dans la suite.

**Définition 14** *Le système donné par (3.1) est dit asymptotiquement stabilisable basé sur un filtre, si et seulement si il existe une loi de commande donnée par (3.3b) telle que, pour  $w_i(t) = 0$  :*

1. Il existe un gain  $K_i$  pour chaque sous système tel que  $u_i$  converge vers  $K_i x_i$ . En d'autres termes, l'erreur d'estimation donnée par :

$$e_i(t) = u_i(t) - K_i x_i(t) \quad (3.4)$$

converge vers zéro, c'est à dire  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$ .

2. Le système en boucle fermée formé par (3.1) et le correcteur (3.3b) est asymptotiquement stable .

On utilisera aussi l'indice de performance  $H_\infty$  défini par

$$J_{e_i w_i} = \int_0^\infty (e_i^T e_i - \gamma_i^2 w_i^T w_i) dt \quad (3.5)$$

pour un scalaire  $\gamma_i > 0$  donné.

Alors, le problème à résoudre dans cette partie peut être posé comme suit :

**Problème :** Construire un correcteur basé sur le filtre  $H_\infty$  donné par (3.3) tel que :

- Le système (3.1) est asymptotiquement stabilisable (voir la Définition 14) basé sur le filtre donné par (3.3)
- Le système (3.1) augmenté par l'erreur d'estimation (3.4) est admissible et l'erreur d'estimation satisfait le critère de performance  $H_\infty$ ,  $J_{e_i w_i} < 0$  pour un scalaire  $\gamma_i > 0$ .

### 3.2.2 Synthèse d'une commande basée sur un filtre

Dans cette partie, on propose de résoudre le problème de la commande basée sur un filtre  $H_\infty$ . Pour cela, on commence par calculer les paramètres de l'observateur à synthétiser.

D'après l'expression de la commande  $u_i(t)$  donnée par (3.3b), l'erreur d'estimation définie dans (3.4) s'écrit :

$$\begin{aligned} e_i(t) &= u_i(t) - K_i x_i(t) \\ &= \xi_i(t) + G_i z_i(t) - K_i x_i(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

D'après l'expression de  $z_i(t)$  donnée par (3.1b), on obtient :

$$e_i(t) = \xi_i(t) + \psi_{i1} x_i(t) + G_i R_i w_i(t) \quad (3.7)$$

avec

$$\psi_{i1} = G_i H_i - K_i \quad (3.8)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation obéit à :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \dot{\xi}_i(t) + \psi_{i1} \dot{x}_i(t) + G_i R_i \dot{w}_i(t) \\ &= N_i \xi_i(t) + M_i u_i(t) + J_i H_i x_i(t) + J_i R_i w_i(t) + \psi_{i1} A_{ii} x_i(t) + \psi_{i1} B_i u_i(t) \\ &+ \psi_{i1} D_i v_i(X) + \psi_{i1} F_i w_i(t) + G_i R_i \dot{w}_i(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

et d'après (3.7) on a :

$$\xi_i(t) = e_i(t) - \psi_{i1} x_i(t) - G_i R_i w_i(t) \quad (3.10)$$

En remplaçant  $\xi_i(t)$  par son expression donnée par (3.10), on aura :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= N_i e_i(t) - N_i \psi_{i1} x_i(t) - N_i G_i R_i w_i(t) + \psi_{i1} A_{ii} x_i(t) + J_i H_i x_i(t) \\ &+ (\psi_{i1} B_i + M_i) u_i(t) + \psi_{i1} D_i v_i(X) + \psi_{i1} F_i w_i(t) + G_i R_i \dot{w}_i(t) \\ &= N_i e_i(t) - (N_i \psi_{i1} - \psi_{i1} A_{ii} - J_i H_i) x_i(t) + (\psi_{i1} B_i + M_i) u_i(t) \\ &+ \psi_{i1} D_i v_i(X) + [(J_i - N_i G_i) R_i + \psi_{i1} F_i] w_i(t) + G_i R_i \dot{w}_i(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Alors, la synthèse du filtre  $H_\infty$  se réduit à déterminer les matrices  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $J_i$  et  $G_i$  telles que :

1. L'observateur donné par (3.3) est non biaisé (c'est à dire que la dynamique de l'erreur d'estimation ne dépend pas explicitement de l'état  $x_i$  et de l'entrée  $u_i$  du système (3.1) pour  $w_i(t) = 0$ ).
2. L'observateur (3.3) est stable, c'est à dire  $N_i$  est Hurwitz.

Les conditions 1) et 2) ci-dessus sont satisfaites si l'équation de Sylvester suivante est vérifiée :

$$-\psi_{i1} A_{ii} + N_i \psi_{i1} - J_i H_i = 0 \quad (3.12)$$

et

$$M_i = -\psi_{i1} B_i \quad (3.13)$$

En utilisant (3.8), l'équation de Sylvester (3.12) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$Y_i \Sigma_i = \Omega_i \quad (3.14)$$

où :

$$Y_i = [ N_i \quad G_i \quad L_i ] \quad (3.15)$$

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} K_i \\ H_i A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\Omega_i = K_i A_{ii} \quad (3.17)$$

et

$$L_i = J_i - N_i G_i \quad (3.18)$$

L'équation (3.14) possède une solution si et seulement si la condition (3.19) suivante est satisfaite :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \Sigma_i \\ \Omega_i \end{bmatrix} = \text{rang} \Sigma_i \quad (3.19)$$

Dans ce cas la solution générale de (3.14) est donnée par

$$[ N_i \quad G_i \quad L_i ] = \Omega_i \Sigma_i^+ - \mathcal{Z}_i (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \quad (3.20)$$

avec  $\mathcal{Z}_i$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée à déterminer dans la suite. La matrice  $\Sigma_i^+$  est une inverse généralisée de  $\Sigma_i$  vérifiant  $\Sigma_i \Sigma_i^+ \Sigma_i = \Sigma_i$ . Une fois la matrice  $\mathcal{Z}_i$  calculée, le filtre est complètement déterminé et les matrices  $N_i$ ,  $G_i$ ,  $L_i$ ,  $J_i$  et  $M_i$  sont données alors par :

$$N_i = \Lambda_{N_i} - \mathcal{Z}_i \Delta_{N_i} \quad (3.21)$$

$$G_i = \Lambda_{G_i} - \mathcal{Z}_i \Delta_{G_i} \quad (3.22)$$

$$L_i = \Lambda_{L_i} - \mathcal{Z}_i \Delta_{L_i} \quad (3.23)$$

$$J_i = L_i + N_i G_i \quad (3.24)$$

$$M_i = -\psi_{i1} B_i \quad (3.25)$$

avec

$$\Lambda_{N_i} = \Omega_i \Sigma_i^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\Delta_{N_i} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\Lambda_{G_i} = \Omega_i \Sigma_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\Delta_{G_i} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\Lambda_{L_i} = \Omega_i \Sigma_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\Delta_{L_i} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

D'autre part, d'après (3.12) et (3.13), la dynamique de l'erreur d'estimation (3.11) devient

$$\dot{e}_i(t) = N_i e_i(t) + \psi_{i1} D_i v_i(X) + \psi_{i2} w_i(t) + \psi_{i3} \dot{w}_i(t) \quad (3.32)$$

avec :

$$\psi_{i2} = L_i R_i + \psi_{i1} F_i \quad (3.33)$$

$$\psi_{i3} = G_i R_i \quad (3.34)$$

En remplaçant les matrices  $\psi_{i1}$ ,  $G_i$  et  $L_i$  par leurs valeurs données respectivement par les équations (3.8), (3.22) et (3.23), on obtient :

$$\psi_{i1} = \Lambda_{G_i} H_i - \mathcal{Z}_i \Delta_{G_i} H_i - K_i \quad (3.35)$$

$$\psi_{i2} = \Lambda_{L_i} R_i + \Lambda_{G_i} H_i F_i - K_i F_i - \mathcal{Z}_i (\Delta_{L_i} R_i + \Delta_{G_i} H_i F_i) \quad (3.36)$$

$$\psi_{i3} = \Lambda_{G_i} R_i - \mathcal{Z}_i \Delta_{G_i} R_i \quad (3.37)$$

Les équations (3.35), (3.36) et (3.37) précédentes nous seront utiles dans la suite pour la formulation de la LMI qui permettra de déterminer la matrice inconnues  $\mathcal{Z}_i$ .

Notons que l'équation de la dynamique de l'erreur d'estimation (3.32) contient la dérivée de la perturbation  $w_i(t)$ . Un grand nombre d'auteurs résout ce problème en ajoutant une contrainte supplémentaire sur les matrices de l'observateur.

Afin de résoudre ce problème, on propose de réécrire la dynamique de l'erreur d'estimation sous une forme singulière. Dans ce cas, l'équation (3.32) peut être réécrite comme suit :

$$\mathcal{E}_i \dot{\chi}_i = \mathcal{A}_i \chi_i + \mathcal{B}_i w_i + \Psi_i D_i v_i \quad (3.38a)$$

$$e_i(t) = \mathcal{C}_i \chi_i \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (3.38b)$$



$$\text{avec } \mathcal{E}_i = \begin{bmatrix} I & -\psi_{i3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} N_i & \psi_{i2} \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \Psi_i = \begin{bmatrix} \psi_{i1} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{C}_i = [ I \quad 0 ]$$

et  $\chi_i = \begin{bmatrix} e_i(t) \\ \eta_i(t) \end{bmatrix}$ .

Le vecteur  $\chi_i$  représente l'état du système décrit par  $(\mathcal{E}_i, \mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \Psi_i D_i, \mathcal{C}_i)$ ,  $e_i(t)$  est l'erreur d'estimation et  $\eta_i(t)$  est un état fictif tel que  $\eta_i(t) = w_i(t)$ .

Pour étudier ce système, la matrice  $\mathcal{E}_i$  doit être indépendante du paramètre  $\mathcal{Z}_i$ . Cela peut s'obtenir en choisissant la matrice gain du filtre comme suit :

$$\mathcal{Z}_i = \mathcal{Y}_i(I - \Delta_{G_i} \Delta_{G_i}^+) \quad (3.39)$$

Dans ce cas, on aura :

$$\psi_{i1} = \Lambda_{G_i} H_i - K_i \quad (3.40)$$

$$\psi_{i2} = \Lambda_{\psi_{i2}} - \mathcal{Y}_i \Delta_{\psi_{i2}} \quad (3.41)$$

$$\psi_{i3} = \Lambda_{G_i} R_i \quad (3.42)$$

$$N_i = \Lambda_{N_i} - \mathcal{Y}_i \overline{\Delta_{N_i}} \quad (3.43)$$

$$G_i = \Lambda_{G_i} \quad (3.44)$$

$$L_i = \Lambda_{L_i} - \mathcal{Y}_i \overline{\Delta_{L_i}} \quad (3.45)$$

avec :

$$\Lambda_{\psi_{i2}} = \Lambda_{L_i} R_i + (\Lambda_{G_i} H_i - K_i) F_i \quad (3.46)$$

$$\Delta_{\psi_{i2}} = \overline{\Delta_{L_i}} R_i \quad (3.47)$$

$$\overline{\Delta_{N_i}} = (I - \Delta_{G_i} \Delta_{G_i}^+) \Delta_{N_i} \quad (3.48)$$

$$\overline{\Delta_{L_i}} = (I - \Delta_{G_i} \Delta_{G_i}^+) \Delta_{L_i} \quad (3.49)$$

Compte tenu des équations (3.1), (3.4) et (3.38), le système en boucle fermé peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{\chi}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ii} + B_i K_i & B_i \mathcal{C}_i \\ 0 & \mathcal{A}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ \chi_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i \\ \mathcal{B}_i \end{bmatrix} w_i(t) + \begin{bmatrix} I \\ \Psi_i \end{bmatrix} D_i v_i(t) \quad (3.50a)$$

$$e_i(t) = [0 \quad \mathcal{C}_i] \begin{bmatrix} x_i(t) \\ \chi_i(t) \end{bmatrix} \quad (3.50b)$$

Le problème de synthèse de la commande basé sur un filtre  $H_\infty$  est réduit à l'étude du système (3.50). L'admissibilité du système (pour  $w_i(t) = 0$ ) garantit la stabilité du système en boucle fermée. Le théorème suivant donne des conditions pour l'existence du correcteur basé sur le filtre (3.3) et permet de déterminer le gain par retour d'état  $K_i$  et la matrice gain de l'observateur  $\mathcal{Y}_i$ .

### **Théorème 15** [MBDhb]

*Sous les Hypothèses 7 et 8, il existe une matrice de gain de retour d'état  $K_i$  telle que le système en boucle fermée (3.50) est stable et une matrice  $\mathcal{Y}_i$  paramétrant toutes les matrices du filtre telles que la paire  $(\mathcal{E}_i, \mathcal{A}_i)$  est admissible pour  $w_i(t) = 0$  et satisfait le critère de performance  $H_\infty$ ,  $J_{e_i w_i} < 0$ , pour  $w_i(t) \neq 0$  et pour un scalaire donné  $\gamma_{e_i} > 0$  s'il existe des matrices symétriques*

définies positives  $\mathbf{P}_{i1}$ ,  $\mathbf{P}_{i2}$ ,  $\overline{\mathbf{Q}}_i$  et les deux matrices  $\Omega_{K_i}$  et  $\Omega_{Y_i}$  telles que les deux LMI suivantes soient satisfaites :

$$\begin{bmatrix} (1,1)_x & \sqrt{3}I_{n_i} & \sqrt{2\beta} \cdot \overline{\mathbf{Q}}_i \\ \sqrt{3}I_{n_i} & -I_{n_i} & 0 \\ \sqrt{2\beta} \cdot \overline{\mathbf{Q}}_i & 0 & -I_{n_i} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.51)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{i1} & 0 \\ 0 & \Upsilon_{i2} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.52)$$

où

$$\Upsilon_{i1} = \begin{bmatrix} (1,1)_e & (1,2)_e & (1,3)_e & \mathcal{C}_i^T B_i^T & \mathcal{C}_i^T \\ (1,2)_e^T & -I_{(q_i+l_i)} & 0 & 0 & 0 \\ (1,3)_e^T & 0 & -I_{(q_i+l_i)} & 0 & 0 \\ B_i \mathcal{C}_i & 0 & 0 & -I_{(q_i+l_i)} & 0 \\ \mathcal{C}_i & 0 & 0 & 0 & -I_{(q_i+l_i)} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\Upsilon_{i2} = \begin{bmatrix} -\gamma_{e_i}^2 I_{q_i} & \mathcal{B}_i^T & F_i^T \\ \mathcal{B}_i & -I_{q_i} & 0 \\ F_i & 0 & -I_{q_i} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$(1,1)_x = \overline{\mathbf{Q}}_i A_{ii}^T + A_{ii} \overline{\mathbf{Q}}_i + \Omega_{K_i}^T B_i^T + B_i \Omega_{K_i} \quad (3.55)$$

$$(1,1)_e = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) \\ (1,2)^T & (2,2) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$(1,1) = \mathbf{P}_{i1} \Lambda_{N_i} + \Omega_{Y_i} \overline{\Delta_{N_i}} + (\mathbf{P}_{i1} \Lambda_{N_i})^T + (\Omega_{Y_i} \overline{\Delta_{N_i}})^T \quad (3.57)$$

$$(1,2) = -\mathbf{P}_{i2} + \mathbf{P}_{i1} \Lambda_{\psi_{i2}} - \Omega_{Y_i} \Delta_{\psi_{i2}} - \Lambda_{N_i}^T \mathbf{P}_{i1} \psi_{i3} + \overline{\Delta_{N_i}}^T \Omega_{Y_i}^T \psi_{i3} \quad (3.58)$$

$$(2,2) = -\psi_{i3}^T (\mathbf{P}_{i1} \Lambda_{\psi_{i2}} - \Omega_{Y_i} \Delta_{\psi_{i2}}) - (\mathbf{P}_{i1} \Lambda_{\psi_{i2}} - \Omega_{Y_i} \Delta_{\psi_{i2}})^T \psi_{i3} \\ + \psi_{i3}^T \mathbf{P}_{i2} + \mathbf{P}_{i2}^T \psi_{i3} \quad (3.59)$$

$$(1,2)_e = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i2} \\ -\psi_{i3}^T \mathbf{P}_{i1} & -\psi_{i3}^T \mathbf{P}_{i2} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$(1,3)_e = \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_{i1} (\Lambda_{G_i} H_i - K_i) \\ -(\psi_{i3})^T \mathbf{P}_{i1} (\Lambda_{G_i} H_i - K_i) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

avec

$$\beta = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \lambda_{\max}(\tau_i^T \tau_i)$$

et  $\lambda_{\max}(\bullet)$  est la valeur propre maximale ( $\bullet$ ).

Alors le gain par retour d'état  $K_i$  est donné par :

$$K_i = \Omega_{K_i} (\overline{\mathbf{Q}}_i)^{-1} \quad (3.62)$$

et

$$\mathcal{Y}_i = \mathbf{P}_{i1}^{-1} \Omega_{Y_i} \quad (3.63)$$

Dans ce cas, le gain de l'observateur est donné par :

$$\mathcal{Z}_i = \mathbf{P}_{i1}^{-1} \Omega_{Z_i} (I - \Delta_{G_i} \Delta_{G_i}^+) \quad (3.64)$$

### 3.2. Commande basée sur un filtre pour les systèmes non singuliers de grande dimension

**Preuve 24** On définit les fonctions de Lyapunov suivantes :

$$V_{\mathcal{E}_i, x_i}(t) = V_{x_i}(t) + V_{\mathcal{E}_i}(t) \quad (3.65)$$

où  $V_{x_i}(t)$  et  $V_{\mathcal{E}_i}(t)$  sont des fonctions de Lyapunov définies par :

$$V_{x_i}(t) = \sum_{i=1}^N (x_i(t))^T \mathbf{Q}_i x_i(t) \quad (3.66)$$

où  $\mathbf{Q}_i$  est une matrice définie positive.

$V_{\mathcal{E}_i}(t)$  est définie par [Owens85],[Peter03] :

$$V_{\mathcal{E}_i}(t) = \sum_{i=1}^N (\mathcal{E}_i \chi_i(t))^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i \chi_i(t) \quad (3.67)$$

$$\text{où } \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i2} \\ \mathbf{P}_{i2}^T & \mathbf{P}_{i3} \end{bmatrix} > 0$$

La dérivée de  $V_{\mathcal{E}_i, x_i}(t, x_i, \chi_i)$  le long de la solution de (3.50) est donnée par :

$$\dot{V}_i = \sum_{i=1}^N \dot{x}_i^T \mathbf{Q}_i x_i + x_i^T \mathbf{Q}_i \dot{x}_i + (\mathcal{E}_i \dot{\chi}_i)^T \mathbf{P}_i (\mathcal{E}_i \chi_i) + (\mathcal{E}_i \chi_i)^T \mathbf{P}_i (\mathcal{E}_i \dot{\chi}_i) \quad (3.68)$$

En remplaçant  $\dot{x}_i$  et  $\mathcal{E}_i \dot{\chi}_i$  par leurs valeurs respectives données par (3.1a) et (3.38a), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \sum_{i=1}^N x_i^T (A_{ii} + B_i K_i)^T \mathbf{Q}_i x_i + x_i^T \mathbf{Q}_i (A_{ii} + B_i K_i) x_i + (B_i e_i)^T \mathbf{Q}_i x_i + x_i^T \mathbf{Q}_i B_i e_i \\ &+ (D_i v_i)^T \mathbf{Q}_i x_i + x_i^T \mathbf{Q}_i D_i v_i + (F_i w_i)^T \mathbf{Q}_i x_i + x_i^T \mathbf{Q}_i F_i w_i + \chi_i^T \mathcal{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i \chi_i \\ &+ \chi_i^T \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{A}_i \chi_i + w_i^T \mathcal{B}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i \chi_i + \chi_i^T \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{B}_i w_i + v_i^T D_i^T \Psi_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i \chi_i \\ &+ \chi_i^T \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \Psi_i D_i v_i \end{aligned} \quad (3.69)$$

En utilisant le Lemme 10 on obtient pour  $\rho_i = 1$  les inégalités suivantes :

$$e_i^T B_i^T \mathbf{Q}_i x_i + x_i^T \mathbf{Q}_i B_i e_i \leq e_i^T B_i^T B_i e_i + x_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i x_i \quad (3.70)$$

$$v_i^T D_i^T \mathbf{Q}_i x_i + x_i^T \mathbf{Q}_i D_i v_i \leq v_i^T D_i^T D_i v_i + x_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i x_i \quad (3.71)$$

$$w_i^T F_i^T \mathbf{Q}_i x_i + x_i^T \mathbf{Q}_i F_i w_i \leq w_i^T F_i^T F_i w_i + x_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i x_i \quad (3.72)$$

$$w_i^T \mathcal{B}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i \chi_i + \chi_i^T \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{B}_i w_i \leq w_i^T \mathcal{B}_i^T \mathcal{B}_i w_i + \chi_i^T \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i \chi_i \quad (3.73)$$

$$v_i^T D_i^T \Psi_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i \chi_i + \chi_i^T \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \Psi_i D_i v_i \leq v_i^T D_i^T D_i v_i + \chi_i^T \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \Psi_i \mathbf{P}_i \Psi_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i \chi_i \quad (3.74)$$

Compte tenu des inégalités (3.70), (3.71), (3.72), (3.73), (3.74) et de l'équation (3.69) on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq \sum_{i=1}^N x_i^T [(A_{ii} + B_i K_i)^T \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_i (A_{ii} + B_i K_i) + 3\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i] x_i \\ &+ \chi_i^T [\mathcal{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{A}_i + \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \Psi_i \Psi_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i] \chi_i \\ &+ e_i^T B_i^T B_i e_i + 2v_i^T D_i^T D_i v_i + w_i^T [\mathcal{B}_i^T \mathcal{B}_i + F_i^T F_i] w_i \end{aligned} \quad (3.75)$$

et à partir de l'Hypothèse 7 on peut écrire

$$v_i^T D_i^T D_i v_i \leq \beta_i \sum_{i=1}^N x_i^T x_i \quad (3.76)$$

avec

$$\beta_i = \alpha_i^2 \lambda_{\max}(\tau_i^T \tau_i) \quad (3.77)$$

En remplaçant l'erreur d'estimation  $e_i$  par son expression donnée par (3.38b) et en tenant compte de (3.75) et de (3.76), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq \sum_{i=1}^N x_i^T [(A_{ii} + B_i K_i)^T \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_i (A_{ii} + B_i K_i) + 3\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i + 2\beta I_{n_i}] x_i \\ &+ \chi_i^T [\mathcal{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{A}_i + \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \Psi_i \Psi_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i + \mathcal{C}_i^T B_i^T B_i \mathcal{C}_i] \chi_i \\ &+ w_i^T [\mathcal{B}_i^T \mathcal{B}_i + F_i^T F_i] w_i \end{aligned} \quad (3.78)$$

avec  $\beta = \sum_{i=1}^N \beta_i$ .

Maintenant, définissons le critère de performance  $H_\infty$  pour un scalaire donné  $\gamma_e > 0$  :

$$J_{ew} = \int_0^\infty (e^T e - \gamma_e^2 w^T w) dt \quad (3.79)$$

avec  $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^l$  et  $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^q$  sont respectivement le vecteur des erreurs et la

perturbation du système global avec  $l = \sum_{i=1}^N l_i$  et  $q = \sum_{i=1}^N q_i$ . Alors, pour un scalaire donné  $\gamma_{e_i} > 0$ , l'équation (3.79) peut s'écrire :

$$J_{ew} = \int_0^\infty \sum_{i=1}^N (e_i^T e_i - \gamma_{e_i}^2 w_i^T w_i) dt \quad (3.80)$$

En utilisant le fait que  $V(0) = 0$  et  $V(\infty) \geq 0$ , on peut écrire que :

$$\begin{aligned} J_{ew} &\leq \int_0^\infty (e^T e - \gamma_e^2 w^T w + \dot{V}(t, x_i)) dt \\ &\leq \int_0^\infty \left[ \sum_{i=1}^N \{ \chi_i^T \mathcal{C}_i^T \mathcal{C}_i \chi_i - \gamma_{e_i}^2 w_i^T w_i \} + \dot{V}(t, x_i) \right] dt \end{aligned} \quad (3.81)$$

Les inégalités (3.81) peuvent se réécrire sous la forme compacte suivante :

$$J_{ew} \leq \int_0^\infty \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} x_i \\ \varpi_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Theta_{i1} & 0 \\ 0 & \Theta_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \varpi_i \end{bmatrix} dt \quad (3.82)$$

où

$$\varpi_i = \begin{bmatrix} \chi_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\Theta_{i1} = (A_{ii} + B_i K_i)^T \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_i (A_{ii} + B_i K_i) + 3\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i + 2\beta I_{n_i} \quad (3.84)$$

$$\Theta_{i2} = \begin{bmatrix} \theta_{i1} & 0 \\ 0 & \theta_{i2} \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

$$\text{et } \theta_{i1} = \mathcal{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{A}_i + \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \Psi_i \Psi_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i + \mathcal{C}_i^T B_i B_i \mathcal{C}_i + \mathcal{C}_i^T \mathcal{C}_i \quad (3.86)$$

$$\theta_{i2} = -\gamma_i^2 I_{q_i} + \mathcal{B}_i^T \mathcal{B}_i + F_i^T F_i \quad (3.87)$$

### 3.2. Commande basée sur un filtre pour les systèmes non singuliers de grande dimension

Alors, si

$$\Theta_{i1} < 0 \quad (3.88)$$

et

$$\Theta_{i2} < 0 \quad (3.89)$$

alors  $J_{ew} < 0$ , (et aussi  $\dot{V}_{\mathcal{E}_i, x_i}(t) < 0$ ).

Soit maintenant  $\overline{\mathbf{Q}_i} = \mathbf{Q}_i^{-1}$ , en multipliant de part et d'autre l'inégalité (3.88) par  $\overline{\mathbf{Q}_i}$ , on obtient :

$$\overline{\mathbf{Q}_i}(A_{ii} + B_i K_i)^T + (A_{ii} + B_i K_i)\overline{\mathbf{Q}_i} + 3I_{n_i} + 2\beta \overline{\mathbf{Q}_i} \cdot \overline{\mathbf{Q}_i} < 0 \quad (3.90)$$

En appliquant le complément de Schur [BGFB94] à (3.90) et (3.89), on obtient :

$$\begin{bmatrix} (1,1)_x & \sqrt{3}I_{n_i} & \sqrt{2\beta} \cdot \overline{\mathbf{Q}_i} \\ \sqrt{3}I_{n_i} & -I_{n_i} & 0 \\ \sqrt{2\beta} \cdot \overline{\mathbf{Q}_i} & 0 & -I_{n_i} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.91)$$

et

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{i1} & 0 \\ 0 & \Upsilon_{i2} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.92)$$

où

$$\Upsilon_{i1} = \begin{bmatrix} (1,1)_e & \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i & \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \Psi_i & \mathcal{C}_i^T B_i^T & \mathcal{C}_i^T \\ \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i & -I_{(q_i+l_i)} & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i & 0 & -I_{(q_i+l_i)} & 0 & 0 \\ B_i \mathcal{C}_i & 0 & 0 & -I_{(q_i+l_i)} & 0 \\ \mathcal{C}_i & 0 & 0 & 0 & -I_{(q_i+l_i)} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

$$\Upsilon_{i2} = \begin{bmatrix} -\gamma_{e_i}^2 I_{q_i} & \mathcal{B}_i^T & F_i^T \\ \mathcal{B}_i & -I_{q_i} & 0 \\ F_i & 0 & -I_{q_i} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$(1,1)_x = \overline{\mathbf{Q}_i} A_{ii}^T + \Omega_{K_i}^T B_i^T + A_{ii} \overline{\mathbf{Q}_i} + B_i \Omega_{K_i} \quad (3.95)$$

$$(1,1)_e = \mathcal{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i \mathcal{A}_i \quad (3.96)$$

$$\beta = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \lambda_{\max}(\tau_i^T \tau_i) \quad (3.97)$$

et  $\lambda_{\max}(\bullet)$  est la valeur propre maximale de  $(\bullet)$ .

En remplaçant  $\mathcal{B}_i$ ,  $\mathcal{C}_i$ ,  $\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{A}_i$  et  $\Psi_i$  par leurs expressions données par le système (3.38) et en utilisant le fait que  $\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i2} \\ \mathbf{P}_{i2}^T & \mathbf{P}_{i3} \end{bmatrix}$ , on obtient les LMIs du Théorème 15.

Une fois la LMI donnée par (3.51) est résolue, on obtient  $\overline{\mathbf{Q}_i}$  et  $\Omega_{K_i}$  et on peut déduire  $K_i$  comme suit :

$$K_i = \Omega_{K_i} (\overline{\mathbf{Q}_i})^{-1} \quad (3.98)$$

A partir de la solution de la LMI (3.52), on obtient la matrice  $\Omega_{Y_i}$  et par suite la  $\mathcal{Y}_i$  est donnée par :

$$\mathcal{Y}_i = \mathbf{P}_{i1}^{-1} \Omega_{Y_i} \quad (3.99)$$

le gain du filtre  $\mathcal{Z}_i$  est donc donné par :

$$\mathcal{Z}_i = \mathbf{P}_{i1}^{-1} \Omega_{Y_i} (I - \Delta_{G_i} \Delta_{G_i}^+) \quad (3.100)$$

ce qui complète la preuve du Théorème 15. ■

Le Théorème 15 illustré précédemment peut être relaxé en utilisant uniquement les inégalités (3.71) et (3.74), ce qui donne le théorème suivant :

**Théorème 16** [MBDHb]

Sous les Hypothèses 7 et 8, il existe un gain de retour d'état  $K_i$  et une matrice  $\mathcal{Y}_i$  paramétrant toute les matrices du filtre, telle que le système en boucle fermée (3.50) est admissible pour  $w_i(t) = 0$  et satisfait le critère de performance  $H_\infty$ ,  $J_{e_i w_i} < 0$ , pour  $w_i(t) \neq 0$  et pour un scalaire  $\gamma_{e_i} > 0$  donné, s'il existe trois matrice définie positive  $\widetilde{\mathbf{P}}_{i1} = \widetilde{\mathbf{P}}_{i1}^T > 0$ ,  $\widetilde{\mathbf{P}}_{i2} = \widetilde{\mathbf{P}}_{i2}^T > 0$  et  $\widetilde{\mathbf{Q}}_i = \widetilde{\mathbf{Q}}_i^T > 0$  et deux matrices  $\Omega_{K_i}$  et  $\Omega_{Y_i}$  telles que les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix} (1,1)_Q & \sqrt{2\beta} \widetilde{\mathbf{Q}}_i & I & B_i \mathcal{C}_i & F_i & 0 & 0 \\ \sqrt{2\beta} \widetilde{\mathbf{Q}}_i & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_i^T B_i^T & 0 & 0 & (1,1)_P & (1,2)_P & (1,3)_P & (1,4)_P \\ F_i^T & 0 & 0 & (1,2)_P^T & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1,3)_P^T & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1,4)_P^T & 0 & 0 & -\gamma_{e_i}^2 I_{q_i} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.101)$$

où

$$(1,1)_Q = A_{ii} \widetilde{\mathbf{Q}}_i + \widetilde{\mathbf{Q}}_i A_{ii}^T + \Omega_{K_i}^T B_i^T + B_i \Omega_{K_i} \quad (3.102)$$

$$(1,1)_P = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) \\ (1,2)^T & (2,2) \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

$$(1,1) = \widetilde{\mathbf{P}}_{i1} \Lambda_{N_i} + (\widetilde{\mathbf{P}}_{i1} \Lambda_{N_i})^T - \Omega_{Y_i} \overline{\Delta_{N_i}} - (\Omega_{Y_i} \overline{\Delta_{N_i}})^T \quad (3.104)$$

$$(1,2) = -\widetilde{\mathbf{P}}_{i2} - \Lambda_{N_i}^T \widetilde{\mathbf{P}}_{i1} \psi_{i3} + \widetilde{\mathbf{P}}_{i1} \Lambda_{\psi_{i2}} + \overline{\Delta_{N_i}}^T \Omega_{Y_i}^T \psi_{i3} - \Omega_{Y_i} \Delta_{\psi_{i2}} \quad (3.105)$$

$$(2,2) = -\psi_{i3}^T (\widetilde{\mathbf{P}}_{i1} \Lambda_{\psi_{i2}} - \Omega_{Y_i} \Delta_{\psi_{i2}}) - (\widetilde{\mathbf{P}}_{i1} \Lambda_{\psi_{i2}} - \Omega_{Y_i} \Delta_{\psi_{i2}})^T \psi_{i3} + \psi_{i3}^T \widetilde{\mathbf{P}}_{i2} + \widetilde{\mathbf{P}}_{i2}^T \psi_{i3} \quad (3.106)$$

$$(1,2)_P = \begin{bmatrix} -\widetilde{\mathbf{P}}_{i1} (\Lambda_{G_i} H_i - K_i) \\ -\psi_{i3}^T \widetilde{\mathbf{P}}_{i1} (\Lambda_{G_i} H_i - K_i) \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

$$(1,3)_P = \begin{bmatrix} -\widetilde{\mathbf{P}}_{i2} \\ -\psi_{i3}^T \widetilde{\mathbf{P}}_{i2} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

$$(1,4)_P = [ I \quad 0 ] \quad (3.109)$$

Dans ce cas, le gain  $K_i$  est donné par :

$$K_i = \Omega_{K_i} (\widetilde{\mathbf{Q}}_i)^{-1} \quad (3.110)$$

et

$$\mathcal{Y}_i = (\widetilde{\mathbf{P}}_{i1})^{-1} \Omega_{Y_i} \quad (3.111)$$

et la matrice gain du filtre est donnée par :

$$\mathcal{Z}_i = \mathcal{Y}_i (I - \Delta_{G_i} \Delta_{G_i}^+) \quad (3.112)$$

**Preuve 25** On définit les fonctions de Lyapunov suivantes :

$$\widetilde{V}_{\mathcal{E}_i, x_i}(t, x_i, \chi_i) = V_{x_i}(t, x_i) + V_{\mathcal{E}_i}(t, \chi_i) \quad (3.113)$$

où

$$\widetilde{V}_{x_i}(t, x_i) = \sum_{i=1}^N (x_i(t))^T \widetilde{\mathbf{Q}}_i x_i(t) \quad (3.114)$$

avec  $\widetilde{\mathbf{Q}}_i = \widetilde{\mathbf{Q}}_i^T$

$$\widetilde{V}_{\mathcal{E}_i}(t, \chi_i) = \sum_{i=1}^N (\mathcal{E}_i \chi_i(t))^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{E}_i \chi_i(t) \quad (3.115)$$

avec  $\widetilde{\mathbf{P}}_i = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{P}}_{i1} & \widetilde{\mathbf{P}}_{i2} \\ \widetilde{\mathbf{P}}_{i2}^T & \widetilde{\mathbf{P}}_{i3} \end{bmatrix}$  définie positive ou aussi  $\widetilde{\mathbf{P}}_{i1} = \widetilde{\mathbf{P}}_{i1}^T > 0$  et  $\widetilde{\mathbf{P}}_{i3} - \widetilde{\mathbf{P}}_{i2}^T \widetilde{\mathbf{P}}_{i1}^{-1} \widetilde{\mathbf{P}}_{i2} > 0$ .

On dérive  $V_{\mathcal{E}_i, x_i}(t, x_i, \chi_i)$  le long des solutions de (3.50) et en tenant compte des inégalités (3.71), (3.74) et (3.76), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq \sum_{i=1}^N x_i^T [(A_{ii} + B_i K_i)^T \widetilde{\mathbf{Q}}_i + \widetilde{\mathbf{Q}}_i (A_{ii} + B_i K_i) + \widetilde{\mathbf{Q}}_i \widetilde{\mathbf{Q}}_i + 2\beta I_{n_i}] x_i + (B_i e_i)^T \widetilde{\mathbf{Q}}_i x_i + x_i^T \widetilde{\mathbf{Q}}_i B_i e_i \\ &+ (F_i w_i)^T \widetilde{\mathbf{Q}}_i x_i + x_i^T \widetilde{\mathbf{Q}}_i F_i w_i + \chi_i^T [\mathcal{A}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{A}_i + \mathcal{E}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \Psi_i \Psi_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{E}_i] \chi_i \\ &+ w_i^T \mathcal{B}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{E}_i \chi_i + \chi_i^T \mathcal{E}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{B}_i w_i \end{aligned} \quad (3.116)$$

En utilisant le fait que  $V(0) = 0$  et  $V(\infty) \geq 0$ , l'indice de performance  $H_\infty$  donné par (3.79),  $J_{ew}$  satisfait l'inégalité :

$$\begin{aligned} J_{ew} &\leq \int_0^\infty \sum_{i=1}^N (e_i^T e_i - \gamma_{e_i}^2 w_i^T w_i + \dot{V}(t, x_i)) dt \\ &\leq \int_0^\infty [\sum_{i=1}^N \{\chi_i^T \mathcal{C}_i^T \mathcal{C}_i \chi_i - \gamma_{e_i}^2 w_i^T w_i\} + \dot{V}(t, x_i)] dt \end{aligned} \quad (3.117)$$

L'inégalité (3.117) peut s'écrire dans la forme compacte suivante :

$$J_{ew} \leq \int_0^\infty \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} x_i \\ \chi_i \\ w_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ * & a_{22} & a_{23} \\ * & * & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \chi_i \\ w_i \end{bmatrix} dt \quad (3.118)$$

où

$$a_{11} = (A_{ii} + B_i K_i)^T \widetilde{\mathbf{Q}}_i + \widetilde{\mathbf{Q}}_i (A_{ii} + B_i K_i) + \widetilde{\mathbf{Q}}_i \widetilde{\mathbf{Q}}_i + 2\beta I_{n_i} \quad (3.119)$$

$$a_{12} = \widetilde{\mathbf{Q}}_i B_i C_i \quad (3.120)$$

$$a_{13} = \widetilde{\mathbf{Q}}_i F_i \quad (3.121)$$

$$a_{22} = \mathcal{A}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{A}_i + \mathcal{E}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \Psi_i \Psi_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{E}_i + C_i^T C_i \quad (3.122)$$

$$a_{23} = \mathcal{E}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{B}_i \quad (3.123)$$

$$a_{33} = -\gamma_i^2 I \quad (3.124)$$

Si on a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ * & a_{22} & a_{23} \\ * & * & a_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.125)$$

alors  $J_{ew} < 0$ , (et  $\dot{V}(t, \chi_i, x_i) < 0$ ).

En appliquant le complément de Schur [BGFB94] à la LMI (3.125), on obtient :

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \sqrt{2\beta} I_{n_i} & \widetilde{\mathbf{Q}}_i & \widetilde{\mathbf{Q}}_i B_i C_i & \widetilde{\mathbf{Q}}_i F_i & 0 & 0 \\ * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & b_{44} & \mathcal{E}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \Psi_i & C_i^T & \mathcal{E}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{B}_i \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma_i^2 I_{q_i} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.126)$$

où

$$b_{11} = (A_{ii} + B_i K_i)^T \widetilde{\mathbf{Q}}_i + \widetilde{\mathbf{Q}}_i (A_{ii} + B_i K_i) \quad (3.127)$$

$$a_{22} = \mathcal{A}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{A}_i \quad (3.128)$$

On considère maintenant  $\overline{\mathbf{Q}}_i = \widetilde{\mathbf{Q}}_i^{-1}$ , en pré- et postmultipliant l'inégalité (3.126) par :

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Q}}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

on obtient la LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \sqrt{2\beta} \overline{\mathbf{Q}}_i & I & B_i C_i & F_i & 0 & 0 \\ * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & b_{44} & \mathcal{E}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \Psi_i & C_i^T & \mathcal{E}_i^T \widetilde{\mathbf{P}}_i \mathcal{B}_i \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma_i^2 I_{q_i} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.130)$$



où

$$c_{11} = \widetilde{\mathbf{Q}}_i(A_{ii} + B_i K_i)^T + (A_{ii} + B_i K_i)\widetilde{\mathbf{Q}}_i \quad (3.131)$$

$$(3.132)$$

en remplaçant  $\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{B}_i$ ,  $\mathcal{C}_i$ ,  $\Psi_i$  et  $\widetilde{\mathbf{P}}_i$  par leurs valeurs respectives et en utilisant les équations (3.40), (3.41), (3.42), (3.43) on obtient la LMI du theorem 16, où  $K_i \widetilde{\mathbf{Q}}_i = \Omega_{K_i}$  et  $\mathbf{P}_i \mathcal{Y}_i = \Omega_{Y_i}$ .

Si la LMI (3.101) est vérifiée, on obtient les deux matrices  $\Omega_{K_i}$  et  $\Omega_{Y_i}$  et on peut déduire  $K_i$  et  $\mathcal{Y}_i$  telles que :

$$K_i = \Omega_{K_i}(\widetilde{\mathbf{Q}}_i)^{-1} \quad (3.133)$$

et

$$\mathcal{Y}_i = \widetilde{\mathbf{P}}_{i1}^{-1} \Omega_{Y_i} \quad (3.134)$$

Le gain du filtre est conséquent par donné par :

$$\mathcal{Z}_i = \mathcal{Y}_i(I - \Delta_{G_i} \Delta_{G_i}^+) \quad (3.135)$$

ce qui complète la démonstration du Théorème 16. ■

L'approche proposée est résumée dans l'algorithme suivant. Sous la condition de l'Hypothèse 7, les principales étapes de synthèse d'une loi de commande basée sur un filtre pour une classe de système de grande dimension sont :

- **Etape 1** : Trouver le gain  $K_i$  qui garantit la stabilité du système en boucle fermée donné par (3.1) ; en résolvant la LMI (3.51).
- **Etape 2** : Calculer  $\Sigma_i$  et  $\Omega_i$  en utilisant respectivement (3.16) et (3.17).
- **Etape 3** : Calculer  $\Lambda_{N_i}, \Delta_{N_i}, \Lambda_{G_i}, \Lambda_{L_i}, \Delta_{L_i}, \psi_{i1}, \psi_{i3}, \Lambda_{\psi_{i2}}, \Delta_{\psi_{i2}}$  et  $\overline{\Delta_{N_i}}$  en utilisant respectivement les équations (3.26), (3.27), (3.28), (3.30), (3.31), (3.35), (3.37), (3.46), (3.47) et (3.48),.
- **Etape 4** : Résoudre la LMI (3.52) afin de déterminer  $\mathbf{P}_{i1}$  et  $\Omega_{Y_i}$  et en déduire  $\mathcal{Y}_i$  et  $\mathcal{Z}_i$ .
- **Etape 5** : Calculer  $N_i, G_i$  et  $L_i$  en utilisant respectivement (3.21), (3.22), (3.23) et déduire  $J_i$  et  $M_i$  des équations (3.24) et (3.25). Ainsi la commande basée sur un filtre  $H_\infty$  est déterminée.

La stratégie de commande proposée est validée sur un exemple de système électrique composé de trois machines interconnectées qui sera illustré dans la section suivante.

### 3.2.3 Simulation

On considère l'exemple donné dans [KLZ09c], où on a modifié le modèle pour avoir un système perturbé. Le modèle décrit une classe de système d'énergie multimachines composé de trois machines interconnectées dont l'équation d'état est donnée par le système (3.1), où :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_i}{2S_i} & \frac{\omega_0}{2S_i}(1 - F_{IP_i}) & \frac{\omega_0}{2S_i} F_{IP_i} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{m_i}} & \frac{K_{m_i}}{T_{m_i}} \\ 0 & -\frac{K_{e_i}}{T_{e_i} r_i \omega_0} & 0 & \frac{1}{T_{e_i}} \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_{e_i}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 D_i &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 x_i &= \begin{bmatrix} \delta_i \\ \omega_i \\ P_{mi} \\ X_{ei} \end{bmatrix}, u_i = P_{ci}, \\
 v_i(X) &= \sum_{j=1, j \neq i}^N p_{ij} \frac{\omega_0 E'_{qi} E'_{qj} B_{ij}}{2S_i} \sin(\delta_i - \delta_j).
 \end{aligned}$$

La dynamique des différentes composantes de ce système électrique d'alimentation peut être trouvée dans [KLZ09c], [GWH00], [WHG98].

$\delta_i$  : angle du rotor de la i-ème machine en degré.

$\omega_i$  : vitesse relative de la i-ème machine en rad/sec.

$\omega_0$  : vitesse synchrone en rad/sec.

$B_{ij}$  : la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice de susceptance nodal en (p.u.)

$d_i$  : coefficient d'amortissement de la i-ème machine en(p.u.).

$E'_{qi}$  : tension transitoire interne de la i-ème machine en (p.u.), supposée être constante.

$E'_{qj}$  : tension transitoire interne de la j-ème machine en (p.u.), supposée être constante.

$F_{IP_i}$  : fraction de la puissance de la turbine générée par la pression intermédiaire (IP).

$S_i$  : inertie constante de la i-ème machine en sec.

$K_{ei}$  : gain du régulateur de vitesse de la i-ème machine.

$K_{mi}$  : gain de la turbine de la i-ème machine.

$P_{ci}$  : Puissance de contrôle de la i-ème machine.

$p_{ij}$  : Une constante qui indique si la la i-ème machine est connectée à la j-ème machine elle prend deux valeurs 0 ou 1.

$P_{mi}$  : Puissance mécanique de la i-ème machine en (p.u.).

$r_i$  : régulation constante de la i-ème machine en (p.u.).

$T_{ei}$  : Constante de temps du régulateur de vitesse de la i-ème machine.

$T_{mi}$  : Constante de temps de la turbine de la i-ème machine.

$X_{ei}$  : ouverture de la soupape de vapeur de la i-ème machine en (p.u.).

On applique la méthode développée précédemment de synthèse du correcteur basé sur un filtre  $H_\infty$ , pour la commande du système formé par l'ensemble "turbine/régulateur de vitesse" afin de stabiliser le système électrique composé de générateurs contre les défauts et les perturbations (Figure 3.1). Le générateur 3 est considéré comme noeud infini ayant la même dynamique que le générateur 2 [EB02].

On considère un court-circuit triphasé symétrique (comme dans [GWH00], [WHG98]) sur la ligne de transmission entre la première et la seconde machine (Figure 3.1).

Les valeurs des paramètres de chaque machine sont résumées dans le tableau suivant [WHG98] :

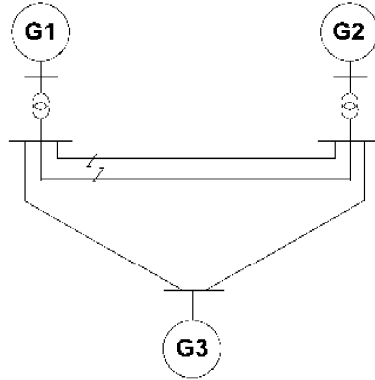


FIG. 3.1 – Système électrique composé de trois générateurs

Paramètre	Machine 1	Machine 2
$S_i$	4	5.1
$d_i$	5	3
$F_{IP_i}$	0.3	0.3
$T_{m_i}$	0.35	0.35
$T_{e_i}$	0.1	0.1
$r_i$	0.05	0.05
$K_{m_i}$	1	1
$K_{e_i}$	1	1
$\omega_0$	314.159	314.159

Les données complètes du système utilisé pour la simulation sont données dans [GWH00].

On applique la méthode illustré dans [KLZ09c] pour le calcul de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  où  $\beta_1 = 16.3231$  et  $\beta_2 = 11.5260$ . Le point de fonctionnement pour chaque sous-système est donnée par [KLZ09c] :  $x_{10} = [ 49 \ 0 \ 0.57 \ 0.57 ]^T$  et  $x_{20} = [ 53 \ 0 \ 0.56 \ 0.56 ]^T$ .

En utilisant la procédure de synthèse de commande basée sur un filtre  $H_\infty$  proposée précédemment, on obtient :

**Pour le générateur 1 :**

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5572 & -0.1429 & -2.4326 \\ 0 & 1 & -2.8571 & 2.8571 \\ 0 & -0.2616 & 27.4889 & 21.7810 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Omega_1 = [ 0 \ 1.8969 \ -14.9091 \ -31.2990 ]$$

$$\psi_{11} = [ -7.8158 \ -0.3966 \ -6.7192 \ 1.4788 ], \psi_{12} = [ -5.9669 \ 0 ], \psi_{13} = [ -6.8620 \ 0 ],$$

$$K_1 = [ 0 \ -0.5572 \ -0.1429 \ -2.4326 ]$$

$$\mathcal{Z}_1 = 10^4 [ -0.3472 \ 1.3139 \ -2.9450 \ -0.9814 \ -1.0068 ]$$

alors  $N_1$ ,  $G_1$ ,  $L_1$ ,  $J_1$  et  $M_1$  sont données par :

$$N_1 = -48.294, G_1 = [ -6.8620 \ -0.9538 ], L_1 = [ 0.3701 \ -0.3701 ], J_1 = [ 3.3176 \ 0.4569 ]$$

$$M_1 = -10.7382$$

**Pour le générateur 2 :**

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.4302 & -0.1429 & -2.4326 \\ 0 & 1 & -2.8571 & 2.8571 \\ 0 & -0.1268 & 21.56 & 19.24 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Omega_2 = [ 0 \quad 1.7595 \quad -8.8662 \quad -28.7092 ]$$

$$\psi_{21} = [ -6.6566 \quad -0.3514 \quad -5.7321 \quad 1.6510 ], \psi_{22} = [ -8.6408 \quad 0 ],$$

$$\psi_{23} = [ -5.8750 \quad 0 ], K_2 = [ 0 \quad -0.4302 \quad -0.1429 \quad -2.4326 ]$$

$$\mathcal{Z}_2 = 10^4 [ 3.4198 \quad -6.9473 \quad -7.6484 \quad 0.0376 \quad 0.6997 ]$$

alors  $N_2, G_2, L_2, J_2$  et  $M_2$  sont données par :

$$N_2 = -26.1573, G_2 = [ -5.8750 \quad -0.7816 ], L_2 = [ -3.6352 \quad 3.6352 ],$$

$$J_2 = [ 1.5483 \quad 0.2101 ], M_2 = -9.4774$$

La Figure 3.2 illustre la forme d'onde de la perturbation qui est supposée à énergie finie et les Figures 3.3 et 3.4 montrent le comportement de l'erreur d'observation relatives aux sous-systèmes 1 et 2 respectivement.

3.2. Commande basée sur un filtre pour les systèmes non singuliers de grande dimension

---

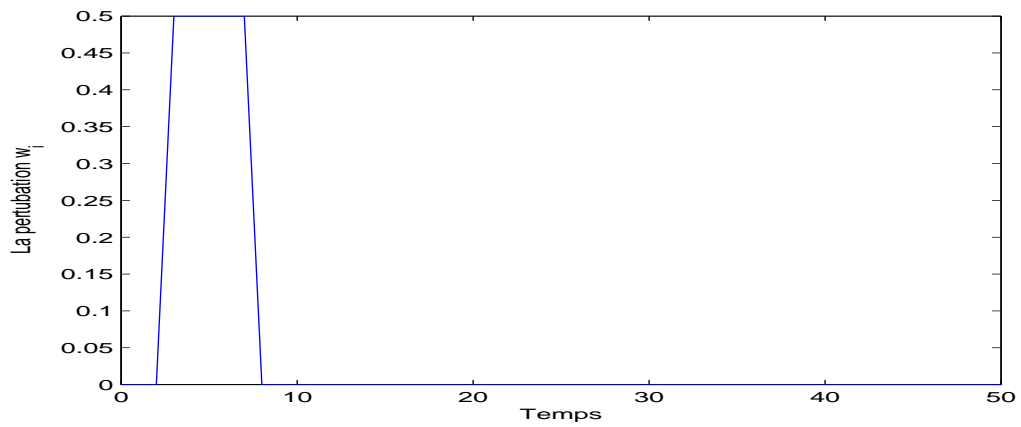


FIG. 3.2 – La perturbation du système

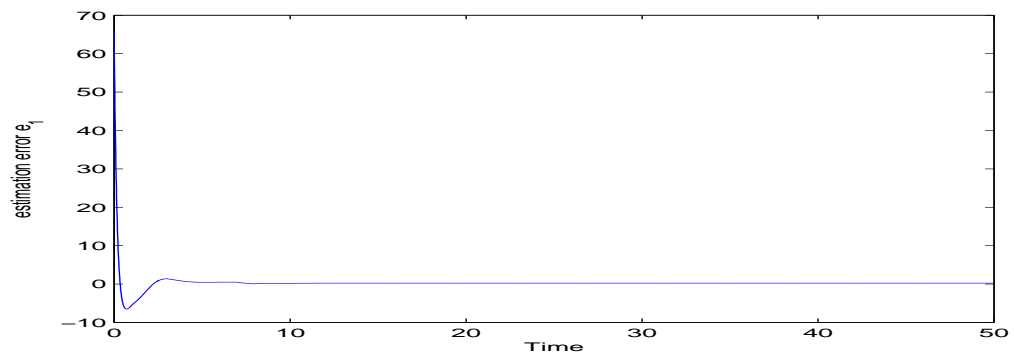


FIG. 3.3 – L'erreur d'estimation du système 1

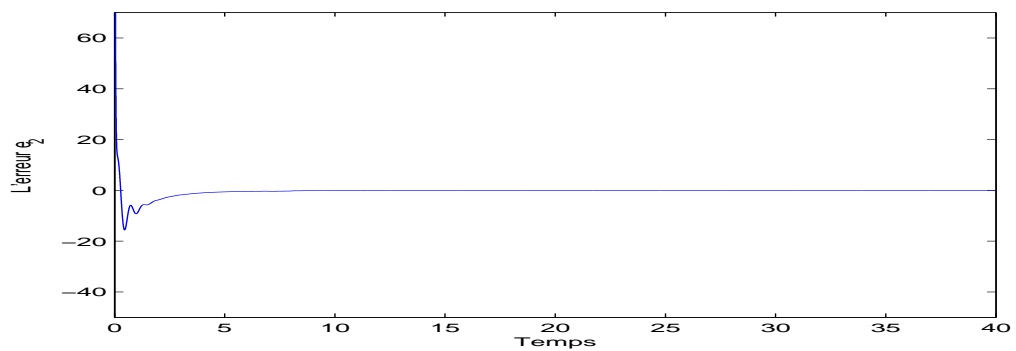


FIG. 3.4 – L'erreur d'estimation du système 2

Dans la suite de ce chapitre, on étendra notre approche proposée au cas des systèmes singuliers sujet à des perturbations à énergie finie. En effet, on s'intéresse à la commande basée sur un filtre des systèmes singuliers de grande dimension.

### 3.3 Commande décentralisée basée sur un filtre $H_\infty$ pour les systèmes singuliers de grande dimension

L'approche présentée dans ce paragraphe est une extension des travaux de Kalsi et al ([KLZ08], [KLZ09a] et [KLZ09b]...) développées pour les systèmes déterministes standards aux cas des systèmes singuliers affectés par une perturbation. La synthèse de la commande décentralisée basée sur un filtre  $H_\infty$  est faite sur deux étapes

- La première consiste à trouver le gain par retour d'état pour la synthèse de la loi de commande.
- La deuxième concerne la synthèse de la commande basée sur le filtre  $H_\infty$ , qui nous permettra de reconstruire cette loi de commande. Les inégalités matricielles linéaires sont utilisées pour le calcul du gain par retour d'état et celui des paramètres du filtre.

#### 3.3.1 Position du problème

On considère le système singulier interconnecté décrit par le modèle suivant :

$$E_i \dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_i u_i(t) + D_i v_i(X) + F_i w_i(t) \quad (3.136a)$$

$$z_i(t) = H_i x_i(t) + R_i w_i(t), \quad i \in \{1 \dots N\} \quad (3.136b)$$

où  $E_i, A_{ii}, B_i, D_i, F_i, H_i$  et  $R_i$  sont des matrices réelles constantes de dimensions appropriées avec  $\text{rang}(E_i) = r_i \leq n_i$  et  $B_i$  vérifiant l'Hypothèse 8 citée dans la section précédente. Les vecteurs  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u_i(t) \in \mathbb{R}^{l_i}$ ,  $z_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  et  $w_i(t) \in \mathbb{R}^{q_i}$  sont respectivement l'état, l'entrée, la sortie et la perturbation du système, qui est supposée à énergie finie.

La variable  $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état du système global, avec  $n = \sum_{i=1}^N n_i$ .

$v_i(x)$  représente l'interconnection du  $i$ -ème sous système qui est supposée globalement bornée,  $\|v_i(x)\| \leq \rho_i$  pour  $\rho_i > 0$  [KLZ10] et satisfait la contrainte quadratique donnée par l'hypothèse 7 déjà présentée dans la section 3.2.

**Remarque 22** *Nontons que pour  $E_i = I_{n_i}$ ,  $F_i = 0$  et  $R_i = 0$ , on retrouve le système déterministe standard défini par [KLZ08], [KLZ09a] et [KLZ09b].*

Pour la suite de ce chapitre on suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée :

**Hypothèse 9** *On suppose que la matrice  $\begin{bmatrix} E_i \\ H_i \end{bmatrix}$  est de rang plein colonne [Dar06].*

**Remarque 23** *L'Hypothèse 9 n'est pas restrictive, elle est liée à l'observabilité du système (3.136) .*

De l'Hypothèse 9, on peut déduire qu'il existe une matrice non singulière  $J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & J_{i2} \\ J_{i3} & J_{i4} \end{bmatrix}$  telle que

$$J_{i1}E_i + J_{i2}H_i = I_{n_i} \quad (3.137)$$

$$J_{i3}E_i + J_{i4}H_i = 0 \quad (3.138)$$

La matrice  $J_i$  est obtenue par la décomposition en valeur singulière (SVD) de la matrice  $E_i$ .

Considérons le correcteur basé sur un filtre  $H_\infty$  suivant [MBDHa] :

$$\dot{\xi}_i(t) = N_i\xi_i(t) + M_iu_i(t) + L_iz_i(t) \quad (3.139a)$$

$$u_i(t) = \xi_i(t) + K_iJ_{i2}z_i(t) + G_iJ_{i4}z_i(t) \quad (3.139b)$$

avec  $\xi_i \in \mathbb{R}^{l_i}$  est le vecteur d'état de l'observateur,  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $L_i$ ,  $K_i$  et  $G_i$  sont des matrices inconnues de dimensions appropriées, qui seront déterminées dans la suite telle que l'erreur d'estimation obéit à :

$$e_i(t) = u_i(t) - K_ix_i(t) \quad (3.140)$$

converge vers zéro, c'est à dire  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$ .

Le problème à résoudre dans cette partie peut être posé comme suit :

**Problème :** On cherche à déterminer une loi de commande basée sur un filtre  $H_\infty$  telle que :

- Le système (3.136) est admissible basé sur le filtre donné par (3.139) et satisfait la performance  $H_\infty$  donné par :

$$J_{z_i w_i} = \int_0^\infty (z_i^T z_i - \gamma_i^2 w_i^T w_i) dt < 0 \quad (3.141)$$

pour un scalaire  $\gamma_i > 0$  donné.

- Le système (3.136) augmenté par l'erreur d'estimation (3.140) est admissible et l'erreur d'estimation satisfait le critère de performance  $H_\infty$

$$J_{e_i w_i} = \int_0^\infty (e_i^T e_i - \gamma_{e_i}^2 w_i^T w_i) dt < 0 \quad (3.142)$$

pour un scalaire  $\gamma_{e_i} > 0$ .

### 3.3.2 Synthèse du gain par retour d'état

Dans cette section, on considère le problème de synthèse par retour d'état. Pour cela, on remplace  $u_i$  par  $K_ix_i$ , et on aura :

$$E_i \dot{x}_i = (A_{ii} + B_i K_i)x_i + D_i v_i(X) + F_i w_i(t) \quad (3.143)$$

Le lemme suivant donne une méthode de synthèse du gain par retour d'état  $K_i$  qui garantit aussi bien l'admissibilité que le critère  $H_\infty$  du système en boucle fermée (3.143).

**Lemme 11** [MBDHa] Le système (3.143) est admissible pour  $w(t) = 0$  et satisfait le critère  $H_\infty$ ,  $J_{z_i w_i} < 0$ , pour  $w(t) \neq 0$  et pour un scalaire  $\gamma_i > 0$  s'il existe une matrice définie positive  $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^T$  et une matrice  $\Omega_{BK_i}$  telles que les LMIs suivantes soient satisfaites :

$$\Delta_{i_1} = \begin{bmatrix} (1,1) & H_i^T & E_i^T \mathbf{Q}_i & \sqrt{\beta} I_{n_i} \\ H_i & -\frac{1}{2} I_{n_i} & 0 & 0 \\ \mathbf{Q}_i E_i & 0 & -\frac{1}{2} I_{n_i} & 0 \\ \sqrt{\beta} I_{n_i} & 0 & 0 & -I_{n_i} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.144)$$

$$\Delta_{i_2} = \begin{bmatrix} -\gamma_i I_{q_i} & F_i^T & R_i^T \\ F_i & -I_{n_i} & 0 \\ R_i & 0 & -\frac{1}{2} I_{q_i} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.145)$$

où :

$$\begin{aligned} (1,1) &= A_{ii} \mathbf{Q}_i E_i + \Omega_{BK_i} E_i + E_i^T \mathbf{Q}_i A_{ii}^T + E_i^T \Omega_{BK_i}^T \\ \Omega_{BK_i} &= \mathbf{Q}_i B_i K_i \\ \beta &= \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \lambda_{\max}(\tau_i^T \tau_i) \end{aligned}$$

et  $\lambda_{\max}(\bullet)$  est la valeur propre maximale de  $(\bullet)$ .

Dans ce cas, le gain  $K_i$  est donné par :

$$K_i = (B_i^T B_i)^{-1} B_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \Omega_{BK_i} \quad (3.146)$$

**Preuve 26** On considère la fonction de Lyapunov suivante [Owens85],[Peter03]

$$V(t, x_i) = \sum_{i=1}^N (E_i x_i(t))^T \mathbf{Q}_i E_i x_i(t) \quad (3.147)$$

où  $\mathbf{Q}_i$  est définie positive.

La dérivée de  $V(t, x_i)$  par rapport aux solutions de (3.143) est donnée par :

$$\dot{V}(t, x_i) = \sum_{i=1}^N \{ (E_i \dot{x}_i)^T \mathbf{Q}_i E_i x_i + (E_i x_i)^T \mathbf{Q}_i (E_i \dot{x}_i) \} \quad (3.148)$$

En utilisant l'équation (3.143), la relation (3.148) s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_i) &= \sum_{i=1}^N \{ [(A_{ii} + B_i K_i) x_i + D_i v_i + F_i w_i]^T \mathbf{Q}_i E_i x_i + (E_i x_i)^T \mathbf{Q}_i [(A_{ii} + B_i K_i) x_i + D_i v_i + F_i w_i] \} \\ &= \sum_{i=1}^N \{ x_i^T (A_{ii} + B_i K_i)^T \mathbf{Q}_i E_i x_i + x_i^T E_i^T \mathbf{Q}_i (A_{ii} + B_i K_i) x_i + v_i^T D_i^T \mathbf{Q}_i E_i x_i + x_i^T E_i^T \mathbf{Q}_i D_i v_i \\ &\quad + (F_i w_i)^T \mathbf{Q}_i E_i x_i + x_i^T E_i^T \mathbf{Q}_i F_i w_i \} \end{aligned} \quad (3.149)$$

en utilisant le Lemme 10 avec  $\rho_i = 1$  on obtient :

$$v_i^T D_i^T \mathbf{Q}_i E_i x_i + x_i^T E_i^T \mathbf{Q}_i D_i v_i \leq v_i^T D_i^T D_i v_i + x_i^T E_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i E_i x_i \quad (3.150)$$



3.3. Commande décentralisée basée sur un filtre  $H_\infty$  pour les systèmes singuliers de grande dimension

$$w_i^T F_i^T \mathbf{Q}_i E_i x_i + x_i^T E_i^T \mathbf{Q}_i F_i w_i \leq w_i^T F_i^T F_i w_i + x_i^T E_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i E_i x_i \quad (3.151)$$

Des équations (3.149), (3.150) et (3.151) on peut déduire

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_i) &\leq \sum_{i=1}^N \{x_i^T [(A_{ii} + B_i K_i)^T \mathbf{Q}_i E_i + E_i^T \mathbf{Q}_i (A_{ii} + B_i K_i) + 2E_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i E_i] x_i \\ &\quad + (D_i v_i)^T D_i v_i + w_i^T F_i^T F_i w_i\} \end{aligned} \quad (3.152)$$

De l'inégalité (3.2) de l'Hypothèse 7 on a :

$$(D_i v_i)^T D_i v_i \leq \alpha_i^2 \lambda_{\max}(\tau_i^T \tau_i) x_i^T x_i \leq \beta_i \sum_{i=1}^N x_i^T x_i \quad (3.153)$$

où  $\beta_i = \alpha_i^2 \lambda_{\max}(\tau_i^T \tau_i)$ . Par la suite, de (3.152) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_i) &\leq \sum_{i=1}^N \{x_i^T [(A_{ii} + B_i K_i)^T \mathbf{Q}_i E_i + E_i^T \mathbf{Q}_i (A_{ii} + B_i K_i) + 2E_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i E_i] x_i \\ &\quad + \beta_i \sum_{i=1}^N x_i^T x_i + w_i^T F_i^T F_i w_i\} \end{aligned} \quad (3.154)$$

On définit maintenant le critère de performance  $H_\infty$  pour un scalaire  $\gamma > 0$  par :

$$J_{zw} = \int_0^\infty (z^T z - \gamma^2 w^T w) dt \quad (3.155)$$

où  $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$  et  $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^q$  représentent respectivement le vecteur de sortie et

le vecteur de perturbation du système global, avec  $m = \sum_{i=1}^N m_i$  et  $q = \sum_{i=1}^N q_i$ .

Donc pour  $\gamma_i > 0$ , on peut donc réécrire (3.155) comme suit :

$$J_{zw} = \int_0^\infty \sum_{i=1}^N (z_i^T z_i - \gamma_i^2 w_i^T w_i) dt \quad (3.156)$$

En utilisant le fait que  $V(0) = 0$  et  $V(\infty) \geq 0$ , on peut obtenir :

$$\begin{aligned} J_{zw} &\leq \int_0^\infty (z^T z - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(t, x_i)) dt \\ &\leq \int_0^\infty \left[ \sum_{i=1}^N \{x_i^T H_i^T H_i x_i + x_i^T H_i^T R_i w_i + w_i^T R_i^T H_i x_i + w_i^T R_i^T R_i w_i - \gamma_i^2 w_i^T w_i\} \right. \\ &\quad \left. + \dot{V}(t, x_i) \right] dt \end{aligned} \quad (3.157)$$

en utilisant le Lemme 10 on a :

$$x_i^T H_i^T R_i w_i + w_i^T R_i^T H_i x_i \leq x_i^T H_i^T H_i x_i + w_i^T R_i^T R_i w_i \quad (3.158)$$

De (3.154), (3.157) et (3.158) on déduit que :

$$\begin{aligned}
 J_{zw} &\leq \int_0^\infty \left[ \sum_{i=1}^N \{x_i^T (2H_i^T H_i + (A_{ii} + B_i K_i)^T \mathbf{Q}_i E_i + E_i^T \mathbf{Q}_i (A_{ii} + B_i K_i) + 2E_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i E_i) x_i \right. \\
 &\quad \left. + w_i^T (F_i^T F_i + 2R_i^T R_i - \gamma_i^2 I) w_i \right] + \beta \sum_{i=1}^N x_i^T x_i dt \\
 &\leq \int_0^\infty \sum_{i=1}^N \{x_i^T (2H_i^T H_i + (A_{ii} + B_i K_i)^T \mathbf{Q}_i E_i + E_i^T \mathbf{Q}_i (A_{ii} + B_i K_i) \\
 &\quad + 2E_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i E_i + \beta I_{n_i}) x_i + w_i^T (F_i^T F_i - \gamma_i^2 I_{q_i} + 2R_i^T R_i) w_i \} dt
 \end{aligned} \tag{3.159}$$

où

$$\beta = \sum_{i=1}^N \beta_i \tag{3.160}$$

L'inégalité (3.159) peut être réécrite sous forme compacte :

$$J_{zw} \leq \int_0^\infty \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Theta_{i1} & 0 \\ 0 & \Theta_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix} dt \tag{3.161}$$

où

$$\begin{aligned}
 \Theta_{i1} &= (A_{ii} + B_i K_i)^T \mathbf{Q}_i E_i + E_i^T \mathbf{Q}_i (A_{ii} + B_i K_i) + 2E_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i E_i \\
 &\quad + \beta I_{n_i} + 2H_i^T H_i
 \end{aligned} \tag{3.162}$$

$$\Theta_{i2} = F_i^T F_i + 2R_i^T R_i - \gamma_i^2 I_{q_i} \tag{3.163}$$

Donc, si

$$\Theta_{i1} < 0 \tag{3.164}$$

$$\text{et } \Theta_{i2} < 0 \tag{3.165}$$

alors  $J_{zw} < 0$ , (et on aura également  $\dot{V}(t, x_i) < 0$ ).

En appliquant le complément de Schur ([BGF94]) aux équations (3.164) et (3.165) on obtient les LMIs du Lemme 11.

Comme la matrice  $B_i$  est de rang plein colonne (selon l'hypothèse 8) la résolution des LMIs (3.144) et (3.145), donne l'expression du gain  $K_i$  donné par

$$K_i = (B_i^T B_i)^{-1} B_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \Omega_{BK_i}$$

Ce qui termine la démonstration du Lemme 11. ■

### 3.3.3 Synthèse d'une commande basée sur un filtre $H_\infty$

Comme les états du système ne sont pas toutes accessibles pour une commande par retour d'état, dans ce paragraphe on procède à la synthèse de la commande basée sur un filtre pour le

### 3.3. Commande décentralisée basée sur un filtre $H_\infty$ pour les systèmes singuliers de grande dimension

système (3.136) en utilisant le gain par retour d'état obtenu dans le paragraphe 3.3.2 D'après le premier point de la Définition 14, l'erreur d'estimation est définie par :

$$e_i(t) = u_i(t) - K_i x_i(t) \quad (3.166)$$

En remplaçant  $u_i$  par sa valeur donnée en (3.139b) on obtient

$$\begin{aligned} e_i(t) &= \xi_i(t) + K_i J_{i2} z_i(t) + G_i J_{i4} z_i(t) - K_i x_i(t) \\ &= \xi_i(t) - K_i (I - J_{i2} H_i) x_i(t) + G_i J_{i4} H_i x_i(t) + (K_i J_{i2} + G_i J_{i4}) R_i w_i(t) \end{aligned} \quad (3.167)$$

et en utilisant les équations (3.137) et (3.138), l'équation (3.167) devient :

$$e_i(t) = \xi_i(t) + \psi_{i1} E_i x_i(t) + (K_i J_{i2} + G_i J_{i4}) R_i w_i(t) \quad (3.168)$$

où

$$\psi_{i1} = -(K_i J_{i1} + G_i J_{i3}) \quad (3.169)$$

la dynamique de l'erreur d'estimation peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \dot{\xi}_i(t) + \psi_{i1} E_i \dot{x}_i(t) + (K_i J_{i2} + G_i J_{i4}) R_i \dot{w}_i(t) \\ &= N_i \xi_i(t) + M_i u_i(t) + L_i z_i(t) + \psi_{i1} (A_{ii} x_i(t) + B_i u_i(t) + D_i v_i(X) + F_i w_i(t)) \\ &+ (K_i J_{i2} + G_i J_{i4}) R_i \dot{w}_i(t) \\ &= N_i e_i(t) + (\psi_{i1} A_{ii} - N_i \psi_{i1} E_i + L_i H_i) x_i(t) + (\psi_{i1} B_i + M_i) u_{i1}(t) \\ &+ \psi_{i1} D_i v_i(X) + (\psi_{i1} F_i + L_i R_i - N_i (K_i J_{i2} + G_i J_{i4}) R_i) w_i(t) \\ &+ (K_i J_{i2} + G_i J_{i4}) R_i \dot{w}_i(t) \end{aligned} \quad (3.170)$$

le problème de synthèse du filtre est réduit à la détermination des matrices  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $L_i$ ,  $G_i$  telles que :

1. Le filtre donné par les équations (3.139a) – (3.139b) est non biaisé pour  $w_i(t) = 0$  (i.e il ne dépend pas explicitement du vecteur d'état du système  $x_i(t)$  et de  $u_i(t)$ )
2. Le critère  $H_\infty$  est satisfait, i.e.  $\|e_i(t)\|_2 < \gamma_{ei} \|w_i(t)\|_2$

la condition 1) ci-dessus est vérifiée si et seulement si l'équation de Sylvester généralisée sous contrainte suivante est réalisée :

$$\psi_{i1} A_{ii} - N_i \psi_{i1} E_i + L_i H_i = 0 \quad (3.171)$$

$$\psi_{i1} B_i + M_i = 0 \quad (3.172)$$

en utilisant (3.137), (3.138) et (3.169), l'équation (3.171) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Y_i \Sigma_i = \Omega_i \quad (3.173)$$

où :

$$Y_i = [ N_i \quad G_i \quad \Gamma_i ] \quad (3.174)$$

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} K_i \\ -J_{i3} A_{ii} \\ H_i \end{bmatrix}, \quad (3.175)$$

$$\Omega_i = K_i J_{i1} A_{ii} \quad (3.176)$$

et

$$\Gamma_i = -L_i - N_i(K_i J_{i2} + G_i J_{i4}) \quad (3.177)$$

L'équation (3.173) admet une solution si et seulement si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \Sigma_i \\ \Omega_i \end{bmatrix} = \Sigma_i$$

dans ce cas une solution générale de (3.173) peut être donnée par :

$$\begin{bmatrix} N_i & G_i & \Gamma_i \end{bmatrix} = \Omega_i \Sigma_i^+ - \mathcal{Z}_i (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \quad (3.178)$$

où  $\mathcal{Z}_i$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée qui sera déterminée dans la suite de ce chapitre en utilisant les LMIs.

Une fois la matrice de paramètre  $\mathcal{Z}_i$  trouvé, le filtre est complètement déterminé et les matrices  $N_i$ ,  $G_i$ ,  $\Gamma_i$ ,  $L_i$  et  $M_i$  sont données par :

$$N_i = \Lambda_{N_i} - \mathcal{Z}_i \Delta_{N_i} \quad (3.179)$$

$$G_i = \Lambda_{G_i} - \mathcal{Z}_i \Delta_{G_i} \quad (3.180)$$

$$\Gamma_i = \Lambda_{\Gamma_i} - \mathcal{Z}_i \Delta_{\Gamma_i} \quad (3.181)$$

$$L_i = -\Gamma_i - N_i(K_i J_{i2} + K_i J_{i4}) \quad (3.182)$$

$$M_i = -\psi_{i1} B_i \quad (3.183)$$

avec

$$\Lambda_{N_i} = \Omega_i \Sigma_i^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.184)$$

$$\Delta_{N_i} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.185)$$

$$\Lambda_{G_i} = \Omega_i \Sigma_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

$$\Delta_{G_i} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.187)$$

$$\Lambda_{\Gamma_i} = \Omega_i \Sigma_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

$$\Delta_{\Gamma_i} = (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

D'autre part, compte tenu des équations (3.171) et (3.172) la dynamique de l'erreur d'observation (3.170) devient

$$\dot{e}_i(t) = N_i e_i(t) + \psi_{i1} D_i v_i(X) + \psi_{i2} w_i(t) - \psi_{i3} \dot{w}_i(t) \quad (3.190)$$

### 3.3. Commande décentralisée basée sur un filtre $H_\infty$ pour les systèmes singuliers de grande dimension

où

$$\psi_{i2} = \psi_{i1}F_i + L_iR_i + N_i\psi_{i3} \quad (3.191)$$

$$\psi_{i3} = -(K_iJ_{i2} + G_iJ_{i4})R_i \quad (3.192)$$

Soit

$$\psi_{i3} = \Lambda_{\psi_{i3}} - Z_i\Delta_{\psi_{i3}} \quad (3.193)$$

avec

$$\Lambda_{\psi_{i3}} = -(K_iJ_{i4} + \Lambda_{G_i}J_{i4}R_i) \quad (3.194)$$

$$\Delta_{\psi_{i3}} = -\Delta_{G_i}J_{i4}R_i \quad (3.195)$$

les matrices données par (3.194) et (3.195) nous seront utile pour la démonstration du Théorème 17 ci-après.

Notons que dans l'expression de la dynamique de l'erreur (3.190) on a la dérivée du bruit  $w_i(t)$ . Pour contourner ce problème, on réécrit l'erreur du système dans une forme singulière. Dans ce cas, l'équation (3.190) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_i\dot{\theta}_i = \mathcal{A}_i\theta_i + \mathcal{B}_i\bar{w}_i \\ e_i(t) = \mathcal{C}_i\theta_i \quad i \in \{1 \dots N\} \end{cases} \quad (3.196)$$

où  $\mathcal{E}_i = \begin{bmatrix} I & \psi_{i3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} N_i & \psi_{i2} \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} \psi_{i1}D_i & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{C}_i = [ I \ 0 ]$ ,  $\theta_i = \begin{bmatrix} e_i(t) \\ \eta_i(t) \end{bmatrix}$ ,  $\bar{w}_i = \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix}$ ,  $\theta_i$  représente l'état du système représenté par  $(\mathcal{E}_i, \mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i)$  et  $\eta_i$  est un état fictif tel que  $\eta_i(t) = w_i(t)$ .

Le théorème suivant donne les conditions d'existence du filtre (3.139) en étudiant le système donné par (3.196).

#### **Théorème 17** [MBDHa]

Il existe une matrice paramètre  $Z_i$  telle que la paire  $(\mathcal{E}_i, \mathcal{A}_i)$  est admissible et la fonction de transfert  $\mathfrak{G}(s)$  vérifie

$$\|\mathfrak{G}(s) = \mathcal{C}_i(s\mathcal{E}_i - \mathcal{A}_i)^{-1}\mathcal{B}_i\|_\infty < \gamma_{e_i}$$

pour un scalaire  $\gamma_{e_i} > 0$  si et seulement si il existe des matrices  $\mathbf{P}_{i1} = \mathbf{P}_{i1}^T > 0$ ,  $\mathbf{P}_{i2} = \mathbf{P}_{i2}^T > 0$  et  $\Omega_{Z_i}$  telles que les LMIs suivantes soient vérifiées :

1)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i1}\Lambda_{\psi_{i3}} \\ \Lambda_{\psi_{i3}}^T \mathbf{P}_{i1} & \Lambda_{\psi_{i3}}^T \mathbf{P}_{i1}\Lambda_{\psi_{i3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i1}\Lambda_{\psi_{i3}} \\ \Lambda_{\psi_{i3}}^T \mathbf{P}_{i1} & \Lambda_{\psi_{i3}}^T \mathbf{P}_{i1}\Lambda_{\psi_{i3}} \end{bmatrix} \geq 0$$

2)

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & 0 & I \\ (1,2)^T & (2,2) & (2,3) & 0 & 0 \\ (1,3)^T & (2,3)^T & -\gamma_{e_i}^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_{e_i}^2 I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

où

$$\begin{aligned}
 (1,1) &= \Lambda_{N_i}^T \mathbf{P}_{i1} + \mathbf{P}_{i1} \Lambda_{N_i} - \overline{\Delta_{N_i}}^T \Omega_{Z_i}^T - \Omega_{Z_i} \overline{\Delta_{N_i}} \\
 (1,2) &= \Lambda_{N_i}^T \mathbf{P}_{i1} \Lambda_{\psi_{i3}} + \mathbf{P}_{i1} (\Lambda_{\psi_{i2}} - \Lambda_{\psi_{i3}}) - \overline{\Delta_{N_i}}^T \Omega_{Z_i}^T \Lambda_{\psi_{i3}} - \Omega_{Z_i} \overline{\Delta_{\psi_{i2}}} \\
 (1,3) &= \mathbf{P}_{i1} \Lambda_{\psi_{i3}} + \mathbf{P}_{i1} \psi_{i1} D_i \\
 (2,2) &= \Lambda_{\psi_{i3}}^T \mathbf{P}_{i1} \Lambda_{\psi_{i2}} + \Lambda_{\psi_{i2}}^T \mathbf{P}_{i1} \Lambda_{\psi_{i3}} - \Lambda_{\psi_{i3}}^T \Omega_{Z_i} \overline{\Delta_{\psi_{i2}}} - \overline{\Delta_{\psi_{i2}}}^T \Omega_{Z_i}^T \Lambda_{\psi_{i3}} - 2\mathbf{P}_{i2} \\
 (2,3) &= \Lambda_{\psi_{i3}}^T \mathbf{P}_{i1} \psi_{i1} D_i + \mathbf{P}_{i2}
 \end{aligned}$$

et

$$\overline{\Delta_{N_i}} = (I - \Delta_{G_i} \Delta_{G_i}^+) (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.197)$$

$$\overline{\Delta_{\Gamma_i}} = (I - \Delta_{G_i} \Delta_{G_i}^+) (I - \Sigma_i \Sigma_i^+) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.198)$$

$$\Lambda_{L_i} = -(\Lambda_{\Gamma_i} + \Lambda_{N_i} (K_i J_{i2} + \Lambda_{G_i} J_{i4})) \quad (3.199)$$

$$\overline{\Delta_{L_i}} = -(\overline{\Delta_{\Gamma_i}} + \overline{\Delta_{N_i}} (K_i J_{i2} + \Lambda_{G_i} J_{i4})) \quad (3.200)$$

$$\Lambda_{\psi_{i2}} = -K_i J_{i1} F_i - \Lambda_{G_i} J_{i3} F_i + \Lambda_{L_i} R_i - \Lambda_{N_i} \Lambda_{\psi_{i3}} \quad (3.201)$$

$$\overline{\Delta_{\psi_{i2}}} = \overline{\Delta_{L_i}} R_i - \overline{\Delta_{N_i}} \Lambda_{\psi_{i3}} \quad (3.202)$$

Dans ce cas  $\mathcal{Z}_i$  est donnée par :

$$\mathcal{Z}_i = (\mathbf{P}_{i1})^{-1} \Omega_{Z_i} (I - \Delta_{\psi_{i3}} \Delta_{\psi_{i3}}^+) \quad (3.203)$$

**Preuve 27** Tout d'abord, de l'équation (3.193) et de l'expression de  $\mathcal{E}_i$ , on peut voir que cette matrice est dépendante de  $\mathcal{Z}_i$ , tandis que pour appliquer les résultats de [MKOS97], il faut que la matrice  $\mathcal{E}_i$  soit indépendante du paramètre  $\mathcal{Z}_i$ . D'après (3.193) et (3.195), la matrice  $\mathcal{Z}_i$  doit alors satisfaire la condition suivante :

$$\mathcal{Z}_i \Delta_{G_i} = 0 \quad (3.204)$$

Il existe toujours une matrice  $\bar{Z}_i$  qui est solution de (3.204) telle que :

$$\mathcal{Z}_i = \bar{Z}_i (I - \Delta_{G_i} \Delta_{G_i}^+) \quad (3.205)$$

Dans ce cas, on aura :

$$N_i = \Lambda_{N_i} - \bar{Z}_i \overline{\Delta_{N_i}} \quad (3.206)$$

$$G_i = \Lambda_{G_i} \quad (3.207)$$

$$\Gamma_i = \Lambda_{\Gamma_i} - \bar{Z}_i \overline{\Delta_{\Gamma_i}} \quad (3.208)$$

$$L_i = \Lambda_{L_i} - \bar{Z}_i \overline{\Delta_{L_i}} \quad (3.209)$$

$$\psi_{i1} = -(K_i J_{i1} + \Lambda_{G_i} J_{i3}) \quad (3.210)$$

$$\psi_{i2} = \Lambda_{\psi_{i2}} - \bar{Z}_i \overline{\Delta_{\psi_{i2}}} \quad (3.211)$$

$$\psi_{i3} = \Lambda_{\psi_{i3}} \quad (3.212)$$

avec  $\Lambda_{N_i}$ ,  $\Lambda_{G_i}$ ,  $\Lambda_{\Gamma_i}$ ,  $\Lambda_{\psi_{i3}}$ ,  $\overline{\Delta_{N_i}}$ ,  $\overline{\Delta_{\Gamma_i}}$ ,  $\Lambda_{L_i}$ ,  $\overline{\Delta_{L_i}}$ ,  $\Lambda_{\psi_{i2}}$  et  $\overline{\Delta_{\psi_{i2}}}$  sont données respectivement par (3.184), (3.186), (3.188), (3.194), (3.197), (3.198), (3.199), (3.200), (3.201) et (3.202) .

Les matrices  $\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{A}_i$  et  $\mathcal{B}_i$  intervenant dans le système (3.196) deviennent :

$$\mathcal{E}_i = \begin{bmatrix} I & \Lambda_{\psi_{i3}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.213)$$

$$\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} \Lambda_{N_i} - \bar{Z}_i \bar{\Delta}_{N_i} & \Lambda_{\psi_{i2}} - \bar{Z}_i \bar{\Delta}_{\psi_{i2}} \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (3.214)$$

$$\mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} \psi_{i1} D_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.215)$$

$$\mathcal{C}_i = [ I \ 0 ] \quad (3.216)$$

Soit maintenant, une matrice  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^T > 0$  telle que

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i1} \mathbf{S}_i^T \\ \mathbf{S}_i \mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i2} \end{bmatrix} \quad (3.217)$$

En appliquant les résultats de Masubuchi [MKOS97] au système singulier (3.196) on obtient :

$$\mathcal{E}_i^T \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \mathcal{E}_i \geq 0 \quad (3.218)$$

et

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathcal{A}_i & \mathbf{P}_i \mathcal{B}_i & \mathcal{C}_i^T \\ \mathcal{B}_i^T \mathbf{P}_i & -\gamma_{e_i}^2 I & 0 \\ \mathcal{C}_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.219)$$

en remplaçant les matrices  $\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{B}_i$ ,  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathbf{P}_i$  par leurs valeurs respectives données par (3.213), (3.214), (3.215), (3.216) et (3.217) dans les LMIs (3.218) et (3.219), on obtient les LMIs du théorème 17.

Si les LMIs du théorème sont satisfaites,  $\bar{Z}_i$  et  $\mathcal{Z}_i$  peuvent être déduites en utilisant les relations suivantes  $\bar{Z}_i = (\mathbf{P}_{i1})^{-1} \Omega_{Z_i}$  et par suite  $\mathcal{Z}_i = (\mathbf{P}_{i1})^{-1} \Omega_{Z_i} (I - \Delta_{\psi_{i3}} \Delta_{\psi_{i3}}^+)$ . ■

#### Remarque 24

- Notons que dans [KLZ08], la synthèse du filtre dépend d'une condition restrictive portant sur la distance entre la paire  $(A_i, B_i)$  et l'ensemble des paires des matrices incontrôlables. La deuxième condition restrictive établie par Kalsi et al. porte sur les interconnexions qui sont supposées inconnues et dont les bornes ne peuvent pas être maximisées, ce qui est très important pour l'étude des systèmes électriques et en robotique [Swa-2008]. Dans ce travail, ces conditions sont relaxées par l'utilisation des inégalités matricielles linéaires (LMIs) pour la synthèse de la commande basée sur le filtre  $H_\infty$ . Ceci offre un degré de liberté additionnel par le filtre  $H_\infty$  où les interconnexions ne sont plus considérées comme inconnues tout en tenant compte de la maximisation des bornes de ces interconnexions. Ce qui aboutit à une résolution de la LMI.
- La synthèse du filtre et celle de la commande sont couplées, donc, le principe de séparation n'est pas établi. Cependant, l'avantage offert par la solution combinée à la synthèse de commande basée sur le filtre  $H_\infty$  c'est de relaxer les conditions restrictives sur les interconnexions. Dans ce qui suit, on donne quelques remarques sur le principe de séparation pour les systèmes de grandes dimension où on détaillera les avantages offerts par la solution combinée présentée dans ce travail.

### 3.3.4 Principe de séparation

Dans cette partie, on aborde le principe de séparation pour la commande basée observateur des systèmes de grande dimension. On présente l'avantage apporté par la solution combinée au problème de la commande basée sur un filtre présenté dans notre travail. En effet, la difficulté dans la synthèse de commande basée sur un filtre est : "comment combiner la solution du problème d'estimation et celui de la commande". Il est très connu [Kail80] que dans la théorie de commande classique, l'observateur et la commande peuvent être synthétisés séparément, comme le prouve une multitude de travaux. Cependant, pour les systèmes de grande dimension, le principe de séparation n'est pas toujours établi à cause des interconnexions entre les sous-systèmes.

En effet, pour le cas non singulier et d'après l'équation (3.4), la loi de commande  $u_i$  peut être écrite comme suit :

$$u_i(t) = K_i x_i(t) + e_i(t) \quad (3.220)$$

Alors, en insérant (3.220) dans le système (3.1a) et en utilisant l'expression de la dynamique d'erreur (3.190), on obtient le système augmenté en boucle fermée suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{e}_i(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{ii} + B_i K_i & B_i \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ e_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_i \\ \psi_{i1} D_i \end{bmatrix} v_i(X) + \begin{bmatrix} F_i \\ \psi_{i2} \end{bmatrix} w_i(t) \\ &- \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{i3} \end{bmatrix} \dot{w}_i(t) \end{aligned} \quad (3.221)$$

Pour le système singulier on a le système augmenté en boucle fermée suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{e}_i(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{ii} + B_i K_i & B_i \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ e_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_i \\ \psi_{i1} D_i \end{bmatrix} v_i(X) + \begin{bmatrix} F_i \\ \psi_{i2} \end{bmatrix} w_i(t) \\ &- \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{i3} \end{bmatrix} \dot{w}_i(t) \end{aligned} \quad (3.222)$$

D'après (3.221) et (3.222) , on peut déduire que le principe de séparation est établie lorsque  $\psi_{i1} D_i = 0$ .

Cette contrainte algébrique correspond à l'hypothèse que les interconnexions soient des entrées inconnues. Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée en pratique.

L'approche proposée peut être résumée par l'algorithme suivant :

- **Etape 1** : Déterminer le gain de retour d'état  $K_i$  assurant l'admissibilité et l'atténuation  $H_\infty$  du retour d'état du système (3.136), en résolvant les LMIs du Lemme 11.
- **Etape 2** : Calculer les matrices  $\Sigma_i$  et  $\Omega_i$  en utilisant respectivement (3.175) et (3.176).
- **Etape 3** : Calculer  $\Lambda_{N_i}$ ,  $\Lambda_{G_i}$ ,  $\Lambda_{\Gamma_i}$ ,  $\Lambda_{\psi_{i3}}$ ,  $\overline{\Delta}_{N_i}$ ,  $\overline{\Delta}_{\Gamma_i}$ ,  $\Lambda_{L_i}$ ,  $\overline{\Delta}_{L_i}$ ,  $\Lambda_{\psi_{i2}}$  et  $\overline{\Delta}_{\psi_{i2}}$  en utilisant respectivement (3.184), (3.186), (3.188), (3.194), (3.197), (3.198), (3.199), (3.200), (3.201) et (3.202)
- **Etape 4** : Résoudre la LMI du Théorème 17 afin d'obtenir  $\mathcal{Z}_i$ .
- **Etape 5** : Calculer  $N_i$ ,  $G_i$ ,  $\Gamma_i$  en utilisant (3.179), (3.180), (3.181) respectivement et déduire  $L_i$  et  $M_i$  à partir (3.182) et (3.183) respectivement, alors le filtre est complètement défini.

### 3.3.5 Exemple Numérique

Considérons le système singulier interconnecté de la forme (3.136) formé par deux sous-systèmes.



**Sous-système 1** est donné par :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = [0 \ 1 \ 1], R_1 = 1.$$

**Sous-système 2** est donné par :

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1 & 0 \\ -40.8 & -14.5 & -9.35 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pour le sous-système 1 et sous l'Hypothèse 8, les matrices  $J_{11}$ ,  $J_{12}$ ,  $J_{13}$  et  $J_{14}$  sont données par :

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, J_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, J_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T, J_{14} = 0.$$

et pour le sous-système 2 les matrices  $J_{21}$ ,  $J_{22}$ ,  $J_{23}$  et  $J_{24}$  sont :

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.33 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.33 & -0.33 \\ 0 & 0 \\ 0.33 & 0.66 \end{bmatrix}, J_{23} = \begin{bmatrix} 0 & -0.44 & 0 & -0.63 \\ 0 & 0.36 & 0 & -0.77 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$J_{24} = \begin{bmatrix} 0.44 & -0.44 \\ -0.36 & 0.36 \end{bmatrix}.$$

### Synthèse du gain de retour d'état

Le gain de retour d'état  $K_i$  ( $i = 1, 2$ ) qui assure l'admissibilité et le critère de performance  $H_\infty$ , selon la section 3.3.2, est déterminé en résolvant la LMI du Lemme 11 pour  $\beta = 0.08$  [KLZ08], on obtient :

**Pour le sous-système 1 :**

$$\gamma_1 = 9 \text{ et } K_{11} = 10^4 \times [0 \ -2.02 \ 0] \text{ avec } \Omega_{K1} = 10^8 \times [0 \ -2.7608 \ 0]$$

**Pour le sous-système 2 :**

$$\gamma_2 = 7.4 \text{ et } K_{21} = [-28.78 \ -28.94 \ -2.46 \ 0] \text{ avec } \Omega_{K2} = [-0.9683 \ -0.4361 \ -0.1597 \ 0]$$

### Synthèse du correcteur basé sur un filtre

En se référant à la section 3.3.3, on obtient :

**Pour le sous-système 1**

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -20202 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \Omega_1 = 10^4 \times [ 0 \quad 1.2121 \quad 0 \quad 0 ], \Lambda_{N_1} = -0.6,$$

$$\Lambda_{\Gamma_{11}} = -2.2901 \times 10^{-5}, \Lambda_{\Gamma_{12}} = -3.8169 \times 10^{-5}, \Delta_{N_1} = 10^{-9} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0.067 \\ 0.27 \end{bmatrix}, \Delta_{\Gamma_{11}} = 10^{-5} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.11 \\ -0.66 \end{bmatrix}, \Delta_{\Gamma_{12}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour  $\gamma_{e_1} = 8$ , on obtient

$$\Omega_{Z_1} = 10^4 \times [ 0.1638 \quad 0.1638 \quad 0.1638 ], \mathcal{Z}_1 = [ 0.0116 \quad 0.0116 \quad 0.0116 ]$$

Alors, les matrices du filtre sont données comme suit :

$$N_1 = -0.6, K_1 = -2.9913 \times 10^{-8}, L_1 = -6.4646 \times 10^{-8} \text{ et } G_{11} = -2.0202 \times 10^4.$$

**Pour le sous-système 2**

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} -28.78 & -28.94 & -2.46 & 0 & 0 \\ 0.63 & 0.269 & 0.448 & -0.63 & 1.07 \\ 0.77 & -0.21 & -0.36 & -0.77 & 0.41 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \Omega_2 = [ 114.78 \quad -4.68 \quad 3.71 \quad 2.46 \quad -48.08 ]$$

$$\Lambda_{N_2} = -0.6, \Lambda_{\Gamma_{21}} = 4.7835, \Lambda_{\Gamma_{22}} = -1.7764 \times 10^{-5}, \Delta_{N_2} = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 0.99 \\ -0.04 \\ -0.006 \\ -0.065 \\ -0.062 \end{bmatrix}, \Delta_{\Gamma_{21}} =$$

$$10^{-5} \times \begin{bmatrix} -0.40 \\ 0.0109 \\ 0.0028 \\ 0.0196 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \Lambda_{\Gamma_{22}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et pour  $\gamma_{e_2} = 12$ , on a

$$\Omega_{Z_2} = 10^6 \times \begin{bmatrix} -1.62 \\ -1.62 \\ -1.62 \\ -1.62 \\ -1.62 \end{bmatrix}^T, \mathcal{Z}_2 = 10^5 \times \begin{bmatrix} -8.66 \\ -8.66 \\ -8.66 \\ -8.66 \\ -8.66 \end{bmatrix}$$

Alors, les matrices du filtre sont données comme suit :

$$N_2 = -6.4060, K_1 = [ -38.9187 \quad -14.7962 ], L_2 = -6.4646 \times 10^{-8} \text{ et } G_{21} = 33.5649.$$

La figure 3.5 représente le comportement de la perturbation utilisée  $w_i(t)$  et les figures 3.6 et 3.7 montrent respectivement l'évolution des erreurs d'estimation du correcteur basé sur le filtre  $H_\infty$  des sous-systèmes 1 et 2. Ce qui montre l'efficacité de l'approche proposée.

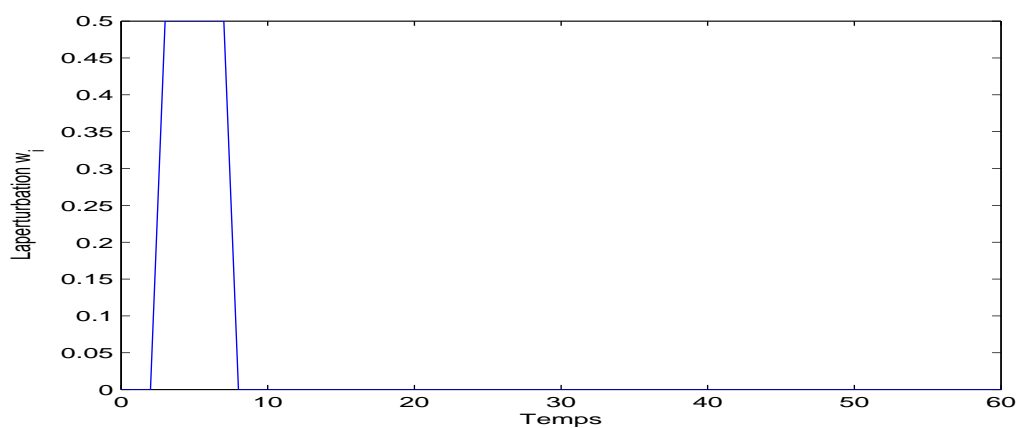


FIG. 3.5 – L'allure de la perturbation utilisée  $w_i(t)$

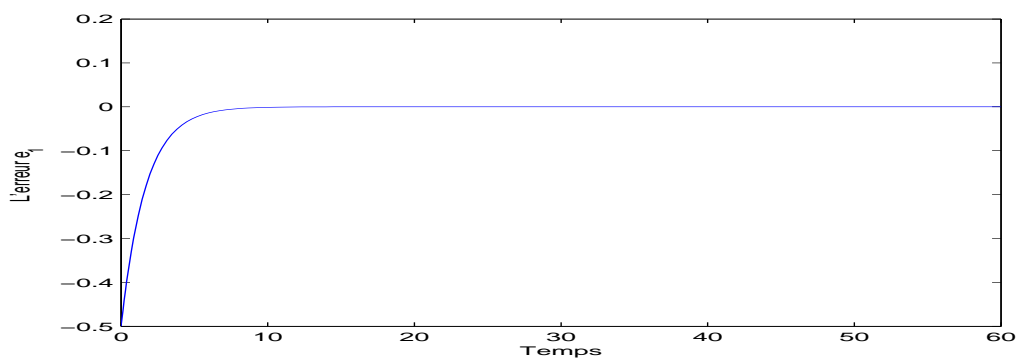


FIG. 3.6 – L'évolution de l'erreur d'estimation  $e_1(t)$

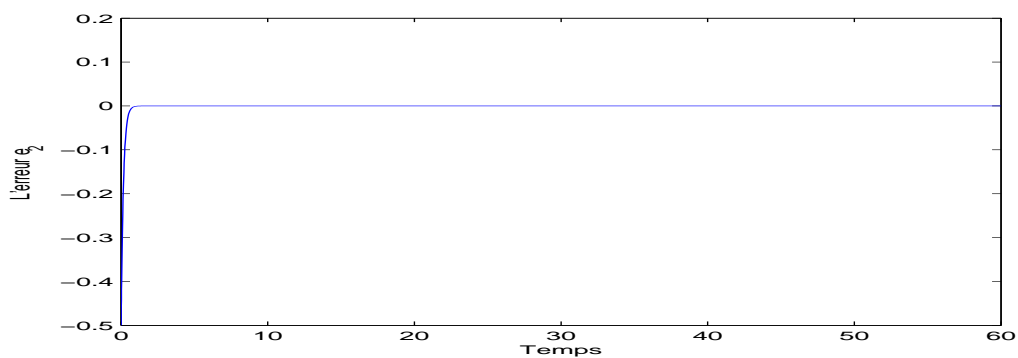


FIG. 3.7 – L'évolution de l'erreur d'estimation  $e_2(t)$

## 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a proposé dans le premier volet, une méthode de synthèse d'une commande basée sur un filtre  $H_\infty$  pour une classe de système standard de grande dimension. Ce système, dont les interconnexions sont considérées comme globalement bornées et vérifiant une contrainte quadratique, est soumis à des perturbations à énergie bornée. L'approche est une extension des travaux de Kalsi et al. développée pour les systèmes standards déterministes au cas des systèmes perturbés. Le gain de ce filtre est paramétré en utilisant les conditions de non biais de la dynamique de l'erreur d'estimation et les conditions d'existence de ce filtre sont obtenues à l'aide des inégalités matricielles linéaires (LMIs). L'utilisation des LMIs génère des conditions de solvabilité moins restrictives que celles introduites dans les travaux de Kalsi et al. et qui se rapportent à la distance entre la paire de matrices formée par la matrice d'état et la matrice d'entrée d'une part et l'ensemble de paires de matrices incontrôlables d'autre part. De plus, on tient compte de la maximisation des bornes de l'interconnexion inconnue, ce qui est très important en pratique. Cette première partie est récapitulée par un algorithme résumant les différentes étapes de synthèse et elle est clôturée par l'application des résultats proposés sur un système électrique composé de trois machines interconnectées. Le choix de cet exemple est motivé par sa particularité de satisfaire la contrainte quadratique sur les interconnexions.

Dans le second volet du chapitre, on a considéré le problème de la commande via un filtre  $H_\infty$  pour une classe de système singulier de grande dimension soumis à des perturbations à énergie bornée. Les interconnexions de ce système sont aussi considérées comme globalement bornées et vérifiant une contrainte quadratique. L'approche est une extension des travaux de Kalsi et al. au cas des systèmes singuliers perturbés.

Il s'agit de synthétiser un gain par retour d'état qui stabilise la boucle fermée du système objet d'étude. Un filtre  $H_\infty$  est proposé par la suite afin de reconstruire ce retour d'état. Les inégalités matricielles linéaires sont utilisées pour le calcul du gain par retour d'état et du gain du filtre. L'avantage de cette méthode est de construire un filtre qui a la même dimension que la commande, car la sortie du filtre donne directement la commande à estimer. La dernière partie du chapitre est consacré à une application numérique permettant d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

# Conclusion Générale

## *Principales contributions*

On s'est intéressé tout au long de nos travaux, à l'estimation, au filtrage  $H_\infty$  et à la commande basée-observateur pour les systèmes de grande dimension. L'étude porte sur les systèmes linéaires standards mais aussi sur les systèmes algèbro-différentiels appelés aussi systèmes singuliers pour couvrir la classe la plus large possible des systèmes de grande dimension.

Ainsi on a commencé par un état de l'art concernant la problématique des systèmes de grande dimension où on a donné quelques définitions relatives aux systèmes de grande dimension interconnectés et non interconnectés. Les outils de structuration et de décentralisation des systèmes sont aussi présentés tels que la méthode des graphes, les techniques de recouvrements...

Dans le chapitre 2, on a proposé des méthodes de synthèse d'observateurs décentralisés et de filtrage  $H_\infty$  pour des systèmes de grande dimension standards et singuliers. On a cherché à éliminer l'effet des interconnexions, considérées comme inconnues, sur la dynamique de l'erreur d'observation. La synthèse de l'observateur est basée sur des LMIs permettant de déterminer la matrice de gain paramétrant toutes les matrices du dit observateur. La formulation LMI est basée sur l'approche de Lyapunov et déduite des différents lemmes bornés.

Ensuite, on a proposé des filtres décentralisés qui permettent d'assurer, en plus de la stabilité, un critère de performance  $H_\infty$ . Cela veut dire qu'on a cherché à atténuer l'effet des perturbations, supposées être inconnues mais à énergie finie, sur la dynamique de l'erreur d'estimation. On a proposé alors, une approche unifiée au problème de synthèse des observateurs décentralisés qui couvre les observateurs d'ordre plein, d'ordre réduit et d'ordre minimal. Cette méthode est basée sur une nouvelle paramétrisation de l'équation de Sylvester généralisée. Les inégalités matricielles linéaires (LMIs) sont utilisées pour le calcul du gain de l'observateur et l'approche est validée par un exemple numérique.

On a abordé à la fin du chapitre 2, l'étude des observateurs interconnectés pour les systèmes singuliers de grande dimension. En effet, on a proposé une nouvelle méthode permettant de synthétiser une nouvelle forme d'observateurs interconnectés connectivement stables. On s'est intéressé à la capacité d'un tel observateur à être stable de manière robuste vis-a-vis des incertitudes sur les interconnexions entre les sous-observateurs qui les forment. Cette stabilité est assurée non seulement en présence des interconnexions entre sous-observateurs, mais aussi pour certains types de non-linéarité au niveau de ces interconnexions. L'analyse de stabilité est basée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov quadratiques et l'approche de la stabilité connective. La méthode proposée est testée sur un exemple numérique.

Enfin, on s'est intéressé dans le chapitre 3, à l'application des méthodes d'estimation proposées dans le cadre de la commande. En effet, dans un premier temps, on a proposé une commande décentralisée basée sur un filtre  $H_\infty$  pour une classe de systèmes de grande dimension standards à interconnexions non-linéaires. L'approche est une extension des travaux de Kalsi et al. aux cas des systèmes perturbés standards. En effet, on a commencé par le calcul du gain de retour

d'état qui satisfait les spécifications du système bouclé. Puis, on a synthétisé un filtre qui a pour but de fournir en sortie une estimée de ce retour d'état. L'approche a été validée sur un exemple de système composé de trois machines électriques interconnectés.

Dans le second volet du chapitre, on a considéré le problème de la commande via un filtre  $H_\infty$  pour une classe de système singulier de grande dimension soumis à des perturbations à énergie finie. Les interconnexions de ce système sont aussi considérées comme globalement bornées et vérifiant une contrainte quadratique. L'approche est une extension des travaux de Kalsi et al. au cas des systèmes singuliers perturbés. Un gain par retour d'état qui stabilise la boucle fermée du système objet de l'étude est synthétisé et un filtre  $H_\infty$  est proposé par la suite afin de reconstruire ce retour d'état. Les inégalités matricielles linéaires sont utilisées pour le calcul du gain par retour d'état et des paramètres du filtre. L'avantage de cette méthode est de construire un filtre qui a la même dimension que la commande, car la sortie du filtre est bien la commande à estimer.

L'un des principaux apports de nos travaux, a été de proposer une nouvelle méthode de synthèse de commande basée sur un filtre  $H_\infty$  qui est appuyée sur des conditions de solvabilité moins restrictives que celles introduites dans les travaux de Kalsi et al. Ainsi, on a relaxé les contraintes qui portaient sur la distance entre la paire de matrices formée par la matrice d'état et la matrice d'entrée d'une part et l'ensemble de paires de matrices incontrôlables d'autre part. De plus, la méthode tient compte de la maximisation des bornes de l'interconnexion, ce qui est très important en pratique. La dernière partie du chapitre est consacrée à une application numérique permettant d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

Au final, on tient à préciser qu'on a choisi volontairement dans ce travail de ne pas employer des techniques de simplification telles que la troncature ou la théorie des graphes qui permet de négliger certains termes faiblement interconnectés. Le but était de couvrir une plus large variété de systèmes à faibles et fortes interconnexions. Ce choix nous a permis de présenter à l'utilisateur deux types d'observateurs à savoir les observateurs décentralisés à interconnexions inconnues et les observateurs interconnectés connectivement stables. Cela est d'autant plus important qu'on sait que les observateurs interconnectés connectivement stables sont les mieux adaptés aux systèmes où la dimension des interconnexions est grande. De plus, ils assurent à la fois la stabilité locale au niveau de chaque sous-système et la stabilité globale en tenant compte des interactions. Pour la synthèse des observateurs décentralisés à interconnexions inconnues, certes, les hypothèses formulées dans ce rapport dépendent du niveau de complexité des systèmes étudiés car les dimensions des interconnexions peuvent limiter l'utilisation de ces observateurs, mais, en contrepartie, on a présenté à l'utilisateur des outils de structuration permettant de faire ressortir une forme plus adaptée à l'analyse. Un des outils de structuration est la recherche de recouvrement ; cet outil constitue une des alternatives à la complexité car il permet de réduire la dimension des interconnexions. Cependant, la décomposition par recouvrement augmente la dimension de la matrice d'état et n'est applicable que sur des sous-systèmes qui se partagent physiquement des états, des entrées et des sorties.

En ce qui concerne la partie commande, nos travaux de thèse sont, à notre connaissance, parmi les premiers travaux de thèse à essayer de synthétiser une commande basée observateur où les interconnexions ne sont pas considérées comme inconnues. Cela permet d'étudier des systèmes de plus en plus complexes où les dimensions des interconnexions sont élevées.

### *Perspectives*

Comme perspectives à ce travail, nous proposons d'utiliser d'autres méthodes de décentralisation pour la synthèse d'observateurs des systèmes de grandes dimensions, telles que la recherche

---

de recouvrements (overlapping) et le principe d'inclusion. Signalons qu'on n'a considéré dans ce mémoire que la décentralisation des systèmes, mais l'étude des systèmes de grande dimensions nous fait prendre conscience du manque de méthodologies de synthèse exploitant des structures de système autre que décentralisée. Des travaux comme ceux de K. Hiramoto et al. [HBG05] s'intéressent au cas des systèmes mécaniques symétriques ouvrent des perspectives intéressantes. Un autre point qu'on pourrait développer, serait d'exploiter la stabilité connective pour la synthèse d'une commande basée sur un observateur interconnecté.

Enfin, il serait intéressant de penser à une méthode de synthèse d'observateur décentralisé et de commande basée observateur pour les systèmes de grande dimension à retard, en tenant compte des contraintes de communication.





# Bibliographie

- [AM99] M. Aldeen and J. F. Marsh. *Decentralised observer-based control scheme for interconnected dynamical systems with unknown inputs*. Inst. Electr. Eng. Proc. Control Theory Appl., vol. 146, pp. 349-357, 1999.
- [Bas92] A. Bassong-Onana. *Filtrage Optimal des Systèmes Dynamiques Discrets : Décentralisation et Robustesse Numérique*. Thèse de doctorat, université de Nancy 1, 1992.
- [Bam97] B. Bamieh. *The Structure of optimal controllers of spatially-invariant distributed parameter systems* in Proc. IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, USA, 1997.
- [BD92] A. Bassong-Onana, M. Darouach *Optimal filtering for singular systems using orthogonal transformations* Cont. Th. Adv. Tech., vol.8, 731-742, 1992.
- [BDRRZ92] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis. *Automatique : modélisation et identification des processus tome 2*. Collection Méthodes et pratiques de l'ingénieur, Ed. Technip, 1992.
- [Ben07] A.A. BENLATRECHE *Contribution à la commande robuste  $H_\infty$  de systèmes à grande échelle d'enroulement de bandes flexibles*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur - Strasbourg I, 2007.
- [Ber88] P. Bertrand, *Réduction des grand-systèmes-Agrégation, Méthodes dites de Perturbations, Aperçus sur la commande hiérarchisée*, Support de cours DEA "Automatique et Traitement du Signal", 1988.
- [BGFB94] Boyd. S, El Ghaoui. L, Feron. E, and BalaKrishnan. V *Linear Matrix Inequality in systems and control theory* SIAM, Philadelphia, USA, 1994.
- [Bie77] G.J Bierman *An application of the square root information filter to large scale linear interconnected systems*. IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, Louisiana, 1977.
- [BPD02] B. Bamieh, F. Paganini, A. Dahleh. *Distributed control of spatially invariant systems* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, N°7, 2002.
- [BRRR01] L. Bakule, J. Rodellar, M. Rossell, P. Rubio. *Preservation of controllability - observability in expanded systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, N°7, pp. 1155-1162, 2001
- [BT82] J. Bernussou, A. Titli. *Interconnected dynamical systems : stability, decomposition and decentralisation* North-Holland, 1982
- [Cam82] S.L.Campbell "Singular systems of differential equations". vol.I and vol.II : Pitman, 1980, 1982.
- [Chi05] Chiang-Cheng Chiang "Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control For Time-Delay Uncertain Large-Scale Systems", IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, Spain, 2005

- [CL98] C.T.Chen, Y.Q.LIU "Sufficient and necessary conditions of asymptotical stability of Singular Linear System", Journal of South China University of Technology, vol .26, No.3.pp.1-6,1998.
- [Cla05] F. Claveau. *Contribution à l'analyse et la commande des grands systèmes*. Thèse de doctorat, Ecole centrale de Nantes et Université de Nantes, 02 Décembre 2005.
- [Dai89] L. Dai *Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 118, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [Dal76] K.C Daly The computation of Luenberger canonical form using elementary similarity transformations, *Int J.Syst.Sci*, vol 7, 1-15, 1976.
- [Dar06] M. Darouach, *Solution to Sylvester equation associated to linear descriptor systems*. Systems and Control Letters pp 835-838, 2006.
- [Dar09] M. Darouach, *Complement to full order observer design for linear systems for unknown inputs*. Applied Mathematic Letters pp 1107-1111, 2009.
- [DB95] M. Darouach, M. Boutayeb. *Design of Observers for Descriptor Systems*. IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 40, NO. 7. July 1995
- [DB08] M. Darouach, L. Boutat-Baddas. *Observers for Lipschitz nonlinear descriptor systems : Application to unknown inputs systems* 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, 2008
- [DB09] M. Darouach, L. Boutat-Baddas *Observers for class of nonlinear singular systems* IEEE Trans.Automat.Contr., vol.53, pp.2627-2633, 2009.
- [DZM93] M. Darouach, M.Zasadzinski, D.Mehdi. *State estimation of stochastic singular linear systems* Int. J.Syst. Sci., 345. 1993.
- [DZX94] M. Darouach, M.Zasadzinski, Xu S.J *Full order observers for linear systems with unknown input*, IEEE Trans. Autom. Control, vol AC 39, pp. 606-609,1994.
- [DZB95] M. Darouach, M. Zasadzinski, A. Bassong Onana, and S. Nowakowski *Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems* Int. J.Syst. Sci., 26 ,2015-2028, 1995.
- [DZS01] Darouach.M, Zasadzinski.M and Souley Ali.H *Robust reduced order unbiased filtering via LMI*, Proceedings of the 6th European Control Conference. Porto, Portugal, September 2001.
- [DZ09] M. Darouach, M. Zasadzinski. *Optimal unbiased reduced order filtering for discrete-time descriptor systems via LMI*, Systems and control letters, 436-444, 2009.
- [DCW03] J.M. Dion, C. Commault, J. van der Woude. *Generic properties and control of linear structured systems : a survey* Automatica, vol. 39, pp.1125-1144, 2003
- [EB02] S. Elloumi and E. B. Braiek, *Robust decentralized control for multimachine power systems The LMI approach* in Proc. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, vol. 6, Yasmine Hammamet, Tunisia, Oct. 2002.
- [ESDM11] M. Ezzine, H. Souley Ali, M. Darouach, H.Messaoud. "Acontroller design based on functional  $H_\infty$  filter for descriptor systems : the time and frequency domains cases". Automatica 48, 542-549, 2012.
- [Ezz11] M. Ezzine. *Observation et Commande des Systèmes Linéaires dans les Domaines Temporel et Fréquentiel*. Thèse de doctorat, université de Lorraine, 2011.
- [FGS87] C.Foulard, S.Gentil et J.P. Sandraz. *Commande et régulation par ordinateur numérique* Eyrolles, Paris, 1987.

- 
- [FP62] M. Fiedler and V. Ptak *On matrices with on-positive off diagonal elements and positive principal minors* Czech.Math. Journal, vol. 12, 1962.
- [Fra87] B. A. Francis. *A Course in  $H_\infty$  Control Theory*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1987.
- [Ger79] J.C Geromel *Contribution à l'étude des systèmes dynamiques interconnectés : aspects de décentralisation*. Thèse pour l'obtention de grade de docteur d'état, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1979.
- [GNLC93] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. Laub, et M. Chilali. *LMI Control Toolbox* The Mathworks Inc,1995.
- [GS89] : D. T. Gavel and D. D. Siljak *Decentralized adaptive control : Structural conditions for stability* IEEE Trans. Autom. Control, vol. 34,no. 4, pp. 413-426, Apr. 1989.
- [GS91] Y. P. Guan and M. Saif, *A novel approach to the design of unknown input observers* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 36, pp. 632-635, 1991.
- [GWH00] G. Guo, Y. Wang, and D. J. Hill, *Nonlinear decentralized control of large-scale power systems* Automatica, vol. 36, no. 9, pp. 1275 - 1289, Sep. 2000.
- [GWM96] Z. Gong, C. Wen, and D. P. Mital *Decentralized robust controller design for a class of interconnected uncertain systems : With unknown bound of uncertainty* IEEE Trans. Autom. Control, vol. 41, no. 6, pp.291-298, Jun. 1996.
- [HBG05] K. Hiramoto, Y. Bai, K.M. Grigoriadis *Upper bound  $H_\infty$  and  $H_2$  control for symmetric mechanical systems* IFAC World Congress, Prague, 2005.
- [Hau83] M.L.J Hautus *Strong detectability and observers, Linear Algebra and its applications*, vol 50, pp 353-368,1983.
- [HS85] M. Hodzic and D.D. Siljak *Estimation and control of large sparse systems* Automatica, 21 ,277-292, 1985.
- [HLYC05] N. Hovakimyan, E. Lavretsky, B.J.Yang, and A. J. Calise *Coordinated decentralized adaptive output feedback control of interconnected systems* IEEE Trans.Autom. Control, vol. 16, no. 1, pp. 185-194, Jan. 2005.
- [HJ90] R.A.Horn et C.R.Johnson. *Matrix analysis* Cambridge University Press, Cambridge. 1990
- [HM76] Y.C HO, S.K Mitter. *Directions in large scale sytems* Plentum, New York, 1976.
- [HM92] M. Hou and P. C. Muller, *Design of observers for linear systems with unknown inputs* IEEE Trans. Automat.Contr., vol. 37, pp. 871-875, 1992.
- [HSST78] Hassan, M.F., Salut, G., Singh, M.G et A.Titli. *A decentralized computationnal algorithm for global Kalman filter* IEEE Transactions on Automatic Control, vol AC-23, pp 262-268, 1978
- [HS94] M. Hovd, S. Skogestad, *Sequential Design of Decentralized Controllers*, Automatica, vol. 30, N° 10, pp. 1601-1607, 1994
- [Rosen74] Rosenbrock, *Structural Properties of Linear Dynamical Systems* Int. J. Contr., vol. 20, pp. 191-202, 1974.
- [Hov05] N. Hovakimyan, E. Lavretsky, B.-J. Yang, and A. J.Calise, *Coordinated decentralized adaptive output feedback control of interconnected systems*, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 16, no. 1, pp. 185-194, Jan. 2005.

- [Ift93] A. Iftar. *Overlapping decentralized dynamic optimal control*. International Journal of Control, vol. 58, pp. 187-209, 1993
- [IS80] M. Ikeda, D.D. Siljak. *Overlapping decompositions, expansions, and contractions of dynamic systems*. in Proc. IFAC Large Scale Systems, vol. 1, pp. 29-38, 1980.
- [ISW84] M. Ikeda, D.D. Siljak, D.E. White. *An inclusion principle for dynamic systems* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-29, N°3, pp. 244-249, 1984
- [IS94] T. Iwasaki, R. Skelton, *All controllers for the general  $H_\infty$  control problems*, LMI existence conditions and state space formulas, Automatica 30 (1994), 1307-1317.
- [Kail80] Kailath, T. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [KLZ08] K.Kalsi, J.Lian S.H. Zak *Observers for linear systems with unknown inputs* 47th IEEE Conference on Decision and Control Cancun, Mexico, Dec. 9-11, 2008
- [KLZ09a] K. Kalsi, J. Lian and S.H. Zak "Reduced-order observer-based decentralised control of non-linear interconnected systems", International Journal of Control, 1157 - 1166, 2009
- [KLZ09b] K. Kalsi, J. Lian and S.H. Zak "On decentralised control of non-linear interconnected systems", International Journal of Control,3,541-554, 2009.
- [KLZ09c] K. Kalsi, J. Lian and S.H. Zak "Decentralized control of multimachine power systems", IEEE American Control Conference 2009, Missouri, USA June 10 - 12, 2009.
- [KLZ10] K. Kalsi, J. Lian and S.H. Zak "Decentralised dynamic output feedback control of non-linear interconnected systems", IEEE Trans. Autom. Control, vol.55, no. 8, 2010
- [Kuc91] V.Kucera, *Analysis and design of discrete control systems*, Prentice Hall International, Series in systems and control engineering, 1991
- [KVR80] P.Kudva, N.Viswanadham, A. Ramakrishna, *Observers for linear systems with unknown inputs*, IEEE Trans. Autom. Control, vol AC 25, pp. 113-115,1980.
- [LL69] Lakshmikantham, V. ; and Leela, S. *Differential and Integral Inequalities*, vols. I and II, Academic Press, New York, 1969.
- [Lue71] D. G. Luenberger *An introduction to observers* IEEE Trans. Automat. Contr.,vol.16, pp. 596-602, 1971.
- [Mah77] M.S Mahmoud. *Multilevel systems control and application : a survey* IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, vol.SMC-7, pp.125-143, 1977.
- [MBDH] M. MANSOURI, L. BOUTAT-BADDAS, M. DAROUACH and H. MESSAOUD *Decentralized observers for a class of large scale singular systems via LMI* à paraître dans International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics
- [MBDH<sub>a</sub>] M. Mansouri, L. Boutat-Baddas, M. Darouach and H. Messaoud *Filter based decentralized control for large scale descriptor systems* submitted to International Journal of Control, Automation and Systems.
- [MBDH<sub>b</sub>] M. Mansouri, L. Boutat-Baddas, M. Darouach and H. Messaoud  *$H_\infty$  filter based decentralized control for a class of large scale system* soumis to Automatica.
- [MBDH09] M. Mansouri, L. Boutat-Baddas, M. Darouach and H. Messaoud *Decentralized observers design for large scale systems* 10th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA 2009), December 20-22, 2009, Hammemet, Tunisia.

- 
- [MBDH10] M. Mansouri, L. Boutat-Baddas, M. Darouach and H. Messaoud *Observateur décentralisé des systèmes de grande dimension à entrées inconnues* Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2010), Juin 2-4, 2010, Nancy, France.
- [MBDH10a] M. Mansouri, L. Boutat-Baddas, M. Darouach and H. Messaoud *Approche LMI pour la synthèse d'observateur décentralisé à grande dimension* 16ème Colloque National dans la recherche dans les IUT (CNRIUT 2010), Juin 9- 11, 2010, Angers, France.
- [MBDH10b] M. Mansouri, L. Boutat-Baddas, M. Darouach and H. Messaoud *Decentralized observers design for descriptor systems* 18th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2010), June 23- 25, 2010, Marrakech, Morocco.
- [MBDH10c] M. Mansouri, L. Boutat-Baddas, M. Darouach and H. Messaoud *Robust filtering for descriptor large scale systems via LMI* 12th IFAC-LSS, Large Scale System : Theory and application, July 11-14, 2010, Villeneuve d'Ascq, France.
- [MBDHd] M. Mansouri, L. Boutat-Baddas, M. Darouach and H. Messaoud *Decentralized observers for a class of large scale singular systems via LMI* IEEE International Conference on System and Control, June 20-22, 2012, Marrakech,
- [Men71] J.M Mendel. *Computation requirements for a discret Kalman filter*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol 16, pp 748-758, 1971
- [MK71] S.M. Melzer, B.C. Kuo. *Optimal regulation of systems described by a countably infinite number of objects* Automatica, vol. 7, N°7, pp. 359-366, 1971.
- [MKOS97] Izumi.Masubuchi, Yoshiyuki. Kamitane, Atsumi. Ohara and Nobuhide. Suda  *$H_\infty$  Control for descriptor Systems : A Matrix Inequalities Approach* , Automatica, vol 33, No. 4, pp 669-673, 1997.
- [MOS98] Masubuchi. I, Ohara. A, Suda. N , *LMI-Based controller synthesis : a unified formulation and solution* Journal international journal of robust and nonlinear control 8, 669-686, 1998.
- [MMT70] M.D. Mesarovic, D. Macko, and Y. Takahara. *Theory of hierarchical multi-level systems*. Academic Press, New-York, 1970.
- [MOS98] Masubuchi. I, Ohara. A, Suda. N , "LMI-Based controller synthesis : a unified formulation and solution", Journal international journal of robust and nonlinear control 8, 669-686, 1998.
- [MZ89] M. Morari, and E. Zafriou, *Robust process control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989
- [NK91] K. Nagpal, P. Khargonekar *Filtering and smoothing in an  $H_\infty$  setting*. IEEE Transactions on Automatic Control 36, pp. 152-166,1991.
- [Rot] F. Rotella *Cours de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes*
- [Sch02] H. Schmidt. *Model based design of decentralized control configurations* Thèse de doctorat, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2002
- [Sco97] G. Scorletti. *Approche unifiée de l'analyse et de la commande des systèmes par formulation LMI* Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, 1997.
- [Sil78] D.D. Siljak. *Large-scale dynamic systems Stability and Structure*. North-Holland, New-York, 1978.
- [Sil91] : D.D. Siljak. *Decentralized control of complex system* Mathematics in science and engineering, Volume 184, Edited by William F. Ames, Georgia Institute of Technology, 1991.



- [SJ03] H. Schmidt, E. W. Jacobsen, *Selecting control configurations for performance with independent design* Computer and Chemical Engineering, vol. 27, pp. 101-109, 2003
- [SL73] Singh, S.P. et R-W. Liu. *Existence of state equation representation of linear large scale dynamical system* IEEE Transaction on circuit Theory, vol. CT 20, pp 239-246. 1973
- [SV78] : D.D. Siljak, M.B. Vukcevic *On decentralized estimations*, Int. Journal of Contr., 27, 113-131, 1978.
- [Sin80] M.G. Singh *Dynamical hierarchical control*. Revised Edition (First edition 1977), North-Holland, 1980.
- [Sou02] Harouna SOULEY ALI. *Observateurs robustes d'ordre réduit pour les systèmes linéaires et bilinéaires incertains*. Thèse de doctorat, université Henri Poincaré - Nancy 1, 2002
- [SS86] M.E. Sezer, D.D.Siljak. *Nested  $\epsilon$ -decompositions and clustering of complex systems* Automatica, vol. 22, n°3, pp. 321-331, 1986
- [SS93] *Decentralized control for interconnected uncertain systems : Extension to high-order uncertainties*, Internat. J. Control 57 (1993) 1453-1468.
- [SS02] S.S. Stankoviæ, D.D. Siljak. *Model abstraction and inclusion principal : a comparaison*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, N°3, pp. 529-532, March 2002
- [SP01] S. Skogestad, I. Postlethwaite, *Multivariable feedback control* John Wiley and Sons, 2001
- [GM86] P. Grosdidier, M. Morari, *Interaction measures for systems under decentralized control*, Automatica, vol. 22, pp. 309-312, 1986
- [SVAS78] N.R. Sandell, J.P. Varaiya, M. Athans, M.G. Safonov *Survey of decentralized control methods for large scale systems* IEEE Transactions On Automatic Control, vol. AC-23, N°2, pp. 108-128, Avril 1978.
- [SZ95] D.D. Siljak, A.I. Zecevic *A nested decomposition algorithm for parallel computations of very large sparse systems*. Mathematical Problems in Engineering, vol. 1, pp. 41-57, 1995
- [Swa-2008] A.Swarnakar, *Robust control of large scale system with application to an industrial integrated energy plant*, Phd submitted to the Faculty of Graduate Studies and Research, Department of Electrical and Computer Engineering, Alberta, 2008.
- [O'Rei83] : O'Reilly.J *Observers for Linear Systems"*, *Mathematics in sciense and engineering*, Vol.170, New York, NY : Academic press , 1983.
- [Owens85] D. H. Owens *Consistency and Iiapnnov Stability of Linear Descriptor Systems : A Geometric Analysis*, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 139-151, 1985
- [Pea71] J.D. Pearson. *Dynamical decomposition techniques, in Optimisation methods for large scale systems* D.A. Wismer (editor), McGraw-Hill, 1971.
- [Peter03] P.C. Muller *On the stability of linear descriptor systems by applying modified Lyapunov equations*, PAMM · Proc. Appl. Math. Mech. 3, 136-137 (2003).
- [PCK91] P.Hr. Petkov, N.D. Christov and M.M. Konstantinov *Computational methods for linear control systems*, Prentice Hall, New York, 1991.
- [WHG98] Y. Wang, D. J. Hill, and G. Guo, *Robust decentralized control for multimachine power systems*, IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol. 45, no. 3, pp. 271-279, Mar. 1998.

- 
- [Wu07] H.Wu, *Decentralized iterative learning control for a class of large scale interconnected dynamical systems* J. Math. Anal. Appl. 327 (2007) 233-245
- [YMK03] T.K. Yeu, N. Matsunaga, S.Kawaji. *Decentralization of interconnected system Descriptor Systems via estimation of disturbances* Proceeding of the American Control Conference, Denver, Colorado June, 4-6, 2003.
- [YW88] F. Yang and R. W. Wilde *Observers for linear systems with unknown inputs* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 33, pp. 677-681, 1988.
- [ZXS08] G. Zhang, Y. Xia, P. Shi *New bounded real lemma for discrete-time singular systems*, Automatica 44 (2008) 886-890.





## Résumé

Dans ce mémoire, on s'est intéressé aux problèmes d'estimation, de filtrage  $H_\infty$  et de la commande basée observateur des systèmes de grande dimension. L'étude porte sur les systèmes linéaires standards mais aussi sur les systèmes algèbro-différentiels appelés aussi systèmes singuliers pour couvrir la classe la plus large possible des systèmes de grande dimension.

Ainsi, on a commencé notre travail en proposant des méthodes de synthèse d'observateurs décentralisés à interconnexions inconnues pour des systèmes de grande dimension standards et singuliers. On a cherché à éliminer l'effet des interconnexions inconnues sur la dynamique de l'erreur d'observation. La synthèse de l'observateur est basée sur des LMIs permettant de déterminer la matrice de gain paramétrant toutes les matrices de l'observateur. La formulation LMI est basée sur l'approche Lyapunov et déduite des différents lemmes bornés.

Ensuite, on a proposé des filtres décentralisés qui permettent d'assurer, en plus de la stabilité, un critère de performance  $H_\infty$ , c'est à dire qu'on a cherché à atténuer l'effet des perturbations, supposées être inconnues mais à énergie bornée, sur la dynamique de l'erreur d'estimation. On a abordé après l'étude des observateurs interconnectés pour les systèmes de grande dimension, où on a proposé une nouvelle méthode permettant de synthétiser une nouvelle forme d'observateurs interconnectés connectivement stable. On s'est intéressé à la capacité d'un tel observateur à être stable de manière robuste vis-a-vis des incertitudes sur les interconnexions entre les sous observateurs qui les forment.

Enfin, on s'est intéressé à l'application des méthodes d'estimation proposées dans le cadre de la commande. En effet, dans un premier temps, on a proposé une commande décentralisée basée sur un filtre  $H_\infty$  pour une classe de systèmes de grande dimension standards à interconnexions non-linéaires. L'approche est une extension des travaux de Kalsi et al. aux cas des systèmes perturbés standards. En effet, on a commencé par le calcul du gain de retour d'état qui satisfait les spécifications du système bouclé. Puis, on a synthétisé un filtre qui a pour but de fournir en sortie une estimée de ce retour d'état. L'approche a été validée sur un exemple de système composé de trois machines électriques interconnectées.

Dans le second volet du chapitre, on a considéré le problème de la commande via un filtre  $H_\infty$  pour une classe de système singulier de grande dimension soumis à des perturbations à énergie bornée. L'approche est une extension des travaux de Kalsi et al. au cas des systèmes singuliers perturbés

L'un des principaux apports de nos travaux, a été de proposer une nouvelle méthode de synthèse de commande basée sur un filtre  $H_\infty$  qui générée par des conditions de solvabilité moins restrictives que celles introduites dans les travaux de Kalsi et al. Ainsi, on a relaxé les contraintes qui portait sur la distance entre la paire de matrices formée par la matrice d'état et la matrice d'entrée d'une part et l'ensemble de paires de matrices incontrôlables d'autre part. De plus, on tient compte de la maximisation des bornes de l'interconnexion, ce qui est très important en pratique.

**Mots-clés:** Système de grande dimension, Système singulier, Observateur décentralisé, Observateur interconnecté, Filtrage  $H_\infty$ , Commande basée observateur

# Abstract

In this dissertation, we investigated the problems of the estimation,  $H_\infty$  filtering and the controller based-observer design for standard large scale systems and for algebro-differentials ones called also singular large scale systems.

So, we began to propose methods for decentralized observer design with unknown interconnections for standard and singular systems. We search here to decouple the unknown interconnections and the dynamics of the observation error. The method is based on LMIs approach to find the gain matrix implemented in the observer matrices. The LMI formulation is based on Lyapunov approach and deduced from various bounded lemmas.

We propose then, filters that permits to ensure, in addition to the stability, an  $H_\infty$  performance criteria; we search to attenuate the perturbations effect, supposed unknown but of bounded energy, on the dynamics of the estimation error. We discussed after the study of interconnected observers for large systems, we have proposed a new method to design a new form of interconnected observers connectively stable. We are interested in the ability of a such observer to be robustly stable towards uncertainties in the interconnections between sub-observers.

Finally, we are interested to the application of the proposed estimation methods to the control purpose. Indeed, in a first step, we propose a decentralized control based on a filter  $H_\infty$  for a class of large scale standard systems with nonlinear interconnections. Then, Then, we focus our attention on the observer based control for singular systems to search for a control law which ensures an  $H_\infty$  performance criteria. The approach is an extension of recent works of Kalsi and al. to the case of disturbed large scale systems.

One of the main contributions of our work was to propose a new method of control design based on a filter  $H_\infty$  which generated by using less restrictive conditions than those introduced in the work of Kalsi and al. Thus, we have relaxed the constraint on the distance between the pair of matrices formed by the state matrix and input matrix and the set of pairs of matrices uncontrollable. In addition, we consider the maximization of the bound of the interconnection, which is very important in practice.

Our approach is obtained into two steps. The first one consist on calculating the gain state feedback that meets the specifications of the closed loop system. The second one , then we reconstruct this control law using our previous results on the  $H_\infty$  filtering. The approach has been validated on an example of a system composed of three interconnected electrical machines.

**Keywords:** Large scale system, Singular system, Decentralized observer, Interconnected observer,  $H_\infty$  filtering, Observer based control