



**HAL**  
open science

# Analyse du comportement mécanique d'un mélange d'élastomères avec prise en compte d'une interface fine entre ses constituants

Esséata Koffi Holonou

► **To cite this version:**

Esséata Koffi Holonou. Analyse du comportement mécanique d'un mélange d'élastomères avec prise en compte d'une interface fine entre ses constituants. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2002. Français. NNT : 2002METZ020S . tel-01749680

**HAL Id: tel-01749680**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749680>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**THESE**  
**Présentée à****L' UNIVERSITÉ DE METZ****PAR****Esséata Koffi HOLONOU**Pour l'obtention du grade de :  
**DOCTEUR DE L' UNIVERSITÉ DE METZ****SPÉCIALITÉ SCIENCES DE L' INGENIEUR**  
**OPTION MECANIQUE ET MATERIAUX**

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE METZ	
N° inv	2002 0635
Cote	S/MZ 02/20
Loc	

**ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE**  
**D' UN MELANGE D' ELASTOMERES AVEC**  
**PRISE EN COMPTE D' UNE INTERFACE FINE**  
**ENTRE SES CONSTITUANTS**

Soutenue le 29 novembre 2002 à Metz, devant le jury composé de :

Paul LIPINSKI

Alain CARMASOL

Said AHZI

Jean Claude MICHEL

Khémaïs SAANOUNI

Mohamed CHERKAOUI

Filomeno CORVASCE

Anne PAQUIN

LPMM, Metz

LPMM, Metz

Univ. Louis Pasteur, IPST, Strasbourg

LMA, Marseille

LSMIS, Univ. de Technologie de Troyes

LPMM, Metz

GOODYEAR, Luxembourg

GOODYEAR, Luxembourg

*Directeur de thèse**Co-directeur de thèse**Rapporteur**Rapporteur**Examineur**Examineur**Examineur**Examineur*

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 486009 9



INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

**THESE**  
**Présentée à**

**L' UNIVERSITÉ DE METZ**



PAR

**Esséata Koffi HOLONOU**

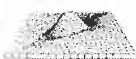
Pour l'obtention du grade de :  
**DOCTEUR DE L' UNIVERSITÉ DE METZ**

**SPÉCIALITÉ SCIENCES DE L'INGENIEUR**  
**OPTION MECANIQUE ET MATERIAUX**

**ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE**  
**D' UN MELANGE D' ELASTOMERES AVEC**  
**PRISE EN COMPTE D' UNE INTERFACE FINE**  
**ENTRE SES CONSTITUANTS**

Soutenue le 29 novembre 2002 à Metz, devant le jury composé de :

Paul LIPINSKI	LPMM, Metz	<i>Directeur de thèse</i>
Alain CARMASOL	LPMM, Metz	<i>Co-directeur de thèse</i>
Said AHZI	Univ. Louis Pasteur, IPST, Strasbourg	<i>Rapporteur</i>
Jean Claude MICHEL	LMA, Marseille	<i>Rapporteur</i>
Khémaïs SAANOUNI	LSMIS, Univ. de Technologie de Troyes	<i>Examineur</i>
Mohamed CHERKAOUI	LPMM, Metz	<i>Examineur</i>
Filomeno CORVASCE	GOODYEAR, Luxembourg	<i>Examineur</i>
Anne PAQUIN	GOODYEAR, Luxembourg	<i>Examineur</i>



## REMERCIEMENTS

Cette thèse n'aurait pas pu se faire sans le soutien de certaines personnes que je tiens vivement à remercier.

Toute ma gratitude à mes directeurs et co-directeur de thèse, Paul LIPINSKI et Alain CARMASOL qui, outre leurs aides scientifiques ont su m'apporter un soutien morale et un encouragement qui m'ont permis de finaliser cette thèse.

Mes remerciements aux professeurs S. AHZI et J. C. MICHEL, qui ont bien voulu se charger de la lourde tâche de rapporter ce travail.

Je remercie également Madame A. PAQUIN, Messieurs K. SAANOUNI, M. CHERKAOUI, et F. CORVASCE qui ont accepté d'examiner ce travail.

Qu'il me soit aussi permis de remercier les membres du L.P.M.M. et particulièrement ceux avec qui j'ai eu à travailler au cours de ces années de thèse pour l'intérêt qu'ils m'ont porté.

Je voudrais enfin remercier mes proches qui par leur présence et leur soutien permanent m'ont permis d'aller au bout de cette recherche mais aussi tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre m'ont apporté une aide durant ces années.

# SOMMAIRE

---

---

## NOTATIONS

<b>I - INTRODUCTION GÉNÉRALE</b> .....	1
<b>A - RAISONS ET OBJECTIFS DE L' ETUDE</b> .....	2
<b>B - PROBLEMATIQUE</b> .....	7
<b>C - LES MATERIAUX HYPER - ELASTIQUES</b> .....	9
1 - Introduction .....	9
2 - Élastomères et élasticité caoutchoutique .....	10
3 - Composites hyper élastiques et applications .....	13
<b>D - BIBLIOGRAPHIE</b> .....	15
<b>II - LES BASES MECANIQUES DE L' ÉTUDE</b> .....	17
<b>A - DESCRIPTION DES GRANDES DÉFORMATIONS</b> .....	18
1 - Introduction .....	18
2 - Cinématique des grandes déformations .....	18
3 - Description des efforts .....	26
4 - Équations du mouvement .....	28
5 - Définition des lois de comportement .....	30
<b>B - HOMOGENÉISATION EN GRANDES DÉFORMATIONS</b> .....	38
1 - Introduction .....	38
2 - Localisation .....	39
3 - Homogénéisation .....	47
4 - Approximation autocohérente .....	49
<b>C - BIBLIOGRAPHIE</b> .....	54
<b>III - ETUDE DES LOIS DE COMPORTEMENT PHÉNOMÉNOLOGIQUES</b> ...	56
<b>A - INTRODUCTION</b> .....	57
<b>B - LES POTENTIELS HYPER - ELASTIQUES</b> .....	59
<b>C - DEVELOPPEMENT DES LOIS DE COMPORTEMENT</b> .....	62
1 - Loi de Mooney-Rivlin .....	63
2 - Loi d' Ogden-Swanson .....	69
<b>D - BIBLIOGRAPHIE</b> .....	77

<b>IV – HOMOGENÉISATION ET PRISE EN COMPTE D'UNE INTERFACE</b> .....	79
A – INTRODUCTION .....	80
B – REPRESENTATION ET LOCALISATION .....	81
1 - Représentation de l'inclusion enrobée .....	81
2 - Équation intégrale - cas de l'inclusion enrobée .....	81
C - OPERATEURS INTER FACIAUX.....	86
D - APPROXIMATION AUTO-COHERENTE DE L' EQUATION INTEGRALE .....	91
Cas de l' inclusion enrobée	
1 - Homogénéisation .....	91
2 - Approche auto – cohérente .....	93
E – BIBLIOGRAPHIE .....	96
<b>V – ASPECTS NUMERIQUES ET PROGRAMMATION</b> .....	97
A – INTRODUCTION .....	98
B – OBJECTIFS ET ETAPES DE LA PROGRAMMATION .....	99
1 - Données (en entrées) .....	100
2 – Initialisation .....	101
3 - Expressions des lois de comportement .....	102
4 - Routine d' homogénéisation en grandes déformations .....	103
5 - Cumul, actualisation et changement de forme .....	105
6 - Résultats (en sorties) .....	105
B – DEVELOPPEMENTS PARTICULIERS .....	106
1 - Nouvelle expression de la loi de comportement .....	106
2 - Approximation autocohérente en grandes déformations .....	107
3 - Cumul et actualisation des grandeurs mécaniques .....	109
4 - Changement de forme des constituants du mélange .....	111
D – ALGORITHMIQUE .....	115
1 – Algorithme général du programme .....	115
2 – Organigramme de l'homogénéisation .....	116
3 – Organigramme du cumul et de la réactualisation microscopique .....	117
4 - Organigramme du cumul et de la réactualisation macroscopique .....	118
E – BIBLIOGRAPHIE .....	119

<b>VI - APPLICATIONS DIVERSES</b> .....	120
A. VALIDATION DU COMPORTEMENT HYPER – ELASTIQUE .....	121
1 - validation du modèle hyper – élastique .....	121
2 - Comparaison des modèles de Mooney - Rivlin et d'Ogden – Swanson ...	127
B. ÉTUDES DE L' ISOTROPIE ET DE LA COMPRESSIBILITÉ DU MATÉRIAU .....	129
1 - Définition des matériaux utilisés .....	129
2 - Isotropie du matériau .....	130
3 - Incompressibilité de matériau .....	135
C. VARIATION DE LA STRUCTURE INTERNE DU MATÉRIAU .....	136
1 - Structure globale (hyper - élasticité du mélange d'élastomères) .....	136
2 - Structure locale (variation de forme des constituants) .....	148
D. APPORT DE L' ENROBAGE .....	141
 <b>VII - CONCLUSION GÉNÉRALE</b> .....	 144
 <b>ANNEXE</b> .....	 147
Relations préliminaires à la détermination des lois de comportement .....	148



# NOTATIONS

- Nous réservons les lettres minuscules pour les variables locales et les lettres majuscules pour les correspondants globaux ou macroscopiques.

- La moyenne volumique d'une fonction  $f(x)$  est notée :

$$\overline{f(x)} = \langle f(x) \rangle = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} f(x) dV$$

- Un tenseur  $T$  d'ordre 2 ou 4 sont notées de la manière suivante :  $[T]$

- Le point "." et le double point ":" définissent les produits matriciels suivants :

$$\begin{aligned} [T].v &\Rightarrow T_{ij} v_j \\ [T].[A] &\Rightarrow T_{ij} A_{jk} \\ [T]:[A] &\Rightarrow T_{ij} A_{ij} \end{aligned}$$

Nous utilisons la convention d'indice muet.

- Le symbole " $\otimes$ " correspond au produit tensoriel

$$[T] \otimes [A] \Rightarrow T_{ij} A_{mn}$$

- L'exposant (indice) « *eff* » est utilisé pour indiquer les propriétés effectives

- L'exposant (indice) « *I* » est utilisé pour indiquer une grandeur liée à l'inclusion.

- L'exposant (indice) « *c* » est utilisé pour indiquer une grandeur liée à l'enrobage.

- L'exposant (indice) « *Ic* » est utilisé pour indiquer une grandeur liée à l'inclusion enrobée.

-  $[{}^tT]$  Transposé du tenseur  $T$

-  $[T^{-1}]$  Inverse du tenseur  $T$

-  $[{}^tT^{-1}]$  transposée de l'inverse du tenseur  $T$

- Les symboles suivants sont réservés pour :

$W$  Énergie de déformation

$\kappa_0$  Configuration initiale

$\kappa_t$  Configuration actuelle

$\bar{x}$	Vecteur de la configuration initiale
$\bar{X}$	Vecteur de la configuration actuelle
$[F]$	Tenseur gradient de la transformation
$\bar{v}$	Vecteur vitesse
$[G]$	Tenseur gradient de vitesse
$[B]$	Tenseur de dilatation de Cauchy-Green gauche
$[C]$	Tenseur de dilatation de Cauchy-Green droit
$[A]$	Tenseur de déformation d'Euler-Almansi
$[E]$	Tenseur de déformation de Green Lagrange
$[D]$	Tenseur taux de déformation
$[W]$	Tenseur taux de rotation
$[\sigma]$	Tenseur des contraintes de Cauchy
$[S]$	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
$[N]$	Tenseur des contraintes de Boussinesq
$[L^{eff}]$	Tenseur des propriétés tangentes effectives
$[l]$	Tenseur des propriétés tangentes locales
$[\mathfrak{R}]$	Tenseur de Green
$E_0$	Module d'Young initial
$\nu$	Coefficient de poisson
$\mu$	Module de cisaillement
$\lambda$	Allongement
$J$	Déterminant du gradient de la transformation
$I_1, I_2, I_3$	Invariants principaux du tenseur des dilatations de Cauchy-Green
$a, a^l$	Opérateur de localisation du gradient de vitesse microscopique
$A, A^l$	Opérateur de localisation du gradient de vitesse macroscopique.
$\theta(x)$	Fonction caractéristique
$[I]$	Tenseur unité d'ordre 2

# Chapitre I

## INTRODUCTION GENERALE

**A. RAISONS ET OBJECTIFS DE L' ETUDE**

**B. PROBLEMATIQUE**

**C. LES MATERIAUX HYPER - ELASTIQUES MODERNES**

**1. Introduction**

**2. Elastomères et élasticité caoutchoutique**

**3. Composites hyper élastiques et applications**

**D. BIBLIOGRAPHIE**

### A. RAISONS ET OBJECTIFS DE L' ETUDE

Les caoutchoucs utilisés dans le domaine industriel sont généralement obtenus à partir de mélanges de caoutchoucs naturels et de caoutchoucs synthétiques. La connaissance des propriétés et des performances de tels mélanges constitue un champ de recherche en plein développement du fait des applications potentielles qui y sont liées.

Il existe deux façons de connaître les propriétés mécaniques d'un mélange de caoutchouc et plus généralement, deux méthodologies pour déterminer le comportement mécanique d'un composite; en introduction du chapitre I de l'ouvrage [25], André Zaoui parle d'approches inductive et déductive.

♦ L'approche inductive repose sur une démarche phénoménologique. Fondée sur l'expérience, elle intègre les résultats de tout un ensemble de mesures réalisées sur éprouvette d'un matériau donné, en réponse à des sollicitations déterminées, dans une représentation unifiée compatible avec ces mesures. Plus simplement, il s'agit d'élaborer et fabriquer des éprouvettes. Puis, les tester sous diverses sollicitations, dépouiller ensuite les résultats de ces essais pour déduire les propriétés du mélange testé, pour ce qui nous concerne, le caoutchouc.

Une telle démarche, certainement efficace et précieuse, demeure néanmoins limitée eu égard à sa définition. En effet, le matériau étant choisi et l'optimisation réalisée pour des conditions nominales de service, tout écart à ces conditions posera un problème : une augmentation du niveau de sollicitations mécaniques (ou thermiques), l'intervention de facteurs extérieurs non pris en compte au cours de l'identification du comportement du matériau (humidité, rayonnement, corrosion...), l'utilisation en service sur des durées sensiblement supérieures à celles déjà testées expérimentalement risqueront de solliciter le matériau au-delà du domaine de validité de la loi de comportement prise en compte dans les calculs prévisionnels. La démarche ayant conduit à une telle loi de comportement n'ayant, par nature, pas de pouvoir prédictif en dehors de son domaine d'identification, elle ne permettra pas d'évaluer les risques de mise hors service, sauf à reprendre complètement l'étude dans des conditions élargies, du comportement du matériau.

Sur un autre plan, la démarche inductive ne peut être mise en œuvre que sur des matériaux bien définis. Un changement de matériau, voire même une légère modification de sa composition chimique, de ses modes d'élaboration, de mise en forme ou de traitement, de ses conditions de polymérisation, de cristallisation, etc. impose une complète ré-identification du comportement mécanique sans qu'il puisse être tiré parti des connaissances déjà acquises pour les extrapoler ou les adapter. De plus, dans ce travail, le nombre d'essais doit être important, ce qui le rend long et onéreux.

On comprend donc plus aisément que les préoccupations modernes de performances, de sécurité, d'économie d'énergie et de matière première, aient poussé au développement d'approches plus déductives du comportement mécanique des matériaux. Elles permettent une meilleure capacité prédictive et une plus grande latitude d'optimisation, incluant celle des matériaux eux-mêmes.

♦ L'approche déductive est celle retenue pour cette étude; il s'agit de modéliser dans un outil de simulation, le comportement mécanique du mélange de caoutchoucs à partir des propriétés mécaniques de ses constituants. On conçoit aisément qu'un tel outil soit essentiellement composé de trois parties :

- chercher une loi de comportement hyper-élastique (grandes déformations) selon un modèle classique, qui approche au mieux les résultats expérimentaux;

## Chapitre I – Introduction générale

- mettre en place les techniques d'homogénéisation pour caractériser le mélange;
- prendre en compte le changement de forme des constituants, ainsi que l'interface entre les constituants pour mieux représenter la réalité.

Ces trois aspects du problème sont ensuite introduits dans un programme numérique qui génère l'évolution des champs de contraintes et de déformations microscopiques et macroscopiques dans le mélange et également, la variation de forme des constituants.

Toute modélisation a, en général, un double objectif :

- d'une part, établir un modèle pour un état ou un procédé afin d'obtenir une forme de fonction "physiquement correcte" pour l'interprétation des phénomènes observés.
- d'autre part, utiliser le modèle pour la prédiction de nouveaux résultats.

Pour modéliser les caractéristiques d'un mélange de caoutchoucs à partir des caractéristiques de ses constituants, il faut déjà connaître la loi de comportement d'un matériau élastique non linéaire en grandes déformations.

On admet que les caoutchoucs ont un comportement hyper-élastique ou du moins, élastique non-linéaire. Ils sont incompressibles ou presque. On négligera ici leur comportement visqueux et on s'attachera à leur comportement élastique quasi-statique. Les lois de comportement de tels matériaux dérivent d'une énergie élastique interne  $W$  ; dont la forme varie suivant les auteurs.

Mooney développa en 1940 [1] une théorie des grandes déformations qui fut généralisée pour la fonction d'énergie de déformation en 1948 par Rivlin [2,3]. Une forme de  $W$  largement utilisée est donc celle dite de Mooney-Rivlin qui considère cette énergie comme une fonction des principaux invariants du tenseur de déformation de Cauchy-Green (voir Chapitre II.A.) et de constantes obtenues à partir de résultats expérimentaux. Cette énergie est généralement mise sous la forme :

$$W(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (\text{I.1})$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes obtenues à partir des résultats expérimentaux.

$I_1$  et  $I_2$  les principaux invariants de tenseur de déformation de Cauchy-Green (voir Chapitre II.A.)

En 1965, Valanis et Landel [8] utilisent les allongements principaux à la place des invariants et proposent une nouvelle forme pour cette énergie :

$$W(\lambda_i) = W_1(\lambda_1) + W_2(\lambda_2) + W_3(\lambda_3) \quad (\text{I.2})$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont les allongements principaux du tenseur de déformation de Cauchy-Green.

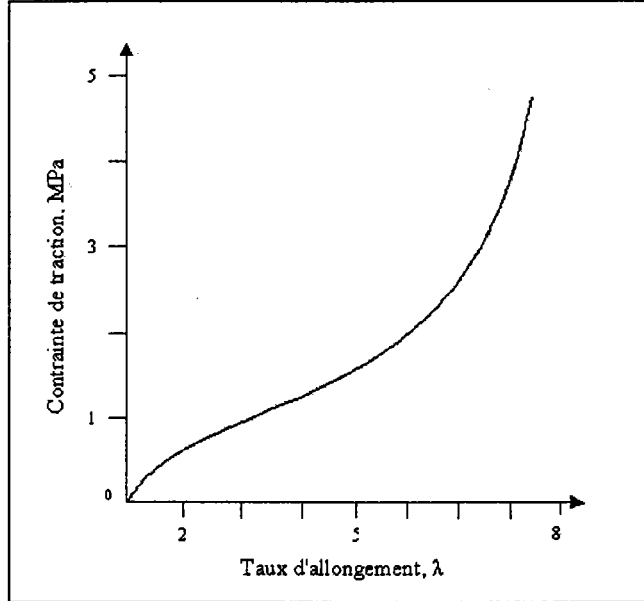
Ogden, en 1972 [4,5] développa les travaux de Valanis et Landel en utilisant une formulation en somme de puissances non entières des allongements principaux :

En utilisant l'énergie de déformation sous la forme suivante :

## Chapitre I – Introduction générale

$$W(\lambda_i) = \sum_{i=1}^N A_i (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i}) \quad (\text{I.3})$$

où les  $A_i$  et  $\alpha_i$  sont des constantes liées au matériau et déterminées à partir des résultats expérimentaux. Ogden montre que pour  $N = 3$ , on obtient une excellente approximation des résultats expérimentaux fournis par Treloar (1944) [6,7]



*Figure I.1* Forme générale d'une loi de comportement hyper-élastique

Peng [9,10] et Mandel [11] ont une approche similaire à celle d'Ogden.

Plus récemment, Swanson [12] a montré que les avantages de la formulation avec les puissances non entières peuvent être combinés avec l'utilisation des invariants du tenseur de déformation. Il exprime alors l'énergie sous la forme :

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{3A_i (I_1/3)^{\alpha_i+1}}{2(\alpha_i+1)} + \sum_{j=1}^M \frac{3B_j (I_2/3)^{\beta_j+1}}{2(\beta_j+1)} + \int_0^{I_3} \frac{g(\zeta)}{2} d\zeta - \frac{\text{Ln}(I_3)}{2} \sum_{i=1}^N (A_i + 2B_i) \quad (\text{I.4})$$

On notera que la compressibilité a été introduite dans cette formulation au travers du troisième invariant  $I_3$ , qui n'est autre que le rapport  $\frac{V}{V_0}$  des volumes avant et après déformation.

D'autres modèles développés par divers auteurs [18, 19, 20, 21] sont présentés au chapitre III de ce document.

## Chapitre I – Introduction générale

On cherche à modéliser des mélanges de caoutchoucs, donc des matériaux "mésos-hétérogènes", par des matériaux "macroscopiquement homogènes" ayant des caractéristiques équivalentes. Il s'agit donc de trouver une caractéristique globale effective du mélange, à partir des caractéristiques de ses constituants. Pour cela, il existe plusieurs méthodes qui sont des lois de mélanges [14]. En élasticité linéaire par exemple, l'approximation de Voigt (déformation uniforme) permet d'obtenir une borne inférieure de la caractéristique globale effective cherchée :

$$E : (\langle C \rangle - C^{eff}) : E \geq 0 \quad \forall E \quad (I.5)$$

$E$  : déformation uniforme imposée aux frontières.

$C$  : caractéristique d'un constituant

$C^{eff}$  : caractéristique globale effective

Le symbole " $\langle \ \rangle$ " représente la moyenne volumique.

De même Reuss propose une approximation fournissant une borne supérieure:

$$\Sigma : (\langle S \rangle - S^{eff}) : \Sigma \geq 0 \quad \forall \Sigma \quad (I.6)$$

$\Sigma$  : Contrainte uniforme imposée à la frontière

$$S = C^{-1} \quad \text{et} \quad S^{eff} = (C^{eff})^{-1} \quad (I.7)$$

Symboliquement, on peut résumer les inégalités de Voigt et Reuss en :

$$(\langle C^{-1} \rangle)^{-1} \leq (S^{eff})^{-1} = C^{eff} \leq \langle C \rangle \quad (I.8)$$

Le calcul de  $\langle C \rangle$  ou  $\langle S \rangle$  ne demande que la connaissance des fractions volumiques des phases (ou constituants). Il s'en suit que pour un composite élastique dont on ne connaît que les modules et les fractions volumiques des phases constituantes, on ne peut pas faire une meilleure prédiction des modules effectifs, que celle définie par les bornes de Voigt et de Reuss.

Celles-ci ne donnent donc que des limites à l'intérieur desquelles se trouvent les modules effectifs équivalents. Elles ne sont faciles à mettre en oeuvre que pour de petites déformations en élasticité linéaire.

Il existe d'autres modèles de matériau hétérogène à base d'inclusion. Le modèle auto cohérent [15,16,17] consiste par exemple à établir la loi de localisation en considérant que chaque phase est tour à tour rassemblée dans un domaine ellipsoïdale et en assimilant le milieu hétérogène qui l'entoure, et qui constitue la matrice, au milieu homogène équivalent cherché. Le comportement de ce dernier est identifié en faisant jouer successivement à chaque phase le rôle d'inclusion, le comportement de la matrice restant le même, et en réalisant les opérations de moyenne adéquates entre les diverses configurations considérées (avec comme "poids relatif", la fraction volumique de la phase prise en compte).

## Chapitre I – Introduction générale

$$C^{eff} = \langle C : (C + C^*)^{-1} : (C^{eff} + C^*) \rangle \quad (I.9)$$

avec :

$$C^* = C : (S^{-1} - 1) \quad (I.10)$$

Remarquons qu'il s'agit en général, d'une équation intégrale en  $C^{eff}$ , ce dernier figurant aussi implicitement dans l'opération de moyenne par l'intermédiaire de  $C^*$  qui en dépend.

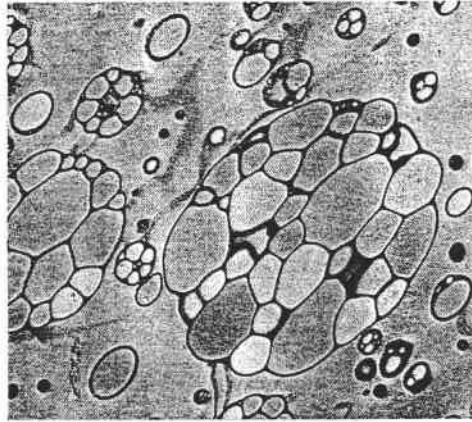
Notons aussi que la méthode autocohérente, dans le cas des grandes déformations non linéaires, utilise des incréments de sollicitations. Ceci nécessite, pour la loi de comportement, le calcul du module tangent et non du module sécant.

Pour situer notre sujet, il est nécessaire de bien fixer la problématique, les bases et les objectifs de cette étude, ainsi que la démarche adoptée.



### B. PROBLEMATIQUE

Considérons un "mélange" d'élastomères. Il est constitué de plusieurs "phases" : c'est un polyphasé. L'expérience a montré que ce genre de mélange peut permettre d'obtenir un matériau aux propriétés très intéressantes. Nous supposons connus les comportements de chacune des phases et nous proposons de déterminer le comportement du mélange en prenant en compte un certain nombre de caractéristiques propres aux matériaux hyper-élastiques. En réalité, un mélange de caoutchoucs est un ensemble de réseaux de chaînes de molécules qui s'entremêlent; une micrographie d'un tel mélange montre qu'il se présente comme un ensemble d'agrégats des divers constituants du mélange. On peut donc faire l'hypothèse que le mélange de caoutchoucs soit un matériau polyphasé où chaque phase est un agrégat du constituant numéro  $n$  (la phase  $n$ ).



*Figure I.2 : Micrographie d'un mélange d'élastomères (polystyrène rendu plus résistant à l'impact par addition d'une phase caoutchoutique) [34]*

On connaît le comportement de chaque phase (propriétés mécaniques, comportement des constituants du mélange). On cherche à déterminer le comportement global du polyphasé. Le comportement des constituants est décrit par une loi hyperélastique qui est introduite dans un schéma autocohérent pour l'homogénéisation du polyphasé. La réalité des grandes déformations nous oblige, à considérer le changement de forme des constituants. La structure réelle de ces matériaux nous amène en outre à prendre en considération l'existence d'une fine interface entre eux.

Dans cette étude, nous allons dans un premier temps poser les bases mécaniques nécessaires en matière de description des grandes déformations et d'homogénéisation. Nous étudierons ensuite les lois de comportement phénoménologiques en grandes déformations en mettant un accent particulier sur celles qui nous semblent les plus adaptées ici. Nous parlerons également de la nécessité de prendre en compte une interface entre les différentes phases du mélange et ce que cela implique sur l'homogénéisation. Enfin, nous nous attarderons sur l'aspect numérique de cette étude et le programme informatique qui nous a permis de développer des applications diverses que nous présentons à la fin de ce document.

## Chapitre I – Introduction générale

Nous précisons que les travaux que nous avons menés et les résultats que nous présentons dans ce document sont le fruit d'une recherche fondamentale. Ils ont un caractère relativement théorique et numérique et ne visent pas une exploitation expérimentale. Les validations expérimentales qui y sont faites le sont sur la base de résultats expérimentaux que nous avons trouvés dans la littérature.

Avant d'aller plus loin, notons que la présente étude se limite aux matériaux purement élastiques non linéaires en grandes déformations. De tels matériaux sont dits hyperélastiques et admettent une gamme de propriétés particulières dont la connaissance ne peut que faciliter la compréhension des développements effectués dans la suite de cette étude. C'est l'objectif du paragraphe suivant.

### C. LES MATERIAUX HYPER-ELASTIQUES

#### 1. Introduction

Les matériaux ont généralement été à la source des grands bouleversements technologiques : les premiers métaux ont permis de perfectionner les outils de l'homme et de transformer son évolution, après des millions d'années de stagnation, dans l'utilisation de la pierre et du bois; l'acier a favorisé le développement du chemin de fer, puis de l'automobile; le ciment-béton a provoqué une transformation de l'habitat; le silicium est à la base de l'électronique moderne et de l'informatique.

Tous ces matériaux sont en perpétuelle mutation et c'est une véritable révolution industrielle, silencieuse certes, mais assez importante pour bouleverser les attitudes industrielles traditionnelles. Cette révolution, issue de l'apport de la physique des solides et de la chimie moléculaire, a permis de connaître leur intimité et de comprendre leur architecture. Autrefois, on réalisait des produits par déformation de la matière en la travaillant en quelque sorte par l'extérieur; c'était: la fonderie, la forge, le travail du verre ou le moulage des plastiques ...

Aujourd'hui, on tend à "organiser la matière" à partir de sa structure interne et c'est à cette conception, en particulier, que l'on doit le nucléaire, les composites, l'électronique et les biotechnologies.

Les polymères, du fait de leurs nombreux états structuraux et de la diversité chimique de leurs macromolécules, constituent l'un des groupes de matériaux les plus affectés par cette "nouvelle conception". L'étendue formidable des propriétés et des qualités de ces matériaux [28] leurs ont permis, ces dernières décennies, de bénéficier d'une attention particulière de la part des chercheurs. Entre autres, nous pourrions citer les propriétés d'imperméabilité, de biocompatibilité, de photosensibilité, d'amortissement, de mémoire de forme ...

On l'aura compris, les polymères, du fait de la diversité de leur états structurels et de leurs propriétés thermomécaniques permettent d'obtenir aujourd'hui des performances en coût ou en qualité semblables ou bien meilleures que celles obtenues jusqu'à présent avec les matériaux traditionnels (acier, aluminium...). Cela explique les substitutions récentes de polymères à ces matériaux traditionnels et leur utilisation dans une large gamme de produits industriels comme les pneus, les mousses élastiques et les bandes de caoutchouc. Il est difficile d'imaginer un matériau remplaçant le caoutchouc dans ses propriétés physiques uniques qui dérivent essentiellement de sa diversité d'adaptation. En plus des propriétés techniques intéressantes, comme la réversibilité de la déformation à plusieurs centaines de pour cent (élasticité caoutchoutique) et un module d'Young plusieurs fois moindre que celui des aciers, les molécules de polymères offrent au scientifique un terrain fertile d'études.

Il est intéressant de noter également que le module de cisaillement typique d'un caoutchouc est de l'ordre de  $20 \text{ N/cm}^2$ . Il a une capacité de déformation de l'ordre de plusieurs centaines de pour cent et un module de compressibilité mille fois plus grand que son module de cisaillement.

Comme pour les métaux et les céramiques, il existe une variété stupéfiante de polymères, et leur nombre s'accroît chaque année. Nous pouvons les regrouper en quatre classes :

- a) les thermoplastiques comme le polyéthylène, qui se ramollissent à la chaleur;

## Chapitre I – Introduction générale

- b) les résines thermodurcissables comme les polyépoxydes qui durcissent lorsque deux composants (une résine et un durcisseur) sont mélangés et chauffés;
- c) les élastomères ou caoutchoucs;
- d) les polymères naturels comme la cellulose, la lignine et les protéines qui sont les éléments mécaniques de base et qui sont quasiment tout animal ou tout végétal.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons particulièrement aux élastomères et aux mélanges d'élastomères, à l'élasticité caoutchoutique et à quelques applications courantes et modernes de ces matériaux aux caractères spéciaux.

### 2. Elastomères et élasticité caoutchoutique.

Sans reprendre en détail l'étude de la déformation des caoutchoucs traités par ailleurs, l'analyse et la modélisation du comportement mécanique d'un mélange d'élastomères nécessitent cependant de revenir, d'un point de vue général, sur leur évolution dans le temps, leur structure et leur mise en œuvre, quelques caractéristiques mécaniques et aspects chimiques.

L'intérêt porté aux élastomères a commencé il y a deux siècles. Michael Faraday (1826) travailla sur la composition chimique des caoutchoucs. Il trouva une fraction en poids de Carbone / hydrogène de 6,8 (la valeur correcte est 7,5 ) ce qui lui permit de suggérer que le caoutchouc contient huit atomes de Carbone pour sept d'Hydrogène [28]. Quelques années plus tard Goodyear (1844) au USA et Hancock (1844) en Angleterre, montraient que l'échauffement du caoutchouc par le soufre améliorait ses propriétés à divers égards. L'aspect collant était éliminé, la rigidité du caoutchouc pouvait être relevée et la solubilité dans un certain nombre de solvants était éliminée.

En 1805, Gough découvre quelques propriétés thermoplastiques très importantes pour le caoutchouc. Il trouve que lorsque ce matériau est rapidement étiré, sa température augmente. Il trouve également qu'une bande de caoutchouc à laquelle est suspendue une petite masse se rétrécit lorsqu'elle est échauffée. Ces résultats obtenus avec un caoutchouc vulcanisé furent confirmés par Joule (1859) sur des produits vulcanisés, un demi-siècle plus tard. Thomson (1857) (plus tard appelé Lord Kelvin) effectue des analyses thermodynamiques sur le caoutchouc qui conduisirent à une explication et à une compréhension des résultats précédemment trouvés par Gough et Joule. Un certain nombre de chercheurs ont étudié dans les dernières décennies du XIX<sup>ième</sup> siècle et au début du XX<sup>ième</sup>, l'addition des fibres aux caoutchoucs. Un rapport de Mote (du "Indian Rubber"), et du "Télégraphe Works of Silverton" (en Angleterre) sur le renforcement du caoutchouc par le noir de carbone n'avait pas été publié, mais jeta les bases de l'utilisation du noir de carbone comme fibre renforçant dans les pneus en caoutchouc.

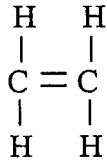
Aujourd'hui, il existe une assez grande variété de matériaux caoutchoutiques. Leurs propriétés physiques particulièrement intéressantes viennent de la structure de leurs réseaux moléculaires.

Bien que leurs propriétés soient très variées, tous les polymères sont constitués de chaînes de molécules formées par la succession de monomères liés chimiquement entre eux. Il s'agit d'une réaction de polymérisation. Ces monomères sont en général des hydrocarbures [29]. Ainsi, la polymérisation de monomère A donne une chaîne

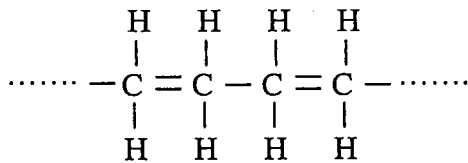


## Chapitre I – Introduction générale

Dans le polyéthylène (PE) par exemple, A est un groupement éthylène



dont la polymérisation engendre la chaîne ci-après.



Les polymères sont donc fait de longues molécules avec un squelette covalent d'atomes de carbone. Ces macromolécules sont liées les unes aux autres par des liaisons hydrogènes ou Van der Waals (liaisons secondaires). Elles peuvent aussi être liées par des ponts covalents supplémentaires dont la température de fusion est très basse, proche de la température ambiante. Le squelette covalent d'atomes de carbone n'est pas rectiligne. Il se replie sur lui-même de façon aléatoire et à haute température sa configuration varie continuellement sous l'effet de l'agitation thermique. L'application d'une contrainte mécanique a pour effet de déployer les chaînes. La déformation élastique qui correspond à une telle contrainte ne résulte donc pas d'une augmentation de la distance entre les atomes de carbone de squelette, mais découle plutôt d'un déploiement des chaînes c'est à dire d'une action sur les liaisons de Van der Waals. Tant que les chaînes ne se déplacent pas les unes par rapport aux autres, la déformation est réversible (domaine élastique).

On voit bien que le mécanisme de l'élasticité caoutchoutique est distinctement différent de l'élasticité des métaux ou des autres solides durs. Les relations entre les déformations moléculaires et macroscopiques sont capitales pour la compréhension des élastomères. Les élastomères sont des polymères de haute masse moléculaire et à chaînes linéaires. Les déplacements de leurs chaînes les unes par rapport aux autres n'étant limités que par une légère réticulation, on peut obtenir de grandes déformations élastiques totalement réversibles. Ils se présentent sous la forme d'un ensemble de chaînes macromoléculaires de différentes longueurs, chacune étant repliée sur elle-même sous forme de "pelote statique". Le nombre moyen de motifs monomères enchaînés peut varier de quelques milliers à quelques dizaines de milliers dans le cas extrême du caoutchouc naturel.

Sur le squelette linéaire de la macromolécule, d'autres molécules semblables peuvent se brancher latéralement. La figure I.4-a illustre schématiquement un polymère dont les macromolécules sont linéaires, et la figure I.4-b, le même polymère avec des ramifications latérales. Puisqu'une telle disposition des macromolécules augmente le nombre de leurs interactions, cela rigidifie le polymère (augmentation de la température de transition vitreuse) et améliore sa résistance à la traction. Il est en effet plus difficile de déployer les chaînes car les branches latérales s'opposent à un tel mouvement.

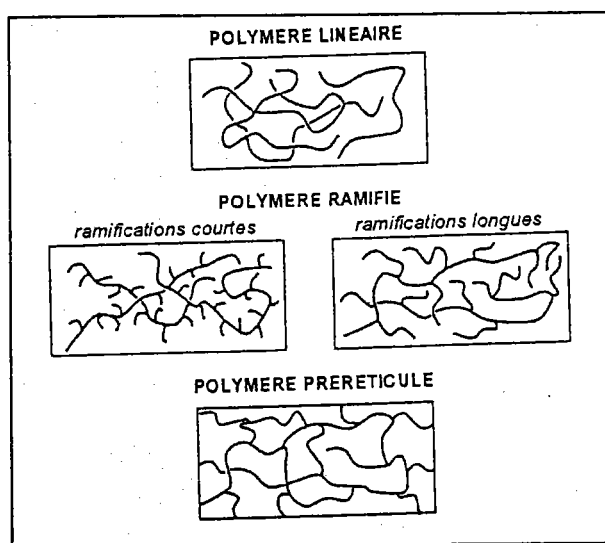


Figure I.3 : Macro structure d'un élastomère ramifié

D'autres parts on peut construire un réseau tridimensionnel de macromolécules en les reliant chimiquement entre elles : le polymère est alors dit réticulé. Quand la température s'élève, un tel polymère n'adopte plus le comportement décrit au paragraphe précédent (état vitreux, état caoutchoutique et fusion); il reste rigide jusqu'à sa température de décomposition, température à laquelle les liaisons atomiques sont rompues. Ce polymère est donc infusible. C'est un polymère thermodurcissable et à l'inverse des polymères thermoplastiques, il ne peut être mis en forme par fusion.

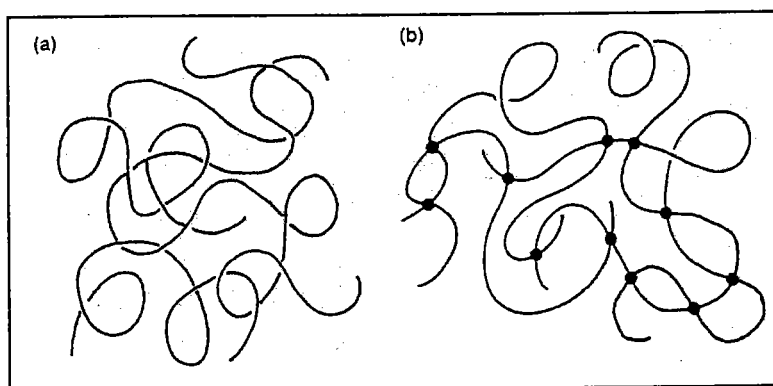


Figure I.4 : Macro structure d'un polymère à chaînes linéaires réticulés

Les copolymères sont constitués de monomères différents. On peut distinguer plusieurs types de copolymères, selon la façon dont les différents monomères sont regroupés. La cristallisation des copolymères est difficile, voire impossible à réaliser. En fait, ce sont de véritables alliages de monomères différents, tant par leur composition chimique que par leurs propriétés mécaniques.

Les mélanges stables de polymères différents ne sont pas toujours faciles à réaliser. En général, deux polymères de nature chimique différente ne sont pas miscibles. On peut toutefois obtenir une dispersion de très fines particules de chacun de constituants. Mais pour

qu'elle soit utile, une telle dispersion doit être stable, c'est-à-dire qu'il faut empêcher la séparation des particules à longue échéance. Les propriétés ainsi obtenues sont souvent très intéressantes ; par exemple, les plastiques ABS (mélange de copolymères d'acrylonitrile, de butadiène et de styrène), largement utilisés dans l'industrie automobile, doivent leur excellente ténacité à la dispersion de sphérules de caoutchouc (butadiène) dans une matrice rigide.

### 3. Composites hyper -élastiques et applications

Pour une application donnée, le choix du (des) matériau(x) est généralement basé sur ses propriétés physiques, mécaniques et chimiques et ses procédés de transformation. Aujourd'hui, cette démarche s'avère insuffisante parce qu'il faut prendre en compte les analyses de la fonction d'usage et du comportement à long terme du produit à concevoir. C'est en particulier le cas dans les domaines industriels où les performances exigées sont en accroissement constant (mécanique, automobile et pneumatique, aéronautique et spatial, bâtiment et génies civil, exploitation et exploration pétrolière, énergie nucléaire, transport...) Ce sont autant de domaines où le choix de l'élément de base, le matériaux, reste une étape capitale de la conception ou de la fabrication des produits.

D'autre part, les exigences de plus en plus extrêmes du monde industriel imposent un choix de matériaux précisément adaptés aux spécifications recherchées. Or il est très rare aujourd'hui de trouver de tels matériaux. Ils sont en général soit trop durs ou trop souples, trop fragiles ou trop ductiles etc. D'où la nécessité, depuis quelques décennies, de procéder à des "mélanges" de matériaux afin de trouver "le juste milieu" des caractéristiques désirées. On obtient ainsi les composites.

Les élastomères ne sont pas en marge de ces pratiques, bien au contraire. Les composites à base d'élastomères font l'objet d'utilisations très importantes sous diverses formes : pneumatique, bandes transporteuses, tuyaux renforcés pour véhiculer des fluides sous haute pression, structures gonflables, feuille de caoutchoucs renforcées... Malheureusement, en raison de la concurrence et des secrets de fabrication, les règles de conception de ces composites à base d'élastomères, ne sont pas divulguées et probablement qu'une bonne part des améliorations a été réalisée de façon empirique dans le passé.

Il est fondamental de garder en mémoire que les propriétés physiques, mécaniques ou chimiques d'un caoutchouc vulcanisé dépendent non seulement de la nature, mais aussi de la teneur en chaque constituant qui peuvent être :

- des élastomères de base conférant au mélange son caractère déformable, son comportement mécanique, sa résistance chimique et thermique
- les charges renforçantes (noir de carbone, silices...) ou diluantes, qui améliorent les propriétés mécaniques de l'élastomère ou contribuent dans le cas des charges diluantes, à réduire le coût du produit fini.
- les plastifiants permettant d'améliorer les conditions de mise en œuvre, et des propriétés spécifiques telles qu'une meilleure tenue au froid ou une résistance au vieillissement améliorée ou, dans certains cas, un accroissement de la composante visqueuse du module dynamique.
- les agents de protection limitent la dégradation dans le temps du réseau macromoléculaire de l'élastomère qui résulte de l'action combinée d'un nombre important de mécanismes associés aux environnements d'utilisation : thermo oxydation (oxygène - chaleur), photo oxydation (lumière - oxygène), radio oxydation (irradiation).

## Chapitre I – Introduction générale

- les agents de réticulation utilisés uniquement avec les élastomères vulcanisables sont à l'origine de la formation du réseau tridimensionnel irréversible qui confère à ces matériaux leurs propriétés physiques et mécaniques.

Voici quelques exemples courants des produits ou de pièces composées en tout ou partie de composites d'élastomères..

**Pneumatique** : Tous les élastomères peuvent être renforcés par des fibres : caoutchouc naturel, néoprène, SBR,... Les gommes utilisées pour les pneumatiques sont principalement des compositions complexes à base de caoutchoucs synthétiques (SBR : styrène-butadiène). Le caoutchouc naturel tend à disparaître sauf pour les pneus-neige et poids lourd .

**Tuyaux caoutchouc sous pression** : Ils sont également renforcés pour résister aux pressions internes. Les principales fibres de renfort sont le coton, la rayonne, le nylon, le polyester, les fibres de verre et les fils d'acier. Ce sont entre autres les tuyaux pour actionner des vérins dans les engins de chantiers, de forage pétrolier, avions, circuit de freinage en automobile...

**Bandes transporteuses** : En usine, les courroies d'entraînement et courroies trapézoïdales (renfort en nylon, polyester rayonne) appareils gonflables tels que les bateaux pneumatiques...

Dans la suite du développement, nous ne prenons en compte ni le caractère visqueux ni les phénomènes d'hystérésis du caoutchouc. La formulation et les notations que nous utilisons pour décrire les grandes déformations et les techniques d'homogénéisation sont spécifiées dans le chapitre suivant.



D. BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Mooney, "A theory of large elastic deformation", J. Appl. Phys., Vol.11, pp. 582-592, 1940.
- [2] R. S. Rivlin, "Large elastic deformations of isotropic materials, VI. Further developments of the general theory", Phil. Trans. Royal Soc., Vol. A241, pp.379 –397, 1948.
- [3] R. S. Rivlin., K. N. Sawyers, "The strain energy function for elastomers", Trans. of the Soc. of Rheology, Vol. 20:4, pp. 545-557, 1976.
- [4] R. W. Ogden, "Large deformation isotropic elasticity : On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids", Proc. R. Soc. Lond., Series A., Vol. 326, pp. 565-584, 1972.
- [5] R. W. Ogden, " Large deformation isotropic elasticity : On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids", Proc. R. Soc. Lond., Series A., Vol. 328, pp. 567-583, 1972.
- [6] L. R. G. Treloar, "Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation", Trans. Faraday Soc., Vol. 40, PP. 59-70, 1944.
- [7] L. R. G Treloar., *the physics of rubber elasticity*, Oxford, 1958.
- [8] K. C. Valanis, R. F. Landel, "The strain - energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratio", J. of Appl. Physics, Vol.38, pp. 2997-3002, 1967.
- [9] S. T. J. Peng, "Nonlinear multiaxial finite deformation investigation of solids propellants", AFRPL TR-85-036, 1985
- [10] S. T. J. Peng, R. F. Landel , J. Appl. Phys., Vol. 46, p.2599, 1975.
- [11] K. C. Valanis, R. F. Landel, "Large Multi – axial deformation behavior of a filled rubber", Trans. Soc. Rheol., Vol. 11, pp 243-256, 1967.
- [12] S. R Swanson, L. W. Christensen, M. Ensign , "Large deformation finite elements calculations for slightly compressible hyperelastic materials", Comp. And Struc., Vol. 21, n°1/2, pp. 81-88, 1985.
- [13] S. R. Swanson, "A constitutive model for high elongation elastic materials", J. of Eng. Mat. And Tech., Vol. 107, pp. 110-114, 1985.
- [14] Daniel Gay, "Matériaux composites", édition Hermès, Paris, 1997.
- [15] Bornert M., Bretheau T., Gilormin P., Homogénéisation en mécanique des matériaux Vol. 1, 2001
- [16] R. Hill , "Problems in mechanics", Novozhilov Anniversary Volume, Leningrad, (a), pp. 459, 1970.

## Chapitre I – Introduction générale

- [17] R. Hill, "*Constitutive inequalities for isotropic elastic under finite strain*", Proc. Roy. Soc. Lond., A314, (b), pp. 457-472, 1970.
- [18] H. Trumel, A. Dragon, "*A hyperelastic nonlinear model for nearly incompressible particulate composite*", Int. J. of Eng. Sc., Vol. 32, fasc.7, pp. 1085-1101, 1994.
- [19] L. J. Hart-Smith, *angew. Math. Phys.*, Vol. 17, 608, 1966.
- [20] L. J. Hart-Smith. "*Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials*", p. 608, 1967.
- [21] Christian G'Sell, Alain Coupard, "*Génie mécanique des caoutchoucs et des élastomères thermoplastique*", Apollor et INPL, 1997.
- [22] P. Germain, "*Mécanique des milieux continus*", Edition Masson, Paris, 1973.
- [23] P. Germain, "*Mécanique, Cours de l'école polytechnique*", Edition Ellipses, Paris, 1986.
- [24] J. Salençon, "*Mécanique des milieux continus - Cours de l'école polytechnique*"
- [25] M. Bornert, T. Bretheau, P. Gilormini, "*Homogénéisation en mécanique des matériaux*", Vol. 1, Hermes sciences publications.
- [26] D. Gay, "*Matériaux composites*", édition Hermès, Paris, 1997.
- [27] M. Reyne, "*Les matériaux nouveaux*", édition Hermès, Paris, 1990.
- [28] R. W. Cahn, P. Haasen, E. J. Kramer, "*Materials science and technology*", Vol. 12, Structure and properties of polymers, VCH, 1993.
- [29] J. P. Mercier, E. Maréchal, "*Traité des matériaux*", Vol. 13 Chimie des polymères, presse polytechniques et universitaires romandes.
- [30] Ph. Cognard, "*Les applications industrielles des matériaux composites*", Vol. I et II, édition du moniteur, Paris, 1989.
- [31] J. M. Dorlot, J. P. Naïlon, J. Masounave, "*Des matériaux*", édition des écoles polytechniques de Montréal, 1986.
- [32] M. F. Ashby, D. R. H. Jones, "*Matériaux*", Vol. 2, Microstructure et mise en œuvre, édition Dunod, Paris, 1991.
- [33] D. William., J. Callister, "*Materials science and engineering, an introduction*", John and sons Inc., 1994.
- [34] E.R. Wagner and L. M. Robeson, *Rubber Chemistry and technology*, Vol. 42, 1129, 1970.

## Chapitre II

# LES BASES MÉCANIQUES

### A. DESCRIPTION DES GRANDES DEFORMATIONS

1. Introduction
2. Cinématique des grandes déformations
3. Description des efforts
4. Equations du mouvement
5. Définition des lois de comportement

### B. HOMOGENÉISATION EN GRANDES DEFORMATIONS

1. Introduction
2. Localisation
  - a. Loi des mélanges
  - b. Equation intégrale cinématique
3. Homogénéisation
4. Approximation auto - cohérente

### C. BIBLIOGRAPHIE

## A. DESCRIPTION DES GRANDES DÉFORMATIONS

### 1. Introduction

De nombreux ouvrages [1, 2, 3] dédiés en tout ou partie à l'analyse de l'élasticité linéaire ou non ont montré qu'il existe différentes notions mathématiques servant à décrire le mouvement d'un milieu continu et les déformations qui y règnent. Ces notions mathématiques sont fortement liées à la nature physique du milieu considéré. En effet, on n'utilisera pas les mêmes outils mathématiques pour décrire un volume gazeux, un milieu liquide ou un bloc d'élastomère.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons aux milieux dits matériellement simples c'est-à-dire des milieux pour lesquels la comparaison entre les voisinages d'une même particule se fait à l'aide des dérivées premières des grandeurs cinématiques comme la dérivée spatiale du déplacement. Dans de nombreux problèmes mécaniques, ces dérivées restent très faibles devant 1. Du point de vue mathématique, on ne conserve alors que les dérivées premières restant ainsi dans le domaine linéaire ou linéarisé. Du point de vue physique, la pièce reste pratiquement inchangée et nous sommes dans l'hypothèse des petites déformations. Cette approche peut cependant se révéler insuffisante dans certains cas où plusieurs non linéarités apparaissent. C'est le cas des élastomères et caoutchoucs. Ces non linéarités peuvent être d'ordre matériel (hyper-élasticité), géométrique (grandes déformations) ou dues aux conditions aux limites (contact, frottement,...). L'on entre alors dans le domaine de l'élasticité non linéaire en grandes déformations.

L'objet de ce chapitre n'est pas de faire un cours complet sur la description des milieux hyperélastiques en grandes déformations mais d'introduire et d'étudier sommairement les notions physiques et mathématiques et les outils permettant d'appréhender les matériaux qui sont le siège de non-linéarités et de grandes déformations. Nous précisons ainsi l'approche et les notations que nous avons adoptées pour nos travaux. Des cours plus approfondis sont disponibles dans la littérature [4,5].

### 2. Cinématique des grandes déformations

#### a. Vecteurs position, déplacement, vitesse et accélération

On considère un milieu dont les particules occupent à un instant initial  $t_0$  ( $t_0 = 0$  sauf mention contraire) une configuration de référence  $K_0$  et à un instant  $t > 0$ , sous l'effet d'actions extérieures une configuration  $K_t$ , appelée « configuration actuelle ». Si on considère ces deux configurations  $K_0$  et  $K_t$  dans un référentiel d'observation  $R$  doté d'un repère  $S(O, x, y, z)$ , une particule se trouvant au point  $p$  à l'instant  $t_0$  se retrouvera en  $P$  à l'instant  $t$  comme l'indique la figure ci-après.

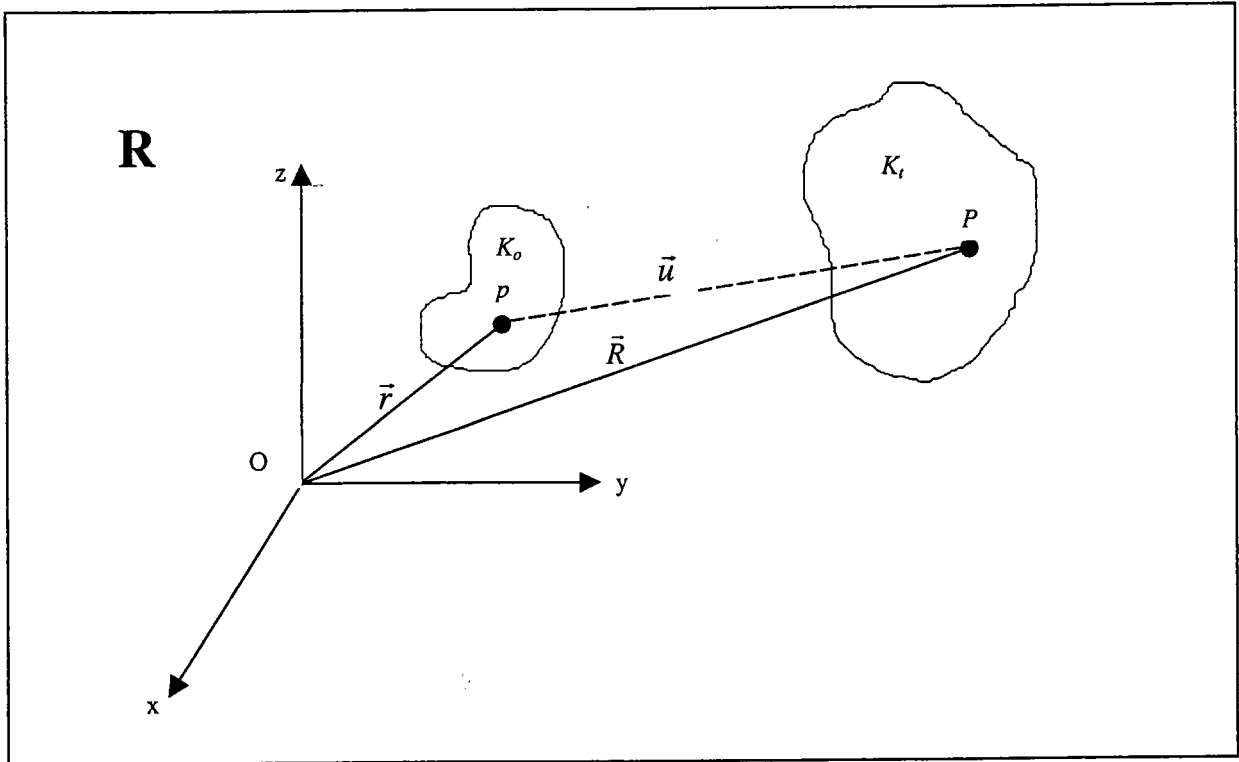


Figure II.1 : Différentes configurations d'un système.

On définit ainsi les grandeurs cinématiques suivantes :

- Vecteur position de la particule référencée par  $\vec{r}$  à l'instant  $t_0$  dans le référentiel  $R$  dans la configuration initiale  $K_0$  :

$$\overrightarrow{Op} = \vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = (x_i)$$

dans la configuration actuelle  $K_t$  :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{R} = \vec{R}(X, Y, Z) = (X_i)$$

- Vecteur déplacement de la particule référencée par  $\vec{r}$  à l'instant  $t_0$  dans le référentiel  $R$

$$\vec{U}(\vec{r}, t) = \vec{R}(\vec{r}, t) - \vec{R}(\vec{r}, 0) = \vec{R} - \vec{r}$$

- Vecteur vitesse de la particule référencée par  $\vec{r}$  à l'instant  $t_0$  dans le référentiel  $R$

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{r}, t)$$

- Vecteur accélération de la particule référencée par  $\vec{r}$  à l'instant  $t_0$  dans le référentiel  $R$

$$\vec{\gamma}(\vec{r}, t) = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial t^2}$$

On peut donc choisir de décrire toutes les grandeurs mécaniques par rapport à la configuration initiale  $\kappa_0$  (description Lagrangienne) ou par rapport à la configuration actuelle  $\kappa_t$  (description Eulerienne).

Dans la configuration Lagrangienne par exemple, on écrira :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{\phi}(\overrightarrow{Op}, t) \quad \text{ou} \quad \vec{R} = \vec{\phi}(\vec{r}, t)$$

où  $\vec{\phi}$  est une fonction vectorielle qui vérifie des propriétés de régularité [2] et de plus :

$$\vec{\phi}(\vec{r}, 0) = \vec{r} .$$

### b. Opérateur gradient

Le milieu étant supposé matériellement simple, on introduit également le **gradient de déformation**  $[F]$  pour explorer ce qui se passe au voisinage de la particule :

$$d\vec{R} = [F].d\vec{r} \quad \text{ou} \quad [F] = \frac{d\vec{R}}{d\vec{r}} = F_{ij}$$

avec :

$$F_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\vec{r}, t) \quad (\text{II.1})$$

En remarquant que la fonction  $\vec{\phi}$  définie précédemment par  $\vec{R} = \vec{\phi}(\vec{r}, t)$  est bijective, on peut noter que le gradient  $[F]$  n'est rien d'autre que la matrice Jacobienne de la transformation  $\vec{\phi}$ . L'opérateur gradient est donc inversible et on pose :

$$J(\vec{r}, t) = \text{Det}[F(\vec{r}, t)] \neq 0 \quad (\text{II.2})$$

D'autre part, on montre que le gradient de déformation peut se décomposer de manière unique sous la forme :

$$[F] = [R].[U] = [V].[R] \quad (\text{II.3})$$

C'est la décomposition polaire de  $[F]$ .

$[U]$  et  $[V]$  sont deux matrices symétriques, définies et positives, respectivement appelées tenseur de déformation pure à droite et tenseur de déformation pure à gauche

$[R]$  est un tenseur orthogonale appelée tenseur de rotation  $[R] = [{}'R]$

$$[U]^2 = [{}'F].[F] \quad \text{et} \quad [V]^2 = [F].[{}'F] \quad (\text{II.4})$$

Il est également intéressant de noter que, si nous avons la relation  $d\vec{R} = [F].d\vec{r}$  pour les éléments particuliers, on obtient aussi :

$$d\vec{A} = J [{}'F^{-1}].d\vec{a}$$

## Chapitre II – Les bases mécaniques

pour les éléments de surface orientée ( $d\vec{a}$  et  $d\vec{A}$  représentant respectivement le même élément de volume dans la configuration initiale et dans la configuration actuelle ) et :

$$dV = J dv$$

pour les éléments de volume ( $dv$  et  $dV$  représentant respectivement la même surface orientée dans la configuration initiale et dans la configuration actuelle ).

Si  $J = 1$  , la transformation est alors équivolumique.

### c. Gradient de déformation

Le vecteur vitesse  $\vec{V}$  défini précédemment peut être considéré comme fonction de  $r$  (description Lagrangienne) ou de  $\vec{R}$  (description Eulerienne).

Soit  $d\vec{x}$  un vecteur matériel dans la configuration de référence et  $d\vec{X}$  le même vecteur après la transformation (dans la configuration actuelle). La dérivée par rapport au temps du vecteur matériel  $d\vec{X}$  sera alors donnée par :

$$\dot{d\vec{X}} = [\dot{F}].d\vec{x} = [\dot{F}].[F^{-1}].d\vec{X} = [G].d\vec{X}$$

et

$$\dot{F}_{ij} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

on définit ainsi le tenseur gradient de vitesse  $[G]$  par :

$$[G] = [\dot{F}].[F]^{-1} \quad \text{ou} \quad G_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial X_j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad (\text{II.5})$$

La décomposition de  $[G]$  en partie symétrique et antisymétrique permet de définir le tenseur taux de déformation  $[D]$  et le tenseur taux de rotation  $[W]$  :

$$\begin{aligned} [D] &= [G]^S = \frac{1}{2}([G] + [{}^tG]) \\ [W] &= [G]^A = \frac{1}{2}([G] - [{}^tG]) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Le tenseur  $[W]$  correspond au rotationnel du vecteur vitesse défini plus haut et décrit donc la vitesse de rotation du solide tandis que  $[D]$  décrit la vitesse de déformation.

**Remarque :** Contrairement à ce que l'on pourrait croire, le taux de rotation (respectivement, de déformation) n'est pas la dérivée par rapport au temps du tenseur de rotation  $[R]$  (respectivement, de déformation pure  $[U]$  ou  $[V]$ ). Pour avoir une interprétation de ce type, il faut faire intervenir la description "Lagrangienne réactualisée", c'est-à-dire prendre comme configuration de référence, la configuration actuelle à l'instant  $t$ .

Le choix de la configuration de référence est bien sûr libre, mais la détermination du mouvement des solides déformables est plus ou moins commode en fonction de ce choix.

Dans la configuration Lagrangienne, ce choix est porté sur la configuration initial du milieu

considéré (généralement sans déformations ni contraintes). Quant à la configuration Eulerienne, ce choix est porté sur la configuration à l'instant  $t$ . Il existe une troisième possibilité appelée description relative. Suivant Truesdell [14], on introduit une troisième configuration du solide à l'instant  $\tau \neq t$ . On peut alors écrire :

$$[F(\tau)] = [F_t(\tau)] \cdot [F(t)] \quad \text{et} \quad [F_t(\tau)] = [F(\tau)] \cdot [F(t)]^{-1} \quad (\text{II.7})$$

en introduisant le *gradient relatif de déformation*  $F_t(\tau)$ , gradient de la déformation subit par le matériau entre les instants  $t$  et  $\tau$ .

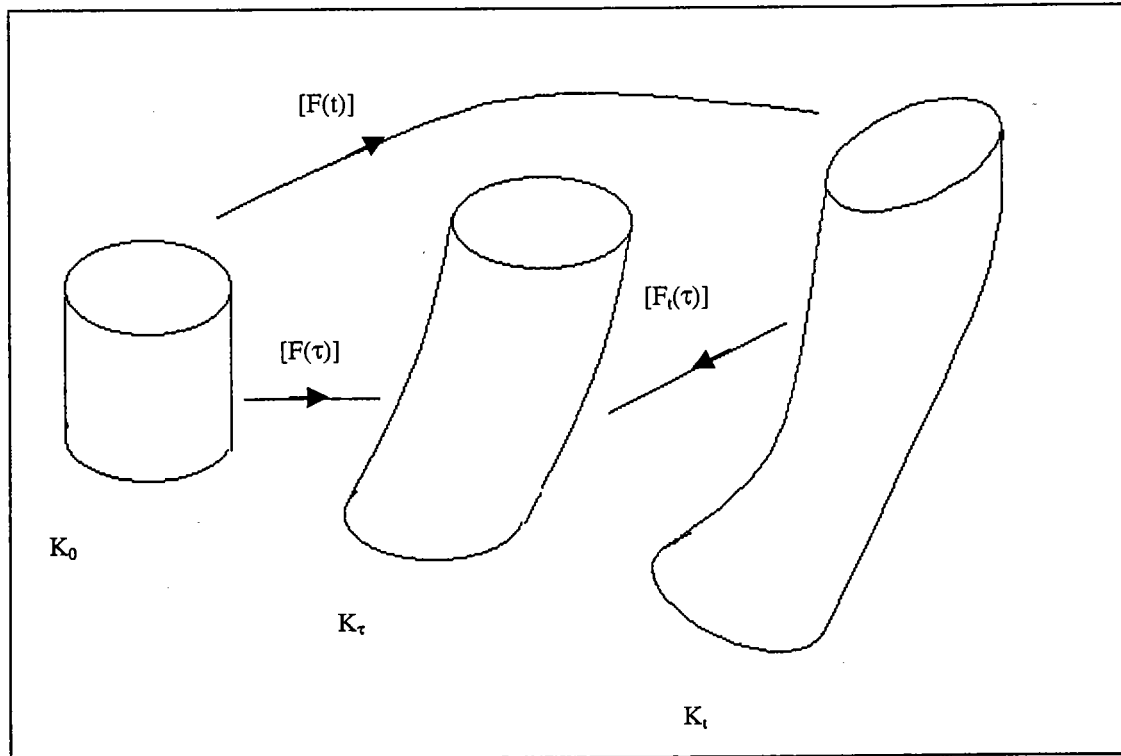


Figure II.2 : Description Lagrangienne réactualisée.

On a bien évidemment :  $[F_t(t)] = [I]$ . On peut définir à partir de  $F_t(\tau)$  les mêmes tenseurs qu'aux paragraphes précédents, en particulier :

$$[F_t(\tau)] = [R_t(\tau)][U_t(\tau)] = [V_t(\tau)][R_t(\tau)] \quad (\text{II.8})$$

$$[G(t)] = \frac{\partial}{\partial \tau} [F_t(\tau)] \Big|_{\tau=t} \quad [W(t)] = \frac{\partial}{\partial \tau} [R_t(\tau)] \Big|_{\tau=t} \quad [D(t)] = \frac{\partial}{\partial \tau} [U_t(\tau)] \Big|_{\tau=t}$$

Dans cette description comme en description Eulerienne, on utilise une formulation en vitesse, incontournable d'ailleurs en mécanique non linéaire des solides déformables.

**Cependant, l'emploi des méthodes numériques conduit toujours à une formulation incrémentale qui peut être obtenue à partir d'une écriture différentielle. C'est cette dernière formulation que nous utiliserons dans les développements ultérieurs.**



## Chapitre II – Les bases mécaniques

La dérivée instantanée du *gradient relatif de déformation*  $F_i(\tau)$  par rapport au temps joue un rôle primordial dans la description de l'évolution de la structure interne du matériau. Son incrément noté  $g$  est défini par :

$$[g] = \delta_t [F_i(t)] \quad (\text{II.9})$$

où  $\delta_t$  symbolise l'incrément selon le temps :  $\delta_t a = a(t + dt) - a(t)$

En introduisant :

$$\vec{V} = \delta_t \vec{R}(r, t) \quad (\text{II.10})$$

on démontre que :

$$[g] = \frac{\partial \vec{V}(R, t)}{\partial \vec{R}} \quad (\text{II.11})$$

Dans la suite, les incréments  $\vec{V}$  et  $[g]$  seront appelés respectivement vitesse et gradient de vitesse.

L'incrément de la relation (II.8) par rapport au temps, par définition  $[g]$  s'écrit :

$$[g] = \delta_t [F_i(\tau)]|_{\tau=t} = \delta_t [R_i(\tau)] \cdot [U_i(\tau)] + [R_i(\tau)] \cdot \delta_t [U_i(\tau)]|_{\tau=t} \quad (\text{II.12})$$

or pour  $t = \tau$ , on a :  $[F_i(\tau)] = [I]$  et  $U_i(\tau) = R_i(\tau) = [I]$ . Il s'en suit que :

$$[g] = \delta_t [R_i(\tau)]|_{\tau=t} + \delta_t [U_i(\tau)]|_{\tau=t} = [w] + [d] \quad (\text{II.13})$$

Grâce à l'unicité de la décomposition de  $[g]$  en partie symétrique et antisymétrique la relation [II.13] permet de définir le tenseur incrément de déformation  $[d]$  et le tenseur incrément de rotation  $[w]$  :

$$\begin{aligned} [d] &= [g]^S = \frac{1}{2}([g] + [g]') \\ [w] &= [g]^A = \frac{1}{2}([g] - [g]') \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

En dérivant par rapport à  $\tau$  et en posant  $\tau = t$ , la relation (II.7) devient :

$$\delta_t [F(r, t)] = [g(R, t)] \cdot [F(r, t)] \quad (\text{II.15})$$

ou encore :

$$[g(R, t)] = \delta_t [F(R, t)] \cdot [F(r, t)]^{-1} \quad (\text{II.16})$$

d. Tenseurs de dilatation

La meilleure façon d'étudier les changements de forme subis par la géométrie du système entre les configurations  $K_0$  et  $K_t$  est d'examiner les variations d'orientation (les angles) et de distance (les longueurs). Le produit scalaire offre cette double possibilité et c'est sa variation pour deux vecteurs matériels, qui nous donne les tenseurs dilatation.

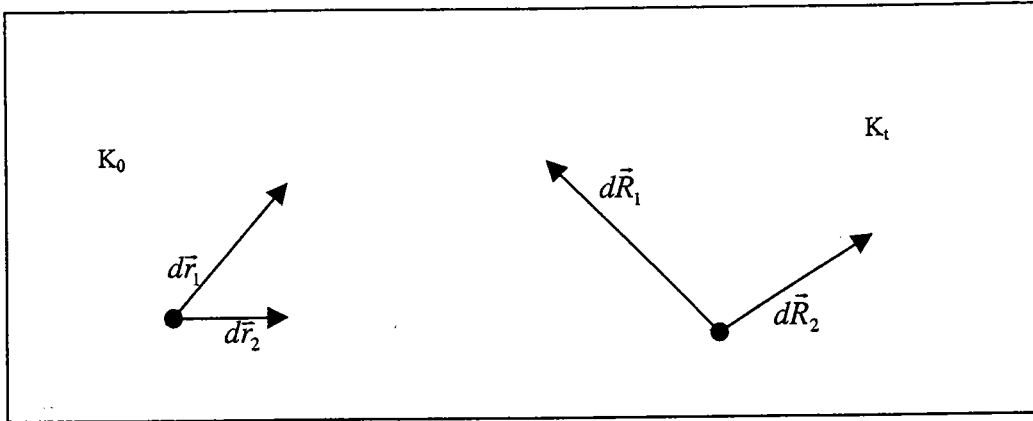


Figure II.3 : Etude des grandes déformations.

On montre ainsi que :

$$d\vec{R}_1 \cdot d\vec{R}_2 = d\vec{r}_1 \cdot [C] \cdot d\vec{r}_2$$

où :

$$[C] = [F] \cdot [F] \quad (\text{II.17})$$

$[C]$  est appelé « tenseur de dilatation » ou « tenseur de Cauchy-Green droit ». On remarquera qu'avec la relation (II.3) on a :

$$[C] = [U]^2 \quad (\text{II.18})$$

De même, on définit le « tenseur de Cauchy-Green gauche »  $[B]$  par :

$$d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 = d\vec{R}_1 \cdot [B^{-1}] \cdot d\vec{R}_2$$

où :

$$[B] = [F] \cdot [F] \quad (\text{II.19})$$

En considérant la relation (II.3) on obtient aussi :

$$[B] = [V]^2 \quad (\text{II.20})$$

Remarquons que les deux tenseurs de Cauchy-Green sont symétriques.

e. Tenseurs de déformation

Comme précédemment, pour obtenir les tenseurs de déformation, nous examinerons la différence entre les produits scalaires de deux vecteurs matériels dans les configurations  $K_o$  et  $K_t$ .

$$d\vec{R}_1 \cdot d\vec{R}_2 - d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 = 2.d'\vec{r}_1.[E].d\vec{r}_2$$

où :

$$[E] = \frac{1}{2}([F].[F] - [I]) = \frac{1}{2}([C] - [I]) \quad (\text{II.21})$$

$[I]$  étant le tenseur unité et  $[C]$  le tenseur de "Cauchy-Green droit".  
 $[E]$  est appelé " tenseur de Green - Lagrange ".

On montre de même que :

$$d\vec{R}_1 \cdot d\vec{R}_2 - d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 = 2.d'\vec{R}_1.[A].d\vec{R}_2$$

où :

$$[A] = \frac{1}{2}([I] - [B]^{-1}) \quad (\text{II.22})$$

$[A]$  est appelé « tenseur d'Euler - Almansi ».

Des équations précédentes, on déduit les relations suivantes entre  $[A]$  et  $[E]$  :

$$[E] = [F].[A].[F] \quad \text{et} \quad [A] = [F^{-1}].[E].[F^{-1}] \quad (\text{II.23})$$

Notons que tous ces tenseurs recouvrent la même déformation physique, mais pour des raisons de commodité, on utilise souvent  $[B]$  et  $[A]$  dans la configuration actuelle  $K_t$  et  $[C]$  et  $[E]$  dans la configuration de référence  $K_o$ .

Examinons à présent les termes diagonaux de ces tenseurs :

$$E_{ii} = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\Delta l_i}{l_i} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{II.24})$$

et

$$A_{ii} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\left( 1 + \frac{\Delta l_i}{l_i} \right)^2} \right] \quad (\text{II.25})$$

où  $\frac{\Delta l_i}{l_i} \ll 1$  est l'allongement relatif dans la direction  $i$ .

Dans le cas des petites déformations (Hpp), en ne conservant que les termes de premier ordre  $\frac{\Delta l_i}{l_i} \ll 1$ , on montre que :

$$E_{ii} \approx A_{ii} \approx \frac{\Delta l_i}{l_i} = \varepsilon_{ii} \quad (\text{II.26})$$

En conséquence, les termes diagonaux des tenseurs  $[E]$ ,  $[A]$  et  $[\varepsilon]$  sont identiques et représentent l'allongement relatif dans les directions du repère.

### 3. Description des efforts

Dans un milieu hyper-élastique, considérons un élément de surface  $dS_0$  dans la configuration initiale  $K_0$ , qui se déforme pour devenir un élément de surface  $dS$  dans la configuration actuelle  $K_t$ , comme le montre la figure ci-après.

On définit dans la configuration actuelle le vecteur contrainte  $d\vec{T}$  qui caractérise les efforts intérieurs de cohésion exercés sur une partie du solide à travers un élément de surface  $dS$  de normale extérieure  $-\vec{N}$ . On montre ensuite qu'en un point donné, ce vecteur contrainte dépend linéairement du vecteur normal  $\vec{N}$  ce qui permet d'écrire :

$$d\vec{T} = [\sigma] \cdot \vec{N} \cdot dS \quad \text{ou} \quad dT_i = \sigma_{ij} \cdot N_j \cdot dS$$

Ce raisonnement classique, est donc Eulérien (car exprimé dans la configuration actuelle) et  $[\sigma]$  est le tenseur de contrainte de Cauchy, symétrique en l'absence de couples surfacique [2].

En mécanique du solide, il est inconfortable de travailler avec le tenseur de Cauchy puisque la configuration déformée n'est pas connue d'avance. D'où la nécessité d'introduire d'autres tenseurs qui ne sont pas uniquement liés à la configuration actuelle.

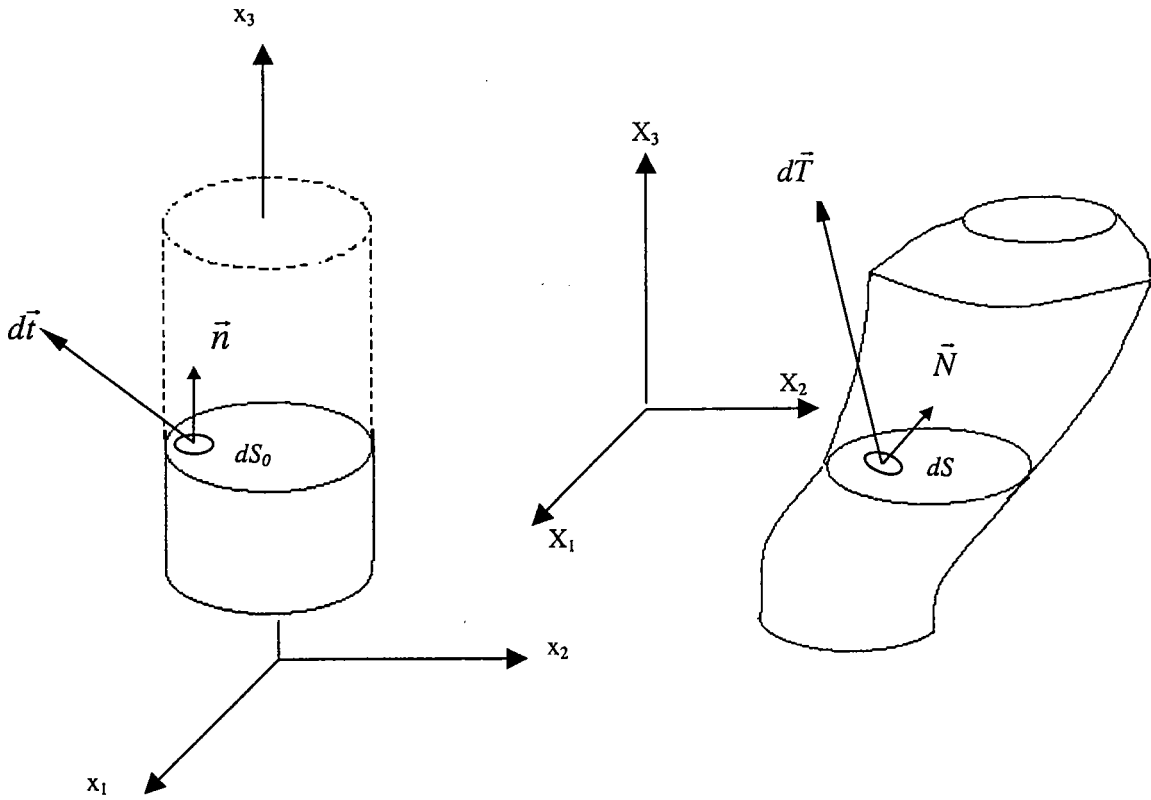


Figure II.4 : Vecteurs contraintes

Si l'on choisit d'exprimer l'élément de surface dans  $K_0$  plutôt que dans  $K_t$ , la relation précédente devient :

$$d\vec{T} = [N] \cdot \vec{n} dS_0 \quad \text{ou} \quad dT_i = N_{ij} n_j dS_0 \quad (\text{II.27})$$

Ce qui définit un nouveau tenseur de contraintes : le premier tenseur de Piola - Kirchhoff ou tenseur de Boussinesq  $[N]$ .

Comme  $[F]$ , ce tenseur n'est ni Lagrangien ni Eulérien. C'est une application de  $K_0$  dans  $K_t$ .

De plus, il n'est pas symétrique. Pour contourner ces inconvénients et obtenir un tenseur complètement Lagrangien et symétrique, on transporte la force élémentaire  $d\vec{T}$  de  $K_t$  dans la configuration initiale  $K_0$ . Elle devient  $d\vec{t}$  et est liée à  $d\vec{T}$  par la relation :

$$d\vec{t} = [F^{-1}] \cdot d\vec{T}, \quad \text{où } [F] \text{ est l'opérateur gradient.}$$

On définit ainsi le second tenseur de Piola - Kirchhoff ou tenseur de Piola - Lagrange  $[S]$  par :

$$d\vec{t} = [S] \cdot \vec{n} dS_0 \quad (\text{II.28})$$

## Chapitre II – Les bases mécaniques

D'après les formules (II.27) et (II.28), les tenseurs de contraintes sont liés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [S] &= [F^{-1}].[N] = J[F^{-1}].[ \sigma ].[F^{-1}] = [F^{-1}].[ \tau ].[F^{-1}] \\ [N] &= J[ \sigma ].[F^{-1}] \\ j[ \sigma ] &= [ \tau ] = [N].[F] = [F].[S].[F] \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

$[ \tau ]$  est appelé tenseur de Kirchhoff.

Remarquons qu'en petites déformations,  $[F]$  tend vers l'unité et tous ces tenseurs de contrainte  $[ \sigma ]$ ,  $[N]$  et  $[S]$  se réduisent à la même grandeur. Il en est de même lorsqu'on choisit la configuration actuelle comme configuration de référence :

$$[F] = [I] \Rightarrow [ \sigma ] = [N] = [S]$$

mais les incréments de ces tenseurs restent différents et tels que :

$$\begin{aligned} \delta_i [ \sigma ] &= \delta_i [N] + [g][ \sigma ] - [ \sigma ]Tr[g] \\ \delta_i [ \sigma ] &= \delta_i [S] + [g][ \sigma ] + [ \sigma ][g]' - [ \sigma ]Tr[g] \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Physiquement,  $[S]$  et  $[ \tau ]$  n'ont pas de signification concrète tandis que  $[ \sigma ]$  et  $[N]$  caractérisent directement les efforts appliqués. Ce sont donc eux qui interviendront dans l'écriture des conditions aux limites statiques. Par exemple, pour des efforts appliqués donnés par unité de surface, dans la configuration initiale, on écrira :  $N_{ij} n_j = t_i^d$  alors que pour des efforts donnés par unité de surface dans la configuration actuelle (cas des efforts appliqués par un fluide sous pression), ces conditions aux limites porteront sur :  $\sigma_{ij} N_j = -p^d N_i$

### 4. Equations du mouvement

Les équations du mouvement ainsi que les conditions aux limites sur la structure déformée ( $\Omega_t$ ), s'obtiennent de manière relativement simple par application du principe des puissances virtuelles.

En description Eulerienne, on obtient donc (Cf. figure II.4)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} + \rho f_i = \rho \gamma_i \quad \text{dans } (\Omega_t),$$

$$\sigma_{ij} N_j = T_i \quad \text{sur les bords de } (\Omega_t),$$

Plus précisément, on pourra écrire :

$$Div[ \sigma(\vec{R}) ] + \rho \vec{f}(\vec{R}) = \rho(\vec{R}) \vec{\gamma}(\vec{R}) \quad \text{dans } (\Omega_t),$$

$$\vec{T}(\vec{R}) = [\sigma(\vec{R})] \cdot \vec{N} \quad \text{sur les bords de } (\Omega_t),$$

Dans ces relations, on reconnaît :

$\vec{f}(\vec{R})$  : densité massique des efforts à distance

$\vec{\gamma}(\vec{R})$  : vecteur accélération

$\rho(\vec{R})$  : masse volumique du matériau

$[\sigma(\vec{R})]$  : tenseur contrainte de Cauchy

$\vec{N}$  : vecteur normal unitaire extérieur à  $(\Omega_t)$

En description Lagrangienne, on se place dans la configuration de référence où la structure est dans son état initial  $(\Omega_0)$  et on remarque que les puissances virtuelles des divers efforts sont données par :

- Puissances des efforts intérieurs :

$$P_i = - \int_{\Omega_t} \sigma_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial X_i} dV = - \int_{\Omega_0} S_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} dv \quad (\text{II.31})$$

- Puissance des efforts à distance :

$$P_d = \int_{\Omega_t} \rho f_i V_i dV = \int_{\Omega_0} \rho_0 f_i V_i dv \quad (\text{II.32})$$

où  $\rho_0 = J \rho$

- Puissance des efforts d'inertie :

$$P_i = - \int_{\Omega_t} \rho \gamma_i V_i dV = - \int_{\Omega_0} \rho_0 \gamma_i V_i dv \quad (\text{II.33})$$

- Puissance des efforts de contact :

$$P_c = \int_{\partial\Omega_t} T_i V_i dS = \int_{\partial\Omega_0} \beta T_i V_i dS_0 \quad (\text{II.34})$$

où  $dS = \beta dS_0$

Le principe des puissances virtuelles  $P_i + P_d + P_i + P_c = 0$  montre alors que :

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 f_i = \rho_0 \gamma_i \quad \text{dans } (\Omega_0),$$

$$S_{ij} n_j = T_i^0 = \beta T_i \quad \text{sur les bords de } (\Omega_0)$$

$$\beta = J [{}^tF^{-1}]$$

Plus précisément, on écrira :

$$\text{div}[N(\bar{r},t)] + \rho_0(\bar{r})\bar{f}[(\phi(\bar{r},t))] = \rho_0\bar{\gamma}[(\phi(\bar{r},t))] \quad \text{dans } (\Omega_0) \quad (\text{II.35})$$

$$\bar{T}(\bar{r},t) = [S(\bar{r},t)] \cdot \bar{n} \quad \text{sur les bords de } (\Omega_0) \quad (\text{II.36})$$

Dans ces relations,  $\bar{n}$  est le vecteur unitaire extérieur à  $(\Omega_0)$  et  $\bar{R} = \phi(\bar{r},t)$  la fonction donnant la position de la particule

En tenant compte du gradient de vitesse et de la formulation incrémentale nécessaire pour toute méthode numérique, ces équations d'équilibre pour des problèmes quasi-statiques deviennent [15] :

- en fonction du taux de contraintes de Cauchy  $[\sigma]$  :

$$\text{div}[\delta_t \sigma] + \rho \delta_t f - \text{grad}[\sigma] : [g] + \rho f \text{Tr}[g] = 0 \quad (\text{II.37})$$

- en fonction de taux de contraintes de Boussinesq  $[n]$  et pour la configuration de référence confondue avec la configuration actuelle :

$$\text{div}[\delta_t n] + \rho \delta_t f = 0 \quad (\text{II.38})$$

où  $\delta_t f$  est l'incrément de forces volumiques,  $\rho$  la masse volumique du matériau et  $g$  le gradient de vitesse.

## 5. Définition des lois de comportement

### a. Matériaux élastiques

Les matériaux élastiques sont des milieux qui ont une mémoire privilégiée. Ils ne se souviennent que d'une seule configuration qu'il convient naturellement de prendre comme état de référence. Dans la plupart des cas, cet état est libre de contrainte et on dit que l'état de référence est l'état naturel. Du point de vue quantitatif, on dit qu'un matériau est élastique si le tenseur des contraintes de Cauchy  $[\sigma]$  dépend uniquement du gradient des déformations  $[F]$  faisant passer de l'état de référence à l'état actuel.

$$[\sigma] = \Psi([F])$$

$\Psi$  est une fonction dont la matrice est symétrique. Elle est physiquement objective puisque le comportement du matériau ne dépend pas du référentiel choisi.

En partant de la relation précédente et compte tenu des relations obtenues aux paragraphes 3 et 4, on montre que dans un milieu élastique, le tenseur de Piola - Kirchhoff  $[S]$  est fonction du tenseur de déformation de Cauchy-Green droit  $[C]$  ou du tenseur de Green - Lagrange  $[E]$ .

$$[S] = \Pi([C]) = \Pi(2[E] + [I])$$



En faisant un raisonnement semblable à celui qui aboutit à la relation ci-dessus mais en se plaçant dans la configuration actuelle, on montre également que le tenseur des contraintes de Cauchy  $[\sigma]$  est fonction du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche  $[B]$  ou tenseur d'Euler - Almansi  $[A]$ .

$$[\sigma] = \Gamma([B]) = \Gamma([I] - 2[A]^{-1}) \quad (\text{II.39})$$

Cette dernière relation est d'intérêt pratique moindre que la précédente puisque la configuration actuelle est en général inconnue.

### b. Matériaux hyper - élastiques

Un matériau élastique est dit hyperélastique ou "élastique de Green" si son comportement est régi par une fonction densité d'énergie de déformation  $W$ , ce qui implique que le travail mis en jeu pour aller d'un état de déformation à un autre ne dépend pas du chemin suivi.

En petites déformations, la loi de comportement s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.40})$$

où  $A_{ijkl}$  est le tenseur des modules élastiques du matériau. En introduisant l'énergie de déformation, on pourra également écrire :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{2} A_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.41})$$

Enfin, on peut écrire cette loi sous forme différentielle :

$$\dot{\sigma} = A_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (\text{II.42})$$

Ces trois écritures, strictement équivalentes en petites déformations conduisent, lorsqu'on les étend en grandes déformations, à trois modèles différents de comportement :

- le modèle élastique (qui s'obtient par généralisation de la première forme de loi de comportement en petites déformations) (II.40)
- le modèle hyperélastique (II.41)
- le modèle hypoélastique (II.42)

Nous - nous intéressons ici au modèle hyperélastique qui s'obtient par généralisation de la seconde écriture de la loi de comportement en petites déformations. Cette forme résulte d'une approche thermodynamique obtenue en introduisant une énergie  $W$  fonction des déformations.

En théorie purement mécanique, nous écrirons donc :

$$W = W([F]) = W([E]) \quad (\text{II.43})$$

## Chapitre II – Les bases mécaniques

La seconde forme s'obtenant à partir de la première par application du principe d'indifférence matérielle,  $[F]$  étant le tenseur gradient de déformation et  $[E]$  le tenseur des déformations de Green - Lagrange.

Pour déduire une loi liant les contraintes aux déformations, nous remarquerons que les matériaux élastiques ne dissipent pas d'énergie. Pour obtenir la forme de cette dissipation, nous considérons une approche mécanique classique qui consiste à "oublier" les phénomènes thermiques. La thermodynamique intervient alors pour introduire la notion d'irréversibilité indépendamment de tout couplage thermomécanique. La distinction entre énergie interne et énergie libre disparaît et on ne parle que d'une énergie que nous avons noté  $W$ . Les inégalités de Clausius-Duhem deviennent alors :

$$\sigma_{ij} D_{ij} = \dot{W} + \phi \quad (\text{II.44})$$

ou encore, dans la configuration initiale :

$$S_{ij} \dot{E}_{ij} = \dot{W} + \phi_o \quad (\text{II.45})$$

La signification énergétique de ce bilan est claire. Le travail des efforts intérieurs se décompose en deux parties. Une partie stockée par le matériau sous forme d'énergie  $W$  et une partie dissipée sous forme de chaleur  $\phi$ .

Un matériau élastique ne dissipe pas d'énergie ce qui veut dire :

$$\phi_o = [S] : [\dot{E}] - \dot{W} = ([S] - \frac{\partial W}{\partial [E]}) : [\dot{E}] = 0$$

Il en résulte la loi de comportement suivante :

$$\begin{aligned} [S] &= \frac{\partial W}{\partial [E]} \\ S_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

C'est la forme générale de la loi de comportement d'un matériau hyperélastique.

Dans le cas isotrope, l'énergie  $W$  doit être invariante dans toute rotation de la configuration initiale  $K_o$ . On doit donc avoir :

$$W(\dot{E}) = W(Q E 'Q) = W(E) \quad (\text{II.47})$$

et la fonction scalaire  $W$  doit être isotrope.

Remarquons que la loi de comportement ci-dessus lie des tenseurs définis dans  $K_o$  qui sont invariants par changement de référentiel (formulation Lagrangienne). Une telle loi écrite dans  $K_o$  est donc nécessairement objective. Malheureusement, la loi de comportement ainsi

## Chapitre II – Les bases mécaniques

obtenue dépend de la configuration de référence choisie. Elle ne convient donc pas à des matériaux comme le caoutchouc qui n'ont pas de configuration de référence privilégiée. Il nous faut donc trouver une forme Eulérienne de la loi de comportement.

En choisissant  $[Q] = [R]$  dans (II.47), on peut écrire :

$$W = W([R].[E].[R]) = W([B]) \quad (\text{II.48})$$

car  $[R].[E].[R] = \frac{1}{2}([B] - [I])$

L'énergie doit donc être une fonction isotrope du tenseur de Cauchy–Green gauche  $[B]$ . La forme Eulérienne de la loi de comportement peut alors s'obtenir par une série de calculs en partant de la relation (II.44) :

$$\phi = [\sigma] : [D] - \dot{W} = [\sigma] : [D] - \frac{\partial W}{\partial [B]} : [\dot{B}] \quad (\text{II.49})$$

Compte tenu de l'isotropie de la fonction scalaire  $W$  et des relations

$[\dot{B}] = [G].[B] + [B].[G]$  et  $[A] : [B].[C] = [A].[C] : [B]$  (où  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  sont trois tenseurs d'ordre deux), l'expression de la dissipation devient :

$$\phi = [\sigma] : [D] - 2 \frac{\partial W}{\partial [B]} : [G].[B] = [\sigma] : [D] - 2 \frac{\partial W}{\partial [B]} [B] : [G]$$

$[B]$  est un tenseur symétrique,  $[G] = [D] + [w]$  le tenseur gradient de vitesse et  $[w]$  est anti-symétrique

$$\phi = \left( [\sigma] - 2 \frac{\partial W}{\partial [B]} [B] \right) : [D]$$

On obtient alors la forme Eulerienne de la loi de comportement d'un matériau isotrope:

$$[\sigma] = 2 \frac{\partial W}{\partial [B]} [B] = 2 [B] \frac{\partial W}{\partial [B]} \quad (\text{II.50})$$

en remarquant que, puisque  $W$  est isotrope,  $\frac{\partial W}{\partial B}$  commute avec  $[B]$  (résultat mathématique classique).

Reprenons la relation (II.46) 
$$[S] = \frac{\partial W([E])}{\partial [E]} \quad (\text{II.51})$$

Sachant que le tenseur de Cauchy–Green droit  $[C]$  et celui de Green - Lagrange  $[E]$  sont liés par  $[E] = \frac{1}{2}([C] - [I])$  cette relation devient :

$$[S] = 2 \frac{\partial W([C])}{\partial [C]} \quad (\text{II.52})$$

## Chapitre II – Les bases mécaniques

Dans le cas d'un milieu isotrope, on montre que la fonctionnelle  $W$ , dépend des trois invariants du tenseur de Cauchy-Green droit  $[C]$  exprimés ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 I_1([C]) &= \text{Tr}([C]) = C_{ij} \delta_{ij} = C_{ii} \\
 I_2([C]) &= \frac{1}{2} \left[ (\text{Tr}[C])^2 - \text{Tr}([C]^2) \right] = \frac{1}{2} (C_{ii} C_{jj} - C_{ij} C_{ij}) \\
 I_3([C]) &= \text{Det}([C]) = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} C_{ip} C_{jq} C_{kr}
 \end{aligned} \tag{II.53}$$

où  $\delta_{ij}$  définit les composantes du tenseur unité et  $\varepsilon_{ijk}$  les composantes du tenseur de permutation.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices sont égaux} \\ 1 & \text{si la permutation (i j k) est paire} \\ -1 & \text{si la permutation (i j k) est impaire} \end{cases}$$

On peut donc réécrire la loi (II.52) en fonction de ces invariants :

$$S_{ij} = \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial C_{ij}} \right]$$

Notons que ces invariants s'écrivent en fonction des composantes de  $[C]$  sous la forme :

$$\begin{aligned}
 I_1([C]) &= C_{11} + C_{22} + C_{33} \\
 I_2([C]) &= C_{11}C_{22} + C_{11}C_{33} + C_{22}C_{33} - C_{12}C_{21} - C_{13}C_{31} - C_{23}C_{32} \\
 I_3([C]) &= C_{11}C_{22}C_{33} + C_{11}C_{33}C_{23} + C_{31}C_{23}C_{11} - C_{22}C_{13}C_{31} - C_{12}C_{21}C_{33} - C_{11}C_{23}C_{32}
 \end{aligned} \tag{II.54}$$

et que :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} &= \delta_{ij} \\
 \frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}} &= I_1 \delta_{ij} - C_{ij} \\
 \frac{\partial I_3}{\partial C_{ij}} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{imk} \varepsilon_{jqr} C_{mq} C_{kr} = I_3 (C^{-1})_{ij}
 \end{aligned} \tag{II.55}$$

La symétrie du tenseur de Cauchy-Green  $[C]$  montre que :

$$C_{is} \frac{\partial I_3}{\partial C_{sj}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{smk} \varepsilon_{jqr} C_{mq} C_{kr} C_{si} = \frac{1}{2} \varepsilon_{iqr} \varepsilon_{jqr} \text{Det}[C] = I_3 \delta_{ij} \tag{II.56}$$

En petites déformations, on montre que :

$$2W([\varepsilon]) = (\lambda + 2\mu)I_1^2(\varepsilon) - 4\mu I_2(\varepsilon) \quad (\text{II.57})$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda I_1(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (\text{II.58})$$

$$2W([\sigma]) = \frac{I_1^2(\sigma)}{E} - \frac{2(1+\nu)}{E}I_2(\sigma) \quad (\text{II.59})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}I_1(\sigma)\delta_{ij} \quad (\text{II.60})$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du matériau,  $[\varepsilon]$  le tenseur des petites déformations, identique au tenseur des Green - Lagrange au premier ordre près,  $E$  le module d'Young du matériau et  $\nu$  son coefficient de Poisson.

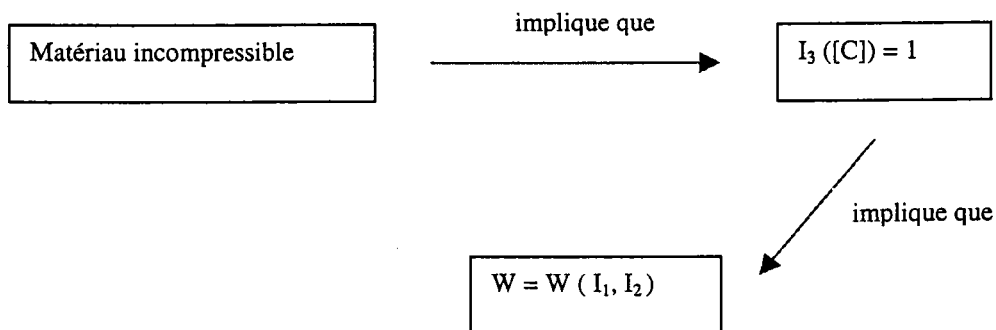
### c. Matériaux hyperélastiques incompressibles

Un matériau est dit incompressible si toute évolution de son milieu est équivolumique, d'où les relations :

$$J = \text{Det}[F] = \frac{dV}{dv} = 1 \quad (\text{II.61})$$

$$I_3([C]) = \text{Det}[C] = \text{Det}([F]^T \cdot [F]) = J^2 = 1$$

Il s'ensuit que pour un matériau incompressible, l'énergie volumique de déformation  $W$  n'est fonction que des deux principaux invariants de  $[C]$ ,  $I_1$  et  $I_2$ . Notons que la réciproque n'est pas vraie.



Dans le cas de petites déformations, on inverse la loi de comportement en exprimant la déformation  $[\varepsilon]$  en fonction de la contrainte  $[\sigma]$  pour traduire l'incompressibilité. Cette "gymnastique" est exclue en grandes déformations et pour pallier à cet inconvénient, une démarche communément admise consiste à exprimer l'énergie de déformation sous la forme :

## Chapitre II – Les bases mécaniques

$$W([C]) = \Pi(I_1, I_2) + \xi G^2(I_3) \quad (\text{II.62})$$

Dans laquelle  $G(I_3)$  est appelé fonction de pénalité telle que :

$$G(I_3) = 0 \Rightarrow I_3 = 1$$

Les formes généralement admises pour la fonction de pénalité  $G$  sont :

$$\begin{aligned} G(I_3) &= I_3 - 1 \\ G(I_3) &= \frac{1}{2} \text{Log}(I_3) \end{aligned}$$

Il reste à déterminer le paramètre  $\xi$ . Une première approche utilisant les multiplicateurs de Lagrange est très lourde et difficilement praticable. Une deuxième approche consiste à introduire *a priori* la valeur de  $\xi$  et à poser :

$$\xi = \frac{1}{2\alpha} \quad (\text{II.63})$$

$\alpha$  est le paramètre pénalisant, défini de telle sorte que lorsque :

$$\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow G(I_3) \rightarrow 0 \Rightarrow I_3 \rightarrow 1$$

La relation (II.52) devient alors :

$$\frac{S_{ij}}{2} = \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial \Pi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}} + \frac{1}{\alpha} G(I_3) \frac{\partial G}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial C_{ij}} \right]$$

Ou encore, en utilisant les expressions (II.55)

$$\frac{S_{ij}}{2} = \left( \frac{\partial \Pi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Pi}{\partial I_2} \right) \delta_{ij} - C_{ij} \frac{\partial \Pi}{\partial I_2} + \frac{I_3}{\alpha} G(I_3) \frac{\partial G}{\partial I_3} (C^{-1})_{ij} \quad (\text{II.64})$$

Il est également à noter qu'il est parfois d'usage d'introduire une forme plus achevée de l'énergie volumique de déformation en ajoutant une fonction  $H(I_3)$  servant à traduire la nullité des contraintes à l'état naturel.

$$W([C]) = \Pi(I_1, I_2) - H(I_3) + \frac{1}{2\alpha} G^2(I_3) \quad (\text{II.65})$$

avec  $H(1) = 0$ .

Cette dernière forme de  $W$  permet d'écrire les composantes du tenseur de Piola-Kirchhoff sous la forme :

$$\frac{S_{ij}}{2} = \left( \frac{\partial \Pi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Pi}{\partial I_2} \right) \delta_{ij} - C_{ij} \frac{\partial \Pi}{\partial I_2} + \left( \frac{G(I_3)}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial I_3} - \frac{\partial H}{\partial I_3} \right) I_3 (C^{-1})_{ij} \quad (\text{II.66})$$

Si  $[S] = 0$  lorsque  $[C] = [I]$  ( $I_1 = 3, I_2 = 3, I_3 = 1$ ) alors la fonction  $H(I_3)$  doit vérifier

$$\frac{\partial H}{\partial I_3}(1) = \frac{\partial \Pi}{\partial I_1}(3,3,1) + 2 \frac{\partial \Pi}{\partial I_2}(3,3,1) \Rightarrow H(I_3) = -c \left( \frac{1}{I_3^2} - 1 \right)$$

où  $c$  est une constante à déterminer.

Enfin, on montre que le paramètre de pénalisation  $\alpha$  s'obtient par la relation suivante:

$$\alpha = \frac{\frac{\partial^2 [G^2(1)]}{\partial^2 C_{11}}}{\frac{3(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial I_1}(3,3) + \frac{\partial \Pi}{\partial I_2}(3,3) \right] - 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial C_{11}^2}(3,3)} \quad (\text{II.67})$$

$\nu$  étant le coefficient de Poisson du matériau. Lorsque celui-ci est parfaitement incompressible, la relation précédente montre alors que  $\alpha = 0$ . En général, on choisit  $\nu$  au voisinage de 0.5, c'est-à-dire 0.48 ou 0.499

De tout ce qui précède se dégage la remarque suivante :

Les lois de comportement en grandes déformations et la forme donnée à l'énergie est la base de tout modèle voulant décrire le comportement de matériaux hyperélastiques. On trouve dans la littérature, plusieurs expressions de cette énergie suivant les problèmes à traiter et la nature du matériau. Les plus couramment utilisées sont :

- celles de Mooney-Rivlin (1940 – 1948) (cf. [7,8]) surtout utilisée pour l'étude des déformations des élastomères (caoutchouc) supportant jusqu'à environ 150 % de déformation,
  - celle d'Ogden-Swanson (1972 – 1985) pour les matériaux hyperélastiques faiblement incompressibles supportant un taux de déformation supérieur à 150 %,
  - la loi de Blatz - Ko utilisée pour modéliser le comportement des mousses compressibles.
- Nous-nous pencherons plus en détail sur les deux premières lois dans le chapitre III .

## B. HOMOGENEISATION EN GRANDES DEFORMATIONS

### 1. Introduction

Depuis toujours, l'apparition de nuances ou de matériaux nouveaux avait jusque là entièrement tenue du hasard, de l'ingéniosité ou de l'empirisme. La pratique et le marché se chargeant peu à peu de faire le tri entre les curiosités et les véritables facteurs d'innovation technologique. Cette logique tend aujourd'hui à s'inverser. De plus en plus, cette activité devient rationnelle, organisée, systématique. Le hasard, l'empirisme et l'ingéniosité jouent toujours un rôle clé dans l'innovation, mais celle-ci est de plus en plus subordonnée à l'analyse et à l'expression du besoin industriel et économique, orientée, mobilisée et évaluée à partir d'eux. Au cœur de cette nouvelle logique se situe le besoin impérieux d'une maîtrise toujours plus grande des relations entre la structure microscopique des matériaux, telle qu'elle résulte de leurs procédés d'élaboration et de transformation, et leur comportement macroscopique, responsable de leurs propriétés d'usage.

Le "passage du microscopique au macroscopique", qui régit ces relations, n'en est pas moins un formidable défi scientifique, relevé de tous les cotés et pour une très grande variété de matériaux par des physiciens, des chimistes et des mécaniciens.

Les premiers pas, timides et incomplets vers l'homogénéisation des comportements non linéaires ont été faits par Taylor, Lin, Voigt et Reuss puis, dans les années soixante où les principaux auteurs furent Eshelby [15], avec son problème d'inclusion, Budiansky et al [16] d'abord, puis Kröner [17] ensuite qui s'engagent explicitement sur le terrain des estimations non linéaires pour l'élastoplasticité du poly cristal en rapprochant la déformation plastique de la notion de "déformation libre" introduite par Eshelby. Le véritable tournant est marqué par Hill [18] en 1965 : s'appuyant sur l'idée initiale de Kröner, il l'intègre pour de bon dans le cadre de l'élastoplasticité en introduisant l'idée simple mais nouvelle selon laquelle on peut aborder l'homogénéisation en plasticité par un traitement incrémental linéarisé et se ramener ainsi à chaque pas à un problème de (pseudo-) élasticité. Sous jacente à cette approche est la notion, qui ne sera systématisée qu'ultérieurement, de "milieu linéaire de comparaison": il s'agit bien, en effet, d'assimiler, dans un état donné, le milieu non linéaire réel à un milieu linéaire fictif ayant localement des caractéristiques mécaniques déduites par linéarisation de celles du milieu réel. Mais, ainsi formulé, le problème révèle sa redoutable complexité. La non-linéarité du comportement local, combinée à la non-uniformité des champs mécaniques, conduit à des caractéristiques linéarisées elles-mêmes non uniformes à l'intérieur d'une même phase.

De toutes les approches préconisées par les divers auteurs précédemment cités, il se dégage une méthodologie de l'homogénéisation en trois étapes :

Rappelons tout d'abord que l'objet d'étude est un "Volume Élémentaire Représentatif" (VER) d'un matériau hétérogène quelconque constitué de plusieurs éléments homogènes, de petite taille, de caractéristiques mécaniques et géométriques variables d'un volume à un autre. L'objectif étant de définir un milieu homogène fictif de même géométrie que le VER et qui, soumis aux mêmes sollicitations que lui, aura une réponse globale (dans un sens à préciser) identique.

> Etape 1, *représentation* du VER : quels constituants et disposés comment, assemblés de quelle façon, ayant quelles propriétés mécaniques ?

> Etape 2, *localisation* des grandeurs mécaniques : quelle réponse mécanique du VER à diverses sollicitations, quels champs microscopiques de contraintes et de déformation, déterminés comment ?



> Etape 3, l'*homogénéisation* proprement dite : comment synthétiser les résultats précédents et les mettre dans la forme globale attendue, quelles opérations de moyenne réaliser, pour parvenir à quel comportement global ?

Dans ce chapitre, nous ne nous intéresserons qu'aux deux dernières étapes. Pour l'étape de localisation, nous détaillerons la méthode qui permet de déterminer les tenseurs de localisations des contraintes et des déformations par la résolution d'une équation intégrale cinématique, à partir des propriétés des fonctions d'interaction de Green.

## 2. Localisation

### a. Loi des moyennes

Entre les grandeurs macroscopiques ( contraintes, déformations ...) et le champ des variables locales à déterminer ne peuvent être établies que des relations de moyennes. On aurait donc à résoudre un problème de structure sans véritables conditions à la limite, mais soumise à des "solllicitations" s'exprimant comme des conditions de moyenne sur telle ou telle variable locale. A un tel problème "mal posé", le mécanicien préfère substituer un problème aux limites plus classique en adoptant, quand c'est possible, des conditions homogènes au contour  $\partial V$ .

> Cas des contraintes homogènes au contour.

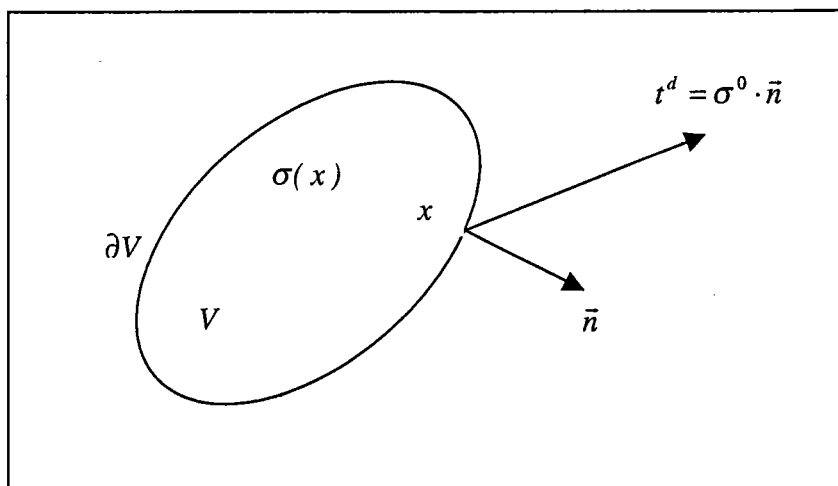


Figure II.5 : Solide soumis à des contraintes homogènes au contour

On pose la condition  $t^d = \sigma^0 \cdot \vec{n}$  sur  $\partial V$  avec  $[\sigma^0]$  homogène ( Figure II.5). Il en résulte pour le champ des contraintes  $\sigma(x)$  la relation de moyenne suivante.

$$\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \sigma(x) dV = \sigma^0 \quad (\text{II.68})$$

## Chapitre II – Les bases mécaniques

On a en effet, du fait de l'équilibre des contraintes, en l'absence de forces réparties (d'où  $\text{div}(\sigma) = 0$ ) et par utilisation du théorème de Gauss en coordonnées cartésiennes rectangulaires  $x_i$  et avec la notation  $\frac{\partial}{\partial x_j} a_i = a_{i,j}$  :

$$\int_V \sigma_{ij} dV = \int_V (\sigma_{ik} x_j)_{,k} dV = \int_{\partial V} \sigma_{ik} x_j n_k dS = \sigma_{ik}^0 \int_{\partial V} x_j n_k dS \quad (\text{II.69})$$

avec :

$$\int_{\partial V} x_j n_k dS = \int_V x_{j,k} dV = |V| \delta_{jk}$$

$$\text{d'où : } \int_V \sigma_{ij} dV = |V| \sigma_{ij}^0$$

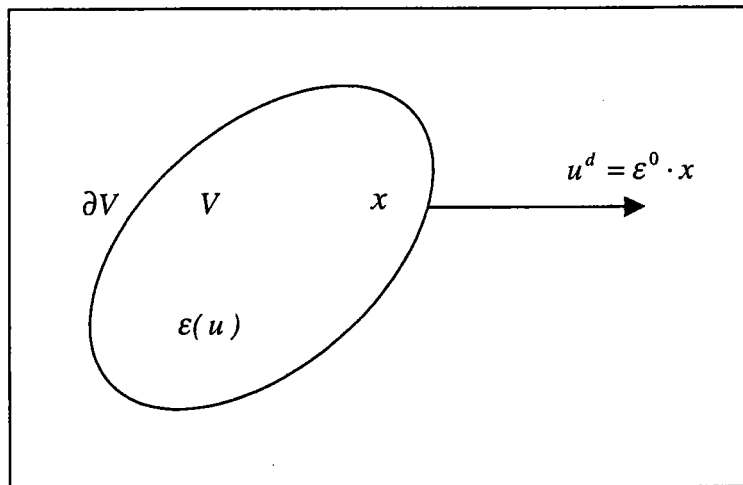
ce qui est la relation (II.68) annoncée  $\bar{\sigma} = \sigma^0$ . Ainsi, les contraintes macroscopiques  $\sigma^0$ , vue de manière homogène par le VER sur son contour, sont égales à la moyenne spatiale des contraintes locales dans le VER.

Pour les déformations, on prendra alors comme "définition" la relation :

$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \varepsilon(x) dV \quad (\text{II.70})$$

où  $\bar{\varepsilon}$  désigne les déformations macroscopiques.

> Cas des déformations homogènes au contour.



**Figure II.6 :** Solide soumis à des déformations homogènes au contour

On écrira cette fois, à un champ rigidifiant près, la condition de déplacement affine :  $u^d = \varepsilon^0 \cdot x$  sur  $\partial V$  avec  $\varepsilon^0$  homogène (figure II.6). Il en découle alors pour les champs de déformation  $\varepsilon(x)$  la relation de moyenne :

$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon(u) \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \varepsilon(u) dV = \varepsilon^0$$

## Chapitre II – Les bases mécaniques

On a en effet en utilisant cette fois la compatibilité de  $\varepsilon(u)$  et la continuité supposée du déplacement  $u$  dont il dérive :

$$\frac{1}{2} \int_V (u_{i,j} + u_{j,i}) dV = \frac{1}{2} \int_{\partial V} (u_i n_j + u_j n_i) dS = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{ik}^0 \int_{\partial V} x_k n_j dS + \varepsilon_{jk}^0 \int_{\partial V} x_k n_i dS \right]$$

D'où, compte tenu de (II.69) :

$$\int_V \varepsilon_{ij} dV = \frac{|V|}{2} (\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ji}^0) = |V| \varepsilon_{ij}^0$$

Ce qui est bien la relation annoncée. Les déformations macroscopiques  $\varepsilon^0$ , vues de manière homogène sur son contour par le VER sont égales à la moyenne spatiale des déformations locales dans le VER. Pour les contraintes, on définira alors les contraintes macroscopiques  $\bar{\sigma}$  par la relation :

$$\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \sigma(x) dV$$

On a raisonné sur les champs  $\sigma(x)$  et  $\varepsilon(x)$  comme s'il s'agissait de "la" solution du problème. En réalité, on n'a utilisé que l'équilibre des contraintes et la compatibilité des déformations ainsi que les conditions aux limites sans faire appel au comportement. Les résultats obtenus valent donc pour tout champ de contrainte statiquement admissible avec des données statiques homogènes au contour comme pour tout champ de déformation cinématiquement admissible avec des données cinématiques homogènes au contour.

### b. Équation intégrale cinématique

La *localisation* consiste à relier les grandeurs "microscopiques" aux grandeurs "macroscopiques" homologues, au moyen de tenseurs de localisations obtenus par la résolution d'une équation intégrale. Résoudre un problème de localisation revient donc à construire une solution de cette équation, vérifiant les équations d'équilibre, de compatibilité, les lois de comportement et les conditions aux limites du problème.

Une telle équation fut établie par Dederichs et Zeller [19]. En grandes déformations, les bases de la localisation ont été établies par Hill et Rice [21]. En élastoplasticité, sa formulation a été mise en œuvre par Berveiller et Zaoui [20] en petite déformation puis en grandes déformations par Lipinski [22].

Considérons un solide occupant à l'instant  $t$ , un volume  $V_t$  de surface extérieure  $S_t$ . Pour ce problème d'évolution en grandes transformations, une formulation en vitesse est nécessaire. On considère donc que l'action de l'extérieur sur ce solide se traduit par une vitesse imposée sur sa surface :

$$v_i(x) = G_{ij}(x) x_j \quad \text{sur } S_t \tag{II.71}$$

En se limitant au cas quasi stationnaire et en négligeant les forces volumiques, l'équilibre du solide s'exprime localement par la relation :

$$(\delta_i n_j)_i(x) = 0 \tag{II.72}$$

## Chapitre II – Les bases mécaniques

où  $\delta_t n$  est l'incrément de temps du tenseur des contraintes de Boussinesq  $[n]$ .

Une loi de comportement locale objective en grandes déformations peut toujours se ramener à l'expression suivante :

$$\delta_t n_{ij}(x) = l_{ijkl}(x) v_{l,k}(x) \quad (\text{II.73})$$

Ces trois équations (II.71, II.72, II.73) représentant les conditions aux limites, l'équation d'équilibre et la loi de comportement définissent complètement le problème dans le cas d'une approche cinématique. Les équations de compatibilité sont alors vérifiées.

En introduisant (II.73) dans (II.72) on obtient :

$$\left( l_{ijkl}(x) v_{l,k}(x) \right)_{,i} = 0 \quad (\text{II.74})$$

Comme pour les milieux linéaires, le tenseur des constantes élastiques peut être décomposé en une partie uniforme  $L^o$  et une déviation  $\delta l(x)$  telles que

$$l_{ijkl}(x) = L_{ijkl}^o + \delta l_{ijkl}(x) \quad (\text{II.75})$$

Ce qui permet de réécrire la relation (II.74) :

$$L_{ijkl}^o v_{l,ki}(x) + \left[ \delta l_{ijkl}(x) v_{l,k}(x) \right]_{,i} = 0 \quad (\text{II.76})$$

Le deuxième terme apparaît comme des forces de volume fictives  $\delta_t f$  dans l'équation classique de Navier. En introduisant l'opérateur de Lamé  $\Lambda$ , l'équation (II.76) peut être réécrite sous la forme :

$$\Lambda_{jl} v_l(x) + \delta_t f_j(x) = 0 \quad (\text{II.77})$$

$$\Lambda_{jl} \equiv L_{ijkl}^o \partial_k \partial_i \quad (\text{II.78})$$

$$\delta_t f_j(x) = \left[ \delta l_{ijkl}(x) v_{l,k}(x) \right]_{,i} \quad (\text{II.79})$$

Le problème initialement défini par les relations (II.71) (II.72) et (II.73) est maintenant défini par l'équation (II.77) et les conditions aux limites (II.71).

L'opérateur de Lamé  $\Lambda$  est non symétrique dans le cas où  $L_{ijkl}^o \neq L_{klij}^o$

En effet dans ce cas on a  $L_{ijkl}^o \partial_k \partial_i = \Lambda_{jl} \neq \Lambda_{ij} = L_{klij}^o \partial_k \partial_i$ .

Considérons un opérateur  $\Lambda^*$  adjoint à  $\Lambda$  et tel que :

$$\int_{V'} \Lambda_{jl} v_l w_j dV = \int_{V'} \Lambda_{jl}^* v_j w_l dV \quad (\text{II.80})$$

ce qui, dans le cas de l'espace vectoriel réel, conduit à :

## Chapitre II – Les bases mécaniques

$$\Lambda^* = {}^t\Lambda \quad \text{ou} \quad \Lambda_{ji}^* = \Lambda_{ij} = L_{klij}^o \partial_k \partial_i \quad (\text{II.81})$$

En utilisant les techniques du tenseur de Green, l'équation (II.77) peut être transformée en équation intégrale comme suit.

On suppose que l'action d'une force concentrée au point  $x$  définie par

$$\delta_i f_j(x') = \delta_{jm} \delta(x' - x) \quad (\text{II.82})$$

induit une vitesse au point  $x'$  égale à :

$$v_i(x') = \mathfrak{R}_{im}(x' - x) \delta_i f_m(x) \quad (\text{II.83})$$

Ces deux quantités doivent bien sûr vérifier l'équation (II.77). En remplaçant  $f(x')$  et  $v(x')$  dans (II.77) par (II.82) et (II.83) on obtient :

$$L_{ijkl}^o \mathfrak{R}_{im,ki}(x', x) + \delta_{jm} \delta(x' - x) = 0 \quad (\text{II.84})$$

où le tenseur de Green  $\mathfrak{R}(x', x)$  apparaît comme l'opérateur inverse de l'opérateur de Lamé  $\Lambda$ . De la même manière, on peut introduire le tenseur de Green  $\mathfrak{R}^*(x', x)$  associé à  $\Lambda^*$ , opérateur adjoint de  $\Lambda$ .

$$L_{klij}^o \mathfrak{R}_{im,ki}^*(x', x) + \delta_{jm} \delta(x' - x) = 0 \quad (\text{II.85})$$

En multipliant (II.76) par  $\mathfrak{R}_{jm}^*(x', x)$  et (II.85) par  $v_j(x')$ , on obtient par différence :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) L_{ijkl}^o v_{l,ki}(x') + \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) f_j(x') - v_j(x') L_{klij}^o \mathfrak{R}_{im,ki}^*(x', x) \\ = v_m(x') \delta(x' - x) \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

Par ailleurs, on démontre que :

$$\begin{aligned} \left[ \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) L_{ijkl}^o v_{l,k}(x') - v_j(x') L_{klij}^o \mathfrak{R}_{im,k}^*(x', x) \right]_i = \\ \mathfrak{R}_{jm,i}^*(x', x) L_{ijkl}^o v_{l,k}(x') + \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) L_{ijkl}^o v_{l,ki}(x') - \\ v_{j,i}(x') L_{klij}^o \mathfrak{R}_{im,k}^*(x', x) - v_j(x') L_{klij}^o \mathfrak{R}_{im,ki}^*(x', x) = \\ \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) L_{ijkl}^o v_{l,ki}(x') - v_j(x') L_{klij}^o \mathfrak{R}_{im,ki}^*(x', x) + \\ \mathfrak{R}_{jm,i}^*(x', x) L_{ijkl}^o v_{l,k}(x') - \mathfrak{R}_{im,k}^*(x', x) L_{klij}^o v_{j,i}(x') = \\ \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) L_{ijkl}^o v_{l,ki}(x') - v_j(x') L_{klij}^o \mathfrak{R}_{im,ki}^*(x', x) \end{aligned}$$

Ce qui permet de réécrire l'équation (II.86) sous la forme :

$$\begin{aligned} \left[ \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) L_{ijkl}^o v_{l,k}(x') - v_j(x') L_{klij}^o \mathfrak{R}_{im,k}^*(x', x) \right]_i + \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) \delta_i f_j(x') \\ = v_m(x') \delta(x' - x) \end{aligned} \quad (\text{II.87})$$

## Chapitre II – Les bases mécaniques

Par intégration sur le volume  $V_i$  du solide et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$v_m(x) = \int_{S_i} \left[ \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) L_{ijkl}^o v_{l,k}(x') - v_j(x') L_{klij}^o \mathfrak{R}_{lm,k}^*(x', x) \right] v_i dS + \int_{V_i} \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) \delta_i f_j(x') dV \quad (\text{II.88})$$

Les deux termes sous l'intégrale définissent deux types de conditions aux limites :

- conditions aux limites cinématiques quand :

$$v_j(x') = v_j^d(x') \quad \text{alors} \quad \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) = 0 \quad \forall \quad x' \in S_i$$

- conditions aux limites statiques quand :

$$T_j(x') = L_{ijkl}^o v_{l,k}(x') v_i(x') = T_j^d(x') \quad \text{alors} \quad L_{klij}^o \mathfrak{R}_{lm,k}^*(x', x) v_i(x') = 0 \quad \forall \quad x' \in S_i$$

Nous travaillerons dans la suite avec les conditions aux limites cinématiques. L'équation (II.88) devient alors :

$$v_m(x) = - \int_{S_i} v_j(x') L_{klij}^o \mathfrak{R}_{lm,k}^*(x', x) v_i(x') dS + \int_{V_i} \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) \delta_i f_j(x') dV \quad (\text{II.89})$$

La relation (II.89) et les conditions aux limites  $\mathfrak{R}^*(x', x) = 0$  sur  $S_i$  permettent d'écrire la dernière intégrale sur le volume :

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) \left[ \delta l_{ijkl}(x') v_{l,k}(x') \right]_i dV &= \int_{S_i} \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) \delta l_{ijkl}(x') v_{l,k}(x') v_i(x') dS - \\ &\int_{V_i} \mathfrak{R}_{jm,i}^*(x', x) \delta l_{ijkl}(x') v_{l,k}(x') dV \\ &= - \int_{V_i} \mathfrak{R}_{jm,i}^*(x', x) \delta l_{ijkl}(x') v_{l,k}(x') dV \end{aligned}$$

En introduisant ce résultat dans (II.89), le champ de vitesse dans le solide s'écrit alors :

$$v_m(x) = - \int_{S_i} v_j(x') L_{klij}^o \mathfrak{R}_{lm,k}^*(x', x) v_i(x') dS - \int_{V_i} \mathfrak{R}_{jm,i}^*(x', x) \delta l_{ijkl}(x') v_{l,k}(x') dV \quad (\text{II.90})$$

La première intégrale dans (II.90) représente le champ de vitesse dans un solide homogène ayant la même géométrie et soumis aux mêmes conditions aux limites que le solide considéré.

En notant cette vitesse  $V_m^o(x)$ , on obtient :

$$v_m(x) = V_m^o(x) - \int_{V_i} \mathfrak{R}_{jm,i}^*(x', x) \delta l_{ijkl}(x') v_{l,k}(x') dV \quad (\text{II.91})$$

La relation (II.91) constitue la solution du problème, exprimée en fonction de l'opérateur de Green  $\mathfrak{R}^*(x', x)$ . Cet opérateur peut être éliminé à l'aide d'une relation entre lui même et  $\mathfrak{R}(x', x)$ . En effet en choisissant

$$v_j(x') = \mathfrak{R}_{jn}(x', x'') \quad \text{et} \quad \delta_i f_j = \delta_{jn} \delta(x' - x'')$$

et en utilisant la relation (II.88), on obtient :

$$\mathfrak{R}_{mn}(x, x'') = \int_{S_i} [\mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) L_{ijkl}^o \mathfrak{R}_{kn,l}^*(x', x'') - \mathfrak{R}_{jn}^*(x', x'') L_{klij}^o \mathfrak{R}_{im,k}^*(x', x)] v_i(x') dS + \int_{V_i} \mathfrak{R}_{jm}^*(x', x) \delta_{jn} \delta(x' - x'') dV$$

Dans cette équation, l'intégrale de surface s'annule quelles que soient les conditions aux limites et il s'ensuit que :

$$\mathfrak{R}_{nm}^*(x'', x) = \mathfrak{R}_{mn}(x, x'') \quad (\text{II.92})$$

Notons que cette propriété, dans le cas de l'opérateur de Lamé auto-adjoint, traduit la symétrie du tenseur de Green.

En introduisant (II.92) dans (II.91), on obtient :

$$v_m(x) = V_m^o(x) - \int_{V_i} \mathfrak{R}_{mj,i}^*(x, x') \delta l_{ijkl}(x') v_{i,k}(x') dV \quad (\text{II.93})$$

Cette dernière relation décrit le mouvement du solide hétérogène. En la dérivant par rapport à la position  $x$ , le gradient de vitesse peut être calculé et on aboutit à l'équation intégrale recherchée :

$$g_{mn}(x) = v_{m,n}(x) = G_{mn}^o(x) - \int_{V_i} \mathfrak{R}_{mj,i'n}^*(x, x') \delta l_{ijkl}(x') g_{ik}(x') dV \quad (\text{II.94})$$

où :  $G^o(x) = \text{grad}[V^o(x)]$

Rappelons que l'objectif de ce paragraphe est la détermination des tenseurs de localisation par résolution de l'équation intégrale (II.94).

Une solution formelle de cette équation intégrale consiste à procéder par degrés successifs en partant de l'hypothèse (degré zéro) suivant laquelle on néglige dans (II.94) le terme sous l'intégrale, ce qui permet d'écrire :

$$g_{mn}^{(0)}(x) = G_{mn}^o(x) \quad (\text{II.95})$$

Puisque les sollicitations envisagées se traduisent par des conditions aux limites homogènes, la solution  $G^o$  pour des milieux homogènes doit être homogène. En appliquant la relation (II.109) à l'expression (II.95), il vient :

$$G = \langle g(x) \rangle = \langle G^o \rangle = G^o \quad (\text{II.96})$$

Soit :

$$g_{mn}^o = G_{mn} \quad (\text{II.97})$$

Cette équation représente la solution d'ordre zéro de l'équation (II.94). Elle exprime l'hypothèse de Lin [23] de l'homogénéité de la déformation (ici, du gradient de vitesse) totale.

## Chapitre II – Les bases mécaniques

On voit que cette approximation néglige de fait toute hétérogénéité de comportement et ne doit s'appliquer qualitativement que pour des milieux faiblement hétérogènes.

A partir de la solution de Lin (II.97) on peut obtenir l'approximation d'ordre un de la solution de l'équation intégrale en substituant au terme  $g(x)$  dans (II.94) l'expression (II.97). On a alors :

$$\begin{aligned} g^{(1)}(x) &= G^o + \int_{V_i} \Gamma(x, x') : G^o dV' \\ &= \left[ I + \int_{V_i} \Gamma(x, x') : \delta l(x') dV' \right] : G^o \end{aligned} \quad (\text{II.98})$$

Pour simplifier cette expression, on introduit le tenseur :

$$\Gamma_{ijmn}(x, x') \equiv \mathfrak{R}_{im, jn'}(x, x') \quad (\text{II.99})$$

L'approximation de second ordre s'obtient en remplaçant  $g(x)$  dans (II.94) par l'approximation de premier ordre (II.98)

$$\begin{aligned} g^{(2)}(x) &= G^o + \left[ \int_{V_i} \Gamma(x, x') : \delta l(x') dV' \right] : G^o + \\ &\quad \left[ \int_{V_i} \Gamma(x, x') : \delta l(x') \Gamma(x', x'') : \delta l(x'') dV'' dV' \right] : G^o \\ &= \left[ I + \int_{V_i} \Gamma(x, x') : \delta l(x) dV' + \right. \\ &\quad \left. \int_{V_i} \Gamma(x, x') : \delta l(x') : \int_{V_i} \Gamma(x', x'') : \delta l(x'') dV'' dV' \right] : G^o \end{aligned} \quad (\text{II.100})$$

En procédant de la même manière pour les ordres supérieurs, on aboutit à une solution générale pour  $g(x)$  sous la forme d'une série infinie. Kröner et Koch [24] ont montré que la convergence d'une telle série est assurée si les propriétés locales sont réparties aléatoirement dans l'espace.

$$\begin{aligned} g(x) &= \left[ I + \int_{V_i} \Gamma(x, x') : \delta l(x') dV' + \int_{V_i} \Gamma(x, x') : \delta l(x') : \int_{V_i} \Gamma(x', x'') : \delta l(x'') dV'' dV' + \right. \\ &\quad \left. \int_{V_i} \Gamma(x, x') : \delta l(x') dV' : \int_{V_i} \Gamma(x', x'') : \delta l(x'') : \int_{V_i} \Gamma(x'', x''') : \delta l(x''') dV''' dV'' dV' + \dots \right] : G^o \end{aligned} \quad (\text{II.101})$$

Cette solution peut être réécrite sous la forme :

$$g(x) = a(x) : G^o \quad (\text{II.102})$$

à partir de laquelle on déduit le tenseur de localisation. En effet, l'application du théorème de la moyenne (II.109) au résultat (II.102) conduit à :



## Chapitre II – Les bases mécaniques

$$G = \langle g(x) \rangle = \langle a(x) \rangle : G^o \quad (\text{II.103})$$

qui permet d'exprimer  $G^o$  :

$$G^o = \langle a(x) \rangle^{-1} : G \quad (\text{II.104})$$

On introduit ensuite (II.104) dans (II.102) et on obtient :

$$g(x) = a(x) : \langle a(x) \rangle^{-1} : G \quad (\text{II.105})$$

Enfin, la comparaison de cette dernière équation avec celle obtenue dans le paragraphe suivant (II.113) permet de définir le tenseur de localisation :

$$A(x) = a(x) : \langle a(x) \rangle^{-1} \quad (\text{II.106})$$

Avec :

$$\begin{aligned} a(x) = I + \int_{V_1} \Gamma(x, x') : \delta l(x') dV' + \int_{V_1} \Gamma(x, x') : \delta l(x') : \int_{V_1} \Gamma(x', x'') : \delta l(x'') dV'' dV' + \\ \int_{V_1} \Gamma(x, x') : \delta l(x') dV' : \int_{V_1} \Gamma(x', x'') : \delta l(x'') : \int_{V_1} \Gamma(x'', x''') : \delta l(x''') dV''' dV'' dV' + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.107})$$

L'équation (II.107) a été obtenue pour la première fois par Eimer [25, 26] en 1967 dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire. Elle constitue la solution formelle de l'équation intégrale (II.94).

### 3. Homogénéisation

Le paragraphe précédent montre que l'étape de localisation débouche sur deux séries de relations très différentes entre les grandeurs locales et globales.

- Les relations directes de moyenne, de validité très générale.
- Les relations de localisation, découlant, elles, d'une modélisation spécifique (équation intégrale).

La dernière étape, celle de l'homogénéisation proprement dite, vise à exprimer le comportement du milieu homogène équivalent. Elle résulte de la combinaison des deux séries de relations établies à la localisation, avec celle assurant la description du comportement mécanique local.

La plus simple des méthodes d'homogénéisation est la loi des mélanges. Elle consiste à décrire les caractéristiques mécaniques effectives (modules, souplesse, limite d'élasticité, etc.) comme les moyennes directes des caractéristiques locales correspondantes ce qui constitue généralement une simplification excessive. En outre, se pose le problème du choix de la grandeur considérée (la moyenne d'un module n'est pas l'inverse de la moyenne d'une souplesse). Elle dénature le problème de la localisation et revient à traiter comme additives des grandeurs qui ne le sont pas. D'où la nécessité de prendre des précautions importantes pour pouvoir considérer les contraintes et les déformations macroscopiques comme les moyennes des contraintes et déformations locales. Néanmoins on peut sans restriction

## Chapitre II – Les bases mécaniques

procéder directement par moyenne lors de changement d'échelle pour des densités de grandeurs clairement additives telles que masse, potentiel ou fonction thermodynamiques etc.

$$\delta_i N_{ij} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \delta_i n \, dV_i \quad (\text{II.108})$$

$$G = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} g \, dV_i \quad (\text{II.109})$$

$[N]$  étant le tenseur de contrainte de Boussinesq et  $[G]$  le gradient de vitesses macroscopiques.

On ne peut échapper au traitement du problème de localisation pour mener à bien l'opération d'homogénéisation. Ainsi, même pour des comportements décrits par un potentiel (comme en élasticité ou en hyperélasticité) pour lesquels on peut directement exprimer le potentiel effectif comme la moyenne des potentiels locaux, on ne saura, du fait de la dépendance de ces potentiels par rapport aux variables mécaniques locales, en tirer une description du comportement globale qu'en ayant recours aux relations de localisations.

Une autre façon d'exprimer le comportement du milieu homogène équivalent est d'injecter tout simplement les relations de localisation dans les équations de comportement locale. En grandes déformations, on obtient le schéma suivant.

La loi de comportement locale peut se mettre sous la forme :

$$\delta_i n = l : g \quad (\text{II.110})$$

où  $l$  représente le tenseur des propriétés tangentes d'un volume élémentaire représentatif vérifiant l'équation d'équilibre suivante :

$$\text{div}(\delta_i n) = 0 \quad \text{dans } V_i$$

et soumis à l'action de sollicitations extérieures appliquées sur sa surface  $S_i$  de type cinématique  $v_i = G_{ij} x_j$  sur  $S_i$ .

Il existe alors :

- un champ de vitesse  $v(x)$  solution du problème tel que :

$$g(x) = \text{grad } v(x)$$

- un tenseur de localisation du quatrième ordre  $A$  tel que :

$$g(x) = A(x) : G \quad (\text{II.111})$$

- un tenseur de localisation de quatrième ordre  $B$  tel que :

$$\delta_i n(x) = B(x) : \delta_i N \quad (\text{II.112})$$

L'existence de tels tenseurs a été démontrée en élasticité par Hill [27] et Mandel [28]. La connaissance de l'un des tenseurs de localisation du quatrième ordre permet de retrouver les propriétés effectives du volume représentatif  $V$ .

## Chapitre II – Les bases mécaniques

Supposons donc connu le tenseur  $[A]$ , l'association des relations de loi de comportement (II.110) et de localisation (II.111) donne :

$$\delta_i n(x) = l(x) : g(x) = l(x) : A(x) : G$$

En appliquant sur cette relation, l'opération de moyenne (II.108) on aboutit à :

$$\delta_i N = \overline{\delta_i n(x)} = \overline{l(x) : A(x) : G} \quad (\text{II.113})$$

L'hypothèse de macro homogénéité permet de reconnaître dans cette dernière relation, le tenseur des propriétés effectives tangentes du matériau macro homogène.

$$L^{eff} = \overline{l(x) : A(x)} \quad (\text{II.114})$$

Notons également que les tenseurs de localisations possèdent plusieurs propriétés dont :

$$\overline{A(x)} = I \quad \text{et} \quad \overline{B(x)} = I \quad (\text{II.115})$$

En introduisant les tenseurs inverses des propriétés locales et macroscopiques  $l^{-1}(x)$  et  $L^{-eff} = (L^{eff})^{-1}$ , on démontre aisément que les deux tenseurs de localisation A et B sont liés par :

$$B(x) = l(x) : A(x) : L^{-eff} \quad (\text{II.116})$$

$$A(x) = l^{-1}(x) : B(x) : L^{eff} \quad (\text{II.117})$$

Il existe plusieurs approches pour déterminer la solution de l'équation intégrale cinématique. La solution formelle présentée au paragraphe précédent est très difficile à mettre en application et pas nécessairement justifiée eu égard aux simplifications faites pour décrire le milieu considéré. Des solutions telles que celles de Taylor-Lin-Voigt, de Kröner ou de Mori-Tanaka méritent d'être étudiées mais comme l'a démontré Kröner [29] le comportement élastique des milieux parfaitement désordonnés se modélise très bien avec la méthode auto-cohérente.

### 4. Approximation auto - cohérente

L'approche autocohérente développée par Kröner en élasticité s'inspire, tout comme la démarche de Hill en plasticité en petites déformations, de la solution du problème d'inclusion proposée par Eshelby. Sa formulation en grandes transformations élastoplastiques avec prise en compte des rotations des grains et de l'écroutissage intragranulaire a été proposée par Lipinski [22]. L'application de la méthode autocohérente pour l'étude du comportement hyper élastique d'un mélange d'élastomères nécessite l'adoption de deux hypothèses.

1. Le matériau est supposé "granulaire" et les "grains" ont une forme ellipsoïdale.
2. Le module tangent du matériau  $l(x)$  et le gradient de vitesse  $g(x)$  varient faiblement à l'intérieur d'un constituant (ou d'un grain), de sorte que le

## Chapitre II – Les bases mécaniques

comportement réel de ce dernier peut être raisonnablement décrit par leurs valeurs moyennes.

On suppose donc que le comportement est uniforme dans chaque grain, ce qui permet d'écrire :

$$l(x) = l^I \quad \forall x \in V_I^I \quad (\text{II.118})$$

$$g^I = \frac{1}{V_I^I} \int_{V_I^I} g(x) dV_I \quad (\text{II.119})$$

où  $V_I^I$  désigne le volume actuel du grain modélisé par un ellipsoïde  $I$  (volume de l'inclusion  $I$  à l'instant  $t$ )

Ces deux approximations nous conduisent à des expressions suivantes du champ du gradient de vitesse et du champ des modules tangents locaux :

$$g(x) = \sum_{I=1}^N g^I \theta^I(x) \quad (\text{II.120})$$

$$l(x) = \sum_{I=1}^N l^I \theta^I(x) \quad (\text{II.121})$$

où  $\theta^I$  est une fonction caractéristique telle que :

$$\theta^I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin V_I^I \\ 1 & \text{si } x \in V_I^I \end{cases} \quad (\text{II.122})$$

et  $N$  le nombre de "grains" dans le polyphasé.

On peut également écrire une expression semblable pour la déviation  $\delta l(x)$  :

$$\delta l(x) = \sum_{I=1}^N \Delta l^I \theta^I(x) \quad (\text{II.123})$$

avec :

$$\Delta l^I = l^I - L^o \quad (\text{II.124})$$

constant dans le grain  $I$ .

En introduisant les relations (II.120) et (II.124) dans l'équation intégrale (II.94) on peut écrire :

$$g(x) = G^o - \int_{V_I} \Gamma(x-x') : \left( \sum_{I=1}^N \Delta l^I : g^I \theta^I(x-x') \right) dV_I \quad (\text{II.125})$$

On peut dès lors effectuer la moyenne de cette équation sur le volume  $V_I$  et déterminer l'expression du gradient de vitesse dans l'inclusion  $I$ .

$$g^I = G^o - \sum_{J=1}^N \left( \frac{1}{V_i^I} \int_{V_i^I} \int_{V_i^J} \Gamma(x-x') dV_i^I dV_i^J \right) : \Delta l^J : g^J \quad (\text{II.126})$$

Cette relation permet d'introduire les tenseurs d'interaction définis par :

$$T^{IJ} = \frac{1}{V_i^I} \int_{V_i^I} \int_{V_i^J} \Gamma(x-x') dV_i^I dV_i^J \quad (\text{II.127})$$

La définition de ces tenseurs permet de réécrire simplement l'égalité (II.126) :

$$g^I = G^o - \sum_{J=1}^N T^{IJ} : \Delta l^J : g^J \quad (\text{II.128})$$

Les tenseurs  $T^{IJ}$  représentent les interactions entre les inclusions  $I$  et  $J$  et le milieu homogène de référence. Les expressions de ces tenseurs sont basées sur une approche suggérée par Fassi-Fehri et *al.* [30] qui donnent également une méthode de calcul de ces tenseurs dans le cas d'inclusion ellipsoïdale en milieu anisotrope.

Dans le contexte de l'application de cette démarche à un mélange d'élastomères symboliquement représenté par un polyphasé granulaire (où chaque grain représente une inclusion), la relation (II.128) constitue un système linéaire d'équations dont le nombre équivaut à celui des grains dans le polyphasé. Dans le cas particulier où  $I=J$ , le tenseur  $T^{II}$  décrit les interactions entre l'inclusion  $I$  et le milieu environnant. Il est relié au tenseur d'Eshelby [ $\mathfrak{S}$ ] par [32]

$$[\mathfrak{S}] = [T^{II}] : [L^o] \quad (\text{II.129})$$

En tenant compte de la remarque précédente, on peut réécrire (II.128) sous la forme :

$$g^I = G^o - T^{II} : \Delta l^I : g^I - \sum_{J=1, J \neq I}^N T^{IJ} : \Delta l^J : g^J \quad (\text{II.130})$$

L'approche auto-cohérente consiste à choisir le milieu effectif comme milieu de référence, c'est à dire :

$$L^o \approx L^{eff} \quad (\text{II.131})$$

Dans ce cas, les contributions des termes tels que  $T^{IJ} : \Delta l^J : g^J$  pour  $I \neq J$  dans la relation précédente, peuvent être valablement négligées, du fait que leur effet sur  $g^I$  a été pris en compte au travers de l'interaction entre le grain  $I$  et le milieu homogène de comportement proche de  $L^{eff}$ .

Le choix  $L^o \approx L^{eff}$  et la limitation de la relation (II.130) à  $I=J$  constitue la solution approchée auto-cohérente à un site de l'équation intégrale (II.94). Nous obtenons alors :

$$g^I = (I + T^{II} : \Delta l^I)^{-1} : G^o = a^{II} : G^o \quad (\text{II.132})$$

En appliquant le théorème de la moyenne (II.109) on élimine  $G^o$  de l'expression ci-dessus :

$$g^I = a^{II} : \langle a^{II} \rangle^{-1} : G = A^I : G \quad (\text{II.133})$$

où

## Chapitre II – Les bases mécaniques

$$a'' = (I + T'' : \Delta l^I)^{-1} \quad (\text{II.134})$$

et

$$A^I = a'' : \langle a'' \rangle^{-1} \quad (\text{II.135})$$

sont respectivement le tenseur de localisation de  $G^o$  dans l'approche auto-cohérente à un site et le tenseur de localisation du gradient de vitesse macroscopique  $G$  pour l'inclusion ellipsoïdale  $I$ .

La détermination des tenseurs de localisation permet de déduire l'expression des modules tangents effectifs du milieu hétérogène. En effet, ces derniers représentent les moyennes volumiques des modules tangents locaux de chaque phase :

$$L^{\text{eff}} = \langle l^I : A^I \rangle = \langle l^I : a'' \rangle : \langle a'' \rangle^{-1} \quad (\text{II.136})$$

On introduit la fraction volumique  $f_i^I$  de l'inclusion  $I$ , définie par  $f_i^I = \frac{V_i^I}{V_i}$  et pour un polyphasé constitué de  $N$  grains, ces relations s'écrivent :

$$\langle a'' \rangle = \sum_{I=1}^N f^I a'' \quad (a)$$

$$A^I = a^{II} : \left( \sum_{I=1}^N f^I a'' \right)^{-1} \quad (b) \quad (\text{II.137})$$

$$L^{\text{eff}} = \sum_{I=1}^N f^I l^I : A^I \quad (c)$$

La détermination du tenseur des modules tangents effectifs découle donc de la résolution de l'équation doublement implicite (II.136). En effet, le tenseur de localisation  $A^I$  dépend des tenseurs de localisation des autres constituants, ainsi que des tenseurs d'interaction  $T''$  et  $T''$ , qui eux-mêmes nécessitent la connaissance des modules  $L^{\text{eff}}$ . La résolution d'un tel problème peut s'effectuer de manière itérative. Dans le cas du polyphasé considéré ici, les tenseurs de localisation  $A^I$  prennent en considération, par l'intermédiaire des tenseurs  $T''$ , les interactions entre les grains.

Les relations ci-dessus sont basées sur la simplification  $L^o \approx L^{\text{eff}}$ , ce qui les rend fortement implicites. Une amélioration de l'approximation auto cohérente à un site peut être faite en ne considérant pas le milieu de référence comme étant le milieu effectif recherché.

Rappelons la relation (II.130)

$$g^I = G^o - T'' : \Delta l^I : g^I - \sum_{J=1, J \neq I}^N T'' : \Delta l^J : g^J$$

Il s'agit d'un système linéaire en  $g^I$  dont la solution peut être mise sous la forme :

$$g^I = a^I : G^o \quad (\text{II.138})$$

En reportant cette forme de solution dans la relation (II.130) on obtient :

## Chapitre II – Les bases mécaniques

$$g^I = G^o - T^{II} : \Delta l^I : g^I - \sum_{J=1, J \neq I}^N (T^{IJ} : \Delta l^J : a^J) : G^o \quad (\text{II.139})$$

soit :

$$g^I = a^{II} : \left( I - \sum_{J=1, J \neq I}^N (T^{IJ} : \Delta l^J : a^J) \right) : G^o \quad (\text{II.140})$$

et par comparaison avec (II.138), on déduit le tenseur de localisation de  $G^o$  dans la méthode auto-cohérente à sites multiples.:

$$a^I = a^{II} : \left( I - \sum_{J=1, J \neq I}^N (T^{IJ} : \Delta l^J : a^J) \right) \quad (\text{II.141})$$

Cette relation de  $a^I$  reste doublement implicite car dépendant des tenseurs de localisation de tous les autres constituants. Une solution naturelle consiste à choisir pour  $a^I$  son approximation à un site  $a^I \approx a^{II}$ , ce qui permet de réécrire la relation (II.141) sous la forme :

$$a^I = a^{II} : \left( I - \sum_{J=1, J \neq I}^N (T^{IJ} : \Delta l^J : a^{JJ}) \right) \quad (\text{II.142})$$

Les relations  $A^I = a^{II} : \langle a^{II} \rangle^{-1}$  et  $L^{eff} = \langle l^I : A^I \rangle = \langle l^I : a^{II} \rangle : \langle a^{II} \rangle^{-1}$  demeurent valable et constituent la solution du problème en méthode auto-cohérente à site multiples [22]. Cette approche multisite permet de rendre compte de l'effet de la répartition spatiale des hétérogénéités sur les propriétés mécaniques du milieu.

La difficulté principale dans la mise en œuvre de la méthode auto-cohérente est représentée par le caractère implicite des équations à résoudre. Dans l'approximation de la solution par une procédure itérative, à une étape donnée, on choisit comme milieu de référence, celui dont le comportement a été calculé à l'étape précédente. Cette approximation trouve une justification dans les résultats satisfaisants obtenus par Hihl et al., [20] et par Beradaï et al.[21].

C. BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Germain, "*Mécanique des milieux continus*", Edition Masson, Paris, 1973.
- [2] P. Germain, Mécanique "*Cours de l'école polytechnique*", Edition Ellipses, Paris, 1986.
- [3] J. Salençon, Mécanique des milieux continus, "*Cours de l'école polytechnique*"
- [4] F. Sidoroff, "*Les grandes déformations*", École d'été Sophia Antipolis, 8-10 sept. 1982, Rapport GRECO N°51, 1982.
- [5] J. Lemaitre, "*Formulaire de mécanique des matériaux*", Rapport GRECO N°29, 1981.
- [6] H. Peeken, R. Dopfer, B. Drschall, "*A 3-D rubber material verified in a user supplied subroutine*", Computer and structures Vol. 26, N° 162, pp. 181-189, 1987.
- [7] M. A Mooney, "*A theory of elastic deformation*", J. of applied Physics, Vol.11, pp.582, 1940.
- [8] S. R. Rivlin., "*Large elastic deformation of isotropic materials*", Phil. Trans. R. society I- Fundamental concept, vol.240, pp459-490.  
II- Further developments of the general theory, Vol.348, pp.379-397, 1948.
- [9] S. R. Swanson, L. W. Christensen, M. Ensign, "*Large deformation finite elements calculation for slightly compressible hyper-elastic materials*", Computer and structures, Vol.21, n°112, pp81-88, 1985.
- [10] R. W. Ogden "*Large deformation isotropic elasticity in the correlation of theory and experiment for incompressible rubber like solids*", Proc. Royal Society, London, A326, pp.565-584, 1972.
- [11] R. W. Ogden, "*Large deformation isotropic elasticity in the correlation of theory and experiment for compressible rubber like solids*", Proc. Royal Society, London, Vol. A328, pp.567-583, 1972.
- [12] R. W. Ogden, "*Non linear elastic deformations*" John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [13] L. R. G. Treloar, "*The physics of rubber elasticity*" Oxford university press, London, 1958.
- [14] C. Truesdell, Masson et Cie, Editeur, 1974.
- [15] J. D. Eshelby, "*The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*", Proc. R. Soc. Lond. Vol.A, pp. 421 : 376-396, 1957.
- [16] B. Budianski, Z. Hashin and J. L. Sanders, "*The stress field of a slipped crystal and the early plastic behaviour of polycrystalline materials*", In plasticity, Proc. 2<sup>nd</sup> Symp. Naval Struct. Mech., pp.239. Pergamon, Oxford, 1960.



## Chapitre II – Les bases mécaniques

- [17] E. Kröner, "Zur Plastischen Verformung des Vielkristalls", Acta Metall., Vol. 9, pp155-161, 1961.
- [18] R. Hill, "Continuum micro-mechanics of elasto-plastic polycrystals", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, pp. 89-101, 1965.
- [19] P. H. Dederichs, R. Z. Zeller, Phys., Vol. 259, pp. 103-113, 1973.
- [20] M. Berveiller, A. Zaoui, "An extension of the self consistent scheme to plastically-flowing polycrystals", J. Mech. Phys. Sol., Vol.26, pp. 325-339, 1979.
- [21] R. Hill, J. R. Rice, "Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 20, pp. 401-413, 1972..
- [22] P. Lipinski, thèse d'habilitation, Université de Metz, 1993.
- [23] T. H. Lin, J. Mech. Phys. Solids, Vol.5, pp. 143-158, 1957.
- [24] E. Kröner, H. Koch, Solid Mechanics Archives, Vol.1, pp. 183, 1976.
- [25] C. Eimer, Arch. Mech. Stos., Vol. 20, pp. 87, 1968.
- [26] C. Eimer, Arch. Mech. Stos., Vol. 19, pp. 521, 1967.
- [27] R. Hill, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, pp 89-101, 1965
- [28] J. Mandel, Proc. 11<sup>th</sup> Int. Cong. Appl. Mech., Springer, pp. 502-509, 1964.
- [29] E. Kröner; Colloque G.F.R., Ed. Huet-Zaoui, pp.15-40, 1980.
- [30] O. Fassi-Fehri., A. Hihi, M. Berveiller, Int. J. Ing. Sci., Vol 25, p.691,1987.
- [31] C. Beradaï., M. Berveiller , P. Lipinski ., Int. J. Plasticity., vol. 3, pp 143-163, 1987.
- [32] J. D. Eshelby., Proc. R. Soc. London, A 241, p 376, 1957.

## Chapitre III

# ETUDE DES LOIS DE COMPORTEMENT PHENOMENOLOGIQUES

**A. INTRODUCTION**

**B. LES POTENTIELS HYPERELASTIQUES**

**C. DEVELOPPEMENT DES LOIS DE COMPORTEMENT**

**1. Loi de Mooney-Rivlin**

**2. Loi d' Ogden-Swanson**

**D. BIBLIOGRAPHIE**

## A. INTRODUCTION

Le comportement d'un matériau est défini par une loi qui lie « l'état de contrainte » du matériau à son « état de déformation ». Suivant les matériaux, cette loi peut être très simple (du genre affine par exemple pour les aciers, en deçà d'une certaine contrainte) ou complexe (type différentiel ou matriciel pour les polymères).

Ces lois mettent en évidence le module d'élasticité, qui peut être constant ou non, traduisant ainsi la linéarité ou la non linéarité du comportement élastique du matériau considéré. Ce module mesure la résistance du matériau à la déformation élastique (analogue à celle d'un ressort). Dans la grande majorité des applications mécaniques, la déformation est peu souhaitable, et l'ingénieur recherche un matériau de module élevé. Mais de plus en plus, les matériaux à module bas sont utilisés du fait de leur flexibilité, de leurs déformations importantes sous charge et de leur qualité exceptionnelle d'amortissement : les ressorts, les coussins, les perches de saut, les pneus, les joints, etc.

Il a été montré précédemment (chapitre II.A) que la connaissance de la forme exacte de l'énergie volumique de déformation  $W$  est la base du développement de toute loi de comportement hyper-élastique. Dans ce même chapitre, nous avons insisté sur les bases mécaniques de la théorie des grandes déformations en soulignant la forme générale des lois de comportement hyper - élastiques. Nous y avons également présenté la théorie d'homogénéisation en grandes déformations. Il s'en est suivi que cette dernière nécessite une loi incrémentale qui connecte le taux de contrainte nominale  $[\delta N]$  avec le gradient de vitesse  $[G] : [\delta N] = [L] : [G]$ .

L'objectif principal du présent chapitre est de déterminer cette loi incrémentale et donc de construire le tenseur  $[L]$  des propriétés tangentées.

Plusieurs auteurs ont développé des théories de l'élasticité en grandes déformations basées sur une forme particulière de l'énergie de déformation et sur les travaux expérimentaux de Treloar [2,3]. En 1940, Mooney [1], propose une équation constitutive pour les matériaux hyperélastiques qui est généralisée en 1949 pour la fonction d'énergie de déformation par Rivlin [4,5]. La forme bien connue et très largement utilisée de l'énergie de déformation de Mooney-Rivlin est une fonction polynomiale (développement en série) des deux principaux invariants du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche.

D'autres chercheurs tels que Hart et Smith [19, 20] ou Alexander [21], ont continué à proposer des formulations de la fonction d'énergie de déformation, où celle-ci est exprimée en fonction des invariants du tenseur des déformations. Il s'avère que tous ces modèles sont relativement complexes à mettre en œuvre et manquent quelquefois de précision à grandes, et parfois même, à moyennes déformations.

En 1967, Valanis et Landel [6,7] proposent une autre forme de l'énergie de déformation, fonction non plus des deux invariants principaux, mais des allongements principaux de la déformation. En 1970, Hill [23,24] énonce la méthode des axes principaux, méthode qui ne nécessite pas un choix spécifique des invariants. D'autres auteurs comme Blatz, Sharda et Tschoegl [8,9] ont essayé d'ajouter plus de détails à la représentation des modèles pour des matériaux particuliers.

Plus récemment, Ogden [10,11] propose une forme améliorée de l'équation de Valanis et Landel, en utilisant des puissances non entières des allongements principaux. Il montre alors que ses résultats coïncident mieux avec les résultats expérimentaux de Treloar.

Considérant le fait que les modèles traditionnels d'hyperélasticité supposent l'incompressibilité du matériau (ce qui réduit les analyses au cas des contraintes planes) et compte tenu des difficultés numériques liées au calcul des valeurs et directions propres des contraintes et déformations dans un programme d'analyse de structures (cas de l'énergie fonction des allongements principaux), Swanson [13,14] propose une forme intermédiaire pour l'énergie de déformation. Cette forme a le mérite de préserver la précision et l'efficacité de l'approche d'Ogden mais ne nécessite pas le calcul des valeurs principales des contraintes ou des déformations. Elle peut également prendre en compte la légère compressibilité des matériaux hyperélastiques.

En somme, pour un matériau hyper - élastique l'énergie de déformation élastique ou potentiel hyper - élastique, peut se mettre sous la forme d'une fonction des invariants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ , de la déformation de Cauchy-Green gauche  $[B]$  (ou d'autres tenseurs de déformation tel que le tenseur de Cauchy-Green droit  $[C]$ ) ou sous forme d'une fonction des allongements principaux  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  et des constantes  $C_i$  caractérisant le comportement élastique d'un caoutchouc considéré.

$$w = w(I_1, I_2, I_3, C_i) \quad (\text{III.1})$$

ou

$$w = w(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, C_i) \quad (\text{III.2})$$

Comme il a été souligné dans les lignes précédentes, plusieurs auteurs ont développé des théories basées sur l'une ou l'autre des deux formes de l'énergie de déformation élastique  $W$ . Il convient de passer en revue les principales formulations de cette énergie avant de développer les lois de comportements associées à celles qui nous semblent les plus adaptées à notre étude.

## B. LES POTENTIELS HYPERÉLASTIQUES

Dans le paragraphe précédent, nous avons souligné que les potentiels hyper-élastiques sont développés soit à partir des invariants, soit à partir des allongements principaux. De plus, dans ces lois, les coefficients élastiques représentatifs des propriétés mécaniques des élastomères testés peuvent intervenir sous forme linéaire ou sous forme de puissances non entières.

Les potentiels, fonctions des invariants de la déformation où interviennent linéairement les constantes élastiques, sont les plus largement utilisés aussi bien dans les codes de calcul industriels que pour les développements théoriques en grandes déformations. C'est le cas de potentiel de Rivlin [26] formulé à partir des invariants du tenseur de déformation de Cauchy-Green droit  $[C]$  et dont la forme la plus générale s'écrit :

$$W(I_1, I_2, I_3) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N C_{ijk} (I_1 - 3)^i \cdot (I_2 - 3)^j \cdot (I_3 - 3)^k \quad (\text{III.3})$$

où  $C_{ijk}$  sont des constantes caractérisant l'élastomère particulier.

Lorsque les phénomènes de pression hydrostatique restent faibles, les élastomères sont incompressibles et se déforment donc à volume constant. L'énergie de déformation élastique est alors écrite directement en fonction des deux premiers invariants de  $[C]$  et on obtient ainsi le potentiel de Mooney-Rivlin [1] dont la forme la plus générale est :

$$W(I_1, I_2) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M C_{ij} (I_1 - 3)^i \cdot (I_2 - 3)^j \quad (\text{III.4})$$

Certains auteurs [17] écrivent cette fonction sous forme plus complète en y ajoutant un autre terme mettant en évidence une légère compressibilité, ce qui traduit mieux le comportement réel des caoutchoucs :

$$W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i \cdot (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J - 1)^{2i} \quad (\text{III.5})$$

où :

$D_i$  : constantes caractéristiques de l'élastomère,

$J$  : jacobien de la transformation,

$\bar{I}_1$  et  $\bar{I}_2$  : invariants principaux de  $[C]$  pour une transformation à volume constant.

Cette loi est fréquemment utilisée lorsqu'elle est limitée au premier ordre ( $N = 1$ ).

Parmi les modèles les plus utilisés dans cette famille de potentiels hyper élastiques, citons par exemple les formulations suivantes :

Néo-Hookéen :  $W = C_{10}(I_1 - 3)$

Mooney-Rivlin :  $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$

Tschoegl 1<sup>er</sup> ordre [27]:  $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2$

Biderman : 
$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3)$$

D'autres modèles, exprimant également l'énergie de déformation en fonction des invariants existent mais sont plus rarement utilisés :

Varga : 
$$W = C_1(I_1 + I_2 + I_3 - 3)$$

Thomas : 
$$W = C_1(I_1 - 3) + \sum_{i=1}^n C_i f(I_2)$$

où la fonction  $f(I_2)$  vaut par exemple :  $f(I_2) = \ln(I_2/3)$

Les modèles proposés par Hart-Smith [19, 20] et Alexander [21, 22] où interviennent les coefficients élastiques sous forme non linéaire sont moins populaires. En effet, ces lois ne conduisent pas nécessairement à une meilleure modélisation que les lois de Rivlin avec le même nombre de coefficients.

Hart-Smith : 
$$W = C_1 \int_0^{I_1} \exp[C_3(I_1 - 3)^2] dI_1 + 3C_2 \ln(I_2/3)$$

Cette loi est souvent écrite directement sous la forme de deux dérivées directement utilisables pour le calcul des composantes du tenseur des contraintes :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 \exp[C_3(I_1 - 3)^2]$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{1}{12} C_2$$

Alexander : 
$$W = C_1 \int_0^{I_1} \exp[C_3(I_1 - 3)^2] dI_1 + C_2 \ln\left(\frac{(I_2 - 3) + \gamma}{\gamma}\right) + C_4(I_2 - 3)$$

La loi d'Alexander (cinq coefficients) représente simplement un modèle de Hart-Smith enrichi d'un terme supplémentaire.

L'autre grande famille des potentiels élastiques utilise les allongements principaux à la place des invariants du tenseur de déformation :

Valanis-Landel [6] : 
$$W = \sum_i f_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Le modèle le plus utilisé dans cette famille est celui d'Ogden [10, 11, 25] qu'on peut développer à plusieurs ordres ( $n = 1, 2, \dots$ ). Notons néanmoins qu'en général, au delà de l'ordre  $n = 3$ , ces modèles deviennent assez instables.

Ogden : 
$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\beta_i} (\lambda_1^{\beta_i} + \lambda_2^{\beta_i} + \lambda_3^{\beta_i} - 3)$$

Le modèle de Peng [28], même s'il est méconnu du fait de son association à la "recherche non publiée", est l'un des modèles qui fonctionne bien dans la plupart des problèmes où interviennent les matériaux hyper-élastiques:

$$\text{Peng :} \quad W = f(\lambda_1) + f(\lambda_2) + f(\lambda_3)$$

Le modèle suivant, initialement proposé par Peng et Landel [29, 30] est non seulement assez simple, mais donne en plus de bons résultats pour des matériaux dont la courbe contraintes – déformations obtenue en traction uni-axiale, est linéaire :

Peng-Landel :

$$W = \sum_{i=1}^N c \left[ \lambda_i - 1 - \ln(\lambda_i) - (1/6)(\ln(\lambda_i))^2 + (1/18)(\ln(\lambda_i))^3 - (1/216)(\ln(\lambda_i))^4 \right]$$

La constante  $c$  étant le module de tension initial ou module d'Young.

Enfin, Swanson [13, 14] fait remarquer que l'utilisation des allongements principaux (valeurs principales du gradient de la déformation) convient beaucoup moins bien lorsque le modèle est introduit dans un schéma général de calcul tel que les programmes aux éléments finis. Il propose donc d'éliminer cette difficulté en utilisant les invariants dans la fonction d'énergie de déformation tout en retenant les avantages de l'approche d'Ogden.

Swanson :

$$W = \sum_i \frac{3A_i(I_1/3)^{1+\alpha_i}}{2(1+\alpha_i)} + \sum_j \frac{3B_j(I_2/3)^{1+\beta_j}}{2(1+\beta_j)} + \int_0^{I_3} \frac{g(\xi)}{2} d\xi - \left( \sum_i A_i + 2 \sum_j B_j \right) \frac{\ln I_3}{2} \quad (\text{III.6})$$

où les  $A_i$ ,  $B_j$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  sont des constantes liées au matériau.

Cette liste de formulations possibles de l'énergie élastique de déformation n'est pas exhaustive. On trouve dans la littérature de nombreuses expressions reprenant partiellement les modèles que nous avons cités en y apportant quelques modifications pour des applications particulières. Dans la plupart des calculs industriels impliquant les caoutchoucs, les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden ou de Swanson sont les plus souvent rencontrés. Le modèle de Mooney-Rivlin notamment, est simple à mettre en œuvre et offre un bon compromis entre les difficultés d'élaboration et la précision obtenue.

Dans la suite, nous nous attarderons donc essentiellement sur la loi de comportement déduite du modèle de Mooney-Rivlin mais également celle déduite du modèle d'Ogden et de Swanson car cette dernière offre une plus grande précision que le modèle de Mooney-Rivlin et convient bien à l'utilisation ultérieure que nous allons en faire (introduction des lois dans un code de calcul numérique)

### C. DEVELOPPEMENT DES LOIS DE COMPORTEMENT

Rappelons que l'objectif de cette étude est de déterminer le comportement mécanique d'un mélange d'élastomères en introduisant dans un code de calcul numérique tous les éléments nécessaires nous permettant de déduire les champs de contraintes et de déformations subis par le mélange lorsqu'il est soumis à diverses sollicitations mécaniques.

Le présent paragraphe trouve son importance dans le fait que les lois de comportement rencontrées dans la littérature se présentent sous une forme inexploitable par un tel code de calcul. Il nous est donc indispensable de les modifier en vue de cet usage.

Rappelons les relations (II.51) et (II.52) :

$$[S] = \frac{\partial W([E])}{\partial [E]}$$

$$[S] = 2 \frac{\partial W([C])}{\partial [C]}$$

on en déduit que :

$$S_{ij} = 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial C_{ij}} \right]$$

rappelons aussi les relations (II.53) et (II.55):

$$I_1([C]) = Tr([C]) = C_{ij} \delta_{ij} = C_{ii}$$

$$I_2([C]) = \frac{1}{2} \left[ (Tr[C])^2 - Tr([C]^2) \right] = \frac{1}{2} (C_{ii} C_{jj} - C_{ij} C_{ji})$$

$$I_3([C]) = Det([C]) = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} C_{ip} C_{jq} C_{kr}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} = \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}} = I_1 \delta_{ij} - C_{ij}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial C_{ij}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{imk} \varepsilon_{jkr} C_{mk} C_{kr} = I_3 (C^{-1})_{ij}$$

En nous basant sur les formes de l'énergie  $W$  proposées par Mooney-Rivlin et Ogden-Swanson, nous décrivons les lois de comportements hyper élastiques nécessaires aux développements ultérieurs.



### 1. Loi de Mooney – Rivlin

En général, on considère les matériaux hyperélastiques comme étant incompressibles sauf lorsqu'ils sont soumis à des pressions hydrostatiques très importantes. Cette hypothèse est justifiée, car en toute rigueur ils admettent une très faible variation de volume qui se traduit par un coefficient de Poisson très proche de 0.5 et donc un module de cisaillement très faible par rapport au module de compressibilité.

Pour prendre en compte cette légère compressibilité, une technique consiste à considérer dans un premier temps, une transformation sans changement de volume (transformation incompressible) en vue de simplifier le problème, puis dans un deuxième temps, introduire cette compressibilité par l'intermédiaire du rapport de volume  $J$  qui n'est rien d'autre que le déterminant du gradient de la transformation. Cette technique se traduit dans la forme de l'énergie  $W$  par une partie fonction des deux premiers invariants  $I_1$  et  $I_2$  et une autre partie fonction de  $I_3$  sachant que  $I_3 = J^2$

La forme la plus générale de l'énergie volumique de déformation de Mooney – Rivlin s'écrit [17]:

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N D_i (I_3 - 1)^{2i}$$

En prenant pour état de référence, l'état naturel du matériau où les contraintes sont nulles, il apparaît un terme supplémentaire traduisant cette nullité des contraintes à l'état naturel :

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N D_i (I_3 - 1)^{2i} + \sum_{i=1}^N E_i \left( \frac{1}{I_3} - 1 \right)$$

$C_{ij}$ ,  $D_i$  et  $E_i$  sont des paramètres du matériau, déterminés à l'aide de résultats expérimentaux.

Les  $D_i$  déterminent la compressibilité du matériau. Si tous les  $D_i$  sont nuls alors le matériau est supposé complètement incompressible. Si  $D_1$  est égal à zéro alors tous les  $D_i$  doivent être nuls.

$I_1$  et  $I_2$  sont les premier et deuxième invariants principaux du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche.

$I_3 = J^2$  et  $J$  représente le changement de volume. C'est le déterminant du gradient de la transformation.

En général, on s'arrête aux premiers rangs car la précision obtenue à un rang supérieur ne vaut pas les efforts de calcul supplémentaires que cela implique. Les valeurs typiques de  $N$  sont donc 1 ou 2.

L'énergie de Mooney-Rivlin devient alors :

$$W(I_1, I_2, I_3) = a(I_1 - 3) + b(I_2 - 3) + d(I_3 - 1)^2 + c \left( \frac{1}{I_3} - 1 \right) \quad (\text{III.7})$$

$a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes appelées "constantes de Mooney Rivlin".

$d = \frac{1}{2\alpha}$  où  $\alpha$  est appelé paramètre de pénalisation.

On en déduit, avec la relation (II.52), l'expression suivante pour le tenseur de Piola - Kirchhoff :

$$\frac{1}{2} S_{ij} = a \delta_{ij} + b (I_1 \delta_{ij} - C_{ij}) + 2I_3 \left[ d (I_3 - 1) - \frac{c}{I_3^3} \right] (C^{-1})_{ij}$$

Pour passer dans la configuration actuelle, nous exprimons le tenseur des contraintes de Cauchy qui est lié à celui de Piola - Kirchhoff par la relation  $j[\sigma] = [F][S][F]'$  ou encore  $J \sigma_{mn} = F_{mk} S_{kl} F_{nl}$  :

$$\frac{1}{2} S_{ij} = (a + I_1 b) \delta_{ij} - b C_{ij} + 2I_3 \left[ d (I_3 - 1) - \frac{c}{I_3^3} \right] (C^{-1})_{ij} \quad (\text{III.8})$$

On en déduit, au vu de la relation liant  $[\sigma]$  et  $[S]$  :

$$\frac{J}{2} \sigma_{mn} = (a + I_1 b) F_{mi} \delta_{ij} F_{nj} - b F_{mi} C_{ij} F_{nj} + 2I_3 \left[ d (I_3 - 1) - \frac{c}{I_3^3} \right] F_{mi} (C^{-1})_{ij} F_{nj}$$

En remarquant que :

$$F_{mk} \delta_{kl} F_{nl} = F_{mi} F_{nl} = B_{mn} \quad \text{car} \quad [B] = [F].[F]' \quad (\text{III.9})$$

$$F_{mk} C_{kl} F_{nl} = F_{mk} F_{ik} F_{il} F_{nl} = B_{mi} B_{in} = B_{mk} B_{kn} \quad \text{car} \quad [C] = [F]'.[F] \quad (\text{III.10})$$

$$\begin{aligned} F_{mk} (C^{-1})_{kl} F_{nl} &= F_{mk} (F^t . F)_{kl}^{-1} F_{nl} = F_{mk} (F^{-1} . F^{-1t})_{kl} F_{nl} \\ &= F_{mk} F_{ki}^{-1} F_{li}^{-1} F_{nl} = \delta_{mi} F_{li}^{-1} F_{nl} \\ &= F_{lm}^{-1} F_{nl} = F_{nl} F_{lm}^{-1} = \delta_{nm} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

la relation (III.8) devient :

$$\frac{J}{2} \sigma_{mn} = (a + I_1 b) B_{mn} - b B_{mk} B_{kn} + 2I_3 \left[ d (I_3 - 1) - \frac{c}{I_3^3} \right] \delta_{mn} \quad (\text{III.12})$$

$a$  et  $b$  sont des constantes liées au matériau et déterminées par comparaison avec les résultats expérimentaux. Il reste donc à déterminer les paramètres  $d$  et  $c$ . Pour ce faire, il est d'usage de se référer à l'élasticité linéaire et d'introduire le tenseur tangent du matériau défini par :

$$D_{ijkl}(I_1, I_2, I_3) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} = 2 \frac{\partial S_{ij}}{\partial C_{kl}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial C_{kl}^2} \quad (\text{III.13})$$

Si à l'état de référence (ou état naturel),  $[C] = [I]$ ,  $[E] = 0$  et  $[S] = 0$ , le tenseur tangent s'interprète comme le 1<sup>er</sup> terme du développement de Taylor du tenseur des contraintes de Piola – Kirchhoff ( $I_1 = I_2 = 3$  et  $I_3 = 0$ )

$$S_{ij}([E]) = D_{ijkl}(3,3,1)E_{kl} + K_{ijklmn}(3,3,1)E_{kl}E_{mn} + \dots \quad (\text{III.14})$$

En élasticité linéaire isotrope ( $s_{ij} \cong \sigma_{ij}$  et  $E_{ij} \cong \varepsilon_{ij}$ ) la loi de comportement montre que le tenseur tangent est constant et est égal à  $D_{ijkl}^o$ .

En particulier on a :

$$D_{1111}^o = \lambda + 2\mu = \frac{E_o(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{III.15})$$

où  $E_o$  est le module d'Young du matériau au voisinage de l'état de référence (module tangent) et  $\nu$  son coefficient de Poisson.

Le paramètre de pénalisation  $\alpha$  (fonction de la constante  $d$ ) à déterminer est alors obtenu en identifiant, au voisinage de l'état de référence le tenseur tangent du matériau à celui défini en élasticité linéaire.

$$D_{1111}(3,3,1) = D_{1111}^o = \frac{E_o(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

On montre par ailleurs que si l'énergie volumique de déformation a la forme (II.62).

$$W(I_1, I_2, I_3) = \Pi(I_1, I_2) + \frac{1}{2\alpha} G^2(I_3) - H(I_3) ;$$

alors :

$$E_o = 6 \left( \frac{\partial \Pi}{\partial I_1}(3,3) + \frac{\partial \Pi}{\partial I_2}(3,3) \right) \quad (\text{III.16})$$

ce qui équivaut pour le modèle de Mooney Rivlin à :

$$E_o = 6(a+b) \quad (\text{III.17})$$

Il a déjà été établi que :

$$D_{1111} = 2 \frac{\partial S_{11}}{\partial C_{11}}$$

et

$$\frac{1}{2} S_{11} = (a + I_1 b) - b C_{11} + 2 I_3 \left[ d(I_3 - 1) - \frac{c}{I_3^3} \right] (C^{-1})_{11}$$

or  $I_1 = C_{11} + C_{22} + C_{33}$ , il s'ensuit que :

$$S_{11} = 2 \left[ a + b(C_{22} + C_{33}) + 2I_3 \left[ d(I_3 - 1) - \frac{c}{I_3^3} \right] (C^{-1})_{\lambda_1} \right]$$

$$D_{1111} = 2 \frac{\partial S_{11}}{\partial C_{11}} = 4 \frac{\partial}{\partial I_3} \left[ 2 \left( d(I_3 - 1) - \frac{c}{I_3^3} \right) I_3 (C^{-1})_{\lambda_1} \right] \frac{\partial I_3}{\partial C_{11}}$$

$$= 8 \left[ d + \frac{3c}{I_3^4} \right] \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{1mk} \varepsilon_{1qr} C_{mq} C_{kr} \right)^2$$

$$= 8 \left[ d + \frac{3c}{I_3^4} \right] I_3^2 (C^{-1})_{\lambda_1}^2$$

car :  $\frac{\partial I_3}{\partial C_{11}} = I_3 (C^{-1})_{\lambda_1} = \frac{1}{2} \varepsilon_{1mk} \varepsilon_{1qr} C_{mq} C_{kr}$

$$D_{1111}(3,3,1) = D_{1111}^o \quad \Leftrightarrow \quad \frac{E_o(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 8[d+3c] = \frac{6(a+b)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

d'où

$$d = \frac{1}{2\alpha} = \frac{3(a+b)(1-\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)} - 3c$$

Pour déterminer la constante  $c$ , il suffit d'écrire la relation (III.8) dans l'état de référence (ou état naturel) dans lequel les composantes du tenseur de contraintes de Piola – Kirchhoff sont nulles, donc :

$$a + 2b - 2c = 0$$

ou encore

$$c = \frac{a}{2} + b$$

Finalement :

$$d = \frac{1}{2\alpha} = \frac{3(a+b)(1-\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)} - 3 \left( \frac{a}{2} + b \right) \quad (\text{III.18})$$

Pour un matériau hyperélastique dont le comportement est non linéaire, une loi de comportement adéquate ne peut se limiter à une relation linéaire entre la contrainte de Kirchhoff  $[\tau]$  et le tenseur de dilatation  $[B]$ . Il faudra une loi objective liant un taux de contrainte à un taux de déformation au travers d'un module tangent.

La relation (III.12) permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} [\dot{\tau}] = (a + I_1 b) [B] - b [B] \cdot [B] + 2I_3 \left[ d(I_3 - 1) - \frac{c}{I_3^3} \right] [I] \quad (\text{III.19})$$

en prenant la variation de l'expression ci-dessus, il vient :

$$\frac{1}{2}d[\tau] = b dI_1 [B] + (a + I_1 b) d[B] - b d([B].[B]) + 2 \left[ D(2I_3 - 1) + \frac{2c}{I_3^3} \right] dI_3 [I]$$

Il est démontré en Annexe B qu'en définissant les deux grandeurs suivantes

$$H_{ijkl}^1 = \delta_{ik} B_{jl} + \delta_{jl} B_{ik}$$

$$H_{ijkl}^2 = \delta_{ik} B_{jp} B_{pl} + \delta_{jl} B_{ip} B_{pk} + 2 B_{ik} B_{jl}$$

on peut écrire :

$$\begin{cases} dI_1 = 2[B] : [D] \\ dI_2 = 2(I_1 [B] - [B].[B]) : [D] \\ dI_3 = 2I_3 [I] : [D] \\ d[B] = [H^1] : [D] + [w].[B] - [B].[w] \\ d([B].[B]) = [H^2] : [D] + [w].[B].[B] - [B].[B].[w] \end{cases}$$

où :

$[D]$  est le tenseur taux de déformation et  $[w]$  le tenseur taux de rotation qui sont liés par le tenseur gradient de vitesse :  $[L] = [D] + [w]$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d[\tau] = & 2b[B] : [D].[B] + (a + I_1 b)[H^1] : [D] + (a + I_1 b)([w].[B] - [B].[w]) \\ & - b[H^2] : [D] - b([w].[B].[B] - [B].[B].[w]) + 2 \left[ d(2I_3 - 1) + \frac{2c}{I_3^3} \right] 2I_3 [I] : [D].[I] \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d[\tau] = & \left[ 2b[B] \otimes [B] + (a + I_1 b)[H^1] - b[H^2] + 4I_3 \left[ d(2I_3 - 1) + \frac{2c}{I_3^3} \right] [I] \otimes [I] \right] : [D] \\ & + [w].((a + bI_1)[B] - b[B].[B]) - ((a + bI_1)[B] - b[B].[B]).[w] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}d[\tau] - [w].((a + bI_1)[B] - b[B].[B]) + ((a + bI_1)[B] - b[B].[B]).[w] = [X] : [D]$$

$$\frac{1}{2}d[\tau]-[w]\left[\frac{1}{2}[\tau]-2I_3\left(d(I_3-1)-\frac{c}{I_3^3}\right)[I]\right]+$$

$$\left[\frac{1}{2}[\tau]-2I_3\left(d(I_3-1)-\frac{c}{I_3^3}\right)[I]\right].[w]=[X]:[D]$$

$$\frac{1}{2}(d[\tau]-[w][\tau]+[\tau][w])+2I_3\left(d(I_3-1)-\frac{c}{I_3^3}\right)([w][I]-[I][w])=[X]:[D]$$

Or il apparaît que  $[w][I]-[I][w]=0$  ce qui permet d'écrire finalement :

$$\frac{1}{2}d_{ja}([\tau])=[X]:[D] \quad (\text{III.20})$$

où  $d_{ja}$  représente la dérivée de Jauman.

$$[X]=2b[B]\otimes[B]+(a+I_1b)[H^1]-b[H^2]+4I_3\left[d(2I_3-1)+\frac{2c}{I_3^3}\right][I]\otimes[I]$$

(III.21)

La relation précédente est une loi de comportement objective que nous appellerons dans la suite "la loi de Mooney-Rivlin". Le module d'élasticité  $[X]$  liant la dérivée de Jauman de la contrainte de Kirchhoff  $[\tau]$  au taux de déformation  $[D]$  s'écrit finalement :

$$X_{ijkl}=2bB_{ij}B_{kl}+(a+I_1b)H_{ijkl}^1-bH_{ijkl}^2+4I_3\left[d(2I_3-1)+\frac{2c}{I_3^3}\right]\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (\text{III.22})$$

## 2. Loi d'Ogden-Swanson

Cette loi s'applique à des matériaux hyper - élastiques faiblement incompressibles supportant un taux de déformation pouvant dépasser 150%.

Rappelons que la loi d'Ogden s'appuie sur une formulation basée sur une énergie de déformation de la forme :

$$W = \sum_{i=1}^N A_i (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i})$$

dans laquelle les  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  sont les allongements principaux (racine carrée des valeurs propres du tenseur de Cauchy-Green  $[C]$ ). Les coefficients  $A_i$ , les puissances  $\alpha_i$  (non entières) caractérisent le matériau. On notera que la forme ci-dessus de l'énergie  $W$  rentre bien dans le cadre de la théorie présentée au chapitre II.A.4 puisque les allongements principaux sont directement liés aux invariants de  $[C]$  par les relations :

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned}$$

Il est cependant utile de remarquer que cette forme de l'énergie  $W$  est peu commode d'utilisation en particulier pour le calcul numérique, puisqu'elle suppose la connaissance par avance des allongements principaux. Swanson [13] a montré que l'approche par des puissances non entières pouvait être combinée de manière relativement simple avec l'emploi des invariants principaux de la déformation. Il en déduit la forme suivante de l'énergie de déformation :

$$W = \sum_i \frac{3A_i (I_1/3)^{1+\alpha_i}}{2(1+\alpha_i)} + \sum_j \frac{3B_j (I_2/3)^{1+\beta_j}}{2(1+\beta_j)} + \int_0^{I_3} \frac{g(\xi)}{2} d\xi - \left( \sum_i A_i + 2 \sum_j B_j \right) \frac{\log(I_3)}{2} \quad (\text{III.23})$$

Cette forme de l'énergie prend en compte la nullité des contraintes à l'état naturel qui est pris comme état de référence.

Sachant que les composantes du tenseur de Piola - Kirchhoff se déduisent de l'énergie de déformation  $W$  par la relation :

$$S_{kl} = 2 \frac{\partial W([C])}{\partial C_{kl}} \quad \text{soit} \quad S_{kl} = 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{kl}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C_{kl}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial C_{kl}} \right]$$

Il s'ensuit :

$$S_{kl} = \left[ \sum_{i=1}^p A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} I_1 \right] \delta_{kl} - \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} C_{kl} + \left[ I_3 g(I_3) - \left( \sum_{i=1}^p A_i + 2 \sum_{j=1}^q B_j \right) \right] (C^{-1})_{kl} \quad (\text{III.24})$$

$g$  étant une fonction telle que  $g(1) = 0$ . En général, on prend :

$$g(I_3) = D_1(I_3 - 1) \quad (\text{III.25})$$

A l'état naturel,  $I_1 = I_2 = 3$  et  $I_3 = 1$ . De plus,  $C_{ij} = \delta_{ij}$ . On remarque alors que :

$$S_{kl} = \left[ \sum_{i=1}^p A_i + 3 \sum_{j=1}^q B_j \right] - \sum_{j=1}^q B_j - \left[ \left( \sum_{i=1}^p A_i + 2 \sum_{j=1}^q B_j \right) \right] = 0$$

Ainsi donc, à l'état naturel (ou de référence, on vérifie bien la nullité des contraintes c'est-à-dire :  $S_{ij} = 0$

Le tenseur de Piola - Kirchhoff et celui de Cauchy étant à tout instant liés par la relation  $J \sigma_{mn} = F_{mk} S_{kl} F_{nl}$ , on en déduit que :

$$J \sigma_{mn} = \left[ \sum_{i=1}^p A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} I_1 \right] F_{mk} \delta_{kl} F_{nl} - \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} F_{mk} C_{kl} F_{nl} + \left[ I_3 g(I_3) - \left( \sum_{i=1}^p A_i + 2 \sum_{j=1}^q B_j \right) \right] F_{mk} (C^{-1})_{kl} F_{nl}$$

En considérant les relations liant le gradient de la transformation  $[F]$  et le tenseur des dilatations  $[B]$ , il vient :

$$J \cdot \sigma_{mn} = \left[ \sum_{i=1}^p A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} I_1 \right] B_{mn} - \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} B_{mk} B_{kn} + \left[ I_3 g(I_3) - \left( \sum_{i=1}^p A_i + 2 \sum_{j=1}^q B_j \right) \right] \delta_{mn}$$

En effet :

$$F_{mk} \delta_{kl} F_{nl} = F_{ml} F_{nl} = B_{mn} \quad ([B] = [F] \cdot [F]^t)$$

$$F_{mk} C_{kl} F_{nl} = F_{mk} F_{ik} F_{il} F_{nl} = B_{mi} B_{in} = B_{mk} B_{kn} \quad ([C] = [F]^t \cdot [F])$$

$$\begin{aligned} F_{mk} (C^{-1})_{kl} F_{nl} &= F_{mk} (F^t \cdot F)_{kl}^{-1} F_{nl} = F_{mk} (F^{-1} \cdot F^{-t})_{kl} F_{nl} \\ &= F_{mk} F_{ki}^{-1} F_{li}^{-1} F_{nl} = \delta_{mi} F_{li}^{-1} F_{nl} \\ &= F_{lm}^{-1} F_{nl} = F_{nl} F_{lm}^{-1} = \delta_{nm} \end{aligned}$$



Remarquons que, lorsque le matériau est à l'état naturel, les composantes du tenseur de Cauchy  $[\sigma]$  comme celles du tenseur de Piola - Kirchhoff  $[S]$  sont nulles.

Les coefficients  $A_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $B_j$  et  $\beta_j$  étant des constantes liées au matériau et déterminées grâce aux essais, il reste à calculer la constante  $D_1$  introduite par la fonction  $g$  et qui représente le paramètre de pénalisation  $\chi$  tel que :

$$D_1 = \frac{1}{2\chi}.$$

Pour déterminer cette constante, on introduit le tenseur tangent du matériau, défini par :

$$D_{ijkl}(I_1, I_1, I_3) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}}$$

et on fait une identification au voisinage de l'état de référence de ce tenseur avec celui défini en élasticité linéaire ( hypothèse des petites perturbations  $D_{ijkl}^0 = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$  ) :

$$\begin{aligned} D_{1111}(3,3,1) &= D_{1111}^0 \text{ avec :} \\ D_{1111}^0 &= \lambda + 2\mu = \frac{E_o(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \text{et :} \quad \frac{E_o}{2(1+\nu)} &= \mu \end{aligned} \tag{III.26}$$

$E_o$  est le module d'Young du matériau au voisinage de l'état de référence (module tangent),  $\nu$  le coefficient de Poisson fixé entre 0 et 0.5, proche de 0.5 pour les matériaux incompressibles,  $\mu$  le module de cisaillement du matériau.

En restant dans l'hypothèse des petites perturbations ( $I_1 \approx I_2 \approx 3$ ,  $I_3 = 1$  et donc  $g(I_3) = 0$ ) et en considérant la composante  $S_{12}$ , la relation (III.24) permet d'écrire :

$$S_{12} = -\sum_{j=1}^q B_j C_{12} - \left( \sum_{i=1}^p A_i + 2 \sum_{j=1}^q B_j \right) (C_{13} C_{23} - C_{12} C_{33})$$

et puisque  $C_{ij} \approx \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}$  un développement au 2<sup>ème</sup> ordre donne :  $C_{13} C_{23} - C_{12} C_{33} \approx -2\varepsilon_{12}$  soit

$$S_{12} = 2 \left( \sum_{i=1}^p A_i + \sum_{j=1}^q B_j \right) \varepsilon_{12}$$

ce qui nous permet de déduire le module de rigidité du cisaillement  $G_o$  en petites déformations :

$$\mu = \sum_{i=1}^p A_i + \sum_{j=1}^q B_j \quad (\text{III.27})$$

Avec (III.26) et (III.27) on obtient :

$$E_0 = 2(1+\nu) \left[ \sum_{i=1}^p A_i + \sum_{j=1}^q B_j \right] \quad (\text{III.28})$$

et :

$$D_{1111}^0 = \frac{2(1-\nu) \left( \sum_{i=1}^p A_i + \sum_{j=1}^q B_j \right)}{(1-2\nu)} \quad (\text{III.29})$$

Il a déjà été établi que :

$$D_{1111} = 2 \frac{\partial S_{11}}{\partial C_{11}}$$

et

$$S_{11} = \left[ \sum_{i=1}^p A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} I_1 \right] - \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} C_{11} + \left[ I_3 D_1 (I_3 - 1) - \left( \sum_{i=1}^p A_i + 2 \sum_{j=1}^q B_j \right) \right] (C^{-1})_{11}$$

soit :

$$S_{11} = \sum_{i=1}^p A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + (I_1 - C_{11}) \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} + \left[ D_1 I_3 (I_3 - 1) - \left( \sum_{i=1}^p A_i + 2 \sum_{j=1}^q B_j \right) \right] (C^{-1})_{11}$$

ou encore :

$$S_{11} = \sum_{i=1}^p A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + (C_{22} + C_{33}) \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} + \left[ D_1 I_3 (I_3 - 1) - \left( \sum_{i=1}^p A_i + 2 \sum_{j=1}^q B_j \right) \right] (C^{-1})_{11}$$

Pour déterminer  $D_{1111}$  on effectue les opérations suivantes :

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial C_{11}} = \frac{\partial S_{11}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{11}} + \frac{\partial S_{11}}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C_{11}} + \frac{\partial S_{11}}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial C_{11}}$$

d'où :

$$2 \frac{\partial S_{11}}{\partial C_{11}} = 2 \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{3} A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i - 1} \delta_{11} + 2 (C_{22} + C_{33})^2 \sum_{j=1}^q \frac{\beta_j}{3} B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j - 1} + 2 D_1 (2I_3 - 1) (C^{-1})_{11} \cdot I_3 (C^{-1})_{11}$$

En début de déformation,  $I_1 = I_2 = 3$ ,  $I_3 = 1$  et  $[C] = [I]$ . Il s'ensuit :

$$D_{1111}(3,3,1) = 2 \frac{\partial S_{11}}{\partial C_{11}} = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i + \frac{8}{3} \sum_{j=1}^q \beta_j B_j + 2D_1$$

$$D_{1111}(3,3,1) = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i + \frac{8}{3} \sum_{j=1}^q \beta_j B_j + 2D_1 \quad (\text{III.30})$$

En considérant les relations (III.29) et (III.30), l'égalité  $D_{1111}(3,3,1) = D_{1111}^0$  s'écrit :

$$\frac{2(1-\nu)(\sum A_i + \sum B_j)}{(1-2\nu)} = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i + \frac{8}{3} \sum_{j=1}^q \beta_j B_j + 2D_1$$

d'où :

$$D_1 = \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \left( \sum_{i=1}^p A_i + \sum_{j=1}^q B_j \right) - \frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i + 4 \sum_{j=1}^q \beta_j B_j \right) \quad (\text{III.31})$$

### Détermination de la loi de comportement

Comme pour le cas de Mooney – Rivlin, nous cherchons à présent une loi de comportement objective de la forme  $\delta[\sigma] = [Y] : [D]$  par exemple, où  $[Y]$  est un tenseur d'ordre 4 des constantes hyper - élastiques.

$$[\tau] = \left[ \sum_i A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + I_1 \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} \right] [B] - \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} [B].[B] +$$

$$\left[ D_1 I_3 (I_3 - 1) - \left( \sum_i A_i + 2 \sum_j B_j \right) \right] [I]$$

En prenant la variation de cette relation, on obtient :

$$d[\tau] = \left[ \sum_i \frac{\alpha_i}{3} A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i - 1} dI_1 + \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} dI_1 + I_1 \sum_j \frac{\beta_j}{3} B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j - 1} dI_2 \right] [B] +$$

$$\left[ \sum_i A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + I_1 \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} \right] d[B] - \sum_j \frac{\beta_j}{3} B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j - 1} dI_2 [B].[B] -$$

$$\sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} d([B].[B]) + [D_1 (2I_3 - 1) dI_3] [I]$$

Il est démontré en Annexe qu'en définissant les deux grandeurs suivantes :

$$\begin{aligned} H_{ijkl}^1 &= \delta_{ik} B_{jl} + \delta_{jl} B_{ik} \\ H_{ijkl}^2 &= \delta_{ik} B_{jp} B_{pl} + \delta_{jl} B_{ip} B_{pk} + 2 B_{ik} B_{jl} \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

on peut écrire :

$$\begin{cases} dI_1 = 2[B] : [D] \\ dI_2 = 2(I_1[B] - [B].[B]) : [D] \\ dI_3 = 2I_3[I] : [D] \\ d[B] = [H^1] : [D] + [w].[B] - [B].[w] \\ d([B].[B]) = [H^2] : [D] + [w].[B].[B] - [B].[B].[w] \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

où :

$[D]$  est le tenseur taux de déformation et  $[w]$  le tenseur taux de rotation qui sont liés par  $[G] = [D] + [w]$ .

De ces relations, on déduit :

$$\begin{aligned} d[\tau] &= \left[ \sum_i \frac{\alpha_i}{3} A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i - 1} + \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} \right] 2[B] : [D].[B] \\ &\quad + 2I_1 \sum_j \frac{\beta_j}{3} B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j - 1} (I_1[B] - [B].[B]) : [D].[B] \\ &\quad - 2 \sum_j \frac{\beta_j}{3} B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j - 1} (I_1[B] - [B].[B]) : [D].[B].[B] \\ &\quad + \left[ \sum_i A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + I_1 \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} \right] [H^1] : [D] \\ &\quad - \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} [H^2] : [D] + 2D_1(2I_3 - 1)I_3[I] : [D].[I] \\ &\quad + [w] \left[ \left[ \sum_i A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + I_1 \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} \right] [B] - \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} [B].[B] \right] \\ &\quad - \left[ \left[ \sum_i A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + I_1 \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} \right] [B] + \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} [B].[B] \right] [w] \end{aligned}$$

En isolant le tenseur  $[D]$  des cinq premières lignes de cette relation et en remarquant que les expressions multiplicatrices de  $[w]$  sont en fait équivalentes à l'expression suivante :

$$[\tau] - \left[ D_1 I_3 (I_3 - 1) - \left( \sum_i A_i + 2 \sum_j B_j \right) \right] [I]$$

on peut réécrire la relation ci-dessus sous la forme :

$$d[\tau] - [w] \left( [\tau] - \left[ D_1 I_3 (I_3 - 1) - \left( \sum_i A_i + 2 \sum_j B_j \right) \right] [I] \right) + \left( [\tau] - \left[ D_1 I_3 (I_3 - 1) - \left( \sum_i A_i + 2 \sum_j B_j \right) \right] [I] \right) [w] = [Y] : [D]$$

ou encore :

$$(d[\tau] - [w][\tau] + [\tau][w]) + \left[ D_1 I_3 (I_3 - 1) - \left( \sum_i A_i + 2 \sum_j B_j \right) \right] ([w].[I] - [I].[w]) = [Y] : [D]$$

Dans cette relation, l'expression  $(d[\tau] - [w][\tau] + [\tau][w])$  est la dérivée de Jauman du tenseur des contraintes  $[\tau]$  et  $([w].[I] - [I].[w]) = 0$ . Il s'ensuit :

$$d_{ja}[\tau] = [Y] : [D] \quad (\text{III.34})$$

où le tenseur d'ordre quatre des modules tangents  $[Y]$ , vaut :

$$\begin{aligned} [Y] = & 2 \left[ \sum_i \frac{\alpha_i}{3} A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i - 1} + \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} \right] [B] \otimes [B] \\ & + 2I_1 \sum_j \frac{\beta_j}{3} B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j - 1} [B] \otimes (I_1 [B] - [B].[B]) \\ & - 2 \sum_j \frac{\beta_j}{3} B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j - 1} [B].[B] \otimes (I_1 [B] - [B].[B]) \quad (\text{III.35}) \\ & + \left[ \sum_i A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + I_1 \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} \right] [H^1] \\ & - \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} [H^2] + 2D_1 I_3 (2I_3 - 1) [I] \otimes [I] \end{aligned}$$

soit en utilisant les notations indicielles :

$$\begin{aligned}
 Y_{ijkl} = & 2 \left[ \sum_i \frac{\alpha_i}{3} A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i - 1} + \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} \right] B_{ij} B_{kl} \\
 & + 2I_1 \sum_j \frac{\beta_j}{3} B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j - 1} B_{ij} (I_1 B_{kl} - B_{km} B_{ml}) \\
 & - 2 \sum_j \frac{\beta_j}{3} B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j - 1} B_{im} B_{mj} (I_1 B_{kl} - B_{km} B_{ml}) \\
 & + \left[ \sum_i A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + I_1 \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} \right] H_{ijkl}^1 \\
 & - \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} H_{ijkl}^2 + 2D_1 I_3 (2I_3 - 1) \delta_{ij} \delta_{kl}
 \end{aligned} \tag{III.36}$$

Nous venons de décrire une loi de comportement liant l'incrément du tenseur des contraintes de Boussinesq  $[\delta N]$  et le gradient de vitesse  $[G]$ . Rappelons que cette forme de la loi est nécessaire car elle est destinée à être introduite dans un processus d'homogénéisation en grandes déformations. En somme, elle a été définie pour deux formes différentes de l'énergie de déformation  $W$  :  $\delta N_{ij} = L_{ijkl} G_{kl}$

*Mooney - Rivlin :*

$$L_{ijkl} = 2b B_{ij} B_{kl} + (a + I_1 b) H_{ijkl}^1 - b H_{ijkl}^2 + 4I_3 \left[ d(2I_3 - 1) + \frac{2c}{I_3} \right] \delta_{ij} \delta_{kl}$$

*Ogden - Swanson :*

$$\begin{aligned}
 L_{ijkl} = & 2 \left[ \sum_i \frac{\alpha_i}{3} A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i - 1} + \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} \right] B_{ij} B_{kl} \\
 & + 2I_1 \sum_j \frac{\beta_j}{3} B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j - 1} B_{ij} (I_1 B_{kl} - B_{km} B_{ml}) \\
 & - 2 \sum_j \frac{\beta_j}{3} B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j - 1} B_{im} B_{mj} (I_1 B_{kl} - B_{km} B_{ml}) \\
 & + \left[ \sum_i A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + I_1 \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} \right] H_{ijkl}^1 \\
 & - \sum_j B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} H_{ijkl}^2 + 2D_1 I_3 (2I_3 - 1) \delta_{ij} \delta_{kl}
 \end{aligned}$$

D. BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Mooney, "A theory of large elastic deformation", J. Appl. Phys., Vol.11, pp. 582-592; 1940.
- [2] L. R. G. Treloar, "Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation", Trans. Faraday Soc., Vol. 40, PP. 59-70, 1944.
- [3] L. R. G. Treloar, "The physics of rubber elasticity", Oxford, 1958.
- [4] R. S. Rivlin, "Large elastic deformations of isotropic materials, VI. Further developments of the general theory", Phil. Trans. Royal Soc., Vol. A241, pp.379 –397, 1948.
- [5] R. S. Rivlin, D. W. Saunders, "Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber", Phil. Trans. Royal Soc., Vol. A243, pp. 251-288, 1951.
- [6] K. C. Valanis, R. F. Landel, "The strain - energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratio", J. of Appl. Physics, Vol.38, pp. 2997-3002, 1967.
- [7] K. C. Valanis, R. F. Landel, "Large Multi – axial deformation behavior of a filled rubber", Trans. Soc. Rheol., Vol. 11, pp 243-256, 1967.
- [8] P. J. Blatz, S. C. Sharda, N. W. Tschoegl, "Strain – energy function for rubberlike materials based on a generalized measure of strain", Trans. Soc. Rheol., Vol.18, pp. 145-161, 1974.
- [9] P. J. Blatz, W. L. Ko, "Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials", Trans. Soc. Rheol., Vol. 6, pp. 223-251, 1962.
- [10] R. W. Ogden, "Large deformation isotropic elasticity : On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids", Proc. R. Soc. Lond., Series A., Vol. 326, pp. 565-584, 1972.
- [11] R. W. Ogden "Large deformation isotropic elasticity : On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids", Proc. R. Soc. Lond., Series A., Vol. 328, pp. 567-583, 1972.
- [12] L.R. G. Treloar, "The elasticity and related properties of rubbers", Rubber Chem. And Tech., Vol. 47, pp. 625-695, 1974.
- [13] S. R. Swanson, L. W. Christensen, M. Ensign, "Large deformation finite elements calculations for slightly compressible hyperelastic materials", Comp. And Struc., Vol. 21, n°1/2, pp. 81-88, 1985.
- [14] S. R. Swanson, "A constitutive model for high elongation elastic materials", J. of Eng. Mat. And Tech., Vol. 107, pp. 110-114, 1985.

### Chapitre III – Étude des lois de comportement phénoménologiques

- [15] A. Domscheit, H. Rothert, T. Winkelman, "*Rifined methods for tire computations*", *Tire Sc. And Tech.*, Vol. 17, n°4, pp. 291-304, 1989.
- [16] R. H., Finney, A. Kumar, "*Development of material constants for nonlinear finite – element analysis*", 132<sup>nd</sup> Meeting Rubber Division, Amer. Chem. Soc., Cleveland, Ohio, october 6-9, 1987.
- [17] Abaqus "*Theory Manual*", V.5.7 , Hibbitt, Karlson, Sorensen Inc., 1997.
- [18] H. Trumel, A. Dragon, "*A hyperelastic nonlinear model for nearly incompressible particulate composite*", *Int. J. of Eng. Sc.*, Vol. 32, fasc.7, pp. 1085-1101, 1994.
- [19] L. J. Hart-Smith, *Z. Angew. Math. Phys.*, 17, p. 608, 1966.
- [20] L. J. Hart-Smith, "*Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials*", p. 608, 1967.
- [21] H. Alexander, "*A constitutive relation for rubber-like materials*", *Int. J. Eng. Sc.*, Vol 6, pp.549-563, 1968.
- [22] H. Alexander, "*Tensile instability of initially spherical balloons*", *Int. J. Eng. Sc.*, Vol 9, pp. 151-162, 1971.
- [23] R. Hill, "*Problems in mechanics*", Novozhilov Anniversary Volume, Leningrad, (a), pp. 459, 1970.
- [24] R. Hill, "*Constitutive inequalities for isotropic elastic under finite strain*", *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A314, (b), pp. 457-472, 1970.
- [25] R. W. Ogden, "*Volume changes associated with the deformation of rubberlike solids*", *Mech. Phys. Solids*, Vol. 24, pp. 323-338, 1976.
- [26] R. S. Rivlin, K. N. Sawyers, "*The strain energy function for elastomers*", *Trans. of the Soc. of Rheology*, 20:4, pp. 545-557, 1976.
- [27] N. W. Tschoegl, "*Constitutive equations for elastomers*", *J. of Polymer Sc.*, Part A1, Vol. 9, pp. 2997-3004, 1971.
- [28] Peng S. T. J., "*Nonlinear multiaxial finite deformation investigation of solids propellants*", AFRPL TR-85-036, 1985.
- [29] S. T. J. Peng, R. F., J. Landel, *Appl. Phys.*, Vol. 43, p.3034, 1972.
- [30] S. T. J. Peng, R. F., J. Landel, *Appl. Phys.*, Vol. 46, p.2599, 1975.



## CHAPITRE IV

# HOMOGENÉISATION ET PRISE EN COMPTE D'UNE INTERFACE

### A. INTRODUCTION

### B. REPRESENTATION ET LOCALISATION

1. Représentation de l'inclusion enrobée
2. Equation intégrale – cas de l'inclusion enrobée

### C. OPERATEURS INTERFACIAUX

### D. APPROXIMATION AUTO - COHERENTE DE L' EQUATION INTEGRALE - CAS DE L' INCLUSION ENROBEE

1. Homogénéisation
2. Approche auto – cohérente

### E. BIBLIOGRAPHIE

## A. INTRODUCTION

La prise en compte d'une interface fine entre les constituants du mélange d'élastomères répond à un souci d'approcher au mieux la réalité. Il est possible d'une part que cette interface soit volontairement introduite par une opération d'ensimage par exemple, pour donner au mélange certaines propriétés particulières. D'autre part, l'expérience a montré que les frontières entre les constituants du mélange peuvent être le siège de réactions chimiques pouvant donner naissance à une couche supplémentaire autour des diverses phases. C'est cette couche que nous appelons ici, interface.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'adapter l'approche utilisée pour un composite à renforts enrobés à notre problème. Dans ce cas l'hétérogénéité sera décrite par deux inclusions ellipsoïdales concentriques, mais non homothétiques définissant l'inclusion  $I$  et son enrobage  $C$  (interface).

La démarche micromécanique est basée, d'une part, sur l'équation intégrale, et d'autre part, sur les relations interfaciales caractéristiques de la topologie d'inclusion enrobée [1]. Cette démarche se limite au cas de matériaux hyperélastiques ne présentant pas de discontinuités du vecteur déplacement et du vecteur de contraintes aux interfaces. Dans une direction donnée, l'épaisseur de l'enrobage ( $\Delta a$ ) est supposée petite par rapport aux dimensions caractéristiques

( $a$ ) de l'inclusion, c'est à dire :  $\frac{\Delta a}{a} \ll 1$ . Les déformations moyennes dans l'enrobage sont calculées à partir de l'hypothèse d'un champ uniforme selon l'épaisseur de l'enrobage en utilisant le champ moyen dans l'inclusion. Les équations sont développées dans le cas général d'inclusions ellipsoïdales et de milieux anisotropes.

## B. REPRESENTATION ET LOCALISATION

### 1. Représentation de l'inclusion enrobée

La topologie de l'inclusion enrobée (figure ci-dessous) suppose que l'inclusion  $I$  de module tangent  $l^i$  et de volume  $V_i$  est entourée d'une couche mince (enrobage) de module tangent  $l^c$  et de volume  $V_c$ , l'ensemble étant plongé dans un milieu homogène infini (matrice  $M$ ) de module tangent  $l^o$ . On suppose que la liaison entre tous les constituants (inclusion - enrobage et enrobage - matrice) est parfaite de telle sorte que les vitesses et les vecteurs incréments de contraintes sont continus sur toutes les frontières.

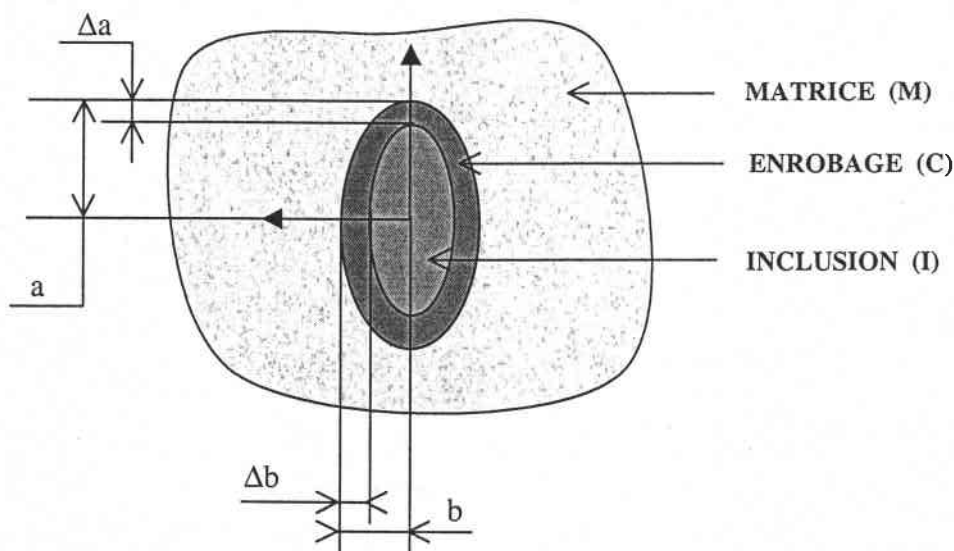


Figure IV.1 : Représentation de l'inclusion enrobée.

### 2. Equation intégrale – Cas de l'inclusion enrobée.

Un mélange d'élastomères est un matériau hétérogène et peut être considéré comme un milieu continu à microstructure. Celle-ci est supposée connue dans l'état initial du milieu, et son évolution au cours de la déformation conditionne la réponse du matériau. La formulation d'un tel problème en élasticité conduit à une équation intégrale [2] dont la solution approchée est souvent obtenue dans le cadre du schéma auto-cohérent [3, 4].

Berveiller et Zaoui [5] ont formulé une telle équation dans le cadre des petites déformations. Nous utilisons une démarche semblable pour résoudre notre problème en grandes transformations avec une formulation en vitesse et en se plaçant dans la configuration actuelle (description Eulerienne).

Soit donc un milieu hyper-élastique continu  $V$  de frontière  $S_t$  à l'instant  $t$ . On impose sur cette frontière une répartition de vitesse  $V^d(x)$  (conditions aux limites cinématiques).

## Chapitre IV – Homogénéisation et prise en compte d'une interface

L'équilibre d'un tel milieu peut se traduire pour des problèmes quasi - statiques [6] :  
- en fonction du taux de contraintes de Cauchy :

$$\operatorname{div}(\delta_t \sigma) + \rho \delta_t f - \operatorname{grad}(\sigma) : g + \rho f \operatorname{Tr}(g) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

ou

- en fonction du taux de contraintes de Boussinesq et pour la configuration de référence confondue avec la configuration actuelle :

$$\operatorname{div}(\delta_t n) + \rho \delta_t f = 0 \quad (\text{IV.2})$$

où  $\delta_t f$  est l'incrément de forces volumiques,  $\rho$  la masse volumique du matériau et  $g$  le gradient de vitesse.

La deuxième relation est celle que nous utiliserons du fait de sa simplicité relativement à la première, du type de contrainte qu'elle met en évidence et de la configuration dans laquelle elle s'écrit. Nos développements se feront donc dans la "configuration Lagrangienne réactualisée" comme déjà précisé dans le paragraphe II.A.2.

L'application de la relation fondamentale de la dynamique en description Eulerienne se traduit par :

$$\begin{cases} \delta_t n_{ij,i} + \rho \delta_t f_j = 0 \\ \delta_t n_{ij} \neq \delta_t n_{ji} \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

$\delta_t n_{ij}$  étant l'incrément de taux de contraintes de Boussinesq (contraintes nominales).

Les conditions aux limites cinématiques se traduisent par :

$$V_i(x) = V_i^d(x) = G_{ij}(x) x_j \quad \forall x \in S_i \quad (\text{IV.4})$$

La loi de comportement locale du matériau hyper-élastique s'écrit :

$$\delta_t n_{ij}(x) = l_{ijkl}(x) g_{lk}(x) \quad (\text{IV.5})$$

où les  $l_{ijkl}(x)$  représentent les composantes du module tangent en  $x$  et  $g_{ij}(x) = V_{i,j}(x)$  les composantes du gradient de vitesse infinitésimale.

En reprenant la démarche décrite au chapitre II.B.2.b, on aboutit à l'équation intégrale cinématique suivante :

$$g_{mn}(x) = G_{mn}^o - \int_V \Gamma_{mnij}(x-x') \delta l_{ijkl}(x') g_{kl}(x') dV' \quad (\text{IV.6})$$

avec

$$\Gamma_{mnij}(x-x') = \mathfrak{R}_{mj,i'n}^*(x-x') = -\frac{1}{2} [\mathfrak{R}_{im,nj}(x-x') + \mathfrak{R}_{in,mj}(x-x')] \quad (\text{IV.7})$$

$G_{mn}$  n'est pas symétrique par rapport à  $k$  et  $m$  du fait que  $V_{n,m} \neq V_{m,n}$

La détermination des propriétés effectives d'un milieu hétérogène passe par la résolution de l'équation intégrale ci-dessus. Le cas de l'inclusion simple noyée dans une matrice a été largement abordé dans le chapitre II.B.4 dont les relations suivantes sont à retenir :

$$g^I = a^{II} : \langle a^{II} \rangle^{-1} : G = A^I : G \quad (\text{IV.8})$$

$$a^{II} = (I + T^{II} : \Delta I^I)^{-1} \quad (\text{IV.9})$$

$$L^{eff} = \langle l^I : A^I \rangle = \langle l^I : a^{II} \rangle : \langle a^{II} \rangle^{-1} \quad (\text{IV.10})$$

En introduisant la fraction volumique  $f_i^I$  de l'inclusion  $I$ , définie par  $f_i^I = \frac{V_i^I}{V_i}$  et pour un polyphasé constitué de  $N$  grains, on obtient :

$$\langle a^{II} \rangle = \sum_{I=1}^N f^I a^{II} \quad (a)$$

$$A^I = a^{II} : \left( \sum_{I=1}^N f^I a^{II} \right)^{-1} \quad (b) \quad (\text{IV.11})$$

$$L^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I l^I : A^I \quad (c)$$

Dans les paragraphes suivants, nous nous attarderons plus sur le cas d'inclusions enrobées.

Rappelons que la présence d'interfaces entre les constituants du mélange est modélisée par la considération d'une inclusion enrobée, noyée dans une matrice homogène, l'enrobage, faisant office d'interface (*figure IV.1*). Dans ces conditions, la déviation du module tangent au travers du modèle élémentaire s'écrit :

$$\delta l(x) = (l^I - L^o) \theta^I(x) + (l^c - L^o) \theta^c(x) \quad (\text{IV.12})$$

où les fonctions caractéristiques  $\theta^I(x)$  et  $\theta^c(x)$ , sont définies par :

$$\theta^I(x) = \begin{cases} 1 & x \in V_I \\ 0 & x \notin V_I \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta^c(x) = \theta^2(x) - \theta^I(x)$$

Notons également la fonction :

$$\theta^2(x) = \begin{cases} 1 & x \in V_2 = V_I + V_c \\ 0 & x \notin V_2 \end{cases}$$

où  $V_2$  désigne le volume de l'inclusion composite ( $I + C$ ).

On peut aussi écrire (IV.12) comme suit:

$$\delta l(x) = \Delta l^l \theta^l(x) + \Delta l^c \theta^c(x) \quad (\text{IV.13})$$

en remarquant bien que :  $\Delta l^l = l^l - L^o$  et  $\Delta l^c = l^c - L^o$

L'équation intégrale (VI.6) devient alors :

$$\begin{aligned} g_{ij} = & G_{ij} - \int_V \Gamma_{ijkl}(x-x') \Delta l^l_{klmn} g_{mn}(x') \theta^l(x') dV' \\ & - \int_V \Gamma_{ijkl}(x-x') \Delta l^c_{klmn} g_{mn}(x') \theta^c(x') dV'. \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

En tenant compte des propriétés des fonctions caractéristiques  $\theta^l(x)$  et  $\theta^c(x)$ , la relation (VI.14) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} g_{ij} = & G_{ij} - \int_{V_l} \Gamma_{ijkl}(x-x') \Delta l^l_{klmn} g_{mn}(x') dx' \\ & - \int_{V_c} \Gamma_{ijkl}(x-x') \Delta l^c_{klmn} g_{mn}(x') dx'. \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

La présence dans cette équation intégrale de l'inconnue  $g_{ij}(x)$  de part et d'autre de l'égalité ne facilite pas sa résolution. Certains auteurs dont Kröner [1, 7] ou Eimer [8, 9] ont proposé des approches de solution pour les milieux élastiques linéaires. Par ailleurs, dans les problèmes d'homogénéisation pour un milieu dans lequel  $l(x)$  est uniforme par morceaux (ce qui correspond à nos hypothèses), seules les déformations moyennes d'une phase interviennent. On se propose donc de déduire de (VI.15) les moyennes des gradients de vitesses suivantes:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij}^l &= \frac{1}{V_l} \int_{V_l} g_{ij}(x) dV \\ \bar{g}_{ij}^c &= \frac{1}{V_c} \int_{V_c} g_{ij}(x) dV \\ \bar{g}_{ij}^2 &= \frac{1}{V_2} \int_{V_2} g_{ij}(x) dV \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

A partir de l'expression de l'équation intégrale (IV.15), on calcule  $\bar{g}_{ij}^2$  par :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij}^2 = & G_{ij} - \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \int_{V_l} \Gamma_{ijkl}(x-x') \Delta l^l_{klmn} g_{mn}(x') dV dV' - \\ & \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \int_{V_c} \Gamma_{ijkl}(x-x') \Delta l^c_{klmn} g_{mn}(x') dV dV'. \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

Eshelby [10] a démontré l'uniformité de l'intégrale  $\int_{V_2} \Gamma_{ijkl}(x-x') dV'$  pour une inclusion ellipsoïdale. On note cette intégrale  $T_{ijkl}^2(L^o)$  pour tout  $x' \in V_2$  qui représente le tenseur d'interaction dans l'inclusion composite ( $I_c$ ). On en déduit :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij}^2 = & G_{ij} - \frac{1}{V_2} T_{ijkl}^2(L^o) \Delta l_{klmn}^l \int_{V_l} g_{mn}(x') dV' \\ & - \frac{1}{V_2} T_{ijkl}^2(L^o) \Delta l_{klmn}^c \int_{V_c} g_{mn}(x') dV' \end{aligned} \quad (IV.18)$$

En considérant les expressions de moyennes (VI.16), on obtient:

$$\bar{g}_{ij}^2 = G_{ij} - \frac{V_l}{V_2} T_{ijkl}^2(L^o) \Delta l_{klmn}^l \bar{g}_{mn}^l - \frac{V_c}{V_2} T_{ijkl}^2(L^o) \Delta l_{klmn}^c \bar{g}_{mn}^c \quad (IV.19)$$

D'autre part, la moyenne sur l'inclusion composite du tenseur gradient de vitesse  $\bar{g}_{ij}^2$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij}^2 = & \frac{1}{V_2} \left[ \int_{V_l} g_{ij}(x) dV + \int_{V_c} g_{ij}(x) dV \right] \quad \text{soit :} \\ & \bar{g}_{ij}^2 = \frac{V_l}{V_2} \bar{g}_{ij}^l + \frac{V_c}{V_2} \bar{g}_{ij}^c \end{aligned} \quad (IV.20)$$

En combinant les expressions (IV.19) et (IV.20), on obtient:

$$\frac{V_l}{V_2} \left( I_{ijmn} + T_{ijkl}^2(L^o) \Delta l_{klmn}^l \right) \bar{g}_{mn}^l + \frac{V_c}{V_2} \left( I_{ijmn} + T_{ijkl}^2(L^o) \Delta l_{klmn}^c \right) \bar{g}_{mn}^c = G_{ij} \quad (IV.21)$$

où  $I_{ijmn} = \delta_{im} \cdot \delta_{jn}$  est le tenseur unité d'ordre 4.

On obtient ainsi une équation à deux inconnues qui sont les moyennes des gradients de vitesse dans l'inclusion,  $\bar{g}_{mn}^l$  et dans l'enrobage,  $\bar{g}_{mn}^c$ .

Pour résoudre complètement ce problème, il faut relier les deux inconnues  $\bar{g}_{mn}^l$  et  $\bar{g}_{mn}^c$  par une autre équation. C'est cette nouvelle équation qui fait l'objet du paragraphe suivant où nous introduisons les opérateurs interfaciaux.

### C. OPERATEURS INTERFACIAUX

Les champs de contraintes dans l'enrobage varient en réalité de manière complexe. De plus, il existe une discontinuité des champs d'incrément de contraintes et de gradients de vitesses respectivement  $\delta n$  et  $g$  au passage d'une interface. Lorsque l'épaisseur de l'enrobage est faible, on peut admettre raisonnablement que les champs moyens  $\delta n$  et  $g$  sont uniformes selon l'épaisseur de la couche si bien que l'on peut relier les déformations de part et d'autre de l'interface (Inclusion - enrobage) à partir d'une formulation simplifiée des équations de champ (équilibre et compatibilité) conduisant aux opérateurs interfaciaux [10, 11].

On désigne par  $(\delta n^I, g^I)$  et  $(\delta n^C, g^C)$  les champs d'incrément de contraintes nominale et de gradients des vitesses dans l'inclusion ( $I$ ) et dans l'enrobage ( $C$ ). Comme il a été démontré par Eshelby, Hill et Walpole [10, 11, 12] dans le cas de petites déformations, ces champs peuvent être reliés explicitement uniquement au travers des propriétés élastiques des constituants de part et d'autre de l'interface et de la normale unitaire  $\vec{u}$  à l'interface.

En effet, le fait de supposer qu'il s'agit d'une liaison parfaite entre les deux phases, conduit à une continuité du vecteur vitesse :

$$[V_i] \equiv V_i^C - V_i^I = 0 \quad (\text{IV.22})$$

et une continuité du vecteur taux de contrainte :

$$[\delta n_{ij}] u_j = [\delta n_{ij}^C - \delta n_{ij}^I] u_j = 0 \quad (\text{IV.23})$$

Les  $u_i$  étant les composantes du vecteur unitaire normale  $\vec{u}$  à l'interface.

Dans chaque phase, la loi de comportement se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta n_{ij}^I &= l_{ijkl}^I g_{kl}^I \\ \delta n_{ij}^C &= l_{ijkl}^C g_{kl}^C \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

En un point  $\vec{x}(x_i)$  de l'interface les conditions de compatibilité s'écrivent :

$$dV_i = V_{i,j} dx_j \quad (\text{IV.25})$$

et la continuité des vecteurs vitesses impose pour le saut du gradient de vitesse l'équation suivante:

$$[V_{i,j}] dx_j = (V_{i,j}^I - V_{i,j}^C) dx_j = 0 \quad (\text{IV.26})$$

et puisque  $u_j dx_j = 0$  ( $\vec{u}$  normale à  $d\vec{x}$ ), la condition (IV.26) est équivalente à [15]:

$$[V_{i,j}] = (V_{i,j}^I - V_{i,j}^C) = \lambda_i \cdot u_j \quad (\text{IV.27})$$



## Chapitre IV – Homogénéisation et prise en compte d'une interface

Autrement dit

$$[g_{ij}] = g_{ij}^c - g_{ij}^l = \lambda_i \cdot \nu_j \quad (\text{IV.28})$$

où  $\lambda$  est un vecteur de proportionnalité (correspondant à l'amplitude du saut) qui est déterminé complètement par la condition :

$$l_{ijkl}^l g_{kl}^l u_j = l_{ijkl}^c g_{kl}^c u_j \quad (\text{IV.29})$$

Celle-ci s'obtient à partir de la continuité du vecteur contrainte au passage de l'interface en utilisant les lois de comportement dans chaque phase.

En prenant  $l^l$  comme milieu de référence, l'équation (IV.29) permet d'éliminer le champ  $g^c$  dans l'équation (IV.28). On obtient ainsi :

$$l_{ijkl}^l g_{kl}^l u_j = l_{ijkl}^c (g_{kl}^l + \lambda_k u_l) u_j$$

ou encore :

$$(l_{ijkl}^l - l_{ijkl}^c) g_{kl}^l u_j = l_{ijkl}^c u_l u_j \lambda_k \quad (\text{IV.30})$$

En introduisant la matrice de Christoffel

$$M_{ik} = l_{ijkl}^c u_l u_j \quad (\text{IV.31})$$

On peut écrire :

$$M_{ik} \lambda_k = (l_{ijkl}^l - l_{ijkl}^c) g_{kl}^l u_j$$

Ce qui permet d'écrire  $\lambda_i$  sous la forme:

$$\lambda_i = M_{ki}^{-1} u_l (l_{klmn}^l - l_{klmn}^c) g_{mn}^l \quad (\text{IV.32})$$

La relation (IV.28) donnant le saut du gradient de vitesse permet alors d'écrire :

$$g_{ij}^c - g_{ij}^l = P_{ijkl}^c (l_{klmn}^l - l_{klmn}^c) g_{mn}^l \quad (\text{IV.33})$$

où l'opérateur P s'écrit :

$$P_{ijkl}^c = M_{ki}^{-1} u_j u_l \quad (\text{IV.34})$$

Une démarche similaire, en prenant comme milieu de référence l'enrobage, aboutit également à l'équation ci-après :

$$g_{ij}^l - g_{ij}^c = P_{ijkl}^l (l_{klmn}^c - l_{klmn}^l) g_{mn}^c \quad (\text{IV.35})$$

$P^l$  : opérateur interfacial qui dépend de  $\bar{u}$  et de  $l^l$

$P^c$  : opérateur interfacial qui dépend de  $\bar{u}$  et de  $l^c$

Finalement, il vient :

$$g_{ij}^c = g_{ij}^l + P_{ijkl}(l^c, \bar{u}) \Delta l_{klmn}^{IC} \bar{g}_{mn}^l \quad (\text{IV.36})$$

où  $\Delta l_{klmn}^{IC} = l_{klmn}^l - l_{klmn}^c$

En première approximation, on remplace dans (IV.37)  $g_{ij}^l$  par sa valeur moyenne  $\bar{g}_{ij}^l$  sur  $V_l$  de telle sorte qu'on puisse écrire :

$$g_{ij}^c = \bar{g}_{ij}^l + P_{ijkl}(l^c, \bar{u}) \Delta l_{klmn}^{IC} \bar{g}_{mn}^l \quad (\text{IV.38})$$

L'épaisseur de l'enrobage étant supposée très petite, la valeur moyenne de la déformation dans l'enrobage est calculée en supposant que  $g^c(x)$  est uniforme selon l'épaisseur de l'enrobage et égale à  $g^c$  de (IV.38). Dans ce cas,  $g^c(x)$  ne dépend que de la normale à la frontière de  $V_l$  et on a :

$$\bar{g}_{ij}^c = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} g_{ij}^c(x) dV = \bar{g}_{ij}^l + \frac{1}{V_c} \left[ \int_{V_c} P_{ijkl}(l^c, \bar{u}) dV \right] \Delta l_{klmn}^{IC} \bar{g}_{mn}^l \quad (\text{IV.39})$$

Soit :

$$\bar{g}_{ij}^c = \bar{g}_{ij}^l + \frac{1}{V_c} \left[ \int_{V_c} P_{ijkl}(l^c, \bar{u}) dV \right] \Delta l_{klmn}^{IC} \bar{g}_{mn}^l \quad (\text{IV.40})$$

En posant  $T_{ijkl}^* = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} P_{ijkl}(l^c, \bar{u}) dV$  cette équation devient :

$$\bar{g}_{ij}^c = \bar{g}_{ij}^l + T_{ijkl}^* \Delta l_{klmn}^{IC} \bar{g}_{mn}^l \quad (\text{IV.41})$$

Cette deuxième équation associée à celle obtenue à la fin du paragraphe précédent réduit le problème à la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{V_l}{V_2} (I_{ijmn} + T_{ijkl}^2(L^o) \Delta l_{klmn}^l) \bar{g}_{mn}^l + \frac{V_c}{V_2} (I_{ijmn} + T_{ijkl}^2(L^o) \Delta l_{klmn}^c) \bar{g}_{mn}^c = G_{ij} \\ \bar{g}_{ij}^c = \bar{g}_{ij}^l + T_{ijkl}^* \Delta l_{klmn}^{IC} \bar{g}_{mn}^l \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

De ce système, on déduit finalement que la résolution du problème de l'inclusion enrobée hétérogène se ramène au calcul des tenseurs  $T^2$  et  $T^*$ .

Avec :

$$T_{ijkl}^2(L^o) = \int_{V_2} \Gamma_{ijkl}(x - x') dV \quad \text{et} \quad T_{ijkl}^* = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} P_{ijkl}(l^c, \bar{u}) dV$$

**Détermination de  $T^*$ .**

En Annexe B on montre que :

$$P_{ijkl}(L^0, \bar{u}) = T_{ijkl}^I(L^0) - \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(x^+ - x) dV \quad (\text{IV.43})$$

$x^+$  est un point de l'interface (IC) vu du côté de l'enrobage.

En intégrant cette relation sur le volume  $V_c$  de la couche (enrobage), on obtient

$$\int_{V_c} P_{ijkl}(L^0, \bar{u}) dV = V_c T_{ijkl}^I(L^0) - \int_{V_c} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(x^+ - x) dV^+ dV \quad (\text{IV.44})$$

En remarquant que  $V_2 = V_c + V_I$ , on peut décomposer le terme  $\int_{V_c} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(x^+ - x) dV^+ dV$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(x^+ - x) dV^+ dV &= \int_{V_2} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(x^+ - x) dV^+ dV \\ &\quad - \int_{V_I} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(x - x') dV dV' \end{aligned} \quad (\text{IV.45})$$

De plus, en considérant les résultats d'Eshelby concernant l'uniformité de l'intégrale  $\int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(x - x') dV'$  pour une inclusion ellipsoïdale, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{V_2} \Gamma_{ijkl}(x - x') dV' &= T_{ijkl}^2(L^0) \quad \text{pour } x \in V_2 \\ \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(x - x') dV' &= T_{ijkl}^I(L^0) \quad \text{pour } x \in V_I \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \int_{V_2} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(x^+ - x) dV^+ dV &= V_I T_{ijkl}^2(L^0) \\ \int_{V_I} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(x - x') dV dV' &= V_I T_{ijkl}^I(L^0) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'exprimer (IV.45) sous la forme :

$$\int_{V_c} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(x^+ - x) dV^+ dV = V_I [T_{ijkl}^2(L^0) - T_{ijkl}^I(L^0)] \quad (\text{IV.46})$$

Le tenseur  $T_{ijkl}^2(L^0)$  est calculé sur le volume  $V_2$  de l'inclusion composite ( inclusion + enrobage ) supposée de forme ellipsoïdale. Comme pour  $T_{ijkl}^I(L^0)$ , ce tenseur se déduit classiquement du tenseur d'Eshelby.

En introduisant la dernière expression de (IV.46) dans (IV-44) il vient :

$$\int_{V_c} P_{ijkl}(L^o, \bar{u}) dV = V_c T_{ijkl}^I(L^o) - V_I (T_{ijkl}^2(L^o) - T_{ijkl}^I(L^o)) \quad (IV.47)$$

Rappelons que le tenseur  $T^*$  est défini par :

$$T_{ijkl}^* = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} P_{ijkl}(L^o, \bar{u}) dV$$

Finalement :

$$T_{ijkl}^* = T_{ijkl}^I(L^o) - \frac{V_I}{V_c} (T_{ijkl}^2(L^o) - T_{ijkl}^I(L^o)) \quad (IV.48)$$

Notons que  $T^2(L^o)$  dépend également de la géométrie de l'inclusion composite par

l'intermédiaire des rapports d'axes :  $\frac{a_i + \Delta a_i}{b_i + \Delta b_i}$

Dans le cas particulier d'une géométrie concentrique et homothétique où  $\frac{\Delta a_i}{a_i} = \frac{\Delta b_i}{b_i}$  on a :

$$\frac{a_i + \Delta a_i}{b_i + \Delta b_i} = \frac{a_i \left(1 + \frac{\Delta a_i}{a_i}\right)}{b_i \left(1 + \frac{\Delta b_i}{b_i}\right)} = \frac{a_i}{b_i} \quad (IV.49)$$

ce qui veut dire que l'inclusion ( $I$ ) et l'inclusion composite ( $IC$ ) ont le même rapport d'axe et donc que :  $T^2(L^o) = T^I(L^o)$ . Autrement dit, pour ce genre de géométrie, on a :

$$T_{ijkl}^* = T_{ijkl}^I(L^o) \quad (IV.50)$$

## D. APPROXIMATION AUTO - COHERENTE DE L' EQUATION INTEGRALE

### - Cas de l'inclusion enrobée -

On se propose dans ce chapitre de déduire le comportement élastique global d'un élastomère constituant un milieu hyper élastique infini composé de trois éléments différents :

- une matrice dont les propriétés mécaniques sont représentées par le tenseur  $l^M$ ,
- des inclusions de forme ellipsoïdales dont les propriétés mécaniques élastiques sont représentées par le tenseur  $l^I$ ,
- une couche mince (entourant chaque inclusion) qui constitue l'enrobage et dont les propriétés élastiques sont désignées par  $l^c$ . On suppose également que l'inclusion composite ( $IC$ ) est de forme ellipsoïdale.

On note  $V$  le volume total du milieu élastique,  $V_I$  le volume total des inclusions,  $V_c$  le volume total de l'enrobage et  $V_M$  le volume de la matrice de telle sorte que  $V = V_I + V_c + V_M$ . On notera aussi  $V_2 = V_I + V_c$ .

En introduisant les tenseurs de localisation reliant les champs locaux aux champs globaux, les relations de moyennes de Hill-Mandel permettront de déduire le comportement effectif global du composite.

Les tenseurs de localisation sont évalués à partir d'une approche autocohérente qui consiste à faire un choix particulier du tenseur  $L^o$  décrivant la matrice et à limiter, dans le cas de la méthode autocohérente à un site, les interactions entre constituants à celles entre une inclusion enrobée ellipsoïdale et le milieu homogène équivalent considéré comme matrice.

### 1. Homogénéisation

Si on applique une vitesse à la frontière du volume élémentaire représentatif (V.E.R), le gradient de vitesse globale est égal à la valeur moyenne volumique des gradients des vitesses locaux  $g_{ij}(x)$  au sein du composite.

$$G_{ij} = \bar{g}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V g_{ij} dV \quad (IV.51)$$

Le champ taux de contraintes macroscopiques résultant de l'application du champ  $[G]$  se traduit par le tenseur de Boussinesq  $[\delta N]$ , défini par :

$$\delta N(x) = L^{eff}(x) : G(x) \quad (IV.52)$$

ou encore

$$\delta N(x) = \int_V L^{eff}(x') : G(x') \delta(x - x') dV \quad (IV.53)$$

$L^{eff}$  représentant les constantes élastiques effectives du matériau composite.

## Chapitre IV – Homogénéisation et prise en compte d'une interface

Les champs gradients de vitesses microscopiques et macroscopiques sont liés par la relation suivante:

$$g(x) = A(x) : G \quad (IV.54)$$

$A(x)$  est le tenseur de localisation du gradient de vitesse global  $[G]$ .

En appelant :

- $\bar{g}^I$  le gradient de vitesse moyen dans la phase inclusion
- $\bar{g}^c$  le gradient de vitesse moyen dans la phase enrobage
- $\bar{g}^M$  le gradient de vitesse moyen dans la phase matrice

On peut écrire à partir de (IV.51) la relation suivante:

$$G_{ij} = \frac{V_I}{V} \bar{g}_{ij}^I + \frac{V_c}{V} \bar{g}_{ij}^c + \frac{V_M}{V} \bar{g}_{ij}^M \quad (IV.55)$$

ou encore :

$$G_{ij} = f^I \bar{g}_{ij}^I + f^c \bar{g}_{ij}^c + f^M \bar{g}_{ij}^M \quad (IV.56)$$

$f^I = \frac{V_I}{V}$  étant la fraction volumique de l'inclusion,

$f^c = \frac{V_c}{V}$  étant la fraction volumique de l'enrobage et

$f^M = \frac{V_M}{V}$  étant la fraction volumique de la matrice.

Il est évident de remarquer que :  $f^I + f^c + f^M = 1$

Les valeurs moyennes des gradients de vitesses dans l'inclusion, dans l'enrobage et dans la matrice sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij}^I &= \frac{1}{V_I} \int_{V_I} g_{ij} dV \\ \bar{g}_{ij}^c &= \frac{1}{V_c} \int_{V_c} g_{ij} dV \\ \bar{g}_{ij}^M &= \frac{1}{V_M} \int_{V_M} g_{ij} dV \end{aligned} \quad (IV.57)$$

De même, si on désigne par:

$\delta n_{ij}^I$  l'incrément de contrainte dans la phase inclusion,

$\delta n_{ij}^c$  l'incrément de contrainte dans la phase enrobage, et

$\delta n_{ij}^M$  l'incrément de contrainte dans la phase matrice.

on peut écrire :

$$\delta N_{ij} = f^I \delta n_{ij}^I + f^c \delta n_{ij}^c + f^M \delta n_{ij}^M \quad (IV.58)$$

A partir de (IV.54), nous avons :

$$\begin{aligned} g^I(x) &= A^I(x) : G && \text{dans l'inclusion} \\ g^c(x) &= A^c(x) : G && \text{dans l'enrobage} \end{aligned} \quad (\text{IV.59})$$

D'autre part la loi de comportement locale permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \delta n_{ij}^I &= l_{ijkl}^I g_{kl}^I && \text{dans l'inclusion} \\ \delta n_{ij}^c &= l_{ijkl}^c g_{kl}^c && \text{dans l'enrobage} \\ \delta n_{ij}^M &= l_{ijkl}^M g_{kl}^M && \text{dans la matrice} \end{aligned} \quad (\text{IV.60})$$

Tenant compte de (IV.59) et de la loi de comportement locale dans l'enrobage et dans l'inclusion, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta n_{ij}^I &= l_{ijkl}^I A_{klmn}^I G_{mn} \\ \delta n_{ij}^c &= l_{ijkl}^c A_{klmn}^c G_{mn} \end{aligned} \quad (\text{IV.61})$$

D'après (IV.56) et (IV.60) :

$$g_{ij}^M = \frac{1}{f^M} (I_{ijkl} - f^I A_{ijkl}^I - f^c A_{ijkl}^c) G_{kl} \quad (\text{IV.62})$$

$$\delta n_{ij}^M = \frac{1}{f^M} L_{ijkl}^M (I_{klmn} - f^I A_{klmn}^I - f^c A_{klmn}^c) G_{mn} \quad (\text{IV.63})$$

Les relations (IV.58, IV.61 et IV.63) donnent :

$$\delta N_{ij} = (l_{ijmn}^M + f^I (l_{ijkl}^I - l_{ijkl}^M) A_{klmn}^I + f^c (l_{ijkl}^c - l_{ijkl}^M) A_{klmn}^c) G_{mn} \quad (\text{IV.64})$$

Avec la dernière expression de (IV.64), l'équation (IV.52) permet d'écrire :

$$L_{ijmn}^{eff} = l_{ijmn}^M + f^I (l_{ijkl}^I - l_{ijkl}^M) A_{klmn}^I + f^c (l_{ijkl}^c - l_{ijkl}^M) A_{klmn}^c \quad (\text{IV.65})$$

## 2. Approche autocohérente.

L'approche autocohérente consiste à faire un choix particulier du module  $L^o$  et à remplacer les interactions entre une hétérogénéité particulière qui est l'inclusion, et le milieu réel environnant par celles entre l'inclusion et le milieu homogène équivalent de module tangent  $L^{eff}$ .

Le matériau modélisé étant supposé granulaire, la forme des grains peut être suffisamment bien approchée par un ellipsoïde.

Le module tangent  $l(x)$ , qui définit le comportement instantané du matériau composite, ainsi que le gradient de la vitesse  $g(x)$  varient faiblement à l'intérieur d'un constituant, de sorte que leurs valeurs moyennes reflètent bien le comportement réel. Ceci se traduit par :

$$l(x) = l^j \quad \forall x \in V^j$$

$$g^j = \frac{1}{V^j} \int_{V^j} g(x) dV \quad j \equiv I, C \text{ ou } M \quad (\text{IV.66})$$

La détermination des tenseurs de localisation  $A^I$  et  $A^C$  par l'approche auto-cohérente se ramène à utiliser les résultats du problème de l'inclusion enrobée hétérogène. Il suffit de remplacer alors dans les équations donnant  $\bar{g}^I$  et  $\bar{g}^C$ ,  $L^0$  par  $L^{eff}$  qui représente dans ce cas, le milieu homogène équivalent. Les équations (IV.42) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{V_I}{V_2} [I_{ijmn} + T_{ijkl}^2(L^{eff}) \Delta l_{klmn}^I] \bar{g}_{mn}^I + \frac{V_C}{V_2} [I_{ijmn} + T_{ijkl}^2(L^{eff}) \Delta l_{klmn}^C] \bar{g}_{mn}^C = G_{ij} \\ \bar{g}_{ij}^C = \bar{g}_{ij}^I + T_{ijkl}^*(l^C) \Delta l_{klmn}^{Ic} \bar{g}_{mn}^I = [\delta_{im} \delta_{jn} + T_{ijkl}^*(l^C) \Delta l_{klmn}^{Ic}] \bar{g}_{mn}^I \end{cases} \quad (\text{IV.67})$$

avec :  $\Delta l^I = l^I - L^{eff}$  et  $\Delta l^C = l^C - L^{eff}$

et dont la résolution permet de déduire les tenseurs de localisations  $a^I$  et  $a^C$  respectivement de  $g^I$  et de  $g^C$  par rapport au gradient de vitesse imposé  $[G^0]$  :

$$a_{ijmn}^I = \left\{ \frac{V_I}{V_2} [I_{ijmn} + T_{ijkl}^2(L^{eff}) \Delta l_{klmn}^I] + \frac{V_C}{V_2} [I_{ijmn} + T_{ijkl}^2(L^{eff}) \Delta l_{klmn}^C] + \frac{V_C}{V_2} [I_{ijrs} + T_{ijkl}^2(L^{eff}) \Delta l_{klrs}^C] T_{rspq}^*(l^C) \Delta l_{pqmn}^{Ic} \right\}^{-1} \quad (\text{IV.68})$$

$$a_{ijmn}^C = A_{ijmn}^I + T_{ijrs}^* \Delta l_{rskl}^{Ic} A_{klmn}^I \quad (\text{IV.69})$$

Comme au chapitre II, on montre que les tenseurs de localisation  $A^I$  et  $A^C$  respectivement de  $g^I$  et de  $g^C$  par rapport au gradient de vitesse global  $[G]$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} A^I &= a^I : \langle a \rangle^{-1} \\ A^C &= a^C : \langle a \rangle^{-1} \\ A^M &= a^M : \langle a \rangle^{-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.70})$$

Pour démontrer (IV.70), rappelons les relations IV.56 et IV.59 ci dessus.

$$G = f^M \bar{g}^M + f^I \bar{g}^I + f^C \bar{g}^C$$

$$g^C = A^C : G \quad \text{dans l'enrobage}$$

$$g^I = A^I : G \quad \text{dans l'inclusion}$$

$$g^M = A^M : G \quad \text{dans la matrice}$$

il s'en suit que



$$G = [f^M a^M + f^I a^I + f^c a^c] : G^o \Leftrightarrow G^o = \langle a \rangle^{-1} : G$$

$$g^c = a^c : \langle a \rangle^{-1} : G = A^c : G \quad \text{dans l'enrobage}$$

$$g^I = a^I : \langle a \rangle^{-1} : G = A^I : G \quad \text{dans l'inclusion}$$

$$g^M = a^M : \langle a \rangle^{-1} : G = A^M : G \quad \text{dans la matrice}$$

d'où les relations (IV.70).

En rappelant la relation (II.115)  $\overline{A(x)} = I$  qui s'écrit dans le cas présent sous la forme  $f^I A^I + f^c A^c + f^M A^M = I$  on déduit que :

$$A^M = \frac{1}{f^M} [I - f^I A^I - f^c A^c] \quad (IV.71)$$

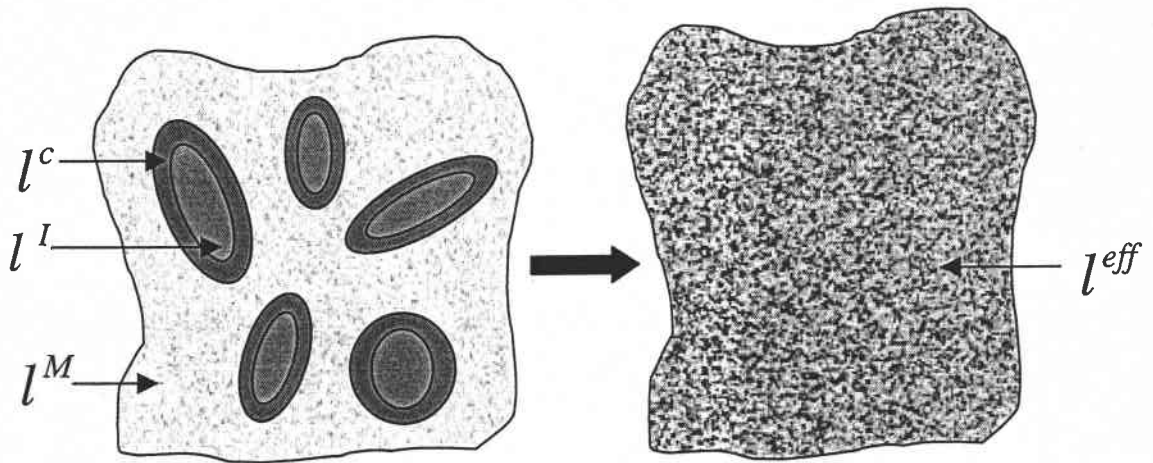
En faisant l'hypothèse que le gradient de vitesse dans la matrice est approximativement égale à celui imposé aux limites du polyphasé on déduit que :

$$G = f^M G^o + f^I \bar{g}^I + f^c \bar{g}^c$$

$$G = f^M G^o + f^I a^I : G^o + f^c a^c : G^o = [f^M I + f^I a^I + f^c a^c] : G^o$$

Il s'en suit :

$$\langle a \rangle = f^M I + f^I a^I + f^c a^c \quad (IV.72)$$



Matériau hétérogène à inclusions enrobées

Matériau homogène équivalent

Figure IV.1 : Schématisation du modèle autocohérent

E. BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. HILL., *"Interfacial Operators in the mechanics of composite media"*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 31, 1983.
- [2] M. CHERKAOUI, *"Comportement thermomécanique global des composites à renforts enrobés: Modélisation micromécanique et applications"*. Thèse de doctorat. Université de Metz, 1995
- [3] Y. BENVENISTE, *"The effective mechanical behavior of composite materials with imperfect contact between the constituents"*, Mech. of Mater., Vol 4, 1985.
- [4] Z. HASHIN, *"Thermoelastic properties of particulate composite with imperfect"*, J. Mech. phys. Solids, vol.39, 1991.
- [5] J. QU, *"The effect of slightly weakened interfaces on the overall elastic properties of composite materials"*, Mech. of Mater. Vol.14, 1993.
- [6] FASSI-FEHRI., *"Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice anisotrope-application à l'étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité"*. Thèse d'état. Université de Metz. 1985.
- [7] L. J. WALPOLE, *"The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium"* Proc. Roy. Soc, 1967.
- [8] M. CHEKAOUI, H. SABAR, M. BERVEILLER, *"Micro mechanical approach of the coated inclusion problem and applications to composite materials"* J. Eng. Mater. Techno., Vol.116, 1994.
- [9] M. CHEKAOUI, H. SABAR, M. BERVEILLER, *"Elastic composites with coated reinforcements: a micro mechanical approach for non homothetic topology"*, Int. J. Eng. Sci.
- [10] J. D. ESHELBY, *"Elastic inclusions and inhomogeneities"*. Prog. in solid. Mech.- Amsterdam, 1961.
- [11] J. D. ESHELBY, *"The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems"*. Proc. Rhe. Soc., London, Vol.241, pp. 376-96, 1957.
- [12] M. BERVEILLER, O. FASSI-FEHRI, A. HIHI, *"The problem of two plastic and heterogeneous inclusions"*. Int. J. Eng. Sci. Vol. 25, pp. 691-709, 1987.
- [13] A. MOLINARI, M. EL MOUDEN, *"The problem of elastic inclusions at finite concentration"*. Int. J. Solids Struct. Vol. 33, pp.31-50, 1996.

## Chapitre V

# ASPECTS NUMÉRIQUES ET PROGRAMMATION

### A. INTRODUCTION

### B. OBJECTIFS ET ETAPES DE LA PROGRAMMATION

1. Données (en entrées)
2. Initialisations
3. Expression de la loi de comportement
4. Routine d'homogénéisation en grandes déformations
5. Cumul, réactualisation et changement de forme
6. Résultats (en sorties)

### C. DEVELOPPEMENTS PARTICULIERS

1. Nouvelle expression de la loi de comportement
2. Approximation autocohérente en grandes déformations
3. Cumul et actualisation des grandeurs mécaniques
4. Changement de forme des constituants du mélange

### D. L'ALGORITHMIQUE

1. Algorithme général du programme
2. Organigramme de l'homogénéisation
3. Organigramme du cumul et de la réactualisation microscopique
4. Organigramme du cumul et de la réactualisation macroscopique

### E. BIBLIOGRAPHIE

## A. INTRODUCTION.

Dans notre étude, l'aspect numérique tient une place tout aussi importante que les développements théoriques effectués jusqu'à présent.

Rappelons que l'objectif visé par cette étude est l'analyse du comportement mécanique d'un mélange d'élastomères. Cette analyse se fera par simulation numérique. Cette technique de résolution numérique d'un problème non linéaire nécessite une méthode de travail particulière qui consiste à considérer l'évolution du système, étape par étape. C'est l'approche incrémentale.

Les élastomères ont en effet un comportement hyper - élastique non linéaire, donc un gradient de transformation non constant sur le chemin de la déformation. Ceci nous impose pour une étude numérique efficace, de découper ce chemin en petits incréments de déformation, assez petits pour que le gradient de la transformation puisse être considéré comme constant sur cet incrément. Il est donc nécessaire dans un premier temps de fixer un pas d'incrémentation, des conditions initiales qui correspondent à l'état de références du mélange et des relations mécaniques équivalentes à celles obtenues en petites perturbations.

Ensuite, pour chaque étape correspondant à une incrémentation sur le chemin de la déformation, il faudra d'une part procéder au cumul des grandeurs mécaniques calculées jusque là, et d'autre part réactualiser les grandeurs de base de cette étape, qui devrait correspondre aux valeurs atteintes lors de l'étape précédente.

En outre, il est nécessaire dans un développement en grandes déformations de tenir compte à chaque étape, du changement de forme des constituants du mélange.

Ce cumul, cette réactualisation des grandeurs mécaniques et cette prise en compte du changement de forme des constituants du mélange sont développés dans les paragraphes suivants.

Dans ce chapitre, nous allons présenter dans un premier temps les principales étapes de la programmation numérique, des données en entrée jusqu'aux résultats en sortie du programme. Nous - nous attarderons ensuite sur les étapes où nous avons fait des développements particuliers, propres à notre étude. Un algorithme général viendra finalement synthétiser les aspects numériques et la programmation effectués lors de cette étude.

## B. OBJECTIFS ET ETAPES DE LA PROGRAMMATION.

La présente étude a pour objectif d'analyser le comportement mécanique d'un mélange d'élastomères. Ce mélange est considéré comme étant un "polyphasé granulaire".

Chaque phase correspond à un type de constituant du mélange et donc, répond à une loi de comportement particulière. En réalité, les constantes  $C_1$ ,  $\alpha$  pour la loi de Mooney-Rivlin et  $A_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $B_j$ ,  $\beta_j$ ,  $D_1$ , pour la loi d'Ogden-Swanson, introduites aux chapitres III sont les véritables facteurs qui différencient la loi de comportement d'une phase de celle d'une autre.

Chaque grain est un élément ou une inclusion du mélange et peut être d'une phase ou d'une autre. Deux grains adjacents ou non peuvent donc avoir la même loi de comportement ou non. Les nombres de grains et de phases différentes sont fixés au départ

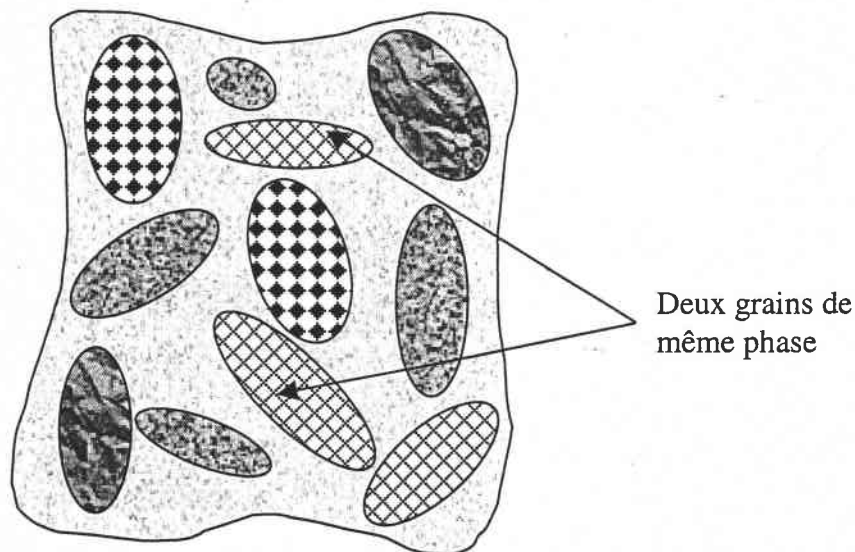


Figure V.1 : Représentation du mélange : Matériau polyphasé.

L'analyse du comportement mécanique du mélange sera basée sur la détermination des états de contrainte et de déformation macroscopiques du mélange. Par la connaissance de ces états, on fera :

- ◆ une analyse comparée entre l'utilisation de la loi de Mooney-Rivlin et celle d'Ogden-Swanson,
- ◆ une analyse sur l'influence de l'orientation et de la forme initiales des grains dans le mélange, sur son comportement,
- ◆ une analyse sur l'apport de l'enrobage c'est-à-dire la présence d'une interface fine entre les grains.

Toutes ces analyses constituent l'objectif de cette étude. Les résultats obtenus seront interprétés et nous en tirerons les conclusions qui y sont liées.

Pour en arriver à ces conclusions, il est judicieux de scinder le problème en petites étapes que nous présentons dans les paragraphes suivants.

### 1. Données (en entrées).

Pour atteindre les objectifs voulus, il est indispensable de fixer les paramètres définissant les contours de cette étude. Les principaux paramètres sont les suivants :

◆ Nombre de phases constituant le mélange.

Ce nombre est utilisé pour des besoins de commodité dans la programmation.

◆ Le nombre de grains constituant le mélange

Ce nombre est également utilisé pour des besoins de commodité de la programmation et caractérise la "taille" du matériau considéré. Les grains sont supposés de forme ellipsoïdale.

◆ Pour chaque grain, on précise :

- les dimensions initiales (demi-axes  $a, b, c$ )
- les orientations initiales (angles d'Euler  $\alpha, \beta, \gamma$ )
- le type de phase (décrit la loi de comportement)
- la fraction volumique  $f^i$

Dans le cas où on considère une interface entre les constituants du mélange (inclusions enrobées), on précisera également pour chaque grain, la phase et les trois épaisseurs (suivant les trois axes principaux) de son enrobage.

◆ Une donnée précisant la prise en compte ou non dans les calculs de la présence d'une interface entre les constituants du mélange.

◆ Le type de chargement imposé aux frontières du mélange

Traction uni-axiale ou biaxiale ou chargement générale. Le gradient de vitesse global  $G$  caractérise le chargement.

◆ Le pas d'incrémentation.

L'aspect non-linéaire des grandes déformations nécessite, pour une résolution numérique efficace, de découper la déformation globale en petits incréments de déformation.

◆ Le type de loi de comportement.

Précise la loi de comportement à utiliser : loi de Mooney-Rivlin ou celle d'Ogden-Swanson

◆ Les caractéristiques mécaniques de chaque phase.

Ce sont les constantes  $C_1, C_2$ , et  $\alpha$  pour la loi de comportement de Mooney-Rivlin et  $N, A_i, \alpha_i, B_j, \beta_j$  et  $D_1$  pour la loi de comportement d'Ogden-Swanson. Le coefficient de Poisson  $\nu$  est également nécessaire pour les deux lois de comportement.

◆ Précision souhaitée pour le tenseur des modules tangents effectifs.

Elle permet de sortir de la routine de traitement auto-cohérent

♦ Le pas d'affichage des résultats, le nombre maximum d'incrémentations et la valeur maximale d'une composante quelconque du gradient de vitesse. Ces valeurs sont utilisées pour des besoins de commodité de la programmation. Le pas d'affichage permet d'enregistrer régulièrement les résultats en vue de leur représentation graphique à la fin de la simulation. Le nombre maximum d'incrémentations et la valeur maximale d'une composante quelconque du gradient de vitesse permettent d'arrêter la simulation.

Nous avons choisi de regrouper ces données dans un fichier lu en entrée par le programme

### 2. Initialisation.

Rappelons l'allure du comportement mécanique d'un élastomère par la courbe de traction simple ci-après :

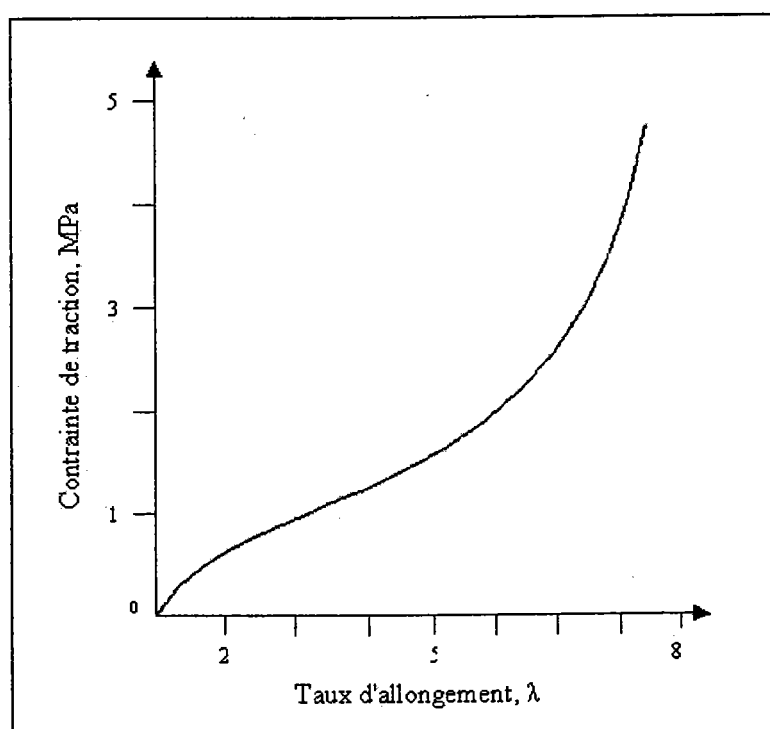


Figure V.2 : Loi de comportement d'un élastomère (traction simple)

L'initialisation consiste à fixer, d'une part les valeurs prises par les différentes grandeurs mécaniques au tout début de la déformation, et d'autre part à déterminer les diverses constantes nécessaires aux calculs ultérieurs.

Une hypothèse assez justifiée consiste à donner à ces grandeurs leurs valeurs prises dans le cas des petites déformations.

Il s'ensuit que :

- Pour le gradient de transformation local initial :

$$[f] = [I] \quad \text{soit} : \quad f_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{V.1})$$



- Pour les tenseurs de dilatation de Cauchy-Green gauche microscopique et macroscopique :

$$[b] = [B] = [I] \quad \text{soit :} \quad b_{ij} = B_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{V.2})$$

Notons que les minuscules correspondent aux grandeurs locales (microscopique) alors que les majuscules correspondent aux grandeurs globales (macroscopiques)

De même pour le tenseur de dilatation de Cauchy - Green droit

$$[c] = [C] = [I] \quad \text{soit :} \quad c_{ij} = C_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{V.3})$$

Les tenseurs de déformation de Green-Lagrange  $[E]$  et d' Euler - Almansi  $[A]$  sont quant à eux nuls :

$$[E] = [0] = [A] \quad \text{soit :} \quad E_{ij} = 0 = A_{ij} \quad (\text{V.4})$$

- Pour les tenseurs de contrainte de Cauchy microscopique et macroscopique initiale :

$$[\Sigma] = [\sigma] = [0] \quad \text{et} \quad [\sigma] = [n] = [s] \quad (\text{V.5})$$

- Pour le module tangent macroscopique initiale, on utilise le modèle de Voigt :

$$[L^{eff}] = \sum f^l . l^l \quad \text{soit :} \quad L_{ijkl}^{eff} = \sum f^l l_{ijkl}^l \quad (\text{V.6})$$

- Les constantes.

pour la loi de comportement de Mooney – Rivlin on calcule les constantes suivantes :

$$c = \frac{a}{2} + b \quad \text{et} \quad d = \frac{1}{2\alpha} = \frac{3(a+b)(1-\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)} - 3\left(\frac{a}{2} + b\right) \quad (\text{V.7})$$

et pour la loi de comportement d'Ogden – Swanson :

$$D_1 = \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \left( \sum_{i=1}^p A_i + \sum_{j=1}^q B_j \right) - \frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i + 4 \sum_{j=1}^q \beta_j B_j \right) \quad (\text{V.8})$$

### 3. Expression de la loi de comportement.

Il a été montré au chapitre III, et notamment par les relations (III.20) et (III.34), que la loi de comportement hyper - élastique pouvait se mettre sous la forme :

$$d_{ja}[\tau] = [Z] : [D] \quad \text{ou encore} \quad d_{ja}\tau_{ij} = Z_{ijkl} D_{kl} \quad (\text{V.9})$$

où  $d_{ja}[\tau]$  est la dérivée de Jauman du tenseur des contraintes de Kirchhoff,  $[Z]$  le tenseur des propriétés tangents et  $[D]$  le tenseur taux de déformation du matériau.



En outre l'utilisation d'une méthode numérique dans cette étude et la formulation incrémentale qui en découle nous conduit à utiliser une relation constitutive locale de la forme :

$$\delta_t[n] = [l] : [g] \quad (\text{V.10})$$

où  $\delta_t[n]$  est l'incrément par rapport au temps des contraintes de Boussinesq,  $[l]$  le tenseur des propriétés tangentes locaux et  $[g]$  le tenseur gradient de vitesse local du matériau. Les travaux d'Iwakuma et Nemat-Nasser [1] repris par Lipinski et Berveiler [2] confirment une telle relation représentant la loi de comportement en grandes déformations.

Il est donc nécessaire de déterminer le tenseur des propriétés tangentes  $[l]$  du matériau en partant des relations (V.9) précédemment démontrées. Cet objectif se traduit symboliquement par la relation ci-dessous :

$$d_{ja}[\tau] = [z] : [d] \quad \Leftrightarrow \quad \delta_t[n] = [l] : [g] \quad \Rightarrow \quad [l] = ? \quad (\text{V.11})$$

La réponse à cette question est donnée dans le paragraphe C.1 des «développements particuliers» ci-après.

#### 4. Routine d'homogénéisation en grandes déformations.

L'objectif de cette routine est de calculer le module tangent effectif du mélange. L'hypothèse selon laquelle ce mélange est considéré comme un matériau polyphasé granulaire nous permet de déterminer ce module tangent par les relations (II.137), en approximation mono site, et (II.142) en approximation multisites.

$$a'' = (I + T'' : \Delta l^I)^{-1}$$

en monosite :

$$\langle a'' \rangle = \sum_{I=1}^N f^I a'' \quad (a)$$

$$A^J = a^{JJ} : \left( \sum_{I=1}^N f^I a'' \right)^{-1} \quad (b) \quad (\text{V.12})$$

$$L^{\text{eff}} = \sum_{I=1}^N f^I l^I : A^I \quad (c)$$

en multisites, les relations ci-dessus restent valables sauf que  $a^I$  prend la place de  $a''$

$$a^I = a'' : \left( I - \sum_{J=1, J \neq I}^N (T^{JJ} : \Delta l^J : a^{JJ}) \right) \quad (\text{V.13})$$

Dans le cas où nous prenons en compte l'enrobage autour des grains, le tenseur des propriétés tangentes effectives devient :

$$L_{ijmn}^{eff} = (l_{ijmn}^M + f^I (l_{ijkl}^I - l_{ijkl}^M) A_{klmn}^I + f^c (l_{ijkl}^c - l_{ijkl}^M) A_{klmn}^c)$$

avec :

$$A_{ijmn}^I = \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{V_1}{V_2} [I_{ijmn} + T_{ijkl}^2 (L^{eff}) \Delta l_{klmn}^I] + \frac{V_c}{V_2} [I_{ijmn} + T_{ijkl}^2 (L^{eff}) \Delta l_{klmn}^c] \right]^{-1} \\ & + \frac{V_c}{V_2} [I_{ijrs} + T_{ijkl}^2 (L^{eff}) \Delta l_{klrs}^c] + T_{rspq}^* (l^c) \Delta l_{pqmn}^{lc} \end{aligned} \right\}$$

et

$$A_{ijmn}^c = A_{ijmn}^I + T_{ijrs}^I \Delta l_{rskl}^I A_{klmn}^I$$

$$\frac{V_c}{V_2} \ll 1$$

$T^2$  étant le tenseur d'interaction de l'inclusion composite et  $T^* = T^I(L^o)$  dans le cas particulier d'une géométrie concentrique et homothétique pour les inclusions et leur enrobage.

Ces relations ont un caractère implicite au travers de la déviation  $\Delta l^I = l^I - L^o$ . Il est donc indispensable de mettre en œuvre un algorithme contournant cette difficulté. Nous proposons dans ce chapitre une approximation numérique par étapes successives qui consiste à choisir comme milieu de référence  $L^o$  celui dont le comportement hyper - élastique a été calculé à l'étape précédente. Le module initial étant bien sûr le module élastique pouvant être déterminé par une méthode itérative. Cette approximation est justifiée par les résultats antérieurs de Hihi et al. [3] et Beradaï et al. [4] qui obtiennent des réponses satisfaisantes à partir d'une évaluation *a priori* du tenseur  $L^o$  supposé constant et isotrope. La procédure décrite ici est donc forcément incrémentale, la première étape consistant à déterminer l'approximation d'ordre zéro du comportement. Elle est décrite plus en détail dans le paragraphe C.2 de ce chapitre.

Le caractère implicite de la formulation autocohérente des équations du problème est le calcul des tenseurs d'interaction. La construction de la solution par cette approche suppose la mise en œuvre d'une procédure itérative. Une telle procédure itérative, même si elle permet de traiter des matériaux comportant un très grand nombre de grains conduit à un temps de calcul très élevé pour le cas d'un problème de plasticité, par exemple. Cette consommation excessive de temps est essentiellement liée aux calculs répétitifs des tenseurs d'interaction. L'optimisation des calculs de ces tenseurs se révèle donc indispensable pour une bonne modélisation. Cette optimisation du temps de calculs ne devra certainement pas se faire au détriment de leur précision. En effet, la précision de la modélisation du comportement du matériau étudié dépend nettement de la bonne évaluation des tenseurs d'interaction. A part le cas particulier d'inclusions sphériques dans un milieu isotrope où l'on peut déterminer les expressions analytiques de ces tenseurs, leur calcul se fait généralement par des méthodes d'intégration numérique.

Kneer [8], puis Mura [10] ont proposé une méthode de calcul des tenseurs d'interaction  $T^{II}$  en exploitant les techniques de transformée de Fourier du tenseur de Green. La démarche a été généralisée par Fassi-Fehri [7] pour la détermination des tenseurs  $T^{II}$  dans le cas d'une paire d'inclusions ellipsoïdales dans un milieu anisotrope.

Les expressions analytiques des tenseurs d'interactions ne sont connues que dans le cas du milieu isotrope pour des inclusions présentant une géométrie particulière, telle que des sphères, des fibres longues ou penny - shape.

Dans la majorité des autres cas, leur évaluation se fait par approximation numérique. Il s'agit notamment du calcul numérique d'une intégrale double (Lipinski [6]). Pour évaluer cette intégrale, Lipinski [9] a proposé un algorithme fondé sur la méthode de quadrature de Gauss. Le souci d'optimisation de ce calcul, a incité Carmasol et Lipinski [5] puis Zattarin [11] à recourir à un nouvel algorithme basé sur un développement en polynômes trigonométriques des fonctions à intégrer. A précision identique, cette nouvelle méthode conduit à une réduction notable du temps de calcul par rapport à la méthode classique de Gauss. C'est naturellement cette méthode que nous avons adoptée dans nos applications.

### 5. Cumul, actualisation et changement de forme

Le matériau étudié ici est un mélange d'élastomères, « micro hétérogène » et « macro homogène ». Son comportement hyper - élastique lui permet de subir des allongements relatifs pouvant dépasser 150%. A ce stade de déformation, on ne peut négliger l'évolution structurale du matériau.

D'autre part, la non linéarité de la déformation et le caractère numérique de notre étude nous contraignent à une analyse incrémentale. Le chemin de la déformation sera donc découpé en petits chemins dont la longueur est déterminée par la variable d'incrémentation  $\Delta t$  proportionnelle au temps. L'incrément  $\Delta t$  sera assez petit pour que la déformation soit valablement supposée linéaire entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ . On pourra alors cumuler ou réactualiser suivant les cas, les grandeurs mécaniques nécessaires à la détermination de l'état structural et du comportement du matériau.

Ce matériau est en outre assimilé ici à un matériau multiphasé dont les phases sont les constituants. Il se présente sous forme d'un agrégat de grains. Ces grains supposés de forme ellipsoïdale vont donc subir une évolution non négligeable au cours de la déformation du système. Or les demi-axes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , dimensions caractéristiques de chaque grain interviennent dans le calcul du module tangent effectif du matériau, par le biais notamment des tenseurs d'interaction  $T^{IJ} = T^{IJ}(L^{eff}, \frac{a}{b}, \frac{a}{c})$ . L'actualisation consiste donc à prendre en compte ce changement de forme des constituants du mélange en déterminant à chaque incrémentation les nouvelles valeurs des dimensions caractéristiques des grains et des autres variables mécaniques qui en découlent.

### 6. Résultats (en sorties)

L'analyse du comportement mécanique d'un matériau, passe naturellement par la connaissance de l'état de contrainte et de l'état de déformation à l'intérieur de ce matériau. Les résultats de la programmation numérique, portent donc essentiellement sur :

- les contraintes microscopiques et macroscopiques du matériau,
- les déformations microscopiques et macroscopiques du matériau,
- l'évolution des demi-axes et des orientations des constituants.

Ces résultats seront ensuite analysés et interprétés.

## C. DEVELOPPEMENTS PARTICULIERS

### 1. Nouvelle expression de la loi de comportement

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer le tenseur des propriétés tangentes  $[l]$  du matériau en partant des relations précédemment démontrées.

$$d_{ja}[\tau] = [z] : [d] \Leftrightarrow \delta_i[n] = [l] : [g] \Rightarrow [l] = ?$$

Rappelons la relation (II.13) c'est-à-dire  $[g] = [d] + [w]$  soit  $[d] = [g] - [w]$

La relation (V.10) devient :

$$d_{ja}[\tau] = [z] : [g] - [z] : [w]$$

$[w]$  étant anti-symétrique et  $[z]$  symétrique par rapport aux deux derniers indices de ses composantes, on montre que :

$$z_{ijkl} w_{kl} = -z_{ijlk} w_{lk} = -z_{ijlk} w_{lk}$$

$$\begin{cases} z_{ijkl} w_{kl} = -z_{ijlk} w_{lk} \\ z_{ijlk} w_{kl} = z_{ijlk} w_{lk} \end{cases} \Leftrightarrow [z] : [w] = [0]$$

d'où :

$$d_{ja}[\tau] = [z] : [g] \tag{V.14}$$

D'après la relation (II.29) :  $[\tau] = [n] \cdot [f]$  on peut écrire :

$$\delta_i[\tau] = \delta_i[n] \cdot [f] + [n] \cdot \delta_i[f] = \delta_i[n] \cdot [f] + d_i[f] \cdot [n]$$

or, dans la description Lagrangienne réactualisée :

$$f_i(\tau) = [I], \quad J = \text{Det}[f_i(\tau)] = 1 \quad \text{et} \quad [\sigma] = [n] = [s] \tag{V.15}$$

il s'ensuit finalement que :

$$\delta_i[\tau] = \delta_i[n] + [g] \cdot [\sigma] \tag{V.16}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} d_{ja}[\tau] &= \delta_i[\tau] - [w][\tau] + [\tau][w] = [z] : [g] \\ \Rightarrow \delta_i[n] + [g] \cdot [\sigma] - [w] \cdot [\tau] + [\tau] \cdot [w] &= [z] : [g] \end{aligned}$$

ou encore :

$$\delta_t[n] = [z] : [g] - [g] \cdot [\sigma] + [w] \cdot [\sigma] - [\sigma] \cdot [w]$$

$$\delta_t[n] = [z] : [g] - [d] \cdot [\sigma] - [w] \cdot [\sigma] + [w] \cdot [\sigma] - [\sigma] \cdot [w]$$

$$\delta_t[n] = [z] : [g] - [d] \cdot [\sigma] - [\sigma] \cdot [w]$$

En notation indicielle, cette relation devient :

$$\delta_t n_{ij} = z_{ijkl} g_{kl} - d_{ik} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} w_{kj}$$

$$\delta_t n_{ij} = z_{ijkl} g_{kl} - \frac{1}{2} (g_{ik} + g_{ki}) \sigma_{kj} - \frac{1}{2} \sigma_{ik} (g_{kj} - g_{jk})$$

$$\delta_t n_{ij} = z_{ijkl} g_{kl} - \frac{1}{2} [g_{il} \sigma_{lj} + g_{ki} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} g_{kj} + \sigma_{il} g_{jl}]$$

$$\delta_t n_{ij} = z_{ijkl} g_{kl} - \frac{1}{2} [g_{kl} \delta_{ik} \sigma_{lj} + g_{kl} \delta_{il} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} g_{kl} \delta_{jl} + \sigma_{il} g_{kl} \delta_{jk}]$$

$$\delta_t n_{ij} = [z_{ijkl} - \frac{1}{2} (\delta_{ik} \sigma_{lj} + \delta_{il} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{il} \delta_{jk})] g_{kl}$$

finalemtent :

$$\delta_t n_{ij} = l_{ijkl} g_{kl} \text{ soit } \delta[n] = [l] : [g]$$

avec :

$$l_{ijkl} = z_{ijkl} - \frac{1}{2} (\delta_{ik} \sigma_{lj} + \delta_{il} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{V.17})$$

$z_{ijkl}$  étant donné par les expressions (III.22) ou (III.36) suivant la loi de comportement utilisée.

## 2. Approximation autocohérente en grandes déformations

L'approche incrémentale introduite plus haut pour l'approximation autocohérente de l'homogénéisation en grandes déformations est décrite plus en détail ici.

◆ la première étape consiste à déterminer l'approximation d'ordre zéro du comportement. Deux situations sont envisageables :

- Au démarrage du calcul, cette approximation est obtenue à partir du modèle de Voigt c'est-à-dire :

$$[L^{eff}] = \langle L^I \rangle = \sum_{I=1}^N f^I \cdot [l^I] \equiv [L^{ini}] \quad (\text{V.18})$$

$l^I$  représentant les propriétés tangentes locales pour le grain numéro « I », calculé à partir des relations (III.20) ou (III.34) et (V.17).

- Après la réactualisation du système dont le changement est induit par l'évolution de la structure interne du matériau, cette approximation initiale est obtenue en prenant  $L^{eff}$  égale à  $L^{eff}$  de l'étape précédente.

♦ La deuxième étape consiste à déterminer pour chaque grain  $I$ , le tenseur de localisation  $a^I$  du gradient de vitesse. Ce tenseur est donné par l'expression (II.134) si le schéma autocohérent à un site est utilisé et (II.142) si le schéma autocohérent à sites multiples est utilisé. Dans les deux cas il est nécessaire de déterminer au préalable, pour chaque grain et à chaque étape, les grandeurs suivantes :

- les tenseurs d'interaction  $T^{II}$  en prenant pour le comportement du milieu de référence, le tenseur des modules tangents déterminé à l'itération précédente, de même que pour les dimensions caractéristiques du grain considéré.
- La déviation  $\Delta l^I$  par rapport au milieu de référence calculé à l'itération précédente.
- Le tenseur de localisation  $a^{II}$  de la relation (II.137) obtenu à partir de  $T^{II}$  et de  $\Delta l^I$  ci dessus.

Dans le cas du schéma autocohérent à sites multiples, le caractère implicite de  $a^I$  fonction de tous les autres  $a^J \neq a^I$ , impose naturellement un traitement itératif cohérent avec l'estimation de  $T^{II}$  et  $\Delta l^I$ . En effet pour déterminer  $a^I$  il convient de prendre pour  $a^J$  son approximation à l'étape précédente. Cette approche comparée à la méthode utilisée par Fassi - Fehri et al [3] permet de réaliser des modélisations avec des nombres de grains très importants car, contrairement aux autres algorithmes, nous ne passons pas par la résolution d'un système d'équations pour  $g^I$ .

♦ La troisième étape consiste à déterminer le tenseur de localisation  $A^I$  pour chaque grain  $I$  (relation II.135). Comme pour la détermination de  $a^I$ , le calcul de  $A^I$  se fait par un processus itératif à l'aide du terme  $\kappa = \left( \sum_{I=1}^N f^I a^I \right)^{-1}$  déterminé lors du processus de calcul de  $a^I$ .

♦ à cette étape, nous déterminons le tenseur des modules tangents effectifs  $L^{eff}$  ( relation II.137 -c)

♦ La dernière étape consiste à vérifier la convergence de la solution. Le critère adopté ici est basé sur la comparaison des normes de  $L^{eff}$  obtenues lors des deux dernières itérations " $i$ " et " $i-1$ ". Le processus d'itération s'arrête quand :

$$\frac{\|L_i^{eff}\| - \|L_{i-1}^{eff}\|}{\|L_{i-1}^{eff}\|} \leq \varepsilon \quad (V.19)$$

où  $\varepsilon$  représente la tolérance admise. Les propriétés tangentes obtenues grâce à cette méthode, serviront de point de départ .

### 3. Cumul et actualisation des grandeurs mécaniques

Dans ce paragraphe, le symbole " $\delta_i$ " représente un incrément fini d'une variable entre les instants " $t$ " et " $t + \Delta t$ ". Les procédures qui y sont décrites sont faites dans le cadre de la description lagrangienne réactualisée, c'est à dire en prenant comme configuration de référence, la configuration actuelle à l'instant " $t$ ". L'objectif de ce paragraphe est de déterminer les expressions de ces grandeurs mécaniques à l'instant " $t + \Delta t$ ", connaissant leur expression à l'instant " $t$ ".

◆ Le gradient de transformation

A chaque instant  $t$ , la relation (II.15) du paragraphe II.2.c s'écrit :

$$\delta_i f(t) = g(t) \cdot f(t)$$

A l'instant " $t + \Delta t$ ", un développement de ce gradient s'écrit :

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \delta_i f + \frac{1}{2} \delta_i (\delta_i f) + \dots$$

soit :

$$f(t + \Delta t) = f(t) + g(t) \cdot f(t) + \frac{1}{2} \delta_i (g(t) \cdot f(t)) + \dots$$

en nous limitant au deuxième ordre, nous avons :

$$f(t + \Delta t) = \left( I + g(t) + \frac{1}{2} g(t) \cdot g(t) \right) \cdot f(t) \quad (\text{V.20})$$

or grâce à la composition de fonction, on a :

$$f(t + \Delta t) = f(\Delta t) \cdot f(t) \quad (\text{V.21})$$

d'où :

$$f(\Delta t) = I + g(t) + \frac{1}{2} g(t) \cdot g(t) \quad (\text{V.22})$$

cette approximation du deuxième ordre permet d'utiliser des pas d'incrémentations relativement grands.

◆ Les tenseurs de déformation

La connaissance du gradient de la transformation à l'instant " $t + \Delta t$ " permet de calculer tous les tenseurs de déformation en introduisant leurs expressions habituelles :

	Désignation	Définition	Observations
[C]	Tenseur des dilatations ou tenseur de Cauchy-Green Droit	$[C] = [{}^tF][F]$ $C_{ij} = F_{ki} \cdot F_{kj}$	tenseur symétrique. Décrit les déformations dans la configuration de référence $K_0$
[B]	Tenseur des dilatations ou tenseur de Cauchy-Green Gauche	$[B] = [F][{}^tF]$ $B_{ij} = F_{ik} \cdot F_{jk}$	tenseur symétrique. Décrit les déformations dans la configuration de référence $K_t$
[E]	Tenseur de déformation de Green - Lagrange	$[E] = \frac{1}{2}([C] - [I])$ $= \frac{1}{2}([{}^tF] \cdot [F] - [I])$	décrit les déformations dans la configuration de référence $K_0$
[A]	Tenseur de déformation D'Euler - Almansi	$[A] = \frac{1}{2}([I] - [B^{-1}])$ $= [{}^tF^{-1}] \cdot [E] \cdot [F^{-1}]$	décrit les déformations dans la configuration de référence $K_t$

Tableau V.1 : Récapitulatif des tenseurs de déformation en grandes déformations.

◆ Les tenseurs de contrainte.

La loi de comportement locale s'écrit :  $\delta_t n^t = l^t : g^t$ .

Cet incrément est bien évidemment déterminé par rapport à la configuration actuelle  $K_t$ , supposée immobile. Dans cette configuration, nous avons montré au paragraphe II.A.3 que :

$$n_{k_t}(t) = s_{k_t}(t) = \sigma(t) \quad (V.23)$$

L'indice  $k_t$  spécifie quand c'est nécessaire la configuration de référence dans la quelle la contrainte est écrite. Ainsi donc, quand bien même ces différentes contraintes sont égales entre elles dans la description lagrangienne réactualisée, leurs incréments ne le sont pas pour autant.

A l'instant " $t + \Delta t$ " le 1<sup>er</sup> tenseur de Piola - Kirchhoff  $[n]$  (ou tenseur de Boussinesq) peut s'écrire :

$$[n(t + \Delta t)] = [n(t)] + [\delta_t n] \quad (V.24)$$

En introduisant la relation (V.23) dans (V.24) on obtient :

$$[n(t + \Delta t)] = [\sigma(t)] + [\delta_t n] \quad (V.25)$$

ceci représente l'état de contrainte dans la nouvelle configuration actuelle.

Par application de la relation (II.29) on peut déduire la contrainte de Cauchy à l'instant " $t + \Delta t$ ".

$$[\sigma(t + \Delta t)] = \frac{1}{\text{Det}[f(\Delta t)]} [n(t + \Delta t)] \cdot [f(\Delta t)] \quad (V.26)$$

Dans cette expression,  $f(\Delta t)$  est le gradient de transformation relatif entre les instants " $t$ " et " $t + \Delta t$ " tel que :



$$f(\Delta t) = f(t + \Delta t) \cdot f^{-1}(t)$$

Les formules présentées ci-dessus, ainsi que les règles de réactualisation de la microstructure se déduisent du gradient de vitesse  $g^l$  ou du taux de contrainte  $\delta_i n$ .

La même approche et les mêmes formules restent valables à l'échelle macroscopique. En effet, dans le chapitre II.B nous avons démontré que :

$$G = \langle g^l \rangle \quad \text{et} \quad \delta_i N = \langle n^l \rangle$$

Ces résultats permettent, en appliquant les expressions décrites plus haut, de réactualiser l'état de contrainte et de déformation macroscopiques.

#### 4. Changement de forme des constituants du mélange

La forme et l'orientation des constituants sont strictement définies par les gradients de déformation locaux. Connaissant le tenseur de localisation  $A^l$ , il est possible par intégration, de déterminer le gradient de transformation  $f^l$  pour chaque grain. Symboliquement cette opération s'écrit :

$$f_i^l = \int_0^l A^l(\tau) : G(\tau) d\tau \quad (\text{V.27})$$

où  $f_i^l$  est le gradient de transformation entre sa configuration initiale  $\kappa_o^l$  et actuelle  $\kappa_i^l$ . Par souci de simplification, supposons que dans la configuration initiale, les grains soient sphériques. Si ce n'est pas le cas, on peut toujours trouver une configuration de référence dans laquelle le grain considéré est sphérique. Dans ce cas, on devra en plus du gradient  $f_i^l$  prendre en compte un gradient de transformation virtuelle  $f_v$  décrivant la transformation du grain, de son état réel (ellipsoïdale) à son état virtuel (sphérique).

Soit donc le grain sphérique de rayon  $R = 1$  dans la configuration initiale ou de référence.

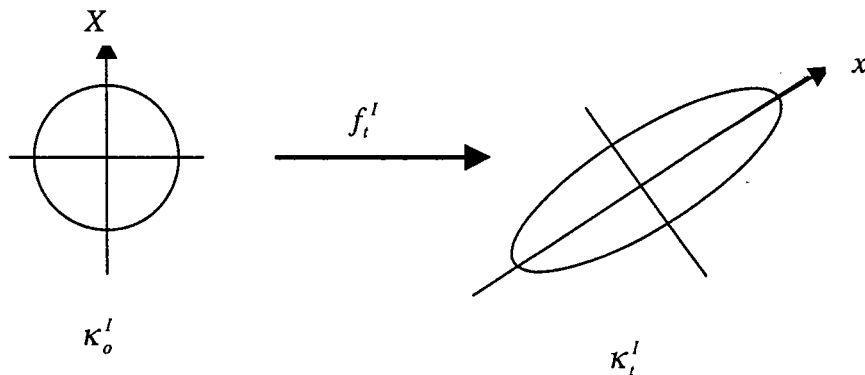


Figure V.4 : changement de forme des grains

$$[f] = \frac{d[x]}{d[X]} \quad \Rightarrow \quad [X] = [f^{-1}] \cdot [x]$$

Le domaine occupé par le grain dans sa configuration initiale  $\kappa_0^I$  est une sphère d'équation :

$X_i X_i = 1$  ou encore :

$$[{}^I X] \cdot [X] = 1 \quad (\text{V.28})$$

La transformation de cette relation vers la configuration actuelle  $\kappa_t^I$  nous donne :

$$({}^I [f^{-1}] [x]) \cdot ({}^I [f^{-1}] [x]) = 1$$

soit :  $[{}^I x] \cdot ([f] \cdot [f])^{-1} \cdot [x] = 1$  ou encore :

$$[{}^I x] \cdot [b^{-1}] \cdot [x] = 1 \quad (\text{V.29})$$

Autrement dit, le domaine sphérique occupé par le grain  $I$  se transforme pendant un mouvement homogène caractérisé par le tenseur gradient  $[f]$ , en un domaine ellipsoïdal d'équation :  $[{}^I x] \cdot [b^{-1}] \cdot [x] = 1$  où  $[b]$  est le tenseur des dilatations ou tenseur de Cauchy Green gauche de cette transformation.

Ce tenseur est diagonal dans son repère principal et s'écrit alors :

$$[b] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

La relation (V.29) devient ainsi :

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

soit :

$$\frac{x^2}{\lambda_a} + \frac{y^2}{\lambda_b} + \frac{z^2}{\lambda_c} = 1 \quad (\text{V.30})$$

En faisant le rapprochement avec l'équation d'un ellipsoïde dans son repère principal et dont les demi-axes sont respectivement  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on en déduit que le grain initialement sphérique a été transformé après déformation en un ellipsoïde dont les demi-axes sont donnés par les relations ci-dessous :

$$a = \sqrt{\lambda_1} \quad , \quad b = \sqrt{\lambda_2} \quad , \quad c = \sqrt{\lambda_3} \quad (\text{V.31})$$

où  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont les valeurs propres de  $[b] = [f][f]$

On montre en outre que la matrice  $[P]$  dont les colonnes sont les vecteurs propres (associés aux valeurs propres  $\lambda_i$ ) de  $[b]$  n'est rien d'autre que la matrice de passage du repère initial du grain (celui de la sphère) au repère principal de  $[b]$  (celui de l'ellipsoïde).

$$[P] = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

On montre qu'en fonction des angles d'Euler  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  de l'ellipsoïde dans la configuration  $\kappa'$ , cette matrice se met sous la forme :

$$[P] = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\gamma) - \cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\gamma) & \cos(\gamma)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) & \sin(\beta)\sin(\gamma) \\ -\cos(\beta)\cos(\gamma)\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\sin(\gamma) & \cos(\gamma)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (\text{V.32})$$

Ces angles d'Euler  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont en réalité les nouvelles orientations du grain après transformation et sont donnés par les relations suivantes :

$$\beta = \text{Ar cos}(P_{33})$$

♦ Si  $\beta \neq 0$  alors :

$$\text{- Si } P_{32} \neq 0 \text{ alors } \alpha = -\text{Arctg} \frac{P_{31}}{P_{32}}$$

$$\text{- Si } P_{32} = 0 \text{ alors } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{- Si } P_{23} \neq 0 \text{ alors } \gamma = \text{Arctg} \frac{P_{13}}{P_{23}}$$

$$\text{- Si } P_{23} = 0 \text{ alors } \gamma = \frac{\pi}{2}$$

♦ Si  $\beta = 0$  alors :

$$\text{- On prend } \gamma = 0$$

$$\text{- Si } P_{11} \neq 0 \text{ alors } \alpha = \text{Arctg} \left( -\frac{P_{21}}{P_{11}} \right)$$

$$\text{- Si } P_{11} = 0 \text{ alors } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

En résumé, les expressions ci-dessus, basées sur la recherche des valeurs et vecteurs propres du tenseur de dilatation local  $[b]$  dans la configuration actuelle permettent de réactualiser la géométrie des grains du polyphasé connaissant le tenseur de localisation du gradient de la transformation  $f_i^I$ . Notons également que dans le cas où le grain est initialement non sphérique, le gradient de transformation  $f_i^I$  s'écrit en tenant compte de la transformation virtuelle faisant passer l'ellipsoïde en sphère :

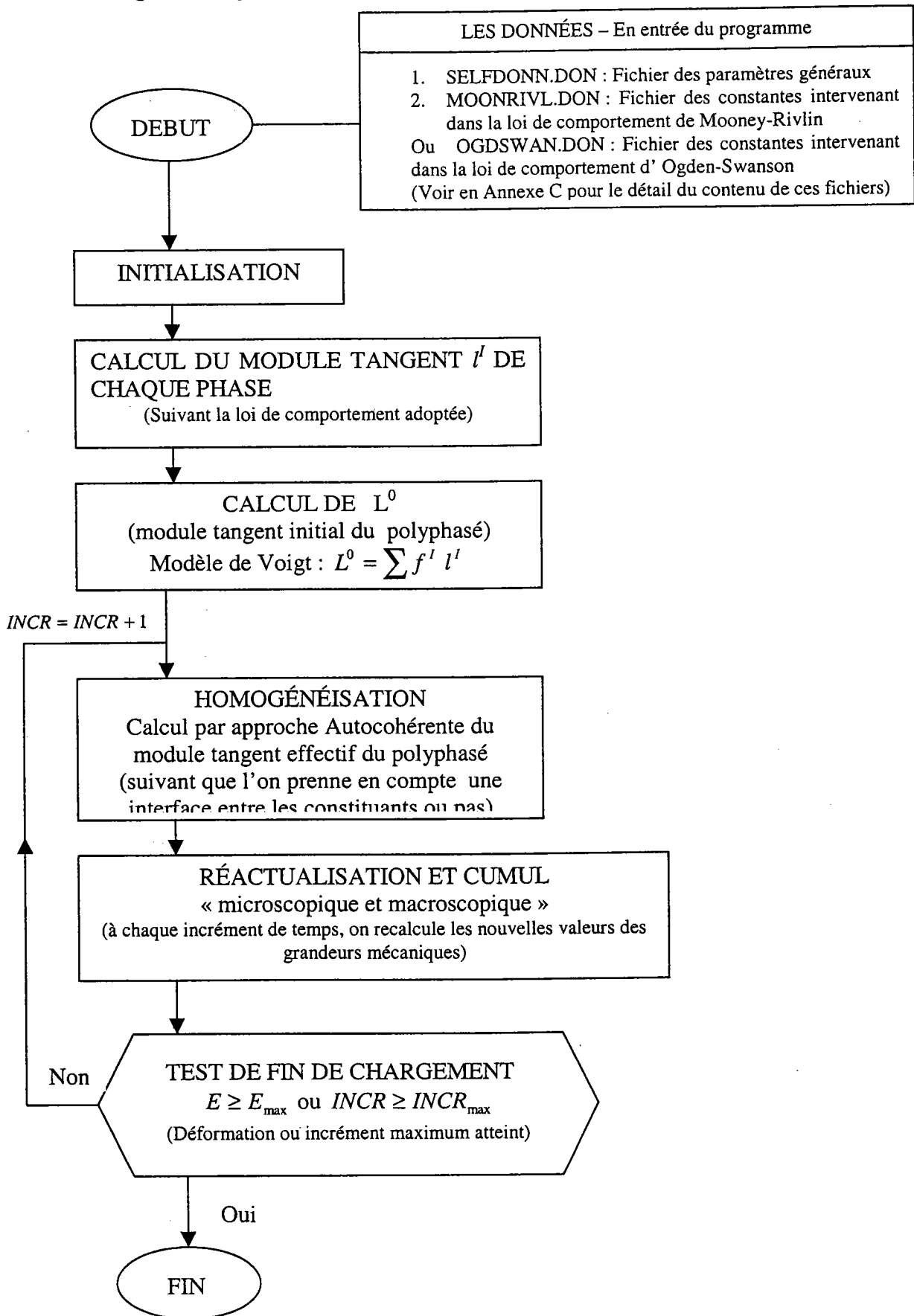
$$f_i^I \equiv f_i^V \cdot f_i^I$$

où  $f_i^V$  est le gradient de la transformation virtuelle faisant passer l'ellipsoïde en sphère.

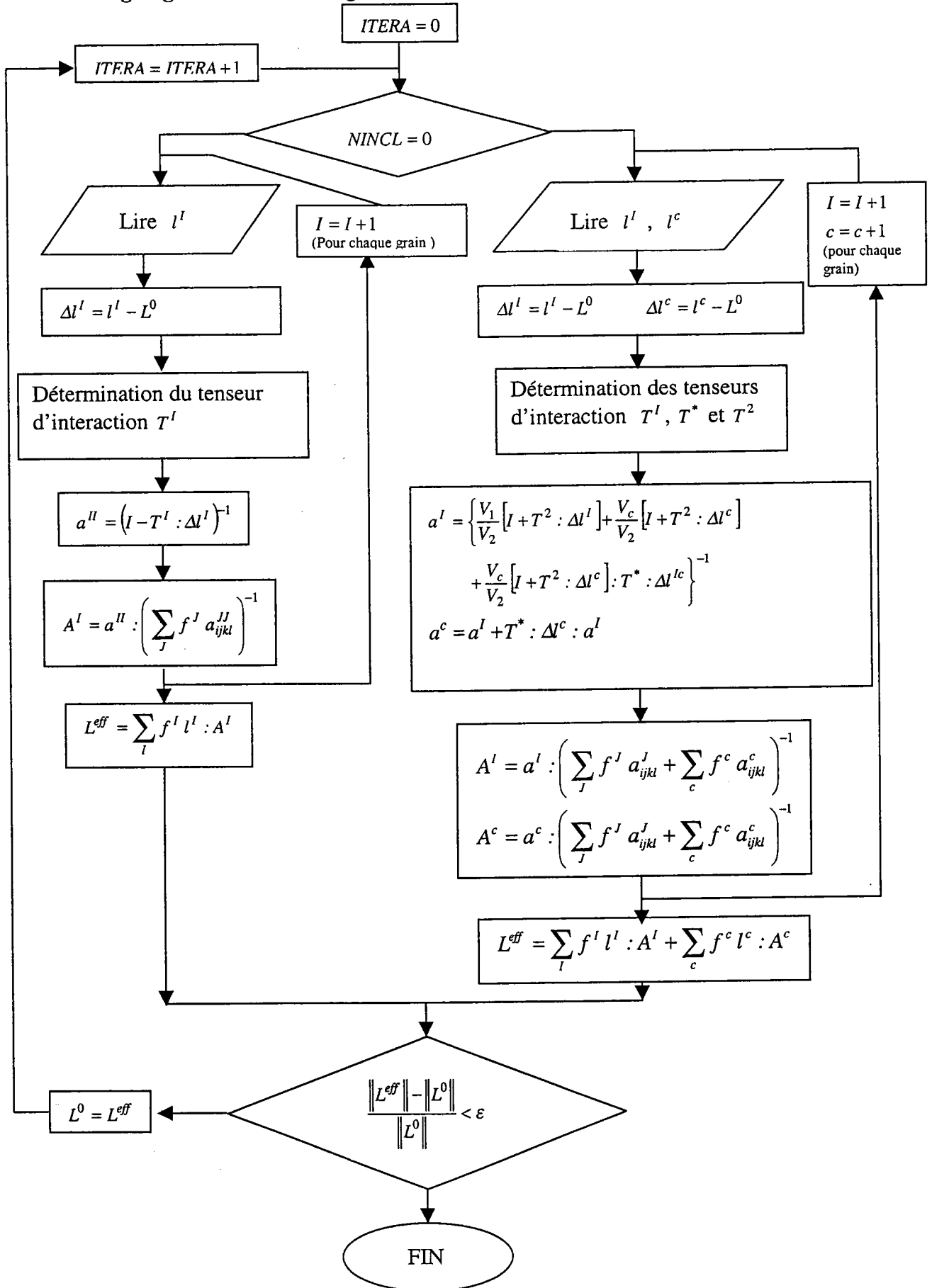
Nous présentons dans le paragraphe suivant un algorithme simplifié résumant l'ensemble du processus de détermination des champs de contrainte et de déformation dans le mélange.

D. L'ALGORITHMIQUE

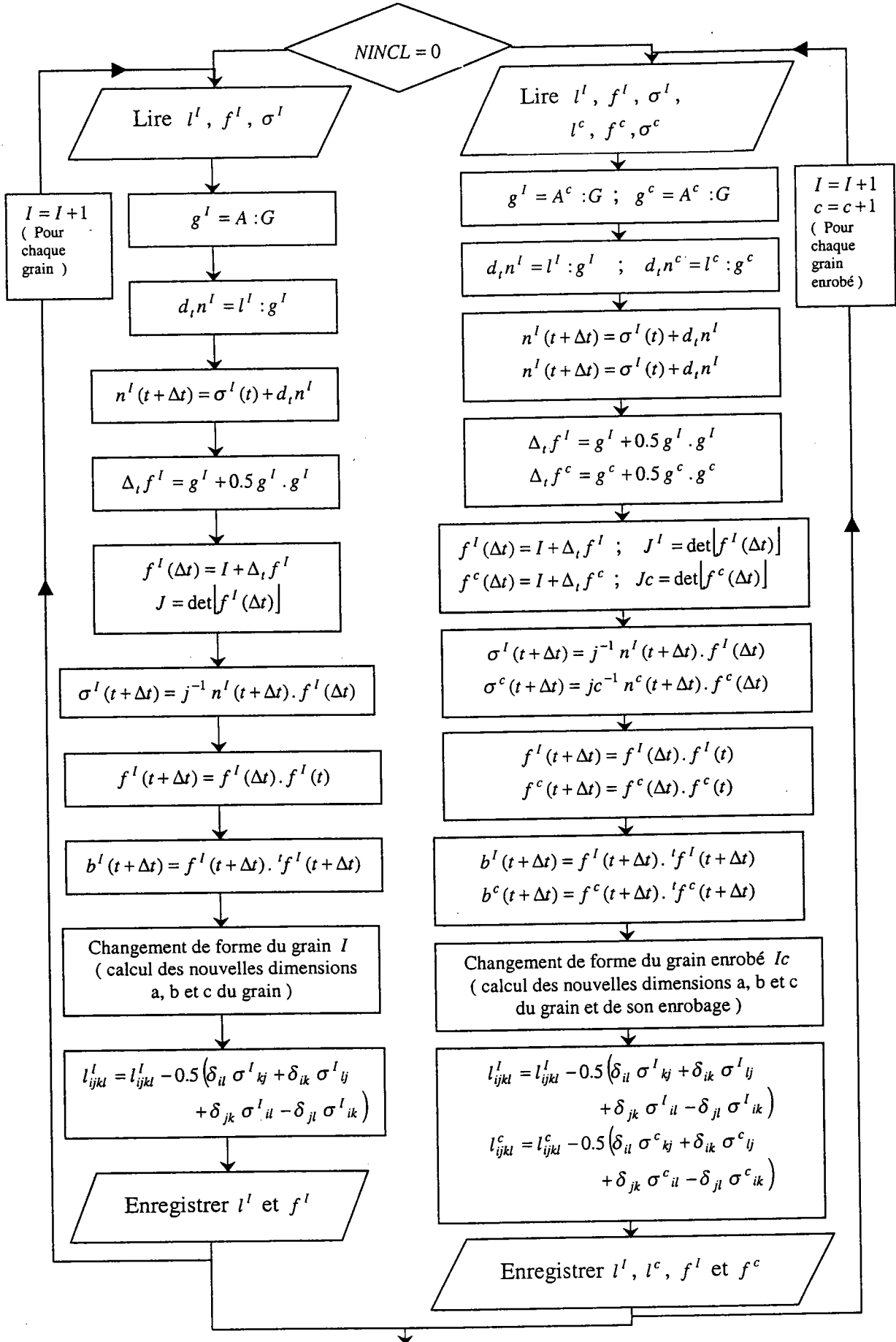
1. Algorithme général du programme.



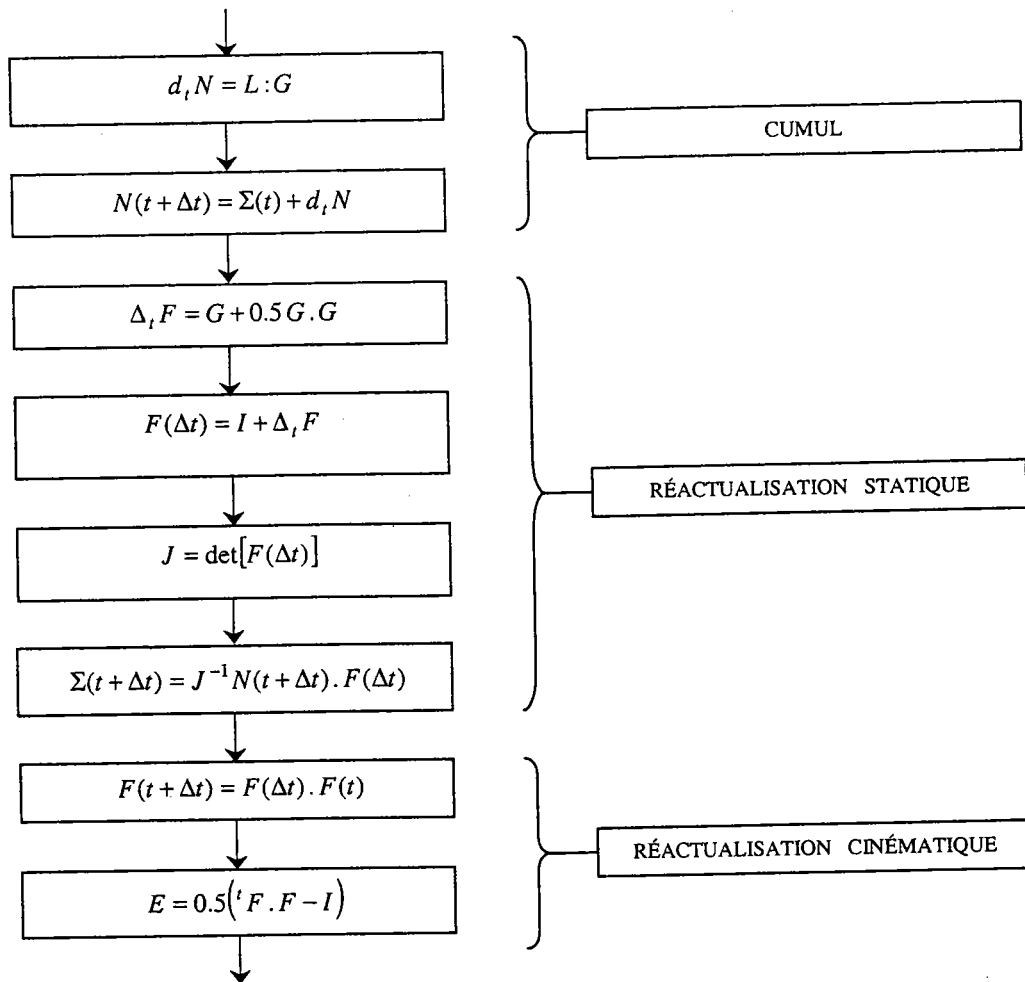
2. Organigramme de l'homogénéisation



3. Organigramme du cumul et de la réactualisation microscopique



4. Organigramme du cumul et de la réactualisation macroscopique





**E. BIBLIOGRAPHIE**

- [1] T. Iwakuma, S. Nemat-Nasser, Proc. R. Soc. Lond., A.394, PP. 87-119, 1986.
- [2] P. Lipinski, M. Berveiller, Int. J. Plasticity, Vol. 5, pp. 149-172, 1989.
- [3] O. Fassi Fehri, A. Hihi, M. Berveiller, Int. J. Eng. Sc., Vol. 25, p.691, 1987.
- [4] C. Beradaï, M. Berveiller, P. Lipinski, Int. J. Plasticity, Vol. 3, pp. 143-163, 1987.
- [5] A. Carmasol, P. Lipinski, 2<sup>ème</sup> Congrès de Mécanique, Maroc, p 307, 1995.
- [6] F. Corvasce, P. Lipinski, M. Berveiller, *Thermo-mechanical behaviour of metal matrix*
- [7] O. Fassi-Fehri, Thèse, Université de Metz, 1985.
- [8] G. Kneer, Physica Status solidi, Vol 9, p. 825, 1965.
- [9] P. Lipinski, Thèse d'habilitation, Université de Metz, 1993.
- [10] A. Zaoui, Thèse d'État, Paris, 1970.
- [11] P. Zattarin , Thèse, Université de Metz, 2000.

## Chapitre VI

# APPLICATIONS DIVERSES

### A. VALIDATION DU COMPORTEMENT HYPER - ELASTIQUE

1. validation du modèle hyper - élastique
2. Comparaison des modèles de Mooney - Rivlin et d'Ogden - Swanson

### B. ÉTUDES DE L' ISOTROPIE ET DE LA COMPRESSIBILITÉ DU MATÉRIAU

1. Définition des matériaux utilisés
2. Isotropie du matériau
3. Incompressibilité de matériau

### C. VARIATION DE LA STRUCTURE INTERNE DU MATÉRIAU

1. Structure globale (hyper - élasticité du mélange d'élastomères)
2. Structure locale (variation de forme des constituants)

### D. APPORT DE L' ENROBAGE

## A. VALIDATION DU COMPORTEMENT HYPER - ELASTIQUE

### 1. Validation du modèle hyper – élastique

Les développements théoriques effectués dans les chapitres précédents ont été intégrés dans un code de calcul numérique qui génère toutes les contraintes et déformations microscopiques (au niveau de chaque constituant) et macroscopiques (au niveau du matériau effectif) et les variations de formes des constituants du mélange d'élastomères étudié.

L'objectif de ce chapitre étant de mettre en application tout le développement théorique précédent, il est nécessaire de valider notre code de calcul avant de l'utiliser pour analyser et interpréter les divers comportements des matériaux hyper-élastiques que nous étudierons. Pour ce faire, nous allons dans un premier temps considérer la relation (II.51)

$$[S] = \frac{\partial W([E])}{\partial [E]}$$

où  $[S]$  est le tenseurs des contraintes de Piola - Kirchhoff,  $W$  l'énergie de déformation volumique et  $[E]$  le tenseur de déformation de Green – Lagrange. En considérant également les relations (III.7) de l'énergie de déformation volumique de Mooney -Rivlin on obtient la relation (III.8) donnant  $[S]$  en fonction du tenseur de Cauchy – Green droit  $[C]$

$$\frac{1}{2} S_{ij} = (a + I_1 b) \delta_{ij} - b C_{ij} + 2 I_3 \left[ d (I_3 - 1) - \frac{c}{I_3} \right] (C^{-1})_{ij} \quad (\text{VI.1})$$

Sachant que le tenseur de Piola - Kirchhoff  $[S]$  et celui de Boussinesq  $[N]$  sont liés à tout instant par la relation

$$[N] = [F].[S]$$

où  $[F]$  est le tenseur gradient de la transformation, on obtient la relation :

$$N_{ij} = 2(a + I_1 b) F_{ij} - 2b B_{in} F_{nj} + 4 I_3 \left[ d (I_3 - 1) - \frac{c}{I_3} \right] (F^{-1})_{ij} \quad (\text{VI.2})$$

$I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  étant les trois principaux invariants du tenseur des dilatations ou tenseur de Cauchy - Green gauche.

De même avec l'énergie de déformation volumique d'Ogden – Swanson, on obtient pour le tenseur des contraintes de Piola – Kirchhoff :

$$S_{ij} = \left[ \sum_{i=1}^p A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} I_1 \right] \delta_{ij} - \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} C_{ij} + \left[ I_3 g(I_3) - \left( \sum_{i=1}^p A_i + 2 \sum_{j=1}^q B_j \right) \right] (C^{-1})_{ij} \quad (\text{VI.3})$$

et pour le tenseur des contraintes de Boussinesq :

$$N_{ij} = \left[ \sum_{i=1}^p A_i \left( \frac{I_1}{3} \right)^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} I_1 \right] F_{kl} - \sum_{j=1}^q B_j \left( \frac{I_2}{3} \right)^{\beta_j} B_{in} F_{nj} + \left[ I_3 g(I_3) - \left( \sum_{i=1}^p A_i + 2 \sum_{j=1}^q B_j \right) \right] (F^{-1})_{ij} \quad (\text{VI.4})$$

**Chargement en traction uni axiale.**

En début de chargement le matériau est dans son état de référence qui est l'état initiale, sans déformation. Le gradient de transformation  $[F]$  est donc égale à l'unité :  $F_{ij} = \delta_{ij}$ .

Nous procédons ensuite à un chargement incrémental en posant à chaque pas d'incrémentacion

$$F_{11}(t + \Delta t) = F_{11}(t) + \Delta F, \\ F_{22} = F_{33} = 1/\sqrt{F_{11}} \text{ et } F_{ij(i \neq j)} = 0$$

$\Delta F$  étant le pas d'incrémentacion du gradient de déformation.

Nous prenons arbitrairement  $\Delta F = 3 \cdot 10^{-3}$  assez petit pour que la non linéarité de la loi de comportement hyper – élastique soit respectée, et nous traçons les courbes  $N_{11} = N_{11}(F_{11})$  et

$$S_{11} = S_{11}(E_{11}) \text{ où } E_{11} = \frac{1}{2}(C_{11} - 1).$$

Notons que pour un chargement en traction simple dans la première direction,  $F_{11}$  représente l'allongement  $\lambda = \frac{l}{l_0}$  du matériau.

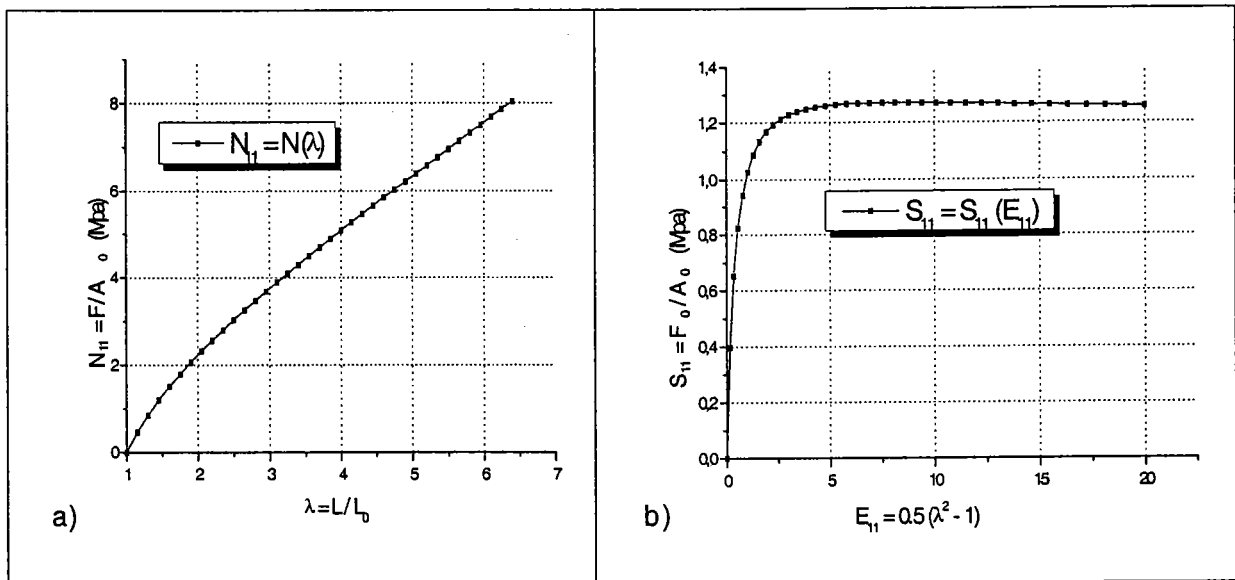


Figure VI.1 : Tracée de la loi de comportement (Mooney – Rivlin : a = 0.574, b = 0.259,  $\nu = 0.499$ )

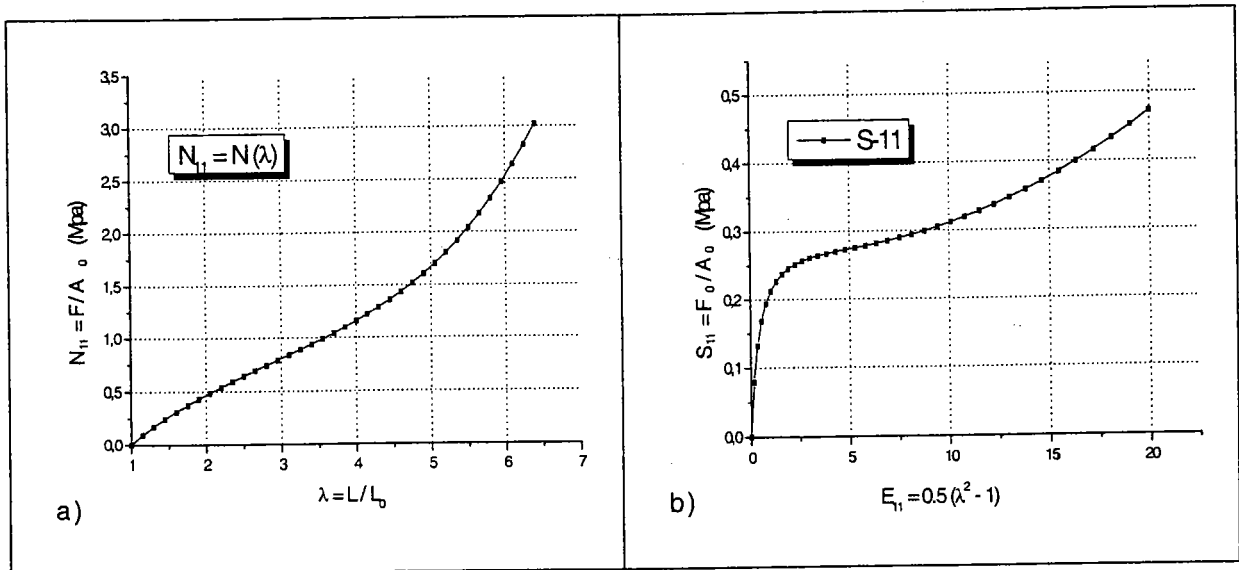


Figure VI.2 : Tracée de la loi de comportement  
(Ogden – Swanson , 4<sup>ième</sup> ordre)

$A_i$ ( $i=1,\dots,4$ )	$\alpha_i$ ( $i=1,\dots,4$ )	$B_i$ ( $i=1,\dots,4$ )	$\beta_i$ ( $i=1,\dots,4$ )	$\nu$
0.0267	-0.3	0.0752	-0.15	0.499
0.359	0.2	-0.0359	-0.1	0.499
-0.111	0.7	0.00576	0.35	0.499
0.0107	1.5	-0.00017	-0.75	0.499

Ces courbes s'accordent avec celles que nous avons retrouvée dans la littérature [1] et que nous reproduisons sur la figure VI.3 ci-dessous.

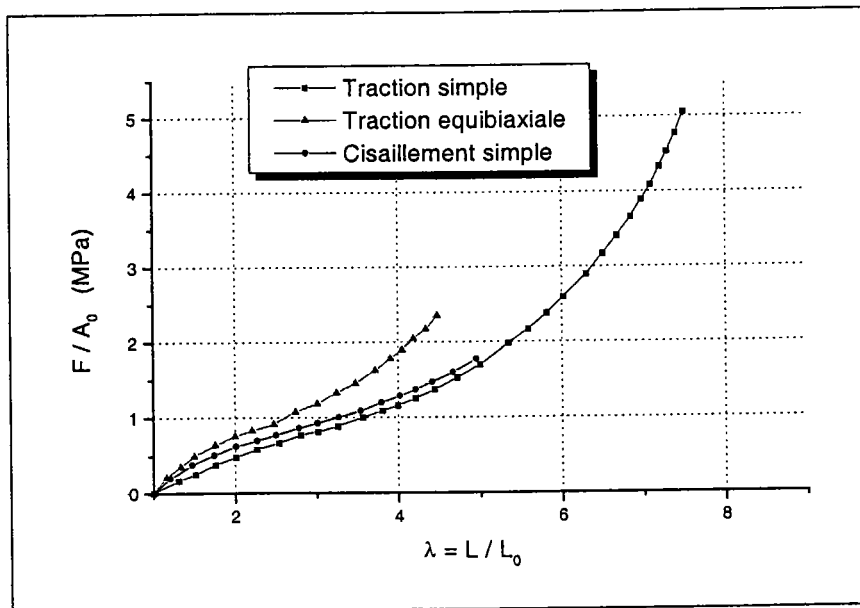


figure VI.3 : Résultats expérimentaux de Treloar  
(Tracés de la contrainte nominale en fonction de l'allongement,  
pour un caoutchouc vulcanisé )

La superposition de ces courbes avec celles obtenues pour les mêmes grandeurs et les mêmes matériaux avec le modèle intégré dans le code de calcul, permet de valider ce modèle tout en déterminant le pas d'incrémentat optimum du chargement.

Rappelons que dans notre modèle, le chargement est "piloté" en gradient de vitesse. En début de chargement, on peut valablement faire l'hypothèse des petites déformations et donc écrire pour la déformation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} + \delta_{ij} \sigma_{kk} \frac{\nu}{1+\nu} \right) \quad (VI.5)$$

En traction simple, on a  $[\sigma] = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow [\varepsilon] = \frac{T}{2\mu(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix}$

Le gradient de vitesse est donné par :

$$G \approx \Delta\varepsilon = \varepsilon_{t+\Delta t} - \varepsilon_t \Leftrightarrow [G] = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} (T_{t+\Delta t} - T_t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix}$$

$$[G] = \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{2\mu(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} = PasIncr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} \quad (VI.6)$$

Dans notre modèle  $PasIncr = \frac{\Delta T}{2\mu(1+\nu)}$  représente donc le pas d'incrémentat. Il doit être

relativement faible et de sa valeur dépend également la précision des résultats obtenus.

En prenant plusieurs pas d'incrémentat variant entre  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$  nous voyons l'écart entre les courbes ci-dessus et celles obtenues par modèle ( pour le même type de chargement) se réduire ou s'élargir. Nous en déduisons ainsi le pas d'incrémentat optimum pour le chargement. Les figures ci-dessous représentent cette comparaison pour ce pas de temps optimal  $PasIncr = 0,5 \cdot 10^{-3}$

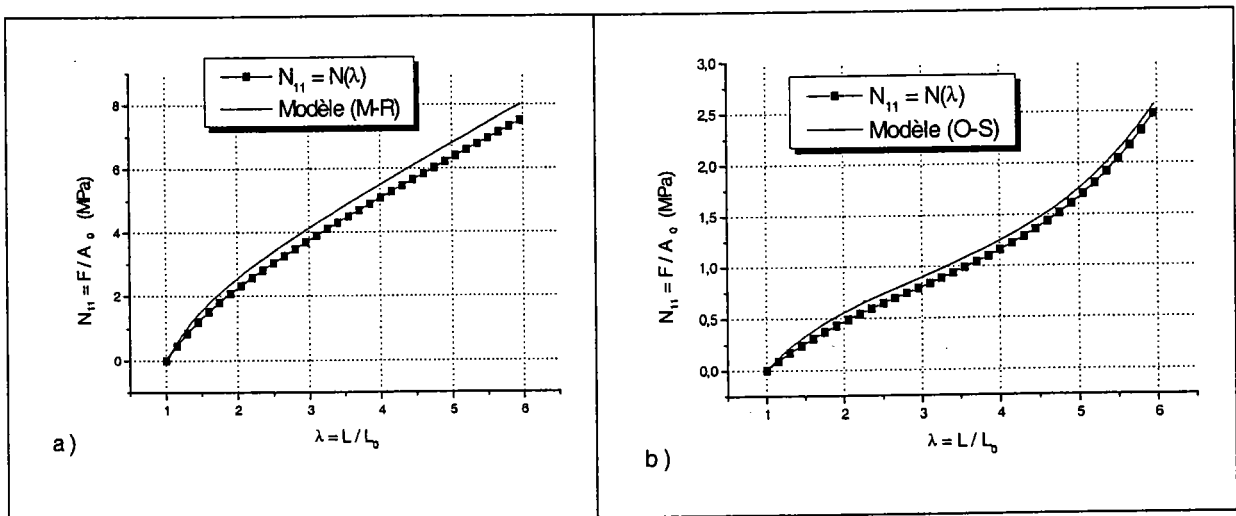


Figure VI.4 : Comparaison des résultats obtenus avec les deux modèles intégrés dans le code de calcul et ceux obtenus avec les relations VI.2 et VI.6  
Modèles de Mooney - Rivlin (M-R) et d'Ogden - Swanson (O-S)  
Matériau  $N_p$  Phases,  $N_c$  Constituants,  $N_p = N_c = 1$

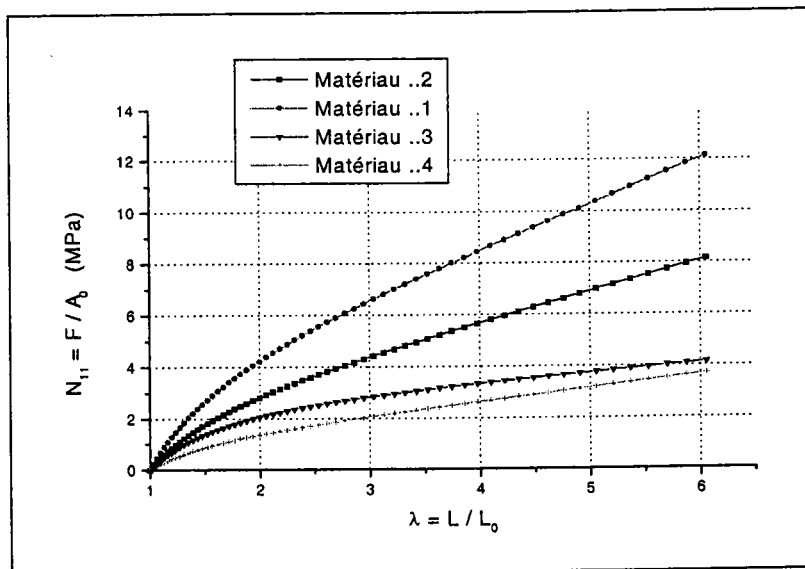
Le petit écart entre les courbes s'explique par le fait que les unes représentent simplement le tracé d'une fonction de la forme  $N = N(\lambda)$  alors que les autres intègrent à la fois une lois de comportement incrémentale de la forme  $dN = X : G$  ( $X$  : tenseur des propriétés effectives,  $G$  : tenseur gradient de vitesse), un processus d'homogénéisation (ici, le mélange est composé d'un seul constituant, donc d'une seule phase), et le chargement est piloté par le gradient de vitesse  $[G]$  et non pas par le gradient de déformation  $[F]$ . Le caractère numérique et incrémental des résultats intervient aussi dans cet écart (accumulation d'infimes erreurs à chaque incrément)

Dans la suite, nous pouvons considérer que notre modèle est suffisamment correct pour un pas d'incrément de  $0.5 \cdot 10^{-3}$

Dans les chapitres précédent nous avons montré que les matériaux hyper - élastiques sont entièrement caractérisés par les constantes  $a$ ,  $b$ , et  $\nu$  pour le cas de Mooney-Rivlin et  $\alpha_i$ ,  $A_i$ ,  $\beta_i$ ,  $B_i$  et  $\nu$  pour le cas d'Ogden - Swanson, intervenant dans l'écriture de l'énergie de déformation volumique  $W$ .

Nous avons pu récupérer dans la littérature<sup>1</sup> plusieurs séries de ces constantes représentant chacune un matériau hyper-élastique. Avant de les utiliser dans les mélanges que nous étudierons dans la suite de ce chapitre, nous allons tracer le comportement en traction simple  $N_{11} = N_{11}(\lambda)$  de chacun des matériaux représentés par ces séries de constantes en vue de déterminer ultérieurement, pour le mélange, quelles sont les phases ou les constituants les plus "durs" ou les plus "mous".

**Les matériaux de Mooney Rivlin**



**Figure VI.5 : Loi de comportement pour 4 matériaux de M-R,  $N_c = N_p = 1$**

	<b>a</b>	<b>b</b>	<b><math>\nu</math></b>
Matériau n°1	0.85	0.40	0.499
Matériau n°2	0.574	0.259	0.499
Matériau n°3	0.164	0.533	0.499
Matériau n°4	0.246	0.164	0.499

<sup>1</sup> S. R. Swanson, "A constitutive model for high elongation elastic materials", J. of Eng. Mat. And Tech., Vol. 107, pp. 110-114, 1985

Les matériaux d'Ogden – Swanson

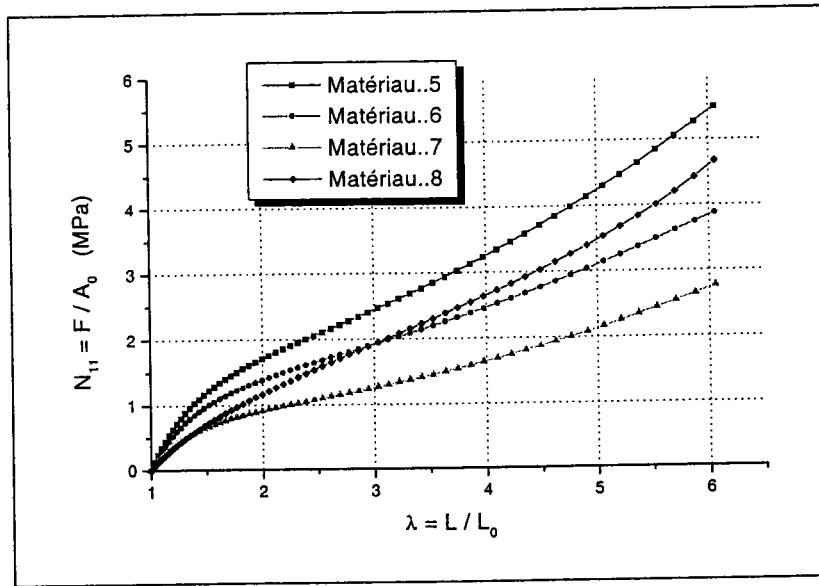


Figure VI.6 : Loi de comportement pour 4 matériaux d' O-S, 1<sup>er</sup> ordre ( $p = q = 1$ )

$$N_c = N_p = 1$$

	$A$	$\alpha$	$B$	$\beta$	$\nu$
Matériau n°5	0.267	0.410	0.552	0.650	0.499
Matériau n°6	0.231	0.319	0.444	-0.712	0.499
Matériau n°7	0.131	0.419	0.344	-0.912	0.499
Matériau n°8	$3.994 \cdot 10^{-5}$	3.117	0.386	1.142	0.499

Dans la suite de notre étude, nous n'utiliserons que ces huit matériaux et ils seront identifiés par leur numéro ( 1 à 4 pour les matériaux de Mooney – Rivlin, 5 à 8 pour ceux d'Ogden – Swanson).



2. Comparaison des modèles de M-R et d'O-S

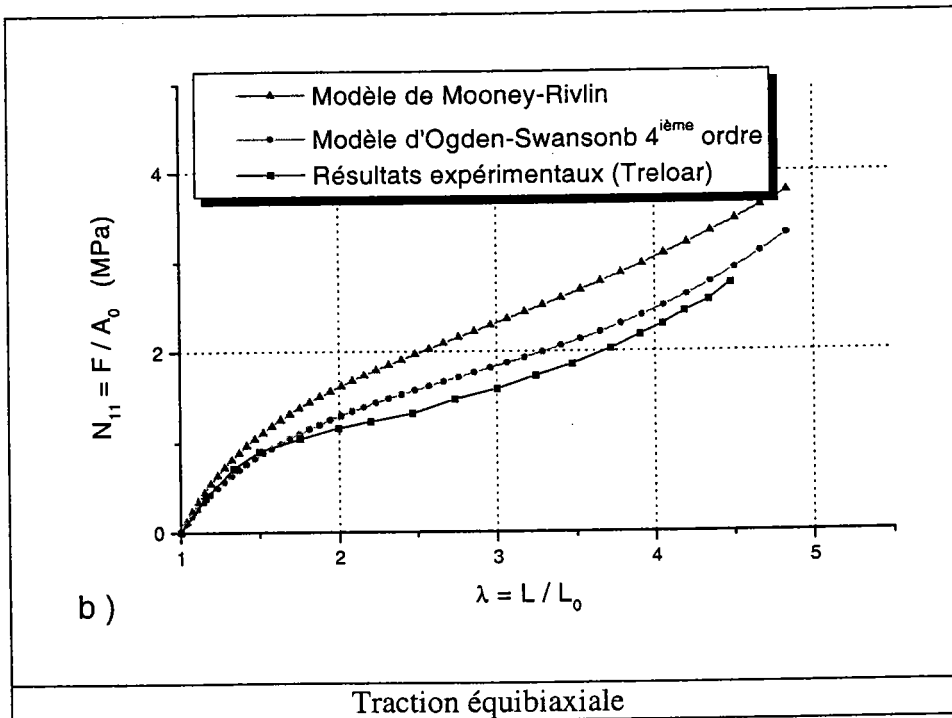
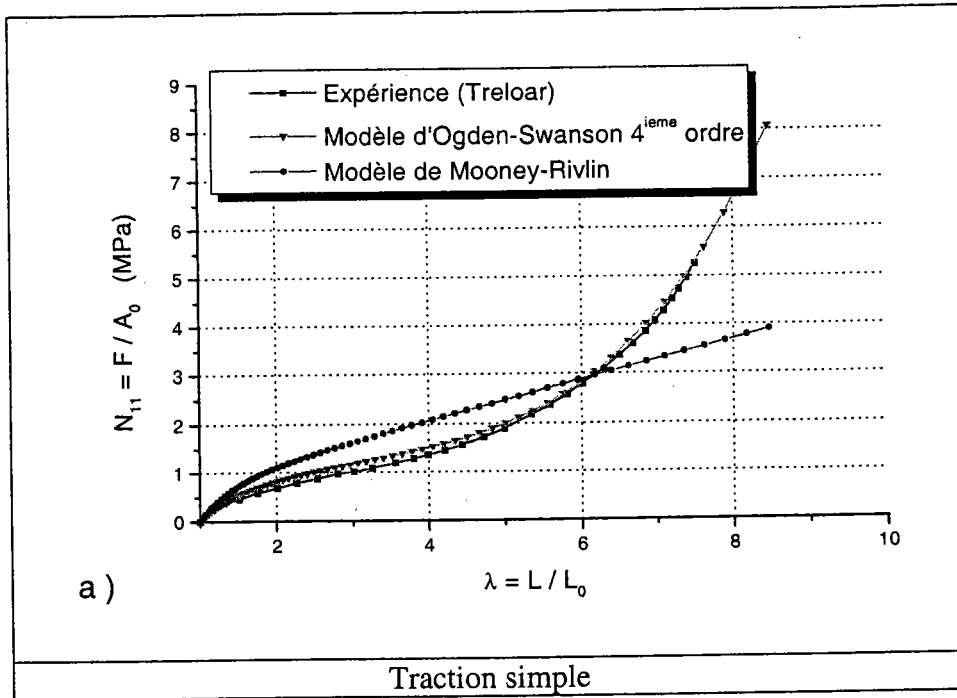


Figure VI.7 : Comparaison des données de Treloar (pour un caoutchouc vulcanisé) avec ceux des modèles de Mooney-Rivlin et d'Ogden-Swanson

Nous avons intégré dans notre code de calcul deux modèles de la loi de comportement hyper – élastique, celui de Mooney – Rivlin et celui d' Ogden - Swanson. Le modèle de Mooney – Rivlin (M-R) car il est simple à mettre en œuvre et est suffisant pour les faibles déformations ( $\lambda \leq 1.3$  ) mais pour plus de précision et surtout pour de grandes déformations, nous avons également intégré le modèle d'Ogden-Swanson (O-S). Ce dernier moins facile à mettre en œuvre nécessite un temps de calcul plus élevé mais s'accorde mieux avec les résultats expérimentaux surtout dans le cas d'un chargement en traction uni axiale (voir figure VI.7).

Dans la suite de ce chapitre, nous soumettrons les matériaux à des déformations allant jusqu'à 500% ( $\lambda = 6$ ). Il est donc judicieux d'utiliser le modèle d'Ogden – Swanson, du fait de son bon accord avec les résultats expérimentaux pour les grandes déformations. Les matériaux qui seront les plus souvent utilisés pour nos mélanges d'élastomères seront donc les matériaux précédemment nommés 5 à 8.

B. ETUDES DE L'ISOTROPIE ET DE LA COMPRESSIBILITE DU MATERIAU

1. Définition des matériaux étudiés :

Les matériaux étudiés sont des mélanges d'élastomères. Nous pouvons donc valablement les considérer comme micro hétérogènes et macro hétérogènes. Ceci nous permet, par un processus d'homogénéisation de déterminer les propriétés effectives du mélange à partir de la connaissance de ses constituants. Ces matériaux peuvent être schématiquement représentés par la figure ci-dessous.

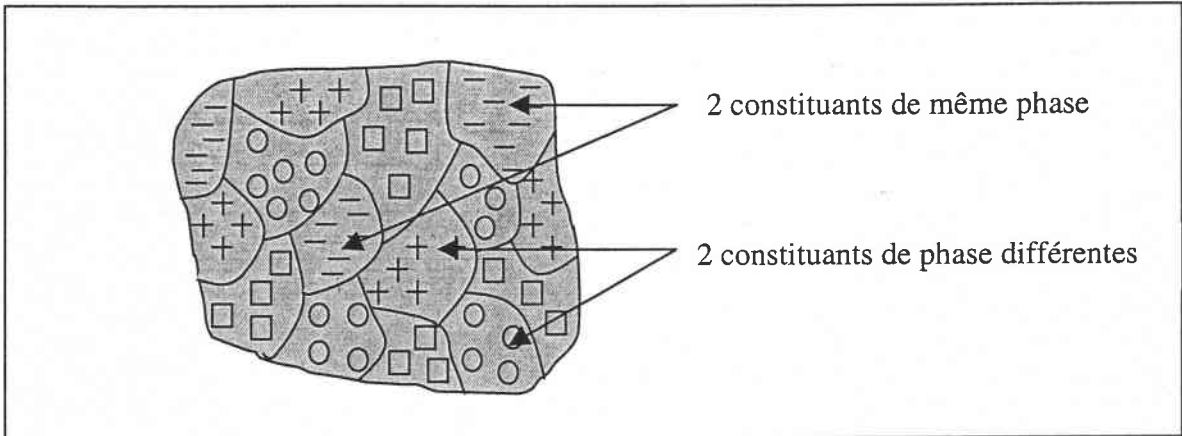


Figure VI.8 : Représentation schématique des mélanges étudiés

Chaque mélange est donc défini par son nombre de constituants  $N_c \geq 1$  et son nombre de phase  $N_p \geq 1$  ( nombre d'élastomères différents constituant le mélange). Il s'en suit qu'on a systématiquement  $N_c \geq N_p$  ( on peut avoir plusieurs constituants de la même phase).

Lorsque  $N_c = N_p = 1$ , il ne s'agit plus d'un mélange mais d'un élastomère unique, homogène.

Pour des raisons de commodité, nous resterons dans des cas de mélanges où les nombres de constituants et de phases sont petits  $N_c \leq 6$ ,  $N_p \leq 4$ . Des nombres plus grands ne pressentent aucune difficulté à notre modèle ni au code de calcul, sinon un temps d'exécution plus élevé.

Les matériaux seront essentiellement chargés en traction uni axiale simple ou équi-biaxiale, jusqu'à une déformation de l'ordre de 500%.

Chaque constituant est supposé ellipsoïdal avant la déformation. Il est caractérisé par son type de phase ( $N_{phas}$ ), ses dimensions, c'est-à-dire ses demi-axes principaux  $Dim = (a, b, c)$ , son orientation définit par ses angles d'Euler  $Ori = (\alpha, \beta, \gamma)$  et sa fraction volumique dans le mélange  $FracV$ .

Dans le cas où une interface sera prise en compte autour des constituants du matériau, elle sera caractérisée par son type de phase ( $M_{phas}$ ) et ses trois épaisseurs principales  $Epais = (\Delta a, \Delta b, \Delta c)$ . La fraction volumique  $FracV$  fixée pour un constituant tiendra compte dans ce cas de celle de l'interface.

En somme, les matériaux (mélanges d'élastomères) étudiés ici sont entièrement définis par les caractéristiques suivantes :

$N_p$  nombre de phases

$N_c$  nombre de constituants

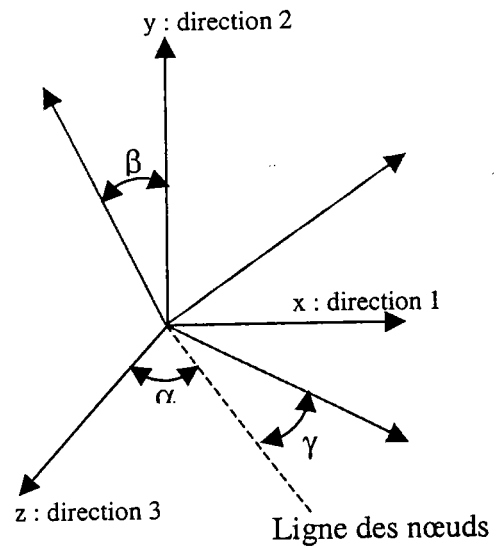
$f_p$  fraction volumique pour une phase (somme des fractions volumiques des constituants d'une même phase)

Pour chaque constituant :

$Dim = (a, b, c)$  dimensions principales

$Ori = (\alpha, \beta, \gamma)$  orientations principales et éventuellement :

$Epais = (\Delta a, \Delta b, \Delta c)$  épaisseurs de l'interface



Avant toute transformation, nous supposons que tous les constituants d'un mélange sont isotropes et quasiment incompressibles.

Les matériaux étudiés dans la suite de ce chapitre sont donc initialement isotropes et incompressibles. Lorsqu'ils sont soumis à un chargement, ils subissent de grandes déformations dans des directions liées au type de chargement et peuvent perdre ces propriétés initiales d'isotropie et de compressibilité. C'est cette probable évolution que nous nous proposons d'étudier dans les paragraphes suivants.

## 2. Isotropie du matériau

Considérons un mélange  $N_c = 6$  ,  $N_p = 3$  , et suivons l'évolution du tenseur des propriétés effectives du matériau macro homogène. Tous les constituants sont caractérisés par  $Dim = (1,1,1)$  et  $Ori = (0,0,0)$ . Les fractions volumiques pour les trois phases sont respectivement  $f_5 = 0.4$  (matériau n°5),  $f_6 = 0.3$  (matériau n°6),  $f_7 = 0.3$  (matériau n°7)

**Remarque :** Le matériau étudié ( $N_c = 6$  ,  $N_p = 3$ ) à 6 constituants et 3 phases différentes, ce qui veut dire que plusieurs constituants sont faits de la même phase. On pourrait donc valablement considérer qu'un tel matériau est équivalent à un matériau  $N_c = 3$  ,  $N_p = 3$  où la fraction volumique de chacune des trois constituants est la somme des fractions volumiques des constituants de la même phase dans le matériau  $N_c = 6$  ,  $N_p = 3$ . Ce qui simplifierait les calculs. L'intérêt de prendre  $N_p \neq N_c$  se trouve dans le fait que pour deux constituants faits de la même phase, ils peuvent avoir des formes ou orientation différentes. Et il est intéressant d'étudier l'évolution de tels constituants au cours du chargement.

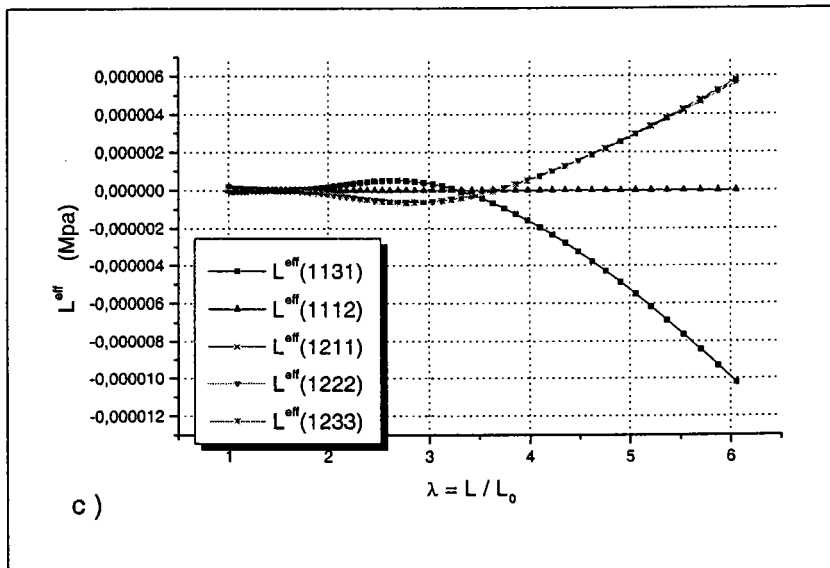
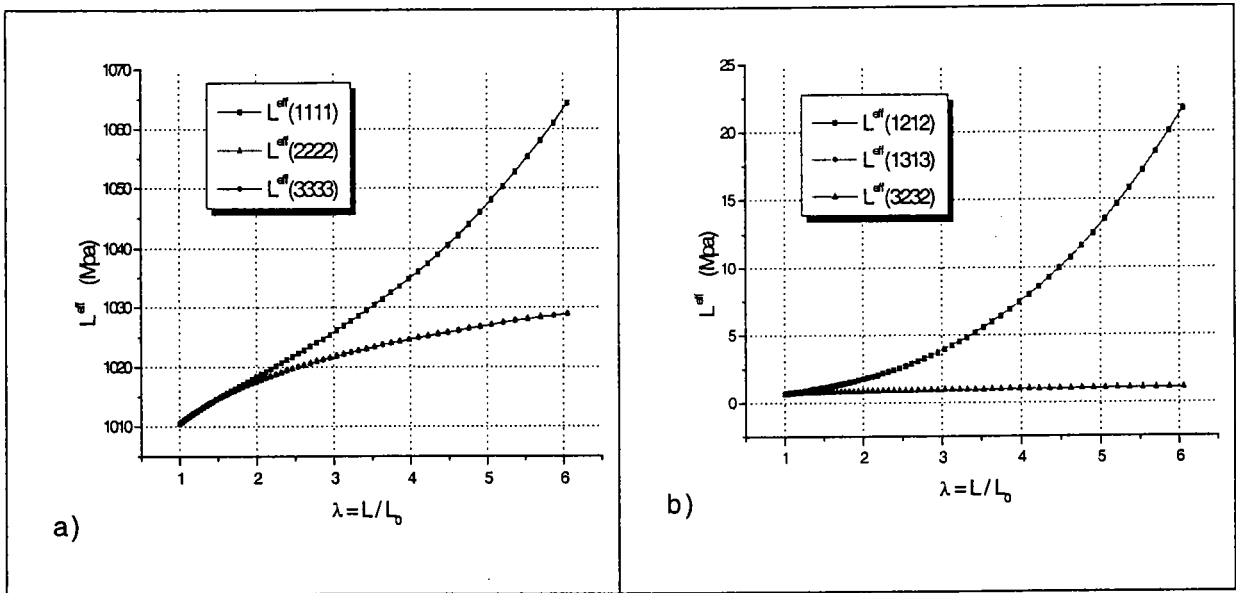


Figure IV.9 : Évolutions des composantes du module tangent effectif du mélange pour un chargement en traction simple

En début de chargement, jusqu'à  $\lambda = 1.8$  le tenseur des propriétés effectives à quasiment la forme suivante :

$$L^{eff} = \begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

ou plus précisément :

ij →	11	22	33	23	13	12
11	0.1010E+04	0.1009E+04	0.1009E+04	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
22	0.1009E+04	0.1010E+04	0.1009E+04	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
33	0.1009E+04	0.1009E+04	0.1010E+04	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
23	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.6726E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
13	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.6726E+00	0.0000E+00
12	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.6726E+00
↑ ki						

Tableau VI.1 : Composantes du tenseur des propriétés tangentes effectives pour un allongement de  $\lambda = 1$  en traction uni axiale dans la direction 1.

Cette forme du tenseur des propriétés effectives traduit l'isotropie du mélange avant et en début de la transformation.

Lorsqu'on avance dans la déformation du matériau ( $\lambda \geq 1.8$ ) on remarque que ce dernier tend à se durcir dans la direction de chargement, et acquière des directions privilégiées. Ceci se traduit par une augmentation de la composante  $L_{1111}^{eff}$  et l'apparition d'une différence entre les composantes  $L_{1111}^{eff}$ ,  $L_{2222}^{eff}$  et  $L_{3333}^{eff}$  ou  $L_{2323}^{eff}$ ,  $L_{1331}^{eff}$ ,  $L_{1212}^{eff}$ . Cet écart entre ces composantes s'agrandit avec la déformation traduisant ainsi une perte d'isotropie au fur et à mesure que le matériau subit de grandes déformations.

D'autre part, l'isotropie du matériau peut être étudiée en observant l'évolution des constantes d'anisotropie définies pour la variante 1-2 par :  $A_{12} = \frac{C_{11}}{C_{12} + 2C_{66}}$

Soit :

$$A_{12} = \frac{L_{1111}}{L_{1122} + 2L_{1212}} \quad A_{13} = \frac{L_{1111}}{L_{1133} + 2L_{1313}} \quad A_{23} = \frac{L_{2222}}{L_{2233} + 2L_{2323}}$$

Remarquons que dans les relations et tableaux ci-dessus nous avons adopté la notation de Voigt où le tableau VI.1 à la forme :

$$L^{eff} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

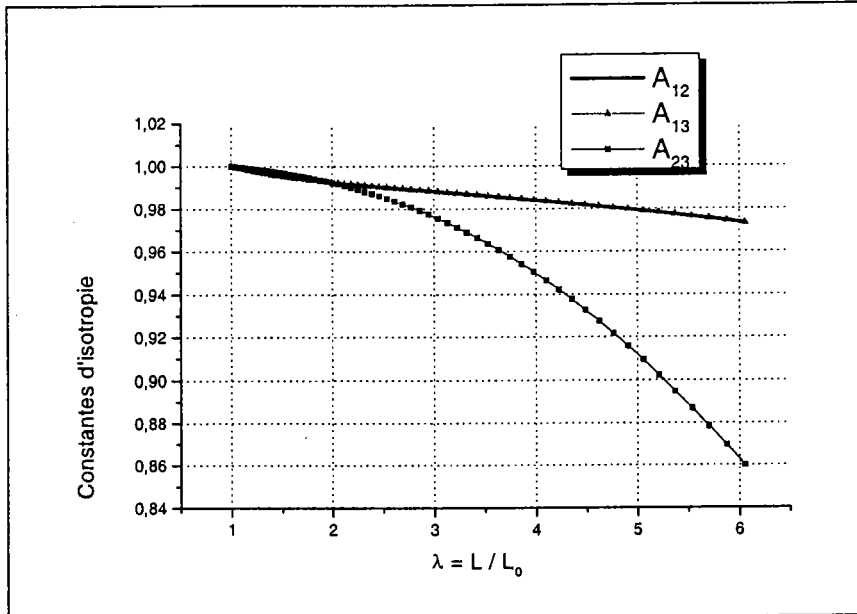


Figure IV.10 : Évolutions des constantes d'anisotropie du mélange pour un chargement en traction simple

Par exemple la constante d'anisotropie  $A_{23}$  qui est égale à 1 pour un matériau isotrope évolue au cours du chargement. Pour des faibles allongements, elle est proche de 1 puis diminue jusqu'à 0.86 pour un allongement de l'ordre de 6. Ce qui représente une perte d'isotropie de 14% environ.

En conclusion, le mélange d'élastomères initialement isotrope, perd légèrement son caractère isotrope avec la déformation. Ceci s'explique par la nature même de l'élasticité caoutchoutique qui est différente de celui des métaux. En effet un élastomère est constitué d'un enchevêtrement de réseaux de chaînes moléculaires "enroulés" et tassés les uns sur les autres et qui se détendent ou se démêlent avec la déformation. On arrive ainsi à atteindre de très grandes déformations réversibles parce que les réseaux de chaîne moléculaire n'ont pas été rompus mais se sont juste détendus. En revanche au cours de la déformation, tous ces réseaux moléculaires, dans le cas d'une traction uni axiale par exemple vont s'allonger dans la même direction, conférant ainsi au matériau une direction privilégiée d'où la perte d'isotropie.

La figure suivante représente schématiquement et de manière simple ce phénomène propre à la déformation caoutchoutique.

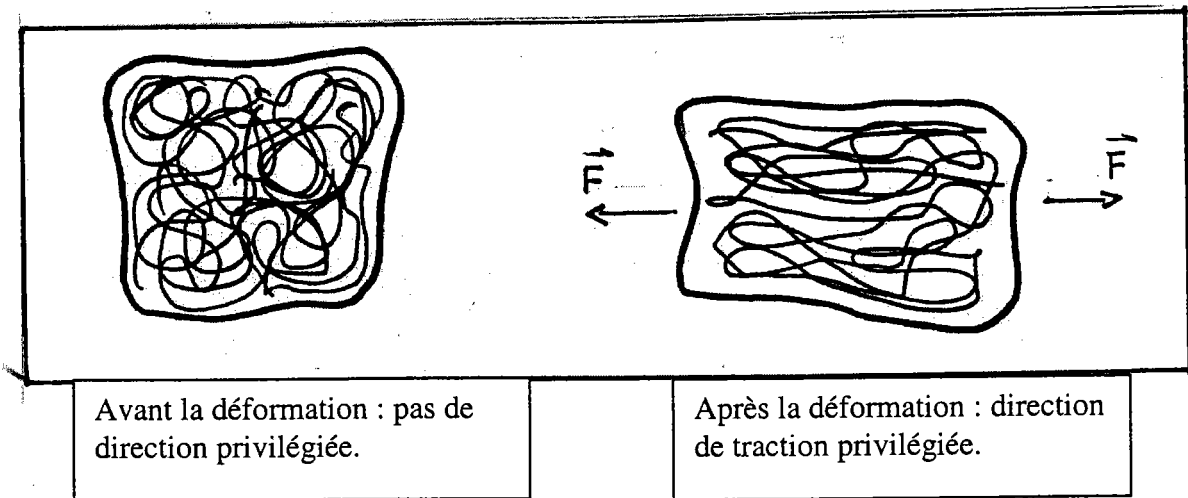


Figure IV.11 : Élasticité caoutchoutique



### 3. Incompressibilité de matériau

Les matériaux caoutchoutiques sont en générale quasiment incompressibles. Leurs déformations s'effectuent donc sans variation de volume

$$J_t = \text{Det}(F_t) = \frac{V_t}{V_0}$$

$F_t$  : gradient macroscopique de la transformation

$V_0$  et  $V_t$  : Volume initial et à l'instant t du matériau.

Dans ce paragraphe nous étudions la conservation ou non de cette propriété, au cours de la déformation.

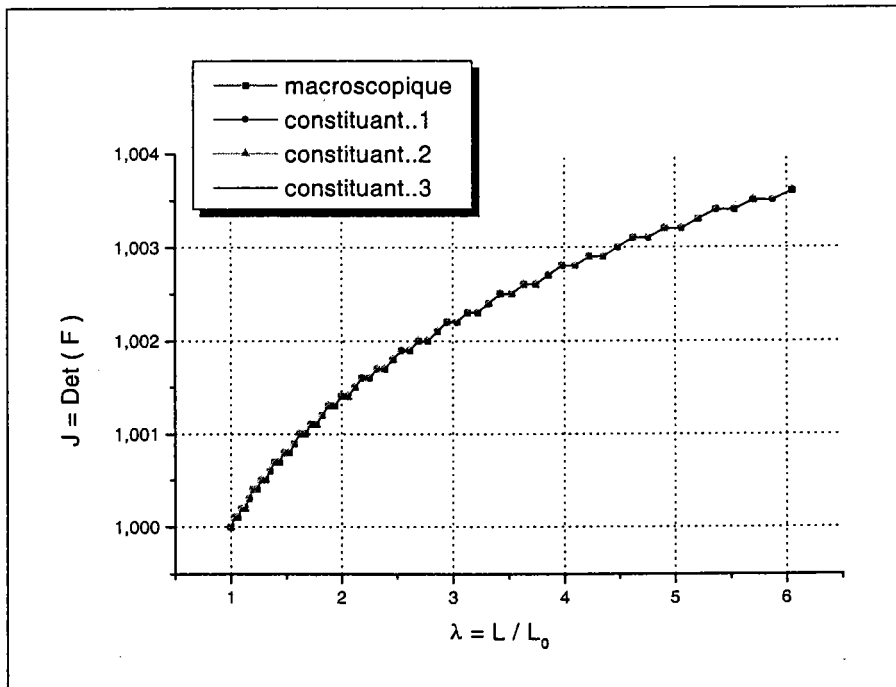


Figure IV.12 : Évolution d'incompressibilité du matériau

Entre le début et la fin du chargement, le rapport de volume augmente de 1 à 1.004 soit une évolution de 0.4%. Autrement dit, le matériau est resté quasiment incompressible. Remarquons également que tous les constituants ont un comportement similaire en ce qui concerne leur incompressibilité au cours de la déformation.

Contrairement à la perte d'isotropie qui s'est relevé plus nettement au cours du paragraphe précédent, nous remarquerons ici une conservation de la propriété d'incompressibilité des matériaux caoutchoutiques. Cette conservation de l'incompressibilité peut également s'expliquer par la nature même de l'élasticité caoutchoutique. Il s'est en effet produit une réorganisation des réseaux de chaînes moléculaires du matériau, sans effet sur le volume global de celui-ci.

C. VARIATION DE LA STRUCTURE INTERNE DU MATERIAU

1. Structure globale (hyper - élasticité du mélange d'élastomères)

Nous considérons trois mélanges  $N_c = 6$  et  $N_p = 3$ . Les trois phases présentes dans les trois mélanges sont identiques. Ils se différencient soit par la forme et l'orientation initiale de leurs constituants soit par la fraction volumique initiale  $f_p$  de chacune des phases présentes dans le mélange.

**Mélange 1 :** tous les constituants sont initialement sphériques c'est-à-dire  $Dim = (1,1,1)$  et  $Ori = (0,0,0)$ . Les fractions volumiques totales des trois phases sont  $f_5 = 0.4$  (matériau n°5),  $f_6 = 0.3$  (matériau n°6),  $f_7 = 0.3$  (matériau n°7).

**Mélange 2 :** tous les constituants sont initialement ellipsoïdaux c'est-à-dire  $Dim \neq (1,1,1)$  et  $Ori \neq (0,0,0)$ . Les fractions volumiques totales des trois phases sont  $f_5 = 0.4$  (matériau n°5),  $f_6 = 0.3$  (matériau n°6),  $f_7 = 0.3$  (matériau n°7)

**Mélange 3 :** tous les constituants sont initialement sphériques c'est-à-dire  $Dim = (1,1,1)$  et  $Ori = (0,0,0)$ . Les fractions volumiques totales des trois phases sont  $f_5 = 0.8$  (matériau n°5),  $f_6 = 0.1$  (matériau n°6),  $f_7 = 0.1$  (matériau n°7)

Sur les figures ci après, nous reportons les résultats obtenus pour chaque constituant et ceux du matériau effectif (macro homogène ). Les mélanges sont chargés en traction uni axiale dans la direction 1.

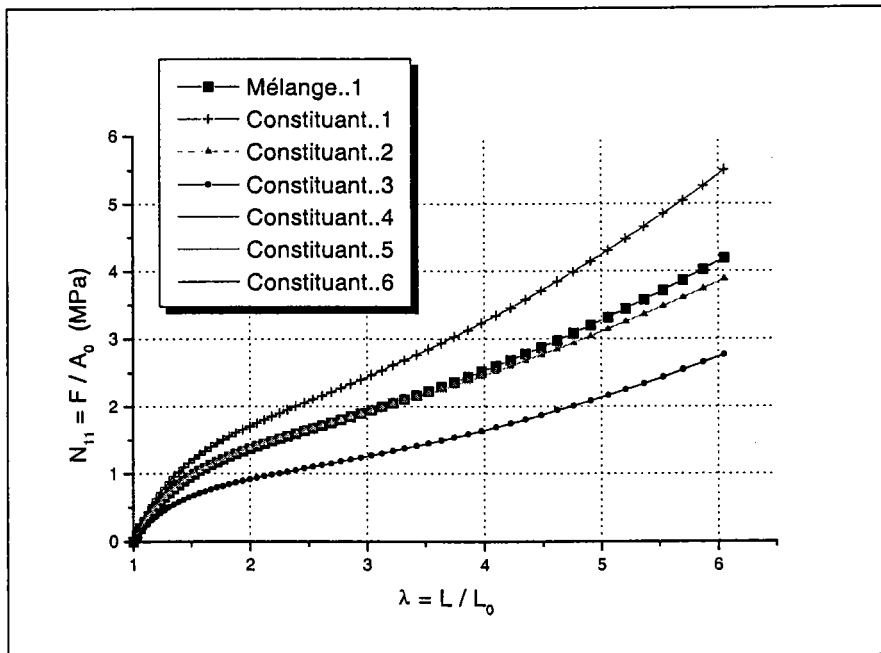
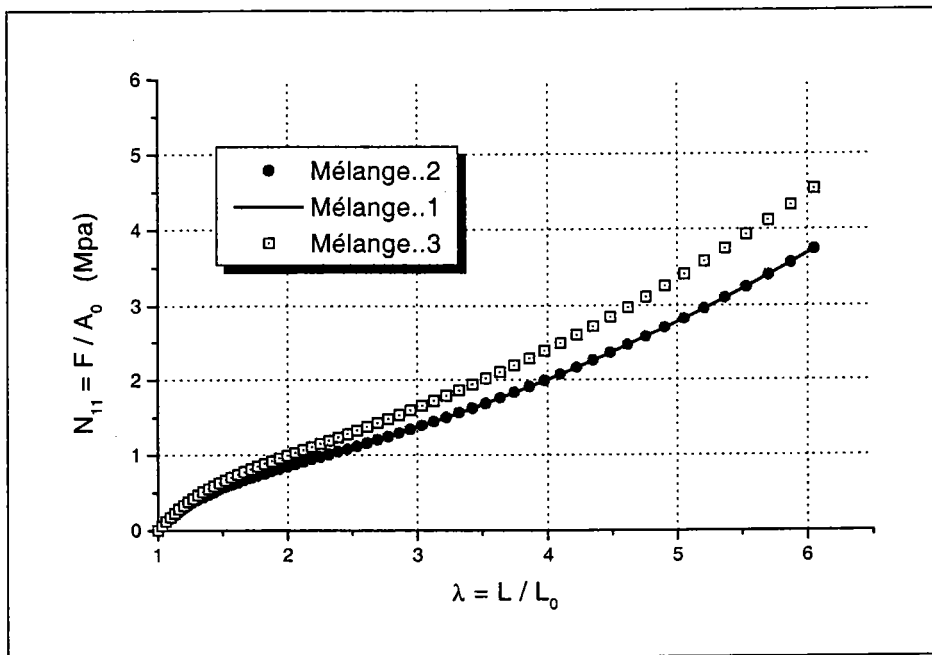


Figure VI.13 : Loi de comportement du mélange 1 et celle de chacune de ses constituants.

Comme on pouvait s'y attendre, les constituants faits de la même phase ont le même comportement (figure VI.13). La courbe de comportement du mélange (matériau effectif) est encadrée par celle de la phase la plus "dure" (matériau n°5) et celle de la phase la plus "molle" (matériau n°7) comme si elle était la moyenne pondérée avec les fractions volumiques des courbes de comportement des phases qui le constituent.

C'est ainsi qu'on arrive à obtenir "un matériau sur commande" ayant un comportement particulier, une réponse particulière à une sollicitation, à partir de matériaux ayant des comportements soit trop au dessus, soit trop en dessous du comportement voulu. C'est l'un des principaux atouts des matériaux composites, ce qui leur a valu de nombreuses études et ouvrages ces dernières décennies.



**Figure VI.14 :** Loi de comportement des trois mélanges : influence des fractions volumiques et des formes initiales des constituants

La figure VI.14 révèle que les mélanges 1 et 2 ont quasiment la même réponse différente de celle du mélange 3. On en déduit que la forme et l'orientation initiale des constituants d'un mélange n'influent pas sur son comportement effectif alors que les fractions volumiques totales des phases présentes dans le mélange déterminent la réponse de celle-ci.

Ceci s'explique par le fait que l'isotropie initiale des constituants annule tout effet de forme ou d'orientation de ces derniers sur le comportement du matériau effectif. En revanche, la prédominance d'une phase va naturellement forcer le mélange à avoir un comportement proche du sien. La prépondérance de la phase représentant le matériau n°5 ( $f_5 = 0.8$ ) qui est la phase la plus "dure" des matériaux considérés fait donc que la courbe de comportement du mélange 3 soit au dessus de celle des deux premières.

D'autres part, on remarque sur la figure ci-dessus que l'écart entre les différentes courbes se creuse réellement à partir d'une déformation d'environ 80% ce qui laisse croire que pour les faibles déformations les élastomères ont des comportements proches les uns des autres et que la différence de comportement se fait réellement pour les grandes déformations.

2. Structure locale (variation de forme des constituants)

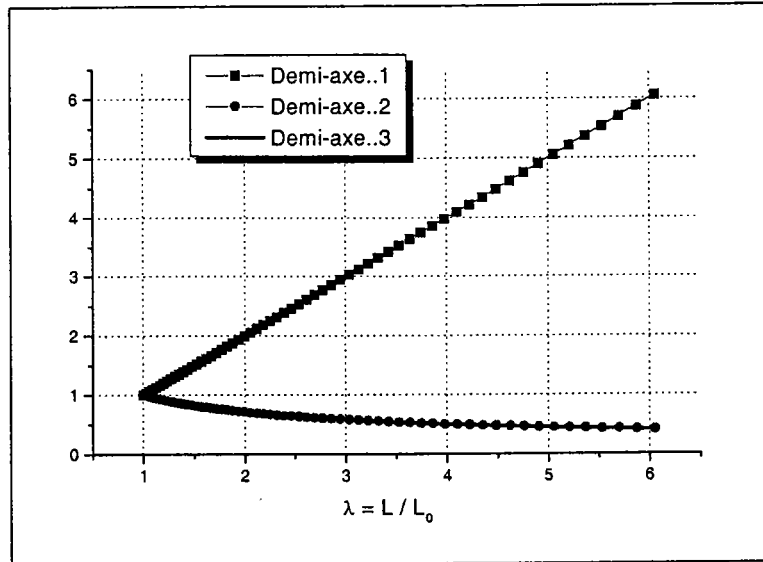


Figure VI.15 : Évolution des demi-axes des constituants

Sur la figure VI.14, tous les constituants initialement sphériques,  $Dim = (1,1,1)$  et  $Ori = (0,0,0)$  subissent la même évolution de forme au cours de la déformation : un allongement proportionnel à  $\lambda$  dans la direction de traction et un rétrécissement plus faible dans les deux autres directions. Ces constituants deviennent des ellipsoïdes dont le volume est quasiment resté le même qu'avant la déformation, ce qui est cohérent avec les résultats de la figure VI.12.

Le présent paragraphe n'a de réel intérêt que si on considère un matériau initialement défini par des constituants non sphériques et différemment orientés. On pourra ainsi voir la différence de comportement entre deux constituants de même phase mais ayant des dimensions et orientations initiales différentes. Pour ce faire, nous allons étudier le mélange n°2 dont les constituants sont définis par les caractéristiques suivantes :

Constituant n°1 :	phase 1	$Dim = (2,3,1)$	$Ori = (40,40,0)$	$FracV = 0.2$
Constituant n°2 :	phase 2	$Dim = (2,3,4)$	$Ori = (0,0,35)$	$FracV = 0.2$
Constituant n°3 :	phase 3	$Dim = (6,4,3)$	$Ori = (0,0,0)$	$FracV = 0.2$
Constituant n°4 :	phase 1	$Dim = (4,5,2)$	$Ori = (-40,-40,0)$	$FracV = 0.2$
Constituant n°5 :	phase 2	$Dim = (2,5,2)$	$Ori = (35,0,0)$	$FracV = 0.1$
Constituant n°6 :	phase 3	$Dim = (2,1,3)$	$Ori = (0,0,40)$	$FracV = 0.1$

On en déduit pour chaque phase :  $f_5 = 0.4$  (matériau n°5),  $f_6 = 0.3$  (matériau n°6),  $f_7 = 0.3$  (matériau n°7)

Ce matériau soumis à une traction uni axiale puis à une traction bi-axiale donne les résultats suivants :

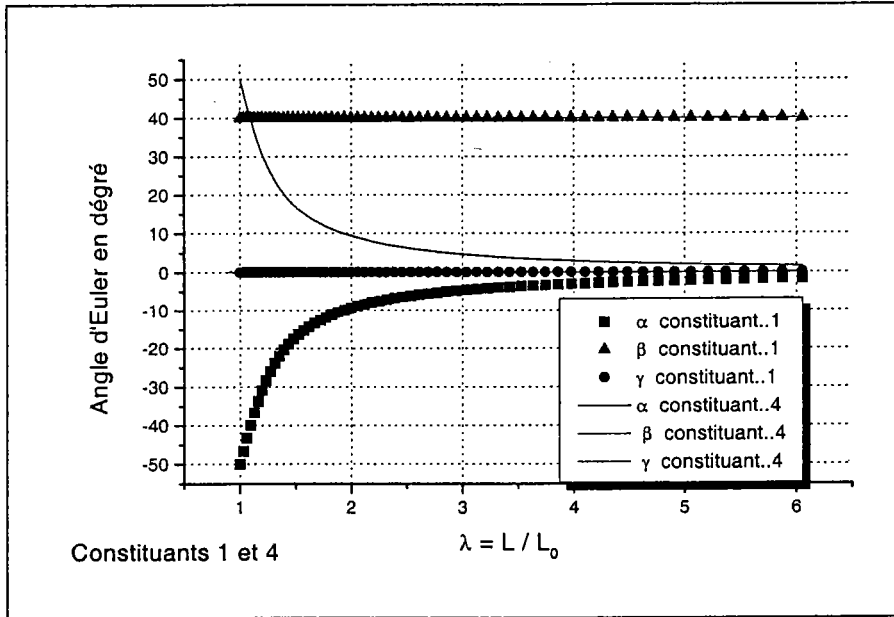


Figure VI.16 : Évolution des orientations des constituants 1 et 4

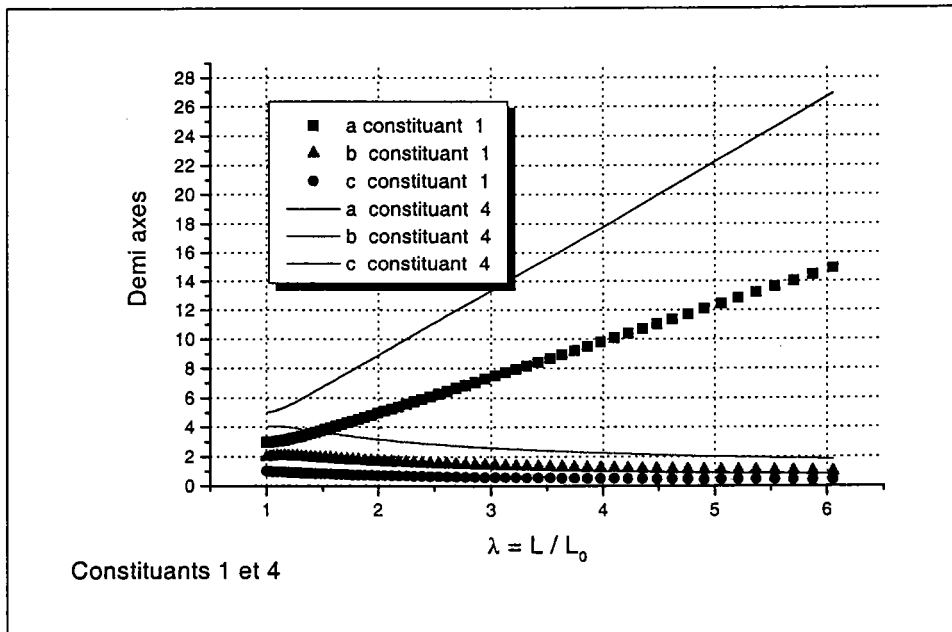


Figure VI.17 : Évolution des demi-axes des constituants 1 et 4

Les constituants 1 et 4 sont de la même phase (matériau 5). Ils ont les mêmes dimensions mais ils sont orientés différemment à l'état initial. Lorsque le mélange est soumis à une traction uni axiale dans la direction 1, les dimensions varient de la même manière (allongement dans la direction 1 et rétrécissement dans les deux autres directions) alors que les orientations évoluent différemment suivant les angles considérés.

## Chapitre VI – Applications diverses

Nous remarquons que les deux constituants ne changent quasiment pas d'orientation dans les plans 2-3 et 1-3 alors que dans le plan 1-2, ils tendent à prendre la direction de la traction, c'est-à-dire que  $\alpha \rightarrow 0$ .

Pour deux constituants de même phase mais d'orientations initiales différentes, il s'en suit que lorsque le mélange est sollicité, l'évolution de ces orientations est différente mais tend, dans la cas de la traction uni axiale à donner à ces constituants la direction de traction. Ce résultat est en accord avec la perte d'isotropie liée à l'acquisition au cours de la déformation d'une direction privilégiée. Suivant donc les plans dans lesquels s'effectuent les chargements, les divers constituants vont s'orienter différemment et leurs dimensions évolueront en accord avec l'allongement global du mélange.

Jusqu'à présent, nos études se sont limitées à des mélanges définis par plusieurs constituants simples, sans considérer une quelconque interface entre ces constituants. Il est intéressant de voir l'influence de la présence d'une telle interface dans le mélange. L'étude de cette influence fait l'objet du paragraphe suivant.

D. APPORT DE L' ENROBAGE

L'enrobage peut être introduit pour donner au mélange des propriétés spécifiques (rigidité ou souplesse, résistance au chocs...). Il peut être également introduit par l'effet de réactions chimiques qui peuvent avoir lieu aux frontières des constituants du mélange. Dans notre étude, nous considérons que les propriétés de la "phase enrobage" sont aussi bien connues que celles des autres constituants.

Pour bien étudier l'impact de la présence d'interfaces entre les constituants du mélange, nous considérons que le problème de " mélange d'élastomères avec prise en compte d'une fine interface entre ses constituants" peut être décliné sous trois aspects que nous comparerons. Ces trois déclinaisons sont symboliquement représentées par le schéma des modèles élémentaires suivant.

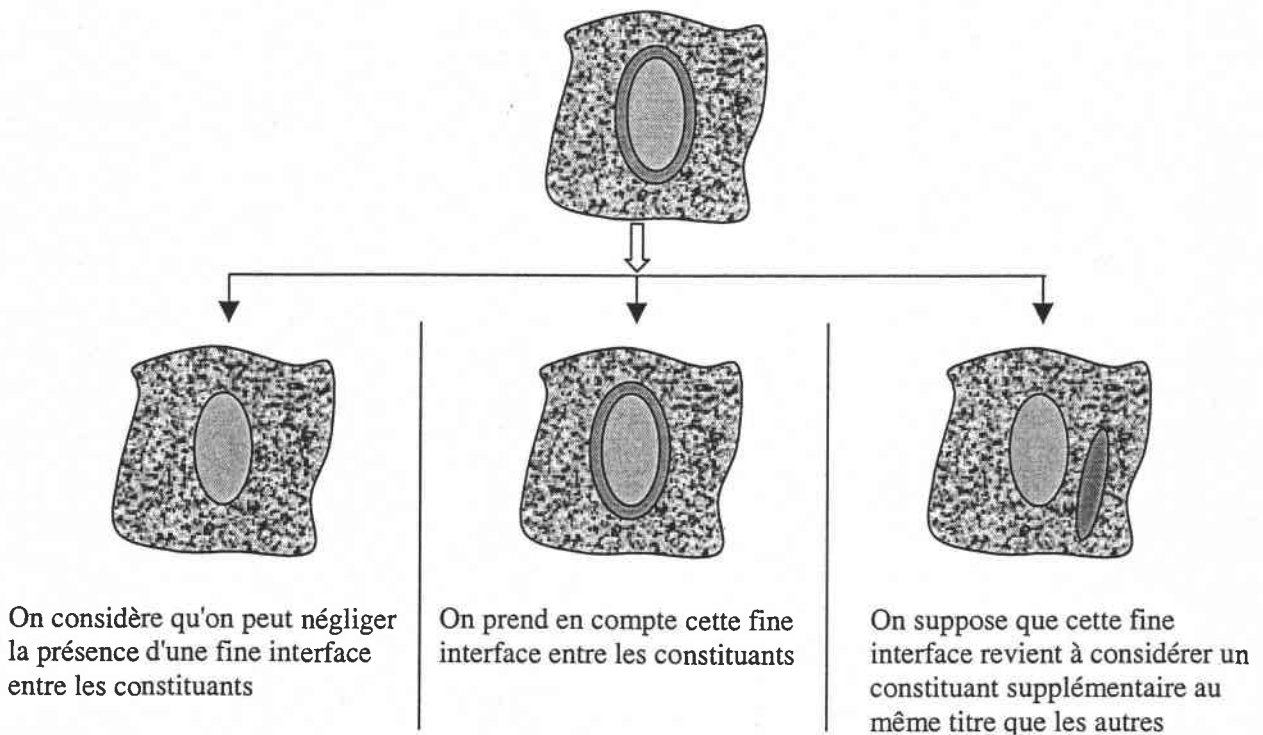


Figure VI.18 : Étude de l'apport de l'enrobage

Prenons donc trois mélanges d'élastomères représentant les trois modèles élémentaires de la figure VI.18. Pour des raisons de simplicité, nous supposons que tous les constituants des mélanges sont initialement sphériques.

**Mélange 1 :** On néglige la présence d'une fine interface entre les constituants.

$N_c = 2$  et  $N_p = 2$ . Les fractions volumiques totales des deux phases sont  $f_5 = 0.5$  (matériau n°5),  $f_8 = 0.5$  (matériau n°8).

**Mélange 2 :** On suppose que cette fine interface revient à considérer un constituant supplémentaire au même titre que les autres.

$N_c = 3$  et  $N_p = 3$ . Les fractions volumiques totales des quatre phases sont  $f_5 = 0.48595$  (matériau n°5),  $f_8 = 0.48595$  (matériau n°8),  $f_7 = 0.02810$  (matériau n°7)

**Mélange 3 :** On prend en compte cette fine interface entre les constituants.

$N_c = 2$  et  $N_p = 3$ . La troisième phase représente l'interface (enrobage) identique pour les deux constituants. Les enrobages ont des épaisseurs identiques de 0.01 dans les trois directions principales. Les fractions volumiques totale des deux phases restent les mêmes sauf qu'elles incluent également l'enrobage :  $f_5 = 0.5$  (matériau n°5),  $f_8 = 0.5$  (matériau n°8).

Ces données nous permettent de calculer la fraction volumique globale de la phase enrobage :  $f_7 = 0.02810$  (matériau n°7).

Rappelons que les matériaux utilisés sont classés par ordre de "dureté" de la manière suivante :

matériau n°5	Plus "dure"
matériau n°8	
matériau n°7	Moins "dure"

L'enrobage représente donc la phase la plus "molle" du mélange.

En soumettant ces trois mélanges à une traction uni axiale dans la direction 1 nous obtenons les courbes ci-dessous.

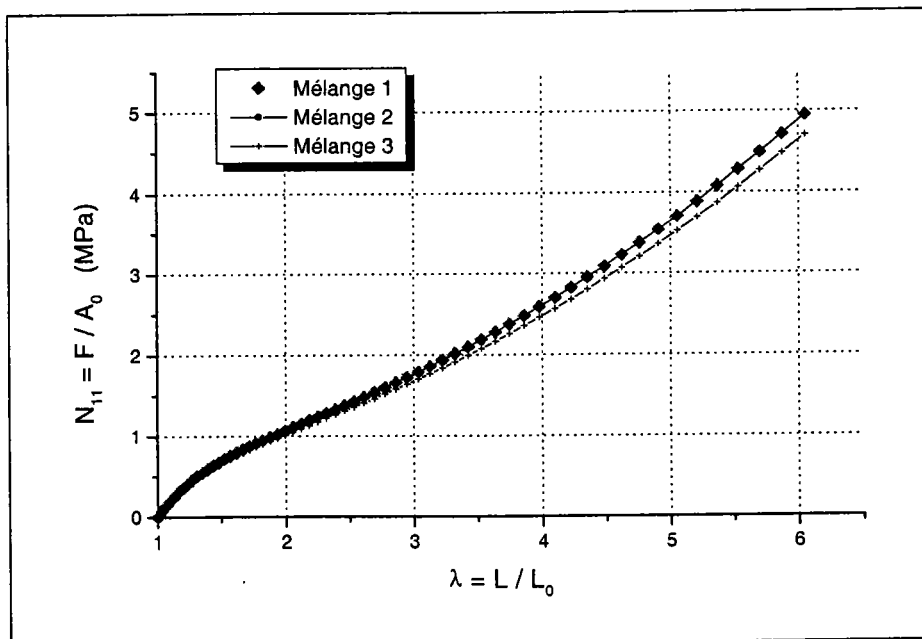


Figure VI.19 : Comparaison de l'état de contrainte nominale dans le constituant 1 (matériau n°5) pour les trois mélanges



Notons que nous obtenons des courbes similaires pour le constituant 2 (matériau n°8) pour les trois mélanges. Les remarques ci – dessous sont donc identiques pour ce constituant.

Sur la figure VI.19, les inclusions représentent les phases les plus "dures" du polyphasé, et elles sont enrobées par une phase plus "molle". Le fait de noyer les inclusions dans des couches moins dures permet en fin de compte de diminuer le niveau de contrainte à l'intérieur de ces inclusions. Cet enrobage joue donc un rôle d'amortisseur pour les inclusions qu'il entoure. Cette remarque est particulièrement intéressante car elle montre que la présence d'une interface entre les constituants d'un mélange peut permettre pour un bon choix de cette interface, de "contrôler" le niveau de contrainte et de déformation dans ces constituant.

Remarquons également que les mélanges 1 et 2 sont équivalents du point de vue de l'inclusion car pour les deux mélanges, le niveau de contrainte dans ces inclusions est identique.

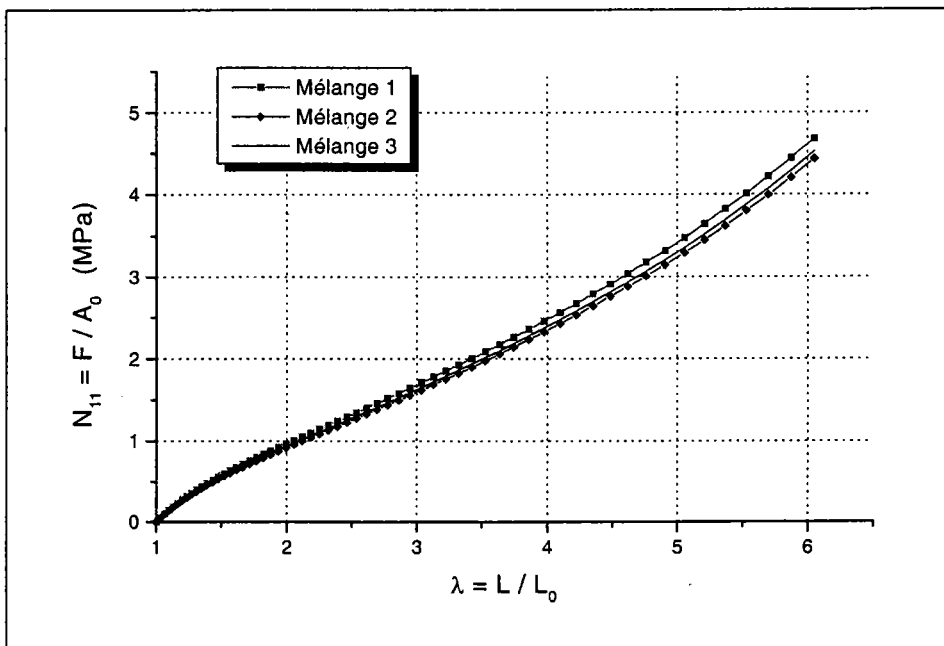


Figure VI.20 : Comparaison de l'état de contrainte nominale macroscopique pour les trois mélanges

La figure ci - dessus montre l'effet de la présence d'enrobage dans le polyphasé. En effet, les trois courbes représentant le niveau de contrainte nominale dans le polyphasé, montrent une légère différence qu'il y ait ou non une troisième phase (matériau n°7). Cette différence du niveau de contrainte peut être plus importante suivant les propriétés et les fractions volumiques de cette troisième phase, montrant ainsi le caractère capital des enrobages pour obtenir un niveau de contrainte relativement précise dans le matériau équivalent. On remarquera également que les états de contraintes nominales sont très proches pour les mélanges 2 et 3, représentant la présence d'une troisième phase. Néanmoins lorsque cette phase constitue l'enrobage, le niveau de contrainte est légèrement plus élevé que si elle représentait un constituant au même titre que les autres. On peut donc envisager la possibilité de choisir l'un ou l'autre cas suivant le niveau de contrainte globale qu'on désire obtenir.

## Chapitre VII

# CONCLUSION GÉNÉRALE

**A. ASPECTS ABORDES ET RESULTATS OBTENUS**

Ce document est le rapport d'une étude menée dans le but d'obtenir un modèle crédible sur les composites d'élastomères en prenant en compte une interface fine entre les différents constituants du mélange.

Pour ce faire, nous avons dans un premier temps souligné les spécificités des polymères et spécialement le caractère hyper - élastique des élastomères. Nous avons ensuite présenté les bases mécaniques des grandes déformations et des processus d'homogénéisation. Avant d'analyser et d'interpréter les applications de notre étude, nous avons fait un développement théorique propre aux types de matériaux étudiés. Ces développements théoriques concernent essentiellement deux modèles de comportement hyper - élastique (Mooney-Rivlin et Ogden-Swanson), le processus d'homogénéisation avec ou sans prise en compte de l'interface entre les constituants des mélanges étudiés et le changement de forme de ces constituants. Cet ensemble est intégré dans un code de calcul dont les résultats sont interprétés dans le chapitre VI des applications.

Ces applications quant à elles se déroulent en quatre principales étapes :

La première consiste à valider les deux modèles de comportement hyper - élastique qui sont intégrés dans le code de calcul.

Nous avons ensuite souligné le fait que les matériaux hyperélastiques étudiés perdent leur isotropie au fur et à mesure de la déformation alors qu'ils gardent leur quasi-incompressibilité.

La troisième étape consiste à étudier le comportement des mélanges par rapport à celui de leurs constituants et les variations de formes subies par ces derniers.

Nous avons terminé ces applications par l'étude de l'influence de la présence d'une interface fine entre les constituants du mélange, interface modélisée par un enrobage de faible épaisseur autour des constituants supposés ellipsoïdaux.

Cette étude permet essentiellement

- d'avoir une formulation de la loi de comportement hyper – élastique adaptée aux matériaux hyper élastiques et pouvant être intégrée dans un processus d'homogénéisation,
- d'analyser les composites 100% élastomère, très peu abordés alors que les composites de métaux, de bois et de mélanges de différents types de matériaux le sont largement,

- de souligner l'influence des formes des constituants du composite sur la réponse de celui-ci lors d'une sollicitation particulière,
- d'avoir un outil unique (programme informatique) permettant d'extraire toutes les informations mécaniques sur un mélange d'élastomères bien défini, ce qui permet de simuler le comportement d'un matériau avant sa mise en œuvre.

Quelques regrets néanmoins qui pourraient constituer les perspectives envisageables pour cette étude.

Les constituants des mélanges étudiés sont des matériaux définis par une série de constantes qui les caractérisent et que nous avons récupéré dans la littérature. Nos mélanges sont donc fictifs. Une étude expérimentale sur ces mélanges permettrait une confrontation des résultats expérimentaux avec ceux obtenus grâce à notre modèle, et donc une analyse plus approfondie du sujet. On pourra également envisager de coupler cette étude avec un code d'éléments finis.

Cette étude ne prend en compte ni le caractère visqueux ni les phénomènes d'hystérésis du caoutchouc. L'introduction de ces caractéristiques propres aux caoutchoucs permettrait d'obtenir des modèles plus fins. De plus le modèle élémentaire de l'inclusion enrobée noyée dans une matrice pour représenter l'interface entre les constituants du mélange peut être remplacé par un modèle plus avancé.

Cette étude menée à terme pourra permettre :

- d'optimiser la constitution du polyphasé en fonction des propriétés et des fractions volumiques de chaque phase.
- de comprendre les mécanismes de renforcement ou de relâchement liés à la forme et à l'orientation de chaque constituant.

# **ANNEXES**

## RELATIONS PRELIMINAIRES A LA DETERMINATION DES LOIS DE COMPORTEMENT HYPER - ELASTIQUES

Soit  $[F]$  le gradient de la transformation et  $J$  son déterminant.

$$J = \text{Det}[F] = \frac{V}{V_0} \quad (\text{Rapport de volume})$$

On définit aussi le tenseur des déformation de Cauchy-Green gauche  $[B]$  par :

$$[B] = [F].[{}^tF]$$

et le tenseur des déformation de Cauchy - Green gauche  $[C]$  par :

$$[C] = [{}^tF].[F]$$

Leurs trois principaux invariants s'écrivent :

$$I_1 = \text{Tr}[B] = B_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left( I_1^2 - \text{Tr}([B].[B]) \right) = \frac{1}{2} \left( B_{ii}^2 - B_{ij} \cdot B_{ji} \right)$$

$$I_3 = \text{Det}[B]$$

Les variations suivantes sont nécessaires à la détermination des lois de comportement hyperélastiques.

### 1. Calcul de $dJ$

$$dJ = d(\text{Det}[F]) = \text{Det}[F] \text{Tr}(d[F].[F]^{-1})$$

$$dJ = J \text{Tr}[G] \quad \text{or} \quad [G] = [D] + [W] \quad \text{et} \quad \text{Tr}[W] = 0$$

$$dJ = J \text{Tr}[D]$$

### 2. Calcul de $d[B]$

$$[B] = [F].[{}^tF]$$

$$d[B] = d[F].[{}^tF] + [F].d[{}^tF]$$

$$d[B] = d[F].[F^{-1}].[F].[{}^tF] + [F].[{}^tF].[{}^tF^{-1}].d[{}^tF]$$

$$d[B] = [G].[B] + [B].[{}^tG]$$

Or on a  $[G] = [D] + [W]$  et  $[{}^tG] = [D] - [W]$

$$d[B] = [D].[B] + [B].[D] + [w].[B] - [B].[w]$$

En définissant la grandeur  $[H^1]$  suivante :

$$H^1_{ijkl} = \delta_{il} B_{jk} + \delta_{jl} B_{ik}$$

on peut réécrire l'expression précédente sous forme :

$$d[B] = [H^1] : [D] + [w].[B] - [B].[w]$$

### 3. Calcul de $d([B].[B])$

$$d([B].[B]) = d[B].[B] + [B].d[B]$$

$$d([B].[B]) = [D].[B].[B] + [B].[D].[B] + [w].[B].[B] - [B].[w].[B] \\ + [B].[D].[B] + [B].[B].[D] + [B].[w].[B] - [B].[B].[w]$$

$$d([B].[B]) = [D].[B].[B] + [B].[B].[D] + 2[B].[D].[B] + [w].[B].[B] - [B].[B].[w]$$

En définissant la grandeur  $[H^2]$  suivante :

$$H^2_{ijkl} = \delta_{il} B_{jp} B_{pk} + \delta_{jl} B_{ip} B_{pk} + 2 B_{ik} B_{jl}$$

on peut réécrire l'expression précédente sous forme :

$$d([B].[B]) = [H^2] : [D] + [w].[B].[B] - [B].[B].[w]$$

### 4. Calcul de $dI_1$

$$I_1 = \text{Tr}[B] = [B] : [I] = [F].[{}^tF] : [I]$$

$$dI_1 = d([B] : [I]) = d[B] : [I]$$

$$\text{or } d[B] = [D].[B] + [B].[D] + [w].[B] - [B].[w]$$

$$dI_1 = [D].[B]:[I] + [B].[D]:[I] + [w].[B]:[I] - [B].[w]:[I]$$

Or  $[w].[B]:[I] = 0 = [B].[w]:[I]$  du fait de la symétrie de  $[B]$  et de l'anti-symétrie de  $[w]$ .

Il s'en suit que :

$$dI_1 = [D].[B]:[I] + [B].[D]:[I]$$

et en passant à la notation indicielle, on montre que :

$$dI_1 = 2[B]:[D]$$

### 5. Calcul de $dI_2$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{Tr}([B].[B])) = \frac{1}{2}(I_1^2 - [B].[B]:I)$$

$$dI_2 = \frac{1}{2}(2dI_1 I_1 - d[B].[B]:[I] - [B].d[B]:[I]) \quad \text{or} \quad dI_1 = 2[B]:[D]$$

$$dI_2 = \frac{1}{2}(4 I_1 [B]:[D] - 2d[B]:[B])$$

rappelons que :  $d[B] = [D].[B] + [B].[D] + [w].[B] - [B].[w]$ . On obtient ainsi :

$$dI_2 = \frac{1}{2}(4 I_1 [B]:[D] - 2([D].[B] + [B].[D] + [w].[B] - [B].[w]):[B])$$

$$dI_2 = 2I_1 [B]:[D] - 2[B].[B]:[D]$$

car  $[w].[B]:[B] - [B].[w]:[B] = 0$

et  $[D].[B]:[B] + [B].[D]:[B] = 2[B].[B]:[D]$

$$dI_2 = 2(I_1 [B] - [B].[B]):[D]$$

### 6. Calcul de $dI_3$

$$I_3 = \text{Det}[B]$$

$$dI_3 = d(\text{Det}[B]) = \text{Det}[B] \text{Tr}(d[B].[B^{-1}])$$

$$d[B].[B^{-1}] = [D] + [B].[D].[B^{-1}] + [w] - [B].[w].[B^{-1}]$$



en notation indicielle on écrit :

$$dB_{ik} \cdot B_{kj}^{-1} = D_{ij} + B_{ik} D_{kl} B_{lj}^{-1} + w_{ij} - B_{ik} w_{kl} B_{lj}^{-1}$$

$$\text{Tr}(d[B] \cdot [B]^{-1}) = dB_{ij} B_{ji}^{-1} = D_{ii} + B_{ik} D_{kl} B_{li}^{-1} + w_{ii} - B_{ik} w_{kl} B_{li}^{-1}$$

$$\text{Tr}(d[B] \cdot [B]^{-1}) = D_{ii} + D_{kk} + w_{ii} - w_{kk} = 2\text{Tr}[B]$$

$$dI_3 = 2I_3 \text{Tr}[B]$$

$$dI_3 = 2I_3 [B] : [I]$$

# RESUME

L'étude des mécanismes, du comportement et de la synthèse des polymères est aujourd'hui largement abordée. Dans notre étude, nous nous intéressons aux mélanges de matériaux hyper - élastiques en particulier les caoutchoucs. Par une méthode numérique, nous donnons les états de contraintes et de déformations, locaux et globaux dans le mélange.

Dans le but de déterminer les propriétés d'un mélange de caoutchouc, on peut soit fabriquer et tester des éprouvettes sous diverses sollicitations, ce qui est long et onéreux, soit élaborer un outil de simulation de tous ces tests dans un but de gain en temps et en coûts. Il s'agit donc pour nous de modéliser dans un outil de simulation, le comportement mécanique du mélange de caoutchoucs à partir des propriétés mécaniques de ses constituants. Nos travaux se font donc essentiellement sur trois fronts :

1- Rechercher une loi de comportement hyper - élastique qui approche au mieux les résultats expérimentaux. Nous-nous basons ici sur les lois de Mooney - Rivlin et d'Ogden - Swanson pour obtenir une forme particulière de la loi de comportement en grandes déformations.

2- Mettre en place des techniques d'homogénéisation pour caractériser le mélange. Nous avons utilisé la méthode auto cohérente mono-site. Nous prenons également en considération une interface fine entre les constituants du mélange.

3- Prendre en compte le changement de forme et d'orientation des constituants car il s'agit de grandes déformations.

Ces trois aspects du problème sont introduits dans un programme numérique qui génère les champs de contraintes et de déformations "microscopiques" et "macroscopiques" dans le mélange et également l'évolution de forme des constituants. Nous interprétons ensuite ses résultats sous diverses influences.

Notre étude se limite aux matériaux hyper - élastiques supposés « granulaires » (élasticité non linéaire en grandes déformations). Dans cette étude, nous ne prenons en compte, ni le caractère visqueux, ni les phénomènes d'hystérésis du caoutchouc.

The study of the mechanisms, the behavior and the synthesis of polymers is largely approached today. In our study, we are interested in the hyperelastic materials blends especially rubbers. By a numerical method, we give the global and local stress and strain states, in the blend.

With an aim of determining the properties of a rubber blend, one can either manufacture and test tubes under various loading, which is long and expensive, or work out a tool for simulation of all these tests with an aim of saving time and costs. It is thus a question for us of modelling the mechanical behavior of the rubbers blend knowing the mechanical properties of its components. Our work is thus concern by :

1 / seek a hyperelastic law of behavior which approaches the experimental results as well as possible. We base here on the laws of Mooney - Rivlin and of Ogden - Swanson to obtain a particular form of the law of behavior in larges deformations.

2 / set up of homogenisation technics to characterize the blend. We used the self-consistent method. We also consider a fine interface between the components of the blend.

3 / considering the form and orientation changing of the components because they are largely deformed.

These three aspects of the problem are introduced into a numerical program which generates microscopic and macroscopic deformations and stress fields the in the blend and also the form evolution of the components. We then interpret its results under various loading.

Our study is limited to the hyperelastic materials supposed "granular" (nonlinear elasticity in larges deformations). In this study, we consider neither the viscous character, nor the hysteresis phenomena of rubber.