



HAL
open science

Écoulements diphasiques en milieux poreux : modèle de ménisque

Irina Panfilova

► **To cite this version:**

Irina Panfilova. Écoulements diphasiques en milieux poreux : modèle de ménisque. Autre. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2003. Français. NNT : 2003INPL059N . tel-01749712

HAL Id: tel-01749712

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749712>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

École Nationale Supérieure de Géologie de Nancy
Laboratoire Environnement, Géomécanique & Ouvrages
École Doctorale RP2E

(T) 2003 PANFILOVA I.

THÈSE

présentée en vue pour obtention du grade de :

DOCTEUR DE L'I.N.P.L.

spécialité : **Génie civil – Hydrosystèmes - Géotechnique**

par :

Irina PANFILOVA

**ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES EN MILIEUX
POREUX : MODÈLE DE MÉNISQUE**

Soutenue publiquement le 15 octobre 2003 devant la Commission d'Examen
composé de :

Président : ADLER Pierre M.
Rapporteurs : MARLE Charles-Michel
QUINTARD Michel
Examineur : BRANCHER Jean-Pierre
Directeur de thèse : BUÈS Michel
Co-Directeur de thèse : PANFILOV Mikhail

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

AVANT PROPOS

Les premiers pas de la recherche qui fait l'objet de ce mémoire de thèse ont été démarrés à Moscou, à l'Oil & Gas Research Institute de l'Académie des Sciences. Cette période a été essentiellement consacrée à la création d'un simulateur numérique du type "réseaux capillaires", qui, suivant les objectifs ciblés à cette époque, aurait dû entrer en concurrence avec des produits du même genre développés de par le monde. Plus tard, on a remarqué, grâce à l'analyse de multiples simulations, que le problème de la création d'un simulateur "réseaux" met en évidence un aspect beaucoup plus important scientifiquement. La création d'un nouveau modèle mathématique décrivant les écoulements diphasiques devrait être basée sur des principes physiques non classiques. Ce travail a été finalisé à Nancy, au Laboratoire Environnement, Géomécanique & Ouvrages de l'École Nationale Supérieure de Géologie.

Je remercie sincèrement Monsieur Michel Buès, Professeur de l'Institut National Polytechnique de Lorraine et Directeur de thèse, qui m'a invitée à travailler dans son équipe et m'a aidée à réaliser cette recherche. Sans son aide permanente, sans ses conseils avisés, sans ses connaissances scientifiques qui m'ont guidée dans la résolution de quelques problèmes, sans ses efforts titanesques pour la rédaction du texte (y compris du français), cette thèse n'aurait, peut être, pas vu le jour.

Je remercie Madame Françoise Homand, Directeur du LAEGO, de m'avoir accueillie et offert de bonnes conditions de travail dans son laboratoire.

Je remercie Monsieur Jean-Paul Tisot, Directeur de l'École Nationale Supérieure de Géologie de l'INPL, pour sa disponibilité et son soutien dès mon arrivée à Nancy.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Michel Panfilov, Professeur de l'Institut National Polytechnique de Lorraine et Co-directeur de thèse, avec qui j'ai fait mes premiers pas en science et qui m'a toujours guidée par ses critiques constructives.

J'exprime ma gratitude à Messieurs Charles-Michel Marle, Professeur à l'Université Paris-6, et Michel Quintard, Directeur de Recherche à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être les rapporteurs de ce mémoire ; ainsi qu'à Messieurs Pierre Adler, Directeur de Recherche à l'Institut de Physique du Globe à Paris, et Jean-Pierre Brancher, Professeur de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, pour avoir accepté de juger mon travail en participant au jury.

Je remercie cordialement tout le personnel du Laboratoire Environnement, Géomécanique & Ouvrages pour leur accueil chaleureux et leurs encouragements.

Merci aussi à ma famille, pour sa patience et son soutien tout au long de mes études.

*« Just as I succeeded in finding all the answers,
all the questions changed »*

Paulo Coelho. Maktub.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	10
1. ANALYSE CRITIQUE DES MACRO- ET MICRO-MODÈLES D'ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES EN MILIEUX POREUX	12
1.1. MODÈLE CLASSIQUE D'ÉCOULEMENT DIPHASIQUE EN MILIEUX POREUX	13
1.1.1. Formulation du modèle de Buckley-Leverett	13
1.1.2. Absence de la structure interne de répartition des phases	14
1.1.3. Description insuffisante de la mouillabilité	14
1.1.4. Conditions aux interfaces	16
1.1.5. Dispersion et capillarité	17
1.1.6. Absence de discontinuités dans le cas de pression capillaire forte ...	17
1.1.7. Caractère scalaire de la capillarité	17
1.2. MODÈLES ALTERNATIFS D'ÉCOULEMENT DIPHASIQUE EN MILIEUX POREUX	18
1.2.1. Modèles des perméabilités croisées	18
1.2.2. Modèles de non équilibre	19
1.2.3. Modèles d'échange	20
1.2.4. Modèles d'échange différentiel	21
1.2.5. Modèles avec transport d'interfaces	21
1.3. MICRO MODÈLES D'ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES EN MILIEUX POREUX	23
1.3.1. Principes de construction des modèles microscopiques	23
1.3.2. Modèles de percolation classique	24
1.3.3. Modèles de percolation connectée	25
1.3.4. Modèles de percolation connectée sans temps.....	26
1.3.5. Modèles de percolation d'invasion	26
1.3.6. Modèles de percolation d'invasion avec mémoire	27
1.3.7. Modèles de croissance des fractals	28
1.3.8. Modèles d'arborescences	29
1.3.9. Modèles dynamiques de réseaux capillaires	29
Conclusions	30
2. « MENISCUS MODEL » POUR DES ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES EN MILIEUX POREUX	32
2.1. RÉPARTITION DE PHASES DANS UN PROCESSUS DE DÉPLACEMENT	33
2.1.1. Structure de répartition des phases et modèle macroscopique d'écoulement	33

2.1.2.	Configuration du ménisque pour le processus de déplacement	34
2.2.	RÉSULTATS ATTENDUS	36
2.2.1.	Imbibition capillaire dans un milieu homogène	36
2.2.2.	Imbibition capillaire dans un milieu hétérogène	36
2.2.3.	Déplacement sans forces capillaires	37
2.2.4.	Sur la loi « racine de temps » pour le front de propagation	37
2.2.5.	Dimension de la zone d'imbibition	38
	Conclusion	38
2.3.	PROPRIÉTÉS DU CHAMP DE MÉNISQUES	39
2.3.1.	Passage du ménisque dans un pore	39
2.3.2.	Passage de ménisque à travers un nœud. « Mécanisme de compensation »	40
2.3.3.	Sur un champ répétitif de ménisques	42
2.3.4.	Formation d'un champ répétitif de ménisques. « Mécanisme de duplication »	43
2.3.5.	Conservation du volume du fluide total dans un champ répétitif de ménisques	45
	Conclusions	45
2.4.	HOMOGÉNÉISATION DU CHAMP RÉPÉTITIF DE MÉNISQUES	46
2.4.1.	Construction géométrique du champ répétitif	46
2.4.2.	Homogénéisation de l'équation (2.4.3)	47
2.4.3.	Interprétation physique de l'équation homogénéisée. Capillarité vectorielle	48
2.4.4.	Sur l'homogénéisation de la configuration entière de ménisque	49
2.5.	APPROCHE PHÉNOMÉNOLOGIQUE DE CONSTRUCTION DU MODÈLE DES MÉNISQUES	51
2.5.1.	M -continuum	51
2.5.2.	Equations phénoménologiques de l'écoulement pour une configuration de ménisques	52
2.5.3.	Autres formes du modèle phénoménologique	54
2.5.4.	Relations de fermeture pour s^I	55
2.5.5.	Relations de fermeture pour η_c	56
2.5.6.	Modèle de ménisque fermé	57
2.5.7.	Transformation en une équation de transport de saturation	58
2.5.8.	Modèle réduit	59
2.5.9.	Cas monodimensionnel	60
2.5.10.	Effets qualitatifs	62
	Conclusions	63
2.6.	AUTRES VERSIONS DU MODÈLE DE MÉNISQUE	65
2.6.1.	Modèle de ménisque limite	65

2.6.2.	Propriétés du modèle limite	66
2.6.3.	Modèle de ménisque dégénéré : les bases	66
2.6.4.	Modèle de ménisque dégénéré : forme finale	69
3.	DÉVELOPPEMENT DU MICRO-MODÈLE NUMÉRIQUE À DEUX ÉCHELLES POUR DES ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES EN RÉSEaux CAPILLAIRES	71
3.1.	GÉOMÉTRIE DU RÉSEAU CAPILLAIRE	73
3.1.1.	Squelette du réseau	73
3.1.2.	Rayons et longueurs de pores	74
3.1.3.	Nombre de coordination du réseau	75
3.1.4.	Contrainte entre les paramètres du réseau	75
3.1.5.	Propriétés aléatoires du champ des rayons de pores	76
3.1.6.	Conditions d'équivalence statistique du champ des rayons de pores	77
3.1.7.	Génération d'une distribution donnée des rayons de pores	78
3.2.	MODÈLE HYDRODYNAMIQUE EN RÉSEAU CAPILLAIRE	79
3.2.1.	Schématisation de l'écoulement dans le réseau	79
3.2.2.	Paramètres du processus	80
3.2.3.	Équation de mouvement de ménisque dans un pore	81
3.2.4.	Équations du champ global de pression	83
3.2.5.	Calcul numérique du champ global de pression	84
3.3.	PASSAGE DES MÉNISQUES À TRAVERS LES NŒUDS	86
3.3.1.	Conditions de passage d'un ménisque à travers un nœud	86
3.3.2.	Algorithme de vérification de la connexion du ménisque avec la sortie	87
3.3.3.	Procédure numérique de passage du ménisque à travers un nœud	88
3.4.	ORGANISATION GLOBALE DES CALCULS	89
3.4.1.	Décomposition locale du problème	89
3.4.2.	Choix du pas de temps	89
3.4.3.	Algorithme global des calculs	90
3.5.	MÉTHODE À DEUX ÉCHELLES D'ORDRE k	91
3.5.1.	Principe de la méthode	91
3.5.2.	Méthode d'ordre k et formation de pièges	92
4.	RÉSULTATS DE SIMULATION EN RÉSEaux CAPILLAIRES. RELATIONS DE FERMETURE	94
4.1.	STRUCTURES DE RÉPARTITION DES PHASES EN MILIEUX POREUX	96

4.1.1.	Structures des clusters de phase pour des grands Ca	96
4.1.2.	Structures des clusters pour des faibles valeurs de Ca	100
4.1.3.	Préférence sur le remplissage des pores. <i>Acceptance profile</i>	100
4.1.4.	Influence des viscosités sur l' <i>acceptance profile</i>	102
4.2.	LOIS STATISTIQUES DE PIÉGEAGE	104
4.2.1.	Structures des pièges de la phase déplacée pour des $Ca \gg 1$ et des $\bar{\mu} \ll 1$	104
4.2.2.	Structures des pièges pour des $Ca \gg 1$ et des $\bar{\mu} \sim 1$	105
4.2.3.	Structures des pièges pour des $Ca \gg 1$ et des $\bar{\mu} \gg 1$	105
4.2.4.	Structures des pièges pour des $Ca \ll 1$	106
4.2.5.	Distribution des tailles des pièges	106
4.2.6.	Effet d'orientation	108
4.3.	MODÈLE DE DOUBLE-RÉSEAU POUR L'ÉTUDE DU PIÉGEAGE	109
4.3.1.	Géométrie du double-réseau	109
4.3.2.	Saturation piégée	110
4.3.3.	Régime de déplacement complet	113
4.4.	VÉRIFICATION DU MODÈLE CLASSIQUE DE BUCKLEY-LEVERETT	114
4.4.1.	Perméabilités relatives	114
4.4.2.	Méthode de détermination des perméabilités relatives (PR)	114
4.4.3.	Résultats du calcul des perméabilités relatives	116
4.4.4.	Effet de la saturation piégée sur les perméabilités relatives	117
4.4.5.	Effet du $\bar{\mu}$ et du Ca sur les perméabilités relatives	118
4.4.6.	Limite inférieure d'influence hydrodynamique sur les perméabilités relatives	119
4.4.7.	Domaine de validité du modèle classique détecté par les simulations	119
4.4.8.	Diagrammes connus des régimes d'écoulement	121
4.4.9.	Diagramme superposé des régimes d'écoulement	123
4.5.	VÉRIFICATION DU MODÈLE DE NON ÉQUILIBRE	125
4.5.1.	Définition des perméabilités relatives de non équilibre	125
4.5.2.	Résultat théorique sur le processus de relaxation du champ de saturation	126
4.5.3.	Dérivation d'une relation théorique pour le temps de relaxation des perméabilités relatives	127
4.5.4.	Analyse du temps de relaxation théorique des perméabilités relatives	128
4.5.5.	Résultats numériques pour le temps de relaxation dans un réseau capillaire	129
4.6.	VÉRIFICATION DU MODÈLE DE PERMÉABILITÉS CROISÉES	133
4.6.1.	Détermination numérique des perméabilités croisées	133

4.6.2.	Résultats de calcul des perméabilités croisées	135
4.6.3.	Influence du Ca et du $\bar{\mu}$ sur les perméabilités croisées	135
4.6.4.	Relations approximatives pour les perméabilités croisées	138
4.6.5.	Comparaison avec des données expérimentales	139
	Conclusions	139
4.7.	RELATIONS DE FERMETURE POUR LE <i>MENISCUS MODEL</i>	142
5.	ANALYSE QUALITATIVE DU MODÈLE DE MÉNISQUE : SOLUTIONS ANALYTIQUES	144
5.1.	FORMULATION DU PROBLÈME DE DÉPLACEMENT	145
5.1.1.	Problème monodimensionnel	145
5.1.2.	Propriétés du flux capillaire $F(s)$	146
5.2.	IMBIBITION CAPILLAIRE ($Ca \rightarrow 0$)	147
5.2.1.	Solution formelle pour $\bar{\mu} \sim 1$	147
5.2.2.	Solution discontinue	148
5.2.3.	Justification de la solution obtenue	149
5.3.	DÉPLACEMENT PAR LA PHASE MOUILLANTE	151
5.3.1.	Propriétés du flux sommé $G(s)$	151
5.3.2.	Solution du problème de déplacement pour des Ca modérés et des $\bar{\mu}$ grands	151
5.3.3.	Justification de la solution obtenue	154
5.3.4.	Solution du problème de déplacement pour des Ca modérés et des $\bar{\mu}$ petits	154
5.4.	DÉPLACEMENT PAR LA PHASE NON MOUILLANTE	156
5.4.1.	Propriétés du flux sommé $G(s)$	156
5.4.2.	Solution du problème de déplacement	156
	Conclusions	158
5.5.	COMPARAISON AVEC DES SIMULATIONS EN RESÉAUX CAPILLAIRES	159
6.	MODÈLE DE MÉNISQUE : SIMULATIONS NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES 2D ET 3D	161
6.1.	MÉTHODE NUMÉRIQUE DFP : DIFFÉRENCES FINIES – PERCOLATION	162
6.1.1.	Modèle à calculer	162
6.1.2.	Principe de la méthode : remplacement de l'équation de transport par une équation de cinématique du front	163
6.1.3.	Méthode numérique	164
6.1.4.	Discretisation du processus d'avancée du front	165

6.1.5.	Calcul de type percolation pour l'avancée des fronts locaux	166
6.1.6.	Algorithme final de simulations	167
6.1.7.	Combinaison de la méthode des différences finies et de percolation	168
6.2.	APPLICATION DE LA MÉTHODE DFP AU PROBLÈME DU DNAPL DANS UNE NAPPE	169
6.2.1.	Sur la modélisation numérique d'un écoulement instable	169
6.2.2.	Description physique du système	170
6.2.3.	Modèle d'écoulement	171
6.2.4.	Formulation du problème du DNAPL	172
6.3.	ESTIMATIONS ANALYTIQUES	174
6.3.1.	Existence d'une pénétration partielle	174
6.3.2.	Estimation d'une pénétration partielle dans le cadre du modèle classique	175
6.3.3.	Test numérique de la solution	176
6.4.	SOLUTION ET ANALYSE QUALITATIVE DU PROCESSUS	177
6.4.1.	Régimes de propagation du DNAPL	177
6.4.2.	Régimes de pénétration complète	178
6.4.3.	Régimes de pénétration incomplète	178
6.4.4.	Régime critique de pénétration partielle instable	180
6.4.5.	Régimes d'étalement	181
	Conclusions	183
CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVE ...		184
	Références et notations	187
	Production scientifique	197

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les études sur les écoulements diphasiques en milieux poreux sont essentiellement initiées par les besoins industriels dans les domaines de l'ingénierie pétrolière, l'hydrologie des aquifères, les réacteurs chimiques, les processus électriques dans les électrodes poreux ... Bien que la physique des processus associés à un écoulement diphasique soit assez bien comprise, sa modélisation mathématique reste un point faible des théories actuelles, compte tenu de la complexité de la géométrie de l'espace poreux, des distributions spatiales de phases fortement variables, ... Le modèle prévalant, connu sous le nom de modèle de Buckley-Leverett, représente une description semi-empirique basée sur un minimum d'informations sur les mécanismes ayant lieu à l'échelle d'un pore. Bien que ce modèle soit largement utilisé dans les applications, il a fait l'objet de critiques multiples dans la littérature scientifique (cf. chapitre 1 - Revue sur les modèles diphasiques). Cependant les tentatives de développer un modèle théorique plus adéquat, régulier et justifié, basé par exemple sur une procédure de changement d'échelle (à partir de l'échelle de pore vers un VER) n'ont pas eu de succès sauf dans quelques géométries très particulières de l'écoulement. La non « homogénéisabilité » est devenu le problème crucial de la théorie des écoulements diphasiques en milieux poreux. La cause de ce problème est cachée dans la description microscopique du système qui inclut non seulement les équations de Navier-Stokes pour chaque phase, mais un nombre de règles logiques de passage des interfaces entre les phases à travers les nœuds. L'exemple typique d'une règle de ce genre est la suivante : "la phase déplaçante ne peut pas entrer dans un pore, si la phase déplacée occupant ce pore n'a pas de liaison continue avec la sortie du milieu". Ces règles, formalisées par des inégalités, portent un caractère non local et donc représentent l'obstacle essentiel de l'application des méthodes d'homogénéisation.

Dans ce présent travail, en acceptant la non homogénéisabilité d'un système dynamique diphasique en milieu poreux comme un fait imposé, on a développé une approche différente de construction d'un modèle théorique. Cette approche est phénoménologique, basée sur l'hypothèse de l'existence de plusieurs continuums représentant les phases réelles, mais ayant des propriétés non classiques qui reflètent la structure interne réelle d'un écoulement diphasique. Ainsi, la structure interne de l'écoulement diphasique est prise en considération, ce qui représente une avancée par rapport au modèle classique qui est basé sur l'hypothèse d'une absence de toute structure interne dans le fluide.

Dans le spectre des modèles différents, autres que celui classique, la différence de notre approche peut être expliquée de la façon suivante. Dans le modèle le plus simple, deux continuums correspondant à chaque phase sont introduits. Dans les modèles plus avancés (Hassanizadeh & Grey, Marle), un troisième continuum est associé à une interface dispersée dans l'espace. En prenant en compte que le concept de continuum donne un grand degré de liberté, contrairement à une interface qui ne peut pas être indépendante des deux phases, nous avons amélioré cette idée du troisième continuum en lui attribuant les propriétés d'un ensemble unique formé des interfaces dispersées (ménisques) et de deux phases associées. Ainsi, nous introduisons deux continuums représentant chaque phase individuelle et un troisième continuum spécial ("Meniscus-continuum") représentant un ensemble formé par les deux phases et les interfaces, au lieu du continuum associé à l'interface unique.

Le résultat essentiel de cette approche consiste en l'apparition d'une capillarité vectorielle dans le modèle macroscopique, au lieu du concept classique de la capillarité thermodynamique. Autrement dit, dans le modèle développé, la capillarité peut accélérer ou

décélérer les phases, tandis que dans le modèle classique la capillarité n'influence que la différence de pression entre les phases.

L'analyse de différents modèles d'écoulements diphasiques en milieux poreux est donné dans le chapitre 1. On y examine plusieurs modèles alternatifs au modèle classique en mettant en évidence leurs avantages et leurs inconvénients.

Le nouveau modèle diphasique est construit dans le chapitre 2. La description brève de l'approche développée a été présentée ci-dessus. Ce nouveau modèle prend en compte l'existence d'une structure typique de la distribution des phases dans les pores, qui a la forme d'un champ répétitif de ménisques mobiles. La présence de ces interfaces conduit à un terme supplémentaire, dans les équations du bilan de quantité de mouvement, qui introduit le champ vectoriel de forces capillaires. Ainsi, l'introduction d'une structure diphasique change le type des équations mathématiques de l'écoulement. Pour comprendre les propriétés du Meniscus-continuum qui est à la base du modèle, nous avons effectué des simulations numériques en réseaux capillaires. Les mêmes simulations ont donné des relations de fermeture pour le modèle phénoménologique.

Le simulateur numérique modélisant un écoulement diphasique 3D en réseau capillaire est développé dans le chapitre 3. Il est comparable à des algorithmes de type automates cellulaires (modèles de percolation), mais est beaucoup plus compliqué en terme de réalisation. Cet algorithme est basé sur une description physique adéquate de la dynamique réelle d'écoulement en réseaux de tubes capillaires.

Dans le chapitre 4, ce simulateur "réseaux" a été utilisé en tant qu'outil remplaçant les expérimentations de laboratoire pour établir les limites de validité de différents modèles diphasiques existants, vérifier la validité du modèle proposé et obtenir des relations de fermeture.

Des solutions analytiques pour les écoulements mono-dimensionnels dans le cadre du modèle proposé sont construites dans le chapitre 5, manifestant des structures non classiques formées de double fronts ou de fronts à contre-courant. Cette analyse est basée sur la méthode des caractéristiques et la technique graphique standard développée pour des équations différentielles hyperboliques non linéaires.

Enfin, pour appliquer le modèle proposé à des problèmes 2D ou 3D, un algorithme numérique combiné « différences finies – percolation » a été développé dans le chapitre 6. Son application à un problème de pénétration d'un DNAPL dans une nappe libre saturée d'un fluide de mouillabilité différente par rapport au DANPL a mis en évidence les différents régimes de pénétration du fluide. Une classification des régimes est donnée. Un régime instable provoquant la formation de « fingers » est détecté.

Chapitre 1

ANALYSE CRITIQUE DES MACRO- ET MICRO- MODÈLES D'ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES EN MILIEUX POREUX

1.1. MODÈLE CLASSIQUE D'ÉCOULEMENT DIPHASIQUE EN MILIEUX POREUX

1.1.1. FORMULATION DU MODÈLE DE BUCKLEY-LEVERETT

L'approche classique de la description d'un écoulement diphasique en milieu poreux se base sur l'application de la loi de Darcy pour chaque phase avec des facteurs adimensionnels k_α et k_β devant la perméabilité, appelés perméabilités relatives des phases, qui tiennent compte de la réduction de la section de passage due à la présence de la seconde phase. Pour des liquides incompressibles, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ont la forme :

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \vec{v}_\alpha = 0 \quad -\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \vec{v}_\beta = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\vec{v}_\alpha = -\frac{Kk_\alpha}{\mu_\alpha} \text{grad } P_\alpha \quad \vec{v}_\beta = -\frac{Kk_\beta}{\mu_\beta} \text{grad } P_\beta \quad (1.1.2)$$

$$P_\beta - P_\alpha = P_c(s) = \frac{\sigma \text{Cos } \theta}{\sqrt{K/\phi}} J(s) \quad (1.1.3)$$

où α et β sont les indices des phases ; s est la saturation de la phase α ; \vec{v} est la vitesse de l'écoulement en milieu poreux ; K est la perméabilité, ϕ est la porosité ; μ est la viscosité dynamique ; P est la pression de phase ; σ est la tension superficielle ; θ est l'angle de contact ; $P_c(s)$ est la pression capillaire macroscopique ; \vec{x} est le vecteur des coordonnées spatiales ; t est le temps. La phase α est la plus mouillante (e.g. : eau).

Les perméabilités relatives $k_\alpha(s)$, $k_\beta(s)$ et la pression capillaire adimensionnelle $J(s)$ sont des fonctions de la saturation seule. Ces fonctions sont empiriques.

En injectant les expressions des vitesses \vec{v}_α et \vec{v}_β dans (1.1.1), on obtient le système suivant par rapport à s et $P=P_\alpha$:

$$\text{div}(\lambda \text{ grad } P) = -\text{div}(\lambda_\beta \text{ grad } P_c) \quad (1.1.4a)$$

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} - (\lambda \text{ grad } P + \lambda_\beta \text{ grad } P_c) \text{ grad } F = -\text{div}(\lambda_\beta F \text{ grad } P_c) \quad (1.1.4b)$$

$$\lambda_\alpha(s) = Kk_\alpha(s)/\mu_\alpha, \quad \lambda_\beta(s) = Kk_\beta(s)/\mu_\beta, \quad \lambda = \lambda_\alpha + \lambda_\beta, \quad F(s) \equiv \lambda_\alpha/\lambda$$

La fonction $F(s)$ a le sens d'une fraction volumique de la phase α dans le flux total et s'appelle la fonction *factional flow*.

Dans le cas monodimensionnel, on a :

$$\lambda(s) \frac{\partial P}{\partial x} = -\lambda_\beta(s) \frac{\partial P_c}{\partial x} - U(t), \quad \lambda(s) \frac{\partial P}{\partial x} = -\lambda_\beta(s) \frac{\partial P_c}{\partial x} - U(t) \quad (1.1.5)$$

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + U(t) \frac{\partial F(s)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_\beta(s) F(s) \frac{\partial P_c(s)}{\partial x} \right) \quad (1.1.6)$$

où $U(t)$ a le sens de la vitesse totale des deux phases.

La relation (1.1.3) entre la pression capillaire macroscopique et les pressions de phase s'écrit par analogie avec l'équation microscopique de Laplace pour la pression capillaire sur un ménisque individuel. Malgré l'analogie formelle, cette relation est insuffisamment argumentée et crée quelques problèmes et de nombreux inconvénients qui seront discutés dans les paragraphes suivants.

1.1.2. ABSENCE DE STRUCTURE INTERNE DE RÉPARTITION DES PHASES

La théorie classique des écoulements diphasiques en milieux poreux, étant phénoménologique, est basée sur l'hypothèse d'absence de toute structure interne dans le fluide. Les deux phases se croisent en tant que deux continuums homogènes en chaque point de l'espace. Le fluide diphasique « phénoménologique » est donc homogène. Cela signifie, en termes de paramètre de structure, que la taille des hétérogénéités du fluide est nulle. Ainsi, les paramètres hydrodynamiques du système (perméabilités relatives, pressions capillaires) ne dépendent que de la saturation. Pour que le modèle phénoménologique soit plus proche de la réalité, les fonctions hydrodynamiques de saturation sont déterminées (expérimentalement ou théoriquement) à partir d'écoulements qui ont une structure interne. Les perméabilités relatives et pressions capillaires standards correspondent à un écoulement diphasique stationnaire dont la structure a la forme d'un faisceau de veines indépendantes de chaque phase. Etant isolées par des parois des canaux poreux, ces veines peuvent n'avoir aucun contact entre-elles. Cette approche qui offre un modèle d'écoulement sans structure, mais avec des paramètres hydrodynamiques tenant compte d'une structure de fluide, s'applique actuellement sous la forme du modèle classique de Buckley-Leverett (1942).

Cependant, cette approche reste profondément contradictoire. Premièrement, on suppose que l'apparition d'une structure de fluide ne change pas le modèle d'écoulement (seuls les paramètres dépendent de la structure). Nous montrerons (chapitre 2) que l'introduction d'une structure change le type des équations mathématiques de l'écoulement et donc de l'hydrodynamique des « veines ». Deuxièmement, une structure étant introduite dans les paramètres hydrodynamiques, ces paramètres ne sont plus fonction que d'une seule saturation. Ils auraient dû dépendre aussi du paramètre de structure du fluide, ce qui n'est pas le cas. Troisièmement, la structure qui est introduite dans les paramètres hydrodynamiques (un faisceau de veines liquides indépendantes) est très particulière et ne correspond pas à l'écoulement qui attire une attention majeure des chercheurs – déplacement d'un fluide par un autre.

1.1.3. DESCRIPTION INSUFFISANTE DE LA MOUILLABILITÉ

Ecrivons l'équation (1.1.6) de transport de la saturation 1D (équation le Rappoport-Leace) :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial F(s)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\lambda F(s) \frac{\partial P_c(s)}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x} \right) \quad (1.1.7)$$

avec des notations classiques.

Cette équation n'inclut pas la fonction de la pression capillaire $P_c(s)$, mais seulement sa dérivée $dP_c(s)/ds$, qui est seule responsable des effets de mouillabilité.

D'autre part, la description macroscopique suffisante de la mouillabilité est l'indice de mouillabilité défini comme le rapport des intégrales de la fonction de pression capillaire P_c pour le drainage et l'imbibition (Fig. 1.1.1).

$$W \equiv \frac{A^I}{A^{II}} \equiv \frac{\int_0^1 P_c^I(s) ds}{\int_0^1 P_c^{II}(s) ds} \quad (1.1.8)$$

où P_c^I correspond au drainage primaire, et $P_c^{II}(s)$ correspond à l'imbibition. Les domaines A^I et A^{II} sont montrés sur la Fig. 1.1.1.

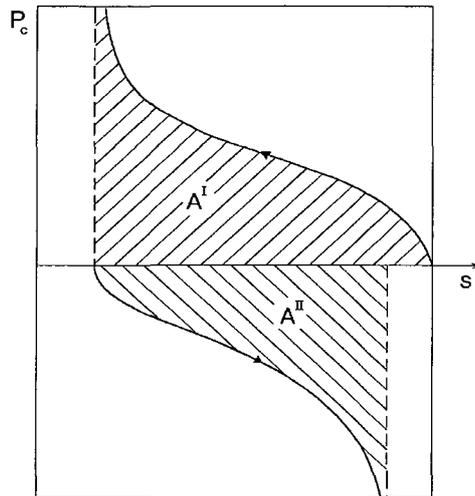


Fig. 1.1.1. Courbes de la pression capillaire au drainage I et à l'imbibition II

L'intégrale de la courbe de pression capillaire a un sens physique clair : c'est un travail effectué par des forces capillaires lors du remplissage du milieu par la phase mouillante (imbibition) ou non mouillante (drainage).

Deux courbes $P_c(s)$ parallèles, obtenues par un déplacement selon l'axe vertical, ont des dérivées identiques en chaque point mais des intégrales différentes (Fig. 1.1.2 a et 1.1.2 b). Le milieu sur la Fig. 1.1.2 a est non mouillable par rapport à la phase entrante (le travail de drainage est beaucoup plus petit), tandis que le milieu sur la Fig. 1.1.2 b est mouillable. Néanmoins, ces deux configurations sont absolument équivalentes pour le modèle (1.1.7). En outre, pour l'équation (1.1.7), le milieu est de mouillabilité neutre par rapport aux deux fluides.

En guise de conclusion, le modèle classique (1.1.7) n'est pas suffisant pour décrire la mouillabilité.

1.1.4. CONDITIONS AUX INTERFACES

Soit Γ la surface de discontinuité en perméabilité du milieu. En particulier, l'interface Γ peut être une surface de contact du milieu poreux avec l'espace libre. Dans le cadre du modèle classique, une condition impérative sur Γ traduit la continuité de la pression capillaire :

$$\left[P_c \right]_{\Gamma} = 0 \quad (1.1.9)$$

qui résulte de la continuité des pressions dans chaque phase et de la définition de la pression capillaire comme la différence des pressions entre phases. La condition (1.1.9) définit de façon unique la liaison entre les saturations de chaque côté de la surface Γ .

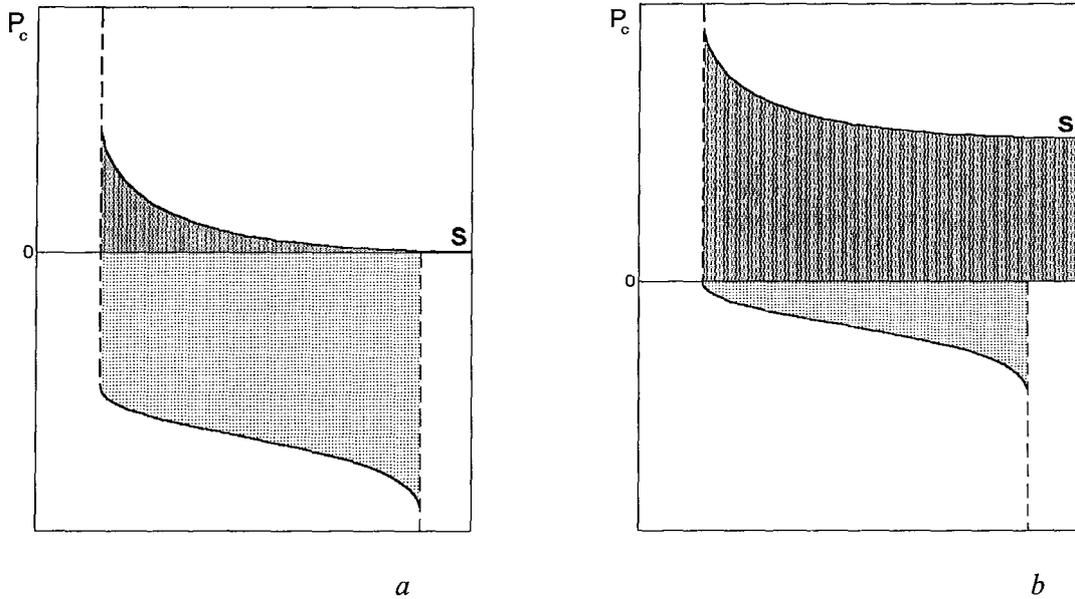


Fig. 1.1.2. Courbes d'imbibition et de drainage pour la phase non mouillante (a) et mouillante (b)

Le problème consiste à ce que la condition (1.1.9) soit ou reste invariante par rapport à la vitesse d'écoulement (ou par rapport au nombre capillaire). Le nombre capillaire est défini comme le rapport des forces hydrodynamiques et capillaires : $Ca = v\mu_2 / \sigma \cos\theta$, où v est la vitesse caractéristique de déplacement, σ est la tension superficielle, θ est l'angle de contact. Cependant, l'augmentation de la vitesse de l'écoulement réduit le rôle des forces capillaires, et donc les saturations à l'interface deviennent indépendantes de $P_c(s)$. Ainsi, la condition à l'interface doit dépendre du nombre capillaire. Ce résultat ne ressort pas de l'équation (1.1.9).

Ce problème devient particulièrement important dans le cas où Γ représente le contact entre le milieu poreux et l'espace libre. La condition (1.9) traduit donc la condition à la limite imposée à la sortie du milieu poreux. Les difficultés de formulation de cette condition sont bien connues. Shvidler et Levy (1970) proposent d'utiliser cette condition uniquement pour le cas de grandes forces capillaires, et de l'ignorer quand les forces capillaires sont petites. Quoique cette suggestion soit logique, elle est en contradiction avec (1.1.9) qui s'applique pour toutes les valeurs de pression capillaire.

1.1.5. DISPERSION ET CAPILLARITÉ

Dans le modèle classique (1.1.7), le terme du membre de droite décrit l'effet de dissipation du champ de saturation en milieu micro-hétérogène. Formellement, ce n'est qu'une diffusion non linéaire. Le coefficient de cette diffusion est proportionnel à la dérivée de la pression capillaire, c'est-à-dire que l'effet de dissipation est provoqué seulement par les forces capillaires. En absence de forces capillaires, le modèle classique ne contient aucune dissipation de saturation. Ce résultat doit être remis en question car, en réalité, la dissipation est provoquée par des hétérogénéités (taille différente des pores), indépendamment de la pression capillaire. Cette dissipation est connue sous le terme de dispersion hydrodynamique Nikolaevskii (1959), ou dispersion de Taylor s'il s'agit d'un seul canal poreux (Taylor, 1953). La dispersion est décrite formellement par une équation de diffusion avec un coefficient de diffusion fonction de la vitesse de transport. Ainsi, le modèle classique (1.1.7) décrit l'effet de dispersion de façon incorrecte.

1.1.6. ABSENCE DE DISCONTINUITÉS DANS LE CAS DE PRESSION CAPILLAIRE FORTE

Supposons que le milieu poreux soit composé d'un faisceau de canaux capillaires identiques. Examinons l'imbibition de la phase mouillante. Il est évident qu'à l'échelle macroscopique la saturation se propagera sous forme d'une marche avec un front de déplacement qui coïncide avec la position de tous les ménisques. Autrement dit, dans un milieu micro-homogène, le modèle d'écoulement diphasique doit avoir une solution discontinue même dans le cas où les forces capillaires sont dominantes. Dans le cadre du modèle classique, ce phénomène ne peut se concevoir, car l'équation (1.1.7), étant parabolique, ne permet que des discontinuités de la dérivée.

Ainsi les équations correctes de transport de la saturation doivent plutôt être hyperboliques que paraboliques même quand les forces capillaires sont dominantes.

1.1.7. CARACTÈRE SCALAIRE DE LA CAPILLARITÉ

La pression capillaire, qui n'est que la différence de pressions entre phases, intervient dans le modèle classique sous forme scalaire ou thermodynamique. Pourtant, les forces capillaires ont une nature vectorielle et, étant appliquées à un ménisque mobile, peuvent freiner ou accélérer le mouvement des phases. Ainsi, le rôle de la force capillaire ne devrait pas se limiter à déterminer des différences de pressions entre phases, mais devrait entrer dans l'équation de la quantité de mouvement.

Quant à cette différence de pressions des phases macroscopiques, elle est loin d'être évidente. En effet, à l'échelle d'un pore la différence existe seulement à proximité de l'interface, dans une couche limite très étroite, qui ne contribue pas à la différence de pression intégrale.

1.2. MODÈLES ALTERNATIFS D'ÉCOULEMENT DIPHASIQUE EN MILIEUX POREUX

1.2.1. MODÈLES DES PERMÉABILITÉS CROISÉES

Une modification, la plus connue du modèle de Buckley-Leverett, est liée à l'introduction de termes croisés dans la loi de Darcy pour chaque phase. Ces termes expriment l'interaction mécanique entre deux phases (échange de quantité du mouvement), i.e. : une décélération ou une accélération d'une phase par rapport à l'autre.

Ce modèle a été proposé pour la première fois dans des travaux indépendants (Shvidler, 1961 ; Kurbanov, 1968 ; Raats, Klute, 1968). Dans ce modèle, la vitesse d'écoulement de la phase est proportionnelle aux gradients de pression dans les deux phases :

$$-\vec{V}_\alpha = \frac{K_{\alpha\alpha}}{\mu_\alpha} \text{grad } P_\alpha + \frac{K_{\alpha\beta}}{\mu_\beta} \text{grad } P_\beta \quad -\vec{V}_\beta = \frac{K_{\beta\beta}}{\mu_\beta} \text{grad } P_\beta + \frac{K_{\beta\alpha}}{\mu_\alpha} \text{grad } P_\alpha \quad (1.2.1)$$

$$P_\beta - P_\alpha = P_c(s)$$

où $K_{\alpha\beta}$ et $K_{\beta\alpha}$ sont des perméabilités croisées et sont toujours considérées comme des fonctions de la saturation seule.

Le modèle est caractérisé par une matrice où quatre fonctions des perméabilités de phase apparaissent, mais qui restaient indéfinies dans les papiers mentionnés. Cependant, la notion de la pression capillaire ne change pas. C'est toujours une fonction qui ne dépend que de la saturation.

La méthode de construction du modèle était purement heuristique. Plus tard, le modèle croisé a été obtenu par une approche phénoménologique dans Marle (1982), Marinbah et Lusternik (1985), Thigpen et Berryman (1985), Barci *et al.* (1990), Kalaydjian (1990) et Whitaker (1998).

Les deux termes de chacune des équations (1.2.1) représentent une relation linéaire d'Onsager de la thermodynamique de non équilibre entre les flux et les forces généralisées. Comme suite au principe de symétrie, on a montré que les perméabilités croisées étaient équivalentes ($K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$).

Une autre approche pour obtenir le modèle diphasique est celle du changement d'échelle et a été appliquée par Whitaker (1998). Le modèle croisé a été déduit comme le résultat du « *volume averaging* » de l'écoulement de Stokes dans Whitaker (1986a). Chaque phase est supposée être continue. En outre, la répartition des phases dans l'espace poreux est telle que chaque pore contient chaque phase. Ainsi la configuration géométrique de la répartition de phases est du type « film ». Outre cela, on a montré que la pression capillaire macroscopique est une fonctionnelle non locale qui dépend explicitement de la saturation et des coordonnées spatiales.

Le même modèle croisé a été obtenu par la méthode d'homogénéisation asymptotique à double échelle des équations diphasiques de Stokes en milieu poreux périodique (Auriault,

Sanchez-Palencia; 1986). La répartition des phases est la même que dans Whitaker (1986b) : les phases sont en contact dans chaque pore (structure pelliculeuse) et l'interface entre les phases est quasiment indéformable. Le fait que la pression macroscopique soit une fonction de la saturation seule a été justifié explicitement. Cependant, on a montré que les perméabilités croisées $K_{\alpha\beta}$ et $K_{\beta\alpha}$ dépendent des viscosités et de la géométrie locale des pores.

Il est important de souligner que le modèle croisé, avec une pression capillaire classique (1.1.3), est le résultat d'une procédure rigoureuse de changement d'échelle, mais établi dans le cas d'une configuration microscopique stratifiée de répartition des phases : (i) chaque phase est continue et connectée dans l'espace poreux, (ii) l'interface entre les phases est présente dans chaque pore, (iii) l'interface est quasiment indéformable et (iv) l'écoulement de chaque phase peut être stationnaire à l'échelle microscopique. Il est évident que ces hypothèses sont conformes à une configuration d'un faisceau de jets, lorsque chaque phase forme ses propres jets continus groupés en un ensemble de jets stratifiés. Une configuration particulière de ce type est la configuration pelliculaire, formée par deux jets présents dans chaque pore : l'un formé par la phase mouillante sur les parois des pores (pellicule liquide), l'autre formé par le second fluide localisé au niveau du noyau du pore.

La forme des fonctions de perméabilités croisées versus la saturation a été obtenue par simulation numérique de l'écoulement de Stokes diphasique pelliculaire dans un pore par Kalaydjian *et al.* (1989) et par des travaux expérimentaux (Kalaydjian et Legait, 1987 et 1988 ; Rose, 1989 ; Zarcone et Lenormand, 1994). Rothman (1989) a estimé les perméabilités croisées par modélisation de type *lattice gas* des équations de Stokes dans un VER du milieu poreux. On a étudié un écoulement à contre-courant où les effets de décélération/accélération d'une phase par l'autre se manifestent de plus en plus fortement. En plus, il a été justifié numériquement que les perméabilités croisées étaient équivalentes.

Le modèle analogique a été appliqué par Rose (1990) en utilisant une cellule de Hele-Shaw.

1.2.2. MODÈLES DE NON EQUILIBRE

Afin d'améliorer les modèles d'écoulement diphasique, une autre approche est basée sur l'introduction du comportement hors équilibre capillaire.

Dans plusieurs travaux, y compris des travaux expérimentaux, les courbes de perméabilités relatives ont été considérées comme variables dans le temps, avec une stabilisation très lente (Singhal et Somerton, 1977 ; Entov et Chen-Sin, 1987 ; Blunt et King, 1991). Cette propriété est la conséquence du fait que la distribution des phases en milieu poreux ne correspond pas à une distribution unique dictée par les conditions d'équilibre capillaire. Le système est donc hors équilibre.

Les mécanismes, qui provoquent le non équilibre, sont liés à l'hétérogénéité des pores à l'intérieur d'un VER, ce qui a des interprétations concrètes assez diverses, et donne naissance à plusieurs modèles de non équilibre capillaire. Malgré leur diversité, dans tous ces modèles, les perméabilités relatives dépendent explicitement non seulement de la saturation mais également du temps.

Le modèle le plus simple de non équilibre, appelé *cinétique*, a été proposé par Barenblatt (1971), avec des modifications (Vinichenko, 1978a et 1978b ; Barenblatt et Vinichenko, 1980). Dans le cadre de ce modèle, les perméabilités relatives (k) dépendent d'une saturation fictive σ' , qui est liée à la saturation à l'équilibre par la relation cinétique : $\sigma' = \sigma + \tau \partial\sigma/\partial t$, de sorte que :

$$k = k(\sigma') = k(\sigma + \tau \partial\sigma/\partial t) \quad (1.2.2)$$

Par une approche phénoménologique, Nikolaevskii *et al.* (1968) ont obtenu une relation semblable :

$$k = k(\sigma, \partial\sigma/\partial t) = k_0'(\sigma) + k_0(\sigma) \tau \partial\sigma/\partial t \quad (1.2.3)$$

où $k_0(\sigma)$ est la perméabilité relative à l'équilibre, tandis que $k_0'(\sigma)$ est sa dérivée.

En effet, le modèle (1.2.2) est valable seulement pour des temps de relaxation petits. On obtient, alors, immédiatement l'équation (1.2.3).

Le problème de fermeture du modèle, qui se réduit à la définition du temps de relaxation τ , reste ouvert. Les tentatives de définir expérimentalement le paramètre τ ont été effectuées dans divers travaux (Bocharov *et al.*, 1990 ; Bocharov, 1991 ; Kuznetsov et Dimov, 1991), mais restreints à un seul milieu poreux donné.

Bien que plusieurs hypothèses adoptées lors de l'établissement du modèle portent un caractère intuitif et sont insuffisamment argumentées, le modèle de non équilibre présente une avancée importante, car il a réussi à confirmer théoriquement que, e.g., le taux de déplacement du pétrole par l'eau peut être une fonction non monotone de la vitesse de déplacement. Cette non-monotonie a été observée expérimentalement par Martintsyv et Ryjik (1965), Martos (1972) et Martos et Ryjik (1972).

Quelques principes de construction d'un modèle plus général ont été examinés dans Entov (1980). L'auteur prend en considération le fait que la distribution des phases est non instantanée et dépend de la direction de déplacement (drainage - imbibition). Ainsi le processus dépend de toute son histoire et doit donc être décrit par des opérateurs d'intégration de convolution. Pour la première fois, la dépendance des caractéristiques du déplacement avec son histoire a été énoncée par Dodd et Kiel (1959), où des effets de mémoire longue ont été pris en considération dans le modèle numérique du réseau capillaire. Ce travail (Entov, 1980) ne proposait qu'une approche générale, sans définition des noyaux des opérateurs d'intégration, ni leur implication dans le modèle d'écoulement.

1.2.3. MODÈLES D'ÉCHANGE

Une autre série de modèles est basée sur l'hypothèse d'existence, pour chaque phase, de composantes active et passive (celle piégée dans des pores). La composante active peut se transformer en passive et vice-versa, ce qui implique un processus d'échange entre-elles. Ce processus, étant non instantané, a une vitesse d'échange finie que l'on admet proportionnelle à la différence des saturations respectives (Barenblatt et Entov, 1972). On a montré que, mathématiquement, ce modèle est proche de (1.2.2) et (1.2.3). Ainsi, des mécanismes physiques différents conduisent, néanmoins, à des modèles formellement proches.

La version finale du modèle d'échange proposée par Zarubin (1993) introduit un processus d'échange entre les composantes passive et active. Ce modèle est examiné comme une alternative à la notion de perméabilités de phase. Ce modèle ne contient pas de perméabilités relatives, ni de pression capillaire.

La présence d'une composante passive conditionne un comportement dynamique de la porosité effective par rapport à la composante active (Bulygin, 1974). L'introduction de la porosité de phase dynamique est une autre approche pour étudier les échanges. L'étude expérimentale de la porosité dynamique a été effectuée dans le travail de Pleshinskii *et al.* (1970). Néanmoins, les données obtenues étaient insuffisantes pour estimer le temps caractéristique d'échange.

Le défaut principal des modèles d'échange se ramène à la description de la transition de la phase active en une phase passive ($A \rightarrow P$) et la transition inverse ($P \rightarrow A$) qui sont décrites de façon symétrique, avec des temps d'échange identiques. En réalité, ces transitions ne sont pas symétriques. La piégeage d'une phase est un événement normalement observé, tandis que la remobilisation de la phase piégée est très faiblement probable. Les temps des processus direct et inverse sont ainsi totalement différents.

Un modèle d'échange a été proposé par Panfilov et Tuvaeva (1990), où le processus d'échange était interprété comme la formation isolée des fractions de phases.

1.2.4. MODÈLES D'ÉCHANGE DIFFÉRENTIEL

Dans le travail de Buevich et Mambetov (1991), une autre version du modèle d'échange a été suggérée. Chaque phase est considérée comme un ensemble de clusters d'échelles différentes. Entre les clusters, il existe des échanges. On a admis que seuls les échanges entre les échelles voisines sont permis. Chaque échange est décrit par une loi cinétique. Il est à noter que l'ensemble des processus d'échange pourrait, dans son intégralité, donner naissance à des opérateurs intégraux décrivant les corrélations spatiales lointaines. Seule la méthodologie de la construction de ce modèle a été élaborée. Le problème de fermeture du modèle n'a pas été posé.

1.2.5. MODÈLES AVEC TRANSPORT DES INTERFACES

Les modèles de ce type sont générés comme une conséquence du constat suivant : la saturation n'est pas suffisante pour décrire un champ diphasique en milieu poreux. La même saturation peut correspondre à différentes configurations géométriques de distribution des phases dans l'espace. Cependant, il est bien connu que la distribution des phases change certaines caractéristiques macroscopiques de l'écoulement (Sheidegger, 1960).

Suivant ces constats, une fonction supplémentaire – l'interface spécifique entre les phases - a été introduite dans le modèle (Hassanizadeh et Gray, 1990, 1993a et 1993b ; Gray et Hassanizadeh, 1991 ; Hassanizadeh, 1997).

Les équations généralisées de l'écoulement diphasique ont été développées en partant de la « théorie des mélanges » qui n'est qu'une version de l'approche phénoménologique. Le résultat essentiel de ces recherches est la démonstration que l'équation de la quantité du

mouvement pour chaque phase devrait contenir un terme complémentaire correspondant à des forces capillaires. Cette équation est donc plus générale que la loi de Darcy classique et a la forme :

$$-\vec{V}_\alpha = \text{grad } P_\alpha + \Omega(s, a) \text{grad } s \quad (1.2.4)$$

$\Omega(s, a)$ est la quantité du mouvement des forces capillaires ; a est la mesure de l'interface par unité de volume. En outre, on peut montrer que les forces capillaires macroscopiques dépendent de la saturation ainsi que de l'aire de l'interface entre les fluides.

La nouvelle fonction « a » demande l'introduction d'une nouvelle équation différentielle qui aurait pu être interprétée comme celle du transport de l'interface « a » (d'où la dénomination de ce modèle). Cependant, comme l'équation décrivant « a » était inutilisable, les auteurs ont essayé de trouver une relation approximative pour « a » par une modélisation du type réseaux de capillaires. Ils ont remarqué que, dans certains cas, il existe une liaison fixe entre « a » et la saturation, mais dans le cas général « a » dépend de la manière dont les phases en milieu poreux ont été introduites (drainage ou imbibition).

1.3. MICRO MODÈLES D'ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES EN MILIEUX POREUX

1.3.1. PRINCIPES DE CONSTRUCTION DES MODÈLES MICROSCOPIQUES

L'étude des écoulements diphasiques en milieux poreux à l'échelle de Darcy est souvent accompagnée par l'analyse du comportement microscopique, à l'échelle d'un pore, qui permet d'obtenir les relations de fermeture pour des modèles macroscopiques. En outre, les modèles microscopiques jouent un rôle supplémentaire très important, i.e. : l'instrument qui peut remplacer les expériences physiques en laboratoires, étant entendu qu'une expérience en écoulement diphasique est très délicate à mener.

Un modèle microscopique direct consiste à calculer un écoulement diphasique de Stokes ou de Navier-Stokes dans un domaine irrégulier représentant un espace poreux. Malheureusement, ce scénario est à peine réalisable. Les difficultés apparaissent dès l'étape de formulation du problème, où on est confronté à la question : comment définir la répartition initiale des phases dans le domaine ? Ensuite, à l'étape de résolution, une nouvelle difficulté apparaît liée au problème mathématique d'une interface mobile. Pratiquement, un problème de ce type ne peut être analysé que dans des domaines d'extension très limitée. Une difficulté supplémentaire est comment modéliser les scénarios de l'évolution singulière de l'interface ? L'exemple d'une évolution singulière est une transformation instantanée d'une pellicule en un ménisque ou un saut spontané d'un ménisque à travers un endroit d'extension du canal poreux (Chizmadjev *et al.*, 1971). Les processus de ce type ne sont pas différentiables et donc ne peuvent pas être décrits par des équations différentielles. Cet ensemble de problèmes conduit à des conclusions décevantes : (i) aucune garantie d'obtenir un résultat assez universel indépendant de la répartition initiale de phases, (ii) le caractère très approximatif du modèle physique si les effets singuliers sont ignorés et (iii) les difficultés mathématiques énormes lors de la résolution du problème à interface mobile. Ainsi, le bénéfice des résultats attendus est beaucoup moins important que le prix des efforts produits. Il en découle que la modélisation microscopique directe n'est pas répandue.

La modélisation microscopique réelle est basée sur d'autres principes. Premièrement, on simplifie le modèle physique de l'écoulement, en supposant que les interfaces qui contribuent essentiellement à l'écoulement homogénéisé sont des ménisques. Une propriété importante de ces interfaces est qu'elles sont faiblement déformables pour des vitesses d'écoulement rencontrées en milieux réels. Les interfaces de ce type, qui ne sont que des approximations de la réalité, peuvent être conformes aux équations d'écoulement de Stokes qu'au sens intégral. Ainsi, la prise en compte de ménisques rigides demande l'introduction des équations intégrales de l'écoulement. Habituellement, on applique l'équation de Poiseuille, pour la vitesse de chaque phase, comme un résultat de l'intégration des équations de Stokes à travers la section transversale du canal. Ainsi le problème se réduit à suivre les déplacements des ménisques dans le système de canaux poreux. Les lois de propagation des ménisques sont strictement définies par les équations de Poiseuille et de continuité. Nous appellerons ce modèle, *le modèle dynamique de réseaux capillaires* ou *le modèle de propagation des*

ménisques (MPM). Il représente un équilibre optimal entre le degré de simplification du processus physique et la complexité mathématique des simulations.

Cependant, des modèles encore plus simples ont été développés. Ils sont basés sur une simplification supplémentaire des lois de propagation des ménisques. En effet, si on suppose que lors d'un pas de temps chaque ménisque fait un pas spatial égal à la longueur d'un pore, l'algorithme du mouvement des ménisques devient équivalent à un algorithme de remplissage/vidange des pores. Les algorithmes des « *automates cellulaires* », proposé pour la première fois par von Neumann (1966), sont utilisés pour le remplissage des cellules de l'espace. Ces algorithmes ne diffèrent que par la règle de remplissage adoptée (Toffoli et Margolus, 1991). Un exemple d'« *automates cellulaires* » est représenté par les modèles de percolation.

En dépit du caractère très approximatif des *automates cellulaires*, ils donnent souvent des résultats excellents, tout à fait conformes à des résultats expérimentaux.

1.3.2. MODÈLES DE PERCOLATION CLASSIQUE

Les revues sur la théorie de percolation et son application à la modélisation des écoulements diphasiques se trouvent dans les références suivantes (Shante et Kirkpatrick, 1971 ; de Gennes, 1976 ; Kirkpatrick, 1979 ; Shklovskii et Efros, 1979 ; Golden, 1980 ; Chandler et Willemsen, 1981 ; Kesten, 1982 ; Deutscher *et al.*, 1983 ; Guyon *et al.*, 1984 ; Newman, 1986 ; Wilkinson, 1986 ; Entov et Chen-Sin, 1987 ; Kadet et Selyakov, 1987 ; Bercowitz et Balberg, 1993 ; Stauffer et Aharony, 1994).

Nous distinguerons 3 types de modèles de percolation, présentant différents niveaux de complexité :

- le modèle classique (équilibre capillaire), dans lequel on ne prend pas en considération la dynamique de déplacement, ni la continuité des phases ;
- le modèle de percolation connectée, dans lequel la dynamique est toujours ignorée, tandis que la connectivité de la phase déplaçante est prise en considération ;
- le modèle de percolation d'invasion, prenant en considération la dynamique comme une succession d'états stationnaires, ainsi que le caractère continu du remplissage des pores.

Le modèle classique de percolation a été proposé pour la première fois par Broadbent et Hammersley (1957), il a été étudiée en détails par (Larson, Scriven et Davis, 1981 ; Chayes, Chayes et Newman, 1985 ; Wilkinson, 1988 ; Sahimi, 1994) et a été formulé de la manière suivante. Examinons un réseau régulier infini dans \mathbf{R}^n ($n \geq 2$) dont les maillons (les pores) sont « conducteurs » ou « non conducteurs ». L'événement qu'un maillon soit conducteur est aléatoire de probabilité u (concentration des conducteurs) donnée. Pour quelles valeurs de u , le système de conducteurs forme-t-il un cluster connecté infini ? Le résultat principal de la théorie est la prédiction de la valeur minimale critique $u^* > 0$, nommée seuil de percolation, au-dessous de laquelle un cluster connecté n'existe pas. Si on associe les pores accessibles à des pores-conducteurs pour la phase déplaçante et les pores bloqués (e.g. : par des forces capillaires) à des pores non conducteurs, on établit ainsi une analogie entre le problème de percolation et le problème de déplacement des liquides en milieu poreux.

Habituellement, on admet que la phase déplaçante est non mouillante et donc les forces capillaires l'empêchent de pénétrer. Alors, la condition de non pénétration est formulée de la façon suivante : la phase déplaçante ne pénètre pas dans un pore si la différence de pression sur un pore, δP , est plus petite que la pression capillaire propre du pore. Pour ne pas calculer le champ de pression, on suppose en plus que δP est constante pour tous les pores. La pression capillaire propre de chaque pore correspond à celle de Laplace sur un ménisque imaginaire installé dedans et, donc, est inversement proportionnelle au rayon du pore. Par conséquent, les pores les plus étroits sont inaccessibles pour la phase entrante. En augmentant δP , on diminue la valeur du rayon minimum de pénétration. Ainsi, on obtient le cluster de chaque phase et la saturation en fonction de δP . En supposant un équilibre capillaire global, i.e. : $\delta P = P_c$ où P_c est la pression capillaire macroscopique, on obtient alors la fonction pression capillaire – saturation, $P_c(s)$.

Soit η la probabilité de remplissage d'un pore par le fluide entrant. L'algorithme du remplissage est donc le suivant : pour que le pore examiné soit rempli il suffit qu'il soit conducteur : $\eta = u$.

La condition de non pénétration est fortement simplifiée, par contre elle est très facilement applicable, étant *locale* (le fait de la non pénétration dans un pore ne dépend que de ce pore). En réalité, il existe une condition supplémentaire de non pénétration, qui est non locale : la phase ne peut pas pénétrer dans un conducteur si la phase déplacée, située initialement dans ce pore, n'a pas de connexion avec le cluster infini de cette phase. Cette dernière condition résulte du fait qu'une goutte séparée d'une phase reste pratiquement immobile en milieu poreux, étant piégée par des effets capillaires (effet de Jamin). Le fluide déplaçant est, également, mobile s'il est connecté.

Suite aux règles de pénétration mentionnées, le modèle de percolation classique est appelé modèle d'équilibre ou modèle local.

On voit que le problème de percolation classique ne contient aucune dynamique d'écoulement, ni de connexion entre des phases. Néanmoins, ces modèles ont été largement répandus dans des travaux de recherche, car capables de calculer le seuil de percolation et la pression capillaire en fonction de la saturation.

1.3.3. MODÈLES DE PERCOLATION CONECTÉE

Les modèles de percolation connectée représentent une généralisation importante des modèles classiques d'équilibre et prennent en compte la connectivité de la phase entrante pour qu'elle puisse être mobile. L'algorithme est le suivant :

$$\eta(x, n, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } u(x, \omega) = 1, \text{ et } \eta(\bar{x}, n-1, \omega) = 1 \\ 0, & \text{au contraire} \end{cases} \quad (1.3.1)$$

où x est la coordonnée du pore, $\eta(x, n, \omega)$ est la probabilité de l'événement que le pore, dont le centre est situé au point x , soit rempli par la phase déplaçante à l'instant n (temps discret) ; $u(x)$ est la probabilité locale que le pore examiné soit un conducteur ($u \in [0,1]$; $n=1,2,\dots$) ; \bar{x} signifie « il existe au moins un point voisin à x » ; ω est le paramètre extérieur (e.g. : δP). La relation (1.3.1) est récurrente selon le temps n . C'est pourquoi on se donne la condition initiale :

$$\eta(x,0, \omega) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

L'équation (1.3.1) se traduit de la manière suivante : pour qu'un pore soit rempli à un pas n , il faut qu'il soit conducteur et qu'il ait une connexion avec des pores remplis au pas précédent. Cela implique que la phase déplaçante forme toujours un cluster connecté, lié avec l'entrée. A chaque temps n , le système est en équilibre. Suite à une évolution du système dans le temps, il résulte que le système a plusieurs états d'équilibre. Cela n'est pas étonnant puisqu'à la même valeur du paramètre extérieur ω , un milieu poreux possède une multitude d'états d'équilibre qui se distinguent par la mode d'entrée des phases dans le milieu (Entov, Feldman et Chen-Sin, 1975).

Les modèles de pénétration connectée sont utiles pour la description des processus de déplacement proche de l'équilibre capillaire, c'est-à-dire dans ce cas d'un nombre capillaire très petit (le nombre capillaire Ca est égal au rapport de la force hydrodynamique sur la force capillaire). Les algorithmes de calcul sont décrits en détail dans Panfilov et Tuvaeva (1991a).

1.3.4. MODÈLES DE PERCOLATION CONNECTÉE SANS TEMPS

Dans plusieurs cas, le temps n peut être éliminé des modèles de percolation connectée. En particulier, cela devient possible si l'évolution temporelle se déroule dans une direction spatiale unique. Alors la suite de points en temps $\{n\}$ est strictement liée à la suite de points spatiaux $\{x_n\}$. Ainsi, pour éliminer le temps, le réseau capillaire doit être modifié.

Soit x la direction principale de remplissage. Supposons ensuite que la structure du milieu est telle que le remplissage de tout pore peut avoir lieu seulement dans la direction de gauche à droite. Cette condition est satisfaite pour un processus stochastique Markovien de branchement des canaux poreux, ou réseau de Bethe. Alors, l'équation (1.3.1) peut être écrite autrement :

$$\eta(x_n, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } u(x_n, \omega) = 1, \text{ et } \eta(x_{n-1}, \omega) = 1 \\ 0, & \text{au contraire} \end{cases}$$

C'est une relation récurrente selon x qui demande comme condition à la limite : $\eta(x_0, \omega) = 1$

Pour la première fois, ces modèles ont été examinés par Markin (1963) et Ksenjek (1963), où le calcul des probabilités de remplissage $\eta(x)$ a été effectué par une méthode itérative « de cycles ». Suivant cette méthode, le résultat du remplissage représente une somme de cycles consécutifs, dont le premier consiste à un remplissage uniquement de gauche à droite, le cycle 2 est le remplissage consécutif de droite à gauche, etc. Au total, on obtient un système infini d'équations différentielles croisées pour les probabilités de remplissage.

1.3.5. MODÈLES DE PERCOLATION D'INVASION

A chaque pore, on attribue un rayon réduit de pore dont la valeur est aléatoire et comprise entre 0 et 1. La condition de remplissage est la suivante (Panfilov et Tuvaeva, 1991b). Soit C_n le cluster connecté de la phase entrante au pas n . Soit Q_n l'ensemble de pores qui appartiennent au voisinage du cluster C_n . Au pas $(n+1)$, un seul pore est rempli, et c'est celui

qui satisfait à deux conditions simultanément : (i) il appartient à Q_n et (ii) son rayon est maximum (en Q_n).

Cet algorithme est proche de celui de la percolation connectée, car entre la pression capillaire propre et le rayon du pore il existe une liaison unique. Cependant, les modèles de percolation d'invasion (Chandler *et al.*, 1982 ; Wilkinson et Willemsen, 1983 ; Chayes *et al.*, 1985) ont des avantages. Le défaut principal des modèles de percolation connectée est la description grossière du champ de pression. Dans les modèles de percolation d'invasion, le champ des pressions n'est pas calculé non plus, mais ses propriétés principales sont prises en considération par l'algorithme de remplissage basé sur la différentiation du système de conducteurs.

Les expériences effectuées sur les micro-modèles 2D (e.g. : Mats, 1983 ; Lenormand et Zarcone, 1985) et 3D (e.g. : Jacquin et Adler, 1987 ; Clément *et al.*, 1987) ont démontré la validité des modèles de percolation d'invasion. Clément *et al.* (1987) ont étudié expérimentalement la structure du front de pénétration d'un métal liquide (métal de Wood) dans un modèle formé de verres écrasés avec une distribution donnée des tailles de grains. Cet alliage est fondu à 70° C et est injecté à partir du bas de la colonne. A la fin de l'injection, l'installation a été refroidie afin de faire durcir le métal. Le verre a été éliminé chimiquement par un acide. Ensuite, on a étudié visuellement le cluster métallique au microscope. Selon l'analyse des structures formées, leur géométrie était très proche des structures théoriques obtenues par le processus de percolation d'invasion.

1.3.6. MODÈLES DE PERCOLATION D'INVASION AVEC MÉMOIRE

Le scénario de remplissage décrit ci-dessus correspond bien au cas où les forces capillaires sont dominantes. En effet, ce sont les forces capillaires qui poussent la phase non mouillante préférentiellement dans les pores les plus larges. Ainsi, les modèles de percolation sont en majorité applicables aux processus très lents contrôlés totalement par les forces capillaires.

Dans le cas des processus régis par des forces hydrodynamiques, on a développé des modifications du modèle de percolation d'invasion, qui sont basées sur d'autres algorithmes de remplissage. Dans les cas où les forces hydrodynamiques dominent, le processus est fortement déterminé par la valeur du rapport des viscosités de phases.

Dans le cas de viscosités égales, il n'y a aucune préférence sur le remplissage des différents pores. Ainsi l'algorithme est simple : le pore qui sera rempli à chaque pas est choisi de façon aléatoire.

Dans le cas, où la phase entrante est moins visqueuse, le système est instable ce qui donne naissance à des algorithmes particuliers qui sont décrits dans le paragraphe 1.3.7.

Dans le cas où la fluide entrant est plus visqueux, l'algorithme de remplissage n'est plus local. L'avancée du fluide entrant est plus importante dans un canal où la résistance hydrodynamique intégrale (le long du canal) est plus petite. Cette résistance intégrale n'est que la viscosité moyenne du système dans le canal examiné, qui dépend, à son tour, de la longueur déjà parcourue par le fluide entrant au pas précédent. Ainsi l'algorithme de remplissage est non local dans le temps et dans l'espace. A chaque pas t , on détermine l'ensemble $Q(t)$ des pores voisins du cluster déjà formé par la phase entrante. Le pore qui sera

rempli au pas suivant ($t+1$) appartient à $Q(t)$ et il y a une voie continue avec la section d'entrée dont la résistance totale est minimale. La viscosité de la phase déplacée est supposée négligeable. Cet algorithme a été proposé par Panfilov et Tuvaeva (1991b).

1.3.7. MODÈLES DE CROISSANCE DES FRACTALS

Si la phase entrante est moins visqueuse, le système est instable. Visuellement, l'instabilité se manifeste par l'apparition de « doigts » du fluide entrant (voir Fig. 1.3.1), qui forment un arbre fortement « branché » et dont les propriétés sont fractales (auto-similarité à toutes échelles d'observation).

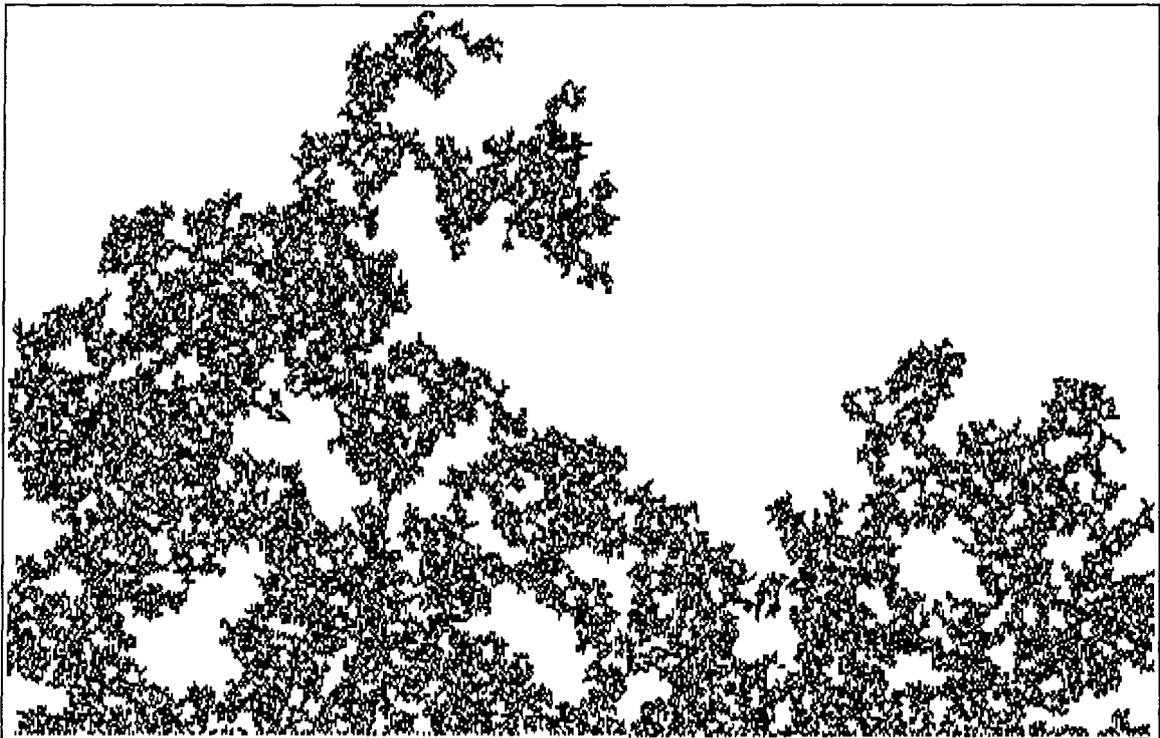


Fig. 1.3.1 Le cluster fractal du fluide entrant (généralisé par le modèle DLA)

Les processus instables sont mathématiquement très difficiles à calculer directement, car l'instabilité physique provoque une instabilité des schémas numériques. Cependant, les *automates cellulaires* sont des algorithmes mathématiquement stables et deviennent donc des outils d'un grand intérêt pour modéliser les instabilités. La classe de *automates cellulaires* qui décrit les déplacements instables est appelée les algorithmes de croissance des fractals (*fractal growth algorithms*). L'algorithme classique proposé par Witten et Sander (1983) est celui de la DLA (*diffusion limited aggregation*).

Une particule de la phase entrante, lâchée de l'extérieur du domaine considéré, fait des sauts browniens jusqu'à ce qu'elle touche le cluster de la phase entrante. A partir de ce moment elle est considérée comme immobile, étant collée au cluster. Ensuite, une nouvelle particule est lâchée et ainsi de suite. Cet algorithme représente une forme numérique de la solution du problème exact de déplacement. Si on néglige la viscosité de la phase entrante

(alors la pression dans cette phase est constante), le modèle mathématique du processus représente une équation de Laplace pour la pression dans la phase déplacée, avec une condition de pression constante à l'interface, qui peut être examinée comme nulle. En traitant la pression comme la probabilité de déplacement, on obtient un problème de marche au hasard (diffusion stationnaire) en dehors du cluster, avec une condition de perméabilité de déplacement nulle (collage) à l'interface du cluster. Dans le papier de Witten & Sander (1983), il a été montré que les arborescences obtenus ont des propriétés fractales.

Ce modèle est également appelé le modèle de croissance des fractals laplaciens (Mahé, Jacquin et Adler, 1986 ; Delannay *et al.*, 1989 ; Guyon *et al.*, 1989). La théorie mathématique des fractals a été développée par (Gefen *et al.*, 1981 ; Mandelbrot, 1982 ; Alexander et Orbach, 1982 ; *Fractals in Physics*, 1988).

D'autres modèles de croissance des fractals (Larson *et al.*, 1977 ; Paterson, 1984 ; Nittmann, 1986 ; Feder, 1988) représentent les modifications du modèle DLA.

1.3.8. MODÈLES D'ARBORESCENCES

Les modèles d'arborescences ont été proposés par Selyakov (1989) et Selyakov et Kadet (1996) comme la forme analytique des modèles de croissance des fractals. Ce modèle tient compte des intersections probables des doigts. On a introduit une hiérarchie des arbres et des branches examinés à différentes échelles, en supposant qu'un arbre à grande échelle peut bloquer la croissance des arbres à plus petites échelles, mais pas le contraire. Le phénomène de blocage donne la possibilité d'étudier le mécanisme de piégeage de la phase déplacée, la formation de la saturation résiduelle et sa relaxation vers l'équilibre. Les auteurs ont donc proposé un modèle de perméabilités relatives hors équilibre.

1.3.9. MODÈLES DYNAMIQUES DE RÉSEAUX CAPILLAIRES

Comme mentionné dans le paragraphe 1.3.1, les modèles de percolation et de croissance des fractales sont des *automates cellulaires* et représentent des simplifications considérables des processus réels. En particulier, ces modèles ne décrivent pas la dynamique réelle du déplacement. Le temps de déplacement soit n'existe pas, soit est fictif, ne servant qu'à compter le nombre de pas effectués.

Les modèles plus complets, prenant en compte la dynamique, sont ceux décrits dans le paragraphe 1.3.1 et sont destinés à calculer la propagation du système de ménisques dans un réseau capillaire en se basant sur des équations dynamiques exactes de l'écoulement en amont et en aval du ménisque.

Les plus connus sont dus aux travaux de deux groupes : Lenormand (1985, 1987), Lenormand et Zarcone (1985), et Lenormand *et al.* (1983) ; Koplik (1982) et Koplik et Lasseter (1985). En dehors de ceux-ci, on peut mentionner Chatzis et Dullein (1977), Chatzis *et al.* (1983, 1988), Singhal et Samerton (1977), Chandler et Willemsen (1981), Wilkinson et Willemsen (1983), Dias et Payatakes (1986), Mohanty *et al.* (1987).

Un des résultats principaux du premier groupe est le diagramme de phase, qui établit le classement des régimes de déplacement en fonction des paramètres du processus : le nombre

capillaire et le rapport des viscosités $\bar{\mu}$. Le cas étudié est celui de la phase entrante non mouillante. Les trois régimes principaux de déplacement sont : (i) croissance des fractals Laplaciens ($\bar{\mu}$ est petit, Ca est arbitraire), (ii) régime de percolation d'invasion (Ca est petit, $\bar{\mu}$ est arbitraire) et (iii) régime de déplacement « piston » (Ca et $\bar{\mu}$ sont supérieurs à 1). Les régimes intermédiaires occupent, cependant, une zone considérable.

Les travaux du second groupe sont orientés vers la construction des modèles de réseaux les plus adéquats vis-à-vis des milieux poreux réels. En particulier, les auteurs recommandent un nombre de coordination (représentant la quantité des capillaires connectées dans un nœud) grand et variable en espace (Koplik et Lasseter, 1985). Beaucoup d'efforts ont porté sur la simulation adéquate du passage des ménisques à travers les nœuds du réseau. Le modèle de Koplik est un réseau régulier de nœuds qui forment des centres de pores sphériques de rayons différents. Ces pores sont connectés par des canaux de rayon aléatoire. Le nombre de coordination du réseaux varie de façon aléatoire entre 2 et 8. La mouillabilité peut varier spatialement. Le mouvement des fluides est calculé à la base par la loi de Poiseuille.

Les difficultés principales pour réaliser des modèles de ce type concernent le contrôle de la condition de passage du ménisque arrivé à un nœud, ainsi qu'à l'intérieur des pores. Chandler *et al.* (1982) proposent de calculer la saturation locale de la phase déplaçante au lieu de la coordonnée locale du ménisque. Cela nécessite d'introduire un nombre de règles qui permet de définir, utilisant la valeur de saturation calculée, la position du ménisque et la direction de son mouvement. Plusieurs règles proposées dans (Koplik et Lasseter, 1985) sont artificielles et non justifiées. Il en découle que les résultats obtenus sont souvent dépourvus de tout sens physique. Dans Singhal et Samerton (1977) l'algorithme de passage des ménisques est extrêmement simplifié : la direction du mouvement du ménisque, étant influencée par divers facteurs physiques, est choisie au hasard.

CONCLUSIONS

Le modèle classique de Buckley-Leverett, bien que amplement appliqué aussi bien en recherche que dans l'industrie, possède des défauts significatifs qui réduisent le domaine de son utilisation aux écoulements avec des forces capillaires négligeables et des viscosités équivalentes.

Actuellement, il existe un ensemble de modèles alternatifs d'écoulement diphasique en milieux poreux, qui, étant plus complexes que le modèle classique de Buckley-Leverett, ont quasiment les mêmes défauts. Ces modèles ne sont donc pas utilisés ni en recherche ni en modélisation pratique.

Le défaut de base de tous les modèles est l'absence de toute structure interne de l'écoulement.

Les micro-modèles d'écoulements diphasiques, qui servent à obtenir des relations de fermeture pour des modèles macroscopiques, sont essentiellement basés sur des algorithmes de type *automates cellulaires* (modèles de percolation, de croissance des fractals, ...). Cependant ces algorithmes, étant bien développés, ne reflètent pas la dynamique réelle de déplacement d'un fluide par un autre. Chaque image dans le scénario d'évolution des clusters des phases existe hors du temps réel. La description correcte de la dynamique réelle ne peut

être observée que dans les modèles dynamiques d'écoulement en réseaux capillaires, qui sont pourtant beaucoup plus compliqués en terme de réalisation.

Prenant en compte cette analyse, le programme de recherche suivant constitue la problématique de ce travail de thèse :

- 1) développer un nouveau modèle macroscopique d'écoulement diphasique, en se basant sur l'introduction de la structure interne de répartition des phases ;
- 2) obtenir des relations de fermeture ;
- 3) développer et appliquer ensuite un modèle dynamique de propagation des ménisques dans un réseau capillaire.

Chapitre 2

« MENISCUS MODEL » POUR DES ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES EN MILIEUX POREUX

2.1. RÉPARTITION DES PHASES DANS UN PROCESSUS DE DÉPLACEMENT

2.1.1. STRUCTURE DE RÉPARTITION DES PHASES ET MODÈLE MACROSCOPIQUE D'ÉCOULEMENT

Les écoulements diphasiques en milieux poreux sont caractérisés par des structures géométriques différentes de répartition des phases dans l'espace poreux, que nous allons appeler *configuration diphasique* ou *structure diphasique*. Quelques exemples sont représentés sur la Fig. 2.1.1 : configuration « canaux » (a), configuration « film » (b), configuration « ménisque » (c) et configuration « bulles » (d).

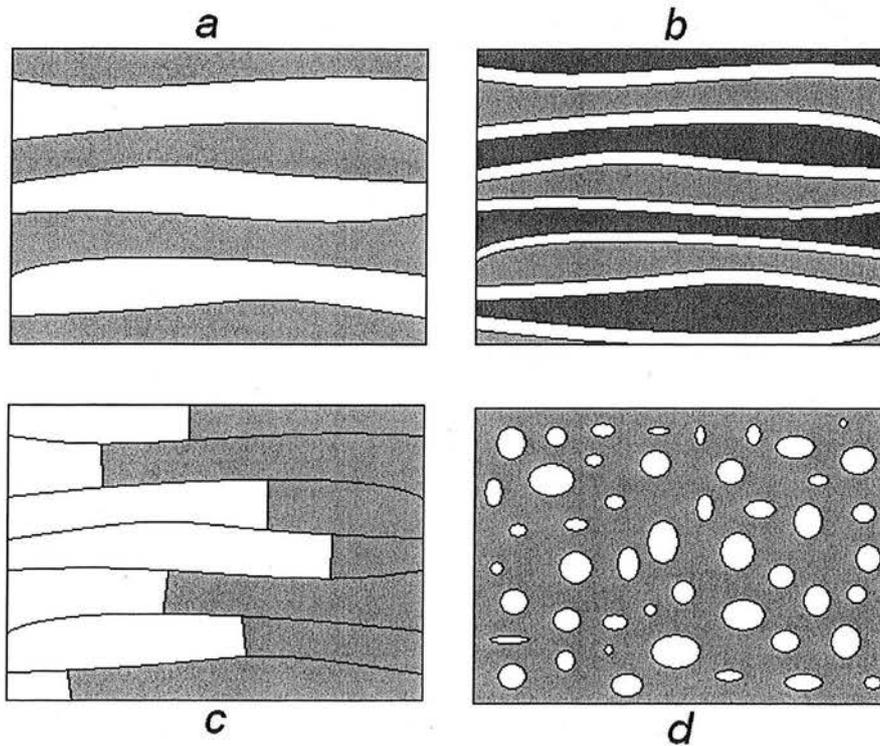


Fig. 2.1.1. Diverses configurations diphasiques (les fluides sont en gris et blanc, le solide est en gris foncé)

A la même saturation, les fluides peuvent former des configurations différentes. Ainsi ces diverses configurations peuvent être décrites par la saturation s et au moins un paramètre supplémentaire, η , responsable du type de configuration. La question du choix du paramètre η reste ouverte. Marle (1982) et Hassanizadeh & Gray (1993b) ont proposé la notion d'interface spécifique à la place de η . Cependant, il est évident que cette proposition n'est pas suffisamment pertinente, car la surface spécifique pour des configurations b , c , d sur la Fig. 2.1.1 sont du même ordre de grandeur. Nous recommandons donc d'utiliser deux paramètres supplémentaires de configuration : η_1 qui caractérise l'interface spécifique entre les phases, et η_2 qui caractérise le degré de connectivité des phases.

Les configurations diphasiques produisent un double effet à l'échelle macroscopique.

Premièrement, les paramètres macroscopiques dépendent non seulement de la saturation, mais également des paramètres de configuration. En particulier, les perméabilités relatives et la pression capillaire sont des fonctions de deux paramètres au moins ($k_\alpha = k_\alpha(s, \eta)$, $k_\beta = k_\beta(s, \eta)$, $P_c = P_c(s, \eta)$) et sont donc différentes pour chaque configuration diphasique.

Deuxièmement, la configuration diphasique peut changer le type du modèle macroscopique d'écoulement. En effet, entre une configuration diphasique et le modèle macroscopique correspondant il existe une liaison directe, de manière à ce que chaque configuration génère son propre modèle macroscopique. En particulier, le modèle classique de Buckley-Leverett correspond à la structure « canaux » (Fig. 2.1.1 *a*), dans laquelle chaque phase forme ses propres canaux, la surface de contact entre phases étant ainsi minimisée. Le modèle de perméabilités croisées a été obtenue, pour une structure de type film, par homogénéisation (Auriault & Sanchez-Palencia, 1986), *volume averaging* (Quintard & Whitaker, 1993) et par le modèle de faisceaux de tubes (Kalaydjian, 1990). Une structure de film suppose que les deux fluides soient présents dans chaque pore afin que la phase mouillante forme une pellicule continue sur les parois, tandis que la phase non mouillante s'écoule dans le noyau central du canal. L'entraînement d'un fluide par l'autre à travers l'interface fait apparaître les termes croisés dans le modèle macroscopique. Le modèle de non équilibre, étant une modification du modèle classique, correspond à la même configuration de phase, i.e. : celle de canaux.

Une tentative pour construire un modèle généralisé a été entreprise par Hassanizadeh & Gray (1993b). Cependant, étant basée sur un seul paramètre de configuration (interface spécifique), ce modèle n'est pas capable de distinguer les configurations « ménisque », « film » ou « bulles ».

Il est évident que les configurations « canaux » et « film » ne décrivent pas le processus de déplacement d'un fluide par un autre. Elles correspondent plutôt à un état qui s'établit après que le déplacement se soit effectué. Ainsi tous les modèles connus sont développés pour des écoulements où le processus de déplacement n'est pas pris en compte. L'objectif de ce chapitre est de construire un modèle qui décrit de façon adéquate la microstructure d'un écoulement diphasique lors d'un processus de déplacement.

2.1.2. CONFIGURATION DU MÉNISQUE POUR LE PROCESSUS DE DÉPLACEMENT

Le processus de déplacement d'un fluide par un autre, qui est un cas particulier de l'écoulement diphasique, a sa propre configuration typique qui est caractérisée par un système développé de ménisques. Cette configuration est présentée sur la Fig. 2.1.2 pour un pore individuel (*a*) et dans un réseau de pores (*b*).

Supposons que le ménisque dans un pore soit une surface entre les phases ayant les propriétés suivantes : (i) elle occupe l'intégralité de la section transversale du pore, (ii) elle reste rigide lors de tout le processus de l'écoulement, (iii) elle est en contact direct soit avec les parois du pore, soit avec un film mince de la phase mouillante, (iv) elle peut avoir un rayon de courbure infini dans les équations de mouvement des fluides et, enfin, (v) la force capillaire de Laplace appliquée à cette surface est proportionnelle à sa courbure réelle.

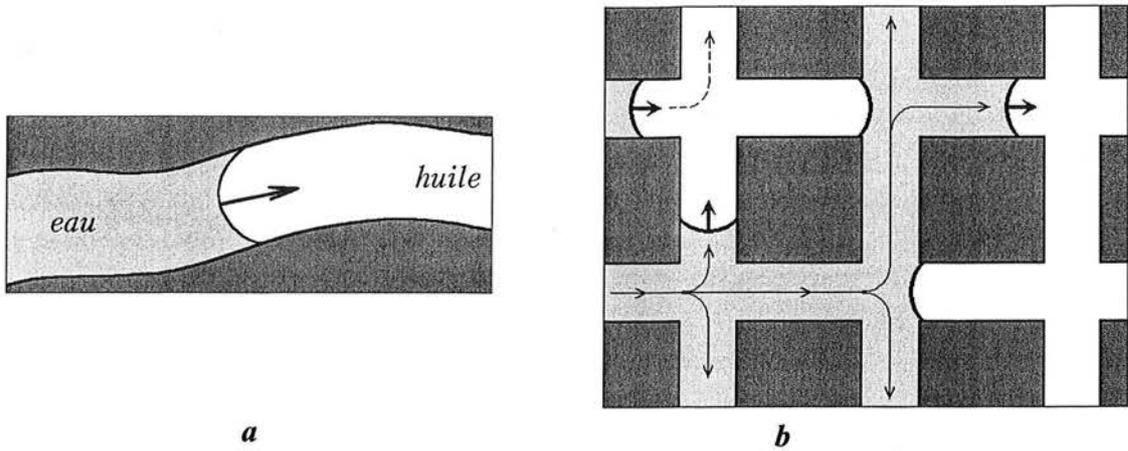


Fig. 2.1.2. Configuration du ménisque : dans un pore (a) et dans un réseau de pores (b)

A l'échelle du réseau de pores, supposons, également, que les ménisques forment un champs chaotique répétitif dans l'espace (Fig. 2.1.2, b). La justification de cette hypothèse importante sera donnée dans le paragraphe 2.3.4.

2.2. RÉSULTATS ATTENDUS

Il est possible de prédire certaines propriétés attendues de ce modèle de déplacement en se basant uniquement sur l'analyse qualitative des propriétés physiques du déplacement.

2.2.1. IMBIBITION CAPILLAIRE DANS UN MILIEU HOMOGÈNE

Examinons un processus d'imbibition (pénétrations de la phase mouillante dans un milieu poreux sous l'action des force capillaires uniquement) dans un faisceau de tubes capillaires homogènes (Fig. 2.2.1, a).

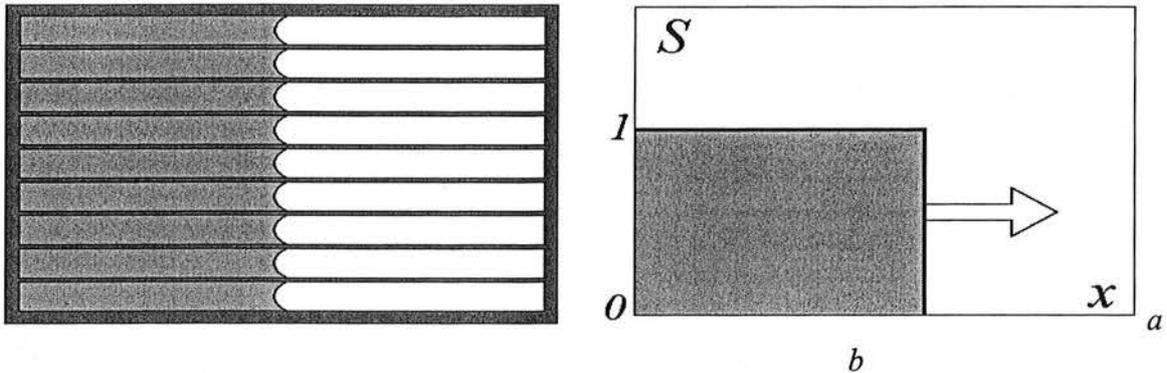


Fig. 2.2.1. Configuration des phases lors d'une imbibition en milieu homogène (a) et le profil de saturation de la phase déplaçante (b)

La saturation macroscopique de la phase déplaçante, S , a la forme d'une fonction de Heaviside inverse (b) dont la propagation est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (2.2.1)$$

avec V la vitesse de transport.

Ainsi on voit que, dans le cas de forces capillaires élevées et en milieu homogène, le modèle de transport de la saturation devrait être hyperbolique de premier ordre. Ce n'est pas le cas du modèle classique qui impose une équation de diffusion (de deuxième ordre) dans le cas où les forces capillaires dominent :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{\text{cap}} \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (2.2.2)$$

2.2.2. IMBIBITION CAPILLAIRE DANS UN MILIEU HÉTÉROGÈNE

Examinons le même processus mais en milieu hétérogène. Pour cela, prenons un faisceau de tubes de différents rayons comme modèle de milieu (Fig. 2.2.2, a).

Suite à une dispersion hydrodynamique provoquée par l'hétérogénéité du milieu, le front de déplacement sera dissipé, ce qui produira la forme continue du profil de saturation, typique pour un processus de convection-dispersion (b). Le modèle formel de ce processus est une équation de convection-dispersion :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (2.2.3)$$

avec $D_h(V)$ le coefficient de dispersion. En outre, le modèle classique (2.2.2) ne contient pas le terme convectif.

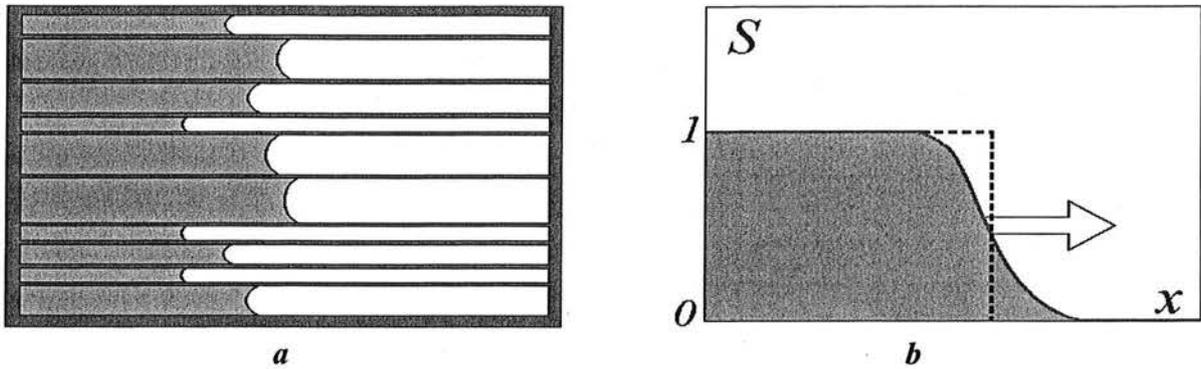


Fig. 2.2.2. Configuration de phases lors d'une imbibition en milieu hétérogène (a) et le profil de saturation de la phase déplaçante (b)

2.2.3. DÉPLACEMENT SANS FORCES CAPILLAIRES

Le processus est formellement identique à ce qui est présenté sur les Fig. 2.2.1 et 2.2.2. Ainsi, dans un milieu homogène, le modèle attendu est (2.2.1) et le modèle classique sans forces capillaires est de la forme (2.2.1). Ainsi, on peut constater que le modèle présent de déplacement doit qualitativement correspondre au modèle classique.

Dans le cas d'un milieu hétérogène, sans forces capillaires, le modèle attendu est traduit par un équation de convection-dispersion (2.2.3) avec un coefficient de dispersion fonction de la vitesse de transport, $D_h(V)$. Par contre, le modèle classique sans forces capillaires est une convection pure, i.e. : de type hyperbolique (2.2.1).

2.2.4. SUR LA LOI « RACINE DE TEMPS » POUR LE FRONT DE PROPAGATION

Habituellement, pour justifier le choix entre un modèle hyperbolique ou parabolique, on utilise le fait que dans le cas hyperbolique le front caractéristique se propage suivant une loi en t , tandis que dans le cas parabolique cette loi est en \sqrt{t} . Cela signifie que la loi \sqrt{t} observée dans les expériences lors de l'imbibition de l'eau en milieu saturé en air peut être une justification du modèle hyperbolique non linéaire du processus.

Cependant, cette distinction peut s'avérer erronée. En effet, il est possible de montrer que, dans le cas hyperbolique (mais non linéaire), le front peut suivre une loi en \sqrt{t} comme dans le cas parabolique. Examinons le déplacement piston de l'air par de l'eau dans un tube capillaire. Le processus de transport de la saturation est purement hyperbolique. Cependant, en appliquant l'équation de Washburn d'écoulement dans le tube, la coordonnée du front est donnée par :

$$x_f = \sqrt{\frac{2P_{cap}}{\mu} t}$$

cette expression est similaire au cas parabolique linéaire.

2.2.5. DIMENSION DE LA ZONE D'IMBIBITION

Le modèle classique, étant parabolique non linéaire, est souvent caractérisé par une vitesse infinie de propagation des perturbations (dans le cas linéaire la vitesse est toujours infinie, dans le cas non linéaire la vitesse peut être finie pour certaines non linéarités). Ceci signifie que la dimension de la zone d'imbibition calculée suivant le modèle classique est souvent infini (Fig.2.2.3, *a*), tandis qu'en réalité cette zone devrait être finie (*b*).

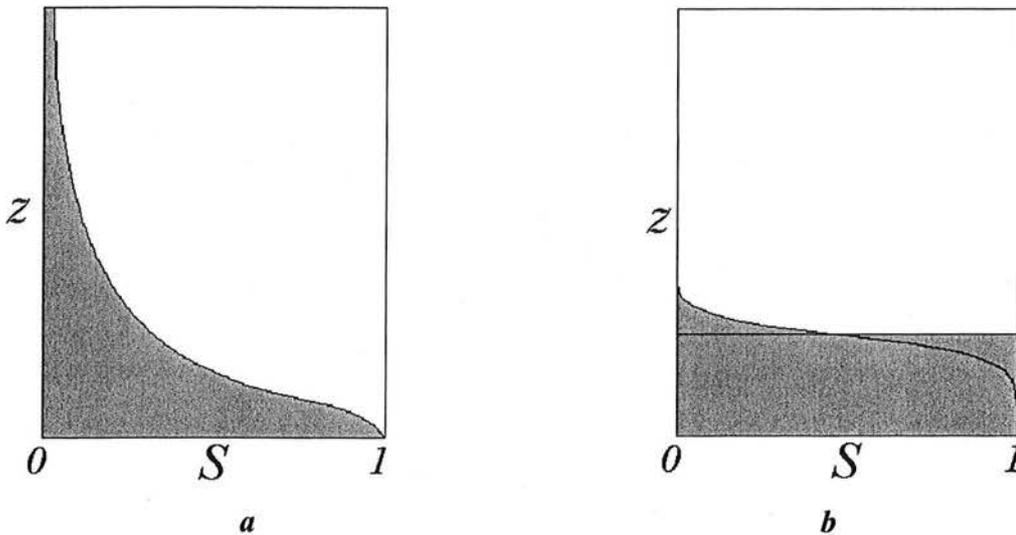


Fig. 2.2.3. Zone d'imbibition capillaire : le modèle classique (*a*), le processus réel (*b*).
Pour le modèle classique : $H \rightarrow \infty$, pour le processus réel : $H \rightarrow const < \infty$

Cette propriété d'une vitesse finie de propagation est typique des équations hyperboliques.

CONCLUSION

De l'analyse présentée, il découle que le modèle de ménisque doit être plutôt hyperbolique que parabolique, même quand les mécanismes mis en jeu sont contrôlés par les forces capillaires.

2.3. PROPRIÉTÉS DU CHAMP DE MÉNISQUES

2.3.1. PASSAGE DU MÉNISQUE DANS UN PORE

Examinons le déplacement dans un tube capillaire (Fig. 2.3.1). De l'ensemble des hypothèses admises, il découle que l'écoulement de chaque fluide de part et d'autre du ménisque ne peut plus être décrit par les équations de Stokes ou Navier-Stokes. En effet, au voisinage du point de contact entre le ménisque et les parois solides l'écoulement de Stokes est impossible si le ménisque est supposé rigide. Cependant, on peut appliquer la loi de Poiseuille pour la vitesse moyennée à travers la section transversale du tube. En effet, le système d'équations de Poiseuille pour chaque phase ne contredit pas l'hypothèse de rigidité de l'interface. Le système d'équations de Poiseuille (2.3.1-a) avec des conditions à l'interface (2.3.1-b) et des conditions aux limites et initiales (2.3.1-c) a la forme suivante :

$$-U_\alpha = \frac{\gamma r^2}{\mu_\alpha} \frac{dP}{dx}, \quad x < x_\xi; \quad -U_\beta = \frac{\gamma r^2}{\mu_\beta} \frac{dP}{dx}, \quad x > x_\xi \quad (2.3.1-a)$$

$$U_\alpha = U_\beta = U(t); \quad P|_{x=x_\xi+0} - P|_{x=x_\xi-0} = P_c(r) = \frac{2\sigma \cos \theta}{r}, \quad \frac{dx_\xi}{dt} = U \quad (2.3.1-b)$$

$$P(0,t) = P_A \quad P(l,t) = P_B \quad x_\xi(0) = 0 \quad (2.3.1-c)$$

où γ est le coefficient de forme du capillaire (1/8 pour la section circulaire), r est le rayon du capillaire, x_ξ est la coordonnée (locale) mobile du ménisque, P est la pression, μ est la viscosité dynamique, U est la vitesse réelle moyenne à travers la section du pore, t est le temps local compté depuis le moment d'apparition du ménisque dans un pore, σ et θ sont respectivement la tension superficielle et l'angle de contact. Les conditions à l'interface traduisent : (i) la continuité du champ des vitesses de Poiseuille, (ii) le saut de pression dû à la pression capillaire de Laplace (P_c) sur le ménisque et (iii) que la vitesse du ménisque est égale à la vitesse d'écoulement du fluide.

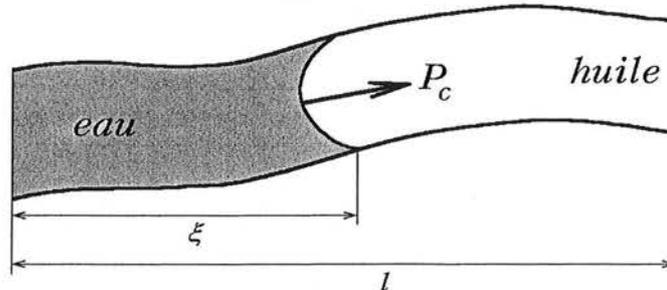


Fig. 2.3.1. Déplacement dans un capillaire

Ce problème est non contradictoire du point de vue mathématique et a une solution unique. En effet, en éliminant successivement la pression et la vitesse, on obtient une seule équation différentielle par rapport à la coordonnée du ménisque, connue sous le nom d'équation de Washburn (1921) :

$$\frac{dx_\xi}{dt} = \frac{\gamma r^2 (\delta P + P_c(r))}{\mu_\alpha x_\xi + \mu_\beta (l - x_\xi)}, \quad x_\xi(0) = 0; \quad \delta P \equiv P_A - P_B \quad (2.3.2)$$

qui a une solution unique continue et différentiable. En réécrivant cette équation sous la forme suivante et en introduisant $\xi = x_\xi / l$, il vient :

$$U = \frac{\gamma r^2}{\mu_\alpha \xi + \mu_\beta (1 - \xi)} \frac{(\delta P + P_c(r))}{l} \quad (2.3.3)$$

où la valeur :

$$\langle \mu \rangle = \mu_\alpha \xi + \mu_\beta (1 - \xi) \quad (2.3.4)$$

est une viscosité dynamique moyenne du fluide dans le pore. En introduisant la saturation volumique s de la phase déplaçante, on remarque que :

$$\langle \mu \rangle = \mu_\alpha s + \mu_\beta (1 - s) \quad (2.3.5)$$

2.3.2. PASSAGE D'UN MÉNISQUE À TRAVERS UN NŒUD : « MÉCANISME DE COMPENSATION »

Le passage d'un ménisque à travers un nœud de branchement des pores est caractérisé par la naissance de nouveaux ménisques dans les branches et la « mort » de certains ménisques suite au piégeage de la phase déplacée et à son immobilisation (décrit en détail dans la section 4.2.). Une illustration des processus de naissance/mort des ménisques est donnée sur la Fig. 2.3.2.

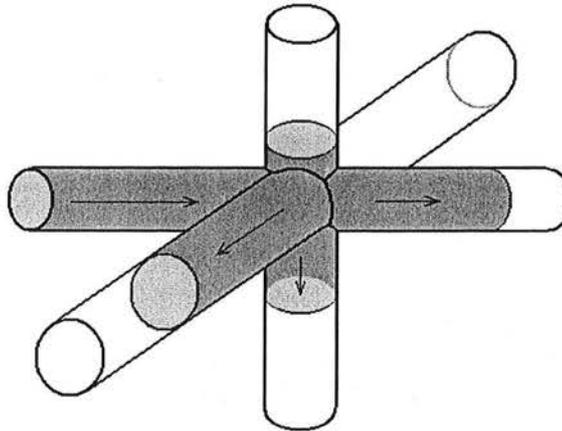


Fig. 2.3.2 Passage d'un ménisque à travers un nœud

En outre, le mécanisme physique de passage du ménisque à travers un nœud est souvent très différent d'un mouvement continu observé dans un canal poreux. Le passage peut s'effectuer sous forme d'un saut spontané provoqué par une instabilité du ménisque Chizmadjev *et al.* (1971). Bien que l'ensemble de tous ces processus semble être « trop » compliqué pour être décrit de façon adéquate, il existe certaines lois de comportement qui permettent de les schématiser de façon efficace.

La loi essentielle que nous accepterons concernant la naissance/mort est la loi de conservation du nombre moyen de ménisques mobiles : nous admettrons que le processus de naissance de ménisques mobiles est compensé entièrement par la mort d'autres ménisques (en moyenne). Le mécanisme physique de compensation est illustré sur la Fig. 2.3.3.

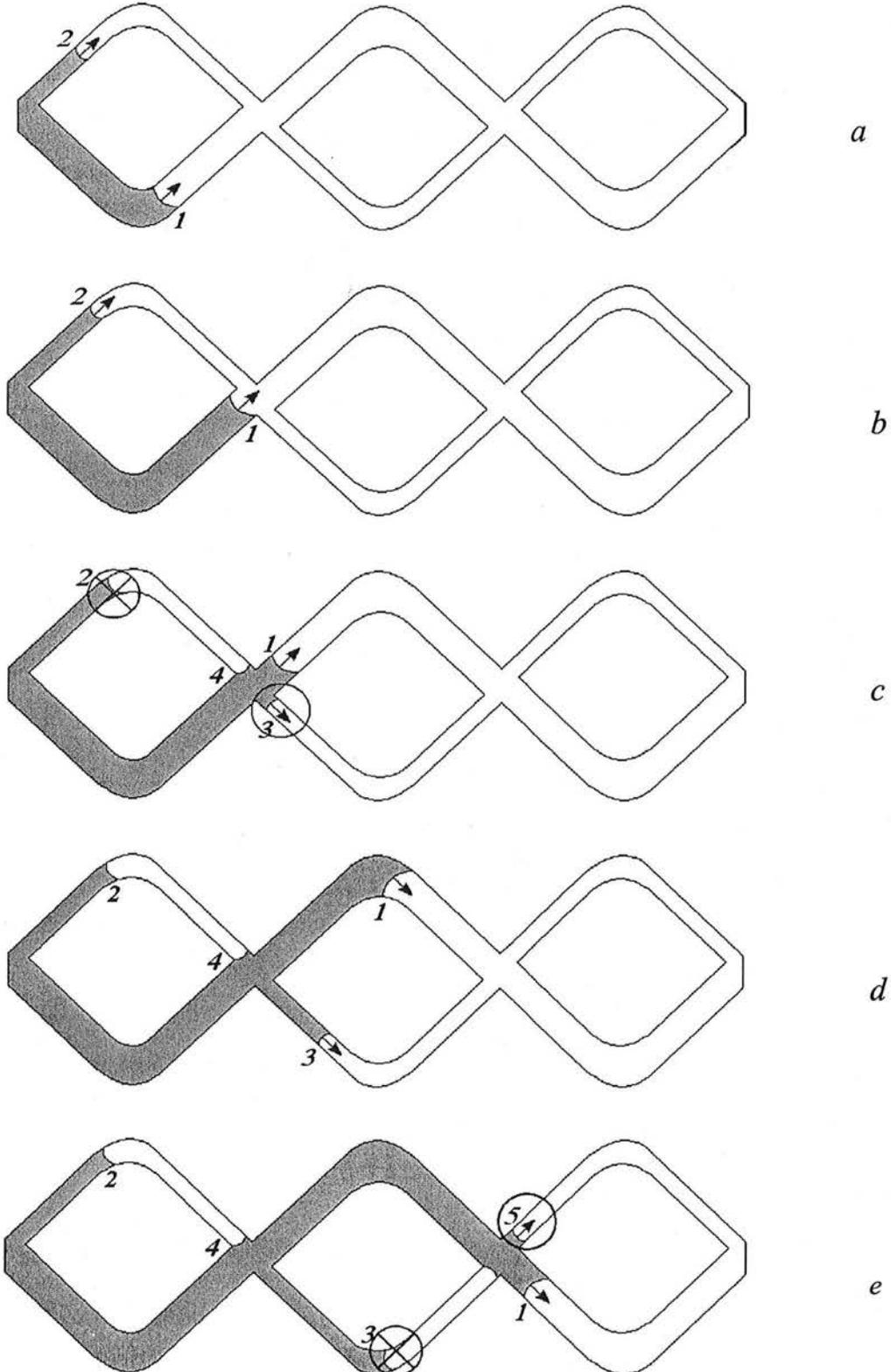


Fig. 2.3.3. Schéma du mécanisme de compensation

Examinons un réseau élémentaire, appelé « doublet », qui représente deux canaux de rayons différents connectés dans des nœuds situés périodiquement le long d'un axe horizontal.

La phase déplaçante (en bleu) entre dans le réseau à travers la section droite située à gauche et forme, ainsi, deux ménisques mobiles 1 et 2 (Fig. 2.3.3, a). Suite à des vitesses différentes, le ménisque 1 atteint le nœud plus rapidement (Fig. 2.3.3, b), le traverse et forme deux nouveaux ménisques : mobile 3 et immobile 4 (Fig. 2.3.3, c). En même temps le ménisque 2 est immobilisé par la formation du piège de la phase déplacée entre les sections 2 et 4. Ainsi, la « naissance » d'un nouveau ménisque mobile 3 est compensée par la « mort » du ménisque 2.

Il vient qu'après le passage du nœud, le nombre de ménisques mobiles (deux) est conservé. Ces deux ménisques (1 et 3) continuent leur avancée (Fig. 2.3.3, d). Dans le nœud suivant, on observe le même phénomène (Fig. 2.3.3, e) : naissance du nouveau ménisque mobile 5 et mort du ménisque 3, ...

Nous admettrons en plus que le volume de chaque nœud est beaucoup plus petit que le volume du moindre pore, alors le temps de passage d'un ménisque à travers un nœud est négligeable. Cela signifie que la vitesse de passage à travers un système « pore + nœud » est la même quand absence de nœud.

2.3.3. SUR UN CHAMP RÉPÉTITIF DE MÉNISQUES

Dans un milieu réel formé de pores hétérogènes, les ménisques forment un système répétitif spatial, comme représenté sur la Fig. 2.3.4 (a) où la phase déplaçante (en jaune) s'écoule du haut vers le bas. Un petit élément de ce réseau (b) montre que les ménisques mobiles sont présents partout y compris derrière les ménisques du front d'avancée.

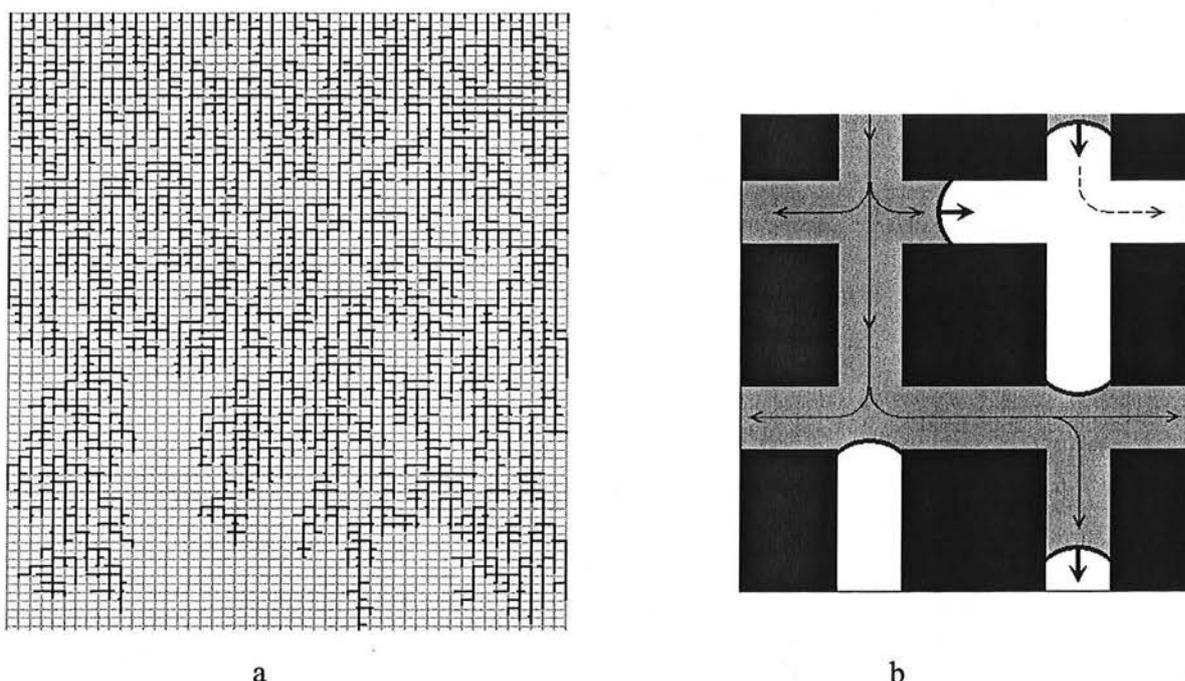
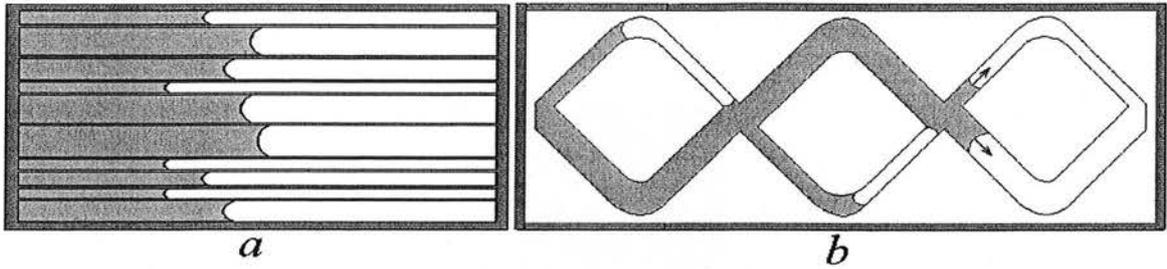


Fig. 2.3.4. Champ répétitif de ménisques dans les milieux réels

Un système répétitif de ménisques est une condition nécessaire pour les examiner dans le sens de l'homogénéisation. Cependant, sa formation n'est pas évidente. En effet, l'image sur la Fig. 2.3.5 montre que dans un faisceau de tubes capillaires (a) les ménisques présentent un front homogénéisé à l'extrémité du domaine d'invasion de la phase déplaçante. De la même manière dans le réseau élémentaire (b), les ménisques mobiles se trouvent toujours dans le même doublet, tandis que derrière eux on ne voit que des ménisques immobilisés.



g. 2.3.5. Exemples de champs non répétitifs de ménisques

2.3.4. FORMATION D'UN CHAMP RÉPÉTITIF DE MÉNISQUES. « MÉCANISME DE DUPLICATION »

Pour expliquer la formation du système répétitif de ménisques, nous allons utiliser une des versions du modèle de milieu effectif appliqué à des processus de transport (Fig. 2.3.6).

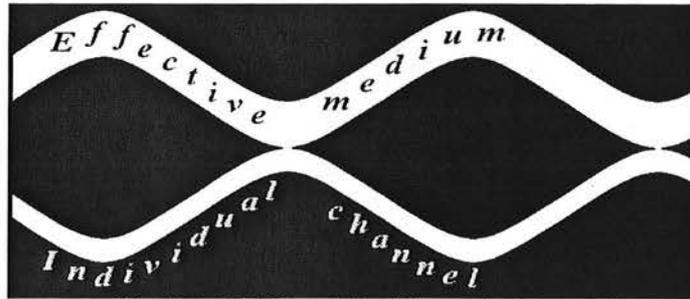


Fig. 2.3.6. Milieu effectif pour le transport.

Il comporte un canal individuel connecté avec le milieu effectif en certains endroits appelés les nœuds du modèle. Dans le canal individuel, on suit le mouvement du ménisque, tandis que, dans le milieu effectif, on observe le mouvement d'un front homogénéisé de déplacement. Les règles d'interaction du canal individuel avec le milieu effectif sont les suivantes :

(i) Supposons que le canal individuel soit plus étroit que le canal moyen. Alors, le déplacement du front homogénéisé est plus rapide que le déplacement du ménisque dans le canal individuel. Dès que le front atteint un nœud quelconque, il bloque le ménisque dans le canal individuel en formant la phase piégée. Ceci est tout à fait identique à ce qui se passe dans un réseau élémentaire ou dans un doublet.

(ii) Supposons maintenant que le canal individuel soit plus large que le canal moyen. Alors, le déplacement du front homogénéisé est moins rapide que le déplacement du

ménisque dans le canal individuel. Dans ce cas de figure, nous appellerons le canal individuel de ce type « *canal percolant* ». Dès que le ménisque atteint un nœud, il donne naissance à un nouveau front dans le milieu effectif. Le nouveau front ne bloque pas le front précédent, car la phase déplacée dans le milieu effectif a toujours des chemins pour sortir du milieu. Ce mécanisme est appelé « *duplication des fronts mobiles* ». Ainsi, on obtient l'image suivante de déplacement (Fig. 2.3.7) avec un système répétitif de fronts homogénéisés mobiles. Ce milieu est composé d'un canal individuel connecté dans certains endroits avec le milieu effectif.

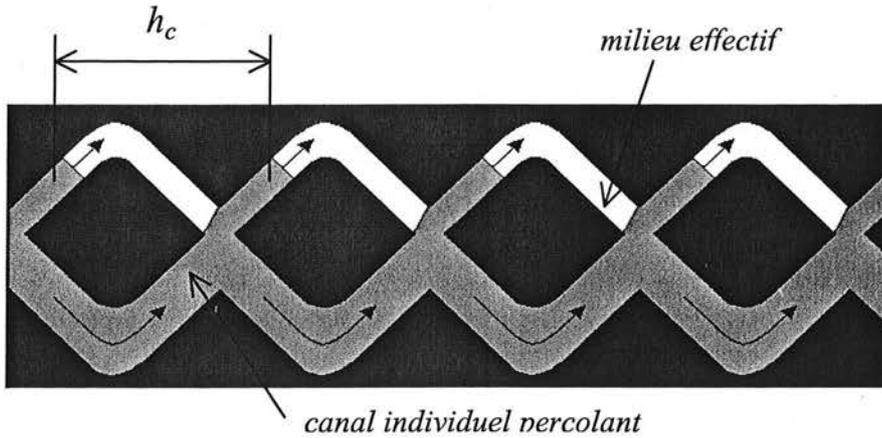


Fig. 2.3.7. Mécanisme de duplication des fronts mobiles

Puisqu'un front homogénéisé est constitué de ménisques individuels, le système répétitif de fronts correspond à un système répétitif de ménisques.

Ainsi, le système répétitif est formé si les pores sont hétérogènes, et s'il existe au moins un canal individuel plus perméable que le canal moyen.

La structure globale du champ de ménisques mobiles est présentée sur la Fig. 2.3.8. L'image *a* montre un canal moyen avec des branchements assurant le mécanisme de duplication. L'image *b* montre la structure résultante pour un canal moyen. La valeur h_c est la distance moyenne entre les deux ménisques voisins et joue le rôle du paramètre de configuration des phases.

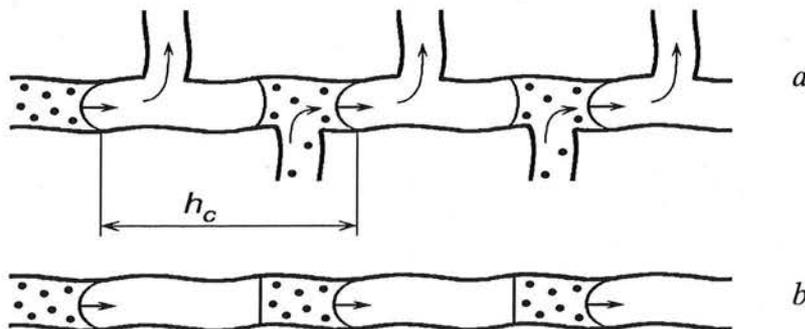


Fig. 2.3.8. Structure du champ de ménisques mobiles

2.3.5. CONSERVATION DU VOLUME DU FLUIDE TOTAL DANS UN CHAMP RÉPÉTITIF DE MÉNISQUES

Examinons un volume élémentaire du champ répétitif de ménisques (Fig. 2.3.9). Supposons que les deux phases soient incompressibles. Il est évident que quelles que soient les masses volumiques des phases, le volume du fluide total est conservé : pour une période de temps fixé, le volume d'entrée est égal au volume de sortie. Cependant, le volume et la masse de la phase déplaçante (en gris) ne sont pas conservés dans l'élément examiné : ils sont positifs à l'entrée et nuls à la sortie. La même conclusion concerne la masse et le volume de la phase déplacée (en blanc).

Supposons maintenant que les masses volumiques des phases soient très différentes : par exemple, la masse volumique de la phase déplaçante est beaucoup plus grande que celle de la phase déplacée. Alors la masse entrante dans le volume examiné n'est pas égale à la masse sortante de ce volume. Donc, la masse totale des phases dans un élément n'est pas conservée. Ceci signifie que la masse totale du fluide dans tout le système peut être inconstante.

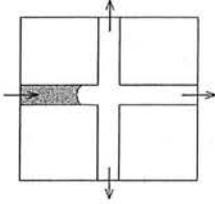


Fig. 2.3.9. La masse d'entrée (en gris) et la masse de sortie (en blanc)

Ainsi, la seule loi de conservation de la quantité de fluide qui a lieu de prendre en compte dans un champ répétitif de ménisques est la conservation du volume du fluide total.

CONCLUSIONS

Au terme de ce paragraphe, nous pouvons lister les conclusions suivantes :

1. Suite au volume négligeable des nœuds, la vitesse d'écoulement et, donc, l'équation de mouvement des phases restent inchangées.
2. Suite au mécanisme de compensation assurant la conservation du nombre moyen de ménisques, les processus de la « naissance/mort » des ménisques ne changent pas l'équation de conservation de la masse de chaque phase.
3. Suite à un mécanisme de duplication, un système répétitif de ménisques se forme dans l'espace, avec une distance caractéristique entre deux ménisques voisins h_c .
4. Le champ répétitif de ménisques ne peut exister que s'il existe un sous-système de canaux individuels totalement remplis de la phase déplaçante. Ainsi, la configuration des ménisques est constituée de deux sous-domaines : (I) *le champ répétitif de ménisques mobiles* et (II) *les canaux percolants*, sans ménisques et remplis par la phase déplaçante.

$$\text{Configuration des ménisques} = \begin{cases} I: & \text{Champs répétitif de ménisques} \\ II: & \text{Canaux percolants} \end{cases} \quad (2.3.6)$$

5. Dans le champ répétitif de ménisques, les vitesses de deux phases sont identiques. On dit que ce champ est mono-vitesse, bien que composé de deux phases.
6. Le volume total du fluide est conservé dans le champ répétitif de ménisques.

2.4. HOMOGÉNÉISATION D'UN CHAMP RÉPÉTITIF DE MÉNISQUES

En utilisant les propriétés du champ des ménisques étudié, nous proposons dans ce paragraphe une approche permettant d'obtenir les équations macroscopiques de l'écoulement par homogénéisation. En occultant l'existence du sous-domaine des canaux percolants, nous examinerons uniquement une des deux composantes de la configuration de ménisque (2.3.6) - le champ répétitif de ménisques. Ceci dit, l'homogénéisation effectuée ne concerne pas toute la configuration des phases, mais uniquement un sous-domaine de cette configuration. Nous examinons ici une géométrie simplifiée du champ répétitif, en n'essayant de saisir de cette procédure que des résultats qualitatifs. Le résultat obtenu ne concerne que la forme attendue de l'équation macroscopique de la quantité de mouvement. Le modèle complet pour la configuration entière sera obtenu dans le paragraphe 2.5 par une approche phénoménologique.

2.4.1. CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DU CHAMP RÉPÉTITIF

Examinons un champ répétitif mono-dimensionnel présenté sur la Fig. 2.3.8, *b*. Supposons que ce champ soit périodique avec une période h_c qui est la distance caractéristique entre deux ménisques voisins. Tout le champ constitue donc une suite de cellules périodiques. Soit x_i la coordonnée du centre de la cellule numéro i . Nous supposons que :

$$h_c \ll L \quad (2.4.1)$$

avec L une longueur macroscopique du champ.

Chaque cellule, à son tour, est constituée de plusieurs pores de longueur l . A chaque instant, un seul pore de la cellule contient le ménisque, tandis que les autres sont remplis entièrement soit de la phase déplaçante, soit de la phase déplacée. Supposons qu'à l'instant t le ménisque soit situé dans le pore dont le centre est x_i . Dans ce pore (c'est-à-dire entre les points $x_i - l/2$ et $x_i + l/2$), l'équation de Washburn (2.3.3) est valide, tandis que, dans les autres pores, il faut appliquer l'équation de Poiseuille. Alors, on peut écrire pour n'importe quel point de la cellule périodique examinée, en prenant en compte (2.3.4) et (2.3.5) que :

$$U = \frac{\gamma r^2}{\langle \mu \rangle} \left[\frac{\delta P}{l} + \frac{P_c}{l} (H(x - x_i + l/2) - H(x - x_i - l/2)) \right] \quad (2.4.1)$$

$$\langle \mu \rangle = \mu_\alpha s + \mu_\beta (1 - s)$$

où δP est la différence de pressions sur un pore, s est la saturation volumique du liquide déplaçant dans un pore, $H(x)$ est la fonction de Heaviside.

Supposons que $l \ll h_c$ et examinons la limite de l'équation (2.4.1) lorsque $l \rightarrow 0$. Alors, la différence de deux fonctions de Heaviside divisée sur l donnera une fonction-delta :

$$U = -\frac{\gamma r^2}{\langle \mu \rangle} \left[\frac{\partial P}{\partial x} - P_c \delta(x - x_\xi) \right] \quad (2.4.2)$$

où x_ξ est la coordonnée du ménisque, calculée à partir de l'entrée dans le milieu ;

$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$, et $\int_0^\infty \delta(x) dx = 1$. Ainsi, la dimension de la fonction $\delta(x)$ est m^{-1} .

Introduisons les pressions adimensionnelles, $p = P / \delta P^*$, et la pression capillaire adimensionnelle, $p_c = P_c / P_c^*$, ainsi que le nombre capillaire $Ca = \delta P^* / P_c^*$, où δP^* (resp. P_c^*) est une différence de pression caractéristique sur un pore (resp. la pression capillaire caractéristique). Alors, (2.4.2) prend la forme :

$$-U = \frac{\gamma r^2 P^*}{\langle \mu \rangle} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Ca} p_c \delta(x - x_\xi) \right) \quad (2.4.3)$$

L'équation (2.4.3) décrit l'écoulement dans une cellule périodique d'un champ répétitif de ménisques.

2.4.2. HOMOGENÉISATION DE L'ÉQUATION (2.4.3)

Suivant la méthode asymptotique d'homogénéisation, nous introduirons deux variables : x et $y = x/h_c$, correspondant à deux échelles différentes du processus, en examinant y appartenant à une cellule étendue : $y \in Y = \{-1/2 < y < 1/2\}$. Chaque fonction dépend maintenant de deux variables spatiales, x et y et est considérée comme périodique par rapport à y . L'opération de différentiation $\partial/\partial x$ devra être maintenant remplacée par une différentiation à double échelle : $\partial/\partial x + (1/h_c)\partial/\partial y$. Alors, l'équation (2.4.3) prend la forme :

$$-U = \frac{\gamma r^2 P^*}{\langle \mu \rangle} \left(\frac{1}{h_c} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{h_c Ca} p_c \delta(y - y_\xi) \right) \quad (2.4.4)$$

où $\delta(y) = \delta(x)/h_c$, car d'après la définition de la fonction delta,

$$\int_0^\infty \delta(y) dy = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \delta(x) dx = 1.$$

Représentons les fonctions inconnues sous forme de séries asymptotiques à deux échelles :

$$\begin{aligned} U &= U_0(x, t) + h_c U_1(x, y, t) + h_c^2 \dots, & p &= p_0(x, t) + h_c p_1(x, y, t) + h_c^2 \dots \\ s &= s_0(x, t) + h_c s_1(x, y, t) + h_c^2 \dots, & p_c &= p_{c0}(x, t) + h_c p_{c1}(x, y, t) + h_c^2 \dots \end{aligned}$$

où les termes d'ordre zéro sont des valeurs homogénéisées. Alors on obtient pour (2.4.4) :

$$-U_0 - h_c U_1 - \dots = \frac{\gamma r^2 P^*}{\langle \mu \rangle_0 + h_c \langle \mu \rangle_1 + \dots} \left(\frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{\partial p_0}{\partial x} + \dots - \frac{1}{h_c Ca} [p_{c0} + h_c p_{c1} + \dots] \delta(y - y_\xi) \right)$$

Examinons le cas $Ca \sim 1/h_c$. Alors la dernière équation donne pour l'approximation à l'ordre zéro :

$$-U_0 = \frac{\gamma r^2 P^*}{\langle \mu \rangle_0} \left(\frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{p_{c0}}{h_c Ca} \delta(y - y_\xi) \right) \quad (2.4.5)$$

Intégrons cette équation selon y à travers Y . Désignons cette opération comme : $\langle \cdot \rangle = \int_y (\cdot) dy$. En prenant en compte que $\langle \partial p / \partial y \rangle = 0$ dû à la périodicité de la fonction p en y , les termes d'ordre zéro ne dépendent plus de y , et l'intégration de la fonction-delta donne 1. On obtient alors :

$$-U_0 = \frac{\gamma r^2 P^*}{\langle \mu \rangle_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{p_{c0}}{h_c Ca} \right) \quad (2.4.6)$$

En prenant en compte que le processus est mono-dimensionnel, l'écriture vectorielle sous forme dimensionnelle de (2.4.6) se présente comme suit :

$$-\vec{V}_0 = \frac{K}{\langle \mu \rangle_0} \left(\text{grad } P_0 - \frac{P_{c0}}{h_c} \vec{e}_c \right), \quad K = \phi \gamma r^2 \quad (2.4.7)$$

où \vec{e}_c est un vecteur unitaire parallèle à la force capillaire, \vec{V} est la vitesse de Darcy ($\vec{V} = \vec{U}\phi$), ϕ est la porosité.

2.4.3. INTERPRÉTATION PHYSIQUE DE L'ÉQUATION HOMOGENÉISÉE. CAPILLARITÉ VECTORIELLE

L'équation (2.4.7) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$-\text{grad } P_0 + \frac{P_{c0}}{h_c} \vec{e}_c - \vec{V}_0 \frac{\langle \mu \rangle_0}{K} = 0 \quad (2.4.8)$$

qui a une interprétation physique claire : la somme de forces appliquées à un volume élémentaire diphasique est nulle. Précisément, trois types de forces apparaissent : pression, capillarité et frottement.

Le phénomène essentiel traduit est la notion de capillarité vectorielle. La capillarité apparaît donc dans l'équation de la quantité de mouvement sous forme vectorielle :

$$\vec{F}_c = \frac{P_{c0}}{h_c} \vec{e}_c \quad (2.4.9)$$

où P_{c0} est la pression capillaire de Laplace sur un ménisque moyen, h_c est la distance

moyenne entre les deux ménisques voisins, \vec{e}_c est un vecteur unitaire du champ capillaire.

L'apparition de la force capillaire réelle sous forme d'un vecteur est une acception nouvelle, qui n'a pas d'existence dans le modèle classique de Buckley-Leverett, où la capillarité a une forme scalaire et n'apparaît qu'à travers une relation thermodynamique. Cette différence est illustrée sur la Fig. 2.4.1, où deux configurations de phases sont présentées.

On voit que dans le cas de la structure « film » (b), la force capillaire appliquée à l'interface courbée est orthogonale à la direction de l'écoulement. Ainsi, la projection de cette force suivant la direction de l'écoulement est nulle. La force capillaire n'a donc aucune contribution dans l'équation de la quantité de mouvement. C'est pour cette raison que le modèle macroscopique de la configuration « film », qui est celui des perméabilités croisées, ne contient pas de capillarité vectorielle. Cependant, pour une configuration « film », la pression capillaire détermine une différence de pressions de phases et donc entre dans les relations thermodynamiques du modèle macroscopique.

Dans le cas de la configuration « ménisque » (Fig. 2.4.1, a), la force capillaire est parallèle à la direction de l'écoulement et entre donc dans l'équation de l'écoulement. Dans ce cas, la capillarité peut ralentir ou accélérer l'écoulement.

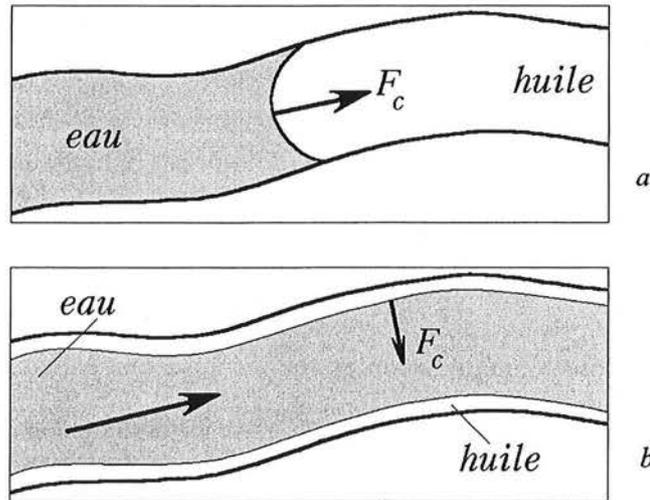


Fig. 2.4.1. Direction de la force capillaire pour une structure « ménisque » (a) et « film » (b)

2.4.4. SUR L'HOMOGENÉISATION DE LA CONFIGURATION ENTIÈRE DE MÉNISQUE

Comme mentionné précédemment, l'homogénéisation effectuée dans ce paragraphe ne concerne que le sous-domaine du champ répétitif des ménisques de géométrie simplifiée et porte un caractère qualitatif. Cependant, une particularité importante du comportement macroscopique de cette configuration a été mise en évidence. En effet, on a pu montrer que l'équation (2.4.7) décrit les deux phases comme un ensemble unique inséparable, possédant une seule vitesse et une seule viscosité dynamique moyenne $\langle \mu \rangle$. De ce point de vue, on peut constater que dans un champ répétitif de ménisques, les deux phases au sens thermodynamiques représentent une seule phase au sens hydrodynamique. Ainsi, l'homogénéisation

doit être effectuée pour les deux phases vues de façon globale, et non pour chaque phase prise séparément, comme cela se pratique habituellement.

D'une façon plus insistante, l'homogénéisation pour chaque phase thermodynamique ne peut pas être effectuée dans ce cas. En effet, l'homogénéisation des équations de l'écoulement en milieu poreux demande de déterminer la continuité de chaque phase. Ceci signifie que la vitesse et la pression de la phase eau doivent être définies non seulement dans le sous-domaine occupé par l'eau (Fig. 2.4.2), mais aussi dans le sous-domaine du milieu occupé par le solide et dans le sous-domaine occupé par l'huile.



Fig. 2.4.2. Sur la continuité des phases en milieu poreux

La prolongation de la vitesse de l'eau sur le domaine I s'effectue de manière naturelle (on y impose une vitesse nulle) et la prolongation de la pression s'effectue en accord avec le théorème connue de Tartar, dont le sens est : la valeur moyenne de la pression de l'eau dans le domaine entier est égale à la moyenne dans le domaine occupé que par l'eau. Cependant la continuité de la vitesse ainsi que de la pression de l'eau sur le domaine de l'huile n'est pas définie. En particulier, on ne peut pas supposer la vitesse de l'eau nulle en domaine de l'huile, car ceci ne satisfait pas les conditions à l'interface des phases. La prolongation de la pression sur le domaine de l'huile suivant le théorème de Tartar ne peut pas être appliquée également, car cela introduit les coordonnées de l'interface inconnue dans la définition de la continuité en pression.

Ce problème ne se pose pas si on effectue l'homogénéisation pour le fluide entier.

2.5. APPROCHE PHÉNOMÉNOLOGIQUE DE CONSTRUCTION DU MODÈLE DES MÉNISQUES

L'approche phénoménologique consiste à admettre l'existence de continus pour chaque phase co-existante en chaque point de l'espace et du temps. Puisque cette approche ignore toute configuration interne des phases, la configuration particulière formée par un champ répétitif de ménisques mobiles doit être remplacée par les propriétés spéciales du continuum.

Suivant les conclusions du paragraphe 2.3, nous admettons que la configuration de ménisques représente une superposition de trois continus croisés : (I) le M -continuum (meniscus continuum) représentant le champ répétitif de ménisques, (II) le continuum percolant représentant le sous-domaine des canaux percolants et (III) le continuum de canaux impénétrables pour la phase déplaçante, qui ne sont remplis que de la phase déplacée. Ce troisième continuum n'est pas obligatoire.

2.5.1. M -CONTINUUM

En se basant sur les propriétés du champ de ménisques décrites (paragraphe 2.3), introduisons la notion d'un M -continuum (meniscus continuum).

Nous admettons que les deux phases thermodynamiques forment un M -continuum unique qui a les propriétés suivantes :

1. Une force capillaire (le vecteur) est distribuée le long de tout le M -continuum avec une densité de distribution statistique par longueur $P_c \mathbf{e}_c / h_c$, où \mathbf{e}_c est le vecteur unitaire du champ capillaire. P_c est une pression capillaire propre des pores (la pression propre d'un pore est la pression capillaire de Laplace appliquée à un ménisque imaginaire positionné dans ce pore).
2. Le M -continuum a une seule vitesse en chaque point : $V_\alpha = V_\beta$.
3. Le vecteur unitaire capillaire \mathbf{e}_c est parallèle à la vitesse macroscopique de l'écoulement du M -continuum hors des fronts de déplacements (un front de déplacement est caractérisé par une discontinuité de la saturation). Sur un front, le vecteur capillaire est normal à la surface de discontinuité.
4. La viscosité dynamique du M -continuum est $\langle \mu \rangle = \mu_\alpha s + \mu_\beta (1 - s)$ avec s la saturation locale.
5. On utilise la loi de conservation du volume du M -continuum.

Notons que les vitesses des deux phases sont identiques uniquement dans le M -continuum, mais différentes pour la configuration entière qui est la superposition de trois continus comme mentionnés précédemment.

Ces propriétés du M -continuum sont nécessaires pour obtenir une équation du mouvement identique à celle obtenue par la procédure d'homogénéisation.

Ecrivons l'équation du bilan de mouvement pour le M -continuum. Un volume élémentaire subit l'action des forces de pression de la part du fluide extérieur ($-\text{grad } P$), des forces de frottement et des forces capillaires. La force de frottement est proportionnelle à la vitesse et à la viscosité dynamique du continuum : $-\vec{V}\langle\mu\rangle/K$. La force capillaire est définie par l'équation (2.4.9). Ainsi, on a l'équation de bilan suivante :

$$-\text{grad } P + \frac{P_c}{h_c} \vec{e}_c - \vec{V} \frac{\langle\mu\rangle}{K} = 0 \quad (2.5.1)$$

En réécrivant cette équation sous forme explicite par rapport à la vitesse de Darcy, on obtient :

$$-\vec{V} = \frac{K}{\langle\mu\rangle} \left(\text{grad } P - \frac{P_c}{h_c} \vec{e}_c \right) \quad (2.5.2)$$

ce qui correspond exactement à l'équation homogénéisée (2.4.7).

2.5.2. ÉQUATIONS PHÉNOMÉNOLOGIQUES DE L'ÉCOULEMENT POUR UNE CONFIGURATION DE MÉNISQUES

Pour les trois continums croisés formant la configuration de ménisques, nous pouvons maintenant formuler les équations de bilan de masse de chaque phase et de bilan de quantité de mouvement. Admettons que les indices supérieurs I , II et III signifient l'appartenance à un des trois continums croisés : I est le M -continuum, II est le continuum percolant, III est le continuum impénétrable ; s^i ($i=I,II,III$) est la saturation de la phase déplaçante dans le continuum i ; α^i est la fraction volumique du continuum i dans le volume total poreux ; K^i et ϕ^i sont respectivement la perméabilité et la porosité du continuum i . Utilisons les vitesses de Darcy, \vec{V} , qui sont liées aux vitesses réelles \vec{U} par les relations : $\vec{V}_\alpha^i = \vec{U}_\alpha^i \phi^i$, $\vec{V}_\beta^i = \vec{U}_\beta^i \phi^i$ ($i=I,II,III$). Nous examinons le cas des phases incompressibles et du milieu non déformable. Les forces de gravité sont négligées.

Pour le M -continuum (I), les équations de conservation sont formulées pour l'ensemble du fluide. L'équation (2.5.3-a) est celle de conservation du volume du M -continuum. L'équation de bilan du mouvement, (2.5.3-b), correspond à (2.5.1) ou (2.5.2) :

$$\phi^I \frac{\partial \alpha^I}{\partial t} + \text{div}(\vec{V}^I \alpha^I) = 0 \quad (2.5.3-a)$$

$$\vec{V}_\alpha^I = \vec{V}_\beta^I \equiv \vec{V}^I = \frac{K^I}{\langle\mu\rangle} \left(-\text{grad } P^I + \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) \quad (2.5.3-b)$$

où $\langle\rho\rangle \equiv \rho_\alpha s^I + \rho_\beta (1-s^I)$ et $\langle\mu\rangle \equiv \mu_\alpha s^I + \mu_\beta (1-s^I)$ sont respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du M -continuum ; l est la longueur d'un pore. Au lieu de la distance entre les ménisques, h_c , introduisons la valeur

$$\eta_c \equiv \frac{l}{h_c}$$

qui n'est autre que la concentration en ménisques. Si la distance entre les ménisques, h_c , est beaucoup plus grande que l , la concentration des ménisques tend vers zéro. La concentration des ménisques tend vers 1, si la distance h_c tend vers l (chaque pore contient un ménisque). Puisque un pore ne peut contenir qu'un seul ménisque, les concentrations supérieures à 1 sont impossibles. Ce développement justifie la consistance de la définition de la concentration en ménisques.

Pour le continuum percolant (II), les équations de conservation sont formulées pour la phase déplaçante uniquement :

$$\phi^{II} \frac{\partial \alpha^{II}}{\partial t} + \text{div}(\vec{V}_\alpha^{II} \alpha^{II}) = 0 \quad (2.5.4-a)$$

$$\vec{V}_\alpha^{II} = -\frac{K^{II}}{\mu_\alpha} \text{grad } P^{II}, \quad \vec{V}_\beta^{II} \equiv 0 \quad (2.5.4-b)$$

Pour le continuum impénétrable (III), les équations de conservation sont formulées pour la phase déplacée :

$$\phi^{III} \frac{\partial \alpha^{III}}{\partial t} + \text{div}(\vec{V}_\beta^{III} \alpha^{III}) = 0 \quad (2.5.4-a)$$

$$\vec{V}_\beta^{III} = -\frac{K^{III}}{\mu_\beta} \text{grad } P^{III}, \quad \vec{V}_\alpha^{III} \equiv 0 \quad (2.5.4-b)$$

Les trois fonctions α^i sont reliées par une équation de normalisation :

$$\alpha^I + \alpha^{II} + \alpha^{III} = 1 \quad (2.5.5)$$

En admettant que les trois continus sont en équilibre entre-eux, alors :

$$P^I = P^{II} = P^{III} \equiv P \quad (2.5.6)$$

En supposant également que la perméabilité et la porosité de chaque continuum sont identiques :

$$K^I = K^{II} = K^{III} \equiv K, \quad \phi^I = \phi^{II} = \phi^{III} \equiv \phi$$

Après avoir éliminé les différentes pressions, nous obtenons un système de 7 équations (2.5.3) – (2.5.5) qui contiennent 9 fonctions inconnues :

- la pression P ;
- les trois vitesses $\vec{V}^I, \vec{V}_\alpha^{II}, \vec{V}_\beta^{III}$;
- les trois fractions volumiques $\alpha^I, \alpha^{II}, \alpha^{III}$;
- la saturation de la phase déplaçante dans le sous-domaine I : s^I ;
- la concentration de ménisques η_c .

Ainsi, il est nécessaire de formuler 2 relations de fermeture.

2.5.3. AUTRES FORMES DU MODÈLE PHÉNOMÉNOLOGIQUE

Le modèle (2.5.3) – (2.5.6) peut être transformé, en éliminant les champs des vitesses, sous les formes suivantes :

$$\phi \frac{\partial \alpha^I}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{K \alpha^I}{\langle \mu \rangle} \left(\operatorname{grad} P - \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) \right) \quad (2.5.7-a)$$

$$\phi \frac{\partial \alpha^{II}}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{K \alpha^{II}}{\mu_\alpha} \operatorname{grad} P \right) \quad (2.5.7-b)$$

$$\phi \frac{\partial \alpha^{III}}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{K \alpha^{III}}{\mu_\beta} \operatorname{grad} P \right), \quad \alpha^{III} = 1 - (\alpha^I + \alpha^{II}) \quad (2.5.7-c)$$

Il est également possible d'obtenir une autre formulation de ce système, non symétrique, dans laquelle deux équations prennent la forme de l'équation de transport. Introduisons les notations suivantes :

$$\lambda^I = K / \langle \mu \rangle, \quad \lambda^{II} = K / \mu_\alpha, \quad \lambda^{III} = K / \mu_\beta, \quad \lambda^\Sigma = \lambda^I \alpha^I + \lambda^{II} \alpha^{II} + \lambda^{III} \alpha^{III},$$

$$F^I = \frac{\lambda^I \alpha^I}{\lambda^\Sigma}, \quad F^{II} = \frac{\lambda^{II} \alpha^{II}}{\lambda^\Sigma}$$

En sommant les trois équations (2.5.7), on obtient :

$$\operatorname{div}(\lambda^\Sigma \operatorname{grad} P) = \operatorname{div} \left(\lambda^I \alpha^I \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) \quad (2.5.8)$$

Puisque $\operatorname{div}(\lambda^I \alpha^I \operatorname{grad} P) = \operatorname{div}(\lambda^\Sigma F^I \operatorname{grad} P) = F^I \operatorname{div}(\lambda^\Sigma \operatorname{grad} P) + \lambda^\Sigma \operatorname{grad} P \operatorname{grad} F^I$ et donc, en utilisant (2.5.8) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda^I \alpha^I \operatorname{grad} P) &= F^I \operatorname{div} \left(\lambda^I \alpha^I \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) + \lambda^\Sigma \operatorname{grad} P \operatorname{grad} F^I = \\ &= \operatorname{div} \left(F^I \lambda^I \alpha^I \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) + \left(\lambda^\Sigma \operatorname{grad} P - \lambda^I \alpha^I \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) \operatorname{grad} F^I \end{aligned}$$

De façon analogue, on obtient :

$$\operatorname{div}(\lambda^{II} \alpha^{II} \operatorname{grad} P) = \operatorname{div} \left(F^{II} \lambda^I \alpha^I \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) + \left(\lambda^\Sigma \operatorname{grad} P - \lambda^I \alpha^I \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) \operatorname{grad} F^{II}$$

Alors, les équations (2.5.7-a,b) prennent la forme :

$$\phi \frac{\partial \alpha^I}{\partial t} - \left(\lambda^\Sigma \operatorname{grad} P - \lambda^I \alpha^I \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) \operatorname{grad} F^I + \operatorname{div} \left([1 - F^I] \lambda^I \alpha^I \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) = 0 \quad (2.5.9)$$

$$\phi \frac{\partial \alpha^{II}}{\partial t} - \left(\lambda^\Sigma \operatorname{grad} P - \lambda^I \alpha^I \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) \operatorname{grad} F^{II} - \operatorname{div} \left(F^{II} \lambda^I \alpha^I \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) = 0 \quad (2.5.10)$$

Les fonctions $F^I(\alpha^I, \alpha^{II}, s^I)$ et $F^{II}(\alpha^I, \alpha^{II}, s^I)$ sont des analogues de la fonction « fractional flow ».

Le système de trois équations (2.5.8), (2.5.9) et (2.5.10) est la forme équivalente du modèle (2.5.3) – (2.5.6), contenant 5 fonctions inconnues : P , α^I , α^{II} , s^I , η_c .

2.5.4. RELATIONS DE FERMETURE POUR S^I

La définition de deux variables, s^I et η_c , qui sont les paramètres responsables de la structure interne du sous-domaine I , ne peut pas être effectuée dans le cadre de l'approche phénoménologique. Ces variables restent les paramètres libres du modèle. Pour les définir, on a besoin d'appliquer d'autres approches, plus fines, soit basée sur l'analyse théorique quantitative des micro-mécanismes décrits (paragraphe 2.3), soit basée sur le traitement statistique des données de simulation en réseaux capillaires.

La saturation s^I dans le champ répétitif de ménisques peut être obtenue en examinant l'évolution du champ de saturation dans le modèle du milieu effectif (Fig. 2.3.7). Nous donnons ici seulement les croquis de l'analyse qualitative du comportement de ce modèle, sans prétendre, dans le cadre de ce travail, à un développement de relations théoriques pour s^I . L'analyse détaillée quantitative demande d'énormes efforts et peut faire le sujet d'une nouvelle thèse.

Premièrement, le remplissage de chaque cellule de longueur h_c (Fig. 2.3.7) par la phase déplaçante provenant du canal percolant commence initialement dans la cellule amont, puis, avec un retard de plus en plus grand, dans les cellules successives. Ainsi la saturation moyenne de chaque cellule varie spatialement. Cependant, si on suppose que la vitesse de remplissage du milieu efficace est beaucoup plus petite que la vitesse de percolation du milieu à travers le canal percolant, on élimine le retard et la différence entre les cellules. Dans le cadre de cette approximation, la saturation moyenne dans chaque cellule ne dépend plus des coordonnées spatiales.

Dans une cellule arbitraire, la saturation moyenne augmente dans le temps, jusqu'au moment où le front rencontre le front immobile qui marque la section amont de chaque nouvelle cellule (Fig. 2.3.7). Après cela, la saturation moyenne reste constante et égale à une valeur s_*^I (Fig. 2.5.1).

Le temps caractéristique de remplissage est $t_{fil} = h_c / U^I$, où U^I est le vitesse réelle de l'écoulement dans le M -continuum. Pour des petites valeurs de $h_c \ll L$ (L est la longueur macroscopique du milieu), le temps de remplissage d'une cellule est beaucoup plus petit que le temps macroscopique du processus de déplacement examiné. Alors, il est possible de négliger ces petites périodes et d'admettre que la saturation moyenne dans chaque cellule, et donc dans tout le M -continuum, reste constante et égale à :

$$s^I \approx s_*^I = const \quad (2.5.11)$$

Cette relation est valable pour des valeurs de h_c assez petites (grandes concentrations en ménisques).

La valeur de la saturation s_*^I peut être évaluée comme suit : $s_*^I = 1 - s_\beta^r$, où s_β^r est la saturation piégée de la phase déplacée.

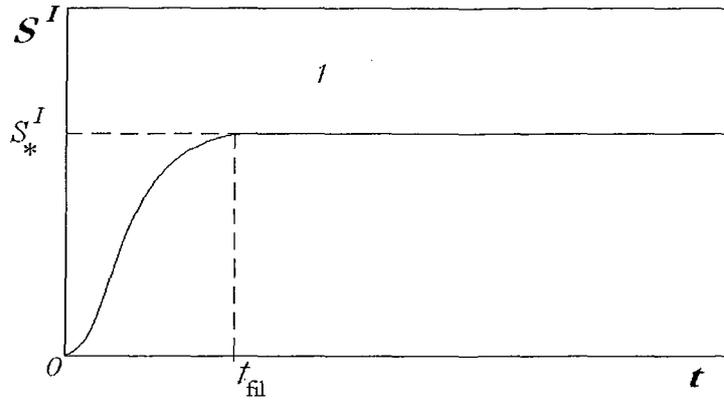


Fig. 2.5.1. Saturation moyenne dans une cellule du milieu effectif en fonction du temps

Il est nécessaire de noter que dans le cas dégénéré, lorsque la saturation totale de la phase déplaçante tend vers zéro, la quantité de cette phase disparaît dans chaque continuum. Ceci n'est pas en contradiction avec la relation (2.5.11), car la quantité de la phase déplaçante dans le continuum I disparaît grâce à la diminution de son volume total α^I .

2.5.5. RELATIONS DE FERMETURE POUR η_c

L'évolution de la concentration en ménisques peut être obtenue à partir d'un micro-modèle du processus décrivant la naissance et la mort des ménisques. Le résultat attendu est une équation de population des ménisques, ayant un type général :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{U}^I \text{grad} \eta = \text{div}(D_\eta \text{grad} \eta) + \underbrace{R(\eta)}_{\rightarrow 0}$$

où \bar{U}^I est la vitesse réelle de transport des ménisques (égale à la vitesse réelle dans le M -continuum) ; D_η est le coefficient de dispersion du champ de ménisques, $R(\eta)$ est le terme-source qui est égal à zéro, dû aux propriétés admises du M -continuum. Pour construire cette équation théoriquement et obtenir la valeur de D_η , on peut examiner un processus stochastique Markovien d'un mouvement aléatoire avec un bilan équilibré naissance (apparition) et mort (dégradation) des particules (ménisques) sur une trajectoire $x - \int_0^t U^I dt$.

Les densités de probabilité de naissance/mort doivent être données et peuvent être obtenues par des algorithmes de percolations multiples.

Ainsi, le modèle proposé établit le pont entre la théorie de la percolation et le modèle macroscopique d'écoulement diphasique.

Cette approche demande, cependant, une analyse profonde bien complexe. Dans le cadre de la présente thèse, nous admettons une approximation simplificatrice pour la concentration en ménisques. Remarquons que si le système est monophasique, c'est-à-dire la saturation globale de la phase déplaçante est 0 ou 1, la concentration de ménisques est nulle. Si une des phases est en abondance, la valeur de η_c est petite. Il est attendu alors que la valeur de η_c soit maximale pour des saturations de l'ordre de 0.5 (les deux phases sont présentes à part égale).

En tenant compte qu'une partie de la saturation totale est occupée par le continuum percolant, on peut donc s'attendre à ce que le maximum de η_c soit un peu déplacé vers des valeurs de saturation supérieures à 0.5.

Ainsi, on admet que :

- 1) il existe une liaison fonctionnelle entre η_c et la saturation totale de la phase déplaçante s :

$$\eta_c = \eta_c(s) \quad (2.5.12)$$

- 2) la fonction (2.5.12) a les propriétés suivantes :

$\eta_c(0) = \eta_c(1) = 0$; $\eta_c(s)$ est non monotone et non symétrique avec un maximum déplacé à droite par rapport au point $s = 0.5$ (Fig. 2.5.2).

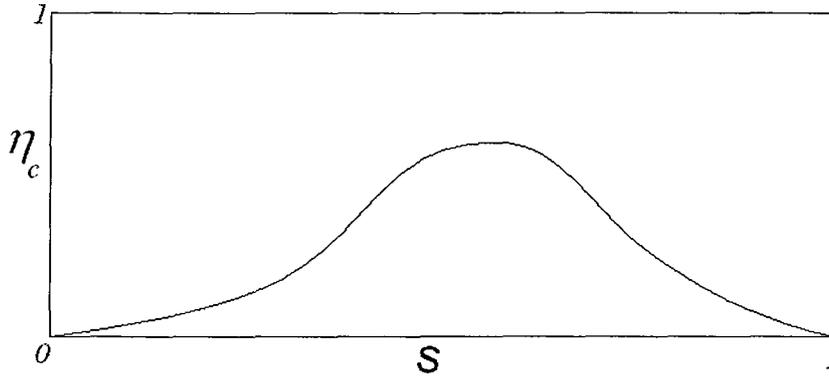


Fig. 2.5.2. Caractère qualitatif de la fonction $\eta_c(s)$

L'hypothèse (2.5.12) sera vérifiée dans le paragraphe 2.6 par des simulations en réseaux capillaires.

2.5.6. MODÈLE DE MÉNISQUE FERMÉ

En rassemblant les équations (2.5.7-a,b,c), (2.5.11) et (2.5.12), nous obtenons le modèle fermé :

$$\phi \frac{\partial \alpha^I}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{K \alpha^I}{\langle \mu \rangle} \left(\text{grad} P - \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) \right) \quad (2.5.13-a)$$

$$\phi \frac{\partial \alpha^{II}}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{K \alpha^{II}}{\mu_\alpha} \text{grad} P \right) \quad (2.5.13-b)$$

$$\phi \frac{\partial \alpha^{III}}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{K \alpha^{III}}{\mu_\beta} \text{grad} P \right), \quad \alpha^{III} = 1 - (\alpha^I + \alpha^{II}) \quad (2.5.13-c)$$

$$s^I \approx s_*^I = \text{const} \quad (2.5.13-d)$$

$$\eta_c = \eta_c(s) \quad (2.5.13-e)$$

$$s = s^I \alpha^I + \alpha^{II} \quad (2.5.13-f)$$

où s est la saturation totale de la phase déplaçante dans le milieu.

Deux équations (2.5.13-a,b,c) peuvent être remplacées par une équation sommaire et par une équation pour la saturation totale :

$$\operatorname{div} \left(K \left(\frac{\alpha^I}{\langle \mu \rangle} + \frac{\alpha^{II}}{\mu_\alpha} + \frac{\alpha^{III}}{\mu_\beta} \right) \operatorname{grad} P - \frac{K \alpha^I}{\langle \mu \rangle} \frac{P_c}{l} \eta_c \bar{e}_c \right) = 0$$

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div} \left(K \left(\frac{\alpha^I s^I}{\langle \mu \rangle} + \frac{\alpha^{II}}{\mu_\alpha} \right) \operatorname{grad} P - \frac{K \alpha^I s^I}{\langle \mu \rangle} \frac{P_c}{l} \eta_c \bar{e}_c \right)$$

Pour obtenir la seconde équation, il suffit de multiplier (2.5.13-a) par s^I et prendre la somme avec (2.5.13-b).

2.5.7. TRANSFORMATION EN UNE ÉQUATION DE TRANSPORT DE SATURATION

Le système (2.5.13) peut être transformé et donner une équation de transport de la saturation totale. Cette nouvelle forme est :

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} P) = \operatorname{div}(a \alpha^I \eta_c \bar{e}_c) \quad (2.5.14-a)$$

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} - (\lambda \operatorname{grad} P - a \alpha^I \eta_c \bar{e}_c) \operatorname{grad} F + \operatorname{div}(F_c a \bar{e}_c) = 0 \quad (2.5.14-b)$$

$$\phi \frac{\partial \alpha^{II}}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_\alpha \alpha^{II} \operatorname{grad} P) \quad (2.5.14-c)$$

$$s^I \approx s_*^I = \text{const} \quad (2.5.14-d)$$

$$\eta_c = \eta_c(s) \quad (2.5.14-e)$$

où les notations introduites sont :

$$\lambda_\alpha \equiv \frac{K k_\alpha}{\mu_\alpha}, \quad \lambda_\beta \equiv \frac{K k_\beta}{\mu_\beta}, \quad \lambda \equiv \lambda_\alpha + \lambda_\beta, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu_\alpha}{\mu_\beta}, \quad a \equiv \frac{K}{\langle \mu \rangle} \frac{P_c}{l}$$

$$F = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda} = \frac{k_\alpha}{k_\alpha + k_\beta \bar{\mu}}, \quad F_c = (s^I - F) \alpha^I \eta_c \quad (2.5.15)$$

et les nouvelles perméabilités relatives :

$$\begin{cases} k_\alpha(\alpha^I, \alpha^{II}, s^I; \bar{\mu}) = \alpha^I s^I \frac{\mu_\alpha}{\langle \mu \rangle} + \alpha^{II}, \\ k_\beta(\alpha^I, \alpha^{II}, s^I; \bar{\mu}) = \alpha^I (1 - s^I) \frac{\mu_\beta}{\langle \mu \rangle} + 1 - \alpha^I - \alpha^{II} \end{cases} \quad (2.5.16)$$

la fonction F est le flux fractionnaire (*fractional flow*), F_c est « le flux capillaire ».

Dérivons, maintenant, le système (2.5.14). Dans un première temps, multiplions (2.5.13-a) par s^I et ajoutons (2.5.13-b), en prenant en compte la relation (2.5.13-f). Dans un second temps, multiplions (2.5.13-a) par $(1-s^I)$ et ajoutons (2.5.13-c) et en intégrant :

$$\alpha^I(1-s^I) + \alpha^{III} = \alpha^I(1-s^I) + 1 - \alpha^I - \alpha^{II} = 1 - \alpha^I s^I - \alpha^{II} = 1 - s.$$

Alors, on obtient deux équations :

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{Kk_\alpha}{\mu_\alpha} \text{grad}P - \frac{K\alpha^I s^I}{\langle \mu \rangle} \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) \quad (2.5.17-a)$$

$$-\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{Kk_\beta}{\mu_\beta} \text{grad}P - \frac{K\alpha^I(1-s^I)}{\langle \mu \rangle} \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right) \quad (2.5.17-b)$$

La somme de ces deux équations donne (2.5.14-a).

Puisque $\text{div}(\lambda_\alpha \text{grad}P) = \text{div}(\lambda F \text{grad}P) = F \text{div}(\lambda \text{grad}P) + \lambda \text{grad}P \text{grad}F$ nous obtenons, en utilisant (2.5.14-a) :

$$\text{div}(\lambda_\alpha \text{grad}P) = F \text{div}(a\alpha^I \eta_c \vec{e}_c) + \lambda \text{grad}P \text{grad}F = \text{div}(Fa\alpha^I \eta_c \vec{e}_c) + (\lambda \text{grad}P - a\alpha^I \eta_c \vec{e}_c) \text{grad}F$$

Alors, (2.5.17-a) prend la forme (2.5.14-b).

Les autres équations du système, (2.5.14-c,d,e), répètent les trois équations du système (2.5.13). Au lieu de (2.5.14-c), on peut donc utiliser : soit (2.5.13-a), soit (2.5.13-c).

La fonction de flux capillaire est déterminée par :

$$F_c = \frac{\bar{\mu} s^I (\alpha^I + \alpha^{II}) [s^I(1-\bar{\mu})-1] + (\bar{\mu} s^I)^2 + \bar{\mu} s^I (1-s^I)(1-\alpha^{II}) - \alpha^{II} (1-s^I)^2}{\bar{\mu} s^I (1-\bar{\mu})(\alpha^I + \alpha^{II}) + s^I \bar{\mu}^2 + (1-s^I)[\alpha^{II} + \bar{\mu}(1-\alpha^{II})]} \alpha^I \eta_c$$

2.5.8. MODÈLE RÉDUIT

Ce modèle peut être significativement simplifié, si on admet pour la fraction volumique du continuum percolant, α^{II} , une approximation résultant de son comportement limite :

$$\alpha^{II} = \alpha^{II}(s) = s^\omega, \quad \omega = \omega(s^I) : \quad 1 < \omega < \frac{1}{1-s^I} \quad (2.5.18)$$

où on rappelle que s est la saturation totale (de la phase déplaçante), tandis que s^I est la saturation interne dans le M -continuum ; la saturation interne du continuum percolant est 1. L'explication de cette approximation est la suivante.

Premièrement, remarquons, que $\alpha^{II} \rightarrow 0$, lorsque $s \rightarrow 0$ (ainsi que $\alpha^I \rightarrow 0$), ce qui est conforme avec (2.5.18).

Secondement, remarquons que, suivant les propriétés du M -continuum, le continuum II joue le rôle secondaire d'un sous-domaine nécessaire à former le M -continuum, mais en occupant un volume négligeable. Ainsi, il est attendu que α^{II} soit assez petite pour toutes les valeurs de la saturation sauf pour $s = 1$. Ceci signifie qu'en (2.5.18) l'exposant ω doit être plus grand que 1.

Les saturations totales proches de 1 peuvent être formées uniquement par le continuum II. En même temps, le M-continuum, dont la saturation interne s^I est toujours plus petite que 1, disparaît. Ainsi, il est attendu que $\alpha^{II} \rightarrow 1$, lorsque $s \rightarrow 1$ (en même temps, $\alpha^I \rightarrow 0$). Ceci est conforme à l'approximation (2.5.18).

En (2.5.18), la valeur de l'exposant ω doit satisfaire à une contrainte évidente : $\alpha^I + \alpha^{II} \leq 1$. Suivant (2.5.13-f), $\alpha^I = (s - \alpha^{II})/s^I$, ainsi, en prenant en considération (2.5.18), on obtient l'inégalité : $f(s) \equiv s - s^\omega(1 - s^I) \leq s^I$. Pour les deux valeurs limites de s , la fonction $f(s)$ vérifie cette inégalité : $f(0) = 0$, $f(1) = s^I$. Si son comportement est monotone entre 0 et 1, l'inégalité est satisfaite. Ainsi, il est suffisant d'éliminer l'existence des maximums de cette fonction.

Pour la dérivée, on a : $f'(s) \equiv 1 - \omega s^{\omega-1}(1 - s^I)$. Au point du maximum : $s_{\max}^{\omega-1} = 1/[\omega(1 - s^I)]$. Le maximum n'existe pas entre les points 0 et 1, si $s_{\max} > 1$. Cette condition est satisfaite, si $\omega < 1/(1 - s^I)$. Ainsi, on obtient la dernière inégalité de (2.5.18).

L'approximation (2.5.18) remplace la troisième équation dans le système (2.5.14), qui peut être ignorée maintenant, et toutes les variables (2.5.15) deviennent des fonctions d'une seule variable s et de trois paramètres constants : s^I , $\bar{\mu}$ et ω :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^I(s) = \frac{(s - s^\omega)}{s^I}, \quad \lambda(s) = \frac{K k_\alpha(s)}{\mu_\alpha} + \frac{K k_\beta(s)}{\mu_\beta} \\ k_\alpha(s) = \alpha^I(s)s^I\gamma + \alpha^{II}(s), \quad k_\beta(s) = \alpha^I(s)(1 - s^I)\frac{\gamma}{\bar{\mu}} + 1 - \alpha^I(s) - \alpha^{II}(s) \\ \gamma = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}s^I + 1 - s^I}, \quad a = \frac{K P_c}{\langle \mu \rangle l} \\ F(s) = \frac{k_\alpha(s)}{k_\alpha(s) + k_\beta(s)\bar{\mu}}, \quad F_c = (s^I - F(s))\alpha^I(s)\eta_c(s) \end{array} \right. \quad (2.5.19)$$

Le modèle d'écoulement prend donc la forme suivante :

$$\operatorname{div}(\lambda(s) \operatorname{grad} P) = \operatorname{div}(a\alpha^I(s)\eta_c(s)\vec{e}_c) \quad (2.5.20-a)$$

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} - (\lambda(s) \operatorname{grad} P - a\alpha^I(s)\eta_c(s)\vec{e}_c) \operatorname{grad} F(s) + \operatorname{div}(aF_c(s)\vec{e}_c) = 0 \quad (2.5.20-b)$$

$$\eta_c = \eta_c(s) \quad (2.5.20-c)$$

$$s^I \approx s_*^I = \text{const}, \quad \omega = \text{const}(s^I) \quad (2.5.20-d)$$

2.5.9. CAS MONODIMENSIONNEL

Dans le cas 1D, le système (2.5.20) peut être réduit à une seule équation par rapport à la saturation totale :

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + V(t) \frac{\partial F(s)}{\partial X} + e_c \frac{\partial (F_c(s) a)}{\partial X} = 0 \quad (2.5.21)$$

où $e_c = \begin{cases} 1, & \text{si la phase déplaçante est mouillante} \\ -1, & \text{si la phase déplaçante est non mouillante} \end{cases}$,

$V(t)$ est la vitesse de Darcy totale de l'écoulement de deux phases qui apparaît comme le résultat de l'intégration de l'équation (2.5.20-a) :

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{a \alpha^l \eta_c(s) e_c}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} V(t) \quad (2.5.22)$$

Introduisons les variables adimensionnelles et examinons le cas $V=const$, pour simplifier l'analyse :

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad Ca = \frac{\delta P}{P_c}, \quad t_* \equiv \frac{L \phi}{V}, \quad \frac{\delta P}{l} \equiv \frac{V \langle \mu \rangle}{K}$$

où L est la longueur macroscopique du milieu. L'équation (2.5.21) prend la forme :

$$\boxed{\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial F(s)}{\partial x} + \frac{e_c}{Ca} \frac{\partial F_c(s)}{\partial x} = 0} \quad (2.5.23)$$

avec la fonction de flux fractionnaire $F(s)$ et la « fonction de flux capillaire » $F_c(s)$ définies par (2.5.19), e_c étant défini par (2.5.21).

Les fonctions $F(s)$ et $F_c(s)$ sont présentées sur la Fig. 2.5.3 pour des paramètres s^l , $\bar{\mu}$ et ω donnés.

L'analyse qualitative des propriétés de ces fonctions et des solutions de l'équation (2.5.23) sera donnée dans le chapitre 5.

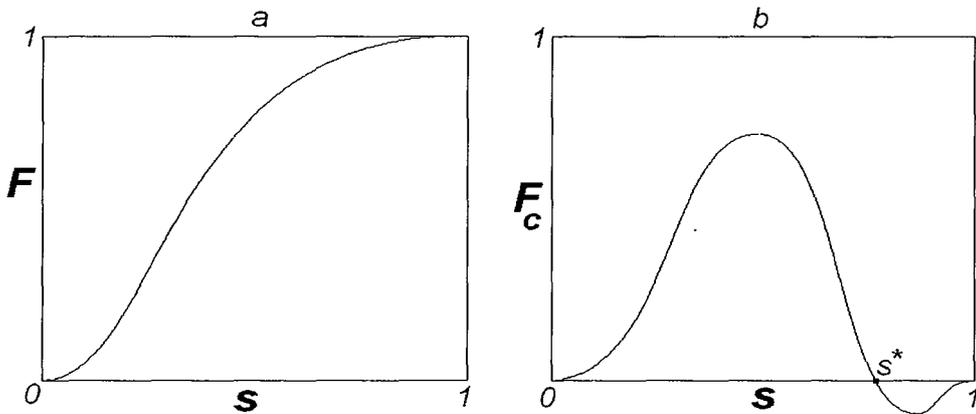


Fig. 2.5.3. Forme du flux fractionnaire non capillaire (a) et capillaire (b)

2.5.10. EFFETS QUALITATIFS

Certains effets nouveaux peuvent être décelés directement de la forme du modèle obtenu, sans pour autant résoudre le problème mathématique.

Capillarité hyperbolique

Le modèle 1D est représenté par une seule équation de transport de saturation totale (2.5.23). C'est une équation hyperbolique non linéaire du premier ordre. Les propriétés de cette équation sont déterminées par la somme de deux fonctions : flux fractionnaire standard et flux capillaire.

On voit que, dans le cadre de ce nouveau modèle, la capillarité entre sous la forme d'un flux convectif, l'équation de transport restant hyperbolique. Ceci est qualitativement différent par rapport au modèle classique de Buckley-Leverett dans lequel la capillarité entre sous forme d'un flux de diffusion, l'équation de transport étant donc parabolique. Cette propriété de ce modèle est tout à fait conforme aux résultats attendus lors d'une analyse qualitative purement physique du processus de transport des ménisques exposée dans le paragraphe 2.2.

Effet de freinage visqueux (par le M -continuum)

Les nouvelles fonctions de perméabilité relative dépendent du rapport de viscosité dynamique, suivant (2.5.19). Ceci a une explication physique. La mobilité intégrale de la phase déplaçante est composée par sa mobilité dans le M -continuum et dans le continuum percolant II . Dans le continuum II qui n'est rempli que de la phase déplaçante, la mobilité de la phase déplaçante est déterminée par sa propre viscosité. Ce n'est pas, cependant, le cas du M -continuum. Puisque la viscosité dynamique du M -continuum est $\langle \mu \rangle$, la mobilité de la phase déplaçante dans le M -continuum est toujours déterminée par la viscosité dynamique maximale. Alors, si la phase déplaçante est moins visqueuse, sa viscosité dynamique intégrale en milieu poreux est plus grande que sa viscosité dynamique propre. Ainsi, le M -continuum freine le mouvement de la phase déplaçante, ce qui produit la diminution de sa perméabilité relative.

Effet de freinage capillaire (par le M -continuum)

Suivant l'équation (2.5.23), le rôle de la capillarité est déterminé par la fonction de flux capillaire $F_c(s)$ définie par (2.5.19). On voit que la contribution de la capillarité est nulle si :

$$F(s) = s^l \quad (2.5.24)$$

où $F(s)$ est le flux fractionnaire non capillaire, intégral de la phase déplaçante (« eau »). En outre, on constate que le flux capillaire change de signe lorsque la saturation traverse la valeur définie par l'équation (2.5.24) :

$$F_c(s) < 0, \quad \text{si} \quad s^l < F(s) \quad (2.5.25)$$

Pour expliquer cet effet, introduisons, dans (2.5.23), le flux sommé :

$$G(s) = F(s) + \frac{e_c}{Ca} F_c(s) \quad (2.5.26)$$

Pour simplifier l'analyse, supposons que $Ca=1$ et la phase déplaçante est mouillante ($e_c = 1$). Alors, le flux sommé est la somme du flux non capillaire et du flux capillaire.

Rappelons que tout flux fractionnaire est la fraction volumique de la phase déplaçante dans le débit total. Il peut être également traité comme la mobilité relative de la phase déplaçante (par rapport à la mobilité totale des deux phases). Le flux non capillaire est provoqué par les gradients de pression, le flux capillaire est provoqué par les forces capillaires sur les ménisques. Remarquons ensuite que s^I est le flux sommé (capillaire + non capillaire) interne dans le M -continuum. Ainsi la différence $s^I - F(s)$ a le sens de la différence entre le flux sommé interne dans le M -continuum et le flux non capillaire intégral dans le milieu entier.

Ainsi, l'explication de la relation (2.5.25) devient la suivante. Si le flux de l'eau dans le M -continuum (s^I) est plus faible que le flux non capillaire intégral ($F(s)$), alors le flux sommé $G(s)$ est plus petit que le flux non capillaire. Ceci signifie, en accord avec (2.5.26), que le flux capillaire devient négatif. Il nous reste à déterminer les situations où s^I peut être plus faible que $F(s)$.

Puisque la phase déplaçante est mouillante, les forces capillaires augmentent sa mobilité dans le M -continuum. Normalement, cela doit augmenter sa mobilité intégrale. Cependant, il existe des cas, où cette tendance est inversée. En effet, examinons le cas de grandes saturations s . Alors, le volume du M -continuum devient de plus en plus petit, le volume du continuum rempli de la phase déplacée disparaît aussi et le volume relatif du continuum II rempli que de la phase déplaçante augmente jusqu'à 1. La mobilité non capillaire de la phase déplaçante est définie essentiellement par le continuum II . Par conséquent, la mobilité sommée devient maximale : $F(s) \rightarrow 1$. Cependant dans le M -continuum, la mobilité interne reste la même (s^I) et, donc, plus petite. Ceci signifie que les forces capillaires réduisent le flux sommé de l'eau.

Il est clair que :

$$\text{si } \bar{\mu} \rightarrow \infty, \quad \text{le flux } F(s) \rightarrow 1, \forall s,$$

ainsi le flux capillaire est toujours positif.

Par contre :

$$\text{si } \bar{\mu} \rightarrow 0, \quad \text{le flux non capillaire } F(s) \rightarrow 0, \forall s,$$

ainsi le flux capillaire est toujours négatif.

CONCLUSIONS

On a suggéré une approche phénoménologique qui a permis de développer un modèle d'écoulement diphasique pour la configuration de ménisques. Cette approche n'est pas triviale et est amplement basée sur l'introduction d'un nouveau type de continuum, appelé M -continuum, ayant des propriétés spéciales.

Le modèle de ménisques sous sa forme la plus générale est présenté par les équations (2.5.3) – (2.5.6), ou par (2.5.7-a,b,c) après élimination des champs des vitesses, ou par trois

équations (2.5.8), (2.5.9) et (2.5.10) obtenues après certaines transformations.

Ce modèle demande deux relations de fermeture pour deux propriétés internes du M -continuum : sa saturation interne et la concentration interne en ménisques. Ces deux paramètres ne peuvent pas être déduits dans le cadre de l'approche phénoménologique. On a proposé les relations de fermeture (2.5.11) et (2.5.12) en se basant sur certaines propriétés de la structure interne du M -continuum et les simulations numériques en réseaux capillaires (cf. chapitres 3 et 4).

Les relations de fermetures admises donnent une opportunité de simplifier le modèle. Le modèle fermé est donc présenté par le système (2.5.13) ou (2.5.14). Ce modèle peut être utilisé dans la pratique. Les nouvelles perméabilités relatives sont des fonctions plus complexes que celles trouvées dans le modèle classique.

En vue d'étudier les propriétés qualitatives de ce modèle, nous avons proposé une approximation supplémentaire, en admettant une relation qualitative (2.5.18) pour la fraction volumique du continuum percolant II . Ceci donne une possibilité de réduire le nombre d'équations et de variables. Toutes les variables du système deviennent des fonctions d'une seule variable – saturation totale s , ainsi que de trois paramètres constants. Le modèle réduit, correspondant à ces approximations, est décrit par le système (2.5.20).

Dans le cas monodimensionnel, le modèle réduit est représenté par une seule équation de transport de saturation totale (2.5.23) qui est une équation hyperbolique non linéaire du premier ordre. Les propriétés de cette équation sont amplement déterminées par la structure de deux fonctions : le flux fractionnaire standard et le flux capillaire. Le flux capillaire est une nouvelle fonction introduite dans la théorie des écoulements en milieux poreux, dont la forme est présentée sur la Fig. 2.5.3, *b* (voir également le chapitre 5).

Dans le cadre de ce nouveau modèle, la capillarité entre sous forme d'un flux convectif, l'équation de transport restant hyperbolique.

Les effets de freinage visqueux et de freinage capillaire sont décrits.

Les possibilités de perfectionner le modèle proposé sont offertes par des relations de fermeture. En particulier, il est possible d'introduire dans le modèle le développement dans le temps de la saturation interne dans le M -continuum, $s^I(t)$. Il est également possible de prendre en considération le fait que les ménisques dans le M -continuum ne sont pas toujours mobiles et s'arrêtent après avoir parcouru, lors de leur déplacement, la longueur caractéristique d'une cellule élémentaire, h_c . Pour cela, il faut introduire la fraction du M -continuum mobile, α_{mob}^I , et construire pour elle des relations de fermeture.

Il est nécessaire de noter, que ces améliorations peuvent notamment aboutir à certains résultats nouveaux, mais ne changeront pas, quelles que soient les relations de fermeture, le résultat essentiel obtenu : le caractère hyperbolique de la capillarité lors d'un écoulement diphasique en milieu poreux.

2.6. AUTRES VERSIONS DU MODÈLE DE MÉNISQUE

Le modèle de ménisque peut être construit d'une autre façon : soit en introduisant les structures du système diphasique global autres que la superposition de trois continums, soit en introduisant d'autres propriétés du M -continuum que celles proposées dans le paragraphe 2.1.1. Les résultats de ces constructions sont présentés dans cette section. Tous les modèles, bien qu'étant différents les uns des autres, ont pourtant la même propriété majeure : la capillarité vectorielle, qui entre dans le modèle à travers les équations du bilan de moment.

2.6.1. MODÈLE DE MÉNISQUE LIMITE

Une des conditions admises lors de la construction du modèle de ménisque consistait à ce que le système diphasique total représente une superposition de trois continums : le M -continuum I, le continuum percolant II et le continuum impénétrable III. Cependant, si le M -continuum existe, alors les deux autres continums peuvent se former automatiquement lors du processus de déplacement. De fait, l'introduction des continums II et III ne semble pas être nécessaire. Examinons maintenant le cas limite du modèle (2.5.20), en supposant que seul un M -continuum existe dans le milieu :

$$\alpha^{II} = 0, \quad \alpha^{III} = 0 \quad (\text{alors } \alpha^I = 1) \quad (2.6.1)$$

Les formules (2.5.19) donnent :

$$k_\alpha(s) = s^I \gamma, \quad k_\beta(s) = (1 - s^I) \frac{\gamma}{\mu}, \quad \lambda = \frac{K}{\langle \mu \rangle}, \quad F(s) = s^I, \quad F_c = 0, \quad s = s^I$$

Le modèle d'écoulement prend la forme suivante :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad (2.6.2-a)$$

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{grad} s = 0 \quad (2.6.2-b)$$

$$\vec{V} \equiv \frac{K}{\langle \mu \rangle} \left(\operatorname{grad} P - \frac{P_c}{l} \eta_c(s) \vec{e}_c \right) \quad (2.6.2-c)$$

Le vecteur capillaire unitaire \vec{e}_c est soit parallèle à \vec{V} hors des fronts de déplacements (un front de déplacement est une discontinuité en saturation), soit normal à un front de déplacement. La viscosité du M -continuum est : $\langle \mu \rangle = \mu_\alpha s + \mu_\beta (1 - s)$.

Ce système de cinq équations contient six inconnues : s, P, \vec{V}, η_c . Par conséquent, on n'a besoin que d'une seule relation de fermeture : celle pour la concentration en ménisques $\eta_c(s)$ en fonction de la saturation.

Il est important de noter qu'on n'a plus besoin de relation de fermeture pour la saturation

s' , car elle est précisément égale à la saturation totale. Ainsi, l'approximation (2.5.11) n'a plus lieu d'être.

2.6.2. PROPRIÉTÉS DU MODÈLE LIMITE

Ajoutons une condition initiale décrivant le problème de déplacement :

$$s(x)|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x \notin \Gamma_0 \\ 1, & x \in \Gamma_0 \end{cases} \quad (2.6.3)$$

où Γ_0 est la surface d'injection (front initial de déplacement).

L'équation (2.6.2-b) avec la condition initiale (2.6.3) a une solution discontinue qui est 0 avant la discontinuité (front de déplacement) et 1 derrière le front. Ainsi, la solution est constante par morceaux et, donc, correspond à un déplacement de type piston. La concentration en ménisques mobiles, $\eta_c(s)$, est non monotone et est nulle dans les points extrêmes, $s = 1$ et $s = 0$, alors le terme contenant $\eta_c(s)$ dans (2.6.2) s'annule partout, sauf sur le front. Sur le front (Γ), où la saturation n'est pas définie, on doit admettre pour η_c une approximation du type :

$$\eta_c|_{\Gamma} = \frac{\eta_c(s^+) + \eta_c(s^-)}{2} \quad (2.6.4)$$

où s^+ et s^- sont les concentrations juste avant et juste derrière du front. Ainsi, dans le modèle (2.6.2), les forces capillaires ne sont nulles que sur le front de déplacement.

Cet exemple d'une solution de type piston n'épuise pas toutes les solutions physiquement acceptables du modèle limite. En particulier, si la saturation d'injection est loin de 1, l'équation (2.6.2-b) reste non linéaire, et donc la saturation n'est pas constante derrière le front. En conséquence, le déplacement n'est pas du type piston.

Cependant, cet exemple montre un effet important du processus : dans le cadre du modèle basée sur une hypothèse d'existence d'un champ spatial continue de forces capillaires, ce même modèle peut conduire à un résultat dans lequel les forces capillaires sont concentrées sur une surface représentée par le front de déplacement.

2.6.3. MODÈLE DE MÉNISQUE DÉGÉNÉRÉ : LES BASES

Le dernier résultat qualitatif du paragraphe précédent se traduit par une autre version du modèle de ménisque.

Supposons que les ménisques ne forment pas un continuum spatial, mais forment une surface macroscopique qui est identique à celle du front de déplacement. Ainsi, on réduit le M -continuum à une surface, en obtenant un M -continuum dégénéré.

Mathématiquement, le M -continuum et les forces capillaires entrèrent dans le modèle à travers la définition de la vitesse de l'écoulement qui aura une formulation différente sur ou en dehors du front.

Pour obtenir le modèle correspondant à partir des équations (2.5.17) qui admettent un M -continuum distribué en espace, il faut donc supposer qu'il existe une surface continue Γ , appelée le front de déplacement, telle que :

- (i) hors de cette surface le M -continuum est inexistant (Fig. 2.6.1) ;
- (ii) après cette surface le continuum percolant, II , n'existe pas (car la phase déplaçante n'est présente qu'en amont du front) ;
- (iii) sur cette surface, il n'existe que le M -continuum et le continuum III , car la phase déplaçante n'est présentée que par des ménisques.

Sur le front, le continuum superficiel III est inséparable des fragments de la phase déplacée qui appartiennent au M -continuum. Ainsi, il est possible de considérer toute la phase déplacée sur le front comme appartenant au M -continuum. Par conséquent, nous obtenons l'image suivante du processus : avant le front, ils n'existent que les continums II et III , après le front il n'existe que le continuum III ; sur le front, il n'existe que le M -continuum. L'écoulement n'est diphasique qu'avant le front.

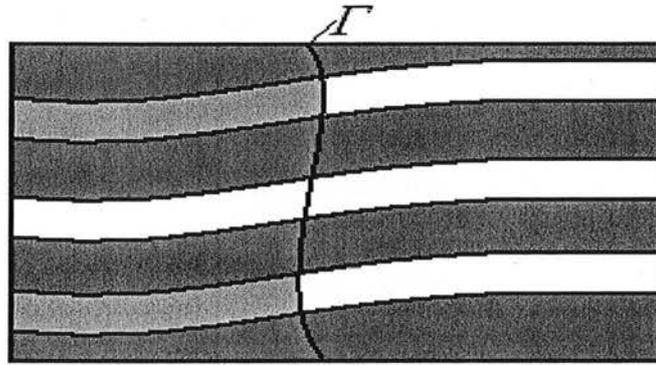


Fig. 2.6.1. Configurations de phase au voisinage d'un front : la phase déplaçante est en gris clair et la phase déplacée est en blanc.

Les conséquences sont les suivantes.

La fraction volumique du M -continuum α^I est maintenant une delta-fonction :

$$\alpha^I = h_c \delta(\Gamma) = \frac{l}{\eta_c} \delta(\Gamma) \quad (2.6.5)$$

où $\delta(\Gamma)$ est égale à 1 sur le front Γ , et est nulle ailleurs ; l est la longueur d'un pore ; h_c est la distance entre deux ménisques. Ce coefficient est introduit de manière à satisfaire l'équation aux dimensions, car $\delta(\Gamma)$ s'exprime en m^{-1} .

Le vecteur capillaire \bar{e}_c est normal au front :

$$\bar{e}_c = \begin{cases} \pm \bar{n}, & x \in \Gamma \\ 0, & x \notin \Gamma \end{cases} \quad (2.6.6)$$

où \bar{n} est le vecteur normal au front, orienté dans le sens de la phase déplaçante vers la phase déplacée ; le signe + est réservé pour le cas de la phase déplaçante mouillante.

La saturation s^l est toujours égale au flux fractionnaire de l'eau dans le M -continuum. Puisque tous les ménisques d'un M -continuum superficiel sont des bouts de canaux remplis d'eau avant le front, le flux fractionnaire avant le front, $F(s)$ est égal au flux fractionnaire à travers le front, s^l :

$$s^l \Big|_{\Gamma^-} = F(s) \Big|_{\Gamma^-} \quad (2.6.7)$$

où le symbole Γ^- signifie « avant le front ».

Prenons maintenant les équations (2.5.17) du modèle de ménisque :

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{Kk_\alpha}{\mu_\alpha} \operatorname{grad} P - \frac{K\alpha^l s^l}{\langle \mu \rangle} \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right), \quad -\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{Kk_\beta}{\mu_\beta} \operatorname{grad} P - \frac{K\alpha^l (1-s^l)}{\langle \mu \rangle} \frac{P_c}{l} \eta_c \vec{e}_c \right)$$

et examinons leur cas dégénéré (2.6.5) :

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{V}_\alpha) = 0, \quad -\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{V}_\beta) = 0 \quad (2.6.8-a)$$

$$\vec{V}_\alpha \equiv -\frac{Kk_\alpha}{\mu_\alpha} \operatorname{grad} P \pm \frac{Ks^l P_c}{\langle \mu \rangle} \vec{n} \delta(\Gamma), \quad \vec{V}_\beta \equiv -\frac{Kk_\beta}{\mu_\beta} \operatorname{grad} P \pm \frac{K(1-s^l) P_c}{\langle \mu \rangle} \vec{n} \delta(\Gamma) \quad (2.6.8-b)$$

Les k_α et k_β correspondent à une configuration d'un écoulement de type « canal » (chaque phase occupe ses propres canaux) et sont donc des perméabilités relatives classiques.

On voit que, suite aux forces capillaires concentrées sur une surface, le champ de vitesse a une singularité sur le front, par contre le champ de pression, P , est toujours continu. Cette singularité peut être supprimée par l'introduction d'un champ de pression discontinu :

$$\tilde{P} = P + P_c \Phi H(\Gamma) \quad (2.6.9)$$

où Φ est un coefficients inconnu ; $H(\Gamma)$ est la fonction de Heaviside qui est nulle avant le front Γ et égal à 1 après. L'objectif est de trouver Φ .

Soient \vec{n} et $\vec{\tau}$ respectivement le vecteur normal et le vecteur tangent à Γ . Remarquons que :

$$\operatorname{grad} H(\Gamma) = \frac{\partial H(\Gamma)}{\partial n} \vec{n} + \frac{\partial H(\Gamma)}{\partial \tau} \vec{\tau} = \frac{\partial H(\Gamma)}{\partial n} \vec{n} = \delta(\Gamma) \vec{n}$$

car la fonction $H(\Gamma)$ reste constante le long de la surface Γ , donc la composante tangentielle de sa dérivée est nulle. Réécrivons les équations (2.6.7-b) en utilisant (2.6.8) et en supposant, pour simplifier, que le coefficient Φ est constant :

$$\vec{V}_\alpha \equiv -\frac{Kk_\alpha}{\mu_\alpha} \operatorname{grad} \tilde{P} - \frac{Kk_\alpha P_c \Phi}{\mu_\alpha} \vec{n} \delta(\Gamma) \pm \frac{Ks^l P_c}{\langle \mu \rangle} \vec{n} \delta(\Gamma)$$

$$\vec{V}_\beta \equiv -\frac{Kk_\beta}{\mu_\beta} \operatorname{grad} P - \frac{Kk_\beta P_c \Phi}{\mu_\beta} \vec{n} \delta(\Gamma) \pm \frac{K(1-s^l) P_c}{\langle \mu \rangle} \vec{n} \delta(\Gamma)$$

d'où on obtient, en éliminant les singularités deux relations pour le coefficient Φ :

$$\Phi = \pm \frac{s^I \mu_\alpha}{\langle \mu \rangle k_\alpha}, \quad \Phi = \pm \frac{(1-s^I) \mu_\beta}{\langle \mu \rangle k_\beta} \quad (2.6.10)$$

Désignons par $a_i = k_i / \mu_i$. En prenant en compte la relation (2.6.7) et le fait que $F = a_\alpha / (a_\alpha + a_\beta)$, on peut montrer que :

$$\frac{s^I \mu_\alpha}{\langle \mu \rangle k_\alpha} = \frac{F / a_\alpha}{F \mu_\alpha + (1-F) \mu_\beta} = \frac{1}{k_\alpha + k_\beta}$$

$$\frac{(1-s^I) \mu_\beta}{\langle \mu \rangle k_\beta} = \frac{(1-F) / a_\beta}{F \mu_\alpha + (1-F) \mu_\beta} = \frac{1}{k_\alpha + k_\beta}$$

ainsi, les deux relations (2.6.10) sont satisfaites simultanément. Dans ces deux relations, les perméabilités relatives sont prises sur le front et correspondent donc à une configuration de ménisque. Remarquons ensuite, que pour les perméabilités relatives du modèle de ménisque définies suivant (2.5.16), il est en vigueur que : $k_\alpha + k_\beta = 1$. Finalement, il vient : $\Phi = \pm 1$ ou :

$$\tilde{P} = P \pm P_c H(\Gamma) \quad (2.6.11)$$

2.6.4. MODÈLE DE MÉNISQUE DÉGÉNÉRÉ : FORME FINALE

Le modèle de ménisque dégénéré prend la forme :

En dehors de Γ :

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}(\vec{V}_\alpha) = 0, \quad -\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}(\vec{V}_\beta) = 0 \quad (2.6.12-a)$$

$$\vec{V}_\alpha \equiv -\frac{Kk_\alpha}{\mu_\alpha} \text{grad} \tilde{P}, \quad \vec{V}_\beta \equiv -\frac{Kk_\beta}{\mu_\beta} \text{grad} \tilde{P} \quad (2.6.12-b)$$

Sur le front Γ :

$$[\tilde{P}]_\Gamma = \pm P_c \quad (+ \text{ si la phase déplaçante est plus mouillante}) \quad (2.6.12-c)$$

avec des conditions supplémentaires d'Hugoniot (5.2.3) et d'entropie sur Γ complétant le modèle.

Le symbole $[P]_\Gamma$ signifie un saut de pression sur le front : $[P]_\Gamma \equiv P|_{\Gamma^+} - P|_{\Gamma^-}$; « + » et « - » signifient « après » et « avant » le front.

Comme on a remarqué précédemment, les équations (2.6.12-a, b), sont valables pour le domaine avant le front, où on observe l'écoulement diphasique. Cependant, il est possible de montrer qu'elles restent aussi valables après le front, où seule la phase déplacée s'écoule. En effet, après le front $s = 0$ (ou la saturation est égale à une valeur non nulle, mais l'eau est immobile), $\vec{V}_\alpha = 0$, $k_\beta = 1$, $k_\alpha = 0$, alors la première équation en (2.6.12-a) et la première équation en (2.6.12-b) sont identiquement satisfaites. Les deux autres équations donnent un

système classique d'un écoulement monophasique incompressible. Ainsi, (2.6.12) est valable partout, sauf sur le front.

On voit que (2.6.12) résulte du modèle classique de Buckley-Leverett sans forces capillaires, en ajoutant une pression capillaire (ou une force capillaire en 2.6.8), juste sur le front de déplacement.

Ce modèle ne peut être appliqué que dans le cas où il existe un « vrai » front formant une surface continue et assez régulière. Si le front subit des auto-croisements multiples et forme une structure fortement dispersée en espace, le M -continuum doit être considéré comme une partie de l'espace (mais pas d'une surface), et donc le modèle complet, (2.5.20), doit être appliqué.

Notons également que le modèle dégénéré (2.6.12) est d'utilisation délicate pour obtenir des solutions analytiques. Par contre, sa réalisation numérique est assez aisée. Un exemple de son application sera illustré dans le chapitre 7.

Chapitre **3**

**DÉVELOPPEMENT DU
MICRO-MODÈLE NUMÉRIQUE
À DEUX ÉCHELLES
POUR DES ÉCOULEMENTS
DIPHASIQUES
EN RÉSEAUX CAPILLAIRES**

Afin de vérifier la validité du modèle macroscopique proposé et d'obtenir des relations de fermeture, on a développé un outil numérique qui remplace les expérimentations de laboratoire. Il s'agit d'un micro-modèle d'écoulement diphasique en milieu poreux. On a construit un modèle de type réseau capillaire. Le processus de déplacement a été schématisé à l'échelle de chaque pore comme un déplacement de type piston avec un ménisque rigide. L'hydrodynamique a été décrite par les équations de Poiseuille pour chaque phase de part et d'autre du ménisque. Sur le ménisque, la pression capillaire de Laplace a été prise en compte. Les règles de passage des ménisques à travers les nœuds ont été établies. Cet algorithme a été réalisé sous forme d'un micro-modèle numérique. Bien que ce type de micro-modèle ne soit pas nouveau, nous avons remarqué, lors de la construction de ce modèle, une opportunité originale de le modifier afin d'accélérer, considérablement, les calculs. Cette idée a été mise en œuvre sous forme d'une série de micro-modèles de nouveau type, que nous appelons les micro-modèles à deux échelles.

3.1. GÉOMETRIE DU RÉSEAU CAPILLAIRE

3.1.1. SQUELETTE DU RÉSEAU

Le squelette du milieu est constituée d'un réseau périodique de nœuds $Z^n \subset \mathbf{R}^n$ ($n=2,3$) et d'un réseau topologique périodique de segments S^n associé à Z^n (Fig. 3.1.1). Un segment est un intervalle joignant deux nœuds voisins.

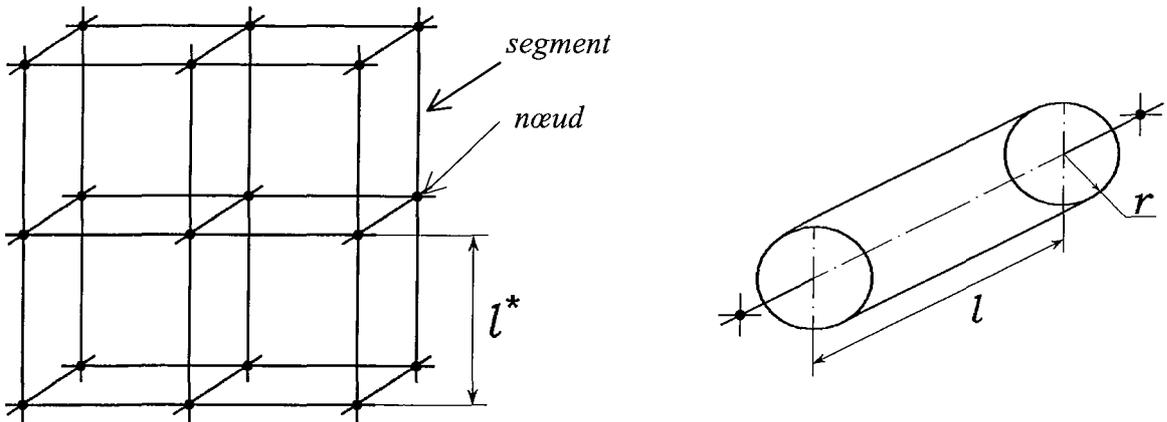


Fig. 3.1.1. Squelette du réseau capillaire 3D constituée de deux réseaux périodiques : réseau de nœuds Z^n et réseau de segments S^n

Fig. 3.1.2. Forme géométrique d'un segment modélisant un pore

Chaque segment constitue l'axe d'un tube cylindrique qui représente un pore (Fig. 3.1.2). Les rayons des tubes sont différents. La connexion des tubes dans les nœuds du réseau est effectuée de façon naturelle (cf. Fig. 3.1.3 pour le cas 2D).

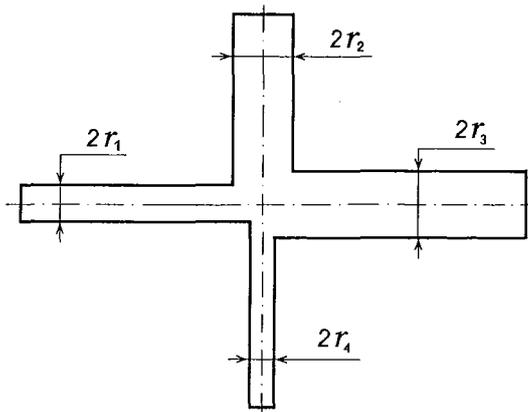


Fig. 3.1.3. Connexion des tubes dans un nœud (2D)

L'ensemble connecté des tubes capillaires construit selon la manière décrite ci-dessus est appelé un *réseau capillaire* P^n . Ce réseau capillaire est caractérisé par les paramètres géométriques suivants :

- la longueur d'un segment l^* appelée la constante du réseau Z^n ;
- les rayons de pores, $\{r_i\}$;
- les longueurs de pores, $\{l_i\}$;
- le nombre de coordination m du réseau Z^n , qui est égale au nombre de tubes connectés dans un nœud ;
- la porosité du milieu, ϕ .

Pour l'analyse conséquente, il sera utile d'introduire la notion de réseau conjugué, Z_*^n , qui est un réseau de points analogues à Z^n mais déplacé dans l'espace d'une valeur $l^*/2$ selon tous les axes. Ainsi, les nœuds du réseaux Z_*^n sont situés aux centres des segments du réseau S^n .

Il est évident que les réseaux formant le squelette Z^n , S^n et Z_*^n sont périodiques, tandis que le réseau capillaire P^n ne l'est plus suite aux variations arbitraires des rayons de pores dans l'espace.

On suppose que le réseau capillaire contient suffisamment de pores pour représenter un VER du milieu poreux réel. Autrement dit, le volume total du réseau est égal ou est plus grand qu'un VER.

3.1.2. RAYONS ET LONGUEURS DE PORES

On admet que les valeurs des rayons de tubes, $\{r_i\}$, sont des réalisations d'une variable aléatoire R caractérisée par sa densité de distribution $f_R(r)$ qui est une fonction donnée. Pour distinguer une fonction aléatoire et sa réalisation, nous utiliserons les notations différentes : le symbole R sera réservé pour la fonction ou variable aléatoire des rayons de pores, tandis que r désignera une réalisation concrète de cette fonction.

Plus exactement, la notion d'une variable aléatoire est insuffisante dans ce cas, et on est obligé d'opérer avec des fonctions aléatoires. En effet, les réalisations $\{r_i\}$ peuvent être associées aux points centraux des segments-tubes, ou, ce qui revient au même, au réseau conjugué Z_*^n . Soient $\{x_*^{(k)}\} = \{x_{*1}^{(k)}, x_{*2}^{(k)}, x_{*3}^{(k)}\}$ les coordonnées du nœud k du réseau Z_*^n ($n=3$). Alors, on obtient un champ spatial de rayons qui représente une réalisation de la fonction aléatoire 3D $R(x_*)$. Nous admettrons les propriétés suivantes de cette fonction : (i) la distribution locale $f_R(r)$ est la même en tout point de l'espace et (ii) la fonction d'auto-corrélation du processus stochastique $R(x_*)$ est un delta-Dirac, c'est-à-dire les rayons ne sont pas corrélés spatialement.

Dues aux intersections dans les nœuds, la longueur de chaque tube est plus petite que la constante du réseau l^* . Nous admettrons que le volume des intersections dans le nœud est nul, ainsi les longueurs des pores sont constantes :

$$l_i = l^*, \quad \forall i$$

Bien que naturelle, cette condition n'est pas obligatoire. Dans plusieurs travaux, on admet que les longueurs de pores sont différentes et même aléatoires, sans se préoccuper de la question : comment ces longueurs peuvent être réellement insérées dans le réseau, dont la géométrie stricte impose des limitations évidentes sur la longueur de pores ?

3.1.3. NOMBRE DE COORDINATION DU RÉSEAU

Le nombre de coordination du réseau, m , est strictement déterminé pour un réseau périodique :

$$m=2^n \quad (3.1.1)$$

n étant la dimension spatiale.

Cependant, il existe une possibilité pour faire varier spatialement m en éliminant certains tubes. Pour cela, il suffit de supposer que le rayon des tubes à éliminer soit nul. Dans ce cas, on obtient les squelettes Z^n , S^n et Z_n^n non périodiques. Dans le cas général, le nombre m peut être examiné comme une variable aléatoire dont les valeurs sont comprises entre 2 et 8 (en 3D). Le cas $m=1$ peut conduire à un réseau imperméable.

Pour les réservoirs souterrains de pétrole, de gaz et d'eau, le nombre de coordination caractéristique est assez petit, habituellement inférieur à 4, ce qui est nettement en de ça de la valeur trouvée avec (3.1.1) en 3D. Pour construire le réseau avec un m moyen donné, on a appliqué une méthode d'élimination aléatoire des segments. Sur tout l'ensemble des segments du squelette, on distribue des valeurs nulles avec une fréquence petite, v . Le segment ayant obtenu cette valeur est considéré comme supprimé. On calcule ensuite les valeurs du nombre de coordination dans chaque nœud et sa valeur moyenne (arithmétique) $\langle m \rangle$. Si cette valeur n'est pas suffisamment petite, on répète la procédure d'élimination des segments encore une fois jusqu'à ce que la valeur donnée $\langle m \rangle$ soit atteinte.

3.1.4. CONTRAINTE ENTRE LES PARAMÈTRES DU RÉSEAU

Si la porosité totale ϕ du milieu et la distribution des rayons $f_R(r)$ sont données, alors la longueur et le rayon moyen de pores du réseau ne sont pas des valeurs indépendantes. Suivant la Fig. 3.1.3, dans un nœud arbitraire, on a la relation suivante pour la porosité locale (cas 2D) :

$$\phi_{loc} = \frac{l^*(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) - (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_4 + r_4 r_1)}{(l^*)^2}$$

Pour la porosité moyenne, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \phi &= \int \int \int \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_R(r_1) f_R(r_2) f_R(r_3) f_R(r_4) \phi_{loc}(r_1, r_2, r_3, r_4) dr_1 dr_2 dr_3 dr_4 = \\ &= \frac{4\langle r \rangle}{l^*} - \frac{4\langle r \rangle^2}{(l^*)^2} = \frac{4\langle r \rangle}{l^*} \left[1 - \frac{\langle r \rangle}{l^*} \right] \end{aligned}$$

où $\langle r \rangle$ est la valeur moyenne du rayon de pores. Dans ce calcul, on a pris en considération l'hypothèse que les rayons de pores ne sont pas corrélés.

Pour un réseau avec un nombre de coordination aléatoire (une partie des segments supprimés), il est facile d'obtenir une relation analogue :

$$\frac{\langle r \rangle}{l^*} \left[1 - \frac{\langle r \rangle}{l^*} \right] = \frac{\phi}{\langle m \rangle}$$

où $\langle m \rangle$ est le nombre de coordination moyen. Dans le cas 3D, on peut obtenir une relation tout à fait analogue par une démarche identique. La relation finale est une équation quadratique dont la solution définit uniquement la valeur $\langle r \rangle / l^*$:

$$\frac{\langle r \rangle}{l^*} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\phi}{\langle m \rangle}} \right] \sim \frac{\phi}{4 \langle m \rangle} \quad (3.1.2)$$

(suivant la géométrie du réseau, la valeur du diamètre de pore ne peut pas dépasser sa longueur, ainsi $\langle r \rangle / l^* < 1/2$). Il est évident qu'en (3.1.2) le terme de droite existe toujours et est toujours positif. Ce terme représente l'approximation de l'expression centrale (3.1.2) compte tenu que la valeur $\phi / \langle m \rangle$ est toujours petite.

Quelle que soit la valeur du rayon moyen, la contrainte (3.1.2) peut toujours être satisfaite par un choix convenable de la longueur l^* . Ainsi, on peut constater que la distribution des rayons de pores du réseau ne subit aucune limitation supplémentaire.

3.1.5. PROPRIÉTÉS ALÉATOIRES DU CHAMP DES RAYONS DE PORES

Le réseau capillaire n'est qu'un modèle géométrique d'un milieu poreux réel concret. Alors le champ spatial des rayons des tubes du réseau doit être équivalent au champ spatial des rayons des pores du milieu réel. L'équivalence est supposée sous couvert d'un certain sens approximatif car, en réalité, le réseau capillaire ne peut jamais être strictement équivalent à un milieu poreux naturel. Pour formuler cette équivalence, on introduit l'interprétation du champ des rayons de pores comme une réalisation de la fonction aléatoire. Ainsi nous introduisons une fonction aléatoire $R_{mp}(x^*)$ pour le milieu poreux réel et une fonction aléatoire $R(x^*)$ pour le réseau capillaire qui représente le modèle de ce milieu poreux. Alors nous obtenons une opportunité d'interpréter cette équivalence en termes statistiques. Autrement dit, au lieu de vérifier l'équivalence entre les deux réalisations concrètes de deux fonctions aléatoires $R(x^*)$ et $R_{mp}(x^*)$, il suffit de vérifier l'équivalence entre ces fonctions aléatoires elles-mêmes. Pour définir les conditions d'équivalence, il suffit d'introduire les propriétés de ces fonctions aléatoires.

D'une manière générale, on peut introduire n'importe quelles propriétés des fonctions aléatoires $R(x^*)$ et $R_{mp}(x^*)$, car le problème de reconstitution d'une fonction aléatoire par sa réalisation unique n'est pas correct et a une infinité de solutions. Cependant, ce problème peut être régularisé pour une classe spéciale de fonctions aléatoires. Il est bien connu que si la fonction aléatoire est stationnaire et ergodique, elle peut être reconstituée de façon unique par une seule réalisation.

Ainsi nous supposons que les fonctions aléatoires $R(x^*)$ et $R_{mp}(x^*)$ du réseau et du milieu réel sont stationnaires et ergodiques. Une fonction aléatoire de x est stationnaire, si un déplacement $x+h$ (h est un vecteur constant arbitraire) ne change pas sa distribution locale (Korn et Korn, 1968 ; Ventsel, 1969). Très souvent il est impossible de vérifier cette condition, qui signifie que tout moment de la fonction examinée doit être invariable par rapport à la transformation $x+h$. Alors, on introduit la notion d'une fonction stationnaire dans un sens plus restrictif, en demandant que seuls les premier et deuxième moments (i.e.,

l'espérance mathématique et la fonction d'auto-corrélation) soient invariables par rapport au déplacement $x+h$. On peut donc montrer que la fonction d'auto-corrélation ne dépend que de la distance entre les points corrélés. La fonction stationnaire est ergodique si ses moments stochastiques sont équivalents aux moments spatiaux respectifs de toute sa réalisation.

Ainsi, la stationnarité signifie que le champ aléatoire est homogène en moyenne. L'ergodicité nous permet de travailler avec une seule réalisation et de remplacer les opérations d'intégration par rapport à la probabilité par une intégration spatiale.

3.1.6. CONDITIONS D'ÉQUIVALENCE STATISTIQUE DU CHAMP DES RAYONS DE PORES

Soit $R(x)$ une fonction aléatoire stationnaire et ergodique. Une de ses propriétés est la suivante. Soit $r(x)$ une réalisation arbitraire de $R(x)$. Supposons que le domaine de variation de $r(x)$ soit couvert par un maillage régulier dont le pas linéaire est h . Soit $\{r_i\}$ l'ensemble des valeurs de la fonction $r(x)$ prises au centre de chaque maille. Soit $\nu(r_i)$ la fréquence statistique de la valeur r_i (le nombre d'observations de la valeur r_i divisé par le nombre d'observations de toutes les valeurs). Alors la limite continue de la fonction $\nu(r)$ tend vers la densité locale $f_R(r)$ de la distribution de la variable aléatoire $R(x)$ lorsque $h \rightarrow 0$. Cela signifie que pour un réseau de constante de réseau l^* (cf. § 3.1.2) assez petite, la fréquence des valeurs des rayons de pores sur l'ensemble des segments est pratiquement égale à la densité de distribution de la variable aléatoire $R(x)$.

Suite à ces propriétés, on peut constater que la réalisation d'une fonction aléatoire stationnaire et ergodique $R(x_*)$ sur le réseau Z_*^n doit vérifier les conditions suivantes : (i) la fréquence statistique des valeurs des rayons sur une réalisation doit être la même que la distribution probabiliste locale $f_R(r)$ et (ii) la fonction d'auto-corrélation spatiale de cette réalisation doit être égale à la fonction d'auto-corrélation probabiliste de la fonction $R(x_*)$. Les méthodes de reconstitution du champ aléatoire sont décrites dans (Adler, 1992 ; Mantoglou et Wilson, 1982).

Dans le cas d'une fonction d'auto-corrélation de type delta-Dirac, la procédure peut être suffisamment simplifiée. En effet, si une fonction stationnaire ergodique est non corrélée, cela signifie que les valeurs de toutes ses réalisations sont réparties dans l'espace de façon arbitraire, chaotique. Ainsi, si on a déterminé la suite des valeurs des rayons de la réalisation désirée, il suffit de les disperser chaotiquement dans l'espace pour obtenir la réalisation recherchée.

Ainsi, on a réduit le problème à la génération d'une suite de valeurs de rayons qui doivent avoir une distribution statistique donnée, $f_R(r)$.

Pour conclure, cette analyse nous pouvons constater que le réseau capillaire construit dans cette thèse est statistiquement équivalent au milieu poreux donné, s'ils ont les paramètres suivants identiques :

- la distribution statistique des rayons de pores $f_R(r)$;
- la porosité moyenne, ϕ ;
- le nombre de coordination moyen, $\langle m \rangle$;

- le rapport $\langle r \rangle / l^*$;
- la fonction d'auto-corrélation des rayons de type delta-Dirac.

La dernière condition réduit le domaine d'application des relations de fermetures obtenues dans le chapitre 4 à ce réseau capillaire. En particulier, les milieux assez réguliers ont un champ de rayons de pores fortement corrélé. Par contre, les milieux ayant une structure fortement désordonnée, chaotique font l'objet de notre analyse.

3.1.7. GÉNÉRATION D'UNE DISTRIBUTION DONNÉE DES RAYONS DE PORES

La solution du problème de génération d'une distribution donnée commence par la génération d'une distribution uniforme. Une suite de chiffres vérifiant une distribution uniforme entre 0 et 1 peut être facilement générée par des algorithmes triviaux (Ventsel, 1969). Cette procédure est accessible de façon standard dans les systèmes opérationnels modernes d'exploitations des ordinateurs.

Supposons qu'on ait une suite de nombres $\{a_i\}_{i=1}^n$, $a_i \in [0,1]$ qui est un ensemble de réalisations d'une variable aléatoire A ayant une distribution uniforme entre $[0,1]$. Ainsi la densité de distribution de cette variable est $f_A(a)=1, \forall a$. Il s'agit donc de transformer cette suite en une autre suite $\{r_i\}_{i=1}^n$, $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$, de réalisations d'une variable aléatoire R dont la distribution probabiliste $f_R(r)$ est donnée. Le problème de la transformation $A \rightarrow R$ se traduit de la façon suivante : il faut trouver une fonction $r(a)$ entre les réalisations. Supposons que cette fonction existe et soit monotone. Alors, on a une équivalence évidente pour les probabilités des événements suivants :

$$P\{A \leq a\} = P\{R \leq r(a)\}, \quad \text{ou} \quad \int_{r_{\min}}^r f_R(r') dr' = \int_0^a f_A(a') da'.$$

Pour la distribution uniforme $f_A(a)=1$, on obtient :

$$\int_{r_{\min}}^r f_R(r') dr' = a$$

En différenciant cette équation par rapport à la valeur a , on en déduit :

$$f_R(r) \frac{dr}{da} = 1, \quad \text{avec la condition} \quad r(0) = r_{\min} \quad (3.1.3)$$

C'est un problème de Cauchy pour une équation différentielle non linéaire qui définit la fonction $r(a)$ recherchée. La solution est obtenue par la méthode standard de Runge-Kutta.

L'algorithme de génération de la suite de valeurs des rayons est donc le suivant :

- on génère une suite $\{a_i\}_{i=1}^n$ sur $[0, 1]$ uniformément distribuée ;
- pour chaque valeur a_i , on obtient la valeur r_i en résolvant le problème (3.1.3).

3.2. MODÈLE HYDRODYNAMIQUE EN RÉSEAU CAPILLAIRE

3.2.1. SCHÉMATISATION DE L'ÉCOULEMENT DANS LE RÉSEAU

Examinons un processus de déplacement d'un fluide par un autre dans le réseau construit. Pour la phase déplaçante (e.g. : eau) et déplacée (e.g. : huile), on attribue les indices α et β respectivement. La définition traditionnelle des phases mouillante et non mouillante n'est pas valable en milieu avec une mouillabilité hétérogène.

Les hypothèses suivantes sont admises :

- 1) les liquides sont incompressibles ;
- 2) l'écoulement de chaque phase est laminaire et est régi par la loi de Poiseuille dans chaque section transversale du pore.
- 3) le déplacement dans chaque pore est de type piston ;
- 4) l'interface entre les phases a la forme d'un ménisque rigide ;
- 5) le passage du ménisque à travers un nœud du réseau capillaire se déroule de façon instantanée et sans perte d'énergie ;
- 6) la phase déplacée est immobile si elle n'a pas de liaisons avec la sortie du modèle ;
- 7) la phase déplaçante est immobile si elle n'a pas de liaisons avec l'entrée du modèle ;
- 8) le ménisque ne peut pas entrer dans un pore si la différence de pression sur ce pore est plus faible que la pression capillaire propre de ce pore.

La notion de pression capillaire propre du pore sera expliquée dans le paragraphe suivant.

Toutes ces hypothèses sont naturelles et standards. L'hypothèse occultant la dynamique de l'écoulement dans les nœuds, qui semble être la plus forte, n'est en effet que la conséquence logique de l'hypothèse géométrique suivant laquelle le volume du nœud est nul (cf. chapitre 3.1).

Cependant, il existe des travaux dans lesquels les nœuds sont considérés comme un élément principal du réseau (Singhal et Somerton, 1977). Par contre, Koplík & Lasseter (1985) ont tenu compte de la dynamique du mouvement de chaque phase dans les nœuds de façon très approximative. En ce qui concerne la dynamique réelle des processus dans les nœuds, de par sa complexité sa description exacte ne semble pas être envisageable. Elle inclut les sauts instantanés des ménisques à travers le nœud entier, les arrêts brusques des ménisques avant des élargissements de pores, ... De façon approximative et globale, on peut prendre en considération la dynamique dans un nœud par une attribution d'un temps propre de passage à chaque nœud. Ce temps doit cependant être fonction des rayons de pores adjacents, du nombre capillaire local et du rapport des viscosités. Ces relations peuvent être obtenues par des moyens expérimentaux.

3.2.2. PARAMÈTRES DU PROCESSUS

Domaine

Supposons que le réseau soit un parallélépipède P^n ($n=2,3$) de dimensions $L \times B \times H$, placé dans un système de coordonnées cartésiennes (X_1, X_2, X_3) dont les directions coïncident avec les axes du réseau capillaire. En même temps, introduisons l'axe local y pour chaque pore individuel, dont la direction positive coïncide avec la direction positive de l'axe respectif du système globale. Nous utiliserons également un système global adimensionnel (x_1, x_2, x_3) où $x_i = X_i / L$.

Le pas adimensionnel du réseau, $\Delta h \equiv l / L$, est un paramètre petit et l'ensemble des pores du réseau est donc suffisamment grand pour qu'une description statistique soit possible.

On introduit une numérotation triple entière (i, j, k) pour le nœud dont les coordonnées sont (X_{1i}, X_{2j}, X_{3k}) , et une numérotation semi-entière $(i+1/2, j, k)$ pour un pore situé entre deux nœuds $(i+1, j, k)$ et (i, j, k) .

Conditions aux limites

Les deux faces du réseau, $X_1=0$ et $X_1=L$, sont perméables à l'écoulement, les autres faces sont imperméables. Les conditions d'imperméabilité sont identiques à celles de symétrie, ainsi on suppose que notre réseau représente une période répétitive (un VER) d'un milieu poreux global.

Le fluide déplaçant est injecté en réseau à travers la face $X_1=0$, la sortie des fluides est observée à travers la face $X_1=L$. La pression d'entrée, P^I , et de sortie, P^{II} , sont constantes. Ainsi, le processus est caractérisé par une différence globale de pressions $\Delta P = P^I - P^{II}$.

Pressions capillaires propres de pores

La pression capillaire propre d'un pore est définie comme la pression de Laplace pour un ménisque imaginaire qui aurait pu être situé dans ce pore :

$$P_c(r) = \frac{2\sigma \cos \theta}{r} \quad (3.2.1a)$$

où σ est la tension superficielle sur le ménisque ; θ est l'angle de contact ; r est le rayon du pore. Nous allons utiliser aussi une pression capillaire moyenne :

$$\langle P_c \rangle = 2 \left\langle \frac{\sigma \cos \theta}{r} \right\rangle \quad (3.2.1b)$$

où l'opérateur $\langle \rangle$ représente la moyenne arithmétique.

Notons que la pression capillaire propre est une valeur positive.

Nombre capillaire

Introduisons le nombre capillaire global comme le rapport de la différence de pression moyenne locale ($\Delta P \cdot l / L$) sur la pression capillaire propre moyenne :

$$Ca = \frac{\Delta P \cdot l}{\langle P_c \rangle \cdot L} \quad (3.2.1c)$$

Classification de pores

Introduisons une classification de pores selon leur contenance, marquée par un identificateur du conteneur de pore individuel, $\rho(X)$. Il prend les valeurs binaires (α, α) (respectivement (β, β)) si le pore examiné ne contient que de l'eau (respectivement du pétrole). Les valeurs (α, β) et (β, α) indiquent la présence simultanée de deux phases dans le pore, suivant leur disposition dans la direction positive de l'axe correspondant.

On introduira également un indicateur $\zeta(x)$ traduisant la présence d'un ménisque et son orientation dans le pore :

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \rho(X) = (\alpha, \beta) \\ 0, & \text{si } \rho(X) = (\alpha, \alpha), \text{ ou } (\beta, \beta) \\ -1, & \text{si } \rho(X) = (\beta, \alpha) \end{cases} \quad (3.2.1d)$$

Notons que cette valeur est également l'identificateur de la courbure du ménisque.

3.2.3. ÉQUATION DE MOUVEMENT DU MÉNISQUE DANS UN PORE

Examinons un ménisque entre deux phases dans un pore cylindrique (Fig. 3.2.1). Utilisons la loi de Poiseuille pour chaque phase des deux cotés du ménisque, la condition de continuité pour l'écoulement dans un pore de section constante πr^2 , la relation de Laplace pour le saut de pression à travers un ménisque sphérique, et la condition traduisant que la vitesse du ménisque est égale à la vitesse phasique de l'écoulement :

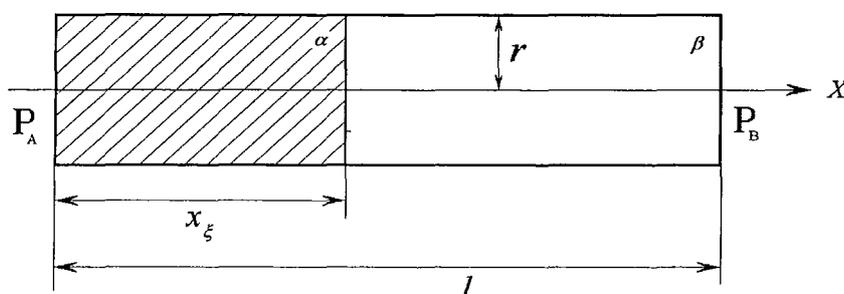


Fig. 3.2.1. Schéma du capillaire avec un ménisque : α est la phase déplaçante, β est la phase déplacée

$$-V_\alpha = \frac{\gamma r^2}{\mu_\alpha} \frac{dP}{dX}, \quad X < x_\xi; \quad -V_\beta = \frac{\gamma r^2}{\mu_\beta} \frac{dP}{dX}, \quad X > x_\xi \quad (3.2.2)$$

$$V_\alpha = V_\beta = V(t); \quad P \Big|_{X=x_\xi+0} - P \Big|_{X=x_\xi-0} = P_c(r) = \frac{2\sigma \cos \theta}{r}, \quad \frac{dx_\xi}{dt} = V(t)$$

où γ est un coefficient de forme du capillaire (1/8 pour la section circulaire), r est le rayon du capillaire, x_ξ est la coordonnée (locale) mobile du ménisque, P est la pression, μ est la

viscosité dynamique, $V(t)$ est la vitesse réelle. On impose les conditions aux limites suivantes :

$$P(0,t) = P_A \quad P(l,t) = P_B \quad x_\xi(0) = 0 \quad (3.2.3)$$

Le problème (3.2.2)-(3.2.3) peut être réduit à une équation différentielle appelée équation de Washburn (1921) :

$$\frac{dx_\xi}{dt} = \frac{\delta P \gamma r^2}{x_\xi (\mu_\alpha - \mu_\beta) + l \mu_\beta}, \quad \delta P = P_A - P_B + P_c(r) \quad (3.2.4a)$$

ou, sous forme adimensionnelle :

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\lambda}{\xi(\bar{\mu} - 1) + 1}, \quad \xi(\tau_0) = \xi_0 \quad (3.2.4b)$$

$$\xi = \frac{x_\xi}{l}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu_\alpha}{\mu_\beta}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad \lambda = \frac{t_*}{t^*}, \quad t_* = \frac{L^2 \mu_\beta}{\gamma \langle r \rangle^2 \Delta P}, \quad t^* = \frac{l^2 \mu_\beta}{\gamma r^2 \delta P}$$

où ΔP est la chute de pression macroscopique à travers le milieu entier ; $\langle r \rangle$ est le rayon de pore moyen dans le réseau ; t_* est le temps macroscopique caractéristique du processus (le temps de remplissage complet du milieu par la phase déplaçante) ; t^* est le temps microscopique (le temps de remplissage complet du pore examiné par la phase déplaçante) ; τ_0 est le moment (adimensionnel) initial (quelconque) ; ξ_0 est la coordonnée du ménisque dans le pore à l'instant initial. Dans ces calculs locaux, on utilise néanmoins le temps macroscopique τ , qui est le temps commun pour tout le réseau.

La disposition des phases dans le pore présenté sur la Fig. 3.2.1 n'est pas unique. Il existe deux autres possibilités : (i) le ménisque est inversé (ainsi la phase 1 est à droite) et (ii) le ménisque est absent (le fluide dans le pore est monophasique). Tous ces cas sont définis par l'identificateur $\zeta(x)$ introduit dans le paragraphe 3.2.2 et toutes ces possibilités sont décrites par une version plus générale de l'équation (3.2.4) :

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\lambda^* \delta p}{\xi \bar{\mu} z + (1 - \xi)/z} = v(\tau) \quad (3.2.5)$$

$$\text{où } z(\zeta) \equiv 1 + \frac{(1 - \bar{\mu})(\zeta^2 - \zeta)}{2\bar{\mu}}, \quad \lambda^* = \frac{L^2 r^2}{l^2 \langle r \rangle^2}, \quad \delta p = \frac{\delta P}{\Delta P}; \quad \delta P(\zeta) = P_A - P_B + P_c(r)\zeta;$$

$v = V t_* / l$ est la vitesse adimensionnelle de l'écoulement. La fonction $z(\zeta)$ est construite de telle façon qu'elle prend des valeurs $(1, 1, 1/\bar{\mu})$ lorsque les valeurs de ζ sont $(0, 1, -1)$. Parmi un spectre infini de fonctions qui peuvent satisfaire à ces trois conditions, on a choisi une forme parabolique : $z(\zeta) = \alpha_2 \zeta^2 + \alpha_1 \zeta + \alpha_0$.

Le problème (3.2.5) admet une solution exacte :

$$\xi(\tau) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + (\bar{\mu}z^2 - 1) \left[2z\lambda^* \delta p(\tau - \tau_0) + 2\xi_0 + \xi_0^2 (\bar{\mu}z^2 - 1) \right]} - 1}{\bar{\mu}z^2 - 1}, & \bar{\mu} \neq 1 \\ \xi_0 + z\lambda^* \delta p(\tau - \tau_0), & \bar{\mu} = 1 \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Notons que, dans ce cas plus général, la valeur δp dépend de l'identificateur ζ et du nombre capillaire :

$$\delta p = p_A - p_B + \frac{\Delta h}{Ca} p_c(r) \zeta \quad (3.2.7)$$

où Δh est la distance adimensionnelle entre les nœuds ($\Delta h = l/L$) ; p est la pression adimensionnelle ($p = P/\Delta P$) ; $p_c = P_c/\langle P_c \rangle$ est la pression capillaire propre locale adimensionnelle ; $\langle P_c \rangle$ est une pression capillaire moyenne ; $Ca = \frac{\Delta P \cdot l}{\langle P_c \rangle \cdot L}$ est le nombre capillaire du processus (cf. § 3.2.2).

3.2.4. EQUATIONS DU CHAMP GLOBAL DE PRESSION

Les relations (3.2.5) définissant la dynamique des ménisques contiennent seulement la différence de pression δP sur le pore. Cela signifie que pour les utiliser, il est nécessaire (et suffisant) de savoir calculer les pressions dans les nœuds du réseau.

Utilisons le système global de coordonnées adimensionnelles : (x_1, x_2, x_3) où $x_i = X_i/L$. Examinons un nœud arbitraire au point x . Dans chaque nœud, la conservation du volume se traduit sous forme de la loi de Kirchhoff en débits volumiques : $\sum V_q r_q^2 = 0$, ou $\sum v_q r_q^2 / l^2 = 0$ sous forme adimensionnelle. Ici la sommation est effectuée par rapport à tous les pores adjacents au nœud considéré. En utilisant (3.2.5) pour $v(\tau)$, on obtient pour le nœud (i, j) :

$$(a\delta p)_{i-\frac{1}{2},j,k} + (a\delta p)_{i,j-\frac{1}{2},k} + (a\delta p)_{i,j,k-\frac{1}{2}} = (a\delta p)_{i+\frac{1}{2},j,k} + (a\delta p)_{i,j+\frac{1}{2},k} + (a\delta p)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \quad (3.2.8)$$

où $\delta p|_{i+\frac{1}{2},j,k} \equiv p|_{i,j,k} - p|_{i+1,j,k}$, $a|_{i+\frac{1}{2},j,k} \equiv a|_{i,j,k} - a|_{i+1,j,k}$, etc., p est la pression adimensionnelle ($p = P/\Delta P$). La « conductivité » adimensionnelle locale a est définie par :

$$a(x) = \frac{\lambda^* r^2(x) / l^2}{\xi \bar{\mu} z + (1 - \xi) / z} \quad (3.2.9)$$

On peut, alors, réécrire la relation (3.2.8) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & a_{i-\frac{1}{2},j,k} (p_{i-1,j,k} - p_{i,j,k}) + a_{i,j-\frac{1}{2},k} (p_{i,j-1,k} - p_{i,j,k}) + a_{i,j,k-\frac{1}{2}} (p_{i,j,k-1} - p_{i,j,k}) + \\ & + a_{i+\frac{1}{2},j,k} (p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}) + a_{i,j+\frac{1}{2},k} (p_{i,j+1,k} - p_{i,j,k}) + a_{i,j,k+\frac{1}{2}} (p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k}) = \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$= \frac{1}{Ca} \left[(ap_c \zeta)_{i+\frac{1}{2},j,k} + (ap_c \zeta)_{i,j+\frac{1}{2},k} + (ap_c \zeta)_{i,j,k+\frac{1}{2}} - (ap_c \zeta)_{i-\frac{1}{2},j,k} - (ap_c \zeta)_{i,j-\frac{1}{2},k} - (ap_c \zeta)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right]$$

où on a pris en compte (3.2.7).

(3.2.10) n'est qu'une discrétisation de l'équation différentielle de Poisson :

$$\operatorname{div}(a(x)\operatorname{grad} p) = \frac{1}{Ca} f(x), \quad x \in P^n \quad (3.2.11)$$

$$f(x) = \operatorname{grad}(a(x)p_c(x)\zeta(x)) \cdot \vec{i}, \quad \vec{i} \text{ étant un vecteur unitaire selon les axes.}$$

Les conditions aux limites sont mentionnées dans le paragraphe 3.2.1 :

$$p|_{x_1=0} = p^I = \text{const} \quad p|_{x_1=1} = p^{II} = p^I - 1 \quad (3.2.12a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}|_{x_2=0} = \frac{\partial p}{\partial n}|_{x_2=B/L} = \frac{\partial p}{\partial n}|_{x_3=0} = \frac{\partial p}{\partial n}|_{x_3=H/L} = 0 \quad (3.2.12b)$$

\vec{n} étant le vecteur normal extérieur à la frontière.

Dans la formulation (3.2.11), les fonctions $a(x)$, $p_c(x)$ et $\zeta(x)$ sont définies, continues et dérivables en chaque point de l'espace. Le terme de droite de (3.2.11) est appelée « le terme capillaire », car il est entièrement déterminé par les pressions capillaires propres p_c .

3.2.5. CALCUL NUMÉRIQUE DU CHAMP GLOBAL DE PRESSION

Notons que la constante p^I peut être choisie de façon arbitraire, car la solution ne dépend pas de cette valeur. En fait, dans l'équation (3.2.11), qui est linéaire par rapport à p , rien ne change si on remplace la fonction p par $\varphi = p - C$ où C est une constante arbitraire. En choisissant $C = p^I$, on obtient le problème :

$$\operatorname{div}(a(x)\operatorname{grad} \varphi) = -f(x)/Ca, \quad x \in P^n$$

$$\varphi|_{x_1=0} = 1, \quad \varphi|_{x_1=1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{x_2=0; B/L} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{x_3=0; H/L} = 0$$

qui ne contient plus la constante p^I .

Ainsi, le problème (3.2.11)-(3.2.12) est invariant par rapport à la valeur p^I . En pratique, on la choisit de façon à éviter quelques problèmes numériques (par exemple, certaines méthodes de simulations « digèrent mal » une valeur nulle comme condition à la limite).

Si le nombre capillaire Ca est très grand, le terme de droite dans (3.2.11) est négligeable, alors les pressions capillaires propres p_c , qui n'entrent que dans la partie droite de l'équation (3.2.11), n'interviennent plus dans le calcul de la pression. Cependant, les forces capillaires gardent une importance locale, étant incluses dans l'algorithme de passage à travers les nœuds (cf. § 3.3.1).

Si le nombre capillaire Ca est petit, le terme capillaire domine, le processus représente une imbibition capillaire. Ce cas est singulier par rapport au nombre capillaire Ca en (3.2.11) : un petit paramètre (Ca) apparaît devant la dérivée majeure. Ceci signifie, qu'au moins une partie des conditions aux limites ne pourra plus être satisfaite. Du point de vue de la physique, ce phénomène est explicable car, dans ce cas, la valeur ΔP n'est plus une vraie valeur caractéristique de pression et devrait être remplacée par la valeur $\langle P_c \rangle$ afin d'adimensionnaliser les variables. Autrement dit, l'apparition d'une singularité est due à la mise sous forme adimensionnelle du problème. En réalité, le code numérique que nous avons développé, fonctionnait sans le moindre problème même pour de très petites valeurs de Ca .

La discrétisation (3.2.8) du problème (3.2.11)-(3.2.12), qui a l'ordre d'approximation $O(\Delta h^2)$, peut être obtenue par la méthode des différences finies. La solution numérique de ce système d'équations a été obtenue par des méthodes standards. En particulier, on a testé la méthode itérative de Seidel et celle de factorisation.

Il faut pourtant noter que, strictement dit, le schéma (3.2.8) ne doit pas coïncider avec l'équation différentielle (3.2.11) pour la limite $\Delta h \rightarrow 0$, car la pression $p(x)$ physique n'est pas une variable continue. L'opérateur de différentiation en (3.2.11) devrait donc être examiné dans le sens généralisé.

Puisque les coefficients de l'équation (3.2.11) dépendent du temps, le champ de pressions est recalculé à chaque pas de temps.

3.3. PASSAGE DES MÉNISQUES À TRAVERS LES NŒUDS

Le mouvement d'un ménisque en réseau inclut deux processus différents : (i) avancement continue du ménisque le long d'un pore entre les nœuds et (ii) naissance de nouveaux ménisques ou l'arrêt des ménisques (« la mort ») lors du passage à travers un nœud.

Le premier process est décrit par des relations différentielles (3.2.5), tandis que la naissance/mort ne peut être formalisée qu'au niveau d'un certain algorithme composé entièrement par des opérations de logique mathématique.

3.3.1. CONDITIONS DE PASSAGE D'UN MÉNISQUE À TRAVERS UN NŒUD

Utilisons la Fig. 3.3.1 pour examiner les conditions qui interdisent au ménisque 1 de passer du pore OA dans le pore voisin AB (position 3), A étant un nœud du réseau. Supposons que le ménisque avance de gauche à droite.

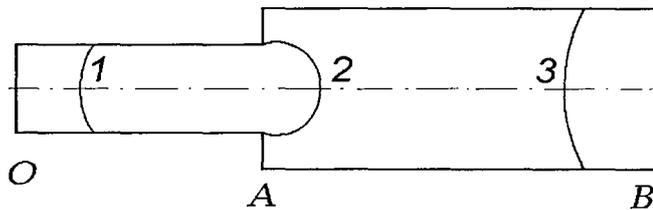


Fig. 3.3.1. Schéma de passage du ménisque à travers un nœud

Condition C1

Si le ménisque pénètre dans le pore AB , la pression capillaire, qui lui est appliquée, est égale à la pression capillaire propre du pore AB , $P_{c,AB}$ (par définition de la pression propre). Cependant, suivant l'équation de Washburn (3.2.4), la vitesse de propagation du ménisque est positive si la valeur $\delta P = P_A - P_B + P_{c,AB}\zeta_{AB}$ est positive, où $P_A - P_B$ est la chute de pression sur AB , $P_{c,AB}$ est la pression capillaire propre du pore AB et ζ_{AB} est l'identificateur de la courbure du ménisque. Sinon, le ménisque reste dans le nœud. Ainsi, on obtient la première condition de non pénétration :

$$\delta P_{AB} \leq 0 \quad (3.3.1a)$$

ou sous forme adimensionnelle :

$$p_B - p_A \geq \frac{\Delta h}{Ca} p_{c,AB} \zeta_{AB} \quad (3.3.1b)$$

Si la phase déplaçante est « plus » mouillante, alors $\zeta_{AB}=1$, et le ménisque ne peut être arrêté que par une chute de pression $P_A - P_B$ négative. Si la phase déplaçante est « moins » mouillante, alors $\zeta_{AB} = -1$ et le ménisque s'arrête si la chute de pression $P_A - P_B$ est plus petite que la pression capillaire propre.

Condition C2

Si la phase déplaçante est « plus » mouillante, et si elle passe un nœud du type élargissement de pore, alors le ménisque, juste avant d'entrer dans le pore AB , est inversé en changeant le signe de sa courbure. Au fur et à mesure de son gonflement successif, la valeur absolue de la pression capillaire qui s'applique sur lui augmente. La valeur maximale est estimée par la formule : $P_{c,\max} = \sigma/r_{OA}$. Ainsi, le ménisque ne peut pas entrer dans le pore AB si la chute de pression dans le pore OA est plus petite que la contre-pression capillaire. On obtient donc la condition de non-pénétration :

$$P_O - P_A \leq P_{c,\max}, \quad \text{si } \zeta_{OA} = -1 \text{ et } r_{OA} < r_{AB} \quad (3.3.2)$$

Notons que cette condition de non pénétration du pore AB inclut les paramètres du pore voisin OA .

Condition C3

En hydrodynamique des milieux poreux, il est traditionnel de supposer qu'un volume de la phase isolée du cluster continu de la même phase reste immobile, étant piégé par plusieurs mécanismes capillaires. Ceci signifie que le ménisque reste immobile s'il n'a pas de connexion par la phase déplacée avec la sortie du milieu. Cette condition est fortement non locale en espace et demande de développer un algorithme spécial pour la faire intervenir dans le modèle hydrodynamique (cf. § 3.3.2).

Il existe d'autres mécanismes très spécifiques de non pénétration des ménisques dans des pores, qui ont été examinés par Koplik et Lassefer (1985), par exemple. Dans cette thèse, ces mécanismes sont considérés comme peu importants.

3.3.2. ALGORITHME DE VÉRIFICATION DE LA CONNEXION DU MÉNISQUE AVEC LA SORTIE

Pour vérifier la condition C3 ci-dessus, nous avons appliqué un algorithme itératif de détection d'un cluster continu développé par Entov *et al.* (1975) pour les modèles de percolation statique. Pour se fixer les idées, appelons la phase déplaçante « eau », et la phase déplacée « huile ». Pour l'ensemble des pores, on introduit les identificateurs suivants :

k_0 : les pores contenant le ménisque et non connectés par l'huile avec la sortie ;

k_1 : les pores contenant le ménisque et connectés par l'huile avec la sortie ;

k_2 : les pores remplis entièrement de l'eau ;

k_3 : les pores remplis entièrement de l'huile et connectés avec la sortie ;

k_4 : les pores remplis entièrement de l'huile et non connectés avec la sortie ;

k_5 : les pores appartenant au cluster d'huile connecté.

Pour les nœuds, on introduit des identificateurs :

b_0 : les nœuds d'huile non connectés ;

b_1 : les nœuds d'huile connectés ;

b_2 : les nœuds d'eau.

Similaire à l'algorithme de croissance des fractals, où les nouvelles particules sont successivement collées à un cluster déjà existant, dans l'algorithme examiné les nouveaux pores et nœuds seront ajoutés successivement au cluster de la phase déplacée à partir de la section de sortie du réseau. L'algorithme est donc le suivant :

1. On attribue un identificateur b_1 aux nœuds de la section de sortie.
2. On attribue les identificateurs k_3, k_5 aux pores adjacents à la section de sortie.
3. On effectue un passage suivant tous les pores et tous les nœuds, en détectant les pores remplis entièrement par l'eau (on leur attribue l'identificateur k_2), remplis partiellement (k_0) et non remplis (k_4). Simultanément, on détecte les nœuds remplis (b_0) et non remplis (b_2).
4. On effectue un nouveau passage sur tous les pores. Les pores adjacents au nœuds b_1 sont rajoutés au cluster connecté de l'huile.
5. On effectue un nouveau passage de tous les nœuds. Les nœuds d'huile adjacents au pore appartenant au cluster connecté sont rajoutés au cluster.
6. On répète l'algorithme depuis le point 3 jusqu'à ce que les identificateurs des pores et des nœuds ne changent plus.

Notons que la phase déplaçante reste toujours connectée avec l'entrée du milieu suivant l'algorithme choisi.

3.3.3. PROCÉDURE NUMÉRIQUE DE PASSAGE DU MÉNISQUE À TRAVERS UN NŒUD

Supposons qu'un ménisque ait atteint un nœud. Pour chaque pore adjacent à ce nœud, on effectue les procédures suivantes :

- i) on vérifie les trois conditions de non pénétration du ménisque ;
- ii) pour tous les pores qui ont été évalués comme pénétrables, on suppose que le ménisque y soit entré spontanément ;
- iii) pour chaque pore, on attribue les identificateurs $\rho(x)$ et $\zeta(x)$, (cf. 3.2.1d) de la disposition spatiale des phases.

On effectue ces procédures y compris pour le pore où le ménisque est entré, ce qui donne la possibilité de détecter des mouvements inverses. En effet, si le δP dans ce pore devient négatif, le ménisque se retire de ce pore au lieu d'entrer dans le nœud examiné.

3.4. ORGANISATION GLOBALE DES CALCULS

3.4.1. DÉCOMPOSITION LOCALE DU PROBLÈME

Suivant l'analyse précédente, le problème de déplacement d'une phase par une autre en réseau capillaire est représenté par trois composantes :

- (i) problème I : calcul du déplacement de chaque ménisque dans chaque pore (3.2.5) ou (3.2.6) ;
- (ii) problème II : calcul du champ de pression dans les nœuds (3.2.11) – (3.2.12) ;
- (iii) problème III : passage de chaque ménisque à travers chaque nœud.

Le problème II – (3.2.11)–(3.2.12) – est stationnaire et donne un champ de pression instantané. Avant de le résoudre, il faut définir les fonctions $a(x)$ et $f(x)$ qui dépendent du caractère de saturation du pore examiné par les phases et de la position exacte du ménisque à l'intérieur de ce pore.

Par contre, le problème I, qui définit la position du champ de ménisque à chaque instant, est non stationnaire et peut être résolu si la chute de pression dans les nœuds adjacents est connue a priori. Ainsi, ces deux problèmes sont couplés.

Pour les décomposer, on utilise la propriété suivante du champ de pression : lors de petits intervalles de temps, les variations du champ de pression sont négligeables. Alors on peut formuler le principe de décomposition *locale dans le temps* des problèmes I et II : on calcule le problème I pour de petits pas temporels $\Delta\tau$ (quasi-stationnaire) de façon à ce que la chute de pression sur chaque pore puisse être considérée constante.

Alors on obtient une méthode de calcul des problèmes I (avec III) et II, l'un après l'autre.

3.4.2. CHOIX DU PAS DE TEMPS

Ainsi le mouvement des ménisques est effectué pour de petits pas temporels $\Delta\tau(\tau)$ qui sont différents à chaque instant τ . Les pas successifs sont choisis de la façon suivante.

Lors du pas $\Delta\tau$, la solution de l'ensemble du problème I (3.2.6) pour chaque pore doit être telle qu'aucun ménisque ne traverse un nœud, car un tel passage est déterminé par un autre problème (II).

Par la suite, le pas $\Delta\tau$ doit être égal au temps minimum de remplissage de tous les pores contenant des ménisques.

Pour le temps τ^* de remplissage complet d'un pore par la phase déplaçante, il est possible d'obtenir des relations exactes en utilisant (3.2.6). En prenant $\xi(\tau^*)=1$, nous obtiendrons :

$$\tau^* = \begin{cases} \tau_0 + \frac{(\bar{\mu}z^2 + 1) - 2\xi_0 - \xi_0^2(\bar{\mu}z^2 - 1)}{2z\lambda^*\delta p}, & \bar{\mu} \neq 1 \\ \tau_0 + \frac{(1 - \xi_0)}{z\lambda^*\delta p}, & \bar{\mu} = 1 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Ainsi

$$\Delta\tau = \min\{\tau^*\} \quad (3.4.2)$$

où la procédure de minimisation est effectuée sur l'ensemble de pores.

3.4.3. ALGORITHME GLOBAL DES CALCULS

Supposons qu'à un instant τ l'image complète des positions des ménisques dans tous les pores du réseau soit connue. Alors :

1. on calcule les temps de remplissages (3.4.1) de tous les pores non occupés par l'eau et partiellement occupés ;
2. on choisit le pas de temps $\Delta\tau$ (3.4.2) ; le pore correspondant, nommé « le pore de front », sera rempli entièrement lors de ce pas de calcul ;
3. pour le pore de front, on réalise la procédure de passage du ménisque à travers le nœud (cf. § 3.3.1) ;
4. dans tous les autres pores, on calcule les nouvelles coordonnées locales des ménisques atteintes durant le pas $\Delta\tau$, en utilisant (3.2.6) pour $\tau = \Delta\tau$;
5. on calcule le champ des conductivités a (3.2.9) de tous les pores ;
6. on calcule le champ instantané des pressions (3.2.11)–(3.2.12) ;
7. à tous les pores et nœuds, on attribue des identificateurs de leur contenu et leurs degrés de connexion ;
8. l'algorithme est répété depuis le point 1.

3.5. MÉTHODE À DEUX ÉCHELLES D'ORDRE k

Le défaut de la méthode décrite précédemment réside dans la relation (3.4.2), qui établit un pas spatial h_1 très petit pour le calcul des déplacements des ménisques. Les simulations numériques ont montré que ce pas peut être mille fois plus petit que h_2 et même plus faible encore. L'algorithme devient donc trop lent. La question qui se pose est comment l'accélérer, ou comment augmenter le pas h_1 ?

La solution de ce problème a conduit à un nouvel algorithme de simulations hydrodynamiques en réseaux capillaires.

3.5.1. PRINCIPE DE LA METHODE

Fixons à un instant quelconque τ l'image instantanée du système. Calculons le temps de remplissage τ^* pour chaque pore, en utilisant les formules (3.4.1). Choisissons le temps minimum τ_{\min}^* comme pas de temps. Calculons les coordonnées ξ atteintes par les ménisques lors du pas τ_{\min}^* , en utilisant (3.2.6). Remplaçons tout le spectre de coordonnées ξ par une suite de $k+1$ valeurs discrètes $\{\xi^{(j)}\}_{j=0}^k$ définies de la façon suivante :

$$\xi^{(j)} = j \cdot \delta\xi, \quad j = 0, \dots, k ; \quad \delta\xi = 1/k \quad (3.5.1)$$

Ainsi, $\xi^{(0)} = 0$, $\xi^{(k)} = 1$ (cf. Fig. 3.5.1).

Remplaçons maintenant les valeurs ξ par les valeurs discrètes $\xi^{(j)}$ en utilisant la règle suivante : toutes les valeurs ξ qui appartiennent à l'intervalle $\xi^{(j-1)} < \xi \leq \xi^{(j)}$ ($j = 1, \dots, k$) seront remplacées par la même valeur $\xi^{(j)}$.

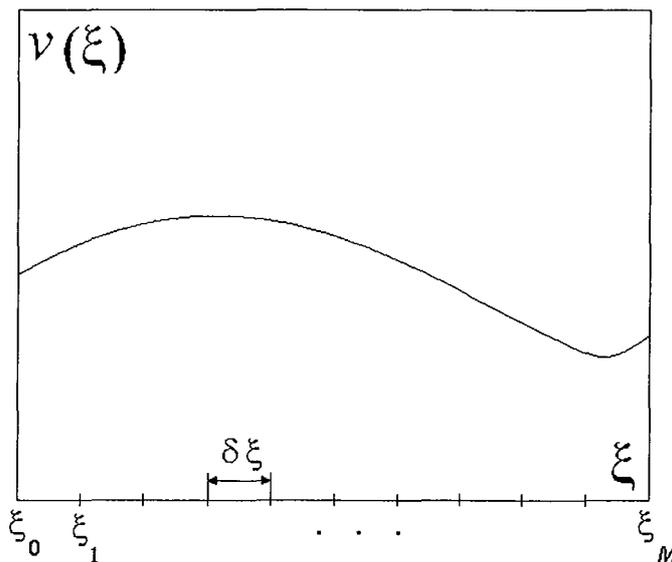


Fig. 3.5.1. Courbe de fréquences $\nu(\xi)$ d'apparition des valeurs ξ

Autrement dit, nous acceptons que chaque ménisque n'effectue que des mouvements discrets, proportionnels au pas de discrétisation $\delta\xi$.

Le nombre k ou le pas de discrétisation $\delta\xi = 1/k$ sont des paramètres libres de l'algorithme. Le nombre k est appelé l'ordre de l'algorithme. En acceptant $k=1$, nous obtenons l'algorithme d'ordre 1, ... jusqu'à un algorithme d'ordre infini, ce qui correspond à $k=\infty$.

On voit que dans l'algorithme d'ordre 1, le pas minimal de ménisques est égale à 1, c'est-à-dire, tous les ménisques qui bougent font le même pas égal à la durée du pore entier. Dans l'algorithme d'ordre 2, le pas minimal de ménisques est égale à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire les ménisques qui bougent font soit le pas $\frac{1}{2}$, soit 1. Dans l'algorithme d'ordre ∞ , le pas minimal de ménisques est égale à 0, c'est-à-dire les ménisques peuvent faire tout pas entre 0 et 1. Ainsi, l'algorithme d'ordre ∞ correspond au modèle de réseau décrit dans les paragraphes 3.2-3.4.

Notons que le modèle d'ordre 1 est similaire à celui de la percolation d'invasion ou de la percolation connectée, dans lesquelles le pas élémentaire est toujours égale à 1 (cependant le champ de pression n'est pas calculé dans les modèles de percolation).

Initialement, cette méthode a été suggérée par Panfilova et Muller (1996) et Panfilov, Panfilova (1996).

Les résultats des calculs à la base de ce modèle à différents ordres seront présentés dans le chapitre 4, y compris la comparaison de ces modèles avec le modèle d'ordre ∞ . On verra que le modèle d'ordre 1-2 donne déjà des résultats tout à fait satisfaisants.

3.5.2. MÉTHODE D'ORDRE k ET FORMATION DE PIÈGES

Une des propriétés importantes du processus examiné est la formation de pièges de la phase déplacée. Le piégeage s'effectue au moment où un volume du liquide se trouve détachée du cluster continue du même liquide. Un des mécanismes de piégeage est présenté sur la Fig. 3.5.2.

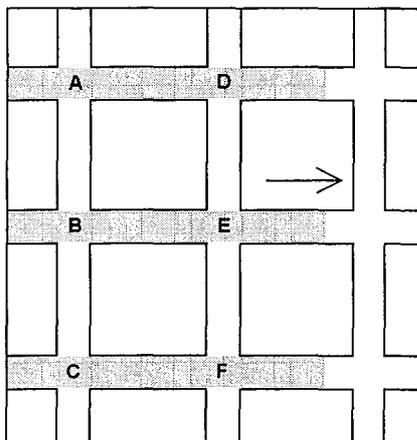


Fig. 3.5.2. Piégeage de la phase déplacée (en blanc) dans un réseau de pores (la phase déplaçante est en gris). La phase entre les points A-B, B-C, D-E, E-F est piégée.

On voit que le piégeage s'effectue au moment où la phase déplaçante passe à travers un nœud. Nous appelons « piège » un volume piégé de la phase déplacée.

Dans le modèle d'ordre ∞ , la dimension linéaire des pièges peut être arbitraire à partir de 0. Dans un modèle d'ordre fini k , où il existe un pas minimum spatial $\delta\xi = 1/k$ du mouvement, les pièges suivront la discrétisation spatiale. Ainsi la dimension minimale des pièges est $\delta\xi$. La Fig. 3.5.3 montre les pièges minimums permis par les modèles aux différents ordres.

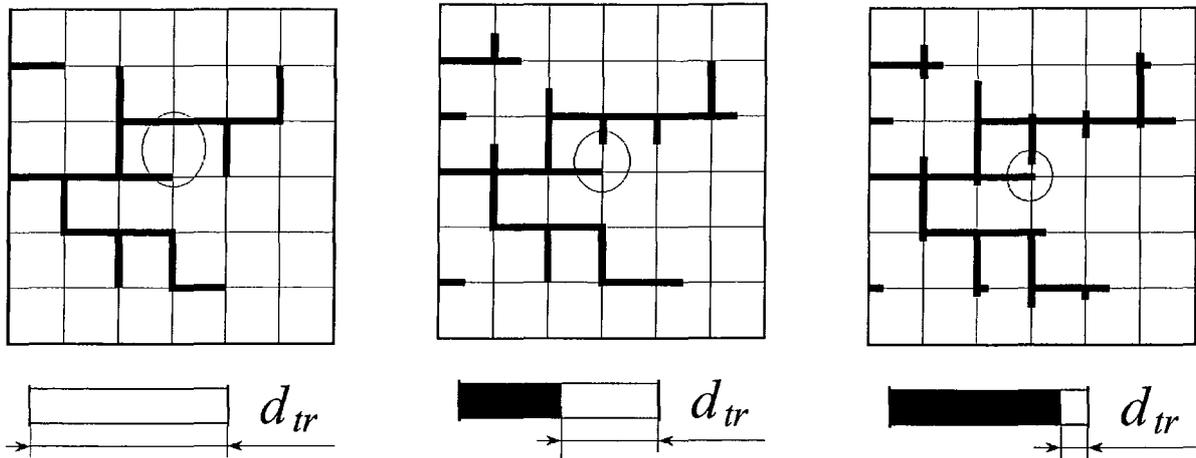


Fig. 3.5.3. La dimension minimale (d_{tr}) des pièges dans la méthode de différents ordres (la phase déplaçante est en noir) : *a* - ordre « 1 »; *b* - ordre « 2 »; *c* - ordre « ∞ »

Autrement dit, le modèle de plus petit ordre augmente suffisamment la dimension minimale des pièges. Cela peut produire une augmentation de la saturation totale piégée. Néanmoins nous avons montré numériquement (chapitre 4) que le modèle d'ordre 2-3 donne des résultats qui sont très proches des résultats obtenus par la méthode « exacte » (ordre ∞) au sens global.

Chapitre 4

RÉSULTATS DE SIMULATION EN RÉSEAUX CAPILLAIRES – RELATIONS DE FERMETURE

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats d'utilisation du simulateur d'un écoulement diphasique en réseau capillaire. Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- étudier certaines lois microscopiques de distribution des phases ;
- trouver les domaines de validité de trois modèles anciens d'écoulements diphasiques en milieux poreux : modèle de Buckley-Leverett, modèle croisé, modèle de non-équilibre ;
- obtenir les relations de fermeture pour le modèle proposé dans le chapitre 2.
- étudier les micro-mécanismes des écoulements et obtenir des relations de fermeture pour le modèle macroscopique proposé dans le chapitre 2.

On a effectué des simulations 3D en réseaux constitués de $27 \times 27 \times 10$ pores et des simulations 2D en réseaux de 101×75 pores. Une distribution uniforme ou logarithmique des rayons de pores a été utilisée. Dans toutes les simulations, le fluide déplaçant était plus mouillant. Les paramètres qui variaient dans les différentes versions de calcul sont : le rapport des viscosités $\bar{\mu}$ =(viscosité du fluide déplaçant / viscosité du fluide déplacé) et le nombre capillaire Ca =(chute de pression sur la longueur d'un pore moyen / pression capillaire sur un ménisque moyen).

4.1. STRUCTURES DE RÉPARTITION DES PHASES EN MILIEUX POREUX

Suivant les résultats des calculs effectués, pour des réseaux assez représentatifs statistiquement, la dimension de l'espace ne produisait aucune différence qualitative dans les répartitions des phases dans le réseau. Dans le cas de déplacement fortement instable (le fluide déplaçant est non visqueux), une image statistiquement répétitive peut être obtenue si les dimensions linéaires du domaine sont largement plus grandes que l'échelle caractéristique de perturbation.

La Fig. 4.1.1 illustre une répartition typique des phases dans un modèle 3D au moment de la percolation du fluide déplaçant.

Pour caractériser les configurations spatiales des phases, nous utiliserons les notions de *branchement micro* et de *branchement macro*. Un *branchement micro* constitue la formation de nouvelles branches du cluster continu de la phase examinée à l'échelle d'un pore. Ce type de branchement est provoqué par la micro hétérogénéité du milieu. Un *branchement macro* représente le processus de formation de grandes branches du cluster sous forme de doigts pénétrant dans le fluide déplacé. La distance séparant deux doigts voisins est de l'ordre de quelques dizaines voire de quelques centaines de longueurs de pore. Le branchement macro est provoqué soit par une hétérogénéité macroscopique du milieu, soit par une instabilité hydrodynamique.

4.1.1. STRUCTURES DES CLUSTERS DE PHASE POUR DES GRANDS Ca

Pour les grands nombres capillaires, lorsque les forces capillaires sont négligeables, l'évolution du cluster de la phase déplaçante en fonction du rapport des viscosités $\bar{\mu}$ est représentée sur la Fig. 4.1.2 dans le cas 3D et sur la Fig. 4.1.3 pour le cas 2D. On ne voit pas réellement de différence significative entre les cas 2D et 3D.

Sur la Fig. 4.1.3, les deux étapes sont montrés : au moment de la percolation de la phase déplaçante (*a,c*) et après la stabilisation complète du processus (*b,d*).

Dans le cas $\bar{\mu}=0.01$ (Fig. 4.13 *a,b*), il n'existe pas de front macroscopique de déplacement. Le déplacement s'effectue dans le domaine tout entier. Le cluster représente un branchement macroscopique avec des petites branches latérales. Le cluster est allongé suivant la direction de la différence de pression globale. Ceci est causé par le fait que les voies de sorties les plus courtes ont une résistance minimale. Lors de la propagation des doigts macro, les branchements latéraux n'arrivent pas à se développer.

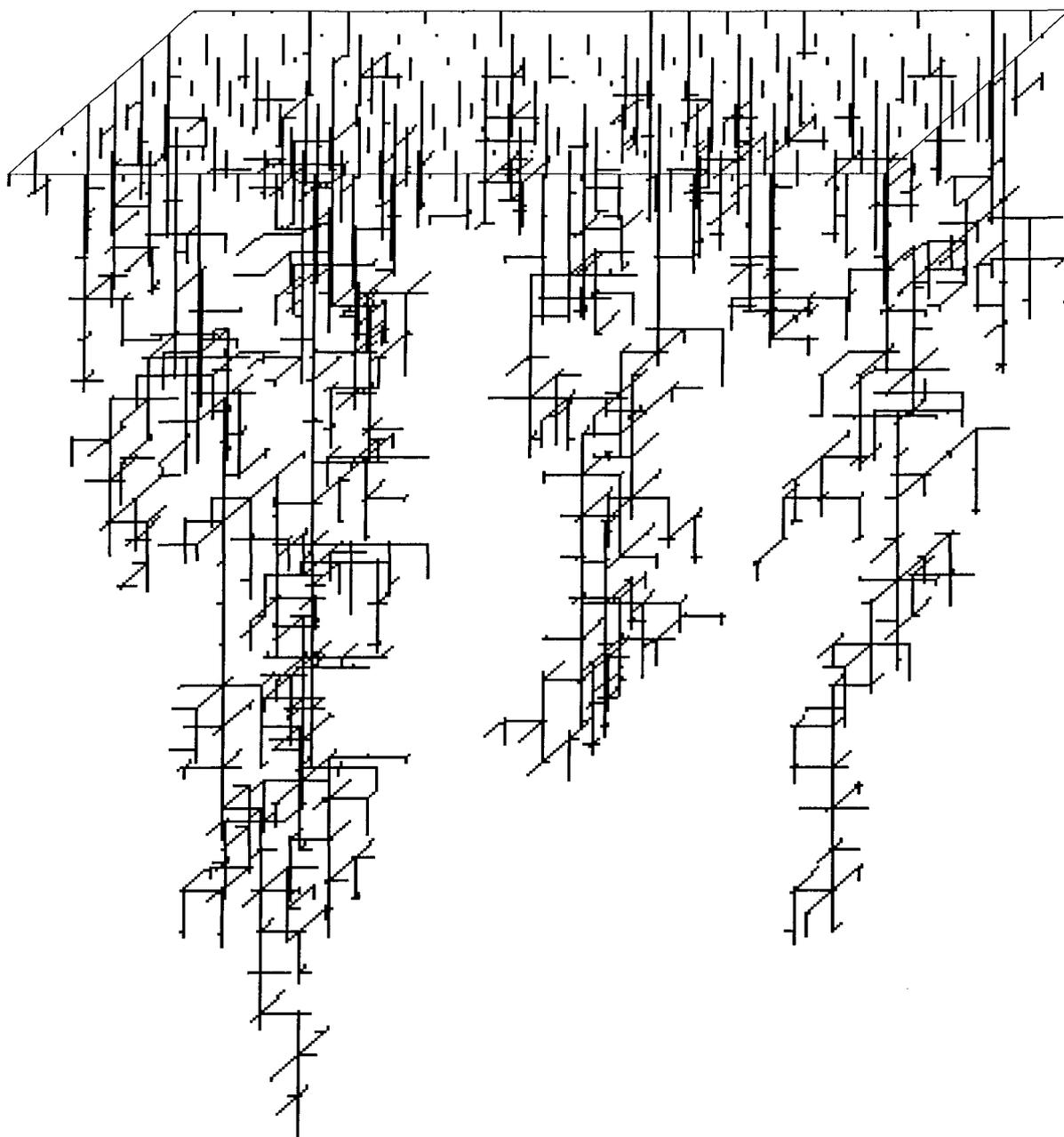


Fig. 4.1.1. Configuration de la phase déplaçante en réseau capillaire : $Ca=10^5$, $\bar{\mu}=0.01$

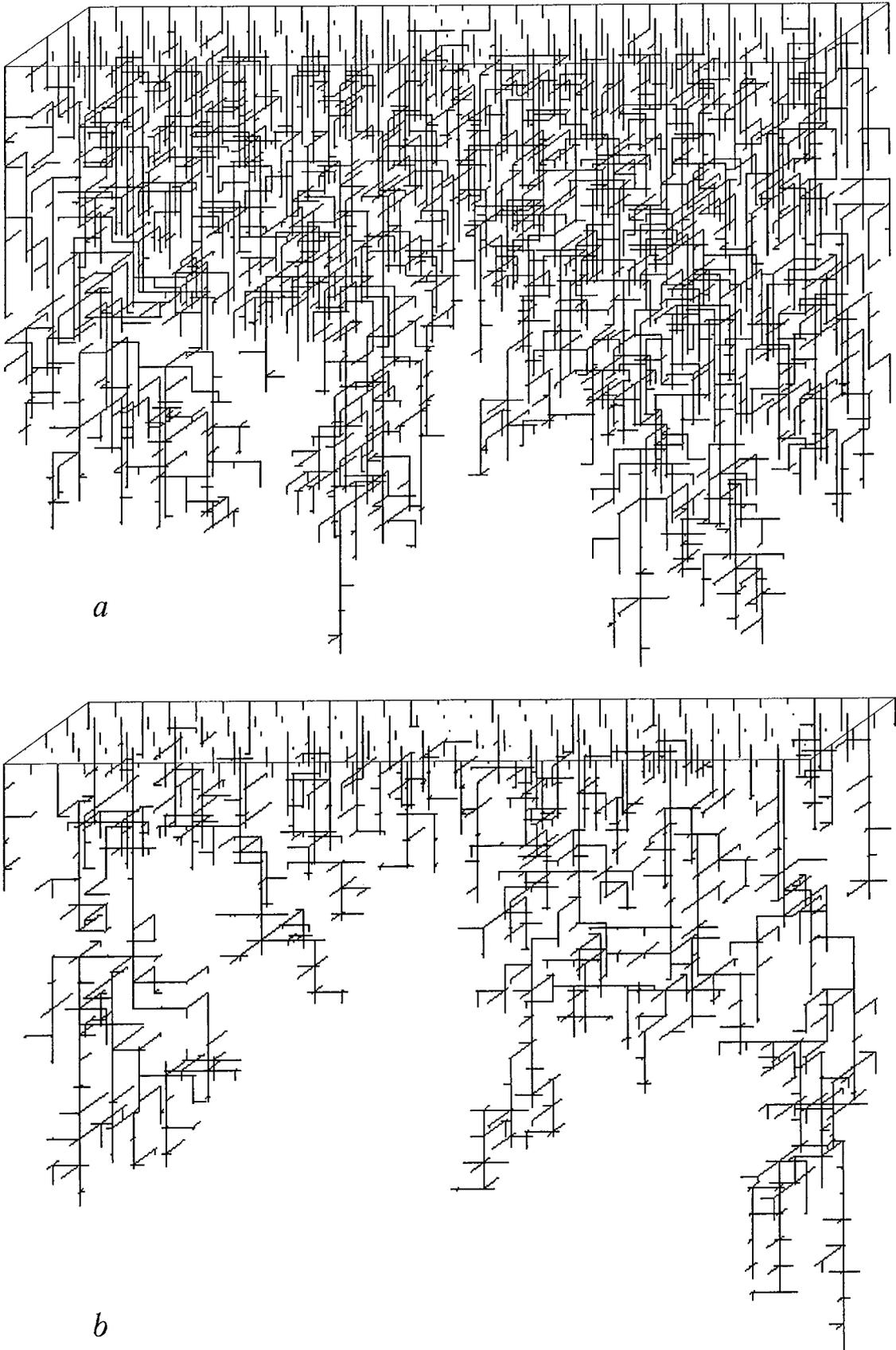


Fig. 4.1.2. Structures du cluster de la phase déplaçante pour $Ca=10^{10}$ et deux valeurs du rapport des viscosités : $\bar{\mu}=0.1$ (a) et $\bar{\mu}=0.01$ (b)

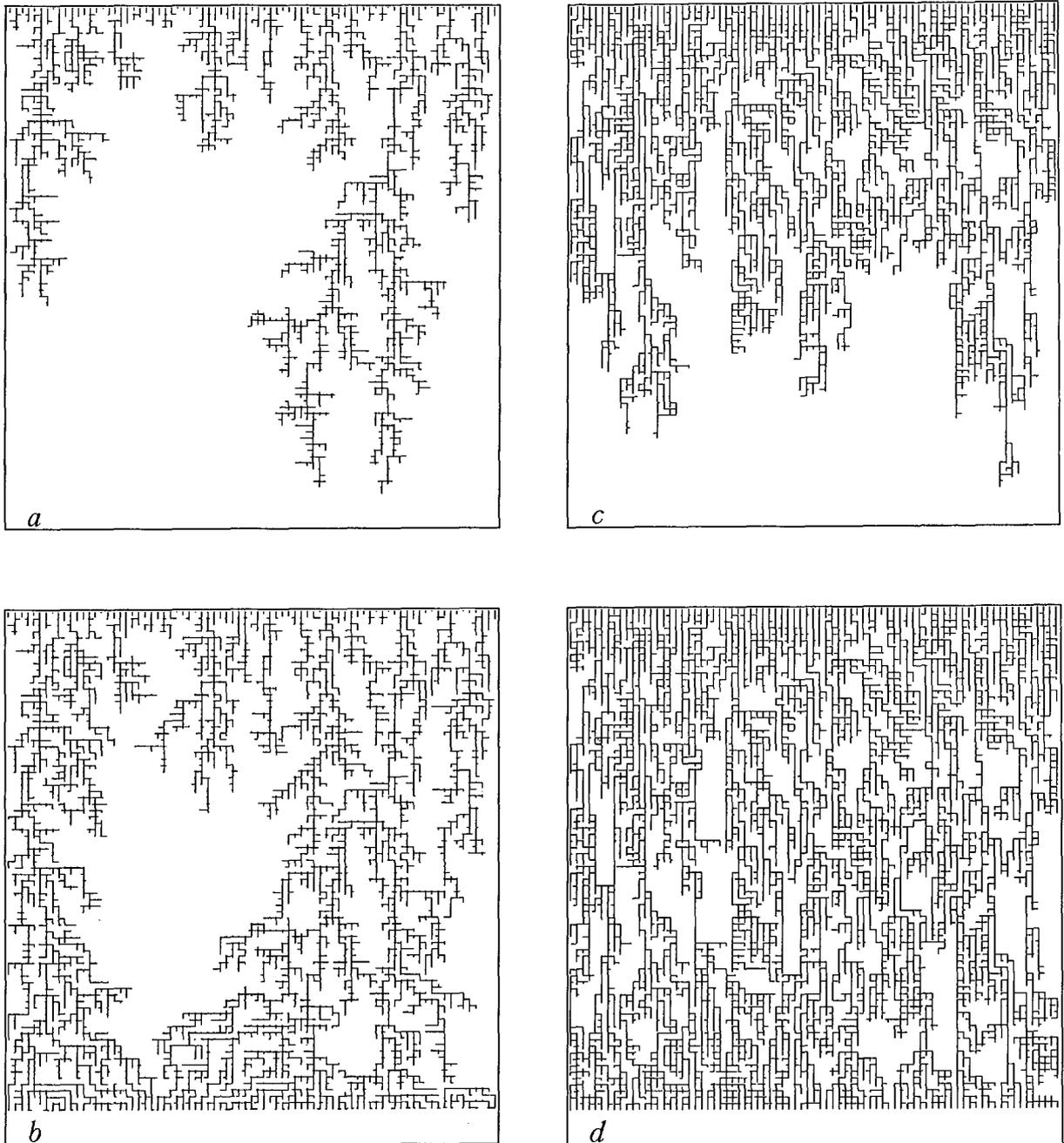


Fig. 4.1.3. Structure du cluster dans le cas 2D pour $Ca=10^{10}$ et deux valeurs de $\bar{\mu}$: $\bar{\mu}=0.01$ (*a, b*) et $\bar{\mu}=100$ (*c, d*). Avant percolation (*a, c*) et après stabilisation complète (*b, d*)

Lorsque $\bar{\mu}=100$ (Fig. 4.13 *c, d*), le cluster est similaire à celui du cas précédent, mais le déplacement est moins complet et le front macroscopique est moins flagrant. Le processus de déplacement est concentré dans la frange au voisinage du front homogénéisé et n'est quasiment pas observable derrière cette frange. Les branchements latéraux apparaissent suffisamment souvent mais tournent rapidement dans la direction macroscopique de l'écoulement. A cause de ce fait, leur longueur transversale est petite.

Dans le cas $\bar{\mu}=1$, l'image du déplacement est différent (non représenté et analogue à la Fig. 4.14 b). On peut observer un front homogénéisé de déplacement, qui devient de plus en plus dispersé, étant décomposé par des hétérogénéités locales du milieu. Derrière le front, le processus de déplacement n'est pratiquement pas observable. Les branches transversales sont essentiellement orientées dans la direction principale de l'écoulement et le nombre de branches latérales est très petit. Ceci peut être expliqué par le fait que le remplissage de tous les canaux est effectué à une vitesse quasiment uniforme ce qui bloque les canaux transversaux, sans donner des branches. L'hétérogénéité du milieu a d'autant moins d'influence sur le process quand la valeur de $\bar{\mu}$ augmente.

4.1.2. STRUCTURES DES CLUSTERS POUR DES FAIBLES VALEURS DE Ca

Quand les forces capillaires dominant, les structures des clusters restent en majorité les mêmes que lors d'un déplacement aux grands Ca . La particularité de l'action des forces capillaires se manifeste sous forme de branchements micro plus intenses. L'écoulement transversal est quasiment de même intensité que celui longitudinal. Les branches micro conduisent à la formation d'un grand nombre de gouttes bloquées de la phase déplacée. Ces pièges ont une dimension inférieure à la longueur d'un pore (Fig. 4.1.4).

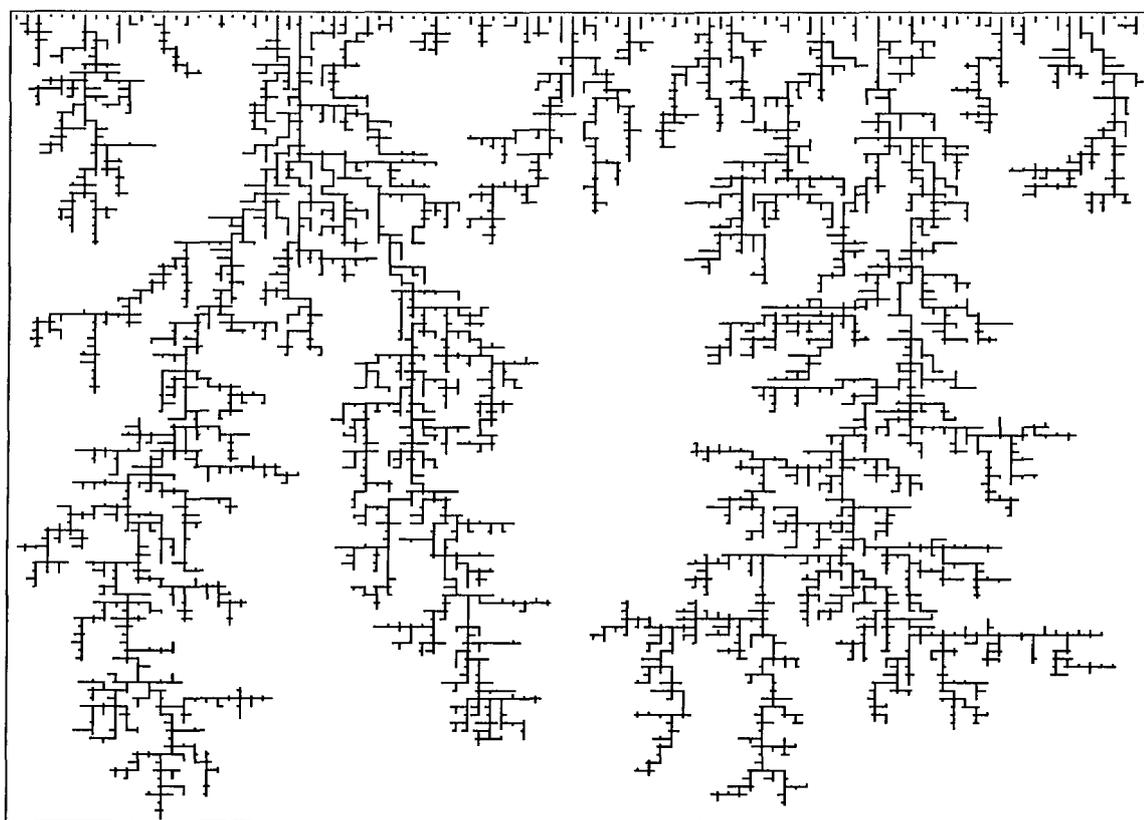
4.1.3. PRÉFÉRENCE SUR LE REMPLISSAGE DES PORES : « ACCEPTANCE PROFILE »

Une des caractéristiques importantes d'un cluster est la préférence sur le remplissage des pores par la phase déplaçante. L'hypothèse de base de la théorie phénoménologique des écoulements diphasiques en milieu poreux assume que la phase mouillante préfère remplir les pores les plus étroits. Les simulations effectuées ont montré que ce schéma simpliste de remplissage n'a souvent rien de commun avec la réalité.

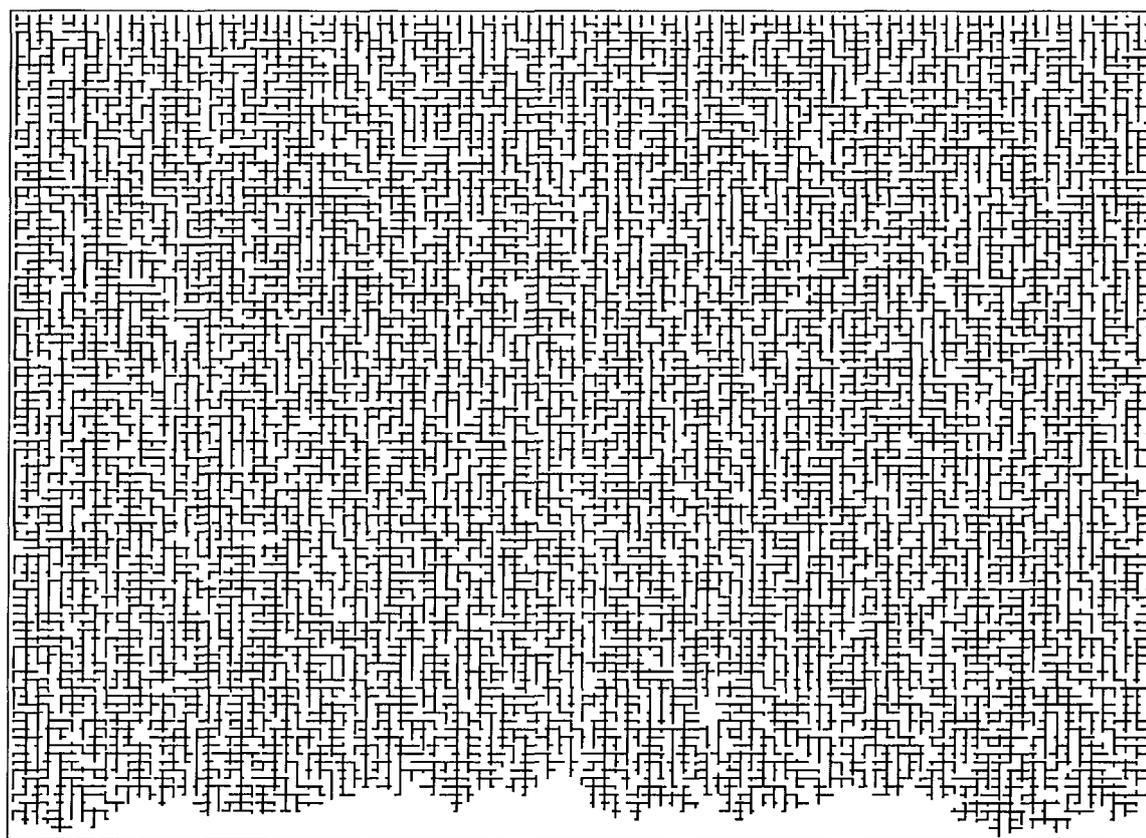
Pour caractériser la préférence de remplissage, on utilise la fonction appelée « *acceptance profile* » introduite par Wilkinson et Willemsen (1983). Pour définir un *acceptance profile*, introduisons certaines notions auxiliaires. Examinons la quantité $Q(t)$ de tous les pores remplis (par la phase déplaçante) y compris partiellement au moment t , et une quantité $M(t)$ de tous les pores marqués. Un pore est dit marqué s'il est un voisin adjacent de $Q(t)$. Soit la fonction $f_t(\rho)$ égale au nombre de pores remplis au moment t dont la résistance est comprise entre ρ et $\rho+d\rho$. Soit $h_t(\rho)$, une fonction égale au nombre de pores marqués au moment t dont la résistance est également comprise entre ρ et $\rho+d\rho$. La fonction $q_t(\rho)=f_t(\rho)/h_t(\rho)$ est appelée l'*acceptance profile*. La résistance d'un pore est une valeur inversement proportionnelle à sa conductivité hydraulique.

Les propriétés de cette fonction sont les suivantes :

- 1) si $q_t(\rho) \rightarrow 0$, alors les pores de cette résistance ne sont pas remplis (et donc restent marqués);
- 2) si $q_t(\rho) \rightarrow 1$, alors les pores de cette résistance sont remplis.



a



b

Fig. 4.1.4. Structure du cluster pour $Ca=10^{-3}$: $\bar{\mu}=0.001$ (a) ; $\bar{\mu}=1$ (b)

Ainsi, si le graphique $q_i(\rho)$ a la forme d'un échelon :

$$q_i(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho < \rho_* \\ 0, & \rho > \rho_* \end{cases} \quad (4.1.1)$$

alors la valeur critique ρ_* représente un seuil de percolation, en ce sens que les pores, dont la résistance est plus grande que ρ_* , ne peuvent jamais être remplis.

Une seconde constatation importante atteste que l'*acceptance profile* $q_i(\rho)$ permet de sélectionner une classe de pores qui ont une préférence à être remplis. Ce sont des pores dont la valeur q_i est proche de 1.

4.1.4. INFLUENCE DES VISCOSITES SUR L'ACCEPTANCE PROFILE

L'*acceptance profile* est bien étudié dans les problèmes de percolation (Chayes *et al.* 1985 ; Wilkinson et Willemsen, 1983). En particulier, dans un modèle de percolation statique, l'*acceptance profile* est une fonction-échelon (4.1.1) dont le seuil de percolation ρ_* est 0,5 (pour un réseau 2D). Le profil de ce type sera appelé profil d'équilibre. Dans les modèles de la percolation d'invasion, l'*acceptance profile* est variable dans le temps, mais tend vers un profil d'équilibre lorsque $t \rightarrow \infty$. Dans les modèles non locaux de percolation d'invasion, l'*acceptance profile* est également non stationnaire mais tend vers un profil différent (Panfilov et Tuvaeva, 1991a).

Nos simulations ont montré que l'*acceptance profile* obtenu au moment de la percolation du milieu a une forme typique présentée sur la Fig. 4.1.5.

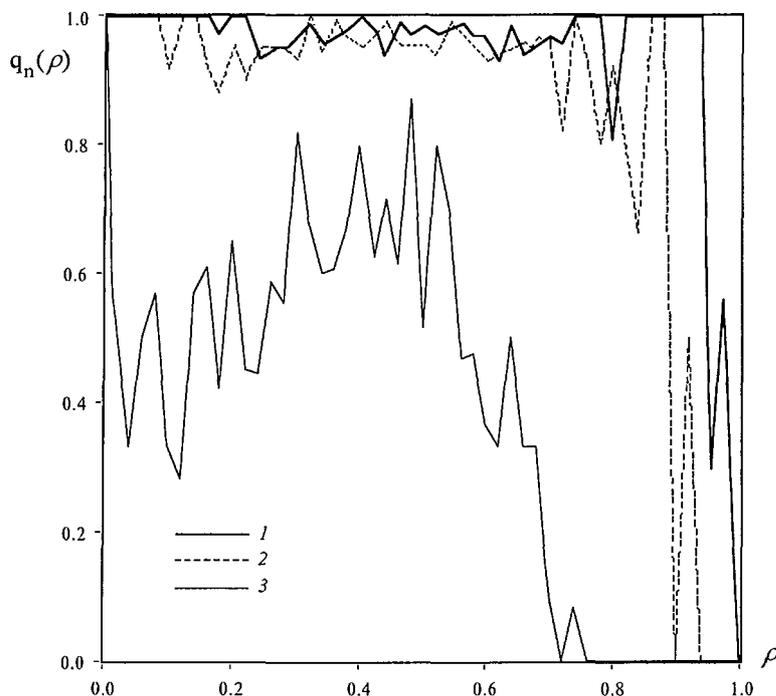


Fig. 4.1.5. *Acceptance profile* pour un réseau capillaire : $\bar{\mu}=100$ (1), $\bar{\mu}=1$ (2), $\bar{\mu}=0.01$ (3)

Les fluctuations des courbes deviennent plus faibles sur les grands réseaux. On peut noter les propriétés suivantes :

- l'*acceptance profile* a un point seuil ρ^* (seuil de percolation) qui dépend de $\bar{\mu}$;
- si $\bar{\mu} \gg 1$, la valeur de ρ^* est égale à 1 strictement (Fig. 4.1.5, courbe 1) ;
- si $\bar{\mu} \sim 1$, ρ^* est proche de 1 ($\rho^* \approx 0.94$) (courbe 2) ;
- si $\bar{\mu} \ll 1$, ρ^* se déplace significativement vers la gauche et tend vers une valeur de 0.75 (courbe 3).

Des simulations multiples ont montré que dans le cas $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$, le seuil de percolation ρ^* tend vers différentes valeurs pour des réseaux différents en ne suivant aucune loi déterminée, tout en restant toujours inférieur à 1.

Les conclusions qui découlent de ces propriétés sont :

1. Si $\bar{\mu} \gg 1$, l'*acceptance profile* représente une fonction triviale égale à 1 partout. Aucune préférence de remplissage des pores n'existe alors. Ce résultat numérique coïncide avec des résultats obtenus sur des modèles approximatifs de percolation d'invasion avec mémoire (Panfilov et Tuvaeva, 1991a).
2. Si $\bar{\mu} \sim 1$, une faible partie des pores ($\approx 5\%$) ne peut pas être remplie. Ce sont des pores à forte résistance, i.e. : les plus étroits. La phase mouillante remplit préférentiellement les pores larges, où les pertes visqueuses sont moins importantes.

Ceci est en contradiction notoire avec les résultats classiques de la théorie phénoménologique. L'explication suivante peut être donnée : dans un pore étroit la force capillaire motrice est plus grande, mais la force de résistance visqueuse l'est aussi. La force capillaire est inversement proportionnelle au rayon du pore, tandis que la force visqueuse est inversement proportionnelle au carré du rayon. Ainsi, la croissance de la résistance visqueuse dans une restriction du canal poreux est plus forte que la force capillaire motrice. Alors, le fluide évite les pores étroits.

3. Si $\bar{\mu} \ll 1$, la partie des pores inaccessibles pour la phase déplaçante devient beaucoup plus grande (jusqu'à 20 %) et correspond aux pores les plus étroits. La phase mobile déplaçante se fraie un passage à travers les pores les plus larges, en « oubliant » les pores étroits. Bien évidemment, pour les grandes valeurs du temps, loin derrière le front, la phase déplaçante forme des branches transversales et entre dans des pores plus étroits, en déplaçant le seuil de percolation vers 1.

A gauche par rapport au seuil de percolation ρ^* , la fonction $q_f(\rho)$ prend une valeur autour de 0.5. Cela signifie que seule la moitié des pores de chaque type est remplie.

4.2. LOIS STATISTIQUES DE PIÉGEAGE

Le processus d'écoulement diphasique en milieu hétérogène est accompagné de l'apparition des volumes isolés de la phase déplacée. Dans la littérature anglo-américaine, un tel processus porte le nom de *trapping* (piégeage). L'étude du phénomène de piégeage a une grande importance pratique dans l'ingénierie pétrolière, étant à l'origine des pertes du pétrole dans les gisements lors de leur exploitation.

Le mécanisme standard de formation d'un piège est le suivant (Fig. 4.2.1) :

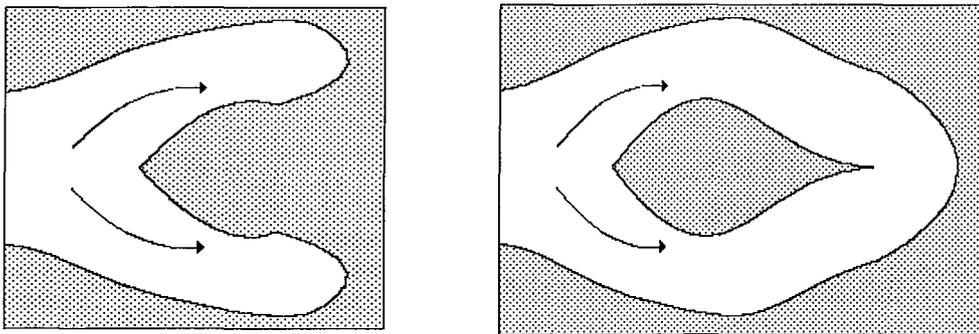


Fig. 4.2.1. Etapes consécutives de formation d'un piège

lorsque le front de déplacement rencontre une zone faiblement perméable (ZFP), la phase déplaçante s'ouvre un passage à travers les voies les plus perméables, en contournant la phase non déplacée dans la ZFP ; lors d'un collapse consécutif à la formation des doigts, la phase non déplacée dans la ZFP devient séparée de la sortie du milieu. Ainsi, un piège est formé. Le problème crucial de ce phénomène est que le piège reste immobile quelles que soient les gradients de pression appliqués (pour de très forts gradients de pression, de faibles mouvements des pièges deviennent possibles, mais ils suivent des lois non linéaires).

Aujourd'hui, nous n'avons que des relations empiriques pour la description de ce phénomène, en particulier, les relations obtenues par Chatzis *et al.* (1983) et Rose (1967). Panfilov et Panfilova (1996) ont effectué l'étude du mécanisme de la formation et de la cinétique des pièges. Les simulations effectuées donnent la possibilité de trouver des lois statistiques plus générales sur la formation des pièges.

4.2.1. STRUCTURES DES PIÈGES DE LA PHASE DÉPLACÉE POUR DES $Ca \gg 1$ ET DES $\bar{\mu} \ll 1$

Le remplissage du milieu s'effectue de façon très irrégulière et a la forme de plusieurs arbres éloignés les uns des autres et croissant indépendamment. Les troncs des arbres sont pratiquement verticaux avec de petits branchements transversaux. Le processus ressemble à une arborescence. La probabilité de formation d'un piège est assez faible. Tous les pièges ont une dimension de l'ordre du pore. La plupart des pièges sont orientés transversalement par rapport à la direction principale de l'écoulement. On peut rencontrer des pièges solitaires de

longueur de 2-3 pores. Des pièges plus grands n'existent pas car la phase déplacée a de nombreuses voies pour sortir du milieu (Fig. 4.1.3 a).

Néanmoins, pour de grandes valeurs du temps, lorsque une interaction entre les différents arbres est observée, les lois d'écoulement et de piégeage changent (Fig. 4.1.3 c). Ainsi, dans le cas $\bar{\mu} \ll 1$, on est obligé de distinguer deux étapes : (i) une croissance libre des arbres et (ii) leur interférence. La seconde étape conduit à une formation de très grands pièges, de dimensions comparables à la largeur du front de déplacement.

Il est nécessaire de noter que le déplacement de ce type est fréquemment modélisé par la croissance des fractals Laplaciens (modèle DLA - diffusion limited aggregation). Il est cependant connu que le modèle DLA ne contient pas de pièges. Ceci montre à quel point le modèle DLA est approximatif, car dans le processus réel, les pièges sont toujours présents.

4.2.2. STRUCTURES DES PIÈGES POUR DES $Ca \gg 1$ ET DES $\bar{\mu} \sim 1$

Dans ce cas, le cluster de la phase déplacée remplit uniformément le milieu, le front avance de façon irrégulière dans le temps. Derrière lui, on observe un remplissage secondaire du milieu par l'intermédiaire des branches transversales. Suite à ce processus secondaire, l'image sommaire du déplacement devient très uniforme. La probabilité de formation de pièges dans ce cas est beaucoup plus grande, avec des dimensions des pièges plus diversifiées. Cependant, la dimension moyenne d'un piège est de l'ordre d'un pore, comme dans le cas précédent. La longueur maximale d'un piège est quant-à-elle voisine de plusieurs pores.

On ne voit pas de grandes différences entre les dimensions et les probabilités des pièges longitudinaux et transversaux.

4.2.3. STRUCTURES DES PIÈGES POUR DES $Ca \gg 1$ ET DES $\bar{\mu} > 1$

Le front avance plus régulièrement dans le temps, mais le degré de couverture du domaine par le déplacement est plus faible que dans le cas $\bar{\mu} \sim 1$. Ce résultat est loin d'être trivial et demande quelques explications qui seront exposées plus loin.

Les pièges de dimension d'un pore dominant toujours, mais on peut également observer des grands pièges allongés dont la longueur est de l'ordre de plusieurs dizaines de pores.

La totalité du déplacement devient moindre par rapport au cas des viscosités équivalentes ($\bar{\mu} \sim 1$). Ceci est en désaccord avec certains postulats de la théorie classique, selon laquelle le cas $\bar{\mu} \gg 1$ correspond à un déplacement de type piston et est caractérisé par un taux de déplacement maximal quel que soit le degré d'hétérogénéité du milieu.

En fait, si le cas $\bar{\mu} \ll 1$ est « maximale » sensible à toute hétérogénéité, le cas $\bar{\mu} \gg 1$, au contraire, nivelle le rôle de l'hétérogénéité du milieu. Ainsi dans le cas limite $\bar{\mu} \rightarrow \infty$, le déplacement devrait s'effectuer de la même façon que dans un milieu homogène. Cependant dans un réseau homogène, le déplacement n'a lieu seulement que dans les canaux

longitudinaux à vitesse uniforme. Ainsi, tous les canaux transversaux sont bloqués et exclus du déplacement, par la formation de pièges de la phase déplacée. Ainsi dans un réseau 3D uniforme, uniquement 33% du liquide peut être déplacé, tandis que le volume piégé constitue 67% (!). Le volume total piégé est énorme, mais la dimension de chaque piège est égale à un pore.

Si le rapport $\bar{\mu}$ est grand mais fini, les vitesses des jets longitudinaux seront différents dans un réseau hétérogène. Devant les jets qui sont en retard, un volume de la phase déplacée reste cloisonné entre les jets longitudinaux voisins. Suite à un collapse probable des jets voisins, ce volume retardé forme un piège allongé dans la direction du déplacement principal.

4.2.4. STRUCTURES DES PIÈGES POUR DES $Ca \ll 1$

Pour des petits nombres Ca , la structure des pièges est différente.

Dans le cas $\bar{\mu} \ll 1$, on observe des arbres séparés de la phase déplaçante, quasiment indépendants l'un de l'autre au début du processus. Néanmoins, assez rapidement les arbres entrent en concurrence, puisque les forces capillaires provoquent une croissance des branches latérales. Ceci conduit à la formation d'un grand nombre de pièges transversaux de longueur d'un pore simultanément avec des pièges longitudinaux de longueur de plusieurs pores.

Si $\bar{\mu} \sim 1$, les arbres interfèrent fortement entre eux, en bloquant les voies de sortie de la phase déplacée. Il vient que des nombreux pièges se forment, très diversifiés en taille et en forme. Cependant, la taille d'un pore domine toujours.

Si $\bar{\mu} \gg 1$, le déplacement devient plus complet, alors les pièges sont peu nombreux. Les pièges ont tous une taille plus petite qu'un pore. L'orientation des pièges est très aléatoire, en contraste avec le cas du paragraphe 4.2.3.

Pour de très petits Ca , le front de déplacement devient très régulier et indépendant de la valeur de $\bar{\mu}$ (Fig. 4.2.2).

Il est important de noter que le piégeage est observé essentiellement dans le domaine au voisinage du front homogénéisé. Lorsque $\bar{\mu} < 1$ ce processus s'effectue grâce à un mélange convectif des phases. Lorsque $\bar{\mu} \gg 1$, l'effet d'orientation joue le rôle dominant, i.e. : le piégeage dans les pores transversaux entre les jets longitudinaux.

4.2.5. DISTRIBUTION DES TAILLES DES PIÈGES

Examinons les longueurs adimensionnelles des pièges, obtenues à l'aide d'une réduction par la longueur d'un pore moyen. La Fig. 4.2.3 montre la densité de distribution des longueurs adimensionnelles des pièges obtenue à partir des simulations du processus de déplacement en réseau capillaire.

Des courbes du même type ont été obtenues expérimentalement par Chatzis *et al.* (1988) sur du grès Berea. L'analyse expérimentale des dimensions des pièges représente un problème extrêmement compliqué dont la solution a été proposée par Chatzis *et al.*. Le milieu est rempli initialement par un monomère du styrène, qui modélise la phase déplacée (huile). « L'huile » contient 1% du pyroxile de benzol. Après avoir effectué le déplacement de l'huile par de

l'eau, on installe l'échantillon contenant l'huile piégé dans un bain thermostaté dans des conditions pour lesquelles l'huile entre en réaction de polymérisation. Comme résultat, on obtient un gel qui se transforme en une masse solide. Ensuite, on injecte de l'acide fluorhydrique dans l'échantillon jusqu'à la destruction complète du squelette du milieu. La substance des pièges ne réagissant pas avec l'acide, les pièges solides sont alors lavés et tassés.

D'après la Fig. 4.2.3 et des données du travail de Chatzis *et al.* (1988), il vient que, dans la plupart des cas, la majorité des pièges (70 %) ont des dimensions inférieures au pore.

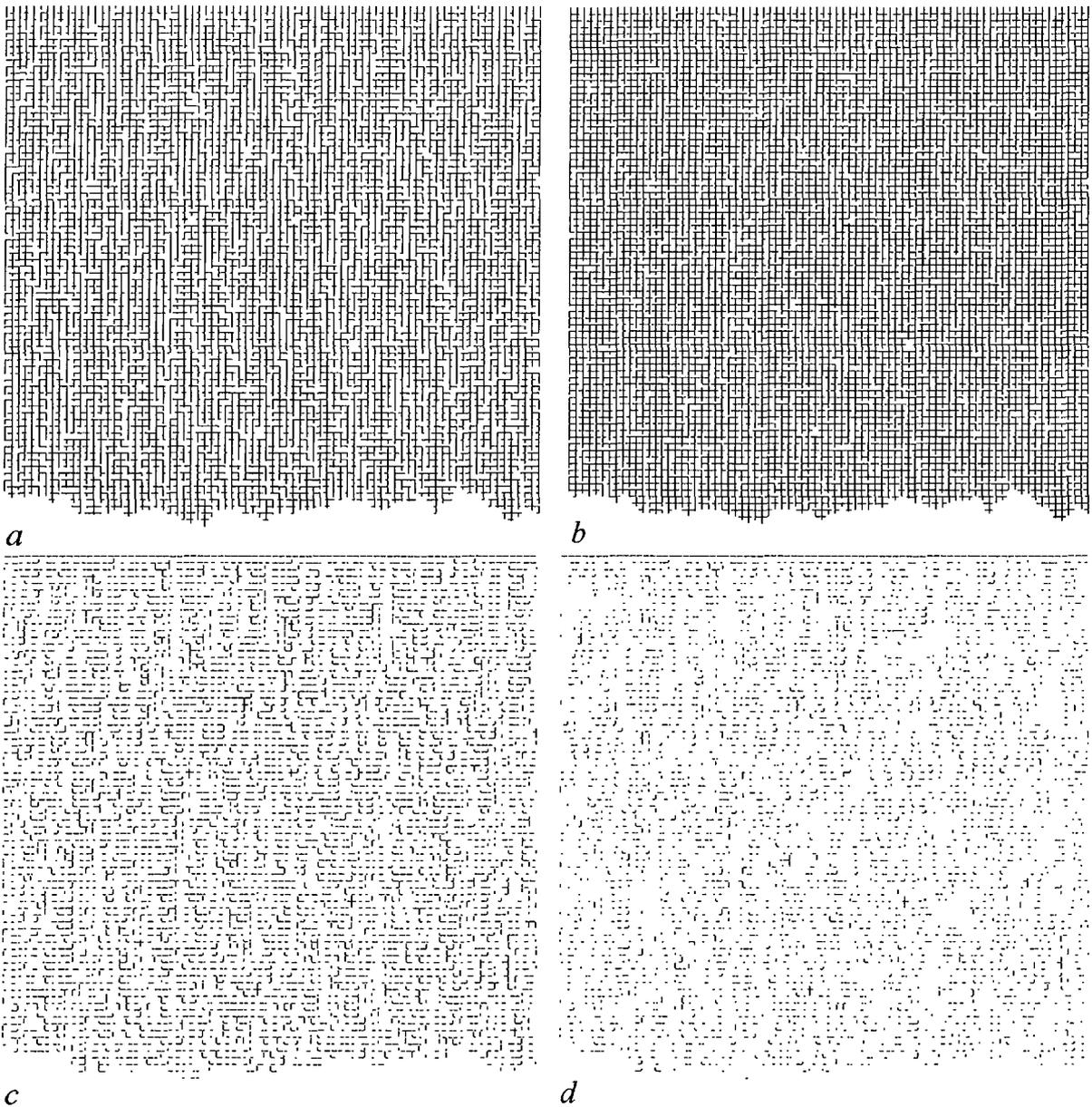


Fig. 4.2.2. Structure des clusters de la phase déplaçante (*a, b*) et du champ des pièges (*c, d*) pour $Ca = 10^{-3}$, $\bar{\mu} = 1$ (*a, c*), $\bar{\mu} = 100$ (*b, d*).

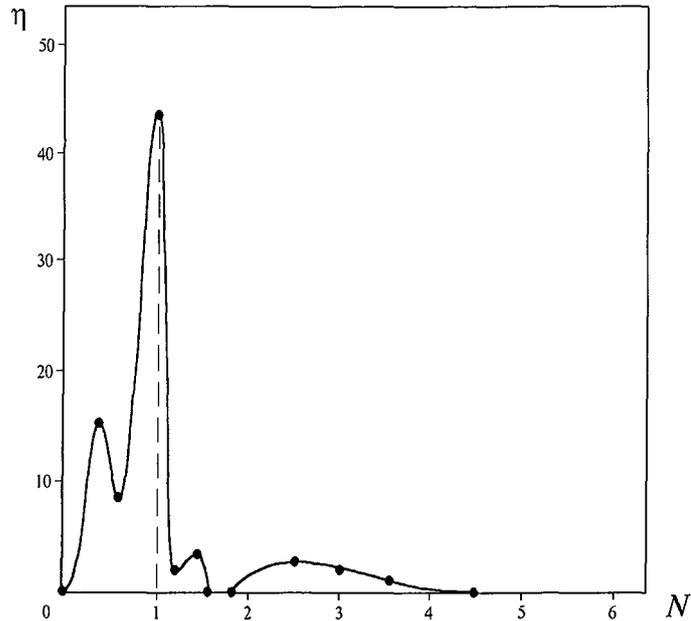


Fig. 4.2.3. Densité η de distribution des tailles des pièges (N est la taille mesurée en nombre de pores)

4.2.6. EFFET D'ORIENTATION

Comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe 4.2.3, un réseau capillaire, même parfaitement homogène, est favorable à la formation des pièges. En outre, ceci dépend de l'orientation des axes du réseau par rapport aux directions de l'écoulement. La Fig. 4.2.4 illustre le cas d'un même réseau de canaux homogènes, mais orientés différemment par rapport à la direction principale de l'écoulement. Supposons que la direction macroscopique de l'écoulement soit horizontale avec un déplacement global de gauche à droite.

Dans le cas *a*, on observe la formation des pièges, car le front avance à la même vitesse le long des canaux horizontaux, en bloquant la phase non déplacée dans les pores verticaux. Dans le cas *b*, les pièges ne seront pas formés car tous les canaux sont à angles droits. Ainsi le piégeage dépend considérablement de l'orientation du réseau ou de la direction du déplacement. Cet effet d'orientation n'est pas inhérent à certains types de réseaux. En particulier, il n'est jamais observé dans les réseaux hexagonaux (Fig. 4.2.4, *c*) à cause de son isotropie.

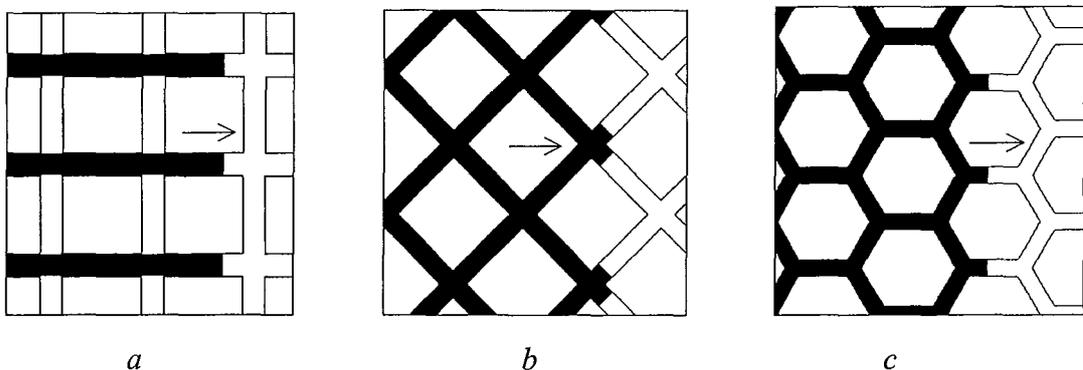


Fig. 4.2.4. Réseaux capillaires : carré (*a*) ; carré orienté à 45° (*b*) ; hexagonal (*c*)

4.3. MODÈLE DE DOUBLE-RÉSEAU POUR L'ÉTUDE DU PIÉGEAGE

4.3.1. GÉOMÉTRIE DU DOUBLE-RÉSEAU

Pour quantifier le processus de piégeage, nous proposons un modèle approximatif d'un réseau périodique hétérogène composé de deux réseaux homogènes de canaux : le réseau I est composé de canaux étroits, le réseau II est formé par des canaux larges (Fig. 4.3.1).

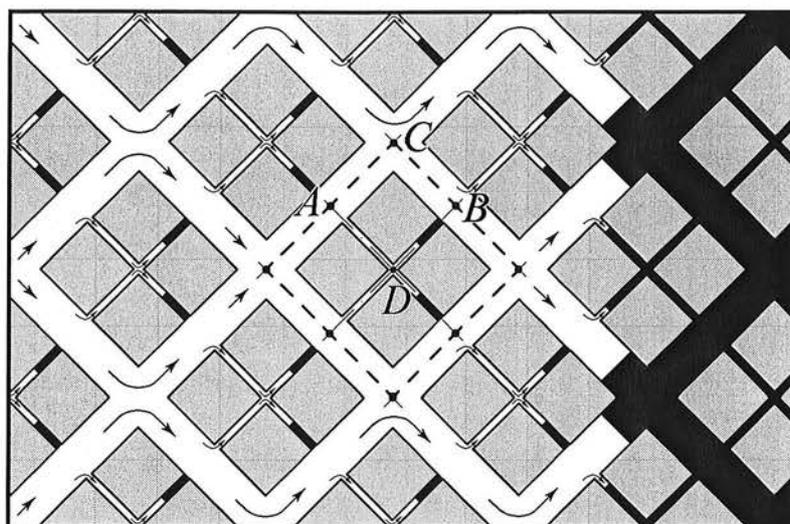


Fig. 4.3.1. Modèle de double-réseau périodique pour l'étude du piégeage

Les deux réseaux sont connectés l'un avec l'autre. Les points d'intersection des axes des canaux forment un réseau périodique. Un élément périodique du réseau global est marqué par une ligne pointillée (Fig. 4.3.1). On voit également que cet élément est symétrique par rapport à l'axe horizontal.

Supposons que la direction macroscopique de l'écoulement soit de gauche à droite selon l'axe horizontal. Les axes du réseau capillaire sont orientés à 45° par rapport à la direction de l'écoulement macroscopique pour éliminer le piégeage causé par l'effet d'orientation (cf. § 4.2.6). En effet, si l'orientation d'un axe du réseau était parallèle à l'axe de l'écoulement, le déplacement s'effectuerait uniquement par les canaux larges, tandis que le réseau I serait entièrement occulté. Comme précédemment, les parties foncées sur la Fig. 4.3.1 correspondent à des zones remplies par le fluide déplacé. Les flèches montrent la direction de l'écoulement local.

Dans le nœud C, les deux jets passant le long des canaux larges sont entièrement symétriques, ainsi on peut les examiner comme s'effectuant dans deux tubes capillaires indépendants.

Examinons une cellule $ACBD$ du modèle qui est composée de 4 canaux connectés (Fig. 4.3.2), dont deux sont larges et les deux autres étroits. Leurs rayons sont r_1 et r_2 . De par la symétrie du système, il suffit d'examiner un élément composé de la moitié du canal large et de la moitié du canal étroit (Fig. 4.3.3).

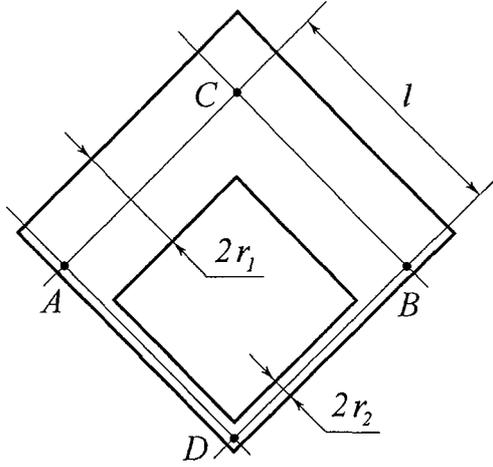


Fig. 4.3.2. Un fragment du modèle: canal large (ACB) et canal étroit (ADB)

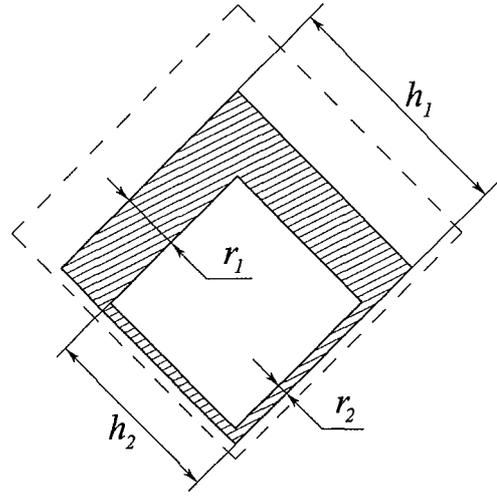


Fig. 4.3.3. Schéma de calcul du mouvement dans le réseau

Pour les longueurs caractéristiques, il vient : $h_1=l$, $h_2=l-r_1$.

Ainsi, nous obtenons le modèle bien connu du doublet qui a été utilisé pour calculer la saturation piégée.

4.3.2. SATURATION PIÉGÉE

Le fluide remplit plus rapidement le canal large et bloque le canal étroit après avoir atteint le nœud B . La phase non déplacée reste ainsi dans le canal étroit. Un processus analogue de piégeage sera répété dans la cellule suivante, et ainsi de suite jusqu'à l'extrémité du réseau.

La théorie du doublet est basée sur l'équation de Washburn (3.7) dans chaque canal du doublet pour la coordonnée locale du ménisque. En utilisant les solutions analytiques (3.9) pour $\xi_0=0$ $\tau_0=0$, on peut obtenir une relation exacte pour le temps de remplissage et le volume piégé dans le canal étroit. Toutes ces procédures font l'objet de la théorie du doublet. Il est donc facile de montrer que la coordonnée du ménisque bloqué dans le canal étroit est :

$$\xi(T_1) = \frac{2}{\bar{\mu}-1} \left[\sqrt{(l-r_1)^2 + l^2(\bar{\mu}^2-1) \frac{r_2(Ca r_2/r_1+1)}{r_1(Ca+1)}} - (l-r_1) \right], \quad Ca \equiv Ca_1$$

où T_1 est le temps de remplissage total des canaux larges dans une cellule, défini comme :

$$T_1 = \frac{2l^2(\mu_\alpha + \mu_\beta)}{r_1^2(\Delta P + P_{c1})}, \quad P_{c1} \text{ est la pression capillaire dans les canaux larges.}$$

La longueur du piège est donc : $d = 2(l-r_1) - \xi(T_1)$. Pour la saturation piégée, on obtient :

$$S_{tr} = \frac{A_1}{\bar{\mu} - 1} \left[\bar{\mu}(1 - R_1) - \sqrt{(1 - R_1)^2 + (\bar{\mu}^2 - 1) \omega \frac{Ca\omega + 1}{Ca + 1}} \right], \text{ lorsque } \bar{\mu} \neq 1 \quad (4.3.1-a)$$

$$S_{tr} = A_1 \left[(1 - R_1) - \frac{\omega}{(1 - R_1)} \frac{Ca\omega + 1}{Ca + 1} \right], \quad \bar{\mu} = 1 \quad (4.3.1-b)$$

où $R_i = r_i/l$, $\omega = R_2/R_1$, $A_1 \equiv \frac{\omega^2}{1 + \omega^2(1 - R_1)}$.

Les Figures 4.3.4 et 4.3.5. montrent la saturation piégée S_{tr} en fonction du rapport des rayons $\omega = R_2/R_1$, pour les valeurs limites des paramètres $\bar{\mu}$ et Ca :

- lorsque $\bar{\mu} \rightarrow \infty$, $Ca \rightarrow \infty$: $S_{tr} = A_1(1 - R_1 - \omega)$;
- lorsque $\bar{\mu} \rightarrow \infty$, $Ca = 0$: $S_{tr} = A_1(1 - R_1 - \sqrt{\omega})$;
- lorsque $\bar{\mu} = 1$, $Ca \rightarrow \infty$: $S_{tr} = A_1 \left(1 - R_1 - \frac{\omega^2}{1 - R_1} \right)$;
- lorsque $\bar{\mu} = 1$, $Ca = 0$: $S_{tr} = A_1 \left(1 - R_1 - \frac{\omega}{1 - R_1} \right)$;
- lorsque $\bar{\mu} = 0$, $Ca \rightarrow \infty$: $S_{tr} = A_1 \sqrt{(1 - R_1)^2 - \omega^2}$;
- lorsque $\bar{\mu} = 0$, $Ca = 0$: $S_{tr} = A_1 \sqrt{(1 - R_1)^2 - \omega}$

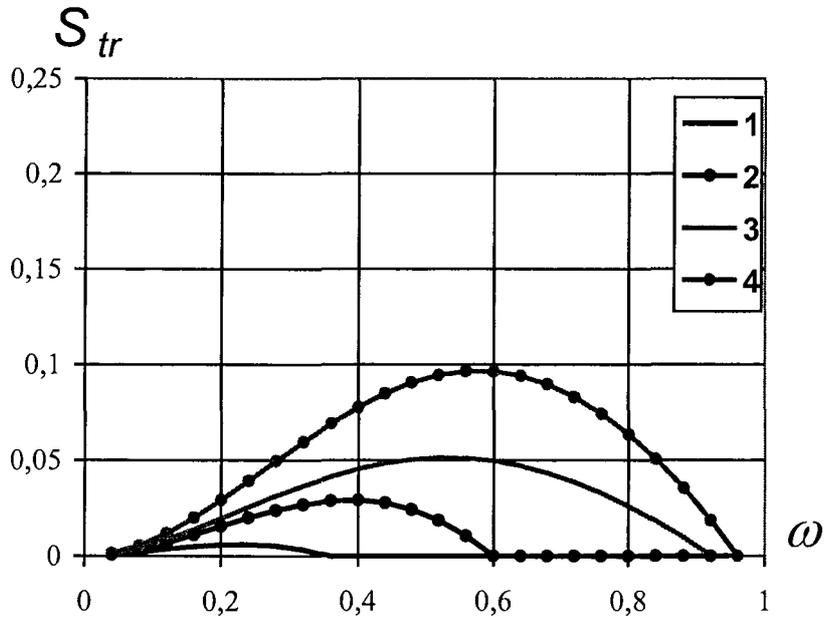


Fig. 4.3.4. Saturation piégée S_{tr} en fonction du rapport des rayons du double-réseau ω , pour $\bar{\mu} \rightarrow \infty$ et $Ca \rightarrow \infty$ (1 et 3) ; $Ca = 0$ (2 et 4). Les courbes 3 et 4 correspondent à un rayon R_1 10 fois plus petit par rapport aux courbes 1 et 2.

On voit que la saturation piégée diminue lorsque le rapport des viscosités augmente (Fig. 4.3.4-4.3.6), et augmente significativement lors d'un déplacement instable (Fig. 4.3.6). L'augmentation du Ca conduit à une réduction du piégeage. La réduction de la porosité (i.e. : des rayons de pores - courbes 1 et 3, 2 et 4) conduit à une augmentation du piégeage. Ces conclusions correspondent aux observations physiques.

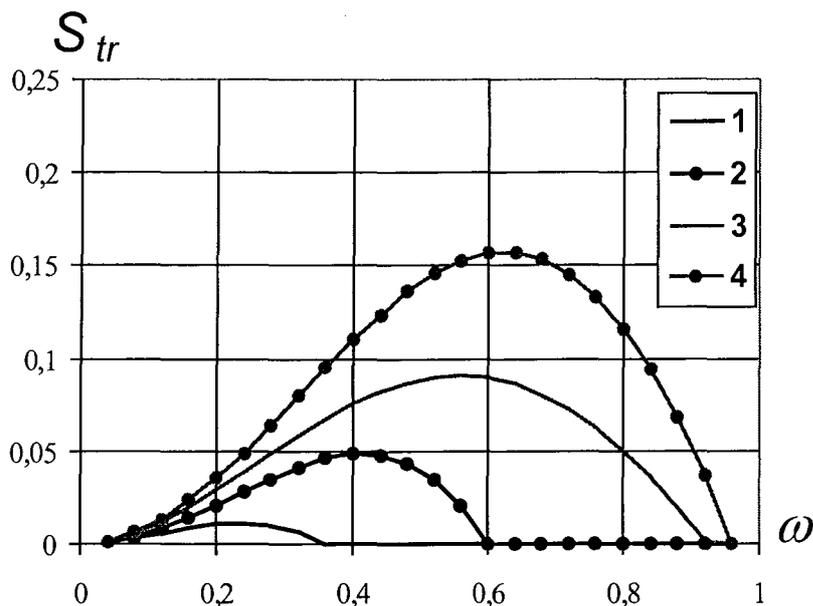


Fig. 4.3.5. Saturation piégée S_{tr} en fonction de ω pour $\bar{\mu}=1$ et $Ca \rightarrow \infty$ (1 et 3) ; $Ca=0$ (2, 4). Les courbes 3 et 4 correspondent à un rayon R_1 10 fois plus petit par rapport aux courbes 1 et 2

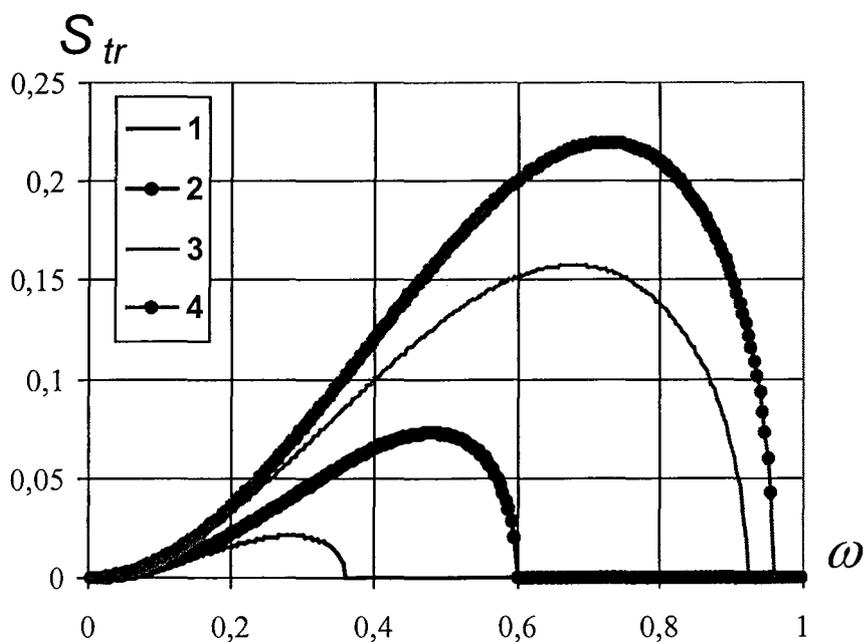


Fig. 4.3.6. Saturation piégée S_{tr} en fonction de ω pour $\bar{\mu}=0$ et $Ca \rightarrow \infty$ (1 et 3) ; $Ca=0$ (2 et 4). Les courbes 3 et 4 correspondent à un rayon R_1 10 fois plus petit par rapport aux courbes 1 et 2

4.3.3. RÉGIME DE DÉPLACEMENT COMPLET

Le critère d'absence de piégeage découle de la relation (4.3.1) en imposant : $S_r \leq 0$. Il vient :

$$\bar{\mu}(1 - R_1) \leq \sqrt{(1 - R_1)^2 + (\bar{\mu}^2 - 1)\omega \frac{Ca\omega + 1}{Ca + 1}}, \quad \bar{\mu} \neq 1$$

$$(1 - R_1) \leq \frac{\omega}{(1 - R_1)} \frac{Ca\omega + 1}{Ca + 1}, \quad \bar{\mu} = 1$$

Ces conditions se ramènent à une seule inégalité :

$$Ca \leq \frac{\omega - b^2}{b^2 - \omega^2}, \quad b = 1 - R_1 \quad (4.3.2)$$

Ainsi, l'absence de piégeage dépend des valeurs prises par Ca et par les rayons des pores.

Sur la Fig. 4.3.7, le diagramme des régimes de piégeage est présenté en fonction de Ca et du rapport des rayons caractéristiques du réseau ω . La zone hachurée correspond à l'absence de pièges. On voit que c'est la zone d'une hétérogénéité modérée des pores. Notons que ces régimes de non formation de pièges n'ont jamais été mentionnés dans les travaux publiés à ce jour, à notre connaissance.

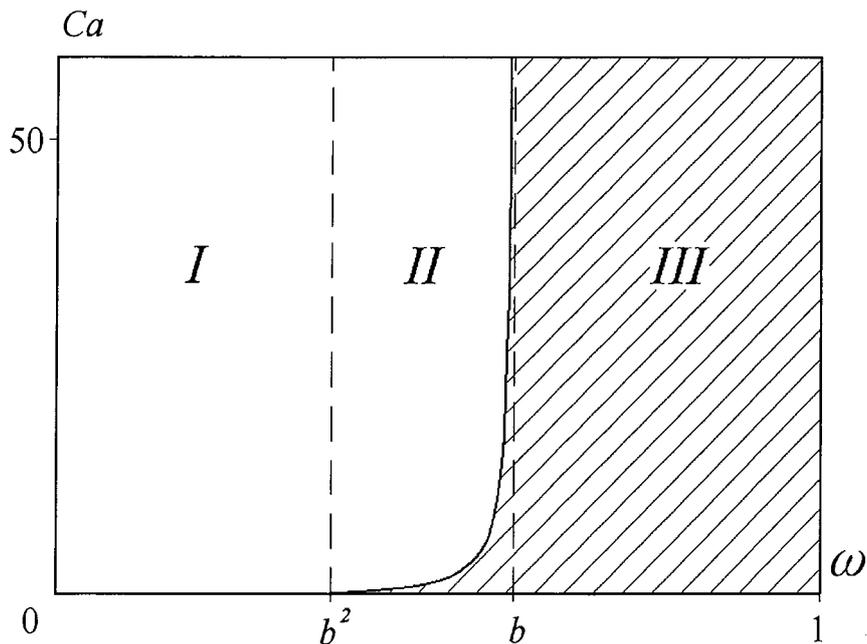


Fig. 4.3.7. Diagramme des régimes de piégeage : piégeage a toujours lieu (I) ; présence du piégeage dépend du Ca (II) ; déplacement complet, sans piégeage (III)

Ainsi, le processus de piégeage est contrôlé, car il dépend suffisamment de la vitesse de déplacement. La tendance globale consiste en une réduction de la saturation piégée par une diminution de la vitesse de déplacement.

4.4. VÉRIFICATION DU MODÈLE CLASSIQUE DE BUCKLEY-LEVERETT

Les résultats de simulation du processus de déplacement nous ont donné la possibilité de vérifier la validité du modèle classique d'écoulement diphasique. Malgré la critique de ce modèle dans le Chapitre 2, nous avons trouvé des régimes où le modèle classique est valable. Pour ces régimes d'écoulement, il n'est donc pas nécessaire de changer ce modèle.

4.4.1. PERMÉABILITES RELATIVES

Techniquement, la vérification de la validité du modèle classique s'effectue à travers les perméabilités relatives (PR) : il suffit de montrer que les perméabilités relatives sont des fonctions de la saturation seule pour justifier le modèle.

De par sa définition, la PR est une fonction qui caractérise la pénétrabilité du milieu. Ceci signifie que pour un écoulement macroscopiquement 1D le long de l'axe x , elle doit être déterminée en chaque abscisse x par homogénéisation à travers les sections droites. Cette approche permet de percevoir la dynamique des PR, ce qui diffère notablement de la méthode de détermination des PR déduite d'une caractéristique homogénéisée à travers le volume entier du milieu (méthode de Weldge). Dans les processus avec des interfaces mobiles, l'homogénéisation conduit à des résultats tout à fait différents pour des volumes contenant ou non des interfaces. Ainsi, il n'est pas question de parler d'une PR unique pour tout le volume poreux.

Pour ce type de processus de déplacement, l'échelle caractéristique macroscopique est la coordonnée du front, $x_\xi(t)$, dont la valeur est variable en fonction du temps. Pour que l'homogénéisation ait un sens, l'échelle microscopique l doit vérifier la condition :

$$l \ll x_\xi(t), \quad \forall t$$

Pour des temps petits, la valeur de l tend vers 0, c'est-à-dire les volumes d'homogénéisation tendent vers des surfaces (sections planes dans un processus macro homogène). Dans le présent travail, nous proposons une méthode de détermination des PR par homogénéisation à travers des surfaces planes.

4.4.2. MÉTHODE DE DÉTERMINATION DES PERMÉABILITÉS RELATIVES (PR)

Appelons « section élémentaire du réseau au point x_* », l'ensemble de tous les canaux de la direction x , coupés par le plan $x = x_*$, avec l'ensemble de tous les canaux adjacents dans les directions y et z .

Sélectionnons les classes suivantes de canaux dans une section arbitraire :

(X) : tous les canaux de la direction x de la section donnée ;

(1), (2) : tous les canaux appartenant à \mathbf{X} et contenant la phase α ou β respectivement ;

(01), (02) : tous les canaux appartenant à \mathbf{X} et contenant la phase α ou β mobile et sans ménisque ;

(12) : tous les canaux appartenant à \mathbf{X} et contenant des ménisques mobiles.

La relation générale, impliquant la perméabilité de la phase α dans la section considérée, est donnée par la loi de Darcy :

$$J \equiv -\text{grad } P = \frac{\mu_\alpha}{K_\alpha} \vec{V}_\alpha, \quad \text{il vient alors :} \quad K_\alpha = \frac{\vec{V}_\alpha \mu_\alpha}{J} = \frac{Q_\alpha \mu_\alpha}{J \left(\frac{F}{m S_\alpha} \right)}$$

où \vec{V}_α est la vitesse de Darcy de la phase α ; Q_α est le débit volumique de la phase α ; P est la pression homogénéisée de la phase α ; J est le gradient de pression homogénéisé à travers la phase α ; F est la surface totale des canaux de la direction x dans la section donnée ; S_α est la saturation de la phase α dans la section ; μ_α est la viscosité dynamique de la phase α ; m est la porosité locale dans la section.

Soit $\langle \cdot \rangle_{(j)}$ l'homogénéisation pour la classe j dans un écoulement diphasique et soit $\langle \cdot \rangle_{(j)}^*$ l'homogénéisation pour la classe j dans un écoulement monophasique. L'écoulement de la phase α dans les canaux (01) et (12) est décrit par des relations résultant de la loi de Poiseuille :

$$u = \frac{\delta P r^2}{l \gamma \mu_\alpha} \quad \text{pour (01),} \quad u = \frac{(\delta P + P_c) r^2}{l \gamma \mu_\alpha [\bar{\mu} \xi + 1 - \xi]} \quad \text{pour (12)}$$

où δP est la chute de pression sur un pore, l est la longueur du pore, P_c est la pression capillaire sur le ménisque dans le pore, r est le rayon du pore, $\xi = x_\alpha / l$ avec x_α coordonnée du ménisque de la phase α dans le pore, γ est le coefficient de forme du canal et $\bar{\mu} \equiv \mu_\alpha / \mu_\beta$. Alors, le débit volumique de la phase α est :

$$Q = \frac{\pi}{l \gamma \mu_\alpha} \left[\sum_{i \in (01)} r_i^4 \delta P_i + \bar{\mu} \sum_{i \in (12)} r_i^4 \frac{\delta P_i + P_{ci}}{\bar{\mu} \xi_i + 1 - \xi_i} \right]$$

Comme résultat, on obtient pour la perméabilité de la phase α (K_α) et pour la perméabilité absolue (K) :

$$K_\alpha = \frac{\pi m S_\alpha}{\gamma F} \frac{1}{\langle \delta P \rangle_{(1)}} \left[N_{(01)} \langle r^4 \delta P \rangle_{(01)} + N_{(12)} \mu \left\langle \frac{r^4 (\delta P + P_c)}{\bar{\mu} \xi + 1 - \xi} \right\rangle_{(12)} \right], \quad K = \frac{\pi m N_{(X)}}{\gamma F} \frac{\langle r^4 \delta P \rangle_{(X)}^*}{\langle \delta P \rangle_{(X)}^*}$$

où, rapportés à la section donnée, $N_{(01)}$ est le nombre de canaux de la classe (01), $N_{(12)}$ est le nombre de canaux de la classe (12) et $N_{(X)}$ est le nombre de tous les canaux de la classe (X). Pour la perméabilité relative de la phase α dans la section, il vient :

$$k_{\alpha} = \frac{\bar{S}_{\alpha} \left[N_{(01)} \langle r^4 \delta P \rangle_{(01)} + N_{(12)} \mu \left\langle \frac{r^4 (\delta P + P_c)}{\mu \xi + 1 - \xi} \right\rangle_{(12)} \langle \delta P \rangle_{(x)}^* \right]}{N_{(x)} \langle r^4 \delta P \rangle_{(x)}^* \langle \delta P \rangle_{(1)}}, \quad \text{avec } \bar{S}_{\alpha} = \frac{N_{(1)} \langle r^2 \xi \rangle_{(1)}}{N_{(x)} \langle r^2 \rangle_{(x)}}$$

Dans ces formules, l'homogénéisation est effectuée selon les pores de la classe correspondante dans la section.

Une formulation identique peut être donnée pour la PR de la phase β :

$$k_{\beta} = \frac{\bar{S}_{\beta} \left[N_{(02)} \langle r^4 \delta P \rangle_{(02)} + N_{(12)} \mu \left\langle \frac{r^4 (\delta P + P_c)}{\mu \xi + 1 - \xi} \right\rangle_{(12)} \langle \delta P \rangle_{(x)}^* \right]}{N_{(x)} \langle r^4 \delta P \rangle_{(x)}^* \langle \delta P \rangle_{(2)}}, \quad \bar{S}_{\beta} = \frac{N_{(2)} \langle r^2 \xi \rangle_{(2)}}{N_{(x)} \langle r^2 \rangle_{(x)}}$$

4.4.3. RÉSULTATS DU CALCUL DES PERMÉABILITÉS RELATIVES

L'application de la méthode décrite ci-dessus a donné les résultats suivants. Plusieurs exemples de déplacement avec une variation de $\bar{\mu}$ comprise entre 10^{-3} et 10^3 et une variation de Ca de 10^{-7} à 10^{10} ont été examinés. En outre, le cas d'absence de forces capillaires ($Ca > 10^{10}$) et le cas de l'imbibition capillaire ($Ca=0$) ont également été envisagés. Le réseau 3D incluait plus de 7000 nœuds. Pour toutes ces possibilités, les PR ont été estimées.

La Figure 4.4.1 montre une classification typique de tous les PR obtenues.

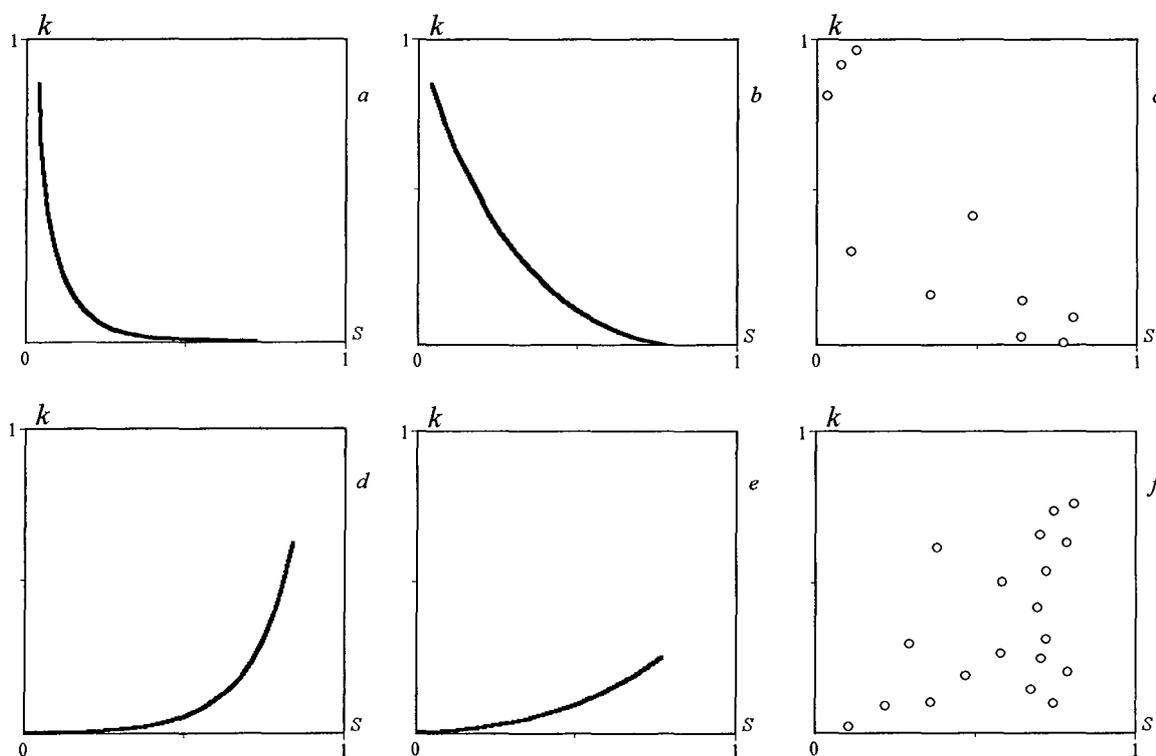


Fig. 4.4.1. Classes des perméabilités relatives obtenues par simulation : pour la phase déplacée (a,b,c) et pour la phase déplaçante (d,e,f)

On a pu mettre en évidence les intervalles des paramètres Ca et $\bar{\mu}$ dans lesquelles les fonctions calculées ont de très faibles fluctuations et se placent correctement sur une courbe (Fig. 4.4.1 *a,b,d,e*). D'autre part, on a détecté les valeurs des Ca et $\bar{\mu}$ dans lesquelles les PR ont une évolution de type « bruit » (Fig. 4.4.1 *c,f*). Les calculs ont montré que, outre leur sensibilité aux variations des Ca et $\bar{\mu}$, les PR dépendent d'un grand nombre de paramètres tels que les conditions hydrodynamiques d'écoulement et la structure du milieu poreux. Ainsi, il est assez délicat de déterminer les PR comme seule fonction de la saturation.

On a remarqué que les PR dépendent également du temps. Dans certains cas, quand la saturation piégée augmente, les oscillations de la courbe PR augmentent dans le temps. La PR de la phase déplacée diminue dans le temps en s'approchant de l'axe des abscisses (Fig. 4.4.1, *a*).

4.4.4. EFFET DE LA SATURATION PIÉGÉE SUR LES PERMÉABILITÉS RELATIVES

La formation de la saturation piégée signifie l'apparition de la troisième phase hydrodynamique dans le système. Pour un écoulement triphasique, les PR sont des fonctions de deux saturations. Ainsi, la PR ne peut pas être examinée comme une fonction de la saturation seule dans le cas d'un piégeage intense. Au contraire, moins il y a de pièges formés, plus la PR s'approche d'une vraie fonction de la saturation.

Si la phase déplaçante est non visqueuse ($\bar{\mu} < 1$), son cluster représente de grandes branches longitudinales avec des branches transversales faiblement développées. Dans ce cas, le piégeage est faible dû à un très petit nombre de pièges qui n'empêchent pas le fluide de s'écouler. Dans ce cas, les PR de la phase déplaçante représentent des courbes uniques de saturation sans dispersion des points (Fig. 4.4.1 *d* et 4.4.2 *b*). Pourtant les PR de la phase déplacée ont la forme typique vue sur la Figure 4.4.1 *b*, avec une dispersion significative des points (Fig. 4.4.2 *c*). Ceci s'explique par le fait que la phase déplacée est retardée par les branches les plus rapides de la phase déplaçante.

Si $\bar{\mu} \sim 1$, on observe le front macroscopique de déplacement qui, étant assez hétérogène, ne contient pas de doigts. La phase piégée est présente en abondance, ainsi le PR pour la phase déplaçante a la forme d'un nuage de points (Fig. 4.4.1, *f* et Fig. 4.4.2, *d*). La PR de la phase déplacée est toujours beaucoup plus régulière.

Si $\bar{\mu} > 1$, il y a beaucoup de petits pièges de dimension de l'ordre du pore voire inférieure. La PR de la phase déplaçante est la même que dans le cas $\bar{\mu} \sim 1$, tandis que la PR de la phase déplacée est une fonction unique et lisse de la saturation. La phase déplacée est immobile derrière le front. Au contraire, devant le front, elle avance sans aucun obstacle. Cela explique pourquoi la PR de la phase déplacée peut être qualifiée de fonction bien positionnée sur l'axe des ordonnées (Fig. 4.4.1 *a*).

Ainsi, la PR dépend des deux saturations : saturation totale de la phase déplaçante (ou déplacée) et saturation piégée.

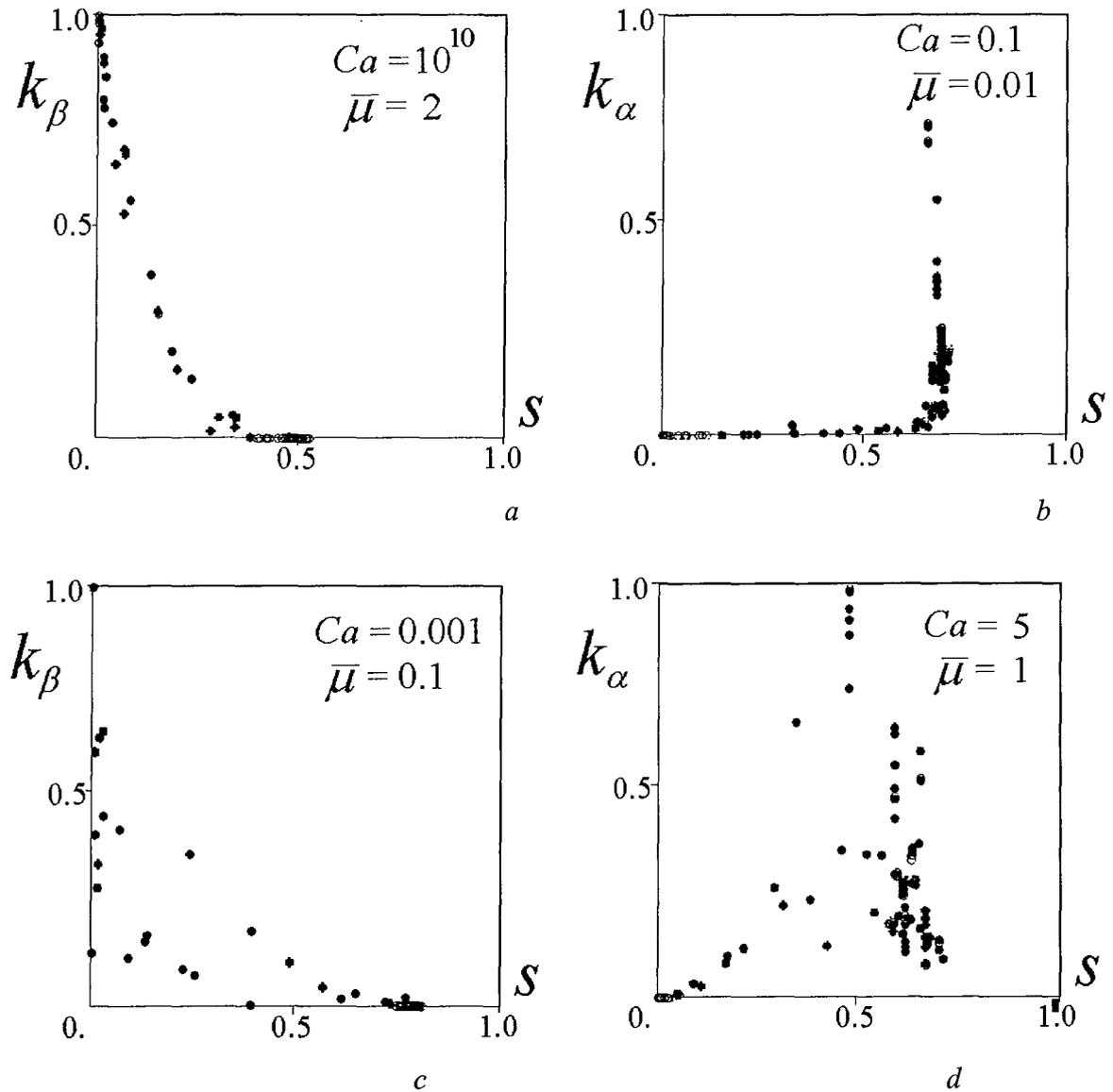


Fig. 4.4.2. Perméabilités relatives ($Ca=10^{10}$, $\bar{\mu}=2$ (a); $Ca=0.1$, $\bar{\mu}=0.01$ (b); $Ca=0.001$, $\bar{\mu}=2$ (c); $Ca=5$, $\bar{\mu}=1$ (d)) en fonction de s .

4.4.5. EFFET DU $\bar{\mu}$ ET DU Ca SUR LES PERMÉABILITÉS RELATIVES

Il est clair que le rapport des viscosités influence la répartition des phases dans l'espace poreux ce qui produit des effets sur les PR. En outre, nous avons observé le déplacement vers l'axe des ordonnées des courbes de PR pour la phase déplacée lors d'une augmentation de $\bar{\mu}$. Lorsque $\bar{\mu} \geq 10$, la courbe PR est fortement serrée vers l'axe d'abscisses (Fig. 4.4.1 a). Ces courbes représentent toujours des fonctions de la saturation, sans aucune dispersion des points. Dans le cas $\bar{\mu} < 1$, on a observé des oscillations dans les valeurs des PR pour la phase déplacée.

Pour la phase déplaçante, les PR sont des fonctions lorsque $\bar{\mu} < 1$, et forme un nuage de points fortement dispersé quand $\bar{\mu} > 1$ à cause d'un grand nombre de petits pièges formés (Fig. 4.4.2 d).

L'influence du paramètre $\bar{\mu}$ sur les PR peut être expliquée de façon différente. Quand $\bar{\mu} < 1$, un grand nombre de ménisques se forment puisque la dispersion est très forte. Lorsqu'il y a beaucoup de ménisques mobiles, le mouvement d'une phase dépend considérablement du mouvement de l'autre phase. Dans le cas $\bar{\mu} > 1$, on voit l'apparition d'un grand nombre de ménisques mais la plupart d'eux sont bloqués par des pièges. Cette influence entre donc en concurrence avec la dispersion des ménisques. Evidemment le piégeage prédomine, c'est pour cette raison que les PR pour la phase déplaçante sont des fonctions non uniques de la saturation.

On a effectué aussi des simulations pour différentes valeurs du Ca entre 10^{-7} et 10^{10} . La croissance des forces capillaires augmente la dispersion locale des ménisques mobiles et, par conséquent, augmente le nombre de pièges formés. Pour un rapport $\bar{\mu}$ fixé, les courbes des PR, pour la phase déplacée, se décalent vers la droite avec une croissance simultanée des oscillations dans ses valeurs.

Pour de très petits Ca , une dispersion énorme des points représentant la PR de la phase déplacée est observable. Cette évolution ne peut pas être considérée comme une fonction unique de la saturation (Fig. 4.4.2, c). Pour des grands Ca , les PR sont de « vrais » fonctions. (Fig. 4.4.2, a).

4.4.6. LIMITE INFÉRIEURE D'INFLUENCE HYDRODYNAMIQUE SUR LES PERMÉABILITÉS RELATIVES

On a pressenti numériquement l'existence d'un nombre Ca critique, au-dessous duquel le régime d'écoulement est purement capillaire. Cette valeur critique se situe au voisinage de 10^{-5} . Lorsque $\bar{\mu}$ varie, le Ca critique varie très faiblement (entre 0.2×10^{-4} et 0.8×10^{-4}). Ce régime correspond bien aux résultats expérimentaux de Efros (Barenblatt *et al.*, 1990), suivant lesquels la limite d'influence hydrodynamique est pour un $Ca \sim 10^{-5}$ ou $10^{-6} - 10^{-4}$.

Sur les réseaux 2D, la limite d'influence hydrodynamique se localise pour un $Ca \sim 10^{-4}$. En effet, pour des petits Ca , en 2D, il existe une probabilité plus faible de formation d'une suite connectée de pores avec un gradient de pression non nul.

4.4.7. DOMAINE DE VALIDITÉ DU MODÈLE CLASSIQUE DÉTECTÉ PAR LES SIMULATIONS

La structure des courbes de PR peut être un bon indicateur de la validité du modèle classique. En effet, bien qu'un nuage fortement dispersé de points puisse être représenté par une seule courbe de PR, la PR, en tant que fonction unique de la saturation, n'a pas de réalité physique. Ainsi, le postulat de base de la théorie classique phénoménologique n'est pas satisfait et, donc, la théorie classique n'est pas valable dans ce cas. La Fig. 4.4.3 représente les domaines d'existence des fonctions uniques des PR.

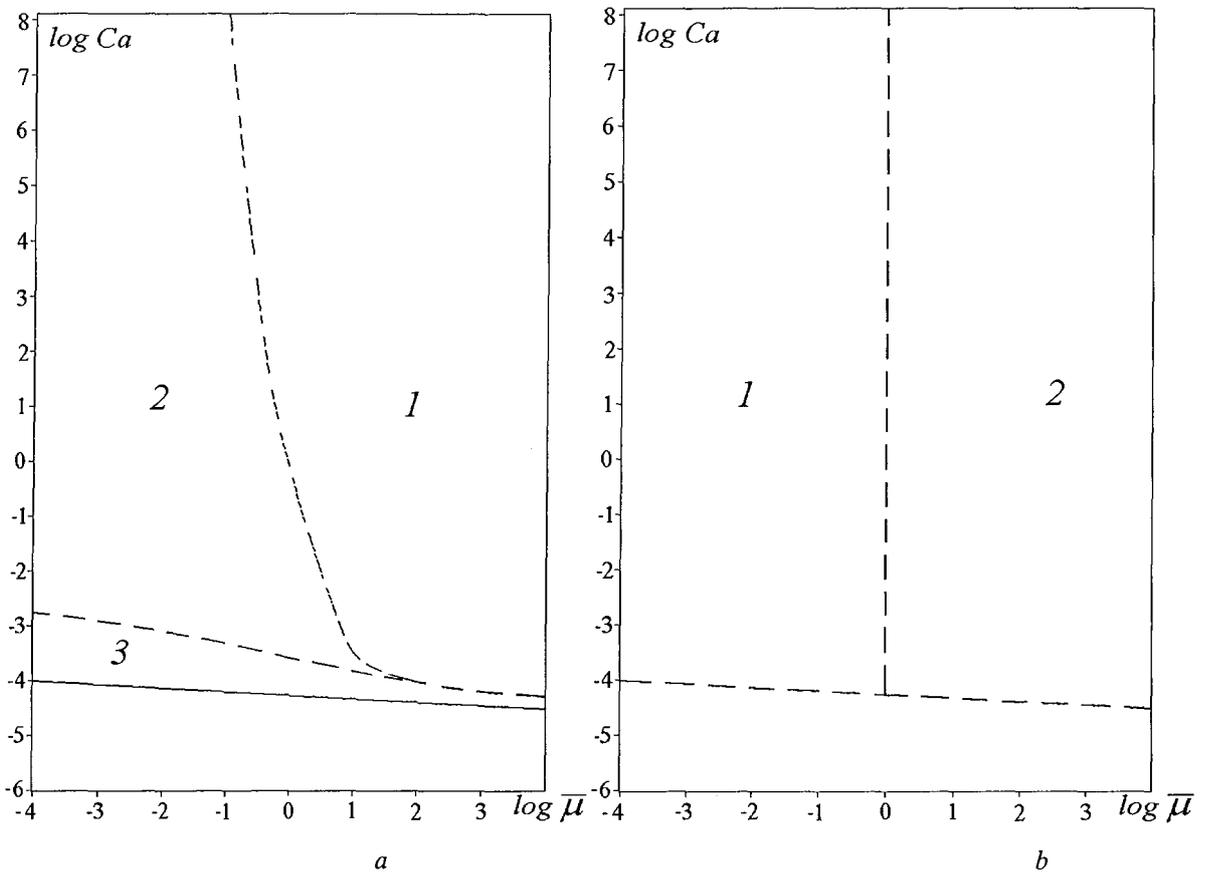


Fig. 4.4.3. Domaines d'existence des fonctions PR ne dépendant que de la saturation : pour la phase déplaçante (a) et déplacée (b). 1 est la zone des PR uniques, 2 est la zone des PR non uniques localement et 3 est la zone des PR qui sont non uniques partout.

Un diagramme superposé pour les deux phases est présenté sur la Fig. 4.4.4, où 1 (resp. 2) est la zone des PR uniques pour la phase déplaçante (resp. déplacée), 3 est la zone des PR non uniques partout et 4 est le domaine où les PR classiques existent pour les deux phases.

Autrement dit, nous avons montré que la loi classique de Darcy fonctionne bien dans la zone (4), et où cette loi est toujours incorrecte. Que doit-on utiliser dans ce dernier cas ?

Pour $\bar{\mu} < 1$ la phase déplacée avance parallèlement avec des doigts percolants de la phase déplaçante. Ainsi, on doit tenir compte de l'interaction visqueuse entre les phases. Une telle interaction peut être décrite formellement par le modèle avec des PR croisées. Par la suite, (cf. paragraphe 4.6), nous montrerons que ce modèle croisé donne des résultats corrects dans son domaine d'application.

Pour $\bar{\mu} > 1$, on observe un branchement fort des ménisques (Fig. 4.13 c,d) et leur dissipation à travers tout le domaine. Dans ce cas, on doit utiliser le *meniscus model* suggéré dans le chapitre 2.

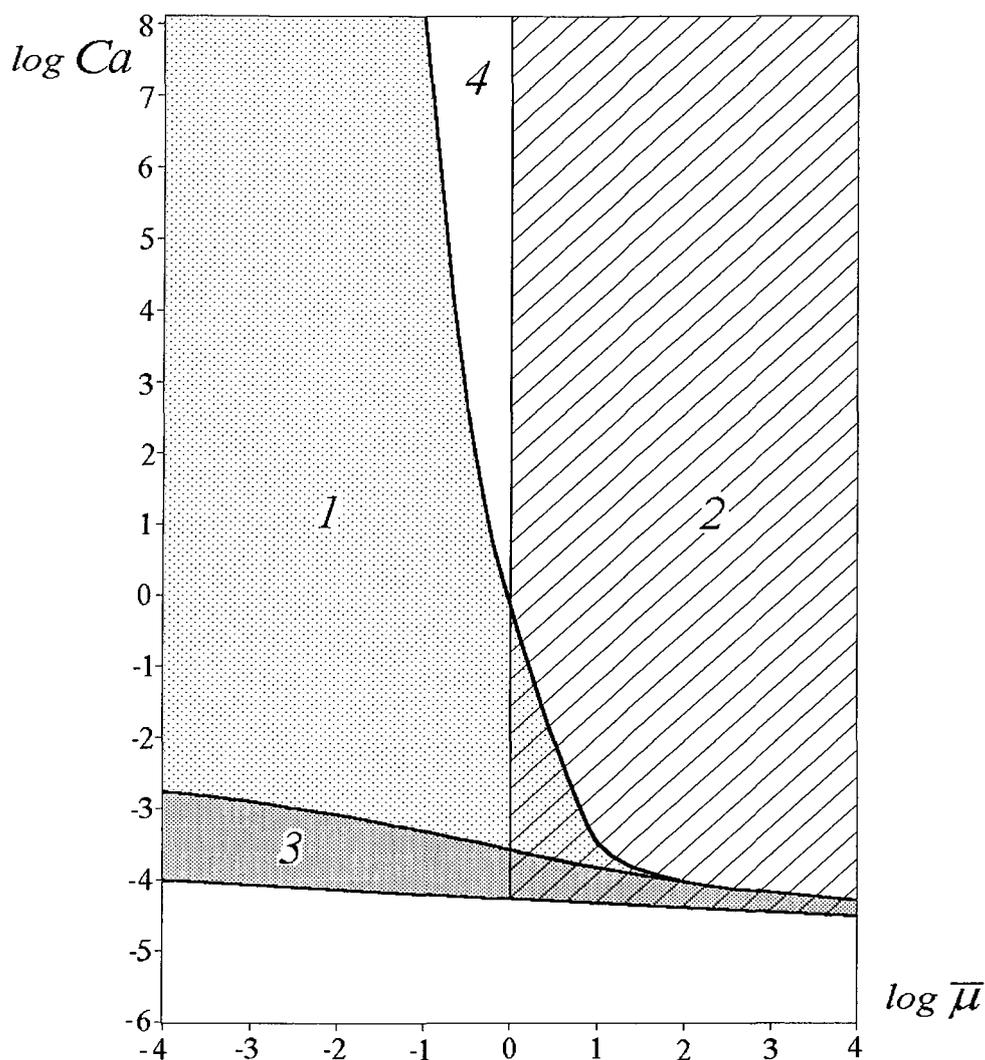


Fig. 4.4.4. Diagramme des PR pour les deux phases

4.4.8. DIAGRAMMES CONNUS DES RÉGIMES D'ÉCOULEMENT

A l'heure actuelle, le processus de drainage (déplacement d'une phase mouillante par une autre phase moins mouillante) est étudié en détail. Yortsos *et al.* (1997) pensent qu'au fur et à mesure de l'avancée du front de déplacement, les structures des clusters changent. Tout déplacement, suivant ces auteurs, peut être caractérisé par deux régimes globaux.

Le premier régime est un *déplacement stable*. Il comprend les cas d'un front assez dissipé avec une zone bornée derrière le front. Ce cas correspond à la description phénoméno-logique classique qui a fait l'objet de plusieurs travaux (Wilkinson, 1986 ; Blunt *et al.*, 1992).

Le second régime est un *déplacement instable*. A notre connaissance, ce type de régime n'a jamais été étudié complètement. Habituellement, il est décrit par le modèle DLA (Witten et Sander, 1983 ; Paterson, 1984) ou le modèle analogique dans le cas de déplacement miscible. Il existe des versions plus développées du modèle DLA dans lesquelles on ajoute la capillarité (Yortsos et Hickernell, 1989).

La limite entre ces deux régimes est assez vague.

Bien que les résultats des travaux de Yortsos *et al.* (1997) sont présentés en coordonnées $(\log Ca)$ et $(-\log \bar{\mu})$, nous allons les traduire en coordonnées traditionnelles $(\log Ca)$ et $(\log \bar{\mu})$ (Fig. 4.4.5).

Le déplacement stable a lieu si $\bar{\mu} > \bar{\mu}^*$ pour tous les Ca , et si $\bar{\mu} < \bar{\mu}^*$ avec une contrainte (Ca petits). Autrement, le déplacement est instable. Ces deux régimes sont séparés par une ligne qui tend asymptotiquement vers une droite pour des petits Ca et $\bar{\mu}$, dont la pente est $\psi = \psi(\xi, \nu, D)$, où ξ, ν, D sont des paramètres du cluster de percolation. Cette ligne séparatrice devient verticale quand $\bar{\mu}$ tend vers $\bar{\mu}^*$ ($\bar{\mu}^* = 1$).

Ces auteurs ont remarqué que leur digramme d'écoulements représente également le digramme de validité du modèle classique (correspond au régime stable).

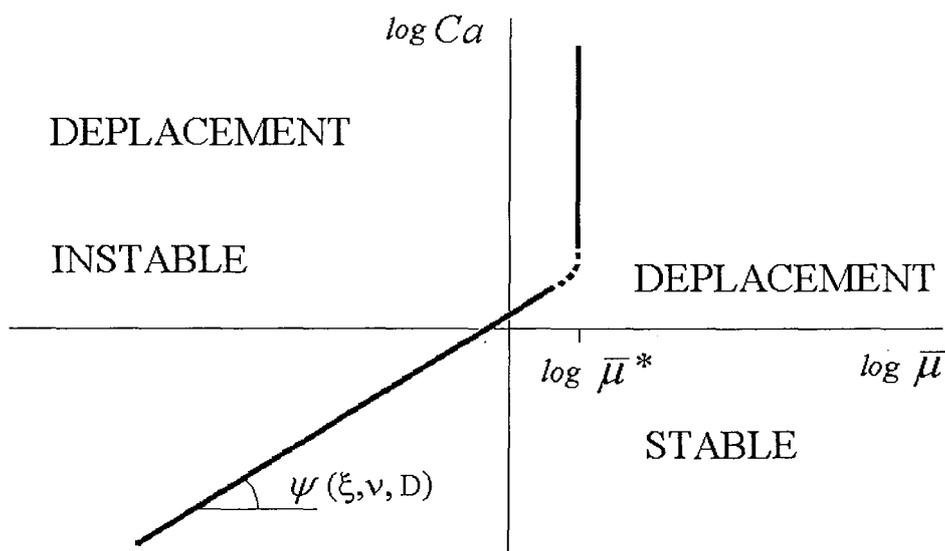


Fig. 4.4.5. Diagramme des régimes diphasiques pour le drainage. ψ angle par rapport à l'axe horizontal.

Suite à ses expériences sur les micro modèles en verre 2D (Lenormand, 1985 et 1987 ; Lenormand et Bories, 1980), Lenormand a caractérisé 3 régimes : la percolation d'invasion (Chandler *et al.*, 1982 ; Wilkinson et Willemsen, 1983), le déplacement piston et le *fingering* visqueux (Witten et Sander, 1983).

Dans le papier de Lenormand *et al.* (1988), les limites des régimes ont été déterminées. Les résultats sont présentés sur la Fig. 4.4.6, où $Ca = q\mu_p / \Sigma\gamma \cos\theta$, q est la vitesse de Darcy, Σ est l'aire de la section transversale, γ est le coefficient de tension superficielle et θ est l'angle de mouillabilité. Les lignes séparant les domaines dépendent de la géométrie du milieu poreux. Dans les limites de chaque zone, un seul type de forces est observé : forces visqueuses dans le fluide déplaçant (I), forces visqueuses dans le fluide déplacé (régime DLA) (II) et forces capillaires (III). En dehors de ces zones, plusieurs types de forces sont mises en jeu. Par exemple, à l'intérieur du domaine ABC, 3 types de forces ont été décelés.

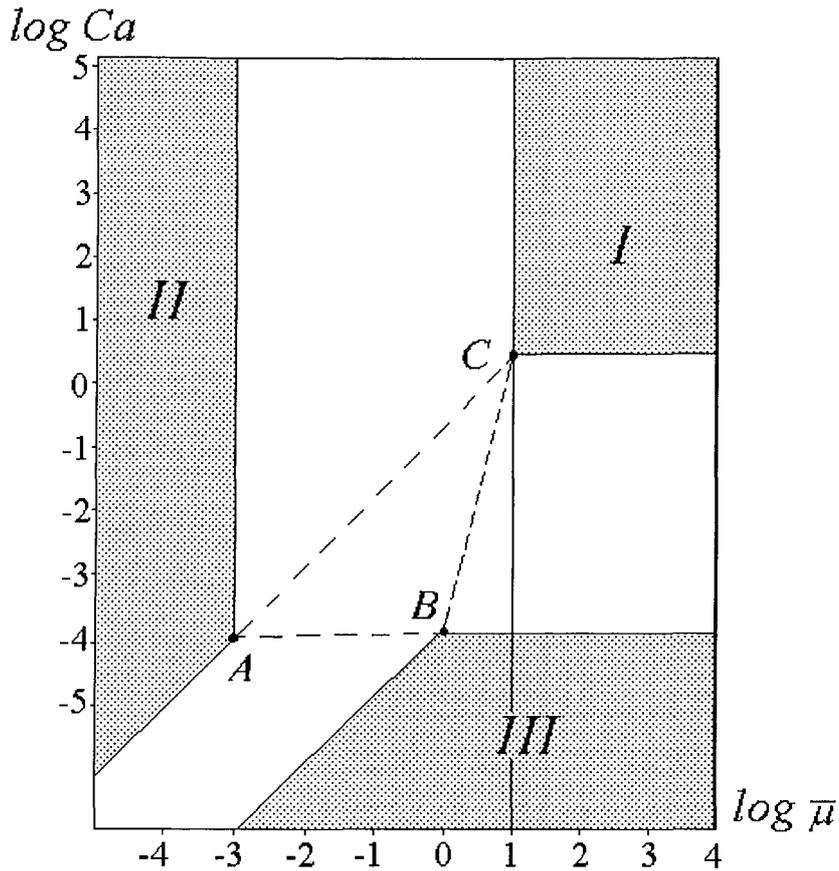


Fig. 4.4.6. Diagramme de régimes d'écoulements (d'après Lenormand *et al.*, 1988).

4.4.9. DIAGRAMME SUPERPOSÉ DES RÉGIMES D'ÉCOULEMENT

Superposons nos résultats (Fig. 4.4.4) avec le diagramme de Yortsos (Fig. 4.4.5) et celui de Lenormand (Fig. 4.4.6).

Ces 3 diagrammes sont en bon accord (Fig. 4.4.7). Dans le domaine de déplacement instable, la phase déplaçante a des PR uniques. Par contre, pour la phase déplacée, les PR ne peuvent pas être déterminées de la manière classique.

Dans la zone de déplacement stable, les PR sont des fonctions uniques de la saturation. Le front de déplacement reste quasiment plat, le piégeage est faible. Il existe une zone Ω , située entre la zone de croissance des fractals et la zone de déplacement piston. Dans cette zone, la théorie classique peut être appliquée. Cette zone est caractérisée par les valeurs suivantes : $0.1 < \bar{\mu} < 1$ et $Ca > 1$.

Hors de cette zone, les causes de la non validité du modèle classique sont : le piégeage, la différence des viscosités dynamiques, les forces capillaires appliquées au ménisques mobiles.

Il est important de noter que la différence de structures des écoulements à l'échelle microscopique ne signifie pas obligatoirement une différence dans leur description macroscopique.

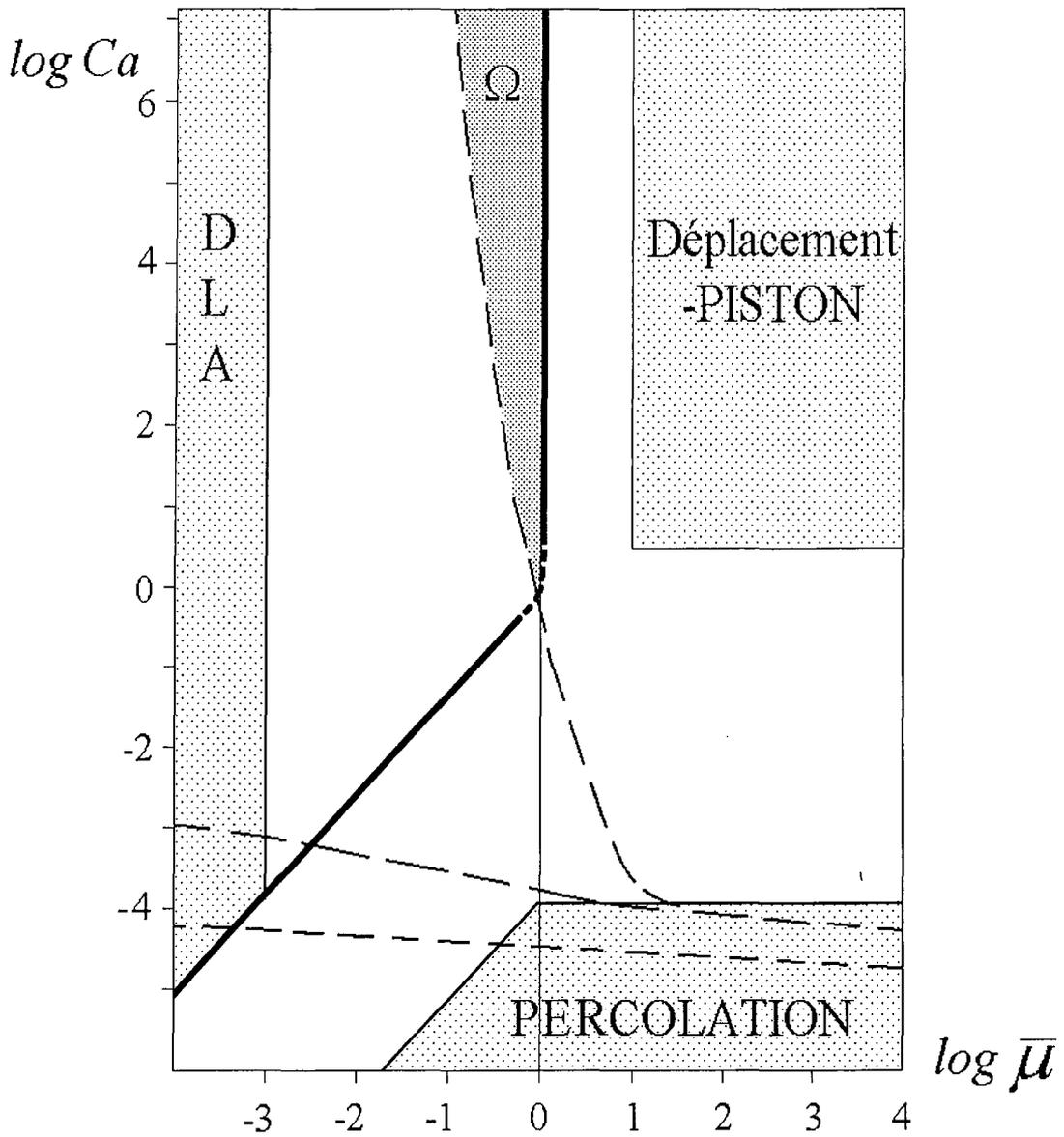


Fig. 4.4.7. Diagramme superposé des régimes d'écoulements :

3 zones grises (DLA, Percolation et Déplacement-piston) appartiennent au diagramme de Lenormand ; la ligne noire grasse sépare les deux zones de Yortsos : le *fingering* capillaire-visqueux à gauche, et le déplacement stable à droite ; les lignes pointillées appartiennent au diagramme des PR (présent travail) : Ω est le domaine de validité de la loi de Darcy pour les deux phases.

4.5. VÉRIFICATION DU MODÈLE DE NON ÉQUILIBRE

Le modèle dynamique est un développement du modèle de Buckley-Leverett suivant lequel les perméabilités relatives et pression capillaire ne sont plus des fonctions à l'équilibre, mais tiennent compte du processus transitoire de variation du champ de saturation vers un équilibre local. Ainsi, dans le cadre du modèle dynamique, les perméabilités relatives et la pression capillaire sont des fonctions de la saturation et de la dérivée temporelle de saturation. Habituellement, ces fonctions sont décrites par des relations de cinétique, avec un paramètre supplémentaire caractérisant le temps du processus transitoire – le temps de relaxation. Dans le cadre des théories phénoménologiques, le temps de relaxation ne peut pas être déterminé quantitativement. Pour cela il faut développer soit un changement d'échelle correct entre l'écoulement diphasique au niveau des pores vers un écoulement dans un VER (impossible cf. chapitre 1), soit utiliser les résultats de simulation en réseaux capillaires en les homogénéisant. Cette seconde approche fait l'objet du présent chapitre.

4.5.1. DÉFINITION DES PERMÉABILITÉS RELATIVES DE NON ÉQUILIBRE

Le processus transitoire de stabilisation locale du champ de saturation ressemble à une stabilisation du champ de pression dans les écoulements monophasiques. Pour le cas monophasique, ces processus transitoires ont été étudiés (de Swaan, 1976 ; Auriault, 1983 ; Arbogast *et al.*, 1990) où le temps de relaxation de pression a été obtenu explicitement. Dans un processus diphasique, le temps de stabilisation locale du champ de pression, étant beaucoup plus rapide que celui du champ de saturation, est pratiquement négligeable. L'intérêt essentiel est donc porté sur la saturation. Contrastant avec la pression, la relaxation de saturation est un processus non linéaire.

Suivant les théories phénoménologiques, la perméabilité relative dans un processus de relaxation est représentée sous forme (Nikolaevskii *et al.*, 1968) :

$$k(s, t) = k_0(s) - \tau_*(s) \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.5.1)$$

où $k_0(s)$ est une perméabilité relative à l'équilibre ; $\tau_*(s)$ est le temps de relaxation.

Une autre relation a été proposée par Barenblatt et Vinichenko (1980) :

$$k(s, t) = k_0(s) - \tilde{\tau}_*(s) \frac{\partial k(s, t)}{\partial t} \quad (4.5.2)$$

où $\tilde{\tau}_*(s)$ est le temps de relaxation, qui est différent du temps $\tau_*(s)$.

Ces deux relations sont tout à fait équivalentes. En effet, en se rappelant qu'une relation cinétique pour le processus de relaxation n'est qu'une approximation pour des petites valeurs de temps de relaxation, on obtient à partir de (4.5.2) pour des petits $\tilde{\tau}_*$:

$$k(s, t) = k_0(s) - \tilde{\tau}_*(s) \frac{\partial k_0(s, t)}{\partial t} - O(\tilde{\tau}_*(s)) = k_0(s) - \tilde{\tau}_*(s) \frac{\partial k_0}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} - O(\tilde{\tau}_*(s))$$

ce qui est identique à la formule (4.5.1). En comparant ces deux relations, nous obtenons la relation entre les deux temps caractéristiques :

$$\tau_*(s) \approx \tilde{\tau}_*(s) \frac{\partial k_0}{\partial s} \quad (4.5.3)$$

4.5.2. RÉSULTAT THÉORIQUE SUR LE PROCESSUS DE RELAXATION DU CHAMP DE SATURATION

Une relation théorique pour le temps de relaxation de saturation a été obtenue par (Panfilov, 1996 ; Panfilov et Panfilova, 1998 ; Bourgeat et Panfilov, 1998). En tenant compte que le non équilibre local est provoqué par une hétérogénéité de distribution des fluides dans l'espace poreux, on a examiné un modèle de milieu fortement hétérogène pour construire un modèle de non équilibre (Panfilov, 1996 ; Panfilov et Panfilova, 1998 ; Bourgeat et Panfilov, 1998). Le milieu était hétérogène en perméabilité et porosité, étant constitué de sous-domaines fortement perméables (« fissures ») connectés et des inclusions faiblement perméables (« blocs »). Dans les inclusions faiblement perméables, tous les processus d'écoulement sont retardés, ainsi ces inclusions sont à l'origine d'un non équilibre local à l'échelle macroscopique. En effectuant l'homogénéisation du processus d'écoulement diphasique dans le milieu décrit ci-dessus, on a obtenu une relation explicite pour décrire le processus de non équilibre :

$$P_c^I(S^I) - P_c^{II}(S^{II}) = P_c^0 \tau_r(S^I) \frac{\partial S^I}{\partial \tau} \quad (4.5.4-a)$$

le temps de relaxation de la saturation dans les blocs est :

$$\tau_r(S^I) = \frac{l^2 \phi^I \mu_\beta}{P_c^0 K^I} \langle \varphi \rangle^I \frac{[k_\alpha(S^I) + k_\beta(S^I) \mu_\alpha / \mu_\beta]}{k_\alpha(S^I) k_\beta(S^I)} \quad (4.5.4-b)$$

et les perméabilités relatives macroscopiques :

$$\hat{k}_\alpha = \hat{k}_\alpha(S^I, S^{II}), \quad \hat{k}_\beta = \hat{k}_\beta(S^I, S^{II}) \quad (4.5.4-c)$$

où P_c^0 est une pression capillaire caractéristique donnée ; S^I est la saturation homogénéisée dans les inclusions ; S^{II} est une saturation macroscopique dans le milieu fortement perméable ; P_c^i est la pression capillaire microscopique (fonction donnée de la saturation) dans le milieu i ($i=I, II$) ; $k_\gamma(S^I)$ est la perméabilité relative microscopique de la phase γ ($\gamma=\alpha, \beta$) dans les blocs I (fonctions données de la saturation) ; μ_α est la viscosité dynamique de la phase γ ; $\langle \varphi \rangle^I$ est une valeur homogénéisée de la fonction auxiliaire φ qui est déterminée par un problème local dont la formulation est omise dans ce travail ; l est la longueur des blocs I ; ϕ^I, K^I sont la porosité et la perméabilité des blocs I .

Pour des inclusions d'une forme sphérique, on a obtenu une relation analytique pour la fonction auxiliaire φ et sa valeur homogénéisée :

$$\langle \varphi \rangle^I = \frac{2l^2}{15l_2^2} \quad (4.5.4-d)$$

où l_2 est la distance entre les centres de deux blocs voisins (échelle de l'hétérogénéité).

Ainsi, la saturation macroscopique est décrite par deux champs continus : (i) la saturation dans le milieu fortement perméable, S'' , qui est toujours en équilibre local et (ii) la saturation dans le milieu faiblement perméable, S' , qui est hors équilibre local. Comme résultat, les perméabilités relatives dépendent de ces deux saturations. Dans le temps, la saturation S' tend, en suivant l'équation cinétique (4.5.4-a), vers une valeur correspondant à un équilibre local. Il est à noter qu'à l'équilibre les pressions capillaires P_c^I et P_c^{II} sont égales, ainsi la limite de S' n'est pas égale à S'' . Cette équation est une équation différentielle par rapport à la valeur S' qui la détermine en fonction de la saturation S'' et du temps.

4.5.3. DÉRIVATION D'UNE RELATION THÉORIQUE POUR LE TEMPS DE RELAXATION DES PERMÉABILITÉS RELATIVES

En utilisant les résultats susmentionnés, il est facile d'obtenir pour la saturation S' , en tenant compte que le temps de relaxation est petit, que :

$$S' \sim (P_c^I)^{-1}(P_c^{II}) + P_c^0 \frac{d(P_c^I)^{-1}}{dP_c} \Big|_{P_c=P_c^{II}} \tau_r(S') \frac{\partial S'}{\partial \tau} = S'_0(P_c^{II}) + P_c^0 \frac{dS'_0}{dP_c^{II}} \tau_r(S') \frac{\partial S'}{\partial \tau} \quad (4.5.2)$$

où $S'_0(P_c^{II})$ est la saturation S' à l'équilibre, qui est une fonction de la pression capillaire à l'équilibre (P_c^{II}). Les deux valeurs de saturation à l'équilibre, S'_0 et S'' , ne sont pas indépendantes, étant reliées par une équation d'équilibre local :

$$P_c^I(S'_0) = P_c^{II}(S'') \quad (4.5.3)$$

Au lieu de la saturation S' , introduisons la saturation moyenne S définie comme :

$$S \equiv \frac{\phi^I \theta^I S' + \phi^{II} (1 - \theta^I) S''}{\phi^I \theta^I + \phi^{II} (1 - \theta^I)} \quad (4.5.4)$$

la valeur θ^I est la fraction volumique des blocs.

Au lieu de la saturation à l'équilibre S'' ou S'_0 , introduisons la saturation moyenne à l'équilibre :

$$S_0 \equiv \frac{\phi^I \theta^I S'_0 + \phi^{II} (1 - \theta^I) S''}{\phi^I \theta^I + \phi^{II} (1 - \theta^I)} \quad (4.5.5)$$

qui peut être représentée par une fonction non linéaire de S'' seule :

$$S_0 = \Phi(S'') \equiv \frac{\phi^I \theta^I (P_c^I)^{-1}(P_c^{II}(S'')) + \phi^{II} (1 - \theta^I) S''}{\phi^I \theta^I + \phi^{II} (1 - \theta^I)} \quad (4.5.6)$$

Introduisons la fonction inverse (en supposant qu'elle existe) :

$$S'' = \Phi^{-1}(S_0) \quad (4.5.7)$$

Alors, (4.5.4) prend la forme :

$$S \equiv \frac{\phi^I \theta^I S^I + \phi^{II} (1 - \theta^I) \Phi^{-1}(S_0)}{\phi^I \theta^I + \phi^{II} (1 - \theta^I)}$$

et nous pouvons maintenant remplacer la saturation S^I par S :

$$S^I(S, S_0) = \frac{1}{\phi^I \theta^I} \left[(\phi^I \theta^I + \phi^{II} (1 - \theta^{II})) S - \phi^{II} (1 - \theta^I) \Phi^{-1}(S_0) \right] \quad (4.5.8)$$

Alors (4.5.2) donne pour la saturation S :

$$S = S_0 + P_c^0 \frac{dS_0^I}{dP_c^{II}} \tau_r(S^I(S, S_0)) \left[(\phi^I \theta^I + \phi^{II} (1 - \theta^{II})) \frac{\partial S}{\partial \tau} - \phi^{II} (1 - \theta^I) \frac{d\Phi^{-1}}{dS_0} \frac{\partial S_0}{\partial \tau} \right]$$

Finalement, nous obtenons la relation suivante pour la relaxation de la saturation moyenne :

$$S = S_0 + P_c^0 \frac{dS_0^I(S_0)}{dP_c^{II}} \tau_r(S_0^I(S_0)) \left[\phi^I \theta^I + \phi^{II} (1 - \theta^{II}) \left(1 - \frac{d\Phi^{-1}}{dS_0} \right) \right] \frac{\partial S}{\partial \tau} \quad (4.5.9)$$

où la fonction $S_0^I(S_0)$ est définie comme :

$$S_0^I(S_0) = \frac{1}{\phi^I \theta^I} \left[(\phi^I \theta^I + \phi^{II} (1 - \theta^{II})) S_0 - \phi^{II} (1 - \theta^I) \Phi^{-1}(S_0) \right]$$

Alors, pour la perméabilité relative de la phase α (4.5.4-c), on obtient :

$$\hat{k}_\alpha = \hat{k}_\alpha(S, S'') = \hat{k}_\alpha(S_0) - \tau_{*\alpha}(S_0) \frac{\partial S}{\partial \tau} \quad (4.5.10)$$

$$\tau_{*\alpha}(S_0) = P_c^0 \frac{d\hat{k}_\alpha(S_0)}{dS_0} \frac{dS_0^I(S_0)}{dP_c^{II}} \tau_r(S_0^I(S_0)) \left[\left(\frac{d\Phi^{-1}}{dS_0} - 1 \right) \phi^{II} (1 - \theta^I) - \phi^I \theta^I \right] \frac{\partial S}{\partial \tau} \quad (4.5.11)$$

Pour la phase β , une relation symétrique peut être trouvée en remplacement l'indice α par β dans (4.5.10)-(4.5.11).

Dans le cas particulier, lorsque les courbes de pression capillaire microscopique (P_c^I et P_c^{II}) sont équivalentes, les saturations à l'équilibre sont aussi identiques : $S'' = S_0^I$. Alors, la saturation moyenne à l'équilibre est définie de façon très simple : $S_0 = S_0^I = S''$

Ainsi, la fonction Φ en (4.5.6) est triviale : $\Phi \equiv 1$.

4.5.4. ANALYSE DU TEMPS DE RELAXATION THÉORIQUE DES PERMÉABILITÉS RELATIVES

La fonction (4.5.11) peut avoir trois formes différentes, présentées sur la Fig. 4.5.1. Les courbes monotones 2 et 3 ont lieu pour les cas $\mu_\alpha \ll \mu_\beta$ et $\mu_\alpha \gg \mu_\beta$ respectivement. La valeur

$\tau_*(0)$ dans le premier cas et $\tau_*(1)$ dans le deuxième cas peuvent être égales à 0. la courbe 1 a lieu si les viscosités ne sont pas trop contrastées et si le comportement des courbes de pression capillaires microscopiques est presque linéaire lorsque $s \rightarrow 0$. Sinon, pour le cas des viscosités de même ordre, la courbe correspond au type 3 avec $\tau_*(0)=0$.

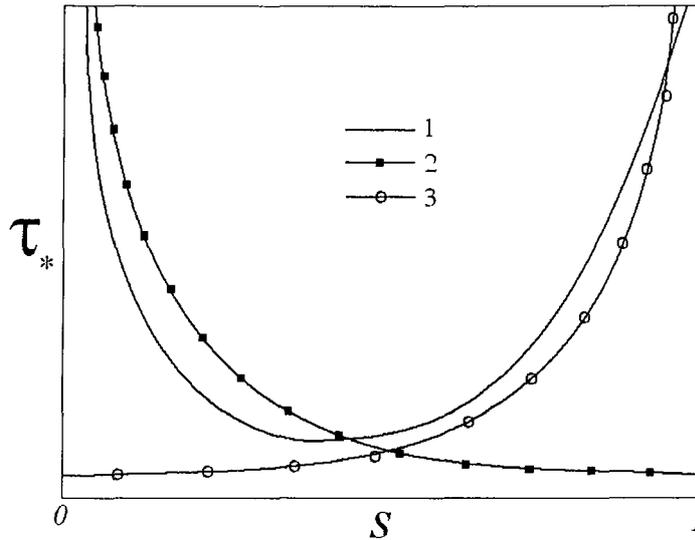


Fig. 4.5.1. Trois types de temps de relaxation en fonction de la saturation

L'explication de ces résultats est la suivante. Si le fluide déplacé est très visqueux (courbe 2), alors pour des petites saturations S , le système est préférablement rempli du fluide visqueux qui détermine les petites vitesses ou les grands temps caractéristiques. Pour le cas des viscosités contraires, la courbe $\tau_*(S)$ est également inversée.

Il est possible de déterminer les critères stricts sur le comportement des fonctions de pression capillaire et de perméabilités relatives microscopiques pour chaque classe des courbes présentées sur la Fig. 4.5.1. Nous n'avons pas juger nécessaire de les développer dans ce présent travail.

4.5.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES POUR LE TEMPS DE RELAXATION DANS UN RÉSEAU CAPILLAIRE

Dans le modèle théorique étudié, le non équilibre est provoqué par l'hétérogénéité du champ de perméabilités. Le temps de relaxation est déterminé par des processus ayant lieu à l'échelle de Darcy. Il est évident que ce modèle ne peut pas être appliqué pour la description du non équilibre à l'échelle d'un volume représentatif de pores. En particulier, le non équilibre dans un réseau capillaire ne peut être décrit par le modèle (4.5.11) que qualitativement. Cependant, les mécanismes de relaxation dans un réseau capillaire sont tout à fait analogues à ceux dans un milieu hétérogène en perméabilités. On peut donc espérer que (4.5.11) pourrait donner des résultats qualitativement suffisants si on remplace les perméabilités par les carrés des rayons de pores.

Pour obtenir des résultats quantitatifs, nous avons déterminé le temps de relaxation des perméabilités relatives sur la base de simulations numériques en réseaux capillaires.

Pour traiter les résultats, on a utilisé la formule (4.5.2) sous la forme :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{\tau}_*} (k_0 - k)$$

Examinons les régimes pour lesquels la perméabilité à l'équilibre, k_0 , ne varie pas. Cela peut arriver si la saturation reste constante. Alors, nous obtiendrons :

$$\frac{\partial(k_0 - k)}{\partial t} = -\frac{1}{\tilde{\tau}_*} (k_0 - k)$$

dont la solution est:

$$k = k_0 + \lambda \exp(-t/\tilde{\tau}_*)$$

avec une constante d'intégration λ . Présentons cette formule autrement :

$$\ln(k - k_0) = A - Bt, \quad A \equiv \ln \lambda, \quad B \equiv 1/\tilde{\tau}_* \quad (4.5.12)$$

soit, en désignant $y = \ln(k - k_0)$: $y = A - Bt$

Ayant une série de points $\{k_i\}$ calculés à des instants $\{t_i\}$ ($i=1,N$), nous pouvons trouver le paramètre B avec (4.5.12) par une méthode standard de moindres carrés.

Une application de cette méthode correspond aux paramètres suivants : porosité 0.1, rapport des viscosités $\bar{\mu}=2$, $Ca=10$ a été effectuée. Les courbes de PR pour la phase mouillante sont présentées sur la Fig. 4.5.2.

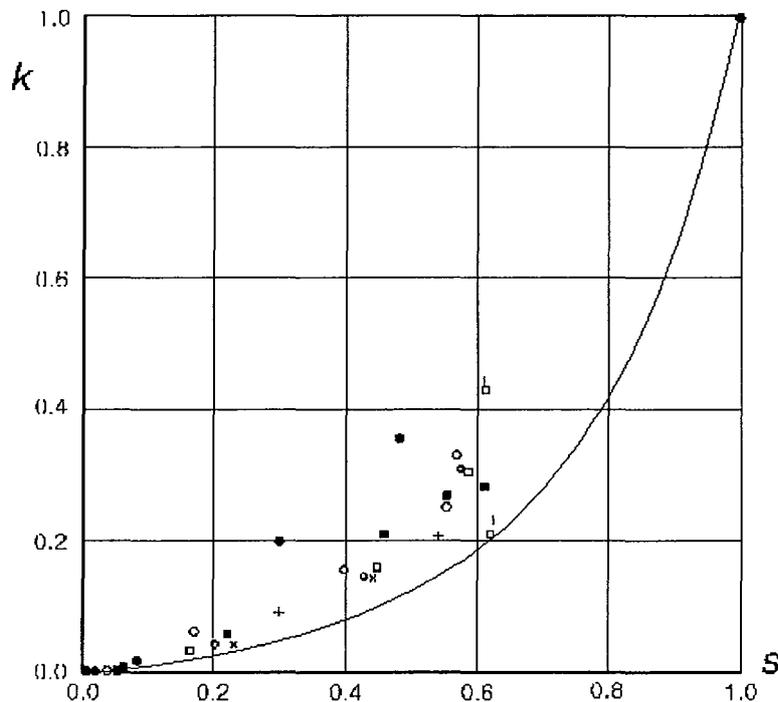


Fig. 4.5.2. Evolution de la perméabilité relative en fonction de la saturation

La PR à l'équilibre, $k_0(s)$, représente la limite de cette famille de courbes lorsque le temps tend vers l'infini. Cette courbe limite est présentée sur la Fig. 4.5.2 par une ligne solide continue. Elle est bien approchée par une loi cubique :

$$k_0 = 0.64 s^3 + 0.27 s^2 + 0.1 s$$

Pour la dérivée, on a donc :

$$(k_0)'_s = 1.92 s^2 + 0.54 s + 0.1$$

Pour une valeur de la saturation fixée, par exemple $s=0.2$, nous trouvons la série de points $\{k_i\}$ pour différents temps (tableau 4.5.1).

Tableau 4.5.1 Série de valeurs de PR pour différents temps à saturation fixée.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i (min)	3.387	6.554	10.570	16.468	22.945	24.134	27.502	36.773
k_i (-)	0.100	0.075	0.057	0.048	0.044	0.0435	0.0422	0.0415

Il est facile de trouver que : $k = k_0 + 0.1 \exp(-t/\tau_*)$, $\tau_* = 6.1$ min, dont le graphique est montré sur la Fig. 4.5.3.

De la même façon, nous avons trouvé le temps de relaxation pour d'autres valeurs de la saturation : $s=0.3$, $s=0.4$, $s=0.5$, $s=0.6$, $s=0.7$, $s=0.8$, ce qui nous a permis de trouver l'évolution du temps de relaxation en fonction de la saturation, $\tau_*(s)$ (Fig. 4.5.4). Cette courbe est du type 3 (Fig. 4.5.1).

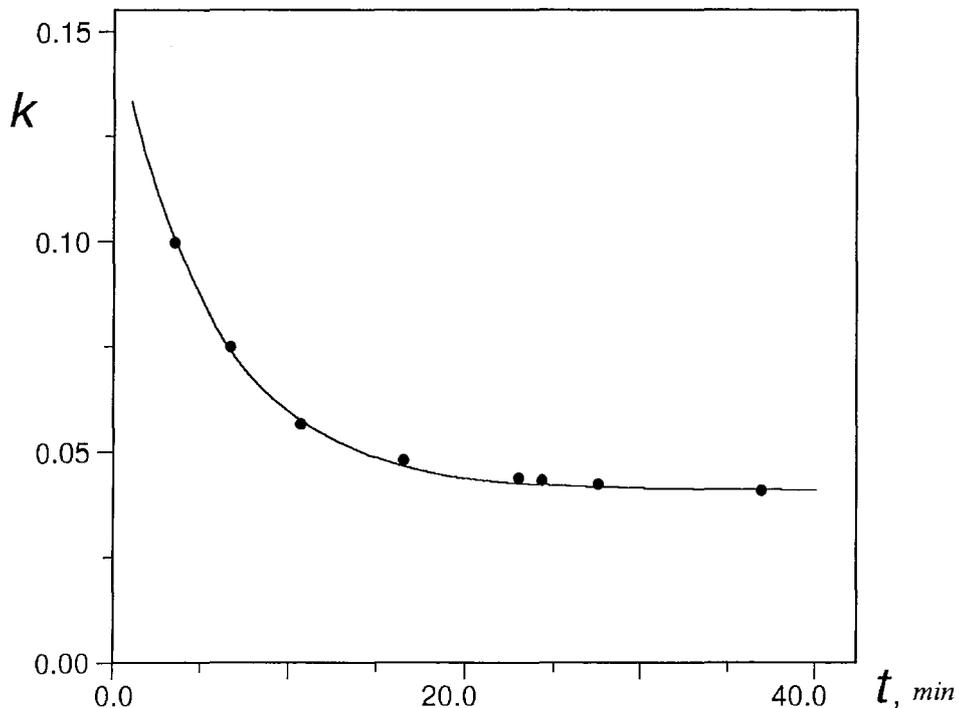


Fig. 4.5.3. Relaxation de la perméabilité relative pour une valeur fixée de saturation $s=0.2$

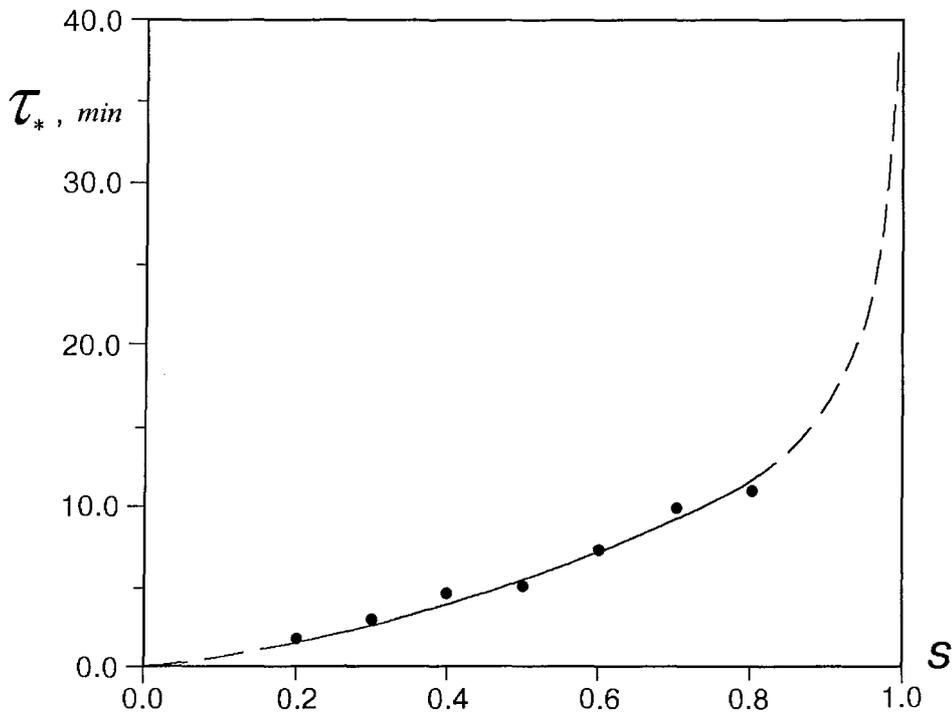


Fig. 4.5.4. Temps de relaxation des PR en fonction de la saturation (résultats de simulation en réseau capillaires)

Pour conclure, on voit que le temps de relaxation dans un réseau de pores n'est pas une constante, comme dans les théories phénoménologiques, mais dépend de la saturation de façon croissante. L'explication de ce phénomène est la suivante. Lorsque la saturation augmente, l'interface entre les phases augmente aussi due aux séparations intenses des ménisques. En même temps, ce processus de croissance de l'interface est en concurrence avec un processus de diminution de l'interface mobile à cause du piégeage de la phase déplacée. Ces deux processus se développent de façon non synchronisée dans le temps. Si le piégeage est plus rapide ($\bar{\mu} \approx 1$), alors la conductivité du milieu diminue dans le temps pour la même valeur de saturation. Dans ce cas, le temps de relaxation augmente. Si l'augmentation de l'interface n'est pas retardée par le piégeage, ce qui est le cas d'un déplacement instable, alors le temps de relaxation est nul. Ceci est confirmé par le fait que les perméabilités relatives sont permanentes dans le cas $\bar{\mu} \ll 1$. Dans ce cas, un temps de relaxation non nul signifie que de grands pièges conditionnent le processus de déplacement par des forces capillaires (Bourgeat et Panfilov, 1998).

4.6. VÉRIFICATION DU MODÈLE DE PERMÉABILITÉS CROISÉES

Le modèle croisé (cf. § 1.2.1) tient compte du phénomène d'échange de la quantité de mouvement entre les phases.

4.6.1. DÉTERMINATION NUMÉRIQUE DES PERMÉABILITÉS CROISÉES

Réécrivons les formules du modèle croisé (1.2.1) pour les débits de phase, Q_α et Q_β pour une longueur très petite, en remplaçant les gradients de pression par les différences finies δP_α et δP_β :

$$Q_\alpha \approx SB_{\alpha\alpha}\delta P_\alpha + SB_{\alpha\beta}\delta P_\beta, \quad Q_\beta \approx SB_{\beta\alpha}\delta P_\alpha + SB_{\beta\beta}\delta P_\beta$$

$$B_{\alpha\alpha} = \frac{Kk_{\alpha\alpha}}{\mu_\alpha}, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{Kk_{\alpha\beta}}{\mu_\beta}, \quad B_{\beta\alpha} = \frac{Kk_{\beta\alpha}}{\mu_\alpha}, \quad B_{\beta\beta} = \frac{Kk_{\beta\beta}}{\mu_\beta}$$

avec la saturation S .

Représentons ces relations sous forme linéaire par rapport aux paramètres B :

$$\frac{Q_\alpha}{S\delta P_\alpha} = B_{\alpha\alpha} + B_{\alpha\beta} \frac{\delta P_\beta}{\delta P_\alpha}, \quad \frac{Q_\beta}{S\delta P_\alpha} = B_{\beta\beta} + B_{\beta\alpha} \frac{\delta P_\alpha}{\delta P_\beta} \quad (4.6.1)$$

Ces relations sont à la base du traitement des résultats de calcul en réseaux capillaires effectués pour différentes valeurs de Ca et $\bar{\mu}$. Comme dans le cas du modèle de Buckley-Leverett, les perméabilités relatives croisées ont été calculées par homogénéisation à travers les sections orthogonales à la direction principale de l'écoulement.

Suivant les résultats des simulations numériques, pour une section arbitraire, nous avons sélectionné les pores de trois classes : rempli que d'eau mobile (classe 01), rempli que d'huile mobile (clase 02) et contenant un ménisque mobile (classe 12). Soit N_α, N_β , et $N_{\alpha\beta}$ le nombre de pores de chaque classe. Les simulations nous donnent directement les différences de pression sur chaque pore i rempli d'eau mobile, $\delta P_{\alpha i}$, sur chaque pore rempli d'huile mobile, $\delta P_{\beta i}$, et sur chaque pore contenant un ménisque mobile, $\delta P_{\alpha\beta i}$. Les différences de pressions moyennes dans chaque phase peuvent alors être calculées :

$$\delta P_\alpha = \frac{1}{(N_\alpha + N_{\alpha\beta})} \left(\sum_{i \in (01)} \delta P_{\alpha i} + \sum_{j \in (12)} \delta P_{\alpha\beta j} \right),$$

$$\delta P_\beta = \frac{1}{(N_\beta + N_{\alpha\beta})} \left(\sum_{i \in (02)} \delta P_{\beta i} + \sum_{j \in (12)} \delta P_{\alpha\beta j} \right)$$

En se basant sur ces données, les débits de chaque phase, en utilisant la formule de Poiseuille pour les pores **01** et **02** et la formule de Washburn pour les pores **12**, sont calculés :

$$Q_\alpha = \frac{\pi}{l\gamma\mu_\alpha} \left[\sum_{i \in (01)} r_i^4 \delta P_{\alpha i} + \bar{\mu} \sum_{j \in (12)} r_j^4 \frac{\delta P_{\alpha\beta j} + P_{c j}}{\mu \xi_j + 1 - \xi_j} \right]$$

$$Q_\beta = \frac{\pi}{l\gamma\mu_\beta} \left[\sum_{i \in (02)} r_i^4 \delta P_{\beta i} + \bar{\mu} \sum_{j \in (12)} r_j^4 \frac{\delta P_{\alpha\beta j} + P_{c j}}{\mu \xi_j + 1 - \xi_j} \right]$$

où l est la longueur d'un pore, P_c est la pression capillaire sur le ménisque, r est le rayon de pore, $\xi = x_\alpha/l$, x_α est la coordonnée du ménisque de la phase α dans le pore, γ est le coefficient de forme du canal, $\bar{\mu} \equiv \mu_\alpha/\mu_\beta$.

La saturation S dans ce paragraphe est calculée de la même façon que dans le paragraphe 4.4.2.

Tout calcul fait, il vient que, pour chaque section du milieu, nous obtenons cinq valeurs $Q_\alpha, Q_\beta, \delta P_\alpha, \delta P_\beta, S$.

Pour obtenir les perméabilités croisées en fonction de la saturation, fixons-nous la valeur de S . Choisissons uniquement les sections avec cette valeur de S . Alors, on obtient une série de valeurs $\{Q_\alpha, Q_\beta, \delta P_\alpha, \delta P_\beta\}$ correspondant à une seule valeur de S . L'opération suivante consiste à appliquer une méthode de moindres carrés pour les formules (4.6.1). La forme graphique de cette méthode est illustrée sur la Fig. 4.6.1 où l'évolution de $Q_\alpha/\delta P_\alpha$ en fonction de $\delta P_\beta/\delta P_\alpha$ est présentée. Toutes les valeurs $Q_\alpha, \delta P_\alpha, \delta P_\beta$ correspondent à la même valeur de la saturation. Les coefficients $B_{\alpha\alpha}$ et $B_{\alpha\beta}$ sont des paramètres de la droite :

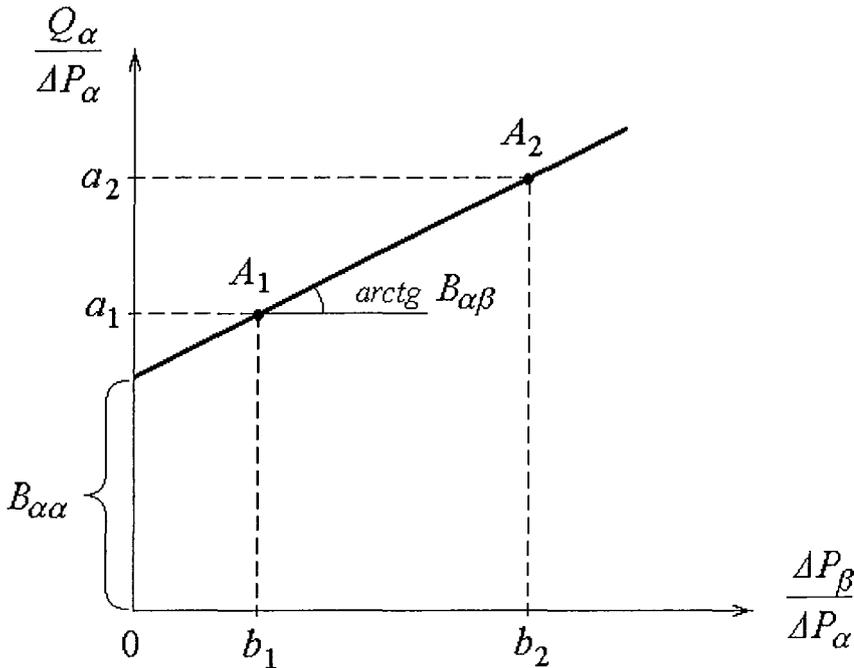


Fig. 4.6.1. Méthode de détermination des coefficient B

$$B_{\alpha\beta} = \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}, \quad \Rightarrow \quad k_{\alpha\beta} = \frac{\mu_\beta}{K} \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$$

$$B_{\alpha\alpha} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}, \quad \Rightarrow \quad k_{\alpha\alpha} = \frac{\mu_\alpha}{K} \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_2 - b_1}$$

D'une manière analogue, on obtient les perméabilités $k_{\beta\beta}$ et $k_{\beta\alpha}$.

4.6.2. RÉSULTATS DE CALCUL DES PERMÉABILITÉS CROISÉES

La perméabilité croisée a la forme typique présentée sur la Fig. 4.6.2.

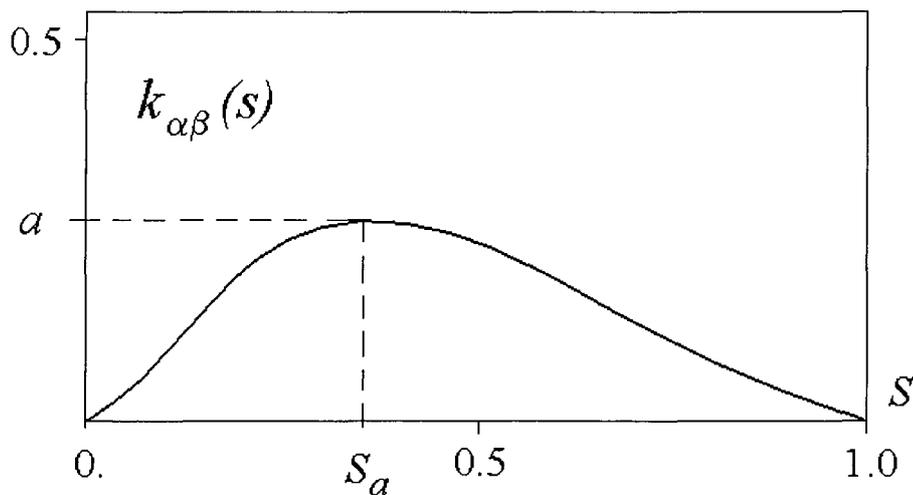


Fig. 4.6.2. Forme typique de l'évolution de la perméabilité croisée en fonction de la saturation.

Elle est toujours non monotone et asymétrique, ayant un maximum déplacé vers les faibles valeurs de la saturation. La valeur maximale a dépend considérablement des paramètres Ca et $\bar{\mu}$.

Les Fig. 4.6.3 – 4.6.4 illustrent les résultats de calculs obtenus pour différentes valeurs de Ca et $\bar{\mu}$.

4.6.3. INFLUENCE DU Ca ET DU $\bar{\mu}$ SUR LES PERMÉABILITÉS CROISÉES

On voit que, pour des $Ca \gg 1$, la perméabilité croisée est négligeable. Ceci signifie uniquement que les perméabilités classiques sont beaucoup plus importantes, mais ne signifie en aucun cas que la loi classique de Darcy soit applicable. En effet, les perméabilités classiques peuvent se présenter sous la forme d'un nuage de points fortement dispersé non représentable par une fonction unique en saturation.

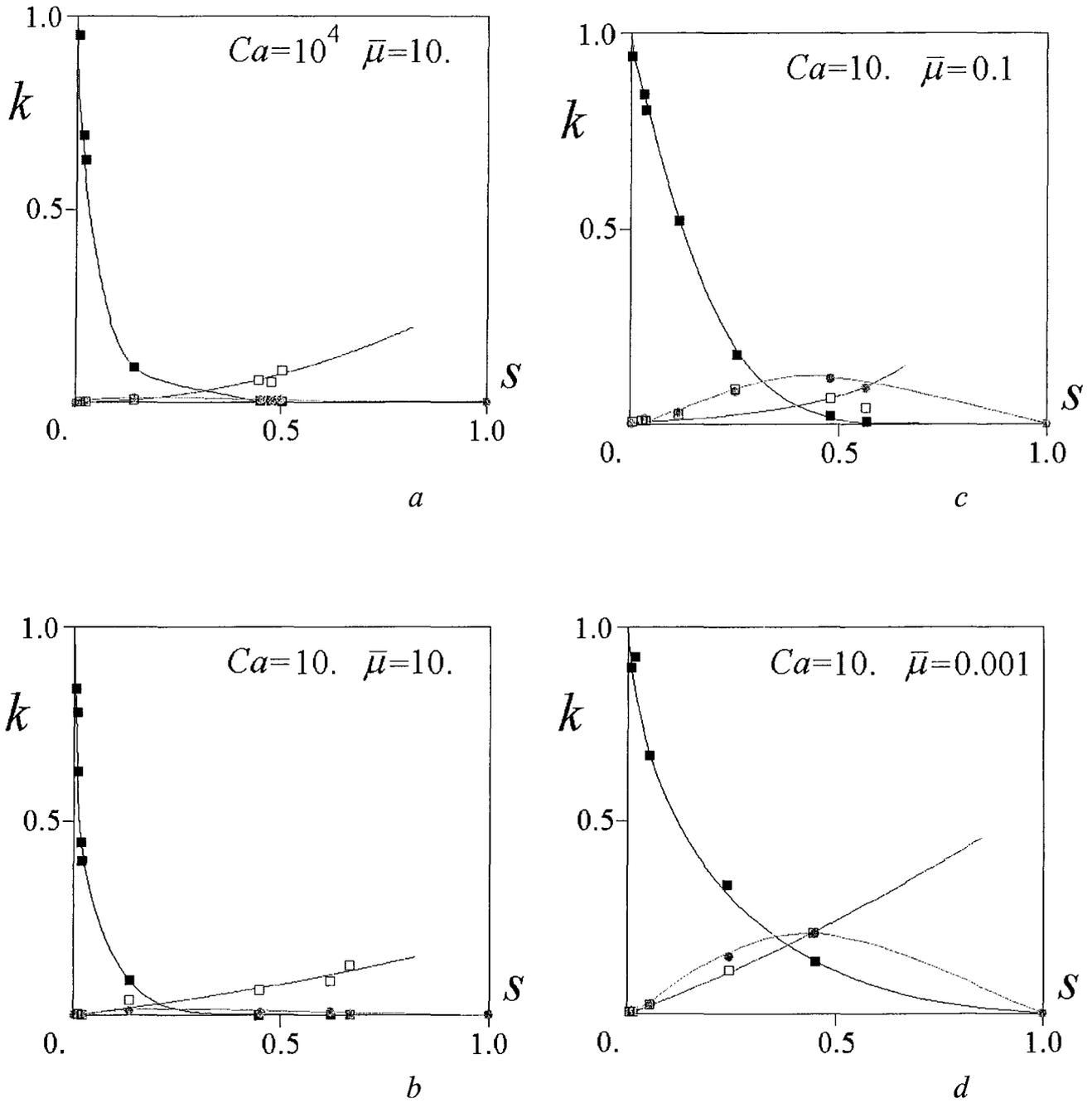


Fig. 4.6.3. Perméabilités relatives classiques et croisées pour des valeurs de $Ca > 1$ et différents $\bar{\mu}$:

□ — k_1 ■ — k_2 ♦ — k_{12}

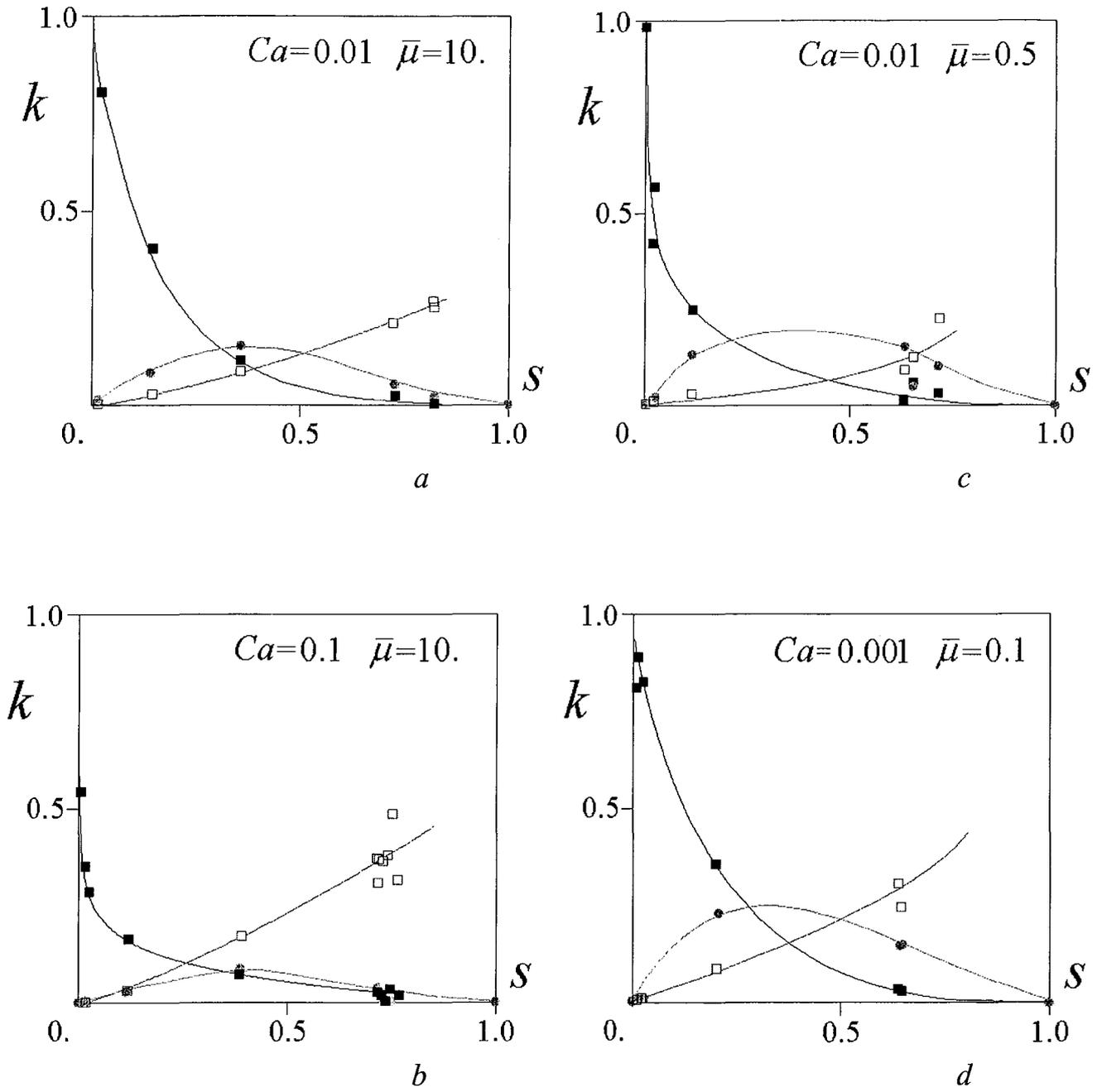


Fig. 4.6.4. Perméabilités relatives classiques et croisées pour $Ca < 1$ et différents $\bar{\mu}$:

□ — k_1 ■ — k_2 • — k_{12}

Lorsque les forces capillaires augmentent (Ca diminue), la perméabilité croisée devient de plus en plus importante, mais uniquement dans le cas $\bar{\mu} < 1$. Ainsi, moindre seront les paramètres Ca et $\bar{\mu}$, plus grande la perméabilité croisée sera. La valeur maximale h de la PR croisée en fonction de Ca et $\bar{\mu}$ est présentée sur la Fig. 4.6.5.

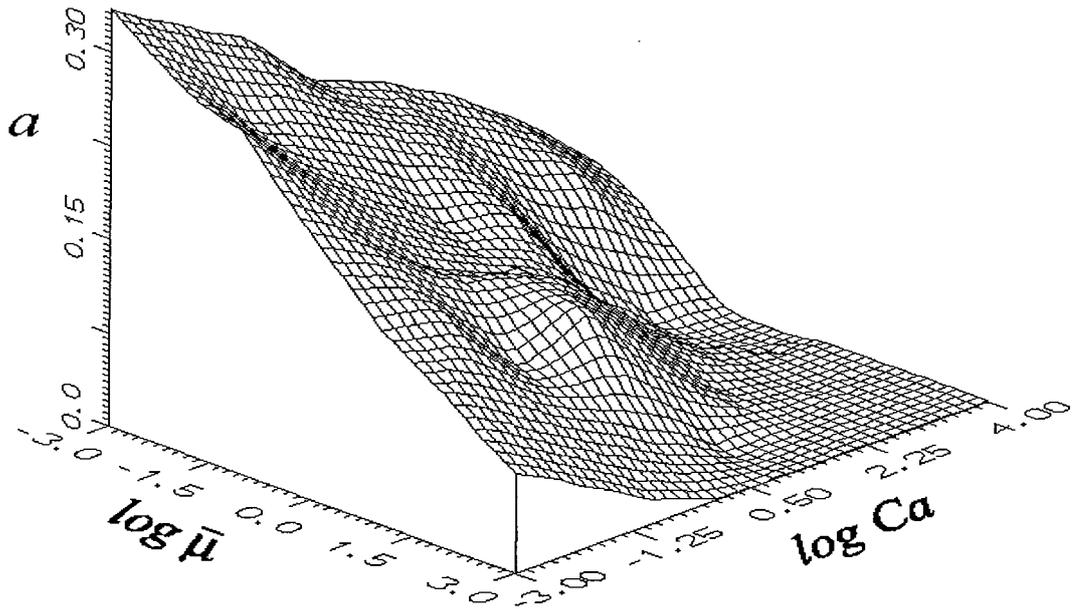


Fig. 4.6.5. Valeur maximale h de la perméabilité croisée en fonction de Ca et $\bar{\mu}$

Le cas des faibles Ca signifie que tout mouvement est provoqué par des forces capillaires sur les ménisques mobiles. C'est bien évidemment le cas d'une forte interaction entre les phases, quand l'écoulement de chaque phase ne peut pas être décrit par la loi de Darcy classique indépendamment de l'autre phase. Les termes croisés deviennent très importants, du même ordre de grandeur que les termes de Darcy classiques.

Pour le cas $\bar{\mu} < 1$, le mouvement de la phase déplacée est essentiellement déterminé par l'écoulement de la phase déplaçante qui est beaucoup moins visqueuse. Ainsi, l'interaction entre les phases est aussi évidente.

4.6.4. RELATIONS APPROXIMATIVES POUR LES PERMÉABILITÉS CROISÉES

Le traitement statistique des données obtenues nous a permis de proposer les formules suivantes pour la fonction $k_{\alpha\beta}(s, Ca, \bar{\mu})$:

$$k_{\alpha\beta}(s, Ca, \bar{\mu}) = a \text{Sin}(\pi s^p), \quad (4.6.2)$$

$$\begin{cases} a = 0.043(2. - \log \bar{\mu}) + 0.031(1. - \log Ca), \\ a \cong 0., \quad \text{si } 4.3 \log \bar{\mu} + 3.1 \log Ca \geq 11.7 \end{cases}$$

où p est le paramètre d'asymétrie de la courbe $k_{\alpha\beta}(s, Ca, \bar{\mu})$ dont la valeur est proche de $p=0.75$ dans tous les cas.

Les Fig. 4.6.6 et 4.6.7 illustrent les applications du modèle (4.6.2). Quant à la valeur maximale de la perméabilité relative croisée, elle atteint une valeur de 0.25.

4.6.5. COMPARAISON AVEC DES DONNÉES EXPÉRIMENTALES

Ces résultats sont qualitativement et quantitativement conformes aux données expérimentales. Les valeurs des termes croisés ont été obtenues dans les travaux expérimentaux (Kalaydjian, 1990 ; Barci *et al.*, 1990), en observant un écoulement simultané de deux phases dans un capillaire. Les PR croisées maximales peuvent atteindre la valeur 0.2-0.25 ce qui correspond bien à nos résultats de simulation.

Cependant des résultats tout à fait différents ont été publiés dans le papier (Zarcone et Lenormand, 1994), où il observait un écoulement simultané d'eau et de mercure ($\mu_{Hg} = 1.55 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$, $\mu_{H_2O} = 1.0 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$, $\sigma = 0.4 H/m$) dans un massif de sable. Les pressions individuelles des phases étaient mesurées par la méthode des membranes semi-perméables. Le nombre capillaire Ca variait entre $1.43 \cdot 10^{-7}$ et $7.17 \cdot 10^{-7}$. De ces résultats il vient que la perméabilité relative croisée est toujours inférieure à 0.004. Ces résultats, très différents de tous les autres, sont dus à un circuit très spécial d'écoulement, quand la surface de contact entre les phases a été minimisée a priori.

CONCLUSIONS

Les simulations en réseaux capillaires ont montré que les perméabilités relatives croisées sont souvent négligeables, sauf dans le cas d'une grande interaction entre les phases qui sont observés pour des $\bar{\mu} \ll 1$ et des grands Ca . Dans ces deux cas, la perméabilité croisée atteint son maximum de l'ordre de grandeur de 0.25. Ces résultats sont conformes aux données expérimentales (Kalaydjian, 1990 ; Barci *et al.*, 1990).

En même temps, les perméabilités diagonales sont très faiblement corrélées avec la saturation. Ceci signifie que le modèle croisé montre bien l'importance d'une interaction entre les phases, qui n'est pas prise en considération par le modèle classique de Buckley-Leverett. Cependant cette interaction ne peut pas être décrite par le modèle croisé lui-même, qui a un grand défaut concernant les perméabilités diagonales. En effet, pour le modèle croisé, les perméabilités diagonales sont des fonctions uniquement de la saturation, tandis que les simulations en réseau ont montré que ce n'était pas le cas.

Ainsi, dans le domaine d'une interaction importante entre les phases, le modèle classique n'est pas valable, mais la description de cette interaction sous forme du modèle croisé n'est pas non plus satisfaisante.

L'interaction entre les phases, formant une configuration de type ménisque, peut être décrite de façon adéquate par le « *meniscus model* ».

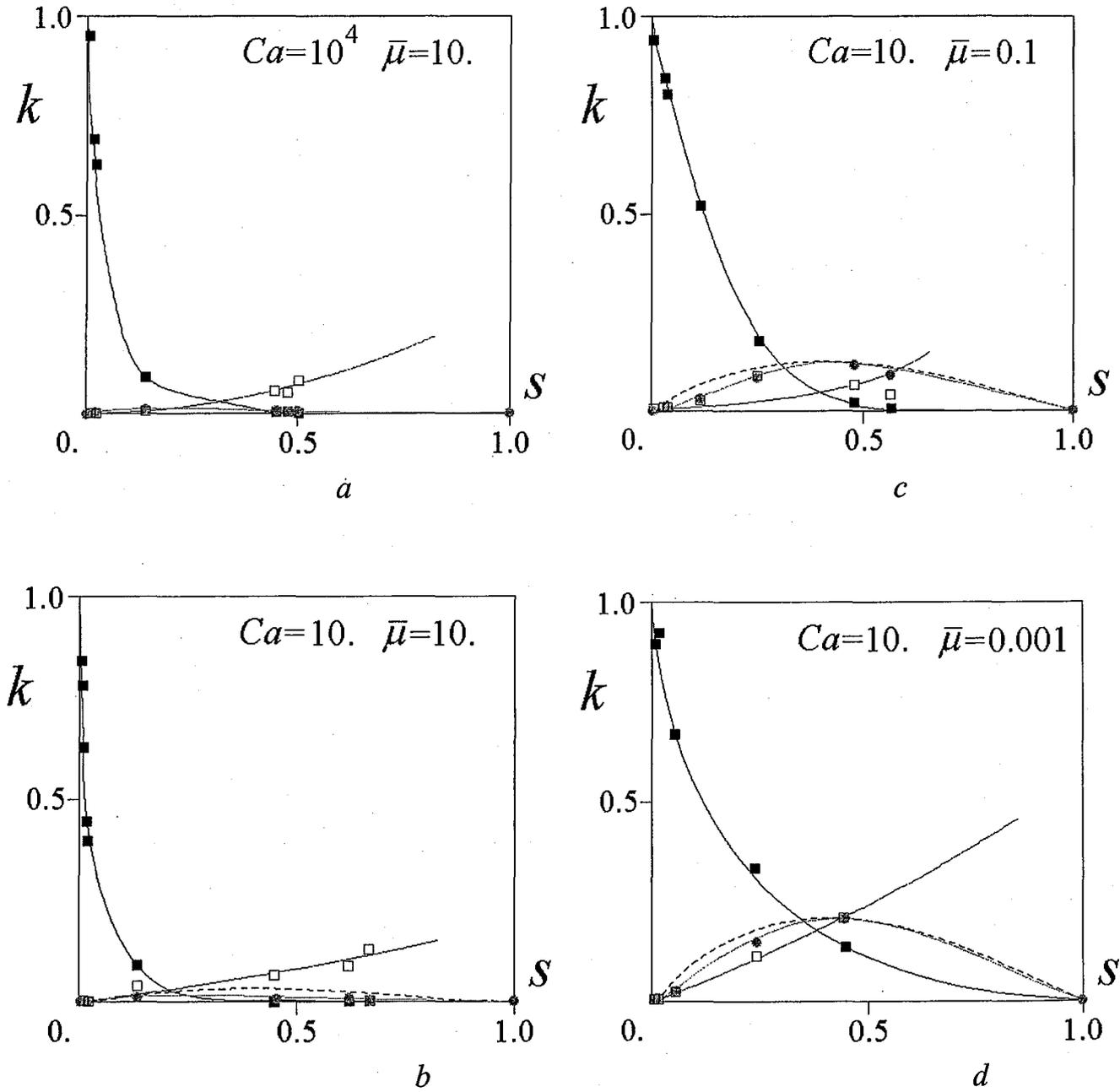


Fig. 4.6.6. Perméabilité croisée numérique et son approximation (4.6.2) pour des $Ca > 1$

$\square - k_1$ $\blacksquare - k_2$ $\bullet - k_{12}$

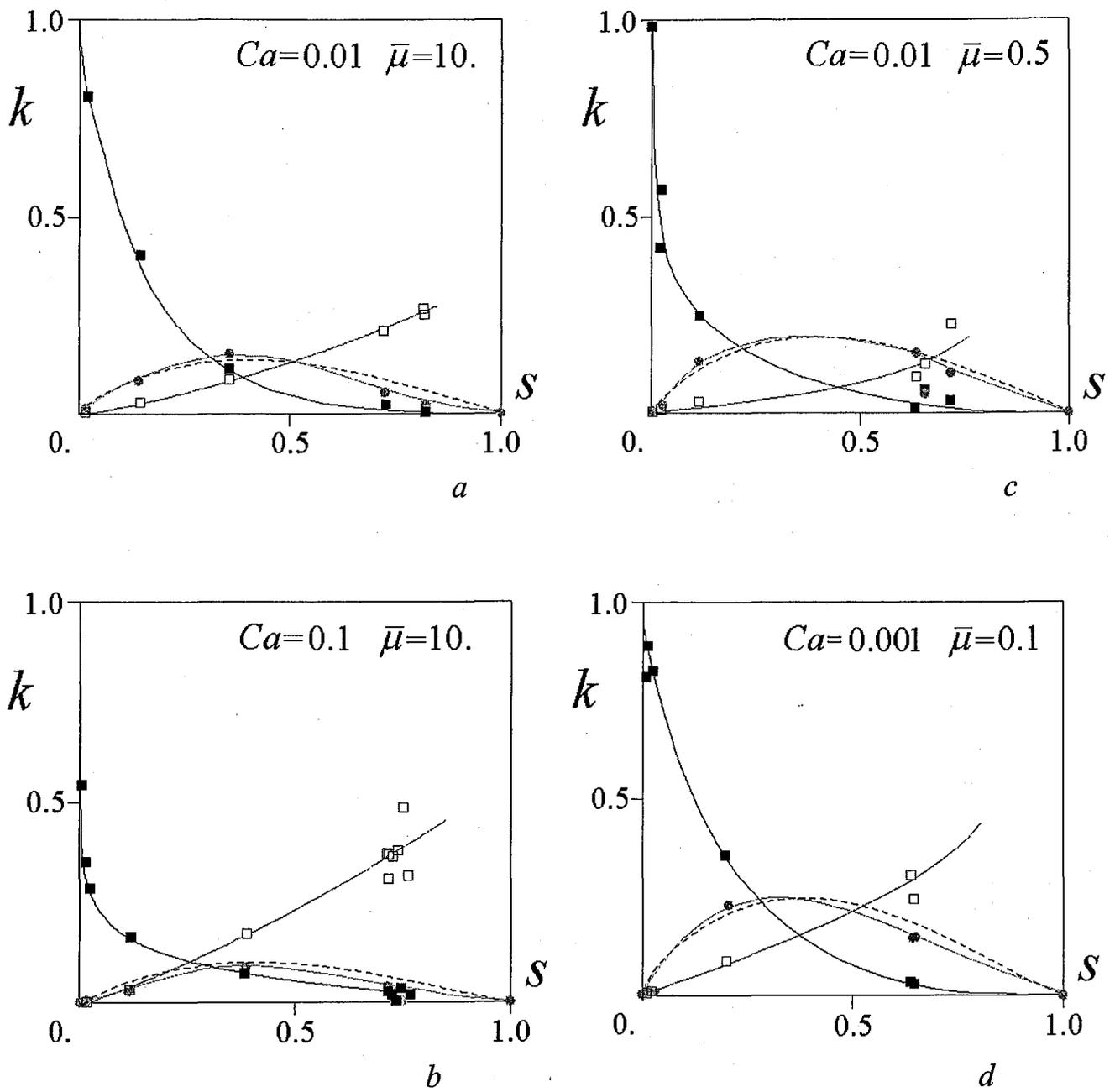


Fig. 4.6.7. Perméabilité croisée numérique et son approximation (4.6.2) pour des $Ca < 1$

□ — k_1 ■ — k_2 • — k_{12}

4.7. RELATIONS DE FERMETURE POUR LE MENISCUS MODEL

Le modèle « de ménisque » proposé dans le paragraphe 2.5.8 demande de multiples relations de fermeture. On a vu que, dans le cadre de ce modèle, les perméabilités relatives dépendent de plusieurs paramètres autres que la saturation. La version la plus simple de ce modèle, exposé dans le paragraphe 2.5.9, suppose que les perméabilités relatives sont égales aux perméabilités classiques. Cette approximation réduit immédiatement le nombre de relations de fermeture jusqu'à une. En acceptant le modèle sous cette forme réduite, nous nous sommes intéressés à la construction de la relation de fermeture pour la concentration de ménisques en fonction de la saturation, $\eta_c(s)$.

Pour calculer la fonction $\eta_c(s)$, nous avons utilisé de nouveau les données sur différentes sections orthogonales à la direction principale de l'écoulement. Dans chaque section, nous avons calculé la saturation et la concentration moyenne de ménisques (la longueur d'un pore divisée par la distance entre les deux ménisques voisins). Ainsi, nous avons obtenu les couples de points $\{s, \eta_c\}$.

Les Figures 4.7.1 et 4.7.2 montre la courbe généralisée obtenue pour les différentes valeurs de Ca et $\bar{\mu}$. On voit que la forme de la fonction $\eta_c(s)$ est assez universelle indépendamment des valeurs Ca et $\bar{\mu}$, saur si $\bar{\mu}$ n'est pas trop petit.

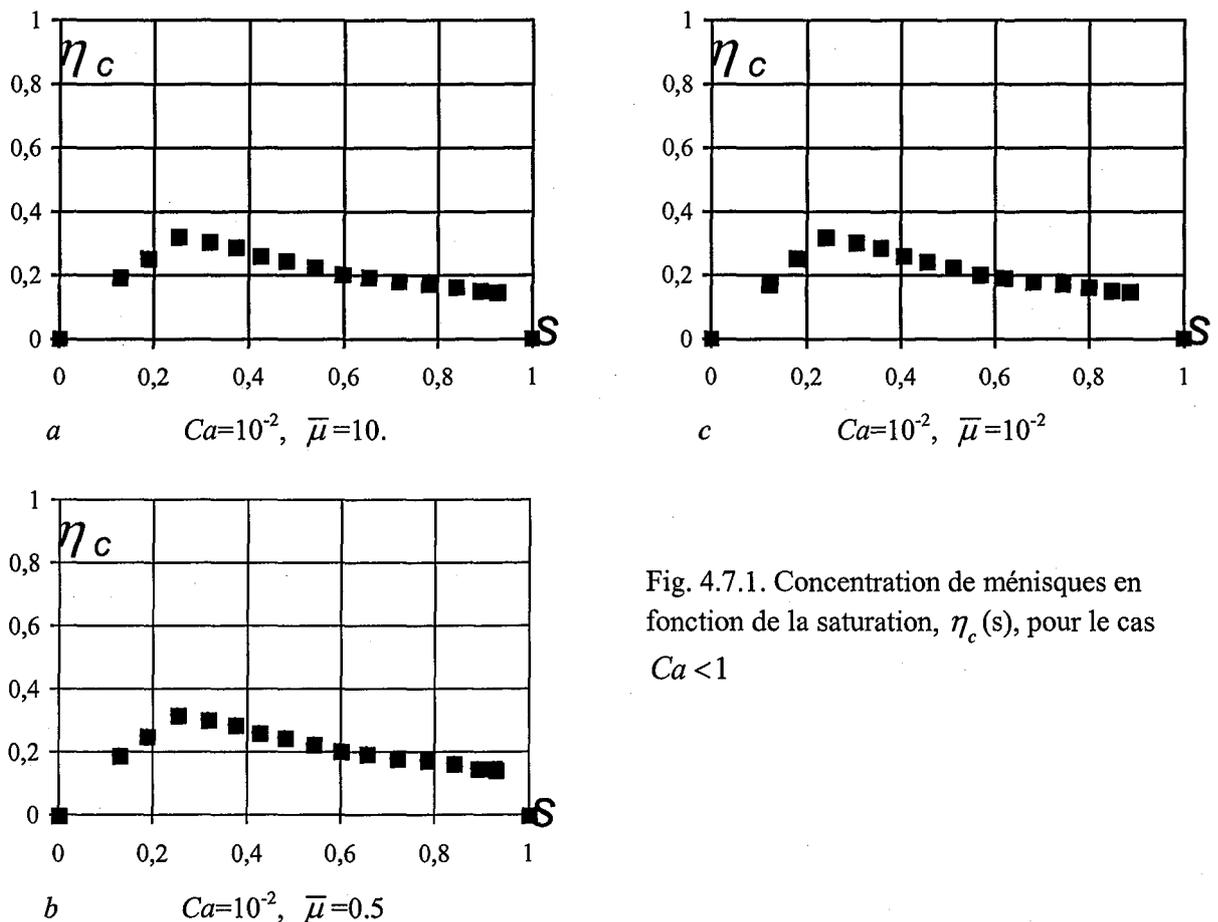
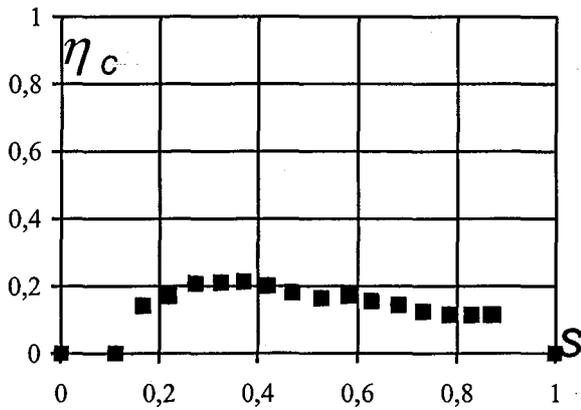
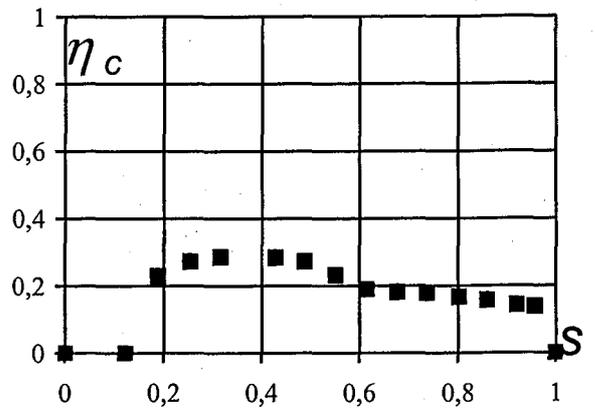


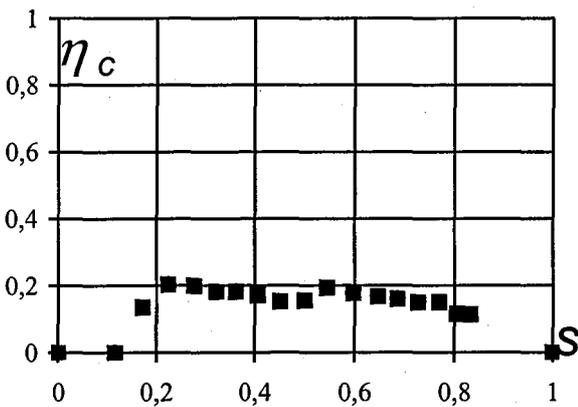
Fig. 4.7.1. Concentration de ménisques en fonction de la saturation, $\eta_c(s)$, pour le cas $Ca < 1$



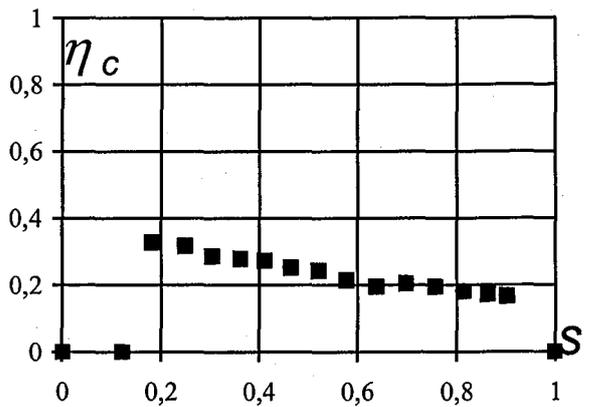
a $Ca=10^3, \bar{\mu}=10.$



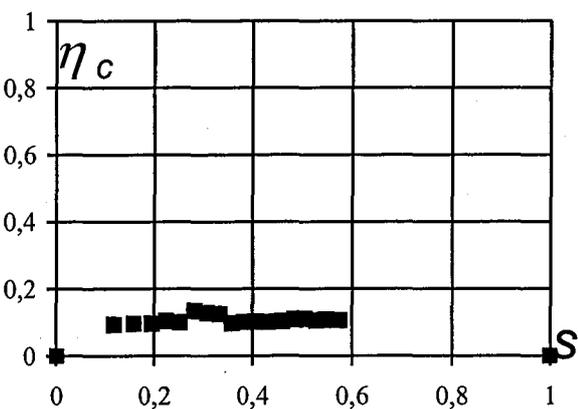
d $Ca=1., \bar{\mu}=10.$



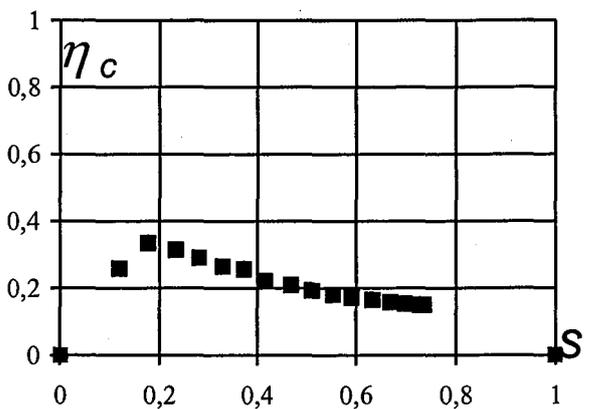
b $Ca=10^3, \bar{\mu}=0.5$



e $Ca=1., \bar{\mu}=0.5$



c $Ca=10^3, \bar{\mu}=10^{-2}$



f $Ca=1., \bar{\mu}=10^{-2}$

Fig. 4.7.2. Concentration de ménisques en fonction de la saturation, $\eta_c(s)$ pour le cas $Ca \geq 1$

Chapitre **5**

**ANALYSE QUALITATIVE DU
MODÈLE DE MÉNISQUE :
SOLUTIONS ANALYTIQUES**

5.1. FORMULATION DU PROBLÈME DE DÉPLACEMENT

Dans ce chapitre nous examinons les solutions analytiques de certains problèmes de déplacement en milieu poreux formulés dans le cadre du modèle de ménisque proposé dans le chapitre 2 (§ 2.5).

5.1.1. PROBLÈME MONODIMENSIONNEL

Examinons le modèle 1D (2.5.22) appliqué à la description du problème standard de déplacement d'une phase par une autre en milieux poreux :

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial G(s)}{\partial x} = 0, \quad G(s) \equiv F(s) + \frac{e_c}{Ca} F_c(s) \quad (5.1.1)$$

$$s|_{\tau=0} = 1 - H(x) \quad (5.1.2)$$

où $G(s)$ est un flux sommé ; $H(x)$ est une fonction de Heaviside ; la fonction de flux fractionnaire non capillaire $F(s)$ et la fonction de flux fractionnaire capillaire $F_c(s)$ sont définies en accord avec (2.5.19) :

$$F(s) = \frac{k_\alpha(s)}{k_\alpha(s) + k_\beta(s)\bar{\mu}}, \quad F_c(s) = (s^I - F(s))\alpha^I(s)\eta_c(s) \quad (5.1.3)$$

$$\begin{cases} k_\alpha(s) = (s - s^\omega)\gamma + s^\omega, & k_\beta(s) = \frac{(s - s^\omega)}{s^I} \left(\frac{(1 - s^I)\gamma}{\bar{\mu}} - 1 \right) + 1 - s^\omega \\ \alpha^I(s) = \frac{(s - s^\omega)}{s^I}, & \gamma = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}s^I + 1 - s^I}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu_\alpha}{\mu_\beta}, \quad Ca = \frac{\delta P}{P_c} \end{cases}$$

$$e_c = \begin{cases} 1, & \text{si la phase déplaçante est mouillante} \\ -1, & \text{si la phase déplaçante est non mouillante} \end{cases}$$

Le problème (5.1.1) – (5.1.2) signifie qu'à l'état initial le milieu est occupé par la phase β . En suite, la saturation de la phase déplaçante α à l'entrée du milieu est maintenue constante et égale à 1.

On voit que le problème dépend significativement de la forme de deux fonctions $F(s)$ et $F_c(s)$, ainsi que des paramètres Ca , $\bar{\mu}$, s^I , ω et du signe de e_c . Les paramètres les plus conservatifs sont s^I et ω . Leurs variations n'apportent que des changements quantitatifs. De ce fait, l'analyse consécutive est effectuée pour des valeurs fixées de ces paramètres, à savoir : $s^I = 0.8$, $\omega = 4.9$. Les autres paramètres, Ca , $\bar{\mu}$ et le signe de e_c , jouent un rôle prépondérant. En fonction de leurs valeurs, on peut obtenir diverses versions de ce problème ayant des solutions significativement différentes.

5.1.2. PROPRIÉTÉS DU FLUX CAPILLAIRE $F_c(s)$

La fonction $F_c(s)$ ne dépend pas de Ca et e_c . Pour les différents valeurs de $\bar{\mu}$, elle est présentée sur la Fig. 5.1.1 ($s^l=0.8$; $\omega=4.9$).

Le point caractéristique s^* dans lequel la courbe traverse l'axe des abscisses est défini comme la solution de l'équation non linéaire (2.5.24) :

$$F(s^*) = s^l$$

Pour $s > s_*$, cette fonction devient négative. La partie négative est négligeable pour des grands $\bar{\mu}$ et augmente au fur et à mesure de la diminution du $\bar{\mu}$. Un flux capillaire négatif signifie que les forces capillaires réduisent la fraction de l'eau dans le flux total. Cet effet, appelé freinage capillaire, est expliqué dans le paragraphe 2.5.10. Il faut néanmoins noter que le flux capillaire négatif ne signifie pas un transport à contre-courant, car la direction du transport est définie par la dérivée des flux.

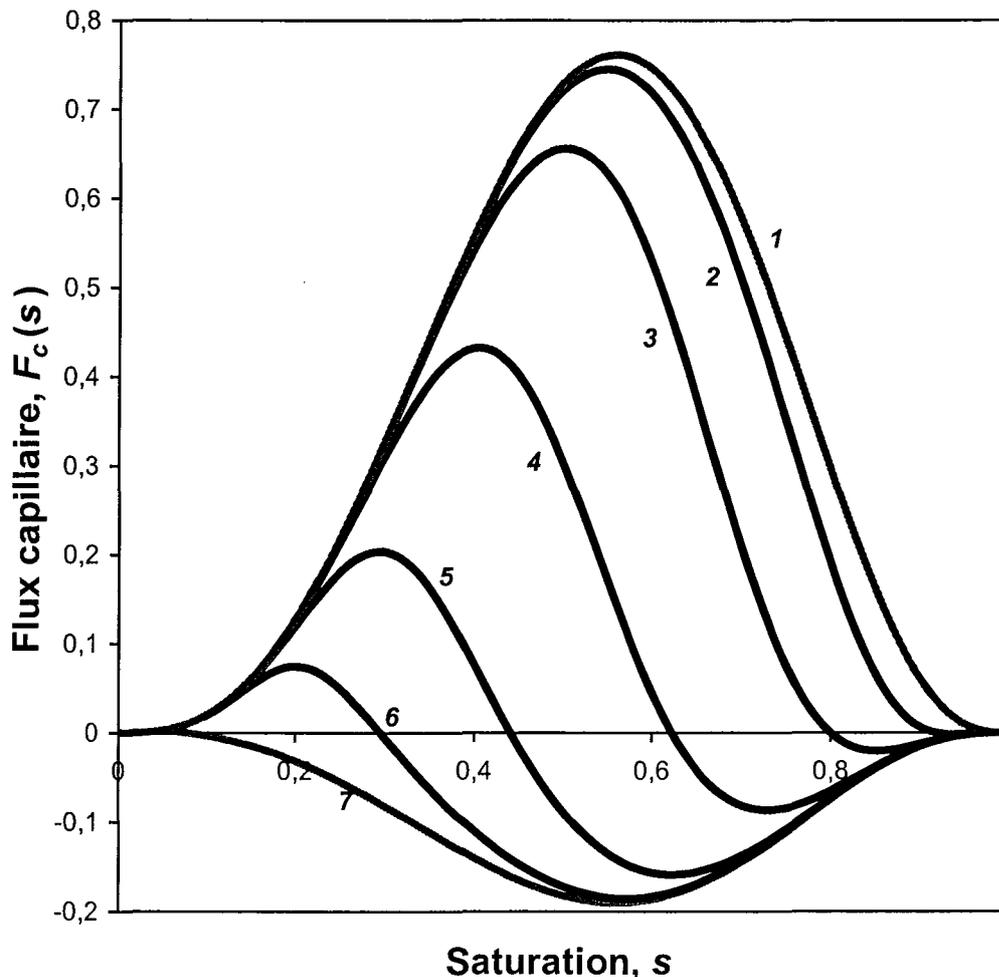


Fig. 5.1.1. Forme du flux capillaire F_c en fonction de la saturation s

1 : $\bar{\mu} = \infty$; 2 : $\bar{\mu} = 100$; 3 : $\bar{\mu} = 10$; 4 : $\bar{\mu} = 1$; 5 : $\bar{\mu} = 0.1$; 6 : $\bar{\mu} = 0.01$; 7 : $\bar{\mu} = 0$

5.2. IMBIBITION CAPILLAIRE ($Ca \rightarrow 0$)

5.2.1. SOLUTION FORMELLE POUR $\bar{\mu} \sim 1$

Le problème (5.1.1) prend la forme, avec la conservation de la dérivée temporelle (sinon l'équation change de type) et une renormalisation du temps ($\tau \rightarrow \tau / Ca$), suivante :

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial F_c(s)}{\partial x} = 0 \quad (5.2.1)$$

$$s|_{\tau=0} = 1 - H(x) \quad (5.2.2)$$

Suivant la structure de la fonction $F_c(s)$ (Fig. 5.1.1, courbe 3), on voit que la vitesse de transport, $F'_c(s) \equiv dF_c / ds$, a la structure exposée sur la Fig. 5.2.1.

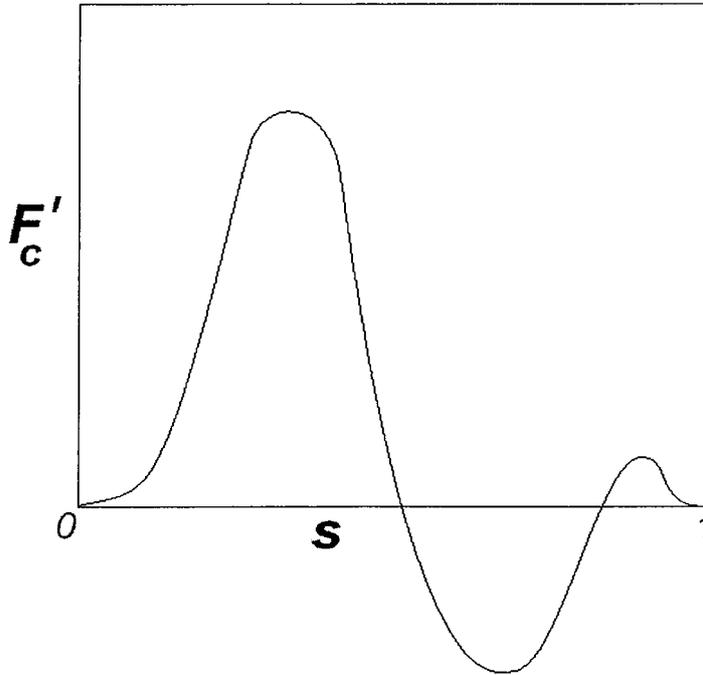


Fig. 5.2.1. Dérivée du flux capillaire

Suivant le sens de l'équation de transport (5.2.1), chaque valeur de saturation s est transportée à sa propre vitesse égale à $F'_c(s)$. Ainsi la solution du problème (5.2.1) prend la forme présentée sur la Fig. 5.2.2.

Puisque cette fonction $s(x)$ n'est pas unique, elle n'a pas de sens physique. Ainsi, la solution continue et différentiable du problème (5.2.1) n'existe pas. Cependant, le problème a des solutions dans la classe des fonctions discontinues.

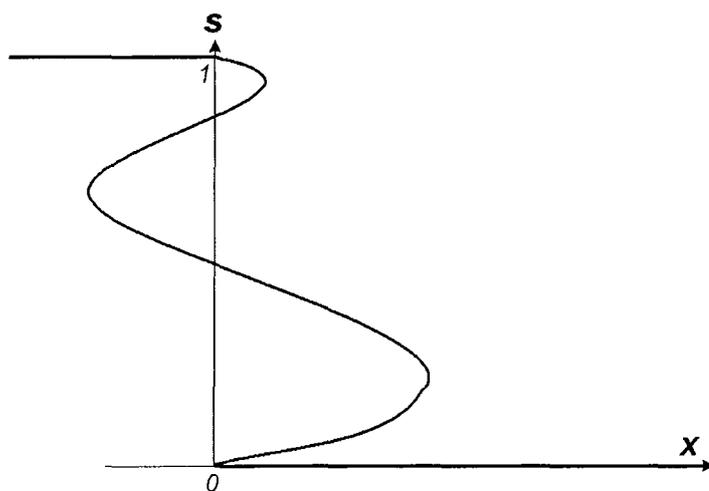


Fig. 5.2.2. Solution formelle du problème d'imbibition

5.2.2. SOLUTION DISCONTINUE

La solution unique et discontinue est construite de façon classique, en se basant sur la méthode des caractéristiques. En omettant les dérivations, nous présentons directement les résultats sur la Fig. 5.2.3, où deux fronts apparaissent.

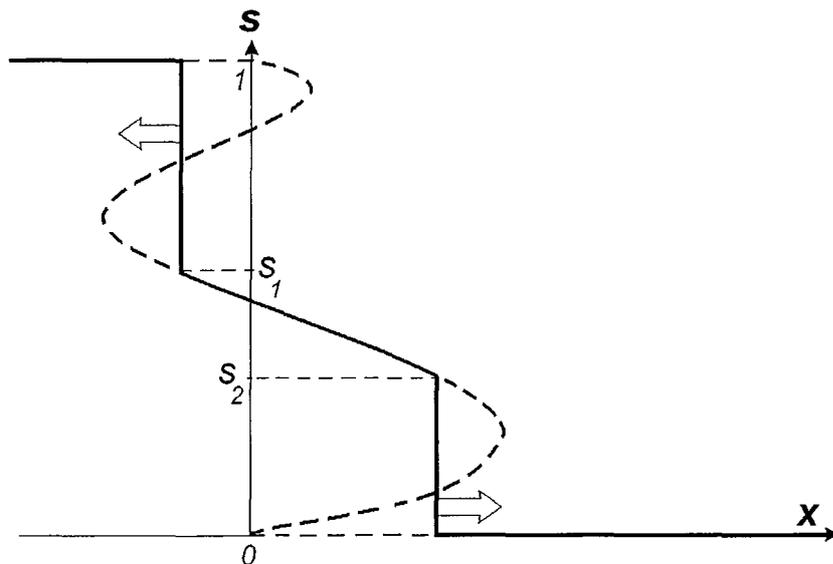


Fig. 5.2.3. Solution unique et discontinue du problème d'imbibition

Cette solution est construite par une technique graphique sur le diagramme $F_c(s)$ (Fig. 5.2.4). Deux tangentes à la fonction $F_c(s)$ déterminent les saturations (s_1 et s_2) des fronts, tandis que la pente de chaque tangente définit la vitesse du front correspondant (positive ou négative).

Du point de vue mathématique, il est possible de montrer que les fronts construits de cette façon vérifient les conditions de Hugoniot et les conditions d'augmentation de l'entropie.

On voit que simultanément avec le front de pénétration dans le milieu, il existe un autre front sortant du milieu, car sa vitesse est négative. Ceci signifie qu'il existe une circulation à

contre-courant à travers la section amont. Ainsi, le modèle proposé décrit l'imbibition à contre-courant et a un énorme avantage par rapport au modèle classique. Dans le modèle classique, l'imbibition à contre-courant est décrite par une équation parabolique qui demande deux conditions aux limites, à l'entrée et à la sortie. Cependant, dans le processus réel, la condition à l'entrée ne peut pas être imposée car elle s'établit automatiquement à une valeur inconnue a priori. Dans le modèle proposé, ce problème n'existe pas : l'équation de transport, étant hyperbolique, ne demande pas de conditions à l'entrée du milieu. La saturation à l'entrée s'établit ainsi à une valeur déterminée par la structure du flux capillaire.

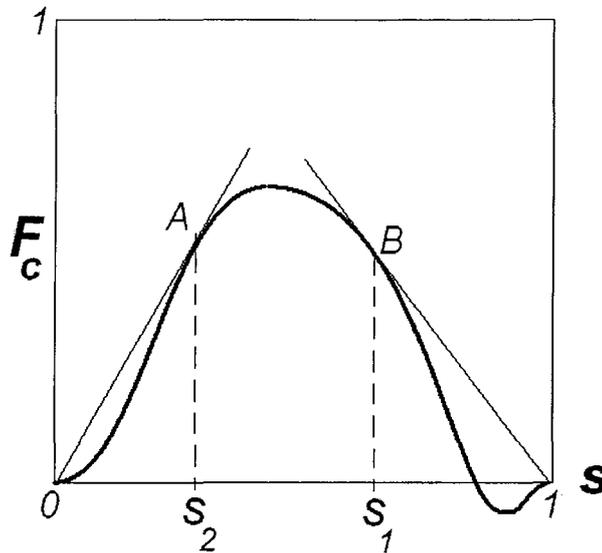


Fig. 5.2.4. Technique graphique de construction de la solution discontinue

5.2.3. JUSTIFICATION DE LA SOLUTION OBTENUE

Pour justifier la solution, remarquons que toute solution discontinue peut être construite à partir de fragments de la solution formelle continue et des fronts de discontinuité. Sur chaque front, au lieu de l'équation différentielle de transport (5.1.1) ou (5.2.1), on applique son analogue intégral appelé la condition de Hugoniot :

$$U_f = \frac{G^+ - G^-}{s^+ - s^-} \quad (5.2.3)$$

où les indices « + » ou « - » signifient la valeur juste après le front ou juste avant le front ; U_f est la vitesse du front. La fonction $G(s)$ est définie comme $G(s) \equiv F(s) + \frac{e_c}{Ca} F_c(s)$ dans le cas général de l'équation (5.1.1) ou $G(s) = F_c(s)$ dans le cas (5.2.1).

Il existe un nombre infini de fronts qui satisfont à cette condition. Pour choisir un front unique, on impose qu'il vérifie une condition supplémentaire appelée la condition d'entropie. Cette condition tient compte que, dans le processus réel, la discontinuité est toujours représentée par une zone très étroite mais finie. Dans cette zone, il existe toujours, comme dans chaque processus physique réel, une dissipation d'énergie qui conduit à une augmentation de l'entropie. Ainsi, le modèle hyperbolique (5.1.1) n'est qu'une approximation

de la réalité qui néglige la dissipation dans la zone de front. Pour que cette approximation soit physique, il est nécessaire d'imposer une augmentation de l'entropie sur le front dans la direction du transport.

Dans le cas de l'équation (5.1.1), il est possible de montrer que la condition d'entropie est équivalente à la condition d'évolution de Lax (1971) :

$$G'(s^+) \leq U_f \leq G'(s^-) \quad (5.2.4)$$

où s^+ et s^- sont les saturations juste après et juste avant le front. Cette condition dit que la vitesse du front ne peut pas dépasser la vitesse de transport de la saturation avant le front et ne peut pas être plus petite que la vitesse de transport de la saturation après le front

Dans le cas examiné, il existe deux fronts qui vérifient les conditions (5.2.3) et (5.2.4) simultanément. En effet, pour le front s'avancant au sein du milieu, on a :

$$s^+ = 0, \quad G^+ = F^+ = F(s^+) = F(0) = 0 ; \quad F'(s^-) \neq 0, \quad F'(s^+) = 0$$

Ainsi, les conditions (2.5.3) et (2.5.4) prennent la forme :

$$U_f = \frac{F(s^-)}{s^-} \quad U_f = F'(s^-)$$

et on obtient une seule équation non linéaire qui détermine la saturation sur le front s^- :

$$F'(s^-) = \frac{F(s^-)}{s^-} \quad (5.2.5)$$

Cette équation a une interprétation graphique claire. Supposons que $s^- = s_2$. Examinons le triangle $O-A-s_2$ sur le diagramme Fig. 5.2.4. Il est évident que la pente de la ligne OA est $F(s^-)/s^-$. En même temps, la ligne OA est tangente à la courbe $F(s)$ au point s^- . Ainsi, on obtient l'égalité (5.2.5).

De la même façon, on justifie les paramètres du deuxième front, sortant du milieu, pour lequel on a :

$$s^+ = 1, \quad G^+ = F(s^+) = F(1) = 0 ; \quad F'(s^-) \neq 0, \quad F'(s^+) = 0$$

Ainsi, les conditions (2.5.3) et (2.5.4) prennent la forme :

$$U_f = \frac{-F(s^-)}{1-s^-} \quad U_f = F'(s^-)$$

et on obtient une seule équation non linéaire qui détermine la saturation sur le front s^- :

$$F'(s^-) = -\frac{F(s^-)}{1-s^-} \quad (5.2.6)$$

Supposons que $s^- = s_2$ et examinons le triangle $B-s_2-I$ sur le diagramme de la Fig. 5.2.4. La pente de la ligne $B-I$ est $-F(s^-)/(1-s^-)$. En même temps, la ligne $B-I$ est tangente à la courbe $F(s)$ au point s^- . Ainsi, on obtient l'égalité (5.2.6).

Cette interprétation justifie la méthode graphique de construction de la solution discontinue.

5.3. DÉPLACEMENT PAR LA PHASE MOUILLANTE

Examinons, maintenant, le déplacement pour des valeurs différentes du nombre capillaire.

5.3.1. PROPRIÉTÉS DU FLUX SOMMÉ $G(s)$

Si la phase déplaçante est mouillante, le vecteur unitaire des forces capillaires est orienté dans le sens positif de l'axe x : $e_c = 1$. Le flux sommé, $G(s) \equiv F(s) + \frac{e_c}{Ca} F_c(s)$, qui détermine la structure de la solution du problème (5.1.1) a la forme présentée sur les Fig. 5.3.1, 5.3.2 et 5.3.3, pour trois nombres capillaires.

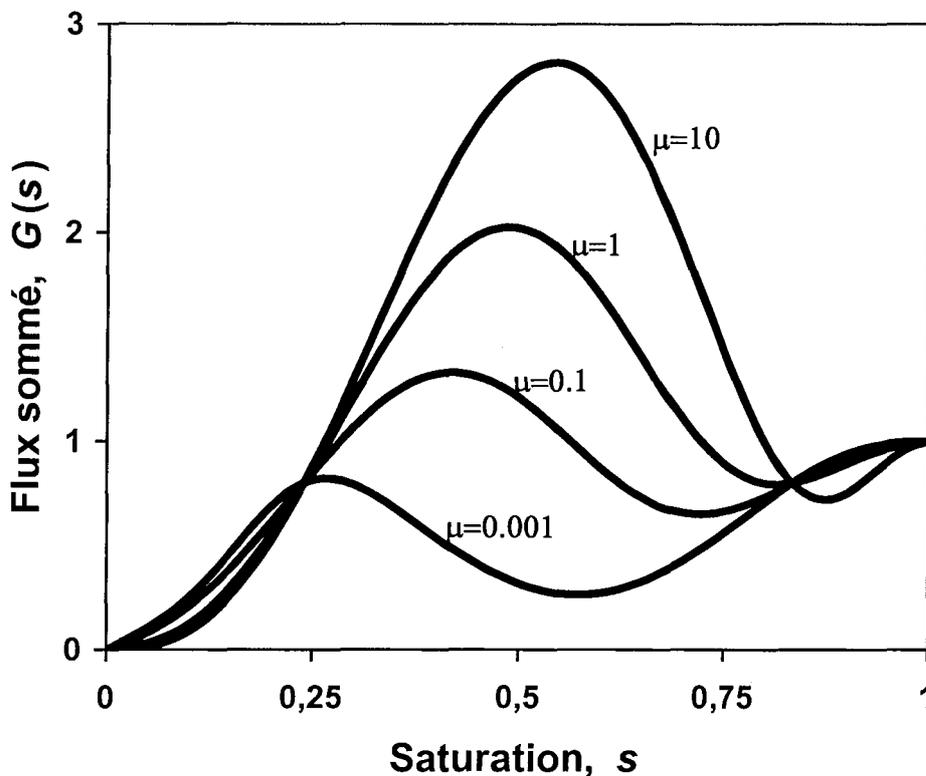


Fig. 5.3.1. Flux sommé, $G(s)$, pour $Ca=0.1$ et phase déplaçante mouillante

5.3.2. SOLUTION DU PROBLÈME DE DÉPLACEMENT POUR DES Ca MODÉRÉS ET DES $\bar{\mu}$ GRANDS

Nous allons construire la solution pour un des cas les plus répandus de la courbe $G(s)$, présenté sur la Fig. 5.3.4. Ce cas est typique pour des nombres capillaires faibles et des rapports de viscosité grands.

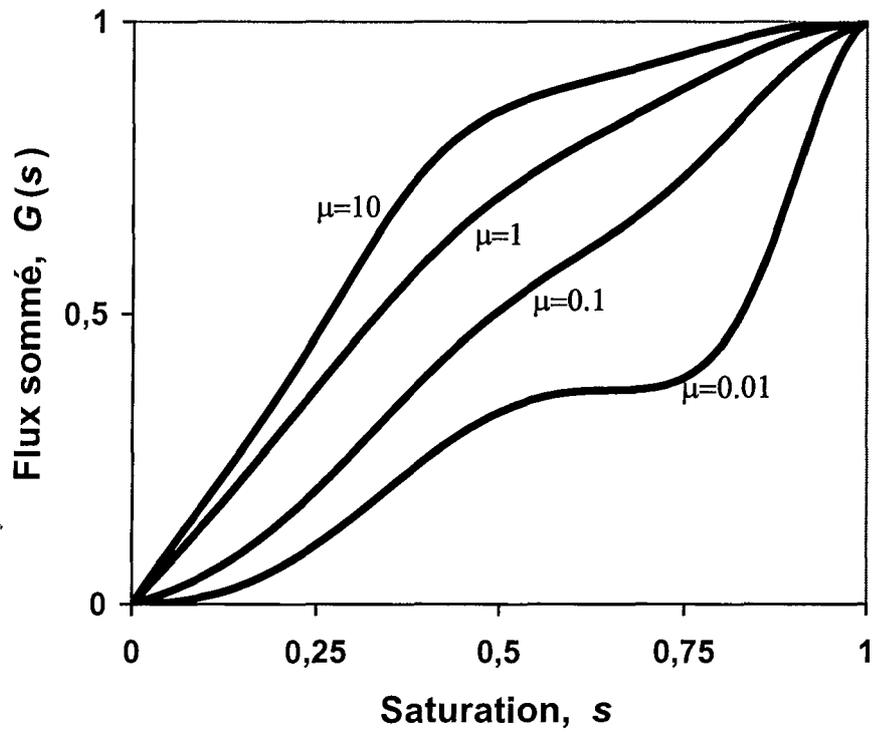


Fig. 5.3.2. Flux sommé, $G(s)$, pour $Ca=1$ et phase déplaçante mouillante

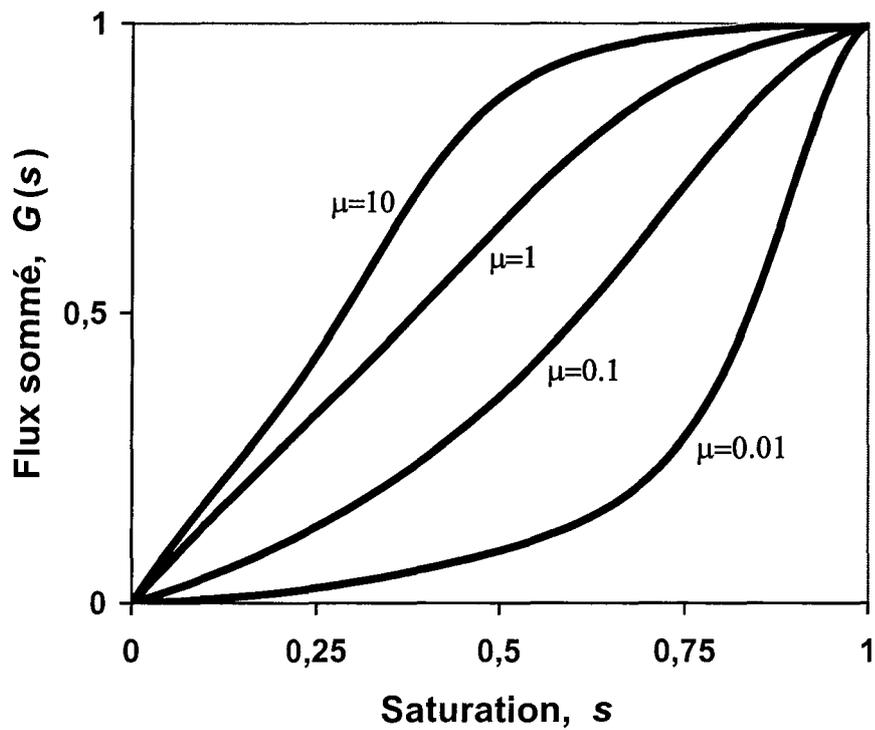


Fig. 5.3.3. Flux sommé, $G(s)$, pour $Ca=10$ et phase déplaçante mouillante

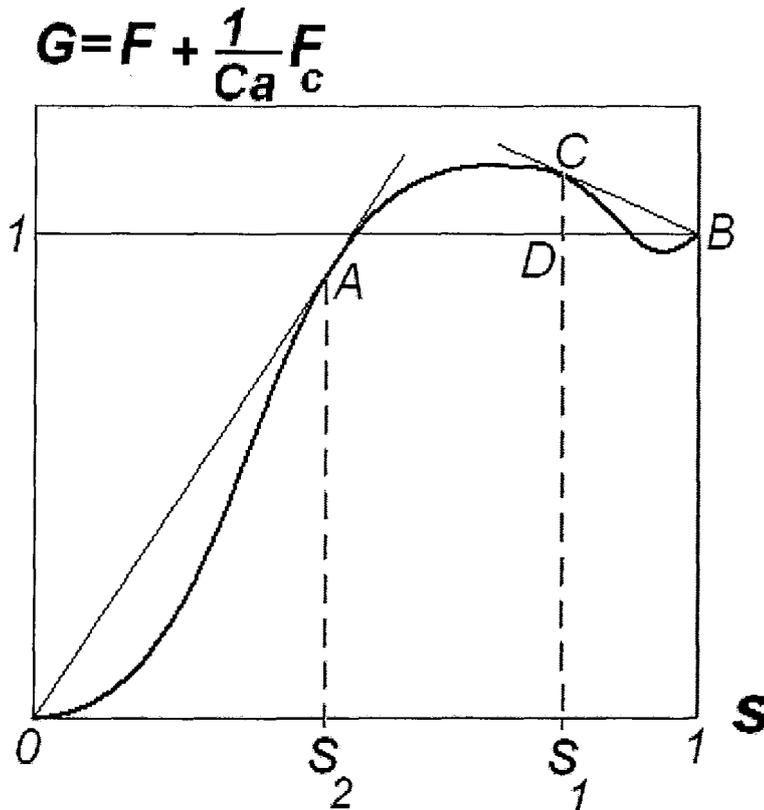


Fig. 5.3.4. Technique graphique de construction de la solution

Comme dans le cas précédent, il est facile de montrer que le problème n'a pas de solutions continues. La solution discontinue est présentée sur la Fig. 5.3.5 par la courbe solide (la solution formelle continue est en pointillés).

Les points caractéristiques de cette solution sont déterminés graphiquement par les deux tangentes, OA et BC , sur le diagramme $G(s)$ (Fig. 5.3.4).

La présence d'un second front sortant du milieu est une particularité caractéristique de ces solutions. Sa vitesse est, cependant, assez petite et diminue au fur et à mesure de l'augmentation de Ca . Ceci signifie qu'une partie du mélange diphasique forme une circulation à contre-courant à l'entrée du milieu.

Nous insistons sur le fait que cette solution est typique pour des Ca assez faibles. Pour des grands Ca , ce second front disparaît, supprimé par des gradients de pression élevés. En effet, dans ce cas, la courbe $G(s)$ est présentée sur la Fig.5.3.4, et est identique au flux fractionnaire de la théorie classique. Ainsi, on n'obtient qu'un seul front type « Buckley-Leverett ».

Ainsi, la présence du front arrière peut être pratiquement négligée par rapport à la présence du front s'avancant dans le milieu. Cependant, la formation spontanée d'un faible contre-courant à l'entrée du milieu est un nouveau résultat de la théorie des écoulements diphasiques en milieux poreux, aucunement prédit par la théorie classique.

Il est important que la saturation à l'entrée s'établisse automatiquement et, donc, ne puisse pas être imposée comme une condition limite.

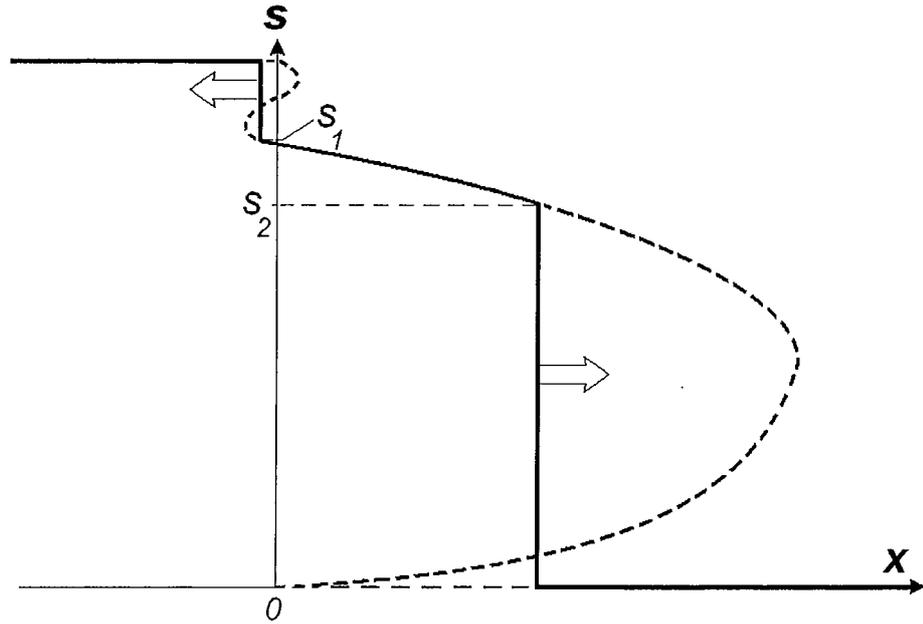


Fig. 5.3.5. Solution discontinue du problème de déplacement par la phase mouillante (courbe solide)

5.3.3. JUSTIFICATION DE LA SOLUTION OBTENUE

Examinons les conditions de Hugoniot (5.2.3) et d'entropie (5.2.4) pour les deux fronts. Pour le front entrant, on a :

$$s^+ = 0, G^+ = G(0) = 0 ; \quad s^- = s_2, G^- = G(s_2); \quad G'(s^-) > 0, \quad G'(s^+) = 0$$

Pour le front sortant du milieu :

$$s^+ = 1, G^+ = G(1) = 1 ; \quad s^- = s_1, G^- = G(s_1); \quad G'(s^-) > 0, \quad G'(s^+) = 0$$

Ainsi, (5.2.3) et (5.2.4) prennent la forme :

$$U_{f1} = \frac{1 - G(s_1)}{1 - s_1} = G'(s_1) \quad \text{pour le front arrière} \quad (5.3.1-a)$$

$$U_{f2} = \frac{G(s_2)}{s_2} = G'(s_2) \quad \text{pour le front avant} \quad (5.3.1-b)$$

L'interprétation graphique de ces deux équations définissant les valeurs de s_1 et s_2 est donnée sur le diagramme de la Fig. 5.3.4 où OA et BC sont deux tangentes à la courbe $G(s)$. Pour le triangle BCD on peut écrire la relation (5.3.1-a), tandis que le triangle $O-A-s_2$ donne (5.3.1-b). Les vitesses des fronts sont égales aux pentes des lignes tangentes.

5.3.4. SOLUTION DU PROBLÈME DE DÉPLACEMENT POUR DES Ca MODÉRÉS ET $\bar{\mu}$ PETITS

Un autre cas de la courbe $G(s)$, présenté sur la Fig. 5.3.6, donne une solution différente. Suivant les Fig. 5.3.1 et 5.3.2, ce type de courbe est caractéristique pour des Ca et $\bar{\mu}$ assez petits.

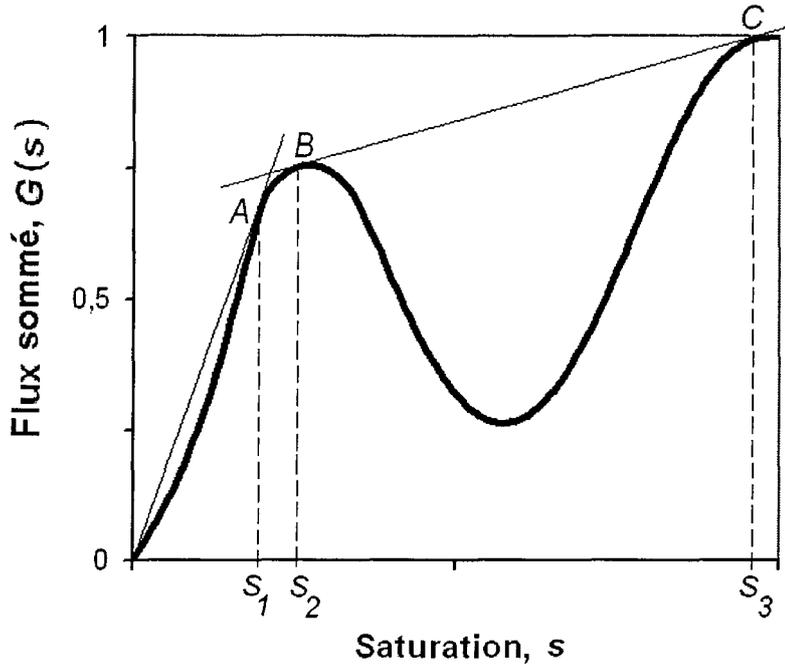


Fig. 5.3.6. Flux sommé assurant deux fronts positifs

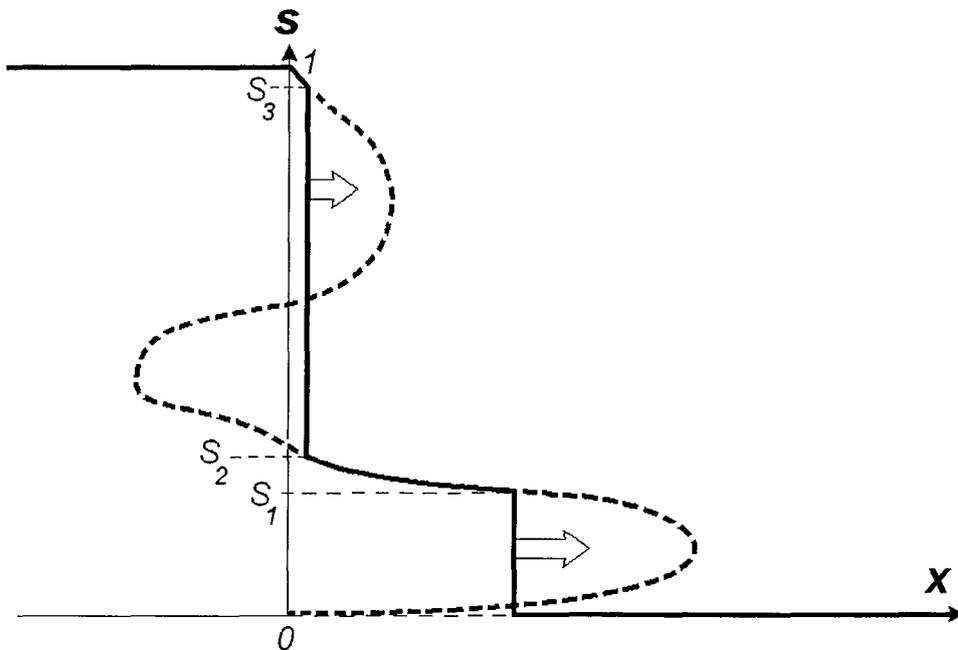


Fig. 5.3.7. Solution à deux fronts positifs (ligne solide)

La solution du problème de déplacement dans ce cas a la forme présentée sur la Fig. 5.3.7 (ligne solide). La ligne pointillée est la solution continue formelle.

Le front avant est formé dans le continuum percolant (*II*), qui est dans ce cas faiblement visqueux. Le front arrière est formé dans le *M*-continuum qui est moins mobile, car sa viscosité effective est déterminée par la phase la plus visqueuse.

Les autres types de courbes $G(s)$, pour des grands Ca , correspondent à la théorie classique de Buckley-Leverett.

5.4. DÉPLACEMENT PAR LA PHASE NON MOUILLANTE

5.4.1. PROPRIÉTÉS DU FLUX SOMMÉ $G(s)$

Si la phase déplaçante est non mouillante, le vecteur unitaire des forces capillaires est orienté dans le sens négatif de l'axe x : $e_c = -1$. La fonction $G(s) \equiv F(s) + \frac{e_c}{Ca} F_c(s)$ qui détermine la structure de la solution du problème (5.1.1) a la forme présentée sur les Fig. 5.4.1, 5.4.2 et 5.4.3, pour trois valeurs du Ca (0.1, 1 & 10).

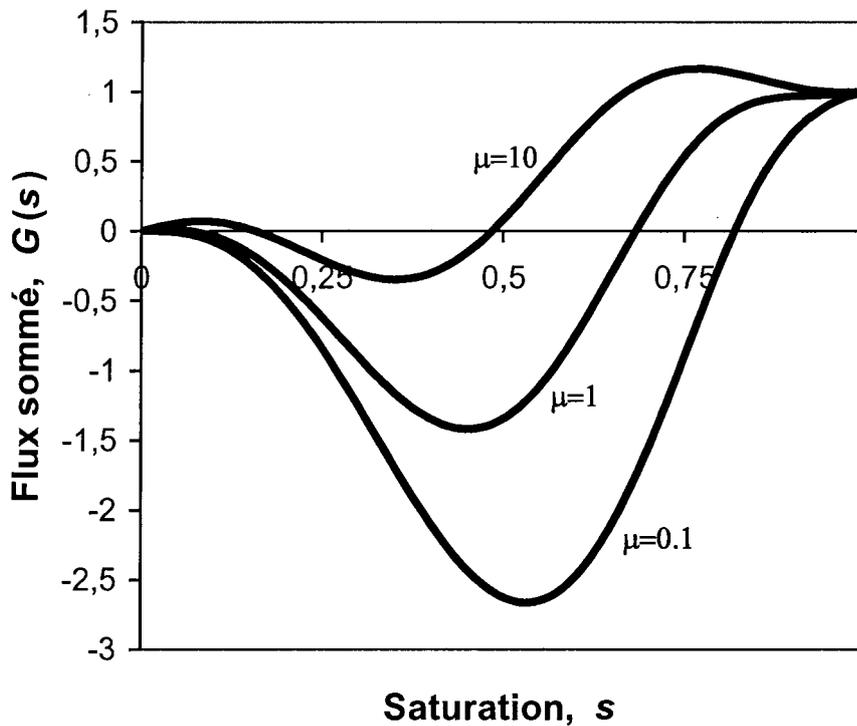


Fig. 5.4.1. Flux sommé, $G(s)$, pour $Ca=0.1$ et phase déplaçante non mouillante

5.4.2. SOLUTION DU PROBLÈME DE DÉPLACEMENT

Pour des grands Ca , la solution est qualitativement la même que celle obtenue dans le cas d'un déplacement par la phase mouillante, la fonction $G(s)$ ayant la même allure (Fig. 5.4.3 et 5.3.3). Ceci s'explique car un Ca grand correspond à des forces capillaires négligeables, i.e. : le rôle de la mouillabilité s'estompe jusqu'à s'annuler.

Pour des petits Ca , la situation devient différente. Il existe une valeur critique maximale Ca_* à partir de laquelle la courbe $G(s)$ n'a plus de tangente positive, comme le montre la Fig. 5.4.4.

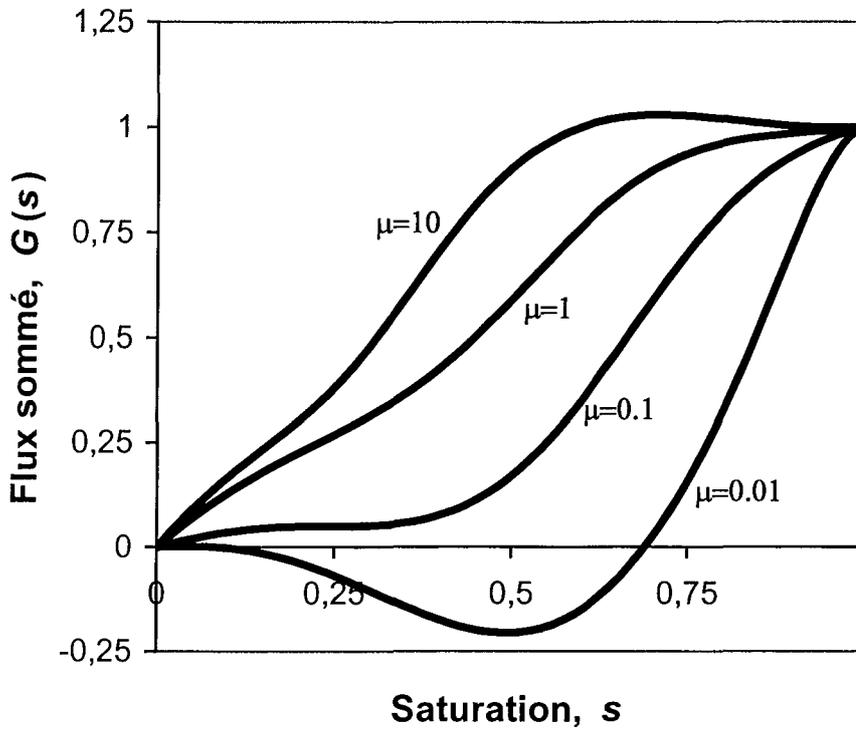


Fig. 5.4.2. Flux sommé, $G(s)$, pour $Ca=1$ et phase déplaçante non mouillante

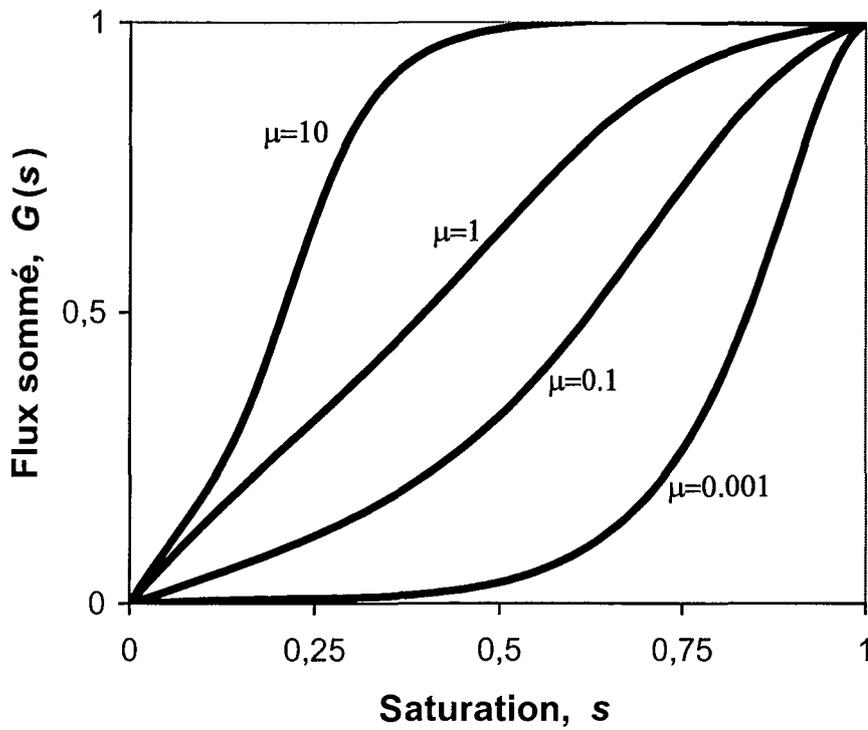
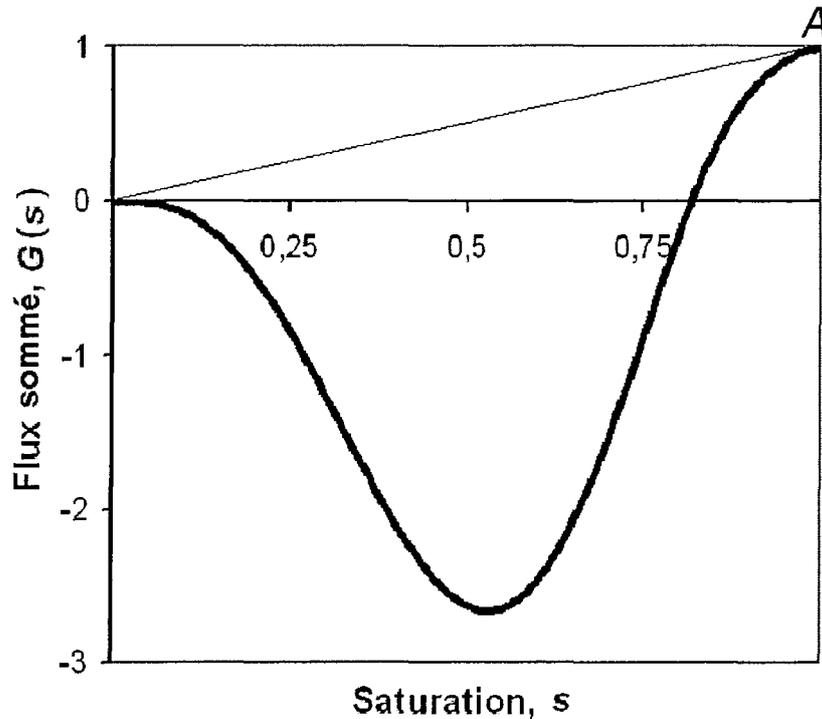


Fig. 5.4.3. Flux sommé, $G(s)$, pour $Ca=10$ et phase déplaçante non mouillante


 Fig. 5.4.4. Courbe critique du flux total pour $Ca = Ca_*$.

Il est possible de montrer que la solution formelle continue n'existe pas. En même temps, l'absence de tangentes positives signifie qu'il n'existe pas de fronts pénétrant dans le milieu. Le problème n'a donc pas de solutions discontinues également.

Cet effet mathématique est en accord avec la physique du processus. En effet, la phase non mouillante ne peut pas pénétrer dans un milieu sans être fortement propulsée par une différence de pression externe. Alors, pour des petits nombres capillaires, il n'y a pas de pénétration. Le nombre critique Ca_* , qui détermine le seuil de non pénétration est défini comme la valeur maximale pour laquelle il existe une solution s^- de l'équation non linéaire :

$$G'(s^-) \equiv F'(s^-) - \frac{1}{Ca} F'_c(s^-) = \frac{F(s^-) - \frac{1}{Ca} F_c(s^-)}{s^-} \quad (5.4.1)$$

telle que : $0 < s^- < 1$ et $G'(s^-) > 0$.

CONCLUSIONS

On a montré qu'ils existent plusieurs régimes de déplacement déterminés par la typologie de la courbe du flux fractionnaire $G(s)$.

Pour des grands nombres capillaires, les forces capillaires deviennent négligeables et la solution du problème de déplacement tend vers la solution classique de Buckley-Leverett, qui ne dépend pas de la mouillabilité du milieu.

Pour des petits nombres capillaires et la phase déplaçante mouillante (imbibition capillaire), le processus d'imbibition est caractérisé par l'existence de deux fronts. L'un d'eux

s'avance dans le milieu, le second sort du milieu en formant un écoulement à contre-courant à l'entrée du milieu. L'augmentation du Ca réduit la vitesse de ce second front jusqu'à l'annuler.

Si la phase déplaçante est non mouillante, la diminution du Ca réduit la vitesse du front pénétrant dans le milieu jusqu'à zéro à partir d'une valeur critique Ca_* définie par le problème (5.4.1). Aux nombres capillaires inférieurs à Ca_* , la phase déplaçante ne peut pas pénétrer dans le milieu dû à des forces capillaires opposées au sens de la pénétration.

Il est important que, pour tous les régimes, la saturation à l'entrée du milieu s'établit automatiquement et soit entièrement définie par la structure du flux sommé $G(s)$. Plus exactement, la saturation à l'entrée est définie comme le point du maximum de la fonction $G(s)$, autres que $s=0$ ou $s=1$. Ainsi la saturation à l'entrée ne peut pas être imposée comme une condition limite. Ceci est tout à fait conforme à la physique du processus et prouve encore une fois que les régimes capillaires ne peuvent pas être décrits par une équation parabolique, qui demande toujours une condition limite à l'entrée du milieu.

5.5. COMPARAISON AVEC DES SIMULATIONS EN RÉSEAUX CAPILLAIRES

On a calculé le déplacement de la phase non mouillante par la phase mouillante en utilisant le code numérique décrit dans le chapitre 3 qui effectue des simulations à l'échelle microscopique. L'objectif de cette étude était d'homogénéiser les résultats de calcul et de les comparer avec des solutions analytiques obtenues dans le cadre du modèle proposé.

On a modélisé un déplacement 3D dans un parallélépipède. Initialement, le milieu était rempli d'une seule phase. La phase déplaçante entrait à travers une seule face et sortait à travers la face opposée. Toutes les autres faces étaient imperméables. Ainsi, l'écoulement macroscopique est mono-dimensionnel et on peut donc comparer les résultats des calculs avec des solutions analytiques. Le nombre capillaire était égal à 2, le rapport des viscosités était 0.5. Le résultat des calculs est présenté sur la Fig. 5.5.1 sous forme d'une distribution spatiale de la saturation pour un temps donné.

Pour construire la solution analytique correspondante, il suffisait de déterminer la courbe du flux fractionnaire $G(s)$ équivalente à des simulations à l'échelle microscopique. Suivant l'équation (5.1.1), en coordonnées adimensionnelles, c'est le seul paramètre du système qui intervient dans la solution analytique. La fonction $G(s)$ résultant des simulations numériques a été obtenue par un calcul direct basé sur sa définition, c'est-à-dire comme le débit de la phase déplaçante divisé par le débit total. En effectuant cette procédure pour chaque section du milieu orthogonale à l'écoulement macroscopique et en calculant simultanément la saturation dans ces sections, on a obtenu la fonction $G(s)$. Cette fonction correspond qualitativement à celle présentée sur la Fig. 5.3.6.

La solution analytique obtenue, aux même temps que la courbe numérique (1), est présentée sur la Fig. 5.5.1 (courbe 2).

Premièrement, il faut remarquer que la différence de comportement des courbes au voisinage du front d'avancée n'est pas un défaut des solutions obtenues. En effet, l'absence d'un front brusque d'avancée dans la courbe numérique est causée par l'effet de dispersion hydrodynamique sur les hétérogénéités du milieu, qui n'étaient pas pris en compte par la solution analytique. Cependant, la position du front d'avancée prédit par la solution analytique est quantitativement exacte.

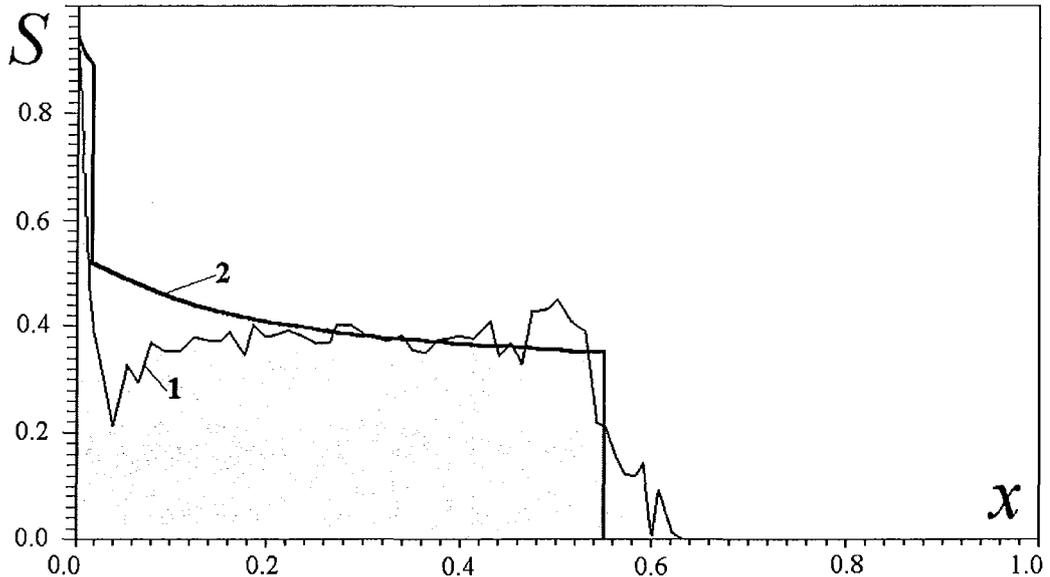


Fig. 5.5.1. Comparaison de la solution analytique avec des simulations numériques

On voit également que la solution analytique décrit qualitativement bien l'existence de deux fronts de déplacement. Ce fait est un avantage par rapport aux solutions classiques qui ne contiennent qu'un seul front. Cependant, la vitesse du front arrière, prédite par la solution analytique, est un peu plus grande que celle numérique (il aura une divergence faible dans le positionnement des fronts arrières dans le temps).

Un défaut clairement manifesté par la solution analytique consiste en l'allure générale de sa partie continue entre deux fronts, qui est décroissante, tandis que la courbe numérique passe par un minimum après lequel elle augmente. Ce comportement de la courbe numérique reflète un comportement plus compliqué à l'intérieur du ménisque-continuum que celui déterminé par des relations de fermeture admises pour le modèle de ménisque proposé. En effet, si on examine le schéma du mécanisme de duplication qui assure la formation du champ répétitif de ménisques (Fig. 2.3.7), on voit que, suite à une avancée des fronts macroscopiques, la saturation dans le M-continuum n'est pas constante dans le temps, comme elle le serait avec la relation de fermeture (2.5.11). Cette saturation augmente jusqu'à une valeur finale qui est déterminée par la collision de deux fronts voisins. Ce processus d'augmentation de la saturation s^I représente le résultat d'un processus d'échange de masse entre le M-continuum et le continuum II. L'augmentation de la saturation sur la courbe numérique reflète exactement ce processus d'échange entre les continua.

Cette analyse ouvre les perspectives d'un perfectionnement des relations de fermeture pour le modèle proposé.

Chapitre **6**

**MODÈLE DE MÉNISQUE :
SIMULATION NUMÉRIQUE
DES PROBLÈMES 2D et 3D**

6.1. MÉTHODE NUMÉRIQUE DFP : DIFFÉRENCES FINIES - PERCOLATION

Le modèle diphasique proposé dans cette thèse a deux propriétés importantes qui forment la base du développement de la méthode numérique. Premièrement, l'équation de transport de saturation est clairement hyperbolique, même en présence des forces capillaires, et donc admet des solutions discontinues. Pour un spectre de problèmes de déplacement d'un fluide par un autre qui sont conditionnés par un front initial, une discontinuité en saturation est donc un attribut obligatoire pour obtenir des solutions. Ainsi, la méthode numérique devrait être basée sur l'existence de discontinuités. Deuxièmement, ce modèle a une liaison directe avec la théorie de percolation. En particulier, comme il était mentionné dans le chapitre 2, les paramètres de l'équation de transport des ménisques peuvent être obtenus par une des méthodes de percolation d'invasion. Une affirmation plus forte même est valable : l'équation de transport des ménisques peut être obtenue suite à l'homogénéisation d'un des algorithmes de percolation d'invasion. Cette liaison du *meniscus model* avec la théorie de percolation permet de développer une méthode numérique pour sa résolution qui est basée sur les algorithmes de percolation.

Le principe de la solution qui résulte de cette analyse préalable est d'introduire explicitement les discontinuités sous forme de fronts de déplacement, de reformuler, utilisant le modèle proposé, les lois de comportement des fronts, et donc de développer un algorithme itératif de calcul de propagation des fronts dans l'espace.

6.1.1. MODÈLE DE CALCUL

Supposons que le milieu poreux soit hétérogène. En particulier, il peut être constitué de fragments de différentes perméabilités et porosités. Dans chaque fragment, l'écoulement est de type ménisque. Examinons le modèle de ménisque de l'écoulement diphasique en milieu poreux. Pour simplifier l'exposé des principes de la méthode, nous utiliserons le modèle limite (2.6.2).

Soient Ω le domaine de l'écoulement, $\partial\Omega$ sa limite, Γ_0 la surface d'injection appartenant à Ω ou à sa frontière $\partial\Omega$. Alors, (2.6.2) prend la forme sur Ω :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad (6.1.1-a)$$

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{grad} s = 0 \quad (6.1.1-b)$$

$$\vec{V} \equiv -\frac{K}{\langle \mu \rangle} \left(\operatorname{grad} P - \frac{P_c}{l} \eta_c(s) \vec{e}_c \right) \quad (6.1.1-c)$$

Suivant les propriétés du M -continuum (section 2.5.1), le vecteur unitaire capillaire \vec{e}_c est parallèle à \vec{V} hors des fronts de déplacements (un front de déplacement est la discontinuité en saturation). En outre, le vecteur capillaire est normal à la surface du front.

On ajoute les conditions initiales et aux limites décrivant le problème de déplacement :

$$s(x)|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x \notin \Gamma_0 \\ s^0, & x \in \Gamma_0 \end{cases}, \quad P|_{x \in \partial\Omega} = P_* \quad (6.1.2)$$

Bien que la fonction limite P_* soit arbitraire, elle n'est pas considérée comme constante. Soit ΔP la différence entre sa valeur maximale et minimale. Supposons que la concentration en ménisques mobiles, $\eta_c(s)$, soit non monotone et nulle aux points extrêmes :

$$\eta_c(s^0) = 0, \quad \eta_c(0) = 0 \quad (6.1.3)$$

La première relation a l'explication suivante. Nous supposons que la saturation d'injection, s^0 , est proche de 1 et a une valeur hors de la zone où la phase déplacée est mobile. Ainsi le système à saturation s^0 ne contient pas de ménisques mobiles, donc la concentration en ménisques est nulle.

6.1.2. PRINCIPE DE LA MÉTHODE : REMPLACEMENT DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT PAR UNE ÉQUATION DE CINÉMATIQUE DU FRONT

L'équation (6.1.1-b) avec la condition initiale (6.1.2) a une solution discontinue. La surface de discontinuité, $\Gamma_t(x)$, joue le rôle du front de déplacement. Avant le front, la saturation est nulle, derrière, elle est constante et égale à s^0 (plus exactement, elle est quasiment constante et proche de s^0). Ainsi, le problème consiste à déterminer, pour chaque temps, la forme du front de déplacement, $\Gamma_t(x)$, qui, dans un milieu hétérogène, peut avoir une forme très irrégulière.

L'idée essentielle de la méthode est donc la suivante. Si on accepte que les saturations locales avant et après le front soient constantes, alors le champ de saturation est défini uniquement par la position du front. Pour le modèle limite (2.6.2), cette hypothèse sur le champ de saturation est exacte, comme on vient de le montrer. Pour le modèle dégénéré, (2.6.12), qui a des solutions partiellement continues non constantes, du type de Buckley-Leverett, l'hypothèse du champ de saturation constant par morceaux est une approximation. Une fois cette hypothèse acceptée, au lieu de calculer l'équation de transport avec une discontinuité, on peut calculer l'équation cinématique d'avancement du front qui, pour un instant arbitraire t , prend la forme généralisée :

$$\Gamma_{t+\Delta t}(x) = \Gamma_t(x) + V_n \Delta t \quad (6.1.4)$$

La vitesse du front, suivant les conditions d'entropie (§ 5.2.3, condition 5.2.4), est égale à la vitesse de transport qui est donnée par l'équation (6.1.1-c). Puisque la saturation est constante par morceaux, la vitesse ne dépend que de deux variables inconnues : la pression P et le vecteur capillaire \vec{e}_c . Ainsi, si le champ de pression et le vecteur capillaire en chaque point du milieu sont connus, la vitesse du front peut être calculée en n'importe quel point. Puisque les variables s , P et V sont couplées, il est impossible de calculer le champ de pression indépendamment du champ de saturation. Cependant, une technique itérative peut être

mise en œuvre dans le temps, tenant compte qu'à l'instant initial le champ de saturation est donné.

Il reste à déterminer la procédure de calcul du vecteur capillaire. Puisque hors du front la saturation peut prendre deux valeurs s^0 ou 0, la fonction $\eta_c(s)$ est égale à zéro partout, sauf sur le front, suivant (6.1.3). Sur le front, la fonction $\eta_c(s)$ peut être calculée pour une saturation moyenne entre s^0 et 0. Ainsi, en accord avec (6.1.1), on n'a besoin de calculer le vecteur capillaire que sur le front de déplacement. Suivant le paragraphe 6.1.1, le vecteur capillaire est normal à la surface du front.

6.1.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE

Cette analyse donne naissance à l'algorithme de résolution suivant pour le problème (6.1.1) - (6.1.2).

1. Pour l'instant initial, le champ de pression et de vitesse, ainsi que le vecteur capillaire peuvent être calculés précisément, car la saturation s est donnée par la distribution initiale (6.1.2) et la position initiale du front est également connue : $\Gamma_t(x)|_{t=0} = \Gamma_0$.

Alors, le vecteur capillaire est défini comme :

$$\vec{e}_c = \begin{cases} \pm \vec{n}, & x \in \Gamma_t \\ 0, & x \notin \Gamma_t \end{cases} \quad (6.1.5)$$

où \vec{n} est le vecteur normal au front, orienté de la phase déplaçante vers la phase déplacée ; le signe + est réservé dans le cas où la phase déplaçante est mouillante.

Le champ de pression P est calculé à l'aide des relations résultant de (6.1.1-a) et (6.1.1-c) :

$$\operatorname{div} \left(\frac{K}{\langle \mu \rangle} \left[\operatorname{grad} P - \frac{P_c}{l} \eta_c(s) \vec{e}_c \right] \right) = 0, \quad x \in \Omega \quad (6.1.6-a)$$

$$P|_{x \in \partial \Omega} = P_* \quad (6.1.6-b)$$

Le champ des vitesses est alors calculé en utilisant (6.1.1-b).

La vitesse normale du front, $V_n(x)$, peut alors être calculée.

2. Pour un petit pas de temps, Δt , on peut calculer le déplacement du front en utilisant (6.1.4) :

$$\Gamma_{\Delta t}(x) = \Gamma_0 + V_n \Delta t \quad (6.1.7)$$

3. Pour la nouvelle position du front, on recalcule le champ de saturation, en supposant que $s = s^0$ derrière le front et $s = 0$ devant le front.

Cet algorithme est répété.

Si $\Delta t \rightarrow 0$, l'algorithme proposé converge évidemment vers la solution cherchée.

L'algorithme décrit ci-dessus contient deux parties majeures : 1) la simulation numérique du problème de Dirichlet (6.1.2) pour l'équation de Poisson (Laplace avec le membre de

droite) décrivant le champ de pression ; 2) le calcul de l'avancée du front en utilisant la relation cinématique (6.1.4).

La réalisation numérique de l'algorithme itératif (6.1.4) ne pose pas de problèmes si le front conserve une forme « assez » régulière. Ce n'est cependant pas toujours le cas dans un milieu hétérogène. Le front peut prendre des formes extrêmement chaotiques et il est nécessaire de suivre la condition de non recouvrement des fronts. Un exemple de ce type de configuration interdite est présenté sur la Fig. 6.1.1.

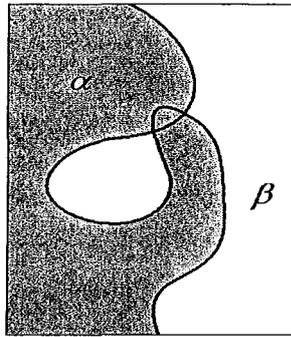


Fig. 6.1.1. Auto-croisement interdit du front de déplacement de la phase β par la phase α

6.1.4. DISCRÉTISATION DU PROCESSUS D'AVANCÉE DU FRONT

Le calcul de l'avancée du front s'effectue numériquement, ce qui demande une discrétisation du domaine. Dans chaque cellule de la maille, nous supposons que le front a la forme d'une surface plate, parallèle à un des axes du système de coordonnées choisies (Fig. 6.1.2).

Ainsi, nous obtenons un système de « fronts locaux » dont la somme constitue le front global discrétisé. Le calcul de l'avancée du front est donc réduit au calcul de l'avancée des fronts locaux plats.

Maintenant, il est nécessaire d'établir les règles du mouvement de chaque front local afin que la somme des mouvements discrets soit compatible avec le mouvement global de la surface non discrétisée. Nous allons donc remplacer le mouvement réel complexe 3D de chaque front local par une suite de mouvements élémentaires qui consistent en : (i) une avancée 1D le long d'un axe entre deux nœuds voisins (y compris le front peut faire un demi-tour), (ii) une rotation brusque d'un angle de 90° dans un nœud et (iii) un branchement et une naissance de nouveaux fronts locaux dans un nœud. Ces mouvements élémentaires de chaque front sont similaires à ceux du système des ménisques dans le modèle microscopique du chapitre 3. Une illustration de ces règles est donnée sur la Fig. 6.1.3.

Si un front local est situé entre deux nœuds voisins (A et B), il ne peut qu'avancer le long de la ligne AB (dans les deux sens) sans pivoter et ni se séparer. Le pivotement et la séparation s'effectuent dans un nœud du maillage.

Ceci donne un algorithme entièrement défini de la solution discrétisée de l'équation (6.1.4).

Pour éviter les auto-croisements du front, on ajoute un algorithme logique de contrôle de l'existence d'une voie continue entre un front local donné et la sortie du milieu. Cet algorithme est entièrement similaire à celui décrit dans le chapitre 3.

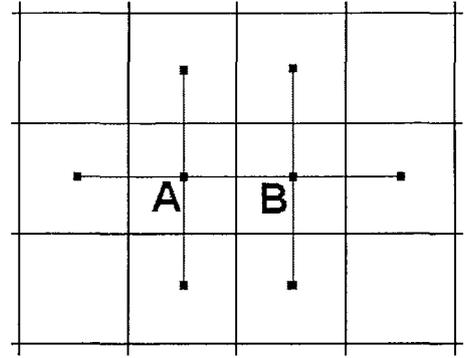
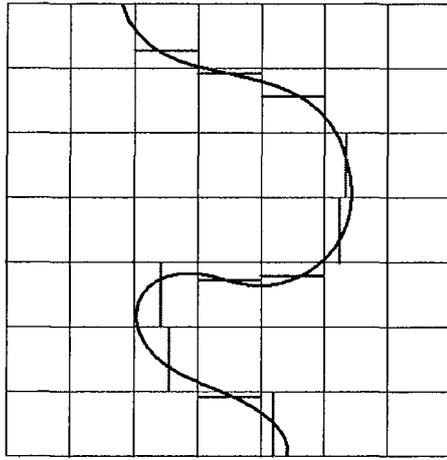


Fig. 6.1.2. Discretisation du front dans le domaine maillé

Fig. 6.1.3. Sur les règles de mouvement des fronts locaux

6.1.5. CALCUL DE TYPE PERCOLATION POUR L'AVANCÉE DES FRONTS LOCAUX

La schématisation discrétisée de l'avancée des fronts locaux permet de simplifier le calcul de la vitesse normale de chaque front dans l'équation de base (6.1.4). En effet, tout front local est supposé être plat et parallèle à l'un des axes du système de coordonnées. En outre, le mouvement 3D de chaque front est représenté comme une suite de mouvements mono-dimensionnels entre les nœuds voisins et de pivotements brusques dans les nœuds. Puisque dans le cas mono-dimensionnel les équations de l'écoulement diphasique ont une solution analytique, on peut l'utiliser pour résoudre (6.1.4). A des petites échelles, nous pouvons simplifier cette solution en utilisant des fonctions approchées correspondant au schéma de déplacement quasi-piston, au lieu de la solution exacte de type Buckley-Leverett pour (2.6.12) :

$$\begin{aligned} s(x,t) &= s^-, \text{ avant le front local } \xi(\tau), \\ s(x,t) &= 0, \quad \text{après le front local } \xi(\tau) \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Ainsi, le problème est réduit au calcul de la constante s^- et de la coordonnée mobile du front local $\xi(\tau)$ dans le fragment donné du milieu poreux.

A partir de (2.6.12) il est possible d'obtenir pour des fronts se déplaçant dans une direction soit verticale, soit horizontale :

$$\eta_v \equiv \frac{\xi}{\Delta h} = \frac{1}{(\lambda-1)} \left\{ \sqrt{1 + (\lambda-1)[\eta_0^2(\lambda-1) + 2\eta_0 + \Delta p \psi \Delta \tau / \varphi]} - 1 \right\} \quad (6.1.9)$$

$$\eta_h \equiv \frac{\xi}{\Delta l} = \frac{1}{(\lambda-1)} \left\{ \sqrt{1 + (\lambda-1)[\eta_0^2(\lambda-1) + 2\eta_0 + \Delta p \psi \Delta \tau \gamma / \varphi]} - 1 \right\}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 + p_c^+ + \langle \Lambda \rangle \quad \psi = \frac{K_i}{K} \quad \varphi = \frac{\phi_i}{\phi} \quad \Delta \tau = \frac{\Delta t}{t_v^*} \quad \gamma = \frac{t_v^*}{t_h^*}$$

$$t_v^* = \frac{\phi \mu_2 (\Delta h)^2}{2KP^0 F'^+} \quad t_h^* = \frac{\phi \mu_2 (\Delta l)^2}{2KP^0 F'^+} \quad \lambda = \frac{k_1^* + k_2^* \mu}{k_1^+ + k_2^+ \mu}$$

où p_1, p_2 sont des pressions limites entre deux nœuds ; $\langle \Lambda \rangle$ est le charge de gravité moyenne entre deux nœuds (nulle pour les mouvements horizontaux) ; $\Delta \tau$ est le pas de temps adimensionnel ; $\Delta l, \Delta h$ sont les longueurs des mailles élémentaires horizontales et verticales du milieu ; ξ_0 est la position du front local entre deux nœuds à l'instant τ_0 ; ψ , (resp. φ) sont les rapports de la perméabilité (resp. porosité) locale sur la perméabilité (resp. porosité) moyenne du milieu ; k_1^0, k_2^0 sont les perméabilités relatives prises à la saturation initiale.

6.1.6. ALGORITHME FINAL DE SIMULATIONS

L'algorithme de cette méthode est le suivant :

1) On effectue la discrétisation du milieu poreux et on fixe les paramètres de toutes les mailles du milieu : perméabilité, porosité, longueurs.

2) On calcule le champ de pression à l'instant initial. Dans la thèse, on a appliqué un code numérique standard développé à l'Oil & Gas Research Institut de l'Académie des Sciences de Russie qui utilise une méthode de changement de directions de la solution de l'équation de Laplace (ou de Poisson) avec des conditions de Dirichlet ou Neumann.

3) On calcule le premier pas de temps $\Delta \tau$ comme le temps moyen de remplissage des pores verticaux de la première série jouxtant la section $x=0$. Pour le temps de remplissage, on obtient de (6.1.9) :

$$\Delta \tau = \min_i \{ \Delta \tau^i \}$$

$$\Delta \tau_v^i = \frac{\lambda + 1 - 2\eta - \eta^2 (\lambda - 1)}{\psi \Delta p / \varphi} \quad \text{pour les canaux verticaux}$$

$$\Delta \tau_h^i = \frac{\lambda + 1 - 2\eta - \eta^2 (\lambda - 1)}{\gamma \psi \Delta p / \varphi} \quad \text{pour les canaux horizontaux}$$

où i est le numéro de tous les tubes contenant le front.

A chaque fois, le pas de temps $\Delta \tau$ est recalculé comme un temps minimal de l'arrivée des fronts locaux jusqu'à un nœud voisin. Donc, lors d'un pas $\Delta \tau$, qu'un seul front atteint son nœud voisin.

4) On lance des algorithmes logiques qui effectuent les fonctions suivantes : vérification de la possibilité d'un pivotement du front arrivé dans le nœud, de formation de nouveaux fronts, choisir les voies de passage tels que les fronts locaux appartenant aux différents

fragments du milieu ne se croisent pas. Dans le code du calcul, ce bloc est présenté par le système des procédures logiques.

- 5) On calcule les nouvelles coordonnées des fronts locaux en utilisant (6.1.9).
- 6) On recalcule le champ de pression.
- 7) On calcule le nouveau pas de temps, ...

6.1.7. COMBINAISON DE LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES ET DE PERCOLATION

L'algorithme de percolation dynamique développé pour la simulation de l'équation de transport de la saturation provient d'une famille tout à fait différente par rapport à celle de la méthode des différences finies ou éléments finies utilisée pour la simulation de l'équation de Laplace pour le terme de pression. D'un point de vue technique, une des différences principales est le pas de discrétisation. Dans le schéma aux différences finies, le pas spatial est fixe et égal à la longueur d'une maille élémentaire du milieu, l ; le pas temporel est également fixe et égal à Δt . Dans l'algorithme de percolation, le pas élémentaire de propagation de chaque front de déplacement est égal à $V_n \Delta t$. Pour un Δt fixe et une vitesse très faible, le pas de déplacement du front peut être beaucoup plus petit que le pas l . Autrement dit, l'algorithme de percolation fonctionne à une échelle tout à fait différente de l'échelle de l'algorithme des différences finies.

Formellement, l'algorithme développé ressemble bien à celui du modèle numérique du réseau capillaire (Chapitre 3). En effet, si on remplace les mailles du milieu poreux avec des fronts locaux par des pores individuels avec des ménisques, on obtient un algorithme mathématiquement similaire. D'ici, proviennent toutes les particularités de cet algorithme, mentionnées dans le chapitre 3, y compris son caractère bi-échelle.

La méthode d'accélération de l'algorithme de percolation proposée dans le chapitre 3 peut être également appliquée dans ce cas. Une autre méthode d'accélération du calcul consiste à choisir le pas de temps de façon qu'il soit de l'ordre du temps de passage d'un front local entre deux nœuds voisins. Pour un pas suffisamment petit, on acceptera que le champ des pressions reste quasiment invariable. Ainsi, on peut faire tout une suite de pas de percolation sans recalculer les pressions.

Il est nécessaire de noter qu'une telle décomposition du problème en deux problèmes (équations de Laplace et de percolation dynamique) correspond bien au processus physique, dans lequel la pression est quasi-stationnaire, suite à l'incompressibilité des fluides, et toute la non stationnarité est apportée par le transport des ménisques.

6.2. APPLICATION DE LA MÉTHODE DFP AU PROBLÈME DU DNAPL DANS UNE NAPPE

Examinons le problème de la pénétration d'une phase non aqueuse dans une nappe à partir de la surface du sol. Nous allons examiner le cas généralisé, y compris celui où la phase supérieure (déplaçante) est plus lourde que la phase déplacée (l'eau ou l'air). Il est bien connu que le processus de ce type est gravitationnellement instable. Cette instabilité physique pose des problèmes cruciaux dans les tentatives de simuler ce processus numériquement. La méthode DFP décrite dans le chapitre précédent permet de simuler ce processus sans aucune limitation.

6.2.1. SUR LA MODÉLISATION NUMÉRIQUE D'UN ÉCOULEMENT INSTABLE

Un processus physiquement instable ne peut être modélisé numériquement que dans deux situations : (i) si l'échelle du maillage numérique est plus petite que la longueur minimale des ondes générées par l'instabilité ou (ii) si l'échelle du maillage numérique est plus petite que la longueur minimale à partir de laquelle l'instabilité physique a lieu.

Le premier cas ne peut se rencontrer que par hasard, car les longueurs d'ondes générées par une instabilité ne peuvent pas être prédites a priori. A fortiori, l'instabilité conduit à un chaos dans lequel toutes les longueurs sont présentes.

Le second cas signifie que l'on ne peut modéliser un processus instable que lorsque ce processus est stable. Les processus de ce type, qui sont instables dans une plage fixe de variation de leurs paramètres et sont stables hors de cette plage, seront appelés *conditionnellement instables*. Un exemple de cette situation est illustré par la compétition entre les forces gravitaires (déstabilisant le système) et la tension superficielle sur l'interface entre deux fluides (facteur stabilisant). Les trop grandes longueurs d'onde des perturbations ne peuvent pas déstabiliser ce système.

Les processus *inconditionnellement instables*, représente la seconde classe d'instabilité. Dans ces systèmes l'instabilité a toujours lieu, sans aucune limitation sur les paramètres. L'exemple est l'instabilité gravitationnelle d'une interface qui ne possède pas de tension superficielle. Autrement dit, s'il n'existe pas de facteurs stabilisant le processus est instable.

Le processus de pénétration d'un DNAPL dans une nappe est gravitationnellement instable. Si les forces capillaires agissent dans le même sens que la gravité, le processus est inconditionnellement instable. Par contre, si les forces capillaires sont orientées dans le sens contraire aux forces de gravité, elles jouent un rôle stabilisateur. Ce système devient conditionnellement instable. Les régimes stables seront atteints lorsque les forces capillaires stabilisantes suppriment le rôle de la pesanteur. Puisque, dans ce problème, les forces capillaires sont invariantes par rapport à la longueur d'onde des perturbations, on ne s'attend pas à ce que la stabilité puisse être atteinte pour un spectre particulier de longueurs d'onde. Ainsi, le choix d'un maillage numérique ne peut pas éviter l'apparition de l'instabilité

physique. En d'autres termes, le processus de ce type est inconditionnellement instable par rapport aux longueurs d'onde de la perturbation.

Donc, quelle que soit la direction des forces capillaires, le processus de pénétration d'un DNAPL est inconditionnellement instable par rapport aux longueurs d'onde des perturbations. La simulation numérique du processus de ce type est impossible, car un processus physiquement instable est décrit par un modèle mathématique instable. Ainsi, une instabilité physique provoque obligatoirement une instabilité mathématique.

Il existe, cependant, une possibilité de modéliser les processus inconditionnellement instables. Il s'agit des algorithmes du type *automates cellulaires*. L'avantage de ces algorithmes est qu'ils sont stables numériquement. Ainsi, l'instabilité physique ne provoque pas d'instabilité numérique. Un *automate cellulaire* peut alors modéliser, de façon précise, une instabilité physique.

Tenant compte que l'algorithme DFP décrit dans le chapitre précédent représente une version « *automate cellulaire* », nous allons l'appliquer pour modéliser la propagation du DNAPL.

6.2.2. DESCRIPTION PHYSIQUE DU SYSTEME

Si les forces capillaires agissent dans le même sens que la gravité, le comportement macroscopique du processus est assez prévisible sans aucune simulation. Par contre, si les forces capillaires sont opposées aux forces de gravité, le processus est non trivial, difficilement prévisible même qualitativement. Il est cependant évident que plusieurs régimes puissent exister, en particulier un régime de non pénétration du fluide. Suite à ces raisons, nous allons étudier le cas de la pénétration d'un DNAPL moins mouillant par rapport au milieu poreux que la phase déplacée. En pratique, c'est le cas qui est observé lors de la pénétration des hydrocarbures dans un sable ou un grès mouillé par de l'eau (zone non saturée de la nappe) ou rempli d'eau (zone saturée). Les hydrocarbures représentent soit une huile de pétrole s'échappant suite à une rupture d'un pipe-line, soit un résidu de l'industrie chimique. Ainsi, la phase déplaçante sera appelée « huile », avec « eau » comme phase déplacée.

Le cas le plus classique, est la remontée d'un liquide mouillant (eau) en milieu poreux, qui est utilisée largement pour la détermination expérimentale de la pression capillaire (Sheidegger, 1960). Dans ce cas, la force capillaire est motrice, tandis que la pesanteur freine le mouvement des fluides. Un des résultats est la hauteur finie de pénétration qui correspond à l'équilibre des forces capillaires-gravitationnelles.

La pénétration du liquide non mouillant en milieu poreux (haut en bas) représente le cas inverse du système précédent. La force de pesanteur est motrice, tandis que la force capillaire freine les fluides.

Soit le domaine d'écoulement présenté sur la Fig. 6.2.1.

La ligne AC est un axe de symétrie, CD est une surface imperméable. En ce qui concerne la surface DB, on suppose qu'elle est suffisamment éloignée de la zone de l'écoulement de manière à ce que la condition limite sur DB n'influence pas le processus. Sur la surface AB, on connaît la pression dans la couche d'huile (AM), et la pression atmosphérique sur la zone MB.

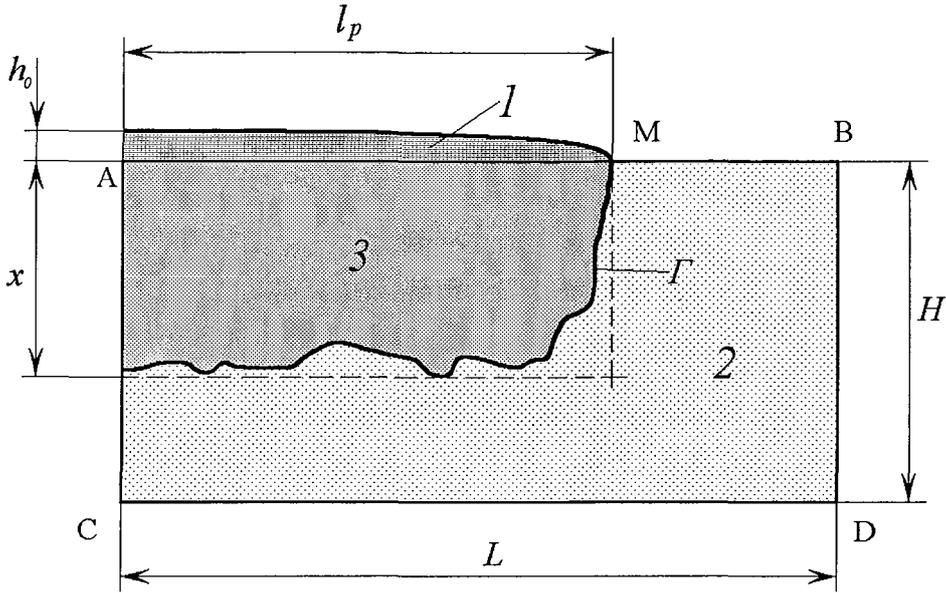


Fig. 6.2.1. Domaine d'écoulement

1 : couche d'huile à la surface; 2 : sol rempli d'air ; 3 : huile pénétrant dans le sol

Les deux phases sont incompressibles, i.e. : la compressibilité de l'air est négligée. Cette approximation est tout à fait admissible si les gradients de pression ne sont pas trop forts. En pratique, pour des vitesses traditionnellement très faibles de l'écoulement en milieu poreux et une viscosité dynamique de l'air pratiquement nulle, les gradients de pression dans l'air sont réellement négligeables.

6.2.3. MODÈLE D'ÉCOULEMENT

Utilisons le modèle de ménisque dégénéré, (2.6.12), dans lequel sont ajoutées des forces de pesanteur :

Hors du front Γ :

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}(\vec{V}_\alpha) = 0, \quad -\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}(\vec{V}_\beta) = 0 \quad (6.2.1-a)$$

$$\vec{V}_\alpha \equiv -\frac{Kk_\alpha}{\mu_\alpha} \text{grad}(P - \rho_\alpha g X_1), \quad \vec{V}_\beta \equiv -\frac{Kk_\beta}{\mu_\beta} \text{grad}(P - \rho_\beta g X_1) \quad (6.2.1-b)$$

Sur le front Γ :

$$[P]_\Gamma = -P_c \quad (6.2.1-c)$$

avec des conditions supplémentaires d'Hugoniot (5.2.3) et d'entropie sur Γ qui complètent le modèle.

Ici s est la saturation de l'huile, ρ_i est la masse volumique, μ_i est la viscosité dynamique, P est la pression, K est la perméabilité absolue, k_i est la perméabilité relative de la phase i , ϕ est la porosité, P_c est la pression capillaire moyenne sur un ménisque. Le système de

coordonnées (X_1, X_2) est cartésien, avec X_1 orienté suivant la verticale descendante. Les k_α et k_β sont les perméabilités relatives classiques. Le symbole $[P]_\Gamma$ signifie un saut de pression sur le front : $[P]_\Gamma \equiv P|_{\Gamma^+} - P|_{\Gamma^-}$; + et - signifient « après » et « avant » le front. Comme la phase déplaçante est non mouillante, la pression capillaire est négative en (6.2.1-c).

6.2.4. FORMULATION DU PROBLÈME DU DNAPL

Soient H et L la hauteur et la largeur du domaine de l'écoulement.

Le modèle (6.2.1) prend, après quelques transformations classiques, la forme suivante :

en $X \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$, $\tau > 0$:

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V} \text{grad } F(s) + \Delta \rho g \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{K k_\beta(s)}{\mu_\beta} F(s) \right) = 0, \quad \Delta \rho \equiv \rho_\alpha - \rho_\beta \quad (6.2.2)$$

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (6.2.3)$$

$$\vec{V} = -K \left(\frac{k_\alpha(s)}{\mu_\alpha} + \frac{k_\beta(s)}{\mu_\beta} \right) \text{grad } P + \left(\frac{k_\alpha(s) \rho_\alpha}{\mu_\alpha} + \frac{k_\beta(s) \rho_\beta}{\mu_\beta} \right) K g \vec{e}_1 \quad (6.2.4)$$

où \vec{e}_1 est le vecteur unitaire le long de l'axe vertical, $F(s) = \frac{k_\alpha}{k_\alpha + k_\beta \bar{\mu}}$.

Introduisons les variables adimensionnelles :

$$x = X_1/H, \quad y = X_2/L, \quad \tau = t/t_*, \quad p = P_\alpha/\Delta P, \quad v = V/V^*$$

$$f(x, y) = K(x, y)/K^*, \quad \varphi = \phi(x, y)/\phi^*, \quad \Phi = \bar{\mu} f k_\beta(s) F(s)$$

et les paramètres adimensionnels :

$$\omega = (L/H)^2, \quad \bar{\mu} = \mu_\alpha/\mu_\beta, \quad Bd^* = \frac{\Delta \rho g H}{P_c}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}$$

$$\lambda_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\Delta \rho} = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho} + 1}, \quad \lambda_\beta = \frac{\rho_\beta}{\Delta \rho} = \frac{1}{1 + \bar{\rho}}, \quad \gamma = \frac{\mu_\alpha}{\langle \mu \rangle} = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu} s + 1 - s}$$

où $t_* = \frac{\phi^* H}{V^*}$; $V^* = \frac{K^* \Delta P}{\mu_\alpha H}$, $\Delta P = \Delta \rho g H$, K^* et ϕ^* sont des valeurs moyennes de la perméabilité et de la porosité.

Formulons en variables adimensionnelles le problème d'infiltration d'un DNAPL.

Le domaine de l'écoulement est un carré $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ dont la surface Γ (le front de déplacement) est exclue. En Ω :

$$\varphi \frac{\partial s}{\partial \tau} + \vec{v} \text{grad } F(s) + \frac{\partial \Phi(s)}{\partial x} = 0 \quad (6.2.5-a)$$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (6.2.5-b)$$

$$\vec{v} = -f(k_\alpha + k_\beta \bar{\mu}) \operatorname{grad} p + f(k_\alpha \lambda_\alpha + k_\beta \lambda_\beta \bar{\mu}) \vec{e}_1 \quad (6.2.5-c)$$

Sur Γ :

$$[p]_\Gamma = -\frac{1}{Bd^*} \quad (6.2.5-d)$$

où $[p]$ traduit la relation de saut en pression à travers le front.

Les conditions aux limites et initiale sont :

$$x = 1 : \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (6.2.6-a)$$

$$y = 0, y = 1 : \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (6.2.6-b)$$

$$x = 0 : \quad p|_{y \notin I} = 1, \quad p|_{y \in I} = 1 + h(\tau) \quad (6.2.6-c)$$

$$\tau = 0 : \quad s|_{\tau=0} = s^0(1 - H(x)) \quad (6.2.6-d)$$

$H(x)$ est la fonction de Heaviside qui est égale à 0 avant le front et 1 après. I désigne la zone occupée par la flaque d'huile. Les opérateurs **div** et **grad** dans le système plan cartésien des coordonnées (x, y) s'écrivent de la façon suivante :

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \sqrt{\omega} \frac{\partial A_y}{\partial y}, \quad \operatorname{grad} = \frac{\partial}{\partial x} i_x + \sqrt{\omega} \frac{\partial}{\partial y} i_y$$

La fonction adimensionnelle $h(\tau)$ est la hauteur courante de la flaque d'huile, elle est définie à partir de l'équation de conservation du volume total de l'huile :

$$h(\tau) = 1 - B \phi \int_{\Omega} s(x, y, \tau) dx dy, \quad B \equiv \frac{HL}{h_0 l_p} \quad (6.2.7)$$

où h_0 , l_p sont la hauteur initiale et la largeur de la flaque d'huile. Le coefficient B est le rapport entre le volume du domaine et le volume de l'huile.

Les paramètres donnés sont : $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $k_\alpha(s)$, $k_\beta(s)$, Bd^* , $\bar{\rho}$, $\bar{\mu}$, B . Les fonctions inconnues sont : $p(x, y, \tau)$, $s(x, y, \tau)$, $\vec{v}(x, y, \tau)$, $h(\tau)$.

Remarquons que pour le système huile – air, $\bar{\rho} \rightarrow \infty$. Il vient alors : $\lambda_\alpha \rightarrow 1$ et $\lambda_\beta \rightarrow 0$.

6.3. ESTIMATIONS ANALYTIQUES

6.3.1. EXISTENCE D'UNE PÉNÉTRATION PARTIELLE

Dans le cadre du problème monodimensionnel, il est possible de montrer l'existence d'un régime spécial quand le DNAPL ne peut pas pénétrer dans le milieu.

En effet, examinons la version 1D du problème (6.2.5) – (6.2.7) décrivant un déplacement vertical d'air par un DNAPL. La face supérieure est connectée directement à l'atmosphère. Supposons que l'air déplacé a toujours une connexion avec la face supérieure, à travers laquelle il sort du domaine à contre-courant. Ainsi, la pression supérieure et inférieure est atmosphérique, p_{at} . La saturation (du DNAPL) est nulle pour $x > 0$ et s^0 pour $x < 0$.

Supposons qu'on ait atteint un état où la vitesse d'écoulement est nulle, et tout le système reste stationnaire. Alors, on obtient :

$$\Phi(s) = const \quad (6.3.1)$$

$$-(k_\alpha + k_\beta \bar{\mu}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + (k_\alpha \lambda_\alpha + k_\beta \lambda_\beta \bar{\mu}) = 0 \quad (6.3.2)$$

$$[\tilde{p}]_\Gamma = -\frac{1}{Bd^*} \quad (6.3.3)$$

Puisque la fonction $\Phi(s)$ est non monotone, l'équation (6.3.1) a deux solutions : s_1 et s_2 . Ces deux valeurs sont imposées par la distribution initiale : $s_1 = s^0$, $s_2 = 0$. La saturation est donc constante dans deux zones qui sont séparées par un front de déplacement. Dans chacune de ces deux zones, les coefficients de l'équation (6.3.2) sont constants, donc on obtient deux équations différentielles ordinaires pour la pression dont la solution est une fonction linéaire :

$$\tilde{p}^+ = C^+ x + \frac{1}{Bd^*}, \quad \tilde{p}^- = C^+ x - p_c + \frac{1}{Bd^*}$$

$$C^- \equiv (k_\alpha \lambda_\alpha + k_\beta \lambda_\beta \bar{\mu})^- / (k_\alpha + k_\beta \bar{\mu})^- \geq 0, \quad C^+ \equiv \lambda_\beta > 0$$

où on a utilisé la condition en pression sur la phase supérieure et la condition de couplage (6.3.3). Les indices + et – signifient « avant » et « après » le front. Ainsi le profil de pression dans chaque zone est linéaire. La condition de couplage de ces deux profils est (6.3.3). Sur la face inférieure, on a donc : $\tilde{p}|_{x=1} = C^+ - p_c + p_{at}$. Cette pression doit être égale à la pression atmosphérique, suivant la seconde condition à la limite inférieure qui doit assurer la sortie de l'air déplacé dans l'atmosphère. On obtient alors : $C^+ = \frac{1}{Bd^*}$. Autrement dit, cette solution n'existe que pour une valeur unique du nombre de Bond. Remarquons que si la phase déplaçante était mouillante, alors on aurait obtenu une relation : $C^+ + \frac{1}{Bd^*} = 0$, qui n'a pas de solution (C^+ et Bd^* sont positifs).

Cette analyse montre que le modèle de ménisque (dégénéré) a une solution unique stationnaire non triviale qui correspond à un régime de pénétration partielle du DNAPL, si le DNAPL est moins mouillant que la phase déplacée. Cette solution correspond à une valeur unique du nombre de Bond.

6.3.2. ESTIMATION D'UNE PÉNÉTRATION PARTIELLE DANS LE CADRE DU MODÈLE CLASSIQUE

Examinons le même processus mais dans le cadre du modèle classique, c'est-à-dire du modèle de Buckley-Leverett en présence de forces capillaires. Supposons que le milieu poreux soit homogène :

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \bar{v} \frac{\partial F(s)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(s)}{\partial x} = -\frac{1}{Bd^*} \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{\beta} F \frac{\partial \wp_c(s)}{\partial x} \right), \quad \Phi = \bar{\mu} k_{\beta}(s) F(s)$$

$\wp_c(s)$ est la pression capillaire classique adimensionnelle ($\wp_c(s) = P_c(s) / \langle P_c \rangle$), où $P_c(s)$ est la pression capillaire dimensionnelle ; $\langle P_c \rangle$ est la pression capillaire moyenne ; le nombre de Bond dans ce cas est : $Bd^* = \Delta \rho gH / \langle P_c \rangle$.

A l'équilibre :

$$k_{\beta}(s) F(s) \left(\bar{\mu} + \frac{1}{Bd^*} \frac{\partial \wp_c(s)}{\partial x} \right) = C$$

où $C = \text{const}$ est la vitesse de la phase non mouillante, égale à zéro en repos. Alors, on obtient les conditions de l'équilibre capillaire-gravitationnel :

$$\frac{d \wp_c(s)}{d x} = -\bar{\mu} Bd^*$$

Puisque $s(x=0)=1$, $\wp_c(x=0)=0$, la distribution à l'équilibre de la saturation est décrite par l'équation :

$$\wp_c(s(x)) = -\bar{\mu} Bd^* x$$

Pour le liquide non mouillant $\wp_c \leq 0$, ceci traduit que la valeur absolue de la pression capillaire augmente d'une manière monotone le long de l'axe x . Puisque la valeur absolue de la pression capillaire est une fonction monotone décroissante, la saturation en huile diminue avec la profondeur. Cela correspond à l'image réelle physique de la pénétration de l'huile. Outre cela, il vient, pour le liquide déplaçant mouillant, que les solutions stationnaires n'existent pas.

La profondeur de pénétration x_* est définie comme le point, où $s = 0$ ou $\wp_c = \wp_c(0)$, qui correspond à la valeur maximal du module de la pression capillaire $|\wp_c|_{\max}$:

$$x_* = \frac{|\wp_c|_{\max}}{\bar{\mu} Bd^*} \quad (6.3.4)$$

On peut donner l'interprétation suivante à ce résultat : si le DNAPL a pu pénétrer en milieu poreux, il existe une distribution non triviale stationnaire de saturation. La profondeur de pénétration x_* est finie si $|\phi_c|_{\max} < \infty$.

6.3.3. TEST NUMÉRIQUE DE LA SOLUTION

Un test a été réalisé sur le modèle sans forces capillaires. On a examiné le déplacement de l'air par l'huile. La profondeur du domaine est de 5 m, la largeur de 100 m, la viscosité dynamique du gaz nulle, la perméabilité de $1 \times 10^{-12} \text{ m}^2$, la porosité de 0.1, la masse volumique de l'huile 1000 kg/m^3 et de l'air 1.2 kg/m^3 , la viscosité de l'huile $2 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, la hauteur initiale de la flaque est égal à 5 cm.

Soit τ_* le temps de pénétration de l'huile jusqu'à la limite inférieure. Une estimation minorée de τ_* donne :

$$\tau_* \approx \frac{Hm}{v} = \frac{Hm\mu_1}{K\rho_1g} \approx 10^5 - 10^6 \text{ s},$$

où v est la vitesse moyenne de l'huile.

Les résultats du calcul d'un écoulement 2D, tenant compte de l'étalement latéral du pétrole ont donné :

$$\tau_* \approx 15 \times 10^5 \text{ s}$$

Ces résultats sont tout à fait compatibles avec l'estimation mentionnée ci-dessus.

6.4. SOLUTION ET ANALYSE QUALITATIVE DU PROCESSUS

6.4.1. RÉGIMES DE PROPAGATION DU DNAPL

Quatre régimes de propagation ont été mis en évidence par des simulations numériques.

Régime I (non pénétration) : L'huile n'entre pas dans le sol. La poussée gravitationnelle initiale se trouve insuffisante pour vaincre la résistance capillaire.

Régime II (pénétration partielle stable) : Seulement une partie de l'huile pénètre dans le sol. A partir d'un certain temps, la force gravitationnelle devient plus faible que la résistance capillaire dans tout le milieu.

Régime III (pénétration partielle instable) : Comme dans le cas précédent, seulement une partie de l'huile pénètre dans le sol. Cependant, la pénétration du DNAPL se manifeste sous forme de doigts fortement irréguliers, formellement similaires à des structures formées lors d'un déplacement instable.

Régime IV (pénétration complète) : Toute l'huile pénètre dans le sol. L'entraînement par les forces de gravité est plus fort que la résistance capillaire tout au long de la période de pénétration du pétrole.

La classification des régimes est basée sur le nombre de Bond qui représente le rapport des forces gravitationnelles sur les forces capillaires :

$$Bd = \frac{\Delta\rho g h_0}{P_c} = \frac{(\rho_\alpha - \rho_\beta) g h_0 \sqrt{K/\phi}}{\sigma} \quad (6.4.1)$$

où h_0 est la hauteur initiale de la couche d'huile au-dessus de la surface du sol ; σ est la tension superficielle à l'interface « air – huile ».

Les limites des régimes sont présentées sur la Fig. 6.4.1, où

$$Bd_1 = 0.44, \quad Bd_2 = 24.8 \quad (6.4.2)$$

Ces deux valeurs ont été obtenues par analyse d'un grand nombre de simulations numériques.

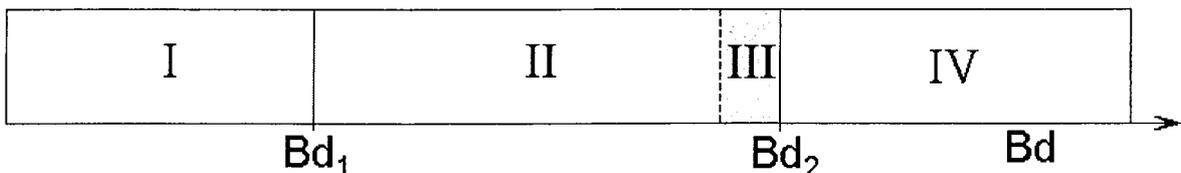


Fig. 6.4.1. Régimes de pénétration du DNAPL : non pénétration (I), pénétration partielle stable (II), pénétration partielle instable (III) et pénétration complète (IV)

6.4.2. RÉGIMES DE PÉNÉTRATION COMPLÈTE

La forme caractéristique du cluster de pétrole infiltré est présentée sur la Fig. 6.4.2.

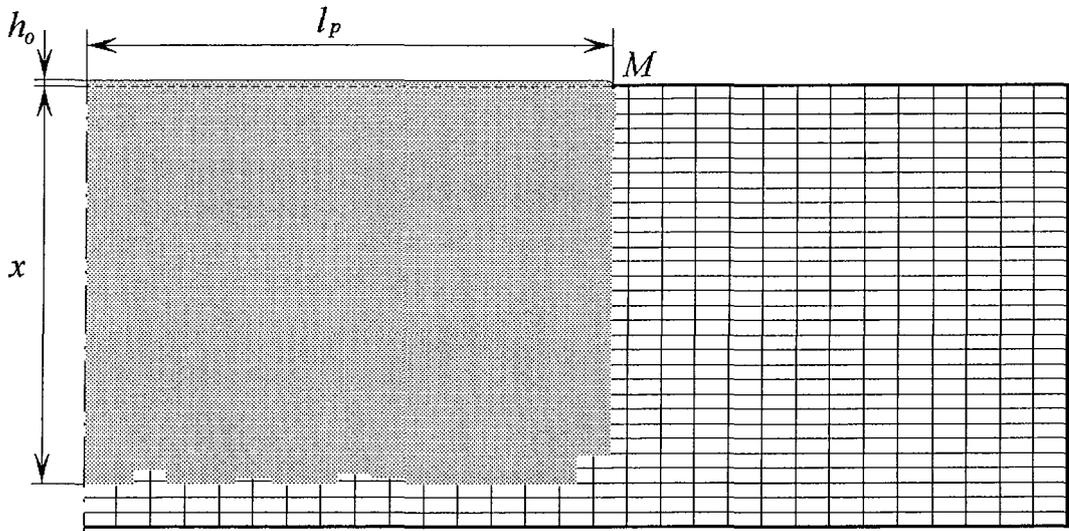


Fig. 6.4.2. Structure du cluster d'huile en régime de pénétration complète (I), $Bd = \infty$

Lors de la pénétration complète, le processus se passe principalement dans la direction verticale. L'étalement latéral est très faible et est provoqué par le fait, qu'au niveau du point M sur la Fig. 6.2.1, il y a un saut de pression. En effet, à gauche du point M , la pression est hydrostatique dans la couche d'huile au-dessus du sol, tandis qu'à droite la pression est atmosphérique. Cette différence de pression est orientée vers la droite. Il vient donc que plus petit sera la hauteur de la flaque, plus faible sera son rôle.

Dans les calculs effectués, la taille horizontale d'une cellule est 40 fois plus grande que la taille verticale. L'étalement latéral sur 1 – 2 cellules fait donc 10 m, ce qui est nettement plus grand que la profondeur entière de la pénétration verticale.

Puisque les forces capillaires freinent le mouvement (l'huile est non mouillante), l'étalement latéral est plus faible lorsque les forces capillaires sont plus fortes. La profondeur de pénétration au moment de la disparition complète de la flaque sur la surface augmente avec la croissance des forces capillaires, puisque dans ce régime l'étalement latéral est réduit.

Comme montré dans le paragraphe 6.3, les équations du processus ont une solution stationnaire correspondant à un équilibre capillaire-gravitationnel. Ce régime est caractérisé par une valeur Bd^* du nombre de Bond. Il est donc évident, que le régime de pénétration complète correspond à des valeurs de Bd supérieures que Bd^* .

6.4.3. RÉGIMES DE PÉNÉTRATION INCOMPLÈTE

Les régimes de la pénétration incomplète sont non triviales. L'apparition de l'huile sur la surface au moment initial crée un gradient de pression vertical fort près de la surface sous l'effet du poids de l'huile. Dans le même temps, la pression augmente partout, ce qui entraîne une diminution des gradients de pression. En outre, la pousse d'Archimède agit sur le pétrole,

d'autant plus fortement que le volume d'huile pénétré augmente. Ces deux effets diminuent le rôle de la gravité par rapport à la résistance capillaire.

La profondeur finale de la pénétration diminue rapidement avec la diminution du Bd . Le temps de pénétration diminue également. Sur la Fig. 6.4.3, on montre la profondeur finale de la pénétration en fonction du temps caractérisant l'arrêt de la pénétration. Tous les points de cette courbe correspondent à différentes valeurs de Bd .

Sur la Fig. 6.4.4, l'évolution de la profondeur courante de la pénétration dans le temps est présentée. L'enveloppe de la famille des courbes, désignée par la ligne pointillée, correspond aux temps d'arrêt de pénétration. La courbe inférieure est calculée pour une tension superficielle égale à zéro ($Bd \rightarrow \infty$), la courbe 2 - à la valeur critique Bd_2 . Le domaine inférieur correspond au régime IV, le domaine supérieur au régime II.

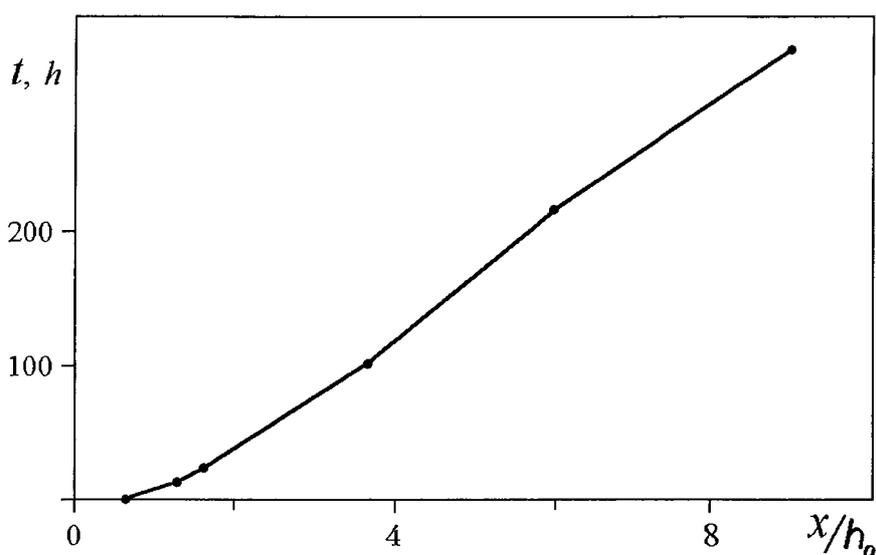


Fig. 6.4.3. Profondeur finale de la pénétration en fonction du temps de pénétration (régimes de pénétration incomplète)

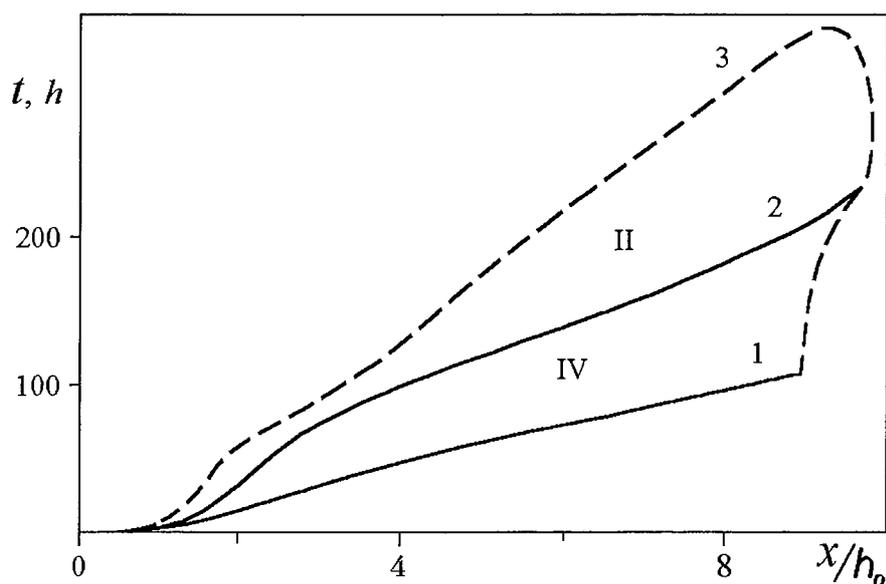


Fig. 6.4.4. Développement de la profondeur courante de pénétration dans le temps : $\sigma = 0$ (1); $Bd_2 = 24.8$ (2); l'enveloppe correspondant au moment d'arrêt de la pénétration (3)

Les structures typiques de pénétration au temps d'arrêt sont présentées sur la Fig. 6.4.5. L'huile pénètre peu en profondeur, mais s'étale fortement dans le sens horizontal. La largeur du modèle étant de 100 m montre que l'étalement horizontal d'une cellule du réseau correspond à environ 3.6 m, valeur qui représente plus de la moitié de la pénétration de l'huile.

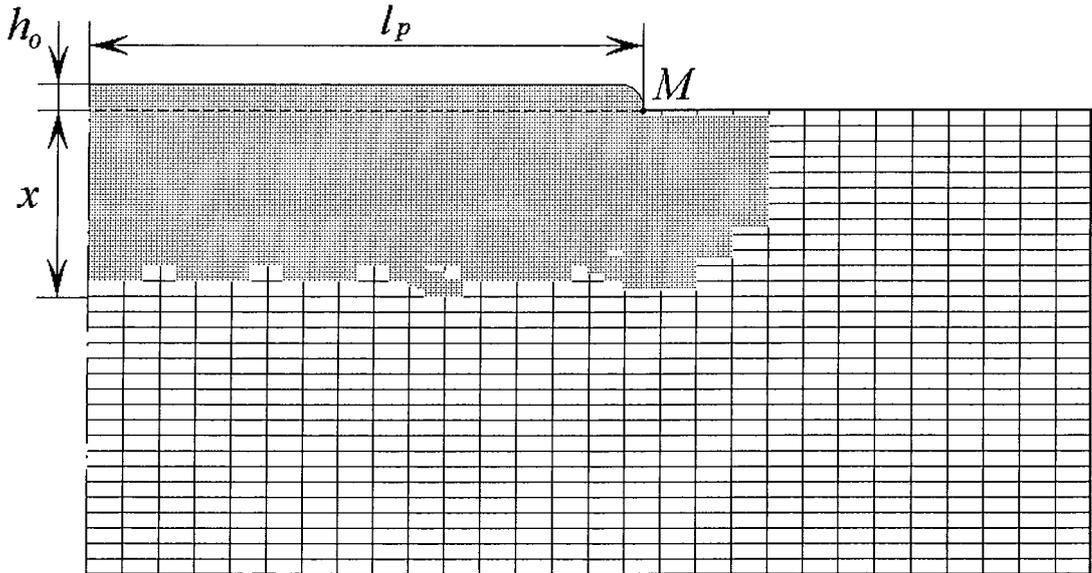


Fig. 6.4.5. Structure de clusters en régimes de pénétration incomplète $Bd=22.8$

6.4.4. RÉGIME CRITIQUE DE PÉNÉTRATION PARTIELLE INSTABLE

Le régime critique est observé sur le graphique de la profondeur finale de pénétration versus Bd (Fig. 6.4.6). On voit que la profondeur de pénétration dans le régime I est pratiquement constante et proche de la hauteur initiale de la flaque divisée par la porosité du milieu. En régime II, la profondeur de pénétration diminue rapidement avec la diminution de Bd .

Proche de la seconde valeur critique de Bd , les structures spécifiques des clusters sont observées (Fig. 6.4.7). Elles sont différentes des structures typiques mises en évidence pour les régimes II et IV. On observe une instabilité hydrodynamique forte et une formation intense des fragments piégés.

Cette instabilité ne peut pas être provoquée par le rapport de viscosités, qui, étant égal à 100, est au contraire favorable à un mouvement stable. Cette instabilité n'est pas non plus provoquée par la gravité, car dans ce régime la gravité est pratiquement équilibrée par la force capillaire. Ce type d'instabilité a une explication différente. Il est connu qu'au voisinage du seuil de percolation la structure du cluster est fortement fractionnée du type fractal. Donc, le point Bd_2 peut s'interpréter comme un point critique de changement des structures hydrodynamiques de la pénétration.

On voit que le cluster de ce régime ressemble bien à une structure fractale qui ne peut être modélisée que par un algorithme numérique absolument stable.

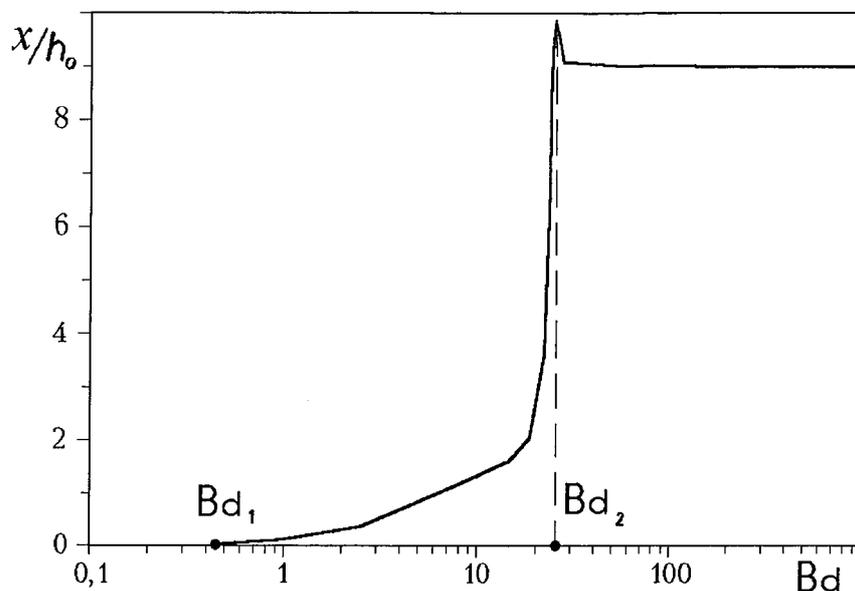


Fig. 6.4.6. Profondeur finale de pénétration en fonction du nombre de Bond ($Bd_1=0.44$; $Bd_2=24.8$)

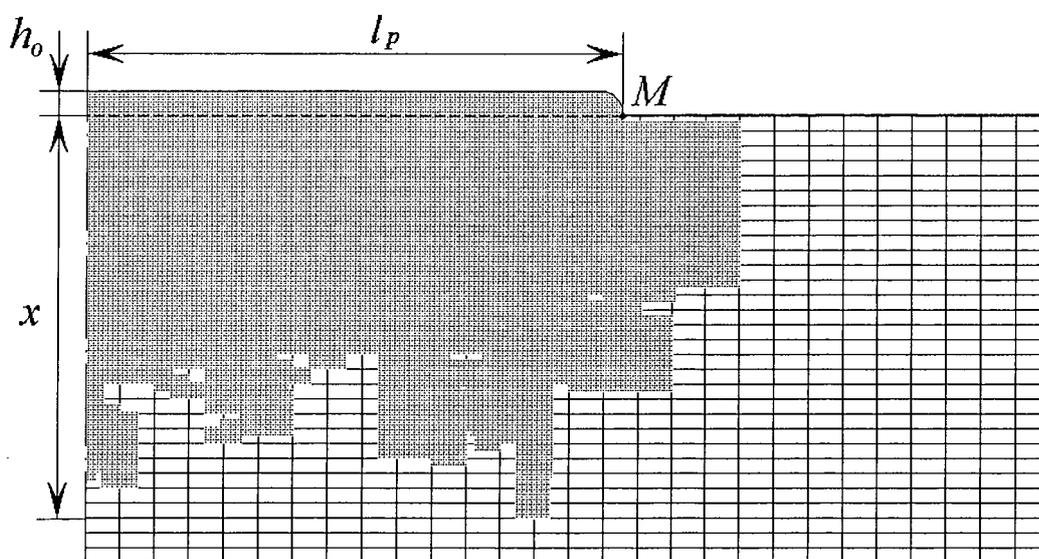


Fig. 6.4.7. Structure du cluster de pénétration en régime critique : $Bd=24.8$

6.4.5. RÉGIMES D'ÉTALEMENT

Si à une profondeur finie il existe une couche de perméabilité faible, qui joue la rôle d'un écran, et si, en plus, les nombres de Bond se trouvent dans la gamme du régime *IV*, on peut observer des régimes spécifiques de pénétration tel que l'étalement latéral. Les stades successifs du processus sont présentés sur la Fig. 6.4.8.

Après que le DNAPL est atteint l'écran, l'écoulement prend la forme de doigts individuels qui creusent des chemins latéraux. Ensuite ces doigts s'inclinent, tombent verticalement et s'étalent sur la frontière inférieure. Les pièges du fluide déplacé sont nettement visibles.

L'évolution de la profondeur courante de pénétration dans le temps est montrée sur la Fig. 6.4.9.

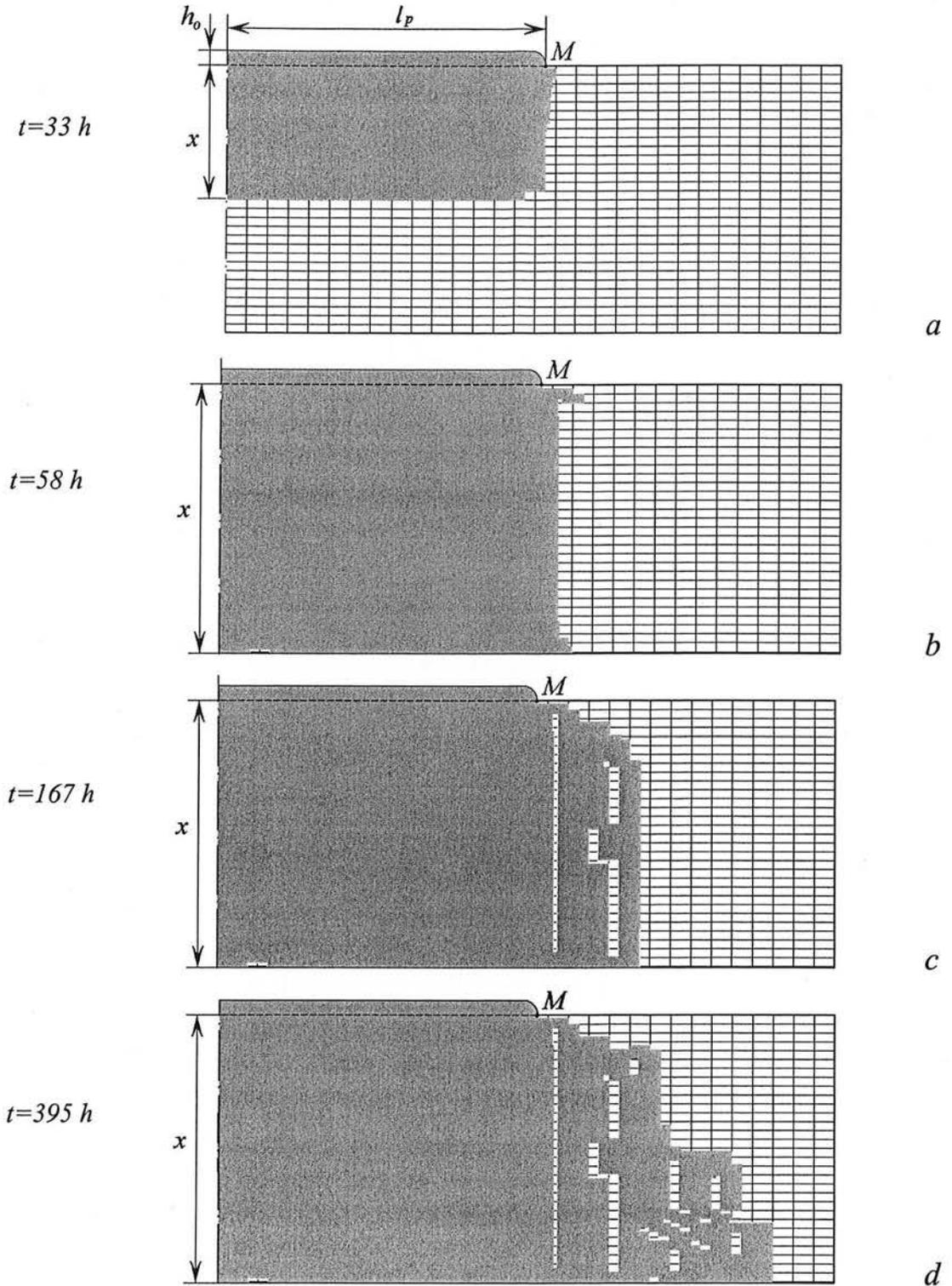


Fig. 6.4.8. Stades successifs de pénétration pour les régimes d'étalement :

a) le fluide n'est pas encore arrivé à l'écran, mais l'écoulement latéral est déjà important, de l'ordre de 3.5 m, b) le fluide a pénétré la profondeur totale (5 m), l'écoulement latéral se réalise par des branches qui pénètrent d'abord horizontalement, et puis tombent ; c) la pénétration latérale très forte, plus de 17 m, d) la largeur de la pénétration latérale est de l'ordre de la largeur du modèle, l'écoulement latéral est instable et prend la forme de « doigt »

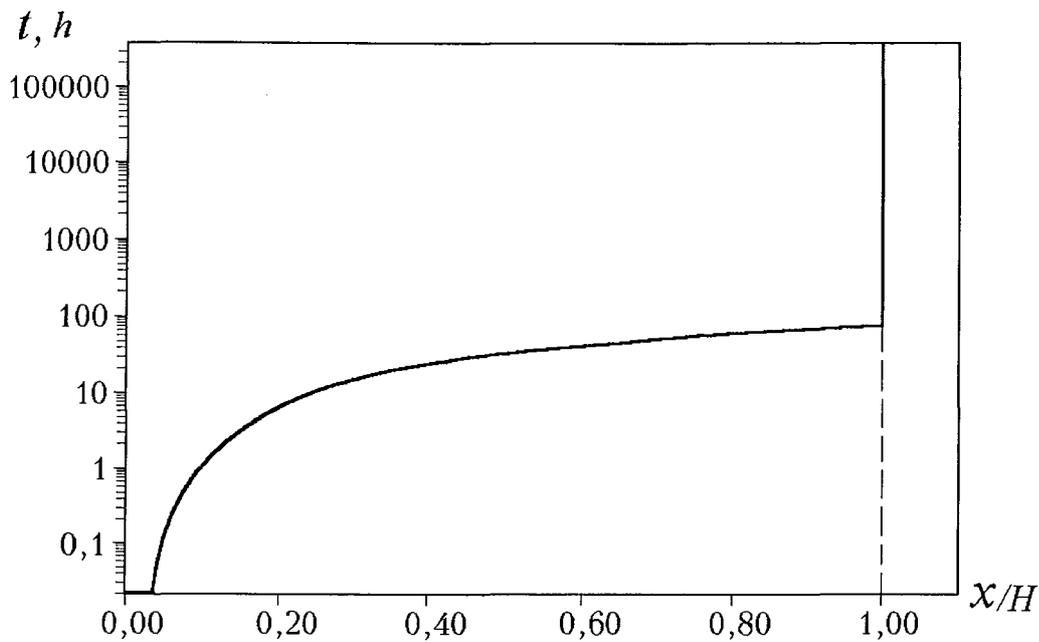


Fig. 6.4.9. Profondeur courante de pénétration dans le temps pour le régime d'étalement

CONCLUSIONS

Les simulations numériques basées sur le modèle de ménisque dégénéré ont montré les résultats suivants. Si la valeur caractéristique du nombre de Bond (6.4.1) n'excède pas la valeur critique $Bd_1=0.44$, la pénétration du liquide en milieu poreux n'aura pas lieu. Si le nombre de Bond est compris entre deux valeurs critiques ($Bd_1=0.44$ et $Bd_2=24.8$), on se trouve dans un régime d'équilibre capillaire-gravitationnel. Dans ce cas, le liquide pénètre partiellement dans le milieu poreux. La profondeur de pénétration diminue fortement avec la réduction du Bd . Un système ayant un nombre de Bond excédant $Bd_2=24.8$ se trouve en régime de pénétration complète. S'il existe une couche faiblement perméable au voisinage du sol, un étalement latéral intensif a lieu.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES

La description des processus de déplacement d'un fluide par un autre en milieux poreux proposée par le modèle classique de Buckley-Leverett ne peut être considérée que comme très approximative. Notre analyse a montré que le modèle classique était basé sur une structure interne de distribution des phases de type « canaux » qui ne correspondait pas au processus de déplacement.

Un nouveau modèle macroscopique des écoulements diphasiques en milieux poreux a été développé. Pour le dériver, une approche phénoménologique a été proposée, en introduisant un continuum spécial appelé le Ménéisque-Continuum : un ensemble du système répétitif de ménisques et de deux phases autour d'eux. Des propriétés spéciales ont été attribuées à ce continuum. En particulier, dans le champ répétitif de ménisques, les vitesses des deux phases sont identiques. On a montré que le champ répétitif de ménisques ne peut exister que s'il existe un sous-système de canaux individuels totalement remplis de la phase déplaçante. En outre, on doit tenir compte de l'existence de canaux dans lesquels la phase déplaçante ne peut pas pénétrer. Ainsi, l'écoulement diphasique est représenté comme une superposition de trois continums : (I) *le M-continuum*, (II) *les canaux remplis que de la phase déplaçante* et (III) *les canaux remplis que de la phase déplacée*.

Ce nouveau modèle demande deux relations de fermeture pour deux propriétés du *M-continuum* : sa saturation interne et la concentration interne en ménisques. Ces deux paramètres ne peuvent pas être déterminés dans le cadre de l'approche phénoménologique. On a proposé des relations de fermeture en se basant sur certaines propriétés de la structure interne du *M-continuum* et sur des simulations numériques en réseaux capillaires.

Les relations de fermetures admises donnent une opportunité de simplifier le modèle. Le modèle fermé peut être utilisé dans la pratique. Les nouvelles perméabilités relatives sont des fonctions plus complexes que celles trouvées dans le modèle classique.

Dans le cas monodimensionnel, le modèle est réduit à une seule équation de transport de saturation totale, qui est une équation hyperbolique non linéaire du premier ordre. Les propriétés de cette équation sont amplement déterminées par la structure de deux fonctions : le flux fractionnaire standard et le flux capillaire. Le flux capillaire est une nouvelle fonction introduite dans la théorie des écoulements en milieux poreux. Dans le cadre de ce nouveau modèle, la capillarité entre sous forme d'un flux convectif, l'équation de transport restant hyperbolique. L'analyse qualitative a mis en évidence les nouveaux effets de freinage visqueux, freinage capillaire, apparition de deux fronts de déplacement, apparition de fronts inversés.

Pour obtenir les relations de fermeture et analyser les propriétés internes du *M-continuum*, un code numérique basé sur une description physique adéquate de la dynamique réelle d'écoulement en réseaux de tubes capillaires a été développé. Il prend en considération la continuité des clusters mobiles et des conditions de passage à travers les nœuds. Les relations de fermeture pour la distance caractéristique entre les ménisques h_c en fonction de la saturation ont une forme assez universelle, correspondant à des prédictions théoriques.

L'analyse effectuée à la base des simulations en réseaux capillaires a montré que les perméabilités relatives croisées sont souvent négligeables, sauf dans le cas d'une grande interaction entre les phases qui est observé pour des $\bar{\mu} \ll 1$ et des grands Ca . En même temps, les perméabilités diagonales sont très faiblement corrélées avec la saturation. Ainsi, l'interaction entre les phases est mise en évidence. Cependant, elle ne peut pas être décrite par le modèle croisé. La description adéquate pour cette interaction, dans le cas d'une configuration de type ménisque, est assurée par le « *meniscus model* ». En se basant sur les simulations, nous avons établi le domaine de validité de la loi de Darcy sur le diagramme $Ca-\mu$. Hors du domaine de validité de Darcy, nous proposons d'appliquer le modèle de ménisque.

Le modèle de ménisque reste hyperbolique même si les forces capillaires sont dominantes, tandis que le modèle classique, avec des forces capillaires, est parabolique.

Des solutions analytiques d'écoulements mono-dimensionnels dans le cadre du modèle proposé ont été construites, manifestant des structures non classiques formées de doubles fronts ou de fronts à contre-courant. Pour des grands nombres capillaires, les forces capillaires deviennent négligeables et la solution du problème de déplacement tend vers la solution classique de Buckley-Leverett, qui ne dépend pas de la mouillabilité du milieu. Pour des petits nombres capillaires et la phase déplaçante mouillante (imbibition capillaire), le processus d'imbibition est caractérisé par l'existence de deux fronts. L'un d'eux s'avance dans le milieu, le second sort du milieu en formant un écoulement à contre-courant à l'entrée du milieu. L'augmentation du Ca réduit la vitesse de ce second front jusqu'à l'annuler. Si la phase déplaçante est non mouillante, la diminution du Ca réduit la vitesse du front pénétrant dans le milieu jusqu'à zéro à partir d'une valeur critique Ca_* . Aux nombres capillaires inférieurs à Ca_* , la phase déplaçante ne peut pas pénétrer dans le milieu dû à des forces capillaires opposées au sens de la pénétration.

Pour tous les régimes, la saturation à l'entrée du milieu s'établit automatiquement et est entièrement définie par la structure du flux sommé $G(s)$. Plus exactement, la saturation à l'entrée est définie comme le point du maximum de la fonction $G(s)$, autres que $s=0$ ou $s=1$. Ainsi la saturation à l'entrée ne peut pas être imposée comme une condition limite. Ceci est tout à fait conforme à la physique du processus et prouve encore une fois que les régimes capillaires ne peuvent pas être décrits par une équation parabolique, qui demande toujours une condition limite à l'entrée du milieu.

Pour résoudre les problèmes 2D et 3D, la méthode numérique « différences finies – percolation » a été proposée. Elle contient la simulation numérique du problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson décrivant le champ de pression et le calcul exact de l'avancée de chaque front local ayant le caractère d'un algorithme de percolation. Une telle décomposition du problème en deux correspond bien au processus physique, dans lequel la pression est quasi-stationnaire, suite à l'incompressibilité des fluides, et toute la non stationnarité est apportée par le transport des ménisques. La méthode proposée permet de simuler les processus y compris ceux physiquement instables.

Les solutions numériques 2D du problème de propagation d'un polluant DNAPL dans un aquifère, basées sur le modèle de ménisque dégénéré ont permis de construire une classification de régimes d'écoulement. Le cas d'un polluant non mouillant a été étudié, pour lequel les forces capillaires sont opposées à sa pénétration dans le milieu. Si la valeur

caractéristique du nombre de Bond n'excède pas la valeur critique $Bd_1=0.44$, la pénétration du liquide dans le milieu poreux n'aura pas lieu. Si le nombre de Bond est compris entre deux valeurs critiques ($Bd_1=0.44$ et $Bd_2=24.8$), on se trouve dans un régime d'équilibre capillaire-gravitationnel. Dans ce cas, le liquide pénètre partiellement dans le milieu poreux. La profondeur de pénétration diminue fortement avec la réduction du Bd . Un système ayant un nombre de Bond excédant $Bd_2=24.8$ se trouve en régime de pénétration complète.

Les possibilités de perfectionner le modèle proposé sont offertes par des relations de fermeture. En particulier, il est possible d'introduire dans le modèle l'évolution dans le temps de la saturation interne dans le M -continuum, $s^I(t)$. Il est également possible de prendre en considération le fait que les ménisques dans le M -continuum ne sont pas toujours mobiles et s'arrêtent après avoir parcouru, lors de leur déplacement, la longueur caractéristique d'une cellule élémentaire, h_c . Pour cela, il faut introduire la fraction du M -continuum mobile, α_{mob}^I , et construire pour elle des relations de fermeture.

Il est nécessaire de noter, que ces améliorations peuvent notamment aboutir à certains résultats nouveaux, mais ne changeront pas, quelles que soient les relations de fermeture, le résultat essentiel obtenu : le caractère hyperbolique de la capillarité lors d'un écoulement diphasique en milieu poreux.

Les perspectives d'application du modèle proposé concernent l'hydrogéologie et la théorie de récupération du pétrole. La formation de la frange capillaire des nappes, les phénomènes dans la zone non saturée, le déplacement du pétrole par de l'eau sont fortement régis par les effets capillaires. Grâce au nouveau modèle, leur description peut être suffisamment améliorée.

RÉFÉRENCES ET NOTATIONS

1. Adler P.M. (1992) *Porous media: Geometry and transport*. Butterworth/ Heinemann, 544 p.
2. Alexander S., Orbach R. (1982) Density of states of fractals: fractons. *J. Phys. Lett., Paris*, 43, L625.
3. Arbogast T., Douglas J. and Hornung U. (1990) Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenisation theory. *SIAM J. Appl. Math.*, 21, p.823-836.
4. Auriault J.L., Sanchez-Palencia E. (1986) Remarques sur la loi de Darcy pour les écoulements biphasiques en milieu poreux. *Journal de Mec. Theor. Appl., N spécial*, p.141-156.
5. Auriault J.L. (1983). Effective macroscopic description for heat conduction in periodic composites. *Internat. Journal Heat Mass Transfer*, 26, p. 861-869.
6. Ayub M., Bentsen R.G. (1999) Interfacial viscous coupling : a myth or reality? *Journal of Petrol. Science & Engin.*, 23, p.13-26.
7. Barci J.C., Chaouche M., Salin D. (1990) Modèle simple de perméabilités relatives croisées. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 311, série II, p.591-597.
8. Barenblatt G.I. (1971) Flow of tow immiscible fluids in homogeneous porous media. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, N 5, p.144-151.
9. Barenblatt G.I., Entov A. (1972) Non-equilibrium effects in the flow of immiscible fluids. "Numerical methods of solution to problem of multiphase incompressible fluid filtration", *Periodical. Proc. Akademiia Nauk SSSR, Novosibirsk*, p.33-43. (in Russian)
10. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. (1972) *Theory of unsteady liquid and gas flow through porous media*. Moscow, Nedra, p.288
11. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. (1990) *Theory of fluid flows through natural rocks*. Kluwer Academic Publishing, Dordrecht.
12. Barenblatt G.I., Vinichenko A.P. (1980) Non-equilibrium flow of immiscible fluids in porous media, *Uspekhi Mat. Nauk*, 3, p.35-50.
13. Berkowitz B., Balberg I. (1993) Percolation theory and its applications to groundwater hydrology. *Water Resource Research*, 29(4), p.775-794.
14. Blunt M., King P. (1991) Relative permeabilities from two and tree dimensional pore scale network modelling. *Transport in Porous Media*, N 6, p.407-433.
15. Blunt M., King M.J, and Sher H. (1992) Simulation and theory of two-phase flow in porous media. *Phys. Rev. A* 46, 7680-7698.
16. Bocharov O. (1991) Influence de non-équilibre sur l'écoulement diphasique en milieu poreux. *Akademiia Nauk SSSR, Proc. Ins. Teplofiziki, Novosibirsk*, p.89-95.
17. Bocharov O., Vitkovski O., Kuznetsov V. (1990) Structure des sauts de saturation dans le déplacement en milieu poreux, *Izvestiia Akademii Nauk SSSR*, N 6, p.97-104.
18. Bourgeat A., Panfilov M. (1998) Effective two-phase flow through highly heterogeneous porous media: capillary nonequilibrium effects. *Computational Geosciences*, 2, p.191-215.
19. Broadbent S.R., Hammersley J.M. (1957) Percolation processes. *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, N 53, p.629-645.
20. Buckley S.E., Leverett M.C. (1942) Mechanism of fluid displacement in sands. "Transactions Amer. Inst. Mining Engineers", v.146, p.107
21. Buevich U.A., Mambetov U.M. (1991) Theory of flow simultaneous of immiscible fluids. *Inzhinerno-Fizicheskii Zhurnal*, 60, N 1, p.98-107.
22. Bulygin V. (1974) *Hydromechanics of oil field*. Moscow, Nedra, 232 p.
23. Chandler R., Koplik J., Lerman K., Willemsen J.F. (1982) Capillary displacement and percolation in porous media. *J. Fluid Mech.*, N 119, p.249-267.

24. Chandler R., Willemsen J.F. (1981) Percolation and porosimetry. *Schlumberger-Doll Research Report, Ridgefield, C.T.*
25. Chatzis J., Dullien F.A. (1977) Modeling pore structure by 2-D and 3-D networks with applications to sandstones. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 16, p.97-108.
26. Chatzis I., Kuntamukkula M.S., Morrow N.R. (1988) Effect of capillary number on the microstructure of residual oil in strongly water-wet sandstones. *SPE Res.Eng.*, 3, p.902-912.
27. Chatzis I., Morrow N.R., Lim H.T. (1983) Magnitude and detailed structure of residual oil saturation. *SPE J.*, N 4, p.311-326.
28. Chayes J.T., Chayes L., Newman C.M. (1985) The stochastic geometry of invasion percolation. *Commun. Math. Phys.*, 101, p.383-407.
29. Chizmadjev U.A., Markin V.S., Tarasevich M.R., Chirkov U.G. (1971) *Macro-kinetics of processes in porous media*. Moscow, Nauka, 364 p.
30. Clement E., Baudet C., Guyon E., Hulin J.P. (1987) Invasion front structure in a 3D model porous medium under a hydrostatic pressure gradient. *J. of Physics D: Appl.Phys.*, 20, N 5, p.608-615.
31. Crapiste G., Rotstein H., Whitaker S. (1986) A general closure scheme for the method of volume averaging. *Chem. Eng. Sci.*, 41, p.227-235.
32. Dagan G. (1989) *Flow and transport in porous Formations*. Springer-Verlag, New-York.
33. de Gennes P.G. (1976) La percolation: un concept unificateur. *La Recherche*, 7, p.919.
34. de Gennes P.G., Guyon E. (1978) Lois générales pour l'injection d'un guide dans un milieu poreux aléatoire. *J. Mecan.*, 17, p.403-432.
35. de Swaan A.O. (1976) Analytic solution for determining naturally fractured reservoir properties by well testing. *Soc.Petroleum Eng. J.*, 6, p.117-122.
36. Delannay R., Thovert J.-F., Adler P.M. (1989) Fractals et milieux poreux. *Revue Internationale de Systémique*, v.3, 4, p.485-514.
37. Deutscher G., Zallen R. and Adler J. (1983) Percolation Structures Processes, *Ann. Isr. phys. Soc.*, v.5, Bristol: Hilger.
38. Dias M.M., Payatakes A.C. (1986) Network models for two-phase flow in porous media. *J. Fluid Mech.*, N 164, p. 305-358.
39. Dodd C.G., Kiel O.G. (1959) Evaluation of Monte-Carlo methods in studying fluid-fluid displacement and wettability in porous rocks. *J.Phys.Chem.*, v.63, N 10, p.1646-1652.
40. Entov V. (1980) Theory of non-equilibrium effects in the flow of inhomogeneous fluids through porous medium. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, N 3, p.52-57.
41. Entov V., Chen-Sin E. (1987) Micromechanics of two phase flow in porous media. "Numerical methods of problem solution of multiphase incompressible fluid filtration", *Periodical. Proc. Akademii Nauk SSSR, Novosibirsk*, p.120-129. (in Russian)
42. Entov V., Feldman Z., Chen-Sin E. (1975) Le simulation du process de l'évincement capillaire en milieu poreux. *Moscou, Programmation*, N.3, p.67-74.
43. Fatt I. (1956) The network model of porous media. *Petrol. Transactions AIME*, v.207, p.144-181.
44. Fayers F.J., Hewett T.A. (1992) A review of current trends in petroleum reservoir description and assessment of the impact of oil recovery. *Adv. Water. Resources*, 15, p.341-365.
45. Feder J. (1988) *Fractals*. Plenum Press, New York.
46. *Fractals in Physics* (1988) Proc. YI Intern. Symp. of fractals in physics. Moscow, Mir, 672p.

47. Gefen Y., Aharony A., Mandelbrot B.B., Kirkpatrick S. (1981) Solvable fractal family, and its possible relation to the backbone at percolation. *Phys. Rev. Lett.*, 47, p.1771.
48. Golden J.M. (1980) Percolation theory and models of unsaturated porous media. *Water Resource Research*, v.16, N 1, p.201-209.
49. Grey W.G., Hassanizadeh S.M. (1991) Paradoxes and realities in unsaturated flow theory. *Water Resource Research*, v.27, N 8, p.1847-1854.
50. Guyon E., Hulin J.P. & Lenormand R. (1984) Application de la percolation à la physique de milieux poreux. *Annales des Mines*, 5-6, p.17-40.
51. Guyon E., Mitescu C.D., Hulin J.-P., Roux S. (1989) Fractals and percolation in porous media and flow. *Physica. D*, v.38, N 1-3, p.172-178.
52. Hassanizadeh S.M. (1997) Dynamic effects in the capillary pressure-saturation relationship, *Proc. 4th Int. Conf. Civ. Eng., Sharif Univ. Technol., Tehran, Iran, 4-6 May 1997*, 4: *Water Resources and Environmental Engineering*, p.141-149.
53. Hassanizadeh S.M., Gray W.G. (1990) Mechanics and thermodynamics of multiphase flow in porous media including interface boundaries. *Adv. Water Resources*, 13, p.169-186.
54. Hassanizadeh S.M., Gray W.G. (1993a) Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media. *Water Resource Research*, 29, p.3389-3405.
55. Hassanizadeh S.M., Gray W.G. (1993b) Toward an improved description of the physics of two-phase flow. *Adv. Water Resources*, 16, p.53-67.
56. Jacquin C.G., Adler P.M. (1987) Fractal porous media: geometry of porous geological structures, *Transport in Porous Media*, 2-6, p.571-596.
57. Kadet V.V., Selyakov V.I. (1987) Percolation model of two phase flow. *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, N 1, p.88-95.
58. Kalaydjian F. (1990) Origin and quantification of coupling between relative permeabilities for two-phase flow in porous media, *Trans. Porous Media*, 5, p.215-229.
59. Kalaydjian F., Bourbiaux B., Cuerillot D. (1989) Viscous coupling between fluid phase for two-phase flow in porous media: theory versus experiment. *Proc. 5-th Eur. Symp. on improved oil recovery, Budapest*, p. 717-726.
60. Kalaydjian F., Legait B. (1987) Ecoulement lent à contre-courant de deux fluides non-miscibles dans un capillaire présentant un rétrécissement. *C.R. Acad. Sc., Paris, Ser.11*, v.304, N 17, p.869-872.
61. Kalaydjian F., Legait B. (1988) Effets de la géométrie des pores et de la mouillabilité sur le déplacement diphasique à contre-courant en capillaire et en milieux poreux. *Revue Phys. Appl.*, v.23, p.1071-1081.
62. Kesten H. (1982) *Percolation Theory for Mathematicians*. Boston: Birkhauser.
63. Kirkpatrick S. (1979) Les Houches Summer School on Ill Condensed Matter, edited by R. Maynard and G. Toulouse (Amsterdam: North Holland).
64. Koplik J. (1982) Creeping flow in two-dimensional network. *J. Fluid Mech.*, N 119, p.219-247.
65. Koplik J., Lasseter T.J. (1985) Two-phase flow in random network models of porous media. *SPE J.*, v.25, N 1, p.89-100.
66. Korn G.A., Korn T.M. (1968) *Mathematical handbook for scientists and engineers*. Second enlarged and revised edition, McGraw-Hill Book Company.
67. Ksenjek O.S. (1963) Capillary equilibrium in porous media with cross-pores. *Zh. Fiz.-Himii*, 37, N 6, p.1297-1303.
68. Kurbanov A.K. (1968) Les équations de transport de liquides diphasique dans milieux poreux. *Théorie et pratique de exploitation des gisements pétrolières. Moscow, Nedra*, p.281-286.

69. Kuznetsov V.V., Dimov S.V. (1991) Microstructure d'écoulement diphasique dans milieu poreux. *Akademiia Nauk SSSR, Proc. Ins. Teplofiziki, Novosibirsk*, p.71-88.
70. Larson R.G., Davis H.T., Scriven L.E. (1977) Percolation theory of residual phases in porous media. *Nature*, v.268, p.409-413.
71. Larson R.G., Scriven L.E., Davis H.T. (1981) Percolation theory of two phase flow in porous media. *Chem.Eng.Sci.*, v.36, N.1, p.57-73.
72. Lax P.D. (1971) Hyperbolic systems of conservation laws, II. *Communs. Pure Appl. Maths.* v. 10, *Academic Press, New York*, p. 603-634.
73. Lenormand R. (1985) Différents mécanismes de déplacements visqueux et capillaires en milieu poreux: Diagramme de phase. *C.R.Acad.Sci. II, Paris*, v.301, p.247-250.
74. Lenormand R. (1987) Statistical physics and immiscible displacements through porous media. *In: Proc. 2nd Int.Symp."Phys.and Chem. Porous Media II", Riedgefield, Conn., Oct. 1986, New York*, p.98-115.
75. Lenormand R., Bories S. (1980) Description d'un mécanisme de connexion de liaisons destiné à l'étude du drainage avec piégeage en milieu poreux. *C.R.Acad.Sci. B, Paris*, v.291, p.279-280.
76. Lenormand R., Toubaul E., Zarccone C. (1988) Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media. *J. Fluid Mech.*, N.189, p.165-187.
77. Lenormand R., Zarccone C. (1985) Invasion percolation in an etched network: Measurement of fractal dimension. *Phys. Rev. Let.*, v.54, p.2226-2229.
78. Lenormand R., Zarccone C. and Sarr A. (1983) Mechanisms of the displacement of one fluid by another in a network of capillary ducts. *J. Fluid Mech.*, v.135, p.337-353.
79. Lions J.L. Sur certains aspects de la méthode de l'homogénéisation en milieux composites. *In : Numerical Methods of mathematical physics, geophysics and optimal control. Eds. G.I.Marchuk & J.-L. Lions, Novosibirsk*, p.5-19.
80. Mahe M.J., Jacquin C.G., Adler P.M. (1986) La dimension fractale d'une interface gaz-liquide dans un milieu poreux. *Hydrogeologie*, N 2, p.175-181.
81. Mandelbrot B.B. (1982) *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: Freeman.
82. Mantoglou A., Wilson J.L. (1982) The turning bonds method for simulation of random fields using line generation by q spectral method. *Water Resource Research*, 18, p.1379-1394.
83. Marinbah M.A., Lusternik V.E. (1985) Influence des macro hétérogénéités sur perméabilité effective des milieux poreux. *Dynamics of multiphase media, Periodic. Proc., Acad. Sci., Novosibirsk, Nauka*, p.123-127.
84. Markin V. (1963) Capillary equilibrium in model of porous object with cross-pores of variable section. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, v.151, N 3, p.620-623.
85. Marle C.M. (1981) *Multiphase flow in porous media*. Éd. Technip, Paris.
86. Marle C.M. (1982) On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and reactions in porous media. *Int. J. Eng. Sci.*, v.20, p.643-662.
87. Martintsyv O.F., Ryjik V.M (1965) Investigation des processus de déplacement du pétrole par l'eau dans des couches hétérogènes. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Mekhanika*, N 5, p.175-181.
88. Martos V.N. (1972) Possibilité de l'injection d'eau dans les couches de gaz-condensat. *In : Questions d'écoulement non linéaire et de production du pétrole et du gaz sous l'exploitation des gisements du pétrole et du gaz, Moscou*, p.127.
89. Martos V.N., Ryjik V.M. (1972) Détermination des courbes dynamiques de pression capillaire par la méthode du domaine stabilisé. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, N 2, p.57-160.

90. Mats A.A. (1983) Experimental analysis of the capillary displacement of an immiscible liquid by miscible using micromodels of porous media. *Proc. VNIIGAZ, Novosibirsk, N 83, p.35-37.*
91. Mohanty K.K, Davis H.T., Scriven L.E. (1987) Physics of oil entrapment in water-wet rock. *SPE Res. Eng., 2, p.113-128.*
92. Morrow N.R., Chatzis I., Lim H.T. (1985) Relatives permeabilities at reduced residual oil saturations. *J.Canad.Petr.Technol., v.24, p.62-69.*
93. Newman C.M. (1986) Percolation theory: a selective survey of rigorous results. *In: "Adv. Multiphase Flow and Related Probl.: Proc. Workshop Cross Discip. Res. Multiphase Flow, Leesburg, Va, june 2-4 1986", Philadelphia, p.147-167.*
94. Nikolaevskii V.N. (1959) Convective diffusion in porous media. *Appl. Maths and Mech., Moscow, 23, N 6, p.1042-1050.* (in Russian)
95. Nikolaevskii V.N., Bondarev E.A., Mirkin M.I. *et al.* (1968) *Transport of hydro-carbonate mixtures in porous media.* Moscow, Nedra, 192 p.
96. Nittmann J. (1986) Fractal viscous fingering: experiments and models. *Physica A, v.140, p.124-133.*
97. Panfilov M. (1996) Homogenized model with capillary nonequilibrium for two-phase flow through highly heterogeneous porous media. *Comptes Rendus Acad. Sciences, Paris, Ser.IIb, t. 322, N 3, p. 195-202, 1996.*
98. Panfilov M. (2000) *Macroscale Models of Flow Through Highly Heterogeneous Porous Media.* Kluwer Academic Publishing, Dordrecht, February 2000, 363 p.
99. Panfilov M., Panfilova I. (1995) Macro-kinetic model of the trapping process in two-phase fluid displacement in a porous medium. *Fluid Dynamics, v.30, N 3, p.409-417.*
100. Panfilov M., Panfilova I. (1996) *Averaged models of flow with heterogeneous internal structure.* Nauka, Moscow, 383 p. (in Russian)
101. Panfilov M., Panfilova I. (1998) Averaged model with capillary non-equilibrium for two-Phase flow through highly heterogeneous porous media. *Fluid Dynamics, N 2.*
102. Panfilova I., Panfilov M. (1997) Generalized model for two-phase flow through porous media with three types of capillary forces. *In: Contributed Presentation on 4th SIAM Conf. on Mathematical and Computational Issues in the Geosciences, USA, Albuquerque, June 16-19.*
103. Panfilova I., Panfilov M. (1999) New model of two-phase flow through porous media in a vector field of capillary forces. *In: Porous Media: Physics, Models, Simulation (Proc. Int. Conf), World Scientific Publishing, Singapore, p.145-165.*
104. Panfilov M., Tuvaeva I. (Panfilova I.) (1990) Convective dispersion of front in heterogeneous medium and problem of its description. *Preprint, N 6, Oil & Gas Research Institute, Russian Acad. Sci, Moscow, 71 p.*
105. Panfilov M., Tuvaeva I. (Panfilova I.) (1991a) Les modèles de percolation des processus d'écoulement dans milieu hétérogène aléatoire. *Preprint, N 12, Oil & Gas Research Institute, Russian Acad. Sci, Moscow, 90°p.*
106. Panfilov M., Tuvaeva I. (Panfilova I.) (1991b) Les modèles non locales de percolation d'invasion. *In: Proc. 2nd Int. Seminary on Reservoir Engineering., AN SSSR, Mars. 1991, Zvenigorod, Russie, v.1, p.247-258.*
107. Panfilova I., Muller J. (1996) Two-scale method for the saturation transport simulation in the network model of porous media. *In: Proc. of Internat. Congress "Recent Advances in Problems of Flow and Transport in Porous Media", Maroc, Marrakech, 9-12 June 1996.*
108. Panfilova I., Shakirov A., Kukharonok A., Panfilov M. (1998) Dynamic capillary model for two-phase flow through media with heterogeneous wettability. *In: Proc. ECMOR-VI, 6th European*

- Conf. on the Mathematics of Oil Recovery, Peebles, near Edinbourg, Scotland, 8-11 Sept. 1998, (paper C-09).*
109. Paterson L. (1984) Diffusion-limited aggregation and two-fluid displacements in porous media. *Phys.Rev.Lett.*, v.52, p.1621-1624.
 110. Pleshinskii B.I., Nazarovskii G.A., Gimadiev G.A., Gimadiev R.M. (1970) Détermination expérimentale de porosité dynamique dans l'écoulement simultané de deux fluides immiscibles. *Sci. Notes of Kazan University*, 130, N 1, p.120-122.
 111. Quintard M., Whitaker S. (1987). Ecoulement monophasique en milieux poreux : effets des hétérogénéités locales. *J. Mec. Theor. Appl.*, 6(5), p.691-726.
 112. Quintard M., Whitaker S. (1988) Two-phase flow in heterogeneous porous media: the method of large-scale averaging, *Transport in Porous Media*, N 3, p.357-413.
 113. Quintard M., Whitaker S. (1993) Transport in ordered and disordered porous media: volume averaged equations, closure problems, and comparison with experiment. *Chem. Eng. Sci.*, 48, 2537-2564.
 114. Raats P.A.C., Klute A. (1968) Transport in soils: the balance of momentum. *Soil Sci. Sor. Amer. Proc.*, 32, p.452-456.
 115. Rose A. (1967) Model of doublet for simulation of trapping in porous media. *Trans. AIME*, v.112, N 23, p.345-356.
 116. Rose W. (1989) Data interpretation problems to be expected in the study of coupled two-phase flow of immiscible fluid flows in porous media. *Transport in Porous Media*, 4, p.185-198.
 117. Rose W. (1990) Coupling coefficients for two-phase flow in pore spaces of simple geometry. *Transport in Porous Media*, 5(1), p.97-102.
 118. Rothman D.H. (1989) Lattice-gas automata for immiscible two-phase flow. In: *Discrete kinetic theory, lattice-gas dynamics, and foundations of hydrodynamics*. Singapore, p.286-299.
 119. Sahimi M. (1994) *Applications of percolation theory*. 1st edn. Taylor & Francis, London.
 120. Selyakov V.I. (1989) Model of forest growth. In: "Numerical methods of problem solution of multiphase incompressible fluid filtration", *Periodical. Proc., Akademiia Nauk SSSR, Novosibirsk.*, p.201-210.
 121. Selyakov V.I., Kadet V.V. (1996) *Percolation models for transport in porous media*. Kluwer Academic Publishing, Boston, London.
 122. Shante W.K.S., Kirkpatrick S. (1971) An introduction to percolation theory. *Adv. Phys.*, v.20, N 85, p.325-357.
 123. Sheidegger A.E (1960) The physics of flow through porous media. *Revised edition, University of Toronto Press*, p.313.
 124. Shklovskii B.I., Efros A.L. (1979) *Electronic properties of semiconductors*. Moscow, Nauka, 416 p.
 125. Shvidler M.I. (1985) *Hydrodynamics statistics of porous media*. Moscow, Nedra, 288 p.
 126. Shvidler M.I. (1961) Les équations d'écoulement diphasique dans milieux poreux avec prise en considération d'interaction entre des phases. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Mekhanika, Mashinostroenie*, N.1, p.31-134.
 127. Shvidler M.I., Levy B.I. (1970) *Ecoulement unidimensionnel de fluides immiscibles*. Moscou, Nedra, 156 p.
 128. Singhal A.K., Somerton W.H. (1977) Quantitative modelling of immiscible displacement in porous media: A network approach. *Rev. Inst. fr. petrol.*, v.32, N 6, p.897-920.
 129. Slattery J.C. (1990) *Interfacial transport phenomena*. New York: Springer.

130. Stauffer D., Aharony A. (1994) *Introduction to Percolation Theory*. Taylor & Francis, London.
131. Tanveer S. (1987) Analytic theory for the selection of Saffman-Taylor finger. *Phys. Fluids*, 30, 1589.
132. Thigpen L., Berryman J. (1985) Mechanics of porous elastic materials containing multiphase fluid, *Intern. J. Eng. Sci.*, 23, p.1203-1214.
133. Toffoli T., Margolus N. (1991) *Machines of cellular automata*. Moscow, Mir, 280 p.
134. Taylor G.I. (1953) Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube. *In: Proc. Roy. Soc. London A.*, v.219, p.186-203.
135. Van Brakel J. (1975) Pore space models for transport phenomena in porous media. Review and evaluation with special emphasis on capillary liquid transport. *Powder Tech.*, 11, p.205-236.
136. Ventsel E.D. (1969) *Probability theory*. Moscow, Nauka. (in Russian)
137. Vinichenko A.P. (1978a) Theory of non stationary non equilibrium flow of immiscible fluids. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, N 9, p.51-58.
138. Vinichenko A.P. (1978b) Analysis of an equation of 3rd order implicate with respect to the time derivative. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, N 6, p.96-103.
139. von Neumann J. (1966) Theory of self-reproducing automata. (A.W. Burks, Editor) *University of Illinois Press, Urbana, IL*.
140. Washburn E.W. (1921) The dynamics of capillary flow. *Phys. Rev.* 17273.
141. Wilkinson D. (1986) Percolation effects in immiscible displacement. *Phys. Rev. A*, 34(2), p.1380-1391.
142. Wilkinson D. (1988) Fluid dynamics at a pore scale. *In: "Math. Oil Prod.: Proc. Conf. Inst. Math. and its Appl. Math. Oil Prod., Cambridge, July 1987."*, Oxford, p.343-362.
143. Wilkinson D., Willemsen J.F. (1983) Invasion percolation: a new form of percolation theory. *J.Phys. A: Math.Gen.*, v.16, p.3365.
144. Whitaker S. (1998) Coupled transport in multiphase systems: a theory of drying. *Advances in heat transfer*, v.31, Academic Press, New York, p.1-103.
145. Whitaker S., (1986a) Flow in porous media. I: a theoretical derivation of Darcy's law. *Transport in Porous Media*, v.1, p.3-35.
146. Whitaker S., (1986b) Flow in porous media. 2: the governing equations for immiscible, two-phase flow. *Transport in Porous Media*, v.1, p.105-125.
147. Witten T.A., Sander L.M. (1983) Diffusion limited aggregation. *Phys.Rev. B*, v.27, p.5686-5697.
148. Yortsos Y.C.and Hickernell F.J. (1989) Linear stability of immiscible displacement in porous media. *SIAM J. Appl. Math.* 49, p.730.
149. Yortsos Y.C., Xu B., and Salin D. (1997) Phase diagram of fully developed drainage in porous media. *Phys. Rev. Lett.*, 79, p.4581-4584.
150. Zarcone C., Lenormand R. (1994) Détermination expérimentale du couplage visqueux dans les écoulements diphasiques en milieu poreux. *C.R.Acad. Sci., Paris*, 318, série II, p.1429-1435.
151. Zarubin U.A. (1993) Exchange model of displacement in porous media. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, N 1, p.91-97.
152. Znanng Yu., Shariati M., Yortsos Y. (2000) The spreading of immiscible fluids in porous media under the influence of gravity. *Transport in Porous Media*, 38, p.117-140.

Variables :

ρ	masse volumique	kg m^{-3}
μ	viscosité dynamique	$\text{m}^{-1} \text{kg s}^{-1}$
g	accélération de la pesanteur	m s^{-2}
ϕ	porosité du milieu	-
s	saturation de la phase déplaçante	-
s_{β}^{tr}	saturation piégée de la phase déplacée	-
l^*	constante du réseau capillaire	m
l	longueur d'un capillaire	m
R	rayon du capillaire	m
r	rayon adimensionnel du capillaire	-
σ	tension superficielle sur le ménisque	H·m
θ	angle de contact	grad
γ	coefficient de forme du capillaire	-
P	pression	Pa
ΔP	chute de pression macroscopique à travers le milieu entier	Pa
$\langle P_c \rangle$	pression capillaire moyenne	Pa
p	pression adimensionnelle	-
p_c	pression capillaire local adimensionnelle	-
Ca	nombre capillaire du processus	-
L	longueur du modèle dans la direction de l'écoulement	m
t	temps macroscopique	s
t^*	temps macroscopique caractéristique du processus (e.g. : remplissage complet du milieu par la phase déplaçante)	s
t^*	temps microscopique (e.g. : remplissage complet du pore par la phase déplaçante)	s
τ	temps macroscopique adimensionnel	-
m	nombre de coordination du réseau	-
$\langle m \rangle$	nombre de coordination moyen	-
X	coordonnée globale du système	m
x	coordonnée globale adimensionnelle du système	-
x_{ξ}	coordonnée locale du ménisque mobile	m
ξ	coordonnée adimensionnelle (locale) du ménisque	-
ξ_0	coordonnée adimensionnelle du ménisque dans le pore à l'instant initial	-
Δh	pas adimensionnel du réseau (distance entre les nœuds)	-
$\rho(X)$	identificateur du contenu de pore individuel	-
$\zeta(x)$	indicateur de la présence d'un ménisque et de son orientation dans le pore	-
V	vitesse de l'écoulement de Darcy	m s^{-1}
U	vitesse de l'écoulement réelle	m s^{-1}
h_c	distance caractéristique adimensionnelle entre deux ménisques voisins	m
η_c	concentration en ménisques (l/h_c)	-

P_{c0}	pression capillaire de Laplace sur un ménisque moyen	Pa
p_{c0}	pression capillaire de Laplace sur un ménisque adimensionnelle	-
\vec{e}_c	vecteur unitaire du champ capillaire	-
H	fonction de Heaviside	-
α^i	fraction volumique du continuum i dans le volume total poreux, $i=I,II,III$	-
D_h	coefficient de dispersion	$m^2 s^{-1}$
K	perméabilité	m^2
k_i	perméabilité relative, $i=\alpha,\beta$	-
F	flux fractionnaire (<i>fractional flow</i>)	-
F^I, F^{II}	fonctions analogues de la « <i>fractional flow</i> »	-
F_c	« flux capillaire »	-
G	flux sommé	-
h_0	hauteur initiale de la flaque d'huile	m
l_p	largeur de la flaque d'huile	m
h	hauteur courante de la flaque d'huile	m
Bd	nombre de Bond	-

Indices inférieurs :

α	indice de la phase déplaçante (e.g. : eau)	-
β	indice de la phase déplacée (e.g. : huile)	-

Indices supérieurs :

I	meniscus-continuum
II	continuum constitué de la phase déplaçante seule
III	continuum constitué de la phase déplacée seule

Abréviations :

VER	volume élémentaire représentative
PR	perméabilité relative
DLA	diffusion-limited aggregation
DFP	méthode « différences finies – percolation »

PRODUCTION SCIENTIFIQUE

MONOGRAPHIE

- 1996 Panfilov M., Panfilova I. *Averaged models of flow with heterogeneous internal structure*. Moscow, Ed. Nauka, 383 p. (in Russian)

REVUES INTERNATIONALES (ISSN)

- 2003 Panfilov M., Oltean C., Panfilova I. and Buès M. A. Singular nature of nonlinear macroscale effects in high-rate flow through porous media. *C. R. Acad. Sci., Paris, Série Iib, M12*, 41-48.
- 2003 Panfilova, I. and Panfilov M. Near-Critical Gas-Liquid Flow through Porous Media : Monovariante Model and Convective Mass Exchange Effects. *Transport in Porous Media, August 2003 (accepté pour publication le 6/11/2002)*.
- 2002 Panfilova I., Panfilov M. Near-critical gas-liquid flow in porous media: monovariante model, analytical solutions, convective mass exchange effects. *Transport in Porous Media, Special Issue (accepté le 2/11/2002)*.
- 1998 Panfilova I. Gravitational penetration of a nonwetting fluid into a porous medium. Classification of regimes. *Fluid Dynamics*, 33, N2, p.230-237.
- 1998 Panfilov M., Panfilova I. Averaged model with capillary non-equilibrium for two-phase flow through highly heterogeneous porous media. *Fluid Dynamics*, N 2, 1998.
- 1995 Panfilov M., Panfilova I. Macro-kinetic model of the trapping process in two-phase fluid displacement in a porous medium. *Fluid Dynamics*, 1995, v.30, N 3, p.409-417.

ACTES DES CONFERENCES INTERNATIONALES (ISBN)

- 2002 Panfilova I., Buès M., Panfilov M. High-rate Navier-Stokes flow in porous media: d'Alembert paradox and its solution. *Poromechanics II, Eds, J.L. Auriault et al., pp. 521-526*, ISBN : 90-5809-394-8.
- 2002 Lucas Y., Panfilova I., Buès M., Panfilov M. Homogenized model of two-phase flow with various types of interfaces in porous media. *Poromechanics II, Eds, J.L. Auriault et al., pp. 495-500*, ISBN : 90-5809-394-8.
- 2002 Buès M., Panfilova I., Panfilov M. Two-phase dispersion in porous media. *Poromechanics II, Eds, J.L. Auriault et al., pp. 353-358*, ISBN : 90-5809-394-8.
- 2000 Panfilova I., Panfilov M. New model of two-phase flow through porous media in a vector field of capillary forces. In: *"Porous Media: Physics, Models, Simulations"*, Eds. A.Dmitrievsky and M.Panfilov, World Sci. Publishing, Singapor, pp. 145 – 165, ISBN : 981-02-4126-7.
- 1998 Panfilova I., Shakirov A., Kukharonok A., Panfilov M. Dynamic capillary model for two-phase flow through media with heterogeneous wettability. *Proc.: ECMOR-VI, 6-th European Conf. on the Mathematics of Oil Recovery, Peebles, near Edinbourg, Scotland, 8-11 Sept.1998 (paper C-09)*.
- 1998 Panfilov M., Panfilova I., Bourgeat A., Faleev V., Komin M. Principles of enhancing gas recovery from heterogeneous fields. *Proc.: IGRC98, International Gas Research Conference, San Diego, California, USA, 8-11 November 1998 (paper EPO-05)*.

- 1997 Panfilova I., Panfilov M. Representation of Gas-Condensate Wells in Numerical Reservoir Simulations. *Proc.: SPE Reservoir Simulation Symp., Dallas, Texas, USA, 8-11 June 1997, p.319-320.*
- 1996 Panfilova I., Muller J. Two-scale method for the saturation transport simulation in the network model of porous media. *Proc.: "Recent Advances in Problems of Flow and Transport in Porous Media", Maroc, Marrakech, 9--12 June, 1996.*

ACTES DES CONFERENCES NATIONALES

- 2003 Panfilova I., Panfilov M. et Buès M. A. Perméabilité effective des milieux hétérogènes : méthode d'analyse des clusters. *Proc. : CFM 2003, Nice, 1-5 Sept. 2003.*
- 2001 Lucas Y., Panfilova I., Panfilov M., Buès M. Modèle macroscopique d'écoulement avec dispersion diphasique en milieu hétérogène. *5 Journées d'études sur les Milieux Poreux, Marseille, 6-7 nov., pp. 69 – 70.*
- 2001 Panfilova I., Buès M., Panfilov M., Bouet Y. Paradoxe de symétrie et loi macroscopique d'écoulement aux grands nombres de Reynolds en milieux poreux. *Proc. : 5 Journées d'Etude sur Milieux Poreux, Marseille, 6-7 novembre 2001, pp. 105-106.*

PUBLICATIONS INTERNES

- 1991 Tuvaeva I. (Panfilova), Panfilov M. Percolation models of fluid displacement processes in media with random heterogeneity. *Moscow, Ed.: Oil & Gas Res. Inst., 1991, Preprint N12, 90 p.*
- 1990 Panfilov M., Tuvaeva I. (Panfilova) Convective dispersion of front in heterogeneous medium and problem of its description. *Moscow, Ed.: Oil & Gas Res. Inst., 1990, Preprint N6, 71 p.*

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

oOo

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur Charles MARLE, Professeur, Université de Paris VI
Monsieur Michel QUINTARD, Directeur de Recherche, IMF, Toulouse

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Madame PANFILOVA Irina

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

« **Écoulements diphasiques en milieu poreux : modèle de ménisque** »

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Génie Civil – Hydrosystèmes - Géotechnique** »

Fait à Vandoeuvre, le 01 octobre 2003

Le Président de l'I.N.P.L.,
L. SCHUFFENECKER



Service Commun de la Documentation
NPL
Nancy-Brabois

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANCEUVRE CEDEX

RÉSUMÉ

Un nouveau modèle macroscopique des écoulements diphasiques en milieux poreux est proposé. Il prend en compte l'existence d'une structure typique de la distribution des phases dans les pores, qui a la forme d'un champ répétitif de ménisques mobiles. La présence de ces interfaces conduit à un terme supplémentaire dans les équations du bilan de quantité de mouvement qui introduit le champ vectoriel de forces capillaires. Pour dériver ce modèle, une approche phénoménologique en introduisant un continuum spécial, appelé le Meniscus-Continuum, a été utilisée. Les relations de fermeture pour le modèle phénoménologique ont été obtenues par des simulations numériques en réseaux capillaires. Le nouveau modèle reste hyperbolique même si les forces capillaires sont dominantes, tandis que le modèle classique, avec des forces capillaires, est parabolique. Des solutions analytiques d'écoulements mono-dimensionnels ont été construites, manifestant des structures non classiques formées de doubles fronts ou de fronts à contre-courant. Pour calculer les problèmes 2D ou 3D, un algorithme numérique combiné « différences finies – percolation » a été développé. Son application à un problème de pénétration dans le sous-sol d'un DNAPL a permis de détecter plusieurs régimes de pénétration.

SUMMARY

A new macroscopic model of two-phase flow through porous media is suggested. It takes in consideration a typical structure of phase distribution in pores in the form of a repetitive field of mobile menisci. The presence of such interfaces gives rise to a supplementary term in the momentum balance equation, which introduces a vector field of capillary forces. The derivation of the model is based on the phenomenological approach with introducing a special continuum called the Meniscus-continuum. The closure relations to the phenomenological model are obtained by numerical simulations in network models of porous media. The new model remains hyperbolic even when the capillary forces are dominant, in contrast with the classical model which is parabolic. Analytical solutions to the mono-dimensional flow problems are constructed. They manifest non-classical structures like the double fronts or counter-flow fronts. To simulate 2D or 3D problems, a numerical algorithm is developed, which is a combination between the finite difference and the percolation techniques. Its application to the problem of DNAPL propagation into the soil has enabled to detect several penetration regimes.