



HAL
open science

Couplage thermomécanique et approche non entière de l'irréversibilité en viscoélasticité

Yves Meshaka

► **To cite this version:**

Yves Meshaka. Couplage thermomécanique et approche non entière de l'irréversibilité en viscoélasticité. Physique [physics]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2002. Français. NNT : 2002INPL091N . tel-01749725

HAL Id: tel-01749725

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749725v1>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

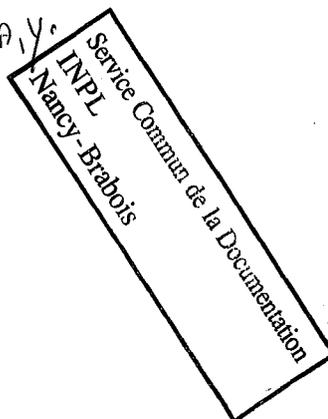
1360314732

02INPL091N

Institut National Polytechnique de Lorraine

Ecole Doctorale EMMA

[1] 2002 MESHAKA, Y.



THESE

présentée par

Yves MESHAKA
(Ingénieur ENSEM)

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Institut National Polytechnique de Lorraine
Spécialité : Mécanique et Énergétique

Couplage thermomécanique et approche non entière de l'irréversibilité en viscoélasticité

Soutenue publiquement le 10 décembre 2002 devant la commission d'examen :

A. Oustaloup	Président	Professeur, ENSEIRB, Bordeaux
A. Chrysochoos	Rapporteur	Professeur, Université Montpellier II
A. Le Mehauté	Rapporteur	Professeur, ISMANS, Le Mans
S. André	Examinateur	Maître de conférence, EEIGM, Nancy (Tuteur de Thèse)
C. Cunat	Examinateur	Professeur, ENSEM, Nancy (Directeur de Thèse)
A. Galtier	Examinateur	Ingénieur de recherche, IRSID, Metz

Remerciements

Ce travail a été réalisé au LEMTA (Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée) à Nancy sous la direction du Professeur Christian Cunat et du Maître de Conférence Stéphane André. Je ne les remercierai jamais assez pour leur disponibilité, leurs conseils avisés et l'intérêt qu'ils n'ont cessé de porter à ces recherches. Leurs grandes compétences, leur ouverture d'esprit, leur curiosité scientifique et l'ambiance de travail amicale et très détendue ont permis de rendre ces trois années de thèse, réputées des plus stressantes, fort agréables...

Je remercie les Professeurs André Chrysochoos et Alain Le Méhauté pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de porter un regard critique sur mon mémoire en tant que rapporteurs.

Le Professeur Alain Oustaloup m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je l'en remercie vivement.

Je voudrais également remercier Monsieur André Galtier, Ingénieur IRSID, à la fois pour son accueil à l'IRSID et pour le temps qu'il m'a consacré tout au long de cette thèse.

Je remercie également tous les membres de l'équipe; en particulier Marie Hélène Zoberman pour sa disponibilité, son humour et sa gentillesse légendaire ainsi que mes chers collègues doctorants avec qui j'ai passé ces trois années : Lamine, Kaïs, Hanane, Boris ...

Enfin, j'adresse une pensée toute particulière à ma famille, mes amis et Anne Laure qui ont su m'apporter tout leur soutien et leur amour dans les moments difficiles.

Vandoeuvre, le 19 décembre 2002

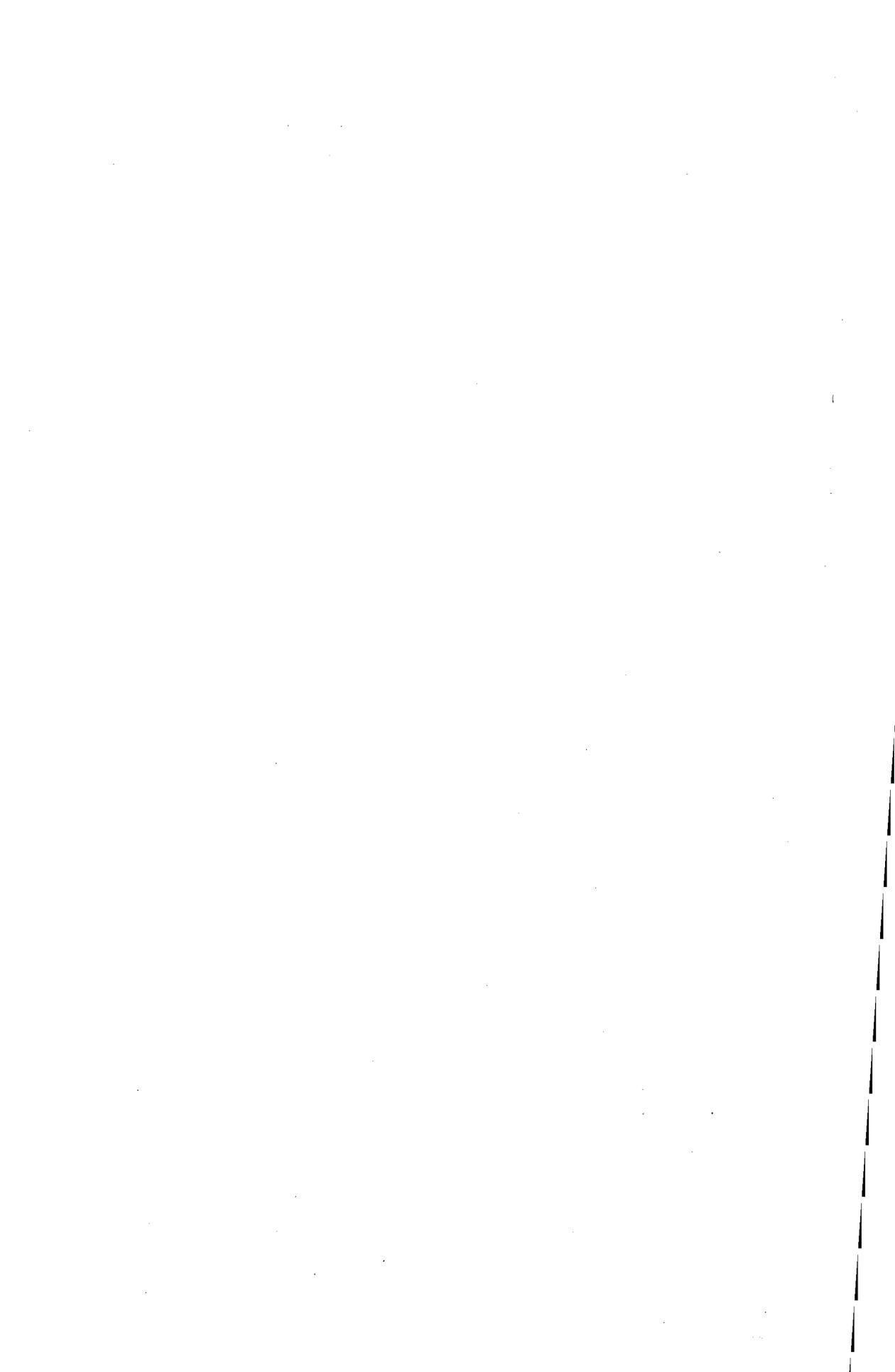


Table des matières

Introduction	1
A Mise en place des équations constitutives	7
I Présentation du modèle DNLR	9
I.1 Thermodynamique des processus irréversibles et approche DNLR	10
I.1.1 Première extension de la loi fondamentale de Gibbs (systèmes ouverts)	10
I.1.2 Équation de conservation des espèces	11
I.1.3 Deuxième extension de la loi fondamentale de Gibbs (réactions chimiques)	12
I.1.4 Thermodynamique à Variables Internes	12
I.2 Bases et principes de l'approche DNLR	13
I.2.1 Lois constitutives générales	13
I.2.2 Loi de relaxation propre aux variables internes	15
I.2.3 Modélisation des temps de relaxation	17
I.2.3.1 Au voisinage de l'équilibre	17
I.2.3.2 Introduction de non-linéarités coopératives	19
I.2.3.3 Conclusion	21
I.2.4 Distribution des modes de relaxation	21
I.2.4.1 Évolution du potentiel thermodynamique	22
I.2.5 Lien entre variables internes et variables d'états	28
I.3 Conclusion	29
II Écriture du couplage thermomécanique	31
II.1 Liens entre les différents potentiels généralisés	32
II.1.1 Brefs rappels mathématiques quant à la transformée de Legendre	32
II.1.2 Transformation partielle appliquée à l'énergie interne u	33
II.2 Lois constitutives thermomécaniques	34
II.2.1 Définition des coefficients propres à l'énergie libre d'Helmholtz	34
II.2.2 Lois constitutives propre à l'énergie interne	36
II.2.3 Lois constitutives liées à une contrainte imposée	38
II.3 Conclusions	39
B Loi de comportement mécanique	41
III Loi constitutive mécanique	43
III.1 Caractérisation du système mécanique propre au DNLR	44
III.1.1 Caractérisation d'un système	44

III.1.2	Transmittance mécanique normalisée propre au DNLR	46
III.1.2.1	Déformation imposée	46
III.1.2.2	Contrainte imposée	47
III.1.2.3	Conclusion	48
III.1.3	Modèle analogique associé à une déformation imposée	49
III.1.4	Caractérisation temporelle de la transmittance	50
III.1.4.1	Réponse impulsionnelle	50
III.1.4.2	Fonction de relaxation	51
III.1.5	Caractérisation fréquentielle de la transmittance - Diagramme de Bode	52
III.1.5.1	Construction des diagrammes de Bode	54
III.1.5.2	DNLR N processus	58
III.2	Réversibilité du modèle DNLR	58
III.2.1	Réversibilité des temps de relaxation et des poids	59
III.2.2	Expression de la réversibilité temporelle du modèle DNLR	60
III.2.3	Lien entre réversibilité temporelle et réversibilité fréquentielle (analyse en terme de zéros et de pôles)	60
III.2.3.1	Réversibilité fréquentielle	61
III.2.3.2	Détermination du paramètre fractionnaire n	62
III.2.3.3	Non équivalence stricte entre série récursive et distribution récursive des zéros et des pôles	63
III.2.4	Liens entre réversibilité temporelle et réversibilité géométrique analogique	65
III.3	Le modèle DNLR et les modèles non entiers	66
III.3.1	Bibliographie sur les modèles fractionnaires	67
III.3.1.1	Définition de la dérivée généralisée	67
III.3.1.2	Propriétés	68
III.3.1.3	Domaines d'application	68
III.3.1.4	La viscoélasticité et les modèles fractionnaires	69
III.3.2	Liens entre la réversibilité de l'approche DNLR et les modèles à un seul ordre de dérivation non entière	74
III.3.2.1	Modèle de Oldham et Zoski	74
III.3.2.2	Modèle de Oustaloup	76
III.3.2.3	Liens avec les modèles de relaxations empiriques	80
III.3.2.4	Conclusion	82
III.3.3	Liens entre l'approche DNLR et les modèles à deux puissances non entières	83
III.3.3.1	Étude empirique de Jonscher [Jon 96]	83
III.3.3.2	Modélisation DNLR	85
III.3.3.3	Modèle de Havriliak-Negami	88
III.3.3.4	Liens entre le modèle DNLR et le modèle de Dissado et Hill	91
III.4	Conclusions	92

C Loi de comportement thermique 95

IV Équation constitutive du transfert de chaleur 97

IV.1	Équation générale de propagation de la chaleur	98
------	--	----

IV.1.1	Écriture de l'entropie	98
IV.1.2	Équation de la chaleur	99
IV.1.3	Sources de chaleur et aire d'hystérésis	100
IV.1.4	Hypothèses simplificatrices	101
IV.2	Étude de la dissipation dans le cas isotherme	102
IV.2.1	Écriture générale de la dissipation	102
IV.2.2	Application à une déformation sinusoïdale	104
IV.2.3	Conclusions	108
IV.3	État de l'art sur l'écriture de la dissipation mécanique associée à la viscoélasticité linéaire isotherme	108
IV.3.1	Problématique	108
IV.3.2	Bibliographie	110
IV.3.3	Premières conclusions	114
IV.3.4	Comparaison des différentes approches avec le modèle DNLR	115
IV.3.4.1	Modèles analogiques	115
IV.3.4.2	Modèle empirique de Rabotnov	118
IV.3.4.3	Étude des différentes expressions de la dissipation sur un cas simple	118
IV.3.5	Conclusions	119
IV.4	Dissipation et équation de la chaleur dans le cas non isotherme	120
IV.4.1	Modèle DNLR	120
IV.4.2	Bibliographie non exhaustive	122
IV.4.2.1	Viscoélasticité non isotherme	122
IV.4.2.2	Plasticité	122
IV.4.2.3	Approches expérimentales	126
V	Analyse et résolution de l'équation de transfert thermique	127
V.1	Simplification géométrique de l'équation de transfert thermique	128
V.2	Analyse numérique	133
V.2.1	Analyse des conditions aux limites	134
V.2.1.1	Modèle 3D : Simulation de l'ensemble éprouvette + mors	134
V.2.1.2	Modèle 3D sans mors avec flux imposé	138
V.2.1.3	Modèle 3D sans mors avec Température imposée	138
V.2.1.4	Conclusions	139
V.2.2	Validation des simplifications géométriques effectuées sur le modèle 3D	140
V.2.2.1	Réduction du modèle 3D au modèle 2D	140
V.2.2.2	Réduction du modèle 2D au modèle 1D	143
V.2.2.3	Conclusion	145
V.3	Modèle 1D	145
V.3.1	Résolution analytique de l'équation de la chaleur 1D	145
V.3.2	Analyse de la réponse temporelle en température	148
V.4	Conclusions	149
VI	Analyse du régime transitoire propre à la conduction de chaleur dans un solide	151
VI.1	Thermodynamique Classique	152
VI.1.1	Équation de la chaleur	152

VI.1.2	Écriture de l'entropie	153
VI.2	Approche de Cattaneo-Vernotte	154
VI.3	Thermodynamique Irréversible Étendue	157
VI.3.1	Loi d'évolution de l'entropie	157
VI.3.2	Équation de la chaleur	159
VI.3.3	Discussions	159
VI.4	Thermodynamique des Processus Irréversibles - Cas particulier d'une modélisation DNLR	160
VI.4.1	Loi d'évolution de l'entropie	160
VI.4.2	Conclusion	162

D Protocole expérimental et premières comparaisons 163

VII Étude expérimentale 165

VII.1	Développement d'un système expérimental	166
VII.1.1	Premiers essais et premières conclusions	166
VII.1.2	Nouveau système mécanique	168
VII.1.3	Nouveau banc optique infrarouge	168
VII.1.3.1	Élément sensible	169
VII.1.3.2	Hublot	170
VII.1.3.3	Guide d'onde	171
VII.1.3.4	Montage qualificatif du banc de détection infrarouge	171
VII.1.4	Conclusions et perspectives	174
VII.2	Premières validations du modèle DNLR	175
VII.2.1	Résultats expérimentaux	176
VII.2.1.1	Notations	176
VII.2.1.2	Comportement mécanique	177
VII.2.1.3	Comportement thermique	179
VII.2.2	Comparaison expérience-simulation	182
VII.2.2.1	Paramètres mécaniques	183
VII.2.2.2	Paramètre thermique	187
VII.2.2.3	Validation de la modélisation DNLR	188
VII.2.3	Conclusions et perspectives	190

Conclusions et perspectives 195

Annexes 199

A	Détermination de la loi constitutive associée au potentiel d'énergie interne u	199
B	Formulation continue du modèle DNLR	202
C	Reformulation de la transmittance DNLR sous forme de fonction hypergéométrique	205
D	Calcul temporel de la dissipation	208
E	Résolution de l'équation de la chaleur dans l'espace de Laplace	210
F	Détermination des caractéristiques géométriques de l'ellipse caractéristique de l'hystérésis	211

Nomenclature 217

Introduction

Introduction

La notion de couplage thermomécanique invoque par sa terminologie les interactions entre thermodynamique et mécanique. Elle décrit d'une part l'effet de la température sur les propriétés mécaniques des matériaux (module, limite d'élasticité, viscosité, ...) et d'autre part l'effet d'un chargement mécanique sur la température interne d'une éprouvette.

Pour ce qui concerne l'étude de la thermo-dépendance des matériaux, on peut citer, parmi les principales applications, les différentes techniques de mise en forme des matériaux telles que le traitement thermique (trempe), le laminage, le thermoformage des plastiques, des verres, ...

L'étude de l'effet d'un chargement mécanique sur la température interne d'un matériau s'est initialement portée sur le cas simple des comportements élastiques. Pour de tels comportements, toute l'énergie mécanique est restituée à la décharge du matériau. La variation de température est alors directement liée, dans le cas d'un effort imposé, à la trace du tenseur des contraintes (en négligeant l'effet de la diffusion de la chaleur) :

$$\Delta T = -k \sum_i \sigma_{ii}$$

Ainsi, la température diminue en traction, augmente en compression et n'évolue pas en torsion ou en cisaillement. Ce phénomène est l'homologue des effets obtenus dans le cas des gaz. Lorsque le comportement d'un matériau est viscoélastique, plastique, viscoplastique ou lorsqu'il s'endommage ou se fissure, une partie de l'énergie nécessaire à la déformation est transformée de façon irréversible en chaleur ; on dit alors qu'il y a dissipation (ou dégradation) de l'énergie.

Ce double phénomène est à l'origine du couplage thermomécanique "complet". Sous sollicitation mécanique, une partie de l'énergie est dissipée sous forme de chaleur, ce qui se traduit par une élévation de la température du matériau qui peut en retour influencer sur son comportement mécanique par thermo-dépendance de ses propriétés mécaniques.

L'étude du comportement mécanique des matériaux (ou rhéologie) doit donc prendre en compte les effets dissipatifs liés aux processus de déformation. C'est dans cette optique que s'inscrit ce mémoire dont l'objectif est de mettre en place une description complète du couplage thermomécanique. Dans le cas de faibles vitesses de sollicitation mécanique (essais quasi-statiques), la chaleur spécifique des matériaux étant très élevée, les variations de température induites par la déformation restent souvent faibles et l'étude des matériaux est alors classiquement traité en mécanique des solides sous l'hypothèse d'un comportement mécanique isotherme. Dans le cas de grandes vitesses de sollicitation ou dans le cas de chargements complexes non linéaires induisant plasticité ou endommagement, cette dernière hypothèse n'est plus valable. L'étude du comportement mécanique nécessite

alors la prise en compte du couplage thermomécanique. En ce qui nous concerne, c'est plus particulièrement le problème de la compatibilité (ou consistence) thermodynamique des modèles rhéologiques qui sera analysé et c'est en ce sens que nous entendrons dorénavant l'expression "comportement thermomécanique du matériau". Le caractère dissipatif de l'irréversibilité en action impose nécessairement la prise en compte du comportement thermique des matériaux.

Ainsi se trouvait initialement défini le thème du travail de thèse. L'intérêt montré par l'IRSID (Institut de Recherche de la Sidérurgie à Maizières-les-Metz) vis à vis de ce projet nous a conduit à envisager son intégration dans la problématique de la détection par signal thermique du seuil de fatigue dans les aciers soumis à des chargements mécaniques cycliques, l'objectif étant de décrire correctement (au sens thermodynamique défini ci-dessus) le comportement thermomécanique du matériau avant l'apparition de la plasticité et de l'endommagement. Ce travail est partie intégrante de l'action thermomécanique entreprise par l'ERT (Équipe de Recherche Technologique) avalisée par le ministère et réalisée en partenariat avec le LEMTA (Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée à Nancy) et le LSGS (Laboratoire de Science et Génie des Surfaces à Nancy). Compte tenu de l'objectif industriel fixé, nous nous sommes principalement attachés à décrire le couplage thermo-viscoélastique.

Pour décrire le comportement thermomécanique et plus particulièrement les termes de couplage associés, on s'appuie sur la stratégie DNLR (Distribution of Non Linear Relaxation) élaborée par Cunat [Cun 85]. Cette approche, basée sur la Thermodynamique des Processus Irréversibles (TPI), a le grand avantage de permettre une description exhaustive et cohérente des énergies mises en jeu lors de sollicitations mécaniques. Ainsi, on pourra proposer une modélisation complète du comportement mécanique et thermique des matériaux.

Ce mémoire est subdivisé en quatre parties. La partie A est dévolue à la mise en place des équations constitutives mécanique et thermique issues de l'approche DNLR dont on rappelle les bases dans le chapitre I. Le chapitre II propose quatre écritures différentes mais équivalentes du couplage thermomécanique en fonction des variables observables choisies, obtenues par des transformations de Legendre appliquées au potentiel de l'énergie interne.

La partie B (chapitre III) est consacrée à l'étude de la loi constitutive purement mécanique issue du DNLR dans le cas de la viscoélasticité linéaire, ouvrant de manière plus générale sur la description des phénomènes de relaxation. En effet, il s'avère que le spectre de relaxation DNLR, basé sur la théorie des fluctuations et sur le concept d'équipartition de l'entropie produite de Prigogine, est étroitement lié à la notion de récursivité définie par Oustaloup [Ous 95]. On montre alors comment cette récursivité des temps de relaxation et des poids des processus de relaxation peut être associée à la notion de fractalité, ce qui permet (i) d'établir le lien entre l'approche DNLR et les modèles à dérivées non entières qui se développent depuis ces deux dernières décennies et (ii) de confronter alors (pour les enrichir) les ingrédients utilisés dans l'approche DNLR avec ceux mis en oeuvre dans les modélisations physiques à l'échelle microscopique et les idées topologiques en résultant qui conduisent à la fractalité.

La partie C est dévolue à l'étude du comportement thermique d'une éprouvette sous

sollicitation mécanique.

Le chapitre IV permet (i) la mise en place de l'équation de la chaleur locale dans un VER (Volume Élémentaire Représentatif) et (ii) une écriture directe des différentes énergies mises en jeu. On montre ainsi que la stratégie DNLr permet de retrouver des résultats comparables à ceux des modèles standards généralisés fondés sur l'existence d'un potentiel de dissipation et désormais classiquement utilisés en Mécaniques des Solides [Ger 75], [Chr 85], [Cha 93]. On cherche ensuite à analyser les différentes écritures de la dissipation en viscoélasticité proposées dans la littérature [Sta 52], [Pip 86], [Tsc 89], [Lio 01] au travers d'une comparaison avec le DNLr. Cette dernière étude nous permettra à terme de déterminer la dissipation associée aux modèles à dérivées fractionnaires afin de vérifier leur compatibilité thermodynamique.

L'étude du transfert thermique est ensuite détaillée au chapitre V. Dans un premier temps, on rappelle les outils mathématiques nécessaires à la simplification de l'équation de la chaleur au cas unidimensionnel 1D. Cette écriture est ensuite validée par une étude numérique effectuée sur un logiciel d'éléments finis FlexPDE®. Dans un dernier temps, on propose une solution analytique originale du problème thermique dans le cas d'un modèle viscoélastique linéaire 1D et pour le cas particulier d'une déformation sinusoïdale imposée.

Le chapitre VI s'intéresse à la propagation de la chaleur dans un solide sans aucun couplage mécanique. Il sort clairement des préoccupations initiales fixées pour cette thèse et le lecteur uniquement intéressé par les aspects du couplage thermomécanique pourra s'affranchir de sa lecture. Néanmoins, il reflète un travail important effectué dans le cadre des trois années de thèse et concernant des aspects fondamentaux pour les thermodynamiciens contemporains. C'est à ce double titre qu'il a été reporté dans le corps du texte. Le but est de montrer comment la TPI à variables internes développée dans le cadre DNLr contient implicitement toutes les bases nécessaires pour décrire le régime transitoire hyperbolique qu'on attribue parfois à l'équation de la chaleur. Ce chapitre permet ainsi de faire le lien entre la TPI et la TIE (Thermodynamique Irréversible Étendue) qui préconise l'introduction de variables de flux supplémentaires sans pouvoir cependant justifier physiquement ces nouvelles variables. D'un point de vue pratique, cet aspect ne présente aucun intérêt pour décrire les effets thermiques modélisés aux chapitres V et VI puisqu'il ne peut intervenir que pour des phénomènes marginaux (transferts thermiques ultra-rapides) pour lesquels la loi phénoménologique de Fourier est mise en défaut. D'un point de vue théorique, cette étude est cependant fondamentale. En effet, toute modélisation thermodynamique irréversible cohérente se doit de contenir dans ses fondements les ingrédients qui conduisent aux transitoires.

La partie D (chapitre VII) se divise en deux sections. La première est consacrée au protocole expérimental mis en place au sein du laboratoire axé sur la combinaison d'un système de vidéo-traction et d'un banc de détection infrarouge. La seconde propose une première validation de l'approche thermomécanique DNLr à partir de données expérimentales propres à l'acier S355 fournies par l'IRSID.

L'organisation du mémoire de thèse énoncée ci-dessus fait apparaître une multiplicité de champs disciplinaires distincts : lois rhéologiques, mathématique associée aux dérivées non entières, phénomènes de relaxation, TPI et EIT, modélisation thermique. Par conséquent, les aspects bibliographiques liés à ce travail de recherche apparaîtront soit dans la continuité du texte soit feront l'objet, au moment opportun, d'une étude historique spécifique.

Partie A

Mise en place des équations constitutives



Présentation du modèle DNLR

Sommaire

I.1	Thermodynamique des processus irréversibles et approche DNLR	10
I.1.1	Première extension de la loi fondamentale de Gibbs (systèmes ouverts)	10
I.1.2	Équation de conservation des espèces	11
I.1.3	Deuxième extension de la loi fondamentale de Gibbs (réactions chimiques)	12
I.1.4	Thermodynamique à Variables Internes	12
I.2	Bases et principes de l'approche DNLR	13
I.2.1	Lois constitutives générales	13
I.2.2	Loi de relaxation propre aux variables internes	15
I.2.3	Modélisation des temps de relaxation	17
I.2.4	Distribution des modes de relaxation	21
I.2.5	Lien entre variables internes et variables d'états	28
I.3	Conclusion	29

L'objectif de ce chapitre est de présenter les fondements de l'approche DNLR (Distribution of Non Linear Relaxations) développée par Cunat [Cun 85] et basée sur la Thermodynamique des Processus Irréversibles (TPI) à l'échelle du VER (Volume Élémentaire Représentatif). Cette approche repose sur une généralisation de la relation de Gibbs au cas où l'équilibre local est rompu. Elle se définit comme une extension des concepts initialement introduits par De Donder [Ded 20] : la dissipation locale peut être considérée physiquement comme le résultat de réorganisations internes assimilables à des réactions chimiques mal définies (stoechiométries inconnues) ; ces processus sont alors caractérisés par leurs degrés d'avancement et leurs affinités. L'idée est d'en réaliser une description modale y compris en présence de non-linéarités.

L'originalité de cette approche réside d'une part dans l'exploitation des propriétés des variables internes dans le domaine linéaire, où un changement de base approprié permet de découpler ces variables, et d'autre part dans l'extension de la théorie des fluctuations pour en caractériser la distribution. Une manipulation mathématique permet, dans un dernier temps, de substituer aux variables internes, difficiles à appréhender, des écarts à l'équilibre de la variable étudiée afin de proposer une formulation pratique des lois constitutives.

I.1 Thermodynamique des processus irréversibles et approche DNLR

I.1.1 Première extension de la loi fondamentale de Gibbs (systèmes ouverts)

La relation de Gibbs généralisée qui intègre à la fois le premier principe (conservation de l'énergie globale) et le second principe (non conservation et production positive de l'entropie) s'écrit pour les milieux uniformes hors équilibre :

$$u = u(s, \underline{\epsilon}, \underline{n}) \quad (\text{I.1})$$

où u représente le potentiel d'énergie interne spécifique, s l'entropie spécifique, $\underline{\epsilon}$ le tenseur des déformations (en petites déformations) et \underline{n} les nombres de moles spécifiques de particules constitutives. Toutes ces grandeurs sont exprimées par unité de volume. Le vecteur \underline{n} s'écrit $\underline{n} = (n^1, \dots, n^k, \dots, n^N)$ où n^k est le nombre de moles spécifiques de la particule k et N le nombre total d'espèces différentes indépendantes.

De manière générale, on notera \underline{y} l'ensemble des grandeurs extensives spécifiques qui pourraient aussi comprendre le champ magnétique, la polarisation électrique ... On se limite ici aux trois variables d'états nécessaires pour permettre le traitement de l'évolution des trois formes d'énergie : thermique, mécanique et chimique.

$$u = u(\underline{y}) = \underline{Y} \underline{y} = Ts + \underline{\sigma} : \underline{\epsilon} + \sum_k \mu_k n_k \quad (\text{I.2})$$

On définit ainsi par $\underline{Y} = (T, \underline{\sigma}, \underline{\mu})$ l'ensemble des variables intensives associées à \underline{y} . T représente la température, $\underline{\sigma}$ le tenseur des contraintes et $\underline{\mu}$ l'ensemble des potentiels chimiques :

$$\underline{Y} = \frac{\partial u}{\partial \underline{y}} \quad (\text{I.3})$$

Les propriétés d'extensité de l'énergie interne conduisent par dérivation temporelle de la relation (I.1) à la formulation en vitesse de la relation de Gibbs spécifique :

$$\dot{u} = T\dot{s} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \underline{\underline{\mu}} \dot{n} = T\dot{s} + \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \sum_k \mu_k \dot{n}_k \quad (\text{I.4})$$

complétée par ce qui constitue la relation de Gibbs-Duhem :

$$0 = \dot{T}s + \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\dot{\mu}}} n \quad (\text{I.5})$$

La spécificité de l'approche DNLR consiste à admettre que la relation $u = u(s, \underline{\underline{\epsilon}}, n)$ reste valable en dehors de l'équilibre et conserve son statut de véritable potentiel thermodynamique. Dans un certain sens, avec des arguments distincts, cette formulation rejoint la thermodynamique dite rationnelle de Truesdell : l'entropie reste une fonction potentielle y compris dans les situations hors équilibre. Ce sont les variables internes représentatives de la microstructure qui s'auto-adaptent pour minimiser à chaque échelle de temps le potentiel thermodynamique associé aux variables contrôlées. Les variables contrôlées correspondent aux conditions aux limites du VER homogénéisé. C'est la dynamique des variables internes qui induit une irréversibilité d'origine dissipative dans les milieux uniformes sans qu'il soit nécessaire d'y adjoindre un pseudo-potentiel des vitesses de type Rayleigh.

I.1.2 Équation de conservation des espèces

L'évolution du nombre de moles d'atomes \dot{n} est régie par les échanges avec l'extérieur \dot{n}_e et par les réactions à l'intérieur du système \dot{n}_i .

$$\dot{n} = \dot{n}_e + \dot{n}_i \quad (\text{I.6})$$

L'équation d'évolution précédente peut encore s'écrire :

$$\dot{n} = -\nabla J_n + \pi_n \quad (\text{I.7})$$

où J_n et π_n correspondent respectivement au flux de diffusion et au taux de production interne; le taux de constituant échangé avec l'extérieur correspondant ainsi à :

$$\dot{n}_e = -\nabla J_n \quad (\text{I.8})$$

D'une approche thermodynamique apparemment réservée au traitement de milieux chimiques réactifs, on glisse alors vers une approche plus générale des phénomènes irréversibles en pensant le taux de production interne du constituant comme étant lié aux variables internes \bar{x}^1 (ou variables cachées) qui régissent l'avancement d'évolutions (ou réactions) irréversibles [Ded 20]. On admet que toute réorganisation interne peut être décrite par ces variables cachées [Cun 91] : elles peuvent représenter aussi bien le degré d'avancement d'une réaction chimique que les taux de dissociation ou les composantes des mouvements moléculaires massifs tels que montées de dislocations lorsqu'on s'intéresse à

¹Un vecteur appartenant à l'espace des variables d'état sera noté \underline{V} tandis qu'un vecteur appartenant à l'espace des dissipations sera noté \bar{V} . Cette convention permet de percevoir facilement l'appartenance à l'un ou/et l'autre des espaces. Par exemple, une matrice notée \underline{M} appartiendra à ces deux espaces; il s'agira donc d'une matrice de couplage.

la plasticité par exemple.

Si N réactions ont lieu dans le système :

$$\dot{n}_i = \pi_n = \sum_{k=1}^N \nu_k z^k = \bar{\nu} \bar{z} \quad (\text{I.9})$$

où le coefficient de proportionnalité ν est appelé coefficient stoechiométrique. L'évolution du nombre de moles de particules \underline{n} s'écrit donc finalement :

$$\dot{\underline{n}} = -\nabla J_n + \bar{\nu} \bar{z} \quad (\text{I.10})$$

I.1.3 Deuxième extension de la loi fondamentale de Gibbs (réactions chimiques)

La combinaison des relations (I.4) et (I.10) conduit à une nouvelle écriture de la relation de Gibbs :

$$\dot{u} = T \dot{s} + \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\mu} \nabla J_n + \underline{\mu} \bar{\nu} \bar{z} \quad (\text{I.11})$$

Conformément à l'écriture de De Donder [Ded 20], on définit le concept d'affinité \bar{A} associé à \bar{z} par :

$$\bar{A} = -\underline{\mu} \bar{\nu} \quad (\text{I.12})$$

On retombe ainsi sur la deuxième extension de Gibbs (voir par exemple [Mun 66]) qui s'applique aux systèmes en cours d'évolution :

$$\dot{u} = T \dot{s} + \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\mu} \nabla J_n - \bar{A} \dot{\bar{z}} \quad (\text{I.13})$$

I.1.4 Thermodynamique à Variables Internes

Si on ne prend pas en compte les phénomènes de transport qui impliquent l'utilisation des gradients de grandeurs intensives, i.e. le paramétrage de l'espace conjointement à celui du temps, alors l'énergie interne ne dépend que des variables d'états classiques et des variables internes :

$$u = u(s, \underline{\epsilon}; \bar{z}) = u(y; \bar{z}) \quad (\text{I.14})$$

Cette écriture conduit directement à la Thermodynamique à Variables Internes (TVI).

L'équation (I.13) s'écrit alors :

$$\dot{u} = T \dot{s} + \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} - \bar{A} \dot{\bar{z}} \quad (\text{I.15})$$

Cette équation est associée à la loi de Gibbs-Duhem :

$$T \dot{s} + \underline{\dot{\sigma}} : \underline{\dot{\epsilon}} - \dot{\bar{A}} \bar{z} = 0 \quad (\text{I.16})$$

I.2 Bases et principes de l'approche DNLR

Le modèle DNLR, élaboré par Cunat [Cun 01], se positionne à l'échelle du VER (Volume Élémentaire Représentatif) que l'on définit comme la taille limite pour laquelle tout gradient de grandeur intensive peut y être considéré comme nul. Ceci permet ainsi de développer une Thermodynamique à Variables Internes en traitant des milieux hétérogènes uniformisés ; la prise en compte des gradients se fera de manière naturelle par l'intégration de ces lois locales dans un code de calcul d'éléments finis [Die 02].

I.2.1 Lois constitutives générales

On a jusqu'ici défini l'énergie interne $u(\underline{y})$ comme une fonction potentielle construite sur toutes les variables extensives indépendantes \underline{y} . Cela sous-entend qu'on "contrôle" l'ensemble de ces variables \underline{y} .

Cependant, expérimentalement, on contrôle souvent à la fois des grandeurs extensives et intensives, ce qui implique des conditions aux limites mixtes sur le VER. Dans ce cas, on peut toujours définir une fonction potentielle Ψ adaptée qui contient toute l'information thermodynamique du VER par simple transformée de Legendre de l'énergie interne. On appellera alors $\underline{\gamma}$ les variables indépendantes de contrôle et $\underline{\beta}$ les réponses associées correspondantes pour des conditions aux limites mixtes.

Si on définit $\Psi = \Psi(\underline{\gamma}, \bar{z})$ le potentiel thermodynamique régissant le système, les variables observables sont définies comme les dérivées du potentiel thermodynamique par rapport aux paramètres de contrôle et les forces dissipatives comme les dérivées du potentiel thermodynamique par rapport aux degrés d'avancement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\beta}(\underline{\gamma}; \bar{z}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\gamma}}(\underline{\gamma}; \bar{z}) \\ \bar{A}(\underline{\gamma}; \bar{z}) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}}(\underline{\gamma}; \bar{z}) \end{array} \right. \quad (\text{I.17})$$

où $\underline{\beta}$ et $\underline{\gamma}$ sont des vecteurs colonnes de rang q représentant respectivement l'ensemble des variables observables et des variables de commande (ou variables de contrôle). La nature des variables de commande et des variables observables n'est pas précisée à ce niveau. La formulation peut s'appliquer aussi bien à la mécanique, l'optique, le magnétisme, la thermodynamique chimique, ... qu'au couplage de ces grandeurs. Le choix des variables de commande dépend du potentiel thermodynamique utilisé.

\bar{A} et \bar{z} sont des vecteurs colonnes de rang N représentant respectivement les affinités et les variables internes (ou variables dissipatives) associées à N processus.

Le signe négatif dans l'expression (I.17.b.) a été historiquement introduit pour traduire la force motrice, ou force thermodynamique de non-équilibre, qui tend à ramener le système vers son état d'équilibre.

Sous forme incrémentale, le système précédent s'écrit :

$$\begin{cases} d\underline{\beta} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\gamma} \partial \underline{\gamma}} d\underline{\gamma} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\gamma} \partial \bar{z}} d\bar{z} \\ d\bar{A} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{z} \partial \underline{\gamma}} d\underline{\gamma} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}} d\bar{z} \end{cases} \quad (I.18)$$

Ce système peut encore être représenté en terme de vitesses par un système d'équations matricielles :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\beta}} \\ -\dot{\bar{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}^u & \underline{b} \\ \underline{b}^t & \bar{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\gamma}} \\ \dot{\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (I.19)$$

$\underline{\beta}$ et $\underline{\gamma}$ sont aussi appelées respectivement variables de sortie et variables d'entrée en référence à l'écriture de l'automaticien.

La matrice de couplage entre les variables d'état est la matrice instantanée de Tisza \underline{a}^u (la notation u correspond à la terminologie anglo-saxonne *unrelaxed*). C'est une matrice symétrique carrée de dimension (qxq) qui s'écrit :

$$\underline{a}^u = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\gamma} \partial \underline{\gamma}} \quad (I.20)$$

\underline{b} est une matrice rectangulaire de dimension (Nxq) couplant les variables d'état et les variables dissipatives :

$$\underline{b} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\gamma} \partial \bar{z}} \quad (I.21)$$

\bar{g} est la matrice de dissipation pure. Cette matrice est symétrique, définie positive et de dimension (NxN). Elle traduit le couplage entre les grandeurs dissipatives :

$$\bar{g} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}} \quad (I.22)$$

D'après la relation (I.19.a), la réponse d'un système à une perturbation (ou stimulus) peut se décomposer en une réponse instantanée et une réponse qu'on qualifera de dissipative.

$$\dot{\underline{\beta}} = \underbrace{\underline{a}^u \dot{\underline{\gamma}}}_{\text{instantanée}} + \underbrace{\underline{b} \dot{\bar{z}}}_{\text{dissipative}} \quad (I.23)$$

La réponse instantanée reflétant l'élasticité du système est un phénomène réversible. La réponse est proportionnelle à la commande (le coefficient de proportionnalité est noté \underline{a}^u). La réponse dissipative, liée à la notion d'irréversibilité, met en jeu les phénomènes dissipatifs du système. La structure interne du matériau se réorganise jusqu'à atteindre un état stable, dit relaxé, caractérisé par exemple par une nouvelle proportionnalité entre variable de commande et variable observable (\underline{a}^r le nouveau coefficient de proportionnalité est alors défini tel que $\underline{a}^r < \underline{a}^u$). Cet état relaxé est caractérisé par une affinité dont la dérivée temporelle est nulle

$$\dot{\bar{A}} = \bar{A}^r = 0 \quad (I.24)$$

L'état relaxé se différencie du véritable état d'équilibre pour lequel l'affinité elle-même est nulle. D'après la relation (I.19.b), l'état relaxé (stationnaire en affinité c'est à dire isoaffin) est entièrement régi par les variables de contrôle :

$$\bar{z}^r = \bar{g}^{-1} \bar{b}^t \dot{\gamma} \quad (I.25)$$

Les variables observables sont ainsi définies à l'état relaxé par la relation :

$$\underline{\hat{\beta}}^r = \underline{a}^u \dot{\gamma} + \bar{b} \bar{z}^r = \underline{a}^r \dot{\gamma} \quad (I.26)$$

Deux écritures propres à la réponse $\underline{\hat{\beta}}$ sont alors possibles en fonction de l'état de référence choisi (instantané ou relaxé) :

$$\begin{cases} \underline{\hat{\beta}} = \underline{a}^u \dot{\gamma} + \bar{b} \bar{z} \\ \text{ou} \\ \underline{\hat{\beta}} = \underline{a}^r \dot{\gamma} + \bar{b} (\bar{z} - \bar{z}^r) \end{cases} \quad (I.27)$$

La figure suivante illustre schématiquement, dans le cas d'un traitement scalaire à une seule variable γ , les deux composantes instantanée et dissipative de la réponse du système en fonction de l'état de référence choisi :

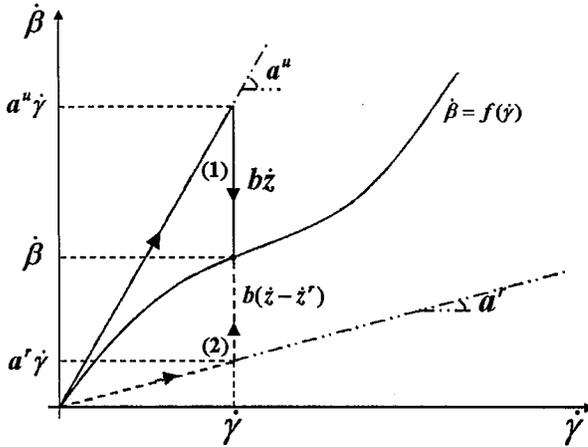


FIG. I.1: Représentation des deux écritures possibles de la réponse β associée à une sollicitation γ (eq. I.27) dans un schéma $(\dot{\gamma}, \hat{\beta})$ - Le chemin (1) se réfère à l'état instantané et le chemin (2) à l'état relaxé

I.2.2 Loi de relaxation propre aux variables internes

Pour résoudre le système (I.19), il est bien entendu nécessaire de connaître toutes les entrées. Si le vecteur $\dot{\gamma}$ est accessible à l'expérimentateur, il n'en sera pas de même des variables de micro-structure \bar{z} . On fait alors appel à une modélisation des cinétiques internes afin de permettre la fermeture du système d'équations.

Comme on l'a déjà indiqué précédemment, la dérivée de l'affinité qui s'écrit :

$$-\bar{A} = \bar{b}^t \dot{\gamma} + \bar{g} \bar{z} \quad (I.28)$$

s'annule lorsque l'état d'équilibre est atteint ($\overline{A} = 0$). Dans ces conditions,

$$\underline{\bar{b}}^t \dot{\underline{\gamma}} = -\underline{\bar{g}} \underline{\bar{z}}^r \quad (\text{I.29})$$

La combinaison des deux dernières équations conduit à :

$$\overline{A} = -\underline{\bar{g}} (\underline{\bar{z}} - \underline{\bar{z}}^r) \quad (\text{I.30})$$

Deux hypothèses principales servent alors de base quant à la description des variables internes (ou variables cachées) au voisinage de l'équilibre :

- La première (de nature thermodynamique) postule que les coefficients des matrices \underline{a}^u , $\underline{\bar{b}}$ et $\underline{\bar{g}}$ (qui sont les dérivées secondes du potentiel Ψ) sont des constantes au voisinage de l'équilibre. L'intégration de la relation (I.30) conduit alors à :

$$\overline{A} = -\underline{\bar{g}} (\underline{\bar{z}} - \underline{\bar{z}}^r) \quad (\text{I.31})$$

- La deuxième (de nature cinétique) relie linéairement les flux généralisés $\underline{\bar{z}}$ aux forces \overline{A} conformément aux équations phénoménologiques de Onsager [Ons 31] :

$$\underline{\bar{z}} = \overline{\overline{L}} \overline{A} \quad (\text{I.32})$$

La combinaison des équations (I.31) et (I.32) conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\underline{\dot{\bar{z}}} = -\overline{\overline{\tau}}^{-1} (\underline{\bar{z}} - \underline{\bar{z}}^r) \text{ avec } \overline{\overline{\tau}}^{-1} = \overline{\overline{L}} \underline{\bar{g}} \quad (\text{I.33})$$

L'opérateur $\overline{\overline{\tau}}$ ainsi obtenu correspond à la définition thermodynamique des temps de relaxation.

Cette dernière relation s'écrit en composante :

$$\dot{z}^i = - \sum_j \tau^{ij-1} (z^j - z^{j,r}) \quad (\text{I.34})$$

Meixner [Mei 49] a montré qu'il était toujours possible de choisir une base qui diagonalise à la fois $\overline{\overline{L}}$ et $\underline{\bar{g}}$, qui permettait à l'une des deux d'être isotrope tout en conservant, bien entendu, la même valeur pour la production d'entropie. Cunat [Cun 01] a montré que l'isotropie devait porter naturellement sur le tenseur phénoménologique $\overline{\overline{L}}$ ($\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{L}} \overline{\overline{1}}$) lorsque l'on considère les réorganisations dissipatives comme le retour à l'équilibre par régression spontanée de fluctuations. Il propose de les relier directement à la constante de Planck, qui fixe en quelque sorte la référence absolue de l'échelle des temps :

$$L \sim \frac{1}{h} \quad (\text{I.35})$$

Dans cette base orthogonale, l'opérateur temps de relaxation est donc lui aussi diagonal. Cette opération mathématique permet ainsi de découpler les processus dissipatifs en modes normaux.

$$\tau^{ij} = \tau^{ij} \delta^{ij} = \tau^{jj} \quad (\text{I.36})$$

δ^{ij} est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i=j$ et 0 sinon.

L'opération de diagonalisation précédente conduit donc à une analyse modale des processus dans l'espace des dissipations. Cette démarche est similaire à la description en régime vibratoire du mouvement d'une poutre, en dynamique des structures, par la superposition de modes propres. En d'autres termes, le comportement du VER est décrit par une simple superposition des différents modes normaux. Ainsi, chaque mode est une description partielle de l'ensemble du système. La réponse globale est alors simplement obtenue par superposition de chacun des modes j .

Les relations (I.31) et (I.32) s'écrivent alors en composante modale :

$$\begin{cases} A^j = -g^{jj}(z^j - z^{j,r}) \\ \dot{z}^j = -\tau^{jj-1}(z^j - z^{j,r}) \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

En définissant $\tau^j = \tau^{jj}$, on peut alors transformer la matrice des temps de relaxation en un vecteur temps de relaxation.

L'équation de relaxation associée aux variables internes s'écrit alors :

$$\dot{z}^j = -\frac{(z^j - z^{j,r})}{\tau^j} \quad (\text{I.38})$$

I.2.3 Modélisation des temps de relaxation

La relation (I.33) introduit la notion thermodynamique de temps de relaxation. Il reste à donner un sens physique à cet opérateur. Dans le cadre des modèles construits sur la stratégie DNLR, on se réfère souvent à la théorie de l'état transitoire activé [Eyr 36], [Kau 41].

Tout réarrangement d'un groupe de particules peut être vu comme une transition entre deux états : le système passe d'un état initial u (équilibre métastable) à un état final r de plus faible énergie (équilibre stable) en traversant une suite continue d'états intermédiaires. Comme ces deux états correspondent à deux minimums d'énergie, Cunat [Cun 85] postule alors l'existence d'un maximum appelé col d'activation.

I.2.3.1 Au voisinage de l'équilibre

Dans le cadre de la théorie thermodynamique de l'état transitoire activé, le processus de relaxation d'un système micro-structural particulier (atome, ensemble d'atomes, ...) passe par le franchissement d'une barrière énergétique pour passer de l'état initial u à l'état final r .

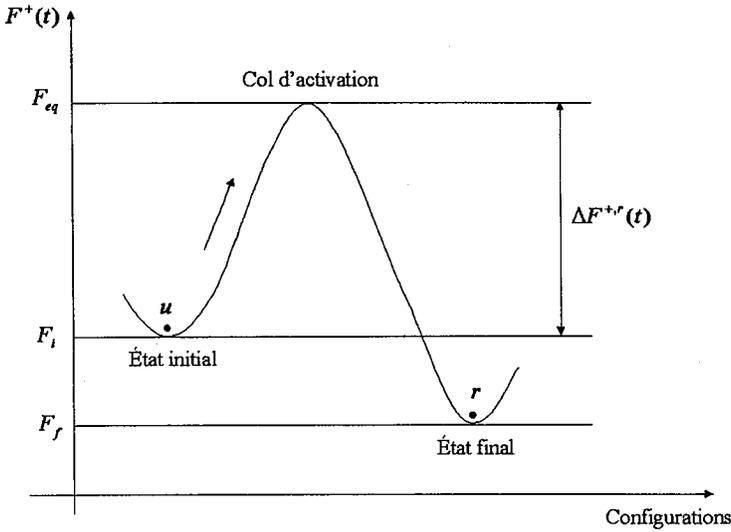


FIG. I.2: Représentation schématique de la barrière énergétique à franchir pour passer de l'état instantané (u) à l'état relaxé (r)

Pour que le système puisse surmonter la barrière d'activation, il faut que l'environnement configurationnel soit favorable (formation d'un défaut topologique par exemple) et que la fréquence de saut ν soit suffisamment grande. Le temps de relaxation peut alors être défini comme proportionnel à l'inverse du produit de la fréquence de saut ν^j et de la probabilité p^{j+} d'atteindre la position énergétique du col d'activation :

$$\tau^j = \frac{1}{\nu^j p^{j+}} \quad (I.39)$$

En se basant sur les études statistiques de Guggenheim [Gug 39], on suppose la fréquence de saut identique pour chaque processus j . Pour caler l'échelle des temps, Cunat a retenu pour la fréquence la forme suivante :

$$\nu^j = \nu = \frac{k_B T}{h} \quad (I.40)$$

où k_B est la constante de Boltzmann et h la constante de Planck ; cette forme correspond à un temps de translation élémentaire.

Pour un saut thermiquement activé, la probabilité p^{j+} est liée à la fois à l'énergie d'activation et à l'entropie d'activation ; sur des petits domaines de température, on peut toujours admettre que l'énergie d'activation reste constante et que le comportement suit une loi d'Arrhenius. Ici, bien entendu, le niveau d'énergie d'activation traduit l'énergie à fournir à l'ensemble du VER pour que les mouvements se produisent. Ce niveau ne saurait être brutalement identifié à quelque mouvement moléculaire individuel ; il possède une forte part de coopérativité puisque, rappelons le encore, un mode concerne un mouvement d'ensemble de tous les éléments de VER avec leurs lots d'interactions mutuelles. On peut donc admettre la même énergie d'activation (apparente) pour tous les modes. Ceci permet de retrouver le principe d'équivalence temps-température et de conserver en outre la même

base modale quand la température varie :

$$p^{j+} = \exp\left(-\frac{\Delta F_j^+}{RT}\right) \quad (\text{I.41})$$

où ΔF_j^+ représente l'énergie libre d'activation caractérisant la barrière à franchir :

$$\Delta F_j^+ = \Delta E^+ - T\Delta S_j^+ \quad (\text{I.42})$$

Dans ces conditions, c'est le facteur entropie d'activation qui intégrera la distribution des modes et qui éventuellement "corrige" implicitement le choix précédent de la fréquence de saut ν^j .

Les temps de relaxation ont été déterminés au voisinage de l'équilibre. Afin de rendre compte de cette particularité, on affectera l'indice r (pour relaxed i.e. à l'équilibre) à l'ensemble des fonctions précédentes :

$$\tau^{j,r} = \frac{h}{kT} \exp\left(\frac{\Delta F_j^{+,r}}{RT}\right) = \left[\frac{h}{kT} \exp\left(-\frac{\Delta S_j^{+,r}}{R}\right)\right] \exp\left(\frac{\Delta E^{+,r}}{RT}\right) \quad (\text{I.43})$$

Deux remarques peuvent être formulées à ce stade de la modélisation :

- Tous les processus de retour depuis l'état final vers l'état initial ont été négligés. Leur prise en compte introduirait simplement un sinus hyperbolique à la place de l'exponentielle. Par souci de simplicité, on admettra donc que les mécanismes de retour sont peu probables.
- La présence d'un spectre de relaxation induit de possibles compétitions entre modes et apparaît donc comme une source potentielle d'effet de mémoire. Cet effet serait inaccessible avec un seul mécanisme linéaire.

Les temps de relaxation, définis en (I.43), peuvent mathématiquement prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et l'infini. Cependant, Cunat [Cun 85] postule l'existence de deux temps extrêmes qui bornent alors le spectre ou de manière équivalente de deux entropies d'activation limites. La présence d'un temps de relaxation minimal τ_m est unanimement reconnue. Elle se justifie physiquement par le fait que les vitesses de réorganisation interne ne peuvent pas être infinies; ce temps minimal est habituellement relié à la notion de distance inter-atomique et est estimé de l'ordre de 10^{-14} s à 10^{-12} s. Le temps de relaxation maximal τ_M est caractéristique du processus de réorganisation interne le plus lent et peut être associé à la taille limite du VER. La signification physique de ce temps de relaxation maximal sera plus amplement détaillée au paragraphe III.3.3.

I.2.3.2 Introduction de non-linéarités coopératives

Au-delà de l'équilibre, les approximations de linéarité précédentes ne sont plus admises. Kovacs [Kov 54], par exemple, observe une forte asymétrie de la recouvrance volumique selon le signe de l'écart à l'équilibre induit par des histoires thermiques différentes. Ces expériences ont mis en évidence la dépendance temporelle des temps de relaxation; chaque processus est intrinsèquement non linéaire.

En admettant une dépendance de $\bar{\gamma}$ avec l'écart à l'équilibre des variables internes ($\bar{z} - \bar{z}^r$),

l'opérateur temps de relaxation devient lui même dépendant de cet écart à l'équilibre puisque par définition :

$$\bar{\tau}^{-1} = \bar{L} \bar{g} \quad \text{avec} \quad \bar{L} \sim \frac{1}{h} \bar{1} \quad (\text{I.44})$$

On introduit ainsi une dépendance temporelle (par l'intermédiaire de $(\bar{z} - \bar{z}^r)$) au niveau du col d'activation (figure I.3). La hauteur du col d'activation varie donc avec $(\bar{z} - \bar{z}^r)$ et dépend implicitement du temps.

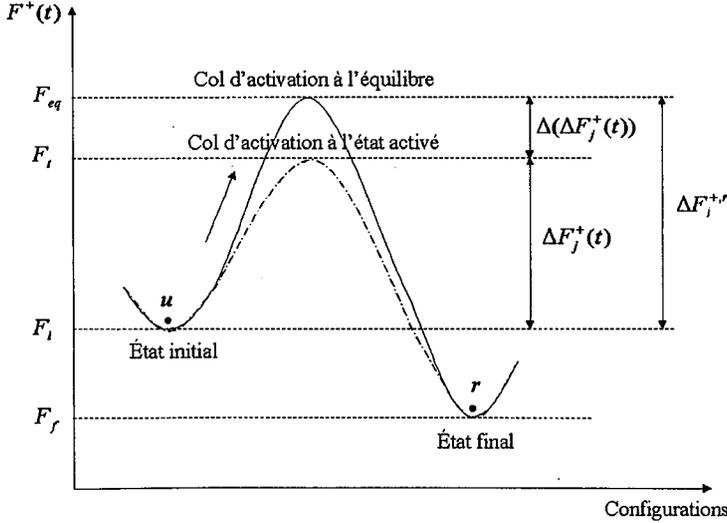


FIG. I.3: Représentation schématique, associée au jème processus, de la dépendance temporelle de la barrière énergétique à franchir pour passer de l'état instantané (u) à l'état relaxé (r)

L'énergie libre d'activation nécessaire pour franchir la barrière d'activation s'écrit alors :

$$\Delta F_j^+(t) = \Delta F_j^{+,r} + \Delta(\Delta F_j^+(t)) \quad (\text{I.45})$$

où $\Delta(\Delta F_j^+(t))$ correspond à l'écart énergétique par rapport à l'activation de l'état relaxé. On peut noter que la configuration proposée par la figure I.3 impose une valeur négative à cet écart énergétique.

Les temps de relaxation s'écrivent ainsi :

$$\tau^j = \frac{h}{kT} \exp\left(\frac{\Delta F_j^{+,r}}{RT}\right) \exp\left(\frac{\Delta(\Delta F_j^+(t))}{RT}\right) \quad (\text{I.46})$$

ou encore :

$$\tau^j(t) = \tau^{j,r} \alpha^j(t) \quad (\text{I.47})$$

en posant

$$\alpha^j(t) = \exp\left(\frac{\Delta(\Delta F_j^+(t))}{RT}\right) \quad (\text{I.48})$$

Comme pour l'énergie d'activation propre à chaque mode du VER, Cunat [Cun 85] admet un facteur de glissement identique pour tous les modes :

$$a^j(t) = a(t) \quad \forall j \quad (\text{I.49})$$

Le coefficient a^j appelé facteur de glissement (ou encore facteur de réduction) sur l'échelle des temps est donc indépendant du mode j .

C'est cette dernière hypothèse qui a permis d'interpréter et de simuler la transition vitreuse et les phénomènes de vieillissement physique qui lui sont associés lors de la mise en place du formalisme. Par conséquent :

$$\Delta(\Delta F_j^+(t)) = \Delta(\Delta F^+(t)) \quad \forall j \quad (\text{I.50})$$

Dans ces conditions, les temps de relaxation sont définis par :

$$\tau^j(t) = \tau^{j,r} a(t) \quad (\text{I.51})$$

En première approximation, Cunat [Cun 85] a retenu pour l'écart énergétique $\Delta(\Delta F^+(t))$ un développement au premier ordre par rapport à la variable observable $\underline{\beta}$:

$$\Delta(\Delta F^+(t)) = \underline{K}_\beta (\underline{\beta} - \underline{\beta}^r) \quad (\text{I.52})$$

où \underline{K}_β représente le facteur de non-linéarité induit par l'écart à l'équilibre. Le facteur de glissement s'écrit donc :

$$a(t) = \exp\left(\frac{\underline{K}_\beta (\underline{\beta} - \underline{\beta}^r)}{RT}\right) \quad (\text{I.53})$$

I.2.3.3 Conclusion

L'introduction des deux non-linéarités précédentes (distribution des temps et propriété coopérative du facteur de glissement) conduit à l'expression temporelle des temps de relaxation hors-équilibre :

$$\left[\begin{aligned} \tau^j &= \frac{h}{kT} \exp\left(\frac{\Delta F_j^{+,r}}{RT}\right) \exp\left(\frac{\underline{K}_\beta (\underline{\beta} - \underline{\beta}^r)}{RT}\right) \\ &= \tau^{j,r} \exp\left(\frac{\underline{K}_\beta (\underline{\beta} - \underline{\beta}^r)}{RT}\right) = \tau^{j,r} a(t) \end{aligned} \right. \quad (\text{I.54})$$

Le comportement que l'on qualifiera de linéaire par la suite correspond au cas particulier où $\underline{K}_\beta = \underline{0}$ i.e. $a(t) = 1 \quad \forall t$.

I.2.4 Distribution des modes de relaxation

Pour modéliser la distribution des processus de relaxation, Cunat [Cun 88] s'est basé sur les résultats expérimentaux de Kovacs [Kov 63] et Struik [Str 78]. Kovacs a mis en évidence la multiplicité des mécanismes de relaxation à partir de ses expériences de recouvrance volumique (encore appelées expériences de cross-over) tandis que Struik, suite à une analyse

du vieillissement physique de nombreux matériaux de natures très variées, a observé une réponse mécanique unique après réduction de leurs coordonnées de manière appropriée. Ainsi si Kovacs souligne la nécessité de prendre en compte un nombre important de processus dissipatifs (que l'on note N), les conclusions de Struik mettent implicitement en lumière la nature statistique du comportement des matériaux.

L'attribution d'un poids (amplitude) associé à chaque processus dissipatif doit ainsi trouver ses fondements dans une étude probabiliste de la relaxation et du potentiel thermodynamique associé.

1.2.4.1 Évolution du potentiel thermodynamique

On choisit de travailler avec le potentiel f , énergie libre de Helmholtz, classiquement utilisé en mécanique dans le cas où l'on admet souvent gérer la température et contrôler la déformation :

$$f = f(T, \epsilon, \bar{z}) = u - Ts = \sigma \epsilon - \sum_k A_k z_k \quad (\text{I.55})$$

Pour étudier le phénomène de relaxation, on s'appuie tout d'abord sur une étude de l'évolution du potentiel thermodynamique, dans le cas simple d'un seul mode dissipatif, lors d'un chargement uniaxial isotherme ($-sdT = 0$) en déformation ; la forme incrémentale de f s'écrit alors :

$$df = \sigma d\epsilon - A dz \quad (\text{I.56})$$

avec, selon l'approche DNLR :

$$\begin{cases} d\sigma = E^u d\epsilon + b dz \\ -dA = b d\epsilon + g dz \end{cases} \quad (\text{I.57})$$

- Dans un premier temps, on fixe la microstructure et on examine l'évolution de f en fonction de la déformation imposée.

Si on considère une microstructure figée caractéristique de l'état instantané, c'est à dire à $z = z^u$ ($dz^u = 0$), l'intégration des relations (I.56) et (I.57) pour un chemin de déformation allant de 0 à ϵ conduit alors à :

$$f(\epsilon, z^u) = f(0, z^u) + \frac{1}{2} E^u \epsilon^2 \quad (\text{I.58})$$

Si on considère maintenant la situation opposée associée à l'état relaxé ($z = z^r$ et $A = A^r = 0$), on a alors :

$$f(\epsilon, z^r) = f(0, z^r) + \frac{1}{2} E^r \epsilon^2 \quad (\text{I.59})$$

où E^r est le module relaxé défini précédemment par la relation (I.26).

Il faut noter qu'à déformation nulle, compte-tenu des deux expressions précédentes, la variable de microstructure z s'écrit $z = z^u = z^r$ aussi :

$$f(0, z^u) = f(0, z^r) = f_0 \quad (\text{I.60})$$

La figure (I.4.a) donne une représentation graphique de ces deux potentiels.

- Dans un second temps, on fige la déformation et on étudie l'évolution de f en fonction de la microstructure.

On se place tout d'abord dans le cas où la déformation est nulle. On a alors $z_0 = z^u = z^r$. L'intégration des relations (I.56) et (I.57) entre $z = z_0$ et z conduit à :

$$f(0, z) = f(0, z_0) + \frac{1}{2}g(z - z_0)^2 \quad (\text{I.61})$$

On se place ensuite dans le cas d'une déformation imposée ($\epsilon = \epsilon^*$). Le potentiel s'écrit alors :

$$f(\epsilon^*, z) = f(\epsilon^*, z^r(\epsilon^*)) + \frac{1}{2}g(z - z^r(\epsilon^*))^2 \quad (\text{I.62})$$

avec, d'après I.59

$$f(\epsilon^*, z^r(\epsilon^*)) = f(0, z^r(\epsilon^*)) + \frac{1}{2}E^r \epsilon^{*2} \quad (\text{I.63})$$

et

$$z^r(\epsilon^*) = z^r(\epsilon = 0) - g^{-1}b\epsilon^* = z_0 - g^{-1}b\epsilon^* \quad (\text{I.64})$$

L'ensemble de ces potentiels sont représentés sur la figure (I.4.b)

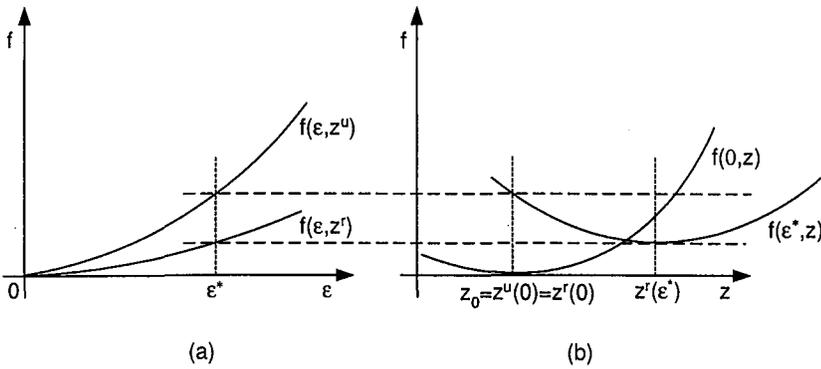


FIG. I.4: Représentations graphiques du potentiel thermodynamique f - (a) en fonction de la déformation pour une microstructure fixée - (b) en fonction de la microstructure pour une déformation figée

L'analyse de ces graphes montre clairement (i) que l'équilibre initial sans déformation correspond à un potentiel optimisé par z_0 (ii) que la mise en charge jusqu'à ϵ^* à $z^u = z_0$ produit un décalage vers les plus hautes énergies ce qui rend le système métastable par rapport à la configuration relaxée (iii) que la bifurcation vers l'état stable (relaxé) à ϵ^* imposée ne peut se faire qu'avec un dégel des degrés de liberté initialement figés lors de la mise en charge. C'est cette évolution spontanée vers l'équilibre stable qui est à l'origine de la réponse différée caractéristique de la viscoélasticité que l'on analysera tout au long de ce travail. D'une manière générale, toutes les réponses différées peuvent s'analyser dans ce schéma.

La construction de f qui vient d'être présentée montre que l'on peut considérer que l'état (ϵ^*, z^u) peut être vu comme un état de fluctuation autour de l'équilibre pour la valeur optimisée du potentiel $f(\epsilon^*, z^r)$. Le retour à l'équilibre se fait alors sur un système fermé sans échange mécanique (ni thermique) avec l'extérieur, c'est à dire sur un système isolé. Seule la variable z évolue au cours de cette relaxation ; elle est associée à la production d'entropie $\dot{s}_i = A\dot{z}/T$.

En s'appuyant sur l'inversion d'Einstein de la relation de Boltzmann [Bol 74]

$$S(z) = k_B \ln \Omega(z) \text{ soit } \Omega(z) = \exp\left(\frac{S(z)}{k_B}\right) \quad (\text{I.65})$$

où Ω est le nombre de complexions du système, on peut définir la densité de probabilité de transition $p|^\epsilon$ (à déformation figée) de l'état hors équilibre ($z = z^u$) vers l'état relaxé ($z = z^r$) par la relation suivante :

$$p|^\epsilon = \frac{\Omega(z^u)}{\Omega(z^r)} \quad (\text{I.66})$$

Le système étant isolé, la variation d'entropie se réduit à sa production $\Delta S = S(z^u) - S(z^r) = \Delta_i S$. La probabilité de régression à déformation fixée s'écrit donc :

$$p|^\epsilon = K \exp\left(\frac{\Delta_i S}{k_B}\right) \quad (\text{I.67})$$

avec K constante de normalisation définie par :

$$K = \int \exp\left(\frac{\Delta_i S}{k_B}\right) d(z^u - z^r) \quad (\text{I.68})$$

Dans le formalisme DNLR, la production d'entropie s'écrit :

$$\Delta_i S = \frac{1}{T} \int_{z^u}^{z^r} A dz = \frac{g}{2T} (z^u - z^r)^2 \quad (\text{I.69})$$

ce qui conduit finalement à une densité de probabilité de la forme :

$$p|^\epsilon = K \exp\left(\frac{(z^u - z^r)^2}{\left(\frac{2k_B T}{g}\right)}\right) \quad (\text{I.70})$$

La condition de normalisation

$$\int p|^\epsilon d(z^u - z^r) = 1 \quad (\text{I.71})$$

permet, dans un dernier temps, de déterminer la constante K :

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{k_B T}{g}}} \quad (\text{I.72})$$

Dans le cas d'une déformation ϵ^* , la densité de probabilité associée aux configurations que le système est thermodynamiquement susceptible d'explorer est donc représentée par une gaussienne centrée autour de z^r et d'écart type σ_z :

$$p|^{\epsilon^*} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{(z^u - z^r)^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (\text{I.73})$$

où l'écart-type σ_z est défini par :

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{k_B T}{g}} \quad (\text{I.74})$$

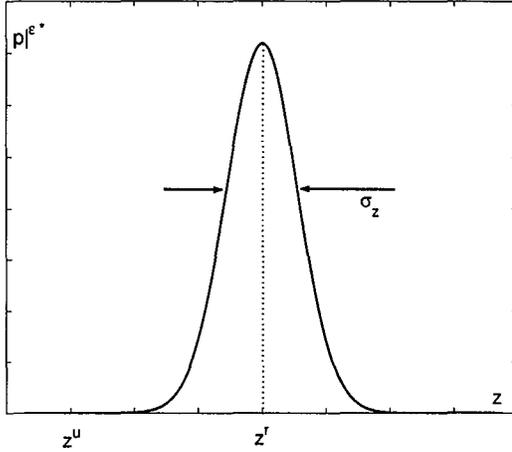


FIG. I.5: Densité de probabilité associée à une déformation figée - eq. (I.73)

Par définition, l'écart quadratique moyen σ_z représente la racine carrée de la valeur moyenne des carrés des écarts en z par rapport à la valeur moyenne $\bar{z} = z^r$:

$$\sigma_z^2 = \overline{(z^u - \bar{z})^2} = \overline{(z^u - z^r)^2} = \overline{z^{u2}} - z^{r2} \quad (I.75)$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de la relation (I.74) par le coefficient phénoménologique L de Onsager, la relation précédente s'écrit :

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{RTL}{Lg}} = \sqrt{RTL} \sqrt{\frac{1}{Lg}} \quad (I.76)$$

Cette dernière écriture fait apparaître la définition (I.33) du temps de relaxation τ . En reprenant la définition (I.35) de la constante L , la relation précédente s'écrit :

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{RT}{h}} \sqrt{\tau} \sim \sqrt{\tau} \quad (I.77)$$

Il faut noter que la relation (I.77), qui établit le lien proportionnel entre l'écart type σ_z et le temps de relaxation τ^j , a été initialement introduite par Cunat [Cun 88] à partir de la théorie des fluctuations et du théorème d'équipartition de l'énergie, décrits par Prigogine [Pri 68] au voisinage de l'équilibre, en admettant que le passage de l'état instantané u à l'état relaxé r peut être assimilé à une régression spontanée des fluctuations. En effet, dans son analyse des processus de régression spontanée des fluctuations, Prigogine établit que la production moyenne d'entropie est la même pour chaque mode et qu'elle s'identifie à la constante de Boltzmann :

$$\left\langle \frac{\partial \Delta_i S^j}{\partial \Delta z^j} \Delta z^j \right\rangle = -k_B \quad (I.78)$$

En reprenant l'expression de la production d'entropie associée au formalisme DNLr, cette dernière relation permet effectivement de faire apparaître le lien entre l'écart-type et le temps de relaxation associé :

$$\frac{1}{T} g^{jj} \langle (\Delta z^j)^2 \rangle = k_B \quad (I.79)$$

L'étude précédente a été conduite en ne prenant en compte qu'un seul processus dissipatif. La problématique liée à la relaxation prend toute son importance lorsque le retour à l'équilibre passe par une multiplicité de modes : on impose brutalement $\epsilon = \epsilon^*$ global sur le VER ce qui induit une configuration présentant un écart à l'équilibre avant que les mécanismes de relaxation n'interviennent. La probabilité de transition s'écrit, en prenant en compte l'ensemble des modes :

$$p|\epsilon^* = K \exp\left(\frac{\Delta_i S}{k_B}\right) \text{ avec } K = \int \dots \int \exp\left(\frac{\Delta_i S}{k_B}\right) d(z_1^u - z_1^r) \dots d(z_N^u - z_N^r) \quad (I.80)$$

La production d'entropie s'écrit, dans ce cas :

$$\Delta_i S = \frac{1}{2T} \sum_j g^{jj} (z_j^u - z_j^r)^2 \quad (I.81)$$

Ainsi à chaque mode est associé une gaussienne et son écart type σ_{z^j} (autrement dit un temps de relaxation $\tau^j = \tau^{jj}$).

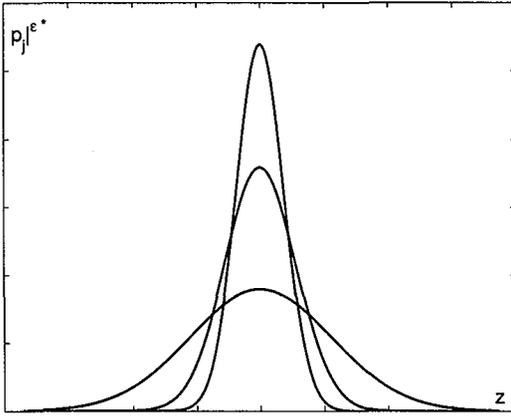


FIG. I.6: Représentation des densités de probabilité $p_j|\epsilon^*$, associées à 3 processus, et centrées arbitrairement autour d'une même valeur de configuration interne z

Cunat définit la notion de poids (contribution relative de chaque mode dissipatif à la réponse globale) à partir de l'écart-type σ_{z^j} :

$$p_0^j = \frac{\sigma_{z^j}}{\sum_j \sigma_{z^j}} \quad (I.82)$$

Soit finalement :

$$p_0^j = B\sqrt{\tau^j} \text{ avec } B = \frac{1}{\sum_j \sqrt{\tau^j}} \quad (I.83)$$

La constante B permet d'assurer la condition de normalisation :

$$\sum_j p_0^j = 1 \quad (I.84)$$

La relation (I.83) fournit la forme du spectre utilisé dans l'approche DNLr. Elle est conforme aux observations de Kovacs [Kov 54] sur le vieillissement volumique des polymères qui spécifient que les temps longs doivent avoir un poids prépondérant sur la réponse. De nombreuses observations expérimentales sur la chaleur spécifique apparente des verres métalliques confirment la nécessité d'une telle forme de spectre lors d'une analyse modale [Cun 85]. Le principal avantage de ce spectre est qu'il est totalement indépendant des mécanismes élémentaires donc des matériaux étudiés et des sollicitations imposées.

L'évolution du spectre de relaxation, basé sur l'hypothèse d'un continuum de processus de dissipation borné par deux temps caractéristiques τ_m et τ_M (définis au paragraphe I.2.3.1), est proposée à la figure (I.7) :

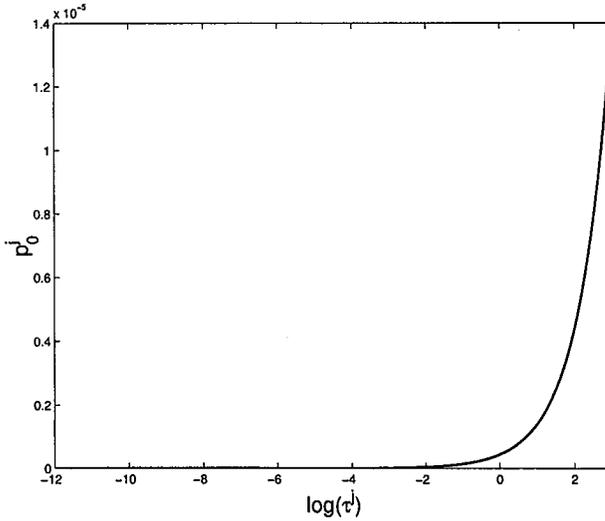


FIG. I.7: Spectre de relaxation associé à une distribution continue - eq. (I.83) avec $\tau_m = 10^{-12}$ s et $\tau_M = 10^3$ s

Cunat a montré que la relaxation associée à ce spectre était peu sensible aux temps de relaxation les plus faibles ce qui est somme toute logique puisqu'ils sont associés aux poids les plus faibles. Il a ainsi décidé de travailler avec un spectre tronqué aux temps courts. Le nouveau spectre de largeur D (en décades) admet le même temps de relaxation maximal que le spectre initial $\tau_{max} = \tau_M$ et un temps de relaxation minimal définit alors par $\tau_{min} = 10^{-D}\tau_M$. Par ailleurs, il a montré numériquement qu'une discrétisation en un nombre N "suffisamment grand" de processus permettait de reproduire la réponse obtenue pour un spectre continu. En choisissant d'équi-répartir les temps de relaxations sur une échelle logarithmique, il montre ainsi, par exemple, que pour six décades, cinquante processus suffisent et pour trois décades, il n'en faut plus que trente. Ce point sera plus amplement détaillé au chapitre III.

Le spectre de relaxation utilisé dans le formalisme DNLr est donc entièrement régi par la donnée de trois paramètres : le nombre de décades D , le nombre de processus N et le temps de relaxation du processus le plus lent (ou temps de relaxation maximal) que l'on

note τ_{max} .

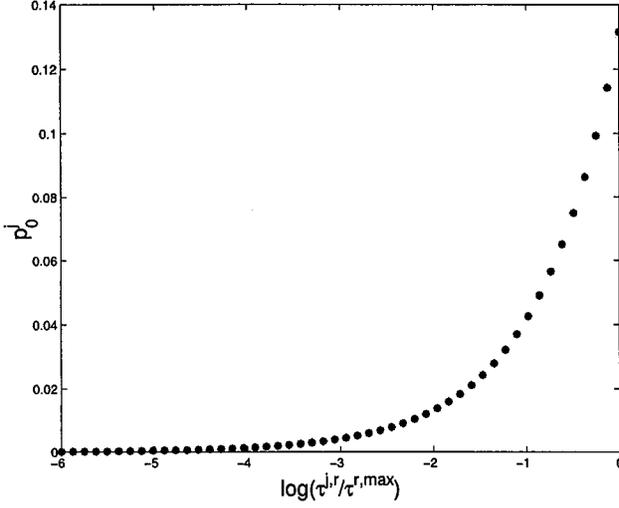


FIG. I.8: Spectre DNLR de la distribution des processus de dissipation
- eq. (I.83) avec $N=50$ et $D=6$

I.2.5 Lien entre variables internes et variables d'états

La dernière difficulté dans l'utilisation des lois constitutives (I.19.a) est liée aux variables internes, difficiles à appréhender, qui régissent la relaxation par l'intermédiaire de $\bar{b}\bar{z}$:

$$\dot{\underline{\beta}} = \underline{a}^u \dot{\underline{\gamma}} + \bar{b} \bar{z} \quad (I.85)$$

A l'état relaxé, cette dernière relation s'écrit :

$$\underline{\beta}^r = \underline{a}^u \dot{\underline{\gamma}} + \bar{b} \bar{z}^r \quad (I.86)$$

Par substitution dans (I.85), on obtient :

$$\dot{\underline{\beta}} - \underline{\beta}^r = \bar{b} (\bar{z} - \bar{z}^r) \quad (I.87)$$

puis, en intégrant cette dernière équation (la matrice \bar{b} est supposé constante) :

$$\underline{\beta} - \underline{\beta}^r = \bar{b} (\bar{z} - \bar{z}^r) \quad (I.88)$$

La combinaison de (I.33) et (I.88) permet de reformuler le terme dissipatif $\bar{b}\bar{z}$ en fonction des variables observables $\underline{\beta}$:

$$\bar{b}\bar{z} = -\bar{\tau}^{-1} (\underline{\beta} - \underline{\beta}^r) \quad (I.89)$$

La substitution de (I.89) dans l'équation (I.85) permet ainsi de travailler avec une loi de comportement générale fonction uniquement des variables d'états et donc entièrement opérationnelle :

$$\dot{\underline{\beta}} = \underline{a}^u \dot{\underline{\gamma}} - \bar{\tau}^{-1} (\underline{\beta} - \underline{\beta}^r) \quad \text{avec} \quad \underline{\beta}^r = \underline{a}^r \underline{\gamma} \quad (I.90)$$

I.3 Conclusion

La stratégie DNLR élaborée par Cunat [Cun 85] repose donc sur quatre points caractéristiques :

1. La TPI (Thermodynamique des Processus Irréversibles) à variables internes qui conduit, par l'intermédiaire de la relation de Gibbs étendue, à un système couplé de deux lois constitutives matricielles :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\beta}} = \underline{a}^u \dot{\underline{\gamma}} + \underline{b} \dot{\underline{z}} \\ \dot{\underline{A}} = \underline{b}^t \dot{\underline{\gamma}} + \underline{g} \dot{\underline{z}} \end{cases} \quad \underline{b} \dot{\underline{z}} = \bar{\tau}^{-1} (\underline{\beta} - \underline{\beta}^r) \quad (\text{I.91})$$

La première équation décrit la réponse observée suite à une perturbation physique tandis que la seconde équation assure la compatibilité thermodynamique du modèle à l'échelle microstructurale.

2. Trois hypothèses fondamentales servent ensuite de base à l'approche DNLR :
 - L'hypothèse d'un état local hors équilibre que l'on peut décrire par le potentiel de Gibbs généralisé et qui permet de travailler à l'échelle du VER avec des grandeurs uniformes
 - Deux hypothèses couplées (l'une de nature thermodynamique et l'autre de nature cinétique) qui permettent de décrire l'évolution des variables internes en se basant sur une analyse modale de la dissipation :

$$\dot{z}^j = -\frac{z^j - z^{j,r}}{\tau^j} \quad (\text{I.92})$$

3. La modélisation des temps de relaxation repose sur la théorie de l'état activé à laquelle on adjoint des hypothèses de non-linéarité de nature coopérative. La distribution des temps de relaxation (supposés équi-répartis sur une échelle logarithmique en temps) est entièrement déterminée par la connaissance du nombre de décades D, du nombre de processus N et du temps de relaxation maximal :

$$\tau^j = \frac{h}{kT} \exp\left(\frac{\Delta F_j^{+,r}}{RT}\right) \exp\left(\frac{K_\beta(\underline{\beta} - \underline{\beta}^r)}{RT}\right) \quad (\text{I.93})$$

4. L'analyse statistique probabiliste de la régression des modes de fluctuation permet enfin de définir le poids (amplitude) associé à chaque processus dissipatif :

$$p_0^j = B\sqrt{\tau^j} \quad \text{et} \quad \sum_j p_0^j = 1 \quad (\text{I.94})$$

A titre d'exemple, lorsque le potentiel thermodynamique généralisé est donné par :

$$\Psi = \Psi(T, \underline{g}, \underline{E}, \underline{H}, \underline{n}, \dots) \quad (\text{I.95})$$

la loi constitutive s'écrit sous la forme matricielle suivante [Lou 96] :

$$\begin{bmatrix} \dot{S} \\ \dot{\underline{\epsilon}} \\ \dot{\underline{P}} \\ \dot{\underline{M}} \\ \dot{\underline{\mu}} \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} CT^{-1} & \underline{\alpha} & \underline{\Phi} & \underline{\varphi} & \underline{\mu},T & \cdots \\ \underline{\alpha} & \underline{\underline{\epsilon}} & \underline{\gamma} & \underline{\pi} & \underline{\underline{\mu}},\sigma & \cdots \\ \underline{\Phi} & \underline{\underline{\epsilon}} & \underline{\underline{\kappa}} & \underline{\underline{\xi}} & \underline{\underline{\mu}},E & \cdots \\ \underline{\varphi} & \underline{\underline{\pi}} & \underline{\underline{\xi}} & \underline{\underline{\chi}} & \underline{\underline{\mu}},H & \cdots \\ \underline{\mu},T & \underline{\underline{\mu}},\sigma & \underline{\underline{\mu}},E & \underline{\underline{\mu}},H & \underline{\underline{\mu}},n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\text{Partie instantanée de la réponse}} \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{\underline{E}} \\ \dot{\underline{H}} \\ \dot{\underline{n}} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (I.96)$$

$$- \underbrace{\begin{bmatrix} (S - S^r)_1 & \cdots & (S - S^r)_j & \cdots & (S - S^r)_N \\ (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^r)_1 & \cdots & (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^r)_j & \cdots & (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^r)_N \\ (\underline{P} - \underline{P}^r)_1 & \cdots & (\underline{P} - \underline{P}^r)_j & \cdots & (\underline{P} - \underline{P}^r)_N \\ (\underline{M} - \underline{M}^r)_1 & \cdots & (\underline{M} - \underline{M}^r)_j & \cdots & (\underline{M} - \underline{M}^r)_N \\ (\underline{\mu} - \underline{\mu}^r)_1 & \cdots & (\underline{\mu} - \underline{\mu}^r)_j & \cdots & (\underline{\mu} - \underline{\mu}^r)_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\text{Partie dissipative de la réponse}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau^1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\tau^j} \\ \vdots \\ \frac{1}{\tau^N} \end{bmatrix}$$

où les variables de commande sont composées de la température T , du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$, du vecteur champ électrique \underline{E} , du vecteur champ magnétique \underline{H} et du vecteur constituant chimique \underline{n} . Les variables observables sont composées des variables duales : l'entropie S , le tenseur des déformations $\underline{\epsilon}$, le vecteur polarisation électrique \underline{P} , le vecteur polarisation magnétique \underline{M} et le vecteur potentiel chimique $\underline{\mu}$.

La matrice de stabilité de Tisza (matrice de la réponse instantanée) est composée sur sa diagonale de sous-matrices de couplage entre variables d'état duales et pour le reste de sous-matrices de couplage entre les grandeurs d'état non duales.

Le modèle DNLN permet ainsi la description de tous les comportements physiques (mécanique, électricité, magnétisme, chimie, thermique, ...) et de leurs couplages respectifs. Il suffit de choisir les variables de commandes et les variables observables associées nécessaires à la compréhension du phénomène souhaité.

Initialement, l'approche DNLN visait à utiliser la TPI non linéaire pour simuler la transition vitreuse et les relaxations et vieillissements physiques qui s'y rattachent. Des études de vieillissement physique de verres de chalcogénures en conditions isothermes ont permis de modéliser la variation de la chaleur spécifique associée à la transition vitreuse pour diverses vitesses de chauffage [Aha 93]. Les relaxations magnétiques observées dans les verres métalliques ont pu être analysées quantitativement avec succès et ont permis de valider un procédé industriel de stabilisation de ces matériaux [Cun 88b]. L'axe de recherche du laboratoire repose depuis une dizaine d'années sur l'étude des comportements mécaniques des matériaux [Aya 95], [Fac 97], [Had 96], [Lou 96], [Mar 99].

Ce mémoire sera dévolu à l'application du formalisme DNLN dans le cadre du couplage thermomécanique afin de compléter les études mécaniques précédentes effectuées sous l'hypothèse parfois trop simpliste d'un comportement isotherme.

II

Écriture du couplage thermomécanique

Sommaire

II.1	Liens entre les différents potentiels généralisés	32
II.1.1	Brefs rappels mathématiques quant à la transformée de Legendre	32
II.1.2	Transformation partielle appliquée à l'énergie interne u	33
II.2	Lois constitutives thermomécaniques	34
II.2.1	Définition des coefficients propres à l'énergie libre d'Helmholtz	34
II.2.2	Lois constitutives propre à l'énergie interne	36
II.2.3	Lois constitutives liées à une contrainte imposée	38
II.3	Conclusions	39

Le but de ce chapitre est d'expliciter l'expression des coefficients des matrices \underline{a}^u , \bar{b} et \bar{g} associées au système constitutif (II.1) dans le cas particulier du couplage thermomécanique pour une sollicitation mécanique uni-axiale.

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \underline{a}^u \dot{\gamma} + \bar{b} \dot{z} \\ -\dot{A} = \bar{b}^t \dot{\gamma} + \bar{g} \dot{z} \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

L'expression de ces matrices dépend des variables de contrôle choisies et donc implicitement du potentiel thermodynamique généralisé associé. Quatre cas sont à étudier en fonction du couple de variables de contrôle choisi (T, ϵ) , (s, ϵ) , (T, σ) et (s, σ) . Après avoir défini les trois matrices \underline{a}^u , \bar{b} et \bar{g} dans le cas où (T, ϵ) est imposé, on montrera comment les trois derniers cas peuvent se déduire de cette première écriture en s'appuyant sur le formalisme de Legendre et les méthodes de transformation de Jacobi.

Il faut noter, dès à présent, que le terme de "variables observables" et "variables de contrôle" ne doit pas être pris au sens propre de sa définition. Expérimentalement, on n'agira pas plus sur la température T que sur l'entropie s ! Seule la variable mécanique (ϵ ou σ) est réellement contrôlée par l'expérimentateur. Il faut ainsi comprendre les termes "variables de contrôle" et "variables observables" au sens large de part la définition du potentiel thermodynamique associé. Elles correspondent en automatisme à la définition de variables d'entrée et de sortie d'un système et définissent simplement les conditions aux limites imposées au VER et les réponses enregistrées correspondantes.

II.1 Liens entre les différents potentiels généralisés

Les lois de comportement (II.1) ont été mises en place au chapitre I en s'appuyant sur le potentiel d'énergie interne spécifique u qui utilise uniquement des grandeurs extensives comme variables de contrôle. Si l'on souhaite travailler avec d'autres jeux de variables par raison de commodité ou par nécessité expérimentale, il faut alors choisir le potentiel adéquat qui se dérive de l'énergie interne grâce au formalisme de la transformée de Legendre.

II.1.1 Brefs rappels mathématiques quant à la transformée de Legendre

Considérons une fonction Y qui ne dépende que d'une seule variable indépendante X .

$$Y = Y(X) \quad \text{avec} \quad P = \frac{dY}{dX} \text{ sa dérivée} \quad (\text{II.2})$$

On peut représenter cette relation fondamentale par une courbe dans le plan (X, Y) . P est la pente de la tangente à la courbe $Y = Y(X)$. Le but de la transformée de Legendre est de remplacer la variable X par la variable P comme variable indépendante. Pour cela, on remplace le couple de variable (X, Y) par le couple (Ψ, P) où Ψ est l'ordonnée à l'origine de la tangente en M à la courbe. On a alors :

$$\Psi = Y - PX \quad (\text{II.3})$$

II. Écriture du couplage thermomécanique

Cette transformation revient de fait à remplacer la courbe $Y(X)$ par la famille des tangentes en chacun de ses points (de façon équivalente, on peut dire que $Y(X)$ est la courbe enveloppe des tangentes).

En différentiant l'équation précédente, on obtient :

$$d\Psi = dY - PdX - XdP = -XdP \quad (\text{II.4})$$

En partant de la fonction Y , à laquelle on peut associer une fonction d'état, on aboutit à une nouvelle fonction d'état $\Psi(P)$, puisqu'on lui associe la forme différentielle (II.4).

On peut généraliser la transformation précédente en l'appliquant à des fonctions de plusieurs variables :

$$Y = Y(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) \quad (\text{II.5})$$

La variable $P_i = dY/dX_i$ conjuguée de X_i permet de définir la fonction :

$$\Psi = Y - \sum_i P_i X_i \quad (\text{II.6})$$

On a effectué une transformation de Legendre dans un espace à $(n + 1)$ dimensions qui remplace l'hypersurface $Y = Y(X_1, \dots, X_n)$ par la famille d'hyperplans qui lui sont tangents. Il est aussi possible de n'opérer qu'une transformation partielle sur la fonction en ne remplaçant qu'une partie des variables par leurs conjuguées.

II.1.2 Transformation partielle appliquée à l'énergie interne u

Si on veut, par exemple, inverser le rôle de T et s dans l'écriture des potentiels thermodynamiques, l'énergie libre d'Helmoltz f devient alors le potentiel le plus adapté. Ce potentiel se déduit de l'énergie interne u par une transformation de Legendre appliquée à la variable $X = s$:

$$f = f(T, \epsilon, \bar{z}) = u - Ts = \sigma\epsilon - \bar{A}\bar{z} \quad (\text{II.7})$$

En dérivant l'expression précédente,

$$\dot{f} = \dot{u} - T\dot{s} - s\dot{T} \quad (\text{II.8})$$

Soit encore, d'après (I.15) :

$$\dot{f} = \sigma\dot{\epsilon} - s\dot{T} - \bar{A}\dot{\bar{z}} \quad (\text{II.9})$$

La cohérence thermodynamique est obtenue grâce à la relation de Gibbs-Duhem :

$$0 = \epsilon\dot{\sigma} - T\dot{s} - \bar{z}\dot{\bar{A}} \quad (\text{II.10})$$

Lorsqu'on suppose contrôler la contrainte σ et l'entropie s , il convient de formuler le problème à l'aide du potentiel enthalpie h :

$$h = h(s, \sigma, \bar{z}) = u - \sigma\epsilon = Ts - \bar{A}\bar{z} \quad (\text{II.11})$$

et

$$\dot{h} = T\dot{s} - \epsilon\dot{\sigma} - \bar{A}\dot{\bar{z}} \quad (\text{II.12})$$

Lorsque ce sont la température T et le tenseur des contraintes σ que contrôle l'expérimentateur, le potentiel enthalpie libre (ou fonction de Gibbs) g devient le potentiel le mieux adapté :

$$g = g(T, \sigma, \bar{z}) = h - Ts = -\bar{A}\bar{z} \quad (\text{II.13})$$

et

$$\dot{g} = -s\dot{T} - \epsilon\dot{\sigma} - \bar{A}\dot{\bar{z}} \quad (\text{II.14})$$

On peut enfin citer le potentiel zéro dont la vitesse d'évolution correspond à la relation de Gibbs-Duhem (II.10) :

$$0 = 0(T, \sigma, \bar{A}) = u - Ts - \sigma\epsilon + \bar{A}\bar{z} \quad (\text{II.15})$$

II.2 Lois constitutives thermomécaniques

II.2.1 Définition des coefficients propres à l'énergie libre d'Helmholtz

En faisant le choix d'utiliser comme potentiel thermodynamique l'énergie libre d'Helmholtz, les variables de commande indépendantes correspondent implicitement à la température T et à la déformation ϵ . Les variables observables et l'affinité sont définies comme les dérivées premières du potentiel f par rapport aux variables d'entrée :

$$\left[\begin{array}{l} -s = \frac{\partial f}{\partial T} \Big|_{\epsilon, \bar{z}} \\ \sigma = \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \Big|_{T, \bar{z}} \\ -\bar{A} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{T, \epsilon} \end{array} \right. \quad (\text{II.16})$$

Les dérivées temporelles de ces trois grandeurs conduisent alors aux lois de comportements suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} -\dot{s} = \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \Big|_{\epsilon, \bar{z}} \dot{T} + \frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \epsilon} \Big|_{T, \bar{z}} \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \bar{z}} \Big|_{T, \epsilon} \dot{\bar{z}} \\ \dot{\sigma} = \frac{\partial^2 f}{\partial \epsilon \partial T} \Big|_{\epsilon, \bar{z}} \dot{T} + \frac{\partial^2 f}{\partial \epsilon^2} \Big|_{T, \bar{z}} \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 f}{\partial \epsilon \partial \bar{z}} \Big|_{T, \epsilon} \dot{\bar{z}} \\ -\dot{\bar{A}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial T} \Big|_{\epsilon, \bar{z}} \dot{T} + \frac{\partial^2 f}{\partial \epsilon \partial \bar{z}} \Big|_{T, \bar{z}} \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} \Big|_{T, \epsilon} \dot{\bar{z}} \end{array} \right. \quad (\text{II.17})$$

que l'on peut encore écrire sous forme matricielle :

$$\left[\begin{array}{c} -\dot{s} \\ \dot{\sigma} \\ -\dot{\bar{A}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} a_{sT}^{T\epsilon} & a_{s\epsilon}^{T\epsilon} & \bar{b}_{sz}^{T\epsilon} \\ a_{\sigma T}^{T\epsilon} & a_{\sigma\epsilon}^{T\epsilon} & \bar{b}_{\sigma z}^{T\epsilon} \\ \bar{b}_{AT}^{T\epsilon} & \bar{b}_{A\epsilon}^{T\epsilon} & \bar{g}^{T\epsilon} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{T} \\ \dot{\epsilon} \\ \dot{\bar{z}} \end{array} \right] \quad (\text{II.18})$$

Dans cette représentation, la lettre a est utilisée pour décrire les couplages entre grandeurs dont le contrôle peut être considéré comme accessible à l'expérimentateur, la lettre b est

II. Écriture du couplage thermomécanique

réservée au termes de couplage de ces grandeurs avec les variables internes et la lettre g traduit le couplage entre grandeurs dissipatives. L'indice rs traduit le couplage entre la variable observable r et la variable de commande s . L'exposant tu définit, quant à lui, l'ensemble des variables de commande associées au potentiel thermodynamique choisi (ici T et ϵ).

Notons que la condition d'intégrabilité, propre à la forme du potentiel dont la différentielle doit être totale, implique la symétrie de cette matrice (relation de Maxwell) :

$$a_{s\epsilon}^{T\epsilon} = a_{\sigma T}^{T\epsilon} \quad \bar{b}_{sz}^{T\epsilon} = {}^t \bar{b}_{AT}^{T\epsilon} \quad \text{et} \quad \bar{b}_{\sigma z}^{T\epsilon} = {}^t \bar{b}_{Az}^{T\epsilon} \quad (\text{II.19})$$

L'entropie, la contrainte et l'affinité peuvent, dans ce formalisme, être considérées comme des différentielles exactes ; le système (II.17) peut alors s'écrire :

$$\left[\begin{array}{l} \dot{s} = \frac{\partial s}{\partial T} |_{\epsilon, \bar{z}} \dot{T} + \frac{\partial s}{\partial \epsilon} |_{T, \bar{z}} \dot{\epsilon} + \frac{\partial s}{\partial \bar{z}} |_{T, \epsilon} \dot{\bar{z}} \\ \dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} |_{\epsilon, \bar{z}} \dot{T} + \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} |_{T, \bar{z}} \dot{\epsilon} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} |_{T, \epsilon} \dot{\bar{z}} \\ \dot{\bar{A}} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial T} |_{\epsilon, \bar{z}} \dot{T} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial \epsilon} |_{T, \bar{z}} \dot{\epsilon} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{z}} |_{T, \epsilon} \dot{\bar{z}} \end{array} \right. \quad (\text{II.20})$$

Cette dernière écriture permet de relier les coefficients $a^{T\epsilon}$, $b^{T\epsilon}$ et $g^{T\epsilon}$ définis précédemment aux dérivées premières des variables de sortie :

$$\left[\begin{array}{lll} a_{sT}^{T\epsilon} = -\frac{\partial s}{\partial T} |_{\epsilon, \bar{z}} & a_{s\epsilon}^{T\epsilon} = -\frac{\partial s}{\partial \epsilon} |_{T, \bar{z}} & b_{sz}^{T\epsilon} = -\frac{\partial s}{\partial \bar{z}} |_{T, \bar{z}} \\ a_{\sigma T}^{T\epsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} |_{T, \bar{z}} & a_{\sigma \epsilon}^{T\epsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} |_{T, \bar{z}} & \bar{b}_{\sigma z}^{T\epsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} |_{T, \epsilon} \\ \bar{b}_{AT}^{T\epsilon} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial T} |_{T, \epsilon} & \bar{b}_{Az}^{T\epsilon} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial \epsilon} |_{T, \epsilon} & \bar{g}^{T\epsilon} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{z}} |_{T, \epsilon} \end{array} \right. \quad (\text{II.21})$$

Les dérivées premières des variables observables par rapport aux variables de commande sont classiquement définies par :

$$\frac{\partial s}{\partial T} |_{\epsilon, \bar{z}} = \frac{C_{\epsilon \bar{z}}^u}{T} \quad \frac{\partial s}{\partial \epsilon} |_{T, \bar{z}} = \alpha^u E^u \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} |_{T, \bar{z}} = E^u \quad (\text{II.22})$$

où $C_{\epsilon, \bar{z}}$, E , α correspondent respectivement à la chaleur spécifique à ϵ et \bar{z} constants, au module mécanique et au coefficient de dilatation thermique. L'exposant u signifie instantané (unrelaxed) c'est à dire à \bar{z} maintenu constant (blocage des évolutions irréversibles).

Les lois constitutives (I.19) s'écrivent finalement :

$$\left[\begin{array}{c} -\dot{s} \\ \dot{\sigma} \\ -\dot{\bar{A}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{C_{\epsilon \bar{z}}^u}{T} & -\alpha^u E^u & \bar{b}_{sz}^{T\epsilon} \\ -\alpha^u E^u & E^u & \bar{b}_{\sigma z}^{T\epsilon} \\ {}^t \bar{b}_{sz}^{T\epsilon} & {}^t \bar{b}_{\sigma z}^{T\epsilon} & \bar{g}^{T\epsilon} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{T} \\ \dot{\epsilon} \\ \dot{\bar{z}} \end{array} \right] \quad (\text{II.23})$$

L'élimination des variables internes au profit de l'écart à l'équilibre des variables observables (I.89) associées permet une écriture opérationnelle des deux premières équations (II.23.a) et (II.23.b) :

$$\begin{bmatrix} -\dot{s} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_{\epsilon z}^u}{T} & -\alpha^u E^u \\ -\alpha^u E^u & E^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} - \sum_j \begin{bmatrix} \frac{-s^j - (-s^{j,r})}{\tau_{T\epsilon}^j} \\ \frac{\sigma^j - \sigma^{j,r}}{\tau_{\epsilon T}^j} \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

La première équation permet la mise en oeuvre de l'équation de la chaleur intégrant le couplage lié à la dissipation mécanique tandis que la seconde décrit la loi de comportement thermomécanique du matériau.

Les temps de relaxation $\tau_{T,\epsilon}^j$ et $\tau_{\epsilon,T}^j$ s'écrivent, d'après (I.54) :

$$\tau_{T\epsilon}^j = \tau_{\epsilon T}^j = \tau_{T\epsilon}^{j,r} a(t) \quad (\text{II.25})$$

où $\tau_{T,\epsilon}^{j,r}$ correspond au temps de relaxation au voisinage de l'équilibre et $a(t)$ au glissement induit par les non-linéarités :

$$\begin{cases} \tau_{T\epsilon}^{j,r} = \tau_{\epsilon T}^{j,r} = \left[\frac{h}{kT} \exp\left(-\frac{\Delta S_j^+}{R}\right) \right] \exp\left(\frac{\Delta E^{+,r}}{RT}\right) \\ a(t) = \exp\left(\frac{K_\sigma^{T\epsilon}(\sigma - \sigma^r)}{RT}\right) \exp\left(\frac{K_s^{T\epsilon}(s - s^r)}{RT}\right) \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

II.2.2 Lois constitutives propre à l'énergie interne

Les lois constitutives précédentes ont été définies à partir de l'énergie libre d'Helmoltz. Les variables observables étaient alors s et σ . Si on souhaite travailler avec s et ϵ comme variables de commande, il faut utiliser le potentiel d'énergie interne u ; les lois constitutives s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dot{T} = \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} \dot{s} + \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 u}{\partial S \partial z} \dot{z} \\ \dot{\sigma} = \frac{\partial^2 u}{\partial \epsilon \partial s} \dot{s} + \frac{\partial^2 u}{\partial \epsilon^2} \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial s} \dot{z} \\ -\dot{A} = \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial z} \dot{s} + \frac{\partial^2 u}{\partial \epsilon \partial z} \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dot{z} \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

soit encore, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{\sigma} \\ -\dot{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{T_s}^{s\epsilon} & a_{T_\epsilon}^{s\epsilon} & \bar{b}_{T_z}^{s\epsilon} \\ a_{\sigma_s}^{s\epsilon} & a_{\sigma_\epsilon}^{s\epsilon} & \bar{b}_{\sigma_z}^{s\epsilon} \\ \bar{b}_{A_s}^{s\epsilon} & \bar{b}_{A_\epsilon}^{s\epsilon} & \bar{y}^{s\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\epsilon} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

II. Écriture du couplage thermomécanique

Les coefficients $a^{s\epsilon}$, $b^{s\epsilon}$ et $g^{s\epsilon}$ peuvent, ici encoré, se définir en fonction des dérivées premières des variables observables :

$$\begin{cases} a_{T_s}^{s\epsilon} = \frac{\partial T}{\partial s}|_{\epsilon, \bar{z}} & a_{T_\epsilon}^{s\epsilon} = \frac{\partial T}{\partial \epsilon}|_{s, \bar{z}} & \bar{b}_{T_z}^{s\epsilon} = -\frac{\partial T}{\partial \bar{z}}|_{s, \epsilon} \\ a_{\sigma_s}^{s\epsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial s}|_{\epsilon, \bar{z}} & a_{\sigma_\epsilon}^{s\epsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}|_{s, \bar{z}} & \bar{b}_{\sigma_z}^{s\epsilon} = -\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}|_{s, \epsilon} \\ \bar{b}_{A_s}^{s\epsilon} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial s}|_{\epsilon, \bar{z}} & \bar{b}_{A_\epsilon}^{s\epsilon} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial \epsilon}|_{s, \bar{z}} & \bar{g}^{s\epsilon} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{z}}|_{s, \epsilon} \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

En se basant sur le formalisme mathématique de Jacobi, on peut déterminer les coefficients $a^{s\epsilon}$, $b^{s\epsilon}$ et $g^{s\epsilon}$ à partir des coefficients $a^{T\epsilon}$, $b^{T\epsilon}$ et $g^{T\epsilon}$ définis précédemment (II.21). Cette étude effectuée en annexe A permet alors d'écrire la loi d'évolution du modèle DNLr pour le couple de variables de commande (s, ϵ) :

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{\sigma} \\ -\dot{\bar{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{C_{\epsilon z}^u} & -\frac{\alpha^u E^u T}{C_{\epsilon z}^u} & \frac{T}{C_{\epsilon z}^u} \bar{b}_{s_z}^{T\epsilon} \\ -\frac{\alpha^u E^u T}{C_{\epsilon z}^u} & E^u + \frac{(\alpha^u E^u)^2 T}{C_{\epsilon z}^u} & \bar{b}_{\sigma_z}^{T\epsilon} - \frac{\alpha^u E^u T}{C_{\epsilon z}^u} \bar{b}_{s_z}^{T\epsilon} \\ \frac{T}{C_{\epsilon z}^u} \bar{b}_{s_z}^{T\epsilon} & t(\bar{b}_{\sigma_z}^{T\epsilon} - \frac{\alpha^u E^u T}{C_{\epsilon z}^u} \bar{b}_{s_z}^{T\epsilon}) & \bar{g}^{T\epsilon} + \frac{T}{C_{\epsilon z}^u} \bar{b}_{s_z}^{T\epsilon} \cdot t \bar{b}_{s_z}^{T\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\epsilon} \\ \dot{\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

L'élimination des variables internes (I.89) au profit de l'écart à l'équilibre des variables observables associées permet de reformuler les deux premières équations sous la forme opérationnelle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{C_{\epsilon z}^u} & -\frac{\alpha^u E^u T}{C_{\epsilon z}^u} \\ -\frac{\alpha^u E^u T}{C_{\epsilon z}^u} & E^u + \frac{(\alpha^u E^u)^2 T}{C_{\epsilon z}^u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} - \sum_j \begin{bmatrix} \frac{T^j - T^{j,r}}{\tau_{s\epsilon}^j} \\ \frac{\sigma^j - \sigma^{j,r}}{\tau_{\sigma s}^j} \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

Les temps de relaxation $\tau_{s\epsilon}^j$ et $\tau_{\sigma s}^j$ s'écrivent :

$$\tau_{s\epsilon}^j = \tau_{\sigma s}^j = \tau_{s\epsilon}^{j,r} a(t) \quad (\text{II.32})$$

L'équivalence entre les lois constitutives (II.31) et (II.24) est assurée par la relation (II.33) associée aux temps de relaxation caractéristiques :

$$\tau_{s\epsilon}^{j,r} = \frac{C_{\epsilon z}^u}{C_{\epsilon z}^r} \tau_{T_\epsilon}^{j,r} \quad (\text{II.33})$$

Le glissement $a(t)$ est lié aux écarts à l'équilibre de la température et de la contrainte :

$$a(t) = \exp\left(\frac{K_\sigma^{T\epsilon}(\sigma - \sigma^r)}{RT}\right) \exp\left(\frac{K_T^{T\epsilon}(T - T^r)}{RT}\right) \quad (\text{II.34})$$

On peut imaginer qu'il doit exister un lien mathématique entre les coefficients $K_T^{T\epsilon}$ (II.26) et $K_\sigma^{s\epsilon}$ (II.26) mais celui-ci n'a pour l'instant pas encore été déterminé.

Le coefficient reliant la contrainte à la déformation a un sens physique fondamental. En effet, il permet de définir le nouveau module associé au blocage de l'entropie et de la microstructure :

$$E_{sz}^u = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \Big|_{s, \bar{z}} = E^u + \frac{(\alpha^u E^u)^2 T}{C_{\epsilon z}^u} \quad (\text{II.35})$$

Cependant, pour la plupart des matériaux, on peut en toute légitimité négliger le terme additionnel. Par exemple, pour un polymère, à température ambiante :

$$\begin{cases} [E^u] & \approx 1e^9 \text{ Pa} \\ [\alpha^u] & \approx 1e^{-4} \text{ K}^{-1} \\ [C_{\epsilon, z}^u] & \approx 2e^6 \text{ Pa} \cdot \text{K}^{-1} \\ [T] & \approx 300 \text{ K} \end{cases} \implies \left[\frac{(\alpha^u E^u)^2 T}{C_{\epsilon, z}^u} \right] \approx 1.5e^6 \text{ Pa} \ll [E^u] \approx 1e^9 \text{ Pa} \quad (\text{II.36})$$

On pourra donc par la suite confondre ces deux modules que l'on notera de manière générique E^u .

II.2.3 Lois constitutives liées à une contrainte imposée

En reprenant le même raisonnement que précédemment, on peut déterminer les lois constitutives thermomécaniques associées aux potentiels de l'enthalpie libre et de Gibbs.

Lorsque l'on contrôle la température T et la contrainte σ , la loi constitutive DNLR s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -\dot{s} \\ -\dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_{\epsilon z}^u}{T} \left(1 + \frac{(\alpha^u)^2 E^u T}{C_{\epsilon z}^u} \right) & -\alpha^u \\ -\alpha^u & -\frac{1}{E^u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} - \sum_j \begin{bmatrix} \frac{-s^j + s^{j,r}}{\tau_{T\sigma}^j} \\ \frac{-\epsilon^j + \epsilon^{j,r}}{\tau_{\sigma T}^j} \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

où les temps de relaxations sont définis par :

$$\tau_{T\sigma}^j = \tau_{T\sigma}^{j,r} a(t) \quad (\text{II.38})$$

avec

$$\begin{cases} \tau_{T\sigma}^{j,r} = \frac{E^u}{E^r} \tau_{T,\epsilon}^{j,r} \\ a(t) = \exp\left(\frac{K_\epsilon^{T\sigma}(\epsilon - \epsilon^r)}{RT}\right) \exp\left(\frac{K_s^{T\sigma}(s - s^r)}{RT}\right) \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Là encore, on peut définir une nouvelle chaleur spécifique pour σ et \bar{z} bloqués (comme pour l'étude des gaz où sont définies les chaleurs spécifiques à volume constant C_v et à pression constante C_p) :

$$\frac{C_{\sigma z}^u}{T} = \frac{\partial s}{\partial T} \Big|_{\sigma, \bar{z}} = \frac{C_{\epsilon z}^u}{T} \left(1 + \frac{(\alpha^u)^2 E^u T}{C_{\epsilon z}^u} \right) = \frac{C_{\epsilon z}^u}{T} + (\alpha^u)^2 E^u \quad (\text{II.40})$$

Compte tenu de la remarque précédente (II.36), on continuera, par la suite, à confondre ces deux chaleurs spécifiques que l'on notera de manière générique C_z^u :

$$C_{\sigma z}^u = C_{\epsilon z}^u = C_z^u \quad (\text{II.41})$$

Notons, de plus, que l'inverse du module, classiquement notée s^u , est associé à la notion de souplesse.

Lorsque l'on "contrôle" l'entropie s et la contrainte σ , la loi constitutive DNLR s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ -\dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(1 + \frac{(\alpha^u)^2 E^u T}{C_{\epsilon z}^u}\right)} \begin{bmatrix} \frac{T}{C_{\epsilon z}^u} & -\frac{\alpha^u T}{C_{\epsilon z}^u} \\ -\frac{\alpha^u T}{C_{\epsilon z}^u} & -\frac{1}{E^u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} - \sum_j \begin{bmatrix} \frac{T^j - T^{j,r}}{\tau_{s\sigma}^j} \\ \frac{-\epsilon^j + \epsilon^{j,r}}{\tau_{\sigma s}^j} \end{bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

L'équivalence entre les lois constitutives (II.24) et (II.42) est assurée par la relation suivante :

$$\tau_{s\sigma}^{j,r} = \frac{E^u}{E^r} \tau_{\epsilon s}^{j,r} = \frac{E^u C^u}{E^r C^r} \tau_{T\epsilon}^{j,r} \quad (\text{II.43})$$

Le glissement associé au potentiel de Gibbs s'écrit alors :

$$a(t) = \exp\left(\frac{K_{\epsilon}^{s\sigma}(\epsilon - \epsilon^r)}{RT}\right) \exp\left(\frac{K_T^{s\sigma}(T - T^r)}{RT}\right) \quad (\text{II.44})$$

II.3 Conclusions

Dans le cas de comportements linéaires, les quatre lois constitutives thermomécaniques (II.24), (II.31), (II.37), (II.42) peuvent être appliquées de manière équivalente en fonction de leurs apports théoriques respectifs et des données expérimentales dont on dispose.

Trois groupes de paramètres régissent la modélisation DNLR dans le cadre du couplage thermomécanique :

- les paramètres instantanés : le module mécanique E^u , le coefficient thermoélastique α^u et la chaleur spécifique C_z^u
- les paramètres relaxés : E^r , α^r et C_z^r
- Les paramètres propres à la description du spectre de relaxation : le nombre de décades D et le temps de relaxation maximal τ_{max}^r (ou de manière équivalente l'entropie d'activation du processus le plus lent ΔS_{min}^+ et l'énergie d'activation du système ΔE^+). On rappelle que le nombre de processus N pris en compte n'est pas réellement un paramètre lorsqu'on admet l'hypothèse d'un continuum. La valeur de N est choisie uniquement dans le but de décrire un spectre continu avec le minimum de processus afin d'accélérer les calculs numériques.

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, les élévations de température sont suffisamment faibles pour supposer que la chaleur spécifique reste constante; on définit alors $C_z = C_z^u = C_z^r$. De plus, l'expérience montre que le coefficient thermoélastique à l'état relaxé α^r est suffisamment faible pour que sa contribution puisse être négligée.

Le couplage thermo-viscoélastique linéaire est donc finalement régi par 6 paramètres (C_z , E^u , E^r , α^u , τ_{max} et D). Une fois ces 6 paramètres identifiés pour un matériau donné, les

quatre formulations (II.24), (II.31), (II.42), (II.37) permettront de simuler les réponses mécaniques et thermiques à tous les types de chargement mécaniques imaginables.

Pour des comportements mécaniques non linéaires (plasticité, endommagement, ...), le modèle précédent doit prendre en compte le glissement des temps de relaxation ce qui ajoute deux paramètres supplémentaires au modèle i.e. les deux coefficients K propres à la mécanique et à la thermique. Le lien entre les différents coefficients K propres aux quatre formulations (II.24), (II.31), (II.42), (II.37) n'a malheureusement pas encore pu être déterminé. Les deux paramètres devront donc, si possible, être identifiés pour chacune des formulations i.e. pour chaque couple de variables de contrôle imposées.

Partie B

Loi de comportement mécanique

III

Loi constitutive mécanique

Sommaire

III.1	Caractérisation du système mécanique propre au DNLR .	44
III.1.1	Caractérisation d'un système	44
III.1.2	Transmittance mécanique normalisée propre au DNLR	46
III.1.3	Modèle analogique associé à une déformation imposée	49
III.1.4	Caractérisation temporelle de la transmittance	50
III.1.5	Caractérisation fréquentielle de la transmittance - Diagramme de Bode	52
III.2	Récurtivité du modèle DNLR	58
III.2.1	Récurtivité des temps de relaxation et des poids	59
III.2.2	Expression de la récurtivité temporelle du modèle DNLR	60
III.2.3	Lien entre récurtivité temporelle et récurtivité fréquentielle (analyse en terme de zéros et de pôles)	60
III.2.4	Liens entre récurtivité temporelle et récurtivité géométrique analogique	65
III.3	Le modèle DNLR et les modèles non entiers	66
III.3.1	Bibliographie sur les modèles fractionnaires	67
III.3.2	Liens entre la récurtivité de l'approche DNLR et les modèles à un seul ordre de dérivation non entière	74
III.3.3	Liens entre l'approche DNLR et les modèles à deux puissances non entières	83
III.4	Conclusions	92

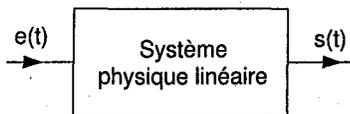
On a montré au chapitre I qu'une perturbation (ou stimulus) induisait une réponse du système qu'on peut décomposer en deux parties : une réponse instantanée et une réponse dite dissipative. La réponse instantanée d'un système est proportionnelle à la commande et symptomatique d'un phénomène réversible. La réponse dissipative est due à une dégradation du matériau. La structure interne se réorganise jusqu'à atteindre un état stable dit relaxé. Ce phénomène est caractéristique de l'irréversibilité. En s'appuyant sur la loi de comportement mécanique d'un matériau, on étudie, dans ce chapitre, le phénomène de relaxation associé à la notion de dissipation intrinsèque (en se dégradant, la structure dégage de la chaleur).

On articule notre étude autour de trois points. Dans un premier temps, on met en place la loi de comportement mécanique DNLR dans le cadre de la viscoélasticité linéaire isotherme. On suppose ainsi implicitement que l'élévation de température induite par le couplage thermomécanique n'influe pas, en retour, sur la variable observable mécanique. L'écriture de la loi constitutive va permettre de caractériser la fonction de transfert du DNLR et par là même de définir une fonction caractéristique de la relaxation mécanique du matériau. Dans un second temps, on met en évidence la récursivité, au sens d'Oustaloup [Ous 95], du spectre de relaxation défini au chapitre I à partir de la théorie des fluctuations. Dans un dernier temps, on montre comment cette récursivité associée aux temps de relaxation et aux poids conduit à une formulation non entière de la fonction de relaxation. En se basant sur une bibliographie détaillée des modèles à dérivées fractionnaires, on met ensuite en évidence le lien entre ces dernières approches et le modèle DNLR. Ce lien apparaît comme fondamental car il permet de donner une assise cohérente sur laquelle il est possible de développer des modèles non entiers pour décrire la relaxation.

III.1 Caractérisation du système mécanique propre au DNLR

III.1.1 Caractérisation d'un système

Un système dynamique linéaire peut être schématisé par une "boite noire" où $e(t)$ est la variable d'entrée appliquée au système et $s(t)$ la variable de sortie encore appelée variable observable :



- La caractérisation du régime transitoire peut être déterminée en utilisant le calcul opérationnel dans l'espace de Laplace.

La transformée de Laplace¹ d'une fonction causale² f s'écrit :

$$\bar{f}(p) = \mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \tag{III.1}$$

¹On dit que $\bar{f}(p)$ est l'image de $f(t)$ dans l'espace symbolique et réciproquement que $f(t)$ est l'image de $\bar{f}(p)$ dans l'espace temporel. On appelle transformation de Laplace l'application \mathcal{L} telle que $\mathcal{L}[f] = \bar{f}$

²Nulle sur $] -\infty, 0]$

La transmittance (ou fonction de transfert) est un des concepts de base des systèmes automatiques : c'est une écriture linéaire, condensée et intrinsèque de la dynamique d'un système. Connaissant l'excitation en entrée, il est alors possible de calculer la réponse en sortie du système :

$$\bar{s}(p) = H(p) \bar{e}(p) \quad (\text{III.2})$$

La caractérisation temporelle du régime transitoire s'effectue par un retour inverse en temps de la variable de sortie $\bar{s}(p)$. Dans l'espace temporel, la loi précédente s'écrit :

$$s(t) = (h \otimes e)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) e(u) du \quad (\text{III.3})$$

où \otimes correspond au produit de convolution et h est l'image de la transmittance dans l'espace temporel (h correspond à la réponse impulsionnelle du système $h = \mathcal{L}^{-1}[H]$).

- La caractérisation du système en régime périodique établi est déterminée en utilisant le calcul opérationnel dans l'espace de Fourier. Le passage de l'écriture en Laplace à celle en Fourier se fait simplement en substituant la variable $i\omega$ à p où ω est la pulsation du système d'entrée.

La fonction de transfert fréquentielle est caractérisée par son module M et son argument ϕ :

$$H^*(i\omega) = M(\omega) e^{i\phi(\omega)} \quad (\text{III.4})$$

ou, de manière équivalente, par sa partie réelle et imaginaire :

$$H^*(i\omega) = H' + i H'' \quad (\text{III.5})$$

Pour décrire graphiquement la fonction de transfert harmonique, on dispose de quatre solutions complémentaires :

1. Les diagrammes de Bode représentent l'évolution du gain et de la phase en fonction de la fréquence, en échelle logarithmique :

$$\begin{cases} \log(M) = f_M(\log(\omega)) \\ \phi = f_\phi(\log(\omega)) \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

2. La combinaison de ces deux courbes correspond au diagramme de Black-Nichols :

$$\log(M) = f(\phi) \quad (\text{III.7})$$

3. la représentation de Cole-Cole caractérise l'évolution des parties réelle et imaginaire de la fonction de transfert (parfois en échelle logarithmique) en fonction de la fréquence en échelle logarithmique :

$$\begin{cases} H' = f_1(\log(\omega)) \\ H'' = f_2(\log(\omega)) \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

4. La combinaison de ces deux courbes correspond au diagramme de Cole-Cole (ou de Nyquist) :

$$\log(H'') = f(\log(H')) \quad (\text{III.9})$$

III.1.2 Transmittance mécanique normalisée propre au DNLR

Le but de ce paragraphe est de définir la fonction de transfert caractéristique du système mécanique DNLR dans le cadre de la viscoélasticité linéaire isotherme. Dans ce cas particulier, les coefficients des matrices de couplage \underline{a}^u , \underline{b} et \underline{g} ainsi que les temps de relaxation sont supposés constants (indépendants du temps).

III.1.2.1 Déformation imposée

Dans le cadre d'un système mécanique à déformation imposée, les variables observables et les variables de contrôle s'écrivent :

$$\underline{\beta} = \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\gamma} = \underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{pmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Dans l'hypothèse d'un chargement uni-axial, ces grandeurs se réduisent aux scalaires :

$$\underline{\beta} = \sigma_{11} = \sigma \quad \text{et} \quad \underline{\gamma} = \epsilon_{11} = \epsilon \quad (\text{III.11})$$

et les matrices instantanée et relaxée à :

$$\begin{cases} \underline{a}^u = E^u \\ \underline{a}^r = E^r \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

où E^u et E^r correspondent respectivement aux modules instantané et relaxé.

La loi constitutive (I.90) s'écrit alors dans le cadre d'une déformation imposée :

$$\dot{\sigma} = E^u \dot{\epsilon} - \sum_j \frac{\sigma^j - p_0^j E^r \sigma}{\tau_\epsilon^j} \quad (\text{III.13})$$

La réponse en contrainte peut être décomposée en une réponse instantanée et en une réponse dissipative comme on l'a montré précédemment dans le cas général (I.23) :

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^u + \dot{\sigma}^d \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dot{\sigma}^u = E^u \dot{\epsilon} \\ \dot{\sigma}^d = \sum_j \frac{p_0^j E^r \epsilon - \sigma^j}{\tau_\epsilon^j} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

La loi de comportement mécanique uni-axiale précédente s'écrit en composante modale :

$$\dot{\sigma}^j = p_0^j E^u \dot{\epsilon} - \frac{\sigma^j - p_0^j E^r \epsilon}{\tau_\epsilon^j} \quad (\text{III.15})$$

Dans l'espace de Laplace, cette dernière équation s'écrit :

$$\bar{\sigma}^j + \tau_\epsilon^j p \bar{\sigma}^j = p_0^j E^r \bar{\epsilon} + p_0^j E^u \tau_\epsilon^j p \bar{\epsilon} \quad (\text{III.16})$$

III. Loi constitutive mécanique

La contrainte totale est la somme des contraintes propres à chaque processus. Dans l'espace de Laplace, elle s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \sum_j \bar{\sigma}^j = \sum_j p_0^j \frac{E^r + E^u \tau_\epsilon^j p}{1 + \tau_\epsilon^j p} \bar{\epsilon} \quad (\text{III.17})$$

La transmittance (ou fonction de transfert) relie, par définition, les variables observables aux variables de contrôle i.e. dans ce cas précis la contrainte à la déformation. Elle est alors appelée module (ou relaxance) et notée \bar{G} :

$$\bar{G} = \sum_j p_0^j \frac{E^r + E^u \tau_\epsilon^j p}{1 + \tau_\epsilon^j p} \quad (\text{III.18})$$

Suivant le même formalisme, on définit la transmittance dite dissipative qui correspond au rapport de la contrainte dissipative sur la déformation :

$$\bar{G}^d = (E^r - E^u) \sum_j p_0^j \frac{1}{1 + \tau_\epsilon^j p} = \bar{G} - E^u \quad (\text{III.19})$$

On définit enfin la transmittance normalisée \bar{G}_n par la relation suivante :

$$\bar{G}_n = \frac{\bar{G} - E^u}{E^r - E^u} = \bar{G}_n^d = \frac{\bar{G}^d}{E^r - E^u} = \sum_j \frac{p_0^j}{1 + \tau_\epsilon^j p} \quad (\text{III.20})$$

Cette fonction, nommée relaxance ou module normalisé, est le reflet des phénomènes dissipatifs qui interviennent au cours de la déformation du matériau.

En régime établi, la fonction de transfert fréquentielle (ou module complexe) s'écrit :

$$G^* = \sum_j p_0^j \frac{E^r + iE^u \tau_\epsilon^j \omega}{1 + i\tau_\epsilon^j \omega} \quad (\text{III.21})$$

La décomposition de cette transmittance en partie réelle et imaginaire permet de définir le module stocké et le module dissipatif (ou module de perte) :

$$G^* = G' + iG'' \text{ avec } \begin{cases} G' = \sum_j p_0^j \frac{a^r + a^u (\tau_\epsilon^j \omega)^2}{1 + (\tau_\epsilon^j \omega)^2} \\ G'' = (a^u - a^r) \sum_j p_0^j \frac{\tau_\epsilon^j \omega}{1 + (\tau_\epsilon^j \omega)^2} \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

III.1.2.2 Contrainte imposée

Dans le cas d'une contrainte imposée, la loi constitutive mécanique s'écrit en composante modale :

$$\dot{\epsilon}^j = p_0^j s^u \dot{\sigma} - \frac{\epsilon^j - p_0^j s^r \sigma}{\tau_\sigma^j} \quad (\text{III.23})$$

où s^u et s^r correspondent aux souplesses instantanée et relaxée :

$$s^u = \frac{1}{E^u} \text{ et } s^r = \frac{1}{E^r} \quad (\text{III.24})$$

La relation (III.23) peut encore s'écrire :

$$\epsilon^j + \tau_\epsilon^j \dot{\epsilon}^j = p_0^j s^r \sigma + p_0^j s^u \tau_\sigma^j \dot{\sigma} \quad (\text{III.25})$$

Dans l'espace de Laplace, la déformation totale s'écrit :

$$\bar{\epsilon} = \sum_j \bar{\epsilon}^j = s^u \bar{\sigma} + (s^r - s^u) \sum_j \frac{p_0^j}{1 + \tau_\sigma^j p} \bar{\sigma} \quad (\text{III.26})$$

Cette loi permet ainsi de définir la transmittance associée appelée retardance ou susceptibilité et notée \bar{J} :

$$\bar{J} = \sum_j p_0^j \frac{s^r + s^u \tau_\sigma^j p}{1 + \tau_\sigma^j p} \quad (\text{III.27})$$

L'écriture (III.26) permet d'identifier les déformations instantanée et dissipative :

$$\begin{cases} \bar{\epsilon}^u = s^u \bar{\sigma} \\ \bar{\epsilon}^d = (s^r - s^u) \sum_j \frac{p_0^j}{1 + \tau_\sigma^j p} \bar{\sigma} \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

La susceptibilité normalisée \bar{J}_n (ou susceptibilité dissipative normalisée \bar{J}_n^d) s'écrit :

$$\bar{J}_n = \frac{\bar{J} - s^u}{s^r - s^u} = J_n^d = \frac{J^d}{s^r - s^u} = \sum_j \frac{p_0^j}{1 + \tau_\sigma^j p} \quad (\text{III.29})$$

L'expression des retardances stockée et dissipative se déduit de l'expression de la retardance complexe dans l'espace de Fourier :

$$\mathcal{F}[J] = J' - iJ'' \text{ avec } \begin{cases} J' = \sum_j p_0^j \frac{s^r + s^u (\tau_\sigma^j \omega)^2}{1 + (\tau_\sigma^j \omega)^2} \\ J'' = \sum_j p_0^j \frac{(s^u - s^r) \tau_\sigma^j \omega}{1 + (\tau_\sigma^j \omega)^2} \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

III.1.2.3 Conclusion

Qu'elles soient écrites en contrainte ou en déformation, les lois constitutives issues du modèle DNLR (III.15) et (III.25) sont équivalentes. Les temps de relaxation associés à chaque équation sont liés entre eux par la relation :

$$\tau_\epsilon^j = \frac{E^u}{E^r} \tau_\sigma^j \quad (\text{III.31})$$

Il n'est donc pas nécessaire d'effectuer une étude propre à chaque cas de figure. La transmittance \bar{Y} peut être définie de manière générique comme le rapport de la variable observable β sur la variable de commande γ et s'écrira :

$$\bar{Y}(p) = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\gamma}} = \sum_j p_0^j \frac{a^r + a^u \tau^j p}{1 + \tau^j p} = a^u + (a^r - a^u) \bar{Y}_n(p) \quad (\text{III.32})$$

où a^u et a^r correspondent respectivement aux coefficients instantané et relaxé liant variable observable et variable de commande. Le coefficient a^u et l'admittance \bar{Y} correspondront respectivement, dans le cas d'une déformation imposée, au module instantané E^u et au module complexe \bar{G} et, dans le cas d'une contrainte imposée, à la souplesse instantanée s^u et à la susceptibilité \bar{J} .

La transmittance normalisée \bar{Y}_n est définie par la relation générique :

$$\bar{Y}_n(p) = \sum_j \frac{p_0^j}{1 + \tau^j p} \tag{III.33}$$

Elle caractérise la fonction de transfert du système complet en intégrant les processus dissipatifs. La caractérisation de cette fonction permet ainsi de décrire implicitement la dégénérescence énergétique du système.

III.1.3 Modèle analogique associé à une déformation imposée

Le modèle analogique associé à l'équation constitutive modale (III.25) correspond au solide de Zener :

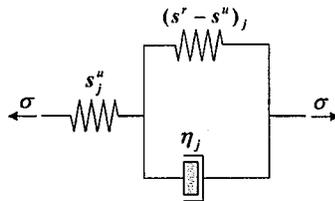


FIG. III.1: Représentation analogique du solide de Zener

où s_j^u et $(s^r - s^u)_j$ représentent respectivement la souplesse instantanée pondérée et la souplesse dissipée pondérée :

$$\begin{cases} s_j^u = p_0^j s^u \\ (s^r - s^u)_j = p_0^j (s^r - s^u) \end{cases} \tag{III.34}$$

Le temps caractéristique correspond au produit du coefficient de viscosité propre à l'amortisseur par la souplesse anélastique pondérée :

$$\tau_\epsilon^j = \eta_j (s^r - s^u)_j \tag{III.35}$$

Ainsi le modèle analogique associé au DNLr dans le cas d'une contrainte imposée (III.14) n'est rien d'autre qu'un Zener généralisé :

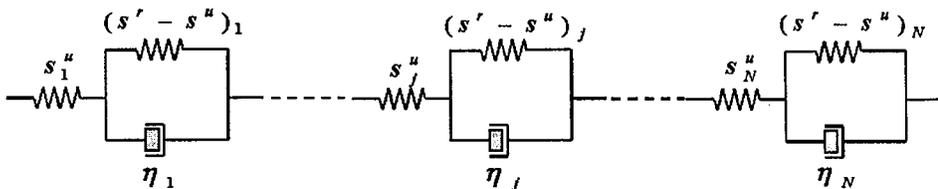


FIG. III.2: Représentation analogique du solide de Zener généralisé

D'après la loi des noeuds, le schéma analogique précédent peut être reconstruit de manière à faire apparaître la séparation de la déformation en une déformation instantanée et une déformation dissipée (III.28) :

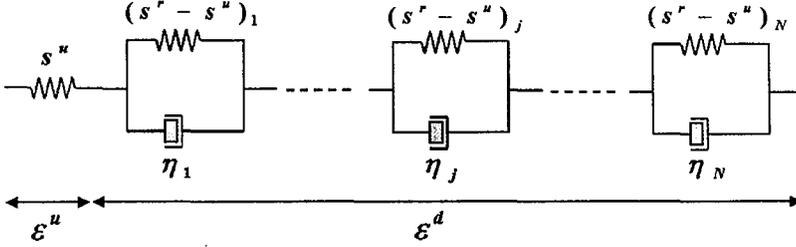


FIG. III.3: Représentation analogique de la séparation des déformations à partir du solide de Zener généralisé

Le modèle analogique caractéristique de la réponse dissipative est donc un assemblage en série de N schémas analogiques de Kelvin-Voigt avec chacun un amortisseur et une souplesse propre. Chaque processus dissipatif est régi analogiquement par le couple de paramètres $((s^u - s^r)_j, \eta^j)$ ou de manière équivalente par $((s^u - s^r)_j, \tau^j)$.

III.1.4 Caractérisation temporelle de la transmittance

III.1.4.1 Réponse impulsionnelle

Par définition, la réponse impulsionnelle y relie la variable observable β à la variable de commande γ par l'intermédiaire du produit de convolution.

$$\beta(t) = (y \otimes \gamma)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) \gamma(u) du \quad (\text{III.36})$$

Cette fonction coïncide avec la transformation inverse en temps de la transmittance définie en (III.32) :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{Y}] \quad (\text{III.37})$$

D'après la relation (III.32), la réponse impulsionnelle normalisée y_n correspond alors à une somme d'exponentielles de relaxation de type Debye :

$$y_n(t) = \sum_j \frac{P_0^j}{\tau_j^j} \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right) \quad (\text{III.38})$$

La réponse impulsionnelle est encore appelée fonction mémoire ou fonction héréditaire.

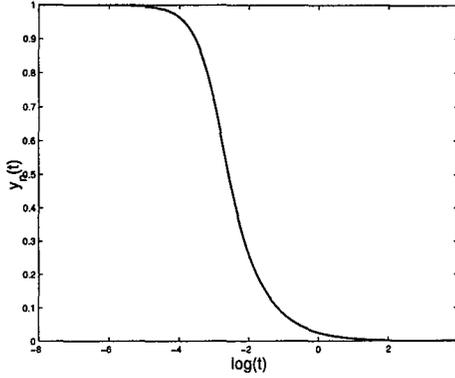


FIG. III.4: Évolution de la réponse impulsionnelle normalisée - eq. (III.38) ($N = 50, D = 6, \tau_{max} = 1000 \text{ s}$)

Cette fonction est couramment utilisée dans les domaines physiques tels que l'électricité, la thermique, ... mais son utilisation reste limitée en mécanique. En effet, s'il est possible expérimentalement d'imposer une impulsion dans les domaines physiques cités précédemment, cela reste difficilement réalisable mécaniquement.

III.1.4.2 Fonction de relaxation

Les mécaniciens préfèrent ainsi travailler avec la fonction ϕ dite de relaxation ou de retard (en fonction du type de sollicitation imposée) qui correspond physiquement à la réponse du système à un échelon de commande.

La fonction de relaxation relie la variable observable à la variable de contrôle par la relation de Boltzmann [Bol 74] :

$$\beta(t) = (\phi \otimes \dot{\gamma})(t) = \int_0^t \phi(t-u) \dot{\gamma}(u) du \quad (III.39)$$

La transformation de cette loi dans l'espace de Laplace conduit à l'expression suivante :

$$\bar{\beta}(p) = p \bar{\phi}(p) \bar{\gamma}(p) \quad (III.40)$$

ce qui, combiné à la définition de la transmittance (III.32), permet de définir la fonction de relaxation en fonction de la transmittance :

$$\bar{\phi}(p) = \frac{1}{p} \bar{Y}(p) \quad (III.41)$$

soit encore :

$$\bar{\phi}(p) = \frac{1}{p} \sum_j p_0^j \frac{a^r + a^u \tau^j p}{1 + \tau^j p} \quad (III.42)$$

L'inversion dans l'espace temporel de la relation (III.42) conduit à l'expression de la fonction de relaxation $\phi(t)$:

$$\phi(t) = \sum_j p_0^j \left[a^r + (a^u - a^r) \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right) \right] \quad (III.43)$$

La normalisation de cette fonction conduit à l'expression de la fonction de relaxation dite normalisée :

$$\phi_*(t) = \frac{\phi - a^r}{a^u - a^r} = \sum_j p_0^j \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right) \quad (\text{III.44})$$

Normalisée par rapport au coefficient instantané, la fonction de relaxation s'écrit alors :

$$\phi_*(t) = \frac{\phi - a^u}{a^r - a^u} = \sum_j p_0^j \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right) \right] \quad (\text{III.45})$$

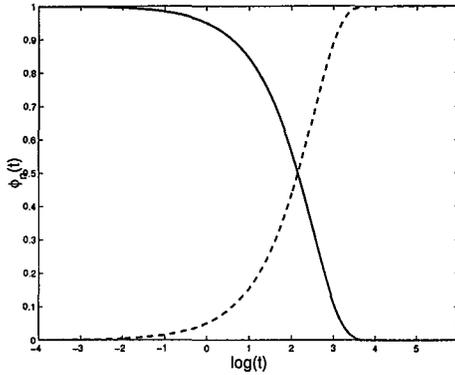


FIG. III.5: Évolution temporelle de relaxation normalisée - eq. (III.44) ... eq. (III.45) ($N = 50$, $D = 6$, $\tau_{max} = 1000$ s)

Dans la suite de ce mémoire, on utilisera la relation (III.44) comme définition de la fonction de relaxation normalisée.

III.1.5 Caractérisation fréquentielle de la transmittance - Diagramme de Bode

Pour décrire l'évolution de la transmittance normalisée (III.33) en fonction de la fréquence, on a choisi de s'appuyer sur les diagrammes de Bode associés. Cette représentation graphique, couramment utilisée en automatique, est beaucoup moins classique en rhéologie des solides que ne peuvent l'être les diagrammes de Cole-Cole (où sont représentés l'évolution de la partie réelle et imaginaire en fonction de la fréquence). Rogers [Rog 83] fut l'un des premiers à faire une étude complète des fonctions de transfert harmoniques propre à la rhéologie et à mettre en évidence l'apport de cette représentation.

On appelle représentation dans le plan de Bode d'une fonction de transfert harmonique $H^*(i\omega)$ l'ensemble des deux diagrammes suivants :

- la courbe de gain (module) : tracé du module $M(dB)$ en décibels en fonction de la pulsation ou de la fréquence, en échelle logarithmique :

$$M(dB) = 20 \log |H^*(i\omega)| \quad (\text{III.46})$$

- la courbe de phase : tracé de l'argument ϕ de la fonction de transfert, généralement exprimé en degrés, en fonction de la pulsation ou de la fréquence, en échelle logarithmique.

La transmittance normalisée (III.33), réduite au même dénominateur, se met sous la forme :

$$\bar{Y}_n(p) = \frac{1}{P_0} \frac{\prod_{k=1}^{N-1} (1 + \frac{p}{\omega'_k})}{\prod_{j=1}^N (1 + \frac{p}{\omega_j})} \quad \text{où} \quad \frac{1}{P_0} = \sum_{j=1}^N P_0^j = 1 \quad (\text{III.47})$$

où les fréquences $-\omega_j$ et $-\omega'_j$ correspondent aux pôles et aux zéros de la fonction \bar{Y}_n i.e. elles annulent respectivement le dénominateur et le numérateur de la transmittance normalisée.

En régime établi, la fonction de transfert harmonique s'écrit :

$$Y_n^*(i\omega) = \frac{\prod_{k=1}^{N-1} (1 + i \frac{\omega}{\omega'_k})}{\prod_{j=1}^N (1 + i \frac{\omega}{\omega_j})} \quad (\text{III.48})$$

Le module et la phase se déduisent automatiquement de la relation (III.48) :

$$\left[\begin{aligned} M = |Y_n^*| &= \frac{\prod_{k=1}^{N-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega'_k}\right)^2}}{\prod_{j=1}^N \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2}} \\ \phi &= \sum_{k=1}^{N-1} \arctan \left(\frac{\omega}{\omega'_k}\right) - \sum_{k=1}^N \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right) \end{aligned} \right. \quad (\text{III.49})$$

En décibels, le module s'écrit :

$$M = \sum_{k=1}^{N-1} 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega'_k}\right)^2} - \sum_{k=1}^N 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2} \quad (\text{III.50})$$

Le module (en dB) et la phase correspondent donc à la somme des contributions de chaque pôle et de chaque zéro.

Étant donné l'importance des analyses effectuées ultérieurement au cours de ce chapitre basées sur les comportements fréquentiels asymptotiques, on a choisi de rappeler les bases de la construction de Bode en s'appuyant sur les trois fonctions de transfert les plus triviales pour la caractérisation des systèmes : un pôle seul, puis un zéro seul puis deux pôles et un zéro. Les lecteurs habitués à ce type de constructions pourront passer directement au paragraphe III.1.5.2.

III.1.5.1 Construction des diagrammes de Bode

• **Pôle simple**

On considère l'expression d'une fonction de transfert du premier ordre avec un pôle $-\omega_1$:

$$P^* = \frac{1}{1 + i\frac{\omega}{\omega_1}} \quad (\text{III.51})$$

Cette expression n'est rien d'autre que la définition de la fonction de transfert normalisée du modèle DNLR à un temps de relaxation τ_1 (solide de Zener) :

$$Y_{\omega_1}^* = \frac{1}{1 + i\frac{\omega}{\omega_1}} \quad (\text{III.52})$$

Le gain $|Y_{\omega_1}^*|$ (en décibels (dB)) et la phase ϕ_{ω_1} de la fonction de transfert (III.52) sont définis par :

$$20 \log |Y_{\omega_1}^*| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \phi_{\omega_1} = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \quad (\text{III.53})$$

Pour effectuer un tracé rapide du module et de la phase, il suffit de remplacer les évolutions du gain et de la phase par leurs asymptotes. Deux comportements asymptotiques bien distincts peuvent être discernés :

– aux fréquences basses ($\omega \ll \omega_1$) : le système n'a pas encore évolué :

$$\left[\begin{array}{l} |Y_{\omega_1}^*| \xrightarrow{\omega \ll \omega_1} 1 \quad \text{soit} \quad 20 \log |Y_{\omega_1}^*| \xrightarrow{\omega \ll \omega_1} 0 \\ \phi_{\omega_1} \xrightarrow{\omega \ll \omega_1} 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.54})$$

Le gain (en dB) et la phase sont nuls.

– aux fréquences hautes ($\omega \gg \omega_1$) : le système est entièrement relaxé.

$$\left[\begin{array}{l} 20 \log |Y_{\omega_1}^*| \xrightarrow{\omega \gg \omega_1} -20 \log(\omega) + 20 \log(\omega_1) \\ \phi_{\omega_1} \xrightarrow{\omega \gg \omega_1} -\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (\text{III.55})$$

L'évolution du gain (en dB) en fonction du $\log(\omega)$ est une droite dont la pente vaut -20 dB/décade (ou encore -6 dB/octave).³ La phase est constante et bloquée à -90°.

³L'octave correspond à un intervalle de pulsation $[\omega, 2\omega]$ et la décade à un intervalle $[\omega, 10\omega]$.

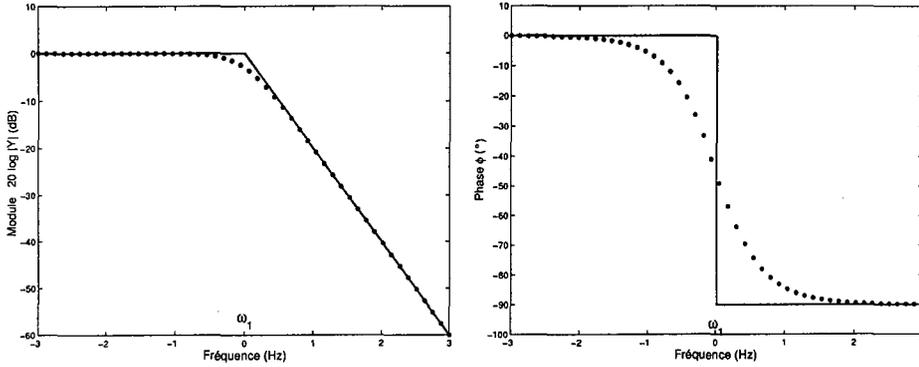


FIG. III.6: Diagrammes de Bode associés à une fonction de transfert à un pôle - eq. (III.51) ($\omega_1 = 1 \text{ Hz}$)

Le tracé asymptotique (trait plein) se compose des deux demi-droites définies ci-dessus qui se coupent en $\omega = \omega_1$ appelée fréquence de coupure. La courbe réelle (trait en pointillé) apporte une correction autour de la fréquence de coupure.

On peut souvent se contenter des asymptotes pour représenter la courbe de gain car la courbe réelle est assez proche de celles-ci, ce qui n'est pas le cas pour les courbes de phase. Cette remarque aura son importance par la suite (§ III.3.2.2).

• **Zéro unique**

On considère l'expression d'une fonction de transfert du premier ordre avec un zéro $-\omega'_1$:

$$Z^* = 1 + i \frac{\omega}{\omega'_1} \tag{III.56}$$

L'expression (III.56) correspond à l'inverse de la fonction de transfert normalisée (III.52) associée à la fréquence de coupure ω'_1 :

$$Z^* = \frac{1}{Y^*_{\omega'_1}} \tag{III.57}$$

Le gain et la phase correspondants s'écrivent :

$$20 \log |Z^*| = -20 \log |Y^*_{\omega'_1}| = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega'_1}\right)^2} \tag{III.58}$$

$$\phi_Z = -\phi_{\omega'_1} = \arctan \left(\frac{\omega}{\omega'_1}\right)$$

Les évolutions du module et de la phase de la fonction de transfert (III.56) se déduisent des évolutions de (III.51) par symétrie par rapport à l'axe des fréquences :

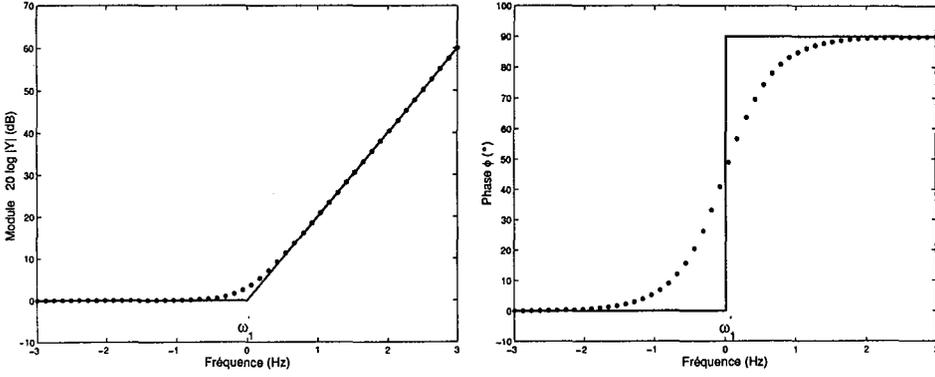


FIG. III.7: Diagrammes de Bode associés à une fonction de transfert à un zéro - eq. (III.56) ($\omega'_1 = 1 \text{ Hz}$)

• Modèle à 2 processus

La transmittance dissipative normalisée du modèle DNLR à deux temps de relaxation soit deux fréquence de relaxation ω_1 et ω_2 avec $\omega_1 < \omega_2$ s'écrit dans l'espace de Fourier :

$$Y^* = \frac{p_0^1}{1 + i\frac{\omega}{\omega_1}} + \frac{p_0^2}{1 + i\frac{\omega}{\omega_2}} = \frac{1 + i\frac{\omega}{\omega_1}}{(1 + i\frac{\omega}{\omega_1})(1 + i\frac{\omega}{\omega_2})} = \frac{Y_{\omega_1}^* Y_{\omega_2}^*}{Y_{\omega_1'}^*} \quad (\text{III.59})$$

où le zéro $-\omega'_1$ est défini en fonction des deux pôles $-\omega_1$ et $-\omega_2$:

$$\frac{1}{\omega'_1} = \frac{p_0^2}{\omega_1} + \frac{p_0^1}{\omega_2} \quad \text{soit } \omega_1 < \omega'_1 < \omega_2 \quad (\text{III.60})$$

Le module et la phase de la fonction de transfert (III.59) s'écrivent en fonction du module et de la phase des transmittances (III.51) calculées précédemment pour trois fréquences de coupure différentes :

$$\begin{cases} 20 \log |G| = 20 \log |Y_{\omega_1}^*| + 20 \log |Y_{\omega_2}^*| - 20 \log |Y_{\omega_1'}^*| \\ \phi = \phi_{\omega_1} + \phi_{\omega_2} - \phi_{\omega_1'} \end{cases} \quad (\text{III.61})$$

Le tracé asymptotique propre à Y^* (trait plein) est la somme des évolutions asymptotiques des trois fonctions de transfert $Y_{\omega_1}^*$, $1/Y_{\omega_1'}^*$, $Y_{\omega_2}^*$ (trait pointillé) :

III. Loi constitutive mécanique

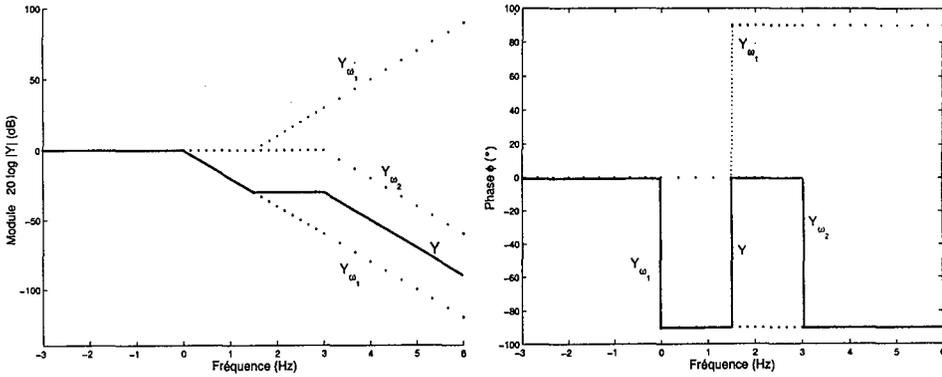


FIG. III.8: Diagrammes de Bode asymptotiques associés à une fonction de transfert à deux pôles et un zéros - eq. (III.59) ($\omega_1 = 1 \text{ Hz}$, $\omega_2 = 1000 \text{ Hz}$)

Les évolutions extrêmes (i.e. $\omega \ll \omega_1$ et $\omega \gg \omega_2$) restent les mêmes. Seul le comportement "transitoire" varie. Le module correspond à une marche d'escalier et la phase à un double crêteau.

L'évolution réelle de la fonction de transfert (III.59) (trait pointillé) ainsi que le tracé asymptotique (trait plein) est reporté ci-dessous :

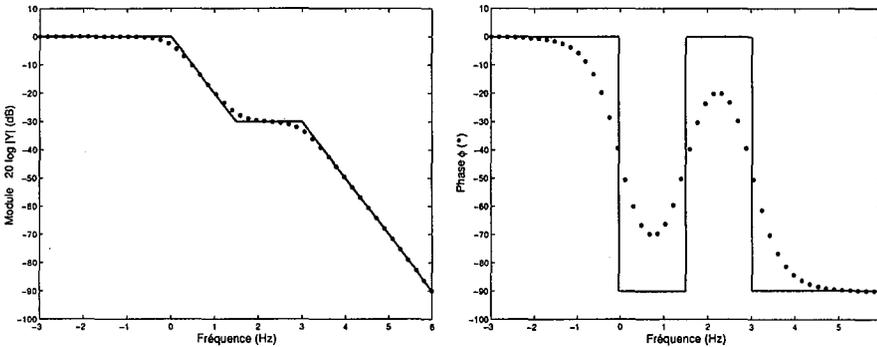


FIG. III.9: Diagrammes de Bode associés à une fonction de transfert à deux pôles et un zéros - eq. (III.59) ($\omega_1 = 1 \text{ Hz}$, $\omega_2 = 1000 \text{ Hz}$)

Le tracé asymptotique du gain est une bonne approximation de l'évolution réelle du module. L'amplitude réelle de la phase au cours du comportement "transitoire" est beaucoup moins importante que ne le prévoit le tracé asymptotique. L'écart entre les deux tracés réel et asymptotique de la phase sera d'autant plus important que les fréquences de coupure seront proches.

III.1.5.2 DNLR N processus

La généralisation de l'étude précédente avec N processus ($N=4, 6$ ou 50) répartis sur 6 décades conduit aux diagrammes de Bode suivants :

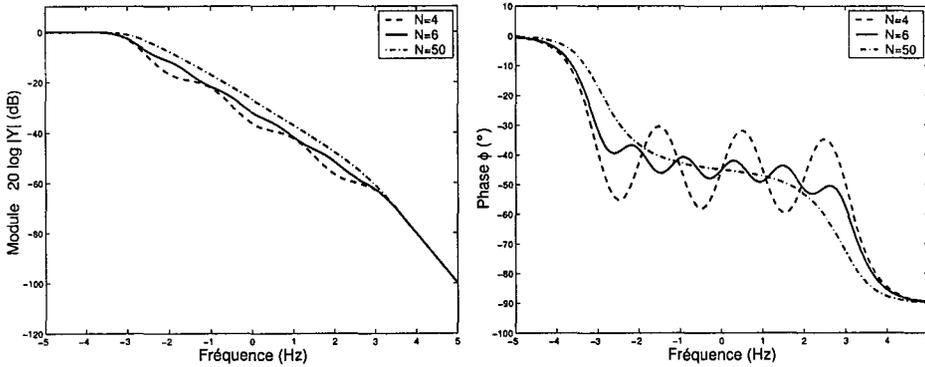


FIG. III.10: Diagrammes de Bode associés à la fonction de transfert normalisée DNLR - eq. (III.48) ($N = 4, 6$ ou $50, D = 6, \tau_1 = 1000$ s)

Lorsque N augmente, la distance entre un zéro et un pôle successif diminue. Aussi, dans le cas limite où N tend vers l'infini, le rapport de deux fréquences de relaxation successives tend vers 1, si bien que la succession de marches d'escalier propre au module et les oscillations successives de la phase tendent à se confondre avec une courbe monotone continue.

III.2 Récursivité du modèle DNLR

Jusqu'à présent la modélisation DNLR exploitait le résultat du théorème d'équipartition de l'entropie produite pour caractériser globalement le spectre de relaxation sans chercher à en approfondir véritablement les conséquences. Le but de ce paragraphe est de montrer que la distribution des temps de relaxation conjuguée à la définition des poids associés peut être réinterprétée à la lumière du concept de récursivité introduit par Oustaloup [Ous 95] pour traiter des problèmes d'amortissement en automatique. Dans un premier temps, on montre que le choix arbitraire d'une équipartition des temps de relaxation est naturellement associé à la notion d'une récursivité temporelle; le théorème de fluctuation-dissipation induit alors une récursivité des poids. Nous suivons dans un second temps l'analyse développée par Oustaloup dans son ouvrage pour montrer le lien entre une récursivité temporelle et une récursivité fréquentielle associée à la transmittance normalisée⁴ (III.29) :

$$\bar{Y}_n = \sum_j \frac{p_0^j}{1 + \tau^j p} \quad (\text{III.62})$$

Nous serons alors prêt à aborder le paragraphe III.3 qui établira le lien entre cette double récursivité et l'apparition d'un opérateur non entier en temps.

⁴Afin de simplifier l'écriture de la transmittance normalisée dans les paragraphes à venir, on supprimera abusivement l'indice n .

III.2.1 Récursivité des temps de relaxation et des poids

• Dans le formalisme DNLR, les temps de relaxation ont été choisis de manière à être équitablement espacés sur une échelle logarithmique. La connaissance du nombre de décades D et du nombre total de modes dissipatifs N permet ainsi de déterminer le rapport des temps caractéristiques successifs :

$$\frac{\tau^{j+1}}{\tau^j} = 10^{-\frac{D}{N-1}} = \frac{1}{\beta} \quad (\text{III.63})$$

β est une constante indépendante du rang j . La suite $(\tau^j)_{j \in [1:N]}$ est dite réursive i.e. il existe une relation indépendante du rang j liant deux termes consécutifs. Les suites récurives sont un cas particulier des suites dites récurrentes où le coefficient de proportionnalité est alors fonction du rang j . Le paramètre β est appelé facteur récurif; il traduit la progression géométrique des temps de relaxation.

• D'après la définition du poids caractéristique déduit de la thermodynamique statistique (I.83), le rapport des temps caractéristiques successifs est égal au carré du rapport des poids caractéristiques successifs :

$$\frac{\tau^{j+1}}{\tau^j} = \left(\frac{p_0^{j+1}}{p_0^j} \right)^2 \quad (\text{III.64})$$

La suite $(p_0^j)_{j \in [1:N]}$ est donc elle aussi réursive :

$$\frac{p_0^{j+1}}{p_0^j} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{\beta} \quad (\text{III.65})$$

D'après l'expression (III.63), quel que soit le nombre de décades et de processus pris en compte, les facteurs récurifs α et β sont toujours supérieurs à 1. $(\tau^j)_{j \in [1:N]}$ et $(p_0^j)_{j \in [1:N]}$ sont donc des suites décroissantes dont les valeurs maximales sont respectivement égales à τ_1 et p_0^1 .

Compte tenu des expressions des relations de récurivité (III.63) et (III.65), les poids et les temps de relaxation du rang j se déduisent des valeurs maximales p_0^1 et τ_1 (encore appelées p_0^{max} et τ_{max}) :

$$p_0^j = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{j-1} p_0^1 \quad \text{et} \quad \tau^j = \left(\frac{1}{\beta} \right)^{j-1} \tau_1 \quad (\text{III.66})$$

• Si le temps de relaxation maximal est une caractéristique du matériau qui est déterminé par l'expérimentation, le poids maximal n'est fonction que du nombre de décades et de processus. En effet, d'après sa définition (I.83), il s'écrit :

$$p_0^1 = B\sqrt{\tau^1} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{B} = \sum_{j=1}^N \sqrt{\tau^j} \quad (\text{III.67})$$

D'après la relation de récurivité (III.63), le coefficient B s'écrit :

$$\frac{1}{B} = \sqrt{\tau^1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \right)^j = \sqrt{\tau^1} \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \right)^N}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \right)} \quad (\text{III.68})$$

Le poids maximal s'écrit finalement :

$$p_0^1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^N} \quad (\text{III.69})$$

Le choix du temps de relaxation maximal τ_{max} , du nombre de décades D et du nombre de processus N fixe donc la valeur des poids et des temps de relaxation de chaque processus.

III.2.2 Expression de la récursivité temporelle du modèle DNLR

L'expression de la transmittance temporelle (ou réponse impulsionnelle) définie précédemment (III.38) peut alors s'écrire :

$$y_n(t) = \sum_j \frac{p_0^j}{\tau^j} \exp\left(-\frac{t}{\tau^j}\right) = \frac{p_0^1}{\tau^1} \sum_j \alpha^j \exp\left(-\beta^j \frac{t}{\tau_1}\right) \quad (\text{III.70})$$

En définissant la fonction $e(t)$ par :

$$e(t) = \frac{p_0^1}{\tau^1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \quad (\text{III.71})$$

on peut alors réécrire la réponse impulsionnelle sous la forme :

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha^j e(\beta^j t) = e(t) + \alpha e(\alpha t) + \alpha^2 e(\alpha^2 t) + \dots \quad (\text{III.72})$$

Cette fonction est définie par Oustaloup comme une série récursive de fonctions élémentaires déduites par récurrence d'une fonction motif. Les différentes grandeurs sont définies comme suit :

$e(t)$: fonction motif

$\alpha^j e(\beta^j t)$: fonction élémentaire de rang j , notée $e_j(t)$

α : facteur récursif (ou d'homothétie) suivant l'amplitude

β : facteur récursif (ou d'homothétie) suivant le temps.

III.2.3 Lien entre récursivité temporelle et récursivité fréquentielle (analyse en terme de zéros et de pôles)

Oustaloup [Ous 95] a montré que les fonctions récursives possédaient un comportement bien particulier quand elles étaient étudiées dans l'espace des fréquences. Quelle que soit la fonction motif $e(t)$ choisie, l'étude de la réponse à l'aide du diagramme de Bode associé révèle :

- une évolution linéaire de l'amplitude (ou module) avec une pente de $20n$ dB/décade ($6n$ dB/octave).
- une phase constante, indépendante de la fréquence, définissant un blocage de phase à $n\pi/2$.

La valeur absolue de n est non entière (comprise entre 0 et 1) et dépend uniquement des valeurs des facteurs récursifs α et β .

III.2.3.1 Récursivité fréquentielle

D'après (III.29), la transmittance normalisée (appelée par la suite "transmittance somme") s'écrit :

$$\bar{Y} = \sum_j \frac{p_0^j}{1 + \tau^j p} \quad (III.73)$$

Une réduction de cette fonction au même dénominateur conduit à l'expression suivante ("transmittance produit") (§ III.1.5) :

$$\bar{Y} = \frac{\prod_{k=1}^{N-1} (1 + \frac{p}{\omega_k})}{\prod_{j=1}^N (1 + \frac{p}{\omega_j})} \quad (III.74)$$

où $-\omega_j(-1/\tau^j)$ et $-\omega'_j$ correspondent respectivement aux pôles et aux zéros de la fonction \bar{Y} .

Ce type de fonction de transfert (III.74) a été étudiée par Biot [Bio 58] afin de décrire le comportement des matériaux en viscoélasticité. Le nombre important de paramètres (pôles et zéros) nécessaires pour se conformer aux données expérimentales, ajouté à l'absence d'une physique sous-jacente concernant les paramètres identifiés, limitait l'intérêt de cette approche. Le caractère récursif des zéros et des pôles permettrait de simplifier le problème et de retomber sur les mêmes propriétés que la fonction exprimée sous forme de somme.

Dans le cas d'un nombre infini de processus, Oustaloup postule que l'équivalence mathématique des deux expressions de la transmittance (III.73) et (III.74) implique que, à l'exception des premiers et derniers zéros, deux zéros successifs sont dans un rapport constant et égal à celui de deux pôles successifs :

$$\frac{\omega'_{j+1}}{\omega'_j} = \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j} = \gamma \delta \quad (III.75)$$

Dans le cas particulier du modèle DNLR, la fréquence caractéristique ω_j correspond à l'inverse du temps caractéristique associé au rang j . Aussi, la récursivité des pôles est une conséquence directe de la récursivité des temps de relaxation. D'après la relation de récursivité (III.63), le produit $\gamma \delta$ est directement lié à β :

$$\beta = \gamma \delta \quad (III.76)$$

De plus, le même rapport constant entre deux zéros ou deux pôles consécutifs implique des rapports constants entre un zéro et un pôle de même rang et entre un pôle et un zéro de rang immédiatement inférieur :

$$\frac{\omega'_j}{\omega_j} = \gamma \quad \text{et} \quad \frac{\omega_{j+1}}{\omega'_j} = \delta \quad (III.77)$$

Dans le cas particulier du DNLR où $\alpha = \sqrt{\beta}$ (III.65) :

$$\gamma = \delta \tag{III.78}$$

On représente l'évolution asymptotique du module et de la phase de la transmittance (III.74) autour du pôle $-\omega_j$ sous l'hypothèse d'une récursivité des pôles et des zéros (III.77) :

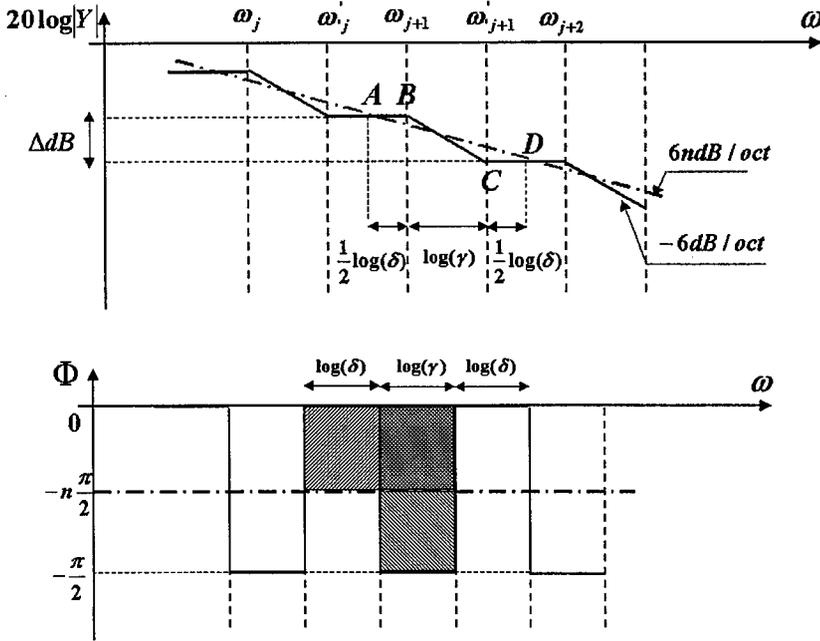


FIG. III.11: Diagrammes asymptotiques de la transmittance normalisée sous l'hypothèse d'une récursivité des pôles et des zéros, tirés de [Ous 95]

Les deux schémas ci-dessus montrent clairement, compte tenu de l'analyse détaillée de la construction de Bode présentée au paragraphe III.1.5, l'incidence de la récursivité des zéros et des pôles sur la répartition alternée des plateaux et des pentes de -20 dB/dec (-6 dB/oct) du module et sur l'alternance de plateaux à 0 et $-\pi/2$ de la phase.

III.2.3.2 Détermination du paramètre fractionnaire n

Le lissage des marches d'escalier qui constituent le diagramme asymptotique du module peut-être matérialisé par une droite appelée droite de lissage de gain de pente $6n \text{ dB/oct}$. Les pentes des segments AB et CD (fig III.11) sont respectivement données par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 6n \text{ dB/oct} = \frac{\Delta \text{dB}}{\log \gamma + \log \delta} \\ -6 \text{ dB/oct} = \frac{\Delta \text{dB}}{\log \gamma} \end{array} \right. \tag{III.79}$$

En effectuant le rapport de ces expressions, on déduit l'expression de l'ordre non entier n en fonction des facteurs récurrents α et β :

$$n = -\frac{\log \gamma}{\log \delta + \log \gamma} = -\frac{1}{1 + \frac{\log \delta}{\log \gamma}} \quad (\text{III.80})$$

Le lissage des créneaux qui constituent le diagramme asymptotique de l'argument peut être matérialisé par une droite, appelée droite de lissage de phase, d'ordonnée $n\pi/2$, égale à la moyenne de la variation asymptotique de l'argument. L'identité des surfaces hachurées (fig. III.11) se traduit par l'équation :

$$-n\frac{\pi}{2}(\log \gamma + \log \delta) = \frac{\pi}{2} \log \gamma \quad (\text{III.81})$$

soit encore :

$$n = -\frac{1}{1 + \frac{\log \delta}{\log \gamma}} \quad (\text{III.82})$$

expression qui est bien identique à celle déterminée à partir du module (III.80).

Compte tenu de la relation (III.76) reliant α et β , l'ordre non entier n s'écrit dans le cas du DNLR :

$$n = -0.5 \quad (\text{III.83})$$

Entre ω_1 et ω_N , la transmittance DNLR, pour un nombre infini de processus, est donc caractérisée par une pente du module de -10 dB/dec et par un blocage de phase à $-\pi/4$:

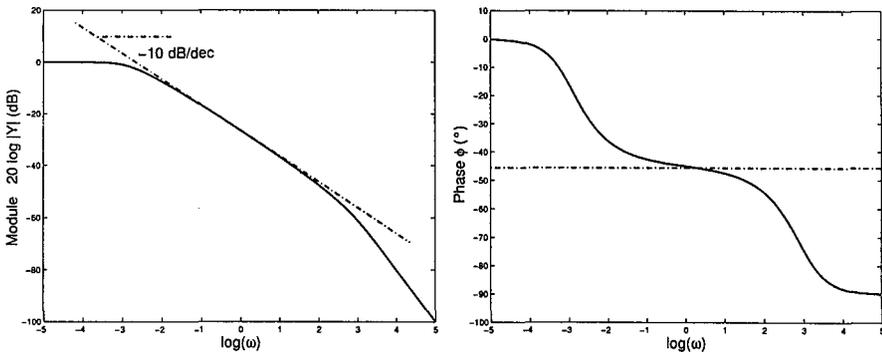


FIG. III.12: Diagramme de Bode associé à la transmittance DNLR ($N = 1500$, $D = 6$, $\tau_{max} = 1000$ s) : mise en évidence du lissage de gain et de phase associée

III.2.3.3 Non équivalence stricte entre série récurrente et distribution récurrente des zéros et des pôles

Toute l'étude précédente a été faite, rappelons-le, sous l'hypothèse d'un nombre infini de processus dissipatifs (i.e. lorsque α et β tendent vers 1) et n'est, à priori, valable que dans

ce cadre.

Le but de ce paragraphe est de déterminer quelles sont les erreurs induites dans le cas d'un nombre fini de processus dissipatifs.

Dans le cas d'un nombre fini de processus :

- la récursivité des poids et des temps de relaxation définie en (III.63) et (III.65) est partiellement perdue par les zéros ω_j' dans l'opération permettant le passage de la transmittance somme (III.73) à la transmittance produit (III.74). Autrement dit, on ne peut maintenir l'équivalence des deux expressions de la transmittance sans perdre la caractère récursif propre aux zéros.

Le rapport de deux zéros consécutifs (III.75) reste conservé dans la part centrale de la plage de fréquence. Seul le ratio des valeurs extrêmes diffère et évolue en fonction de la valeur de N . La figure (III.13) montre l'évolution du rapport des zéros successifs, normalisé par le coefficient $\gamma\delta$ (i.e. β), en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de N :

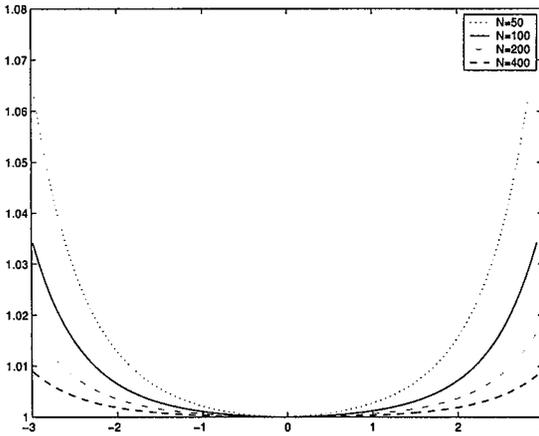


FIG. III.13: Rapport de deux zéros consécutifs réduit par le produit $\gamma\delta$ pour différentes valeurs de N

- De manière réciproque, lorsque la relation de récursivité liée aux zéros (III.75) est conservée, l'expression de la transmittance (III.74) n'est plus équivalente à (III.73).

La figure (III.14) illustre ces deux derniers résultats. On a choisi de présenter le diagramme de Bode lié à la phase car les écarts sont plus marqués que sur la courbe de gain.

La transmittance définie à partir de la somme récursive (III.73) a été calculée pour 8 temps de relaxation et 6 décades. Le temps de relaxation maximal a été fixé à 1000 s.

On a ensuite tracé la transmittance définie en (III.74) avec les mêmes paramètres et en conservant la relation de récursivité propre aux zéros. Les deux courbes ne se superposent pas, la différence la plus nette ayant lieu aux deux extrémités du spectre de fréquence (i.e. ω_1 et ω_N). La dernière courbe correspond à la transmittance (III.74) qui a été ajustée sur la courbe propre à (III.73) en jouant sur le rapport des zéros successifs. Les valeurs des

nouveaux zéros identifiés suite à l'optimisation précédente sont reportées en dessous des valeurs récursives associées à la transmittance (III.73).

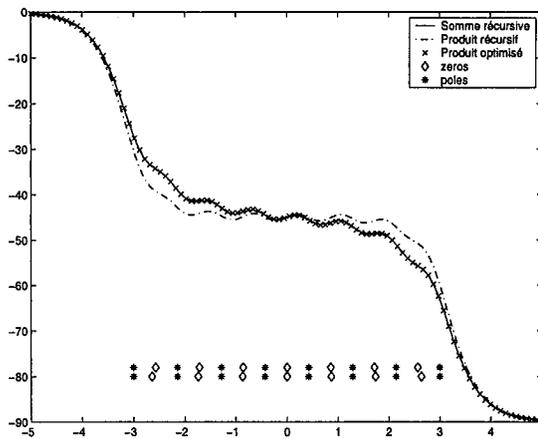


FIG. III.14: Évolution de la phase propre aux transmittances récursives (III.73) et (III.74) ainsi qu'à (III.74) optimisée ($N = 8$, $D = 6$ et $\tau_1 = 1000$ s)

Dans le cas d'un nombre fini d'éléments, l'opération qui transforme une somme récursive d'éléments simples en une fraction de produits réduits au même dénominateur tout en conservant la propriété récursive liée aux zéros apparaît, à la vue de cette dernière figure, comme une approximation importante. Cette approximation n'est pas uniquement due à la notion de "nombre de processus fini" puisqu'on montre dans l'annexe B, qu'au delà de 50 processus (pour 6 décades), les écarts absolus associés au module et à la phase de la transmittance définie sous forme de somme (III.73) deviennent négligeables. Même pour un nombre infini de processus, l'expression de transmittance "produit" (III.74) ne pourra jamais être parfaitement équivalente à l'expression "somme" (III.73) car (i) aux bornes du spectre de relaxation, la propriété récursive des zéros n'est jamais vérifiée et (ii) l'opération de lissage se base sur les comportements asymptotiques qui peuvent être, surtout pour la phase, très différents des comportements réels comme on l'a souligné précédemment (§ III.1.5).

III.2.4 Liens entre récursivité temporelle et récursivité géométrique analogique

D'après l'étude effectuée au paragraphe III.1.3, la réponse mécanique dissipative e^d à une contrainte imposée σ peut-être représentée par le schéma analogique suivant :

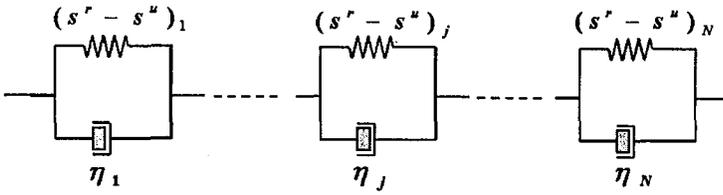


FIG. III.15: Représentation analogique de la réponse dissipative propre au DNLR

Les coefficients des ressorts et des amortisseurs du "dipôle" i sont définis par :

$$\left[\begin{array}{l} (s^r - s^u)_j = p_0^j (s^r - s^u) \\ \eta_j = \frac{\tau_\xi^j}{(s^r - s^u)_j} \end{array} \right. \quad (\text{III.84})$$

En conséquence, le rapport des coefficients géométriques successifs peut être relié au rapport des poids et des temps caractéristiques successifs :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{(s^r - s^u)_{j+1}}{(s^r - s^u)_j} = \frac{p_0^{j+1}}{p_0^j} \\ \frac{\eta_{j+1}}{\eta_j} = \frac{\tau^{j+1}}{\tau^j} \frac{p_0^j}{p_0^{j+1}} \end{array} \right. \quad (\text{III.85})$$

Compte tenu des relations de récursivité (III.63) et (III.65), ces rapports peuvent s'écrire en fonction des paramètres récursifs α et β :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{(s^r - s^u)_{j+1}}{(s^r - s^u)_j} = \frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{\eta_{j+1}}{\eta_j} = \frac{1}{\alpha} \end{array} \right. \quad (\text{III.86})$$

La récursivité des temps de relaxation et des poids se répercute donc sur les paramètres géométriques du modèle analogique associé. L'arrangement représentatif de la réponse dissipative (fig. III.15) traduit le passage de la récursivité temporelle à la récursivité systémique à travers la récursivité fréquentielle. Cette récursivité géométrique propre à la représentation analogique de la modélisation DNLR doit être reliée aux arrangements hiérarchiques décrits par Hermans [Hey 94] et Schiessel [Sch 95]. Cette étude permet ainsi de tisser un premier lien entre la modélisation DNLR et les modèles non entiers que l'on va explorer plus en détail dans la suite de ce chapitre.

III.3 Le modèle DNLR et les modèles non entiers

Le but de ce paragraphe est de mettre en évidence le lien entre la récursivité associée à la définition du spectre DNLR, issue de la théorie des fluctuations, et les modèles à dérivées non entières.

Après un rappel historique sur les modèles à dérivées fractionnaires et leurs application en rhéologie des solides (§ III.3.1), on montre comment l'approche DNLR, par une description auto-similaire des effets dissipatifs à l'intérieur de la structure, peut conduire à la formulation d'une loi constitutive utilisant ce type d'opérateur (§ III.3.2). Ensuite, la comparaison de la formulation non entière issue du DNLR avec d'autres modèles empiriques ou micro-physiques (§ III.3.3), montre que la description de la relaxation DNLR faite par Cunat est encore insuffisante pour décrire le comportement aux basses fréquences. Deux nouvelles modélisations sont alors proposées pour corriger le spectre de relaxation et sont ensuite comparées avec le modèle empirique de Havriliak-Négami et le modèle micro-physique de cluster de Dissado et Hill.

III.3.1 Bibliographie sur les modèles fractionnaires

III.3.1.1 Définition de la dérivée généralisée

La notion de dérivée fractionnaire (ou dérivée d'ordre non entier) a été imaginée par Leibniz [Leb 62] en 1662. Liouville [Lio 32] élaborata la première théorie de la dérivation fractionnaire mais la formule la plus souvent utilisée aujourd'hui, dite intégrale de Riemann-Liouville, fut proposée par Riemann [Rie 92]. Pour de plus amples précisions sur ces aspects historiques, le lecteur pourra consulter la thèse de Dugowson [Dug 94].

Il existe deux définitions équivalentes de l'opérateur de dérivation fractionnaire $D^\alpha f(t)$:

- La première, qui correspond à une généralisation de la dérivée entière classique, est due à Riemann [Rie 92] :

$$D^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{u^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(t-u) du \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}^- \quad (\text{III.87})$$

où Γ représente la fonction Gamma (encore appelée fonction d'Euler ou fonction factorielle) définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du \text{ pour } \alpha > 0 \quad (\text{III.88})$$

La définition (III.87) nécessite un prolongement analytique de la fonction Gamma pour les valeurs négatives de α , aussi une autre expression mathématique équivalente est-elle souvent proposée pour palier à cette difficulté :

$$D^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(t-u) du \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{III.89})$$

- La deuxième, fondée sur les différences finies et proposée par Liouville [Lio 32], relie la dérivée généralisée aux valeurs de cette fonction aux temps antérieurs :

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} a_k f(t - kh) \quad (\text{III.90})$$

avec

$$a_k = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+k)} \quad (\text{III.91})$$

A travers les fonctions $f(t-kh)$ qui introduisent des échantillons du passé, la dérivée non entière d'une fonction à un instant t donné prend en compte les valeurs de cette fonction à tous les instants du passé. Si la dérivée entière donne une caractérisation locale de la fonction (par l'intermédiaire de la pente de la tangente à la courbe à l'instant t), la dérivée non entière en donne une caractérisation globale (non locale) et permet ainsi de discriminer des fonctions dont le passé est différent.

III.3.1.2 Propriétés

La dérivée généralisée vérifie les mêmes propriétés que la dérivée entière réelle :

- **Linéarité**

Si $f(t)$ est une fonction réelle de la forme :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \tag{III.92}$$

alors

$$D^\alpha f(t) = D^\alpha f_1(t) + D^\alpha f_2(t) \tag{III.93}$$

- **Composition**

$$D^{\alpha_1+\alpha_2} f(t) = D^{\alpha_1}[D^{\alpha_2} f(t)] = D^{\alpha_2}[D^{\alpha_1} f(t)] \tag{III.94}$$

Une autre propriété remarquable et très utile pour la suite concerne sa transformée dans l'espace de Laplace. Si on note $\mathcal{L}[f] = \bar{f}$ la transformée dans l'espace de Laplace de la fonction f alors :

$$\mathcal{L}[D^\alpha f] = p^\alpha \mathcal{L}[f] - \sum_{i=0}^{\infty} p^{n-i-1} f^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{\infty} p^{-i-1} f^{\alpha+i}(0) \tag{III.95}$$

Aussi pour une fonction causale :

$$\mathcal{L}[D^\alpha f] = p^\alpha \mathcal{L}[f] \tag{III.96}$$

III.3.1.3 Domaines d'application

C'est depuis ces dernières décennies seulement que l'on note une utilisation accrue des modèles à dérivées fractionnaires dans le domaine des sciences de l'ingénieur. A titre d'exemple, on cite quelques cas afin de montrer la diversité de ces domaines :

- En électricité, Cole et Cole [Col 41] proposent une expression empirique fractionnaire de la constante diélectrique complexe normalisée (transmittance complexe reliant la polarisation électrique D au champ électrique E).
- En traitement d'image, les dérivées fractionnaires sont utilisées dans la caractérisation des courbes de formes [Mar 80].
- En acoustique, elles sont par exemple utilisées pour modéliser les pertes visco-thermiques dans les instruments à vent [Dep 95].
- En automatisme, les dérivées fractionnaires sont utilisées dans des procédés de réglage de phase des systèmes en boucle ouverte [Ous 95].

Si on excepte les travaux dédiés au traitement d'image, on s'aperçoit que les modèles à dérivées fractionnaires ont ainsi connu un grand essor dans la description des phénomènes de relaxation. Historiquement, ils ont été initialement introduits dans l'étude de la relaxation des diélectriques pour être ensuite étendus (par analogie) aux autres domaines de la physique.

III.3.1.4 La viscoélasticité et les modèles fractionnaires

La description de la viscoélasticité par une approche fractionnaire n'a eu de cesse d'évoluer depuis les premiers travaux empiriques de Scott-Blair [Sco 49] en 1949.

• Dans " The theory of Quasi-Properties ", Scott-Blair formule la nécessité d'introduire des équations aux dérivées fractionnaires en temps. Il modélise ainsi simultanément les observations de Nutting [Nut 21] et Gemant [Gem 36], [Gem 38].

- Nutting [Nut 21], à la suite d'observations expérimentales, modélisa la fonction de relaxation par une loi puissance :

$$\phi(t) = E^r + (E^u - E^r) \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-\alpha} \tag{III.97}$$

où E^r et E^u sont les modules relaxé et non relaxé (ou instantané) et τ un temps caractéristique.

Ce modèle contrastait à l'époque avec la théorie classique qui prévoyait une fonction de relaxation sous forme de sommes d'exponentielles (fonctions de Debye) :

$$\phi(t) = E^r + \sum_j (E^u - E^r)_j \exp \left(-\frac{t}{\tau_j} \right) \tag{III.98}$$

- Gemant [Gem 38], quant à lui, remarqua que les propriétés viscoélastiques d'un matériau semblaient être proportionnelles à la puissance fractionnaire de la fréquence.

Scott-Blair, dans son " Principle of intermediacy " a la conviction qu'il est possible de concevoir un modèle entre le solide Hookéen ($\sigma = E\epsilon$) et le solide Newtonien ($\sigma = \eta\dot{\epsilon}$) dont le comportement obéit à la loi suivante :

$$\sigma = E\tau^\alpha \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha} \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{ou} \quad \epsilon = \frac{\tau^\alpha}{E} \frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} \text{ avec } -1 \leq \alpha \leq 0 \tag{III.99}$$

Le modèle analogique répondant à cette loi est appelé spring-pot (compromis entre le ressort (spring) et l'amortisseur (dash-pot)), élément fractal ou encore diamant et dont les trois différentes représentations utilisées dans la littérature sont reportées ci-dessous :

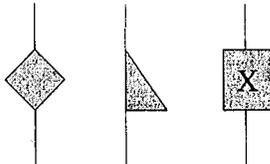


FIG. III.16: Représentation schématique de l'élément fractal

Scott-Blair détermine ainsi la fonction de relaxation pour l'équation fractionnaire la plus simple possible :

$$\phi(t) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\alpha} \quad (\text{III.100})$$

En effet, en reprenant la relation de Boltzmann [Bol 74], la contrainte s'écrit :

$$\sigma(t) = \phi \otimes \dot{\epsilon}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{t-u}{\tau}\right)^{-\alpha} \epsilon(t-u) du \quad (\text{III.101})$$

Conjuguée à la définition de la dérivation non entière (III.89), cette relation fait apparaître la loi non entière reliant la contrainte à la déformation :

$$\sigma = E\tau^\alpha \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha} \quad (\text{III.102})$$

On s'aperçoit ainsi qu'une fonction de relaxation en loi puissance introduit naturellement la notion de dérivation non entière par l'intermédiaire du produit de convolution.

- Bien plus tard, Heymans et Bauwens [Hey 94] et Schiessel et Blumen [Fri 98], [Sch 93], [Sch 95] démontrent que la relation fractionnaire (III.99) peut être réalisée physiquement à travers des arrangements hiérarchiques (ou auto-similaires) infinis de ressorts et d'amortisseurs tels que les "structures d'échelle", "modèles d'arbre" ou "modèles fractals". La "structure d'échelle" (ladder structure) a été introduite pour la première fois par Oldham et Spanier [Old 74] dans le cadre de l'électricité pour être ensuite transposée à la mécanique par Tschoegl [Tsc 89] sous le nom de modèle de Gross-Marvin. L'ajustement des paramètres E_i et η_i conduit à une valeur de α caractéristique :

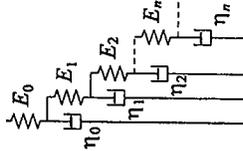


FIG. III.17: Représentation analogique de la "structure d'échelle"

Le modèle "arbre" (tree model) [Hey 94] correspond à une structure auto-similaire dont la représentation analogique est la suivante :

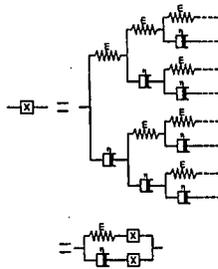


FIG. III.18: Modèle dit de l'arbre

• A la fin des années 1960, Slonimsky [Slo 67] relance les travaux sur les dérivées fractionnaires en généralisant l'équation constitutive (III.99) et crée un nouveau modèle, compromis entre le solide de Hooke et celui de Kelvin-Voigt, appelé par la suite solide de Kelvin-Voigt fractionnaire :

$$\sigma = E(\epsilon + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha}) \quad (III.103)$$

Smitt de Vries [Smi 70] et Koëller [Koe 84] étudient les différentes fonctions rhéologiques issues de ce modèle (comme le module complexe et la fonction de relaxation) et cherchent à valider leurs résultats avec des données expérimentales.

Mainardi et Caputo [Mai 71] introduisent un modèle plus complexe où l'ordre de dérivation est le même pour la contrainte et la déformation. Ce modèle est appelé Zener fractionnaire ou Cole-Cole car il n'est rien d'autre qu'une transposition aux matériaux viscoélastiques du modèle proposé par Cole-Cole [Col 41] initialement dédié à la description des matériaux diélectriques.

$$\sigma + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} = E^r \epsilon + E^u \tau^\alpha \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha} \quad (III.104)$$

Les études de Mainardi et Caputo ont été reprises par Friederich [Fri 91a], [Fri 91b], [Fri 92], Nonnenmacher [Non 91a], [Non 91b] et Bagley et Torvik [Bag 86] qui ont aussi résolu le cas général où les dérivées fractionnaires sont différentes :

$$\sigma + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} = E^r \epsilon + E^u \tau^\beta \frac{d^\beta \epsilon}{dt^\beta} \quad (III.105)$$

Friederich et Nonnenmacher réussirent à obtenir la fonction de relaxation pour ce dernier modèle avec deux ordres différents. Ces fonctions sont obtenues grâce aux transformations de Mellin et s'expriment en terme de fonctions de Mittag-Leffler ou dans les cas plus complexes grâce aux fonctions de Fox.

Bagley et Torvik [Bag 83a], [Bag 86] et Heymans [Hey 96] généralisent ce dernier modèle par le modèle de Zener fractionnaire généralisé :

$$\sigma + \sum_j \tau^{\alpha_j} \frac{d^{\alpha_j} \sigma}{dt^{\alpha_j}} = E^r \epsilon + \sum_j E^u \tau^{\beta_j} \frac{d^{\beta_j} \epsilon}{dt^{\beta_j}} \quad (III.106)$$

L'équation (III.106) (restreinte au cas $j=1$) a été utilisée avec succès pour la modélisation du comportement viscoélastique des polymères à l'état caoutchoutique [Bag 83b], du polyuréthane vers sa température de transition vitreuse [Rog 83], d'élastomères [Bag 84], [Cos 95], [Cos 96], du polyisobutylène et du caoutchouc naturel [Fri 95] ainsi que pour modéliser le comportement viscoélastique des polymères amorphes solides sur une large gamme de fréquences et de températures [Alc 98], [Alc 99a], [Alc 99b] et [Alc 99c]. Friederich [Fri 91b] a cependant montré que ce dernier modèle était thermodynamiquement acceptable (fonction de relaxation monotone décroissante) uniquement si $\alpha=\beta$.

Toutes ces recherches restent cependant des généralisations, le plus souvent empiriques, des lois constitutives classiques auxquelles les dérivées entières sont substituées par des dérivées fractionnaires. En d'autres termes, les justifications relèvent essentiellement de

leurs aptitudes avérées à reproduire les faits expérimentaux plus que d'une véritable analyse des phénomènes physiques mis en jeu.

• Une autre approche assez ancienne et initialement dévolue à l'étude des matériaux diélectriques repose sur une écriture purement phénoménologique de la transmittance dans l'espace de Laplace ou de la fonction de relaxation dans l'espace temporel.

Parmi les modèles les plus classiques, on peut citer le modèle de relaxation de Kohlrausch-Williams-Watts (KWW) [Koh 47], [Wil 70] où la fonction de relaxation est régie par une exponentielle étirée :

$$\phi(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \quad (\text{III.107})$$

et les modèles de Cole et Cole [Col 41], Davidson et Cole [Dav 50] et Havriliak et Negami [Hav 66] qui proposent une écriture de la transmittance associée à des puissances non entières :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Y}_{CC} = \frac{1}{1 + (\tau p)^\alpha} \quad \bar{Y}_{DC} = \frac{1}{(1 + \tau p)^{1-\beta}} \\ \bar{Y}_{HN} = \frac{1}{(1 + (\tau p)^\alpha)^{\frac{1-\beta}{\alpha}}} \end{array} \right. \quad (\text{III.108})$$

Les modèles de Cole-Cole et Davidson-Cole correspondent respectivement aux cas particulier du modèle de Havriliak-Negami où $\alpha = \beta - 1$ et $\alpha = 1$.

De nombreux auteurs, dont Hartmann [Har 91], ont mis en évidence les très grandes capacités de l'expression de Havriliak-Negami (III.108.c.) à simuler les phénomènes de relaxation.

Les quatre auteurs précédemment cités n'ont pas réellement cherché à connaître la physique sous-jacente à l'utilisation d'un opérateur de transmittance en puissance non entière ni à déterminer les équations constitutives associées aux variables mécaniques. Ils se sont uniquement attachés à décrire le plus grand nombre de matériaux visco-élastiques en s'appuyant sur l'étude empirique de l'évolution fréquentielle des parties réelle Y' et imaginaire Y'' de la fonction de transfert harmonique. On sait toutefois que les lois puissance propres aux transmittances induisent, par l'intermédiaire du produit de convolution, des modèles à dérivées fractionnaires. Cette étude sera développée ultérieurement dans ce mémoire (§ III.3.2.3). On peut, de plus, mentionner, dès à présent, les travaux de Le Mehauté et Crepy [LeM 82], [LeM 83] sur l'électrochimie et la technologie des batteries qui introduisent la notion d'auto-similarité de changement d'échelle en supposant que la fonction de relaxation est régie par une équation de transfert sur une surface fractale (auto-similaire) :

$$\frac{\partial^q \phi}{\partial t^q}(t) \propto -\phi(t) \quad (\text{III.109})$$

où q est donné par $1/d$ et d est la dimension fractale de la surface auto-similaire. La transformation dans l'espace de Laplace de l'équation précédente conduit à une expression de la transmittance de type Cole-Cole avec $\alpha = 1/d$.

Le schéma (III.19) montre le lien entre la valeur des pentes associées aux évolutions asymptotiques de Y' (et $Y'(\omega) - Y^*(\omega = 0)$) et $Y''(\omega)$ en échelle logarithmique et les puissances non entières α et β relatives à la transmittance de Havriliak-Negami :

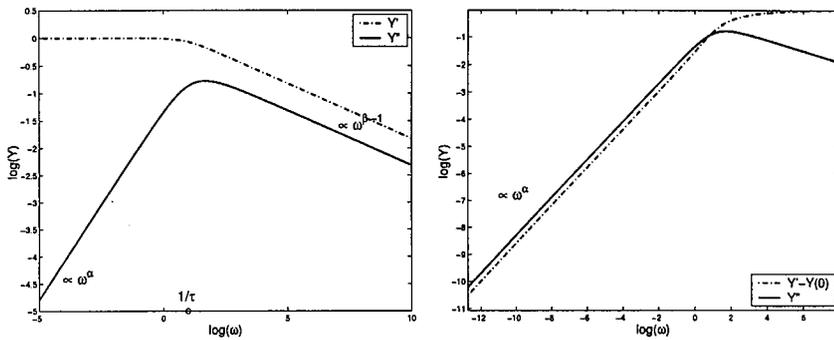


FIG. III.19: Influence des puissances non entières α et β dans la représentation fréquentielle de la transmittance de HN - eq. III.108.c

• Depuis ces vingt dernières années, de nombreux modèles physiques ont été développés principalement pour décrire la relaxation des matériaux diélectriques. L'application de ces lois à la viscoélasticité est automatique, en se basant sur une simple analogie diélectrique/mécanique [Dis 83a].

Ces modèles conduisent tous aux mêmes comportements asymptotiques que ceux décrits précédemment dans le cas du modèle empirique de Havriliak-Negami i.e. :

$$\begin{cases} Y^*(0) - Y' \propto Y'' \propto \omega^\alpha & \text{pour } \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ Y' \propto Y'' \propto \omega^{\beta-1} & \text{pour } \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases} \quad (\text{III.110})$$

La principale dissimilitude entre ces modèles basés sur des théories différentes se situe sur la réponse aux alentours de la fréquence caractéristique $\omega = 1/\tau$. Pour Jonscher [Jon 96], il serait hasardeux de donner raison à l'un de ces modèles plutôt qu'à un autre.

On peut cependant en citer deux, souvent mentionnés dans la littérature : le modèle de Dissado et Hill et celui de Weron et Jurlewicz.

Le modèle de Dissado et Hill, initialement basé sur une théorie de la relaxation diélectrique rendant compte d'un caractère coopératif a ensuite été reformulé sous la forme d'un modèle de cluster lié à la relaxation dipolaire [Dis 85]. Ils montrent que la transmittance normalisée qui s'exprime alors sous la forme de fonctions hypergéométriques [Sla 66] :

$$\bar{Y}_n(p) = \frac{\Gamma(1 - \beta + \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2 - \beta)} (1 + \tau p)^{\beta-1} {}_2F_1\left(1 - \beta, 1 - \alpha, 2 - \beta, \frac{1}{1 + \tau p}\right) \quad (\text{III.111})$$

conduit à l'expression de la fonction de relaxation suivante :

$$\phi(t) = \frac{\Gamma(1 - \beta + \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2 - \beta)^2} (\omega t)^{1-\beta} {}_2F_2(1 - \beta + \alpha, 1 - \beta, 2 - \beta, 2 - \beta, \omega t) \quad (\text{III.112})$$

avec $\omega = 1/\tau$.

Weron et Jurlewicz [Wer 93] s'appuient quant à eux sur une approche stochastique de la relaxation basé également sur le concept de cluster et proposent alors une fonction de relaxation décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = (1 - \beta)\omega(\omega t)^{-\beta} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha(\omega t)^{\beta-1}}{1 - \beta}\right) \right] \phi(t) \quad (\text{III.113})$$

• **Conclusions**

D'un point de vue purement phénoménologique, tous les auteurs ont mis en évidence l'excellente reproduction des données expérimentales avec ces modèles. A partir d'un jeu de paramètres fixés, on retrouve une très bonne similitude entre l'expérience et le modèle fractionnaire pour des fonctions aussi variées que le module complexe (Y' et Y'') et la fonction de relaxation et ceci pour de grandes gammes de fréquences (de l'ordre de 8 décades).

En plus de la très bonne reproductibilité expérimentale de ces modèles, le faible nombre de paramètres nécessaires (5 au maximum) apporte un intérêt supplémentaire à la grande flexibilité des ces formulations fractionnaires.

Cependant il n'en demeure pas moins que la physique sous-jacente à l'utilisation de tels opérateurs reste encore à établir dans la plupart des cas. Les fondements physiques de ces modèles (si on excepte les modèles physiques dernièrement cités) sont très rares et restent encore à ce jour insuffisants. On peut cependant citer quelques tentatives d'interprétations physiques comme celle de Bagley [Bag 83a] qui a montré que le modèle de Cole-Cole était un prolongement de la théorie moléculaire de Rouse [Rou 53a], [Rou 53b] et Zimm [Zim 56] où l'ordre fractionnaire de l'équation correspondait au paramètre caractéristique de Rouse et Zimm. Mentionnons également les perspectives ouvertes dans ce sens par une nouvelle approche des phénomènes dynamiques en mécanique se développant sur un substrat à caractère topologique fractal [LeM 98].

III.3.2 Liens entre la récursivité de l'approche DNLR et les modèles à un seul ordre de dérivation non entière

En s'appuyant sur trois modélisations différentes de l'écriture non entière de la transmittance (la première basée sur une approche analogique, la seconde sur une étude fréquentielle et la troisième purement empirique), on montre que la propriété récursive de la transmittance DNLR conduit naturellement à la formulation d'une loi constitutive fractionnaire utilisant une seule puissance non entière.

III.3.2.1 Modèle de Oldham et Zoski

Dans le cadre de l'électricité, Oldham et Zoski [Old 83] ont montré qu'un "domino ladder network" (réseau série de résistances et de capacités mises en parallèle (fig. III.20)) respectant une progression géométrique des valeurs de résistances et de capacités (ce qu'on a appelé progression récursive) conduisait à une loi d'évolution fractionnaire reliant la tension entre ses bornes au courant traversant le circuit.

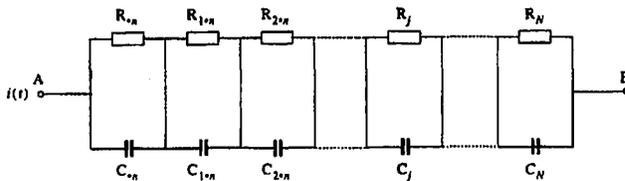


FIG. III.20: Schéma analogique de Oldham et Zoski

Les auteurs montrent que la loi générale reliant tension et courant s'écrit :

$$U(t) = \int_0^t i(t-\tau) \sum_{j=-n}^N \frac{\exp(-\frac{\tau}{R_j C_j})}{C_j} d\tau \quad (\text{III.114})$$

Si on suppose que les valeurs des résistances et des capacités forment une progression géométrique :

$$R_j = g^{-j} R_0 \quad \text{et} \quad C_j = G^{-j} C_0 \quad (\text{III.115})$$

et qu'on fait tendre les facteurs géométriques g et G vers 1 et le nombre d'éléments en cascade n et N vers l'infini, la loi précédente (III.114) conduit en première approximation [Old 83] à une loi fractionnaire reliant la tension à l'intensité aux bornes du circuit :

$$U(t) = K_\nu \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} i(t) \quad (\text{III.116})$$

où les paramètres K_ν et ν sont définis par :

$$K_\nu = \frac{\pi \csc(\pi\nu) R_0^\nu}{\log(Gg) C_0^{1-\nu}} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\log G}{\log Gg} \quad (\text{III.117})$$

Le schéma analogique DNLR propre à l'évolution de la déformation anélastique (fig. III.15) est identique à celui étudié par Oldham et Zoski en remplaçant les ressorts et les amortisseurs par des résistances et des capacités. Aussi, par analogie électricité/mécanique, on peut déterminer la loi d'évolution de la déformation anélastique en fonction de la contrainte :

$$\epsilon^d(t) = K_\nu \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \sigma(t) \quad (\text{III.118})$$

Avec

$$K_\nu = \frac{\pi \csc(\pi\nu) (s^u - s^r)_1^\nu}{\log \beta \eta_1^{1-\nu}} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\log \alpha}{\log \beta} \quad (\text{III.119})$$

La transmittance dissipative normalisée (ou transmittance normalisée) s'écrit donc :

$$\bar{Y}_n^d = \bar{Y}_n = (\tau_{ozp})^\kappa \quad \text{avec} \quad \kappa = \nu - 1 \quad (\text{III.120})$$

Cette transmittance correspond à la définition même de l'élément fractal appelé spring-pot (III.99). Le module et la phase de cette transmittance s'écrivent, pour tout ω :

$$M(\omega) = (\tau_{oz\omega})^\kappa \quad \text{et} \quad \phi = \kappa \frac{\pi}{2} \quad (\text{III.121})$$

La représentation de Bode consiste donc en une droite de pente 20κ dB/dec pour le module et à un blocage de phase à $\kappa\pi/2$. On peut noter l'absence totale de bornes en fréquence.

Dans le cas particulier du DNLR où $\alpha = \sqrt{\beta}$, on obtient $\nu = 0.5$ et ainsi $\kappa = -0.5$, ce qui était prévisible compte tenu des études précédentes.

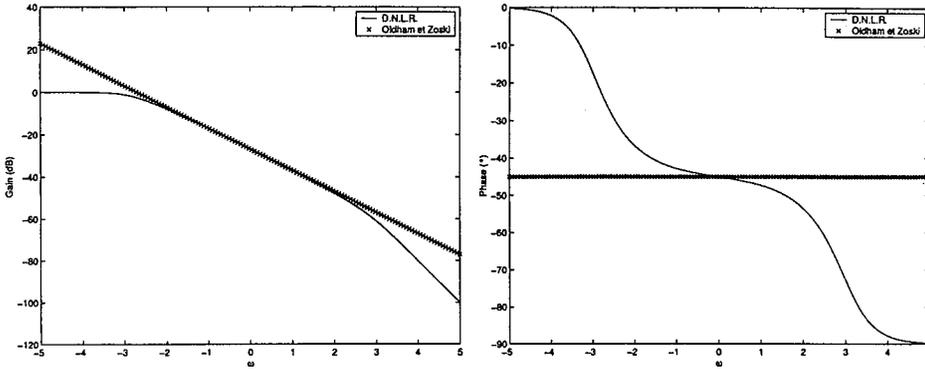


FIG. III.21: Comparaison des diagrammes de Bode DNLr et Oldham et Zoski ($\kappa = -0.5$ et $\tau_{oz} = 500$ s)

Graphiquement, il est clair que la transmittance déterminée par Oldham et Zoski (III.120) est une mauvaise approximation de la transmittance DNLr (III.73). Cependant, cette approche permet d'établir un premier lien entre le modèle DNLr et les modèles non entiers en montrant que la récursivité d'un schéma analogique pouvait conduire approximativement à la loi d'évolution d'un élément fractal. Ce résultat rejoint les travaux de Heymans et Bauwens [Hey 94] sur les arrangements hiérarchiques. En suivant le calcul approximatif de Oldham et Zoski, le schéma récursif DNLr, caractéristique de la réponse dissipative, peut être représenté analogiquement par un élément fractal ; le schéma analogique complet DNLr (fig. III.2) correspond alors à un modèle de Maxwell fractionnaire :

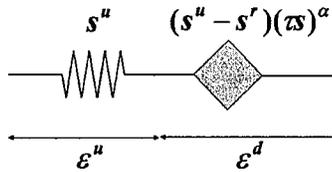


FIG. III.22: Modèle de Maxwell Fractionnaire

III.3.2.2 Modèle de Oustaloup

• Dans le cas particulier où les zéros et les pôles sont régis par les relations de récursivité (III.77), Oustaloup [Ous 95] propose une simplification de la transmittance \bar{Y}_N définie par :

$$\bar{Y}_N = \frac{\prod_{j=1}^{N-1} \left(1 + \frac{p}{\omega_j} \right)}{\prod_{j=1}^N \left(1 + \frac{p}{\omega_j} \right)} \quad (III.122)$$

basée exclusivement sur l'étude graphique du comportement asymptotique du diagramme de Bode associé.

Dans le cas d'un nombre infini de processus, les diagrammes de Bode asymptotiques

(fig. III.11) de la fonction de transfert sont caractérisés par un lissage de gain de pente $20n \text{ dB/Dec}$ et un blocage de phase à $n\pi/2$. En introduisant ainsi les fréquences transitionnelles dites basse et haute ω_b et ω_h , définies par les points d'intersection de la droite de lissage de gain avec les asymptotes correspondant respectivement aux basses et hautes fréquences (cf fig. III.11), la fonction de transfert (III.122) peut se réduire à :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{Y}_N = \bar{Y}_{n'} = \frac{\left(1 + \frac{p}{\omega_h}\right)^{n'-1}}{\left(1 + \frac{p}{\omega_b}\right)^{n'}} \quad \text{(III.123)}$$

où n' est une puissance non entière.

En effet, entre les fréquences transitionnelles ($\omega_b \ll \omega \ll \omega_h$), l'évolution du gain (en dB) en fonction du $\log(\omega)$ est une droite dont la pente vaut $-20 n' \text{ dB/décade}$. La phase est constante et bloquée à $-n' \pi/2$:

$$20 \log |\bar{Y}_{n'}| \rightarrow -20n' \log(\omega) + 20n' \log(\omega_b) \quad \text{et} \quad \phi \rightarrow -n' \frac{\pi}{2} \quad \text{(III.124)}$$

Les diagrammes asymptotiques de cette dernière fonction sont reportés ci-dessous :

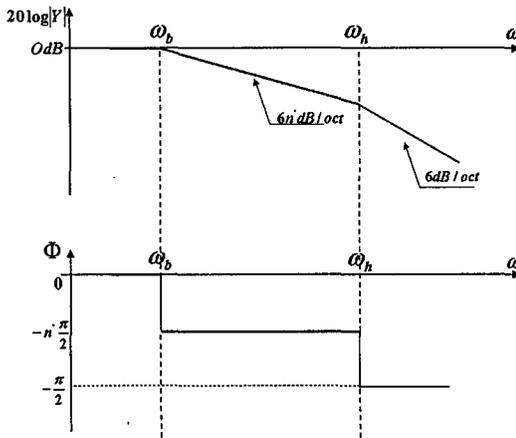


FIG. III.23: Diagrammes asymptotiques de $\bar{Y}_{n'}$.

La comparaison entre les valeurs de pente du gain et de blocage de la phase avec celles obtenues précédemment (III.80) et (III.82) permet de déterminer la puissance non entière n' en fonction de n et des paramètres récurrents α et β :

$$n' = -n = \frac{1}{1 + \frac{\log \beta}{\log \alpha}} \quad \text{(III.125)}$$

L'identification de n' ne résulte cependant que des diagrammes asymptotiques qui sont des approximations de l'évolution réelle du gain et de la phase en fonction de la fréquence. Il n'existe aucun lien mathématique possible entre les trois paramètres de $\bar{Y}_{n'}$ (i.e. n' , ω_b ,

ω_b) et ceux de \bar{Y}_N (i.e. n, ω_1, ω_N).

• On a montré précédemment (§ III.2.3) que la récursivité des paramètres (p_0^j, τ^j) de la transmittance normalisée

$$\bar{Y} = \sum_{j=1}^N \frac{p_0^j}{1 + \tau^j p} \quad (\text{III.126})$$

pouvait induire en première approximation une récursivité fréquentielle associée aux zéros et aux pôles (ω_j, ω'_j) de la transmittance normalisée réduite au même dénominateur :

$$\bar{Y} = \frac{\prod_{j=1}^{N-1} \left(1 + \frac{p}{\omega_j} \right)}{\prod_{j=1}^N \left(1 + \frac{p}{\omega_j} \right)} \quad (\text{III.127})$$

En utilisant la simplification précédente de Oustaloup, on peut ainsi proposer une nouvelle approximation de la transmittance dissipative normalisée (III.126) lorsque le nombre de processus N tend vers l'infini :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{Y} \cong \frac{\left(1 + \frac{p}{\omega_h} \right)^{n-1}}{\left(1 + \frac{p}{\omega_b} \right)^n} \quad (\text{III.128})$$

Il faut bien mettre en évidence que cette nouvelle expression de la transmittance (III.128) correspond à une double approximation de la transmittance initiale (III.126) propre au DNLR. Dans un premier temps, on suppose que la récursivité temporelle induit une récursivité fréquentielle et plus particulièrement une récursivité associée aux zéros de la fonction de transfert. Cette hypothèse, engendrant une approximation d'autant moins importante qu'on fait tendre le nombre de processus vers l'infini, n'est jamais entièrement vérifiée (surtout aux extrémités du spectre). Ensuite, dans un second temps, sous couvert de l'hypothèse de récursivité fréquentielle, on identifie la transmittance produit (III.127) à une transmittance écrite sous forme de puissance non entière (III.128) sur la base du comportement asymptotique.

Les paramètres de la transmittance (III.128) devront être identifiés à l'aide de méthodes inverses visant à minimiser l'écart entre les deux transmittances réduites (III.128) et (III.126). Les ordres de grandeurs des trois paramètres (n, ω_b et ω_h) devront évidemment se situer à des valeurs proches de ($0.5, \omega_1$ et ω_N).

A titre d'exemple, on confronte sur la figure (III.24) la représentation de la transmittance "somme" (III.126) pour $N=50, D=6$ et $\omega_1=1 \text{ mHz}$ (soit $\omega_N=1000 \text{ Hz}$) avec l'expression de Oustaloup (III.128). Les paramètres identifiés valent :

$$n = 0.5, \omega_b = 1.7 \text{ mHz} \text{ et } \omega_h = 572 \text{ Hz} \quad (\text{III.129})$$

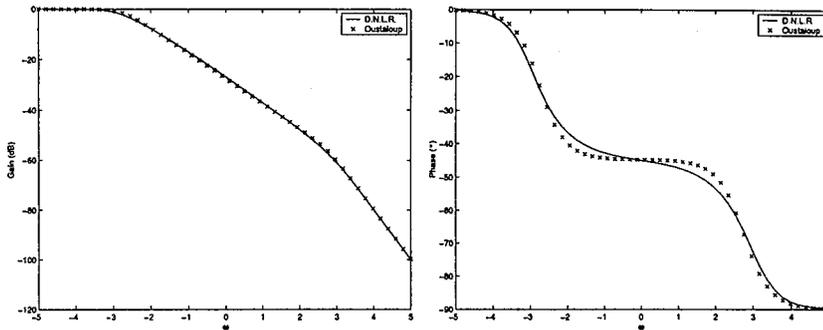


FIG. III.24: Comparaison des évolutions de la transmittance normalisée du DNLr et de Oustaloup

Les différences entre les deux modèles sont accentuées sur le diagramme de phase ce qui était prévisible puisque son évolution réelle est bien plus éloignée de son comportement asymptotique que ne peut l'être le gain.

L'expression (III.123) permet d'offrir un lien direct entre le modèle DNLr et les lois constitutives fractionnaires qui relient l'évolution de la variable observable en fonction de la variable de commande.

En remplaçant l'expression (III.126) de la transmittance normalisée par l'expression (III.128), la loi constitutive DNLr s'écrit :

$$\bar{\beta} = \left[a^u - (a^u - a^r) \left(1 + \frac{p}{\omega_h} \right)^{n'-1} \left(1 + \frac{p}{\omega_b} \right)^{-n'} \right] \bar{\gamma} \quad (III.130)$$

D'après Oustaloup [Ous 95], la transformation inverse en temps de cette dernière équation s'écrit :

$$\beta(t) = a^u \gamma(t) - (a^u - a^r) \omega_h^{1-n'} \exp(-\omega_h t) \left(\frac{d}{dt} \right)_{impl, \omega_h}^{n'-1} \left[\omega_b^{n'} \exp(-\omega_b t) \left(\frac{d}{dt} \right)_{impl, \omega_b}^{-n'} \gamma(t) \right] \quad (III.131)$$

où la dérivée implicite non entière est définie par :

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{impl, \omega}^n [f(t)] = \left(\frac{d}{dt} \right)^n [f(t) \exp \omega t] \quad (III.132)$$

Cette dérivée est dite implicite car elle ne porte pas directement sur $f(t)$ mais sur le produit de $f(t)$ par une exponentielle croissante de constante de temps $\tau = 1/\omega$.

La forme de l'équation constitutive (III.131) n'est bien sûr pas aussi simple que les généralisations faites à partir des modèles classiques en substituant les dérivées entières par des dérivées non entière répertoriées au paragraphe III.3.1.4. Friedrich [Fri 98] et Le Mehaut [LeM 98] ont récemment mis en évidence l'efficacité de ce type de modèle :

- De manière empirique, Friedrich montre qu'en multipliant par une exponentielle de la forme $\exp(-\omega_m t)$ la fonction de transfert non entière issue d'un Zener étendue, il améliore ainsi les capacités de la transmittance à reproduire des résultats expérimentaux,

principalement pour les temps longs ($t > \tau_m$).

- Dans le livre de Le Méhauté (Chap. 5), l'apparition de cet opérateur, appelé "opérateur d'intégrodifférentiation fractionnaire décalée", est justifié théoriquement lorsque la formulation fractionnaire est établie par une intégrale de convolution dont le noyau est un support fractal de type Cantor soumis à un amortissement exponentiel.

III.3.2.3 Liens avec les modèles de relaxations empiriques

Les deux modèles fractionnaires empiriques les plus classiques comportant une seule puissance non entière ont été introduits par Cole-Cole et Davidson-Cole.

$$\bar{Y}_n^{CC} = \frac{1}{1 + (\tau p)^\alpha} \quad \bar{Y}_n^{DC} = \frac{1}{(1 + \tau p)^{1-\beta}} \quad (\text{III.133})$$

La transmittance totale qui relie la variable observable à la variable de contrôle se déduit de la transmittance normalisée par la relation :

$$\bar{Y} = a^u + (a^r - a^u)\bar{Y}_n \quad (\text{III.134})$$

• Modèle de Cole-Cole

L'expression de la transmittance de Cole-Cole correspond à la transformée de Laplace de l'opérateur de dérivation généralisée explicite défini par Oustaloup. La loi constitutive temporelle associée à cette transmittance s'écrit :

$$\beta(t) = a^u + (a^r - a^u) \left(\frac{d}{dt} \right)_{expl,\omega}^\alpha [\gamma(t)] \quad (\text{III.135})$$

Cette relation conduit à une équation différentielle à dérivée généralisée :

$$\beta + \tau^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \beta(t) = a^r \gamma(t) + a^u \tau^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \gamma(t) \quad (\text{III.136})$$

• Modèle de Davidson-Cole (DC)

L'expression de la transmittance de Davidson-Cole, qui fut introduite afin de reproduire le comportement asymétrique du facteur de perte (rapport de la partie imaginaire du module complexe sur la partie réelle de ce dernier), correspond à la définition de l'opérateur de dérivation implicite cité précédemment (III.132). La loi constitutive associée s'écrit :

$$\beta(t) = a^u \gamma(t) + (a^r - a^u) \left(\frac{d}{dt} \right)_{impl,\omega}^{1-\beta} [\gamma(t)] \quad (\text{III.137})$$

Au vue de l'expression des transmittances normalisées (III.128) et (III.133.b), le modèle de Davidson-Cole apparaît comme un cas particulier (avec $\omega_N \rightarrow \infty$ ou $\tau_N \rightarrow 0$ et $n = 1 - \beta$) du modèle fractionnaire issu des travaux de Oustaloup (eq. III.128). Physiquement, le temps de relaxation minimal ne peut pas être nul car la relaxation est due microscopiquement à des mouvements d'atomes, des rotations interstitielles, ... qui ne peuvent pas avoir une vitesse infinie. Ce temps minimal est classiquement estimé de l'ordre de la picoseconde

ce qui correspond à une fréquence de relaxation maximale de l'ordre de 10^{12} s^{-1} . On peut donc supposer que Davidson et Cole considèrent que cette fréquence est suffisamment importante pour ne pas être accessible expérimentalement.

Le choix effectué par Cunat de tronquer le spectre de relaxation aux temps courts, s'il conduit à une réponse dynamique équivalent à celle obtenue par un spectre complet, ne semble cependant pas être acceptable dans le cadre de l'étude fréquentielle de la transmittance. Il faut donc choisir une valeur de D suffisamment grande pour que la fréquence de relaxation maximale ω_{max} n'appartienne pas à la fenêtre d'observation expérimentale.

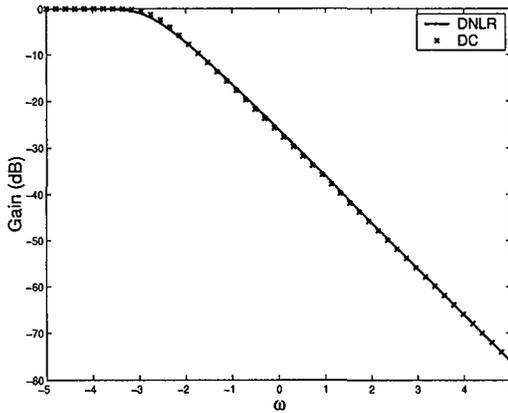


FIG. III.25: Comparaison des modules de la transmittance DNLN (eq. (III.126) $\tau_{max} = 1000 \text{ s}$, $D = 13$, $N = 2500$) et de la transmittance DC (eq. (III.133.a) $\tau = 527 \text{ s}$ et $\beta=0.492$)

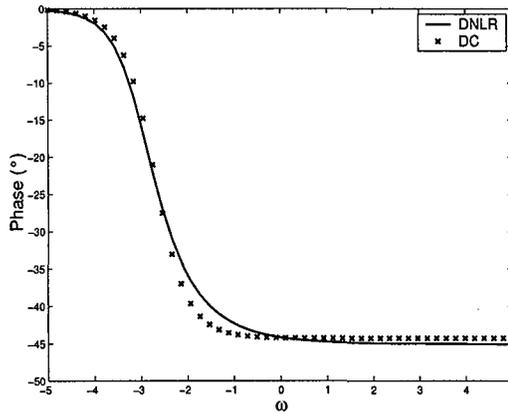


FIG. III.26: Comparaison des phases de la transmittance DNLN (eq. (III.126) $\tau_{max} = 1000 \text{ s}$, $D = 13$, $N = 2500$) et de la transmittance DC (eq. (III.133.a) $\tau = 527 \text{ s}$ et $\beta=0.492$)

L'équivalence entre le modèle de Davidson-Cole et le modèle DNLN est intéressante puisqu'elle permet de faire le lien entre la récursivité du spectre issue de la théorie des fluc-

tuations et les modèles fractionnaires mais cette équivalence est loin d'être parfaite. La différence la plus nette apparaît, là encore, sur la courbe de phase (fig. III.26).

III.3.2.4 Conclusion

Partant d'un modèle de relaxation basé entièrement sur les concepts de la Thermodynamique des Processus Irréversibles, on montre que la réponse dissipative, source de l'irréversibilité, peut s'exprimer sous la forme d'une série récursive. Cette récursivité induite par l'équipartition de la distribution des temps de relaxation et par la définition des poids associés (conséquence implicite du concept d'équipartition de l'entropie produite introduit par Prigogine) permet de faire le lien avec les modèles à dérivées fractionnaires. On reprend par cette étude la problématique de Le Méhauté [Fru 86] dont le but était à l'époque de comprendre comment la fractalité pouvait naître de l'optimisation géométrique de la production de chaleur.

La transmittance est la somme d'une transmittance instantanée et d'une transmittance dissipative :

$$\bar{Y} = \bar{Y}^u + \bar{Y}^d = a^u + (a^r - a^u)\bar{Y}_n \quad (\text{III.138})$$

où la transmittance normalisée \bar{Y}_n peut être interprétée comme un opérateur fractionnaire. On peut ainsi répondre à l'attente de Enelund et Olson [Ene 99] qui proposaient que les variables internes soient reliées à la variable de commande par l'intermédiaire d'une dérivation non entière. En effet, à la suite de cette étude, on s'aperçoit que le système matriciel (I.19) régissant l'approche DNLR peut ainsi s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{\beta} = a^u \dot{\gamma} + b \dot{z} \\ -\dot{A} = b \dot{\gamma} + g \dot{z} \end{cases} \quad b \dot{z} = -(a^u - a^r) \mathcal{L}^{-1} [p \bar{Y}_n \bar{\epsilon}] \quad (\text{III.139})$$

Les variables internes sont liées à la variable de commande via le produit de convolution avec l'opérateur temporel fractionnaire y_n :

$$b \dot{z} = -(a^u - a^r)(y_n \otimes \dot{\epsilon})(t) \quad (\text{III.140})$$

Sous l'approximation de Oldham et Zoski, l'opérateur fractionnaire est analogue à l'opérateur de dérivation non entière D^κ tandis que pour Oustaloup, il correspond alors à :

$$y_n = \mathcal{L}^{-1} \left[\left(1 + \frac{p}{\omega_h}\right)^{n'-1} \left(1 + \frac{p}{\omega_b}\right)^{-n'} \right] \quad (\text{III.141})$$

Cette notion de récursivité, représentative de structures auto-similaires, permet d'apporter un éclairage nouveau aux fondements théoriques quant à l'utilisation de l'opérateur de dérivation non entière en rhéologie des solides et de manière générale à l'ensemble des domaines scientifiques. On peut cependant noter, à ce stade de la modélisation, que le formalisme DNLR impose, par l'intermédiaire du théorème d'équipartition de l'entropie de Prigogine, à la puissance non entière une valeur fixée à 1/2. Cette valeur ne peut, de façon évidente, caractériser l'ensemble des matériaux. On va montrer dans le paragraphe suivant que l'introduction d'une non-linéarité fréquentielle associée au spectre de relaxation permet au paramètre n de prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 1 ce qui offre au modèle DNLR une liberté suffisante pour caractériser le plus grande nombre de matériaux.

III.3.3 Liens entre l'approche DNLR et les modèles à deux puissances non entières

On s'intéresse dans cette partie aux modèles fractionnaires dont la transmittance comporte deux puissances non entières et qui semblent mieux à même de reproduire le comportement réel des matériaux que les modèles décrits précédemment. En s'appuyant sur les comportements asymptotiques à basse et haute fréquence associés aux représentations de Cole-Cole bien établis maintenant [Jon 96], on montre comment le DNLR peut être modifié pour rejoindre ce type de modèles et on le compare alors au modèle empirique de Havriliak-Négami et au modèle de cluster de Dissado et Hill.

III.3.3.1 Étude empirique de Jonscher [Jon 96]

A partir de l'étude approfondie d'une base importante de données expérimentales sur la relaxation diélectrique, Jonscher [Jon 96] montre que la fonction de transfert harmonique doit être caractérisée par une fréquence caractéristique (τ^{-1}) et par deux puissances non entières α et β . Les comportements asymptotiques de la partie réelle Y' et de la partie imaginaire Y'' de la transmittance s'écrivent :

$$\begin{cases} Y^*(0) - Y' \propto Y'' \propto \omega^\alpha & \text{pour } \omega \ll 1/\tau \\ Y' \propto Y'' \propto \omega^{\beta-1} & \text{pour } \omega \gg 1/\tau \end{cases} \quad \text{(III.142)}$$

Les paramètres α et β correspondent à la pente des deux comportements asymptotiques associés aux représentations de Cole-Cole des parties réelle et imaginaire de la transmittance :

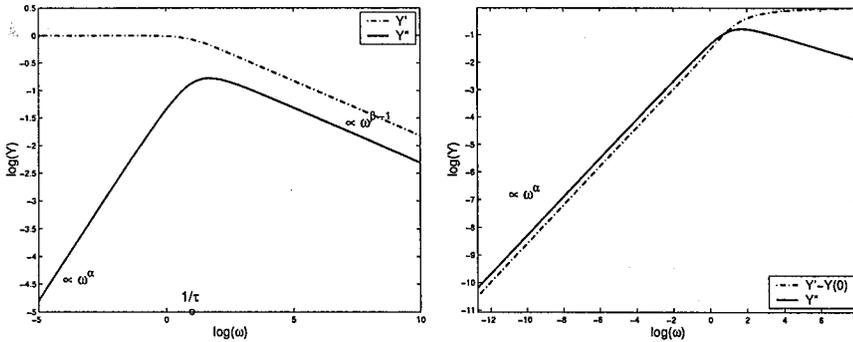


FIG. III.27: Évolutions de Y' et Y'' associées au modèle de HN - eq. III.149 ($\alpha = 0.7$ et $\beta = 0.8$)

Le diagramme de Cole-Cole qui représente l'évolution de la partie imaginaire Y'' en fonction de la partie réelle Y' de la transmittance permet aussi de déterminer graphiquement

les deux paramètres α et β . Le comportement limite du rapport des deux modules s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Y''}{Y^*(0) - Y'} = \tan(\alpha \frac{\pi}{2}) \quad \text{pour } \omega \rightarrow 0 \\ \frac{Y''}{Y'} = \cot(\beta \frac{\pi}{2}) \quad \text{pour } \omega \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (\text{III.143})$$

Les paramètres α et β sont donc directement liés aux valeurs de la pente du diagramme de Cole Cole aux fréquences extrêmes ($\omega = 0, \omega \rightarrow \infty$) :

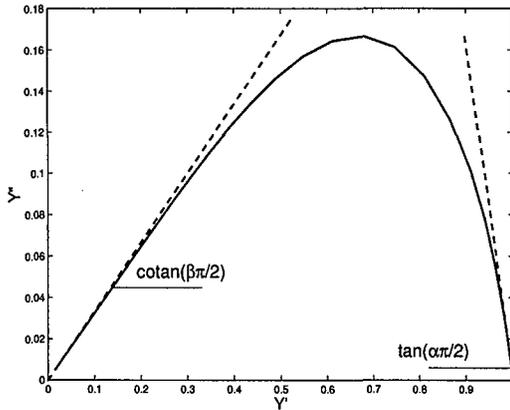


FIG. III.28: Diagramme de Cole Cole ($\alpha = 0.7$ et $\beta = 0.8$)

Jonscher met ainsi en évidence la nécessité pour un modèle rhéologique de contenir dans l'expression de sa transmittance deux paramètres non entiers ; les modèles à une puissance non entière décrits au paragraphe précédent tels que Cole-Cole, Davidson-Cole, Oustaloup, ... ne sont donc pas à même de décrire un comportement viscoélastique non linéaire. Le tableau ci-dessous tiré de [Hil 83] donne un aperçu des différents modèles classiques et des comportements asymptotiques associées à la partie réelle et imaginaire de leur fonction de transfert :

Modèle	Fonction de transfert	$\omega \ll \omega_p$		$\omega \gg \omega_p$	
		Y'	Y''	Y'	Y''
<i>Un paramètre</i>					
Debye	$(1 + i\omega/\omega_p)^{-1}$	2	1	-2	-1
Cole-Cole	$(1 + (i\omega/\omega_p)^\alpha)^{-1}$	α	α	$-\alpha$	$-\alpha$
Fuoss-Kirkwood	$2(\omega/\omega_p)^\gamma(1 + (i\omega/\omega_p)^{2\gamma})^{-1}$	γ	γ	$-\gamma$	$-\gamma$
Davidson-Cole	$(1 + (i\omega/\omega_p))^{1-\beta}$	2	1	$1-\beta$	$1-\beta$
<i>Deux paramètres</i>					
Havriliak-Negami	$(1 + (i\omega/\omega_p)^\alpha)^{\frac{1-\beta}{\alpha}}$	α	α	$1-\beta$	$1-\beta$
Dissado-Hill	$(1 + i\omega/\omega_p)^{n-1} * {}_2F_1(1-n, 1-m, 2-n; \frac{1}{1+i\omega/\omega_p})$	m	m	n-1	n-1

TAB. III.1: Résumé des différentes transmittances et de leurs exposants non entiers

III.3.3.2 Modélisation DNLr

Jonscher a mis en évidence l'apport très intéressant de la représentation de Cole-Cole caractérisant l'évolution du logarithme des parties réelle et imaginaire de la fonction de transfert en fonction du logarithme de la fréquence. Il permet en effet de caractériser graphiquement les deux comportements fractionnaires associés aux paramètres α et β ce que ne permettent pas les diagrammes de Bode utilisés dans le paragraphe précédent. Avant d'étudier les modèles de Havriliak-Negami et de Dissado et Hill et de déterminer les liens possibles avec l'approche DNLr, on s'intéresse dans un premier temps à la représentation de Cole-Cole de la fonction de transfert DNLr :

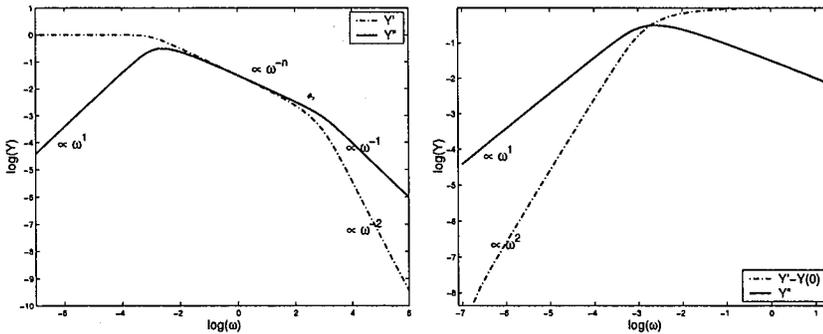


FIG. III.29: Représentation de Cole-Cole du DNLr ($N = 50, D = 6, \tau_{max} = 1000 s$)

La fonction de transfert DNLR est ainsi caractérisée par trois comportements asymptotiques :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Y^*(0) - Y' \propto \omega^2 \text{ et } Y'' \propto \omega^1 & \omega \ll \omega_1 \\ Y' \propto Y'' \propto \omega^{-n} & \omega_1 \ll \omega \ll \omega_N \\ Y' \propto \omega^{-2} \text{ et } Y'' \propto \omega^{-1} & \omega_N \ll \omega \end{array} \right. \quad (\text{III.144})$$

La zone associée aux fréquences hautes ($\omega_N \ll \omega$) est caractéristique de l'état instantané : le matériau peut alors être considéré comme un solide élastique.

La zone délimitée par $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_N$ est associée à la relaxation du matériau. La micro-structure se réorganise. On a montré précédemment que cette zone est caractérisée par une puissance non entière n associée à la récursivité des processus.

La dernière zone associée aux fréquences basses ($\omega \ll \omega_1$) traduit l'état relaxé. Tous les processus internes au matériau ont eu le temps de se dissiper. La structure est entièrement régie par les variables de commande.

En comparant les conclusions énoncées par Jonscher avec le comportement du DNLR, on peut tout d'abord noter que Jonscher comme beaucoup d'autres ne fait appel qu'à un seul temps caractéristique. Ce point a déjà mis en évidence lors de la comparaison entre le modèle DNLR et le modèle de Davidson-Cole (§ III.3.2.3) aussi on ne s'attardera pas d'avantage sur ce sujet et on choisira par la suite un nombre de décades suffisamment important pour que la fréquence maximale de relaxation ne figure pas dans les fenêtres d'observation des représentations de Cole-Cole. On peut ensuite noter qu'aux fréquences basses (i) les asymptotes de $Y^*(0) - Y'$ et Y'' du DNLR n'ont pas la même pente et (ii) cette pente ne fait pas intervenir de puissance non entière contrairement aux observations de Jonscher. Cette différence est somme toute logique puisqu'on a supposé implicitement par la forme du spectre DNLR choisi qu'au delà d'un certain seuil ($t = \tau_{max}$) la relaxation cessait subitement (fig III.30) à l'intérieur de VER. Autrement dit, pour des fréquences inférieures à τ_{max}^{-1} caractéristique de l'état relaxé, le matériau se comporte subitement comme un solide élastique (dont le module élastique vaut a^r).

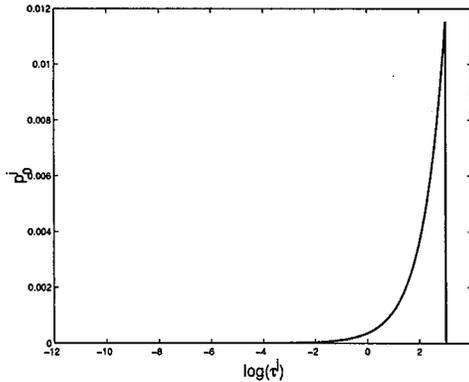


FIG. III.30: Spectre DNLR de la distribution des processus de dissipation
 $\tau_{max} = 1000 \text{ s}, D = 15$

Le comportement en puissance non entière pour des fréquences $\omega \ll \omega_1$ observé par Joncher laisse donc supposer qu'en deçà de ω_1 un nouveau type de relaxation intervient. Ce phénomène n'a pas été pris en compte par le DNLR jusqu'alors. Pour expliquer cette nouvelle relaxation, Dissado et Hill [Dis 86] proposent une justification physique intéressante basée sur leur modèle de cluster. La fréquence caractéristique ω_1 est définie comme la taille moyenne d'une région (cluster) à l'intérieur de laquelle l'information associée à la fluctuation (énergie) est "auto-similairement" distribuée. Pour des temps supérieurs à τ_{max} ($=1/\omega_1$), les clusters interagissent entre eux à l'intérieur d'un réseau de clusters; l'information jusqu'alors associée à chaque cluster se retrouve dissipée au travers d'un ensemble de clusters sous la forme, par exemple, de transport de molécules ou d'orientation de dipôles [Dis 83b]. La dissipation ne peut ainsi plus être décrite par des théories de marche au hasard associées à la relaxation des clusters étudiés de manière indépendante mais doit être assimilée à des processus hiérarchiques faisant intervenir des unités du réseau de plus en plus grandes. L'information associée à la dissipation est ainsi distribuée de manière auto-similaire à l'intérieur de tout le réseau. La puissance non entière associée à l'auto-similarité de cette dissipation est notée m . Un système associé à une valeur de m proche de 1 correspond ainsi à un liquide : l'auto-similarité associée à la matrice est substantiellement perdue dans ces fluctuations structurelles. Au contraire, une valeur de m proche de zéro correspond à un système qui conserve une structure du réseau figée et donc un caractère auto-similaire des effets de relaxation. Ce cas correspond aux structures amorphes.

En s'appuyant sur cette modélisation, on définit ainsi un nouveau spectre où le poids caractéristique est associé au temps de relaxation par deux lois puissance distinctes de part et d'autre du temps de relaxation caractéristique (noté précédemment τ_{max}) :

$$\begin{cases} p_0^j = B(\tau^j)^{1-\beta} & \text{pour } \tau_{min} \leq \tau^j \leq \tau_{max} \\ p_0^j = C(\tau^j)^{-\alpha} & \text{pour } \tau^j \geq \tau_{max} \end{cases} \quad (III.145)$$

La relation (III.145.a), caractéristique de la fluctuation propre à chaque VER, correspond à la définition classique du spectre de relaxation DNLR où la puissance β vaut 0.5 d'après le théorème d'équipartition de l'entropie de Prigogine. La relation (III.145.b), associée à la relaxation intra-cluster selon Dissado et Hill, permet de compléter ce spectre jusqu'à l'infini. En réalité, au bout d'un certain temps le poids caractéristique associé est tellement faible qu'on pourra supposer que le matériau est entièrement relaxé (état relaxé correspondant à l'état iso-affin).

La continuité du spectre en $\tau^j = \tau_{max}$ permet de relier les deux paramètres B et C :

$$C = B(\tau_{max})^{1-\beta+\alpha} \quad (III.146)$$

et la propriété de normalisation du poids caractéristique

$$\sum_j p_0^j = 1 \quad (III.147)$$

permet ensuite de déterminer le paramètre B :

$$\frac{1}{B} = \sum_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} (\tau^j)^{1-\beta} + (\tau_{max})^{1-\beta+\alpha} \sum_{\tau_{max}}^{\infty} (\tau^j)^{-\alpha} \quad (III.148)$$

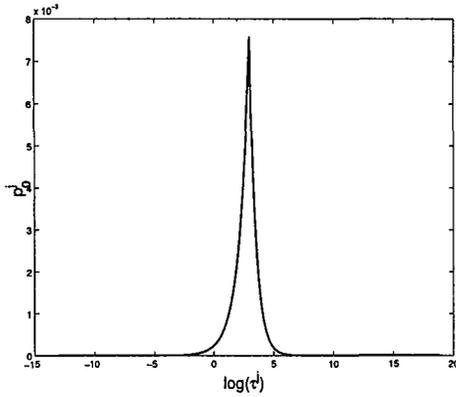


FIG. III.31: Nouveau spectre DNLR - eq. III.145 ($\beta = 0.5$, $\alpha = 0.8$, $\tau_{max} = 1000$ s, $D = 15$)

La représentation de Bode des parties réelle et imaginaire de la transmittance DNLR associée à ce nouveau spectre est reportée ci-dessous :

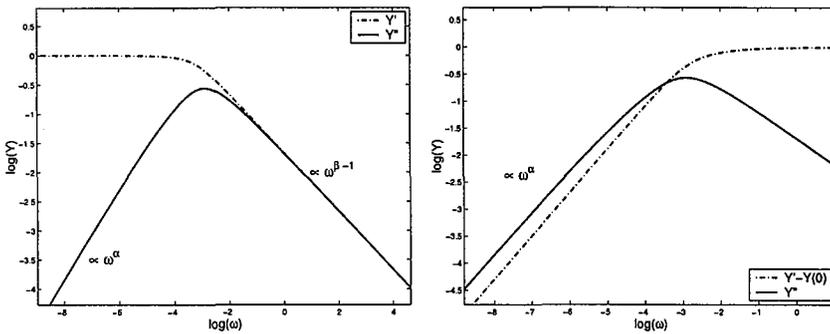


FIG. III.32: Représentation de Cole-Cole du DNLR associé au nouveau spectre de relaxation ($\beta = 0.5$, $\alpha = 0.8$, $N = 150$, $D = 16$, $\tau_{max} = 1000$ s)

De part et d'autre du temps caractéristique τ_{max} , on retrouve ainsi les deux comportements asymptotiques en loi puissance décrits par Jonscher. La pente de ces droites est directement liée à la puissance non entière caractéristique de la loi de distribution (III.145) définie sur chaque gamme de fréquence.

III.3.3.3 Modèle de Havriliak-Negami

Le modèle de Havriliak-Negami (HN) a été introduit de manière totalement empirique comme une généralisation des modèles de Cole-Cole et Davidson-Cole afin d'intégrer les deux différents comportements asymptotiques de la transmittance décrits précédemment.

$$\tilde{Y}_n^{HN} = \frac{1}{(1 + (\tau_{hn}p)^\alpha)^{\frac{1-\beta}{\alpha}}} \quad (III.149)$$

Les expressions des modèles de Cole-Cole et Davidson-Cole en terme de dérivées non entières par rapport au temps, détaillées au paragraphe précédent montrent que le modèle de Havriliak-Negami est une généralisation de ces deux derniers modèles se traduisant donc comme une composition de dérivées implicites et explicites non entières. Une équation constitutive peut donc être associée au modèle de HN. Ne présentant que peu d'intérêt pour notre étude, elle ne sera pas développée dans ce mémoire.

• **Comparaison entre le modèle de HN et l'approche DNLN associée au nouveau spectre de relaxation (III.145)**

Dans le paragraphe précédent, on a montré que la mise en place d'un nouveau spectre de relaxation permettait de reproduire les deux comportements asymptotiques fractionnaires de Y' et Y'' du DNLN. La comparaison des représentations asymptotiques de Cole-Cole (fig III.27 et III.32) permet d'identifier le temps caractéristique τ_{hn} de HN qui s'avère être égal au temps de relaxation DNLN dit maximal et noté τ_{max} .

La figure III.33 propose une comparaison des représentations de Cole-Cole de ces deux modèles dans le cas particulier où $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.5$, et $\tau_{max} = 1e - 5$ s.

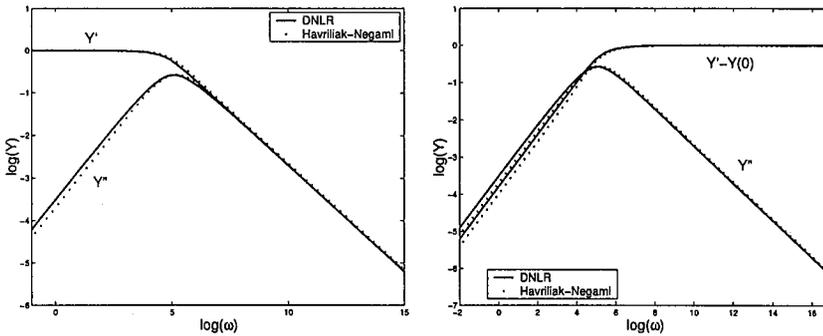


FIG. III.33: Représentation de Cole-Cole du DNLN et de HN avec ($N = 150$, $D = 14$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.5$, et $\tau_{max} = 1e - 5$ s)

On peut observer une légère différence entre les deux modèles aux fréquences courtes qui se traduit uniquement par un écart à l'origine des droites asymptotiques de chaque modèle et non par la pente de ces dernières. On peut donc supposer que cet écart est uniquement dû à une différence de l'évolution de la transmittance autour de la fréquence caractéristique $\tau_{hn}^{-1} = \tau_{max}^{-1}$.

Cet écart se justifie intuitivement par la forme abrupte du spectre de relaxation DNLN au voisinage du temps maximal de relaxation τ_{max} (fig III.32). On peut imaginer que le changement de pente associé au spectre DNLN doit se faire en réalité de manière plus "douce".

• **Comparaison entre HN et le modèle DNLN basé sur un glissement des temps de relaxations et des poids**

Rahouadj et Cunat [Rah 01] ont montré que l'introduction de deux glissements en fréquence (l'un associé au spectre des temps de relaxation $a(\omega)$ et l'autre aux poids $f(\omega)$) permettait une similarité quasi-parfaite entre l'approche DNLN et le modèle de HN.

Les auteurs généralisent ainsi la transmittance DNLR sous la forme suivante :

$$\bar{Y}(p) = \sum_j p_0^j \frac{f(\omega)}{1 + \tau^j a(\omega) p} \quad (\text{III.150})$$

où le glissement $a(\omega)$ est défini par la relation suivante :

$$\tau_{hn}^j = a(\omega) \tau_G^j = \left(\frac{\tan(\gamma\theta)}{\omega \tau_{hn}} \right) \text{ avec } \gamma = \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (\text{III.151})$$

La fonction θ est définie par :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{(\omega \tau_{hn})^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}{1 + (\omega \tau_{hn})^\alpha \cos(\alpha\pi/2)} \right) \quad (\text{III.152})$$

et τ^j par :

$$\tau^j = \tau_{hn} 10^{(j \frac{D}{N} + k)} \quad (\text{III.153})$$

où k est un paramètre d'échelle, D le nombre de décade et N le nombre de modes.

Le glissement $f(\omega)$ de l'amplitude est défini par la relation suivante :

$$f(\omega) = \cos(\gamma\theta) \frac{1 + \tan^2(\gamma\theta)}{(1 + 2(\omega \tau_{hn})^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + (\omega \tau_{hn})^{2\alpha})^{\frac{\gamma}{2}}}; \quad (\text{III.154})$$

La figure ci-dessous reporte la représentation de Cole-Cole pour le modèle DNLR (où le modèle 1 représente le spectre de relaxation asymétrique non borné et le modèle 2 le double glissement en temps et en amplitude) et le modèle de HN.

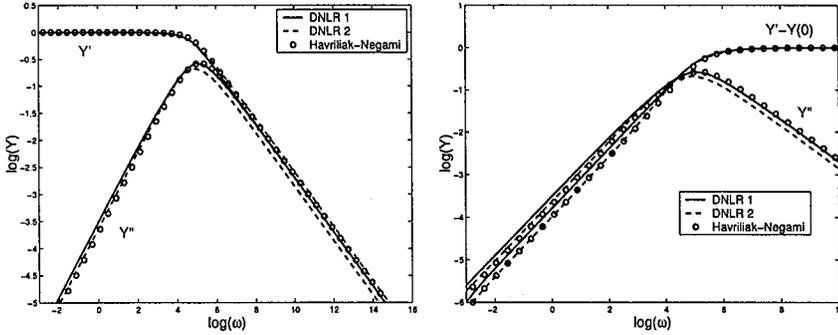


FIG. III.34: Représentation de Cole-Cole des deux modèles DNLR et de HN ($\alpha = 0.7$, $\beta = 0.5$, $\tau_{hn} = 1e - 5$ s, $N = 150$, $D = 14$)

Dans le cas particulier des paramètres précédents ($\alpha = 0.7$, $\beta = 0.5$, $\tau_{hn} = 1e - 5$ s), le modèle de HN peut être assimilé pour les fréquences hautes au modèle DNLR 1 et pour les fréquences basses au modèle DNLR 2.

• Lien entre les deux descriptions précédentes du DNLR

L'étude comparative du DNLR avec les conclusions phénoménologiques de Jonscher a permis de mettre en évidence les lacunes de la modélisation initiale DNLR pour la description

du comportement mécanique aux basses fréquences.

Sur la base des représentations de Bode de la transmittance (fig. III.34), on a ainsi montré que la réponse associée à la définition du nouveau spectre de relaxation non borné asymétrique (III.145) était également obtenue de manière quasi-équivalente par un glissement des poids et des temps de relaxation associée au spectre initial DNLR. Il reste désormais à comprendre physiquement comment un double glissement des poids et des temps associés à un spectre récursif peut induire une double loi récursive associée aux poids et aux temps de relaxation.

Afin d'asseoir définitivement la validation des nouvelles modélisations DNLR, on a repris une base des données expérimentales du PTMG proposée par Hartmann et Lee [Har 94] qui leur avait permis de mettre en évidence les grandes capacités du modèle de HN à simuler les phénomènes de relaxation.

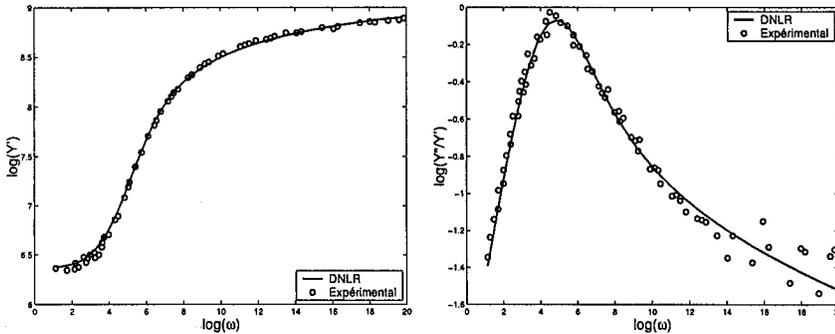


FIG. III.35: Simulations DNLR ($\alpha = 0.5735$, $\beta = 0.973$, $\tau_{hn} = 8.6e - 6$ s, $E^u = 1.4$ GPa et $E^r = 2.3$ MPa) sur les données expérimentales du PTMG (poly(tetramethylene ether) glycol; MIDI : 4,4'-diphenylmethane diisocyanate; DMPD : 2,2-dimethyl-1,3-propanediol avec une densité de $1,074$ g/cm³ et une température de transition $T_g = -40^\circ$ C)

III.3.3.4 Liens entre le modèle DNLR et le modèle de Dissado et Hill

Le but de ce paragraphe est de mettre en évidence le lien entre la modélisation DNLR issue de la TPI et le modèle récent de Dissado et Hill [Dis 85] basé sur une étude de la régression propre à chaque fluctuation structurelle et qui est signé sur le plan mathématique par l'introduction de fonctions hypergéométriques [Sla 66] dans l'expression de la transmittance :

$$\bar{Y}_n(p) = Y_0(1 + \tau p)^{\beta-1} {}_2F_1(1 - \beta, 1 - \alpha, 2 - \beta, \frac{1}{1 + \tau p}) \quad (III.155)$$

avec Y_0 coefficient de normalisation défini par :

$$Y_0 = \frac{\Gamma(1 - \beta + \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2 - \beta)} \quad (III.156)$$

La transmittance normalisée DNLR définie sous forme de somme récursive :

$$\bar{Y}_n = \sum_{j=1}^N \frac{p_0^j}{1 + \tau^j p} \quad (\text{III.157})$$

peut être définie de manière équivalente sous forme intégrale :

$$\bar{Y}_n = \int_1^N \frac{p_0(x)}{1 + \tau(x)} dx \quad (\text{III.158})$$

En partant de cette dernière expression, on montre dans l'annexe C que la transmittance DNLR peut alors être définie comme une différence de deux fonctions hypergéométriques faisant intervenir chacune un temps de relaxation distinct (τ_1 temps de relaxation maximal et τ_N temps de relaxation minimal) :

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{A} [p_0^1 {}_2F_1(n, 1, 2 - n, -\tau_1 p) - p_0^N {}_2F_1(1 - n, 1, 2 - n, -\tau_N p)] \quad (\text{III.159})$$

En faisant tendre le temps minimal de relaxation τ_N vers zéro (ou de manière équivalente le nombre de décades D vers l'infini) dans l'expression de la transmittance DNLR (III.159), on obtient :

$$\left[\begin{aligned} \bar{Y}_n &= {}_2F_1(1 - n, 1, 2 - n, -\tau_1 p) \\ &= (1 + \tau_1 p)^{n-1} {}_2F_1(1 - n, 1 - n, 2 - n, \frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p}) \end{aligned} \right. \quad (\text{III.160})$$

Cette écriture est associée au spectre DNLR dans sa version linéaire. Si on utilise le nouveau spectre non borné asymétrique de relaxation DNLR (III.145), la transmittance DNLR correspond à la différence de deux fonctions hypergéométriques associées chacune à une puissance non entière :

$$\bar{Y}_n = {}_2F_1(1 - \beta, 1, 2 - \beta, -\tau_1 p) - {}_2F_1(\alpha, 1, 1 + \alpha, -\tau_1 p) \quad (\text{III.161})$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_n &= (1 + \tau_1 p)^{\beta-1} {}_2F_1(1 - \beta, 1 - \beta, 2 - \beta, \frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p}) \\ &\quad - (1 + \tau_1 p)^{-\alpha} {}_2F_1(\alpha, \alpha, 1 + \alpha, \frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p}) \end{aligned} \quad (\text{III.162})$$

Malheureusement, les deux formulations des transmittances (III.155) et (III.162), si elles font bien apparaître toutes deux des fonctions hypergéométriques, ne sont pourtant pas identiques. Un effort reste donc à faire pour comprendre où se joue cette différence.

III.4 Conclusions

Dans un premier temps, ce chapitre a permis, préalablement à la description du couplage thermomécanique associé à la viscoélasticité, de mettre en oeuvre la loi de comportement purement mécanique DNLR. Dans un second temps, et c'est là la contribution majeure de notre travail, on s'est focalisé sur la description de la relaxation mécanique, traduite dans l'approche DNLR par l'évolution des fluctuations par rapport à l'état relaxé. La récursivité associée au spectre de relaxation a permis de faire le lien entre l'approche DNLR, basée

sur la théorie des fluctuations, et les modèles à dérivés non entières. L'équipartition de l'entropie est représentative d'une auto-similarité de la dissipation à l'intérieur d'un VER qui peut être caractérisée par un opérateur de dérivation non entière. L'étude comparative du modèle DNLR, des analyses de Jonscher et des modèles micro-physiques considérés comme les plus pertinents (modèle de cluster) a permis dans un dernier temps de corriger le spectre de relaxation DNLR pour intégrer la présence de phénomènes de relaxation à basse fréquence soit en introduisant des non-linéarités fréquentielles associées aux poids et aux temps de relaxation soit en prolongeant le spectre de relaxation par une autre récursivité.

Partie C

Loi de comportement thermique

IV

Équation constitutive du transfert de chaleur

Sommaire

IV.1	Équation générale de propagation de la chaleur	98
IV.1.1	Écriture de l'entropie	98
IV.1.2	Équation de la chaleur	99
IV.1.3	Sources de chaleur et aire d'hystérésis	100
IV.1.4	Hypothèses simplificatrices	101
IV.2	Étude de la dissipation dans le cas isotherme	102
IV.2.1	Écriture générale de la dissipation	102
IV.2.2	Application à une déformation sinusoïdale	104
IV.2.3	Conclusions	108
IV.3	État de l'art sur l'écriture de la dissipation mécanique associée à la viscoélasticité linéaire isotherme	108
IV.3.1	Problématique	108
IV.3.2	Bibliographie	110
IV.3.3	Premières conclusions	114
IV.3.4	Comparaison des différentes approches avec le modèle DNLR	115
IV.3.5	Conclusions	119
IV.4	Dissipation et équation de la chaleur dans le cas non iso- therme	120
IV.4.1	Modèle DNLR	120
IV.4.2	Bibliographie non exhaustive	122

Ce chapitre est dévolu à la mise en place de l'équation de la chaleur pour un solide soumis à des sollicitations mécaniques.

Lorsqu'on suppose contrôler la température et la déformation, la loi constitutive thermique associée au formalisme DNLR s'écrit d'après (II.24) :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{s} &= \frac{C_z^u}{T} \dot{T} + \alpha^u E^u \dot{\epsilon} - \bar{b}_{sz} \bar{\dot{z}} \\ &= \frac{C_z^u}{T} \dot{T} + \alpha^u E^u \dot{\epsilon} - \sum_j \frac{s^j - s^{j,r}}{\tau^j} \end{aligned} \right. \quad (IV.1)$$

On rappelle, encore une fois, que la notion de variable de contrôle doit être prise au sens de variable d'entrée du système. Expérimentalement, on n'agit pas plus sur l'entropie que sur la température. L'équation précédente comporte donc deux inconnues (s et T); sa résolution nécessite ainsi une information supplémentaire. On montre, dans ce chapitre, qu'un bilan entropique permet la fermeture du système et l'écriture opérationnelle de l'équation du transfert thermique en fonction des différentes puissances mises en jeu. On retrouve alors une structure de l'équation de la chaleur comparable à celle déduite des modèles standards généralisés [Ger 75], [Chr 85], [Cha 93]. Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire isotherme, le modèle DNLR permet une écriture directe de la dissipation qui apparaît comme une fonction explicite de la variable de commande mécanique. Un état de l'art sur la dissipation en viscoélasticité permet de mettre en évidence les différentes difficultés rencontrées quant à l'écriture de cette dernière et qu'on peut résumer sous la problématique suivante : si on se donne une loi de comportement mécanique, quelle est la dissipation associée ? Par construction, le formalisme DNLR permet d'expliciter cette information. Nous nous appuyerons sur cette propriété pour mener une discussion comparative avec quelques modèles de littérature. Cette étude devrait ainsi permettre à terme de vérifier la validité thermodynamique des modèles à dérivées fractionnaires décrits au chapitre III, pour lesquels le débat reste largement ouvert dans la littérature [Bre 64], [Rab 80], [Tsc 89], [Pip 86], [Lio 01]. Dans un dernier temps, on propose une première ouverture aux comportements non isothermes de type plasticité dont le seul but est de mettre en évidence les perspectives offertes par la stratégie DNLR dans ces domaines.

IV.1 Équation générale de propagation de la chaleur

IV.1.1 Écriture de l'entropie

L'entropie peut se décomposer en une entropie échangée avec l'extérieur et en une entropie créée :

$$\dot{s} = \dot{s}_e + \dot{s}_i \quad (IV.2)$$

Dans d'autres ouvrages, cette séparation de l'entropie se note aussi :

$$\dot{s} = -\nabla J_s + \sigma^s \quad (IV.3)$$

où J_s correspond au flux d'entropie et σ^s à la production d'entropie \dot{s}_i .

L'entropie échangée est liée à un flux de transfert. Pour un système fermé, seul le flux de chaleur J_q est pris en compte :

$$\dot{s}_e = -\nabla \left(\frac{J_q}{T} \right) = -\frac{\nabla J_q}{T} + \frac{J_q}{T^2} \nabla T \quad (IV.4)$$

IV. Équation constitutive du transfert de chaleur

où J_q sera défini par la loi de Fourier $\vec{J}_q = -\lambda \text{grad}(T)$ qui traduit le lien entre flux et force de non équilibre, conformément à l'approche de Onsager.

Le taux de production d'entropie est lié à la fois à la relaxation et aux phénomènes de transport :

$$\dot{s}_i = \dot{s}_i^{\text{relaxation}} + \dot{s}_i^{\text{transport}} \quad (\text{IV.5})$$

Dans le formalisme DNLR, la production d'entropie due à la relaxation s'écrit directement :

$$\dot{s}_i^{\text{relaxation}} = \frac{\overline{A} \cdot \overline{\dot{z}}}{T} \quad (\text{IV.6})$$

Le produit de l'affinité \overline{A} (force thermodynamique de non-équilibre) par la vitesse de réorganisation interne $\overline{\dot{z}}$ qui lui est associée, est appelé dissipation interne et sera noté $\mathcal{D} = \overline{A} \cdot \overline{\dot{z}}$ par la suite. Le terme dissipation doit être pris au sens de puissance dissipée. La création d'entropie liée au transport est formellement donnée par le produit de la force et du flux associés au transfert. Pour les échanges thermiques, on a :

$$\dot{s}_i^{\text{transport}} = -\frac{J_q}{T^2} \nabla T \quad (\text{IV.7})$$

Le taux de production total d'entropie s'écrit donc :

$$\dot{s}_i = -\frac{J_q}{T^2} \nabla T + \frac{\overline{A} \cdot \overline{\dot{z}}}{T} \quad (\text{IV.8})$$

La vitesse d'évolution de l'entropie totale s'écrit alors :

$$\dot{s} = \dot{s}_e + \dot{s}_i = -\frac{\nabla J_q}{T} + \frac{\overline{A} \cdot \overline{\dot{z}}}{T} \quad (\text{IV.9})$$

IV.1.2 Équation de la chaleur

La combinaison des expressions (IV.1) et (IV.9) conduit à l'équation générale de propagation de la chaleur dans un VER :

$$C_z^u \dot{T} = \lambda \Delta T - \alpha^u E^u T \dot{\epsilon} + \overline{b}_{sz} T \overline{\dot{z}} + \overline{A} \cdot \overline{\dot{z}} \quad (\text{IV.10})$$

Les variations de température résultent de quatre phénomènes bien distincts apparaissant dans le membre de droite de l'équation ci-dessus :

- *Conduction thermique* : Le premier terme à droite de l'équation de la chaleur régit la diffusion thermique qui tend à uniformiser la température dans le matériau. Dans le cas d'un régime transitoire, le comportement thermique est gouverné non seulement par sa conductivité thermique mais également par sa capacité thermique. Ces deux caractéristiques se fondent dans le coefficient de diffusion de chaleur (ou diffusivité thermique) $a = \lambda/C_z^u$.
- *Thermoélasticité* : Le deuxième terme illustre la partie thermoélastique réversible de l'énergie mécanique. Ce couplage, dit isentropique, rend compte du fait qu'un matériau thermoélastique se réchauffe lorsqu'on le comprime ou se refroidit lorsqu'on l'étire.

- *Couplage thermomécanique* : Le troisième terme traduit les interactions entre la température et les variables internes. Le terme $\bar{b}_{sz}\bar{z}$ a deux écritures équivalentes. La première correspond à la dérivée seconde du potentiel thermodynamique choisi par rapport à la température et aux variables internes. La seconde correspond à la somme des écarts à l'équilibre des composantes modales de l'entropie :

$$\bar{b}_{sz}\bar{z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \bar{z}} \bar{z} = \sum_j \frac{s^j - s^{j,r}}{\tau_{T\epsilon}^j} \quad (\text{IV.11})$$

Souvent négligé dans l'écriture de l'équation de la chaleur, ce terme peut pourtant avoir une influence importante sur l'évolution de la température. Pour la transformation martensitique des alliages à mémoire de forme par exemple, l'équipe thermomécanique du LMGC de Montpellier [Pey 98], [Tuf 95] a identifié ce terme (en assimilant les variables internes aux fractions volumiques de martensite transformée) comme la somme des taux de chaleur latente de changement de phase de chaque variante de martensite.

- *Dissipation* : Le quatrième terme illustre la dissipation intrinsèque générée par la viscosité et/ou la plasticité qui traduisent les réorganisations internes de microstructure. Cette dissipation de l'énergie interne a été reconnue par de nombreux chercheurs [Nie 72] et est maintenant complètement acceptée.

IV.1.3 Sources de chaleur et aire d'hystérésis

Le couplage thermoélastique, thermomécanique et la dissipation sont définis par les thermiciens sous le terme générique de sources internes que l'on note q . On voit bien ici l'ambiguïté de ce langage par rapport à celui du thermodynamicien qui réserve le terme de source aux véritables producteurs internes ($\dot{\epsilon}$ est une variable de contrôle externe et l'effet thermoélastique n'est alors pas entendu comme une source interne).

$$q = -\alpha^u E^u T \dot{\epsilon} + \bar{b}_{sz} T \dot{\bar{z}} + \bar{A} \dot{\bar{z}} \quad (\text{IV.12})$$

On montre ici que la stratégie DNLR permet de retrouver tous les éléments de l'analyse faite par l'équipe thermomécanique de Montpellier [Chr 95], [Pey 98] expliquant comment les sources de couplage thermomécanique se retrouvent contenus dans l'expression de l'aire d'hystérésis mécanique A_b .

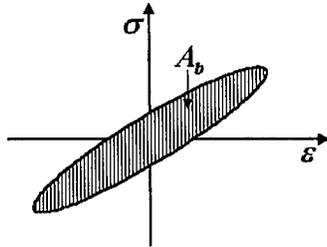


FIG. IV.1: Mise en évidence de l'aire d'hystérésis pour une sollicitation cyclique

En effet, par définition, l'aire d'hystérésis correspond au travail mécanique sur un cycle d'excitation :

$$A_b = \oint \sigma \dot{\epsilon} dt \quad (\text{IV.13})$$

D'après la relation de Gibbs, cette relation peut encore s'écrire :

$$A_b = \oint \dot{u} dt - \oint T \dot{s} dt + \oint \overline{A} \dot{z} dt \quad (\text{IV.14})$$

En remplaçant la dérivée de l'entropie par l'expression (IV.1.a.), l'aire de la boucle d'hystérésis s'écrit :

$$A_b = \oint \dot{u} dt - \oint C_v \dot{T} dt - \oint \alpha^u E^u T \dot{\epsilon} dt + \oint \overline{b}_{sz} T \dot{z} dt + \oint \overline{A} \dot{z} dt \quad (\text{IV.15})$$

Sur un cycle thermodynamique, les valeurs finales de la variable d'état T et de la fonction d'état u correspondent par définition aux valeurs initiales de ces dernières. L'aire de la boucle d'hystérésis s'écrit donc finalement :

$$A_b = - \oint \alpha^u E^u T \dot{\epsilon} dt + \oint \overline{b}_{sz} T \dot{z} dt + \oint \overline{A} \dot{z} dt = \oint q dt \quad (\text{IV.16})$$

Cette étude permet de donner une interprétation physique à l'aire d'une boucle d'hystérésis qui est souvent assimilée, à tort, à la contribution sur un cycle de la dissipation mécanique. Ceci n'est vrai que dans l'hypothèse d'une déformation isotherme. Dans ce cas particulier, la relation précédente s'écrit effectivement d'après (IV.16) :

$$A_b = \oint \overline{A} \dot{z} dt \quad (\text{IV.17})$$

IV.1.4 Hypothèses simplificatrices

Dans l'objectif de décrire le couplage thermomécanique associé au cas "simple" de la viscoélasticité linéaire, on suppose, à ce stade, que :

- $\overline{b}_{sz} = \overline{0}$ ce qui présuppose l'absence de relaxations pour l'entropie, relaxations pourtant observées dans les structures vitreuses (hors équilibre) en cours de "dégel" de leurs degrés de libertés préalablement figés. On retrouve ainsi l'hypothèse de l'équilibre local où l'entropie n'est définie qu'à l'équilibre

$$s \simeq s^r \quad (\text{IV.18})$$

Cette hypothèse, couramment utilisée de manière implicite dans de nombreux ouvrages, constitue une approximation raisonnable dans le cadre de la viscoélasticité linéaire. Dans les systèmes fortement hors équilibre, cette hypothèse peut s'avérer incorrecte : l'influence du couplage thermomécanique peut être primordiale. Chrysochoos [Chr 95], par exemple, a mis en évidence la prédominance de ce type de couplage thermomécanique devant la dissipation mécanique dans le cas des alliages à mémoire de forme.

- $\alpha^u E^u T \dot{\epsilon} = \alpha^u E^u T_0 \dot{\epsilon}$ avec T_0 température initiale. Cette hypothèse classique se justifie par le fait que les variations de température effectives sont de l'ordre de quelques Kelvin ce qui, comparativement à la température initiale ($T_0 = 300^\circ K$), est suffisamment faible pour ne pas influencer de manière notable sur le terme de thermoélasticité.

Sous ces hypothèses, l'équation de la chaleur (IV.10) s'écrit :

$$C_z^u \dot{T} = \lambda \Delta T - \alpha^u E^u T_0 \dot{\epsilon} + \mathcal{D} \quad (\text{IV.19})$$

où la puissance dissipée est définie par :

$$\mathcal{D} = \overline{A \dot{z}} \quad (\text{IV.20})$$

L'équation de propagation de la chaleur (IV.19) est ainsi directement obtenue à partir de la loi de comportement thermomécanique du matériau. L'approche DNLR par l'intermédiaire de l'équation constitutive propre aux affinités permet une formulation explicite de la dissipation interne $\mathcal{D} = \overline{A \dot{z}}$.

Certaines classes de modèles telles que les modèles analogiques, les modèles empiriques ou les modèles fractionnaires par exemple se basent uniquement sur une description du comportement mécanique d'un matériau. L'équation de la chaleur déterminée sur la base d'un bilan de flux énergétique [Gya 70] est ensuite simplement adjointe à cette dernière. La compatibilité des équations mécanique et thermique est alors difficile à vérifier car l'expression de la puissance dissipée présente dans la seconde équation (transfert thermique) n'apparaît pas de manière immédiate en fonction des variables mécaniques.

IV.2 Étude de la dissipation dans le cas isotherme

Par définition, la dissipation correspond au produit de la température par la production d'entropie (irréversible) :

$$\mathcal{D} = T \dot{s}_i \quad (\text{IV.21})$$

Dans le formalisme DNLR, la dissipation coïncide avec le produit scalaire du tenseur affinité \overline{A} par le tenseur associé des variables internes \dot{z} :

$$\mathcal{D} = \overline{A \dot{z}} = \sum_j A^j \dot{z}^j \quad (\text{IV.22})$$

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, on peut supposer que les variations de température induites par les sollicitations mécaniques sont suffisamment faibles pour ne pas influencer sur la réponse mécanique du matériau. Autrement dit, les variables observables mécaniques et l'affinité sont indépendantes de la température. La dissipation engendrée sera donc uniquement due à l'irréversibilité mécanique. On parle alors de couplage faible ou encore de semi-couplage thermomécanique puisque la contrainte est déterminée sous l'hypothèse d'un comportement isotherme.

Le but de ce paragraphe est de montrer comment la dissipation peut s'écrire comme une fonction explicite des variables mécaniques.

IV.2.1 Écriture générale de la dissipation

Sous l'hypothèse d'un comportement isotherme (les paramètres mécaniques sont alors supposés constants), les lois constitutives mécaniques (I.19) s'écrivent en composante sur

la base modale des dissipations (i.e. écrites individuellement pour chaque processus) dans le cas d'une déformation uni-axiale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}^j = p_0^j E^u \dot{\epsilon} + b^j \dot{z}^j \\ -\dot{A}^j = b^j \dot{\epsilon} + g^{jj} \dot{z}^j \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad b^j z^j = -\frac{\sigma^j - \sigma^{r,j}}{\tau^j} \quad (\text{IV.23})$$

La réponse globale est simplement obtenue par superposition des réponses caractéristiques de chacun des modes j .

On se place dans l'espace de Laplace¹ afin de déterminer une expression générale de $(\bar{\sigma}^j, \bar{z}^j, \bar{A}^j)$ fonction de la déformation $\bar{\epsilon}$ imposée.

Les conditions initiales étant considérées comme nulles à l'instant initial ($t = 0$), le système précédent s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}^j = p_0^j E^u \bar{\epsilon} + b^j \bar{z}^j \\ -\bar{A}^j = b^j \bar{\epsilon} + g^{jj} \bar{z}^j \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad b^j \bar{z}^j = -\frac{1}{s} \frac{\bar{\sigma}^j - \bar{\sigma}^{j,r}}{\tau^j} \quad (\text{IV.24})$$

La combinaison de (IV.24a) et (IV.24b) conduit à la loi de comportement mécanique pour le mode j , déjà largement étudiée au chapitre III :

$$\bar{\sigma}^j = p_0^j \frac{E^r + E^u \tau^j p}{1 + \tau^j p} \bar{\epsilon} \quad (\text{IV.25})$$

soit encore

$$\bar{\sigma}^j = \bar{G}^j \bar{\epsilon} \quad \text{où} \quad \bar{G}^j = p_0^j \frac{E^r + E^u \tau^j p}{1 + \tau^j p} \quad (\text{IV.26})$$

La contrainte totale s'écrit alors

$$\bar{\sigma} = \sum_j \bar{\sigma}^j = \bar{G} \bar{\epsilon} \quad \text{avec} \quad \bar{G} = \sum_j \bar{G}^j \quad (\text{IV.27})$$

\bar{G} étant la transformée de Laplace du module (ou relaxance) qui relie la déformation à la contrainte.

En associant l'expression (IV.24b) et (IV.25), on obtient :

$$\bar{z}^j = -p_0^j \frac{E^u - E^r}{b^j} \frac{p}{1 + \tau^j p} \bar{\epsilon} \quad (\text{IV.28})$$

Pour déterminer l'expression de \bar{A}^j il faut d'abord déterminer g^{jj} .

A l'état relaxé, $\dot{A}^j = 0$, $\sigma^{j,r} = p_0^j E^r$ et ainsi d'après (IV.24a) et (IV.24c) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}^{j,r} = p_0^j E^u \bar{\epsilon} + b^j \bar{z}^{j,r} = p_0^j E^r \bar{\epsilon} \quad (a) \\ -\bar{A}^{j,r} = b^j \bar{\epsilon} + g^{jj} \bar{z}^{j,r} = 0 \quad (b) \end{array} \right. \quad (\text{IV.29})$$

¹La transformée dans l'espace de Laplace d'une fonction causale f sera notée \bar{f} . Afin de ne pas faire de confusion avec la notation matricielle utilisée précédemment telle que \bar{A} et \bar{z} par exemple, on ne traitera dans ce paragraphe que des composantes modales des vecteurs (A^j et z^j) afin de réserver le symbole $\bar{\cdot}$ à la transformée de Laplace uniquement

La substitution de $\bar{z}^{j,r}$ définie par (IV.29.b) dans l'équation (IV.29.a) s'écrit :

$$p_0^j E^u \bar{\epsilon} - \frac{b^{j^2}}{g^{jj}} \bar{\epsilon} = p_0^j E^r \bar{\epsilon} \quad (\text{IV.30})$$

soit

$$g^{jj} = \frac{b^{j^2}}{p_0^j (E^u - E^r)} \quad (\text{IV.31})$$

et finalement, grâce à (IV.24.c),

$$\bar{A}^j = -b^j \frac{\tau^j p}{1 + \tau^j p} \bar{\epsilon} \quad (\text{IV.32})$$

On a ainsi réussi à expliciter les grandeurs dissipatives A^j et z^j en fonction de la déformation imposée et des paramètres mécaniques. La connaissance de b^j , difficile à appréhender par ailleurs, n'est pas nécessaire puisque la dissipation correspond au produit de l'affinité par la vitesse de réorganisation interne. L'approche DNLR permet ainsi une écriture opérationnelle de la dissipation :

$$\mathcal{D}(t) = \sum_j \mathcal{L}^{-1} [\bar{A}^j] \mathcal{L}^{-1} [\bar{z}^j] \quad (\text{IV.33})$$

La substitution des relations (IV.28) et (IV.32) dans l'expression précédente s'écrit :

$$\mathcal{D}(t) = \sum_j p_0^j \frac{E^u - E^r}{\tau^j} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tau^j p}{1 + \tau^j p} \bar{\epsilon} \right] \right]^2 \quad (\text{IV.34})$$

soit encore :

$$\mathcal{D}(t) = \sum_j p_0^j \frac{E^u - E^r}{\tau^j} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tau^j}{1 + \tau^j p} \right] \otimes \mathcal{L}^{-1} [p \bar{\epsilon}] \right]^2 \quad (\text{IV.35})$$

La dissipation s'écrit alors finalement :

$$\mathcal{D}(t) = \sum_j p_0^j \frac{E^u - E^r}{\tau^j} \left[\int_0^t \exp\left(-\frac{t-u}{\tau^j}\right) \dot{\epsilon}(u) \right]^2 \quad (\text{IV.36})$$

La nécessaire positivité de la relation (IV.36) permet ainsi de vérifier la seconde loi de la thermodynamique.

Quelle que soit la déformation imposée, on peut donc déterminer la dissipation mécanique associée et ainsi caractériser l'évolution de la température interne d'un matériau soumis à des sollicitations mécaniques.

IV.2.2 Application à une déformation sinusoïdale

Compte tenu des données expérimentales fournies par l'IRSID qui seront analysées au chapitre VII, on choisit d'explicitier l'expression de la dissipation dans le cas particulier d'une déformation sinusoïdale imposée :

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \sin \omega t \quad (\text{IV.37})$$

IV. Équation constitutive du transfert de chaleur

En reprenant la procédure de calcul décrite en annexe (D), on peut formuler l'évolution temporelle de la contrainte et de la dissipation :

$$\left[\begin{aligned} \sigma(t) &= \epsilon_0 \sum_j p_0^j \left[\frac{E^r + E^u \tau_j^2 \omega^2}{1 + \tau_j^2 \omega^2} \sin(\omega t) + \frac{(E^u - E^r) \tau_j \omega}{1 + \tau_j^2 \omega^2} \cos(\omega t) - \frac{(E^u - E^r) \tau_j \omega}{1 + \tau_j^2 \omega^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right) \right] \\ \mathcal{D}(t) &= \epsilon_0^2 \omega^2 \sum_j p_0^j (E^u - E^r) \tau_j \left[\frac{1}{1 + (\tau_j \omega)^2} \cos \omega t + \frac{\tau_j \omega}{1 + (\tau_j \omega)^2} \sin \omega t - \frac{1}{1 + (\tau_j \omega)^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right) \right]^2 \end{aligned} \right] \quad (IV.38)$$

La réponse en contrainte (et la dissipation) peut être séparée en deux parties : une fonction périodique représentant le régime établi et une fonction non périodique (exponentielle retardée) caractéristique du régime transitoire.

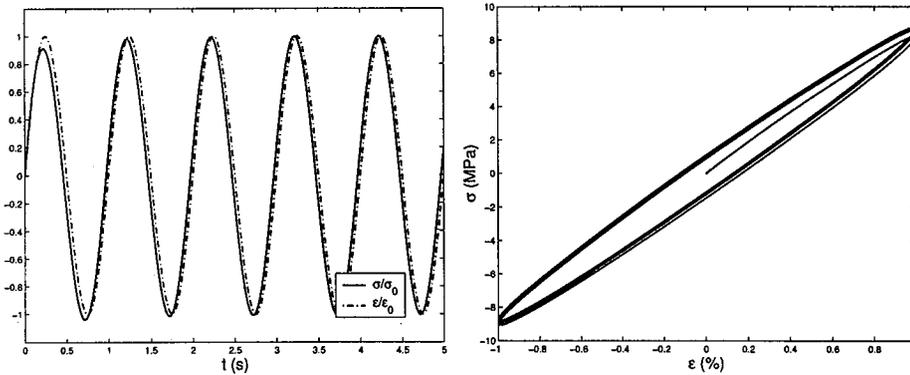


FIG. IV.2: Mise en évidence du régime transitoire mécanique suite à une déformation sinusoïdale - eq. (IV.38.a) ($E^u = 1 \text{ GPa}$, $E^r = 0.3 \text{ GPa}$ et $\tau_{max} = 5 \text{ s}$)

En viscoélasticité, le régime mécanique transitoire est très rapide (de l'ordre de quelques cycles - cf. figure (IV.3)) comparativement au temps nécessaire à la stabilisation en température (rapport de l'ordre de 300). De plus, l'élévation de température moyenne sur quelques cycles est suffisamment faible pour être négligée. Dans le cadre du couplage thermo-viscoélastique, on se placera donc sous l'hypothèse d'un régime mécanique établi.

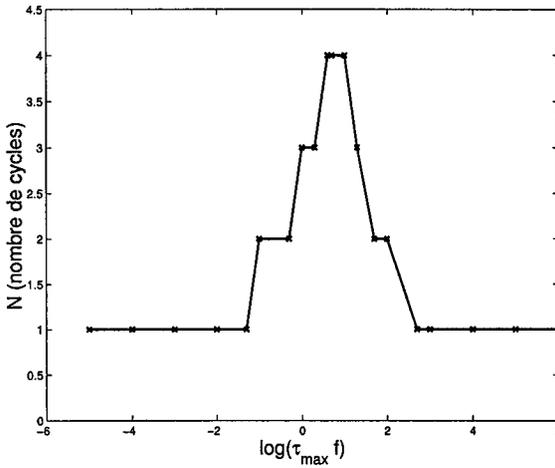


FIG. IV.3: Nombre de cycles nécessaire pour atteindre le régime établi (i.e. lorsque la contrainte revient à la fin d'un cycle à la même valeur qu'elle avait au début de ce même cycle) en fonction du produit de la fréquence d'excitation par le temps de relaxation maximal du matériau τ_{max}

Dans l'espace de Fourier, la loi mécanique (IV.27) s'écrit :

$$\sigma^* = G^* \epsilon^* \quad \text{avec} \quad G^* = G' + iG'' \quad (IV.39)$$

Le module stocké et le module de perte sont définis par les relations suivantes :

$$\left[\begin{aligned} G'(\omega) &= \sum_j p_0^j \frac{E^r + E^u \tau_j^2 \omega^2}{1 + \tau_j^2 \omega^2} \\ G''(\omega) &= \sum_j p_0^j \frac{(E^u - E^r) \tau_j \omega}{1 + \tau_j^2 \omega^2} \end{aligned} \right. \quad (IV.40)$$

La réponse temporelle à une déformation sinusoïdale ($\epsilon^* = \Im(\epsilon_0 e^{i\omega t})$)² s'écrit :

$$\left[\begin{aligned} \sigma &= \Im(G^* \epsilon_0 e^{i\omega t}) \\ \sigma &= \epsilon_0 (G' \sin(\omega t) + G'' \cos(\omega t)) \end{aligned} \right. \quad (IV.41)$$

La représentation paramétrique (ϵ, σ) définit l'équation d'une ellipse (la démonstration en est donnée en annexe F) :

² \Im correspond à la partie imaginaire

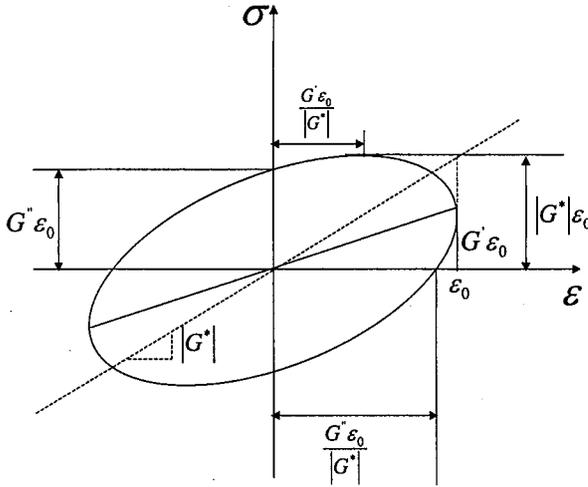


FIG. IV.4: Cycle d'Hysteresis suite à une déformation cyclique d'amplitude ϵ_0

En régime établi, lors d'un cycle de déformation, la réponse en contrainte revient à la fin du cycle à la même valeur que celle qu'elle avait en début de cycle; l'énergie stockée durant la déformation est, ainsi, complètement restituée et l'énergie dissipée sur un cycle d'excitation est égale à l'énergie totale sur un cycle nécessaire pour déformer le matériau (égale à l'aire de l'ellipse).

La puissance dissipée sur un cycle \tilde{D} s'écrit :

$$\tilde{D} = \frac{1}{T} \oint \sigma d\epsilon = \frac{\omega}{2\pi} \int_{t+\frac{2n\pi}{\omega}}^{t+\frac{2(n+1)\pi}{\omega}} \sigma \dot{\epsilon} dt = \epsilon_0^2 \omega \frac{G''}{2} \quad (\text{IV.42})$$

On rappelle que ce résultat n'est vrai que dans l'hypothèse d'un comportement isotherme (§ IV.1.3).

En reprenant les techniques de calcul, associées à l'espace de Fourier, utilisées pour la détermination de la contrainte, on peut calculer, à partir de (IV.28) et (IV.32), les affinités et les variables internes modales et ainsi calculer la dissipation :

$$\mathcal{D}(t) = \epsilon_0^2 \omega^2 \sum_j p_0^j (E^u - E^r) \tau_j \left[\frac{1}{1 + (\tau_j \omega)^2} \cos \omega t + \frac{\tau_j \omega}{1 + (\tau_j \omega)^2} \sin \omega t \right]^2 \quad (\text{IV.43})$$

Si on développe cette dernière expression, on obtient :

$$\mathcal{D}(t) = \epsilon_0^2 \omega^2 \sum_j \frac{p_0^j (E^u - E^r) \tau_j}{2(1 + (\tau_j \omega)^2)} \left[1 + \frac{1 - (\tau_j \omega)^2}{1 + (\tau_j \omega)^2} \cos 2\omega t + \frac{2\tau_j \omega}{1 + (\tau_j \omega)^2} \sin 2\omega t \right] \quad (\text{IV.44})$$

IV.2.3 Conclusions

On vient ainsi de montrer que l'approche DNLr permettait de calculer la dissipation quelle que soit la déformation imposée. L'équation de la chaleur est donc complètement opérationnelle. Son étude sera entièrement détaillée au chapitre V dans le cas d'une déformation sinusoïdale imposée. Au préalable, il nous a semblé opportun, à ce stade de la modélisation, d'effectuer un état de l'art de l'écriture de la dissipation, dans le cadre de la viscoélasticité linéaire. Cette bibliographie permet de mesurer les difficultés rencontrées pour déterminer une expression générale de la dissipation pouvant s'appliquer à n'importe quelle loi de comportement mécanique choisie.

IV.3 État de l'art sur l'écriture de la dissipation mécanique associée à la viscoélasticité linéaire isotherme

IV.3.1 Problématique

La relation de Gibbs généralisée (§ I.1.1) définit l'énergie interne en fonction des variables extensives, indépendantes les unes des autres :

$$u = u(s, \epsilon, n) \quad (\text{IV.45})$$

En terme de vitesse, l'évolution du système s'écrit :

$$\dot{u} = T\dot{s} + \sigma\dot{\epsilon} - \overline{A}\dot{z} \quad (\text{IV.46})$$

Le formalisme de la transformée de Legendre permet de définir l'énergie libre :

$$f = u - Ts \quad (\text{IV.47})$$

soit encore en terme de vitesse :

$$\dot{f} = -s\dot{T} + \sigma\dot{\epsilon} - \overline{A}\dot{z} \quad (\text{IV.48})$$

Ainsi dans le cas d'une évolution isotherme :

$$\sigma\dot{\epsilon} = \dot{f} + \overline{A}\dot{z} = \dot{f} + \mathcal{D} \quad (\text{IV.49})$$

où $\sigma\dot{\epsilon}$ correspond à la puissance totale du système i.e. la puissance mécanique fournie pour déformer le matériau et $\mathcal{D} = \overline{A}\dot{z}$ correspond à la puissance dissipée. Notons que la relation (IV.49) est souvent proposée sous la forme suivante :

$$\dot{W} = \sigma\dot{\epsilon} = \dot{W}_s + \dot{W}_d \quad (\text{IV.50})$$

où \dot{W} est la puissance totale, \dot{W}_s la puissance stockée et \dot{W}_d la puissance dissipée (ou puissance anélastique).

La fonction \dot{f} apparaît ainsi comme représentative de la puissance stockée au cours de la déformation. Cette puissance est aussi appelée puissance élastique car en régime établi, elle est récupérable à la décharge des efforts.

Quelle que soit la loi de comportement mécanique utilisée, la puissance totale du système

$\sigma \epsilon$ est une fonction connue ; la difficulté consiste à identifier quelle est la part de l'énergie totale qui est stockée et quelle est la part qui est dissipée.

Dans le cas de matériaux purement élastiques ou purement dissipatifs, cette identification est triviale. Pour des matériaux viscoélastiques, cela apparaît moins évident comme le montre le nombre important de travaux qui traitent de cette problématique et qui conduisent à des conclusions parfois contradictoires [Bre 64], [Rab 80], [Tsc 89], [Pip 86], [Lio 01].

Breuer & Onat [Bre 64] furent les premiers à poser clairement la problématique liée à la définition de l'énergie libre.

De par sa définition, l'énergie libre est une fonction potentielle dont dérive la contrainte :

$$\sigma = \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \quad (\text{IV.51})$$

Sans aucune hypothèse préalable, l'énergie libre peut être définie, de manière générale, comme une fonctionnelle quadratique fonction des dérivées premières de la déformation :

$$f = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t K(t-u, t-v) \dot{\epsilon}(u) \dot{\epsilon}(v) du dv \quad (\text{IV.52})$$

où $K(x, y)$ est une fonction noyau continue et symétrique dont les dérivées partielles d'ordre 1 existent. La relation (IV.52)³ peut être considérée comme un développement du modèle de Fréchet-Volterra [Chr 82].

L'énergie libre est supposée être une fonction non négative :

$$f \geq 0 \quad (\text{IV.53})$$

ce qui impose à la fonction noyau K d'être définie non négative.

En dérivant la relation (IV.52) par rapport au temps et en l'injectant dans la relation (IV.49), les auteurs en déduisent l'expression de la contrainte et de la puissance dissipée :

$$\begin{cases} \sigma(t) = \int_{-\infty}^t K(0, t-u) \dot{\epsilon}(u) du \\ \mathcal{D}(t) = - \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial K}{\partial t} \dot{\epsilon}(u) \dot{\epsilon}(v) du dv \end{cases} \quad (\text{IV.54})$$

La comparaison de l'expression de la contrainte (IV.54) avec la relation de Boltzmann :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \phi(t-u) \dot{\epsilon}(u) du \quad (\text{IV.55})$$

où ϕ est la fonction de relaxation, conduit à la relation suivante :

$$K(0, t) = K(t, 0) = \phi(t) \quad (\text{IV.56})$$

Enfin, la seconde loi de la thermodynamique impose à la dissipation d'être non négative :

$$\mathcal{D} \geq 0 \quad (\text{IV.57})$$

³Il faut noter que l'expression (IV.52) ne comporte pas, dans l'article [Bre 64], le facteur 1/2. Il a été ajouté dans ce mémoire afin d'uniformiser les expressions de l'énergie libre à venir

Breuer et Onat montrent alors que la connaissance de la fonction de relaxation conjuguée à la nécessaire positivité de f et de \mathcal{D} ne permet pas de définir la fonction noyau K (et donc f et \mathcal{D}) de manière unique.

La non-unicité de l'énergie libre est une grande problématique qui a été traitée par de nombreux auteurs [Col 67], [Day 72], [Fab 94], [Del 95], [Gol 01] sous des formes différentes que nous ne détaillerons pas ici et qui amène Hazanov, encore récemment [Haz 97], à poser la question clef : quelle doit être l'information supplémentaire à ajouter aux trois conditions (IV.53), (IV.56) et (IV.57) qui permettrait de déterminer l'énergie libre de manière unique et d'où doit-elle être issue ?

On peut d'ores et déjà remarquer que la modélisation DNLR apporte, par l'intermédiaire de la deuxième loi constitutive propre aux affinités, un élément de réponse à Hazanov. Avant de détailler la force de cet apport, on se propose, tout d'abord, d'étudier les différentes modélisations de l'énergie libre et de la dissipation (ainsi que leurs différentes hypothèses sous-jacentes) proposées dans la littérature depuis ces cinquante dernières années.

IV.3.2 Bibliographie

- Les premières expressions de la dissipation et de l'énergie libre pour des modèles viscoélastiques discrets ont été formulées par Staverman et Schwarzl [Sta 52]. Ils supposent que les ressorts et les amortisseurs sont représentatifs des processus moléculaires spécifiques se produisant pendant la déformation du matériau. Les ressorts sont reliés à l'énergie libre accumulée lors de configurations moléculaires particulières induites par la déformation. Le flux dans les amortisseurs représente les processus moléculaires responsables de la dissipation d'énergie dans les processus viscoélastiques.

Pour le solide de Maxwell généralisé soumis à un échelon de déformation $\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t)$, la contrainte s'écrit :

$$\sigma(t) = \epsilon_0 \sum_i G_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \quad (\text{IV.58})$$

où G_i et τ_i sont respectivement le module et le temps de relaxation propre à la branche i . La fonction de relaxation $\phi(t)$ s'écrit :

$$\phi(t) = \sum_i G_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \quad (\text{IV.59})$$

Staverman & Schwarzl définissent l'énergie libre comme la somme des quantités d'énergie accumulées dans les ressorts :

$$F(t) = \sum_i \frac{\sigma_i(t)^2}{2G_i} \quad (\text{IV.60})$$

En combinant les expressions (IV.58), (IV.59) et (IV.60), on obtient immédiatement :

$$F(t) = \frac{1}{2} \epsilon_0^2 \sum_i G_i \exp\left(-\frac{2t}{\tau_i}\right) = \frac{1}{2} \epsilon_0^2 \phi(2t) \quad (\text{IV.61})$$

La puissance dissipée par unité de temps est calculée en additionnant les puissances mécaniques dans chaque amortisseur :

$$D(t) = \sum_i \frac{\sigma_i(t)^2}{\eta_i} \quad (\text{IV.62})$$

La combinaison de (IV.58), (IV.59) et (IV.62) conduit à :

$$D(t) = \epsilon_0^2 \sum_i \frac{G_i^2}{\eta_i} \exp\left(-\frac{2t}{\tau_i}\right) = \epsilon_0^2 \dot{\phi}(2t) \quad (\text{IV.63})$$

Par la généralisation du traitement ci-dessus au cas général d'une déformation donnée $\epsilon(t)$, les auteurs déterminent alors les expressions générales

- de la contrainte :

$$\left[\begin{aligned} \sigma(t) &= \sum_i G_i \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_i}\right) \dot{\epsilon}(u) du \\ &= \int_{-\infty}^t \phi(t-u) \dot{\epsilon}(u) du \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.64})$$

- de l'énergie libre

$$\left[\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2} \sum_i G_i \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{2t-u-v}{\tau_i}\right) \dot{\epsilon}(u) \dot{\epsilon}(v) dudv \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \phi(2t-u-v) \dot{\epsilon}(u) \dot{\epsilon}(v) dudv \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.65})$$

- et de la dissipation

$$\left[\begin{aligned} D(t) &= \sum_i \frac{G_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{2t-u-v}{\tau_i}\right) \dot{\epsilon}(u) \dot{\epsilon}(v) dudv \\ &= - \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \dot{\phi}(2t-u-v) \dot{\epsilon}(u) \dot{\epsilon}(v) dudv \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.66})$$

Ces expressions permettent de vérifier la loi (IV.49) :

$$\dot{F}(t) + D(t) = \sigma(t) \dot{\epsilon}(t) \quad (\text{IV.67})$$

La démonstration précédente a été effectuée dans le cas particulier du solide de Maxwell. Elle aurait cependant mené aux mêmes conclusions dans le cas du solide de Kelvin généralisé. En partant du principe que tout modèle analogique peut être représenté comme un assemblage de ressorts et d'amortisseurs de type Maxwell et Kelvin [Ros 50], Stavermann et Schwarzl étendent leurs expressions à l'ensemble des modèles rhéologiques. Cette généralisation sera complètement validée par Mandel [Man 66] et Huet [Hue 92].

Bland [Bla 60] et Hunter [Hun 60] sont arrivés, de manière indépendante, aux mêmes conclusions concernant l'expression de l'énergie libre (IV.65) et de la dissipation (IV.66), en traitant eux aussi les matériaux viscoélastiques comme un assemblage d'éléments élastiques et visqueux i.e. des ressorts et des amortisseurs. Hunter met en évidence le fait que les expressions (IV.64), (IV.65) et (IV.66) ne dépendent que de la fonction de relaxation $\phi(t)$ et du chargement $\epsilon(t)$; il démontre ainsi que si des représentations analogiques composées de ressorts et d'amortisseurs sont mécaniquement équivalentes, alors elles sont aussi énergétiquement équivalentes.

Breuer et Onat [Bre 64], pour ne citer qu'eux, réfutent l'écriture d'une énergie libre définie uniquement à partir de la fonction de relaxation. Pour argumenter leur désaccord, ils

s'appuient sur un contre-exemple basé sur deux modèles analogiques. Le premier correspond à un assemblage de deux unités de Maxwell en parallèle et le second correspond au même modèle auquel ils ajoutent une masse entre le ressort et l'amortisseur de l'une des deux unités de Maxwell. Ils montrent alors que ces deux modèles qui possèdent la même fonction de relaxation conduisent à des expressions différentes de l'énergie libre (l'énergie libre, dans le second cas, est la somme des énergies des ressorts et de l'énergie cinétique associée à la masse) qui sont pourtant toutes deux thermodynamiquement admissibles puisqu'elles vérifient (IV.53), (IV.56) et (IV.57).

Hazanov [Haz 97] propose un autre contre-exemple qui prouve, selon lui, l'incapacité du modèle de Staverman-Schwarzl à décrire l'ensemble des comportements viscoélastiques. Il définit la fonction de relaxation suivante :

$$\phi(t) = \begin{cases} 2 - t & 0 \leq t < 1 \\ \exp(-(t-1)) & t \geq 1 \end{cases} \quad (\text{IV.68})$$

Cette fonction est continue, positive et monotone décroissante. Elle est donc thermodynamiquement admissible et conduit pourtant, dans le cas d'une déformation sinusoidale, à une dissipation négative pour des valeurs particulières de la fréquence d'excitation. Le modèle de Staverman-Schwarzl est selon Hazanov limité aux fonctions de relaxation de type exponentielle ou puissance.

On peut ainsi déjà mesurer sur ce premier modèle le grand débat et les nombreuses discordes attachées à l'écriture de la dissipation.

• Biot [Bio 54], [Bio 58] propose une autre approche de la dissipation basée sur la thermodynamique des processus irréversibles. Il définit par Q_i l'ensemble des forces généralisées associées aux variables d'état q_i . Le terme générique q_i représente les variables observables et les variables cachées (ou variables internes).

Au voisinage d'une position d'équilibre stable ($Q_i = 0$), le potentiel thermodynamique du système s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} q_i q_j \quad (\text{IV.69})$$

où la matrice (a_{ij}) est semi-définie positive. En calculant la variation d'entropie durant un court intervalle de temps, il obtient, pour des vitesses q_i supposées petites et en négligeant les forces d'inertie, que la puissance dissipée peut s'écrire :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (\text{IV.70})$$

où la matrice (b_{ij}) est symétrique d'après le principe d'Onsager et semi-définie positive d'après le second principe de la thermodynamique.

La loi d'évolution du système s'écrit :

$$Q_i = \sum_j (a_{ij} q_j + b_{ij} \dot{q}_j) \quad (\text{IV.71})$$

Sans hypothèses préalables sur ces variables cachées qui peuvent, pour des déformations mécaniques, représenter des mouvements d'atomes interstitiels, des mâcles, des courants

intercristallins thermiques, etc., et qui ne peuvent donc pas être mesurés par l'expérimentation, le formalisme mis en place par Biot n'est pas, à ce stade, opérationnel.

Schapery a développé les travaux de Biot et a réussi à définir les variables internes en fonction des variables observables. Malheureusement, son expression de la dissipation sous forme de somme héréditaire est difficilement applicable car elle reste régie par un nombre important de paramètres (b_{ij}) difficilement identifiables.

On peut noter que la modélisation DNLR qui peut être interprétée comme une extension de ces deux derniers modèles remédie à ces difficultés en s'appuyant sur le théorème d'équipartition de l'entropie produite de Prigogine pour définir une distribution des variables dissipatives.

• En considérant l'énergie libre comme une fonction potentielle dont dérive la contrainte (IV.51), Rabotnov [Rab 80] montre que l'énergie libre s'écrit obligatoirement :

$$f = \sigma\epsilon - \frac{E^u\epsilon^2}{2} + \mathcal{Q} \quad (\text{IV.72})$$

où \mathcal{Q} est une fonctionnelle dépendant uniquement de l'histoire et non de l'état actuel. D'après les relations (IV.53), (IV.56) et (IV.57), la fonctionnelle \mathcal{Q} doit vérifier les conditions suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \epsilon} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{Q}} \leq -\epsilon \int_{-\infty}^t \dot{\phi}(t-u)\epsilon(u)du \quad (\text{IV.73})$$

Rabotnov propose alors une écriture de \mathcal{Q} purement phénoménologique :

$$\mathcal{Q} = p \frac{(\sigma - E^u\epsilon)^2}{2} \quad (\text{IV.74})$$

où p est un paramètre intrinsèque au matériau.

La dissipation s'écrit alors compte tenu de la relation (IV.49) :

$$\mathcal{D} = -\epsilon\dot{\sigma} - E^u\epsilon\dot{\epsilon} + p(\sigma - E^u\epsilon)(\dot{\sigma} - E^u\dot{\epsilon}) \quad (\text{IV.75})$$

L'écriture de la dissipation, dans le cas d'une déformation sinusoïdale, et la condition nécessaire de positivité de cette fonction a permis à Hazanov de caractériser le paramètre p comme une fonction du module stockée G' et du module de perte G'' :

$$p = \frac{E^u - G'}{(E^u - G')^2 + G''^2} \quad (\text{IV.76})$$

• Pipkin [Pip 86] a essayé de relier les notions d'énergie stockée et d'énergie dissipée avec la partie réelle et la partie imaginaire du module complexe G' et G'' .

Il se place dans le cadre d'une déformation sinusoïdale où la déformation s'écrit sous forme complexe :

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \exp(i\omega t) \quad (\text{IV.77})$$

La contrainte s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= G^*\epsilon(t) = (G' + iG'')\epsilon(t) \\ &= G'\epsilon(t) + (G''/\omega)\dot{\epsilon}(t) \end{aligned} \quad (\text{IV.78})$$

Le travail effectué par la contrainte suite à une variation de déformation s'écrit :

$$dW = \sigma d\epsilon = d\left(\frac{1}{2}G' \epsilon^2\right) + \frac{1}{\omega} G'' \dot{\epsilon}^2 dt \quad (IV.79)$$

La part associée à G' est une différentielle exacte et peut alors selon l'auteur être interprétée comme une variation d'énergie élastique stockée. La part associée avec G'' correspond alors, selon l'auteur, à un taux de dissipation visqueuse.

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{1}{2} G' \epsilon^2 \\ \mathcal{D} = \frac{1}{\omega} G'' \dot{\epsilon}^2 \end{array} \right. \quad (IV.80)$$

Bagley & Torvik [Bag 86], par exemple, ont étudié la consistance thermodynamique de leurs modèles à dérivées fractionnaires sur la base des énergies définies par Pipkin.

• Dans le cas d'une déformation sinusoïdale, Tschoegl [Tsc 89] et plus tard Lion [Lio 01] par une voie différente, proposent une nouvelle écriture opérationnelle de la dissipation. En se basant sur une étude analogique de la viscoélasticité, ils montrent que l'énergie libre et la dissipation sont des fonctions conjuguées du module stockée et du module de perte :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \frac{\epsilon_0^2}{4} \left(G'(\omega) - \omega \frac{dG'}{d\omega} \right) \cos(2\omega t) + \left(G''(\omega) - \omega \frac{dG''}{d\omega} \right) \sin(2\omega t) \\ \mathcal{D}(t) = \frac{\epsilon_0^2}{4} \omega \left(G''(\omega) + \omega \frac{dG''}{d\omega} \right) \cos(2\omega t) + \omega \frac{dG'}{d\omega} \sin(2\omega t) \end{array} \right. \quad (IV.81)$$

Tschoegl et Lion remettent ainsi complètement en cause les résultats de Pipkin. D'après ces auteurs, seule la puissance dissipée sur un cycle d'excitation est uniquement fonction de G'' :

$$\oint \mathcal{D}(u) du = \int_t^{t+T} \mathcal{D}(u) du = \frac{\epsilon_0^2 \omega G'' T}{4} \quad (IV.82)$$

IV.3.3 Premières conclusions

Si la dissipation est une notion parfaitement définie (Biot, Schapery), il n'en reste pas moins, au vue de la bibliographie précédente, qu'il existe, en viscoélasticité, un nombre important d'expressions de la puissance dissipée [Sta 52], [Rab 80], [Pip 86], [Tsc 89], [Lio 01] qui ne semblent pas conduire aux mêmes conclusions. De nombreuses questions restent encore en suspens :

- Les expressions de la dissipation basées sur une étude analogique de la viscoélasticité (Staverman-Schwarzl, Lion) peuvent-elles être étendues à l'ensemble des modèles viscoélastiques ?
- La dissipation est-elle fonction de G' et G'' (Lion) ou uniquement de G'' (Pipkin) ?
- Comment se situe le modèle empirique de Rabotnov par rapport aux modèles basés sur une étude analogique de la dissipation ?

Ces questions sont cruciales car la dissipation est une notion clef en mécanique.

D'une part, elle permet, par sa nécessaire non-négativité, de vérifier la validité thermodynamique d'un modèle rhéologique. Bagley et Torvik [Bag 86], par exemple, ont étudié la

validité thermodynamique de leur modèle à dérivées fractionnaires à partir de l'expression de la dissipation de Pipkin tandis que Lion, toujours dans le cadre de modèles fractionnaires, s'est appuyé sur sa propre expression de la dissipation (IV.81).

D'autre part, sans parfaite connaissance de la dissipation, on ne peut espérer caractériser finement l'évolution de la température d'un matériau soumis à des sollicitations mécaniques. La plupart des travaux axés sur la caractérisation thermique de matériaux soumis à des sollicitations mécaniques ont ainsi été dans l'obligation de s'appuyer sur des modélisations approximatives de la dissipation. Certains auteurs [Pet 64], [Tin 72] postulent que la puissance stockée est négligeable autrement dit que l'énergie libre ne dépend pas de la déformation imposée. Pour ces auteurs, la dissipation est tout simplement égale à la puissance mécanique. D'autres auteurs [Tin 72], [Tin 73], [Sch 64] se sont limités à l'étude de l'équation de la chaleur moyennée sur un cycle d'excitation car c'est le seul cas où toutes les modélisations semble s'accorder sur l'écriture de la dissipation (IV.82).

IV.3.4 Comparaison des différentes approches avec le modèle DNLR

Nous allons essayé dans ce paragraphe d'apporter certains éléments de réponses aux trois questions précédentes en comparant les différents modèles à l'approche DNLR, basée sur la TPI et dont la validité thermodynamique est assurée par l'équation constitutive associée à l'affinité.

IV.3.4.1 Modèles analogiques

La plupart des approches décrites ci-dessus se sont basées sur un traitement purement analogique, en considérant qu'un comportement viscoélastique peut toujours être décrit par un assemblage de ressorts et d'amortisseurs. D'après ces théories [Tsc 89], l'énergie est uniquement stockée dans les ressorts et toute l'énergie nécessaire pour déformer un ressort est stockée. Cette énergie est appelée énergie élastique. L'énergie est dissipée uniquement dans les amortisseurs pour se transformer en chaleur et toute l'énergie nécessaire pour déformer un amortisseur est dissipée. Par voie de conséquence, l'énergie stockée (qui correspond dans le cas isotherme à l'énergie libre) dans un modèle est la somme des énergies stockées dans chaque ressort et l'énergie dissipée totale est la somme des énergies dissipées dans chaque amortisseur. Autrement dit, si on appelle σ_v^j et ϵ_v^j respectivement la contrainte et la déformation aux bornes du j-ème amortisseur alors, la puissance dissipée par un matériau viscoélastique s'écrira :

$$\mathcal{D}(t) = \sum_j \sigma_v^j(t) \dot{\epsilon}_v^j(t) \quad (\text{IV.83})$$

En comparant cette expression avec celle du DNLR (IV.22), on peut imaginer qu'il existe un lien entre les affinités et les contraintes visqueuses d'une part et entre les variables internes et les déformations visqueuses d'autre part. Pour répondre à cette question, on s'appuie sur le modèle analogique associé à la loi modale DNLR i.e. le solide de Zener (§ III.1.3).

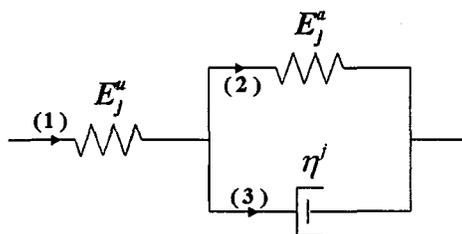


FIG. IV.5: Solide de Zener associé au DNLR à un processus où $E_j^u = p_0^j E^u$, $E_j^a = p_0^j E^u E^r / (E^u - E^r)$ et $\eta_j = p_0^j E^a / \tau_j^s$

Pour déterminer la contrainte σ_3 et la déformation ϵ_3 aux bornes de l'amortisseur (correspondant respectivement à la contrainte visqueuse σ_v et à la déformation visqueuse ϵ_v), on se place classiquement en mécanique des solides soit dans l'espace de Laplace soit dans l'espace de Laplace-Carson. Dans l'espace de Laplace, on obtient :

$$\bar{\epsilon}_{2b} = \frac{E^u - E^r}{E^u} \frac{1}{1 + \tau_j s} \bar{\epsilon} \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_{2b}^j = \eta^j s \bar{\epsilon}_{2b} = p_0^j E^u \frac{\tau_j s}{1 + \tau_j s} \bar{\epsilon} \quad (\text{IV.84})$$

Reprenons maintenant le système d'équations constitutives associé au DNLR (IV.24) :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^j = p_0^j E^u \bar{\epsilon} + b^j \bar{z}^j \\ -\bar{A}^j = b^j \bar{\epsilon} + g^{jj} \bar{z}^j \end{cases} \quad (\text{IV.85})$$

Si on choisit de définir la déformation visqueuse comme une variable interne :

$$z^j = \epsilon^v \quad (\text{IV.86})$$

la première équation s'écrit alors :

$$\bar{\sigma}^j = p_0^j E^u \bar{\epsilon} + b^j \bar{\epsilon}^v \quad (\text{IV.87})$$

Par définition, la contrainte est directement liée à la déformation élastique :

$$\bar{\sigma}^j = p_0^j E^u \bar{\epsilon}^e \quad (\text{IV.88})$$

La combinaison des deux dernières équations permet ainsi de définir le coefficient b^j :

$$b^j = -p_0^j E^u \quad (\text{IV.89})$$

D'après l'équation (IV.32), l'affinité s'écrit alors :

$$\bar{A}^j = p_0^j E^u \frac{\tau_j^s}{1 + \tau_j^s} \bar{\epsilon} \quad (\text{IV.90})$$

Si on identifie la variable interne à la déformation visqueuse, l'affinité (IV.90) correspond alors à la contrainte visqueuse (IV.84). La généralisation de ce résultat à n processus dissipatifs (soit n branches de Zener en parallèle) est automatique.

Les modélisations basées sur les modèles analogiques apparaissent ainsi comme un cas

particulier du DNLR où la matrice de couplage \bar{b} est assimilée à la matrice instantanée de Tisza \underline{a}^u .

Dans ce cas particulier, les expressions de Staverman-Schwarzl et de Lion qui dérivent de l'écriture analogique de la dissipation (IV.83) devraient donc être équivalentes à l'expression issue du DNLR. C'est ce que nous allons vérifier ci-dessous.

- Modèle de Staverman-Schwarzl

L'expression de la dissipation d'après Staverman-Schwarzl s'écrit :

$$\mathcal{D}(t) = - \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \dot{\phi}(2t - u - v) \dot{\epsilon}(u) \dot{\epsilon}(v) du dv \quad (IV.91)$$

Si on utilise la fonction de relaxation (III.42) associée au DNLR,

$$\phi(t) = \sum_j p_0^j [E^r + (E^u - E^r) \exp(-\frac{t}{\tau_j})] \quad (IV.92)$$

la dissipation s'écrit alors, d'après Staverman-Schwarzl :

$$\mathcal{D}(t) = - \sum_j p_0^j \frac{(E^u - E^r)}{\tau_j} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \exp(-\frac{2t - u - v}{\tau_j}) \dot{\epsilon}(u) \dot{\epsilon}(v) du dv \quad (IV.93)$$

soit encore :

$$\mathcal{D}(t) = - \sum_j p_0^j \frac{(E^u - E^r)}{\tau_j} \left[\int_{-\infty}^t \exp(-\frac{t - u}{\tau_j}) \dot{\epsilon}(u) du \right]^2 \quad (IV.94)$$

Cette écriture n'est rien d'autre que celle déterminée précédemment à partir de la modélisation DNLR (IV.36).

- Modèle de Lion

Lion considère que la dissipation dans le cas d'une déformation sinusoïdale a la forme suivante :

$$\mathcal{D}(t) = \frac{\epsilon_0^2}{4} \omega (G''(\omega) + \omega \frac{dG''}{d\omega} \cos(2\omega t) + \omega \frac{dG'}{d\omega} \sin(2\omega t)) \quad (IV.95)$$

où G' et G'' correspondent respectivement à la partie réelle et à la partie imaginaire du module complexe.

Dans le cadre du modèle DNLR, d'après (IV.40) ces fonctions s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} G'(\omega) = \sum_j p_0^j \frac{E^r + E^u \tau_j^2 \omega^2}{1 + \tau_j^2 \omega^2} \\ G''(\omega) = \sum_j p_0^j \frac{(E^u - E^r) \tau_j \omega}{1 + \tau_j^2 \omega^2} \end{array} \right. \quad (IV.96)$$

La dérivée de ces fonctions par rapport à la pulsation ω s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dG'}{d\omega}(\omega) = (E^u - E^r) \sum_j p_0^j \frac{2\tau_j^2 \omega}{(1 + \tau_j^2 \omega^2)^2} \\ \frac{dG''}{d\omega}(\omega) = (E^u - E^r) \sum_j p_0^j \frac{\tau_j (1 - \tau_j^2 \omega^2)}{(1 + \tau_j^2 \omega^2)^2} \end{array} \right. \quad (IV.97)$$

La dissipation (IV.95) a alors pour expression :

$$\mathcal{D}(t) = \frac{\epsilon_0^2}{2} \omega (E^u - E^r) \sum_j p_j^0 \frac{\tau_j \omega}{1 + \tau_j^2 \omega^2} \left(1 + \frac{1 - \tau_j^2 \omega^2}{1 + \tau_j^2 \omega^2} \cos(2\omega t) + \frac{2\tau_j \omega}{1 + \tau_j^2 \omega^2} \sin(2\omega t) \right) \quad (\text{IV.98})$$

La dissipation issue du modèle de Lion correspond ainsi exactement à l'expression du modèle DNLR (IV.44).

On peut donc maintenant affirmer que la dissipation instantanée dépend à la fois du module stocké G' et du module de perte G'' contrairement à ce que prévoyait Pipkin.

Pipkin a sûrement voulu relier intuitivement les appellations de module stocké et de module dissipé aux énergies portant le même nom. Le lien existe mais il ne correspond pas directement à ses conclusions. Le module stocké G' est proportionnel à la moyenne de l'énergie stockée sur un cycle d'excitation :

$$W_s^{moy}(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{t+\frac{2n\pi}{\omega}}^{t+\frac{2(n+1)\pi}{\omega}} W_s(u) du = \frac{\epsilon_0^2}{4} G'(\omega) \quad (\text{IV.99})$$

Le module de perte (ou module dissipé) est proportionnel à l'énergie dissipée sur un cycle d'excitation :

$$\tilde{W}_d(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{t+\frac{2n\pi}{\omega}}^{t+\frac{2(n+1)\pi}{\omega}} \mathcal{D}(u) du = \frac{\epsilon_0^2}{4} G''(\omega) \quad (\text{IV.100})$$

IV.3.4.2 Modèle empirique de Rabotnov

Dans le cas d'une déformation sinusoïdale, la dissipation s'écrit selon Rabotnov :

$$\mathcal{D}(t) = \epsilon_0^2 \omega [A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)]^2 \quad (\text{IV.101})$$

où les fonctions A et B sont définies par :

$$A^2(\omega) = p G'' (E^u - G') \quad , \quad B^2(\omega) = G'' (1 - p(E^u - G')) \quad \text{et} \quad p = \frac{E^u - G'}{(E^u - G')^2 + G''^2} \quad (\text{IV.102})$$

En substituant le module stocké et le module de perte par les expressions propres au DNLR (IV.96), on s'aperçoit rapidement de la divergence entre les deux modèles. Mis à part pour le cas simple du DNLR à 1 processus, l'expression de Rabotnov ne permet pas de retrouver l'expression de la dissipation associée au DNLR.

IV.3.4.3 Étude des différentes expressions de la dissipation sur un cas simple

Afin de mettre en évidence les erreurs induites par les expressions de Pipkin et de Rabotnov, on effectue une étude comparative de ces modèles avec le DNLR sur le cas simple d'une déformation sinusoïdale (de fréquence 1 Hz) pour un acier dont les paramètres mécaniques sont donnés par $E^u = 217e^9 \text{ GPa}$, $E^r = 20e^9 \text{ GPa}$ et $\tau_{max} = 250 \text{ s}$:

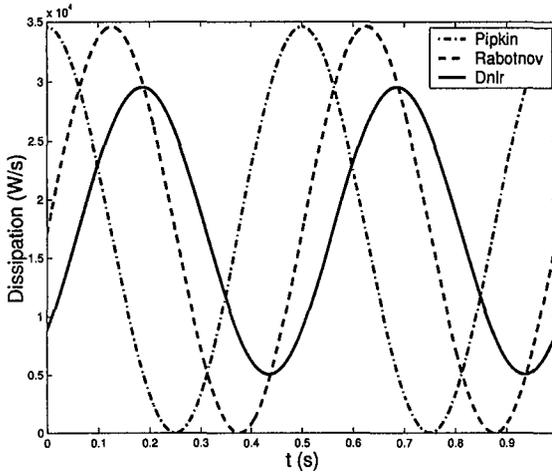


FIG. IV.6: Comparaison de la dissipation associée aux modèles de Pipkin, de Rabotnov et du Dnlr ($E^u = 217e^9 \text{ GPa}$, $E^r = 20e^9 \text{ GPa}$ et $\tau_{max} = 250 \text{ s}$)

Même si les ordres de grandeurs des trois dissipation sont similaires, leurs déphasages et leurs différences d'amplitudes sont suffisamment importantes pour induire des erreurs notables sur l'évolution de température associée.

IV.3.5 Conclusions

Cette étude comparative a permis d'une part de mettre en évidence le lien entre l'écriture DNLr de la dissipation et les expressions de Stavermann-Schwarzl et de Lion et d'autre part d'invalider le modèle empirique de Rabotnov et l'approche pseudo-mathématique de Pipkin et de régler ainsi définitivement le problème de dépendance de la dissipation avec G' et G'' .

La connaissance précise de la dissipation est fondamentale (i) dans l'optique de la caractérisation du transfert thermique d'une éprouvette sous sollicitations mécaniques et (ii) pour assurer, par sa nécessaire positivité, la validité thermodynamique d'un modèle rhéologique.

Le lien entre l'approche "analogique" et la modélisation DNLr devrait permettre de vérifier la validité thermodynamique ($\mathcal{D} \geq 0$) des modèles à dérivées fractionnaires, ce qui n'a pas encore été fait de manière satisfaisante dans la littérature. A titre d'exemple, Bagley et Torvik [Bag 86] ont supposé qu'un modèle rhéologique était thermodynamiquement consistant si et seulement si $G' \geq 0$ et $G'' \geq 0$. La justification de ces deux conditions reste obscure dans la mesure où elles sont déduites de la définition de la dissipation selon Pipkin. On ne remet pas forcément en cause la justesse de ces conditions mais leur unicité. Il est possible que la condition de non-négativité de la dissipation induisent des conditions restrictives supplémentaires. Autrement dit, elles peuvent être nécessaires mais pas suffisantes.

On a vu au chapitre III que certains modèles à dérivées fractionnaires pouvaient être représentés par des modèles analogiques où l'amortisseur est remplacé par un élément fractal. L'écriture de la dissipation selon Tschoegl ne peut pas s'appliquer directement sur de tels solides. En effet, il est impossible, a priori, de déterminer quelle est la part

de la contrainte et de la déformation associée à ces modèles qui est visqueuse. Cependant, Heymans et Bauwens [Hey 94], Schiessel et Blumen [Sch 93], [Sch 95] ont montré qu'un élément fractal pouvait être représenté par un assemblage hiérarchique de ressorts et d'amortisseurs (modèle d'arbre ou structure d'échelle par exemple). Les expressions de Stavermann-Schwarzl et de Lion peuvent donc logiquement s'appliquer à ces modèles.

Les modèles analogiques qui conduisent à une expression de la dissipation reliée à la fonction de relaxation ou de manière équivalente à G' et G'' ont cependant le grand défaut de n'être applicable qu'en viscoélasticité linéaire isotherme. Dans le cas de la plasticité, les modèles analogiques deviennent plus rares mais surtout ils font intervenir d'autres éléments que le ressort et l'amortisseur comme le patin ou la butée; il est alors impossible de déterminer la dissipation associée. La notion même de module stocké, de module de perte et de fonction de relaxation n'a plus de sens en plasticité. Les expressions de Staverman-Schwartzl et de Lion deviennent alors inutilisables. Dans le cas de comportements complexes, les modèles standards généralisés ont montré depuis une vingtaine d'années leurs grandes aptitudes à décrire les réponses mécaniques et thermiques associées à de tels comportements [Cha 93], [Luo 99], [Chr 98], [Chr 00]. Compte tenu (i) des aptitudes de la stratégie DNLR à décrire des comportements mécaniques complexes [Fac 97], (ii) du fait que la structure de l'équation de la chaleur peut être directement déduite du DNLR (et apparaît comme comparable à celle déduite des modèles standards généralisés) et (iii) de l'écriture directe de la dissipation dans le formalisme DNLR, il est fort probable que l'approche DNLR permettra elle-aussi de décrire les comportements thermomécaniques complexes avec leur cortège de couplages.

IV.4 Dissipation et équation de la chaleur dans le cas non isotherme

Avant de clore ce chapitre, on se propose d'évoquer le couplage thermomécanique d'un point de vue plus général en décrivant succinctement le système d'équations constitutives DNLR complet (i.e. sans aucune hypothèse simplificatrice). Dans un dernier temps, on effectue une dernière bibliographie non exhaustive sur le couplage thermomécanique non linéaire afin de proposer un aperçu (très) succinct de l'état actuel de la recherche dans ce domaine.

IV.4.1 Modèle DNLR

Dans le cadre du couplage thermomécanique complet sous sollicitations mécaniques i.e. sous l'hypothèse d'une interdépendance de la température et de la contrainte, on effectue une distinction des variables de microstructure :

$$\bar{z} = \bar{z}_{th} + \bar{z}_m \quad (IV.103)$$

où \bar{z}_{th} et \bar{z}_m correspondent respectivement aux variables internes d'origine thermique et d'origine mécanique. On note alors \bar{A}_{th} et \bar{A}_m les affinités associées. La dissipation s'écrit alors :

$$\mathcal{D} = \bar{A}_{th}\bar{z}_{th} + \bar{A}_m\bar{z}_m \quad (IV.104)$$

Le système DNLR caractéristique du couplage thermomécanique s'écrit dans le cas d'une

déformation imposée :

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\sigma} &= E^u \dot{\epsilon} - E^u \dot{T} - \sum_j \frac{\sigma^j - \sigma^{j,r}}{\tau_\epsilon^j} \\
 \sigma^{j,r} &= p_0^j E^r \epsilon - \alpha^r E^r T^j \\
 C^u \dot{T} &= \lambda \Delta T - \alpha^u E^u \dot{\epsilon} + \mathcal{D} - T \sum_j \frac{s^j - s^{j,r}}{\tau_\epsilon^j} \\
 T \dot{s}^j &= A^j \dot{z} - p_0^j \lambda \Delta T \\
 s^{j,r} &= p_0^j C^r \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + p_0^j \alpha^r E^r \epsilon \\
 \tau_\epsilon^{j,r} &= \frac{h}{kT} \exp \left(\frac{\Delta E^+ - T \Delta S^{j,+}}{RT} \right) \\
 \tau_\epsilon^j &= \tau_\epsilon^{j,r} \exp \left(\frac{K_\sigma |\sigma - \sigma^r|}{RT} \right) \exp \left(\frac{K_s |s - s^r|}{RT} \right) \\
 \dot{z}_m^j &= -\frac{1}{b_{\sigma z}^j} \frac{\sigma^j - \sigma^{j,r}}{\tau_\epsilon^j} \quad \text{et} \quad \dot{z}_{th}^j = -\frac{1}{b_{sz}^j} \frac{s^j - s^{j,r}}{\tau_\epsilon^j} \\
 \dot{A}_m^j &= -b_{\sigma z}^j \left(\dot{\epsilon} - \frac{\sigma^j - \sigma^{j,r}}{p_0^j (E^u - E^r) \tau_\epsilon^j} \right) \\
 \dot{A}_{th}^j &= -b_{sz}^j \left(\dot{T} - T \frac{s^j - s^{j,r}}{p_0^j (C_z^u - C_z^r) \tau_\epsilon^j} \right) \\
 \mathcal{D} &= \sum_j A_m^j \dot{z}_m^j + \sum_k A_{th}^k \dot{z}_{th}^k
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Loi constitutive} \\ \text{mécanique} \\ \\ \text{Lois constitutives} \\ \text{thermiques} \\ \\ \text{Définitions des} \\ \text{temps de relaxation} \\ \\ \text{Lois constitutives} \\ \text{dissipatives} \\ \text{et Calcul} \\ \text{de la dissipation} \end{array} \quad (IV.105)$$

Ce système, relativement complexe, contient 11 paramètres à identifier (E^u , E^r , α^u , α^r , C_z^u , C_z^r , λ , ΔE^+ , ΔS_{max}^+ , K_σ et K_s). On peut noter que la connaissance des matrices des couplages $b_{\sigma z}$ et b_{sz} entre variables observables et variables internes n'est pas nécessaire puisque seul le produit de la j-ième composante de l'affinité A^j et de la vitesse d'avancement \dot{z}^j intervient dans l'écriture de la dissipation.

Les techniques de calcul de la dissipation (présentées au paragraphe IV.2) basées sur la transformation de Laplace sont ici difficilement applicables compte tenu de la dépendance temporelle des temps de relaxation. La résolution d'un tel système ne peut alors se faire sans l'apport de codes de calcul numériques. Une étude préalable de sensibilité aux paramètres devrait permettre une meilleure compréhension de l'influence de chaque couplage (thermoélastique, dissipatif et thermomécanique). Cette étude devrait ainsi permettre d'effectuer certaines hypothèses simplificatrices en fonction du chargement imposé et du type de matériau étudié.

IV.4.2 Bibliographie non exhaustive

Dans le cas de chargements plus complexes induisant une élévation de température plus importante, de nombreuses approches ont été développées dans la littérature. On ne citera toutefois que quelques exemples particulièrement éclairants des différents axes de recherche adoptés.

IV.4.2.1 Viscoélasticité non isotherme

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire non isotherme, l'axe principal de recherche s'appuie sur les travaux de Christensen et Naghdi [Chr 66] qui postulent une écriture de l'énergie libre et de la dissipation sous forme de fonctionnelles quadratiques linéaires de la déformation et de la température. A titre d'exemple, on peut citer les travaux récents de Hajar et Blanc [Haj 98] qui conduisent à l'écriture de la dissipation intrinsèque suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t) = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} G_1(t - \tau, t - \eta) \dot{\epsilon}_{ij}(\tau) \dot{\epsilon}_{ij}(\eta) d\tau d\eta \\ & + \frac{1}{6} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} G_2(t - \tau, t - \eta) \dot{\epsilon}_{kk}(\tau) \dot{\epsilon}_{ll}(\eta) d\tau d\eta - \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} F(t - \tau, t - \eta) \dot{\epsilon}_{kk}(\tau) \dot{\theta}(\eta) d\tau d\eta \end{aligned} \quad (\text{IV.106})$$

$G_1(0, \tau) = G_1(\tau, 0)$: fonction de relaxation de la déformation déviatorique.

$G_2(0, \tau) = G_2(\tau, 0)$: fonction de relaxation de la déformation sphérique.

$F(0, \tau)$: fonction de relaxation de la déformation thermique.

La principale différence entre cette écriture tridimensionnelle et l'expression de Staverman-Schwarzl se situe au niveau du troisième terme de l'expression précédente (IV.106) associé au produit de la température par la déformation. On peut noter que ce terme apparaît explicitement dans l'écriture DNLR par l'intermédiaire du produit $\overline{A\dot{z}}$ (IV.105).

L'équation de la chaleur correspondante s'écrit :

$$C\dot{\theta} = \lambda\Delta\theta - (T_0 + \theta) \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-\infty}^t F(t - \tau, 0) \dot{\epsilon}_{kk}(\tau) d\tau \right] + D(t) \quad (\text{IV.107})$$

Le principal défaut de ces modèles est lié à l'absence d'information thermodynamique permettant de déterminer les trois fonctions de relaxation G_1 , G_2 et F citées précédemment. De plus, ces modèles restent limitées au cas linéaire de par leurs hypothèses de base trop restrictives.

IV.4.2.2 Plasticité

Dans le cadre de la plasticité, il existe une multitude de modèles très différents les uns des autres. On n'étudiera pas, dans cette étude, les modèles empiriques bien trop nombreux et souvent associés à une écriture arbitraire de l'énergie libre. Ils n'ont, à l'heure actuelle, d'autre justification que leur bonne aptitude à reproduire des faits expérimentaux partiels. On reporte dans le tableau ci-dessous quelques exemples de modèles de couplages thermomécaniques tirés de l'exposé de Luong [Luo 99] :

IV. Équation constitutive du transfert de chaleur

Auteurs	Variables internes et Postulats	Puissance stockée \dot{W}_s	Puissance dissipée \mathcal{D}	Chaleur plasticité
Dillon [Dil 63]	$V.I. = \dot{\epsilon}_{ij}^p$	0	$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$	0
Lee [Lee 69]	$V.I. = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{W}_p$ (\dot{W}_p puissance plastique) $0.9 \leq \gamma \leq 1$	$(1 - \gamma)\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$	$\gamma\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$	0
Nied & Batermann [Nie 72]	$V.I. = \omega$ $\Lambda = \dot{W}_s / \dot{W}_p$ Λ : densité de dislocation χ : puissance de dislocation	$\Lambda \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$	$(1 - \Lambda) \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$	$T\chi \frac{\partial \Lambda}{\partial \chi}$
Raniecki & Sawczuk [Ran 75]	$V.I. = \kappa$ κ : écrouissage ω : facteur d'intégration $\dot{\kappa} = \omega(\sigma_{ij}, T) \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$	$\chi(\kappa, T) \dot{\kappa}$	$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \pi \dot{\kappa}$ π : conjuguée de V.I.	$T \frac{\partial \pi}{\partial T}$
Mroz & Raniecki [Mro 76]	$V.I. = \kappa$ $\dot{\kappa} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$	$\pi = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \kappa}$	$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \pi \dot{\kappa}$	$T \frac{\partial \pi}{\partial T} = 0$
Lehmann [Leh 79]	$V.I. = \kappa$ ξ : Cte empirique $\dot{\kappa} = (1 - \xi) \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$	$\dot{\kappa}$	$\xi \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$	0

- **Modèle de Dillon**

On peut noter, compte tenu de l'étude comparative entre le DNLR et les approches analogiques effectuées dans le cadre de la viscoélasticité (§ IV.3.4.1), que le modèle de Dillon est, tout simplement, un cas particulier de la modélisation DNLR où $z = \epsilon^p$ et $\underline{b} = -\underline{a}^u$.

- **Modèle de Nied et Batermann**

Afin de mieux comprendre le sens de chacun des trois termes appelés respectivement puissance stockée, puissance dissipée et chaleur, en comparaison avec l'approche DNLR, on va détailler, à titre d'exemple, le modèle de Nied et Batermann [Nie 72].

Les auteurs effectuent une partition de la puissance mécanique \dot{W} en une puissance élas-

tique \dot{W}' et une puissance plastique \dot{W}'' :

$$\dot{W} = \sigma \dot{\epsilon} = \dot{W}' + \dot{W}'' \quad (\text{IV.108})$$

Ils définissent le paramètre $\Lambda(T)$ comme le rapport de la puissance stockée sur la puissance plastique dépensée dans des conditions adiabatiques. La puissance mécanique \dot{W}_H dissipée sous forme de chaleur s'écrit donc :

$$\dot{W}_H = (1 - \Lambda) \dot{W}'' \quad (\text{IV.109})$$

La puissance stockée \dot{W}_s encore appelée puissance latente (puisque'elle n'est pas apparente) s'écrit alors :

$$\dot{W}_s = \Lambda \dot{W}'' \quad (\text{IV.110})$$

En s'appuyant sur la théorie des réseaux de dislocations et de leurs interactions, ils postulent que la puissance latente peut encore se définir par la relation suivante

$$\dot{W}_s = \Lambda \chi \dot{\omega} \quad (\text{IV.111})$$

où χ est la puissance de dislocation par unité de longueur et ω est une variable interne spécifique de la densité de dislocation.

Avec ces différentes définitions, l'équation de Gibbs s'écrit :

$$\dot{u} = T \dot{s} + \dot{W}' + \Lambda \chi \dot{\omega} \quad (\text{IV.112})$$

et la production d'entropie :

$$T \dot{s}_i = -\frac{J_q \nabla T}{T} + (1 - \Lambda) \dot{W}'' \quad (\text{IV.113})$$

La simple comparaison des deux dernières expressions (IV.112) et (IV.113) avec celle déduite de la modélisation DNLr (IV.46) et (IV.8) permet d'identifier les puissances stockée et dissipée en fonction du terme $\bar{A} \bar{z}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{W}_s + \dot{W}' = \sigma \dot{\epsilon} - \bar{A} \bar{z} \\ \dot{W}_H = \bar{A} \bar{z} = (1 - \Lambda) \dot{W}'' = (1 - \Lambda) \chi \dot{\omega} \end{array} \right. \quad (\text{IV.114})$$

La puissance stockée n'a pas de correspondance précise avec le modèle DNLr. La puissance élastique peut, elle aussi, être considérée comme une puissance stockée. La somme de ces deux termes correspond à la définition de la puissance non dissipée.

A la suite de considérations thermodynamiques liées à l'énergie libre d'Helmholtz f , Nied et Batermann montrent que la variable conjuguée à la variable interne ω s'écrit :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \omega} \right|_{\epsilon^e, T} = \Lambda \chi \quad (\text{IV.115})$$

Il faut noter que les auteurs supposent que l'énergie libre d'Helmholtz est une fonction de la déformation élastique ϵ^e , de la température T et de la variable interne ω . Cette hypothèse est contestable car la déformation élastique n'est pas une variable d'état indépendante pour le potentiel f . La fonction f n'est alors plus une fonction potentielle mais une simple

fonction d'état. L'affinité \bar{A} , définie comme la variable conjuguée à la variable interne \bar{z} , s'écrit :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|_{\epsilon, T} = -\bar{A} \quad (\text{IV.116})$$

En assimilant le tenseur des variables internes DNLR \bar{z} à la variable interne ω , la relation (IV.114) implique que l'affinité \bar{A} peut être assimilée à :

$$\bar{A} = (1 - \Lambda) \chi \quad (\text{IV.117})$$

En se basant sur la TPI qui postule que l'entropie est une variable d'état même si le système n'est pas en équilibre, Nied et Batermann écrivent la vitesse d'évolution de l'entropie totale sous la forme :

$$T\dot{s} = \alpha E T \dot{\epsilon} + C_v \dot{T} - T \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \chi \dot{\omega} \quad (\text{IV.118})$$

et l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\lambda \Delta T = \alpha E T \dot{\epsilon} + C_v \dot{T} - T \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \chi \dot{\omega} - (1 - \Lambda) \dot{W}'' \quad (\text{IV.119})$$

Ces deux dernières équations correspondent exactement à celles déterminées par l'approche DNLR (IV.1) et (IV.10) :

$$\begin{cases} T\dot{s} = C_v \dot{T} + \alpha^u E^u T \dot{\epsilon} - \bar{b}_{sz} T \dot{\bar{z}} \\ \lambda \Delta T = C_{\epsilon, z} \dot{T} + \alpha^u E^u T \dot{\epsilon} - (\bar{b}_{sz} T + \bar{A}) \dot{\bar{z}} \end{cases} \quad (\text{IV.120})$$

En assimilant le tenseur des variables internes DNLR \bar{z} à la variable interne ω , la chaleur de réaction $T (\partial \Lambda / \partial T) \chi \dot{\omega}$ correspond alors à la définition du produit du terme de couplage DNLR \bar{b}_{sz} par la température T :

$$T \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \chi = T \bar{b}_{sz} \quad (\text{IV.121})$$

Ainsi les modèles présentés dans le tableau (IV.4.2.2) qui conduisent à une expression de la chaleur de réaction nulle reposent implicitement sur l'hypothèse de l'état local où l'entropie n'est définie qu'à l'équilibre, ce qui se traduirait dans le modèle de Nied et Batermann par un coefficient Λ indépendant de la température.

L'écriture de Nied et Batermann et celle de Cunat sont donc relativement similaires. On peut cependant reprocher aux auteurs un manque de rigueur thermodynamique lorsqu'ils ôtent à la fonction f son véritable statut de fonction potentiel (IV.115). Leur formalisme s'appuie de plus implicitement sur un seul processus dissipatif et nécessite la connaissance d'un paramètre Λ difficile à appréhender expérimentalement. La modélisation DNLR grâce à la description de l'évolution dynamique des variables internes en terme de distribution de temps de relaxation permet en ce sens une écriture plus opérationnelle de la dissipation.

- Modèle de Lee

Le modèle de Lee [Lee 69], comme ceux de Sawczuk [Ran 75], Raniecki [Mro 76] et Lehmann [Leh 79], conduit, lui aussi, à une écriture similaire au DNLR. La différence fondamentale se situe au niveau du choix des variables internes assimilées à des puissances (cf tab. IV.4.2.2). Cette hypothèse ne peut malheureusement, à nos yeux, aucunement se justifier d'un point de vue thermodynamique. Ce dernier aspect est clairement révélé dans le modèle de Lehmann qui nécessite l'introduction d'une constante empirique qui n'a aucune signification physique.

IV.4.2.3 Approches expérimentales

Devant l'importance des modèles théoriques destinés à déterminer la dissipation et leurs conclusions trop souvent différentes et insuffisantes, l'approche expérimentale consistant à déterminer les puissances mises en jeu a pris toute son importance. Initialement basée sur l'utilisation de thermocouples [Tay 25] ou de calorimètres [Chr 85], cette approche s'est largement développée depuis ces dernières décennies avec l'apparition des systèmes de détection infrarouge. L'utilisation des thermocouples a longtemps restreint les études du couplage thermomécanique aux seuls phénomènes de grande amplitude (plasticité, fatigue oligocyclique, etc...) induisant des élévations importantes de température. L'apparition de la thermographie infrarouge a permis un perfectionnement remarquable des données expérimentales thermiques par ses capacités de mesure sans contact et surtout de détection de très petit écarts de température.

A partir des cartes temporelles en température de la surface d'un matériau, on peut à l'aide d'un logiciel de traitement d'image, déterminer l'évolution de la partie gauche de l'équation de la chaleur ci-dessous et ainsi remonter à l'évolution de la distribution des sources de chaleur [Chr 98].

$$C_v \dot{T}(\underline{x}, t) - \lambda \Delta T(\underline{x}, t) = q(\underline{x}, t) \quad (\text{IV.122})$$

où $q(\underline{x}, t)$ correspond à la source de chaleur interne incluant les effets thermo-élastiques et dissipatifs :

$$q = \overline{A\dot{z}} - \alpha^u E^u T \dot{\epsilon} + \overline{b_{sz} T \dot{z}} \quad (\text{IV.123})$$

Cette technique expérimentale de détection infrarouge, non destructive, sans contact et utilisable en temps réel, a permis entre autres d'observer les processus dissipatifs de l'endommagement, de la fatigue [Luo 92a] et de la rupture des éprouvettes [All 85]. Cette voie de recherche ne cesse de progresser avec l'amélioration du matériel thermographique et de la micro-informatique associée. Elle semble très prometteuse pour la meilleure compréhension des phénomènes dissipatifs.

Il faut noter que la méthode axée sur la mesure de la température par l'intermédiaire des thermocouples reste encore d'actualité puisqu'elle permet de connaître la température interne d'un matériau contrairement aux techniques infrarouges où seule la température surfacique peut être mesurée. A titre d'exemple, on citera Rittel [Rit 00] qui insère un thermocouple à l'intérieur d'éprouvettes cylindriques de polymères et détermine ainsi l'évolution de la température interne suite à des essais cycliques de compression. Cette technique apporte une correction sur la température mesurée par détection infrarouge qui a tendance à être sous-évaluée par rapport aux valeurs de température réelles d'un matériau [Kap 98]. Cette méthode ne permet cependant qu'une mesure locale et intrusive de la température et est restreinte aux limites mécaniques du thermocouple. On ne peut pas, par exemple, espérer caractériser les phénomènes de rupture dans le cadre de cette technique expérimentale.

Ce dernier paragraphe, qui sort un peu du cadre de cette thèse dévolue à la viscoélasticité, ne sera pas davantage développé dans ce mémoire. Le système constitutif thermomécanique complet DNLR y est simplement évoqué pour ouvrir le domaine d'utilisation possible vers des chargements plus complexes

V

Analyse et résolution de l'équation de transfert thermique

Sommaire

V.1	Simplification géométrique de l'équation de transfert thermique	128
V.2	Analyse numérique	133
V.2.1	Analyse des conditions aux limites	134
V.2.2	Validation des simplifications géométriques effectuées sur le modèle 3D	140
V.3	Modèle 1D	145
V.3.1	Résolution analytique de l'équation de la chaleur 1D	145
V.3.2	Analyse de la réponse temporelle en température	148
V.4	Conclusions	149

Ce chapitre porte sur l'étude du transfert thermique pour une éprouvette soumise à des sollicitations mécaniques. Cette étude est nécessaire pour un traitement ultérieur des signaux expérimentaux et dans l'optique d'une analyse inverse des paramètres mécaniques et thermiques associés à l'équation de la chaleur. Ce passage obligé a déjà été traité par Chrysochoos à plusieurs reprises [Chr 89], [Chr 95], [Chr 98], [Chr 00] dans un même souci de développer un modèle adapté au traitement des données de la mesure en température sur une éprouvette. Dans un premier temps, on justifie la simplification de l'équation tridimensionnelle du transfert thermique en une écriture unidimensionnelle basée sur les hypothèses de l'ailette. Une analyse numérique par le logiciel d'éléments finis FlexPDE® permet dans un second temps de vérifier la validité de cette dernière écriture pour caractériser le champ de température d'une éprouvette élancée. Dans un dernier temps, on propose deux techniques analytiques de résolution du transfert thermique 1D qu'on applique au cas particulier d'une déformation sinusoïdale imposée. Une discussion basée sur la solution en température ainsi obtenue permet ensuite de mettre en évidence l'influence des différentes contributions énergétiques (thermoélasticité et dissipation).

V.1 Simplification géométrique de l'équation de transfert thermique

Afin de permettre l'analyse des données expérimentales, il faut résoudre l'équation de diffusion de la chaleur pour une structure tridimensionnelle (modèle 3D). En choisissant de moyenner la température suivant l'épaisseur de l'éprouvette, on peut dans un premier temps ramener le problème 3D à un problème 2D. Un second moyennage suivant la largeur de l'éprouvette permet ensuite de se ramener à une équation unidimensionnelle de la diffusion de chaleur (modèle 1D). Le cas limite consiste enfin à moyenner la température suivant les trois directions de l'espace. On présente dans ce paragraphe les méthodes et les hypothèses sous-jacentes de réductions dimensionnelles de l'équation de transfert de chaleur. On montre ensuite l'intérêt de ces réductions en vue de l'analyse future des données expérimentales.

Modèle 3D

L'éprouvette est supposée parallélépipédique comme le montre la figure (V.1). (L, l, e) correspondent aux dimensions géométriques. On notera $\underline{x} = (x, y, z)$ les coordonnées eulériennes d'un point quelconque de l'éprouvette 3D considérée comme un milieu continu.

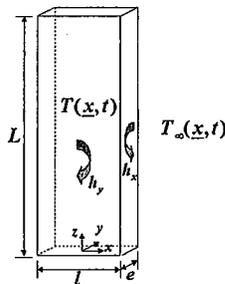


FIG. V.1: Schéma de l'éprouvette 3D

On suppose dans un premier temps que le maintien de l'éprouvette entre les mors de la machine correspond à une condition limite de type température imposée. Cette hypothèse sera vérifiée ultérieurement (§ V.2.1). On note $h_x = h_y$ les coefficients d'échange convectif avec l'air environnant.

Le terme "source de chaleur interne" défini précédemment dans le cas d'un VER est étendu au cas de l'éprouvette complète, autrement dit on suppose ce terme indépendant des variables d'espace. Il faut noter que cette hypothèse, classiquement acceptée en petites déformations, sera mise en défaut pour des déformations plus importantes donnant lieu à des concentrations de contrainte et conduisant à la rupture par exemple. L'hypothèse d'homogénéité spatiale est aussi appliquée pour la chaleur spécifique C , la masse volumique ρ et le coefficient de conduction isotrope λ . Il faut noter que la chaleur spécifique C_z^u défini précédemment s'écrit $C_z^u = \rho C$.

La température loin de l'éprouvette, T_∞ , est supposée constante. On suppose de plus que l'éprouvette est initialement à la même température que l'air environnant $T(\underline{x}, t = 0) = T_\infty$.

Moyennant ces hypothèses, la température, régie par l'équation :

$$\rho C \dot{T} = \lambda \Delta T + q \quad (V.1)$$

est alors soumise aux conditions limites en surface suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(-l/2, y, z, t)} = \frac{h_x}{\lambda} [T(-l/2, y, z, t) - T_\infty] \\ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(l/2, y, z, t)} = -\frac{h_x}{\lambda} [T(l/2, y, z, t) - T_\infty] \\ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x, -e/2, z, t)} = \frac{h_y}{\lambda} [T(x, -e/2, z, t) - T_\infty] \\ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x, e/2, z, t)} = -\frac{h_y}{\lambda} [T(x, e/2, z, t) - T_\infty] \\ T(x, y, 0, t) = T_\infty \\ T(x, y, L, t) = T_\infty \end{array} \right. \quad (V.2)$$

En notant $\theta(\underline{x}, t) = T(\underline{x}, t) - T_\infty$, la température est régie par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t}(\underline{x}, t) = \lambda \Delta \theta(\underline{x}, t) + q(t) \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{(\underline{x}, t)} = -h \theta(\underline{x}, t) \text{ sur les parois latérales} \\ \theta(\underline{x}_b, t) = 0 \text{ sur les bases de l'éprouvette} \\ \theta(\underline{x}, t = 0) = 0 \end{array} \right. \quad (V.3)$$

Passage au modèle 2D

Pour passer de l'équation tridimensionnel à un modèle 2D, on effectue une moyenne du champ de température sur l'épaisseur e de l'éprouvette. On note $\bar{\theta}$ l'écart de température moyenné selon y :

$$\bar{\theta}(x, z, t) = \frac{1}{e} \int_{-e/2}^{e/2} \theta(x, y, z, t) dy \quad (V.4)$$

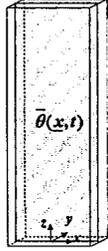


FIG. V.2: Représentation graphique de l'opération de moyenne de la température suivant l'axe y pour l'éprouvette 3D

Le terme "source de chaleur interne", dépendant uniquement du temps, reste inchangé : $\bar{q}(t) = q(t)$.

Dans cette opération de moyennage, les conditions limites sur les faces "avant" ($y = -e/2$) et "arrière" ($y = e/2$) s'écrivent :

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{(x, e/2, z, t)} &= -\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{(x, -e/2, z, t)} \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{(x, e/2, z, t)} &= -\frac{h_y}{e} \int_{-e/2}^{e/2} \theta(x, y, z, t) dy = -h_y \bar{\theta}(x, z, t) \end{aligned} \right. \quad (V.5)$$

La première hypothèse suppose la symétrie des pertes convectives tandis que la seconde exprime la continuité du flux de chaleur (V.2 d).

En intégrant l'équation de bilan d'énergie sur y , ces conditions aux limites disparaissent dans l'opération de moyennage linéaire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \int_{-e/2}^{e/2} \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}(x, y, z, t) dy &= \frac{1}{e} \left[\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, y, z, t) \right]_{y=-e/2}^{y=e/2} \\ &= \frac{1}{e} \left[\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, e/2, z, t) - \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, -e/2, z, t) \right] \\ &= \frac{1}{e} \left[-2 \frac{h_y}{e} \int_{-e/2}^{e/2} \theta(x, y, z, t) dy \right] \\ &= -\frac{2h_y}{e} \bar{\theta}(x, z, t) \end{aligned} \quad (V.6)$$

En intégrant l'équation (V.3) sur l'épaisseur et en posant $\underline{x} = (x, z)$, le transfert thermique bidimensionnel est régi par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}(\underline{x}, t) = -\frac{2h_y}{e} \bar{\theta}(\underline{x}, t) + \lambda \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2}(\underline{x}, t) + \lambda \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2}(\underline{x}, t) + q(t) \\ \lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \Big|_{(-l/2, z, t)} = h_x \theta(-l/2, z, t) \\ \lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \Big|_{(l/2, z, t)} = -h_x \theta(l/2, z, t) \\ \bar{\theta}(x, 0, t) = 0 \\ \bar{\theta}(x, L, t) = 0 \\ \bar{\theta}(\underline{x}, t = 0) = 0 \end{array} \right. \quad (V.7)$$

Passage au modèle 1D

On peut ensuite moyenner la température suivant la largeur de l'éprouvette. Le champ de température $\bar{\bar{\theta}}(z, t)$ est alors défini par :

$$\bar{\bar{\theta}}(z, t) = \frac{1}{el} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-e/2}^{e/2} \theta(x, y, z, t) dx dy \quad (V.8)$$

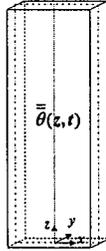


FIG. V.3: Représentation graphique de l'opération de moyenne de la température suivant l'axe x et y pour l'éprouvette 3D

Pour les conditions limites sur les faces latérales ($x = -l/2$ et $x = l/2$), on suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \Big|_{(l/2, z, t)} = -\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \Big|_{(-l/2, z, t)} \\ \lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \Big|_{(l/2, z, t)} = -\frac{h_x}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \bar{\theta}(x, z, t) dx \end{array} \right. \quad (V.9)$$

L'intégration de l'équation (V.3) conduit (en supposant $h_x = h_y = h$) à l'équation de la chaleur unidimensionnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}(z, t) = -\frac{2h(e+l)}{el} \bar{\theta}(z, t) + \lambda \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2}(z, t) + q(t) \\ \bar{\theta}(0, t) = 0 \\ \bar{\theta}(L, t) = 0 \\ \bar{\theta}(z, t = 0) = 0 \end{array} \right. \quad (V.10)$$

Passage au modèle 0D

Le cas limite consiste à moyenner la température suivant toutes les directions afin d'obtenir une température ponctuelle :

$$\bar{\bar{\theta}}(t) = \frac{1}{elL} \int_0^L \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-e/2}^{e/2} \theta(x, y, z, t) dx dy dz \quad (V.11)$$

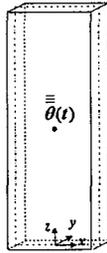


FIG. V.4: Représentation graphique de l'opération de moyenne de la température suivant les trois directions de l'espace pour l'éprouvette 3D

La température de l'éprouvette, fonction uniquement du temps, est régie par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial t}(t) = -\left[\frac{2h(e+l)}{el} + \frac{\lambda}{L^2} \right] \bar{\bar{\theta}}(t) + q(t) \\ \bar{\bar{\theta}}(t = 0) = 0 \end{array} \right. \quad (V.12)$$

soit encore en posant $\frac{1}{\tau_{th}} = \frac{2h(e+l)}{\rho C el} + \frac{\lambda}{\rho C L^2}$ et $Q(t) = \frac{q(t)}{\rho C}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial t}(t) = -\frac{1}{\tau_{th}} \bar{\bar{\theta}}(t) + Q(t) \\ \bar{\bar{\theta}}(t = 0) = 0 \end{array} \right. \quad (V.13)$$

τ_{th} joue le rôle d'une constante de temps de fuite thermique caractéristique du système.

Intérêt et perspectives de ces différentes réductions

Ces réductions géométriques successives du transfert de chaleur permettent de simplifier l'analyse des données thermiques expérimentales.

En effet, une caméra infrarouge mesure uniquement un champ de température de surface d'une éprouvette. Dans le cas de plaques minces, on peut espérer caractériser ce champ de température grâce au modèle plan thermique 2D (V.7). Pour des éprouvettes élancées, l'équation unidimensionnelle (V.10) devrait cette fois suffire pour caractériser l'évolution de température mesurée. Cette évolution peut être aussi obtenue expérimentalement en moyennant les colonnes de l'image thermique, obtenue grâce à la caméra, sur la largeur de l'éprouvette. Cette opération est d'autant plus intéressante qu'elle permet une réduction importante du bruit propre à la mesure. Le modèle 0D correspondant à l'écriture locale du transfert thermique (V.13) devrait permettre de caractériser d'une part l'évolution du champ de température mesurée par la caméra et moyennée suivant les deux dimensions de la surface de l'éprouvette et d'autre part l'évolution de la température mesurée sur quelques pixels de la surface par un mono-détecteur.

Le paragraphe suivant, basé sur une étude numérique du transfert thermique dans une éprouvette 3D, va permettre de vérifier la validité des hypothèses précédentes sur le cas particulier d'une éprouvette élancée en polymère soumise à une déformation sinusoïdale.

V.2 Analyse numérique

L'objectif de ce paragraphe est :

1. de simuler les conditions réelles en température qui s'exercent au niveau de l'interface mors-éprouvette (blocs "massifs" (grande inertie thermique) serrés sur l'échantillon (faible résistance de contact)) afin de pouvoir déterminer quelles sont les conditions aux limites les plus réalistes pour un calcul de transfert thermique dans l'éprouvette seule (température imposée ou condition mixte en flux).
2. de vérifier numériquement la possibilité d'utiliser la loi de transfert thermique unidimensionnelle pour décrire l'évolution du champ de température pour des éprouvettes élancées.

On étudie le comportement thermique d'une éprouvette en polymère soumise à des déformations sinusoïdales. Les sources de chaleur internes q s'écrivent, d'après la relation (IV.44) :

$$q(t) = q_1 + q_2 \sin 2\omega t + q_3 \cos 2\omega t + q_4 \cos \omega t \quad (\text{V.14})$$

où les paramètres q_1 , q_2 , q_3 et q_4 sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \epsilon_0^2 \omega^2 (E^u - E^r) \sum_j \frac{p_0^j \tau_j}{2(1 + (\tau_j \omega)^2)} \\ q_2 = \epsilon_0^2 \omega^2 (E^u - E^r) \sum_j \frac{p_0^j \tau_j (1 - (\tau_j \omega)^2)}{2(1 + (\tau_j \omega)^2)^2} \\ q_3 = \epsilon_0^2 \omega^2 (E^u - E^r) \sum_j \frac{p_0^j \tau_j^2 \omega}{(1 + (\tau_j \omega)^2)^2} \\ q_4 = -\alpha^u E^u T_0 \omega \epsilon_0 \end{array} \right. \quad (V.15)$$

On choisit de travailler avec une éprouvette en polymère plutôt qu'en acier car c'est un matériau plus visqueux donc associé à une dissipation plus importante. Ayant une diffusivité ($a = \lambda/(\rho C)$) plus faible, on aura des gradients de température plus importants au sein de l'éprouvette. Il nous paraît plus important d'étudier ce cas dans la perspective d'utilisation de la caméra infrarouge pour tester les différents niveaux de modèles présentés précédemment. Dans le cas d'un acier (bon conducteur), si l'on s'attend à un effet plus décisif de la modélisation des conditions limites où les mors constituent alors deux importants puits de chaleur [Chr 98], on aura par contre des gradients moins marqués sur l'éprouvette.

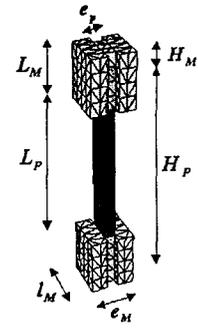
V.2.1 Analyse des conditions aux limites

V.2.1.1 Modèle 3D : Simulation de l'ensemble éprouvette + mors

- Modélisation

On modélise numériquement un ensemble mors + éprouvette à l'aide d'un solveur d'équations aux dérivées partielles basé sur la méthode des éléments finis : FlexPDE[®]. L'éprouvette est supposée être en PEHD (Poly-Ethylène Haute Densité) et les mors en acier inoxydable 316L. Les caractéristiques thermiques des matériaux et les dimensions géométriques de l'éprouvette et des mors sont données dans le tableau ci-dessous. L'éprouvette de longueur totale H_P est serrée entre deux mors de longueur L_M formant une espèce de sabot. La longueur utile de l'éprouvette a alors pour valeur $L_P = H_P - 2(L_M - H_M)$.

	Polymère	Acier
L (mm)	50	20
H (mm)	80	5
l (mm)	10	16
e (mm)	4	8
ρ ($kg.m^{-3}$)	960	7900
C_v ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)	1900	470
λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	0.45	16
h ($W.m.K^{-1}$)	12	12
T_∞ (K)	300	300



TAB. V.1: Caractéristiques géométriques et thermiques **FIG. V.5:** Représentation de l'éprouvette serrée entre les mors

Les équations utilisées pour décrire le comportement thermique de chaque élément (l'éprouvette et les 2 mors) sont décrites précédemment (V.3). Concernant la source de chaleur interne (V.14), deux cas sont à différencier :

- **Partie "utile" de l'éprouvette en PEHD** (longueur L_p)

Afin de simplifier les calculs numériques et le temps nécessaire à la résolution numérique, on néglige les effets thermoélastiques ($\alpha^u = 0$) et on ne prend en compte que la partie continue du terme dissipatif q_1 (V.15) calculé avec les caractéristiques mécaniques et les conditions expérimentales suivantes :

E^u (GPa)	1
E^r (GPa)	0.2
τ_{max} (s)	100
ϵ_0	0.01
ω	2π

TAB. V.2: Conditions de simulations du cas test

Les deux hypothèses précédentes impliquent implicitement de travailler avec la température moyennée sur chaque cycle d'excitation c'est à dire en négligeant les variations sinusoïdales de la température dues à la déformation harmonique imposée.

- **Les mors**

La partie de l'éprouvette serrée entre les mors ainsi que les mors eux-mêmes ne subissent pas de déformations dues au chargement sinusoïdal imposé (hormis l'effort de serrage qui intervient avant le début de l'expérience) ce qui induit implicitement une source de chaleur interne nulle.

Les deux structures mors et éprouvette sont liées entre elles par les conditions à l'interface :

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_P = T_M & \text{continuité en température} \\ \lambda_P \frac{\partial T_P}{\partial n} = \lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial n} & \text{continuité du flux} \end{array} \right. \quad (V.16)$$

auxquelles s'ajoutent les conditions limites concernant la partie extérieure des mors au contact de l'air environnant :

$$\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial n} = -h(T_M - T_\infty) \quad (V.17)$$

- Résultats numériques

L'évolution temporelle des températures en trois points particuliers de l'axe ($x = y = 0$ et $z = L_M, L_M + L_p/4, L_M + L_p/2$)¹ de l'éprouvette sont reportées ci-dessous :

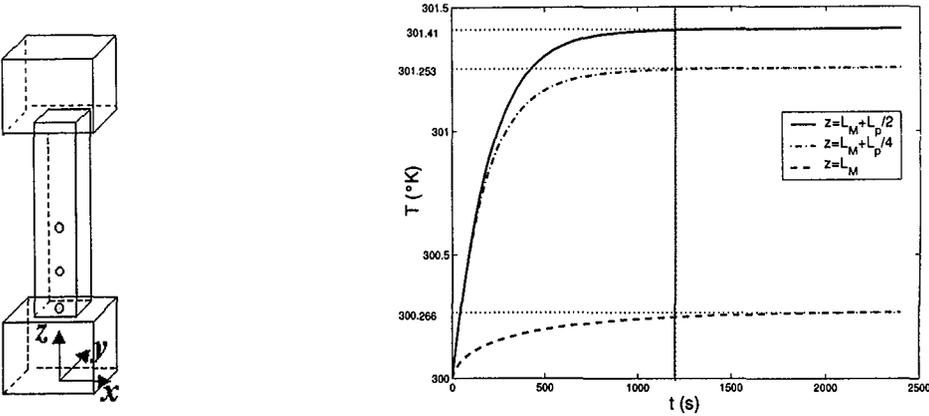


FIG. V.6: Thermogramme en 3 points particuliers de l'éprouvette ($x = y = 0$ et $z = L_M, L_M + L_p/4, L_M + L_p/2$)

La température au sein de l'éprouvette (en $z = L_M + L_p/4$ et $L_M + L_p/2$) croît de moins de 2 Kelvin jusqu'à atteindre une asymptote. A partir de $t = t_e = 1200$ s, la température est stabilisée. Le régime est dit établi : l'équilibre thermique entre les pertes convectives et la dissipation mécanique intrinsèque est atteint.

La température à l'interface atteint sa valeur maximale plus tardivement. Cet écart est lié à un temps de fuite thermique différent vu les différences de capacités thermiques des matériaux.

A $t = 1200$ s, le régime n'est donc pas réellement établi sur l'ensemble du système (éprouvette + mors). Cependant les variations de température à l'intérieur des mors sont suffisamment faibles pour avoir une incidence négligeable sur l'évolution de la température au sein de l'éprouvette dite "utile".

FlexPDE® permet de connaître la carte des isovaleurs en température dans n'importe quel plan et ceci pour un temps fixé. D'après les conclusions précédentes, on choisit de tracer toutes les cartes d'isovaleurs à $t = t_e$ afin de s'affranchir de toute dépendance temporelle.

¹L'origine du repère est fixée au centre et en bas du socle du mors inférieur. L'axe x est orienté suivant la largeur de l'éprouvette, l'axe y suivant son épaisseur et l'axe z suivant sa hauteur

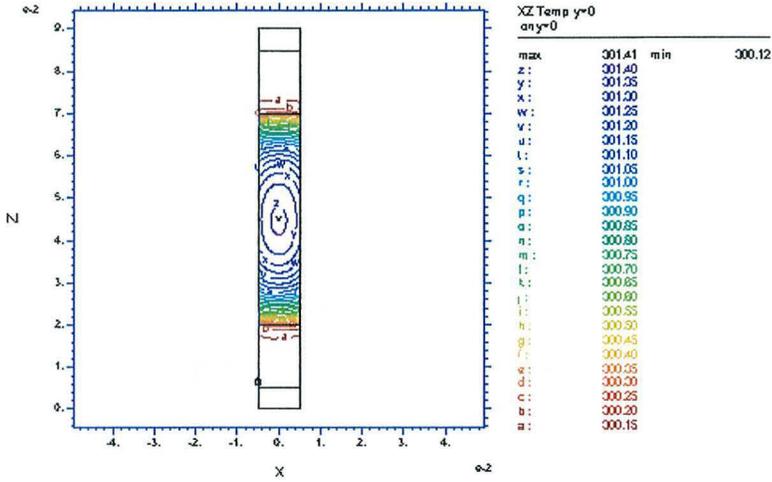


FIG. V.7: Isothermes du modèle 3D complet dans le plan (Oxz) en $t = t_e$

Les lignes d'isovaleurs sont des ellipses centrées sur le milieu de l'éprouvette et dont le grand axe est confondu avec l'axe (Oz). Le rayon de courbure sur l'axe (Oz) augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre jusqu'à tendre vers l'infini à l'interface pour former des lignes parallèles à l'axe (Ox).

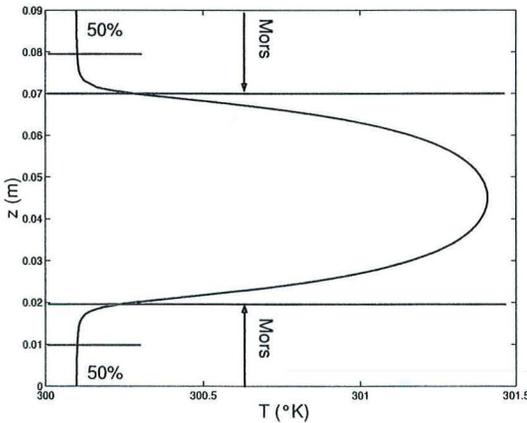


FIG. V.8: Évolution de la température suivant l'axe (Oz) en $x = 0$ à $t = t_e$

L'évolution de la température le long de l'axe des z (fig. V.8) met en évidence la différence "importante" de température entre l'interface et le centre de l'éprouvette ($1.3^\circ K$). Cette différence est d'autant plus remarquable que l'interface est soumise à de faibles variations temporelles ($0.1^\circ K$ sur 1200 s). On peut aussi noter que sur une zone de 50 % de leur longueur, les mors sont soumis à la même température.

Modèle 3D sans mors avec flux imposé

On modélise l'éprouvette sans les mors en imposant une condition de flux nul ($\partial T/\partial n = 0$) en $z=0$ et L (l'origine du repère étant dorénavant placée au pied de l'éprouvette) ; la carte des isovaleurs en température dans le plan $(0xz)$ a la forme suivante :

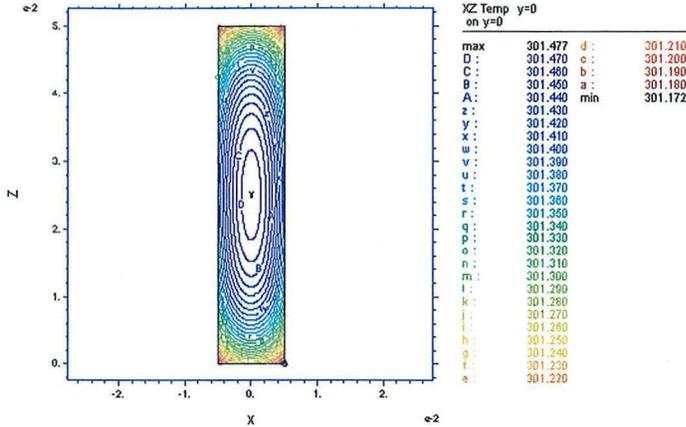


FIG. V.9: Isothermes du modèle 3D dans le plan (Oxz) à $t = t_e$ avec des conditions de flux nul au niveaux des mors

Les lignes d'isovaleurs sont des ellipses toujours complètes (contrairement au modèle 3D avec mors) centrées sur le milieu de l'éprouvette et dont le grand axe est confondu avec l'axe des z . La température maximale est proche de celle calculée pour le modèle précédent (4.5%) cependant la température minimale est beaucoup plus importante que précédemment (80%), ce qui induit un écart min-max trop important comparativement au modèle 3D complet.

Modèle 3D sans mors avec Température imposée

On modélise l'éprouvette sans les mors en imposant la température ($T = T_\infty$) en $z=0$ et L ; la carte des isovaleurs en température dans le plan $(0xz)$ a la forme suivante :

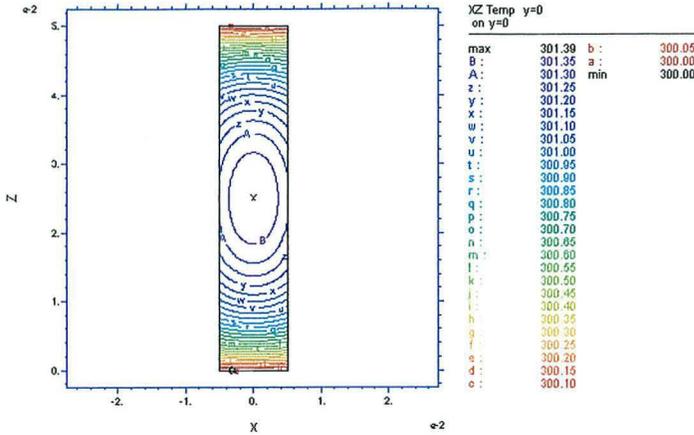


FIG. V.10: Isothermes du modèle 3D dans le plan (Oxz) à $t = t_e$ avec des conditions de type température imposée au niveau des mors

Les lignes d'isovaleurs sont des ellipses ou des bouts d'ellipse semblables à celles obtenues avec le modèle 3D complet. La température maximale est inférieure de 1.4% à celle calculée avec le modèle 3D si bien que les écarts min-max sont relativement comparables (10%).

Conclusions

En comparant les figures (V.7), (V.9), (V.10) l'hypothèse d'une condition aux limites de type température imposée semble mieux à même de représenter les conditions réelles au niveau des mors de la machine d'essai, étant donnés les écarts de température observés (valeurs minimales et maximales) ainsi que la distribution des lignes de niveau en température. On peut de plus noter que cette distribution des lignes de niveau a été confirmée par les images thermiques obtenues expérimentalement par la caméra infrarouge et présentées ultérieurement dans ce mémoire (fig. VII.1). Afin de valider définitivement ces observations, la figure (V.11) propose une comparaison de l'évolution de la température à un temps fixé le long de l'axe des z pour le modèle 3D complet et le modèle 3D sans mors avec des conditions aux limite de type température imposée :

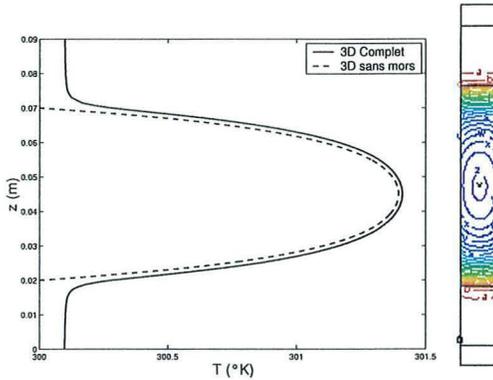


FIG. V.11: Comparaison de la température axiale (Oz) pour le modèle 3D complet et pour le modèle 3D sans mors avec température imposée aux bords ($z = 0$ et $z = L$) à $t = t_e$

Mis à part à proximité de l'interface mors-éprouvette, les deux modèles conduisent à des évolutions en température comparables.

V.2.2 Validation des simplifications géométriques effectuées sur le modèle 3D

Le but de ce sous-paragraphe est de vérifier l'opportunité d'utiliser des modélisations de transfert thermique 2D et 1D (§ V.1) pour décrire l'évolution réelle du champ de température dans une éprouvette tridimensionnelle. On compare dans un premier temps l'évolution de la température issue du modèle 3D et moyennée selon l'épaisseur avec celle issue du modèle plan 2D. Dans un second temps, on compare l'évolution de la température issue du modèle 2D moyennée suivant la largeur de l'éprouvette avec celle induite par le modèle 1D. On montre de plus que le coefficient d'échange h permet à lui seul d'endosser les écarts entre ces différents modèles.

Réduction du modèle 3D au modèle 2D

Le logiciel FlexPDE® ne permet pas de calculer les valeurs moyennes linéiques en température dans le cas d'une structure 3D. Afin de contourner cette difficulté, on trace le profil de température suivant l'axe (Oy) pour différentes valeurs de z et on calcule la moyenne associée à chaque cote :

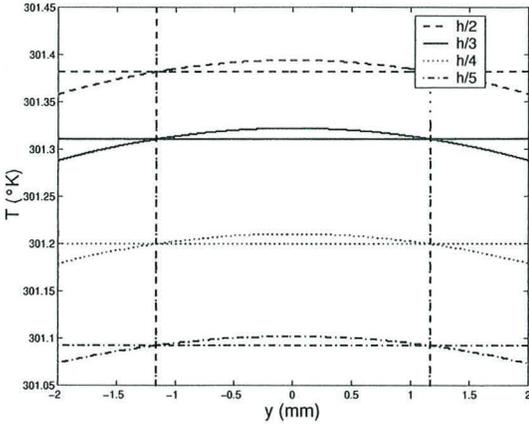


FIG. V.12: Profil de température suivant (Oy) et température moyenne pour différentes cotes z à $t = t_e$

D'après la figure ci-dessus, la température 3D moyennée suivant l'axe y correspond, en première approximation, à la température réelle du plan $y = y_m = \pm 1.165 \text{ mm}$. On compare donc les lignes isothermes du modèle 2D avec celles du modèle 3D dans le plan $y = y_m$:

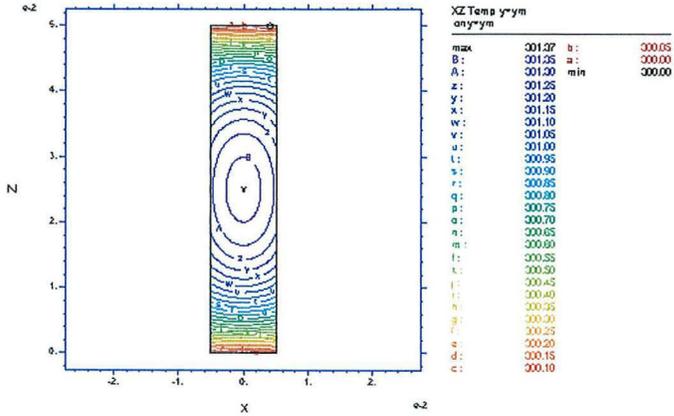


FIG. V.13: Modèle 3D - Isothermes dans le plan $y = y_m$ à $t = t_e$

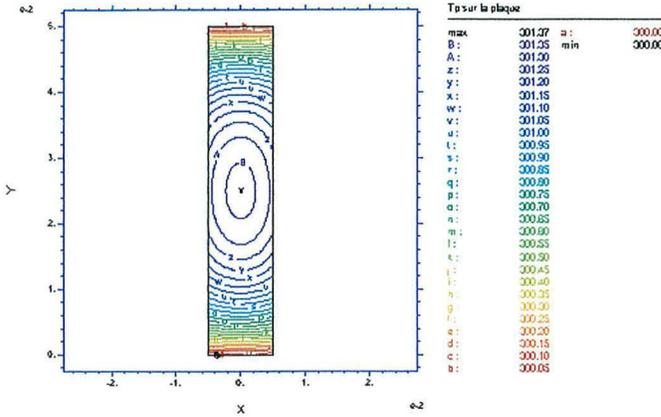


FIG. V.14: Modèle 2D - Isothermes à $t = t_e$

Les distributions des isothermes et les écarts de températures sur les deux schémas (V.13) et (V.14)² sont similaires. Afin de compléter cette étude, on compare l'évolution temporelle de la température 3D moyennée (en $y = y_m$) avec celle de la température 2D à deux hauteurs différentes ($z = L/2$ et $z = L/4$) en $x = 0$:

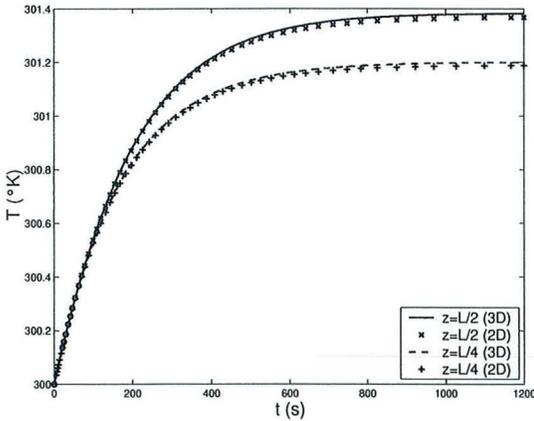


FIG. V.15: Thermogrammes associés au modèle 3D en $(0, y_m, z)$ et au modèle 2D en $(0, z)$ pour deux z différents

Les courbes relatives à chaque modèle ne se superposent pas exactement. L'écart relatif est cependant relativement faible ($< 1\%$). Le modèle simplifié 2D est donc parfaitement à même de reproduire le comportement complexe du modèle 3D moyennant un changement de valeur du coefficient d'échange h . La superposition complète de deux modèles peut être effectuée en changeant faiblement le paramètre h (11.84 W.m.K^{-1}) dans le modèle 2D :

²Les simulations FlexPDE® 2D sont obligatoirement tracées dans un plan référencé $(OX_p Y_p)$. Tous les graphiques issus du calcul 2D doivent donc être transposés dans le plan (Oxz) en posant $X_p = x$ et $Y_p = z$

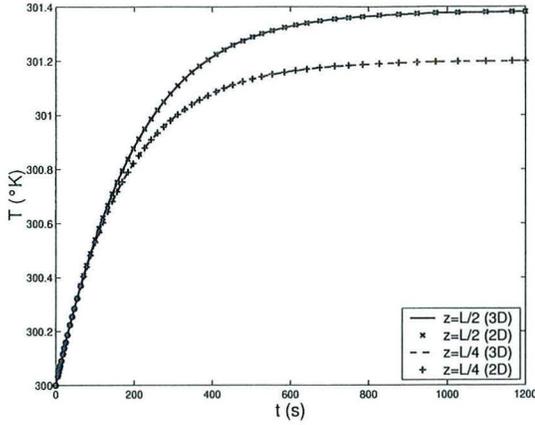


FIG. V.16: Thermogrammes associés au modèle 3D en $(0, y_m, z)$ et au modèle 2D, corrigés avec $h=11.84 \text{ W.m.K}^{-1}$, en $(0, z)$ pour deux z différents

Le paramètre h permet, à lui seul, "d'endosser" les effets 3D comme la diffusion suivant y dans le modèle plan 2D.

Réduction du modèle 2D au modèle 1D

Le profil des isovaleurs en température associé à l'écriture 1D de l'équation de la chaleur et calculé à $t = t_e$ est reporté ci-dessous :

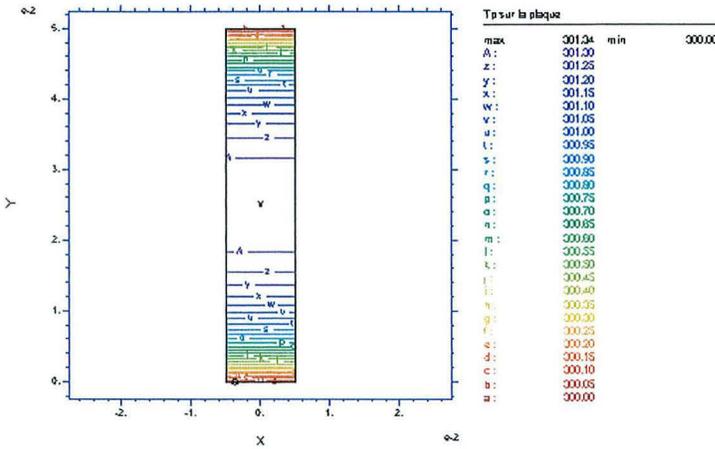


FIG. V.17: Isothermes associées au modèle 1D à $t = t_e$

La différence principale entre le modèle 1D (fig. V.17) et le modèle 2D (fig. V.14) se situe bien évidemment, puisqu'on néglige la conduction suivant l'axe x , dans la partie centrale de l'éprouvette au niveau des bords en $x = \pm e/2$.

On étudie ensuite l'évolution temporelle de la température 2D moyennée selon l'axe (Oy)

avec la température issue de la modélisation 1D en 2 points particuliers ($z = L/2$ et $z = L/4$) :

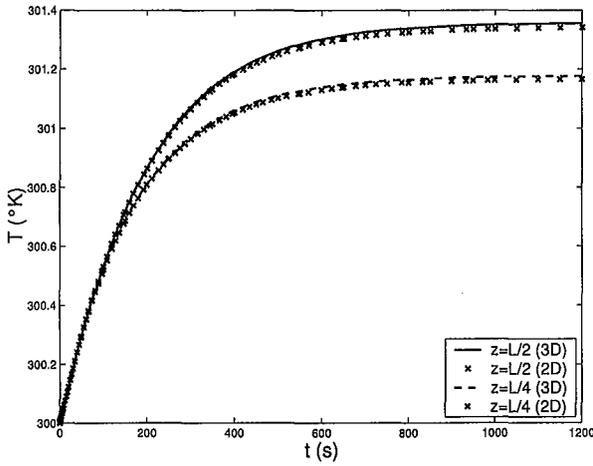


FIG. V.18: Thermogrammes associés aux modèles 2D et 1D à deux hauteurs différentes ($z = L/2$ et $z = L/4$)

L'écart relatif entre les deux courbes est relativement faible ($< 1\%$). L'équivalence entre les deux modèles peut être obtenu, là aussi, par le seul changement de la valeur du coefficient d'échange h . La figure ci-dessous a été obtenue avec $h=11.84 \text{ W.m.K}^{-1}$ pour le modèle 2D et $h=11.7 \text{ W.m.K}^{-1}$ pour le modèle 1D :

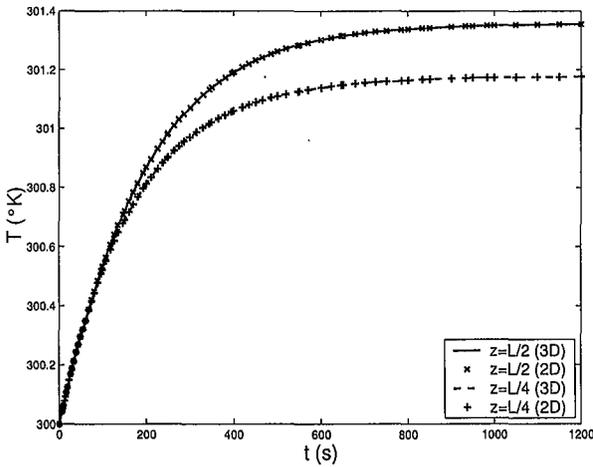


FIG. V.19: Thermogrammes associés aux modèles 2D et 1D corrigés à deux hauteurs différentes ($z = L/2$ et $z = L/4$)

V.2.2.3 Conclusion

Cette étude permet donc de valider l'utilisation de la loi de transfert thermique 1D pour caractériser l'évolution de la température dans une éprouvette. Les effets 2D et 3D sur le champ de température moyenné selon les deux directions x et y sont complètement "rat-trapés" par une faible correction de la valeur numérique du coefficient d'échange h . Cette réduction dimensionnelle du problème de transfert de chaleur est très avantageuse car elle permet une simplification importante de l'analyse des données thermiques expérimentales et de l'identification des paramètres mécaniques et thermiques associés.

V.3 Modèle 1D

On détermine dans ce paragraphe la solution en température de l'équation 1D du transfert thermique dans le cas particulier d'une déformation sinusoïdale imposée. L'originalité de cette étude réside dans l'utilisation de deux puissantes techniques de résolution analytique utilisées, à notre connaissance, pour la première fois en mécanique des solides. On s'attache ensuite à mettre en évidence l'influence des différentes contributions énergétiques (thermoélasticité, dissipation) associées à l'équation du transfert de chaleur.

V.3.1 Résolution analytique de l'équation de la chaleur 1D

La température, pour le modèle 1D, est régie par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t}(z, t) = -\frac{2h(e+l)}{el} \theta(z, t) + \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}(z, t) + q(t) \\ \theta(0, t) = 0 \\ \theta(L, t) = 0 \\ \theta(z, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (V.18)$$

En définissant la diffusivité $a = \lambda/\rho C$ et la constante de temps de fuite $\tau = (\rho C e l)/(2h(e+l))$, l'équation de propagation de la chaleur s'écrit encore :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\theta}{a\tau} + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (V.19)$$

D'après le théorème de Duhamel, la solution de cette équation peut être obtenue à partir de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2} - \frac{\theta'}{a\tau} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta'}{\partial t} \quad (V.20)$$

où

$$\theta(z, t) = \int_{u=0}^t q(u) \frac{\partial \theta'}{\partial t}(z, t-u) du \quad (V.21)$$

En posant $\kappa^2 = \frac{1}{a\tau}$ et

$$\theta'(z, t) = W'(z, t) \exp(-\kappa^2 at) \quad (V.22)$$

l'équation (V.20) devient :

$$\frac{\partial^2 W'}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda} \exp(\kappa^2 at) = \frac{1}{a} \frac{\partial W'}{\partial t} \quad (\text{V.23})$$

Toujours d'après le théorème de Duhamel, la solution de cette équation se déduira de la solution de l'équation différentielle auxiliaire suivante :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (\text{V.24})$$

où

$$W'(z, t) = \int_{u=0}^t \exp(\kappa^2 au) \frac{\partial W}{\partial t}(z, t-u) du \quad (\text{V.25})$$

Pour résoudre l'équation (V.24), on décompose W en deux fonctions :

$$W(z, t) = T_p(z) + T_t(z, t) \quad (\text{V.26})$$

avec T_p solution du problème permanent et T_t solution du problème transitoire dont les conditions initiales seront modifiées.

T_p est régie par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T_p}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda} = 0 \\ T_p(z=0) = T_p(z=L) = 0 \end{cases} \quad (\text{V.27})$$

et s'écrit donc :

$$T_p(z) = -\frac{z}{2\lambda}(z-L) \quad (\text{V.28})$$

T_t est régie par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T_t}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T_t}{\partial t} \\ T_t(z=0, t) = T_t(z=L, t) = 0 \\ T_t(z, t=0) = 0 - T_p(z) = \frac{z}{2\lambda}(z-L) = F(z) \end{cases} \quad (\text{V.29})$$

La résolution de ce système, basée sur la technique des séparations de variables, conduit à la solution suivante :

$$T_t(z) = -\frac{4}{\lambda L} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-a\beta_k^2 t) \frac{\sin(\beta_k z)}{\beta_k^3} \quad \text{avec} \quad \beta_k = \frac{(2k+1)\pi}{L} \quad (\text{V.30})$$

En additionnant (V.28) et (V.30), la solution finale de l'équation (V.24) s'écrit :

$$W(z, t) = -\frac{z}{2\lambda}(z-L) - \frac{4}{\lambda L} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-a\beta_k^2 t) \frac{\sin(\beta_k z)}{\beta_k^3} \quad (\text{V.31})$$

Connaissant l'expression de $W(z, t)$, on peut remonter successivement à la solution de l'équation initiale (V.18).

D'après (V.31), on remonte avec (V.25) à l'expression de $W'(z, t)$:

$$W'(z, t) = \frac{4}{\lambda L} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\beta_k z)}{\beta_k (\beta_k^2 + \kappa^2)} (\exp(-a\kappa^2 t) - \exp(-a\beta_k^2 t)) \quad (\text{V.32})$$

et avec (V.22) on remonte à l'expression de $\theta'(z, t)$:

$$\theta'(z, t) = \frac{4}{\lambda L} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\beta_k z)}{\beta_k (\beta_k^2 + \kappa^2)} (1 - \exp(-a(\kappa^2 + \beta_k^2)t)) \quad (\text{V.33})$$

Connaissant l'expression de la "source de chaleur interne" proprement mécanique q (V.14)

$$q(t) = q_1 + q_2 \cos(2\omega t) + q_3 \sin(2\omega t) + q_4 \cos(\omega t) \quad (\text{V.34})$$

et celle de $\theta'(z, t)$, on peut alors déterminer l'expression analytique de $\theta(z, t)$ solution du système (V.18) à partir de (V.21) :

$$\theta(z, t) = \theta_1(z, t) + \theta_2(z, t) + \theta_3(z, t) + \theta_4(z, t) \quad (\text{V.35})$$

$$\left[\begin{aligned} \theta_1(z, t) &= \frac{4q_1}{\rho C L} \sum_k \left(\frac{1 - \exp(-\gamma_k t)}{\gamma_k} \right) \frac{\sin(\beta_k z)}{\beta_k} \\ \theta_2(z, t) &= \frac{4q_2}{\rho C L} \sum_k \left(\frac{\gamma_k \cos(2\omega t) + 2\omega \sin(2\omega t) - \gamma_k \exp(-\gamma_k t)}{\gamma_k^2 + 4\omega^2} \right) \frac{\sin(\beta_k z)}{\beta_k} \\ \theta_3(z, t) &= \frac{4q_3}{\rho C L} \sum_k \left(\frac{\gamma_k \sin(2\omega t) - 2\omega \cos(2\omega t) + 2\omega \exp(-\gamma_k t)}{\gamma_k^2 + 4\omega^2} \right) \frac{\sin(\beta_k z)}{\beta_k} \\ \theta_4(z, t) &= \frac{4q_4}{\rho C L} \sum_k \left(\frac{\gamma_k \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) - \gamma_k \exp(-\gamma_k t)}{\gamma_k^2 + \omega^2} \right) \frac{\sin(\beta_k z)}{\beta_k} \end{aligned} \right. \quad \text{avec } \gamma_k = a(\kappa^2 + \beta_k^2) \quad (\text{V.36})$$

Une autre technique de résolution basée sur la transformation intégrale de Laplace de l'équation de transfert thermique unidimensionnelle (V.19) est présentée en annexe E. Elle conduit à la solution complexe suivante :

$$\bar{\theta}(z, s) = \bar{q}(s) \frac{a\tau}{\lambda(1 + \tau s)} \left[1 + \cosh(r_0 z) - \coth\left(\frac{r_0 L}{2}\right) \sinh(r_0 z) \right] \quad \text{avec } r_0 = \sqrt{\frac{1 + \tau s}{a\tau}} \quad (\text{V.37})$$

L'utilisation d'algorithmes numériques classiques de retour en temps ont permis de vérifier l'équivalence entre les deux solutions précédentes (V.36) et (V.37).

On a ensuite vérifié la validité de ces solutions en les comparant avec la solution numérique calculée par FlexPDE® (courbes non présentées dans ce mémoire). La solution analytique programmée sur Matlab a l'avantage de nécessiter un temps de calcul jusqu'à 1500 fois moins long que le calcul numérique effectué sur FlexPDE®. Ce gain de temps est appréciable en vue du problème inverse qui sera mis en place ultérieurement pour l'identification des paramètres mécaniques et thermiques. Les méthodes de résolution par transformations

intégrales (type Laplace) peu utilisées en Mécaniques des Solides, souvent confrontées au domaine des fortes non-linéarités, sont ici, dans le cadre linéaire simplificateur que nous avons retenu, bien adaptées, surtout avec la perspective du problème inverse d'estimation de paramètres associés à l'équation de la chaleur, ce qui explique notre choix de les avoir utilisées ici.

V.3.2 Analyse de la réponse temporelle en température

On étudie, dans ce paragraphe, l'évolution temporelle de la température 1D déterminée précédemment (V.36) afin de mesurer l'influence des différents termes de la source de chaleur $q(t)$. A une cote z fixée ($z = z_0$), la température s'écrit de manière générique :

$$\theta(z_0, t) = \sum_k A_k(1 - \exp(-\gamma_k t)) + \sum_k B_k \exp(-\gamma_k t) + C \sin(2\omega t + \varphi_C) + D \sin(\omega t + \varphi_D) \quad (\text{V.38})$$

avec

$$\left[\begin{array}{ll} A_k = q_1 f(a, \tau) & B_k = f(q_2, q_3, q_4, a, \tau) \\ (C, \varphi_C) = f(q_2, q_3, a, \tau) & (D, \varphi_D) = f(q_4, a, \tau) \end{array} \right. \quad (\text{V.39})$$

La réponse en température peut donc se décomposer mathématiquement en 4 termes bien distincts :

- $\sum_k A_k(1 - \exp(-\gamma_k t))$ est proportionnel au terme constant de la dissipation q_1 . Ce terme correspond à la solution moyennée sur un cycle de l'équation de la chaleur avec la source de chaleur complète (V.34) ou de manière équivalente, comme pour les simulations numériques précédentes, à la solution de l'équation de la chaleur avec une source de chaleur constante (q_1). L'évolution de la température a une allure de type exponentielle paramétrée par une constante de temps fonction des γ_k eux même fonction de a et de τ . Son évolution peut être observée sur les résultats des simulations numériques présentés par exemple sur la figure (V.18). La stabilisation en température est caractéristique de l'équilibre thermique entre les pertes convectives et la dissipation moyenne.
- $\sum_k B_k \exp(-\gamma_k t)$ dépend à la fois de q_2 et q_3 et q_4 . Ce terme est issu de la condition initiale en température.
- $C \sin(2\omega t + \varphi_C)$ dépend de q_2 et q_3 , coefficients de la dissipation mécanique intrinsèque. La dissipation induit donc une réponse sinusoïdale en température autour de son évolution moyenne de fréquence double comparativement à la fréquence d'excitation mécanique imposée.
- $D \sin(\omega t + \varphi_D)$ est proportionnel au paramètre thermoélastique q_4 . La thermoélasticité induit donc une réponse en température sinusoïdale autour de son évolution moyenne en opposition de phase ($q_4 \leq 0$ d'après l'équation V.15) et de même fréquence que l'excitation imposée.

Ces deux derniers termes rendent compte de la compétition entre la thermoélasticité qui induit une oscillation de la température de même fréquence que la fréquence d'excitation et la dissipation qui induit une oscillation de fréquence double.

L'évolution temporelle de la température (en $z = L/2$) pour une éprouvette en PEHD avec les paramètres mécaniques et thermiques fixés précédemment (tab.V.1 et tab. V.2) est reportée ci-dessous :

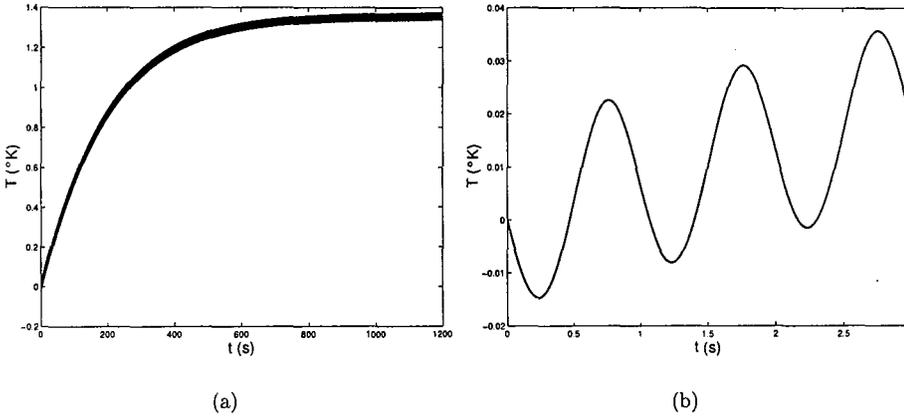


FIG. V.20: (a) - Évolution de la température à $z = L/2$ - eq. (V.36) ($a^u = 1 \text{ GPa}$, $E^r = 0.2 \text{ GPa}$, $\tau_{max} = 100 \text{ s}$, $\alpha^u = 1e - 5 \text{ K}^{-1}$, $\alpha^r = 0 \text{ K}^{-1}$, $\epsilon_0 = 0.01$ et $\omega = 2\pi$). (b) - Zoom sur les trois premières secondes

La figure (V.20.a.) met en évidence, compte tenu de la fréquence du signal observé, la prépondérance de l'effet thermoélastique sur l'effet de la dissipation pour le caractère oscillatoire de la température. Cette prédominance se caractérise, en plus, par l'opposition de phase du signal en température par rapport au signal mécanique imposé ; lorsque l'on tire sur le matériau, il se refroidit et lorsqu'on le comprime, il s'échauffe.

Depuis ces dix dernières années, de nombreux chercheurs [Luo 92a], [Bre 94], [Kra 99] se sont penchés sur l'apport de l'analyse de Fourier classique du thermosignal expérimental pour différencier et caractériser les sources thermo-élastiques des sources dissipatives. D'après l'étude précédente, la démodulation en fréquence de ce signal devrait effectivement permettre de caractériser pour la fréquence nulle le coefficient q_1 , pour le fondamental (fréquence d'excitation) le coefficient thermoélastique q_4 et pour l'harmonique n°2 les coefficients q_2 et q_3 .

V.4 Conclusions

Dans un premier temps, on a montré que l'équation unidimensionnelle de la chaleur était suffisante pour caractériser le transfert thermique associée à une éprouvette élançée.

Dans un second temps, en s'appuyant sur le cas particulier d'une déformation sinusoïdale imposée, deux techniques de résolution de l'équation de transfert unidimensionnel, originales pour la mécanique des solides, ont été proposées.

L'écriture de la loi de comportement thermique est donc désormais complètement opérationnelle. Quelle que soit la sollicitation mécanique imposée, la stratégie DNLR permet de calculer la dissipation associée (Chap. IV) et de caractériser l'évolution de la température induite au sein de l'éprouvette.

VI

Analyse du régime transitoire propre à la conduction de chaleur dans un solide

Sommaire

VI.1	Thermodynamique Classique	152
VI.1.1	Équation de la chaleur	152
VI.1.2	Écriture de l'entropie	153
VI.2	Approche de Cattaneo-Vernotte	154
VI.3	Thermodynamique Irréversible Étendue	157
VI.3.1	Loi d'évolution de l'entropie	157
VI.3.2	Équation de la chaleur	159
VI.3.3	Discussions	159
VI.4	Thermodynamique des Processus Irréversibles - Cas particulier d'une modélisation DNLR	160
VI.4.1	Loi d'évolution de l'entropie	160
VI.4.2	Conclusion	162

On s'intéresse dans cette partie à la propagation de la chaleur dans un solide sans aucun couplage mécanique. Le but est de montrer comment la TPI à variables internes développée dans le cadre DNLR contient implicitement toutes les bases nécessaires pour décrire le régime transitoire propre à l'équation de la chaleur. Ce chapitre permet ainsi de faire le lien entre la TPI et la TIE (Thermodynamique Irréversible Étendue) qui préconise l'introduction de variables de flux supplémentaires sans pouvoir cependant justifier physiquement ces nouvelles variables.

Si, d'un point de vue pratique, ce transitoire ne présente aucun intérêt pour la thermo-mécanique liée à la viscoélasticité, il n'en est rien d'un point de vue fondamental. En effet, toute théorie thermodynamique irréversible cohérente se doit de contenir dans ses fondements les ingrédients qui conduisent aux transitoires. C'est simplement cette préoccupation qui justifie la présence de ce chapitre dans le mémoire : l'approche DNLR contient-elle par essence autre chose que la forme parabolique de la diffusion de la chaleur caractéristique du VER en équilibre thermodynamique? Peut-on espérer retrouver l'équation hyperbolique du télégraphe aujourd'hui classiquement utilisée pour la modélisation des transitoires dans le cas de transferts thermiques dans des VER hors-équilibre (à l'échelle de la femtoseconde)?

VI.1 Thermodynamique Classique

VI.1.1 Équation de la chaleur

Le premier principe postule que la variation d'énergie du système résulte de l'échange d'une quantité de chaleur et/ou d'un travail mécaniques avec l'extérieur :

$$\Delta U + \Delta W_k = \Delta Q + \Delta W_e \quad (VI.1)$$

où ΔU est la variation d'énergie, ΔW_k la variation d'énergie cinétique, ΔQ l'énergie thermique (ou chaleur) échangée avec l'extérieur et ΔW les travaux dus aux forces extérieures. La première loi de la thermodynamique s'écrit encore :

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W_i \quad (VI.2)$$

où $\Delta W_i = \Delta W_e - \Delta W_k$.

Dans le cadre de la thermique pure :

$$\Delta W_i = 0 \quad (VI.3)$$

L'écriture locale de l'équation d'évolution propre au système s'écrit alors :

$$\dot{u} = -\nabla \vec{J}_q = -\text{div} \vec{J}_q \quad (VI.4)$$

Dans la description de la conduction de la chaleur dans un solide, la Thermodynamique Classique (TC) considère une seule variable d'état, la température T .

L'énergie interne par unité de volume u s'écrit alors :

$$u = u(T) \text{ soit } \dot{u} = C_v \dot{T} \quad (VI.5)$$

où C_v est la chaleur spécifique par unité de volume à volume constant. On peut noter que l'énergie interne perd alors son statut de fonction potentielle par rapport à la forme $u = u(s, \epsilon, \bar{z})$ et est ainsi réduite à la fonction d'équation d'état.

La loi de Fourier décrit la réponse thermique d'un solide conducteur de la chaleur soumis à un gradient de température, sous la forme d'une relation algébrique linéaire entre la cause (le gradient de température) et l'effet (la densité de flux de chaleur). Elle présente un caractère local et se traduit par l'expression :

$$\vec{J}_q = -\lambda \vec{\text{grad}}(T) \quad (\text{VI.6})$$

Cette relation traduit le lien entre flux et force de non équilibre conformément à l'approche de Onsager.

En supposant les coefficients C_v et λ constants, la combinaison des relations (VI.4), (VI.5) et (VI.6) conduit à l'équation parabolique de la chaleur propre au système :

$$\dot{T} = a \Delta T \quad (\text{VI.7})$$

où $a = \lambda / C_v$ représente la diffusivité thermique.

VI.1.2 Écriture de l'entropie

L'entropie locale par unité de volume s'écrit :

$$s = s(T) \quad (\text{VI.8})$$

Ici encore, l'entropie a également perdu son statut de fonction potentielle $s = s(u, \epsilon, \bar{z})$. La relation de Gibbs

$$\dot{u} = T \dot{s} + \sigma \dot{\epsilon} - \bar{A} \dot{\bar{z}} \quad (\text{VI.9})$$

permet de relier l'entropie à l'énergie interne soit encore, d'après (VI.4), de relier l'entropie au flux de chaleur lorsque $\dot{\epsilon} = 0$ et $\dot{\bar{z}} = 0$:

$$\dot{s} = \frac{1}{T} \dot{u} = -\frac{\nabla J^q}{T} \quad (\text{VI.10})$$

Sous sa forme générale, le second principe de la thermodynamique traduit l'évolution d'un système par sa variation d'entropie dS . Celle ci est la somme de deux termes $d_e S$ lié aux échanges avec l'extérieur et $d_i S$ traduisant les modifications internes du système, de sorte que :

$$dS = d_e S + d_i S \quad (\text{VI.11})$$

Sous forme locale, le second principe s'écrit :

$$\dot{s} = \dot{s}_e + \dot{s}_i \quad (\text{VI.12})$$

Cette équation est aussi présentée sous la forme d'un bilan entropique :

$$\dot{s} = -\nabla J_s + \sigma^s \quad (\text{VI.13})$$

avec J_s flux entropique et σ^s source d'entropie.

Connaissant l'expression de l'entropie (VI.10), on peut ainsi identifier chaque contribution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{s}_e = -\nabla J_s = -\nabla\left(\frac{J_q}{T}\right) = -\frac{\nabla J_q}{T} + \frac{J_q \nabla T}{T^2} \\ \dot{s}_i = \sigma^s = J_q \nabla\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{J_q \nabla T}{T^2} \end{array} \right. \quad (\text{VI.14})$$

La deuxième loi de la thermodynamique impose $\dot{s}^i \geq 0$ ce qui implique, d'après (VI.6) et (VI.14.b) :

$$\lambda \geq 0 \quad (\text{VI.15})$$

VI.2 Approche de Cattaneo-Vernotte

Cattaneo [Cat 48] est parti du constat que l'équation parabolique de la chaleur classique (VI.7) suppose implicitement une vitesse infinie de la propagation de la chaleur, ce qui est physiquement inacceptable. Onsager [Ons 31] avait à l'époque déjà noté que le modèle de Fourier était en contradiction avec le principe de réversibilité microscopique. La loi de Fourier correspondait selon lui à une description approximative des processus de conduction où le temps nécessaire à l'accélération du flux de chaleur était négligé.

En effet, si on considère un mur semi-infini de diffusivité thermique a , initialement à la température T_i et soumis à un échelon de température T_s sur sa face ($x=0$), la température s'écrit alors en tout point x du mur :

$$\theta = \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta}{\sqrt{2\tilde{t}}}\right) \quad (\text{VI.16})$$

où θ , δ et \tilde{t} sont les grandeurs adimensionnelles définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{T(x,t) - T_i}{T_s - T_i} \\ \tilde{t} = \frac{t}{2\tau} \\ \delta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \end{array} \right. \quad (\text{VI.17})$$

A titre d'illustration, la figure (VI.1) montre la distribution spatiale des températures à différents instants ($\tilde{t} = 0.5$ et $\tilde{t} = 8$). Quelle que soit la position d'observation x , il apparaît quasiment instantanément un signal thermique, ce qui est inadmissible.

Pour palier à cette incohérence théorique, Cattaneo [Cat 58] a postulé que le flux de chaleur était relié au gradient de température par la loi de relaxation suivante :

$$\dot{J}_q = -\frac{J_q + \lambda \nabla T}{\tau} \quad (\text{VI.18})$$

où τ correspond au temps de relaxation propre au flux de chaleur.

Cette équation a été obtenue par différents auteurs et de différentes manières : Maxwell [Max 67], Cattaneo [Cat 48] et Grad [Gra 58] se sont basés sur la théorie cinétique des gaz. Les travaux de Maxwell et Grad sont plus généraux dans le sens où ils ne sont pas appliqués directement à la conduction de chaleur. La relation (VI.18) apparaît comme un cas particulier de leur approche.

Vernotte [Ver 58] retomba sur la même équation par une voie différente. Il supposa qu'il existait un retard τ entre l'effet (le flux) et la cause (le gradient) de telle sorte que la loi de Fourier devenait :

$$J_q(t + \tau) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(t) \quad (\text{VI.19})$$

Par un développement de Taylor du première ordre, cette dernière expression conduit à l'expression de Cattaneo (VI.18) :

$$J_q(t) + \tau \dot{J}_q(t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(t) \quad (\text{VI.20})$$

Certains ouvrages, dans un souci d'équité historique, dénomment cette dernière comme l'équation de Cattaneo-Vernotte. On la notera par la suite "équation de CV".

La combinaison de l'équation de conservation de l'énergie (VI.4), de la définition de u (VI.5) et de l'équation de CV (VI.18) conduit à l'équation hyperbolique de la chaleur dite équation du télégraphe en référence à la première équation hyperbolique dérivée de travaux qui portaient initialement sur les phénomènes électromagnétiques :

$$\tau \ddot{T} + \dot{T} = a \Delta T \quad (\text{VI.21})$$

- Pour les temps longs ($t \gg \tau$), l'équation précédente se ramène à l'équation parabolique classique (VI.7). Le signal thermique est principalement constitué de modes diffusifs, de fréquences faibles, nettement inférieures à celle associée à τ^{-1} .
- Pour les temps courts ($t \ll \tau$), l'équation hyperbolique se ramène à l'équation d'onde réversible suivante :

$$\ddot{T} = \frac{a}{\tau} \Delta T \quad (\text{VI.22})$$

Cette équation correspond à une propagation de la chaleur sous forme d'onde, de vitesse $v = \sqrt{a/\tau}$, la contribution des basses fréquences devenant dans ce domaine de temps négligeable.

Baumeister [Bau 69] a repris l'exemple du mur semi-infini soumis à un échelon de température en partant de l'équation du télégraphe.

La figure ci-dessous compare les différentes réponses en température obtenues par les modèles paraboliques et hyperboliques à deux instants donnés ($\tilde{t} = 0.5$ et $\tilde{t} = 8$) :

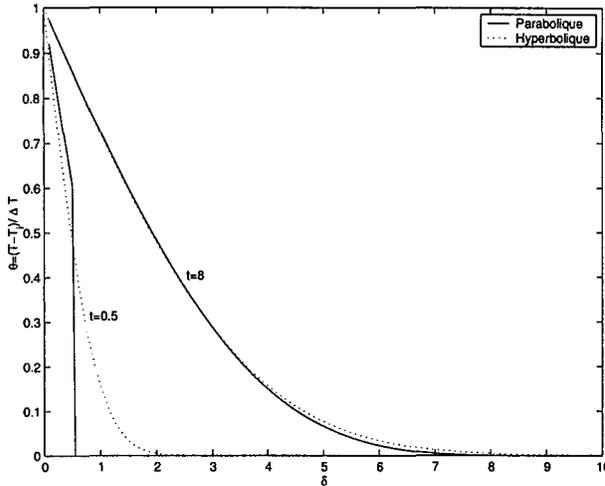


FIG. VI.1: Comparaison des réponses en température pour un mur semi-infini dans le cas des modèles paraboliques et hyperboliques

On note l'extrême différence des prédictions des deux modèles aux temps courts.

Une fois mise en place l'équation hyperbolique de la chaleur par Cattaneo et Vernotte, les années 60 furent le théâtre de nombreuses investigations sur les lacunes de l'équation parabolique et sur l'apport théorique de l'équation hyperbolique ([Bol 64], [Lin 65], [Mor 53], [Net 63], ...). Les exemples justifiant la nécessité de préciser les domaines de non-validité de la loi de Fourier ne manquent pas. Citons entre autre Chen [Che 95] qui a étudié le comportement thermique de solides soumis à de très brèves impulsions laser de durées inférieures à la picoseconde et Majumdar [Maj 93] qui s'est penché sur le comportement des composants optoelectroniques du laser lui-même, qui sont le siège d'impulsions électriques ultracourtes auxquelles sont associées des impulsions thermiques. D'autres exemples ont été traités par Tzou [Tzo 90], Ozisik & Tzou [Ozi 92], Tien & Chen [Tie 94].

Pour une étude complète de l'équation du télégraphe et des équations de la chaleur plus complexes, des théories sous-jacentes, on guidera le lecteur vers l'étude bibliographique remarquable effectuée par Joseph et Preziosi [Jos 89] et [Jos 90].

Jou & al [Jou 99] ont montré que l'apport de la loi de CV n'était pas suffisant pour assurer la compatibilité avec la version locale de la seconde loi de la thermodynamique i.e. $\dot{s}^i \geq 0$.

Ils se sont basés sur le cas particulier d'un barreau de longueur L , isolé adiabatiquement soumis à un profil de température initial de la forme :

$$T(x, 0) = T_0 + \delta T_0 \cos \frac{2\pi n x}{L} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{VI.23})$$

où T_0 est la température homogène et constante de référence.

Après avoir déterminé les champs de température et de flux de chaleur au sein du barreau, Criado-Sancho [Cri 93] montrent (fig. VI.2) que l'entropie pour certains cas particuliers est une fonction "oscillante" au lieu d'être une fonction croissante monotone :

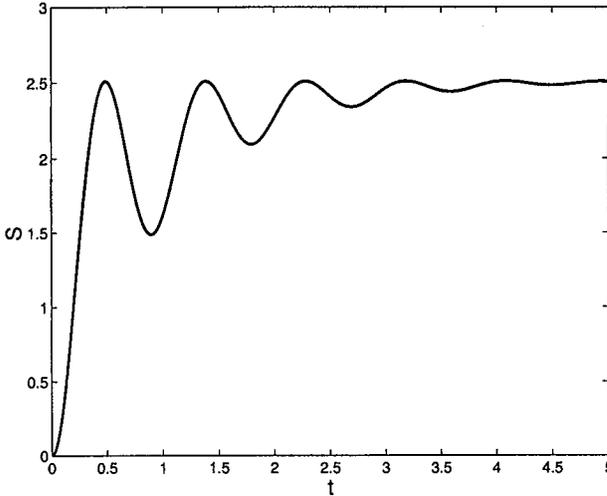


FIG. VI.2: Évolution de l'entropie adimensionnelle \bar{s} en fonction du temps adimensionnel \bar{t}

Ce résultat, même s'il n'est pas incompatible avec la formulation classique de la seconde loi qui établit que l'entropie de l'état d'équilibre final doit être supérieure à l'entropie de l'état d'équilibre initial, remet en cause la version locale de cette dernière loi qui stipule que la production d'entropie doit être positive en tout point du solide et quel que soit le temps de l'évolution.

VI.3 Thermodynamique Irréversible Étendue

VI.3.1 Loi d'évolution de l'entropie

La Thermodynamique Irréversible Étendue (TIE) est basée sur une extension de l'ensemble des variables d'état. Lebon [Jou 99] et Müller [Mül 98], les fondateurs de cette thermodynamique, admettent que l'entropie s est désormais fonction des variables d'état de la TIC et des flux dissipatifs. Ils s'affranchissent ainsi de l'hypothèse de l'équilibre local.

Dans le cadre de la thermique, l'entropie s'écrit alors :

$$s = s(T, J_q) \tag{VI.24}$$

Soit encore sous forme potentielle

$$s = s(u, J_q) \tag{VI.25}$$

où u correspond à l'énergie interne qui joue le rôle d'une variable indépendante vis à vis de J_q .

La variation de l'entropie s'écrit alors :

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial s}{\partial J_q} \dot{J}_q \tag{VI.26}$$

Soit encore, avec $\dot{u} = -\nabla J_q$ et $\partial s/\partial u = 1/T$ et en postulant à priori la forme quadratique suivante :

$$J_q \frac{\partial^2 s}{(\partial J_q)^2} J_q = \frac{\partial^2 s}{\partial J_q^2} (J_q)^2 \quad (\text{VI.27})$$

pour la dépendance de s en J_q , on obtient :

$$\dot{s} = -\frac{1}{T} \nabla J_q + 2J_q \frac{\partial s}{\partial J_q^2} \dot{J}_q \quad (\text{VI.28})$$

A partir de cette dernière expression, on peut identifier le flux d'entropie échangée et le flux d'entropie créée :

$$\left[\begin{array}{l} \dot{s}_e = -\nabla J_s = -\nabla \left(\frac{J_q}{T} \right) \\ \dot{s}_i = \sigma^s = J_q \underbrace{\left(\nabla \left(\frac{1}{T} \right) + 2J_q \frac{\partial s}{\partial J_q^2} \right)}_{X_q} \end{array} \right. \quad (\text{VI.29})$$

Cette dernière expression a la structure d'une forme bilinéaire :

$$\dot{s}_i = J_q X_q \quad (\text{VI.30})$$

où X_q correspond à la force généralisée conjuguée de J^q .

Afin d'assurer la linéarité entre le flux et sa force conjuguée (relation d'Onsager) et d'assurer la positivité du taux de création d'entropie, on pose :

$$X_q = \frac{1}{L} J_q \quad \text{avec} \quad L \geq 0 \quad (\text{VI.31})$$

avec :

$$L = \lambda T^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial s}{\partial J_q^2} = -\frac{\tau}{2L} \quad (\text{VI.32})$$

les relations (VI.29), (VI.31) et (VI.32) conduisent à l'équation de CV (VI.18) :

$$\dot{J}_q = -\frac{J_q + \lambda \nabla T}{\tau} \quad (\text{VI.33})$$

et l'entropie dans le cadre de la TIE s'écrit finalement :

$$\dot{s} = \frac{1}{T} \dot{u} - \frac{\tau}{\lambda T^2} J_q \dot{J}_q \quad (\text{VI.34})$$

Cette expression peut encore s'écrire :

$$\dot{s} = \dot{s}_{eq} - \frac{\tau}{\lambda T^2} J_q \dot{J}_q \quad (\text{VI.35})$$

où s_{eq} est l'expression de l'entropie déterminée dans le cadre de la TC. D'après la loi de CV (VI.18), cette dernière expression peut encore s'écrire :

$$\dot{s} = \dot{s}_{eq} + \frac{1}{\lambda T^2} J_q (J_q + \lambda \nabla T) = \frac{\tau}{\lambda T^2} J_q^2 \quad (\text{VI.36})$$

Dans le cas d'un système isolé, la création d'entropie est directement liée au taux de variation de l'entropie. Lebon [Jou 99] vérifie ainsi la compatibilité de cette approche avec la seconde loi de la thermodynamique :

$$\dot{s}_i = \dot{s} = \frac{\tau}{\lambda T^2} J_q^2 \geq 0 \quad (\text{VI.37})$$

VI.3.2 Équation de la chaleur

En étendant à l'énergie interne la dépendance à l'égard des flux, on peut, par similitude, écrire :

$$\begin{cases} \dot{s} = \dot{s}_{eq} + a(T) J_q \dot{J}_q \\ \dot{u} = \dot{u}_{eq} + b(T) J_q \dot{J}_q \end{cases} \quad (VI.38)$$

Jou & al [Jou 99] effectuent une approximation linéaire sur cette dernière équation si bien qu'ils définissent l'énergie interne comme :

$$\dot{u} = \dot{s}_{eq} = C_v \dot{T} \quad (VI.39)$$

Partant de la première loi de la thermodynamique (VI.4), ils retombent donc sur l'équation hyperbolique de la chaleur (VI.21) :

$$\tau \ddot{T} + \dot{T} = a \Delta T \quad (VI.40)$$

A l'heure actuelle, l'étude de l'équation de la chaleur complète sans l'hypothèse de l'approximation du premier ordre sur l'énergie interne (VI.39) n'a pas encore été réalisée à notre connaissance.

VI.3.3 Discussions

La Thermodynamique Irréversible Étendue a donc permis de retrouver l'équation de CV (VI.18) dans le cadre d'un formalisme thermodynamique cohérent, qui conduit en première approximation à l'équation dite du télégraphe (VI.21).

Mais le principal apport de la TIE réside dans la correction de l'écriture de l'entropie classique par l'ajout d'un terme correctif.

Criado-Sancho [Cri 93] reprend l'exemple du barreau soumis à une température initiale sinusoïdale (VI.23) dans le cadre de la TIE et montre (figure VI.23) que l'entropie croît de manière monotone avec quelques points stationnaires correspondant aux minimums locaux de l'entropie précédente :

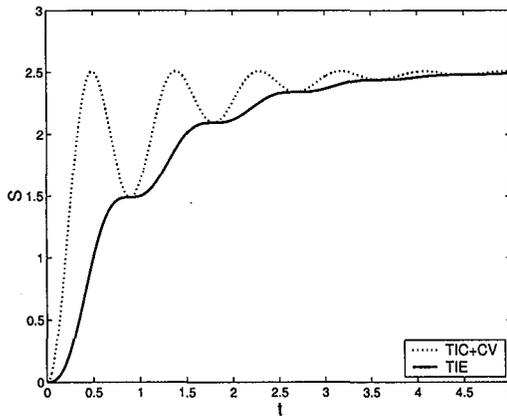


FIG. VI.3: Comparaison de l'évolution des entropies adimensionnelles calculées dans le cadre de la TIC (avec la loi de CV) et dans le cadre de la TIE

La Thermodynamique Irréversible Étendue repose sur le postulat d'une dépendance de l'entropie avec les variables thermodynamiques classiques et avec les variables complémentaires de flux (pouvant elles-mêmes être des flux de flux, etc...) .

Ce postulat reste le point "faible" de la TIE car les auteurs n'ont pas réussi à justifier véritablement ce choix. Dans le cadre de la thermodynamique rationnelle, Coleman [Col 67] a montré que prendre les variables de flux comme variables d'états n'était pas admissible thermodynamiquement.

VI.4 Thermodynamique des Processus Irréversibles - Cas particulier d'une modélisation DNLR

Le modèle DNLR repose sur la Thermodynamique des Processus Irréversibles (TPI) dans laquelle on généralise l'équation de Gibbs selon la méthode de De Donder lorsque les variables de microstructure "prennent leur indépendance" vis à vis des variables de contrôle usuelles. Dans le cadre de la thermique pure, la relation de Gibbs s'écrit :

$$u = u(T, \underline{n}) \quad (\text{VI.41})$$

En terme de dérivées :

$$\dot{u} = T\dot{s} + \underline{\mu}\dot{\underline{n}} \quad (\text{VI.42})$$

où T et \underline{n} représentent respectivement la température et le vecteur nombre de mole d'atomes. Ce vecteur s'écrit $\underline{n} = (n^1, \dots, n^k, \dots, n^N)$ avec n^k étant le nombre de mole de l'atome k et N le nombre total de constituants. s représente l'entropie et $\underline{\mu}$ le vecteur des potentiels chimiques.

On rappelle que le passage de $\underline{\mu}\dot{\underline{n}}$ à $\overline{A}\dot{\underline{z}}$ est immédiat puisque d'après De Donder $\dot{\underline{n}} = \underline{\nu}\dot{\underline{z}}$ et $\overline{A} = -\underline{\nu}\underline{\mu}$ ce qui conduit de manière équivalente à l'expression suivante de \dot{u} :

$$\dot{u} = T\dot{s} + \overline{A}\dot{\underline{z}} \quad (\text{VI.43})$$

VI.4.1 Loi d'évolution de l'entropie

L'entropie s'écrit alors :

$$\dot{s} = -\frac{1}{T}\nabla J_q - \frac{1}{T}\underline{\mu}\dot{\underline{n}} \quad (\text{VI.44})$$

L'évolution du vecteur $\dot{\underline{n}}$ est régie par l'équation de diffusion :

$$\dot{\underline{n}} = \dot{\underline{n}}_e + \dot{\underline{n}}_i \quad (\text{VI.45})$$

Le nombre de moles peut changer suite à un échange avec l'extérieur du VER et suite à des réactions à l'intérieur du système.

L'équation de diffusion précédente peut encore s'écrire :

$$\dot{\underline{n}} = -\nabla J_{\underline{n}} + \pi_{\underline{n}} \quad (\text{VI.46})$$

où $J_{\underline{n}}$ et $\pi_{\underline{n}}$ correspondent respectivement au flux de diffusion et au taux de production interne.

Le taux de constituant échangé avec l'extérieur s'écrit donc :

$$\dot{\underline{n}}_e = -\nabla J_{\underline{n}} \quad (\text{VI.47})$$

Comme on vient de le rappeler, le taux de production interne du constituant est proportionnel à une variable du degré d'avancement (variable interne). Le coefficient de proportionnalité est appelé coefficient stoechiométrique.

Si N réactions ont lieu dans le système :

$$\dot{n}_i = \pi_n = \sum_{j=1}^N \nu_j \dot{z}^j = \bar{\nu} \dot{\bar{z}} \quad (\text{VI.48})$$

L'entropie (VI.44) s'écrit alors :

$$\dot{s} = -\frac{1}{T} \nabla J_q + \frac{\mu}{T} \nabla J_n - \frac{1}{T} \mu \bar{\nu} \dot{\bar{z}} \quad (\text{VI.49})$$

En définissant l'affinité propre associée à \bar{z} :

$$\bar{A} = -\mu \bar{\nu} \quad (\text{VI.50})$$

l'entropie peut s'écrire :

$$\dot{s} = -\nabla \left(\frac{J_q}{T} - \frac{J_n \mu}{T} \right) + \left(J_q \nabla \frac{1}{T} - J_n \mu \nabla \frac{1}{T} - \frac{J_n}{T} \nabla \mu + \frac{1}{T} \bar{A} \dot{\bar{z}} \right) \quad (\text{VI.51})$$

Par identification avec la seconde loi de la thermodynamique, on peut en déduire l'expression de l'entropie échangée avec l'extérieur :

$$\dot{s}_e = -\nabla J^s = -\nabla \frac{(J_q - \mu J_n)}{T} \quad (\text{VI.52})$$

et l'expression de l'entropie créée :

$$\dot{s}_i = \pi^s = J_q \nabla \frac{1}{T} - J_n \mu \nabla \frac{1}{T} - \frac{J_n}{T} \nabla \mu + \frac{1}{T} \bar{A} \dot{\bar{z}} \quad (\text{VI.53})$$

Si l'on admet que les entités transporteuses de chaleur (électrons, phonons) possèdent un potentiel chimique quasi-uniforme ($\nabla \mu \simeq 0$), la production d'entropie s'écrit alors :

$$\dot{s}_i = \pi^s = (J_q - \mu J_n) \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \bar{A} \dot{\bar{z}} \quad (\text{VI.54})$$

Les équations phénoménologiques linéaires d'Onsager relient le flux à la force :

$$\bar{A} = \underline{\underline{L}}^{-1} \dot{\bar{z}} \quad (\text{VI.55})$$

Aussi la production d'entropie s'écrit encore, dans ce cas :

$$\dot{s}_i = (J_q - \mu J_n) \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \underline{\underline{L}}^{-1} \dot{\bar{z}} \quad (\text{VI.56})$$

Si on postule que la vitesse d'avancement des entités transporteuses de chaleur (électrons et phonons) est liée au flux de chaleur :

$$\dot{\bar{z}} = M J_q \quad (\text{VI.57})$$

La production d'entropie s'écrit finalement :

$$\dot{s}_i = (J_q - \underline{\mu} J_n) \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \underline{L}^{-1} M^2 J_q^2 \quad (\text{VI.58})$$

La comparaison peut être établie avec la relation issue (VI.29) de la TIE lorsque l'on confond J_q avec $(J_q - \underline{\mu} J_n)$:

$$\dot{s}_i = J_q \nabla \frac{1}{T} + 2 J_q^2 \frac{\partial s}{\partial J_q^2} \quad (\text{VI.59})$$

avec :

$$\frac{\partial s}{\partial J_q^2} = -\frac{\tau}{2} \underline{L}^{-1} \quad (\text{VI.60})$$

La comparaison des deux approches conduit à l'identification suivante :

$$\tau = \frac{M^2}{T} \quad (\text{VI.61})$$

Ainsi, l'écriture DNLR permet d'appréhender les hypothèses de la TIE sans mettre en opposition la TVI (Thermodynamique à variables Internes) et la TIE comme c'est souvent le cas.

La loi de relaxation propre aux variables internes s'écrit :

$$\dot{z} = -\frac{z - z^r}{\tau_z} = M J_q \quad (\text{VI.62})$$

Si on suppose le temps de relaxation τ_z indépendant du temps, la dérivée par rapport au temps de l'expression précédente conduit tout simplement à l'équation de Cattaneo-Vernotte (C-V) :

$$\dot{J}_q = -\frac{J_q - J_q^r}{\tau_q} \quad \text{avec} \quad J_q^r = -\lambda \nabla T \quad \text{et} \quad \tau_q = \tau_z \quad (\text{VI.63})$$

VI.4.2 Conclusion

Ce chapitre a ainsi permis de faire le lien entre TPI et TIE. La Thermodynamique à Variables Internes développée selon la stratégie DNLR pour aborder la Thermodynamique des Processus Irréversibles conduit, dans le cadre de la thermique pure, à l'équation du télégraphe et ceci sans avoir besoin de rajouter des variables supplémentaires de flux comme le préconise la TIE, éludant ainsi toute controverse à ce sujet.

Partie D

Protocole expérimental et premières comparaisons

VIII

Étude expérimentale

Sommaire

VII.1 Développement d'un système expérimental	166
VII.1.1 Premiers essais et premières conclusions	166
VII.1.2 Nouveau système mécanique	168
VII.1.3 Nouveau banc optique infrarouge	168
VII.1.4 Conclusions et perspectives	174
VII.2 Premières validations du modèle DNLR	175
VII.2.1 Résultats expérimentaux	176
VII.2.2 Comparaison expérience-simulation	182
VII.2.3 Conclusions et perspectives	190

L'un des objectifs initialement fixé dans le cadre de ce travail était de mettre au point, au sein du laboratoire, un système expérimental permettant de caractériser les phénomènes de couplage thermomécanique. Le but est de mesurer les évolutions de la contrainte, de la déformation et de la température surfacique d'une éprouvette soumise à des sollicitations mécaniques aussi variées que possible (fluage et relaxation en traction, compression ou cisaillement, sollicitations cycliques en contrainte ou en déformation, ...). La constitution d'une base de données suite à ce type d'études expérimentales sur différents matériaux (polymères, aciers, duralumin ...) permettra de vérifier, en mettant en oeuvre des méthodes inverses d'estimation de paramètres, la validité de la modélisation du couplage thermomécanique présentée précédemment.

VII.1 Développement d'un système expérimental

Initialement, nous avons prévu de nous appuyer sur deux dispositifs déjà existants au laboratoire : une machine de traction et une caméra infrarouge.

- La machine de traction uni-axiale est asservie par une Micro console MTS (modèle 458.20) et commandée par un micro profiler. La programmation de ce dernier se fait de façon segmentée et permet de commander la MTS en déplacement, en force ou en déformation. On peut ainsi générer une gamme de fonctions très diverses (traction-compression cyclique, essai de fatigue, etc...). La force limite applicable peut varier entre 2.5 et 25 kN tandis que le déplacement maximal imposé peut varier entre 10 et 100 mm. La mesure (et la commande) de la déformation s'effectue par l'intermédiaire d'un extensomètre axial dont la course est de 4 mm en traction et de 2 mm en compression pour un écartement initial de 20 mm.
- La caméra infrarouge Agéma thermovision 780 SWB (détecteur InSb) est couplée à une carte d'acquisition et à un logiciel de traitement de l'information thermique ADDELIE qui permet ainsi d'obtenir l'évolution temporelle de la température au cours du temps en tout point de l'éprouvette.

VII.1.1 Premiers essais et premières conclusions

En plaçant la caméra devant la MTS, on a pu effectuer une première série de mesures de la température surfacique d'une éprouvette en polypropylène soumise à des déformations sinusoïdales. Cette série de mesures a permis de déterminer, grâce aux formes des lignes d'isovaleurs en température (fig. VII.1), les conditions limites en température au niveau des mors de serrage et ainsi de valider l'étude numérique effectuée au paragraphe V.2 et plus particulièrement le passage du modèle thermique 3D au modèle 2D.

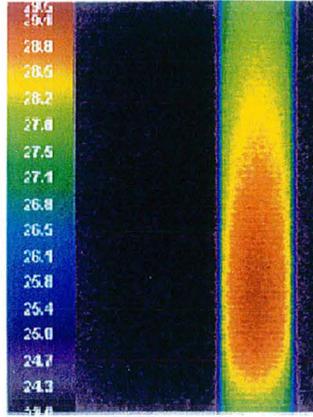


FIG. VII.1: Scène thermique mesurée par la caméra Agéma à un instant t sur une éprouvette en PEHD

Cette première série de mesures a aussi permis de dresser un bilan des limites de ce dispositif expérimental et des améliorations à effectuer.

L'inconvénient majeur de ce dispositif est dû à l'extensomètre (fig. VII.2) qui peut :

- fausser les mesures mécaniques, à cause de son poids, pour des matériaux souples (faible module d'élasticité). Pour une sécurité expérimentale maximale, on est alors obligé de travailler uniquement avec des aciers.
- entacher la scène thermique mesurée, à cause des broches d'attaches. On ne peut donc pas mesurer simultanément la température et la déformation. Pour une même expérience, il faut donc effectuer deux essais : le premier pour mesurer la réponse mécanique et le second pour la réponse thermique. Mais surtout, on ne peut donc pas mesurer la température dans le cas d'une commande en déformation. Si, dans le cadre de faibles déformations, on peut, en première approximation, imposer un déplacement du vérin et assimiler la déformation au rapport de ce déplacement sur la longueur de l'éprouvette, il n'en est absolument rien pour des déformations plus importantes telles que celles obtenues en plasticité.

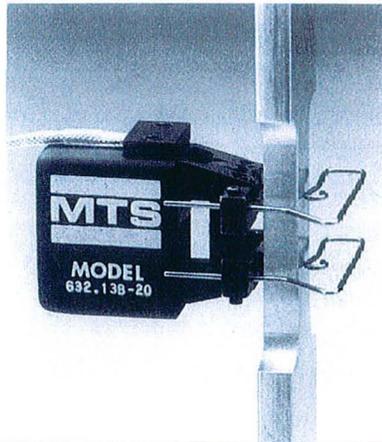


FIG. VII.2: Extensomètre uni-axial

Un autre inconvénient du système vient de la fréquence d'acquisition de la caméra infrarouge qui est limitée à 12 images par seconde. Dans le cadre de sollicitations cycliques, on ne peut donc pas espérer caractériser finement le signal obtenu pour des fréquences supérieures à quelques hertz.

Les seules expériences qu'il était possible d'envisager se limitaient ainsi à des essais en déplacement et en contrainte sur des éprouvettes en acier. Pour des sollicitations cycliques, il aurait fallu faire un choix entre la caractérisation de la thermoélasticité (fréquences inférieures à quelques hertz) et celle de la dissipation qui n'intervient pour les aciers de manière conséquente que pour des fréquences minimales de l'ordre de la dizaine de hertz. On restreignait ainsi de manière trop importante l'objectif expérimental initial qu'on s'était fixé. C'est pour cette raison qu'on a dû imaginer et mettre au point un nouveau dispositif expérimental, dont la réalisation ne s'est achevée que récemment.

VII.1.2 Nouveau système mécanique

Pour palier aux difficultés liées à l'extensomètre axial, le laboratoire s'est équipé, depuis peu, d'un système de vidéo-traction. Développé par le laboratoire de Physique des Matériaux de l'école des Mines de Nancy, il permet une mesure précise des déformations locales (même si celles-ci se localisent dans une striction) par caméra vidéo et un pilotage en temps réel de la machine de traction. La mesure de la déformation s'effectue par un suivi en temps réel du barycentre de tâches "optiques" déposées sur la surface de l'échantillon.

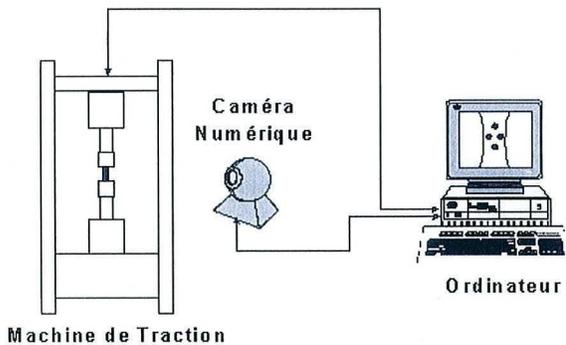


FIG. VII.3: Schéma du système de vidéo-traction : les données de la déformation mesurées par la caméra sont envoyées sur l'ordinateur qui renvoie par feed-back une commande à la MTS

Les principaux avantages de ce système consistent en (i) une mesure sans contact (contrairement aux extensomètres classiques), (ii) un traitement des données en temps réel et (iii) une acquisition des déformation et contrainte vraies en toutes circonstances.

VII.1.3 Nouveau banc optique infrarouge

Pour s'affranchir des problèmes de fréquences d'acquisition liées à la caméra, nous avons opté pour l'utilisation d'un mono-détecteur infrarouge connecté à un oscilloscope numé-

rique qui est, à notre connaissance, une démarche assez originale pour l'étude expérimentale du couplage thermomécanique. Ce dispositif a le triple avantage de :

- permettre une mesure de la température sans contact,
- permettre une fréquence d'acquisition allant jusqu'à 10^6 mesures par seconde,
- avoir un coût réduit comparativement à une caméra (5 kE contre 100 kE) ce qui peut, à long terme, être intéressant pour l'industrie.

Le laboratoire disposait déjà de deux monodétecteurs à grande surface sensible (InSb et HgCdTe refroidis à l'azote liquide (77°K)), utilisés jusqu'alors pour d'autres applications métrologiques.

Les deux éléments caractéristiques d'un détecteur (figure VII.4) sont l'élément sensible (1) (appelé détecteur sur le schéma) et le hublot (6).

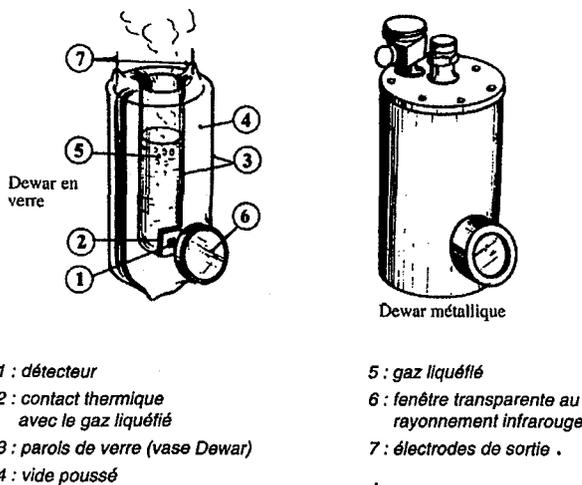


FIG. VII.4: Schéma d'un détecteur

VII.1.3.1 Élément sensible

La figure (VII.5), qui représente la détectivité de chaque élément sensible en fonction de la longueur d'onde, met en évidence les différentes performances des détecteurs infrarouges et en particulier des détecteurs quantiques photovoltaïques InSb et HgCdTe.

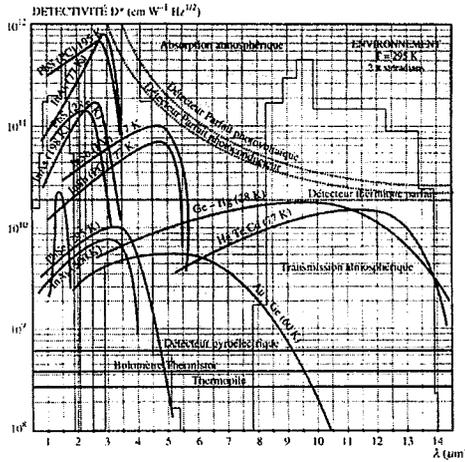


FIG. VII.5: Performances de différents détecteurs infrarouge en fonction de la longueur d'onde λ

Un détecteur InSb a une détectivité plus importante mais une bande passante plus étroite que l'HgCdTe et concentrée à des longueurs d'ondes plus petites correspondant à des températures supérieures à la température ambiante. Dans une application de mesure de variations de température de quelques degrés autour de la température ambiante, le schéma ci-dessus et les observations générales que l'on peut en tirer ne permettent pas de déterminer le détecteur le mieux adapté. Seuls des tests préliminaires peuvent nous apporter une réponse.

VII.1.3.2 Hublot

Le hublot, placé juste devant le détecteur (figure VII.4) pour le maintenir dans un environnement de vide secondaire garantissant des échanges thermiques très faibles, joue un rôle optique important. En effet, le flux reçu par l'élément sensible est proportionnel au coefficient de transmission du hublot.

La difficulté était donc de trouver le bon compromis entre l'absorptance (transmittance) de la fenêtre, la gamme de longueur d'onde de détection optimale pour l'élément sensible et son prix sur le marché. Là encore seule l'expérience pouvait nous apporter une réponse. Deux fenêtres différentes (Ge traité anti reflet et ZnSe), dont les caractéristiques nous semblaient les mieux à même de coïncider avec les détecteurs dont on disposait, ont été testées.

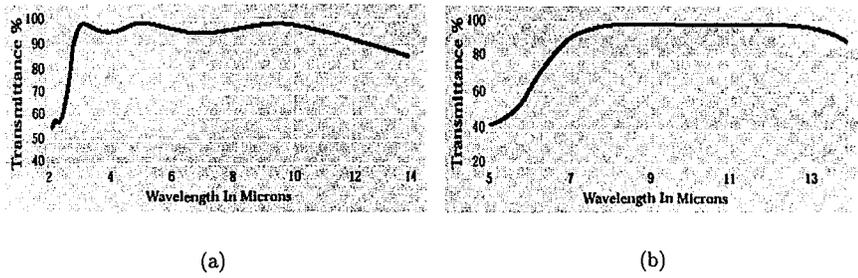


FIG. VII.6: Transmittance (%) pour une lentille (a) en Ge traité et (b) en ZnSe

VII.1.3.3 Guide d'onde

Afin de s'affranchir de toute perturbation extérieure, on a ajouté un "guide d'onde" formé par un simple tube en cuivre choisi pour ses qualités de poli miroir en paroi interne. L'une des extrémités est adaptée au détecteur au niveau du hublot. L'autre extrémité, qui sera placée devant l'éprouvette, est obturée par une rondelle en cuivre percée d'un trou qui permet ainsi de diaphragmer le flux reçu en provenance d'un petit élément de surface de l'éprouvette (mesure locale). Deux diaphragmes ont été testés, présentant des diamètres respectifs de 1 et 2 mm de diamètre.

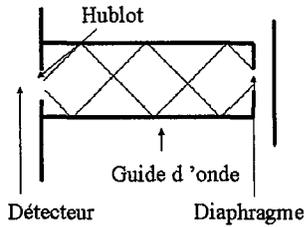


FIG. VII.7: Schéma du guide d'onde

VII.1.3.4 Montage qualificatif du banc de détection infrarouge

Afin de déterminer la meilleure association (élément sensible, hublot et diamètre du diaphragme) capable de détecter des températures de l'ordre du degré i.e. avec la meilleure sensibilité et un rapport signal sur bruit le plus faible, on a mis en place un montage expérimental intermédiaire (fig. VII.8) couplé à la caméra infrarouge thermovision 780 SWB.

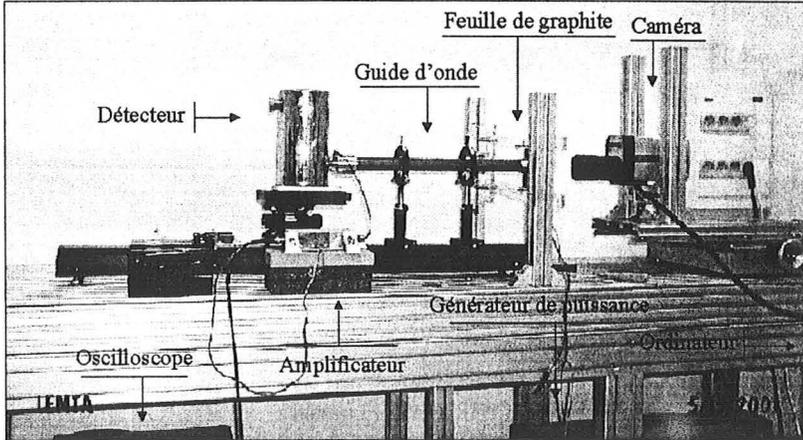


FIG. VII.8: Montage expérimental

Une fine feuille de graphite (d'épaisseur 0.10 mm) est tendue par deux lamelles de cuivre à chacune de ses extrémités. Les lamelles sont reliées à un générateur de puissance qui envoie un signal sinusoïdal. Le signal électrique induit, par effet joule, une élévation sinusoïdale de la température de la feuille de graphite qui est détectée d'un côté par la caméra infrarouge (tenant lieu d'étalonnage en température) et de l'autre côté par le montage composé du détecteur et du tube en cuivre (qu'on approche à 5 mm de la feuille de graphite). En supposant que la chaleur dégagée est la même de part et d'autre de la feuille, ce qui semble raisonnable, on peut alors déterminer, en comparant les amplitudes des signaux mesurés par les deux systèmes, la sensibilité en tension de chaque détecteur. L'étude des évolutions sinusoïdales en tension permet aussi de caractériser le rapport signal sur bruit des détecteurs.

Une série d'essais effectués à différentes amplitudes et fréquences de signal d'entrée en tension a permis de montrer que la réponse optimale en sortie était finalement obtenue par la combinaison du détecteur photovoltaïque InSb, d'un hublot ZnSe avec une ouverture au bout du tube en cuivre de 2 mm. La réponse en tension de ce dispositif en fonction des variations de température est reportée ci-dessous :

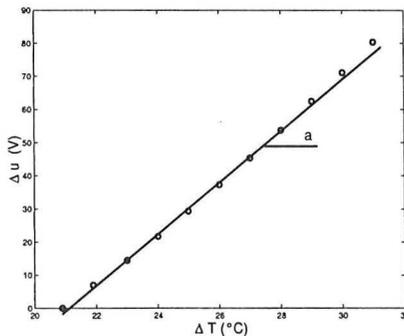


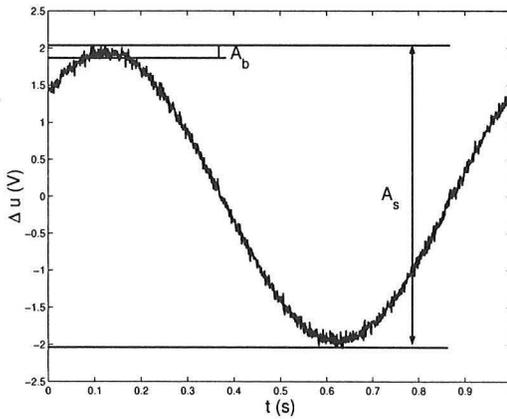
FIG. VII.9: Réponse en tension du détecteur

VII. Étude expérimentale

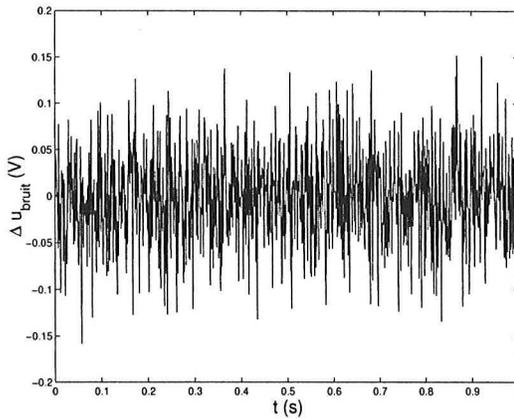
La tension mesurée aux bornes du détecteur est une fonction linéaire de la variation de température réelle. La pente de la droite est de :

$$a = \frac{\Delta u}{\Delta T} \simeq 7.8 V/^{\circ}C \tag{VII.1}$$

La figure (VII.10.a) propose un exemple de la réponse en tension du détecteur suite à un signal électrique sinusoïdal, de fréquence 1 Hertz, imposé par le générateur de puissance. L'amplitude du signal est de 4 Volts, ce qui correspond d'après la sensibilité calculée précédemment à une amplitude de température de l'ordre de 0.51 °C.



(a)



(b)

FIG. VII.10: (a) Exemple de réponse en tension du détecteur à un signal électrique sinusoïdal (b) Évolution temporelle du bruit déduit de l'optimisation de (a) par une sinusoïde

L'optimisation de cette courbe par une sinusoïde permet de caractériser le bruit intrinsèque au détecteur (fig. VII.10.b) et de déduire la valeur du rapport signal sur bruit R_{sb} qui correspond au rapport de l'amplitude du signal A_s sur le rapport de l'amplitude du bruit A_b :

$$R_{sb} = \frac{A_b}{A_s} \simeq \frac{4}{0.12} \simeq 30 \quad (\text{VII.2})$$

compte tenu de la valeur de l'amplitude de bruit déterminée précédemment, on peut espérer une résolution en tension de l'ordre de 0.2 V. L'émissivité du graphite étant équivalente à l'émissivité de la peinture noire qui sera induite sur les éprouvettes ($\epsilon \approx 0.95$), on peut ainsi espérer, compte tenu de la sensibilité du détecteur, détecter des écarts de température de l'ordre de 0.02 K (résolution thermique équivalente à celle des nouvelles caméras matricielles).

Les valeurs élevées de la sensibilité et du rapport signal sur bruit combinées à une fréquence d'acquisition très largement supérieure aux fréquences classiques de sollicitations mécaniques font de ce banc de mesure un système de détection infrarouge ayant des performances supérieures à celle de la caméra. La caméra a l'avantage cependant de permettre une caractérisation d'un champ surfacique de température contrairement au détecteur qui ne permet qu'une mesure locale.

Dans un souci de reproductibilité expérimentale, une deuxième série d'essais a été effectuée sur un corps noir. Cette série a permis de confirmer l'ordre de grandeur de la sensibilité mesurée précédemment ($a \simeq 8.6 \text{ V}/^\circ\text{C}$). On a pu également constater que cette sensibilité dépendait fortement de la distance entre la source émettrice de chaleur et le diaphragme d'entrée du guide d'onde. Ceci explique l'écart de sensibilité avec celui obtenu pour l'étalonnage précédent.

Ces essais ont aussi permis de mesurer la dérive inhérente au détecteur qui est de l'ordre de 0.5 V (soit 0.07 °C) pour 500 s.

VII.1.4 Conclusions et perspectives

Cette étude préliminaire a permis de mettre en oeuvre un banc d'essai infrarouge peu onéreux, facile à mettre en place, avec une sensibilité et une fréquence d'acquisition remarquables. La combinaison de ce système infrarouge avec le système de vidéo-traction devrait permettre une grande flexibilité expérimentale tant au niveau des sollicitations mécaniques envisageables que des matériaux étudiés. L'un des intérêts majeurs de ce système est qu'il permet une mesure locale de la température et de la déformation. Il suffit pour cela de placer les deux systèmes de part et d'autre de l'éprouvette tout en focalisant sur le même élément de surface :

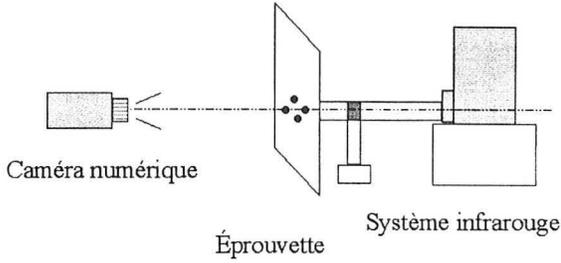


FIG. VII.11: Schéma du montage expérimental dédié à la mesure locale de la déformation et de la température

Malheureusement, la mise en place minutieuse du protocole expérimental a été retardée d'une part par des aléas expérimentaux (casse d'un détecteur, ...) et d'autre part par les longs délais de déblocage de crédit pour l'acquisition du système de vidéo-traction. Le système expérimental complet n'est opérationnel que depuis peu, ce qui ne nous permet pas, à l'heure actuelle, de pouvoir proposer des résultats expérimentaux propres au couplage thermomécanique. Toute cette étude sera bien entendu l'un des axes de recherche privilégié de l'après-thèse.

En attendant de disposer de nos propres données expérimentales, nous avons tout de même cherché à valider notre approche théorique du couplage thermomécanique présentée précédemment. Nous nous sommes pour cela appuyés sur des mesures qui ont été fournies par l'IRSID (centre de recherche d'Usinor situé à Metz) et concernant l'acier S355.

VII.2 Premières validations du modèle DNLR

Le but de ce paragraphe est de mettre en évidence les capacités du modèle DNLR à reproduire les comportements mécaniques et thermiques de l'acier S355 (encore appelé Usidur 360) soumis à des sollicitations cycliques.

La nuance a été laminée à chaud ce qui permet de considérer sa texture comme isotrope. Elle se compose d'une phase ferrite majoritaire (94 %) et d'une seconde phase perlite minoritaire (6 %). La composition chimique (pourcentage de volume) de l'acier est donnée dans le tableau suivant :

C	Mn	P	S	Si	Nb
0.0064	1.142	0.0012	0.003	0.012	0.02

TAB. VII.1: Composition chimique de l'acier S 355

La forme de l'éprouvette utilisée est reportée ci-dessous :

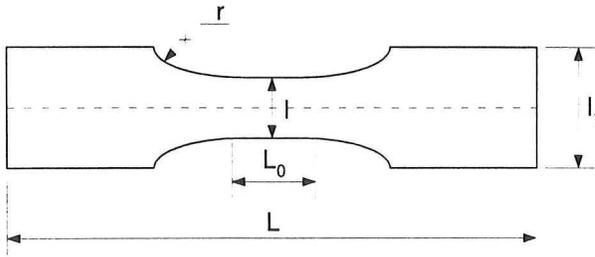


FIG. VII.12: Forme normalisée de l'éprouvette d'essai

Les dimensions sont données par :

e (mm)	l (mm)	l_1 (mm)	L_0 (mm)	L (mm)	r (mm)
6	20 ± 0.1	35	$20 + 0.5$	179.46 ± 2	55 ± 1

TAB. VII.2: Dimensions de l'éprouvette d'essai

Les principales propriétés mécaniques de cet acier ont été fournies par l'IRSID :

$R_{0.2}$ (MPa)	R_m (MPa)	σ_D (MPa)	A (%)
405	510	235	27

TAB. VII.3: Propriétés mécaniques de l'acier S 355

$R_{0.2}$ correspond à la limite élastique conventionnelle à 0.2 %, R_m est la résistance à la traction, σ_D est la limite d'endurance en traction-compression alternée (rapport de charge $R_s=-1$) correspondant à $2.1e^6$ cycles et A correspond à l'allongement à la rupture. Les propriétés thermiques annoncées par l'IRSID sont les suivantes :

ρC ($J m^{-3} K^{-1}$)	λ ($W m^{-1} K^{-1}$)
$3.6 e^6$	25

TAB. VII.4: Propriétés thermiques de l'acier S 355

VII.2.1 Résultats expérimentaux

VII.2.1.1 Notations

Afin de simplifier la présentation du paragraphe expérimental à suivre, on définit dès à présent un ensemble de notations très utiles pour la suite :

Notations	Noms	Définitions
f	Fréquence du signal mécanique imposé	
A_σ	Amplitude de variations de la contrainte	$A_\sigma = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$
A_ϵ	Amplitude de variations de la déformation	
R_σ	Rapport de charge	$R_\sigma = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$
R_ϵ	Rapport de déformation	
T	Température locale du matériau	
T_a	Température ambiante	
θ	Différence de température	$\theta = T - T_a$

VII.2.1.2 Comportement mécanique

On dispose de deux jeux de données mécaniques obtenues sous sollicitations cycliques. La première correspond à des essais de motifs triangulaires en déformation et la seconde à des essais de motifs sinusoïdaux en contrainte.

• Essais à déformation imposée

Des essais triangulaires cycliques symétriques ($R_\epsilon = -1$) ont été effectués pour différentes amplitudes de déformation A_ϵ jusqu'à stabilisation de la contrainte. La vitesse de déformation a été fixée à $4 \text{ e}^{-3} \text{ s}^{-1}$ pour tous les essais.

On ne dispose que de deux informations pour chaque essai : l'évolution des contraintes maximale et minimale en fonction du nombre de cycles imposés (fig. VII.13) et la réponse en contrainte en fonction de la déformation pour le dernier cycle stabilisé (fig. VII.14).

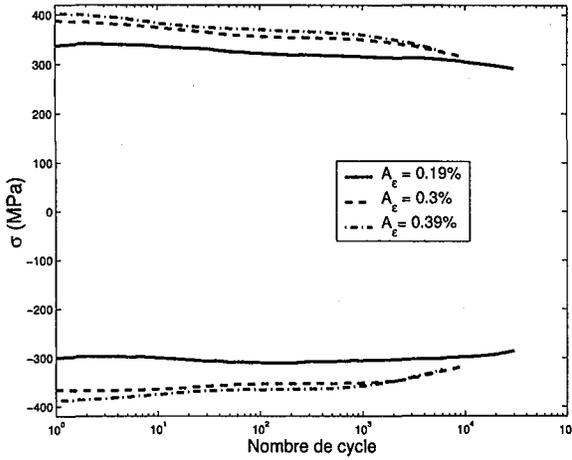


FIG. VII.13: Évolution des contraintes extrêmes en fonction du nombre de cycles imposés pour une déformation triangulaire cyclique

Le caractère non constant des extrémums est symptomatique du phénomène d'érouissage cyclique. La valeur absolue des extrémums est une fonction décroissante du nombre de cycles imposés. Cette évolution est représentative d'un adoucissement du matériau. On peut noter que cet adoucissement est d'autant plus important que l'amplitude de déformation imposée A_ϵ est grande.

La réponse en contrainte pour le dernier cycle stabilisé en fonction des différentes déformations imposées est reportée ci-dessous :

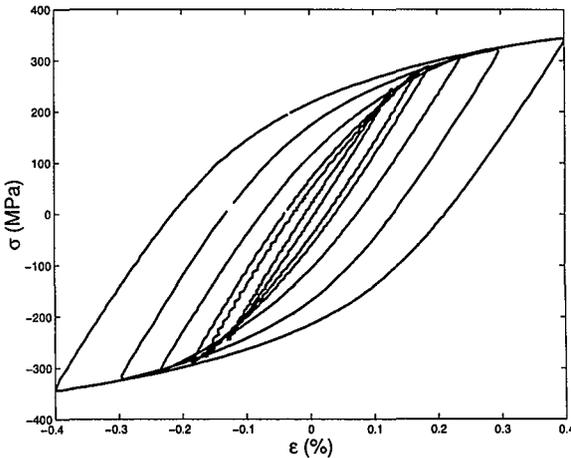


FIG. VII.14: Dernier cycle stabilisé $\sigma = f(\epsilon)$ pour différentes amplitudes de déformation imposée (excitation cyclique triangulaire)

• Essais à contrainte imposée

Des essais sinusoïdaux ont été effectués sur une large gamme de fréquences ($f \in [0.1 :$

30] Hz) pour différents rapports de charge ($R_\sigma \in [-1 : 0.1]$) et différentes amplitudes de contraintes ($A_\sigma \in [100 : 250]$ MPa). Malgré l'éventail des essais effectués, les réponses en déformation pour une même amplitude de contrainte sont très similaires (exemple en fig. VII.15). L'aspect mécanique (dynamique) seul ne présentera une sensibilité qu'à un nombre réduit de paramètres. Les surfaces de dissipation (aires d'hystérésis) ne sont néanmoins pas négligeables puisqu'elles induisent des élévations de température conséquentes qui permettront une étude fine du signal thermique mesuré.

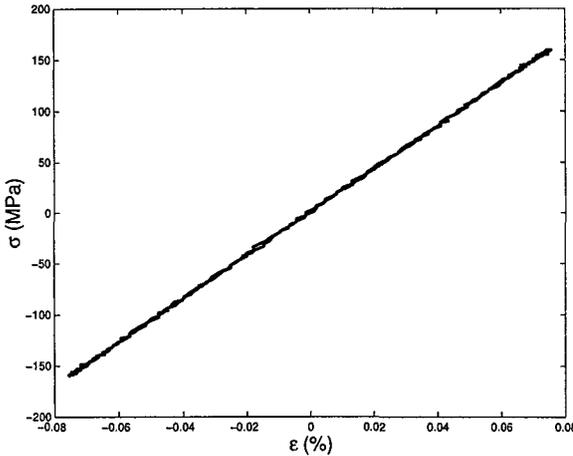


FIG. VII.15: Cycle stabilisé $\sigma = f(\epsilon)$ pour un essai en contrainte $A_\sigma = 160$ MPa, $f = 30$ Hz et $R_\sigma = -1$

VII.2.1.3 Comportement thermique

On dispose de deux types de données thermiques toutes effectuées sous sollicitations cycliques, en contrainte imposée uniquement, à une fréquence de 30 Hertz. Les élévations de température sont mesurées à l'aide de micro-jauges de température collées au centre de l'éprouvette.

La première classe d'essais consiste à imposer une contrainte sinusoïdale jusqu'à la stabilisation de la température et ensuite à laisser l'éprouvette se refroidir sans sollicitation mécanique :

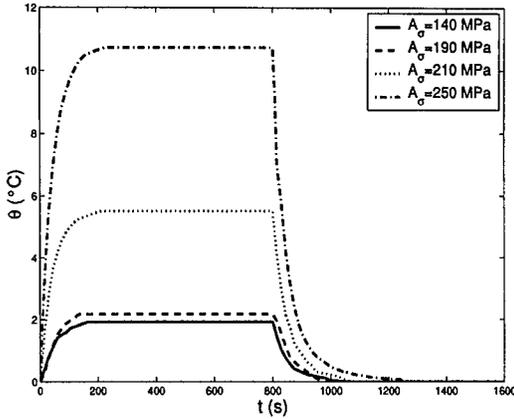


FIG. VII.16: Évolution de la température pour 4 amplitudes de contrainte avec un rapport de charge $R_\sigma = -1$

La deuxième classe d'essais consiste à faire varier l'amplitude de contrainte A_σ par paliers suffisamment longs et à mesurer la température stabilisée (température maximale atteinte par l'éprouvette correspondant aux plateaux des courbes de la figure (VII.16)) :

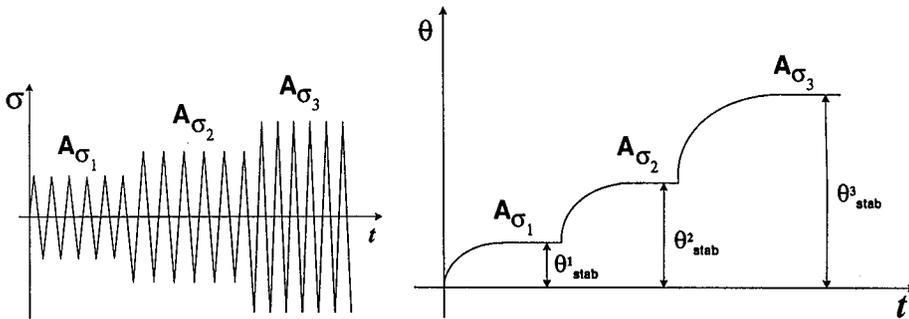


FIG. VII.17: Principe de mesure des échauffements maximums atteints pour différentes valeurs d'amplitude A_σ

L'évolution de la température moyenne stabilisée en fonction de la contrainte maximale imposée et du rapport de charge est reportée ci-dessous :

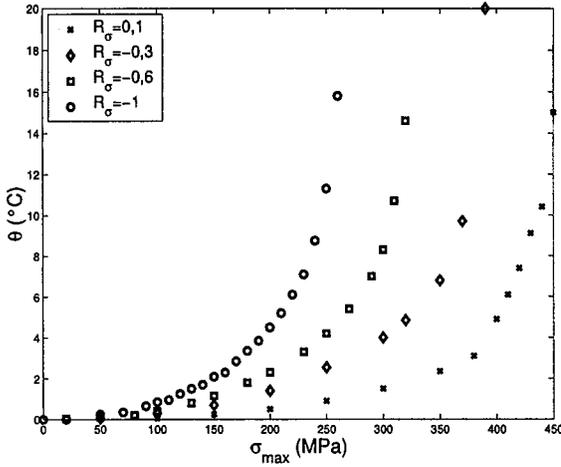


FIG. VII.18: Signal thermomécanique $\theta_{stab} = f(\sigma_{max})$ pour 4 rapports de charge

En reportant l'évolution de la température moyenne maximale en fonction de l'amplitude de contrainte imposée (fig. VII.19), on constate deux comportements distincts suivant le signe du rapport de charge. Pour un même signe, l'échauffement est indépendant de la valeur moyenne de la contrainte et ne dépend que de l'amplitude imposée :

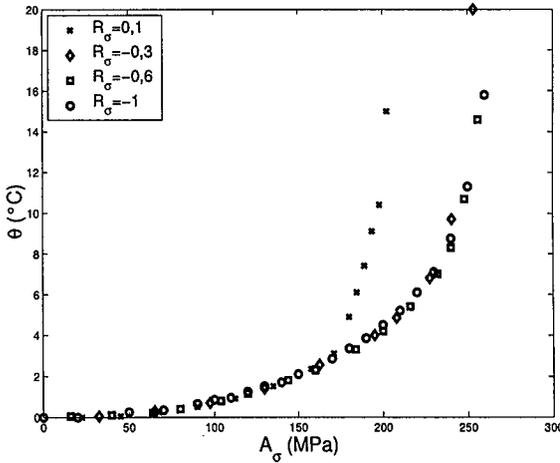


FIG. VII.19: Signal thermomécanique $\theta_{stab} = f(A_\sigma)$ pour 4 rapports de charge

On observe en outre deux domaines bien distincts [Gal 97]. Une première partie correspond aux faibles contraintes dans laquelle l'échauffement évolue de manière linéaire avec la contrainte. Ensuite, à partir d'une certaine contrainte (notée σ_{rev}) l'échauffement se produit de façon exponentielle en fonction de l'amplitude de la contrainte appliquée. Luong a breveté [Luo 92b] une technique expérimentale de détection de la limite en fatigue basée sur cette dernière courbe. Il propose de déterminer la contrainte limite σ_D à partir

de l'intersection de 2 tangentes comme le montre schématiquement la figure ci-dessous. Cette technique basée sur le comportement thermomécanique du matériau s'est avérée particulièrement prometteuse sur certaines classes de matériaux puisqu'elle permet un gain de temps considérable par rapport aux techniques oligocycliques classiques pour des valeurs de la contrainte limite relativement similaires. Si d'un point de vue pratique, cette méthode a des qualités certaines, il reste cependant un effort théorique important à fournir quant à la compréhension du lien physique entre l'intersection des tangentes décrites précédemment et la limite en fatigue.

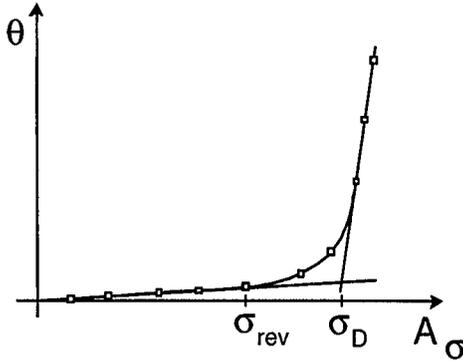


FIG. VII.20: Détermination graphique de σ_{rev} et de la limite en fatigue σ_D [Gal 97]

VII.2.2 Comparaison expérience-simulation

L'objectif poursuivi ici est la validation du modèle DNLR dans sa forme linéaire sur la base des données expérimentales propre au S355 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Réponse mécanique à une déformation imposée} \\
 \dot{\sigma} = E^u \dot{\epsilon} - \sum_j \frac{\sigma^j - p_0^j E^r \epsilon}{\tau_j^\epsilon} \\
 \\
 \text{Réponse mécanique à une contrainte imposée} \\
 \dot{\epsilon} = s^u \dot{\sigma} - \sum_j \frac{\epsilon^j - p_0^j s^r \sigma}{\tau_j^\sigma} \\
 \\
 \text{Réponse thermique à une contrainte imposée} \\
 C_z^u \dot{\theta} = -\frac{C_z^u}{\tau_{th}} \theta - \alpha^u T_0 \dot{\sigma} + \bar{A} \dot{z}
 \end{array} \right. \quad (VII.3)$$

La réponse mécanique est donc régie par trois paramètres : $(E^u, E^r, \tau_{max}^\epsilon)$ ou, de manière équivalente, par $(s^u, s^r, \tau_{max}^\sigma)$ en fonction du type de sollicitation imposée.

Si on suppose connue la valeur de la chaleur spécifique C_z^u , la réponse thermique à une contrainte imposée apparaît comme fonction du temps de fuite thermique τ_{th} et de la dissipation $\mathcal{D} = \bar{A} \dot{z}$. Or on a vu, dans le paragraphe dédié à l'écriture de la dissipation, que cette dernière, dans le cas linéaire, était entièrement régie par la partie réelle Y' et la partie

imaginaire Y'' de la fonction de transfert harmonique Y^* qui sont elles mêmes fonction des trois paramètres mécaniques ($s^u, s^r, \tau_{max}^\sigma$). On peut noter que, dans le cas d'une contrainte imposée, Y^* n'est rien d'autre que la retardance J^* . Ainsi, la réponse thermique à une sollicitation mécanique est régie par la connaissance des quatre paramètres ($\tau_{th}, s^u, s^r, \tau_{max}^\sigma$).

La stratégie qui sera développée dans ce paragraphe et schématisée sur la figure (VII.21) consiste donc à

1. identifier les trois paramètres mécaniques à partir du comportement en déformation imposée (fig. VII.14).
2. vérifier le bien-fondé de ces paramètres sur les données relatives aux essais en contrainte imposée (fig. VII.15).
3. identifier le temps de fuite thermique sur la base des réponses en refroidissement (fig. VII.16)
4. vérifier, avec l'ensemble des paramètres identifiés, la pertinence de la modélisation DNLR sur le signal thermo-viscoélastique $\theta = f(A_\sigma)$ (fig. VII.19)

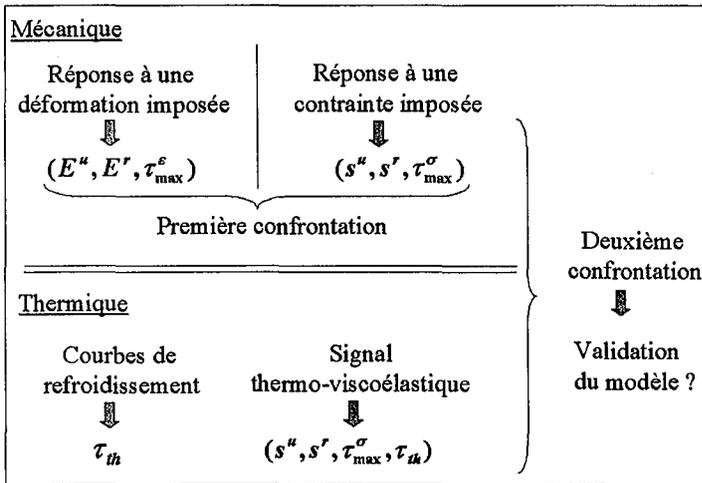


FIG. VII.21: Stratégie de validation du modèle DNLR basée sur l'étude couplée des réponses mécaniques et thermiques du S355

VII.2.2.1 Paramètres mécaniques

Afin de familiariser le lecteur avec les méthodes graphiques d'identification des paramètres à venir, on étudie rapidement le cas simple d'une traction.

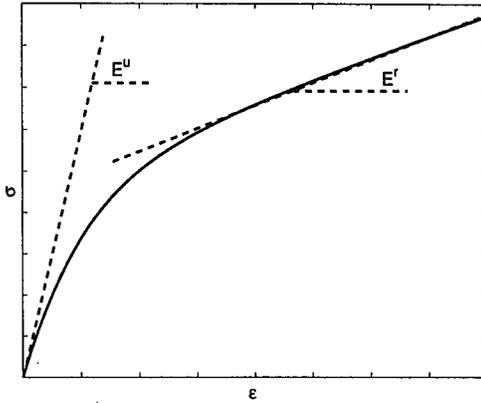


FIG. VII.22: Mise en évidence graphique de E^u et E^r sur un essai de traction

Le module instantané E^u correspond à la tangente à l'origine de la courbe tandis que le module relaxé E^r correspond à la pente finale de la courbe. La relaxation des processus dissipatifs est caractérisée par la courbe située "entre" ces deux droites. Le temps de relaxation maximal τ_{max} correspond ainsi au temps nécessaire pour atteindre l'état relaxé.

L'application de cet exemple simple au cas d'un chargement cyclique permet ainsi de fixer l'ordre de grandeur des modules instantané E^u et relaxé E^r à partir des cycles stabilisés (fig. VII.23) en déformation imposée.

Le module instantané correspond à la pente de l'ellipse juste après que la vitesse de déformation imposée change de signe. Le module relaxé correspond à la pente de l'ellipse juste avant ce changement de signe uniquement pour les grandes déformations où l'état relaxé semble atteint.

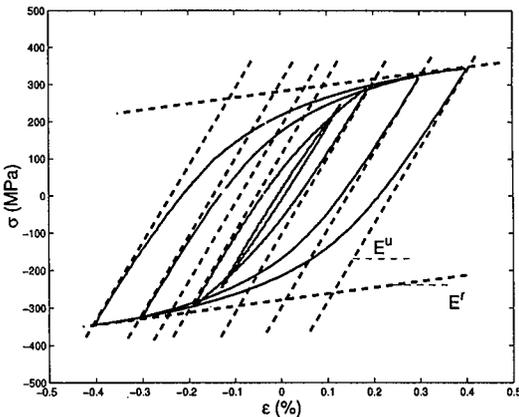


FIG. VII.23: Détermination graphique de E^u et E^r à partir des cycles stabilisés pour des essais en déformation imposée

La détermination graphique des modules instantané et relaxé conduit aux valeurs suivantes :

$$E^u = 205 \text{ GPa} \text{ et } E^r = 20 \text{ GPa} \quad (\text{VII.4})$$

Pour déterminer le temps de relaxation maximal τ_{max}^ϵ , on s'appuie sur la courbe relative à l'amplitude de déformation la moins élevée i.e. $A_\epsilon = 0.14\%$ (fig. VII.24).

De toutes les données dont on dispose, c'est le cas où le matériau est soumis à un phénomène d'adoucissement le moins important et où il induit une dissipation (aire d'hystérésis) la plus faible. Ainsi, les faibles élévations de température qui accompagneront cette sollicitation ne devraient pas avoir d'influence sur le comportement mécanique. En choisissant de travailler avec cette amplitude de déformation, on minimise ainsi les erreurs potentielles d'identification du jeu de paramètres réduits (E^u , E^r et τ_{max}^ϵ) associé au modèle DNLR linéaire.

La valeur du temps maximal de relaxation est identifiée à :

$$\tau_{max}^\epsilon = 40 \text{ s} \quad (\text{VII.5})$$

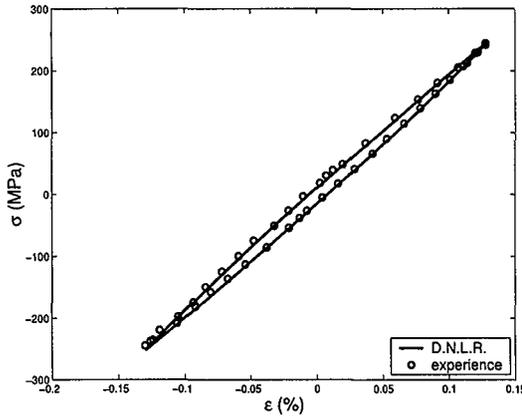


FIG. VII.24: Comparaison de la courbe expérimentale dans le cas d'une déformation imposée $A_\epsilon = 0.14\%$ avec la modélisation DNLR ($E^u=205 \text{ GPa}$, $E^r = 20 \text{ GPa}$ et $\tau_{max}^\epsilon=40 \text{ s}$)

Les paramètres mécaniques identifiés précédemment doivent permettre de reproduire les données expérimentales en contrainte imposée. La figure (VII.15) correspondant à la réponse en déformation pour une amplitude de contrainte $A_\sigma = 160 \text{ MPa}$, un rapport de charge $R_\sigma = -1$ et une fréquence de 30 Hz montre que la réponse est quasiment similaire à une réponse d'un matériau purement élastique. Si l'aire de l'ellipse n'est pas nulle, on est tout de même loin de l'état relaxé caractérisé par une seconde droite de pente plus faible (cf fig. VII.22). On comprend ainsi graphiquement que la sensibilité du modèle DNLR à la souplesse relaxée est dans ce cas très faible. On suppose alors cette valeur connue que l'on fixe en fonction du module relaxé déterminé précédemment :

$$s^r = \frac{1}{E^r} = 5 e^{-11} \text{ Pa}^{-1} \quad (\text{VII.6})$$

L'identification des paramètres (fig. VII.25) conduit aux valeurs suivantes :

$$s^u = 4.6 e^{-12} \text{ Pa}^{-1} \text{ et } \tau_{max}^\sigma = 2710 \text{ s} \quad (\text{VII.7})$$

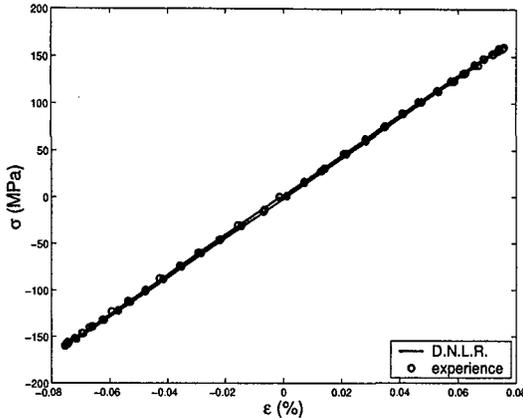


FIG. VII.25: Comparaison de la réponse expérimentale suite à une contrainte imposée $A_\sigma = 160 \text{ MPa}$ à une fréquence de 30 Hz avec la modélisation DNLr ($s^u = 4.6 e^{-12} \text{ Pa}^{-1}$, $s^r = 5 e^{-11} \text{ Pa}^{-1}$, $\tau_{max}^\sigma = 2710 \text{ s}$)

L'équivalence des deux écritures constitutives DNLr écrites en déformation (VII.3.a) ou en contrainte imposée (VII.3.b) permet de déterminer le module instantané et le temps de relaxation associés aux paramètres précédents :

$$E^u = \frac{1}{s^u} = 217 \text{ GPa} \quad \text{et} \quad \tau_{max}^\epsilon = \frac{s^u}{s^r} \tau_{max}^\sigma = 250 \text{ s} \quad (\text{VII.8})$$

L'écart relatif des valeurs du module instantané déterminées en déformation imposée et en contrainte imposée est de 5.5 %. Cette différence peut s'expliquer par l'adoucissement du matériau, plus important en déformation qu'en contrainte imposée, qui n'est pas pris en compte par le modèle DNLr linéaire et qui tend à faire baisser le module instantané apparent.

Les deux temps maximaux de relaxation identifiés précédemment sont dans un rapport de 6. Les ordres de grandeurs sont ainsi respectés. Cet écart peut s'expliquer par le fait que les fréquences d'excitations imposées ne sont pas les mêmes. Dans le cas d'une déformation imposée, elle est de l'ordre de 0.5 Hertz tandis que dans le cas d'une contrainte imposée, elle est de 30 Hertz. Or on a vu dans le chapitre III que le spectre DNLr classique (utilisé ici) ne permettait pas de prendre correctement en compte les effets de vitesses de chargement. Dans le cadre de cette thèse, on cherche uniquement à effectuer une première validation purement qualitative de l'approche DNLr aussi on ne s'attardera pas davantage sur ce dernier écart qui pourra être corrigé en temps voulu en utilisant le double glissement fréquentiel associé aux poids et aux temps de relaxation du spectre DNLr décrit au chapitre III.

La réponse à une déformation imposée avec les deux jeux de paramètres identifiés précédemment est reportée ci-dessous :

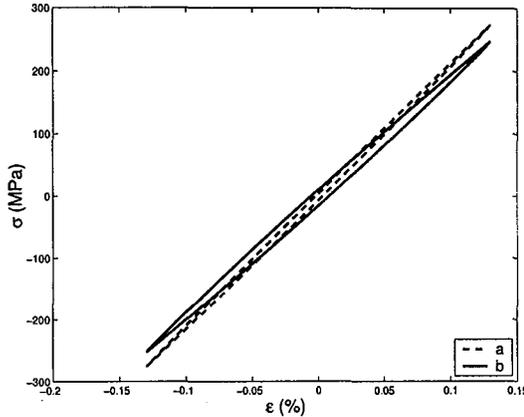


FIG. VII.26: Réponses DNLr suite à une amplitude de déformation imposée $A_\sigma = 0.13\%$ (a) avec ($E^u=217$ GPa, $E^r = 20$ GPa et $\tau_{max}^e=250$ s) (b) avec ($E^u=205$ GPa, $E^r = 20$ GPa et $\tau_{max}^e=40$ s)

On peut ainsi imaginer que la courbe (a) correspondrait au premier cycle d'excitation et la courbe (b) au cycle stabilisé. L'adoucissement va ainsi permettre un glissement de (a) vers (b) et conduit à un module instantané apparent plus faible qu'il ne l'est en réalité.

VII.2.2.2 Paramètre thermique

Les courbes de refroidissement du matériau permettent, à elles seules, de déterminer le temps de fuite thermique τ_{th} . En effet, dans ces conditions, l'évolution théorique de la température T s'écrit pour le modèle le plus simple (hypothèse du petit corps) :

$$T(t) = (T_i - T_a) \exp\left(-\frac{t}{\tau_{th}}\right) + T_a \quad (VII.9)$$

où T_i est la température initiale du matériau, T_a la température ambiante et τ_{th} le temps de fuite thermique défini par :

$$\frac{1}{\tau_{th}} = \frac{2h(e+l)}{C_z^u e l} + \frac{\lambda}{C_z^u L^2} \quad (VII.10)$$

avec (e, l, L) dimensions géométriques de l'éprouvette, C_z^u la chaleur spécifique, λ le coefficient de conduction et h coefficient d'échange thermique aux niveaux des parois.

En posant $\theta = T - T_a$, la fonction précédente s'écrit :

$$\theta(t) = \theta_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_{th}}\right) \quad (VII.11)$$

Le temps de fuite correspond ainsi théoriquement à la pente de la droite reliant le temps au $\ln(\theta_i/\theta(t))$.

$$t = \tau_{th} \ln\left(\frac{\theta_i}{\theta}\right) \quad (VII.12)$$

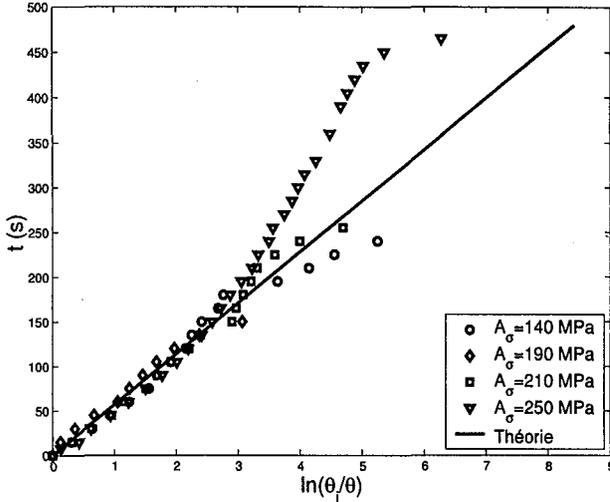


FIG. VII.27: Courbes de refroidissement expérience-théorie ($\tau_{th} = 57$ s)

Si le comportement expérimental semble être régi par l'équation (VII.12) aux temps courts, il n'en est rien pour les temps longs. La modélisation précédente est basée sur une simplification du modèle de conduction de la chaleur 3D en un modèle 0D. Cette simplification peut expliquer les écarts observés précédemment aux temps longs qui peuvent être attribués aux phénomènes de conduction thermique mettant en jeu les effets de constriction thermique des lignes de flux à l'élargissement de l'éprouvette normalisée, les conditions de serrage de l'éprouvette (conditions limitées au niveau des mors) mais également une éventuelle instabilité de température de l'environnement sur la durée de l'expérience. Compte tenu des remarques précédentes, on s'est limité aux 130 premières secondes pour identifier le temps de fuite thermique.

Connaissant la valeur de la chaleur spécifique ($C_z^u = 3.6e^6 J m^{-3} K^{-1}$) et du coefficient de conduction ($\lambda = 25 W m^{-1} K^{-1}$) de la nuance S355, on peut alors, d'après la définition du temps de fuite thermique, en déduire la valeur du coefficient d'échange h :

$$h \simeq 140 W m^{-2} K^{-1} \quad (VII.13)$$

Cette valeur est supérieure aux valeurs auxquelles on peut s'attendre en convection quasi-libre ($h \simeq 15 W m^{-2} K^{-1}$). Cet écart est sans doute dû au modèle simpliste du petit corps utilisé ici qui ne permet pas de rendre correctement compte du transfert de chaleur aux niveaux des mors (puits de chaleur). Néanmoins, l'ordre de grandeur est globalement respecté compte tenu des approximations considérées.

VII.2.2.3 Validation de la modélisation DNLR

Les deux études précédentes ont permis d'identifier les quatre paramètres (s^u , s^r , τ_{max}^σ et τ_{th}) caractéristiques du couplage thermomécanique linéaire. Avec ces quatre paramètres, la modélisation DNLR doit pouvoir reproduire les données expérimentales thermomécaniques $\theta_{stab} = f(A_\sigma)$ présentées sur la figure VII.19.

L'équation de la chaleur a été écrite au chapitre IV dans le cas d'une déformation imposée. Le formalisme développé au chapitre II permet de transposer cette loi dans le cas d'une contrainte imposée :

$$C_z^u \dot{\theta} = \lambda \Delta \theta - \alpha^u T \dot{\sigma} + \bar{A} \bar{z} + \bar{b}_{sz} T \bar{z} \quad (\text{VII.14})$$

L'hypothèse de l'état local appliquée à l'entropie permet dans un premier temps de s'affranchir du terme de couplage isentropique $\bar{b}_{sz} T \bar{z}$. Si on reprend ensuite le même raisonnement que celui décrit au chapitre V.1, on peut alors écrire l'équation de la chaleur dans le cas 0D pour une contrainte imposée :

$$C_z^u \dot{\theta} = -\frac{C_z^u}{\tau_{th}} \theta - \alpha^u T_0 \dot{\sigma} + \bar{A} \bar{z} \quad (\text{VII.15})$$

Compte tenu des données expérimentales à notre disposition, on se limitera à l'étude de la température moyenne i.e. la température moyennée sur chaque cycle :

$$\bar{\theta}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \theta(u) du \quad (\text{VII.16})$$

Cette température est alors solution de l'équation différentielle :

$$C_z^u \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = -\frac{C_z^u}{\tau_{th}} \bar{\theta} + \bar{q} \quad (\text{VII.17})$$

où \bar{q} la puissance thermique moyennée s'écrit :

$$\bar{q}(t) = \bar{D} - \alpha^u T \bar{\sigma} \quad (\text{VII.18})$$

et où \bar{D} correspond à la puissance dissipée $\bar{A} \bar{z}$.

Dans le cas d'une contrainte cyclique imposée d'amplitude A_σ et de période T , la puissance thermoélastique moyennée est nulle et la dissipation moyennée, dans le cas du comportement viscoélastique, s'écrit :

$$\bar{D} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{A}(u) \bar{z}(u) du = -\frac{A_\sigma^2 \pi}{T} J''(\omega) = -\frac{\omega A_\sigma^2}{2} J''(\omega) \quad (\text{VII.19})$$

où J'' correspond à la partie imaginaire de la souplesse complexe appelée aussi composante dissipative de la souplesse et où ω est la pulsation.

La température moyennée sur un cycle s'écrit alors :

$$\bar{\theta}(t) = \bar{\theta}_{stab} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau_{th}})) \quad (\text{VII.20})$$

où $\bar{\theta}_{stab}$ correspond à la température moyenne stabilisée (i.e. la limite lorsque t tend vers l'infini de la température moyenne) :

$$\bar{\theta}_{stab} = -\frac{\omega A_\sigma^2 \tau_{th}}{2 C_z^u} J''(\omega) \quad (\text{VII.21})$$

En visco-élasticité linéaire, la complaisance imaginaire ne dépend pas du chargement imposé mais uniquement de sa fréquence :

$$J''(\omega) = (s^u - s^r) \sum_j p_0^j \frac{\tau^j \omega}{1 + (\tau^j \omega)^2} \quad (\text{VII.22})$$

Aussi, à fréquence fixée, la température stabilisée est une fonction linéaire du carré de l'amplitude :

$$\bar{\theta}_{stab} = -\frac{\omega \tau_{th}}{2 C_z^u} J''(\omega) A_\sigma^2 = \rho A_\sigma^2 \quad (\text{VII.23})$$

où ρ est une constante positive fonction de J'' et de τ_{th} . Compte tenu de la relation (VII.22), ρ est donc entièrement déterminée par les quatre paramètres (s^u , s^r , τ_{max}^σ et τ_{th}).

Cette dernière relation permet de justifier les observations expérimentales de Galtier [Gal 97] stipulant que pour une amplitude de contrainte fixée la température stabilisée apparaît comme une fonction linéaire de la fréquence (pour $\omega \in [3 - 20] \text{ Hz}$). On s'aperçoit, d'après (VII.23) que ce comportement n'est valable que pour une faible gamme de fréquence sur laquelle la complaisance imaginaire $J''(\omega)$ peut être supposée constante.

On reporte sur la figure (VII.28) les données expérimentales thermiques, la simulation issue du modèle DNLR avec les quatre paramètres déterminés précédemment et celle obtenue en fixant les trois paramètres mécaniques et en identifiant le temps de fuite thermique τ_{th} sur la première partie de la courbe expérimentale ($A_\sigma \leq 100 \text{ MPa}$) :

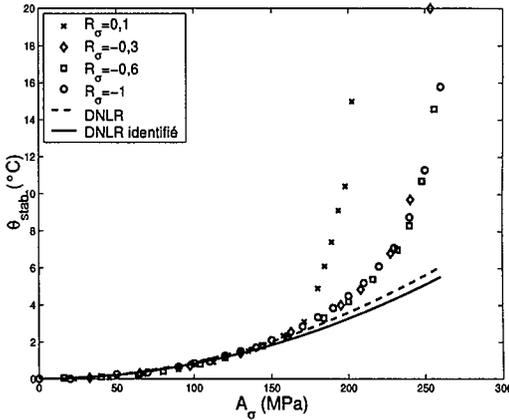


FIG. VII.28: Comparaison des données thermomécaniques avec la modélisation DNLR

On identifie la valeur de τ_{th} à 52 s. L'écart relatif entre cette valeur et celle déterminée précédemment ($\approx 9\%$) est suffisamment faible pour valider définitivement la modélisation DNLR. Dans sa forme la plus simple, la modélisation DNLR linéaire (sans prise en compte des non-linéarités d'origine mécanique et thermique) ne permet pas bien sûr de décrire toute la courbe expérimentale. Cependant cette modélisation apporte déjà un outil thermique original et fondamental pour déterminer la limite entre viscoélasticité linéaire et viscoplasticité, ce qui était une des préoccupations principales de notre partenaire industriel, l'IRSID. Pour la nuance d'acier S355, la limite à partir de laquelle il semblerait que l'on sorte de la viscoélasticité linéaire est estimée (fig. VII.28) à environ $A_{vp} = 135 \text{ MPa}$.

VII.2.3 Conclusions et perspectives

Cette première tentative d'analyse comparée entre modèle théorique et données issues de l'expérimentation, bien que très grossière, a permis néanmoins de vérifier le potentiel de

modélisation DNLR dans le cadre de la viscoélasticité linéaire. A nos yeux, elle a surtout permis d'illustrer la démarche qui nous ouvre les perspectives à venir i.e. combiner signaux expérimentaux d'origine mécanique et thermique pour vérifier la validité d'une loi rhéologique dans un cadre cohérent de modélisation qui intègre correctement les couplages.

On ne peut pas, bien sûr, se contenter de ces premiers résultats spécifiques aux comportements viscoélastiques d'une nuance d'acier. La prise en compte des non-linéarités d'origine mécanique et thermique devraient permettre de décrire les comportements thermovisco-plastiques. Il reste pour cela à acquérir au préalable une base de données conséquente sur différents matériaux ; c'est sur cet aspect que nous devons maintenant porter nos efforts. De plus, une analyse fine de la sensibilité aux paramètres mécaniques et thermiques du système DNLR complet (IV.105) devrait permettre

- de dégager clairement quels sont les paramètres que l'on pourra espérer déterminer avec une précision satisfaisante, en particulier dans le cas où les non-linéarités seront introduites. Ces non-linéarités impliquent un couplage avec la température au travers des lois d'activation de type Arrhénius comme le rappellent les équations ci-dessous :

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Loi constitutive thermomécanique incluant thermoélasticité et} \\
 \text{effets dissipatifs avec glissement du spectre} \\
 \dot{\epsilon} = s^u \dot{\sigma} - \alpha^u \dot{T} - \sum_{j=1}^N \frac{\epsilon^j - p_0^j s^r \sigma + \alpha^r T}{\tau_{\sigma}^{r,j}(t, T) a(t, T)} \\
 \\
 \text{Spectre des temps de relaxation} \\
 \tau_{\sigma}^{r,j}(t, T) = \left[\frac{h}{kT} \exp\left(-\frac{\Delta S_j^{+,r}}{R}\right) \right] \exp\left(\frac{\Delta E^{+,r}}{RT}\right) \\
 \\
 \text{Facteur de glissement (non-linéarités mécanique et thermique)} \\
 a(t, T) = \exp\left(\frac{K_{\sigma} |\epsilon - p_0^j s^r \sigma|}{RT}\right) \exp\left(\frac{K_T |T - T^r|}{RT}\right)
 \end{array} \right\} \quad (\text{VII.24})$$

- de définir alors une stratégie d'estimation optimale des différents paramètres en fonction de la nature des différents signaux mécaniques et thermiques utilisés. Faute d'informations supplémentaires, on a travaillé ici avec l'évolution de la température moyennée ; on pourrait, par exemple, avec des données complètes du thermosignal, à l'aide d'une analyse de Fourier, remonter aux différentes informations mécaniques représentées par les quatre paramètres q_i des sources de chaleur interne (§ V.3.2).

Conclusions et perspectives

Conclusions et perspectives

Cette étude a permis de mettre en oeuvre une modélisation complète du couplage thermomécanique i.e. une modélisation qui décrit le comportement mécanique d'un matériau tout en prenant en compte son comportement thermique au cours d'un essai. Cette démarche est fondamentale pour la caractérisation rhéologique des matériaux. La description fine du comportement mécanique d'un matériau nécessite la connaissance de l'évolution de température. La signature de cette dernière reflète en effet les réorganisations internes du matériau et leurs incidences sur les variables observables mécaniques. De plus, la caractérisation thermique est indispensable pour vérifier la validité thermodynamique d'un modèle ($T\dot{s}_i \geq 0$). Ce dernier point reste, encore à l'heure actuelle, une grande lacune de certains modèles rhéologiques utilisés dans la littérature dont la seule validité est assurée par la bonne reproductibilité du comportement mécanique expérimental.

D'un point de vue purement mécanique, l'étude de la relaxation des matériaux viscoélastiques a permis de faire le lien entre la modélisation DNLR, basée sur la théorie des fluctuations et le théorème d'équipartition de l'entropie, et les modèles à dérivées non entières. L'étude comparative du modèle DNLR, des analyses de Jonscher et des modèles micro-physiques considérés comme les plus pertinents (modèle de cluster) a permis dans un dernier temps de corriger le spectre de relaxation DNLR pour intégrer la présence de phénomènes de relaxation à basse fréquence soit en introduisant des non-linéarités fréquentielles associées aux poids et aux temps de relaxation soit en utilisant un spectre non borné asymétrique caractérisé par deux lois récursives. Il reste à déterminer le lien physique entre ces deux dernières modélisations. Il reste enfin dans ce domaine un investissement à fournir en matière de compréhension des effets non-linéaires et du lien que continuerait d'entretenir l'approche thermodynamique et les approches aux dérivées non-entières. Ce travail nécessitera sans doute de s'ouvrir vers les travaux des physiciens de la structure.

Un dernier point, qui nous tient à coeur et qui a été peu développé dans ce mémoire, reste à traiter : il s'agit de la notion d'irréversibilité associée à l'approche fractale et plus particulièrement celle attachée à la création d'entropie. On a montré que l'écriture modale de la loi constitutive mécanique DNLR (VII.25.a) pouvait être réécrite sous forme condensée (VII.25.b) en utilisant un opérateur de dérivation non entière y :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}^j = p_0^j E^u \dot{\epsilon} + b^j \dot{z}^j \quad \text{avec} \quad b^j \dot{z}^j = -\frac{\sigma^j - \sigma^{j,r}}{\tau_j^\epsilon} \quad \text{et} \quad \sigma = \sum_j \sigma^j \\ \sigma = E^u \epsilon + bz \quad \text{avec} \quad bz = y \otimes \epsilon \end{array} \right. \quad (\text{VII.25})$$

Il serait intéressant de mener une analyse similaire sur l'écriture de l'affinité afin d'obtenir une forme condensée de la puissance dissipée $T\dot{s}_i = \sum_j A^j \dot{z}^j$. On peut d'ailleurs citer, à ce sujet, les derniers travaux novateurs de Le Mehaut et ses collaborateurs [Niv 02] qui

les amènent à redéfinir une nouvelle thermodynamique où la notion même de vitesse est réfutée.

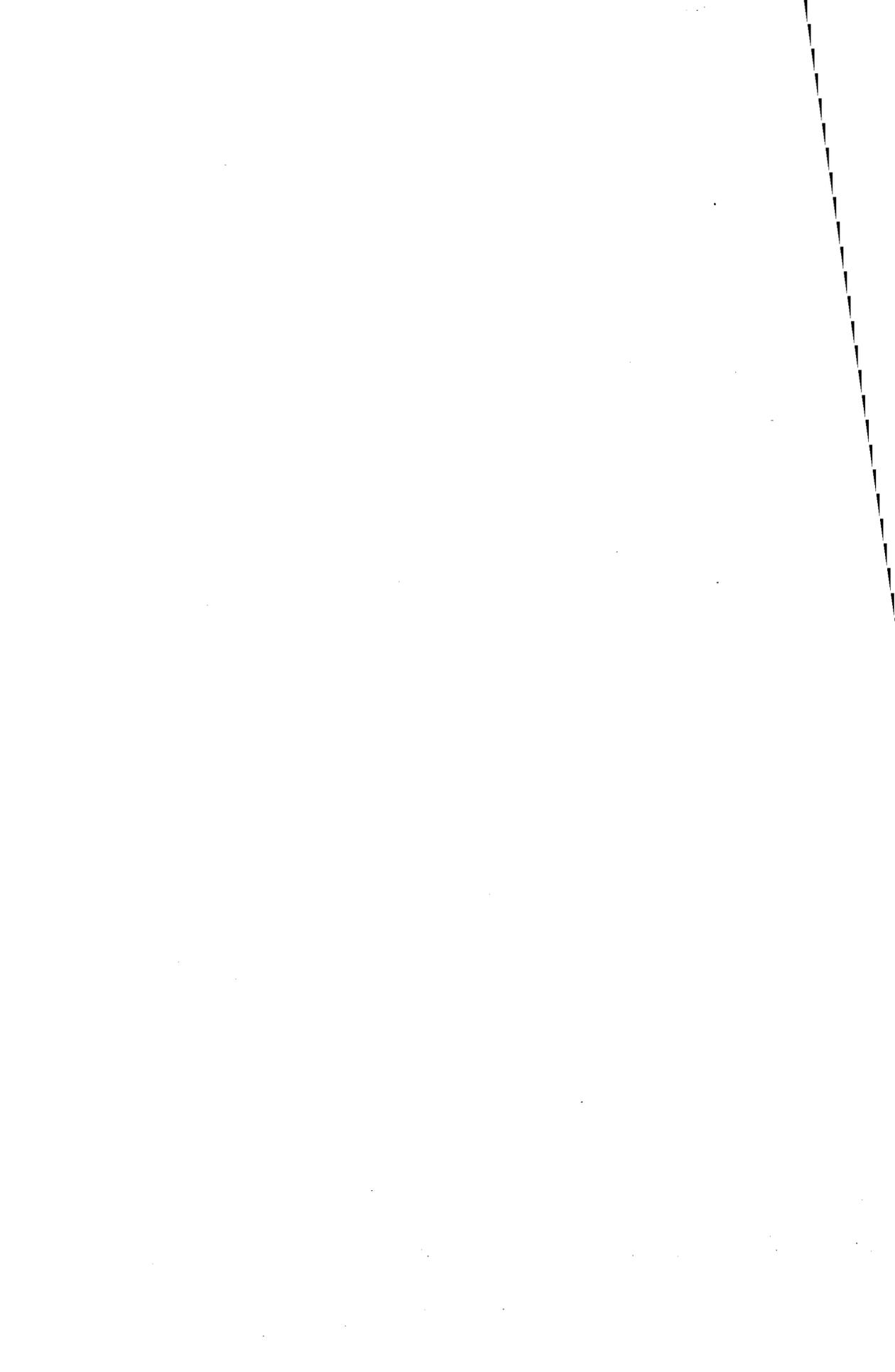
L'étude du couplage thermomécanique basé sur l'approche DNLR a ensuite permis de développer un modèle de transfert thermique pour une éprouvette soumise à des sollicitations mécaniques. Cette étude a permis de faire apparaître explicitement les différentes puissances mises en jeu lors d'une sollicitation mécanique imposée et ainsi d'étudier les différentes modélisations de la dissipation proposées dans la littérature. En s'appuyant sur une étude numérique, on a ensuite vérifié que l'écriture unidimensionnelle de l'équation de la chaleur était suffisante pour décrire le transfert thermique associé à des éprouvettes élancées. On est donc désormais capable de déterminer l'évolution de la température quelle que soit la sollicitation mécanique imposée.

Compte tenu (i) des aptitudes de la stratégie DNLR à décrire des comportements mécaniques complexes [Fac 97], (ii) du fait que la structure de l'équation de la chaleur peut être directement déduite du DNLR (et apparaît comme comparable à celle déduite des modèles standards généralisés) et (iii) de l'écriture directe de la dissipation dans le formalisme DNLR, il est fort probable que l'approche DNLR permettra elle-aussi de décrire les comportements thermomécaniques complexes avec leur cortège de couplages. Dans ce mémoire, on a cependant restreint l'étude du couplage thermomécanique au cas "simple" de la viscoélasticité linéaire. Il reste maintenant à développer cette étude pour des comportements mécaniques plus complexes.

D'un point de vue expérimental, on a mis en place un protocole de mesure locale et simultanée de la déformation (vidéo-traction) et de la température (mono-détecteur infrarouge) d'une éprouvette. Une grande campagne d'essais sur différents matériaux va être lancée très prochainement afin de disposer d'une base de données expérimentales conséquente.

On a enfin proposé une première validation du modèle DNLR en exploitant les données expérimentales d'une nuance d'acier S355. Cette étude "sommaire" a permis de répondre à la préoccupation principale de l'IRSID consistant à bien décrire le comportement mécanique et thermique à faible dissipation dans les essais de fatigue. Cette étude a surtout permis d'illustrer les perspectives à venir consistant à combiner les signaux expérimentaux d'origine mécanique et thermique pour vérifier la validité d'une loi rhéologique dans un cadre cohérent de modélisation qui intègre correctement les couplages. Il reste ainsi à effectuer une validation définitive de l'approche DNLR à l'aide d'une stratégie optimale d'estimations des paramètres et en s'appuyant sur les données effectuées au laboratoire à l'aide de la combinaison de détection infrarouge vidéo-traction. Cette étude devrait permettre, à terme, une meilleure compréhension des phénomènes physiques mis en jeu (couplage thermoélastique, thermomécanique et dissipatif) et de leurs importances respectives pour des comportements complexes non linéaires. A terme, l'idée est bien entendu d'étendre cette étude, jusqu'à la restreinte à la viscoélasticité linéaire, à la description complète du couplage thermomécanique.

Annexes



A Détermination de la loi constitutive associée au potentiel d'énergie interne u

Le but de cette annexe est de déterminer les coefficients $a^{s\epsilon}$, $b^{s\epsilon}$ et $g^{s\epsilon}$ à partir des coefficients $a^{T\epsilon}$, $b^{T\epsilon}$ et $g^{T\epsilon}$ définis précédemment (II.21). On s'appuie pour cela sur la méthode de Jacobi dont on rappelle, au préalable, les bases mathématiques.

Transformation de Jacobi : Méthode du Jacobien pour un cas simple

Introduisons deux paires de variables (a,b) et (x,y) reliées entre elles par la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \Big|_y & \frac{\partial a}{\partial y} \Big|_x \\ \frac{\partial b}{\partial x} \Big|_y & \frac{\partial b}{\partial y} \Big|_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (26)$$

On définit le Jacobien comme le déterminant associé à cette matrice de couplage :

$$\frac{\partial(a,b)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (27)$$

Les Jacobiens obéissent aux relations :

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial(a,b)}{\partial(x,y)} &= \frac{\partial(a,b)}{\partial(r,s)} \frac{\partial(r,s)}{\partial(x,y)} \\ \frac{\partial(a,b)}{\partial(x,y)} &= \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right]^{-1} \\ \frac{\partial(a,b)}{\partial(x,y)} &= - \frac{\partial(b,a)}{\partial(x,y)} = - \frac{\partial(a,b)}{\partial(y,x)} \end{aligned} \right. \quad (28)$$

Dans le cas particulier où $b = y$, le Jacobien s'écrit :

$$\frac{\partial(a,y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial a}{\partial x} \Big|_y \quad (29)$$

La méthode du Jacobien permet, par exemple, de calculer le coefficient $\frac{\partial b}{\partial y}|_a$ à partir des coefficients supposés connus de la matrice de couplage introduite dans l'équation (26) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial b}{\partial y}|_a &= \frac{\partial(b, a)}{\partial(y, a)} \\
 &= \frac{\partial(b, a)}{\partial(y, x)} \cdot \frac{\partial(y, x)}{\partial(y, a)} \\
 &= \frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, y)} \\
 &= \frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial x}{\partial a}|_y \\
 &= \left(\frac{\partial a}{\partial x}|_y \cdot \frac{\partial b}{\partial y}|_x - \frac{\partial a}{\partial y}|_x \cdot \frac{\partial b}{\partial x}|_y \right) \cdot \left[\frac{\partial a}{\partial x}|_y \right]^{-1}
 \end{aligned} \tag{30}$$

En effectuant le même développement, on peut ainsi déterminer les trois derniers coefficients reliant le couple de variables (x,b) au couple (a,y).

Application à la matrice propre au DNLR

Définissons, au préalable, la variable z par l'ensemble $(z^1, \dots, z^j, \dots, z^n)$ et $z^{j \neq i}$ par l'ensemble $(z^1, \dots, z^{i-1}, z^{i+1}, \dots, z^n)$.

• Coefficients $a^{s\epsilon}$

$$a_{Ts}^{s\epsilon} = \frac{\partial T}{\partial s}|_{\epsilon, z} = \left[\frac{\partial s}{\partial T}|_{\epsilon, z} \right]^{-1} = [a_{sT}^{T\epsilon}]^{-1} = \frac{T}{C_{\epsilon z}^u} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 a_{T\epsilon}^{s\epsilon} &= \frac{\partial T}{\partial \epsilon}|_{s, z} = \frac{\partial(T, s, z)}{\partial(\epsilon, s, z)} = \frac{\partial(T, s, z)}{\partial(\epsilon, T, z)} \cdot \frac{\partial(\epsilon, T, z)}{\partial(\epsilon, s, z)} \\
 &= -\frac{\partial(s, T, z)}{\partial(\epsilon, T, z)} \cdot \frac{\partial(T, \epsilon, z)}{\partial(s, \epsilon, z)} = -\frac{\partial s}{\partial \epsilon}|_{T, z} \cdot \frac{\partial T}{\partial s}|_{\epsilon, z}
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 &= -a_{s\epsilon}^{T\epsilon} a_{Ts}^{s\epsilon} = -\frac{\alpha^u E^u T}{C_{\epsilon z}^u} \\
 a_{\sigma\epsilon}^{s\epsilon} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}|_{s, z} = \frac{\partial(\sigma, s, z)}{\partial(\epsilon, s, z)} = \frac{\partial(\sigma, s, z)}{\partial(\epsilon, T, z)} \cdot \frac{\partial(\epsilon, T, z)}{\partial(\epsilon, s, z)} \\
 &= \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}|_{T, z} \frac{\partial s}{\partial T}|_{\epsilon, z} - \frac{\partial \sigma}{\partial T}|_{\epsilon, z} \frac{\partial s}{\partial \epsilon}|_{T, z} \right) \cdot \frac{\partial T}{\partial s}|_{\epsilon, z} \\
 &= (a_{\sigma\epsilon}^{T\epsilon} a_{sT}^{T\epsilon} - a_{\sigma T}^{T\epsilon} a_{s\epsilon}^{T\epsilon}) a_{Ts}^{s\epsilon} = E^u + \frac{(\alpha^u E^u)^2 T}{C_{\epsilon z}^u}
 \end{aligned} \tag{33}$$

• Coefficients $b^{s\epsilon}$

$$b_{Tz^j}^{s\epsilon} = \frac{\partial T}{\partial z^j} \Big|_{s,\epsilon,z^{i \neq j}} = \frac{\partial(T, s, \epsilon, z^{i \neq j})}{\partial(z^j, s, \epsilon, z^{i \neq j})} = \frac{\partial(T, s, \epsilon, z^{i \neq j})}{\partial(z^j, T, \epsilon, z^{i \neq j})} \frac{\partial(z^j, T, \epsilon, z^{i \neq j})}{\partial(z^j, s, \epsilon, z^{i \neq j})} \quad (34)$$

$$= -b_{sz^j}^{T\epsilon} a_{Ts}^{s\epsilon} = b_{sz^j} \frac{T}{C_{\epsilon z}^u}$$

$$b_{\sigma z^j}^{s\epsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial z^j} \Big|_{s,\epsilon,z^{i \neq j}} = \frac{\partial(\sigma, s, \epsilon, z^{i \neq j})}{\partial(z^j, s, \epsilon, z^{i \neq j})} = \frac{\partial(\sigma, s, \epsilon, z^{i \neq j})}{\partial(z^j, T, \epsilon, z^{i \neq j})} \frac{\partial(z^j, T, \epsilon, z^{i \neq j})}{\partial(z^j, s, \epsilon, z^{i \neq j})} \quad (35)$$

$$= (b_{\sigma z^j}^{T\epsilon} a_{sT}^{T\epsilon} - a_{\sigma T}^{T\epsilon} b_{sz^j}^{T\epsilon}) a_{Ts}^{s\epsilon} = b_{\sigma z^j} - b_{sz^j} \frac{\alpha^u E^u T}{C_{\epsilon z}^u}$$

• Coefficients $g^{s\epsilon}$

$$g_{A^k z^j}^{s\epsilon} = \frac{\partial A^k}{\partial z^j} \Big|_{s,\epsilon,z^{i \neq j}} = g_{A^k z^j}^{T\epsilon} + \frac{T}{C_{\epsilon z}^u} b_{sz^k}^{T\epsilon} b_{\sigma z^j}^{T\epsilon} \quad (36)$$

En considérant le couple de variables observables (T, σ) , la loi d'évolution du modèle DNLR s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{\sigma} \\ -\dot{\bar{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{C_{\epsilon z}^u} & -\frac{\alpha^u E^u T}{C_{\epsilon z}^u} & \frac{T}{C_{\epsilon z}^u} \bar{b}_{sz}^{T\epsilon} \\ -\frac{\alpha^u E^u T}{C_{\epsilon z}^u} & E^u + \frac{(\alpha^u E^u)^2 T}{C_{\epsilon z}^u} & \bar{b}_{\sigma z}^{T\epsilon} - \frac{\alpha^u E^u T}{C_{\epsilon z}^u} \bar{b}_{sz}^{T\epsilon} \\ \frac{T}{C_{\epsilon z}^u} \bar{b}_{sz}^{T\epsilon} & \bar{b}_{\sigma z}^{T\epsilon} - \frac{\alpha^u E^u T}{C_{\epsilon z}^u} \bar{b}_{sz}^{T\epsilon} & \bar{g}^{T\epsilon} + \frac{T}{C_{\epsilon z}^u} \bar{b}_{sz}^{T\epsilon} \bar{b}_{sz}^{T\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\epsilon} \\ \dot{\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (37)$$

B Formulation continue du modèle DNLR

On développe, dans cette annexe, l'écriture dans le cas d'un nombre infini de processus de la transmittance DNLR afin de valider l'hypothèse formulée précédemment selon laquelle 50 processus suffisent dans le cas d'un spectre de 6 décades pour décrire la réponse associée à une infinité de processus.

On montre au paragraphe III.2.1 que le choix d'une équipartition des temps de relaxation associé à la théorie des fluctuations implique une double récursivité associée aux temps et aux poids :

$$\frac{\tau_{j+1}}{\tau_j} = 10^{-\frac{p}{N-1}} = \frac{1}{\beta} \quad \text{et} \quad \frac{p_0^{j+1}}{p_0^j} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \quad (38)$$

Ces deux relations peuvent encore s'écrire :

$$\tau^j = \tau^1 \exp(-2A(j-1)) \quad \text{et} \quad p_0^j = p_0^1 \exp(-A(j-1)) \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{2} \ln(\beta) \quad (39)$$

La transmittance DNLR écrite sous forme de somme récursive

$$\bar{Y} = \sum_j \frac{p_0^j}{1 + \tau^j p} \quad (40)$$

peut alors être transformée en une écriture intégrale :

$$\bar{Y} = \int_0^{N-1} \frac{p_0^1 \exp(-Aj)}{1 + \tau^1 \exp(-2Aj)p} dj \quad (41)$$

En posant $u = (\sqrt{\tau^1 p}) \exp(-Aj)$, la transmittance s'écrit encore :

$$\bar{Y} = -\frac{p_0^1}{A\sqrt{\tau^1 p}} \int_{\sqrt{\tau^1 p}}^{\sqrt{\tau^N p}} \frac{1}{1+u^2} du \quad (42)$$

soit finalement :

$$\bar{Y} = -\frac{p_0^1}{A\sqrt{\tau^1 p}} \left[\arctan(\sqrt{\tau^N p}) - \arctan(\sqrt{\tau^1 p}) \right] \quad (43)$$

En reprenant la définition du poids maximal (III.69) et celle du paramètre A fonction uniquement de β et de N :

$$p_0^1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^N} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2} \ln(\beta) \quad \text{avec} \quad \beta = 10^{\frac{p}{N-1}} \quad (44)$$

on peut déterminer la limite du rapport p_0^1/A lorsque N tend vers l'infini :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p_0^1}{A} = \frac{1}{1 - 10^{-\frac{p}{2}}} \quad (45)$$

Dans le cas d'un nombre infini de processus, la transmittance dissipative normalisée s'écrit donc :

$$\bar{Y} = \frac{\arctan(\sqrt{\tau^N p}) - \arctan(\sqrt{\tau^1 p})}{\sqrt{\tau^N p} - \sqrt{\tau^1 p}} \quad (46)$$

Les diagrammes de Bode associés à la fonction de transfert précédente sont reportés ci-dessous :

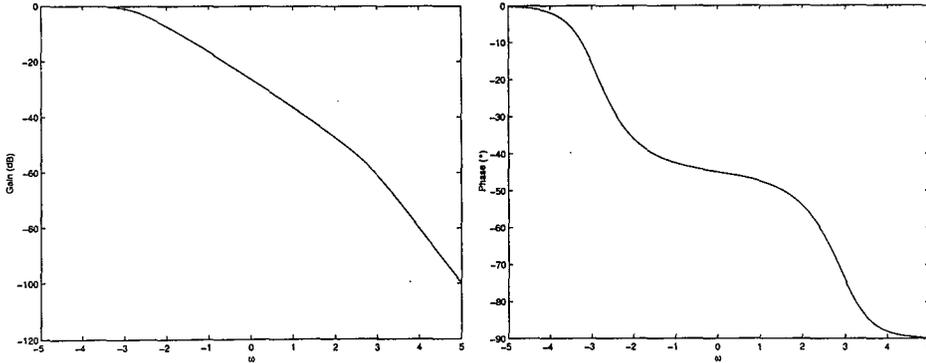


FIG. 29: Diagrammes asymptotiques de la transmittance dissipative continue ($D = 6, \tau_{max} = 1000 \text{ s}$) - eq. 46

Dans le cas d'un nombre fini mais suffisamment important de processus ($N \geq 50$), les diagrammes de Bode de la transmittance associée sont difficilement dissociables à l'oeil nu des tracés de la transmittance dite continue (nombre infini de processus). Aussi, on représente les écarts absolus du gain et de la phase en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de N .

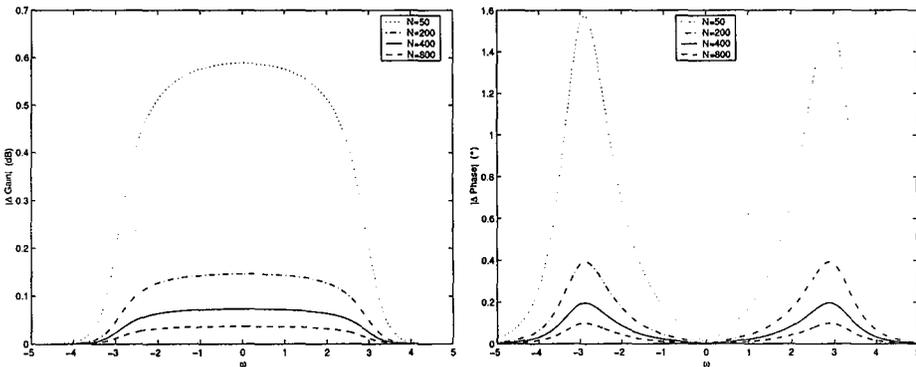


FIG. 30: Écart absolu entre modèle DNLr discret et modèle continu ($D = 6, \tau_{max} = 1000 \text{ s}$)

On peut noter la symétrie parfaite des deux courbes par rapport à l'axe $\omega = \omega_{min}\omega_{max}$ (ici $\omega = 1$ soit $\log(\omega) = 0$). Les écarts les plus importants concernant le gain ont lieu au centre du spectre tandis que ceux propre à la phase se situent aux bornes du spectre des

fréquences.

Compte tenu des faibles valeurs des écarts comparativement aux valeurs calculées sur la figure (29), on peut donc effectivement se limiter dans le cas de 6 décades à $N=50$ processus pour l'étude de la transmittance associée au DNLR.

En conclusion, nous avons développé dans cette annexe, une nouvelle écriture simple et opérationnelle de la transmittance associée au modèle DNLR. Cette écriture a pour principal avantage de permettre un gain en temps de calcul appréciable.

C Reformulation de la transmittance DNLR sous forme de fonction hypergéométrique

Le but de cette annexe est de montrer comment la transmittance DNLR classiquement définie dans l'espace temporel par une somme de fonctions de Debye peut s'écrire dans l'espace de Laplace sous la forme d'une fonction hypergéométrique.

D'après les relations de récursivité (III.63) et (III.65), les poids et les temps caractéristiques du processus j peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} p_0^j = p_0^1 \exp(-A(j-1)) \\ \tau^j = \tau_1 \exp(-B(j-1)) \end{cases} \quad \text{avec } A = \ln \frac{\beta}{\alpha} \text{ et } B = \ln \beta \quad (47)$$

La transmittance dissipative normalisée, définie sous forme de somme récursive :

$$\bar{Y} = \sum_{j=1}^N \frac{p_0^j}{1 + \tau^j p} \quad (48)$$

peut être définie de manière équivalente sous forme intégrale :

$$\bar{Y} = \int_1^N \frac{p_0^1 \exp(-A(j-1))}{1 + \tau_1 \exp(-B(j-1))p} dj \quad (49)$$

soit encore :

$$\bar{Y} = \int_0^{N-1} \frac{p_0^1 \exp(-Ak)}{1 + \tau_1 \exp(-Bk)p} dk \quad (50)$$

En effectuant le changement de variable

$$u = \exp(Bk) \quad (51)$$

auquel correspond

$$du = B \exp(Bk) dk = B u dk \quad (52)$$

l'intégrale précédente s'écrit encore :

$$\bar{Y} = \frac{p_0^1}{B} \int_1^{\exp(B(N-1))} \frac{u^{-\frac{A}{B}}}{u + \tau_1 p} du \quad (53)$$

En posant

$$n = 1 - \frac{A}{B}, \text{ et } c = \exp(B(N-1)) \quad (54)$$

la transmittance normalisée s'écrit :

$$\bar{Y} = \frac{p_0^1}{B \tau_1 p} \int_1^c \frac{u^{n-1}}{1 + \frac{u}{\tau_1 p}} du \quad (55)$$

Dans son ouvrage de référence, Oustaloup [Ous 95] montre que l'intégrale

$$I = \int_{\xi}^{\infty} y^{u-1}(1+ky)^{-v} dy \quad (56)$$

définit, sous les conditions $\Re](v) > \Re](u)$, $|\arg(1/k+\xi)| < \pi$, un prolongement analytique de série hyperbolique P donné par :

$$I = \frac{\xi^{u-v}}{k^v(v-u)} {}_2F_1(v, v-u, v-u+1, -\frac{1}{k\xi}) \quad (57)$$

qui, d'après la deuxième relation d'Euler, peut encore s'écrire :

$$I = \frac{(1+k\xi)^{u-v}}{k^u(v-u)} {}_2F_1(v-u, 1-u, v-u+1, \frac{1}{1+k\xi}) \quad (58)$$

En décomposant la transmittance conformément à :

$$\bar{Y} = \frac{p_0^1}{B\tau_1 p} \left[\int_1^{\infty} \frac{u^{n-1}}{1+\frac{u}{\tau_1 p}} du - \int_c^{\infty} \frac{u^{n-1}}{1+\frac{u}{\tau_1 p}} du \right] \quad (59)$$

et en appliquant le résultat d'Oustaloup, on peut alors définir la transmittance par une somme de deux fonctions hypergéométriques :

$$\begin{aligned} \bar{Y} = \frac{p_0^1}{A} & \left[(1+\tau_1 p)^{n-1} {}_2F_1(1-n, 1-n, 2-n, \frac{\tau_1 p}{1+\tau_1 p}) \right. \\ & \left. - (c+\tau_1 p)^{n-1} {}_2F_1(1-n, 1-n, 2-n, \frac{\tau_1 p}{c+\tau_1 p}) \right] \end{aligned} \quad (60)$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \bar{Y} = \frac{p_0^1}{A} & \left[(1+\tau_1 p)^{n-1} {}_2F_1(1-n, 1-n, 2-n, \frac{\tau_1 p}{1+\tau_1 p}) \right. \\ & \left. - c^{n-1} (1+\tau_{Np})^{n-1} {}_2F_1(1-n, 1-n, 2-n, \frac{\tau_{Np}}{1+\tau_{Np}}) \right] \end{aligned} \quad (61)$$

Compte tenu de la relation de récursivité des poids (III.65) et de la définition de c (54), on peut définir la transmittance par la différence de deux fonctions hypergéométriques faisant intervenir chacune un temps de relaxation distinct.

$$\begin{aligned} \bar{Y} = \frac{1}{A} & \left[p_0^1 (1+\tau_1 p)^{n-1} {}_2F_1(1-n, 1-n, 2-n, \frac{\tau_1 p}{1+\tau_1 p}) \right. \\ & \left. - p_0^N (1+\tau_{Np})^{n-1} {}_2F_1(1-n, 1-n, 2-n, \frac{\tau_{Np}}{1+\tau_{Np}}) \right] \end{aligned} \quad (62)$$

D'après la deuxième relation d'Euler, la transmittance peut encore s'écrire :

$$\bar{Y} = \frac{1}{A} [p_0^1 {}_2F_1(1-n, 1, 2-n, -\tau_1 p) - p_0^N {}_2F_1(1-n, 1, 2-n, -\tau_{Np})] \quad (63)$$

C. Reformulation de la transmittance DNLR sous forme de fonction hypergéométrique

La constante B étant supposée supérieure à A , le paramètre n est non entier et compris entre 0 et 1. La transmittance définie en (62) ou (63) est alors dite non entière. Lorsque les fréquences transitionnelles ω_1 et ω_N sont suffisamment distantes, l'ordre non entier n détermine le comportement fréquentiel de la transmittance dans une bande de fréquences médiane appartenant à $[\omega_1, \omega_N]$. Dans la bande de fréquence ainsi définie, le gain croît à raison de $-6n$ dB/Oct et la phase présente un blocage à $-\frac{n\pi}{2}$.

Dans le cas particulier du modèle DNLR où $\alpha = \sqrt{\beta}$, le paramètre n vaut $\frac{1}{2}$ et l'expression précédente s'écrit :

$$\bar{Y} = \frac{p_0^1}{A} \left[{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -\tau_1 p\right) - c^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -\tau_N p\right) \right] \quad (64)$$

avec

$$A = \frac{D}{2(N-1)} \ln 10 = \frac{\ln c}{2(N-1)} \quad (65)$$

D Calcul temporel de la dissipation

On connaît l'expression dans l'espace de Laplace de l'affinité \bar{A} et des vitesses de réorganisation interne \bar{z} en fonction de la déformation $\bar{\epsilon}$. La dissipation interne est définie comme $D(t) = \sum_j A^j(t) \dot{z}^j(t)$.

Dans le cas d'une déformation imposée sinusoïdale, $\epsilon = \epsilon_0 \sin(\omega t)$, on cherche l'expression temporelle de la dissipation et donc au préalable l'expression temporelle de $A^j(t)$ et $\dot{z}^j(t)$.

Table des transformées

La table des transformations usuelles nécessaires à la suite de l'annexe est fournie ci-dessous :

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{1}{1+as}$	$\frac{1}{a} \exp(-\frac{t}{a})$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$

TAB. 5: Table de transformation Laplace-Temps

Écriture temporelle de $\dot{z}(t)$

Les vitesses de réorganisation interne \bar{z} s'écrivent (IV.28) :

$$\bar{z}^j = -p_0^j \frac{a^u - a^r}{b^j} \frac{s}{1 + \tau^j s} \bar{\epsilon} \quad (66)$$

La déformation imposée s'écrit dans l'espace de Laplace :

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (67)$$

Ainsi :

$$\bar{z}^j = -p_0^j \frac{(a^u - a^r) \epsilon_0 \omega}{b^j} \frac{s}{(1 + \tau^j s)(s^2 + \omega^2)} \quad (68)$$

Après décomposition en éléments simples,

$$\bar{z}^j = -p_0^j \frac{(a^u - a^r) \epsilon_0 \omega}{b^j} \frac{1}{1 + (\tau^j \omega)^2} \left[\frac{s + \tau^j \omega^2}{s^2 + \omega^2} - \frac{\tau^j}{1 + \tau^j s} \right] \quad (69)$$

En posant $X_j = p_0^j \frac{(a^u - a^r) \epsilon_0 \omega}{b^j} \frac{1}{1 + (\tau^j \omega)^2}$,

$$\bar{z}^j = -X_j \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} + \tau^j \omega \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\tau^j}{1 + \tau^j s} \right] \quad (70)$$

La table 5 permet le retour en temps :

$$\dot{z}^j(t) = -X_j [\cos(\omega t) + \tau^j \omega \sin(\omega t) - \exp(-\frac{t}{\tau^j})] \quad (71)$$

Écriture temporelle de $A(t)$

Dans l'espace de Laplace, l'affinité s'écrit (IV.32) :

$$\bar{A}^j = -b^j \frac{\tau^j s}{1 + \tau^j s} \bar{\epsilon} \quad (72)$$

En remplaçant $\bar{\epsilon}$ par (67),

$$\bar{A}^j = -b^j \epsilon_0 \tau^j \omega \frac{s}{(1 + \tau^j s)(s^2 + \omega^2)} \quad (73)$$

En reprenant le même raisonnement qu'au paragraphe précédent, l'affinité $A^j(t)$ s'écrit :

$$A^j(t) = -Y_j [\cos(\omega t) + \tau^j \omega \sin(\omega t) - \exp(-\frac{t}{\tau^j})] \quad \text{avec} \quad Y_j = b^j \epsilon_0 \tau^j \omega \frac{1}{1 + (\tau^j \omega)^2} \quad (74)$$

Écriture temporelle de la dissipation interne

La dissipation interne est définie comme $D(t) = \sum_j A^j(t) \dot{z}^j(t)$. Aussi, en reprenant les expressions (71) et (74), la dissipation s'écrit :

$$D(t) = \sum_j A^j(t) \dot{z}^j(t) = - \sum_j X_j \cdot Y_j [\cos(\omega t) + \tau^j \omega \sin(\omega t) - \exp(-\frac{t}{\tau^j})]^2 \quad (75)$$

Soit après simplification :

$$D(t) = \epsilon_0^2 \omega^2 \sum_j p_0^j (a^u - a^r) \tau_j \left[\frac{1}{1 + (\tau_j \omega)^2} \cos \omega t + \frac{\tau_j \omega}{1 + (\tau_j \omega)^2} \sin \omega t - \frac{1}{1 + (\tau_j \omega)^2} \exp(-\frac{t}{\tau^j}) \right]^2 \quad (76)$$

E Résolution de l'équation de la chaleur dans l'espace de Laplace

On cherche à résoudre le système suivant dans l'espace de Laplace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t}(z, t) = -\frac{2h(e+l)}{el} \theta(z, t) + \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}(z, t) + q(t) \\ \theta(0, t) = 0 \\ \theta(L, t) = 0 \\ \theta(z, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (77)$$

Dans l'espace de Laplace, l'équation de transfert thermique au sein de l'éprouvette s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{\theta}(z, s) - \left(\frac{1 + \tau s}{a\tau} \right) \bar{\theta}(z, s) = -\frac{1}{\lambda} \bar{q}(s) \quad (78)$$

La solution de l'équation homogène (sans second membre) est connue :

$$\bar{\theta}_1(z, s) = A(s) \exp\left(\sqrt{\frac{1 + \tau s}{a\tau}} z\right) + B(s) \exp\left(-\sqrt{\frac{1 + \tau s}{a\tau}} z\right) \quad (79)$$

Une solution particulière de l'équation générale apparaît naturellement ;

$$\bar{\theta}_2(z, s) = \frac{a\tau}{\lambda(1 + \tau s)} \bar{q}(s) \quad (80)$$

La solution générale de l'équation (78) s'écrit alors, en posant $r_0 = \sqrt{\frac{1 + \tau s}{a\tau}}$ et $C = \frac{a\tau}{\lambda(1 + \tau s)}$:

$$\bar{\theta}(z, s) = \bar{\theta}_1(z, s) + \bar{\theta}_2(z, s) = A(s) \exp(r_0 z) + B(s) \exp(-r_0 z) + C \bar{q}(s) \quad (81)$$

Les fonctions A et B sont déterminées grâce aux conditions limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}(z = 0, s) = 0 \\ \bar{\theta}(z = L, s) = 0 \end{array} \right. \quad (82)$$

ce qui s'écrit encore

$$\left\{ \begin{array}{l} A(s) + B(s) + C \bar{q}(s) = 0 \\ A(s) \exp(r_0 L) + B(s) \exp(-r_0 L) + C \bar{q}(s) = 0 \end{array} \right. \quad (83)$$

soit finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} A(s) = C \bar{q}(s) \frac{1 + \exp(-r_0 L)}{\exp(-r_0 L) - \exp(r_0 L)} = \frac{1}{2} C [1 - \coth\left(\frac{r_0 L}{2}\right)] \bar{q}(s) \\ B(s) = -C \bar{q}(s) \frac{1 + \exp(r_0 L)}{\exp(-r_0 L) - \exp(r_0 L)} = \frac{1}{2} C [1 + \coth\left(\frac{r_0 L}{2}\right)] \bar{q}(s) \end{array} \right. \quad (84)$$

La solution du système (77) s'écrit encore :

$$\bar{\theta}(z, s) = \bar{q}(s) \frac{a\tau}{\lambda(1 + \tau s)} \left[1 + \cosh(r_0 z) - \coth\left(\frac{r_0 L}{2}\right) \sinh(r_0 z) \right] \text{ avec } r_0 = \sqrt{\frac{1 + \tau s}{a\tau}} \quad (85)$$

F Détermination des caractéristiques géométriques de l'ellipse caractéristique de l'hystérésis

Dans le cas d'une déformation sinusoidale, en régime établi, l'évolution de la contrainte et de la déformation est représentée par le système paramétrique suivant :

$$\begin{cases} \epsilon(t) = \epsilon_0 \sin(\omega t) \\ \sigma(t) = \epsilon_0 (G' \sin(\omega t) + G'' \cos(\omega t)) \end{cases} \quad (86)$$

On note (\mathcal{C}) la conique représentative de ce système.

La première équation permet d'exprimer le sinus en fonction de la déformation :

$$\sin(\omega t) = \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_0} \quad (87)$$

En remplaçant cette dernière équation dans (86.b.), la contrainte n'est alors plus fonction que de la déformation :

$$\sigma - G' \epsilon = G'' \sqrt{\epsilon_0^2 - \epsilon^2} \quad (88)$$

En élevant cette dernière équation au carré, l'équation cartésienne de la conique (\mathcal{C}) s'écrit :

$$(G'^2 + G''^2)\epsilon^2 - 2G'\epsilon\sigma + \sigma^2 - \epsilon_0^2 G''^2 = 0 \quad (89)$$

Rappel mathématique :

Soit (Γ) la conique d'équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (90)$$

- si $ac - b^2 > 0$, (Γ) est du type ellipse
- si $ac - b^2 < 0$, (Γ) est du type hyperbole
- si $ac - b^2 = 0$, (Γ) est du type parabole

Ainsi, la conique (\mathcal{C}) est une ellipse dont on va chercher à déterminer le centre et la direction de ses deux axes dans le repère $\mathcal{R} = (0, \vec{e}, \vec{\sigma})$.

On définit Φ la forme quadratique suivante :

$$\Phi : (\epsilon, \sigma) \rightarrow (G'^2 + G''^2)\epsilon^2 - 2G'\epsilon\sigma + \sigma^2 \quad (91)$$

La matrice représentative M_Φ s'écrit :

$$M_\Phi = \begin{pmatrix} G'^2 + G''^2 & -G' \\ -G' & 1 \end{pmatrix} \quad (92)$$

Cette matrice admet deux valeurs propres (on peut noter que ces valeurs sont de même signe puisque \mathcal{C} est une ellipse) :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(G'^2 + G''^2 + 1 - \sqrt{\Delta}) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(G'^2 + G''^2 + 1 + \sqrt{\Delta}) \end{cases} \quad \text{où } \Delta = (G'^2 + G''^2 + 1)^2 - 4G''^2 \quad (93)$$

Le sous-espace propre associé à λ_1 est la droite vectorielle d'équation :

$$\sigma = K_1 \epsilon \text{ avec } K_1 = \frac{1}{2G'}(G'^2 + G''^2 - 1 - \sqrt{\Delta}) \quad (94)$$

On notera \vec{V}_1 le vecteur propre associé :

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+K_1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ K_1 \end{pmatrix} \quad (95)$$

Le sous-espace propre associé à λ_2 est la droite vectorielle d'équation :

$$\sigma = K_2 \epsilon \text{ avec } K_2 = \frac{1}{2G'}(G'^2 + G''^2 - 1 + \sqrt{\Delta}) \quad (96)$$

Le vecteur propre associé à λ_2 s'écrit :

$$\vec{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+K_2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ K_2 \end{pmatrix} \quad (97)$$

La matrice de passage entre $\mathcal{R} = (0, \vec{\epsilon}, \vec{\sigma})$ et $\mathcal{R}' = (0, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$ s'écrit donc :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+K_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+K_2^2}} \\ \frac{K_1}{\sqrt{1+K_1^2}} & \frac{K_2}{\sqrt{1+K_2^2}} \end{pmatrix} \quad (98)$$

On note (ϵ', σ') les nouvelles coordonnées dans le repère \mathcal{R}' . Connaissant la matrice de passage de \mathcal{R} à \mathcal{R}' , on peut relier (ϵ, σ) à (ϵ', σ') .

$$\begin{cases} \epsilon = \frac{1}{\sqrt{1+K_1^2}} \epsilon' + \frac{1}{\sqrt{1+K_2^2}} \sigma' \\ \sigma = \frac{K_1}{\sqrt{1+K_1^2}} \epsilon' + \frac{K_2}{\sqrt{1+K_2^2}} \sigma' \end{cases} \quad (99)$$

L'équation de la conique (C) dans \mathcal{R}' s'écrit :

$$A_1 \epsilon'^2 + A_2 \sigma'^2 = \epsilon_0^2 G''^2 \quad (100)$$

avec

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{1+K_1^2} [G''^2 + (G' - K_1^2)] \\ A_2 = \frac{1}{1+K_2^2} [G''^2 + (G' - K_2^2)] \end{cases} \quad (101)$$

L'équation (100) peut encore s'écrire :

$$\frac{A_1}{\epsilon_0^2 G''^2} \epsilon'^2 + \frac{A_2}{\epsilon_0^2 G''^2} \sigma'^2 = 1 \quad (102)$$

Ainsi (C) est une ellipse centrée sur 0 de grand axe $2a = \frac{2\epsilon_0 G''}{\sqrt{A_1}}$ (porté par $\sigma = K_1 \epsilon$) et de petit axe $2b = \frac{2\epsilon_0 G''}{\sqrt{A_2}}$ (porté par $\sigma = K_2 \epsilon$) comme le montre la figure ci-dessous :

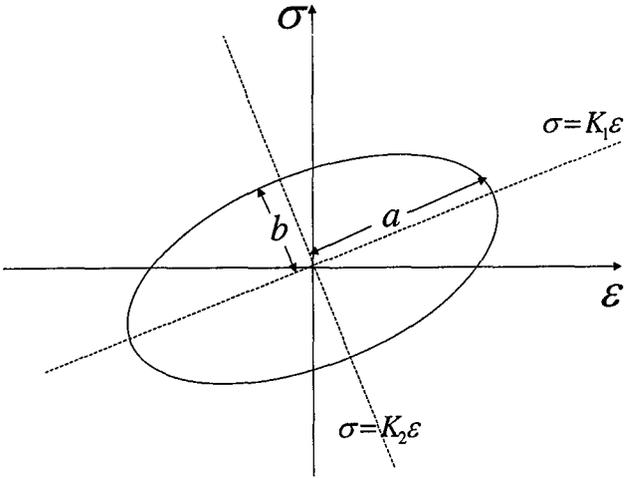


FIG. 31: $\sigma = f(\epsilon)$ pour un cycle

Nomenclature

Notations associées à une grandeur x

x_e	Grandeur x échangée avec l'extérieur
x_i	Production interne de la variable x
x_n	Grandeur normalisée
x^j	Grandeur associée au processus j
x^*	Transformée de Fourier de la grandeur x
x'	Partie réelle de la grandeur x^*
x''	Partie imaginaire de la grandeur x^*
\dot{x}	Dérivée temporelle de la variable x
\ddot{x}	Dérivée seconde temporelle de la variable x
x^u	Grandeur à l'état instantané
x^r	Grandeur à l'état relaxée
x^d	Part dissipative de la grandeur x
x^p	Part plastique de la grandeur x
$\bar{x} = \mathcal{L}[x]$	Transformée de Laplace de la grandeur x
\bar{x}	Vecteur de variables dissipatives
\underline{x}	Vecteur de variables d'état

Lettres latines

$a(t)$	Facteur de glissement
a	Diffusivité ($=\lambda/C_z$)
\underline{a}	Matrice de couplage entre variables d'état
\bar{A}_γ	Amplitude de la variable de commande imposée
A_b	Aire de la boucle d'hystérésis
A^j	Affinité du processus dissipatifs de réorganisation interne j
\bar{A}	Vecteur affinité
B	Constante de normalisation associée aux poids
\bar{b}	Matrice de couplage entre les variables d'états et les variables de dissipation
C_z	Chaleur spécifique à \bar{z} bloqué
D	Puissance dissipée (ou disipation)
D	Nombre de décades
e	Épaisseur de l'éprouvette
E, E^u, E^r	Module d'Young, module instantané, module relaxé

ΔE^+	Énergie d'activation
f	Fréquence du signal ou Énergie libre d'Helmoltz
${}_2F_1[a, b; c]$	Fonction hypergéométrique
ΔF_j^+	Énergie libre d'activation du processus j
$\Delta(\Delta F_j^+)$	Écart énergétique associé à l'énergie libre d'activation du processus j
g	Potentiel enthalpie libre
\bar{g}	Matrice de couplage entre variables dissipatives
\bar{G}	Module ou relaxance
h	Constante de Planck
h	Coefficient d'échange thermique
h	Potentiel enthalpie
i	Symbole des imaginaires ($i^2 = -1$)
J_q	Flux de chaleur
\bar{J}	Retardance ou susceptibilité
k_B	Constante de Boltzmann
K_β	Constante de non-linéarité coopérative associée à la variable β
l	Largeur de l'éprouvette
L	Longueur de l'éprouvette
\bar{L}	Matrice phénoménologique d'Onsager
\underline{n}	Vecteur constituant chimique
n	Puissance non entière
N	Nombre total de processus
m	Puissance non entière
p	Variable de Laplace
p_0^j	Poids du processus j
p^{j+}	Probabilité d'atteindre la position énergétique du col j
$p ^\epsilon$	Densité de probabilité de transition à déformation figée
q	Sources internes de chaleur
R	Constante des gaz parfaits
R_γ	Rapport de charge de la variable de commande imposée ($= \gamma_{max}/\gamma_{min}$)
s, s^u, s^r	Souplesse, souplesse instantanée, souplesse relaxée
s	Entropie
$\Delta_i s$	Production d'entropie
ΔS_j^+	Entropie d'activation du processus j
T	Température
T_0	Température initiale
T_∞	Température ambiante
W_s	Énergie stockée
W_d	Énergie dissipée
$y(t)$	Réponse impulsionnelle (ou fonction mémoire)
\underline{y}	Ensemble des grandeurs extensives
$\bar{Y}(p)$	Transmittance
\underline{Y}	Ensemble des grandeurs intensives
\bar{z}	Variables internes

Lettres grecs

α	Facteur récursif suivant l'amplitude
α	Puissance non entière
α^u, α^r	Coefficient de dilatation thermique instantané, relaxé
β	Facteur récursif suivant le temps
β	Puissance non entière
$\underline{\beta}$	Vecteur variable observable (ou variable de sortie)
ϵ	Déformation
η_j	Viscosité de l'amortisseur j
$\underline{\gamma}$	Vecteur variable de commande (ou variable d'entrée)
λ	Conductivité thermique
$\underline{\mu}$	Vecteur potentiel chimique
ν^j	Coefficient stochiométrique
ν^j	Fréquence de saut pour le processus j
ω	Pulsation du signal d'excitation mécanique
ω_b	Pulsation basse
ω_h	Pulsation haute
ω_j	Pôles de la transmittance
ω_j	Zéros de la transmittance
Ω	Nombre de complexions du système
Φ	Fonction de relaxation
Φ	Phase de la transmittance
Ψ	Potentiel thermodynamique
σ	Contrainte
σ^x	Taux de production de la variable x
σ_z	Écart-type
τ^j	Temps de relaxation associé au processus j
τ_{max}	Temps de relaxation maximal
τ_{th}	Temps de relaxation associé à l'équation de la chaleur
τ_{hn}	Temps de relaxation caractéristique de la transmittance de Havriliak-Négami
θ	Variation de température ($=T - T_0$)
θ_{stab}	Variation de température stabilisée

Abbréviations

CV	Cattanéo-Vernotte
SS	Staverman-Schwartzl
TC	Thermodynamique Classique
TIE	Thermodynamique Irréversible Étendue
TPI	Thermodynamique des Processus Irréversibles
TVI	Thermodynamique à Variables Internes

Références bibliographiques

Bibliographie

A

- [Aha 93] **Aharoune A., Kuhnast F.A., Cunat C.** Correlation between DNLr model and AES model to describe relaxation phenomena study starting from anisothermal DSC measurements for amorphous alloy (Se, Te, Ge) near glass transition. *2nd International Discussion Meeting on Relaxation in complex System. Alicante, Espagne, Jul. 1993*
- [Alc 98] **Alcoulabi M., Martinez-Vega J.J.** Application of fractional calculus to viscoelastic behavior modelling and to the physical ageing phenomenon in glassy amorphous polymers. *Polymer. 1998, vol. 39, n° 5-6, pp. 6269-6277*
- [Alc 99a] **Alcoulabi M., Martinez-Vega J.J.** The effect of physical ageing on the relaxation time spectrum of amorphous polymers :the fractional calculus approach. *J. Mater. Sci. 1999, vol. 34, pp. 2361-2369*
- [Alc 99b] **Alcoulabi M., Martinez-Vega J.J.** A modified fractional model to describe the viscoelastic behavior of solid amorphous polymers : the effect of physical aging. *J. macromol. sci., Phys. 1999, vol. B38, n° 5-6, pp. 991-1007*
- [Alc 99c] **Alcoulabi M.** *Modelisation du comportement viscoelastique des polymeres amorphes solides par la methode de derivation et d'integration fractionnaires.* Th. Sciences. 1999. Insa Lyon
- [All 85] **Allen D.H.** A prediction of heat generation in a thermoviscoplastic uniaxial bar. *Int. j. solids strut. 1985, vol. 21, n° 4, pp. 325-342*
- [App 25] **Appell P.** Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. *Paris : Gauthier-Villars, 1925. 75 p.*
- [Aya 95] **Ayadi Z.** Contribution à la modélisation du comportement mécanique de polymères à partir d'une approche thermodynamique de la relaxation des milieux continus. *Th. Sciences appliquées. 1995. INP Lorraine*

B

- [Bag 83a] **Bagley R.L.** A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *J. rheol. 1983, vol. 27, n° 3, pp. 201-210*

- [Bag 83b] **Bagley R.L., Torvik P.J.** Fractional Calculus - A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA j.* 1983, vol. 21, n°5, pp. 741-748
- [Bag 84] **Bagley R.L., Torvik P.J.** On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *J. appl. mech.* 1984, vol. 51, pp. 294-298
- [Bag 86] **Bagley R.L., Torvik P.J.** On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *J. rheol.* 1986, vol. 30, n°1, pp. 133-155
- [Bau 69] **Baumeister K.S., Hamill T.D.** Hyperbolic Heat conduction Equation - A solution for the semi-Infinite Body Problem. *J. heat transfer.* 1969, vol. 91, n°4, pp. 543-548
- [Bio 54] **Biot M.A.** Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena. *J. Appl. phys.* 1954, vol. 25, n°11, pp. 1385-1391
- [Bio 58] **Biot M.A.** Linear thermodynamics and the mechanics of solids. In *Proceeding of the Third National Congress on Applied Mechanics.* NY : Haythornthwaite. 1958. pp. 1-18
- [Bla 60] **Bland D.** The theory of linear viscoelasticity. Paris : Pergamon Press, 1960. vi, 126 p.
- [Bol 64] **Boley B.A.** The analysis of Problems of heat conduction and Melting : High temperature structures and materials. New-York : Pergamon. 1964, pp. 260-315
- [Bol 74] **Boltzmann L.** Zür Theorie der elastischen nahwirkung. *Sitz. ber. - Bayer. Akad. Wiss., Math. - Nat. Wiss. Kl.* 1874, vol. 70, pp. 275
- [Bre 94] **Brémont P., Potet P.** Démodulation synchrone des images thermiques. Application à l'analyse expérimentale des structures. *Journée de la Soc. Française des thermiciens. Thermographie Quantitative,* 7 dec. 1994
- [Bre 64] **Breuer S., Onat E.T.** On the determination of free Energy in Linear Viscoelastic Solids. *Z. angew. Math. Phys.* 1964, vol. 15, n°5, pp. 184-191

C

- [Car 59] **Carslaw H.S., Jaeger J-C.** Conduction of heat in solids. Oxford : Clarendon Press. 1986, 1954c, viii, 510 p. ISBN : 0-19-853368-3
- [Cat 48] **Cattaneo C.** Sulla conduzione del calore. *Atti. Semin. Mat. Fis. Univ. Modena.* 1948, Vol. 3
- [Cat 58] **Cattaneo C.R.** Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantannée. *C.r. hebd. séances Acad. sci.* 1958, vol. 247, n°4, pp. 431-433

- [Cha 93] **Chaboche J.L.** Cyclic viscoplastic constitutive equations, Part I : a thermodynamically consistent formulation. *J. appl. mech.* 1993, vol. 60, pp. 813-828
- [Che 95] **Chen G.** Heat transfer in micro and nanoscale photonic devices. *Annu. rev. heat Transf.* 1995, ser. VII
- [Chr 66] **Christensen R.M., Naghdi P.M.** Linear non-isothermal viscoelastic solids. *Acta mech.* 1966, pp. 1-12
- [Chr 82] **Christensen R.M.** Theory of viscoelasticity. An introduction. *New-York : Academic Press, 1982. xii, 364 p. ISBN : 0-12-174252-0*
- [Chr 85] **Chrysochoos A.** Bilan énergétique en élastoplasticité grandes déformations. *J. méc. théor. appl.* 1985, vol.4, n°5, pp. 589-614
- [Chr 89] **Chrysochoos A., Chezeaux J.C., Caumon H.** Analyse thermomécanique des lois de comportement par thermographie infra-rouge. *Rev. Phys. Appl.* 1989, vol.24, pp. 215-225
- [Chr 95] **Chrysochoos A., Löbel M., Maisonneuve O.** Couplages thermomécaniques du comportement pseudoélastiques d'alliages Cu-Cn-Al et Ni-Ti. *C.r. Acad. sci., Sér. 2, Méc. phys. chim. astron.* 1995, vol. 320, pp. 217-223
- [Chr 95] **Chrysochoos A.** Analyse du comportement des matériaux par thermographie infrarouge. *Photomécanique, ed. Eyroles, 1995, pp. 1-9*
- [Chr 98] **Chrysochoos A.** Analyse expérimentale et modélisation numérique des couplages thermomécaniques dans les matériaux solides. *Rev. gén. therm.* 1998, vol. 37, pp. 582-606
- [Chr 00] **Chrysochoos A., Louche H.** An infared image processing to analyse the calorific effects accompanying strain localisation. *Int. j. eng. sci.* 1998, vol. 38, pp. 1759-1788
- [Col 41] **Cole K.S. Cole R.H.** Dispersion and absorption in dielectrics. *J. chem. phys.* 1941, vol. 9, p. 341-351
- [Col 67] **Coleman B.D., Gurtin M.E.** Thermodynamics with internal state variables. *J. chem. phys.* 1967, vol. 47, n°2, p. 597-613
- [Cos 95] **Cosson P.** Contribution à la modélisation du comportement mécanique des matériaux viscoélastiques par des opérateurs différentiels d'ordre non entier. *Th. Physique.* 1995. Nantes
- [Cos 96] **Cosson P., Michon J.C.** Identification of non-integer order of the mechanical behaviour of an elastomer. *Chaos, Solitons fractals.* 1996, vol. 7, n°11, pp. 1807-1824

- [Cri 93] Criado-Sancho M., Llebot J.E. Behavior of entropy in hyperbolic heat conduction. *Physical review. E.* 1993, vol. 47, n°6, pp. 4104-4107
- [Cun 85] Cunat C. Approche statistique des propriétés thermodynamiques des états liquides et vitreux : relaxation des liquides et transition vitreuse ; influence des associations chimiques. *Thèse d'état : Sciences appliquées/ Physique.* 1985. Nancy I
- [Cun 88] Cunat C. Thermodynamic treatment of relaxation in frozen-in systems. Universality of the distribution law for relaxation times. *Zeit. für Phys. Chem. Neue Folge.* 1988, vol. 157, pp. 419
- [Cun 88b] Cunat C., Hilzinger H.R., Herzer G. Relaxation parameter to simulate the change of magnetostriction in amorphous magnetic alloys. *Math. Sci. Eng.* 1988, vol. 97, n°497
- [Cun 91] Cunat C. A thermodynamic theory of relaxation based on a distribution of non linear processes. *J. non-cryst. solids.* 1991, vol. 131 & 133, pp. 196 & 812
- [Cun 01] Cunat C. The DNLR approach and relaxation phenomena. Part I - Historical Account and DNLR formalism. *Mech. time-depend. mater.* 2001, vol. 5, n°1, pp. 39-65

D

- [Dav 50] Davidson D.W., Cole R.H. Dielectric relaxation in Glycerine. *J. chem. phys.* 1950, vol. 18, pp. 1417
- [Day 72] Day W.A. The thermodynamics of simple material with fading memory. *New-York : Springer-Verlag, 1972, 134 p. ISBN : 3-540-05704-8*
- [Ded 20] De Donder T. Leçons de thermodynamique et de chimie physiques. *Paris : Gauthier-Villars et cie, 1920, iv, 151 p.*
- [Del 95] Del Piero G., Deseri L. Monotonic, completely monotonic and exponential relaxation functions in linear viscoelasticity. *Q. appl. math.* 1995, vol. 53, n°2, pp. 273-300
- [Dep 95] Depalle P., Tassart S. State Space Sound Synthesis and a State Space Synthesiser Builder. *ICMC 95, Banff (Canada), 1995*
- [Die 02] Dieng L. Sur un modèle de comportement issue d'une analyse modale de la dissipation intrinsèque : mise en oeuvre numérique et validation. *Thèse en cours, INP Lorraine*
- [Dil 63] Dillon O.W. Coupled plasticity. *J. mech. phys. solids.* 1963, vol. 11, pp. 21-33

- [Dis 79] **Dissado L.A., Hill R.M.** Non exponential decay in dielectrics and dynamics of correlated systems. *Nature*. 1979, vol. 279, pp. 685-689
- [Dis 83a] **Dissado L.A., Hill R.M.** Relaxation en elastic and viscoelastic materials. *J. Mater. Sci.* 1983, vol. 19, pp. 1576-1595
- [Dis 83b] **Dissado L.A., Hill R.M.** A Cluster approach to the structure of imperfect materials and their relaxation spectroscopy. *Proc. R. Soc. Lond., A Math. phys. sci.* 1983, vol. 390, pp. 131-180
- [Dis 85] **Dissado L.A., Nigmatullin R.R., Hill R.M.** The fading of memory during the regression of structural fluctuations. In *Evans M.W. Dynamical Processes in condensed matter*. NY : John Wiley and sons. 1985, vol.63, pp. 253-292
- [Dis 86] **Dissado L.A., Hill R.M.** Self-similarity as a fundamental feature of the regression of fluctuations. *Chemical Physics*. 1987, vol. 111, pp. 193-207
- [Dug 94] **Dugowson S.** Histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation. *Th. Sciences et techniques Communs*. 1994. Paris 13

E

- [Ene 99] **Enelund M., Olsson P.** Damping described by fading memory - analysis and application to fractional derivative models. *Int. j. of solids struct.* 1999, vol.36, pp. 939-970
- [Eyr 36] **Eyring H.** Viscosity, plasticity and diffusion as exemples of absolute reaction rates. *J. chem. phys.* 1936, vol. 4, pp. 283

F

- [Fab 94] **Fabrizio M., Giorgi C., Morro A.** Free enrgies and dissipation Properties for Systems with Memory. *Arch. ration. mech. anal.* 1994, vol.125, pp. 341-373
- [Fac 97] **Faccio-Toussaint E.** Thermodynamique non linéaire des processus irréversibles et comportement mécanique des matériaux. Modélisation et interprétation microphysique. *Th. Physiques/Sciences appliquées*. 1997. INP Lorraine
- [Fri 91a] **Friedrich CHR.** Relaxation functions of rheological constitutive equations with fractional derivatives : thermodynamical constraints. *Lecture notes in physics, Casas-Vaszquez J., Jou D., Springer Berlin*. 1991, vol. 381, pp. 321-330
- [Fri 91b] **Friedrich CHR.** Relaxation and retardation functions of the Maxwell model with fractional derivatives. *Rheol acta*. 1991, vol. 30, n°2, pp. 151-158
- [Fri 92] **Friedrich CHR., Braun H.** Original contributions - Generalized Cole-Cole behavior and its rheological relevance. *Rheol. acta*. 1992, vol. 31, pp. 309-322

- [Fri 95] **Friedrich CHR., Braun H. Weese J.** Determination of relaxation time spectra by analytical inversion using a linear viscoelastic model with fractional derivatives. *Polym. eng. sci.* 1995, vol. 35, pp. 6426-6434
- [Fri 98] **Friedrich CHR., Schiessel H., Blumen A.** Constitutive behavior modeling and fractional derivatives. In *advances in the flow and rheological behaviour of non-newtonian fluids*, D. A. Siginer, D. De kee, and R.P. Chhabra (Eds), Amsterdam : Elsevier. 1998, pp. 429-466
- [Fru 86] **Fruchter L., Crepy G., Le Mehauté A.** Batteries, identified fractal objects. *J. power sources.* 1986, vol. 18, pp. 51-62

G

- [Gal 97] **Galtier A., Carmet A.** Mesure de la microplasticité par l'échauffement des éprouvettes en cours d'essai de fatigue. *Les applications de la thermographie dans les industries mécaniques*, CETIM, Senlis, 22 et 23 juin 1999
- [Gem 36] **Gemant A.** A method of analysing experimental results obtained from elasto-viscous bodies. *Physics.* 1936, vol. 7, pp. 311-317
- [Gem 38] **Gemant A.** On fractional differentials. *Philos. Mag.* 1938, vol. 25, pp. 540-549
- [Ger 75] **Germain P.** Cours de mécanique des milieux continus. *Masson. Paris.* 1975
- [Gol 01] **Golden J.M.** Consequences of non-uniqueness in the free energy of material with memory. *Int. j. eng. sci.* 2001, vol.39, pp. 53-70
- [Gou 36] **Goursat E.** Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss. *Actualités scientifiques et industrielles.* 1936, vol. 1
- [Gra 58] **Grad H.** Handbuch der Physik 12 : thermodynamics of Gases. Ed. S. Flügge, Berlin : Springer. 1958, pp. 205-294
- [Gya 70] **Gyarmati I.** Non Equilibrium thermodynamics : field theory and variational principles. Berlin : Springer. 1970, xi, 184 p.
- [Gug 39] **Guggenheim E.A., Fowler R.H.** Statistical thermodynamics : a version of statistical mechanics for students of physics and chemistry. Cambridge : the University Press. 1939, 693 p.

H

- [Had 96] **Haddad A.** Thermodynamique de la relaxation appliquée à la modélisation du comportement des polymères sous chargement complexes : viscoélasticité en régime dynamique, Fluage thermostimulé, courant thermostimulés et relaxation diélectrique. *Th. Sciences appliquées.* 1996. INP Lorraine

[Haj 98] Hajar M., Blanc R.H. Linear thermoviscoelasticity - Part I : a functional model. *Acta mech.* 1998, vol. 130, pp. 175-183

[Har 91] Hartmann B., Lee G.F. Dynamic mechanical relaxation in some polyurethanes. *J. non-cryst. solids.* 1991, vol. 131-133, pp. 887-890

[Har 94] Hartmann B., Lee G.F. Loss factor and width limits for polymer relaxations. *J. Acoust. Soc. Am.* 1994, vol. 1, pp. 226-231

[Hav 66] Havriliak S., Negami S. A complex plane analysis of ϵ'' -dispersion in some polymer systems. *J. polym. sci., C Polym. symp.* 1966, n°14, pp. 97-117

[Haz 97] Hazanov S. On separation of energies in viscoelasticity. *Mech. res. commun.* 1997, vol. 24, n°2, pp. 167-177

[Hey 94] Heymans N., Bauwens J.C. Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior. *Rheol. acta.* 1994, vol. 33, n°3, pp. 210-219

[Hey 96] Heymans N. Hierarchical models for viscoelasticity : dynamic behaviour in the linear range. *Rheol. acta.* 1996, vol. 35, n°5, pp. 508-519

[Hil 83] Hill R.M., Jonscher A.K. The dielectric behaviour of condensed matter and many body interpretation. *Contemp. phys.* 1983, vol. 24, pp. 75-110

[Hue 92] Huet C. Minimum theorems for viscoelasticity. *Eur. j. mech. A, Solids.* 1992, vol. 11, n°5, pp. 653-684

[Hun 60] Hunt Report to the corporation of Brown university. In the John Carter Brown Library : Providence R.I., USA. 1960, 18594/2

J

[Jon 96] Jonscher A.K. Universal Relaxation law. London : Chelsea Dielectrics Press. 1996, 415 p. ISBN 0-9508711-2-5

[Jos 89] Joseph D.D., Preziosi L. Heat Waves. *Rev. mod. phys.* 1989, vol. 61, pp. 41-73

[Jos 90] Joseph D.D., Preziosi L. Addendum to the paper "heat waves". *Rev. mod. phys.* 1990, vol. 62, pp. 375-391

[Jou 99] Jou D., Casas-vasquez J., Lebon G. Extended irreversible thermodynamics revisited (1988-98). *Rep. prog. phys.* 1999, vol. 62, pp. 1035-1142

K

[Kap 98] Kapoor R., Nemat-Nasser S. Determination of temperature rise during high strain rate deformation. *Mech. mater.* 1998, vol. 27, pp. 1-12

[Kau 41] Kauzmann Flow of solids metals from the stand point of chemical rate theory. *Trans. AIME.* 1941, vol. 143, pp. 57

[Koe 84] Koeller R.C. Application of the fractional Calculus for the theory of viscoelasticity. *J. appl. mech.* 1984, vol. 51, pp. 299-307

[Koh 47] Kohlrausch R. Ueber das Dellmann'sche Elektrometer. *Ann. Phys. (Leipz.)* 1847, vol. 72, pp. 353-405

[Kov 54] Kovacs A. J. Contribution à l'étude de l'évolution isotherme du volume des hauts polymères. *Th. Sciences.* 1954. *Faculté des Sciences de l'Université de Paris*

[Kov 63] Kovacs A. J. Transitions vitreuses dans les polymères amorphes. Etude phénoménologique. *Fortschr. Hochpolym.-Forsch.* 1963, Bd. 3, S., pp. 349-507

[Kra 99] Krapez J.C., Pacou D., Bertin C. Application of lock-in-thermography to rapid evaluation of fatigue limit in metals. *5th Int. Workshop on Advanced Infrared Techn. and Appl., Venise, Italy, 29-30 Sept. 1999*

L

[Leb 62] Leibniz G.W. Letter from Hanover, Germany, 30 Sept. 1665 to G.A. L'Hospital. *Leibnizen Mathematische Schriften, Olms Verlag, Hildesheim, Germany, 1962*

[Lee 69] Lee E.H. Elastic plastic deformations at finite strains. *J. appl. mech.* 1969, vol. 36, pp. 1-6

[Leh 79] Lehmann Th. Coupling phenomena in thermoplasticity. *SMiRT 5, Berlin, Paper L1/1, aris, 1979*

[LeM 82] Le Méhauté A., Crepy G. Sur quelques propriétés de transferts électrochimiques en géométrie fractale *C.r. Acad. sci., ser. II.* 1982, vol. 294, pp. 685-688

[LeM 83] Le Méhauté A., Crepy G. Introduction to transfer motion in fractal media : the geometry of kinetics. *Solid state ion.* 1983, vol. 9-10, pp. 17-30

[LeM 98] Le Méhauté A., Nigmatullin R.R., Nivanen L. Flèches du temps et géométrie fractale. *Paris : Hermès.* 1998. 348 p. ISBN 2-86601-682-3

[Li 83] Li Y.Y. & al. A numerical method in solving a coupled thermoelasticity equation and some results. *J. therm. stress.* 1983, vol. 6, pp. 253-280

- [Lin 65] **Lindholm U.S. & al.** Transient Heat conduction at High Thermal Flux. *J. heat transf.* 1965, vol. 87, pp. 249-52
- [Lio 01] **Lion A.** Thermomechanically consistent formulations of the standard linear solid using fractional derivatives. *Arch. Mech.* 2001, vol. 53, n° 3, pp. 253-273
- [Lio 32] **Liouville J.** Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques. *J. Ec. polytech.* 1832, vol. 13, n° 221, pp. 9-131
- [Lou 96] **Loukil M.** Modélisation des surfaces de plasticité à partir d'une approche de la thermodynamique de la relaxation des milieux continus. *Th. Physique. 1996. INP Lorraine*
- [Luo 92a] **Luong M. P.** Infrared thermography of fatigue in metals. *Int. Conf. Thermal Sensing and Imaging diagnostics Applications, SPIE, 1682, Thermosense XIV, pp. 222-233, 1992*
- [Luo 92b] **Luong M. P., Dang Van K.** Procédé et dispositif de détermination de la limite de fatigue d'un matériau. *Fr. Brevet. FR 2-692-988.92.08040*
- [Luo 99] **Luong M. P.** Observation infrarouge de l'endommagement des matériaux et des structures mécaniques " *Les applications de la thermographie dans les industries mécaniques, CETIM, Senlis, 22 et 23 juin 1999*

M

- [Mai 71] **Mainardi F., Caputo M.** Linear models of dissipation in anelastic solids. *Nuovo Cim.* 1971, ser. II, vol. 1, pp. 161-198
- [Maj 93] **Majumdar A.** Microscale heat conduction in dielectric thin films. *J. heat transf.* 1993, vol. 115, pp. 7-16
- [Man 66] **Mandel J.** Cours de mécanique des milieux continus. *Paris : Gauthier-Villars. 1966, 2 vol., 848 p.*
- [Mar 99] **Marceron P.** Sur le rôle des potentiels généralisés en thermodynamique de la relaxation. Application au comportement mécanique des polymères. *Th. Sciences et techniques. 1999. INP Lorraine*
- [Mar 80] **Marr D., Hildreth E.** A study of edge detection. *Proc. R. Soc. Lond., B Biol. Sci.* 1980, n° 207, pp. 187-217
- [Max 67] **Maxwell J.C.** On the dynamical theory of gases. *Philos. trans. R. Soc. Lond., A, 1867, vol. 157, pp. 49-88*
- [Mei 49] **Meixner J.Z.** *Naturforscher* 1949, vol. 4a, pp. 594

[Mor 53] Morse R.M., Feshbach H. *Methods of theoretical physics.* New-York : McGraw-Hill. 1953. ISBN : 0-07-043316-X

[Mro 76] Mroz, Z., Raniecki B. On the uniqueness problem in coupled thermoplasticity. *Int. j. eng. sci.* 1976, vol. 14, pp. 211-221

[Mül 98] Müller I., Ruggeri T. *Rational Extended Thermodynamics.* NY : Springer. 1998, 396 p. ISBN : 0-387-98373-2

[Mun 66] Münster A. *Thermodynamique des Processus Irréversibles.* Paris : PUF. 1966, 271 p.

N

[Net 63] Nettleton R.E. Inertial Effects in the Phenomenological theory of Thermal diffusion in Liquids. *Nuovo Cim.* 1963, vol. 28, n°5, pp. 952-969

[Nie 72] Nied H.A., Battermann S.C. On the thermal feedback reduction of latent energy in the heat conduction equation. *Mater. sci. eng.* 1972, vol. 9, pp. 243-245

[Niv 02] Nivanen L., Q.A. Wang, Le Méhauté A. A generalisation of statistical mechanics : from principles to non extensive thermodynamics. *Lohachevsky Riechny. Kazan, Russie, Dec. 2002*

[Non 91a] Nonnenmacher T.F. Fractional relaxation equations for viscoelasticity and related phenomena. *Lecture notes in physics - Thermodynamical and statistical approaches - Casas Vasquez, Jou D : , vol. 381, pp. 309-320, Springer Berlin 1991*

[Non 91b] Nonnenmacher T.F., Glöckle W.G. A fractional model for mechanical stress relaxation. *Philos. mag. lett.* 1991, vol. 64, n°2, pp. 89-93

[Nut 21] Nutting P.G. A new general law of deformation. *J. Franklin Inst.* 1921, vol. 191, pp. 679-685

O

[Old 74] Oldham K.B., Spanier J. *The fractional calculus : theory and application of differentiation and integration to arbitrary order.* NY : Academic Press. 1974, 234 p. ISBN : 0-12-525550-0

[Old 83] Oldham K.B., Zoski C.G. Analogue instrumentation for processing polarographic data. *J. electroanal. chem. interfacial electrochem.* 1983, vol. 157, n°1, pp. 27-51

[Ons 31] Onsager L. Reciprocal relation in irreversible process. *Phys. rev.* 1931, vol. 37, pp. 405-426

[Ous 95] **Oustaloup A.** La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications. Paris : Hermès. 1995, 508 p., ISBN 2-86601-456-1

[Ozi 92] **Ozisk M.N., Tzou D.Y.** On the Wave theory in heat conduction. *J. heat transf.* 1994, vol. 116, pp. 526-536

P

[Pet 64] **Petrof R.C., Gratch S.** Wave propagation in a viscoelastic Material with Temperature-dependent properties and thermomechanical coupling. *J. appl. mech.* 1964, vol.31, pp. 423-429

[Pey 98] **Peyroux R., Chrysochoos A., Licht C., Löbel M.** Thermomechanical couplings and pseudoelasticity of shape memory alloys. *Int. j. eng. sci.* 1998, vol. 36, n° 4, pp. 489-509

[Pip 86] **Pipkin A.C.** Lectures on viscoelasticity theory. NY : Spring-Verlag. 1986, 188 p. ISBN : 0-387-96345-6

[Pri 68] **Prigogine I.** Introduction à la thermodynamique des processus irréversibles. Paris :Dunod. 1968, 230 p.

R

[Rab 80] **Rabotnov Yu. N.** Elements of hereditary solid mechanics. *Mir Publishers, Moscou, 1980, 388 p.*

[Ran 75] **Raniecki B., Sawczuk A.** Thermal effect in plasticity. *Z.A.M.M.* 1975, vol. 55, n° 1, pp 333-341, n° 2, pp. 363-373

[Rah 01] **Rahouadj R. Cunat C.** A nonlinear viscoelastic model based on fluctuating modes. In *Handbook of Materials Behavior Models. Lemaitre J.* NY : Academic Press. 2001. INSB : 0-12-443342-1

[Rie 92] **Riemann B.** " Versuch einer Auffssung der integration und differentiation. *Gesammelte Werke, 1876 ed. publ. Posthumously. 1892, pp. 331-344*

[Rit 00] **Rittel D.** An investigation of the heat generated during cyclic loading of two glassy polymers. Part I : Experimental. *Mechanics of materials.* 2000, vol. 32, pp. 131-147

[Rob 66] **Roberts G.E., Kaufman H.** Table of Laplace Transforms. *Philadelphia : Saunders. 1966, 367 p.*

[Rog 83] **Rogers L.** Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations. *J. rheol.* 1983, vol. 27, n° 4, pp. 351-372

[Ros 50] **Roscoe R.** Mechanical models for representation of viscoelastic properties. *Br. j. appl. phys.* 1950, vol. 1, pp. 171-173

[Rou 53a] **Rouse P.E.** A theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers. *J. chem. phys.* 1953, vol. 21, n°7, pp. 1272-1280

[Rou 53b] **Rouse P.E., Sittel K.** Viscoelastic Properties of dilute polymer solutions. *J. appl. phys.* 1953, vol. 24, n°6, pp. 690-696

S

[Sch 64] **Schapery R.A.** Effect of the cyclic loading on the temperature in viscoelastic Media with Variable Properties. *AIAA j.* 1964, vol. 2, n°5, pp. 827-835

[Sch 93] **Schiessel H., Blumen A.** Hierarchical analogues to fractional relaxation equations. *J. phys., A, math. gen.* 1993, vol. 26, pp. 5057-5069

[Sch 95] **Schiessel H., Blumen A.** Fractal aspect in polymer science. *Fractals.* 1995, vol. 3, n°3, pp. 483-490

[Sco 49] **Scott Blair G., Caffyn J.E.** An application of the theory of quasi-properties to the traitement of anomalous strain-stress relations. *Philos. Mag.* 1949, vol. 40, pp. 80-94

[Sla 66] **Slater L.J.** Generalized hypergeometric functions. *Cambridge : University Press.* 1966, xiii, 273 p.

[Slo 67] **Slonimsky G.L** Laws of Mechanical relaxation processes in polymers. *J. polym. sci., C Polym. symp.* 1967, n°16, pp. 1667-1672

[Smi 70] **Smit W., De Vries H.** Rheological models containing fractional derivatives. *Rheol. acta.* 1970, vol. 9, pp. 525-534

[Sta 52] **Staverman A.J., Schwarzl F.** Thermodynamics of viscoelastic behavior (model theory). *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschapen.* 1952, vol. 55, B, n°5, pp. 474-485

[Str 78] **Struik L.C.E.** Physical aging in amorphous polymers and other materials. *Amsterdam : Elsevier Scientific Pub. Co.* 1978. 229 p.

T

[Tay 25] **Taylor G.I., Quinney H.** The heat developed during plastic extension of metals. *Proc. R. Soc. Lond., A Math. phys. sci.* 1934

[Tie 94] **Tzien C.L., Chen G.** Challenges in microscale conductive and radiative heat transfer. *J. heat transf.* 1994, vol. 116, pp. 799-807

[Tin 72] **Ting E.C.** A remark on the thermomechanical coupling Behavior in a viscoelastic Medium. *J. appl. phys.* 1972, pp. 609-611

[Tin 73] **Ting E.C.** "Dissipation function of a viscoelastic material with temperature-dependent properties. *J. appl. phys.* 1973, vol. 44, n° 11, pp. 4956-4960

[Tuf 95] **Tuffraud-Löbel M.** Caractérisation thermomécanique d'alliages à mémoire de forme de type NiTi et CuZnAl; domaine de transition et cinétique de changement de phase. *Th. Sciences.* 1995. Montpellier 2

[Tsc 89] **Tschoegl N.W.** The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior An introduction. *Berlin : Springer.* 1989. 769 p. ISBN 3-540-19173-9

[Tzo 90] **Tzou D.Y.** The thermal shock wave induced by a moving front. *Int. j. heat mass transfer.* 1990, vol. 33, pp. 977-885

V

[Ver 58] **Vernotte P.** Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur. *C.r. hebd. séances Acad. sci.* 1958, vol. 246, n° 22, pp. 3154-3155

W

[Wer 93] **Weron K., Jurlewicz A.** Two forms of self-similarity as a fundamental feature of the power-law dielectric response. *J. phys., A, math. gen.* 1993, vol. 26, pp. 395-410

[Wil 70] **Williams G., Watts, D.C.** Non-symmetrical dielectric relaxation behaviour arising from a simple empirical decay function. *Trans. Faraday Soc.* 1970, vol. 66, pp. 80-85

Z

[Zim 56] **Zimm B.H.** Dynamics of polymer molecules in dilute solution : viscoelasticity, flow birefringence and dielectric loss. *J. chem. phys.* 1956, vol. 24, n° 2, pp. 269-278

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur André CHRYSOCHOOS, Professeur, Université de Montpellier II

Monsieur Alain LE MEHAUTE, Professeur, ISMANS, Le Mans

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur MESHAKA Yves

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

"Couplage thermomécanique et approche non-entière de l'irréversibilité en viscoélasticité. "

NANCY BRAB
2, AVENUE DE
FORET-DE-HA
BOITE POSTALI
F - 5 4 5 0
VANCEUVRE CEI

en vue de l'obtention du titre de :

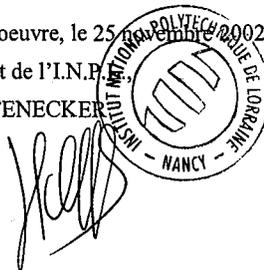
DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « Mécanique et Energétique »

Fait à Vandoeuvre, le 25 Novembre 2002

Le Président de l'I.N.P.

L. SCHUFFENECKER



Titre

Couplage thermomécanique et approche non entière de l'irréversibilité en viscoélasticité.

Résumé

Ce mémoire concerne l'élaboration de lois constitutives viscoélastiques en rhéologie des solides qui sont consistantes sur le plan thermodynamique. On utilise la stratégie DNLR (Distribution of Non-Linear Relaxation) basée sur la Thermodynamique des Processus Irréversibles à variables internes.

La première partie s'intéresse à la relaxation viscoélastique. La théorie des fluctuations et le concept d'équipartition de l'entropie produite régissent l'écriture du spectre de relaxation DNLR. L'irréversibilité est décrite par un schéma auto-similaire dont les propriétés récursives permettent de faire le lien entre l'approche DNLR et les modèles rhéologiques à dérivées non entières.

La seconde partie analyse les différents termes associés aux couplages thermomécaniques et développe une modélisation des transferts thermiques dans une éprouvette soumise à des sollicitations mécaniques. Une simulation par éléments finis permet de valider le calcul analytique 1D.

Enfin après avoir décrit le protocole expérimental mis en place (basé sur la combinaison d'un système de mesure non intrusif de déformation [vidéo-traction] et de température [mono-détecteur infrarouge]), la dernière partie propose une première validation du modèle à partir de données expérimentales obtenues sur une nuance d'acier S355 soumis à des essais mécaniques cycliques. Cette étude a surtout valeur d'exemple pour une stratégie de caractérisation cohérente d'un matériau sur le plan thermomécanique.

Mots-cles

Thermodynamique, Irréversibilité, Dérivation non entière, Viscoélasticité, Rhéologie des solides, Couplage thermomécanique, Relaxation, Puissance dissipée.

Title

Thermomechanical coupling and fractional approach of irreversible process in viscoelastic media.

Abstract

This report is about the elaboration of constitutive viscoelastic relations in rheology of solids which are consistant in thermodynamics. The DNLR strategy (Distribution of Non-Linear Relaxation) based on the thermodynamics of irreversible processes will be used.

The first section of this study is considering the viscoelastic relaxation. The theory of fluctuations and the concept of equipartition of produced entropy is governing the writing of the DNLR Relaxation spectra. The irreversible process is described by a self similar representation. Its recursive proprieties will allow to establish the relation between DNLR approach and rheological models with fractional derivative.

The second section analyzes the thermomechanic coupling terms and develops a modelisation of thermic transferts in a sample which is subjected to mechanical loadings. The 1D analytical calculations will be validated with finites elements simulations.

After a description of the experimental non intrusive set-up composed by an infrared mono-detector to mesure temperature and a videotraction system for strain measurement, the last section will present a first validation of our modelisation, rising experimental data coming from a S355 steel subjected to mechanical cyclic loadings. The main interest of this part is to present an exemple of a coherent strategy for the thermomechanical characterization of a material.

Keyword

Thermodynamics, Irreversibility, Fractional differentiation, Viscoélasticity, Rheology of solids, Thermomechanical coupling, Relaxation, Dissipation.