



**HAL**  
open science

# Étude de quelques problèmes de stabilisation stochastique et de filtrage non linéaire

Laurent Daumail

► **To cite this version:**

Laurent Daumail. Étude de quelques problèmes de stabilisation stochastique et de filtrage non linéaire. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 2002. Français. NNT : 2002METZ024S . tel-01749729

**HAL Id: tel-01749729**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749729>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



73662135

Département de Mathématiques  
U.F.R. M.I.M.  
Ile du Saulcy 57045 METZ Cedex 01

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE METZ

en vue de l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ**

Mention : **Mathématiques Appliquées**

par

**Laurent Daumail**

## ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES DE STABILISATION STOCHASTIQUE ET DE FILTRAGE NON LINÉAIRE

Soutenue le 18 novembre 2002 devant le Jury composé de :

François DUFOUR	Professeur à l'Université de Bordeaux <i>Rapporteur</i>
Patrick FLORCHINGER	Professeur à l'Université de Metz <i>Directeur de Thèse</i>
François LE GLAND	Directeur de recherche à l'INRIA <i>Rapporteur</i>
Etienne PARDOUX	Professeur à l'Université de Provence <i>Rapporteur</i>
Marc QUINCAMPOIX	Professeur à l'Université de Brest <i>Rapporteur</i>
Pierre VUILLERMOT	Professeur à l'Université de Nancy I <i>Président du jury</i>

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	20020765
Cote	S/MZ 02/24
Loc	





Département de Mathématiques  
U.F.R. M.I.M.  
Ile du Saulcy 57045 METZ Cedex 01

## THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE METZ

en vue de l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ**

Mention : **Mathématiques Appliquées**

par

**Laurent Daumail**

# ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES DE STABILISATION STOCHASTIQUE ET DE FILTRAGE NON LINÉAIRE

Soutenue le 18 novembre 2002 devant le Jury composé de :

<b>François DUFOUR</b>	Professeur à l'Université de Bordeaux <i>Rapporteur</i>
<b>Patrick FLORCHINGER</b>	Professeur à l'Université de Metz <i>Directeur de Thèse</i>
<b>François LE GLAND</b>	Directeur de recherche à l'INRIA <i>Rapporteur</i>
<b>Etienne PARDOUX</b>	Professeur à l'Université de Provence <i>Rapporteur</i>
<b>Marc QUINCAMPOIX</b>	Professeur à l'Université de Brest <i>Rapporteur</i>
<b>Pierre VUILLERMOT</b>	Professeur à l'Université de Nancy I <i>Président du jury</i>

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Monsieur Patrick Florchinger pour avoir bien voulu diriger mon travail au cours de ces années. Sa constante disponibilité, sa compétence et sa volonté sans faille de m'aider à découvrir de nombreuses facettes de l'analyse stochastique auront joué un rôle décisif dans l'élaboration de cette thèse.

J'exprime toute ma reconnaissance à Messieurs François Dufour, François Le Gland, Étienne Pardoux et Marc Quincampoix pour avoir accepté la tâche de rapporteurs pour cette thèse et de faire partie du Jury. La qualité des échanges que j'ai pu connaître avec eux m'a été très précieuse, de même que la pertinence de leurs remarques, leurs conseils et leurs avis éclairés qui m'ont aidé à achever ce travail.

Je remercie aussi chaleureusement Monsieur Pierre Vuillermot pour avoir bien voulu examiner cette thèse et participer au jury.

Ma reconnaissance va aussi à l'ensemble des membres du Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Metz au sein duquel ce travail a pu être mené à bien.

A ce propos, qu'il me soit permis de saluer ici la mémoire de Madame Jeannine Saint Jean-Paulin qui m'avait accueilli avec chaleur et compréhension au Département de Mathématiques de l'Université de Metz et dont l'enseignement et les encouragements généreux m'ont été, comme à beaucoup d'autres, très précieux.

Enfin, je remercie toutes celles et tous ceux qui, dans mon entourage familial et professionnel, m'ont aidé, par leur gentillesse et leur patience, à concilier la réalisation de ce travail avec les contraintes du quotidien.

La majeure partie de cette thèse est consacrée d'une part à l'étude de différentes questions concernant le contrôle de systèmes différentiels stochastiques modélisés par des équations différentielles stochastiques écrites au sens d'Itô et, d'autre part, à des questions de filtrage non linéaire.

Dans une première partie, sont rassemblés des résultats de stabilisation asymptotique en probabilité de systèmes différentiels stochastiques. Ces résultats sont obtenus dans le cadre de la théorie développée à partir de la fin des années 1960, principalement par Khasminskii et Kushner. Le principal but poursuivi est de généraliser divers résultats de stabilisation par retours d'état obtenus par différents auteurs pour des systèmes différentiels stochastiques où le contrôle n'est pas bruité, à des situations où un même bruit affecte à la fois la dynamique du système en régime libre et le contrôle rétroactif. Le contenu du chapitre 2, consacré à une extension au contexte stochastique du théorème d'Artstein, a fait l'objet de la publication [5], en collaboration avec Patrick Florchinger. Dans le chapitre 3, on exploite le résultat obtenu dans le chapitre précédent pour établir un résultat de stabilisation asymptotique adaptative pour des systèmes différentiels stochastiques. Le contenu du chapitre 4, consacré à la stabilisation de systèmes différentiels stochastiques à travers la notion de passivité, constitue la prépublication [1] et a fait l'objet de la communication [6] à la 41-ème "IEEE Conference on Decision and Control", tandis que l'étude concernant des systèmes différentiels stochastiques en cascade développée dans le chapitre 5 est l'objet de la prépublication [2].

La seconde partie de ce travail est consacrée à des problèmes de filtrage non linéaire en dimension finie ou infinie. Dans ce domaine, le premier problème abordé est celui du filtrage approché par un filtre de dimension finie d'un signal de dimension deux, dont une seule composante est observée. Ce travail, correspondant au chapitre 7, est l'objet de la prépublication [3]. Le chapitre 8 est consacré à la recherche d'exemples de filtres exacts de dimensions finies. Son contenu constitue la prépublication [4]. Dans les chapitres 9 et 10, on s'intéresse à des généralisations des équations du filtrage non linéaire pour des problèmes en dimension infinie.

Dans une troisième partie, on étudie, grâce au calcul de Malliavin, l'existence d'une densité régulière pour la solution d'une équation différentielle stochastique à coefficients dépendant du temps avec une infinité de termes de diffusion.

- [1] L.Daumail, A passive system approach for the stabilization of stochastic differential systems. Soumis pour publication.
- [2] L.Daumail, Cascade stochastic differential systems : asymptotic stabilization via a Jurdjevic-Quinn approach. Soumis pour publication.
- [3] L.Daumail, Approximate filters for a nonlinear problem with correlated noise. Soumis pour publication.
- [5] L.Daumail, Some examples of exact finite-dimensional filters for nonlinear problems with correlated noise. Prépublication.
- [5] L.Daumail, P.Florchinger, A constructive extension of Artstein's theorem to the stochastic context. *Stochastics and Dynamics* 2 (2002) 251-263.
- [6] L.Daumail, Stabilization of stochastic differential systems via passivity. *Proceedings of the 41th IEEE Conference on Decision and control, Las Vegas (USA) (2002)*. (à paraître)

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Stabilisation de systèmes différentiels stochastiques.</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Stabilité et stabilisation stochastique</b>	<b>9</b>
1.1	Introduction. . . . .	9
1.2	Concepts de stabilité stochastique. . . . .	10
1.3	Fonctions de Lyapunov stochastiques . . . . .	11
1.4	Systèmes différentiels stochastiques contrôlés . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Un théorème d'Artstein stochastique</b>	<b>15</b>
2.1	Introduction. . . . .	15
2.2	Présentation du problème. . . . .	16
2.3	Définition d'un contrôle rétroactif. . . . .	18
2.4	Stabilité du système en boucle fermée. . . . .	20
2.5	Exemples. . . . .	24
2.6	Conclusion. . . . .	25
<b>3</b>	<b>Stabilisation adaptative</b>	<b>27</b>
3.1	Introduction. . . . .	27
3.2	Énoncé du problème et définitions. . . . .	28
3.3	Résultat principal. . . . .	28
<b>4</b>	<b>Stabilisation de systèmes passifs</b>	<b>31</b>
4.1	Introduction. . . . .	31
4.2	Systèmes stochastiques passifs. . . . .	32
4.3	Stabilisation asymptotique . . . . .	36
4.4	Cas particulier et exemples numériques. . . . .	37
4.4.1	Systèmes différentiels stochastiques affines par rapport au contrôle. . . . .	37
4.4.2	Exemples numériques. . . . .	39
4.5	Stabilisation globale. . . . .	40
4.6	Stabilisation dynamique. . . . .	45
4.7	Quelques simulations numériques. . . . .	47
<b>5</b>	<b>Stabilisation de systèmes en cascade</b>	<b>53</b>
5.1	Introduction. . . . .	53
5.2	Énoncé du problème. . . . .	54
5.3	Stabilisation asymptotique . . . . .	55
<b>II</b>	<b>Filtrage non linéaire.</b>	<b>63</b>
<b>6</b>	<b>Les équations du filtrage non linéaire</b>	<b>67</b>
6.1	Introduction. . . . .	67
6.2	Le filtre optimal et sa version non normalisée. . . . .	69
6.3	Absolue continuité du filtre. . . . .	70

<b>7</b>	<b>Filtrage approché</b>	<b>73</b>
7.1	Introduction.	73
7.2	Énoncé du problème et notations.	74
7.3	Estimation de l'erreur de filtrage.	76
7.4	Exemples.	78
7.4.1	Un cas où l'observation est linéaire.	78
7.4.2	Équation du second ordre bruitée.	79
7.5	Comparaison avec le filtre optimal.	79
<b>8</b>	<b>Filtres de dimension finie</b>	<b>95</b>
8.1	Introduction.	95
8.2	Le problème de filtrage.	95
8.3	Filtres de dimension finie.	96
8.4	Exemples.	100
<b>9</b>	<b>Filtrage dans les espaces de Hilbert</b>	<b>101</b>
9.1	Introduction.	101
9.2	Le modèle étudié.	102
9.3	Équations du filtrage.	103
9.4	Équations de la prédiction.	106
9.5	Absolute continuité du filtre non normalisé.	108
9.6	Exemple : systèmes avec retards.	109
<b>10</b>	<b>Problème avec coût exponentiel</b>	<b>113</b>
10.1	Introduction.	113
10.2	Présentation du modèle.	114
10.3	Équation de Zakai modifiée.	115
10.4	Application à un système observé avec un retard constant.	116
10.5	Existence d'une densité pour le filtre $\sigma_t$ .	117
<b>III</b>	<b>Calcul de Malliavin.</b>	<b>127</b>
<b>11</b>	<b>Quelques rappels sur le calcul de Malliavin.</b>	<b>131</b>
11.1	Introduction.	131
11.2	Analyse sur l'espace de Wiener.	131
11.2.1	Dérivation au sens de Malliavin.	131
11.2.2	Dérivées de Malliavin et intégrales stochastiques.	133
11.3	Régularité de la loi de fonctionnelles de Wiener.	134
11.4	Application aux équations différentielles stochastiques.	135
<b>12</b>	<b>Une application du calcul de Malliavin.</b>	<b>137</b>
12.1	Introduction.	137
12.2	Présentation du problème.	138
12.3	Différentiabilité au sens de Malliavin de la solution.	141
12.4	Absolute continuité de la solution.	144

Première partie

Stabilisation de systèmes différentiels  
stochastiques.

Dans la première partie de ce travail, on étudie du point de vue de la stabilisation asymptotique en probabilité des systèmes différentiels stochastiques contrôlés modélisés par des équations différentielles stochastiques écrites au sens d'Itô sous la forme

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_s, u) ds + \int_0^t g(x_s, u) dw_s \quad (1)$$

où  $(w_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Wiener standard.

Plus précisément, on suppose que le système possède une solution d'équilibre et on cherche à construire des contrôles rétroactifs qui rendent cette solution d'équilibre asymptotiquement stable en probabilité. La méthode utilisée dans ce travail repose essentiellement sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov stochastiques.

Dans le cadre de cette thèse, on s'est surtout attaché à obtenir des résultats de stabilisation pour des systèmes différentiels stochastiques contrôlés du type (1) dans lesquels le même "bruit" affecte à la fois l'état et le contrôle.

La première partie de cette thèse est organisée de la manière suivante.

Dans le chapitre 1, on rappelle les définitions et les résultats concernant la stabilité en probabilité, au sens de Khasminskii [30], et la stabilité asymptotique en probabilité de la solution d'équilibre d'une équation différentielle stochastique.

Dans le chapitre 2, on considère un système différentiel stochastique du type (1) affine vis à vis du contrôle. On montre comment un stabilisateur peut être construit sous forme de retour d'état régulier lorsqu'une fonction de Lyapunov contrôlée est connue. Dans le chapitre 3 ce résultat est utilisé afin d'établir des conditions sous lesquelles la stabilisation asymptotique en probabilité d'un système reste possible en présence d'un paramètre inconnu dans la dérive du système.

Le chapitre 4 est consacré à la stabilisation asymptotique en probabilité de systèmes différentiels stochastiques passifs. Après avoir montré qu'un système passif peut être rendu localement asymptotiquement stable en probabilité on utilise cette notion de passivité afin d'étudier la stabilisation asymptotique en probabilité de systèmes pour lesquels la stabilité en probabilité est garantie par l'existence d'une fonction de Lyapunov. Différents moyens permettant d'obtenir une stabilisation asymptotique en probabilité globale sont ensuite étudiés.

Dans le chapitre 5 des idées similaires à celles développées dans le chapitre 4 sont mises en œuvre pour étudier la stabilisation asymptotique en probabilité de systèmes différentiels stochastiques en cascade.

# Chapitre 1

## Stabilité et stabilisation stochastique

### 1.1 Introduction.

Dans ce chapitre, on se propose de rappeler diverses notions concernant la stabilité en probabilité et la stabilité asymptotique en probabilité de la solution d'équilibre d'une équation différentielle stochastique.

Après que la théorie du mouvement Brownien mise en forme par Wiener [51] ait donné des fondements mathématiques solides à cette idée, l'émergence et le développement du calcul stochastique depuis les travaux de K. Itô [24] ont conduit à la modélisation de systèmes réels par des équations différentielles stochastiques dans des domaines variés : sciences physiques, technologie, dynamique des populations etc.

Comme pour les systèmes déterministes, la stabilisation des systèmes différentiels stochastiques constitue souvent un aspect important du contrôle de ces systèmes.

Plus encore que celle des équations différentielles déterministes, la résolution explicite des équations différentielles stochastiques n'est que très rarement possible, même dans le cas d'équations linéaires. Dans l'optique de la théorie ergodique, des résultats concernant les exposants de Lyapunov pour les solutions d'équations différentielles stochastiques ont été obtenus (voir [3] et les références citées dans cet article). Dans la pratique l'exploitation de ces résultats suppose la connaissance d'une mesure invariante pour un processus de Markov obtenu en projetant le processus initialement considéré sur la sphère unité, ce qui soulève d'importantes difficultés.

Une autre approche, celle qui sera suivie ici, consiste à faire appel à des fonctions de Lyapunov.

L'analyse de la stabilité, ou de l'instabilité, des systèmes différentiels stochastiques par l'intermédiaire de fonctions de Lyapunov a été développée en majeure partie par Kushner [36] et Khasminskii [30]. Sous réserve de pouvoir déterminer de telles fonctions, cette démarche est bien adaptée à l'étude de la stabilisation de systèmes différentiels stochastiques contrôlés non linéaires. On peut la décrire sommairement comme une extension au contexte stochastique de la méthode de Lyapunov, bien connue dans le cadre de l'étude des systèmes déterministes, cette extension exploitant la notion de surmartingale pour traduire l'idée de décroissance d'un potentiel.

Le contenu de ce chapitre est organisé de la manière suivante.

Dans le paragraphe 1.2, les définitions des notions de stabilité stochastique employées par la suite sont rappelées. Le paragraphe 1.3 rassemble les résultats fondamentaux qui seront appliqués

à la stabilisation des systèmes différentiels stochastiques contrôlés qui font l'objet d'une brève présentation dans le paragraphe 1.4.

## 1.2 Concepts de stabilité stochastique.

Dans ce paragraphe, on rappelle les concepts de stabilité stochastique utilisés dans la suite de ce travail.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  un espace de probabilité complet et  $(W_t)_{t \geq 0}$  un processus de Wiener standard, à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$ , défini sur cet espace de probabilité.

Considérons le processus stochastique  $x_t$ , solution dans  $\mathbb{R}^n$  de l'équation différentielle stochastique écrite au moyen de la différentielle d'Itô sous la forme :

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_s) ds + \int_0^t g(x_s) dW_s. \quad (1.1)$$

Supposons, afin de garantir l'existence d'une unique solution forte de (1.1), que les fonctions  $f$  et  $g$ , définies sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs respectivement dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^{n \times r}$ , sont globalement Lipschitziennes en  $x$  et à croissance sous linéaire; c'est à dire qu'il existe une constante positive  $K$  telle que pour tout  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  on ait :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)|_{\mathbb{R}^n} + |g(x) - g(y)|_{\mathbb{R}^{n \times r}} &\leq K |x - y|_{\mathbb{R}^n} \\ |f(x)|_{\mathbb{R}^n} + |g(x)|_{\mathbb{R}^{n \times r}} &\leq K (1 + |x|_{\mathbb{R}^n}) \end{aligned}$$

La solution de l'équation différentielle stochastique (1.1) initialisée à la valeur  $x_0$  à l'instant  $s$  sera notée  $(x_t^{s, x_0})_{t \geq s}$ .

Dans ce contexte, si  $f$  et  $g$  s'annulent toutes les deux à l'origine de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $x_t \equiv 0$  est une solution d'équilibre de l'équation différentielle stochastique (1.1). Si on s'intéresse à la stabilité de cet équilibre, on peut définir comme dans [30] la notion de stabilité en probabilité de la manière suivante.

**Définition 1.2.1** *La solution d'équilibre  $x_t \equiv 0$  de l'équation différentielle stochastique (1.1) est dite stable en probabilité si, et seulement si, pour tout  $s \geq 0$  et  $\varepsilon > 0$  :*

$$\lim_{x \rightarrow 0} P \left( \sup_{t \geq s} |x_t^{s, x}| > \varepsilon \right) = 0.$$

Comme dans le cas déterministe, la notion de stabilité asymptotique vient compléter cette première définition. On peut lui prêter une signification locale ou globale, comme l'indique la définition suivante.

**Définition 1.2.2** *1. La solution d'équilibre  $x_t \equiv 0$  de l'équation différentielle stochastique (1.1) est dite localement asymptotiquement stable en probabilité si, et seulement si, elle est stable en probabilité et si pour tout  $s \geq 0$  :*

$$\lim_{x \rightarrow 0} P \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_t^{s, x}| = 0 \right) = 1.$$

*2. La solution d'équilibre  $x_t \equiv 0$  de l'équation différentielle stochastique (1.1) est dite globalement asymptotiquement stable en probabilité si, et seulement si, elle est stable en probabilité et si pour tout  $s \geq 0$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$  :*

$$P \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_t^{s, x}| = 0 \right) = 1.$$

Dans ce travail, on se référera aux deux définitions ci-dessus. Néanmoins, la stabilité d'une solution d'équilibre d'une équation différentielle stochastique peut être envisagée sous d'autres aspects. En particulier, on dit que la solution d'équilibre  $x_t \equiv 0$  de l'équation différentielle stochastique (1.1) est exponentiellement stable en moyenne d'ordre  $p$  lorsqu'il existe des constantes strictement positives  $C$  et  $k$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq s \leq t$  on ait :

$$E |x_t^{s,x}|^p \leq C |x|^p e^{-k(t-s)}.$$

Il existe des liens entre ces diverses notions de stabilité stochastique, en particulier lorsque le système considéré est linéaire. Une étude de ces liens figure dans [30], et une synthèse en est proposée dans [2]. En particulier, sous une forte hypothèse d'ellipticité sur la matrice de diffusion, la stabilité en probabilité implique la stabilité asymptotique en probabilité ainsi que l'indique le résultat suivant.

**Théorème 1.2.3** ([30], page 168) *Supposons qu'il existe une fonction continue  $m$  définie positive sur  $\mathbb{R}^n$  telle que pour tout  $x$  voisin de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  on ait*

$$y^* g(x) g(x)^* y \geq m(x) |y|^2$$

quelque soit  $y \in \mathbb{R}^n$ .

*Alors, si la solution d'équilibre de l'équation différentielle stochastique (1.1) est stable en probabilité, elle est aussi localement asymptotiquement stable en probabilité.*

### 1.3 Fonctions de Lyapunov et étude de la stabilité des systèmes.

Pour l'étude de la stabilité d'une solution d'équilibre d'une équation différentielle stochastique dans les divers sens rappelés ci-dessus, on peut faire appel à des fonctions de Lyapunov, comme dans le cas déterministe. Dans ce but, nous adoptons la définition suivante.

**Définition 1.3.1** *On appellera fonction de Lyapunov stochastique toute fonction  $V$  définie et continue sur un voisinage  $D$  de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$ , définie positive et de classe  $C^2$  sur  $D \setminus \{0\}$ .*

Appliqué à une fonction de Lyapunov  $V$ , le générateur infinitésimal  $\mathcal{L}$  du processus stochastique  $x_t$  solution de l'équation différentielle stochastique (1.1) donne pour tout  $x \in D$  :

$$\mathcal{L}V(x) = \nabla V(x) f(x) + \frac{1}{2} \text{Tr} (g(x) g(x)^* \nabla^2 V(x)).$$

L'étude de la quantité ainsi définie est susceptible de fournir des informations qualitatives sur le comportement de la solution  $x_t$  de l'équation différentielle stochastique (1.1).

Commençons à cet égard par noter que le recours à des fonctions de Lyapunov stochastiques permet d'assouplir les hypothèses sur les coefficients de l'équation différentielle stochastique (1.1). En effet, le théorème 4.1 page 84 de [30] prend la forme suivante dans le cadre de l'étude d'un système autonome.

**Théorème 1.3.2** *Supposons que les coefficients  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $g$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n \times r}$  du système différentiel stochastique (1.1) vérifient des conditions de Lipschitz sur toute boule de  $\mathbb{R}^n$ . Si il existe une fonction de Lyapunov stochastique propre  $V$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  et une constante réelle  $c > 0$  telles que*

$$\mathcal{L}V(x) \leq cV(x)$$

*pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , alors le système différentiel stochastique (1.1) admet une solution unique pour toute condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .*

Les fonctions de Lyapunov stochastiques peuvent aussi permettre de mener à bien l'étude de la stabilité en probabilité, ou de la stabilité asymptotique en probabilité, d'un système différentiel stochastique. On dispose à cet égard de l'extension suivante du théorème de Lyapunov au cadre stochastique.

**Théorème 1.3.3** *Si il existe une fonction de Lyapunov stochastique  $V$  définie sur un voisinage ouvert  $D$  de l'origine de  $\mathbb{R}^n$  telle que :*

$$\mathcal{L}V(x) \leq 0 \text{ (respectivement } \mathcal{L}V(x) < 0)$$

*pour tout  $x$  dans  $D \setminus \{0\}$ , alors la solution d'équilibre  $x_t \equiv 0$  du système différentiel stochastique (1.1) est stable en probabilité (respectivement localement asymptotiquement stable en probabilité). De plus, si  $D = \mathbb{R}^n$  et si la fonction  $V$  est propre, alors la solution d'équilibre  $x_t \equiv 0$  du système différentiel stochastique (1.1) est globalement asymptotiquement stable en probabilité si*

$$\mathcal{L}V(x) < 0$$

*pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .*

Ce résultat est prouvé en détail dans [30]. Schématiquement, on s'appuie sur la formule d'Itô pour mettre en évidence le fait que le processus stochastique  $\mathcal{L}V(x_t)$ , arrêté à l'instant de sa première sortie d'une boule centrée sur l'origine de  $\mathbb{R}^n$  est une sur-martingale positive, dès que  $\mathcal{L}V(x) \leq 0$  pour tout  $x$  dans  $D$ .

Sous cette même hypothèse, comme la sur-martingale en question est continue, elle est presque sûrement convergente et ses trajectoires, compte-tenu de la stabilité en probabilité de la solution d'équilibre de l'équation différentielle stochastique, coïncident avec celles de  $\mathcal{L}V(x_t)$  avec une probabilité tendant vers 1 quand la condition initiale  $x$  tend vers 0.

En fait, on dispose du résultat suivant dû à Kushner [38] pour obtenir des précisions sur le comportement asymptotique de la solution de l'équation différentielle stochastique (1.1). Ce théorème constitue le pendant stochastique du principe d'invariance de La Salle [39].

**Théorème 1.3.4** *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  on ait :*

$$\mathcal{L}V(x) \leq 0.$$

*Alors, le processus stochastique  $x_t$  solution de l'équation différentielle stochastique (1.1) tend avec probabilité 1 vers le support du plus grand ensemble invariant, contenu dans l'ensemble  $\mathcal{L}V(x_t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ .*

Les théorèmes énoncés ci-dessus donnent, en termes de fonctions de Lyapunov, des conditions suffisantes pour la stabilité ou la stabilité asymptotique en probabilité des systèmes différentiels stochastiques. Il est naturel de se demander dans quelle mesure de telles conditions sont aussi nécessaires. La réponse est positive dans certaines situations, et les deux résultats suivants peuvent être cités dans ce sens.

**Théorème 1.3.5** *(Khasminskii [30], chapitre 5) Supposons que les coefficients du système différentiel stochastique (1.1) sont Lipschitziens dans un voisinage de l'origine et que la solution d'équilibre de ce système est stable en probabilité. Supposons en outre qu'il existe une fonction continue  $m$  telle que  $m(x) > 0$  pour  $x \neq 0$  telle que*

$$g(x)g(x)^* > m(x)I.$$

*Alors, il existe une fonction de Lyapunov stochastique  $V$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , continue en 0, telle que  $\mathcal{L}V(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

**Théorème 1.3.6** (Kushner [37]) *Si les coefficients du système différentiel stochastique (1.1) sont deux fois différentiables et bornés et si la solution d'équilibre  $x_t \equiv 0$  de ce système est localement (respectivement globalement) asymptotiquement stable en probabilité, alors il existe une fonction de Lyapunov  $V$  de classe  $C^2$  définie sur un voisinage  $D$  de l'origine (respectivement propre et de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^n$ ) telle que  $\mathcal{L}V(x) < 0$  pour tout  $x \in D \setminus \{0\}$  (respectivement  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ).*

## 1.4 Stabilisation de systèmes différentiels stochastiques contrôlés.

Les chapitres suivants sont consacrés à la stabilisation asymptotique en probabilité de systèmes différentiels stochastiques de la forme

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_s, u_s) ds + \int_0^t g(x_s, u_s) dW_s \quad (1.2)$$

où  $u$  désigne un processus stochastique à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ , adapté à la filtration obtenue en augmentant de manière appropriée (cf. [28] théorème 2.7.15) la filtration naturelle engendrée par le processus de Wiener  $(W_t)_{t \geq 0}$ .

Les fonctions  $f$  et  $g$  seront soumises dans la suite à des hypothèses permettant de garantir l'existence et l'unicité d'une unique solution forte pour le système différentiel stochastique (1.2).

Notre but vis à vis de tels systèmes sera principalement de déterminer des contrôles  $u$  sous forme de retours d'état  $u = \alpha(x)$  tels que le système différentiel stochastique

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_s, \alpha(x_s)) ds + \int_0^t g(x_s, \alpha(x_s)) dW_s$$

soit asymptotiquement stable en probabilité à l'origine, localement ou globalement.

On parlera alors du contrôle rétroactif  $u_t = \alpha(x_t)$  comme d'un stabilisateur du système différentiel stochastique (1.2).



## Chapitre 2

# Une extension constructive du théorème d'Artstein

### 2.1 Introduction.

Le but de ce chapitre est de proposer une extension du théorème d'Artstein à des systèmes différentiels stochastiques non linéaires contrôlés dans lesquels un même bruit blanc représenté par les variations d'un processus de Wiener standard affecte à la fois l'état et le contrôle. Plus précisément, nous allons montrer que l'existence d'une fonction de Lyapunov lisse, sauf peut-être au point d'équilibre, et vérifiant une hypothèse d'existence de "petits contrôles" au voisinage de cet équilibre autorise la construction explicite d'un retour d'état lui-même lisse, sauf peut-être au voisinage de l'équilibre, mais néanmoins continu en ce point.

La stabilisabilité de systèmes différentiels déterministes non linéaires a été explorée au cours de ces dernières années par de nombreux auteurs (voir par exemple [1, 7, 48, 49, 42] et les références contenues dans ces articles). Fondée sur la théorie de Lyapunov, la méthode développée par ces auteurs fournit des conditions suffisantes pour l'existence de retours d'état stabilisateurs lisses, sauf éventuellement à l'équilibre. La pertinence et l'intérêt de l'utilisation de retours d'état éventuellement non lisses à l'équilibre a été soulignée par Sontag et Sussman dans [47] et a depuis été considérée comme acceptable par différents auteurs (voir entre autres [12], [29] ou [49]).

Une preuve explicite du théorème d'Artstein est donnée par Sontag dans [46] et revue par Lin et Sontag dans [42]. La preuve donnée dans [46] utilise une formule "universelle", en l'espèce une fonction algébrique de dérivées de Lie des coefficients du système. Le retour d'état stabilisateur obtenu est lisse, sauf éventuellement au point d'équilibre, et continu en ce point si l'hypothèse du petit contrôle est satisfaite. Le théorème d'Artstein a par ailleurs été prouvé de manière non constructive par Tsinias [49], en utilisant une méthode basée sur des partitions de l'unité.

La stabilisation de systèmes différentiels stochastiques non linéaires a été étudiée par différents auteurs au moyen de la méthode de Lyapunov stochastique (voir par exemple [13, 23, 16] et les références citées dans ces articles).

Une extension du théorème d'Artstein aux systèmes différentiels stochastiques non linéaires dont la dérive dépend de manière affine du contrôle a été obtenue par Florchinger dans [14] et dans [16]. Sous l'hypothèse de l'existence d'une fonction de Lyapunov contrôlée, Florchinger obtient dans [14] un retour d'état stabilisateur construit de manière analogue à celui proposé par Sontag dans [46] pour des systèmes déterministes affines vis-à-vis du contrôle. Ce retour d'état est lisse sauf éventuellement à l'équilibre et, si l'hypothèse du petit contrôle est satisfaite, il est en outre continu en ce point. La preuve du théorème d'Artstein donnée dans [16] est fondée sur un usage

non constructif de partitions de l'unité, comme celle donnée par Tsinias dans [49] et en constitue une extension au cadre stochastique.

Ce chapitre est divisé en quatre paragraphes. Le paragraphe 2.2 expose de manière précise le problème à traiter. Celui-ci a pour objet la stabilisation d'un système différentiel stochastique où la dérive et le terme de diffusion sont tous deux affines vis-à-vis du contrôle. Aucune limitation n'est imposée sur la corrélation éventuelle des bruits susceptibles d'affecter les termes dépendants du contrôle et ceux susceptibles d'affecter les autres termes. Un contrôle rétroactif est construit dans le paragraphe 2.3, tandis que dans le paragraphe 2.4, on montre que ce contrôle est lisse sauf peut-être au point d'équilibre où, cependant, sa continuité est établie moyennant une hypothèse comparable à celle du petit contrôle. Quelques exemples illustrant le résultat obtenu sont exposés dans le paragraphe 2.5.

## 2.2 Présentation du problème.

Soit  $(w_t)_{t \geq 0}$  un processus de Wiener standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  défini sur un espace de probabilité complet  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Considérons le processus stochastique  $(x_t)_{t \geq 0}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , solution de l'équation différentielle stochastique

$$x_t = x_0 + \int_0^t [f(x_s) + u f_1(x_s) + u^2 f_2(x_s)] ds + \int_0^t [g(x_s) + u g_1(x_s)] dw_s \quad (2.1)$$

où  $u$  représente un contrôle progressivement mesurable à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Les hypothèses concernant les coefficients de ce système différentiel stochastique contrôlé seront précisées plus loin.

Notre objectif est de construire explicitement un retour d'état  $u = \alpha(x)$  rendant le système (2.1) asymptotiquement stable en probabilité, et tel que la fonction  $\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  soit au moins de classe  $C^1$ , sauf peut être au point d'équilibre où cette fonction sera cependant continue.

Compte tenu du théorème 1.3.3 et du théorème 1.3.6, nous sommes conduits à examiner le générateur infinitésimal  $\mathcal{L}_u$  du processus stochastique  $x_t$  solution de l'équation différentielle stochastique (2.1).

Pour toute fonction  $V$  de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\mathcal{L}_u V(x) = a(x)u^2 + b(x)u + c(x)$$

avec

$$\begin{aligned} a(x) &= \sum_{i=1}^n \left( f_2^i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) (x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^p \left( g_1^{i,k} g_1^{j,k} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) (x), \\ b(x) &= \sum_{i=1}^n \left( f_1^i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) (x) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^p \left( g^{i,k} g_1^{j,k} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) (x), \\ c(x) &= \sum_{i=1}^n \left( f^i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) (x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^p \left( g^{i,k} g^{j,k} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) (x). \end{aligned}$$

Par la suite, on utilisera aussi les notations suivantes :

$$\Delta(x) = b(x)^2 - 4a(x)c(x)$$

et, si  $\Delta(x) \geq 0$  et  $a(x) > 0$  :

$$\lambda_1(x) = \frac{-b(x) - \sqrt{\Delta(x)}}{2a(x)}$$

et

$$\lambda_2(x) = \frac{-b(x) + \sqrt{\Delta(x)}}{2a(x)}.$$

Bien entendu,  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$ ,  $\Delta(x)$ ,  $\lambda_1(x)$  et  $\lambda_2(x)$  dépendent de la fonction de Lyapunov  $V$ . Cependant, comme cette dernière sera supposée choisie une fois pour toute dans ce qui suit, cette dépendance n'est pas explicitement mentionnée dans les notations que nous avons adoptées.

Voici maintenant les hypothèses sur les coefficients  $f$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g$  et  $g_1$  du système différentiel stochastique (2.1) sous lesquelles nous serons en mesure d'obtenir la stabilisation asymptotique en probabilité de sa solution d'équilibre.

**(H1)** Les fonctions  $f$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g$  et  $g_1$  sont lisses (au moins de classe  $C^1$ ) et les fonctions  $f$  et  $g$  s'annulent en 0.

Il existe une fonction de Lyapunov stochastique propre  $V$  telle que :

**(H2)** pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , on a

$$\inf_{u \in \mathbb{R}} \{\mathcal{L}_u V(x)\} < 0$$

**(H3)** pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,

$$a(x) < 0 \implies \Delta(x) < 0$$

**(H4) (hypothèse du petit contrôle)**

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{-2c(x)}{|b(x)|} \geq 0.$$

$$b(x) \neq 0$$

**Remarque 2.2.1** *Le théorème 1.3.2 et l'hypothèse (H1) suffisent à garantir l'existence d'une unique solution non explosive pour le système en boucle fermée que nous obtiendrons dans la suite.*

L'hypothèse (H2) sous-entend que

$$a(x) > 0 \implies \Delta(x) > 0.$$

*Si  $f_2 \equiv 0$  et si la fonction de Lyapunov  $V$  est convexe, alors l'hypothèse (H3) est trivialement vérifiée.*

**Remarque 2.2.2** *Dans le chapitre 3, une fonction de Lyapunov  $V$  satisfaisant les hypothèses (H2), (H3) et (H4) ci-dessus est appelée **fonction de Lyapunov de contrôle** pour le système différentiel stochastique (2.1).*

La construction du retour d'état proposé dans le paragraphe suivant est motivée par le résultat élémentaire suivant sur les solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ . Les notations sont analogues à celles introduites au début de ce paragraphe.

**Lemme 2.2.3** *Si  $a > 0$  et  $\Delta > 0$ , alors :*

1. si  $b > 0$  et  $c > 0$ , on a

$$\lambda_1 < \frac{-b}{2a} < \frac{-2c}{b} < \lambda_2 < 0 \quad (2.2)$$

2. si  $b < 0$  et  $c > 0$ , on a

$$0 < \lambda_1 < \frac{-2c}{b} < \frac{-b}{2a} < \lambda_2 \quad (2.3)$$

3. si  $b > 0$  et  $c \leq 0$ , on a

$$\lambda_1 < \frac{-b}{2a} < 0 \leq \lambda_2 \quad (2.4)$$

4. si  $b < 0$  et  $c \leq 0$ , on a

$$\lambda_1 \leq 0 < \frac{-b}{2a} < \lambda_2 \quad (2.5)$$

De plus, les inégalités de (2.4) et (2.5) sont strictes lorsque  $c < 0$ .

**Démonstration.** On peut se contenter de vérifier les points 1 et 3, les deux autres étant parfaitement analogues.

1. Comme  $\frac{c}{a} > 0$  et  $\frac{-b}{a} < 0$ , il est clair que

$$\lambda_1 < \frac{-b}{2a} < \lambda_2 < 0.$$

L'inégalité  $\frac{-b}{2a} < \frac{-2c}{b}$  est une conséquence immédiate des inégalités  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $\Delta > 0$ .

Enfin, on calcule

$$\begin{aligned} \lambda_2 - \frac{-2c}{b} &= \frac{-b^2 + b\sqrt{\Delta} + 4ac}{2a} \\ &= \frac{\sqrt{\Delta} (b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} \end{aligned}$$

et il suffit pour conclure de remarquer que, par hypothèse, on a  $ac > 0$ .

3. Les inégalités  $\lambda_1 < \frac{-b}{2a} < 0$  sont évidentes. De plus, comme  $\frac{c}{a} \leq 0$  et  $\lambda_1 < 0$ , on a bien  $\lambda_2 \geq 0$ .  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de construire un retour d'état qui stabilise asymptotiquement en probabilité le système différentiel stochastique (2.1).

## 2.3 Définition d'un contrôle rétroactif.

Pour définir une "réalisation" lisse du contrôle stabilisateur asymptotique  $u$  à partir de l'hypothèse (H2), commençons par choisir quatre fonctions  $\delta$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  possédant les propriétés suivantes.

1.  $\delta$  est une fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ , bornée par un réel  $K$ , nulle en 0, lisse et telle que  $\delta(s) > 0$  en tout point  $s > 0$ .
2.  $\phi_1$  est une fonction lisse de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  dans  $[0, 1]$  telle que :

$$\phi_1(z, s) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \leq -\delta(s) \\ 0 & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

3.  $\phi_2$  est une fonction lisse de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  dans  $[0, 1]$  telle que :

$$\phi_2(z, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq -2\delta(s) \\ 1 & \text{si } z \geq -\delta(s) \end{cases}$$

4.  $\phi_3$  est une fonction lisse de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  dans  $[0, 1]$  telle que :

$$\phi_3(z, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 1 & \text{si } z \geq \delta(s) \end{cases}$$

**Remarque 2.3.1** La fonction  $\phi_1$  peut être construite à partir d'une fonction  $\psi_1$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$  telle que

$$\psi_1(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \leq -1 \\ 0 & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

en posant, par exemple,  $\phi_1(z, s) = \psi_1\left(\frac{z}{\delta(s)}\right)$ . Les fonctions  $\phi_2$  et  $\phi_3$  peuvent être construites à leur tour par le même procédé, à partir de fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$  choisies de manière adéquate.

A partir des fonctions  $\delta$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  décrites ci-dessus, il est possible de définir un contrôle rétroactif pour le système différentiel stochastique (2.1) de telle sorte que le système en boucle fermée ainsi obtenu soit asymptotiquement stable en probabilité, comme on le verra dans le paragraphe suivant.

Avant d'entreprendre cette construction, notons qu'en vertu des hypothèses (H2) et (H3) les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}^n$

$$\{x \in \mathbb{R}^n; a(x) > 0 \text{ et } \Delta(x) \leq 0\}$$

et

$$\{x \in \mathbb{R}^n; a(x) < 0 \text{ et } \Delta(x) \geq 0\}$$

sont vides.

De plus, l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n; a(x) = 0 \text{ et } \Delta(x) < 0\}$$

est également vide.

Définissons maintenant une fonction  $\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  par l'algorithme de calcul suivant.

1. Si  $x = 0$ , alors  $\alpha(x) = 0$ .

2. Si  $x \neq 0$ , alors

(a) si  $\Delta(x) \leq 0$ ,  $\alpha(x) = 0$ .

(b) sinon,

i. si  $a(x) > 0$  et  $b(x) > 0$ , alors

$$\begin{aligned} \alpha(x) = & \frac{-2c(x)}{b(x)} \phi_1\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right) + \left(1 - \phi_3\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right)\right) \\ & \cdot \left(1 - \phi_1\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right)\right) \\ & \cdot \left(\frac{-b(x)}{2a(x)} \phi_2\left(\frac{-b(x)}{2a(x)}, \|x\|\right) - \left(1 - \phi_2\left(\frac{-b(x)}{2a(x)}, \|x\|\right)\right) \delta(\|x\|)\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ii. si  $a(x) > 0$  et  $b(x) < 0$ , alors

$$\begin{aligned} \alpha(x) = & \frac{-2c(x)}{b(x)} \phi_1\left(\frac{2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right) + \left(1 - \phi_3\left(\frac{2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right)\right) \\ & \cdot \left(1 - \phi_1\left(\frac{2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right)\right) \\ & \cdot \left(\frac{-b(x)}{2a(x)} \phi_2\left(\frac{b(x)}{2a(x)}, \|x\|\right) + \left(1 - \phi_2\left(\frac{b(x)}{2a(x)}, \|x\|\right)\right) \delta(\|x\|)\right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

iii. si  $a(x) > 0$  et  $b(x) = 0$ , alors  $\alpha(x) = 0$ .

iv. si  $a(x) = 0$  et  $b(x) > 0$ , alors

$$\alpha(x) = \frac{-2c(x)}{b(x)} \phi_1 \left( \frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\| \right) - \left( 1 - \phi_3 \left( \frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\| \right) \right) \cdot \left( 1 - \phi_1 \left( \frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\| \right) \right) \delta(\|x\|) \quad (2.8)$$

v. si  $a(x) = 0$  et  $b(x) < 0$ , alors

$$\alpha(x) = \frac{-2c(x)}{b(x)} \phi_1 \left( \frac{2c(x)}{b(x)}, \|x\| \right) + \left( 1 - \phi_3 \left( \frac{2c(x)}{b(x)}, \|x\| \right) \right) \cdot \left( 1 - \phi_1 \left( \frac{2c(x)}{b(x)}, \|x\| \right) \right) \delta(\|x\|) \quad (2.9)$$

**Remarque 2.3.2** La définition de la fonction  $\alpha$  a essentiellement pour but de fournir une valeur du contrôle  $u$  telle que l'on ait  $\mathcal{L}_u V(x) < 0$  pour tout  $x \neq 0$ . Si on se contentait d'une inégalité large et de la continuité de  $u$  par rapport à  $x$ , il serait possible de remplacer les formules (2.6) et (2.7) par

$$u = \min \left\{ \frac{-2c(x)}{b(x)}, 0 \right\}$$

et les formules (2.8) et (2.9) par

$$u = \max \left\{ \frac{-2c(x)}{b(x)}, 0 \right\}.$$

Ceci sera apparent dans le paragraphe suivant, où on va montrer par ailleurs que le choix de la fonction  $\alpha$  conduit bien aux objectifs fixés.

## 2.4 Stabilité du système en boucle fermée.

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat principal de ce chapitre énoncé dans le théorème suivant.

**Théorème 2.4.1** Soit  $\alpha$  la fonction définie dans le paragraphe 2.3. Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) :

1. la fonction  $\alpha$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$  et lisse en tout point distinct de l'origine ;
2. la solution d'équilibre  $x_t \equiv 0$  du système différentiel stochastique

$$\begin{aligned} x_t = x_0 + \int_0^t [f(x_s) + \alpha(x_s)f_1(x_s) + \alpha(x_s)^2 f_2(x_s)] ds \\ + \int_0^t [g(x_s) + \alpha(x_s)g_1(x_s)] dw_s \end{aligned} \quad (2.10)$$

est asymptotiquement stable en probabilité.

**Démonstration.** Nous examinons successivement les deux assertions du théorème.

**Étude de la fonction  $\alpha$ .**

La fonction  $\alpha$  est évidemment lisse sur les ouverts  $\{\Delta(x) < 0\}$ ,  $\{\Delta(x) > 0\} \cap \{a(x) > 0\} \cap \{b(x) < 0\}$  et  $\{\Delta(x) > 0\} \cap \{a(x) > 0\} \cap \{b(x) > 0\}$ .

Il reste à examiner cette fonction au voisinage de l'origine, ainsi que des points  $x$  distincts de l'origine tels que :

1.  $\Delta(x) = 0$ .
2.  $\Delta(x) > 0$ ,  $a(x) > 0$  et  $b(x) = 0$ .
3.  $\Delta(x) > 0$ ,  $a(x) = 0$  et  $b(x) > 0$ .
4.  $\Delta(x) > 0$ ,  $a(x) = 0$  et  $b(x) < 0$ .

Étudions alors successivement les quatre situations énumérées ci-dessus ainsi que la continuité de  $\alpha$  à l'origine.

1. Il est exclu dans ce cas que l'on ait  $a(x) < 0$  à cause de l'hypothèse (H3), ainsi que  $a(x) > 0$  à cause de l'hypothèse (H2). On a donc dans ce cas  $a(x) = 0$ , ce qui, puisque  $\Delta(x) = 0$ , implique  $b(x) = 0$ . Par définition de la fonction  $\alpha$ , on a donc  $\alpha(x) = 0$ .

D'autre part, d'après l'hypothèse (H2),  $c$  est strictement négatif au point  $x$ , ainsi donc que dans un voisinage  $\mathcal{U}$  de ce point. Donc, en restreignant éventuellement ce voisinage, celui-ci ne contient que des points  $y$  pour lesquels  $c(y) < l$ , ou  $l$  est un nombre réel négatif. Comme  $b(x) = 0$ , nous pouvons supposer que  $\left| \frac{-2c(y)}{b(y)} \right| > K$  dès que  $b(y) \neq 0$  et  $y \in \mathcal{U}$ . En retournant selon le signe de  $b(y)$  au différentes formules définissant la fonction  $\alpha$ , on constate que  $\alpha(y) = 0$  pour tout  $y \in \mathcal{U}$ . En effet lorsque  $b(y) > 0$  on a  $\phi_1 \left( \frac{-2c(y)}{b(y)}, \|y\| \right) = 0$  et  $\phi_3 \left( \frac{-2c(y)}{b(y)}, \|y\| \right) = 1$  puisque  $\frac{-2c(y)}{b(y)} > K > \delta(\|y\|)$ . Les cas où  $b(y) < 0$  peuvent être traités de la même façon et ceux où  $b(y) = 0$  sont évidents.

Puisque la fonction  $\alpha$  est nulle au voisinage du point  $x$ , elle est lisse en ce point.

2. On a dans ce cas  $c(x) < 0$ , compte tenu de la définition de  $\Delta(x)$ . De même que dans le cas précédent, il existe donc un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $x$  à l'intérieur duquel on a  $\frac{-2c(y)}{b(y)} > K$  pour tout  $y$  de  $\mathcal{U}$  tel que  $b(y) \neq 0$  et on peut raisonner de la même manière pour montrer qu'à nouveau  $\alpha$  est nulle au voisinage de  $x$ .
3. Comme  $\Delta(x) > 0$  et  $b(x) > 0$ , on peut supposer qu'il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $x$  et un réel  $l'$  tels que  $\Delta(y) > 0$  et  $b(y) > l' > 0$  pour tout  $y \in \mathcal{U}$ . Comme  $\Delta(y) > 0$ , l'hypothèse (H3) nous permet d'affirmer que  $a(y) \geq 0$ . En restreignant au besoin  $\mathcal{U}$ , on peut supposer que  $0 \leq a(y) < l''$  pour tout  $y \in \mathcal{U}$ ,  $l''$  désignant un réel positif arbitrairement petit. Si on choisit  $\mathcal{U}$  de telle sorte que  $l'' < \frac{l'}{4K}$ , on a  $\frac{-b(y)}{2a(y)} < -2K < -2\delta(y)$  pour tout point  $y \in \mathcal{U}$  tel que  $a(y) > 0$ . Pour de tels points  $y$  on a  $\phi_2 \left( \frac{-b(y)}{2a(y)}, \|y\| \right) = 0$  et l'égalité (2.6) de la définition de  $\alpha$  se réduit à (2.8), cette conclusion restant valable pour les points  $y$  tels que  $a(y) = 0$ .

Donc, comme  $\alpha(y)$  est donné par (2.8) dans  $\mathcal{U}$ ,  $\alpha$  est lisse au point  $x$ .

4. Ce cas est analogue au précédent et peut être traité de la même manière.

Montrons maintenant la continuité de  $\alpha$  en 0. Il suffit pour cela de s'assurer de la convergence vers 0 de  $\alpha(x)$  quand  $x$  tend vers 0 et  $\alpha$  est défini par une des formules (2.6),(2.7),(2.8) ou (2.9).

La construction de  $\alpha$  implique que dans tous les cas où  $b(x) > 0$ , on a :

$$\min \left\{ -2\delta(x), \frac{-2c(x)}{b(x)} \right\} \leq \alpha(x) \leq 0,$$

tandis que lorsque  $b(x) < 0$ , on a :

$$0 \leq \alpha(x) \leq \max \left\{ 2\delta(x), \frac{-2c(x)}{b(x)} \right\},$$

et

$$\alpha(x) = 0$$

dés que  $b(x) = 0$ .

L'hypothèse (H4) et le fait que  $\delta$  tend vers 0 en 0 permettent donc de conclure à la continuité de  $\alpha$  en 0.

### Stabilité asymptotique en probabilité.

En vertu du théorème 1.3.3, il suffit d'établir que pour tout  $x$  distinct de l'origine, on a  $\mathcal{L}V(x) < 0$ ,  $\mathcal{L}$  désignant le générateur infinitésimal du processus stochastique solution du système différentiel stochastique (2.10). En d'autres termes, il nous suffit de vérifier que

$$a(x)\alpha(x)^2 + b(x)\alpha(x) + c(x) < 0 \quad (2.11)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Nous passons en revue les différents items de la définition de  $\alpha$  pour montrer que l'inégalité (2.11) est systématiquement vérifiée pour  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

1. L'inégalité (2.11) ne concerne que les points distincts de l'origine de  $\mathbb{R}^n$  et la définition de  $\alpha$  en 0 est indifférente du point de vue qui nous intéresse ici.
2. Supposons maintenant que  $x \neq 0$ .

- (a) Si  $\Delta(x) < 0$ ,  $a(x)$  ne peut être nul et on a, grâce à l'hypothèse (H2),  $a(x) < 0$ . Pour n'importe quelle valeur de  $u$ , on a  $a(x)u^2 + b(x)u + c(x) < 0$ , en particulier pour  $u = \alpha(x) = 0$ .

Si  $\Delta(x) = 0$ , on a nécessairement  $a(x) = 0$ . En effet, l'inégalité  $a(x) > 0$  serait en contradiction avec l'hypothèse (H2) et l'inégalité  $a(x) < 0$  avec l'hypothèse (H3). Comme  $\Delta(x) = 0$  et  $a(x) = 0$ , on a aussi  $b(x) = 0$  ce qui implique que  $c(x) < 0$  à cause de l'hypothèse (H2). Ainsi  $\mathcal{L}V(x) < 0$ , indépendamment de la valeur choisie pour  $\alpha(x)$ .

- (b) Dans les cas qui restent à examiner, on a  $\Delta(x) > 0$ .

- i. Ici, on suppose que  $a(x) > 0$ ,  $b(x) > 0$  et que  $\alpha(x)$  est défini par (2.6).

Nous considérons successivement trois cas suivant la valeur de  $\frac{-2c(x)}{b(x)}$ .

- A. Si  $\frac{-2c(x)}{b(x)} \leq -\delta(\|x\|)$ , alors  $\phi_1\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right) = 1$  et  $\alpha(x) = \frac{-2c(x)}{b(x)}$ . On peut donc conclure dans ce cas grâce au lemme 2.2.3.1.
- B. Si  $-\delta(\|x\|) < \frac{-2c(x)}{b(x)} < 0$ , alors  $\phi_3\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \delta(\|x\|)\right) = 0$  et  $\alpha(x)$  est le barycentre, avec des coefficients positifs, du nombre négatif  $\frac{-2c(x)}{b(x)}$  et de

$$\beta(x) = \frac{-b(x)}{2a(x)}\phi_2\left(\frac{-b(x)}{2a(x)}, \|x\|\right) - \left(1 - \phi_2\left(\frac{-b(x)}{2a(x)}, \|x\|\right)\right)\delta(\|x\|).$$

De plus la fonction  $\phi_2$  a été choisie de telle sorte que  $\beta(x)$  est toujours compris entre  $\frac{-b(x)}{2a(x)}$  et  $\frac{-2c(x)}{b(x)}$  dès que  $-\delta(\|x\|) < \frac{-2c(x)}{b(x)} < 0$ . En effet, comme  $\beta(x)$  est le barycentre de  $\frac{-b(x)}{2a(x)}$ , avec le poids  $\phi_2\left(\frac{-b(x)}{2a(x)}, \|x\|\right)$ , et de  $-\delta(\|x\|)$ , avec le poids  $1 - \phi_2\left(\frac{-b(x)}{2a(x)}, \|x\|\right)$ , on est amené à examiner les trois situations suivantes :

Si  $\frac{-b(x)}{2a(x)} \leq -2\delta(\|x\|)$ , on a  $\phi_2\left(\frac{-b(x)}{2a(x)}, \|x\|\right) = 0$  et, par conséquent,  $\beta(x) = -\delta(\|x\|)$ . La conclusion résulte alors des inégalités

$$\frac{-b(x)}{2a(x)} \leq -2\delta(\|x\|) < -\delta(\|x\|) < \frac{-2c(x)}{b(x)}.$$

Si  $-2\delta(\|x\|) < \frac{-b(x)}{2a(x)} < -\delta(\|x\|)$ , on conclut en remarquant que

$$-2\delta(\|x\|) < \frac{-b(x)}{2a(x)} < -\delta(\|x\|) < \frac{-2c(x)}{b(x)}.$$

Si  $-\delta(\|x\|) \leq \frac{-b(x)}{2a(x)}$ , on a  $\phi_2\left(\frac{-b(x)}{2a(x)}, \|x\|\right) = 1$  et, par conséquent,  $\beta(x) = \frac{-b(x)}{2a(x)}$  ce qui permet de conclure.

C. Si  $0 \leq \frac{-2c(x)}{b(x)}$ , alors  $\phi_1\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right) = 0$  et

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \left(1 - \phi_3\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \delta(\|x\|)\right)\right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{-b(x)}{2a(x)}\phi_2\left(\frac{-b(x)}{2a(x)}, \|x\|\right) - \left(1 - \phi_2\left(\frac{-b(x)}{2a(x)}, \|x\|\right)\right)\delta(\|x\|)\right). \end{aligned}$$

Le second terme du produit dans le membre de droite de cette dernière égalité est négatif et borné inférieurement par  $\frac{-b(x)}{2a(x)}$ . Donc :

$$\frac{-b(x)}{2a(x)} \leq \left(1 - \phi_3\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \delta(\|x\|)\right)\right) \left(\frac{-b(x)}{2a(x)}\right) \leq \alpha(x)$$

et nous avons :

$$\lambda_1(x) < \frac{-b(x)}{2a(x)} \leq \alpha(x) < 0 \leq \lambda_2(x).$$

Cela montre que  $\mathcal{L}V(x) < 0$ .

- ii. On peut raisonner exactement comme dans le cas précédent.
- iii. Dans ce cas,  $b(x) = 0$ ,  $a(x) > 0$  et  $\Delta(x) > 0$ . On a donc  $c(x) < 0$  et, puisque  $\alpha(x) = 0$ , on a  $\mathcal{L}V(x) < 0$ .
- iv. Comme  $a(x) = 0$ ,  $\Delta(x) > 0$  et  $b(x) > 0$ , le contrôle  $\alpha(x)$  est défini par la formule (2.8) et on a  $\mathcal{L}V(x) = \alpha(x)b(x) + c(x)$ .

Si  $c(x) > 0$ , on peut remarquer que  $\alpha(x) \leq \frac{-2c(x)}{b(x)} < \frac{-c(x)}{b(x)}$  ce qui entraîne  $\mathcal{L}V(x) < 0$ . En effet lorsque  $\frac{-2c(x)}{b(x)} \leq -\delta(\|x\|)$ , on a  $\alpha(x) = \frac{-2c(x)}{b(x)}$  (puisque  $\phi_1\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right) = 1$ ) et, lorsque  $-\delta(\|x\|) < \frac{-2c(x)}{b(x)} < 0$ , il suffit d'observer que

$$\alpha(x) = \frac{-2c(x)}{b(x)}\phi_1\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right) - \left(1 - \phi_1\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right)\right)\delta(\|x\|)$$

et  $\frac{-2c(x)}{b(x)} > -\delta(\|x\|)$  pour conclure.

Si  $c(x) = 0$ , on a  $\alpha(x) = -\delta(\|x\|) < 0$ , c'est à dire  $\alpha(x) < \frac{-c(x)}{b(x)}$ .

Enfin, si  $c(x) < 0$ , il suffit de remarquer que

$$\alpha(x) = -\left(1 - \phi_3\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right)\right) \cdot \left(1 - \phi_1\left(\frac{-2c(x)}{b(x)}, \|x\|\right)\right)\delta(\|x\|)$$

pour en déduire que  $\alpha(x) \leq 0 < \frac{-c(x)}{b(x)}$  ainsi que l'inégalité  $\mathcal{L}V(x) < 0$ .

- v. On peut raisonner comme dans le cas précédent.

L'inégalité  $\mathcal{L}V(x) < 0$  a été vérifiée pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$

**Remarque 2.4.2** En l'absence de l'hypothèse (H4), les conclusions du théorème 2.4.1 restent vraies, à l'exception de la continuité de la fonction  $\alpha$  en 0.

## 2.5 Exemples.

Dans ce paragraphe, nous donnons deux exemples de systèmes différentiels stochastiques contrôlés dans  $\mathbb{R}^2$ , qui ne sont pas asymptotiquement stables en l'absence de contrôle, mais qui peuvent être stabilisés asymptotiquement en probabilité par la méthode proposée ci-dessus.

**Exemple 1.** Soit  $(w_t)_{t \geq 0}$  un processus de Wiener standard réel et  $\sigma$  un nombre réel tel que  $0 < \sigma^2 < \frac{2}{5}$ .

Considérons alors le processus stochastique  $x_t = (x_{1,t}, x_{2,t})$  solution dans  $\mathbb{R}^2$  du système différentiel stochastique :

$$\begin{cases} dx_{1,t} &= x_{2,t} dt \\ dx_{2,t} &= (-\sin x_{1,t} + u) dt + \sigma u dw_t \end{cases} \quad (2.12)$$

et la fonction de Lyapunov  $V$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2.$$

Avec les notations des paragraphes précédents, on a ici :

$$\mathcal{L}_u V(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + (x_1 + x_2)u - x_1^2 - (x_1 + x_2)\sin x_1 + (x_1 + x_2)^2$$

et

$$\Delta(x) = (1 - 2\sigma^2)(x_1 + x_2)^2 + 2\sigma^2(x_1 + x_2)\sin x_1 + 2\sigma^2 x_1^2.$$

Ici,  $a(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$  et l'hypothèse (H3) est trivialement satisfaite. De plus, nous allons établir que l'hypothèse (H2) est vérifiée en montrant que  $\Delta(x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$ .

Considérons pour cela le polynôme en  $X$

$$P(X) = (1 - 2\sigma^2)X^2 + 2\sigma^2 \sin x_1 X + 2\sigma^2 x_1^2.$$

Il est facile de vérifier que la fonction

$$x_1 \mapsto 4\sigma^2 x_1^2 - 2x_1^2 + \sigma^2 \sin^2 x_1$$

est strictement concave et négative sauf pour  $x_1 = 0$  où elle s'annule.

Pour  $x_1 \neq 0$ , on en déduit que  $\sigma^4 \sin^2 x_1 - 2\sigma^2 x_1^2 (1 - 2\sigma^2) < 0$  et, par conséquent,  $P(X) > 0$  pour tout réel  $X$ .

Ce qui précède montre que  $\Delta(x) > 0$  dès que  $x_1 \neq 0$ . Mais pour  $x_1 = 0$ , on a :

$$\Delta(x) = (1 - 2\sigma^2)x_2^2.$$

Ainsi,  $\Delta(x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$ .

Il reste maintenant à vérifier l'hypothèse (H4). Pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\frac{-2c(x)}{|b(x)|} = \frac{2x_1^2}{|x_1 + x_2|} + 2 \operatorname{sgn}(x_1 + x_2) \sin(x_1) - 2|x_1 + x_2|.$$

Le premier terme de cette somme est positif ou nul, tandis que les deux termes suivants s'annulent à l'origine. L'hypothèse (H4) est donc vérifiée et le résultat de stabilisation obtenu dans ce chapitre s'applique au système différentiel stochastique (2.12).

**Exemple 2.** Dans cet exemple,  $w_t = (w_{1,t}, w_{2,t})$  désigne un processus de Wiener standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et  $x_t = (x_{1,t}, x_{2,t})$  la solution dans  $\mathbb{R}^2$  du système différentiel stochastique :

$$\begin{cases} dx_{1,t} &= (x_{2,t} + ux_{1,t}dt) + \frac{1}{\sqrt{2}}ux_{1,t}dw_{1,t} \\ dx_{2,t} &= (-x_{1,t} - x_{2,t})dt + \frac{1}{\sqrt{2}}x_{1,t}\sin x_{1,t}dw_{2,t} \end{cases} \quad (2.13)$$

Si on pose  $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ , on obtient

$$\mathcal{L}_u V(x) = \frac{1}{4}x_1^2 u^2 + x_1^2 u - x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^2 \sin^2 x_1$$

et

$$\Delta(x) = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 x_1\right).$$

Lorsque  $x_1 \neq 0$ ,  $\Delta(x) > 0$  et, si  $x \neq 0$  et  $x_1 = 0$ , on a  $\mathcal{L}_u V(x) = -x_2^2 < 0$ . L'hypothèse (H2) est donc vérifiée, ainsi que l'hypothèse (H3) puisque  $a(x) = \frac{1}{4}x_1^2 \geq 0$ .

Comme

$$\frac{-2c(x)}{|b(x)|} = \frac{2x_2^2}{x_1^2} - \frac{1}{2} \sin^2 x_1 \geq -\frac{1}{2} \sin^2 x_1,$$

l'hypothèse (H4) est aussi vérifiée et on peut obtenir la stabilisation asymptotique en probabilité du système différentiel stochastique (2.13) par la méthode exposée dans ce chapitre.

## 2.6 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons prouvé que le système différentiel stochastique (2.1) peut être rendu asymptotiquement stable en probabilité au moyen d'un retour d'état lisse en tout point, sauf éventuellement à l'origine, lorsque les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites. Si l'hypothèse (H4) est également satisfaite, alors le retour d'état proposé est continu à l'origine.

Il est clair que les hypothèses (H3) et (H4) sont assez restrictives, bien que l'hypothèse (H3) est remplie dans beaucoup de cas usuels, comme on l'a noté dans la remarque 2.2.1.

En fait, notre démarche a été en grande partie déterminée par les deux considérations suivantes.

D'une part, si on autorise l'ensemble  $\{a(x) = 0\} \setminus \{0\}$  à ne pas être vide, il semble difficile de ne pas prendre en compte la quantité  $\frac{-c(x)}{b(x)}$  dans la construction du retour d'état. On est alors conduit à introduire l'hypothèse (H4), comme dans le cas déterministe étudié dans [46].

D'autre part, si  $a(x) < 0$  et  $\Delta(x) > 0$ , il faut bien entendu choisir  $\alpha(x)$  à l'extérieur de l'intervalle  $[\lambda_2(x), \lambda_1(x)]$ . Si, de plus,  $b(x) = 0$ , il devient nécessaire, pour étudier le comportement de  $\alpha(x)$ , de prendre en compte le comportement de  $\sqrt{\frac{-c(x)}{a(x)}}$  au voisinage de l'origine.

Par conséquent, le problème posé dans ce chapitre semble difficile à résoudre de façon universelle, sauf à introduire des hypothèses très restrictives.

Il est sans doute possible de construire des retours d'état stabilisants par des moyens différents dans des cas qui n'ont pas été pris en compte dans ce chapitre. Cette remarque semble particulièrement pertinente lorsque les coefficients du système différentiel stochastique (2.1) sont linéaires et  $f_2 \equiv 0$ . En effet, dans ce cas on a  $a(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .



## Chapitre 3

# Stabilisation adaptative de systèmes différentiels stochastiques.

### 3.1 Introduction.

Ce chapitre est consacré à la stabilisation par retour d'état d'une classe de systèmes différentiels stochastiques non linéaires dont les coefficients de la dérive dépendent d'un paramètre inconnu  $\theta$ . Comme ces systèmes évoluent en fonction du paramètre  $\theta$ , il est à priori peu vraisemblable que cette stabilisation puisse être réalisée sans que ce paramètre  $\theta$  soit estimé dynamiquement.

La méthode employée consiste à ramener le problème de stabilisation étudié à celui de l'existence d'une fonction de Lyapunov de contrôle pour un système différentiel stochastique obtenu en modifiant le système initial.

La stabilisation adaptative de systèmes déterministes dépendant d'un paramètre inconnu a fait l'objet d'un certain nombre de travaux ces dernières années. Des résultats concernant des systèmes triangulaires ont été obtenus par Kanellakopoulos, Kokotovic et Morse dans [27] et par Kokotovic, Kanellakopoulos et Morse dans [32]. Ces résultats ont pu être améliorés, dans le sens d'une réduction significative de la dimension de l'estimateur du paramètre inconnu dans [34]. En introduisant le concept de fonction de Lyapunov de contrôle adaptatif, Krstic et Kokotovic [35] ont obtenu une généralisation de ces résultats à une classe plus vaste de systèmes déterministes.

La notion de fonction de Lyapunov de contrôle adaptatif renvoie à celle de fonction de Lyapunov de contrôle et au théorème d'Artstein [4, 46]. S'appuyant sur l'extension de ce résultat obtenue dans [14], une extension du concept de fonction de Lyapunov de contrôle adaptatif a été proposée et exploitée par Florchinger dans [20] afin d'étendre au contexte stochastique les résultats de [35].

Les systèmes différentiels stochastiques étudiés dans [14] ne font apparaître le contrôle que dans la dérive. Dans ce chapitre, nous allons nous appuyer sur l'extension constructive du théorème d'Artstein obtenue dans le chapitre précédent pour aborder la stabilisation adaptative d'une classe plus vaste de systèmes différentiels stochastiques, où le contrôle apparaît à la fois dans la dérive et le terme de diffusion.

Ce chapitre est divisé en deux paragraphes. Dans le première paragraphe, le problème de stabilisation adaptative envisagé est présenté, ainsi que l'extension de la notion de fonction de Lyapunov de contrôle adaptatif pour les systèmes concernés. Dans le second paragraphe, le résultat de stabilisation adaptative est énoncé et établi.

### 3.2 Énoncé du problème et définitions.

Soit  $(w_t)_{t \geq 0}$  un processus de Wiener standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  défini sur un espace de probabilité complet  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Considérons le processus stochastique  $(x_t)_{t \geq 0}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} x_t = x_0 + \int_0^t [f(x_s) + F(x_s)\theta + u(h(x_s) + H(x_s)\theta)] ds \\ + \int_0^t [g(x_s) + u\tilde{g}(x_s)] dw_s \end{aligned} \quad (3.1)$$

où :

- \*  $u$  désigne un contrôle progressivement mesurable à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ;
- \*  $\theta$  est un paramètre inconnu appartenant à  $\mathbb{R}^q$ ;
- \*  $f$  et  $h$  sont des fonctions de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ ;
- \*  $F$  et  $H$  sont des fonctions de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n \times q}$ ;
- \*  $g$  et  $\tilde{g}$  sont des fonctions de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n \times p}$ .
- \* Les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $F$  s'annulent en 0.

Le but poursuivi est la stabilisation asymptotique en probabilité par retour d'état du système (3.1). On parlera alors de *stabilisation asymptotique adaptative en probabilité*.

Pour cela, on passe par l'intermédiaire d'un estimateur  $\hat{\theta}$  dont la dynamique est définie par

$$d\hat{\theta}_t = \Gamma \tau(x_t, \hat{\theta}_t) dt, \quad (3.2)$$

$\Gamma$  désignant une matrice symétrique définie positive de  $\mathcal{M}_{q \times q}(\mathbb{R})$  et  $\tau$  une fonction de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$  dans  $\mathbb{R}^q$ . Le choix de cette fonction, qui sera déterminant pour l'obtention de la stabilisation asymptotique en probabilité du système (3.1), sera précisé par la suite.

La définition suivante, va nous permettre de ramener notre problème de stabilisation adaptative à la situation étudiée dans le chapitre 2.

**Définition 3.2.1** Une fonction  $W$  de classe  $C^{3,2}$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$  dans  $\mathbb{R}$ , définie positive et propre est dite fonction de Lyapunov de contrôle adaptatif pour le système différentiel stochastique (3.1) si il existe une matrice symétrique définie positive  $\Gamma$  de  $\mathcal{M}_{q \times q}(\mathbb{R})$  telle que  $W$  est une fonction de Lyapunov de contrôle (voir le chapitre 2) pour le système différentiel stochastique :

$$\begin{aligned} dx_t = & \left[ f(x_t) + F(x_t) \left( y + \Gamma \frac{\partial W}{\partial y}(x_t, y)^* \right) \right. \\ & + u \left( h(x_t) + H(x_t) \left( y + \Gamma \frac{\partial W}{\partial y}(x_t, y)^* \right) \right) \left. \right] dt \\ & + [g(x_t) + u\tilde{g}(x_t)] dw_t \end{aligned} \quad (3.3)$$

pour tout  $y \in \mathbb{R}^q$ .

Pour conclure ce paragraphe, remarquons que le générateur infinitésimal du processus stochastique solution du système différentiel stochastique (3.3) sera noté  $L_u^y$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^q$ .

### 3.3 Résultat principal.

Le résultat principal de ce chapitre peut être énoncé de la manière suivante.

**Théorème 3.3.1** *Si il existe une fonction de Lyapunov de contrôle adaptatif pour le système différentiel stochastique (3.1), alors ce système est adaptativement stabilisable en probabilité par retour d'état.*

**Démonstration.** Soit  $W$  une fonction de Lyapunov de contrôle adaptatif pour le système différentiel stochastique (3.1).

Alors, la fonction  $V$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$V(x, \hat{\theta}) = W(x, \theta) + \frac{1}{2} (\hat{\theta} - \theta)^* \Gamma^{-1} (\hat{\theta} - \theta).$$

est propre et strictement positive, sauf au point  $(0, \theta)$  où elle s'annule.

Considérons maintenant le système différentiel stochastique

$$\begin{cases} dx_t &= [f(x_t) + F(x_t)\theta + u(h(x_t) + H(x_t)\theta)] dt \\ &+ [g(x_t) + u\tilde{g}(x_t)] dw_t \\ d\hat{\theta}_t &= \Gamma\tau(x_t, \hat{\theta}_t) dt \end{cases} \quad (3.4)$$

Alors, si  $\mathcal{L}$  désigne le générateur infinitésimal du processus stochastique solution de ce système différentiel stochastique, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, \hat{\theta}) &= \frac{\partial W}{\partial x}(x, \hat{\theta}) [f(x) + F(x)\theta + u(h(x) + H(x)\theta)] \\ &+ (\hat{\theta} - \theta)^* \tau(x, \hat{\theta}) \\ &+ \frac{\partial W}{\partial \hat{\theta}}(x, \hat{\theta}) \Gamma\tau(x_t, \hat{\theta}_t) \\ &+ \frac{1}{2} \text{trace} \left( (g(x) + u\tilde{g}(x)) (g(x) + u\tilde{g}(x))^* \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Donc, en revenant au système différentiel stochastique (3.3), pour lequel la fonction de Lyapunov  $W$  constitue une fonction de Lyapunov de contrôle pour chaque valeur de  $y \in \mathbb{R}^q$ , nous déduisons du théorème 2.4.1 l'existence d'une fonction  $\alpha$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$L_\alpha^y W(x, y) < 0 \quad (3.6)$$

pour tout couple  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \setminus \{(0, \theta)\}$ . En fait, cette fonction est de classe  $C^{r-2}$  en  $x$  et de classe  $C^{s-1}$  en  $y$ , dès que  $W$  est de classe  $C^r$  en  $x$  et de classe  $C^s$  en  $y$ .

De plus, comme

$$\begin{aligned} L_\alpha^y W(x, y) &= \frac{\partial W}{\partial x}(x, y) \left[ f(x) + F(x) \left( y + \Gamma \frac{\partial W}{\partial y}(x, y)^* \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha(x, y) \left( h(x_t) + H(x) \left( y + \Gamma \frac{\partial W}{\partial y}(x, y)^* \right) \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \text{trace} \left( (g(x) + \alpha(x, y) \tilde{g}(x)) (g(x) + \alpha(x, y) \tilde{g}(x))^* \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

on remarque que, en prenant  $u = \alpha(x, \hat{\theta})$ , l'égalité (3.5) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}V(x, \hat{\theta}) &= L_{\alpha}^{\hat{\theta}} W(x, \hat{\theta}) + \frac{\partial W}{\partial x}(x, \hat{\theta}) (F(x) + \alpha(x, y) H(x)) (\theta - \hat{\theta}) \\
 &\quad + (\hat{\theta} - \theta)^* \tau(x, \hat{\theta}) \\
 &\quad + \frac{\partial W}{\partial \hat{\theta}}(x, \hat{\theta}) \Gamma \tau(x, \hat{\theta}) - \frac{\partial W}{\partial x}(x, \hat{\theta}) F(x) \Gamma \frac{\partial W}{\partial \hat{\theta}}(x, \hat{\theta})^* \\
 &\quad - \frac{\partial W}{\partial x}(x, \hat{\theta}) \alpha(x, y) H(x) \Gamma \frac{\partial W}{\partial \hat{\theta}}(x, \hat{\theta})^*
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Un choix adéquat de la fonction  $\tau$  est maintenant possible. En effet, si nous posons

$$\tau(x, \hat{\theta}) = \left[ \frac{\partial W}{\partial x}(x, \hat{\theta}) (F(x) + \alpha(x, \hat{\theta}) H(x)) \right]^*, \tag{3.8}$$

l'égalité (3.7) se réduit à

$$\mathcal{L}V(x, \hat{\theta}) = L_{\alpha}^{\hat{\theta}} W(x, \hat{\theta}).$$

Compte-tenu de l'inégalité (3.6), on peut maintenant conclure, grâce au théorème 1.3.3, à la stabilité asymptotique en probabilité de la solution d'équilibre  $(0, \theta)$  du système différentiel stochastique (3.4) lorsque la fonction  $\tau$  est définie par la formule (3.8) et le contrôle donné par le retour d'état  $u = \alpha(x, \hat{\theta})$ .  $\square$

# Chapitre 4

## Stabilisation asymptotique de systèmes stochastiques passifs.

### 4.1 Introduction.

Ce chapitre est consacré à la stabilisation asymptotique en probabilité de systèmes différentiels stochastiques non linéaires qui sont supposés stables en probabilité en régime libre. Deux approches complémentaires seront mises en œuvre. La première exploite la notion de passivité tandis que la seconde procède de celle de la stabilisation dynamique.

La technique employée est celle des fonctions de Lyapunov stochastiques rappelée dans le chapitre 1. Elle conduira à formuler des hypothèses sur les coefficients des systèmes différentiels étudiés qui peuvent être considérées comme une extension de conditions de rang pour la partie déterministe de ces systèmes. Rappelons maintenant certaines contributions à la théorie de la stabilisation des systèmes contrôlés en rapport étroit avec les résultats de ce chapitre.

Pour ce qui concerne les systèmes déterministes, la voie ouverte par Jurdjevic-Quinn [25] pour l'obtention de conditions suffisantes autorisant la stabilisation asymptotique de systèmes linéaires affines vis-à-vis du contrôle a été explorée par différents auteurs. Parmi ceux-ci, Kalouptsidis et Tsinias [26] ont étendu le résultat de [25] à des systèmes non linéaires stables au sens de Lyapunov en l'absence de contrôle. Des extensions au cas de systèmes différentiels stochastiques du résultat de [25] ont été obtenus par Florchinger dans [15], [16] et [19], tandis que le résultat de [26] a été étendu au contexte stochastique par Boulanger [5].

En observant que la théorie des systèmes passifs développée par Willems [52] comprend le cas de systèmes déterministes non nécessairement affines vis-à-vis du contrôle, Lin [40] a généralisé les idées et les méthodes développées par Byrnes, Isidori et Willems [8] pour des systèmes déterministes affines par rapport au contrôle, afin de construire des stabilisateurs pour une classe plus vaste de systèmes déterministes contrôlés.

La stabilité en probabilité de la solution d'un système différentiel stochastique peut dans certains cas suffire à garantir sa stabilité asymptotique en probabilité, comme en témoigne le théorème 1.2.3. Néanmoins, outre le fait que l'on puisse chercher à accélérer la convergence vers l'équilibre, le caractère sévère de l'hypothèse d'ellipticité sur les coefficients de diffusion du système dans ce théorème conduit à rechercher des extensions au contexte stochastique des résultats concernant les systèmes passifs déterministes.

Dans cette direction, une première extension du résultat de [40] a été donnée par Florchinger dans [21] pour la stabilisation asymptotique en probabilité de systèmes différentiels stochastiques

non linéaires dont les coefficients de diffusion ne dépendent pas du contrôle. Dans ce chapitre, on continue dans cette direction en étudiant des systèmes différentiels stochastiques contrôlés représentés par la solution  $x_t$  dans  $\mathbb{R}^n$  de l'équation différentielle stochastique :

$$x_t = x_0 + \int_0^t F(x_s, u) ds + \sum_{k=1}^r \int_0^t G^k(x_s, u) dW_s^k \quad (4.1)$$

où  $W_t$  est un processus de Wiener standard, défini sur un espace de probabilité complet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$ ,  $u$  est une loi de contrôle mesurable à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , et  $F$  et  $G^k$ ,  $1 \leq k \leq r$ , sont des fonctions indéfiniment différentiables, nulles à l'origine, définies sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

L'étude menée dans ce chapitre est organisée de la manière suivante. Dans un premier temps (paragraphe 2), la notion de passivité pour un système différentiel stochastique est rappelée et des conditions suffisantes pour la stabilisation asymptotique en probabilité de tels systèmes au moyen de retours d'états définis implicitement sont établies. Comme dans [21], le résultat est obtenu grâce au théorème 1.3.3, version stochastique du théorème de Lyapunov, et au théorème 1.3.4, c'est à dire à la version stochastique du principe d'invariance de La Salle. Cependant, par rapport au résultat de [21], celui présenté ici autorise la dépendance du terme de diffusion vis-à-vis du contrôle et, lors de l'utilisation de la version stochastique du principe d'invariance de La Salle, toute l'information rendue disponible par l'application de la formule d'Itô est exploitée, ce qui permet d'obtenir une plus grande classe de systèmes stabilisables.

Les paragraphes 3 et 4 de ce chapitre illustrent le résultat du paragraphe 2 à travers des cas particuliers et des exemples numériques. Le paragraphe 5 présente une adaptation, inspirée de Lin [41], de la méthode utilisée précédemment qui permet d'obtenir une stabilisation globale au moyen de retours d'états bornés.

La notion de stabilisation dynamique a été introduite par Sontag et Sussmann dans [47] afin de calculer des stabilisateurs pour certains systèmes déterministes. Florchinger [16] a étendu cette méthode au calcul de stabilisateurs dynamiques pour des systèmes stochastiques dont les coefficients de diffusion ne dépendent pas du contrôle.

Dans le paragraphe 6 de ce chapitre, une technique de stabilisation dynamique est utilisée afin de calculer des retours d'états stabilisant le système modélisé par l'équation différentielle stochastique (4.1). Les retours d'états obtenus dans ce paragraphe sont calculés explicitement, alors que ceux obtenus dans le paragraphe 2 l'étaient de manière implicite. Toutefois, contrairement aux retours d'états obtenus dans le paragraphe 5, ceux-ci ne sont pas bornés, tout en étant plus facile à calculer. Enfin, l'efficacité de ces retours d'états pour la stabilisation asymptotique du système considéré est soumise aux mêmes hypothèses que celles des résultats des paragraphes précédents.

## 4.2 Systèmes stochastiques passifs.

Soit  $L$  le générateur infinitésimal du processus stochastique solution du système différentiel stochastique (4.1), c'est à dire l'opérateur différentiel du second ordre :

$$L = \sum_{l=1}^n F_l(x, u) \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \sum_{l_1, l_2=1}^n (G_{l_1}^k G_{l_2}^k)(x, u) \frac{\partial^2}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}. \quad (4.2)$$

En posant  $u = 0$  dans (4.2), on obtient le générateur infinitésimal du processus stochastique solution du système libre déduit de (4.1). Ce générateur infinitésimal sera noté  $L_0$  dans la suite de ce chapitre.

Soit  $h$  une fonction de classe  $C^\infty$  définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , définissant une sortie  $y_t \in \mathbb{R}^m$  du système différentiel stochastique (4.1) par la relation :

$$y_t = h(x_t, u). \quad (4.3)$$

Le concept de passivité d'un système contrôlé a été étendu aux systèmes différentiels stochastiques de la manière suivante par Florchinger dans [21].

**Définition 4.2.1** *Le système entrée-sortie (4.1)-(4.3) est dit passif si il existe une fonction de Lyapunov  $V$  ( c'est à dire une fonction propre, définie positive et de classe  $C^2$  ) de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , appelée fonction de stockage, telle que :*

$$LV(x) \leq h(x, u)^* u \quad (4.4)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathbb{R}^m$ .

**Remarque 4.2.2** *Les contrôles stabilisant le système différentiel stochastique (4.1) proposés dans ce chapitre sont de la forme*

$$u = \alpha(y) = \alpha(h(x, u)),$$

ce qui suppose, au moins au voisinage de l'équilibre, l'existence d'une solution unique en  $u$  de cette dernière équation.

En fait, ces contrôles seront au moins de classe  $C^1$ , ce qui garantit en même temps, compte tenu du théorème 1.3.2, l'existence d'une solution unique sur  $[0, +\infty[$  de l'équation différentielle stochastique (4.1) pour toute donnée initiale, lorsque la fonction de Lyapunov  $V$  est propre et lorsque le contrôle est défini sur  $\mathbb{R}^n$ .

Afin de simplifier la présentation, les coefficients du système différentiel stochastique (4.1) seront supposés indéfiniment différentiables. Une propriété de passivité pour ce système différentiel stochastique entraîne alors des conséquences intéressantes pour le problème de stabilisation considéré. Il est commode dans cette optique de récrire les coefficients  $F$  et  $G^k$ ,  $1 \leq k \leq r$ , sous la forme suivante :

$$F(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i \bar{f}^i(x) + \varepsilon(x, u) u \quad (4.5)$$

$$G^k(x, u) = g^k(x) + \sum_{i=1}^m u_i \bar{g}^{k,i}(x) + \eta^k(x, u) u. \quad (4.6)$$

Dans cette dernière écriture, les fonctions de classe  $C^\infty$   $f = F(\cdot, 0)$  et  $g^k = G^k(\cdot, 0)$ ,  $1 \leq k \leq r$ , s'annulent à l'origine, et les fonctions  $\bar{f}^i$  et  $\bar{g}^{k,i}$ ,  $1 \leq k \leq r$ , sont définies respectivement par  $\bar{f}^i = \frac{\partial F}{\partial u_i}(\cdot, 0)$  et  $\bar{g}^{k,i} = \frac{\partial G^k}{\partial u_i}(\cdot, 0)$ ,  $1 \leq k \leq r$ . Enfin,  $\varepsilon(x, \cdot)$  et  $\eta^k(x, \cdot)$ ,  $1 \leq k \leq r$ , sont des fonctions de classe  $C^\infty$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n \times m}$  qui s'annulent en tout point  $(x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

Comme dans les cas étudiés dans [40] et [21], le point clé de notre étude est exprimé par la proposition suivante. Cet énoncé remplace en un certain sens le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (voir [8]) pour l'étude du problème non linéaire traité ici. On peut remarquer en particulier qu'un système différentiel stochastique passif en régime libre est stable en probabilité.

**Proposition 4.2.3** *Si le système entrée-sortie (4.1)-(4.3) est passif avec la fonction de stockage  $V$ , alors :*

1.  $L_0 V(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $L_0V(x) = 0$ , on a :

$$\nabla V(x) \bar{f}^i(x) + \sum_{k=1}^r \sum_{l_1, l_2=1}^n \left( g_{l_1}^k \bar{g}_{l_2}^{k,i} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}} \right) (x) = h_i(x, 0) ; 1 \leq i \leq m. \quad (4.7)$$

**Démonstration.** 1. Soit  $\phi$  la fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$  définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  par :

$$\phi(x, u) = LV(x) - h(x, u)^* u.$$

L'inégalité (4.4) exprimant la passivité du système considéré entraîne que  $\phi(x, u) \leq 0$  pour tout couple  $(x, u)$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Par conséquent, on a bien

$$L_0V(x) = \phi(x, 0) \leq 0$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

2. En tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $L_0V(x) = 0$ , on a

$$\phi(x, 0) = L_0V(x) = 0.$$

Ainsi, la fonction  $u \rightarrow \phi(x, u)$  atteint son maximum en  $u = 0$ . On a donc pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $L_0V(x) = 0$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(x, 0) = 0.$$

Compte tenu de (4.5) et de (4.6), le générateur infinitésimal  $L$  appliqué à  $V$  donne :

$$\begin{aligned} LV(x) &= \nabla V(x) \cdot \left( f(x) + \sum_{i=1}^m u_i \bar{f}^i(x) + \varepsilon(x, u) u \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \sum_{l_1, l_2=1}^n \left( g^k(x) + \sum_{i=1}^m u_i \bar{g}^{k,i}(x) + \eta^k(x, u) u \right)_{l_1} \\ &\cdot \left( g^k(x) + \sum_{i=1}^m u_i \bar{g}^{k,i}(x) + \eta^k(x, u) u \right)_{l_2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}(x) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Comme les fonctions  $\varepsilon(x, \cdot)$  et  $\eta^k(x, \cdot)$ ,  $1 \leq k \leq r$ , s'annulent en tout point  $(x, 0)$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , on en déduit la seconde assertion de la proposition.  $\square$

Introduisons maintenant quelques notations qui seront utilisés dans la formulation des résultats de ce chapitre.

\* Pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  on note  $\Lambda_i V(x)$  la quantité

$$\Lambda_i V(x) = \nabla V(x) \bar{f}^i(x) + \sum_{k=1}^r \sum_{l_1, l_2=1}^n \left( g_{l_1}^k \bar{g}_{l_2}^{k,i} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}} \right) (x). \quad (4.9)$$

\* Pour tout  $k \in \{1, \dots, r\}$ , on note  $\mathcal{G}_k$  l'opérateur différentiel du premier ordre défini par

$$\mathcal{G}_k = \sum_{l=1}^n g_l^k(x) \frac{\partial}{\partial x_l} ; 1 \leq k \leq r.$$

\* Une fonction  $V$  de classe  $C^{2p+2}$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  étant donnée, on définit enfin l'ensemble :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} = & \left\{ x \in \mathbb{R}^n / L_0^{\alpha_1} \mathcal{G}_{k_1}^{\beta_1} \dots L_0^{\alpha_{p'}} \mathcal{G}_{k_{p'}}^{\beta_{p'}} L_0 V(x) = 0, \right. \\
& L_0^{\alpha_1} \mathcal{G}_{k_1}^{\beta_1} \dots L_0^{\alpha_{p'}} \mathcal{G}_{k_{p'}}^{\beta_{p'}} \Lambda_i V(x) = 0, \\
& \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall k_1 \dots k_{p'} \in \{1, \dots, r\}, \\
& \left. \forall \alpha_1, \beta_1 \dots \alpha_{p'}, \beta_{p'} \in \{1, \dots, p'\} \right. \\
& \left. \text{tels que } \sum_{q=1}^{p'} (\alpha_q + \beta_q) = p', p' \in \{0, \dots, p\} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Par ailleurs, une fonction  $s$  de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m$ , nulle à l'origine, sera dite de secteurs 1-3 si  $y^* s(y) > 0$ ,  $\forall y \neq 0$ .

Les notations ci-dessus permettent d'établir des conditions suffisantes sous lesquelles le système différentiel stochastique (4.1)-(4.3) peut être asymptotiquement stabilisé en probabilité.

**Théorème 4.2.4** *Supposons le système différentiel stochastique (4.1)-(4.3) passif avec une fonction de stockage  $V$  de classe  $C^{2p+2}$ . Soit  $s$  une fonction de secteurs 1-3 de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Alors, si l'égalité*

$$u = -s(y) \tag{4.11}$$

définit de manière unique, au voisinage de 0, une loi de contrôle rétroactif de classe  $C^1$  et si  $\mathcal{S} = \{0\}$ , alors le contrôle  $u$  (calculé par la sortie  $y$ ) défini par (4.11) rend le système différentiel stochastique (4.1) localement asymptotiquement stable en probabilité.

De plus, si  $V$  est propre et si  $u$  est défini globalement par l'équation (4.11), alors ce contrôle rend le système différentiel stochastique (4.1) globalement asymptotiquement stable en probabilité.

**Démonstration.** Puisque  $s$  est une fonction de secteurs 1-3, l'inégalité de passivité (4.4) permet d'écrire :

$$LV(x) \leq h(x, u)^* u = -y^* s(y) \leq 0, \tag{4.12}$$

lorsque, au moins au voisinage de l'origine,  $u$  est défini par (4.11). En vertu du théorème 1.3.3, la stabilité en probabilité du système en boucle fermée est ainsi établie.

Le théorème 1.3.4, c'est à dire la version stochastique du principe d'invariance de La Salle, implique que le processus stochastique  $x_t$  tend avec probabilité 1 vers le support du plus grand ensemble invariant, contenu dans l'ensemble

$$LV(x_t) = 0, \forall t \geq 0.$$

Montrons que cet ensemble est contenu dans  $\mathcal{S}$  et par conséquent réduit à  $\{0\}$ . L'inégalité (4.12) montre que :

$$LV(x_t) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow -h(x_t, u)^* s(h(x_t, u)) = 0, \forall t \geq 0$$

et, puisque  $s$  est une fonction de secteurs 1-3,

$$LV(x_t) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow y_t = u = 0, \forall t \geq 0.$$

Donc, pour toute trajectoire évoluant dans l'ensemble invariant,  $L_0 V(x_t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$  et on déduit de la seconde assertion de la proposition 4.2.3 que

$$\Lambda_j V(x_t) = h_j(x_t, 0) = 0$$

pour tout  $t \geq 0$  et  $j \in \{1, \dots, m\}$ . La formule d'Itô et l'unicité de la décomposition de Doob-Meyer d'une semi-martingale continue permettent d'affirmer que pour tout  $t \geq 0$ , tout  $j \in \{1, \dots, m\}$  et tout  $k \in \{1, \dots, r\}$  on a :

$$L_0^2 V(x_t) = 0$$

$$\mathcal{G}_k L_0 V(x_t) = 0$$

$$L_0 \Lambda_j V(x_t) = 0$$

$$\mathcal{G}_k \Lambda_j V(x_t) = 0.$$

De la même manière, en appliquant de manière itérative la formule d'Itô, on obtient

$$L_0^{\alpha_1} \mathcal{G}_{k_1}^{\beta_1} \dots L_0^{\alpha_{p'}} \mathcal{G}_{k_{p'}}^{\beta_{p'}} L_0 V(x_t) = 0$$

et

$$L_0^{\alpha_1} \mathcal{G}_{k_1}^{\beta_1} \dots L_0^{\alpha_{p'}} \mathcal{G}_{k_{p'}}^{\beta_{p'}} \Lambda_i V(x_t) = 0$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall k_1, \dots, k_{p'} \in \{1, \dots, r\}, \forall \alpha_1, \beta_1 \dots \alpha_{p'}, \beta_{p'} \in \{1, \dots, p'\} / \sum_{q=1}^{p'} (\alpha_q + \beta_q) = p', p' \in \{0, \dots, p\}.$$

Le théorème 1.3.4 montre donc que le système en boucle fermée est localement stable en probabilité.

La dernière assertion du théorème découle immédiatement du même argument.  $\square$

### 4.3 Stabilisation asymptotique de systèmes différentiels stochastiques

La proposition 4.2.3 ci-dessus indique que lorsque le système différentiel stochastique (4.1) est passif, le système libre associé est stable en probabilité. On va montrer dans ce paragraphe que, réciproquement, l'existence d'une fonction de Lyapunov suffisamment régulière garantissant la stabilité en probabilité du système libre peut s'exprimer en termes de passivité. Les résultats du paragraphe précédent permettront alors d'obtenir la stabilisation asymptotique du système.

**Proposition 4.3.1** *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov stochastique  $V$  de classe  $C^2$  telle que  $L_0 V(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et soit la fonction  $h$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m$  dont les composantes  $h_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , sont définies par*

$$\begin{aligned} h_i(x, u) &= \sum_{l=1}^n (\bar{f}_l^i(x) + \varepsilon_{l,i}(x, u)) \frac{\partial V}{\partial x_l} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l_1, l_2=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^m \Theta_{l_1, l_2, i, j, k}(x, u) \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}(x) \end{aligned} \quad (4.13)$$

où

$$\begin{aligned} \Theta_{l_1, l_2, i, j, k}(x, u) &= g_{l_1}^k(x) \bar{g}_{l_2}^{i,k}(x) + g_{l_1}^k(x) \eta_{l_2, i}^k(x, u) + g_{l_2}^k(x) \bar{g}_{l_1}^{i,k}(x) \\ &+ \bar{g}_{l_1}^{i,k}(x) \bar{g}_{l_2}^{j,k}(x) u_j + \bar{g}_{l_1}^{i,k}(x) \eta_{l_2, j}^k(x, u) u_j + g_{l_2}^k(x) \eta_{l_1, i}^k(x, u) \\ &+ \bar{g}_{l_2}^{j,k} \eta_{l_1, i}^k(x, u) u_j + \eta_{l_1, i}^k(x, u) \eta_{l_2, j}^k(x, u) u_j \end{aligned}$$

Alors :

1. Le système différentiel stochastique (4.1) est passif avec la fonction de stockage  $V$  pour la sortie  $y_t = h(x_t, u)$ .

## 2. L'équation

$$u = -h(x, u) \quad (4.14)$$

définit de manière unique le contrôle rétroactif  $u$  au voisinage de l'origine.

**Démonstration.** 1. Avec les notations ci-dessus, l'égalité (4.8) s'écrit

$$LV(x) = L_0V(x) + h^*(x, u)u.$$

Comme par hypothèse,  $L_0V(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , la propriété de passivité est bien vérifiée.

2. La seconde assertion découle du théorème des fonctions implicites. La fonction  $\tilde{h}$  définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  par  $\tilde{h}(x, u) = u + h(x, u)$  a en effet pour dérivées partielles en  $u_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,

$$\left. \frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial u_j} \right|_{x=0, u=0} = \delta_{i,j} + \frac{1}{2} \sum_{l_1, l_2=1}^n \sum_{k=1}^r \bar{g}_{l_1}^{i,k}(0) \bar{g}_{l_2}^{j,k}(0) \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}(0).$$

Sous une forme plus condensée, ceci s'écrit aussi

$$\left. \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u} \right|_{x=0, u=0} = Id_m + \sum_{k=1}^r (\bar{g}^k)^*(0) \nabla^2 V(0) \bar{g}^k(0),$$

$\bar{g}^k$  désignant la matrice dont les colonnes sont les  $\bar{g}^{i,k}$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

La matrice  $\nabla^2 V(0)$  étant symétrique et positive puisque la fonction  $V$  atteint son minimum en 0, la matrice  $\left. \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u} \right|_{x=0, u=0}$  est donc inversible.  $\square$

Le théorème 4.2.4 joint à la proposition ci-dessus conduisent avec les notations de cette dernière au résultat suivant.

**Corollaire 4.3.2** *Supposons qu'il existe pour un entier naturel  $p$  une fonction de Lyapunov stochastique  $V$  de classe  $C^{2p+2}$  telle que  $L_0V(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et telle que  $S = \{0\}$ . Alors, le système différentiel stochastique (4.1) est rendu localement asymptotiquement stable en probabilité par le contrôle rétroactif  $u$  défini par l'équation  $u = -h(x, u)$ .*

*De plus, si cette dernière équation définit  $u$  comme une fonction de classe  $C^1$  de  $x$  sur  $\mathbb{R}^n$  tout entier et si  $V$  est propre, alors la stabilisation asymptotique du système différentiel stochastique ainsi obtenu est globale.*

**Remarque 4.3.3** *En pratique, on pourrait chercher à construire d'autres stabilisateurs du système différentiel stochastique (4.1). En effet, si  $s$  est une fonction de secteurs 1-3 définie sur  $\mathbb{R}^m$ , le résultat ci-dessus reste valable dès que l'équation*

$$u = -s(h(x, u))$$

définit correctement le contrôle  $u$  au voisinage de l'origine.

## 4.4 Cas particulier et exemples numériques.

### 4.4.1 Systèmes différentiels stochastiques affines par rapport au contrôle.

Considérons maintenant le système différentiel stochastique

$$dx_t = f(x_t)dt + \sum_{i=1}^m u_i \bar{f}^i(x_t)dt + \sum_{k=1}^r g^k(x_t)dw_t^k + \sum_{i=1}^m \sum_{k'=1}^{r'} u_i \bar{g}^{i,k'}(x_t)dW_t^{k'} \quad (4.15)$$

où  $(w_t)_{t \geq 0}$  et  $(W_t)_{t \geq 0}$  sont des processus de Wiener indépendants définis sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  respectivement à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$  et  $\mathbb{R}^{r'}$ , et  $f, \bar{f}^i, 1 \leq i \leq m, g^k, 1 \leq k \leq r$ , et  $\bar{g}^{i,k'}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq k' \leq r'$ , sont des fonctions indéfiniment différentiables de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , nulles à l'origine.

La définition (4.13) des composantes de  $h(x, u)$  se réduit dans ce cas à :

$$h_i(x, u) = \sum_{l=1}^n \bar{f}_l^i(x) \frac{\partial V}{\partial x_l}(x) + \frac{1}{2} \sum_{l_1, l_2=1}^n \sum_{k'=1}^{r'} \sum_{j=1}^m \bar{g}_{l_1}^{i,k'}(x) \bar{g}_{l_2}^{j,k'}(x) u_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}(x)$$

$$1 \leq i \leq m.$$

L'équation (4.14) s'écrit sous la forme du système d'équations linéaires en  $u$

$$u_i = - \sum_{l=1}^n \bar{f}_l^i(x) \frac{\partial V}{\partial x_l}(x) - \frac{1}{2} \sum_{l_1, l_2=1}^n \sum_{k'=1}^{r'} \sum_{j=1}^m \bar{g}_{l_1}^{i,k'}(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}(x) \bar{g}_{l_2}^{j,k'}(x) u_j$$

$$1 \leq i \leq m,$$

soit sous forme matricielle

$$\left( Id_m + \sum_{k'=1}^{r'} (\bar{G}^{k'}(x))^* \nabla^2 V(x) \bar{G}^{k'}(x) \right) u = - (\nabla V(x) \bar{f}(x))^*$$

si on note  $\bar{f}$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $\bar{f}^i, 1 \leq i \leq m$ , et  $\bar{G}^{k'}, 1 \leq k' \leq r'$ , les matrices dont les colonnes sont les vecteurs  $\bar{g}^{i,k'}, 1 \leq i \leq m$ .

En conservant la définition (4.10) de  $\mathcal{S}$  avec :

$$\Lambda_i V(x) = \nabla V(x) \bar{f}^i(x); 1 \leq i \leq m, \quad (4.16)$$

le corollaire 4.3.2 se réduit alors à l'énoncé suivant.

**Corollaire 4.4.1** *Supposons qu'il existe pour un entier naturel  $p$  une fonction de Lyapunov stochastique  $V$  de classe  $C^{2p+2}$  telle que  $L_0 V(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et telle que  $\mathcal{S} = \{0\}$ . Alors, le système différentiel stochastique (4.15) est rendu localement asymptotiquement stable en probabilité par le contrôle rétroactif défini au voisinage de l'origine par*

$$u(x) = - \left( Id_m + \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^{r'} \bar{G}^{k'}(x)^* \nabla^2 V(x) \bar{G}^{k'}(x) \right)^{-1} (\nabla V(x) \bar{f}(x))^*.$$

*De plus, la stabilisation obtenue est globale si la matrice*

$$Id_m + \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^{r'} \bar{G}^{k'}(x)^* \nabla^2 V(x) \bar{G}^{k'}(x)$$

*est inversible pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et si  $V$  est propre.*

**Remarque 4.4.2** *Ce résultat recouvre ceux obtenus par Florchinger dans [15]-[21] pour des systèmes différentiels stochastiques où les coefficients de diffusion ne dépendent pas du contrôle.*

### 4.4.2 Exemples numériques.

**Exemple 1.** Considérons le système différentiel stochastique à simple commande défini dans  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\begin{cases} dx_{1,t} &= \left(-\frac{1}{2}x_{1,t} - x_{2,t} + ux_{2,t}^2\right) dt - x_{2,t}dw_t + \sigma udW_t \\ dx_{2,t} &= \left(x_{1,t} - \frac{1}{2}x_{2,t} + ux_{1,t}x_{2,t}\right) dt + x_{1,t}dw_t + \sigma udW_t \end{cases} \quad (4.17)$$

avec une donnée initiale  $(x_{1,0}, x_{2,0})$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\sigma$  désignant un réel positif et  $(w_t)_{t \geq 0}$ ,  $(W_t)_{t \geq 0}$  deux processus de Wiener réels standards indépendants.

Ce système est affine par rapport au contrôle, et nous pouvons envisager d'appliquer le corollaire 4.4.1.

La solution de ce système différentiel stochastique est donnée, quand  $u = 0$ , par les formules

$$\begin{aligned} x_{1,t} &= r \sin(t + w_t + \phi) \\ x_{2,t} &= -r \cos(t + w_t + \phi) \end{aligned}$$

avec un choix approprié de  $r \geq 0$  et de  $\phi$ . Manifestement, le système en régime libre est donc stable mais pas asymptotiquement stable.

Si  $V$  est la fonction de Lyapunov définie par  $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ , on obtient pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$L_0V(x) = 0,$$

ainsi que

$$\Lambda_1V(x) = 2x_1x_2^2$$

et

$$L_0\Lambda_1V(x) = 4x_1^2x_2 - 7x_1x_2^2 - 2x_2^3 + 2x_1^3.$$

Par conséquent, l'ensemble  $\mathcal{S}$  se réduit ici à l'origine de  $\mathbb{R}^2$ .

On peut donc appliquer le corollaire 4.4.1 qui fournit le contrôle rétroactif suivant :

$$u(x) = \frac{-2x_1x_2^2}{1 + \sigma^2}.$$

Ici, le contrôle  $u$  est défini sur tout  $\mathbb{R}^2$  et le système en boucle fermé ainsi obtenu est globalement asymptotiquement stable en probabilité.

**Exemple 2.** Considérons le système différentiel stochastique à simple commande défini dans  $\mathbb{R}^3$  par :

$$\begin{cases} dx_{1,t} &= \left(-\frac{1}{2}x_{1,t} - x_{2,t}x_{3,t} + ux_{2,t} + u^\beta\right) dt + (x_{2,t} - ux_{2,t}) dW_t \\ dx_{2,t} &= \left(-\frac{1}{2}x_{2,t} + x_{1,t}x_{3,t}\right) dt + (-x_{1,t} - ux_{1,t}) dW_t \\ dx_{3,t} &= -x_{3,t}dt \end{cases} \quad (4.18)$$

où  $(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$  est donné dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Wiener réel standard et  $\beta = 2$  ou  $3$ .

Comme dans l'exemple précédent, le système libre est stable mais pas asymptotiquement stable en probabilité. En effet, ses solutions sont de la forme

$$x_{1,t} = r \sin(x_{3,0}e^{-t} + w_t + \phi)$$

$$\begin{aligned}x_{2,t} &= r \cos(x_{3,0}e^{-t} + w_t + \phi) \\x_{3,t} &= x_{3,0}e^{-t}\end{aligned}$$

ce qui implique la stabilité de la solution d'équilibre.

En posant  $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ , on obtient

$$L_0V(x) = -x_3^2 \quad (4.19)$$

et

$$\Lambda_1V(x) = x_1x_2 + x_1^2 - x_2^2. \quad (4.20)$$

De plus, on a :

$$L_0\Lambda_1V(x) = -2\Lambda_1V(x) + x_3(x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2)$$

et, pour toute fonction  $\phi(x_1, x_2)$ , on obtient :

$$L_0(\phi(x_1, x_2)x_3) = x_3(L_0\phi(x_1, x_2) - \phi(x_1, x_2)).$$

Par conséquent, si on se limite à l'application du seul opérateur  $L_0$  on n'obtient pas d'information supplémentaire sur l'ensemble  $S$  au delà de celles fournies par (4.19) et (4.20). En cet état des choses, il n'est donc pas possible d'affirmer que l'ensemble  $S$  est réduit à l'origine et la technique proposée dans [21] ne permet pas de conclure à la stabilité du système (4.18). Mais nous avons aussi

$$\mathcal{G}_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

et

$$L_0\mathcal{G}_1\Lambda_1V(x) = x_2^2 - x_1^2 + 4x_1x_2 = 4\Lambda_1V(x) - 5x_1^2 + 5x_2^2.$$

Donc  $S = \{0\}$  et le corollaire 4.3.2 montre que le système différentiel stochastique (4.18) est localement asymptotiquement stabilisable en probabilité.

Quand  $\beta = 2$ , la solution de l'équation (4.14) est

$$u(x) = -2 \frac{x_1x_2 + x_1^2 - x_2^2}{2 + 2x_1 + x_1^2 + x_2^2} \quad (4.21)$$

et la stabilisation asymptotique en probabilité obtenue est valable au sens global.

Mais, si  $\beta = 3$ , on a

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{-2 - x_1^2 - x_2^2}{4x_1} \\ &+ \frac{\sqrt{4 + 4x_2^2 + 4x_1d^2 + x_2^4 + 2x_2^2x_1^2 + x_1^4 - 16x_1^2x_2 + 16x_1x_2^2 - 16x_1^4}}{4x_1}\end{aligned}$$

et le contrôle rétroactif n'est défini que localement. Le paragraphe suivant montre comment il est possible de remédier à cet inconvénient.

## 4.5 Stabilisation globale.

Les résultats obtenus jusqu'ici permettent pour l'essentiel une stabilisation asymptotique locale du système différentiel stochastique (4.1). Le but de ce paragraphe est de montrer que sous les mêmes hypothèses que précédemment, le concept de passivité fournit aussi des contrôles rétroactifs bornés définis sur tout  $\mathbb{R}^n$ . En outre, la stabilisation asymptotique obtenue de cette manière

a aussi une signification globale.

Dans ce but, nous commençons par récrire les coefficients du système différentiel stochastique (4.1) sous la forme de développements de Taylor plus précis que ceux figurant dans (4.5) et (4.6). Ces coefficients peuvent en effet être écrits :

$$F(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i \bar{f}^i(x) + \sum_{i=1}^m u_i R^i(x, u) u$$

et

$$G^k(x, u) = g^k(x) + \sum_{i=1}^m u_i \bar{g}^{k,i}(x) + \sum_{i=1}^m u_i S^{k,i}(x, u) u; 1 \leq k \leq r$$

où  $R^i$  et  $S^{k,i}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq k \leq r$ , désignent des fonctions indéfiniment différentiables de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^{n \times m}$ .

Le générateur infinitésimal  $LV(x)$  appliqué à une fonction  $V$  de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  s'exprime alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} LV(x) &= L_0 V(x) + \sum_{i=1}^m u_i \Lambda_i V(x) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla V(x) (R^i(x, u) u) \\ &\quad + \frac{1}{2} u^* K(x, u) u \end{aligned} \quad (4.22)$$

les quantités  $\Lambda_i V$ ,  $1 \leq i \leq m$ , étant définies par (4.9) et les composantes  $K_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ , de la matrice  $K$  par

$$\begin{aligned} K_{i,j}(x, u) &= \sum_{k=1}^r \sum_{l_1, l_2=1}^n \left[ 2g_{l_1}^k(x) S_{l_2,j}^{k,i}(x, u) + \bar{g}_{l_1}^{k,i}(x) \bar{g}_{l_2}^{k,j}(x) \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{g}_{l_1}^{k,i}(x) \left( \sum_{i'=1}^m u_{i'} S_{l_2,j}^{k,i'}(x, u) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{i'=1}^m u_{i'} S_{l_1,i'}^{k,i}(x, u) \right) \left( \sum_{i'=1}^m u_{i'} S_{l_2,j}^{k,i'}(x, u) \right) \right] \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}(x). \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Les contrôles rétroactifs qui seront proposés ci-dessous pour la stabilisation asymptotique en probabilité du système différentiel stochastique (4.1) seront bornés en norme par  $\frac{\varepsilon}{2} \wedge \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ . De plus, soit  $\rho$  une fonction de  $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  vérifiant :

$$\rho(x) \geq \max_{|u| \leq \varepsilon/2 \wedge \sqrt{\varepsilon}/2} \|K(x, u)\| \vee \max_{|u| \leq \varepsilon/2 \wedge \sqrt{\varepsilon}/2} \left\| \begin{array}{c} \nabla V(x) R^1(x, u) \\ \vdots \\ \nabla V(x) R^m(x, u) \end{array} \right\| \quad (4.23)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme matricielle associée à la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ .

Il est alors possible de formuler le résultat suivant.

**Théorème 4.5.1** *Supposons qu'il existe pour un entier naturel  $p$  une fonction de Lyapunov stochastique propre  $V$  de classe  $C^{2p+2}$  telle que  $L_0 V(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et telle que  $S = \{0\}$ . Alors, le contrôle rétroactif défini pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  par*

$$u(x) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}; u_i = -\frac{\beta(x)}{(1 \vee \varepsilon) + \sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2} \Lambda_i(x), 1 \leq i \leq m \quad (4.24)$$

où :

$$\beta(x) = \frac{\varepsilon}{1 + \rho(x)^2}$$

rend le système différentiel stochastique (4.1) globalement asymptotiquement stable en probabilité.

De plus, la norme euclidienne de  $u$  est majorée par  $\frac{\varepsilon}{2} \wedge \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ .

**Démonstration.** Vérifions tout d'abord que la norme euclidienne de  $u$  défini par (4.24) est majorée par  $\frac{\varepsilon}{2} \wedge \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ .

On vérifie aisément que

$$\max_{z \in \mathbb{R}^+} \frac{z}{1 + z^2} = \frac{1}{2}$$

et que

$$\max_{z \in \mathbb{R}^+} \frac{z}{\varepsilon + z^2} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

Comme

$$|u(x)| = \beta(x) \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2}}{1 \vee \varepsilon + \sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2},$$

la majoration annoncée résulte de l'inégalité  $\beta(x) \leq \varepsilon$ .

Montrons maintenant que le système en boucle fermée obtenu via le contrôle rétroactif  $u$  défini par (4.24) est stable en probabilité. On suppose que  $\varepsilon \leq 1$ , l'autre cas étant presque analogue.

La définition de  $u$  et celle de la fonction  $\rho$  impliquent que

$$\begin{aligned} \left| u^* \begin{bmatrix} \nabla V(x) R^1(x, u) \\ \vdots \\ \nabla V(x) R^m(x, u) \end{bmatrix} u \right| &\leq |u|^2 \left\| \begin{bmatrix} \nabla V(x) R^1(x, u) \\ \vdots \\ \nabla V(x) R^m(x, u) \end{bmatrix} \right\| \\ &\leq \beta(x)^2 \left( \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2}}{1 + \sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2} \right)^2 \rho(x) \end{aligned} \quad (4.25)$$

et que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u^* K(x, u) u| &\leq \frac{1}{2} |u|^2 \|K(x, u)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \beta(x)^2 \left( \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2}}{1 + \sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2} \right)^2 \rho(x). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Par définition de  $u$ , on a :

$$\begin{aligned} LV(x) &= L_0 V(x) - \beta(x) \frac{\sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2}{1 + \sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^m u_i \nabla V(x) (R^i(x, u) u) + \frac{1}{2} u^* K(x, u) u. \end{aligned}$$

D'autre part,  $\beta(x)\rho(x) = \varepsilon \frac{\rho(x)}{1 + \rho(x)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et comme par hypothèse  $L_0 V(x) \leq 0$ , on en déduit ainsi que des inégalités (4.25) et (4.26) que

$$LV(x) \leq \beta(x) \frac{\sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2}{1 + \sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2} \left( -1 + \frac{3}{2} \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2} \beta(x)\rho(x) \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \beta(x) \frac{\sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2}{1 + \sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x)|^2} \left( -1 + \frac{3\varepsilon}{4} \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Le système en boucle fermée (4.1)-(4.24) est donc stable en probabilité. De plus, la seconde inégalité obtenue dans la majoration de  $LV(x)$  écrite ci-dessus est analogue à une propriété de passivité avec la fonction de stockage  $V$  et la sortie

$$y = h(x) = \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{4} \right) \begin{bmatrix} \Lambda_1(x) \\ \vdots \\ \Lambda_m(x) \end{bmatrix}.$$

Il reste à montrer la stabilité asymptotique en probabilité du système en boucle fermée. On fait de nouveau appel au théorème 1.3.4. Ici, la condition  $LV(x_t) = 0, \forall t \geq 0$  implique aussi, comme dans la démonstration du théorème 4.2.4, que

$$\sum_{j=1}^m |\Lambda_j(x_t)|^2 = 0, \forall t \geq 0,$$

et donc que  $u \equiv 0$ . On peut donc conclure de la même manière que dans la démonstration de ce théorème.  $\square$

**Exemple 3.** La démarche proposée dans l'exemple 2 ne conduisait qu'à une stabilisation asymptotique locale du système différentiel stochastique (4.18) pour le cas  $\beta = 3$ . Le théorème 4.5.1 s'applique également dans ce cas et, pour  $\varepsilon = 1$ , conduit au contrôle rétroactif

$$u(x) = -\frac{1}{1 + (\rho(x))^2} \cdot \frac{x_1 x_2 + x_1^2 - x_2^2}{1 + (x_1 x_2 + x_1^2 - x_2^2)^2}$$

en définissant par exemple la fonction  $\rho$  de classe  $C^1$  par :

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left( \frac{x_1^2}{\delta} + \delta \right) + \frac{1}{2} x_2^2 & |x_1| \leq \delta \\ \frac{|x_1|}{2} + \frac{x_2^2}{2} & \delta \leq |x_1| \leq 1 - \delta \\ \frac{1}{8\delta} \left( |x_1|^3 + 2(1 - \delta)x_1^2 + (1 + \delta)^2 |x_1| \right) + \frac{x_2^2}{2} & 1 - \delta \leq |x_1| \leq 1 + \delta \\ \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} & 1 + \delta \leq |x_1| \end{cases}$$

Ce contrôle rétroactif rend le système différentiel stochastique (4.18) globalement asymptotiquement stable en probabilité.

Lorsque le système différentiel stochastique (4.1) est à simple commande, c'est à dire si  $m = 1$ , une variante du résultat précédent peut être obtenue. Le système s'écrit alors

$$\begin{aligned} dx_t &= (f(x_t) + u\bar{f}(x_t) + u^2 R(x_t, u)) dt \\ &+ \sum_{k=1}^r (g^k(x_t) + u\bar{g}^k(x_t) + u^2 S^k(x_t, u)) dw_t^k \end{aligned} \quad (4.27)$$

avec  $x_t \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathbb{R}$ .

Posons :

$$\Delta V(x) = \nabla V(x) \bar{f}(x) + \sum_{k=1}^r \sum_{l_1, l_2=1}^n \left( g_{l_1}^k \bar{g}_{l_2}^k \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}} \right) (x)$$

et

$$K(x, u) = \sum_{k=1}^r \sum_{l_1, l_2=1}^n [2g_{l_1}^k(x)S_{l_2}^k(x, u) + \bar{g}_{l_1}^k(x)\bar{g}_{l_2}^k(x) + 2u\bar{g}_{l_1}^k(x)S_{l_2}^k(x, u) + u^2S_{l_1}^k(x, u)S_{l_2}^k(x, u)] \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}(x).$$

Pour toute fonction  $V$  de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $LV(x)$  s'écrit alors sous la forme :

$$LV(x) = L_0V(x) + u\Delta V(x) + u^2\nabla V(x)R(x, u) + \frac{1}{2}u^2K(x, u).$$

Soit  $\varepsilon$  un réel positif et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , soit  $k_x$  la fonction (continue) de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$k_x(u) = u + \alpha(x, u) \frac{\Delta V(x)}{(1 \vee \varepsilon) + (\Delta V(x))^2},$$

où

$$\alpha(x, u) = \frac{\varepsilon}{1 + (\nabla V(x)R(x, u))^2 + K(x, u)^2}. \quad (4.28)$$

Le second terme de la somme définissant  $k_x(u)$  est borné, donc :

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} k_x(u) = -\infty$$

et

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} k_x(u) = +\infty.$$

Choissant pour chaque valeur de  $x \in \mathbb{R}^n$  une solution de l'équation  $k_x(u) = 0$ , on peut construire un contrôle rétroactif  $u = u(x)$  vérifiant la relation

$$u = -\alpha(x, u) \frac{\Delta V(x)}{(1 \vee \varepsilon) + (\Delta V(x))^2} \quad (4.29)$$

pour tout couple  $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Il résulte de (4.28) et (4.29) que  $u$  est borné en valeur absolue par  $\frac{\varepsilon}{2}$  si  $\varepsilon \leq 1$ , et par  $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$  si  $\varepsilon \geq 1$ .

Les mêmes arguments que ceux exposés dans la démonstration du théorème 4.5.1 permettent alors de montrer le résultat suivant.

**Théorème 4.5.2** *Supposons que :*

1. *il existe pour le système différentiel stochastique (4.27) un entier naturel  $p$  et une fonction de Lyapunov stochastique propre  $V$  de classe  $C^{2p+2}$  telle que  $L_0V(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et telle que  $S = \{0\}$  ;*
2.  *$u = \phi(x)$  est une solution de classe  $C^1$  de l'équation (4.29).*

*Alors, le contrôle rétroactif  $u = \phi(x)$  rend le système différentiel stochastique (4.27) globalement asymptotiquement stable en probabilité.*

Divers types de stabilisateurs asymptotiques ont été proposés jusqu'ici grâce au concept de passivité, essentiellement sous l'hypothèse  $S = \{0\}$ . Une méthode de stabilisation dynamique en fournit également, sous la même hypothèse. Cette méthode est l'objet du paragraphe suivant.

## 4.6 Stabilisation dynamique.

On suppose encore dans ce paragraphe que la stabilité en probabilité du système différentiel stochastique en régime libre déduit de (4.1) est garantie par l'existence d'une fonction de Lyapunov  $V$  satisfaisant l'inégalité

$$L_0V(x) = \nabla V(x)F(x,0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \sum_{l_1, l_2=1}^n (G_{l_1}^k G_{l_2}^k)(x,0) \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}(x) \leq 0$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Afin de développer un schéma de stabilisation dynamique pour ce système différentiel stochastique, considérons dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  le système différentiel stochastique suivant :

$$\begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t F(x_s, y_s) ds + \sum_{k=1}^r \int_0^t G^k(x_s, y_s) dW_s^k \\ y_t = \int_0^t u ds \end{cases} \quad (4.30)$$

On note encore  $F(x,0) = f(x)$  et  $G^k(x,0) = g^k(x)$ ,  $1 \leq k \leq r$ . Les fonctions  $F$  et  $G^k$ ,  $1 \leq k \leq r$ , étant supposées indéfiniment différentiables, il existe des fonctions  $\phi$  et  $\psi^k$ ,  $1 \leq k \leq r$ , dans  $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$  telles que :

$$F(x, y) = f(x) + \phi(x, y)y$$

et

$$G^k(x, y) = g^k(x) + \psi^k(x, y)y, \quad 1 \leq k \leq r$$

pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

Le système différentiel stochastique (4.30) peut donc être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} dx_t = (f(x_t) + \phi(x_t, y_t)y_t) + \sum_{k=1}^r (g^k(x_t) + \psi^k(x_t, y_t)y_t) dW_t^k \\ dy_t = u dt \end{cases} \quad (4.31)$$

La fonction  $\hat{V}$  définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  par :

$$\hat{V}(x, y) = V(x) + \frac{|y|^2}{2}$$

est une fonction de Lyapunov. Appliqué à cette fonction, le générateur infinitésimal  $\hat{L}$  associé au processus stochastique solution du système différentiel stochastique (4.31) donne :

$$\begin{aligned} \hat{L}\hat{V}(x, y) &= L_0V(x) + \nabla V(x)\phi(x, y)y + y^*u \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \sum_{l_1, l_2=1}^n \left( g_{l_1}^k(x) + \sum_{j=1}^m \psi_{l_1, j}^k(x, y)y_j \right) \\ &\cdot \left( g_{l_2}^k(x) + \sum_{j=1}^m \psi_{l_2, j}^k(x, y)y_j \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}(x). \end{aligned}$$

En notant  $\lambda$  la fonction de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m$  dont les composantes  $\lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , sont définies par

$$\begin{aligned} \lambda_j(x, y) = & \sum_{l=1}^n \phi_{l,j}(x, y) \frac{\partial V}{\partial x_l}(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \sum_{l_1, l_2=1}^n \left[ 2g_{l_1}^k(x) \psi_{l_2, j}^k(x, y) \right. \\ & \left. + \sum_{j'=1}^m \psi_{l_1, j}^k(x, y) \psi_{l_2, j'}^k(x, y) y_{j'} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}(x) \end{aligned}$$

on obtient :

$$\hat{L}\hat{V}(x, y) = L_0V(x) + y^*u + y^*\lambda(x, y).$$

**Remarque 4.6.1** Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda_j(x, 0)$  coïncide avec la quantité  $\Lambda_j V(x_t)$  défini par (4.9).

Par conséquent, en prenant le contrôle rétroactif défini sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  par

$$u(x, y) = -y - \lambda(x, y), \quad (4.32)$$

on obtient l'égalité :

$$\hat{L}\hat{V}(x, y) = L_0V(x) - |y|^2.$$

Le résultat suivant montre que le système différentiel stochastique (4.31) est rendu asymptotiquement stable en probabilité par le contrôle rétroactif  $u$  défini par (4.32), sous les mêmes hypothèses que celles des résultats des paragraphes précédents.

**Théorème 4.6.2** Supposons qu'il existe pour un entier naturel  $p$  une fonction de Lyapunov stochastique propre  $V$  de classe  $C^{2p+2}$  telle que  $L_0V(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et telle que  $S = \{0\}$ . Alors, le système différentiel stochastique en boucle fermée (4.30)-(4.32) est globalement asymptotiquement stable en probabilité.

**Démonstration.** Le système différentiel stochastique en boucle fermée (4.30)-(4.32) est stable en probabilité puisque

$$\hat{L}\hat{V}(x, y) = L_0V(x) - |y|^2 \leq 0$$

pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

Il reste à établir la stabilité asymptotique en probabilité de ce système. D'après le théorème 1.3.4,  $(x_t, y_t)$  tend avec probabilité 1 vers le plus grand ensemble invariant dont le support est contenu dans l'ensemble  $\hat{L}\hat{V}(x_t, y_t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ .

Mais  $\hat{L}\hat{V}(x_t, y_t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$  implique que les termes négatifs ou nuls  $L_0V(x_t)$  et  $-|y_t|^2$  sont en fait nuls pour tout  $t \geq 0$ . D'après la définition (4.32) de  $u$ , il en va de même de ce dernier.

Donc,

$$\lambda(x_t, y_t) = \lambda(x_t, 0) = 0$$

pour tout  $t \geq 0$ .

D'après la remarque 4.6.1, il est donc clair que

$$\Lambda_j V(x_t) = 0; 1 \leq j \leq m$$

pour tout  $t \geq 0$ . On peut donc conclure comme dans la démonstration du théorème 4.2.4.  $\square$

**Remarque 4.6.3** Si la condition  $L_0V(x) \leq 0$  n'est valable que dans un voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n$ , ou si la fonction  $V$  n'est pas une fonction propre, le résultat de stabilisation du théorème 4.6.2 reste valable, mais la stabilisation obtenue n'a qu'une signification locale.

**Remarque 4.6.4** Le contrôle rétroactif défini par l'équation (4.32) n'est en général pas borné. En revanche son calcul n'exige pas l'évaluation d'une quantité comme  $\rho(x)$  dans (4.23) ni la résolution d'équation implicites comme (4.14) ou (4.29). Ce dernier point est illustré par l'exemple suivant.

**Exemple 4.** Mettons en œuvre un schéma de stabilisation dynamique pour le système différentiel stochastique (4.18). Les hypothèses du théorème 4.6.2 sont satisfaites pour le système différentiel stochastique

$$\begin{cases} dx_{1,t} &= \left( -\frac{1}{2}x_{1,t} - x_{2,t}x_{3,t} + y_t x_{2,t} + y_t^\beta \right) dt + (x_{2,t} - y_t x_{2,t}) dW_t \\ dx_{2,t} &= \left( -\frac{1}{2}x_{2,t} + x_{1,t}x_{3,t} \right) dt + (-x_{1,t} - y_t x_{1,t}) dW_t \\ dx_{3,t} &= -x_{3,t} dt \\ dy_t &= u dt \end{cases} \quad (4.33)$$

qui peut être asymptotiquement stabilisé en probabilité par le contrôle rétroactif défini par

$$u(x, y) = -y - x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^2 y - x_1 y^{\beta-1} - x_1 x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 y + x_2^2. \quad (4.34)$$

## 4.7 Quelques simulations numériques.

Les retours d'état obtenus pour les systèmes différentiels stochastiques (4.18) et (4.33) ont fait l'objet de quelques simulations numériques destinées à fournir un aperçu de la convergence vers l'équilibre des solutions des systèmes en boucle fermée induits par le choix de ces retours d'état.

Ce travail ne prétend en rien constituer une démarche complète d'expérimentation sur le sujet. Cependant, les résultats obtenus présentent une cohérence manifeste quand à "l'allure" des trajectoires et à l'ordre de grandeur de la solution après un temps donné.

Le schéma numérique utilisé est celui de Milstein [43], mis en œuvre de manière concrète sur le logiciel Maple avec l'aide de la bibliothèque de programmes proposée par Cyganowski, Grüne et Kloeden dans [11].

Pour ce qui concerne la résolution numérique des équations différentielles stochastiques, nous nous référons au livre de Kloeden et Platen [31].

Les figures 4.3, 4.2, 4.1, et 4.4 montrent pour  $0 \leq t \leq 10$  des trajectoires typiques des deux premières composantes de la solution du système différentiel stochastique (4.18)-(4.21) avec  $\beta = 2$  et diverses conditions initiales.

De la même manière, les figures 4.5, 4.6 et 4.7 illustrent pour  $0 \leq t \leq 5$  des trajectoires du système en boucle fermée (4.33)-(4.34) avec  $\beta = 3$ .

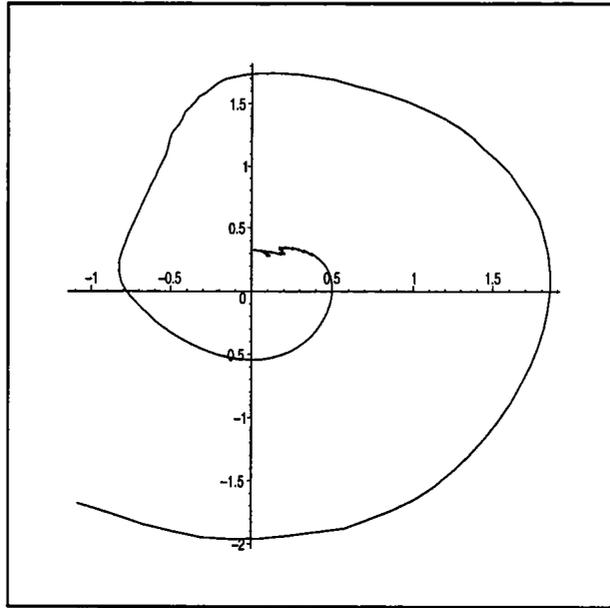
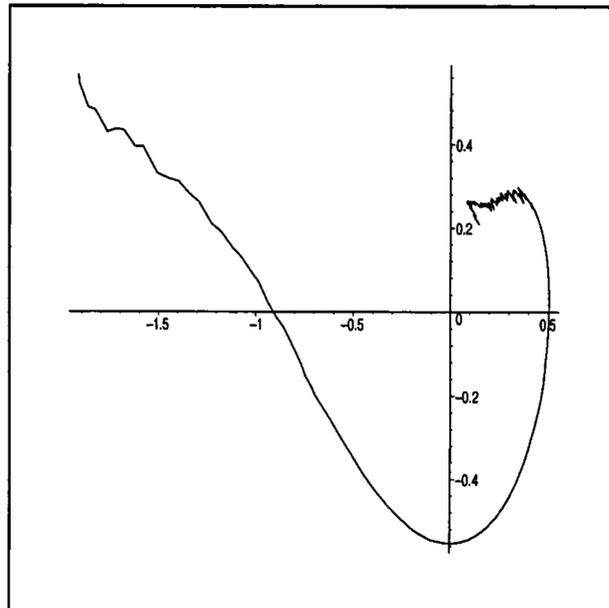
FIG. 4.1 -  $x_{3,0} = 10$ ;  $\Delta_t = 0,01$ .FIG. 4.2 -  $x_{3,0} = 5$ ;  $\Delta_t = 0,01$ .

FIG. 4.3 -  $x_{3,0} = 1$ ;  $\Delta_t = 0,01$ .

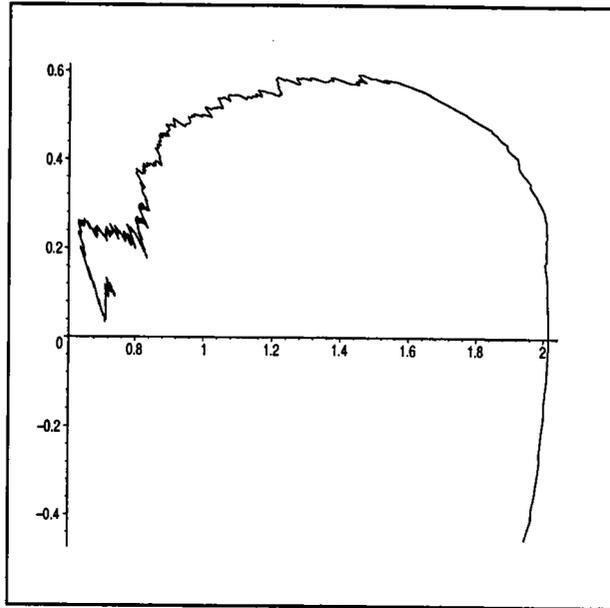


FIG. 4.4 -  $x_{3,0} = 0$ ;  $\Delta_t = 0,01$ .

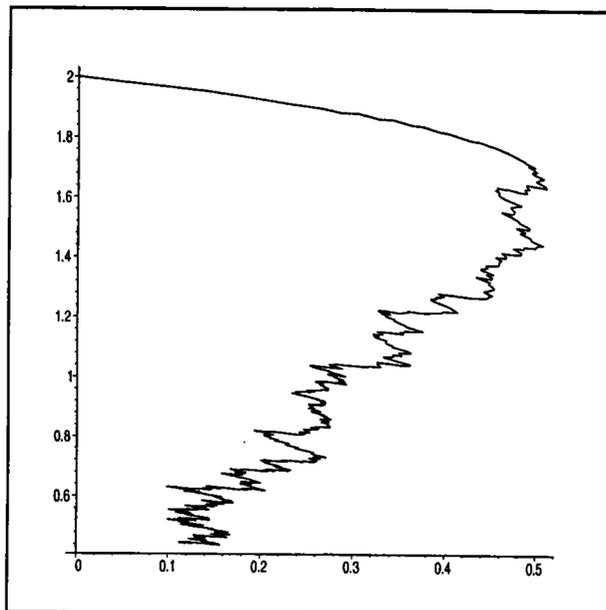


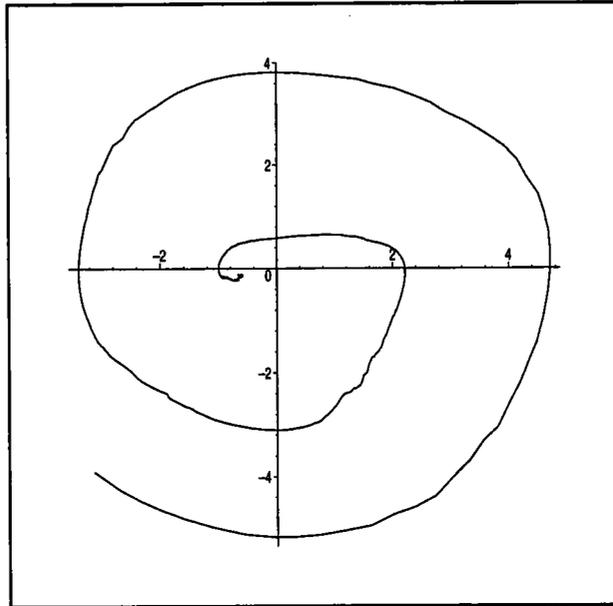
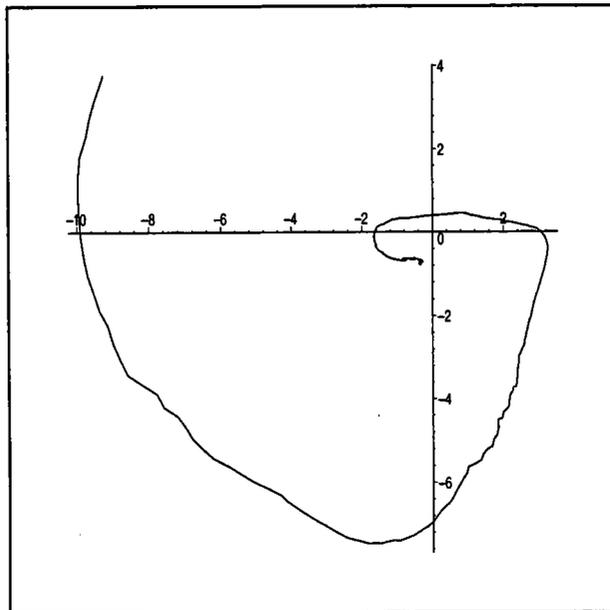
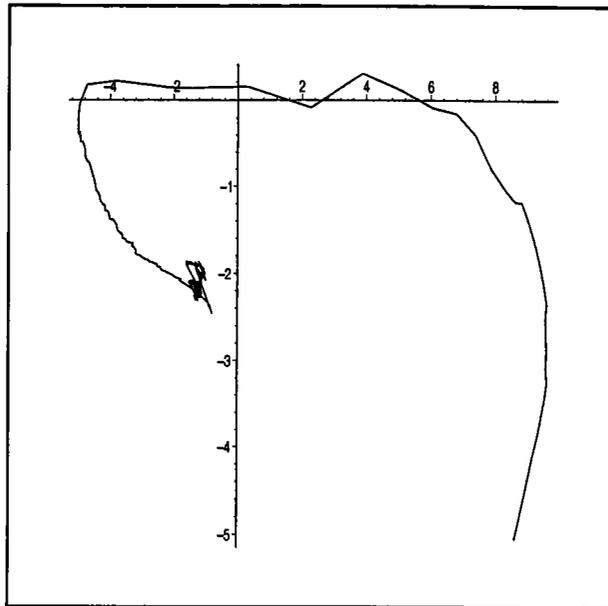
FIG. 4.5 -  $x_{3,0} = 10$ ;  $\Delta_t = 0,01$ .FIG. 4.6 -  $x_{3,0} = 5$ ;  $\Delta_t = 0,01$ .

FIG. 4.7 -  $x_{3,0} = 2$ ;  $\Delta_t = 0,01$ .





## Chapitre 5

# Stabilisation asymptotique de systèmes stochastiques en cascade.

### 5.1 Introduction.

Ce chapitre est consacré à la stabilisation asymptotique en probabilité de systèmes différentiels stochastiques en cascade par l'intermédiaire de retours d'états. Comme dans le chapitre 4, la méthode employée est basée sur l'utilisation de la version stochastique du principe d'invariance de La Salle (théorème 1.3.4).

Le problème de la stabilisation de systèmes déterministes interconnectés a été étudié par différents auteurs (voir par exemple Kokotovic-Sussman [33], Tsiniias [50] et Coron-Praly [10]). La stabilisation des systèmes étudiés dans ces articles est déduite de celle de systèmes de dimension plus petite obtenus par la méthode "des intégrateurs en série".

La stabilisation de systèmes déterministes en cascade plus généraux que ceux obtenus par l'ajout d'un intégrateur a été l'objet de différents travaux (voir par exemple Saberi, Kototovic et Sussman [45] et Ortega [44]).

L'étude de la stabilisation d'un système augmenté par l'ajout d'un intégrateur a été étendue à des systèmes différentiels stochastiques contrôlés non linéaires par Florchinger [18].

En général, un système composé de deux systèmes différentiels stochastiques en cascade asymptotiquement stables en probabilité n'est pas asymptotiquement stable en probabilité. Le problème de stabilisation asymptotique qui découle de cette remarque a été étudié par Florchinger [17] et par Boulanger et Florchinger [6]. Dans ces deux articles, la construction de retours d'états stabilisants repose sur une extension de la procédure d'élimination utilisée en théorie du contrôle déterministe et fait appel à des fonctions de Lyapunov stochastiques composites analogues à celles introduites par Saberi, Kototovic et Sussman [45] pour des systèmes déterministes.

Dans ce chapitre, on considère des systèmes différentiels stochastiques en cascade composés de deux systèmes différentiels stochastiques stables en probabilité, mais pas nécessairement asymptotiquement stables en probabilité. Le système est affine par rapport au contrôle, qui n'intervient pas dans les termes de diffusion. Des retours d'états rendant le système composite asymptotiquement stable en probabilité sont construits en deux étapes, permettant tout d'abord de garantir la stabilité en probabilité du système en boucle fermée puis sa stabilité asymptotique en probabilité.

Le modèle étudié dans ce chapitre est présenté dans le paragraphe 2. Le résultat de stabilisation obtenu est énoncé et prouvé dans le paragraphe 3.

## 5.2 Énoncé du problème.

Sur un espace de probabilité complet  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , on considère le processus stochastique  $(x_t, y_t)$  solution dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  du système différentiel stochastique

$$\begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t f_1(x_s, y_s) ds + \int_0^t g_1(x_s, y_s) dw_s \\ y_t = y_0 + \int_0^t (f_2(y_s) + h(y_s)u) ds + \int_0^t g_2(y_s) dv_s \end{cases} \quad (5.1)$$

où :

1.  $x_0$  et  $y_0$  sont donnés respectivement dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  ;
2.  $(v_t)_{t \geq 0}$  et  $(w_t)_{t \geq 0}$  sont deux processus de Wiener standard définis sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , à valeurs respectivement dans  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$  ;
3.  $u$  est un contrôle mesurable à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$  ;
4.  $f_1$  et  $g_1$  sont des fonctions lipschitziennes de classe  $C^\infty$ , à croissance sous linéaire, définies sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , à valeurs respectivement dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^{n \times q}$  et nulles à l'origine ;
5.  $f_2, h$  et  $g_2$  sont des fonctions lipschitziennes de classe  $C^\infty$ , à croissance sous linéaire, définies sur  $\mathbb{R}^m$ , à valeurs respectivement dans  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathbb{R}^{m \times r}$  et  $\mathbb{R}^{m \times p}$  et nulles à l'origine.

En outre, on suppose que les conditions suivantes sont satisfaites.

(A1) La stabilité en probabilité de la solution d'équilibre  $y_t \equiv 0$  de l'équation différentielle stochastique

$$dy_t = f_2(y_t)dt + g_2(y_t)dv_t$$

est garantie par l'existence d'une fonction de Lyapunov stochastique  $V_2$  de classe  $C^{2+\gamma}$ ,  $\gamma \in \mathbb{N}$ , définie sur  $\mathbb{R}^m$  telle que pour tout  $y \in \mathbb{R}^m$  :

$$L_2 V_2(y) = \nabla_y V_2(y) f_2(y) + \frac{1}{2} \text{Tr} (g_2(y) g_2(y)^* \nabla_{yy}^2 V_2(y)) \leq 0.$$

(A2) Posons pour tout  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $z(y) = (\nabla_y V_2(y) h(y))^*$ . On suppose qu'il existe des fonctions  $f_1^i, g_1^i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , de classe  $C^\infty$ , définies sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  et respectivement à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^{n \times q}$ , telle que pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  :

$$f_1(x, y) = f_1(x, 0) + \sum_{i=1}^r z_i(y) f_1^i(x, y) \quad (5.2)$$

et

$$g_1(x, y) g_1(x, y)^* = g_1(x, 0) g_1(x, 0)^* + \sum_{i=1}^r z_i(y) g_1^i(x, y) g_1^i(x, y)^*. \quad (5.3)$$

(A3) Il existe une fonction de Lyapunov stochastique  $V_1$  de classe  $C^{2\beta}$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^*$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$L_1 V_1(x) = \nabla_x V_1(x) f_1(x, 0) + \frac{1}{2} \text{Tr} (g_1(x, 0) g_1(x, 0)^* \nabla_{xx}^2 V_1(x)) \leq 0.$$

### 5.3 Stabilisation asymptotique en probabilité de systèmes en cascade.

Le but de ce paragraphe est d'obtenir, grâce au théorème 1.3.4, des conditions suffisantes sous lesquelles le système différentiel stochastique (5.1) peut être asymptotiquement stabilisé en probabilité, au moyen d'un contrôle rétroactif. La construction de ce contrôle sera effectuée en deux étapes, ce qui est ici commode puisque le système (5.1) est affine vis à vis du contrôle. Dans un premier temps, on se préoccupe simplement de s'assurer de la stabilité en probabilité de la solution d'équilibre du système en boucle fermée.

Soit le contrôle rétroactif  $u = \alpha(x, y)$  dont les composantes sont définies par :

$$\alpha_i(x, y) = -\nabla_x V_1(x) f_1^i(x, y) - \frac{1}{2} \text{Tr} (g_1^i(x, y) g_1^i(x, y)^* \nabla_{xx}^2 V_1(x)) , 1 \leq i \leq r. \quad (5.4)$$

Un premier pas est alors accompli vers le résultat de stabilisation recherché, comme en témoigne la proposition suivante.

**Proposition 5.3.1** *Sous les hypothèses (A1), (A2) et (A3), le système différentiel stochastique en boucle fermée (5.1)-(5.4) est stable en probabilité.*

**Démonstration.** Soit la fonction de Lyapunov stochastique définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  par

$$W(x, y) = V_1(x) + V_2(y).$$

Si  $\mathcal{L}_\alpha$  désigne le générateur infinitésimal du processus stochastique solution du système en boucle fermée (5.1)-(5.4), on a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha W(x, y) &= \nabla_x V_1(x) f_1(x, y) + \nabla_y V_2(y) f_2(y) + \nabla_y V_2(y) h(y) \alpha(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} (g_1(x, y) g_1(x, y)^* \nabla_{xx}^2 V_1(x)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} (g_2(y) g_2(y)^* \nabla_{yy}^2 V_2(y)). \end{aligned}$$

Des hypothèses (5.2) et (5.3), on déduit les égalités

$$\nabla_x V_1(x) f_1(x, y) = \nabla_x V_1(x) f_1(x, 0) + \sum_{i=1}^r ((\nabla_y V_2(y) h(y))^*)^*_i \nabla_x V_1(x) f_1^i(x, y)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Tr} (g_1(x, y) g_1(x, y)^* \nabla_{xx}^2 V_1(x)) &= \text{Tr} (g_1(x, 0) g_1(x, 0)^* \nabla_{xx}^2 V_1(x)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r [ ((\nabla_y V_2(y) h(y))^*)^*_i \\ &\quad \text{Tr} (g_1^i(x, y) g_1^i(x, y)^* \nabla_{xx}^2 V_1(x)) ]. \end{aligned}$$

D'après la définition de  $u = \alpha(x, y)$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_y V_2(y) h(y) \alpha(x, y) &= - \sum_{i=1}^r ((\nabla_y V_2(y) h(y))^*)^*_i \nabla_x V_1(x) f_1^i(x, y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r [ ((\nabla_y V_2(y) h(y))^*)^*_i \\ &\quad \text{Tr} (g_1^i(x, y) g_1^i(x, y)^* \nabla_{xx}^2 V_1(x)) ]. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\alpha W(x, y) &= \nabla_x V_1(x) f_1(x, 0) \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} (g_1(x, 0) g_1(x, 0)^* \nabla_{xx}^2 V_1(x)) \\
&\quad + \nabla_y V_2(y) f_2(y) \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} (g_2(y) g_2(y)^* \nabla_{yy}^2 V_2(y)) \\
&= L_1 V_1(x) + L_2 V_2(y).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

D'après les hypothèses (A1) et (A3), on a donc

$$\mathcal{L}_\alpha W(x, y) \leq 0 \tag{5.6}$$

pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . On conclut donc à la stabilité en probabilité de la solution d'équilibre du système en boucle fermée (5.1)-(5.4) grâce au théorème 1.3.3.  $\square$

À l'issue de cette première étape, nous nous trouvons dans une situation propice à l'application du corollaire 4.4.1. Néanmoins, tout en procédant de manière analogue (voir aussi [22]), il semble plus naturel d'énoncer des conditions suffisantes pour la stabilisabilité du système différentiel stochastique (5.1) qui ne mettent en jeu que les coefficients du système en régime libre lorsque ses composantes sont découplées.

Dans ce but, introduisons pour  $1 \leq l \leq p$ , les opérateurs différentiels du premier ordre  $\mathcal{G}_l$  définis pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$\mathcal{G}_l \varphi(y) = \nabla_y \varphi(y) g_2^l(y)$$

où  $g_2^l(y)$ ,  $1 \leq l \leq p$ , désigne le vecteur de  $\mathbb{R}^m$  constitué de la  $l$ -ème colonne de la matrice  $g_2(y)$ .

Le résultat principal de ce chapitre s'énonce alors comme suit.

**Théorème 5.3.2** *Supposons que les coefficients du système différentiel stochastique (5.1) sont des fonctions de classe  $C^\infty$  satisfaisant aux conditions (A1) (A2) et (A3) et que les ensembles*

$$\{x \in \mathbb{R}^n / L_1^k V_1(x) = 0, 1 \leq k \leq \beta\} \tag{5.7}$$

$$\{y \in \mathbb{R}^m / \mathcal{G}_i^k z_i(y) = 0, 1 \leq i \leq r, 1 \leq l \leq p, 0 \leq k \leq 1 + \gamma\} \tag{5.8}$$

*sont réduits respectivement à l'origine de  $\mathbb{R}^n$  et de  $\mathbb{R}^m$ .*

*Alors, le système différentiel stochastique (5.1) est rendu asymptotiquement stable en probabilité par le contrôle rétroactif  $u$  défini par*

$$u(x, y) = \alpha(x, y) - z(y) \tag{5.9}$$

*pour tout couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .*

**Démonstration.** Soit  $\tilde{f}_2$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  par :

$$\tilde{f}_2(x, y) = f_2(y) + h(y)\alpha(x, y).$$

Puisque le contrôle rétroactif  $u$  est défini par (5.9), le système en boucle fermé (5.1)-(5.9) s'écrit alors

$$\begin{aligned}
d \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(x_t, y_t) \\ \tilde{f}_2(x_t, y_t) \end{pmatrix} dt - \begin{pmatrix} 0 \\ h(y_t)z(y_t) \end{pmatrix} dt \\
&\quad + \begin{pmatrix} g_1(x_t, y_t) & 0 \\ 0 & g_2(y_t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dw_t \\ dv_t \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

et le générateur infinitésimal  $\mathcal{L}_{\alpha+z}$  de sa solution est l'opérateur différentiel du second ordre

$$\mathcal{L}_{\alpha+z} = \mathcal{L}_{\alpha} - z(y)^* h(y)^* \nabla_y^*.$$

Pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , on déduit de (5.6) l'inégalité

$$\mathcal{L}_{\alpha+z} W(x, y) = \mathcal{L}_{\alpha} W(x, y) - |h(y)^* \nabla_y V_2(y)|^2 \leq 0, \quad (5.11)$$

qui montre la stabilité en probabilité du système en boucle fermé (5.1)-(5.9).

Soit maintenant  $(x_t, y_t)_{t \geq 0}$  une trajectoire du système différentiel stochastique (5.10) vérifiant

$$\mathcal{L}_{\alpha+z} W(x_t, y_t) = 0$$

pour tout  $t \geq 0$ .

Compte tenu de l'inégalité (5.11) et de (5.5), les composantes de ce processus stochastique vérifient les conditions

$$L_1 V_1(x_t) = 0 \quad (5.12)$$

$$L_2 V_2(y_t) = 0 \quad (5.13)$$

et

$$z(y_t) = (\nabla_y V_2(y_t) h(y_t))^* = 0 \quad (5.14)$$

pour tout  $t \geq 0$ .

En appliquant de façon itérative la formule d'Itô, on obtient à partir l'égalité (5.12), en tenant compte de (5.14), (5.2) et (5.3), que pour tout  $k \in \{1, \dots, \beta\}$  :

$$L_1^k V_1(x_t) = 0$$

pour tout  $t \geq 0$ .

D'autre part, on obtient aussi grâce à la formule d'Itô appliquée de manière itérative au processus stochastique  $z(y_t)$  que :

$$\mathcal{G}_l^k z_i(y_t) = 0,$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $l \in \{1, \dots, p\}$ ,  $k \in \{0, \dots, \gamma + 1\}$  et  $t \geq 0$ .

Ainsi, les hypothèses (5.7) et (5.8) impliquent que le processus stochastique  $(x_t, y_t)$  vérifiant  $\mathcal{L}_{\alpha+z} W(x_t, y_t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$  est identiquement nul.

Le théorème 1.3.4 permet donc de conclure à la stabilité asymptotique en probabilité du système en boucle fermé (5.1)-(5.9).  $\square$



# Bibliographie

- [1] D.Aeyels, Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control. *Systems and Control Letters* **5** (1985) 289–294.
- [2] L.Arnold. Stochastic differential equations : Theory and applications. Wiley, New York (1974).
- [3] L.Arnold, V.Wihstutz, Lyapunov exponents, a survey. Lecture Notes in Mathematics **1186**, SpringerVerlag, Berlin,Heidelberg (1986) 1-26.
- [4] Z.Artstein, Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications* **7** (1983) 1163–1173.
- [5] C.Boulanger, Output feedback stabilization of stochastic systems. Thèse, Université de Metz (1999).
- [6] C.Boulanger, P.Florchinger, Stabilization of some cascade stochastic systems, *Proceedings of the 4th European Control Conference*, Bruxelles (B) July 1997 1-4.
- [7] R.W.Brockett, Asymptotic stability and feedback stabilization. In : R.W.Brockett, R.S.Millman and H.J.Sussmann eds., *Differential Geometric Control Theory* Birkhauser, Boston (1983) 181–191.
- [8] C.I.Byrnes, A.Isidori, J.C.Willems, Passivity, feedback equivalence and global stabilization of minimum phase nonlinear system. *IEEE Transactions on Automatic Control* **36** (1991) 1228-1240.
- [9] R.Chabour, M.Oumoun, A Jurdjevic-Quinn theorem for stochastic nonlinear systems. *Stochastic Analysis and Applications* **16** 1 (1998) 43-50.
- [10] J.M.Coron, L.Praly, Adding an integrator for the stabilization problem. *Systems and Control Letters* **17** (1991) 84-104.
- [11] S.O.Cyganowski, L.Grüne, P.E.Kloeden, MAPLE for stochastic differential equations, *Proceedings of the IX-th Summer School in Numerical Analysis*, University of Durham (UK), July 2000.
- [12] W.P.Dayawansa, C.F.Martin, Asymptotic stabilization of two dimensional real analytic systems. *Systems and Control Letters* **12** (1989) 205–211.
- [13] H.Deng, M.Krstic, R.Williams, Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance. *IEEE Transactions on Automatic Control* **46** 8 (2001) 1237-1253.
- [14] P.Florchinger, A universal formula for the stabilization of control stochastic differential equations. *Stochastic Analysis and Applications* **11** 2 (1993) 155–162.
- [15] P.Florchinger, A stochastic version of Jurdjevic-Quinn theorem. *Stochastic Analysis and Applications* **12** 4 (1994) 473-480.
- [16] P.Florchinger, Lyapunov-like techniques for stochastic stability. *SIAM Journal on Control and Optimization* **33** 4 (1995) 1151-1169.
- [17] P.Florchinger, Global stabilization of cascade stochastic systems. *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans (La) December 1995 13-15.
- [18] P.Florchinger, On the stabilization of interconnected stochastic systems. *Stochastic Analysis and Applications*, **14** 4 (1996) 383-391.

- [19] P.Florchinger, Global stabilization of affine stochastic systems. *Stochastic Analysis and Applications* **15** 4 (1997) 493-502.
- [20] P.Florchinger, Adaptive stabilization of nonlinear stochastic systems. *Applied Mathematics and Optimization* **38** 1 (1998) 109-120.
- [21] P.Florchinger, A passive system approach to feedback stabilization of nonlinear control stochastic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization* **37** 6 (1999) 1848-1864.
- [22] P.Florchinger, A stochastic Jurdjevic-Quinn theorem. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and control, Sydney (AUS)* December 2000.
- [23] Z.Y.Gao, N.U.Ahmed, Feedback Stabilizability of nonlinear stochastic systems with state-dependent noise. *International Journal of Control* **45** (1987) 729-737.
- [24] K.Itô, On stochastic differential equations. *Mem. Amer. Math. Soc.* **4** (1951).
- [25] V.Jurdjevic, J.P.Quinn, Controllability and stability. *Journal of Differential Equations* **28** (1978) 381-389.
- [26] N.Kalouptsidis, J.Tsinias, Stability improvement of nonlinear systems by feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control* **29** (1984) 364-367.
- [27] I.Kanellakopoulos, P.V.Kokotovic, A.S.Morse, Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **36** (1991) 1241-1253.
- [28] I.Karatzas, S.E.Shreve, Brownian motion and stochastic calculus. Sec Edition. Springer Verlag (1991)
- [29] M.Kawski, Stabilization of nonlinear systems in the plane. *Systems and Control Letters* **12** (1989) 169-175.
- [30] R.Z.Khasminskii, Stochastic stability of differential equations. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1980).
- [31] P.E.Kloeden, E.Platen, Numerical solution of stochastic differential equations. Springer Verlag, Heidelberg (1992).
- [32] P.V.Kokotovic, I.Kanellakopoulos, A.S.Morse, Adaptive feedback linearization of nonlinear systems. In P.V.Kokotovic ed; *Foundations of Adaptive Control*. Springer-Verlag, Berlin (1991) 311-346.
- [33] P.V.Kokotovic, H.J.Sussmann, A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. *Systems and Control Letters* **13** (1989) 125-133.
- [34] M.Krstic, I.Kanellakopoulos, P.V.Kokotovic, Adaptive nonlinear control without overparametrization. *Systems and Control Letters* **19** (1992) 177-185.
- [35] M.Krstic, P.V.Kokotovic, Control Lyapunov functions for adaptive nonlinear stabilization. *Systems and Control Letters* **26** (1995) 17-23.
- [36] H.J.Kushner, Stochastic stability and control. Academic Press, New York, London (1967).
- [37] H.J.Kushner, Converse theorems for stochastic Lyapunov functions, *SIAM Journal on Control* **5** 2 (1967) 228-233.
- [38] H.J.Kushner, Stochastic stability. In : R.Curtain ed., Stability of Stochastic Dynamical Systems. *Lecture Notes in Mathematics* **294** Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972) 97-124.
- [39] J.P.La Salle, Stability theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations* **4** (1968) 57-65.
- [40] W.Lin, Feedback stabilization of general nonlinear control systems : a passive system approach. *Systems and Control Letters* **25** (1995) 41-52.
- [41] W.Lin, Global asymptotic stabilization of general nonlinear systems with stable free dynamics via passivity and bounded feedback. *Automatica* **32** 6 (1996) 915-924.
- [42] Y.Lin, E.D.Sontag, A universal formula for stabilization with bounded controls. *Systems and Control Letters* **16** (1991) 393-397.

- [43] G.G.Milstein, Numerical integration of stochastic differential equations. Kluwer, Dordrecht (1995).
- [44] R.Ortega, On global stabilization of cascade nonlinear systems. *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, Honolulu (HI) December 1990.
- [45] A.Saberi, P.V.Kototovic, H.J.Sussmann, Global Stabilization of partially linear composite systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **28** (1990) 1491-1503.
- [46] E.D.Sontag, A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems and Control Letters* **13** (1989) 117-123
- [47] E.D.Sontag, H.J.Sussmann, Remarks on continuous feedback. *Proceedings of the 19th IEEE Conference on Decision and Control*, Albuquerque (NM) December 1980.
- [48] J.Tsinias, Stabilization of affine in control nonlinear systems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **12** 11 (1988) 1283-1296.
- [49] J.Tsinias, Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization. *Mathematics of Control Signals and Systems* **2** (1989) 343-357.
- [50] J.Tsinias, A local stabilization theorem for interconnected systems. *Systems and Control Letters* **18** (1992) 429-434.
- [51] N.Wiener, Differential space. *J. Math. Phys.* **2** (1923) 131-174.
- [52] J.C. Willems, Dissipative dynamic systems. *Arch. Rational Mech. Anal.* **45** (1972) 321-393.



Deuxième partie

Filtrage non linéaire.

La seconde partie de ce travail est consacrée à différents problèmes de filtrage non linéaire en dimension finie ou en dimension infinie et se compose de cinq chapitres.

Dans le chapitre 6, on rappelle le vocabulaire et des résultats fondamentaux de la théorie du filtrage non linéaire pour des problèmes de filtrage en dimension finie. L'accent est mis sur les équations du filtrage : équation de Kushner-Stratonovitch et équation de Zakai ainsi que sur la question de l'existence d'une densité régulière pour le filtre non normalisé.

Un des aspects importants de la théorie du filtrage non linéaire est la recherche d'approximations du filtre optimal par des filtres de dimension finie. Le chapitre 7 est consacré à l'étude d'une telle approximation dans le cadre d'un problème de filtrage non linéaire de dimension deux avec faible bruit d'observation.

Dans le chapitre 8, on étudie un exemple de filtre de dimension finie pour un problème de filtrage non linéaire de dimension un avec bruits corrélés.

Les deux chapitres suivants sont consacrés à des problèmes de filtrage dans des espaces de Hilbert

Dans le chapitre 9, on établit une généralisation des équations du filtrage non linéaire pour des problèmes où le signal et l'observation évoluent dans des espaces de Hilbert séparables et où les coefficients du système dépendent du temps. On discute également de l'application des résultats obtenus à des problèmes incluant des facteurs de retard.

Dans le chapitre 10, on considère un problème de filtrage en dimension infinie avec bruits indépendants incluant un contrôle dont le coût est évalué par l'exponentielle d'une fonctionnelle du temps, de l'état du système et du contrôle. On établit une généralisation de l'équation de Zakai pour ce problème et l'existence et l'unicité d'une solution absolument continue par rapport à une mesure de référence, dans le cas de problèmes avec bruit additif.



# Chapitre 6

## Les équations du filtrage non linéaire

### 6.1 Introduction.

Le problème du filtrage stochastique apparaît lorsqu'un "signal" ne peut faire l'objet que d'observations partielles et bruitées, la dynamique du signal pouvant également être influencée par un bruit. Dans le cadre de ce travail, nous traitons des problèmes à temps continu où les bruits d'observation et de dynamique sont représentés par les variations de processus de Wiener à valeurs dans des espaces de Hilbert séparables de dimension éventuellement infinie.

Diverses situations concrètes débouchent sur des problèmes de filtrage stochastique, dès lors que la dynamique du signal partiellement observé est susceptible d'être modélisée par des équations aux différences ou des équations différentielles stochastiques. Parmi les principales applications pratiques de cette théorie, on peut citer des problèmes d'astronomie, de guidage, de suivi de trajectoires, mais aussi d'écologie, d'ingénierie électrique, etc.

Dans la situation que nous avons évoquée d'observation partielle et bruitée d'un signal, la "meilleure" estimation de l'état du signal au vu des informations fournies par les observations effectuées jusqu'à un instant donné est définie par la loi conditionnelle de l'état du signal connaissant la trajectoire de l'observation jusqu'à cet instant. Lorsque le problème est formulé au moyen d'équations différentielles stochastiques, la théorie du filtrage permet de décrire l'évolution de cette loi conditionnelle sous la forme d'équations aux dérivées partielles stochastiques. Lorsque le but poursuivi est précisément la connaissance de cette loi conditionnelle, par exemple pour l'estimation et la prédiction de la trajectoire d'un "projectile", ces équations peuvent fournir la solution du problème, au moins en principe. Dans d'autres cas, elles constituent souvent une étape utile dans la résolution de problèmes de statistique ou de contrôle de processus partiellement observés.

Le problème du filtrage stochastique a d'abord été résolu pour des problèmes linéaires par Kalman [36] et Kalman et Bucy [37]. La loi du couple signal-observation est alors gaussienne et l'étude du filtre de Kalman-Bucy, très utilisé en pratique, débouche sur une équation différentielle stochastique linéaire pour l'espérance conditionnelle du signal connaissant l'observation et une équation de Riccati pour sa variance conditionnelle.

Le filtre de Kalman-Bucy est également utilisé, après linéarisation, pour des problèmes non linéaires. Cette démarche, rarement justifiée de manière rigoureuse, ne conduit pas toujours à des résultats satisfaisants. Une théorie du filtrage non linéaire a par conséquent vu le jour et connu d'importants développements.

Une équation aux dérivées partielles stochastiques, l'équation de Kushner-Stratonovitch, a été obtenue pour décrire l'évolution de la loi conditionnelle du signal connaissant la trajectoire de

l'observation par Kushner dans [46]. Fujisaki, Kallianpur et Kunita [31] ont par la suite obtenu le même résultat, en introduisant la notion de processus d'innovation associée au problème de filtrage considéré.

L'étude et l'emploi de l'équation de Kushner-Stratonovitch sont rendus difficiles par le caractère non linéaire de cette équation aux dérivées partielles stochastique. Un pas décisif a été accompli par Zakai dans [65] avec l'introduction d'un filtre non normalisé, moyennant un changement de probabilité. Ce filtre non normalisé est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique linéaire, l'équation de Zakai, et il est relié au filtre optimal solution de l'équation de Kushner-Stratonovitch par une formule de Bayes, la formule de Kallianpur-Striebel (voir par exemple [34]). Le résultat de Zakai a par la suite été étendu à des situations plus générales que celle considérée initialement par différents auteurs (sur ce sujet, voir par exemple Pardoux [56]).

Des questions importantes concernant l'équation de Zakai, comme l'unicité ou l'absolue continuité de la solution par rapport à la mesure de Lebesgue, ont pu être au moins partiellement résolues.

Par des méthodes variationnelles, Chaleyat-Maurel, Michel et Pardoux [14] ont obtenu un résultat d'unicité de l'équation de Zakai, en supposant en particulier les coefficients du système tous bornés. Par d'autres méthodes, d'autres résultats d'unicité ont été obtenus par Rozovskii [61], Bensoussan [9] et Kurtz-Ocone [45].

L'existence d'une densité pour le filtre non normalisé peut être établie sous certaines hypothèses par des méthodes variationnelles (Krylov-Rosovski [39], Pardoux [54]), en utilisant les propriétés des opérateurs pseudo-différentiels (Chaleyat-Maurel et Michel [12]) ou à l'aide de techniques de perturbation (Kunita [43]). Toutefois, c'est grâce au calcul de Malliavin que des résultats reposant pour l'essentiel sur l'hypothèse de Hörmander ont été obtenus par Bismut et Michel [11], puis par Ferreyra [27] et Florchinger [29].

Différents schémas de calcul numérique de la densité du filtre non normalisé ont été proposés et justifiés rigoureusement. Néanmoins, la recherche de filtres approchés de dimension finie, dont le calcul effectif reste beaucoup plus facile, a fait l'objet de nombreux travaux, en particulier pour des problèmes avec faible bruit d'observation. Nous reviendrons plus en détails sur ce sujet dans le chapitre 7.

Les résultats évoqués ci-dessus concernent des problèmes de filtrage où le signal évolue dans un espace de dimension finie. Depuis plusieurs décennies, les problèmes de filtrage en dimension infinie ont également suscité un intérêt certain.

Ce sont d'abord des problèmes linéaires et la généralisation du filtre de Kalman-Bucy qui ont retenu l'attention de différents auteurs, parmi lesquels on peut citer en particulier Curtain-Pritchard [18] et Bensoussan [7].

Plus récemment, les équations du filtrage non linéaire ont été généralisées pour des problèmes non linéaires en dimension infinie par différents auteurs. Ahmed [1], Ahmed et Zabczyk [5], Ahmed, Fuhrman et Zabczyk [3] ont ainsi obtenu de telles généralisations pour des problèmes non linéaires où le signal évolue dans un espace de Hilbert séparable avec un bruit de dynamique additif et une observation de dimension finie.

En s'appuyant sur des résultats de Da Prato et Zabczyk [21], Ahmed, Fuhrman et Zabczyk [3] ont également obtenu des résultats d'absolue continuité du filtre non normalisé par rapport à une mesure gaussienne de référence.

Ces résultats ont été étendus à des cas où l'observation est aussi de dimension infinie et où le

coefficient de diffusion du signal dépend de ce dernier par Dietsch [24].

Dans la suite de ce chapitre, nous allons brièvement rappeler quelques notions et résultats fondamentaux de la théorie du filtrage non linéaire en dimension finie. Dans le paragraphe 2, nous rappelons la définition du filtre optimal et de sa version non normalisée, puis la formulation de l'équation de Kushner-Stratonovitch et de l'équation de Zakai. Dans le paragraphe 3, nous énonçons quelques résultats concernant l'existence d'une densité pour le filtre non normalisé.

## 6.2 Le filtre optimal et sa version non normalisée.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé complet,  $(v_t)_{t \geq 0}$  et  $(w_t)_{t \geq 0}$  deux processus de Wiener standards indépendants à valeurs respectivement dans  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^d$ .

Soit  $f$ ,  $\sigma$  et  $g$  des applications bornées et continues sur  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n$ , à valeurs respectivement dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^{n \times m}$  et  $\mathbb{R}^{n \times d}$  telles que pour tout  $T > 0$ , il existe une constante positive  $K$  telle que :

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y|$$

et

$$|f(t, x)| + |g(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K (1 + |x|),$$

pour tout  $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Dans ces conditions,  $x_0$  désignant une variable aléatoire intégrable indépendante des processus de Wiener  $(v_t)_{t \geq 0}$  et  $(w_t)_{t \geq 0}$ , l'équation différentielle stochastique

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_s) ds + \int_0^t \sigma(s, x_s) dv_s + \int_0^t g(s, x_s) dw_s \quad (6.1)$$

possède une solution unique  $(x_t)_{t \geq 0}$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Le processus stochastique  $x_t$  représente un signal partiellement observé par l'intermédiaire du processus stochastique  $y_t$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , défini par :

$$y_t = \int_0^t h(s, x_s) ds + w_t, \quad (6.2)$$

où la fonction  $h$  définie sur  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n$  est mesurable et bornée sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  pour tout  $T > 0$ .

Dans ces conditions, il est possible de définir pour tout  $t \geq 0$ , le *filtre optimal*  $\Pi_t$ , mesure positive aléatoire sur  $\mathbb{R}^n$ , en posant pour toute fonction  $\phi$  continue et bornée de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\Pi_t \phi = E[\phi(x_t) | \sigma(y_s, 0 \leq s \leq t)].$$

Le filtre optimal  $\Pi_t$  est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique, l'équation de Kushner-Stratonovitch, dont l'énoncé nécessite quelques notations supplémentaires.

Pour tout  $t \geq 0$ , soit  $L_t$  l'opérateur différentiel du second ordre défini pour toute fonction  $\phi$  dans  $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  par

$$L_t \phi(x) = \frac{1}{2} \text{Tr}((\sigma \sigma^* + g g^*)(t, x) \nabla^2 \phi(x)) + \nabla \phi(x) f(t, x)$$

et  $B_t^j$ ,  $1 \leq j \leq d$ , l'opérateur différentiel du premier ordre défini pour toute fonction  $\phi$  dans  $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  par

$$B_t^j \phi(x) = h^j(t, x) \phi(x) + \sum_{k=1}^n g(t, x)^{kj} \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x).$$

Le processus d'innovation associé au problème de filtrage (6.1)-(6.2) est défini par :

$$\nu_t = y_t - \int_0^t \Pi_s h(s, \cdot) ds.$$

L'équation de Kushner-Stratonovitch s'exprime pour toute fonction  $\phi \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  sous la forme de l'équation aux dérivées partielles stochastiques :

$$\Pi_t \phi = \Pi_0 \phi + \int_0^t \Pi_s (L_s \phi) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t (\Pi_s (B_s^j \phi) - \Pi_s h^j(s, \cdot) \Pi_s \phi) d\nu_s^j. \quad (6.3)$$

Introduisons maintenant un filtre non normalisé, solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique linéaire : l'équation de Zakai.

Dans ce but, considérons le processus stochastique

$$Z_t = \exp \left( \int_0^t h(s, x_s)^* dy_s - \frac{1}{2} \int_0^t |h(s, x_s)|^2 ds \right).$$

Sous les hypothèses énoncées plus haut, on a  $E(Z_t^{-1}) \equiv 1$  et le théorème de Girsanov permet donc de définir une nouvelle probabilité  $\bar{P}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ , appelée *probabilité de référence*, par la dérivée de Radon-Nykodim :

$$\frac{d\bar{P}}{dP} = Z_t^{-1}.$$

En fait, les probabilités  $P$  et  $\bar{P}$  sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et, sous  $\bar{P}$ ,  $(\nu_t)_{t \geq 0}$  et  $(y_t)_{t \geq 0}$  sont des processus de Wiener standards indépendants.

Le filtre non normalisé  $\sigma_t$  est alors défini pour toute fonction  $\phi$  de  $C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  par

$$\sigma_t \phi = \bar{E}[Z_t \phi(x_t) | \sigma(y_s, 0 \leq s \leq t)].$$

Le filtre non normalisé  $\sigma_t$  est relié au filtre optimal  $\Pi_t$  par la formule de Kallianpur-Striebel :

$$\Pi_t \phi = \frac{\sigma_t \phi}{\sigma_t 1}$$

et il est solution de l'équation de Zakai :

$$\sigma_t \phi = \sigma_0 \phi + \int_0^t \sigma_s (L_s \phi) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_s (B_s^j \phi) dy_s^j. \quad (6.4)$$

Les équations de Kushner-Stratonovitch et de Zakai peuvent être établies sous des hypothèses plus générales que celles énoncées au début de ce paragraphe. En particulier, il n'est pas nécessaire de supposer que les coefficients du système différentiel stochastique (6.1)-(6.2) sont bornés et on peut supposer que ces coefficients dépendent de l'observation courante  $y_t$  ou même de toute la trajectoire de l'observation jusqu'à l'instant  $t$ . Sur ces questions ainsi que sur d'autres problèmes essentiels en théorie du filtrage non linéaire comme la continuité du filtre par rapport à l'observation, nous renvoyons le lecteur au cours de Pardoux [56].

### 6.3 Absolue continuité du filtre.

Dans ce paragraphe, nous supposons que les coefficients du système différentiel stochastique décrivant le problème de filtrage sont indépendants du temps  $t$  et que la condition initiale  $x_0$  est

donnée dans  $\mathbb{R}^n$ . Le modèle considéré est donc le suivant :

$$\begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t f(x_s) ds + \int_0^t \sigma(x_s) dv_s + \int_0^t g(x_s) dw_s \\ y_t = \int_0^t h(x_s) ds + w_s \end{cases} \quad (6.5)$$

Pour exprimer une condition du type de celle de Hörmander sous laquelle le filtre non normalisé  $\sigma_t$  possède une densité régulière par rapport à la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$ , il est commode d'introduire les champs de vecteurs

$$U_0 = \sum_{i=1}^n f^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et

$$U_k = \sum_{i=1}^n \sigma_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$1 \leq k \leq n$ .

Désignons maintenant par  $\mathcal{A}$  l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs  $U_0, U_1, \dots, U_n$ , et par  $\mathcal{B}$  l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs  $U_1, \dots, U_n$ .

Soit  $\mathcal{I}$  l'idéal engendré par  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{I} = \{U_1, \dots, U_n; [U_i, U_j], 0 \leq i, j \leq n; [U_i, [U_j, U_k]], 0 \leq i, j, k \leq n; \dots\}.$$

On dispose du résultat suivant.

**Théorème 6.3.1** *Si les coefficients du système différentiel stochastique (6.5) sont de classe  $C_b^\infty$  et si l'espace vectoriel engendré par  $\mathcal{I}(x_0)$  coïncide avec  $\mathbb{R}^n$ , alors le filtre non normalisé  $\sigma_t$  possède une densité de classe  $C^\infty$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .*

Le résultat que nous venons d'énoncer peut être étendu, en particulier, à des problèmes de filtrage non linéaire où les coefficients du système dépendent de l'observation courante  $y_t$  (voir par exemple [56, chapitre 5]).



## Chapitre 7

# Filtrage approché d'un signal faiblement bruité

### 7.1 Introduction.

Le problème de filtrage non linéaire étudié dans ce chapitre consiste à estimer un signal de dimension deux, solution d'une équation différentielle stochastique écrite au sens de Itô, lorsque seule la première composante de ce signal est mesurée avec un faible bruit.

Les difficultés rencontrées en pratique pour résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles stochastiques du filtrage non linéaire (équation de Zakai, équation de Kushner Stratonovitch) ont conduit à rechercher des filtres de dimension finie efficaces pour l'estimation de l'état du signal observé.

En dehors de quelques cas particuliers comme celui de Beneš [6] par exemple ou bien entendu de celui du filtre de Kalman-Bucy [36] pour les problèmes linéaires, le filtre optimal est effectivement de dimension infinie, comme l'on montré Chaleyat-Maurel et Michel dans [13]. La technique la plus couramment employée dans la pratique est l'utilisation du filtre de Kalman-Bucy pour le problème linéarisé, ou de diverses variantes issues de cette idée de linéarisation comme le filtre de Kalman étendu (voir par exemple [56]). Si cette démarche n'est pas sans péril en général, son efficacité a cependant été établie dans le cas de problèmes de filtrage non linéaire avec faible bruit d'observation (voir [59] par exemple).

Motivés par les considérations rappelées ci-dessus concernant les difficultés pratiques liées au filtrage optimal, de nombreux auteurs ont étudié depuis quelques années des filtres approchés de dimensions finies associés à des problèmes de filtrage non linéaire avec faible bruit d'observation.

Le cas des problèmes de filtrage non linéaire où le signal et l'observation sont de dimension un a été considéré par Katzur, Bobrowsky et Schuss [38], Picard [57] et Bensoussan [8]. Une extension des résultats établis dans [57] aux problèmes de filtrage multidimensionnels fait l'objet de l'étude menée par Picard dans [58].

La question délicate de problèmes de filtrage unidimensionnels où la fonction d'observation n'est pas nécessairement injective a été abordée par Fleming et Pardoux dans [28] dans le cas particulier d'une fonction d'observation monotone par morceaux. Remarquons que cette question a été étudiée dans d'autres contextes par Zhang [67] et Roubaud [60] par exemple. De plus, dans l'étude de ce type de problèmes, c'est bien souvent la prise en compte de la variation quadratique de la fonction d'observation qui permet une estimation convenable de l'état du signal.

Un cas important de fonction d'observation non-injective est naturellement celui où seule une composante d'un signal de dimension deux peut intervenir dans la fonction d'observation. Ce problème a été étudié dans un cadre particulier de système de filtrage non linéaire avec bruits indépendants par Gegout-Petit [32] et étendu au cas de systèmes avec bruits dépendants par Dietsch [23]. Ce type de problèmes a été aussi abordé par Yaesh, Bobrobsky et Schuss [64] qui ont obtenu obtenu de manière formelle un développement asymptotique du filtre optimal lorsque l'amplitude du bruit d'observation tend vers 0.

Dans [49], Milheiro a étudié, en utilisant la méthode développée par Picard dans [59], un problème de filtrage non linéaire pour un signal de dimension deux dont seule une composante, dont la dynamique n'est pas bruitée, est susceptible d'être mesurée. Dans ce travail, Milheiro a montré que l'erreur de filtrage due à l'emploi du filtre approché (qui coïncide avec celui donné dans [64] dans le cas stationnaire) tend vers zéro avec l'amplitude du bruit d'observation. Un majorant du taux de convergence du filtre approché vers le filtre optimal est aussi calculé. L'étude menée dans [49] a été poursuivie par Milheiro et Picard dans [50] où les auteurs obtiennent une comparaison asymptotique du filtre approché et du filtre optimal.

Le but de ce chapitre est d'étendre les résultats de [49] et [50] aux cas de problèmes de filtrage non linéaire où les deux composantes d'un signal de dimension deux sont bruitées et corrélées avec l'observation.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans le paragraphe 2, on introduit le problème de filtrage non linéaire étudié dans ce chapitre ainsi que le filtre approché utilisé dans ce travail. Le paragraphe 3 est consacré à l'estimation de l'erreur de filtrage associée à l'utilisation de ce filtre. Dans le paragraphe 4, quelques exemples illustrent le résultat obtenu. Enfin, on obtient dans le paragraphe 5 une estimation qui montre, sous une hypothèse renforcée, que le filtre de dimension fini proposé donne une estimation asymptotiquement assez proche de celle du filtre optimal.

## 7.2 Énoncé du problème et notations.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité complet et  $(w_t)_{t \geq 0}$ ,  $(\bar{w}_t)_{t \geq 0}$  deux processus de Wiener standards réels indépendants définis sur cet espace.

Soit  $(x_t, y_t)$  le couple signal-observation solution dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  du problème de filtrage non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 x_{1,t} &= x_{1,0} + \int_0^t f_1(x_{1,s}, x_{2,s}) ds + \int_0^t \sqrt{\varepsilon} \sigma_{1,1}(x_{1,s}, x_{2,s}) dw_s \\
 &\quad + \int_0^t \sqrt{\varepsilon} \sigma_{1,2}(x_{1,s}, x_{2,s}) d\bar{w}_s \\
 x_{2,t} &= x_{2,0} + \int_0^t f_2(x_{1,s}, x_{2,s}) ds + \int_0^t \sigma_{2,1}(x_{1,s}, x_{2,s}) dw_s \\
 &\quad + \int_0^t \sigma_{2,2}(x_{1,s}, x_{2,s}) d\bar{w}_s \\
 y_t &= \int_0^t h(x_{1,s}) ds + \varepsilon \bar{w}_t.
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Dans la suite, les coefficients du système différentiel stochastique (7.1) sont supposés satisfaire aux conditions (A1) à (A5) énoncées ci-dessous.

(A1)  $\varepsilon$  est un réel positif voisin de 0.

(A2)  $h$  est une fonction différentiable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

(A3)  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  est une fonction différentiable de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , dont la différentielle  $\nabla f = F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$  est uniformément bornée.

(A4)  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$  est une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  mesurable et uniformément bornée.

Soit  $\alpha$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\delta_3$  des nombres réels tels que  $0 < \alpha < \sqrt{2}$ ,  $\delta_1 \geq 1$ ,  $\delta_2 \geq 1$ ,  $\delta_3 \geq 1$  et choisis de la manière suivante.

1. Associons à tout élément  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  de  $]0, +\infty[^5$  la matrice symétrique  $C$  de dimension 2 définie par

$$C_{11} = -2x_5 \sqrt{\frac{x_1 x_3}{x_4}} + x_5 x_3$$

$$C_{12} = C_{21} = -x_5 \sqrt{\frac{x_1 x_3}{x_4}} + x_2$$

$$C_{22} = -x_5 x_3$$

et notons  $\lambda$  la plus grande valeur propre de  $C + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} I$ .

L'ensemble  $\{\lambda < 0\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^5$  qui contient  $(1, 1, 1, 1, 1)$  puisque dans ce cas  $C = -I$ .

2. Le pavé  $\Pi = [1/\delta_3, \delta_3] \times [1/\delta_3, \delta_3] \times [1/\delta_1, \delta_1] \times [1/\delta_2, \delta_2] \times [1/\delta_2, \delta_2]$  de  $\mathbb{R}^5$  est inclus dans l'ensemble  $\{\lambda \leq 0\}$ .

Nous pouvons maintenant achever d'exprimer les conditions sous lesquelles la convergence du filtre approché défini ci-dessous pourra être établie.

(A5) Il existe des constantes positives  $\sigma$ ,  $H$ ,  $\bar{F}$  telles que

$$\frac{1}{\delta_1} \leq \frac{\sigma_{21}(x)}{\sigma} \leq \delta_1, \frac{1}{\delta_2} \leq \frac{h'(x_1)}{H} \leq \delta_2, \frac{1}{\delta_3} \leq \frac{F_{12}(x)}{\bar{F}} \leq \delta_3$$

pour tout  $x = (x_1, x_2)$  de  $R^2$ .

Définissons maintenant la dynamique du filtre de dimension deux  $m_t = \begin{pmatrix} m_{1,t} \\ m_{2,t} \end{pmatrix}$ , destiné à

estimer le processus stochastique  $x_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$ . Pour cela, une valeur initiale  $(m_{1,0}, m_{2,0}) \in \mathbb{R}^2$  étant choisie, le processus stochastique  $m_t$  est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dm_t = f(m_t) dt + \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2F_{12}(m_t) \sigma_{21}(m_t)}{\varepsilon h'(m_{1,t})}} \\ \frac{\sigma_{21}(m_t)}{\varepsilon} \end{bmatrix} (dy_t - h(m_{1,t}) dt). \quad (7.2)$$

**Remarque 7.2.1** *Le filtre défini ci-dessus coïncide avec celui donné dans [50] pour le cas où  $\sigma_{1,1} = \sigma_{1,2} = \sigma_{2,2} = 0$ . Il s'agit par ailleurs du filtre obtenu formellement dans un des cas considérés dans [64].*

Afin d'estimer les moments des processus stochastiques  $(x_{1,t} - m_{1,t})_{t \geq 0}$  et  $(x_{2,t} - m_{2,t})_{t \geq 0}$ , nous définissons le processus stochastique  $(Z_t)_{t \geq 0}$  par :

$$Z_t = T(x_t - m_t) \quad (7.3)$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} & \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 7.3 Estimation de l'erreur de filtrage.

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat d'estimation suivant.

**Théorème 7.3.1** *Soit  $p$  un entier positif. Si les hypothèses (A1)-(A5) sont vérifiées avec  $\alpha < \sqrt{2}$  et si  $E(|x_0 - m_0|^{2p}) \leq K < \infty$ , alors il existe des constantes positives  $C_p$  et  $c_p$  telles que pour tout  $t \geq 0$  :*

$$\begin{aligned} E|x_{1,t} - m_{1,t}|^{2p} &\leq C_p \varepsilon^{\frac{3p}{2}} + C_p e^{-\frac{c_p}{\sqrt{\varepsilon}} t} \\ E|x_{2,t} - m_{2,t}|^{2p} &\leq C_p \varepsilon^{\frac{p}{2}} + C_p \frac{1}{\varepsilon^p} e^{-\frac{c_p}{\sqrt{\varepsilon}} t} \end{aligned}$$

**Démonstration.** Dans un premier temps, effectuons un changement d'échelle en remplaçant respectivement  $x_{1,t}$ ,  $x_{2,t}$ ,  $y_t$  et  $\varepsilon$  par :

$$\frac{x_{1,t}}{\sigma \bar{F}}, \quad \frac{x_{2,t}}{\sigma}, \quad \frac{y_t}{\sigma \bar{F} H}, \quad \frac{\varepsilon}{\sigma \bar{F} H}.$$

Cela nous permet de supposer pour la suite que  $\sigma = H = \bar{F} = 1$ .

D'autre part, le processus stochastique  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est solution d'une équation différentielle stochastique linéaire. Afin d'établir cette équation, observons que la formule de Taylor implique l'existence de trois processus stochastiques adaptés  $(\theta_{1,t})_{t \geq 0}$ ,  $(\theta_{2,t})_{t \geq 0}$  et  $(\theta_{3,t})_{t \geq 0}$  (dépendants de  $(x_t)_{t \geq 0}$  et  $(m_t)_{t \geq 0}$ ) tels que :

$$f(x_t) - f(m_t) = \begin{pmatrix} F_{11}(\theta_{1,t}) & F_{12}(\theta_{1,t}) \\ F_{21}(\theta_{2,t}) & F_{22}(\theta_{2,t}) \end{pmatrix} (x_t - m_t)$$

et

$$h(x_{1,t}) - h(m_{1,t}) = h'(\theta_{3,t})(x_{1,t} - m_{1,t}).$$

Ainsi, le processus stochastique  $(Z_t)_{t \geq 0}$  défini par (7.3) vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dZ_t = A_t Z_t dt + U_t \begin{pmatrix} dw_t \\ d\bar{w}_t \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

où les composantes de la matrice  $A_t$  sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} * A_{11,t} &= F_{11}(\theta_{1,t}) - F_{21}(\theta_{2,t}) \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} - h'(\theta_{3,t}) \sqrt{\frac{2F_{12}(m_t) \sigma_{21}(m_t)}{\varepsilon h'(m_{1,t})} + \frac{h'(\theta_{3,t}) \sigma_{21}(m_t)}{\sqrt{2\varepsilon}}} \\ * A_{12,t} &= A_{11,t} + \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} F_{12}(\theta_{1,t}) - F_{22}(\theta_{2,t}) \\ * A_{21,t} &= F_{21}(\theta_{2,t}) \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} - \frac{h'(\theta_{3,t}) \sigma_{21}(m_t)}{\sqrt{2\varepsilon}} \\ * A_{22,t} &= A_{21,t} + F_{22}(\theta_{2,t}) \end{aligned}$$

et la matrice  $U_t$  est définie par

$$U_t = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sigma_{11}(x_t) - \sigma_{21}(x_t) & \sqrt{2}\sigma_{12}(x_t) - \sqrt{\frac{2F_{12}(m_t)\sigma_{21}(m_t)}{h'(m_{1,t})}} + \sigma_{21}(m_t) - \sigma_{22}(x_t) \\ \sigma_{21}(x_t) & -\sigma_{21}(m_t) + \sigma_{22}(x_t) \end{pmatrix}.$$

Remarquons que cette dernière matrice est bornée compte-tenu des hypothèses (A4) et (A5), tandis que  $A_t$  est la somme d'une matrice bornée et de la matrice  $\bar{A}_t$  définie par :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11,t} &= -\frac{h'(\theta_{3,t})}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{2F_{12}(m_t)\sigma_{21}(m_t)}{h'(m_{1,t})}} + \frac{h'(\theta_{3,t})\sigma_{21}(m_t)}{\sqrt{2\varepsilon}} \\ \bar{A}_{12,t} &= \bar{A}_{11,t} + \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} F_{12}(\theta_{1,t}) \\ \bar{A}_{21,t} &= \bar{A}_{22,t} = -\frac{h'(\theta_{3,t})\sigma_{21}(m_t)}{\sqrt{2\varepsilon}} \end{aligned}$$

De plus, en notant  $B_t$  la matrice définie par  $B_t = \bar{A}_t + (\bar{A}_t)^*$ , on a :

$$\begin{aligned} B_{11,t} &= -\frac{2h'(\theta_{3,t})}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{2F_{12}(m_t)\sigma_{21}(m_t)}{h'(m_{1,t})}} + \frac{2h'(\theta_{3,t})\sigma_{21}(m_t)}{\sqrt{2\varepsilon}} \\ B_{12,t} &= B_{21,t} = -\frac{h'(\theta_{3,t})}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{2F_{12}(m_t)\sigma_{21}(m_t)}{h'(m_{1,t})}} + \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} F_{12}(\theta_{1,t}) \\ B_{22,t} &= -\frac{2h'(\theta_{3,t})\sigma_{21}(m_t)}{\sqrt{2\varepsilon}} \end{aligned}$$

et, d'après l'hypothèse (A5), la matrice symétrique  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}B_t + I$  est semi-définie négative. On obtient donc :

$$B_t \leq -\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}I. \quad (7.5)$$

Cette propriété de stabilité de la matrice  $B_t$  va permettre d'estimer les moments de  $Z_t$ .

Par application de la formule d'Itô, on déduit de (7.4) que

$$d\|Z_t\|^2 = (Z_t^*(A_t + A_t^*)Z_t + \text{trace}(U_t^*U_t))dt + 2Z_t^*U_t \begin{pmatrix} dw_t \\ d\bar{w}_t \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

et par conséquent, comme la matrice  $U_t$  est uniformément bornée, les moments de  $\|Z_t\|^2$  sont finis. Plus précisément, pour tout entier  $p \geq 2$ , on a, par application de la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E\|Z_t\|^{2p} &= pE\left(\|Z_t\|^{2p-2}Z_t^*(A_t + A_t^*)Z_t\right) + pE\left(\|Z_t\|^{2p-2}\text{trace}(U_t^*U_t)\right) \\ &\quad + 2p(p-1)E\left(\|Z_t\|^{2p-4}\|U_t^*Z_t\|^2\right). \end{aligned}$$

Compte tenu de (7.5) et du fait que la trace de la matrice  $U_t^*U_t$  est uniformément bornée, on déduit de cette dernière égalité l'existence de constantes positives  $C_p$  et  $\alpha' \leq \alpha$  telles que

$$\frac{d}{dt}E\|Z_t\|^{2p} \leq -p\frac{\alpha'}{\sqrt{\varepsilon}}E\|Z_t\|^{2p} + C_pE\|Z_t\|^{2p-2},$$

dès que  $\varepsilon$  est assez petit.

Choisissons maintenant  $C'_p$  de telle sorte que

$$C_p E \|Z_t\|^{2p-2} \leq p \frac{\alpha'}{2\sqrt{\varepsilon}} E \|Z_t\|^{2p} + C'_p \varepsilon^{\frac{p-1}{2}}$$

nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} E \|Z_t\|^{2p} \leq -p \frac{\alpha'}{2\sqrt{\varepsilon}} E \|Z_t\|^{2p} + C'_p \varepsilon^{\frac{p-1}{2}}.$$

L'intégration de cette inéquation différentielle conduit à l'estimation suivante pour les moments de  $Z_t$

$$E \|Z_t\|^{2p} \leq C''_p \varepsilon^{\frac{p}{2}} + C''_p E \|Z_0\|^{2p} e^{-p \frac{\alpha'}{2\sqrt{\varepsilon}} t}. \quad (7.7)$$

Les estimations annoncées dans le théorème résultent alors de la définition de  $Z_t$  et de l'expression de la matrice  $T^{-1}$ .  $\square$

**Remarque 7.3.2** Il ressort de l'inégalité (7.7) que la valeur de la constante  $\alpha'$ , arbitrairement proche de  $\alpha$  quand  $\varepsilon$  est assez petit, apparaît dans la "constante de temps" de la décroissance exponentielle des termes où intervient l'erreur sur la condition initiale dans les estimations obtenues pour l'erreur de filtrage.

Nous examinons maintenant quelques cas particuliers pour le système (7.1) afin d'illustrer l'analyse qui vient d'être menée. Il s'agit de situations où la fonction  $f_1(x_1, x_2)$  ne dépend que de  $x_2$  et ceci de manière linéaire.

## 7.4 Exemples.

### 7.4.1 Un cas où l'observation est linéaire.

Lorsque le système (7.1) s'écrit sous la forme

$$dx_{1,t} = F_{1,2} x_{2,t} dt + \sqrt{\varepsilon} \sigma_{1,1}(x_{1,t}, x_{2,t}) dw_t + \sqrt{\varepsilon} \sigma_{1,2}(x_{1,t}, x_{2,t}) d\bar{w}_t$$

$$dx_{2,t} = f_2(x_{1,t}, x_{2,t}) dt + \sigma_{2,1}(x_{1,t}, x_{2,t}) dw_t + \sigma_{2,2}(x_{1,t}, x_{2,t}) d\bar{w}_t$$

$$dy_t = H x_{1,t} dt + \varepsilon d\bar{w}_t$$

où  $F_{1,2}$  et  $H$  sont deux constantes positives, en prenant la valeur 1 pour les constantes  $\delta_2$  et  $\delta_3$  l'hypothèse (A5) se réduit à :

$$\frac{1}{\delta_1} \leq \frac{\sigma_{21}(x)}{\sigma} \leq \delta_1 \quad (7.8)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ .

La première valeur propre  $\lambda$  de  $C + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} I$  est donnée dans ce cas en fonction de  $x_3$  par :

$$\lambda(x_3) = -\sqrt{x_3} + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + \sqrt{x_3^2 + 2x_3 - 2x_3\sqrt{x_3} - 2\sqrt{x_3} + 1}$$

Il est possible de vérifier numériquement que la quantité

$$-\sqrt{x_3} + \sqrt{x_3^2 + 2x_3 - 2x_3\sqrt{x_3} - 2\sqrt{x_3} + 1}$$

est négative si  $x_3$  est dans l'intervalle  $\left] \frac{1}{\delta}, \delta \right[$  avec  $\delta \simeq 3,546$ .

Le théorème 7.3.1 s'applique donc dans cette situation dès que la condition (7.8) est satisfaite avec  $\delta_1 < \delta$ , pour une certaine valeur de  $\alpha$  dépendant de  $\delta_1$ .

### 7.4.2 Équation du second ordre bruitée.

Dans le cas du problème de filtrage

$$dx_{1,t} = x_{2,t} dt$$

$$dx_{2,t} = f_2(x_{1,t}, x_{2,t}) dt + \sigma dw_t + \sigma' d\bar{w}_t$$

$$dy_t = h(x_{1,t}) dt + \varepsilon d\bar{w}_t$$

où  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux constantes positives, on peut exprimer  $\lambda$  sous la forme suivante :

$$\lambda = \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-x_5 \sqrt{x_4} + \sqrt{2x_5^2 x_4 - 2x_4^{3/2} x_5^2 + x_5^2 x_4^2 + x_4^2 - 2x_5 x_4^{3/2}}}{x_4}$$

On peut alors vérifier, par exemple, que si la fonction  $h$  vérifie pour une constante positive  $H$  la condition

$$\frac{3}{4} \leq \frac{h'(x)}{H} \leq \frac{4}{3}; \forall x \in \mathbb{R}$$

alors,  $\lambda$  est négatif pour  $\alpha = 0, 4$ , et le théorème 7.3.1 s'applique avec cette valeur de la constante  $\alpha$ .

## 7.5 Comparaison avec le filtre optimal.

Il s'agit dans ce paragraphe d'évaluer en termes de moments, pour un horizon fini arbitraire  $T$ , l'ordre de grandeur de la différence entre le filtre de dimension finie introduit dans le paragraphe deux et le filtre optimal :

$$\hat{x}_t = E[x_t | \sigma(y_s, 0 \leq s \leq t)].$$

Le résultat sera obtenu sous l'hypothèse que le bruit affectant l'observation agit de manière modérée sur le signal. Plus précisément, le problème de filtrage que nous étudions désormais est décrit par les équations différentielles stochastiques :

$$\begin{aligned} x_{1,t} &= x_{1,0} + \int_0^t f_1(x_{1,s}, x_{2,s}) ds + \int_0^t \varepsilon^{\frac{3}{4}} \sigma_{1,1}(x_{1,s}, x_{2,s}) dw_s \\ &\quad + \int_0^t \varepsilon^{\frac{3}{4}} \sigma_{1,2}(x_{1,s}, x_{2,s}) d\bar{w}_s \\ x_{2,t} &= x_{2,0} + \int_0^t f_2(x_{1,s}, x_{2,s}) ds + \int_0^t \sigma_{2,1}(x_{1,s}, x_{2,s}) dw_s \\ &\quad + \int_0^t \varepsilon^{\frac{1}{4}} \sigma_{2,2}(x_{1,s}, x_{2,s}) d\bar{w}_s \\ y_t &= \int_0^t h(x_{1,s}) ds + \varepsilon \bar{w}_t. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Les coefficients de ce système différentiel stochastique sont supposés satisfaire aux conditions suivantes.

(B1)  $\varepsilon$  est un réel positif voisin de 0.

- (B2)  $h$  est une fonction de classe  $C^3$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dont les dérivées jusqu'à l'ordre 3 sont bornées.
- (B3)  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  est une fonction de classe  $C^3$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 3 sont bornées.
- (B4)  $\sigma_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  sont des fonctions de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont bornées.

Afin de formuler une hypothèse du même type que (A5), choisissons tout d'abord un réel positif  $\alpha < \sqrt{2}$ , puis trois réels  $\delta_1 \geq 1$ ,  $\delta_2 \geq 1$ ,  $\delta_3 \geq 1$  de la manière suivante :

1. Associons à tout élément  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  de  $]0, +\infty[^5$  la matrice carrée et symétrique  $C'$  de dimension 2 définie par

$$\begin{aligned} C'_{11} &= -x_1 x_3 \\ C'_{12} = C'_{21} &= -x_4 + x_1 \sqrt{\frac{x_3 x_5}{x_2}} \\ C'_{22} &= x_1 x_3 - 2x_1 \sqrt{\frac{x_3 x_5}{x_2}} \end{aligned}$$

et notons  $\lambda'$  la plus grande valeur propre de  $C' + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}I$ .

L'ensemble  $\{\lambda' < 0\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^5$  qui contient  $(1, 1, 1, 1, 1)$  puisque dans ce cas  $C' = -I$ .

2.  $\delta'_1, \delta'_2$  et  $\delta'_3$  sont des réels positifs choisis de telle sorte que le pavé  $\Pi = [1/\delta'_1, \delta'_1] \times [1/\delta'_1, \delta'_1] \times [1/\delta'_2, \delta'_2] \times [1/\delta'_3, \delta'_3] \times [1/\delta'_3, \delta'_3]$  de  $\mathbb{R}^5$  est inclus dans l'ensemble  $\{\lambda' \leq 0\}$ .

On suppose de plus que l'hypothèse suivante est satisfaite.

(B5) Il existe des constantes positives  $\sigma', H', \overline{F'}$  telles que

$$\frac{1}{\delta'_1} \leq \frac{\sigma_{21}(x)}{\sigma'} \leq \delta'_1, \frac{1}{\delta'_2} \leq \frac{h'(x_1)}{H'} \leq \delta'_2, \frac{1}{\delta'_3} \leq \frac{F_{12}(x)}{\overline{F'}} \leq \delta'_3$$

pour tout  $x = (x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

On supposera en outre que la loi de la variable aléatoire  $x_0$  possède une densité  $p_0$  par rapport à la mesure de Lebesgue telle que :

(B6)  $p_0(x_0)^{-1} \nabla p_0(x_0)$  est dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Voici maintenant une notation utile pour les estimations à venir. Elle concerne des familles de processus aléatoires indexées par le paramètre réel positif  $\varepsilon$ .

Soit  $\xi = (\xi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  une famille de processus aléatoires. Dans toute la suite, la notation :

$$\xi_t = O(\varepsilon^\beta)$$

signifie qu'il existe des constantes positives  $K_1, K_2$  et  $c$  indépendantes de  $\varepsilon$  telles que :

$$E(|\xi_t|^p)^{\frac{1}{p}} \leq K_1 \varepsilon^\beta + K_2 \varepsilon^{-q} \exp\left(-\frac{ct}{\varepsilon^\alpha}\right)$$

pour deux réels  $q \geq 0$  et  $\alpha > 0$ . Le processus  $\xi$  sera alors dit d'ordre  $\varepsilon^\beta$  dans  $L^p$ .

Notons que le théorème 7.3.1 signifie que  $x_{1,t} - m_{1,t} = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\right)$  et que  $x_{2,t} - m_{2,t} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right)$  dans tous les espaces  $L^p$ ,  $p \geq 1$ . De plus, on vérifie immédiatement à partir de l'inégalité de Hölder

que si les processus  $\xi^1$  et  $\xi^2$  sont respectivement d'ordres  $\beta$  et  $\gamma$  dans  $L^{2p}$  et  $L^{2p'}$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , alors leur produit est d'ordre  $\beta + \gamma$  dans  $L^2$ .

Voici maintenant le résultat concernant l'ordre dans  $L^2$  de la différence entre le filtre de dimension finie et le filtre optimal.

**Théorème 7.5.1** *Soit  $T$  un réel positif fixé. Si les coefficients du système différentiel stochastique (7.9) satisfont aux hypothèses (B1)-(B6) et (A5), alors on a pour  $0 \leq t \leq T$  :*

$$\widehat{x}_{1,t} - m_{1,t} = O(\varepsilon)$$

$$\widehat{x}_{2,t} - m_{2,t} = O(\sqrt{\varepsilon})$$

dans  $L^2$ .

**Démonstration.** Nous suivons la démarche de [50].

Commençons par définir diverses quantités qui interviendront dans cette démonstration. Soit donc :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix}, \Sigma_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \sigma_{12} \\ \varepsilon^{\frac{1}{4}} \sigma_{22} \end{bmatrix}, H = [ h' \quad 0 ].$$

La matrice symétrique ci-dessous apparaît comme terme dominant dans la "matrice de covariance du filtrage" (filtering covariance matrix) dans les calculs de [64],

$$P_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{h'(m_{1,t})} \sqrt{\frac{2\sigma_{21}(m_t) F_{12}(m_t)}{h'(m_{1,t})}} \varepsilon^{\frac{3}{2}} & \frac{\sigma_{21}(m_t)}{h'(m_{1,t})} \varepsilon \\ \frac{\sigma_{21}(m_t)}{h'(m_{1,t})} \varepsilon & \sigma_{21}(M_t) \sqrt{\frac{2\sigma_{21}(m_t)}{h'(m_{1,t}) F_{12}(m_t)}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

De plus, cette matrice satisfait à la relation suivante :

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} P_t H^*(m_t) H(m_t) P_t + \tilde{F}(m_t) P_t + P_t \tilde{F}^*(m_t) + \tilde{\Sigma}(m_t) \tilde{\Sigma}^*(m_t) = 0 \quad (7.10)$$

où

$$\tilde{F}(m) = \begin{bmatrix} 0 & F_{12}(m) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\tilde{\Sigma}(m) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{21}(m) \end{bmatrix}$$

et, son inverse est donné par

$$P_t^{-1} = \begin{bmatrix} h'(m_{1,t}) \sqrt{\frac{2h'(m_{1,t})}{\sigma_{21}(m_t) F_{12}(m_t)}} \varepsilon^{-\frac{3}{2}} & -\frac{h'(m_{1,t})}{\sigma_{21}(m_t)} \varepsilon^{-1} \\ -\frac{h'(m_{1,t})}{\sigma_{21}(m_t)} \varepsilon^{-1} & \frac{1}{\sigma_{21}(m_t)} \sqrt{\frac{2h'(m_{1,t}) F_{12}(m_t)}{\sigma_{21}(m_t)}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Les hypothèses sur les coefficients du système différentiel stochastique (7.9) impliquent que pour chaque valeur de  $\varepsilon$ ,  $P_t$  ainsi que son inverse sont uniformément bornées.

On utilisera aussi le changement de base définie par les matrices

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \end{bmatrix}$$

et

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \end{bmatrix}.$$

### Un changement de probabilité.

On commence par introduire une nouvelle probabilité  $\tilde{P}$  définie en vertu du théorème de Girsanov par :

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \Lambda_t^{-1} = \exp \left[ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t h(x_{1,s}) d\tilde{w}_s + \int_0^t \tilde{\Sigma}^*(m_s) P_s^{-1} (x_s - m_s) dw_s - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t [h(x_{1,s})]^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \tilde{\Sigma}^*(m_s) P_s^{-1} (x_s - m_s) \right]^2 ds \right]$$

Sous la probabilité  $\tilde{P}$ ,  $y_t/\varepsilon$  et  $\tilde{w}_t = w_t - \int_0^t \tilde{\Sigma}^*(m_s) P_s^{-1} (x_s - m_s) ds$  sont des processus de Wiener standards indépendants.

Afin d'obtenir les estimations souhaitées, nous devons évaluer l'ordre de grandeur (en termes de moments) du processus

$$V_t = \left( \nabla_0 \log(\Lambda_t) (\nabla_0 x_t)^{-1} + (x_t - m_t)^* P_t^{-1} \right) U, \quad (7.11)$$

$\nabla_0$  désignant l'opérateur de dérivation (dans  $L^q$ ,  $q > 1$ ) par rapport à la condition initiale  $X_0$  (des précisions concernant cet opérateur différentiel sont données dans l'appendice).

### Calcul de la différentielle de $V_t$ .

La formulation suivante de la différentielle de  $x_t$  fait apparaître la possibilité d'appliquer l'opérateur  $\nabla_0$  à la semi-martingale

$$dx_t = f(x_t)dt + \Sigma(x_t) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} (x_t - m_t) dt + \Sigma(x_t) d\tilde{w}_t + \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1(x_t) (dy_t - h(x_{1,t})dt). \quad (7.12)$$

En fait, le processus  $\nabla_0 x_t$  est solution de l'équation différentielle stochastique linéaire :

$$\begin{aligned} d(\nabla_0 x_t) &= \left[ F(x_t) + \Sigma(x_t) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \right] \nabla_0 x_t dt \\ &\quad + \Sigma'(x_t) \nabla_0 x_t \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} (x_t - m_t) dt \\ &\quad + \Sigma'(x_t) \nabla_0 x_t d\tilde{w}_t + \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1'(x_t) \nabla_0 x_t (dy_t - h(x_{1,t})dt) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1(x_t) h'(x_{1,t}) \nabla_0 x_{1,t} dt \\ &= \left[ F(x_t) + \Sigma(x_t) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \right] \nabla_0 x_t dt \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1(x_t) h'(x_{1,t}) \nabla_0 x_{1,t} dt \\ &\quad + \Sigma'(x_t) \nabla_0 x_t dw_t + \Sigma_1'(x_t) \nabla_0 x_t d\tilde{w}_t \end{aligned} \quad (7.13)$$

avec la condition initiale  $\nabla_0 x_0 = I$ . Ce point est discuté plus en détail dans l'appendice à la fin de ce chapitre.

La formule d'Itô permet alors de vérifier que  $\nabla_0 x_t$  est inversible et que son inverse satisfait à l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{aligned} d(\nabla_0 x_t)^{-1} &= -(\nabla_0 x_t)^{-1} \left[ F(x_t) + \Sigma(x_t) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_0 x_t)^{-1} \Sigma_1(x_t) H(x_t) dt \\ &\quad - (\nabla_0 x_t)^{-1} \Sigma'(x_t) dw_t - (\nabla_0 x_t)^{-1} \Sigma'_1(x_t) d\bar{w}_t \\ &\quad + (\nabla_0 x_t)^{-1} (\Sigma'(x_t)^2 + \Sigma'_1(x_t)^2) dt. \end{aligned}$$

Un calcul analogue conduit d'autre part à

$$\nabla_0 \log(\Lambda_t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t h'(x_{1,s}) \nabla_0 x_{1,s} d\bar{w}_s - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \tilde{\Sigma}^*(m_s) P_s^{-1} \nabla_0 x_s dw_s$$

à partir de la formulation ci-dessous de  $\log(\Lambda_t)$

$$\begin{aligned} \log(\Lambda_t) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t h(x_{1,s}) dy_s - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t h^2(x_{1,s}) ds \\ &\quad - \int_0^t \tilde{\Sigma}^*(m_s) P_s^{-1} (x_s - m_s) d\bar{w}_s \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \left( \tilde{\Sigma}^*(m_s) P_s^{-1} (x_s - m_s) \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Appliquant à nouveau la formule d'Itô, on obtient :

$$\begin{aligned} d\left(\nabla_0 \log(\Lambda_t) (\nabla_0 x_t)^{-1}\right) &= \frac{1}{\varepsilon} H(x_t) d\bar{w}_t - \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} dw_t \\ &\quad - \nabla_0 \log(\Lambda_t) (\nabla_0 x_t)^{-1} \Sigma'(x_t) dw_t \\ &\quad - \nabla_0 \log(\Lambda_t) (\nabla_0 x_t)^{-1} \Sigma'_1(x_t) d\bar{w}_t \\ &\quad - \nabla_0 \log(\Lambda_t) (\nabla_0 x_t)^{-1} \left[ F(x_t) + \Sigma(x_t) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \right. \\ &\quad \quad \left. - \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1(x_t) H(x_t) + \Sigma'(x_t)^2 + \Sigma'_1(x_t)^2 \right] dt \\ &\quad + \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \Sigma'(x_t) dt - \frac{1}{\varepsilon} H(x_t) \Sigma'_1(x_t) dt. \end{aligned}$$

D'autre part, en prenant en compte la définition (7.2) du filtre  $m_t$ , on a :

$$\begin{aligned} d(x_t - m_t) &= [f(x_t) - f(m_t)] dt - R_t (h(x_{1,t}) - h(m_{1,t})) dt \\ &\quad - \varepsilon R_t d\bar{w}_t + \Sigma(x_t) dw_t + \Sigma_1(x_t) d\bar{w}_t. \end{aligned}$$

Notons

$$dP_t^{-1} = J_t^{(1)} dt + J_t^{(2)} d\bar{w}_t$$

la différentielle de la semi-martingale  $P_t^{-1}$ .

Avec ces notations, on est conduit à l'expression suivante concernant le second terme de  $V_t U^{-1}$  :

$$\begin{aligned} d[(x_t - m_t)^* P_t^{-1}] &= [f^*(x_t) - f^*(m_t) \\ &\quad - R_t^* (h(x_{1,t}) - h(m_{1,t}))] P_t^{-1} dt \\ &\quad + \Sigma^*(x_t) P_t^{-1} dw_t \\ &\quad + [\Sigma_1^*(x_t) - \varepsilon R_t^*] P_t^{-1} d\bar{w}_t \\ &\quad + (x_t - m_t)^* \left[ J_t^{(1)} dt + J_t^{(2)} d\bar{w}_t \right] \\ &\quad + [\Sigma_1^*(x_t) - \varepsilon R_t^*] J_t^{(2)} dt \end{aligned} \tag{7.14}$$

Comme dans la démonstration du théorème 7.3.1, on va chercher à exploiter la formule de Taylor pour faire apparaître  $V_t$  comme la solution d'une équation différentielle linéaire. On a :

$$f(x_t) - f(m_t) = F(m_t)(x_t - m_t) + \phi_t$$

et

$$h(x_{1,t}) - h(m_{1,t}) = H(m_t)(x_t - m_t) + \gamma_t,$$

les processus stochastiques  $\phi_t$  et  $\gamma_t$  vérifiant respectivement

$$\|\phi_t\| \leq C \|x_t - m_t\|^2 \quad (7.15)$$

et

$$|\gamma_t| \leq C |x_{1,t} - m_{1,t}|^2. \quad (7.16)$$

Conjointement avec l'identité  $H^*(m_t) R_t^* P_t^{-1} = \varepsilon^{-2} H^*(m_t) H(m_t)$ , les égalités ci-dessus substituées dans (7.14) conduisent à :

$$\begin{aligned} d[(x_t - m_t)^* P_t^{-1}] &= (x_t - m_t)^* \left[ F^*(m_t) P_t^{-1} - \frac{1}{\varepsilon^2} H^*(m_t) H(m_t) \right] dt \\ &\quad + \Sigma^*(x_t) P_t^{-1} dw_t \\ &\quad + [\Sigma_1^*(x_t) - \varepsilon R_t^*] P_t^{-1} d\bar{w}_t + (x_t - m_t)^* \left[ J_t^{(1)} dt + J_t^{(2)} d\bar{w}_t \right] \\ &\quad + [\Sigma_1^*(x_t) - \varepsilon R_t^*] J_t^{(2)} dt + (\phi_t^* - \gamma_t R_t^*) P_t^{-1} dt. \end{aligned}$$

La différentielle de  $V_t U^{-1}$  apparaît donc sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} d(V_t U^{-1}) &= -V_t U^{-1} \left[ F(x_t) + \Sigma(x_t) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} - \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1(x_t) H(x_t) \right. \\ &\quad \left. + \Sigma'(x_t)^2 + \Sigma_1'(x_t)^2 \right] dt \\ &\quad - V_t U^{-1} \Sigma'(x_t) dw_t - V_t U^{-1} \Sigma_1'(x_t) d\bar{w}_t \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} H(x_t) d\bar{w}_t - \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} dw_t \\ &\quad + \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \Sigma'(x_t) dt - \frac{1}{\varepsilon} H(x_t) \Sigma_1'(x_t) dt + \Sigma^*(x_t) P_t^{-1} dw_t \\ &\quad + (x_t - m_t)^* S_t dt + (x_t - m_t)^* P_t^{-1} \Sigma'(x_t) dw_t \\ &\quad + (x_t - m_t)^* P_t^{-1} \Sigma_1'(x_t) d\bar{w}_t \\ &\quad + [\Sigma_1^*(x_t) - \varepsilon R_t^*] P_t^{-1} d\bar{w}_t + (x_t - m_t)^* \left[ J_t^{(1)} dt + J_t^{(2)} d\bar{w}_t \right] \\ &\quad + [\Sigma_1^*(x_t) - \varepsilon R_t^*] J_t^{(2)} dt + (\phi_t^* - \gamma_t R_t^*) P_t^{-1} dt \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S_t &= F^*(m_t) P_t^{-1} - \frac{1}{\varepsilon^2} H^*(m_t) H(m_t) + P_t^{-1} F(x_t) \\ &\quad + P_t^{-1} \Sigma(x_t) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} - \frac{1}{\varepsilon} P_t^{-1} \Sigma_1(x_t) H(x_t) \\ &\quad - P_t^{-1} (\Sigma'(x_t)^2 + \Sigma_1'(x_t)^2) \end{aligned}$$

Finalement, nous avons obtenu

$$\begin{aligned} dV_t &= V_t A_t dt + J_t^{(3)} dt + J_t^{(4)} dw_t + J_t^{(5)} d\bar{w}_t \\ &\quad - V_t U^{-1} \Sigma'(x_t) U dw_t - V_t U^{-1} \Sigma_1'(x_t) U d\bar{w}_t \end{aligned} \quad (7.17)$$

en notant :

$$A_t = -U^{-1} \left[ F(x_t) + \Sigma(x_t) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} - \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1(x_t) H(x_t) + \Sigma'(x_t)^2 + \Sigma_1'(x_t)^2 \right] U$$

$$\begin{aligned} J_t^{(3)} &= \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \Sigma'(x_t) U - \frac{1}{\varepsilon} H(x_t) \Sigma_1'(x_t) U + (x_t - m_t)^* S_t U \\ &\quad + (x_t - m_t)^* J_t^{(1)} U \\ &\quad + [\Sigma_1^*(x_t) - \varepsilon R_t^*] J_t^{(2)} U + (\phi_t^* - \gamma_t R_t^*) P_t^{-1} U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_t^{(4)} &= -\tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} U + \Sigma^*(x_t) P_t^{-1} U + (x_t - m_t)^* P_t^{-1} \Sigma'(x_t) U \\ &= \left( \Sigma^*(x_t) - \tilde{\Sigma}^*(m_t) \right) P_t^{-1} U + (x_t - m_t)^* P_t^{-1} \Sigma'(x_t) U \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_t^{(5)} &= \frac{1}{\varepsilon} H(x_t) U + (x_t - m_t)^* P_t^{-1} \Sigma_1'(x_t) U + [\Sigma_1^*(x_t) - \varepsilon R_t^*] P_t^{-1} U \\ &\quad + (x_t - m_t)^* J_t^{(2)} U \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (H(x_t) - H(m_t)) U + (x_t - m_t)^* P_t^{-1} \Sigma_1'(x_t) U + (x_t - m_t)^* J_t^{(2)} U \\ &\quad + \Sigma_1^*(x_t) P_t^{-1} U. \end{aligned}$$

La dernière égalité étant justifiée par l'identité  $\varepsilon R_t^* P_t^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} H(m_t)$ .

Dans la mesure où l'on va vérifier que la matrice  $A_t$  jouit, sous les hypothèses choisies, d'une propriété de stabilité, l'ordre de grandeur du moment d'ordre 2 de  $V_t$  pourra finalement être estimé grâce à la conséquence suivante de (7.17) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E \|V_t\|^2 &= E(V_t (A_t + A_t^*) V_t^*) + 2E \left( J_t^{(3)} V_t^* \right) \\ &\quad + E \left( \left\| J_t^{(4)} - V_t U^{-1} \Sigma'(x_t) U \right\|^2 \right) \\ &\quad + E \left( \left\| J_t^{(5)} - V_t U^{-1} \Sigma_1'(x_t) U \right\|^2 \right) \end{aligned} \quad (7.18)$$

### Stabilité de $A_t$ .

Les composantes de la matrice

$$\tilde{A}_t = F(x_t) + \Sigma(x_t) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} - \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1(x_t) H(x_t) + \Sigma'(x_t)^2 + \Sigma_1'(x_t)^2$$

sont :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11,t} &= F_{11}(x_t) - \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \sigma_{12}(x_t) h'(x_{1,t}) - \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \sigma_{12}(x_t) h'(m_{1,t}) \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{3}{2}} (\partial_1 \sigma_{11}(x_t))^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} (\partial_1 \sigma_{12}(x_t))^2 \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} &\quad + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \partial_1 \sigma_{21}(x_t) \partial_2 \sigma_{11}(x_t) + \varepsilon \partial_1 \sigma_{22}(x_t) \partial_2 \sigma_{12}(x_t) \\ \tilde{A}_{12,t} &= F_{12}(x_t) + \varepsilon^{\frac{1}{4}} \sigma_{21}(x_t) \sqrt{\frac{2h'(m_{1,t}) F_{12}(m_t)}{\sigma_{21}(m_t)}} \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \partial_1 \sigma_{11}(x_t) \partial_2 \sigma_{11}(x_t) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \partial_1 \sigma_{12}(x_t) \partial_2 \sigma_{12}(x_t) \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \partial_2 \sigma_{21}(x_t) \partial_2 \sigma_{21}(x_t) + \varepsilon \partial_2 \sigma_{12}(x_t) \partial_2 \sigma_{22}(x_t) \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_{21,t} &= F_{21}(x_t) - \varepsilon^{-1}\sigma_{21}(x_t)h'(m_{1,t}) - \varepsilon^{-\frac{3}{4}}\sigma_{22}(x_t)h'(x_{1,t}) \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\partial_1\sigma_{11}(x_t)\partial_1\sigma_{21}(x_t) + \varepsilon\partial_2\sigma_{12}(x_t)\partial_1\sigma_{22}(x_t) \\ &\quad + \partial_1\sigma_{21}(x_t)\partial_2\sigma_{21}(x_t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\partial_1\sigma_{22}(x_t)\partial_2\sigma_{22}(x_t)\end{aligned}\quad (7.21)$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_{22,t} &= F_{22}(x_t) + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma_{21}(x_t)\sqrt{\frac{2h'(m_{1,t})F_{12}(m_t)}{\sigma_{21}(m_t)}} \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\partial_2\sigma_{11}(x_t)\partial_1\sigma_{21}(x_t) \\ &\quad + \varepsilon\partial_2\sigma_{12}(x_t)\partial_1\sigma_{22}(x_t) + (\partial_2\sigma_{21}(x_t))^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial_2\sigma_{22}(x_t))^2\end{aligned}\quad (7.22)$$

De plus, on a :

$$A_t = \begin{bmatrix} \sigma_{21}(x_t)h'(m_{1,t}) & \sigma_{21}(x_t)h'(m_{1,t}) + 2F_{12}(x_t) \\ -2\sigma_{21}(x_t)\sqrt{\frac{h'(m_{1,t})F_{12}(m_t)}{\sigma_{21}(m_t)}} & -\sigma_{21}(x_t)h'(m_{1,t}) \\ -\sigma_{21}(x_t)h'(m_{1,t}) & +2\sigma_{21}(x_t)\sqrt{\frac{h'(m_{1,t})F_{12}(m_t)}{\sigma_{21}(m_t)}} \end{bmatrix} + O(\varepsilon^{-\frac{1}{4}})$$

et par conséquent, d'après l'hypothèse (B5), pour  $\varepsilon$  assez petit, on a  $A_t + A_t^* \leq -\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}I$ .

D'autre part, on vérifie que les matrices  $U^{-1}\Sigma'(x)U$  et  $U^{-1}\Sigma'_1(x)U$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^2$  indépendamment de  $\varepsilon$ . On trouve en effet pour la première de ces deux matrices

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{\frac{3}{4}}\partial_1\sigma_{11}(x) - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\partial_1\sigma_{21}(x) & \varepsilon^{\frac{3}{4}}\partial_1\sigma_{11}(x) - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\partial_1\sigma_{21}(x) \\ +\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{1}{4}}\partial_2\sigma_{11}(x) - \partial_2\sigma_{21}(x) & \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\partial_1\sigma_{21}(x) & \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\partial_1\sigma_{21}(x) + \partial_2\sigma_{21}(x) \end{bmatrix}$$

et un résultat analogue pour la seconde.

Grâce aux inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, on déduit de (7.18) et de la propriété de stabilité de la matrice  $A_t$  que

$$\frac{d}{dt}E\|V_t\|^2 \leq -\frac{\alpha'}{\sqrt{\varepsilon}}E\|V_t\|^2 + C\sqrt{\varepsilon}E\|J_t^{(3)}\|^2 + 2E\left(\|J_t^{(4)}\|^2 + \|J_t^{(5)}\|^2\right)$$

On va maintenant établir que les deux derniers termes du membre de droite de cette inégalité sont d'ordre  $\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$ , ce qui implique que  $V_t$  est d'ordre  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ .

**Estimation de  $J_t^{(3)}$ .**

Ce paragraphe est consacré à l'estimation :

$$\|J_t^{(3)}\| = O(\varepsilon^{-1}).$$

Tout d'abord, en calculant les deux composantes du vecteur  $\tilde{\Sigma}^*(m_t)P_t^{-1}\Sigma'(x_t)$ , on obtient :

$$-\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\partial_1\sigma_{11}(x_t)h'(m_{1,t}) + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\partial_1\sigma_{21}(x_t)\sqrt{\frac{2h'(m_{1,t})}{F_{1,2}(m_t)\sigma_{21}(m_t)}}$$

et

$$-\varepsilon^{-\frac{1}{4}} \partial_2 \sigma_{11}(x_t) h'(m_{1,t}) + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \partial_2 \sigma_{21}(x_t) \sqrt{\frac{2h'(m_{1,t}) F_{1,2}(m_t)}{\sigma_{21}(m_t)}}.$$

D'où :

$$\tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \Sigma'(x_t) = \begin{bmatrix} O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}$$

et

$$\tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \Sigma'(x_t) U = \begin{bmatrix} O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) & O(\varepsilon^{-1}) \end{bmatrix}.$$

On constate ensuite que le terme

$$-\frac{1}{\varepsilon} H(x_t) \Sigma'_1(x_t) U = -\varepsilon^{\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} h'(x_{1,t}) \partial_1 \sigma_{12}(x_t) & h'(x_{1,t}) \partial_2 \sigma_{12}(x_t) \end{bmatrix} U$$

est d'ordre  $\varepsilon^{-\frac{1}{4}}$  et, par conséquent, il est négligeable par rapport au précédent.

Pour l'étude des termes  $(x_t - m_t)^* J_t^{(1)} U$  et  $[\Sigma_1^*(x_t) - \varepsilon R_t^*] J_t^{(2)} U$ , remarquons que pour toute fonction  $\rho$  de classe  $C_b^2$ , on a :

$$d\rho(m_t) = O(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}) dt + O(1) d\bar{w}_t. \quad (7.23)$$

Ceci résulte de la formule d'Itô, des estimations du théorème 7.3.1, de l'égalité

$$dm_t = [f(m_t) + (h(x_{1,t}) - h(m_{1,t})) R_t] dt + \varepsilon R_t d\bar{w}_t$$

ainsi que de l'expression de  $R_t$  et des hypothèses sur  $f$  et  $h$ . Il convient en particulier de noter que le terme  $f(m_t)$  possède des moments uniformément bornés sur l'intervalle  $[0, T]$ , indépendamment de  $\varepsilon$ .

Les composantes de la matrice  $P_t^{-1}$  sont des fonctions de classe  $C_b^2$  de  $m_t$ , pondérées par diverses puissances de  $\varepsilon$ . On déduit en conséquence de (7.23) que :

$$J_t^{(1)} = \begin{bmatrix} O(\varepsilon^{-\frac{7}{4}}) & O(\varepsilon^{-\frac{5}{4}}) \\ O(\varepsilon^{-\frac{5}{4}}) & O(\varepsilon^{-\frac{3}{4}}) \end{bmatrix}$$

et

$$J_t^{(2)} = \begin{bmatrix} O(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}) & O(\varepsilon^{-1}) \\ O(\varepsilon^{-1}) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

Ainsi, d'après le théorème 7.3.1, on en déduit que les termes

$$(x_t - m_t)^* J_t^{(1)} U$$

et

$$[\Sigma_1^*(x_t) - \varepsilon R_t^*] J_t^{(2)} U$$

sont tous deux d'ordre  $\varepsilon^{-1}$ .

D'après les majorations (7.15) et (7.16) et le théorème 7.3.1, on a  $\|\phi_t - \gamma_t R_t^*\| = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  et par conséquent, le terme  $(\phi_t^* - \gamma_t R_t^*) P_t^{-1} U$  est également d'ordre  $\varepsilon^{-1}$ .

Calculons maintenant une estimation du terme  $(x_t - m_t)^* S_t U$ .

Grâce à l'équation de Riccati (7.10), on peut écrire  $S_t$  sous la forme :

$$\begin{aligned} S_t &= \left( F^*(m_t) - \tilde{F}^*(m_t) \right) P_t^{-1} + P_t^{-1} \left( F(x_t) - \tilde{F}(m_t) \right) \\ &\quad + P_t^{-1} \left( \Sigma(x_t) - \tilde{\Sigma}(m_t) \right) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \\ &\quad - P_t^{-1} \left( \Sigma'(x_t)^2 + \Sigma_1'(x_t)^2 \right) - \frac{1}{\varepsilon} P_t^{-1} \Sigma_1(x_t) H(x_t) \end{aligned}$$

Des calculs directs montrent que  $P_t^{-1} \Sigma_1(x_t) H(x_t)$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{-\frac{3}{4}} \left( h'(x_{1,t}) h'(m_{1,t}) \sqrt{\frac{2h'(m_{1,t})}{F_{1,2}(m_t) \sigma_{21}(m_t)}} \sigma_{12}(x_t) - h'(x_{1,t}) \sigma_{22}(x_t) \frac{h'(m_{1,t})}{\sigma_{21}(m_t)} \right) & 0 \\ h'(x_{1,t}) \sigma_{12}(x_t) \frac{h'(m_{1,t})}{\sigma_{21}(m_t)} + h'(x_{1,t}) \frac{\sigma_{22}(x_t)}{\sigma_{21}(m_t)} \sqrt{\frac{2h'(m_{1,t})}{F_{1,2}(m_t) \sigma_{21}(m_t)}} & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, on a compte tenu des hypothèses sur les fonctions  $h$ ,  $F_{12}$  et  $\sigma_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  :

$$-\frac{1}{\varepsilon} P_t^{-1} \Sigma_1(x_t) H(x_t) = \begin{bmatrix} O(\varepsilon^{-\frac{7}{4}}) & 0 \\ O(\varepsilon^{-\frac{5}{4}}) & 0 \end{bmatrix}.$$

En procédant au calcul de  $\left( F^*(m_t) - \tilde{F}^*(m_t) \right) P_t^{-1}$ , on constate que

$$\left( F^*(m_t) - \tilde{F}^*(m_t) \right) P_t^{-1} = \begin{bmatrix} O(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}) & O(\varepsilon^{-1}) \\ O(\varepsilon^{-1}) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}.$$

D'après le théorème 7.3.1 et le fait que les dérivées partielles de  $F_{12}$  sont supposées bornées, on a

$$F(x_t) - \tilde{F}(m_t) = \begin{bmatrix} O(1) & O(\varepsilon^{\frac{1}{4}}) \\ O(1) & O(1) \end{bmatrix}$$

et

$$P_t^{-1} \left( F(x_t) - \tilde{F}(m_t) \right) = \begin{bmatrix} O(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}) & O(\varepsilon^{-\frac{5}{4}}) \\ O(\varepsilon^{-1}) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}.$$

L'évaluation des termes de  $-P_t^{-1} \left( \Sigma'(x_t)^2 + \Sigma_1'(x_t)^2 \right)$  donne quant à elle :

$$-P_t^{-1} \left( \Sigma'(x_t)^2 + \Sigma_1'(x_t)^2 \right) = \begin{bmatrix} O(\varepsilon^{-1}) & O(\varepsilon^{-1}) \\ O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}.$$

Pour achever l'évaluation de la quantité  $S_t$ , il reste à étudier le terme

$$\tilde{S}_t := P_t^{-1} \left( \Sigma(x_t) - \tilde{\Sigma}(m_t) \right) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1}$$

défini par

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{11,t} &= -\varepsilon^{-\frac{7}{4}} h'(m_{1,t}) \sigma_{11}(x_t) \sqrt{\frac{2h'(m_{1,t})}{F_{1,2}(m_t) \sigma_{21}(m_t)}} \\ &\quad + \varepsilon^{-2} \frac{h'(m_{1,t})^2}{\sigma_{21}(m_t)} (\sigma_{21}(x_t) - \sigma_{21}(m_t)) \\ &= O\left(\varepsilon^{-\frac{7}{4}}\right) \\ \tilde{S}_{12,t} &= 2\varepsilon^{-\frac{5}{4}} h'(m_{1,t})^2 \frac{\sigma_{11}(x_t)}{\sigma_{21}(m_t)} \\ &\quad - \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \frac{h'(m_{1,t})}{\sigma_{21}(m_t)} \sqrt{\frac{2h'(m_{1,t}) F_{1,2}(m_t)}{\sigma_{21}(m_t)}} (\sigma_{21}(x_t) - \sigma_{21}(m_t)) \\ &= O\left(\varepsilon^{-\frac{5}{4}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{21,t} &= \varepsilon^{-\frac{5}{4}} \frac{h'(m_{1,t})^2}{\sigma_{21}(m_t)} \sigma_{11}(x_t) \\ &\quad - \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \frac{h'(m_{1,t})}{\sigma_{21}(m_t)} \sqrt{\frac{2h'(m_{1,t})F_{1,2}(m_t)}{\sigma_{21}(m_t)}} (\sigma_{21}(x_t) - \sigma_{21}(m_t)) \\ &= O\left(\varepsilon^{-\frac{5}{4}}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{22,t} &= -\varepsilon^{-\frac{3}{4}} h'(m_{1,t}) \frac{\sigma_{11}(x_t)}{\sigma_{21}(m_t)} \sqrt{\frac{2h'(m_{1,t})F_{1,2}(m_t)}{\sigma_{21}(m_t)}} \\ &\quad + 2\varepsilon^{-1} \frac{h'(m_{1,t})F_{1,2}(m_t)}{\sigma_{21}(m_t)^2} (\sigma_{21}(x_t) - \sigma_{21}(m_t)) \\ &= O\left(\varepsilon^{-\frac{3}{4}}\right)\end{aligned}$$

En récapitulant les estimations des divers termes de la somme  $S_t$ , on constate que

$$S_t = \begin{bmatrix} O\left(\varepsilon^{-\frac{7}{4}}\right) & O\left(\varepsilon^{-\frac{5}{4}}\right) \\ O\left(\varepsilon^{-\frac{5}{4}}\right) & O\left(\varepsilon^{-\frac{3}{4}}\right) \end{bmatrix}$$

et, en vertu des estimations du théorème 7.3.1 :

$$(x_t - m_t)^* S_t U = \begin{bmatrix} O\left(\varepsilon^{-1}\right) & O\left(\varepsilon^{-1}\right) \end{bmatrix}.$$

Nous avons bien vérifié que tous les termes de  $J_t^{(3)}$  sont au plus d'ordre  $\varepsilon^{-1}$ .

#### Estimation de $J_t^{(4)}$ et de $J_t^{(5)}$ .

Nous allons vérifier dans ce paragraphe que ces deux processus aléatoires sont bien d'ordre  $\varepsilon^{-\frac{3}{4}}$ .

Commençons par écrire le premier terme de  $J_t^{(4)}$  sous la forme :

$$\left(\Sigma^*(x_t) - \tilde{\Sigma}^*(m_t)\right) P_t^{-1} U = \left(\Sigma^*(x_t) - \Sigma^*(m_t)\right) P_t^{-1} U + \left(\Sigma^*(m_t) - \tilde{\Sigma}^*(m_t)\right) P_t^{-1} U.$$

Les termes de la matrice  $P_t^{-1} U$  sont d'ordres

$$\begin{bmatrix} O\left(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\right) & O\left(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\right) \\ O\left(\varepsilon^{-1}\right) & O\left(\varepsilon^{-1}\right) \end{bmatrix}.$$

Compte tenu de l'hypothèse (B4), de l'expression de  $\Sigma$  et du théorème 7.3.1, on en déduit que le terme  $\left(\Sigma^*(x_t) - \Sigma^*(m_t)\right) P_t^{-1} U$  est de la forme  $\begin{bmatrix} O\left(\varepsilon^{-\frac{3}{4}}\right) & O\left(\varepsilon^{-\frac{3}{4}}\right) \end{bmatrix}$ . En effet, comme

$$\Sigma^*(m_t) - \tilde{\Sigma}^*(m_t) = \begin{bmatrix} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \sigma_{11}(m_t) & 0 \end{bmatrix},$$

il en va de même pour  $\left(\Sigma^*(m_t) - \tilde{\Sigma}^*(m_t)\right) P_t^{-1} U$ . Montrons que c'est aussi le cas pour  $(x_t - m_t)^* P_t^{-1} \Sigma'(x_t) U$  et le résultat sera acquis pour  $J_t^{(4)}$ .

On a :

$$\Sigma'(x_t) = \begin{bmatrix} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \partial_1 \sigma_{11}(x_t) & \varepsilon^{\frac{3}{4}} \partial_2 \sigma_{11}(x_t) \\ \partial_1 \sigma_{12}(x_t) & \partial_2 \sigma_{12}(x_t) \end{bmatrix}.$$

Après multiplication à droite par  $U$  et à gauche par  $P_t^{-1}$ , on obtient une matrice dont les termes sont d'ordres

$$\begin{bmatrix} O(\varepsilon^{-1}) & O(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}) \\ O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) & O(\varepsilon^{-1}) \end{bmatrix}.$$

On en déduit à l'aide du théorème 7.3.1 que l'ordre des termes de  $(x_t - m_t)^* P_t^{-1} \Sigma'(x_t) U$  et par conséquent de  $J_t^{(4)}$  est bien celui attendu.

Étudions maintenant les quatre termes dont  $J_t^{(5)}$  est la somme. La seconde composante de  $\frac{1}{\varepsilon} (H(x_t) - H(m_t))$  étant nulle et la première composante étant d'ordre  $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ , on en déduit que  $\frac{1}{\varepsilon} (H(x_t) - H(m_t)) U$  est négligeable par rapport aux autres termes de  $J_t^{(5)}$  qui sont d'ordre  $\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$ . En effet, on peut raisonner pour  $(x_t - m_t)^* P_t^{-1} \Sigma'_1(x_t) U$  comme on l'a fait dans le cas de  $(x_t - m_t)^* P_t^{-1} \Sigma'(x_t) U$ . Par ailleurs, on a

$$\Sigma_1^*(x_t) = \begin{bmatrix} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \sigma_{12}(x_t) & \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sigma_{22}(x_t) \end{bmatrix}$$

et l'estimation recherchée pour  $\Sigma_1^*(x_t) P_t^{-1} U$  s'ensuit, compte tenu de l'ordre de  $P_t^{-1} U$ . Étant donné (7.24), c'est à nouveau le théorème 7.3.1 qui permet de constater que l'ordre des composantes du vecteur  $(x_t - m_t)^* J_t^{(2)} U$  est bien  $\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$ , ce qui achève la vérification pour  $J_t^{(5)}$ .

#### Estimation de $(\hat{x}_t - m_t)^* P_t^{-1} U$ .

Puisque nous avons établi l'estimation  $V_t = O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$ , nous pouvons en déduire compte-tenu de la définition (7.11) de  $V_t$  que :

$$(x_t - m_t)^* P_t^{-1} U = -\nabla_0 \log(\Lambda_t) (\nabla_0 x_t)^{-1} U + O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$$

dans  $L^2$ .

L'espérance conditionnelle étant un projecteur orthogonal dans  $L^2$ , on a aussi :

$$(\hat{x}_t - m_t)^* P_t^{-1} U = -E \left[ \nabla_0 \log(\Lambda_t) (\nabla_0 x_t)^{-1} U \mid \sigma(y_s, 0 \leq s \leq t) \right] + O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$$

dans  $L^2$ .

Dans ce paragraphe, nous allons évaluer l'ordre du premier terme du membre de droite de cette égalité. On va d'abord transformer l'écriture de ce terme grâce à la formule d'intégration par partie (7.28). Cela suppose de s'assurer que  $(\nabla_0 x_t)^{-1}$  peut être vu comme une fonctionnelle de  $(x_0, \bar{w}, y)$  différentiable par rapport à la condition initiale, ce qui est une conséquence de l'égalité :

$$\begin{aligned} d(\nabla_0 x_t)^{-1} &= -(\nabla_0 x_t)^{-1} \left[ F(x_t) + \Sigma(x_t) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \Sigma'(x_t)^2 - \Sigma'_1(x_t)^2 - \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1(x_t) H(x_t) \right] dt \\ &\quad - \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} (x_t - m_t) (\nabla_0 x_t)^{-1} \Sigma'(x_t) dt \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_0 x_t)^{-1} \Sigma'_1(x_t) h(x_{1,t}) dt \\ &\quad - (\nabla_0 x_t)^{-1} \Sigma'(x_t) d\bar{w}_t - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_0 x_t)^{-1} \Sigma'_1(x_t) dy_t. \end{aligned} \tag{7.25}$$

En appliquant la formule d'intégration par parties (formule (7.28)) aux composantes de la matrice  $(\nabla_0 x_t)^{-1}$ , on obtient pour la  $i$ -ème ligne  $(\nabla_0 x_t)_i^{-1}$  de la matrice  $(\nabla_0 x_t)^{-1}$  :

$$E \left[ \nabla_0^i \log(\Lambda_t) (\nabla_0 x_t)_i^{-1} + \left( p_0^{-1} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \right) (x_0) (\nabla_0 x_t)_i^{-1} + \nabla_0^i (\nabla_0 x_t)_i^{-1} | \sigma(y_s, 0 \leq s \leq t) \right] = 0$$

puis après sommation en  $i$  et multiplication par  $U$  :

$$E \left[ \nabla_0 \log(\Lambda_t) (\nabla_0 x_t)^{-1} U + (p_0^{-1} \nabla p_0) (x_0) (\nabla_0 x_t)^{-1} U + \sum_{i=1}^2 \nabla_0^i (\nabla_0 x_t)_i^{-1} U | \sigma(y_s, 0 \leq s \leq t) \right] = 0. \quad (7.26)$$

Montrons que le terme  $\psi_t = \left( p_0^{-1} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \right) (x_0) (\nabla_0 x_t)^{-1} U$  décroît de manière exponentielle avec  $t$ .

Le processus  $\psi_t$  est solution de l'équation différentielle stochastique

$$d\psi_t = \psi_t A_t dt - \psi_t U^{-1} \Sigma'(x_t) U dw_t - \psi_t U^{-1} \Sigma'_1(x_t) U d\bar{w}_t.$$

En calculant  $U^{-1} \Sigma'(x_t) U$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \partial_1 \sigma_{11}(x_t) - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \partial_1 \sigma_{21}(x_t) & \varepsilon^{\frac{3}{4}} \partial_1 \sigma_{11}(x_t) + \varepsilon^{\frac{1}{4}} \sqrt{2} \partial_2 \sigma_{11}(x_t) - \partial_2 \sigma_{21}(x_t) \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \partial_1 \sigma_{21}(x_t) & \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \partial_1 \sigma_{21}(x_t) + \partial_2 \sigma_{21}(x_t) \end{bmatrix}.$$

Comme cette matrice est bornée, on déduit de la formule d'Itô et de la stabilité de la matrice  $A_t$ , que  $E \|\psi_t\|^2 \leq CE \|\psi_0\|^2 \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)$  pour  $\varepsilon$  assez petit. Ainsi, le terme  $\psi_t$  est donc négligeable vis à vis des termes d'ordre  $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ .

Évaluons maintenant l'ordre de  $\sum_{i=1}^2 \nabla_0^i (\nabla_0 x_t)_i^{-1} U$ .

En définissant  $\phi_t^i$  par

$$\phi_t^i = \nabla_0^i (\nabla_0 x_t)_i^{-1} U,$$

on déduit de l'équation (7.25) que

$$\begin{aligned} d\phi_t^i &= \phi_t^i A_t dt - \phi_t^i U^{-1} \Sigma'(x_t) U dw_t - \phi_t^i U^{-1} \Sigma'_1(x_t) U d\bar{w}_t \\ &\quad - (\nabla_0 x_t)_i^{-1} \nabla_0^i \rho(x_t, m_t) U dt - \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \nabla_0^i x_t (\nabla_0 x_t)_i^{-1} \Sigma'(x_t) U dt \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_0 x_t)_i^{-1} \Sigma'_1(x_t) \nabla_0^i h(x_{1,t}) U dt \\ &\quad - (\nabla_0 x_t)_i^{-1} \nabla_0^i \Sigma'(x_t) U dw_t - (\nabla_0 x_t)_i^{-1} \nabla_0^i \Sigma'_1(x_t) U d\bar{w}_t \end{aligned}$$

en posant

$$\rho(x_t, m_t) = U A_t U^{-1}.$$

Par conséquent,  $\phi_t = \phi_t^1 + \phi_t^2$  satisfait l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} d\phi_t &= \phi_t A_t dt - \phi_t U^{-1} \Sigma'(x_t) U dw_t - \phi_t U^{-1} \Sigma'_1(x_t) U d\bar{w}_t \\ &\quad - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \rho_j}{\partial x_j}(x_t, m_t) U dt - \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \Sigma'(x_t) U dt \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} H(x_t) \Sigma'_1(x_t) U dt \\ &\quad - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \Sigma'_j}{\partial x_j}(x_t) U dw_t - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \Sigma'_{1,j}}{\partial x_j}(x_t) U d\bar{w}_t \end{aligned}$$

où  $\Sigma'_{0,j}$  (respectivement  $\Sigma'_{1,j}$ ,  $\rho_j$ ) désigne la  $j$ -ème ligne de  $\Sigma'$  (respectivement  $\Sigma'_1$ ,  $\rho$ ).

Compte tenu de la propriété de stabilité de  $A_t$ , pour montrer que  $\phi_t$  est d'ordre  $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ , il nous suffit d'établir que les termes  $\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \rho_j}{\partial x_j}(x_t, m_t) U$ ,  $\tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \Sigma'(x_t) U$  et  $\frac{1}{\varepsilon} H(x_t) \Sigma'_1(x_t) U$  sont au plus d'ordre  $\varepsilon^{-1}$  et que les termes  $\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \Sigma'_j}{\partial x_j}(x_t) U$  et  $\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \Sigma'_{1,j}}{\partial x_j}(x_t) U$  sont au plus d'ordre  $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ .

On a calculé les termes de la matrice  $\rho(x_t, m_t) = U A_t U^{-1}$  en (7.19)-(7.22), et puisque les dérivées d'ordre deux des fonctions  $\sigma_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , sont bornées, on constate que  $\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \rho_j}{\partial x_j}(x_t, m_t) U$  est bien de la forme

$$[ O(\varepsilon^{-1}) \quad O(\varepsilon^{-1}) ].$$

La même propriété a déjà été établie pour  $\tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \Sigma'(x_t) U$  lors de l'estimation de  $J_t^{(3)}$ .

Les deux composantes de  $\Sigma'_{0,j}(x_t)$  sont de la forme  $O(\varepsilon^{\frac{3}{4}})$  pour  $j = 1$  et de la forme  $O(1)$  pour  $j = 2$ . Il en va de même pour  $\frac{\partial \Sigma'_j}{\partial x_j}(x_t)$  et après multiplication par  $U$ , on obtient donc

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \Sigma'_j}{\partial x_j}(x_t) U = [ O(1) \quad O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) ].$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} H(x_t) \Sigma'_1(x_t) U &= [ \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \partial_1 \sigma_{12}(x_t) h'(x_{1,t}) \quad \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \partial_2 \sigma_{12}(x_t) h'(x_{1,t}) ] U \\ &= [ O(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}) \quad O(\varepsilon^{-\frac{3}{4}}) ]. \end{aligned}$$

Nous sommes donc maintenant en mesure d'affirmer que  $\phi_t$  est d'ordre  $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$  et par conséquent, on a aussi :

$$(\hat{x}_t - m_t)^* P_t^{-1} U = O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}).$$

Donc, comme la matrice  $U^{-1}P_t$  s'exprime sous la forme

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{h'(m_{1,t})} \sqrt{\frac{2\sigma_{21}(m_t)F_{12}(m_t)}{h'(m_{1,t})}} - \sqrt{2} \frac{\sigma_{21}(m_t)}{h'(m_{1,t})} \right) & \varepsilon \left( \frac{\sigma_{21}(m_t)}{h'(m_{1,t})} - \sqrt{2}\sigma_{21}(M_t) \sqrt{\frac{2\sigma_{21}(m_t)}{h'(m_{1,t})F_{12}(m_t)}} \right) \\ \varepsilon^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \frac{\sigma_{21}(m_t)}{h'(m_{1,t})} & \varepsilon \sqrt{2}\sigma_{21}(M_t) \sqrt{\frac{2\sigma_{21}(m_t)}{h'(m_{1,t})F_{12}(m_t)}} \end{bmatrix}$$

on déduit que les composantes du vecteur  $\hat{x}_t - m_t$  satisfont les estimations suivantes :

$$\hat{x}_{1,t} - m_{1,t} = O(\varepsilon)$$

et

$$\hat{x}_{2,t} - m_{2,t} = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

□

## Appendice.

Nous revenons dans ce paragraphe un peu plus en détail sur l'opérateur  $\nabla_0$  et son application aux variables aléatoires  $x_t$ ,  $t \geq 0$ . Ces variables aléatoires peuvent être identifiées à des fonctionnelles définies sur l'espace canonique  $\mathbb{R}^2 \times C^0([0, \infty[) \times C^0([0, \infty[)$  muni de la mesure produit de la mesure de Lebesgue et de la mesure de Wiener standard sur  $C^0([0, \infty[) \times C^0([0, \infty[)$ .

L'opérateur  $\nabla_0$  est alors défini de la manière suivante (voir Picard [59]).

**Définition 7.5.2** Une variable aléatoire  $\phi(x_0, \bar{w}, y)$  est dite différentiable dans  $L^q$  avec  $\nabla_0\phi$  pour dérivée par rapport à  $x_0$  lorsque pour tout vecteur unitaire  $\mu$  de  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [\phi(x_0 + \delta\mu, \bar{w}, y) - \phi(x_0, \bar{w}, y)] \rightarrow \nabla_0\phi\mu$$

au sens de  $L^q$  sous la probabilité  $P$ .

Le fait que  $\nabla_0x_t$  est bien défini pour une valeur donnée de  $\varepsilon$  par (7.13) peut être vérifié directement à partir de cette définition. A cette fin, on peut en effet écrire en notant  $x^\mu$  la solution de l'équation différentielle stochastique (7.12) associée à la condition initiale  $x_0 + \mu$  :

$$\begin{aligned} d(x_t^\mu - x_t) &= [f(x_t^\mu) - f(x_t)] dt + \Sigma(x_t^\mu) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} (x_t^\mu - x_t) dt \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1(x_t^\mu) (h(x_{1,t}^\mu) - h(x_{1,t})) dt \\ &\quad + [\Sigma(x_t^\mu) - \Sigma(x_t)] d\omega_t + [\Sigma_1(x_t^\mu) - \Sigma_1(x_t)] d\bar{w}_t \end{aligned}$$

En utilisant le caractère globalement lipschitzien de  $f$  et de  $h$ , ainsi que le fait que  $\Sigma$ ,  $\Sigma_1$  et  $P_t^{-1}$  sont uniformément bornés, on peut déduire de cette égalité grâce aux inégalités classiques et par l'intermédiaire du lemme de Gronwall que :

$$E|x_t^\mu - x_t|^q = O(|\mu|^q).$$

Par la même technique et en s'appuyant sur cette première estimation, on peut montrer que

$$E|x_t^\mu - x_t - \nabla_0x_t\mu|^q = O(|\mu|^{2q}), \quad (7.27)$$

si  $\nabla_0x_t$  désigne la solution de l'équation différentielle stochastique linéaire (7.13) avec la condition initiale  $\nabla_0x_0 = I$ . En effet, on a :

$$\begin{aligned} d(x_t^\mu - x_t - \nabla_0x_t\mu) &= [f(x_t^\mu) - f(x_t) - F(x_t)\nabla_0x_t\mu] dt \\ &\quad + \Sigma(x_t^\mu) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} (x_t^\mu - x_t) dt - \Sigma(x_t) \tilde{\Sigma}^*(m_t) P_t^{-1} \nabla_0x_t\mu dt \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1(x_t^\mu) (h(x_{1,t}^\mu) - h(x_{1,t})) dt + \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1(x_t) H(x_t) \nabla_0x_t\mu dt \\ &\quad + [\Sigma(x_t^\mu) - \Sigma(x_t) - \Sigma'(x_t)\nabla_0x_t\mu] d\omega_t \\ &\quad + [\Sigma_1(x_t^\mu) - \Sigma_1(x_t) - \Sigma_1'(x_t)\nabla_0x_t\mu] d\bar{w}_t \end{aligned}$$

et le terme  $f(x_t^\mu) - f(x_t) - F(x_t)\nabla_0 x_t \mu$  peut être mis sous la forme

$$F(x_t)(x_t^\mu - x_t - \nabla_0 x_t \mu) + O(|x_t^\mu - x_t|^2),$$

tandis que l'on peut écrire

$$\Sigma(x_t^\mu)\tilde{\Sigma}^*(m_t)P_t^{-1}(x_t^\mu - x_t) - \Sigma(x_t)\tilde{\Sigma}^*(m_t)P_t^{-1}\nabla_0 x_t \mu$$

sous la forme

$$\Sigma(x_t)\tilde{\Sigma}^*(m_t)P_t^{-1}(x_t^\mu - x_t - \nabla_0 x_t \mu) + (\Sigma(x_t^\mu) - \Sigma(x_t))\tilde{\Sigma}^*(m_t)P_t^{-1}(x_t^\mu - x_t).$$

Des manipulations analogues sont possibles pour les autres termes et conduisent compte tenu des hypothèses sur les coefficients du système (7.9) à l'estimation (7.27) qui débouche à son tour sur la conclusion attendue.

Désignons maintenant par  $\nabla_0^i$  l'opérateur de dérivation des fonctionnelles définies sur  $\mathbb{R}^2 \times C^0([0, \infty]) \times C^0([0, \infty])$  par rapport à la  $i$ -ème composante de la condition initiale. Sous l'hypothèse (B6), la formule d'intégration par partie suivante est prouvée dans Picard [59, lemme 3.4.2], pour toute fonctionnelle  $G = G(x_0, \tilde{w}, y)$  différentiable par rapport à  $x_0$  :

$$E \left[ G \nabla_0^i \log(\Lambda_t) + G \left( p_0^{-1} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \right) (x_0) + \nabla_0^i G | \sigma(y_s, 0 \leq s \leq t) \right] = 0. \quad (7.28)$$

## Chapitre 8

# Exemples de filtres de dimension finie pour un problème de filtrage avec bruits dépendants

### 8.1 Introduction.

Dans ce chapitre, on considère un cas particulier de problème de filtrage non linéaire avec bruits dépendants dont la résolution se ramène à celles d'une équation différentielle de Riccati et d'une équation différentielle stochastique linéaire.

Dans une telle situation, le calcul de la densité conditionnelle du signal connaissant le passé de l'observation devient bien sûr beaucoup plus aisé que dans le cas général. Il est donc ainsi possible d'obtenir un terrain commode d'expérimentations numériques d'algorithmes de résolution des équations du filtrage stochastique.

Pour des problèmes linéaires, la loi conditionnelle du signal connaissant l'observation est gaussienne. La connaissance de cette loi gaussienne se réduit alors au calcul de ses paramètres qui sont respectivement solutions d'une équation de Riccati et d'une équation différentielle stochastique linéaire constituant le filtre de Kalman-Bucy.

Des classes particulières de problèmes de filtrage non linéaires avec bruits indépendants où le calcul de la loi conditionnelle se ramène à la résolution d'un nombre fini d'équations différentielles déterministes ou stochastiques ont été mises en évidence par Beneš [6], Ocone, Baras et Marcus [52] et Elliott et Krishnamurthy [25].

L'étude menée par Beneš dans [6] a été étendue au cas de problèmes de filtrage non linéaires unidimensionnels avec bruits dépendants par Zeitouni dans [66], dont le résultat semble cependant comporter une erreur de calcul. Nous reprenons ici cette étude en proposant certaines modifications aux résultats exposés dans [66].

### 8.2 Le problème de filtrage.

Un espace probabilisé complet  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  étant donné, on considère sur cet espace deux processus de Wiener réels standards indépendants  $(v_t)_{t \geq 0}$  et  $(w_t)_{t \geq 0}$ , ainsi que deux réels positifs  $\eta_1$  et  $\eta_2$  liés par la relation de normalisation

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1. \tag{8.1}$$

De plus, soit  $f$  une fonction dérivable et Lipschitzienne de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $F$  une primitive de la fonction  $f$ .

Pour toute condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  possédant des moments de tous ordres, soit  $(x_t, y_t)$  le couple signal-observation solution dans  $\mathbb{R}^2$  du système différentiel stochastique :

$$\begin{cases} dx_t = f(x_t) dt + \eta_1 dw_t + \eta_2 dy_t \\ dy_t = \frac{\eta_2}{\eta_1^2} f(x_t) dt + dv_t \end{cases} \quad (8.2)$$

Remarquons que sous les hypothèses ci-dessus, les processus stochastiques  $x_t$  et  $y_t$  possèdent également des moments de tous ordres pour tout  $t \geq 0$ .

Pour conclure ce paragraphe, notons que la loi de probabilité induite par la solution de ce problème de filtrage sera notée  $P_1$ , tandis que nous désignerons par  $Y_{r,t}$  la tribu  $\sigma(y_s; r \leq s \leq t)$ , pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,  $s \leq t$ .

### 8.3 Filtres de dimension finie.

Le résultat suivant montre que si la fonction  $f$  est solution d'une équation différentielle particulière, le calcul d'une densité conditionnelle non normalisée de la loi de  $x_t$  connaissant  $Y_{0,t}$  se réduit à celui des solutions respectives d'une équation de Riccati et d'une équation différentielle stochastique linéaire.

**Théorème 8.3.1** *Supposons  $\eta_1$  et  $\eta_2$  liés par la relation (8.1) et l'existence de trois réels  $\alpha > 0$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels que :*

$$\frac{f'(x)}{\eta_1^2} + \frac{f^2(x)}{\eta_1^4} = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \forall x \in \mathbb{R} \quad (8.3)$$

*La densité conditionnelle  $P_1[x_t \in dz | Y_{0,t}, x_0 = x]$  est alors proportionnelle à  $q_t(z)$  défini par :*

$$q_t(z) = \exp\left(\frac{F(z)}{\eta_1^2}\right) \exp\left(-\frac{(z - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right) \quad (8.4)$$

*où  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  est solution de l'équation de Riccati*

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_t}{dt} = \eta_1^2 - \alpha\sigma_t^2 \\ \sigma_0 = 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

*et  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  est solution de l'équation différentielle stochastique linéaire*

$$\begin{cases} d\mu_t = \left(-\alpha\sigma_t\mu_t - \frac{\beta}{2}\sigma_t\right) dt + \eta_2 dy_t \\ \mu_0 = x_0. \end{cases} \quad (8.6)$$

**Démonstration.** Commençons par choisir une mesure de probabilité  $P_0$  sous laquelle le couple  $(x_t, y_t)$  est solution du système différentiel stochastique

$$\begin{cases} dx_t = \eta_1 d\bar{w}_t + \eta_2 dy_t \\ dy_t = d\bar{v}_t \end{cases} \quad (8.7)$$

où  $(\bar{w}_t)_{t \geq 0}$  et  $(\bar{v}_t)_{t \geq 0}$  sont deux processus de Wiener réels standards indépendants.

D'après le théorème de Girsanov, il nous suffit pour cela d'introduire la probabilité  $P_0$  définie par la dérivée de Radon-Nykodim

$$\zeta_t = \frac{dP_1}{dP_0} = \exp \left[ \int_0^t \frac{\eta_2}{\eta_1^2} f(x_s) dy_s + \frac{1}{\eta_1} \int_0^t f(x_s) d\bar{w}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{\eta_2}{\eta_1^2} f(x_s) \right)^2 ds - \frac{1}{2\eta_1^2} \int_0^t f^2(x_s) ds \right].$$

Il est clair que sous la probabilité  $P_0$ , le couple  $(x_t, y_t)$  est gaussien et, plus précisément, le processus stochastique  $(x_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Wiener standard.

En appliquant la formule d'Itô et en tenant compte de (8.1), on obtient la formule d'intégration par parties suivante :

$$\int_0^t f(x_s) dx_s = F(x_t) - F(x_0) - \frac{1}{2} \int_0^t f'(x_s) ds. \quad (8.8)$$

En prenant en compte (8.7), la relation  $dw_t = d\bar{w}_t - \frac{1}{\eta_1} f(x_t) dt$  et (8.1), on peut récrire  $\zeta_t$  sous la forme :

$$\zeta_t = \exp \left( \int_0^t \frac{1}{\eta_1^2} f(x_s) dx_s - \frac{1}{2\eta_1^2} \int_0^t f^2(x_s) ds \right).$$

Ainsi, en utilisant l'égalité (8.8) puis l'hypothèse (8.3), on en déduit que :

$$\begin{aligned} \zeta_t &= \exp \left( \frac{F(x_t) - F(x_0)}{\eta_1^2} - \frac{1}{2\eta_1^2} \int_0^t f'(x_s) ds - \frac{1}{2\eta_1^2} \int_0^t f^2(x_s) ds \right) \\ &= \exp \left( \frac{F(x_t) - F(x_0)}{\eta_1^2} \right) \cdot \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^t (\alpha x_s^2 + \beta x_s + \gamma) ds \right) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Compte tenu de cette dernière égalité et de la formule de Kallianpur-Striebel, la densité conditionnelle  $q_t$  du filtre s'exprime finalement comme suit :

$$\begin{aligned} q_t(z) &= p_t(z) E_0 [\zeta_t | Y_{0,t}, x_t = z, x_0 = x] \\ &= p_t(z) \exp \left( \frac{F(z) - F(x_0)}{\eta_1^2} \right) \\ &\quad E_0 \left[ \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^t (\alpha x_s^2 + \beta x_s + \gamma) ds \right) | Y_{0,t}, x_t = z, x_0 = x \right], \end{aligned} \quad (8.10)$$

où  $p_t$  désigne la densité conditionnelle

$$\begin{aligned} p_t(z) &= P_0 [x_t \in dz | Y_{0,t}, x_0 = x] \\ &= \frac{1}{\eta_2 \sqrt{2\pi t}} \exp \left( -\frac{(z - x - \eta_2 y_t)^2}{2\eta_2^2 t} \right). \end{aligned}$$

Soient  $l$  un réel strictement positif, et les processus stochastiques réels  $(\sigma_t^l)_{t \geq 0}$ ,  $(\mu_t^l)_{t \geq 0}$  et  $(K_t^l)_{t \geq 0}$  définis par

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_t^l}{dt} = \eta_1^2 - \alpha (\sigma_t^l)^2 \\ \sigma_0^l = l \\ \begin{cases} d\mu_t^l = \left( -\alpha \sigma_t^l \mu_t^l - \frac{\beta}{2} \sigma_t^l \right) dt + \eta_2 dy_t \\ \mu_0^l = x \end{cases} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{dK_t^l}{dt} = \left( -\frac{\eta_1^2}{2\sigma_t^l} - \frac{\alpha}{2} (\mu_t^l)^2 - \frac{\beta}{2} \mu_t^l - \frac{\gamma}{2} \right) K_t^l \\ K_0^l = (2\pi l)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

ainsi que, pour tout réel  $z$ , le processus stochastique  $(V_t(z))_{t \geq 0}$  défini par :

$$V_t(z) = K_t^l \exp \left( -\frac{(z - \mu_t^l)^2}{2\sigma_t^l} \right).$$

Pour alléger les notations, on a omis, dans la suite de ce chapitre, de rappeler la dépendance en  $l$  dans la notation du processus  $V_t$ .

Par application de la formule d'Itô, on montre facilement que le processus stochastique  $(V_t(z))_{t \geq 0}$  est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique :

$$\begin{cases} dV_t(z) = \frac{1}{2} (\partial^2 V_t(z) - (\alpha z^2 + \beta z + \gamma) V_t(z)) dt - \eta_2 \partial V_t(z) dy_t \\ V_0(z) = K_0^l \exp \left( -\frac{(z-x)^2}{2l} \right). \end{cases}$$

Fixons  $t > 0$  et renversons le temps sur l'intervalle  $[0, t]$  en posant  $y'_s = y_t - y_{t-s}$ . Alors, le processus stochastique  $V'_s$  défini par  $V'_s = V_{t-s}$  est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique rétrograde (voir Kunita [9] pour la définition de l'intégrale stochastique rétrograde au sens d'Itô)

$$\begin{cases} dV'_s(z) = -\frac{1}{2} (\partial^2 V'_s(z) - (\alpha z^2 + \beta z + \gamma) V'_s(z)) ds + \eta_2 \partial V'_s(z) \otimes dy'_s \\ V'_t(z) = K_0^l \exp \left( -\frac{(z-x)^2}{2l} \right). \end{cases}$$

L'allure de cette équation aux dérivées partielles stochastique rétrograde nous incite à appliquer les résultats de Krylov-Rosovskii [40] ou Pardoux [56] en vue d'obtenir pour  $V'_s$  une représentation du type "Feynman-Kac stochastique". Cependant, le terme quadratique, bien évidemment non borné, jouant ici le rôle du potentiel nous oblige à une certaine vigilance.

Lorsque la fonction  $\varphi$  décrit l'espace  $L^2([0, t]; \mathbb{R})$ , la famille des processus stochastiques  $\rho_r$  définis par

$$\rho_r = \exp \left( \int_r^t \varphi(u) dy'_u - \frac{1}{2} \int_r^t \varphi^2(u) du \right)$$

est totale dans l'espace  $L^2(\Omega, Y_{r,t}, P_0)$ . De plus, on déduit de la définition des processus stochastiques  $(\sigma_t^l)_{t \geq 0}$ ,  $(\mu_t^l)_{t \geq 0}$ ,  $(K_t^l)_{t \geq 0}$  et  $(V_t)_{t \geq 0}$  et de la nature gaussienne de la mesure  $P_0$  que pour tout  $s$ ,  $0 \leq s \leq t$ ,  $V'_s$ , ainsi que ses dérivées par rapport à la variable d'espace, possèdent des moments de tous ordres. On peut donc définir le processus stochastique  $W'_s$  par :

$$W'_s = E_0(\rho_s V'_s).$$

Ainsi, en appliquant la formule d'Itô, on obtient une équation aux dérivées partielles pour le processus stochastique  $W'_s$  :

$$\begin{cases} \frac{dW'_s}{ds} = -\frac{1}{2} (\partial^2 W'_s - (\alpha z^2 + \beta z + \gamma) W'_s) + \eta_2 \varphi(s) \partial W'_s \\ W'_t(z) = K_0^l \exp \left( -\frac{(z-x)^2}{2l} \right). \end{cases}$$

On en déduit alors par application de la formule d'Itô une représentation de type Feynman-Kac pour  $W_r^l(z)$ , en l'occurrence :

$$W_r^l(z) = E_{\xi}^{r,z} \left[ K_0^l \exp \left( -\frac{(z-\xi_t)^2}{2l} \right) \cdot \exp \left( -\frac{1}{2} \int_r^t (\alpha \xi_s^2 + \beta \xi_s + \gamma) ds \right) \right] \quad (8.11)$$

où le processus stochastique  $\xi_s$  est défini par

$$\begin{cases} d\xi_s &= -\eta_2 \varphi(s) ds - \eta_1 d\bar{w}'_s - \eta_2 dy'_s \\ \xi_r &= z. \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} & W_t^l(\xi_t) \exp \left( -\frac{1}{2} \int_r^t (\alpha \xi_s^2 + \beta \xi_s + \gamma) ds \right) = \\ & W_r^l(z) + \int_r^t \left[ \frac{dW'_s}{ds}(\xi_s) + \frac{1}{2} (\partial^2 W'_s(\xi_s) - (\alpha \xi_s^2 + \beta \xi_s + \gamma) W'_s(\xi_s)) \right. \\ & \quad \left. - \eta_2 \varphi(s) \partial W'_s(\xi_s) \right] \exp \left( -\frac{1}{2} \int_r^s (\alpha \xi_u^2 + \beta \xi_u + \gamma) du \right) ds \\ & - \eta_1 \int_r^t \partial W'_s \exp \left( -\frac{1}{2} \int_r^s (\alpha \xi_u^2 + \beta \xi_u + \gamma) du \right) d\bar{w}'_s \\ & - \eta_2 \int_r^t \partial W'_s \exp \left( -\frac{1}{2} \int_r^s (\alpha \xi_u^2 + \beta \xi_u + \gamma) du \right) dy'_s \end{aligned}$$

et les intégrales stochastiques figurant dans cette égalité sont des martingales compte tenu des remarques faites plus haut et de l'hypothèse  $\alpha > 0$ . Il suffit donc de prendre l'espérance des deux membres pour conclure à propos de (8.11).

Considérons maintenant le processus stochastique  $x'_s$  défini par :

$$\begin{cases} dx'_s &= -\eta_1 d\bar{w}'_s - \eta_2 dy'_s \\ x'_r &= z \end{cases}$$

et soient  $P_{\xi}^{r,z}$  et  $P_{x'}^{r,z}$  les lois de probabilité induites respectivement par les processus stochastiques  $\xi_s$  et  $x'_s$ .

Comme les lois de probabilités  $P_{\xi}^{r,z}$  et  $P_{x'}^{r,z}$  sont liées par la dérivée de Radon-Nykodym  $\frac{dP_{\xi}^{r,z}}{dP_{x'}^{r,z}} = \rho_r$ , on obtient

$$E_{x'}^{r,z} \left( \rho_r K_0^l \exp \left( -\frac{(z-x'_t)^2}{2l} \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \int_r^t (\alpha (x'_s)^2 + \beta x'_s + \gamma) ds \right) \right) = E_{\xi}^{r,z} (\rho_r V_r^l),$$

ce qui implique que :

$$V_r^l(z) = E_{x'}^{r,z} \left[ K_0^l \exp \left( -\frac{(z-x'_t)^2}{2l} \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \int_r^t (\alpha (x'_s)^2 + \beta x'_s + \gamma) ds \right) \mid Y_{0,t} \right]. \quad (8.12)$$

Faisant tendre  $l$  vers 0, on obtient presque sûrement à la limite pour  $\sigma_t^l$  et  $\mu_t^l$  les solutions respectives de (8.5) et (8.6). Le second membre de (8.12) tend lui vers

$$P_{x'}^{r,z} [x'_t \in dx \mid Y_{0,t}] E_{x'}^{r,z} \left[ \exp \left( -\frac{1}{2} \int_r^t (\alpha (x'_s)^2 + \beta x'_s + \gamma) ds \right) \mid Y_{0,t}, x'_t = x \right].$$

De plus, un calcul direct montre que :

$$P_{x'}^{0,z} [x'_t \in dx \mid Y_{0,t}] = P_0 [x_t \in dz \mid Y_{0,t}, x_0 = x] = p_t(z).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} x'_s &= z - \eta_1 \bar{w}'_s - \eta_2 y'_s \\ &= z - \eta_1 \bar{w}'_t - \eta_2 y'_t + \eta_1 \bar{w}_{t-s} + \eta_2 y_{t-s}. \end{aligned}$$

Ainsi, conditionné par  $x'_t = x$ , le processus stochastique  $(x'_s)_{0 \leq s \leq t}$  est un pont brownien entre  $z$  et  $x$ , et le processus stochastique  $(x'_{t-s})_{0 \leq s \leq t}$  coïncide avec le processus stochastique  $(x_s)_{0 \leq s \leq t}$  conditionné par  $x_t = z$ .

Donc :

$$V_t(z) = p_t(z) E_0 \left[ \exp \left( -\frac{1}{2} \int_r^t (\alpha(x_s)^2 + \beta x_s + \gamma) ds \right) \mid Y_{0,t}, x_t = z, x_0 \right].$$

Il suffit de reporter ce résultat dans l'égalité (8.10) pour achever la preuve du théorème.  $\square$

## 8.4 Exemples.

**Exemple 1.** Lorsque la fonction  $f$  est linéaire, on retrouve des formules analogues à celles du filtre de Kalman-Bucy (voir [7] par exemple).

**Exemple 2.** Avec  $f(z) = \tanh(\lambda z)$ ,  $\eta_1 = \lambda^{-1/2}$ , on a  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Les raisonnements effectués restent valides et on a une généralisation à des systèmes avec bruits corrélés d'un exemple introduit par Beneš dans [6]. Plus précisément, on a alors :

$$q_t(z) = \cosh(\lambda z) \exp \left( -\frac{\lambda(z - x_0 - y_t)^2}{2t} \right).$$

**Exemple 3.** Avec  $\eta_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \gamma = 0$ , l'équation différentielle (8.3) a une solution nulle en 0 qui équivaut à  $x/4$  à l'infini. Le théorème ci-dessus s'applique dans ce cas.



## Chapitre 9

# Filtrage et prédiction dans les espaces de Hilbert

### 9.1 Introduction.

Les résultats rappelés dans le chapitre 6 de cette thèse s'appliquent lorsque le signal et l'observation évoluent dans des espaces de dimensions finies. La généralisation de ces résultats à des problèmes d'évolution dans des espaces plus généraux a motivé de nombreux travaux dans les dernières décennies.

L'importance pratique considérable du filtre de Kalman-Bucy a suscité la production d'une vaste littérature consacrée à la généralisation de cette technique au contexte des problèmes de filtrage en dimension infinie. Dans ce domaine, on peut citer plus particulièrement, parmi beaucoup d'autres travaux, Kushner [47], le livre de Bensoussan [7], Curtain [16], Curtain et Pritchard [18], ainsi que les articles cités dans [17].

Plus récemment, les équations du filtrage non linéaire ont été étendues à des systèmes avec bruits additifs corrélés lorsque le signal évolue dans un espace de Hilbert de dimension infinie et l'observation est de dimension finie par Ahmed [1] et Ahmed, Fuhrman et Zabczyk [3] et par Elliot et Moore [26] pour des systèmes avec bruits indépendants lorsque les coefficients de diffusion dépendent du signal. Ces résultats ont été généralisés à des problèmes où l'observation est de dimension infinie par Dietsch [24].

La théorie des semi-groupes jointe au calcul stochastique dans les espaces de dimension infinie fournissent un cadre commode pour l'étude de différents problèmes. Nous nous référons pour cette question des équations différentielles stochastiques en dimension infinie à l'ouvrage de Da Prato et Zabczyk [20]. Parmi les champs d'application du calcul stochastique dans les espaces de Hilbert, on peut citer par exemple les problèmes incluant des facteurs de retard.

Divers systèmes réels sont susceptibles d'être modélisés par des équations différentielles incluant des retards, que ce soit par exemple en technologie, en biologie ou en dynamique des populations. Des systèmes différentiels stochastiques avec retards ont été étudiés par différents auteurs parmi lesquels Delfour [22], Vinter et Kwong [63]. La question du filtrage pour des systèmes avec retards modélisés par une diffusion dans un espace de Banach a été étudiée par Kallianpur et Mandal [35] qui ont montré que le filtre associé à de tels problèmes de filtrage est solution d'une équation de Zakai.

Dans ce chapitre, on étudie la généralisation des équations du filtrage et de la prédiction à un modèle décrit en détails dans le paragraphe 2. Le contexte choisi est assez général, dans la mesure

où le signal et l'observation évoluent tous deux dans des espaces de Hilbert séparables suivant des équations non linéaires. Dans notre modèle, les bruits sont modélisés par des processus de Wiener cylindriques corrélés. Les méthodes classiques de la théorie du filtrage non linéaire conduisent alors à des équations aux dérivées partielles stochastiques de types Zakai et Kushner-Stratonovitch pour les problèmes de filtrage (paragraphe 3) et de prédiction (paragraphe 4). Dans le paragraphe 5, on étend à l'équation de la prédiction le résultat d'absolue continuité du filtre non normalisé obtenu par Ahmed, Fuhrman et Zabczyk [3]. Le paragraphe 6 présente un modèle de couple signal-observation avec deux facteurs de retard et discute de l'application des résultats de ce chapitre dans cette situation.

## 9.2 Le modèle étudié.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité complet,  $U, V$  et  $H$  des espaces de Hilbert séparables.

Soient  $W_1$  et  $W_2$  deux processus de Wiener cylindriques indépendants à valeurs respectivement dans  $U$  et  $V$  définis sur cet espace de probabilité. Pour alléger la présentation, on supposera que l'opérateur de covariance de  $W_1$  (respectivement  $W_2$ ) est l'identité de  $U$  (respectivement  $V$ ).

Considérons un signal modélisé par le processus stochastique  $X_t$  solution faible dans  $H$  de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = AX_t dt + F(X_t, t) dt + B(X_t, t) dW_1(t) + C(X_t, t) dW_2(t). \quad (9.1)$$

où :

- (H1)  $X_0$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $H$ , indépendante de  $W_1$  et  $W_2$ .
- (H2)  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe  $S(\cdot)$ .
- (H3) Les applications  $F, B$  et  $C$  définies sur  $H \times [0, +\infty[$  et à valeurs respectivement dans  $H, L_2(U, H)$  et  $L_2(V, H)$  sont mesurables et, pour tout  $T > 0$ , il existe une constante  $c_T$  telle que

$$\begin{aligned} \|F(x_1, t) - F(x_2, t)\|_H + \|B(x_1, t) - B(x_2, t)\|_{L_2(U, H)} \\ + \|C(x_1, t) - C(x_2, t)\|_{L_2(V, H)} \leq c_T \|x_1 - x_2\|_H \end{aligned}$$

et

$$\|F(x_1, t)\|_H + \|B(x_1, t)\|_{L_2(U, H)} + \|C(x_1, t)\|_{L_2(V, H)} \leq c_T (1 + \|x_1\|_H)$$

pour tout triplet  $(x_1, x_2, t) \in H \times H \times [0, T]$ .

Sous ces hypothèses, qui peuvent être assouplies, l'équation différentielle stochastique (9.1) a une unique solution faible (voir par exemple [20, chapitre 7]).

Supposons maintenant que le processus  $X_t$  est observé par l'intermédiaire du processus stochastique  $Y_t$

$$Y_t = \int_0^t G(X_s, s) ds + W_2(t) \quad (9.2)$$

où :

- (H4)  $G$  est une fonction définie sur  $H \times [0, +\infty[$  et à valeurs dans  $V$ , continue et bornée.

Le paragraphe suivant est consacré à des résultats concernant le problème de filtrage associé au système différentiel stochastique (9.1)-(9.2).

### 9.3 Équations du filtrage.

Ce paragraphe est consacré à une extension des résultats de la théorie du filtrage non linéaire dans les espaces de dimension finis au problème exposé dans le paragraphe 2, faisant intervenir des espaces de Hilbert séparables. Cette extension est possible avec les techniques habituelles en théorie du filtrage, dans la mesure où l'on reste attentif à la nature précise des solutions des équations différentielles stochastiques qui entrent en jeu, solutions faibles dans le contexte de ce chapitre.

Remarquons d'abord que grâce à l'hypothèse (H4), on peut définir en vertu du théorème de Girsanov étendu au contexte des espaces de Hilbert [20, théorème 10.14] une probabilité  $P_0$  sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{F})$  par la relation  $\frac{dP_0}{dP} = Z_t^{-1}$ , avec :

$$Z_t = \exp \left( \int_0^t \langle G(X_s, s), dY_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \|G(X_s, s)\|^2 ds \right). \quad (9.3)$$

Ceci permet de poser pour toute fonction à valeurs réelles  $\phi$  définie sur  $H$ , mesurable et bornée :

$$\rho_t \phi = E_0 [Z_t \phi(X_t) \mid \sigma(Y_s; 0 \leq s \leq t)].$$

On notera d'autre part

$$\Pi_t \phi = E[\phi(X_t) \mid \sigma(Y_s; 0 \leq s \leq t)]$$

le filtre optimal. D'après la formule de Kallianpur-Striebel,  $\rho_t$  et  $\Pi_t$  sont liés par la relation :

$$\Pi_t \phi = \frac{\rho_t \phi}{\rho_t 1}.$$

On peut obtenir une équation de Zakai pour le filtre non normalisé  $\rho_t$  et une équation de Kushner-Stratonovitch pour le filtre  $\Pi_t$  sous réserve de choisir de manière adéquate l'espace des fonctions test  $\phi$ . Dans ce sens, rappelons la définition de l'espace  $\mathcal{D}_0$  introduit par Ahmed, Fuhrman et Zabczyk dans [3].

Pour tout espace de Hilbert séparable  $K$ , notons  $UC_b^k(H, K)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , l'espace vectoriel des applications  $\phi$  de  $H$  dans  $K$  qui sont, ainsi que leurs dérivées de Fréchet jusqu'à l'ordre  $k$ , bornées et uniformément continue. D'autre part, si  $\phi \in UC_b^k(H, \mathbb{R})$  est telle que l'application  $\phi_A : x \mapsto \phi(Ax)$ , définie sur le domaine de l'opérateur  $A$ , se prolonge continûment sur  $H$ , alors ce prolongement sera aussi noté  $\phi_A$ .

L'espace  $\mathcal{D}_0$  est alors défini comme l'ensemble des applications  $\phi$  de  $H$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

- \*  $\phi \in UC_b^2(H, \mathbb{R})$  et  $\phi_A \in UC_b^2(H, \mathbb{R})$
- \*  $\nabla^2 \phi \in UC_b^0(H, L_1(H, H))$  et  $\nabla^2 \phi_A \in UC_b^0(H, L_1(H, H))$ , où  $L_1(H, H)$  désigne l'espace des opérateurs nucléaires de  $H$  dans  $H$ .

L'intérêt de l'espace  $\mathcal{D}_0$  est que pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{D}_0$ , on peut exprimer la différentielle du processus stochastique  $\phi(X_t)$  grâce à la formule d'Itô, en dépit du fait que  $X_t$  est une solution faible de l'équation différentielle stochastique (9.1).

Introduisons maintenant quelques notations utiles pour formuler les équations du filtrage correspondant au système différentiel stochastique (9.1)-(9.2).

Pour tout  $s \geq 0$ , soit l'opérateur  $\mathcal{L}_s$  défini sur l'espace  $\mathcal{D}_0$  par

$$\mathcal{L}_s \phi(x) = \frac{1}{2} \text{Tr} (\nabla_{xx}^2 \phi(x) (BB^* + CC^*)(x, s)) + \langle x, A^* \nabla_x \phi(x) \rangle_H + \langle F(x, s), \nabla_x \phi(x) \rangle_H,$$

et l'opérateur  $\Lambda_s$  défini par

$$\Lambda_s \phi(x) = \phi(x)G(x, s) + C(x, s)^* \nabla_x \phi(x).$$

Puisque les opérateurs de covariance des processus de Wiener  $W_1(t)$  et  $W_2(t)$  sont respectivement l'identité de  $U$  et de  $V$ , on peut écrire

$$W_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) e_i \quad (9.4)$$

et

$$W_2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(t) f_j, \quad (9.5)$$

$(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  désignant respectivement deux bases orthonormales de  $U$  et  $V$ ,  $(\beta_i(t))_{t \geq 0}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , et  $(\gamma_j(t))_{t \geq 0}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , deux suites de processus de Wiener standards, tous mutuellement indépendants.

La convergence en moyenne quadratique des séries (9.4) et (9.5) a lieu dans un espace de Hilbert arbitraire  $U_1 \supset U$ , choisi de telle sorte que l'injection canonique de  $U$  dans  $U_1$  soit un opérateur de Hilbert-Schmit (voir [20, chapitre 4]).

Remarquons l'égalité

$$Y_t = \int_0^t G(X_s, s) ds + \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j(t) f_j \quad (9.6)$$

et posons

$$\rho_s(\Lambda_s \phi)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_s(\langle \phi(x) G(x, s) + C(x, s)^* \nabla_x \phi(x), f_j \rangle_V) f_j.$$

Avec ces notations, on peut montrer les deux résultats suivants, analogues à ceux donnés par Dietsch dans [24] lorsque les coefficients du système différentiel stochastique (9.1)-(9.2) sont indépendants du temps.

**Théorème 9.3.1** *Sous les hypothèses (H1)-(H4), on a pour tout  $\phi \in \mathcal{D}_0$*

$$\rho_t \phi = \rho_0 \phi + \int_0^t \rho_s(\mathcal{L}_s \phi) ds + \int_0^t \langle \rho_s(\Lambda_s \phi), dY_s \rangle_V, \quad (9.7)$$

**Démonstration.** En appliquant la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned} d\phi(X_t) &= \mathcal{L}_t \phi(X_t) dt + \langle \nabla_x \phi(X_t), B(X_t, t) dW_1(t) \rangle_H \\ &\quad + \langle \nabla_x \phi(X_t), C(X_t, t) dW_2(t) \rangle_H \\ &= \mathcal{L}_t \phi(X_t) dt + \sum_{i=0}^{\infty} \langle B(X_t, t)^* \nabla_x \phi(X_t), e_i \rangle_U d\beta_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \langle C(X_t, t)^* \nabla_x \phi(X_t), f_j \rangle_V d\gamma_j(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} dZ_t &= Z_t \langle G(X_t, t), dY_t \rangle \\ &= Z_t \|G(X_t, t)\|_V^2 dt + Z_t \sum_{j=1}^{\infty} \langle G(X_t, t), f_j \rangle_V d\gamma_j(t). \end{aligned}$$

A nouveau par application de la formule d'Itô, on déduit que :

$$\begin{aligned} d(Z_t \phi(X_t)) &= Z_t \mathcal{L}_t \phi(X_t) dt + \sum_{i=0}^{\infty} Z_t \langle B(X_t, t)^* \nabla_x \phi(X_t), e_i \rangle d\beta_i(t) \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} Z_t \langle C(X_t, t)^* \nabla_x \phi(X_t), f_j \rangle d\gamma_j(t) \\ &+ Z_t \phi(X_t) \|G(X_t, t)\|_V^2 dt \\ &+ Z_t \phi(X_t) \sum_{j=1}^{\infty} \langle G(X_t, t), f_j \rangle d\gamma_j(t) \\ &+ Z_t \sum_{j=1}^{\infty} \langle C(X_t, t)^* \nabla_x \phi(X_t), G(X_t, t) \rangle dt. \end{aligned}$$

En prenant en compte les égalités (9.4), (9.5) et (9.6), la différentielle  $d(Z_t \phi(X_t))$  s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} d(Z_t \phi(X_t)) &= Z_t \mathcal{L}_t \phi(X_t) dt + Z_t \langle \nabla_x \phi(X_t), B(X_t, t) dW_1(t) \rangle_H \\ &+ \langle Z_t (\phi(X_t) G(X_t, t) + C(X_t, t)^* \nabla_x \phi(X_t)), dY_t \rangle_V. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Compte-tenu des hypothèses sur les coefficients du système différentiel stochastique (9.1)-(9.2), l'intégrale stochastique

$$\int_0^t Z_s \langle \nabla_x \phi(X_s), B(X_s, s) dW_1(s) \rangle_H$$

est une martingale.

En intégrant (9.8) de 0 à  $t$  et en prenant l'espérance conditionnelle

$$E_0[\cdot | \sigma\{Y_s; 0 \leq s \leq t\}],$$

on obtient l'équation de Zakai (9.7) grâce aux arguments habituels de la théorie du filtrage (voir par exemple [56]).  $\square$

**Théorème 9.3.2** *Sous les hypothèses (H1)-(H4), on a pour tout  $\phi \in \mathcal{D}_0$*

$$\Pi_t \phi = \Pi_0 \phi + \int_0^t \Pi_s (\mathcal{L}_s \phi) ds + \int_0^t \langle \Pi_s (\Lambda_s \phi) - \Pi_s \phi \Pi_s G(\cdot, s), dv_s \rangle_V, \quad (9.9)$$

où :

$$v_t = Y_t - \int_0^t \Pi_s G(\cdot, s) ds \quad (9.10)$$

est le processus d'innovation associé au système (9.1)-(9.2).

**Démonstration.** On peut commencer par remarquer que

$$\rho_t 1 = \exp \left[ \int_0^t \langle \Pi_s G(\cdot, s), dY_s \rangle_V - \frac{1}{2} \int_0^t \|\Pi_s G(\cdot, s)\|_V^2 ds \right]. \quad (9.11)$$

En effet, comme

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s \langle G(X_s, s), dY_s \rangle_V,$$

on obtient en procédant comme pour établir l'équation de Zakai :

$$\rho_t 1 = 1 + \int_0^t \rho_s 1 \langle \Pi_s G(\cdot, s), dY_s \rangle_V.$$

De plus, le processus stochastique exponentiel (9.11) est bien la solution de cette équation différentielle stochastique.

En appliquant la formule d'Itô, on déduit de (9.11) que :

$$d(\rho_t \mathbf{1})^{-1} = (\rho_t \mathbf{1})^{-1} \left( - \langle \Pi_t G(\cdot, t), dY_t \rangle_V + \|\Pi_t G(\cdot, t)\|_V^2 dt \right).$$

Grâce à l'équation de Zakai (9.7), on en déduit à nouveau à l'aide de la formule d'Itô que :

$$\begin{aligned} d\Pi_t \phi &= (\rho_t \mathbf{1})^{-1} \rho_t (\mathcal{L}_t \phi) + (\rho_t \mathbf{1})^{-1} \langle \rho_t (\Lambda_t \phi), dY_t \rangle_V \\ &\quad - (\rho_t \mathbf{1})^{-1} \rho_t \phi \langle \Pi_t G(\cdot, t), dY_t \rangle_V + (\rho_t \mathbf{1})^{-1} \rho_t \phi \|\Pi_t G(\cdot, t)\|_V^2 dt \\ &\quad - (\rho_t \mathbf{1})^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Pi_t G(\cdot, t), f_j \rangle_V \langle \rho_t (\Lambda_t \phi), f_j \rangle_V dt. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Le dernier terme du second membre de la dernière égalité s'écrit aussi

$$- (\rho_t \mathbf{1})^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Pi_t G(\cdot, t), \rho_t (\Lambda_t \phi) \rangle_V dt.$$

La formule de Kallianpur-Striebel permet donc de récrire l'égalité (9.12) sous la forme de l'équation de Kushner-Stratonovitch (9.9).  $\square$

## 9.4 Équations de la prédiction.

Le problème de prédiction qui nous concerne est celui de l'estimation de la loi de  $X_t$  connaissant la trajectoire de l'observation jusqu'à un instant  $s$ . On s'intéresse donc, pour  $0 \leq s \leq t$ , à l'espérance conditionnelle :

$$\hat{\Pi}_t \phi = E[\phi(X_t) | \mathcal{Y}_s],$$

où  $\mathcal{Y}_s$  désigne la tribu  $\sigma(Y_r; 0 \leq r \leq s)$ .

La méthode employée consiste à ramener le problème de prédiction à un problème de filtrage artificiel. Dans ce but, fixons  $s \geq 0$  et définissons le processus stochastique  $\hat{W}_2$  à valeurs dans  $V$  par :

$$\hat{W}_2(t) = W_2(t) + W_3(t) - W_3(t \wedge s),$$

où  $W_3$  désigne un processus de Wiener cylindrique de covariance  $I$ , à valeurs dans  $V$ , indépendant de  $W_1$  et  $W_2$ .

Des hypothèses sur les processus stochastiques  $W_1$  et  $W_2$ , on déduit que  $\hat{W}_2$  est un processus de Wiener cylindrique de covariance  $I$ , indépendant de  $W_1$ .

Sous les hypothèses choisies, l'équation différentielle stochastique (9.1) a une unique solution faible et, si on note  $\hat{Y}_t$  le processus stochastique défini par :

$$\hat{Y}_t = \int_0^t 1_{[0,s]}(r) G(X_r, r) dr + \hat{W}_2(t), \quad (9.13)$$

alors  $\hat{Y}_t$  et  $Y_t$  coïncident pour  $0 \leq t \leq s$ .

De plus, en posant  $\hat{Z}_t = Z_{t \wedge s}$  où  $Z_t$  est défini par (9.3), on peut définir une mesure de probabilité  $\hat{P}$  sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{F})$  par la dérivée de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\hat{P}}{dP} = \hat{Z}_t^{-1}$$

ainsi qu'un filtre non normalisé  $\hat{\rho}_t$  par :

$$\hat{\rho}_t \phi = \hat{E} \left[ \hat{Z}_t \phi(X_t) \mid \mathcal{Y}_s \right].$$

On obtient un résultat analogue à celui de Pardoux [55] concernant les problèmes en dimension finie, en supposant que les fonctions tests sont prises dans l'espace  $\mathcal{D}_0$ .

**Théorème 9.4.1** *Sous les hypothèses (H1)-(H4) et pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{D}_0$ , on a :*

$$\hat{\rho}_t \phi = \hat{\rho}_0 \phi + \int_0^t \hat{\rho}_r (\mathcal{L}_s \phi) dr + \int_0^{t \wedge s} \langle \hat{\rho}(\Lambda_r \phi), dY_r \rangle_V \quad (9.14)$$

et

$$\hat{\Pi}_t \phi = \hat{\Pi}_0 \phi + \int_0^t \hat{\Pi}_r (\mathcal{L}_r \phi) dr + \int_0^{t \wedge s} \langle \hat{\Pi}_r (\Lambda_r \phi) - \hat{\Pi}_r(\phi) \hat{\Pi}_r(G), dv_r \rangle, \quad (9.15)$$

$v_t$  étant le processus d'innovation défini par (9.10).

**Démonstration.** Pour tout  $t \geq 0$  on a :

$$E[\phi(X_t) \mid \mathcal{Y}_s] = E \left[ \phi(X_t) \mid \sigma(\hat{Y}_r; 0 \leq r \leq t) \right]$$

et

$$\hat{E} \left[ \hat{Z}_t \phi(X_t) \mid \mathcal{Y}_s \right] = \hat{E} \left[ \hat{Z}_t \phi(X_t) \mid \sigma(\hat{Y}_r; 0 \leq r \leq t) \right].$$

Ce résultat est évident si  $t \leq s$  et dans le cas contraire, on peut noter que

$$\sigma(\hat{Y}_r; 0 \leq r \leq t) = \mathcal{Y}_s \vee \sigma(\hat{Y}_r - \hat{Y}_s; s \leq r \leq t),$$

tandis que la tribu

$$\sigma(\hat{Y}_r - \hat{Y}_s; s \leq r \leq t) = \sigma(W_3(r) - W_3(s); s \leq r \leq t)$$

est indépendante de  $\mathcal{Y}_s \vee \sigma(X_r; 0 \leq r \leq t)$ .

Considérons maintenant le problème de filtrage correspondant au système différentiel stochastique

$$\begin{cases} dX_t &= AX_t dt + F(X_t, t) dt + B(X_t, t) dW_1(t) + C(X_t, t) dW_2(t) \\ d\hat{Y}_t &= 1_{[0, s]}(t) G(X_t, t) dt + d\hat{W}_2(t). \end{cases} \quad (9.16)$$

Les accroissements  $\hat{W}_2(t_1) - \hat{W}_2(t_2)$  coïncident avec  $W_2(t_1) - W_2(t_2)$  pour  $0 \leq t_1 < t_2 \leq s$  et sont indépendants du processus stochastique  $W_2$  pour  $s \leq t_1 < t_2$ .

En appliquant le théorème 9.3.1, on obtient donc :

$$\hat{\rho}_t \phi = \hat{\rho}_0 \phi + \int_0^t \hat{\rho}_r (\mathcal{L}_s \phi) dr + \int_0^t \langle \hat{\rho}_r(\hat{\Lambda}_r \phi), d\hat{Y}_r \rangle_V, \quad (9.17)$$

avec

$$\hat{\Lambda}_r \phi(x) = 1_{[0, s]}(r) (\phi(x) G(x, r) + C(x, s)^* \nabla_x \phi(x)).$$

L'égalité (9.17) donne donc (9.14).

Le théorème 9.3.2 appliqué au système (9.16) donne l'équation

$$\hat{\Pi}_t \phi = \hat{\Pi}_0 \phi + \int_0^t \hat{\Pi}_r (\mathcal{L}_r \phi) dr + \int_0^t \langle \hat{\Pi}_r(\hat{\Lambda}_r \phi) - \hat{\Pi}_r(\phi) \hat{\Pi}_r(1_{[0, s]}(r) G(\cdot, r)), dv_r \rangle,$$

avec  $\hat{v}_r = \hat{Y}_t - \int_0^t \hat{\Pi}_r (1_{[0,s]}(\tau)G(\cdot, \tau)) d\tau$ .

On en déduit (9.15) puisque

$$\hat{\Pi}_r (\hat{\Lambda}_r \phi) = \hat{\Pi}_r (1_{[0,s]}(\tau)G(\cdot, \tau)) = 0$$

pour  $r > t$ . □

## 9.5 Absolue continuité du filtre non normalisé.

Nous nous tournons maintenant vers un résultat d'absolue continuité du filtre non normalisé  $\rho_t$  obtenu par Ahmed, Fuhrman et Zabczyk [3] dans le cas où  $F$  ne dépend pas du temps,  $B$  est un opérateur linéaire constant de  $U$  dans  $H$ ,  $C \equiv 0$  et  $V$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ . Le système différentiel stochastique (9.1)-(9.2) s'écrit alors dans  $H \times \mathbb{R}^d$  :

$$\begin{cases} dX_t = AX_t dt + F(X_t) dt + BdW_1(t) \\ dY_t = G(X_t, t) dt + dW_2(t). \end{cases} \quad (9.18)$$

Posons  $Q = BB^*$  et supposons en plus des hypothèses (H1), (H2) et (H4) que :

(H2') Il existe deux constantes positives  $M$  et  $k$  telles que  $\|S(t)\| \leq Me^{-kt}$ ,  $t \geq 0$ .

(H3')  $F$  est une fonction lipschitzienne et bornée de  $H$  dans  $H$ .

(H5) pour tout  $t \geq 0$ , l'opérateur  $Q_t = \int_0^t S(s)QS(s)^* ds$  est nucléaire.

(H6)  $\sup_{t>0} \text{Tr} Q_t < \infty$ .

Alors, Da Prato et Zabczyk [21] ont montré que la mesure  $\mu_0$  sur  $H$ , gaussienne, centrée et d'opérateur de covariance  $Q_\infty = \int_0^\infty S(s)QS(s)^* ds$  est l'unique mesure invariante associée à l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = AX_t dt + BdW_1(t).$$

Cette mesure peut servir de mesure de référence par rapport à laquelle le filtre non normalisé  $\rho_t$  possède une densité.

Soit en effet  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert  $L^2(H, \mu_0)$ . Dans cet espace, l'équation duale de l'équation de Zakai (9.7) s'écrit

$$dq_t = \mathcal{L}^* q_t dt + \langle G(\cdot, t)q_t, dW_2(t) \rangle \quad (9.19)$$

où  $\mathcal{L}^*$  désigne l'adjoint de l'opérateur non borné  $\mathcal{L}$  (ici indépendant de  $t$ ).

Compte tenu des résultats généraux sur les équations différentielles stochastiques dans les espaces de Hilbert [20], (9.19) possède une unique solution faible dès que la loi de  $X_0$  est absolument continue par rapport à  $\mu_0$  et l'opérateur  $\mathcal{L}$  possède une extension engendrant un semi-groupe continu sur  $\mathcal{H}$ .

Ahmed, Fuhrman et Zabczyk [3] ont démontré l'existence d'une telle extension (qui coïncide avec une extension du semi groupe de transition associé à la première équation du système 9.18) lorsque les hypothèses suivantes sont satisfaites.

(H7)  $F = 0$

ou

$$\text{Im}S(t) \subset \text{Im}Q_t^{1/2} \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } \int_0^T \|Q_t^{-1/2}S(t)\| < \infty \text{ pour tout } T > 0.$$

(H8) La loi  $\nu$  de  $X_0$  est absolument continue par rapport à  $\mu_0$  et  $\frac{d\nu}{d\mu_0} \in \mathcal{H}$ .

Sous l'ensemble des hypothèses ci-dessus, l'équation de Zakai (9.7) a une solution  $\rho_t$  telle que

$$\rho_t(dx) = q_t\mu_0(dx),$$

$q_t$  étant l'unique solution de l'équation différentielle stochastique dans  $\mathcal{H}$ .

Sous ces mêmes hypothèses, il est immédiat que l'équation (9.14) possède aussi une solution de la forme

$$\hat{\rho}_t(dx) = \hat{q}_t\mu_0(dx),$$

$\hat{q}_t$  étant l'unique solution faible dans  $\mathcal{H}$  de l'équation différentielle stochastique

$$d\hat{q}_t = \mathcal{L}^*\hat{q}_t dt + \langle 1_{[0,s]}(t)G(\cdot, t)\hat{q}_t, dW_2(t) \rangle$$

avec la condition initiale  $\hat{q}_0 = \nu$ .

## 9.6 Exemple : systèmes avec retards.

Dans ce paragraphe, on montre que les résultats donnés dans les paragraphes 3, 4 et 5 ci dessus sont applicables pour des problèmes où on cherche à estimer l'état d'une diffusion dans  $\mathbb{R}^n$ , lorsque cette diffusion est observée, en un sens précisé plus loin, avec un retard constant  $\tau > 0$  et que sa dynamique modélisée par une équation différentielle stochastique linéaire dépend d'un retard constant  $t_1 > 0$ , supposé unique pour simplifier la présentation.  $h$  désigne un réel positif majorant  $\tau$  et  $t_1$ .

Soit  $a_0$  et  $a_1$  deux matrices carrées de dimension  $n$ ,  $B$  un élément de  $\mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C$  un élément de  $\mathbb{R}^{n \times d}$ ,  $(w_t^1)_{t \geq 0}$  et  $(w_t^2)_{t \geq 0}$  deux processus de Wiener standards indépendants à valeurs respectivement dans  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^d$ .

L'équation différentielle stochastique

$$dx_t = a_0x_t dt + a_1x_{t-t_1} dt + Bdw_t^1 + Cdw_t^2 \tag{9.20}$$

peut être réécrite comme une équation différentielle stochastique dans l'espace de Hilbert  $H = \mathbb{R}^n \oplus L^2([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$  sous la forme

$$dX_t = AX_t dt + Bdw_t^1 + Cdw_t^2 \tag{9.21}$$

avec (voir par exemple [20, chapitre 5]) :

\*  $A : \text{Dom}(A) \subset H \rightarrow H$

$$\text{Dom}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in H; f(0) = x, f \text{ est absolument continue, } f' \in L^2([-h, 0]; \mathbb{R}^n) \right\}$$

$$\text{et } A \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0x + a_1f(-t_1) \\ f' \end{pmatrix}.$$

\*  $Bu = \begin{pmatrix} Bu \\ 0 \end{pmatrix}$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^p$ .

$$* Cy = \begin{pmatrix} Cy \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^d.$$

L'équation différentielle stochastique (9.21) possède une unique solution faible dans  $H$  dont la première composante donne la solution dans  $\mathbb{R}^n$  de l'équation différentielle stochastique (9.20).

Soit  $g$  une application continue et bornée de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\rho$  une approximation appartenant à  $L^2([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$  de la distribution de Dirac  $\delta_{-\tau}$ , par exemple une distribution gaussienne de petite dispersion.

La fonction  $G$  définie sur  $H$  par

$$G \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = g \left( \langle f, \rho \rangle_{L^2([-h, 0]; \mathbb{R}^n)} \right)$$

est continue et bornée.

Soit

$$Y_t = \int_0^t G(X_r) dr + w_t^2 \quad (9.22)$$

l'observation du signal  $X_t$  défini par (9.21).

On peut appliquer les théorèmes 9.3.1, 9.3.2 et 9.4.1 dans ce contexte. Il semble donc pertinent de chercher des précisions concernant l'espace  $\mathcal{D}_0$  des fonctions tests.

De manière générale (voir [21]), cet espace contient les fonctions  $\phi$  de la forme

$$\phi(X) = \varphi(\langle X, \xi_1 \rangle, \langle X, \xi_2 \rangle, \dots, \langle X, \xi_m \rangle) \quad (9.23)$$

avec  $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , et  $\xi_i \in \text{Dom} A^*$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

Donnons un exemple d'élément du domaine de  $A^*$ . Soit  $v$  un élément de  $H_0^1([-h, 0]; \mathbb{R}^n) \subset C([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ . Alors,  $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$  appartient au domaine de  $A^*$  et

$$A^* \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ -v' \end{pmatrix}$$

$v'$  désignant la dérivée de  $v$ .

Si, dans l'égalité (9.23), on choisit  $\xi_i = \begin{pmatrix} 0 \\ v_i \end{pmatrix}$  avec  $v_i \in H_0^1([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , on peut exprimer les dérivées de Fréchet  $\nabla \phi \in H$  et  $\nabla^2 \phi \in L_1(H, H)$  :

$$\nabla \phi(X) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\langle X, \xi_1 \rangle, \langle X, \xi_2 \rangle, \dots, \langle X, \xi_m \rangle) \xi_i$$

$$\nabla^2 \phi(X) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\langle X, \xi_1 \rangle, \langle X, \xi_2 \rangle, \dots, \langle X, \xi_m \rangle) \xi_i \otimes \xi_j$$

d'où :

$$A^* \nabla \phi(X) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\langle X, \xi_1 \rangle, \langle X, \xi_2 \rangle, \dots, \langle X, \xi_m \rangle) \begin{pmatrix} 0 \\ -v_i' \end{pmatrix}.$$

De plus, pour tout élément  $X = \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}$  de  $H$ , on a

$$(BB^* + CC^*)X = \begin{pmatrix} BB^*x + CC^*x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $\text{Im}(\mathcal{B}\mathcal{B}^* + \mathcal{C}\mathcal{C}^*) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}$  et on a  $\nabla^2\phi(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{0\}$ .

Donc :

$$\text{Tr}(\nabla^2\phi(X)(\mathcal{B}\mathcal{B}^* + \mathcal{C}\mathcal{C}^*)) = 0.$$

Les équations (9.7) et (9.14) se réduisent ainsi après le choix de  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , à des équations aux dérivées partielles stochastiques du premier ordre. Cette remarque suggère par exemple avec  $m = 1$  de choisir pour  $v_1$  une approximation de la distribution de Dirac  $\delta_{-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , dans le but d'estimer la loi conditionnelle non normalisée de l'état du système à l'instant  $t - \varepsilon$ .

Supposons maintenant que  $C = 0$  et que le semi-groupe  $S(\cdot)$  engendré par l'opérateur  $A$  vérifie la condition de stabilité de l'hypothèse (H2'). Notons à ce sujet que [19, théorème 5.1.7] ce semi-groupe est  $\beta$ -exponentiellement stable si, et seulement si, pour tout nombre complexe  $s$  tel que  $\Re(s) \geq \beta$  on a

$$\det[sI - a_0 - e^{-t_1 s} a_1] \neq 0.$$

Puisque la restriction à  $\{0\} \times L^2([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$  de l'opérateur  $\mathcal{B}\mathcal{B}^*$  est nulle, on a donc pour une base orthonormale  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$  diagonalisant la matrice symétrique  $\mathcal{B}\mathcal{B}^*$  :

$$\begin{aligned} \text{Tr} \int_0^t S(s)\mathcal{B}\mathcal{B}^*S(s)^* ds &= \int_0^t \left\| S(s)(\mathcal{B}\mathcal{B}^*)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_2(H,H)}^2 ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \left\| S(s)(\mathcal{B}\mathcal{B}^*)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} f_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_H^2 ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \left\| S(s) \begin{pmatrix} (\mathcal{B}\mathcal{B}^*)^{\frac{1}{2}} f_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_H^2 ds \\ &\leq C \int_0^t e^{-2ks} ds. \end{aligned}$$

L'hypothèse (H6) est donc vérifiée ainsi que l'hypothèse (H7) (avec  $F = 0$ ).

Les équations de Zakai du filtrage et de la prédiction des théorèmes 9.3.1 et 9.4.1 possèdent donc des solutions absolument continues par rapport à la mesure gaussienne  $\mu_0$ .



## Chapitre 10

# Equations du filtrage pour un problème avec coût exponentiel.

### 10.1 Introduction.

Dans ce chapitre, on considère un couple signal observation  $(X_t, y_t)$  dont la première composante évolue dans un espace de Hilbert séparable  $H$  et la seconde dans  $\mathbb{R}^d$ . La dynamique du signal  $X_t$  dépend d'un contrôle calculé à partir de l'information fournie par le processus d'observation  $y_t$ . Les bruits affectant le signal et l'observation sont supposés indépendants et sont représentés respectivement par un processus de Wiener cylindrique  $(W(t))_{t \geq 0}$  et un processus de Wiener standard  $(b_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

Dans un tel contexte, une question importante, intimement liée à celle du filtrage optimal, est celle de l'existence, et le cas échéant de la construction, d'un contrôle optimal minimisant une fonctionnelle de coût.

Lorsque les équations différentielles stochastiques décrivant l'évolution du signal et de l'observation sont linéaires et le coût évalué par l'espérance mathématique d'une fonctionnelle quadratique de l'état du signal et du contrôle, on a affaire à un problème de contrôle optimal en dimension infinie dans la veine de ceux étudiés par Bensoussan dans [7].

Pour une classe de problèmes non linéaires où le bruit de dynamique du signal est additif, Ahmed [2] a montré l'existence de contrôles optimaux et proposé des conditions nécessaires d'optimalité sous forme d'un principe de minimum stochastique tout en décrivant des applications des résultats obtenus à des problèmes d'écologie et de génie électrique.

Par ailleurs, un intérêt certain a été suscité ces dernières années par des modèles où le coût du contrôle est évalué par l'espérance mathématique de l'exponentielle d'une fonctionnelle de l'état du signal et du contrôle. De tels modèles, initialement présentés par Jacobson [33], ont été étudiés par différents auteurs parmi lesquels Speyer [62], Kumar et Van Schuppen [41] et Bensoussan [9].

Plus récemment, Bensoussan et Elliot [10] ont obtenu un principe de programmation dynamique pour des problèmes non linéaires en dimension finie.

Il ressort en particulier des résultats de [2] et [10] qu'une voie efficace de résolution de problème de contrôle optimal avec coût exponentiel passe par la reformulation du problème initial en termes d'évolution de la solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique du type de l'équation de Zakai.

Le but poursuivi dans ce chapitre est d'explorer la possibilité d'une telle reformulation pour un signal de dimension infinie et une fonctionnelle de coût exponentielle.

Le modèle étudié est décrit dans le paragraphe 2. Dans le paragraphe 3, on établit une équation aux dérivées partielles stochastique du type de l'équation de Zakai, modifiée pour prendre en compte le problème posé, de la même manière que dans [10]. Le résultat obtenu est illustré par l'exemple d'un système observé avec retard dans le paragraphe 4. Dans le paragraphe 5, on s'appuie sur des résultats obtenus par Da Prato et Zabczyk [21] pour étudier l'existence d'une solution de l'équation de Zakai modifiée absolument continue par rapport à une mesure gaussienne de référence dans l'espace d'état du signal.

## 10.2 Présentation du modèle.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  un espace de probabilité complet filtré et  $(W(t))_{t \geq 0}$  un processus de Wiener cylindrique à valeurs dans un espace de Hilbert séparable  $V$ . On suppose que l'opérateur de covariance de  $W(t)$  est l'identité de  $V$ .

Soit également un processus de Wiener standard  $(b_t)_{t \geq 0}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , défini sur le même espace de probabilité et indépendant de  $(W(t))_{t \geq 0}$ .

Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable et  $(X_t, y_t)_{t \geq 0}$  le processus signal-observation, à valeurs dans  $H \times \mathbb{R}^d$ , solution du système différentiel stochastique

$$\begin{aligned} dX_t &= AX_t dt + F(X_t, u_t) dt + B(X_t) dW(t) \\ dy_t &= G(X_t) dt + db_t \end{aligned} \tag{10.1}$$

où :

- (H1)  $X_0$  est donné dans  $H$ .
- (H2)  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $S(\cdot)$  de classe  $C_0$  dans  $H$ .
- (H3) Le contrôle  $(u_t)_{t \geq 0}$  est un processus stochastique prévisible à valeurs dans un espace métrique séparable complet  $U$ .
- (H4) L'application  $F$  définie sur  $H \times U$  et à valeurs dans  $H$  est lipschitzienne par rapport à la première variable et continue par rapport à la seconde.
- (H5) L'application  $B$  définie sur  $H$  et à valeurs dans l'espace  $L_2(V, H)$  des opérateurs de Hilbert-Schmitt de  $V$  dans  $H$  est lipschitzienne.
- (H6)  $G$  est une fonction continue et bornée définie sur  $H$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

Sous ces hypothèses, le système différentiel stochastique (10.1) a une unique solution faible ([20, chapitre 7]).

Dans la suite, on suppose que  $(u_t)_{t \geq 0}$  est prévisible par rapport à la filtration  $(\mathcal{Y}_t)_{t \geq 0}$  engendrée par la trajectoire de l'observation.

$T$  désignant un réel positif, soit  $L$  et  $\Phi$  deux fonctions mesurables bornées à valeurs réelles définies respectivement sur  $H \times U \times [0, T]$  et  $H$ . Le coût du contrôle  $u = (u_t)_{t \geq 0}$  sur l'intervalle  $[0, T]$  est défini par :

$$J(u) = \theta E \left[ \exp \left( \theta \int_0^T L(X_s, u_s, s) ds + \Phi(X_T) \right) \right], \tag{10.2}$$

où  $\theta$  est un paramètre réel fixé.

L'hypothèse (H6) autorise le changement de probabilité habituel en théorie du filtrage obtenu par application du théorème de Girsanov. Soit donc la probabilité  $\bar{P}$  définie sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{F})$

par la dérivée de Radon-Nikodym  $\frac{d\bar{P}}{dP} = Z_t^{-1}$ , avec :

$$Z_t = \exp \left( \int_0^t G(X_s)^* dy_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|G(X_s)\|_{\mathbb{R}^d}^2 ds \right).$$

Alors, sous la probabilité  $\bar{P}$ ,  $(W(t))_{t \geq 0}$  et  $(y_t)_{t \geq 0}$  sont des processus de Wiener indépendants.

Afin de définir un filtre non normalisé de manière pertinente vis à vis du problème considéré, il est naturel, compte tenu de (10.2), de prendre en considération, comme dans le cas d'un signal de dimension fini [10, 15], la quantité

$$D_t = \exp \left( \theta \int_0^T L(X_s, u_s, s) ds \right).$$

On peut ainsi définir, pour toute fonction mesurable bornée  $\phi$  de  $H$  dans  $\mathbb{R}$ , le filtre non normalisé  $\sigma_t \phi$  par

$$\sigma_t \phi = \bar{E} [Z_t D_t \phi(X_t) | \mathcal{Y}_t]. \quad (10.3)$$

### 10.3 Équation de Zakai modifiée.

L'espace  $\mathcal{D}_0$  de fonctions tests intervenant dans l'énoncé du résultat ci-dessous a été défini à la page 103 en fonction de l'opérateur non borné  $A$ .

Soit  $\mathcal{L}_u$  l'opérateur différentiel du second ordre défini pour toute fonction  $\phi$  de  $\mathcal{D}_0$  par

$$\mathcal{L}_u \phi(x) = \langle x, A^* \nabla_x \phi(x) \rangle_H + \langle F(x, u), \nabla_x \phi(x) \rangle_H + \frac{1}{2} \text{Tr} (\nabla_{xx}^2 \phi(x) B(x) B(x)^*).$$

Ces notations permettent d'énoncer le résultat suivant, dont la démonstration utilise les techniques habituelles de la théorie du filtrage non linéaire.

**Théorème 10.3.1** *Pour tout élément  $\phi$  de  $\mathcal{D}_0$ , le processus stochastique  $\sigma_t \phi$  est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique*

$$\begin{aligned} \sigma_t \phi &= E(\phi(X_0)) + \int_0^t \sigma_s (\mathcal{L}_{u_s} \phi) ds + \theta \int_0^t \sigma_s (L(\cdot, u_s, s) \phi) ds \\ &+ \int_0^t \sigma_s (\phi G)^* dy_s. \end{aligned} \quad (10.4)$$

**Démonstration.** Par application de la formule d'Itô, on obtient

$$d(Z_t D_t) = Z_t D_t G(X_t)^* dy_t + \theta Z_t D_t L(X_t, u_t, t) dt$$

et

$$d\phi(X_t) = \mathcal{L}_{u_t} \phi(X_t) dt + \langle \nabla_x \phi(X_t), B(X_t) dW(t) \rangle_H,$$

puis

$$\begin{aligned} d(Z_t D_t \phi(X_t)) &= Z_t D_t \phi(X_t) G(X_t)^* dy_t + \theta Z_t D_t \phi(X_t) L(X_t, u_t, t) dt \\ &+ Z_t D_t \mathcal{L}_{u_t} \phi(X_t) dt + Z_t D_t \langle \nabla_x \phi(X_t), B(X_t) dW(t) \rangle_H. \end{aligned}$$

Des hypothèses (H2)-(H6) et du fait que la fonction  $L$  est bornée, on déduit facilement que  $\int_0^t Z_s D_s \langle \nabla_x \phi(X_s), B(X_s) dW(s) \rangle_H$  est une martingale. Donc, compte-tenu de l'indépendance sous  $\bar{P}$  des processus de Wiener  $(W(t))_{t \geq 0}$  et  $(y_t)_{t \geq 0}$ , en intégrant de 0 à  $t$  et en

prenant l'espérance conditionnelle par rapport à  $\mathcal{Y}_t$ , on obtient en appliquant le théorème de Fubini stochastique prouvé par Lipster et Shirayev dans [48] :

$$\begin{aligned}\bar{E}[Z_t D_t \phi(X_t) | \mathcal{Y}_t] &= E(\phi(X_0)) + \int_0^t \bar{E}[Z_s D_s \mathcal{L}_{u_s} \phi(X_s) | \mathcal{Y}_s] ds \\ &+ \theta \int_0^t \bar{E}[Z_s D_s L(X_s, u_s, s) | \mathcal{Y}_s] ds \\ &+ \int_0^t \bar{E}[Z_s D_s \phi(X_s) G(X_s)^* | \mathcal{Y}_s] dy_s,\end{aligned}$$

c'est à dire l'équation aux dérivées partielles stochastique (10.4), compte-tenu de la définition du filtre  $\sigma_t$ .  $\square$

**Remarque 10.3.2** *On peut déduire du résultat précédent une équation du type Kushner-Stratonovitch pour un filtre "modifié" en utilisant la formule de Kallianpur-Striebel.*

*D'autre part, les arguments avancés dans la démonstration de l'équation aux dérivées partielles stochastique (10.4) s'étendent aux cas de systèmes de filtrage avec bruits dépendants ainsi qu'aux problèmes de filtrage où l'observation  $(y_t)_{t \geq 0}$  et le processus de Wiener  $(b_t)_{t \geq 0}$  évoluent dans un espace de Hilbert séparable.*

## 10.4 Application à un système observé avec un retard constant.

Dans ce paragraphe, on considère un couple signal-observation solution dans  $H \times \mathbb{R}^d$ , où  $H = \mathbb{R}^n \oplus L^2([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ , du système différentiel stochastique :

$$\begin{aligned}dX_t &= AX_t dt + Bu_t dt + B\sigma dw_t \\ dY_t &= G(X_t) dt + db_t\end{aligned}\tag{10.5}$$

où :

\*  $(w_t)_{t \geq 0}$  et  $(b_t)_{t \geq 0}$  sont deux processus de Wiener standards indépendants respectivement à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^d$ .

\*  $A : \text{Dom}(A) \subset H \rightarrow H$  est l'opérateur non borné de domaine  $\text{Dom}(A)$  défini par

$$\text{Dom}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in H; f(0) = x, f \text{ est absolument continue, } f' \in L^2([-h, 0]; \mathbb{R}^n) \right\}$$

$$\text{et } A \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 x + a_1 f(-t_1) \\ f' \end{pmatrix} \text{ où } a_0 \text{ et } a_1 \text{ sont deux matrices carrées de dimension } n.$$

\*  $B = (I, 0)$ .

\*  $\sigma$  est une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

\*  $G$  est fonction continue et bornée de  $H$  dans  $\mathbb{R}^d$  définie par  $G \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = g(\langle f, \rho \rangle_{L^2([-h, 0]; \mathbb{R}^n)})$

où  $g$  est une application continue et bornée de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\rho$  une approximation dans  $L^2([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$  de la distribution de Dirac  $\delta_{-\tau}$ .

\*  $(u_t)_{t \geq 0}$  est un processus stochastique à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{Y}_t$ -prévisible où  $\mathcal{Y}_t$  désigne la filtration engendrée par la trajectoire de l'observation jusqu'au temps  $t$ .

Le processus stochastique  $(x_t)_{t \geq 0}$  image par la projection canonique dans  $\mathbb{R}^n$  de la première composante  $X_t$  de la solution faible du système différentiel stochastique (10.5) peut être vu comme la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dx_t = a_0 x_t dt + a_1 x_{t-t_1} dt + u_t dt + \sigma dw_t.$$

Dans ce contexte, le théorème 10.3.1 s'applique et l'espace  $\mathcal{D}_0$  contient les fonctions  $\phi$  de la forme

$$\phi(X) = \varphi(\langle X, \xi_1 \rangle, \langle X, \xi_2 \rangle, \dots, \langle X, \xi_m \rangle)\tag{10.6}$$

avec  $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , et  $\xi_i \in \text{Dom} A^*$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

Pour tout élément  $v$  de  $H_0^1([-h, 0]; \mathbb{R}^n) \subset C([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ ,  $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$  appartient au domaine de  $A^*$  et

$$A^* \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ -v' \end{pmatrix}$$

$v'$  désignant la dérivée de  $v$ .

Dans le cas où  $a_1 = 0$ ,  $\xi = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}$  appartient également au domaine de  $A^*$  pour tout  $\psi \in \mathbb{R}^n$  et

$$A^* \xi = \begin{pmatrix} a_0^* \psi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour  $\phi(X) = \varphi(\langle X, \xi \rangle)$ ,  $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$ , on a

$$\nabla \phi(X) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\langle X, \xi \rangle) \xi$$

$$\nabla^2 \phi(X) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\langle X, \xi \rangle) \xi \otimes \xi$$

d'où :

$$A^* \nabla \phi(X) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\langle X, \xi \rangle) \begin{pmatrix} a_0^* \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\langle X, A^* \nabla \phi(X) \rangle_H = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\langle X, \xi \rangle) a_0^* \psi.$$

On peut alors déduire, par exemple, du théorème 10.3.1 une équation aux dérivées partielles stochastique du second ordre pour le processus stochastique  $\sigma_t \phi$ , avec  $\phi(X) = \varphi(x^i)$ ,  $x^i$  désignant la  $i$ -ème composante de l'image de  $X$  par la projection canonique sur  $\mathbb{R}^n$ .

## 10.5 Existence d'une densité pour le filtre $\sigma_t$ .

Dans ce paragraphe, on suppose que le système différentiel stochastique (10.1) s'écrit sous la forme

$$dX_t = AX_t dt + F(X_t, u_t) dt + \sqrt{Q} dW(t) \tag{10.7}$$

$$dy_t = G(X_t) dt + db_t$$

et que :

- (C1)  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $S(\cdot)$  de classe  $C_0$  dans  $H$  tel qu'il existe deux constantes réelles positives  $M$  et  $\eta$  telles que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|S(t)\| \leq Me^{-\eta t}$ .
- (C2) Le contrôle  $(u_t)_{t \geq 0}$  est un processus stochastique prévisible à valeurs dans un espace métrique séparable complet  $U$ .
- (C3)  $F$  est une application bornée définie sur  $H \times U$ , à valeurs dans  $H$ , lipschitzienne par rapport à la première variable et continue par rapport à la seconde.
- (C4)  $Q$  est un opérateur linéaire continu et symétrique de  $V$  dans  $H$  tel que pour tout  $t \geq 0$ , l'opérateur  $Q_t$  défini par  $Q_t x = \int_0^t S(s) Q S(s)^* x ds$  est nucléaire et

$$\sup_{t \geq 0} \text{Tr} Q_t < +\infty.$$

(C5) Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\text{Im}S(t) \subseteq \text{Im}Q_t^{\frac{1}{2}}$ .

(C6)  $\Gamma$  désignant la fonction définie par  $\Gamma(t) = Q_t^{-\frac{1}{2}}S(t)$ , la fonction  $\|\Gamma(t)\|$  possède une transformée de Laplace (i.e.  $\int_0^{+\infty} \|\Gamma(t)\| e^{-\lambda t} dt < +\infty$  si  $\lambda$  est assez grand)

De plus, il existe  $\alpha \in ]0, 1/2[$  et  $c > 0$  tel que  $\|\Gamma(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{c}{t^\alpha}$  pour tout  $t > 0$ .

(C7)  $G$  est une fonction continue et bornée définie sur  $H$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

Commençons par rappeler quelques résultats de Da Prato et Zabczyk [21] concernant l'existence de densités régulières par rapport à une mesure invariante sur les espaces de Hilbert.

Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une unique mesure invariante  $\mu_0$  pour la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dZ_t = AZ_t dt + \sqrt{Q} dW(t). \quad (10.8)$$

La mesure  $\mu_0$  est gaussienne, centrée et son opérateur de covariance est

$$Q_\infty = \int_0^{+\infty} S(s)QS(s)^* ds.$$

Notons  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert  $L^2(H, \mu_0)$ . Alors, l'opérateur  $\mathcal{A}_0$  défini sur le domaine  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{H}$  par

$$\mathcal{A}_0 \phi(x) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\nabla_{xx}^2 \phi(x)Q) + \langle x, A^* \nabla_x \phi(x) \rangle_H$$

s'étend au générateur infinitésimal  $\mathcal{A}$  d'un semi-groupe  $R(\cdot)$  sur  $\mathcal{H}$ , de classe  $C_0$ , qui coïncide avec le semi-groupe de transition associé à l'équation différentielle stochastique (10.8).

De plus,  $\text{Dom} \mathcal{A} \subset \mathcal{V}$  et, pour tout  $t > 0$  et toute fonction  $\varphi \in \mathcal{H}$ ,  $R(t)\varphi$  appartient à l'espace de Sobolev  $\mathcal{V} = W^{1,2}(H, \mu_0)$  et on a :

$$\|\nabla_x R(t)\varphi\|_{\mathcal{H}} \leq \|\Gamma(t)\| \|\varphi\|_{\mathcal{H}}. \quad (10.9)$$

L'estimation (10.9) constitue un élément clé pour l'étude de l'équation adjointe de l'équation de Zakai modifiée (10.4) c'est à dire de l'équation différentielle stochastique dans  $\mathcal{H}$  :

$$dq_t = A^* q_t dt + \theta L(\cdot, u_t, t) q_t dt + B_{u_t}^* q_t dt + \sum_{j=1}^d G_j q_t dy_t^j, \quad (10.10)$$

où  $B_u^*$  désigne, pour tout  $u \in U$ , l'adjoint de l'opérateur  $B_u$  défini par

$$B_u \phi(x) = \langle F(x, u), \nabla_x \phi(x) \rangle_H.$$

Compte-tenu de l'hypothèse (C5),  $B_u$  est, pour tout  $u \in U$ , un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{H}$  et son adjoint  $B_u^*$  est linéaire et continu de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{V}^*$ . De plus, la norme de ces opérateurs est bornée par une constante indépendante de  $u$ .

Introduisons maintenant certaines classes de processus stochastiques, de façon analogue à celle de [2].

Soit  $L_2^{\mathcal{Y}}$  la classe des processus stochastiques  $(\beta(t))_{t \geq 0}$ ,  $\mathcal{Y}_t$ -prévisibles et tels que

$$\bar{P} \left\{ \int_0^T \|\beta(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt < \infty \right\} = 1.$$

Soit  $T > 0$  et  $\mathcal{M}_2^T$  l'espace de Banach des processus stochastiques  $(\beta(t))_{0 \leq t \leq T}$ ,  $\mathcal{Y}_t$ -prévisibles, tels que :

$$\|\beta\|_{\mathcal{M}_2^T} = \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \bar{E} \|\beta(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Le résultat principal de ce paragraphe peut alors être énoncé de la façon suivante.

**Théorème 10.5.1** *Supposons que les hypothèses (C1)-(C7) sont satisfaites et que  $q_0 \in \mathcal{H}$ . Alors l'équation différentielle stochastique (10.10) possède une solution "mild"  $q_t$  telle que*

$$\begin{aligned} q_t = & R(t)^* q_0 + \theta \int_0^t R(t-s)^* (L(\cdot, u_s, s) q_s) ds \\ & + \int_0^t R(t-s)^* (B_{u_s}^* q_s) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t R(t-s)^* (G_j q_s) dy_s^j. \end{aligned} \quad (10.11)$$

De plus, cette solution est, à équivalence près, unique dans  $L_2^e$  et appartient à  $\mathcal{M}_2^T$  pour tout  $T > 0$ .

**Démonstration.** Nous suivons le schéma classique fondé sur le lemme de Gronwall et la recherche d'un point fixe pour une transformation affine.

**Unicité de la solution.**

Soient  $q^{(1)}$  et  $q^{(2)}$  deux éléments de  $L_2^e$  vérifiant la relation (10.11) et tels que  $\bar{E} \left( \|q_t^{(i)}\|^2 \right) < \infty$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , pour tout  $t \geq 0$ . Alors, le processus  $q_t = q_t^{(1)} - q_t^{(2)}$  vérifie la relation :

$$\begin{aligned} q_t = & \theta \int_0^t R(t-s)^* (L(\cdot, u_s, s) q_s) ds \\ & + \int_0^t R(t-s)^* (B_{u_s}^* q_s) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t R(t-s)^* (G_j q_s) dy_s^j. \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned} \|q_t\|_{\mathcal{H}}^2 \leq & c \left[ \theta \left\| \int_0^t R(t-s)^* (L(\cdot, u_s, s) q_s) ds \right\|_{\mathcal{H}}^2 \right. \\ & + \left\| \int_0^t R(t-s)^* (B_{u_s}^* q_s) ds \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \left. + \sum_{j=1}^d \left\| \int_0^t R(t-s)^* (G_j q_s) dy_s^j \right\|_{\mathcal{H}}^2 \right]. \end{aligned}$$

Comme  $L$  est une fonction bornée et  $R^*$  un semi-groupe de classe  $C^0$  dans  $\mathcal{H}$ , il existe une constante  $K_1 > 0$  telle que pour tout  $t \leq T$ , on a :

$$\left\| \int_0^t R(t-s)^* (L(\cdot, u_s, s) q_s) ds \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K_1 \int_0^t \|q_s\|_{\mathcal{H}}^2 ds. \quad (10.12)$$

L'inégalité (10.9) permet de considérer pour tout  $t > 0$  l'opérateur  $R(t)$  comme un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{V}$  dont la norme est majorée par  $c(1 + \|\Gamma(t)\|)$  avec  $c > 0$ .

On déduit donc de l'hypothèse (C6) et de la remarque concernant la norme des opérateurs linéaires continus  $B_{u_s}^*$  que :

$$\left\| \int_0^t R(t-s)^* (B_{u_s}^* q_s) ds \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K_2 \int_0^t \|q_s\|_{\mathcal{H}}^2 ds. \quad (10.13)$$

avec  $K_2 > 0$ .

En utilisant à nouveau le fait que  $R^*$  un semi-groupe de classe  $C^0$  dans  $\mathcal{H}$  et comme la fonction  $G$  est bornée, on constate qu'il existe une constante  $K_3 > 0$  telle que :

$$\bar{E} \left( \sum_{j=1}^d \left\| \int_0^t R(t-s)^* (G_j q_s) dy_s^j \right\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \leq K_3 \bar{E} \int_0^t \|q_s\|_{\mathcal{H}}^2 ds. \quad (10.14)$$

On déduit des inégalités (10.12), (10.13) et (10.14) que

$$\bar{E} \|q_t\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K \int_0^t \bar{E} \|q_s\|_{\mathcal{H}}^2$$

et donc que  $q_t$  est identiquement nul en vertu du lemme de Gronwall.

On obtient alors le résultat d'unicité annoncé en procédant par localisation.

### Existence de la solution dans $\mathcal{M}_2^T$ .

Pour établir le résultat, commençons par vérifier que la formule

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\beta)(t) &= R(t)^* q_0 + \theta \int_0^t R(t-s)^* (L(\cdot, u_s, s) \beta(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t R(t-s)^* (\mathcal{B}_{u_s}^* \beta(s)) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t R(t-s)^* (G_j \beta(s)) dy_s^j \end{aligned} \quad (10.15)$$

définit un opérateur affine de  $\mathcal{M}_2^T$  dans  $\mathcal{M}_2^T$ .

$q_0$  est fixé et  $R^*$  est un semi-groupe de classe  $C^0$ , donc  $\bar{E} \|R(t)^* q_0\|^2$  est borné pour tout  $t \leq T$ .

Les processus stochastiques qui interviennent dans la première et la seconde intégrale du second membre de (10.15) sont  $\mathcal{Y}_t$ -prévisibles compte-tenu de l'hypothèse (C2) et de la continuité en  $u$  des fonctions  $L$  et  $F$ .

De plus, les mêmes arguments que dans la démonstration de l'unicité permettent de montrer l'existence de deux constantes  $c_1, c_2 > 0$  telles que :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \bar{E} \|\mathcal{K}(\beta)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_1 + c_2 \int_0^t \sup_{0 \leq s \leq t} \bar{E} \|\beta(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds.$$

Le lemme de Gronwall permet donc d'affirmer que la formule (10.15) définit bien un opérateur affine de  $\mathcal{M}_2^T$  dans  $\mathcal{M}_2^T$ .

Pour achever la démonstration, montrons que, quitte à réduire la valeur de  $T > 0$ , cet opérateur est une contraction dans  $\mathcal{M}_2^T$ .

Soit  $\beta_1$  et  $\beta_2$  deux éléments de  $\mathcal{M}_2^T$ . On a pour tout  $0 \leq t \leq T$  :

$$\begin{aligned} \bar{E} \left\| \int_0^t R(t-s)^* (L(\cdot, u_s, s) (\beta_1(s) - \beta_2(s))) ds \right\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq K'_1 \bar{E} \left( \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds \right)^2 \\ &\leq TK'_1 \bar{E} \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &\leq T^2 K'_1 \sup_{0 \leq s \leq t} \bar{E} \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{E} \left\| \int_0^t R(t-s)^* (B_{u_s}^* \beta(s)) ds \right\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq T \bar{E} \int_0^t \|R(t-s)^* (B_{u_s}^* \beta(s)) ds\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &\leq TK'_2 \int_0^t (1 + \|\Gamma(t-s)\|^2) \bar{E} \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &\leq TK''_2 \sup_{0 \leq s \leq t} \bar{E} \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \bar{E} \left\| \sum_{j=1}^d \int_0^t R(t-s)^* (G_j (\beta_1(s) - \beta_2(s))) dy_s^j \right\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq K'_3 \bar{E} \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &\leq TK'_3 \sup_{0 \leq s \leq t} \bar{E} \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Donc, il existe une constante positive  $K'$  telle que :

$$\|\mathcal{K}(\beta_1 - \beta_2)\|_{\mathcal{M}_2^T}^2 \leq K'T(1+T) \|\beta_1 - \beta_2\|_{\mathcal{M}_2^T}^2$$

et, pour un choix convenable de  $T$ , l'opérateur  $\mathcal{K}$  est une contraction dans  $\mathcal{M}_2^T$ .  $\square$

Terminons ce chapitre avec la conséquence suivante du théorème 10.5.1.

**Corollaire 10.5.2** *Si la loi de probabilité de  $X_0$  possède une densité  $q_0 \in \mathcal{H}$  et si les hypothèses (C1)-(C7) sont vérifiées, alors l'équation différentielle stochastique (10.10) possède une solution de la forme*

$$\sigma_t(dx) = q_t(x)\mu_0(dx).$$

**Démonstration.** La proposition 6.4 de [20] permet de vérifier que l'unique solution "mild" de l'équation différentielle stochastique (10.11) obtenue dans la démonstration du théorème 10.5.1 est aussi une solution faible de (10.11).

On a donc, pour tout  $\phi \in \text{Dom } \mathcal{A}_0 \subset \text{Dom } \mathcal{A} = \text{Dom } \mathcal{A}^{**}$  :

$$\begin{aligned} \langle q_t, \phi \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle q_t, \phi \rangle_{\mathcal{H}} + \int_0^t \langle q_s, \mathcal{A}^{**} \phi \rangle_{\mathcal{H}} ds \\ &\quad + \theta \int_0^t \langle L(\cdot, u_s, s) q_s, \phi \rangle_{\mathcal{H}} ds + \int_0^t \langle B_{u_s}^* q_s, \phi \rangle_{\mathcal{H}} ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \int_0^t \langle G_j q_s, \phi \rangle_{\mathcal{H}} dy_s^j. \end{aligned}$$

En posant  $\sigma_t(dx) = q_t(x)\mu_0(dx)$ , on obtient en tenant compte du fait que  $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_t \phi &= E(\phi(X_0)) + \int_0^t \sigma_s(\mathcal{A}_0 \phi) ds + \int_0^t \sigma_s(B_{u_s} \phi) ds \\ &\quad + \theta \int_0^t \sigma_s(L(\cdot, u_s, s) \phi) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_s(\phi G_j)^* dy_s^j \end{aligned}$$

qui correspond bien à l'équation aux dérivées partielles stochastique (10.4) pour le cas particulier étudié dans ce paragraphe.  $\square$



# Bibliographie

- [1] N.U.Ahmed, Nonlinear filtering for stochastic differential equations on Hilbert spaces. Actes de 14th IMACS World Congress, Georgia Tech, Atlanta (Ga) (1994) 5-8.
- [2] N.U.Ahmed, Optimal relaxed controls for infinite-dimensional stochastic systems of Zakai type. *SIAM Journal on Control and Optimization* **34** 5 (1996) 1592-1615.
- [3] N.U.Ahmed, M.Fuhrman, J.Zabczyk, On filtering equations in infinite dimensions. *Journal of Functional Analysis* **143** (1997) 180-204.
- [4] N.U.Ahmed, S.M.Radaiteh, A powerful numerical technique solving Zakai equation for nonlinear filtering. *Dynamics & Control* **7** (1997) 293-308.
- [5] N.U.Ahmed, J.Zabczyk, Nonlinear filtering for semilinear stochastic differential equations on Hilbert spaces. *Preprint 522 of the Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences*, Mars 1994.
- [6] V.Beneš, Exact finite dimensional filters for certain diffusions with nonlinear drift. *Stochastics* **5** (1981) 65-92.
- [7] A.Bensoussan, Filtrage optimal des systèmes linéaires. Dunod, Paris (1975).
- [8] A.Bensoussan, On some approximation techniques in nonlinear filtering. *Stochastic Differential systems, Stochastic Control and Application*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1988).
- [9] A.Bensoussan, Stochastic control of partially observable systems. *Cambridge University Press*. Cambridge (UK) 1992.
- [10] A.Bensoussan, R.J.Elliott, A finite-dimensional risk-sensitive control problem. *SIAM Journal on Control and Optimization* **33** 6 (1995) 1834-1846.
- [11] J.M.Bismut, D.Michel, Diffusions conditionnelles. *Journal of Functional Analysis* Part I **44** (1981) 174-211, Part II **4** (1982) 274-292.
- [12] M.Chaleyat-Maurel, D.Michel, Hypocoellipticity theorems and conditional laws. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete* **65** (1984) 573-597.
- [13] M.Chaleyat-Maurel, D.Michel, Des résultats de non existence de filtres de dimension finie. *Stochastics* **19** (1986) 11-40.
- [14] M.Chaleyat-Maurel, D.Michel, E.Pardoux, Un théorème d'unicité pour l'équation de Zakai. *Stochastics* **29** (1990) 1-13.
- [15] C.D.Charalambous, Minimum principle for partially observable nonlinear risk-sensitive control problems using measure-valued decompositions. *Stochastics and Stochastics Reports* **57** (1996) 247-288.
- [16] R.F.Curtain, Infinite dimensional filtering, Control Theory. *SIAM Journal on Control* **13** 1 (1975) 89-104.
- [17] R.F.Curtain, A survey of infinite dimensional filtering. *SIAM Review* **17** 3 (1975) 395-411.
- [18] R.F.Curtain, A.J.Pritchard, Infinite dimensional linear systems theory. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag (1978).

- [19] R.Curtain, H.Zwart, An introduction to infinite dimensional linear systems theory. *Text in Applied Mathematics*. Springer Verlag, New York (1995).
- [20] G.Da Prato, J.Zabczyk, Stochastic equations in infinite dimensions. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 44 Cambridge University Press (1992).
- [21] G.Da Prato, J.Zabczyk, Regular densities of invariant measures in Hilbert spaces. *Journal of Functional Analysis* 130 (1995) 427-449.
- [22] M.N.Delfour, The largest class of hereditary systems defining a  $C_0$  semigroup on the product space. *Canadian Journal of Mathematics* 32 (1980) 969-978.
- [23] M.N.Dietsch, Filtering of a partially observed process in the case of a high signal-to-noise ratio for correlated systems. *Stochastic Analysis and Applications* 18 3 (2000) 347-360.
- [24] M.N.Dietsch, Filtrage non linéaire pour des systèmes à valeurs dans des espaces de Hilbert. Thèse, Université de Metz (2000).
- [25] R.Elliott, V.Krishnamurthy, Exact finite dimensional filters for exponential functionals of the state. In : W. Mc Eneaney ed. *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications*. Birkhäuser Boston (1999) 391-408.
- [26] R.J.Elliott, J.B.Moore, Zakai equation for Hilbert space valued processes. *Stochastic Analysis and Applications* 16 4 (1998) 597-605.
- [27] G.S.Ferreya, Smoothness of the unnormalized conditional measures of stochastic nonlinear filtering. *Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas (NV)* (1984).
- [28] W.Fleming, E.Pardoux, Piecewise monotone filtering with small observation noise. *SIAM Journal on Control and Optimization* 27 5 (1989) 1156-1181.
- [29] P.Florchinger, Malliavin Calculus with time depending coefficients and application to nonlinear filtering. *Probability Theory and Related Fields* 86 (1990) 203-233.
- [30] P.Florchinger, F.Le Gland, Time discretization of the Zakai equation for diffusion processes observed in correlated noise. *Stochastics and Stochastics Reports* 35 4 (1991) 233-256.
- [31] M.Fujisaki, G.Kallianpur, H.Kunita, Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem. *Osaka Journal of Mathematics* 9 (1972) 19-40.
- [32] A.Gégout-Petit, Approximate filter for the conditional law of a partially observed process in nonlinear filtering. *SIAM Journal on Control and Optimization* 36 4 (1998) 1423-1447.
- [33] D.H.Jacobson, Optimal stochastic linear systems with exponential criteria and their relation to deterministic differential games. *IEEE Transactions on Automatic Control* 18 (1973), 124-131.
- [34] G.Kallianpur, *Stochastic filtering theory*. Springer Verlag, Berlin (1980).
- [35] G.Kallianpur, P.K.Mandal, Nonlinear filtering with stochastic delay equations. *Preprint*.
- [36] R.Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng ASME* 82 (1960) 33-45.
- [37] R.Kalman, R.Bucy, New results in nonlinear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng ASME* 83 (1961) 95-108.
- [38] R.Katsur, B.Z.Bobrovsky, Z.Schuss, Asymptotic analysis of the optimal filtering problem for one-dimensional diffusions measured in a low noise channel. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 44 (1984) Part 1 : 591-604, Part 2 : 1176-1191.
- [39] N.Krylov, B.Rozovskii, On the Cauchy problem for linear stochastic differential equations. *Math. USSR Izvestija* 11 (1977) 1267-1284.
- [40] N.Krylov, B.L. Rozovskii, On conditional distributions of diffusion processes. *Math USSR Izvestia* 12 (1978) 336-356.
- [41] P.R.Kumar, J.H.Van Schuppen, On the optimal control of stochastic systems with exponential-of-integral performance index. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (1981) 312-332.

- [42] H.Kunita, Cauchy problems for stochastic partial differential equations arising in nonlinear filtering theory. *Systems and Control Letters* **1** (1981) 37-41.
- [43] H.Kunita, Densities of measure-valued process governed by a stochastic partial differential equation. *Systems and Control Letters* **1** (1981) 100-104.
- [44] H.Kunita, Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms. Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XII, *LNM 1097* Springer Verlag, Berlin (1984).
- [45] T.Kurtz, D.Ocone, Unique characterization of conditional distributions in nonlinear filtering. *Annals of Probability* **16** (1988) 80-107.
- [46] H.J.Kushner, Dynamical equations for optimal nonlinear filtering, *Journal of Differential Equations* **3** (1967) 179-190.
- [47] H.J.Kushner, Filtering for linear distributed parameter systems. *SIAM Journal on Control* **8** (1970) 346-359.
- [48] R.S.Lipster, A.N.Shiryayev, Statistics of random processes. Springer-Verlag, Berlin Vol. 1 (1977), Vol. 2 (1978).
- [49] P.Milheiro de Oliveira, Etudes asymptotiques en filtrage non linéaire avec petit bruit d'observation. Thèse, Université de Provence (1990).
- [50] P.Milheiro de Oliveira, J.Picard, Approximate nonlinear filtering for a two-dimensional diffusion with one-dimensional observations in a low noise channel. *Preprint*.
- [51] D.Ocone, Stochastic calculus of variations for stochastic partial differential equations. *Journal of Functional Analysis* **79** (1988) 288-331.
- [52] D.Ocone, J.Baras, S.Marcus, Explicit filters for diffusions with uncertain nonlinear drifts. *Stochastics* **8** (1982) 1-16.
- [53] D.Ocone, E.Pardoux, A Lie-algebraic criterion for non existence of finite dimensionally computable filters. In : G. Da Prato and L. Tubaro eds. Stochastic Partial Differential Equations and Application II, Lecture Notes in Mathematics **1390**, Springer Verlag Berlin (1989).
- [54] E.Pardoux, Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes. *Stochastics* **3** 2 (1979) 127-167.
- [55] E.Pardoux, Equations du filtrage non linéaire, de la prédiction et du lissage. *Stochastics* **6** (1982), 192-231.
- [56] E.Pardoux, Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées. In : P.L.Hennequin ed. École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIX. *Lecture Notes in Mathematics* **1464** Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1991) 67-163.
- [57] J.Picard, Nonlinear filtering of one-dimensional diffusions in the case of a high signal-to-noise ratio. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **46** 6 (1986) 1098-1125.
- [58] J.Picard, Nonlinear filtering and smoothing with high signal-to-noise ratio. *Stochastic Processes in Physics and Engineering* Reidel (1988).
- [59] J.Picard, Efficiency of the extended Kalman filter for nonlinear systems with small noise. INRIA Rapport de recherche 1068 (1989).
- [60] M.C.Roubaud, Filtrage linéaire par morceaux avec petits bruits d'observation. *Applied Mathematics and Optimization* **32** (1995) 163-194.
- [61] B.Rozovskii, Evolution stochastic systems. D. Reidel 1990.
- [62] J.L.Speyer, An adaptative terminal guidance scheme based on an exponential cost criterion with application to homing missile guidance. *IEEE Transactions on Automatic Control* **21** (1976) 371-375.
- [63] RB.Vinter, R.H.Kwong, The infinite time quadratic control problem for linear systems with state and control delays : an evolution equation approach. *SIAM Journal on Control and Optimization* **19** (1981) 139-153.

- [64] I.Yaesh, B.Z.Bobrovsky, Z.Schuss, Asymptotic analysis of the optimal filtering problem for two-dimensional diffusions measured in a low noise channel. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **50** (1990) 1134-1155.
- [65] M.Zakai, On the optimal filtering of diffusion processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete* **11** (3) (1969) 230-243.
- [66] O. Zeitouni, On some finite dimensional filters for certain diffusions observed in correlated noise. *Systems and Control Letters* **7** (1986) 61-63.
- [67] Q.Zhang, Nonlinear filtering and control of a switching diffusion with small observation noise. *SIAM Journal on Control and Optimization* **36** 5 (1998) 1638-1668.

Troisième partie  
Calcul de Malliavin.

La troisième partie de ce travail est consacrée à une application du calcul de Malliavin à l'étude de la régularité de la loi de probabilité de la solution d'une équation différentielle stochastique, à coefficients dépendants du temps.

Cette partie comporte deux chapitres.

Dans le chapitre 11, on rappelle les notions fondamentales du calcul des variations stochastiques sur l'espace de Wiener, ainsi que quelques résultats fondamentaux en relation avec l'étude menée dans le chapitre suivant. Dans le chapitre 12, on considère la solution d'une équation différentielle stochastique à coefficients dépendants du temps et comportant une infinité de termes de diffusion. Sous une hypothèse forte de Hörmander, on établit l'existence d'une densité régulière pour la solution de telles équations différentielles stochastiques.



# Chapitre 11

## Quelques rappels sur le calcul de Malliavin.

### 11.1 Introduction.

Le calcul des variations stochastiques sur l'espace de Wiener, ou calcul de Malliavin, a été introduit en 1976 par Malliavin [12, 13] et développé en particulier par Bismut [2, 3], Meyer [14], Shigekawa [24], Stroock [26, 27, 28], Watanabe [31], Ikeda et Watanabe [7] et Kusuoka et Stroock [10].

Le calcul de Malliavin est un outil puissant pour étudier l'existence d'une densité régulière pour la loi de probabilité d'une fonctionnelle de Wiener (c.f. Malliavin [12], Zakai [33], Shigekawa [23], Norris [16], Watanabe [32] ou Ikeda [6] par exemple). Toutefois, cette théorie possède un plus large champ d'applications : Intégrale de Skorohod (c.f. Skorohod [25] ou Nualart [17] par exemple) ; Calcul anticipatif (c.f. Nualart [17], Nualart et Zakai [20], Nualart et Pardoux [19], Ocone et Pardoux [22] par exemple) ; Preuve du théorème d'Atiyah–Singer (c.f. Bismut [4]) ; Étude des propriétés asymptotiques du noyau de la chaleur (c.f. Léandre [11], Ben Arous et Léandre [1] et Watanabe [32] par exemple).

Le but de ce chapitre est d'introduire les principaux outils du calcul de Malliavin en suivant l'approche de Nualart [17, 18]. Dans le paragraphe deux, on rappelle la notion de dérivée de Malliavin d'une fonctionnelle de Wiener, ainsi que les liens entre dérivation et intégrales stochastiques qui seront utiles dans le chapitre suivant. Dans le paragraphe trois, on énonce un critère permettant de prouver l'existence d'une densité régulière pour la loi de probabilité d'une fonctionnelle de Wiener. Dans le paragraphe quatre, on présente une application des résultats énoncés dans les parties précédentes à l'étude de l'existence d'une densité régulière pour la loi de probabilité d'une diffusion solution d'une équation différentielle stochastique. L'étude de ce problème à l'aide du calcul de Malliavin a permis de donner une preuve probabiliste du théorème de Hörmander (c.f. Kusuoka et Stroock [10] ou Norris [16] par exemple).

### 11.2 Analyse sur l'espace de Wiener.

#### 11.2.1 Dérivation au sens de Malliavin.

Dans ce qui suit, on considère un espace mesurable  $(T, \mathcal{T})$  et une mesure  $\sigma$ -finie  $\mu$  sans atome sur  $(T, \mathcal{T})$ . On désignera par  $H$  l'espace de Hilbert  $L^2(T, \mathcal{T}, \mu)$ .

Soit  $\{W(h) \mid h \in H\}$  un processus aléatoire à valeurs réelles, gaussien et centré, défini sur un espace

de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  dont la fonction de covariance est donnée par :

$$E(W(h_1)W(h_2)) = \langle h_1, h_2 \rangle_H.$$

Le processus gaussien  $W(h)$  est en fait caractérisé par la famille de variables aléatoires

$$\{W(A); A \in \mathcal{T}, \mu(A) < \infty\}$$

où  $W(A) = W(1_A)$ . On emploie souvent à propos de  $W$  les termes de "mesure" brownienne sur  $(T, \mathcal{T})$  ou de bruit blanc de base  $\mu$ .

**Remarque 11.2.1** 1. Lorsque l'espace mesuré  $(T, \mathcal{T}, \mu)$  est l'intervalle  $[0, 1]$  muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, la version continue du processus stochastique  $W$  est un processus de Wiener standard réel sur  $[0, 1]$ .

2. De la même manière, en prenant  $T = [0, 1] \times \{1, \dots, d\}$ , on retrouve la notion de mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^d$ .

Nous supposons désormais que la tribu  $\mathcal{F}$  est la tribu engendrée par le processus gaussien  $W$ .

Toute variable aléatoire  $F$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  peut être vue comme une fonctionnelle de  $W$  et nous souhaitons rappeler dans ce paragraphe comment l'opérateur de dérivation peut être défini pour de telles fonctionnelles.

Dans ce but, introduisons la classe  $\mathcal{S}$  des fonctionnelles  $F$  de la forme

$$F = f(W(h_1), \dots, W(h_n)) \quad (11.1)$$

où  $h_1, \dots, h_n, n \geq 1$ , sont des éléments de  $H$  et  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C_p^\infty$ , c'est à dire une fonction indéfiniment différentiable qui est, ainsi que toutes ses dérivées, à croissance polynomiale.

Alors, la classe  $\mathcal{S}$  est dense dans  $L^2(\Omega)$  et on définit la dérivée au sens de Malliavin  $DF$  d'un élément  $F$  de  $\mathcal{S}$  de la forme (11.1) par :

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i(t).$$

$(D_t F)_{t \in T}$  est donc un processus aléatoire à valeurs réelles indexé par  $T$ , que l'on peut aussi considérer comme une variable aléatoire à valeurs dans  $L^2(T)$ .

Pour tout  $p \geq 1$ ,  $D$  est un opérateur fermable de  $L^p(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega; L^2(T))$ . On désigne encore par  $D$  la fermeture de cet opérateur et par  $\mathbb{D}_{p,1}$  le domaine de  $D$  dans  $L^p(\Omega)$ , c'est à dire l'adhérence de la classe  $\mathcal{S}$  pour la norme définie par

$$\|F\|_{p,1} = \left( E(|F|^p) + E(\|DF\|_{L^2(T)}^p) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Remarque 11.2.2** Dans le cas où  $T = [0, 1] \times \{1, \dots, d\}$ , le processus gaussien  $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$  est un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^d$ . La dérivée de Malliavin d'une variable aléatoire réelle  $F \in \mathbb{D}_{p,1}$  s'identifie alors à un processus aléatoire  $D_t F = (D_t^1 F, \dots, D_t^d F)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . D'autre part, on peut interpréter l'opérateur de dérivation de Malliavin comme une dérivée de Fréchet dans l'espace de Cameron-Martin et, pour  $1 \leq j \leq d$ , nous appellerons dérivée de Malliavin de  $F$  par rapport à  $W_t^j$ , la  $j$ -ème composante de la dérivée de Malliavin de  $F$ .

Pour tout élément  $F$  de  $\mathcal{S}$ , les dérivées de Malliavin de  $F$  d'ordre  $k \geq 1$  peuvent être définies par :

$$D_{t_1 \dots t_k}^k F = D_{t_1} D_{t_2} \dots D_{t_k} F,$$

avec  $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ .

On peut considérer  $D^k F$  comme une variable aléatoire à valeurs dans  $L^2(T^k)$  et, pour tout  $k \geq 1$  et  $p \geq 1$ , une norme sur  $\mathcal{S}$  peut être définie par :

$$\|F\|_{p,k} = \left( E(|F|^p) + \sum_{l=1}^k \left( E \|D^l F\|_{L^2(T^l)}^p \right) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les normes ainsi définies vérifient des propriétés de monotonie et de compatibilité (voir par exemple [32]).

Comme dans le cas où  $k = 1$ , on définit l'espace  $\mathbb{D}_{p,k}$  comme l'adhérence de  $\mathcal{S}$  dans  $L^p(\Omega)$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_{k,p}$  et on note :

$$\mathbb{D}^\infty = \bigcap_{k \geq 1} \bigcap_{p > 1} \mathbb{D}_{p,k}.$$

Terminons ce paragraphe en énonçant une règle de calcul utile pour la dérivation de l'image par une fonction  $\varphi$  d'un vecteur  $F = (F_1, \dots, F_m)$  dont les composantes sont des éléments de  $\mathbb{D}_{p,1}$ ,  $p \geq 1$ .

**Proposition 11.2.3** *Soit  $\varphi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable, à dérivées bornées, et  $p \geq 1$ . Alors, si  $F = (F_1, \dots, F_m)$  est tel que  $F_i \in \mathbb{D}_{p,1}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , on a  $\varphi(F) \in \mathbb{D}_{p,1}$  et*

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) D F_i.$$

### 11.2.2 Dérivées de Malliavin et intégrales stochastiques.

Ce paragraphe est consacré au rappels de quelques notions concernant les liens entre la dérivation au sens de Malliavin, l'intégrale de Skorohod et l'intégrale d'Itô.

A la suite des résultats rappelés dans le paragraphe 11.2.1 ci-dessus, on peut définir l'opérateur  $\delta$ , adjoint de l'opérateur non borné  $D$  de domaine  $\mathbb{D}_{2,1} \subset L^2(\Omega)$ , à valeurs dans  $L^2(T \times \Omega)$ .

Le domaine de  $\delta$  est l'ensemble des processus aléatoires  $(u_t)_{t \in T}$  tels qu'il existe une constante positive  $c$  telle que :

$$\left| E \left( \int_T D_t F u_t \mu(dt) \right) \right| \leq c \left[ E(|F|^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

pour tout élément  $F$  de  $\mathbb{D}_{2,1}$ .

L'opérateur  $\delta$  coïncide avec la généralisation de l'intégrale stochastique introduite par Skorohod dans [25] et on note :

$$\delta(u) = \int_T u_t dW_t.$$

La relation de dualité entre les opérateurs  $D$  et  $\delta$  permet d'écrire

$$E(F\delta(u)) = E \left( \int_T D_t F u_t \mu(dt) \right), \quad (11.2)$$

pour toute variable aléatoire  $F \in \mathbb{D}_{2,1}$  et tout processus  $u \in \text{Dom}(\delta)$ .

Cette formule "d'intégration par parties", dont une première version a été donnée par Malliavin [12] et Bismut [2] joue un rôle clé dans l'étude de la régularité de la loi des fonctionnelles de

Wiener développée dans le paragraphe 11.3 ci-dessous.

Introduisons maintenant une classe de processus stochastiques contenue dans  $\text{Dom}(\delta)$  utile pour la formulation de certaines règles de calculs. On note  $L_{2,1}$  la classe des processus stochastiques  $u \in L^2(T \times \Omega)$  tels que  $u_t \in \mathbb{D}_{2,1}$  pour tout  $t \in T$  et tels que le processus à deux paramètres  $D_s u_t$  possède une version mesurable vérifiant la condition

$$E \int_T \int_T |D_s u_t|^2 \mu(ds) \mu(dt) < \infty.$$

Muni de la norme définie par

$$\|u\|_{2,1}^2 = \|u\|_{L^2(T \times \Omega)}^2 + \|Du\|_{L^2(T^2 \times \Omega)}^2,$$

$L_{2,1}$  est un espace de Hilbert.

Soit  $u$  un élément de  $L_{2,1}$ . Si pour presque tout  $t$  le processus  $(D_s u_t)_{s \in T}$  appartient au domaine de  $\delta$  et si il existe dans  $L^2(T \times \Omega)$  une version du processus  $(\int_T (D_t u_s) dW_s)_{t \in T}$ , alors l'intégrale de Skorohod  $\delta(u)$  appartient à  $\mathbb{D}_{2,1}$  et on a :

$$D_t(\delta(u)) = u_t + \int_T (D_t u_s) dW_s. \quad (11.3)$$

Lorsque  $W$  est un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^d$  (voir la remarque 11.2.1), l'opérateur  $\delta$  est une extension de l'intégrale d'Itô, dans le sens où pour tout processus adapté  $u_t = (u_t^1, \dots, u_t^d)$  tel que

$$E \sum_{i=1}^d \int_0^1 |u_s^i|^2 ds < \infty,$$

on a  $u \in \text{Dom}(\delta)$  et

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^d \int_0^1 u_s^i dW_s^i,$$

les intégrales stochastiques du second membre de cette égalité étant écrites au sens d'Itô.

Notons  $X_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t u_s^i dW_s^i$  et désignons par  $D^j$  la dérivée au sens de Malliavin par rapport à la  $j$ -ème composante du processus de Wiener  $W_t$ .

Alors, la variable aléatoire  $X_1$  appartient à  $\mathbb{D}_{2,1}$  si, et seulement si, le processus  $u$  appartient à  $L_{2,1}$ . Dans ce cas, la règle de calcul (11.3) s'applique et permet d'écrire :

$$D_s^j X_t = u_s^j 1_{\{s \leq t\}} + \sum_{i=1}^d \int_s^t D_s^j u_r^i dW_r^i. \quad (11.4)$$

### 11.3 Régularité de la loi de fonctionnelles de Wiener.

Dans ce paragraphe, on donne un critère sous lequel les fonctionnelles du processus gaussien  $W$  introduit dans le paragraphe 11.2.1 admettent une densité régulière.

Soit  $F = (F^1, \dots, F^n)$  un vecteur aléatoire dont les composantes sont des variables aléatoires dérivables au sens de Malliavin. On appelle *matrice de covariance de Malliavin associée à  $F$*  la fonctionnelle de Wiener  $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , à valeurs dans l'espace des matrices  $n \times n$  positives, définie par :

$$\sigma_{i,j} = \langle DF^i, DF^j \rangle_H.$$

Énonçons maintenant un critère utilisant la matrice de covariance de Malliavin sous lequel une fonctionnelle de Wiener possède une densité de classe régulière.

**Théorème 11.3.1** *Soit  $F = (F^1, \dots, F^n)$  un vecteur aléatoire vérifiant les conditions suivantes :*

- \*  $F^i$  appartient à  $\mathbb{D}^\infty$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
- \* La matrice de Malliavin  $\sigma$  associée à  $F$  est telle que

$$(\det \sigma)^{-1} \in \bigcap_{p>1} L^p(\Omega).$$

*Alors, la loi de  $F$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$  et sa densité est de classe  $C^\infty$ .*

Ce résultat peut être établi à partir de la formule d'intégration par parties (11.2). L'émergence de cette technique d'étude de la régularité de la loi des fonctionnelles de Wiener est due à Malliavin [12]. Elle a été suivie de nombreux développements dans les années suivantes (voir par exemple Zakai [33], Kusuoka et Stroock [10], Ikeda et S. Watanabe [7], Watanabe [32] et Ocone [21]).

Une autre approche pour traiter le problème de l'absolue continuité de la loi des fonctionnelles de Wiener, introduite par Bouleau et Hirsch, est fondée sur un critère d'absolue continuité en dimension finie et un passage à la limite. Cette technique présente l'avantage de fournir un critère applicable sous des hypothèses moins restrictives que celui déduit de la formule d'intégration par parties.

## 11.4 Application aux équations différentielles stochastiques.

Soit  $(W_t)_{t>0}$  un processus de Wiener standard de dimension  $m$  défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Dans ce paragraphe, nous considérons le processus stochastique  $x_t$  solution dans  $\mathbb{R}^d$  de l'équation différentielle stochastique écrite au sens d'Itô

$$x_t = x_0 + \int_0^t X_0(s, x_s) ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t X_i(s, x_s) dW_s^i, \tag{11.5}$$

où :

- \*  $x_0$  est donné dans  $\mathbb{R}^d$ .
- \*  $X_0, X_1, \dots, X_m$  sont des fonctions de  $[0, 1] \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$  indéfiniment différentiables en  $x$  avec des dérivées de tous ordres bornées et telles que les fonctions  $X_0(t, 0), X_1(t, 0), \dots, X_m(t, 0)$  de la variable  $t$  sont bornées sur  $[0, 1]$ .

Alors, on montre le résultat suivant.

**Théorème 11.4.1** *Si les coefficients  $X_j, 0 \leq j \leq m$ , de l'équation différentielle stochastique (11.5) satisfont aux conditions énoncées ci-dessus, alors, pour tout  $t \in [0, 1]$ , chacune des composantes  $x_t^i, 1 \leq i \leq d$ , de la variable aléatoire  $x_t$  appartient à l'espace  $\mathbb{D}^\infty$ .*

*De plus, les dérivées de Malliavin  $D_r^j x_t^i, 1 \leq j \leq m$ , vérifient le système d'équations différentielles stochastiques linéaires :*

$$D_r^j x_t^i = X_j(r, x_r) + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^d \int_r^t \frac{\partial X_l}{\partial x_k}(s, x_s) D_r^j x_s^k dW_s^l + \sum_{k=1}^d \int_r^t \frac{\partial X_0}{\partial x_k}(s, x_s) D_r^j x_s^k ds.$$

Le théorème 11.4.1 est emprunté à Ocone [21]. La preuve de ce théorème peut être trouvée en particulier dans Kusuoka et Stroock [10], Shigekawa [24], Ikeda et Watanabe [7] ou Ocone [21].

Supposons maintenant que les fonctions  $X_0, X_1, \dots, X_m$  ne dépendent que de la variable d'espace  $x$  et identifions ces fonctions à des champs de vecteurs de classe  $C_b^\infty$  sur  $\mathbb{R}^d$ . Notons  $\mathcal{I}$  l'idéal

engendré par les champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_m$  dans l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs  $X_0, X_1, \dots, X_m$ .

Alors, en utilisant le critère d'existence d'une densité régulière pour la loi des fonctionnelles de Wiener fourni par le théorème 11.3.1, on peut établir le résultat suivant.

**Théorème 11.4.2** *Si  $\mathcal{I}(x_0) = \mathbb{R}^d$ , alors la loi de probabilité de la diffusion  $x_t$  possède une densité de classe  $C^\infty$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ .*

Différents travaux concernant ce sujet ont été développés par Bismut [2], Stroock [27, 28], Ikeda et Watanabe [7], Norris [16], Watanabe [32], Ocone [21] ou Nualart [18].

# Chapitre 12

## Une application du calcul de Malliavin.

### 12.1 Introduction.

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence d'une densité régulière pour la solution, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , d'une équation différentielle stochastique à coefficients dépendants du temps et comportant une infinité de termes de diffusion. Notre résultat est obtenu sous une hypothèse du type "condition forte de Hörmander" en supposant que les coefficients sont une fois différentiables par rapport au temps.

L'intérêt pour des équations différentielles stochastiques du type de celles étudiées dans ce chapitre est motivé, en particulier, par les liens existant entre ces équations différentielles stochastiques et la représentation de certains flots stochastiques. En effet, Kunita [8] a montré que des processus de diffusion dirigés par une infinité de composantes peuvent fournir une représentation d'un type d'intégrateurs non linéaires, appelés C-mouvements browniens par Kunita.

L'existence d'une densité régulière pour la solution d'une équation différentielle stochastique homogène et comportant une infinité de termes de diffusion a été étudiée par Nguyen Min Duc, D.Nualart et M.Sanz [15] par utilisation du calcul des variations stochastiques.

Un résultat d'absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue de la solution d'une équation différentielle stochastique à coefficients dépendants du temps dirigée par un nombre fini de processus de Wiener a été obtenu par Taniguchi [30] sous deux jeux d'hypothèses incluant respectivement une hypothèse de Hörmander forte ou faible.

Dans ce chapitre, nous généralisons le résultat obtenu dans [30] sous l'hypothèse de Hörmander forte au cas d'une diffusion dirigée par un mouvement brownien de dimension infinie en nous inspirant pour l'essentiel de la méthode développée dans [15].

Le reste de ce chapitre est divisé en trois paragraphes organisés de la manière suivante. Dans le paragraphe deux, nous introduisons les équations différentielles stochastiques étudiées dans ce chapitre ainsi que les approximations de la solution de ces équations différentielles stochastiques nécessaires pour la suite de notre étude. Le paragraphe trois est consacré à la différentiabilité au sens de Malliavin de la solution des équations différentielles stochastiques introduites dans le paragraphe deux. Dans le paragraphe quatre, on montre sous l'hypothèse forte de Hörmander, l'existence d'une densité régulière par rapport à la mesure de Lebesgue pour la solution des équations différentielles stochastiques considérées dans cette étude.

## 12.2 Présentation du problème.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité complet et  $(w_t^k)_{t \geq 0}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , une famille dénombrable de processus de Wiener réels standards indépendants.

Soit  $\tilde{F}_0$  une application mesurable de  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$  et une suite  $F_k$ ,  $k \geq 1$ , d'applications mesurables de  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$  telles qu'il existe pour tout  $T > 0$ , une constante positive  $K_T$  telle que pour tout  $(t, X, Y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\sum_{i=1}^d \left| \tilde{F}_0^i(t, X) \right|^2 + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{\infty} \left| F_k^i(t, X) \right|^2 \leq K_T (1 + |X|^2) \quad (12.1)$$

et

$$\sum_{i=1}^d \left| \tilde{F}_0^i(t, X) - \tilde{F}_0^i(t, Y) \right|^2 + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{\infty} \left| F_k^i(t, X) - F_k^i(t, Y) \right|^2 \leq K_T |X - Y|^2. \quad (12.2)$$

Nous nous intéresserons dans la suite de ce chapitre à l'équation différentielle stochastique dans  $\mathbb{R}^d$  :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{F}_0(s, X_s) ds + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t F_k(s, X_s) dw_s^k, \quad (12.3)$$

où  $X_0$  est un point donné dans  $\mathbb{R}^d$ .

On peut considérer (12.3) comme un cas particulier d'équation différentielle stochastique en dimension infinie du type de celles étudiées dans le chapitre 7 de [5].

En effet, si on note  $U = l^2$  l'espace de Hilbert séparable des suites  $(u_k)_{k \geq 1}$  de nombres réels telles que  $\sum_{k \geq 1} |u_k|^2 < \infty$  et  $(e_k)_{k \geq 1}$  la base canonique de  $U$ , on obtient en posant

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_t^k e_k,$$

un processus de Wiener cylindrique à valeurs dans  $U$  tel que  $\text{cov}(W(t)) = tI_U$ .

De plus, la condition (12.1) permet de définir une application  $F$  de  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}^d$  dans  $L(U, \mathbb{R}^d)$  par :

$$F(t, X)u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k \rangle_U F_k(t, X),$$

de telle sorte que :

$$\text{Tr}(F(t, X)F(t, X)^*) = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{\infty} \left| F_k^i(t, X) \right|^2 < \infty.$$

L'équation différentielle stochastique (12.3) peut donc s'écrire sous la forme

$$dX_t = \tilde{F}_0(t, X_t) dt + F(t, X_t) dW(t) \quad (12.4)$$

et, sous les conditions (12.1) et (12.2), les coefficients de (12.4) sont lipschitziens et à croissance sous linéaire.

Ainsi, par application du théorème 7.4 de [5] avec le semi-groupe  $S(t)$  égal à l'identité de  $\mathbb{R}^d$ , on montre que l'équation différentielle stochastique (12.4) admet une unique solution forte, qui possède une version continue. De plus, pour tout  $T > 0$  et tout  $p \geq 2$ , on a :

$$E \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^p \right) < \infty. \quad (12.5)$$

Par la suite, il nous sera utile d'approcher les solutions de l'équation différentielle stochastique (12.3) par les solutions  $X_M(t)$ ,  $M \in \mathbb{N}^*$ , des équations différentielles stochastiques :

$$X_t^{(M)} = X_0 + \int_0^t \tilde{F}_0(s, X_s^{(M)}) ds + \sum_{k=1}^M \int_0^t F_k(s, X_s^{(M)}) dw_s^k. \quad (12.6)$$

**Remarque 12.2.1** En revenant à la démonstration par la méthode du point fixe de l'existence d'une unique solution pour l'équation différentielle stochastique (12.6), on peut remarquer que les conditions (12.1) et (12.2) impliquent que, pour tout  $p \geq 2$ ,  $E \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(M)}|^p \right)$  est borné par une constante indépendante de  $M$ . Nous serons amenés à faire un large usage de cette propriété dans ce qui suit.

Nous disposons de plus, comme dans [15], de la proposition suivante qui précise en quel sens les processus stochastiques  $X_t^{(M)}$  constituent des approximations de la solution  $X_t$  de l'équation différentielle stochastique (12.3).

**Proposition 12.2.2** Soit  $p \geq 2$  et  $T > 0$ . Sous les conditions (12.1) et (12.2), le processus stochastique  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est la limite dans  $L^{\frac{p}{2}}(\Omega, L^2([0, T]; \mathbb{R}^d))$  de la suite des processus stochastiques  $(X_t^{(M)})_{0 \leq t \leq T}$  quand  $M$  tend vers  $+\infty$ . En particulier, pour tout  $0 \leq t \leq T$ , la variable aléatoire  $X_t$  est la limite de  $X_t^{(M)}$  dans  $L^p(\Omega)$ .

**Démonstration.** D'après l'inégalité de Young, il existe une constante  $C_p$ , ne dépendant que de  $p$ , telle que :

$$\begin{aligned} |X_t - X_t^{(M)}|^p &\leq C_p \left[ \left| \int_0^t \tilde{F}_0(s, X_s) - \tilde{F}_0(s, X_s^{(M)}) ds \right|^p \right. \\ &\quad \left. + \left| \sum_{k=1}^M \int_0^t F_k(s, X_s) - F_k(s, X_s^{(M)}) dw_s^k \right|^p \right. \\ &\quad \left. + \left| \sum_{k>M} \int_0^t F_k(s, X_s) dw_s^k \right|^p \right]. \end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\left| \int_0^t \tilde{F}_0(s, X_s) - \tilde{F}_0(s, X_s^{(M)}) ds \right|^p \leq t^{\frac{p}{2}} \left( \int_0^t |\tilde{F}_0(s, X_s) - \tilde{F}_0(s, X_s^{(M)})|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}}$$

et, par application de l'inégalité de Burkholder (voir par exemple [5, lemme 7.2]) on a :

$$\begin{aligned} E \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \sum_{k=1}^M \int_0^s (F_k(r, X_r) - F_k(r, X_r^{(M)})) dw_r^k \right|^p \\ \leq C'_p E \left( \int_0^t \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^M |F_k^i(r, X_r) - F_k^i(r, X_r^{(M)})|^2 dr \right)^{\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

et

$$E \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \sum_{k>M} \int_0^s F_k(r, X_r) dw_r^k \right|^p \leq C'_p E \left( \int_0^t \sum_{i=1}^d \sum_{k>M} |F_k^i(r, X_r)|^2 dr \right)^{\frac{p}{2}},$$

où  $C'_p$  est une constante positive qui ne dépend que de  $p$ .

En prenant en compte les conditions (12.1) et (12.2), on déduit de l'inégalité de Hölder que :

$$E \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - X_s^{(M)}|^p \leq C_p K_T^{\frac{p}{2}} \left( T^{p-1} + C'_p T^{\frac{p}{2}-1} \right) \int_0^t E \sup_{0 \leq r \leq s} |X_r - X_r^{(M)}|^p ds \\ + C_p C'_p E \left( \sum_{k > M} \int_0^t \sum_{i=1}^d |F_k^i(r, X_r)|^2 dr \right)^{\frac{p}{2}}.$$

De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^d |F_k^i(r, X_r)|^2 \leq K_T (1 + |X_r|^2)$$

ce qui implique

$$E \left( \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^d |F_k^i(r, X_r)|^2 dr \right)^{\frac{p}{2}} \leq K_T^{\frac{p}{2}} E \left( \int_0^T (1 + |X_r|^2) dr \right)^{\frac{p}{2}}$$

et, par conséquent, cette quantité est finie d'après l'inégalité (12.5).

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a donc :

$$C_p C'_p E \left( \sum_{k > M} \int_0^t \sum_{i=1}^d |F_k^i(r, X_r)|^2 dr \right)^{\frac{p}{2}} < \varepsilon \quad (12.7)$$

dès que  $M$  est assez grand.

En appliquant le lemme de Gronwall, on en déduit que pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} E \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - X_t^M|^p \leq \varepsilon \exp \left( C_p K_T^{\frac{p}{2}} \left( T^p + C'_p T^{\frac{p}{2}} \right) \right).$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient

$$\lim_{M \rightarrow \infty} E \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - X_t^M|^p = 0,$$

ce qui implique, a fortiori, la conclusion de la proposition.  $\square$

Pour terminer ce paragraphe, précisons de quelle manière nous utiliserons dans la suite de ce chapitre les notions de calcul de Malliavin rappelées dans le chapitre 11 :

- \*  $T$  est l'ensemble  $[0, 1] \times \mathbb{N}^*$  muni de la mesure produit  $\lambda \times \nu$ , où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]$  et  $\nu$  la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}^*$ .
- \* L'espace de Hilbert  $H$  est l'ensemble des fonctions  $h = (h_1, h_2, \dots, h_k, \dots)$  de  $T$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} |h_k(s)|^2 ds < \infty,$$

muni du produit scalaire

$$\langle h^1, h^2 \rangle_H = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} h_k^1(s) h_k^2(s) ds.$$

\* Le processus gaussien  $\{W(h); h \in H\}$  est défini par :

$$W(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 h_k(s) dw_s^k.$$

\* Pour tout  $p > 1$  et  $N \geq 1$ , l'espace  $D_{p,N}(\mathbb{R}^d)$  est formé des variables aléatoires  $F = (F^1, \dots, F^d)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  telles que  $F^i \in D_{p,N}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

La dérivée de Malliavin d'ordre  $N$  de  $F$  est le processus stochastique

$$\left\{ D_{s_1 \dots s_N}^{j_1 \dots j_N} F, (s_1, \dots, s_N) \in [0, 1]^N, (j_1, \dots, j_N) \in (\mathbb{N}^*)^N \right\},$$

que l'on peut aussi voir comme une variable aléatoire à valeurs dans  $[0, 1]^N \times (\mathbb{N}^*)^N \times \mathbb{R}^d$  telle que :

$$E \left( \int_{[0,1]^N} \sum_{j_1, \dots, j_N=1}^d \sum_{i=1}^d |D_{s_1 \dots s_N}^{j_1 \dots j_N} F^i|^2 ds_1 \dots ds_N \right)^{\frac{p}{2}} < \infty.$$

### 12.3 Différentiabilité au sens de Malliavin de la solution.

Dans ce paragraphe, on montre que lorsque les coefficients de l'équation différentielle stochastique (12.3) sont suffisamment réguliers, la solution  $X_t$  est indéfiniment différentiable au sens de Malliavin.

Pour la suite de ce chapitre, nous fixons pour faciliter les notations la valeur de l'horizon  $T$  à 1 et nous renforçons les hypothèses du paragraphe précédent en supposant que les fonctions  $\tilde{F}_0^i$  et  $F_k$ ,  $k \geq 1$ , satisfont aux conditions suivantes.

**(H1)** Il existe une constante  $K$  telle que pour tout  $(t, X) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^d$ , on a :

$$\sum_{i=1}^d \left| \tilde{F}_0^i(t, X) \right|^2 + \sum_{i=1}^d \sum_{k \geq 1} |F_k^i(t, X)|^2 \leq K (1 + |X|^2).$$

**(H2)** Pour tout multi-indice  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ ,  $n \geq 1$ , les dérivées partielles  $\partial_x^\alpha \tilde{F}_0^i(t, x)$  et  $\partial_x^\alpha F_k^i(t, x)$ ,  $1 \leq i \leq d$ ,  $k \geq 1$ , existent pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^d$  et vérifient la condition :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left( \sum_{k \geq 1} \sum_{i=1}^d |\partial_x^\alpha F_k^i(t, x)|^2 + \sum_{i=1}^d |\partial_x^\alpha \tilde{F}_0^i(t, x)|^2 \right) < \infty.$$

Nous suivons maintenant la démarche de Nguyen Min Duc, D.Nualart, M.Sanz [15] pour montrer que, sous ces hypothèses, la solution de l'équation différentielle stochastique (12.3) appartient à l'espace  $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Le point de départ du raisonnement est le lemme suivant, établi dans [15] au moyen d'une intégration par parties et par projection dans les chaos de Wiener.

**Lemme 12.3.1** Soit  $(F_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Hilbert séparable  $E$  telles que pour  $p \geq 2$  et  $N \geq 1$  on ait :

1.  $F_n \in D_{p,N}(E)$  pour tout  $n \geq 1$ .
2. La suite  $(F_n)_{n \geq 1}$  converge dans  $L^p(\Omega, E)$  vers une variable aléatoire  $F$ .
3. La suite des dérivées de Malliavin  $(D^{(N)} F_n)_{n \geq 1}$  est bornée dans  $L^p(\Omega, H^{\otimes N}(E))$ .

Alors, la variable aléatoire  $F$  appartient à  $D_{p,N}(E)$ .

Nous pouvons maintenant établir le résultat suivant.

**Théorème 12.3.2** *Si les coefficients de l'équation différentielle stochastique (12.3) satisfont aux hypothèses (H1) et (H2), alors  $X_t$  appartient à  $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .*

**Démonstration.** Pour montrer que la variable aléatoire  $X_t, t > 0$ , appartient à l'espace  $D_{p,N}(\mathbb{R}^d)$  pour tout  $p \geq 2$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ , nous nous appuyons sur le lemme 12.3. Vérifions les hypothèses de ce lemme pour la suite de variables aléatoires  $(X_t^{(M)})_{M \geq 1}$  et  $F = X_t$ .

1. Sous les hypothèses du théorème, les approximations  $X_t^{(M)}, M \geq 1$ , solutions des équations différentielles stochastiques (12.6) sont telles que  $X_t^{(M)} \in D_{p,N}(\mathbb{R}^d)$  et  $X^{(M)} \in D_{p,N}(L^2([0, 1]; \mathbb{R}^d))$ , pour tout  $p \geq 2$  et  $N \geq 1$ . (Voir par exemple [18])
2. La proposition 12.2.2 montre que, pour tout  $0 \leq t \leq 1$ ,  $X_t$  est la limite dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$  de la suite de variables aléatoires  $(X_t^{(M)})_{M \geq 1}$ .
3. Il reste à établir que, pour tous  $p \geq 2, N \geq 1$  et  $0 \leq t \leq 1$ , la suite des processus aléatoires  $(D^{(N)} X_t^{(M)})_{M \geq 1}$  est bornée dans  $L^p(\Omega, H^{\otimes N} \otimes \mathbb{R}^d)$ .

Nous vérifions ce point, en montrant, par récurrence sur l'entier  $N$ , que :

$$\sup_{M \in \mathbb{N}^*} E \left[ \sup_{r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_N \leq t \leq 1} \left( \sum_{j_1 \dots j_N = 1}^M |D_{r_1 \dots r_N}^{j_1 \dots j_N} X_t^{(M)}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right] < \infty. \quad (12.8)$$

(Ici,  $D^j Z$  désigne la dérivée de Malliavin de la variable aléatoire  $Z$  par rapport au processus de Wiener standard  $w_t^j$ )

Montrons d'abord la relation (12.8) pour  $N = 1$ . Le processus stochastique  $(X_t^{(M)})_{0 \leq t \leq 1}$  est la solution de l'équation différentielle stochastique (12.6) dont les coefficients sont à croissance sous linéaire et indéfiniment différentiables avec des dérivées bornées. On peut en déduire (voir le théorème 11.4.1) que les variables aléatoires  $X_t^{(M)}, 0 \leq t \leq 1$ , sont dans  $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$  et vérifient le système d'équations différentielles stochastiques

$$\begin{aligned} D_r^j X_t^{(M)} &= F_j(r, X_r^{(M)}) + \sum_{k=1}^M \int_r^t \nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}) D_r^j X_s^{(M)} dw_s^k \\ &\quad + \int_r^t \nabla_x \tilde{F}_0(s, X_s) D_r^j X_s^{(M)} ds, \end{aligned}$$

avec  $i \leq j \leq M$ , pour  $0 \leq r \leq t \leq 1$ .

Notons  $D_r X_t$  l'élément de  $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^M$  dont la  $j$ -ème colonne est  $D_r^j X_t$  et  $F_{(M)}(t, X)$  l'élément de  $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^M$  dont la  $j$ -ème colonne est  $F_j(t, X)$ . Avec ces notations, on peut écrire

$$\begin{aligned} D_r X_t^{(M)} &= F_{(M)}(r, X_r^{(M)}) + \sum_{k=1}^M \int_r^t \nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}) D_r X_s^{(M)} dw_s^k \\ &\quad + \int_r^t \nabla_x \tilde{F}_0(s, X_s^{(M)}) D_r X_s^{(M)} ds, \end{aligned} \quad (12.9)$$

puis, grâce à l'inégalité de Young :

$$\|D_r X_t^{(M)}\|^p \leq c_p \left( \|F_{(M)}(r, X_r^{(M)})\|^p + \left\| \sum_{k=1}^M \int_r^t \nabla_x F_k(s, X_s) D_r X_s dw_s^k \right\|^p \right)$$

$$+ \left\| \int_r^t \nabla_x \tilde{F}_0 \left( s, X_s^{(M)} \right) D_r X_s^{(M)} ds \right\|^p.$$

L'hypothèse (H1) implique l'existence d'une constante  $C_1$ , indépendante de  $M$  et de  $r \leq 1$ , telle que  $\left\| c_p F_{(M)} \left( r, X_r^{(M)} \right) \right\|^p \leq C_1 \left( 1 + \left\| X_r^{(M)} \right\|^2 \right)^{\frac{p}{2}}$ . En utilisant les inégalités de Hölder et de Burkholder et la remarque 12.2.1, on constate l'existence d'une constante  $C_2$ , indépendante de  $M$ , de  $r$  et de  $t'$ , telle que :

$$E \left( \sup_{r \leq t \leq t'} \left\| D_r X_t^{(M)} \right\|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq C_2 \left( 1 + E \int_r^{t'} E \left( \sup_{r \leq u \leq s} \left\| D_r X_u^{(M)} \right\|^2 \right)^{\frac{p}{2}} ds \right).$$

Le lemme de Gronwall montre donc que  $E \left( \sup_{r \leq t \leq 1} \left\| D_r X_t^{(M)} \right\|^2 \right)^{\frac{p}{2}}$  est majoré par une constante indépendante de  $M$  et la relation (12.8) est établie dans le cas où  $N = 1$ .

Supposons maintenant que la relation (12.8) est établie jusqu'à l'ordre  $N - 1$ . Les dérivées de Malliavin d'ordre  $N$  de la variable aléatoire  $X_t^{(M)}$  sont données par des relations de récurrence (voir aussi [18, preuve du théorème 2.2.2]). Pour exprimer ces relations, il est commode de faire appel aux notations suivantes.

A toute partie  $K = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  de l'ensemble  $\{1, \dots, N\}$ , associons les multi-indices  $J(K) = j_{\varepsilon_1} \dots j_{\varepsilon_n}$  et  $r(K) = r_{\varepsilon_1} \dots r_{\varepsilon_n}$ . Pour tout  $k \geq 1$ , posons :

$$\alpha_k^{j_1 \dots j_N} (s, r_1, \dots, r_N) = \sum \nabla_{k_1 \dots k_m}^m F_k \left( s, X_s^{(M)} \right) D_{r(I_1)}^{j(I_1)} X_s^{(M)k_1} \dots D_{r(I_m)}^{j(I_m)} X_s^{(M)k_m}$$

et

$$\alpha_0^{j_1 \dots j_N} (s, r_1, \dots, r_N) = \sum \nabla_{k_1 \dots k_m}^m \tilde{F}_0 \left( s, X_s^{(M)} \right) D_{r(I_1)}^{j(I_1)} X_s^{(M)k_1} \dots D_{r(I_m)}^{j(I_m)} X_s^{(M)k_m},$$

les sommations étant étendues à l'ensemble des partitions  $I_1 \cup \dots \cup I_m$  de l'ensemble  $\{1, \dots, N\}$  et des indices  $k_1, \dots, k_m$  variant dans l'ensemble  $\{1, \dots, d\}$ .

On a la relation :

$$\begin{aligned} D_{r_1 \dots r_N}^{j_1 \dots j_N} X_t^{(M)} &= \sum_{\varepsilon=1}^N \alpha_{j_\varepsilon}^{j_1 \dots j_{\varepsilon-1} j_{\varepsilon+1} \dots j_N} (r_\varepsilon, r_1, \dots, r_{\varepsilon-1}, r_{\varepsilon+1}, \dots, r_N) \\ &+ \sum_{k=1}^M \int_{r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_N \leq t} \alpha_{j_k}^{j_1 \dots j_N} (s, r_1, \dots, r_N) dw_s^k \\ &+ \int_{r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_N \leq t} \alpha_{j_k}^{j_1 \dots j_N} (s, r_1, \dots, r_N) ds, \end{aligned}$$

dont on déduit, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, que

$$\begin{aligned} &E \left[ \sup_{r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_N \leq t \leq t'} \left( \sum_{j_1 \dots j_N=1}^M \left| D_{r_1 \dots r_N}^{j_1 \dots j_N} X_t^{(M)} \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\ &\leq C_{(N)} \left[ 1 + \int_0^{t'} E \left[ \sup_{r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_N \leq u \leq s} \left( \sum_{j_1 \dots j_N=1}^M \left| D_{r_1 \dots r_N}^{j_1 \dots j_N} X_u^{(M)} \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} ds \right] \right] \end{aligned}$$

en utilisant la même méthode que pour le cas  $N = 1$ . A nouveau le lemme de Gronwall permet de conclure à la validité de (12.8) au rang  $N$ , ce qui achève la démonstration.

□

## 12.4 Absolue continuité de la solution.

L'objet de ce paragraphe est d'étudier l'existence d'une densité de classe  $C^\infty$  pour la loi de probabilité de la solution de l'équation différentielle (12.3). Pour  $X_0$  fixé dans  $\mathbb{R}^d$ , nous serons en mesure d'établir le résultat pourvu que les coefficients de (12.3) soient de classe  $C_b^\infty$  par rapport à la variable d'espace et vérifient une hypothèse forte de Hörmander.

Ainsi, nous supposerons en plus des hypothèses (H1) et (H2), que :

(H3) Pour tout multi-indice  $\alpha = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_{|\alpha|}}$ , les dérivées partielles

$$\nabla_{x_{i_1} \cdots x_{i_{|\alpha|}}}^\alpha \tilde{F}_0^l(t, x), \quad 1 \leq l \leq d,$$

et

$$\nabla_{x_{i_1} \cdots x_{i_{|\alpha|}}}^\alpha F_k^l(t, x), \quad 1 \leq l \leq d, k \geq 1$$

sont des fonctions continûment différentiables par rapport à  $t$ , bornées sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}^d$ .

Notre dernière hypothèse peut être énoncée de la manière suivante, si les fonctions  $F_k(0, \cdot)$ ,  $k \geq 1$ , sont identifiées à des champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

(H4)  $\dim \mathcal{L}(X_0) = d$ , où  $\mathcal{L}$  désigne l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs  $\{F_k(0, \cdot)\}$ ,  $k \geq 1$ .

La suite de ce paragraphe est consacrée à la preuve du résultat suivant.

**Théorème 12.4.1** *Sous les hypothèses (H1)-(H4), la loi de probabilité de la solution  $X_t$  de l'équation différentielle stochastique (12.3) possède une densité de classe  $C^\infty$  par rapport à la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^d$ , pour tout  $t \in ]0, 1]$ .*

Pour établir ce résultat, nous aurons besoin des trois lemmes énoncés ci-dessous. Les deux premiers ont été démontrés par Nguyen Min Duc, D.Nualart, et M.Sanz dans [15]. Le troisième est une adaptation à notre problème d'un résultat de Norris [16].

**Lemme 12.4.2** *Soit  $(\zeta_M)_{M \geq 1}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  appartenant à l'espace  $D_{2,1}(\mathbb{R}^d)$ . Supposons que la suite  $(\zeta_M)_{M \geq 1}$  converge dans  $D_{2,1}(\mathbb{R}^d)$  vers une variable aléatoire  $\zeta$ , et notons  $\Gamma_M = [\Gamma_M^{i,j}]_{1 \leq i,j \leq d}$  (respectivement  $\Gamma = [\Gamma^{i,j}]_{1 \leq i,j \leq d}$ ) la matrice de Malliavin de  $\zeta_M$  (respectivement  $\zeta$ ). Alors, si il existe  $M_0 \geq 1$  tel que pour tout  $p \geq 2$   $\sup_{M \geq M_0} E(\det \Gamma_M)^{-p} < \infty$ , on a aussi  $E(\det \Gamma)^{-p} < \infty$  pour tout  $p \geq 2$ .*

**Lemme 12.4.3** *Soit  $(C_M)_{M \geq 1}$  une suite de matrices aléatoires symétriques et positives à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d \times d}$ . Supposons qu'il existe  $M_0 \geq 1$  tel que :*

1.  $\sup_{M \geq M_0} E(|C_M|^p) < \infty$ ;
2. Pour tout  $p \geq 2$ , il existe deux réels positifs  $\varepsilon_0(p)$  et  $c(p)$  tels que

$$\sup_{M \geq M_0} \sup_{|v|=1} P\{v^* C_M v < \varepsilon\} \leq c(p) \varepsilon^p,$$

dès que  $\varepsilon < \varepsilon_0(p)$ .

Alors,  $\sup_{M \geq M_0} E(\det C_M)^{-p} < \infty$ , pour tout  $p \geq 2$ .

**Lemme 12.4.4** Soient  $y \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 > 0$  et  $(a_t)_{t \geq 0}$ ,  $(u_t)_{t \geq 0}$  deux processus prévisibles respectivement à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^n$ , tels que pour  $p \geq 2$  :

$$C(p) = E \sup_{0 \leq t \leq t_0} (|a_t| + |u_t|)^p < \infty. \quad (12.10)$$

Posons

$$y_t = y + \int_0^t a_s ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t u_s^i dw_s^i.$$

Alors, pour tout  $q, v > 0$  vérifiant  $q > 14 + v$ , il existe  $\varepsilon_0(t_0)$  tel que :

$$\varepsilon < \varepsilon_0(t_0) \Rightarrow P \left\{ \int_0^{t_0} y_t^2 dt < \varepsilon^q ; \int_0^{t_0} |u_t|^2 dt \geq \varepsilon \right\} \leq C(p)\varepsilon^p + 2 \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon^v} \right\}.$$

**Démonstration.** Soit  $(\theta_t)_{t \geq 0}$  le processus stochastique à valeurs réelles défini par

$$\theta_t = |a_t| + \|u_t\|$$

et, pour  $\varepsilon$  donné, le temps d'arrêt :

$$S = \inf \left\{ s \leq t_0 ; \sup_{0 \leq r \leq s} \theta_r > \varepsilon^{-1} \right\} \wedge t_0. \quad (12.11)$$

On a

$$P \left\{ \int_0^{t_0} y_t^2 dt < \varepsilon^q ; \int_0^{t_0} \|u_t\|^2 dt \geq \varepsilon \right\} \leq p_1 + p_2,$$

avec :

$$p_1 = P \{ S < t_0 \}$$

et

$$p_2 = P \left\{ \int_0^{t_0} y_t^2 dt < \varepsilon^q ; \int_0^{t_0} \|u_t\|^2 dt \geq \varepsilon ; S = t_0 \right\}.$$

D'après (12.10), il est clair que

$$p_1 \leq C(p)\varepsilon^p. \quad (12.12)$$

Pour estimer la probabilité  $p_2$ , considérons les martingales  $M_t = \sum_{i=1}^m \int_0^t u_s^i dw_s^i$  et  $N_t =$

$\sum_{i=1}^m \int_0^t y_s u_s^i dw_s^i$  ainsi que l'événement  $B = \left\{ \langle N \rangle_S < \rho ; \sup_{0 \leq s \leq S} |N_s| > \delta \right\}$ , où :

$$\rho = \varepsilon^{-2+q},$$

$$\delta = \varepsilon^{q_1}$$

et

$$q_1 = \frac{q}{2} - 1 - \frac{\nu}{2}.$$

Nous allons montrer que, pour  $\varepsilon$  assez petit,  $p_2 \leq P(B)$ , ce qui entraîne, compte-tenu de l'inégalité exponentielle pour les martingales :

$$p_2 \leq 2e^{-\frac{\rho}{2}} \leq 2e^{-\frac{1}{2\varepsilon^{\nu}}}. \quad (12.13)$$

L'assertion du lemme découlant immédiatement des inégalités (12.12) et (12.13), il reste donc à prouver que  $p_2 \leq P(B)$  pour  $\varepsilon$  assez petit.

Soit un élément  $\omega$  de  $\Omega \setminus B$  tel que  $S(\omega) = t_0$  et

$$\int_0^{S(\omega)} y_s^2(\omega) ds < \varepsilon^q. \quad (12.14)$$

Puisque

$$\langle N \rangle_S = \int_0^S y_s^2 \|u_s\|^2 ds,$$

la définition du temps d'arrêt  $S$ , l'inégalité (12.14) et la définition du nombre  $\rho$  impliquent que

$$\langle N \rangle_S(\omega) < \rho.$$

Comme  $\omega$  n'appartient pas à  $B$ , on a nécessairement

$$\sup_{0 \leq s \leq S} |N_s(\omega)| = \sup_{0 \leq s \leq S} \left| \sum_{i=1}^m \int_0^s y_\tau u_\tau^i d w_\tau^i \right| \leq \varepsilon^{q_1}. \quad (12.15)$$

D'autre part, par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\sup_{0 \leq t \leq S} \left| \int_0^t y_s a_s ds \right| \leq \sqrt{t_0} \left( \int_0^S y_s^2 a_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

et ainsi, de (12.11) et (12.14) on déduit que

$$\sup_{0 \leq t \leq S(\omega)} \left| \int_0^t y_s(\omega) a_s(\omega) ds \right| \leq \sqrt{t_0} \varepsilon^{\frac{q}{2}-1}. \quad (12.16)$$

En appliquant la formule d'Itô, on obtient

$$y_t^2 = y^2 + 2 \int_0^t y_s dy_s + \langle M \rangle_t$$

et, en utilisant les inégalités (12.15) et (12.16), on en déduit que

$$\int_0^S \langle M \rangle_t(\omega) dt < \varepsilon^q + 2t_0 \left( \sqrt{t_0} \varepsilon^{\frac{q}{2}-1} + \varepsilon^{q_1} \right).$$

Comme  $\frac{q}{2} - 1 > q_1$  (et donc aussi  $q > q_1$ ), on a, en posant  $C(t_0) = 1 + 2t_0(1 + \sqrt{t_0})$  :

$$\int_0^S \langle M \rangle_t(\omega) dt < C(t_0) \varepsilon^{q_1}. \quad (12.17)$$

Soit maintenant un réel  $\gamma$  tel que  $0 < \gamma < S(\omega)$ . Comme  $\langle M \rangle_t(\omega)$  est une fonction croissante de  $t$ ,  $\gamma \langle M \rangle_{S-\gamma}(\omega) < C(t_0) \varepsilon^{q_1}$ . Compte-tenu de la définition de  $S$ , on en déduit que  $\langle M \rangle_S(\omega) < \gamma^{-1} C(t_0) \varepsilon^{q_1} + \gamma \varepsilon^{-2}$ .

Comme  $q > 14 + \nu$ ,  $\frac{q_1}{2} > 3$  on a, pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\sqrt{C(t_0)} \varepsilon^{\frac{q_1}{2}} < t_0 = S(\omega)$ . En prenant  $\gamma = \sqrt{C(t_0)} \varepsilon^{\frac{q_1}{2}}$ , on obtient :

$$\langle M \rangle_S(\omega) < \sqrt{C(t_0)} \varepsilon^{\frac{q_1}{2}} + \sqrt{C(t_0)} \varepsilon^{\frac{q_1}{2}-2}.$$

Donc, lorsque  $\varepsilon$  est assez petit, on a  $\langle M \rangle_S(\omega) < \varepsilon$ , ce qui achève de montrer que  $p_2 \leq P(B)$  ainsi que la démonstration du lemme.  $\square$

Avant d'aborder la démonstration du résultat principal de ce paragraphe, introduisons quelques notations.

Pour tout  $M \geq 1$ , notons  $(Y_t^{(M)})_{t \geq 0}$  le processus stochastique à valeurs dans l'espace des matrices carrées d'ordre  $d$ , solution de l'équation différentielle stochastique :

$$Y_t^{(M)} = I_d + \sum_{k=1}^M \int_0^t \nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}) Y_s^{(M)} dw_s^k + \int_0^t \nabla_x \tilde{F}_0(s, X_s^{(M)}) Y_s^{(M)} ds.$$

On vérifie en appliquant la formule d'Itô que  $Y_t^{(M)}$  est presque sûrement inversible pour tout  $t \geq 0$ , et que son inverse est la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{aligned} (Y_t^{(M)})^{-1} &= I_d - \sum_{k=1}^M \int_0^t (Y_s^{(M)})^{-1} \nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}) dw_s^k \\ &\quad + \int_0^t (Y_s^{(M)})^{-1} \left[ \nabla_x \tilde{F}_0(s, X_s^{(M)}) - \sum_{k=1}^M (\nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}))^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (12.18)$$

La matrice de Malliavin  $\Gamma_t^{(M)}$  associée à la solution  $X_t^{(M)}$  de l'équation différentielle stochastique (12.6) peut alors être écrite sous la forme suivante (voir par exemple [18]) :

$$\Gamma_t^{(M)} = Y_t^{(M)} C_M(t) (Y_t^{(M)})^*, \quad (12.19)$$

avec :

$$C_M(t) = \sum_{k=1}^M \int_0^t (Y_s^{(M)})^{-1} F_k(s, X_s^{(M)}) (F_k(s, X_s^{(M)}))^* \left( (Y_s^{(M)})^{-1} \right)^* ds.$$

Avec ces notations, nous sommes en mesure d'établir le résultat principal de ce paragraphe.

**Démonstration du théorème 12.4.1.** Nous suivons la démarche de [15].

Fixons la valeur de  $t > 0$  et remarquons que pour établir le résultat, il nous suffit de montrer que :

1.  $X_t^{(M)} \rightarrow X_t$  dans  $D_{2,1}(\mathbb{R}^d)$  quand  $M \rightarrow \infty$ .
2.  $\sup_{M > 0} E \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| (Y_t^{(M)})^{-1} \right\|^p \right) < \infty$  pour tout  $p \geq 2$ .
3. Il existe un entier  $M_0$  tel qu'il existe, pour tout  $p \geq 2$ , une constante positive  $C_p$  telle que  $\sup_{M \geq M_0} \sup_{|v|=1} P \{ v^* C_M(t) v < \varepsilon \} \leq C_p \varepsilon^p$ .

En effet, on déduit des hypothèses (H1) et (H2) que pour tout  $p \geq 2$ , il existe une constante positive  $C_p$ , indépendante de  $M$ , telle que

$$E |C_M(t)|^p \leq C_p E \int_0^t \left\| (Y_s^{(M)})^{-1} \right\|^{2p} ds.$$

L'assertion 2 implique alors que, pour tout  $p \geq 2$ ,

$$\sup_{M > 0} E |C_M(t)|^p < \infty.$$

D'après le lemme 12.4.3 et l'assertion 3, on en déduit que

$$\sup_{M \geq M_0} E (\det C_M(t))^{-p} < \infty$$

pour tout  $p \geq 2$ .

En utilisant à nouveau l'assertion 2 et l'égalité (12.19), on peut en déduire que

$$\sup_{M \geq M_0} E \left( \det \Gamma_t^{(M)} \right)^{-p} < \infty$$

pour tout  $p \geq 2$ .

Compte-tenu de l'assertion 1, le lemme 12.4.2 montre alors que, pour tout  $p \geq 2$ ,  $E(\det \Gamma_t)^{-p} < \infty$ , où  $\Gamma_t$  désigne la matrice de Malliavin associée à la variable aléatoire  $X_t$ . Cette dernière appartenant à l'espace  $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$  d'après le théorème 12.3.2, cela suffit à établir le résultat.

Nous nous tournons maintenant vers la preuve de chacune des assertions 1, 2 et 3.

**Démonstration de l'assertion 1.** Par le théorème 12.3.2, nous savons que, pour tout  $t > 0$ , la variable aléatoire  $X_t$  appartient à  $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$  et la proposition 12.2.2 montre que  $X_t$  est la limite de la suite  $(X_t^{(M)})_{M>0}$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Comme  $D$  est un opérateur fermé de  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$  vers  $L^2(\Omega; H \otimes \mathbb{R}^d)$ , la conclusion sera acquise si nous montrons que la suite des processus stochastiques  $(DX_s^{(M)})_{0 \leq s \leq t}$  a une limite dans l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega; H \otimes \mathbb{R}^d)$ .

Dans ce but, considérons un réel  $\varepsilon > 0$  et deux entiers positifs  $N$  et  $N$ ,  $N \leq M$ .

On déduit de (12.9) l'existence d'une constante  $c$ , indépendante de  $M$  et  $N$ , telle que :

$$\|DX_t^{(M)} - DX_t^{(N)}\|_{L^2(\Omega; H \otimes \mathbb{R}^d)}^2 \leq \sum_{i=1}^7 A_i,$$

où :

$$\begin{aligned} * A_1 &= E \int_0^t \left| F_{(M)}(r, X_r^{(M)}) - F_{(N)}(r, X_r^{(N)}) \right|^2 dr \\ * A_2 &= E \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^N \int_r^t \left( \nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}) - \nabla_x F_k(s, X_s^{(N)}) \right) D_r X_s^{(N)} dw_s^k \right|^2 dr \\ * A_3 &= E \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^N \int_r^t \nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}) \left( D_r X_s^{(M)} - D_r X_s^{(N)} \right) dw_s^k \right|^2 dr \\ * A_4 &= E \int_0^1 \left| \sum_{k=N+1}^M \int_r^t \nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}) D_r X_s^{(M)} dw_s^k \right|^2 dr \\ * A_5 &= E \int_0^1 \left| \int_r^t \left( \nabla_x \tilde{F}_0(s, X_s^{(M)}) - \nabla_x \tilde{F}_0(s, X_s^{(N)}) \right) D_r X_s^{(N)} ds \right|^2 dr \\ * A_6 &= E \int_0^1 \left| \int_r^t \nabla_x \tilde{F}_0(s, X_s^{(M)}) \left( D_r X_s^{(M)} - D_r X_s^{(N)} \right) dw_s^k \right|^2 dr \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous continuerons à désigner par  $c$  diverses constantes positives indépendantes de  $M$ ,  $N$  et  $\varepsilon$ .

Compte-tenu de l'hypothèse (H2), on a :

$$A_1 \leq c \left( E \int_0^t \left| F_{(M)}(r, X_r^{(M)}) - F_{(M)}(r, X_r^{(N)}) \right|^2 dr \right)$$

$$\begin{aligned}
& + E \int_0^t \left| F_{(M)}(r, X_r^{(N)}) - F_{(N)}(r, X_r^{(N)}) \right|^2 dr \\
& \leq c \left( E \int_0^t \left| X_r^{(M)} - X_r^{(N)} \right|^2 dr + E \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_0^t \left| F_k(r, X_r^{(N)}) \right|^2 dr \right).
\end{aligned}$$

La proposition 12.2.2 d'une part et l'inégalité (12.7) d'autre part montrent que les deux termes du second membre de la dernière inégalité tendent vers 0 quand  $N$  tend vers l'infini. On a donc  $A_1 \leq \frac{\varepsilon}{4}$  dès que  $N$  est assez grand.

En appliquant l'inégalité de Burkholder, on obtient compte-tenu de l'hypothèse (H2) :

$$\begin{aligned}
A_2 & \leq cE \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^N \int_r^t \left| \nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}) - \nabla_x F_k(s, X_s^{(N)}) \right|^2 \left| D_r X_s^{(N)} \right|^2 ds \right) dr \\
& \leq cE \int_0^1 \int_r^t \left| X_s^{(M)} - X_s^{(N)} \right|^2 \left| D_r X_s^{(N)} \right|^2 ds dr.
\end{aligned}$$

De cette inégalité, on déduit au moyen de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$\begin{aligned}
A_2 & \leq c \left[ E \int_0^1 \int_0^t \left| X_s^{(M)} - X_s^{(N)} \right|^4 dr ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[ E \int_0^1 \int_r^t \left| D_r X_s^{(N)} \right|^4 ds dr \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq c \left[ E \left( \sup_{0 \leq s \leq 1} \left| X_s^{(M)} - X_s^{(N)} \right|^4 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \sup_{K>0} \sup_r E \left( \sup_{0 \leq s \leq 1} \left| D_r X_s^{(K)} \right|^2 \right).
\end{aligned}$$

La démonstration de la proposition 12.2.2 montre en fait que la suite des solutions approchées  $X_s^{(M)}$  converge pour la norme définie par :

$$\|X^{(M)}\|^p = E \left( \sup_{0 \leq s \leq 1} \left| X_s^{(M)} \right|^p \right),$$

pour tout  $p \geq 2$ .

Le premier terme du majorant obtenu ci-dessus pour  $A_2$  tend donc vers 0 quand  $N$  tend vers  $+\infty$ , tandis que le second est borné indépendamment de  $M$  et  $N$  en vertu de (12.8). Pour  $N$  assez grand, on a donc  $A_2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$ .

Passons à l'estimation de  $A_3$ . L'inégalité de Burkholder et l'hypothèse (H2) nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
A_3 & \leq cE \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^N \int_r^t \left| \nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}) \right|^2 \left| D_r X_s^{(M)} - D_r X_s^{(N)} \right|^2 ds \right) dr \\
& \leq cE \int_0^1 \int_r^t \left| D_r X_s^{(M)} - D_r X_s^{(N)} \right|^2 ds dr \\
& \leq cE \int_0^1 \int_0^1 \left| D_r X_s^{(M)} - D_r X_s^{(N)} \right|^2 dr ds \\
& = c \int_0^t \left\| D X_s^{(M)} - D X_s^{(N)} \right\|_{L^2(\Omega; H \times \mathbb{R}^d)}^2 ds.
\end{aligned}$$

Par les mêmes arguments, on obtient pour  $A_4$  :

$$\begin{aligned}
A_4 & \leq cE \int_0^1 \left( \sum_{k=N+1}^M \int_r^t \left| \nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}) \right|^2 \left| D_r X_s^{(M)} \right|^2 ds \right) dr \\
& \leq c \left[ \sup_{0 \leq s \leq 1; x \in \mathbb{R}^d} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \nabla_x F_k(s, x) \right|^2 \right] \left[ \sup_{K>0} \sup_{r \leq t} E \left( \sup_{0 \leq s \leq 1} \left| D_r X_s^{(K)} \right|^2 \right) \right].
\end{aligned}$$

Le premier terme de ce majorant de  $A_4$  tend vers 0 quand  $N$  tend vers l'infini en vertu de l'hypothèse (H2), tandis que l'inégalité (12.8) montre que le second est borné. Donc, pour  $N$  assez grand, on a  $A_4 \leq \frac{\varepsilon}{4}$ .

En utilisant l'inégalité de Hölder au lieu de l'inégalité de Burkholder, on obtient pour  $A_5$  (respectivement  $A_6$ ) une estimation analogue à celle obtenue pour  $A_2$  (respectivement  $A_3$ ).

En rassemblant les estimations obtenues pour  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , on aboutit à :

$$\left\| DX_t^{(M)} - DX_t^{(N)} \right\|_{L^2(\Omega; H \otimes \mathbb{R}^d)}^2 \leq \varepsilon + c \int_0^t \left\| DX_s^{(M)} - DX_s^{(N)} \right\|_{L^2(\Omega; H \otimes \mathbb{R}^d)}^2 ds,$$

lorsque  $N$  et  $M$  sont suffisamment grands, la constante  $c$  étant indépendante de  $\varepsilon$ ,  $M$  et  $N$ .

On déduit alors du lemme de Gronwall l'inégalité

$$\left\| DX_t^{(M)} - DX_t^{(N)} \right\|_{L^2(\Omega; H \otimes \mathbb{R}^d)}^2 \leq \varepsilon e^c.$$

La convergence dans  $L^2(\Omega; H \otimes \mathbb{R}^d)$  de la suite des dérivées de Malliavin des approximations  $X_t^{(M)}$  en découle aussitôt, ainsi que l'assertion 1.

**Démonstration de l'assertion 2.** A partir de l'équation différentielle stochastique (12.18) vérifiée par le processus  $(Y_t^{(M)})^{-1}$ , on obtient, en utilisant les inégalités de Hölder et de Burkholder, l'existence d'une constante  $C_p$  telle que :

$$\begin{aligned} E \left( \sup_{0 \leq s \leq t} \left\| (Y_s^{(M)})^{-1} \right\|^p \right) &\leq C_p \left[ 1 + E \left( \int_0^t \sum_{k=1}^M \left\| (Y_s^{(M)})^{-1} \right\|^2 \left| \nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}) \right|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right. \\ &\quad + E \left( \int_0^t \left\| (Y_s^{(M)})^{-1} \right\|^2 \left| \nabla_x \tilde{F}_0(s, X_s^{(M)}) \right|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\quad \left. + E \left( \int_0^t \sum_{k=1}^M \left\| (Y_s^{(M)})^{-1} \right\|^2 \left| \nabla_x F_k(s, X_s^{(M)}) \right|^4 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H2), on en déduit que

$$E \left( \sup_{0 \leq s \leq t} \left\| (Y_s^{(M)})^{-1} \right\|^p \right) \leq C'_p \left( 1 + \int_0^t E \sup_{0 \leq r \leq s} \left\| (Y_r^{(M)})^{-1} \right\|^p ds \right),$$

où  $C'_p$  ne dépend pas de  $M$ .

On obtient alors l'assertion 2 en appliquant le lemme de Gronwall.

**Démonstration de l'assertion 3.** Introduisons pour tout entier  $M_0 > 0$  les familles de champs de vecteurs  $\Sigma_{l, M_0}$ ,  $l \geq 1$ , définies de manière récurrente par :

$$\Sigma_{1, M_0} = \{F_k(0, \cdot); 1 \leq k \leq M_0\}$$

et

$$\Sigma_{l+1, M_0} = \{[F_k(0, \cdot), V]; 1 \leq k \leq M_0, V \in \Sigma_{l, M_0}\}.$$

D'après l'hypothèse (H4), il existe des entiers  $M_0$  et  $l_0$  tels que la famille (finie) de champs de vecteurs  $\bigcup_{l=1}^{l_0} \Sigma_{l, M_0}$  engendre  $\mathbb{R}^d$  au point  $X_0$ . Dans la suite, nous noterons  $\mathcal{J}$  cette famille et :

$$K_J = \max_{V \in \mathcal{J}} |V|.$$

Comme  $\mathcal{J}$  engendre  $\mathbb{R}^d$  au point  $X_0$ , il existe des réels strictement positifs  $R_1$ ,  $C_1$  et  $s_1 \leq t$  tels que

$$\inf_{|v|=1} \left( \sum_{V_j \in \mathcal{J}} |v^* V_j(s, y)|^2 \right) > C \quad (12.20)$$

pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$  tel que  $|y - X_0| \leq R$ , et tout  $s \leq s_1$ , comme on le vérifie facilement en utilisant la continuité en  $s$  et  $y$  des champs de vecteurs  $V_j$  et la compacité de la sphère unité  $S^{d-1}$  de  $\mathbb{R}^d$ .

Soit  $v$  un élément quelconque de  $S^{d-1}$ . Nous verrons qu'on peut déduire de l'inégalité (12.20), l'existence d'un entier  $j_0 \leq l_0$ , d'un élément  $V_{j_0} = [F_{i_{j_0}}, [F_{i_{j_0-1}}, [\dots [F_{i_2}, F_{i_1}}] \dots]]$  de  $\mathcal{J}$ ,  $i_1, i_2, \dots, i_{j_0} \leq M_0$ , (dépendant bien entendu de  $v$ ) et de réels strictement positifs  $R$ ,  $C'$  et  $s_0$ , indépendants de  $v$ , tel que

$$|v^* V_{j_0}(s, y)|^2 \geq C', \quad (12.21)$$

pour tout  $s \leq s_0$  et  $y \in \mathbb{R}^d$  tels que  $|y - X_0| \leq R$ .

Nous souhaitons en déduire que pour tout  $p \geq 2$ , il existe un réel positif  $\varepsilon_0(p)$  et une constante  $C_p$ , indépendants de  $v$  et de  $M \geq M_0$ , et un entier  $i_1 \leq M_0$  tels que

$$P \left\{ \int_0^{s_0} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} F_{i_1} \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds < \varepsilon \right\} \leq C_p \varepsilon^p. \quad (12.22)$$

En fait, il résulte de cette inégalité que

$$\begin{aligned} P \{ v^* C_M(t) v < \varepsilon \} &= P \left\{ \sum_{k=1}^M \int_0^t \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} F_k \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds < \varepsilon \right\} \\ &\leq P \left\{ \int_0^{s_0} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} F_{i_1} \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds < \varepsilon \right\} \\ &\leq C_p \varepsilon^p, \end{aligned}$$

ce qui constitue précisément l'assertion 3.

Commençons par établir (12.21).

Il est clair que pour tout  $v \in S^{d-1}$ , l'ensemble des indices  $j$ ,  $1 \leq j \leq \text{card} \mathcal{J}$ , tels que  $|v^* V_j(0, X_0)|^2 \geq \frac{C}{\text{card} \mathcal{J}}$  est non vide. Notons  $J(v)$  cet ensemble et, d'autre part,  $R(v)$  et  $s(v)$  les réels strictement positifs choisis de telle sorte que

- \*  $0 < R(v) < R_1$  et  $0 < s(v) < s_1$ ;
- \*  $s \leq s(v)$  et  $|y - X_0| \leq R(v) \Rightarrow |v^* V_j(s, y)|^2 \geq \frac{c'}{3}$ , où  $c' = \frac{C}{\text{card} \mathcal{J}}$ , pour tout  $j \in J(v)$ .
- \*  $\min \{R(v); s(v)\}$  est maximal.

Il nous suffit de montrer que  $\inf_{v \in S^{d-1}} \{R(v)\} > 0$  et  $\inf_{v \in S^{d-1}} \{s(v)\} > 0$ .

Supposons que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un élément  $v_\varepsilon$  de  $S^{d-1}$  tel que l'on puisse trouver  $V_j$ ,  $j \in J(v_\varepsilon)$ ,  $s_\varepsilon \leq s_1$  et  $y_\varepsilon$  tel que  $|y_\varepsilon - X_0| \leq \varepsilon$  avec :

$$|v_\varepsilon^* V_j(s_\varepsilon, y_\varepsilon)|^2 < \frac{c'}{3}.$$

On peut, par extraction de sous-suites, supposer que l'indice  $j$  est constant et que les suites  $v_\varepsilon$  et  $s_\varepsilon$  convergent respectivement vers  $\bar{v} \in S^{d-1}$  et  $\bar{s} \leq s_1$ .

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient alors :

$$|\bar{v}^* V_j(\bar{s}, X_0)|^2 \leq \frac{c'}{3}.$$

Mais, quitte à modifier (une fois pour toutes) le choix de  $s_1$ , on peut supposer grâce à l'hypothèse (H3) que  $|V_j(\bar{s}, X_0) - V_j(0, X_0)|^2 \leq \frac{c'}{3}$ , ce qui conduit à une contradiction puisqu'il est clair que  $j \in J(\bar{v})$ .

Nous venons de vérifier que  $\inf_{v \in S^{d-1}} \{R(v)\} > 0$  et on vérifie de la même manière que  $\inf_{v \in S^{d-1}} \{s(v)\} > 0$ . L'inégalité (12.21) a donc bien lieu dans les conditions annoncées.

Tournons-nous maintenant vers la preuve de l'estimation (12.22). Dans ce but, posons  $m(l) = 2^{-4l+4}$  pour tout entier  $l > 0$  et montrons, par récurrence "descendante" sur l'entier naturel  $l \leq l_0$ , qu'il existe pour tout  $p \geq 2$  fixé des réels strictement positifs  $C_{p,l}$  et  $\varepsilon_0(p, l)$ , indépendants de  $v$  et de  $M$ , tels que pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p, l)$ , on ait

$$P \left\{ \int_0^{s_0} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} V_l \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds < \varepsilon^{m(l)} \right\} \leq C_{p,l} \varepsilon^p \quad (12.23)$$

où  $V_l$  désigne le champ de vecteurs

$$V_l = [F_{i_l}, [F_{i_{l-1}}, [\dots [F_{i_2}, F_{i_1}] \dots ]]].$$

L'estimation (12.22) correspond simplement au cas où  $l = 1$ .

Commençons par montrer (12.23) pour  $l = j_0$ . A cet effet, définissons pour tout  $M \geq M_0$  le temps d'arrêt  $\tau_M$  par :

$$\tau_M = \inf \left\{ s \leq s_0 ; \sup_{r \leq s} \left| X_r^{(M)} - X_0 \right| \geq R \text{ ou } \sup_{r \leq s} \left| \left( Y_r^{(M)} \right)^{-1} - I_d \right| \geq \frac{c'}{2K_J} \right\} \wedge s_0$$

et l'événement

$$G_{j_0} = \left\{ \int_0^{s_0} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} V_{j_0} \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds < \varepsilon^{m(j_0)} \right\}.$$

Soit  $\beta < m(j_0)$ . Il s'avère que lorsque  $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p, j_0)$ , le choix de  $\varepsilon_0(p, j_0)$  ne dépendant pas de  $v$  et de  $M$ ,  $P(G_{j_0} \cap \{\tau_M \geq \varepsilon\}) = 0$ . En effet, sur  $G_{j_0} \cap \{\tau_M \geq \varepsilon\}$ , on a, étant donné la définition de  $G_{j_0}$  et l'inégalité  $\tau_M \leq s_0$ ,

$$\int_0^{\tau_M} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} V_{j_0} \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds \leq \int_0^{s_0} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} V_{j_0} \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds < \varepsilon^{m(j_0)},$$

tandis que la définition du temps d'arrêt  $\tau_M$  et l'inégalité (12.21) impliquent que

$$\frac{c' \varepsilon^\beta}{4} \leq \int_0^{\tau_M} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} V_{j_0} \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds.$$

On a  $\frac{c' \varepsilon^\beta}{4} > \varepsilon^{m(j_0)}$  lorsque  $\varepsilon$  est assez petit et, par conséquent,  $P(G_{j_0} \cap \{\tau_M \geq \varepsilon\}) = 0$ .

Estimons maintenant la probabilité de  $G_{j_0}$ . On a :

$$\begin{aligned} P(G_{j_0}) &\leq P\{\tau_M < \varepsilon^\beta\} \\ &\leq P\left\{ \sup_{r \leq \varepsilon^\beta} \left| X_r^{(M)} - X_0 \right| \geq R \right\} + P\left\{ \sup_{r \leq \varepsilon^\beta} \left| \left( Y_r^{(M)} \right)^{-1} - I_d \right| \geq \frac{c'}{2K_J} \right\} \\ &\leq \frac{1}{R^{p'}} E\left( \sup_{r \leq \varepsilon^\beta} \left| X_r^{(M)} - X_0 \right|^{p'} \right) + \left( \frac{2K_J}{c'} \right)^{p'} E\left( \sup_{r \leq \varepsilon^\beta} \left| \left( Y_r^{(M)} \right)^{-1} - I_d \right|^{p'} \right), \end{aligned}$$

pour tout exposant  $p' \geq 2$ .

A l'aide des inégalités de Hölder et de Burkholder, du lemme de Gronwall et grâce aux hypothèses (H1) et (H2), on peut vérifier qu'il existe des constantes  $C_{p'}^1$  et  $C_{p'}^2$  indépendantes de  $M$  telles que

$$E \left( \sup_{r \leq \varepsilon^\beta} |X_r^{(M)} - X_0|^{p'} \right) \leq C_{p'}^1 \varepsilon^{\frac{p'\beta}{2}}$$

et

$$E \left( \sup_{r \leq \varepsilon^\beta} \left| \left( Y_r^{(M)} \right)^{-1} - I_d \right|^{p'} \right) \leq C_{p'}^2 \varepsilon^{\frac{p'\beta}{2}}.$$

On a donc

$$P(G_{j_0}) \leq (C_{p'}^1 + C_{p'}^2) \varepsilon^{\frac{p'\beta}{2}}$$

et il suffit de choisir  $p' \geq \frac{2p}{\beta}$  pour obtenir l'estimation (12.23) dans le cas  $l = j_0$ .

Supposons maintenant que cette estimation est vraie au rang  $l$ ,  $2 < l \leq j_0$ , et remarquons que

$$P \left\{ \int_0^{s_0} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} V_l \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds < \varepsilon^{m(l-1)} \right\} \leq p_1 + p_2,$$

où

$$p_1 = P \left\{ \int_0^{s_0} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} V_{l-1} \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds < \varepsilon^{m(l-1)} \right\};$$

$$\left\{ \int_0^{s_0} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} V_l \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds \geq \varepsilon^{m(l)} \right\}$$

et

$$p_2 = P \left\{ \int_0^{s_0} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} V_l \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds < \varepsilon^{m(l)} \right\}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a  $p_2 \leq C_{p,l} \varepsilon^p$  dès que  $\varepsilon < \varepsilon_0(p, l)$ . Il suffit donc d'établir une estimation similaire pour la probabilité  $p_1$  pour achever la démonstration.

Dans ce but, vérifions que le lemme 12.4.4 peut être appliqué à la semi-martingale :

$$y_t = v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} V_{l-1} \left( s, X_s^{(M)} \right).$$

Pour tout  $M > 0$ , soit  $F_0^{(M)}$  le champ de vecteur défini par :

$$F_0^{(M)} = \tilde{F}_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M F_k \nabla F_k$$

(Ici,  $A \nabla B$  désigne la dérivée de Lie de  $B$  le long de  $A$ ).

Par application de la formule d'Itô, on a :

$$y_s = v^* V_{l-1} (0, X_0) + \int_0^s a_r dr + \sum_{k=1}^M \int_0^s u_k(s) dw_r^k,$$

avec

$$a_r = v^* \left( \left( Y_r^{(M)} \right)^{-1} \left( \frac{\partial V_{l-1}}{\partial r} + [F_0^{(M)}, V_{l-1}] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M [F_k, [F_k, V_{l-1}]] \right) \left( r, X_r^{(M)} \right) \right)$$

et

$$u_k(r) = v^* \left( Y_r^{(M)} \right)^{-1} [F_k, V_{l-1}] \left( r, X_r^{(M)} \right),$$

pour  $k = 1, \dots, M$ .

La définition du champ de vecteurs  $V_{j_0}$  indique que :

$$p_1 = P \left\{ \int_0^{s_0} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} V_{l-1} \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds < \varepsilon^{m(l-1)} ; \right. \\ \left. \sum_{k=1}^M \int_0^{s_0} \left| v^* \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} [F_k, V_{l-1}] \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 ds \geq \varepsilon^{m(l)} \right\}.$$

Supposons que la condition (12.10) (écrite avec  $p'$  à la place de  $p$ ) est satisfaite pour les processus  $a_r$  et  $u_k(r)$ , quel que soit l'exposant  $p' \geq 2$ , avec une constante  $C(p')$  indépendante de  $M$ .

Alors, en choisissant un exposant  $p' \geq 2$  tel que  $p'm(l) \geq p$ , puis  $14 < q \leq 16$  et  $0 < \nu < q - 14$ , nous avons

$$\varepsilon^{m(l-1)} \leq \varepsilon^{qm(l)}$$

et

$$\varepsilon^{p'm(l)} \leq \varepsilon^p$$

pour tout  $\varepsilon \leq 1$ .

En appliquant le lemme 12.4.4, nous obtenons donc l'estimation

$$p_1 \leq C(p') \varepsilon^{p'm(l)} + 2 \exp \left( -\frac{1}{2\varepsilon^{\nu m(l)}} \right) \\ \leq C_p \varepsilon^p$$

dès que  $\varepsilon$  est inférieur à une valeur dont le choix ne dépend pas de  $M$ .

Ceci permet d'achever la démonstration par récurrence de l'estimation (12.23) et celle du théorème. Il nous reste donc à vérifier que pour tout  $p' \geq 2$ , on a

$$E \left( \sup_{0 \leq s \leq t} |a_s|^{p'} + \|u_s\|^{p'} \right) \leq C(p') < \infty, \quad (12.24)$$

avec une constante  $C(p')$  indépendante de  $M$ .

Remarquons que

$$\|u_s\|^{p'} \leq \left\| \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} \right\|^{p'} \left( \sum_{k=1}^M \left| \nabla_x V_{l-1} \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 \left| F_k \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^M \left| \nabla_x F_k \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 \left| V_{l-1} \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|^2 \right)^{\frac{p'}{2}}.$$

En appliquant l'inégalité de Young et en utilisant les hypothèses (H1) et (H2), on observe qu'il existe une constante positive  $C_{p'}$ , indépendante de  $M$ , telle que :

$$\|u_s\|^{p'} \leq C_{p'} \left( \left\| \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} \right\|^{2p'} + \left| 1 + |X_s^{(M)}|^2 \right|^{2p'} + \left| 1 + |X_s^{(M)}|^2 \right|^{p'} \right).$$

De même, on a

$$|a_s|^{p'} \leq \left\| \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} \right\|^{p'} \left| \frac{\partial V_{l-1}}{\partial s} \left( s, X_s^{(M)} \right) + \left[ F_0^{(M)}, V_{l-1} \right] \left( s, X_s^{(M)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \left[ F_k, \left[ F_k, V_{l-1} \right] \right] \left( s, X_s^{(M)} \right) \right|.$$

On déduit de cette majoration grâce aux hypothèses (H1), (H2) et (H3) que :

$$|a_s|^{p'} \leq C'_{p'} \left( \left\| \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} \right\|^{2p'} + \left| 1 + \left| X_s^{(M)} \right|^2 \right|^{2p'} + \left| 1 + \left| X_s^{(M)} \right|^2 \right|^{p'} \right)$$

pour une constante  $C'_{p'}$  indépendante de  $M$ .

De plus, nous savons que chacun des moments de  $\sup_{0 \leq s \leq s_0} \left| 1 + \left| X_s^{(M)} \right|^2 \right|$  est borné indépendamment de  $M$  et, d'après l'assertion 2, que chacun des moments de  $\sup_{0 \leq s \leq s_0} \left\| \left( Y_s^{(M)} \right)^{-1} \right\|$  est borné indépendamment de  $M$ .

L'estimation (12.24) est donc établie, ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$



# Bibliographie

- [1] G.Ben Arous, R.Léandre, Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale. *Probability Theory and Related Fields* **90** (1991) 175–202, 377–402.
- [2] J.M.Bismut, Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander conditions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete* **56** (1981) 469–505.
- [3] J.M.Bismut, An introduction to the stochastic calculus of variations. In : M.Kohlmann, N.Christopeit eds., Stochastic Differential Systems. *Lecture Notes in Control and Information Science* **49**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1982) 201–214.
- [4] J.M.Bismut, The Atiyah–Singer theorems : a probabilistic approach. *Journal of Functional Analysis* Part I **57** (1984) 56–98, Part II **57** (1984) 329–348.
- [5] G.Da Prato, J.Zabczyk, Stochastic equations in infinite dimensions. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **44** Cambridge University Press (1992).
- [6] N.Ikeda, Probabilistic methods in the study of asymptotics. In : P.L.Hennequin ed., Ecole d’Eté de Probabilités de Saint Flour XX. *Lecture Notes in Mathematics* **1427**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1990).
- [7] N.Ikeda, S.Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes. North-Holland Kodansha, Amsterdam (1981).
- [8] H.Kunita, Lectures on stochastic flows and applications. Lect. Math. Phys., Tata Inst. Fundam. Res. Springer Verlag, Berlin (1983).
- [9] H.Kunita, Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms. Ecole d’été de probabilités de Saint-Flour XII, *Lecture Notes in Mathematics* **1097** Springer Verlag, Berlin (1984).
- [10] S.Kusuoka, D.Stroock, Applications of the Malliavin calculus. Part I, In : K.Itô ed., Taniguchi symposium (Katata–Kyoto 1982) North-Holland (1984) 277–306, Part II *Journal Faculty Sciences University of Tokyo* section 1A Math **32** (1985).
- [11] R.Léandre, Développement asymptotique de la densité d’une diffusion dégénérée. *Forum Mathematicum* **4** (1992) 45–75.
- [12] P.Malliavin, Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. In : K.Itô ed. Proceedings International Symposium on Stochastic Differential Equations (Kyoto 1976) Kinokuniya, Wiley (1978) 195–263.
- [13] P.Malliavin,  $C^k$  hypoellipticity with degeneracy. In : A.Friedman and M.Pinsky eds. *Stochastic Analysis* Academic Press (1978) 199–214, 327–340.
- [14] P.A.Meyer, Quelques résultats analytiques sur le semi-groupe d’Ornstein–Uhlenbeck en dimension infinie. Theory and Applications of Random Fields. *Lecture Notes in Control and Information Science* **49** Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 201–214.
- [15] Nguyen Min Duc, D.Nualart, M.Sanz, Application of Malliavin Calculus to a class of stochastic differential equations. *Probability Theory and Related Fields* **84** (1990) 549–571.
- [16] J.Norris, Simplified Malliavin Calculus. In J.Azéma, M.Yor eds., Séminaire de Probabilités XX. *Lecture Notes in Mathematics* **1204** Springer Verlag, Berlin (1988) 101–130.

- [17] D.Nualart, Non causal stochastic integral and calculus. In : H.Korezlioglu and A.S.Ustunel eds. Stochastic analysis and related topics. *Lecture Notes in Mathematics* **1316**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1988) 80–129.
- [18] D.Nualart, The Malliavin calculus and related topics. *Probability and its Applications* Springer Verlag, Berlin (1995).
- [19] D.Nualart, E.Pardoux, Stochastic calculus with anticipating integrands. *Probability Theory and Related Fields* **78** (1988) 535–581.
- [20] D.Nualart, M.Zakai, Generalized stochastic integrals and the Malliavin calculus. *Probability Theory and Related Fields* **73** (1986) 255–280.
- [21] D.Ocone, A guide to the stochastic calculus of variations. In : H.Korezlioglu and A.S.Ustunel eds. Stochastic analysis and related topics. *Lecture Notes in Mathematics* **1316**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1988) 1–79.
- [22] D.Ocone, E.Pardoux, A generalized Itô–Ventzell formula. Application to a class of anticipating stochastic differential equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré* **25** (1989) 39–71..
- [23] I.Shigekawa, Absolute continuity of probability laws of Wiener functionals. *Proceedings of the Japanese Academy* **54 A** (1978) 230–233.
- [24] I.Shigekawa, Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures. *Journal of Mathematics Kyoto University* **20–2** (1980).
- [25] A.V.Skorohod, On a generalization of a stochastic integral. *Theory of Probability and its Applications* **20** (1975) 219–233.
- [26] D.Stroock, The Malliavin calculus, a functional analytic approach. *Journal of Functional Analysis* **44** (1981) 212–257.
- [27] D.Stroock, Some applications of stochastic calculus to partial differential equations. In : P.L.Hennequin ed., Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour. *Lecture Notes in Mathematics* **976**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1983) 267–382.
- [28] D.Stroock, The Malliavin calculus and its applications to second order parabolic differential operators. *Math. Systems Theory* **14** (1981) 26–65, 141–171.
- [29] H.Sugita, Sobolev spaces of Wiener functionals and Malliavin's calculus. *Journal of Mathematics Kyoto University* **25–1** (1985) 31–48.
- [30] S.Taniguchi, Application of Malliavin calculus to time dependent systems of heat equations. *Osaka Journal of Mathematics* **22** (1985) 307–320..
- [31] S.Watanabe, Stochastic differential equations and Malliavin calculus. *Tata Institute of Fundamental Research* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1984).
- [32] S.Watanabe, Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels. *Annals of Probability* **15** (1987) 1–39.
- [33] M.Zakai, The Malliavin calculus. *Acta Applicandae Mathematicae* **3–2** (1985) 175–207.