



**HAL**  
open science

# Modélisation numérique de l'amortissement passif et actif des tôles sandwich comportant des couches viscoélastiques ou piézoélectriques

Laëtitia Duigou-Kersulec

► **To cite this version:**

Laëtitia Duigou-Kersulec. Modélisation numérique de l'amortissement passif et actif des tôles sandwich comportant des couches viscoélastiques ou piézoélectriques. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2002. Français. NNT : 2002METZ026S . tel-01749738

**HAL Id: tel-01749738**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749738v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° Inv	20020845
Cote	S/MZ 02/26
Loc	

# THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

Par

**Laëtitia DUIGOU - KERSULEC**

Pour l'obtention du grade de :

**DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ****SPECIALITE :** *Sciences de l'ingénieur***OPTION :** *Mécanique des matériaux*

**Modélisation numérique de l'amortissement  
passif et actif des tôles sandwich comportant des  
couches viscoélastiques ou piézoélectriques**

Soutenue le 4 décembre devant le jury composé de :

<b>E.M. Daya</b>	Maître de conférences, Université de Metz	Codirecteur de thèse
<b>P. Lorenzini</b>	Ingénieur au Ledep SOLLAC, Florange	Examineur
<b>P. Muller</b>	Professeur, IUT de Cergy-Pontoise	Examineur
<b>R. Ohayon</b>	Professeur, CNAM de Paris	Rapporteur
<b>E. Patoor</b>	Professeur, ENSAM de Metz	Examineur
<b>M. Potier-Ferry</b>	Professeur, Université de Metz	Directeur de thèse
<b>J. Pouget</b>		Rapporteur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



031 465915 0

sailles

U.M.R. C.N.R.S. N°7554

**THESE**

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

Par

**Laëtitia DUIGOU - KERSULEC**

Pour l'obtention du grade de :

**DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ****SPECIALITE : *Sciences de l'ingénieur*****OPTION : *Mécanique des matériaux*****Modélisation numérique de l'amortissement passif et actif des tôles sandwich comportant des couches viscoélastiques ou piézoélectriques**

Soutenue le 4 décembre devant le jury composé de :

<b>E.M. Daya</b>	Maître de conférences, Université de Metz	Codirecteur de thèse
<b>P. Lorenzini</b>	Ingénieur au Ledeppe Sollac, Florange	Examineur
<b>P. Muller</b>	Professeur, IUT de Cergy-Pontoise	Examineur
<b>R. Ohayon</b>	Professeur, CNAM de Paris	Rapporteur
<b>E. Patoor</b>	Professeur, ENSAM de Metz	Examineur
<b>M. Potier-Ferry</b>	Professeur, Université de Metz	Directeur de thèse
<b>J. Pouget</b>	Directeur de recherches CNRS, Versailles	Rapporteur

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au laboratoire de physique et mécanique des matériaux (L.P.M.M.) à l'université de Metz.

Je tiens tout d'abord à remercier Michel Potier-Ferry pour m'avoir accueillie au sein de son équipe et encadrée durant ces trois années de thèse, pour l'originalité de mon travail sur l'amortissement actif et pour ses questions pertinentes qui m'ont fait avancer.

Je remercie également Monsieur El Mostafa Daya, qui a co-encadré ce travail, pour sa disponibilité, sa gentillesse, son soutien permanent et sa patience !

J'aimerais leur exprimer à tous les deux, toute ma reconnaissance pour m'avoir initiée au travail de la recherche par leur savoir mais également par leur enthousiasme qu'ils ont su me communiquer et pour avoir partagé leur connaissance, ce qui m'a permis de mener à bien ce projet.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Roger Ohayon et Monsieur Joël Pouget pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon travail de thèse et de m'avoir fait part de leurs remarques.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Patrick Muller, président du jury, et Messieurs Pascal Lorenzini et Etienne Patoor pour leur aimable participation au jury de cette thèse.

Je remercie les membres du L.P.M.M. (Thésards, Maîtres de Conférences, Professeurs, Secrétaires et Informaticiens) pour leur sympathie et la bonne ambiance durant ces trois années et notamment Jean-Marc Cadou pour son aide lors de la rédaction.

Je tiens aussi à remercier mes parents qui m'ont toujours soutenue et encouragée.

Enfin, je remercie tout particulièrement mon mari, pour son soutien, ses encouragements ainsi que pour sa patience de tous les instants !

# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>12</b>
<b>1 Position du problème</b>	<b>16</b>
1.1 Introduction . . . . .	16
1.2 Modélisation des structures viscoélastiques . . . . .	17
1.2.1 Matériau viscoélastique linéaire isotrope non-vieillissant . . . . .	17
1.2.2 Vibrations libres des structures viscoélastiques . . . . .	23
1.3 Modélisation numérique des coques sandwich viscoélastiques . . . . .	26
1.3.1 Introduction . . . . .	26
1.3.2 Savoir faire existant . . . . .	28
1.4 Conclusion . . . . .	39
<b>2 Des éléments finis pour les coques sandwich</b>	<b>41</b>
2.1 Introduction . . . . .	41
2.2 Analyse de quelques éléments de coque . . . . .	42
2.2.1 Test sur une plaque en appui le long de son bord . . . . .	43
2.2.2 Test sur une plaque encastree sur un bord . . . . .	45
2.2.3 Conclusion . . . . .	49
2.3 Elément sandwich . . . . .	49
2.3.1 Présentation et hypothèses du modèle :	
coque/Mindlin/coque . . . . .	50
2.3.2 Expression des déformations dans les couches . . . . .	54

2.3.3	Formulation élément fini pour les vibrations des coques sandwich	55
2.4	Premières validations du nouvel élément	59
2.4.1	Tôles sandwich constituées d'un seul matériau	59
2.4.2	Tôles sandwich	61
2.5	Conclusion	64
<b>3</b>	<b>Méthodes itératives pour les vibrations et l'amortissement des structures viscoélastiques</b>	<b>66</b>
3.1	Introduction	66
3.2	Méthode de continuation	68
3.2.1	Technique d'homotopie	68
3.2.2	Méthode de perturbation	69
3.2.3	Méthode de continuation	72
3.3	Algorithmes itératifs d'ordre élevé	75
3.3.1	Comment construire des algorithmes d'ordre élevé	75
3.3.2	Un algorithme de Newton d'ordre élevé	78
3.3.3	Un algorithme itératif $L^*$ d'ordre élevé	83
3.4	Organigrammes récapitulatifs des algorithmes proposés	88
3.5	Applications numériques	92
3.5.1	Module d'Young $E$ constant	93
3.5.2	Module d'Young $E$ dépendant de la fréquence	98
3.5.3	Test de robustesse des algorithmes	102
3.5.4	Cylindre	104
3.5.5	Conclusion	106
<b>4</b>	<b>Amortissement actif - Couplage avec l'amortissement passif</b>	<b>107</b>
4.1	Introduction	107
4.2	Lois de contrôle	109
4.3	Modélisation des couches minces piézoélectriques	112

4.3.1	Loi de comportement des matériaux piézoélectriques . . . . .	112
4.3.2	Description de l'état électrique . . . . .	115
4.4	Poutre piézoélectrique/élastique/piézoélectrique . . . . .	116
4.4.1	Description cinématique de la poutre . . . . .	117
4.4.2	Formulation variationnelle - Définition des efforts globaux . .	118
4.4.3	Loi de comportement électromécanique du stratifié . . . . .	121
4.4.4	Condensation des termes électriques au niveau du capteur . .	122
4.4.5	Formulation variationnelle simplifiée . . . . .	123
4.4.6	Première loi du contrôle actif - Approche élastique équivalente	125
4.4.7	Analyse modale en appui simple . . . . .	126
4.4.8	Deuxième loi du contrôle actif - Approche viscoélastique équivalente	131
4.4.9	Analyse modale en appui simple . . . . .	132
4.5	Poutre piézoélectrique/élastique/viscoélastique	
	/élastique/piézoélectrique . . . . .	137
4.5.1	Description cinématique de la poutre . . . . .	138
4.5.2	Formulation variationnelle. Définition des efforts globaux . . .	140
4.5.3	Lois de comportement du stratifié . . . . .	143
4.5.4	Approche modale. Condensation du potentiel électrique au ni- veau du capteur . . . . .	144
4.5.5	Formulation variationnelle simplifiée . . . . .	146
4.5.6	Première loi du contrôle actif - Approche viscoélastique équivalente	147
4.5.7	Deuxième loi du contrôle actif - Approche viscoélastique équivalente	154
4.6	Conclusion . . . . .	159
	<b>Conclusion générale</b>	<b>161</b>
	<b>A Fonctions de forme de l'élément quadrilatère à huit noeuds</b>	<b>164</b>
	<b>B Calculs intermédiaires pour avoir le déplacement de la couche cen-</b>	



---

<b>trale</b>	<b>166</b>
<b>C Résultats obtenus par les trois algorithmes pour le test de robuste</b>	<b>169</b>
<b>tesse</b>	<b>169</b>
C.1 Algorithme de Continuation . . . . .	169
C.2 Algorithme Itératif d'ordre élevé de type Newton . . . . .	171
C.3 Algorithme Itératif d'ordre élevé $L^*$ . . . . .	173
<b>D Propriétés des matériaux</b>	<b>175</b>
D.1 Matériau élastique . . . . .	175
D.2 Matériau piézoélectrique . . . . .	175
<b>Références</b>	<b>176</b>

# Liste des figures

1.1	Modélisations des matériaux viscoélastiques . . . . .	22
1.2	Modèle de Maxwell généralisé . . . . .	23
1.3	Structure sandwich avec une couche centrale viscoélastique . . . . .	26
1.4	Poutre sandwich viscoélastique encastree-libre . . . . .	27
1.5	Modèle de Killian . . . . .	30
1.6	Modèle de Johnson . . . . .	30
1.7	Modèle de Lezza A. Mignery . . . . .	31
1.8	Calcul d'amortissement par la méthode des bandes passantes . . . . .	35
2.1	Convergence vers la 5 <sup>eme</sup> fréquence de la plaque en appui avec le DKT et le BRR . . . . .	44
2.2	Convergence vers la 10 <sup>eme</sup> fréquence de la plaque en appui avec le DKT et le BRR . . . . .	44
2.3	Convergence vers la 5 <sup>eme</sup> fréquence de la plaque encastree-libre avec le BD, le DKT et le BRR . . . . .	46
2.4	Convergence vers la 10 <sup>eme</sup> fréquence de la plaque encastree-libre avec le BD, le DKT et le BRR . . . . .	46
2.5	Convergence vers la 15 <sup>eme</sup> fréquence de la plaque encastree-libre avec le BD, le DKT et le BRR . . . . .	47
2.6	Comparaison en temps CPU entre le DKT et le BRR pour l'obtention des 20 premières fréquences et des 20 premiers modes pour la plaque encastree-libre . . . . .	47

2.7	Représentation des notations prises pour définir les structures sandwich	49
2.8	Description géométrique de la coque . . . . .	50
3.1	Organigramme de l'Algorithme de Continuation . . . . .	89
3.2	Organigramme de l'Algorithme Itératif de type Newton . . . . .	90
3.3	Organigramme de l'Algorithme Itératif $L^*$ . . . . .	91
3.4	Parties réelles et imaginaires du module d'Young du polymère considéré en fonction de la fréquence à 50°C et 30°C et 50°C . . . . .	98
3.5	Représentation du cylindre troué . . . . .	105
4.1	Mécanismes d'action piézoélectrique . . . . .	108
4.2	Notations utilisées pour la poutre sandwich piézo./él./piézo. . . . .	117
4.3	Notations utilisées pour la poutre sandwich piézo./él./visco./él./piézo. $\Omega_s$ : capteur ( <i>sensor</i> ), $\Omega_a$ : actionneur, $\Omega_{e1}, \Omega_{e2}$ : couches élastiques, $\Omega_v$ : couche viscoélastique . . . . .	138
A.1	Représentation d'un élément quadrilatère à 8 noeuds . . . . .	164

# Liste des tableaux

2.1	Caractéristiques de la plaque rectangulaire pour la comparaison de différents éléments . . . . .	43
2.2	Comparaison des temps de calcul par rapport au maillage nécessaire pour obtenir les fréquences propres des 5 <sup>emes</sup> , 10 <sup>emes</sup> et 15 <sup>emes</sup> . . . . .	48
2.3	4 premières fréquences obtenues pour une poutre constituée d'un seul matériau . . . . .	60
2.4	4 premières fréquences obtenues pour la plaque constituée d'un seul matériau . . . . .	61
2.5	Caractéristiques des matériaux pour la poutre et la plaque sandwich	62
2.6	Fréquences d'une poutre sandwich encastree-libre. Elément BRR/Mindlin/BRR	62
2.7	Comparaison des 3 premiers modes de flexion . . . . .	63
2.8	Vibrations libres : fréquences propres des modes symétriques . . . . .	64
3.1	Propriétés matérielles pour la poutre encastree-libre . . . . .	93
3.2	Poutre encastree-libre avec un amortissement petit ou modéré. Trois algorithmes sont comparés : continuation, Newton, Iteratif( $L^*$ ). Résidu final obtenu avec des séries tronquées à l'ordre 20. L'amortissement structural calculé $\eta_m$ est le même dans les trois cas. . . . .	94
3.3	Poutre encastree-libre. Amortissement élevé. Les cinq premiers modes complexes sont calculés. Trois algorithmes sont comparés : continuation, Newton, Iteratif ( $L^*$ ). Résidu final à la fin de l'algorithme de continuation ou après chaque itération. . . . .	95

3.4	Poutre encastree-libre. Amortissement eleve. Les cinq premiers modes complexes sont calcules. Trois algorithmes sont compares : continuation, Newton, Iteratif ( $L^*$ ) + approximants de Padé. Résidu final à la fin de l'algorithme de continuation ou après chaque itération. . . . .	95
3.5	Propriétés de la plaque sandwich . . . . .	97
3.6	Plaque rectangulaire en appui sur les bords. Amortissement modéré ( $\eta_m=0.5$ ). Trois algorithmes sont compares. Résidu final après un pas ou une itération. . . . .	97
3.7	Propriétés de la poutre sandwich (178*10mm) . . . . .	99
3.8	Poutre sandwich encastree-libre. Viscoélasticité : Maxwell généralisé à 50°C et 30°C. Fréquences naturelles, facteur de perte, résidu final et nombre d'itérations. Deux algorithmes itératifs sont compares. . . . .	99
3.9	Convergence selon l'ordre de troncature des séries à 50°C pour la poutre encastree-libre . . . . .	100
3.10	Poutre encastree-libre à 70°C. Calculs de la fréquence et du rapport $\eta_m/\eta_c$ des trois premiers modes, effectués avec les algorithmes de Newton et itératif $L^*$ + les approximants de Padé . . . . .	101
3.11	Poutre encastree-libre à 20°C. Calculs de la fréquence et du rapport $\eta_m/\eta_c$ des trois premiers modes, effectués avec les algorithmes de Newton et itératif $L^*$ + les approximants de Padé . . . . .	101
3.12	Plaque sandwich encastree le long de ses bords. Viscoélasticité : Maxwell généralisé à 50°C et 30°C. Fréquences naturelles, facteur de perte, résidu final et nombre d'itérations. Deux algorithmes itératifs sont compares. . . . .	102
3.13	Etude du mode 21 par la méthode de continuation . . . . .	104
3.14	Cylindre encastree à ses extrémités. Calculs des fréquences ( $f$ ) et du rapport $\eta_m/\eta_c$ des 10 premiers modes, effectués avec les algorithmes de Newton et itératif $L^*$ + les approximants de Padé . . . . .	105

---

C.1	50 premiers modes obtenus par l'Algorithme de Continuation . . . . .	169
C.2	50 premiers modes obtenus par l'Algorithme de Continuation (suite) .	170
C.3	50 premiers modes obtenus par l'Algorithme Itératif d'ordre élevé de type Newton . . . . .	171
C.4	50 premiers modes obtenus par l'Algorithme Itératif d'ordre élevé de type Newton (suite) . . . . .	172
C.5	50 premiers modes obtenus par l'Algorithme Itératif $L^*$ . . . . .	173
C.6	50 premiers modes obtenus par l'Algorithme Itératif $L^*$ (suite) . . . .	174

# Introduction générale

Autour de nous, tous les corps sont déformables : métaux, matières plastiques ou synthétiques. Une des conséquences de cette propriété est que, lorsqu'ils sont soumis à des efforts variant en fonction du temps, ils vibrent. Ces vibrations peuvent être importantes, même sous l'effet de forces très faibles, si les fréquences d'excitation sont proches des fréquences propres (fréquences naturelles de résonance). Lorsqu'une pièce vibre, surtout si c'est une plaque, elle communique son mouvement aux pièces ou/et à l'air (fluide) qui l'entourent. Quand plusieurs pièces d'une même structure vibrent, cela peut provoquer des fissures ou même des ruptures dans celle-ci, et donc, avoir des incidences graves. Quand la pièce vibrante transmet son mouvement à l'air, elle joue alors le rôle de haut parleur conduisant ainsi des nuisances sonores. Mais, aujourd'hui, la protection de l'environnement, et donc le combat contre le bruit, est de plus en plus pris en compte que ce soit au niveau de l'automobile, de l'électroménager, de l'aérospatial, de l'aéronautique... Il faut donc chercher à amortir les vibrations pour éviter des dégâts matériels ou/et les nuisances sonores. Pour cela, il existe deux types d'amortissement : l'amortissement dit "passif" et l'amortissement dit "actif". Le premier est introduit par l'intégration ou l'ajout de matériaux ou de systèmes, ayant des propriétés amortissantes, à la structure. Celle-ci sera amortie passivement, c'est à dire sans intervention extérieure. Les tôles sandwich constituées d'une couche viscoélastique située entre deux parements élastiques, permettent d'amortir les vibrations de façon passive. En effet, les propriétés mécaniques du matériau viscoélastique dépendent des fréquences des vibrations. L'amortisseur actif est quant à lui rendu possible grâce à la présence de capteurs et d'actionneurs sur la structure à étudier.

Les capteurs mesurent en permanence l'état vibratoire, un microprocesseur traite ces informations et assure la commande d'actionneurs. Ces capteurs et actionneurs sont réalisés à partir de matériaux intelligents capables de fournir une action, générée par le couplage naturel de leurs déformations ou contraintes avec différents facteurs externes. Pour l'amortissement actif, les matériaux utilisés sont des polymères ou des céramiques piézoélectriques qui permettent de transformer l'énergie mécanique en énergie électrique et vice versa. L'énergie fournie par l'actionneur permet de contrer les vibrations, de façon plus ou moins optimale, suivant sa position.

Dans ce travail, nous nous intéressons principalement à l'amortissement passif, et nous aborderons l'amortissement actif, dans la dernière partie de ce document.

L'amortissement passif d'une tôle sandwich est lié au cisaillement dans la couche centrale viscoélastique, dont les propriétés dépendent de la fréquence. L'étude des vibrations des structures sandwich viscoélastiques pose donc deux problèmes :

- Premièrement, l'amortissement est dû à la différence entre les déplacements horizontaux des couches supérieure et inférieure élastiques, ce qui conduit à un cisaillement de la couche centrale. Il faut donc des modèles qui prennent en compte ce cisaillement. Certes, il existe le modèle complet, le modèle volume/volume/volume ; mais dans ce cas, le nombre de degrés de liberté devient vite important, ce qui implique des manipulations de grandes matrices et donc un coût important en temps calcul et en place mémoire. Quant aux autres modèles, ils sont soit très simplifiés et donc applicables seulement à des conditions aux limites et à des géométries simples (poutres, plaques, cylindres...), soit faibles en membrane, ce qui nécessite un maillage fin pour obtenir la convergence. C'est pourquoi, dans le chapitre 2, nous proposons un élément fini sandwich.

- Le second problème est lié à la dépendance en fréquence et en température des propriétés du matériau viscoélastique. En effet, cette dépendance amène à résoudre



un problème de vibrations libres aux valeurs propres complexes non-linéaires. Pour résoudre ce problème, on distingue les méthodes approchées et les méthodes directes. Cependant, les méthodes approchées, comme leur nom l'indique, ne sont que des approximations. Les méthodes directes existantes ne sont applicables qu'aux structures dont les propriétés ne dépendent pas de la fréquence, et de plus, elles se révèlent être coûteuses en place mémoire ou en temps calcul. Dans ce travail, nous proposons une autre approche pour résoudre ces problèmes, basée sur la technique d'homotopie et les méthodes de perturbation.

Ce manuscrit se décompose en quatre chapitres :

- Au chapitre 1, un rappel sur les matériaux viscoélastiques et sur les vibrations libres de ces structures est réalisé. Ensuite, une étude bibliographique est présentée. Elle est composée de deux parties. La première a pour objet la modélisation des structures sandwich et la seconde les méthodes numériques pour résoudre le problème de vibrations libres de ces structures pour pouvoir obtenir l'amortissement.
- Le second chapitre est consacré à la modélisation des structures sandwich. Nous présentons un modèle élément fini sandwich riche en membrane afin de prendre en compte le cisaillement dans la couche centrale, qui est responsable de l'amortissement.
- Dans le troisième chapitre, deux méthodes itératives d'ordre élevé sont proposées pour résoudre le problème de vibrations libres aux valeurs propres complexes. Toutes les deux sont basées sur la technique d'homotopie et sur la méthode asymptotique. Cependant, l'une utilise l'inversion d'une matrice complexe (algorithme itératif de type Newton) et la seconde, l'inversion d'une matrice réelle (algorithme itératif  $L^*$ ).
- Dans le quatrième chapitre, l'amortissement actif est abordé. Nous proposons une étude analytique originale des poutres piézoélectriques : nous utilisons une approche modale pour obtenir une expression de la fréquence complexe de ces structures. Ceci a déjà été réalisé pour les structures sandwich viscoélastiques et nous souhaitons le

généraliser à tout type d'amortissement. Après un bref rappel des lois de contrôle rétroactif et de la loi de comportement des matériaux piézoélectriques, nous étudions deux poutres (piézoélectrique/élastique/piézoélectrique) et (piézoélectrique/élastique/viscoélastique/piézoélectrique/élastique), sur lesquelles deux types de contrôle sont appliqués.

# CHAPITRE 1

## Position du problème

### 1.1 Introduction

Nous étudions dans ce travail, les vibrations des structures sandwich viscoélastiques, il est donc nécessaire d'effectuer quelques rappels. Dans un premier temps, nous présentons les matériaux viscoélastiques linéaires isotropes non-vieillissants. En effet, la couche centrale de nos structures est constituée de ce type de matériau, dont les propriétés dépendent de la fréquence. Il est donc indispensable de connaître sa loi de comportement. Dans un deuxième temps, nous établissons une formulation variationnelle des problèmes de vibrations libres des structures viscoélastiques. Celle-ci nous amène à résoudre un problème aux valeurs propres complexes non-linéaires. Après ces rappels, une étude bibliographique est présentée. Celle-ci est composée de deux parties, représentant chacune des solutions possibles aux deux problèmes engendrés par l'étude des vibrations libres des structures sandwich viscoélastiques : d'une part, la nécessité de prendre en compte le cisaillement dans la couche centrale responsable de l'amortissement, d'autre part, la résolution du problème aux valeurs propres complexes pour obtenir la fréquence amortie et l'amortissement.

## 1.2 Modélisation des structures viscoélastiques

### 1.2.1 Matériau viscoélastique linéaire isotrope non-vieillissant

Les matériaux viscoélastiques, tels que les polymères, sont caractérisés par deux modes de déformation : le fluage et la relaxation. Lorsque l'on soumet le matériau viscoélastique à une contrainte instantanée, celui-ci subit une déformation instantanée suivie d'une déformation différée (fluage). De même, lorsqu'on le soumet à une déformation constante dans le temps, une évolution des contraintes dans le temps (relaxation) est observée. C'est pourquoi en viscoélasticité, la loi de comportement s'écrit d'une manière générale :

$$\sigma_{ij}(t) = \mathcal{F}[\varepsilon_{kl}(\tau_{-\infty}^t)] \quad (1.1)$$

A chaque instant  $t$ , la contrainte  $\sigma_{ij}(t)$  dépend de l'histoire de la déformation  $\varepsilon_{kl}(\tau)$  jusqu'à cet instant  $t$ .

Lorsque le matériau est supposé linéaire, la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{F}[\varepsilon_{kl}^{(1)}(\tau_{-\infty}^t) + \varepsilon_{kl}^{(2)}(\tau_{-\infty}^t)] = \mathcal{F}[\varepsilon_{kl}^{(1)}(\tau_{-\infty}^t)] + \mathcal{F}[\varepsilon_{kl}^{(2)}(\tau_{-\infty}^t)] \\ \mathcal{F}[\lambda \varepsilon_{kl}(\tau_{-\infty}^t)] = \lambda \mathcal{F}[\varepsilon_{kl}(\tau_{-\infty}^t)] \end{cases} \quad (1.2)$$

En prenant un matériau non vieillissant, ses propriétés n'évoluent pas avec le temps [46]. Cela signifie que la réponse à un instant  $t$  pour une sollicitation à un instant  $\tau$  (antérieur à  $t$ ), est la même que celle à un instant  $t + \Delta\tau$  pour une sollicitation à un instant  $\tau + \Delta\tau$ . D'après cette définition, les fonctions de fluage et de relaxation ne dépendent que d'une seule variable :  $t - \tau$  (temps séparant l'effet de la cause). Les formules de Boltzmann, qui donnent la déformation à l'instant  $t$  en fonction de l'histoire de contrainte et inversement, s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t f_{ijkl}(t-\tau) \dot{\sigma}_{kl}(\tau) d\tau \\ \sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t r_{ijkl}(t-\tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau) d\tau \end{cases} \quad (1.3)$$

Soit encore en notant (\*) le produit de convolution de Riemann :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = f_{ijkl}(t) * \dot{\sigma}_{kl}(t) \\ \sigma_{ij}(t) = r_{ijkl}(t) * \dot{\varepsilon}_{kl}(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Les formules précédentes montrent que pour les matériaux viscoélastiques linéaires non-vieillissants, les calculs se font dans une algèbre de convolution. Utilisons alors la transformation de Carson de la fonction  $x(t)$  notée  $x^*(p)$  qui est définie par :

$$\begin{aligned} x^*(p) &= p \int_{-\infty}^0 x(t) e^{-pt} dt \\ &= p\mathcal{L}(x(t)) \end{aligned} \quad (1.5)$$

où  $\mathcal{L}(x(t))$  est la transformée de Laplace de la fonction  $x(t)$ .

La transformée de Laplace possède les propriétés principales suivantes [9] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t) * y(t)) &= \mathcal{L}(x(t))\mathcal{L}(y(t)) \\ \mathcal{L}(\dot{x}(t)) &= p\mathcal{L}(x(t)) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Avec la définition de la transformée de Carson et les propriétés précédentes, les formules (1.4) deviennent dans l'espace de Carson :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}^*(p) = f_{ijkl}^*(p) \sigma_{kl}^*(p) \\ \sigma_{ij}^*(p) = r_{ijkl}^*(p) \varepsilon_{kl}^*(p) \end{cases} \quad (1.7)$$

avec  $f_{ijkl}^*(p)$  : composantes du tenseur d'ordre 4 des modules opérationnels

$r_{ijkl}^*(p)$  : composantes du tenseur d'ordre 4 des complaisances opérationnelles.

Donc, grâce à l'hypothèse de non vieillissement du matériau viscoélastique, les calculs intégraux peuvent être transformés en calculs opérationnels. Les équations précédentes sont analogues aux lois de Hooke généralisées en élasticité :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}^*(p) = S_{ijkl}^*(p)\sigma_{kl}^*(p) \\ \sigma_{ij}^*(p) = C_{ijkl}^*(p)\varepsilon_{kl}^*(p) \\ S_{ijkl}^*(p) = [C_{ijkl}^*(p)]^{-1} \end{cases} \quad (1.8)$$

Aussi, nous supposons que le matériau viscoélastique est isotrope. Cela signifie que le tenseur  $C^*$  ne fait intervenir que deux composantes indépendantes : par exemple un module opérationnel ( $E^*(p)$ ) et un coefficient de Poisson opérationnel ( $\nu^*(p)$ ) :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^*(p) = \frac{E^*(p)}{1+\nu^*(p)}\varepsilon_{ij}^*(p) + \frac{E^*(p)\nu^*(p)}{(1+\nu^*(p))(1-2\nu^*(p))}\varepsilon_{kk}^*(p)\delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij}^*(p) = \frac{1+\nu^*(p)}{E^*(p)}\sigma_{ij}^*(p) - \frac{\nu^*(p)}{E^*(p)}\sigma_{kk}^*(p)\delta_{ij} \end{cases} \quad (1.9)$$

Lors de la modélisation des structures sandwich, le coefficient de Poisson est souvent supposé constant et réel.

Lorsque le matériau viscoélastique isotrope linéaire non vieillissant subit des chargements harmoniques de la forme  $\sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}e[\sigma_{ij}^0 e^{i\omega t}]$  avec  $i^2 = -1$ , les déformations résultantes sont :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{kl}^0 \int_{-\infty}^t f_{ijkl}(t-\tau) \mathcal{R}e[i\omega e^{i\omega\tau}] d\tau \quad (1.10)$$

En posant  $u = t - \tau$  et  $i\omega = p$  et en utilisant la transformée de Carson (1.5), la loi de comportement d'un matériau viscoélastique isotrope linéaire non vieillissant soumis

à des sollicitations harmoniques s'écrit en complexe :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{kl}^0 \mathcal{R}e[f_{ijkl}^*(p)e^{pt}] \quad (1.11)$$

avec

$$f_{ijkl}^*(p) = p \int_0^\infty f_{ijkl}(t)e^{-pt} dt$$

$f_{ijkl}^*(p)$  représente les composantes du tenseur des complaisances complexes et peut être exprimé de la façon suivante :

$$f_{ijkl}^*(p) = f'_{ijkl}(\omega) + i f''_{ijkl}(\omega) \quad (1.12)$$

avec  $f'_{ijkl}(\omega) = \mathcal{R}e[f_{ijkl}^*(p)]$ , composantes du tenseur des complaisances de stockage et  $f''_{ijkl}(\omega) = \mathcal{I}m[f_{ijkl}^*(p)]$ , composantes du tenseur des complaisances de pertes.

La loi de comportement duale de (1.11), correspondant à des sollicitations harmoniques en déformation, s'écrit :

$$\sigma_{ij}(t) = \varepsilon_{kl}^0 \mathcal{R}e[r_{ijkl}^*(p)e^{pt}] \quad (1.13)$$

$r_{ijkl}^*(p)$  représente les composantes du tenseur des modules complexes et peut être exprimé de la façon suivante :

$$r_{ijkl}^*(p) = r'_{ijkl}(\omega) + i r''_{ijkl}(\omega) \quad (1.14)$$

avec  $r'_{ijkl}(\omega) = \mathcal{R}e[r_{ijkl}^*(p)]$ , composantes du tenseur des modules de stockage et  $r''_{ijkl}(\omega) = \mathcal{I}m[r_{ijkl}^*(p)]$ , composantes du tenseur des modules de pertes.

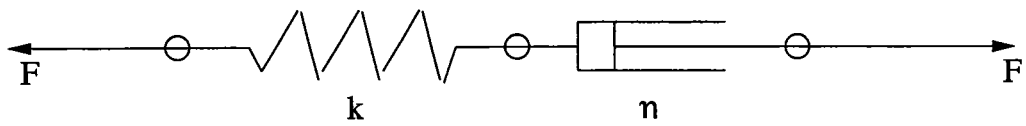
Par la suite, pour simplifier l'écriture, nous noterons la loi de comportement du matériau viscoélastique isotrope linéaire non vieillissant en sollicitations harmoniques :

$$\sigma = C(\omega)\varepsilon \quad (1.15)$$

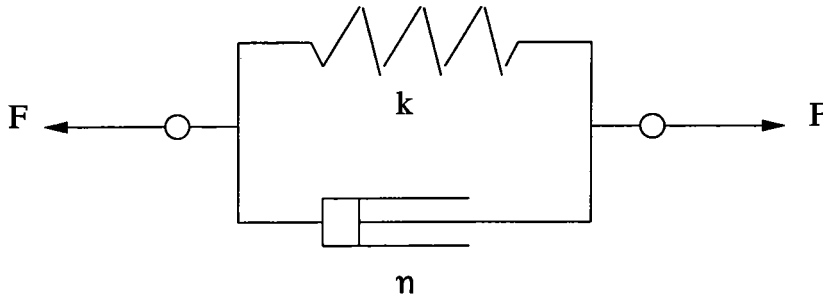
avec  $C(\omega) = E^R(\omega) + iE^I(\omega)$ ,  $E^R(\omega)$  et  $E^I(\omega)$  représentant respectivement les modules de stockage et les modules de perte. Les composantes de ces modules sont définies directement dans le domaine des fréquences et leur détermination se fait expérimentalement pour chaque matériau.

Il existe des modèles permettant de définir ces modules de stockage et de pertes. En effet, les matériaux viscoélastiques peuvent être modélisés à l'aide de ressorts, représentant l'élasticité, et d'amortisseurs, représentant la viscosité [59]. Il existe trois modèles de base : le modèle de Maxwell, le modèle de Voigt et le modèle standard linéaire (FIG. 1.1).

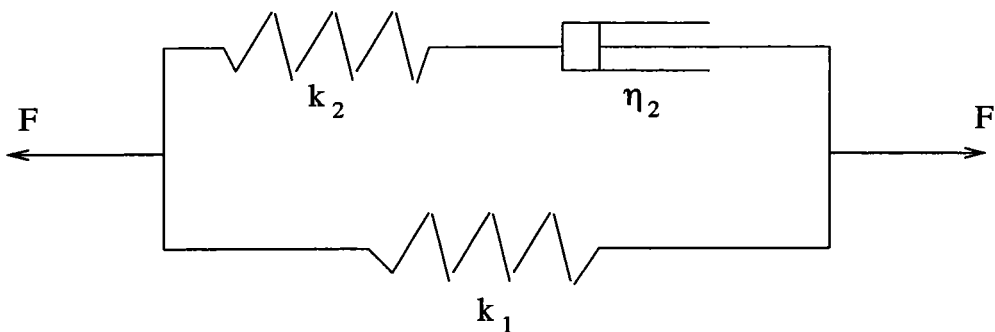




(a) Modèle de Maxwell



(b) Modèle de Voigt



(c) Modèle standard linéaire

FIG. 1.1 – Modélisations des matériaux viscoélastiques

Le modèle que nous utiliserons est appelé modèle de Maxwell généralisé. Celui-ci est une combinaison en parallèle de modèles de Maxwell avec un modèle de Voigt (FIG. 1.2). Le module opérationnel de ce modèle de Maxwell généralisé s'écrit :

$$C^*(\omega) = k_0 + \eta_0 i\omega + \sum_{i=1}^{Nmax} \frac{i\omega}{\left(\frac{i\omega}{k_j} + \frac{1}{\eta_j}\right)} \quad (1.16)$$

Les coefficients  $k_j$  et  $\eta_j$  sont obtenus comme décrit dans [33] à partir de tests expérimentaux sur un polymère. Il faut noter que les expériences de relaxation sont réalisées à une température donnée, et que la modélisation est étendue à toute température

en utilisant la loi WLF [1], [23].  $N_{max}$  représente le nombre d'éléments de Maxwell et sera égal à 129 pour nos simulations. Ces données ont été fournies par l'industriel USINOR.  $k_0$  est le module d'élasticité retardée.

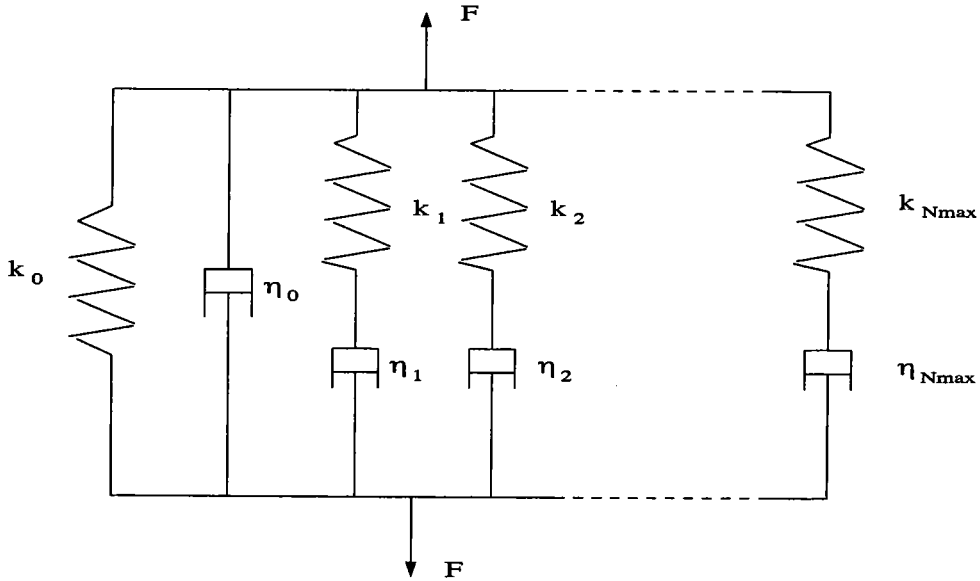


FIG. 1.2 – Modèle de Maxwell généralisé

### 1.2.2 Vibrations libres des structures viscoélastiques

La formulation variationnelle du problème de vibrations libres des structures peut être obtenue à partir de l'équation du travail virtuel :

$$\int_V (S * \frac{\partial \delta \mathcal{E}}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \delta U) dV = 0 \quad (1.17)$$

où  $S$ ,  $\mathcal{E}$  et  $U$  sont respectivement les tenseurs de contrainte et de déformation et le déplacement généralisé.  $\delta U$  représente le déplacement virtuel et  $\delta \mathcal{E}$  le tenseur déformation virtuelle.  $V$  est le volume de la structure et  $\rho$  la masse volumique du matériau. Pour étudier les vibrations libres, les tenseurs des contraintes et des déformations et le déplacement généralisé peuvent être exprimés comme des fonctions harmoniques en temps :

$$\begin{aligned} U &= ue^{i\omega t} \\ S &= \sigma e^{i\omega t} \\ \mathcal{E} &= \varepsilon e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.18)$$

où  $i = \sqrt{-1}$  et  $\omega$  est la pulsation de vibration. En présence d'amortissement, la fréquence  $\omega$  est un nombre complexe.

En utilisant les expressions harmoniques (1.18) et la loi de comportement d'un matériau viscoélastique (1.15),  $\sigma = C(\omega)\varepsilon$ , nous pouvons écrire (1.17) de la façon suivante :

$$\int_v (\varepsilon C(\omega)\delta\varepsilon - \rho\omega^2 U\delta U) dV = 0 \quad (1.19)$$

En utilisant la méthode des éléments finis, le problème des vibrations naturelles d'une structure viscoélastique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[K(\omega) - \omega^2 M][U] = 0 \quad (1.20)$$

où  $[K(\omega)]$  est la matrice de rigidité dépendant de la fréquence; elle est complexe.  $[M]$ , la matrice de masse, est supposée constante réelle dans notre analyse et  $[U]$  est le vecteur regroupant les modes propres nodaux complexes.

En utilisant la loi de Hooke généralisée :

$$\begin{cases} \sigma = 2\mu^*\varepsilon + \lambda^*\mathbf{I}_3\varepsilon \\ \mu^* = \frac{E^*(\omega)}{2(1+\nu)} \\ \lambda^* = \frac{\nu E^*(\omega)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (1.21)$$

la matrice  $[K(\omega)]$  peut être écrite de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{K}(\omega) = \mathbf{K}(0) + E(\omega)\mathbf{K} \\ \mathbf{K}(0) = E^*(0)\mathbf{K} \\ E(\omega) = E^*(\omega) - E^*(0) \end{cases} \quad (1.22)$$

Le module d'élasticité retardée  $E^*(0)$  est toujours réel et la matrice d'élasticité  $\mathbf{K}(0)$  est réelle, symétrique et définie positive. La matrice  $\mathbf{K}$  est constante. Le problème des vibrations naturelles d'une structure viscoélastique s'écrit alors :

$$[\mathbf{K}(0) + E(\omega)\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U} = 0 \quad (1.23)$$

Les formulations (1.19), (1.23), représentent un problème aux valeurs propres complexes non-linéaires. La détermination du couple  $(U, \omega)$  permet de définir l'amortissement  $\eta$  et la fréquence amortie  $f$  à l'aide de la formule classique suivante [51] :

$$\begin{cases} \omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta) \\ \eta : \textit{amortissement} \\ \Omega : \textit{pulsation amortie} \\ f = \frac{\Omega}{2\pi} : \textit{fréquence amortie} \end{cases} \quad (1.24)$$

Une revue bibliographique complète sur les méthodes de résolution du problème (1.23) sera présentée dans la suite.

## 1.3 Modélisation numérique des coques sandwich viscoélastiques

### 1.3.1 Introduction

Les structures sandwich destinées à amortir les vibrations et à réduire le bruit, sont souvent constituées d'une couche viscoélastique située entre deux parements élastiques (FIG. 1.3).

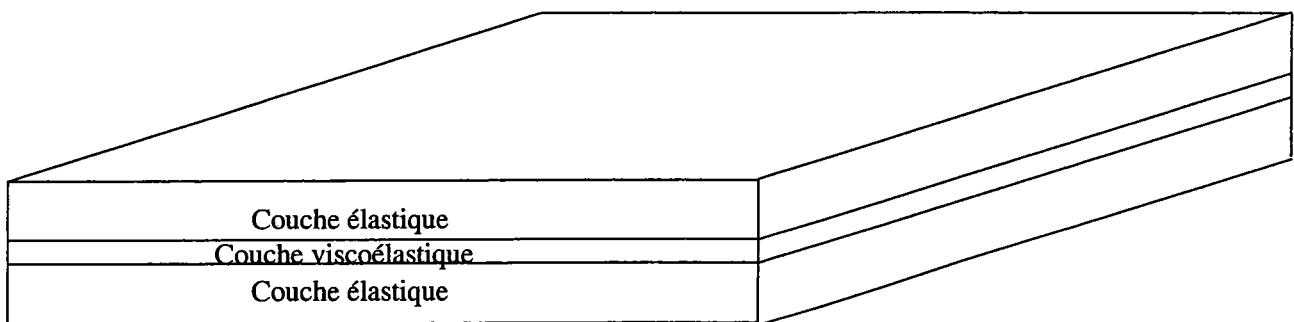


FIG. 1.3 – Structure sandwich avec une couche centrale viscoélastique

La présence du matériau viscoélastique apporte la fonction amortissante à ces tôles. En effet, les caractéristiques mécaniques de ce genre de matériau dépendent de la fréquence des vibrations et de la température. Cependant, la modélisation numérique des tôles sandwich pose deux types de problèmes.

Le premier problème est lié à la discrétisation par éléments finis de ces tôles. En effet, l'utilisation de la méthode des éléments finis doit être capable d'évaluer correctement le cisaillement dans la couche centrale. Ce cisaillement est dû à un écart entre les déplacements longitudinaux des couches élastiques, comme le montre la figure (1.4). Cette dernière représente un calcul par éléments finis d'une poutre sandwich encastree à une extrémité et soumise à un effort transversal à l'autre extrémité.

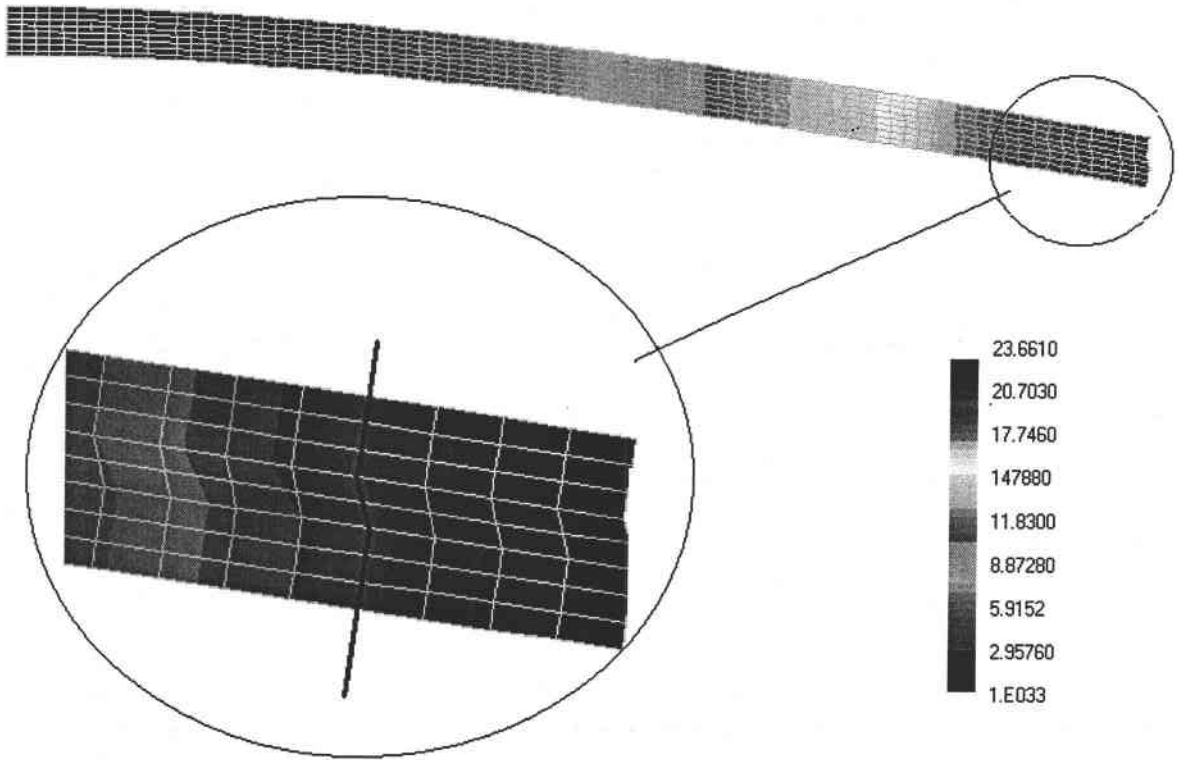


FIG. 1.4 – Poutre sandwich viscoélastique encastrée-libre

Le deuxième problème est lié au fait que le module du matériau viscoélastique dépend de la fréquence. Ainsi, la matrice de rigidité de la structure est complexe et dépend de la pulsation. Dans ce cas, le nombre des degrés de liberté (d.d.l.) est double, ce qui peut engendrer un coût important en temps calcul pour les grandes structures. De plus, les procédures numériques classiques de calcul des vibrations, telles que les méthodes de recherches des modes et des fréquences propres, sont difficiles à mettre en oeuvre dans ce cas.

Dans ce qui suit, nous présentons une étude bibliographique sur les différentes modélisations et les méthodes numériques utilisées dans le calcul des vibrations des tôles sandwich viscoélastiques.

### 1.3.2 **Savoir faire existant**

Dans cette section, nous allons d'abord analyser la bibliographie sur la modélisation des structures sandwich viscoélastiques, puis sur les méthodes de résolution du problème des vibrations libres de ces tôles.

#### **Modélisation des structures sandwich**

Initialement, des modèles analytiques ont été développés pour évaluer l'amortissement dans la couche centrale. Ceci a permis l'étude des vibrations des structures sandwich viscoélastiques de géométrie simple (poutres, plaques) ([14], [19], [24], [26], [31], [40], [43], [51], [54], [64]).

La première recherche sur les poutres sandwich a été réalisée par Kerwin en 1959 [31]. Pour lui, l'amortissement était dû au cisaillement dans la couche viscoélastique. Kerwin, puis Ross, Ungar et Kerwin [53], utilisent les hypothèses suivantes :

- Les couches supérieure et inférieure sont élastiques, isotropes et ne subissent pas de déformation de cisaillement.
- La couche centrale est constituée d'un matériau viscoélastique linéaire non-*vieillissant* homogène isotrope.
- Les inerties longitudinales et rotationnelles sont négligeables par rapport aux forces d'inerties du mouvement de flexion transverse.
- Tous les points d'une même normale à la plaque ont le même déplacement transverse.
- Entre les couches, aucun glissement n'est permis.

Yu [65] s'intéresse à un sandwich symétrique. Il ne néglige aucun des effets d'inertie et suppose les contraintes de cisaillement transverses constantes dans chaque couche.

Cela le conduit à introduire des coefficients correcteurs (théorie de Mindlin). Yu obtient alors une équation du mouvement d'ordre 4 relativement à la flèche, pour une poutre de longueur infinie.

Di Taranto [19], [18], puis Mead et Markus [40] se basent sur les hypothèses de Kerwin mais incluent les effets du cisaillement transverse et les inerties longitudinales et rotationnelles dans les parements d'acier. Ils obtiennent ainsi une équation différentielle d'ordre 6 sur le déplacement axial du plan moyen de l'une des peaux pour Di Taranto, et sur la flèche pour Mead et Markus.

Yan et Dowell [64] utilisent les mêmes hypothèses et supposent une distribution uniforme des contraintes de cisaillement selon l'épaisseur du sandwich. Ils aboutissent alors à une équation d'ordre 4, fonction de la flèche.

Ce cisaillement sera alors introduit par Rao en 1978 [51], par un zig-zag tel que les déplacements horizontaux des couches supérieures et inférieures restent parallèles.

A partir de la résolution de ces équations, ces différents auteurs obtiennent les propriétés amortissantes de leurs structures sandwich. Cependant, ils considèrent des cas simples (poutre encastree-libre pour Mead et Markus...). Comme il est nécessaire, en simulations numériques d'étudier des structures sandwich avec des géométries complexes et des conditions aux limites quelconques, plusieurs modélisations furent réalisées [2], [3], [29], [36], [37] [50], [52], [55], [58]. Une idée simple consiste à assembler trois éléments à travers l'épaisseur de la structure sandwich. En voici quelques exemples :

- En 1979, Killian [36] décrit le noyau viscoélastique linéaire par des éléments volumes linéaires isoparamétriques à 8 nœuds, et les peaux, par des éléments plaques



quadrilatères à 4 nœuds sur le plan moyen (FIG. 1.5).

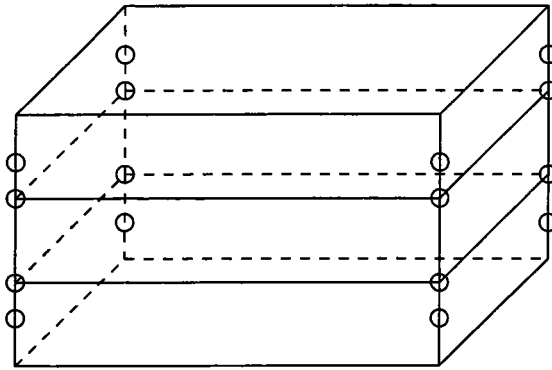


FIG. 1.5 – Modèle de Killian

- Johnson et ses collaborateurs [29] (respectivement Soni [58]) en 1981 proposent de définir la couche centrale par un élément 3D à 8 nœuds (respectivement 16 nœuds) et les couches d'acier par des éléments plaques à 4 nœuds (respectivement 8 nœuds) (FIG. 1.6).

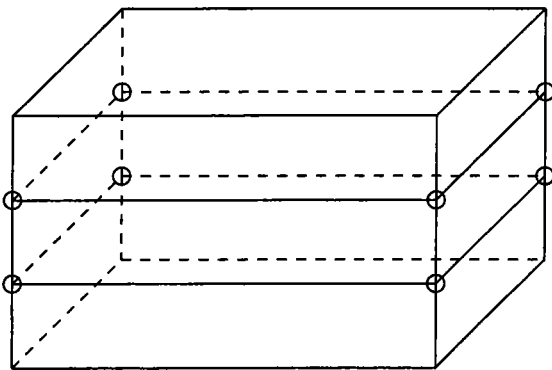


FIG. 1.6 – Modèle de Johnson

- Un modèle plaque/plaque/plaque (poutre/poutre/poutre), avec des degrés de libertés de la couche centrale exclus, fut étudié par Rikards et ses associés en 1992 [52]. Le cisaillement est introduit ici, à l'aide de coefficient de correction (Théorie de Mindlin pour les plaques et théorie de Timoshenko pour les poutres).

- En 1997, Lezza A. Mignery [34] utilise un assemblage coque en considérant le modèle coque/ressort/coque, la partie ressort permettant d'introduire la viscoélasticité de la couche centrale (FIG.1.7).

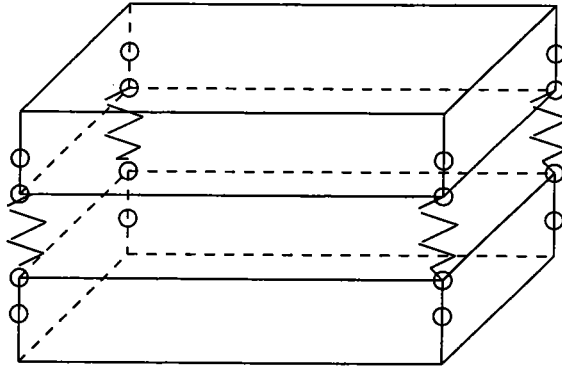


FIG. 1.7 – Modèle de Lezza A. Mignery

Il existe également des éléments spécifiques pour les coques de révolution [2], pour les coques coniques [50] et pour les poutres [3], [55]. Une difficulté à ces modélisations est la compatibilité entre le champ de déplacement du noyau et celui des faces.

En général, tous ces modèles simplifient considérablement le modèle complet qui serait le modèle volume/volume/volume et qui engendrerait un nombre considérable de degrés de liberté pour les structures de grandes tailles. Ainsi, les simulations utilisant ces modèles peuvent devenir très coûteuses en temps CPU. C'est pourquoi un élément plaque/plaque/plaque a été présenté par Ma et He [37]. Dans celui-ci, les hypothèses d'un même déplacement transverse et des mêmes rotations dans les faces sont prises en compte, comme dans les modèles analytiques. Toutes ces suppositions leur permettent alors de réduire à 5 le nombre de degrés de liberté par noeud : la flèche, les deux rotations des couches élastiques et les deux rotations du noyau. Cependant, les auteurs limitent leur analyse à des mouvements de flexion de plaque. Ainsi, l'élément ne peut être utilisé pour les études incluant les effets de membranes, telles que les vibrations non-linéaires ou les vibrations de coques.

Récemment, Daya et Potier-Ferry ont proposé un modèle de coque obtenu par l'assemblage coque/volume/coque [17]. En associant les hypothèses simplificatrices et les conditions de raccord cinématique aux interfaces, cela conduit à un élément à 8 d.d.l. par noeud : les deux déplacements longitudinaux des couches élastiques, la flèche et les trois rotations. L'élément ainsi construit est un élément triangulaire à trois nœuds, basé sur la théorie de Kirchhoff. Cependant, cet élément possède une interpolation linéaire, donc insuffisante pour décrire les comportements en membrane. De plus, le calcul des moyennes et hautes fréquences à l'aide de cet élément nécessite un maillage très fin et un grand temps de calcul pour les grandes structures.

Dans le prochain chapitre, nous présentons un élément fini sandwich décrivant plus finement le mouvement en membrane et permettant la modélisation des structures à géométries complexes.

## **Méthodes numériques**

Comme nous l'avons vu à la section précédente, la matrice de rigidité des structures viscoélastiques dépend de la fréquence et est complexe (1.15). Ainsi, l'analyse de vibrations libres de ces structures conduit à résoudre des problèmes aux valeurs propres complexes non-linéaires (1.23). Il existe au moins six méthodes différentes, pour calculer l'amortissement des structures sandwich viscoélastiques : la méthode QR, la méthode d'énergie de déformation modale, la méthode directe de réponse en fréquence, l'approche asymptotique, la technique d'itération-réduction et la méthode asymptotique numérique (M.A.N.) avec continuation. Ces méthodes sont, soit des méthodes "approchées", soit des méthodes "exactes".

## Méthodes approchées

- Méthode d'énergie de déformation modale (Modal Strain Energy : MSE)

Il existe deux façons d'appliquer la méthode dite : méthode d'énergie de déformation modale.

a) MSE en utilisant le mode réel (MSER)

On suppose que le mode propre du sandwich viscoélastique est proportionnel au mode propre de la structure sandwich non-amortie  $\mathbf{U}_r$ , qui vérifie le problème aux valeurs propres réelles :  $(\mathbf{K}(0) - \omega_0^2 \mathbf{M})\mathbf{U}_r = 0$ .  $\mathbf{K}(0)$  est la matrice de rigidité construite en considérant seulement l'élasticité retardée du matériau viscoélastique. Le problème aux valeurs propres complexes (1.23) s'écrit alors :

$$[\mathbf{K}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{U}_r = 0 \quad (1.25)$$

On approxime ensuite,  $\mathbf{K}(\omega)$  par  $\mathbf{K}(\omega_0)$ . Ainsi, on obtient une approximation de la fréquence  $\Omega$  et de l'amortissement  $\eta$  à l'aide du rapport :

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{U}_r^t \mathbf{K}(\omega_0) \mathbf{U}_r}{\mathbf{U}_r^t \mathbf{M} \mathbf{U}_r} = \Omega^2(1 + i\eta) \quad (1.26)$$

L'amortissement est défini par le rapport :

$$\eta = \frac{\text{énergie dissipée}}{2\pi * \text{énergie de déformation stockée}} \quad (1.27)$$

Remarque :

Si la matrice  $\mathbf{K}$  ne dépend pas de  $\omega$ , on a  $\omega = \Omega$ . Cette méthode permet d'estimer l'amortissement en ne calculant que des modes réels. Elle a donc un coût numérique très faible. Cependant, elle n'est précise que pour des structures faiblement amorties [17].

b) MSE en utilisant les modes complexes (MSEC)

Pour améliorer l'estimation de  $\Omega$  et  $\eta$ , on peut utiliser la même technique que précédemment, mais on approxime  $\mathbf{U}$  par une approximation du mode complexe  $\mathbf{U}_c$  calculée en résolvant le problème linéaire suivant :

$$[\mathbf{K}(\omega_0) - \omega_0^2 \mathbf{M}] \mathbf{U}_c = \mathbf{F} \quad (1.28)$$

$\mathbf{F}$  est le vecteur des amplitudes des forces sinusoïdales imposées. Dans ce cas,  $\Omega$  et  $\eta$  sont donnés par :

$$\begin{cases} \Omega^2 = \frac{\mathbf{U}_c^t \mathbf{K}^R(\omega_0) \mathbf{U}_c}{\mathbf{U}_c^t \mathbf{M} \mathbf{U}_c} \\ \eta = \frac{\mathbf{U}_c^t \mathbf{K}^I(\omega_0) \mathbf{U}_c}{2\pi \mathbf{U}_c^t \mathbf{K}^R(\omega_0) \mathbf{U}_c} \end{cases} \quad (1.29)$$

Cette méthode donne de très bonnes estimations [58] dans le cas où  $\mathbf{K}(\omega)$  est constante. Cependant, l'approximation du mode  $\mathbf{U}$  par  $\mathbf{U}_c$  peut-être insuffisante quand  $\mathbf{K}(\omega)$  dépend de  $\omega$  [52].

- Méthode directe de réponse en fréquence

La méthode directe de réponse en fréquence considère l'analyse de la réponse forcée. Dans ce cas, l'équation (1.23) doit être complétée par un vecteur  $\mathbf{F}$  qui représente les

amplitudes des forces sinusoïdales imposées, habituellement prises comme réelles :

$$(\mathbf{K}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (1.30)$$

Ensuite, nous cherchons la solution  $U(\omega)$  (courbes de réponses), ce qui impose l'assemblage et la décomposition de la matrice de rigidité dynamique complexe  $(\mathbf{K}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M})$  pour chaque pulsation  $\omega$ . A partir des courbes de réponses en fréquence, des pics de résonance sont mis en évidence. Ainsi, le calcul des facteurs de perte de la structure peut se faire à l'aide de la méthode des bandes passantes à 3 dB (voir FIG. 1.8) et le facteur de perte a pour expression :

$$\eta = \frac{\omega_f - \omega_i}{\omega_m} \quad (1.31)$$

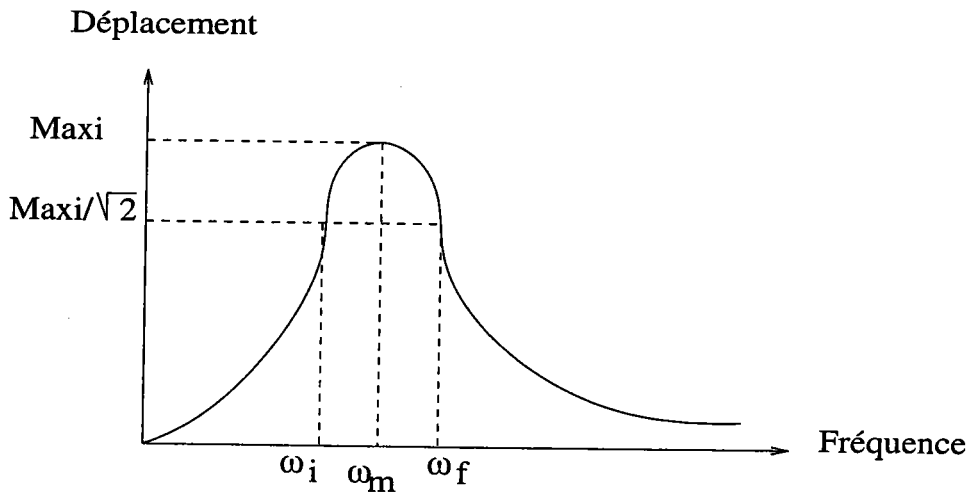


FIG. 1.8 – Calcul d'amortissement par la méthode des bandes passantes

En fait, cette méthode est d'abord une méthode pour estimer l'amortissement à partir de résultats expérimentaux. Si cette méthode est appliquée avec un grand nombre de degrés de liberté, elle comporte néanmoins quelques inconvénients :

- L'obtention de la courbe de réponse (FIG. 1.8) est très coûteuse quand une solution complète est exigée.

- L'évaluation du facteur de perte n'est valide que pour un amortissement petit et pour des fréquences propres suffisamment séparées.

### Méthodes directes

- Méthode QR

Cette méthode permet de calculer les valeurs propres d'une matrice complexe [6]. Le principe de base de l'itération QR est de décomposer la matrice complexe  $\mathbf{A}$  dans la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} \quad (1.32)$$

avec  $\mathbf{Q}$  matrice orthogonale et  $\mathbf{R}$  matrice triangulaire supérieure.

Une fois la décomposition QR obtenue, la matrice  $\mathbf{RQ}$  est formée. On itère ce calcul sur la matrice obtenue. Lorsque la suite matricielle est convergente, elle tend vers une matrice triangulaire supérieure semblable à  $\mathbf{A}$ , dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres  $\lambda$  de  $\mathbf{A}$ . Pour obtenir les vecteurs propres de  $\mathbf{A}$ , il suffit de résoudre le système :  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité.

Dans le problème aux valeurs propres complexes, la matrice  $\mathbf{A}$  est complexe [6], [63]. Pour appliquer la méthode QR, il faut séparer les parties réelles et imaginaires. L'équation matricielle à résoudre est donc égale à :

$$\begin{cases} (\mathbf{B}^{\mathbf{R}} + j\mathbf{B}^{\mathbf{I}})(\mathbf{x}^{\mathbf{R}} + j\mathbf{x}^{\mathbf{I}}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{B}^{\mathbf{R}} + j\mathbf{B}^{\mathbf{I}} \end{cases} \quad (1.33)$$

Cette équation est nulle si et seulement si, les parties réelles et imaginaires sont simultanément nulles. Elle équivaut donc au système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{B}^{\mathbf{R}}\mathbf{x}^{\mathbf{R}} - \mathbf{B}^{\mathbf{I}}\mathbf{x}^{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^{\mathbf{R}}\mathbf{x}^{\mathbf{I}} + \mathbf{B}^{\mathbf{I}}\mathbf{x}^{\mathbf{R}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.34)$$

qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{R}} & \mathbf{B}^{\mathbf{I}} \\ \mathbf{B}^{\mathbf{I}} & -\mathbf{B}^{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathbf{R}} \\ \mathbf{x}^{\mathbf{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Cette matrice est symétrique réelle donc diagonalisable mais à une dimension double par rapport à celle de la matrice  $\mathbf{A}$  initiale.

La méthode QR présente donc deux difficultés :

- elle ne peut être utilisée que pour une matrice de rigidité complexe qui ne dépend pas de la fréquence.

- elle n'est pas efficace pour des structures avec un grand nombre de ddl, car elle implique beaucoup de produit de matrices à grande dimension.

- Méthode asymptotique

La méthode asymptotique a été proposée par Ma et He [37] pour résoudre des équations du type (1.23). Cette méthode n'a été appliquée qu'au cas où la matrice de rigidité  $\mathbf{K}(\omega)$  est constante et s'écrit  $K_1 + K_2(1 + i\beta)$ .  $\beta$  représente le facteur de perte de la couche viscoélastique et les matrices  $K_1$  et  $K_2$  sont constantes. Les modes propres, les fréquences propres et l'amortissement sont exprimés sous forme de séries entières en  $\beta$  :

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mu\mathbf{U}_1 + \mu^2\mathbf{U}_2 + \mu^3\mathbf{U}_3 + \mu^4\mathbf{U}_4 + \mu^5\mathbf{U}_5\dots \\ \Omega^2 = \Omega_0^2 + \mu^2\Omega_2^2 + \mu^4\Omega_4^2 + \dots \\ i\eta = \mu\eta + \mu^3\eta_3 + \mu^5\eta_5 \\ \mu = i\beta \end{cases} \quad (1.36)$$



Leurs nouvelles expressions sont injectées dans l'équation (1.23). Une suite de problèmes linéaires récurrents est obtenue et résolue en utilisant la normalisation des modes complexes :  $U^t M U = 1$ .

Ainsi, les fréquences propres et les facteurs de perte modale sont calculés à l'aide des formules (1.36) en se limitant à l'ordre 5. L'approximation résultante a été améliorée en utilisant les approximants de Padés (cf chap.3 ou [22]). Cependant, cette méthode ne peut pas être appliquée aux cas de grands amortissements et aux problèmes dont la matrice de rigidité est dépendante de la fréquence, car  $\beta$  dépend de  $\omega$ . Il faut, dans ce cas, un nouveau paramètre de développement. En effet, dans ces cas, les séries ne convergent généralement pas et une méthode de continuation est nécessaire.

- Méthode d'itération-réduction

La méthode d'itération-réduction, proposée par Chen et al. [11] consiste en deux pas. Le premier est la détermination d'une solution de perturbation au premier ordre. Le deuxième pas est une technique itérative pour trouver les valeurs propres complexes. Celle-ci est couplée avec un algorithme de Lanczos [6] et une base réduite. Ainsi, la méthode d'itération-réduction est une sorte d'algorithme de Newton. Elle demande donc probablement beaucoup d'itérations, ce qui augmente le temps de calcul, si la structure est grande. L'amortissement est défini aussi à l'aide de la formule classique (1.24).

- Méthode de continuation

La méthode de Daya et Potier-Ferry [16] est basée sur la technique d'homotopie et la technique de perturbation. Il s'agit d'une méthode asymptotique dans laquelle une

procédure de continuation est proposée. Dans ce travail, Daya et Potier-Ferry partent des modes propres non amortis et en déduisent les modes viscoélastiques par la technique de perturbation. Cependant, le pas de continuation nécessite une inversion de matrice complexe. Or, le nombre de degrés de liberté devient double dans ce cas. Ainsi, ce dernier algorithme n'est pas optimal dans le cas de grandes structures et de grands amortissements, puisqu'il nécessiterait un grand nombre de pas de continuation, soit un grand nombre d'inversions de matrices complexes. Il serait donc coûteux.

Dans le troisième chapitre de ce document, nous rappelons l'algorithme de Daya et Potier-Ferry et nous présentons deux nouveaux algorithmes itératifs d'ordre élevé pour résoudre le problème aux valeurs propres complexes non-linéaires (1.23).

## 1.4 Conclusion

L'étude bibliographique précédente nous a montré la manière de résoudre les deux types de problèmes rencontrés lors de l'étude des tôles sandwich viscoélastiques, à savoir : la modélisation, pour prendre en compte correctement le cisaillement dans la couche centrale responsable de l'amortissement, et les méthodes pour calculer l'amortissement. De cette étude, nous pouvons conclure de la façon suivante :

1- Il manque des éléments sandwich qui prennent mieux en compte les effets de membrane. En effet, par exemple, l'élément de Daya et Potier-Ferry possède une interpolation linéaire donc insuffisante pour décrire le comportement en membrane. Pour cela, le calcul des moyennes et hautes fréquences, à l'aide de cet élément, nécessiterait un maillage très fin. Dans le chapitre suivant, nous proposons un élément quadratique en membrane.

2- Il existe peu de méthodes permettant d'obtenir directement l'amortissement des structures sandwich avec un coût modéré en place mémoire et en temps calcul. C'est pourquoi, dans le troisième chapitre, nous présentons deux algorithmes itératifs

pour résoudre le problème aux valeurs propres complexes non-linéaires et pour calculer l'amortissement.

## CHAPITRE 2

# Des éléments finis pour les coques sandwich

### 2.1 Introduction

Comme il a été dit précédemment, les structures sandwich constituées d'une couche fine viscoélastique intercalée entre deux couches métalliques, permettent de réduire le bruit et les vibrations dans de nombreux domaines (automobiles, aérospatial...). Cet amortissement est essentiellement introduit par le cisaillement transverse dans la couche centrale viscoélastique. Celui-ci est dû à la différence des déplacements plans dans les couches élastiques et à la rigidité "molle" de la couche centrale. Ainsi, la prise en compte de ce cisaillement est nécessaire pour déterminer de façon correcte les propriétés amortissantes de la tôle sandwich. Plusieurs modèles ont été développés pour le calcul des vibrations des tôles sandwich. Les premiers modèles ont permis de calculer analytiquement les fréquences et amortissements des tôles sandwich de géométrie simple (poutres, plaques...) [31], [19], [40], [64], [43], [54], [14], [24], [26]. Aussi, les éléments finis ont été utilisés pour modéliser les tôles sandwich de forme quelconque [3], [36], [29], [58], [2], [37], [52], [50], [55]. D'après l'étude bibliographique du chapitre 1, ces éléments ont permis la réduction du nombre de degrés de liberté des simulations des tôles sandwich par rapport à une discrétisation de la tôle par assemblage d'éléments 3D suivant l'épaisseur. Une idée simple pour réduire le nombre de d.d.l., consiste à assembler trois éléments dans l'épaisseur de la structure sand-

wich [29], [58], [52]. Puis, on élimine les d.d.l. de l'élément central en considérant les conditions de raccord aux interfaces et les hypothèses simplificatrices énoncées dans le chapitre 1. Cette idée est reprise récemment par E.M. Daya et M. Potier-Ferry [17]. Ils modélisent les couches élastiques par un élément coque, le DKT, et la couche centrale par un élément volume. Cependant, cet élément, le DKT/volume/DKT, possède une interpolation linéaire, donc insuffisante pour décrire correctement le comportement en membrane. Ceci engendre des maillages très fins pour calculer convenablement les fréquences des tôles sandwich au delà des premières.

Dans ce chapitre, nous proposons d'établir un nouvel élément fini sandwich, de type coque/volume/coque, capable de décrire convenablement les mouvements en membrane de la structure sandwich. Comme le DKT/volume/DKT, l'élément proposé possèdera 8 d.d.l. par nœud qui sont les deux déplacements dans le plan des couches élastiques, la flèche et les trois "rotations".

## 2.2 Analyse de quelques éléments de coque

Pour établir notre nouvel élément sandwich capable de décrire convenablement les mouvements en membrane, en permettant le calcul des moyennes et hautes fréquences de vibrations des tôles avec un temps de calcul raisonnable, nous comparons trois éléments de type coque : le Bathe-Dvorkin (BD) [7], le DKT [6], [7] et l'élément de Büchter et al. (BRR) [10]. Le premier est un quadrangle possédant 4 nœuds avec 5 d.d.l. (rotation autour de  $z$  nulle). Il utilise une formulation en contraintes planes ( $\sigma_{zz} = 0$ ) et il est basé sur le concept ANS (Assumed Natural Strain), proposé par Dvorkin et Bathe [21]. Cette méthode suggère de calculer les déformations de cisaillement transverse,  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$ , en des points particuliers de l'élément afin d'éviter le verrouillage en cisaillement et elle permet de ne pas ajouter de variables supplémentaires. Le deuxième est un élément triangulaire à 3 nœuds et 6 d.d.l. par nœud. Sa formu-

lation utilise la théorie classique de plaque de Love-Kirchoff (où le cisaillement n'est pas pris en compte). Le dernier, quadrangle à 8 nœuds et 6 d.d.l. par nœud, utilise une formulation tridimensionnelle sans condensation (donc tous les effets peuvent être pris en compte). Pour cela, Büchter et al. utilisent le concept EAS (Enhanced Assumed Strain) proposé par Simo et Rifai [57], qui est basé sur la formulation de Hu-Washizu. Le principe consiste à introduire une variable additonnelle permettant une variation linéaire de la déformation à travers l'épaisseur. Ce nouveau paramètre est ensuite éliminé au niveau élémentaire par condensation des équations d'équilibre et de compatibilité. Ce principe permet d'éviter les problèmes de verrouillage dans la formulation de coques.

### 2.2.1 Test sur une plaque en appui le long de son bord

Nous comparons ici les résultats issus des simulations à l'aide des éléments DKT et BRR, à ceux d'un calcul analytique pour un calcul de vibrations libres. Nous considérons une plaque rectangulaire en appui le long de son bord. La structure possède les caractéristiques suivantes :

Longueur	0.4 m	Module d'Young	2.1 10 <sup>11</sup> Pa
Largeur	0.2 m	Coefficient de Poisson	0.3
Epaisseur	0.001 m	Masse volumique	7800 kg/m <sup>3</sup>

TAB. 2.1 – Caractéristiques de la plaque rectangulaire pour la comparaison de différents éléments

Les solutions analytiques sont obtenues à l'aide de la formule classique suivante [8] :

$$freq = \sqrt{\frac{D}{m_s} \pi^2 \left[ \left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right]} / (2\pi) \quad (2.1)$$

avec  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $m_s = \rho h$  et  $n, m = 1, 2, 3, \dots$

Les résultats obtenus pour les 5<sup>èmes</sup> et 10<sup>èmes</sup> fréquences sont présentés aux figures suivantes :

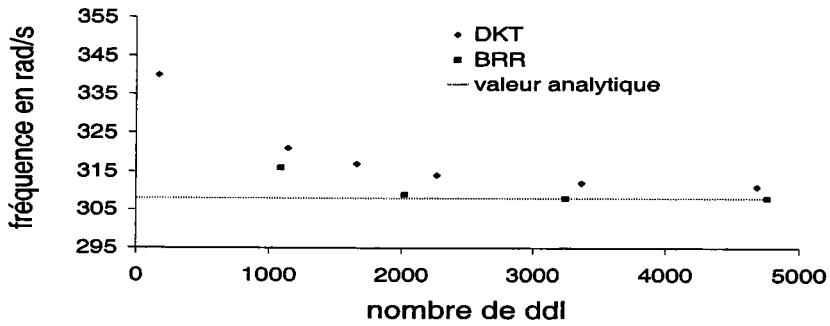


FIG. 2.1 – Convergence vers la 5<sup>ème</sup> fréquence de la plaque en appui avec le DKT et le BRR

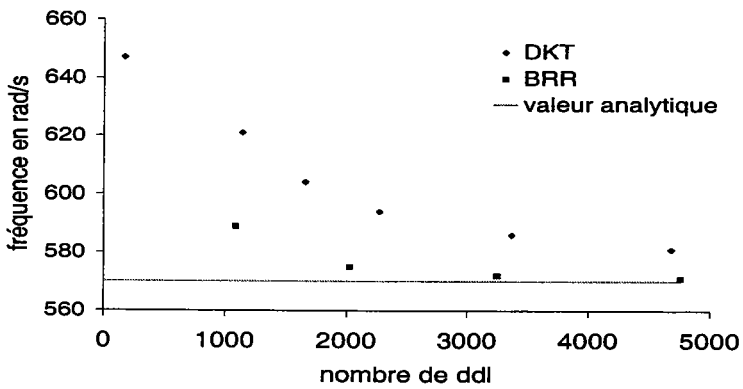


FIG. 2.2 – Convergence vers la 10<sup>ème</sup> fréquence de la plaque en appui avec le DKT et le BRR

Les courbes précédentes permettent de vérifier la bonne convergence en valeurs propres avec les éléments DKT et BRR pour les 5<sup>èmes</sup> et 10<sup>èmes</sup> fréquences. Nous remarquons que l'élément BRR converge avec moins de d.d.l. que le DKT. Pour la 5<sup>ème</sup> fréquence, seulement 3250 d.d.l. sont nécessaires à l'élément BRR pour atteindre la convergence alors que le DKT n'a toujours pas convergé avec 4750 d.d.l.. De même, pour la 10<sup>ème</sup> fréquence, le DKT n'a toujours pas convergé à 4750 d.d.l., alors que le BRR a atteint la bonne valeur propre.

Ce test nous montre la richesse de l'élément BRR.

### **2.2.2 Test sur une plaque encadrée sur un bord**

Maintenant, nous comparons les trois éléments cités auparavant, à savoir le BD, le DKT et le BRR, pour un calcul de vibrations libres de la plaque rectangulaire précédente mais cette fois, elle est encadrée sur un bord.

Nous avons réalisé différents maillages pour chaque élément. Nous présentons par les courbes suivantes les résultats obtenus pour certaines fréquences.



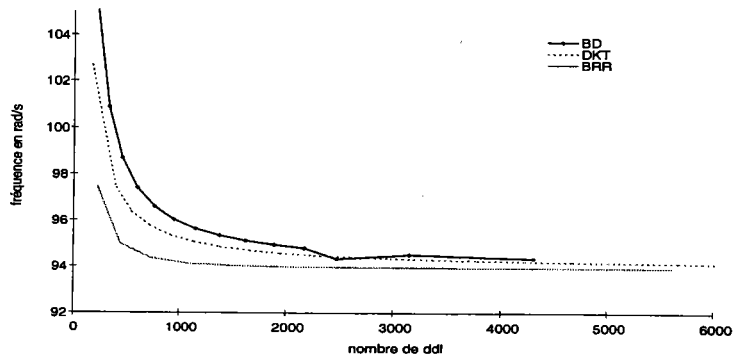


FIG. 2.3 – Convergence vers la 5<sup>eme</sup> fréquence de la plaque encastree-libre avec le BD, le DKT et le BRR

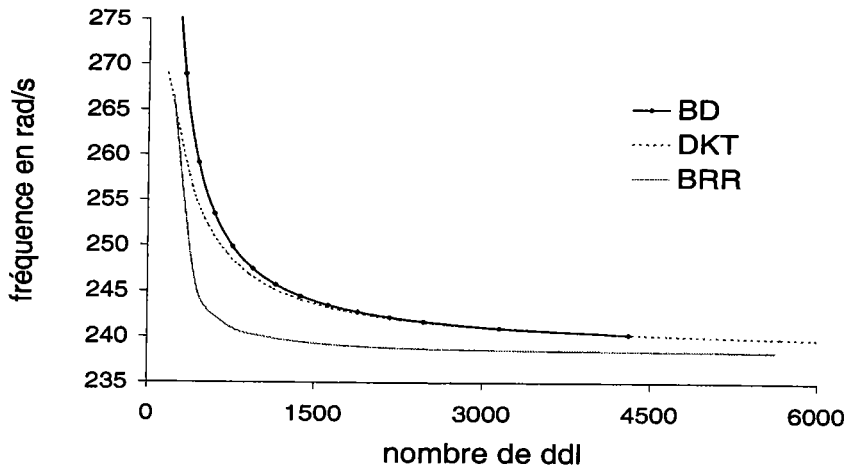


FIG. 2.4 – Convergence vers la 10<sup>eme</sup> fréquence de la plaque encastree-libre avec le BD, le DKT et le BRR

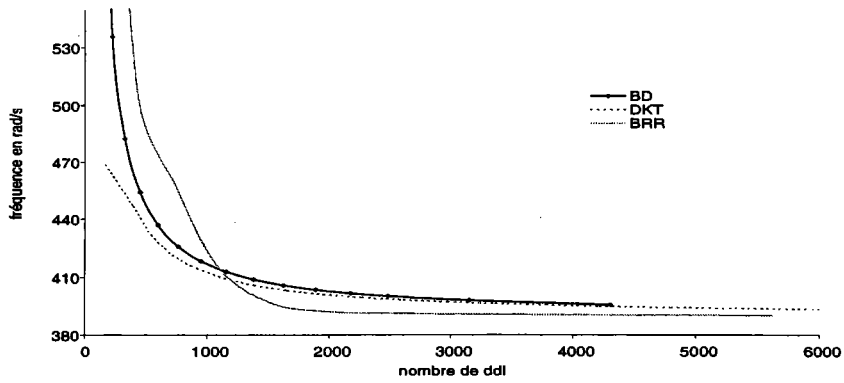


FIG. 2.5 – Convergence vers la 15<sup>ème</sup> fréquence de la plaque encastree-libre avec le BD, le DKT et le BRR

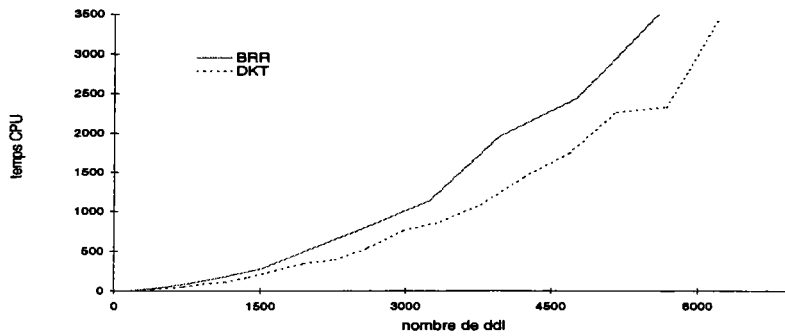


FIG. 2.6 – Comparaison en temps CPU entre le DKT et le BRR pour l'obtention des 20 premières fréquences et des 20 premiers modes pour la plaque encastree-libre

Les différents résultats de comparaison présentés aux figures (2.3), (2.4) et (2.5) montrent bien que l'élément BRR converge plus rapidement que les autres éléments dans le calcul des 5<sup>èmes</sup>, 10<sup>èmes</sup>, 15<sup>èmes</sup> fréquences. Par exemple, pour la 10<sup>ème</sup> fréquence, alors qu'un maillage de 1800 d.d.l. avec le BRR est suffisant pour obtenir la convergence, un maillage de 6000 d.d.l. ne suffit toujours pas pour le Bathe-Dvorkin et le DKT. Le BRR semble donc l'élément à retenir pour établir notre élément sandwich. Si maintenant, nous réalisons une analyse du temps CPU nécessaire pour obtenir les 20 premières fréquences et les 20 premiers modes, nous obtenons les courbes de la figure (2.6). A partir de celles-ci, nous remarquons qu'à un nombre de d.d.l. fixé, le BRR (8 nœuds et 6 d.d.l./nœuds) est plus coûteux que le DKT (3 nœuds et 6 d.d.l./nœuds), à cause d'une plus grande largeur de bande. Ainsi, nous pourrions conclure rapidement, que le DKT est meilleur que le BRR. Or, ceci n'est pas exact. En effet, il faut analyser conjointement les courbes des figures (2.3) à (2.6) et dresser le tableau (2.2). Ce tableau représente le temps calcul nécessaire pour obtenir les 5<sup>èmes</sup>, 10<sup>èmes</sup> et 15<sup>èmes</sup> fréquences propres, par rapport au maillage.

Fréquences	Eléments	Nb de d.d.l.	Temps calcul
5 <sup>ème</sup> =94	DKT	> 6200	> 3450
	BRR	3200	1100
10 <sup>ème</sup> =238	DKT	> 6200	> 3450
	BRR	4800	2450
15 <sup>ème</sup> =390	DKT	>> 6200	>> 3450
	BRR	5600	3450

TAB. 2.2 – Comparaison des temps de calcul par rapport au maillage nécessaire pour obtenir les fréquences propres des 5<sup>èmes</sup>, 10<sup>èmes</sup> et 15<sup>èmes</sup>

On s'aperçoit alors, en comparant simultanément la valeur propre calculée et le temps de calcul issu d'une modélisation par le BRR et par le DKT, que l'élément BRR est nettement préférable pour le calcul des moyennes fréquences. Pour avoir une bonne approximation en valeur propre, le DKT nécessite un maillage beaucoup plus fin que

le BRR, qui s'avère donc beaucoup plus riche. De plus, le BRR offre une interpolation quadratique, ce qui permet d'estimer correctement les effets de membrane.

### 2.2.3 Conclusion

Les simulations numériques précédentes des vibrations libres des plaques montrent que l'élément BRR permet de calculer les moyennes fréquences avec un coût de calcul très raisonnable. Dans la suite, nous nous proposons d'établir un nouvel élément sandwich, le BRR/Mindlin/BRR, en utilisant les mêmes hypothèses simplificatrices que dans [17]. Ceci nous permettra d'avoir un élément à 8 nœuds et 8 d.d.l. par nœud, où les déformations de membranes sont prises en compte convenablement.

## 2.3 Élément sandwich

Dans cette partie, nous développons un nouvel élément sandwich en considérant l'élément coque BRR. Avant de définir notre modèle, nous présentons dans la figure (2.7) les notations utilisées pour les différentes caractéristiques définissant la structure sandwich.  $\Omega$  désigne un volume,  $h$  une épaisseur et les exposants  $s$ ,  $c$  et  $i$  représentent respectivement les couches supérieure, centrale et inférieure.

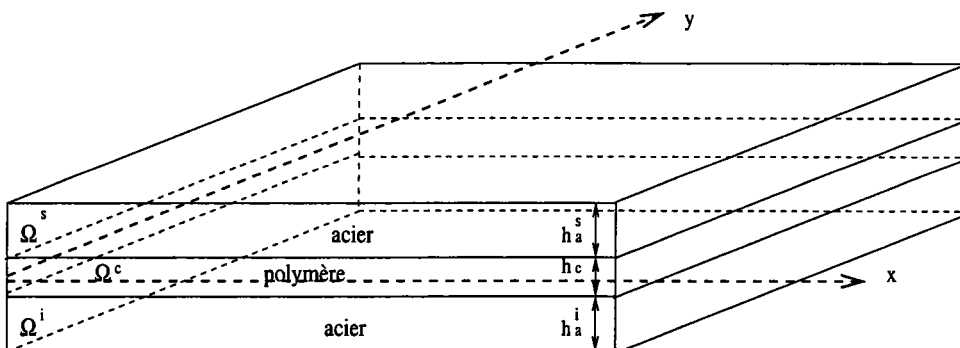


FIG. 2.7 – Représentation des notations prises pour définir les structures sandwich

### 2.3.1 Présentation et hypothèses du modèle : coque/Mindlin/coque

Pour définir le champ de déplacement dans les couches métalliques d'une structure sandwich, nous utilisons un élément de type coque. La position d'un point quelconque de la géométrie décrite sur la figure (2.8) est repérée, sur la configuration initiale, par un vecteur  $\mathbf{x}$  exprimé sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(r_1, r_2, r_3) = \mathbf{r}(r_1, r_2) + r_3 \mathbf{a}_3(r_1, r_2) \quad (2.2)$$

avec  $\mathbf{r}$  : un vecteur qui repère la position de la surface moyenne,

$\mathbf{a}_3$  : le vecteur directeur de la coque au point considéré,

$(r_1, r_2, r_3)$  : les coordonnées curvilignes convectives.

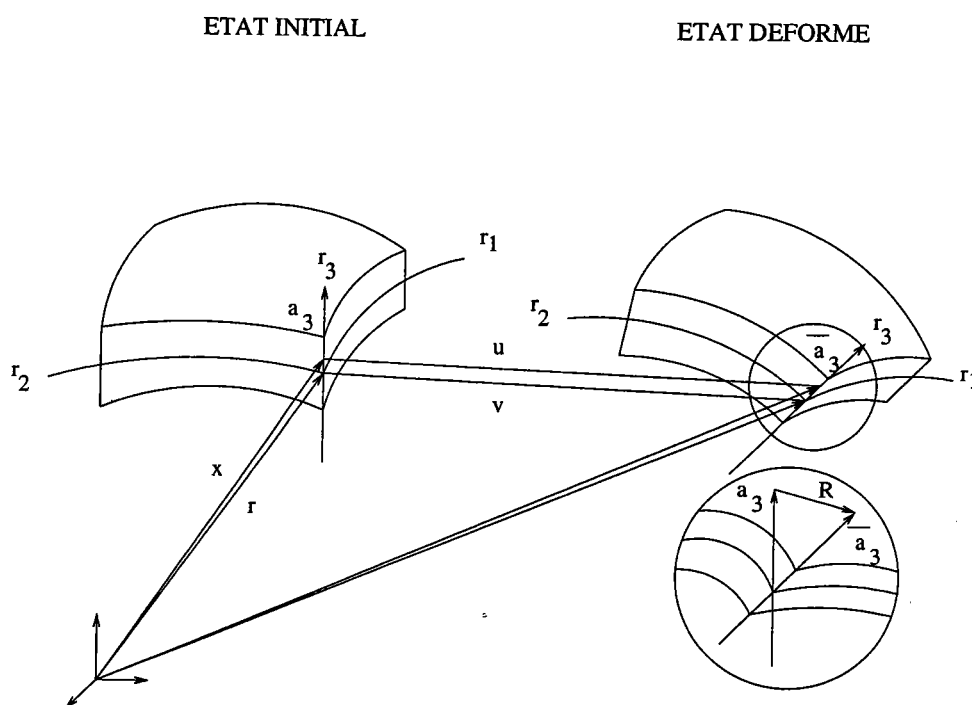


FIG. 2.8 – Description géométrique de la coque

En faisant l'hypothèse d'une variation linéaire du champ de déplacement dans la direction de l'épaisseur, ce dernier peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{u}(r_1, r_2, r_3) = \mathbf{v}(r_1, r_2) + r_3 \mathbf{R}(r_1, r_2) \quad (2.3)$$

avec  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{R}$  représentant respectivement le déplacement d'un point de la surface moyenne et la différence des vecteurs directeurs de la coque entre la configuration de référence et la configuration déformée.

L'élément coque utilisé ici, est le BRR. Cet élément possède 8 nœuds et 6 d.d.l. par nœud :

$$u, v, w, R_x, R_y, R_z.$$

Nous utilisons la discrétisation usuelle d'un élément quadrilatère à huit nœuds avec intégration réduite :

$$u = \sum_{k=1}^8 N_k v_k + \sum_{k=1}^8 r_3 N_k R_k \quad (2.4)$$

où les  $N_k$  sont les fonctions de forme habituelles du quadrangle à 8 nœuds,  $v_k$  et  $R_k$  variables nodales interpolées via les fonctions de formes classiques des éléments quadrilatéraux à huit nœuds (voir Annexe A),  $k$  indiquant le numéro de nœud de l'élément.

En utilisant, pour les couches métalliques, un champ de déplacement ayant la forme précédente (2.4), nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^s(x, y, z) = u^s(x, y) + zR_x^s(x, y) \\ V^s(x, y, z) = v^s(x, y) + zR_y^s(x, y) \\ W^s(x, y, z) = w^s(x, y) + zR_z^s(x, y) \\ z \in [-\frac{h_a^s}{2}, \frac{h_a^s}{2}] \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U^i(x, y, z) = u^i(x, y) + zR_x^i(x, y) \\ V^i(x, y, z) = v^i(x, y) + zR_y^i(x, y) \\ W^i(x, y, z) = w^i(x, y) + zR_z^i(x, y) \\ z \in [-\frac{h_a^i}{2}, \frac{h_a^i}{2}] \end{array} \right. \quad (2.6)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} R^j(x, y) = \sum_{k=1}^8 N_k R_k^j \\ \alpha^j(x, y) = \sum_{k=1}^8 N_k \alpha_k \\ j = s, i \\ \alpha = u, v, w \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Afin d'exprimer les déplacements et le vecteur "rotation" de la couche viscoélastique en fonction des champs de déplacement des couches supérieure et inférieure, nous supposons que le champ de déplacement dans la couche centrale s'écrit également sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^c(x, y, z) = u^c(x, y) + zR_x^c(x, y) \\ V^c(x, y, z) = v^c(x, y) + zR_y^c(x, y) \\ W^c(x, y, z) = w^c(x, y) + zR_z^c(x, y) \\ z \in [-\frac{h_c}{2}, \frac{h_c}{2}] \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Nous considérons ensuite les conditions de raccord cinématique aux interfaces et nous faisons les hypothèses suivantes, classiques dans les études analytiques ou numériques des tôles sandwich [14], [37], [51] :

- Tous les points d'une normale à un plan ont le même déplacement transverse  $w(r_1, r_2)$ ,
- Aucun écart entre la couche centrale et les parements d'acier n'est permis,
- Tous les points des couches élastiques sur une normale ont les mêmes rotations :  $R_j^s = R_j^i$ ,  $j = x, y, z$ ,
- L'épaisseur est constante dans les trois couches et un sandwich symétrique est considéré :  $h_a^s = h_a^i = h_a$ .

Ce sont ces hypothèses simples qui permettent de ramener à huit le nombre de variables par nœud : la flèche  $w$ , qui est commune aux trois couches, les rotations  $R_j$  qui sont supposées communes aux deux couches dures, et les déplacements longitudinaux des deux couches élastiques. En effet, le raccord cinématique entre les trois couches permet d'exprimer les six variables de la couche centrale  $u^c$ ,  $v^c$ ,  $w$ ,  $R_x^c$ ,  $R_y^c$ ,  $R_z^c$ , en fonction des huit degrés de liberté choisis. On renvoie à l'annexe B pour le détail des calculs qui conduisent à l'expression suivante du déplacement dans la couche centrale :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^c(x, y, r_3) = \left(\frac{1}{2} + \frac{r_3}{2}\right)u^s(x, y) + \left(\frac{1}{2} - \frac{r_3}{2}\right)u^i(x, y) - \frac{r_3}{2}h_a R_x \\ V^c(x, y, r_3) = \left(\frac{1}{2} + \frac{r_3}{2}\right)v^s(x, y) + \left(\frac{1}{2} - \frac{r_3}{2}\right)v^i(x, y) - \frac{r_3}{2}h_a R_y \\ W^c(x, y, r_3) = w(x, y) - \frac{r_3}{2}h_a R_z \\ r_3 \in [-1; 1] \end{array} \right. \quad (2.9)$$

On notera que le déplacement de la couche centrale s'exprime complètement en fonction des variables associées aux deux autres couches. Il n'y aura donc pas besoin de définir une interpolation pour la couche centrale : l'élément fini de cette couche sera



déduit de l'élément fini de coque utilisé pour les couches élastiques, grâce à la formule (2.8) et donc grâce aux hypothèses de linéarité de type Mindlin (2.9). C'est pourquoi nous disons que l'élément sandwich ainsi défini est un élément coque/Mindlin/coque.

Notons également qu'il existe une continuité exacte entre les faces et le noyau et que le champ de déplacement de la couche centrale (2.9) permet d'éviter une incompatibilité entre la discrétisation dans le noyau et les faces.

### 2.3.2 Expression des déformations dans les couches

A partir des formules des déplacements des couches supérieure et inférieure (2.5) et (2.6) et en supposant que la déformation des couches élastiques obéit à la théorie classique des plaques minces, les déformations dans ces couches sont de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^l(x, y, z, t) = \frac{\partial U^l}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy}^l(x, y, z, t) = \frac{\partial V^l}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz}^l(x, y, z, t) = \frac{\partial W^l}{\partial z} \\ 2\varepsilon_{xy}^l(x, y, z, t) = \frac{\partial U^l}{\partial y} + \frac{\partial V^l}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{xz}^l(x, y, z, t) = \frac{\partial U^l}{\partial z} + \frac{\partial W^l}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{yz}^l(x, y, z, t) = \frac{\partial V^l}{\partial z} + \frac{\partial W^l}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

où  $l$  désigne soit la couche supérieure ( $l = s$ ), soit la couche inférieure ( $l = i$ ). La déformation dans le noyau viscoélastique peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon_{xx}^c(x, y, z, t) = [\Gamma_1(r_3)] \left[ \frac{\partial u^s}{\partial x}, \frac{\partial u^i}{\partial x}, \frac{\partial R_x}{\partial x} \right] \\
 \varepsilon_{yy}^c(x, y, z, t) = [\Gamma_1(r_3)] \left[ \frac{\partial v^s}{\partial y}, \frac{\partial v^i}{\partial y}, \frac{\partial R_y}{\partial y} \right] \\
 \varepsilon_{zz}^c(x, y, z, t) = -\frac{h_a}{h_p} R_z \\
 2\varepsilon_{xy}^c(x, y, z, t) = [\Gamma_1(r_3)] \left[ \left( \frac{\partial u^s}{\partial y} + \frac{\partial v^s}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial u^i}{\partial y} + \frac{\partial v^i}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{\partial R_y}{\partial x} \right) \right] \\
 2\varepsilon_{xz}^c(x, y, z, t) = [\Gamma_2(r_3)] \left[ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial R_z}{\partial x}, R_x \right] \\
 2\varepsilon_{yz}^c(x, y, z, t) = [\Gamma_2(r_3)] \left[ \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial R_z}{\partial y}, R_y \right]
 \end{array} \right. \quad (2.11)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l}
 [\Gamma_1(r_3)] = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] \\
 [\Gamma_2(r_3)] = [1, \gamma_3, -\frac{h_a}{h_p}] \\
 \gamma_1 = \left( \frac{1}{2} + \frac{r_3}{2} \right) \\
 \gamma_2 = \left( \frac{1}{2} - \frac{r_3}{2} \right) \\
 \gamma_3 = -\frac{r_3}{2} h_a
 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

### 2.3.3 Formulation élément fini pour les vibrations des coques sandwich

Grâce à la formule (2.9), nous allons établir notre nouvel élément le BRR/Mindlin/BRR : élément à huit nœuds et huit d.d.l. par nœud :

$$u^s(x, y), v^s(x, y), u^i(x, y), v^i(x, y), w(x, y), R_x, R_y, R_z \quad (2.13)$$

Le déplacement de l'élément volume sandwich sera écrit sous une forme discrétisée habituelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} U^s \\ V^s \\ W^s \end{bmatrix} = [N^s][q^e], \quad \begin{bmatrix} U^c \\ V^c \\ W^c \end{bmatrix} = [N^c][q^e], \quad \begin{bmatrix} U^i \\ V^i \\ W^i \end{bmatrix} = [N^i][q^e] \\ [q^e]^t = [u_j^s, v_j^s, u_j^i, v_j^i, w_j, R_{xj}, R_{yj}, R_{zj}, j = 1, 8] \end{array} \right. \quad (2.14)$$

L'élément est conçu en sorte que les matrices  $[N^s]$ ,  $[N^c]$ ,  $[N^i]$  dépendent seulement des fonctions de forme de l'élément fini coque (BRR) dans les couches élastiques.

En décomposant le volume élémentaire  $\Omega_e$  en trois volumes élémentaires  $\Omega_e^s$ ,  $\Omega_e^c$ ,  $\Omega_e^i$ , les matrices de rigidité et de masse élémentaires se décomposent ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} [K^e] = [K_e^s] + [K_e^c] + [K_e^i] \\ [M^e] = [M_e^s] + [M_e^c] + [M_e^i] \end{array} \right. \quad (2.15)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_e^j] = \int_{\Omega_e^j} \rho_j [N^j]^t [N^j] dv \\ j = s, c, i \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$\rho_j$  est la densité du matériau de la couche  $j$ .

Dans la couche centrale, les déformations sont définies par (2.11) et s'écrivent en formulation élément fini en fonction d'une matrice  $[B_c]$  précisée ultérieurement :

$$[\varepsilon^c] = [B_c][q_e] \quad (2.17)$$

La matrice de rigidité de la couche centrale s'exprime alors :

$$[K^c] = \int_{\Omega_c} [B_c]^t [C_c] [B_c] dv \quad (2.18)$$

$[C_c]$  est la matrice obtenue de la loi de comportement contrainte-déformation.

Dans les couches supérieures et inférieures élastiques, on applique exactement la technique de discrétisation de l'élément BRR. Les matrices d'interpolation  $[N^i]$  et  $[N^s]$  sont celles d'une interpolation dans un quadrangle à huit nœuds (polynômes de Serendip), avec une petite modification par rapport à [10]. En effet, le déplacement élémentaire  $[q_e]$  contient huit variables au lieu de six dans l'élément BRR. Pour définir  $[N^i]$  ou  $[N^s]$ , il suffit de rajouter deux colonnes de zéros correspondant aux déplacements  $u, v$  de l'autre couche. Quant aux déformations, elles contiennent une partie déduite du champ de déplacement (2.14) prise en compte par la matrice  $[B_q]$  et une partie additionnelle non compatible avec un champ de déplacement, représentée ci-dessous par une matrice  $[B_\alpha]$  et quatre degrés supplémentaires notés  $[\alpha]$  [10] :

$$[\varepsilon] = [B_q][q_e] + [B_\alpha][\alpha] \quad (2.19)$$

$[B_\alpha][\alpha]$  représente une déformation additionnelle linéaire à travers l'épaisseur. Cette technique permet d'implémenter une loi de comportement tridimensionnelle additionnelle. Comme on n'exige pas de continuité interéléments de cette déformation, elle est condensée au niveau élémentaire. Ainsi, la matrice de rigidité dans les couches élastiques, s'exprime par :

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_e^j] = [K_{qq}^j] - [K_{\alpha q}^j]^t [K_{\alpha\alpha}^j]^{-1} [K_{\alpha q}^j] \\ [K_{qq}^j] = \int_{\Omega_e} [B_q]^t [q_e] [B_q] dv + \int_{\Omega_e} [G]^t [L] [G] dv \\ [K_{\alpha q}^j] = \int_{\Omega_e} [B_\alpha]^t [C] [B_q] dv \\ [K_{\alpha\alpha}^j] = \int_{\Omega_e} [B_\alpha]^t [C] [B_\alpha] dv \end{array} \right. \quad (2.20)$$

avec  $\int_{\Omega_e} [G]^t [L] [G] dv$  représentant la matrice de rigidité géométrique, et  $L$  la matrice des contraintes initiales [10].

Précisons maintenant la forme des matrices  $[B_q^j]$  ( $j=i,s,c$ ) reliant le déplacement nodal et la déformation compatible.

Les  $[B_q^j]$  sont égaux à  $[B_q^j] = [R][G^j]$ . Dans les couches élastiques, les  $[G^j]$  ( $j = i, s$ ) sont les matrices du gradient des fonctions de forme  $[N^j]$ . Ce sont les mêmes que dans la référence BRR, mais avec deux colonnes de zéros supplémentaires.  $[R]$  est la matrice des composantes de la base covariante, servant au changement de base :

$$[R] = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & 0 & 0 & 0 & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Les matrices relatives à la couche viscoélastique ont dû être implémentées entièrement. La matrice de fonction de forme  $[N^c]$  est obtenue directement à partir de l'expression du champ de déplacement (B.7) et s'écrit :

$$[N^c] = \begin{bmatrix} \gamma_1 N_k & 0 & \gamma_2 N_k & 0 & 0 & \gamma_3 N_k & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_1 N_k & 0 & \gamma_2 N_k & 0 & 0 & \gamma_3 N_k & 0 & \dots, \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & \gamma_3 N_k & \dots \end{bmatrix} \quad k = 1, 8 \quad (2.22)$$

avec  $\gamma_1 = (\frac{1}{2} + \frac{r_3}{2})$ ,  $\gamma_2 = (\frac{1}{2} - \frac{r_3}{2})$ ,  $\gamma_3 = -\frac{r_3}{2} h_a$ .

Quant à la matrice  $[G^c]$ , elle est obtenue à partir de la relation (2.11), en calculant les dérivées des champs de déplacement de la couche centrale en fonction des déplacements des couches élastiques, par rapport aux coordonnées locales. Elle a la forme suivante :

$$[G^c] = \begin{bmatrix}
 \gamma_1 \frac{\partial N_k}{\partial r_1} & 0 & \gamma_2 \frac{\partial N_k}{\partial r_1} & 0 & 0 & \gamma_3 \frac{\partial N_k}{\partial r_1} & 0 & 0 \\
 0 & \gamma_1 \frac{\partial N_k}{\partial r_1} & 0 & \gamma_2 \frac{\partial N_k}{\partial r_1} & 0 & 0 & \gamma_3 \frac{\partial N_k}{\partial r_1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial r_1} & 0 & 0 & \gamma_3 \frac{\partial N_k}{\partial r_1} \\
 \gamma_1 \frac{\partial N_k}{\partial r_2} & 0 & \gamma_2 \frac{\partial N_k}{\partial r_2} & 0 & 0 & \gamma_3 \frac{\partial N_k}{\partial r_2} & 0 & 0 \\
 0 & \gamma_1 \frac{\partial N_k}{\partial r_2} & 0 & \gamma_2 \frac{\partial N_k}{\partial r_2} & 0 & 0 & \gamma_3 \frac{\partial N_k}{\partial r_2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial r_2} & 0 & 0 & \gamma_3 \frac{\partial N_k}{\partial r_2} \\
 \gamma_1 \frac{\partial N_k}{\partial r_3} & 0 & \gamma_2 \frac{\partial N_k}{\partial r_3} & 0 & 0 & \gamma_3 \frac{\partial N_k}{\partial r_3} & 0 & 0 \\
 0 & \gamma_1 \frac{\partial N_k}{\partial r_3} & 0 & \gamma_2 \frac{\partial N_k}{\partial r_3} & 0 & 0 & \gamma_3 \frac{\partial N_k}{\partial r_3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial r_3} & 0 & 0 & \gamma_3 \frac{\partial N_k}{\partial r_3}
 \end{bmatrix}, k = 1, 8 \quad (2.23)$$

Nous avons donc défini notre nouvel élément sandwich : le BRR/Mindlin/BRR. Nous rappelons que cet élément a été créé en utilisant les mêmes hypothèses que Daya et Potier-Ferry pour établir leur élément (DKT/volume/DKT) [17].

## 2.4 Premières validations du nouvel élément

Nous nous contentons de présenter une première validation du nouvel élément en considérant les vibrations propres de structures sandwich non-amorties.

### 2.4.1 Tôles sandwich constituées d'un seul matériau

Nous considérons ici une tôle constituée d'un seul matériau, afin de valider la représentation des couches d'acier dans notre modèle lors de la programmation. Une comparaison est réalisée entre les fréquences propres obtenues pour une structure constituée d'une seule couche discrétisée par l'élément BRR et une structure sandwich constituée du même matériau, discrétisée par le nouvel élément. Ces tôles ont la même épaisseur et sont constituées du même acier. Nous avons pris le même maillage (45 nœuds) pour les deux modèles. Nous avons réduit l'épaisseur de la couche centrale ( $2 \cdot 10^{-10} \approx 0$ ) afin de réduire les effets de cisaillement existant dans celle-ci. La comparaison est

faite pour une poutre et pour une plaque toutes les deux encastées-libres.

L'acier choisi pour toutes les simulations, possède les caractéristiques suivantes :

- un module d'Young de  $2.1 \cdot 10^{11}$  Pa,
- un coefficient de Poisson de 0.3,
- une masse volumique de  $7800 \text{ kg/m}^3$ .

**Poutre :**

La poutre a une longueur de 0.178m, une largeur de 0.010m et une épaisseur de  $1.245 \cdot 10^{-3}$ m.

Les résultats sont représentés dans le tableau (2.3) :

Fréquences	BRR	BRR/Mindlin/BRR
1ère	33,25	33,25
2ème	208,78	208,78
3ème	264,81*	264,6*
4ème	592,32	592,27

TAB. 2.3 – 4 premières fréquences obtenues pour une poutre constituée d'un seul matériau

Remarque :

les fréquences suivies d'un signe (\*) sont celles des modes de tension, les autres sont celles correspondant aux modes de flexion.

**Plaque :**

La plaque a une longueur de 0.4m, une largeur de 0.2m et une épaisseur de  $10^{-3}$ m.

Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau 2.4 :

Fréquences	BRR	BRR/Mindlin/BRR
1ère	5,37	5,37
2ème	23,15	23,15
3ème	33,61*	33,61*
4ème	75,84	75,84

TAB. 2.4 – 4 premières fréquences obtenues pour la plaque constituée d'un seul matériau

Les tableaux précédents (2.3, 2.4) montrent que pour une épaisseur de la couche centrale presque nulle, les fréquences propres obtenues par notre modèle sandwich sont proches de celles obtenues pour une couche homogène uniforme. Ceci est dû au faible effet de cisaillement, lorsque la couche centrale est très fine. D'après ces tests, nous pouvons donc en conclure que dans notre modélisation, les couches d'acier sont bien représentées.

### 2.4.2 Tôles sandwich

Cette fois-ci, nous considérons des structures sandwich constituées d'une couche molle intercalée entre deux couches dures (acier). Les caractéristiques sont indiquées dans le tableau (2.5).

Nous étudions successivement une poutre et une plaque. La simulation des vibrations libres pour ces structures par notre modèle sandwich, le BRR/Mindlin/BRR, va être comparée aux résultats obtenus par E.M. Daya et M. Potier-Ferry avec leur



modèle sandwich. Cela nous permettra de valider notre modèle, car leur élément DKT/volume/DKT a déjà été validé par rapport à la discrétisation 2D qui est incontestable [17].

	Acier	Polymère
Module d'Young	$2.1 \cdot 10^{11}$ Pa	$27.616 \cdot 10^5$ Pa
Coefficient de Poisson	0.3	0.44
Masse volumique	$7800 \text{ kg/m}^3$	$1200 \text{ kg/m}^3$
Epaisseur	$0.6 \cdot 10^{-3}$ m	$45 \cdot 10^{-6}$ m

TAB. 2.5 – Caractéristiques des matériaux pour la poutre et la plaque sandwich

### Poutre sandwich encastree-libre :

La poutre étudiée a les mêmes dimensions qu'au test de poutre précédent. Nous simulons une poutre encastree-libre et nous comparons nos résultats avec ceux obtenus par Daya et Potier-Ferry [17] avec leur modèle sandwich. Nous avons maillé de plus en plus finement la poutre, et nous avons établi le tableau suivant :

éléments	ddl	FREQUENCES					
		1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	10ème
1	64	31,3	229,72	282*	551,85	/	/
2	104	30,25	152,63	270,84*	534,51	550,13	3566
10	360	30,03	144,22	264,65*	353,18	543	1923
50	1448	29,95	143,41	263,38*	347,09	514,774	1552
128	3464	29,93	143,15	263,32*	345,85	478,15	1441,34
200	5288	29,92	143,03	263,31*	345,18	451	1407

TAB. 2.6 – Fréquences d'une poutre sandwich encastree-libre. Elément BRR/Mindlin/BRR

Nous remarquons bien la convergence des fréquences propres. Pour confirmer la bonne convergence, nous comparons les trois premières fréquences de flexion obtenues avec celles obtenues par Daya et Potier-Ferry (2.7).

BRR/Mindlin/BRR	DKT/volume/DKT
5288 ddl	2840 ddl
29,92	30
143	143
345	347

TAB. 2.7 – Comparaison des 3 premiers modes de flexion

La convergence en fréquences propres obtenue avec le BRR/Mindlin/BRR pour les 3 premières fréquences de flexion, coïncide avec les résultats obtenus avec le DKT/volume/DKT, qui avait été validé. Cette comparaison confirme donc la validité de notre programmation. De plus, on peut noter que pour obtenir les mêmes résultats que ceux obtenus avec 2840 d.d.l. (soit 355 éléments) pour le DKT/volume/DKT, le BRR/Mindlin/BRR n'a besoin que de 1448 d.d.l. (soit 50 éléments). Ceci nous montre l'efficacité de notre modèle.

### Plaque sandwich :

Nous considérons une plaque sandwich (300\*30 mm) dont les caractéristiques des matériaux sont indiquées dans le tableau (2.5) et les épaisseurs des couches sont 0.4/0.05/0.4 millimètres. Nous calculons les fréquences propres de cette plaque à l'aide de deux éléments.

La plaque est posée, en son milieu, sur un pot vibrant et elle est libre ailleurs. On se contentera des modes doublement symétriques, donc le calcul se fait sur un quart de la plaque (150\*15 mm).

Nous comparons dans le tableau (2.8), les quatre premières fréquences de flexion en mode symétrique, obtenues par notre modèle avec celles du DKT/volume/DKT :

	Ramm/3D/Ramm	DKT/volume/DKT
Fréquences	680 ddl	
1er	47	47
2eme	188	188
3eme	394	395
4eme	679	679

TAB. 2.8 – Vibrations libres : fréquences propres des modes symétriques

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation des tôles sandwich par la méthode des éléments finis. Nous avons établi un élément fini permettant d'étudier les tôles sandwich de grande taille et de géométrie complexe, en prenant en compte le cisaillement dans la couche centrale viscoélastique. Le BRR/Mindlin/BRR est l'assemblage de deux éléments de Büchter et al. (BRR) dans les couches élastiques, les déplacements de la couche centrale étant déduits des conditions de raccords cinématiques et de l'hypothèse de Mindlin. Le BRR a été choisi pour son interpolation plus riche en membrane que les éléments de coque classiques et pour sa formulation tridimensionnelle permettant son utilisation aussi bien pour les coques minces que pour les coques épaisses. Grâce aux conditions de raccords cinématiques et aux hypothèses simplificatrices classiques (mêmes flèches pour les trois couches, mêmes rotations dans les couches d'acier...), nous avons pu exprimer le champ de déplacement de la couche centrale en fonction de ceux des couches supérieure et inférieure. Cela nous a permis de réduire le nombre de degrés de liberté par nœud à huit : les déplacements longitudinaux des couches d'acier, la flèche, et les "rotations". Dans un premier temps nous avons vérifié la représentation des couches élastiques (cf 2.4.1). Ensuite, nous avons validé le modèle en considérant une poutre puis une plaque sandwich (cf 2.4.2). Pour cela, nous avons calculé les fréquences propres et nous les avons comparées à celles obtenues par le modèle DKT/volume/DKT de Daya et Potier-Ferry, déjà validé [17]. Les résultats numériques obtenus sont très satisfaisants

et montrent bien que le nouvel élément sandwich permet des simulations numériques avec un coût très raisonnable.

## CHAPITRE 3

# Méthodes itératives pour les vibrations et l'amortissement des structures viscoélastiques

### 3.1 Introduction

Nous avons vu précédemment (section 1.2.2.), que l'analyse de vibrations libres des structures sandwich viscoélastiques conduit à résoudre un problème aux valeurs propres complexes non-linéaires (1.23). La résolution de ce problème permet d'évaluer les propriétés amortissantes de la tôle en considérant la fréquence amortie  $\Omega$  et l'amortissement  $\eta$  définis par la formule (1.24). Cependant, il existe plusieurs méthodes pour calculer ces deux quantités : la méthode aux valeurs propres complexes, la méthode d'énergie de déformation modale, la méthode directe de réponse en fréquence, l'approche asymptotique, la technique d'itération réduction et la méthode asymptotique numérique avec continuation (voir les méthodes numériques dans la section 1.3.2. pour plus de détails). Seules celles proposées par Chen et al. [11] et par Daya et Potier-Ferry [16] permettent de résoudre directement le problème aux valeurs propres non-linéaires. Dans une première étape, Chen et al. déterminent une solution de perturbation au premier ordre. La seconde étape est une technique itérative qui est couplée avec l'algorithme de Lanczos [6] et l'approximation d'une base réduite pour trouver les valeurs propres complexes. Cette seconde étape demande probablement beaucoup d'itérations pour de grands amortissements. La méthode de Daya et

Potier-Ferry associe une transformation d'homotopie, une technique de perturbation et une méthode de continuation. La technique d'homotopie consiste à transformer le problème initial en introduisant un paramètre  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ) de sorte que pour  $\varepsilon = 0$ , le problème obtenu est simple à résoudre et pour  $\varepsilon = 1$ , le problème est identique au problème initial. Puis, on cherche la solution sous forme de séries entières du paramètre  $\varepsilon$ . Ceci sera illustré lors des définitions des algorithmes. Ces techniques ont été utilisées pour résoudre d'autres problèmes non-linéaires comme l'élasticité non-linéaire, les équations de Navier-Stokes et des problèmes de contact, de plasticité ou de viscoplasticité [48], [27]. La méthode asymptotique numérique associe une technique de perturbation et une procédure de discrétisation classique.

Dans ce chapitre, nous présentons deux algorithmes itératifs pour résoudre le problème de vibrations libres non-linéaires afin d'améliorer la méthode proposée par Daya et Potier-Ferry. Ces deux méthodes associent aussi l'homotopie et les techniques asymptotiques numériques. La première est une sorte de méthode de Newton d'ordre élevé [32] puisqu'elle s'identifie à la procédure itérative de Newton pour un ordre de troncature égal à un. La seconde utilise une matrice plus ou moins arbitraire. Nous commençons par développer l'algorithme de Daya et Potier-Ferry. Nous définissons ensuite les deux algorithmes itératifs d'ordre élevé. Enfin, nous effectuons des tests pour valider ces deux méthodes. Il est à noter que ces deux algorithmes itératifs ont fait l'objet d'un article de Duigou, Daya et Potier-Ferry [20].

## 3.2 Méthode de continuation

On commence par rappeler la méthode de continuation proposée par Daya et Potier-Ferry [16]. Elle utilise les techniques d'homotopie, de perturbation et de continuation.

### 3.2.1 Technique d'homotopie

Le but de cette première étape est de transformer le problème aux valeurs propres non-linéaires en utilisant la technique d'homotopie. Cela nous permet d'introduire un paramètre artificiel  $\varepsilon$  :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + \varepsilon E(\omega)\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U} = 0 \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

On peut remarquer que le cas  $\varepsilon = 1$  correspond au problème initial (1.23) et que  $\varepsilon = 0$  correspond au problème aux valeurs propres réelles pour une structure non amortie :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \omega_M^2\mathbf{M}]\mathbf{U}_M = 0 \quad (3.2)$$

où  $\omega_M$  et  $\mathbf{U}_M$  sont respectivement une fréquence propre et un mode propre de la structure non amortie. Cette dernière équation peut être résolue par les méthodes classiques telles que la méthode d'itération de sous-espace ou la technique de Lanczos [6]. Nous supposons que les valeurs propres réelles de (3.2) sont calculées.

Comme dans tout problème aux valeurs propres, l'inconnue  $\mathbf{U}$  de (3.1) est définie à une constante multiplicative près. Il est donc nécessaire d'introduire une condition de normalisation, par exemple :

$$\mathbf{U}_0^t(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0) = 0 \quad (3.3)$$

Les équations (3.1) et (3.3) définissent un problème bien posé de la forme  $\varepsilon \rightarrow \{\mathbf{U}(\varepsilon), \omega(\varepsilon)\}$ . Celui-ci sera résolu par la méthode de perturbation.

### 3.2.2 Méthode de perturbation

Une méthode asymptotique numérique est appliquée pour résoudre le problème perturbé (3.1) et (3.3). Celle-ci consiste à chercher les inconnues du problème  $\mathbf{U}$  et  $\omega$  sous forme de séries entières par rapport à un paramètre  $\varepsilon$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \mathbf{U}_j \\ \omega = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \omega_j \\ \omega^2 = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j p_j \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

$N$  représente l'ordre de troncature des séries et  $\omega$  la fréquence propre de la structure amortie. Comme le module  $E(\omega)$  est supposé dépendre de la fréquence, il peut être également décomposé sous forme de série entière de  $\varepsilon$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\omega) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j E_j \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Après insertion des séries (3.4) et (3.5) dans l'équation (3.1) et identification des puissances en  $\varepsilon$ , nous obtenons une série de problèmes linéaires récurrents :



Problème à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{U}_0 = 0 \\ \mathbf{A} = \mathbf{K}(0) - p_0\mathbf{M} \\ p_0 = -\omega_0^2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Problème à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{U}_1 = \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_1 = -E_0\mathbf{K}\mathbf{U}_0 + p_1\mathbf{M}\mathbf{U}_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Problème à l'ordre (j+1) :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{U}_j = \mathbf{F}_j \\ \mathbf{F}_j = -\sum_{k=0}^{j-1} E_k\mathbf{K}\mathbf{U}_{j-k-1} + \sum_{k=1}^j p_k\mathbf{M}\mathbf{U}_{j-k} \end{cases} \quad (3.8)$$

Notons que, pour le premier ordre, nous retrouvons le problème aux valeurs propres non amorties (3.2), et nous proposons de calculer les valeurs propres demandées par une méthode classique pour résoudre un problème aux valeurs propres symétrique. Pour les ordres élevés, les problèmes sont linéaires non-homogènes mais ils possèdent tous la même matrice  $\mathbf{A}$ . Ainsi, nous pouvons calculer les termes des séries en inversant seulement une matrice par fréquence, ce qui présente un sérieux avantage.

Notons que les inconnues du problème à l'ordre (j+1) sont  $U_j$  et  $p_j$ . Puisque la matrice  $\mathbf{A}$  est singulière et que son noyau est généré par le mode non amorti  $\mathbf{U}_0$ , une condition supplémentaire est nécessaire pour calculer ces solutions. Cette condition est la condition de solvabilité suivante :

$$\mathbf{F}_j^t \mathbf{U}_0 = 0. \quad (3.9)$$

Cette condition nous permet de calculer le terme  $p_j$  de la série (3.4) de la valeur propre :

$$\begin{cases} P_1 = \frac{E_0 \mathbf{U}_0^t \mathbf{K} \mathbf{U}_0}{\mathbf{U}_0^t \mathbf{M} \mathbf{U}_0} & j = 1 \\ p_j = \frac{\sum_{k=0}^{j-1} E_k \mathbf{U}_0^t \mathbf{K} \mathbf{U}_{j-k-1} - \sum_{k=1}^{j-1} p_k \mathbf{U}_0^t \mathbf{M} \mathbf{U}_{j-k}}{\mathbf{U}_0^t \mathbf{M} \mathbf{U}_0} & j \geq 2 \dots \end{cases} \quad (3.10)$$

Nous notons que ce nombre  $p_j$  dépend seulement des vecteurs calculés précédemment  $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{j-1}$  et de  $p_1, \dots, p_{j-1}$ . Alors, nous pouvons calculer  $p_1$  en résolvant (3.10), puis  $\mathbf{U}_1$  par (3.7) puis  $p_2$  à nouveau par (3.10) et ainsi de suite. Si l'équation de solvabilité est satisfaite, alors les équations linéaires (3.7) et (3.8) sont bien posées et elles ont une solution unique si on prend en compte la condition supplémentaire (3.3), qui devient :

$$\mathbf{U}_0^t \mathbf{U}_j = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.11)$$

Les  $E_k$  sont déterminés à partir de la série (3.5), qui dépend du modèle viscoélastique choisi.

On peut réarranger (3.8) et (3.11) en introduisant un multiplicateur de Lagrange  $k$ , et il est facile de vérifier que la solution des équations (3.8) et (3.11) satisfait l'équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_0^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La matrice dans l'équation (3.12) est réelle et inversible. Nous pouvons la factoriser par la méthode de Crout [30]. Ceci nous permet de résoudre tous les problèmes linéaires (3.7) et (3.8) avec une seule factorisation matricielle.

Grâce à ce principe, nous obtenons les solutions du problème perturbé (3.1) de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{U}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \mathbf{U}_j \\ \omega(\varepsilon) = i\sqrt{\sum_{j=0}^N \varepsilon^j p_j}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Ceci est seulement une estimation de la solution de (3.1), puisque l'ordre de troncature est nécessairement fini (généralement,  $N=20$  est choisi). Cependant, la solution recherchée (solution de l'équation initiale (1.23)) correspond à  $\varepsilon = 1$ . Ce qui implique que le rayon de convergence des séries doit être supérieur ou égal à 1. Si l'estimation est suffisamment bonne, c'est à dire si le résidu relatif (3.14) est plus petit qu'une tolérance donnée (telle que  $10^{-8}$ ), la solution du problème (1.23) est obtenue en prenant  $\varepsilon=1$  dans l'équation (3.13),

$$R(\varepsilon) = \frac{\|[\mathbf{K}(0) + \varepsilon E(\omega)\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U}(\varepsilon)\|}{\|\mathbf{K}(0)\mathbf{U}(\varepsilon)\|} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \sum_{j=0}^N \mathbf{U}_j \\ \omega = \sqrt{\sum_{j=0}^N p_j}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Si ce n'est pas le cas, nous devons utiliser une procédure de continuation. Cette dernière est présentée dans la section suivante.

### 3.2.3 Méthode de continuation

Si le résidu relatif (3.14) à  $\varepsilon=1$  n'est pas satisfaisant, nous devons définir un intervalle de validité  $[0, \varepsilon_{max}]$  de l'approximation (3.13). Il serait possible de vérifier les valeurs du résidu relatif pour plusieurs valeurs de  $\varepsilon$ . Classiquement, avec la M.A.N. (Méthode Asymptotique Numérique) [12], un moyen simple consiste à estimer a priori cet in-

tervalle de validité, ce qui évite des calculs de résidu. L'idée est de demander que le dernier terme des séries (3.13) soit suffisamment petit par rapport au premier terme. Ceci conduit à une évaluation explicite de la valeur de  $\varepsilon_{max}$  :

$$\varepsilon_{max} = \left( \delta \frac{\|U_1\|}{\|U_N\|} \right)^{\frac{1}{N-1}}, \quad (3.16)$$

où  $\delta$  est un paramètre suffisamment petit (en pratique  $\delta=10^{-4}$  est un bon choix). La solution intermédiaire de  $(\mathbf{U}(\varepsilon), \omega(\varepsilon))$ , est choisie comme point de départ du prochain pas et nous définissons une autre représentation de la solution, qui est valide pour  $\varepsilon$  au-delà de  $\varepsilon_{max}$ . En introduisant  $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_{max}$ , nous réécrivons le problème perturbé (3.1) sous la forme suivante :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + (\varepsilon_{max} + \Delta\varepsilon)E(\omega)\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U} = 0 \quad (3.17)$$

La solution suivante est cherchée de la même façon que précédemment. Ainsi, nous recherchons les inconnues  $\mathbf{U}$  et  $\omega$  sous forme de séries entières en  $\Delta\varepsilon$  :

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{U}_{max} + \sum_{j=1}^N (\Delta\varepsilon)^j \mathbf{U}_j \\ \omega = \omega_{max} + \sum_{j=1}^N (\Delta\varepsilon)^j \omega_j \\ -\omega^2 = p_{max} + \sum_{j=1}^N (\Delta\varepsilon)^j p_j \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $(\mathbf{U}_{max}, \omega_{max}, p_{max})$  est la solution obtenue de l'équation (3.13) en prenant  $\varepsilon=\varepsilon_{max}$ .

Le module  $E(\omega)$  est aussi écrit sous la forme d'une série entière en  $\Delta\varepsilon$  :

$$E(\omega) = E_{max} + \sum_{j=1}^N (\Delta\varepsilon)^j E_j, \quad (3.19)$$

où le module  $E_{max}$  est obtenu à partir de (3.5) en prenant  $\varepsilon=\varepsilon_{max}$ .

En substituant les équations (3.18) et (3.19) dans l'équation (3.17), et en identifiant les puissances de  $\Delta\varepsilon$ , nous obtenons une série de problèmes linéaires :

Problème à l'ordre 0 :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\max}\mathbf{U}_{\max} = 0 \\ \mathbf{A}_{\max} = \mathbf{K}(0) + \varepsilon_{\max}E_{\max}\mathbf{K} - p_{\max}\mathbf{M} \end{cases} \quad (3.20)$$

Problème à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\max}\mathbf{U}_1 = \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_1 = -\varepsilon_{\max}E_1\mathbf{K}\mathbf{U}_{\max} + p_1\mathbf{M}\mathbf{U}_{\max} - E_{\max}\mathbf{K}\mathbf{U}_{\max} \end{cases} \quad (3.21)$$

Problème à l'ordre  $j$  ( $j \geq 2$ ) :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\max}\mathbf{U}_j = \mathbf{F}_j \\ \mathbf{F}_j = -\varepsilon_{\max}\sum_{k=1}^{j-1} E_k\mathbf{K}\mathbf{U}_{j-k} - \sum_{k=1}^{j-1} E_k\mathbf{K}\mathbf{U}_{j-k-1} - E_{\max}\mathbf{K}\mathbf{U}_{j-1} \\ \quad + \sum_{k=1}^{j-1} p_k\mathbf{M}\mathbf{U}_{j-k} - \varepsilon_{\max}E_j\mathbf{K}\mathbf{U}_{\max} + p_j\mathbf{M}\mathbf{U}_{\max}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Le premier problème (3.20) est satisfait puisque  $(\mathbf{U}_{\max}, \omega_{\max})$  sont solutions du problème perturbé (3.1) pour  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ . Les équations (3.21) et (3.22) sont très similaires aux équations (3.7) et (3.8) de la procédure précédente. Aussi, la matrice  $\mathbf{A}_{\max}$  est singulière. La différence est le caractère complexe de la matrice  $\mathbf{A}_{\max}$  parce que le module  $E$  et la fréquence  $\omega$  sont complexes. Ceci induit des réarrangements techniques pour transformer le problème (3.22) en une équation réelle nécessitant aussi une factorisation de matrice symétrique, mais en contrepartie sa dimension est alors

double par rapport à la dimension initiale. Une autre différence, par comparaison aux équations (3.7) et (3.8), est la présence simultanée des termes  $E_j$  et  $p_j$  dans (3.22) pour l'ordre  $(j+1)$ . Puisque  $E_j$  est une fonction de  $p_j$ , la condition de solvabilité (3.9) est modifiée. La résolution des équations (3.21) et (3.8) est directe.

Les nouvelles séries sont analysées de la même façon que précédemment et la même procédure est itérée jusqu'à ce que l'on obtienne une solution correcte sur tout l'intervalle  $\varepsilon \in [0, 1]$  du problème aux valeurs propres initial.

Le lecteur pourra se référer à l'article de E.M. Daya et M. Potier-Ferry [16], pour plus de détails.

### 3.3 Algorithmes itératifs d'ordre élevé

La méthode précédente utilise des pas de continuation, dans lesquels il faut décomposer une matrice complexe. Ceci double le nombre des degrés de liberté du système. Ainsi, cette technique demanderait certainement un grand temps de calcul dans le cas des applications aux grandes structures. Dans le but de diminuer ce temps de calcul, nous proposons de développer deux algorithmes itératifs d'ordre élevé. Ces derniers utilisent la technique d'homotopie et la M.A.N., comme l'algorithme précédent.

#### 3.3.1 Comment construire des algorithmes d'ordre élevé

Le principe des algorithmes itératifs d'ordre élevé a été présenté récemment dans le cas de problèmes non-linéaires [15], [38], [39]. Ecrivons le problème non-linéaire à résoudre sous la forme suivante :

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

où  $\mathbf{R}$  représente le vecteur résidu.

Supposons que  $\mathbf{u}_0$  est une solution d'essai de l'équation non-linéaire ci-dessus (3.23). On décompose l'opérateur non-linéaire  $\mathbf{R}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{F}^{nl}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{R}_0 = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

où  $\mathbf{L}_t(\cdot)$  est l'opérateur tangent en  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(\mathbf{u}_0)$  est le résidu initial et  $\mathbf{F}^{nl}(\cdot)$  est un opérateur non-linéaire, de degré deux au moins en  $\mathbf{u}$ .

Un algorithme de Newton d'ordre élevé peut être établi de la manière suivante. Premièrement, nous appliquons une transformation d'homotopie (insertion d'un paramètre  $\varepsilon$ ) dans (3.24) :

$$\mathbf{L}_t \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}^{nl}(\mathbf{v}) + \varepsilon \mathbf{R}_0 = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

Ensuite, nous cherchons la solution de (3.25) sous la forme d'une série tronquée en  $\varepsilon$ , paramètre de l'homotopie :

$$\mathbf{v}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^N \varepsilon^j \mathbf{v}_j \quad (3.26)$$

Comme c'est habituellement le cas pour les techniques de perturbation, le calcul de tous les vecteurs  $\mathbf{v}_j$  demande seulement une inversion de l'opérateur tangent  $\mathbf{L}_t$ . Lorsque les valeurs obtenues après calcul ne sont pas satisfaisantes, la représentation polynômiale des inconnues peut être remplacée par une représentation rationnelle, appelée approximants de Padé [44], [4] :

$$\mathbf{v}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N-1} f_j(\varepsilon) \mathbf{v}_j \quad (3.27)$$

Les fonctions scalaires  $f_j$  représentent des fractions rationnelles. Pour obtenir l'approximation rationnelle à partir de la solution en séries, nous appliquons les mêmes méthodes que dans [13], [41], [42].

Une fois calculées les  $\mathbf{v}_j$ , la prochaine solution d'essai sera :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}(1) \quad (3.28)$$

Si le nouveau résidu relatif  $\mathbf{R}(\mathbf{u})$  n'est pas suffisamment petit, le processus doit être recommencé avec un nouveau point  $\mathbf{U}_0$  dans (3.24), une nouvelle homotopie (3.25), une nouvelle série (3.26) et ainsi de suite. Cet algorithme est un algorithme de Newton d'ordre élevé puisque nous inversons une nouvelle matrice tangente à chaque itération. Généralement, une troncature d'ordre  $N$  assez grand est choisie afin de limiter le nombre d'itérations généralement à un, quelquefois à deux.

Une variante de cet algorithme nous permet de choisir a priori l'opérateur  $L^*$  qui doit être inversé. Pour cela, il suffit seulement de changer la transformation d'homotopie (3.25) en :

$$(1 - \varepsilon)\mathbf{L}^*.\mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{L}_t.\mathbf{v} + \mathbf{F}^{nl}(\mathbf{v}) + \varepsilon\mathbf{R}_0 = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

Si les séries sont tronquées à l'ordre 1, cet algorithme est similaire aux méthodes itératives standard : à l'algorithme de Newton si  $\mathbf{L}^*=\mathbf{L}_t$  représente l'opérateur tangent, ou à l'algorithme de Newton modifié si  $\mathbf{L}^*=\mathbf{L}_t^0$ ,  $\mathbf{L}_t^0$  représentant l'opérateur tangent à la solution d'essai de la première itération. En pratique, on choisit pour  $\mathbf{L}^*$ , soit un opérateur dont la triangulation est peu coûteuse, soit un opérateur qui a été triangulé à une étape de calcul précédente. Dans le cas du problème aux valeurs propres complexes, nous choisissons une matrice proche de la matrice  $\mathbf{A} = \mathbf{K}(0) - \omega^2\mathbf{M}$ , utilisée au premier pas de l'algorithme de continuation. Ceci permettra d'éviter la



triangulation d'une matrice de taille double.

Les algorithmes itératifs  $L^*$  et de Newton sont complémentaires. L'algorithme itératif  $L^*$  d'ordre élevé conduit à des algorithmes peu coûteux, mais il peut diverger si la solution d'essai est loin de la solution exacte ou si l'opérateur  $L^*$  choisi est trop éloigné de  $L_t$ . Dans ce cas, il peut être remplacé par un algorithme de Newton d'ordre élevé dans le but d'assurer la convergence.

Dans ce qui suit, nous proposons un algorithme de type Newton et un algorithme itératif  $L^*$  d'ordre élevé pour résoudre le problème aux valeurs propres complexes non-linéaire (1.23).

### 3.3.2 Un algorithme de Newton d'ordre élevé

Nous considérons le problème aux valeurs propres complexes non-linéaire (1.23) :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(p)\mathbf{K} + p^2\mathbf{M}]\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

Pour le résoudre, nous établissons un algorithme de Newton d'ordre élevé, en prenant comme inconnue le vecteur complexe  $(\mathbf{U}, p)$ , où  $p = i\omega$  est la valeur propre complexe. Afin de pouvoir définir l'opérateur tangent, nous commençons par utiliser quelques "artifices".

Tout d'abord, nous introduisons  $E(p_0)\mathbf{N}$  et  $p_0^2\mathbf{M}$ , avec  $p_0$ , valeur initiale de  $p$ . Nous obtenons alors :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(p_0)\mathbf{K} + p_0^2\mathbf{M}]\cdot\mathbf{U} + [(E(p) - E(p_0))\mathbf{K} + (p^2 - p_0^2)\mathbf{M}]\cdot\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

Puis, nous introduisons l'incrément  $(\Delta \mathbf{U}, \Delta p)$  :

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} - \mathbf{U}_0 \\ p - p_0 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

$U_0$  représentant la valeur initiale de  $U$ .

Comme  $p = p_0 + \Delta p$ ,  $p^2 - p_0^2$  peut s'écrire :

$$p^2 - p_0^2 = 2p_0\Delta p + (\Delta p)^2 \quad (3.32)$$

Ensuite, nous cherchons à faire apparaître la dérivée du module d'Young  $E(p)$  par rapport à  $p$  au point  $p_0$ , soit  $E'(p_0)$ , dans l'équation (3.30). Pour cela, nous posons :

$$\Delta E(p) = E(p) - E(p_0) = E'(p_0)\Delta p + E(p) - E(p_0) - E'(p_0)\Delta p \quad (3.33)$$

Finalement, nous insérons l'incrément  $(\Delta \mathbf{U}, \Delta p)$  et les égalités (3.32) et (3.33) dans l'équation (3.30), qui s'écrit alors de la façon suivante :

$$\mathbf{L}.\Delta \mathbf{U} + (E'(p_0)\mathbf{K}.\mathbf{U}_0 + 2p_0\mathbf{M}.\mathbf{U}_0)\Delta p + \mathcal{F}^{\text{nl}}(\Delta \mathbf{U}, \Delta p) + \mathbf{R}_0 = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

où  $\mathbf{L} = (\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(p_0)\mathbf{K} + p_0^2\mathbf{M})$  est un opérateur linéaire,

et  $\mathbf{R}_0 = (\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(p_0)\mathbf{K} + p_0^2\mathbf{M}).\mathbf{U}_0$  est le résidu initial,

et  $\mathcal{F}^{\text{nl}}(\Delta \mathbf{U}, \Delta p)$  est un opérateur non-linéaire :

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{\text{nl}}(\Delta \mathbf{U}, \Delta p) = 2p_0\Delta p\mathbf{M}.\Delta \mathbf{U} + (\Delta E(p) - E'(p_0)\Delta p)\mathbf{K}.\mathbf{U}_0 \\ \quad + \Delta E(p)\mathbf{K}.\Delta \mathbf{U} + (\Delta p)^2\mathbf{M}.\mathbf{U}_0 + (\Delta p)^2\mathbf{M}.\Delta \mathbf{U} \end{cases} \quad (3.35)$$

Le terme non-linéaire satisfait  $\mathcal{F}^{\text{nl}}(\Delta\mathbf{U}, \Delta p) = O(|\Delta\mathbf{U}| \cdot |\Delta p| + |\Delta p|^2)$ . Comme le nombre d'inconnues est plus grand que le nombre d'équations, nous ajoutons une équation supplémentaire pour normaliser le mode :

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{U}^t \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}_0 = 0 \\ \mathbf{G} = E'(p_0)\mathbf{K} + 2p_0\mathbf{M} \end{cases} \quad (3.36)$$

Notons que la même condition apparait dans l'algorithme de continuation (3.3) avec  $\mathbf{G}$ , la matrice identité.

A ce stade, nous proposons d'introduire la technique d'homotopie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \Delta\mathbf{U} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}_0 \Delta p + 2p_0 \Delta p \mathbf{M} \cdot \Delta\mathbf{U} + \varepsilon (\Delta E(p) - E'(p_0) \Delta p) \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_0 \\ + \Delta E(p) \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{U} + (\Delta p)^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_0 + (\Delta p)^2 \mathbf{M} \cdot \Delta\mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{R}_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Cette transformation correspond presque exactement à la transformation (3.25). Pour une raison de commodité, nous avons fait une modification par rapport à la formule (3.25), qui ne concerne que le terme non-linéaire en  $\Delta p$ ,  $(\Delta E(p) - E'(p_0) \Delta p) \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_0$ , devant lequel nous avons introduit un  $\varepsilon$ . Cette petite astuce, qui aurait probablement pu être évitée, a simplifié notre programmation, en nous permettant de conserver les sous-programmes de calcul du développement du module d'Young  $E = \sum \varepsilon^n E_n$ , mis au point par E.M. Daya, dans le cas du module de Maxwell généralisé, sans trop compliquer le calcul des seconds membres dans les formules (3.40) et (3.41). Puisque cela ne concerne que le terme non-linéaire, cela ne modifie pas la matrice tangente, qui reste bien la matrice cohérente : il s'agit donc bien d'un algorithme de Newton d'ordre élevé. Notons aussi que si le module complexe  $E$  ne dépend pas de  $p$ , (3.37) coïncide exactement avec (3.25).

La M.A.N. est ensuite utilisée et  $\Delta U$ ,  $\Delta p$  et  $\Delta E(p)$  sont cherchés sous forme de séries entières en  $\varepsilon$  :

$$\begin{cases} \Delta U = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i U_i \\ \Delta p = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i p_i \\ \Delta E(p) = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i E_i \end{cases} \quad (3.38)$$

Après insertion de (3.38) dans (3.37), nous obtenons une série de problèmes linéaires récurrents :

Problème à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} LU_1 + GU_0 p_1 = -R_0 \\ U_1^t . G . U_0 = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Problème à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} LU_2 + GU_0 p_2 = -E_1 KU_0 + E'(p_0) p_1 KU_0 - 2p_0 p_1 MU_1 - E_1 KU_1 - p_1 p_1 MU_0 \\ U_2^t . G . U_0 = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

Problème à l'ordre j :

$$\begin{cases} LU_j + GU_0 p_j = F_j^{nl} \\ U_j^t . G . U_0 = 0 \\ F_j^{nl} = -E_{j-1} KU_0 + E'(p_0) p_{j-1} KU_0 - 2p_0 \sum_{k=1}^{j-1} p_k MU_{j-k} - \sum_{k=1}^{j-1} E_k KU_{j-k} \\ \quad - (\sum_{k=1}^{j-1} p_k p_{j-k}) MU_0 - \sum_{k=1}^{j-2} \sum_{l=1}^{j-k-1} p_k p_l MU_{j-k-l} \end{cases} \quad (3.41)$$

En considérant le vecteur inconnu  $(U_j, p_j)$ , le système (3.41) peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} [L_t] \begin{bmatrix} U_j \\ p_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & G.U_0 \\ G.U_0^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ p_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_j^{nl} \\ 0 \end{bmatrix} \\ G.U_0 = H = H^R + iH^I \\ L = L^R + iL^I \\ U_j = U_j^R + iU_j^I \\ p_j = p_j^R + ip_j^I \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Notons que  $L_t$  est un opérateur complexe. Nous cherchons ici simultanément  $(U_j, p_j)$  contrairement à l'algorithme de continuation (3.8) et (3.10).

Lors de la programmation, nous calculons simultanément les parties réelles (notée exposant R) et imaginaires (notée exposant I), en programmant (3.42) de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} L^R & -L^I & H^R & -H^I \\ -L^I & -L^R & -H^I & -H^R \\ H^R & -H^I & 0 & 0 \\ -H^I & -H^R & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j^R \\ U_j^I \\ p_j^R \\ p_j^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_j^{nlR} \\ F_j^{nlI} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

En pratique, la matrice du système ci-dessus (3.43) est réorganisée de telle sorte que, dans le vecteur inconnu, la partie réelle et la partie imaginaire de chaque d.d.l. se suivent. Ceci permet d'utiliser de façon optimale le stockage en ligne de ciel de la matrice.

A la fin de l'itération, c'est à dire lorsque tous les  $(U_j, p_j)$  sont obtenus, une nouvelle solution de départ est calculée à partir des séries (3.38) pour  $\varepsilon = 1$ . Cette procédure

est appliquée à chaque nouvelle itération. Le point de départ pour la première itération est un mode propre réel  $(\mathbf{U}, p) = (\mathbf{U}_M, i\omega_M)$  de la structure non amortie. La procédure itérative est arrêtée lorsque la norme du résidu relatif est plus petite qu'une tolérance donnée. En pratique, l'ordre de troncature  $N$  est assez grand et le nombre d'itérations assez petit (1 ou 2).

Cet algorithme de Newton à ordre élevé est fait pour être robuste. Mais, en contrepartie, la matrice tangente n'est jamais réelle, ce qui peut engendrer un coût de calcul important pour des applications aux grandes structures. En effet, cette matrice doit être calculée et inversée à chaque itération pour chaque mode. Pour améliorer cet algorithme de Newton d'ordre élevé, nous définissons, dans la section suivante, un autre algorithme itératif d'ordre élevé qui n'inversera qu'une matrice réelle à chaque mode.

### 3.3.3 Un algorithme itératif $L^*$ d'ordre élevé

En général, l'amortissement des structures n'est pas trop élevé. C'est pourquoi le problème aux valeurs propres non-linéaire peut généralement être résolu par une méthode moins coûteuse que l'algorithme exact de Newton. Le principe de cette méthode utilise à nouveau une transformation d'homotopie (3.29), avec cette fois, un opérateur  $L^*$  qui ne sera pas l'opérateur tangent. Nous le choisirons réel, ce qui permettra de découpler le calcul des parties réelles et imaginaires, voir la matrice (3.43). De plus, on prendra le même  $L^*$  à toutes les itérations. Comme dans l'algorithme précédent, nous considérons le vecteur  $(\Delta\mathbf{U}, \Delta p)$ , comme l'inconnue. Pour établir notre algorithme itératif  $L^*$  à ordre élevé, nous procédons par étape.

Tout d'abord, nous faisons apparaître dans l'équation (1.23),  $E(p_0)N$  et  $p_0^2 M$ , où  $p_0$  est la valeur initiale de  $p$ , et nous obtenons :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(p)\mathbf{K} - E(p_0)\mathbf{K} + (p^2 - p_0^2)\mathbf{M}]\mathbf{U} + (E(p_0)\mathbf{K} + p_0^2\mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

Ensuite, nous utilisons le même incrément  $(\Delta\mathbf{U}, \Delta p)$  que dans l'algorithme de Newton (3.31). L'équation précédente peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 + [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(p_0)\mathbf{K} + p_0^2\mathbf{M}]\Delta\mathbf{U} \\ + [(E(p) - E(p_0))\mathbf{K} + ((p^2 - p_0^2)\mathbf{M})](\mathbf{U}_0 + \Delta\mathbf{U}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.45)$$

avec  $\mathbf{R}_0 = [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(p_0)\mathbf{K} + p_0^2\mathbf{M}]\mathbf{U}_0$ , résidu initial. Les nombres  $p_0$ ,  $E(p_0)$  et le vecteur  $\mathbf{U}_0$  sont ici complexes. Avec l'objectif d'aboutir à une matrice  $L^*$  réelle, nous allons maintenant introduire le mode réel  $\mathbf{U}_M$  et la fréquence propre réelle  $\omega_M$ . Commençons par la fréquence :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 + (\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \omega_M^2\mathbf{M})\Delta\mathbf{U} + [E(p_0)\mathbf{K} + (p_0^2 + \omega_M^2)\mathbf{M}]\Delta\mathbf{U} \\ + [(E(p) - E(p_0))\mathbf{K} + ((p^2 - p_0^2)\mathbf{M})](\mathbf{U}_0 + \Delta\mathbf{U}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Comme nous cherchons à obtenir un opérateur  $L^*$  réel, nous faisons apparaître  $\mathbf{U}_M$ , le mode propre réel et  $\omega_M$ , dans le terme  $(p^2 - p_0^2)\mathbf{M}\mathbf{U}_0$  :

$$\begin{aligned} (p^2 - p_0^2)\mathbf{M}\mathbf{U}_0 = 2i\omega_M\Delta p\mathbf{M}\mathbf{U}_M + 2(p_0 - i\omega_M)\Delta p\mathbf{M}\mathbf{U}_M \\ + 2p_0\Delta p\mathbf{M}(\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_M) + (\Delta p)^2\mathbf{M}\mathbf{U}_0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

En utilisant l'égalité précédente (3.47) et en notant  $(\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \omega_M^2 \mathbf{M}) = \mathbf{A}_0$ , nous pouvons réécrire (3.46) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{U} + 2i\omega_M \Delta p \mathbf{M} \mathbf{U}_M + \mathbf{R}_0 \\
 & + E(p_0) \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} + (p_0^2 + \omega_M^2) \mathbf{M} \Delta \mathbf{U} + (E(p) - E(p_0)) \mathbf{K} \mathbf{U}_0 \\
 & + 2p_0 \Delta p \mathbf{M} (\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_M) + 2(p_0 - i\omega_M) \Delta p \mathbf{M} \mathbf{U}_M \\
 & + (E(p) - E(p_0)) \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} + (p^2 - p_0^2) \mathbf{M} \Delta \mathbf{U} + (\Delta p)^2 \mathbf{M} \mathbf{U}_0 = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

La technique d'homotopie est alors appliquée à ce stade du développement et nous la définissons ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{U} + 2i\omega_M \Delta p \mathbf{M} \mathbf{U}_M + \varepsilon \mathbf{R}_0 \\
 + \varepsilon [E(p_0) \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} + (p_0^2 + \omega_M^2) \mathbf{M} \Delta \mathbf{U} + (E(p) - E(p_0)) \mathbf{K} \mathbf{U}_0] \\
 + \varepsilon [2p_0 \Delta p \mathbf{M} (\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_M) + 2(p_0 - i\omega_M) \Delta p \mathbf{M} \mathbf{U}_M] + \mathcal{F}^{nl}(\Delta \mathbf{U}, \Delta p) = \mathbf{0} \\
 \mathcal{F}^{nl}(\Delta \mathbf{U}, \Delta p) = (E(p) - E(p_0)) \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} + (p^2 - p_0^2) \mathbf{M} \Delta \mathbf{U} + (\Delta p)^2 \mathbf{M} \mathbf{U}_0
 \end{array} \right. \tag{3.49}$$

La transformation ci-dessus est très comparable à la transformation générale (3.29), qui revient à introduire un  $\varepsilon$  devant le résidu initial  $\mathbf{R}_0$  et à modifier arbitrairement le terme linéaire. Ici, pour des raisons de commodité identiques à celles qui ont motivé la transformation (3.37) définissant l'algorithme de Newton, nous avons introduit un  $\varepsilon$  devant le terme  $(E(p) - E(p_0)) \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_0$  qui contient à la fois une partie linéaire et une partie non-linéaire. A cette exception près, la transformation (3.49) entre dans le cadre général (3.29). Notons que les deux premiers termes (i.e. l'opérateur  $L^*$ ) définissent un opérateur réel par rapport à la variable complexe  $(\Delta \mathbf{U}, i\Delta p)$ .



La M.A.N. est ensuite appliquée et les inconnues sont développées en séries entières de  $\varepsilon$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i U_i \\ \Delta p = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i p_i \\ \Delta E(p) = E(p) - E(p_0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i E_i \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Après insertion de (3.50) dans (3.49), nous obtenons une série de problèmes linéaires récurrents :

Problème à l'ordre 1 :

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{U}_1 + \mathbf{G} p_1 = -\mathbf{R}_0 \quad (3.51)$$

avec  $\mathbf{G} = 2i\omega_M \mathbf{M} \mathbf{U}_M$

Problème à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 \mathbf{U}_2 + \mathbf{G} p_2 = & -(E(p_0) \mathbf{K} + (p_0^2 + \omega_M^2) \mathbf{M} + E_1 \mathbf{K} + C_1 \mathbf{M}) \mathbf{U}_1 \\ & - E_1 \mathbf{K} \mathbf{U}_0 - 2(p_0 - i\omega_M) p_1 \mathbf{M} \mathbf{U}_M - 2p_0 p_1 \mathbf{M} (\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_M) + p_1^2 \mathbf{M} \mathbf{U}_0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Problème à l'ordre  $j$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_0 \mathbf{U}_j + \mathbf{G} p_j = \mathbf{F}_j^{\text{nl}} \\ \mathbf{F}_j^{\text{nl}} = -E_0 \mathbf{K} \mathbf{U}_{j-1} - (p_0^2 + \omega_M^2) \mathbf{M} \mathbf{U}_{j-1} - E_{j-1} \mathbf{K} \mathbf{U}_0 \\ \quad - 2(p_0 - i\omega_M) p_{j-1} \mathbf{M} \mathbf{U}_M - 2p_0 p_{j-1} \mathbf{M} (\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_M) \\ \quad - \sum_{k=1}^{j-1} (E_k \mathbf{K} \mathbf{U}_{j-k} + C_k \mathbf{M} \mathbf{U}_{j-k}) - (\sum_{k=1}^{j-1} p_k p_{j-k}) \mathbf{M} \mathbf{U}_0 \\ E_0 = E(p_0) \end{array} \right. \quad (3.53)$$

où  $\Delta C = p^2 - p_0^2$  est développé sous la forme  $\Delta C = \sum_{k=1}^N C_k \varepsilon_k$ .

Considérant le vecteur inconnu  $(\Delta U, \Delta p)$ , pour réécrire cette série de problèmes linéaires sous forme de matrice symétrique, il est nécessaire d'introduire la condition d'orthogonalité suivante pour l'incrément modal :

$$\Delta \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_M = 0 \quad (3.54)$$

Ce qui équivaut à :

$$\mathbf{U}_M^t \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_j = 0 \quad (3.55)$$

Notons que les équations (3.53) et (3.55) définissent un problème bien posé sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} L^* \cdot \mathbf{V}_j = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j^{\text{nl}} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{V}_j = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_j \\ p_j \end{Bmatrix} \\ L^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(0) - \omega_M^2 \mathbf{M} & -2\omega_M \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_M \\ -2\omega_M \mathbf{U}_M^t \cdot \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.56)$$

où  $L^*$  est une matrice inversible, symétrique à coefficients réels.

La suite de l'algorithme est définie de la même manière que l'algorithme de Newton à ordre élevé. Le point de départ de la première itération est  $(\mathbf{U}_M, i\omega_M)$ . A la fin de chaque itération, les séries sont calculées en prenant  $\varepsilon = 1$ , puis le résidu relatif (3.14) est calculé. Si cela est nécessaire, le développement en séries des inconnues sera

remplacé par une représentation en Padé (3.27). Le processus d'itération est effectué jusqu'à ce que le critère de convergence soit atteint.

Cet algorithme possède deux avantages par rapport aux précédents algorithmes. Premièrement, l'opérateur  $L^*$  est le même à toutes les itérations. Deuxièmement, il est réel et la partie imaginaire de  $(\Delta \mathbf{U}, \Delta p)$  peut être calculée séparément. Dans ce cas, une seule matrice réelle doit être triangulée pour toutes les itérations pour un mode donné. Cela réduit considérablement le coût en espace mémoire.

### 3.4 Organigrammes récapitulatifs des algorithmes proposés

Dans cette section, les trois algorithmes présentés précédemment (l'algorithme de continuation de E.M. Daya et M. Potier-Ferry, l'algorithme itératif de Newton d'ordre élevé et l'algorithme itératif  $L^*$  d'ordre élevé), sont présentés sous forme d'organigrammes.

#### Remarques :

- Les valeurs propres réelles et vecteurs propres réels de la structure non-amortie sont calculés à l'aide de la méthode du sous-espace [6]. Les problèmes linéaires  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{F}$  sont résolus en transformant la matrice  $\mathbf{A}$  par la méthode de Crout [30] :  $\mathbf{A} = \mathbf{W}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{W}$  où  $\mathbf{W}$  est une matrice triangulaire,  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale.
- Dans les deux algorithmes itératifs à ordre élevé, l'inconnue  $\mathbf{V}_k$  représente le mode  $\mathbf{U}_k$  et la pulsation  $p_k$ .
- Dans les trois algorithmes, Nordre représente l'ordre de troncature des séries.

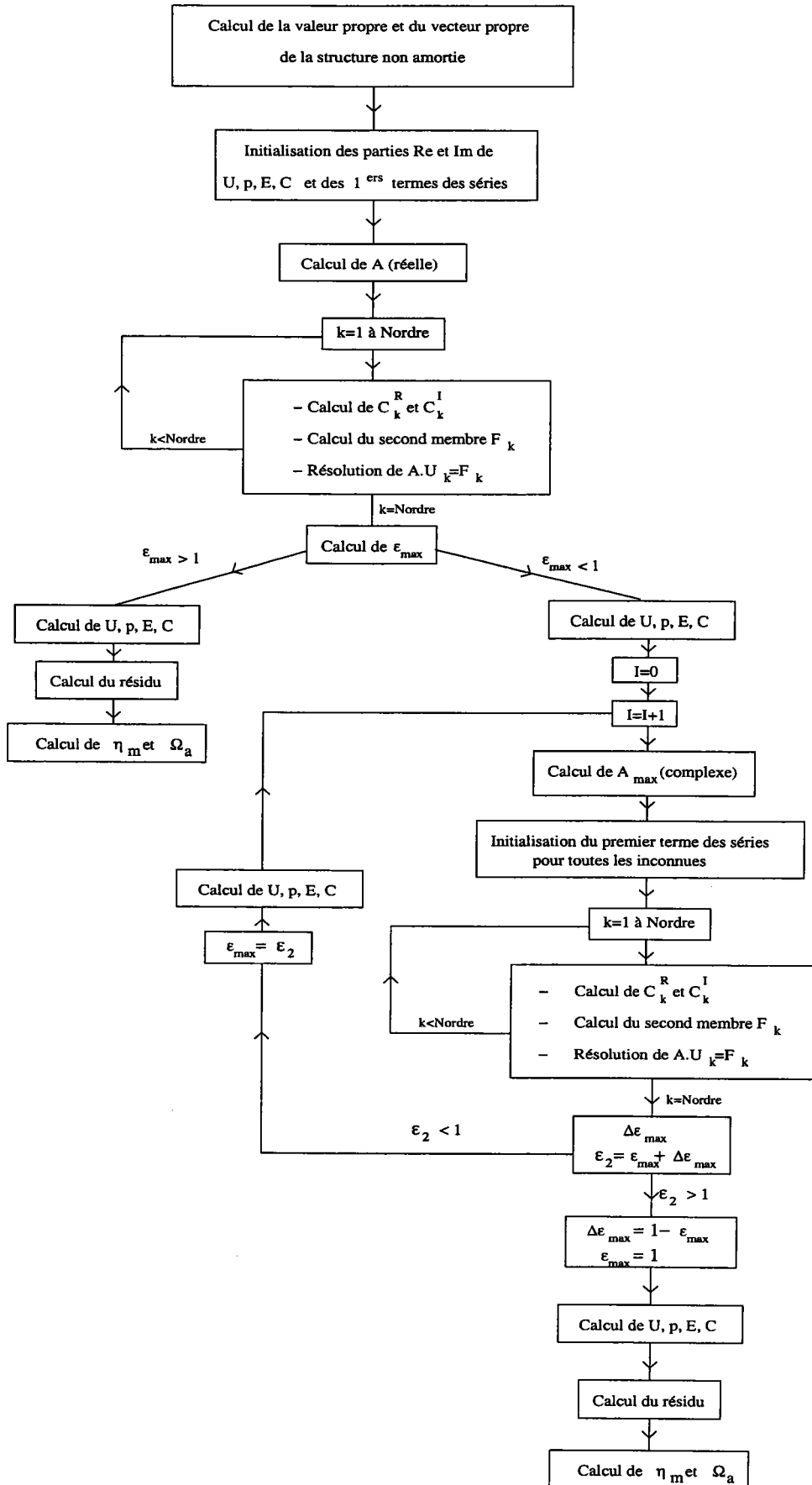


FIG. 3.1 – Organigramme de l'Algorithme de Continuation

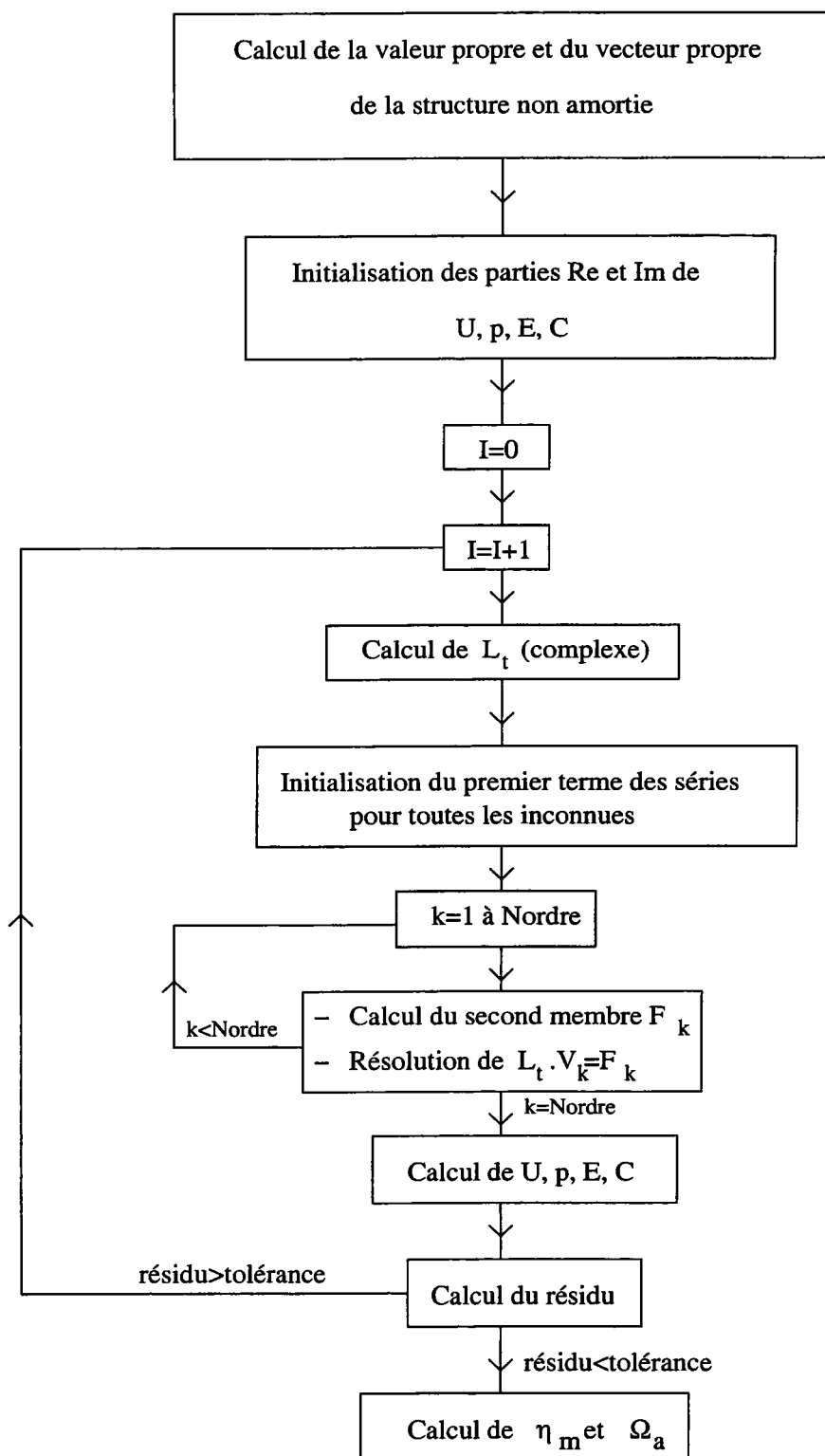


FIG. 3.2 – Organigramme de l'Algorithme Itératif de type Newton

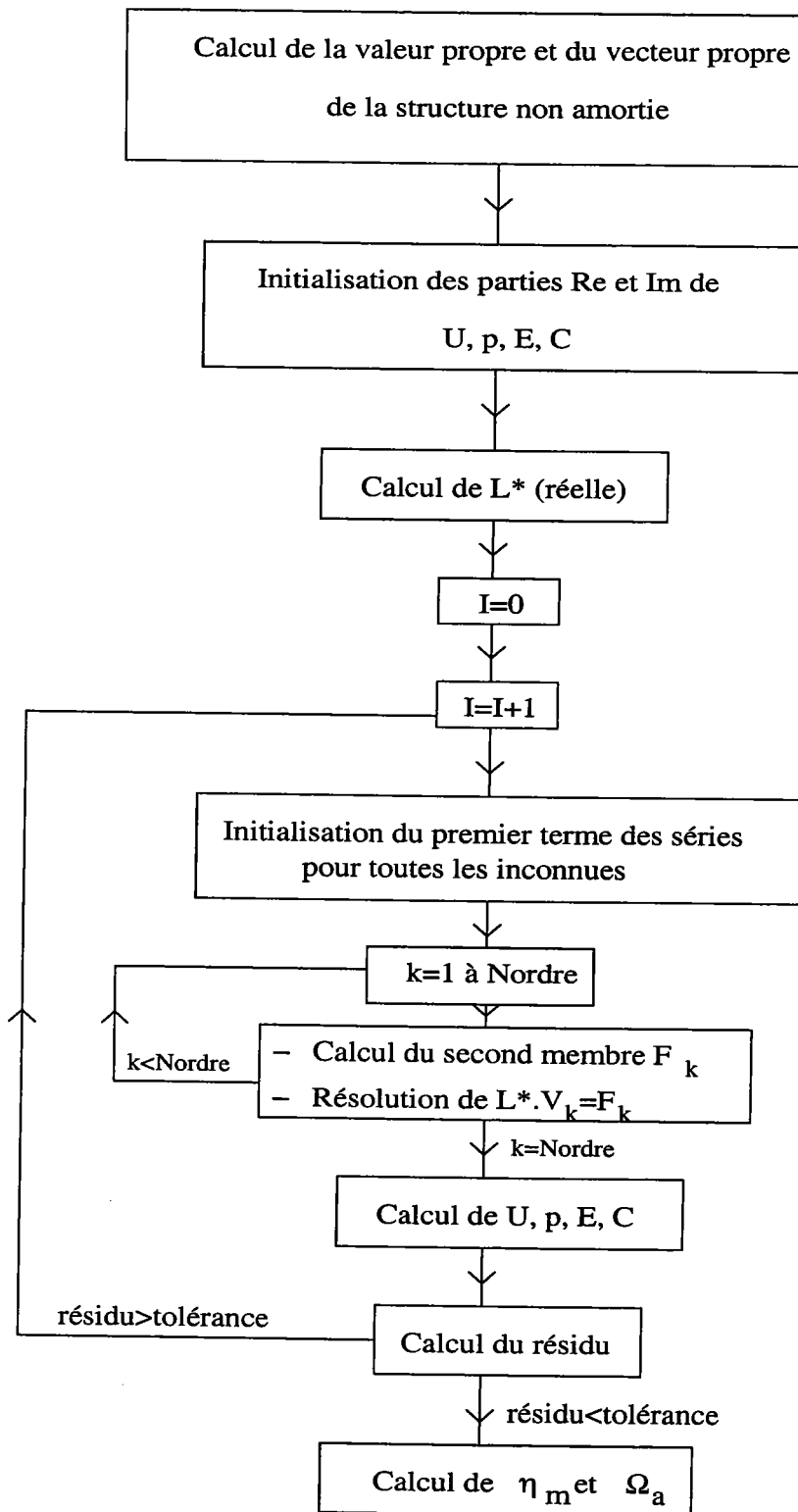


FIG. 3.3 – Organigramme de l'Algorithme Itératif  $L^*$

### 3.5 Applications numériques

Dans cette section, les deux algorithmes itératifs d'ordre élevé proposés sont appliqués à plusieurs tests. Ils seront comparés avec l'algorithme de continuation de la section 3.2.. Le premier exemple est un exemple bien connu d'une poutre encastree-libre [58]. Cela nous permettra de valider la procédure et d'évaluer l'influence de l'amortissement du matériau sur l'efficacité de l'algorithme. Un second exemple est proposé pour vérifier que l'algorithme peut être appliqué aux problèmes à grand nombre de degrés de liberté. Pour ces deux exemples, nous nous limitons à un module d'Young complexe constant. Dans les applications de la section 3.5.2., le module du matériau viscoélastique est dépendant de la fréquence. Dans les quatre premiers exemples, nous nous limitons à quelques modes, ce qui est suffisant pour beaucoup d'applications industrielles. Pour évaluer la robustesse des algorithmes, à la section 3.5.3., nous étudions 50 modes. Les exemples précédents n'utilisent que des structures de poutres ou de plaques. C'est pourquoi le sixième exemple (section 3.5.4.) est un cylindre.

Dans toutes les méthodes numériques, nous choisissons un ordre de troncature égal à vingt. Ici, les deux méthodes itératives (Newton d'ordre élevé, itérative  $L^*$  d'ordre élevé) commencent au point  $(U_0 = U_M, \omega_0 = \omega_M)$  qui est la solution du système non amorti (3.2).

Les deux procédures ont permis de calculer les solutions complexes du problème aux valeurs propres non-linéaire. Aussi, nous pouvons obtenir directement les modes complexes, les facteurs de perte et les fréquences naturelles du problème amorti. Dans ce qui suit, nous adoptons les mêmes définitions du facteur de perte modal  $\eta_m$  et de la fréquence naturelle  $f$ , qui sont décrites au chapitre 1 et que nous rappelons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta) \\ \eta : \text{amortissement} \\ f = \frac{\Omega}{2\pi} : \text{fréquence amortie} \end{array} \right.$$

### 3.5.1 Module d'Young E constant

Dans cette section, le module d'Young de la couche viscoélastique est considéré complexe et constant  $E = E_0(1 + i\eta_c)$ , où  $E_0$  est le module élastique réel et  $\eta_c$  est le facteur de perte du noyau.

#### Poutre encastree-libre

Le premier exemple est une poutre sandwich encastree-libre (177.8 mm \* 12.7 mm) qui a déjà été très étudiée par Soni [58], Johnson [29] des points de vue théorique et expérimental. Les dimensions de la poutre et les caractéristiques des matériaux sont présentées dans le tableau (3.1). Le maillage est de 20 éléments dans la longueur et de 2 dans l'épaisseur, soit de 1320 d.d.l..

Propriétés matérielles	Couches Elastiques	Couche Viscoélastique
Module d'Young	$E_a = 6.9 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	$E_0 = 1794 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$
Coefficient de Poisson	$\nu_a = 0.3$	$\nu_p = 0.3$
Densité	$\rho_a = 2766 \text{ kg/m}^3$	$\rho_p = 968.1 \text{ kg/m}^3$
Épaisseur	$h_a = 1.524 \text{ mm}$	$h_p = 0.172 \text{ mm}$

TAB. 3.1 – Propriétés matérielles pour la poutre encastree-libre

Dans l'analyse, trois valeurs différentes pour le facteur de perte de la couche centrale sont considérées : 0.1, 0.6, 1.5. Avec l'élément sandwich présenté à la section 2.3., nous avons trouvé exactement les mêmes valeurs de rapport d'amortissement  $\eta_m/\eta_c$  et de la fréquence que dans la littérature ( Tab. 3.2 et 3.4). Ceci montre que l'élément sandwich établi peut conduire à des résultats corrects. Rappelons que ce problème a



été étudié analytiquement par Rao [51], en élément fini 3D ou 2D par E.M. Daya [16], Soni [58], Sainsbury [55] ou encore en élément plaque sandwich de type DKT [37], [17].

Dans le cas d'un petit amortissement ou d'un amortissement modéré, une bonne solution est obtenue en un seul pas pour les trois algorithmes. Aussi, le résidu final est un bon critère pour évaluer leur efficacité. Celui-ci est reporté dans le tableau 3.2 pour les cinq premiers modes. On observe une bonne convergence pour les trois algorithmes. Ce qui peut être surprenant, c'est que l'algorithme itératif  $L^*$  d'ordre élevé est le plus efficace. Cependant, l'amortissement de la couche centrale étant faible, on peut supposer que l'opérateur  $L^* = K(0) - \omega_M^2 M$  est très proche de l'opérateur tangent.

$\eta_c$	Mode	$\eta_m/\eta_c$	Continuation	Newton	Itératif $L^*$
0.1	1	0.282	$9 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-10}$
	2	0.242	$9 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-10}$
	3	0.154	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-11}$
	4	0.089	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-12}$
	5	0.057	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-12}$
0.6	1	0.246	$2 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-8}$
	2	0.232	$2 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-10}$
	3	0.153	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-10}$
	4	0.089	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-10}$
	5	0.057	$3 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-11}$

TAB. 3.2 – Poutre encastree-libre avec un amortissement petit ou modéré. Trois algorithmes sont comparés : continuation, Newton, Itératif( $L^*$ ). Résidu final obtenu avec des séries tronquées à l'ordre 20. L'amortissement structural calculé  $\eta_m$  est le même dans les trois cas.

$\eta_c$	$\eta_m/\eta_c$	<i>Continuation</i>		<i>Newton</i>	<i>Iteratif L*</i>	
		<i>Res.</i>	<i>Step</i>	<i>Res.Iter1</i>	<i>Res.</i>	<i>Step</i>
1.5	0.152	$8 \cdot 10^{-6}$	2	$7 \cdot 10^{-5}$	diverge	
	0.197	$6 \cdot 10^{-6}$	2	$4 \cdot 10^{-4}$	diverge	
	0.145	$6 \cdot 10^{-6}$	2	$6 \cdot 10^{-4}$	diverge	
	0.087	$1 \cdot 10^{-4}$	2	$4 \cdot 10^{-4}$	diverge	
	0.057	$1 \cdot 10^{-4}$	2	$4 \cdot 10^{-4}$	diverge	

TAB. 3.3 – Poutre encastree-libre. Amortissement élevé. Les cinq premiers modes complexes sont calculés. Trois algorithmes sont comparés : continuation, Newton, Iteratif ( $L^*$ ). Résidu final à la fin de l'algorithme de continuation ou après chaque itération.

$\eta_c$	$\eta_m/\eta_c$	<i>Continuation</i>		<i>Newton</i>		<i>Iteratif L* + Padé</i>	
		<i>Res.</i>	<i>Step</i>	<i>Res.Iter1</i>	<i>Res.Iter2</i>	<i>Res.Iter1</i>	<i>Res.Iter2</i>
1.5	0.152	$8 \cdot 10^{-6}$	2	$7 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-8}$
	0.197	$6 \cdot 10^{-6}$	2	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-10}$
	0.145	$6 \cdot 10^{-6}$	2	$6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-8}$
	0.087	$1 \cdot 10^{-4}$	2	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-10}$	
	0.057	$1 \cdot 10^{-4}$	2	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-9}$	

TAB. 3.4 – Poutre encastree-libre. Amortissement élevé. Les cinq premiers modes complexes sont calculés. Trois algorithmes sont comparés : continuation, Newton, Iteratif ( $L^*$ ) + approximants de Padé. Résidu final à la fin de l'algorithme de continuation ou après chaque itération.

Pour un grand amortissement du noyau ( $\eta_c = 1.5$ ), l'algorithme itératif diverge ou nécessite un grand nombre d'itérations (Tab. 3.3). Cela s'explique par le fait qu'en augmentant l'amortissement du noyau de la structure sandwich, l'opérateur  $L^*$  s'éloigne de l'opérateur tangent. Pour ce cas plus difficile, les deux autres algorithmes fonctionnent bien. La méthode de continuation demande deux pas pour obtenir un résidu final plus petit que  $10^{-4}$  (ou  $10^{-5}$  pour certains modes). Il faut se souvenir que "deux pas" signifie une inversion de matrice réelle (premier pas) puis une inversion de matrice complexe. Avec l'algorithme de Newton d'ordre élevé, une solution satisfaisante est obtenue après une itération (résidu inférieur à  $6.10^{-4}$  à peu près) et une meilleure après la deuxième itération (résidu inférieur à  $2.10^{-7}$ ). Ceci établit l'intérêt du dernier algorithme, bien que le coût de calcul soit grand (deux matrices complexes à trianguler).

La représentation de Padé a été testée dans le cas de l'algorithme itératif  $L^*$  : chaque inconnue est alors développée sous forme rationnelle (3.27) et non plus polynomiale. L'algorithme converge aussi dans tous les cas en une ou deux itérations et le résidu final est aussi petit qu'espéré (voir tableau 3.4). Comme chaque mode est calculé à l'aide de l'inversion d'une seule matrice réelle, cet algorithme est le plus rapide des trois. Une fois de plus, ceci établit l'intérêt d'introduire les approximants de Padé avec la M.A.N..

La convergence d'un algorithme itératif après une seule itération est très peu commune. Cette efficacité remarquable est une caractéristique typique des algorithmes d'ordre élevé et des approximants de Padé. On peut se référer aux articles [39], [38] pour d'autres exemples, où un algorithme d'ordre élevé converge après une itération et où néanmoins l'algorithme classique de Newton (c'est à dire à l'ordre 1) nécessite 4 ou 5 itérations.

### Plaque rectangulaire

Le second exemple est une plaque sandwich (348 mm \* 304.8 mm) [28] en appui sur ses bords. Le facteur de perte de la couche centrale est modéré ( $\eta_c = 0.5$ ). Le maillage utilise 20 éléments sur chaque côté, ce qui conduit à 10248 d.d.l.. Les caractéristiques des matériaux sont données dans le tableau (3.5).

Propriétés matérielles	Couches Elastiques	Couche Viscoélastique
Module d'Young	$E_a = 6.89 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	$E_0 = 2670.08 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$
Coefficient de Poisson	$\nu_a = 0.3$	$\nu_p = 0.49$
Densité	$\rho_a = 2740 \text{ kg/m}^3$	$\rho_p = 999 \text{ kg/m}^3$
Epaisseur	$h_a = 0.762 \text{ mm}$	$h_p = 0.254 \text{ mm}$

TAB. 3.5 – Propriétés de la plaque sandwich

$f(\text{Hz})$	$\eta_m/\eta_c$	Continuation	Newton	Iteratif $L^*$
87.4	0.379	$9 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-11}$
148.9	0.329	$2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-11}$
169.9	0.308	$3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-11}$
223.9	0.278	$5 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-11}$
241	0.269	$1 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-12}$
289.8	0.239	$8 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-12}$

TAB. 3.6 – Plaque rectangulaire en appui sur les bords. Amortissement modéré ( $\eta_m=0.5$ ). Trois algorithmes sont comparés. Résidu final après un pas ou une itération.

Dans le tableau (3.6), six modes ont été calculés. Dans tous les cas, une seule série est nécessaire pour obtenir la bonne solution. Les valeurs du résidu final nous permettent de comparer les algorithmes. Comme pour le premier exemple, la méthode itérative  $L^*$  donne de meilleurs résultats (cf Tab. 3.6). On peut donc dire que les algorithmes itératifs présentés ( $L^*$  ou Newton) fonctionnent aussi pour un grand nombre de d.d.l..

### 3.5.2 Module d'Young E dépendant de la fréquence

Les exemples présentés dans cette section, ont été réalisés pour évaluer la faculté des algorithmes développés, à utiliser une loi viscoélastique dépendante de la fréquence. Le module d'Young du matériau viscoélastique dépendant de la fréquence est représenté par le modèle de Maxwell généralisé, qui peut être écrit sous la forme suivante :

$$E(\omega) = k_0 + \eta_0 i\omega + \sum_{j=1}^{N_{Max}} \frac{i\omega}{\left(\frac{i\omega}{k_j} + \frac{1}{\eta_j}\right)}$$

Le nombre d'éléments de Maxwell  $N_{Max}$  est très important dans le cas présent ( $N_{Max} = 129$ ). Les coefficients du matériau  $k_i$  et  $\eta_i$  du modèle ont été fournis par le groupe ARCELOR (Sollac Florange), qui a réalisé des expériences de vibration [33] (voir section 1.2.1.). A la figure (3.4), les parties réelles et imaginaires du module E de la couche centrale viscoélastique considérée sont représentées en fonction de la fréquence.

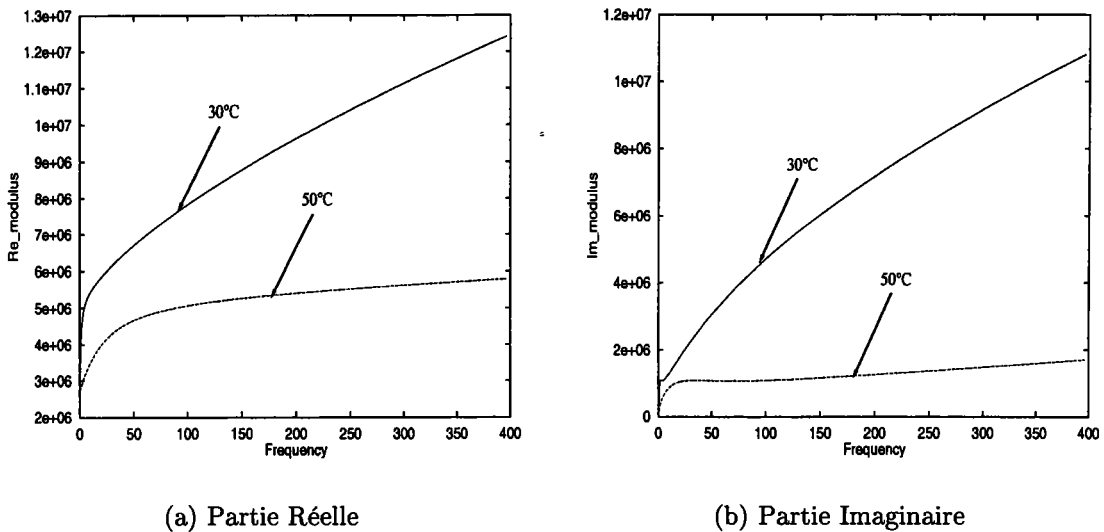


FIG. 3.4 – Parties réelles et imaginaires du module d'Young du polymère considéré en fonction de la fréquence à 50°C et 30°C et 50°C

### Poutre encastree-libre

Les propriétés de la poutre sandwich encastree-libre sont données dans le tableau (3.7). Le maillage utilise 424 d.d.l.. Les températures utilisées pour les simulations sont 30°C et 50°C.

Propriétés matérielles	Couches Elastiques	Couche Viscoélastique
Module d'Young	$E_a = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$	$E_p = 27.216 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$
Coefficient de Poisson	$\nu_a = 0.3$	$\nu_p = 0.44$
Densité	$\rho_a = 7800 \text{ kg/m}^3$	$\rho_p = 1200 \text{ kg/m}^3$
Epaisseur	$h_a = 0.6 \text{ mm}$	$h_p = 0.045 \text{ mm}$

TAB. 3.7 – Propriétés de la poutre sandwich (178\*10mm)

$T(^{\circ}\text{C})$	Rés. Experimentaux		Rés. Numériques		Newton		Iteratif $L^* + \text{Padé}$	
	$f(\text{Hz})$	$\eta_m$	$f(\text{Hz})$	$\eta_m$	Res.	Iter	Res.	Iter
50	35	$3.1 \cdot 10^{-2}$	31	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-6}$	1	$4 \cdot 10^{-6}$	1
	150	$6.5 \cdot 10^{-2}$	159	$6.6 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-5}$	1	$3 \cdot 10^{-7}$	1
	365	$9.2 \cdot 10^{-2}$	390	$9.5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	1	$1 \cdot 10^{-7}$	1
30	37	$5.6 \cdot 10^{-2}$	32	$3.4 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-5}$	1	$7 \cdot 10^{-5}$	1
	167	$1.54 \cdot 10^{-1}$	177	$1.6 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-4}$	1	$2 \cdot 10^{-4}$	2
	-	-	464	$2.4 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-6}$	2	$1 \cdot 10^{-5}$	3

TAB. 3.8 – Poutre sandwich encastree-libre. Viscoélasticité : Maxwell généralisé à 50°C et 30°C. Fréquences naturelles, facteur de perte, résidu final et nombre d'itérations. Deux algorithmes itératifs sont comparés.

Les résultats sont résumés dans le tableau (3.8). Généralement, on observe un bon accord entre la théorie et les expériences. Quelquefois, des disparités existent spécialement pour le facteur de perte. Cependant, celles-ci ne sont pas dues aux techniques numériques utilisées. En effet, plusieurs discrétisations numériques ont été considérées par E.M. Daya et M. Potier-Ferry ([16], [17]) et comparées avec les résultats analytiques, et coïncident avec les résultats obtenus avec l'élément fini présenté. Il est donc probable que ces différences sont principalement dues à la modélisation des propriétés

viscoélastiques du noyau à partir d'un seul essai expérimental.

Les deux algorithmes itératifs sont appliqués pour calculer les trois premières fréquences. Les itérations sont stoppées lorsque le résidu est plus petit que  $5 \cdot 10^{-4}$ . L'algorithme de Newton converge en une seule itération excepté pour un cas. La technique itérative  $L^*$  converge seulement si elle est associée aux approximants de Padé. Dans ce cas, elle converge rapidement, souvent en une itération (voir Tab. 3.8).

Remarque :

Le nombre d'itérations varie en fonction de l'ordre de troncature des séries.

Ceci a été mis en évidence à la température de  $50^\circ\text{C}$ , dans le tableau (3.9).

mode	Ordre	Newton				Itératif $L^*$ +Padé			
		$f(Hz)$	$\eta_m$	Rés.	Iter.	$f(Hz)$	$\eta_m$	Rés.	Iter.
1	3	31.09	$3.05 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-8}$	2	31.1	$3.39 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-6}$	23+P
	10	-	-	$8 \cdot 10^{-6}$	1	31.09	$3.05 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-8}$	2+P
	20	-	-	$8 \cdot 10^{-6}$	1	-	-	$4 \cdot 10^{-6}$	1+P
2	3	159.27	$6.48 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-5}$	2	160.32	$8.17 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-5}$	60+P
	10	159.31	$6.56 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-5}$	1	159.31	$6.56 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-8}$	2+P
	20	-	-	$7 \cdot 10^{-5}$	1	-	-	$1 \cdot 10^{-7}$	1+P
3	3	390.31	$9.37 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-6}$	2	diverge			
	10	390.47	$9.46 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-9}$	2	390.47	$9.46 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-6}$	2+P
	20	-	-	$3 \cdot 10^{-9}$	2	-	-	$1 \cdot 10^{-7}$	1+P

TAB. 3.9 – Convergence selon l'ordre de troncature des séries à  $50^\circ\text{C}$  pour la poutre encastree-libre

Dans ce tableau, le nombre d'itérations et le résidu final correspondant aux trois premières fréquences sont présentés. Nous pouvons observer, surtout pour l'algorithme itératif  $L^*$ , qu'un ordre de troncature égal à 3 est nettement moins bon qu'un ordre égal à 10, lui-même moins bon qu'un ordre de 20.



Si on étudie les fréquences et amortissements de la même poutre mais à 70°C, le tableau (3.10) peut être établi. Celui-ci confirme la convergence des deux algorithmes itératifs en une itération, sauf pour un cas. En revanche, si on s'intéresse aux valeurs propres des vibrations de la structure à la température de 20°C, le tableau (3.11) nous montre la difficulté des algorithmes à converger. Ceci est probablement dû aux valeurs des coefficients du modèle viscoélastique, qui ne sont plus représentatifs du comportement à cette température, ou au caractère itératif des algorithmes.

$f(Hz)$	$\eta_m$	Newton		Itératif L*+Padé	
		Res.	Iter.	Res.	Iter.
30.32	$2.89 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-6}$	1	$2 \cdot 10^{-10}$	1+P
152.68	$8.08 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-5}$	1	$5 \cdot 10^{-8}$	1+P
377.06	$7.27 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-9}$	2	$5 \cdot 10^{-8}$	1+P

TAB. 3.10 – Poutre encastree-libre à 70°C. Calculs de la fréquence et du rapport  $\eta_m/\eta_c$  des trois premiers modes, effectués avec les algorithmes de Newton et itératif L\* + les approximants de Padé

Expérience		Newton				Itératif L*+Padé			
$f(Hz)$	$\eta_m$	$f(Hz)$	$\eta_m$	Res.	Iter.	$f(Hz)$	$\eta_m$	Res.	Iter.
38	$5.22 \cdot 10^{-2}$	32.8	$3.38 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-5}$	1	32.53	$6.08 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-5}$	5+P
188	$1.09 \cdot 10^{-1}$	197.8	$9.9 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-7}$	2	diverge			
519	$1.44 \cdot 10^{-1}$	diverge				diverge			

TAB. 3.11 – Poutre encastree-libre à 20°C. Calculs de la fréquence et du rapport  $\eta_m/\eta_c$  des trois premiers modes, effectués avec les algorithmes de Newton et itératif L\* + les approximants de Padé

### Plaque aux bords encastres

Cet exemple concerne la plaque étudiée précédemment à la section 3.5.1., mais, cette fois-ci, elle est encastree le long de ses bords. Les températures considérées sont à nouveau 30°C et 50°C.



$T(^{\circ}C)$	Rés. Numériques		<i>Newton</i>		<i>Itératif <math>L^* + Padé</math></i>	
	$f(Hz)$	$\eta_m$	<i>Res.</i>	<i>Iter</i>	<i>Res.</i>	<i>Iter</i>
50	99	$9.06 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-5}$	1	$1 \cdot 10^{-8}$	1 + <i>P</i>
	166	$9.28 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-5}$	1	$1 \cdot 10^{-8}$	1 + <i>P</i>
	192	$9.30 \cdot 10^{-2}$	diverge		$4 \cdot 10^{-9}$	1 + <i>P</i>
30	111	0.236	$3 \cdot 10^{-5}$	1	$4 \cdot 10^{-6}$	1 + <i>P</i>
	196	0.297	$2 \cdot 10^{-9}$	2	$7 \cdot 10^{-9}$	2 + <i>P</i>
	225	0.313	$2 \cdot 10^{-9}$	2	$5 \cdot 10^{-8}$	2 + <i>P</i>

TAB. 3.12 – Plaque sandwich encastree le long de ses bords. Viscoélasticité : Maxwell généralisé à 50°C et 30°C. Fréquences naturelles, facteur de perte, résidu final et nombre d'itérations. Deux algorithmes itératifs sont comparés.

Cet exemple (Tab. 3.12) nous montre à nouveau l'efficacité de l'algorithme itératif  $L^*$  associé aux approximants de Padé. Les deux méthodes fonctionnent donc bien avec un module d'Young  $E$  dépendant de la fréquence et lorsque le nombre de d.d.l. est important (ici 1281 nœuds).

### 3.5.3 Test de robustesse des algorithmes

Dans les tests précédents, nous avons restreint la discussion à quelques modes de basses fréquences. Cela correspond à une demande industrielle, en vue d'étudier les coques sandwich conçues pour réduire le bruit. Cependant, nous pouvons nous demander si les algorithmes présentés peuvent conduire à une stratégie de calcul robuste.

Dans cette optique, nous avons considéré à nouveau la poutre encastree-libre définie à la section 3.5.1, avec un amortissement assez modéré  $\eta_c = 0.6$ , mais nous avons cherché les 50 premiers modes (voir Annexe C). Les procédures itératives ont été poursuivies jusqu'à ce que le résidu soit inférieur à  $10^{-4}$  et le nombre d'itérations a été limité à 3. L'algorithme de Newton ayant donné de moins bons résultats que l'algorithme itératif  $L^*$  (voir Annexe C), il n'a pas été pris en compte dans l'étude suivante.

Tout d'abord, nous avons commencé avec l'algorithme itératif  $L^*$  à l'ordre 20. Celui-

ci converge après seulement une itération pour 41 cas, après deux itérations pour le mode 19 et après trois itérations pour le mode 24.

Parmi les sept modes restants, deux fréquences non amorties sont très proches. Nous pouvons en conclure que la convergence de la procédure itérative est très bonne pour des valeurs propres bien séparées. Cependant, des valeurs propres presque doubles peuvent conduire à la divergence de la procédure. Dans ce cas, il apparaît parfois que la procédure itérative converge vers une autre valeur propre. Dans ces sept cas, nous avons appliqué la méthode de continuation, avec des valeurs variables pour l'ordre de troncature (10 ou 20) et pour le paramètre de précision  $\delta$  ( $10^{-4}$ ,  $10^{-8}$ ,  $10^{-15}$ ). Ces calculs donnent des résultats cohérents sauf pour le mode 21. En particulier, dans ces six cas, nous avons toujours observé les faits suivants :

- 1- quels que soient les paramètres du calcul, nous obtenons les mêmes valeurs propres complexes et les mêmes facteurs de perte,
- 2- la fréquence amortie reste proche de la fréquence non amortie,
- 3- le résidu final est suffisamment petit (plus petit que  $3 \cdot 10^{-4}$ ).

Le coût de ces calculs peut être important : si le mode 37 et le mode 46 sont obtenus après un seul pas, les quatre autres modes demandent de 3 à 8 pas, c'est à dire plusieurs triangulations de matrices complexes.

Nous n'avons pas pu obtenir de résultats cohérents pour le dernier mode : le mode 21. La méthode de continuation a été appliquée avec quatre séries de paramètres de calcul : ordre 10,  $\eta = 10^{-4}$ ; ordre 20,  $\eta = 10^{-4}$ ; ordre 20,  $\eta = 10^{-8}$ ; ordre 20,  $\eta = 10^{-15}$  (voir Tableau 3.13). En dépit d'un grand nombre de pas (de 17 à 31), les quatre calculs conduisent à quatre valeurs propres complexes différentes. Notons que trois valeurs propres non amorties sont très proches dans ce cas : 9813 Hz, 9881 Hz, 9974 Hz pour les modes 21, 22, et 23.

<i>Ordre</i>	<i>Precision <math>\delta</math></i>	<i>f(Hz)</i>	<i><math>\eta_m/\eta_c</math></i>	<i>Nb Pas</i>	<i>Res.</i>
10	$10^{-4}$	9885	0.122	19	$10^{-3}$
20	$10^{-4}$	9968	$6.410^{-2}$	19	$10^{-3}$
20	$10^{-8}$	9817	0.504	17	$10^{-3}$
20	$10^{-15}$	9951	0.576	31	$10^{-3}$

TAB. 3.13 – Etude du mode 21 par la méthode de continuation

Donc, même en combinant le meilleur algorithme itératif et la méthode de continuation, la classe d'algorithmes présentée n'est pas complètement robuste. Il semble que les difficultés se produisent dans le cas de modes propres presque coïncidents. Pour confirmer cette idée, nous avons étudié les 100 premiers modes d'une plaque encastrée le long de ses bords. Cette plaque a les mêmes caractéristiques que la plaque des exemples précédents mais avec un coefficient d'amortissement de la couche centrale relativement grand ( $\eta_c = 1.5$ ). Sur 100 modes, pour obtenir un résidu inférieur à  $10^{-4}$ , l'algorithme itératif  $L^*$  diverge seulement pour 3 modes : les modes 81, 82 et 99. Nous avons pu constater à nouveau, qu'il existait, dans ces cas, des modes coïncidents : les modes 81 et 82, les modes 98 et 99. Pour ces modes, nous avons appliqué la méthode de continuation. Celle-ci a nécessité environ 10 pas avant convergence.

D'après ces tests, on peut conclure qu'il faut prendre en compte dans l'analyse les problèmes des valeurs propres voisines.

### 3.5.4 Cylindre

Dans les tests précédents, seules les vibrations libres de poutres ou de plaques ont été simulées. C'est pourquoi ici, nous étudions un cylindre troué. Celui-ci est représenté à la figure (3.5). L'épaisseur des couches élastiques est de 0.6 mm et celle de la couche centrale viscoélastique de 0.045 mm. Les caractéristiques des matériaux sont celles données dans le tableau (3.7). Le maillage utilise 432 éléments, soit 1430 nœuds et 11440 d.d.l.. Les fréquences et amortissements de ce cylindre sont calculés en

considérant un module d'Young de la couche centrale fixe :  $\eta_c = 0.2$ . Le calcul est effectué à l'aide des algorithmes itératifs d'ordre élevé (Newton et  $L^*$ ). L'ordre de troncature est égal à 20. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau (3.14).

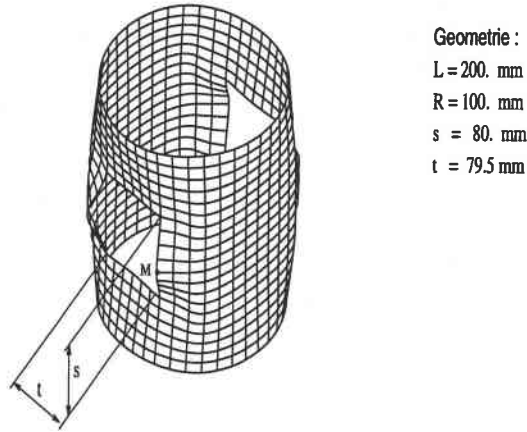


FIG. 3.5 – Représentation du cylindre troué

$f$ (Hz)	$\eta_m/\eta_c$	Newton		Itératif $L^*$ +Padé	
		Res.	Iter.	Res.	Iter.
917.51	$8.88 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-6}$	2	$6 \cdot 10^{-10}$	1
919.69	$8.91 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-5}$	2	$1 \cdot 10^{-5}$	2+P
919.65	$7.72 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$	1	$2 \cdot 10^{-5}$	1+P
921.36	$7.58 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-5}$	1	$1 \cdot 10^{-6}$	1+P
1147.97	$9.81 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$	1	$5 \cdot 10^{-12}$	1
1149.22	$9.62 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$	1	$7 \cdot 10^{-7}$	1
1180.21	$4.46 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-6}$	1	$5 \cdot 10^{-12}$	1
1200.52	$4.27 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-6}$	1	$4 \cdot 10^{-12}$	1
1353.00	0.1044	$10^{-5}$	1	$3 \cdot 10^{-12}$	1
1354.53	0.1051	$2 \cdot 10^{-5}$	1	$6 \cdot 10^{-12}$	1+P

TAB. 3.14 – Cylindre encasté à ses extrémités. Calculs des fréquences ( $f$ ) et du rapport  $\eta_m/\eta_c$  des 10 premiers modes, effectués avec les algorithmes de Newton et itératif  $L^*$  + les approximants de Padé

Ces résultats montrent l'efficacité et la fiabilité des procédures pour ce problème ayant un assez grand nombre de degrés de liberté. Les deux algorithmes convergent vite, en une seule itération dans dix sept cas, deux itérations dans les trois autres cas. Notons que ce test est assez sévère, malgré la valeur assez faible de l'amortissement (correspondant à des ordres de grandeurs rencontrés en pratique), à cause de la grande

proximité des fréquences propres, qui se présentent sous forme de paquets de 2 ou 4. Notons que ces valeurs propres quasi-multiples sont dues aux symétries du cylindre, les petites différences entre ces valeurs propres résultant des dissymétries du maillage.

### 3.5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, deux méthodes itératives d'ordre élevé ont été proposées. Elles ont été appliquées pour calculer les modes complexes et amortissements des structures sandwich viscoélastiques. Elles sont basées sur les techniques d'homotopie et de perturbation. La première est une méthode itérative de Newton à ordre élevé. Cette méthode qui est généralement très robuste, est un peu décevante pour la classe de problèmes aux valeurs propres non-linéaires considérée. La seconde est une méthode itérative à ordre élevé ( $L^*$ ), qui demande seulement l'inversion d'une seule matrice réelle par mode complexe. Plusieurs tests ont été réalisés utilisant un nombre important de d.d.l., ou un grand amortissement, ou un module d'Young dépendant de la fréquence. Dans beaucoup de cas, la méthode itérative  $L^*$  converge rapidement quand elle est associée aux approximations de Padé. Néanmoins, elle peut échouer lorsque des modes sont très proches. En l'associant avec la méthode de continuation de E.M. Daya et M. Potier-Ferry [16], nous obtenons les fréquences propres dans tous les cas testés sauf un. Ainsi, la robustesse de l'algorithme doit encore être améliorée.

D'après les tests numériques, le meilleur algorithme serait le suivant : d'abord, il faudrait commencer par faire quelques itérations avec l'algorithme itératif d'ordre élevé  $L^*$ , puisqu'il est peu coûteux et converge rapidement dans beaucoup de cas. S'il ne converge pas, il faudrait recommencer avec l'algorithme de continuation, qui est plus fiable.

Il est à noter que ces conclusions valent seulement pour les structures viscoélastiques, où les modes et les valeurs propres amortis ne sont pas très éloignés des modes et des valeurs propres non-amortis.

## CHAPITRE 4

# Amortissement actif - Couplage avec l'amortissement passif

### 4.1 Introduction

Jusqu'ici, nous avons étudié l'amortissement "passif", introduit par une couche viscoélastique. Mais, il faut savoir qu'un amortissement dit "actif" existe également et que parfois, ces deux types d'amortissements, "actifs" et "passifs", sont utilisés simultanément. Dans ce cas, on parle de contrôle hybride "actif-passif". L'amortissement "actif" fait l'objet de ce dernier chapitre.

Pour créer de l'amortissement "actif", il est nécessaire d'utiliser des capteurs (*sensor*) et actionneurs (*actuator*). Ces derniers sont des céramiques piézoélectriques. Les matériaux piézoélectriques ont la capacité de se polariser lorsqu'une contrainte leur est imposée. Cette polarisation ( $\vec{P}$ ) est proportionnelle à la contrainte et change de signe avec elle. Ce phénomène est appelé effet piézoélectrique direct et il est réversible. On parle alors d'effet piézoélectrique inverse : une polarisation résultant de l'application d'un champ électrique ( $\vec{E}$ ) entraîne une déformation du même matériau piézoélectrique. Donc, un capteur piézoélectrique, en se polarisant, informe un "contrôleur" d'une déformation de la structure contrôlée. Le "contrôleur" peut alors agir sur la déformation de la structure en appliquant un champ sur l'actionneur piézoélectrique. Ces caractéristiques des matériaux piézoélectriques leur valent le nom

de matériaux intelligents. Il existe deux types de mécanismes d'action piézoélectrique : le mécanisme d'action par extension, dans ce cas le champ électrique  $\vec{E}$  imposé et la polarisation  $\vec{P}$  du matériau ont même direction (transversale), et le mécanisme d'action par cisaillement (Fig. 4.1).

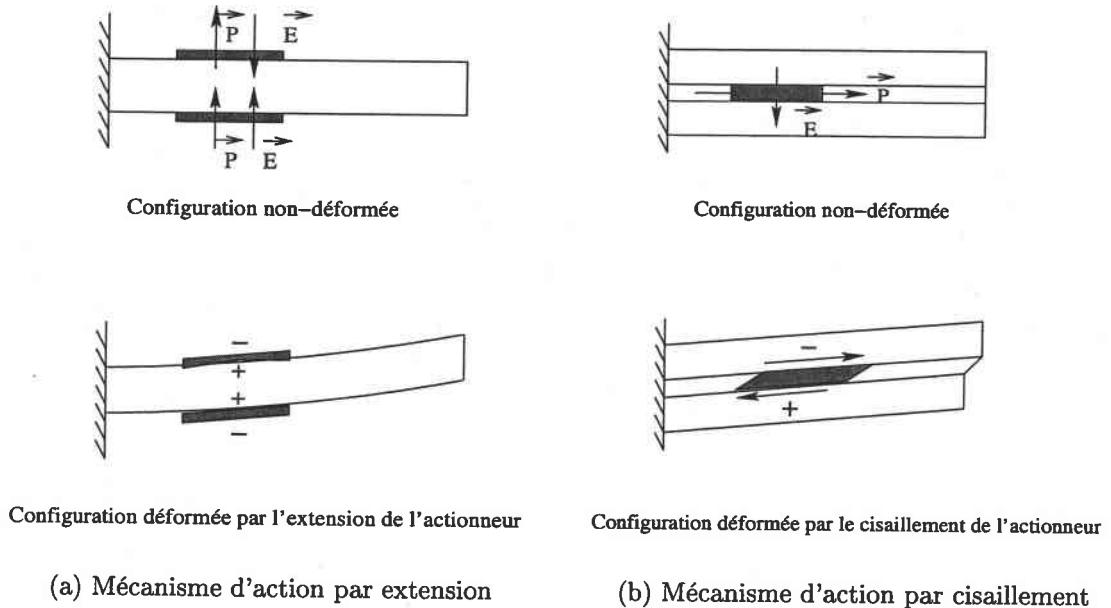


FIG. 4.1 – Mécanismes d'action piézoélectrique

Ici, nous limiterons notre étude à des mécanismes par extension. La structure à étudier peut être recouverte de matériau piézoélectrique entièrement ou partiellement. Dans ce dernier cas, on parle alors de patches ou pastilles piézoélectriques. Ceux-ci peuvent être placés n'importe où, de part et d'autre de la structure. Mais, des études ont montré que des actionneurs/capteurs co-localisés facilitent le contrôle et aboutissent à des systèmes stables.

Dans ce chapitre, nous proposons une approche modale des valeurs propres complexes (amortissements et fréquences amorties) des structures stratifiées, où les couches piézoélectriques jouent le rôle de capteurs et actionneurs. Ceci représente l'originalité de notre analyse des structures piézoélectriques. Nous étudions deux poutres : l'une sandwich à trois couches (piézoélectrique/élastique/piézoélectrique) et l'autre sand-

wich à cinq couches (piézoélectrique/élastique / viscoélastique/élastique/piézoélectrique). Pour chacune, un modèle analytique est proposé et deux lois de contrôle actif sont appliquées. A l'aide de quelques hypothèses, nous aboutissons à l'expression simplifiée de la pulsation amortie et de l'amortissement, en fonction de quelques paramètres (gain de contrôle, épaisseur des couches, ...). Divers niveaux d'approximations seront étudiés.

Avant de développer ces modèles analytiques, nous présentons trois grands types de lois de contrôle.

Remarque :

Les termes relatifs aux capteurs (respectivement aux actionneurs) auront "s" (respectivement "a") comme indice ou exposant.

## 4.2 Lois de contrôle

Les vibrations des structures sandwich piézoélectriques sont contrôlées à l'aide de capteurs et d'actionneurs. Les capteurs piézoélectriques permettent de mesurer une quantité, par exemple le potentiel électrique appelé dans ce cas, potentiel de sortie. Un contrôleur analyse ces mesures et peut ensuite appliquer un potentiel électrique ou une charge électrique à l'actionneur. Ainsi, il peut rectifier, contrôler, l'amplitude des vibrations et/ou l'amortissement des structures sandwich piézoélectriques. Ce type de contrôle est appelé contrôle par rétroaction (*feedback control*). Il existe trois grands types de lois de contrôle par rétroaction :



### 1 - Loi rétroactive de Lyapunov

Le potentiel appliqué à l'actionneur,  $\Phi_A(t)$ , est de signe opposé au potentiel de sortie  $\Phi_S(t)$  et sa valeur absolue est fixe :

$$\{\Phi_A(t)\} = -\Phi_{max} \text{sgn}\{\{\Phi_S(t)\}\} \quad (4.1)$$

Il est à noter que le contrôleur, suivant la loi de Lyapunov, est non-linéaire et discontinu.

### 2 - Loi rétroactive proportionnelle et directe (*Direct proportional feedback*)

Comme son nom l'indique, utiliser cette loi revient à appliquer à l'actionneur, un potentiel directement proportionnel au potentiel de sortie. Ce potentiel s'écrit :

$$\{\Phi_A(t)\} = [G_c] \{\Phi_S(t)\} \quad (4.2)$$

où  $[G_c]$  représente le gain de contrôle.

Cette loi de contrôle a été utilisée par Liu et al. [35] et Wang et al. [62], par exemple.

### 3 - Loi rétroactive en vitesse avec gain constant négatif (*Constant gain negative velocity feedback*)

Cette loi, utilisée par Pietrzakowski [47] et par Huang et Sun [25], est telle que le potentiel appliqué à l'actionneur est égal à l'opposé de la dérivée du potentiel de sortie multiplié par un gain  $[G_c]$  :

$$\{\Phi_A(t)\} = [G_c] \{\dot{\Phi}_S(t)\} \quad (4.3)$$

Remarques :

1 - Ces deux dernières lois peuvent être employées simultanément [61, 45]. On parle alors de contrôle proportionnel-dérivatif (*proportional derivative control*).

2 - Ces trois types de lois de contrôle, proportionnelle, dérivative, proportionnelle-dérivative, occupent la majeure partie des travaux car ils sont simples dans la conception et dans la mise en oeuvre.

3 - Seules les lois de contrôle proportionnelle et dérivative seront appliquées dans notre étude.

S'il semble simple de contrôler les vibrations des structures sandwich piézoélectriques, il ne faut pas oublier que les matériaux piézoélectriques ont certaines limites qu'il ne faut pas dépasser. Dans le contrôle actif, le potentiel électrique appliqué doit donc être inférieur au potentiel électrique maximal supportable par l'actionneur piézoélectrique. Il est donc indispensable de connaître les gains de contrôle optimaux utilisables. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser la théorie des lois de contrôle. Cette théorie de contrôle optimal est souvent appliquée au cas pratique du contrôle optimal quadratique linéaire : régulateur linéaire quadratique (LQR) [5] ou contrôleur linéaire quadratique Gaussien (LQG) [56]. Dans ce document, nous ne tiendrons pas compte des limites de champ électrique à appliquer, et nous ne calculerons pas le gain maximal "autorisé". Pour plus d'explications et de précisions sur la théorie de contrôle optimal, le lecteur pourra se reporter à la thèse de M. Areias Trindade [60].

## 4.3 Modélisation des couches minces piézoélectriques

Dans cette section, nous rappelons la loi de comportement des matériaux piézoélectriques orthotropes. Puis, nous donnons une description de l'état électrique. Ceci nous permettra d'étudier deux modèles de poutres piézoélectriques sur lesquels deux lois de contrôle actif seront appliquées.

### 4.3.1 Loi de comportement des matériaux piézoélectriques

Nous avons dit précédemment que les matériaux piézoélectriques étaient tels qu'une contrainte appliquée à ce matériau créait un déplacement électrique (effet piézoélectrique direct) et qu'un champ électrique appliqué entraînait l'existence d'une contrainte (effet piézoélectrique inverse). Ceci s'exprime dans les équations piézoélectriques linéaires d'un matériau piézoélectrique :

$$\begin{cases} \sigma = \mathbf{c}\varepsilon - \mathbf{e}^t \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \mathbf{e}\varepsilon + \epsilon \mathbf{E} \end{cases} \quad (4.4)$$

$\sigma$  et  $\varepsilon$  représentent respectivement les vecteurs de contrainte et de déformation.  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  sont les vecteurs champ électrique et déplacement électrique.  $\mathbf{c}$  est la matrice d'élasticité,  $\mathbf{e}$  la matrice des constantes piézoélectriques et  $\epsilon$  la matrice des constantes diélectriques. Ici, les matériaux piézoélectriques sont considérés orthotropes et les axes d'orthotropie correspondent aux axes de la poutre. Comme le mécanisme étudié est le mécanisme d'extension, les matériaux sont polarisés dans la direction de l'épaisseur (soit la direction  $z$  ou  $3$ ). Leur loi de comportement s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -e_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & | & 0 & -e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 & | & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & | & \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & | & 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \\ \hline E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Les couches piézoélectriques sont supposées fines. Cela permet de négliger les déformations de cisaillement transverse, c'est à dire :

$$\epsilon_4 = \epsilon_5 = 0 \quad (4.6)$$

Les champs de déplacement considérés sont indépendants de  $y$  et nuls suivant la direction  $y$ . Cela équivaut à :

$$\epsilon_2 = \epsilon_6 = 0 \quad (4.7)$$

Nous supposons la composante  $\sigma_3=0$  dans (4.5). Ainsi, nous obtenons :

$$\epsilon_3 = \frac{1}{c_{33}}(e_{33}E_3 - c_{13}\epsilon_1) \quad (4.8)$$

Comme, dans le cas de l'actionneur, seul le champ électrique dans la direction de l'épaisseur est imposé, et dans le cas du capteur, le champ électrique induit dans cette même direction est grand par rapport à ceux induits dans les directions  $x$  (ou

1) et  $y$  (ou 2), la contribution à l'énergie électromécanique des composantes du champ électrique  $E_1$  et  $E_2$ , est généralement faible. C'est pourquoi nous considérons :

$$E_1 = E_2 = 0 \quad (4.9)$$

En injectant  $\sigma_3=0$  et en tenant compte de (4.6), (4.7) et (4.9), dans la loi de comportement (4.5), nous obtenons les égalités suivantes :

$$D_1 = D_2 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0 \quad (4.10)$$

Ainsi simplifiée, la loi de comportement d'un matériau piézoélectrique orthotrope peut donc s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ D_3 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} c_{11}^* & -e_{31}^* \\ e_{31}^* & \epsilon_{33}^* \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ E_3 \end{array} \right\} \\ \epsilon_{33}^* = \epsilon_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}} \\ e_{31}^* = e_{31} - \frac{c_{13}}{c_{33}} e_{33} \\ c_{11}^* = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Les constantes  $\epsilon_{33}^*$ ,  $e_{31}^*$  et  $c_{11}^*$  sont obtenues par l'hypothèse de contrainte transversale négligeable ( $\sigma_3=0$ ).

Remarque :

La déformation axiale  $\varepsilon_1$  et le champ transversal  $E_3$  créent le couplage électromécanique.

### 4.3.2 Description de l'état électrique

En l'absence de charges électriques volumiques, l'équation d'équilibre électrostatique s'écrit :

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0 \quad (4.12)$$

D'après (4.10), le déplacement électrique se réduit à une seule composante :  $D_3$ . L'équation précédente se simplifie alors comme :

$$\frac{\partial D_3}{\partial z} = 0 \quad (4.13)$$

soit en utilisant l'expression de  $D_3$  (4.11) :

$$\epsilon_{33}^* \frac{\partial E_3}{\partial z} + e_{31}^* \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} = 0 \quad (4.14)$$

En insérant dans (4.14),  $E_3 = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$  ( $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\phi$ ), nous obtenons :

$$\epsilon_{33}^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -e_{31}^* \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} \quad (4.15)$$

Une fois l'expression de la déformation  $\varepsilon_1$  définie, cette équation nous permettra d'obtenir le potentiel  $\phi$ , puis le champ  $E_3$  par intégration par rapport à  $z$ . Le potentiel  $\phi$  aura une partie linéaire en  $z$  et l'autre quadratique en  $z$  représentant le potentiel induit [49, 60], par la flexion de la couche piézoélectrique.

Dans notre étude, nous négligeons cette partie quadratique du potentiel, considérant que les couches piézoélectriques sont minces. On suppose aussi que la couche centrale est conductrice avec un potentiel uniforme, arbitrairement fixé à zéro. Cela revient à faire l'hypothèse d'un champ électrique constant dans l'épaisseur de chaque couche

piézoélectrique de la forme  $E_3 = -\frac{\phi}{h}$ , où  $\phi(x)$  représente le potentiel sur la surface externe.

Dans ce qui suit, nous considérons deux poutres sandwich intelligentes : la première est constituée de trois couches, un coeur élastique pris entre deux peaux piézoélectriques (piézoélectrique/élastique/piézoélectrique), et la seconde est constituée de cinq couches, un sandwich viscoélastique pris entre deux peaux piézoélectriques (piézoélectrique/élastique/viscoélastique/élastique/piézoélectrique).

Les dérivées par rapport au temps et par rapport à la direction  $x$  seront notées  $(\dot{\cdot})$  et  $(\prime)$  respectivement.

#### 4.4 Poutre piézoélectrique/élastique/piézoélectrique

La poutre piézoélectrique/élastique/piézoélectrique considérée ici, est telle que les couches sont parfaitement collées. Les peaux piézoélectriques sont constituées du même matériau piézoélectrique et sont polarisées dans la direction de l'épaisseur. Elles sont couvertes entièrement par des électrodes supérieures et inférieures. Les matériaux piézoélectriques sont supposés orthotropes et leurs axes coïncident avec les axes de la poutre. Le matériau élastique est linéaire, homogène et isotrope. La figure (4.2) indique les notations utilisées. Notre but est d'obtenir les fréquences de vibrations et/ou l'amortissement. Pour cela, une description cinématique de type Bernoulli permet de réduire à deux le nombre de variables cinématiques : le déplacement longitudinal de la couche centrale et la flèche commune aux trois couches. Ensuite, le principe variationnel définit un effort et un moment fléchissant pour le sandwich et prend en compte les potentiels. L'hypothèse d'une condition aux limites sur le capteur conduit à une nouvelle loi de comportement. Puis, un contrôle est introduit par deux types de lois. Chacune de ces lois entraîne une loi de comportement différente et un problème aux valeurs propres. Le problème aux valeurs propres est résolu par

une méthode de Galerkin. Finalement, pour évaluer l'influence des paramètres sur la fréquence et/ou l'amortissement, des termes sans dimensions sont définis et évalués. Dans ce qui suit, nous détaillons chaque étape mentionnée précédemment.

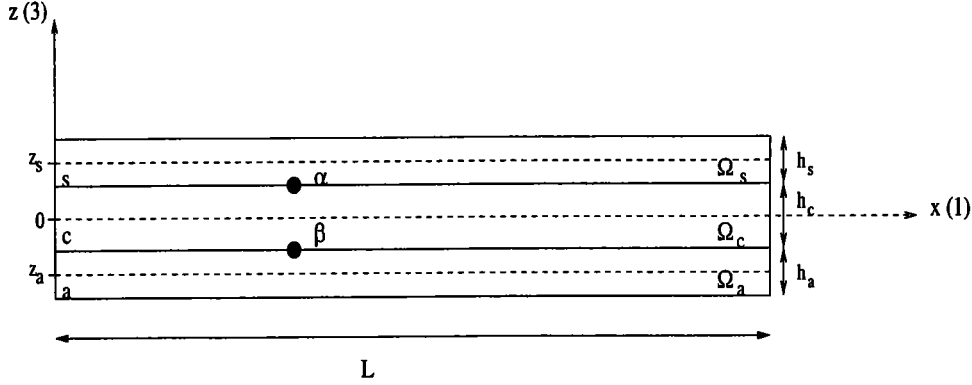


FIG. 4.2 – Notations utilisées pour la poutre sandwich piézo./él./piézo.

#### 4.4.1 Description cinématique de la poutre

Dans la poutre sandwich, nous considérons trois poutres d'Euler-Bernouilli et la même flèche  $w$  pour les trois couches. Le déplacement dans chaque couche est de la forme suivante :

$$U_i = u_i - zw' \quad i = s, c, a \quad (4.16)$$

où  $u_i$  est le déplacement axial.

Les conditions de raccords cinématiques aux points  $\alpha$  et  $\beta$ , définis à la figure (FIG. 4.2), permettent d'exprimer les déplacements axiaux dans les peaux piézoélectriques, en fonction du déplacement axial de la couche centrale ( $u$ ) et de la flèche ( $w$ ) commune aux trois couches :

$$\begin{cases} u_s = u - z_s w' \\ u_a = u - z_a w' \end{cases} \quad (4.17)$$

où  $z_s = \frac{h}{2} + \frac{h_s}{2}$  et  $z_a = -\frac{h}{2} - \frac{h_a}{2}$  représentent les ordonnées des plans moyens du capteur et de l'actionneur piézoélectrique respectivement. Les déplacements axiaux



des trois couches peuvent donc s'écrire uniquement en fonction des variables  $u$  et  $w$ .  
D'où :

$$\begin{cases} U_i = u_i - zw' & i = s, c, a \\ u_c = u \end{cases} \quad (4.18)$$

Les déformations axiales pour les trois couches s'écrivent :

$$\varepsilon_{1i} = u'_i - zw'' \quad i = s, c, a \quad (4.19)$$

#### 4.4.2 Formulation variationnelle - Définition des efforts globaux

Le principe d'Alembert permet d'écrire la formulation variationnelle de la poutre sandwich piézoélectrique/élastique/piézoélectrique, sous la forme suivante :

$$\delta T + \delta H + \delta W = 0 \quad \forall \delta u, \delta w, \delta \phi_i \quad i = s, a \quad (4.20)$$

où  $\delta T$ ,  $\delta H$  et  $\delta W$  sont les travaux virtuels des efforts d'inertie, électromécaniques internes et externes respectivement. Ces termes sont fonction des variables  $u$ ,  $w$ ,  $\phi_s$  et  $\phi_a$ , c'est à dire du déplacement axial de la couche centrale, de la flèche et du potentiel superficiel des couches piézoélectriques capteur et actionneur.

Dans notre étude, nous supposons qu'aucune force (volumique, surfacique, linéique) extérieure n'est appliquée sur les trois couches. L'équation précédente se ramène alors à :

$$\delta T + \delta H = 0 \quad \forall \delta u, \delta w, \delta \phi_i \quad i = s, a \quad (4.21)$$

- Travail virtuel des efforts d'inertie

Le travail virtuel des efforts d'inertie dans la poutre sandwich est défini par :

$$\delta T = \int_{\Omega_s} \rho_s \delta \underline{u}_s \ddot{\underline{u}}_s d\Omega + \int_{\Omega_c} \rho_c \delta \underline{u}_c \ddot{\underline{u}}_c d\Omega + \int_{\Omega_a} \rho_a \delta \underline{u}_a \ddot{\underline{u}}_a d\Omega \quad (4.22)$$

$\rho_i$  représente la densité volumique de masse de la  $i^{eme}$  couche, les  $\delta \underline{u}_i$  sont les vecteurs déplacement virtuel,  $\delta \underline{u}_i = \{\delta U_i, \delta w\}^t$  et  $\ddot{\underline{u}}_i = \{\ddot{U}_i, \ddot{w}\}^t$  les vecteurs accélérations.

Nous remplaçons les déplacements virtuels  $\delta \underline{u}_i$  et les accélérations  $\ddot{\underline{u}}_i$  dans (4.22) à l'aide des expressions (4.18) et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta T = \int_0^L (\rho_s S_s + \rho_c S_c + \rho_a S_a) \ddot{w} \delta w + [(\rho_s S_s + \rho_c S_c + \rho_a S_a) \ddot{u} + (\rho_s S_s z_s \\ + \rho_a S_a z_a) \ddot{w}'] \delta u + [(\rho_s I_s + \rho_c I_c + \rho_a I_a + z_s^2 \rho_s S_s + z_a^2 \rho_a S_a) \ddot{w}' \\ + (\rho_s S_s z_s + \rho_a S_a z_a) \ddot{u}] \delta w' dx \end{aligned} \quad (4.23)$$

où  $S_i$  représente la surface de la  $i^{eme}$  couche et  $I_i$  leur moment quadratique avec  $I_i = \int_{S_i} (z - z_i)^2 dS$ .

En négligeant les termes d'inertie de rotations, c'est à dire les termes en  $\ddot{w}' \delta u$ ,  $\ddot{w}' \delta w'$  et  $\ddot{u} \delta w'$ , et en définissant une densité linéique de masse équivalente  $(\rho S)_{eq}$  dans l'équation précédente, cette dernière peut se résumer à :

$$\begin{cases} \delta T = \int_0^L (\rho S)_{eq} (\ddot{w} \delta w + \ddot{u} \delta u) dx \\ (\rho S)_{eq} = \rho_s S_s + \rho_c S_c + \rho_a S_a \end{cases} \quad (4.24)$$

• Travail virtuel des efforts électromécaniques internes

Pour une poutre d'Euler-Bernouilli élastique, le travail virtuel des efforts électromécaniques internes s'écrit :

$$\delta H = \int_0^L \{N\delta u' + M\delta w''\} dx \quad (4.25)$$

où  $N$  représente l'effort normal et  $M$ , le moment fléchissant. Cette expression est valable pour la couche centrale. Pour les matériaux piézoélectriques étudiés ici, le travail virtuel des efforts électromécaniques internes est obtenu en ajoutant dans l'équation précédente un terme relatif à la partie électrique du matériau :

$$\delta H = \int_0^L \{N\delta u' + M\delta w'' - D_z\delta E_z\} dx \quad (4.26)$$

où  $D_z$  et  $E_z$  désignent le déplacement électrique et le champ électrique suivant l'axe  $z$ , qui sont les seules composantes non nulles (4.9),(4.10).

Dans la poutre sandwich piézoélectrique/élastique/piézoélectrique étudiée, nous considérons trois poutres d'Euler-Bernouilli, avec la même flèche pour les trois couches. Nous obtenons alors l'expression suivante pour le travail virtuel des efforts électromécaniques internes pour la poutre :

$$\begin{aligned} \delta H = \int_0^L \{ & N_s\delta u'_s + M_s\delta w'' + \frac{D_{zs}}{h_s}\delta\phi_s + N_c\delta u'_c + M_c\delta w'' + \\ & N_a\delta u'_a + M_a\delta w'' - \frac{D_{za}}{h_a}\delta\phi_a\} dx \end{aligned} \quad (4.27)$$

Dans cette équation, nous avons remplacé  $E_z$  par son expression en potentiel  $\phi$  :  $E_{zi} = -\frac{\phi_i}{h_i}$ ,  $h_i$  et  $\phi_i$  représentant l'épaisseur et le potentiel de la couche piézoélectrique  $i$ . Le signe négatif devant  $\phi_a$  est dû au fait que le champ électrique au niveau de

l'actionneur est dans le sens inverse à l'axe des  $z$  (FIG. 4.1(a)).

En utilisant les expressions de  $u_s$  et de  $u_a$  (4.17), pour calculer  $\delta u'_s$  et  $\delta u'_a$ , nous pouvons réécrire (4.27) de la façon suivante :

$$\delta H = \int_0^L \left\{ N \delta u' + M \delta w'' + \frac{D_{zs}}{h_s} \delta \phi_s - \frac{D_{za}}{h_a} \delta \phi_a \right\} dx \quad (4.28)$$

avec  $N = N_s + N_c + N_a$  et  $M = M_s + M_c + M_a + N_s z_s + N_a z_a$ .

### 4.4.3 Loi de comportement électromécanique du stratifié

Afin de pouvoir exprimer une loi de comportement globale, nous calculons les efforts normaux et les moments fléchissants à l'aide de leurs définitions :

$$N_i = \int_{S_i} \sigma_i dS \quad \text{et} \quad M_i = \int_{S_i} (z - z_i) \sigma_i dS$$

En reportant dans chaque couche la loi de Hooke ou la loi piézoélectrique (4.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned} N_c &= E_c S_c u' & M_c &= E_c I_c w'' \\ N_s &= c_{11}^* S_s (u' - z_s w'') + e_{31}^* \frac{S_s}{h_s} \phi_s & M_s &= c_{11}^* I_s w'' \\ N_a &= c_{11}^* S_a (u' - z_a w'') - e_{31}^* \frac{S_a}{h_a} \phi_a & M_a &= c_{11}^* I_a w'' \\ I_i &= \int_S (z - z_i)^2 dS & i &= s, c, s \end{aligned} \quad (4.29)$$

Une fois ces calculs réalisés, nous obtenons la loi de comportement mécanique globale du stratifié :

$$\begin{aligned} N &= (ES)_{mec} u' + B_{mec} w'' + e_{31}^* \left( \frac{S_s}{h_s} \phi_s - \frac{S_a}{h_a} \phi_a \right) \\ M &= B_{mec} u' + (EI)_{mec} w'' + e_{31}^* \left( \frac{z_s S_s}{h_s} \phi_s - \frac{z_a S_a}{h_a} \phi_a \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

avec

$$\begin{cases} (ES)_{mec} = E_c S_c + c_{11}^* (S_s + S_a) \\ B_{mec} = -c_{11}^* (z_s S_s + z_a S_a) \\ (EI)_{mec} = E_c I_c + c_{11}^* (I_s + I_a) + c_{11}^* (S_s z_s^2 + S_a z_a^2) \end{cases} \quad (4.31)$$

Remarques :

- En l'absence de champs électriques, nous retrouvons la théorie classique des poutres stratifiées.

-  $B_{mec}$  représente le terme de couplage membrane/flexion.

- Si la poutre est symétrique ( $z_a = -z_s$ ),  $B_{mec}$  est nul, c'est à dire qu'il n'y a pas de couplage membrane/flexion.

#### 4.4.4 Condensation des termes électriques au niveau du capteur

Nous considérons que le déplacement électrique est nul dans la couche piézoélectrique, qui joue le rôle de capteur, ce qui traduit le fait que l'on n'y applique aucune charge électrique. Cela signifie que  $D_{z_s}$  est nul et que nous pouvons éliminer le potentiel électrique au niveau du capteur à partir de (4.11) :

$$\phi_s = \frac{e_{31}^*}{\epsilon_{33}^*} h_s (u' + z_s w'') \quad (4.32)$$

Comme  $D_{z_s}$  est nul et que  $\phi_s$  s'exprime en fonction des variables  $u'$  et  $w''$  (4.32), nous les remplaçons par leurs valeurs ou expressions dans (4.30). Ainsi, nous obtenons une nouvelle forme de la loi de comportement du stratifié, qui tient compte de la condition aux limites électriques dans le capteur :

$$\begin{cases} N = (ES)_{eq} u' + B_{eq} w'' - e_{31}^* \frac{S_a}{h_a} \phi_a \\ M = B_{eq} u' + (EI)_{eq} w'' - e_{31}^* \frac{z_a S_a}{h_a} \phi_a \end{cases} \quad (4.33)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} (ES)_{eq} = (ES)_{mec} + \frac{e_{31}^{*2}}{\epsilon_{33}^*} S_s \\ B_{eq} = B_{mec} + \frac{e_{31}^{*2}}{\epsilon_{33}^*} z_s S_s \\ (EI)_{eq} = (EI)_{mec} + \frac{e_{31}^{*2}}{\epsilon_{33}^*} z_s^2 S_s \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Remarques :

- Le dernier terme de  $B_{eq}$  représente le terme de couplage membrane/flexion d'origine électrique. Cette dissymétrie du comportement du stratifié ne provient pas d'une dissymétrie matérielle, mais de la différence des conditions aux limites électriques entre le capteur et l'actionneur.

- A ce stade, le potentiel sur l'actionneur peut être considéré comme une sorte de forcing. Il va falloir introduire une loi de contrôle linéaire pour appliquer une approche modale.

#### 4.4.5 Formulation variationnelle simplifiée

A ce stade de l'étude analytique de la poutre sandwich piézoélectrique/élastique/piézoélectrique, nous appliquons un contrôle sur l'actionneur, c'est à dire que nous lui imposons un certain potentiel. Dans ce cas, nous pouvons supposer que  $\delta\phi_a$  est nul. Compte tenu de la condition aux limites  $D_{zs} = 0$ , le travail virtuel des efforts électromécaniques internes se réduit au travail mécanique :

$$\delta H = \int_0^L \{N\delta u' + M\delta w''\} dx \quad (4.35)$$

où  $M$  et  $N$  sont définis avec les formules (4.33) et (4.34).

Le principe d'Alembert s'écrit alors :

$$\int_0^L \{N\delta u' + M\delta w''\} dx + \int_0^L (\rho S)_{eq} (\ddot{w}\delta w + \ddot{u}\delta u) dx = 0 \quad \forall \delta u, \delta w \quad (4.36)$$

où  $N$  et  $M$  sont définis par les formules (4.33) et (4.34) et  $(\rho S)_{eq}$  par (4.24).

Pour n'avoir que des termes en  $\delta u$  et  $\delta w$  dans (4.36), nous intégrons par parties  $\int_0^L N\delta u' dx$  et  $\int_0^L M\delta w'' dx$ . Ainsi, nous obtenons l'expression suivante du principe d'Alembert :

$$\int_0^L \{(-N' + (\rho S)_{eq}\ddot{u})\delta u + (M'' + (\rho S)_{eq}\ddot{w})\delta w\} dx + \gamma = 0 \quad \forall \delta u, \delta w \quad (4.37)$$

Pour que l'équation (4.37) soit satisfaite, il faut que les coefficients de  $\delta u$  et de  $\delta w$  soient nuls. Nous en déduisons les équations locales suivantes :

$$\begin{cases} -N' + (\rho S)_{eq}\ddot{u} = 0 & (\text{coefficient de } \delta u) \\ M'' + (\rho S)_{eq}\ddot{w} = 0 & (\text{coefficient de } \delta w) \end{cases} \quad (4.38)$$

où  $N$  et  $M$  sont définis par les formules (4.33) et (4.34) et  $(\rho S)_{eq}$  par (4.24).

Dans notre étude, nous nous limitons à étudier deux types de loi de contrôle actif : la loi rétroactive proportionnelle et directe, et la loi rétroactive en vitesse avec un gain constant négatif.

Nous nous limitons également aux conditions d'appui simple :  $N$ ,  $M$  et  $w$  sont nuls aux points  $x = 0$  et  $x = L$ .

#### 4.4.6 Première loi du contrôle actif - Approche élastique équivalente

$\phi_a$  : fonction linéaire du déplacement

Utiliser la **loi de contrôle rétroactive proportionnelle et directe** signifie que l'on applique le potentiel suivant en chaque point de l'actionneur :

$$\phi_a(x) = G_c \phi_s(x) \quad (4.39)$$

où  $G_c$  représente le gain de contrôle.

D'après la formule (4.32) obtenue en considérant que le déplacement électrique est nul dans le capteur, ce potentiel équivaut à :

$$\phi_a = G_c \frac{e_{31}^*}{\epsilon_{33}^*} h_s (u' + z_s w'') \quad (4.40)$$

Comme dans les expressions de l'effort normal et du moment fléchissant (4.33), le potentiel  $\phi_a$  apparaît ; nous le remplaçons par sa valeur (4.40) et nous obtenons une sorte de loi de comportement de poutre élastique équivalente :

$$\begin{cases} N = [(ES)_{eq} - g]u' + [B_{eq} - g z_s]w'' \\ M = [B_{eq} - g z_a]u' + [(EI)_{eq} - g z_a z_s]w'' \end{cases} \quad (4.41)$$

où  $g$  représente le terme de contrôle et est égal à :

$$g = G_c S_a \frac{h_s e_{31}^{*2}}{h_a \epsilon_{33}^*} \quad (4.42)$$

$g$  dépend seulement du gain et des caractéristiques des couches piézoélectriques.



Il faut noter dans (4.41), une dissymétrie dans le couplage membrane/flexion. En effet, dans  $N$ ,  $[B_{eq} - gz_s]$  apparait alors que dans  $M$ , il s'agit de  $[B_{eq} - gz_a]$ . Ces deux termes ne sont jamais égaux. Cette dissymétrie traduit le caractère non conservatif de la loi de contrôle.

Une fois les nouvelles expressions de  $N$  et de  $M$  établies, nous pouvons calculer leurs dérivées première et seconde par rapport à  $x$ , respectivement, et réécrire le système (4.38) :

$$\begin{cases} -[(ES)_{eq} - g]u'' - [B_{eq} - gz_s]w^{(3)} + (\rho S)_{eq}\ddot{u} = 0 \\ [B_{eq} - gz_a]u^{(3)} + [(EI)_{eq} - gz_a z_s]w^{(4)} + (\rho S)_{eq}\ddot{w} = 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

#### 4.4.7 Analyse modale en appui simple

##### Condensation statique en membrane

Nous recherchons maintenant des solutions harmoniques en  $e^{i\omega t}$ ,  $\omega$  pouvant éventuellement être complexe. En appui simple, nous pouvons supposer des champs de déplacement de la forme suivante :

$$\begin{cases} u = q_1 \cos(kx) e^{i\omega t} \\ w = q_2 \sin(kx) e^{i\omega t} \end{cases} \quad (4.44)$$

Nous reportons (4.44) dans les équations (4.43). Après simplifications en  $e^{i\omega t} \cos(kx)$  et  $e^{i\omega t} \sin(kx)$ , le système devient :

$$\begin{cases} [(ES)_{eq} - g]k^2 q_1 + [B_{eq} - gz_s]k^3 q_2 - (\rho S)_{eq} \omega^2 q_1 = 0 \\ [B_{eq} - gz_a]k^3 q_1 + [(EI)_{eq} - gz_a z_s]k^4 q_2 - (\rho S)_{eq} \omega^2 q_2 = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

Pour une poutre élancée, la fréquence de vibration de flexion est beaucoup plus petite que la fréquence de vibration en membrane. C'est pourquoi nous réalisons une condensation statique en membrane, en négligeant la partie dynamique ( $\omega^2$ ) de la première équation du système (4.45). Cela nous permet d'exprimer  $q_1$  en fonction de  $q_2$  :

$$q_1 = -\frac{(B_{eq} - gz_s)}{(ES)_{eq} - g} kq_2 \quad (4.46)$$

En reportant cette expression dans la deuxième équation de (4.45), nous obtenons la pulsation de flexion  $\omega_f$  égale à :

$$\omega_f^2 = \frac{k^4}{(\rho S)_{eq}} \left[ \frac{-(B_{eq} - gz_a)(B_{eq} - gz_s)}{(ES)_{eq} - g} + [(EI)_{eq} - gz_a z_s] \right] \quad (4.47)$$

#### Poutre sandwich symétrique - Paramètres adimensionnels

Pour simplifier notre étude analytique, nous considérons une poutre sandwich rectangulaire symétrique. Cela équivaut à prendre :

$$\begin{cases} z_a = -z_s \\ I_j \rightarrow \frac{h_j^3}{12} \\ S_j \rightarrow h_j \end{cases} \quad (4.48)$$

Ainsi, la fréquence  $\omega_f$  peut s'écrire :

$$\omega_f^2 = \frac{k^4}{(\rho S)_{eq}} \left[ \frac{-(B_{eq}^2 - g^2 z_s^2)}{(ES)_{eq} - g} + (EI)_{eq} + g z_s^2 \right] \quad (4.49)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho S)_{eq} = 2\rho_s h_s + \rho_c h_c \\ B_{eq} = \frac{e_{31}^{*2}}{\epsilon_{33}^*} \left( \frac{h_s + h_c}{2} \right) h_s \\ (ES)_{eq} = E_c h_c + h_s \left( 2c_{11}^* + \frac{e_{31}^{*2}}{\epsilon_{33}^*} \right) \\ (EI)_{eq} = \frac{E_c h_c^3}{12} + c_{11}^* \frac{h_s^3}{6} + c_{11}^* \frac{h_s}{2} (h_s + h_c)^2 + \frac{e_{31}^{*2}}{\epsilon_{33}^*} \frac{h_s}{4} (h_s + h_c)^2 \end{array} \right. \quad (4.50)$$

Avec l'objectif d'aboutir à un résultat sans dimension, nous définissons 5 paramètres sans dimension, en prenant comme référence les caractéristiques de la couche centrale :

$$r_E = \frac{c_{11}^*}{E_c}, \quad r_E^p = \frac{e_{31}^{*2}}{c_{11}^* \epsilon_{33}^*}, \quad r_h = \frac{h_s}{h_c}, \quad r_m = \frac{\rho_s}{\rho_c}, \quad \lambda = g \frac{3}{E_c h_c} \quad (4.51)$$

où maintenant,  $\lambda$  est le paramètre représentant le gain.

Ainsi, les termes (4.50) se réécrivent de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho S)_{eq} = \rho_c h_c (1 + 2r_m r_h) \\ B_{eq} = E_c h_c^2 r_E r_E^p (1 + r_h) \frac{r_h}{2} \\ (ES)_{eq} = E_c h_c [1 + r_h r_E (2 + r_E^p)] \\ (EI)_{eq} = \frac{E_c h_c^3}{12} [1 + r_E (2r_h^3 + 3r_h (2 + r_E^p) (1 + r_h)^2)] \end{array} \right. \quad (4.52)$$

En prenant  $k = \frac{n\pi}{L}$  et en utilisant aussi les paramètres sans dimension (4.51), la pulsation de vibration de flexion s'exprime comme suit :

$$\omega_f^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + 2r_m r_h} \left[ \frac{-3r_E^2 r_E^p r_h^2 (1 + r_h)^2 \left( 1 - \frac{\lambda^2}{9r_E^2 r_E^p r_h^2} \right)}{[1 + r_h r_E (2 + r_E^p)] \left[ 1 - \frac{\lambda}{3(1 + r_h r_E (2 + r_E^p))} \right]} \right] + (1 + r_h)^2 \lambda + 1 + r_E [2r_h^3 + 3r_h (2 + r_E^p) (1 + r_h)^2] \quad (4.53)$$

où  $\omega_0^2 = \frac{(n\pi)^4 E_c h_c^2}{12L^4 \rho_c}$  est la fréquence propre de la seule couche centrale.

### Approximations des pulsations propres

Maintenant, nous considérons la poutre sandwich étudiée par X.D. Zhang et C.T. Sun [66], pour nous permettre d'évaluer les ordres de grandeur des paramètres sans dimension (4.51). Cette poutre sandwich est constituée de matériaux PZT5H pour les peaux et d'aluminium pour le coeur (Voir Annexe D pour les caractéristiques des matériaux). Ses caractéristiques géométriques sont :  $L = 10\text{cm}$ ,  $h_c = 1.6\text{cm}$  et  $h_s = h_a = 0.1\text{cm}$ . Avec ces données, nous obtenons une valeur approximative pour chaque paramètre :

$$r_E \simeq 1, \quad r_E^p \simeq 0.5, \quad r_h \simeq 6.10^{-2}, \quad r_m \simeq 3 \quad (4.54)$$

D'après ces évaluations, la principale simplification possible provient de la minceur des couches piézoélectriques ( $r_h = h_s/h_c \leq 0.1$ ), ce qui peut permettre de négliger  $r_h^2$  et  $r_h^3$  dans l'expression (4.53) de la fréquence. Les deux matériaux ont des rigidités et des densités comparables (cf  $r_E, r_m$ ). On notera surtout qu'on ne peut pas négliger le coefficient  $r_E^p$ , caractéristique de toutes les propriétés électriques et mécaniques du matériau piézoélectrique. La valeur de ce coefficient  $r_E^p$  montre l'influence de la condition aux limites électriques sur le capteur  $D_{zs} = 0$ , qui induit une modification significative de la rigidité apparente de la poutre : dans les formules (4.34) ou (4.50), les grandeurs équivalentes  $(ES)_{eq}$ ,  $B_{eq}$  et  $(EI)_{eq}$  sont sensiblement différentes des grandeurs purement mécaniques  $(ES)_{mec}$ ,  $B_{mec}$  et  $(EI)_{mec}$ . En particulier, on devra tenir compte du couplage membrane/flexion ( $B_{eq} \neq 0$ ). En négligeant  $r_h^2$  et  $r_h^3$  dans (4.53), on obtient une approximation de la fréquence pour des couches piézoélectriques minces.

$$\omega_f^2 = \frac{\omega_0^2}{1+2r_m r_h} \left[ 1 + 3r_E r_h (2 + r_E^p) + (1 + r_h)^2 \lambda + \frac{\lambda^2 (1+r_h)^2}{3(1+r_h r_E (2+r_E^p)) - \lambda} \right] \quad (4.55)$$

On notera l'expression assez complexe du dernier terme. Toutefois, si le gain est assez faible, alors on peut supposer  $\lambda^2 \ll 1$  et négliger ce dernier terme, ce qui donne l'expression suivante :

$$\omega_f^2 = \frac{\omega_0^2}{1+2r_m r_h} [1 + 3r_E r_h (2 + r_E^p) + (1 + r_h)^2 \lambda] \quad (4.56)$$

Nous retiendrons de cette analyse, qu'une loi de contrôle  $\phi_a = G_c \phi_s$ , fait varier la fréquence, mais sans créer d'amortissement. A partir de la formule simplifiée (4.56), nous trouvons trois causes principales à l'évolution de la fréquence du cœur  $\omega_0$  :

1 - Au dénominateur, le terme  $2r_m r_h$  prend en compte l'augmentation de masse due à la présence des couches piézoélectriques.

2 - Ces couches induisent naturellement une augmentation de rigidité, représentée par le second terme du numérateur. On notera l'influence de la condition aux limites  $D_{zs} = 0$ , via le nombre  $r_E^p$ , qui implique une augmentation de 25% environ de ce second terme.

3 - Enfin, le terme de contrôle  $(1 + r_h)^2 \lambda$  augmente la fréquence si  $G_c$  est positif. On notera que le paramètre sans dimension  $\lambda$  (ou  $\lambda(1 + r_h)^2$ ) est le terme significatif représentant l'influence du contrôle sur la fréquence.

#### 4.4.8 Deuxième loi du contrôle actif - Approche viscoélastique équivalente

$\phi_a$  : fonction linéaire du déplacement

Dans le cas d'un **contrôle actif en vitesse avec gain constant négatif**, le potentiel appliqué à l'actionneur n'est plus proportionnel au potentiel de sortie du capteur mais à sa dérivée par rapport au temps :

$$\phi_a(x, t) = -G_c \dot{\phi}_s(x, t) \quad (4.57)$$

(avec  $G_c > 0$ ), soit encore en utilisant la formule (4.32) :

$$\phi_a = -G_c \frac{e_{31}^*}{\epsilon_{33}^*} h_s (\dot{u}' + z_s \dot{w}'') \quad (4.58)$$

où  $G_c$  représente le gain de contrôle.

Nous remplaçons ensuite le potentiel  $\phi_a$  donné par (4.58), dans les expressions de l'effort normal et du moment fléchissant (4.33), et nous obtenons :

$$\begin{cases} N = (ES)_{eq} u' + B_{eq} w'' + g(\dot{u}' + z_s \dot{w}'') \\ M = B_{eq} u' + (EI)_{eq} w'' + g z_a (\dot{u}' + z_s \dot{w}'') \end{cases} \quad (4.59)$$

où  $g$ , représentant le terme de contrôle, est défini comme dans le cas de la première loi (4.42).

Il faut noter ici une dissymétrie due au contrôle. En effet, dans  $N$ , nous avons  $g z_s \dot{w}''$  ( $z_s$  positif) alors que dans  $M$ , nous avons  $g z_a z_s \dot{w}''$  ( $z_a z_s$  négatif).

Les expressions de  $N$  et  $M$  évaluées, les dérivées par rapport à  $x$  peuvent être calculées et le système (4.38) peut être redéfini :

$$\begin{cases} -(ES)_{eq}u'' - B_{eq}w^{(3)} - g(\dot{u}'' + z_s\dot{w}^{(3)}) + (\rho S)_{eq}\ddot{u} = 0 \\ B_{eq}u^{(3)} + (EI)_{eq}w^{(4)} + gz_a(\dot{u}^{(3)} + z_s\dot{w}^{(4)}) + (\rho S)_{eq}\ddot{w} = 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

#### 4.4.9 Analyse modale en appui simple

##### Condensation statique en membrane

Nous considérons une nouvelle fois les expressions des déplacements  $u$  et  $w$  donnés en (4.44) ainsi que leurs dérivées. Cela nous conduit au système suivant, après simplification des termes en  $e^{i\omega t}\cos(kx)$  et  $e^{i\omega t}\sin(kx)$  :

$$\begin{cases} (ES)_{eq}k^2q_1 + B_{eq}k^3q_2 + i\omega g(k^2q_1 + z_s k^3q_2) - (\rho S)_{eq}\omega^2q_1 = 0 \\ B_{eq}k^3q_1 + (EI)_{eq}k^4q_2 + i\omega gz_a(k^3q_1 + z_s k^4q_2) - (\rho S)_{eq}\omega^2q_2 = 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

Comme précédemment, nous réalisons une condensation statique en membrane ( $\omega = 0$  dans la première équation du système précédent). Nous obtenons alors  $q_1$  en fonction de  $q_2$  :

$$q_1 = -\frac{B_{eq}}{(ES)_{eq}}kq_2 \quad (4.62)$$

La deuxième équation du système (4.61) peut alors s'écrire :

$$-(\rho S)_{eq}\omega^2 + i\omega gz_a k^4 \left( -\frac{B_{eq}}{(ES)_{eq}} + z_s \right) + k^4 \left( -\frac{B_{eq}^2}{(ES)_{eq}} + (EI)_{eq} \right) = 0 \quad (4.63)$$

Afin d'aboutir à une équation sans dimension, nous définissons deux paramètres :

$$(EI)_0 = \frac{E_c h_c^3}{12}, \quad \omega_0 = \frac{k^4 E_c h_c^2}{12 \rho_c} \quad (4.64)$$

Ensuite, nous divisons (4.63) par  $k^4 (EI)_0$  et nous obtenons :

$$-\frac{(\rho S)_{eq}}{\rho_c S_c} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i \frac{\omega}{\omega_0} g z_a \frac{\omega_0}{(EI)_0} \left( -\frac{B_{eq}}{(ES)_{eq}} + z_s \right) + \left( \frac{(EI)_{eq}}{(EI)_0} - \frac{B_{eq}^2}{(ES)_{eq} (EI)_0} \right) = 0 \quad (4.65)$$

### Poutre sandwich symétrique - Paramètres adimensionnels

A nouveau, nous considérons une poutre sandwich rectangulaire symétrique ( $z_a = -z_s$ ) et les paramètres sans dimension (4.51). Les termes  $(\rho S)_{eq}$ ,  $B_{eq}$ ,  $(ES)_{eq}$  et  $(EI)_{eq}$  s'écrivent comme pour la première loi (4.52). En injectant ces différents termes, fonctions des paramètres sans dimension, l'équation (4.65) devient :

$$\begin{aligned} & -(1 + 2r_m r_h) \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - i \frac{\omega}{\omega_0} 2\lambda \left( 1 - \frac{r_E r_E^p r_h}{1 + r_h r_E (2 + r_E^p)} \right) \\ & + \left[ 1 + r_E (2r_h^3 + 3(2 + r_E^p) r_h (1 + r_h)^2) - \frac{3r_h^2 r_E^2 r_E^p (1 + r_h)^2}{1 + r_h r_E (2 + r_E^p)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

$\lambda$  contient le terme de contrôle et est égal à :

$$\lambda = \frac{\omega_0 g z_s^2}{2(EI)_0} \quad (4.67)$$

### Remarque :

Le  $\lambda$  défini ici est différent de celui défini pour la première loi de contrôle.

En effet, ici,  $\lambda$  est dépendant du mode via  $\omega_0$ .



L'équation (4.66) peut être réécrite de la façon simplifiée suivante :

$$A \frac{\omega^2}{\omega_0} + i \frac{\omega}{\omega_0} 2B - C = 0 \quad (4.68)$$

avec

$$\begin{cases} A = 1 + 2r_m r_h \\ B = \lambda \left( 1 - \frac{r_E r_E^p r_h}{1 + r_h r_E (2 + r_E^p)} \right) \\ C = 1 + r_E (2r_h^3 + 3(2 + r_E^p) r_h (1 + r_h)^2) - \frac{3r_h^2 r_E^2 r_E^p (1 + r_h)^2}{1 + r_h r_E (2 + r_E^p)} \end{cases} \quad (4.69)$$

L'équation (4.68) est une équation classique du second degré. Pour la résoudre, il nous faut calculer son discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = (iB)^2 + AC \quad (4.70)$$

Trois cas sont possibles et ils ont chacun une signification :

- $\Delta > 0$  signifie que les racines  $r_\omega$  sont complexes et donc les  $\omega$  sont complexes.
- $\Delta = 0$  signifie que l'équation (4.68) a une racine double,  $\omega = -iB/A$ , et donc  $\omega$  est imaginaire pure.
- $\Delta < 0$  signifie que les racines  $r_\omega$  sont imaginaires purs et donc que  $\omega$  aussi.

$\omega$  imaginaire pur est irréaliste. C'est pourquoi le cas qui nous intéresse, est le premier cas, c'est à dire  $\Delta > 0$ . Celui-ci permet d'avoir une pulsation complexe et donc de définir une fréquence amortie et un amortissement. Ainsi, en prenant le discriminant positif, et en retenant la valeur positive de la pulsation, nous obtenons la racine de l'équation (4.68) :

$$\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)_{1,2} = \frac{-iB - \sqrt{AC - B^2}}{A} \quad (4.71)$$

Nous avons vu précédemment (section 1.2.2., équation (1.24)), que l'amortissement d'une structure était défini par le rapport de la partie imaginaire sur la partie réelle de  $\omega$ . Or,  $r_\omega$  est égal à  $\omega/\omega_0$ . Nous pouvons donc définir l'amortissement  $\eta$  et la pulsation amortie  $\Omega$ , de notre poutre sandwich piézoélectrique/élastique/piézoélectrique à partir de la définition  $\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta)$  :

$$\begin{cases} \eta = \frac{2B\sqrt{AC-B^2}}{AC-2B^2} \\ \Omega^2 = \frac{\omega_0^2}{A^2}(AC - 2B^2) \end{cases} \quad (4.72)$$

En y remplaçant A, B et C, par leurs expressions (4.69), nous obtenons :

$$\begin{cases} \eta = \frac{2\lambda \left(1 - \frac{r_E r_E^p r_h}{1 + r_h r_E (2 + r_E^p)}\right) \sqrt{\alpha - \beta}}{\alpha - 2\beta} \\ \Omega^2 = \frac{\omega_0^2}{(1 + 2r_m r_h)^2} (\alpha - 2\beta) \\ \alpha = (1 + 2r_m r_h) \left[1 + r_E (2r_h^3 + 3(2 + r_E^p) r_h (1 + r_h)^2) - \frac{3r_h^2 r_E^2 r_E^p (1 + r_h)^2}{1 + r_h r_E (2 + r_E^p)}\right] \\ \beta = \lambda^2 \left(1 - \frac{r_E r_E^p r_h}{1 + r_h r_E (2 + r_E^p)}\right)^2 \end{cases} \quad (4.73)$$

#### Approximation des pulsations propres

En reprenant l'exemple de X.D. Zhang et C.T. Sun, nous pouvons négliger les termes  $r_h^2$  et  $r_h^3$  dans (4.73), ce qui nous amène à l'expression suivante pour l'amortissement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{2\lambda \left(1 - \frac{r_E r_E^p r_h}{1+r_h r_E (2+r_E^p)}\right) \sqrt{(1+2r_m r_h) [1+3r_E r_h (2+r_E^p)]} - \lambda^2 \left(1 - \frac{r_E r_E^p r_h}{1+r_h r_E (2+r_E^p)}\right)^2}{(1+2r_m r_h) [1+3r_E r_h (2+r_E^p)] - 2\lambda^2 \left(1 - \frac{r_E r_E^p r_h}{1+r_h r_E (2+r_E^p)}\right)^2} \\ \Omega^2 = \frac{\omega_0^2}{(1+2r_m r_h)^2} \left[ (1+2r_m r_h) [1+3r_E r_h (2+r_E^p)] - 2\lambda^2 \left(1 - \frac{r_E r_E^p r_h}{1+r_h r_E (2+r_E^p)}\right)^2 \right] \end{array} \right. \quad (4.74)$$

En négligeant le terme  $\lambda^2$  devant 1 (gain petit), le système précédent devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{2\lambda(1+2r_E r_h)}{[1+r_E r_h (2+r_E^p)] \sqrt{(1+2r_m r_h) [1+3r_E r_h (2+r_E^p)]}} \\ \Omega^2 = \frac{\omega_0^2}{(1+2r_m r_h)^2} (1+2r_m r_h) [1+3r_E r_h (2+r_E^p)] \end{array} \right. \quad (4.75)$$

Cette expression simplifiée de l'amortissement nous montre que l'amortissement est proportionnel au gain  $\lambda$ , c'est à dire à :

$$\lambda = \frac{\omega_0 g z_s^2}{2(EI)_0} = \frac{k^4 z_s^2 G_c S_a e_{31}^{*2}}{2h_c \rho_c \epsilon_{33}^*}$$

On notera que pour des couches piézoélectriques minces ( $r_h \ll 1$ ), l'amortissement est égal à  $2\lambda$ . Ce paramètre  $\lambda$  est donc le paramètre pertinent pour représenter l'amortissement dû au contrôle actif et au couplage piézoélectrique. On notera que ce coefficient dépend fortement du mode (présence de  $k^4$ ). Il est proportionnel au gain de contrôle  $G_c$  et il dépend du coefficient matériel caractérisant le couplage piézoélectrique  $e_{31}^{*2}$ . En ce qui concerne la fréquence, on notera la ressemblance entre la présente formule (4.75) et celle obtenue avec l'autre loi de contrôle (4.56). On retrouve en particulier l'influence de la couche piézoélectrique sur la masse et sur la rigidité, ainsi que l'influence de la condition aux limites électriques sur le capteur (cf  $r_E^p$ ). Avec la présente

loi de contrôle (4.39), le gain n'a pas d'influence sur la fréquence en première approximation, ce qui est normal puisqu'il s'agit d'une loi en dérivée du potentiel.

## 4.5 Poutre piézoélectrique/élastique/viscoélastique /élastique/piézoélectrique

Comme pour l'étude de la poutre trois couches, nous considérons ici les couches parfaitement collées. Pour simplifier notre étude, la poutre sandwich est choisie symétrique : les couches élastiques (piézoélectriques) ont même épaisseur  $h_e$  ( $h_p$ ) et sont constituées du même matériau et  $h_c$  est l'épaisseur du coeur viscoélastique. Les peaux piézoélectriques sont polarisées dans la direction de l'épaisseur. Comme précédemment, elles sont couvertes entièrement d'électrodes supérieures et inférieures. Les matériaux piézoélectriques sont toujours supposés orthotropes et leurs axes coïncident avec ceux de la poutre. Le matériau élastique est linéaire homogène et isotrope. La couche centrale est molle, mince et constituée d'un matériau viscoélastique isotrope, linéaire, homogène, non-vieillissant. La cinématique du stratifié est basée sur le même principe qu'aux chapitres précédents. Chaque ensemble de deux couches dures (piézoélectriques + élastiques) est assimilé à une poutre d'Euler-Bernouilli et la couche centrale est assimilée à une poutre de Timoshenko. A l'aide des conditions de raccords cinématiques, le nombre de variables est réduit à trois : le déplacement axial et la rotation de la couche centrale, et la flèche commune aux trois couches. Le comportement du multicouche est obtenu en appliquant le principe d'Alembert. Les potentiels électriques sont alors pris en compte, un effort  $N$  et deux moments  $M_w$  et  $M_\beta$  sont définis. Une approche modale ainsi qu'une condition aux limites sur le capteur permettent une condensation électrique au niveau du capteur et donc d'établir une loi de comportement équivalente. Puis, le contrôle au niveau de l'actionneur est introduit par les deux lois précédemment étudiées. Ensuite, nous considérons les modes en appui simple et réalisons une condensation du déplacement moyen et de la rotation de la couche cen-

trale. Ainsi, nous aboutissons à un problème aux valeurs propres non-linéaire, de type viscoélastique et nous approximons les fréquences complexes.

Dans ce qui suit, nous détaillons ces différentes étapes. Les notations utilisées sont indiquées à la figure (4.3).

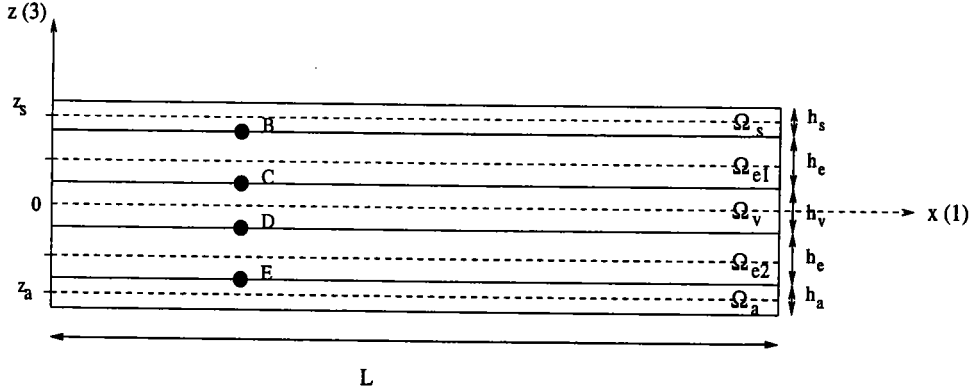


FIG. 4.3 – Notations utilisées pour la poutre sandwich piézo./él./visco./él./piézo.  $\Omega_s$  : capteur (*sensor*),  $\Omega_a$  : actionneur,  $\Omega_{e1}, \Omega_{e2}$  : couches élastiques,  $\Omega_v$  : couche viscoélastique

#### 4.5.1 Description cinématique de la poutre

Dans la poutre sandwich, nous considérons des poutres d'Euler-Bernouilli dans les couches élastiques et piézoélectriques et une poutre de Timoshenko, dans la couche centrale. Les cinq couches ont la même flèche ( $w$ ) et l'origine de l'axe des  $z$  coïncide avec le plan moyen de la couche viscoélastique. Les déplacements dans les couches s'écrivent alors de la façon suivante :

$$\begin{cases} U_i = u_i - (z - z_i)w' & i = s, e1, e2, a \\ U_v = u + z\beta \end{cases} \quad (4.76)$$

Les  $z_i$  désignent l'ordonnée de l'axe moyen de chaque couche :

$$z_s = -z_a = (h_v + 2h_e + h_p)/2, \quad z_{e1} = -z_{e2} = (h_v + h_e)/2$$

Les  $u_i$  sont les déplacements axiaux de la couche  $i$  et  $u$  celui de la couche centrale viscoélastique.  $\beta$  est la rotation de la normale au plan moyen dans cette couche. Les conditions de raccords cinématiques aux points B,C,D,E, définis à la figure (4.3), s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_s(z_B) = U_{e1}(z_B) \\ U_{e1}(z_C) = U_v(z_C) \\ U_v(z_D) = U_{e2}(z_D) \\ U_{e2}(z_E) = U_a(z_E) \end{array} \right. \quad (4.77)$$

Ces égalités permettent d'avoir les expressions des déplacements axiaux dans les couches élastiques et piézoélectriques, en fonction du déplacement axial et de la rotation de la normale au plan du noyau et de la flèche :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_s = u + \frac{h_v}{2}\beta - Hw' \\ u_{e1} = u + \frac{h_v}{2}\beta - \frac{h_e}{2}w' \\ u_{e2} = u - \frac{h_v}{2}\beta + \frac{h_e}{2}w' \\ u_a = u - \frac{h_v}{2}\beta + Hw' \\ H = \frac{h_p}{2} + h_e \end{array} \right. \quad (4.78)$$

Les déplacements des différentes couches peuvent donc s'exprimer uniquement en fonction des variables  $u$ ,  $\beta$  et  $w$ , qui représentent le déplacement, la rotation de la normale dans la couche centrale visqueuse et la flèche commune à toutes les couches :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_s = u + \frac{h_v}{2}\beta - Hw' - (z - z_s)w' \\ U_{e1} = u + \frac{h_v}{2}\beta - \frac{h_e}{2}w' - (z - z_{e1})w' \\ U_v = u + z\beta \\ U_{e2} = u - \frac{h_v}{2}\beta + \frac{h_e}{2}w' - (z - z_{e2})w' \\ U_a = u - \frac{h_v}{2}\beta + Hw' - (z - z_a)w' \end{array} \right. \quad (4.79)$$

Nous aboutissons donc à un modèle global, avec seulement trois variables,  $u$ ,  $w$  et  $\beta$ . Ainsi, les déformations axiales s'écrivent également en fonction de  $u$ ,  $w$  et  $\beta$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{1s} = u' + \frac{h_v}{2}\beta' - Hw'' - (z - z_s)w'' \\ \varepsilon_{1e1} = u' + \frac{h_v}{2}\beta' - \frac{h_e}{2}w'' - (z - z_{e1})w'' \\ \varepsilon_{1v} = u' + z\beta' \\ \varepsilon_{1e2} = u' - \frac{h_v}{2}\beta' + \frac{h_e}{2}w'' - (z - z_{e2})w'' \\ \varepsilon_{1a} = u' - \frac{h_v}{2}\beta' + Hw'' - (z - z_a)w'' \end{array} \right. \quad (4.80)$$

#### 4.5.2 Formulation variationnelle. Définition des efforts globaux

Dans notre étude, nous supposons qu'aucune force (volumique, surfacique, linéique) extérieure n'est appliquée sur les couches. La formulation variationnelle de la poutre piézoélectrique/élastique/viscoélastique/élastique/piézoélectrique, s'exprime alors par l'équation suivante :

$$\delta T + \delta H = 0 \quad \forall \delta u, \delta w, \delta \beta, \delta \phi_i \quad i = s, a \quad (4.81)$$

où  $\delta T$  et  $\delta H$  sont les travaux virtuels des efforts d'inertie et électromécaniques internes respectivement.

• Travail virtuel des efforts d'inertie

Le travail virtuel des efforts d'inertie dans la poutre sandwich à 5 couches est défini par :

$$\delta T = \sum_i \int_{\Omega_i} \rho_i \delta \underline{u}_i \ddot{\underline{u}}_i d\Omega \quad i = s, e1, v, e2, a \quad (4.82)$$

où  $\rho_i$  représente la densité volumique de masse de la  $i^{eme}$  couche, les  $\delta \underline{u}_i = \{\delta U_i, \delta w, \delta \beta\}^t$  sont les vecteurs déplacement virtuel et  $\ddot{\underline{u}}_i = \{\ddot{U}_i, \ddot{w}, \ddot{\beta}\}^t$  les vecteurs accélérations.

Nous remplaçons les déplacements virtuels  $\delta \underline{u}_i$  et les accélérations  $\ddot{\underline{u}}_i$  dans (4.82) à l'aide des expressions (4.79) et nous négligeons les termes d'inertie de rotation. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{cases} \delta T = \int_0^L (\rho S)_{eq} (\dot{w} \delta w + \ddot{u} \delta u) dx \\ (\rho S)_{eq} = 2\rho_p S_p + \rho_v S_v + 2\rho_e S_e \end{cases} \quad (4.83)$$

où  $(\rho S)_{eq}$  est la densité linéique de masse équivalente.

• Travail virtuel des efforts électromécaniques internes

Comme le travail virtuel des efforts électromécaniques internes pour une poutre d'Euler-Bernouilli a été défini précédemment ((4.25) pour une poutre élastique ou (4.26) pour une poutre piézoélectrique), nous commençons par écrire celui d'une poutre de Timoshenko :

$$\delta H = \int_0^L \{N \delta u' + M_v \delta \beta'\} dx + \int_0^L T(\delta \beta + \delta w') dx \quad (4.84)$$

$N$  est l'effort normal,  $M_v$  le moment de flexion et  $T$  l'effort tranchant.



Dans notre étude, nous considérons des poutres d'Euler-Bernouilli pour les couches élastiques et piézoélectriques et une poutre de Timoshenko, pour le noyau viscoélastique et la même flèche pour les cinq couches. Le travail virtuel des efforts électromécaniques internes pour la poutre sandwich s'exprime alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \delta H = \int_0^L \{ & N_s \delta u'_s + M_s \delta w'' + \frac{D_{zs}}{h_s} \delta \phi_s + N_{e1} \delta u'_{e1} + M_{e1} \delta w'' + N_v \delta u' + M_v \delta \beta' + \\ & T(\delta \beta + \delta w') + N_{e2} \delta u'_{e2} + M_{e2} \delta w'' + N_a \delta u'_a + M_a \delta w'' - \frac{D_{za}}{h_a} \delta \phi_a \} dx \end{aligned} \quad (4.85)$$

Comme dans l'étude précédente, nous utilisons les expressions de  $u_s$ ,  $u_{e1}$ ,  $u_{e2}$  et  $u_a$  en fonction  $u$ ,  $\beta$  et  $w$  (4.78) et nous récrivons (4.85) de la façon suivante :

$$\delta H = \int_0^L \{ N \delta u' + M_w \delta w'' + M_\beta \delta \beta' + T(\delta \beta + \delta w') + \frac{D_{zs}}{h_s} \delta \phi_s - \frac{D_{za}}{h_a} \delta \phi_a \} dx \quad (4.86)$$

avec des efforts et des moments globaux définis comme suit :

$$\begin{cases} N = N_s + N_{e1} + N_v + N_{e2} + N_a, \\ M_\beta = \frac{h_v}{2}(N_{e1} - N_{e2}) + M_v + \frac{h_v}{2}(N_s - N_a), \\ M_w = M_s + M_{e1} + M_{e2} + M_a - \frac{h_e}{2}(N_{e1} - N_{e2}) - H(N_s - N_a). \end{cases} \quad (4.87)$$

On notera en particulier l'expression des lois de conservation mécaniques en l'absence d'efforts extérieurs :

$$\begin{cases} N' = (\rho S)_{eq} \ddot{u}, \\ M'_\beta - T = 0, \\ M''_w - T' + (\rho S)_{eq} \ddot{w} = 0 \end{cases} \quad (4.88)$$

### 4.5.3 Lois de comportement du stratifié

Afin de pouvoir exprimer les termes  $N$ ,  $T$ ,  $M_w$  et  $M_\beta$ , nous calculons les efforts normaux et tranchant et les moments fléchissants pour chaque couche :

$$\begin{aligned}
 N_s &= c_{11}^* S_p (u' + \frac{h_v}{2} \beta' - H w'') + e_{31}^* \frac{S_p}{h_p} \phi_s & M_s &= c_{11}^* I_s w'' \\
 N_{e1} &= E_e S_e (u' + \frac{h_v}{2} \beta' - \frac{h_e}{2} w'') & M_{e1} &= E_e I_{e1} w'' \\
 N_{e2} &= E_e S_e (u' - \frac{h_v}{2} \beta' + \frac{h_e}{2} w'') & M_{e2} &= E_e I_{e2} w'' \\
 N_a &= c_{11}^* S_p (u' - \frac{h_v}{2} \beta' + H w'') - e_{31}^* \frac{S_p}{h_p} \phi_a & M_a &= c_{11}^* I_a w'' & (4.89) \\
 N_v &= S_v E_v * \dot{u}' & M_v &= I_v Y * \dot{\beta}' \\
 T &= \frac{S_v}{2(1+\nu_v)} Y * (\dot{w}' + \dot{\beta}') \\
 I_i &= \int_S (z - z_i)^2 dS & i &= s, e1, v, e2, s
 \end{aligned}$$

Comme le noyau viscoélastique est supposé mince et mou, les termes  $M_v$  et  $N_v$  sont négligeables. A l'aide de cette hypothèse et des calculs (4.89), les termes  $N$ ,  $M_\beta$  et  $M_w$  s'écrivent en fonction de  $u$ ,  $w$ ,  $\beta$  et également des potentiels  $\phi_s$  et  $\phi_a$ . La loi de comportement électromécanique du stratifié peut alors être résumée par :

$$\left\{ \begin{aligned}
 N &= (ES)_{mec} u' + e_{31}^* \frac{S_p}{h_p} (\phi_s - \phi_a) \\
 M_\beta &= (EI)_\beta \beta' + \gamma_w w'' + e_{31}^* \frac{h_v}{2} \frac{S_p}{h_p} (\phi_s + \phi_a) \\
 M_w &= \gamma_w \beta' + (EI)_{mec} w'' - e_{31}^* H \frac{S_p}{h_p} (\phi_s + \phi_a) \\
 T &= \frac{S_v}{2(1+\nu_v)} Y * (\dot{w}' + \dot{\beta}')
 \end{aligned} \right. \quad (4.90)$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned}
 (ES)_{mec} &= 2E_e S_e + 2c_{11}^* S_p \\
 (EI)_{mec} &= E_e (I_{e1} + I_{e2} + \frac{h_e^2}{2} S_e) + c_{11}^* (I_a + I_s + 2H^2 S_p) \\
 \gamma_w &= -\frac{h_v}{2} (h_e S_e E_e + 2c_{11}^* S_p H) \\
 (EI)_\beta &= \frac{h_v^2}{2} (E_e S_e + c_{11}^* S_p)
 \end{aligned} \right. \quad (4.91)$$

Remarques :

- Comme la poutre sandwich est symétrique, il n'y a pas de couplage membrane/flexion pour l'élasticité. Cependant, un couplage pourra éventuellement exister à travers les termes électro-mécaniques.

-  $\gamma_w$  représente le couplage flexion/rotation.

- On a considéré que pour  $N$ ,  $M_\beta$  et  $M_w$ , il n'y a pas d'influence significative de la viscoélasticité, qui apparaît seulement à travers le terme de cisaillement dans la couche molle  $T$ .

#### 4.5.4 Approche modale. Condensation du potentiel électrique au niveau du capteur

Nous supposons à nouveau qu'il n'y a aucun déplacement électrique dans le capteur piézoélectrique ce qui traduit le fait qu'on n'y introduit aucune charge ( $D_{zs} = 0$ ). Cela nous permet d'obtenir le potentiel  $\phi_s$  en fonction des variables cinématiques  $u'$ ,  $\beta'$  et  $w''$  :

$$\phi_s = \frac{e_{31}^*}{\epsilon_{33}^*} h_p (u' + \frac{h_v}{2} \beta' - H w'') \quad (4.92)$$

En considérant les vibrations harmoniques libres, les inconnues  $u$ ,  $w$ ,  $\beta$ ,  $\phi_a$ ,  $N$ ,  $M_\beta$ ,  $M_w$  et  $T$  sont cherchées sous forme harmonique ( $\omega$  n'étant pas forcément réel) :

$$\begin{aligned} u &= u e^{i\omega t}, & w &= w e^{i\omega t}, & \beta &= \beta e^{i\omega t}, & \phi_a &= \phi_a e^{i\omega t} \\ N &= N e^{i\omega t}, & M_w &= M_w e^{i\omega t}, & M_\beta &= M_\beta e^{i\omega t}, & T &= T e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Dans ce cas, les lois de comportement du matériau viscoélastique deviennent simples et définies par un module d'Young  $E_v(\omega)$  complexe et dépendant de  $\omega$ , pulsation des vibrations. L'effort tranchant  $T$  s'écrit alors :

$$T = G_v(\omega) S_v (w' + \beta) \quad (4.94)$$

avec  $G_v(\omega) = \frac{E_v(\omega)}{2(1+\nu_v)}$ , module de cisaillement complexe et dépendant de  $\omega$ .

En utilisant les expressions (4.93) et en remplaçant  $\phi_s$  par son expression (4.92) dans  $N$ ,  $M_\beta$  et  $M_w$ , ces derniers deviennent :

$$\begin{cases} N = (ES)_{eq}u' + \alpha \frac{h_v}{2}\beta' - \alpha H w'' - e_{31}^* \frac{S_p}{h_p} \phi_a \\ M_\beta = \alpha \frac{h_v}{2}u' + (EI)_{\beta eq}\beta' + \gamma_{weq}w'' + e_{31}^* \frac{h_v}{2} \frac{S_p}{h_p} \phi_a \\ M_w = -\alpha H u' + \gamma_{weq}\beta' + (EI)_{eq}w'' - e_{31}^* H \frac{S_p}{h_p} \phi_a \end{cases} \quad (4.95)$$

avec

$$\begin{cases} (ES)_{eq} = (ES)_{mec} + \alpha \\ (EI)_{eq} = (EI)_{mec} + \alpha H^2 \\ \gamma_{weq} = \gamma_w - \frac{h_v}{2} H \alpha \\ (EI)_{\beta eq} = (EI)_\beta + \left(\frac{h_v}{2}\right)^2 \alpha \\ \alpha = \frac{e_{31}^{*2}}{\epsilon_{33}^*} S_p \end{cases} \quad (4.96)$$

Remarques :

- Le terme en  $\alpha$  de  $\gamma_{weq}$  représente le terme de couplage flexion/rotation d'origine électrique.

- Dans (4.95), nous notons un couplage membrane/flexion (coefficient  $(-\alpha H)$  dans  $N$  et  $M_w$ ) dû à la condensation du potentiel électrique dans le capteur.

Les formules (4.95) peuvent s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} u' \\ \beta' \\ w'' \end{bmatrix} + e_{31}^* \frac{S_p}{h_p} \phi_a [V_a] \quad (4.97)$$

avec

$$[C] = \begin{bmatrix} (ES)_{eq} & \alpha \frac{h_y}{2} & -\alpha H \\ \alpha \frac{h_y}{2} & (EI)_{\beta eq} & \gamma_{weq} \\ -\alpha H & \gamma_{weq} & (EI)_{eq} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [V_a] = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{h_y}{2} \\ -H \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

La matrice  $[C]$  est symétrique et réelle. Elle nous montre un couplage membrane/flexion, qui est dû à la condensation de l'équation électrostatique au niveau du capteur ( $\alpha \neq 0$ ).

#### 4.5.5 Formulation variationnelle simplifiée

A ce stade de l'étude analytique de la poutre multicouche, nous allons appliquer un contrôle sur l'actionneur. Alors,  $\delta\phi_a$  est nul et le travail virtuel des efforts électromécaniques internes est simplifié :

$$\delta H = \int_0^L \{N\delta u' + M_w\delta w'' + M_\beta\delta\beta' + T(\delta\beta + \delta w')\} dx \quad (4.99)$$

où  $N$ ,  $M_\beta$ ,  $M_w$  et  $T$  sont définis par les formules (4.97) et (4.94).

Le principe d'Alembert s'écrit :

$$\int_0^L \{N\delta u' + M_w\delta w'' + M_\beta\delta\beta' + T(\delta\beta + \delta w') - \omega^2(\rho S)_{eq}(u\delta u + w\delta w)\} dx = 0$$

$$\forall \delta u, \delta w, \delta\beta \quad (4.100)$$

soit sous forme matricielle :

$$\int_0^L \begin{bmatrix} N & M_\beta & M_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u' \\ \delta \beta' \\ \delta w'' \end{bmatrix} + T(\delta \beta + \delta w') - \omega^2(\rho S)_{eq}(u\delta u + w\delta w)dx = 0$$

$$\forall \delta u, \delta w, \delta \beta \quad (4.101)$$

Nous étudions les mêmes lois de contrôle actif que dans le cas de la poutre à trois couches, à savoir la loi rétroactive proportionnelle et directe et la loi rétroactive en vitesse avec un gain constant négatif.

#### 4.5.6 Première loi du contrôle actif - Approche viscoélastique équivalente

$\phi_a$  : fonction linéaire du déplacement

Dans le cas de notre étude, le potentiel appliqué à l'actionneur suivant **la loi rétroactive proportionnelle et directe** s'écrit :

$$\phi_a = G_c \phi_s = G_c \frac{e_{31}^*}{\epsilon_{33}^*} h_p (u' + \frac{h_v}{2} \beta' - H w'') \quad (4.102)$$

où  $G_c$  est le gain de contrôle.

Ce potentiel s'exprime sous la forme matricielle suivante :

$$\phi_a = g [V_s]^t \begin{bmatrix} u' \\ \beta' \\ w'' \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

avec  $[V_s] = [1, \frac{h_v}{2}, -H]^t$  et  $g = G_c \frac{e_{31}^{*2}}{\epsilon_{33}^*} S_p$ .

Ainsi, le système matriciel (4.97) devient :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = ([C] + g[V_a] \otimes [V_s]^t) \begin{bmatrix} u' \\ \beta' \\ w'' \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

où la matrice  $[C]$  et les vecteurs  $[V_a]$  et  $[V_s]$  sont définis en (4.98) et (4.103) Après prise en compte de la loi de contrôle actif proportionnelle et directe, nous obtenons donc une loi élastique équivalente pour l'ensemble membrane-flexion. La matrice obtenue est non-symétrique et tient compte du contrôle actif. D'après les approximations faites, la viscoélasticité n'intervient qu'au niveau du cisaillement.

### Modes en appui simple

En appui simple, les modes sont écrits sous la forme suivante qui satisfait toutes les conditions aux limites ( $N = 0, w = 0, M_w = M_\beta = 0$  aux extrémités) :

$$w = W \sin(kx) \quad \beta = B \cos(kx) \quad u = U \cos(kx) \quad k = \frac{n\pi}{L} \quad (4.105)$$

avec  $W, B, U$  complexes.

Ainsi,  $N, M_\beta$  et  $M_w$  s'expriment :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = ([C] + g[V_a] \otimes [V_s]^t) \begin{bmatrix} U \\ B \\ kW \end{bmatrix} (-k \sin(kx)) \quad (4.106)$$

Condensation du déplacement moyen  $u$  et de la rotation  $\beta$ 

Afin d'obtenir une seule inconnue en déplacement ( $W$ ), nous considérons les deux premières lois de comportement de (4.88), soit :

$$\begin{cases} N' = (\rho S)_{eq} \ddot{u} \\ M'_\beta - T = 0 \end{cases} \quad (4.107)$$

$T$  est défini par (4.94). Les expressions de  $N$  et  $M_\beta$  sont données par les formules (4.95) dans lesquelles le potentiel appliqué à l'actionneur est remplacé par (4.102).

Ainsi, les expressions de  $N'$  et  $M'_\beta$  sont égales à :

$$\begin{cases} N' = [(ES)_{eq} - g]u'' + \frac{h\nu}{2}(\alpha - g)\beta'' - H(\alpha - g)w^{(3)} \\ M'_\beta = \frac{h\nu}{2}(\alpha + g)u'' + [(EI)_{\beta eq} + g(\frac{h\nu}{2})^2]\beta'' + (\gamma_{weq} - g\frac{h\nu}{2}H)w^{(3)} \end{cases} \quad (4.108)$$

Dans le système (4.107), nous réalisons une condensation statique pour la partie en membrane. Cela conduit à  $N'=0$ . Le système (4.107) équivaut alors à :

$$\begin{cases} [(ES)_{eq} - g]u'' + \frac{h\nu}{2}(\alpha - g)\beta'' = H(\alpha - g)w^{(3)} \\ \frac{h\nu}{2}(\alpha + g)u'' + [(EI)_{\beta eq} + g(\frac{h\nu}{2})^2]\beta'' - G_v(\omega)S_v\beta = \\ G_v(\omega)S_v w' - (\gamma_{weq} - g\frac{h\nu}{2}H)w^{(3)} \end{cases} \quad (4.109)$$

Nous réécrivons ce système en utilisant les modes définis par (4.105) et nous obtenons :

$$\begin{cases} [(ES)_{eq} - g]U + \frac{h\nu}{2}(\alpha - g)B = H(\alpha - g)kW & (a) \\ -\frac{h\nu}{2}(\alpha + g)k^2U - \{[(EI)_{\beta eq} + g(\frac{h\nu}{2})^2]k^2 + G_v(\omega)S_v\} B = & (4.110) \\ [G_v(\omega)S_v + (\gamma_{weq} - g\frac{h\nu}{2}H)k^2]kW & (b) \end{cases}$$

A l'aide de ce système à deux équations et trois inconnues ( $U, B, W$ ), nous réduisons



le nombre d'inconnue à une. Nous réalisons les opérations suivantes sur les deux équations précédentes :

$$\begin{cases} (4.110)b + \frac{h_v}{2} \frac{(\alpha+g)k^2}{(ES)_{eq}-g} (4.110)a \\ (4.110)b + \frac{[(EI)_{\beta eq} + g(\frac{h_v}{2})^2]k^2 + G_v(\omega)S_v}{\frac{h_v}{2}(\alpha-g)} (4.110)a \end{cases} \quad (4.111)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{cases} U = U_{mode}kW \\ B = B_{mode}kW \end{cases} \quad (4.112)$$

avec

$$\begin{cases} U_{mode} = \frac{2 \frac{H}{h_v} \{ [(EI)_{\beta eq} + g(\frac{h_v}{2})^2] k^2 + G_v(\omega)S_v \} + G_v(\omega)S_v + (\gamma_{weq} - g\frac{h_v}{2}H) k^2}{\frac{(ES)_{eq}-g}{\frac{h_v}{2}(\alpha-g)} \{ [(EI)_{\beta eq} + g(\frac{h_v}{2})^2] k^2 + G_v(\omega)S_v \} - \frac{h_v}{2}(\alpha+g)k^2} \\ B_{mode} = \frac{G_v(\omega)S_v + \left[ \gamma_{weq} + \frac{h_v}{2}H \left( \frac{\alpha^2-g^2}{(ES)_{eq}-g} - g \right) \right] k^2}{-G_v(\omega)S_v + \left[ \left( \frac{h_v}{2} \right)^2 \left( \frac{\alpha^2-g^2}{(ES)_{eq}-g} - g \right) - (EI)_{\beta eq} \right] k^2} \end{cases} \quad (4.113)$$

Remarque :

Si la couche centrale est dure ( $G_v(\omega)S_v$  très grand), alors  $B_{mode}=-1$ , c'est à dire que le mode de cisaillement est égal à la dérivée du mode de flexion : on retrouve l'hypothèse de Bernouilli.

Les inconnues en déplacement sont alors réduites à  $kW$  de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} U \\ B \\ kW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{mode} \\ B_{mode} \\ 1 \end{bmatrix} kW \quad (4.114)$$

Par la suite, nous noterons le vecteur des déplacements modaux :

$$[R_{mode}] = \begin{bmatrix} U_{mode} \\ B_{mode} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

Les expressions de  $N$ ,  $M_\beta$  et  $M_w$  deviennent alors :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = ([C] + g[V_a] \otimes [V_s]^t) [R_{mode}] (-k^2 \sin(kx)) W \quad (4.116)$$

Remarque :

$[R_{mode}]$  dépend du terme de contrôle ( $g$ ) et de  $G_v(\omega)$ .  $[R_{mode}]$  est donc complexe et dépendant de  $\omega$ .

### Pulsation complexe

Pour arriver à une écriture plus synthétique de la pulsation, nous partons de la formulation variationnelle (4.101) en considérant la condensation de  $u$  et  $\beta$  et en choisissant les déplacements virtuels suivants :

$$\delta u = \bar{u} = \bar{U} \cos(kx) \quad , \quad \delta w = \bar{w} = \bar{W} \sin(kx) \quad , \quad \delta \beta = \bar{\beta} = \bar{B} \cos(kx) \quad (4.117)$$

$\bar{X}$  représentant le complexe conjugué de  $X$ .

Ainsi, en introduisant (4.114), (4.115) et (4.117) dans (4.101), la pulsation s'exprime par :

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L -k^2 \sin(kx) \overline{W} [\overline{R}_{mode}]^t [N \quad M_\beta \quad M_w] + T(\overline{B}_{mode} + 1) k \overline{W} \cos(kx) dx}{(\rho S)_{eq} \int_0^L (W \overline{W}) \sin^2(kx) dx} \quad (4.118)$$

En remplaçant  $[N, M_\beta, M_w]$  par (4.116), et  $T$  par (4.94), l'équation précédente devient :

$$\omega^2 = \frac{k^4 [\overline{R}_{mode}]^t ([C] + g[V_a] \otimes [V_s]^t) [R_{mode}] + k^2 S_v G_v(\omega) |B_{mode} + 1|^2}{(\rho S)_{eq}} \quad (4.119)$$

### Approximation des pulsations complexes

La formule (4.119) ne donne pas une expression explicite de la pulsation, mais une équation la caractérisant puisque le mode et le module de cisaillement dépendent de  $\omega$ . Pour simplifier notre étude, nous considérons que le module de la couche centrale a une valeur fixée :  $G_v(\omega) \rightarrow G_v^R(1 + i\eta_v)$ . Le module de cisaillement  $G_v^R$  et l'amortissement du matériau  $\eta_v$  sont indépendants de la pulsation. Pour approximer l'expression de la pulsation complexe (4.119), nous calculons  $[R_{mode}]$  en considérant  $G_v(\omega) = G_v^R$ . Ainsi,  $[R_{mode}]$  devient réel et  $\omega^2$  (4.119) devient :

$$\omega^2 = \frac{k^4 [\overline{R}_{mode}]^t ([C] + g[V_a] \otimes [V_s]^t) [R_{mode}] + k^2 S_v G_v^R (1 + i\eta_v) |B_{mode} + 1|^2}{(\rho S)_{eq}} \quad (4.120)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} [R_{mode}]^t = [U_{mode}, B_{mode}, 1] \\ \\ U_{mode} = \frac{2\frac{H}{h_v} \{ [(EI)_{\beta eq} + g(\frac{h_v}{2})^2] k^2 + G_v^R S_v \} + G_v^R S_v + (\gamma_{weq} - g\frac{h_v}{2} H) k^2}{\frac{(ES)_{eq} - g}{\frac{h_v}{2}(\alpha - g)} \{ [(EI)_{\beta eq} + g(\frac{h_v}{2})^2] k^2 + G_v^R S_v \} - \frac{h_v}{2}(\alpha + g)k^2} \\ \\ B_{mode} = \frac{G_v^R S_v + \left[ \gamma_{weq} + \frac{h_v}{2} H \left( \frac{\alpha^2 - g^2}{(ES)_{eq} - g} - g \right) \right] k^2}{-G_v^R S_v + \left[ \left( \frac{h_v}{2} \right)^2 \left( \frac{\alpha^2 - g^2}{(ES)_{eq} - g} - g \right) - (EI)_{\beta eq} \right] k^2} \end{array} \right. \quad (4.121)$$

Nous voyons apparaître dans l'expression de la pulsation deux paquets de termes. Le premier paquet est réel et traduit l'effet de la rigidité élastique équivalente. C'est le premier terme qui traduit principalement l'influence du contrôle sur la fréquence, d'une part à travers le terme  $g[V_a] \otimes [V_s]^t$ , d'autre part à travers l'influence de  $g$  sur la forme du mode. Cette évolution de la pulsation  $\Omega$  en fonction de  $g$  est relativement complexe.

Le deuxième paquet traduit l'influence de la couche viscoélastique. Sa partie réelle  $k^2 S_v G_v^R (1 + B_{mode})^2$  aura une faible influence sur la fréquence si le coeur est peu rigide. Donc ce second terme influe surtout sur l'amortissement modal  $\eta$  qui s'écrit :

$$\frac{\eta}{\eta_v} = \frac{k^2 S_v G_v^R (1 + B_{mode})^2}{\Omega^2} \quad (4.122)$$

L'amortissement modal est donc proportionnel à l'amortissement du matériau viscoélastique. Le paramètre de contrôle  $g$  peut modifier cet amortissement via le mode ( $B_{mode}$ ) et la pulsation obtenue  $\Omega$ .

### 4.5.7 Deuxième loi du contrôle actif - Approche viscoélastique équivalente

$\phi_a$  : fonction linéaire du déplacement

Dans le cas de la poutre sandwich (piézoélectrique/élastique/viscoélastique/élastique/piézoélectrique) étudiée ici, le potentiel appliqué à l'actionneur suivant la **loi rétroactive en vitesse avec gain constant négatif** (4.57) s'écrit de la façon suivante :

$$\phi_a = -G_c i\omega \phi_s = -i\omega G_c \frac{e_{31}^*}{\epsilon_{33}^*} H(u' + \frac{h_v}{2}\beta' - Hw'') \quad (4.123)$$

soit sous forme matricielle :

$$\phi_a = -i\omega g [V_s]^t \quad (4.124)$$

$[V_s]$  est identique à celui de la première loi de contrôle, soit égal à :  $[V_s] = [1, \frac{h_v}{2}, -H]^t$ .

De même,  $g$  représentant le terme de contrôle est à nouveau défini par  $g = G_c \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}^2} S_p$ .

Le système matriciel (4.97) donnant la loi de comportement équivalente ressemble cette fois à un modèle viscoélastique de Kelvin :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = ([C] - i\omega g [V_a] \otimes [V_s]^t) \begin{bmatrix} u' \\ \beta' \\ w'' \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

Mode en appui simple. Condensation du déplacement moyen  $u$  et de la rotation  $\beta$

Nous choisissons à nouveau la catégorie de mode de type appui-simple (4.105). Ainsi, le système matriciel (4.125) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = ([C] - i\omega g[V_a] \otimes [V_s]^t) \begin{bmatrix} U \\ B \\ kW \end{bmatrix} (-k \sin(kx)) \quad (4.126)$$

Dans le but d'obtenir une seule inconnue en déplacement, nous considérons à nouveau les deux premières lois de conservation de (4.88) et nous réalisons une condensation quasi-statique pour la partie en membrane. Le système à étudier est alors le suivant :

$$\begin{cases} N' = 0 & \text{avec } \omega = 0 \\ M'_\beta - T = 0 \end{cases} \quad (4.127)$$

$T$  est défini par (4.94). Les expressions de  $N'$  et  $M''_\beta$  sont calculées à partir des formules (4.95) dans lesquelles le potentiel appliqué à l'actionneur est remplacé par (4.123).

Le système précédent s'écrit alors :

$$\begin{cases} (ES)_{eq}u'' + \frac{h_v}{2}\alpha\beta'' = H\alpha w^{(3)} \\ \frac{h_v}{2}(\alpha - i\omega g)u'' + [(EI)_{\beta eq} - i\omega g(\frac{h_v}{2})^2]\beta'' - G_v(\omega)S_v\beta = \\ G_v(\omega)S_v w' - (\gamma_{weq} + i\omega g\frac{h_v}{2}H)w^{(3)} \end{cases} \quad (4.128)$$

Nous réécrivons ce système en utilisant les modes définis par (4.105) et nous obtenons :

$$\begin{cases} (ES)_{eq}U + \frac{h_v}{2}\alpha B = H\alpha kW & (a) \\ -\frac{h_v}{2}(\alpha - i\omega g)k^2U - \{[(EI)_{\beta eq} - i\omega g(\frac{h_v}{2})^2]k^2 + G_v(\omega)S_v\} B = & (4.129) \\ [G_v(\omega)S_v + (\gamma_{weq} + i\omega g\frac{h_v}{2}H)k^2]kW & (b) \end{cases}$$

Comme précédemment, ce système à deux équations et trois inconnues ( $U, B, W$ ) nous permet de réduire le nombre d'inconnues à une :  $W$ . Nous réalisons les opérations suivantes :

$$\begin{cases} (4.127)(b) + \frac{h_v}{2} \frac{(\alpha - i\omega g)k^2}{(ES)_{eq}} (4.127)(a) \\ (4.127)(b) + \frac{[(EI)_{\beta eq} - i\omega g (\frac{h_v}{2})^2]k^2 + G_v(\omega)S_v}{\frac{h_v}{2}\alpha} (4.127)(a) \end{cases} \quad (4.130)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{cases} U = U_{mode}kW \\ B = B_{mode}kW \end{cases} \quad (4.131)$$

avec

$$\begin{cases} U_{mode} = \frac{2\frac{H}{h_v} \{ [(EI)_{\beta eq} - i\omega g (\frac{h_v}{2})^2] k^2 + G_v(\omega)S_v \} + G_v(\omega)S_v + (\gamma_{weq} + i\omega g \frac{h_v}{2} H) k^2}{2\frac{(ES)_{eq}}{h_v\alpha} \{ [(EI)_{\beta eq} - i\omega g (\frac{h_v}{2})^2] k^2 + G_v(\omega)S_v \} - \frac{h_v}{2} (\alpha - i\omega g) k^2} \\ B_{mode} = \frac{G_v(\omega)S_v + [\gamma_{weq} + \frac{h_v}{2} H (\frac{\alpha - i\omega g}{(ES)_{eq}} \alpha + i\omega g)] k^2}{-G_v(\omega)S_v + [(\frac{h_v}{2})^2 (\frac{\alpha - i\omega g}{(ES)_{eq}} \alpha + i\omega g) - (EI)_{\beta eq}] k^2} \end{cases} \quad (4.132)$$

Les inconnues en déplacement sont donc réduites à  $kW$  de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} U \\ B \\ kW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{mode} \\ B_{mode} \\ 1 \end{bmatrix} kW \quad (4.133)$$

Par la suite, nous noterons le vecteur des déplacements modaux :

$$[R_{mode}] = \begin{bmatrix} U_{mode} \\ B_{mode} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

Les expressions de  $N$ ,  $M_\beta$  et  $M_w$  deviennent alors :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = ([C] - i\omega g[V_a] \otimes [V_s]^t) [R_{mode}] (-k^2 \sin(kx)) W \quad (4.135)$$

Remarque :

$[R_{mode}]$  dépend du terme de contrôle ( $g$ ) et de  $G_v(\omega)$ .  $[R_{mode}]$  est donc encore complexe et dépendante de  $\omega$ .

### Pulsation complexe

Pour arriver à une écriture plus synthétique de la pulsation, nous partons de la formulation variationnelle (4.101) en considérant la condensation du déplacement moyen  $u$  et de la rotation  $\beta$  et en choisissant les déplacements virtuels définis par (4.117). Dans cette formulation, nous introduisons (4.133), (4.134) et (4.117) et nous remplaçons  $[N, M_\beta, M_w]$  et  $T$  par leurs expressions (4.135) et (4.94) respectivement. Ainsi, la pulsation complexe est définie par :

$$\omega^2 = \frac{k^4 \bar{\mathbf{R}}_{mode}^t ([C] - i\omega g[V_a] \otimes [V_s]^t) [R_{mode}] + k^2 S_v G_v(\omega) |B_{mode} + 1|^2}{(\rho S)_{eq}} \quad (4.136)$$



Approximation des pulsations complexes

Les relations (4.136) et (4.132) fournissent une équation caractérisant la pulsation complexe  $\omega^2$ . Sous cette forme, le problème de vibrations de poutres à cinq couches a été résolu avec une seule approximation (quasi-statique en membrane). Il semble raisonnable de simplifier cette relation (4.136) en négligeant l'influence de la pulsation sur le mode et sur le module de cisaillement de la couche visqueuse. Cela conduit à des expressions simplifiées du module de cisaillement et du mode qui devient réel :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_v(\omega) \rightarrow G_v^R(1 + i\eta_v) \\ \\ U_{mode} = \frac{2\frac{H}{h_v} \{ (EI)_{\beta eq} k^2 + G_v^R S_v \} + G_v^R S_v + \gamma_{weq} k^2}{2\frac{(ES)_{eq}}{h_v \alpha} \{ (EI)_{\beta eq} k^2 + G_v^R S_v \} - \frac{h_v}{2} \alpha k^2} \\ \\ B_{mode} = \frac{G_v^R S_v + \left[ \gamma_{weq} + \frac{h_v}{2} H \frac{\alpha^2}{(ES)_{eq}} \right] k^2}{-G_v^R S_v + \left[ \left( \frac{h_v}{2} \right)^2 \frac{\alpha^2}{(ES)_{eq}} - (EI)_{\beta eq} \right] k^2} \end{array} \right. \quad (4.137)$$

Comme il est naturel avec cette loi de contrôle et cette approximation, nous avons ainsi négligé l'influence du contrôle et de la pulsation sur les modes. Nous en déduisons une expression simplifiée de la fréquence amortie  $\Omega$  et de l'amortissement modal  $\eta$  ( $\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta)$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^2 = \frac{k^4 [R_{mode}]^t [C] [R_{mode}] + k^2 S_v G_v^R (1 + B_{mode})^2}{(\rho S)_{eq}} \\ \\ \eta = \frac{-\omega g k^4 [R_{mode}]^t [V_a] \otimes [V_s]^t [R_{mode}] + k^2 S_v G_v^R \eta_v (1 + B_{mode})^2}{(\rho S)_{eq} \Omega^2} \end{array} \right. \quad (4.138)$$

Ainsi, l'amortissement modal se décompose en deux termes : un représentant l'influence du contrôle, qui est proportionnel à  $\omega$  puisque le contrôle est une sorte de loi viscoélastique de type Kelvin, l'autre représentant l'amortissement viscoélastique de la couche centrale. Bien entendu ces quantités, ainsi que le vecteur modal  $[R_{mode}]$ , varient avec le numéro du mode ( $k = n\pi/L$  intervenant partout). Notons aussi que, dans ce cas et avec ces approximations, la fréquence ne dépend plus du contrôle.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude analytique de poutres sandwich piézoélectriques. Ces poutres ont des peaux piézoélectriques : l'une joue le rôle de capteur et l'autre le rôle d'actionneur. Nous voulions approcher les valeurs propres complexes de ces structures par une approche modale, afin d'avoir une approche commune pour tous les types d'amortissements (viscoélastique, piézoélectrique...). Pour cela, nous avons étudié une poutre sandwich trois couches (piézoélectrique/élastique/piézoélectrique) et une poutre sandwich viscoélastique prise entre deux peaux piézoélectriques. A titre d'exemple, deux lois de contrôle ont été appliquées : loi rétroactive proportionnelle et directe  $\phi_a = G_c \phi_s$  et loi rétroactive en vitesse avec gain constant négatif  $\phi_a = -G_c \dot{\phi}_s$ . Notre approche a consisté à éliminer les grandeurs électriques pour en déduire des modèles de poutres viscoélastiques équivalentes. Pour le premier type de loi, le contrôle se traduit par une modification des termes élastiques, avec une matrice de rigidité non-symétrique. Avec le second, le contrôle se traduit par une loi de type viscoélastique.

Ensuite, nous avons cherché des solutions analytiques dans le cas particulier de l'appui simple, puis des valeurs approchées de ces solutions. D'après ces valeurs approchées, avec la loi  $\phi_a = G_c \phi_s$ , la fréquence amortie dépend du contrôle de manière complexe et l'amortissement modal est proportionnel à la viscosité du matériau viscoélastique.

Avec la seconde loi  $\phi_a = -G_c \dot{\phi}_s$ , l'amortissement modal est la somme de deux contributions, l'une proportionnelle au contrôle, l'autre proportionnelle à l'amortissement viscoélastique.

# Conclusion et perspectives

Aujourd'hui, la protection de l'environnement, et donc le combat contre le bruit, est de plus en plus pris en compte que ce soit au niveau de l'automobile, de l'électroménager, de l'aérospatial, de l'aéronautique... Il est donc nécessaire d'amortir les vibrations pour éviter des dégâts matériels ou/et les nuisances sonores. Pour cela, il existe deux types d'amortissement : l'amortissement dit "passif" et l'amortissement dit "actif".

Dans le travail présenté, nous avons proposé dans un premier temps un modèle élément fini sandwich et dans un deuxième temps des méthodes numériques capables de résoudre les problèmes de vibrations aux valeurs propres complexes non-linéaires dans le cadre de l'amortissement passif. Ensuite, nous avons étudié analytiquement des poutres sandwich piézoélectriques dans le cadre de l'amortissement actif. Nous avons choisi une approche par modes complexes pour définir l'amortissement.

Tout d'abord, nous nous sommes intéressés à la modélisation des coques sandwich viscoélastiques. Nous avons établi un élément fini sandwich : le BRR/Mindlin/BRR. Il s'agit d'un assemblage de deux éléments de coques de Büchter et al. dans les couches élastiques, les déplacements de la couche centrale étant déduits des conditions aux raccords cinématiques et de l'hypothèse de Mindlin. L'élément ainsi obtenu est riche en membrane et permet de prendre en compte le cisaillement dans la couche centrale viscoélastique, responsable de l'amortissement quelles que soient la taille ou/et la géométrie des structures sandwich. Cette modélisation a été validée en calculant les fréquences propres de structures sandwich et en les comparant à celles obtenues par

E.M. Daya et M. Potier-Ferry [17].

Ensuite, deux méthodes itératives d'ordre élevé ont été proposées pour résoudre le problème aux valeurs propres complexes non-linéaires engendré par la dépendance en fréquence des propriétés du matériau viscoélastique. Les deux méthodes itératives sont basées sur les techniques d'homotopie et de perturbation. La première est une méthode de Newton à ordre élevé. Elle nécessite l'inversion d'une nouvelle matrice tangente (complexe) à chaque itération. La seconde est une méthode itérative d'ordre élevé ( $L^*$ ), qui demande seulement l'inversion d'une seule matrice réelle par mode complexe. D'après les tests effectués, l'algorithme de Newton à ordre élevé n'est pas aussi efficace qu'espéré, tandis que l'algorithme itératif  $L^*$  converge rapidement quand il est associé aux approximants de Padé. Cependant, pour des modes très proches, cette dernière méthode peut échouer, même en l'associant à l'algorithme de continuation de E.M. Daya et M. Potier-Ferry. La robustesse de l'algorithme doit donc encore être améliorée.

Finalement, nous avons présenté une étude analytique de poutres sandwich piézoélectriques à trois et cinq couches. Ces poutres ont des peaux piézoélectriques, l'une jouant le rôle de capteur et l'autre le rôle d'actionneur. L'originalité de cette étude repose sur le fait que nous avons utilisé une approche modale pour obtenir la fréquence amortie et l'amortissement de ces poutres piézoélectriques, comme cela a déjà été réalisé dans le cas des structures sandwich viscoélastiques. Nous avons restreint notre étude à deux types de contrôle : la loi rétroactive proportionnelle et directe  $\phi_a = G_c \phi_s$  et la loi rétroactive en vitesse avec gain constant négatif  $\phi_a = -G_c \dot{\phi}_s$ . L'élimination des termes électriques nous a permis d'obtenir des modèles de poutres viscoélastiques équivalentes, que nous avons encore simplifiés en considérant les poutres en appui simple. Suivant la loi de contrôle appliquée, la fréquence amortie et l'amortissement dépendent plus ou moins du terme de contrôle et de l'amortissement viscoélastique.

L'étude analytique présentée ici sur les poutres sandwich piézoélectriques n'est qu'une

première étape. En effet par la suite, nous souhaitons étudier numériquement les structures piézoélectriques. Nous voulons calculer les fréquences amorties et les amortissements de ces structures piézoélectriques, sous différentes lois de contrôle, à l'aide d'algorithmes itératifs d'ordre élevé présentés ici.

A moyen terme, l'idée serait d'avoir une approche commune pour tous les types d'amortissement (viscoélastique, piézoélectrique, poreux...).

## ANNEXE A

# Fonctions de forme de l'élément quadrilatère à huit noeuds

On représente un élément quadrilatère à 8 noeuds de la façon suivante :

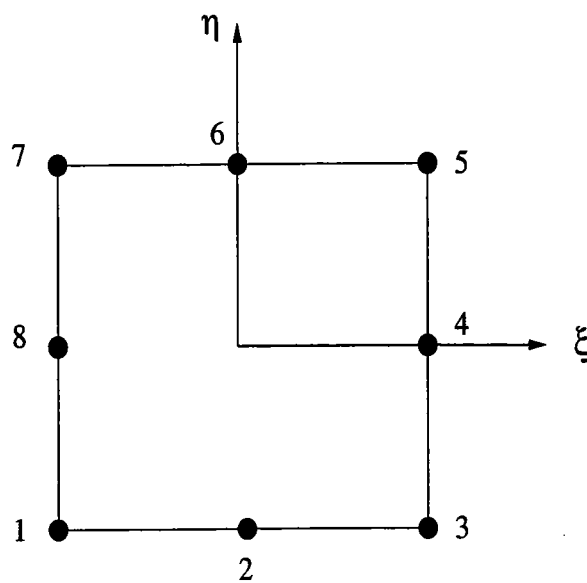


FIG. A.1 – Représentation d'un élément quadrilatère à 8 noeuds

Les fonctions de forme de cet élément sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} N_i = \frac{1}{4}(-1 + \xi_i \xi + \eta_i \eta)(1 + \eta_i \eta)(1 + \xi_i \xi) & i = 1, 3, 5, 7 \\ N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta) & i = 2, 6 \\ N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi_i \xi)(1 - \eta^2) & i = 4, 8 \\ -1 \leq \xi \leq 1 \\ -1 \leq \eta \leq 1 \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$



## ANNEXE B

# Calculs intermédiaires pour avoir le déplacement de la couche centrale

Dans les couches supérieure et inférieure en acier, le champ de déplacement s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^s(r_1, r_2, r_3) = u^s(r_1, r_2) + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^8 h_{ak}^s N_k(r_1, r_2) R_{kx}^s \\ V^s(r_1, r_2, r_3) = v^s(r_1, r_2) + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^8 h_{ak}^s N_k(r_1, r_2) R_{ky}^s \\ W^s(r_1, r_2, r_3) = w^s(r_1, r_2) + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^8 h_{ak}^s N_k(r_1, r_2) R_{kz}^s \\ r_3 \in [-1; 1] \end{array} \right. \quad (B.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U^i(r_1, r_2, r_3) = u^i(r_1, r_2) + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^8 h_{ak}^i N_k(r_1, r_2) R_{kx}^i \\ V^i(r_1, r_2, r_3) = v^i(r_1, r_2) + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^8 h_{ak}^i N_k(r_1, r_2) R_{ky}^i \\ W^i(r_1, r_2, r_3) = w^i(r_1, r_2) + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^8 h_{ak}^i N_k(r_1, r_2) R_{kz}^i \\ r_3 \in [-1; 1] \end{array} \right. \quad (B.2)$$

Afin d'exprimer les déplacements et le vecteur "rotation" de la couche viscoélastique, en fonction des champs de déplacement des couches supérieure et inférieure en acier, nous supposons que le champ de déplacement dans la couche centrale s'écrit également sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^c(r_1, r_2, r_3) = u^c(r_1, r_2) + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^8 h_{ck} N_k(r_1, r_2) R_{kx}^c \\ V^c(r_1, r_2, r_3) = v^c(r_1, r_2) + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^8 h_{ck} N_k(r_1, r_2) R_{ky}^c \\ W^c(r_1, r_2, r_3) = w^c(r_1, r_2) + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^8 h_{ck} N_k(r_1, r_2) R_{kz}^c \\ r_3 \in [-1; 1] \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

Nous faisons les hypothèses classiques suivantes :

- Tous les points d'une normale à un plan ont le même déplacement transverse :

$$w^c(r_1, r_2) = w^i(r_1, r_2) = w^s(r_1, r_2) = w(r_1, r_2),$$

- Aucun écart entre la couche centrale et les parements d'acier n'est permis,

- Tous les points des couches élastiques sur une normale ont les mêmes rotations :

$$R_{kx}^s = R_{kx}^i = R_{kx}, R_{ky}^s = R_{ky}^i = R_{ky}, R_{kz}^s = R_{kz}^i = R_{kz}$$

- L'épaisseur est constante dans les trois couches et un sandwich symétrique est considéré :

$$h_{ak}^s = h_{ak}^i = h_a, h_{ck} = h_c.$$

En considérant les conditions de raccord cinématique ci-dessous, on peut exprimer le déplacement dans la couche centrale en fonction des déplacements des couches élastiques.

$$\begin{array}{l} U^s(A) = U^c(A) \quad V^s(A) = V^c(A) \quad W^s(A) = W^c(A) \\ U^i(B) = U^c(B) \quad V^i(B) = V^c(B) \quad W^i(B) = W^c(B) \end{array} \quad (\text{B.4})$$

où A se situe à l'interface de la couche supérieure en acier et de la couche centrale et B à l'interface de la couche inférieure en acier et de la couche centrale.

Ainsi, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \begin{cases} u^s(r_1, r_2) - \frac{1}{2}h_a \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kx} = u^c(r_1, r_2) + \frac{1}{2}h_c \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kx}^c \\ u^i(r_1, r_2) + \frac{1}{2}h_a \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kx} = u^c(r_1, r_2) - \frac{1}{2}h_c \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kx}^c \end{cases} \\
(2) \quad & \begin{cases} v^s(r_1, r_2) - \frac{1}{2}h_a \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{ky} = v^c(r_1, r_2) + \frac{1}{2}h_c \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{ky}^c \\ v^i(r_1, r_2) + \frac{1}{2}h_a \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{ky} = v^c(r_1, r_2) - \frac{1}{2}h_c \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{ky}^c \end{cases} \\
(3) \quad & \begin{cases} w(r_1, r_2) - \frac{1}{2}h_a \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kz} = w(r_1, r_2) + \frac{1}{2}h_c \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kz}^c \\ w(r_1, r_2) + \frac{1}{2}h_a \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kz} = w(r_1, r_2) - \frac{1}{2}h_c \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kz}^c \end{cases} \quad (B.5)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
(1) \Rightarrow & \begin{cases} u^c(r_1, r_2) = \frac{u^s(r_1, r_2) + u^i(r_1, r_2)}{2} \\ h_c \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kx}^c = u^s(r_1, r_2) - u^i(r_1, r_2) - h_a \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kx} \end{cases} \\
(2) \Rightarrow & \begin{cases} v^c(r_1, r_2) = \frac{v^s(r_1, r_2) + v^i(r_1, r_2)}{2} \\ h_c \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{ky}^c = v^s(r_1, r_2) - v^i(r_1, r_2) - h_a \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{ky} \end{cases} \\
(3) \Rightarrow & \{ h_c \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kz}^c = -h_a \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kz} \} \quad (B.6)
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} U^c(x, y, r_3) = \left(\frac{1}{2} + \frac{r_3}{2}\right)u^s(x, y) + \left(\frac{1}{2} - \frac{r_3}{2}\right)u^i(x, y) - \frac{r_3}{2} \cdot h_a \cdot \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kx} \\ V^c(x, y, r_3) = \left(\frac{1}{2} + \frac{r_3}{2}\right)v^s(x, y) + \left(\frac{1}{2} - \frac{r_3}{2}\right)v^i(x, y) - \frac{r_3}{2} \cdot h_a \cdot \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{ky} \\ W^c(x, y, r_3) = w(x, y) - \frac{r_3}{2} \cdot h_a \cdot \sum_{k=1}^8 N_k(r_1, r_2)R_{kz} \\ r_3 \in [-1; 1] \end{cases} \quad (B.7)$$

## ANNEXE C

# Résultats obtenus par les trois algorithmes pour le test de robustesse

Dans tous les calculs, l'ordre de troncature est choisi égal à 20. Dans le cas de l'Algorithme de continuation,  $\delta$  est pris égal à  $10^{-4}$ .

### C.1 Algorithme de Continuation

Mode	fréq.non amortie	$\Omega$	$\eta_m/\eta_c$	Série+Continuation	Résidu
1	64	66	0.245	S	$2 \cdot 10^{-7}$
2	297	300	0.231	S	$2 \cdot 10^{-6}$
3	321	321	$10^{-6}$	S+1	$2 \cdot 10^{-9}$
4	746	748	0.152	S	$10^{-5}$
5	991.1	991.4	$1.49 \cdot 10^{-2}$	S	$10^{-4}$
6	1398	1399	$8.80 \cdot 10^{-2}$	S	$2 \cdot 10^{-5}$
7	1966	1966	$10^{-6}$	S	$10^{-9}$
8	2266	2267	$5.66 \cdot 10^{-2}$	S	$3 \cdot 10^{-5}$
9	2996	2998	$1.63 \cdot 10^{-2}$	S+1	$10^{-4}$
10	3350.4	3350.8	$3.85 \cdot 10^{-2}$	S	$4 \cdot 10^{-5}$
11	4651	4652	$2.78 \cdot 10^{-2}$	S	$5 \cdot 10^{-5}$
12	5064	5069	$1.74 \cdot 10^{-2}$	S+1	$10^{-4}$
13	5323	5323	$10^{-6}$	S+1	$5 \cdot 10^{-9}$
14	6171.6	6171.9	$2.08 \cdot 10^{-2}$	S	$6 \cdot 10^{-5}$

TAB. C.1 – 50 premiers modes obtenus par l'Algorithme de Continuation

Mode	fréq.non amortie	$\Omega$	$\eta_m/\eta_c$	Itération	Résidu
15	6979	6979	$10^{-6}$	S+2	$2 \cdot 10^{-9}$
16	7178	7188	$2.24 \cdot 10^{-2}$	S+2	$10^{-4}$
17	7913.7	7913.9	$1.64 \cdot 10^{-2}$	S+2	$7 \cdot 10^{-5}$
18	8254.8	8255.1	0.998	S+3	$3 \cdot 10^{-5}$
19	8488	8493	0.937	S+2	$4 \cdot 10^{-5}$
20	9313	9317	$2.46 \cdot 10^{-2}$	S+3	$2 \cdot 10^{-4}$
21	9813	9968	$6.49 \cdot 10^{-2}$	S+18	$10^{-3}$
22	9881.3	9882.6	$1.33 \cdot 10^{-2}$	S+5	$8 \cdot 10^{-5}$
23	9974	9974	$10^{-6}$	S+5	$2 \cdot 10^{-9}$
24	10687		ne converge pas		
25	11475	11477	$2.14 \cdot 10^{-2}$	S+1	$2 \cdot 10^{-4}$
26	12088	12087	$1.08 \cdot 10^{-2}$	S+1	$10^{-4}$
27	12916.9	12915.5	0.396	S+2	$9 \cdot 10^{-5}$
28	13702.9	13702.6	$1.76 \cdot 10^{-2}$	S+2	$2 \cdot 10^{-4}$
29	14535.5	14535.4	$8.74 \cdot 10^{-3}$	S	$10^{-4}$
30	15666	15666	$10^{-6}$	S	$8 \cdot 10^{-10}$
31	16013	16014	$1.33 \cdot 10^{-2}$	S	$2 \cdot 10^{-4}$
32	17240	17240	$7.34 \cdot 10^{-3}$	S+1	$10^{-4}$
33	17704	17708	$9.39 \cdot 10^{-2}$	S+8	$7 \cdot 10^{-4}$
34	18426.9	18427.4	$1.13 \cdot 10^{-2}$	S+2	$2 \cdot 10^{-4}$
35	20219	20219	$6.09 \cdot 10^{-3}$	S	$10^{-4}$
36	20929	20929	$10^{-6}$	S	$6 \cdot 10^{-9}$
37	20953.5	20953.9	$8.84 \cdot 10^{-3}$	S	$2 \cdot 10^{-4}$
38	22154	22154	$10^{-6}$	S+2	$7 \cdot 10^{-9}$
39	22522.7	22523.2	0.128	S	$3 \cdot 10^{-6}$
40	23492	23492	$5.39 \cdot 10^{-3}$	S+1	$2 \cdot 10^{-4}$
41	23607.3	23607.6	$8.04 \cdot 10^{-3}$	S+5	$2 \cdot 10^{-4}$
42	23682	23666	$4.66 \cdot 10^{-2}$	S+28	$6 \cdot 10^{-4}$
43	26402.6	26402.8	$6.66 \cdot 10^{-3}$	S	$3 \cdot 10^{-4}$
44	27080	27080	$4.44 \cdot 10^{-3}$	S	$2 \cdot 10^{-4}$
45	29249	29249	$10^{-6}$	S	$10^{-8}$
46	29354	29355	$5.32 \cdot 10^{-3}$	S	$3 \cdot 10^{-4}$
47	30478		ne converge pas		
48	31007	31007	$3.82 \cdot 10^{-3}$	S	$2 \cdot 10^{-4}$
49	32480.7	32480.8	$4.59 \cdot 10^{-3}$	S	$3 \cdot 10^{-4}$
50	34857	34857	$10^{-6}$	S	$2 \cdot 10^{-7}$

TAB. C.2 – 50 premiers modes obtenus par l'Algorithme de Continuation (suite)

## C.2 Algorithme Itératif d'ordre élevé de type Newton

Mode	fréq.non amortie	$\Omega$	$\eta_m/\eta_c$	Itération	Résidu
1	64	66	0.246	1	$4 \cdot 10^{-6}$
2	297	300	0.232	1	$9 \cdot 10^{-5}$
3	321	321	$10^{-6}$	1	$2 \cdot 10^{-10}$
4	746	748	0.152	2	$2 \cdot 10^{-9}$
5	991	1016	$1.5 \cdot 10^{-2}$	2	$2 \cdot 10^{-11}$
6	1398	1401	$8.80 \cdot 10^{-2}$	1	$10^{-4}$
7	1966	1966	$10^{-6}$	1	$6 \cdot 10^{-12}$
8	2266	2273	$5.66 \cdot 10^{-2}$	1	$1 \cdot 10^{-4}$
9	2996	3075	$1.65 \cdot 10^{-2}$	2	$3 \cdot 10^{-9}$
10	3350	3364	$3.85 \cdot 10^{-2}$	2	$6 \cdot 10^{-10}$
11	4651	4677	$2.78 \cdot 10^{-2}$	2	$5 \cdot 10^{-10}$
12	5064	5202	$1.74 \cdot 10^{-2}$	2	$7 \cdot 10^{-8}$
13	5323	5323	$10^{-6}$	1	$10^{-12}$
14	6171	6216	$2.09 \cdot 10^{-2}$	2	$5 \cdot 10^{-10}$
15	6979	6979	$10^{-6}$	1	$4 \cdot 10^{-13}$
16	7178	7387	$2.16 \cdot 10^{-2}$	2	$7 \cdot 10^{-7}$
17	7913	7987	$1.62 \cdot 10^{-2}$	2	$6 \cdot 10^{-10}$
18	8254		diverge		
19	8488		diverge		
20	9313	9592	$2.33 \cdot 10^{-2}$	2	$10^{-6}$
21	9813				
22	9881	9996	$1.31 \cdot 10^{-2}$	2	$2 \cdot 10^{-8}$
23	9974	9974	$10^{-6}$	1	$3 \cdot 10^{-13}$
24	10687		diverge		
25	11475	11838	$2.07 \cdot 10^{-2}$	2	$9 \cdot 10^{-7}$
26	12088	12259	$1.07 \cdot 10^{-2}$	2	$6 \cdot 10^{-8}$
27	12916		diverge		
28	13702	14162	$1.68 \cdot 10^{-2}$	2	$5 \cdot 10^{-7}$
29	14535	14785	$8.72 \cdot 10^{-3}$	2	$9 \cdot 10^{-9}$

TAB. C.3 – 50 premiers modes obtenus par l'Algorithme Itératif d'ordre élevé de type Newton

Mode	fréq.non amortie	$\Omega$	$\eta_m/\eta_c$	Itération	Résidu
30	15666	15666	$10^{-6}$	1	$10^{-13}$
31	16013	16592	$1.32 \cdot 10^{-2}$	2	$3 \cdot 10^{-8}$
32	17240	17596	$7.21 \cdot 10^{-3}$	2	$3 \cdot 10^{-9}$
33	17704	diverge			
34	18426	19148	$1.07 \cdot 10^{-2}$	2	$2 \cdot 10^{-8}$
35	20219	20717	$6.07 \cdot 10^{-3}$	2	$2 \cdot 10^{-9}$
36	20929	20929	$10^{-6}$	1	$4 \cdot 10^{-14}$
37	20953	diverge			
38	22154	22154	$10^{-6}$	1	$6 \cdot 10^{-14}$
39	22522	22523	0.128	1	$2 \cdot 10^{-6}$
40	23492	24177	$5.19 \cdot 10^{-3}$	2	$2 \cdot 10^{-7}$
41	23607	diverge			
42	23682	23680	0.116	1	$4 \cdot 10^{-5}$
43	26402	27759	$6.15 \cdot 10^{-3}$	2	$10^{-8}$
44	27080	28016	$4.40 \cdot 10^{-3}$	2	$5 \cdot 10^{-9}$
45	29249	29249	$10^{-6}$	1	$4 \cdot 10^{-14}$
46	29354	diverge			
47	30478	30477	$7.03 \cdot 10^{-2}$	2	$2 \cdot 10^{-8}$
48	31007	diverge			
49	32480	diverge			
50	34857	34857	$10^{-6}$	1	$10^{-14}$

TAB. C.4 – 50 premiers modes obtenus par l'Algorithme Itératif d'ordre élevé de type Newton (suite)

### C.3 Algorithme Itératif d'ordre élevé $L^*$

Mode	fréq.non amortie	$\Omega$	$\eta_m/\eta_c$	Itération	Résidu
1	64	66	0.245	1	$10^{-8}$
2	297	300	0.231	1	$3 \cdot 10^{-10}$
3	321	321	$10^{-6}$	1	$2 \cdot 10^{-10}$
4	746	748	0.152	1	$10^{-10}$
5	991	1016	$1.49 \cdot 10^{-2}$	1	$7 \cdot 10^{-6}$
6	1398	1401	$8.799 \cdot 10^{-2}$	1	$10^{-10}$
7	1966	1966	$10^{-6}$	1	$8 \cdot 10^{-12}$
8	2266	2273	$5.66 \cdot 10^{-2}$	1	$7 \cdot 10^{-11}$
9	2996	3074	$1.64 \cdot 10^{-2}$	1+P	$7 \cdot 10^{-8}$
10	3350	3364	$3.85 \cdot 10^{-2}$	1	$10^{-10}$
11	4651	4677	$2.78 \cdot 10^{-2}$	1	$3 \cdot 10^{-10}$
12	5064	5202	$1.74 \cdot 10^{-2}$	1+P	$6 \cdot 10^{-9}$
13	5323	5323	$10^{-6}$	1	$2 \cdot 10^{-10}$
14	6171	6216	$2.09 \cdot 10^{-2}$	1	$4 \cdot 10^{-9}$
15	6979	6979	$10^{-6}$	1	$5 \cdot 10^{-8}$
16	7178	7387	$2.16 \cdot 10^{-2}$	1+P	$3 \cdot 10^{-4}$
17	7913	7987	$1.62 \cdot 10^{-2}$	1+P	$10^{-8}$
18	8254		ne converge pas		
19	8488	8504	0.938	2+P	$6 \cdot 10^{-8}$
20	9313	9592	$2.33 \cdot 10^{-2}$	3+P	$10^{-4}$
21	9813		diverge		
22	9881	9996	$1.31 \cdot 10^{-2}$	2+P	$9 \cdot 10^{-8}$
23	9974	9974	$10^{-6}$	1+P	$6 \cdot 10^{-6}$
24	10687	10688	0.568	3+P	$4 \cdot 10^{-8}$
25	11475	11838	$2.07 \cdot 10^{-2}$	1+P	$2 \cdot 10^{-6}$
26	12088	12259	$1.07 \cdot 10^{-2}$	1+P	$4 \cdot 10^{-9}$
27	12916	12921	0.402	1+P	$10^{-5}$
28	13702	14162	$1.68 \cdot 10^{-2}$	1+P	$10^{-5}$
29	14535	14785	$8.72 \cdot 10^{-3}$	1	$8 \cdot 10^{-11}$

TAB. C.5 – 50 premiers modes obtenus par l'Algorithme Itératif  $L^*$



Mode	fréq.non amortie	$\Omega$	$\eta_m/\eta_c$	Itération	Résidu
30	15666	15666	$10^{-6}$	1	$2 \cdot 10^{-13}$
31	16013	16592	$1.32 \cdot 10^{-2}$	1	$3 \cdot 10^{-6}$
32	17240	17596	$7.21 \cdot 10^{-3}$	1+P	$8 \cdot 10^{-14}$
33	17704	17702	0.211	1+P	$10^{-6}$
34	18426	19148	$1.07 \cdot 10^{-2}$	1+P	$10^{-6}$
35	20219	20717	$6.05 \cdot 10^{-3}$	1	$7 \cdot 10^{-11}$
36	20929	20929	$10^{-6}$	1	$5 \cdot 10^{-14}$
37	20953	ne converge pas			
38	22154	22154	$10^{-6}$	1	$3 \cdot 10^{-5}$
39	22522	22523	0.128	1	$10^{-8}$
40	23492	24177	$5.19 \cdot 10^{-3}$	1+P	$7 \cdot 10^{-9}$
41	23607	diverge			
42	23682	23680	0.117	1+P	$2 \cdot 10^{-10}$
43	26402	27759	$6.15 \cdot 10^{-3}$	1+P	$6 \cdot 10^{-10}$
44	27080	28016	$4.40 \cdot 10^{-3}$	1	$10^{-10}$
45	29249	29249	$10^{-6}$	1	$4 \cdot 10^{-14}$
46	29354	ne converge pas			
47	30478	30477	$7.03 \cdot 10^{-2}$	1+P	$2 \cdot 10^{-10}$
48	31007	32280	$3.77 \cdot 10^{-3}$	1+P	$3 \cdot 10^{-6}$
49	32480	34535	$4.51 \cdot 10^{-3}$	1+P	$2 \cdot 10^{-7}$
50	34857	34857	$10^{-6}$	1	$2 \cdot 10^{-14}$

TAB. C.6 – 50 premiers modes obtenus par l'Algorithme Itératif  $L^*$  (suite)Remarque :

Pour les modes 16 et 20, l'Algorithme itératif  $L^*$  ne converge pas vers la bonne valeur.

## ANNEXE D

# Propriétés des matériaux

### D.1 Matériau élastique

#### Aluminium

Module d'Young :  $E=70.3 \text{ Gpa}$

Coefficient de Poisson :  $\nu=0.345$

Masse volumique :  $\rho=2690 \text{ kg } m^{-3}$

### D.2 Matériau piézoélectrique

#### PZT5H

Masse volumique :  $\rho=7500 \text{ kg } m^{-3}$

Matrice des constantes élastiques :

$$c = \begin{bmatrix} 12.6 & 7.95 & 8.41 & 0 & 0 & 0 \\ 7.95 & 12.6 & 8.41 & 0 & 0 & 0 \\ 8.41 & 8.41 & 11.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.3 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} Nm^{-2} \quad (D.1)$$

Matrice des constantes piézoélectriques :

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ -6.5 & -6.5 & 23.3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .Cm^{-2} \quad (D.2)$$

Matrice des constantes diélectriques :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 1.503 & 0 & 0 \\ 0 & 1.503 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix} .10^{-8}Fm^{-1} \quad (D.3)$$

# Bibliographie

- [1] AKLONIS J.J. and MAC KNIGHT W.J. *Introduction to polymer Viscoelasticity*. Ed. Wiley, second Edition, 1983.
- [2] ALAM N. and ASNANI N.T. Vibration and damping of multilayered cylindrical shell, part i and ii. *AIAA Journal*, 22 :803–810 ;975–981, 1984.
- [3] BABER T.T., MADDOX R.A., and OROZCO C.E. A finite element model for harmonically excited viscoelastic sandwich beams. *Computers and Structures*, 66(1) :105–113, 1998.
- [4] BAKER G. A. and GRAVES-MORRIS P. *Padé approximants, 2nd edition*. Cambridge University Press, 1996.
- [5] BALAMURUGAN V. and NARAYANAN S. Shell finite element for smart piezoelectric composite plate/shell structures and its application to the study of active vibration control. *Finite elements in analysis and design*, 37 :713–738, 2001.
- [6] BATHE K.J. *Finite element procedures in engineering analysis*. NJ : Prentice-Hall, 1982.
- [7] BATOZ J. L and DHATT G. *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 3. Hermes, 1990.
- [8] BATOZ J. L and DHATT G. *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 2. Hermes, 1990.
- [9] BENOIST-GUEUTAL P. and COURBAGE M. *Mathématique pour la physique. Séries de Fourier, Transformations de Fourier et de Laplace, Distributions (2)*. Eyrolles, 1995.

- [10] BÜCHTER N., RAMM E., and ROEHL D. Three dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 37 :2551–2568, 1994.
- [11] CHEN X., CHEN H.L., and HU Le. Damping prediction of sandwich structures by order-reduction-iteration approach. *Journal of Sound and Vibration*, 222(5) :803–812, 1999.
- [12] COCHELIN B. A path-following technique via an Asymptotic-Numerical Method. *Computers and Structures*, 53(5) :1181–1192, 1994.
- [13] COCHELIN B., DAMIL N., and POTIER-FERRY M. Asymptotic-Numerical Methods and Padé approximants for non-linear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :1187–1213, 1994.
- [14] CUPIAL P. and NIZIOL J. Vibration and damping analysis of three-layered composite plate with viscoelastic mid-layer. *Journal of Sound and Vibration*, 183(1) :99–114, 1995.
- [15] DAMIL N., POTIER-FERRY M., NAJAH A., CHARI R., and LAHMAM H. An iterative method based upon padé approximants. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 15 :701–708, 1999.
- [16] DAYA E.M. and POTIER-FERRY M. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems : application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers and Structures*, 79 :533–541, 2001.
- [17] DAYA E.M. and POTIER-FERRY M. A shell finite element for viscoelastically damped sandwich structures. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11(1) :39–56, 2002.
- [18] DITARANTO RA. Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite-length beams. *Journal of Applied Mechanics*, 89(B) :633–638, 1967.
- [19] DITARANTO RA. and BLASINGAME W. Composite damping of vibrating sandwich beams. *Journal of Engineering for Industry*, 89(B) :633–638, 1967.

- [20] DUIGOU L., DAYA E.M., and POTIER-FERRY M. Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. application to vibrations of viscoelastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Accepted in 2002 and To appear.
- [21] DVORKIN E.N. and BATHE K.J. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Engineering computations*, 1 :77–88, 1984.
- [22] ELHAGE HUSSEIN A. Modélisation des problèmes de contact par une méthode asymptotique numérique. Thèse, Université de Metz, 1998.
- [23] FERRY J.D. *Viscoelastic properties of polymers*. New-York : Wiley, 1980.
- [24] HE J.F. and MA B.A. Vibration analysis of viscoelastically damped sandwich shells. *Shock and Vibration Bulletin*, 3(6) :403–417, 1996.
- [25] HUANG D. and SUN B. Approximate analytical solutions of smart composite mindlin beams. *Journal of Sound and Vibration*, 244(3) :379–394, 2001.
- [26] HU Y.C. and HUANG S.C. The frequency response and damping effect of three-layer thin shell with viscoelastic core. *Computers and Structures*, 76 :577–591, 2000.
- [27] IMAZATÈNE A. Quelques techniques pour appliquer la m.a.n. aux structures plastiques et aux grands systèmes. Thèse, Université de Metz, 2001.
- [28] JOHNSON C.D. and KIENHOLZ D.A. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layer. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 20(9) :1284–1290, 1981.
- [29] JOHNSON C.D., KIENHOLZ D.A., and ROGERS L.C. Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layer. *Shock and Vibration Bulletin*, 51(1) :71–81, 1981.

- [30] JOLY P. and VIDRASCU M. *Quelques méthodes classiques de résolution de systèmes linéaires*. INRIA - Collection didactique. Joly P., Vidrascu M. (Eds.), 1994.
- [31] KERWIN E.M. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. *Journal of the Acoustic Society of America*, 31(7) :952–962, 1959.
- [32] LAHMAM H., CADOU J. M., ZAHROUNI H., DAMIL N., and POTIER-FERRY M. High order predictor-corrector algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.*, 55 :685–704, 2002.
- [33] LANDIER J. Modélisation et étude expérimentale des propriétés amortissantes des tôles sandwich. Thèse, Université de Metz, 1993.
- [34] LEZZA A.M. Reduced vibration design.
- [35] LIU G.R., PENG X.Q., LAM K.Y., and TANI J. Vibration control simulation of laminated composite plates with integrated piezoelectrics. *Journal of Sound and Vibration*, 0, 1998.
- [36] LU Y.P., KILLIAN J.W., and EVERSTINE G.C. Vibrations of three layered damped sandwich plate composites. *Journal of Sound and Vibration*, 64(1) :63–71, 1979.
- [37] MA B.A. and HE J.F. Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 52 :107–123, 1992.
- [38] MALLIL E., LAHMAM H., DAMIL N., and POTIER-FERRY M. An iterative process based on homotopy and perturbation techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :1845–1858, 2000.
- [39] MALLIL E. H. Développement d'une méthode itérative basée sur les séries et les approximations de Padé pour le calcul non linéaire des structures. Thèse, Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca, 1999.

- [40] MEAD DJ. and MARKUS S. The forced vibration of three-layer damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 10 :163–175, 1969.
- [41] NAJAH A. Calcul non linéaire des structures par des méthodes asymptotiques numériques et accélération de la convergence. Thèse, Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca, 1997.
- [42] NAJAH A., COCHELIN B., DAMIL N., and POTIER-FERRY M. A critical review of Asymptotic Numerical Methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 5 :31–50, 1998.
- [43] ORAVSKY V., MARKUS S., and SIMKOVA O. New approximate method of finding the loss factors of sandwich cantilever. *Journal of Sound and Vibration*, 33 :335–352, 1974.
- [44] PADÉ H. *Sur la représentation d'une fonction par des fractions rationnelles*, volume 9. Ann. de l'Ecole Normale Supérieure, 3 série, 1892.
- [45] PARK C.H. and BAZ A. Vibration control of bending modes of plates using active constrained layer damping. *Journal of Sound and Vibration*, 227(4) :711–734, 1999.
- [46] PERSOZ B. *La rhéologie*. Masson and Cie, 1969.
- [47] PIETRZAKOWSKI M. Active damping of beams by piezoelectric system : effects of bonding layer properties. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :7885–7897, 2001.
- [48] POTIER-FERRY M., DAMIL N., BRAIKAT B., DESCAMPS J., CADOU J. M., CAO H. L., and ELHAGE HUSSEIN A. Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t.324, Série II b, pages 171–177, 1997.



- [49] RAHMOUNE M., BENJEDDOU A., OHAYON R., and OSMONT D. New thin piezoelectric plate models. *Journal of Intelligent Material System and Structure*, 9(12) :1017–1029, 1998.
- [50] RAMESH T.C. and GANESAN N. Finite element analysis of conical shells with a constrained viscoelastic layer. *Journal of Sound and Vibration*, 171(5) :577–601, 1994.
- [51] RAO D.K. Frequency and loss factor of sandwich beams under various boundary conditions. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20(5) :271–282, 1978.
- [52] RIKARDS R., CHATE A., and BARKANOV E. Finite element analysis of damping the vibrations of laminated composites. *Computers and Structures*, 47(6) :1005–1015, 1993.
- [53] ROSS D., UNGAR E.E., and KERWIN E.M. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate. *New-York, American Society of Mechanical Engineers*, 1959.
- [54] SADEK EA. Dynamic optimisation of a sandwich beam. *Computers and Structures*, 1984(4) :605–615, 1984.
- [55] SAINSBURY M.G. and ZHANG Q.J. The galerkin element method applied to the vibration of damped sandwich beams. *Computers and Structures*, 71 :239–256, 1999.
- [56] SHI Y.M., LI Z.F., HUA H.X., FU Z.F., and LIU T.X. The modelling and vibration control of beams with active constrained layer damping. *Journal of Sound and Vibration*, 245(5) :785–800, 2001.
- [57] SIMO J. C. and RIFAI M. S. A class of mixed assumed strain methods and method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 :101–118, 1985.
- [58] SONI M.L. Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich structures. *Shock and Vibration Bulletin*, 55(1) :97–109, 1981.

- [59] SUN C.T. and LU Y.P. *Vibration damping of structural elements*. Prentice Hall PTR, 1995.
- [60] TRINDADE M.A. Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes. Thèse, CNAM Paris, 2000.
- [61] VELEY D.E. and RAO S.S. A comparison of active, passive and hybrid damping in structural design. *Smart Materials ans Structures*, 5 :660–671, 1996.
- [62] WANG Z., CHEN S., and HAN W. The static shape control for intelligent structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 26 :303–314, 1997.
- [63] WILKINSON J. H. The algebraic eigenvalue problem. *Oxford :Clarendon Press*, 1965.
- [64] YAN MJ. and DOWELL EH. Governing equations for vibrating constrained-layer damping sandwich plates and beams. *Journal of Applied Mechanics*, 94 :1041–1047, 1972.
- [65] YU Y.Y. A new theory of elastic sandwich plates - one dimensional case. *Journal of Applied Mechanics*, 26 :415–421, 1959.
- [66] ZHANG X.D. and SUN C.T. Formulation of an adaptive sandwich beam. *Smart Materials ans Structures*, 5 :814–823, 1996.

## Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'amortissement passif et actif, qui réduisent les vibrations mécaniques. L'amortissement passif est créé par les structures sandwich constituées d'une couche centrale viscoélastique prise entre deux parements d'acier. L'étude de ces structures pose deux types de problèmes. Le premier est lié à la modélisation : le cisaillement dans la couche centrale viscoélastique étant responsable de l'amortissement, il faut un élément qui le prenne en compte. Nous développons l'élément fini sandwich de type coque : le BRR/Mindlin/BRR basé sur les hypothèses classiques des stratifiés, l'hypothèse de Mindlin pour le déplacement dans les trois couches et les conditions de raccord cinématiques aux interfaces. Cet élément a huit nœuds et huit degrés de liberté par nœud. Le second problème est lié aux méthodes numériques : les caractéristiques de la couche viscoélastique dépendant de la fréquence, il faut résoudre un problème aux valeurs propres complexes non-linéaires. Pour obtenir les fréquences complexes et donc l'amortissement, nous proposons deux méthodes itératives d'ordre élevé basées sur la technique d'homotopie et la méthode asymptotique numérique. L'une utilise l'inversion de matrices complexes, l'autre l'inversion d'une seule matrice réelle à tous les ordres et toutes les itérations. L'amortissement actif est réalisé à l'aide d'un capteur et d'un actionneur piézoélectriques ajoutés à une couche élastique ou à une structure sandwich viscoélastique. Pour étudier ces structures, nous utilisons une approche modale, quelques hypothèses et deux lois de contrôle rétroactif. Cela nous permet d'obtenir une valeur approchée de la fréquence complexe et donc de l'amortissement.

**Mots Clés :** Sandwich, vibration, Élément fini sandwich de type coque, Méthodes itératives, Méthodes asymptotiques numériques, Amortissement, Matériaux piézoélectriques, Viscoélasticité.

## Abstract

In this paper, passive and active damping are studied. The passive damping is introduced by sandwich structures constituted by a viscoelastic material sandwiched between two elastic layers. This type of structures sets two types of problem. The first one is linked to an important transverse shear in the viscoelastic core. It can not be accounted for within a standard shell model. Here, we propose a new sandwich shell element, the BRR/Mindlin/BRR which has eight nodes and eight degrees of freedom per node. The second problem is linked to the choice of the method used to find the frequency and loss factor of sandwich viscoelastic structures. Indeed, the characteristics of the viscoelastic core depend on the frequency of vibration. Thus the free vibration analysis of sandwich sheets leads to a non-linear complex eigenvalue problem. Here, we propose two high order iterative methods based on the homotopy asymptotic numerical methods. They permit to compute directly the frequency and the loss factor of viscoelastic sandwich structures. One uses triangulation of complex matrix, the other only one triangulation of a real matrix for all the iterations. The active damping is realised by adding a piezoelectric sensor and a piezoelectric actuator to a elastic layer or to a sandwich viscoelastic structure. To study these structures, a modal approach, two feedback controls and few hypothesis are used. This permits us to obtain approximate values of the complex frequency and consequently of the damping.

**Key words :** Sandwich, vibration, sandwich shell finite element, iterative methods, asymptotic numerical methods, damping, piezoelectric material, viscoelasticity.