



**HAL**  
open science

# Étude numérique de l'influence du modèle de plasticité sur le comportement des tôles lors de l'emboutissage

Luciano Pessanha Moreira

► **To cite this version:**

Luciano Pessanha Moreira. Étude numérique de l'influence du modèle de plasticité sur le comportement des tôles lors de l'emboutissage. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2002. Français. NNT : 2002METZ006S . tel-01749765

**HAL Id: tel-01749765**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749765>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**THESE**

Présentée à

**UNIVERSITE DE METZ**

Par

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	2002 0175
Cote	S/M7 02/06
Loc	magasin

**Luciano PESSANHA MOREIRA**

Pour l'obtention du grade de :

**Docteur de l'Université de Metz**

**Spécialité : Sciences de l'ingénieur**  
**Option : Mécanique des Matériaux**

**Étude numérique de l'influence du modèle  
de plasticité sur le comportement des tôles  
lors de l'emboutissage**

Soutenue le jeudi 19 septembre 2002 devant le jury composé de :

<b>Mme BACROIX Brigitte</b>	<b>Directeur de Recherche CNRS, Université Paris Nord, LPMTM</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>M. FERRON Gérard</b>	<b>Professeur à l'Université de Metz, LPMM</b>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>Mme MARTINY Marion</b>	<b>Maître de Conférences à l'Université de Metz, LPMM</b>	<b>Examinateur</b>
<b>Mme MASSONI Elisabeth</b>	<b>Maître de Recherches à l'École des Mines de Paris, CEMEF</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>M. MOUSSY François</b>	<b>Responsable Matériaux, RENAULT, Technocentre</b>	<b>Examinateur</b>
<b>M. TOTH Lazlo</b>	<b>Professeur à l'Université de Metz, LPMM</b>	<b>Président</b>

## Remerciements

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une coopération scientifique franco-brésilienne **CAPES** (Coordination de Perfectionnement de Personnel d'Enseignement Supérieur) – **COFECUB** (Comité d'Évaluation de la Coopération Universitaire avec le Brésil) entre le "Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz (LPMM)" et le programme de "Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica da Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica de Volta Redonda/Universidade Federal Fluminense (EEIMVR/UFF)". Grâce au projet **CAPES/COFECUB** intitulé "Déformation Plastique des Tôles Métalliques : 1– Modélisation et Études expérimentales. 2 – Simulation Numérique" (No. 228/97 – 0), coordonné par les Professeurs **Gérard Ferron** (LPMM) et **Gustavo Ferran** (EEIMVR/UFF), une bourse de doctorat m'a été accordée par la **CAPES** (Procès BEX 1818 – 97/0). Je tiens tout d'abord à remercier le Professeur **Gustavo Ferran** pour son encouragement et son amitié qu'il m'a apportés depuis le début de mon projet de thèse de doctorat. Je remercie vivement mes amis **Nacib, Aracely, Eduardo, José Adilson** et **Erlen Lenski** (*in memoriam*) pour leur soutien et leur complicité dans cette aventure.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude au Professeur **Gérard Ferron** pour son enthousiasme, pour sa sincérité scientifique de même que pour son amitié qui m'ont été accordés pendant ces quatre années de thèse.

J'aimerais remercier également **Brigitte Bacroix**, Directeur de Recherche au CNRS à l'Université de Paris Nord (LPMTM,) et **Elisabeth Massoni**, Maître de Recherches à l'École des Mines de Paris (CEMEF) pour avoir accepté la charge de rapporteur et pour leurs remarques pertinentes faites sur mon travail. J'adresse également mes remerciements à **Marion Martiny**, Maître de Conférences à l'Université de Metz (LPMM), **Lazlo Toth**, Professeur à l'Université de Metz (LPMM) et à **François Moussy** (RENAULT) pour avoir participé au jury de soutenance et d'avoir montré un intérêt envers mon travail de thèse.

Je remercie tout le personnel du LPMM pour leur sympathie et leur politesse à mon égard pendant ces quatre dernières années. En particulier, aux secrétaires **Christelle, Karima** et **Yvonne** et aux techniciens informatique **Jérôme** et **Khalid**. J'en profite pour dire un grand merci au personnel de la scolarité de l'U.F.R. M.I.M. de l'Université de Metz particulièrement à **Anna Scalvini** et **Marie Laure**.

Je souhaite également remercier tous mes amis, j'en cite quelques uns car la liste serait trop longue : **Annick** et **Loïc Ferron**, **Michel** et **Adeline**, **Alex** et **Lola**, **Pedro** et **Josiane**, **Jean-Baptiste** et **Viktoria**, **Sébastien Mercier**, **Jean-Marc Cadou** "Jojo", **Cédric**, **Laetitia**, **Anne-Sophie**, **Pchem**, **Michäel**, **Nicolas**, **Jérôme** et **Roxane**. Puis l'auberge "messine" composée par **Fosia**, **Nadia**, **Neus**, **Katja**, **Beppe**, **Gian Luca**, **Ivana**, **Lorenza**, **Fred**, **Ricardo**, **Francesco**, **Kika**, **Igor**, **Bruno**, **Marina**, **Marcelo**, **Oswaldo** et **Maria** de même que mes amis "franco-brésiliens" **Marcelo** et **Pascale**, **Aline**, **Luis**, **Roberto**, **Maria Helena** et **Silene**. Je signale également que cette thèse a été "en quelque sorte" co-sponsorisée par les cafés **Jeanne D'arc** (**Siad** et **Julien**) et **Mathis** (**Italo**), les bouquins de **Charles Bukowski** et les chansons des **Têtes Raides** et de **Brassens**.

Enfin, je dédie entièrement cette thèse à mes parents **Josiel** et **Eurli**, mes sœurs **Elisa** et **Fátima**, mes nièces **Larissa** et **Raisa**, mes tantes **Jaja** et **Judith** et à la famille "Monstre". C'est grâce à eux que je suis parvenu à réaliser ce projet et je leur en suis très reconnaissant.

## Résumé

La question concernant la précision des prévisions numériques associées au type de description du comportement matériau est à présent une des exigences souhaitées pour la simulation du procédé d'emboutissage. Dans ce travail, l'influence du modèle de plasticité adopté dans les simulations est analysée à travers une étude numérique de trois types d'essais d'emboutissage des tôles, à savoir, l'expansion par poinçonnement hémisphérique, l'emboutissage profond d'une coupelle cylindrique et l'essai de pliage et étirage proposé récemment par Ferran et al. (1998). Les simulations numériques ont été réalisées avec les versions implicite et explicite du logiciel d'éléments finis **Abaqus** dans lesquels le modèle de plasticité phénoménologique de Ferron et al. (1994) a été implanté via les sous-programmes utilisateurs **UMAT** et **VUMAT** respectivement. Dans les opérations d'emboutissage des tôles où les trajets de chargement peuvent être considérés comme étant relativement linéaires, comme pour l'expansion par poinçonnement hémisphérique et l'emboutissage profond, il est montré que les prévisions des répartitions des déformations dépendent essentiellement de la forme de la surface de charge correspondant aux régions de contraintes d'intérêt. Par ailleurs, il a été montré que l'adoption de l'hypothèse d'un écrouissage isotrope permet de décrire convenablement le comportement plastique des tôles métalliques soumises à des trajets de chargement relativement linéaires. Néanmoins, il semble que les prévisions numériques des déformations obtenues lors de l'essai de pliage et étirage des tôles dépendent non seulement de la forme de la surface de charge, mais que les effets de l'histoire des chargements non-linéaires, dus aux pliages et dépliages imposés à la bande de tôle, doivent également être considérés. Cela suggère que l'hypothèse d'un écrouissage isotrope devrait être relâchée en vue d'évaluer les effets de déformations cycliques dans l'essai de pliage et étirage des tôles.

## Abstract

The question concerning the accuracy of the numerical predictions associated to the type of material behavior description is at this time one of desired requirements to the simulation of the sheet metal forming process. In this work, the influence of the plasticity model adopted in the simulations is analyzed via a numerical study of three types of sheet metal forming tests, namely, the hemispherical punch stretching, the deep drawing of a cylindrical cup and a bending-drawing test proposed recently by Ferran et al. (1998). The numerical simulations were performed with the implicit and explicit versions of the finite element code **Abaqus** wherein the phenomenological yield criterion proposed by Ferron et al. (1994) has been implemented by means of the user material subroutines **UMAT** and **VUMAT** respectively. For the sheet metal forming operations where the loadings paths can be assumed to be somewhat linear, as is the case of the hemispherical stretching and the deep-drawing tests, it is shown that the numerical predictions of strains distributions depend essentially on the yield surface shape in the stress range of interest. Furthermore, it is verified that the isotropic hardening assumption provides an accurate description for the plastic behavior of metal sheets submitted to relatively linear loadings paths. Nevertheless, it seems that the numerical predictions of strains resulting from the bending-drawing test depend not only on the yield surface shape but that the nonlinear loading path history effects, due to the bending and unbending imposed to the strip, should also be taken into account. This suggests that the isotropic hardening assumption should be relaxed so as to evaluate the cyclic strains effects resulting from the bending-drawing test.

# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I : Étude bibliographique</b>	<b>4</b>
I.1. Introduction	4
I.2. Description du comportement plastique des tôles	5
I.2.1. Considérations générales	5
I.2.2. Critères de plasticité isotropes	10
I.2.3. Critères de plasticité anisotropes	15
I.3. Essais d'emboutissage des tôles	33
I.3.1. Essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique	33
I.3.2. Essai d'emboutissage profond d'une coupelle cylindrique	39
I.3.3. Essai de pliage et étirage	52
I.4. Conclusion	58
<b>Chapitre II : Implantation du critère de plasticité de Ferron et al. (1994) dans le logiciel Abaqus</b>	<b>60</b>
II.1. Introduction	60
II.2. Cas général	60
II.2.1. Lois de comportement élasto-plastique	60
II.2.2. Méthode générale d'intégration	62
II.2.3. Abaqus/Standard : UMAT	63
II.2.3.1. Calcul des corrections plastiques	63
II.2.3.2. Obtention du module tangent	65
II.2.4. Abaqus/Explicit : VUMAT	67
II.3. Cas de contraintes planes	68
II.4. Formulation en grandes déformations	70
II.5. Application au critère de Ferron et al. (1994)	71
II.5.1. Cas de contraintes planes	71
II.5.2. Cas 3D	75
II.6. Validations	77
II.7. Conclusion	81

---

<b>Chapitre III : Simulations numériques</b>	<b>82</b>
III.1. Introduction	82
III.2. Simulation numérique de l'emboutissage des tôles	82
III.3. Essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique	85
III.3.1. Influence du critère de plasticité	86
III.3.2. Influence du coefficient de frottement	89
III.3.3. Paramètres caractérisant le poinçonnement hémisphérique	90
III.3.4. Comparaison avec des résultats expérimentaux	92
III.4. Emboutissage profond	94
III.4.1. Essai de Swift	95
III.4.2. Emboutissage d'une boîte de conserves	104
III.4.3. Discussion sur la formation des cornes d'emboutissage	108
III.5. Essai de pliage et étirage	110
III.5.1. Étude numérique	111
III.5.2. Comparaison avec des résultats expérimentaux	115
III.6. Conclusion	119
<b>Conclusion générale</b>	<b>121</b>
<b>Références</b>	<b>123</b>
<b>Annexes</b>	<b>128</b>

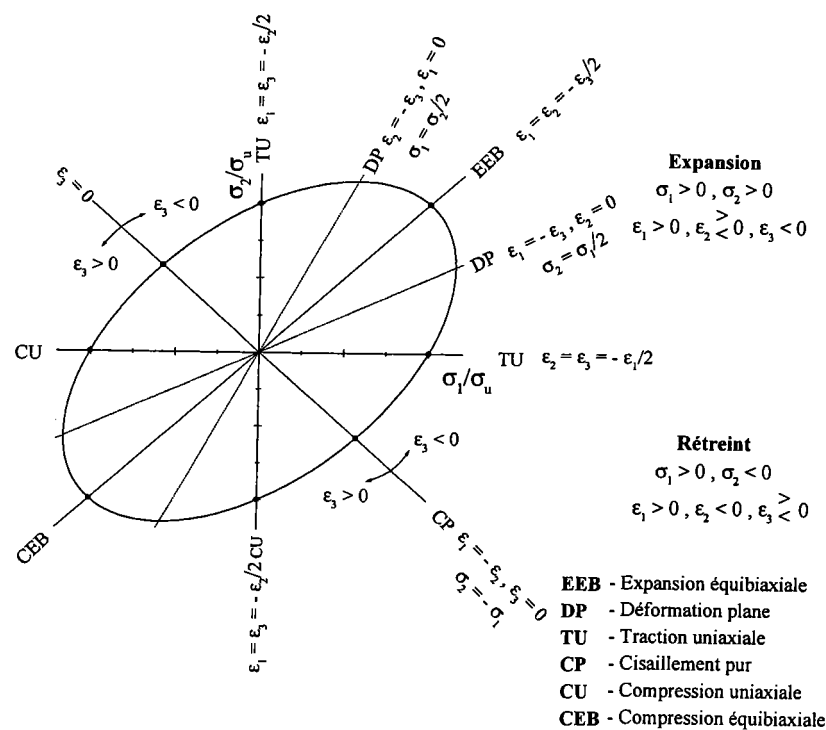


## Introduction générale

L'emboutissage des tôles est un procédé de mise en forme largement utilisé pour la production de biens de consommation dans les secteurs industriels tels que l'automobile et l'électroménager de même que pour les emballages destinés à la conservation alimentaire. Actuellement, les entreprises appartenant à ces secteurs sont obligées d'augmenter la productivité afin de garantir leur part de marché dans le cadre d'une économie mondialisée. La simulation numérique associée au savoir-faire de l'emboutissage des tôles représente une des innovations technologiques permettant de répondre à ces besoins, réduisant ainsi le nombre de campagnes d'essais et donc, les coûts inhérents aux étapes de la conception. Parmi les méthodes d'approximation numériques, la méthode des éléments finis (MEF) est à présent largement utilisée dans l'analyse de l'emboutissage des tôles grâce, d'une part, à sa grande capacité de résolution de problèmes non linéaires et d'autre part, à la performance croissante des moyens de calcul et au développement d'interfaces graphiques conviviales. Au cours de ces dernières années, des améliorations substantielles ont été apportées à la MEF, telles que les techniques de résolution et les algorithmes de contact et, par conséquent, la question concernant la précision et les limitations du type de description du comportement du matériau adoptée dans les simulations de l'emboutissage des tôles est devenue importante.

Cette question constitue l'objectif principal de cette thèse, dans laquelle une étude numérique a été réalisée afin d'identifier quelques éléments nécessaires à la description du comportement anisotrope du matériau dans la simulation associée à l'emboutissage des tôles. Cette étude s'appuie sur le critère de plasticité phénoménologique de Ferron et al. (1994) et les simulations numériques de trois types d'essais d'emboutissage des tôles, à savoir, l'expansion par poinçonnement hémisphérique à flan bloqué, l'emboutissage profond d'une coupelle cylindrique à fond plat et à flan non bloqué et, enfin l'essai de pliage et étirage de tôles proposé récemment par Ferran et al. (1998a).

En fait, ces essais expérimentaux représentent un très bon moyen d'étudier l'influence du critère de plasticité adopté dans les simulations numériques puisqu'ils regroupent les principaux modes de déformations trouvés en emboutissage des tôles. D'une façon générale, du moins pour les tôles minces, les principaux modes de déformations en emboutissage se situent dans les régions de l'expansion et du rétreint, schématisées sur la figure ci-dessous. Il est donc clair que la forme de la surface de charge, décrite par le critère de plasticité adopté, joue un rôle prépondérant par rapport aux prévisions des distributions de déformations ainsi que des efforts dans les simulations numériques associées à l'emboutissage des tôles.



Modes de déformation des tôles minces isotropes représentés dans l'espace des contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) normalisées par la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale  $\sigma_u$ . D'après Pomey et Parnière (1980).

La présentation du présent mémoire de thèse est organisée en trois chapitres. Dans le premier chapitre, une étude bibliographique est exposée en deux parties principales. Dans la première partie, un rappel de la description du comportement plastique des tôles est d'abord présenté dans le cadre général de la théorie de l'écoulement. Ensuite, les principaux critères de plasticité isotropes sont décrits ainsi que quelques descriptions proposées dans la littérature pour représenter le comportement anisotrope des tôles. Dans la deuxième partie, les essais d'emboutissage des tôles analysés dans ce travail sont détaillés en vue d'identifier les caractéristiques nécessaires à la description du comportement anisotrope du matériau dans les simulations numériques.

Dans le deuxième chapitre, les étapes d'implantation du critère de Ferron et al. (1994) dans les sous-programmes utilisateur du logiciel d'éléments finis **Abaqus** sont détaillées. D'abord, la méthode générale d'intégration des lois de comportement élasto-plastique, basée sur un schéma de "prévision élastique-correction plastique", est présentée et ensuite développée pour les techniques d'intégration implicite et explicite disponibles dans **Abaqus**. Dans les deux cas, les prévisions numériques correspondant aux versions en trois dimensions et en contraintes planes du critère de Ferron et al. (1994) sont confrontées aux résultats obtenus avec les logiciels **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit**.

Enfin, les trois types d'essais d'emboutissage des tôles mentionnés précédemment sont analysés au troisième chapitre. En vue d'étudier l'influence de la description adoptée et à titre de comparaison avec les prévisions numériques fournies par le critère de Ferron et al. (1994), les simulations ont également été réalisées avec la description de Hill quadratique (1948). À partir de la comparaison avec les résultats expérimentaux, il est montré que les prévisions sont dictées par la forme de la surface de charge, dans la région de contraintes d'intérêt, de même que par le coefficient de frottement, adoptés dans les simulations numériques.



# Chapitre I : Étude bibliographique

## I.1. Introduction

Ce premier chapitre est consacré à l'analyse des principaux points relatifs à l'influence du critère de plasticité adopté dans les simulations numériques associées à l'emboutissage. Étant donné le grand nombre de travaux réalisés dans ce domaine et le contexte de ce travail, cette étude est limitée aux descriptions du comportement plastique établies dans le cadre d'une approche phénoménologique. Il convient de signaler, toutefois, que des progrès considérables ont également été obtenus à partir d'une approche basée sur la plasticité polycristalline, voir Beaudoin et al. (1994), ou en combinant les approches phénoménologique et polycristalline comme, par exemple, dans les travaux de Bacroix et Gilormini (1995) et Van Houtte et al. (1995).

La présentation de cette étude est organisée en deux parties. Dans la première partie, un rappel de la description du comportement plastique des tôles est initialement présenté en vue d'introduire les éléments de base nécessaires à l'implantation d'un critère de plasticité dans un logiciel de calcul par éléments finis. Cette présentation est limitée à la théorie de l'écoulement. Ensuite, les principaux critères de plasticité isotropes sont d'abord présentés et quelques descriptions proposées dans la littérature pour décrire le comportement anisotrope du matériau sont également détaillées. Dans la deuxième partie, trois types d'essais d'emboutissage des tôles sont analysés, à savoir, l'essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique, l'essai d'emboutissage profond d'une coupelle cylindrique et l'essai de pliage et étirage des tôles proposé récemment par Ferran et al. (1998a). Ces essais d'emboutissage représentent en effet un bon moyen de valider les prévisions réalisées par les critères de plasticité employés dans les simulations numériques puisqu'ils regroupent les principaux modes de déformation retrouvés dans les procédés industriels d'emboutissage des tôles.

## I.2. Description du comportement plastique des tôles

### I.2.1. Considérations générales

La description macroscopique de la déformation plastique des matériaux écrouissables est réalisée généralement par la théorie de l'écoulement, dans laquelle les éléments de base peuvent être résumés par les points suivants :

- (1) l'existence d'une surface de charge permettant de définir le domaine d'élasticité du matériau soumis à un état de contraintes quelconque ;
- (2) la description des lois d'écoulement plastiques et des critères de chargement permettant de déterminer la réponse en déformation à une histoire de contraintes donnée ;
- (3) la description de l'écrouissage permettant de définir l'évolution de la surface de charge au cours de l'écoulement plastique.

La surface de limite élastique ou la surface de charge représentent, respectivement, la frontière initiale ou actuelle dans l'espace de contraintes à partir de laquelle l'écoulement plastique peut avoir lieu. Si l'état de contraintes se trouve à l'intérieur de cette surface, le comportement du matériau est alors élastique. D'autre part, si l'état de contraintes se trouve sur la surface et, que l'incrément de contraintes est dirigé vers l'extérieur de la même, une déformation plastique sera produite, accompagnée d'une évolution de cette surface. En fait, cette évolution dépend de l'histoire de chargement subie par le matériau au cours de la déformation, qui traduit le phénomène d'écrouissage.

Donc, la surface de charge peut être exprimée en fonction de l'état courant de contraintes, ou de déformations plastiques, et de variables cachées, sous la forme :

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k) = 0 \quad (\text{I.1})$$

où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur de contraintes de Cauchy alors que les variables cachées sont exprimées en fonction des composantes des déformations plastiques  $\epsilon_{ij}^p$  et du paramètre d'écrouissage  $k$ . La condition donnée par l'équation (I.1) est appelée fonction de charge ou critère de plasticité.

Toutefois, puisque la déformation plastique est un phénomène de nature irréversible, la définition seule de la surface de charge ne permet de lier de façon univoque le tenseur de contraintes au tenseur de déformations et vice-versa ni de préciser complètement la possibilité d'écoulement plastique. Il est donc nécessaire d'établir initialement une relation entre la fonction de charge  $f$  et l'état de contraintes-déformations  $(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p)$  et ensuite, de définir un critère de charge-décharge.

En s'appuyant sur le postulat de Drucker<sup>1</sup>(1951), considérons dans un premier temps le principe du travail plastique maximal énoncé d'abord par Hill (1950) et ses conséquences. Ce principe peut être déduit à partir de la courbe correspondant à l'essai de traction uniaxiale réalisé pour un matériau écrouissable, schématisée sur la Figure (I.1a). En supposant un trajet de déformation imposé à l'éprouvette à partir d'un état arbitraire situé dans le domaine élastique, représenté par le point A sur la Figure (I.1a), de sorte que les contraintes initiale et finale coïncident, comme le trajet donné par les points ABCE, le travail plastique associé peut être évalué à partir de la somme des aires ABDE et BCD situées sous la courbe  $\sigma - \epsilon$ . Il s'ensuit alors que les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$(\sigma - \sigma^*) d\epsilon^P \geq 0 \text{ et } d\sigma d\epsilon^P > 0 \quad (\text{I.2})$$

où  $d\epsilon^P$  est l'incrément de déformation plastique correspondant à l'incrément de contrainte  $d\sigma$  et l'égalité correspond à la situation pour laquelle  $\sigma = \sigma^*$ .

Il est à noter que la définition d'un matériau écrouissable est obtenue comme un cas particulier de la deuxième condition (I.2), à partir de laquelle la notion de stabilité du matériau lors d'un chargement plastique est introduite, i.e. :

$$d\sigma / d\epsilon^P > 0 \quad (\text{I.3})$$

De façon analogue au cas de traction uniaxiale, la condition de stabilité plastique pour un matériau écrouissable dans le cas général de contraintes 3D, schématisé dans Figure (I.1b), peut être énoncée sous la forme :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij}^P \geq 0 \text{ et } d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P > 0 \quad (\text{I.4})$$

ce qui correspond au postulat de Drucker (1951), selon lequel l'incrément de travail plastique lors d'un trajet de déformation fermé par rapport aux contraintes doit être toujours positif.

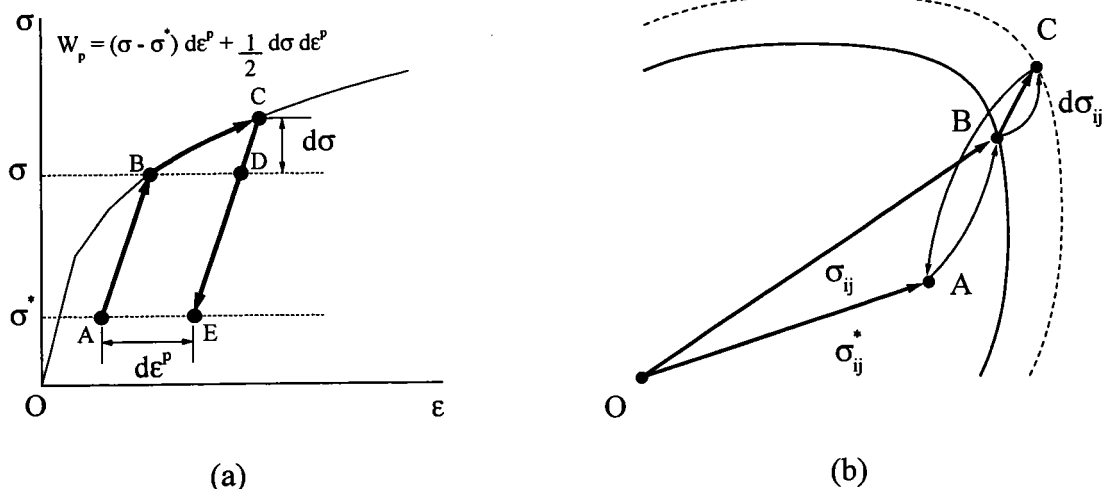


Figure (I.1) – Stabilité des matériaux écrouissables lors d'un trajet de contraintes fermé.

<sup>1</sup> Drucker, D.C., "A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relation", ASME, 1951, pp. 487-491.

Les conséquences du postulat de Drucker (1951) peuvent alors être analysées. D'abord, si  $\sigma_{ij}^* \neq \sigma_{ij}$ ,

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij}^P > 0 \text{ ou } \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P > \sigma_{ij}^* d\epsilon_{ij}^P \quad (I.5)$$

L'état  $\sigma_{ij}^*$  étant un point arbitraire à l'intérieur de ou sur la surface de charge  $f$ , l'inégalité (I.5) vérifie que l'incrément de travail plastique  $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P$  est maximal pour tout incrément de déformations plastiques  $d\epsilon_{ij}^P$  en comparaison avec tout état de contraintes satisfaisant la condition  $f \leq 0$ .

La Figure (I.2) donne l'interprétation géométrique de la relation (I.5), qui implique en effet que le produit scalaire entre les vecteurs  $(\sigma - \sigma^*)$  et  $d\epsilon^P$  doit être positif, c'est-à-dire, que l'angle formé entre eux soit aigu. Étant donné que  $\sigma^*$  représente un état arbitraire situé à l'intérieur de ou sur la surface de charge, le principe du travail plastique maximal impose que la fonction de charge  $f$  soit convexe et que le vecteur  $d\epsilon^P$  soit normal à la surface de charge. Il en résulte que le vecteur  $d\epsilon^P$  est proportionnel au gradient de  $f$  :

$$d\epsilon^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (I.6)$$

ou

$$d\epsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (I.7)$$

appelée la règle d'écoulement associée. Le produit scalaire  $d\sigma d\epsilon^P > 0$  étant également positif pour un matériau écrouissable, il s'ensuit que le scalaire  $d\lambda$ , appelé multiplicateur plastique, est positif lorsque l'écoulement plastique a lieu.

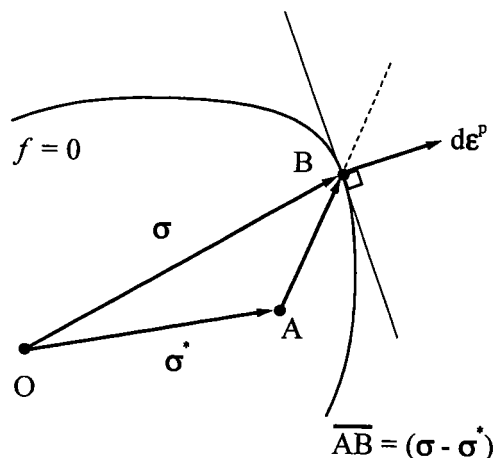


Figure (I.2) – Schéma du principe du travail plastique maximal .



De plus, dans le cas d'un chargement plastique en utilisant (I.7) :

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda f,_{ij} d\sigma_{ij} > 0 \text{ avec } f,_{ij} = \partial f / \partial \sigma_{ij} \quad (I.8)$$

ce qui permet de constituer, avec la condition  $f = 0$ , les critères de charge-décharge pour un matériau écrouissable schématisés sur la Figure (I.3) et exprimés par :

$$\begin{aligned} f = 0 \text{ et } f,_{ij} d\sigma_{ij} > 0, \text{ alors } d\varepsilon_{ij}^p \neq 0 &\rightarrow \text{Chargement plastique} \\ f = 0 \text{ et } f,_{ij} d\sigma_{ij} = 0, \text{ alors } d\varepsilon_{ij}^p = 0 &\rightarrow \text{Chargement neutre} \\ f = 0 \text{ et } f,_{ij} d\sigma_{ij} < 0, \text{ alors } d\varepsilon_{ij}^p = 0 &\rightarrow \text{Déchargement élastique} \end{aligned} \quad (I.9)$$

La situation pour laquelle  $f > 0$  étant interdite, le nouvel état de contraintes lors d'un chargement plastique doit rester sur la surface de charge, ce qui est donné par la condition de consistance définie par :

$$f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^p, k + dk) = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) + df = 0 \quad (I.10)$$

ou

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (I.11)$$

Enfin, la possibilité d'écoulement plastique est entièrement définie par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} f = 0, df = 0 \text{ et } f,_{ij} d\sigma_{ij} > 0 &\rightarrow \text{Chargement plastique} \\ f = 0, df < 0 \text{ et } f,_{ij} d\sigma_{ij} < 0 &\rightarrow \text{Déchargement élastique} \end{aligned} \quad (I.12)$$

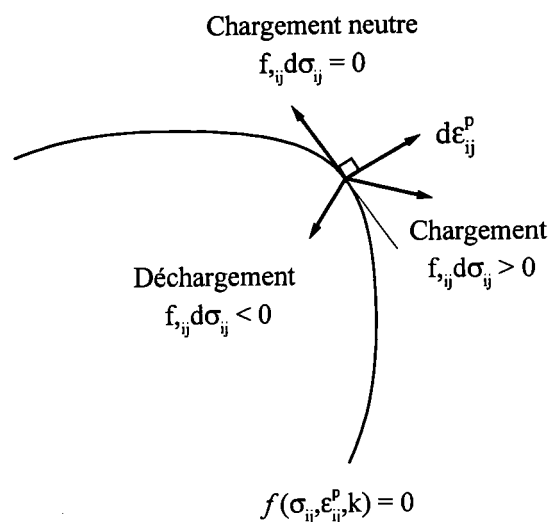


Figure (I.3) – Critères de chargement pour un matériau écrouissable .

La description du comportement plastique est complétée par la définition de l'évolution de la surface de charge ou de l'écrouissage au cours de l'écoulement plastique.

Les modélisations les plus utilisées sont les lois d'érouissage isotrope et d'érouissage cinématique correspondant respectivement à une expansion uniforme et une translation de la surface de charge dans l'espace des contraintes.

Dans le cas d'un érouissage isotrope, la fonction de charge (I.1) peut être exprimée sous la forme suivante :

$$f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{ij}) - \bar{\sigma} = 0 \quad (\text{I.13})$$

où la fonction  $F(\sigma_{ij})$  et la mesure scalaire  $\bar{\sigma}$ , appelée contrainte équivalente, définissent la forme et la taille de la surface de charge respectivement. Dans cette représentation,  $F(\sigma_{ij})$  est une fonction homogène de degré 1 des contraintes. Généralement, la mesure de contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  est identifiée à la contrainte d'écoulement déterminée à partir de l'essai de traction uniaxiale et peut être exprimée par :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^P) \quad (\text{I.14})$$

où  $\bar{\epsilon}^P$  est la déformation plastique équivalente correspondant à l'état de traction uniaxiale.

D'un point de vue pratique, l'utilisation des mesures équivalentes permet d'une part, de relier l'érouissage du matériau à l'évolution de la surface de charge et d'autre part, de comparer différentes histoires de chargement pour le même état du matériau, c'est-à-dire, à un niveau de travail plastique donné. De ce fait, il est utile d'introduire le principe de l'équivalence du travail plastique défini en égalant le travail plastique réalisé par un état quelconque de contraintes avec le travail plastique réalisé par les mesures équivalentes, i.e. :

$$\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^P \quad (\text{I.15})$$

à partir duquel il est possible de déterminer le multiplicateur plastique  $d\lambda$  en remplaçant d'abord  $d\epsilon_{ij}^P$  défini par la règle d'écoulement plastique associée (I.7), i.e.,

$$d\lambda \sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^P \quad (\text{I.16})$$

et ensuite en considérant que  $F(\sigma_{ij})$  est une fonction homogène de degré 1 des contraintes,

il s'ensuit d'après l'identité d'Euler,  $F(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = \sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ , que :

$$d\lambda = d\bar{\epsilon}^P \quad (\text{I.17})$$

Finalement, la règle d'écoulement plastique associée (I.7) peut donc être réécrite sous la forme suivante :

$$d\epsilon_{ij}^P = d\bar{\epsilon}^P \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{I.18})$$

## I.2.2. Critères de plasticité isotropes

Ce sont les critères pour lesquels la condition d'écoulement plastique est invariante par rapport à un changement de repère quelconque. Dans ce cas, la fonction de charge  $f(\sigma)$  ne dépend que des valeurs principales du tenseur de contraintes  $\sigma$ , i.e. :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (\text{I.19})$$

ou

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad (\text{I.20})$$

où  $(I_1, I_2, I_3)$  sont les invariants de  $\sigma$ , solutions de l'équation caractéristique  $|\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$ , donnés par :

$$I_1 = \text{Tr}(\sigma)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[ (\text{Tr}(\sigma))^2 - \text{Tr}(\sigma^2) \right] \quad (\text{I.21})$$

$$I_3 = \det|\sigma|$$

D'autre part, l'expérience montre que l'écoulement plastique des métaux s'effectue sans variation notable de volume, c'est-à-dire, indépendamment de la pression hydrostatique. D'un point de vue microscopique, la déformation plastique des matériaux cristallins est occasionnée par le déplacement des dislocations en réponse aux contraintes de cisaillement, absentes lors d'un état de contraintes hydrostatique. La fonction de charge peut donc être réécrite en fonction des invariants du déviateur du tenseur de contraintes,  $S = \sigma - 1/3 \text{Tr}(\sigma)\mathbf{I}$  :

$$J_1 = \text{Tr}(S) = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(S^2) \quad (\text{I.22})$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \text{Tr}(S^3)$$

sous la forme :

$$f(J_2, J_3) = 0 \quad (\text{I.23})$$

La fonction de charge donnée par (I.23) représente l'expression générale des critères de plasticité isotropes indépendants de la pression hydrostatique. Cette famille de critères est représentée dans l'espace des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  par une surface de charge cylindrique infinie dont l'axe correspond à la trisectrice du repère  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . En outre, puisque toute translation parallèle à cet axe reproduit l'addition d'une pression hydrostatique, il suffit de représenter la surface de charge par des coupes parallèles au plan du déviateur, défini par  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ . Une autre représentation géométrique couramment utilisée est définie par l'intersection de la surface avec le plan  $\sigma_3 = 0$  (état de contraintes planes).

## Tresca (1864)

La limite d'élasticité initiale selon le critère de Tresca (1864) est liée à l'atteinte de la contrainte de cisaillement maximum correspondant à la demi-différence entre les valeurs extrêmes des contraintes principales, conformément à la construction des cercles de Mohr. Elle est donnée par :

$$F(\sigma_i) = \frac{1}{2} \text{Sup}_{i \neq j} \left[ \left| \sigma_i - \sigma_j \right| \right] = k \quad (\text{I.24})$$

où  $k$  est une mesure de la limite élastique en cisaillement pur. Cette valeur peut être également identifiée à partir d'un essai de traction uniaxiale, pour lequel  $\sigma_u = 2k$ , et dans ce cas, le critère de Tresca (1864) est exprimé par :

$$F(\sigma_i) = \frac{1}{2} \text{Sup}_{i \neq j} \left[ \left| \sigma_i - \sigma_j \right| \right] = \frac{\sigma_u}{2} \quad (\text{I.25})$$

Dans l'espace des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  le critère de Tresca (1864) est représenté par un prisme droit à base hexagonale.

## von Mises (1913)

Le critère de von Mises (1913) est établi en considérant que l'écoulement plastique des matériaux insensibles à la pression hydrostatique est gouverné par l'atteinte d'une valeur critique résultant soit de l'énergie élastique de distorsion soit de la contrainte de cisaillement agissant sur les plans octaédriques. Dans le deux cas, il est possible de démontrer que ces interprétations physiques conduisent à un seuil de limite élastique proportionnel à  $J_2$ . L'expression générale du critère de von Mises (1913) est donnée par :

$$f(J_2) = 0 \text{ ou } J_2 = k^2 \quad (\text{I.26})$$

En développant l'expression de  $J_2$  (I.22), le critère de von Mises (1913) peut être exprimé dans le repère des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  par :

$$F(\sigma_i) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_u^2 \quad (\text{I.27})$$

ou encore

$$F(\sigma_{ij}) = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 2 \sigma_u^2 \quad (\text{I.28})$$

où la limite élastique en traction uniaxiale  $\sigma_u = \sqrt{3}k$ . Dans l'espace des contraintes principales le critère de von Mises (1913) est représenté par un cylindre droit à base circulaire de rayon  $\sqrt{2}k$ .

## Drucker (1949)

Un critère permettant d'obtenir une description intermédiaire entre les critères de Tresca et de von Mises a été proposé par Drucker (1949). Il est obtenu à partir d'une combinaison des deuxième et troisième invariants du déviateur de contraintes  $J_2$  et  $J_3$ , exprimée sous la forme :

$$f(J_2, J_3) = (3J_2)^3 \left[ 1 - C \left( \frac{J_3^2}{J_2^3} \right) \right] = \left[ 1 - \frac{4C}{27} \right] \sigma_u^6 \quad (\text{I.29})$$

où  $C$  est un paramètre dépendant du matériau. En particulier, les critères de Tresca (1864) et de von Mises (1913) sont retrouvés pour  $C = 1$  et  $C = 0$  respectivement.

La Figure (I.4) compare les surfaces de charge représentées dans le plan du déviateur de contraintes déterminées avec les critères de plasticité de Tresca (1864), von Mises (1913) et Drucker (1949) ajustés à la limite élastique en traction uniaxiale  $\sigma_u$ .

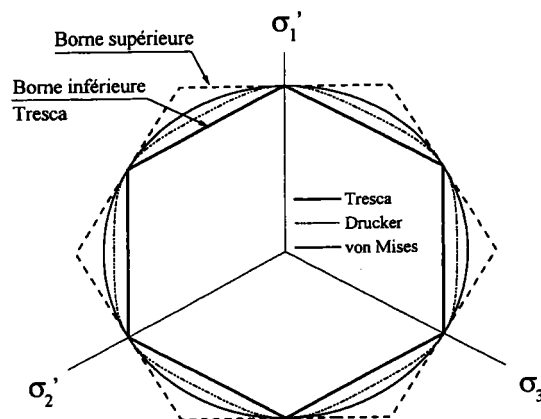


Figure (I.4) – Représentation géométrique des critères de Tresca (1864), von Mises (1913) et Drucker (1949) dans le plan du déviateur de contraintes.

## Hosford (1972)

Hosford (1972) a proposé un critère général dont la trace se situe entre une borne inférieure définie par le critère de Tresca et une borne supérieure correspondant à la somme des diamètres des deux plus grands cercles de Mohr (Hill, 1950). Le critère de Hosford (1972) s'écrit comme une extension non quadratique du critère de von Mises donnée par :

$$F(\sigma_i) = |\sigma_1 - \sigma_2|^a + |\sigma_2 - \sigma_3|^a + |\sigma_3 - \sigma_1|^a = 2 \bar{\sigma}^a \quad (\text{I.30})$$

Les critères de von Mises et Tresca peuvent être retrouvés comme des cas particuliers du critère de Hosford (1972) avec l'exposant  $a = 2$  ou  $4$  et  $a = 1$  ou  $\infty$  respectivement.

La Figure (I.5) compare les résultats obtenus pour des matériaux isotropes de structure cubique centrée (c.c.) et cubique à faces centrées (c.f.c.) à partir du modèle polycristallin de Taylor (1938) et Bishop et Hill (1951)<sup>2</sup> *apud* Hosford (1996), ci-après modèle de TBH, avec les prévisions réalisées à partir des critères de Tresca, de von Mises et de Hosford (1972). Dans les deux cas, les résultats déterminés par le modèle de TBH se situent entre les prévisions des critères de Tresca et de von Mises et sont mieux représentés par le critère de Hosford (1972) lorsque l'exposant  $a$  dans l'équation (I.30) est égal à 6 et 8 pour les matériaux de structure c.c. et c.f.c. respectivement (Logan et Hosford, 1980 et Hosford, 1993).

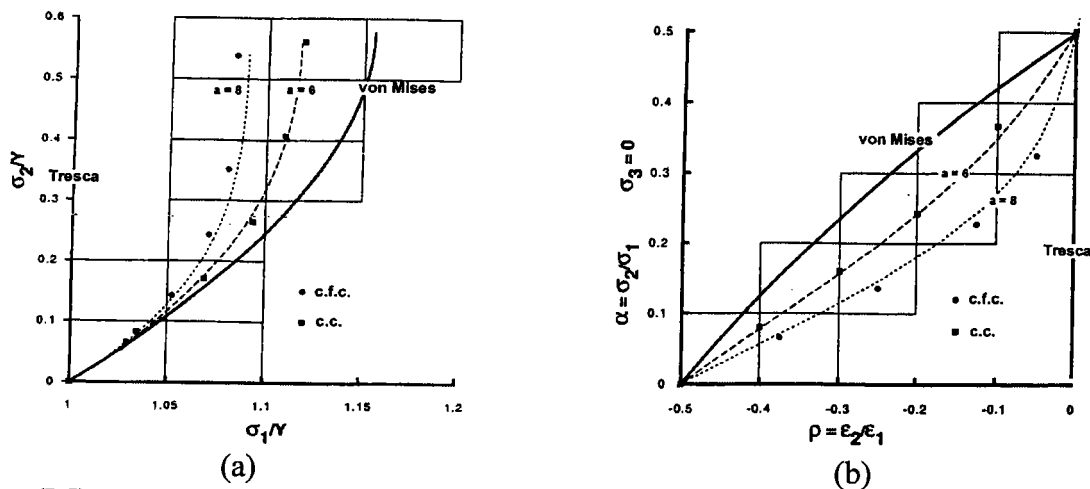


Figure (I.5) – Comparaison entre les critères de von Mises, Tresca et Hosford et les résultats calculés avec le modèle polycristallin de TBH : (a) surfaces de charge et (b) rapport de contraintes en fonction du rapport de déformations. D'après Hosford (1996).

## Barlat et Richmond (1987)

En vue d'évaluer l'effet de la contrainte de cisaillement sur le comportement plastique des tôles minces, Barlat et Richmond (1987) ont déterminé les surfaces de charge représentatives des composantes de texture d'un matériau de structure c.f.c. à l'aide du modèle de TBH. Ces auteurs ont proposé de représenter la surface de charge dans l'espace de contraintes  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$  normalisées par la contrainte équivalente en traction uniaxiale  $\bar{\sigma}$ . Dans cette représentation, montrée dans la Figure (I.6a), les lignes solides correspondent aux projections dans le plan  $(\sigma_{xx}/\bar{\sigma}, \sigma_{yy}/\bar{\sigma})$  des intersections de la surface de charge avec les plans définis par un rapport de contraintes  $S = \sigma_{xy}/\bar{\sigma}$  donné, et les tirets sont les projections des points dont le rapport de vitesses de déformations plastiques  $\rho = \dot{\epsilon}_{yy}/\dot{\epsilon}_{xx}$  est constant.

<sup>2</sup> G.I. Taylor, "Plastic Strain in Metals", J. Inst. Met., Vol. 62, 1938, pp. 307-324 ; J.F.W. Bishop et R. Hill, "A Theory of the Plastic Distortion of a Polycrystalline Aggregate under Combined Stresses", Philosophical Magazine, Vol. 42, 1951, pp. 414-427 et "A Theoretical Derivation of the Plastic Properties of a Polycrystalline Face-Centered Metal", Philosophical Magazine, Vol. 42, 1951, pp. 1298-1307.

Il est intéressant de noter que la forme de ces surfaces varie avec  $S$ , ce qui provient d'un couplage entre les contraintes normales ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ ) et la composante de cisaillement  $\sigma_{xy}$ . D'autre part, la surface de charge obtenue pour  $S = 0$ , c.-à-d., dans l'espace de contraintes principales ( $\sigma_1/\bar{\sigma}, \sigma_2/\bar{\sigma}$ ), présente des petits rayons de courbure dans les régions de traction uniaxiale ( $\rho = -0.5$ ) et équi biaxiale ( $\rho = 1$ ), ainsi qu'un aplatissement au voisinage de la déformation plane ( $\rho = 0$  ou  $\infty$ ).

En vue de tenir compte de la forme des surfaces de charge déterminées par le modèle de TBH, Barlat et Richmond (1987) ont proposé de réécrire la fonction de charge proposée sous différentes formes par Hershey<sup>3</sup>(1954), Hosford (1972) et Hill (1979) pour un état de contraintes planes de façon à y faire intervenir la composante de cisaillement  $\sigma_{xy}$ . Cette fonction est exprimée dans le repère des axes matériels  $x$  et  $y$  par :

$$F(\sigma_{ij}) = |K_1 + K_2|^m + |K_1 - K_2|^m + |2K_2|^m = 2 \bar{\sigma}^m \quad (\text{I.31})$$

avec

$$K_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \text{ et } K_2 = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2} \quad (\text{I.32})$$

Comme montré par la Figure (I.6b), les surfaces de charge représentatives d'un matériau isotrope c.f.c. déterminées à partir du modèle de TBH sont correctement reproduites par le critère de Barlat et Richmond (1987) avec  $m = 8$ .

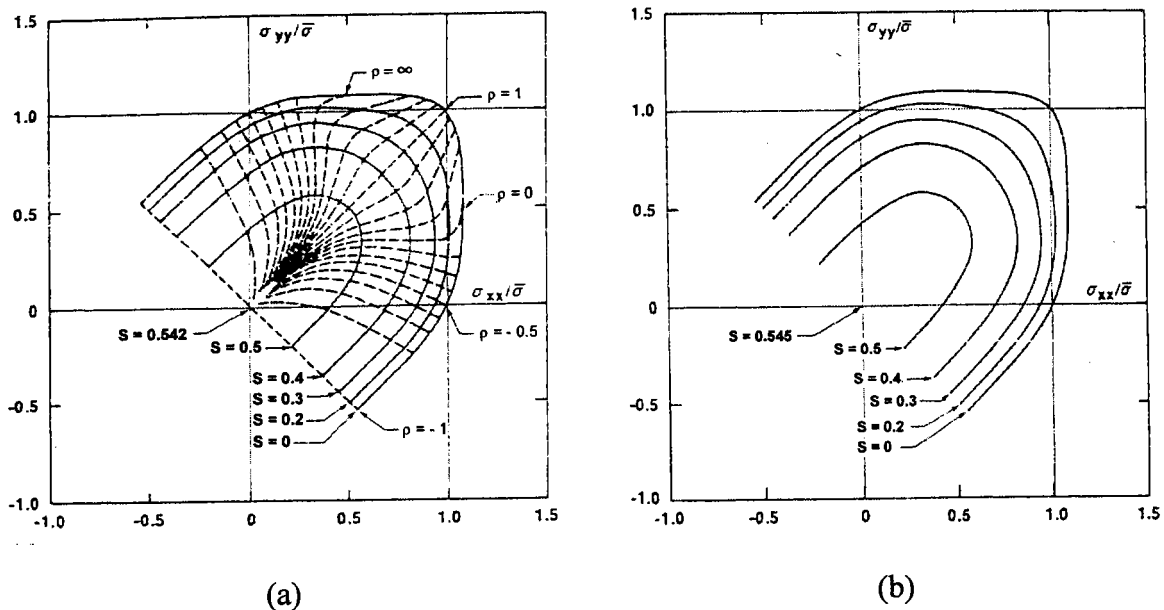


Figure (I.6)- Comparaison entre les surfaces de charge d'un matériau isotrope de structure c.f.c. obtenues à partir (a) du modèle de TBH et (b) du critère de Barlat et Richmond (1987).

<sup>3</sup> A.V. Hershey, "The Plasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic face Centered Cubic Crystals", Journal of Applied Mechanics, Vol. 76, 1954, pp. 241-249.

### I.2.3. Critères de plasticité anisotropes

Dans ce cas, la fonction de charge doit respecter l'existence de directions privilégiées de l'anisotropie de propriétés plastiques résultant de la texture cristallographique du matériau. Un cas particulier de l'anisotropie plastique correspond à la symétrie orthotrope dans laquelle le matériau présente trois plans de symétrie orthogonaux. Les intersections de ces trois plans forment les axes de symétrie orthotrope  $(x, y, z)$ . Dans une tôle, ces axes sont les directions parallèle  $(x)$ , transverse  $(y)$  et normale  $(z)$  par rapport au sens de laminage respectivement. L'anisotropie des tôles peut encore être simplifiée en admettant que toutes les directions dans le plan de la tôle  $(x, y)$  sont équivalentes alors que la direction à travers l'épaisseur possède des propriétés différentes, c'est-à-dire, l'existence d'une symétrie de rotation autour de  $(z)$ . Ces deux types de symétrie d'anisotropie plastique sont appelées l'anisotropie transverse ou planaire et l'isotropie transverse ou l'anisotropie normale respectivement.

Une mesure de l'anisotropie plastique couramment utilisée dans la caractérisation des tôles minces, est définie par le rapport entre les vitesses de déformations plastiques dans le sens de la largeur et à travers l'épaisseur, mesurées sur une éprouvette de traction uniaxiale. Ce rapport de déformations est connu comme le coefficient d'anisotropie plastique ou coefficient de Lankford, donné par :

$$R = \frac{\dot{\epsilon}_w^p}{\dot{\epsilon}_t^p} \text{ ou } R = \frac{d\epsilon_w^p}{d\epsilon_t^p} \quad (\text{I.33})$$

Dans le cas d'un matériau à isotropie transverse, une valeur moyenne de l'anisotropie plastique est donnée par le coefficient d'anisotropie normale défini, par exemple, à partir d'essais de traction uniaxiale réalisés dans les directions parallèle, à 45 et 90 degrés par rapport au sens de laminage :

$$R = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4} \quad (\text{I.34})$$

#### Hill (1948)

Le critère quadratique proposé par Hill (1948) s'écrit comme une extension du critère isotrope de von Mises donnée par :

$$2F(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1 \quad (\text{I.35})$$

où les indices  $x, y$  et  $z$  correspondent aux axes de symétrie orthotrope et les paramètres  $F, G, H, L, M$  et  $N$  caractérisent l'anisotropie du matériau.



Les six paramètres du critère de Hill (1948) peuvent être déterminés à partir des limites élastiques de traction et ou de compression uniaxiale dans les directions d'orthotropie ( $F$ ,  $G$  et  $H$ ) et des limites élastiques de cisaillement pur suivant les trois plans de symétrie orthotrope ( $L$ ,  $M$  et  $N$ ).

Dans le cas particulier d'un état de contraintes planes, i.e., ( $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ ), l'équation (I.36) se réécrit comme :

$$2F(\sigma_{ij}) = (G+H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F+H)\sigma_{yy}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1 \quad (\text{I.36})$$

où les paramètres  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , et  $N$  peuvent être déterminés à partir de quatre essais.

D'abord, à partir d'un essai de traction uniaxiale selon la direction de laminage, i.e.,  $\sigma_{xx} \neq 0$ ,  $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$ , l'équation (I.36) se réduit à :

$$(G+H) = (\sigma_0)^{-2} \quad (\text{I.37})$$

où  $\sigma_0$  est la limite élastique dans la direction de laminage. De façon analogue, pour un essai de traction uniaxiale dans la direction transverse long, i.e.,  $\sigma_{yy} \neq 0$ ,  $\sigma_{xy} = \sigma_{xx} = 0$  :

$$(F+H) = (\sigma_{90})^{-2} \quad (\text{I.38})$$

où  $\sigma_{90}$  est la limite élastique dans la direction transverse long par rapport au sens de laminage.

En traction équibiaxiale la limite élastique est atteinte lorsque  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_b$  :

$$(F+G) = (\sigma_b)^{-2} \quad (\text{I.39})$$

où  $\sigma_b$  représente la limite élastique en traction équibiaxiale et ou en compression équibiaxiale.

Finalement, en combinant (I.37-39), les paramètres  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} 2F &= \frac{1}{(\sigma_0)^2} - \frac{1}{(\sigma_{90})^2} + \frac{1}{(\sigma_b)^2} \\ 2G &= \frac{1}{(\sigma_{90})^2} - \frac{1}{(\sigma_0)^2} + \frac{1}{(\sigma_b)^2} \\ 2H &= \frac{1}{(\sigma_0)^2} + \frac{1}{(\sigma_{90})^2} - \frac{1}{(\sigma_b)^2} \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

Enfin, le paramètre  $N$  peut être déterminé à partir d'un essai de traction uniaxiale faisant un angle de  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage, i.e.,  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{45} / 2$  :

$$2N = \frac{4}{(\sigma_{45})^2} - \frac{1}{(\sigma_b)^2} \quad (\text{I.41})$$

Il est à noter également que la limite élastique en cisaillement pur parallèle aux axes de symétrie orthotrope peut être estimée par :

$$\tau = 1/\sqrt{2N} \quad (\text{I.42})$$

Les évolutions théoriques des propriétés plastiques dans le plan de la tôle peuvent être aisément déterminées avec le critère de Hill quadratique (1948) en considérant une éprouvette de traction uniaxiale soumise à une sollicitation hors-axes, schématisée dans la Figure (I.7). Après un changement de repères, les contraintes exprimées dans les axes de symétrie orthotrope sont données par :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{(\alpha)} \cos^2 \alpha ; \sigma_{yy} = \sigma_{(\alpha)} \sin^2 \alpha \text{ et } \sigma_{xy} = \sigma_{(\alpha)} \sin \alpha \cos \alpha \quad (\text{I.43})$$

où  $\sigma_{(\alpha)}$  est la contrainte de traction uniaxiale appliquée selon une orientation ( $\alpha$ ) par rapport à la direction de laminage ( $x$ ). Donc, en remplaçant les composantes de contraintes données par (I.43) dans (I.36), l'évolution de la limite élastique en traction uniaxiale dans le plan de la tôle est obtenue par :

$$\sigma_{(\alpha)} = \left[ F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha + H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right]^{-1/2} \quad (\text{I.44})$$

d'où se déduisent les différentes évolutions angulaires de la limite élastique en traction uniaxiale illustrées dans la Figure (I.8). En particulier, les valeurs extrémales de  $\sigma_{(\alpha)}$ , déterminées à partir de l'expression (I.44), sont données par :

$$\alpha = 0^0, \alpha = 90^0 \text{ et } \bar{\alpha} = \arctan \left[ \frac{N - G - 2H}{N - F - 2H} \right]^{1/2} \quad (\text{I.45})$$

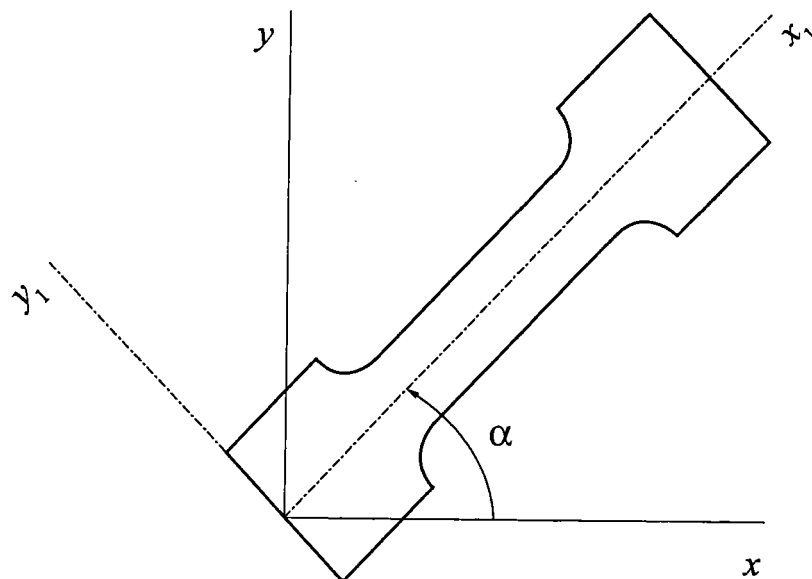


Figure (I.7) – Schéma d'une éprouvette de traction uniaxiale hors-axes : l'axe de chargement est défini pour une orientation  $\alpha = (x, x_1) = (y, y_1)$ .

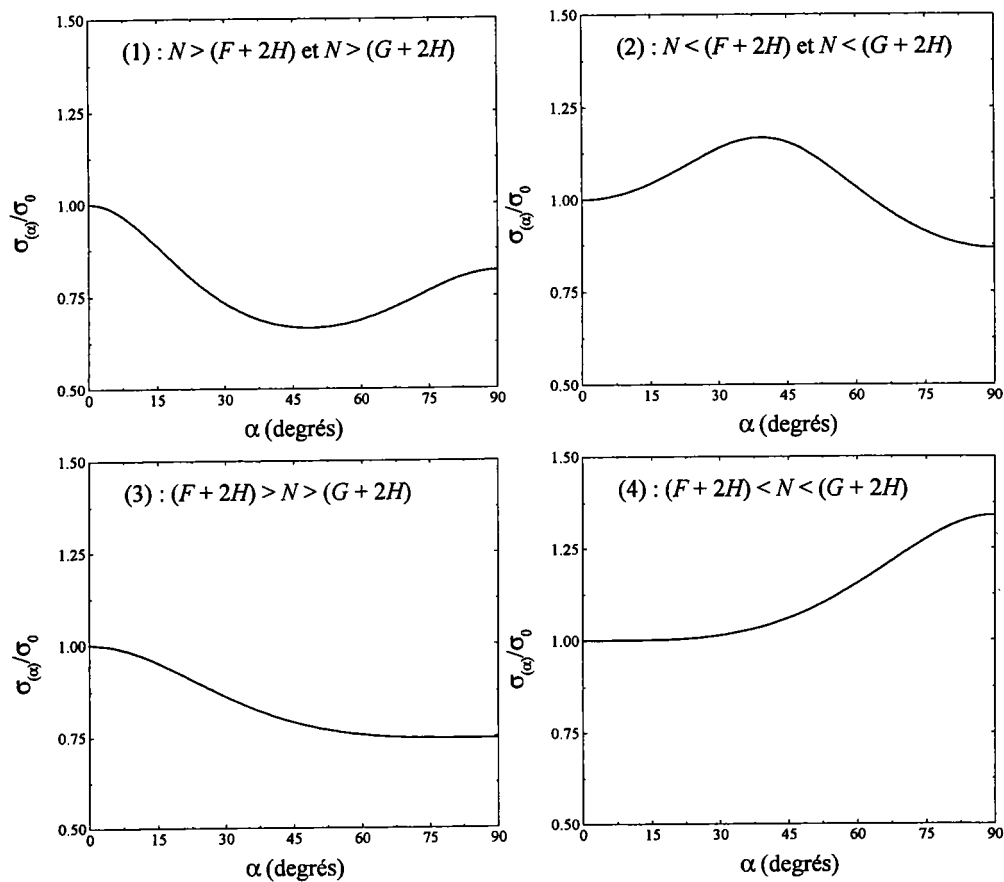


Figure (I.8) – Dépendance de la limite élastique en traction uniaxiale en fonction de l'orientation de l'axe de chargement : variations possibles déterminées avec le critère quadratique de Hill (1948).

Le coefficient d'anisotropie plastique lors d'un essai de traction uniaxiale hors-axes,  $R_{(\alpha)} = d\epsilon_{y1}/d\epsilon_{zz}$ , peut être défini à partir de la règle d'écoulement plastique associée (I.7), et des contraintes exprimées dans le repère des axes d'orthotropie (I.43), ce qui donne :

$$R_{(\alpha)} = \frac{H + (2N - F - 4H)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{F\sin^2\alpha + G\cos^2\alpha} \quad (\text{I.46})$$

Les évolutions angulaires admissibles pour le coefficient d'anisotropie plastique  $R_{(\alpha)}$  sont similaires aux évolutions de  $\sigma_{(\alpha)}$ , c'est-à-dire, un extremum à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$  et éventuellement un maximum ou un minimum entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . En outre, pour un maximum de  $R_{(\alpha)}$  entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , il y a un minimum de  $\sigma_{(\alpha)}$  et vice-versa. Dans le cas de contraintes planes, le critère quadratique de Hill (1948) peut également être écrit en fonction du coefficient d'anisotropie plastique  $R$  déterminé dans les directions parallèle, à 45 et à 90 degrés par rapport au sens de laminage,

$$R_{90}\sigma_{xx}^2 + R_0\sigma_{yy}^2 + R_0R_{90}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (2R_{45} + 1)(R_0 + R_{90})\sigma_{xy}^2 = R_{90}(1 + R_0)\sigma_0^2 \quad (\text{I.47})$$

## Hill (1979)

À partir de résultats expérimentaux, Woodthorpe et Pearce <sup>4</sup> (1970) ont observé que le comportement d'un aluminium de qualité commerciale est caractérisé par une limite élastique plus grande en traction équi-biaxiale ( $\sigma_b$ ) qu'en traction uniaxiale ( $\sigma_u$ ) et par un coefficient d'anisotropie plastique normale  $R$  inférieur à un. Il convient de remarquer que le critère de Hill quadratique (1948) prévoit le contraire ( $\sigma_b/\sigma_u < 1 \leftrightarrow R < 1$ ). Dans la littérature, ces différences de comportement plastique sont connues sous le nom de comportement "anormal" de l'aluminium. En vue d'accommoder cette "anomalie", Hill (1979) a proposé un critère non quadratique sous la forme générale suivante :

$$f|\sigma_2 - \sigma_3|^m + g|\sigma_3 - \sigma_1|^m + h|\sigma_1 - \sigma_2|^m + a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^m + b|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^m + c|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^m = \bar{\sigma}^m \quad (I.48)$$

où les axes de contraintes principales (1,2,3) et de symétrie orthotrope (x,y,z) sont coïncidents.

Hill (1979) a envisagé quatre simplifications pour l'équation (I.48) en considérant dans tous les cas un état de contraintes planes et l'isotropie transverse ( $f = g$  et  $a = b$ ). Seulement le cas donné par ( $a = b = f = g = 0$ ) a reçu l'attention par la suite dans la littérature (Mellor et Parmar, 1978). Il est décrit en fonction du coefficient d'anisotropie normale  $R$  par :

$$|\sigma_1 + \sigma_2|^m + (1 + 2R)|\sigma_1 - \sigma_2|^m = 2(1 + R)\bar{\sigma}^m \quad (I.49)$$

En particulier, le critère quadratique de Hill (1948) est retrouvé pour  $m = 2$ . Dans le cas général, l'exposant  $m$  peut être déterminé à partir d'essais de traction uniaxiale et d'expansion équi-biaxiale (Kobayashi et al., 1985) de même qu'à partir d'essais de traction uniaxiale et de déformation plane par traction (Wagoner, 1980).

## Logan et Hosford (1980)

Logan et Hosford (1980) ont constaté que les surfaces de charge des matériaux isotropes transverses de structure de c.c. et c.f.c. calculées à partir de la plasticité polycristalline sont mieux représentées par la fonction de charge suivante :

$$|\sigma_x|^a + |\sigma_y|^a + R|\sigma_x - \sigma_y|^a = (1 + R)\bar{\sigma}^a \quad (I.50)$$

pouvant être considérée comme un cas particulier du critère non quadratique de Hill (1979).

<sup>4</sup> J. Woodthorpe et R. Pearce, "The Anomalous Behavior of Aluminum Sheet Under Balanced Biaxial Tension", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 12, 1970, pp. 341-347.

Logan et Hosford (1980) ont déterminé l'exposant  $a$  à partir des calculs basés sur la plasticité polycristalline pour diverses textures caractérisées par une symétrie de rotation autour de la normale à la tôle. Les contraintes d'écoulement selon les modes de sollicitation de traction équi-biaxiale ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_b$ ), déformation plane par traction ( $\epsilon_y = 0$ ), traction uniaxiale ( $\sigma_x = \sigma_u$  et  $\sigma_y = 0$ ) et cisaillement pur ( $\epsilon_z = 0$ ) ont été déterminées pour chaque type de texture et comparées aux prévisions faites par l'équation (I.50). La Figure (I.9) montre les résultats obtenus avec un matériau de structure cubique centrée à partir des modes de sollicitation définis par les rapports de contraintes  $\chi = \sigma_b/\sigma_u$  et  $\xi = \sigma_{ps}/\sigma_u$ . Dans cette figure, chaque point représente un rapport de contraintes calculé et une valeur de  $R$  déterminée pour chaque texture considérée. À l'inverse du critère quadratique de Hill (1948), les meilleurs ajustements ont été obtenus avec l'exposant  $a = 6$ . Des résultats similaires ont été obtenus pour des matériaux de structure c.f.c. avec l'exposant  $a = 8$  (voir Hosford, 1993).

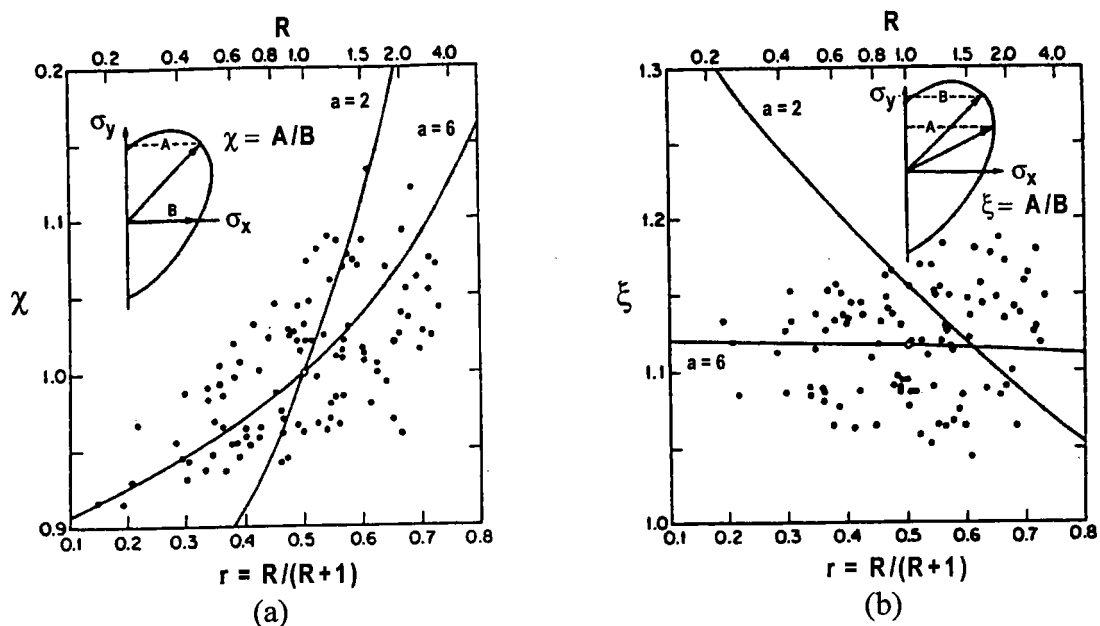


Figure (I.9) – Corrélations entre les rapports de contraintes (a)  $\chi = \sigma_b/\sigma_u$  et (b)  $\xi = \sigma_{ps}/\sigma_u$  et les valeurs de  $R$  déterminées pour des matériaux c.c. à partir du modèle de TBH et du critère de Logan et Hosford (1980). D'après Logan et Hosford (1980).

## Barlat et Lian (1989)

Bien que les critères de Hill (1979) et de Logan et Hosford (1980) puissent décrire quelques caractéristiques relatives au comportement anisotrope des tôles observé dans les expériences ou déterminé par la plasticité polycristalline, ces formulations ne peuvent être utilisées que pour les états de contraintes dans lesquels les directions de contraintes principales et les axes de symétrie orthotrope sont coïncidents, i.e., où les contraintes de cisaillement sont nulles, ou dans le cas particulier de l'isotropie transverse (Hosford, 1985).

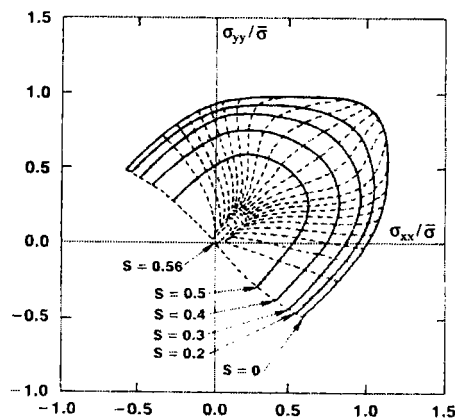
Barlat et Lian (1989) ont alors généralisé le critère proposée par Barlat et Richmond (1987) au cas anisotrope par la fonction de charge suivante :

$$F(\sigma_{ij}) = a |K_1 + K_2|^m + a |K_1 - K_2|^m + (2 - a) |2 K_2|^m = 2\bar{\sigma}^m \quad (\text{I.51})$$

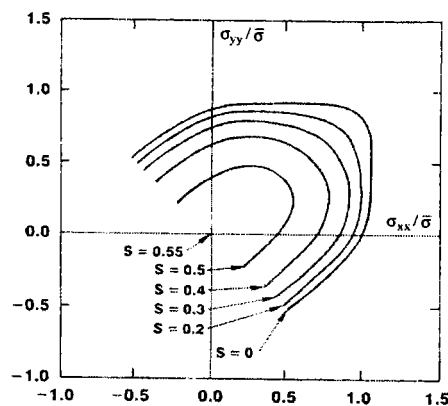
avec

$$K_1 = \frac{(\sigma_{xx} + h\sigma_{yy})}{2} \text{ et } K_2 = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - h\sigma_{yy})^2}{4} + (p\sigma_{xy})^2} \quad (\text{I.52})$$

Les paramètres  $a$ ,  $h$  et  $p$  caractérisent l'anisotropie du matériau et peuvent être déterminés à partir des coefficients de Lankford selon les directions parallèle, diagonale et transverse au sens de laminage de la tôle, i.e., les valeurs de  $R_0$ ,  $R_{45}$  et  $R_{90}$  respectivement. Les valeurs recommandées pour l'exposant  $m$  sont de 6 et 8 pour les matériaux de structure c.c. et c.f.c. respectivement. Lege et al. (1989) ont montré que les prévisions faites par le critère de Barlat et Lian (1989) pour l'alliage d'aluminium 2008-T4 sont en bon accord avec les résultats expérimentaux et les prévisions du modèle de TBH, voir Figure (I.10) ci-dessous.



(a)



(b)

Figure (I.10) – Surfaces de charge de l'alliage d'aluminium 2008-T4 déterminées avec : (a) le modèle de TBH et (b) le critère de Barlat et Lian (1989). D'après Lege et al. (1989).

## Hill (1990)

Hill (1990) a proposé un critère dans lequel l'anisotropie transverse est considérée en explicitant la dépendance d'une fonction de charge homogène de degré arbitraire sur l'orientation de l'axe de chargement. Cette formulation est définie en fonction des composantes de contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) et de l'orientation de leurs axes par rapport aux axes de symétrie orthotrope, i.e.,  $\alpha = (x,1) = (y,2)$  par :

$$\begin{aligned} & |\sigma_1 + \sigma_2|^m + (\sigma_b/\tau)^m |\sigma_1 - \sigma_2|^m \\ & + \left| \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \right|^{(m/2)-1} \left\{ -2a(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + b(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos 2\alpha \right\} \cos 2\alpha = (2\sigma_b)^m \end{aligned} \quad (I.53)$$

Il est à noter que la version quadratique proposée par ce même auteur est retrouvée avec  $m = 2$  et que les termes indépendants de l'orientation  $\alpha$  s'inspirent de la version non quadratique de Hill (1979). Le critère de Hill (1990) est défini par cinq paramètres, à savoir, les limites élastiques en traction équibiaxiale ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_b$ ) et en cisaillement pur parallèle aux axes de symétrie orthotrope ( $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$ ,  $\alpha = \pi/4$ ), les coefficients sans dimension  $a$  et  $b$  et l'exposant  $m$ . Les coefficients  $a$  et  $b$  caractérisant l'anisotropie transverse peuvent être déterminés par deux méthodes : (1) à partir des trois valeurs de la limite élastique en traction uniaxiale ( $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}$ ) ou (2) à partir des deux valeurs du coefficient de Lankford ( $R_0, R_{90}$ ). Dans les deux cas, l'exposant  $m$  peut être calculé à partir des valeurs expérimentales des limites élastiques en traction équibiaxiale ( $\sigma_b$ ), en cisaillement pur parallèle aux axes d'orthotropie ( $\tau$ ) et du coefficient de Lankford et de la limite élastique en traction uniaxiale déterminés à 45 degrés de la direction de laminage.

Ling et Ding (1995) ont appliqué le critère de Hill (1990) pour caractériser le comportement des tôles d'aluminium 1100-F dans l'état de livraison et après 25% et 50% de réductions d'épaisseur par laminage à froid respectivement. Dans chaque condition, les limites élastiques ont été déterminées à partir d'essais de traction biaxiale réalisés sur une éprouvette cruciforme. Les Figures (I.11) et (I.12) confrontent les résultats expérimentaux avec les prévisions réalisées avec le critère de Hill (1990). Les coefficients  $a$  et  $b$  ont été déterminés à partir des méthodes (1) et (2) mentionnées ci-dessus et pour chaque cas analysé, l'exposant  $m$  a été déterminé en ajustant l'équation (I.53) à la limite élastique déterminée en traction équibiaxiale correspondant à l'état initial du matériau. La Figure (I.11) montre qu'un bon accord est trouvé entre les limites élastiques expérimentales et les surfaces de charge déterminées avec le critère de Hill (1990) à partir des deux méthodes mentionnées ci-dessus.

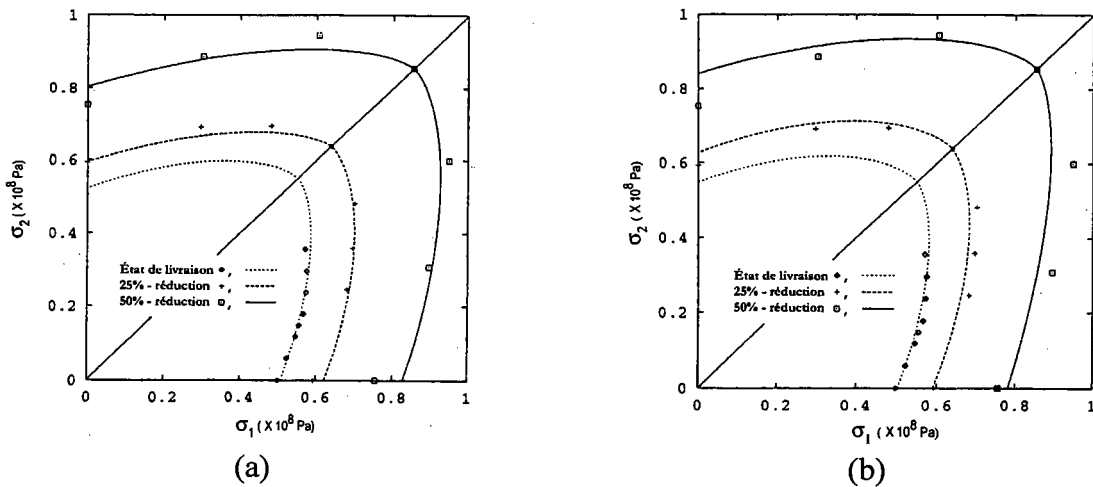


Figure (I.11) – Comparaison entre les limites élastiques obtenues pour l'aluminium 1100-F et les surfaces de charge déterminées en ajustant le critère de Hill (1990) aux valeurs de : (a)  $\sigma_0$ ,  $\sigma_{45}$  et  $\sigma_{90}$  et (b)  $R_0$ ,  $R_{45}$  et  $R_{90}$ . D'après Ling et Ding (1995).

D'autre part, la Figure (I.12) compare les valeurs expérimentales du coefficient de Lankford et de la limite élastique en traction uniaxiale mesurées pour chaque condition de laminage de l'aluminium 1100-F avec les évolutions angulaires obtenues à partir des surfaces de charge correspondant aux Figures (I.11a) et (I.11b) respectivement.

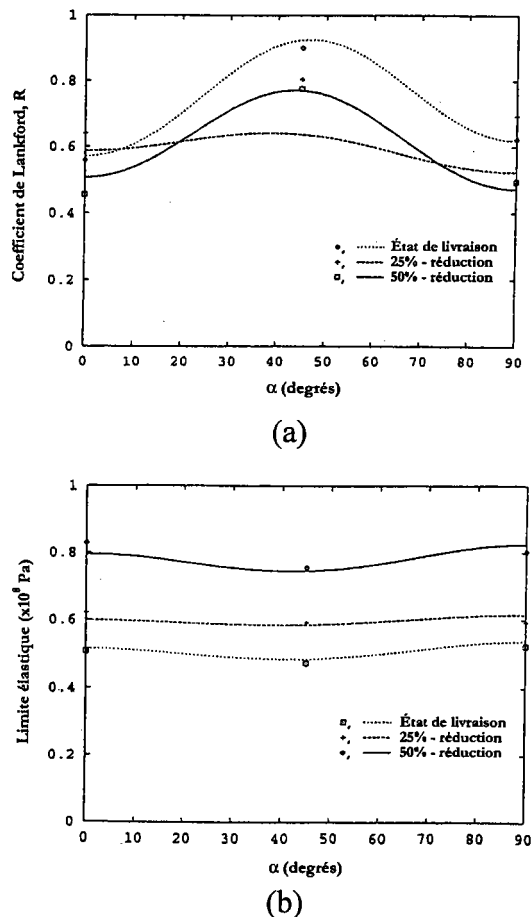


Figure (I.12) – Comparaison entre les évolutions angulaires calculées avec le critère de Hill (1990) et les valeurs mesurées pour l'aluminium 1100-F: (a) coefficient de Lankford et (b) limite élastique en traction uniaxiale. D'après Ling et Ding (1995).



## Barlat et al. (1991)

Ce critère est une extension des formulations isotropes proposées par Hershey (1954), Hosford (1972) et Barlat et Richmond (1987) au cas de matériaux anisotropes, définie par :

$$\Phi(\mathbf{S}) = |S_1 - S_2|^m + |S_2 - S_3|^m + |S_3 - S_1|^m = 2 \bar{\sigma}^m \quad (\text{I.55})$$

où  $S_i$  sont les valeurs principales du déviateur de contraintes transformé  $\mathbf{S}$  exprimé en axes quelconques par :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{c(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) - b(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})}{3} & h\sigma_{xy} & g\sigma_{zx} \\ h\sigma_{xy} & \frac{a(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) - c(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{3} & f\sigma_{yz} \\ g\sigma_{zx} & f\sigma_{yz} & \frac{b(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) - a(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{I.56})$$

où les paramètres  $a, b, c, f, g$  et  $h$  caractérisent l'anisotropie du matériau.

En principe, les paramètres ( $a, b$  et  $c$ ) peuvent être déterminés à partir des limites élastiques en traction uniaxiale ( $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}$ ) tandis que ( $f, g$  et  $h$ ) sont déterminés à partir des limites élastiques en cisaillement correspondant aux plans de symétrie orthotrope. Toutefois, en l'absence de données de cisaillement, la méthode la plus appropriée est d'admettre les valeurs isotropes des paramètres associées aux composantes de cisaillement, i.e.,  $f = g = h = 1$ .

Chung et Shah (1992) ont décrit le comportement de l'alliage d'aluminium 2008-T4 caractérisé par Lege et al. (1989) en ajustant l'équation (I.55) aux données de traction et compression uniaxiale, comme indiqué par les surfaces de charge montrées à la Figure (I.13).

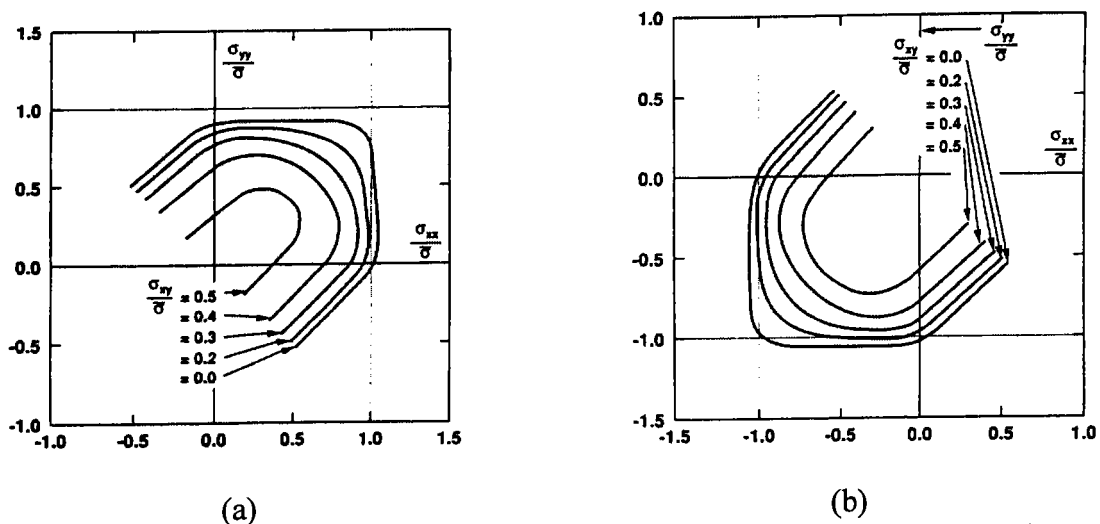


Figure (I.13) – Surfaces de charge de l'alliage d'aluminium 2008-T4 calculées en ajustant le critère de Barlat et al. (1991a) aux données de (a) traction et (b) de compression uniaxiale. D'après Chung et Shah (1992).

## Karafillis et Boyce (1993)

La formulation proposée par Karafillis et Boyce (1993) permet d'abord la description d'un ensemble de surfaces de charge pour un matériau isotrope dont la trace se situe entre la borne inférieure (Tresca) définie par le critère de Hosford (1972) :

$$\Phi_1 \{ \mathbf{S}(\sigma) \} = (S_1 - S_2)^{2k} + (S_2 - S_3)^{2k} + (S_3 - S_1)^{2k} = 2\bar{\sigma}^{2k} \quad (\text{I.56})$$

et la borne supérieure définie par :

$$\Phi_2 \{ \mathbf{S}(\sigma) \} = S_1^{2k} + S_2^{2k} + S_3^{2k} = \frac{2^{2k} + 2}{3^{2k}} \bar{\sigma}^{2k} \quad (\text{I.57})$$

où  $S_i$  sont les valeurs principales du déviateur de contraintes  $\mathbf{S}(\sigma)$ . Karafillis et Boyce (1993) ont proposé ensuite une expression générale en combinant les équations (I.56-57) :

$$\Phi \{ \mathbf{S}(\sigma) \} = (1-c) \Phi_1 \{ \mathbf{S}(\sigma) \} + c \frac{3^{2k}}{2^{2k-1} + 1} \Phi_2 \{ \mathbf{S}(\sigma) \} = 2\bar{\sigma}^{2k} \quad (\text{I.58})$$

La Figure (I.14) montre les surfaces de charge déterminées avec l'équation (I.58). Il est à noter que pour de fortes valeurs de l'exposant  $k$ , les surfaces de charge s'approchent de la borne inférieure ( $\Phi_1$ ) et de la borne supérieure ( $\Phi_2$ ) pour  $c = 0$  et  $c = 1$  respectivement.

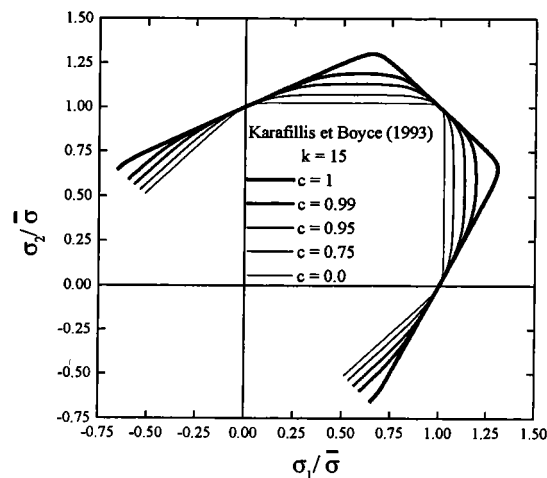


Figure (I.14) – Surfaces de charge d'un matériau isotrope déterminées avec le critère de Karafillis et Boyce (1993).

Le passage à un critère anisotrope est fait par une transformation linéaire du tenseur des contraintes permettant de définir un déviateur des contraintes "fictif", utilisé dans (I.58). Ce passage a été dénommé par Karafillis et Boyce (1993) comme étant le concept de la "Plasticité Isotrope Équivalente". Il est défini par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{I.59})$$

où  $\mathbf{L}$  est un tenseur d'ordre 4 permettant de représenter les différentes symétries du matériau.

Dans le cas particulier d'une symétrie orthotrope et pour un état de contraintes planes, la transformation linéaire proposée par Karafillis et Boyce (1993) est donnée par :

$$\begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & \beta_3 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (I.60)$$

avec

$$\beta_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 - 1}{2}; \beta_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 - 1}{2} \text{ et } \beta_3 = \frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2}{2} \quad (I.61)$$

Les paramètres  $C$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\gamma_3$  définissant l'anisotropie du matériau peuvent être déterminés à partir de trois valeurs du coefficient d'anisotropie de Lankford ( $R_0, R_{45}, R_{90}$ ) et de la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  identifiée, par exemple, à la limite élastique en traction uniaxiale selon la direction de laminage ( $\sigma_0$ ). D'autre part, le facteur  $c$  dans l'équation (I.58) peut être ajusté de façon à ce que les écarts entre les prévisions angulaires de la limite élastique en traction uniaxiale et les données expérimentales, par exemple, les valeurs de ( $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}$ ) soient minimisés, conformément à la procédure suggérée par Karafillis et Boyce (1993).

## Barlat et al. (1993)

Le potentiel plastique peut être également exprimé dans l'espace de vitesses des déformations plastiques, les contraintes, dérivant de façon duale de ce potentiel (Hill, 1987). En s'appuyant sur cette dualité, Barlat et al. (1993) ont proposé initialement un potentiel décrivant les surfaces de charge des matériaux isotropes calculées à l'aide du modèle de TBH. Ce potentiel isotrope est défini par :

$$\psi(\dot{\epsilon}_i) = \left| \frac{2\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3}{3} \right|^\mu + \left| \frac{2\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1}{3} \right|^\mu + \left| \frac{2\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2}{3} \right|^\mu = 2 \dot{\bar{\epsilon}}^\mu \quad (I.62)$$

où  $\dot{\epsilon}_i$  sont les composantes principales de vitesses des déformations plastiques et  $\dot{\bar{\epsilon}}$  est la vitesse de déformation plastique équivalente pouvant être identifiée pour un état de déformations planes, i.e., pour un des  $\dot{\epsilon}_i = 0$ . L'exposant  $\mu$  recommandé pour les matériaux c.c. et c.f.c. est de 3/2 et 4/3 respectivement (Barlat et al., 1993 et Barlat et Chung, 1993). En particulier, les potentiels plastiques correspondant aux critères isotropes de von Mises et de Tresca sont retrouvées avec  $\mu = 2$  ou 4 et  $\mu = 1$  ou  $\infty$  respectivement.

La généralisation du potentiel isotrope de vitesses des déformations plastiques au cas des matériaux anisotropes ayant une symétrie orthotrope est obtenue à travers la même méthode utilisée par Barlat et al. (1991a) pour l'extension d'une fonction de charge isotrope.

Ce passage est défini en remplaçant dans l'équation (I.62) les valeurs principales du tenseur de vitesses des déformations plastiques  $\mathbf{L}$  défini par la transformation suivante :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{c_3(\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy}) - c_2(\dot{\epsilon}_{zz} - \dot{\epsilon}_{xx})}{3} & c_6 \dot{\epsilon}_{xy} & c_5 \dot{\epsilon}_{zx} \\ c_6 \dot{\epsilon}_{xy} & \frac{c_1(\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{zz}) - c_3(\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy})}{3} & c_4 \dot{\epsilon}_{yz} \\ c_5 \dot{\epsilon}_{zx} & c_4 \dot{\epsilon}_{yz} & \frac{c_2(\dot{\epsilon}_{zz} - \dot{\epsilon}_{xx}) - c_1(\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{zz})}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{I.63})$$

où les paramètres  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  et  $c_6$  définissent l'anisotropie du matériau. Il est à noter que pour le cas d'un matériau isotrope ( $c_i = 1$ ),  $\mathbf{L}$  se réduit au tenseur déviateur de vitesses de déformation plastique. Dans le cas d'un matériau anisotrope, les paramètres  $c_i$  peuvent être déterminés à partir des données du modèle de TBH (Barlat et al., 1993) ou à partir des données expérimentales (Barlat et Chung, 1993). D'ailleurs, Barlat et Chung (1993) montrent que les potentiels basés dans l'espace des contraintes (Barlat et al., 1991a) et de vitesses des déformations plastiques (Barlat et al., 1993) fournissent des prévisions comparables de l'évolution angulaire de la limite élastique en traction uniaxiale et sont en bon accord avec les résultats expérimentaux déterminés pour l'alliage d'aluminium 2090-T3.

## Ferron et al. (1994)

Ferron et al. (1994) ont proposé un critère en contraintes planes basé sur une représentation paramétrique définie en coordonnées polaires. Le principe de la description adoptée par Ferron et al. (1994) est schématisé dans la Figure (I.15), où la fonction de charge  $g(\theta, \alpha)$  est représentée dans l'espace des contraintes principales normalisées par la contrainte équivalente en traction équi-biaxiale  $(\sigma_1/\bar{\sigma}, \sigma_2/\bar{\sigma})$ . Le rayon polaire de la surface de charge est représenté par la fonction  $g(\theta, \alpha)$  où l'angle  $\theta$  définit l'état de contraintes  $(\sigma_1/\sigma_2)$  et l'angle  $\alpha$  définit l'orientation des axes de symétrie orthotrope dans le plan de la tôle par rapport aux directions des contraintes principales, i.e.,  $\alpha = (x, 1) = (y, 2)$ .

La fonction  $g(\theta, \alpha)$  proposée par Ferron et al. (1994) est tout d'abord définie à partir d'une extension du critère de Drucker (1949) au cas de l'isotropie transverse donnée par :

$$(1-k)g(\theta)^{-6} = F(\theta) = (\cos^2 \theta + A \sin^2 \theta)^3 - k \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - B \sin^2 \theta)^2 \quad (\text{I.64})$$

pour parvenir ensuite à une forme générale décrite sous la forme suivante :

$$(1-k)^{m/6} g(\theta, \alpha)^{-m} = F(\theta)^{m/6} - 2a \sin \theta \cos^{2n-1} \theta \cos 2\alpha + b \sin^{2p} \theta \cos^{2q} 2\alpha \quad (\text{I.65})$$

Les exposants  $m, n, p, q$  sont des entiers positifs connus a priori tandis que les paramètres  $A, B, k, a$  et  $b$  sont déterminés en deux étapes. D'abord, les paramètres  $A, B, k$  sont déterminés à partir des limites élastiques en traction équibiaxiale ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_b$ ) et en cisaillement pur parallèle aux axes d'orthotropie ( $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau, \alpha = \pi/4$ ), du coefficient de Lankford  $R$  et de la limite élastique  $\sigma$  déterminés à 45 degrés par rapport au sens de laminage. Ensuite, les paramètres  $a$  et  $b$  caractérisant l'anisotropie transverse, peuvent être déterminés soit à partir des valeurs du coefficient de Lankford ( $R_0, R_{90}$ ) soit à partir des limites élastiques en traction uniaxiale ( $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}$ ), voir procédure détaillée dans l'annexe C.

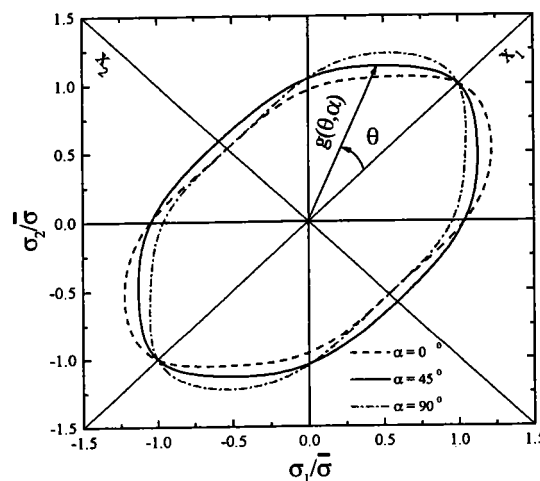


Figure (I.15) – Représentation en coordonnées polaires du critère de Ferron et al. (1994) dans l'espace  $(\sigma_1/\bar{\sigma}, \sigma_2/\bar{\sigma})$ . D'après Makkouk (1994).

Pour qu'une bonne concordance soit obtenue entre les prévisions angulaires de la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale  $\sigma_{(\alpha)}$  et du coefficient de Lankford  $R_{(\alpha)}$ , i.e., pour qu'un maximum de  $R_{(\alpha)}$  soit obtenu entre 0 et 90° pour un minimum de  $\sigma_{(\alpha)}$  et vice-versa, les valeurs recommandées pour  $m$  et  $q$  sont de 2 et 1 respectivement (Makkouk, 1994). D'autre part, lorsque les paramètres caractérisant l'anisotropie du matériau dans le critère de Ferron et al. (1994) sont ajustés aux valeurs du coefficient de Lankford  $R$ , le choix du couple d'exposants  $(n, p)$  permet de faire varier la dépendance angulaire de la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale en comparaison aux prévisions faites avec le critère de Hill quadratique (1948). Enfin, le choix du paramètre  $k > 0$  permet l'obtention d'un aplatissement de la surface de charge près des régions de cisaillement pur et traction/compression plane, conformément aux résultats obtenus pour les surfaces de charge déterminées à partir du modèle de TBH. En particulier, le critère de Hill quadratique (1948) est obtenu avec  $k = 0$  et  $(n, p) = 1$ .

Les Figures (I.16) et (I.17) illustrent les effets du paramètre  $k$  et des exposants  $(n, p)$  en comparant les résultats expérimentaux obtenus pour un acier re-phosphoré avec les prévisions réalisées à partir des critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994). Les paramètres caractérisant l'anisotropie transverse du matériau ont été déterminés à partir des valeurs du coefficient de Lankford  $R$ . D'une part, le rapport expérimental entre les contraintes d'écoulement ( $\sigma_b/\sigma_{45}$ ) est prévu par l'ajustement des paramètres du critère de Ferron et al. (1994) et d'autre part, la prévision de l'évolution angulaire de la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale est sensiblement diminuée lorsque les exposants  $(n, p)$  sont augmentés de 1 à 2. Dans ce cas, un bon accord avec les résultats expérimentaux déterminés à 45 et à 90 degrés par rapport au sens de laminage de la tôle est alors obtenu.

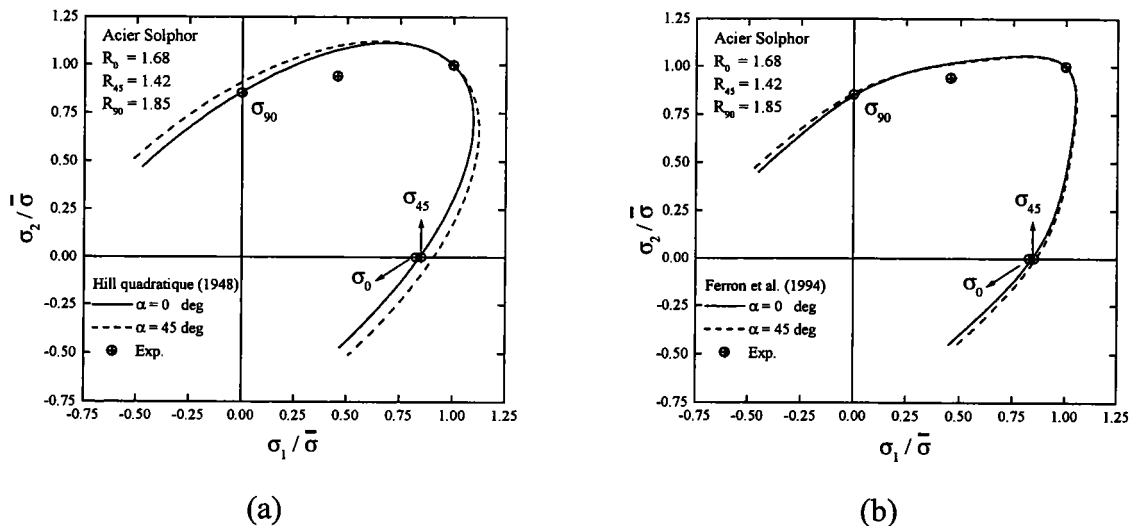


Figure (I.16) – Comparaison entre les contraintes d'écoulement déterminées pour l'acier re-phosphoré (Sollac) et les surfaces de charge des critères de (a) Hill quadratique (1948) et (b) Ferron et al. (1994). D'après Makkouk (1994).

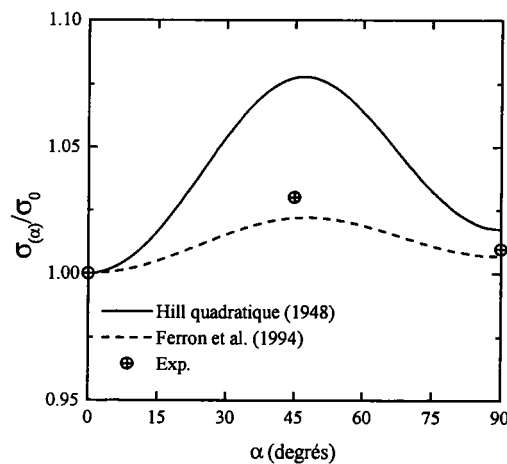


Figure (I.17) – Comparaison entre la contrainte d'écoulement normalisée déterminée en traction uniaxiale dans les directions  $\alpha = (45, 90)$  degrés pour l'acier re-phosphoré (Sollac) et les prévisions obtenues avec les critères de Hill quadratique et de Ferron et al. (1994). D'après Makkouk (1994).

## Barlat et al. (1997)

Certains alliages d'aluminium-magnésium sont caractérisés par un élargissement de la surface de charge dans les régions de cisaillement pur occasionné par un fort taux de réduction par laminage à froid, voir Figure (I.18). En vue de reproduire ce comportement, Barlat et al. (1997a) ont d'abord proposé de généraliser le critère de Barlat et al. (1991a) par :

$$\phi = \alpha_x |S_y - S_z|^m + \alpha_y |S_z - S_x|^m + \alpha_z |S_x - S_y|^m = 2\bar{\sigma}^m \quad (\text{I.66})$$

où  $S_x$ ,  $S_y$  et  $S_z$  sont les composantes normales du tenseur de contraintes transformées par le concept de la "Plasticité Isotrope Équivalente" introduit par Karafillis et Boyce (1993) dans le cas particulier où toutes les composantes de cisaillement sont nulles.

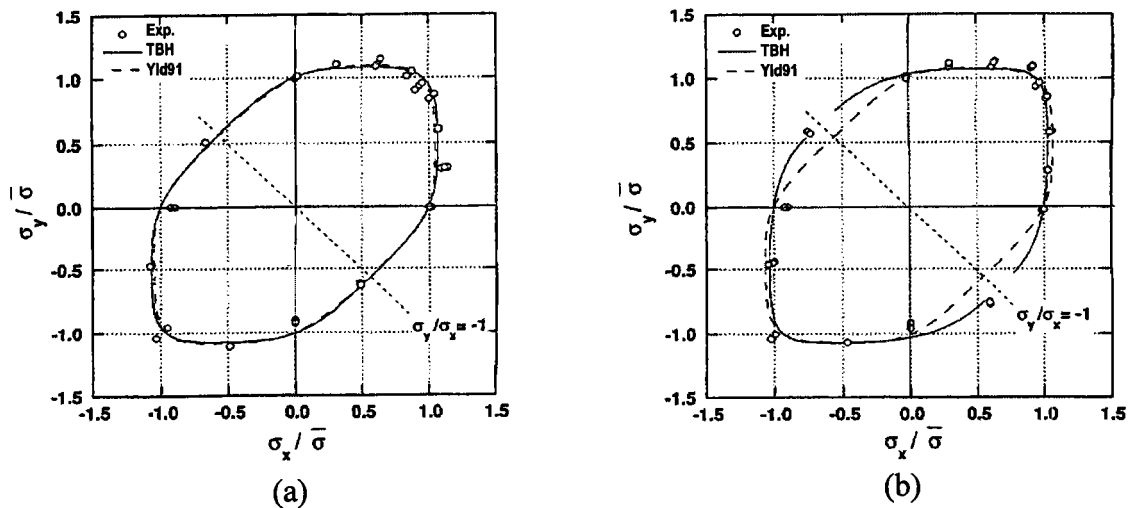


Figure (I.18) – Effet du taux de réduction par laminage à froid sur le comportement d'un alliage d'aluminium-magnésium : (a) 17% et (b) 80 % de réduction respectivement. D'après Barlat et al. (1997a).

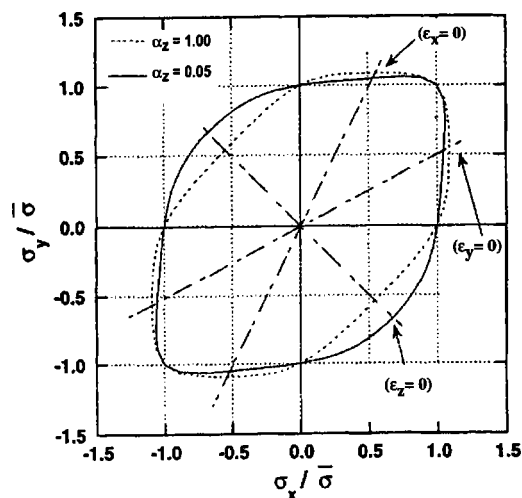


Figure (I.19) – Effet du paramètre  $\alpha_z$  sur les contraintes dans la région de cisaillement pur. D'après Barlat et al. (1997a).

En diminuant la valeur du paramètre  $\alpha_z$  dans l'équation (I.66), la Figure (I.19) montre qu'il est possible d'augmenter les contraintes dans les régions de cisaillement pur sans avoir pour autant occasionné une augmentation dans les autres régions de déformation plane, permettant ainsi de rapprocher le comportement de l'alliage d'aluminium-magnésium ayant subi un fort taux de réduction par laminage à froid.

Barlat et al. (1997b) ont ensuite généralisé l'équation (I.66) par :

$$\phi = \alpha_1 |S_2 - S_3|^m + \alpha_2 |S_3 - S_1|^m + \alpha_3 |S_1 - S_2|^m = 2\bar{\sigma}^m \quad (\text{I.67})$$

où  $S_i$  sont les valeurs principales du tenseur déviateur de contraintes obtenu par la transformation linéaire  $\mathbf{S} = \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}$ . Dans cette nouvelle formulation, les coefficients  $\alpha_k$  sont calculés à partir de la transformation :

$$\alpha_k = \alpha_x p_{1k}^2 + \alpha_y p_{2k}^2 + \alpha_z p_{3k}^2 \quad (\text{I.68})$$

où  $p_{ik}$  sont les composantes d'une matrice de changement de repère entre les axes de symétrie orthotrope  $(x, y, z)$  et les axes principaux du tenseur déviateur de contraintes  $\mathbf{S}$ .

Dans le cas particulier d'un état de contraintes planes et pour une symétrie orthotrope, le tenseur déviateur de contraintes  $\mathbf{S}$  est décrit par :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & 0 \\ S_{xy} & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & S_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_3(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) + c_2 \sigma_{xx}}{3} & c_6 \sigma_{xy} & 0 \\ c_6 \sigma_{xy} & \frac{c_1 \sigma_{yy} - c_3(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -(S_{xx} + S_{yy}) \end{bmatrix} \quad (\text{I.69})$$

dont les valeurs principales dans l'équation (I.67) sont :

$$S_{1,2} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(S_{xx} - S_{yy})^2}{4} + S_{xy}^2} \quad (\text{I.70})$$

$$S_3 = S_{zz} = -(S_1 + S_2) = -(S_{xx} + S_{yy})$$

Dans ce cas, les coefficients  $\alpha_k$  donnés par la transformation (I.68) sont redéfinis comme :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_x \cos^2 \beta + \alpha_y \sin^2 \beta \\ \alpha_2 &= \alpha_x \sin^2 \beta + \alpha_y \cos^2 \beta \end{aligned} \quad (\text{I.71})$$

$$\alpha_3 = \cos^2 2\beta + \alpha_z \sin^2 2\beta$$

avec

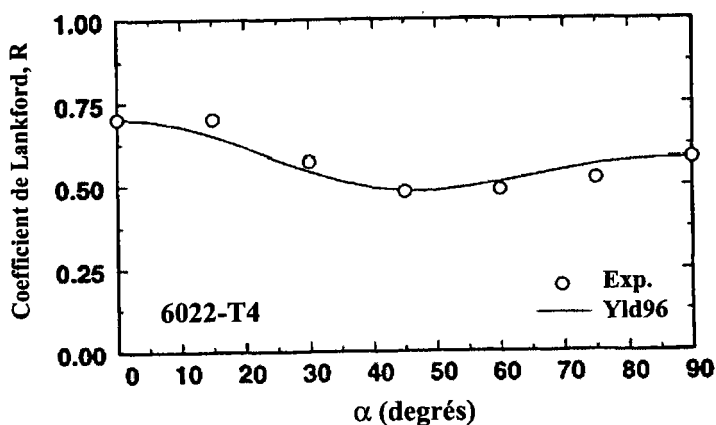
$$\beta = \arctan[(S_1 - S_{xx})/S_{xy}] \quad (\text{I.72})$$

où l'angle  $\beta$  définit l'orientation entre la direction de  $S_1$  et l'axe  $(x)$  de symétrie orthotrope.

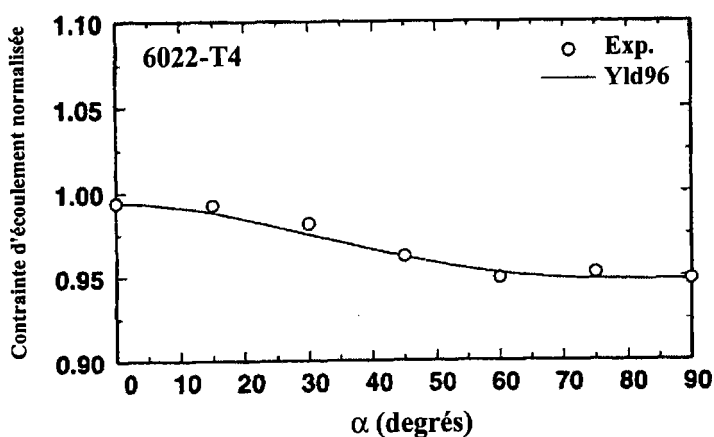


Dans le critère proposé par Barlat et al. (1997b), l'anisotropie du matériau est donc caractérisée par 7 paramètres, à savoir, les valeurs de  $(c_1, c_2, c_3, c_6, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_{z1})$  pouvant être déterminées à partir de la contrainte d'écoulement en traction équi-biaxiale ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_b$ ), de trois contraintes d'écoulement en traction uniaxiale ( $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}$ ) déterminées à un niveau de travail plastique donné et de trois valeurs du coefficient de Lankford ( $R_0, R_{45}, R_{90}$ ).

La Figure (I.20) compare les prévisions des évolutions angulaires du coefficient de Lankford  $R$  et de la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale obtenues à partir du critère de Barlat et al. (1997b) avec les résultats expérimentaux de l'alliage d'aluminium 6022-T4. Dans les deux cas, les prévisions faites par ce critère sont en très bon accord avec les valeurs expérimentales dans les directions  $\alpha = (0, 45, 90)^\circ$  car ces valeurs ont été imposées dans la détermination des paramètres de la fonction de charge proposé par Barlat et al. (1997b).



(a)



(b)

Figure (I.20) – Comparaison entre les prévisions faites par le critère de Barlat et al. (1997b) et les valeurs expérimentales d'aluminium 6022-T4 : (a) coefficient de Lankford  $R$  et (b) contrainte d'écoulement en traction uniaxiale. D'après Barlat et al. (1997b).

### I.3. Essais d'emboutissage des tôles

Étant donné la diversité des modes de déformations présents dans l'emboutissage des tôles minces et l'objectif principal de ce travail, trois types d'essais ont été choisis en fonction des travaux publiés dans la littérature afin de mettre en évidence l'influence de la forme de la surface de charge adoptée dans les simulations numériques. D'abord, l'essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique à flan bloqué est décrit en vue d'identifier les paramètres jouant un rôle prépondérant sur la distribution des déformations radiales et circonférentielles. Ensuite, la formation des cornes d'emboutissage est analysée à partir de l'essai d'emboutissage profond d'une coupelle cylindrique à fond plat et à flan non bloqué. Finalement, les applications de l'essai de pliage et étirage des tôles proposé récemment par Ferran et al. (1998a) sont présentées.

#### I.3.1. Essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique

En vue de pallier les inconvénients liés à la reproductibilité des essais d'emboutissage de type Erichsen/Olsen, Hecker (1974) a proposé un nouvel essai dans lequel un poinçon hémisphérique de 101.6 mm de diamètre et un jonc de retenue sur la matrice ont été adoptés pour minimiser les effets de flexion et assurer la condition d'expansion respectivement. Dans cet essai, l'indice d'expansion est défini comme étant la hauteur du dôme correspondant à l'effort maximum du poinçon. Hecker (1974) démontre, en outre, que les essais réalisés sans lubrification sont plus sensibles à des faibles variations de l'exposant d'érouissage  $N$  que les essais effectués avec lubrifiant. La Figure (I.21) montre la géométrie et les dimensions de l'essai d'expansion proposé par Hecker (1975).

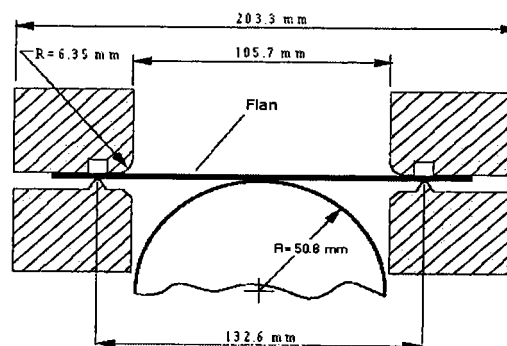


Figure (I.21) – Géométrie et dimensions de l'essai d'expansion des tôles par poinçonnement hémisphérique. D'après le NADDRG<sup>5</sup>

<sup>5</sup> North American Deep Drawing Research Group

Avant la réalisation de l'essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique, un réseau de cercles est déposé sur le flan pour permettre la mesure de l'allongement des axes des ellipses correspondant aux cercles déformés, et donc la détermination des déformations dans les directions radiales et circonférentielles, comme montrées dans la Figure (I.22).

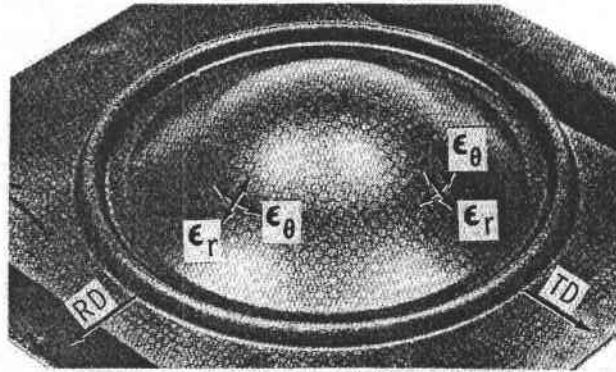


Figure (I.22) – Motif de cercles déposés sur le flan pour l'obtention des déformations dans l'essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique. D'après Ghosh et Hecker (1975).

La Figure (I.23) montre l'histoire de déformations radiales ( $r$ ) et circonférentielles ( $\theta$ ) obtenue par Ghosh et Hecker (1975) pour un acier calmé à l'aluminium et un laiton 70:30 testés sans lubrification. D'après cette figure, il est possible d'observer la formation d'un pic de déformation radiale se déplaçant vers le bord encastré du flan au fur et à mesure que le déplacement du poinçon augmente. En fait, ce pic de déformation se développe sous la forme d'un anneau autour du pôle, dans lequel se produit un amincissement du flan conduisant à un processus de striction localisée tandis que les régions adjacentes à cette zone continuent à se déformer faiblement entre les points notés (b) et (c) sur la Figure (I.23).

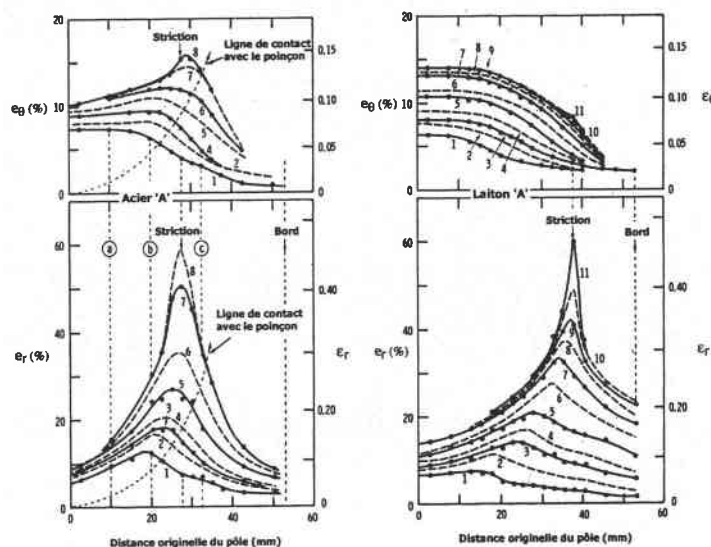


Figure (I.23) – Distributions des déformations en fonction de la distance originelle du pôle et du déplacement du poinçon obtenues pour un acier calmé à l'aluminium et un laiton 70 : 30. D'après Ghosh et Hecker (1975).

L'essai proposé par Hecker (1974) a contribué par la suite à l'établissement de méthodes permettant de déterminer l'aptitude à l'emboutissage des tôles. Hecker (1975,1977) a introduit une nouvelle méthode de définition des déformations limites en emboutissage où trois types d'ellipses sont définies : (1) celles fracturées, (2) celles avec une striction localisée et (3) celles au voisinage de la fracture et de la striction localisée. Les déformations limites en emboutissage sont déterminées entre les régions correspondant aux états de traction uniaxiale et d'expansion biaxiale en faisant varier la largeur du flan et les conditions de lubrification. La Figure (I.24) schématise la méthode proposée par Hecker (1975,1977), dans laquelle la Courbe Limite de Formage (CLF) est définie par la courbe séparant les ellipses sans striction des autres.

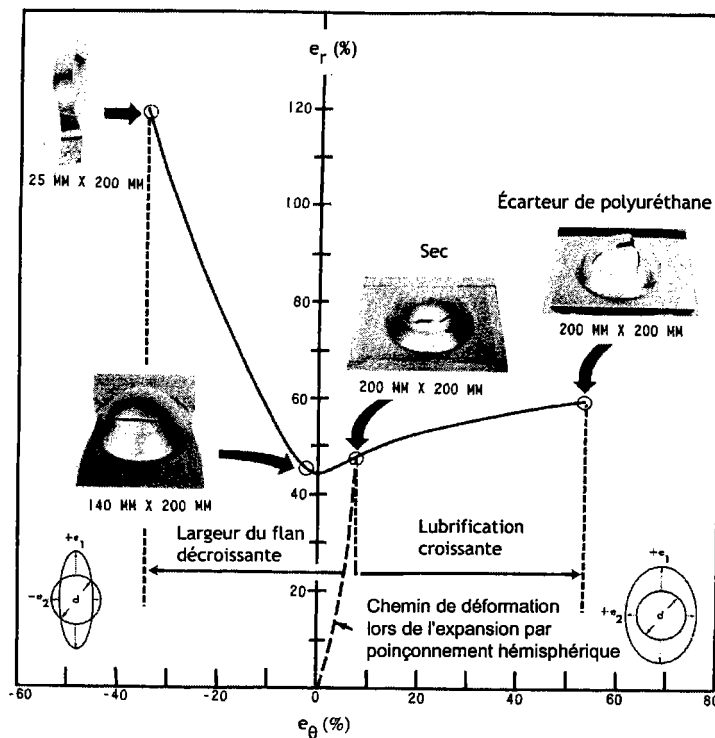


Figure (I.24) – Représentation schématisée de la courbe limite de formage déterminée à travers la méthode proposée par Hecker (1975). D'après Ghosh et Hecker (1975).

En ce qui concerne la simulation de l'expansion par poinçonnement hémisphérique, les premiers travaux se sont basés sur des solutions analytiques, comme, à titre d'exemple, les modèles axisymétriques proposés par Woo (1965) et Wang (1970) en utilisant le critère de von Mises et la loi d'écoulement associée. Ensuite, vers la fin des années 1970, la méthode des éléments finis a été adoptée par de nombreux auteurs dans la solution des problèmes d'emboutissage des tôles. En particulier, le problème de poinçonnement hémisphérique a été étudié par Kobayashi et Kim (1978), Wang et Budianski (1978) et Wang et Wenner (1978) à partir des formulations d'éléments finis de type rigide-plastique, élasto-plastique et élasto-viscoplastique respectivement.

Dans les essais à flan bloqué, l'influence de l'anisotropie transverse est fortement limitée et le comportement anisotrope de la tôle est généralement modélisé comme celui d'un matériau isotrope transverse. Dans ce cas, le critère de plasticité le plus utilisé dans la littérature correspond sans aucun doute à la description quadratique proposée par Hill (1948). Les prévisions numériques basées sur ce critère ont permis la compréhension des effets du coefficient d'anisotropie normale  $R$  sur les distributions de contraintes et de déformations dans l'emboutissage des tôles minces. Cependant, il faut remarquer que l'utilisation d'un seul paramètre pour représenter le comportement anisotrope de la tôle dans les simulations numériques présuppose que la forme de la surface de charge associée soit capable de décrire précisément les états de contraintes en jeu dans l'opération d'emboutissage des tôles étudiée. Dans le cas de l'essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique, les effets tribologiques dus à l'interaction entre le flan et l'outillage doivent être également considérés. En résumé, ces deux conditions préalables suggèrent l'adoption de critères de plasticité comportant des paramètres additionnels de sorte qu'une meilleure description du comportement du matériau soit obtenue.

Un exemple dans la littérature concernant les effets combinés entre la description du comportement anisotrope de la tôle et la tribologie, est donné par Knibloe et Wagoner (1989). Ces auteurs ont réalisé des essais d'expansion sur trois types d'acier calmés à l'aluminium et ont comparé les déformations expérimentales avec les prévisions numériques obtenues par la méthode des éléments finis basée sur la théorie de membranes. Le comportement anisotrope de la tôle a été décrit dans les simulations numériques par les critères quadratique et non quadratique de Hill (1948, 1979). L'exposant  $m$  du critère de Hill non quadratique (1979) a été déterminé par une méthode de minimisation des écarts entre les courbes de contrainte et déformation équivalentes obtenues à partir d'essais de traction uniaxiale et de déformation plane par traction (Wagoner, 1980). Knibloe et Wagoner (1989) ont proposé l'utilisation d'un abaque dans lequel le coefficient de frottement de Coulomb  $\mu$  est déterminé à partir de l'ajustement entre les prévisions et les déformations radiales mesurées au pôle en fonction de la hauteur du poinçon selon différentes conditions de lubrification. La Figure (I.25) montre l'abaque obtenu pour l'acier calmé à l'aluminium sans revêtement à partir des prévisions basées sur le critère de Hill non quadratique (1979). La Figure (I.26) compare les distributions de déformations expérimentales de cet acier essayé sans lubrifiant avec les prévisions numériques obtenues avec un coefficient de frottement  $\mu = 0.639$ . Le bon accord entre les résultats est en effet obtenu grâce à une surestimation de  $\mu$  occasionnée sans doute par la forme de la surface de charge correspondant au critère de Hill non quadratique (1979).

D'autre part, Wagoner et Knibloe (1989) ont obtenu des résultats similaires en utilisant le critère de Hill quadratique (1948) avec un coefficient de frottement  $\mu = 0.268$ . À partir de cet exemple, il est donc possible de démontrer que les prévisions numériques de distributions de déformations sont autant sensibles au type de description du comportement anisotrope du matériau qu'aux effets tribologiques entre les outils et la tôle.

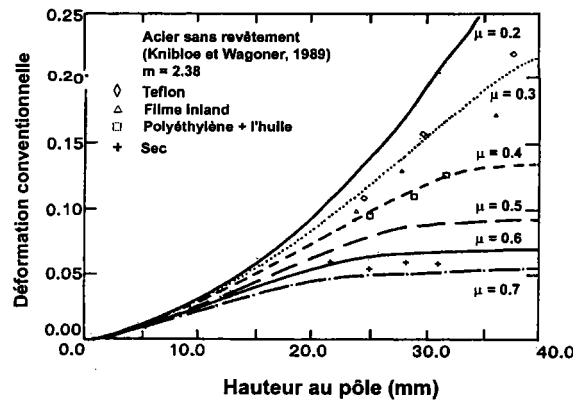


Figure (I.25) – Abaque du coefficient de frottement  $\mu$  déterminé pour un acier calmé à l'aluminium sans revêtement à partir de différentes conditions de lubrification et prévisions réalisées avec le critère de Hill non quadratique (1979). D'après Knibloe et Wagoner (1989).

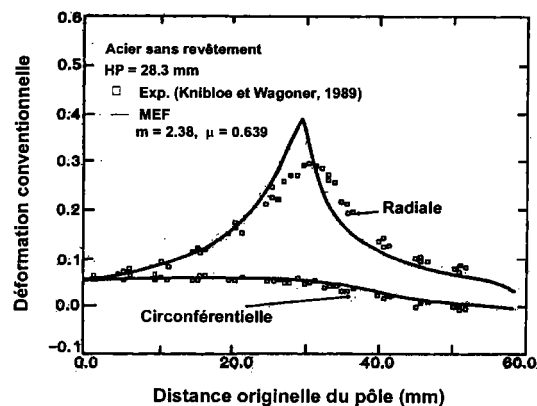


Figure (I.26) – Comparaison entre les distributions de déformations expérimentales d'un acier sans revêtement essayé sans lubrifiant et les prévisions numériques réalisées avec le critère de Hill non quadratique (1979). D'après Knibloe et Wagoner (1989).

À l'aide de la méthode des éléments finis basée sur la théorie des coques et une formulation élasto-viscoplastique, Liao et al. (1998) ont analysé l'influence de la forme de la surface de charge sur les prévisions de l'essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique. Les critères de Hill quadratique (1948), Hill non quadratique (1979) et Barlat et al. (1991) ont été adoptés dans cette étude pour décrire le comportement en isotropie transverse caractéristique d'un alliage d'aluminium ( $R = 0.8$ ) et d'un acier bas carbone ( $R = 1.8$ ).

Les surfaces de charge correspondant à ces matériaux sont représentées dans la Figure (I.27) d'où il est possible d'observer que les trois types de description adoptés donnent différentes formes entre les régions de l'expansion équi-biaxiale et de cisaillement pur pour l'alliage d'aluminium et entre la traction uniaxiale et l'expansion équi-biaxiale pour l'acier bas carbone. Les prévisions des distributions de déformations en épaisseur calculées à partir des surfaces de plasticité avec un coefficient de frottement  $\mu = 0.17$  sont comparées dans la Figure (I.28). Afin d'expliquer les différences trouvées entre ces prévisions, Liao et al. (1998) ont adopté le rapport entre la plus grande contrainte principale en traction plane et la contrainte en expansion équi-biaxiale,  $P = \sigma_{PS1}/\sigma_b$ . Ce paramètre avait été introduit par Barlat (1987) pour caractériser la forme de la surface de charge et l'aptitude à l'emboutissage des tôles par expansion. Dans la Figure (I.28), les faibles déformations au pôle et les pics de déformation prévus par les critères de Hill non quadratique (1979) et de Barlat et al. (1991a) sont en fait dus à l'aplatissement de la surface de charge entre les états de traction plane et d'expansion équi-biaxiale, voir Figure (I.27). En d'autres termes, une faible valeur du paramètre  $P$  favorise les déformations au bord encasté de la tôle, où l'état de contraintes est de traction plane, au détriment de la déformation par expansion équi-biaxiale au pôle.

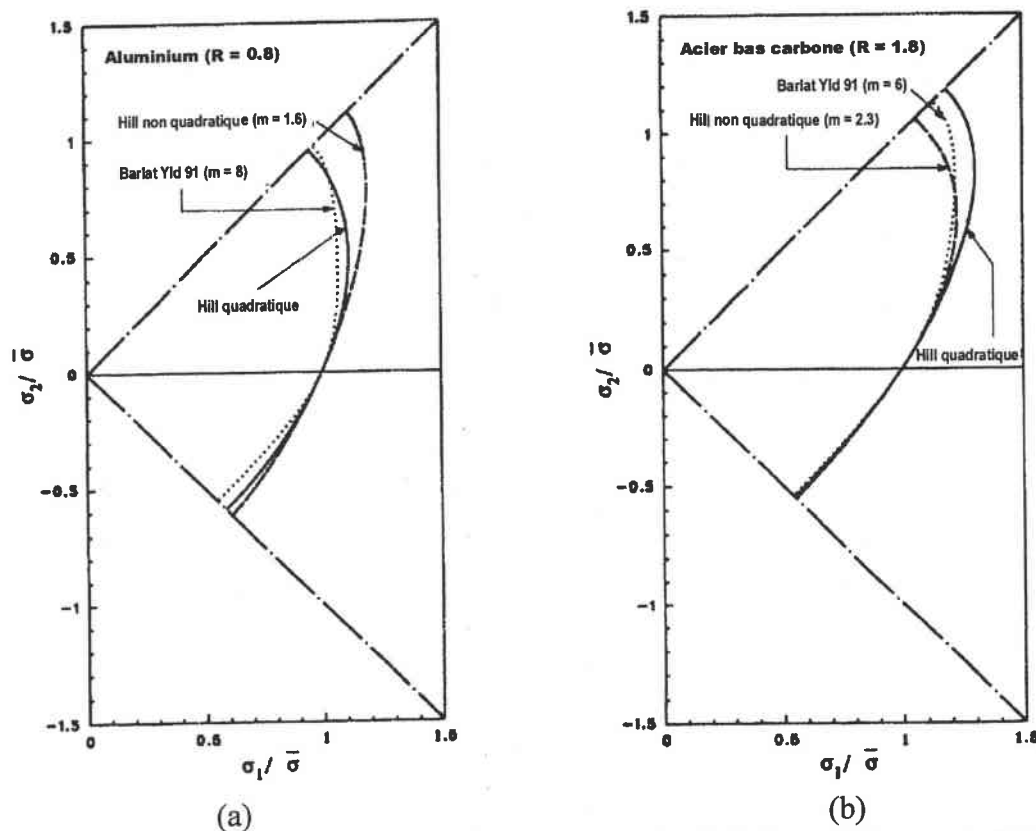


Figure (I.27) – Surfaces de charge adoptées dans l'étude réalisée par Liao et al. (1998) pour décrire l'isotropie transverse (a) d'un alliage d'aluminium et (b) d'un acier bas carbone.

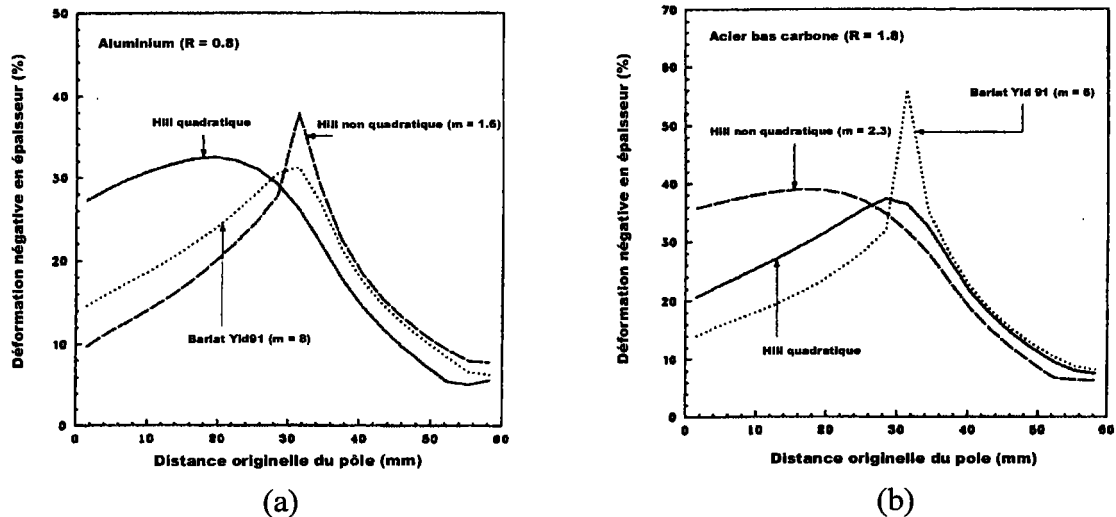


Figure (I.28) – Comparaison entre les prévisions numériques des distributions de déformations en épaisseur déterminées dans l'essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique à partir des surfaces de plasticité adoptées dans l'étude de Liao et al. (1998).

### I.3.2. Essai d'emboutissage profond d'une coupelle cylindrique

Dans l'essai d'emboutissage profond de type Swift<sup>6</sup>, schématisé sur la Figure (I.29), une coupelle cylindrique est obtenue à l'aide d'un poinçon à fond plat, à partir d'un flan circulaire non bloqué sous le serre-flan.

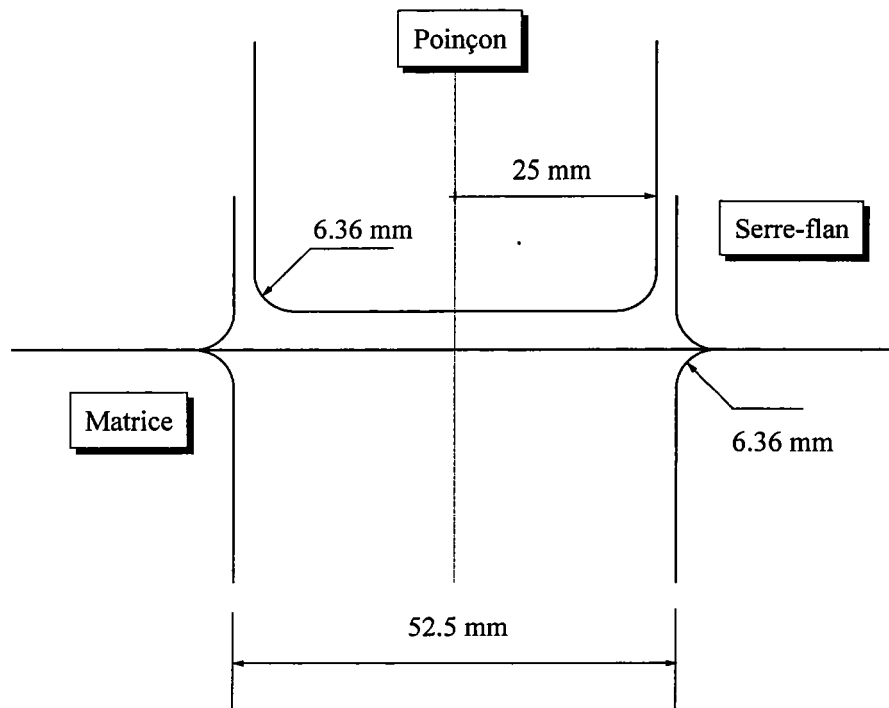


Figure (I.29) – Essai d'emboutissage profond de Swift. (Metals Handbook - ASM, 1998).

<sup>6</sup> H.W. Swift, Sheet Metal Industries, 1954, pp. 817-828



En supposant que le rayon de congé du poinçon soit suffisamment petit, le rétreint sous le serre-flan est le principal mode de déformation dans l'essai d'emboutissage. Cependant, l'essai de Swift peut être également considéré comme un prototype de l'emboutissage sous presse car il regroupe les états de contraintes situés entre les principaux modes de déformations retrouvés dans celle-ci. La Figure (I.30) schématise une tranche de l'embouti dont les états de contraintes, illustrés sur cette figure par le tracé de la surface de charge correspondant à matériau isotrope, varient entre : (1) la compression uniaxiale au bord, (2) le cisaillement pur sur la collerette, (3) la déformation plane sur la paroi de la coupelle jusqu'à (4) l'expansion équilibrée sous le fond plat du poinçon.

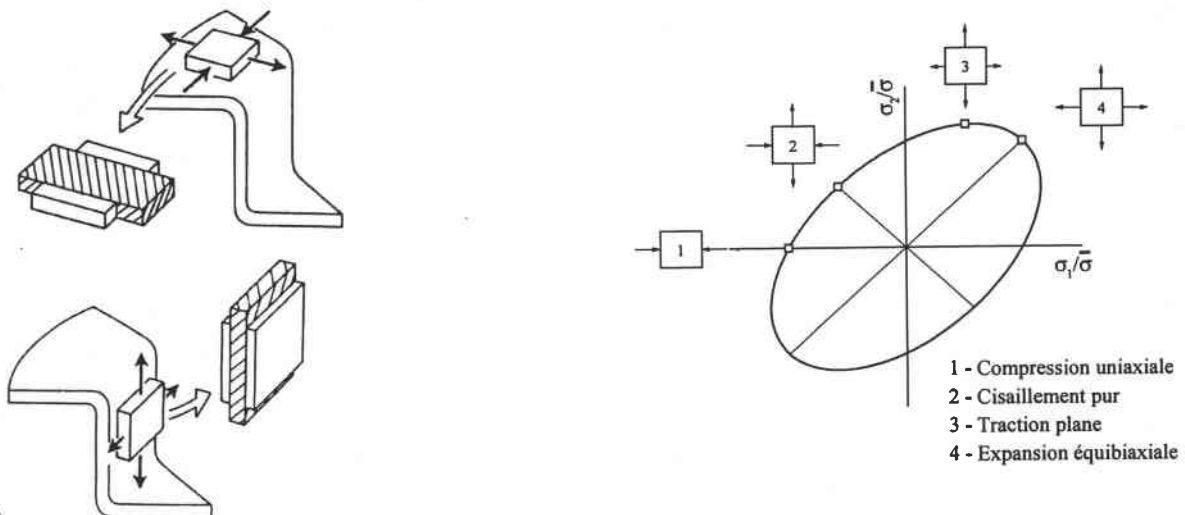


Figure (I.30) – États des contraintes dans l'essai d'emboutissage profond de Swift.

L'emboutissabilité d'une tôle peut être évaluée à partir de l'essai de Swift à travers la détermination du rapport limite d'emboutissage, *LDR* (Limiting Drawing Ratio), établi entre le plus grand diamètre du flan  $D$  permettant la réussite de l'essai et le diamètre du poinçon  $d$ . La corrélation entre le coefficient d'anisotropie plastique normale  $R$  et le rapport limite d'emboutissage *LDR* a été établie initialement par Whiteley<sup>7</sup> *apud* Hosford (1977) en considérant un matériau parfaitement plastique décrit par le critère quadratique de Hill (1948). D'après l'analyse de Whiteley, le rapport limite d'emboutissage est déterminé par :

$$\ln(LDR) = \ln(D/d) = \eta (\sigma_P / \sigma_C) = \eta \sqrt{(1+R)/2} \quad (I.73)$$

où  $\eta$  est le rendement mécanique, dans lequel intervient le frottement ainsi que le pliage et dépliage sous le rayon de la matrice tandis que  $\sigma_C$  et  $\sigma_P$  sont les contraintes d'écoulement en déformation plane sur la collerette ( $\varepsilon_t = 0$ ) et sur la paroi de la coupelle ( $\varepsilon_{\alpha\alpha} = 0$ ).

<sup>7</sup> R.L. Whiteley, "The Importance of Directionality in Drawing Quality Sheet Steel", Trans. ASM, 1960, Vol. 52, pp. 154-169.

D'après l'équation (I.73), il est possible de constater qu'une forte valeur de  $R$  a pour effet d'augmenter la résistance à la traction plane sur la paroi par rapport à la résistance à la traction radiale – compression circonférentielle sur la collerette. Cet effet conduit à une augmentation du rapport limite d'emboutissage. Cependant, la dépendance du rapport limite d'emboutissage sur le coefficient d'anisotropie normale est, en réalité, très sensible à la forme de la surface de charge adoptée pour décrire les états de contraintes dans les différentes régions de la coupelle.

Hosford (1977) a étendu l'analyse de Whiteley en considérant l'érouissage et en calculant le rapport de contraintes ( $\sigma_p/\sigma_c$ ) à partir du modèle de TBH dans le cas de l'isotropie transverse. Hosford (1977) démontre d'une part, que cette méthode offre une meilleure prévision de la variation expérimentale du rapport de limite d'emboutissage que l'approche de Whiteley et d'autre part, que le coefficient d'érouissage  $N$  exerce en fait une faible influence sur le rapport limite d'emboutissage.

La Figure (I.31) compare les rapports limites d'emboutissage déterminés expérimentalement pour une vaste gamme de matériaux aux prévisions obtenues en fonction du coefficient d'anisotropie normale  $R$  avec les descriptions proposées par Hill (1948) et Logan et Hosford (1980). Les résultats expérimentaux sont mieux décrits par le critère de Logan et Hosford (1980) avec l'exposant  $a=6$  et  $a=8$  pour les matériaux c.c. et c.f.c. respectivement. En revanche, le rapport limite d'emboutissage est surestimé avec le critère de Hill quadratique (1948),  $a=2$  dans la Figure (I.31), notamment pour de fortes valeurs de  $R$ .

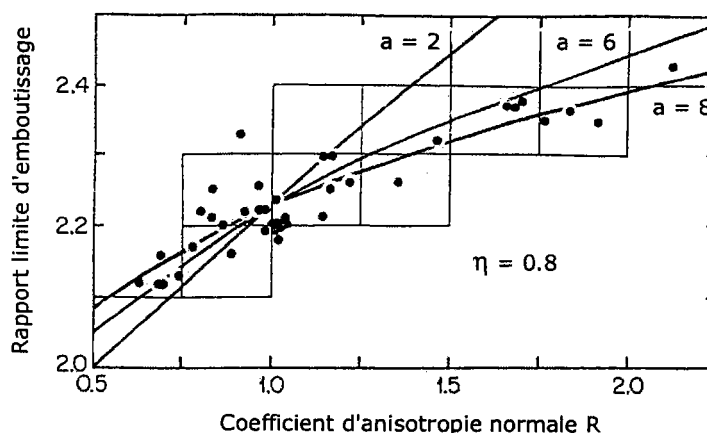


Figure (I.31) – Comparaison entre le rapport limite d'emboutissage (LDR) calculé à partir du critère de Logan et Hosford (1980) avec les résultats expérimentaux obtenus pour une vaste gamme de matériaux. D'après Logan et al.<sup>8</sup> *apud* Hosford (1996).

<sup>8</sup> R.W. Logan, D.J. Meuleman et W.F. Hosford, "The Effects of Anisotropy on the Limiting Drawing Ratio", Formability and Metallurgical Structure, The Metallurgical Society, 1987, pp. 159-173.

Un autre aspect important de l'essai d'emboutissage profond est lié à l'anisotropie des propriétés plastiques dans le plan de la tôle. En fait, la texture cristallographique de la tôle engendre une anisotropie plastique donnant lieu à la formation de cornes et de vallées le long du bord de la coupelle. En pratique, les variables contrôlant la texture cristallographique sont la composition chimique du matériau et l'histoire thermomécanique imposée à la tôle. Par conséquent, la position et l'amplitude des cornes et / ou des vallées sont déterminées par le type de texture cristallographique obtenue.

La Figure (I.32), extraite de l'article de Wilson et Butler (1962), montre les cornes d'emboutissage obtenues sur le cuivre en fonction de la composition chimique, de la réduction par laminage à froid et de différentes séquences de traitements thermiques. Les textures cristallographiques résultantes sont du type "laminage", "équilibrée" et "cubique" respectivement selon le sens de la flèche indiqué dans la Figure (I.32). D'une part, les textures du type "cubique" et "laminage" donnent lieu à la formation de quatre cornes et quatre vallées situées dans les directions parallèle et transverse et à une orientation proche de  $45^\circ$  au sens de laminage de la tôle respectivement. En revanche, une coupelle quasiment parfaite est obtenue pour une texture du type "équilibrée".

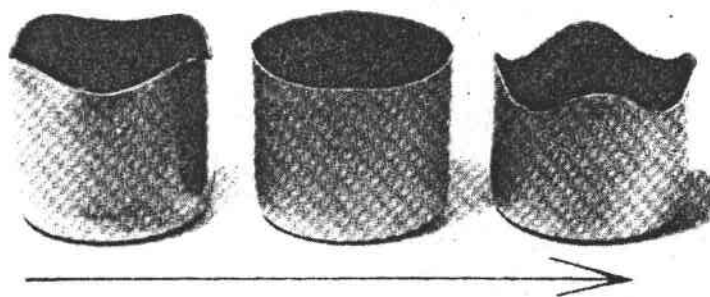


Figure (I.32) – Types de cornes d'emboutissage obtenues avec trois textures de cuivre. La flèche indique la direction de laminage de la tôle. D'après Wilson et Butler (1962).

La corrélation entre les positions des cornes d'emboutissage et la dépendance angulaire de la contrainte d'écoulement dans le plan de la tôle,  $\sigma_{(\alpha)}$ , a été avancée initialement par Hill (1948,1950). En s'appuyant sur son critère quadratique, Hill a considéré deux cas décrits en fonction de l'action exercée par le serre-flan. Dans le premier, l'écart entre la matrice et le serre-flan est supposé être maintenu constant et égal à l'épaisseur initiale du flan. Dans le deuxième, il est supposé que la pression exercée par le serre-flan est négligeable comparée aux contraintes dans le plan de la tôle. En l'absence de frottement, ces deux cas sont représentés par les états de déformation planes et de contraintes planes respectivement.

Étant donné que le bord de la collerette est sollicité par une compression circonférentielle, il est supposé en outre que les cornes et les vallées se forment dans les positions angulaires correspondant aux points pour lesquels les axes principaux de contraintes et de vitesses de déformations sont coïncidents. Pour les états de contraintes considérés, Hill démontre que ces positions correspondent aux directions pour lesquelles les contraintes d'écoulement ont des valeurs stationnaires.

Dans le cas de contraintes planes, ces positions angulaires ( $\alpha$ ) correspondent aux directions selon lesquelles la contrainte d'écoulement en compression uniaxiale à  $(\alpha + \pi/2)$  présente des valeurs stationnaires. Il s'agit donc des directions parallèle et transverse au sens de laminage et des directions faisant une orientation  $\bar{\alpha}$ , voir équation (I.46), avec la direction de laminage. D'après des observations expérimentales, Bourne et Hill (1950) ont ensuite proposé que les cornes d'emboutissage se forment dans les positions angulaires ( $\alpha$ ) où le coefficient de Lankford  $R_{(\alpha + \pi/2)}$  est un maximum. Cette hypothèse est basée sur les fortes elongations radiales obtenues sous une compression uniaxiale pour des fortes valeurs de  $R$ .

À partir de l'analyse ci-dessus, et dans le cas particulier de contraintes planes, le critère quadratique de Hill (1948) prévoit la formation de quatre cornes d'emboutissage dans les orientations correspondant aux minima de  $\sigma_{(\alpha + \pi/2)}$  ou aux maxima de  $R_{(\alpha + \pi/2)}$  et inversement pour les vallées correspondantes. De façon analogue, la formation de deux cornes, et des vallées d'emboutissage, est prévue lorsque les évolutions angulaires de la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale et du coefficient de Lankford sont monotones, i.e., pour des extremum de  $\sigma_{(\alpha)}$  et de  $R_{(\alpha)}$  à  $\alpha = 0$  et  $\alpha = \pi/2$  seulement. Dans ce cas, les positions des cornes et / ou des vallées se trouvent respectivement soit dans la direction parallèle soit dans la direction transverse par rapport au sens de laminage de la tôle.

Les argumentations avancées par Hill (1948,1950) et Bourne et Hill (1950) ont été confirmées expérimentalement par plusieurs auteurs. Par exemple, Wilson et Butler (1962) ont établi une corrélation linéaire entre les hauteurs moyennes des cornes d'emboutissage mesurées pour une vaste gamme de tôles minces d'acier, d'aluminium et de cuivre et les variations dans le plan de la tôle des coefficients de Lankford  $R$  déterminés dans l'essai de traction uniaxiale. La Figure (I.33) montre une corrélation proportionnelle entre le pourcentage de la hauteur moyenne des cornes défini par  $(h_{0,90} - h_{45}) / h_m \times 100 \%$  et la variation de  $R$  définie par  $(R_{0,90} - R_{45}) / R_m$ , où  $h_m$  et  $R_m$  sont les valeurs moyennes de la hauteur des cornes et du coefficient de Lankford respectivement.

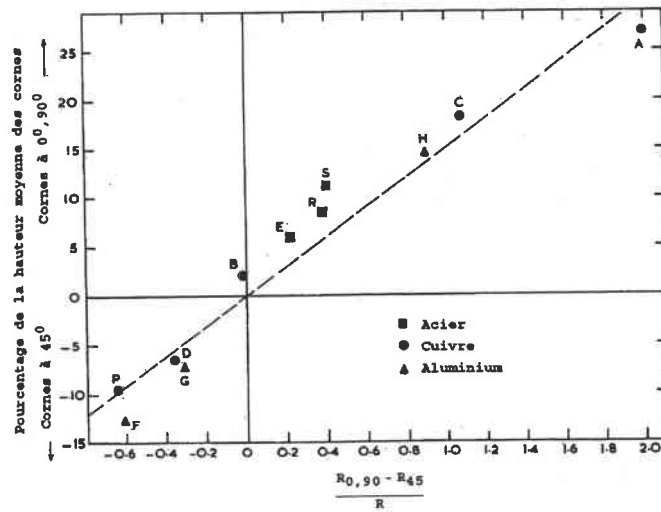


Figure (I.33) – Relation expérimentale entre la hauteur moyenne des cornes d'emboutissage et le coefficient d'anisotropie de Lankford  $R$ . D'après Wilson et Butler (1962).

Bien que les corrélations proposées par Hill (1948,1950) et Bourne et Hill (1950) soient qualitativement correctes, elles ne permettent pas de prévoir quantitativement l'amplitude des cornes d'emboutissage.

En supposant que la formation des cornes et / ou des vallées d'emboutissage soit imposée seulement par la composante radiale de vitesses des points situés au bord de la collerette, Panchanadeeswaran et al. (1988) ont proposé l'expression suivante :

$$\frac{r(\alpha)}{r(0)} = 1 + \left[ \frac{r}{r(0)} - 1 \right] \left\{ 1 - \exp \left[ 2 \int_0^\alpha \Gamma(\alpha) d\alpha \right] \right\} \quad (\text{I.74})$$

pour calculer la variation angulaire du rayon  $r$  de la collerette en fonction du paramètre  $\Gamma(\alpha) = \dot{\epsilon}_{12} / \dot{\epsilon}_{11}$  introduit par Barlat et Richmond (1987) pour quantifier la déformation par cisaillement lors d'une traction ou compression uniaxiale, réalisée à une orientation  $\alpha$  donnée.

Barlat et al. (1991b) ont démontré que les courbes représentant les variations angulaires normalisées de la vitesse radiale et de la contrainte d'écoulement situées au bord de la collerette sont équivalentes et directement proportionnelles au paramètre  $\Gamma(\alpha)$ , i.e.,

$$\frac{1}{v_r} \frac{dv_r}{d\alpha} = \frac{1}{\sigma(\alpha)} \frac{d\sigma(\alpha)}{d\alpha} = 2\Gamma(\alpha) \quad (\text{I.75})$$

où  $\Gamma(\alpha) = \dot{\epsilon}_{r\alpha} / \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha}$ . Il faut observer, toutefois, que les quantités  $\sigma(\alpha)$  et  $\Gamma(\alpha)$  correspondent, en fait, aux valeurs déterminées à une orientation  $(\alpha + \pi/2)$ .

Donc, d'après les hypothèses avancées par Hill (1948), la contrainte d'écoulement dans le cas de contraintes planes est celle définie en traction uniaxiale tandis que dans le cas de déformation plane, elle est identifiée à la contrainte d'écoulement en cisaillement pur.

À partir de la définition du paramètre  $\Gamma_{(\alpha)}$ , le cisaillement se produit lorsque les directions principales des contraintes et des vitesses de déformation ne sont pas coïncidentes. Donc, les cornes et / ou vallées d'emboutissage se forment dans les directions de symétrie orthotrope ( $\alpha = 0, \pi/2$ ) et pour une orientation  $\bar{\alpha}$  telle que  $\Gamma_{(\bar{\alpha}+\pi/2)} = 0$ . D'ailleurs, l'équation (I.75) est en accord avec l'idée proposée par Hill (1948), les directions pour lesquelles  $\Gamma_{(\alpha+\pi/2)} = 0$  correspondent également aux positions angulaires pour lesquelles les contraintes d'écoulement  $\sigma_{(\alpha+\pi/2)}$  ont des valeurs stationnaires. La Figure (I.34) schématise le principe de la formation des cornes d'emboutissage fondé en fonction du paramètre  $\Gamma_{(\alpha)}$  proposé par Barlat et Richmond (1987).

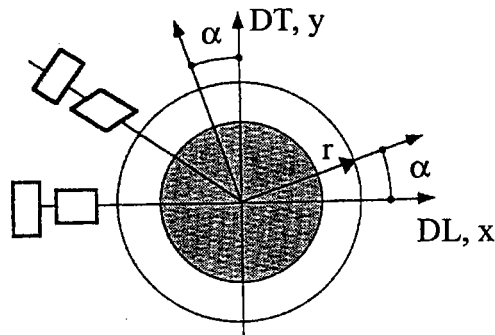


Figure (I.34) – Interprétation physique de la formation des cornes d'emboutissage par les effets de glissement en compression uniaxiale hors-axes. D'après Barlat et al. (1991b).

Le paramètre  $\Gamma_{(\alpha)} = \dot{\epsilon}_{12}/\dot{\epsilon}_{11}$  est défini à un niveau de contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  donné.

Barlat et Richmond (1987) ont démontré que, d'une façon générale, ce paramètre peut être défini par :

$$\Gamma_{(\alpha)} = -\frac{\partial f / \partial \alpha}{2\sigma_{(\alpha)}} \quad (\text{I.76})$$

où la fonction de charge est donnée par  $f = F(\sigma_{ij}) - \bar{\sigma}$ . Finalement, le paramètre  $\Gamma_{(\alpha)}$  peut être également déterminé à partir d'un modèle basé sur la plasticité polycristalline (Panchanadeeswaran et al., 1988 et Barlat et al., 1991b) ainsi qu'à partir d'essais de traction uniaxiale (Lege et al., 1989).

D'une façon qualitative, les approches de Hill (1948, 1950) et Barlat et al. (1991b) fournissent les mêmes tendances pour la formation des cornes et / ou des vallées d'emboutissage. L'approche de Panchanadeeswaran et al. (1988) permet de prévoir en outre l'amplitude relative des cornes et des vallées d'emboutissage.

En retenant les hypothèses simplificatrices adoptées dans les approches proposées par Hill (1948,1950) et Barlat et al. (1991b), il est possible donc au moins de mettre en évidence le rôle de la forme de la surface de charge sur la formation des cornes d'emboutissage. Toutefois, l'évaluation complète de la formation des cornes d'emboutissage nécessite que les conditions réelles d'emboutissage, à savoir, la force de serre-flan et le contact entre les outils et le flan, soient prises en compte.

En pratique, une solution analytique de l'emboutissage profond d'une coupelle cylindrique est difficilement réalisable en raison de la complexité des non-linéarités en jeu et d'une façon générale, la méthode de différences finies puis la méthode des éléments finis ont donc été souvent utilisées.

En se limitant à quelques travaux concernant la prévision de la formation des cornes et utilisant des descriptions du comportement des tôles proposés récemment dans la littérature, les modélisations de l'emboutissage profond d'une coupelle cylindrique peuvent être regroupées en deux types d'approches. Dans la première approche, les outils et le flan de même que le contact, entre ces différents éléments, sont définis en tenant compte de la symétrie orthotrope du matériau, c.-à-d., par une modélisation du quart de la géométrie totale. Dans la deuxième approche, l'analyse est simplifiée au plan initial du flan et seulement la région correspondant à la collerette est considérée négligeant ainsi le poinçon et le serre-flan. Cette approche, proposée initialement par Gotoh et Ishise<sup>9</sup> *apud* Gilormini et Bacroix (1997), est supportée par l'hypothèse que les positions angulaires des cornes et / ou des vallées restent inchangées au cours de l'emboutissage.

L'étude de Smelser et Becker (1991) s'appuyant sur une description polycristalline démontre que le profil de la collerette obtenu à partir de l'approche simplifiée est en bon accord avec les prévisions réalisées avec la modélisation complète de l'emboutissage profond. La Figure (I.35) schématise le maillage correspondant à l'approche simplifiée dans lequel un déplacement radial est imposé aux nœuds de la rangée intérieure d'éléments. Aussitôt qu'une rangée a dépassé le rayon de congé de la matrice, les éléments associés à celle-ci sont enlevés du maillage et ensuite, pour faire avancer la simulation, les mêmes conditions aux limites sont appliquées aux nœuds internes de la rangée d'éléments adjacente. Étant donné que le problème de contact est minimisé, les temps de calcul associés sont plus faibles comparés à une modélisation complète, ce qui constitue l'avantage principal de l'approche simplifiée.

---

<sup>9</sup> M. Gotoh et F. Ishise, "A Finite Element Analysis of Rigid-Plastic Deformation of the Flange in a Deep-Drawing Process Based on a Fourth-Degree Yield Function", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 20, No. 7, 1978, pp. 423-435.

Toutefois, ni l'effort du poinçon ni le profil final de la coupelle ni les effets de la force de serrage et du frottement sous le serre-flan ne peuvent être estimés à partir de l'approche simplifiée. Par ailleurs, les prévisions des cornes d'emboutissage sont sensibles à la façon dont les conditions aux limites sont appliquées, ainsi qu'au nombre de rangées d'éléments décrivant la région de la collerette (Smelser et Becker, 1991).

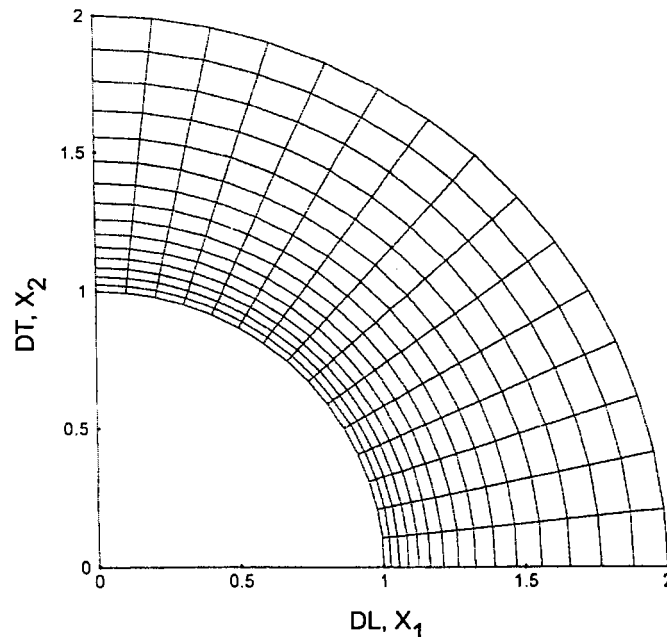


Figure (I.35) – Maillage de la collerette correspondant à l'approche simplifiée de prévision de la formation des cornes d'emboutissage. D'après Inal et al. (2000).

Bacroix et Gilormini (1995) et Gilormini et Bacroix (1995,1997) ont proposé une autre approche simplifiée à partir de laquelle il est possible d'obtenir le profil partiel de la coupelle, montré dans la Figure (I.36) et de calculer l'effort du poinçon. Ces auteurs ont adopté cette approche pour valider l'implantation du potentiel de vitesses de déformations plastiques proposé par Arminjon et al.<sup>10</sup> (1994) dans le sous-programme utilisateur **UMAT** du logiciel d'éléments finis **Abaqus/Standard**.

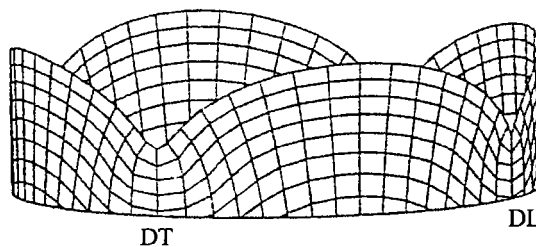


Figure (I.36) – Prédiction de la formation des cornes d'emboutissage à partir de l'approche simplifiée proposée par Bacroix et Gilormini (1995). D'après Gilormini et Bacroix (1995).

<sup>10</sup> M. Arminjon, B. Bacroix, D. Imbault et J.L. Raphanel, "A Fourth-Order Plastic Potential for Anisotropic Metals and its Analytical Calculation from Texture Data", *Acta Mechanica*, Vol. 107, 1994, Nos. 1-4, pp. 33-51.



En ce qui concerne l'approche complète de la formation des cornes d'emboutissage, certains auteurs ont considéré les différences de comportement entre les limites élastiques en traction et compression uniaxiale déterminées dans le plan de la tôle. C'est le cas du travail de Chung et Shah (1992) dans lequel le comportement de l'alliage d'aluminium 2008-T4 a été décrit par le critère de plasticité proposé par Barlat et al. (1991a) ajusté aux données des essais de traction et compression uniaxiale respectivement. La Figure (I.37) compare le profil mesuré de la coupelle avec les prévisions réalisées avec **Abaqus/Standard (UMAT)**. Dans les deux situations considérées, les prévisions des hauteurs des cornes et des vallées d'emboutissage sont qualitativement en bon accord avec le profil expérimental de la coupelle. Cependant, l'amplitude des cornes d'emboutissage est surestimée lorsque la fonction de charge est calibrée aux données expérimentales de compression uniaxiale et sous estimée par la prévision associée aux données de traction uniaxiale. D'autre part, Chung et Shah (1992) ont constaté que le profil de la coupelle obtenu par une moyenne des deux prévisions fournit un meilleur accord avec les résultats expérimentaux. Ceci est d'ailleurs en conformité avec les états de contraintes rencontrés sur la région de la collerette, qui varie de la compression circonférentielle ( $\sigma_r + \sigma_\theta < 0$ ) à la traction uniaxiale ( $\sigma_r + \sigma_\theta > 0$ ).

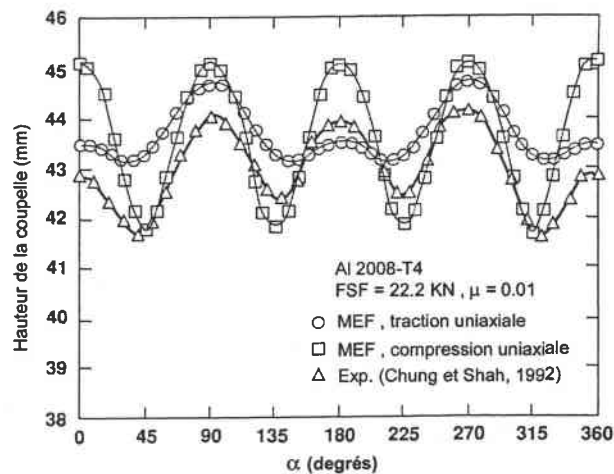


Figure (I.37) – Comparaison entre le profil mesuré des cornes d'emboutissage pour l'aluminium 2008-T4 et les prévisions faites avec le critère de Barlat et al.(1991a) ajusté aux données des essais de traction et de compression uniaxiale. D'après Chung et Shah (1992).

Récemment, Yoon et al. (1998,2000) ont appliqué le critère de Barlat et al. (1997b) en considérant une translation initiale des axes de la surface de charge pour tenir compte des différences entre les limites élastiques en traction et en compression uniaxiale observées dans l'alliage d'aluminium 2090-T3 (Barlat et al.,1991c). Cette translation initiale des axes est introduite dans le tenseur déviateur de contraintes  $\mathbf{S}$  défini par la transformation suivante :

$$\mathbf{S} = \mathbf{L} (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{B}) \quad (\text{I.77})$$

où  $\mathbf{L}$  est l'opérateur de Karafillis et Boyce (1993) et  $\mathbf{B}$  est le tenseur de contraintes de rappel.

Les composantes du tenseur  $\mathbf{B}$  ont été déterminées à partir d'une méthode itérative de façon à obtenir une bonne approximation des valeurs expérimentales des limites élastiques en traction et en compression uniaxiale ainsi que du coefficient d'anisotropie plastique  $R$  de l'alliage d'aluminium 2090-T3 selon les directions parallèle, diagonale et transverse au sens de laminage respectivement. Le profil mesuré de la coupelle est comparé dans la Figure (I.38) aux prévisions numériques faites avec et sans translation initiale des axes de la surface de charge. D'une façon qualitative, les résultats des simulations associées à ces descriptions sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Néanmoins, les prévisions obtenues sans une translation initiale fournissent une hauteur plus faible dans la direction de laminage que dans la direction transverse tandis que les valeurs mesurées indiquent le contraire ( $h_0 > h_{90}$ ). D'autre part, un meilleur accord pour l'amplitude et les tendances angulaires des cornes d'emboutissage est obtenu lorsqu'une contrainte de rappel initiale est considérée dans la description du comportement de l'alliage d'aluminium 2090-T3.

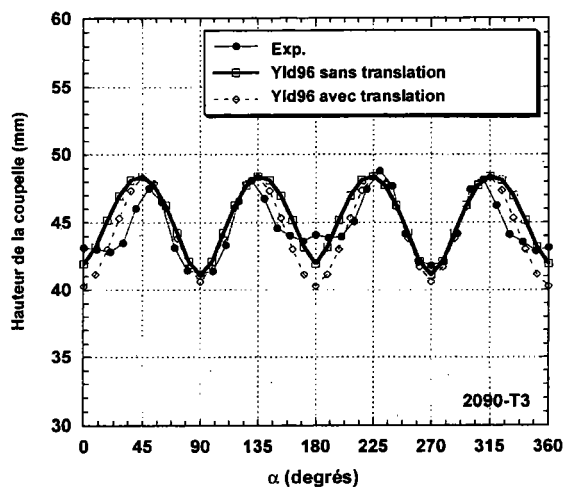


Figure (I.38) – Influence de la contrainte de rappel initiale sur la prévision de la formation des cornes d'emboutissage de l'alliage d'aluminium 2090-T3. D'après Yoon et al. (2000).

La translation des axes de la surface de charge initiale de l'alliage 2090-T3 est schématisée dans la Figure (I.39), où il est possible d'observer que les intensités des limites élastiques en compression uniaxiale dans les directions parallèle (DL) et transverse (DT) au sens de laminage ont été modifiées de  $(\sigma_0 > \sigma_{90})$  à  $(\sigma_0^* < \sigma_{90}^*)$ . La Figure (I.40) compare les distributions des déformations en épaisseur mesurées le long du profil de la coupelle dans les directions (DL) et (DT) avec les résultats de simulations réalisées en fonction de la position initiale des axes de la surface de charge de l'alliage 2090-T3. Les prévisions numériques obtenues avec une translation des axes sont en bon accord avec les résultats expérimentaux et avec les hauteurs des vallées dans les directions (DL) et (DT), i.e.,  $\epsilon_0^t < \epsilon_{90}^t$ , tandis que les résultats obtenus sans une translation de la surface de charge prévoient le contraire.

Les résultats de l'étude de Yoon et al. (2000) suggèrent que les limites élastiques en compression uniaxiale présentent une meilleure corrélation avec la formation des cornes d'emboutissage que les valeurs du coefficient de Lankford.

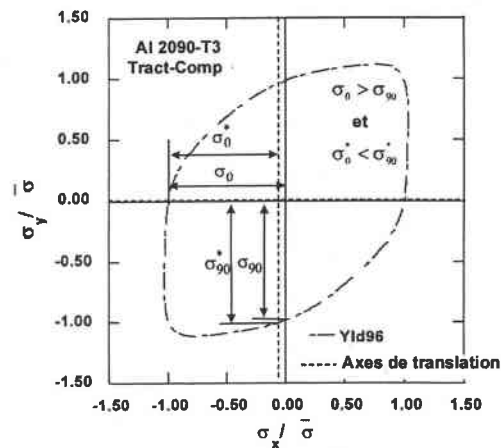


Figure (I.39) – Comparaison entre les intensités des limites élastiques en compression uniaxiale dans les directions DL et DT en fonction de la position initiale des axes de la surface de charge de l'alliage d'aluminium 2090-T3. D'après Yoon et al. (2000).

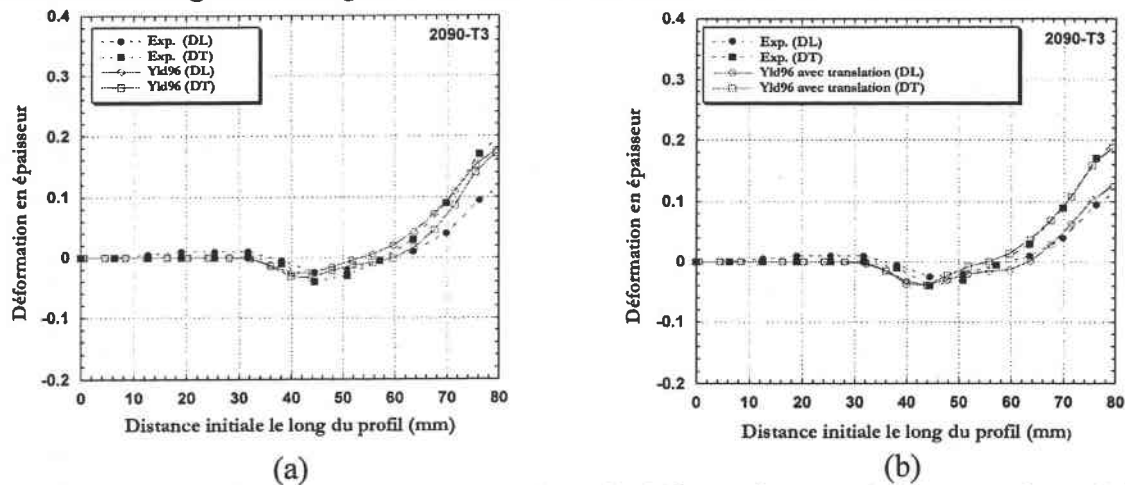


Figure (I.40) – Comparaison des distributions de déformations en épaisseur et les prévisions réalisées (a) sans et (b) avec une translation initiale de axes de la surface de charge de l'alliage d'aluminium 2090-T3. D'après Yoon et al. (2000).

Les comportements des alliages 2090-T3 et 2008-T4 ont également été décrits dans les travaux de Barlat et al. (1994), Yoon et al. (1995) et Chung et al. (1996) par le potentiel des vitesses de déformations plastiques proposé par Barlat et al. (1993). Ces auteurs ont utilisé une formulation d'éléments finis basée sur la théorie de la déformation, dans laquelle les points matériels sont supposés suivre les chemins de déformations pour lesquels le travail plastique associé est minimum (Chung et Richmond, 1993). Cette méthode, dénommée aussi théorie idéale de mise en forme, est particulièrement appropriée aux étapes de conception en vue d'optimiser la forme initiale du flan en partant de la forme l'embouti (Barlat et al. 1994) ainsi qu'à l'analyse incrémentale de l'emboutissage (Yoon et al., 1995 et Chung et al., 1996).

Les effets du coefficient de frottement de Coulomb ( $\mu$ ), de la force de serre-flan (FSF) et du type d'élément sur les prévisions numériques des cornes d'emboutissage ont été analysés par Hu et al. (1998). Ces auteurs ont introduit le potentiel de vitesses de déformations plastiques proposé par Arminjon et al. (1994) dans le sous-programme UMAT du logiciel d'éléments finis **Abaqus/Standard**. La Figure (I.41) montre l'influence du coefficient de frottement  $\mu$  adopté entre le flan et les outils sur le pourcentage des cornes d'emboutissage obtenu à partir des simulations réalisées avec des éléments de type coque. D'après cette figure, il est possible de noter que l'amplitude des cornes d'emboutissage augmente lorsque les valeurs de  $\mu$  varient de 0.01 à 0.15 tandis qu'elle diminue pour des fortes valeurs de  $\mu$  (0.20 – 0.25). Hu et al. (1998) attribuent ces différences aux variations de l'effort du poinçon et de la contrainte de cisaillement dans le plan de la tôle occasionnés par l'augmentation du coefficient de frottement  $\mu$ . Pour des faibles valeurs de  $\mu$  (0.01 – 0.15), l'effort du poinçon augmente avec  $\mu$ , augmentant les déformations plastiques et donc l'amplitude des cornes d'emboutissage. D'autre part, pour des fortes valeurs de  $\mu$  ( $> 0.15$ ), une augmentation du frottement conduit à un accroissement de la contrainte et de la vitesse de déformation plastique de cisaillement, ce qui a pour effet de diminuer l'influence de l'anisotropie plastique dans le plan de la tôle.

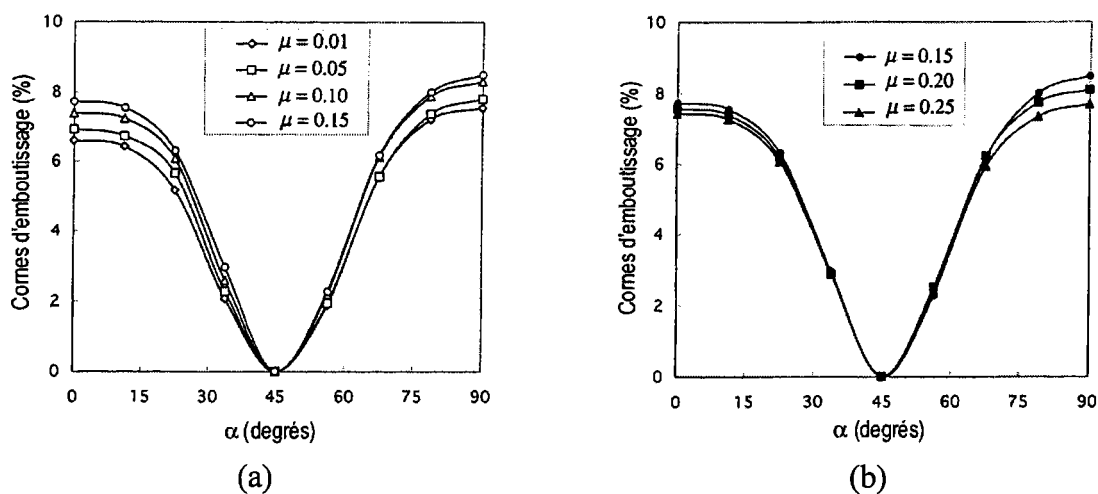


Figure (I.41) – Influence du coefficient de frottement  $\mu$  sur les prévisions numériques des cornes d'emboutissage : (a) faibles valeurs de  $\mu$  et (b) fortes valeurs de  $\mu$  (FSF = 650 N). D'après Hu et al. (1998).

L'influence de la force de serre-flan est montrée dans la Figure (I.42). De fortes forces de serrage produisent des cornes d'emboutissage plus prononcées, ce qui est, en fait, dû à une augmentation de l'effort du poinçon et d'ailleurs, analogue au cas du frottement croissant pour de faibles valeurs de  $\mu$ , voir Figure (I.41a).

Enfin, la Figure (I.43) compare le profil mesuré des cornes d'emboutissage avec les prévisions numériques obtenues avec les éléments de type coques et solide respectivement. Les résultats associés aux éléments de coques surestiment l'amplitude des cornes tandis que les prévisions des éléments solides sous-estiment les valeurs expérimentales.

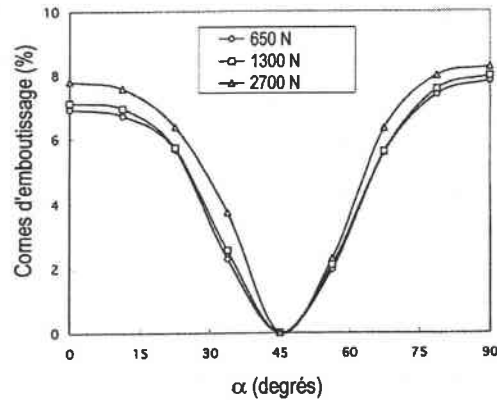


Figure (I.42) – Influence de la force de serre-flan sur les prévisions numériques des cornes d'emboutissage ( $\mu = 0.05$ ). D'après Hu et al. (1998).

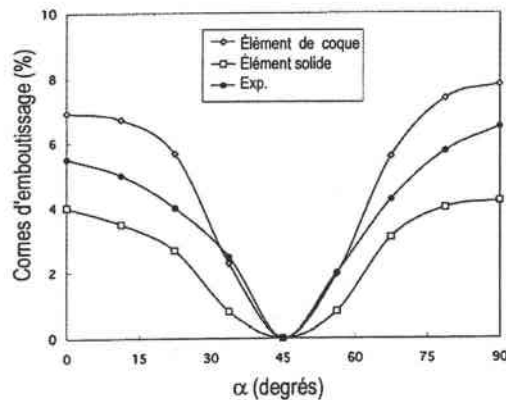


Figure (I.43) – Influence du type de formulation de l'élément sur les prévisions numériques des cornes d'emboutissage ( $\mu = 0.05$  et FSF = 650 N). D'après Hu et al. (1998).

### I.3.3. Essai de pliage et étirage

La mise en forme des feuilles métalliques pour la production d'emballages dans les secteurs alimentaires et de boissons fait intervenir un emboutissage profond suivi parfois par un repassage des parois. Il est connu que la formabilité est associée aux caractéristiques du matériau telles que la ductilité, l'anisotropie plastique et la rugosité superficielle. D'une part, dans le cas particulier des feuilles obtenues par double réduction, comme le fer blanc, la ductilité et l'anisotropie plastique sont difficilement évaluées par l'essai de traction uniaxiale traditionnel car les déformations homogènes atteintes sont généralement très faibles. D'autre part, il est également connu que la formabilité est considérablement augmentée en réduisant la teneur de carbone de même que la fraction volumique et la taille des inclusions.

L'essai de traction uniaxiale des feuilles ne permet pas d'évaluer de telles améliorations puisque la meilleure mesure de ductilité, i.e., la section de l'éprouvette après la fracture, est usuellement obtenue de façon très approximative. Cependant, il est possible d'emboutir une feuille métallique fortement écrouie, en imposant un autre mode de déformation que celui d'une sollicitation uniaxiale.

Les limitations associées à l'essai de traction uniaxiale ont suggéré par la suite l'emploi d'autres types d'essais dans l'évaluation des performances des feuilles métalliques. Par exemple, Brun et al.<sup>11</sup> (1983) ont proposé un essai de pliage et étirage dans lequel une bande métallique est forcée à passer par un jonc de retenue sous une force de serrage donnée. L'essai est réalisé en plusieurs passes entre lesquelles cette bande, prélevée initialement selon la direction transverse au sens de laminage, est tournée de 180° entre les passes consécutives. Après un certain nombre de passes, il est possible de visualiser la formation de petites déchirures dues à la présence des inclusions proches des surfaces de la bande de tôle. Cette méthodologie permet la qualification des feuilles métalliques destinées à la fabrication de boîtes de boisson par le procédé d'emboutissage profond suivi d'étirage de paroi.

À partir de l'essai suggéré par Brun et al. (1983), Ferran et al. (1998a) ont proposé un montage simple pouvant être adapté à une machine standard d'essais de traction uniaxiale. Dans ce dispositif, montré à la Figure (I.44), le jonc de retenue et les rayons de congé de la matrice sont remplaçables par des cylindres rectifiés.

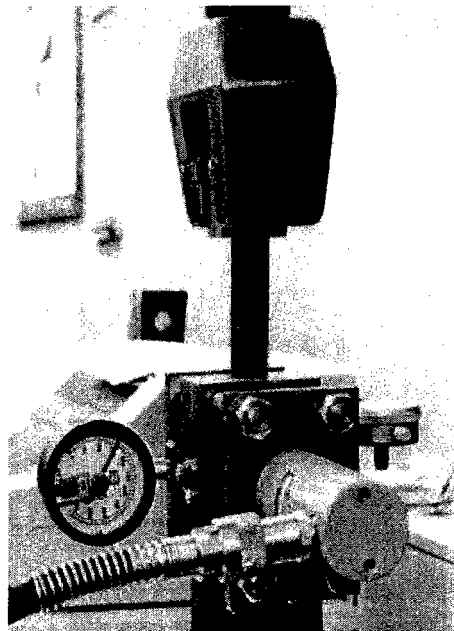


Figure (I.44) – Montage du dispositif de l'essai de pliage et étirage des tôles proposé par Ferran et al. (1998a). D'après Ferran et al. (1998b).

<sup>11</sup> C. Brun, J.-F. Baileul, F. Coolen et F. Lecendre, Brevet Français No. 8307719, Publication No. 2545937, Institut National de la Propriété Industrielle, Paris, 1983.

La procédure de l'essai de pliage et étirage proposé par Ferran et al. (1998a) est schématisée dans la Figure (I.45). D'abord, la bande de tôle est positionnée entre les outils et fixée au mors de la machine de traction. Ensuite, la bande de tôle est pliée entre le jonc de retenue et les rayons de congé de la matrice par une force de serrage contrôlée par un piston hydraulique. Enfin, la bande de tôle est tirée à travers le dispositif par le mors mobile de la machine de traction uniaxiale, grâce à laquelle le déplacement et l'effort correspondant au pliage et étirage sont enregistrés.

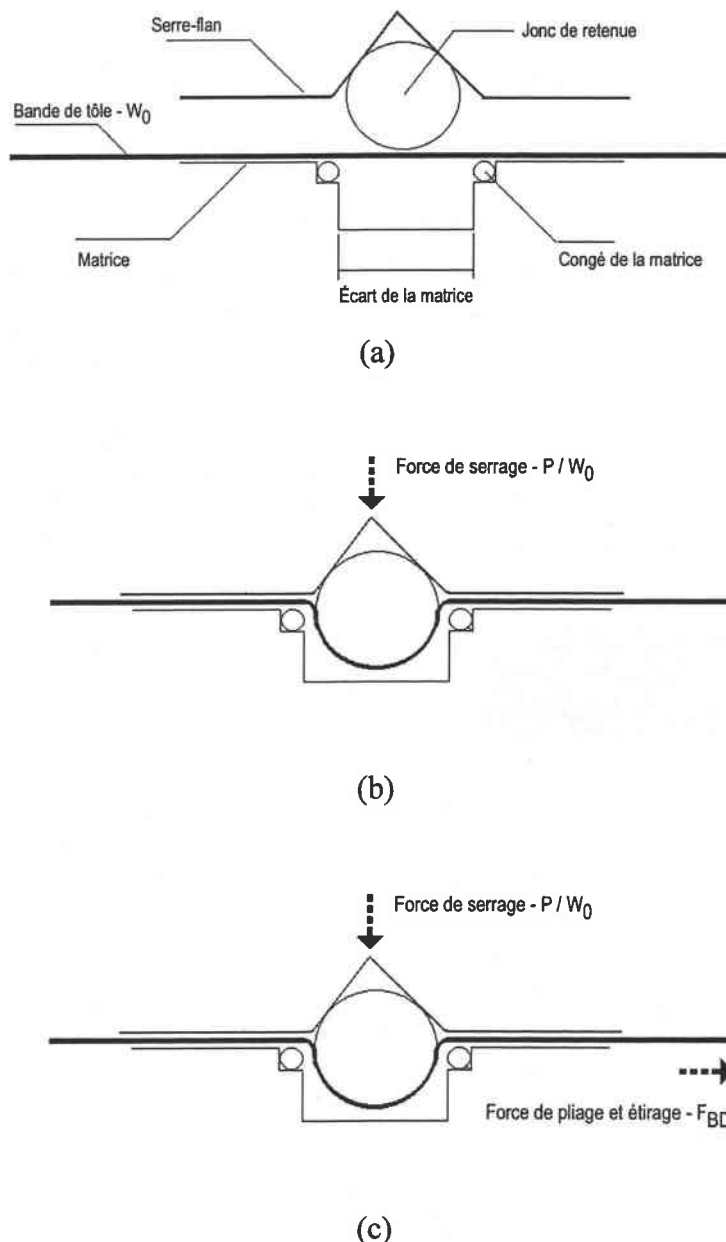


Figure (I.45) – Principe de l'essai de pliage et étirage proposé par Ferran et al. (1998a) : (a) positionnement de la bande de tôle entre les outils, (b) application d'une force de serrage et (c) application d'une force de pliage et étirage. D'après Ferran et al. (1998a).

Les dimensions typiques de la bande de tôle utilisée dans l'essai de pliage et étirage proposé par Ferran et al. (1998a) sont montrées dans la Figure (I.46). Les déformations le long de la bande sont obtenues à partir des mesures de l'allongement entre repères établis, préalablement à l'essai, par des empreintes de dureté. Ces repères servent en outre comme base de mesures pour déterminer les déformations le long de la largeur et à travers l'épaisseur.

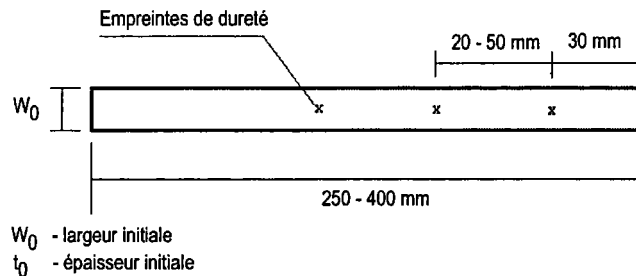


Figure (I.46) – Dimensions de la bande de tôle utilisée dans l'essai de pliage et étirage.

À l'instar de la procédure proposée par Brun et al. (1983), la ductilité de la tôle est évaluée en fonction du nombre maximum de passes de pliage et étirage avant que la bande de tôle ne se déchire. D'autre part, le nombre de passes par pliage et étirage dépend également des paramètres géométriques de même que des conditions de réalisation des essais comme, par exemple, les rayons des outils et la force de serrage respectivement. La Figure (I.47) montre le nombre de passes obtenues pour un acier carbone calmé à l'aluminium ( $W_0/t_0 \cong 32$ ) en fonction de la force de serrage ( $P/W_0$ ). Sous une force de 180 N/mm, la bande de tôle atteint une déformation de  $\sim 55\%$  et se déchire après la quatrième passe tandis qu'une déformation de  $\sim 98\%$  est obtenue après huit passes réalisées avec une force de 98 N/mm.

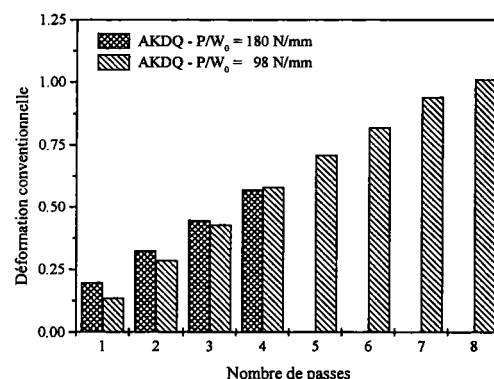


Figure (I.47) – Influence de la force de serrage sur l'allongement obtenu par pliage et étirage d'un acier carbone calmé à l'aluminium. D'après Ferran et al. (1998a).

En vue d'étudier le changement des propriétés mécaniques au cours de l'essai de pliage et étirage des tôles, Ferran et Almeida (1999) ont appliqué une faible force de serrage ( $P/W_0$ ) de manière à obtenir un allongement nominal de la bande de tôle entre 0.5 et 1 %.



Pour évaluer la modification des propriétés mécaniques, des éprouvettes de traction uniaxiale ont été prélevées à partir des bandes de tôles testées pour déterminer la contrainte d'écoulement, la limite de résistance et les allongements uniforme et total respectivement. La Figure (I.48) montre la contrainte d'écoulement et l'allongement total déterminés pour un acier IF ( $W_{0/t_0} \cong 32$ ) en fonction de la déformation vraie imposée le long de la bande de tôle. Les valeurs à une déformation nulle, déterminées dans l'état de livraison, ont été ajoutées dans cette figure à titre de comparaison. Pour une déformation proche de 0.3 %, il est à noter qu'une augmentation considérable de la contrainte d'écoulement est obtenue ( $\Delta\sigma \cong 50$  MPa). Cet écrouissage est sûrement dû à un cumul de déformations résultant du chargement cyclique subi par la bande de tôle sur les rayons des outils de l'essai de pliage et étirage. D'ailleurs, il a été remarqué que la déformation uniforme obtenue après un tel écrouissage reste importante et, que l'allongement total en traction uniaxiale ne décroît que très légèrement, comme indiqué sur la Figure (I.48).

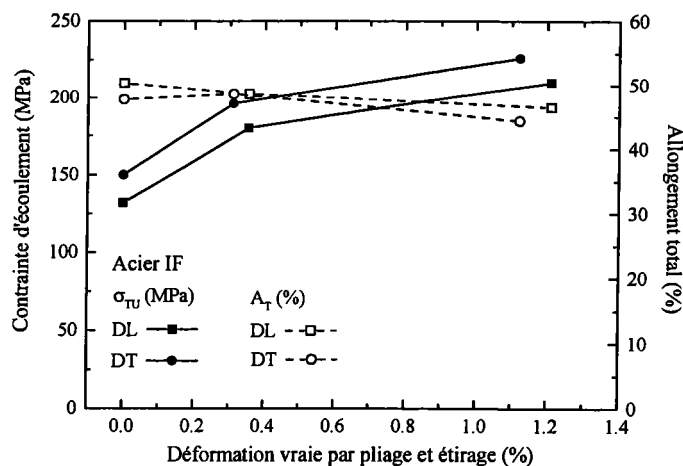


Figure (I.48) – Modification des propriétés mécaniques d'un acier IF en fonction de la déformation longitudinale imposée par pliage et étirage. D'après Ferran et Almeida (1999).

À partir de simulations numériques, Ferran et Almeida (1999) ont constaté que le rapport entre les déformations le long de la largeur et à travers l'épaisseur de la bande de tôle,  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$ , est lié au coefficient de Lankford  $R$  obtenu dans l'essai de traction uniaxiale. Cette corrélation a été confirmée expérimentalement, suggérant ainsi une nouvelle méthodologie de détermination indirecte des valeurs de  $R$ . Étant donné que les déviations dues à la mesure d'épaisseur sont plus importantes que les mesures de l'allongement et de rétrécissement le long de la bande de tôle, ce rapport de déformations est déterminé en considérant l'incompressibilité plastique :

$$(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE} = -\frac{1}{1 + (\epsilon_1/\epsilon_2)_{PE}} \quad (I.78)$$

La Figure (I.49) montre les prévisions numériques du rapport de déformations  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  en fonction du coefficient d'anisotropie de Lankford  $R$ , du coefficient de frottement  $\mu$  et du rapport  $(W_0/t_0)$ . Ces simulations numériques ont été réalisées avec le code explicite d'éléments finis LS-DYNA3D dans lequel le comportement du matériau a été décrit en isotropie transverse par le critère de Hill quadratique (1948) et la bande de tôle par des éléments quadrangulaires de type coque. Les résultats indiquent d'une part une corrélation linéaire entre les valeurs de  $R$  et de  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  et d'autre part, que le rapport de déformations  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  augmente pour des fortes valeurs de  $R$  et diminue lorsque les valeurs de  $\mu$  ou de  $(W_0/t_0)$  augmentent.

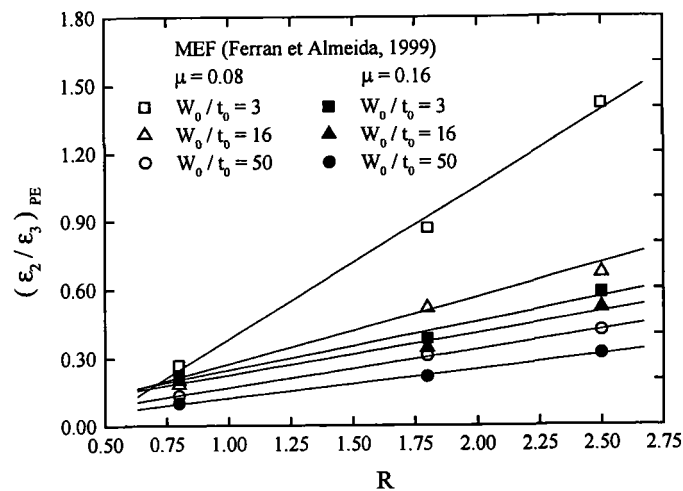


Figure (I.49) – Prévisions numériques du rapport de déformations par pliage et étirage  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  en fonction des valeurs de  $R$ ,  $\mu$  et  $(W_0/t_0)$ . D'après Ferran et Almeida (1999).

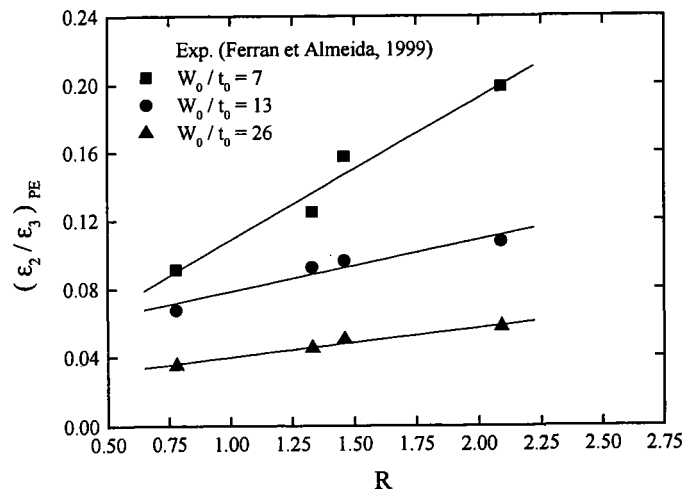


Figure (I.50) – Résultats expérimentaux du rapport de déformations par pliage et étirage  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  obtenus en fonction du rapport  $(W_0/t_0)$  pour un acier calmé à l'aluminium et un acier IF. D'après Ferran et Almeida (1999).

Les résultats expérimentaux du rapport de déformations  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  obtenus dans l'essai de pliage et étirage pour un acier calmé à l'aluminium et un acier IF essayés suivant les directions diagonale et transverse au sens de laminage sont montrés dans la Figure (I.50). Comme prévu dans les simulations numériques, les valeurs expérimentales du rapport de déformations de pliage et étirage  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  présentent une corrélation linéaire avec le coefficient de Lankford  $R$  et augmentent sensiblement lorsque le rapport  $(W_0/t_0)$  décroît. Mis à part aux effets liés aux conditions de lubrification, qui n'ont pas été évalués expérimentalement, il est possible de constater que les prévisions numériques et ainsi que les valeurs expérimentales du rapport de déformations par pliage et étirage  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  indiquent les mêmes tendances quant aux paramètres matériau ( $R$ ) et géométriques  $(W_0/t_0)$ . Cependant, les prévisions numériques surestiment les valeurs mesurées de  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  pour une même fourchette de valeurs expérimentales du coefficient de Lankford  $R$ . Ces différences peuvent être attribuées d'une part à la validité de la théorie de coques lorsque les rayons de congé de la matrice sont petits et d'autre part, à l'hypothèse d'isotropie transverse adoptée dans la description du comportement de la tôle. Le cycle de pliage et dépliage subi par la tôle peut également donner lieu à des effets importants d'écrouissage cinématique, ce qui invaliderait les simulations numériques.

## I.4. Conclusion

Depuis le travail pionnier de Hill (1948), un grand nombre de critères de plasticité ont été proposés dans la littérature de façon à tenir mieux compte du comportement anisotrope dans l'analyse de l'emboutissage des tôles. D'ailleurs, puisque les méthodes de simulation par éléments finis ont été considérablement améliorées ainsi que le rendement des moyens de calcul, la question de la précision et des limitations du critère de plasticité adopté dans les simulations numériques de l'emboutissage des tôles est devenue importante. De ce fait, des critères de plasticité comportant des paramètres additionnels ont été proposés en vue de reproduire le comportement anisotrope du matériau connu a priori soit à partir de l'expérience soit à partir de calculs basés sur la plasticité polycristalline.

Les critères de plasticité évoqués dans cette étude ont été établis dans le cadre général de la théorie d'écoulement plastique associée à un écrouissage isotrope. Dans ce contexte, il est reconnu que selon la méthode d'ajustement des paramètres de la fonction de charge, seulement les valeurs expérimentales soit du coefficient de Lankford  $R$  soit de la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale peuvent être prises en compte.

Mis à part des ajustements réalisés a posteriori, comme dans le critère de Barlat et al. (1997b), il est possible d'adopter une loi d'écoulement plastique non associée permettant de décrire ces deux comportements indépendamment, comme proposé récemment par Stoughton (2000). D'autre part, la considération d'un écrouissage isotrope semble être justifiée du moins dans les problèmes d'emboutissage pour lesquels l'histoire de chargement n'engendre qu'une faible évolution de la texture cristallographique en comparaison avec l'anisotropie initiale de la tôle. Cette idée est supportée par l'étude de Beaudoin et al. (1994), dans laquelle il est montré que le changement de la forme de la surface de charge obtenu en fonction de l'évolution de la texture cristallographique, à partir de la simulation numérique du procédé d'hydroformage, peut être considéré comme secondaire. Dans le cas contraire, l'hypothèse d'écrouissage isotrope peut être relaxée et l'évolution de la surface de charge peut être décrite en admettant une évolution des paramètres de la fonction de charge en fonction de la déformation plastique, comme cela a été proposé, par exemple, dans les travaux de Hill et Hutchinson (1992) et de Suh et al. (1996).

Les essais d'emboutissage des tôles analysés dans cette étude ont permis de mettre en évidence quelques caractéristiques nécessaires à la description du comportement plastique du matériau lors de la simulation numérique associée à l'emboutissage des tôles. En résumé, la forme de la surface de charge correspondant au critère de plasticité adopté dans les simulations doit être capable de décrire l'écoulement plastique dans les régions des contraintes d'intérêt pour le problème analysé. Ainsi, dans le cas de l'expansion par poinçonnement hémisphérique la prévision numérique des distributions de déformations est dictée par la combinaison entre les paramètres décrivant le comportement anisotrope de la tôle et le frottement avec les outils tandis que, la prévision numérique des cornes d'emboutissage est plutôt liée aux effets de glissement en compression uniaxiale hors-axes, autrement dit, à la dépendance de la forme de la surface de charge en fonction de l'orientation de chargement par rapport aux axes de symétrie orthotrope. Finalement, mis à part les effets pouvant avoir lieu à travers l'épaisseur, la prévision numérique du rapport de déformations de pliage et étirage semble être définie en fonction de la dépendance angulaire et de la forme de la surface de charge adoptée ainsi que des effets tribologiques. Dans ce dernier essai, les déformations cycliques subies par la tôle peuvent donner lieu également à des effets importants d'écrouissage cinématique.

# Chapitre II : Implantation du critère de plasticité de Ferron et al. (1994) dans le logiciel Abaqus

## II.1. Introduction

Dans ce chapitre, les méthodes d'implantation des sous-programmes utilisateurs Fortran du logiciel d'éléments finis **Abaqus** sont développées pour le cas particulier de l'élasticité linéaire et pour un modèle de plasticité établi dans le cadre de la théorie de l'écoulement avec l'hypothèse d'écrouissage isotrope. Dans un premier temps, le cas général de l'élasto-plasticité en trois dimensions est abordé et appliqué ensuite aux techniques d'intégration implicite et explicite disponibles dans le logiciel d'éléments finis **Abaqus**. Ensuite, les équations correspondant au cas particulier de l'état de contraintes planes sont présentées pour ces procédures. Finalement, l'implantation du critère de plasticité orthotrope de Ferron et al. (1994) est détaillée et ses résultats sont confrontés à ceux obtenus avec **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit**.

## II.2. Cas général

### II.2.1. Lois de comportement élasto-plastique

Le logiciel **Abaqus** fournit à chaque pas de calcul, en début de l'incrément ou de l'itération selon la technique d'intégration, et à chaque point d'intégration, les valeurs des composantes du tenseur des contraintes ( $\sigma_{ij}$ ), des incréments de la déformation totale ( $\Delta\varepsilon_{ij}$ ) et des variables d'état associées au critère de plasticité. Du point de vue numérique, un problème élasto-plastique est considéré comme étant piloté par la déformation, les contraintes étant ensuite obtenues d'après l'histoire des déformations par un algorithme d'intégration.

D'abord, le comportement élastique est décrit par la loi d'élasticité linéaire de Hooke :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (\text{II.1})$$

où  $\mathbf{C}^e$  est le tenseur d'élasticité et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$  est le tenseur de vitesses des déformations élastiques.

Sous l'hypothèse de petites déformations élastiques, la description du comportement élasto-plastique est basée sur la décomposition additive du tenseur de vitesses de déformations totale en une partie élastique et une partie plastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (\text{II.2})$$

Le tenseur de vitesses des déformations plastiques  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  est défini à travers la règle d'écoulement plastique (I.7) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{II.3})$$

associée à la fonction de charge  $f$  définie sous la forme suivante :

$$f = F(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma} \quad (\text{II.4})$$

où  $F(\boldsymbol{\sigma})$  est une fonction homogène de degré 1 des contraintes et  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$  est une grandeur scalaire représentant une mesure de la contrainte équivalente.

Dans l'équation (II.3), le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  est déterminé d'après la condition de chargement élasto-plastique,  $f = 0$ , en appliquant dans un premier temps l'identité d'Euler sur la fonction de charge  $f$  (II.4), i.e.,

$$\boldsymbol{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = F(\boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{II.5})$$

puis en calculant le travail plastique associé :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \bar{\sigma} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p \quad (\text{II.6})$$

Enfin, en exprimant le premier membre de (II.6) à l'aide de la règle d'écoulement plastique associée (II.3) et de l'identité d'Euler (II.5), il s'ensuit que le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  est égal à la vitesse de déformation plastique équivalente  $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p$  conjuguée de la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$ .

La description du comportement élasto-plastique est complétée par la définition de l'évolution de l'écrouissage au cours de la déformation plastique. La loi d'écrouissage reliant ainsi le taux de contrainte équivalente au taux de déformation plastique équivalente est donnée par :

$$\dot{\bar{\sigma}} = H(\bar{\sigma}) \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p \quad (\text{II.7})$$

où  $H(\bar{\sigma}) = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}$  désigne le taux d'écrouissage.

Pour une analyse par la méthode des éléments finis, l'intégration des équations constitutives décrites ci-dessus est menée aux points d'intégration. De ce fait, puisque la solution est supposée être connue en début de chaque pas de calcul, l'analyse est réalisée de façon incrémentale. Donc, connaissant l'incrément de la déformation totale  $\Delta\epsilon$  en début de pas de calcul, la résolution du problème élasto-plastique consiste à déterminer les nouvelles contraintes et les variables d'état en fin de pas de calcul. En résumé, les équations constitutives présentées sous la forme incrémentale, définissant ainsi les lois d'évolution du comportement élasto-plastique intégrées lors de l'incrément de temps de calcul  $\Delta t$ , sont :

[1] La décomposition des vitesses de déformation totale :

$$\Delta\epsilon_{ij} = \Delta\epsilon_{ij}^e + \Delta\epsilon_{ij}^p \quad (\text{II.8})$$

[2] La loi d'élasticité linéaire de Hooke :

$$\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl}^e \Delta\epsilon_{kl}^e = C_{ijkl}^e \left[ \Delta\epsilon_{kl} - \Delta\epsilon_{kl}^p \right] \quad (\text{II.9})$$

avec  $C_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$  pour le cas de l'élasticité isotrope, où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé.

[3] La règle d'écoulement plastique associée :

$$\Delta\epsilon_{ij}^p = \Delta\bar{\epsilon}^p F_{,ij} \quad (\text{II.10})$$

[4] La loi d'écrouissage :

$$\Delta\bar{\sigma} = H(\bar{\sigma}) \Delta\bar{\epsilon}^p \quad (\text{II.11})$$

[5] La condition de chargement élasto-plastique :

$$f = F(\sigma_{ij}) - \bar{\sigma} = 0 \quad (\text{II.12})$$

avec la notation  $F_{,ij} = \partial F(\sigma_{ij}) / \partial \sigma_{ij}$ .

## II.2.2. Méthode générale d'intégration

La méthode d'intégration numérique de problèmes élasto-plastiques est basée sur un schéma de "prévision élastique" et "correction plastique", dénommé communément dans la littérature comme l'algorithme de "retour normal". En somme, la résolution d'un problème élasto-plastique consiste à déterminer le nouvel état de contraintes et de réactualiser ensuite toutes les variables d'état en fin du pas de calcul. La description présentée dorénavant suit le formalisme décrit par les manuels du logiciel **Abaqus** (1998). Afin de simplifier la notation,  $\xi^t$  désigne les valeurs des variables en début de pas de calcul,  $\xi^{\text{essai}}$  les valeurs résultant de la prévision élastique et  $\xi^{t+\Delta t}$  les valeurs corrigées en fin de pas de calcul.

Premièrement, la prévision élastique est faite à travers la loi d'élasticité linéaire de Hooke (II.9) en tenant compte de l'état des contraintes en début de pas de calcul :

$$\sigma_{ij}^{essai} = \sigma_{ij}^t + C_{ijkl}^e \Delta \varepsilon_{kl} \quad (II.13)$$

Ensuite, il faut évaluer si l'écoulement plastique a eu lieu ou non lors de cette estimation élastique. Pour cela, il suffit d'effectuer le test de chargement élasto-plastique donné par :

$$F(\sigma_{ij}^{essai}) - \bar{\sigma}^t > 0 \quad (II.14)$$

Finalement, si la condition (II.14) est alors vérifiée, les corrections à apporter aux différentes variables doivent être calculées. Les deux méthodes employées dans la détermination de ces corrections plastiques sont détaillées ci-après pour les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** disponibles respectivement dans les versions implicite et explicite du logiciel d'éléments finis **Abaqus**.

### **II.2.3. Abaqus/Standard : UMAT**

Dans le sous-programme **UMAT**, il est nécessaire d'effectuer deux étapes de calcul afin de résoudre les équations constitutives présentées précédemment. Dans la première étape, les corrections plastiques sont déterminées dans une itération locale à travers la méthode de Newton. Deuxièmement, les équations d'équilibre sont écrites en fin de l'incrément de l'itération globale courante et sont résolues par la méthode de Newton-Raphson en ayant comme inconnues les déplacements des nœuds. De ce fait, la solution de l'ensemble des équations d'équilibre requiert la définition de l'opérateur tangent ou de la matrice Jacobienne,  $J = (\partial \sigma / \partial \varepsilon)^{t + \Delta t}$ , déterminée après la convergence de l'itération locale des corrections plastiques afin que les nouveaux déplacements soient estimés lors de l'itération globale des équations d'équilibre.

#### **II.2.3.1. Calcul des corrections plastiques**

La méthode d'intégration numérique utilisée par le sous-programme **UMAT** est basée sur le schéma d'Euler implicite et la solution de l'ensemble des équations constitutives intégrées est déterminée à l'aide de la méthode de Newton. Notons par  $c(\xi)$  la correction apportée sur la variable  $\xi$ . D'après la loi d'élasticité linéaire de Hooke (II.9), les corrections associées aux composantes des contraintes et des déformations plastiques sont reliées par :

$$c(\sigma_{ij}) = - C_{ijkl}^e c(\Delta \varepsilon_{kl}^p) \quad (II.15)$$



De façon analogue, la loi d'écroutissement (II.11) fournit la relation entre les corrections sur la contrainte et la déformation plastique équivalentes, i.e.,

$$c(\bar{\sigma}) = H(\bar{\sigma}) c(\Delta\bar{\epsilon}^P) + \Delta\bar{\epsilon}^P \frac{\partial H(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} c(\bar{\sigma}) \quad (\text{II.16})$$

ou encore

$$c(\bar{\sigma}) = \hat{H}(\bar{\sigma}) c(\Delta\bar{\epsilon}^P) \quad (\text{II.17})$$

avec

$$\hat{H}(\bar{\sigma}) = H(\bar{\sigma}) \left/ \left[ 1 - \frac{\partial H(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \Delta\bar{\epsilon}^P \right] \right. \quad (\text{II.17})$$

La condition de chargement élasto-plastique (II.12) donne lieu à des corrections jusqu'à ce que la solution soit atteinte avec une tolérance donnée, c'est à dire,

$$F,_{ij} c(\sigma_{ij}) - c(\bar{\sigma}) = -f \quad (\text{II.18})$$

La règle d'écoulement associée (II.10) donne également lieu à des corrections jusqu'à l'obtention de la solution :

$$c(\Delta\epsilon_{ij}^P) - F,_{ij} c(\Delta\bar{\epsilon}^P) - \Delta\bar{\epsilon}^P F,_{ijkl} c(\sigma_{kl}) = F,_{ij} \Delta\bar{\epsilon}^P - \Delta\epsilon_{ij}^P \quad (\text{II.19})$$

où  $F,_{ijkl} = \partial^2 F(\sigma_{ij}) / \partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}$ .

En combinant les relations (II.15-19), l'ensemble d'équations linéaires de Newton dans lequel les inconnues sont les corrections associées aux déformations plastiques est obtenu par :

$$c(\Delta\epsilon_{mn}^P) \left[ \delta_{im} \delta_{jn} + C_{klmn}^e (F,_{ijkl} \Delta\bar{\epsilon}^P + F,_{ij} F,_{kl} / \hat{H}(\bar{\sigma})) \right] = F,_{ij} \left[ \Delta\bar{\epsilon}^P + f / \hat{H}(\bar{\sigma}) \right] - \Delta\epsilon_{ij}^P \quad (\text{II.20})$$

Une fois ces corrections calculées, les contraintes en fin de pas de calcul sont donc déterminées itérativement en ramenant l'état des contraintes d'essai donné par la prévision élastique (II.13), sur la surface de charge réactualisée en utilisant la correction plastique :

$$\sigma_{ij} \Big|_N = \sigma_{ij} \Big|_{N-1} - C_{ijkl}^e c(\Delta\epsilon_{kl}^P) \Big|_N \quad (\text{II.21})$$

où  $N$  est l'itération courante de Newton. Ensuite, les variables d'état sont réactualisées en fin de pas après l'itération de Newton. Par exemple, la déformation plastique équivalente est calculée par :

$$\bar{\epsilon}^P \Big|^{t+\Delta t} = \bar{\epsilon}^P \Big|^t + \Delta\bar{\epsilon}^P \quad (\text{II.22})$$

où l'incrément de déformation plastique équivalente est déterminé par :

$$\Delta\bar{\epsilon}^P \Big|_N = \Delta\bar{\epsilon}^P \Big|_{N-1} + c(\Delta\bar{\epsilon}^P) \Big|_N \quad (\text{II.23})$$

Dans l'équation (II.23), la correction sur l'incrément de déformation plastique équivalente est calculée à travers l'équation de Newton établie d'après l'équivalence du travail plastique associée à l'itération (N-1) :

$$c(\Delta\bar{\epsilon}^P) \Big|_N = \left\{ \left[ \sigma_{ij} \Delta\epsilon_{ij}^P - \bar{\sigma} \Delta\bar{\epsilon}^P \right] / \left[ \bar{\sigma} + H(\bar{\sigma}) \Delta\bar{\epsilon}^P \right] \right\}_{N-1} \quad (II.24)$$

### II.2.3.2. Obtention du module tangent

Dans le cadre des algorithmes de prévision élastique et correction plastique de type retour normal, Simo et Taylor (1985) ont démontré que le module tangent doit être calculé d'après une linéarisation cohérente avec l'algorithme d'intégration des équations constitutives afin que la convergence quadratique issue de la solution basée sur la méthode de Newton-Raphson soit assurée. Lorsque l'itération locale de Newton décrite dans la section précédente a convergé, le module tangent cohérent est ensuite déterminé en laissant toutes les variables varier autour de la solution obtenue en fin de pas de calcul. D'après la loi de Hooke (II.9) et la décomposition des vitesses de déformation totale (II.8), les variations entre les déformations et les contraintes sont :

$$\partial\epsilon_{ij} = S_{ijkl}^e \partial\sigma_{ij} + \partial\epsilon_{ij}^P \quad (II.25)$$

où  $S_{ijkl}^e = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{4\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$  est le tenseur des complaisances élastiques.

Les variations sur la règle d'écoulement plastique associée (II.10), la loi d'écrouissage (II.11) et sur la condition de chargement plastique (II.12) sont données respectivement par :

$$\partial\epsilon_{ij}^P = \partial\bar{\epsilon}^P F_{,ij} + \Delta\bar{\epsilon}^P F_{,ijkl} \partial\sigma_{kl} \quad (II.26)$$

$$\partial\bar{\sigma} = H(\bar{\sigma}) \partial\bar{\epsilon}^P \quad (II.27)$$

$$F_{,ij} \partial\sigma_{ij} - \partial\bar{\sigma} = 0 \quad (II.28)$$

et en combinant ces relations :

$$\partial\epsilon_{ij}^P = F_{,ij} F_{,kl} / H(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\epsilon}^P F_{,ijkl} \partial\sigma_{kl} \quad (II.29)$$

Ensuite, en remplaçant (II.29) dans (II.25), le système suivant d'équations est obtenu :

$$\partial\epsilon_{ij} = \left[ F_{,ij} F_{,kl} / H(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\epsilon}^P F_{,ijkl} + S_{ijkl}^e \right] \partial\sigma_{kl} \quad (II.30)$$

dont la solution fournit les composantes du tenseur des complaisances élasto-plastique :

$$S_{ijkl}^{ep} = \left[ F_{,ij} F_{,kl} / H(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\epsilon}^P F_{,ijkl} + S_{ijkl}^e \right] \quad (II.31)$$

et le module tangent cohérent est enfin déterminé après l'inversion de (II.31). L'algorithme général employé dans le sous-programme **UMAT** est résumé dans le Tableau (II.1).

Tableau (II.1) – Schéma de l'algorithme employé dans le sous-programme UMAT

(1) Calcul du tenseur d'élasticité	: $C_{ijkl}^e$
(2) Recouvrement des déformations et des variables d'état	: $\varepsilon_{ij}^e \Big _t, \varepsilon_{ij}^p \Big _t$ et $\bar{\varepsilon}^p \Big _t$
(3) Préviation élastique	: $\sigma_{ij}^{essai} = \sigma_{ij}^t + C_{ijkl}^e \Delta \varepsilon_{kl}$
(4) Écrouissage et contrainte équivalente	: $\bar{\sigma}^t = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p), H(\bar{\sigma})^t$ et $F(\sigma_{ij}^{essai})$
(5) Test : Si $F(\sigma_{ij}^{essai}) - \bar{\sigma}^t > 0$ alors : début de la boucle de l'itération de Newton	
Corrections associées aux incréments des déformations plastiques	
$c(\Delta \varepsilon_{mn}^p) \left[ \delta_{im} \delta_{jn} + C_{klmn}^e (F_{,ijkl} \Delta \bar{\varepsilon}^p + F_{,ij} F_{,kl} / \hat{H}(\bar{\sigma})) \right] = F_{,ij} (\Delta \bar{\varepsilon}^p + f / \hat{H}(\bar{\sigma})) - \Delta \varepsilon_{ij}^p$	
Déformations plastiques	
$\Delta \varepsilon_{ij}^p \Big _N = \Delta \varepsilon_{ij}^p \Big _{N-1} + c(\Delta \varepsilon_{ij}^p) \Big _N$	
Incrément de la déformation plastique équivalente	
$\Delta \bar{\varepsilon}^p \Big _N = \Delta \bar{\varepsilon}^p \Big _{N-1} + c(\Delta \bar{\varepsilon}^p) \Big _N$ avec $c(\Delta \bar{\varepsilon}^p) \Big _N = \left\{ \left[ \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij}^p - \bar{\sigma} \Delta \bar{\varepsilon}^p \right] / \left[ \bar{\sigma} + H(\bar{\sigma}) \Delta \bar{\varepsilon}^p \right] \right\} \Big _{N-1}$	
Correction des contraintes	
$\sigma_{ij} \Big _N = \sigma_{ij} \Big _{N-1} - C_{ijkl}^e c(\Delta \varepsilon_{kl}^p) \Big _N$	
Écrouissage et contrainte équivalente	
$\bar{\sigma}_N = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p + \Delta \bar{\varepsilon}^p), H(\bar{\sigma})_N$ et $F(\sigma_{ij})_N$	
Critère de convergence	
$F(\sigma_{ij})_N - \bar{\sigma}_N \leq \text{Tolérance} : \text{fin de la boucle de Newton}$	
(6) Réactualisation des variables	: $\varepsilon_{ij}^e \Big ^{t+\Delta t}, \varepsilon_{ij}^p \Big ^{t+\Delta t}$ et $\bar{\varepsilon}^p \Big ^{t+\Delta t}$
(7) Module tangent cohérent	: $J_{ijkl}^{t+\Delta t} = \left[ F_{,ij} F_{,kl} / H(\bar{\sigma}) + \Delta \bar{\varepsilon}^p F_{,ijkl} + S_{ijkl}^e \right]^{-1}$
(8) Sinon : alors	
$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^{essai} \text{ et } J_{ijkl}^{t+\Delta t} = C_{ijkl}^e$	

Les équations nécessaires à la détermination des corrections associées aux incréments de déformations plastiques et à l'obtention du module tangent cohérent dans le cas général de l'élasto-plasticité orthotrope sont développées dans les annexes A et B respectivement.

## II.2.4. Abaqus/Explicit : VUMAT

Dans le programme **Abaqus/Explicit**, les équations d'équilibre globales sont résolues à travers une technique d'intégration explicite. Comme cette technique ne requiert ni itérations d'équilibre ni la définition du module tangent, l'intégration des équations constitutives d'un modèle de plasticité est simplement obtenue en fonction des incréments des déformations plastiques lorsque la condition de chargement élasto-plastique est vérifiée. Dans le cas de l'hypothèse d'élasticité linéaire isotrope, le nouvel état des contraintes en fin de pas de calcul est déterminé par :

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^{\text{essai}} - 2\mu \Delta \varepsilon_{ij}^p \quad (\text{II.32})$$

Il est à noter que comme l'algorithme d'Euler implicite, la correction définie par l'équation (II.32) est colinéaire aux incréments des déformations plastiques, justifiant ainsi la dénomination de méthode de retour normal. Dans le cas particulier du critère de von Mises, représenté dans l'espace du déviateur des contraintes sur la Figure (II.1), cet algorithme est connu sous le nom de "méthode de retour radial" (Krieg et Key, 1976).

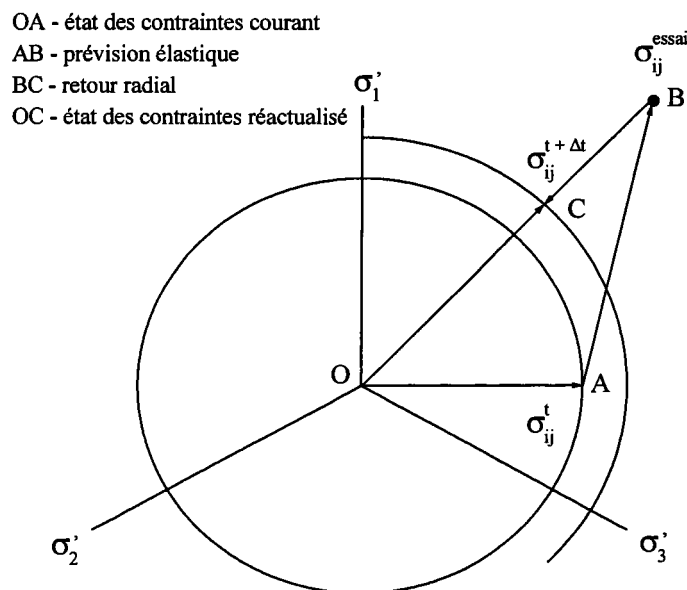


Figure (II.1) – Méthode de retour radial schématisée par le critère isotrope de von Mises représenté dans l'espace du déviateur des contraintes.

Puisque les incréments des déformations plastiques sont déterminés d'après la règle d'écoulement plastique associée, équation (II.10), le problème se réduit ainsi à la détermination d'une seule inconnue : l'incrément de la déformation plastique équivalente qui permet alors la définition de toutes les autres variables en fin de pas de calcul. Une méthode appropriée pour la détermination de l'incrément de la déformation plastique équivalente consiste à calculer l'incrément du travail plastique associé à l'incrément de calcul (II.6) :

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_{ij}^p = \bar{\sigma}^{t+\Delta t} \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (II.33)$$

connaissant la règle d'écoulement plastique associée (II.10)

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta \bar{\varepsilon}^p F_{,ij}^{essai} \quad (II.34)$$

et l'évolution de l'écrouissage (II.7)

$$\bar{\sigma}^{t+\Delta t} = \bar{\sigma}^t + H(\bar{\sigma})^t \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (II.35)$$

Enfin, en remplaçant les équations (II.32) et (II.34-35) dans l'équation (II.33), l'incrément de la déformation plastique équivalente est calculé par :

$$\Delta \bar{\varepsilon}^p = \frac{(\sigma_{ij} F_{,ij})^{essai} - \bar{\sigma}^t}{H(\bar{\sigma})^t + 2\mu (F_{,ij} F_{,ij})^{essai}} \quad (II.36)$$

où selon l'identité d'Euler (II.5),  $(\sigma_{ij} F_{,ij})^{essai} = F(\sigma_{ij}^{essai})$ .

### II.3. Cas de contraintes planes

Dans le cas particulier de contraintes planes, la composante de la déformation normale au plan  $(x, y)$ ,  $\varepsilon_{zz}$ , n'est pas définie par la cinématique mais en posant la restriction  $\sigma_{zz} = 0$ . De ce fait, il est nécessaire d'effectuer de légères modifications sur les méthodes décrites dans les sections précédentes. Dans les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** la prévision élastique est faite d'après la loi de Hooke écrite en contraintes planes pour le cas de l'élasticité linéaire isotrope. Donc, l'équation (II.13) est réécrite de la façon suivante<sup>12</sup> :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{essai} &= \sigma_{xx}^t + \frac{E}{(1-\nu^2)} [\Delta \varepsilon_{xx} + \nu \Delta \varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy}^{essai} &= \sigma_{yy}^t + \frac{E}{(1-\nu^2)} [\Delta \varepsilon_{yy} + \nu \Delta \varepsilon_{xx}] \\ \sigma_{xy}^{essai} &= \sigma_{xy}^t + \mu \Delta \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (II.37)$$

---

<sup>12</sup> Dans le logiciel **Abaqus** les composantes des déformations de cisaillement sont prises comme  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} (i \neq j)$

Puisque la prévision élastique est menée selon la loi d'élasticité linéaire isotrope de Hooke dans le cas de contraintes planes, la correction plastique doit être obtenue alors à partir de cet état de contraintes. Dans **UMAT** les composantes des contraintes dans l'itération de Newton sont déterminées d'après l'équation (II.21) par :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}|_N &= \sigma_{xx}|_{N-1} - \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ c(\Delta \epsilon_{xx}^p) + \nu c(\Delta \epsilon_{yy}^p) \right]_N \\ \sigma_{yy}|_N &= \sigma_{yy}|_{N-1} - \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ c(\Delta \epsilon_{yy}^p) + \nu c(\Delta \epsilon_{xx}^p) \right]_N \\ \sigma_{xy}|_N &= \sigma_{xy}|_{N-1} - \mu c(\Delta \gamma_{xy}^p)|_N \end{aligned} \quad (II.38)$$

Dans **VUMAT**, l'incrément de déformation plastique équivalente doit être recalculé d'après le travail plastique en contraintes planes. Donc, à partir des équations (II.32-35), l'incrément de déformation plastique équivalente est évalué par :

$$\Delta \bar{\epsilon}^p = \frac{F(\sigma_{ij}^{essai}) - \bar{\sigma}^t}{H(\bar{\sigma})^t + \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ F_{,xx}^{essai} F_{,xx}^{essai} + F_{,yy}^{essai} F_{,yy}^{essai} + 2\nu F_{,xx}^{essai} F_{,yy}^{essai} \right] + \mu F_{,xy}^{essai} F_{,xy}^{essai}} \quad (II.39)$$

Ensuite, les nouvelles contraintes sont alors obtenues par les corrections :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{t+\Delta t} &= \sigma_{xx}^{essai} - \frac{E \Delta \bar{\epsilon}^p}{(1-\nu^2)} \left[ F_{,xx}^{essai} + \nu F_{,yy}^{essai} \right] \\ \sigma_{yy}^{t+\Delta t} &= \sigma_{yy}^{essai} - \frac{E \Delta \bar{\epsilon}^p}{(1-\nu^2)} \left[ F_{,yy}^{essai} + \nu F_{,xx}^{essai} \right] \\ \sigma_{xy}^{t+\Delta t} &= \sigma_{xy}^{essai} - \mu \Delta \bar{\epsilon}^p F_{,xy}^{essai} \end{aligned} \quad (II.40)$$

où les incréments des déformations plastiques sont définis d'après la règle d'écoulement plastique associée, équation (II.10),  $\Delta \epsilon_{ij}^p = \Delta \bar{\epsilon}^p F_{,ij}^{essai}$ .

L'incrément de déformation à travers l'épaisseur  $\Delta \epsilon_{zz}$  doit être défini par l'utilisateur dans le sous-programme **VUMAT**. Donc, d'après la condition de contraintes planes ( $\sigma_{zz} = 0$ ) et la décomposition des vitesses de déformation totale (II.8) cet incrément est calculé par :

$$\Delta \epsilon_{zz} = \Delta \epsilon_{zz}^e + \Delta \epsilon_{zz}^p \quad (II.41)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{zz}^e &= -\frac{\nu}{E} \left[ (\sigma_{xx}^{t+\Delta t} - \sigma_{xx}^t) + (\sigma_{yy}^{t+\Delta t} - \sigma_{yy}^t) \right] \\ \Delta \epsilon_{zz}^p &= -(\Delta \epsilon_{xx}^p + \Delta \epsilon_{yy}^p) = -\Delta \bar{\epsilon}^p (F_{,xx}^{essai} + F_{,yy}^{essai}) \end{aligned} \quad (II.42)$$

Ensuite, la déformation à travers l'épaisseur est stockée comme une variable d'état :

$$\epsilon_{zz}^{t+\Delta t} = \epsilon_{zz}^t + \Delta \epsilon_{zz} \quad (II.43)$$

Il faut noter que dans les équations définies ci-dessus, les termes du type  $F_{,ij}$  ( $i \neq j$ ) sont calculés à partir d'expressions de  $F$  tenant compte de la symétrie du tenseur des contraintes, de sorte que par exemple  $F_{,xy} = \partial F / \partial \sigma_{xy} + \partial F / \partial \sigma_{yx} = 2F_{,ij}$  avec  $i \equiv x$  et  $j \equiv y$ . L'ensemble d'équations nécessaires dans **UMAT** à la détermination des corrections associées aux incréments de déformations plastiques et à l'obtention du module tangent cohérent en contraintes planes sont présentées respectivement dans les annexes A et B.

## **II.4. Formulation en grandes déformations**

Dans le logiciel **Abaqus** le comportement élasto-plastique en grandes déformations est géré à partir de la décomposition additive du tenseur de vitesses de déformation totale,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$ , et la loi hypoélastique,  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e = \mathbf{C}^e [\mathbf{D} - \mathbf{D}^p]$ , exprimée dans le référentiel corotationnel. Les déformations fournies par **Abaqus** sont alors obtenues par intégration des taux de déformations dans le référentiel corotationnel. Par défaut, dans le logiciel **Abaqus** les composantes de déformations sont présentées, selon le cas, dans une base orthonormée  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  correspondant au repère global employé lors de la génération du maillage (éléments de type solide), ou dans un système de coordonnées locales créé par **Abaqus** (éléments de type membrane et coque). Toutefois, lorsqu'un matériau orthotrope est considéré, il est recommandé d'exprimer ces composantes dans un référentiel local tournant afin de tenir compte de l'orientation initiale du matériau et si possible de la rotation des axes matériels au cours de la déformation. Ce référentiel tournant local est défini dans le logiciel **Abaqus** par le mot-clé **\*ORIENTATION**.

Lorsque l'option **\*ORIENTATION** est activée, les composantes de déformations sont exprimées dans une base locale fixe par rapport au référentiel corotationnel et les axes matériels seront donc tournés avec le taux de rotation donné par le spin. Il faut observer, cependant, que la rotation des axes d'orthotropie est prise en compte en fonction de la formulation de l'élément et des équations constitutives adoptées dans les simulations. Gilormini et Roudier (1993) ont analysé les mesures de déformations et de contraintes utilisées dans **Abaqus/Standard** à travers l'analyse du problème de cisaillement simple en grandes déformations. Ces auteurs ont constaté pour toutes les lois de comportement disponibles dans **Abaqus/Standard**, hormis la loi hyperélastique, qu'en utilisant l'option **\*ORIENTATION** les composantes de déformations sont données dans le référentiel corotationnel pour les éléments de formulations de type solide ou membrane, ou dans le repère local initial non tourné pour les éléments de type coque.

À travers l'option \*ORIENTATION les axes de symétrie orthotrope  $(x, y, z)$  sont pris initialement coïncidents avec les axes globaux où le maillage est défini  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . En plus, l'orthotropie est supposée être maintenue au cours de la déformation dans un repère tournant avec le référentiel corotationnel. Dans ce cas, les calculs présentés précédemment sont en fait effectués dans le référentiel corotationnel, ce qui correspond à l'utilisation de la dérivée de Jaumman. Donc, avec l'option \*ORIENTATION activée, l'implantation des équations constitutives d'un critère de plasticité orthotrope dans les sous-programmes UMAT et VUMAT est réalisée directement sans avoir besoin de tenir compte de la rotation de repères.

## **II.5. Application au critère de Ferron et al. (1994)**

L'implantation du critère de Ferron et al. (1994) à l'aide du sous-programme UMAT avait été réalisée antérieurement par Tourki (1995) et Fromentin (1998) en employant respectivement le module tangent élasto-plastique et le module tangent cohérent pour l'état de contraintes planes. Dans ce travail, cette dernière version a été reconsidérée comme point de départ pour l'extension du critère de Ferron et al. (1994) au cas général tridimensionnel. Ce critère de plasticité, brièvement décrit au Chapitre I, est détaillé ci-après afin d'obtenir les équations nécessaires à son implantation dans les sous-programmes UMAT et VUMAT du programme d'éléments finis Abaqus.

### **II.5.1. Cas de contraintes planes**

Généralement les critères de plasticité orthotrope sont exprimés dans les axes correspondant aux intersections des trois plans orthogonaux, i.e., les axes de symétrie orthotrope  $(x, y, z)$ . Dans le cas particulier de contraintes planes, la fonction de charge est décrite sous la forme :

$$f = F(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) - \bar{\sigma} \quad (\text{II.44})$$

où  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$  représentent les composantes des contraintes dans le plan  $(x, y)$  et  $\bar{\sigma}$  est une mesure de la contrainte équivalente. Le passage de la fonction de charge décrite dans les axes d'anisotropie planaire  $(x, y)$  vers les axes des contraintes principales  $(1, 2)$  est effectué à travers la définition de l'orientation entre ces deux repères donnée par l'angle  $\alpha = (x, 1) = (y, 2)$ , schématisé dans la Figure (II.2a). Dans ce cas, la fonction de charge (II.44) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$f = \phi(\sigma_1, \sigma_2, \alpha) - \bar{\sigma} \quad (\text{II.45})$$



Une nouvelle description de la fonction de charge peut être obtenue également en effectuant un changement de variables défini par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\ x_2 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned} \tag{II.46}$$

représentant respectivement, selon la Figure (II.2b), le centre et le rayon du cercle de Mohr. De cette façon, la fonction de charge s'écrit :

$$f = \psi(x_1, x_2, \alpha) - \bar{\sigma} \tag{II.47}$$

Finalement, la fonction de charge décrite par l'équation (II.47) est représentée sous une forme paramétrique donnée par :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\theta, \alpha, \bar{\sigma}) \\ x_2 &= x_2(\theta, \alpha, \bar{\sigma}) \end{aligned} \tag{II.48}$$

où  $\theta$  est l'angle associé à une description en coordonnées polaires définie par :

$$\begin{aligned} x_1 &= G(\theta, \alpha, \bar{\sigma}) \cos \theta \\ x_2 &= G(\theta, \alpha, \bar{\sigma}) \sin \theta \end{aligned} \tag{II.49}$$

Dans la représentation en coordonnées polaires donnée par (II.49),  $G(\theta, \alpha, \bar{\sigma})$  est le rayon polaire du point courant de la surface de charge dans les axes  $(x_1, x_2)$ . Dans le cas particulier de l'écroutissage isotrope, le rayon polaire peut être redéfini par :

$$G(\theta, \alpha, \bar{\sigma}) = \bar{\sigma} g(\theta, \alpha) \tag{II.50}$$

où  $g(\theta, \alpha)$  représente le rayon normalisé par la contrainte équivalente en traction équi-biaxiale  $\bar{\sigma}$  dans l'espace des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , voir Figure (II.3).

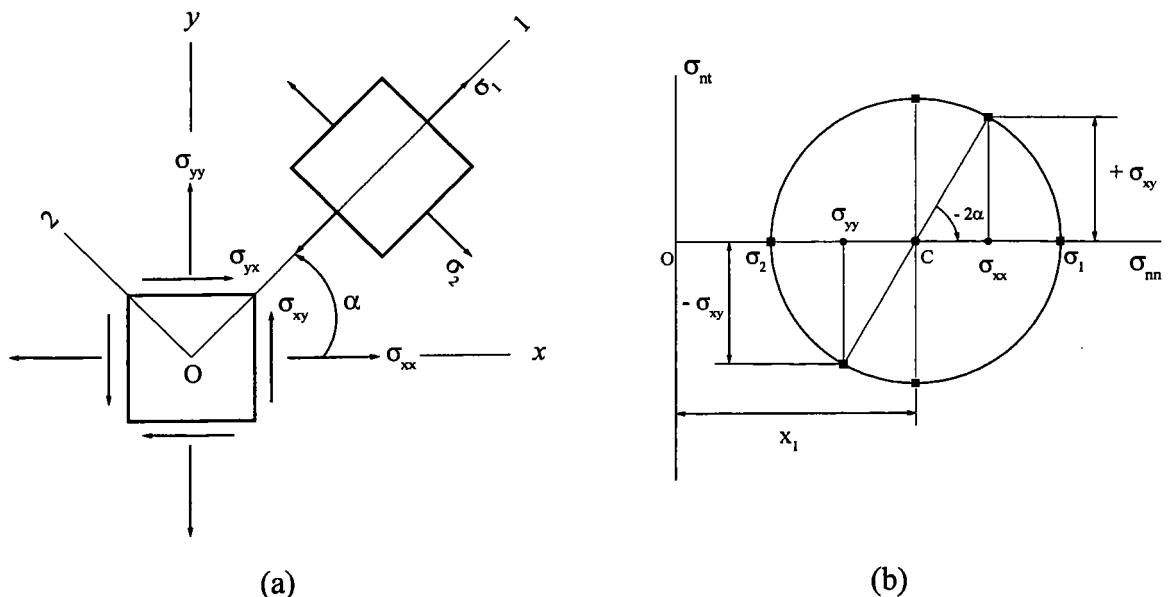


Figure (II.2) – Définition du changement des variables pour l'état de contraintes planes.

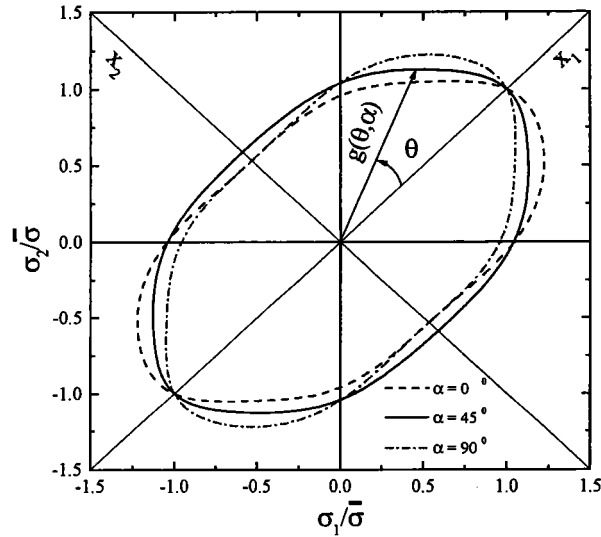


Figure (II.3) – Représentation du critère de Ferron et al. (1994) dans l'espace des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2)$  normalisées par la contrainte équivalente en traction équi-biaxiale  $\bar{\sigma}$ . D'après Makkouk (1994).

La fonction  $g(\theta, \alpha)$  proposée par Ferron et al. (1994), satisfaisant un certain nombre de conditions de consistance vis-à-vis de l'orthotropie, est définie comme une extension d'une fonction de charge  $g(\theta)$  en isotropie transverse par :

$$(1-k)^{m/6} g(\theta, \alpha)^{-m} = F(\theta)^{m/6} - 2a \sin \theta \cos^{2n-1} \theta \cos 2\alpha + b \sin^{2p} \theta \cos^{2q} 2\alpha \quad (\text{II.51})$$

où les exposants  $m, n, p, q$  sont des entiers positifs et  $a$  et  $b$  des paramètres sans dimension caractérisant l'anisotropie planaire. La fonction  $g(\theta)$  en isotropie transverse est une extension du critère de Drucker (1949) définie de la manière suivante :

$$(1-k)g(\theta)^{-6} = F(\theta) = (\cos^2 \theta + A \sin^2 \theta)^3 - k \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - B \sin^2 \theta)^2 \quad (\text{II.52})$$

où les paramètres  $A$  et  $B$  sont des réels positifs tandis que le paramètre  $k$  ( $k > 0$ ) permet la définition d'un aplatissement de la surface de charge dans les régions de cisaillement pur et déformation plane.

Le critère de Ferron et al. (1994) est entièrement déterminé en connaissant les exposants  $m, n, p, q$  et en déterminant les paramètres  $a$  et  $b$  pour la version générale (II.51) et les paramètres  $A, B$  et  $k$  dans la version d'isotropie transverse (II.52). La détermination des paramètres du critère de Ferron et al. (1994) d'après des données expérimentales est présentée dans l'annexe C.

Du point de vue de l'implantation dans le logiciel **Abaqus**, les grandeurs qu'il faut déterminer sont la contrainte équivalente au sens du critère de Ferron et al. (1994),  $F(\sigma_{ij})$ , et les dérivées partielles du type  $F_{,ij}$  et  $F_{,ijkl}$  nécessaires à l'obtention des corrections associées aux incréments des déformations plastiques (II.20) et du module tangent cohérent (II.31).

Dans ce cas, il est préférable de prendre la fonction de charge représentée sous la forme donnée par (II.47) :

$$f = \psi(x_1, x_2, \alpha) - \bar{\sigma} = 0 \text{ ou } F(\sigma_{ij}) = \psi(x_1, x_2, \alpha) \quad (\text{II.53})$$

avec le changement des variables

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \text{ et} \\ x_2 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \left[ \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 / 4 + \sigma_{xy}^2} \right] \text{sign}(\sigma_{xy}) \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

où :

$$\text{sign}(\sigma_{xy}) = \sigma_{xy} / \sqrt{(\sigma_{xy})^2} \quad (\text{II.55})$$

La contrainte équivalente au sens du critère de Ferron et al. (1994) est obtenue en exprimant l'équation (II.53) à l'aide des relations (II.54-55) :

$$\psi(x_1, x_2, \alpha) = \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{(x_1^2 + Ax_2^2)^3 - kx_1^2(x_1^2 - Bx_2^2)^2}{(1-k)} \right]^{m/6} \\ & - \frac{2a}{(1-k)^{m/6}} \frac{x_2 x_1^{2n-1}}{(x_1^2 + x_2^2)^{n-m/2}} \cos 2\alpha \\ & + \frac{b}{(1-k)^{m/6}} \frac{x_2^{2p}}{(x_1^2 + x_2^2)^{p-m/2}} \cos^{2q} 2\alpha \end{aligned} \right\}^{1/m} \quad (\text{II.56})$$

Les dérivées partielles de  $F(\sigma_{ij})$  sont définies en prenant la différentielle totale de la fonction de charge, sous la forme de l'équation (II.47), dans la condition de chargement élasto-plastique, i.e.,

$$df = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} d\alpha - d\bar{\sigma} = 0 \quad (\text{II.57})$$

Ensuite,  $dx_1$ ,  $dx_2$  et  $d\alpha$  sont déterminées en fonction de  $d\sigma_{xx}$ ,  $d\sigma_{yy}$ ,  $d\sigma_{xy}$  d'après (II.54) et en remplaçant ces résultats dans l'équation (II.57), celle-ci peut donc être réécrite par :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \cos 2\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\sin 2\alpha}{2x_2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right] d\sigma_{xx} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \cos 2\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\sin 2\alpha}{2x_2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right] d\sigma_{yy} \\ & \frac{1}{2} \left[ 2 \sin 2\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\cos 2\alpha}{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right] d\sigma_{xy} - d\bar{\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

où

$$\sin 2\alpha = \sigma_{xy}/x_2 \text{ et } \cos 2\alpha = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/(2x_2) \quad (\text{II.59})$$

Enfin, les dérivées premières de  $F(\sigma_{ij})$  sont obtenues par identification entre l'expression définie par (II.58) et la différentielle totale de la fonction de charge exprimée dans le repère des axes d'orthotropie (II.44) :

$$\begin{aligned}
 F_{,xx} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \cos 2\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\sin 2\alpha}{2x_2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right] \\
 F_{,yy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \cos 2\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\sin 2\alpha}{2x_2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right] \\
 F_{,xy} &= \frac{1}{2} \left[ 2 \sin 2\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\cos 2\alpha}{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right]
 \end{aligned} \tag{II.60}$$

La composante normale au plan  $(x, y)$  est déterminée d'après la condition d'incompressibilité plastique,  $\Delta \varepsilon_{zz}^p = -(\Delta \varepsilon_{xx}^p + \Delta \varepsilon_{yy}^p)$  et la règle d'écoulement plastique associée (II.10), i.e. ;  $F_{,zz} = -(F_{,xx} + F_{,yy})$ .

Comme les dérivées premières (II.60) sont exprimées en fonction des variables  $(x_1, x_2, \alpha)$ , les dérivées secondes de  $F(\sigma_{ij})$  peuvent être également déterminées de façon similaire. Ces dérivées ont pour forme générale les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 F_{,xxxx} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial F_{,xx}}{\partial x_1} + \cos 2\alpha \frac{\partial F_{,xx}}{\partial x_2} - \frac{\sin 2\alpha}{2x_2} \frac{\partial F_{,xx}}{\partial \alpha} \right] \\
 F_{,xxyy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial F_{,xx}}{\partial x_1} - \cos 2\alpha \frac{\partial F_{,xx}}{\partial x_2} + \frac{\sin 2\alpha}{2x_2} \frac{\partial F_{,xx}}{\partial \alpha} \right] \\
 F_{,xxxxy} &= \frac{1}{2} \left[ 2 \sin 2\alpha \frac{\partial F_{,xx}}{\partial x_2} + \frac{\cos 2\alpha}{x_2} \frac{\partial F_{,xx}}{\partial \alpha} \right]
 \end{aligned} \tag{II.61}$$

où les deux derniers indices définissent la dérivation partielle des composantes représentées par les deux premiers indices, c'est-à-dire,  $F_{,ijkl} = \partial F_{,ij} / \partial \sigma_{kl}$ .

## II.5.2. Cas 3D

Sachant que l'écoulement plastique des matériaux cristallins s'effectue essentiellement par cisaillement, comme par exemple les mécanismes de glissement, et en conséquence sans variation de volume, la fonction de charge est donc indépendante de la pression hydrostatique. Dans ce cas, la forme générale de la fonction de charge en contraintes planes, représentée dans les axes d'orthotropie par l'équation (II.44), est équivalente à :

$$f = F[(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}), (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}), \sigma_{xy}] - \bar{\sigma} \tag{II.62}$$

Le passage du critère de plasticité de Ferron et al. (1994) établi dans le plan  $(x, y)$  au cas général de contraintes en trois dimensions peut être obtenu en remplaçant les composantes normales des contraintes  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy})$ , dans la version en contraintes planes, par  $(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})$  et  $(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})$  respectivement. Ensuite, les composantes de cisaillement hors-plan  $(x, y)$  sont ajoutées à l'aide de termes quadratiques, pour parvenir à la forme en trois dimensions du critère de Ferron et al. (1994) :

$$f = \Phi(x_1, x_2, \alpha, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}) - \bar{\sigma} = \sqrt{\psi^2(x_1, x_2, \alpha) + \beta\sigma_{xz}^2 + \gamma\sigma_{yz}^2} - \bar{\sigma} \quad (\text{II.63})$$

où la fonction  $\psi(x_1, x_2, \alpha)$  est la contrainte équivalente définie en contraintes planes (II.56). En l'absence de données sur le comportement en cisaillement hors plan, les coefficients  $\beta$  et  $\gamma$  sont pris égaux à leur valeur dans le critère isotrope de von Mises, i.e.,  $\beta = \gamma = 3$ .

En ce qui concerne le changement de variables, la variable  $x_1$  est redéfinie par :

$$x_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - 2\sigma_{zz}}{2} \quad (\text{II.64})$$

tandis que la variable  $x_2$  (II.54) et l'orientation  $\alpha$  (II.59) restent inchangées.

Les dérivées partielles de la fonction de charge (II.63), nécessaires pour les calculs des corrections plastiques et du module tangent cohérent, sont obtenues de la même façon qu'en contraintes planes. Par analogie avec (II.60), les dérivées premières sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} F_{,xx} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \cos 2\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\sin 2\alpha}{2x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right] \\ F_{,yy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \cos 2\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\sin 2\alpha}{2x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right] \\ F_{,zz} &= - (F_{,xx} + F_{,yy}) \\ F_{,xy} &= \frac{1}{2} \left[ 2 \sin 2\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\cos 2\alpha}{x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right] \\ F_{,xz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{xz}} \\ F_{,yz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{yz}} \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

d'où les dérivées secondes peuvent être aisément déduites.

## II.6. Validations

Dans le but de vérifier les procédures d'implantation du critère de Ferron et al. (1994) dans le logiciel **Abaqus**, les prévisions données par les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** ont été confrontées aux résultats fournis par **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit** avec l'option **\*POTENTIAL** pour les critères de von Mises et de Hill quadratique (1948). Les simulations numériques ont été réalisées avec une station de travail HP 9000/785/J5600 (1.5 Go de RAM) et avec la version 5.8-15 du logiciel **Abaqus**.

La traction simple d'un seul élément a été choisie puisque dans ce cas il est assez simple d'évaluer si l'anisotropie est prise en compte en définissant les directions d'orthotropie  $(x, y, z)$  initialement coïncidentes avec les axes globaux  $(1, 2, 3)$  du maillage. Les axes d'orthotropie sont définis par l'option **\*ORIENTATION** où les directions initiales de orthotropie sont précisées par une rotation  $\alpha$  autour de l'axe normal aux axes globaux  $(1, 2)$ . En outre, en vue de comparer les deux techniques d'intégration disponibles dans **Abaqus**, les éléments de types coque à quatre nœuds (**S4R**) et solide (**C3D8R**) avec une interpolation linéaire et une intégration réduite ont été choisis puisqu'ils représentent les seuls éléments communs aux bibliothèques des versions **Standard** et **Explicit**. Les dimensions caractéristiques sont de  $10 \times 10 \times 1$  mm et  $10 \times 10 \times 10$  mm pour les éléments de formulations de type coque et solide respectivement. Dans les deux cas analysés, un déplacement de 2 mm est imposé selon la direction globale 1 aux nœuds indiqués sur la Figure (II.4).

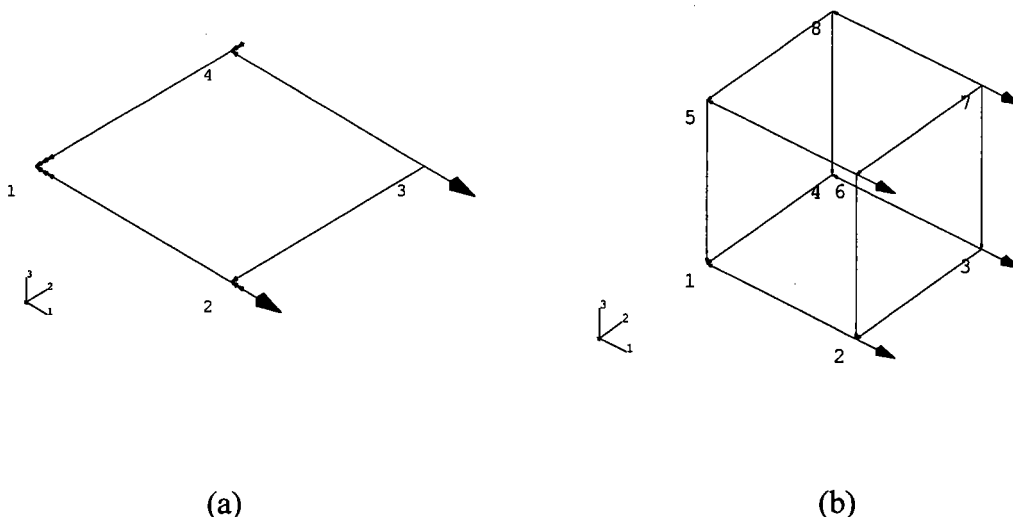


Figure (II.4) – Éléments des formulations de type coque (S4R) et de type solide (C3D8R) employés dans les validations numériques des sous-programmes **UMAT** et **VUMAT**.

Dans les simulations numériques la loi d'érouissage adoptée est la loi de Swift définie par :

$$\bar{\sigma} = K (\epsilon_0 + \bar{\epsilon}^p)^N \tag{II.66}$$

où  $N$ ,  $K$  et  $\epsilon_0$  sont l'exposant d'érouissage, le coefficient de résistance et la pré-déformation en traction uniaxiale respectivement. Cependant, puisque le critère de Ferron et al. (1994) est normalisé par la contrainte en traction équibiaxiale, les paramètres de la loi de Swift sont transformés en données de traction équibiaxiale par le passage défini dans l'annexe D. Les paramètres de la loi d'érouissage sont  $K = 500$  MPa,  $\epsilon_0 = 2.0 \times 10^{-3}$  et  $N = 0.2$  alors que les propriétés élastiques prises sont  $E = 200 \times 10^9$  Pa et  $\nu = 0.3$ .

Deux types de descriptions du comportement mécanique ont été adoptés dans les validations numériques des sous-programmes **UMAT** et **VUMAT**. Le premier cas correspond à un matériau isotrope décrit par le critère de von Mises tandis que dans le deuxième cas, un matériau anisotrope est défini par  $R_0 = 1.5$ ,  $R_{45} = 0.5$  et  $R_{90} = 1.0$ , i.e., les valeurs des coefficients d'anisotropie de Lankford dans les directions parallèle, diagonale et transverse au sens de laminage d'une tôle. Dans les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT**, les critères de von Mises et de Hill quadratique (1948) ont été obtenus comme des cas particuliers du critère de Ferron et al. (1994). Dans le cas du matériau orthotrope, les paramètres  $a$  et  $b$  décrivant l'anisotropie dans le critère de Ferron et al. (1994) ont été calculés à partir des valeurs de  $R_0$ ,  $R_{45}$  et  $R_{90}$  (Annexe C). Dans le cas du critère de Ferron et al. (1994), la valeur du paramètre  $k$  a été prise égale à 0.2 et les exposants  $(n, p)$  égaux à 2.

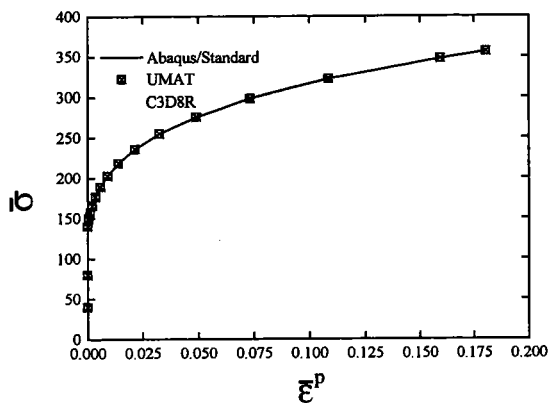
Les Tableaux (II.2) et (II.3) montrent les comparaisons entre les nombres d'incréments et d'itérations requis par **Abaqus/Standard**, **Abaqus/Explicit** et par **UMAT** et **VUMAT** respectivement. Dans les deux situations analysées, temps d'utilisation du processeur étaient très proches vu que les simulations réalisées ne faisaient appel qu'à un seul élément et qu'en plus, la solution d'une sollicitation de traction uniaxiale ne pose pas de problèmes majeurs. Bien que pour un problème général, où par exemple différentes non linéarités sont en jeu, les temps d'utilisation du processeur avec **UMAT** et **VUMAT** soient supérieurs car ces sous-programmes sont appelés à chaque incrément (ou itération) et à chaque point d'intégration, leur utilisation lors de la traction simple d'un seul élément ne fournit qu'une augmentation très faible du nombre d'incréments et ou d'itérations comparés à l'option \*POTENTIAL du logiciel **Abaqus**. D'après ces comparaisons, il est possible de conclure que les implantations réalisées avec le critère de Ferron et al. (1994) dans **UMAT** et **VUMAT** sont cohérentes, satisfaisant ainsi le compromis entre la fonctionnalité et la souplesse de l'utilisation du critère de Ferron et al. (1994) dans les versions **Standard** et **Explicit** du logiciel **Abaqus**.

Tableau (II.2) – Nombres d’incréments et d’itérations nécessaires à la solution d’un élément soumis à une traction uniaxiale simple pour  $\alpha = 0$  degrés obtenus avec **Abaqus/Standard** et **UMAT**.

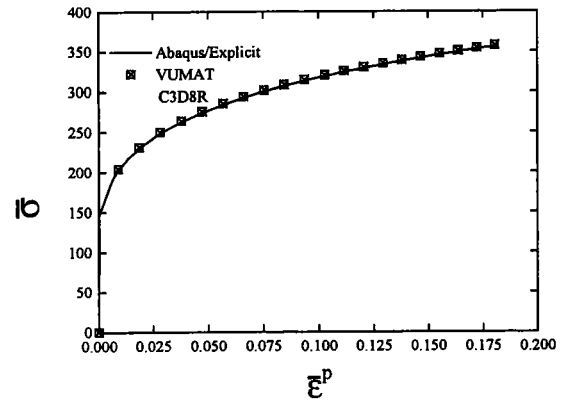
Critère	Abaqus/Standard				UMAT			
	Incréments		Itérations		Incréments		Itérations	
	S4R	C3D8R	S4R	C3D8R	S4R	C3D8R	S4R	C3D8R
von Mises	17	17	18	19	17	17	18	19
Hill quadratique	17	17	19	20	17	17	19	20
Ferron					17	17	19	20

 Tableau (II.3) – Nombres d’incréments nécessaires à la solution d’un élément soumis à une traction uniaxiale simple obtenus pour  $\alpha = 0$  degrés avec **Abaqus/Explicit** et **VUMAT**.

Critère	Abaqus/Explicit		VUMAT	
	Incréments		Incréments	
	S4R	C3D8R	S4R	C3D8R
von Mises	2821	3522	2822	3522
Hill quadratique	2831	3522	2832	3522
Ferron			2834	3522



(a)



(b)

 Figure (II.5) – Contrainte équivalente en fonction de la déformation plastique équivalente de von Mises calculées d’après (a) **Abaqus/Standard** et **UMAT** et (b) **Abaqus/Explicit** et **VUMAT**.

La Figure (II.5) compare la contrainte équivalente en fonction de la déformation plastique équivalente au sens du critère de von Mises obtenue avec l’élément de type solide C3D8R obtenu avec **UMAT-VUMAT** et les logiciels **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit**. D’après cette figure, il est possible de constater que les prévisions faites par **UMAT** et **VUMAT** sont en bonne concordance avec les résultats donnés par **Abaqus**. Le Tableau (II.4) permet de comparer les coefficients d’anisotropie de Lankford en fonction de l’orientation  $\alpha$  de sollicitation calculés par **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit** avec le critère de Hill quadratique (1948), l’option \*POTENTIAL, et à partir du critère de Ferron et al. (1994) avec les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** respectivement.



Tableau (II.4) – Coefficient d’anisotropie de Lankford calculé d’après **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit** et des sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** avec l’élément C3D8R selon les directions  $\alpha = (0, 45, 90)$  degrés par rapport à la direction de laminage.

Critère	Abaqus/Standard			Abaqus/Explicit		
	$\alpha = 0$	$\alpha = 45$	$\alpha = 90$	$\alpha = 0$	$\alpha = 45$	$\alpha = 90$
*POTENTIAL	1.480	0.511	0.993	1.482	0.508	0.992
Hill quadratique	1.480	0.511	0.993	1.484	0.493	0.993
Ferron	1.480	0.503	0.993	1.484	0.494	0.993

Puisque avec l’option \*ORIENTATION les déformations sont données dans le repère des axes matériels initialement tournés par une rotation  $\alpha$ , les déformations suivant les axes de chargement ont été calculées d’après la transformation de repères suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{11} \cos^2 \alpha + \epsilon_{22} \sin^2 \alpha - \gamma_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_{11} \sin^2 \alpha + \epsilon_{22} \cos^2 \alpha + \gamma_{12} \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

où les indices  $(xx, yy, xy)$  représentent les composantes dans le plan  $(x, y)$  situées dans le repère global  $(1, 2, 3)$  tandis que les indices  $(11, 22)$  définissent les composantes dans le repère local orienté par l’angle  $\alpha = (x, 1) = (y, 2)$ .

Le coefficient d’anisotropie de Lankford est défini comme étant le rapport entre les déformations plastiques le long de la largeur et à travers l’épaisseur d’une éprouvette de traction uniaxiale. Donc, en considérant la conservation de volume, le coefficient de Lankford selon une orientation  $\alpha$  quelconque par rapport à la direction de laminage est déterminé par :

$$R_{(\alpha)} = -\frac{\epsilon_{yy}^p}{\epsilon_{xx}^p + \epsilon_{yy}^p} = \frac{\epsilon_{xx}^p}{\epsilon_{xx}^p + \epsilon_{yy}^p} - 1 = \frac{\epsilon_{xx}^p}{\epsilon_{11}^p + \epsilon_{22}^p} - 1 \quad (\text{II.68})$$

D’une façon générale, lorsque le critère de Hill quadratique (1948) est considéré comme un cas particulier du critère de Ferron et al. (1994), les prévisions faites par les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** sont en bon accord avec les résultats fournis par **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit**. Néanmoins, les prévisions numériques du coefficient de Lankford  $R(\alpha)$  obtenues par **Abaqus** ainsi que par les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** sont légèrement écartées des valeurs du matériau adopté.

Ces déviations peuvent être expliquées par deux raisons. Premièrement, les valeurs du coefficient d’anisotropie de Lankford présentées dans le Tableau (II.4) ont été déterminées à partir de déformations élasto-plastiques de l’élément sous charge. Deuxièmement, dans les simulations numériques hors-axes ( $\alpha = 45^0$ ), la transformation imposée à l’élément ne correspond pas rigoureusement à une traction uniaxiale. En effet, l’élément est sollicité par un mode de déformation interdisant la composante de cisaillement  $\gamma_{xy}$ , ce qui génère, par conséquent, une contrainte de cisaillement  $\sigma_{xy}$ .

## **II.7. Conclusion**

Dans ce chapitre, les détails de l'implantation d'un critère de plasticité orthotrope dans les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** disponibles dans les versions implicite et explicite du logiciel d'éléments finis Abaqus ont été présentés d'abord pour le cas général en trois dimensions et en contraintes planes. Ensuite, ces procédures ont été appliquées au critère de plasticité orthotrope proposé par Ferron et al. (1994). Finalement, les prévisions obtenues avec les implantations du critère de Ferron et al. (1994) pour le problème de traction uniaxiale ont été comparées aux résultats fournis par les logiciels Abaqus/Standard et Abaqus/Explicit dans le but de vérifier la pertinence des implantations et de permettre la validation des sous-programmes **UMAT** et **VUMAT**. Dans ces validations, les cas des états de contraintes planes et de trois dimensions ont été étudiés en considérant le comportement du matériau comme isotrope et orthotrope à partir des descriptions de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al.(1994) respectivement. Dans les deux cas analysés, selon les techniques implicite et explicite, les prévisions données par **UMAT** et **VUMAT** sont en très bon accord avec les résultats du logiciel Abaqus obtenus avec l'option \*POTENTIAL. D'ailleurs, le nombre d'itérations et d'incrémentes correspondant aux sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** est pratiquement identique à celui obtenu par le logiciel Abaqus avec l'option \*POTENTIAL, offrant donc à l'utilisateur le choix vis-à-vis de la description du comportement anisotrope entre les critères de plasticité de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994).

# Chapitre III : Simulations numériques

## III.1. Introduction

L'étude bibliographique présentée dans le premier chapitre a montré que les essais d'expansion par poinçonnement hémisphérique, d'emboutissage profond d'une coupelle et de pliage et étirage regroupent les principaux modes de déformation trouvés en emboutissage. Dans ce chapitre, ces essais sont analysés puisqu'ils représentent un très bon moyen d'étudier l'influence du critère de plasticité adopté dans les simulations numériques de l'emboutissage. Par ailleurs, la comparaison entre les résultats expérimentaux obtenus à partir de ces essais et les prévisions numériques permet de valider l'implantation du critère de Ferron et al. (1994) dans les sous-programmes utilisateur disponibles dans les versions implicite (UMAT) et explicite (VUMAT) du logiciel d'éléments finis **Abaqus**.

Dans toutes les simulations numériques réalisées ci-après, le comportement en traction uniaxiale est décrit par la loi de Swift, donnée par l'équation (II.66), tandis que les valeurs prises pour les propriétés élastiques et la densité correspondent aux valeurs typiques de l'acier déterminées à température ambiante :  $E = 200 \times 10^9$  Pa,  $\nu = 0.3$  et  $\rho = 7.830$  kg/m<sup>3</sup>. En outre, les prévisions numériques correspondant à la description quadratique de Hill (1948) ont été réalisées à titre de comparaison avec les résultats fournis par le critère de Ferron et al. (1994).

## III.2. Simulation numérique de l'emboutissage des tôles

En se limitant aux méthodes numériques basées sur la méthode des éléments finis, les approches utilisées dans la simulation numérique de l'emboutissage des tôles peuvent être divisées en deux groupes, à savoir, la méthode directe ou incrémentale et la méthode inverse (Tekkaya, 2000). La méthode directe est utilisée notamment dans l'analyse de l'emboutissage tandis que la méthode inverse est appliquée lors des étapes initiales de conception de la pièce.

Dans la méthode inverse, le contour initial du flan est déterminé à partir de la géométrie de la pièce souhaitée à travers un seul pas de calcul, permettant donc d'évaluer la viabilité de réalisation du procédé ainsi que de l'optimiser. L'avantage principal de cette méthode est sans aucun doute lié à la réduction du temps de calcul correspondant à l'analyse par éléments finis. Cependant, les hypothèses simplificatrices nécessaires à la construction de la méthode inverse limitent, en fait, son champ d'application aux études préliminaires de l'emboutissage des tôles. La méthode incrémentale à son tour, peut être encore subdivisée en fonction du type du schéma d'intégration des équations d'équilibre dans les techniques implicite et explicite. Les avantages et les inconvénients concernant l'application de ces techniques d'intégration dans la simulation numérique de l'emboutissage ont fait l'objet de nombreuses discussions pendant les années 1980-1990. D'un point de vue mécanique, l'analyse de l'emboutissage des tôles est caractérisée par la présence de non linéarités occasionnées par le comportement plastique du matériau, la cinématique de la déformation et les conditions variables de contact. D'une part, la solution des équations d'équilibre à travers la technique implicite est réalisée généralement par la méthode de Newton-Raphson, dans laquelle les déplacements des nœuds sont déterminés de façon itérative en minimisant le résidu entre les forces appliquées. Dans cette méthode, la condition d'équilibre est assurée par un contrôle de convergence et, en principe, la solution est stable par rapport à la taille de l'incrément de temps de calcul du moins dans l'analyse des problèmes bidimensionnels d'emboutissage des tôles. Néanmoins, la transition à un problème tridimensionnel conduit souvent à des problèmes de convergence dus aux conditions de contact conditionnant ainsi la taille de l'incrément de temps de calcul. Dans ce cas, le nombre d'itérations d'équilibre nécessaires à la solution augmente ainsi que le nombre d'assemblages et inversions supplémentaires de la matrice de rigidité. Par conséquent, le temps d'utilisation du processeur augmente considérablement lorsque la taille du modèle 3D augmente. D'autre part, la technique explicite utilise une matrice de masse diagonale sans avoir donc besoin d'appliquer une méthode de décomposition de matrices ni effectuer des itérations d'équilibre à chaque incrément de temps de calcul. Cependant, la stabilité de la solution obtenue avec cette technique dépend de la taille de l'incrément de temps de calcul. Cette valeur limite peut être estimée par le temps minimum nécessaire pour qu'une onde élastique traverse un élément donné (Rebelo et al., 1992) :

$$\Delta t \leq \frac{L}{C} \quad (\text{III.1})$$

où  $L$  est une longueur caractéristique de l'élément et  $C$  est la célérité d'ondes définie par :

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{III.2})$$

où  $E$  et  $\rho$  sont le module d'élasticité de Young et la densité du matériau respectivement.

L'inconvénient quant à l'application de la technique explicite dans la solution des problèmes quasi-statiques, comme dans le cas de l'emboutissage des tôles, est que la limite de stabilité est normalement trop petite en comparaison de la durée réelle  $T$  du problème. Par conséquent, le nombre total d'incréments donné par :

$$N = \frac{T}{\Delta t} \quad (\text{III.3})$$

rendrait en fait inabordable l'analyse par éléments finis réalisée avec la technique explicite. En pratique, le nombre total d'incréments  $N$  peut être réduit artificiellement soit en diminuant la durée réelle  $T$  de l'analyse soit en augmentant la taille de l'incrément de temps de calcul  $\Delta t$ . Dans l'analyse de l'emboutissage des tôles, ces artifices sont obtenus en augmentant la vitesse de course du poinçon et la densité du matériau respectivement. Toutefois, ces options peuvent également produire des résultats erronés dus à l'influence des effets d'inertie non souhaitables pendant la solution numérique. Le moyen le plus simple d'évaluer si la réponse de la solution peut être considérée comme étant quasi-statique ou non, consiste à examiner les fractions d'énergie résultant de la stratégie adoptée dans l'analyse. Une règle pratique consiste à ce que l'énergie cinétique associée au corps déformable ne dépasse 5 % de son énergie interne, durant la simulation numérique (Prior, 1994). Un autre moyen de parvenir à un compromis entre le temps d'utilisation du processeur et l'obtention d'une réponse quasi-statique, consiste à réaliser plusieurs simulations en fonction de la vitesse de chargement et / ou de la densité du matériau, soit en vérifiant les fractions des énergies résultant dans chaque cas (Prior, 1994) soit en comparant les prévisions numériques correspondantes avec les résultats expérimentaux (Mamalis et al., 1997a,b).

L'avantage principal de la technique explicite par comparaison avec la technique implicite se constate par le fait que la solution de problèmes 3D n'est pas trop altérée par les conditions de contact variables. En fait, dans la technique d'intégration explicite le problème de contact est traité séparément vu que la solution est obtenue sans itérations d'équilibre ni contrôle de convergence. En plus, la taille de l'incrément de temps de calcul ne dépend que des propriétés élastiques du matériau et des dimensions caractéristiques de l'élément. Contrairement à la technique implicite, le temps d'utilisation du processeur augmente plutôt en fonction de la taille du modèle 3D. Toutefois, les artifices nécessaires à la réduction du temps d'utilisation du processeur ne sont intéressants qu'en utilisant des éléments du premier ordre avec une règle d'intégration réduite, ce qui représente un inconvénient pour le calcul des contraintes résiduelles (Tekkaya, 2000). Dans ce cas, l'analyse de l'emboutissage peut être réalisée par la technique explicite et le calcul du retour élastique par la technique implicite (Prior, 1994).

### III.3. Essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique

La Figure (III.1) schématise l'outillage de l'essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique adopté dans les simulations numériques, dont la géométrie correspond aux dimensions employées dans l'étude de Knibloe et Wagoner (1989). En considérant la symétrie de révolution de cet essai et le cas d'un matériau à isotropie transverse, l'analyse par éléments finis peut être traitée comme un problème axisymétrique. Dans ce cas, les outils sont décrits par des surfaces rigides analytiques à travers l'option \*RIGID SURFACES disponible dans le logiciel **Abaqus/Standard** tandis que le flan est modélisé par des éléments de type coque axisymétrique (SAX1). Le contact entre les outils et le flan est modélisé par l'option \*CONTACT PAIR, INTERACTION = ROUGH dans laquelle le frottement est décrit par la loi de Coulomb. Le flan est maillé avec 50 éléments comportant 9 points d'intégration à travers l'épaisseur avec des conditions aux limites de symétrie par rapport au plan  $oz$  ( $r = 0$ ) et d'encastrement pour assurer la condition de blocage sur le bord ( $r = 59.2$  mm) remplaçant ainsi le serre-flan.

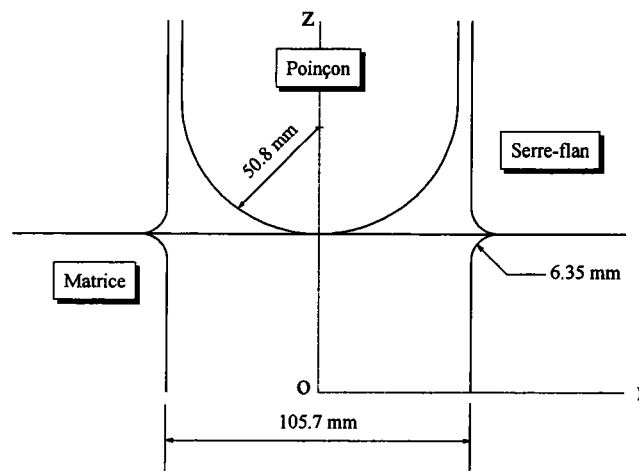
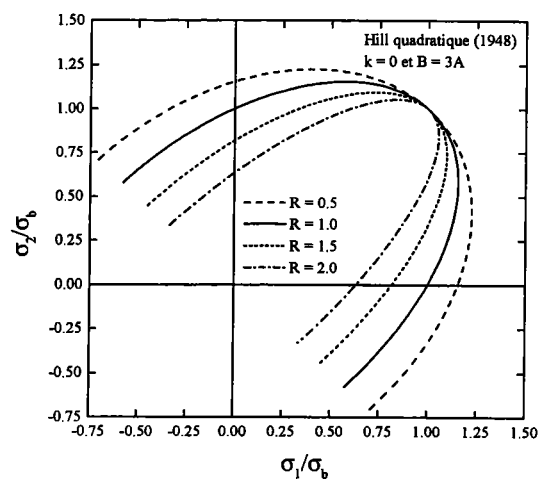


Figure (III.1) – Dimensions de l'essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique.

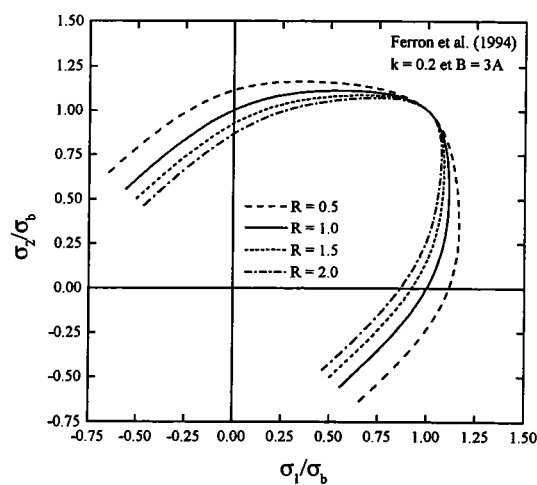
Dans un premier temps, deux études numériques sont présentées en vue d'analyser les effets (1) du critère de plasticité et (2) du coefficient de frottement  $\mu$  adoptés dans les simulations numériques. Le flan a une épaisseur initiale de 0.85 mm et le comportement en traction uniaxiale est défini par la loi de Swift avec  $K = 500$  MPa,  $\epsilon_0 = 2.0 \times 10^{-3}$  et  $N = 0.2$ . À partir de ces études, les paramètres du matériau caractérisant l'aptitude à l'expansion par poinçonnement hémisphérique sont ensuite examinés. Finalement, les résultats expérimentaux de Knibloe et Wagoner (1989) obtenus pour un acier calmé à l'aluminium sans revêtement sont confrontés aux prévisions numériques réalisées avec le critère de Ferron et al. (1994).

### III.3.1. Influence du critère de plasticité

Les matériaux adoptés dans cette étude sont décrits par les surfaces de charge représentées sur la Figure (III.2) dans l'espace des contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) normalisées par la limite élastique en traction équibiaxiale ( $\sigma_b$ ). Ces surfaces ont été calculées en fonction du coefficient d'anisotropie normale  $R$  à partir du critère de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994). Dans le dernier cas, la valeur du paramètre  $k$  a été choisie égale à 0.2 de façon à ce qu'un aplatissement significatif de la surface de charge soit obtenu dans les régions de traction plane et de cisaillement pur. Les paramètres du critère de Ferron et al. (1994) ont été déterminés en fonction de la valeur de  $R$  en imposant la relation  $B = 3A$  (Annexe C). En particulier, le critère de Hill quadratique (1948) est obtenu avec  $k = 0$ .



(a)



(b)

Figure (III.2) – Surfaces de charge tracées dans l'espace des contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) normalisées par la limite élastique en traction équibiaxiale ( $\sigma_b$ ) déterminées en fonction de la valeur de  $R$  à partir des critères de (a) Hill quadratique (1948) et (b) Ferron et al. (1994).

Dans l'expansion par poinçonnement hémisphérique, les états de contraintes d'intérêt varient entre la traction équibiaxiale au pôle ( $r = 0$ ) jusqu'à la déformation plane par traction sur le bord encastré ( $r = 59.2$  mm). Donc, il est intéressant d'évaluer les limites élastiques dans ces états de contraintes à partir des fonctions de charge adoptées dans les simulations. Dans le cas du critère de Hill quadratique (1948), le rapport entre les composantes des limites élastiques en traction plane et la limite élastique en traction équibiaxiale sont donnés par :

$$\frac{\sigma_{PS1}}{\sigma_b} = \sqrt{\frac{2(1+R)}{1+2R}} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_{PS2}}{\sigma_b} = \sqrt{\frac{2R^2}{(1+R)(1+2R)}} \quad (\text{III.4})$$

D'autre part, ces rapports sont définis à partir de la fonction de charge du critère de Ferron et al. (1994) donnée par l'équation (II.52) par :

$$\frac{\sigma_{PS1}}{\sigma_b} = g(\theta_{PS})(\cos \theta_{PS} + \sin \theta_{PS}) \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_{PS2}}{\sigma_b} = g(\theta_{PS})(\cos \theta_{PS} - \sin \theta_{PS}) \quad (\text{III.5})$$

où l'angle  $\theta_{PS}$  est déterminé d'après la règle d'écoulement plastique associée pour la condition de déformation plane par traction, i.e.,  $\dot{\epsilon}_2 = 0$ , voir annexe C. Le Tableau (III.1) compare les rapports entre les limites élastiques en traction plane et la limite élastique en traction équibiaxiale obtenus avec les critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994).

Tableau (III.1) – Rapports des contraintes en fonction du coefficient d'anisotropie normale  $R$ .

$R$	Hill quadratique (1948)		Ferron et al. (1994)	
	$\sigma_{PS1}/\sigma_b$	$\sigma_{PS2}/\sigma_b$	$\sigma_{PS1}/\sigma_b$	$\sigma_{PS2}/\sigma_b$
0.5	1.225	0.408	1.164	0.354
1.0	1.155	0.577	1.112	0.556
1.5	1.118	0.671	1.088	0.676
2.0	1.095	0.730	1.073	0.742

En vue de comparer les critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994), les simulations numériques ont été réalisées avec le sous-programme **UMAT** pour une course du poinçon de 32.5 mm avec un coefficient de frottement  $\mu$  entre l'outillage et le flan de 0.10. Le flan déformé et les outils sont schématisés sur la Figure (III.3), dans laquelle il est possible de distinguer trois régions caractérisant l'expansion par poinçonnement hémisphérique. Dans la première région, localisée entre les points  $P$  et  $A$ , le flan est en contact avec le poinçon. Ensuite, le brin libre se situe entre les points  $A$  et  $B$  correspondant à la région 2. Enfin, le flan enveloppe une partie du rayon de congé de la matrice entre les points  $B$  et  $R$ , ce dernier correspondant au bord encastré. Ces régions conjointement avec les rapports de limites élastiques fournis par le Tableau (III.1) sont utiles à la compréhension des prévisions numériques de distributions des déformations radiales et circonférentielles du flan déformé.



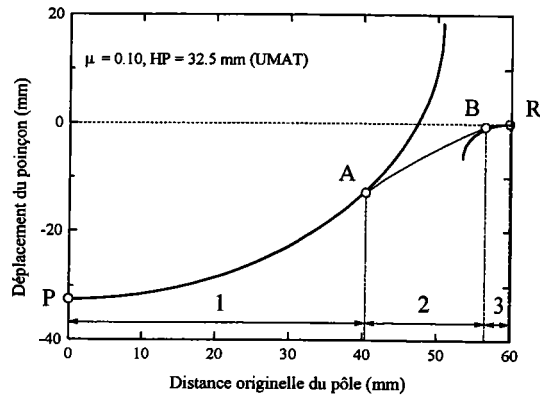
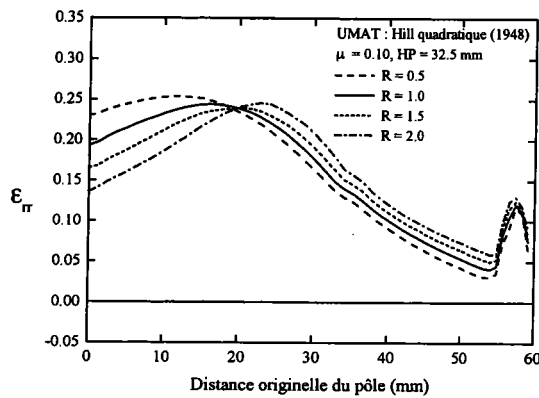
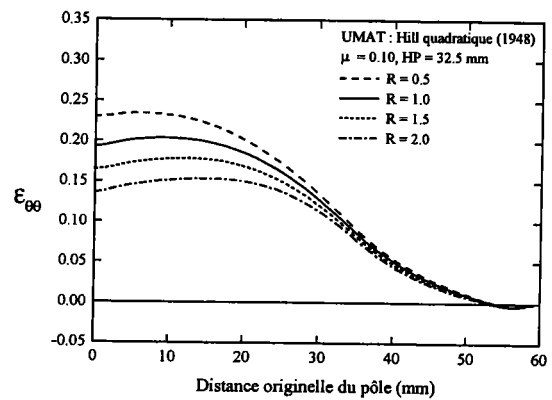


Figure (III.3) – Régions caractérisant l'expansion par poinçonnement hémisphérique : (1) contact entre le flan et le poinçon, (2) brin libre et (3) contact entre le flan et le rayon de la matrice.

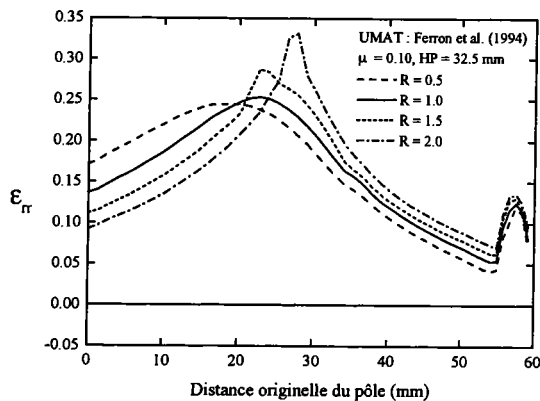


(a)

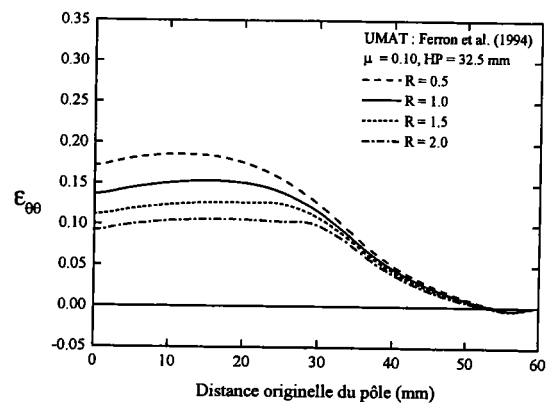


(b)

Figure (III.4) – Prévisions numériques des distributions de déformations radiales ( $\epsilon_{rr}$ ) et circonférentielles ( $\epsilon_{\theta\theta}$ ) déterminées en fonction du coefficient d'anisotropie normale  $R$  avec le critère de Hill quadratique (1948).



(a)



(b)

Figure (III.5) – Prévisions numériques des distributions de déformations radiales ( $\epsilon_{rr}$ ) et circonférentielles ( $\epsilon_{\theta\theta}$ ) déterminées en fonction du coefficient d'anisotropie normale  $R$  avec le critère de Ferron et al. (1994).

Les Figures (III.4) et (III.5) comparent les distributions de déformations radiales et circonférentielles obtenues avec les critères de Hill quadratique (1948) et Ferron et al. (1994) respectivement. D'une façon qualitative, il est possible de constater les mêmes tendances dans les deux cas considérés. D'abord, lorsque le coefficient d'anisotropie normale  $R$  augmente, les déformations radiales au pôle décroissent tandis que les déformations radiales augmentent sur le brin libre et au bord.

En fait, ces effets peuvent être expliqués en fonction du rapport entre la plus grande limite élastique en traction plane et la limite élastique en traction équibiaxiale,  $P = \sigma_{PS1}/\sigma_b$ , introduit par Barlat (1987) comme un paramètre indiquant l'aptitude à l'expansion des tôles. D'après le Tableau (III.1), en augmentant la valeur de  $k$  ou de  $R$ , le paramètre  $P$  décroît, favorisant les déformations radiales au bord, où l'état de contraintes est de traction plane, au détriment de la déformation par traction équibiaxiale au pôle. De ce fait, les déplacements radiaux sont plus faibles et le pic de déformation radiale se déplace vers le point limite de contact entre le poinçon et le flan, et se développe plus tôt pour les plus faibles valeurs de  $P$ , comme montré sur la Figure (III.5a) pour le critère de Ferron et al. (1994). D'autre part, la distribution des déformations circonférentielles, comme attendu, présente au pôle les mêmes valeurs et tendances que les déformations radiales tandis qu'au bord la déformation circonférentielle est nulle à cause de la condition imposée par l'encastrement. D'ailleurs, le déplacement radial, plus faible pour de fortes valeurs de  $R$  et / ou de  $k$ , explique le fait que les déformations circonférentielles diminuent sur tout le flan lorsque  $P$  diminue.

### III.3.2. Influence du coefficient de frottement

La Figure (III.6) compare les prévisions des distributions de déformations radiales et circonférentielles obtenues en fonction du coefficient de frottement  $\mu$  pour un matériau isotrope décrit par le critère de Drucker (1949), obtenu comme un cas particulier du critère de Ferron et al. (1994) avec  $k = 0.2$  et  $B = 3A$ , correspondant à une valeur de  $P = \sigma_{PS1}/\sigma_b = 1.112$ .

Sous la région de contact entre le flan et le poinçon, l'augmentation du frottement occasionne une réduction du glissement du flan et, par conséquent, une diminution des déformations radiales ainsi que des déformations circonférentielles atteintes surtout au pôle. Pour une hauteur au pôle donnée, le pic de déformation radiale s'instaure précocement et s'écarte du pôle au fur et à mesure que la valeur du coefficient de frottement  $\mu$  augmente. Dans le cas particulier d'une forte valeur de  $\mu$ , les déformations radiales se concentrent autour d'une zone correspondant à celle d'une striction localisée.

Dans la région du brin libre, les déformations radiales s'accroissent lorsque le frottement augmente, tandis que les déformations circonférentielles ne sont pas affectées. En revanche, la traction plane observée dans les régions situées le long du rayon de la matrice et proches du bord encastré, est indépendante du frottement.

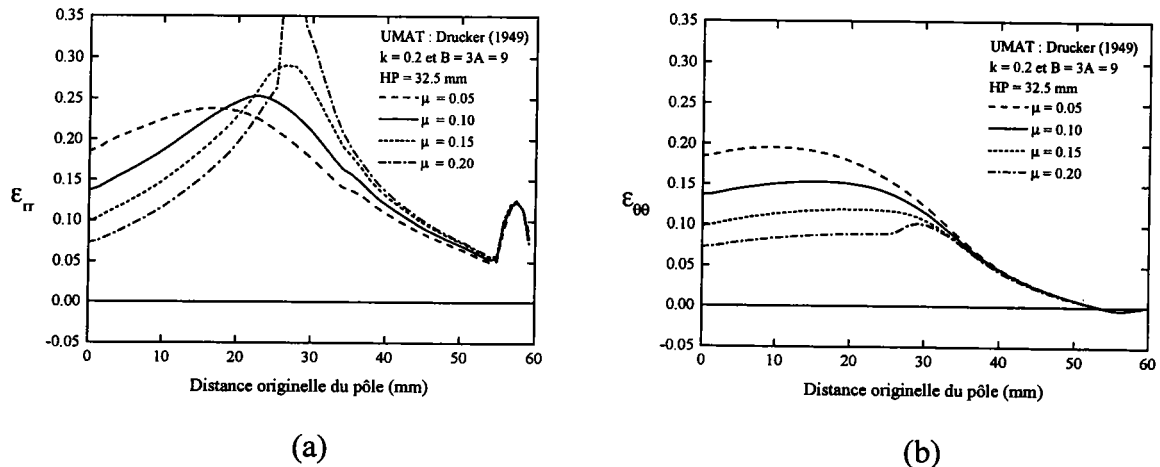


Figure (III.6) – Prévisions numériques des distributions de déformations radiales ( $\epsilon_{rr}$ ) et circonférentielles ( $\epsilon_{\theta\theta}$ ) déterminées en fonction du coefficient de frottement de Coulomb  $\mu$  à partir du critère de Drucker (1949).

### III.3.3. Paramètres caractérisant le poinçonnement hémisphérique

Dans l'expansion par poinçonnement hémisphérique, les paramètres du matériau prépondérants vis-à-vis des déformations limites sont : (a) l'exposant d'écroutissage  $N$ , (b) l'exposant de sensibilité à la vitesse de déformation  $M$  et (c) le coefficient d'anisotropie normale  $R$ . Pour une géométrie de l'outil fixée, ces déformations sont également influencées par les paramètres du procédé tels que (d) la température et (e) la tribologie outils-flan de même que par (f) l'épaisseur initiale du flan. Les effets des paramètres du matériau ( $N$ ,  $M$ ,  $R$ ) et du coefficient de frottement  $\mu$  sur la hauteur limite au pôle obtenue avec le poinçonnement hémisphérique ont été étudiés par Burford et al. (1991). À partir d'une analyse de sensibilité basée sur les prévisions numériques réalisées avec le critère de Hill quadratique (1948), Burford et al. (1991) concluent que les paramètres jouant un rôle sur la hauteur limite au pôle peuvent être classés dans un ordre d'importance décroissante comme étant  $\mu$ ,  $N$ ,  $R$  et  $M$ .

D'autre part, les études numériques réalisées dans le présent travail démontrent que pour une description de l'écroutissage donnée, i.e.,  $N$  et  $M$  connus, les déformations atteintes lors de l'expansion par poinçonnement hémisphérique et, par conséquent, la hauteur au pôle, en fonction du comportement plastique du matériau et du frottement peuvent être mieux analysées à partir du paramètre  $P = \sigma_{PS1}/\sigma_b$  introduit par Barlat (1987) de préférence à la valeur traditionnelle du coefficient d'anisotropie normale  $R$ .

Avec le critère de Hill quadratique (1948), le paramètre  $P$  est calculé par (III.4) d'où il est possible de constater qu'une augmentation de  $R$  correspond à une diminution de  $P$  et, par conséquent, des déformations et de la hauteur au pôle. En revanche, la définition d'une valeur positive du paramètre  $k$  dans le critère de plasticité proposé par Ferron et al. (1994), a le même effet décroissant sur la valeur du paramètre  $P$ . L'effet d'une forte valeur du coefficient de frottement  $\mu$  est, d'une façon qualitative, le même que celui occasionné par une faible valeur du paramètre  $P$ .

Il est possible ainsi de conclure que dans les simulations numériques de l'expansion par poinçonnement hémisphérique à flan bloqué, le critère de plasticité doit être capable de tenir compte du comportement plastique de la tôle dans la région de contraintes d'intérêt, comprise entre la traction équi-biaxiale et la traction plane. Par conséquent, les distributions expérimentales des déformations et la hauteur limite au pôle doivent être estimées en utilisant une valeur raisonnable pour le coefficient de frottement  $\mu$ , contrairement à un ajustement de ce paramètre de façon à ce que les résultats expérimentaux et les prévisions numériques soient rapprochés arbitrairement.

La Figure (III.7) montre les prévisions des chemins de déformations ( $\epsilon_{\theta\theta}$ ,  $\epsilon_{rr}$ ) obtenus à une distance fixe et à une hauteur au pôle données en fonction des paramètres (a) tribologique et (b) matériau respectivement. L'apparition d'une striction peut être expliquée par un changement abrupt du chemin de déformation vers l'état de déformation plane occasionné soit par une forte valeur du coefficient de frottement  $\mu$ , soit par une faible valeur du paramètre  $P$ , illustrant ainsi le rôle de ces paramètres dans l'expansion par poinçonnement hémisphérique à flan bloqué.

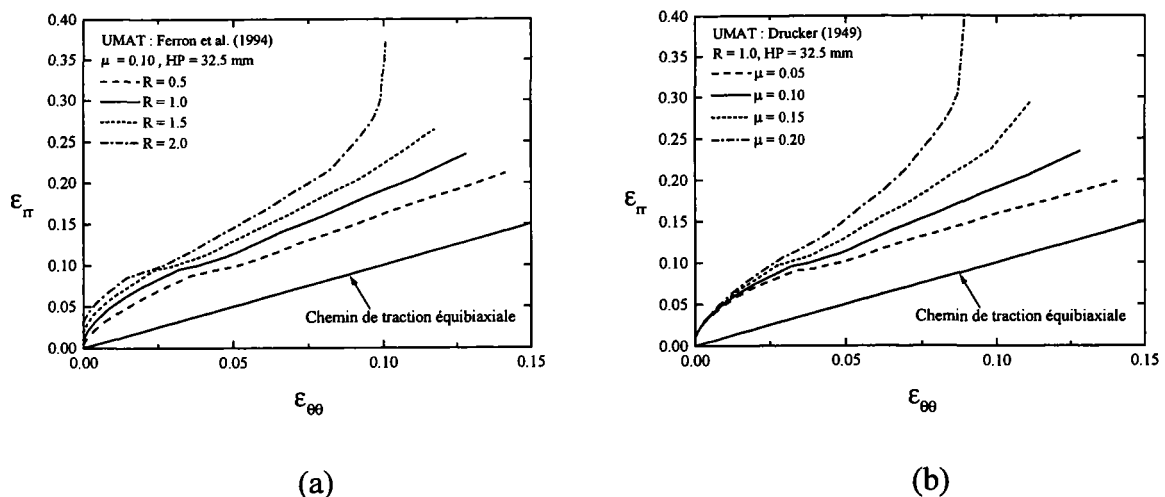


Figure (III.7) – Chemin de déformation ( $\epsilon_{\theta\theta}$ ,  $\epsilon_{rr}$ ) correspondant à un élément situé à une distance initiale du pôle de 27.2 mm déterminé en fonction des paramètres (a) tribologique et (b) matériau.

### III.3.4. Comparaison avec des résultats expérimentaux

Les données expérimentales déterminées par Knibloe et Wagoner (1989) pour un acier calmé à l'aluminium sans revêtement d'épaisseur initiale de 1.04 mm sont comparées dans ce paragraphe aux prévisions réalisées par **UMAT** avec le critère de Ferron et al. (1994). Knibloe et Wagoner (1989) ont caractérisé cet acier en vue de déterminer l'exposant  $m$  du critère non quadratique de Hill (1979) à travers une procédure où les écarts entre les courbes de déformation et contraintes équivalentes déterminées à partir des essais de traction uniaxiale et de traction plane ont été minimisés itérativement.

Le comportement en traction uniaxiale de l'acier essayé par ces auteurs est décrit par la loi de Hollomon avec  $K = 598$  MPa et  $N = 0.23$ . Toutefois, en l'absence des données expérimentales de l'essai de traction uniaxiale, la loi de Swift employée dans **UMAT** a été rapprochée par les valeurs de  $K$  et  $N$  déterminées pour la loi de Hollomon avec  $\varepsilon_0 = N/100$ . D'autre part, les valeurs des paramètres  $A$ ,  $B$  et  $k$  du critère de Ferron et al. (1994) ont été déterminées de façon à respecter le rapport entre les contraintes d'écoulement en traction plane ( $\sigma_{PS1}$ ) et en traction uniaxiale ( $\sigma_u$ ) obtenu avec le critère non quadratique de Hill (1979). Ce rapport a été calculé à partir de la valeur expérimentale du coefficient d'anisotropie normale  $R = 1.48$  et de l'exposant  $m = 2.38$  déterminée par Knibloe et Wagoner (1989). Les valeurs des paramètres du critère de Ferron et al. (1994) calculées selon la procédure détaillée dans l'annexe C sont  $A = 3.65$ ,  $B = 12.23$  et  $k = 0.148$ .

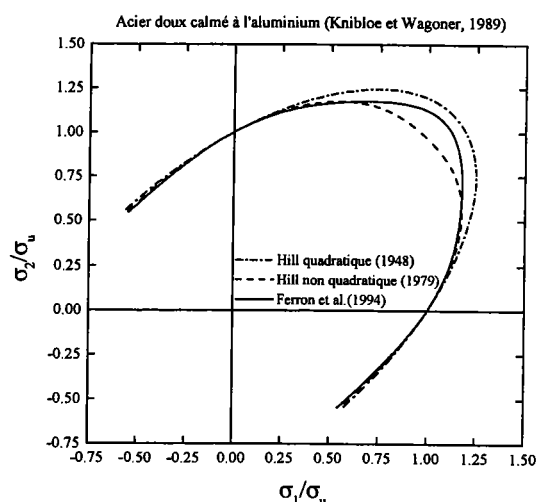


Figure (III.8) – Surfaces de charge déterminées pour l'acier doux calmé à l'aluminium analysé par Knibloe et Wagoner (1989) à partir des critères de Hill quadratique (1948), Hill non quadratique (1979) et de Ferron et al. (1994).

La Figure (III.8) compare les surfaces de charge dans l'espace des contraintes principales normalisées par la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale déterminées pour l'acier analysé par Knibloe et Wagoner (1989) avec les critères de Hill quadratique (1948), Hill non quadratique (1979) et Ferron et al. (1994) respectivement. Les différences entre ces descriptions sont remarquables notamment sur deux aspects. D'abord, d'après cette figure et le Tableau (III.2), le critère non quadratique de Hill (1979) fournit un rapport entre les contraintes d'écoulement en traction équi-biaxiale et uniaxiale inférieur à un tandis que le coefficient d'anisotropie normale  $R$  est supérieur à un, à l'opposé de ce qui est obtenu dans la pratique pour un acier doux calmé à l'aluminium. Deuxièmement, seulement le critère de Ferron et al. (1994) permet l'obtention d'un aplatissement au voisinage de la traction plane fournissant, par conséquent, la plus faible valeur du paramètre  $P = \sigma_{PS1}/\sigma_b$  en comparaison aux descriptions quadratique et non quadratique de Hill (1948,1979).

Tableau (III.2) – Rapports des contraintes de l'acier analysé par Knibloe et Wagoner (1989).

Critère	$\sigma_b/\tau$	$\sigma_b/\sigma_u$	$\sigma_{PS1}/\sigma_b$	$\sigma_{PS2}/\sigma_b$	$\sigma_{PS1}/\sigma_u$	$\sigma_{PS2}/\sigma_u$
Hill (1948)	1.990	1.113	1.119	0.668	1.246	0.744
Hill (1979)	1.783	0.980	1.200	0.553	1.176	0.542
Ferron (1994)	1.962	1.070	1.099	0.642	1.176	0.687

La Figure (III.9) compare les distributions de déformations expérimentales obtenues pour l'acier calmé à l'aluminium sans revêtement testé sans lubrifiant et les prévisions faites par le critère de Ferron et al (1994). Ces prévisions numériques réalisées avec un coefficient de frottement  $\mu$  de 0.20 sont en bon accord avec les distributions des déformations expérimentales. D'ailleurs, cette valeur de  $\mu$  correspond aux valeurs moyennes déterminées dans la méthode proposée par Ghosh (1978) pour un frottement sec d'un acier calmé à l'aluminium sans revêtement.

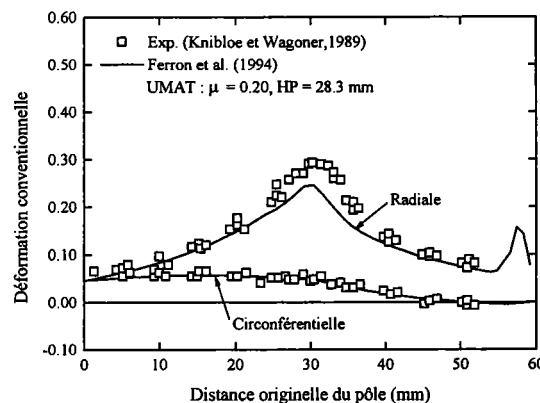


Figure (III.9) – Comparaison entre les distributions des déformations déterminées pour l'acier doux calmé à l'aluminium analysé par Knibloe et Wagoner (1989) et les prévisions numériques calculées avec le critère de Ferron et al. (1994).

En revanche, Knibloe et Wagoner (1989) ont effectué des simulations numériques en adoptant des valeurs de  $\mu$  de 0.268 et de 0.639 avec les critères de Hill quadratique (1948) et Hill non quadratique (1979) respectivement. Ces coefficients ont été déterminés en ajustant les prévisions des déformations radiales au pôle, obtenues en fonction de la hauteur au pôle, avec les valeurs mesurées selon différentes conditions de lubrification, voir la Figure (I.26). Dans le cas du critère de Hill non quadratique (1979), la valeur déraisonnable de  $\mu$  est due en fait à la forte valeur du paramètre  $P = \sigma_{PS1} / \sigma_b$  prévue par ce critère, voir le Tableau (III.2).

Ces auteurs ont, par ailleurs, proposé un abaque avec les meilleurs ajustements du coefficient de frottement  $\mu$  et de l'exposant  $m$  du critère de Hill non quadratique (1979) d'après les déformations radiales expérimentales obtenues en fonction de deux géométries du flan et de la condition de lubrification. Dans la condition de frottement sec pour le matériau analysé ci-dessous, la valeur optimale de  $m$  est égale à 2.0, i.e., correspondant au critère de Hill quadratique (1948), avec une valeur du coefficient de frottement  $\mu$  proche de 0.3. Néanmoins, cet abaque ne semblerait pas être de grand profit si les états de contraintes en jeu lors du poinçonnement hémisphérique ne sont pas décrits précisément par la forme de la surface de charge imposée par le critère de plasticité adopté dans les simulations numériques.

### III.4. Emboutissage profond

La formation des cornes d'emboutissage à partir de l'essai d'emboutissage type Swift et l'emboutissage d'une boîte de conserves cylindrique sont analysés dans ce paragraphe. D'un point de vue de simulation numérique, il est supposé que le flan soit parfaitement centré avec les outils lors de ces opérations. Dans cette condition, l'orthotropie du matériau autorise que seulement le quart de la géométrie soit modélisé en vue de simplifier l'analyse par éléments finis ainsi que réduire le temps d'utilisation du processeur consacré aux simulations. La Figure (III.10) montre le maillage typique adopté pour représenter le flan dans les simulations numériques de l'emboutissage profond. Les axes de symétrie orthotrope ( $x, y, z$ ), correspondant respectivement aux directions parallèle (DL), transverse (DT) et normale (DN) par rapport au sens de laminage de la tôle, sont initialement alignés avec les axes (1,2,3) montrés dans la Figure (III.10). Dans toutes les simulations numériques réalisées ci-après, la rotation des axes de symétrie orthotrope a été prise en compte en définissant le repère corotationnel à travers l'option \*ORIENTATION disponible dans le logiciel **Abaqus**. En outre, le comportement en traction uniaxiale du matériau est décrit par les paramètres de la loi d'érouissage de Swift correspondant à la direction parallèle au sens de laminage ( $x$ ).

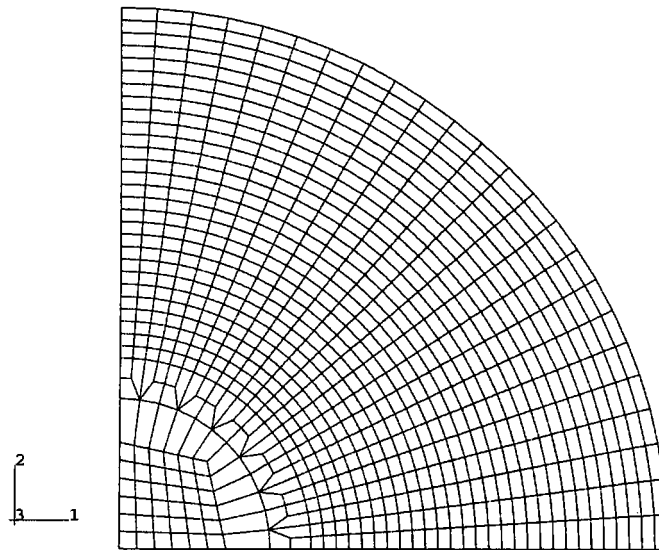


Figure (III.10) – Maillage adopté dans les simulations de l’emboutissage profond.

### III.4.1. Essai de Swift

Les essais d’emboutissage ont été réalisés par l’équipe du Prof. Gustavo Ferran (Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda –Rj, Brésil) dans le cadre du projet de coopération universitaire Capes/Cofecub. Le flan a un diamètre de départ de 106 mm et une épaisseur initiale de 0.7 mm. La géométrie et les dimensions de l’essai d’emboutissage de Swift sont schématisées dans la Figure (I.29). Le matériau essayé est un acier libre d’éléments interstitiels (IF) produit par la Compagnie Sidérurgique Nationale (Brésil). Le Tableau (III.3) donne les paramètres de l’acier IF déterminés à partir de deux essais de traction uniaxiale selon les directions parallèle (DL), à 45 degrés (DD) et à 90 degrés (DT) par rapport au sens de laminage respectivement. L’acier IF présente quatre cornes d’emboutissage situées dans les directions DL et DT dont les hauteurs moyennes sont de  $45.99 \pm 0.11$  mm aux cornes et de  $43.97 \pm 0.05$  mm aux vallées situées au voisinage de la direction DD respectivement. Les écarts expérimentaux des hauteurs moyennes ont été obtenus à partir de trois essais.

Tableau (III.3) – Paramètres de l’acier IF 0.7 mm employé dans l’essai de Swift.

Paramètres	DL	DD	DT
$\sigma_y$ (MPa)	155	161.5	153
K (MPa)	510	523	510
$\epsilon_0$	0.0048	0.0036	0.0038
N	0.223	0.209	0.216
R (18%)	1.884	1.527	2.268



En l'absence d'autres données expérimentales, la détermination des paramètres du critère de Ferron et al.(1994) est réalisée d'après les valeurs des essais de traction uniaxiale. D'abord, la relation  $B = 3A$  est imposée en adoptant le paramètre  $k = 0.2$  et la valeur de  $A$  est alors calculée d'après la valeur expérimentale du coefficient de Lankford  $R$  à 45 degrés ( $R_{45}$ ). Ensuite, les paramètres  $a$  et  $b$  décrivant l'anisotropie transverse du matériau, sont déterminés soit d'après les valeurs expérimentales de  $R_0$  et  $R_{90}$ , méthode  $R$ , soit à partir des contraintes d'écoulement dans les directions DL, DD et DT, i.e., les valeurs de  $\sigma_0$ ,  $\sigma_{45}$  et  $\sigma_{90}$ , méthode  $\sigma$ . Ces méthodes sont détaillées dans l'annexe C.

En vue d'assurer un bon accord entre les données expérimentales et les prévisions de l'évolution angulaire du coefficient de Lankford,  $R_{(\alpha)}$ , et de la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale,  $\sigma_{(\alpha)}$ , différentes valeurs du couple d'exposants  $(n, p)$  peuvent être considérées dans le critère de Ferron et al. (1994). En pratique, pour qu'une bonne concordance entre les prévisions de  $R_{(\alpha)}$  et  $\sigma_{(\alpha)}$  soit obtenue, les combinaisons d'intérêt sont :  $(n = 1, p = 2)$ ,  $(n = 2, p = 1)$  et  $(n = 2, p = 2)$ , en plus du couple  $(n = 1, p = 1)$  qui fournit les évolutions angulaires identiques à celles obtenues par le critère de Hill quadratique (1948). Les effets de la méthode ( $R$  ou  $\sigma$ ) adoptée dans la détermination des paramètres  $(a, b)$  sont illustrés dans les Figures (III.11) et (III.12) en fonction des exposants  $(n, p)$ . D'une part, lorsque  $(a, b)$  sont déterminés à partir de la méthode  $R$ , les valeurs expérimentales de  $(\sigma_{45}/\sigma_0)$  et de  $(\sigma_{90}/\sigma_0)$  sont comparées dans la Figure (III.11) aux différentes prévisions de  $\sigma_{(\alpha)}/\sigma_0$  obtenues en fonction des exposants  $(n, p)$ . D'autre part, la Figure (III.12) confronte les valeurs expérimentales de  $R_0, R_{45}$  et  $R_{90}$  aux prévisions de  $R_{(\alpha)}$  calculées lorsque  $(a, b)$  sont déterminés à partir de la méthode  $\sigma$ . Il est intéressant de noter qu'aucune des combinaisons d'exposants  $(n, p)$  ne fournit à la fois une bonne concordance entre les prévisions et les résultats expérimentaux du coefficient de Lankford et de la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale. Néanmoins, pour une évolution  $R_{(\alpha)}$  donnée, la dépendance angulaire de la contrainte d'écoulement est visiblement diminuée lorsque les exposants  $(n, p)$  sont égaux à 2. Il faut observer que les contraintes d'écoulement utilisées ici sont en fait les valeurs à 20 % de déformation plastique déterminées selon la loi de Swift. En effet, sous l'hypothèse d'un écrouissage isotrope, le comportement plastique en grandes déformations est mieux décrit à partir des valeurs des contraintes d'écoulement définies à une déformation plastique donnée qu'à travers les limites élastiques déterminées de façon conventionnelle (0.2%).

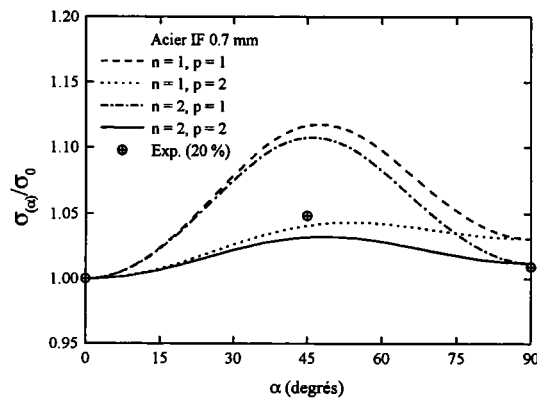


Figure (III.11) – Comparaison entre la contrainte d'écoulement normalisée déterminée en traction uniaxiale dans les directions  $\alpha = (45,90)$  degrés pour l'acier IF et les prévisions angulaires obtenues en fonction des exposants  $(n, p)$  du critère Ferron et al. (1994).

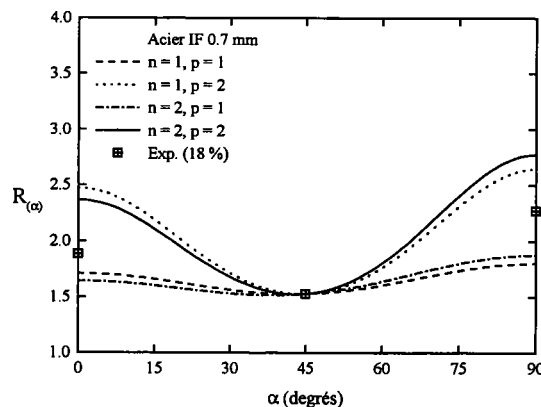


Figure (III.12) – Comparaison entre le coefficient de Lankford déterminé en traction uniaxiale dans les directions  $\alpha = (0,45,90)$  degrés pour l'acier IF et les prévisions angulaires obtenues en fonction des exposants  $(n, p)$  du critère Ferron et al. (1994).

Les simulations numériques de l'essai d'emboutissage de Swift ont été réalisées avec les logiciels **Abaqus/Standard**, **Abaqus/Explicit** en utilisant l'option **\*POTENTIAL** et les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** respectivement. Les outils, supposés indéformables, sont identifiés à des corps rigides représentés à travers de surfaces rigides analytiques dans **Abaqus/Standard** et par des éléments rigides à quatre nœuds (R3D4) dans **Abaqus/Explicit**. Le flan est maillé par 756 éléments de type coque à quatre nœuds avec une intégration réduite (S4R) et cinq points d'intégration à travers l'épaisseur. Lorsque les éléments de type coque sont utilisés avec les sous-programmes utilisateur, le logiciel **Abaqus** ne calcule pas la rigidité due aux efforts tranchants à travers l'épaisseur. Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, l'option **\*TRANSVERSE SHEAR STIFFNESS** permet de définir cette rigidité par :

$$K_{11} = K_{22} = \frac{5}{6} \frac{E}{2(1+\nu)} t_0 \text{ et } K_{12} = 0 \quad (\text{III.5})$$

où les indices (1,2) sont les directions locales de la coque et  $t_0$  est son épaisseur initiale.

Puisque la surface du flan située entre le serre-flan et la matrice diminue au fur et à mesure que le poinçon se déplace alors qu'une force constante est appliquée au serre-flan, la simulation numérique de l'essai de Swift présente souvent des problèmes de convergence. Deux techniques ont été adoptées dans les simulations numériques pour que l'emboutissage soit complété sans que le flan soit retenu par l'action du serre-flan. Dans **Abaqus/Standard**, la course du poinçon est d'abord stoppée lorsque le bord du flan commence à dépasser le rayon de congé de la matrice pour que la force de serre-flan soit ôtée de la simulation et ensuite, elle continue jusqu'à ce que la coupelle soit complètement formée. D'autre part, la vitesse de course du poinçon est augmentée progressivement alors que la force de serre-flan est en même temps diminuée dans les simulations numériques faites avec **Abaqus/Explicit**. La Figure (III.13) montre les courbes de chargement du poinçon et du serre-flan ainsi que les fractions de l'énergie interne et de l'énergie cinétique du flan en fonction du temps de calcul, d'où il est possible de constater que la fraction de l'énergie cinétique reste en dessous de 5% de l'énergie interne durant toute la durée de la simulation numérique. Dans ce cas particulier, l'analyse réalisée par la technique explicite peut être considérée comme correspondant à un problème quasi-statique. Dans tous les cas, le coefficient de frottement de type Coulomb  $\mu$  est égal à 0.15 entre le poinçon et le flan et 0.05 entre le serre-flan et la matrice.

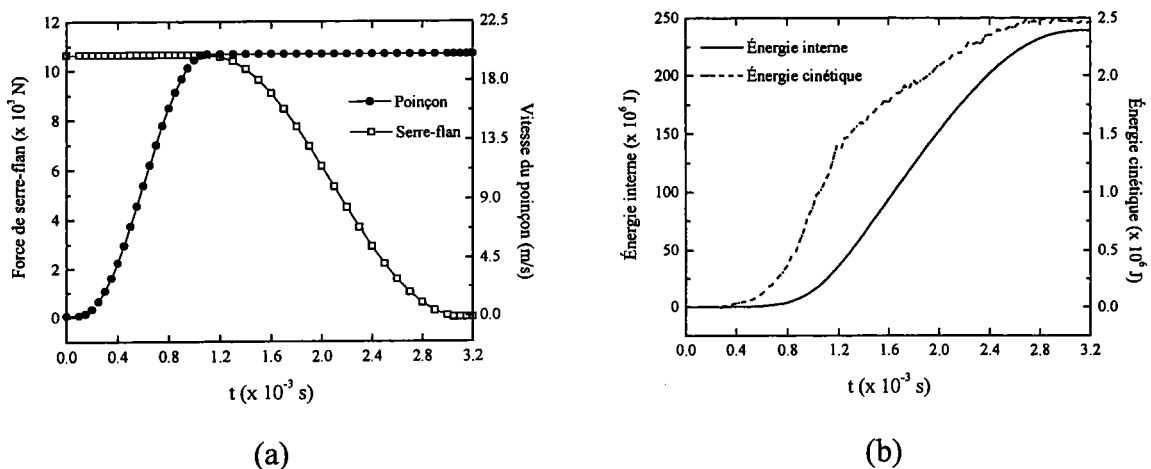


Figure (III.13) – Technique adoptée dans les simulations de l'essai de Swift réalisées avec **Abaqus/Explicit** : (a) courbes de vitesse du poinçon et de la force de serre-flan et (b) évolutions des énergies interne cinétique associées à la simulation numérique.

Dans un premier temps, les prévisions faites avec le critère de Hill quadratique (1948) obtenu comme un cas particulier du critère de Ferron et al. (1994) dans les sous-programmes utilisateur **UMAT** et **VUMAT** sont confrontées aux résultats déterminés en utilisant l'option \*POTENTIAL dans les logiciels **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit** respectivement. Dans les deux cas, les paramètres définissant l'anisotropie transverse dans le critère de Hill quadratique (1948) ont été ajustés aux valeurs du coefficient de Lankford ( $R_0$ ,  $R_{45}$ ,  $R_{90}$ ).

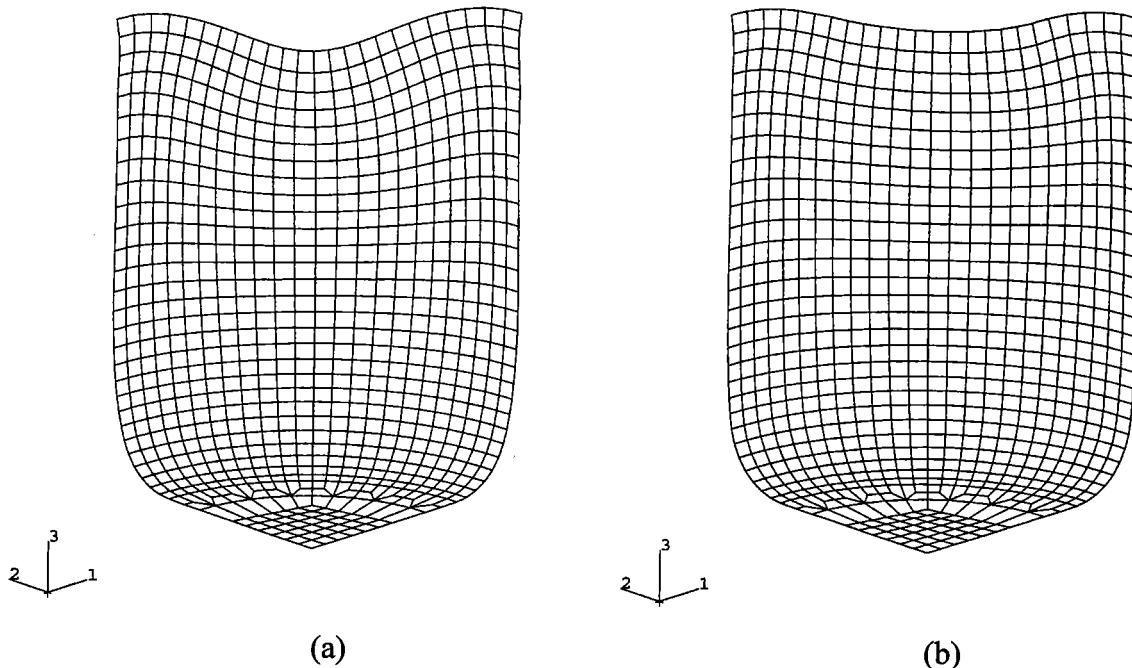


Figure (III.14) – Profil des cornes d’emboutissage obtenu pour l’acier IF 0.7 mm avec le critère de Hill quadratique (1948) à partir des sous-programmes (a) UMAT et (b) VUMAT.

La Figure (III.14) montre le flan déformé avec le profil des cornes d’emboutissage déterminé pour l’acier IF 0.7 mm avec le critère de Hill quadratique (1948) tandis que la Figure (III.15) compare le pourcentage des cornes d’emboutissage déterminé à partir des sous-programmes utilisateur **Abaqus** avec les résultats fournis par **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit** respectivement. Le pourcentage des cornes d’emboutissage est défini par :

$$\%_{CE} = \frac{h_{\alpha} - h_{\min}}{h_{\min}} \times 100 \% \quad (\text{III.6})$$

où  $h_{\alpha}$  et  $h_{\min}$  correspondent à la hauteur de la coupelle en fonction de l’orientation par rapport au sens de laminage de la tôle et à la hauteur minimum de la coupelle respectivement.

Les résultats obtenus en utilisant les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** sont pratiquement identiques aux profils des cornes déterminés par les logiciels **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit**, ainsi qu’en accord qualitatif avec les résultats expérimentaux. Toutefois, les techniques d’intégration implicite et explicite fournissent différentes amplitudes des cornes d’emboutissage alors que la description du comportement du matériau a été maintenue. Ces différences peuvent être attribuées aux types de représentation du problème de contact utilisées dans les logiciels **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit**. Dans **Abaqus/Explicit**, les épaisseurs initiale et courante de la coque sont considérées lors du traitement du contact. D’autre part, l’algorithme de contact employé dans **Abaqus/Standard** néglige l’épaisseur de la coque quel que soit le type de représentation des outils, i.e., qu’ils soient maillées avec des éléments rigides ou décrits par des surfaces rigides analytiques.

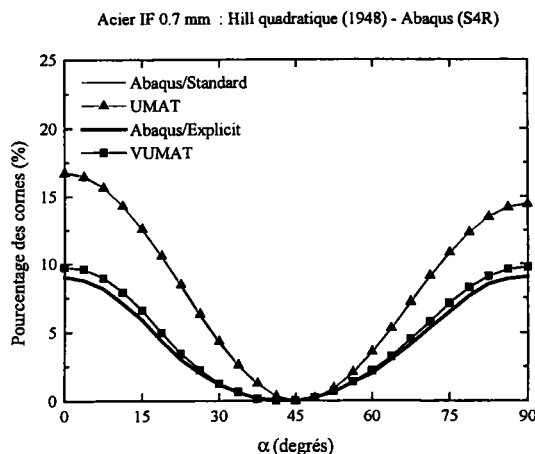


Figure (III.15) – Comparaison entre les prévisions numériques des cornes d’emboutissage déterminées pour l’acier IF 0.7 mm avec des éléments de type coque (S4R) à partir du critère de Hill quadratique (1948) par les logiciels **Abaqus/Standard**, **Abaqus/Explicit** et les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** respectivement.

Le Tableau (III.4) compare le nombre d’incréments et le temps d’utilisation du processeur (CPU) nécessaires à la simulation numérique de l’essai d’emboutissage de Swift en utilisant une station de travail HP 9000/785/J5600 (1.5 Go de RAM). Bien que les temps d’utilisation du processeur correspondant aux sous-programmes utilisateur soient supérieurs, 50 % en plus avec le critère de Ferron et al. (1994) en comparaison à l’option \*POTENTIAL, le nombre d’incréments obtenus avec **UMAT** et **VUMAT** sont proches aux valeurs fournies par **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit**, ce qui, avec la validation des prévisions de la formation des cornes d’emboutissage, démontre la consistance de l’implantation du critère de Ferron et al. (1994) dans les sous-programmes utilisateur du logiciel **Abaqus**.

Tableau (III.4) – Nombres d’incréments et temps d’utilisation du processeur (CPU) correspondant aux simulations numériques de l’essai de Swift réalisées par les logiciels **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit** avec des éléments de type coque (S4R).

Critère	Abaqus/Standard		Abaqus/Explicit	
	Incréments	CPU (s)	Incréments	CPU (s)
*POTENTIAL	1373	10897	18207	582
Hill quadratique	1295	9162	17794	798
Ferron	1317	16418	18607	859

Pour une question de cohérence, les résultats des simulations numériques présentés ci-après correspondant au critère de Hill quadratique (1948) ont été déterminés comme un cas particulier du critère de Ferron et al. (1994). En vue d’analyser la formation des cornes d’emboutissage en fonction de la forme de la surface de charge adoptée dans les simulations, trois types de description ont été comparées, à savoir, (1) Hill quadratique (1948) ajusté à la méthode  $R$  et Ferron et al. (1994) avec  $(n = 2, p = 2)$  ajusté respectivement aux méthodes (2)  $R$  et (3)  $\sigma$  à 20 % de déformation plastique, voir Figures (III.11) et (III.12).

La Figure (III.16) compare les cornes d'emboutissage obtenues pour l'acier IF 0.7 mm avec les prévisions numériques réalisées avec **UMAT** et **VUMAT** respectivement. D'abord, dans les simulations faites avec **VUMAT**, lorsque les paramètres  $(a, b)$  sont déterminés par la méthode  $R$ , la hauteur expérimentale de cornes à 0 et 90 degrés, i.e.,  $(h_{0,90} - h_{45}) \cong 2$  mm, est surestimée avec le critère (1) de Hill quadratique (1948) et sous-estimée avec le critère (2) de Ferron et al. (1994). En rappelant la Figure (III.11), il est possible d'observer que la variation angulaire de la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale  $\sigma_{(\alpha)}$  est également surestimée avec la description (1) et sous-estimée avec la description (2). En revanche, une meilleure prévision est obtenue lorsque les paramètres matériaux  $(a, b)$  sont calculés à partir de la méthode  $\sigma$ , dans le cas présent, par la description (3) de Ferron et al. (1994) avec  $(n = 2, p = 2)$ , voir Figure (III.12).

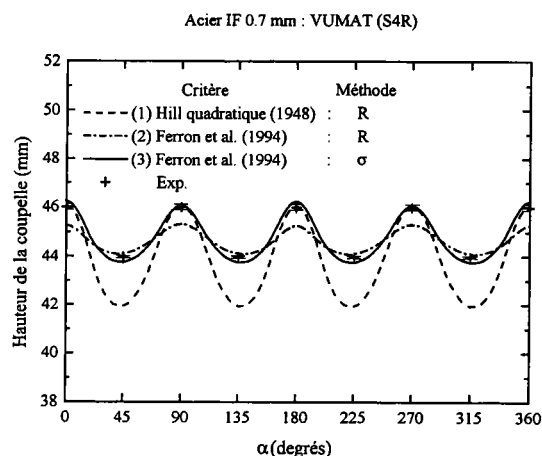
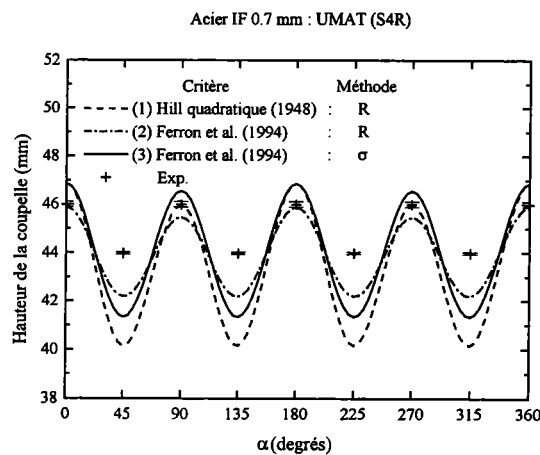


Figure (III.16) – Comparaison entre les cornes d'emboutissage de l'acier IF 0.7 mm et les prévisions déterminées avec des éléments de type coque (S4R) par les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** à partir des critères de (1) Hill quadratique (1948) ajusté à la méthode  $R$  et de Ferron et al. (1994) ajusté aux méthodes (2)  $R$  et (3)  $\sigma$  respectivement.

D'autre part, toutes les prévisions obtenues avec **UMAT** montrées à la Figure (III.16b) sous-estiment la hauteur de la coupelle mesurée aux vallées, ce qui ne permet pas, par ailleurs, d'analyser la formation des cornes en fonction des descriptions adoptées lors des simulations. Ces résultats sont sans doute occasionnés par le fait que l'épaisseur des éléments de type coque ne soit pas prise en compte par l'algorithme de contact du logiciel **Abaqus/Standard**.

Les différences entre les prévisions numériques des cornes d'emboutissage fournies par les logiciels **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit** avec des éléments de type coque peuvent être mieux expliquées en analysant les variations d'épaisseur au bord de la collerette. Sous l'hypothèse de contraintes planes, le bord de la collerette est en fait sollicité par une compression circonférentielle. À partir de cette considération, Chung et al. (1996) démontrent que les déformations plastiques suivant les directions radiale et à travers l'épaisseur le long du bord de la collerette peuvent être exprimées en fonction du coefficient de Lankford  $R$  par :

$$\varepsilon_r \Big|_{\alpha} = \frac{E R_{\alpha}}{(1 + R_{\alpha})} \Big|_{\alpha=\alpha+\pi/2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_t \Big|_{\alpha} = \frac{E}{(1 + R_{\alpha})} \Big|_{\alpha=\alpha+\pi/2} \quad (\text{III.7})$$

où  $\alpha$  est une orientation quelconque par rapport au sens de laminage et la déformation circonférentielle  $E = -\varepsilon_{\alpha}$  est supposée être maintenue constante sur le bord de la collerette. Dans le cas de l'acier IF 0.7 mm, les valeurs du coefficient de Lankford déterminées en traction uniaxiale ( $R_{45} < R_0 < R_{90}$ ) fournissent les relations qualitatives suivantes :

$$\varepsilon_r|_{45} < \varepsilon_r|_{90} < \varepsilon_r|_0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_t|_{45} > \varepsilon_t|_{90} > \varepsilon_t|_0 \quad (\text{III.8})$$

La Figure (III.17) compare les prévisions numériques de la distribution d'épaisseur le long du profil de la coupelle déterminées dans les directions DL, DD et DT avec le critère de Hill quadratique (1948). À titre de comparaison, les simulations numériques ont été réalisées avec une force de serre-flan constante dans **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit** alors que les distributions d'épaisseur ont été obtenues à une configuration intermédiaire afin de respecter l'analyse proposée par Chung et al. (1996). Dans les deux situations considérées, les épaisseurs prévues au bord de la collerette sont en accord avec (III.8), voir Figure (III.17). D'autre part, l'épaississement dans la direction DD montre que la force de serrage exerce en fait une pression non uniforme tout autour de la collerette, ce qui entraîne une diminution de la vitesse radiale des points du bord adjacents à cette direction et, par conséquent, de l'amplitude des cornes d'emboutissage. Étant donné que l'épaisseur de la coque n'est pas considérée dans **Abaqus/Standard** et que toute la collerette est sous une pression uniforme, les vallées dans la direction DD sont plus prononcées en comparaison avec les prévisions faites par **Abaqus/Explicit**, expliquant ainsi les différences montrées dans la Figure (III.16).

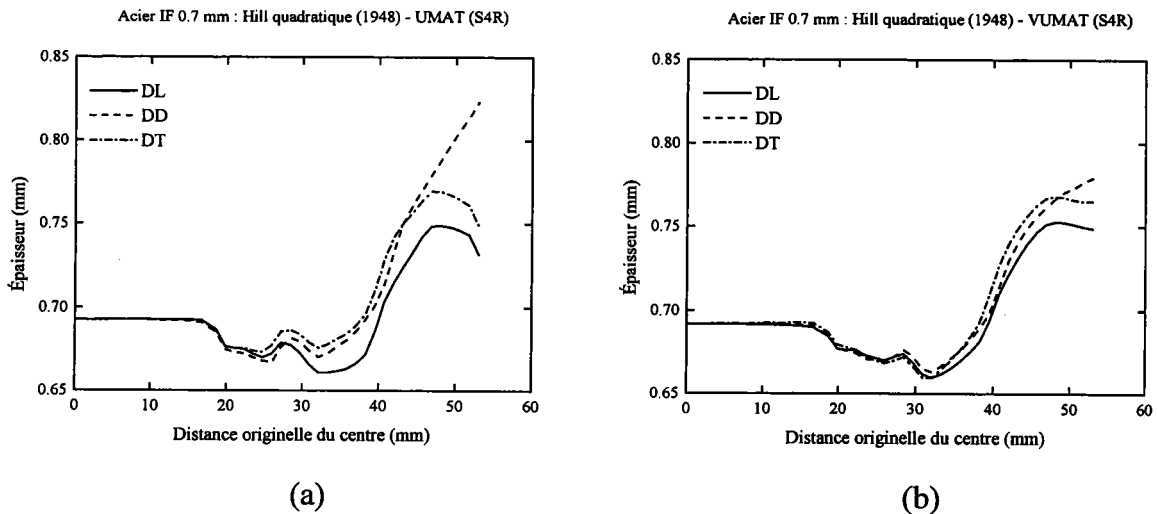


Figure (III.17) – Distributions d'épaisseur le long du profil de la coupelle déterminées pour l'acier IF 0.7 mm avec des éléments de type coque (S4R) par (a) UMAT et (b) VUMAT d'après le critère de Hill quadratique (1948) ajusté à la méthode *R*.

En vue d'évaluer la consistance de l'implantation de la version 3D du critère de Ferron et al. (1994) dans **Abaqus**, les simulations numériques de l'essai de Swift ont également réalisées avec et sans les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** respectivement. Le maillage du flan est constitué par 1512 éléments solides à huit nœuds d'interpolation linéaire avec une intégration réduite (C3D8R). Le Tableau (III.5) montre que le nombre d'incrément ainsi que les temps CPU nécessaires à **UMAT** et **VUMAT** sont comparables aux valeurs fournies en utilisant l'option \*POTENTIAL.

Tableau (III.5) – Nombres d'incrément et temps d'utilisation du processeur (CPU) correspondant aux simulations numériques de l'essai de Swift réalisées par les logiciels **Abaqus/Standard** et **Abaqus/Explicit** avec des éléments solides (C3D8R).

Critère	Abaqus/Standard		Abaqus/Explicit	
	Incréments	CPU (s)	Incréments	CPU (s)
*POTENTIAL	1191	16536	67742	1946
Hill quadratique	1204	14733	67628	2718
Ferron	1395	14177	66839	2727

La Figure (III.18) compare le profil des cornes de l'acier IF 0.7 mm aux prévisions déterminées à partir des mêmes descriptions adoptées avec des éléments de type coque (S4R). Les prévisions obtenues avec **UMAT** sont en bonne correspondance avec les résultats déterminés par **VUMAT** avec des éléments de type coque (S4R), voir Figure (III.16b), supportant ainsi l'idée quant aux effets de l'épaisseur sur l'amplitude des cornes. En revanche, bien que les prévisions déterminées par **VUMAT** soient qualitativement en bon accord avec toutes les descriptions, les hauteurs des cornes dans les directions DL et DT sont surestimées. En fait, ces fortes valeurs sont attribuées aux modes d'énergie de déformation zéro, appelés "hourglass", prépondérants dans le cas des éléments solides d'intégration réduite.



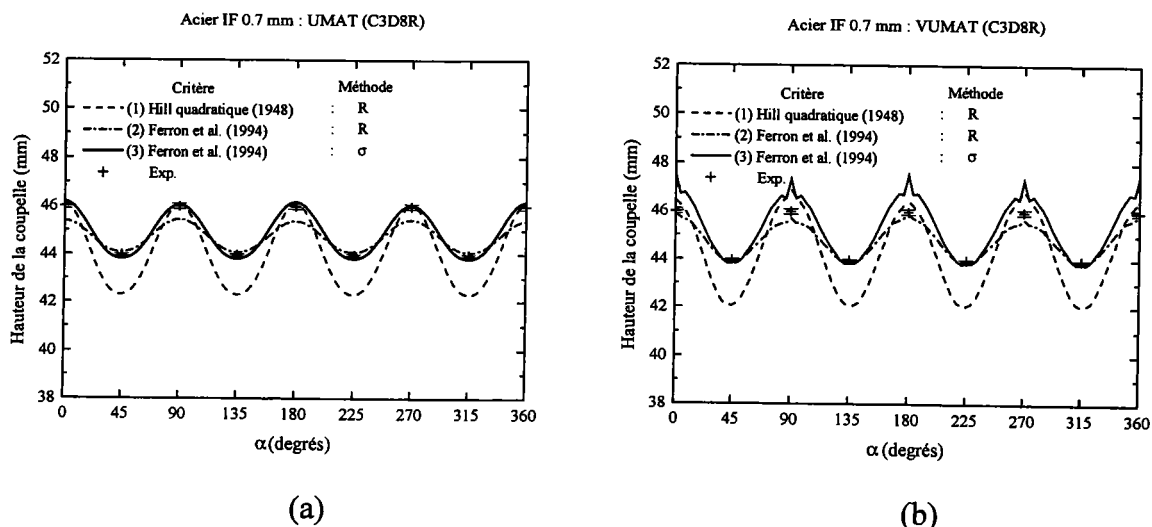


Figure (III.18) – Comparaison entre les cornes d’emboutissage de l’acier IF 0.7 mm et les prévisions déterminées avec des éléments solides (C3D8R) par les sous-programmes UMAT et VUMAT à partir des critères de (1) Hill quadratique (1948) ajusté à la méthode  $R$  et de Ferron et al. (1994) ajusté aux méthodes (2)  $R$  et (3)  $\sigma$  respectivement.

### III.4.2. Emboutissage d’une boîte de conserves

Dans cette partie, les résultats expérimentaux de l’emboutissage profond d’une boîte de conserves cylindrique déterminés par Ferran et Santos (1997) sont comparés aux prévisions réalisées avec VUMAT. L’emboutissage est défini par les paramètres suivants : rayon du flan, 74 mm ; rayon du poinçon, 41.675 mm; rayon de congé du poinçon, 1.25 mm; rayons d’ouverture et de congé de la matrice, 42.05 mm et 2.00 mm respectivement. Le matériau est un fer blanc produit par la Compagnie Sidérurgique Nationale (Brésil) sous la forme de feuilles de 0.24 mm d’épaisseur. Les paramètres correspondant au fer blanc sont donnés dans le Tableau (III.6).

Tableau (III.6)– Paramètres du fer blanc 0.24 mm. D’après Santos (1996).

Paramètres	DL	DD	DT
$\sigma_y$ (MPa)	352	347	349
K (MPa)	668	656	665
$\epsilon_0$	0.023	0.021	0.017
N	0.167	0.164	0.159
R (18%)	0.670	1.017	0.858

À l’exemple de l’acier IF analysé au paragraphe précédent, seulement des essais de traction uniaxiale ont été réalisés pour caractériser le comportement du fer blanc 0.24 mm. Donc, la valeur du paramètre  $A$  est déterminée à partir de la valeur expérimentale de  $R_{45}$  en imposant la relation  $B = 3A$  avec  $k = 0$  et  $k = 0.2$  pour les critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al.(1994) respectivement. Dans les deux cas, les paramètres  $(a, b)$  ont été calculés avec la méthode  $R$ , i.e., à partir des valeurs expérimentales de  $R_0$  et  $R_{90}$ .

La Figure (III.19) compare les prévisions de  $\sigma_{(\alpha)}/\sigma_0$  avec les limites élastiques du fer blanc 0.24 mm déterminées en traction uniaxiale. Il est intéressant de noter qu'en choisissant les exposants  $(n, p) = 2$  avec le critère de Ferron et al. (1994), un très bon accord est obtenu à la fois entre les valeurs expérimentales du coefficient de Lankford et de la limite élastique conventionnelle déterminées en traction uniaxiale dans les directions DL, DD et DT respectivement.

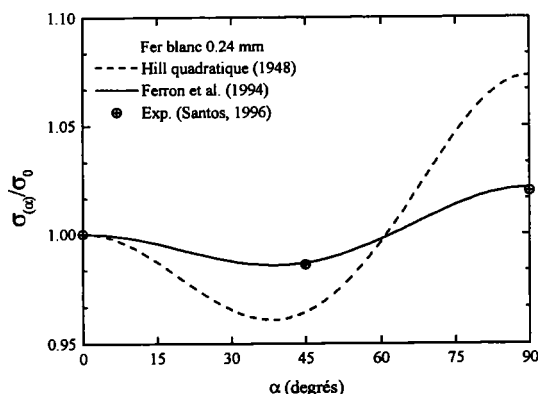


Figure (III.19) – Comparaison entre la limite élastique normalisée déterminée en traction uniaxiale dans les directions  $\alpha = (45,90)$  degrés pour le fer blanc et les prévisions angulaires obtenues à partir des critères de Hill quadratique et de Ferron et al. (1994).

L'emboutissage de la boîte de conserves est réalisée avec une course du poinçon de 39 mm et l'excès de matériau sur la collerette est ensuite découpé. Dans ce cas, la force de serre-flan employée dans les simulations est maintenue à une valeur constante de 30 KN, i.e., 7.5 KN pour le quart de la structure tandis que la vitesse de course du poinçon est augmenté progressivement jusqu'à 10 m/s. Cette force correspond aux valeurs moyennes de la pression exercée par le serre-flan déterminée expérimentalement par Santos (1996). Le coefficient de frottement  $\mu$  entre le flan et le poinçon est de 0.10 et 0.05 entre le serre-flan et la matrice. Quant au maillage du flan, montré à la Figure (III.10), il est composé par 756 éléments de type coque à quatre nœuds (S4R) avec cinq points d'intégration à travers l'épaisseur.

La Figure (III.20) compare les distributions de déformations radiales mesurées le long du profil de la boîte de conserves dans les directions DL, DD et DT avec les prévisions déterminées avec le sous-programme VUMAT à partir des critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994). À titre de comparaison, cette figure montre également les surfaces de charge déterminées pour les directions mentionnées à partir de ces deux descriptions. Ces surfaces de charge sont représentées dans l'espace de contraintes principales normalisées  $(\sigma_1/\sigma_0, \sigma_2/\sigma_0)$  et comparées aux limites élastiques en traction uniaxiale du fer blanc 0.24 mm déterminées dans les directions DL, DD et DT respectivement.

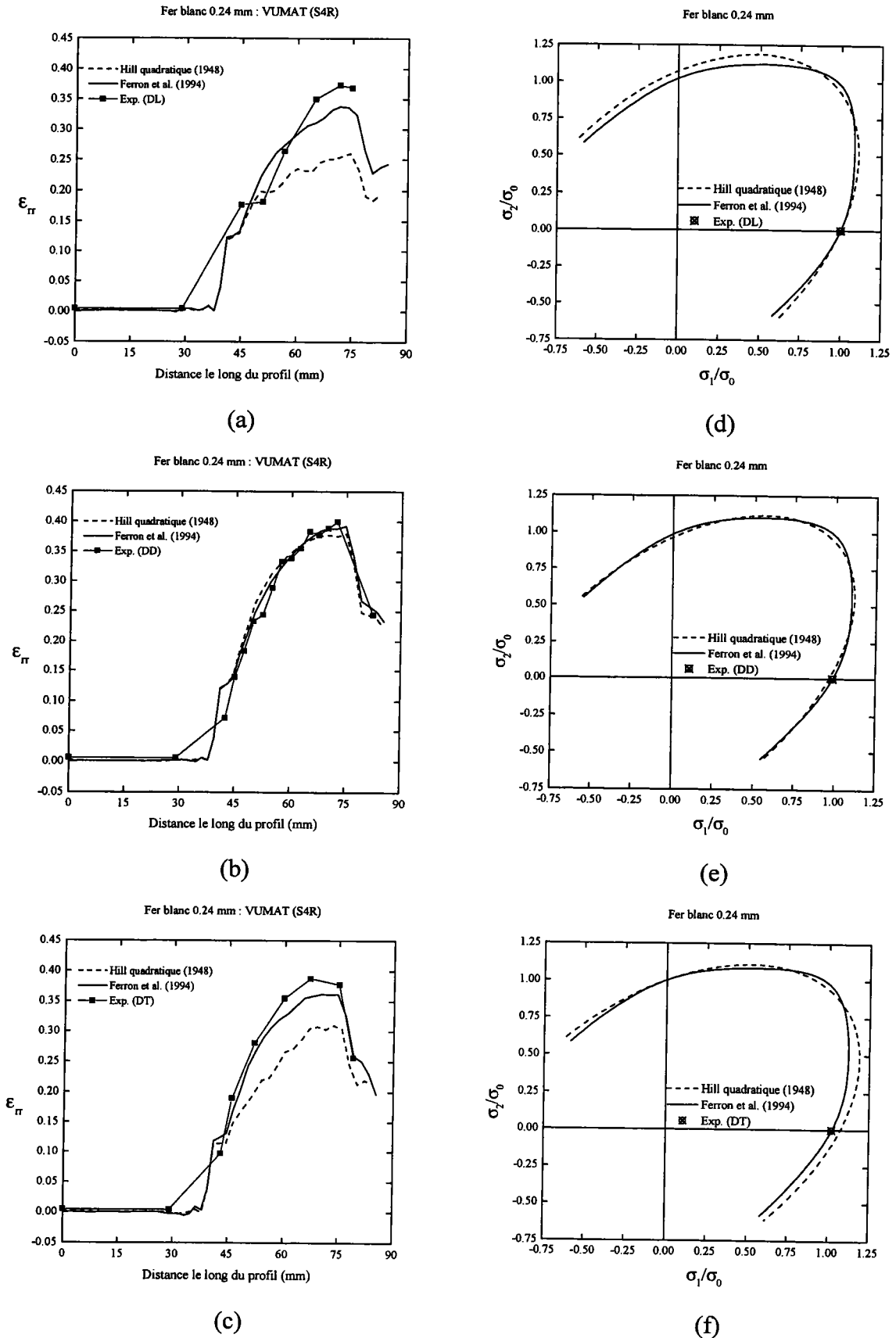


Figure (III.20) – Comparaisons entre les déformations radiales mesurées le long du profil de l'embouti du fer blanc 0.24 mm dans les directions (a) DL, (b) DD et (c) DT et les prévisions numériques obtenues avec VUMAT à partir des descriptions représentées dans cette figure par les surfaces de charge dans les directions (d) DL, (e) DD et (f) DT respectivement.

Les déformations radiales le long de la direction DD déterminées à partir des deux descriptions sont en bon accord avec les valeurs obtenues expérimentalement. En revanche, les déformations radiales selon les directions DL et DT sont sous-estimées par les prévisions réalisées avec le critère de Hill quadratique (1948) tandis qu'une meilleure concordance est obtenue avec le critère de Ferron et al. (1994). Ces prévisions sont aisément expliquées en fonction de la forme de la surface de charge correspondant à la région de contraintes d'intérêt. D'une part, la Figure (III.20d) montre que les surfaces de charge dans la direction DD obtenues avec les deux critères sont très similaires, ce qui correspond aux prévisions des déformations radiales dans cette direction. D'autre part, les faibles déformations sur la paroi de la boîte obtenues dans les directions DL et DT avec le critère de Hill quadratique (1948) sont, en fait, associées à une surestimation des contraintes entre les régions de déformation plane et retreint, indiquée dans les Figures (III.20d) et (III.20f) respectivement.

Le profil de la boîte de conserves, mesuré à  $15^\circ$  d'intervalle comme la différence entre le rayon externe de la collerette et le rayon du poinçon, est montré à la Figure (III.21). En vue de minimiser les écarts dus au centrage du flan, ces distances ont été moyennées en utilisant la relation suivante :

$$\Delta r(\alpha) = \frac{1}{4} \left[ \Delta r(\alpha) + \Delta r(\pi - \alpha) + \Delta r(\pi + \alpha) + \Delta r(2\pi - \alpha) \right] \quad (\text{III.9})$$

où l'angle  $\alpha$  définit l'orientation par rapport à la direction DL. La Figure (III.21) montre que les prévisions numériques du profil de la collerette sont en fait étroitement liées aux prévisions des déformations radiales. La distance mesurée dans la direction DD est en bonne concordance avec les déformations radiales obtenues avec les deux descriptions de même que les valeurs prévues dans les directions DL et DT à partir du critère de Hill quadratique (1948).

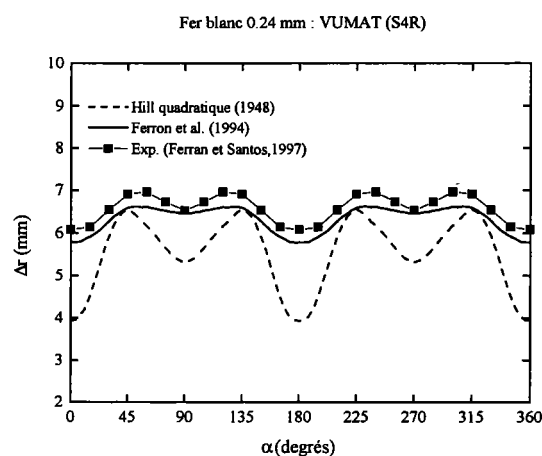


Figure (III.21) – Comparaison entre le profil moyen de la collerette du fer blanc 0.24 mm et les prévisions réalisées avec VUMAT à partir des critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994).

### III.4.3. Discussion sur la formation des cornes d'emboutissage

Les hypothèses introduites initialement par Hill (1948), Bourne et Hill (1950) et ensuite par Barlat et al. (1991b) pour expliquer la formation des cornes d'emboutissage sont confirmées dans les deux cas analysés précédemment. D'abord, les cornes et les vallées d'emboutissage se forment dans les directions angulaires  $\alpha$  correspondant respectivement aux maxima et minima du coefficient de Lankford  $R$  (Hill, 1948 et Bourne et Hill 1950). Cette idée est en correspondance directe avec les fortes et / ou faibles déformations radiales obtenues sous une compression circonférentielle sur la collerette, i.e., à  $\alpha + \pi/2$ . D'autre part, le paramètre introduit par Barlat et Richmond (1987),

$$\Gamma_{(\alpha)} = \frac{\dot{\epsilon}_{12}}{\dot{\epsilon}_{11}} = -\frac{d\sigma_{(\alpha)}/d\alpha}{2\sigma_{(\alpha)}} \quad (\text{III.10})$$

pour quantifier les effets de glissement ayant lieu lors d'une sollicitation uniaxiale hors-axes, prévoit la formation des cornes et / ou vallées respectivement pour les minima et maxima de la contrainte d'écoulement en compression uniaxiale (Panchanadeeswaran et al., 1988 et Barlat et al., 1991b). Qualitativement, ces deux idées fournissent les mêmes tendances pour la formation des cornes d'emboutissage. Néanmoins, les prévisions déterminées pour l'acier IF et le fer blanc montrent que la formation des cornes d'emboutissage est mieux représentée, d'un point de vue quantitatif, par l'idée liée à l'évolution angulaire de la contrainte d'écoulement, de préférence à celle basée sur le coefficient de Lankford  $R_{(\alpha)}$ .

L'idée de la formation de cornes d'emboutissage en fonction des effets de glissement lors d'une sollicitation uniaxiale hors-axes est mieux illustrée dans le cas particulier de la boîte de conserves pour laquelle le profil de la collerette a été mesuré expérimentalement. D'abord, la Figure (III.22) compare l'évolution angulaire du paramètre  $\Gamma$  déterminée analytiquement pour une compression uniaxiale, et d'après les prévisions des déformations de cisaillement et circonférentielle obtenues le long du bord de la collerette à partir des critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994). Les deux évolutions sont en bon accord et, comme attendu, le critère de Hill quadratique (1948) fournit des valeurs plus fortes en comparaison avec le critère de Ferron et al. (1994). Il convient de souligner également que les déformations obtenues à partir des simulations correspondent en fait aux déformations totales calculées d'après les valeurs interpolées aux points d'intégration des éléments situés au bord, ce qui explique les valeurs différentes de zéro dans les directions de symétrie orthotrope. En outre, les contraintes compressives ne sont pas rigoureusement appliquées selon la direction  $(\alpha + \pi/2)$ , en raison précisément de la forme non circulaire du bord de la collerette.

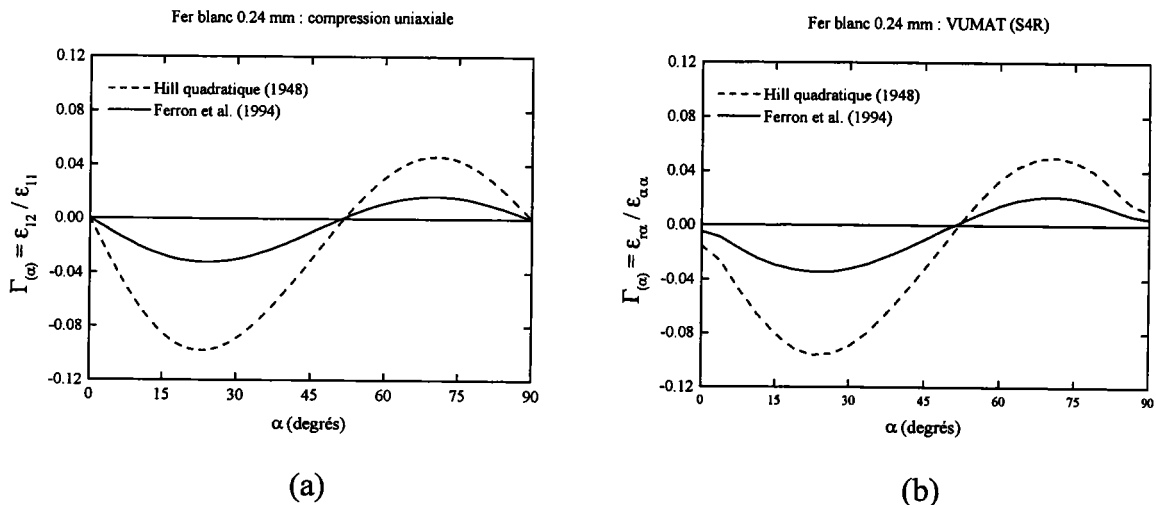


Figure (III.22) – Comparaison entre le paramètre  $\Gamma_{(\alpha)}$  déterminé pour le fer blanc 0.24 mm : (a) pour un état de compression uniaxiale et (b) au bord de la collerette à partir des critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994).

Ensuite, la Figure (III.23) compare l'amplitude relative des cornes d'emboutissage du fer blanc 0.24 mm avec les prévisions déterminées en utilisant le modèle proposé par Barlat et al. (1991b). Cette amplitude relative est définie d'après (I.75) par :

$$\frac{\Delta r_{(\alpha)}}{\Delta r_{\alpha_0}} = \frac{r_{(\theta)} - r}{r_{\alpha_0} - r} = \frac{\Delta \sigma_{(\theta)}}{\sigma_{(\theta)}} \Bigg|_{\theta=\alpha+\pi/2} \quad (\text{III.11})$$

où  $r$ ,  $\alpha_0$  est  $\sigma$  sont le rayon initial du flan, la position angulaire de référence et la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale respectivement. Un très bon accord est obtenu avec le critère de Ferron et al. (1994) tandis de fortes variations de l'amplitude relative sont observées avec le critère de Hill quadratique (1948) d'une part et d'autre de la direction angulaire DD, Dans le dernier cas, les surestimations sont en fait liées aux fortes variations obtenues de  $\Gamma$ , ou de façon analogue de  $\sigma$ , en fonction de l'orientation  $\alpha$ , voir Figures (III.19) et (III.22).

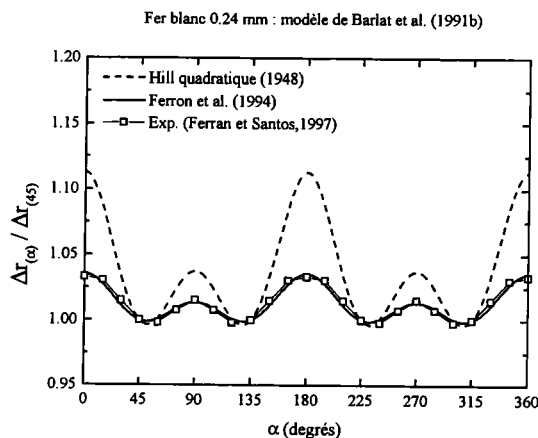


Figure (III.23) – Comparaison entre l'amplitude relative des cornes du fer blanc 0.24 mm et les prévisions réalisées avec le modèle simplifié de Barlat et al. (1991b) à partir des critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994).

### III.5. Essai de pliage et étirage

L'essai de pliage et étirage des tôles proposé par Ferran et al. (1998a) est analysé dans cette partie avec l'objectif d'améliorer les simulations réalisées dans des travaux antérieurs (Ferran et al., 1998a,b et Ferran et Almeida, 1999). D'abord, quant au type de comportement anisotrope du matériau considéré par ces auteurs, selon lequel la bande de tôle est supposée avoir une symétrie d'isotropie transverse. Ensuite, quant à la validité des éléments de type coque pour représenter les pliages et dépliages successifs de la bande de tôle sur de faibles rayons de congé. Enfin, quant à l'influence du type de description adoptée dans les simulations numériques sur les prévisions des déformations imposées à la bande de tôle. Dans le cas présent, la bande de tôle est modélisée par des éléments de formulation solide et décrite par les critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994).

La Figure (III.24) schématise la géométrie et les dimensions de l'essai de pliage et étirage des tôles proposé par Ferran et al. (1998a). En vue de réduire le temps de calcul, la bande de tôle a été représentée à travers un modèle simplifié de 60 mm de longueur, en considérant un plan de symétrie par rapport à la mi-largeur de la bande et trois couches d'éléments à travers l'épaisseur.

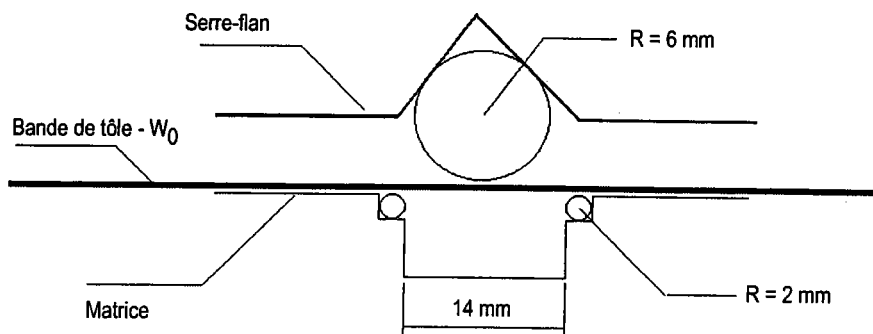


Figure (III.24) – Schéma de l'essai de pliage et étirage des tôles.

De façon analogue aux essais, le rapport de déformations de pliage et étirage est défini d'après l'incompressibilité plastique par :

$$(\varepsilon_2/\varepsilon_3)_{PE} = - \frac{1}{1 + (\varepsilon_1/\varepsilon_2)_{PE}} \quad (\text{III.12})$$

où les déformations suivant la longueur ( $L$ ) et la largeur ( $W$ ) de la bande de tôle sont définies par  $\varepsilon_1 = \ln(L/L_0)$  et  $\varepsilon_2 = \ln(W/W_0)$ . Ces variations sont obtenues après qu'une tranche d'éléments de longueur initiale  $L_0 = 3.25$  mm soit passée à travers les rayons des outils.

Dans un premier temps, une étude numérique de l'essai de pliage et étirage est présentée pour envisager l'établissement des corrélations entre les déformations résultant de cet essai et les paramètres décrivant la surface de charge du matériau. Ensuite, les résultats expérimentaux obtenus par Ferran et al. (2000) sont comparés aux prévisions numériques basées sur les descriptions mentionnées ci-dessus.

### III.5.1. Étude numérique

Une étude numérique préliminaire a été réalisée avec le sous-programme VUMAT en vue d'évaluer l'influence de l'anisotropie initiale du matériau sur les déformations résultant de l'essai de pliage et étirage des tôles. La largeur et l'épaisseur initiales de la bande de tôle adoptées dans les simulations numériques sont de 6.3 et 0.9 mm respectivement ( $W_0/t_0 = 7$ ). Ces valeurs ont été choisies en fonction des essais réalisées par Ferran et Almeida (1999), qui montrent que le rapport de déformations par pliage et étirage,  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$ , est plus sensible à l'anisotropie du matériau pour de faibles valeurs de  $(W_0/t_0)$ . Les simulations réalisées par ces auteurs montrent que le frottement et le rapport  $(W_0/t_0)$  influent dans le même sens sur les valeurs de  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$ . En l'absence de données expérimentales concernant les conditions de lubrification, la valeur de  $\mu$  adoptée entre la bande de tôle et les outils a été prise égale à 0.08. La bande est modélisée par des éléments solides linéaires d'intégration réduite à huit nœuds (C3D8R) et les outils par des surfaces rigides d'éléments de coque à quatre nœuds (R3D4).

Le comportement anisotrope de la tôle a été décrit pour quatre matériaux modèles définis en fonction du coefficient de Lankford  $R_{(\alpha)}$  suivant les directions parallèle ( $R_0$ ), diagonale ( $R_{45}$ ) et transverse ( $R_{90}$ ) au sens de laminage, voir Tableau (III.7) ci-dessous. Ces matériaux modèles correspondent en réalité à deux matériaux, étirés dans la direction parallèle ou transverse au sens de laminage de la bande de tôle, i.e.,  $A \leftrightarrow C$  et  $B \leftrightarrow D$ . En ce qui concerne la symétrie orthotrope du matériau, deux hypothèses ont été examinées. Dans la première hypothèse, le matériau est considéré comme étant isotrope transverse, le coefficient d'anisotropie plastique normale étant défini par la valeur du coefficient de Lankford  $R$  correspondant à la direction de laminage ( $R_0$ ). Dans la deuxième hypothèse, l'anisotropie transverse est définie en déterminant les paramètres  $(a, b)$  dans le critère de Ferron et al. (1994) à partir des valeurs de  $R_0$  et  $R_{90}$ . La relation  $B = 3A$  est imposée avec  $k = 0$  et 0.2 pour les critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994) respectivement. Les exposants  $(n, p)$  sont égaux à 2 dans le critère de Ferron et al. (1994).



Selon l'hypothèse utilisée, le paramètre  $A$  est déterminé à partir de la valeur de  $R$  ou de  $R_{45}$ . Dans tous les cas analysés, le comportement en traction uniaxiale est décrit par la loi de Swift avec  $K = 500$  MPa,  $\epsilon_0 = 0.002$  et  $N = 0.2$  et la rotation des axes de symétrie orthotrope a été prise en compte par l'option \*ORIENTATION.

Tableau (III.7) – Matériaux modèles adoptés dans l'étude numérique de l'essai de pliage et étirage des tôles proposé par Ferran et al. (1998a).

Matériau	$R_0$	$R_{45}$	$R_{90}$
A	0.5	1.0	1.5
B	1.0	0.5	2.0
C	1.5	1.0	0.5
D	2.0	0.5	1.0

La Figure (III.25) montre la corrélation entre le rapport de déformations  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  déterminé après une déformation longitudinale moyenne de 20 % et les valeurs du coefficient de Lankford définies selon l'hypothèse d'isotropie transverse ou suivant l'orientation de l'essai, choisie parallèle au sens de laminage de la tôle dans le cas de l'anisotropie transverse. Conformément aux expériences de Ferran et Almeida (1999), le rapport de déformations  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  augmente lorsque les valeurs de  $R$  augmentent. En comparant ces prévisions avec les résultats des simulations numériques obtenus par Ferran et Almeida (1999) à partir du critère quadratique de Hill (1948) sous l'hypothèse d'isotropie transverse, voir Figure (I.49), il est possible de vérifier que les rapports de déformations  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  déterminés avec les éléments solides sont plus faibles que les valeurs obtenues avec les éléments de type coque adoptés par ces auteurs. Cette différence peut être attribuée aux effets de pliage et dépliage entre les rayons de congé de la matrice et le jonc de retenue. À l'exception du matériau C dans le cas de l'anisotropie transverse, le critère de Hill quadratique (1948) fournit des rapports de déformations plus forts que les prévisions du critère de Ferron et al. (1994).

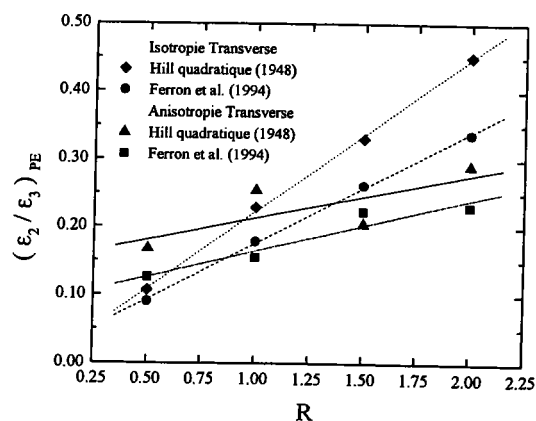


Figure (III.25) – Corrélation entre le rapport de déformations  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  déterminé avec les critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994) et le coefficient de Lankford  $R$ .

Les différences entre ces prévisions numériques peuvent être expliquées en fonction de la forme de la surface de charge associée à ces descriptions et des états de contraintes existants dans l'essai de pliage et étirage. D'abord, la Figure (III.26) compare les rapports de déformations ( $\epsilon_2/\epsilon_1$ ) selon la largeur de la bande de tôle, déterminés pour le matériau B dans le cas d'anisotropie transverse. Il est utile de noter que les modes de déformations présents le long de la largeur de la bande varient pratiquement entre la déformation plane par traction au centre et la traction uniaxiale au bord.

Donc, le paramètre du matériau qui contrôle le rapport de déformations de pliage et étirage semble être le rapport entre les contraintes d'écoulement en traction plane et en traction uniaxiale,  $\sigma_{PS}/\sigma$ , défini en fonction de l'orientation  $\alpha$  de chargement par rapport aux axes de symétrie orthotrope de la bande.

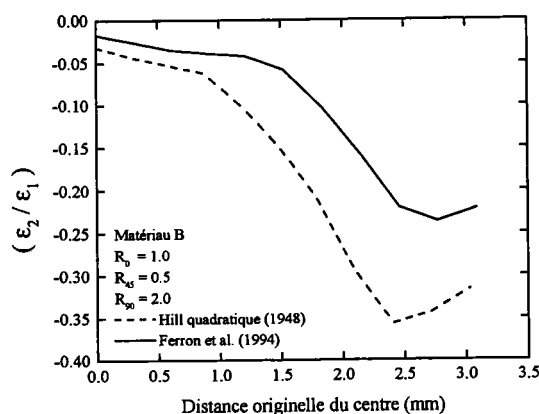


Figure (III.26) – Rapport de déformations ( $\epsilon_2/\epsilon_1$ ) selon la largeur de la bande de tôle déterminé à partir des critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994).

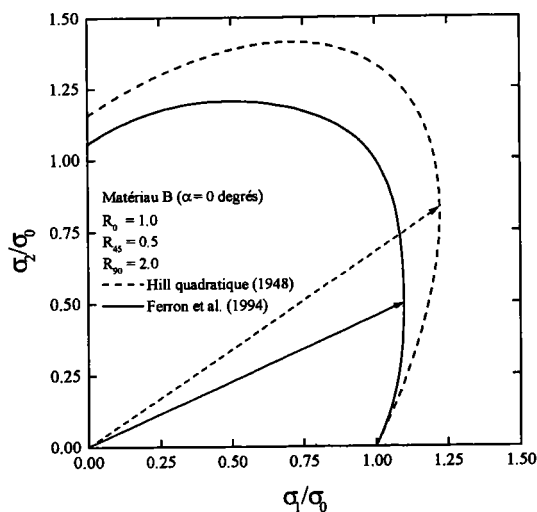


Figure (III.27) – Surfaces de charge du matériau B dans la direction de laminage déterminées à partir des descriptions de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994).

D'autre part, la Figure (III.27) montre les surfaces de charge du matériau B représentées dans l'espace de contraintes principales normalisées par la contrainte d'écoulement dans la direction de laminage. L'aplatissement, dans la région de traction plane, de la surface correspondant au critère de Ferron et al. (1994) conduit à un plus faible rapport de contraintes  $\sigma_{PS}/\sigma$  en comparaison avec le critère de Hill quadratique (1948). Ceci a pour effet de favoriser la traction plane, et donc, de limiter la déformation à travers la largeur de la bande, comme indiqué dans la Figure (III.26), et de diminuer, finalement, la valeur du rapport de déformations par pliage et étirage.

À partir de ces observations, il est donc intéressant de représenter les prévisions du rapport de déformations de pliage et étirage  $(\varepsilon_2/\varepsilon_3)_{PE}$  en fonction des valeurs du rapport de contraintes d'écoulement  $\sigma_{PS}/\sigma$  correspondant aux hypothèses et aux descriptions adoptées dans les simulations numériques. La Figure (III.28) compare les prévisions numériques du rapport de déformations de pliage et étirage en fonction du rapport entre la plus grande contrainte d'écoulement en traction plane et la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale défini suivant la direction d'étirage,  $\sigma_{PSI}/\sigma$ , ou  $\sigma_{PSI}/\sigma_u$  dans le cas de l'isotropie transverse. D'une façon générale, cette figure suggère l'existence d'une meilleure corrélation entre le rapport de déformations de pliage et étirage  $(\varepsilon_2/\varepsilon_3)_{PE}$  et le rapport de contraintes d'écoulement  $\sigma_{PSI}/\sigma$  que la représentation en fonction du coefficient de Lankford  $R$ , montrée dans la Figure (III.25). D'après la Figure (III.28), il est à noter également que le critère de Hill quadratique (1948) fournit les mêmes valeurs du rapport de contraintes  $\sigma_{PSI}/\sigma$  pour les directions parallèle et transverse au sens de laminage de la tôle.

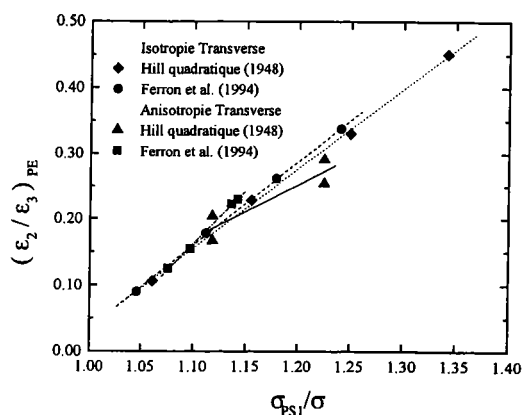


Figure (III.28) – Corrélation entre les prévisions du rapport de déformations  $(\varepsilon_2/\varepsilon_3)_{PE}$  déterminés à partir des critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994) et le rapport de contraintes  $\sigma_{PSI}/\sigma$ .

### III.5.2. Comparaison avec des résultats expérimentaux

Les prévisions du rapport de déformations de pliage et étirage basées sur les critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994) sont comparées avec les résultats expérimentaux fournis par Ferran et al. (2000) sur un acier calmé à l'aluminium (AK) et un acier libre d'éléments interstitiels (IF) produits par la CSN (Brésil). Les paramètres caractérisant le comportement en traction uniaxiale de ces aciers sont montrés dans les Tableaux (III.8) et (III.9) respectivement.

Tableau (III.8) – Paramètres de l'acier AK (0.90 mm d'épaisseur initiale).

Paramètres	DL	DD	DT
$\sigma_y$ (MPa)	278 ± 7	285 ± 5.7	278 ± 2.4
K (MPa)	596	606	598
$\epsilon_0$	14.1 x 10 <sup>-3</sup>	12.4 x 10 <sup>-3</sup>	13.9 x 10 <sup>-3</sup>
N	0.179	0.172	0.179
R (18%)	1.05 ± 0.03	0.77 + 0.06	1.29 ± 0.05

Tableau (III.9) – Paramètres de l'acier IF (0.75 mm d'épaisseur initiale).

Paramètres	DL	DD	DT
$\sigma_y$ (MPa)	139 ± 8	140 ± 12	145 ± 4
K (MPa)	573	562	564
$\epsilon_0$	2.9 x 10 <sup>-3</sup>	3.0 x 10 <sup>-3</sup>	3.1 x 10 <sup>-3</sup>
N	0.242	0.239	0.235
R (18%)	1.56 ± 0.08	1.90 + 0.11	2.15 ± 0.08

Dans les deux cas, les critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994) ont été ajustés aux valeurs du coefficient de Lankford. Dans le critère de Ferron et al. (1994), le paramètre  $k$  a été pris égal à 0.2 pour qu'un faible rapport de contraintes  $\sigma_{PSI}/\sigma$  soit obtenu en comparaison aux valeurs estimées par le critère de Hill quadratique (1948) alors que les valeurs des exposants ( $n, p$ ) ont été choisies de façon à obtenir un bon accord avec les contraintes d'écoulement déterminées en traction uniaxiale. Les meilleures valeurs des exposants ( $n, p$ ) obtenues sont ( $n = 2, p = 2$ ) et ( $n = 2, p = 1$ ) pour les aciers AK et IF respectivement. La Figure (III.29) compare les prévisions angulaires de la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale normalisée par la contrainte d'écoulement suivant la direction de laminage avec les valeurs mesurées dans les directions DD et DT. D'autre part, les prévisions de la dépendance angulaire du rapport de contraintes  $\sigma_{PSI}/\sigma$  sont montrées dans la Figure (III.30). Pour les deux aciers et dans toutes les orientations, les rapports de contraintes  $\sigma_{PSI}/\sigma$  calculés par le critère de Ferron et al. (1994) sont plus faibles que les valeurs obtenues avec le critère de Hill quadratique (1948).

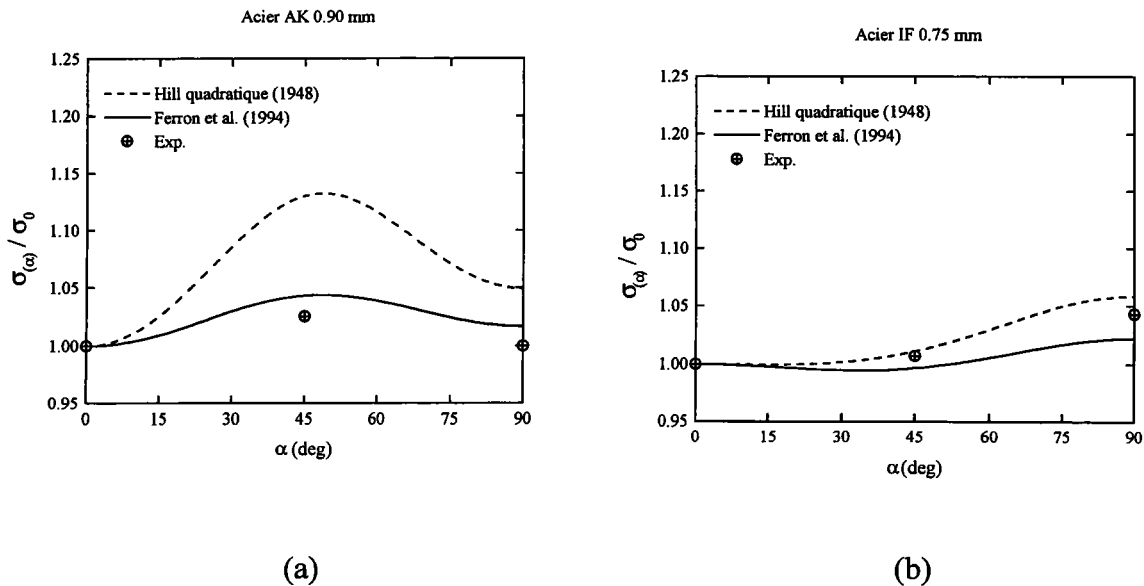


Figure (III.29) – Comparaison entre les contraintes d'écoulement déterminées en traction uniaxiale pour les aciers : (a) AK 0.90 mm et (b) IF 0.75 mm et les prévisions obtenues avec les critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994).

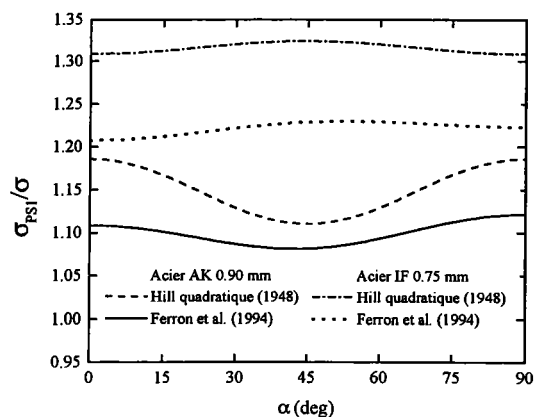


Figure (III.30) – Comparaison entre les prévisions angulaires du rapport de contraintes  $\sigma_{PSI}/\sigma$  déterminées pour les aciers AK 0.90 mm et IF 0.75 mm à partir des critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994).

Les simulations numériques ont été réalisées dans un premier temps avec VUMAT en utilisant le même modèle simplifié adopté dans l'étude numérique présentée précédemment. De façon similaire à cette étude, la bande de tôle a été représentée par trois couches d'éléments solides (C3D8R) et le coefficient de frottement  $\mu$  a été pris égal à 0.08. En outre, les essais de pliage et étirage réalisées dans les directions DD et DT ont été reproduits à partir d'une rotation initiale du repère des axes matériels créés avec l'option \*ORIENTATION. Dans tous le cas, le comportement en traction uniaxiale du matériau est décrit par les paramètres de la loi d'écrouissage de Swift correspondant à la direction de laminage (DL), montrés dans les Tableaux (III.8) et (III.9).

La Figure (III.31) compare les rapports de déformations  $(\varepsilon_2/\varepsilon_3)_{PE}$  mesurés pour les aciers AK 0.90 mm et IF 0.75 mm après un allongement longitudinal de  $\approx 16\%$  avec les prévisions numériques déterminées à partir des critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994). Bien que les prévisions soient en accord avec la tendance expérimentale, les valeurs du rapport de déformations  $(\varepsilon_2/\varepsilon_3)_{PE}$  sont surestimées par ces deux descriptions notamment avec le critère de Hill quadratique (1948), ce qui est en correspondance avec les fortes valeurs du rapport de contraintes  $\sigma_{PSI}/\sigma$  obtenues par ce critère, voir Figure (III.30).

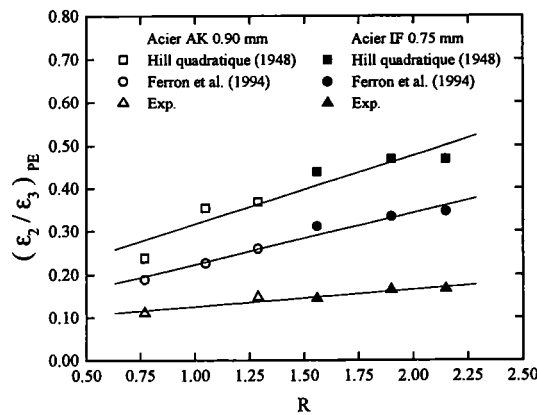


Figure (III.31) – Comparaison entre les prévisions numériques du rapport de déformations par pliage et étirage en fonction des valeurs de  $R$  et les résultats expérimentaux déterminés pour les aciers AK 0.90 mm et IF 0.75 mm.

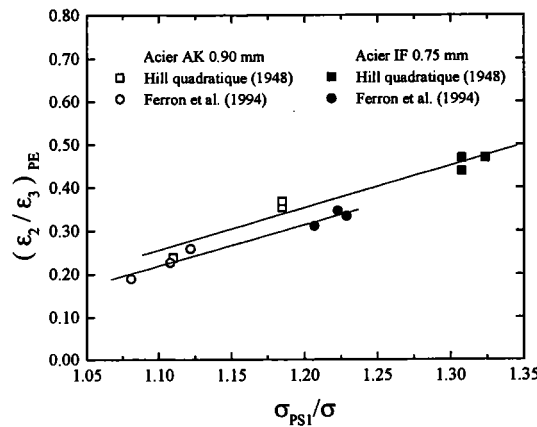


Figure (III.32) – Corrélation entre les prévisions numériques du rapport de déformations par pliage et étirage et le rapport de contraintes  $\sigma_{PSI}/\sigma$  déterminés pour les aciers AK 0.90 mm et IF 0.75 mm à partir des critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994).

La Figure (III.32) compare les corrélations obtenues entre les prévisions numériques du rapport de déformations  $(\varepsilon_2/\varepsilon_3)_{PE}$  et les rapports de contraintes  $\sigma_{PSI}/\sigma$  déterminés pour les aciers AK et IF à partir des critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994). Cette figure suggère que les résultats expérimentaux pourraient être rapprochés à la condition que ces descriptions puissent fournir des rapports de contraintes plus faibles que 1.05.

Étant donné que **Abaqus/Standard** dispose d'une bibliothèque plus ample d'éléments, les simulations numériques ont également été réalisées avec **UMAT** en vue d'évaluer l'influence du type de formulation sur les prévisions du rapport de déformations  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$ . Outre les éléments linéaires d'intégration réduite (C3D8R), la bande de tôle a été représentée par des éléments d'intégration complète sans et avec la considération de modes de déformations incompatibles, les éléments (C3D8) et (C3D8I) dans la terminologie **Abaqus**, et les outils par des surfaces rigides analytiques. Les simulations ont été réalisées pour l'acier IF 0.75 mm étiré suivant la direction DL à partir du critère de Hill quadratique (1948). D'abord, le Tableau (III.10) montre les temps d'utilisation du processeur (CPU) obtenus avec ces éléments en comparaison avec le temps donné par le sous-programme **VUMAT**. Les temps nécessaires à **UMAT** sont beaucoup plus importants et augmentent en fonction du nombre de points d'intégration, ce qui est sans aucun doute lié à la technique implicite. Néanmoins, les prévisions du rapport de déformations  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  déterminées par les éléments solides adoptés avec **UMAT** sont en effet légèrement différentes de la valeur obtenue avec l'élément d'intégration réduite utilisé avec **VUMAT**, comme indiqué sur la Figure (III.13). Ces comparaisons valident en quelque sorte les prévisions numériques réalisées avec des éléments solides d'intégration réduite, lesquels sont très sensibles aux modes d'énergie de déformation zéro.

Tableau (III.10) – Temps d'utilisation du processeur (CPU) correspondant aux simulations de l'essai de pliage et étirage des tôles réalisées avec les sous-programmes **UMAT** (U) et **VUMAT** (V) en utilisant le critère de Hill quadratique (1948).

	Type d'élément			
	C3D8R(U)	C3D8(U)	C3D8I(U)	C3D8R(V)
CPU	4.2	7.3	7.3	1.0

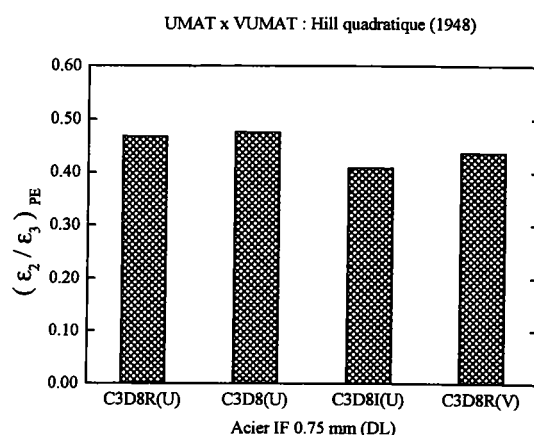


Figure (III.33) – Comparaison entre les prévisions du rapport de déformations  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$  déterminées pour l'acier IF 0.75 mm étiré suivant la direction de laminage (DL) avec les sous-programmes **UMAT** (U) et **VUMAT** (V) à partir du critère de Hill quadratique (1948).

Il est utile de souligner que dans toutes les simulations numériques réalisées avec des éléments d'intégration réduite, les valeurs des paramètres de contrôle de modes d'énergie de déformation zéro n'ont pas été modifiées. La Figure (III.34) montre qu'il est possible de se rapprocher artificiellement des résultats expérimentaux en amplifiant par un facteur de 100 la valeur prise par défaut dans le contrôle basé sur la rigidité élastique.

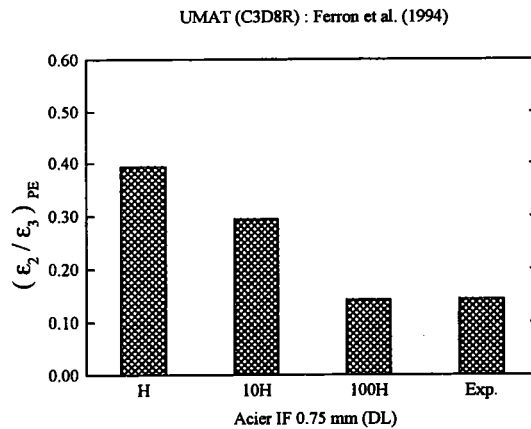


Figure (III.34) – Influence de la valeur de contrôle des modes d'énergie de déformation zéro utilisée avec les éléments solides linéaires d'intégration réduite sur la prévision numérique du rapport de déformations de pliage et étirage.

Il est enfin utile de rappeler que le modèle d'écroutissage isotrope adopté dans les simulations présente le grave défaut de ne pas prendre en compte les caractéristiques du comportement cyclique, telles que l'observation de l'effet Bauschinger, qui peut être décrit par des modèles d'écroutissage mixtes (isotrope et cinématique).

### III.6. Conclusion

Les essais d'emboutissage analysés à travers les simulations réalisées dans ce chapitre ont démontré que le critère de Ferron et al. (1994) est assez souple pour rendre compte des principaux modes de déformations retrouvés lors de l'emboutissage des tôles, du moins pour les matériaux présentant un comportement comme les aciers considérés dans ces essais.

Tout d'abord, l'étude de l'expansion par poinçonnement hémisphérique montre comment la combinaison des effets des paramètres du matériau et de la tribologie outils-flan influe sur les prévisions des distributions des déformations obtenues dans cet essai. L'anisotropie du matériau peut en fait être représentée par un seul paramètre,  $P = \sigma_{PS1} / \sigma_b$ , définissant la forme de la surface de charge entre les régions de traction plane et l'expansion équi-biaxiale. Dans ce cas, il est préférable d'ajuster la description adoptée dans les simulations numériques à ce paramètre plutôt que d'utiliser la seule valeur du coefficient d'anisotropie normale  $R$ .



L'analyse de l'emboutissage profond montre que l'évaluation quantitative de la formation des cornes et/ou des vallées d'emboutissage dépend essentiellement d'une description précise des effets de glissement lors d'une sollicitation uniaxiale hors-axes. En fait, l'intensité de ces effets est dictée par l'évolution de la contrainte d'écoulement en compression uniaxiale en fonction de l'orientation de chargement dans le plan de la tôle,  $\sigma_{(\alpha)}$ . Ainsi, une meilleure prévision de l'amplitude des cornes est obtenue lorsque les paramètres décrivant l'anisotropie transverse dans la fonction de charge sont déterminés à partir des valeurs expérimentales de  $\sigma_{(\alpha)}$  plutôt qu'à partir des valeurs du coefficient de Lankford  $R_{(\alpha)}$ . Plus généralement, les prévisions des distributions de déformations radiales sont contrôlées par la dépendance angulaire des contraintes d'écoulement dans la région comprise entre la compression uniaxiale et l'expansion équi-biaxiale.

Enfin, l'étude numérique de l'essai de pliage et étirage des tôles suggère une bonne corrélation entre le rapport de déformations résultant de cet essai,  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$ , et le rapport entre la plus grande contrainte d'écoulement en traction plane et la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale,  $\sigma_{PSI}/\sigma$ . Néanmoins, les prévisions numériques réalisées avec les critères de Hill quadratique (1948) et de Ferron et al. (1994) surestiment les valeurs expérimentales de ce rapport de déformations. Ces désaccords ont été vérifiés dans les simulations réalisées avec **Abaqus/Explicit** en utilisant des éléments solides linéaires d'intégration réduite de même qu'avec **Abaqus/Standard** en utilisant des éléments solides linéaires d'intégration complète sans et avec la considération de modes de déformations incompatibles. Il semblerait donc que les effets des déformations cycliques produites par les pliages et dépliages successifs entre les rayons des outils devraient être pris en compte dans les simulations numériques de cet essai.

## Conclusion générale

L'étude réalisée dans ce travail a permis d'identifier quelques caractéristiques importantes de la description du comportement anisotrope du matériau dans la simulation numérique de l'emboutissage des tôles. Ces caractéristiques ont été évaluées à partir de l'analyse numérique de trois types d'essais expérimentaux regroupant les états de contraintes situés entre les principaux modes de déformation retrouvés lors de l'emboutissage des tôles. Les simulations numériques ont été réalisées à l'aide du logiciel d'éléments finis **Abaqus**, dans lequel le critère de plasticité proposé par Ferron et al. (1994) a été implanté dans les sous-programmes **UMAT** et **VUMAT** disponibles respectivement dans les versions implicite et explicite de ce logiciel. En outre, les simulations ont également été réalisées avec le critère de Hill quadratique (1948) en vue d'étudier l'influence de la forme de la surface de charge en comparaison avec les prévisions numériques fournies avec le critère de Ferron et al. (1994).

Dans un premier temps, les simulations numériques de l'essai d'expansion par poinçonnement hémisphérique montrent l'importance du couplage entre la forme de la surface de charge et le coefficient de frottement sur les prévisions numériques de distributions des déformations.

Ensuite, il est montré que les prévisions des déformations radiales et, par conséquent, de la formation des cornes dans l'essai d'emboutissage profond d'une coupelle cylindrique, sont étroitement liées à la dépendance angulaire des contraintes d'écoulement dans la région de la surface de charge comprise entre la compression uniaxiale et l'expansion équi-biaxiale. D'autre part, puisque la formation de cornes et/ou des vallées d'emboutissage est directement liée aux effets de glissement hors-axes ayant lieu au bord de la collerette, une meilleure prévision de l'amplitude des cornes est obtenue lorsque l'évolution angulaire de la contrainte d'écoulement en compression uniaxiale dans le plan de la tôle,  $\sigma_{(\alpha)}$ , est précisément décrite par le critère de plasticité adopté dans les simulations numériques.

En ce qui concerne les simulations réalisées avec le logiciel **Abaqus**, il a été remarqué que l'utilisation des éléments de type coque avec **Abaqus/Standard** conduit à une mauvaise estimation de l'amplitude des cornes d'emboutissage en raison du fait que l'épaisseur de la coque n'est pas prise en compte par l'algorithme de contact. De même, les éléments solides linéaires d'intégration réduite utilisés avec **Abaqus/Explicit** ont produit des cornes plus accentuées, à cause probablement des effets des modes d'énergie de déformation zéro.

Enfin, bien que les prévisions du rapport de déformations de pliage et étirage,  $(\epsilon_2/\epsilon_3)_{PE}$ , ne soient pas quantitativement en bon accord avec les valeurs expérimentales, l'étude numérique a présenté une bonne corrélation entre ce rapport de déformations et le rapport entre la plus grande contrainte d'écoulement en traction plane et la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale,  $\sigma_{PS1}/\sigma$ .

En résumé, mis à part les désaccords trouvés pour l'essai de pliage et étirage des tôles, les comparaisons entre les prévisions réalisées avec le critère de Ferron et al. (1994) et les résultats expérimentaux des essais analysés, montrent que ce critère permet de décrire convenablement les caractéristiques essentielles à la simulation numérique associée à l'emboutissage des tôles. Ces améliorations sont attribuées à la souplesse offerte par ce critère permettant une meilleure description de la forme de la surface de charge et de l'influence de l'orientation de chargement sur les contraintes d'écoulement dans les régions d'intérêt, conformément aux résultats expérimentaux et aux prévisions de la plasticité polycristalline. En outre, les temps d'utilisation du processeur (CPU) correspondant à l'application du critère de Ferron et al. (1994) via les sous-programmes utilisateur **Abaqus** restent abordables en comparaison avec ceux obtenus par l'option \*POTENTIAL, représentant en fait un bon compromis entre la précision des prévisions et le coût des simulations numériques.

Les perspectives pour la suite du présent travail pourraient être orientées, d'une part, vers le relâchement de l'hypothèse d'écrouissage isotrope en vue d'évaluer les effets des déformations cycliques dans l'essai de pliage et étirage des tôles. D'autre part, puisque des structures de plus en plus légères sont conçues avec des matériaux à haute limite élastique, une modélisation pertinente du retour élastique en fonction de l'anisotropie de la tôle pourrait également être envisagée. Enfin, il serait intéressant de vérifier la possibilité d'adopter des exposants non entiers dans le critère de Ferron et al. (1994) pour mieux décrire le comportement de certains alliages d'aluminium présentant de fortes variations du coefficient de Lankford dans le plan de la tôle, ou encore, de considérer une transformation linéaire du tenseur de contraintes, comme la représentation du critère isotrope de Drucker (1949) proposée récemment par Cazacu et Barlat (2001).

## Références

- ASM Handbook Committee, "Metals Handbook", Vol. 8, Mechanical Testing, 9<sup>ème</sup> édition, American Society for Metals, 1985, pp. 562-563.
- Bacroix, B. et Gilormini, P., "Finite-Element Simulations of Earing in Polycrystalline Materials Using a Texture-Adjusted Strain-Rate Potential", Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, No. 3, 1995, pp. 1-21.
- Barlat, F., "Crystallographic Texture, Anisotropic Yield Surfaces and Forming Limits of Sheet Metals", Materials Science and Engineering, 1987, Vol. 91, pp. 55-72.
- Barlat, F. et Richmond, O., "Prediction of Tricomponent Plane Stress Yield Surfaces and Associated Flow Behavior of Strongly Textured F.C.C. Polycrystalline Sheets", Materials Science and Engineering, 1987, Vol. 95, pp. 15-29.
- Barlat, F. et Lian, J., "Plastic Behavior and Stretchability of Sheet Metals. Part I: A Yield Function for Orthotropic Sheets Under Plane Stress Conditions", International Journal of Plasticity, 1989, Vol. 5, pp. 51-66.
- Barlat, F., Lege, D. J. et Brem, J.C., "A Six-Component Yield Function for Anisotropic Materials", International Journal of Plasticity, 1991, Vol. 7, pp. 693-712.
- Barlat, F., Panchanadeswaran, S. et Richmond, O., "Earing in Cup Drawing Face-Centered Cubic Single Crystals and Polycrystals", Metallurgical Transactions A, 1991, Vol. 22A, pp. 1525-1534.
- Barlat, F., Lege, D.J., Brem, J.C. et Warren, J.C., "Constitutive Behavior for Anisotropic Materials and Application to a 2090 Al-Li Alloy", Modeling the Deformation of Crystalline Solids ; Physical Theory, Application, and Experimental Comparisons, T. C. Lowe, A.D. Rollett, P.S., Follansbee et G. S. Daehn (eds.), TMS Annual Meeting, New Orleans, USA, 1991, pp. 189-203.
- Barlat, F., Chung, K. et Richmond, O., "Strain-Rate Potential for Metals and its Application to Minimum Plastic Work Path Calculations", International Journal of Plasticity, 1993, Vol. 9, pp. 51-63.
- Barlat, F. et Chung, K., "Anisotropic Potentials Plastically Deforming Materials", Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 1993, Vol. 1, pp. 403-416.
- Barlat, F., Chung, K. et Richmond, O., "Anisotropic Plastic Potentials for Polycrystals and Application to the Design of Optimum Blank Shapes in Sheet Forming", Metallurgical Transactions A, 1994, Vol. 25A, pp. 1209-1216.
- Barlat, F., Becker, R. C., Hayashida, Y., Maeda, Y., Yanagawa, M., Chung, K., Brem, J.C., Lege, D. J., Matsui, K., Murtha, S. J. et Hattori, S., "Yield Description for Solution Strengthened Aluminum Alloys", International Journal of Plasticity, 1997, Vol. 13, No. 4, pp. 385-401.
- Barlat, F., Maeda, Y., Chung, K., Yanagawa, M., Brem, J.C., Hayashida, Y., Lege, D.J., Matsui, K., Murtha, S. J., Hattori, S., Becker, R. C. et Makosey, S. , "Yield Function Development for Aluminum Alloy Sheets", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1997, Vol. 45, No. 11/12, pp. 1727-1763.
- Beaudoin, A. J., Dawson, P. R., Mathur, K. K., Kocks, U. F. et Korzekwa, D. A., "Application of Polycrystal Plasticity to Sheet Forming", Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 117, 1994, pp. 49-70.
- Bourne, L. et Hill, R., "On the Correlation of the Directional Properties of Rolled Sheets in Tension and Cupping Tests", Philosophical Magazine, Vol. 41, 1950, pp. 671-681.
- Burford, D., A., Narasimhan, K. et Wagoner, R. H., "A Theoretical Sensitivity Analysis of Full-Dome Formability Tests : Parameter Study for  $n$ ,  $m$ ,  $r$  and  $\mu$ ", Metallurgical Transactions A, Vol. 22, 1991, pp. 1775-1788.

- Cazacu, O., et Barlat, F., "Generalization of Drucker's Yield Criterion to Orthotropy", *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 6, 2001, pp. 613-630.
- Chung, K. et Shah, K., "Finite Element Simulation of Sheet Metal Forming for Planar Anisotropic Metals", *International Journal of Plasticity*, 1992, Vol. 8, pp. 453-476.
- Chung, K. et Richmond, O., "A Deformation Theory of Plasticity Based on Minimum Work Paths", *International Journal of Plasticity*, 1993, Vol. 9, pp. 907-920.
- Chung, K., Lee, S.Y., Barlat, Keum, Y.T. et Park, J., M., "Finite Element Simulation of Sheet Forming Based on a Planar Anisotropic Strain-Rate Potential", *International Journal of Plasticity*, 1996, Vol. 12, pp. 93-115.
- Drucker, D.C., "Relation of Experiments to Mathematical Theories of Plasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, 1949, Vol. 16, pp. 349-360.
- Ferran, G. et Santos, E.V.B., "Influência do processo de dupla redução sobre o processo de embutimento de latas cilíndricas", II Congresso Internacional de Metalurgia da ABM, São Paulo, Brésil, 1997.
- Ferran, G., Moreira, L. P., Moura, A. C. et Barboza Junior, O., "Formability Assessment of LC and ULC Steels with a Bending-Drawing Test", *International Symposium on Modern LC and ULC Sheet Steels for Cold Forming : Processing and Properties*, W. Bleck (ed.), Department of Ferrous Metallurgy RWTH Aachen University of Technology, Allemagne, 1998, pp. 395-405.
- Ferran, G., Moura, A. C. et Moreira, L. P., "Computer Aided Development of a Bending-Drawing Test for Thin Metallic Sheets", *Journal of Materials Processing Technology*, Vols. 80-81, 1998, pp. 531-537.
- Ferran, G. et Almeida, M.A., "Behavior of Sheet Metal Submitted to Cyclic Bending and Stationary Drawing Deformation", *Proceedings of the 7th International Conference on Sheet Metal - SheMet'99*, M. Geiger, H. J. J. Kals, B. Shirvani, B. et U. P. Singh (eds.), Erlangen, Allemagne, 1999, pp. 311-318.
- Ferran, G., Faria Junior, A. et Schiavo, M. S., "Novo Ensaio para Estimar o Coeficiente de Anisotropia Plástica", *Jornadas de Iniciação Científica da Universidade Federal Fluminense, PIBIC*, Rio de Janeiro, Brésil, 2000, Vol. 1.
- Ferron, G., Makkouk, R. et Morreale, J., "A Parametric Description of Orthotropic Plasticity in Metal Sheets", *International Journal of Plasticity*, 1994, Vol. 10, pp. 51-63.
- Fromentin, S., "Établissement d'un Critère de Striction Intrinsèque des Tôles et Validation Numérique par Simulations d'emboutissage", Thèse de Doctorat, 1998, Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, Université de Metz, Metz, France.
- Ghosh, A. K. et Hecker, S. S., "Stretching Limits in Sheet Metals : In-Plane Versus Out-of-Plane Deformation", *Metallurgical Transactions*, 1974, Vol. 5, pp. 2161- 2164.
- Ghosh, A. K. et Hecker, S. S., "Failure in Thin Sheets Stretched Over Rigid Punches", *Metallurgical Transactions A*, 1975, Vol. 6A, pp. 1065- 1074.
- Ghosh, A. K., "A Method for Determining the Coefficient of Friction in Punch Stretching of Sheet Metals", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 19, 1977, pp. 457-470.
- Gilormini, P. et Roudier, Ph., "Abaqus and Finite Strain", Rapport interne LMT No. 140, Janvier 1993, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Université de Paris VI, France.
- Gilormini, P. et Bacroix, B., "Implementation of a Physically-Motivated Anisotropic Behavior in Abaqus for Sheet-Metal Forming Simulations", *Abaqus User's Conference*, Paris, France, 1995, pp. 289-303.
- Gilormini, P. et Bacroix, B., "Simplified Approaches for the Prediction of Deep-Drawing Ears", *Advanced Methods in Materials Processing Defects*, Third International Conference on Materials Processing Defects, M. Predeleanu et P. Gilormini (eds.), Cachan, France, 1997, pp. 331-340.
- Hecker, S. S., "A Cup Test for Assessing Stretchability", *Metals Engineering Quarterly*, 1974, Vol. 14, No.4, pp. 30-36.

- Hecker, S. S., "Simple Technique for Determining Forming Limit Curves", Sheet Metal Industries, 1975, Vol. 52, No. 11, pp. 671-676.
- Hecker, S. S., "Experimental Studies of Sheet Stretchability", Proceedings of Formability : Analysis, Modeling and Experimentation, The Metallurgical Society of AIME, S.S. Hecker, A.K. Ghosh et H.L. Gegel (eds.), Illinois, USA, 1977, pp. 150-182.
- Hibbitt, Karlson & Sorensen Inc., "Abaqus Theory Manual", Version 5.8, 1998, Pawtucket, USA, Section 4.
- Hibbitt, Karlson & Sorensen Inc., "Abaqus/Explicit User's Manual", Version 5.8, 1998, Pawtucket, USA, Vol. II, Section 23.2.3.
- Hibbitt, Karlson & Sorensen Inc., "Abaqus/Standard User's Manual", Version 5.8, 1998, Pawtucket, USA, Vol. III, Section 25.2.28.
- Hill, R., "A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals", Proceedings of the Royal Society of London, 1948, A 193, pp. 281-297.
- Hill, R., "The Mathematical Theory of Plasticity", Oxford University Press, 1950, pp. 317-332.
- Hill, R., "Theoretical Plasticity of Textured Aggregates", Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 85, 1979, pp. 179-191.
- Hill, R., "Constitutive Dual Potential in Classical Plasticity", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1987, Vol. 35, No. 1, pp. 23-33.
- Hill, R., "Constitutive Modelling of Orthotropic Plasticity in Sheet Metals", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1990, Vol. 38, No. 3, pp. 405-417.
- Hill, R. et Hutchinson, J. W., "Differential Hardening in Sheet Metal Under Biaxial Loading : A Theoretical Framework", Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 1992, Vol. 59, S1-S9.
- Hosford, W. F., "A Generalized Isotropic Yield Criterion", Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 1972, pp. 607-609.
- Hosford, W. F., "Comments on Anisotropic Yield Criteria", International Journal of Mechanical Sciences, 1985, Vol. 27, No. 7-8, pp. 423-427.
- Hosford, W. F., "The Effect of Anisotropy and Work Hardening on Cup Drawing, Redrawing and Ironing", Proceedings of Formability : Analysis, Modeling and Experimentation, The Metallurgical Society of AIME, S.S. Hecker, A.K. Ghosh et H.L. Gegel (eds.), Illinois, USA, 1977, pp. 78-95.
- Hosford, W. F., "The Mechanics of Crystals and Textured Polycrystals", Oxford University Press, 1993, pp. 139-162.
- Hosford, W. F., "On the Crystallographic Basis of Yield Criteria", Textures and Microstructures, 1996, Vols. 26-27, pp. 479 - 493.
- Hu, J., Jonas, J., J. et Ishikawa, T., "FEM Simulation of the Forming of Textured Aluminum Sheets", Materials Science and Engineering A, 1998, Vol. 256, pp. 51-59.
- Inal, K., Wu, P. D. et Neale, K. W., "Simulation of Earing in Textured Aluminum Sheets", International Journal of Plasticity, 2000, Vol. 16, pp. 635-648.
- Karafillis, A. P. et Boyce, M. C., "A General Anisotropic Yield Criterion Using Bounds and a Transformation Weighting Tensor", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1993, Vol. 41, No. 12, pp. 1859-1886.
- Knibloe, J. R. et Wagoner, R. H., "Experimental Investigation and Finite Element Modeling of Hemispherically Stretched Steel Sheer", Metallurgical Transactions A, 1989, Vol. 20A, pp. 1509-1521.
- Kobayashi, S. et Kim, J. H., "Deformation Analysis of Axisymmetric Sheet Metal Forming Processes by the Rigid-Plastic Finite Element Method", Mechanics of Sheet Metal Forming, Material Behavior and Deformation Analysis, D. P. Koistinen et N.-M. Wang (eds.), New York, 1978, pp. 341-365.

- Krieg, R. D. et Key, S. W.**, “Implementation of a Time Independent Plasticity Theory into Structural Computer Programs”, Constitutive Equations in Viscoplasticity : Computational and Engineering Aspects , Vol. 20, ASME, New York, 1976, pp. 125-137.
- Lege, D., Barlat, F. et Brem, J.C.**, “Characterization and Modeling of the Mechanical Behavior and Formability of a 2008-T4 Sheet Sample”, International Journal of Mechanical Sciences, 1989, Vol. 31, No. 7, pp. 549-563.
- Liao, K.-C., Pan, J. et Tang, S. C.**, “Effects of Yield Surface Shape on Sheet Metal Forming Simulations”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, Vol. 41, No. 3, pp. 559-584.
- Lin, S.B. et Ding, J. L.**, “Experimental Study of the Plastic Yielding of Rolled Sheet Metals with the Cruciform Plate Specimen”, International Journal of Plasticity, 1995, Vol. 11, No. 5, pp. 583-604.
- Logan, R.W. et Hosford, W.F.**, “Upper-Bound Anisotropic Yield Locus Calculations Assuming  $\langle 111 \rangle$ -Pencil Glide”, International Journal of Mechanical Sciences, 1980, Vol. 22, pp. 419-430.
- Makkouk, R.**, “Modélisation de la Plasticité Orthotrope en Contraintes Planes : Application à la Détermination des Limites de Formage des Tôles”, Thèse de Doctorat, Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, 1994, Université de Metz.
- Mamalis, A. G., Manolakos, D. E. et Baldoukas, A. K.**, “Simulation of Sheet Metal Forming Using Explicit Finite-Element Techniques : Effect of Material and Forming Characteristics. Part 1. Deep-Drawing of Cylindrical Cups”, Journal of Materials Processing Technology, Vols. 72, 1997, pp. 48-60.
- Mamalis, A. G., Manolakos, D. E. et Baldoukas, A. K.**, “Simulation of Sheet Metal Forming Using Explicit Finite-Element Techniques : Effect of Material and Forming Characteristics. Part 2. Deep-Drawing of Square Cups”, Journal of Materials Processing Technology, Vols. 72, 1997, pp. 110-116.
- Mellor, P.B., et Parmar, A.**, “Plasticity Analysis of Sheet Metal Forming”, Mechanics of Sheet Metal Forming, Material Behavior and Deformation Analysis, D. P. Koistinen et N.-M. Wang (eds.), Plenum Press, New York, 1978, pp. 53-77.
- Panchanadeeswaran, S., Richmond, O., Fricke, W.G. et Lalli, L.A.**, “The Effect of Texture on Earing in Cup Drawing of Rolled High Purity Aluminum Sheet”, Eighth International Conferences on Textures of Materials, J. S. Kallend et G. Gottstein (eds.), 1988, pp. 1103-1110.
- Pomey, G. et Parnière, P.**, “Travail des Métaux en Feuilles : Aptitude à l'emboutissage des Tôles Minces ”, Techniques de l'ingénieur, 1980, Vol. MC2, No. 1, M695/696.
- Prior, A.M.**, “Applications of Implicit and Explicit Finite Element Techniques to Metal Forming”, Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference in Metal Forming, P. Hartley, I. Pillinger, F.R. Hall, C.E. Neal-Sturgess, M. Pietryk et J. Kusiak (eds.), University of Birmingham, Angleterre, 1994, pp. 649-656.
- Rebelo, N., Nategaal, J.C., Taylor, L. M. et Passmann, R.**, “Comparison of Implicit and Explicit Finite Element Methods in the Simulation of Metal Forming Processes”, Proceedings of the Numiform'92, Valbonne, France, 22<sup>nd</sup> 1992, pp. 99-108.
- Santos, E.V.B.**, “Influência da Utilização de Materiais com Dupla Redução sobre a Embutibilidade de Produtos com Geometria Cilíndrica”, Thèse de MSc., Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda – Rj, Brésil, 1996.
- Smelser, R. E. et Becker, R.**, “Earing in Cup Drawing of a (100) Single Crystal ”, Abaqus User's Conference, Oxford, Angleterre, 1991, pp. 457-472.
- Stoughton, T. B.**, “A Non-Associated Flow Rule for Sheet Metal Forming”, International Journal of Plasticity, 2001, Vol. 18, pp. 687-714.

- Suh, Y. S., Saunders, F. I. et Wagoner, R. H.**, “*Anisotropic Yield Functions with Plastic-Strain-Induced Anisotropy*”, *International Journal of Plasticity*, 1996, Vol. 12, No.3, pp. 635-648.
- Tekkaya, A. E.**, “*State-of-the-art of Simulation of Sheet Metal Forming*”, *Journal of Materials Processing Technology*, 2000, Vol. 103, pp. 14-22.
- Tourki, Z.**, “*Simulation Numériques de la Mise en Forme des Tôles : Influence du Modèle de Plasticité*”, Thèse de Doctorat, 1995, Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, Université de Metz, Metz, France.
- Van Houtte, P., Van Bael, A. et Winters, J.**, “*The Incorporation of Texture-Based Yield Loci into Elastic-Plastic Finite Element Programs*”, *Textures and Microstructures*, 1995, Vol. 24, pp. 255- 272.
- Wagoner, R. H.**, “*Measurement and Analysis of Plane-Strain Work Hardening*”, *Metallurgical Transactions A*, 1980, Vol. 11A, pp. 165- 175.
- Wang, N.-M.**, “*Large Plastic Deformation of a Circular Sheet Caused by Punch Stretching*”, *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, 1970, Vol. 37, pp. 431- 440.
- Wang, N.-M. et Budianski, B.**, “*Analysis of Sheet Metal Stamping by a Finite Element Method*”, *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, 1978, Vol. 45, pp. 431- 440.
- Wang, N.-M., et Wenner, M. L.**, “*Elastic-Viscoplastic Analysis of Simple Stretch Forming Problems*”, *Mechanics of Sheet Metal Forming, Material Behavior and Deformation Analysis*, D. P. Koistinen et N.-M. Wang (eds.), Plenum Press, New York, 1978, pp. 367-401.
- Wilson, D. V. et Butler, R.D.**, “*The Role of Cup-Drawing Tests in Measuring Drawability*”, *Journal of the Institute of Metals*, Vol. 90, 1962, pp. 473-483.
- Woo, D. M.**, “*The Stretch-Forming Test*”, *The Engineer*, 1965, Vol. 220, pp. 876- 880.
- Yoon, J., W., Song, I. S., Yang, D. Y., Chung, K. et Barlat, F.**, “*Finite Element Method for Sheet Forming Based on an Anisotropic Strain-Rate Potential and Convected Coordinate System*”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 1995, Vol. 37, No. 7, pp. 733-752.
- Yoon, J., W., Barlat, F., Chung, K., Pourboghrat, F. et Yang, D. Y.**, “*Influence of Initial Back Stress on the Earing Prediction of Drawn Cups for Planar Anisotropic Aluminum Sheets*”, *Journal of Materials Processing Technology*, 1998, Vols. 80-81, pp. 433-437.
- Yoon, J., W., Barlat, F., Chung, K., Pourboghrat, F. et Yang, D. Y.**, “*Earing Predictions Based on Asymmetric Nonquadratic Yield Function*”, *International Journal of Plasticity*, 2000, Vol. 16, No. 9, pp. 1075-1104.



## Annexes

### Annexe A. Corrections associées aux déformations plastiques

Le système d'équations linéaires associées aux corrections de Newton apportées aux composantes de déformations plastiques (II.20) peut être réécrit sous forme matricielle par :

$$[\mathbf{A}] [\mathbf{x}] = [\mathbf{B}] \text{ ou } A_{ij} x_j = B_i \quad (\text{A.1})$$

Dans le cas général de l'élasto-plasticité en trois dimensions, sachant que le vecteur

$$[\mathbf{x}] = [c(\Delta\varepsilon_{xx}^p) \ c(\Delta\varepsilon_{yy}^p) \ c(\Delta\varepsilon_{zz}^p) \ c(\Delta\gamma_{xy}^p) \ c(\Delta\gamma_{xz}^p) \ c(\Delta\gamma_{yz}^p)]^T, \text{ les composantes de la matrice } \mathbf{A}$$

et du vecteur  $\mathbf{B}$  sont données par :

$$A_{11} = 1 + 2\mu \left[ F_{,xx}^2 / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,xxxx} \right]$$

$$A_{22} = 1 + 2\mu \left[ F_{,yy}^2 / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,yyyy} \right]$$

$$A_{33} = 1 + 2\mu \left[ F_{,zz}^2 / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,zzzz} \right]$$

$$A_{44} = (1/2) \left\{ 1 + \mu \left[ F_{,xy}^2 / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,xyxy} \right] \right\}$$

$$A_{55} = (1/2) \left\{ 1 + \mu \left[ F_{,xz}^2 / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,xzzx} \right] \right\}$$

$$A_{66} = (1/2) \left\{ 1 + \mu \left[ F_{,yz}^2 / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,yzyz} \right] \right\}$$

$$A_{12} = A_{21} = 2\mu \left[ F_{,xx} F_{,yy} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,xxyy} \right]$$

$$A_{13} = A_{31} = 2\mu \left[ F_{,xx} F_{,zz} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,xxzz} \right]$$

$$A_{14} = A_{41} = \mu \left[ F_{,xx} F_{,xy} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,xxxxy} \right]$$

$$A_{15} = A_{51} = \mu \left[ F_{,xx} F_{,xz} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,xxxzx} \right]$$

$$A_{16} = A_{61} = \mu \left[ F_{,xx} F_{,yz} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,xxxyz} \right]$$

(A.2)

$$A_{23} = A_{32} = 2\mu \left[ F_{,yy} F_{,zz} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,yyzz} \right]$$

$$A_{24} = A_{42} = \mu \left[ F_{,yy} F_{,xy} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,yyxy} \right]$$

$$A_{25} = A_{52} = \mu \left[ F_{,yy} F_{,xz} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,yyxz} \right]$$

$$A_{26} = A_{62} = \mu \left[ F_{,yy} F_{,yz} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,yyyz} \right]$$

$$A_{34} = A_{43} = \mu \left[ F_{,zz} F_{,xy} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,zzxy} \right]$$

$$A_{35} = A_{53} = \mu \left[ F_{,zz} F_{,xz} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,zzxz} \right]$$

$$A_{36} = A_{63} = \mu \left[ F_{,zz} F_{,yz} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,zzyz} \right]$$

$$A_{45} = A_{54} = (\mu/2) \left[ F_{,xy} F_{,xz} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,xyxz} \right]$$

$$A_{46} = A_{64} = (\mu/2) \left[ F_{,xy} F_{,yz} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,xyyz} \right]$$

$$A_{56} = A_{65} = (\mu/2) \left[ F_{,xz} F_{,yz} / \hat{H}(\bar{\sigma}) + \Delta\bar{\varepsilon}^p F_{,xzyz} \right]$$

et

$$\begin{aligned}
 B_1 &= F_{,xx} \left[ \Delta \bar{\epsilon}^P + f / \hat{H}(\bar{\sigma}) \right] - \Delta \epsilon_{xx}^P \\
 B_2 &= F_{,yy} \left[ \Delta \bar{\epsilon}^P + f / \hat{H}(\bar{\sigma}) \right] - \Delta \epsilon_{yy}^P \\
 B_3 &= F_{,zz} \left[ \Delta \bar{\epsilon}^P + f / \hat{H}(\bar{\sigma}) \right] - \Delta \epsilon_{zz}^P \\
 B_4 &= (1/2) \left\{ F_{,xy} \left[ \Delta \bar{\epsilon}^P + f / \hat{H}(\bar{\sigma}) \right] - \Delta \gamma_{xy}^P \right\} \\
 B_5 &= (1/2) \left\{ F_{,xz} \left[ \Delta \bar{\epsilon}^P + f / \hat{H}(\bar{\sigma}) \right] - \Delta \gamma_{xz}^P \right\} \\
 B_6 &= (1/2) \left\{ F_{,yz} \left[ \Delta \bar{\epsilon}^P + f / \hat{H}(\bar{\sigma}) \right] - \Delta \gamma_{yz}^P \right\}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

où  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Dans le cas d'un état des contraintes planes  $[\mathbf{x}] = [c(\Delta \epsilon_{xx}^P) \ c(\Delta \epsilon_{yy}^P) \ c(\Delta \gamma_{xy}^P)]^T$  et les composantes de la matrice **A** et du vecteur **B** sont données par :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= 1 + \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{F_{,xx}}{\hat{H}(\bar{\sigma})} (F_{,xx} + \nu F_{,yy}) + \Delta \bar{\epsilon}^P (F_{,xxxx} + \nu F_{,xxyy}) \right] \\
 A_{12} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{F_{,xx}}{\hat{H}(\bar{\sigma})} (\nu F_{,xx} + F_{,yy}) + \Delta \bar{\epsilon}^P (\nu F_{,xxxx} + F_{,xxyy}) \right] \\
 A_{13} &= \mu \left[ \frac{F_{,xx} F_{,xy}}{\hat{H}(\bar{\sigma})} + \Delta \bar{\epsilon}^P F_{,xxyy} \right] \\
 A_{21} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{F_{,yy}}{\hat{H}(\bar{\sigma})} (F_{,xx} + \nu F_{,yy}) + \Delta \bar{\epsilon}^P (F_{,xxyy} + \nu F_{,yyyy}) \right] \\
 A_{22} &= 1 + \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{F_{,yy}}{\hat{H}(\bar{\sigma})} (F_{,yy} + \nu F_{,xx}) + \Delta \bar{\epsilon}^P (F_{,yyyy} + \nu F_{,xxyy}) \right] \\
 A_{23} &= \mu \left[ \frac{F_{,yy} F_{,xy}}{\hat{H}(\bar{\sigma})} + \Delta \bar{\epsilon}^P F_{,yyxy} \right] \\
 A_{31} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{F_{,xy}}{\hat{H}(\bar{\sigma})} (F_{,xx} + \nu F_{,yy}) + \Delta \bar{\epsilon}^P (F_{,xxyy} + \nu F_{,yyxy}) \right] \\
 A_{32} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{F_{,xy}}{\hat{H}(\bar{\sigma})} (F_{,yy} + \nu F_{,xx}) + \Delta \bar{\epsilon}^P (F_{,yyxy} + \nu F_{,xxyy}) \right] \\
 A_{33} &= 1 + \mu \left[ \frac{F_{,xy}^2}{\hat{H}(\bar{\sigma})} + \Delta \bar{\epsilon}^P F_{,xyxy} \right]
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

et

$$\begin{aligned}
 B_1 &= F_{,xx} \left[ \Delta \bar{\epsilon}^P + f / \hat{H}(\bar{\sigma}) \right] - \Delta \epsilon_{xx}^P \\
 B_2 &= F_{,yy} \left[ \Delta \bar{\epsilon}^P + f / \hat{H}(\bar{\sigma}) \right] - \Delta \epsilon_{yy}^P \\
 B_3 &= F_{,xy} \left[ \Delta \bar{\epsilon}^P + f / \hat{H}(\bar{\sigma}) \right] - \Delta \gamma_{xy}^P
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

## Annexe B. Module tangent cohérent

Les composantes du module tangent cohérent ou de la matrice Jacobienne sont déterminées après l'inversion de la matrice des complaisances élasto-plastique (II.31), i.e. :

$$\mathbf{J} = \partial\boldsymbol{\sigma}/\partial\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{S}^{\text{ep}})^{-1} \quad (\text{B.1})$$

Dans le cas 3D, les composantes de  $\mathbf{S}^{\text{ep}}$  sont données par :

$$\begin{aligned} S_{11}^{\text{ep}} &= F_{,xx} F_{,xx} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,xxxx} + 1/E \\ S_{22}^{\text{ep}} &= F_{,yy} F_{,yy} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,yyyy} + 1/E \\ S_{33}^{\text{ep}} &= F_{,zz} F_{,zz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,zzzz} + 1/E \\ S_{44}^{\text{ep}} &= F_{,xy} F_{,xy} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,xyxy} + 1/\mu \\ S_{55}^{\text{ep}} &= F_{,xz} F_{,xz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,xzzx} + 1/\mu \\ S_{66}^{\text{ep}} &= F_{,yz} F_{,yz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,yzyz} + 1/\mu \\ \\ S_{12}^{\text{ep}} &= S_{21}^{\text{ep}} = F_{,xx} F_{,yy} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,xxyy} - \nu/E \\ S_{13}^{\text{ep}} &= S_{31}^{\text{ep}} = F_{,xx} F_{,zz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,xxzz} - \nu/E \\ S_{14}^{\text{ep}} &= S_{41}^{\text{ep}} = F_{,xx} F_{,xy} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,xxxxy} \\ S_{15}^{\text{ep}} &= S_{51}^{\text{ep}} = F_{,xx} F_{,xz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,xxxzx} \\ S_{16}^{\text{ep}} &= S_{61}^{\text{ep}} = F_{,xx} F_{,yz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,xxxyz} \\ \\ S_{23}^{\text{ep}} &= S_{32}^{\text{ep}} = F_{,yy} F_{,zz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,yyzz} - \nu/E \\ S_{24}^{\text{ep}} &= S_{42}^{\text{ep}} = F_{,yy} F_{,xy} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,yyxy} \\ S_{25}^{\text{ep}} &= S_{52}^{\text{ep}} = F_{,yy} F_{,xz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,yyxz} \\ S_{26}^{\text{ep}} &= S_{62}^{\text{ep}} = F_{,yy} F_{,yz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,yyyz} \\ \\ S_{34}^{\text{ep}} &= S_{43}^{\text{ep}} = F_{,zz} F_{,xy} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,zzxy} \\ S_{35}^{\text{ep}} &= S_{53}^{\text{ep}} = F_{,zz} F_{,xz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,zzxz} \\ S_{36}^{\text{ep}} &= S_{63}^{\text{ep}} = F_{,zz} F_{,yz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,zzyz} \\ \\ S_{45}^{\text{ep}} &= S_{54}^{\text{ep}} = F_{,xy} F_{,xz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,xyxz} \\ S_{46}^{\text{ep}} &= S_{64}^{\text{ep}} = F_{,xy} F_{,yz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,xyyz} \\ \\ S_{56}^{\text{ep}} &= S_{65}^{\text{ep}} = F_{,xz} F_{,yz} / \hat{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\bar{\varepsilon}^{\text{P}} F_{,xzyz} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Les composantes de la matrice des complaisances élasto-plastique  $\mathbf{S}^{\text{ep}}$  correspondant à l'état de contraintes planes peuvent être obtenues comme un cas particulier du cas 3D (B.2).

## Annexe C. Détermination des paramètres du critère de Ferron et al. (1994)

Il est utile de rappeler que le critère de plasticité proposé par Ferron et al. (1994) est défini sous une forme paramétrique par :

$$(1-k)^{m/6} g(\theta, \alpha)^{-m} = F(\theta)^{m/6} - 2a \sin \theta \cos^{2n-1} \theta \cos 2\alpha + b \sin^{2p} \theta \cos^{2q} 2\alpha \quad (C.1)$$

avec

$$(1-k)g(\theta)^{-6} = F(\theta) = (\cos^2 \theta + A \sin^2 \theta)^3 - k \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - B \sin^2 \theta)^2 \quad (C.2)$$

Étant donné que les exposants  $m$ ,  $n$ ,  $p$  et  $q$  sont connus a priori, les inconnues à déterminer sont alors les paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $k$ ,  $a$  et  $b$ . La procédure générale de l'identification des paramètres du critère de Ferron et al. (1994) est réalisée en deux étapes. D'abord, les paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $k$  sont déterminés en tenant compte que la surface de charge décrite par la fonction  $g(\theta, \alpha)$  est symétrique par rapport aux axes  $(x_1, x_2)$ , voir Figure (C.1) ci-dessous, pour  $\alpha = \pm \pi/4 \therefore g(\theta) = g(\theta, \pm \pi/4)$ . Ensuite, la procédure d'identification est complétée par la détermination des paramètres  $a$  et  $b$  caractérisant l'anisotropie transverse du matériau.

Dans un premier temps, il est préférable d'exprimer la fonction de charge définie par l'équation (II.47) sous la forme :

$$f = \psi(x_1, x_2, \alpha) - 1 \quad (C.3)$$

où le changement de variables défini par (II.46) est exprimé par :

$$x_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\bar{\sigma}} = g(\theta, \alpha) \cos \theta \text{ et } x_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\sigma}} = g(\theta, \alpha) \sin \theta \quad (C.4)$$

Il est à noter que la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  employée dans le critère de Ferron et al. (1994) est identifiée à la limite élastique déterminée en traction équibiaxiale, i.e.,  $\sigma_b = \sigma_1 = \sigma_2$ .

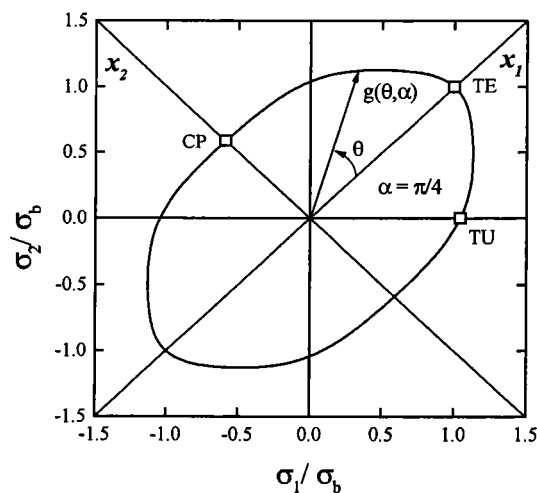


Figure (C.1) – Représentation de la surface de charge du critère de Ferron et al. (1994) dans l'espace de variables  $(x_1, x_2)$ .

### C.1. Isotropie transverse

Les valeurs des paramètres  $(A, B, k)$  définissant le critère de Ferron et al. (1994) dans le cas de l'isotropie transverse donné par l'équation (C.2), peuvent être déterminées à partir du coefficient d'anisotropie normale  $R$  et des limites élastiques en cisaillement pur (CP), en traction uniaxiale (TU) et en traction équibiaxiale (TE), indiquées sur la Figure (C.1). D'après cette figure, le rapport entre les limites élastiques en cisaillement pur, i.e.,  $(\tau = \sigma_1 = -\sigma_2, \theta = \pi/2)$  et en traction équibiaxiale est donné par  $\tau/\sigma_b = g(\pi/2)$ , d'où le paramètre  $A$  peut être exprimé par :

$$A = (1 - k)^{1/3} (\sigma_b / \tau)^2 \quad (C.5)$$

De façon analogue, le rapport entre les limites élastiques en traction équibiaxiale et en traction uniaxiale  $(\sigma_u = \sigma_1, \theta = -\pi/4)$  est donné par  $\sigma_b / \sigma_u = \sqrt{2} / [2g(-\pi/4)]$  :

$$\left( \frac{\sigma_b}{\sigma_u} \right)^6 = \frac{(A + 1)^3 - k(B - 1)^2}{64(1 - k)} \quad (C.6)$$

D'après Makkouk (1994), les vitesses de déformation plastique dans les axes des contraintes principales sont exprimées par :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\bar{\epsilon}}^P} &= \frac{g(\theta) \cos(\pi/4 + \theta) + \partial g(\theta) / \partial \theta \sin(\pi/4 + \theta)}{\sqrt{2} g^2(\theta)} \\ \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\bar{\epsilon}}^P} &= \frac{g(\theta) \sin(\pi/4 + \theta) - \partial g(\theta) / \partial \theta \cos(\pi/4 + \theta)}{\sqrt{2} g^2(\theta)} \end{aligned} \quad (C.7)$$

où  $\dot{\bar{\epsilon}}^P$  est la vitesse de déformation plastique équivalente conjuguée de la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$ . Enfin, le coefficient d'anisotropie normale  $R$  déterminé lors d'un essai de traction uniaxiale peut être défini en considérant d'abord l'incompressibilité plastique, i.e.,

$$\dot{\epsilon}_3^P = -(\dot{\epsilon}_1^P + \dot{\epsilon}_2^P) :$$

$$R = \frac{\dot{\epsilon}_2^P}{\dot{\epsilon}_3^P} = -\frac{\dot{\epsilon}_2^P}{(\dot{\epsilon}_1^P + \dot{\epsilon}_2^P)} \quad (C.8)$$

puis les vitesses de déformation plastique (C.7), à partir de l'expression suivante :

$$\frac{R}{1 + R} = \frac{\partial g(\theta) / \partial \theta}{g(\theta)} \Bigg|_{\theta = -\pi/4} \quad (C.9)$$

d'où

$$R = \frac{(A + 1)^2 (A - 1) - (k/3)(B - 1)(B + 3)}{2(A + 1)^2 - (2k/3)(B - 1)(B - 3)} \quad (C.10)$$

Les paramètres  $(A, B, k)$  peuvent être déterminés en résolvant le système constitué par les équations (C.5-6 et C.10) à partir des valeurs expérimentales  $(\sigma_b/\tau)$ ,  $(\sigma_b/\sigma_u)$  et  $R$ . Dans le cas particulier où seules les données de l'essai de traction uniaxiale sont disponibles, il est d'abord supposé que les paramètres  $A$  et  $B$  soient liés par la relation  $B = 3A$ . Ensuite, il est recommandé que la valeur du paramètre  $k$  soit prise entre 0.2 à 0.3 de façon à ce qu'un aplatissement de la surface de charge soit obtenu près des régions de cisaillement pur et traction/compression plane (Makkouk, 1994). Dans ce cas, le paramètre  $A$  est déterminé à partir de la valeur expérimentale de  $R$  en utilisant l'équation (C.10).

En vue de respecter les données de l'acier analysé par Knibloe et Wagoner (1989), à savoir les valeurs de  $R$  et du rapport entre les contraintes d'écoulement en traction plane et en traction uniaxiale  $(\sigma_{PS1}/\sigma_u)$ , voir § III.3.4, les paramètres  $(A, B, k)$  ont été déterminés d'après le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} f_1 &= (A + 1)^2(A - 1) - (k/3)(B - 1)(B + 3) - 2R(A + 1)^2 + R(2k/3)(B - 1)(B - 3) = 0 \\ f_2 &= (\sigma_b / \sigma_u) g(\theta_{PS})(\cos \theta_{PS} + \sin \theta_{PS}) - (\sigma_{PS1} / \sigma_u) = 0 \\ f_3 &= (\sigma_b / \sigma_u) g(\theta_{PS})(\cos \theta_{PS} - \sin \theta_{PS}) - (\sigma_{PS2} / \sigma_u) = 0 \end{aligned} \quad (C.11)$$

formé à partir de l'expression (C.10) et à l'aide du changement des variables défini par (C.4). En utilisant les relations (C.5-6) et la définition de la fonction  $g(\theta)$  donnée par (C.2), ces équations peuvent être exprimées en fonction du paramètre  $k$  et de l'angle  $\theta_{PS}$  associé à l'état de traction plane. Les contraintes d'écoulement en traction équiuniaxiale  $(\sigma_b)$  et en cisaillement pur  $(\tau)$  ont été choisies arbitrairement de manière à ce qu'un aplatissement de la surface de charge soit obtenu au voisinage des régions de cisaillement pur et de traction plane.

## C.2. Anisotropie transverse

Dans ce cas, les paramètres  $(A, B, k)$  sont d'abord déterminés de façon à décrire la surface de charge pour  $\alpha = \pi/4$ , comme décrit pour le cas de l'isotropie transverse. Ensuite, les paramètres  $(a, b)$  caractérisant l'anisotropie transverse peuvent être calculés soit à partir des valeurs du coefficient de Lankford  $R$  déterminés dans les directions parallèle et transverse au sens de laminage  $(R_0, R_{90})$ , méthode  $R$ , soit à partir de la limite élastique déterminée en traction uniaxiale dans les directions de parallèle, diagonale et transverse au sens de laminage respectivement,  $(\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90})$ , méthode  $\sigma$ .

### C.2.1. Méthode R

L'évolution de  $R$  en fonction de l'orientation de chargement en traction uniaxiale  $\alpha$ , déterminée avec  $g(-\pi/4, \alpha)$  (C.1) dans l'équation (C.9), est donnée par :

$$R_{(\alpha)} = \frac{R_1 + R_3[2^{2-n}(n-1)a \cos 2\alpha + 2^{1-p}pb \cos^{2q} 2\alpha]}{R_2 - R_3[2^{1-n}(2n+m-2)a \cos 2\alpha + 2^{-p}(2p-m)b \cos^{2q} 2\alpha]} \quad (C.12)$$

avec

$$R_1 = (A+1)^2(A-1) - (k/3)(B-1)(B+3)$$

$$R_2 = 2(A+1)^2 - (2k/3)(B-1)(B-3)$$

$$R_3 = (2^{m/2}/2)[(A+1)^3 - k(B-1)^2]^{1-(m/6)}$$

En particulier,

$$R_0 = \frac{R_1 + R_3[2^{2-n}(n-1)a + 2^{1-p}pb]}{R_2 - R_3[2^{1-n}(2n+m-2)a + 2^{-p}(2p-m)b]} \quad (C.13)$$

$$R_{90} = \frac{R_1 + R_3[-2^{2-n}(n-1)a + 2^{1-p}pb]}{R_2 - R_3[-2^{1-n}(2n+m-2)a + 2^{-p}(2p-m)b]} \quad (C.14)$$

d'où il est possible de déterminer les paramètres  $(a, b)$ .

### C.2.2. Méthode $\sigma$

Le rapport entre les limites élastiques en traction équiuniaxiale et en traction uniaxiale ( $\sigma_{(\alpha)} = \sigma_1, \theta = -\pi/4$ ) est donné par  $\sigma_b/\sigma_{(\alpha)} = \sqrt{2}/[2g(-\pi/4, \alpha)]$  :

$$\left[ \frac{\sigma_b}{\sigma_{(\alpha)}} \right]^m = \frac{[(A+1)^3 - k(B-1)^2]^{m/6} - 2^{m/2}[2^{1-n}a \cos 2\alpha - 2^{-p}b \cos^{2q} 2\alpha]}{2^m(1-k)^{m/6}} \quad (C.15)$$

En particulier,

$$\left[ \frac{\sigma_b}{\sigma_0} \right]^m = \frac{[(A+1)^3 - k(B-1)^2]^{m/6} - 2^{m/2}[2^{1-n}a - 2^{-p}b]}{2^m(1-k)^{m/6}} \quad (C.16)$$

$$\left[ \frac{\sigma_b}{\sigma_{90}} \right]^m = \frac{[(A+1)^3 - k(B-1)^2]^{m/6} + 2^{m/2}[2^{1-n}a + 2^{-p}b]}{2^m(1-k)^{m/6}} \quad (C.17)$$

d'où

$$a = \frac{(1-k)^{m/6}}{2^{(4-m-2n)/2}} [(\sigma_b/\sigma_{90})^m - (\sigma_b/\sigma_0)^m]$$

$$b = 2^{(2p-m)/2} \left\{ \frac{(1-k)^{m/6}}{2^{(1-m)}} [(\sigma_b/\sigma_0)^m + (\sigma_b/\sigma_{90})^m] - [(A+1)^3 - k(B-1)^2]^{m/6} \right\} \quad (C.18)$$

En l'absence des données des essais de traction équi-biaxiale et de cisaillement pur, il est d'abord supposé que les paramètres  $A$  et  $B$  soient liés par la relation  $B = 3A$ . Ensuite, en adoptant une valeur positive pour le paramètre  $k$  (0.2 – 0.3), le paramètre  $A$  est déterminé à partir de la valeur expérimentale de  $R_{45}$  :

$$R_{45} = \frac{(A+1)^2(A-1) - (k/3)(B-1)(B+3)}{2(A+1)^2 - (2k/3)(B-1)(B-3)} \quad (\text{C.19})$$

tandis que les paramètres  $(a, b)$  sont définis par :

$$\begin{aligned} a &= 2^{(2n-m-4)/2} [(A+1)^3 - k(B-1)^2]^{m/6} [(\sigma_{45}/\sigma_{90})^m - (\sigma_{45}/\sigma_0)^m] \\ b &= 2^{(2p-m-2)/2} [(A+1)^3 - k(B-1)^2]^{m/6} [(\sigma_{45}/\sigma_0)^m + (\sigma_{45}/\sigma_{90})^m - 2] \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$



## Annexe D. Passage des données : traction uniaxiale - traction équilibiaxiale

En égalant d'abord les incréments de travail plastique réalisés en traction uniaxiale et en traction équilibiaxiale :

$$\sigma_0 d\varepsilon_0^p = \sigma_b |d\varepsilon_t^p| \quad (D.1)$$

et en considérant ensuite l'hypothèse d'érouissage isotrope, le rapport entre les contraintes d'écoulement en traction équilibiaxiale et uniaxiale,  $\sigma_{b0} = (\sigma_b/\sigma_0)$ , est constant et donc, l'équation (D.1) peut être intégrée :

$$\varepsilon_0^p = (\sigma_b/\sigma_0) \varepsilon_t^p = \sigma_{b0} |\varepsilon_t^p| \quad (D.2)$$

où  $\varepsilon_0^p$  et  $\varepsilon_t^p$  sont les déformations plastiques obtenues lors d'un essai de traction uniaxiale selon la direction de laminage et à travers l'épaisseur pour un essai de traction équilibiaxiale.

Le comportement en traction uniaxiale est décrit par la loi de Swift, donnée par :

$$\sigma_0 = K_0(\varepsilon_0^u + \varepsilon_0^p)^{N_0} \quad (D.3)$$

où  $\varepsilon_0^u$ ,  $N_0$  et  $K_0$  sont respectivement la pré-déformation, l'exposant d'érouissage et le coefficient de résistance déterminés selon la direction de laminage.

En identifiant la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  à la contrainte en traction équilibiaxiale  $\sigma_b$ , et en utilisant alors le passage défini par (D.2) avec  $\sigma_b = \sigma_{b0} \sigma_0$  et  $\bar{\varepsilon}^p = |\varepsilon_t^p| = \varepsilon_0^p/\sigma_{b0}$ , la loi de Swift peut être réécrite par :

$$\sigma_b = K(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^{N_0} \quad (D.4)$$

où

$$K = K_0(\sigma_{b0})^{N_0+1} \quad (D.5)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^u/\sigma_{b0}$$

Avec le critère de Ferron et al. (1994), le rapport entre les contraintes d'écoulement en traction équilibiaxiale et en traction uniaxiale selon la direction de laminage est donné par :

$$\sigma_{b0} = \left\{ \frac{[(A+1)^3 - k(B-1)^2]^{m/6} - 2^{m/2} [2^{1-n} a - 2^{-p} b]}{2^m (1-k)^{m/6}} \right\}^{1/m} \quad (D.6)$$