



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude fondamentale de la déformation de milieux poreux saturés

Serge Rebouillat

► **To cite this version:**

Serge Rebouillat. Contribution à l'étude fondamentale de la déformation de milieux poreux saturés. Alimentation et Nutrition. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2002. Français. NNT : 2002INPL076N . tel-01749819

**HAL Id: tel-01749819**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749819v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

236031 2103

02 INPL 07615

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE  
Ecole Nationale Supérieure des Industries Chimiques

(M) 2002 REBOUILLAT, S.

**THESE**  
Doctorat d'État-Sciences  
Présentée pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR ES SCIENCES**

Par

**Serge REBOUILLAT**

**CONTRIBUTION A L'ETUDE FONDAMENTALE DE LA DEFORMATION  
DE MILIEUX POREUX SATURES**

soutenue publiquement le 6 novembre 2002 devant la commission d'examen :

**JURY :**

**Président :** M. D. TONDEUR (CNRS-LSGC Nancy)

**Rapporteurs :** MM. J. HERMIA (Université Louvain-la -Neuve)  
D. LECLERC ( Université Henri Poincaré Nancy)  
J.C. ROUX (EFPG-INPG Grenoble)

**Examineurs :**  
Mme A. VOILLEY (ENSBANA - Dijon)  
M. E. VOROBIEV (UTC - Compiègne)

**Invités :**  
MM. O. CAMPANELLA (PURDUE University - USA)  
M. PELEG (University of Massachusetts - USA)

Service Commun de la Documentation  
INPL  
Nancy - Brabois





---

## Préface

---

*« J'écris avec facilité et joie ce qui me vient à l'esprit ; mais je reste gêné par la quantité de notes que j'ai prises – durant ces quinze dernières années – et que je ne sais où ni comment intercaler. Seul ce travail de jointoiement est difficile ; les pensées une fois refroidies, sont récalcitrantes et se refusent à la soudure. »*

Cet extrait d'une préface d'André GIDE (1942 Théâtre de Goethe) vient à point pour exprimer et amalgamer les deux formidables sensations qui ont dominé mon état d'esprit durant la synthèse et la rédaction de ce travail de recherche scientifique : l'enthousiasme et l'intensité de l'effort fourni durant les périodes de réflexion constamment hachées par des responsabilités toujours croissantes sans rapport direct avec cette tâche. Comment bien lier et bien résumer une démarche scientifique de longue durée, souvent interrompue, en préservant l'essence même de celle-ci qui réside dans sa durée, son évolution et sa diversité ? Tel fût le dilemme associé à cette rédaction de thèse, lequel par la même occasion a été sa principale motivation sachant que l'enthousiasme et l'opiniâtreté ne pouvaient que l'emporter pour que la science s'y retrouve.

Ce mémoire retrace les recherches conduites au laboratoire des Sciences du Génie des Procédés (LSGC) de l'Ecole Nationale Supérieure des Industries Chimiques sous la direction du Professeur Dominique LECLERC et du Directeur CNRS Jean-Claude CHARPENTIER, initialement, puis au département du Génie des Procédés Chimiques et Alimentaires à l'université du Massachusetts sous la direction des Professeurs Henry G. SCHWARTZBERG et M. PELEG. Il va sans dire que, le LSGC restera, en la personne de Dominique LECLERC, la liaison relais, la source de compétences multidisciplinaires, le centre de validation initiale des démarches scientifiques.

C'est à Dominique LECLERC, ci-contre, professeur à l'Université Henri POINCARÉ de Nancy, que je souhaite rendre hommage, pour avoir établi la Science des Séparations Solides-Liquides à Nancy et m'avoir associé à ce projet avec un sens humain du parrainage scientifique. Je lui dois beaucoup dans mon apprentissage de la recherche et je retiens, entre autres, la confiance et la flexibilité qui, « instaurées » naturellement, stimulent la créativité.



Jean-Claude CHARPENTIER, Président de la Société Européenne du Génie Chimique et Directeur-créateur de l'École de Chimie-Physique-Electronique de Lyon (CPE), m'a convaincu, dès mon apprentissage à la recherche, de la richesse des liaisons industrielles.

Que le Professeur Pierre LE GOFF trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour nous avoir associés à certains de ces projets portant sur l'aspect énergétique que lui seul peut traiter avec autant de génie et d'humanisme.

Dans le même esprit, que Daniel TONDEUR, Directeur de Recherche au CNRS, médaillé du CNRS, soit associé à mes remerciements et accepte l'expression d'une certaine admiration pour demeurer aussi fidèle aux fondements de la Science.

Le regretté Jacques VILLERMAUX ne peut pas être omis par un ancien élève de la section spéciale de l'ENSIC.

J'adresse ma gratitude au Professeur Micha PELEG, de l'Université du Massachusetts. Sa dextérité en matière de publications (plus de 300), ses qualités humaines et son inclinaison pour la communauté internationale sont remarquables. Je me permets de nommer ici un ami commun, Oswaldo CAMPANELLA, Professeur à l'Université de PURDUE, pour la qualité intellectuelle et humaine qu'il investit dans les relations.

Le Professeur Jacques HERMIA, Directeur de l'Unité Procédés de l'Université Catholique de Louvain-la-Neuve, spécialiste international de la séparation solide-liquide trouvera ici toute ma reconnaissance pour avoir fidèlement suivi et supporté les travaux scientifiques du groupe.

Les Professeurs Jean-Claude ROUX (EFG-INPG), Henri SCHWARTZBERG (UMASS), Andrée VOILLEY (Université de Bourgogne), Eugène VOROBIEV (UTC) m'ont convaincu de la valeur de l'esprit d'équipe dans le domaine de la recherche.

John DODDS, Fernand PLA, Edouard MINERY, Gérard BALUAIS font aussi partie de cette expérience et je les en remercie.

Je ne puis, à ce stade des remerciements, qu'évoquer la mémoire de mon Père dont les traits dominants, habileté manuelle, précision, sens inné de l'ingénierie fiable et durable, conscience écologique et disposition naturelle pour le service gracieux, méritent citation.

Je souhaite aussi remercier, Marie-Claude, mon épouse, dont la maîtrise et la ferveur au quotidien aussi bien que dans l'exceptionnel ont ressourcé ma persévérance, et nos deux filles Emily et Pauline pour avoir contribué à faire renaître la logique des choses simples.

Enfin, et même s'il a souhaité trop modestement ne pas figurer sur cette liste, je remercie cet ami pour avoir accepté de vérifier bon nombre d'équations et de reproduire certaines illustrations.

---

*Sommaire*

---

<b>AVANT-PROPOS</b>	P. 1
<b>SOMMAIRE</b>	P. 3
<b>RESUME</b>	P. 6
<b>ABSTRACT</b>	P. 7
<b>INTRODUCTION, CHRONOLOGIE ET METHODOLOGIE</b>	P. 8

La séparation solide-liquide dans un contexte de développement technologique durable et soutenable aux plans énergétique, environnemental et économique.

**CHAPITRE 1**

<i>PRELIMINAIRE THEORIQUE CONCERNANT LA DEFORMATION D'UN MILIEU POREUX SATURE (SPM)</i>	P. 20
---	-------

**CHAPITRE 2**

<i>LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE A PRESSION CONSTANTE (CPC)</i>	P. 31
2.1. RAPPELS THEORIQUES	
2.2 ILLUSTRATION EXPERIMENTALE	P. 49
2.3. SENSIBILITE ECONOMIQUE ET ENERGETIQUE	P. 50
2.4 CONCLUSION	P. 52

**CHAPITRE 3**

*LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE A DEFORMATION  
CONSTANTE (CDC)*

	P. 74
3.1 APPAREILLAGE – METHODES – MATERIAUX ET CONDITIONS OPERATOIRES	
3.2 LES RESISTANCES SPECIFIQUES DYNAMIQUES ET STATIQUES	P. 86
3.3 PROPRIETES MECANIQUES DE MATERIAUX BIOLOGIQUES ETUDIES	
3.4 LE FLUAGE DES TOURBES ET LA RELAXATION APRES LA COMPRESSION	P. 87
3.5 LA COMPRESSION A DEFORMATION CONSTANTE	P. 99
3.5.1 CDC DANS LE CAS DE LA VARIATION LINEAIRE DU RAPPORT DE VIDE – SPM NON-LINEAIRE (CDC1)	P. 101
3.5.2 CDC DANS LE CAS DES LARGES DEFORMATIONS – SPM LINEAIRE OU NON (CDC2)	P. 117
3.5.3 CDC DANS LE CAS DES FAIBLES DEFORMATIONS. - SPM LINEAIRE (CDC3)	P. 135
3.5.4 ILLUSTRATION EXPERIMENTALE ET COMPARAISON DES TROIS APPROCHES : CDC1, CDC2 ET CDC3	P. 138
3.6 CONCLUSION GENERALE DE LA CDC	P. 142

**CHAPITRE 4**

*LA COMPRESSION AXIALE AVEC ECOULEMENT RADIAL (CAR) ET LE  
PRESSAGE A VIS*

4.1 THEORIE	P. 146
4.2 ASPECT EXPERIMENTAL	P. 158
4.3 INTERPRETATION ET CONCLUSION	P. 173

**CHAPITRE 5**

*UNE RELATION THERMODYNAMIQUE POUVANT SERVIR DE RELAIS  
POUR LES ETUDES FUTURES*

P. 176

<i>D'AUTRES ORIENTATIONS PROMETTEUSES</i>	P. 185
<b>CONCLUSION</b>	P. 192
<b>NOMENCLATURE</b>	P. 197
<b>REFERENCES CLASSEES</b>	P. 204
<b>ANNEXES</b>	P. 243
ANNEXES A1	P. 244
ANNEXES A2	P. 261
ANNEXES A3	P. 269
ANNEXES A4	P. 285
ANNEXES A5	P. 290
ANNEXES A6	P. 326
ANNEXES A7	P. 334
ANNEXES A8	P. 337
ANNEXES A9	P. 341
<b>ILLUSTRATION NOSTALGIQUE</b>	P. 344
<b>HOMMAGE A DARCY</b>	P. 345
<b>AUTORISATION DE SOUTENANCE</b>	P. 346



---

## Résumé

---

Environnement, énergie et développement durable sont intrinsèquement liés. C'est dans ce contexte que se situent les travaux techniques et scientifiques rapportés dans ce mémoire.

Un potentiel important de réduction de la consommation d'énergie existe encore dans de nombreux secteurs pouvant faire usage des modes mécaniques de séparation de phases. Ce sont par exemple les industries minières, agroalimentaires, papetières, électroniques, pharmaceutiques et biotechnologiques, qui ont toutes à traiter de séparations solides-liquides au combien pesantes, non seulement dans leur bilan économique et énergétique global, mais également au niveau de l'environnement en général et de l'homme en particulier. Le type de séparation solide-liquide qui nous intéresse ici prend en compte des produits et dérivés provenant de ces six secteurs industriels.

Attachés à accroître et à mettre à disposition la compréhension fondamentale et sa composante pratique de la séparation de phases par déformation mécanique multidimensionnelle de milieux poreux saturés, quatre modes de compression sont étudiés sur le plan théorique et illustrés.

Pour cela plusieurs cellules de compression multi-mode (MMCC©) et une unité pilote de pressage à vis (TSPU©) ont été conçues et favorablement testées vis-à-vis de leur compatibilité et de leur potentiel quant à la prédiction de grandeurs caractéristiques de la compression multidimensionnelle.

La compression à pression constante, CPC, et les modèles proposés conviennent mieux à l'étude du comportement des milieux poreux saturés d'origine minérale comme le talc et le kaolin. La durée des expériences n'est pas forcément représentative des pratiques industrielles et la compression secondaire peut paraître quelque peu superflue. L'usage des modèles rhéologiques classiques est à pratiquer avec prudence.

La compression à déformation constante, CDC, sans hypothèse excessivement restrictive concernant les deux paramètres essentiels et caractéristiques de l'écoulement et de la résistance mécanique de la matrice, nous permet de mettre à disposition trois approches théoriques adaptables à une large gamme de situations. Un des apports extrêmement important de la CDC réside dans la rapidité d'exécution des tests.

Les études de la relaxation, qui suit la compression CDC, montrent l'incidence du taux de déformation initial sur les caractéristiques en compression et en relaxation du produit, ouvrant ainsi de nouvelles voies de recherche. Tourbe, pommes, cossettes, protéines lactiques coagulées et aïrelles suivent une tendance analogue.

En matière de compression avec écoulement multi-axial, sont tout d'abord développés la compression axiale avec écoulement radial central ou périphérique et le cas très général de la compression axiale avec écoulement tridimensionnel puis son extension au cas du pressage à vis. Deux méthodes sont envisagées pour le calcul du temps de séjour à partir des données expérimentales (TSPU©) qui concourent à valider l'approche théorique. On note un bon degré de prévisibilité des performances du pilote à partir de la cellule de laboratoire, MMCC©.

Les trois produits principalement étudiés, viscoélastique non linéaire pour les cossettes, F, semi-solide pour les protéines lactières précipitées, C et semi-liquide pour les aïrelles, Cr, se distinguent parfaitement dans leur comportement vis-à-vis de cette double résistance, à la perméation et à la déformation. Une base est établie pour l'étude à gradient de pression contrôlé.

Le raffinement de l'exploitation des résultats qui précèdent aboutirait à entrevoir d'autres aspects plus spécifiques de la matière SPM traitée et de sa rhéologie. Ceci se situe au-delà de l'objectif défini pour cette étape de travail.

Enfin une application de la thermodynamique statistique de BOLTZMANN et le développement du calcul de l'énergie consommée par unité de volume comprimé semblent très prometteurs.



---

## *Abstract*

---

Different types of forces and stress gradients are used to induce compression during the processing of a wide variety of materials. The term expression is generally used when the compression leads to the displacement of a liquid out of a solid-liquid mixture. Most expression processes use the relative movement of solid parts, including inflatable membranes, to transfer the energy required to expel the liquid.

Depending on the geometry of the compression system and the type of movement of the solid parts, which generates the stress gradient inside materials, expression can occur under constant pressure, constant rate or variable pressure / variable rate conditions.

Biological materials, and more generally porous materials containing liquids, are frequently considered as triphasic systems where gas, often air, is trapped into the solid/liquid materials and, sometimes enclosed into the cells. This aspect leads to a complex situation since the air dissipation and the cell rupture mechanism influence the compression behaviour of the mixture. We show that fundamental equations can be rearranged and used to characterize the behaviour of biological materials, such as wastewater sludges and spent sugar beets, undergoing compression under constant applied vertical stress.

After demonstrating that the static filtration characteristics, obtained by permeation through the relaxed cake, are markedly different from the dynamic filtration characteristics calculated from data obtained during the compression test, we show that the compression under constant deformation rate is by far a simpler, quicker and more reliable way to draw more meaningful compression characteristics. Static permeation data, used in the past to predict yields during the dynamic compression of a solid/liquid mixture, are highly suspect in the case of biological materials undergoing active compacting.

This thesis describes a method, which uses a new theory to access the dynamic compression coefficient of biological and food materials. A multi-mode large diameter expression cell has been built to study the dynamic compression characteristics of rather thin layers of materials. The influence of the rate of compression, among other process conditions, is emphasized.

An important theoretical background has been developed regarding multidimensional expression such as the one occurring during axial compression and radial flow. This set of equations is useful to model the expression, which takes place in a screw pilot press designed and instrumented for this study. Both the coefficients of compression obtained during piston-cell compression at the laboratory level and during screw pressing, agree fairly well with each other leading to more meaningful engineering and scientific data.

It has also been shown that the pressure relaxation pattern can be described by simple relationships whose applicability, as well as parameters, can be determined by linear regression. This opens a new area of investigation regarding the possibility to establish correlations between the compression and the relaxation parameters avoiding the controversial use of series of exponentials.

Overall, in this work, a fairly good number of products have been studied such as : kaolin, talc, peat, alfalfa, spent sugar beets, blackcurrant, apples, cranberries, surimi, casein curds, wastewater sludge.

Finally, relationships between the expression parameters and the Arrhenius law are shown to be coherent with the anticipated, nonetheless often disregarded effect of the temperature.

Energy wise the dewatering of bio-products remains a huge potential area for energy saving as being reported in some of the author's publications included in the thesis.

---

## *Introduction, Chronologie et Méthodologie*

---

Dans un contexte - et une volonté affirmée - de développement durable et soutenable, à l'échelle de l'Europe élargie ou de croissance viable - « sustainable growth » - au niveau des Amériques, il est opportun de participer à la consolidation globale des connaissances scientifiques ayant trait aux énergies, à l'environnement et à leurs composantes économiques et humaines.

C'est dans ce cadre que s'insère le mémoire que nous proposons et qui traite des opérations de séparation solide-liquide par compression de milieux poreux saturés selon divers modes unidirectionnels, radiaux, discontinus ou continus. Les produits soumis à l'expérimentation ont plusieurs origines allant des matières premières aux déchets, en passant par des produits semi-ouvrés aux vocations diverses, médicales, alimentaires, électroniques ou purement chimiques ...

Avant de s'attarder sur les aspects scientifiques et technologiques, revenons sur la dimension globale de cette activité de recherche dont le pôle précurseur, d'ancrage puis de liaison, tout au long des recherches conduites, est le Laboratoire des Sciences du Génie Chimique (LSGC) à Nancy. L'équipe de contact permanent et de validation initiale des initiatives conduites, tant au sein de ce laboratoire qu'à l'étranger, est celle animée par D. LECLERC. J. VILLERMAUX, J.C. CHARPENTIER, P. LE GOFF, J.A. DODDS, D. TONDEUR ont eu des rôles essentiels et complémentaires dans l'intégration multidisciplinaire de ce travail au sein de l'environnement de la science des procédés et des nombreuses communautés scientifiques qui s'y rattachent.

Sachant que les deux tiers de l'énergie sont consommés par le quart de la population mondiale, ce rapprochement des connaissances fondamentales, des expertises et des savoir-faire pourrait s'en trouver facilité. Ceci à l'exception des domaines complexes et multidisciplinaires qui se sont quelque peu retrouvés en marge du développement économique et industriel classique. Certaines méthodes de séparation de la matière transformée ou non, comme celle faisant l'objet de ce mémoire, en font parfois partie.

Comme le souligne J. BENDITT, directeur de publication de la revue Innovation du MIT, dans son éditorial de l'édition spéciale « Energy » de février 2002, les nouvelles barrières géopolitiques mises en exergue par la catastrophe du 11 septembre 2001 et l'incontestable impact de notre mode d'utilisation des énergies fossiles sur l'environnement et le climat en particulier, sont des facteurs durables. Et de poursuivre en insistant sur le fait que ces derniers doivent stimuler, même en période de pétrole peu coûteux, la volonté de maintenir un effort de recherche non négligeable dans le domaine de l'innovation en matière d'énergie.

Avec une consommation actuelle mondiale de 10 milliards de tonnes d'équivalent pétrole (tep) par an (United Nations Statistics), devant atteindre 15 milliards de tonnes en 2020, peut-on réellement penser en termes de développement

durable, sachant que non seulement l'énergie disponible mais aussi l'environnement, ozone et dioxyde de carbone inclus, s'inscrivent dans cette notion de pérennité ? Cette question n'est pas aussi incontournable qu'il n'y paraît.

En l'état actuel des connaissances, on peut sans doute compter sur la possibilité de produire environ 3 milliards de tonnes (tep) d'énergie dite renouvelable, non-fossile, à l'horizon 2020. Soyons optimistes et comptons également sur le facteur chance associé à toute découverte ou invention majeure (break-through invention) ; on peut alors ajouter à ces 3 milliards de tep, 2 autres milliards de tep non-fossile et non-nucléaire. Ce scénario conduirait à la situation unique d'une stagnation de la consommation d'énergie fossile et nucléaire. Un tel pari est réaliste. Bien entendu des conditions économiques, politiques, humanitaires et scientifiques s'y rattachent.

Parmi celles-ci il en va du rassemblement des connaissances par les voies traditionnelles mais aussi moins classiques. Il y a bien plus de connaissances à écrire qu'il n'y en a d'écrites. L'industrie, dans un esprit de protection mais aussi de nécessité temporelle et de pyramide des âges, regroupe une base de données technologiques ou scientifiques considérable et pour une grande part non documentée et enregistrée. Les cultures et le savoir-faire non-industriel constituent également des sources diversifiées de données intégrables dans une démarche de « provocation de l'événement majeur » pouvant engendrer le scénario décrit précédemment et la découverte ou l'invention capitale.

C'est dans cet esprit de mise à disposition de la connaissance pratique et purement intellectuelle que nous avons entrepris la démarche de rédaction de ce mémoire, touchant aux préoccupations que nous venons d'évoquer, alors qu'en tant qu'acteur au sein de la grande entreprise, la tâche et les responsabilités s'accroissent jour après jour et sans relâche depuis 16 ans déjà dans un objectif de « sustainable growth ».

La forme de séparation solide-liquide qui nous intéresse ici s'insère parfaitement dans un contexte de développement durable. En effet, les industries **minières**, - transformation des tourbes par exemple -, **agroalimentaires**, - production de produits déshydratés pour l'alimentation du bétail et essorage des protéines lactiques coagulées -, **papetières**, **électroniques**, - mise en forme des céramiques et du kaolin en particulier -, **pharmaceutiques**, **biotechnologiques**, - déshydratation des boues résiduaire -, ont toutes à traiter de séparations solides-liquides au combien pesantes, non seulement dans leur bilan économique et énergétique global mais également au niveau de leur « transférabilité » ; terme difficilement traduisible par le mot mobilité. Des rendements jamais atteints, d'un défaut par million de pièces produites correspondant à l'objectif  $6\sigma$  des grandes sociétés chimiques et informatiques, et des contraintes de zéro déchet ne font qu'accentuer la nécessité absolue de séparations de phases à la fois simples et performantes. Si l'on inclut dans les opérations de séparation de phases solides-liquides, le compactage de déchets divers domestiques ou industriels, pour leur transport ou leur stockage temporaire, et pourquoi pas la densification des objets volumineux comme les automobiles pour leur recyclage, on peut alors considérer la science des séparations de phases ou de densification de la matière comme essentielle à l'activité humaine actuelle et future.

Sachant que ces dernières consomment 10 à 20 (voire 30) fois moins d'énergie lorsqu'elles sont effectuées par la voie mécanique plutôt que par la voie thermique et qu'elles représentent près du quart de la consommation mondiale en équivalent pétrole, on pourrait aujourd'hui réaliser un gain de 1.5 milliards de tep en convertissant toutes ces opérations thermiques en opérations mécaniques ; ceci tout en réduisant les effets liés aux émissions de dioxyde de carbone. Bien entendu

l'investissement déjà en place et les défis technologiques associés à une telle conversion font partie de la gamme imposante de seuils à franchir.

Les recherches conduites dans le cadre de ce mémoire prennent en compte, sous une forme ou sous une autre, des produits ou des procédés rattachés à au moins quatre des six secteurs industriels clés que nous venons de citer.

Etant donné la cinétique des phénomènes étudiés, nos préoccupations nous éloignent des aspects traditionnels de la mécanique des sols, quant à la prévision de leur stabilité à long terme. Il n'en demeure pas moins important de souligner que la démarche scientifique mise en œuvre présente un intérêt fondamental pour la caractérisation des écoulements hydrodynamiques, des déformations et du comportement des structures affectées par les catastrophes « dites naturelles » ; ces dernières étant souvent influencées par la main de l'homme du fait des infrastructures qu'il a dessinées durant le siècle dernier.

Attachés à accroître et à mettre à disposition la compréhension fondamentale et sa composante pratique de la séparation de phases par déformation mécanique multidimensionnelle de milieux poreux saturés, nous avons pensé qu'il serait utile de procéder de façon chronologique et thématique. En effet la démarche scientifique a ici une importance significative car les travaux effectués en divers endroits ont toujours été menés dans un esprit de complémentarité et d'amélioration des connaissances déjà développées à cet endroit précis ou correspondant à une certaine culture locale, celle du génie des procédés à Nancy ou celle du génie alimentaire à l'université du Massachusetts ou encore celle du génie civil au sein du laboratoire militaire du Génie de l'Air. L'expérimentation a pris une grande place dans la démarche puisque pas moins de 4 cellules de compression « multimode » et une unité pilote de pressage par vis ont été construites.

C'est à E. MINERY que l'on doit la réalisation en 1979, sous la direction de D. LECLERC, de la première cellule de compression-perméabilité au sein du LSGC-Nancy pour l'étude de la filtration et de la déshydratation par compression mécanique des suspensions industrielles floculées ou non. On se doit de reconnaître la qualité exceptionnelle de cette pièce, d'un point de vue du génie mécanique. Il faut aussi souligner la démarche scientifique de départ et l'initiative de D. LECLERC d'intégrer au sein du laboratoire des Sciences du Génie Chimique une facette nouvelle de la séparation solide-liquide et d'en fournir non seulement les moyens mais la continuité du suivi scientifique sur une période de plus de vingt ans. Cette première cellule limitera le champ d'étude à la compression mécanique à pression constante, s'agissant de la pression appliquée au sommet du piston de la chambre de compression. D'un diamètre de 85 mm, donc un rapport géométrique  $L/D$  (hauteur/diamètre) déjà favorable à la réduction des forces de friction, comparativement aux cellules de H.G. SWARTZBERG et I. KORMENDY, elle servira de base à nos premiers travaux puis elle sera modifiée. Equipée par nos soins en 1981 de glissières en Teflon®, pour réduire davantage les forces de friction, de capteurs de force et de déplacement reliés à un enregistrement automatisé et continu, cette cellule sera dans un premier temps utilisée pour l'analyse des limites des modèles de M. SHIRATO développés sur la base de la mécanique des sols. Pour cela, des poudres minérales, telles que le kaolin et le talc entrant dans la fabrication de céramiques, seront utilisées afin de bien respecter l'une des hypothèses majeures de ces modèles, à savoir l'incompressibilité de la matrice solide. D'intéressantes situations expérimentales seront découvertes lors de l'étude de boues semi-solides constituées à partir de kaolin floculé donc d'une matrice solide incompressible. Cependant, c'est seulement par le biais des couches minces, tant attendues par D. LECLERC, que l'on pourra adapter ces modèles à des situations

encore rarement étudiées, comme la compression mécanique des agrumes, des pulpes de betterave, de la luzerne, des boues résiduelles flocculées ou non. Il faudra malgré tout faire appel à des modèles semi-empiriques et phénoménologiques pour souligner les aspects techniques et scientifiques entrant dans l'étude de la sensibilité des coefficients de compression et de perméabilité du milieu étudié en fonction des variables thermodynamiques courantes. Ce type d'approche sera poursuivi par G. BALUAIS et D. LECLERC avec une nouvelle gamme de produits et en particulier les drêches de brasserie ayant des comportements rhéologiques bien spécifiques et des teneurs massiques faibles. Dans le rapport final de G. BALUAIS (1987), la diffusivité matérielle du liquide dans la masse poreuse, ici traitée en couches minces, apparaît comme une grandeur unique de fonctionnement de l'opération globale de filtration et de compression. Comme nous le verrons dans le second chapitre, illustré par nos quatre premières publications (P1, P2, P3) sur le sujet en 1981, 1982(2), et 1985, la théorie de M. SHIRATO, la plus citée dans le domaine, souffre de difficultés expérimentales fondamentales, à savoir la recherche du taux de compression infini, valeur purement théorique, et la mesure de la masse volumique du solide qui n'est qu'une grandeur virtuelle lorsque l'on s'intéresse aux produits biologiques. Cette masse volumique est cependant indispensable dans le choix particulier fait par M. SHIRATO de coordonnées de type lagrangiennes ramenées à la matière solide, donc mobiles et rapportées à la hauteur de solide par unité de surface drainante, coordonnées qui font sans doute l'attractivité initiale de cette approche. Seulement dans le cas de couches minces, ce qui réduit l'impact de cette masse volumique dans les calculs, on peut exploiter plus largement des modèles de M. SHIRATO et, avec beaucoup de précautions, les adapter aux systèmes biologiques à forte compressibilité et à courte durée de vie. L'utilisation des modèles rhéologiques a été et demeure une tendance qui ne peut pas échapper au chercheur fidèle à une analyse bibliographique précise. Les derniers travaux de ce type sont ceux de J.L. LANOISELLE en 1995. Nous donnons dans ce chapitre 2 les bases théoriques afférentes à l'usage des modèles rhéologiques linéaires ou visco-élastiques en tentant par l'exemple d'en cerner les limites évidentes et rémanentes associées à leur faible degré de spécificité.

A ce stade, il devenait nécessaire d'admettre les limites de la compression mécanique à pression constante - s'agissant de la contrainte par unité de surface du piston - du fait principalement de l'accessibilité des paramètres ultimes définissant l'état d'équilibre du système. Y-a-t-il une asymptote de compression infinie et une valeur limite de compression infinie pour les matériaux biologiques ? Sans doute pas étant données les dégradations enzymatiques ou d'autres natures qu'elles subissent dans une échelle de temps réduite. Toutefois ne négligeons pas l'apport essentiel de la compression mécanique à pression constante dans la recherche des caractéristiques de compression suite à une phase significative de filtration. La compression suivant une phase de filtration présente l'avantage fondamental d'éviter d'imposer de façon brutale un gradient de déformation incontrôlé dès le début de la phase de compression ; lequel gradient peut, en particulier sur les produits biologiques, causer des effets d'hystérésis importants rendant la suite du processus de déformation encore moins prévisible.

La compression à régime imposé et contrôlé, pas encore exploitée à l'échelle de la recherche fondamentale en Europe, beaucoup plus naturelle pour les ingénieurs de la science des matériaux et plus rarement pour ceux du génie civil, représentait certes un atout scientifique mais avant tout un challenge. Il n'y avait pas encore de thèse doctorale portant sur la compression mécanique à taux de déformation constante. Cependant combien d'opérations industrielles de séparations solides-

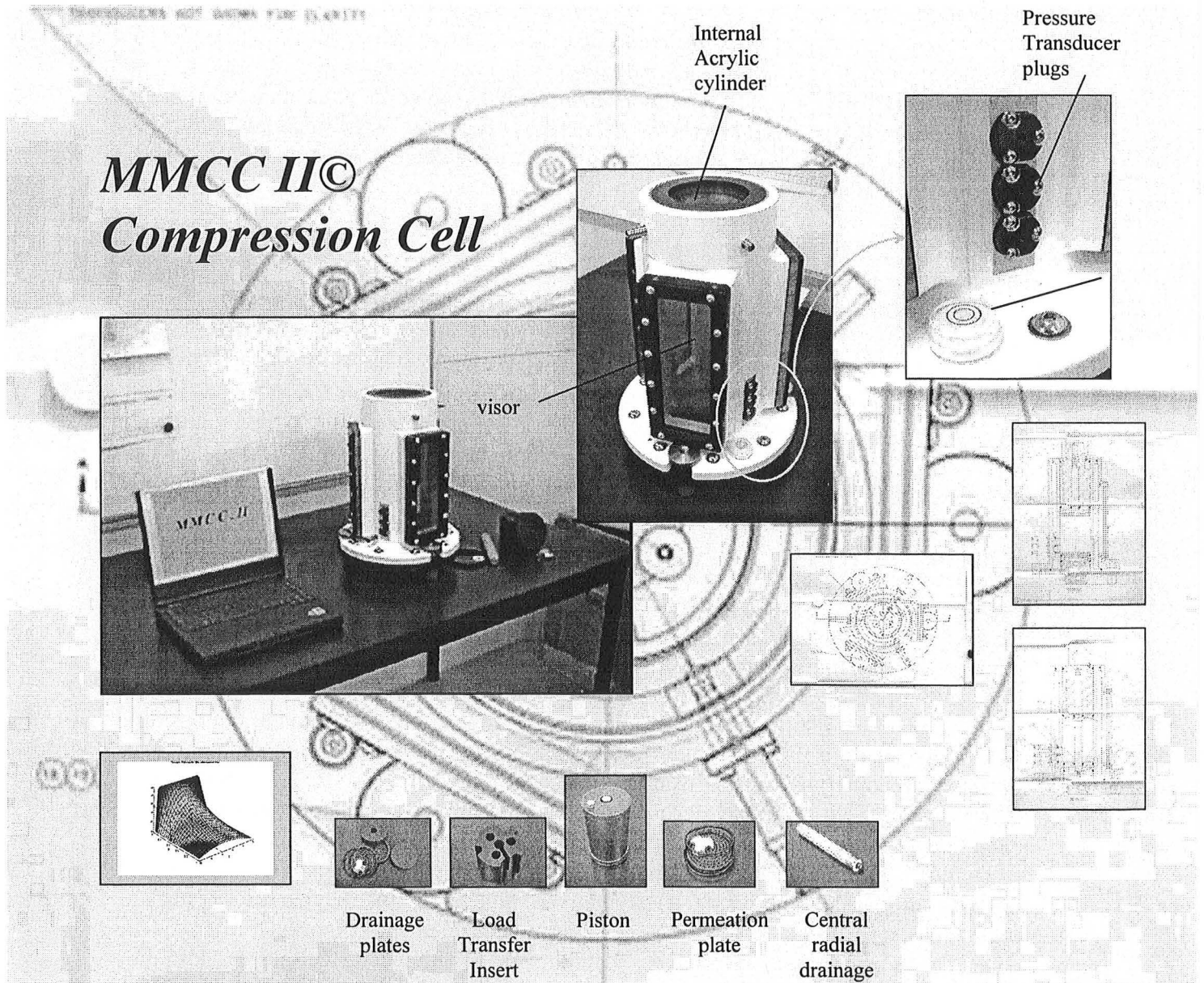
liquides en continu sont réalisées à régime imposé et contrôlé plutôt qu'à gradient constant. A ce sujet, il est utile de préciser que le pressage sur machine à papier correspond à une compression sous une série d'impulsions de pression constante correspondant plus ou moins aux injections-impulsions de type Dirac utilisées par J. VILLERMAUX pour l'étude des réacteurs. Les travaux de K.B. JEWETT, de J-C. ROUX et de J-F. BLOCH constituent des bases incontournables qui cependant ne traitent pas du problème directement sous l'angle proposé ici lorsqu'il s'agit de taux de déformation constant. Nous avons réalisé les premiers essais d'orientation de compression mécanique à déformation constante au laboratoire de génie civil, au sein d'un régiment de l'armée du génie de l'air. Des résultats fort prometteurs, rapportés dans notre thèse de Docteur Ingénieur en 1983, portant sur l'incidence de la vitesse de déformation sur la compressibilité de produits agroalimentaires, nous encouragerons à poursuivre cette voie. Ce rapport reprend également des éléments d'optimisation économique que nous ont permis de publier (P4, P5, P6) séparément P. LEGOFF et J. HERMIA dans leurs initiatives d'études des impacts énergétiques de ce type de séparation. D. LECLERC intègre alors nos résultats expérimentaux dans un modèle technico-économique alors que nous développons une voie d'optimisation applicable à l'industrie de valorisation des pulpes de betteraves à sucre. Bien entendu, la chance de pouvoir prendre en compte rapidement ces aspects et de les exposer au processus de revue de la communauté scientifique, donne à une démarche de recherche scientifique une dimension très valorisante.

Le troisième chapitre de ce mémoire débute par l'approfondissement de la voie « régime imposé et contrôlé », c'est à dire compression à taux de déformation imposé ou à déformation constante. En rejoignant en 1984 pour un séjour post-doctoral l'équipe des professeurs H. G. SCHWARTZBERG et M. PELEG du département de génie alimentaire et chimique de l'université du Massachusetts, tout en maintenant une liaison permanente avec le LSGC et en particulier avec l'équipe du professeur D. LECLERC, des possibilités nouvelles d'extension des recherches conduites précédemment se présentaient. Bien entendu nous devons garder à l'esprit l'idée de poursuivre la compréhension fondamentale de la compression mécanique sous régime imposé et contrôlé de produits agroalimentaires divers aux structures toujours plus complexes. En 1978, H. G. SCHWARTZBERG a initié un programme sur l'élimination d'eau par exprimage. Ce terme en français est généralement réservé au textile mais en anglais il se trouve étendu à d'autres substances desquelles on extrait la phase liquide en exerçant une pression. H. G. SCHWARTZBERG faisait pour cela usage d'une cellule piston d'un diamètre de 2.5 cm. Très rapidement nous serons de nouveau confrontés au problème de friction excessive pouvant dans ce cas précis absorber jusqu'à 80% des forces appliquées. Ceci conduit rapidement à la décision de construire une nouvelle cellule dénommée « MMCC© », « Multi-Mode Compression Cell », cellule de compression multimode ; ceci pour insister sur le caractère plus universel de cet équipement pouvant fonctionner sous une pression constante ou variable, sous un gradient de pression ou à un taux de déformation constant ou variable. Equipée aussi bien au niveau du piston que de la surface drainante de capteurs de forces et de pressions, également disposés le long de la chambre de compression à diverses hauteurs du gâteau, cette cellule est toujours unique. L'évolution de la hauteur du milieu comprimé peut être imposée ou suivie et mesurée avec précision et directement informatisée. La chambre de compression est équipée d'un dispositif de régulation de température, trop rare dans ce domaine de recherche, alors que le traitement de produits biologiques le rend indispensable. Au total équipé de 9 capteurs de pressions hydrauliques, de 3 capteurs de force et de 2



capteurs de distance et de déplacement, le dispositif MMCC© demeure l'une des cellules les plus instrumentée. Une deuxième génération, MMCC© II, sera construite plus tard avec la possibilité d'effectuer de la compression axiale avec un écoulement radial.

## Multi-Mode Compression Cell - II



Ayant résolu les problèmes expérimentaux associés à des frictions trop grandes et ayant créé la première cellule MMCC©, d'un diamètre de 133 mm favorisant encore davantage la compression de couches minces, puisque d'une surface drainante environ 1.5 fois plus grande que celle du dispositif MINERY-REBOUILLAT, nous étions en mesure d'entreprendre la création d'une nouvelle banque de données expérimentales concernant un nouveau mode de compression mécanique. Dans un souci permanent de toujours réduire « le bruit de fond » que peuvent causer les frictions, nous avons adopté un système flottant au niveau de la surface drainante afin de désolidariser complètement la chambre de compression de la base de la cellule et ainsi de réduire les frictions à un niveau zéro lorsque les pièces mobiles sont lubrifiées, ceci à la précision des mesures près. Aujourd'hui à l'échelle du laboratoire, la surface drainante de la cellule MMCC© demeure la plus grande sachant que seul un pilote industriel de 200 mm de diamètre a été expérimenté dans le cadre de recherches à pression constante menées par l'université technologique de Compiègne.

Jusqu'à présent, le critère hydrodynamique le plus fréquemment utilisé pour caractériser l'écoulement du fluide exprimé du milieu poreux au cours de la déformation demeurait, pour des raisons d'accessibilité expérimentale, la résistance spécifique de filtration mesurée par perméation statique puisque réalisée sur le milieu déformé à l'équilibre. De nombreuses expérimentations conduites auparavant avec D. LECLERC nous servent de base pour apprécier les exigences expérimentales et construire un dispositif de mesure optimisé de la perméation. Il s'agit là d'une illustration de la nécessité du lien permanent avec le LSGC. A titre d'exemple, très tôt dans ce travail les aspects de capillarité et de remouillage ont été écartés de nos préoccupations grâce aux études de J.A. DODDS qui soulignent bien que ces préoccupations sont bien plus actuelles lors de la compression de milieux insaturés comme ceux rencontrés dans l'industrie du papier. En ce qui concerne l'évolution de nos recherches proprement dites, il paraît logique de s'affranchir de toute incertitude concernant l'usage d'un paramètre statique. Puisque le dispositif MMCC© permet aussi d'accéder à la résistance spécifique dynamique mesurable au cours de l'opération de compression, nous avons, à l'aide d'un modèle mathématique simple, corrélé les deux types de résistances. Pour la première fois, l'usage du paramètre statique pouvait être remis en cause car il diffère dans un nombre de situations non négligeable, avec sa composante dynamique. Cette mise en évidence est l'objet de la sixième publication (P6) produite dans le troisième chapitre de ce travail.

L'étude de produits humides divers d'origine organique ou biologique est d'autant plus complexe que leurs propriétés mécaniques de base sont rarement disponibles dans la littérature et qu'elles peuvent varier considérablement selon leur origine. Dans ce troisième chapitre, nous présentons deux séries d'études, ayant fait l'objet des septième et huitième publications (P7, P8) rapportées dans ce mémoire, portant sur la mesure de propriétés mécaniques utiles à la caractérisation du comportement de ce type de produits lors de leur compression libre, c'est à dire non frettée. Il s'agit des modules de compressibilité, des relations contrainte-déformation, de l'influence du taux de déformation sur ces relations, des contraintes et déformations à la rupture et de l'évolution des ces propriétés durant la phase de relaxation suivant la compression. Ce sont davantage des expériences de fluage dont les paramètres s'apparentent aux paramètres de compression secondaire que nous avons étudiée lors de nos premières expériences au LSGC-Nancy. Grâce à M. PELEG, nous avons pu préciser le comportement de la tourbe traitée ou non et caractériser une douzaine de catégories de pommes. Ce type d'approche, plus



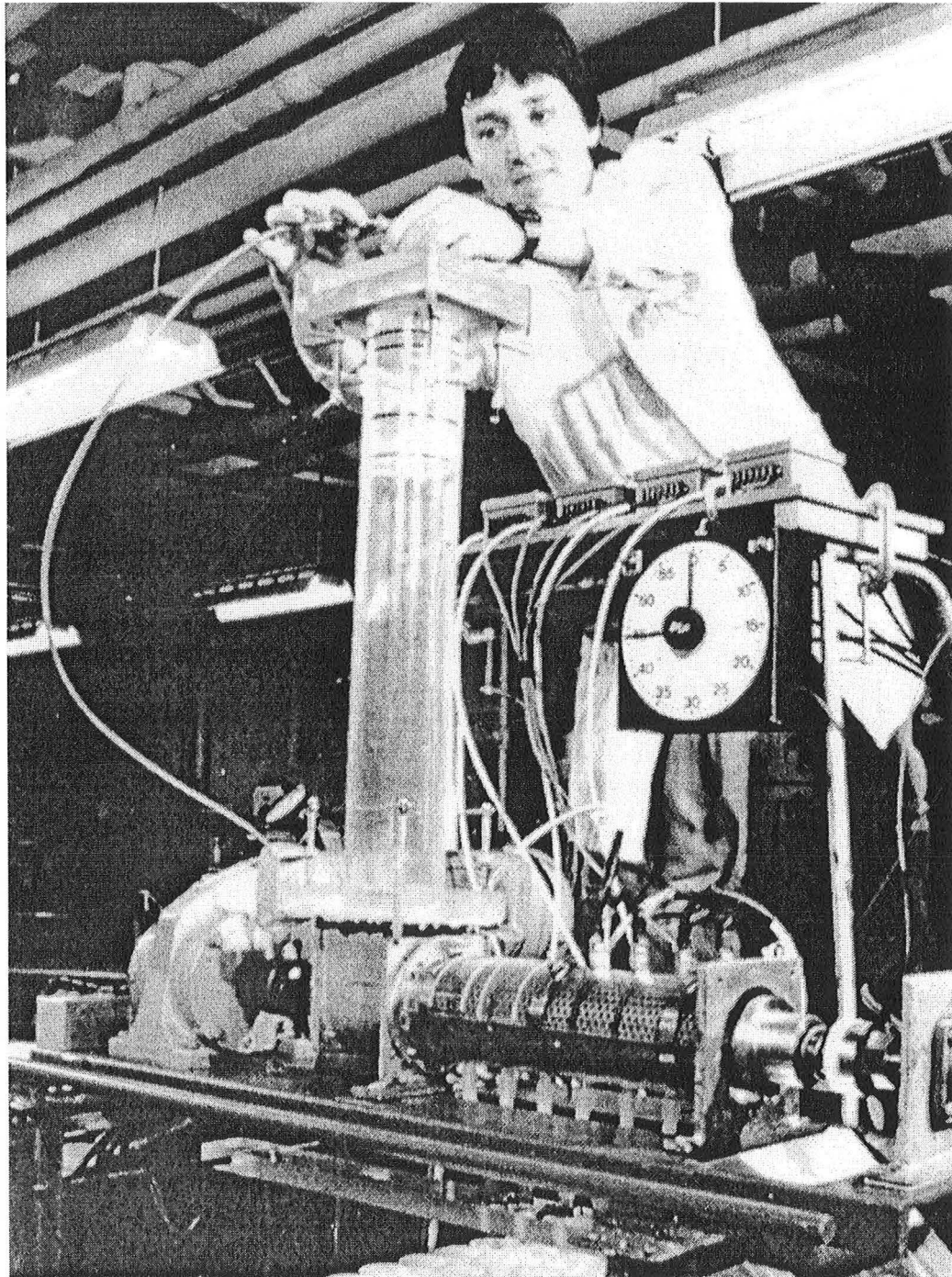
couramment utilisée par les scientifiques des polymères et des matériaux en général, est sans doute insuffisamment exploité dans le domaine du génie des procédés. Nous n'avons pas encore trouvé de travaux portant sur la compression mécanique qui relatent des propriétés mécaniques des produits étudiés sous l'angle purement mécanique du type - résistance des matériaux.

A l'aide de la première cellule MMCC©, divers fruits, pommes (Rdap et Gdap) et aïrelles (Cr) sectionnées, des protéines de lait précipitées par voie chimique (C ou Cc), des pulpes de betteraves (Fp ou F) et des protéines de poisson (Fs), destinées à la fabrication de surimi par extrusion, servent de base à la définition d'un plan d'expériences et à la conduite de nombreuses mesures de compression.

D'un point de vue fondamental partant du théorème de la divergence et faisant usage de quatre systèmes de coordonnées, à savoir lagrangiennes, donc fixes, eulériennes, donc mobiles, dites matérielles selon S. SHIRATO, donc mixtes, et radiales, il est possible de dériver toutes les situations de compression à partir d'une équation globale établie selon la base du scénario le plus large. Cette équation globale, en tête du résumé joint, figure 1, repose sur un bilan vectoriel des flux, sur la loi de Darcy généralisée et les lois de comportement du système étudié. Tous les modes de compression déjà envisagés précédemment mais aussi la compression radiale, centrale ou périphérique, sont mis en équation à partir de cette relation centrale. La situation des couches minces, comparée à celle des larges déformations de couches intermédiaires, est prise en compte dans ce schéma directeur théorique. La nature des contraintes, faibles ou élevées, et les relations contrainte-déformation raisonnablement envisageables sont incluses dans cette série de modèles représentés sur la figure 1. Ces différentes approches font l'objet des deux autres publications, P9, P10, et de présentations aux 6th et 7th congrès mondiaux de la filtration de 1993 et de 1996. Ces publications sont également insérées au chapitre 3. Il est utile de préciser que la compression à déformation imposée et contrôlée est mise en équation selon trois approches, celle des couches minces, celle des fortes déformations et selon une variante mixte, en faisant usage d'au moins trois des produits cités au paragraphe qui précède. D'intéressantes corrélations sont établies entre les trois séries de modèles qui démontrent la pertinence du mode opératoire. Les coefficients de consolidation ou de compression, de compressibilité et de perméabilité sont bien séparés pour montrer leur contribution respective et souligner la validité des hypothèses relatives à la variation du coefficient qui les englobe. Du point de vue du développement mathématique de chacune des théories, un résumé est proposé dans chaque sous-chapitre et le développement complet est annexé à cet ouvrage. Nous prions le lecteur de nous excuser pour la longueur des développements mathématiques que nous avons voulu très détaillés afin d'offrir la base la plus compréhensible possible, sachant que l'avènement de la mathématique informatisée tend parfois à occulter la démarche et la valeur cruciale des hypothèses. Dans ce chapitre apparaissent également les phénomènes de relaxation consécutifs à la compression, ceci selon deux modélisations indépendantes supportées par des exemples sur tourbes (P8), fruits et produits agroalimentaires (P10).

Lors de ce séjour post-doctoral au sein des équipes des professeurs H.G. SCHWARTZBERG et M. PELEG du département de génie alimentaire et chimique de l'université du Massachusetts, nous avons également conçu une unité pilote de pressage par vis. Cette unité est élaborée de manière à apprécier les phénomènes de compression axiale à évacuation radiale du liquide. Une photographie de cette unité est fournie ci-dessous. C'est également l'occasion de faire connaissance avec l'auteur, à cette époque ...

**Screw Press Pilot Unit (TSPU©) – Unité Pilote de Pressage à vis**



Deux sortes de vis centrales ont été conçues, l'une à faible coefficient de compression axiale, LCR « Lower compression ratio », et l'autre à fort coefficient de compression axiale, HCR « Higher Compression Ratio ». La collecte du liquide peut être fractionnée grâce à un dispositif de séparation du fluide lors de sa sortie périphérique, ceci donnant accès aux performances et caractéristiques de compression des secteurs sélectionnés le long de la vis. Des capteurs de pression étant disposés à la périphérie de chaque secteur, la pression exercée par le solide en sortie de presse et son débit étant mesurés et enfin la pression et le débit imposés à l'entrée étant également connus, nous disposons de toutes les données nécessaires à la modélisation globale du comportement de la presse. D'un diamètre externe de 8 cm environ, d'une longueur de vis de 45 cm et pouvant tourner à une vitesse utile de 50 rotations par minute, cette presse à vis est capable d'un débit d'environ  $0.5\text{m}^3/\text{heure}$ . Elle constitue un pilote unique pour l'étude de la compression en continu avec un écoulement radial.

L'approche théorique et l'illustration expérimentale de la compression radiale font l'objet du quatrième chapitre de ce mémoire. Deux types de modélisation sont proposés, prenant en compte une évacuation du liquide centrale ou périphérique. Le calcul des coefficients de compression et de perméabilité est rendu possible en traitant chaque secteur de compression séparément et en le considérant comme équivalent à une unité piston bien définie. Les matériaux étudiés pour le pressage à vis, au nombre de cinq, étant identiques à ceux utilisés pour la compression axiale à déformation constante, d'intéressantes corrélations sont rendues possibles et interprétables.

Le cinquième chapitre regroupe les approches moléculaires et thermodynamiques de la compression sur la base de l'énergie d'activation définie selon la loi d'Arrhenius. Il est intuitivement concevable qu'atomes, molécules, particules, agrégats et couches participent au processus de déformation et aux différents déplacements associés. Pour cela ils doivent acquérir une énergie d'activation suffisante pour franchir les barrières de potentiel leur permettant de passer d'un état d'équilibre à un autre de moindre énergie. La thermodynamique statistique peut dans ce cas remplacer avantageusement les multiples tentatives de mise en adéquation de phénomènes supposés, physiques, biologiques ou purement mécaniques, à des modèles rhéologiques dont on sait que l'accumulation judicieuse en série ou en parallèle fournira de toute façon une relation théorique superposable au comportement expérimental. Dans l'esprit de l'avancement d'une réaction chimique, selon les travaux bien connus de J. VILLERMAUX et O. LEVENSPIEL, on peut dans notre cas définir un taux d'avancement, « process rate », de la compression ou plus généralement de la déformation. En reprenant la relation empirique définie par Arrhenius, on peut établir par exemple la dépendance vis-à-vis de la température du processus global de compression ou des étapes de relaxation, de fluage, de diffusion et d'écoulement hydrodynamique qui l'accompagnent. Nos premières tentatives, dans le cadre de la compression unidirectionnelle et radiale, sont particulièrement prometteuses et ouvrent la voie à une approche complémentaire des phénomènes de déformation par le biais de la thermodynamique et de la mécanique statistiques. Ces résultats ne valident pas directement une théorie globale mais ils démontrent bien que la déformation de certains matériaux est « activée » par la température. C'est pourquoi nous avons choisi de faire figurer cette approche en dernier chapitre car il s'agit d'une voie d'ouverture issue des recherches que nous avons menées.

Classées par disciplines ou par domaines d'application, environ 700 publications afférentes au sujet traité constituent la dernière partie de ce mémoire. Les références proprement dites et directement utilisées dans le texte ou dans les publications sont reprises en fin de mémoire ou dans les publications elles-mêmes.

Concernant la nomenclature, nous comptons sur l'indulgence du lecteur qui pourra constater l'existence d'un double symbolisme du fait de l'antériorité de certaines publications. Le symbolisme qui est homogène pour l'ensemble du mémoire est régulièrement rappelé dans le texte. Il se trouve également regroupé en fin de mémoire. Pour ce qui est des publications, les notations choisies sont également fournies en fin de publication comme il est d'usage. Dans l'ensemble du mémoire, nous nous référons au milieu soumis à la compression par l'abréviation SPM (« Saturated Porous Material – son équivalent serait en français MPS pour Milieux Poreux Saturés dont nous ne faisons pas usage. »), sauf dans les cas où la dénomination spécifique est indispensable à la compréhension.

Enfin étant donné qu'une grande partie des recherches ont été effectuée aux Etats-Unis et que la plupart des travaux ont été publiés en Anglais, nous pensons que le lecteur nous accordera une nouvelle fois des circonstances atténuantes pour avoir maintenu quelques paragraphes de cet ouvrage en Anglais. S'agissant des développements mathématiques, cet aspect devrait être peu encombrant pour le lecteur francophone. Quant aux autres parties ou aux publications, nous fournissons la traduction et le résumé des éléments essentiels de ces travaux.

# Summary Figure 1

## Résumé

### Multi-Mode Compression of SPM

Basic Global Equation  
Multi-Mode Compression  
Chap.1

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K}{\gamma_f} (1+e) \frac{\partial P_f}{\partial e} \frac{\partial n}{\partial a} \right] - \left[ \frac{\gamma_s - 1}{\gamma_f} \right] K \frac{\partial}{\partial n} (1-n)^2 - \frac{\partial P_0(a,t)}{\partial n} \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{1+e} \right] \frac{\partial n}{\partial a} + \frac{K}{\gamma_f} (1-n) \frac{\partial P_0^2(a,t)}{\partial a^2}$$

Viscous material

$$\varepsilon = f(m, \Delta P_f)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\sinh(AP_f)}{B}$$

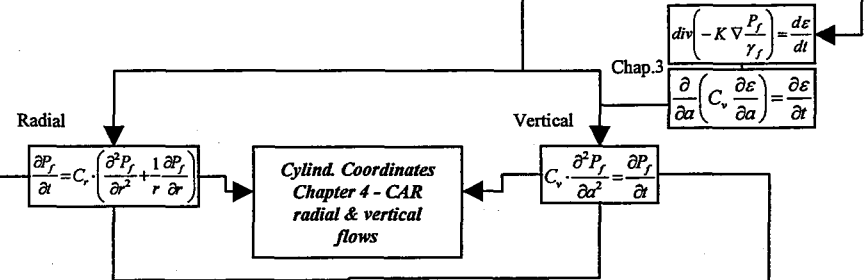
Pseudo-plastic material

Large Deformation  
Finite strains  $\varepsilon$

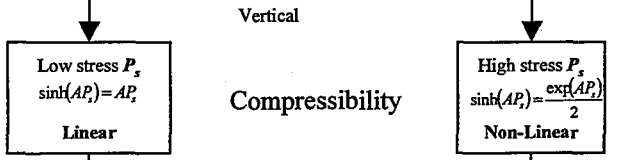
Couches minces  
Infinitesimal strains  $\varepsilon$

- Neglecting the movement of solid particles
- Defining strain in an element of a fixed volume (infinitesimal strain)
- Ignoring the boundary movement as compression occurs

- The movement of solid particles is not negligible
- Defining strain in an element of decrease volume (finite strain)
- The boundary change during the compression



Cylind. Coordinates  
Chapter 4 - CAR  
radial & vertical  
flows



Compressibility

Lagrangian  
Co-ordinates  $z$

Eulerian  
Co-ordinates  $\xi$

Lagrangian  
Co-ordinates  $z$

$$z(a) = \int_0^a \frac{1}{1+e} da$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = \frac{1+e}{1+e_0}$$

$$z(a) = \int_0^a \frac{1}{1+e} da$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{1+e} \frac{\partial P_f}{\partial a} \right]$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( C_v \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{1+e} \frac{\partial P_f}{\partial a} \right]$$

CPC-CDC  
Chapter 2,3  
vertical

CDC  
Chapter 3  
vertical

CPC  
Chap. 1,2  
vertical

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K(e)}{\gamma_f(1+e)} \frac{\partial P_f}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial a} \right] + \left[ \frac{\gamma_s - 1}{\gamma_f} \right] \frac{d}{da} \left[ \frac{K(e)}{1+e} \right] \frac{\partial e}{\partial a} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

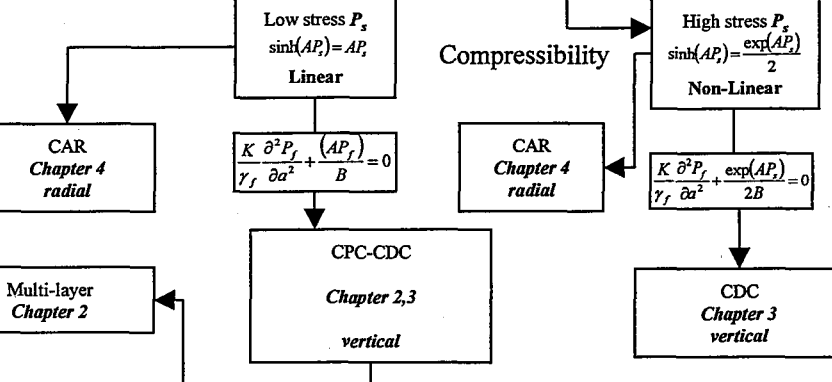
$$\frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{(1+e_0) C_v \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} - C_v \cdot m \cdot \gamma'}{1+e} \right] = \frac{(1+e)}{(1+e_0)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

$$\varepsilon = \log_e X$$

$$X(a,t) = \frac{1+e_0}{1+e}$$

$$X^2 \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left[ C_v \frac{\partial X}{\partial a} - C_v \cdot m \cdot \gamma' \right] = \frac{\partial X}{\partial t}$$

CDC  
Chapter 3  
vertical



If  $\gamma_f = \gamma_s$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{C_v}{(1+e)^2} \frac{\partial e}{\partial a} \right]$$

If  $C_v, m, \gamma' = Cte$   
 $e$  independent of  $a$

$$X^2 \frac{\partial}{\partial a} \left[ C_v \frac{\partial X}{\partial a} \right] = \frac{\partial X}{\partial t}$$

If  $1+e = 1+e_0$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left( C_v \frac{\partial n}{\partial a} \right)$$

$$\frac{\partial e}{(1+e) \partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial P_f}{\partial a} \right]$$

S. Rebouillat - Etude Fondamentale de la Déformation de Milieux Poreux Saturés - Introduction

---

*Chapitre**un*

---

## **Préliminaire Théorique concernant la Déformation d'un Milieu Poreux Saturé (SPM)**

Pour la bonne compréhension des diverses approches théoriques, il est essentiel de fournir quelques éléments de base en ce qui concerne les quatre repères utilisés et le développement de l'équation globale servant de support à l'ensemble des autres formulations théoriques. Pour ce qui est du détail des calculs théoriques, une attention toute particulière a été portée lors du report précis en annexe de toutes les étapes de calcul.



## 1. Les coordonnées

Les **coordonnées lagrangiennes ou spatiales**, fixes dans l'espace ou parfois qualifiées d'externes, sont mathématiquement simples et utiles lorsque l'on considère de faibles déformations, celles correspondant à la compression de couches minces par exemple.

Les **coordonnées euleriennes ou convectives**, mobiles ou parfois qualifiées d'internes, sont plus adaptées aux déformations importantes, celles correspondant à la compression de couches intermédiaires pour laquelle les frontières varient significativement en fonction du temps.

Les schémas ci-dessous sont les descriptions simplifiées de chacun des repères.

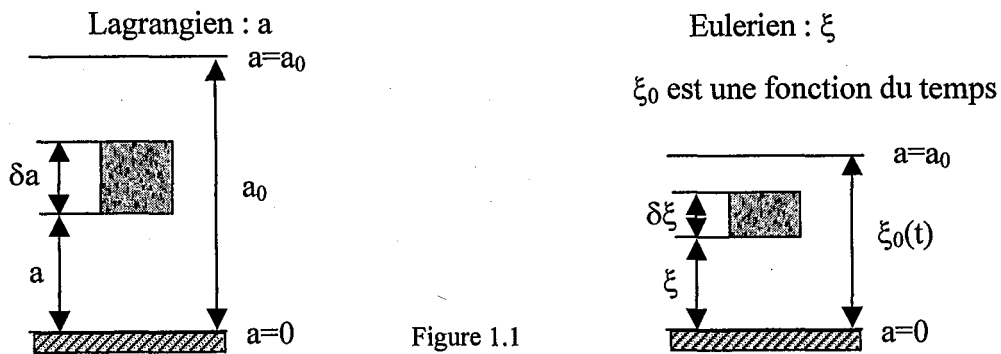
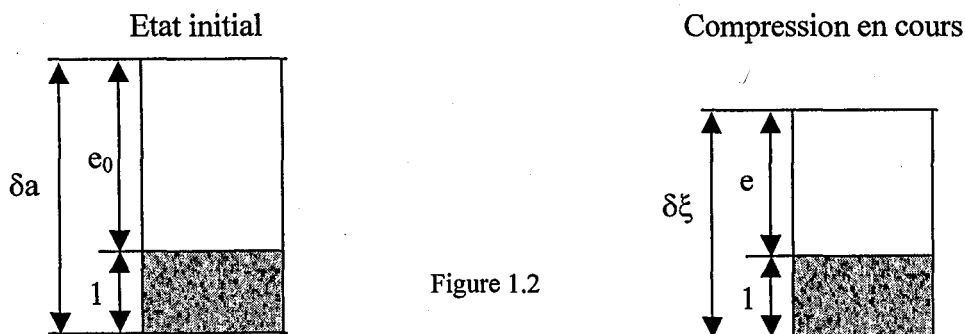


Figure 1.1 et Figure 1.2 : Les descriptions simplifiées de chacun des repères





A l'état initial  $t = 0$ , un élément  $\delta a$  est constitué d'une unité de volume de solide et de liquide selon le rapport de vide  $e_0$ . Au temps  $t$ , le volume de solide reste inchangé et le rapport de vide est  $e$  qui est différent de  $e_0$ , Fig. 1.2. Ainsi le rapport  $\partial \xi$  sur  $\partial a$  est :

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = \frac{1+e}{1+e_0} \quad \text{Eq. 1.1}$$

avec

$$1+e = \frac{V_T}{V_s}, \text{ et } 1+e_0 = \frac{V_{T_i}}{V_s}$$

**Les coordonnées lagrangiennes rapportées au volume de solide par unité de surface drainante, dites coordonnées matérielles ou réduites.**

Initialement définies par K. TERZAGHI (1923) et quelque peu abandonnées par l'usage, puis reprises par A. McNABB (1960) et par M. SHIRATO (1970), l'originalité de ces dernières repose sur le fait que la variable géométrique,  $z$  ou  $w \left[ \frac{m^3}{m^2} \right]$ , s'exprime par le rapport du volume de solide sur la surface drainante soit en [L] cm. La figure 1.3 représente cette situation dans le cas de la compression unidimensionnelle :

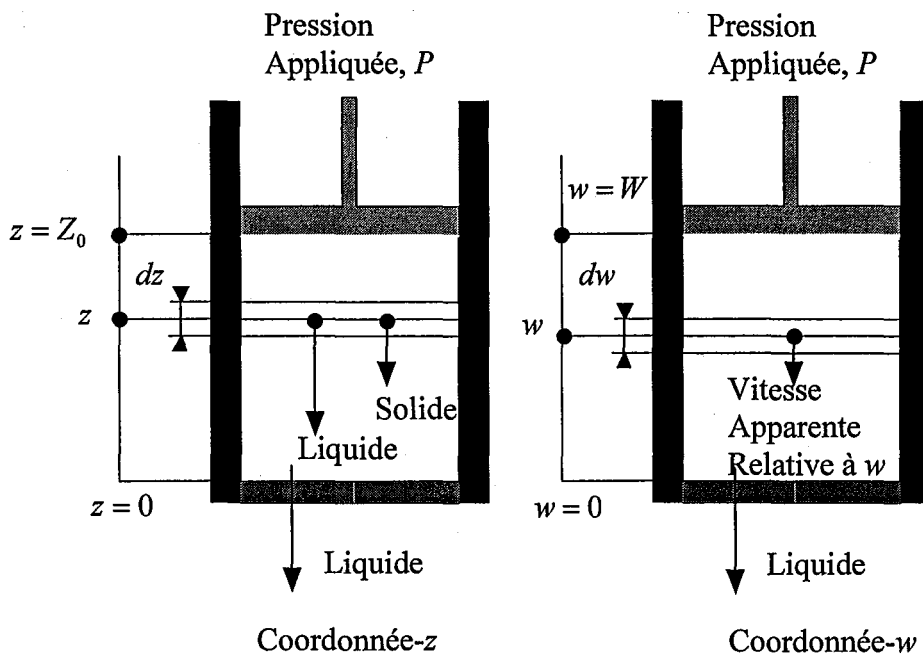


Figure 1.3 : Les coordonnées lagrangiennes rapportées au volume de solide par unité de surface

La variable  $z$  peut aussi s'exprimer en volume de solide par unité de surface filtrante et donc devient une fonction de  $a$  selon les relations suivantes :

$$\frac{\partial a}{1+e_0} = \frac{\partial \xi}{1+e} = \frac{\partial z}{1}$$

$$z(a) = \int_0^{a_0} [1 - n(a,0)] da \quad \text{Eq. 1.2}$$

$n$  est la porosité  $\left(\frac{V_f}{V_T}\right)$

Comme  $a$ ,  $z$  est **indépendant du temps**.

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

Il est plus aisé d'utiliser le rapport de vide  $e$ , c'est à dire :

$$e = \frac{n}{1-n} \quad \text{Eq. 1.3}$$

et l'Eq. 1.2 devient

$$z(a) = \int_0^{a_0} \frac{1}{1+e(a,0)} da = \int_0^{a_0} \frac{V_s}{V_T} da \quad \text{Eq. 1.4}$$

$$\text{avec } \frac{dz}{da} = \frac{1}{1+e_0} \quad \text{Eq. 1.5}$$

et  $e_0$  est le rapport de vide au temps  $t = 0$ .

On retrouve l'Eq. 1.5 dans les travaux de M. SHIRATO en remplaçant la variable  $a$  par  $x$  et  $z$  par  $w$  soit :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{1+e_0}$$

**Les coordonnées cylindriques ou polaires** sont habituellement définies comme suit :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

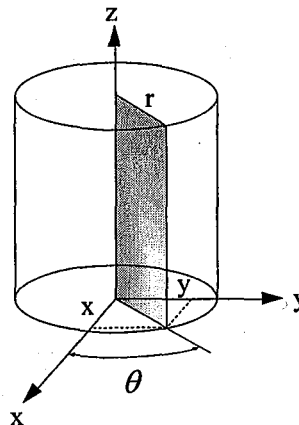


Figure 1.4 : Les coordonnées cylindriques ou polaires

## 2. Le théorème de la divergence dans le contexte de la compression

Selon le principe de la conservation de masse, le flux net massique sortant de l'élément de volume doit être égal à la variation de masse dans cet élément. Ce principe est souvent associé ou confondu avec le théorème de la divergence.

Ainsi le flux total à travers  $S$  est donné par l'intégrale surfacique de  $\vec{v}$  sur  $S$  :

$$\Phi_s(\vec{v}) = \oiint_S \vec{v} \cdot \vec{N}_u \, dS, \text{ le symbole } \oiint \text{ indique que l'intégration est faite sur}$$

l'ensemble d'une surface fermée selon la figure 1.5. L'unité de flux s'exprime en  $[m \cdot s^{-1} \cdot m^2]$ .

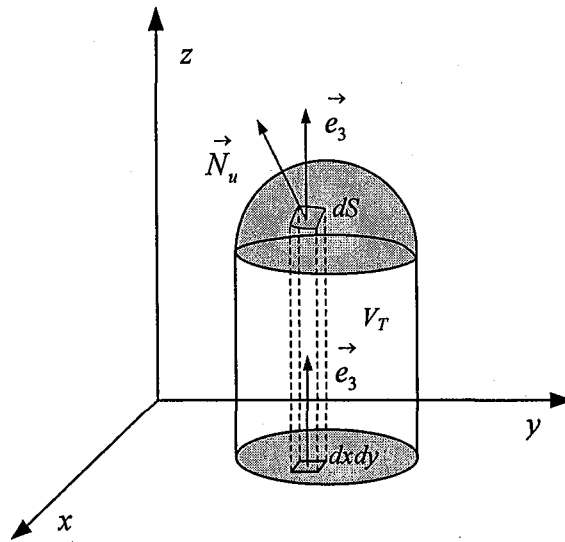


Figure 1.5 : Le théorème de la divergence dans le contexte de la compression

En projetant un élément de surface  $dS$  sur le plan de référence  $xoy$ , on a alors :

$$\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{N}_u \, dS = \oiint_{S_{project}} \vec{v} \cdot \vec{N}_u \frac{dxdy}{\cos(\alpha)} = \oiint_{S_{project}} \vec{v} \cdot \vec{N}_u \frac{dxdy}{\left\| \begin{matrix} \vec{e}_3 \\ \vec{N}_u \end{matrix} \right\|}} \quad \text{Eq. 1.6}$$

L'Eq. 1.6 est équivalente à :

$$\Phi_s(\vec{v}) = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{N}_u \, dS = \iiint_{V_T} \nabla \cdot \vec{v} \, dV_T = \iiint_{V_T} (\operatorname{div} \vec{v}) \, dV_T = \frac{dV}{dt} \quad \text{Eq. 1.7}$$

avec :

$S$  : la surface de l'élément  $[m^2]$

$\vec{v}$  : la vitesse du fluide  $[m \cdot s^{-1}]$

$\alpha$  : l'angle entre  $\vec{e}_3$  et  $\vec{N}_u$   $[radian]$

$\vec{N}_u$  : le vecteur unitaire sortant normal à la surface de l'élément  $[-]$

$\vec{e}_3$  : le vecteur unitaire normal à la surface projetée sur le plan  $xoy$   $[-]$

$V$  : le volume de liquide contenu dans l'élément  $[m^3]$

$V_T$  : le volume total de l'élément  $[m^3]$

$t$  : le temps  $[s]$

Prenons le cas d'une surface fermée  $S$ , par exemple une sphère, de centre  $A$ , et de rayon  $r$ , limitant un domaine  $V_T$ , on considère un point  $M \in V_T$ .

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{N}_u \, dS = \iiint_{V_T} (\operatorname{div} \vec{v}) \, dV_T$$

si  $r \rightarrow 0$ ,  $M \rightarrow A$ , alors  $V_T \rightarrow 0$ ,  $V_T \approx V$

Selon la moyenne de l'intégrale triple :

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{N}_u \, dS = \operatorname{div} \vec{v}(M) * \text{Volume}(V_T), \text{ avec } M \in V_T \quad \text{Eq. 1.8}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(M) = \frac{\Phi_s(\vec{v})}{V_T} \quad \text{Eq. 1.9}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(M) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi_s(\vec{v})}{V_T} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \quad \text{Eq. 1.10}$$

$$\text{Sachant que } \frac{dV}{V} = d\varepsilon \quad \text{Eq. 1.11}$$

et  $\varepsilon$  étant la déformation volumique de l'élément  $[-]$ .

$$\nabla \cdot \vec{v}(M) = \operatorname{div} \vec{v}(M) = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{Eq. 1.12}$$

A ce stade et dans le contexte de la compression d'un matériau poreux, seules trois hypothèses sont nécessaires :

- Le milieu poreux soumis à la déformation est saturé.

- Le liquide et le solide sont tous deux incompressibles, comparativement au matériau poreux saturé (SPM ou MPS).
- La loi de Darcy est applicable.

Nous verrons que la loi de Darcy doit être utilisée avec précaution quant à sa formulation. Prenons en première approche sa forme habituellement considérée :

$$\vec{v} = -K \nabla \frac{P_f}{\gamma_f} = -K \overrightarrow{\text{grad}} \frac{P_f}{\gamma_f} = -\frac{K}{\gamma_f} \left( \frac{\partial P_f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P_f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P_f}{\partial z} \vec{k} \right) \quad \text{Eq. 1.13}$$

avec :

$K$  : coefficient de perméabilité dans la direction  $z$  [ $m \cdot s^{-1}$ ]

$P_f$  : la pression hydraulique [ $N/m^2$ ]

$\gamma_f$  : poids volumique du liquide.

Pour l'eau à l'ambiante :  $\gamma_f = 9.81$  [ $kN/m^3$ ] ( $kg/m^3 \cdot m/s^2$ )

L'Eq. 1.12 prend alors la forme suivante:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( -K \nabla \frac{P_f}{\gamma_f} \right) &= \nabla \cdot \left( -\frac{K}{\gamma_f} \left( \frac{\partial P_f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P_f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P_f}{\partial z} \vec{k} \right) \right) \\ \nabla \cdot \left( -K \nabla \frac{P_f}{\gamma_f} \right) &= \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.14}$$

Respectant la forme générale des équations de la diffusion, on peut aussi utiliser la

nomenclature suivante :  $\frac{d\varepsilon}{dt} = \text{div} \left( -K \overrightarrow{\text{grad}} \frac{P_f}{\gamma_f} \right)$  selon J. CRANK(1973).

Dans le cas d'une déformation unidirectionnelle selon l'axe  $z$ , l'Eq. 1.14 s'écrit :

$$\nabla \cdot \left( -\frac{K}{\gamma_f} \left( \frac{\partial P_f}{\partial z} \vec{k} \right) \right) = -\frac{K}{\gamma_f} \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P_f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial x} = \text{Cte} \Rightarrow \frac{\partial^2 P_f}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial P_f}{\partial y} = \text{Cte} \Rightarrow \frac{\partial^2 P_f}{\partial y \partial z} = 0,$$

pour aboutir à :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial P_f}{\partial z} \right) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad \text{Eq. 1.15}$$

C'est à ce stade que le principe de transfert de la contrainte globale de déformation, pouvant inclure l'effet gravitationnel de la matière poreuse déformée, sur les différentes composantes des pressions et contraintes solide-liquide, intervient. Notons

qu'aucune hypothèse n'est effectuée quant à la réponse linéaire ou non du milieu déformé et quant à ses propriétés de résistance à l'écoulement du fluide.

Ces équations de base étant établies, il est utile pour la compréhension des divers cas de déformation étudiés de tenter d'aboutir à une formulation aussi générale que possible de l'équation de comportement dans le temps et dans l'espace du milieu déformé (SPM) ; ceci en réduisant au minimum le nombre d'hypothèses initiales. Ainsi de cette équation centrale, on pourra dériver la plupart des cas envisagés allant de la compression axiale à écoulement co-linéaire à la déformation, à la compression axiale à écoulement radial ; ceci selon divers modes de compression à pression ou à déformation constante de couches minces ou intermédiaires constituées d'une matrice solide dont la relation contrainte-déformation est linéaire ou non-linéaire.

### 3. Recherche d'une équation globale du comportement dans le temps et dans l'espace du matériau poreux saturé soumis à la compression

#### L'équation de Darcy généralisée

Revenons sur la loi de Darcy, dont l'usage conduit parfois à l'omission de certains aspects spécifiques aux expériences conduites par H. DARCY en 1856. Soulignons également que A. E. SCHEIDEGGER (1957) a établi la forme généralisée de la loi de Darcy associée à l'écoulement à travers un milieu poreux anisotrope et compressible. Quelques considérations simples d'ordre essentiellement physique permettent de replacer la loi de Darcy dans le contexte de la compression.

Considérons la figure 1.3. Au niveau du piston, aucun gradient hydraulique n'existe ; cependant le fluide et le solide se déplacent à la vitesse du piston ; la loi de Darcy se trouverait-elle donc invalidée ? Certainement, sauf, si l'on considère la vitesse apparente du fluide relative au solide. Dans ce cas :

$$n \left( \tilde{v}_f - \tilde{v}_s \right) = - \frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial P_f}{\partial a} \quad \text{Eq. 1.16}$$

$\tilde{v}_f$  étant la vitesse réelle du fluide,  $\tilde{v}_s$  étant la vitesse réelle du solide. Celles-ci s'expriment par rapport aux vitesses apparentes,  $v_s$  et  $v_f$ , selon :

$$n \tilde{v}_f = v_f \quad \text{Eq. 1.17}$$

et

$$(1-n) \tilde{v}_s = v_s \quad \text{Eq. 1.18}$$

ainsi l'Eq. 1.16 devient :

$$\left( v_f - n(v_f + v_s) \right) = - \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \frac{\partial P_f}{\partial a} \quad \text{Eq. 1.19}$$

#### Les équations de continuité de la phase solide et de la phase liquide

- au niveau du solide

$$v_s(a) - v_s(a + da) = \frac{\partial}{\partial t} [(1-n)da] \quad [m \cdot s^{-1}] \quad \text{Eq. 1.20}$$

où  $n$  est la porosité.

Lorsque  $da \rightarrow 0$ , l' Eq. 1.19 devient :

$$\frac{\partial v_s}{\partial a} + \frac{\partial(1-n)}{\partial t} = 0 \quad \text{Eq. 1.21}$$

D'une façon plus générale:

$$\text{div } \vec{v}_s + \frac{\partial(1-n)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_s}{\partial a} + \frac{\partial(1-n)}{\partial t} = 0 \quad (\text{pour la compression unidirectionnelle}).$$

- au niveau du liquide

de manière similaire au cas de la phase solide:

$$\frac{\partial v_f}{\partial a} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad \text{Eq. 1.22}$$

et plus généralement:

$$\text{div } \vec{v}_f + \frac{\partial(n)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_f}{\partial a} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad (\text{pour la compression unidirectionnelle}).$$

En combinant les Eqs. 1.20 et 1.21, on obtient une relation entre les vitesses apparentes du solide et du liquide sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial a} (v_s + v_f) = 0 \quad \text{Eq. 1.23}$$

### Une équation globale et générale de comportement du SPM dans le temps et dans l'espace.

Selon le principe de répartition de la contrainte effective et de la pression hydraulique :

$$P = P_s + P_{\phi} \quad \text{Eq. 1.24}$$

La pression hydraulique se décompose selon :

$$P_{\phi} = P_f + P_{\phi h} \quad \text{Eq. 1.25}$$

où  $P_{\phi h}$  est la pression hydrostatique. Il en résulte que :

$$\frac{\partial P_f}{\partial a} = \frac{\partial P}{\partial a} - \frac{\partial P_s}{\partial a} - \frac{\partial P_{\phi h}}{\partial a} \quad \text{Eq. 1.26}$$

La contrainte totale au sein d'une couche du SPM comprend deux composantes, celle associée au poids et celle associée à la contrainte appliquée  $P_o(a, t)$ . De ce fait :

$$\frac{\partial P}{\partial a} = -\frac{1}{1+e} \left( \frac{\gamma_s}{\gamma_f} + e \right) \gamma_f + \frac{\partial P_o(a, t)}{\partial a} \quad \text{Eq. 1.27}$$

lorsque  $a$  est orienté à l'opposé de la gravité et en supposant que dans le rapport

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_f} = G_s, \text{ le poids spécifique du solide reste constant durant la compression.}$$

Le gradient de pression hydrostatique s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial P_{ph}}{\partial a} = -\gamma_f \quad \text{Eq. 1.28}$$

d'où :

$$\frac{\partial P_f}{\partial a} = -\frac{\partial P_s}{\partial a} - \frac{1}{1+e}(\gamma_s - \gamma_f) + \frac{\partial P_0(a,t)}{\partial a} \quad \text{Eq. 1.29}$$

En l'absence d'effets secondaires strictement associés au temps, la contrainte effective est fonction du rapport de vide seulement. Ceci est particulièrement vrai pour les opérations industrielles dont le temps de séjour est inférieur à une centaine de minutes et plus particulièrement dans le cas des produits biologiques dont la durée de vie sans altération est courte. Il est possible, comme nous le ferons ultérieurement, d'intégrer une variation de la contrainte effective en fonction du temps, parfois qualifiée de compression secondaire. Nous l'éviterons à ce stade par souci de clarté mathématique. Ainsi :

$$\frac{\partial P_s}{\partial a} = \frac{\partial P_s}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial a} \quad \text{Eq. 1.30}$$

En dérivant l' Eq.1.19 par rapport à  $a$  et en utilisant les relations Eq.1.22 et 1.23,

$$\frac{\partial v_f}{\partial a} = -\frac{\partial n}{\partial t} \quad (\text{Eq. 1.22}), \quad \frac{\partial}{\partial a}(v_s + v_f) = 0 \quad (\text{Eq. 1.23})$$

$$\text{on obtient, } \left( \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a}(v_f + v_s) \right) = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \frac{\partial P_f}{\partial a} \right] \quad \text{Eq. 1.31}$$

Que la zone drainante soit mobile ou fixe (à l'aide d'un changement de variable adéquate dans ce dernier cas), l'Eq.1.31 devient :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \frac{\partial P_f}{\partial a} \right] \quad \text{Eq. 1.32}$$

En substituant les Eqs. 1.29 et 1.30 dans l'Eq. 1.32 on obtient en terme de porosité  $n$  la relation générale:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \left\{ -\frac{\partial P_s}{\partial a} - \frac{1}{1+e}(\gamma_s - \gamma_f) + \frac{\partial P_0(a,t)}{\partial a} \right\} \right]$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \left\{ -\frac{\partial P_s}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial a} - \frac{1}{1+e}(\gamma_s - \gamma_f) + \frac{\partial P_0(a,t)}{\partial a} \right\} \right]$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \frac{\partial P_s}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial a} \right) - \frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{(1+e)^2} (\gamma_s - \gamma_f) + \frac{\partial P_0(a,t)}{\partial a} \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \right] + \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \frac{\partial P_0^2(a,t)}{\partial a^2} \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \frac{\partial P_s}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial a} \right) - K \frac{\partial}{\partial a} (1-n)^2 (G_s - 1) + \frac{\partial P_0(a,t)}{\partial a} \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \right] + \frac{K}{\gamma_f} (1-n) \frac{\partial P_0^2(a,t)}{\partial a^2} \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \frac{\partial P_s}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial a} \right) - \left\{ (G_s - 1) K \frac{\partial}{\partial a} (1-n)^2 - \frac{\partial P_0(a,t)}{\partial a} \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \right] \right\} + \frac{K}{\gamma_f} (1-n) \frac{\partial P_0^2(a,t)}{\partial a^2} \end{aligned}$$

$$n = \frac{e}{1+e}, \text{ ainsi } \frac{dn}{da} = \frac{\frac{de}{da}(1+e) - e \frac{de}{da}}{(1+e)^2}, \frac{dn}{da} = \frac{1}{(1+e)^2} \cdot \frac{de}{da} \text{ et finalement :}$$

---


$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{K}{\gamma_f} (1+e) \frac{\partial P_s}{\partial e} \frac{\partial n}{\partial a} \right) - \left\{ (G_s - 1) K \frac{\partial}{\partial n} (1-n)^2 - \frac{\partial P_0(a,t)}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{K}{\gamma_f} \frac{1}{(1+e)} \right] \right\} \frac{\partial n}{\partial a} + \frac{K}{\gamma_f} (1-n) \frac{\partial P_0^2(a,t)}{\partial a^2}$$

Eq. 1.33

---

L'équation 1.33 est la plus générale. Aucune hypothèse concernant l'amplitude de la déformation, la nature linéaire ou non des matériaux constitutifs, la perméabilité du SPM n'a été nécessaire. Seules la saturation du milieu SPM, l'absence de compressibilité du solide et du fluide comparativement à la matrice poreuse et l'applicabilité de la loi de Darcy généralisée ont été utilisées. L'homogénéité de la couche SPM est également implicitement incluse, ce qui dans le cas d'opérations industrielles traditionnelles est une condition fréquemment rencontrée sachant que l'on cherche à obtenir une alimentation du procédé aussi homogène que possible. Cette homogénéité de la couche SPM demeure-t-elle durant la compression ? Nous verrons comment prendre en compte cet aspect ultérieurement.

Il est important de souligner que cette équation peut être exprimée :

- 1- Dans tous les systèmes de co-ordonnées fixes, mobiles ou réduites.
- 2- En fonction de la porosité, du rapport de vide ou de la déformation volumique sachant que :

$$e = \frac{n}{1-n} \text{ et } \partial \varepsilon = \frac{\partial e}{1+e}$$

- 3- Ou encore en fonction du volume spécifique local du SPM défini par :

$$v = \frac{1+e}{\rho_s} = \frac{V_T}{M_s}$$

Cette grandeur est particulièrement utile lors de l'analyse de matériaux biologiques pour lesquels la masse volumique du solide n'est peut être pas une donnée réaliste et accessible.

Comme on peut le voir dans le tableau de la figure 1, sous réserve d'un traitement mathématique adapté et cohérent par rapport aux réalités physiques des systèmes étudiés, cette équation peut être utilisée pour dériver tous les scénarios de compression : unidirectionnelle ou radiale, couche mince ou épaisse, matériaux linéaires ou non, à perméabilité constante ou variable, sous forte ou faible contrainte effective ... Nous reviendrons en détail sur chaque cas.

---

*Chapitre*  
*deux*

---

## **La Compression Unidirectionnelle à Pression Constante (CPC)**

Il s'agit dans ce chapitre de résumer et de compléter, à partir de cinq publications faisant suite au DEA et à la thèse de Docteur Ingénieur, nos travaux de recherche portant principalement sur la compression à pression constante de matériaux poreux saturés, pour la plupart d'origines minérales et biologiques. Ces derniers servent de transition aux études ultérieurement. Les bases théoriques sont rappelées puis détaillées en annexe A1.

Un autre objectif de ce chapitre est de montrer les limites des approches traditionnelles sur les plans expérimental et théorique et de souligner l'importance d'une approche plus large des phénomènes associés à la compression que ce soit au niveau des sciences des matériaux ou des sciences du génie des procédés, voire de la thermodynamique traditionnelle.

Dans ce mémoire venant compléter notre thèse de Docteur-Ingénieur, nous tenons à insister sur l'aspect fondamental de nos recherches et à éviter autant que possible la redondance. C'est pourquoi nous développons certains aspects théoriques plus longuement que dans d'autres chapitres. En effet, la plus citée des théories de base a rarement fait l'objet de démonstrations mathématiques complètes en particulier dans le domaine du génie chimique où SHIRATO l'a rendue populaire. Les démonstrations mathématiques que nous faisons sont absentes de cette littérature et sont encore aujourd'hui sous-exploitées quant aux possibilités qu'elles offrent dans les cas spécifiques que nous traitons.

Enfin on ne peut pas les considérer comme des théories classiques de la mécanique des sols. Non seulement ce n'est pas le cas mais n'oublions pas non plus que la mécanique des sols essaie de traiter de phénomènes lents selon des méthodes de laboratoire aussi rapides que possible et que dans le domaine du génie des procédés nous essayons de prendre en compte des phénomènes beaucoup plus rapides.



## 2.1 RAPPELS THEORIQUES DES EQUATIONS DE BASE

### 2.1.1 La théorie classique fondée sur les bases établies par K. TERZAGHI

Il est bien connu que TERZAGHI, à travers sa théorie de la consolidation, a apporté en 1923 la quatrième dimension – le temps – dans le domaine de la mécanique des sols. L'idée de la contrainte effective et de son transfert durant l'écoulement de la phase liquide, couplé à la déformation de la matrice solide-liquide, a marqué la naissance de la mécanique des sols moderne. Ce processus de déformation au cours du temps est gouverné par la compressibilité de la matrice - qui contrôle la déformation totale possible - et la perméabilité qui détermine la vitesse d'écoulement du liquide lequel permet à la déformation de prendre place. Le taux et l'amplitude de la déformation s'en trouvent ainsi prévisibles.

Dans l'état actuel des connaissances, on retrouve dans ce concept des éléments fédérateurs du génie des procédés, des sciences des matériaux, de la rhéologie et de la thermodynamique statistique. Cependant la prudence s'impose car dans le cas qui nous intéresse, le gradient de changement d'état est provoqué par l'opérateur. Ceci nous amène à souligner que toutes les théories développées dans ce mémoire le sont dans ce cadre multidisciplinaire – procédés-matériaux-rhéologie-thermodynamique – et qu'il serait de ce fait réducteur de les classer dans le domaine de la mécanique des sols, même si les équations finales s'y apparentent parfois. A titre d'illustration, l'une des faiblesses de la mécanique des sols traditionnelle est de ne pas suffisamment faire la distinction entre la déformation ou la consolidation, gouvernée par l'écoulement du liquide - flow controlled - et celle dictée par la résistance mécanique de la matrice – compression controlled – ou encore celle influencée simultanément par les deux, de plus parfois en fonction du temps. Les papetiers, ayant à faire à des processus d'impulsions très rapides, y sont très sensibles. D'un autre côté les études du procédé de déshumidification du papier ont tendance à trop ne pas prendre en compte les équilibres, le système étant constamment en régime transitoire.

N'ayant pas pu trouvé dans la littérature de développement exhaustif de la théorie de TERZAGHI (1923), nous avons entrepris cette démarche mathématique dans l'esprit indiqué précédemment et nous proposons en annexe le détail de l'établissement des équations et des solutions principales.

Il est intéressant de noter que cette théorie souvent assimilée à celle des petites déformations a été à l'origine développée en termes de coordonnées matérielles ou réduites ce qui lui confère la possibilité de prendre en compte les grandes déformations. Cet aspect a été complètement occulté par l'usage. La restriction de la portée de cette théorie est en partie régénérée par les traitements mathématiques de McNABB (1960) repris par SHIRATO (1970). En effet dans une publication intitulée « Principles of final soil classification. » en 1927, K. TERZAGHI fait référence à son choix déterminé d'usage des coordonnées réduites en ces termes : « In the computations concerning the consolidation theory we are obliged to refer everything to the reduced dimensions of the samples ; that means to the thickness the samples would have if the space occupied by the voids were reduced to zero. » Dans l'ouvrage rédigé par A. FROHLICH en 1936, le système de coordonnées matérielles n'est pas repris, puis ceci s'est reproduit faisant de la théorie de TERZAGHI celle des petites déformations.

En résumé voici les éléments de cette théorie vue sous l'angle de l'approche classique du génie des procédés : conservation de masse, équilibre des forces en chaque point du système, loi d'écoulement généralisée de Darcy.

Les hypothèses sont les suivantes :

- Saturation et homogénéité du milieu poreux.
- Solide et liquide demeurent incompressibles comparativement à la matrice qui ne se déforme que dans la direction de l'application de la force de compression et selon la variation de volume du liquide lié à l'écoulement s'effectuant selon la loi de Darcy.
- Le coefficient de compression, qui englobe la perméabilité de la matrice et son coefficient de compressibilité, est constant.

Selon la démarche mathématique complète fournie en annexe A1, l'équation générale de la pression hydraulique  $P_f$  au sein du SPM prend la forme de l'équation Eq. 2.1 :

$$P_f = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} P_{fi} \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4} \right) \quad \text{Eq. 2.1}$$

$$T_v = \frac{C_v t}{Z_0^2}$$

$T_v$  : temps réduit

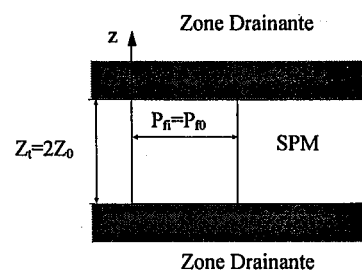
avec les conditions aux limites suivantes :

1. Au temps  $t = 0$ ,  $P_f = P_{fi}$
2.  $P_f = 0$  à  $z = 0$
3.  $P_f = 0$  à  $z = Z_t = 2Z_0$  (la hauteur totale du SPM)

2 et 3 correspondent à deux surfaces drainantes selon l'annexe 1.

Il est alors intéressant de considérer les solutions correspondant à divers profils de pression, dont les détails de calcul sont aussi fournis en annexe A1.

#### 2.1.1.1 La pression hydraulique $P_{fi}$ est invariante



Selon la Fig.2.1 :

$P_{fi} = P_{f0}$  et l'Eq. 2.1 devient

$$P_f = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{2P_{f0}}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4} \right) \quad \text{Eq. 2.2}$$

Figure 2.1 :  $P_{fi}$  est invariante au sein du SPM

La simulation correspondante, Fig. 2.2

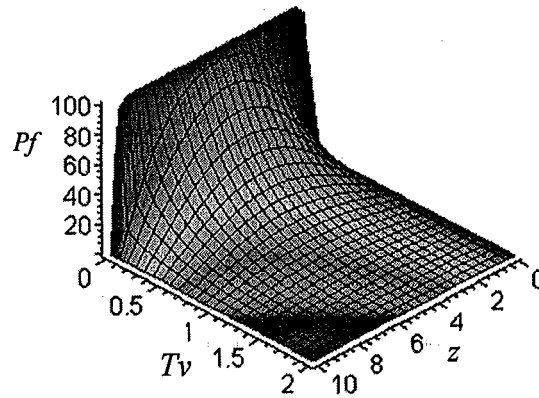


Figure 2.2 :  $P_f = f(T_v, z)$

Le taux de compression pour tout  $z$  est défini selon :

$$U_z = \frac{P_{f0} - P_f}{P_{f0}} = 1 - \frac{P_f}{P_{f0}} = \frac{P_s}{P_{f0}} = \frac{P_s}{P_{f0}} = \frac{\text{pression hydraulique dissipée}}{\text{pression hydraulique initiale}} \quad \text{Eq. 2.3}$$

d'où

$$U_z = 1 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2}{M_i} \cdot \sin \frac{M_i z}{Z_0} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \quad \text{Eq. 2.4}$$

avec  $M_i = (2m + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $m \in [0, +\infty[$  est un entier.

La simulation correspondante, Fig. 2.3

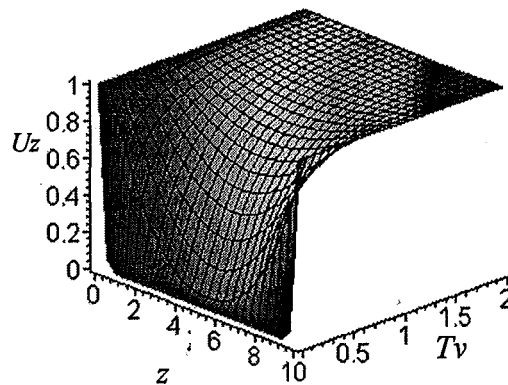


Figure 2.3 :  $U_z = f(z, T_v)$

Le taux moyen pour l'ensemble de la couche :

$$U_{av} = \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f1} dz - (1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f1} dz} = \frac{\text{compression à } t}{\text{compression maximale}} \quad \text{Eq. 2.5}$$

prend la forme de la Fig. 2.4 sur laquelle figure aussi les simulations à partir du modèle de SIVARAM et SWAMEE (1977) :

$$\frac{U_{av} \%}{100} = \frac{\left(\frac{4T_v}{\pi}\right)^{0.5}}{\left[1 + \left(\frac{4T_v}{\pi}\right)^{2.8}\right]^{0.179}} \quad \text{Eq. 2.6}$$

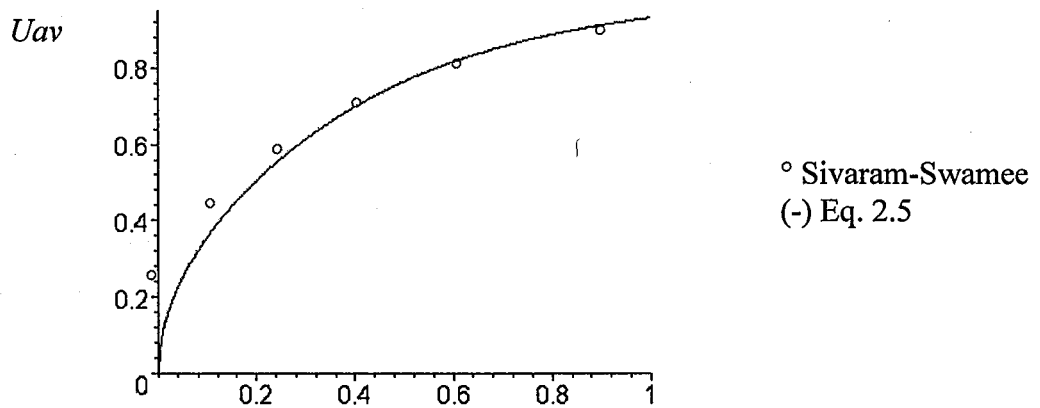


Figure 2.4 : Comparaison des Eq. 2.5 et 2.6  $T_v$

2.1.1.2 Variation linéaire de la pression hydraulique  $P_{f1}$

Selon la Fig. 2.5

$$P_{f1} = P_{f1} - P_{f2} \cdot \frac{Z_0 - z}{Z_0}$$

avec:

$P_{f1}$  = valeur initiale à  $z = Z_0$

et  $P_{f1} = P_{f1} + P_{f2}$  à  $z = 2Z_0$

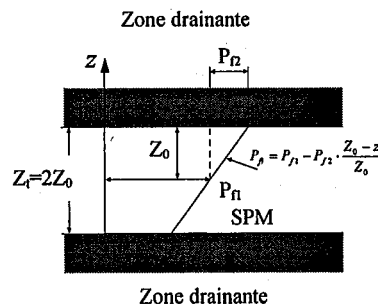


Figure 2.5 : Variation linéaire de  $P_{f1}$  au sein du SPM

En substituant dans l'Eq. 2.1

$$P_f = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} \left( P_{f1} - P_{f2} \cdot \frac{Z_0 - z}{Z_0} \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4} \right) \quad \text{Eq. 2.7}$$

La simulation correspondante, Fig. 2.6

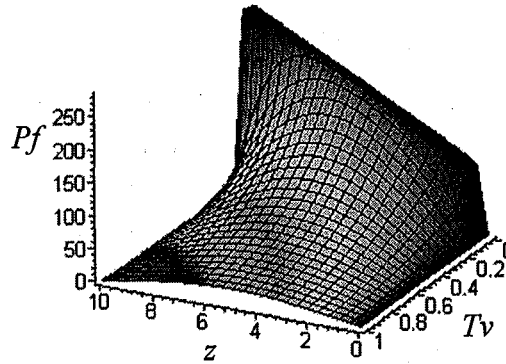


Figure 2.6 :  $P_f = f(z, T_v)$

### 2.1.1.3 Variation sinusoïdale de la pression hydraulique $P_{fi}$

Selon la figure 2.7 :

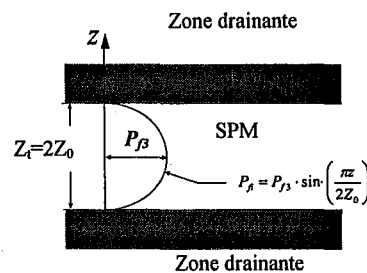


Figure 2.7 : Variation sinusoïdale de  $P_{fi}$  au sein du SPM

$$P_{fi} = P_{f3} \cdot \sin \left( \frac{\pi z}{2Z_0} \right) \quad \text{Eq. 2.8}$$

Par substitution de  $P_{fi}$  dans l'Eq. 2.1, on obtient :

$$P_f = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} P_{f3} \cdot \sin \left( \frac{\pi z}{2Z_0} \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4} \right) \quad \text{Eq. 2.9}$$



La simulation correspondante, Fig. 2.8

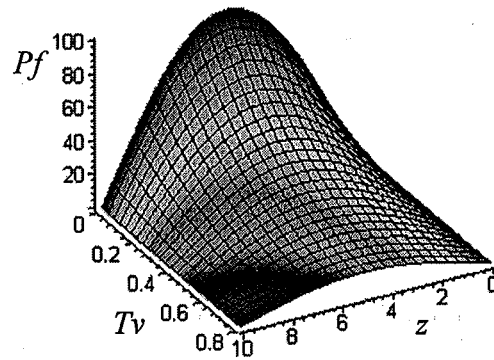


Figure 2.8 :  $P_f = f(T_v, z)$

Le taux de compression moyen selon l'Eq. 2.5 se réduit à :

$$U_{av} = 1 - \exp\left(\frac{-\pi^2 T_v}{4}\right) \quad \text{Eq.2.10}$$

correspondant à la simulation graphique, Fig. 2.9 :

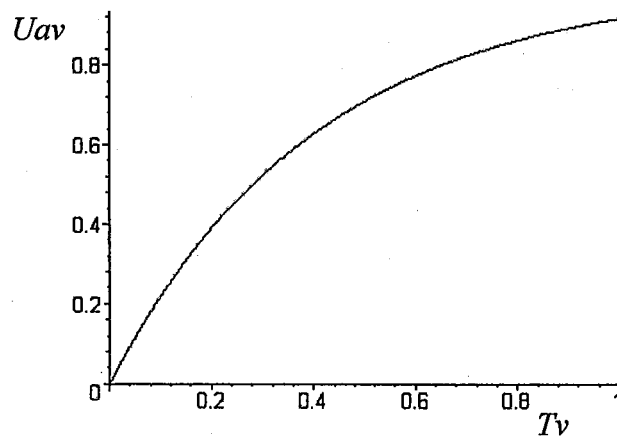


Figure 2.9 : Représentation graphique de l'Eq. 2.10

En résumé pour  $T_v = 0.01$  (gauche) et  $T_v = 0.05$  (droite)  
 la relation  $P_f = f(z)$  pour les trois cas de figure envisagés précédemment :

Constant : Simulation

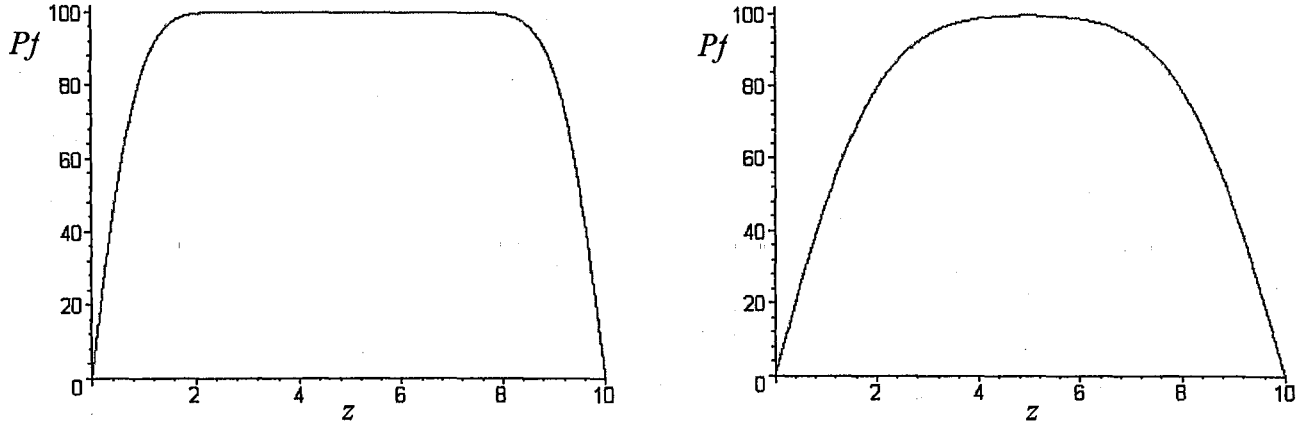


Figure 2.10 : La pression hydraulique  $P_n$  est invariante

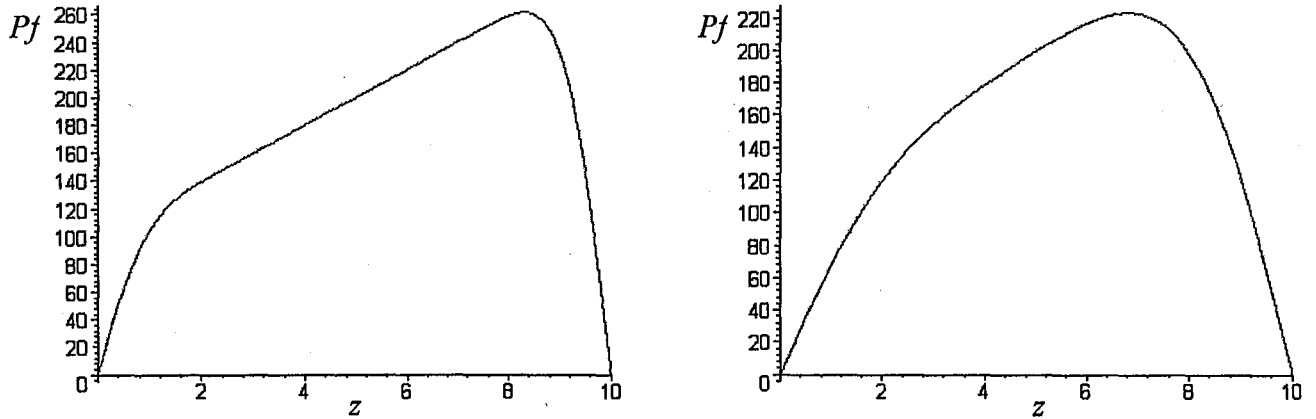


Figure 2.11 : Variation linéaire de la pression hydraulique  $P_n$

Linéaire : Simulation

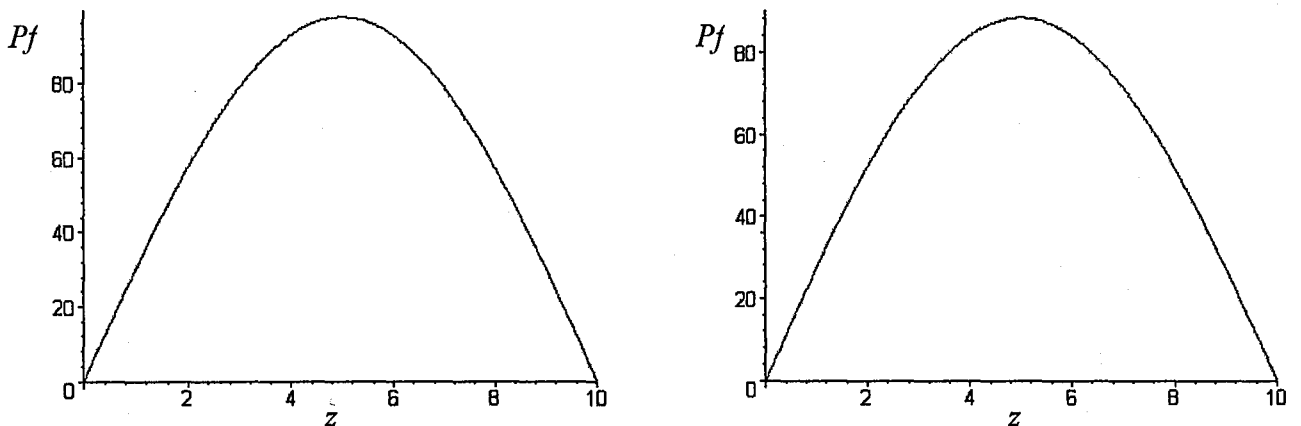


Figure 2.12 : Variation sinusoïdale de la pression hydraulique  $P_n$

Sinusoidal : Simulation

Et pour  $U_{av} = f(T_v)$ :

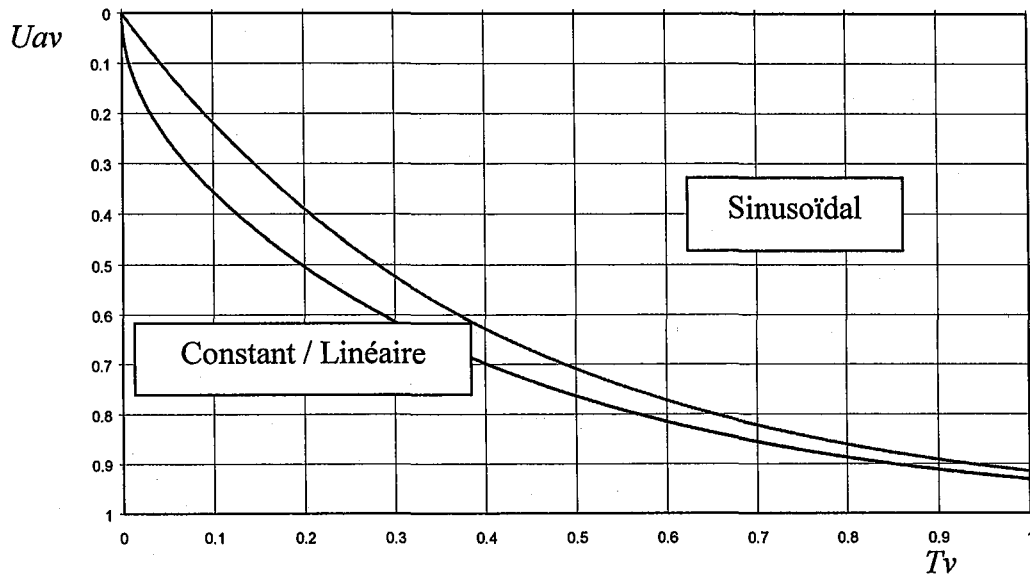


Figure 2.13 : Comparaison de la variation de  $U_{av} = f(T_v)$

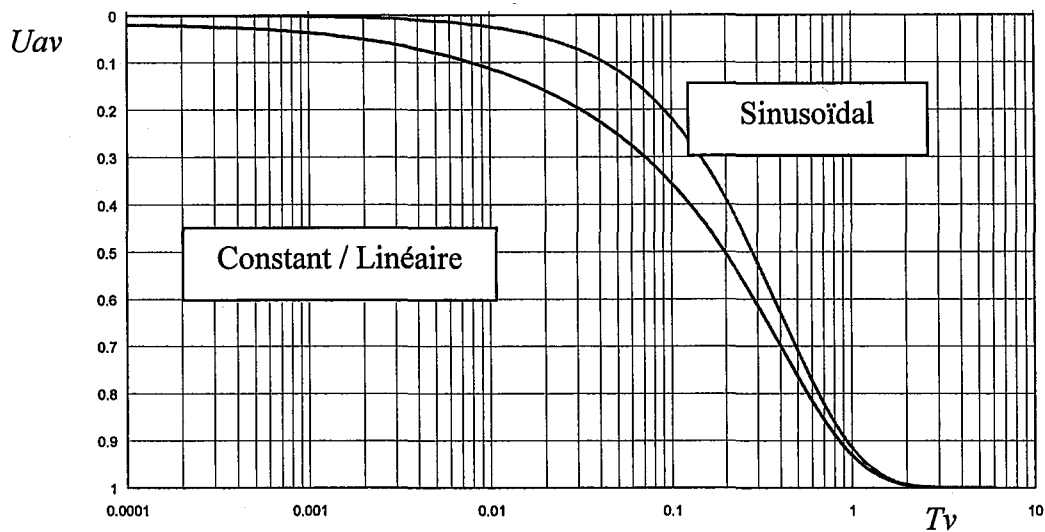


Figure 2.14 : Comparaison de la variation de  $U_{av} = f(T_v)$  – échelle logarithmique

### 2.1.2 Son adaptation au génie chimique par M. SHIRATO

M. SHIRATO, (voir publications P1 et P2), en reprenant les travaux mathématiques de A. McNABB (1960), en redéfinissant des coordonnées matérielles sur la base du volume de solide par unité de surface drainante et en les transposant dans les équations précédentes, a permis un transfert direct des fondements de TERZAGHI dans le domaine du génie chimique.

Le rapport  $w \left[ \frac{m^3}{m^2} \right]$  pour lequel  $\frac{dw}{dx} = \frac{1}{1+e_0}$  requière la connaissance précise  $\rho_s$ .

Nous avons déjà défini ce type de coordonnées dans le préliminaire théorique, chapitre 1.

### 2.1.3 Les approches basées sur la modélisation de courbes expérimentales à partir de modèles rhéologiques

#### 2.1.3.1 Comportement linéaire

Conformément au principe de superposition de Boltzmann, une matrice solide-liquide aura un comportement dit linéaire si la déformation globale qu'elle subit sous une contrainte globale est identique à la somme des déformations élémentaires qu'elle subit lorsqu'elle est soumise séparément à chaque composante élémentaire de la contrainte globale.

On peut ainsi assimiler la matrice concernée à l'assemblage série-parallèle suivant :

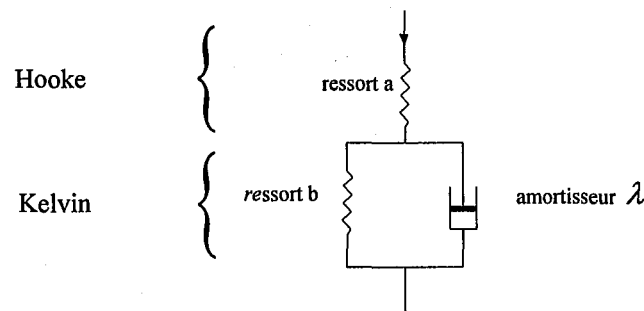


Figure 2.15 : Modèle rhéologique

La déformation totale  $\varepsilon$  est la somme  $\varepsilon_H$  de l'élément de Hooke et de  $\varepsilon_K$  de l'élément de Kelvin.

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_K \quad \text{Eq. 2.11}$$

Le module de compression linéaire du ressort 'a' est A, on note  $a = 1/A$ ,

$$(\varepsilon_H = (1/A)P_s(t))$$

Le module de compression linéaire du ressort 'b' est B, on note  $b = 1/B$

Le coefficient de viscosité de l'amortisseur 'λ' est  $\eta$ , on note  $\lambda = 1/\eta$

Selon les développements mathématiques fournis en annexe 2 (A2) :

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_K = \frac{1}{A} P_s(t) + \frac{1}{\eta} \int_0^t P_s(\tau) \cdot \exp\left(-\frac{B}{\eta}(\tau-t)\right) d\tau \quad \text{Eq. 2.12}$$

Dans ce cas  $\tau$  n'est pas une contrainte mais un temps de retard utile à l'usage du théorème de convolution (voir A2).

$$\text{Sachant, selon Eq. 1.33 que : } \frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad \text{Eq. 2.13}$$

et selon les conditions aux limites définies sur la Fig. 2.16.

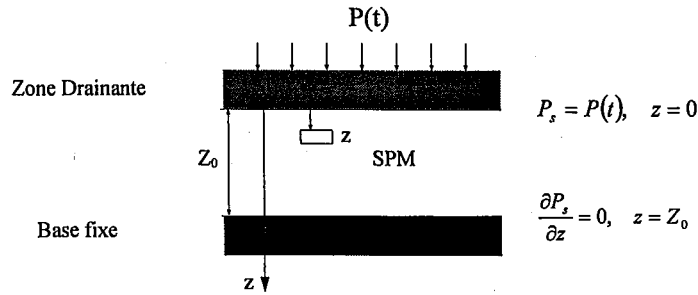


Figure 2.16 : Les conditions aux limites

En combinant les Eq. 2.12 et Eq. 2.13 et en utilisant la transformée de Laplace (détails en A2), on obtient la solution générale :

$$P_f(z,t) = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{A}{B}\right) P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \left[ \frac{x_1 \left( \frac{B}{A+B} - \frac{x_2}{K_1} \right)}{x_1 - x_2} \cdot \exp(-x_1 t) - \frac{x_2 \left( \frac{B}{A+B} - \frac{x_1}{K_1} \right)}{x_1 - x_2} \cdot \exp(-x_2 t) \right] \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2Z_0} \quad \text{Eq. 2.14}$$

$$\text{avec : } x_1(\text{sol.}+) \equiv \frac{(\alpha + K_1) \pm \sqrt{[(\alpha + K_1)^2 - 4\beta K_1]}}{2} \equiv x_2(\text{sol.}-)$$

$$K_1 = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 C_v}{4Z_0^2} \quad \text{Eq. 2.15}$$

$$\alpha = \frac{A+B}{\eta} \text{ ou } \alpha = \lambda \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad \text{Eq. 2.16}$$

$$\beta = \frac{B}{\eta} \text{ ou } \beta = \frac{\lambda}{b} \quad \text{Eq. 2.17}$$

$$C_v = \frac{KA}{\gamma_f} \text{ ou } C_v = \frac{K}{a\gamma_f} \quad \text{Eq. 2.18}$$

$$K_c = \frac{B}{A+B} K_1 \text{ ou } K_c = \frac{a}{a+b} K_1 \quad \text{Eq. 2.19}$$

Il est utile, à titre comparatif seulement, de visualiser la variation de la pression hydraulique donnée par l'Eq. 2.14 en fonction des divers paramètres des modèles rhéologiques.

Dans les simulations nous ne donnons pas toujours les unités choisies car il s'agit d'illustrations mathématiques pour lesquelles la cohérence des unités doit être respectée, comme nous l'avons fait, mais dont le choix est laissé libre car il s'agit de comparaisons. Les variations des paramètres n'ont pas toujours été sélectionnées par rapport à une réalité physique mais surtout pour valider certains choix mathématiques ou pour montrer l'absence de sensibilité d'un modèle ou ses similarités avec d'autres. Ceci est vrai pour l'ensemble du mémoire, sachant que l'auteur insiste sur la validation expérimentale la plus pertinente et pas forcément la plus diverse en conservant le caractère avant tout fondamental de ce travail. Le dispositif expérimental étant la deuxième facette privilégiée pour ainsi fournir à nos successeurs des bases solides de validation à partir de situations diverses.

- variables  $A, B$

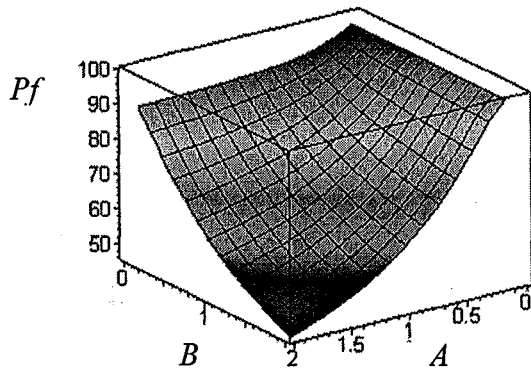
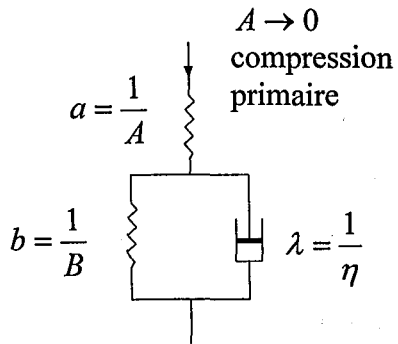


Figure 2.17 : La variation de  $Pf = f(A, B)$  pour le modèle rhéologique ci-contre

- variables  $B, \eta, (n = \eta)$

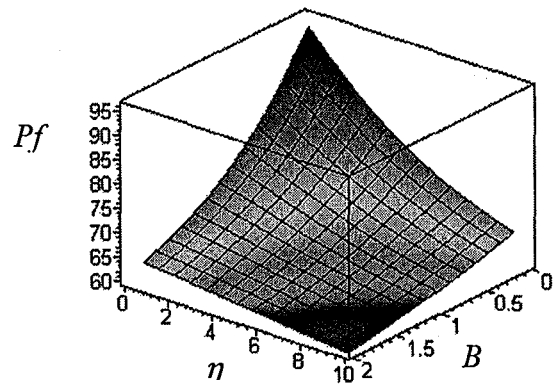
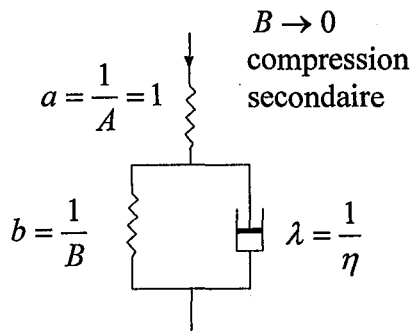


Figure 2.18 : La variation de  $Pf = f(\eta, B)$  pour le modèle rhéologique ci-contre

- variables  $A, \eta, (n = \eta)$

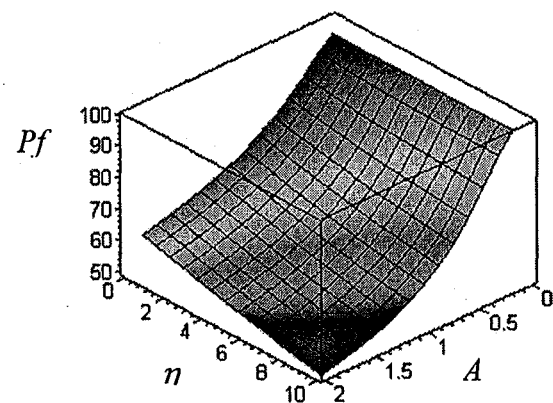
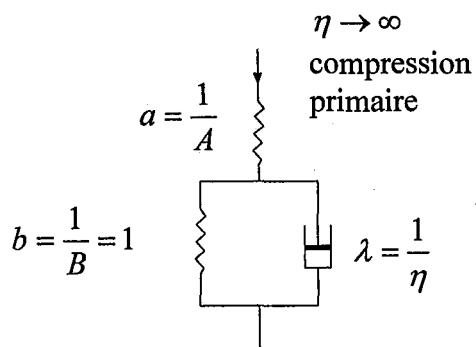
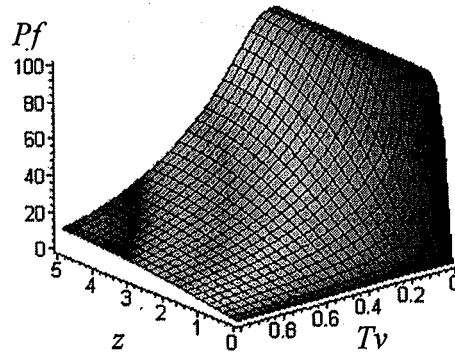


Figure 2.19 : La variation de  $Pf = f(\eta, A)$  pour le modèle rhéologique ci-contre

On peut comparer, pour la situation représentée sur la Fig. 2.16, la figure correspondant à l'Eq. 2.14 et la figure correspondant à l'Eq. 2.1, établie selon les bases de TERZAGHI ou de façon plus générale selon l'Eq. 1.33 provenant du bilan matière et de l'équilibre des forces au sein d'un élément SPM, à savoir :

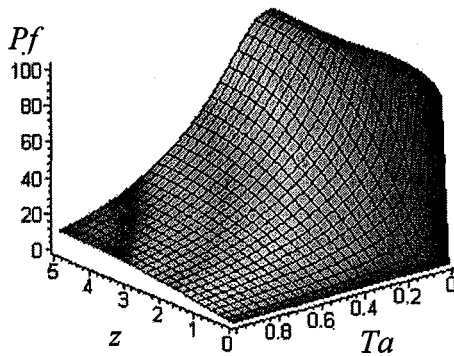
$$P_f(z,t) = \frac{4}{\pi} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 C_v t}{4 Z_0^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2Z_0} \quad \text{Eq. 2.20}$$

Sous forme adimensionnelle et pour  $Ta \equiv Tv$



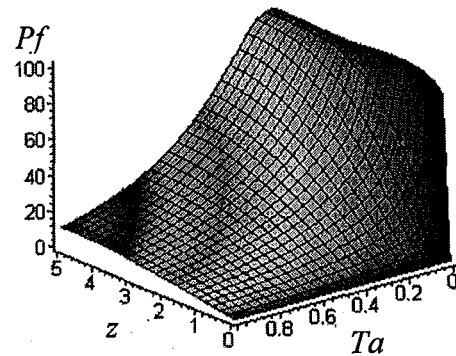
CPC modèle classique  
Eq.2.20

Figure 2.20



Modèle rhéologique  
Compression Secondaire  
 $\rightarrow 0, b \rightarrow 0$

Figure 2.21



Modèle rhéologique  
SPM  $\rightarrow$  Hooke  
 $\lambda \rightarrow 0$

Figure 2.22

Il n'est pas surprenant de constater l'usage fréquent des modèles rhéologiques qui se conforment bien à la théorie classique, en occultant peut-être certains aspects sur lesquels nous reviendrons.

2.1.3.2 Comportement non-linéaire

La démarche d'insertion de composants non-linéaires, bien que conceptuellement simple, peut vite devenir très lourde, en voici les grandes lignes. Nous verrons son usage partiel au chapitre 3.

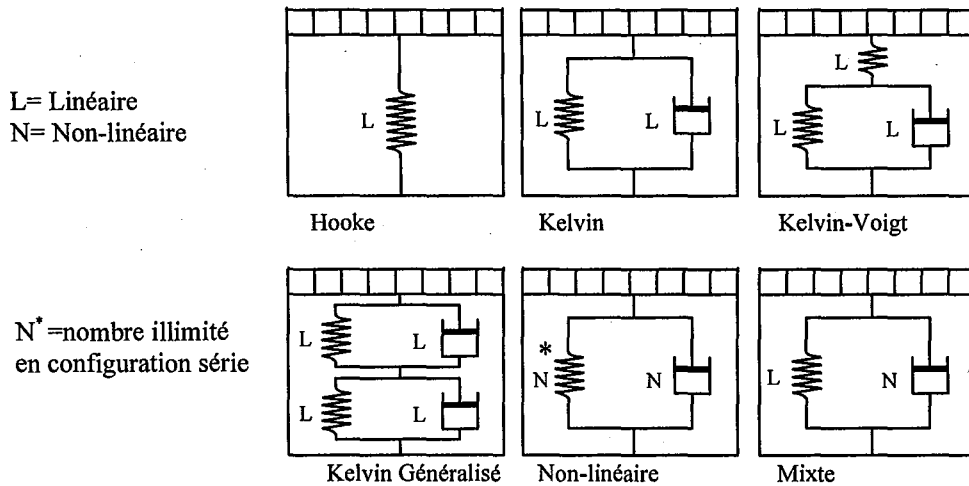


Figure 2.23 : Diverses configurations de modèles rhéologiques à partir d'éléments linéaires ou non

La configuration mixte ci-dessus peut être exploitée selon l'Eq. 1.33, à partir de l'équation suivante :

$$\frac{K(1+e)}{\gamma_f} \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{\partial e}{\partial t} \tag{Eq. 2.21}$$

Dans le cas non linéaire on rencontrera la situation suivante Fig. 2.24 :

Or  $\Delta P = \Delta P_s + P_f$ ,  $\Delta P_s = f(\text{ressort, amortisseur})$  en configuration parallèle  
 $\tau$  est équivalent à  $P_s$  (amortisseur)

$$\frac{e_1 - e_2}{a_v} = \frac{e_1 - e}{a_v} + P_f + \tau$$

ou

$$\frac{e_1 - e_2}{a_v} = \Delta P_s = \text{Contrainte effective totale}$$

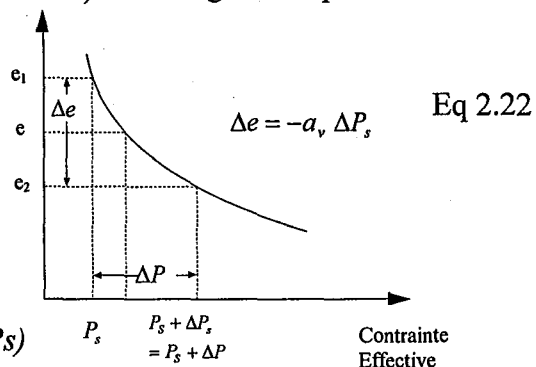


Figure 2.24 : Variation non linéaire  $e = f(P_s)$

Par un choix convenable de relations entre la contrainte effective et la vitesse de déformation on pourra alors résoudre, numériquement le plus souvent, l'Eq. 2.21.



Voici quelques fonctions dont certaines seront utilisées par la suite :

$$\begin{aligned} \tau &= A \cdot \sin^{-1}\left(\dot{\varepsilon}/C\right) && \text{Prandtl} \\ \tau &= \dot{\varepsilon}/B + C \cdot \sin\left(\dot{\varepsilon}/A\right) && \text{Eyring} \\ \tau &= \dot{\varepsilon} A + B \cdot \sinh^{-1}\left(C \dot{\varepsilon}\right) [16] && \text{Powel-Eyring} \\ \tau &= \frac{\dot{\varepsilon} A}{B + \dot{\varepsilon}} + C \dot{\varepsilon} && \text{Williamson} \\ \tau^n &= B \dot{\varepsilon} \text{ avec } n > 1 && \text{Ostwald} \\ \dot{\varepsilon} &= B \cdot f\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^m \sinh(a\tau) \text{ équation générique} && \text{Keedwell} \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon$  = la déformation et  $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$  et  $d\varepsilon = \frac{de}{1+e}$

et à titre d'exemple :

$$\tau = -b \left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)^{1/n} \text{ or } \frac{\partial e}{\partial t} = \left(-\frac{\tau}{b}\right)^n \text{ avec } n > 1.$$

Le taux de compression s'exprimant sous la forme :

$$U_z = \frac{e_1 - e}{e_1 - e_2} \text{ et définissant } \lambda = 1 - U_z = \frac{e - e_2}{e_1 - e_2} = \frac{e'}{a_v \Delta P_s} \quad \text{Eq 2.23}$$

on obtient la solution suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \lambda + \left( R_s \frac{\partial \lambda}{\partial T_v} \right)^{1/n} \right\} = \frac{\partial \lambda}{\partial T_v} \text{ avec } R_s = \frac{C_v \bar{\eta}}{Z_0^2} \text{ et } b = \bar{\eta}$$

Seule une approche numérique est alors envisageable. Etant donnée la portée réellement minime des modèles rhéologiques vis-à-vis des produits traités dans ce mémoire, nous nous limiterons à cette approche qui sera utile pour la suite.

### 2.1.3.3 Comportement de Maxwell généralisé

La base de ce modèle est constituée par un ressort connecté en série à un amortisseur. La déformation totale  $\varepsilon$  est la somme de la déformation,  $\varepsilon_H$ , du ressort et de la déformation de l'amortisseur  $\varepsilon_D$  :

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_D \quad \text{Eq. 2.24}$$

Le module de compression linéaire du ressort est noté  $1/J$ .

Le coefficient de viscosité de l'amortisseur est noté  $\eta$ .

Avec

$$P_{s1}(t) = \frac{1}{J} \varepsilon_H \text{ ou } \varepsilon_1 = J \cdot P_{s1}(t) \text{ loi de Hooke} \quad \text{Eq. 2.25}$$

et pour l'amortisseur

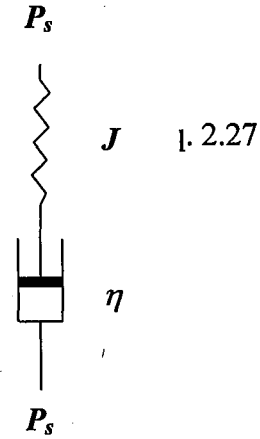
$$P_{s2}(t) = \eta \frac{d\varepsilon_D}{dt} \text{ ou } \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{P_{s2}(t)}{\eta} \quad \text{Eq. 2.26}$$

et pour l'association en série, Fig. 2.25

$$P_s = P_{s1} = P_{s2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Figure 2.25 : Assemblage type Maxwell



Sous forme différentielle :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad \text{Eq. 2.28}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = J \cdot \frac{dP_s(t)}{dt} + \frac{P_s(t)}{\eta} \quad \text{Eq. 2.29}$$

En fin de compression  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ , alors:

$$J \cdot \frac{dP_s}{dt} + \frac{P_s}{\eta} = 0 \quad \text{Eq. 2.30}$$

$$J \cdot \frac{dP_s}{dt} = -\frac{P_s}{\eta}$$

$$-J \cdot \eta \cdot \int_{P_{s0}}^{P_s} \frac{1}{P_s} dP_s = \int_0^t dt \quad \text{Eq. 2.31}$$

$$J \cdot \eta [-\ln(P_s) + \ln(P_{s0})] = t + Cte$$

Or à  $t = 0$ ,  $P_s = P_{s0}$ , alors  $Cte = 0$

$$\ln(P_s) = -\frac{t}{J \cdot \eta} + \ln(P_{s0})$$

$$P_s = \exp\left(-\frac{t}{J \cdot \eta} + \ln(P_{s0})\right)$$

ou,

$$P_s = P_{s0} \exp\left(-\frac{t}{J \cdot \eta}\right) \quad \text{Eq. 2.32}$$

Cette relation décrit aussi le phénomène de relaxation :

$$P_s = P_{s0} \exp\left(-\frac{t}{J \cdot \eta}\right) + P_{s(t \rightarrow \infty)} \quad \text{Eq. 2.33}$$

Et pour la combinaison en parallèle d'éléments de Maxwell :

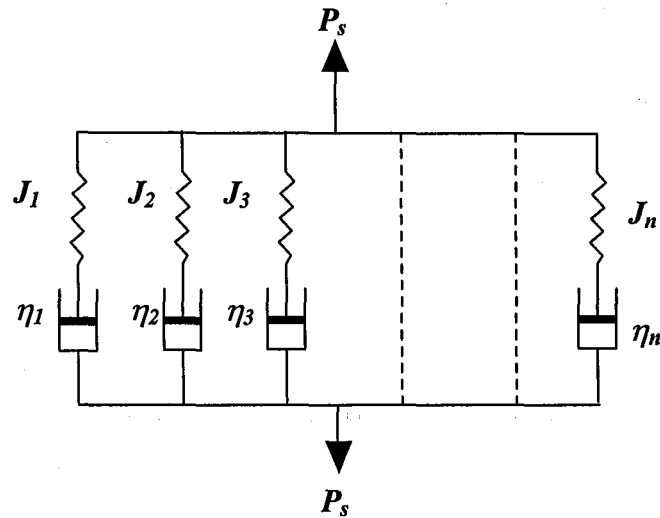


Figure 2.26

$$P_s(t) = \sum_{i=1}^{n-1} G_i \cdot e^{-\frac{t}{\theta_i}} + G_n \quad \text{Eq. 2.34}$$

Prenons le cas simple de deux éléments.  
On peut donc écrire :

$$P_s(t) = G_1 \cdot e^{-\frac{t}{\theta_1}} + G_2 \cdot e^{-\frac{t}{\theta_2}} + G_3 \quad \text{Eq. 2.35}$$

et trouver les différentes caractéristiques rhéologiques à partir des relations contrainte-temps.

A titre d'exemple, nous utilisons l'un de nos tests de compression-relaxation (CDC) durant lequel la pulpe F2 est déformée à une vitesse constante de 0.254 cm/min (voir chapitre 3 pour les conditions opératoires).

Ce cas a été choisi pour illustrer l'usage des modèles rhéologiques tout en établissant une transition avec le chapitre 3, à savoir la CDC. Il convient de souligner qu'il est aisé de calquer un exemple CPC sur le cas étudié car ce type de modélisation est malheureusement peu spécifique comme le souligne davantage ce qui suit.

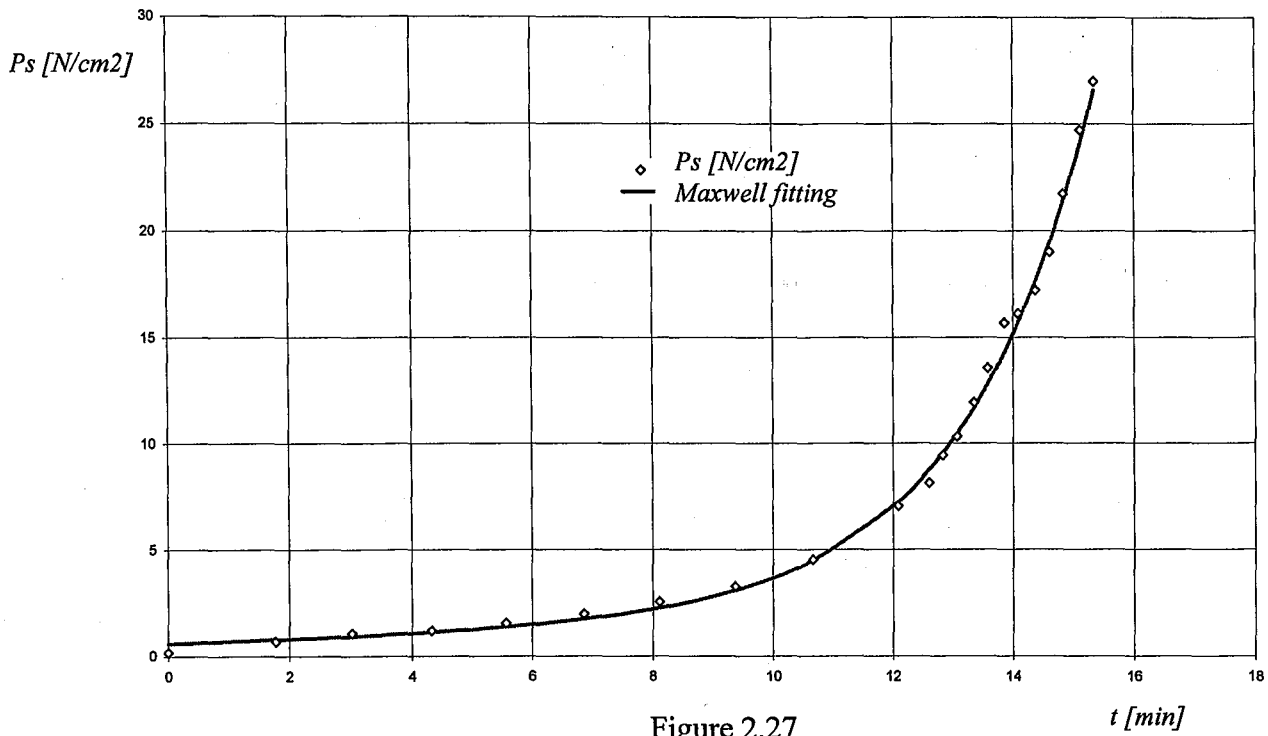


Figure 2.27

La Fig. 2.27 montre la variation de la pression solide en fonction du temps et permet d'apprécier la qualité du modèle de Maxwell à deux éléments.

Les coefficients sont:

$$T1 = 1/\theta_1 = -2.15 \text{ min}^{-1}$$

$$T2 = 1/\theta_2 = -21.57 \text{ min}^{-1}$$

$$G1 = 0.019 \text{ N/cm}^2$$

$$G2 = 1.909 \text{ N/cm}^2$$

$$G3 = -1.34 \text{ N/cm}^2$$

avec un coefficient de corrélation de :  $r^2 = 0.997$ .

## 2.2 ILLUSTRATION EXPERIMENTALE DE LA CPC

### 2.2.1 Publication 1, (P1)

Etablie sur la base du DEA soutenu en 1981 à l'INPL, cette communication scientifique a fait l'objet du congrès « Mathematical Models and Design Methods in Solid –Liquid Separation ». Elle illustre avant tout l'usage et l'exploitation de la théorie développée dans ce chapitre. La version complète est accessible en annexe A5.

LECLERC D. & REBOUILLAT S. *Mathematical Models and Design Methods in Solid-Liquid Separation: Dewatering by compression*. NATO ASI Series, 356-391, (1982-1985).

### 2.2.2 Publication 2, (P2)

Cette seconde publication est reproduite dans son intégralité à la fin de ce chapitre car elle présente l'avantage de replacer le sujet dans un contexte industriel. Les produits humides divers traités demeurent d'intérêt majeur dans les secteurs de l'alimentation et de l'environnement. Les modèles purement théoriques et phénoménologiques mis en œuvre dans des situations diverses sont cohérents et peuvent être utilisés pour l'appréciation rapide des cinétiques de compression. Le calcul des valeurs des paramètres de compression est plus délicat.

REBOUILLAT S., LECLERC D. & BALUAIS G. *La déshydratation par filtration-pressage. Modélisation de la compression unidirectionnelle*. Entropie 121, 13-29, (1985).

On comparera utilement les données du Tableau 2.1 avec celles fournies aux chapitres 3 et 4.

Produit	Pression CPC (bar)	$\omega_0$ [cm]	$v_0$ [cm <sup>3</sup> /g]	Ce [cm <sup>2</sup> /s]
Kaolin	2	0.818	1.0	4.4 10 <sup>-4</sup>
Kaolin Floculé	2	0.510	2.0	3.0 10 <sup>-4</sup>
Kaolin Floculé	4	0.221	1.6	5.1 10 <sup>-4</sup>
Kaolin Floculé	4	0.510	1.7	5.5 10 <sup>-4</sup>
Kaolin Floculé	4	1.021	1.8	7.2 10 <sup>-4</sup>

Tableau 2.1 (sur la base des Fig. 14 et 18 de la publication P2) Variation de Ce en fonction de la pression totale et de la quantité initiale de SPM

## 2.3 SENSIBILITE ECONOMIQUE ET ENERGETIQUE

Environnement, énergie et développement durable sont intrinsèquement liés. Nous citons trois publications qui établissent le lien entre nos préoccupations techniques et scientifiques et leurs impacts économiques et énergétiques. Deux d'entre-elles, P3, P4, figurent en annexe séparée et sont disponibles sur demande. La troisième, P5, figure en annexe A6 en totalité car elle n'a fait l'objet que d'un séminaire et demeure d'actualité si l'on considère les données suivantes :

1. Au cours des vingt-cinq dernières années la consommation mondiale de sucre a augmenté de 45% et de 16% environ durant les dix dernières années.
2. L'Europe, UE, produit 18% de la consommation mondiale et se place en seconde position des producteurs de sucre.
3. L'Europe, UE, est le premier producteur mondial de sucre de betterave représentant 45% de la production mondiale soit 17 millions de tonnes.
4. Une tonne de betterave contient en moyenne 16% de sucre, soit environ 140 kg de sucre produit par tonne de betteraves.
5. Le traitement d'une tonne de betteraves donne 500 kg de pulpes à 90% d'humidité. Ceci représente une quantité considérable d'eau à éliminer pour aboutir à un produit surpressé à 25% de matières sèches (MS) ou déshydraté à 88% de MS.
6. On consomme encore aujourd'hui au moins 175 g de fioul par kg de pulpe sèche produite. Cette consommation peut être réduite de près de 30% si l'on augmente la siccité de la pulpe de 5 points avant séchage thermique. Il faut souligner que si entre 1970 et 1980 la consommation spécifique de fioul est passée de 330 g/kg de pulpe sèche produite à 200g/kg, on enregistre une stagnation à un niveau proche de 190 g/kg entre 1980 et 1995. Ces chiffres sont fournis par la Confédération Générale des Betteraviers (CGB). Ce constat semble supporter le fait que lorsque le baril de pétrole est moins coûteux, la préoccupation diminue. Le concept de développement durable trouve sa pleine justification pour palier de tels réflexes.
7. Au niveau européen (UE) une augmentation par voie mécanique de 5% de la siccité des pulpes avant leur séchage thermique, engendrerait une économie d'énergie de plus 80 000 tep/an soit l'équivalent de la consommation moyenne annuelle pour le chauffage domestique de près de 150 000 habitants vivant en France ; ceci si l'on se réfère aux statistiques de l'Observatoire de l'Energie (CEREN et CREDOC) établies sur 18 années entre 1982 et 1999.  
Si au niveau européen (UE) et selon un raisonnement analogue, les trois plus grandes catégories d'industries « éliminatrices d'eau par voie thermique », à savoir les laiteries, les sucreries et les brasseries, réduisaient également de 5% le taux d'humidité des produits soumis au séchage thermique, cela représenterait l'équivalent de la consommation annuelle en énergie de chauffage de 500 000 habitants demeurant en France. Ces trois secteurs représentent environ les 2/3 de la consommation d'énergie de l'industrie agroalimentaire, principalement dans des activités d'élimination d'eau.

En 1983, thèse de Docteur-Ingénieur, et 1985, publication P5, nous avons proposé un modèle de calcul des optimums économiques et énergétiques de la déshydratation des pulpes qui mettait en évidence une harmonie des coûts énergétiques et économiques pour une siccité de 25%. Aujourd'hui le taux de MS des pulpes avant séchage est de

26% en moyenne alors qu'il était de 17% en 1970. Notre approche mériterait d'être actualisée, elle semble avoir un certain degré de prédictibilité. Nous verrons ultérieurement qu'un taux de MS de 30% est atteignable dans des conditions de pressage en couches minces sans optimisation particulière. Un potentiel important de réduction de la consommation d'énergie existe encore dans ce domaine industriel.

### 2.3.1 Publication 3, (P3)

LECLERC D. & REBOUILLAT S. *Economic Optimization Strategy in Solid/liquid Separation Processes: Mechanical Dewatering of Flocculated Sludges – Theoretical evaluation of energetic and economic optima*. Int. Symp., Louvain-la-Neuve, Belgium, SBF Ed., 283-313, Nov. (1985).

En annexe séparée disponible sur demande.

### 2.3.2 Publication 4, (P4)

LECLERC D. & REBOUILLAT S. *Déshydratation des suspensions solide-liquide par filtration-séchage*. Energétique industrielle, Tome 3, Technique et Documentation, Lavoisier, Paris, (1982).

En annexe séparée disponible sur demande.

### 2.3.3 Publication 5, (P5)

REBOUILLAT S., LECLERC D. & BALUAIS G. *La déshydratation par filtration-pressage. Incidence des adjuvants de pressabilité sur le pressage des pulpes de betteraves*. Société Française de Filtration, Bulletin Technique n° 10, 72-84, (1985).

Version complète en annexe A6.

Etablie sur la base du chapitre « Recherche d'Optima Techniques, Economiques et Energétiques d'Opérations de Pressage » de la thèse de Docteur-Ingénieur soutenue à l'INPL en 1983, cette publication est une synthèse de la méthode développée à cette époque.

## 2.4 CONCLUSION

Des travaux conduits sur la compression à pression constante, et qui sont largement discutés et illustrés dans les publications P1 et P2, nous dégagons les conclusions suivantes :

1. Les modèles décrits précédemment suivent bien le comportement des SPM d'origine minérale, comme le Kaolin. Nos résultats sur le Kaolin floclé demeurent intéressants, en ce sens que l'on peut rendre un comportement linéaire et se rapprocher des distributions théoriques correspondantes.
2. Ces modèles sont d'usage plus limité lorsqu'il s'agit de traiter des matériaux biologiques comme les agrumes, la luzerne, les boues résiduaires et les pulpes de betteraves. Il faut alors faire appel à des modèles plus empiriques ce qui limite et rend difficile la recherche de paramètres de compression spécifiques et comparables entre eux.
3. La durée des expériences n'est pas représentative des pratiques industrielles qui se limitent à des durées inférieures à la seconde dans le cas du pressage du papier, inférieures à plusieurs minutes dans le cas de la filtration pressage continue ou semi-continue et inférieures à l'heure dans la plupart des cas. On note dans nos expériences CPC des durées de tests de plusieurs heures parfois. On a relevé des temps de séjour allant jusqu'à 7 heures dans les travaux sur la compression des produits oléagineux, comme les graines de colza, rapportés par LANOISELLE (1995). Ceci n'ôte rien à la valeur de ces travaux pour la connaissance du comportement de certains produits dans le temps mais reste d'usage plus limité à l'échelle du dimensionnement des équipements.
4. Cet aspect rend quelque peu superflue l'analyse de la phase de compression secondaire sachant que dans peu d'opérations industrielles, le fluage prend place dans les conditions étudiées au laboratoire où par nécessité scientifique la notion d'équilibre est essentielle. Il faudrait peut-être substituer ces expériences longues par des analyses en relaxation comme nous l'avons illustré dans nos publications P8 et P10 sur la base des travaux de PELEG.
5. L'effet choc que peut exercer sur le produit l'application d'une pression soudaine est aussi un facteur à surveiller tout en gardant à l'esprit que la phase préliminaire de filtration tend à atténuer ce phénomène ; encore faut-il qu'elle existe.
6. Soulignons aussi, pour les produits biologiques, la difficulté d'apprécier la densité réelle du solide, ce qui rend les coordonnées matérielles reprises par SHIRATO difficiles d'usage pour la compression de ces produits.

Tentons d'illustrer certaines des expériences qui ont conduit à une évolution significative de nos travaux.

La figure 2.27 donne bien toute la dimension des méthodes de lissage de courbes à partir de fonctions mathématiques ; dans le cas présent, celles correspondant aux modèles rhéologiques classiques. Il est toujours possible, à partir d'un nombre plus ou moins grand d'éléments placés en série ou en parallèle, de faire coïncider une série de points expérimentaux à une courbe dite théorique. L'interprétation des paramètres de lissage devient alors complexe. LANOISELLE (1995) et VOROBIEV démontrent bien la complexité de cet exercice.

Dans l'une des plus cohérentes études sur le sujet, M. PELEG (1980 - J of Rheo, 1982 - Rheol Acta, 1983 - Jour. Texture Studies), démontre les conséquences du manque de



précaution. Il souligne «the large number of rheological exponential equations, derived from various series of mechanical analogues such as the Maxwellian and Kelvin-Voigt models, or combination thereof, should be very cautiously used in the field of solid bio-materials». Ces produits ont en plus une durée de vie courte, ce qui remet en cause les tests de longues durées nécessaires à l'appréciation de conditions aux limites.

Dans un article de PELEG (1977), la démonstration de ce qui précède se trouve parfaitement illustrée. A partir de la relation déformation-contrainte suivante :

$$P(t) = K_0 \cdot \log_e \left( \frac{b}{b-t} \right) + \sum_{i=1}^m \left[ K_i \exp[a_i \cdot (b-t)] \cdot \left\{ \log_e \left( \frac{b}{b-t} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a_i)^n (b^n - (b-t)^n)}{n \cdot n!} \right\} \right]$$

avec  $a_i = \frac{K_i}{n_i}$  et  $b = \frac{Z_0}{dZ/dt}$  on obtient les courbes de la Fig. 2.28,

**qui démontrent que pour trois modèles rhéologiques différents on obtient, pour une vitesse de déformation suffisante, les mêmes lissages.**

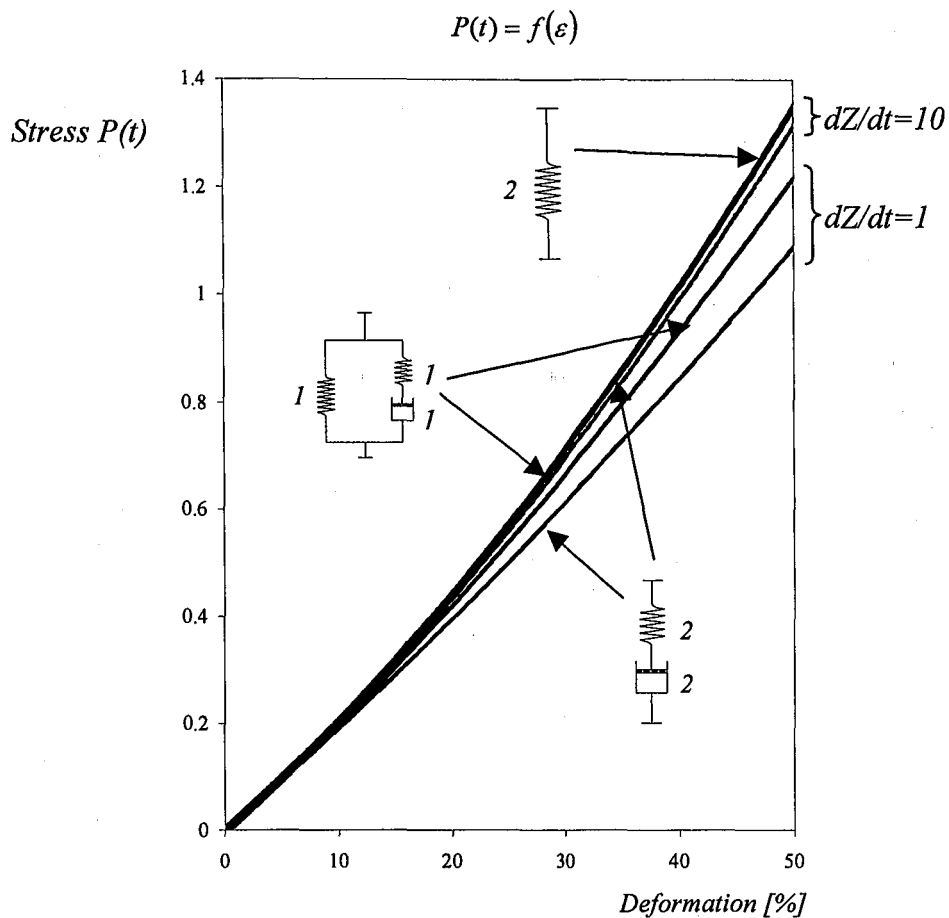


Figure 2.28 : Incidence de la vitesse de déformation sur la modélisation à partir des modèles rhéologiques

Dans le même esprit, les expériences réalisées à titre d'orientation, au laboratoire du génie de l'air et que nous avons rapportées dans notre mémoire de thèse de Docteur-Ingénieur, prennent toute leur signification quant à l'incidence de la vitesse de déformation sur les paramètres de compression. Réalisées à l'aide d'une presse hydraulique manuelle et d'enregistreurs spécialement instrumentés pour le suivi de profils de vitesse choisis, ces tests montrent l'incidence majeure de la vitesse de déformation sur la siccité des pulpes soumises à ce type de compression. De ce fait, la compression à pression constante, si elle n'est pas précédée d'une phase de filtration, peut être remise en cause si l'incidence des vitesses de déformation n'est pas suffisamment bien connue et maîtrisée.

Les figures 2.29 et 2.30 illustrent cet aspect.

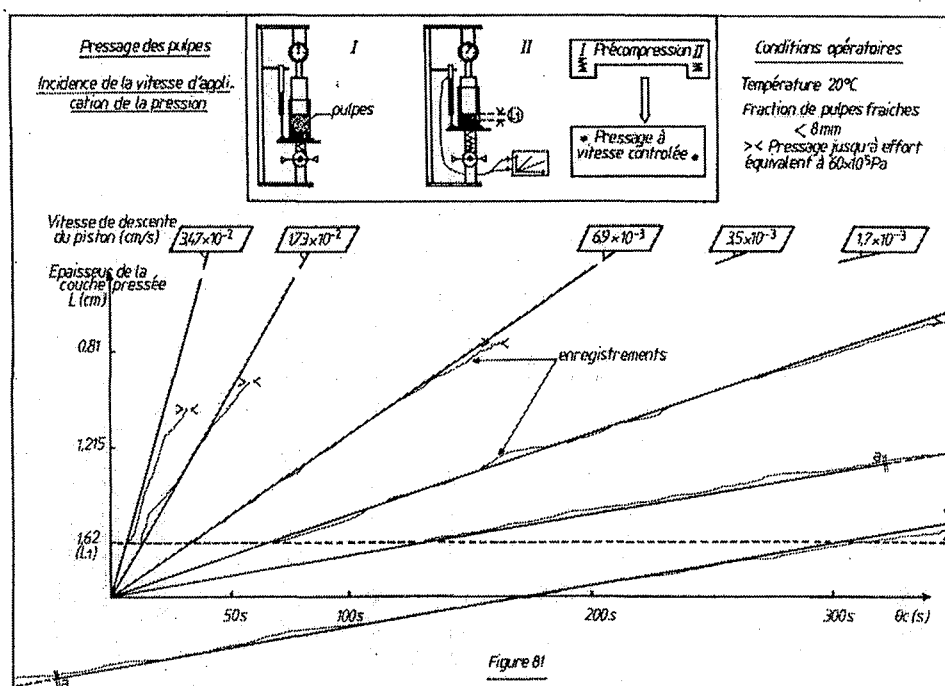


Figure 2.29 : Dispositif et mesures de compression à différentes vitesses de déformation

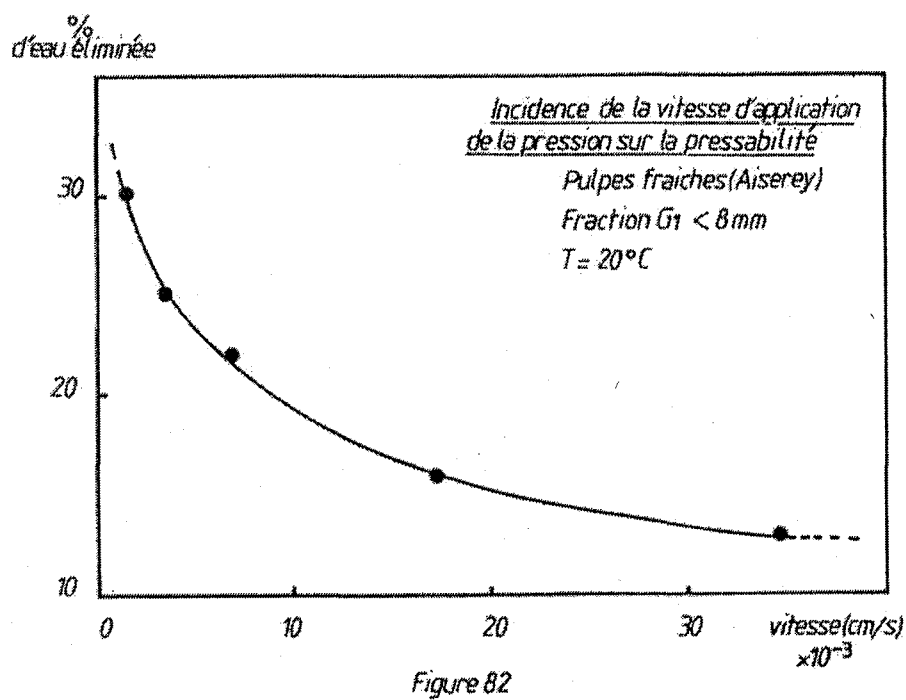


Figure 2.30 : Incidence de la vitesse de déformation sur le pressage des pulpes

Cette expérience a très largement influencé l'orientation de nos recherches vers la compression en régime imposé et contrôlé du type de la compression à déformation constante, sachant que les propriétés intrinsèques du SPM seraient mieux prises en compte. De plus la compression de produits biologiques serait moins sujette aux aléas des mesures faites après un choc de pression.

## P2

REBOUILLAT S., LECLERC D. & BALUAIS G. *La déshydratation par filtration-pressage. Modélisation de la compression unidirectionnelle.* Entropie 121, 13-29, (1985).



S. REBOUILLAT, D. LECLERC, G. BALUAIS

Laboratoire des Sciences du Génie Chimique  
CNRS - ENSIC  
1, rue Grandville - 54042 NANCY Cedex F.

Article reçu le 21/05/84 - Accepté le 23/11/84

Une courte revue des équipements de filtration-pressage est faite afin de dégager les technologies les plus rencontrées dans divers domaines industriels et leurs performances respectives. Les fondements de la compression unidirectionnelle sont ensuite rappelés, ainsi que les différents modèles qui en résultent. On montre alors que le phénomène de consolidation peut être divisé en deux étapes qualifiées de compression primaire (phase hydrodynamique) et de compression secondaire (phase de fluage du matériau). Une méthodologie est développée à partir d'essais réalisés sur une cellule de filtration-compression de laboratoire afin de valider ces modèles ainsi que des modèles simplifiés plus utilisables pour le dimensionnement des dispositifs de pressage industriels. Nous présentons les résultats obtenus avec des argiles (kaolin), des boues résiduelles urbaines et des produits agro-alimentaires (cassis broyé, pulpes de betteraves, luzerne broyée).

*Dehydration by filtration pressing : one direction compression modelling.— A short review of filtration-pressing equipments has been made in order to bring out the most usual technologies in different industrial fields and their achievements. The bases of one-direction compression are recalled as well as the different models which are derived from them. It can be shown that the stiffening phenomenon can be divided into two steps, one of primary compression (hydrodynamical phase) and one of secondary compression (creeping phase). A methodology has been developed from tests in a laboratory filtration-pressing cell to get a validation of these models and of simplified models more useful for the scaling-up of industrial systems. Results obtained with clays kaolin sewage sludges and food products (crushed blackcurrant, beet pulp, crushed lucerne).*

*Die Entwässerung durch Druckfiltration. Modellierung der Kompression.—*

Anhand einer kurzen Übersicht über die Druckfiltrationsgeräte werden die meist verwendeten Technologien beschrieben und ihre Eigenschaften verglichen. Dann werden die Grundlagen der unidirektionalen Kompression und die sich daraus ergebenden Modelle beschrieben. Es wird gezeigt, dass man in der Verfestigung zwei Phasen unterscheiden kann, die Primärkompression (hydrodynamische Phase) und die Sekundärkompression (Kriechphase). Anhand der in einer Druckfiltrations-Zelle im Labormassstab gewonnenen Ergebnisse wird eine Methode zur Überprüfung der Modelle entwickelt; außerdem werden vereinfachte Modelle zur Auslegung von technischen Pressen vorgeschlagen. Die vorgestellten Ergebnisse betreffen die Druckfiltration von Lehmen (Kaolin), Abwasserschlamm und von landwirtschaftlichen Produkten (schwarze Johannisbeeren, Zuckerrübenpülpe, geschrotete Luzerne).

*Deshidratación por filtración-pressado.*

*Modelización de la compresión.— Se pasa en revista los diferentes equipos de filtración-pressado, con el objeto de determinar las tecnologías utilizadas en diversos campos de aplicación industriales y sus características. En seguida se recuerdan los fundamentos de la compresión unidireccional y los modelos tirados de ella. Luego se muestra que el fenómeno de consolidación puede ser dividido en dos etapas calificadas de compresión primaria y compresión secundaria. Se desarrolla una metodología tomando como base los ensayos realizados sobre una celda de filtración-compresión de laboratorio, con el objeto de validar los modelos así que los modelos simplificados mas utilizados en el dimensionamiento de dispositivos de pressado industrial. Se muestran los resultados obtenidos con arcillas (caolin), lodos residuales urbanos y productos agro-alimenticios (pulpa de remolacha y frutas molidas).*

*A desidratação por filtração-pressagem.*

*Modelização da compressão.— Uma pequena revisão dos equipamentos de filtração-pressagem é feita a fim de apresentar as tecnologias mais frequentes em varios domínios industriais e seus desempenhos respectivos. Os fundamentos da compressão unidireccional são em seguida realçados assim como seus diferentes modelos resultantes. Em seguida, é mostrado então que o fenómeno da consolidação pode ser dividido em duas etapas: de compressão primária (fase hidrodinâmica) e de compressão secundária. Uma metodologia é desenvolvida a partir de experiências realizadas sobre uma célula de filtração-compressão de laboratório, a fim de validar estes modelos, assim como os modelos simplificados. Sendo estes últimos os mais utilizados para o dimensionamento dos dispositivos de pressagem industrial. Os resultados obtidos com argilas (kaolin), barros residuais urbanos e produtos agro-alimentares são apresentados.*

mots-clés \* keywords

déshydratation \* filtration-pressage \* compression unidirectionnelle \*

deshydratation \* filtration-pressing \* one direction compression modelling \*

**INTRODUCTION**

Les techniques d'élimination d'eau par voie mécanique répondent aux exigences d'économies d'énergie car elles ne mettent en œuvre que des transferts de quantités de mouvements, tout en apportant des solutions aux problèmes d'environnement. Sur le plan technologique, des dispositifs variés sont apparus sur le marché, associant le plus souvent la filtration à la compression mécanique.

La compression unidirectionnelle, qui correspond à un concept très ancien utilisé essentiellement en mécanique des sols, est reprise dans ses fondements théoriques pour réaliser une approche systématique de la cinétique de déshydratation de suspensions et de produits humides divers. A partir de ces concepts et à travers un protocole opératoire simple, on propose une méthodologie d'approche du pressage. Les exemples illustrant celle-ci sont issus du traitement, au moyen d'une cellule de laboratoire, de produits rencontrés dans les secteurs du traitement des minerais, de l'environnement et de l'industrie agro-alimentaire.

**1 REVUE DES TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES ACTUELLES**

Le mécanisme de déshydratation par pressage peut être représenté par le diagramme de la figure 1 a. Le choix du dispositif permettant le double transfert de quantité de mouvement et de masse est essentiellement guidé par la fluidité et le comportement du produit considéré dans les éventuels systèmes de pompage. Il est rare, en effet, que la nature de l'eau à éliminer (libre, liée, occluse) soit prise en compte pour la réalisation d'un procédé de compression. Par contre, la nature fibreuse, spongieuse ou gélatineuse du produit

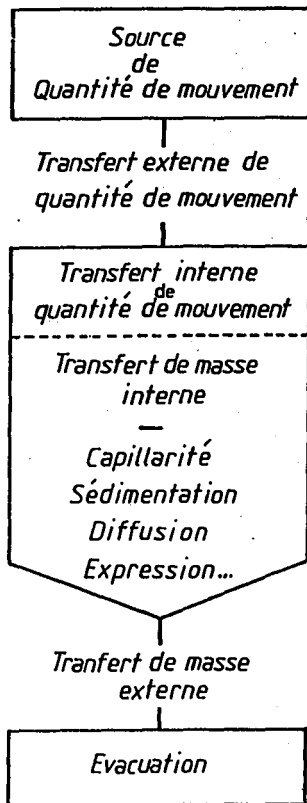


Fig. 1a. Analyse du mécanisme de pressage.

détermine la faisabilité d'un processus de déshydratation par pressage. Nous adopterons donc la classification simplificatrice de la figure 1b pour l'examen des matériels. La figure 1c schématise, compte tenu de l'alternative précédente, le processus global de pressage sans préjuger du ou des constituants précieux : solide et/ou liquide pouvant être valorisables.

**1. 1. Filtres à chambres fixes ou variables pour traitement des suspensions pompables [1]**

Les dispositifs à volume fixe représentés par les filtres à cadres sont surtout utilisés pour les opérations de filtration pure, la compression éventuelle étant réduite à celle provoquée par l'alimentation forcée. Limitant notre propos aux seuls processus de déshydratation par filtration compression ou par expression, nous ne donnons que quelques performances comparées de ces dispositifs.

La planche 1 visualise un ensemble d'équipements permettant d'effectuer les opérations successives de filtration-compression. Généralement, les caractéristiques de fonctionnement sont les suivantes : une pression de 10 bars, une durée de pressage de 15 minutes mais qui peut aller jusqu'à 1 heure, et une charge telle que l'épaisseur du gâteau soit voisine de 30 mm.

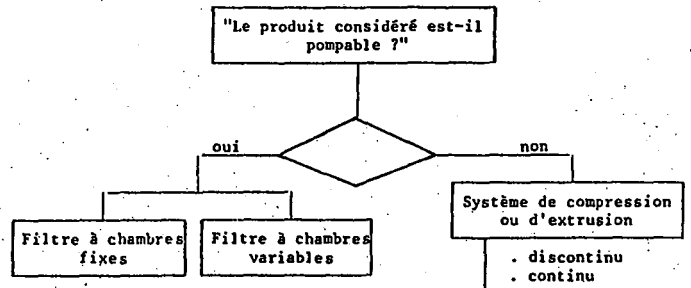


Fig. 1b. Diagramme de classification des matériels.

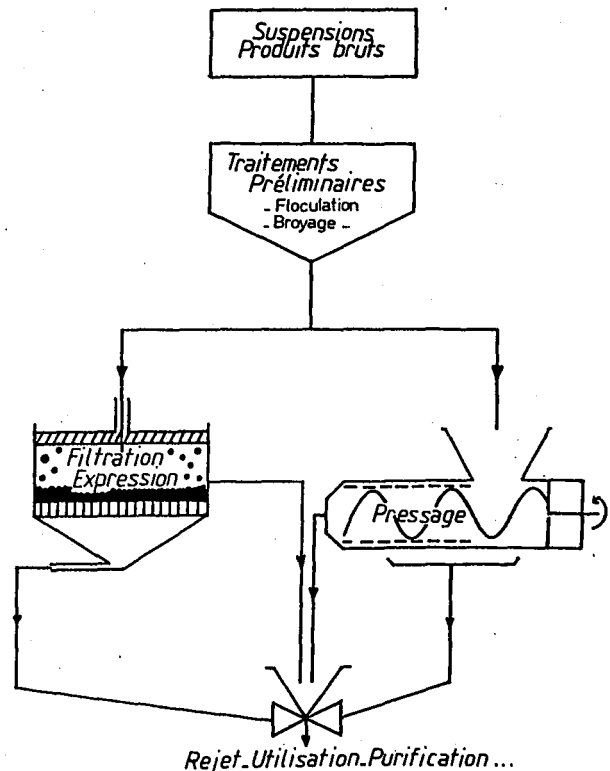


Fig. 1c. Processus global de pressage.

**PLANCHE 1 : TRAITEMENT DES SUSPENSIONS POMPABLES**  
**PRESSE HYDRAULIQUE**  
**FILTRE PRESSE VERTICAL**  
**FILTRE PRESSE CYLINDRIQUE**  
**FILTRE PRESSE TUBULAIRE**

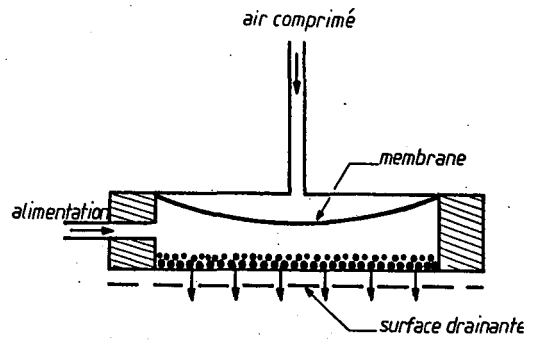


Fig. 2. Principe des filtres à membrane de compression.

**DONNEES COMPARATIVES**

Domaine	MS	Temp. °C	Durée du cycle en mn	Capacité MS en Kg/m <sup>2</sup> .h	% humidité résiduelle	Autres équipements	Capacité MS en Kg/m <sup>2</sup> .h	% humidité résiduelle
Produits	%	pression bar				Type de filtre		
<b>FILTRE PRESSE VERTICAL</b>								
<b>Céramique</b>								
- Kaolin	50	16b	16	36-40 140	28-30	Filtre presse à plateaux chambrés	7-8	33-34
- Talc	45	16b	16	120-150 210	15-18	Filtre presse à plateaux et cadres	8-12	20-22
<b>Traitement des eaux usées</b>								
- Boues	4	20°C 16 b	17,5	14-17	42-56	Filtre presse à plateaux et cadres	6-9	55-65
<b>Agro-alimentaire</b>								
- Jus, industrie du sucre	13,6	60°C 16 b	10	65-75 144	40-43	Filtre à tambour sous vide	35-40	50-51

\* Source : LAROX.

PLANCHE 1 - Tableau 1.

**EXEMPLES**

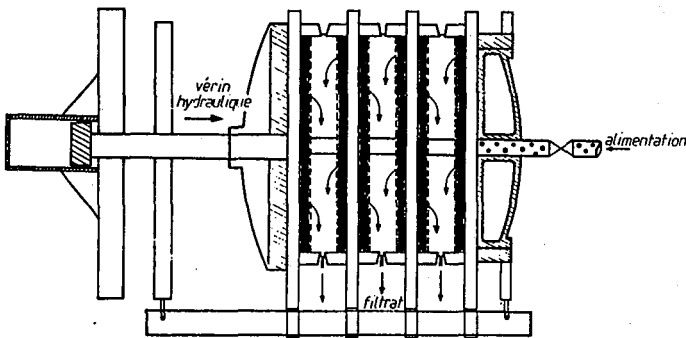


Fig. 3. Filtre presse à plateaux KRAUSS MAFFEI ®

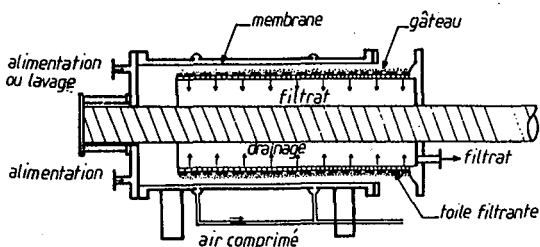


Fig. 4. Filtre à chambre annulaire variable VC FILTER ®

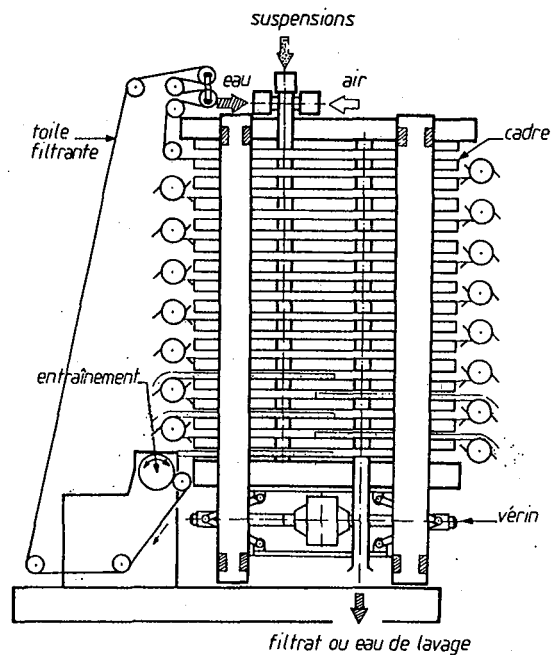


Fig. 5. Filtre automatique à débatissage simultané LAROX ®



1.2. Equipements de pressage

Différents procédés permettent la mise en œuvre de produits semi-solides et correspondent de ce fait à la notion classique de compression due aux mouvements réciproques des parois de la chambre où l'expression est réalisée. Hormis les procédés de pressage discontinus qui n'ont pas un réel impact industriel, les planches 2 et 3

donnent un certain nombre d'exemples d'équipements industriels de pressage dans deux principaux domaines d'utilisation de ces dispositifs, les boues résiduaire et les produits agroalimentaires [2]. Dans ces deux secteurs l'empirisme est encore grand, aussi est-il difficile de dégager des conditions opératoires précises, chaque dispositif ayant, semble-t-il, été mis au point pour une application spécifique.

**PLANCHE 2 : TRAITEMENT DES BOUES RESIDUAIRES  
FILTRES A BANDES PRESSEUSES  
HORIZONTALES, VERTICALES  
PROCEDES PARTICULIERS**

Performances	Filtre Presse		Filtre à bandes	
	Classique	Squeezor	Horizontales	Verticales
Domaine de résistance spécifique (m/Kg)	$5.10^2 - 8.10^{13}$	$5.10^{12} - 8.10^{13}$	$1.10^{10}$	
Capacité de production (KgMS/m <sup>2</sup> .h)	5-15	40-50	150-140	15-30
Siccité (%)	35-55	35-45	20-30	20-30
Consommation d'énergie (KWh/T.MS)	15-40	90-170	5-20	5-20

EXEMPLE :

Tableau 2.

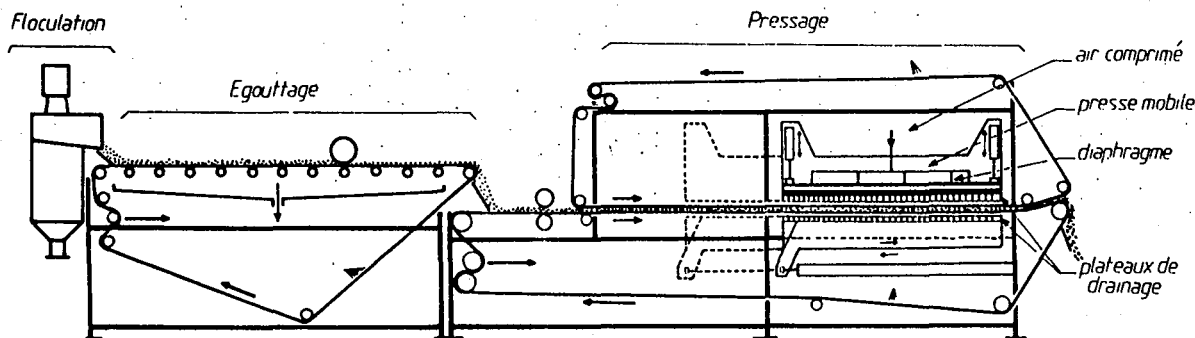


Fig.6. Vue schématique du procédé SQUEEZOR®

2 DEFINITION ET EQUATION GENERALE DE LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE

2.1. Pressage et compression unidirectionnelle

Le pressage est un procédé mécanique simple de séparation solide-liquide utilisé traditionnellement pour la production des jus de fruits. A la différence de la filtration qui est gouvernée par les pressions hydrauliques, le pressage est dû au mouvement des parois qui réalise la compression et provoque l'évacuation du liquide. Cette opération est conditionnée par de nombreuses variables, telles que le temps, la température, la pression et la texture du produit considéré.

La compression unidirectionnelle est le concept qui correspond au terme de pressage utilisé au niveau industriel. Cette opération consiste à comprimer une boue placée dans une chambre cylindrique au moyen d'un piston, le frettage latéral provoquant une déformation unidimensionnelle et donc le drainage (figure 9). La théorie de la déshydratation par compression unidirectionnelle fait appel aux fondements de la mécanique des fluides et des sols. En effet, il est nécessaire d'une part,

de préciser l'aspect hydrodynamique de l'écoulement des fluides à travers le milieu poreux et, d'autre part, de prévoir la compression et le fluage de la structure solide.

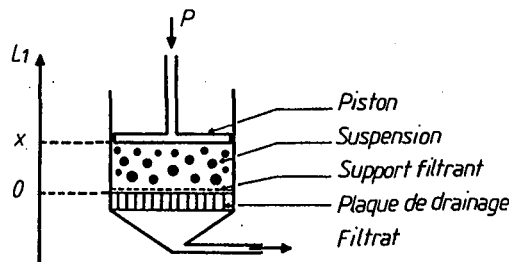


Fig.9. Principe de la cellule de filtration-compression.

PLANCHE 3 : TRAITEMENTS DES PRODUITS AGRO-ALIMENTAIRES  
PRESSES A VIS (SIMPLE, DOUBLE)  
PRESSES PARTICULIERES

## EXEMPLES :

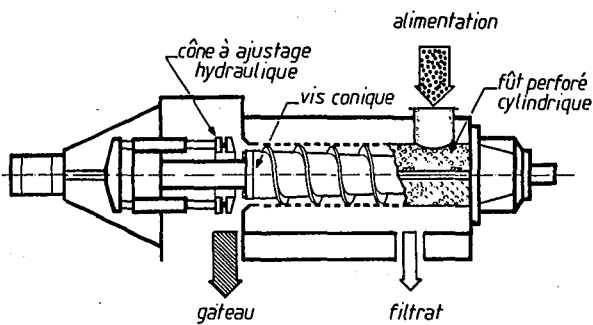


Fig. 7. Presse à vis simple KRIMA CELLWOOD®

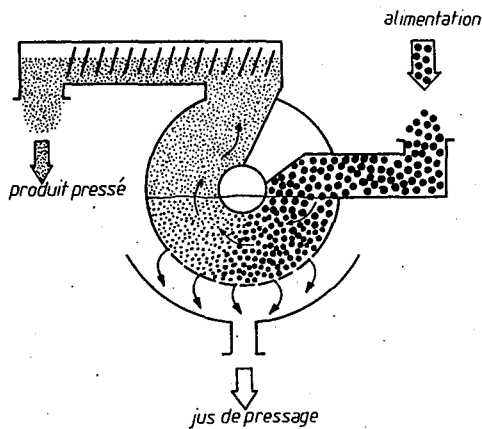


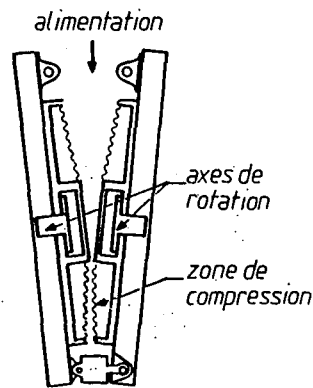
Fig. 8. Représentation schématique de la presse RIETZ®

Performances *	Presse à vis		Presse Rietz
	simple	double	
siccité :			
initiale	0,08	0,15	0,17
finale	0,24	0,31	0,24

\* Luzerne verte.

Tableau 3. Données comparatives.

position respective des 2 roues



## 2.2. Equations générales

## 2.2.1. Degré de compression

D'un point de vue pratique l'efficacité du pressage qui caractérise l'appauvrissement réel en liquide du mélange solide-liquide peut être exprimée par le rapport :  $U_c = \text{appauvrissement réel} / \text{appauvrissement maximal}$  et prend donc la forme d'une efficacité de transfert [3]. Dans le cas de la compression unidirectionnelle, ce rapport s'écrit :

$$U_c = \frac{\text{variation du volume au temps } t_c}{\text{variation finale du volume}} = \frac{\text{variation de hauteur au temps } t_c}{\text{variation totale de hauteur}}$$

$$\text{soit } U_c = (L_1 - L) / (L_1 - L_\infty) \quad (1)$$

avec

 $L_1$  épaisseur initiale $L$  épaisseur au temps  $t_c$  $L_\infty$  épaisseur théorique finale à compression infinie

Les expressions analytiques du taux de compression s'obtiennent à partir de l'expression de la vitesse de compression. Cette dernière n'est accessible qu'à partir

des hypothèses simplificatrices suivantes :

- saturation complète du milieu considéré
- écoulement unidirectionnel du fluide et compression unidimensionnelle de la substance à essorer
- propriétés du solide invariantes avec la pression
- Loi de Darcy applicable.

## 2.2.2. Bilan de matière

La variation de volume est donnée en fonction de la variation de la vitesse d'écoulement par la relation :

$$(\partial V / \partial t_c) \cdot dt_c = A \cdot (\partial u_x / \partial x) \cdot dx \quad (2)$$

A étant la surface de drainage.

Si  $V_s$  est le volume des grains et  $e_x$  l'indice de vide,  $V$  est donné par :

$$V = V_s (1 + e_x) \quad (3)$$

avec  $e_x = \epsilon_x / (1 - \epsilon_x)$  dans laquelle  $\epsilon_x$  est la porosité.

Les équations (3) et (2) conduisent à :

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t_c} \right) \cdot dt_c = V_s \frac{\partial e_x}{\partial t_c} \cdot dt_c = \frac{V}{(1 + e_x)} \frac{\partial e_x}{\partial t_c} \cdot dt_c \quad (4)$$

En égalant les équations (2) et (4), il vient :

$$\partial e_x / \partial t_c = (1 + e_x) \partial u_x / \partial x \quad (5)$$

Un bilan de continuité conduit immédiatement à une relation analogue :

$$\frac{\partial u_x}{\partial w_x} = - \frac{1}{\rho_s} \cdot \frac{\partial e_x}{\partial t_c} \quad (6)$$

avec  $\rho_s$  masse volumique du solide et  $w_x$  masse de solide déposé par unité de surface jusqu'à l'épaisseur  $x$ .

### 2.2.3. Loi d'écoulement

La loi de Darcy donne la vitesse d'écoulement du fluide  $u_x$  à travers une masse infinitésimale :

$$u_x = - \frac{1}{\alpha_x \cdot \mu} \frac{\partial P_Q}{\partial w_x} \quad (7)$$

dans laquelle  $\alpha_x \cdot dw_x$  représente la résistance hydraulique de la couche considérée et  $\mu$  la viscosité dynamique du filtrat.

### 2.2.4. Loi de consolidation

L'analogie de Terzaghi [4] illustre de façon simplifiée l'aspect physique du problème (figure 10). Durant la phase de compression, le gâteau est assimilé à un ressort placé dans un cylindre initialement rempli d'eau et sur lequel on applique une pression  $P_s$  par l'intermédiaire d'un piston.

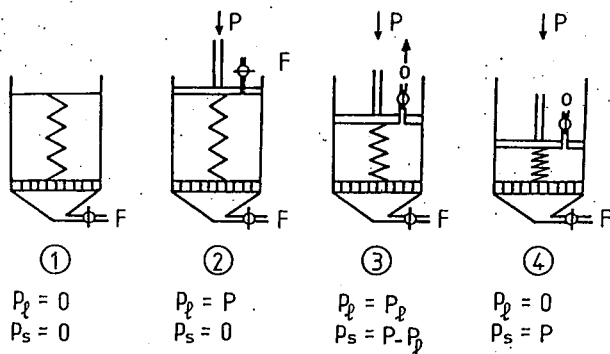


Fig. 10. Analogie piston ressort de Terzaghi (1925).

1. En absence de contrainte le système est en équilibre.
2. Le système étant ouvert, le solide absorbe une partie croissante de la contrainte au détriment de la pression hydraulique.
3. Lorsque la totalité de la contrainte est supportée par le solide, la pression hydraulique est nulle. Le réarrangement subséquent des grains permet une expulsion supplémentaire de liquide interstitiel. Ce phénomène est appelé compression secondaire ou « effet séculaire », en mécanique des sols.

L'analogie de Terzaghi visualise utilement les aspects physiques du problème de compression ; néanmoins, celle-ci présente un point faible qui réside dans le fait que la pression hydraulique est constante à travers toute la hauteur du cylindre alors qu'en réalité la compression commence au niveau de la surface de drainage et progresse graduellement dans la masse pour produire en fin d'opération seulement, c'est-à-dire à l'équilibre, un gâteau uniformément comprimé.

Selon cette analogie du ressort linéairement élastique, tout accroissement de la pression du solide  $P_s$  est égal à la diminution de la pression hydraulique  $P_Q$  d'où :

$$\partial e_x / \partial P_s = - \partial e_x / \partial P_Q$$

On définit alors le coefficient de changement de volume par la relation :

$$m_V = - \frac{1}{1 + e_x} \cdot \frac{\partial e_x}{\partial P_s} = \frac{1}{1 + e_x} \cdot \frac{\partial e_x}{\partial P_Q} \quad (8)$$

En différenciant l'équation (7) et en substituant dans la relation (6), on obtient :

$$\frac{\partial e_x}{\partial t_c} = \frac{\rho_s}{\alpha_x \cdot \mu} \frac{\partial^2 P_Q}{\partial w_x^2} \quad (9)$$

Les équations fondamentales (6), (7), (8), (9) permettent, selon le développement qui suit, d'aboutir aux équations différentielles dont la résolution donne l'expression de la grandeur  $U_c$ .

$$a) \quad \frac{\partial P_Q}{\partial w_x} = \frac{\partial P_Q}{\partial e_x} \frac{\partial e_x}{\partial w_x}$$

d'où d'après les équations (7) et (8) :

$$u_x = \frac{-1}{\alpha_x \cdot \mu \cdot m_V \cdot (1 + e_x)} \frac{\partial e_x}{\partial w_x}$$

puis en différenciant et en combinant à (6) :

$$\frac{\partial e_x}{\partial t_c} = \frac{\rho_s}{\alpha_x \cdot \mu \cdot m_V \cdot (1 + e_x)} \frac{\partial^2 e_x}{\partial w_x^2} = C_e \frac{\partial^2 e_x}{\partial w_x^2} \quad (10)$$

$C_e$  appelé coefficient de compression, est assimilé à une constante.

b) un changement de variables suivant la relation :

$$\frac{\partial e_x}{\partial t_c} = \frac{\partial e_x}{\partial P_Q} \cdot \frac{\partial P_Q}{\partial t_c}$$

conduit à une forme analogue :

$$\frac{\partial P_Q}{\partial t_c} = C_e \frac{\partial^2 P_Q}{\partial w_x^2} \quad (11)$$

Les équations (10) et (11) sont des équations différentielles du second ordre de type parabolique. Elles sont semblables à l'équation caractéristique de la diffusion et peuvent être résolues par la transformée de Laplace. Leurs solutions aboutissent au taux de compression  $U_c$ , cette grandeur étant liée aux variables  $e$  et  $P_Q$  par les relations :

$$U_c = (e_0 - e_x) / (e_0 - e_\infty) = 1 - P_Q / P_{Q_0} \quad (12)$$

Les solutions des équations (10) et (11) sont :

- pour une distribution sinusoïdale des pressions hydrauliques initiales créée par une phase préliminaire de filtration de la forme :

$$(P_Q/P)_x = \sin \left( \frac{\pi}{2} \frac{A \cdot w_x}{M} \right) \quad (13)$$

$$U_c = 1 - \exp \left| \frac{-\pi^2 T_c}{4} \right|$$

avec

$$T_c = \frac{i^2 \cdot A^2 \cdot C_e \cdot t_c}{M^2}$$

et

$i = 1$  ou  $2$ , nombre de surface de drainage

$A$ , surface totale de drainage

$M$ , masse totale de solide déposé

– pour une distribution linéaire de la pression hydraulique :

$$U_c = 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2N-1)^2} \exp \left[ - \frac{(2N-1)^2 \pi^2}{4} \cdot T_c \right] \quad (14)$$

avec  $N$  entier positif.

### 3 REPRESENTATION DES CINETIQUES DE FILTRATION-COMPRESSION A PARTIR DE MODELES THEORIQUES ET PHENOMENOLOGIQUES

#### 3.1. Dispositif expérimental et conduite des essais

L'ensemble des résultats présentés sont obtenus sur une cellule classique de filtration-compression dans laquelle la pression est transmise au milieu à essorer par l'intermédiaire d'un piston dont le déplacement est assuré par un vérin hydraulique. Cet appareillage (figure 11), correspond à la cellule œdométrique utilisée en mécanique des sols. A partir de ces équipements et automatismes, cette cellule permet d'obtenir les courbes de variation de la hauteur du produit étudié en fonction du temps.

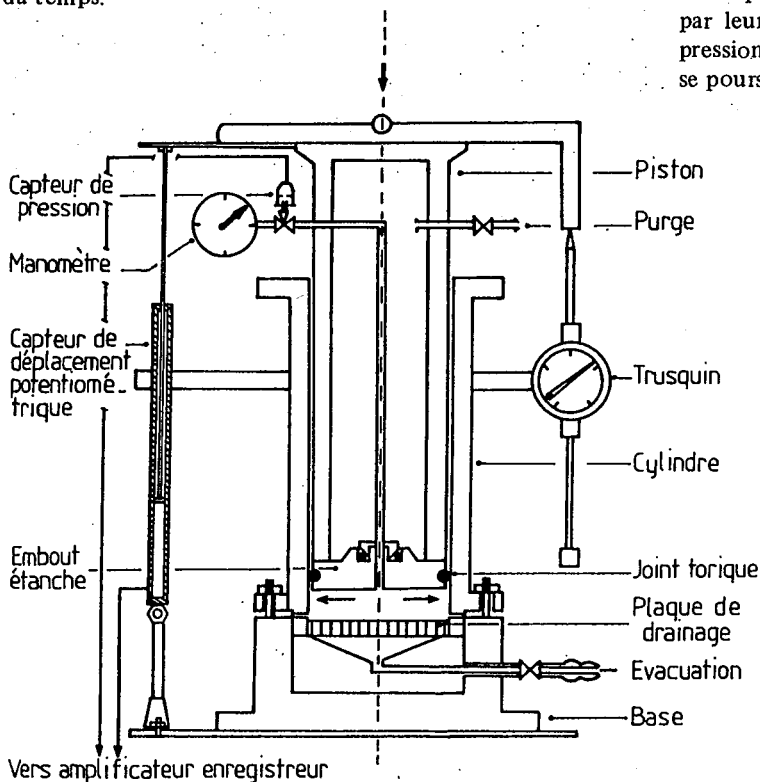


Fig. 11. Cellule de filtration-compression.

#### 3.2. Processus de filtration-compression

La décomposition simplificatrice du processus de déshydratation par compression d'une boue plus ou moins concentrée en deux phases successives se justifie par les faits expérimentaux et permet de modéliser

commodément chacune d'entre elles. Notons toutefois que dans le domaine de la mécanique des sols, la tendance actuelle est d'analyser globalement le phénomène grâce à la théorie de superpositions de Boltzmann en pratiquant une analyse numérique par la méthode des différences finies [6]. Selon la voie traditionnelle, les étapes prises en compte sont les suivantes :

– phase de filtration :

L'application d'une pression  $\Delta P$  par l'intermédiaire du piston de la cellule de filtration-compression provoque une augmentation brutale de la pression hydraulique. Cette pression atteint la valeur de la pression appliquée et sa distribution à travers le gâteau est uniforme. Le processus de déshydratation débute donc par une phase de filtration à pression constante.

– phase de compression :

Durant cette étape, le mécanisme de déshydratation est caractérisé par une décroissance continue de la pression hydraulique à travers le gâteau. La diminution du volume du gâteau associée à ce phénomène se poursuit généralement à faible vitesse lorsque la pression hydraulique s'est dissipée. Ce processus paraît être la conséquence d'un réajustement plastique des particules et de l'eau absorbée sous l'effet de la contrainte exercée.

Globalement, l'étape de compression peut être divisée en deux phases : la compression primaire et la compression secondaire du gâteau par filtration. Ces deux phases ont lieu simultanément et se distinguent par leur cinétique respective et par le fait que la compression secondaire caractéristique du milieu considéré se poursuit à pression hydraulique nulle.

#### 3.3. Accès aux courbes de variation du taux de compression en fonction du temps

L'efficacité du transfert telle que nous l'avons définie à l'équation (1), fait intervenir une variable opératoire  $L$  et deux grandeurs limites  $L_1$  et  $L_\infty$ .

– Epaisseur  $L_1$  au début de la phase de compression

Dans le cas de boues semi-solides la phase de filtration préliminaire est inexistante et donc  $L_1$  est donnée par la valeur initiale de l'épaisseur. Pour les suspensions moins concentrées,  $L_1$  caractérise la transition filtration-compression. Cette grandeur est accessible à partir de la loi de filtration classique.

$$L = V/A = at^2 \quad (15)$$

en supposant négligeable la résistance due au support de gâteau. Tant que l'on reste dans la phase de filtration :

$$\Delta L / \Delta \sqrt{t} = a = \text{cte}$$

La décroissance rapide du rapport précédent marque la transition ( $t_1, L_1$ ) entre la phase de filtration et la phase de compression, comme le montre la figure 12.

– Détermination de l'épaisseur théorique finale  $L_2$

La grandeur théorique  $L_\infty$  caractérise la déshydratation maximum du milieu. Pour accéder à cette grandeur, Taylor [7] propose de substituer  $L_\infty$  par  $L_2$ , valeur obtenue par la méthode dite « de la racine carrée

du temps » qui consiste à exploiter graphiquement les propriétés des courbes théoriques correspondant aux équations réduites (13) et (14). De façon succincte la méthode est explicitée à la figure 13.

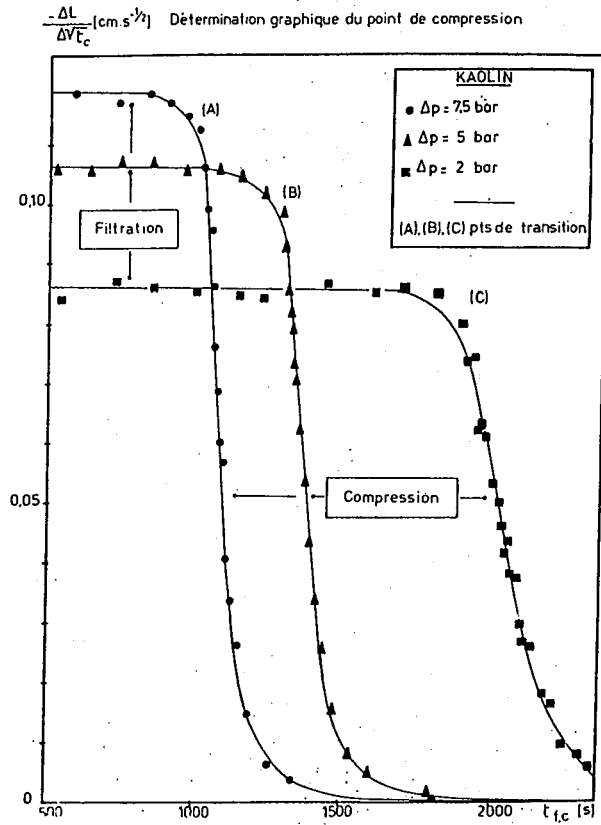


Fig. 12. Détermination graphique du point de compression.

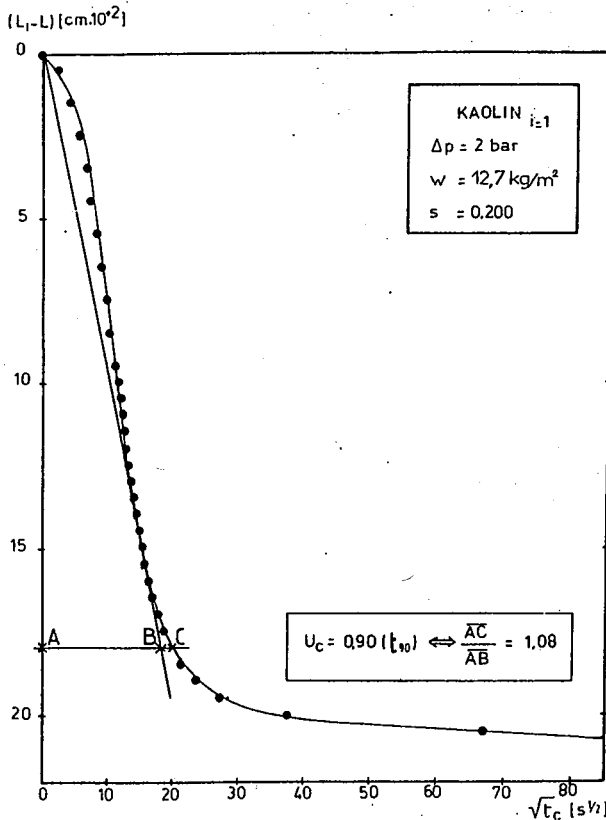


Fig. 13. Méthode graphique de détermination de l'épaisseur théorique de la couche infiniment comprimée.

Pour un profil sinusoidal des pressions hydrauliques, ce qui correspond au cas de la compression d'un gâteau de filtration, c'est-à-dire une courbe  $U_c = f(\sqrt{t_c})$  en forme de S, on démontre que la tangente passant par l'origine intercepte la ligne d'abscisse  $U_c = 0.9$  en définissant les segments AB et AC dans un rapport :

$$\frac{AC}{AB} = 1.08 \quad (16)$$

Cette caractéristique reste valable pour les courbes  $(L_1 - L) = f(\sqrt{t_c})$ .  $L_2$  est donné par :

$$L_2 = L_1 - [(L_1 - L)_{U_c=0.9}] / 0.9 \quad (17)$$

Pour un profil linéaire des pressions hydrauliques (cas des boues semi-solides), des considérations analogues conduisent au rapport :

$$\frac{AC}{AB} = 1.15 \quad (18)$$

### 3.4. Interprétation à partir des modèles rhéologiques

Dans de nombreux domaines, les éléments analogiques simples (ressort, amortisseur, piston) et leurs combinaisons en série-parallèle sont utilisés pour reproduire le comportement des systèmes réels. Dans le domaine de la mécanique des sols, les travaux de Terzaghi ont initié ce courant. Toutefois l'insuffisance du modèle de Terzaghi pour simuler le processus global a conduit au schéma rhéologique de Taylor [7] représenté à la figure 14. Ce schéma permet d'interpréter la notion de compression primaire et secondaire que nous avons introduite et que l'on peut qualifier de façon plus précise de compression hydrodynamique et de fluage.

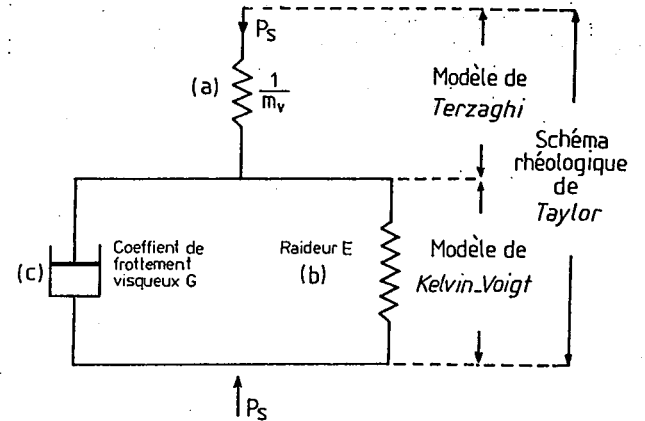


Fig. 14. Modèles rhéologiques de la consolidation.

#### 3.4.1. Adaptation du modèle de Terzaghi à l'aide du modèle analogique de Kelvin-Voigt

A un instant  $t_c$  la variation  $\Delta e$  de l'indice de vide est la somme d'une composante primaire  $\Delta e_p$  et d'une composante secondaire  $\Delta e_s$  :

$$\Delta e = \Delta e_p + \Delta e_s \quad (19)$$

Dans ce cas, le bilan de matière prend une forme composée. En insérant dans cette nouvelle équation l'expression de la loi de Darcy [7] puis en combinant cet ensemble dans l'équation d'état du système analogique Terzaghi-Kelvin-Voigt on aboutit à l'équation suivante introduite par Shirato et al. [9] :

$$C_e \frac{\partial^2 P_s}{\partial w^2} = \frac{\partial P_s}{\partial t_c} + \beta \eta \frac{\partial}{\partial t_c} \int_0^{t_c} (P_s - P_{s(0)}) \exp[-\eta(t_c - \tau)] d\tau \quad (20)$$

dans laquelle :

$$\beta = \frac{1}{m \nu E}; \quad \eta = \frac{E}{G}; \quad C_e = \frac{\rho_s}{\mu \cdot \alpha_x m \nu (1 + e_x)} \quad (20')$$

En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (20) et en utilisant le théorème de convolution, on aboutit, pour une distribution initiale sinusoïdale des pressions hydrauliques, à une solution simplifiée donnant le taux de compression moyen sous la forme :

$$U_c = \frac{(L_1 - L)}{(L_1 - L_2)} = B \cdot [1 - \exp(-\eta t_c)] + (1 - B) \cdot \left| 1 - \exp \left[ - \frac{i^2 \cdot \pi^2 \cdot A^2 \cdot C_e}{4 M^2} \cdot t_c \right] \right| \quad (21)$$

Un réarrangement de l'équation (21) permet d'identifier le terme issu du modèle de Terzaghi et d'attribuer le terme  $B \exp(-\eta t_c)$  à l'effet de compression secondaire explicité par les considérations rhéologiques de Voigt :

$$U_c = \underbrace{1 - (1 - B) \exp \left[ - \frac{i^2 \cdot \pi^2 \cdot A^2 \cdot C_e}{4 M^2} t_c \right]}_{\text{modèle de Terzaghi}} + \underbrace{B \exp(-\eta t_c)}_{\text{modèle de Kelvin-Voigt}} \quad (21')$$

modèle combiné de Terzaghi-Voigt selon le schéma de Taylor

Pour une distribution initiale uniforme des pressions hydrauliques, la solution de l'équation (20) conduit à l'expression du taux de compression suivante :

$$U_c = (1 - B) \cdot \left| 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2N-1)^2} \exp \left[ - \frac{(2N-1)^2}{4} \pi^2 \cdot T_c \right] + B \cdot [1 - \exp(-\eta t_c)] \right| \quad (22)$$

dans laquelle  $N$  est un entier positif et  $T_c$  une grandeur réduite exprimée sous la forme suivante :

$$T_c = i^2 A^2 \cdot C_e \cdot t_c / M^2 \quad (23)$$

L'équation (22) correspond au comportement à la compression des boues semi-solides schématisées par la figure 15. Dans le cas de suspensions moins concentrées, le phénomène de compression intervenant après la phase de filtration initiale est décrit par l'équation (21).

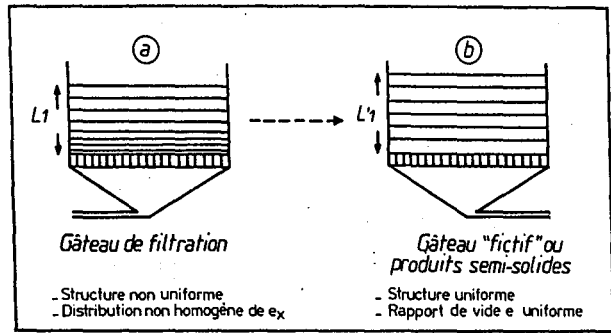


Fig. 15. Modèles de comportement à la compression des suspensions et des produits semi-solides.

### 3.4.2. Illustration expérimentale

#### - Gâteau de filtration

L'exploitation des résultats est illustrée par la figure 16 et repose sur les approximations suivantes :

- pour  $t_c$  grand  $U_c \cong 1 - B \exp(-\eta t_c)$
- $(U_c)$  corrigé = 
$$\frac{(L_1 - L) - B(L_1 - L_2) \cdot |1 - \exp(-\eta t_c)|}{(1 - B)(L_1 - L_2)} = 1 - \exp \left[ - \frac{i^2 \pi^2 A^2}{4 M^2} C_e \cdot t_c \right] \quad (24)$$

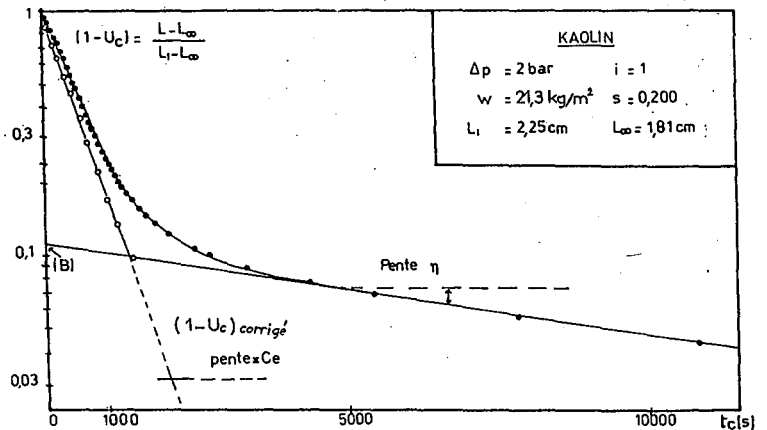


Fig. 16. Détermination graphique des caractéristiques de la consolidation secondaire ( $B, \eta$ ) et du coefficient de compression primaire  $C_e$ .

L'accord entre les résultats expérimentaux et le modèle de Terzaghi-Kelvin-Voigt est visualisé aux figures 17 à 20, l'insuffisance du seul modèle de Terzaghi étant soulignée aux figures 17 et 19, [10].

#### - Produit semi-solides

En utilisant l'équation (18), le calcul du coefficient  $C_e$  est possible au moyen de l'équation suivante :

$$C_e = 0.848 M^2 / i^2 \cdot A^2 \cdot t_{c,90}$$

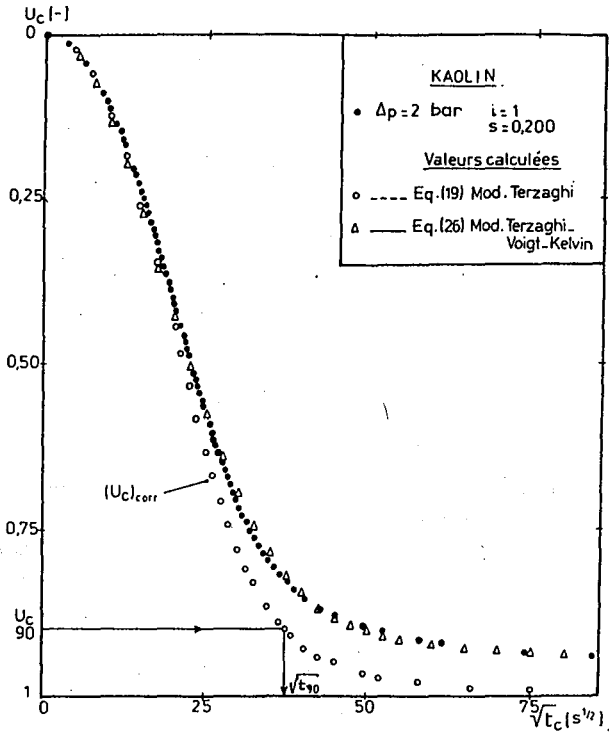


Fig. 17. Validité des modèles élastiques et visco-élastique.

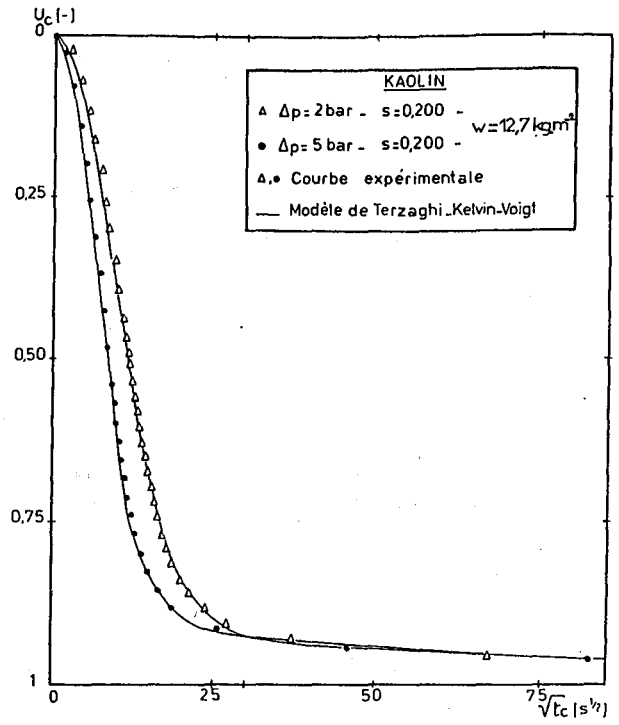


Fig. 18. Validité du modèle visco-élastique.

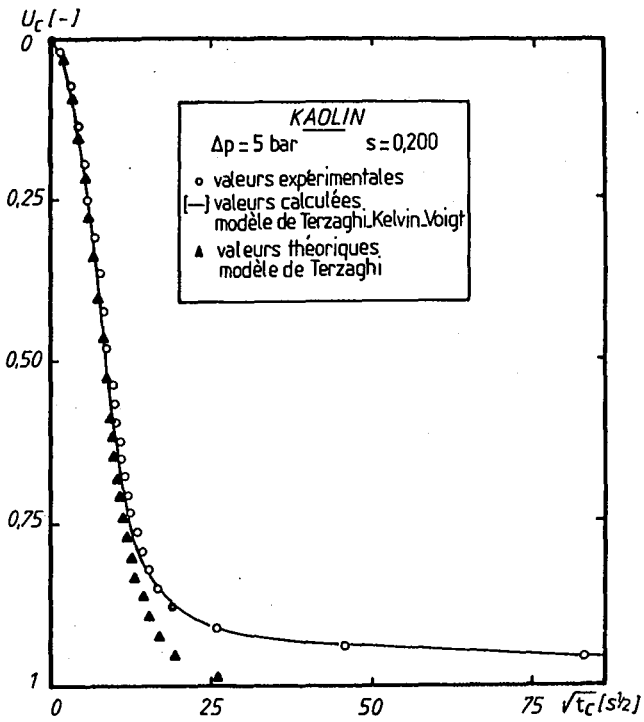


Fig. 19. Comparaison des modèles élastique et visco-élastique.

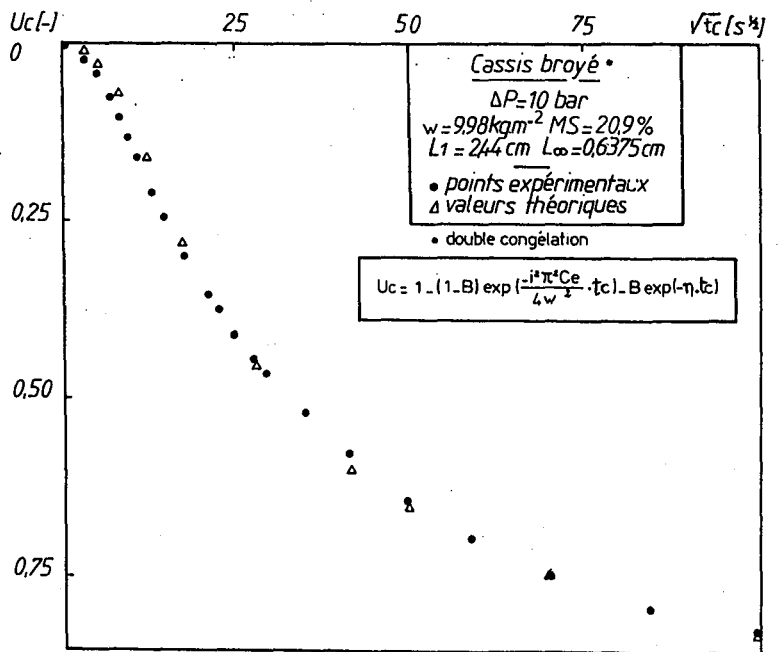


Fig. 20. Modélisation du pressage du cassis broyé conservé par congélation.

La figure 23 illustre la simulation de la cinétique de pressage du kaolin floclé et montre que l'écart entre l'approche initiale de Terzaghi et la modélisation complète est faible.

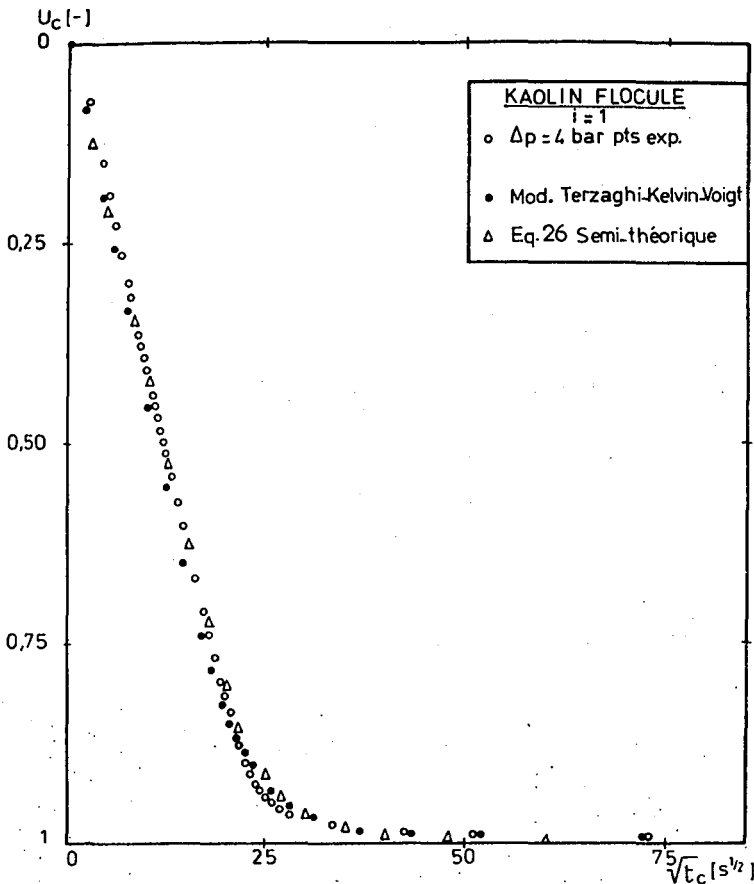


Fig. 23. Comparaison des deux modèles (empirique et visco-élastique) pour du kaolin floclé.

### 3.5. Les modèles semi-théoriques

#### 3.5.1. Introduction

La relative complexité des équations de base de la compression limite leur utilisation pour le calcul prévisionnel des installations industrielles.

Sivaram et Swamee [11] ont mis au point, sur des considérations semi-théoriques, un modèle utilisable en mécanique des sols. En ajoutant un paramètre à ce dernier, Shirato [12] l'a rendu utilisable pour le processus de filtration-compression.

Ce modèle empirique est facile à introduire dans le cas de boues semi-solides présentant un profil linéaire des pressions hydrauliques. Il peut être mis en œuvre dans le cas d'un profil sinusoïdal en introduisant la notion de gâteau fictif à porosité uniforme.

#### 3.5.2. Le modèle empirique de Sivaram et Swamee

Dans le cas de boues semi-solides, la courbe donnant le taux de consolidation moyen en fonction de  $\sqrt{t_c}$  présente deux caractéristiques principales :

— lorsque  $t_c$  est petit, c'est-à-dire lorsque la consolidation secondaire est négligeable, la courbe est linéaire ;

— elle tend asymptotiquement vers 1 pour les valeurs importantes de  $t_c$ . Sivaram et Swamee proposent l'équation empirique :

$$U_c = \frac{L_1 - L}{L_1 - L_\infty} = \left| \frac{\frac{4}{\pi} \cdot T_c}{[1 + (\frac{4}{\pi} \cdot T_c)^{2,8}]^{1/2,8}} \right|^{0,5} \quad (25)$$

Cette équation permet de simuler avec une bonne précision la phase de compression primaire parfaitement décrite par l'équation (14) réduite issue de la théorie de Terzaghi.

Comparativement à l'équation (15), la relation (25) est d'une forme très simple et permet, connaissant uniquement  $C_e$ , de prévoir la totalité du phénomène de compression primaire.

Le point faible de cette relation réside dans l'impossibilité de simuler le phénomène de consolidation secondaire. Afin de pallier cette imperfection, Shirato propose l'adaptation suivante du modèle semi-théorique.

#### 3.5.3. Adaptation du modèle de Sivaram et Swamee à l'étude de la compression des boues « semi-solides »

Lorsque la consolidation secondaire n'est pas négligeable, on observe une décroissance moindre du taux de compression moyen en fonction du temps  $t_c$ . Néanmoins, globalement, la courbe conserve une forme analogue à celle dictée par les équations (14) et (22).

En remplaçant la constante 2,8 par le paramètre  $\nu$ , Shirato et al [12] généralise l'équation simplifiée de Sivaram et Swamee qui prend la forme :

$$U_c = \left| \frac{\frac{4}{\pi} T_c}{[1 + (\frac{4}{\pi} T_c)^\nu]^{1/\nu}} \right|^{0,5} \quad (26)$$

avec

$$T_c = \frac{i^2 \cdot A^2}{M^2} \cdot C_e \cdot t_c = \frac{\pi}{4} \cdot K_e \cdot t_c \quad (27)$$

soit

$$K_e = \frac{4 i^2}{\pi w^2} C_e$$

La validité de ce modèle sera illustrée par des faits expérimentaux.

La figure 21 montre l'influence du paramètre  $\nu$  qui met en évidence l'incidence plus ou moins grande du phénomène de consolidation secondaire sur le processus global de déshydratation.

#### 3.5.4. Modélisation semi-théorique du pressage de produits « semi-solides »

Le coefficient  $K_e$  nécessaire à la simulation est accessible à partir de l'approximation suivante :

$$- \text{pour } t_c \text{ petit } U_c \cong \sqrt{K_e \cdot \sqrt{t_c}}$$

Les figures 22 à 25 montrent l'adéquation entre les résultats calculés et mesurés pour différents produits [2], [14].



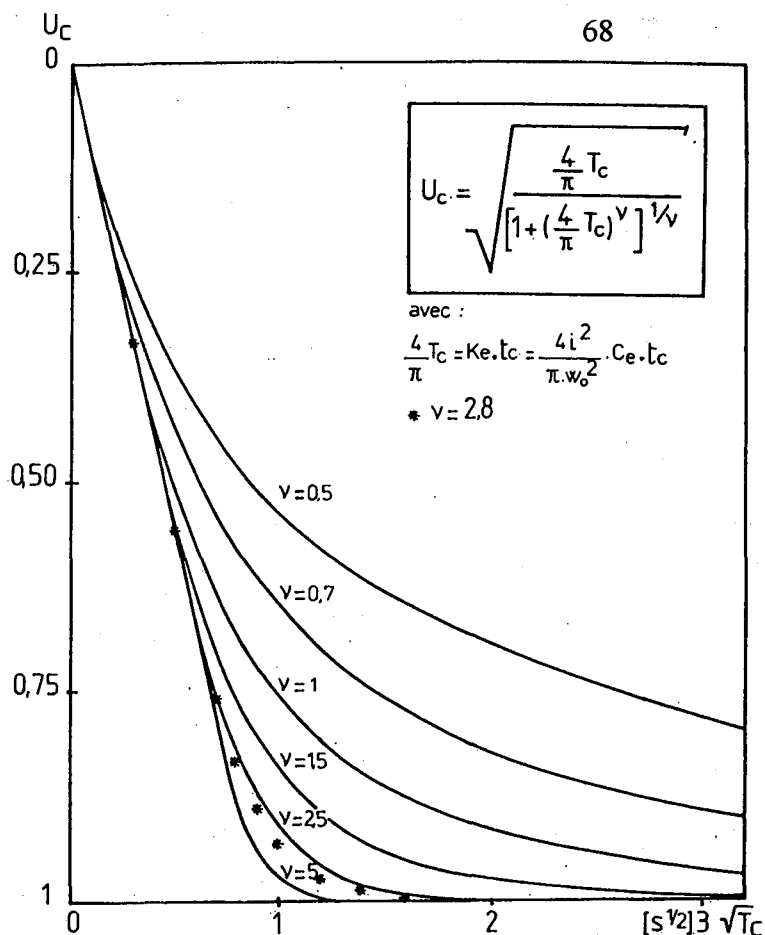


Fig. 21. Modèle empirique : diagramme théorique  $U_c = f(T_c^{0.5})$

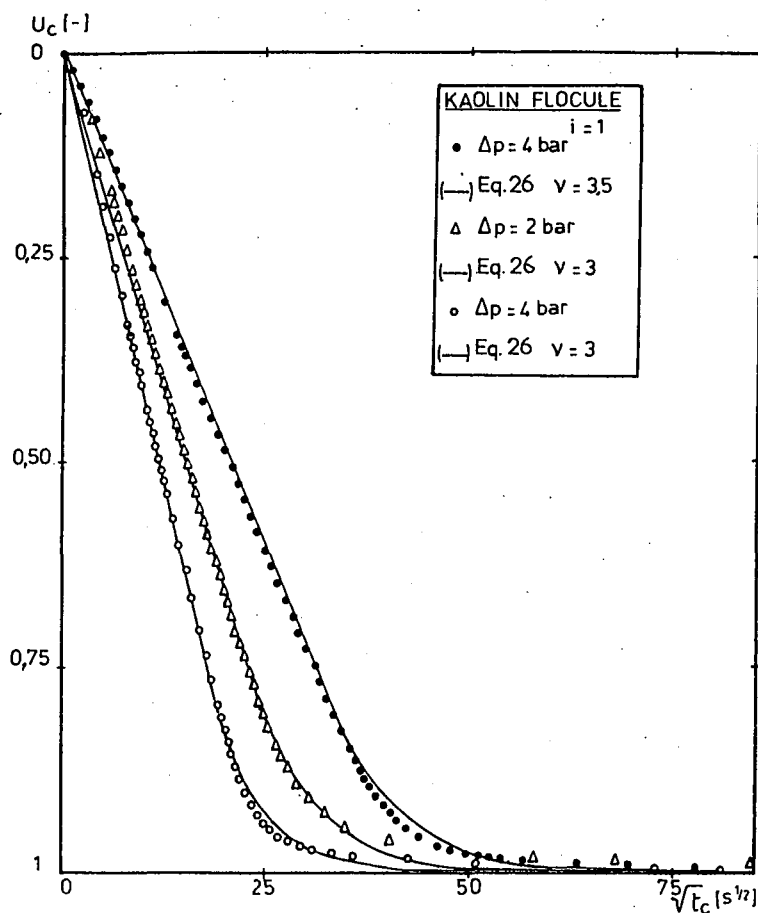


Fig. 22. Illustration expérimentale de l'équation semi-théorique  $U_c = f(tc^{0.5})$ . Modélisation du kaolin floculé.

### 3.6. Approche phénoménologique

Les précédents modèles bien que rigoureux dans leur forme sont d'une utilisation pratique difficile car ils nécessitent de poursuivre l'expérimentation pendant la phase de compression secondaire ce qui présente peu d'intérêt lorsque l'on cherche une déshydratation rapide. Dans ce cas, nous proposons [2] une représentation phénoménologique globale de la forme :

$$U_c = 1 - \exp(-K_c \cdot t_c)^{\nu'} \quad (28)$$

un développement en série de Taylor limité au 1<sup>er</sup> terme donnerait pour  $t_c$  petit :

$$U_c \cong K_c t_c^{\nu'}$$

Il est clair que pour les valeurs de  $t_c$  petites, la formulation (28) inclut le modèle semi-théorique précédemment développé, issu des considérations initiales de Sivaram et Swamee. La généralisation de ce modèle conduit aux expressions établies sur les bases théoriques de Terzaghi et de Taylor lorsque l'on prend  $\beta = 1$ .

#### 3.6.1. Partie expérimentale

Le pressage dans les Industries Agricoles et Alimentaires est souvent une étape de pré-déshydratation qui facilite la phase de séchage ultérieure. Par exemple, l'opération de compression de la luzerne permet de réduire d'environ 28 % la quantité d'eau à éliminer [15]. Le traitement des boues résiduelles domestiques ou industrielles comprend également dans de nombreux cas, une opération de pressage. Nous avons considéré trois types de produits : de la luzerne broyée, de la pulpe de betteraves et des boues résiduelles floculées. Le modèle phénoménologique, équation (28), dans ces trois cas (figures 24 à 26) représente de façon satisfaisante la cinétique de pressage. Les figures 24 et 25 permettent d'établir la comparaison entre les résultats calculés avec les deux modèles.

### 4 LE COEFFICIENT DE COMPRESSION COMME GRANDEUR PREVISIONNELLE

Le plus souvent, à l'échelle industrielle, l'opération d'élimination d'eau est limitée à la phase de compression primaire. A priori, cette phase semble suffisamment bien modélisable pour la représentation :

$$U_c = \sqrt{K_e} \cdot \sqrt{t_c}$$

ce qui revient à négliger la compression secondaire. La déshydratation secondaire, représentée par les queues de courbes  $U_c = f(\sqrt{t_c})$  est très longue et conduit à un gain de siccité très faible.

Aussi, on comprend que l'utilisateur puisse négliger en première approximation la fraction d'humidité éliminée par compression secondaire.

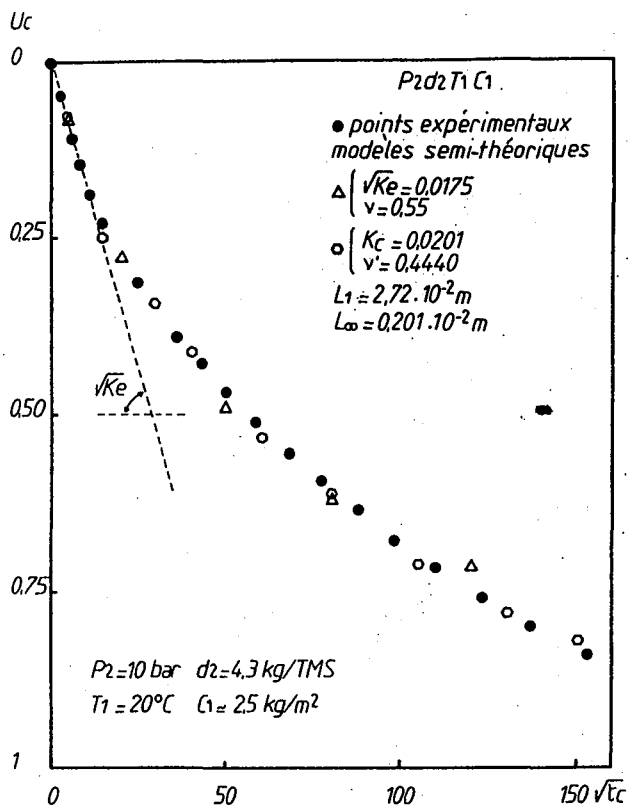


Fig. 24. Modélisation du pressage des boues résiduaires digérées : modèles empiriques.

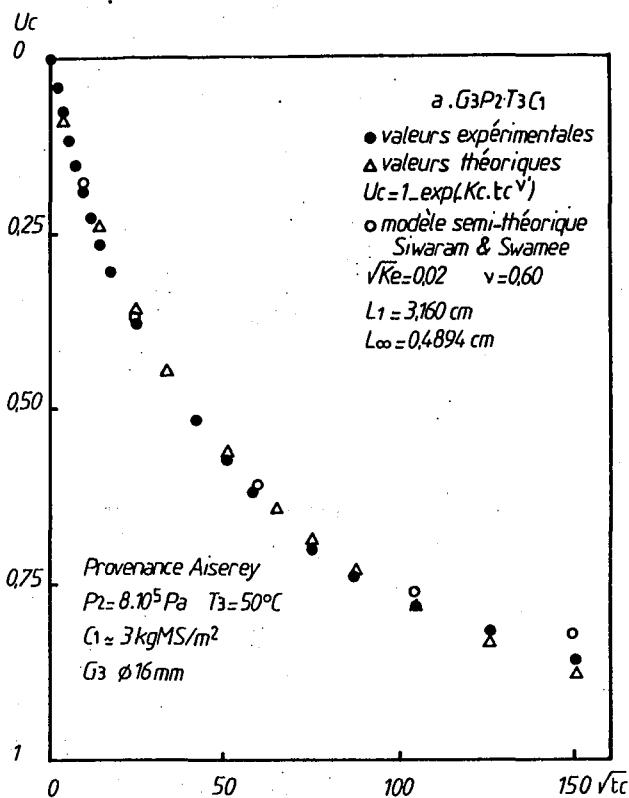


Fig. 25. Modélisation du pressage des pulpes de betteraves.

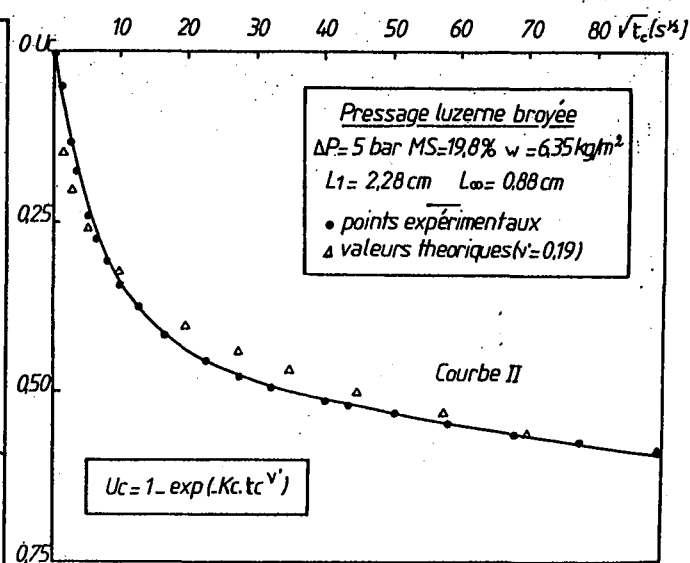
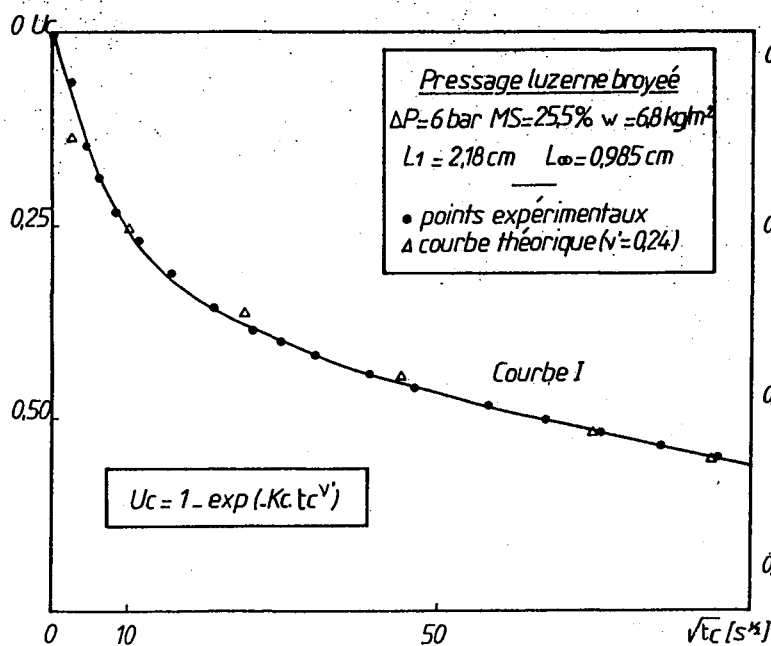


Fig. 26a. et 26b. Modélisation du pressage de la luzerne broyée.

4.1. Les diverses formes explicites du « coefficient de compression »

Incontestablement, cette grandeur a été initialement introduite en mécanique des sols sous le nom de coefficient de consolidation, noté  $C_V$  et explicité par Terzaghi [5]. En s'inspirant des considérations de Terzaghi [4] et de Gibson [16], Shirato [8] propose un

coefficient de consolidation modifié noté  $C_e$ , équivalent à  $C_V$ . Plus récemment, Kormendy [17] dans une théorie du pressage tridimensionnel définit un coefficient de pressage dont l'expression s'écarte peu des deux précédentes.

Le tableau 4 permet d'établir une comparaison des diverses expressions des coefficients mentionnés ci-dessus.

Variabes	Coefficient de Pressage Kormendy 1974	Coefficient de Consolidation Terzaghi 1925	Coefficient de Consolidation modifié ; Shirato 1970
$\epsilon_x$	$C = -\frac{1-\epsilon_x}{\mu\alpha} \left[ \frac{1-\epsilon_x}{1-\epsilon_0} \right]^2 \cdot \frac{dp_s}{d\epsilon_x}$	$C_v = -\frac{1-\epsilon_0}{\mu\alpha} \cdot \frac{dp_s}{d\epsilon_x}$	$C_e = -\frac{\rho_s^2 (1-\epsilon_x)^3}{\mu\alpha} \cdot \frac{dp_s}{d\epsilon_x}$
$e_x$	$C = -\frac{1+e_0}{\mu\alpha} \left[ \frac{1+e_0}{1+e_x} \right] \cdot \frac{dp_s}{de_x}$	$C_v = -\frac{1+e_x}{\mu\alpha} \cdot \frac{dp_s}{de_x}$	$C_e = -\frac{\rho_s^2}{\mu\alpha(1+e_x)} \cdot \frac{dp_s}{de_x}$
dimension	$\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$	$\frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \cdot \left[ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right]^2$

Source : [17].

Tableau 4. Expressions des coefficients de consolidation et de pressage relevées dans la littérature.

#### 4.2. Approche simplissime

Dans la représentation  $Uc$  vs  $\sqrt{t_c}$  des résultats expérimentaux,  $\sqrt{Ke}$  est la pente de la tangente à l'origine de la loi  $Uc = \sqrt{Ke} \cdot \sqrt{t_c}$ . A 10 % près, toute relation expérimentale entre deux grandeurs mesurables, dans un domaine de variation limité, peut être représentée par une fonction puissance [18]. La généralisation de cette méthode permet d'écrire :

$$K_e = Cte \cdot (\Delta P)^j \cdot (\mu)^k \cdot (w)^\ell \quad (29)$$

Ce modèle est un modèle simplissime local si l'on considère l'évolution du système autour de l'état caractérisé par l'indice 1. Dans ce cas, on écrira :

$$\frac{K_e}{K_{e1}} = \left( \frac{\Delta P}{\Delta P_1} \right)^j \cdot \left( \frac{\mu}{\mu_1} \right)^k \cdot \left( \frac{w}{w_1} \right)^\ell \quad (30)$$

Cette méthode a été appliquée à la compression des boues résiduaire floculées, prélevées à la station d'épuration de Nancy-Maxéville ; le conditionnement est réalisé par injection d'un polyélectrolyte cationique Floerger FO 115 suivi d'un égouttage de 10 minutes sur toile métallique de maille de 400  $\mu\text{m}$ . La boue égouttée est ensuite déshydratée dans la cellule de compression (figure 11) suivant le plan d'expériences présenté au tableau 5.

Essai	$\Delta P$ (Pa)	$w$ (kg/m <sup>2</sup> )	$\mu$ (Pa.s)	$\sqrt{K_e}$ (s <sup>-1/2</sup> )	$\nu$	$K_c$ (s <sup>-<math>\nu'</math></sup> )	$\nu'$
P <sub>1</sub> d <sub>2</sub> T <sub>1</sub> C <sub>1</sub>	4.10 <sup>5</sup>	2,61	1,05.10 <sup>-3</sup>	1,56.10 <sup>-2</sup>	0,65	2,20.10 <sup>-2</sup>	0,44
P <sub>2</sub> d <sub>2</sub> T <sub>1</sub> C <sub>1</sub>	8.10 <sup>5</sup>	2,66	1,05.10 <sup>-3</sup>	1,75.10 <sup>-2</sup>	0,60	2,01.10 <sup>-2</sup>	0,44
P <sub>3</sub> d <sub>2</sub> T <sub>1</sub> C <sub>1</sub>	16.10 <sup>5</sup>	2,79	1,05.10 <sup>-3</sup>	1,92.10 <sup>-2</sup>	0,60	3,27.10 <sup>-2</sup>	0,40
d <sub>2</sub> T <sub>1</sub> C <sub>1</sub> P <sub>2</sub>	8.10 <sup>5</sup>	2,52	1,02.10 <sup>-3</sup>	1,92.10 <sup>-2</sup>	0,60	2,73.10 <sup>-2</sup>	0,43
d <sub>3</sub> T <sub>1</sub> C <sub>1</sub> P <sub>2</sub>	8.10 <sup>5</sup>	2,38	1,12.10 <sup>-3</sup>	1,67.10 <sup>-2</sup>	0,60	1,29.10 <sup>-2</sup>	0,51
T <sub>2</sub> C <sub>1</sub> P <sub>2</sub> d <sub>2</sub>	8.10 <sup>5</sup>	2,42	0,83.10 <sup>-3</sup>	1,27.10 <sup>-2</sup>	0,60	2,59.10 <sup>-2</sup>	0,43
T <sub>3</sub> C <sub>1</sub> P <sub>2</sub> d <sub>2</sub>	8.10 <sup>5</sup>	2,26	0,60.10 <sup>-3</sup>	2,50.10 <sup>-2</sup>	0,60	3,21.10 <sup>-2</sup>	0,42
C <sub>2</sub> P <sub>2</sub> d <sub>2</sub> T <sub>1</sub>	8.10 <sup>5</sup>	4,12	1,05.10 <sup>-3</sup>	1,14.10 <sup>-2</sup>	0,65	1,00.10 <sup>-2</sup>	0,51
C <sub>3</sub> P <sub>2</sub> d <sub>2</sub> T <sub>1</sub>	8.10 <sup>5</sup>	6,93	1,05.10 <sup>-3</sup>	0,72.10 <sup>-2</sup>	0,70	0,65.10 <sup>-2</sup>	0,51
P <sub>3</sub> d <sub>2</sub> T <sub>1</sub> C <sub>2</sub>	16.10 <sup>5</sup>	4,85	1,05.10 <sup>-3</sup>	0,99.10 <sup>-2</sup>	0,70	1,20.10 <sup>-2</sup>	0,48

Tableau 5. Plan d'expérience et modélisation du pressage de boue résiduaire digérée ( $K_e$  → modèle empirique de Sivaram et Swamee ;  $K_c$  → modèle empirique proposé).

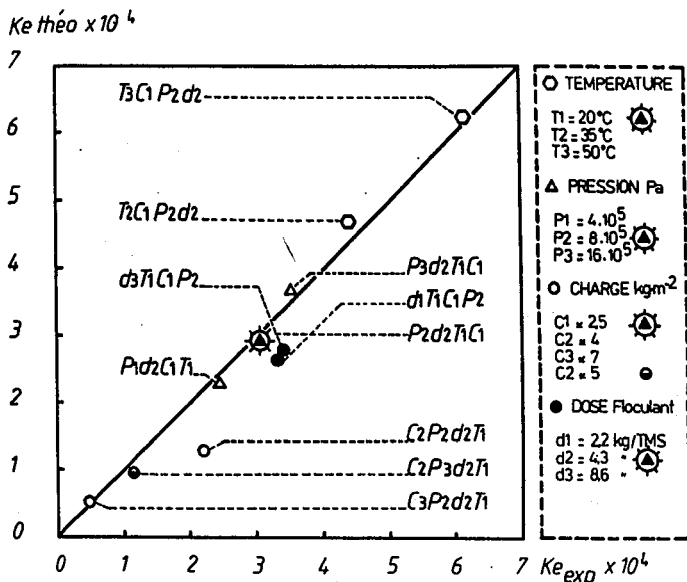


Fig. 27. Corrélation entre les coefficients de compression mesurés et calculés de la boue résiduaire digérée.

Les paramètres opératoires sont : la pression P, la température T, la charge C et la dose de floculant d. Les valeurs prises par ces paramètres sont précisées à la figure 27.

Par régression linéaire, le traitement des données du tableau 5 permet de déterminer les valeurs des exposants j, k, l et de la constante de l'équation (29). La relation de proportionnalité entre Ke et les grandeurs opératoires s'écrit alors :

$$K_{e\text{ théo } 1} = 9,4 \times 10^{-9} \cdot \frac{1}{\Delta P^{-0,4} \cdot \mu \cdot w^2} \quad (31)$$

L'adéquation entre les valeurs de ce coefficient Ke calculé et les coefficients Ke mesurés est représentée à la figure 27.

Les valeurs des exposants et de la constante de l'équation (29) peuvent être approchées, par ailleurs, au moyen des théories de filtration et de compression [8]. En utilisant les approximations conventionnelles généralement admises en filtration :

- variations de l'indice de vide local [4] :

$$e_x = e_1 - e_2 \ln P_s \quad (32)$$

- variations de la résistance spécifique locale [19]

$$\alpha_x = \alpha_{x1} P_s^n \quad (33)$$

avec une résistance spécifique globale pour les gâteau compressibles [20] :

$$\bar{\alpha} = (1-n) \alpha_x = \alpha_1 \cdot P_s^n \quad (34)$$

En substituant dans l'équation (20') m<sub>v</sub> donné par (8) et e<sub>x</sub> fourni par (32), le coefficient de compression primaire Ce, supposé constant, prend la forme :

$$C_e = \frac{\rho_s P_s}{\mu \cdot \alpha_x \cdot e_2} \quad (35)$$

expression de Ce qui néglige totalement la compression secondaire.

En considérant que la pression appliquée sur le

gâteau correspond à la pression du solide ( $\Delta P \equiv P_s$ ), la combinaison des relations (35), (33) et (34) conduit à :

$$C_e = \frac{\rho_s \cdot \Delta P \cdot (1-n)}{\mu \cdot e_2 \cdot \alpha} = \frac{-\rho_s (n-1)}{\mu \cdot e_2 \cdot \alpha_1 \Delta P^{(n-1)}} \quad (36)$$

soit d'après l'équation (27) :

$$K_{e\text{ théo }, 2} = \frac{4 i^2}{\pi \cdot w^2} \cdot \frac{\rho_s \cdot \Delta P \cdot (1-n)}{\mu \cdot e_2 \cdot \bar{\alpha}} \quad (37)$$

L'équation (37) peut s'écrire aussi :

$$k_{e\text{ théo }, 2} = \frac{4 i^2 \rho_s (1-n)}{\pi \cdot e_2 \cdot \alpha_1} \cdot \frac{1}{\mu \cdot w^2 \cdot \Delta P^{n-1}} \quad (37')$$

L'identification des équations (31) et (37') fournit ; n-1 ≡ j ≡ -0,4 soit n = 0,6 ce qui est une valeur de l'indice de compressibilité tout à fait admissible pour des boues digérées [21].

Par contre, la valeur de la résistance spécifique qui peut être approchée à l'aide de l'équation (37) :

$$\bar{\alpha} = \frac{4 i^2}{\pi w^2} \cdot \frac{\rho_s \cdot \Delta P \cdot (1-n)}{\mu \cdot e_2 \cdot K_{e\text{ théo }, 2}} \quad (38)$$

donne par exemple pour l'essai P<sub>1</sub> d<sub>2</sub> C<sub>1</sub> T<sub>1</sub> où :

P<sub>1</sub> = 4 × 10<sup>5</sup> Pa ; C<sub>1</sub> = W = 2,5 kg/m<sup>2</sup> ; e<sub>2</sub> = 0,4 ;  
 μ = 10<sup>-3</sup> Pa.s  
 ρ<sub>s</sub> = 2420 kg/m<sup>3</sup> ; n = 0,6 ; K<sub>e</sub> = 2,6 × 10<sup>-4</sup> s<sup>-1</sup> ;  
 la valeur  $\bar{\alpha}$  = 7,6 × 10<sup>14</sup> m/kg.

Cette valeur ne correspond pas à celles attendues pour des boues digérées floculées car, avant compression, nous avons obtenu, sur cellule de filtration classique,  $\bar{\alpha} \cong 10^{11}$  m/kg sous 0,5 bar. Par contre, cette valeur de résistance spécifique convient tout à fait pour des boues digérées non floculées [21].

Cette constatation est à rapprocher des observations déjà réalisées sur la compression de suspensions de bentonites et d'eau résiduaire industrielle. En effet, Leclerc et al [22] ont observé qu'après une phase rapide de « précompression » le coefficient Ce correspondant aux boues floculées prenait la valeur de celui des boues non floculées. Ceci semble confirmer l'hypothèse selon laquelle la compression à pression relativement forte détruit les floccs. La déshydratation des suspensions diluées floculées se ferait donc en deux temps : un égouttage sous faible pression pour bénéficier de la forte perméabilité des amas de floccs non comprimés, suivi après élimination du maximum de liquide par une déshydratation d'une boue à structure semi-solide, l'opération étant gouvernée par une forte résistance spécifique caractéristique des gâteau de particules non floculée ou défloculées.

La résistance spécifique α calculée à partir de l'équation (38) correspond à une détermination de Ke dans les premiers instants de la compression ( $\sqrt{K_e}$  est la pente à l'origine de la représentation U<sub>c</sub> vs  $\sqrt{t_c}$ ), par conséquent, le phénomène de défloculation se produit très rapidement.

D'un point de vue pratique, les résultats de compression peuvent, grâce à la relation (38), donner rapi-

dement accès à la résistance spécifique de la boue défloculée. Nous disposons ainsi d'une méthodologie pour déterminer ce paramètre indispensable pour rechercher l'amélioration de la compression.

## CONCLUSION

La modélisation de la déshydratation par pressage à partir de la combinaison d'éléments analogiques (ressort, amortisseur, frotteur) rend bien compte du phénomène de compression des gâteaux de filtration et des produits semi-solides. Ces modèles directement issus de la mécanique des sols, sont d'un emploi peu commode en filtration où l'on recherche généralement un pressage rapide caractérisé essentiellement par la phase de compression hydrodynamique (primaire). C'est pourquoi les chercheurs dans le domaine de la filtration ont développé depuis une dizaine d'années des modèles simplifiés permettant un accès aisé au coefficient de compression primaire et à la résistance spécifique de la boue floculée. Cette dernière grandeur qui n'est pas accessible par filtration (boues semi-solides) correspond à un état de défloculation qui se produirait dès le début de la compression. Cette approche réalise un progrès dans la voie de l'amélioration des conditions de pressabilité de telles boues car elle peut fournir une évaluation rationnelle de l'efficacité des adjuvants de compression. ■

## NOMENCLATURE

Symboles et unités usuelles	dimensions
$A$	aire de la surface filtrante ( $m^2$ ) $L^2$
$B$	fraction du taux de compression obtenu par compression secondaire (-)
$C$	charge par unité de surface de drainage ( $M.L^{-2}$ )
$C_e$	coefficient de compression ( $m^2.s^{-1}$ ) ( $L^2.T^{-1}$ ), ( $M.L^3$ ) ou ( $L^2.T^{-1}$ )
$C_v$	coefficient de consolidation ( $L^2.T^{-1}$ )
$d$	dose d'adjuvant ( $kg/tMS$ )
$e_1$	constante dans la relation $e = f(\Delta P)$ (-)
$E$	constante de raideur ; corps idéal de KELVIN-VOIGT ( $M.L^{-1}.T^{-2}$ )
$e_2$	constante dans la relation $e = f(\Delta P)$ (-)
$e$	indice de vide (-)
$e_0$	indice de vide initial (-)
$e_\infty$	indice de vide à compression infinie (-)
$G$	coefficient de frottement visqueux - élément de KELVIN-VOIGT (-)
$g$	accélération de la pesanteur ( $L.T^{-2}$ )
$i$	nombre de surfaces de drainage (-)
$j$	exposant dans la relation n° 29 (-)
$K$	coefficient dans la loi de filtration de Ruth ( $L^2.T^{-1}$ )
$K_e$	coefficient de compression ( $T^{-1}$ )
$K_c$	coefficient de compression moyen ( $T^{-1}$ )
$k$	exposant dans la relation n° 29 (-)
$L$	épaisseur de produit soumis à la compression (cm) (L)
$L_0$	épaisseur initiale de produit soumis à la compression (cm) (L)
$L_1$	épaisseur réelle à $t_c = 0$ (cm) (L)
$L_2$	épaisseur théorique finale (cm) (L)

$L_\infty$	épaisseur à compression infinie (cm) (L)
$l$	exposant dans la relation n° 29 (-)
$M$	charge initiale (M)
$m$	rapport massique gâteau humide/gâteau sec (-)
$m_v$	coefficient de changement de volume (Kg.m.s) (M.L.T.)
$n$	coefficient de compressibilité (-)
$\Delta P$ ou $P$	pression appliquée (Pa) ( $M.L^{-1}.T^{-2}$ )
$P_s$	pression du solide (Pa) ( $M.L^{-1}.T^{-2}$ )
$P_{s0}$	pression initiale du solide (Pa) ( $M.L^{-1}.T^{-2}$ )
$P_Q$	pression du liquide interstitiel (Pa) ( $M.L^{-1}.T^{-2}$ )
$P_{Q_0}$	pression initiale du liquide interstitiel (Pa) ( $M.L^{-1}.T^{-2}$ )
$s, s_i$	teneur massique de la suspension en matières solides (-)
$T$	température ( $^{\circ}C$ ) (K)
$T_c$	variable réduite correspondant à $t_c$ (-)
$t$	temps (s) (T)
$t_c$	temps de compression (s) (T)
$t_f$	temps de filtration (s) (T)
$t_0$	temps initial (s) (T)
$t_1$	temps correspondant à la transition filtration-compression (T)
$t_\infty$	temps infini (T)
$U_c$	taux moyen de compression exprimé en fonction de $L_1$ (-)
$u_L$	vitesse d'écoulement du liquide ( $L.T^{-1}$ )
$u_x$	vitesse d'écoulement du liquide interstitiel ( $L.T^{-1}$ )
$V$	volume total
$V_s$	volume de solide ( $L^3$ )
$w$	masse de solide déposé par unité de surface filtrante ( $M.L^{-2}$ )
$w_x$	masse de solide par unité de surface filtrante à la distance $x$ du support filtrant ( $M.L^{-2}$ )

## Lettres grecques

$\alpha$	résistance spécifique ( $L.M^{-1}$ )
$\bar{\alpha}$	résistance spécifique moyenne ( $L.M^{-1}$ )
$\alpha_x$	résistance spécifique du liquide interstitiel ( $L.M^{-1}$ )
$\alpha_1$	résistance spécifique ( $L.M^{-1}$ )
$\beta$	coefficient de compression secondaire $\equiv \frac{1}{m_v.E}$
$\epsilon$	porosité (-)
$\epsilon_x$	porosité à l'épaisseur $x$ (-)
$\eta$	coefficient de consolidation secondaire ( $T^{-1}$ )
$\mu$	viscosité dynamique du filtrat (Pa.s) ( $M.L^{-1}.T^{-1}$ )
$\nu$	indice de compression secondaire (-)
$\nu'$	indice moyen de compression (-)
$\pi$	constante classique (-)
$\rho$	masse volumique du filtrat ( $M.L^{-3}$ )
$\rho_L$	masse volumique du liquide ( $M.L^{-3}$ )
$\rho_s$	masse volumique du solide ( $M.L^{-3}$ )
$\tau$	constante d'intégration (-)

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Rivet. Guide de la séparation solide-liquide, Société Française de Filtration Idexpo, 1981.
- [2] S. Rebouillat. *Déshydratation par filtration-pressage*, Thèse de Docteur-Ingénieur, INPL, Nancy, 1983.
- [3] L. Suklje. Rheological aspects of soil mechanics, Wiley, 1969.
- [4] K. Terzaghi, R.B. Peck. Soils mechanics in engineering practice, Wiley, 1948.
- [5] K. Terzaghi. Erdbeumechanik auf boden physikaliseher grundlage, Deuticke, Leipzig, 1925.
- [6] B. Felix. *Le fluage et la consolidation unidimensionnelle des sols argileux*, Laboratoire des Ponts et Chaussées, Rapport de recherche, N° 94, 1980.
- [7] R.W. Taylor. Fundamentals of soil mechanics, Wiley, 1962.
- [8] M. Shirato, T. Murase and al. *Fundamental analysis for expression under constant pressure*, Filtration & séparation, 8, 1970, 277 - 282.
- [9] M. Shirato, T. Murase and al. *Calculation of consolidation period in expression operations*, Journal Chem. Eng. of Japan, 7, 3, 1974, 229-231.
- [10] D. Leclerc, S. Rebouillat, Dewatering by expression, Proceedings of Nato Advanced Study Institute. « *Mathematical model and design methods in solid-liquid separation* », Lagos, Portugal, 1982.
- [11] B. Sivaram, K. Swamee, Journal Japanese Soc. Soil. Fund. Eng., 17, 1977, 48.
- [12] M. Shirato, T. Murase and al. *Industrial expression equation for semi-solid materials of solid-liquid mixture under constant pressure*, Jour. Chem. Ing. of Japan, 12, 1, 1979, 51 - 55.
- [13] D. Leclerc, S. Rebouillat. Mechanical dewatering of flocculated sludges. Symposium International « Economic strategy in solid-liquid separation process ». Société Belge de Filtration, Louvain, 1981.
- [14] S. Rebouillat, D. Leclerc, G. Baluais. *Filtration et pressage. Etude du comportement à la compression mécanique de suspensions flocculées*. Symposium FILTRA 82, Paris 1982.
- [15] P. Mafart. *Coût énergétique des opérations d'élimination d'eau*, CDIUPA, Technique et Documentation, 1981.
- [16] R.E. Gibson, K.Y. Lo, *A theory of consolidation for soils exhibiting secondary compression*, Norwegian Geotech. Inst., Oslo, 41, 1961, 3-15.
- [17] I. Kormendy. *Contribution to the dimensional pressing-theory and its one dimensionnal application*, Acta Alimentaria, 3, 1974, 93 - 110.
- [18] P. Le Goff. *Energétique industrielle*, Tome 2, Technique et Documentation, Lavoisier, Paris, 1980.
- [19] D.R. Sperry. *Met. and Chem. Eng.* 15, 1916, 198.
- [20] D. Leclerc, P. Le Lec, P. Le Goff. La filtration sur support, *Techniques de l'ingénieur A 5500*, 1981, 1 - 19.
- [21] L. Bovijn. *Déshydratation sur filtre rotatif des boues d'épuration d'eau*. Symposium International de Filtration, Louvain, 1973, 3 - 53.
- [22] D. Leclerc, E. Minery. *Comparaison du comportement des boues flocculées et non flocculées lors de la déshydratation par compression mécanique*, Tribune Cebedeau, 433, 1980, 441 - 449.



---

## *Chapitre*

### *trois*

---

## **La Compression Unidirectionnelle à Déformation Constate (CDC)**

**De la CPC à la CDC les motivations et les objectifs sont :**

- 1. La nécessité de prendre en compte la vitesse de déformation du milieu saturé.**
- 2. L'imprévisibilité de l'effet de « choc » engendré par l'application d'une pression soudaine.**
- 3. Le superflu de la phase de compression secondaire lors de la compression de produits biologiques et plus généralement pour les opérations industrielles.**
- 4. La difficulté, pour les produits biologiques, d'apprécier la densité réelle du solide.**

### **3.1 APPAREILLAGE – METHODES – MATERIAUX ET CONDITIONS OPERATOIRES**

#### **3.1.1 APPAREILLAGE**

##### **3.1.1.1 Les cellules de compression multi-mode MMCC© et MMCC©-II**

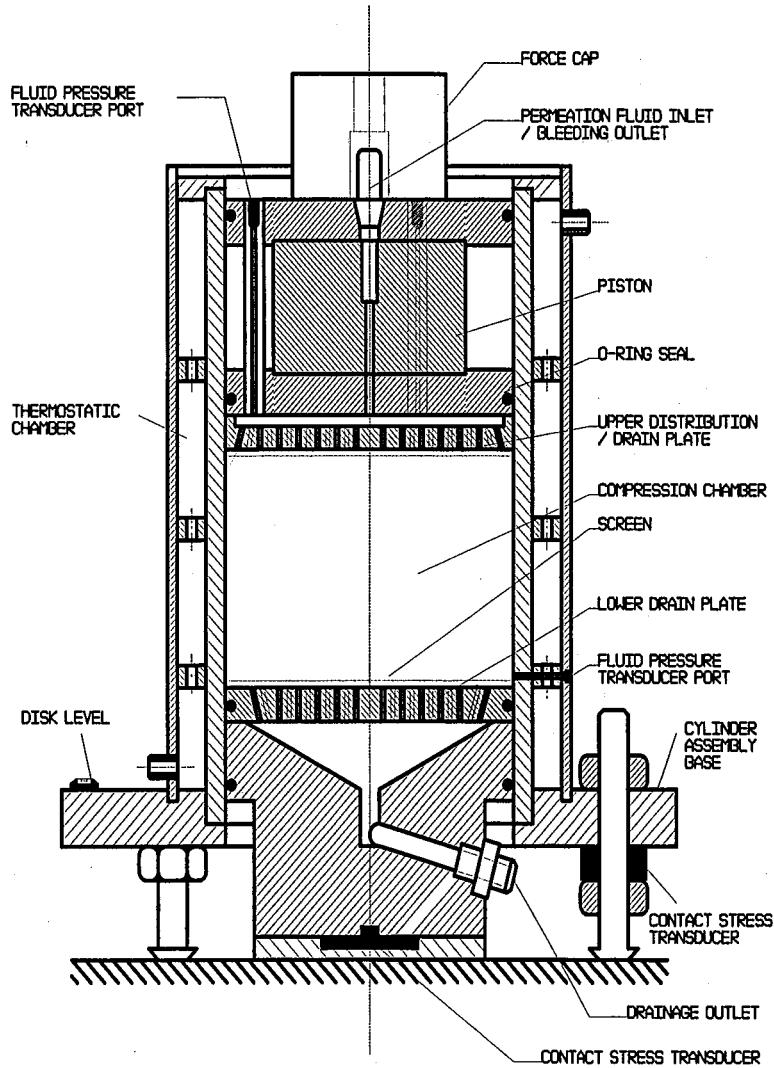
Deux cellules de compression ont été construites dans le cadre de ce travail. Les figures 3.1 et 3.2 en donnent une représentation schématique. Leurs caractéristiques sont fournies dans le paragraphe qui suit.

La cellule MMCC© a été utilisée pour toutes les expériences rapportées dans ce mémoire. La cellule MMCC©-II a été construite pour la compression axiale à écoulement radial central qui ne pas fait l'objet de ce mémoire. Seule la compression radiale à écoulement périphérique en continu, c'est à dire en unité pilote, TSPU©, est rapportée au chapitre 4.



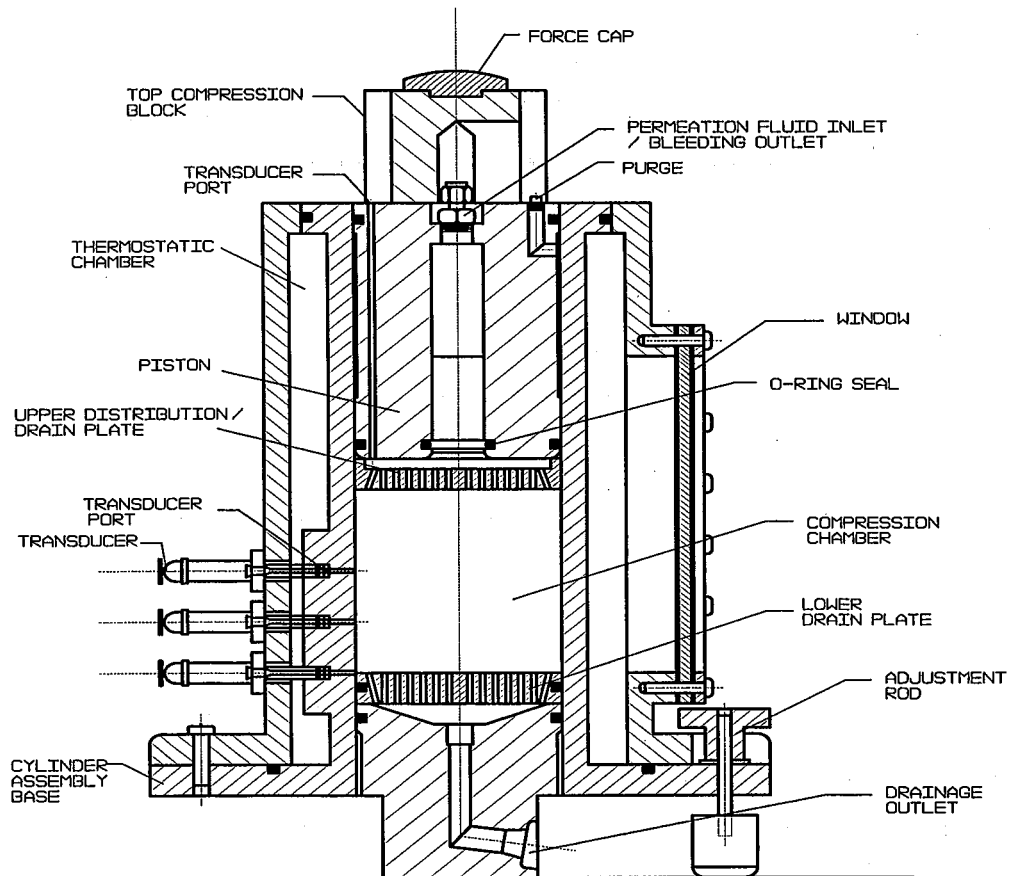
C'est dans le cadre de notre séjour post-doctoral à l'université du Massachusetts que nous avons construit une nouvelle cellule dénommée « MMCC© », « Multi-Mode Compression Cell© », cellule de compression multi-mode; ceci pour insister sur le caractère plus universel de cet équipement pouvant fonctionner sous une pression constante ou variable, sous un gradient de pression ou à un taux de déformation constant ou variable. Equipée aussi bien au niveau du piston que de la surface drainante de capteurs de forces et de pressions, également disposés le long de la chambre de compression à diverses hauteurs du gâteau, cette cellule est toujours unique. L'évolution de la hauteur du milieu comprimé peut être imposée ou suivie et mesurée avec précision et directement informatisée. La chambre de compression est équipée d'un dispositif de régulation de température, encore rare dans ce domaine de recherche, alors que le traitement de produits biologiques le rend indispensable. Au total équipé de 9 capteurs de pressions hydrauliques, de 3 capteurs de force et de 2 capteurs de distance et de déplacement, le dispositif MMCC© demeure l'une des cellules parmi les plus instrumentées. Une deuxième génération, MMCC© II, a été construite plus tard avec la possibilité d'effectuer de la compression axiale à écoulement radial.

Ayant ainsi résolu les éventuels problèmes expérimentaux associés à des frictions trop grandes et ayant créé la première cellule MMCC©, d'un diamètre de 133 mm favorisant encore davantage la compression de couches minces, puisque d'une surface drainante environ 1.5 fois plus grande que celle du dispositif MINERY-REBOUILLAT, nous sommes en mesure d'exploiter une nouvelle banque de données expérimentales concernant un nouveau mode de compression mécanique. Dans un souci permanent de toujours réduire « le bruit de fond » que peuvent causer les frictions, nous avons adopté un système flottant au niveau de la surface drainante afin de désolidariser complètement la chambre de compression de la base de la cellule et ainsi de réduire les frictions à un niveau zéro lorsque les pièces mobiles sont lubrifiées, ceci à la précision des mesures près. Aujourd'hui à l'échelle du laboratoire, la surface drainante de la cellule MMCC© demeure la plus grande sachant que seul un pilote industriel de 200 mm de diamètre a été expérimenté dans le cadre de recherches à pression constante menées par l'université de Compiègne.



### MULTI-MODE COMPRESSION CELL

Figure 3.1 : MMCC© - Multi-Mode Compression Cell©  
Cellule de Compression Multi-Mode



### MULTI-MODE COMPRESSION CELL

Figure 3.2 : MMCC© II – Multi-Mode Compression Cell© II  
Cellule de Compression Multi-Mode© II

### 3.1.1.2 L'unité pilote de pressage à vis (TSPU©)

Lors de ce séjour post-doctoral au sein des équipes des professeurs H.G. SCHWARTZBERG et M. PELEG du département de génie alimentaire et chimique de l'université du Massachusetts, nous avons également conçu une unité pilote de pressage par vis. Cette unité est élaborée de manière à apprécier les phénomènes de compression axiale à évacuation radiale du liquide. Deux types de vis centrale ont été conçus, l'un à faible coefficient de compression axiale, LCR « Lower compression ratio », et l'autre à fort coefficient de compression axiale, HCR « Higher Compression Ratio ». La collecte du liquide peut être fractionnée grâce à un dispositif de séparation du fluide lors de sa sortie périphérique, ceci donnant accès aux performances et caractéristiques de compression des secteurs sélectionnés le long de la vis. Des capteurs de pression étant disposés à la périphérie de chaque secteur, la pression exercée par le solide en sortie de presse et son débit étant mesurés et enfin la pression et le débit imposés à l'entrée étant également connus, nous disposons de toutes les données nécessaires à la modélisation globale du comportement de la presse. D'un diamètre externe de 8 cm environ, d'une longueur de vis de 45 cm et pouvant tourner à une vitesse utile de 50 rotations par minute, cette presse à vis est capable d'un débit d'environ  $0.5\text{m}^3/\text{heure}$ . Elle constitue un pilote unique pour l'étude de la compression radiale en continu. Une photographie est fournie dans l'introduction de ce mémoire et la Fig. 3.3 en donne une représentation schématique (une version agrandie de cette figure se trouve au chapitre 4).

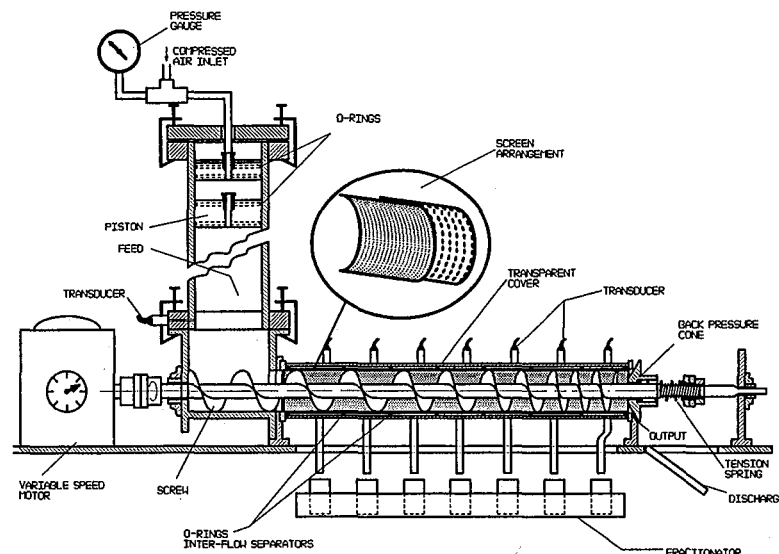


Figure 3.3 : (TSPU©) – Test Screw Press Unit©  
Unité pilote d'extrusion-pressage à vis

### 3.1.1.3 Equipement de perméation

Pour cette étude, les mesures classiques de perméation sont généralement effectuées directement à partir de la cellule MMCC©. Cependant un équipement spécifique de perméation a été mis au point. Nous en présentons un schéma ci-dessous, Fig. 3.4.

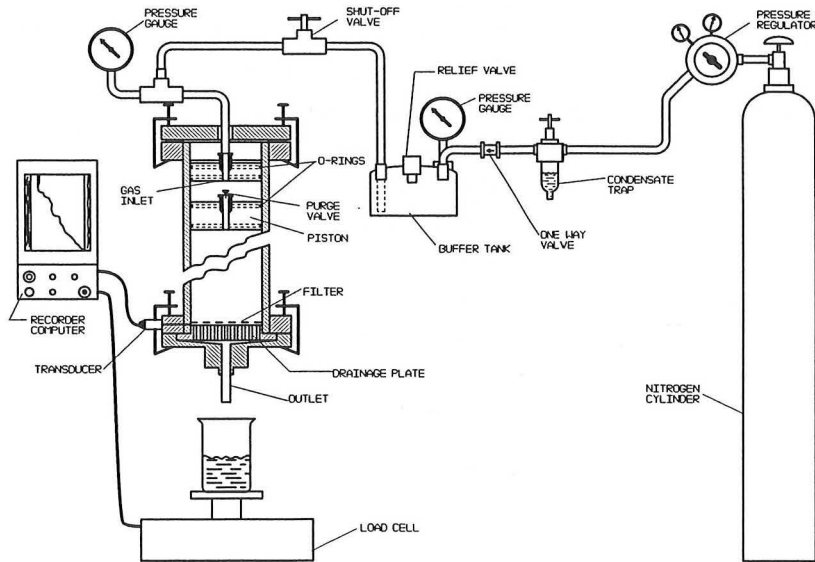
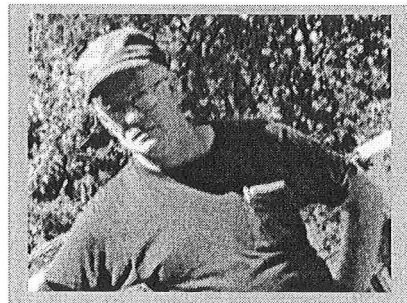


Figure 3.4 : Dispositif expérimental de perméation

Alors que nous venons de voir l'illustration des trois principaux équipements utilisés lors de ces travaux de recherche, je souhaite remercier Dick KOLOSEWICZ, ci-contre, technicien de l'université du Massachusetts, pour m'avoir été d'une aide précieuse lors de la réalisation de ces pièces maîtresses. Les heures que nous avons passées ensemble, pour leur conception, leur fabrication (tournage, fraisage, assemblage... ) et leur évaluation, demeurent inoubliables.



### 3.1.2 MATERIAUX

Cinq types de matériaux ont été utilisés. Ce sont tous des produits biologiques. Leur choix n'a pas été laissé au hasard. Une description complète de leurs caractéristiques est disponible dans les publications P6, P7, P8, P19 et P10. Un résumé des propriétés des trois principaux produits utilisés est fourni dans la section suivante. Voici quelques éléments supplémentaires :

#### **Protéines laitières coagulées : notations C ou Cc**

- Les protéines laitières coagulées sont produites selon la méthode brevetée du Professeur ROSENAU, à l'époque membre de notre équipe de recherche à l'université du Massachusetts. Ce procédé permet la fabrication de fromage à usage diététique et médical. Le précipité obtenu a une forte teneur en solide de 35% environ ce qui en fait un semi-solide très adapté à la caractérisation au niveau de sa résistance structurelle davantage qu'au niveau de sa résistance hydrodynamique vis-à-vis de l'écoulement. Les notations adoptées pour ce produit sont C pour l'étude en cellule-piston et généralement Cc pour les études en pressage à vis. Ce sont bien entendu les mêmes produits.

#### **Pulpes de betteraves : notation F**

- Les pulpes de betteraves se présentent sous forme de parallélépipèdes relativement minces indépendants et sans jus libre entre ces éléments, seul le liquide intercellulaire est exprimé. Leur structure est très élastique, d'où leur sélection pour notre programme en tant que matériaux viscoélastiques. Leur teneur en solide est d'environ 12% au départ. C'est un produit de grand intérêt quant à sa résistance structurelle et à l'aspect hydrodynamique.

#### **Airelles : notation Cr**

- Les airelles, petites baies rouges très populaires aux Etats-Unis pour la fabrication de jus de fruits riches en vitamine C et pour l'accompagnement de la dinde, plat de célébration des premiers immigrants (Thanksgiving), ont été utilisées, soit divisées en deux pour l'étude en cellule piston, soit broyées pour l'étude en continu par pressage à vis. Leur tendance à produire beaucoup de jus en fait un produit idéal pour l'aspect résistance à l'écoulement hydrodynamique en tant que semi-liquide. Sa teneur en solide au départ est de 10% environ.

Ont également été étudiées les pommes et la tourbe dont les propriétés à la relaxation sont intéressantes et discutées dans la publication P8.

Les trois principaux produits étudiés sont représentés sur la palette photographique ci-dessous (Photo. 3.1).

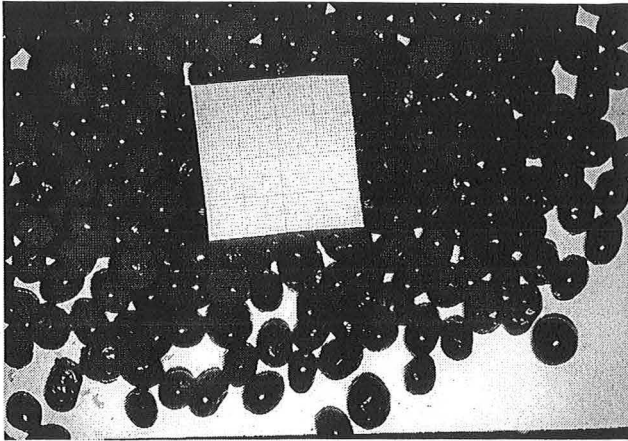
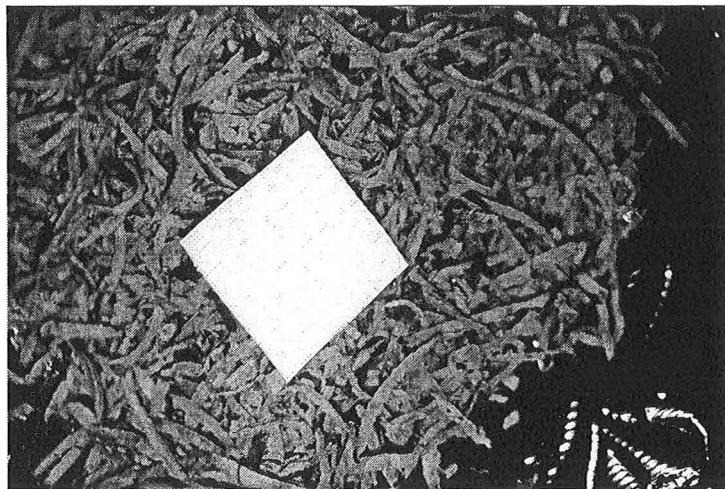
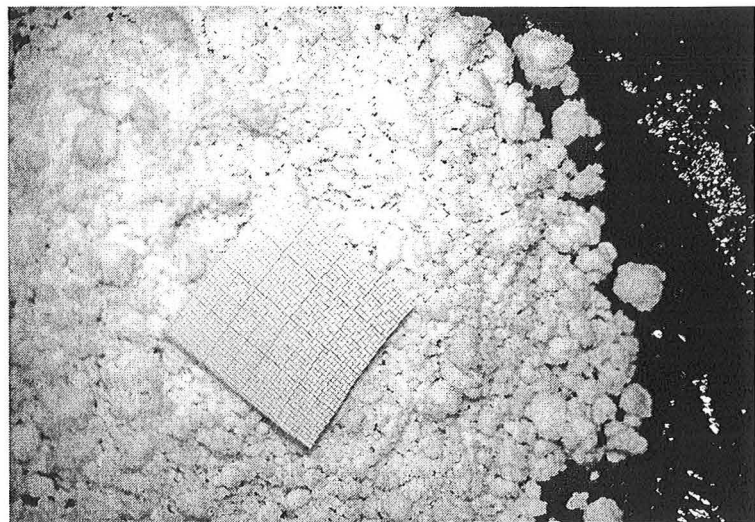


Photo. 3.1

Produit Cr, aïrelles



Produit F, pulpes de betteraves (cossettes)



Produit C ou Cc : Protéines lactières coagulées

### 3.1.3 METHODE

Ci-dessous, nous reproduisons les éléments essentiels de la conduite des expériences. Cet extrait de notre présentation au 6<sup>ème</sup> congrès mondial de la filtration tenu au Japon a été volontairement maintenu en anglais pour préserver l'esprit global de ce travail et de ses origines. Nous comptons sur la compréhension du lecteur.

A schematic drawing of the new expression cell is shown in Fig. 3.1. It consists of a 133.4 mm internal diameter, jacketed high performance acrylic cylindrical cell, a loading piston with a double O-ring low-friction seal system, an insertable drainage base and a perforated filter support plate.

The drainage assembly is also fitted with O-rings to prevent the sample extrusion along the inner surface of the chamber. An additional perforated distributor can be installed into the cell between the piston and the sample for permeability tests. The piston assembly contains a feed line for the injection of liquids during permeation tests; this line can also be used to drain the expelled liquid when a double or upper drainage test is conducted. The compaction chamber is jacketed to receive a coolant or a heating fluid for the expression of biological materials at controlled temperature or for heat accelerated tests. Three transducer ports are available at the top of the piston to measure the hydraulic pressure at the impervious plate level (here also referred as the no-flow surface), three additional miniature pressure sensors can be fitted at the bottom of the cell to measure the fluid pressure just above the filtration membrane. Transducer ports are also available on the periphery of the cell to measure that pressure along the vertical presscake axis. The compaction cylinder is mounted on a tripod; when frictional forces are recorded, one leg is replaced by a stress cell. An additional stress transducer can be fitted underneath the mobile drainage assembly to measure the bottom solid pressure. The advantage of mounting two stress transducers in the pedestal and the loading piston is to directly and independently measure stresses at both end of the specimen, which provides among other things a good reading of the friction and a second indirect measurement of the fluid pressure. The specimen is placed between the piston and the bottom drainage plate. This sample can be subjected to loading at constant pressure or at a constant rate of deformation of the upper surface. For this study, constant rates of strain were selected. Vertical deformation of the test specimen is produced by the movement of the ram drive of a rheometer, which is capable of providing a well controlled and wide range of speeds. The drive is fitted with a load cell capable of measuring forces up to 22.4 kN which corresponds to a vertical pressure of 1603 kPa at the piston level. Deformation of the sample during the expression is measured by the displacement transducer of an Instron® unit. All output signals are recorded and computerized using a graphic digitizing tablet or directly with a computer interface.

#### Testing Procedure

Before the sample was introduced into the cell, the inner surface, the piston O-rings and the drainage assembly O-rings were covered with a thin film of silicone vacuum grease in order to minimize frictions between the moving parts and the static cylinder. For all the expression tests, a plain weave nylon filter cloth, with calibrated 0.5 mm openings, was used to cover the perforated drainage plate to prevent direct extrusion and clogging. The compression-relaxation behavior of the empty cell was periodically recorded (see typical recording in publication P10) in order to take into account



potential deflection. No corrections had to be applied since the deflection was always negligible.

To insure accurate measurements of the fluid pressures, the following precaution was taken: - the base, the transducer port channels and the piston feed line were filled with water and purged as soon as fluid was expelled from the specimen undergoing compression at the beginning of the test. The miniature transducers, used in the aerospace industry, present very small dead volumes which can be easily deaired by flushing.

A constant rate of expression was induced by displacing the piston with the rheometer vertical ram drive set at a given speed. During the test, the vertical applied stress at the top of the sample, the frictional forces, and the fluid pressures, at the top of the specimen and above the bottom filter cloth, were recorded continuously. Vertical compaction of the test sample during compression was also measured.

At the end of each experiment the presscake relaxation curve was recorded. The presscake physical characteristics were also measured, such as the residual humidity level, relaxed thickness...

### **Materials description and samples preparation**

Three types of biological (food and agricultural) materials have been tested in this study: commercial cranberries, experimental casein curds, and spent sugar beet pulps. Commercial cranberries (see Photo. 3.1) from the state of Massachusetts were selected. (For juice production these berries are usually vine-ripened and deep frozen for several months before processed. Good quality cranberries can be kept frozen with minor moisture loss.) About one pound of thawed cranberries were washed and halved parallel to the major axis. (This fruit is a prolate spheroid). The average diameter of the selected population was 10.5 mm (cov. 9%) and its average length measured along the major axis was 12.5 mm (cov. 7%). The average solid content of the selected batch was 10.5% (cov. 12.5%).

Wet acid casein curds (see Photo. 3.1), used to manufacture low sodium and low fat process cheese, were included in this study in order to determine their compressibility characteristics. The curds were prepared according to known art using a patented process (US 4,066,800, Rosenau et al., 1978). About 85 lb of skim milk was acidified under laminar stirring to pH 4.6 with diluted hydrochloric acid (10 parts of acid to 90 parts of water). The batch of acidified milk was gradually heated to 77 °C using a steam jacketed vat. The heating lasted about 20 min. Then, the mixture was cooled to 52 °C within 10 min. under periodic slow stirring. This procedure provides rather uniform small casein curds, easily drainable prior to pressing. About 1 lb of drained curds were used for each test. The batch selected for this study had an average particle diameter of 4.2 mm with a fairly large coefficient of variation of 30%. The average solid content of the drained curds was 35% (cov. 11.5%). (In industry belt presses are used to remove whey, leading to a presscake containing about 50% moisture).

Spent sugar beet pulp samples (see Photo. 3.1) used in the present study were obtained from a sugar beet extraction plant. The exhausted cossettes were submitted, as received, to the compression analysis. The de-sugared cossettes were parallelepipeds with a squared section of 1.5 x 1.5 mm (cov. 30%) and an average length of 23 mm (cov. 29%). The average solid content was 13.3% (cov. 13%).

#### **3.1.4 CONDITIONS OPERATOIRES - RESUME**

(Tous les données expérimentales utilisées dans ce mémoire se trouvent en annexe A3.)

## 3.1.4.1 Pressage à vis (TSPU©)

Tableau 3.1

Pressage Vis  
Conditions Expérimentales

Number	Reference	Material	temperature [°C]	Screw	rotation [rpm]	P feed [kPa]	P out [kPa]	Out-liquid mass Flow Ql [g/s]	Out-solid mass Flow Qs [g/s]	Dry content before process [%]	Dry content after process [%]
1	RDAP6-T26	RDAP	26	HCR	6	75.8	63.2	21.8	6.7	8.1	17.8
2		RDAP	26	HCR	6	0	90.5	9.1	2.6	8.1	19.1
3	RDAP21-T26	RDAP	26	HCR	21	0	73.1	11.4	6.3	8.1	15.6
4	RDAP36-T26	RDAP	26	HCR	36	0	73.1	11.3	7.7	8.1	14.7
5	RDAP08-T26	RDAP	26	HCR	0.8	0	96.3	2.04	0.34	8.1	22.1
6		RDAP									
7		RDAP									
8		RDAP									
9		RDAP									
10		RDAP									
11		RDAP									
12		RDAP									
13		RDAP									
14		RDAP									
15		RDAP									
16		RDAP									
17	F6-T18	F	18	HCR	6	75.8	136	3	8	10.3	13.5
18	Cc6-T38	Cc	38	HCR	6	48.3	132.6	1	1.2	33.5	51.1
19	Cc21-T37	Cc	37	HCR	21	48.3	92.9	6.3	14.2	28.7	43.9
20	Cc6-T11	Cc	11	HCR	6	48.3	119.4	1.8	4.3	33.5	41.7
21	Cc6-T32	Cc	32	HCR	6	75.8	169.1	0.9	1.1	29.3	43.9
22	Cr6-T27	Cr	27	HCR	6	0	109.5	3.8	2.3	9.8	16.4
23	Cr21-T27	Cr	27	HCR	21	0	109.5	6.5	7	9.8	15.6
24		Cr	27	HCR	6	0	139.3	3.6	2.7	9.8	17.6
25	GDAP6-T22	GDAP	22	HCR	6	0	118.1	9.2	4.3	8.8	18.3
26		GDAP	22	HCR	6	0	141	7.7	4.4	8.8	16
27	GDAP6-T24	GDAP	24	LCR	6	0	109.5	9.9	4.4	8.8	17.2
28	GDAP6b-T24	GDAP	24	LCR	6	0	139.3	9.5	4	8.8	17.4
29		MIAP	24	HCR	6	0	112.8	10.8	3.1	7.7	17.8
30		MIAP	24	HCR	6	0	140.9	12.2	2.6	7.1	18.4

## 3.1.4.2 Compression en cellule piston (MMCC©)

Produit C (Protéines lactiques coagulées)

Données et Résultats Bruts

Tableau 3.2

rate [cm/min]	sample number	vi Vinitial [cm <sup>3</sup> /g]	vf Vfinal [cm <sup>3</sup> /g]	T[°C]
0.254	C1	3.42	1.37	40-45
0.254	C2	3.46	1.3	40-45
0.762	C3	3.45	1.15	45
0.254	C4	3.55	1.29	26
0.254	C5	3.56	1.19	26
0.254	C6	3.58	1.49	11
0.254	C7	3.54	1.51	11
2.54	C8	3.45	1.36	45

Produit F (pulpes de betteraves)

Données et Résultats Bruts

rate [cm/min]	sample number	vi Vinitial [cm <sup>3</sup> /g]	vf Vfinal [cm <sup>3</sup> /g]
0.254	F1	11.69	1.57
0.254	F2	11.72	1.78
0.762	F3	11.4	3.15
0.762	F4	11.48	2.38
2.54	F5	11.6	4.28
2.54	F6	11.66	4.08
7.62	F7	11.62	4.58
7.62	F8	11.27	4.38

Tableau 3.3

Produit Cr (Airelles)

Données et Résultats Bruts

Tableau 3.4

rate [cm/min]	sample number	vi Vinitial [cm <sup>3</sup> /g]	vf Vfinal [cm <sup>3</sup> /g]	Openings Filter (mic.)
0.254	Cr1	12.45	3.39	500
0.254	Cr2	12.56	2.64	500
0.254	Cr3	13.1	2.9	100
0.254	Cr4	13.07	2.48	100
0.254	Cr5	13.06	3.01	53
0.254	Cr6	13.08	2.33	53
0.762	Cr7	13.08	3	500
2.54	Cr8	13.28	4.94	500
2.54	Cr9	13.06	5.1	53

Produit : Pommes

Données et Résultats Bruts

(RDAP Red Delicious ← *gauche* → *droite* GDAP Golden Delicious)

Tableau 3.5

RDAP01inch min-T25 piston

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	P1 [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	5.62	3.57	17.94	56.67	
0.28	21.90	3.50	17.57	59.14	
0.60	33.00	3.42	17.16	59.14	
1.00	37.00	3.32	16.64	64.07	
1.29	48.00	3.24	16.28	66.53	
1.57	48.00	3.17	15.93	71.46	
2.00	48.00	3.06	15.37	78.85	
2.39	48.00	2.96	14.88	86.24	
2.71	80.00	2.88	14.47	96.10	
3.18	103.00	2.76	13.87	113.35	
3.63	142.00	2.65	13.30	133.06	
4.03	222.00	2.55	12.78	179.28	0.00
4.50	269.00	2.43	12.19	191.49	21.11
4.80	321.00	2.35	11.80	211.54	50.84
5.09	376.00	2.28	11.43	239.44	88.42
5.35	465.00	2.21	11.10	271.58	128.66
5.56	574.00	2.16	10.83	302.78	165.72
5.75	731.00	2.11	10.59	335.66	203.22
5.96	920.00	2.06	10.32	375.70	247.26
6.16	1200.00	2.01	10.07	416.75	290.93
6.38	1200.00	1.95	9.79	469.61	345.43
6.57	1200.00	1.90	9.54	519.19	395.08
6.82	1200.00	1.84	9.23	586.71	460.83
6.98	1200.00	1.80	9.03	635.15	506.89
7.15	1200.00	1.75	8.80	691.62	559.58
7.31	1200.00	1.71	8.60	745.83	609.25
7.40	3045.00	1.69	8.49	773.98	634.73
7.51	3606.00	1.66	8.35	814.53	671.07

GDAP01inch min-T25 piston

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	P1 [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	5.62	3.46	17.82	142.92	
0.20	21.90	3.41	17.53	150.31	
0.43	33.00	3.35	17.22	160.16	
0.72	37.00	3.28	16.85	177.41	
1.08	48.00	3.19	16.38	197.13	
1.41	62.00	3.10	15.95	214.37	
1.71	80.00	3.03	15.56	239.01	
2.01	103.00	2.95	15.17	261.19	
2.32	142.00	2.87	14.76	293.22	0.00
2.60	222.00	2.80	14.39	325.11	3.26
2.92	269.00	2.72	13.98	358.91	18.62
3.22	321.00	2.64	13.59	401.49	52.07
3.50	376.00	2.57	13.22	452.36	101.41
3.80	465.00	2.50	12.83	518.35	172.62
4.08	574.00	2.42	12.46	593.57	258.55
4.29	731.00	2.37	12.19	656.17	331.95
4.46	920.00	2.33	11.96	714.86	401.55
4.65	1200.00	2.28	11.72	785.14	485.35
4.82	1564.00	2.24	11.49	855.52	569.42
5.01	2051.00	2.19	11.24	939.09	669.14
5.17	2488.00	2.15	11.04	1014.36	758.68
5.29	3045.00	2.12	10.87	1078.36	834.50
5.34	3606.00	2.10	10.81	1103.23	863.90

### 3.2 LES RESISTANCES SPECIFIQUES DYNAMIQUES ET STATIQUES

PUBLICATION 6, (P6)

REBOUILLAT S. & SCHWARTZBERG H.G. *Food Engineering and Process Application : Dynamic and static filtration resistances during mechanical expressions involving foods*. LE MAGUER M. & JELEN P. Ed., Elsevier, (2), 281-292,(1986).

L'une des conclusions fondamentales de ce travail réside dans le fait que pour les produits étudiés, à savoir quatre variétés de pommes, la résistance spécifique statique, c'est-à-dire mesurée par perméation classique (voir équipement § 3.1), diffère de façon significative avec la résistance spécifique dynamique, c'est-à-dire celle mesurée au cours de la compression du SPM. Cette conclusion simplement exprimée justifie une nouvelle fois la démarche d'étude de la compression sous régime contrôlé et mesuré. La figure 4 de cette publication donne une bonne idée de la divergence des deux approches statique et dynamique. Cette publication est fournie à la fin de cette section.

### 3.3 PROPRIETES MECANIQUES DES PRODUITS BIOLOGIQUES ETUDIES

PUBLICATION 7, (P7)

REBOUILLAT S. & PELEG M. *Selected physical and mechanical properties of commercial apple cultivars*. Journal of Texture studies 19 (3), 217-230, (1988). Abstract provided in A7.

Les propriétés mécaniques des produits biologiques ne sont pas systématiquement considérées comme essentielles, sans doute du fait de leur variabilité et du manque de procédures établies. Les résultats que nous présentons, à partir de douze variétés de pommes, sont importants quant à la prise en compte de la déformation vraie, par rapport à la déformation apparente, qui prend encore plus d'importance lors de déformations importantes de matériaux non linéaires, comme le sont beaucoup de produits de ce type. Les précautions expérimentales au niveau de la préparation des échantillons et de la mesure du fluage proprement dit sont décrites. L'analyse statistique n'est pas aussi défavorable que l'on pourrait imaginer avec des produits naturels. Le taux de déformation n'influe pas significativement dans le domaine des faibles vitesses. Ce genre d'étude peut s'avérer très utile pour l'anticipation des tests de compression en cellule. Dans tous les cas la caractérisation des produits, même à forte variabilité intrinsèque, devrait rester une préoccupation pour faciliter la progression scientifique. Cette publication, reproduite en annexe séparée, est disponible sur demande. Le résumé des résultats se trouve en annexe jointe A7.

### 3.4 COMPORTEMENT AU FLUAGE-RELAXATION DES TOURBES

## PUBLICATION 8, (P8)

REBOUILLAT S., CAMPANELLA O.H. & PELEG M. *Mechanical characteristics of raw and processed peat*. Powder Technology 51, 273-275, (1987).

La tourbe est une source d'énergie mise en valeur dans certains pays comme l'Irlande, la Finlande et l'URSS. Sa déshydratation initiale subit les aléas climatiques et sa valorisation s'en trouve affectée. La littérature scientifique est peu abondante quant aux caractéristiques physiques et mécaniques de ce produit. Nos travaux sur la compressibilité et la relaxation de la tourbe sont donc uniques. Des modèles simples de caractérisation du fluage et de la relaxation sont développés et laissent entrevoir la possibilité de mieux utiliser la relaxation pour atteindre des paramètres de compressibilité ; ceci dans la mesure où les tests de compression garantissent une certaine réversibilité. Il serait donc intéressant de tenter d'analyser la relaxation suivant la compression en cellule -piston, de nombreuses données ont été recueillies dans le cadre de ce projet. Leur exploitation dépasse l'objectif de ce rapport. La publication P8 figure en totalité en annexe jointe A8.

## P6

REBOUILLAT S. & SCHWARTZBERG H.G. *Food Engineering and Process Application : Dynamic and static filtration resistances during mechanical expressions involving foods*. LE MAGUER M. & JELEN P. Ed., Elsevier, (2), 281-292,(1986).

## DYNAMIC AND STATIC FILTRATION RESISTANCES DURING MECHANICAL EXPRESSIONS INVOLVING FOODS

SERGE REBOUILLAT and HENRY G. SCHWARTZBERG\*

*Laboratory of Chemical Engineering Science, CNRS-ENSIC, Nancy, France*

\* *Department of Food Engineering, University of Massachusetts, Amherst,  
Massachusetts 01003, U.S.A. †*

### ABSTRACT

*During juice expression from apples, applied ram pressures are mainly used to provide fluid pressure drops needed to sustain juice flow in the presscake and outflow media. The pressure drops are proportional to the specific filtration resistance of the cake and the filtration resistance of the media, which increase during pressing and limit attainable yields. Golden Delicious, Granny Smith, McIntosh and Red Delicious Apple slices were pressed in a new, large-diameter expression tester and static filtration resistances were measured at progressive stages of compression by stopping the ram, applying and measuring water pressure drop across the cake and media and measuring corresponding flow rates of the permeating water. Dynamic filtration resistances were determined by measuring fluid pressure drops across the cake and media during constant-rate pressing. For McIntosh Apples, which tended to completely extrude through the media and had a low deformation modulus, the dynamic specific filtration resistance was markedly lower than the static one, but the situation was reversed for Golden Delicious and Red Delicious Apples, which were firmer and only extruded slightly. For Granny Smith Apples, which didn't extrude at all, the two specific resistances were virtually equal.*

### INTRODUCTION

The pressure applied during the compaction-induced expression of fluids from fluid-rich solids usually consists of solid compressive stress,

† Where work was performed.

$P_s$ , and fluid pressure drop,  $P_f$ .<sup>1,5</sup> Sometimes, friction between the press walls and the presscake tends to reduce  $P_s$ ,<sup>5</sup> but in the present investigation we found that such frictional effects are negligibly small for apples.

$P_f$  is the sum of  $P_c$ , the fluid pressure drop across the cake itself, and  $P_m$ , the pressure drop across the media. These pressure drops are proportional to the fluid viscosity,  $\mu$ , local fluid velocity,  $U$ , and flow resistances. The filtration resistance of the cake is proportional to  $\alpha$  (the average specific filtration resistance of the cake) times  $W$ , the total fixed (i.e. nonexpressible) dry solids load per unit area. Both  $\alpha$  and  $R_m$ , the filtration resistance of the media, tend to increase greatly as compaction proceeds and  $v$ , the average bulk specific volume ( $\text{m}^3$  cake/kg of fixed solids) of the presscake decreases.

To predict juice yields, one should be able to predict  $\alpha$  and  $R_m$  accurately. In the past, these resistances have been measured by static permeability tests, but very little accurate data are available for biological materials.<sup>5</sup> Such tests are time-consuming, highly nonreproducible<sup>1</sup> and may be unreliable because static filtration resistances are not necessarily equal to the resistances which prevail when the bed is undergoing active deformation. Past work on the measurement of dynamic-pressing coefficients for constant-pressure expression<sup>2,4</sup> indicate that predictions based on static measurements are poor. This paper describes techniques for measuring dynamic filtration resistances and pressing behavior observed while using these techniques.

## MATERIALS AND METHODS

Golden Delicious, Red Delicious, McIntosh and Granny Smith Apples were washed, cored, cut into eight segments and then cut into 10-mm cubes. These were then cut into 1.5–2.5-mm thick by 10-mm square tablet-like pieces by passing them through a rotating slicer in a kitchen processor. These pieces, which did not contain pits or parts of the core, but sometimes contained pieces of skin, were used in expression and permeability tests. 10-mm long, 20-mm diameter cylindrical samples of apple flesh (without skin, cores and seeds) were cut from apple halves and used in compaction tests in which deformation moduli and yield strengths for the apples were measured using Peleg's

TABLE I  
Physical properties of tested apples

Property	Apple variety			
	Golden Delicious	Granny Smith	McIntosh	Red Delicious
Diameter (mm)	72	71	77	67
Skin reflectance color				
Hunter L values	+76	+57	+43	+33
Hunter a values	-6	-17	+14	+24
Hunter b values	+36	+24	+10	+5
Flesh density (kg/m <sup>3</sup> )	747	755	694	714
Juice solubles (°Brix)	9.6	10.6	8.7	8.7
Fixed solids w%	5.6	6.4	4.5	5.5
Deformability modulus, free cylinder (kPa)	1 520	2 370	1 630	1 710
Yield stress (kPa)	221.5	317.4	148.3	124.3
Juice viscosity (kg/m.s × 10 <sup>3</sup> )	2.158	1.613	2.682	2.312
Deformability modulus, confined bed (kPa)	143	125	73	77
Extrusion pressure (kPa)	1 090	>1 550 <sup>a</sup>	545	752
Extrusion $v$ (m <sup>3</sup> /kg × 10 <sup>3</sup> )	10.8	<sup>a</sup>	8.3	8.8

<sup>a</sup> Did not extrude.

approach.<sup>3</sup> These moduli and other physical properties in Table I help characterize the physical state of the apples, which is important because the pressing characteristics of apples depend very strongly on their physical state.

The acrylic-plastic cell shown in Fig. 1 was used to carry out expression and permeability tests. It consisted of a 133.4-mm I.D., jacketed cylinder fitted with an insertable drainage basin and perforated, filter-support plate at its bottom. The filter-support plate was covered with a monofilament, nylon (Nitex) filter cloth with 0.5-mm openings. Roughly 450 g of apple tablets of a given species were loaded as uniformly as possible into the pulp chamber (central part of the cylinder). A piston assembly with a mobile, perforated distributor plate covered by Nitex filter cloth at its bottom was inserted into the cylinder above the apple pieces. The piston assembly contained a feed line for injecting water during permeation tests and miniature pressure



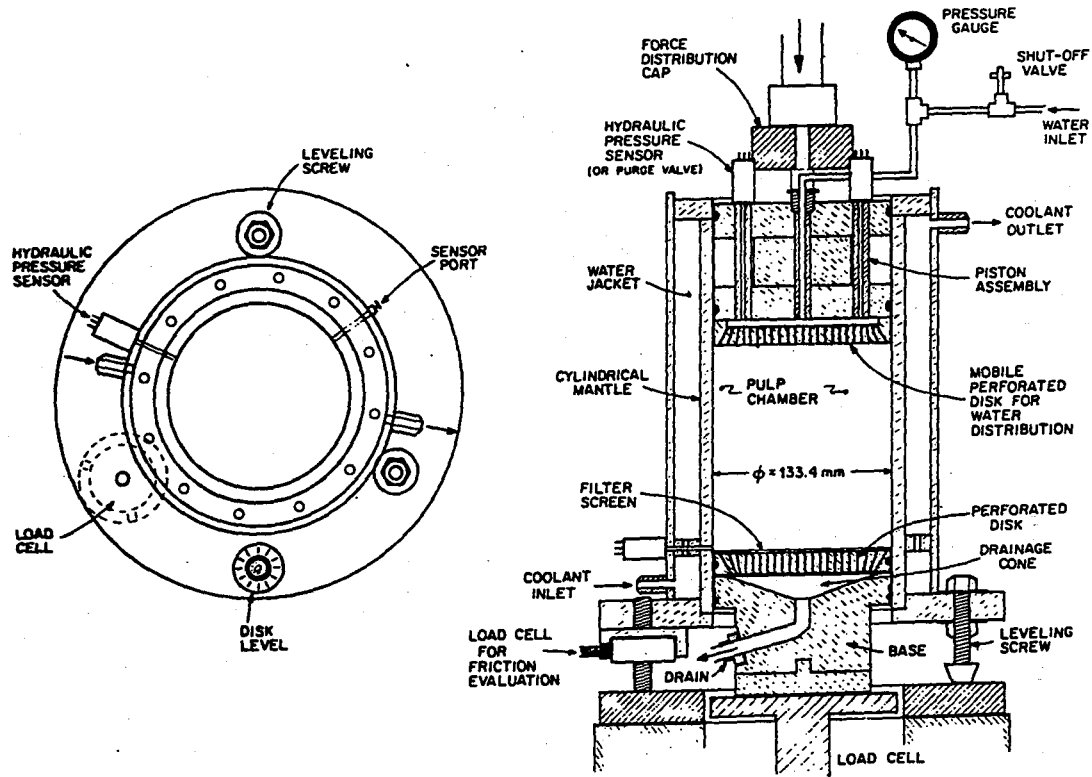


Fig. 1. Expression test cell assembly.

sensors, which measured fluid pressures at the top of the presscake. The cell was fitted with a miniature transducer, which measured fluid pressures just above the bottom filter cloth. The cell was supported by a tripod; frictional force transmitted by the presscake to the cylinder wall was measured by a load cell contained in one of the tripod legs.

The whole assembly was then mounted on an adapter platform under the ram drive of an Instron capillary rheometer. Through the controls of the rheometer, the drive provided fixed pressing speeds of 0.042 mm/s, 0.14 mm/s and 0.42 mm/s. The drive was fitted with a load cell capable of measuring forces of up to 22.4 kN (5000 lbs). This corresponds to a piston pressure of 1603 kPa (232 psi). The output signal from the load cell was transmitted to a recorder of an adjacent Instron Universal Testing Machine, whose maximum pressure interlock was adjusted so that the ram drive was shut off when the compaction pressure reached 1550 kPa (225 psi). The bed and transducer connection lines were completely filled with fluid prior to compaction to make sure that fluid pressures were transmitted to the pressure transducers without significant time lags.

When expression tests were carried out and dynamic filtration resistances,  $\alpha_d$ , were measured, the following variables were automatically recorded using previously described techniques:<sup>5</sup> the force and equivalent pressure,  $P_1$ , exerted by the piston; the frictional force transmitted to the cylinder wall; the cake height,  $Z$ ; and the fluid pressures at the top of the presscake,  $P_n$ , and just above the outflow surface,  $P_{fo}$ . The weight of juice expelled was also continuously measured by a digital balance. A momentary decrease in  $P_{fo}$  occurred at the onset of extrusion. The  $P_1$  and  $v$  values at which this occurred are listed in Table I. The presscake was weighed before and after pressing. The insoluble solids contents of the fresh and pressed apples were determined by exhaustively extracting known weights of these samples and drying the residual solids to constant weights measured.

When static filtration resistances,  $\alpha_s$ , were measured, the ram, driven at a speed of 0.042 m/s, was stopped at progressive stages of compaction; the valve connecting the fluid injection line to a pressurized reservoir containing 24.5 °C distilled water was opened, and the water, driven by nitrogen-applied, reservoir head pressures of 25 to 100 kPa, was forced through the presscake and media. The pressure drops across the cake and media were measured by the pressure transducers and pressure gauges, and the corresponding flow rates by measuring fluid discharge weights and corresponding flow times.

## RESULTS AND DISCUSSION

The specific resistance,  $\alpha$ , is defined by Eq. (1), which is valid for both permeation and expression:

$$dP_f/dw = \alpha\mu U \quad (1)$$

Integration of Eq. (1) yields:

$$(P_f - P_{fo})/W = \alpha\mu U \quad (2)$$

$U$  is the fluid velocity relative to the adjacent solids in the presscake. For the steady state permeation tests used to calculate  $\alpha_s$ ,  $U$  equalled the volumetric flow rate divided by the cell cross sectional area,  $A$ , and was constant at all levels in the cake. During expression,  $U$  normally varies from 0 at the piston surface, to the compaction rate  $-dZ/dt$ , at the outflow surface. Between these two surfaces,  $U$  progressively increases but is difficult to evaluate precisely. As a practical expedient we used the arithmetic mean value of  $U$ , to determine  $\alpha_d$  during expression:

$$\alpha_d = -2(P_f - P_{fo})/[W\mu(dZ/dt)] \quad (3)$$

Then, during permeation:

$$R_m = P_{fo}/U\mu \quad (4)$$

and during expression:

$$R_m = -P_{fo}/(dZ/dt)\mu \quad (5)$$

Typical plots of  $P_1$  and  $P_f$  versus  $v$  for the expression of Red Delicious and Golden Delicious Apples are shown in Fig. 2. As pressing speed increases,  $P_1$  and  $P_f$  rise more rapidly, and the nominal-maximum-tolerated value of  $P_1$  (1550 kPa) is reached at larger values of  $v$ . Consequently, juice yields decrease. Actually, the maximum tolerated value of  $P_1$  should be set at a level which barely prevents solids from extruding through the media. This  $P_1$  value and the corresponding juice yield depend strongly on the type of apple used. The extrusion pressure was lowest for the McIntosh Apples tested, and progressively increased when Red Delicious, Golden Delicious and Granny Smith Apples were used. The order of resistance to extrusion corresponds (with one exception) to the order of yield-point stress and is inversely proportional to the juice viscosity. Since high juice viscosities probably are caused by pectin released due

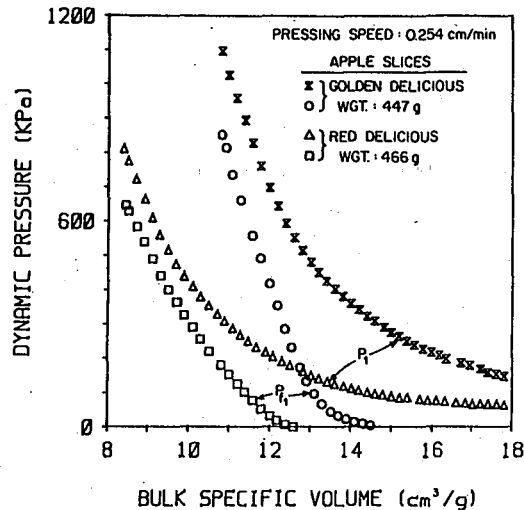


Fig. 2. Log of the ram pressure,  $P_1$ , and log of the fluid pressure at presscake surface  $P_f$  versus mean bulk specific volume,  $v$ , for Red Delicious and Golden Delicious Apples.

to breakdown of the protopectin which binds apple cells together, the relationship between extrudability and juice viscosity appears to be logical.

$P_s$ , the solid compressive stress in the presscake, is determined as  $P_1 - P_n$  at the top of the cake and  $P_1 - P_{fo}$  at the bottom of the cake.  $P_s$  was very small for McIntosh Apples and relatively large for Granny Smith Apples. The rate of rise of  $P_s$ , as  $v$  decreases, is roughly measured by the deformability moduli of the confined presscake. The magnitudes of the confined-cake deformability moduli appear to roughly parallel the magnitudes of the deformability moduli<sup>3</sup> of unconfined apple cylinders.

Log  $\alpha_s$  values for the tested species are plotted versus  $v$  in Fig. 3. It can be readily seen that  $\alpha_s$ , particularly in the low  $v$  range encountered at the end of pressing, depends on the species used. These low- $v$   $\alpha_s$  values fall on the low side of the range of previously reported  $\alpha_s$  values at the end of pressing.<sup>1,5</sup>

Log  $\alpha_s$  and log  $\alpha_d$  values are plotted versus  $v$  for Red Delicious Apples in Fig. 4. For this species,  $\alpha_d$  significantly exceeded  $\alpha_s$ . The same was true over most of the  $v$  range for Golden Delicious Apples. Further, the  $\alpha_d$  versus  $v$  behavior depended on the pressing speed;

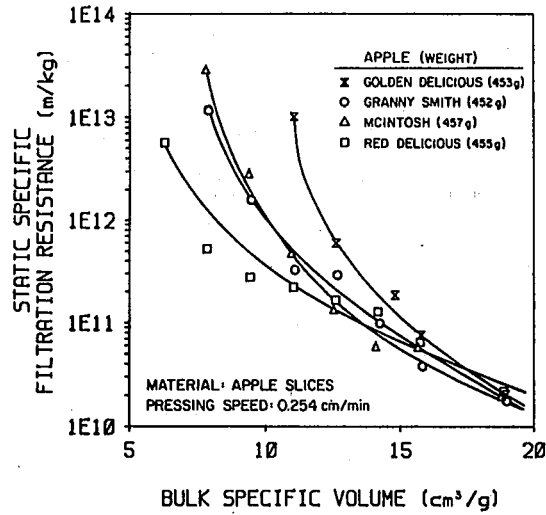


Fig. 3. Log of  $\alpha_s$  versus mean bulk specific volume,  $v$ , for McIntosh, Granny Smith, Golden Delicious and Red Delicious Apples.

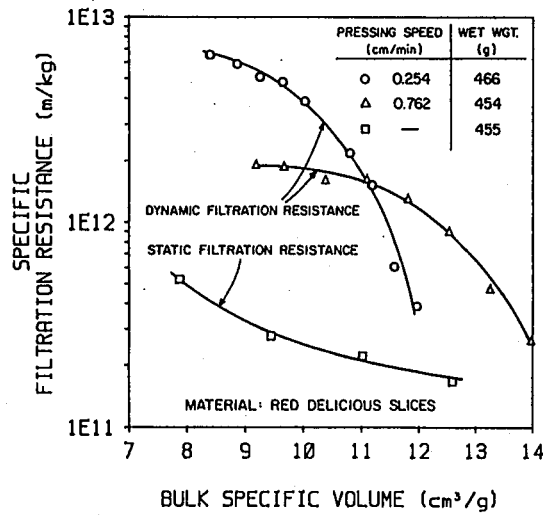


Fig. 4. Comparison of log  $\alpha_s$  versus  $v$  and log  $\alpha_d$  versus  $v$  at two different pressing speeds for Red Delicious Apples.

over the speed range tested,  $\alpha_d$  tended to increase as pressing speed decreased. For McIntosh and Granny Smith Apples,  $\alpha_d$  was smaller than  $\alpha_s$  at equal values of  $v$ . In the case of Granny Smith Apples,  $\alpha_d$  and  $\alpha_s$  did not differ by very much; but the  $\alpha_d$  for McIntosh Apples were much smaller than the  $\alpha_s$  at the same  $v$ . In all cases the log of  $\alpha_s$  versus  $v$  plots (not shown) were concave upward, but the log of  $\alpha_d$  versus  $v$  plots were usually concave downward.

It is important to realize that when extrusion occurs, the calculated  $\alpha_d$  are essentially nominal values, rather than true values.  $W$  decreased to some extent when extrusion occurred; but initial values of  $W$  were used when applying Eq. (3). Further, when solids extrude through the media,  $U$ , the relative velocity of the fluid with respect to the solids is less than  $-(dZ/dt)$  at the outflow surface, and consequently the average value of  $U$  in the presscake is less than  $-0.5(dZ/dt)$ . These factors, when not accounted for, tend to reduce calculated values of  $\alpha_d$ . The reduction in  $W$  caused by extrusion could be a reason why both  $\alpha_d$  and  $\alpha_s$  for McIntosh Apples are low. Extrusion may also possibly account for the concave downward nature of the log of  $\alpha_d$  versus  $v$  curves.

McIntosh Apples extruded significantly. The reduced  $U$  which occurs when apples extrude may explain why  $\alpha_d$  for the McIntosh Apples was much smaller than the  $\alpha_s$ . When extrusion occurs, the material passing through the media is a slurry, whose effective viscosity should be much greater than the clear fluid viscosity. Therefore,  $P_m$  values should be very high when extrusion occurs. This occurred for McIntosh Apples, where 85% of the fluid pressure drop occurred across the outflow media. Clear fluid viscosities are normally employed in Eq. (5) to determine  $R_m$ . Therefore, when extrusion occurs, values of  $R_m$  calculated with Eq. (5) should be much higher than  $R_m$  calculated with Eq. (4). In fact, the static values of  $R_m$  were negligible, except for McIntosh Apples, and much lower than the dynamic values (except for Granny Smith Apples for which  $R_m$  was negligible in both cases). The dynamic  $R_m$  at the end of pressing for the remaining species were:  $1.2 \times 10^{12}/m$  for Red Delicious,  $5.5 \times 10^{12}/m$  for Golden Delicious and  $12.5 \times 10^{12}/m$  for McIntosh.

Examinations of the presscakes showed that the McIntosh apples totally broke down into pulp. The other species broke down into pulps to varying extents. Intact, tablet-like pieces were imbedded in the pulps. Granny Smith Apples provided the greatest amount of intact material; and progressively smaller amounts were found for Golden

Delicious and Red Delicious Apples.  $P_f$  was about 85% of  $P_1$  for McIntosh apples, i.e. the ram pressure was almost completely expended in providing fluid pressure drop. For Golden Delicious and Red Delicious Apples,  $P_f$  was roughly equal to 60% of  $P_1$  at the end of pressing, but for Granny Smith Apples  $P_f$  was only 10% of  $P_1$  at the end of pressing. That is, progressively more and more ram pressure was expended on solid compressive stress from McIntosh, to Red Delicious, to Golden Delicious, to Granny Smith Apples. The large fluid pressure drops across the cakes, and the high  $\alpha_d$  for Golden Delicious and Red Delicious Apples may have been due to increased pressure drop caused by flows of slurry rather than clear juice in these cakes. The wall friction was very small in all cases.

The state of the cake at the end of pressing is strongly influenced by how the apple pieces are formed. If apples are passed through a hammer mill prior to pressing, pulpy presscakes will form and most of the fluid pressure drop encountered during pressing will occur across the media. Forming apple pieces by pressing apple slices through a screen also appears to promote cake disruption during pressing and favors the development of high values of  $P_m$  and  $R_m$ . On the other hand, while intact pieces promote low fluid pressure drops, they do not yield as much juice. To obtain high juice yields, it may be necessary to devise means that promote controlled particle breakup and compaction without simultaneously producing slurries that cause excessive fluid pressure drop.

### CONCLUSIONS

It was shown for four apple varieties that  $\alpha_d$  and  $\alpha_s$  can be significantly different; particle breakup promotes high fluid pressure drops; and solids extrusion promotes high values of  $R_m$ . It is recommended that relative values of  $R_m$ ,  $\alpha_d$  and  $\alpha_s$  be studied for presscakes which are less subject to extrusion and breakup.

### ACKNOWLEDGEMENT

The authors gratefully acknowledge the technical advice and assistance of Dick Kolosewicz.

## REFERENCES

1. Kormedy, I. Experiments for the determination of the specific resistance of comminuted and pressed apple against its own juice. *Acta Aliment. Acad. Sci. Hung.* **3**: 93-110, 1973.
2. Leclerc, D. and Rebouillat, S. Dewatering by compression. In *Mathematical Models and Design Methods in Solid-Liquid Separations* (A. Rushton Ed.). NATO ASI Series (E. No. 88) Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1985.
3. Peleg, M. Operational conditions and the stress-strain relationship of solid foods—theoretical evaluation. *J. Text. Stud.* **8**: 283-93, 1977.
4. Rebouillat, S., LeClerc, D. and Baluais, G. La deshydratation par filtration-pressage. Modelisation de la compression unidirectionnelle. *Entropie* **121**: 13-29, 1985.
5. Schwartzberg, H. G. Expression related properties. In *Physical Properties of Foods* (M. Peleg and E. Bagley Eds). AVI Publishing Co. Inc., Westport, Conn., p. 243, 1983.





### 3.5. LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE A DEFORMATION CONSTANTE (CDC)

Après avoir établi une base théorique suffisamment générale au chapitre 1 et démontré au chapitre 2,

- la nécessité de prendre en compte la vitesse de déformation du milieu saturé, SPM.
- l'imprévisibilité de l'effet de « choc » engendré par l'application d'une pression soudaine sur la qualité des mesures mais aussi vis-à-vis du comportement futur de la matière.
- le superflu de la phase de compression secondaire lors de la compression de produits biologiques et plus généralement d'opérations industrielles incomparablement plus rapides que le phénomène de consolidation rencontré traditionnellement en génie civil.
- la difficulté, pour les produits biologiques, d'apprécier la densité réelle du solide.

Après avoir appréhendé les caractéristiques essentielles et indispensables du point de vue de l'appareillage de test, construit une nouvelle cellule de compression multi-mode et choisi les matériaux à tester sur la base de leur fluidité, semi-liquide, viscoélastique ou semi-solide, il est nécessaire d'établir et de rappeler les bases théoriques de la compression à vitesse de déformation constante.

Trois approches théoriques sont proposées :

- La première, CDC1, prend en considération les couches minces pour lesquelles la perméabilité du SPM peut être reliée au rapport de vide moyen ; c'est donc une fonction du temps seulement et pas de la position au sein du gâteau. Cette limitation semble raisonnable pour les couches minces. Dans le cadre de la compression de produits industriels biologiques ou non, nous introduisons en substitut du rapport de vide, le volume occupé par une unité de masse de solide ; ce qui élimine la difficulté associée à la mesure de la densité de la matière sèche. La compressibilité de la matrice SPM est dans ce cas mesurée directement à partir de la connaissance de la pression du fluide et du rapport de vide ou plus simplement du volume spécifique. L'un des avantages significatifs de cette approche est la prise en compte de SPM à comportement linéaire ou non.
- La seconde approche, CDC2, va encore plus loin en incluant les déformations importantes, donc les couches minces et épaisses, ceci grâce à la notion de déformation vraie définie initialement dans le domaine du génie mécanique par MARIN en 1962. De plus les comportements linéaires ou non sont pris en compte. Alors que le coefficient de compression est considéré comme constant sur la hauteur du gâteau, aucune hypothèse ne repose sur la variation de la perméabilité et de la compressibilité du milieu. La variation du coefficient de compression, en fonction du temps ou du volume spécifique du SPM, devient un paramètre d'étude.
- La troisième approche, CDC3, est la plus restrictive, mais comporte l'avantage de travailler sur la base des déformations apparentes, celles qui sont directement observées lors de l'expérience. Le coefficient de compression est considéré comme constant ; cependant ses deux composantes, perméabilité et compressibilité, demeurent variables. Cette approche permet aussi l'appréciation éventuelle d'une phase transitoire que nous n'avons pas exploitée ici. Ceci du fait que la plupart des procédés industriels sont en

régime établi permanent et les intrants sont généralement homogènes, c'est à dire quasi « isotropes » à l'échelle macroscopique.

Alors que les équations de base de chacune des trois approches, CDC1, CDC2, CDC3, peuvent être déduites de l'équation générale Eq. 1.33, nous prenons le soin pour des raisons de clarté et d'indépendance des chapitres, de fournir pour chaque cas une démonstration simplifiée de ces équations.

Ces théories ont des équivalences dans les domaines de la diffusion, CRANK (1973), de l'écoulement dans les milieux poreux, SCHEIDEGGER (1974), de la mécanique des sols, de façon très dispersée, TERZAGHI (1923) BARRON (1947), GIBSON (1964), SCHIFFMANN (1961) mais aussi de la réaction chimique, EYRING (1936), et du génie des procédés, LEVENSPIEL (1984), VILLERMAUX (1982) et enfin de la physique des produits agricoles et alimentaires, PELEG (1982).

### 3.5.1 CDC DANS LE CAS DE LA VARIATION LINEAIRE DU RAPPORT DE VIDE – SPM NON-LINEAIRE (CDC1)

#### 3.5.1.1 RAPPELS THEORIQUES DES EQUATIONS DE BASE

En négligeant le poids de la matière testée dans le bilan des forces à l'échelle de l'unité élémentaire SPM, l'équation de continuité Eq. 1.33 prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_i}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial z} \right) = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} \text{ avec } v = \frac{(1+e)}{\rho_s} \quad \text{Eq. 3.1}$$

dans laquelle  $K_i$  est le coefficient de perméabilité intrinsèque reliée au coefficient de perméabilité  $K_z$  par la relation habituelle :

$$K_z = \frac{K_i \cdot \rho \cdot g}{\mu} \quad \text{Eq. 3.2}$$

Sauf mention contraire,  $K_z$  sera écrit sous la forme  $K$  pour simplifier les expressions mathématiques.

$K_i$  : perméabilité intrinsèque [ $m^2$ ]

$\mu$  : viscosité du fluide [ $kg/(m \cdot s)$ ] ou [ $Pa \cdot s$ ]

$\rho$  : masse volumique du fluide [ $kg/m^3$ ]

$g$  : accélération de la pesanteur [ $m/s^2$ ]

$v = \frac{(1+e)}{\rho_s}$  est donc la valeur locale du volume de gâteau ramené à la masse de solide,

soit le volume spécifique local du SPM.

$$\frac{K_i}{\mu} \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} \text{ avec : } \begin{array}{l} P_f = 0 @ z = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial P_f}{\partial t} = 0 @ z = Z \end{array} \quad \text{Eq. 3.3}$$

Dans la mesure où la compression est contrôlée à déformation constante  $dZ/dt$ , une relation du type  $v_{(z,t)} = g(z)t + v_0$  est envisageable et rend l'Eq. 3.3 directement soluble.

La forme de la fonction  $g(z)$  n'est pas « immédiate », cependant dans une couche mince une relation linéaire est concevable. On notera une grande similitude entre cette fonction et celle vue au chapitre 2 dans le cadre de la distribution linéaire de la pression du fluide au sein du gâteau. Ce n'est donc pas tout à fait par hasard si nous avons adopté cette forme plutôt qu'une autre sachant que nous avons rencontré à plusieurs reprises durant nos expériences ce type de profil. Le comportement très spécifique du Kaolin floculé par rapport é à son équivalent non traité (P1) constitue un exemple. La sédimentation étant un phénomène sans doute précurseur de la tendance « linéaire » que l'on retrouve au niveau des bio-semi-solides. On peut donc supposer :

$$v = v_0 + \frac{(dZ/dt)t}{W} \left\{ 1 + \frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} \left( \frac{z - Z/2}{Z} \right) \right\} \quad \text{Eq. 3.4}$$

Cette relation est cohérente avec les conditions aux limites définies précédemment et fait bien intervenir la vitesse de déformation imposée et contrôlée  $dZ/dt$ . Conformément à la Fig. 3.1, la grandeur  $W$  correspond ici à la masse de solide totale par unité de surface filtrante. On rappelle à cet effet la relation entre coordonnées matérielles et traditionnelles.

$$Z = \int_0^w v dw \quad \text{et} \quad Z/W = \bar{v} \quad \text{Eq. 3.5}$$

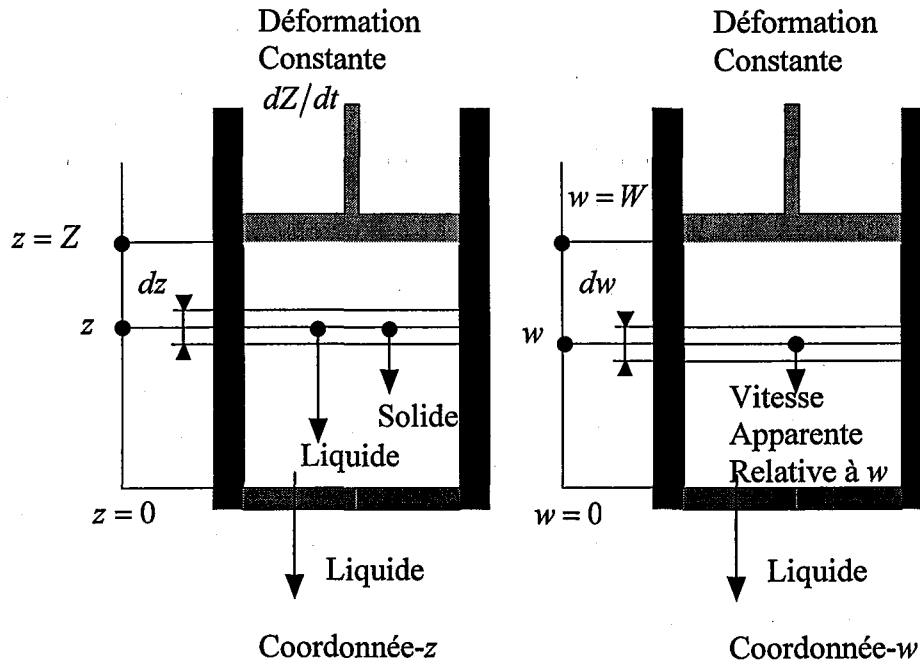


Figure 3.5 : La relation entre coordonnées matérielles et traditionnelles

Il convient alors de cerner les limites du rapport  $\{b.W/(dZ/dt).\rho_S\}$ . Prenons deux cas extrêmes :

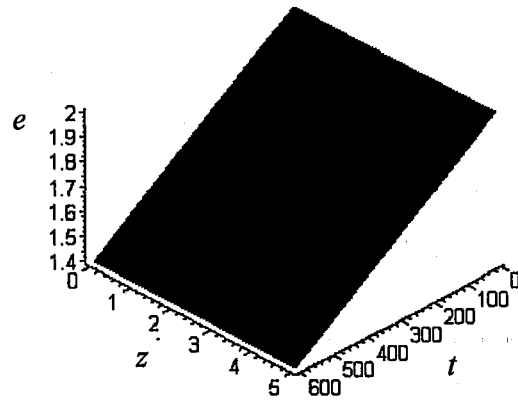
$\{b.W/(dZ/dt).\rho_S\} = 0$  et  $\{b.W/(dZ/dt).\rho_S\} = 2$  pour lesquels au niveau du piston on n'observerait pas de changement du rapport de vide sachant qu'à  $z = Z_0$  on aurait alors, conformément à l'Eq. 3.4,  $v_{(z,t)} = v_0$  ou de façon équivalente  $e_{(z,t)} = e_0$ .

- si  $\{b.W/(dZ/dt).\rho_S\} = 0$ , alors, comme le montre la simulation de la Fig. 3.6, et conformément à l'Eq. 3.4, le rapport de vide demeurerait invariant selon  $z$  et deviendrait variable selon  $t$  seulement.

-par contre, si  $\{b.W/(dZ/dt).\rho_S\} = 2$ , alors, comme le montre la simulation de la Fig. 3.7, et conformément à l'Eq. 3.4, le rapport de vide demeurerait invariant au niveau du piston quel que soit le temps de compression, ce qui paraît totalement irréaliste d'autant plus que l'on considère une couche mince.

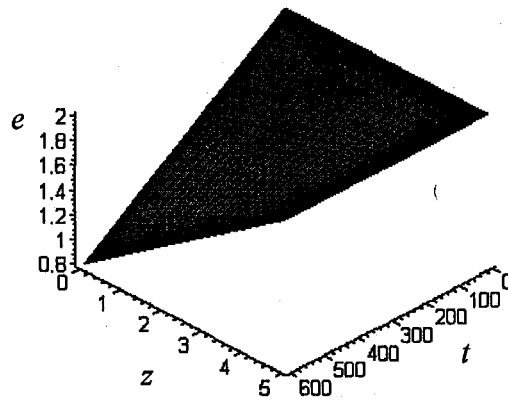
Les simulations proposées n'ont que pour seul et unique but d'illustrer cet aspect mathématique, conformément à l'Eq. 3.4. D'autres échelles sont tout à fait possibles et conduiraient à la même conclusion. La faible variation choisie pour  $e$  n'a aucune incidence sur les valeurs limites que représentent les deux cas extrêmes (valeurs 0 et 2).- une alternative raisonnable que l'on a pu vérifier dans la publication 9 (P9), jointe à la fin de cette section, est  $\{b.W/(dZ/dt).\rho_S\} = 1$ , représentée sur la Fig. 3.8.

Les figures 3.6, 3.7, 3.8 correspondent à des simulations de la variation  $e_{(z,t)}$ , par ailleurs équivalente à celle de  $v_{(z,t)}$ . ( $Z_0 = 5 [cm]$ ,  $e_0 = 2$ ,  $r_c = 10^{-3} [s]$  et  $t \rightarrow 600 s$ )



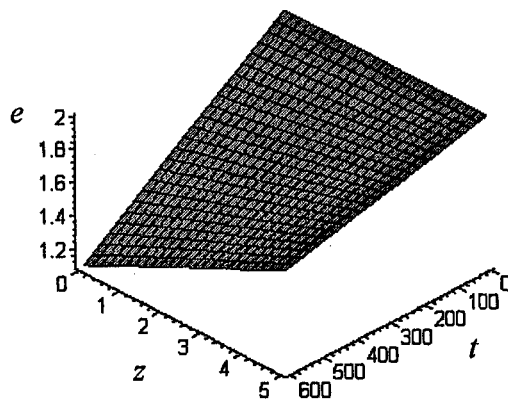
$$\{b.W/(dZ/dt).\rho_S\} = 0$$

Figure 3.6 : La variation  $e_{(z,t)}$



$$\{b.W/(dZ/dt).\rho_S\} = 2$$

Figure 3.7 : La variation  $e_{(z,t)}$



$$\{b.W/(dZ/dt).\rho_S\} = 1$$

Figure 3.8 : La variation  $e_{(z,t)}$

En substituant Eq. 3.4 dans l'Eq. 3.3 :

$$\frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{1}{1 + \left( - \left\{ \frac{\rho_s dZ/dt}{W} \right\} t \left[ 1 - \frac{bW}{\rho_s dZ/dt} \left( \frac{z - 0.5Z_0}{Z_0} \right) \right] + e_0 \right)^x} \quad \text{Eq. 3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( - \left\{ \frac{\rho_s dZ/dt}{W} \right\} t \left[ 1 - \frac{bW}{\rho_s dZ/dt} \left( \frac{z - 0.5Z_0}{Z_0} \right) \right] + e_0 \right)$$

La solution complète de cette équation est fournie en annexe A3. Une simplification supplémentaire, utile pour le traitement mathématique, consiste à remplacer, dans le premier membre de la partie gauche de l'Eq. 3.6,  $1+e$  par  $1+\bar{e}$  ou de façon équivalente  $v$  par  $\bar{v}$  ; ce qui ne réduit pas de façon significative la précision du calcul de la pression du fluide (moins de 2% d'écart).

Dans ce cas l'Eq. 3.6 devient :

$$\frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{1}{1 + \bar{e}} \frac{\partial}{\partial t} \left( - \left\{ \frac{\rho_s dZ/dt}{W} \right\} t \left[ 1 - \frac{bW}{\rho_s dZ/dt} \left( \frac{z - 0.5Z_0}{Z_0} \right) \right] + e_0 \right) \quad \text{Eq. 3.7}$$

qui est de la forme générale  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = R(x)$ , dont la solution s'exprime selon :

$$y = C_1 + C_2 + x \int R(x) dx - \int x R(x) dx$$

Dans ce cas :

$$P_f = \frac{-(dZ/dt)\mu}{K_i Z} \left\{ \left( Zz - \frac{z^2}{2} \right) + \frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} \left( \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{6Z} \right) \right\} \quad \text{Eq. 3.8}$$

qui, à la surface interne du piston de compression, devient  $P_{fi} = P_f(z = Z, t)$ , s'écrit :

$$P_{fi} = \frac{-(dZ/dt)\mu}{K_i} Z \left\{ \frac{1}{2} + \frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} \frac{1}{12} \right\} \quad \text{Eq. 3.9}$$

On peut alors accéder utilement à la valeur moyenne de  $\bar{P}_f$  donnée par :  $\bar{P}_f = \int_0^Z P_f dz$

$$\text{et établir le rapport } \frac{\bar{P}_f}{P_{f1}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{24} \left( \frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} \right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \left( \frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} \right)} \quad \text{Eq. 3.10}$$

A titre de validation des choix précédents concernant la valeur de  $\{b.W/(dZ/dt).\rho_s\}$ , on note que :

pour  $\frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} = 0$ ,  $\frac{\bar{P}_f}{P_{f1}} = 0.667$  et  $\frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} = 1$ ,  $\frac{\bar{P}_f}{P_{f1}} = 0.700$ , toutes deux sont

des valeurs proches de la valeur 2/3 obtenue pour une distribution parabolique. Ainsi le choix de  $\{b.W/(dZ/dt).\rho_s\} = 1$  paraît sans impact majeur sur les valeurs calculées sachant que 2 est une situation non réaliste.

L'accès à l'expression de la pression solide moyenne repose sur l'Eq. 3.10 et la

$$\text{relation classique } \bar{P}_s = P - \frac{\bar{P}_f}{P_{f1}} \cdot P_{f1} \quad \text{Eq. 3.11}$$

avec :

$\bar{P}_s$  = la pression solide moyenne à un instant t

$P$  = la pression totale

$\bar{P}_f$  = la pression moyenne du fluide au même instant  
ainsi

$$\bar{P}_s = P - \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{24} \left( \frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} \right) \right] \cdot P_{f1} \quad \text{Eq. 3.12}$$

$P$  et  $\bar{P}_f$  étant continûment mesurés, le coefficient de compression est alors accessible selon l'expression :

$$C_v = K_i \frac{v}{-(dv/dP_s)_{av} \cdot \mu} \quad \text{Eq. 3.13}$$

$$\text{et } C_e = \frac{C_v}{v^2} \quad \text{Eq. 3.14}$$

pour l'expression du coefficient de compression modifié selon SHIRATO.

On en déduit également l'expression du coefficient de perméabilité :

$$K = \left[ \frac{\gamma_f \frac{dZ}{dt} Z_0}{P_{f1}} \right] \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} \right] \quad \text{Eq. 3.15}$$

Il est important de noter dans l'expression du coefficient de compression que la variation réelle mesurée  $dv/dP_s$  est la valeur locale moyenne, ce qui permet d'encadrer des matériaux à comportement linéaire ou non.

Les quatre figures qui suivent illustrent l'usage de cette approche pour accéder aux paramètres critiques de la CDC1. Plus ample discussion est fournie dans la publication P9 jointe.

### 3.5.1.2 ILLUSTRATION EXPERIMENTALE



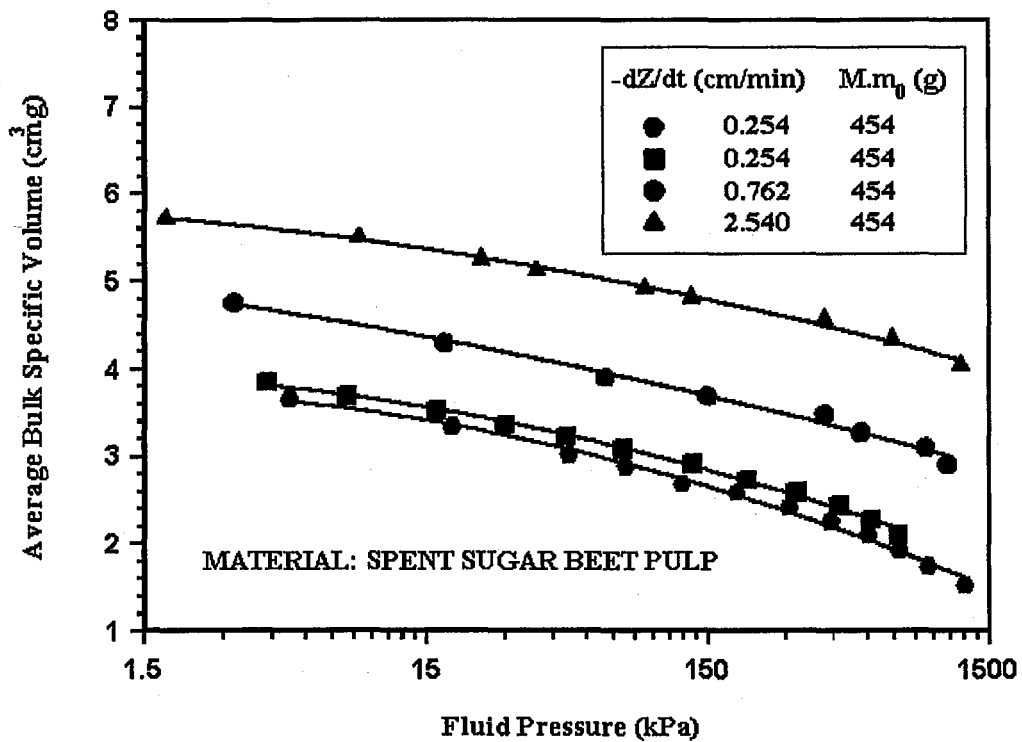
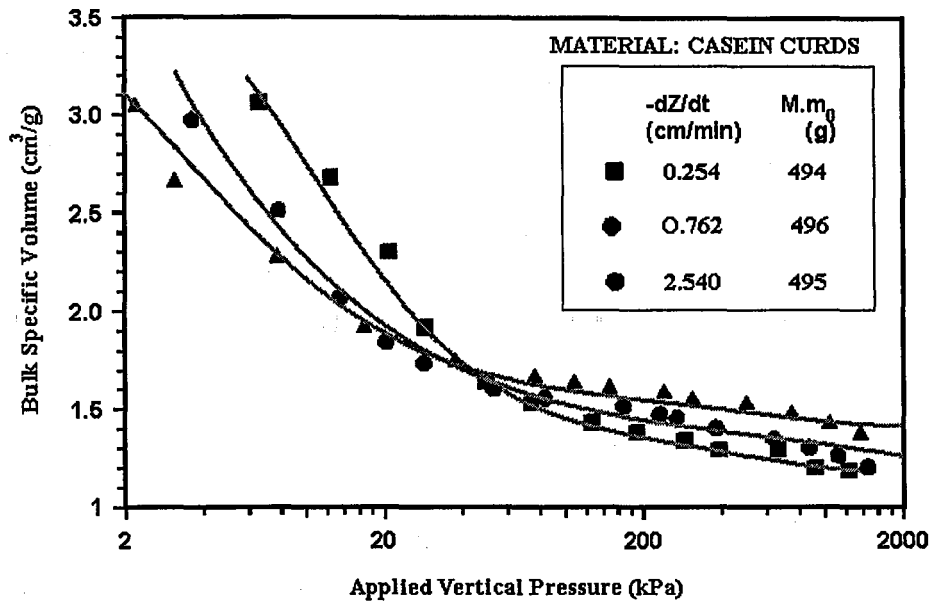


Figure 3.9 (haut - produit C) et Figure 3.10 (bas - produit F)  
 La variation du volume spécifique moyen lors de la compression CDC

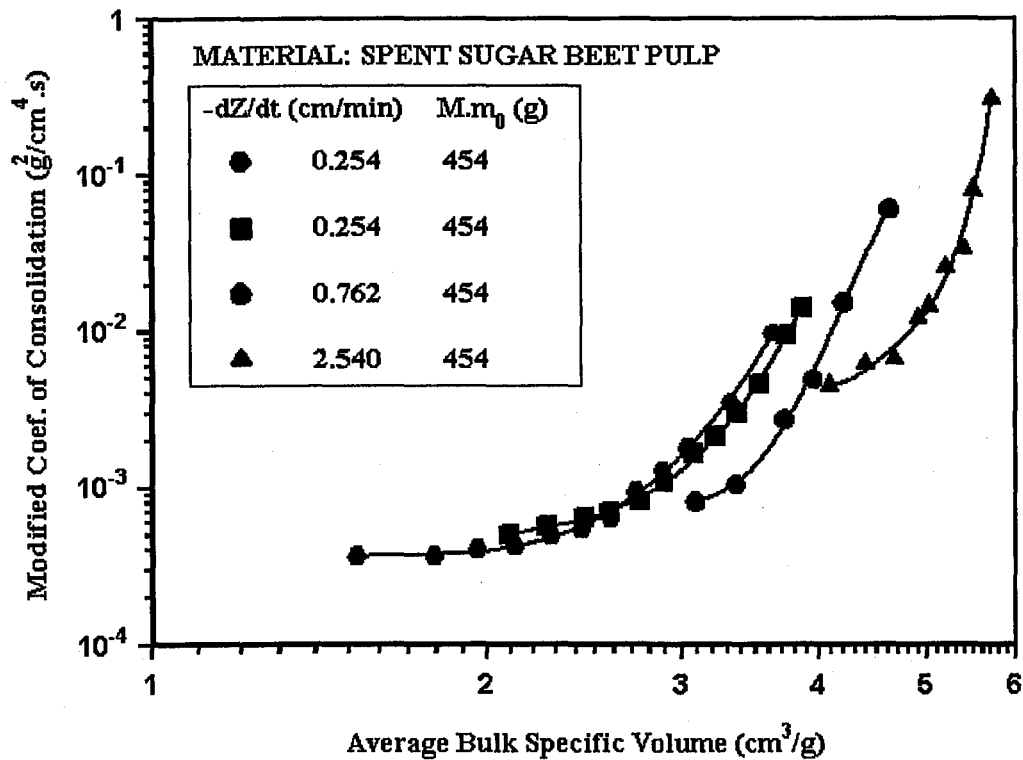
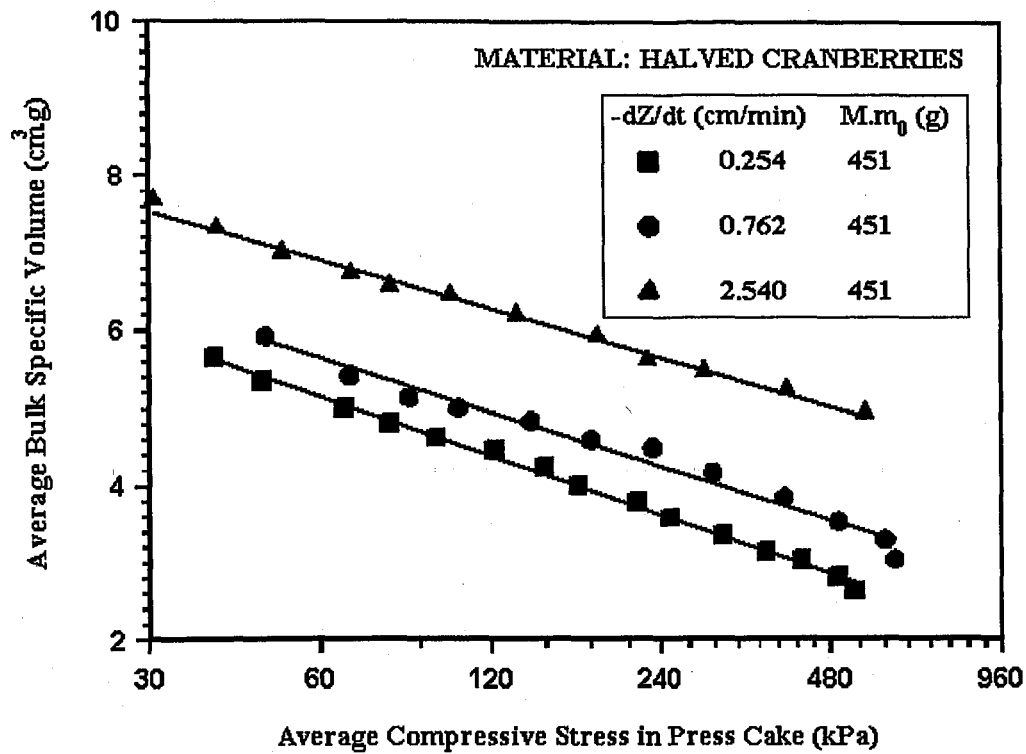


Figure 3.11 (haut – produit Cr) et Figure 3.12 (bas – produit F)  
La variation du volume spécifique moyen et du coefficient de compression

**Publication 9, (P9)**

LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE A DEFORMATION CONSTANTE  
DANS LE CAS DE LA VARIATION LINEAIRE DU RAPPORT DE VIDE (CDC1)  
est illustrée en détail dans la publication qui suit.

REBOUILLAT S., SCHWARTZBERG H.G. & LECLERC D. *The expression of biological and food materials under constant rate of strain.* Journal of Chemical Engineering of Japan 29 (1), 29-36, (1993).

*A multi-mode compression cell has been developed to study the compression behaviour of relatively thin layers of biological materials under constant rate of deformation. Providing that fairly thin layers were compressed under relatively slow rate of deformation, the proposed theory was also found to be sufficiently accurate in the case of non-linear materials.*

*The ratio of the measured fluid pressure at the no-flow surface versus the total stress,  $P_f / P_t$ , seems to be a useful parameter to establish the validity limits of the proposed theory. The rate of deformation also influences the compression characteristics of the sample, such as the modified coefficient of consolidation. Its impact varies considerably with the rate of deformation the sample considered and the  $P_f / P_t$  ratio.*

# THE UNI-AXIAL COMPRESSION OF SOLID-LIQUID MATERIALS UNDER CONSTANT RATE OF STRAIN

SERGE REBOUILLAT\*<sup>1</sup>

Laboratoire des Sciences du Génie Chimique, 1 rue Grandville - BP  
451 - 54001 NANCY - GRANCE

HENRY G. SCHWARTZBERG AND DOMINIQUE  
LECLERC

University of Massachusetts, Amherst, Massachusetts 01003, USA

**Key Words:** Solid-liquid Separation, Uni-axial Deformation, Constant Rate of Strain, Thin Layers, Coefficient of Consolidation.

A multi-mode compression cell has been developed to study the compression behavior of relatively thin layers of biological materials. By a line of reasoning similar to that previously used in advanced soil mechanics, a theory is proposed for the case corresponding to the expression of these materials under constant rate of deformation. In this theory the samples are assumed to be linear materials having a constant coefficient of compressibility,  $-(d\bar{v}/dP_s)$ . Providing that fairly thin layers were compressed under relatively slow rate of deformation, this theory was also found to be sufficiently accurate in the case of non-linear materials. The ratio of the measured fluid pressure at the no-flow surface versus the total stress,  $P_f/P$ , seems to be a useful parameter to establish the validity limits of the proposed theory. The rate of deformation also influences the compression characteristics of the sample, such as the modified coefficient of consolidation. Its impact varies considerably with the sample considered and the  $P_f/P$  ratio.

## Introduction

Different types of forces and stress gradients are used to induce compression during the processing of a wide variety of materials. The term expression is generally used when the compression leads to the displacement of a liquid out of a solid-liquid mixture. Most expression processes use the relative movement of solid parts, including inflatable membranes, to transfer the energy required to expel the liquid.

Depending on the geometry of the compression system and the type of movement of the solid parts, which generates the stress gradient inside materials, expression can occur under constant pressure, constant rate or variable pressure / variable rate conditions. A large number of articles, related to the expression of solid-liquid materials, refer to the constant pressure pattern (Leclerc, 1985 and Shirato, 1971). Most of these works are using clay-like saturated systems. These materials are very similar to the soil samples used by Terzaghi (1925-1943) and Darcy to establish the fundamental equations related to consolidation and filtration.

Nonetheless, if precautions are taken, these basic equations are widely applicable, sometime beyond their original scope. Shirato *et al.* (1987) analyzed the expression of clay materials under a constant-rate of deformation assuming that the internal press-cake conditions were close to those obtained under constant pressure.

Biological materials, and more generally porous

materials containing liquids, are frequently considered as triphasic systems where gas, often air, is trapped into the solid/liquid materials and, sometime enclosed into the cells. This aspect leads to a complex situation since the air dissipation and the cell rupture mechanism influence the compression behavior of the mixture. In a previous study, Rebouillat *et al.* (1985) showed that the fundamental consolidation and filtration equations could be rearranged and used to characterize the behavior of biological materials, such as waste water sludges and spent sugar beets, undergoing compression under constant applied vertical stress. The Kelvin-Voigt model, also used for modeling the secondary consolidation of soils, has been successfully adapted to the analysis of the creep and relaxation of food materials (Peleg, 1977).

Schwartzberg and Schwartzberg *et al.* (1977, 1983) studied a wide variety of agricultural and food materials and provided useful equations to evaluate the force requirements during the expression of these cellular products. Schwartzberg also proposed a comprehensive description of the three basic force components, including the friction, and their relationships with the bulk specific volume of the material undergoing expression. Rebouillat and Schwartzberg (1986) showed that the static filtration characteristics, obtained by permeation through the relaxed cake, are markedly different from the dynamic filtration characteristics calculated from data obtained during the compression test. Such static permeation data (Körmeny, 1974), used in the past to predict yields during the dynamic compression of a solid/liquid mixture, are highly

\* Received on April 7, 1995

<sup>1</sup> Currently with E. I. du Pont de Nemours Int. S. A., Tel. +41 22 717 6885, Fax. +41 22 717 6868

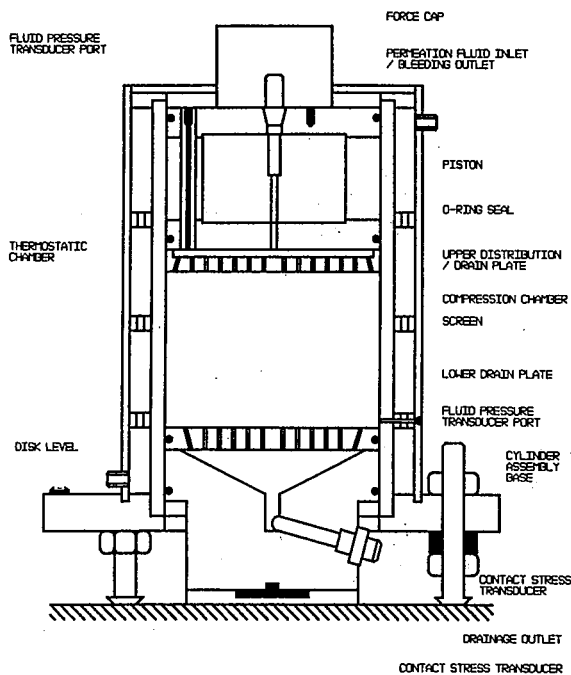


Fig. 1 Assembly drawing of the new multi-mode compression cell (MMCC)<sup>®</sup>.

suspect in the case of biological materials undergoing active compacting.

This paper describes a method which uses a new theory to access the dynamic compression coefficient of biological and food materials. A multi-mode large diameter expression cell has been built to study the dynamic compression characteristics of rather thin layers of materials. The influence of rates of compression is emphasized

## 1. Material and Methods

### 1.1 Test Apparatus: the Multi-Mode Compression Cell (MMCC).

A schematic drawing of the new expression cell is shown in Fig. 1. It consists of a 133.4 mm internal diameter, jacketed high performance acrylic cylindrical cell, a loading piston with a double O-ring low-friction seal system, an insertable drainage base and a perforated filter support plate.

The drainage assembly is also fitted with O-rings to prevent the sample extrusion along the inner surface of the chamber. An additional perforated distributor can be installed into the cell between the piston and the sample for permeability tests. The piston assembly contains a feed line for the injection of liquids during permeation tests; this line can also be used to drain the expelled liquid when a double or upper drainage test is conducted. The compaction chamber is jacketed to receive a coolant or a heating fluid for the expression of biological materials at controlled temperature or for heat accelerated tests. Three transducer ports are available at the top of the piston to measure the hydraulic pressure at the impervious plate level (here also referred as the no-flow surface), three additional miniature pressure

sensors can be fitted at the bottom of the cell to measure the fluid pressure just above the filtration membrane. Transducer ports are also available on the periphery of the cell to measure that pressure along the vertical presscake axis. The compaction cylinder is mounted on a tripod; when frictional forces are recorded, one leg is replaced by a stress cell. An additional stress transducer can be fitted underneath the mobile drainage assembly to measure the bottom solid pressure. The specimen is placed between the piston and the bottom drainage plate. This sample can be subjected to loading at constant pressure or at a constant rate of deformation of the upper surface. For this study, constant rates of strain were selected. Vertical deformation of the test specimen is produced by the movement of the ram drive of a rheometer which is capable of providing a well controlled and wide range of speeds. The drive is fitted with a load cell capable of measuring forces up to 22.4 kN which corresponds to a vertical pressure of 1603 kPa at the piston level. Deformation of the sample during the expression is measured by the displacement transducer of an Instron<sup>®</sup> unit. All output signals are recorded and computerized using a graphic digitizing tablet.

### 1.2 Testing procedure

Before the sample was introduced into the MMCC cell, the inner surface, the piston O-rings and the drainage assembly O-rings were covered with a thin film of silicone vacuum grease in order to minimize frictions between the moving parts and the static cylinder. For all the expression tests, a plain weave nylon filter cloth, with calibrated 0.5 mm openings, was used to cover the perforated drainage plate to prevent direct extrusion and clogging. The compression-relaxation behavior of the empty cell was periodically recorded in order to take into account potential deflection. No corrections had to be applied since the deflection was always negligible.

To insure accurate measurements of the fluid pressures, the following precaution was taken: - the base, the transducer port channels and the piston feed line were filled with water and purged as soon as fluid was expelled from the specimen undergoing compression at the beginning of the test. The miniature transducers present very small dead volumes which can be easily deaired by flushing.

A constant rate of expression was induced by displacing the piston with the rheometer vertical ram drive set at a given speed. During the test, the vertical applied stress at the top of the sample, the frictional forces, and the fluid pressures, at the top of the specimen and above the bottom filter cloth, were recorded continuously. Vertical compaction of the test sample during compression was also measured.

At the end of each experiment the presscake relaxation curve was recorded. The presscake physical characteristics were also measured, such as the residual humidity level.

### 1.3 Materials description and samples preparation

Three types of biological (food and agricultural) materials have been tested in this study: commercial

cranberries, experimental casein curds, and spent sugar beet pulps. Commercial cranberries from the state of Massachusetts were selected. (For juice production these berries are usually vine-ripened and deep frozen for several months before processed. Good quality cranberries can be kept frozen with minor moisture loss.) About one pound of thawed cranberries were washed and halved parallel to the major axis. (This fruit is a prolate spheroid). The average diameter of the selected population was 10.5 mm (cov. 9%) and its average length measured along the major axis was 12.5 mm (cov. 7%). The average solid content of the selected batch was 10.5% (cov. 12.5%).

Wet acid casein curds, used to manufacture low sodium and low fat process cheese, were included in this study in order to determine their compressibility characteristics. The curds were prepared according to known art using a patented process (US 4,066,800, Rosenau *et al.*, 1978). About 85 lb of skim milk was acidified under laminar stirring to pH 4.6 with diluted hydrochloric acid (10 parts of acid to 90 parts of water). The batch of acidified milk was gradually heated to 77 °C using a steam jacketed vat. The heating lasted about 20 min. Then, the mixture was cooled to 52 °C within 10 min under periodic slow stirring. This procedure provides rather uniform small casein curds, easily drainable prior to pressing. About 1 lb of drained curds were used for each test. The batch selected for this study had an average particle diameter of 4.2 mm with a fairly large coefficient of variation of 30%. The average solid content of the drained curds was 35% (cov. 11.5%). (In industry belt presses are used to remove whey, leading to a presscake containing about 50% moisture).

Spent sugar beet pulp samples used in the present study were obtained from a sugar beet extraction plant. The exhausted cossettes were submitted, as received, to the compression analysis. The de-sugared cossettes were parallelepipeds with a squared section of 1.5 × 1.5 mm (cov. 30%) and an average length of 23 mm (cov. 29%). The average solid content was 13.3% (cov. 13%).

## 2. Basic Equations for Compression at Constant Rate of Deformation

By definition, the insoluble solids which can not pass through the outflow media are called solids, unless differently specified.

The traditional assumptions (Terzaghi 1943): - unidirectional deformation and flow, - incompressible fluids and solids, - and the complete saturation of the samples, were made. The linear relationship between the bulk specific volume and the compressive stress, which is also imposed in the pioneering theories of Terzaghi's or its progeny (Taylor, 1958), no longer needs to be. The relieve of this limitation constitutes a substantial advantage in favor of the proposed new approach which can truly encompass a large range of non-linear materials.

It is equally important to underline that no restrictions regarding the simultaneous or successive occurrence of the

so-called primary and secondary consolidation effects are required. The constant rate approach alleviates the highly controversial debate regarding the overlapping - or not - of the two compression phenomena which have inevitably to be considered in the deformation under constant stress.

Based on the continuity of flow through the cake undergoing compression, the basic equation of compression is:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial z} \right) = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1) \quad \text{where } v = \frac{(1+e)}{\rho_s}$$

where  $P_f$  the fluid pressure,  $v$  is the local volume of cake per unit mass of solids and  $K$  the permeability.

Assuming that, at any time  $t$ , the permeability of the presscake is constant over the depth of the sample Eq. (1) can be rearranged as follows:

$$\begin{aligned} P_f = 0 @ z = 0 \\ \frac{K}{\mu} \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2) \text{ B.C.:} \quad \text{and} \\ \frac{\partial P_f}{\partial z} = 0 @ z = Z \end{aligned}$$

This assumption has been used and its validity has been discussed in a great deal of published papers (Schiffman, 1964 and Shirato, 1986). This aspect may deserve a more detailed attention which can be presented at two levels:

Theoretically, in the classical case of consolidation, the fact that the coefficient of permeability is considered to be the same at every point and for every stage of the process can only be truly valid when small strains are involved and when homogeneous isotropic samples are used. In the theory presented in this paper this assumption is justifiable because thin layers are compressed, which basically corresponds to the uniformity aspect of the traditional constant pressure consolidation. Regarding the time aspect, the present study only considers a constant rate of deformation which means that if necessary the rate can be adjusted at sufficiently low level to avoid compression induced anisotropy. Furthermore, the time scale can always be taken as small as necessary.

Practically it has been possible to operate within this type of constrain because the newly designed compression cell, MMCC, used for this study has a fairly large diameter enabling the compaction of relatively thin and rather uniform layers. Under these conditions only the variation of the bulk specific volume within the samples is guaranteed to be small, further supporting the proportionality between the permeability and the average bulk specific volume; i.e. the coefficient of permeability is dependent on the first power of time.

As shown on Fig. 2, the distances and displacements are measured upward from the drainage zone. The sample is pressed at an overall constant rate of deformation, - ( $dZ/dt$ ). With this coordinate system the boundary conditions (B.C.), given next to equation (2) are self-explanatory.

The overall compaction rate is constant, consequently ( $dv/dt$ ) is constant. The local bulk specific volume

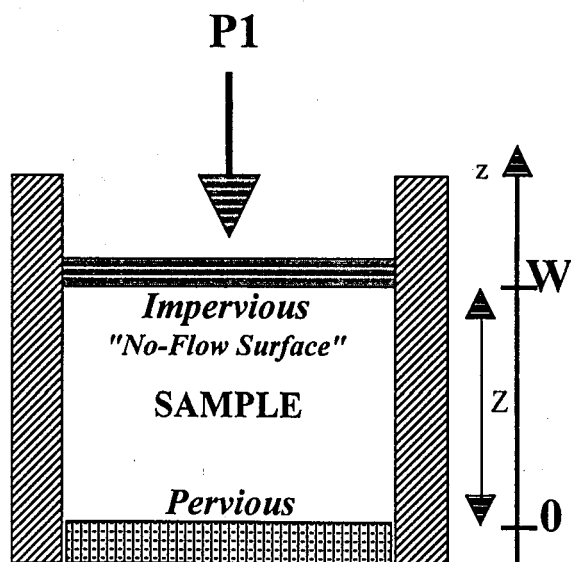


Fig. 2 The Coordinate system

is a function of the first power of time and of the depth  $z$ . In practice it is not possible to determine the exact function governing the variation of the average bulk specific volume with the presscake height. Consequently, it must be assumed. Various functions, such as the linear, sinusoidal and parabolic profiles frequently encountered in the solid consolidation theories, were considered. Then it was concluded that a linear relationship would be entirely justifiable since thin layers are compressed. Furthermore, the mathematical properties of these other traditional functions support, as a first approximation given by the Taylor's series, the linearity for small height.

Considering that the local bulk specific volume varies linearly with  $z$  and based on Smith and Wahls' (1969) theoretical approach of the consolidation of soils, the following equation is proposed:

$$v = v_0 + \frac{(dZ/dt)t}{W} \left\{ 1 + \frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} \left( \frac{z-Z/2}{Z} \right) \right\} \quad (3)$$

where  $W$  is the total specific load which corresponds to the mass of solids between the drainage surface and the no-flow piston surface.  $W$  has a local counterpart  $w$ .  $W$ ,  $Z$ ,  $\bar{v}$  and  $n$  are related by the following equations:

$$Z = \int_0^w v dw \quad \text{and} \quad Z/W = \bar{v}$$

From Eq. (3) it can be demonstrated that the only possible range of variation of the ratio  $\{b.W/(dZ/dt).\rho_s\}$  is 0 to 2. In order to simplify the presentation of this method we have chosen the centered value 1. Within this 0 to 2 range the calculations of  $v$  and  $P_f$  shows only small variations

Using Eq. (3) and the relevant boundary conditions, Eq. (2) can be analytically solved. The solution is a rather complex equation which can be easily simplified by replacing  $1/v$  in Eq. (2) by  $1/\bar{v}$ . This assumption results in less than 2% accuracy loss on the calculated fluid pressure. For the case corresponding to  $\{b.W/(dZ/dt).\rho_s\} = 1$  the

solution of Eq. (2) for the fluid pressures  $P_f$  and  $P_{f1}$  is:

$$P_f = \frac{-(dZ/dt)\mu}{KZ} \left\{ \left( Zz - \frac{z^2}{2} \right) + \frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} \left( \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{6Z} \right) \right\} \quad (4)$$

$$P_{f1} = P_f(z=Z, t)$$

$$P_{f1} = \frac{-(dZ/dt)\mu}{K} Z \left\{ \frac{1}{2} + \frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} \frac{1}{12} \right\} \quad (5)$$

The coefficient of consolidation  $C_v$ , initially introduced by Terzaghi, then, modified by Shirato and called the modified coefficient of consolidation  $C_e$  is defined as:

$$C_v = K \frac{v}{-(dv/dP_s)_{av} \cdot \mu} \quad (6) \quad C_e = \frac{C_v}{V^2} \quad (7)$$

where  $-(dv/dP_s)_{av}$  is equivalent to the coefficient of compressibility divided by the density of the solids.

Providing that in Eqs. (6) and (7)  $v$  can be replaced by  $\bar{v}$ , when the relationship between the average bulk specific volume versus the average solid compressive stress is established, the only unknown in these two equations is  $K$ . The permeability  $K$  can be obtained by solving Eq. (5) in which both the fluid pressure and the compaction rate are known. This yields to the expression:

$$C_e = \frac{-(dZ/dt)W}{-(d\bar{v}/dP_s)_{av} P_{f1}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{dW}{-(dZ/dt)\rho_s} \frac{1}{12} \right\} \quad (8)$$

This equation provides a mean of determining  $C_e$  for any bulk specific volume using the data generated during the constant rate of compaction test.

### 3. Presentation and Discussion of Test Results

#### 3.1 Experimental test results

A series of constant rate of about 30 deformation tests were conducted on each type of material. In this study only the results related to the influence of the strain rate, for a given mass of wet material, are presented in an attempt to determine the critical rate of deformation, under which the equations remain valid.

In each test the deformation rate was set at a given value. While the material was undergoing compaction the total applied stress, the fluid pressures, at the piston surface and just above the filtration cloth, the friction forces, and the displacement were continuously recorded. The friction forces were always negligible compared to the other force components.

Figures 3 and 4 show typical examples of the relationships which can be established from the test data.

Figure 3 illustrates the variation of the average bulk specific volume as a function of the axial pressure. Figure 4 gives the relationship between the average bulk specific volume and the fluid pressure measured at the no-flow surface. As shown on Fig. 4 for the two rates where there was duplication, the two corresponding sets of plotted data overlapped. This indicates that the test reproducibility is excellent. This was observed in most of

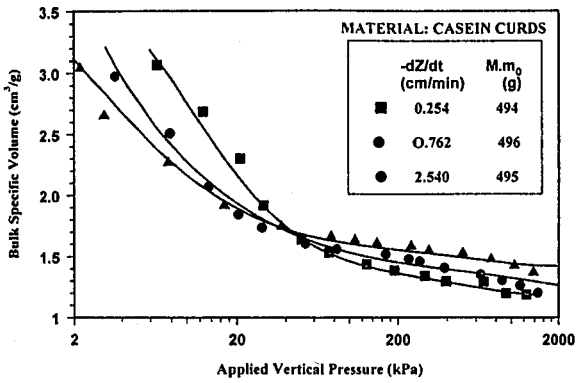


Fig. 3 Average bulk specific volume vs. applied vertical stress. A typical test plot

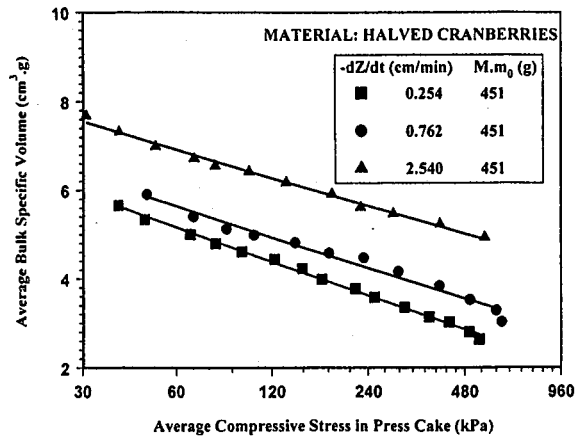


Fig. 5 An example of relationship between the average bulk specific volume and the average compressive stress

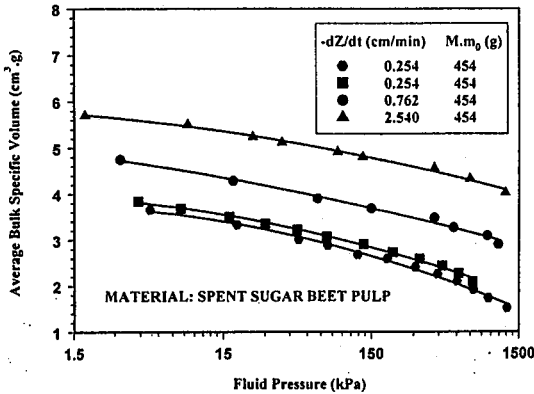


Fig. 4 Average bulk specific volume vs. fluid pressure

Table 1 Summary of average bulk specific volume - average compressive stress relationships for the materials tested

$-dZ/dt$ (cm.min) & Materials	$\bar{v}$ vs. $\bar{P}_s$	$C_d$ [cm <sup>3</sup> /g]	$P_{ff}/P_f$
Casein Curd			
0.254	Linear	0.38	0.85
0.760	Linear	0.52	
2.540	Linear	0.29	
Spent Pulps			
0.254	Concave Downwards	2.25	0.55
0.254	Concave Downwards	2.34	
0.760	Concave Downwards	2.14	
2.540	Concave Downwards	1.54	
Cranberries			
0.254	Concave Downwards	3.03	0.70
0.254	Concave Downwards	2.51	
0.760	Concave Downwards	2.28	
2.540	Concave Downwards	1.97	

the cases and did not seem to be affected by the type of material submitted to the test, as long as the sample preparation was done in a consistent manner.

As shown on Fig. 3, the compaction occurred in two stages. In the initial stage the compressibility was much higher than during the second stage. This might be a transient mode preceding the steady state compression, which is the only phase taken into consideration in this study. All data used to calculate the coefficients of consolidation are taken beyond the intercept of the two modes, i.e. at relatively high stresses. The three materials exhibited the same tendency.

As exemplified on Fig. 4 the variation of  $\bar{v}$  versus the logarithm of  $P_{ff}$  is almost linear, and the curves for different compression rates are essentially parallel. This occurred for all three materials. Comparing Fig. 3 and 4 it appears that the strain rates have more impact on the relationship between  $\bar{v}$  and  $P_{ff}$  than between  $\bar{v}$  and  $P_f$ . This was also true for the three materials but to a higher extend for the casein curd samples. Increase the compression rate also leads to a reduction of the compressibility of the material, both in the initial and final compaction phases as shown by the slopes of the curves  $\bar{v}$  versus  $P_f$ .

For a given material, the most noticeable effect of the increase of the compression rate was reflected on the significant increase of the fluid pressure.

### 3.2 Analysis of results

In order to calculate the modified coefficient of consolidation  $C_e$ , from Eq. (8), as a function of the average bulk specific volume, it is necessary to have an expression for  $-(dv/d\bar{P}_s)$  which involves the test data. The following equations can be used to obtain this expression:

$$P_f = \bar{P}_f + \bar{P}_s \Leftrightarrow \bar{P}_s = P_f - \left\{ \frac{\bar{P}_f}{P_{ff}} \right\} P_{ff} \quad (9)$$

with

$$\bar{P}_f = \frac{1}{Z} \int_0^Z P_f dz$$

The ratio  $\bar{P}_f/P_{ff}$  is obtained from Eq. (4) and Eq. (5). For  $\{b.W / (dZ/dt) \cdot \rho_s\} = 1$  this ratio is equal to 0.700, and is equal to 0.666 for a fluid pressure parabolicakky distributed over the depth of the sample. In the present study all the data were analyzed on the basis of  $\bar{P}_f/P_{ff}$  equal to 0.700, as obtained from Eq. (4) and Eq. (5). Figure 5 shows an example of the relationship between  $\bar{v}$  and the logarithmic value of  $\bar{P}_s$  obtained by computing Eq. (9).

As noticeable on this figure, the behavior of the materials tested depend on the strain rate. For casein curds,



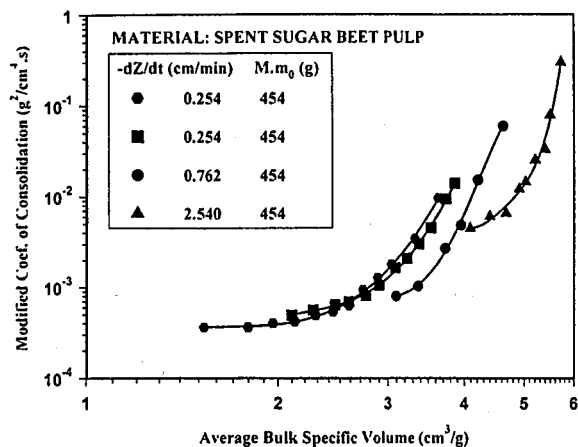


Fig. 6 Modified consolidation coefficient vs. average bulk specific volume for spent sugar beet pulp samples

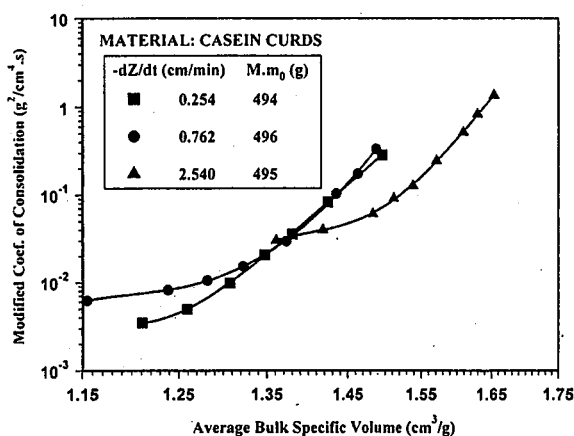


Fig. 7 Coefficient of consolidation vs. bulk specific volume for case in curds

which appeared to have the highest permeability, this tendency was less pronounced. As described in Table 1 casein had a linear stress-strain relationship clearly noticeable when  $\bar{v}$  vs.  $\bar{P}_s$  data were plotted. For the two other products the  $\bar{v}$  vs.  $\bar{P}_s$  relationships were concave downwards. These products exhibit a non-linear behavior which has to be carefully considered since the Eq.(6) originally assumed linearity between these two quantities. For all the products studied, as for the selected example in Fig. 4, there was a decrease in compressibility when the deformation rate was increased.

When  $\bar{v}$  was plotted against the logarithmic value of  $\bar{P}_s$ , a good linear correlation was observed for all the materials. A modified compression index  $C_d$ , representing the slope of this semi-logarithmic plot, was determined by linear regression.  $C_d$  can be related to the compression index  $C_c$  by the following equation:  $C_d = C_c \cdot \rho_s$

The compression index  $C_c$  is usually referred, in the soil mechanics literature, as the slope of the plot of the void ratio  $e$  versus  $\log P_s$ . In this study,  $C_d$  is defined by the equation:  $\Delta\bar{v}/\Delta(\log \bar{P}_s) = C_d$

Table 1 summarized the values of the modified compression index,  $C_d$ , at different compression rates for

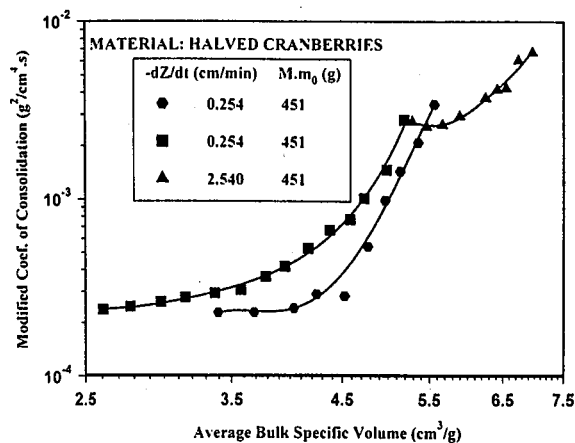


Fig. 8 The modified coefficient of consolidation variation with the compression rate for halved cranberries

Table 2 Theoretical vs experimental average bulk specific volumes

$-dZ/dt$ (cm/min) & Materials	$\frac{b \cdot W}{(dZ/dt)/\rho_s}$	$v_f$ @ $z=0$ [cm <sup>3</sup> /g]	$v_f$ @ $z=Z$ [cm <sup>3</sup> /g]	$\bar{v}$ Theo. [cm <sup>3</sup> /g]	$\bar{v}$ Exp. [cm <sup>3</sup> /g]
Casein Curds 0.254	1	1.018	1.402	1.210	1.20
Spent Pulps 0.254	0.5	0.902	2.132	1.517	1.52
Cranberries 0.254	0.5	1.956	3.326	2.642	2.65

the materials studied. These data indicate a decrease in the value of  $C_d$ , equivalent to a decrease in compressibility, with the increasing rates of deformation.

Knowing the slope of the linear relationship between the average bulk specific volume  $\bar{v}$  and the average solid compressive stress  $\bar{P}_s$ , it is possible to use Eq. (8) to compute the modified coefficient of consolidation,  $C_e$ , as a function of  $\bar{v}$ . In order to compensate for the non-linear stress-strain behavior of some materials tested, the average local values of  $-(d\bar{v}/d\bar{P}_s)$  have been used in the cases referred in Table 1 as "Concave Downwards".

As shown in Figs. 6, 7 and 8 all the plots of  $C_e$  vs.  $\bar{v}$  follow the same trends. Fig. 6 and 8 include duplicated tests and outline the good reproducibility of the results.

The variation of the modified consolidation coefficient  $C_e$  as a function of  $\bar{v}$  is rate dependent. For the three materials studied, when the rate of compression increases, the curves  $\bar{v}$  vs.  $C_e$  shift towards higher bulk specific volumes and higher coefficients of compression. Nonetheless, as illustrated in Fig. 7, it is worth being noticed that, in terms of the variation of  $C_e$ , the casein curd samples tend to be much less impacted by the increase of the deformation rate.

### 3.3 Concluding discussion

The validity of the constant rate of compression theory proposed in this work is based on the assumption that the bulk specific volume varies linearly with the press-cake height,  $z$ . Table 2 provides comparative data between the calculated and the measured final average bulk specific

volumes referred respectively as  $\bar{v}_f$  Theo. and,  $\bar{v}_f$  Exp. This also give the calculated local bulk specific volumes at the boundaries. In the cases considered in the present study the linearity assumptions seems to be a quite suitable approximation.

The permeability was also assumed to be constant over the depth of the compressed sample at any time and to be a function of the average bulk specific volume. Due to the size of the cell used in this study, relatively thin layers have been compressed which could lead to a rather linear distribution of the bulk specific volume over the height of the presscake. This aspect supports made the assumptions above and could compensate for the non-linear stress-strain behavior of some samples.

The larger the solid pressure at the no-flow surface, the less debatable is the validity of the assumptions. In other words, the smaller the ratio  $P_{ff}/P_1$ , the higher is the chance of having a linear distribution of the bulk specific volume over the depth of the sample. In all the cases studied, the ratio  $P_{ff}/P_1$  initially increased fairly rapidly with the total vertical stress and, leveled off according to a slightly inclined "plateau", as the ram pressure further increased. Table 1 gives the  $P_{ff}/P_1$  value at the beginning of the "plateau". The influence of this value may strongly depends on the material, especially if the sample exhibits a non-linear relationship between the average bulk specific volume and the average solid compressive stress. In that case, without enough evidence, we strongly believe that using the local average slope  $-(d\bar{v}/dP_s)$  in the calculation of the modified consolidation coefficient, widens the scope of applicability of the proposed theory.

Based on the results shown in Figs. 6, 7 and 8 the impact of the value of the ratio  $P_{ff}/P_1$  can be discussed separately for the linear and for the non linear cases.

### 3.3.1 Linear materials

In the case of casein curds, for which the  $\bar{v}$  vs.  $\bar{P}_s$  plots are clearly linear, the studied range of compression rate has a moderate effect on the modified consolidation coefficient (Fig. 7), and, as one can notice in Table 1 the "plateau" value of  $P_{ff}/P_1$  is high (85%).

### 3.3.2 Non-linear materials

As summarized in Table 1 a non-linear behavior was observed for both the spent sugar beet pulps and the halved cranberries. Additionally, the "plateau" values of the ratio  $P_{ff}/P_1$  were respectively 55% and 70%. These varied moderately (5 to 10%) with the rate of deformation. In all the cases the leveling-off of this ratio would occur more rapidly when the rate of compression was increased.

In these two cases, as shown in Figs. 6 and 8, the rate of compression has a more significant effect on the value of the modified consolidation coefficient than for the linear material (e.g.: Fig. 7). It is also noticeable that the coefficients of consolidation for the cranberry samples, (Fig. 8), are more dependent on the rate of strain than in the case of the spent sugar beet pulps, (Fig. 6). This suggests that among the non-linear cases several sub-cases could be developed depending on the  $P_{ff}/P_1$  value. The compress-

ibility characteristics of non-linear materials depends more on the rate of strain at high  $P_{ff}/P_1$  ratios.

Although a great deal of work remains to be done before more definite conclusions can be reached, this study may suggest that, in the cases of non-linear stress-strain relationships, the  $P_{ff}/P_1$  ratio is a key parameter. The maximum acceptable value of this ratio, with regard to the assumptions made in this theory, is dependent on the material tested. Nevertheless, the lower this parameter, the broader is the range of compaction where the model can be used.

Possible factors affecting the modified coefficient of consolidation are numerous, however, the compression of thin layers seems to be always favorable to a good reproducibility of the data despite the increased difficulty in the measurement of the sample height and the need for equipment able to sustain high vertical forces without deflexion. Other factors, such as the initial load,  $M.m_0$ , the temperature of the sample undergoing pressing, and, the filter cloth resistance to the hydraulic flow, have been studied and are under consideration for future publications.

In this study, the consolidation parameters were only calculated for the second part of the compression process when the fluid pressures are measurable with a good degree of accuracy. For this compression phase we can reasonably assume that steady state conditions were established. Nonetheless, we have noticed that the development of measurable fluid pressures seemed to coincide with the inflexion of the curves  $\bar{v}$  versus  $P_1$ , as illustrated in Fig. 2. This observation may suggest that as soon as the piston was set in motion a transient compression phase developed in the sample. This phenomenon needs to be confirmed and would require further theoretical studies in future research programs.

The constant rate of deformation approach is a fast and simple method for the determination of the compression characteristics of biological materials. Avoiding any stress shock at the initial stage of the compression and tailoring the initial rate of deformation, might be an important advantage versus the traditional compression at constant pressure. This might be even more important in the case of soft and non-linear materials for which the degree of pressure dependency of the modified coefficient of consolidation seems to vary considerably with the material type.

### Acknowledgments

The writers wish to express their gratitude to the University of Massachusetts where the work has been performed.

### Nomenclature

$b$	= constant in Eq. (3)	
$C_c$	= modified coefficient of consolidation	[kg <sup>2</sup> /m <sup>3</sup> .s]
$C_c$	= coefficient of consolidation	[m <sup>2</sup> /s]
$C_c$	= compression index	[-]
$C_d$	= modified compression index	[m <sup>3</sup> /kg]
$e$	= local void ratio	[-]
$K$	= permeability	[m <sup>2</sup> ]
$M$	= total mass of solids in original mixture	[kg]

$m_o$	= initial ratio of wet to dry cake mass	[-]
$P$	= vertical compression stress	[Pa]
$P_r$	= ram pressure	[Pa]
$P_f$	= fluid pressure	[Pa]
$\bar{P}_f$	= average fluid pressure for whole press-cake	[Pa]
$P_{f1}$	= fluid pressure at no-flow surface	[Pa]
$P_{fo}$	= fluid pressure at outflow surface	[Pa]
$P_s$	= local compaction stress	[Pa]
$\bar{P}_s$	= average compaction stress for whole press-cake	[Pa]
$P_{s1}$	= value of $P_s$ at ram surface	[Pa]
$P_{so}$	= value of $P_s$ at outflow surface	[Pa]
$\bar{P}_{os}$	= average compaction stress at the initial state	[Pa]
$t$	= time	[s]
$v$	= local bulk specific volume, local volume of cake per unit mass of solids	[m <sup>3</sup> /kg]
$\bar{v}$	= average value of $v$ for whole press-cake	[m <sup>3</sup> /kg]
$v_R$	= final value of $v$	[m <sup>3</sup> /kg]
$v_{go}$	= initial value of $v$	[m <sup>3</sup> /kg]
$W$	= mass of solids between outflow and no-flow surfaces / outflow surface area	[kg/m <sup>2</sup> ]
$w$	= mass of solids between a chosen level above the outflow surface and the outflow surface / outflow surface area	[kg/m <sup>2</sup> ]
$Z$	= cake height	[m]
$Z_o$	= initial cake height	[m]
$-dZ/dt$	= compaction rate	[m/s]
$z$	= distance above outflow surface	[m]
$\mu$	= viscosity of liquid expelled	[Pa.s]
$\rho_s$	= density of solids	[kg/m <sup>3</sup> ]

#### Literature Cited

- Crawford, C. B.; "Interpretation of the Consolidation Test," *J. of the Soil Méc. and Found. Div.*, 90-SM5, 87-102 (1964)
- Körmeny, I.; "Contribution to the Three-Dimensional Pressing Theory and its One Dimensional Application," *Acta Aliment. Acad. Sci Hung.*, 3, 93-110 (1974)
- Leclerc, D. and S. Rebouillat; "Dewatering by Compression," *Mathematical models and design methods in solid-liquid separations*, p. 356-391, (A. Rushton, Ed), NATO ASI Series E No. 88, Martinus Nijhoff Publishers, (1985)
- Peleg, M.; "Operational Conditions and the Stress-Strain Relationship of Solid Foods," *J. Text. Stud.*, 8, 283-293 (1977)
- Rebouillat, S., D. Leclerc and G. Baluais; "La Déshydratation par Filtration-Pressage. Modélisation de la Compression Unidirectionnelle," *Entropie*, 121, 12-29 (1985)
- Rebouillat, S. and H. G. Schwartzberg; "Dynamic and Static Filtration Resistances during Mechanical Expression involving Foods," *Food engineering and process applications*, vol. 2: Unit operations, p.281-291, (M. Le Magner and P. Jelen, Ed.), Elsevier Applied Science Publishers, (1986)
- Rebouillat, S., H. G. Schwartzberg and D. Leclerc; "The Expression of Biological and Food Materials under Constant Rate of Strain", 6th World Filtration Congress Proc., p. 382-387, Nagoya (1993)
- Rosenau, J. R., J. F. Calzada and M. Peleg; "Some Rheological Properties of Cheese-Like Products Prepared by Direct Acidification," *J. Food Sci.*, 43, N°3, 948 (1978)
- Schiffman, R. L.; "Consolidation of Nonhomogeneous Clay Layers," *J. of the Soil Mec. and Found. Div.*, ASCE, N°SM5, 1-30 (1964)
- Schwartzberg, H. G.; "Expression-Related Properties," *Physical properties of foods*, p.423-471, (M. Peleg and E. Bagley, Ed.) AVI Publishings Co. Inc. (1983)
- Schwartzberg, H. G., J. R. Rosenau and G. Richardson; "The Removal of Water by Expression," *AIChE Symposium Series*, 73, N°163, 177-190 (1977)
- Shirato, M., T. Murase, M. Negawa and H. Moridera; "Analysis of Expression Operations," *J. Chem. Eng. Japan*, 4, N°3, 263-268 (1971)
- Shirato, M., T. Murase, M. Iwata and S. Nakastuka; "Analysis of Consolidation Process in Filter Coke Dewatering by Use of Difficult-to-Filter Slurries," *Chemical Engineering Science*, 41, N°12, 3212-3218 (1986)
- Shirato, M., M. Iwata, M. Wakita, T. Murase and N. Hayashi; "Constant-Rate Expression of Semi-Solid Materials," *J. Chem. Eng. Japan*, 20, N°1, 1-5 (1987)
- Smith, R. E. and H. E. Wahls; "Consolidation under Constant Rates of Strain" *J. of the Soil Mec. and Found. Div.*, 95-SM2, 519-539 (1969)
- Taylor, D. W.; *Fundamentals of Soil Mechanics and Foundations*, John Wiley & Sons, New York (1958)
- Terzaghi, K.; *Theoretical Solids Mechanics*, John Wiley and Sons, New York (1943)

### 3.5.2 CDC DANS LE CAS DES LARGES DEFORMATIONS – SPM LINEAIRE OU NON (CDC2)

#### 3.5.2.1 RAPPELS THEORIQUES DES EQUATIONS DE BASE

Les principales équations dérivent de l'équation Eq. 1.33. Cependant un rappel préliminaire rend la suite plus directement accessible.

$$\text{Selon l'Eq. 1.12 : } \nabla \cdot \vec{v}(M) = \text{div } \vec{v}(M) = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

l'équation de Darcy (l'Eq. 1.13)

$$\vec{v} = -K \nabla \frac{P_f}{\gamma_f} = -K \text{grad} \frac{P_f}{\gamma_f} = -\frac{K}{\gamma_f} \left( \frac{\partial P_f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P_f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P_f}{\partial z} \vec{k} \right)$$

et le principe de répartition de la contrainte effective et de la pression hydraulique donné par l'Eq. 1.24 :  $P = P_s + P_f$  appliqué à la compression axiale,

$$\text{on peut écrire } \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial P_s}{\partial z} \right) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \text{ ou de façon équivalente } \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial P_s}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \text{ qui}$$

$$\text{selon la définition traditionnelle du coefficient de compression } C_v = \frac{K}{\gamma_f \cdot m_v}$$

Eq. 3.16

$$\text{et } m_v = \frac{a_v}{1+e} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial P_s},$$

Eq. 3.17

$$\text{devient : } \frac{\partial}{\partial z} \left( C_v \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

Eq. 3.18

$$\text{ou encore } C_v \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

Eq. 3.19

lorsque le coefficient de compression est supposé indépendant de  $z$ . Notons que ceci n'impose aucune restriction quant à la perméabilité,  $K$  ou  $K_i$ , et la compressibilité,  $(dv/dP_s)_{av}$  de la matrice, pour autant que leur rapport,  $C_v$ , reste constant.

$$\text{Rappelons que } C_v \text{ peut aussi s'écrire } C_v = K_i \frac{v}{-(dv/dP_s)_{av} \cdot \mu} \text{ et } C_e = \frac{C_v}{v^2} \quad \text{Eq. 3.16b}$$

S'agissant de larges déformations, il est important de définir la déformation en prenant en compte la hauteur réelle du SPM,  $Z$  ou  $z$  au temps considéré et pas seulement la hauteur initiale  $Z_0$  ou  $z_0$  au temps initial qui varie substantiellement.

Pour cela et en accord avec les définitions de MARIN (1962) et de PELEG(1977), on doit distinguer les différentes expressions des déformations vraie, apparente ou moyenne selon ce qui suit.

- la déformation vraie est exprimée par  $d\varepsilon = -\frac{dz}{z} = -\frac{dv}{v}$ , le signe négatif provenant du fait qu'il s'agit d'une compression, ou encore

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_{v_0}^v -\frac{dv}{v} = \log_e \frac{v_0}{v} = \log_e X \quad \text{Eq. 3.20}$$

$X$  étant défini ultérieurement.

Par contre lorsque la déformation par rapport à l'état initial est faible, on peut considérer que la hauteur initiale du SPM est constante, on aura alors égalité entre la déformation apparente et la déformation vraie  $\varepsilon_a = \varepsilon$ .

- la déformation apparente s'exprimant par  $\varepsilon_a = \frac{\Delta z}{z_0}$  que l'on peut aussi écrire :

$$\varepsilon_a = \int_{v_0}^v -\frac{dv}{v_0} = \frac{v_0 - v}{v_0} = 1 - \frac{1}{X} \quad \text{Eq. 3.21}$$

Pour prendre en compte encore plus complètement la déformation importante, on définit un taux de déformation  $X$  reliant les coordonnées  $z$  à l'état déformé aux

$$\text{coordonnées } z_0 \text{ à l'état initial ; ainsi : } X = \frac{v_0}{v} \quad \text{Eq. 3.22}$$

$$\text{que l'on pourra exprimer sous la forme } X = \frac{v_0}{v} = \frac{dz_0}{dz} \quad \text{Eq. 3.23}$$

qui est équivalente à  $z \frac{v_0}{v} = \int dz_0$ , valable que si  $v_0$  est invariant le long de la hauteur du SPM au départ, à  $t = 0$ . Ce qui est justifié lorsque le SPM est homogène avant la compression. (Il faudra donc bien s'assurer d'homogénéiser l'échantillon avant de le soumettre à la compression.) Cette pseudo-isotropie demeure respectée le plus souvent à l'échelle industrielle où les intrants sont généralement homogènes ou homogénéisés durant les étapes antérieures.

$$\text{On peut alors, selon Eq. 3.20, exprimer la déformation } d\varepsilon = \frac{dX}{X} \quad \text{Eq. 3.24}$$

ou encore

$$\varepsilon = \log_e X \quad \text{Eq. 3.25}$$

En substituant les équations Eq. 3.23 et Eq. 3.24 dans l'Eq. 3.19,  $C_v \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ , on

$$\text{obtient : } \frac{\partial X}{\partial t} = X^2 C_v \frac{\partial^2 X}{\partial z_0^2} \quad \text{Eq. 3.26}$$

que l'on peut résoudre numériquement par la méthode des différences finies. (Un exemple détaillé, toutefois volontairement simplifié, de la méthode utilisée est fourni en annexe A3). Comme d'usage nous définissons les grandeurs réduites temps et espace.

Prenons  $T = \frac{-dZ/dt}{Z_0} t$  et  $H_0 = \frac{z_0}{Z_0}$  avec  $\Delta H_0 = \frac{1}{n}$  le nombre de couches choisies au sein du SPM.

Le rapport  $\frac{\Delta t}{\Delta z_0^2}$  s'écrit alors  $\frac{\Delta t}{\Delta z_0^2} = \frac{n^2}{Z_0 \left( -dZ/dt \right)} \Delta T$ .

En faisant usage des développements en série de Taylor, la formulation en différences finies de l'équation Eq. 3.26 s'exprime, en fonction des variables réduites précédemment définies, de la façon suivante :

- pour la partie gauche de l'équation

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (X_{(z_0, t+\Delta t)} - X_{(z_0, t)})$$

- pour la partie droite de l'équation

$$X_{(z_0+\Delta z_0, t)} + X_{(z_0-\Delta z_0, t)} = 2X_{(z_0, t)} + 0 + \frac{2(\Delta z_0)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 X_{(z_0, t)}}{\partial z_0^2} \right)_0 + 0 + \frac{2(\Delta z_0)^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 X_{(z_0, t)}}{\partial z_0^4} \right)_0 + \dots$$

$$+ \frac{2(\Delta z_0)^{(n-1)}}{(n-1)!} \left( \frac{\partial^{(n-1)} X_{(z_0, t)}}{\partial z_0^{(n-1)}} \right)_0 + 2R_n$$

En utilisant les variables réduites et en limitant le développement au deuxième degré, rendu possible du fait d'une incrémentation  $\Delta z_0$  suffisamment petite, on obtient l'expression suivante :

$$X(H_0, T + \Delta T) - X(H_0, T) = n^2 \left( \frac{C_v}{(-dZ/dt)Z_0} \right) \Delta T \cdot \bar{X}^2 \quad \text{Eq. 3.27}$$

$$\times \{X(H_0 + \Delta H_0, T) - 2X(H_0, T) + X(H_0 - \Delta H_0, T)\}$$

dans laquelle  $\bar{X}$  est une valeur moyenne comprise entre  $X(H_0, T)$  et  $X(H_0, T + \Delta T)$ . Avec des valeurs aux limites correspondant à la figure Fig. 3.13, sachant que la base filtrante est orientée vers le bas, que le piston n'est pas poreux et que l'axe du repère se trouve orienté verticalement à l'opposé de la gravité.

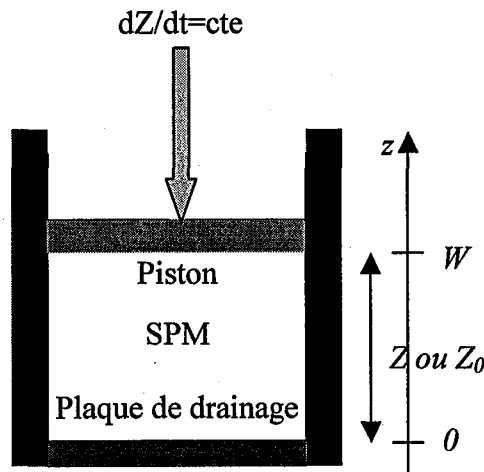


Figure 3.13 : En mode CDC,  $dZ/dt$  est constant.

Ainsi les conditions aux limites s'expriment :

$$X(H_0, 0) = 1 \quad \text{Eq. 3.28}$$

$$X(1, T) = \Psi(T) \quad \text{Eq. 3.29}$$

et

$$\left( \frac{\partial X(H_0, T)}{\partial H_0} \right)_{H_0=1} = 0 \quad \text{Eq. 3.30}$$

Il ne reste alors plus qu'à définir les critères de convergence, de sélection et de contrôle des incréments temps et espace réduits.

En annexe A3, nous démontrons la nécessité de choisir  $\frac{\Delta T}{(\Delta Z_0)^2} \leq \frac{1}{2}$  qui assure la

convergence.

Sachant que seul le déplacement du piston est mesuré et contrôlé et que la déformation moyenne  $\bar{\varepsilon}_a$  est égale à  $\frac{-dZ/dt}{Z_0} t = \frac{\Delta Z_0}{Z_0} = T$ , on peut en première approximation adopter la relation donnée par l'équation Eq. 3.31, où  $T = \Delta T$ , ce qui signifie que la déformation, initiale au niveau du piston, est remplacée par la déformation moyenne qui est connue.

$$\Psi(\Delta T) = \frac{1}{1 - \bar{\varepsilon}_{ap}(1, \Delta T)} \cong \frac{1}{1 - \Delta T} \quad \text{Eq. 3.31}$$

Pour la suite des calculs numériques, la valeur moyenne de  $\bar{\varepsilon}_a$  est utilisée pour valider le choix des incréments espace et temps selon la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon}_a = \int_0^1 \varepsilon_a(H_0, T) dH_0 = \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{X(H_0, T)} \right) dH_0 = \frac{\Delta Z_0}{Z_0} \quad \text{Eq. 3.32}$$

$$\text{Rappelons que } \bar{\varepsilon}_a = \frac{\Delta Z_0}{Z_0} = \frac{(-dZ/dt)t}{Z_0} \equiv T = \frac{\bar{v}_0 - \bar{v}}{\bar{v}_0} \quad \text{Eq. 3.33}$$

avec  $\varepsilon_a = \frac{v_0 - v}{v_0} = 1 - \frac{1}{X}$  et  $\bar{v}_0$  et  $\bar{v}$  étant les valeurs moyennes correspondant respectivement à  $v_0$  et  $v$ .

La résolution numérique de l'Eq. 3.27 permet d'établir la relation  $X = f(H_0, T)$  pour différentes valeurs de  $\frac{C_v}{(-dZ/dt)Z_0}$ .

Or d'un point de vue expérimental, on mesure l'évolution en fonction du temps des propriétés du SPM, en termes de distribution des pressions, en particulier au niveau du piston et de la base filtrante. Ainsi pression hydraulique, contrainte sur la matrice, friction et hauteur globale réelle du SPM, dont la variation est imposée par la vitesse contrôlée de déplacement du piston, sont continûment enregistrées. En particulier on peut donc, selon des principes déjà décrits, établir la relation contrainte-déformation du milieu comprimé. Le rapport des déformations au niveau du piston et de la plaque filtrante, que l'on nomme ici SR (strain ratio) est accessible expérimentalement et numériquement et peut être utilisé pour la détermination du coefficient de compression caractéristique  $C_v$ , puisque, rappelons le, l'Eq. 3.27 permet d'établir la

relation  $X = f(H_0, T)$  pour différentes valeurs de  $\frac{C_v}{(-dZ/dt)Z_0}$ ;  $(-dZ/dt)Z_0$  étant connu.

Ainsi en établissant la relation expérimentale  $\bar{v} = \bar{v}_0 - C_d \log\left(\frac{\bar{P}_s}{P_{0s}}\right)$  Eq. 3.34

on peut exploiter les relations suivantes :

$$- SR = \frac{1 - 1/X(\text{at } H_0 = 1)}{1 - 1/X(\text{at } H_0 = 0)} \text{ obtenue numériquement} \quad \text{Eq. 3.35}$$

et

$$- SR = \frac{\log(P_1 - P_{f1}) - \log(P_{0s})}{\log P_1 - \log P_{0s}} \text{ obtenue expérimentalement} \quad \text{Eq. 3.36}$$

pour extraire la valeur du coefficient de compression caractéristique  $C_v$ , donné par l'abaque ci-dessous, Fig. 3.14, sachant que la variable T est accessible directement selon :

$$T = \frac{\bar{v}_0 - \bar{v}}{\bar{v}_0} \equiv \varepsilon_a = \frac{\Delta Z_0}{Z_0} = \frac{(-dZ/dt)t}{Z_0} \quad \text{Eq. 3.37}$$

Ci-dessous sont reprises les figures essentielles à la compréhension et à l'illustration de l'approche théorique décrite précédemment. Pour plus de détails le lecteur peut se référer à la publication P10, jointe en fin de section.

### 3.5.2.2 ILLUSTRATION EXPERIMENTALE



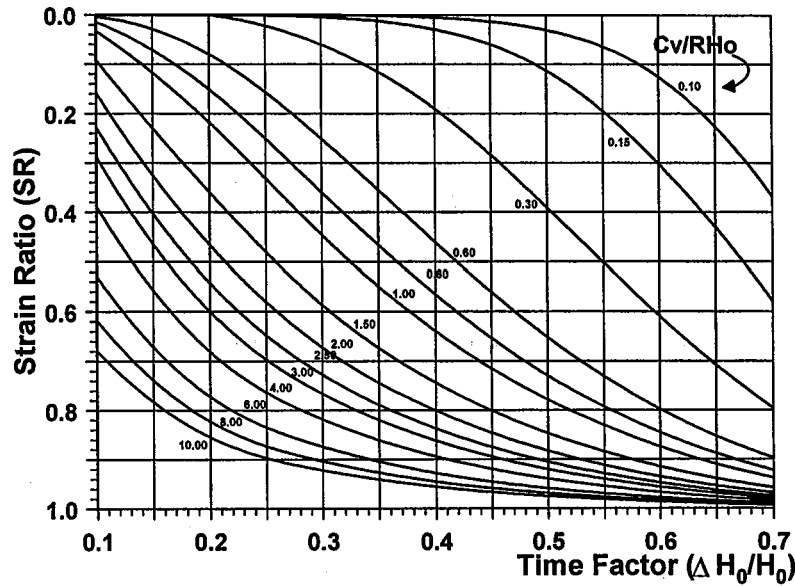


Fig.3: A Graphical Representation of the Numerical Solution of the Generalized Compression Equation

Figure 3.14 : Abaque  $SR = f(Tv)$  pour la recherche de  $Cv$  ou  $Ce$ ,  $\Delta H_0/H_0 \equiv \Delta Z_0/Z_0$

Figure 3.15 :  $Ce = f(\bar{v}, dZ/dt)$  - produit  $Cr$ , aireselles

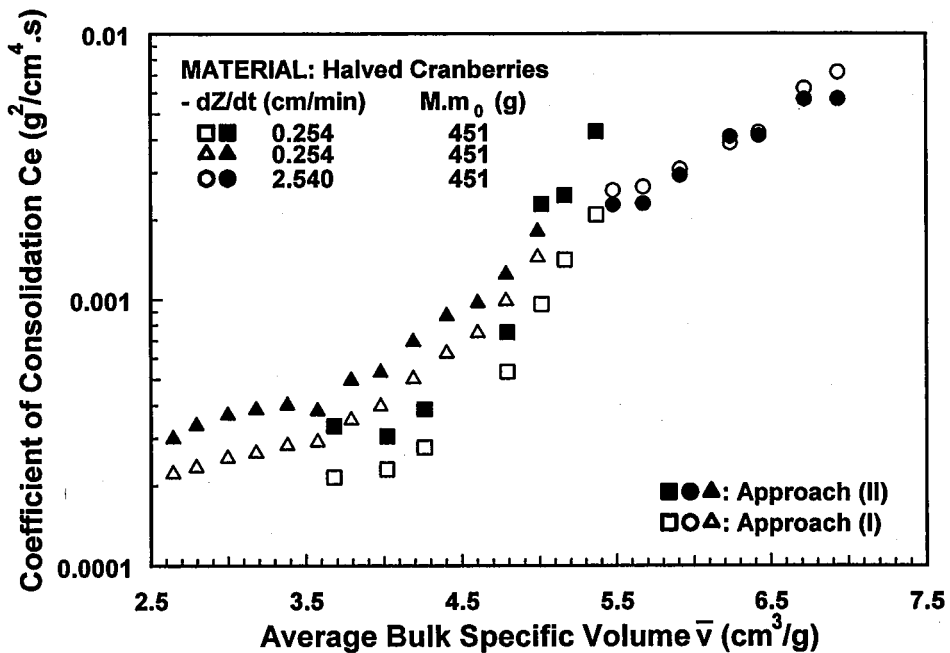
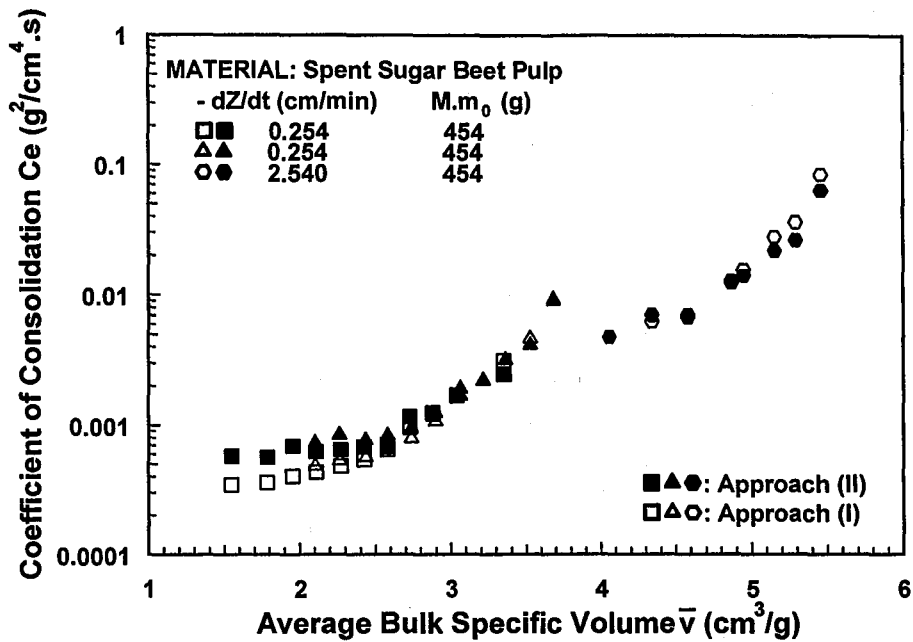


Fig.5: Comparison of the Two Independent Approaches for the Expression of Cranberries



**Fig.4: Comparison of the Two Independent Approaches for the Expression of Sugar Beet Pulps**

Figure 3.16 :  $Ce = f(\bar{v}, dZ/dt)$  – produit F, cossettes

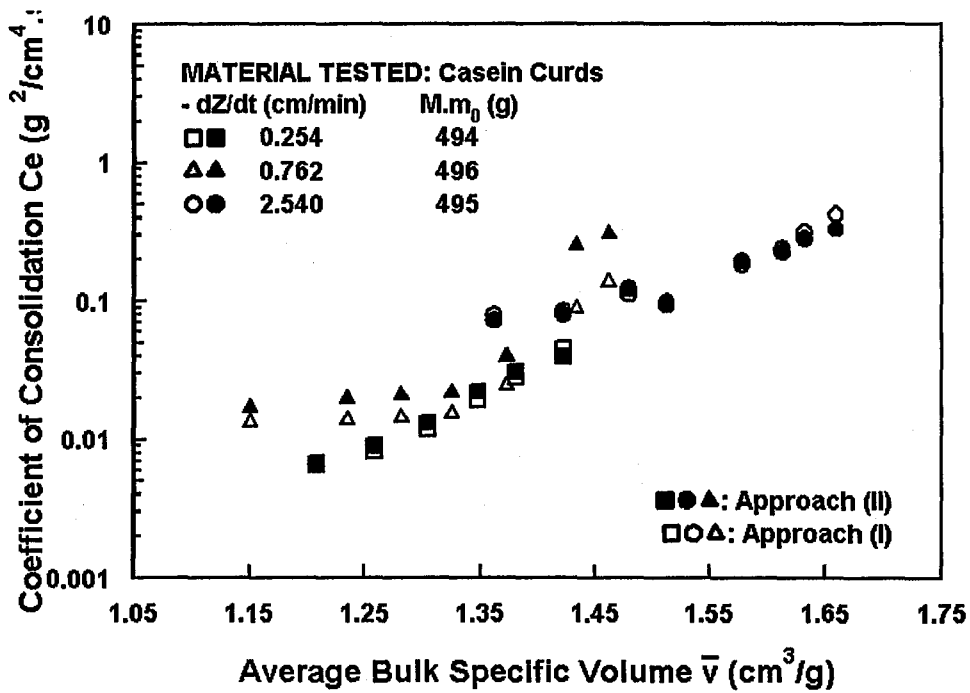


Figure 3.17 :  $Ce = f(\bar{v}, dZ/dt)$  – produit C, protéines lactières coagulées



## Publication 10, (P10)

LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE A DEFORMATION CONSTANTE DANS LE CAS DES LARGES DEFORMATIONS (CDC2) est illustrée en détail dans la publication qui suit.

REBOUILLAT S., CAMPANELLA. O.H. & LECLERC D. *The expression under constant rate of strain and the subsequent relaxation.* 7th World Filtration Congress, Budapest, 112-121, (1996).

*A more general approach is proposed to alleviate the limitations of the widely used conventional theory. Linear and non-linear biosemisolids can therefore be considered using a far less time consuming procedure resolving at the same time the problem linked with the testing of biologically active materials.*

*The constant rate of strain compression is used to predict the expression-related properties of soft porous materials. The basic equation, which is proposed, encompasses a broader range of situations where large deformation occurs. The two parameters, i.e. the permeability and the compressibility of the materials, which are unlikely to be constant in the real situations, are considered as variable along the cake depth.*

*The numerical solution of the general equation is compared to the analytical solution of a more classical approach proposed by Rebouillat et al. at the 6th World Filtration Congress.*

*The relaxation of the various pressures components induced by the expression of the porous structures is presented using a mathematically more unique set of equations. The degree of solidity concept is introduced here to characterise the various parts of the expressed cake.*



# THE EXPRESSION UNDER CONSTANT RATE OF STRAIN AND THE SUBSEQUENT RELAXATION.

## I- Thin Layers of Biosemisolids

S. Rebouillat\*, O. H. Campanella\*\*, D. Leclerc\*

(\*) Laboratoire des Sciences du Génie Chimique, Nancy, France

(\*\*) Massey University, Palmerston North, New Zealand

### SYNOPSIS

*A more general approach is proposed to alleviate the limitations of the widely used conventional consolidation theory. Linear and non-linear biosemisolids can therefore be considered using a far less time consuming procedure resolving at the same time the problem linked with the testing of biologically active materials.*

*The constant rate of strain compression is used to predict the expression-related properties of soft porous materials. The basic equation which is proposed encompasses a broader range of situations where large deformation occurs. The two parameters, i.e. the permeability and the compressibility of the materials, which are unlikely to be constant in the real situations, are considered as variable along the cake depth.*

*The numerical solution of the general equation is compared to the analytical solution of a more classical approach proposed by Rebouillat et al. [10] at the 6th World Filtration Congress.*

*The relaxation of the various pressures induced by the expression of the porous structures is presented using a mathematically more unique set of equations. The degree of solidity concept is introduced here to characterise the various parts of the expressed cake.*

**KEYWORDS:** Uniaxial Compression, Relaxation, Constant Rate of Strain, Non Linear Stress-Strain, Porous Materials.

### INTRODUCTION and PREVIOUS CONTRIBUTIONS

The compressive viscoelastic behaviour of biosemisolid materials is often predominately governed by the flow of the interstitial and external fluids of the cell networks and their exudation and permeation across various interfaces [2,8,12]. Nonetheless, the compressibility of the solids determines the magnitude/amplitude of the deformation achievable in a given time lap[10].

The deviation from the broadly assumed linear strain-stress relationship[10] can lead to grossly inaccurate description of the compression characteristics especially when the most popular "universal" models [11] are used. This problem is exacerbated when large L/D (height to diameter) cake ratio are considered [12]. Consequently, the expression of biosemisolids requires extreme testing precautions [7,10] which are lacking a uniformly accepted and well defined procedure description such as the ASTM standards used by the soil mechanic scientists and engineers.

Furthermore an excessive use of the model fitting techniques can also mislead the engineer in his investigation. Series of exponentials are often found in the creep[3] and relaxation equations. Traditionally derived from the mechanical analogs these models are used to fit the experimental data points. The parameters which are therewith determined can depend on the test duration which makes them mathematically not unique and therefore leading to highly questionable physical interpretation. This aspect is aggravated by the nature of biosemisolids which are biologically active and consequently not allowing long term experimentation. In this case the extrapolated long term asymptotic relaxation and creep parameters can be regarded of little relevance and eventually can be misleading if there are used to find a best fit (inherently not unique).

In the present study an independent approach is proposed to further validate the expression theory and the related experimental procedure which has been proposed earlier by Rebouillat et al. [10]. The advantages of the constant rate of deformation, and the associated merit of experiments conducted on thin layers, initially pioneered by Leclerc et al. [4], are also demonstrated.

The relaxation of the solids which inevitably occurs during and after expression, has been rarely discussed [12] although its key role in the yield of the expression is now fairly well recognised and taken into account for the design of screw and belt presses. The modelling of the relaxation (5,6,9) should also be carefully considered. The use of the simplest but robust models is essential to avoid the adverse consequence of the semi-empirical curve fitting of experimental data.

Another objective of this presentation is to demonstrate the applicability of a method previously introduced [9] to characterise the relaxation of the various pressures induced by the expression of the biosemisolid materials considered in the first part of the study. More insight is provided regarding the relevance of the

proposed approach, in addressing both the testing limitations inherent to the limited shelflife of biosolids and the controversial use of the curve fitting technique.

It is quite apropos in the context of this presentation to acknowledge the paramount pioneering contribution of Kormedy (1974) [2], Shirato et al. (1971) [11] and Schwartzberg (1977) [12]. Their early contributions have led the way to the constantly evolving expression science. The limitations previously outlined would have not been raised, studied and discussed without the key preliminary experimentation of these authors.

## 1- THE GOVERNING EQUATIONS

### 1-1 Approach I

A detailed presentation of this approach is covered in reference [10] presented by the writer at the last World Filtration congress. Based on the continuity of flow through the cake undergoing deformation and assuming that, at any time  $t$ , the permeability of the press-cake is constant over the depth of the sample the basic equation of compression [10] can be rearranged as follows:

$$\frac{K}{\mu} \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1) \text{ B.C.: } \begin{array}{l} P_f = 0 @ z = 0 \\ \text{and} \\ \frac{\partial P_f}{\partial z} = 0 @ z = Z \end{array}$$

where  $P_f$  is the fluid pressure,  $v = (1+e)/\rho_s$  is the local volume of cake per unit mass of solids and  $K$  the permeability.

Considering that the distances and the displacements been measured upward from the drainage zone, the boundary conditions (B.C.), given next to Eq.(1), become self explanatory.

### 1-2 Approach II

This part has been detailed by the writer at the INTERFILTRA-INTERMEMBRANE congress in November 1994. The change of volume,  $\Delta V$ , in the elemental press-cake can be expressed in terms of the compressive strain as follows:

$$\Delta V = A dz d\varepsilon \quad (2)$$

where  $\varepsilon$  is the true strain as defined by Peleg (5), i.e.:

$$\varepsilon = - \int_{z_0}^z \frac{dz}{Z} \quad (3)$$

which allows the case where large deformations are occurring.

Using Eq.(2) and Eq.(3) and making only part of the assumptions which are necessary for the Tezaghi theory, Eq.(1) can be generalized:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( C_v \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \quad (4) \text{ with } C_v = K \frac{v}{-(dv/dP_s)\mu} \quad (5) \text{ and } C_e = \frac{C_v}{v^2} \quad (6)$$

if  $C_v$  is constant:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = C_v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \quad (7)$$

There are basic differences between Eq.(1) and Eq.(7), i.e., the latter has been derived without making the assumption that  $K$  remains constant. It is also worthwhile to outline that  $(dv/dP_s)$  does not have to be constant either, which offers the possibility to include non linear materials. We defer the description of the detailed aspects of this second approach to a future paper which is under review.

### 1-3 The Relaxation Set of Equations

The recorded pressure relaxation curves are first normalised and then linearized in the following previously suggested [6,9] form:

$$\frac{P(0).t}{P(0) - P(t)} = k_1 + k_2 . t \Rightarrow P(t) \equiv P_1(t), P_{s1}(t), P_{f1}(t) \Rightarrow P(t)_{t=0} = P(0) \quad (8)$$

where  $P(t)$  is the decaying selected pressure component, i.e. fluid, solid or total pressure, after time  $t$  and  $k_1$  and  $k_2$  are constants.

Then the hypothetical asymptotic residual (unrelaxed) portion of the pressure, can be referred as *the degree of solidity* of the cake defined by:

$$\left( \frac{P(t)}{P(0)_{t \rightarrow \infty}} \right) = 1 - \frac{1}{k_2} \quad (9)$$

The momentary decay/relaxation rate is expressed by:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P(t)}{P(0)} \right) = \frac{k_1}{(k_1 + k_2 t)^2} \quad (10)$$

and the initial decay rate by  $1/k_1$ .

## 2- THE ANALYTICAL AND THE NUMERICAL SOLUTIONS OF THE BASIC EQUATIONS

### 2-1 Approach I

The overall compaction rate,  $-dZ/dt$ , is constant, consequently  $(d\bar{v}/dt)$  is constant. Assuming that the local bulk specific volume varies linearly [10] with  $z$  as per the following equation:

$$v = v_0 + \frac{(dZ/dt)t}{W} \left\{ 1 + \frac{bW}{(dZ/dt)\rho_s} \left( \frac{z - Z/2}{Z} \right) \right\} \quad (11)$$

where  $W$  is the total specific load which corresponds to the mass of solids between the drainage surface and the no-flow piston surface ( $Z/W = \bar{v}$ ).

Using Eq.(11) and the relevant boundary conditions, Eq.(1) can be analytically solved. The solutions have been described and discussed by Rebouillat and al [10]. The modified coefficient of consolidation defined by Eq.(5) and Eq.(6) is directly accessible from these solutions and is expressed in terms of the experimental data generated during the test by the following equation:

$$C_e = \frac{-(dZ/dt)W}{-(d\bar{v}/d\bar{P}_s)P_{f1}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{bW}{-(dZ/dt)\rho_s} \frac{1}{12} \right\} \quad (12) \text{ where } P_{f1} = P_f(z = Z, t)$$

### 2-2 Approach II

The fact that the thickness of the sample changes -in a non-infinitesimal manner- as the compression proceeds makes the use of a moving boundary method [1, 13] particularly suitable.

Eq. (7) is rearranged as follows:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = C_v X^2 \frac{\partial^2 X}{\partial z_0^2} \quad (13) \text{ where } X = \frac{z}{z_0} = \frac{v_0}{v}$$

-  $z$  is the spatial co-ordinate in the deformed state and  $z_0$  the spatial co-ordinate in the undeformed state.

-  $X$  is the deformation ratio.

Eq. (10) must be solved numerically using a finite difference equation defined from the following dimensionless variables:

$$\frac{\Delta Z_0}{Z_0} = \frac{(-dZ/dt)t}{Z_0} = T \quad H_0 = \frac{z_0}{Z_0} \quad \Delta H_0 = \frac{1}{n}$$

and,

$$\frac{C_v \Delta t}{\Delta z_0^2} = n^2 \left( \frac{C_v}{(-dZ/dt)Z_0} \right) \frac{(-dZ/dt)\Delta t}{Z_0} = n^2 \left( \frac{C_v}{(-dZ/dt)Z_0} \right) \Delta T$$

The finite difference form of Eq. (13) becomes:

$$X(H_0, T + \Delta T) - X(H_0, T) = n^2 \left( \frac{C_v}{(-dZ/dt)Z_0} \right) \Delta T \cdot \bar{X}^2 \\ \times \{X(H_0 + \Delta H_0, T) - 2X(H_0, T) + X(H_0 - \Delta H_0, T)\} \quad (12)$$

in which  $\bar{X}$  is a value between  $X(H_0, T)$  and  $X(H_0, T + \Delta T)$

The initial and boundary conditions are:

$$X(H_0, 0) = 1 \quad X(0, T) = \Phi(T) = \frac{1}{1 - \varepsilon_a(0, \Delta T)} \cong \frac{1}{1 - \Delta T}$$



and,

$$\left( \frac{\partial X(H_0, T)}{\partial H_0} \right)_{H_0=1} = 0$$

The apparent strain [5] is defined by the ratio:  $\varepsilon_a = \frac{v_0 - v}{v_0} = 1 - \frac{1}{X}$  and its average value is given by the integral:

$$\overline{\varepsilon_a} = \int_0^1 \varepsilon_a(H_0, T) dH_0 = \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{X(H_0, T)} \right) dH_0 = \frac{\Delta Z_0}{Z_0}$$

Since there is no analytical solution available for Eq. (7), the average apparent strain,  $\overline{\varepsilon_a}$ , is the only mean of estimating the error during the computation.

### 3- MATERIAL AND METHODS

#### 3-1 Test Apparatus: the Multi-Mode Compression Cell, MMCC® [10]

This new design has been more completely described at the previous World Filtration Congress [10]. A schematic drawing of the expression cell is shown in Fig. 1.

The compaction chamber is jacketed to receive a coolant or a heating fluid for the expression of biological materials at controlled temperature or for heat accelerated tests. The MMCC® is fitted with series of miniature transducers located at the top of the piston, at the bottom drainage plate level, at the periphery of the cell and if needed with a load cell underneath the mobile drainage assembly. The compaction cylinder is mounted on a tripod to assess the frictional forces.

The specimen placed between the piston and the bottom drainage plate can be subjected to various types of loading profiles. For this study the constant rate of strain was selected. The vertical deformation of the test specimen is produced by the movement of the ram drive of a rheometer. The drive is fitted with a load cell capable of measuring forces corresponding to a vertical pressure of 1603 kPa at the piston level. The displacement of the piston is measured by the LVD transducer of an Instron unit. All output signals are computerised.

#### 3.2 Testing Procedure

Before the sample is introduced into the MMCC®, the inner surface, the piston O-rings and the drainage assembly O-rings are covered with a thin film of silicone vacuum grease in order to minimise the frictions between the moving parts and the static cylinder. For all the expression tests, a plain weave Nylon filter cloth, with calibrated 0.5 mm openings, is used to cover the perforated drainage plate to prevent direct extrusion and clogging. The compression-relaxation behaviour of the empty cell is periodically recorded in order to take into account potential deflection [6]. No corrections had to be applied since the deflection was always negligible. To insure accurate measurements of the fluid pressures, the base, the transducer port channels and the piston feed line are filled with water and purged at the beginning of each test.

#### 3.3 Materials description and samples preparation

Two types of biological (food and agricultural) materials have been tested in this study: commercial cranberries and spent sugar beet pulps.

Commercial cranberries from the state of Massachusetts were selected. About one pound of thawed cranberries were washed and halved parallel to the major axis. (This type of fruit has a prolate spheroid shape). The average diameter of the selected population was 10.5 mm (cov. 9%) and its average length measured along the major axis was 12.5 mm (cov. 7%). The average solid content of the selected batch was 10.5% (cov. 12.5%).

Spent sugar beet pulp samples used in the present study were obtained from a sugar beet extraction plant. The exhausted cossettes were submitted, as received, to the compression analysis. The de-sugared cossettes were parallelepipeds with a squared section of 1.5 x 1.5 mm (cov. 30%) and an average length of 23 mm (cov. 29%). The average solid content was 13.3% (cov. 13%).

### 4- PRESENTATION OF THE RESULTS

#### 4-1 Experimental data

A series of constant rate of deformation tests were conducted on each type of materials. While the material was deformed, the total applied stress, the fluid pressure, at the piston surface and just above the filtration medium, the friction forces, and the displacement were continuously recorded. The frictions were always negligible compared to the other components. Fig. 2 gives a typical plot of the data recorded. From these

data, using the solution of Eq.(1), the strain-stress relationships of the three categories of materials were calculated and expressed in the following form :

$$\bar{v} = \bar{v}_0 - C_d \log\left(\frac{\bar{P}_s}{P_{0s}}\right) \quad (14), \text{ where } C_d = C_c / \rho_s$$

As reported in a previous paper [10], we were able to classify the materials as per the table 1.

**Table 1: Compressibility Characteristics of the Materials Tested (Rebouillat and al., 1993, [10])**

Material	$\bar{v} = f(\bar{P}_s)$	$C_d$	$P_{f1} / P_1$ "Plateau"
Spent Pulps	Concave Down	2.30	0.55
Cranberries	Concave Down	2.80	0.70

In an attempt to compare the solutions of the equations (1) and (7), only the results related to the influence of the strain rate, for a given mass of wet material, are presented.

#### 4-2 Analysis of the results

##### 4-2-1 Approach I

Since  $-(dZ/dt)$  and  $W$  are known and  $P_{f1}$  is measured, it is possible, using the experimental strain-stress relationship given by Eq.(14), to calculate the modified coefficient of compression as a function of the average bulk specific volume from Eq.(12). A direct comparison between the two approaches can be done as described below.

##### 4-2-2 Approach II

The solution,  $X$ , of Eq.(13), obtained by finite difference analysis, is given as a function of  $H_0$  and  $T$  for selected values of  $C_v / \{(-dZ/dt)Z_0\}$ . Fig. 3 gives a typical diagram obtained numerically. On this diagram the strain ratio,  $SR$ , is defined as the ratio of the strain at the piston no-flow surface to the strain at the outflow level:

$$SR = \frac{1 - 1/X(\text{at } H_0 = 1)}{1 - 1/X(\text{at } H_0 = 0)} \quad (14)$$

Since  $\varepsilon_a = \frac{v_0 - v}{v_0} = 1 - \frac{1}{X}$  the strain ratio can be determined from the experimental data using Eq. (14).

The experimental equation for  $SR$  is:  $SR = \frac{\log(P_1 - P_{f1}) - \log(P_{0s})}{\log P_1 - \log P_{0s}} \quad (15)$

The time factor can also be calculated from the experimental data since:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta Z_0}{Z_0} = \frac{(-dZ/dt)t}{Z_0} \equiv T = \frac{\bar{v}_0 - \bar{v}}{v_0}$$

Consequently, it is possible to calculate the modified coefficient of consolidation by plotting the experimental strain ratio as a function of the average apparent strain on the diagram of Fig. 3.

## **5- DISCUSSION OF THE RESULTS**

### 5-1 The compression phase

Fig. 4 and Fig. 5 show the variation of the modified coefficient of compression as a function of the bulk specific volume. The two approaches are compared for the two materials studied. Fig. 4 also outlines the reproducibility of the constant rate of deformation test.

The key attributes of the two approaches can be summarised as follows:

- approach I assumes that the permeability is constant over the depth of the material undergoing compression.
- approach II does not include this type of restriction.
- the two methods can be used for linear as well as non-linear materials, since for the first approach the recommended data treatment involves the average local values of  $-(dv/dP_s)$ .
- No conditions are imposed regarding the compressibility,  $-(dv/dP_s)$ , of the press-cake in the second approach.
- approach I is limited to the case of small deformations.
- approach II is suitable for large deformations.

As shown on table 1, the two biosemisolid materials exhibit a non linear variation of the bulk specific volume as a function of the solid compressive stress as per Eq. (14). Despite this non-linearity, as shown on Fig. 4

and Fig. 5 the two independent approaches compare very well. It can be further outline that that the modified coefficient of consolidation varies substantially more with the rate of deformation.

While the agreement between the two independent approaches is outstanding in the case of the spent sugar beet, there is slightly more difference between the two methods in the case of the halved cranberries shown on Fig. 5. This difference can be attribute to the  $P_{f1}/P_1$  "plateau" ratio given in table 1. In this later case this ratio is 70% versus 55% for the spent sugar beet material. One may conclude that approach I, for which the permeability is assumed to be constant over the depth, is possibly a marginally less suitable method to calculate  $C_e$  when the gradient of hydraulic pressure is fairly high. This clearly outlines the advantage of the generalized approach which is proposed here. It is worthwhile to notice that all the cases studied here refer to relatively thin layers undergoing compression. A more detailed consideration of these aspects, also considering linear materials, will be given in a future paper under review.

### 5-2 The relaxation phase

Fig. 6 shows a typical recording of the decay of the fluid pressure and the total pressure subsequent to the expression of a fresh spent sugar beet sample. The recording of the relaxation of the empty MMCC© cell is provided in order to assess the proportion of the decay which is attributable to the equipment itself. As one can see the MMCC© design as a whole allows almost no interference between the cell relaxation and the measurements of the decay of the pressure components. This is an essential aspect which also confirms the lack of deflection of the MMCC© during compression. It is worthwhile to mention that this kind of data is quite rarely provided, although of paramount importance.

The fit of the relaxation equations (8-10), by which the biosolids initial relaxation rate ( $1/k_1$ ) and the asymptotic degree of solidity ( $1-1/k_2$ ) are calculated, is demonstrated in Figs. 7 and 8 and in table 2. Statistical analysis of all the experimental data yielded the following regression coefficients. For the relaxation and for both bioproducts the range is  $0.997 < r^2 < 0.999$ , with a corresponding level of significance of 0.001 or better. Consequently the methodology used for the relaxation of peat [9] is also suitable for the linearization of the decay curves of the solid pressure induced by expression.

Table 2: Linearization of the Decay Curves of the Solid Pressure Induced by Expression

Material Tested	Compaction Rate (*) (dZ/dt) (cm/min)	Initial Average Strain $\bar{\epsilon}_a$ (@t=0)	Initial Solid Pressure $P_{s1}(0)$ (kPa)	$k_1$ (min)	$k_2$	$r^2$	Degree of Solidity $1-1/k_2$ (%)
Fresh Spent Sugar Beet Pulps	0.254	0.60	232	1.176	1.498	0.998	33.0
"	0.762	0.50	265	0.513	1.169	0.997	14.5
"	2.540	0.33	200	0.106	1.043	0.999	4.0
Halved Cranberries	0.254	0.45	277	1.612	1.068	0.999	6.5
"	0.762	0.48	244	0.314	1.081	0.999	7.5
"	2.540	0.42	190	0.082	1.071	0.997	6.5

(\*) prior to the relaxation

Fig. 7 further demonstrates that the validity of the proposed model is independent of the test duration. The degree of solidity is equal (33.0%) regardless whether the relaxation is carried for few minutes or for a much longer period of time of 40 min. It could be easily demonstrated that it would not be the case if a series of exponentials had been used for the fitting of the experimental data. It can be equally easily shown that the individual curves can always be fitted with a series of exponentials provided that there is no restriction on the number of exponential terms being derived from the generalized Maxwell or Kelvin models.

The validity of the relaxation model (8-10) to fit the decay curves of the three components of the pressure induced by compression is illustrated on Fig. 8. A more complete discussion of this aspect is under consideration for publication.

It is also worthwhile to notice that in the case of the sugar beet pulps the asymptotic degree of solidity varies with the compaction rate applied to the cake prior to the relaxation measurements. This is not the case for the cranberries samples which exhibit a fairly constant degree of solidity with the compaction rate. More insight can be provided by considering table 1 which shows that the ratio,  $P_{f1}/P_1$ , is larger in this later case.

## CONCLUSION

In this presentation we have proposed a more general approach of the compression theory. The small deformations and the assumptions of constant permeability and compressibility are no longer required. Furthermore the new method offers a rapid and fairly simple procedure to access the modified coefficient of consolidation.

We have shown that in the case of thin layers, the numerical solution of the general equation compares very well with the analytical solution of a more classical approach proposed by Rebouillat et al. [10]. The compression characteristics of the products tested, being linear or non-linear materials, are accessible according to a simple procedure which outlines some precautions. This is most likely due to the fact that in the case of thin layers the likelihood to encounter homogeneous cakes is higher which minimise the impact of the key assumptions imposed by most of the compression theories proposed so far. Nonetheless, there is a precaution to be taken regarding the gradient of hydraulic pressure across the cake. We have shown that when the ratio of the hydraulic pressure to the total compressive stress is high, it might be less desirable to use the first approach. In this later case the generalized proposed approach is more suitable. The basic equation which is proposed encompasses a broader range of situations where large deformation occurs.

The test being conducted under a well controlled rate of deformation no longer suffers from the impact of a fairly sudden application of a constant pressure. We have also confirmed that the compression and relaxation characteristics of the press-cake are deformation rate dependent, which opens an important question regarding the compression under constant pressure where the deformation rate varies considerably from the beginning to the end of the test.

It has also been shown that the pressure relaxation pattern can be described by simple relationships (8-10) whose applicability, as well as parameters, can be determined by linear regression. This opens a new area of investigation regarding the possibility to establish correlations between the compression and the relaxation parameters avoiding the controversial use of series of exponentials.

## NOMENCLATURE

A	= cross-sectional area (cm <sup>2</sup> )
b	= constant in equation (9)
C <sub>e</sub>	= modified coefficient of consolidation (g <sup>2</sup> /cm <sup>4</sup> .s)
C <sub>v</sub>	= coefficient of consolidation (cm <sup>2</sup> /s)
C <sub>c</sub>	= compression index (-)
C <sub>d</sub>	= modified compression index (cm <sup>2</sup> /g)
e	= local void ratio (-)
H <sub>0</sub>	= normalised initial height (-)
K	= permeability (cm <sup>2</sup> )
k <sub>1</sub>	= reciprocal of the initial rate of relaxation (s <sup>-1</sup> )
k <sub>2</sub>	= constant in the degree of solidity (-), 1-1/k <sub>2</sub> .
M	= total mass of solids in original mixture (g)
m <sub>0</sub>	= initial ratio of wet to dry cake mass (-)
P	= vertical compression stress (kPa)
P <sub>1</sub>	= ram pressure (kPa)
P <sub>f</sub>	= fluid pressure (kPa)
$\overline{P}_f$	= average fluid pressure for whole press-cake (kPa)
P <sub>f</sub>	= fluid pressure at no-flow surface (kPa)
P <sub>fo</sub>	= fluid pressure at outflow surface (kPa)
P <sub>s</sub>	= local compaction stress (kPa)
$\overline{P}_s$	= average compaction stress for whole press-cake (kPa)
P <sub>s1</sub>	= value of P <sub>s</sub> at ram surface (kPa)
P <sub>so</sub>	= value of P <sub>s</sub> at outflow surface (kPa)
$\overline{P}_{0s}$	= average compaction stress at the initial state (kPa)
SR	= strain ratio (-)
T	= time factor (-)
t	= time (s)
v	= local bulk specific volume, local volume of cake per unit mass of solids (cm <sup>3</sup> /g)
$\overline{v}$	= average value of v for whole press-cake (cm <sup>3</sup> /g)
v <sub>0</sub>	= initial value of v (cm <sup>3</sup> /g)

W	= mass of solids between outflow and no-flow surfaces / outflow surface area ( $\text{g}/\text{cm}^2$ )
w	= mass of solids between a chosen level above the outflow surface and the outflow surface / outflow surface area ( $\text{g}/\text{cm}^2$ )
X	= deformation ratio (-)
Z	= cake height (cm)
$Z_0$	= initial cake height (cm)
$-dZ/dt$	= compaction rate (cm/min)
z	= distance above outflow surface (cm)
$z_0$	= initial distance above outflow surface (cm)
$\epsilon$	= true strain (-)
$\epsilon_a$	= apparent strain (-)
$\bar{\epsilon}_a$	= average apparent strain (-)
$\mu$	= viscosity of liquid expelled (Pa.s)
$\rho_s$	= density of solids ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )

### ACKNOWLEDGEMENTS

The authors express their thanks to H. J. van Til\*\* for the computer programming aid. The authors are grateful to Prof. M. Peleg and Prof. H.G. Schwartzberg at the University of Massachusetts for useful discussions.

### REFERENCES

- [1] Crank C. and R. S. Gupta, "A method for solving moving boundary problems in heat flow using cubic splines or polynomials," *J. Inst. Maths Applics*, **10**, 296-304 (1972).
- [2] Kormedy I., "Contribution to the three dimensional pressing theory and its one dimensional application," *Acta Aliment. Acad. Sci Hung.*, **3**, 93-110 (1974).
- [3] Lanoiselle J.-L., E. Vorobyov, and J.-M. Bouvier, "Modélisation du pressage à pression constante. Cas des produits à structure cellulaire.", *Entropie*, **18** (1994)
- [4] Leclerc D. and S. Rebouillat, "Dewatering by expression," "Mathematical models and design methods in solid-liquid separations" (A. Rushton, Ed), NATO ASI Series E No. 88, Martinus Nijhoff Publishers, 356-391 (1985).
- [5] Peleg M., "Operational conditions and the stress-strain relationship of solid foods - Theoretical evaluation," *J. Text. Stud.*, **8**, 283-293 (1977).
- [6] Peleg, M. and O. H. Campanella, "The mechanical sensitivity of soft, compressible testing machines," *J. Rheol.* **33**, 455-467 (1989).
- [7] Rebouillat S., D. Leclerc, and G. Baluais, "La déshydratation par filtration-pressage. Modélisation de la compression unidirectionnelle," *Entropie*, **121**, 13-29 (1985).
- [8] Rebouillat S. and H. G. Schwartzberg, "Dynamic and static filtration resistances during mechanical expressions involving foods," "Food engineering and process applications," vol. 2: "Unit operations," (M. Le Maguer and P. Jelen, Ed.), Elsevier Applied Science Publishers, 281-291 (1986).
- [9] Rebouillat S., O. H. Campanella, and M. Peleg, "Mechanical characteristics of raw and processed peat," *Powder Technology*, **51**, 273-275 (1987).
- [10] Rebouillat S., H. G. Schwartzberg, and D. Leclerc, "The uni-axial compression of solid-liquid materials under constant rate of strain." *J. Chem. Eng. of Japan*. **29-1**, 29-36 (1996).
- [11] Shirato M., T. Murase, M. Negawa, and H. Moridera, "Analysis of expression operation," *J. Chem. Eng. of Japan*, **4-3**, 263-268 (1971).
- [12] Schwartzberg H. G., J. R. Rosenau and G. Richardson, "The removal of water by expression," *AIChE Symposium Series*, Ser. **73**, N° 163, 177-190 (1977).
- [13] Umehara Y. and K. Zen, "Consolidation characteristics of dredged marine bottom sediments with high water content," *Soils and Foundations*, **22-2**, 40-54 (1982).

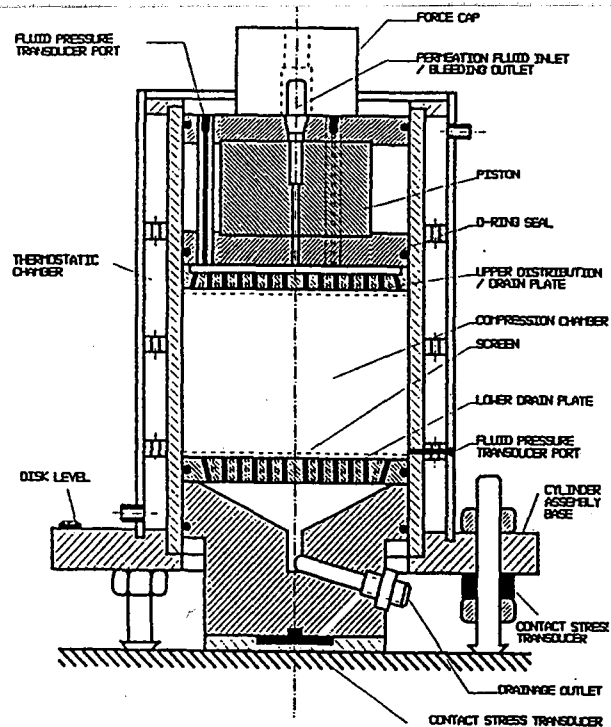


Fig.1: The MMCC

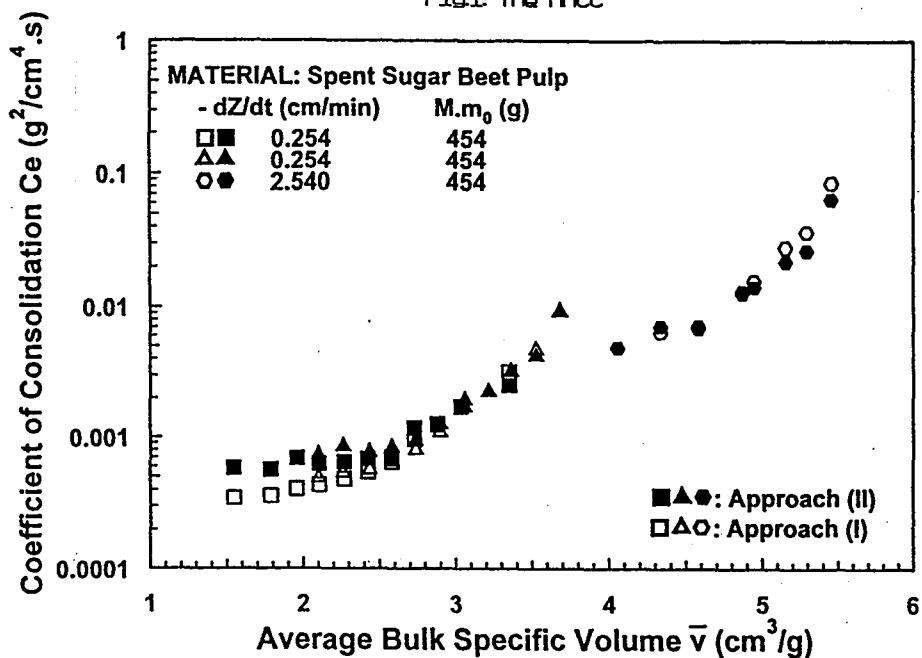


Fig.4: Comparison of the Two Independent Approaches for the Expression of Sugar Beet Pulps

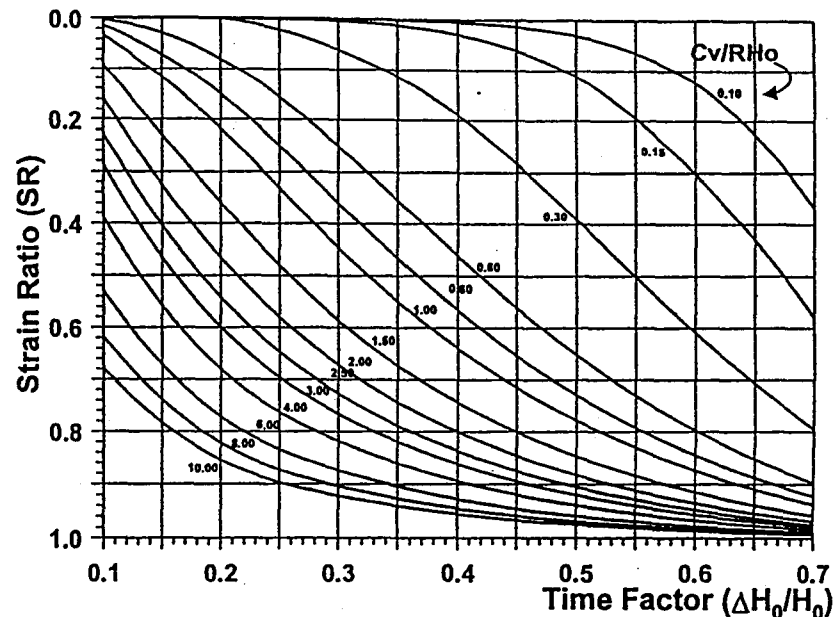


Fig.3: A Graphical Representation of the Numerical Solution of the Generalized Compression Equation

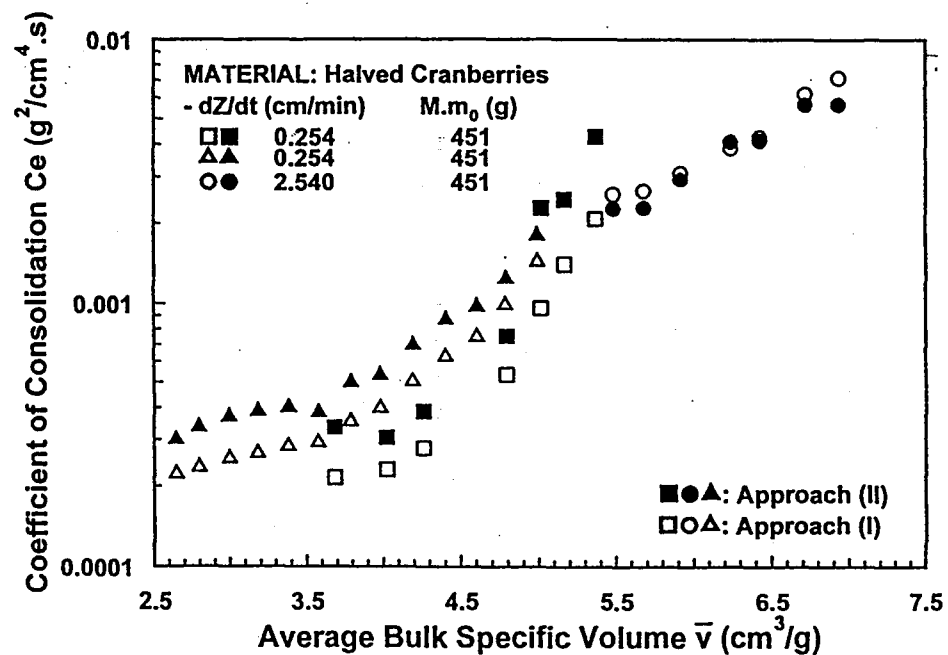


Fig.5: Comparison of the Two Independent Approaches for the Expression of Cranberries

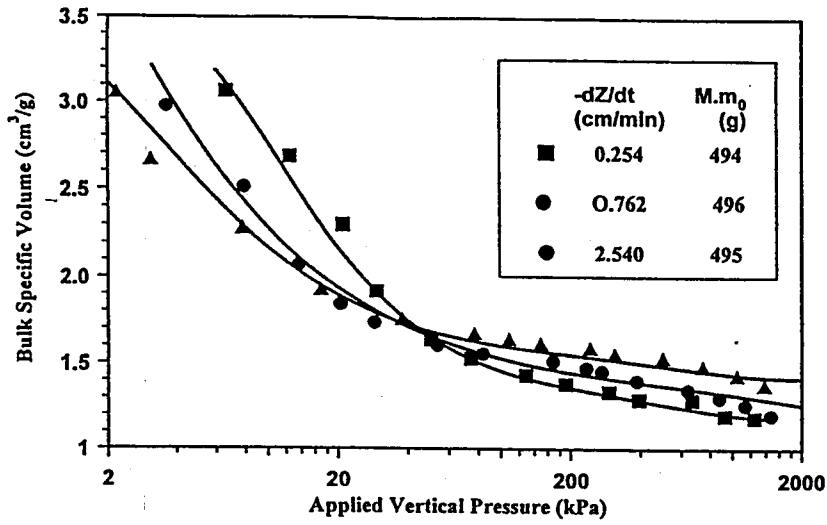


Fig.2: A Complete Test Data Plot

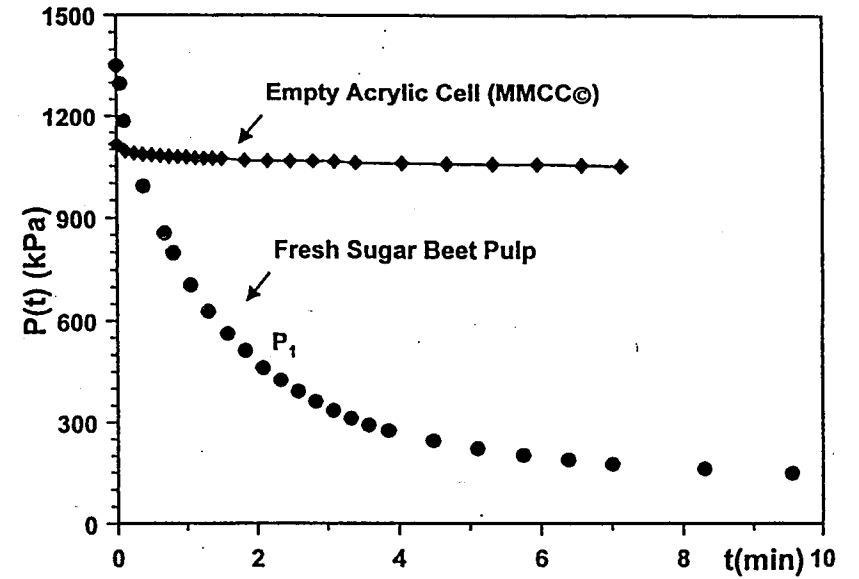


Fig.6: Typical Relaxation Data Plots

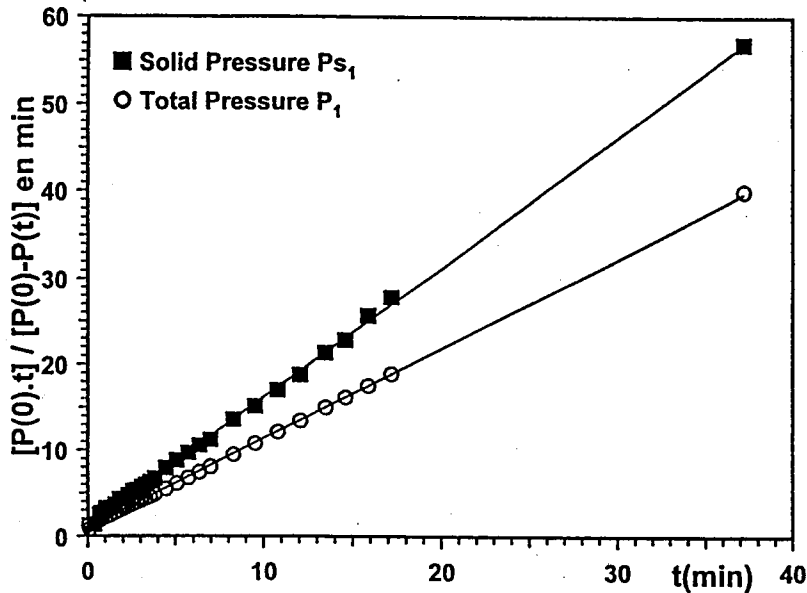


Fig.7: Typical Linearized Pressure Decay Curves for Fresh Sugar Beet Pulps

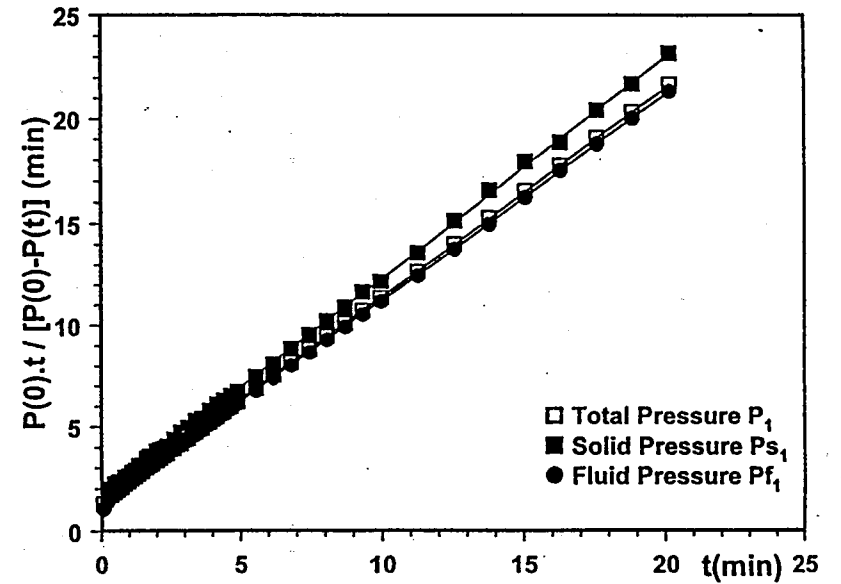


Fig.8: Linearized Relaxation Curves of the Pressures Induced by the Expression of Halved Cranberries

### 3.5.3 CDC DANS LE CAS DES FAIBLES DEFORMATIONS AVEC REGIME TRANSITOIRE (CDC3) RAPPELS THEORIQUES DES EQUATIONS DE BASE

Selon les équations Eq. 3.18 et Eq. 3.19, on peut relier les paramètres de la compression à la déformation locale ou moyenne qui est directement mesurable dans le cas de la compression à pression constante ou imposée dans le cas de la compression à déformation contrôlée. C'est dans ce dernier cas que la vitesse de déplacement  $dZ/dt$  du piston est programmée et contrôlée.

Prenons  $(dZ/dt)t = rt$  le déplacement du piston de compression qui est égal à la déformation moyenne de l'ensemble du gâteau de hauteur  $Z$  à  $t$  ou  $Z_0$  à  $t = 0$ , soit :

$$\frac{dZ}{dt}t = rt = \int_0^z \varepsilon dz \quad \text{Eq. 3.38}$$

$$\text{de façon équivalente } d\left(\frac{dZ}{dt}t\right) = d(rt) = \varepsilon dz \Leftrightarrow \frac{d(rt)}{dz} = \varepsilon \quad \text{Eq. 3.39}$$

En substituant l'Eq. 3.39 dans l'Eq. 3.19 ( $C_v \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ ) on obtient :

$$C_v \frac{\partial^3 rt}{\partial z^3} = \frac{\partial^2 rt}{\partial z \partial t} \quad \text{Eq. 3.40}$$

Pour des couches minces on pourra assimiler  $Z$  à  $Z_0$  et en définissant les grandeurs adimensionnelles espace et temps comme suit :

$$Z_N = \frac{z}{Z_0} \quad \text{Eq. 3.41}$$

$$T_v = \frac{C_v t}{Z_0^2} \quad \text{Eq. 3.42}$$

associées aux conditions aux limites suivantes :

$$\text{à } Z_N = 1 \quad rt = \frac{rZ_0^2 T}{C_v} \text{ au niveau du piston} \quad \text{Eq. 3.43}$$

$$\text{à } Z_N = 0 \quad rt = 0 \text{ au niveau de la zone filtrante} \quad \text{Eq. 3.44}$$

$$\text{à } Z_N = 0 \quad \frac{\partial^2 rt}{\partial Z_N^2} = 0 \quad \text{Eq. 3.45}$$

L'Eq. 3.40 s'écrit alors :

$$\frac{\partial^3 rt}{\partial Z_N^3} = \frac{\partial^2 rt}{\partial Z_N \partial T_v} \quad \text{Eq. 3.46}$$

Cette équation peut être résolue en considérant que  $rt$ , peut s'écrire sous la forme du produit de deux fonctions indépendantes ; ceci de façon similaire au traitement du phénomène de la diffusion selon CRANK (1973).



$$rt = F(Z_N)G(T_v)$$

L'Eq. 3.46 prend la forme suivante :

$$F''(Z_N)G(T_v) = F'(Z_N)G'(T_v) \quad \text{Eq. 3.47}$$

et peut alors être résolue par la méthode de séparation des variables, d'où

$$\frac{F''(Z_N)}{F'(Z_N)} = \frac{G'(T_v)}{G(T_v)} \quad \text{Eq. 3.48}$$

dont la solution générale est :

$$F(Z_N) = (A_1 \cos bZ_N + A_2 \sin bZ_N) \text{ et } G(T_v) = A_3 \cdot e^{-b^2 T_v}$$

$A_1, A_2$  et  $A_3$  sont des constantes.

Sachant que

$$rt = F(Z_N)G(T_v) \text{ et } \frac{d(rt)}{dz} = \varepsilon$$

on obtient :

$$\varepsilon(Z_N, T_v) = \frac{rZ_0}{C_v} \left( T_v + \frac{1}{6} (3Z_N^2 - 6Z_N + 2) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi Z_N}{n^2} \cdot (\exp(-n^2 \pi^2 T_v)) \right) \quad \text{Eq. 3.49}$$

ou en coordonnées non réduites

$$\varepsilon(z, t) = rZ_0 t \left[ 1 + \frac{Z_0^2}{6 \cdot C_v t} \left( 3 \left( \frac{z}{Z_0} \right)^2 - 6 \frac{z}{Z_0} + 2 \right) - \frac{Z_0^2}{\pi^2 C_v t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left( n\pi \left( \frac{z}{Z_0} \right) \right)}{n^2} \exp \left( - \frac{n^2 \pi^2 C_v t}{Z_0^2} \right) \right] \quad \text{Eq. 3.50}$$

De laquelle, en choisissant les conditions aux limites connues, c'est à dire au niveau du piston et au niveau de la plaque de filtration, on peut extraire  $C_v$  puis  $K$  ou  $K_i$  selon les équations Eq. 3.16 ou Eq. 3.16b, sachant que  $r$  est choisi par l'opérateur.

$$\text{Ainsi pour un SPM linéaire : } m_v = \Delta\varepsilon / \Delta P_s \text{ or } K = C_v \gamma_f m_v \quad \text{Eq. 3.51}$$

et  $\Delta\varepsilon$  entre la plaque de drainage et le piston s'exprime par :

$$\varepsilon(z=0, t) - \varepsilon(z=Z_0, t) = rZ_0 t \left[ 1 + \frac{Z_0^2}{6 \cdot C_v t} (2) \right] - rZ_0 t \left[ 1 + \frac{Z_0^2}{6 \cdot C_v t} (3 - 6 + 2) \right] = \Delta\varepsilon \quad \text{Eq. 3.52}$$

$$\Delta\varepsilon = r \left[ \frac{Z_0^3}{2 \cdot C_v} \right] \quad \text{Eq. 3.53}$$

ceci en ignorant le second terme de l'Eq. 3.50 qui devient négligeable en régime permanent.

$$\text{Le rapport } \varepsilon(z=0, t) / \varepsilon(z=Z_0, t) = \frac{m_v \Delta(P_{s0})}{m_v \Delta(P_{s1})} = \frac{P_1 - P_{f1}}{P_1} \quad \text{Eq. 3.54}$$

est également accessible expérimentalement.

Rappelons que :

$\varepsilon(z=0, t)$  : est la déformation au niveau de la surface filtrante

$\varepsilon(z=Z_0, t)$  : est la déformation au niveau du piston de compression

$P_1$  : est la pression axiale provoquée par la descente du piston

$P_{s0}$  : est la pression du solide au niveau de la plaque de drainage  $z = 0$

$P_{st=0}$  : est la pression initiale éventuellement exercée sur le solide avant l'expérience

$P_{s1}$  : est la pression du solide au niveau du piston  $z = Z_0$

$P_f$  : est la pression du liquide

$m_v$  : est le coefficient de compression volumique

En égalant Eq. 3.53 et Eq. 3.54, on a accès aux paramètres caractéristiques  $C_v$  et  $K_i$  ou  $K$  donnés par Eq. 3.16 et Eq. 3.16b.

Pour faciliter la comparaison des différents cas envisagés, on utilise la variable commune,  $v$  ou  $\bar{v}$ , sa valeur moyenne.



### 3.5.4 ILLUSTRATION EXPERIMENTALE ET COMPARAISON DES TROIS APPROCHES : CDC1, CDC2 ET CDC3

Rappelons les trois approches envisagées précédemment :

- **CDC 1 : petites déformations et comportement non-linéaire de la matrice**
- **CDC 2 : grandes déformations et comportement non-linéaire de la matrice**
- **CDC 3 : petites déformations et comportement linéaire de la matrice**

Pour la comparaison des diverses approches, on a choisi comme illustration la variation de coefficient de compression et la variation du coefficient de perméabilité en fonction du volume spécifique moyen.

Pour ce qui est du coefficient de perméabilité, il s'exprime à partir des équations suivantes:

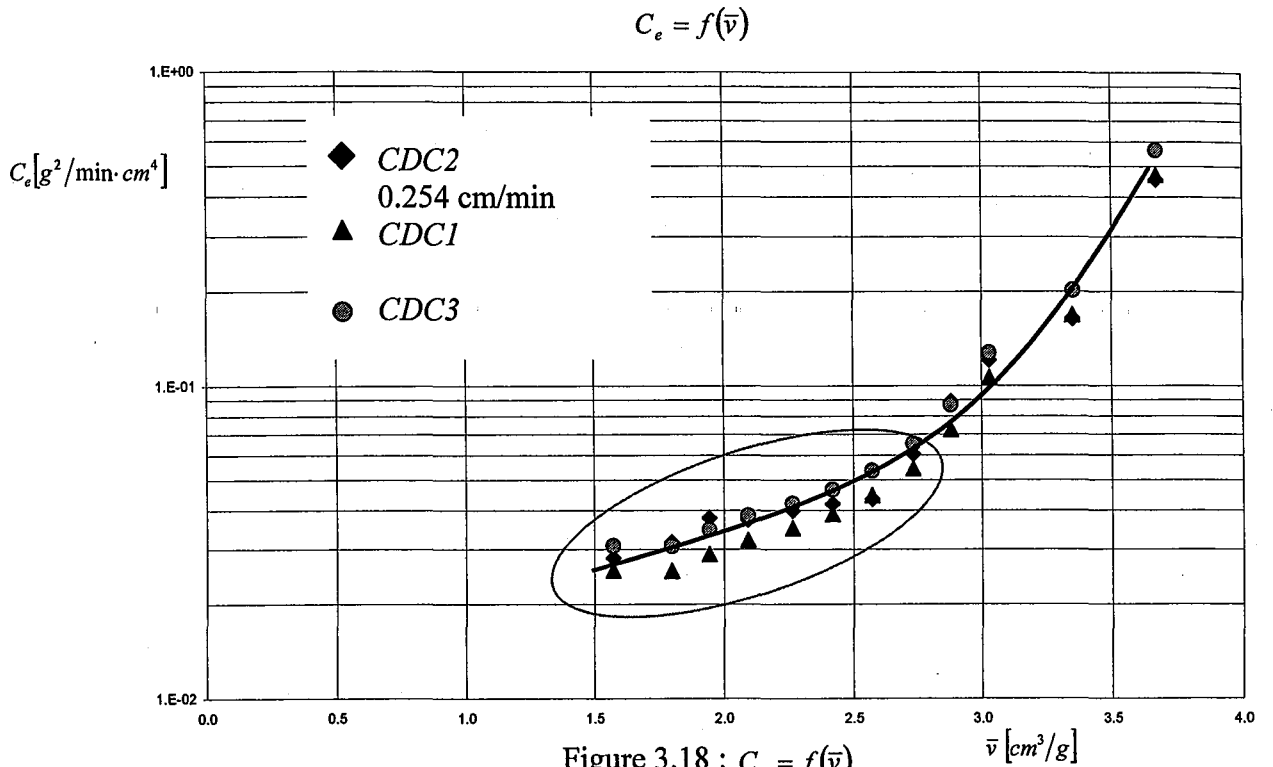
$$1. \text{ pour CDC 1} \quad K = \left[ \frac{\gamma_f \frac{dZ}{dt} Z_0}{P_{f1}} \right] \cdot \left[ \frac{5}{12} \right] \text{ Eq. 3.55}$$

$$2. \text{ pour CDC 2} \quad K = \left[ \frac{\gamma_f \frac{dZ}{dt} Z_0}{P_{f1}} \right] \text{ Eq. 3.56}$$

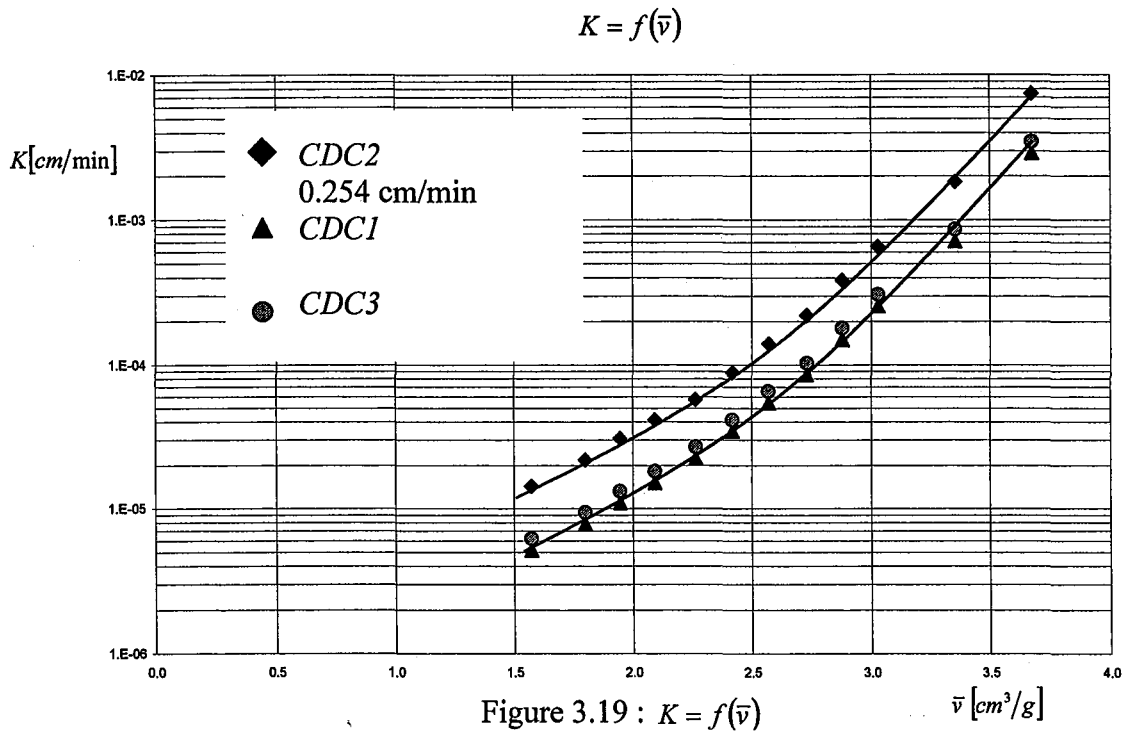
$$3. \text{ pour CDC 3} \quad K = \left[ \frac{\gamma_f \frac{dZ}{dt} Z_0}{P_{f1}} \right] \cdot \left[ \frac{1}{2} \right] \text{ Eq. 3.57}$$

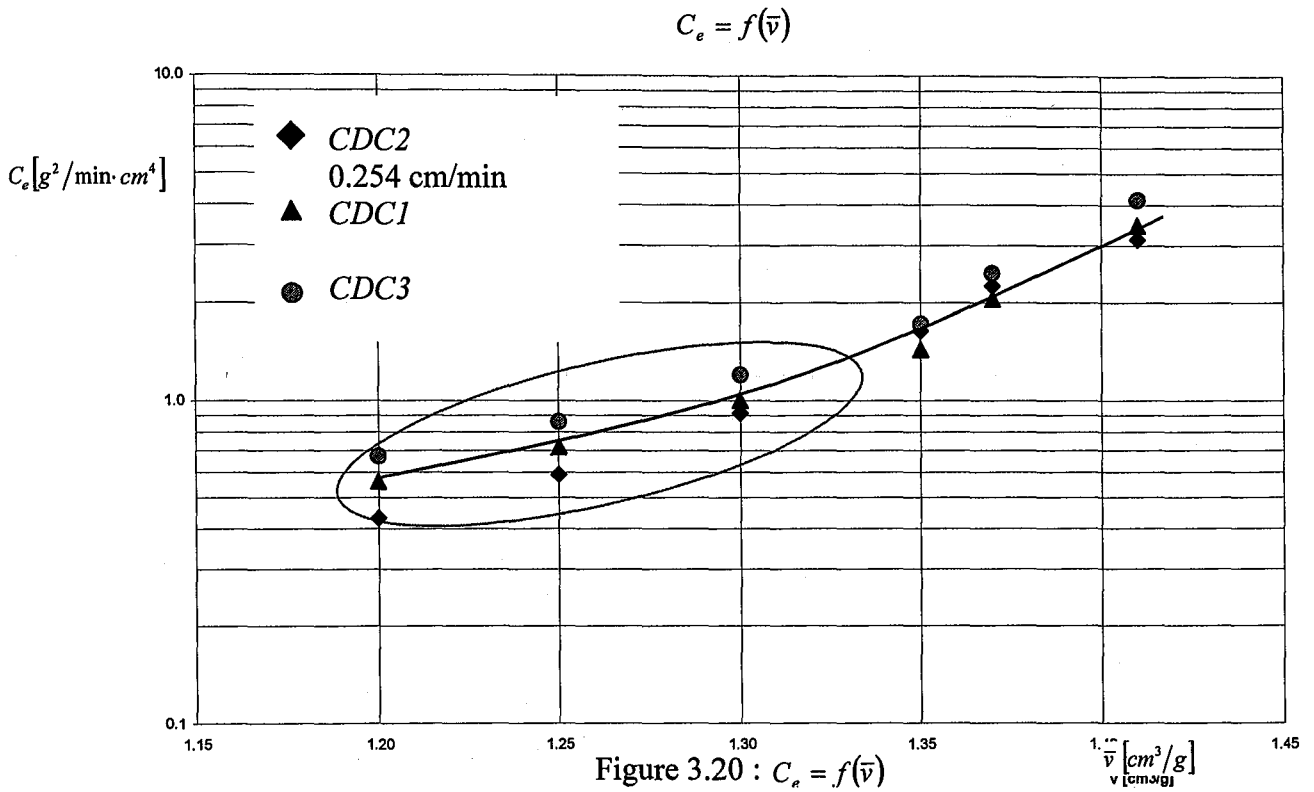
Les figures 3.18 à 3.23 comparent, pour chaque produit étudié, C, Cr et F, la variation du coefficient de compression et du coefficient de perméabilité en fonction du volume spécifique moyen de la matrice SPM.

On constate peu de différence entre les trois approches. Nous reviendrons sur cet aspect car il ne faut pas négliger les différences qui existent entre les trois méthodes. Il faut aussi souligner que l'appareillage, le choix des produits et le travail en couches relativement minces permettent d'approcher de façon plus universelle le phénomène étudié.

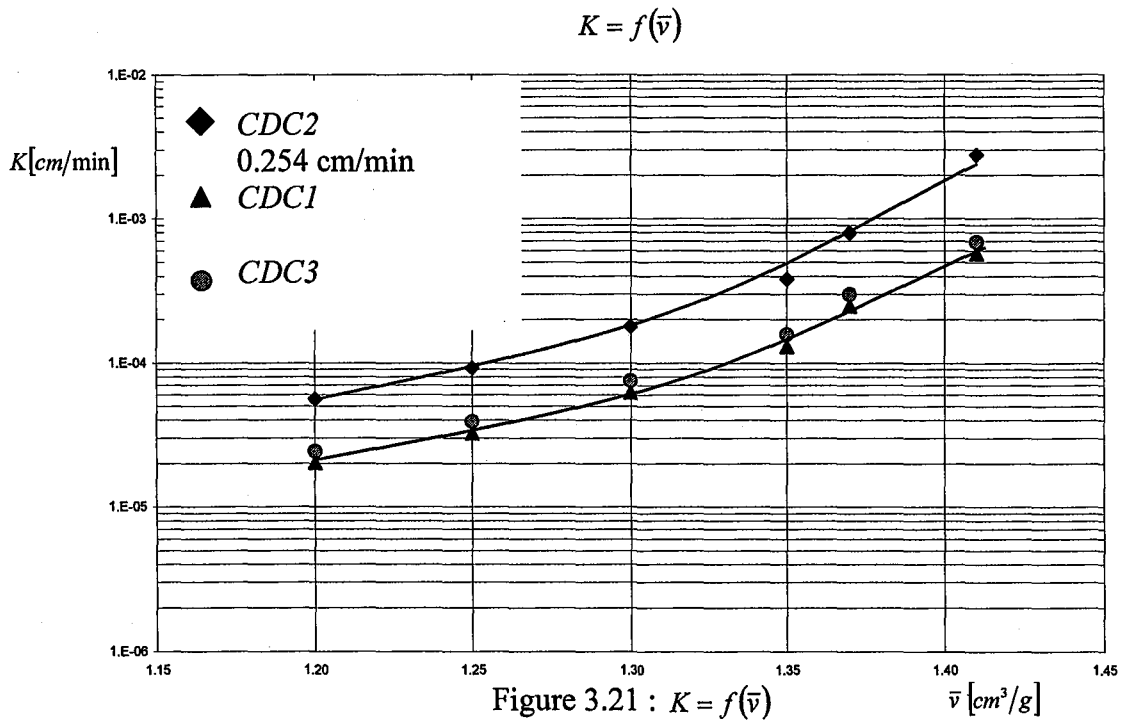


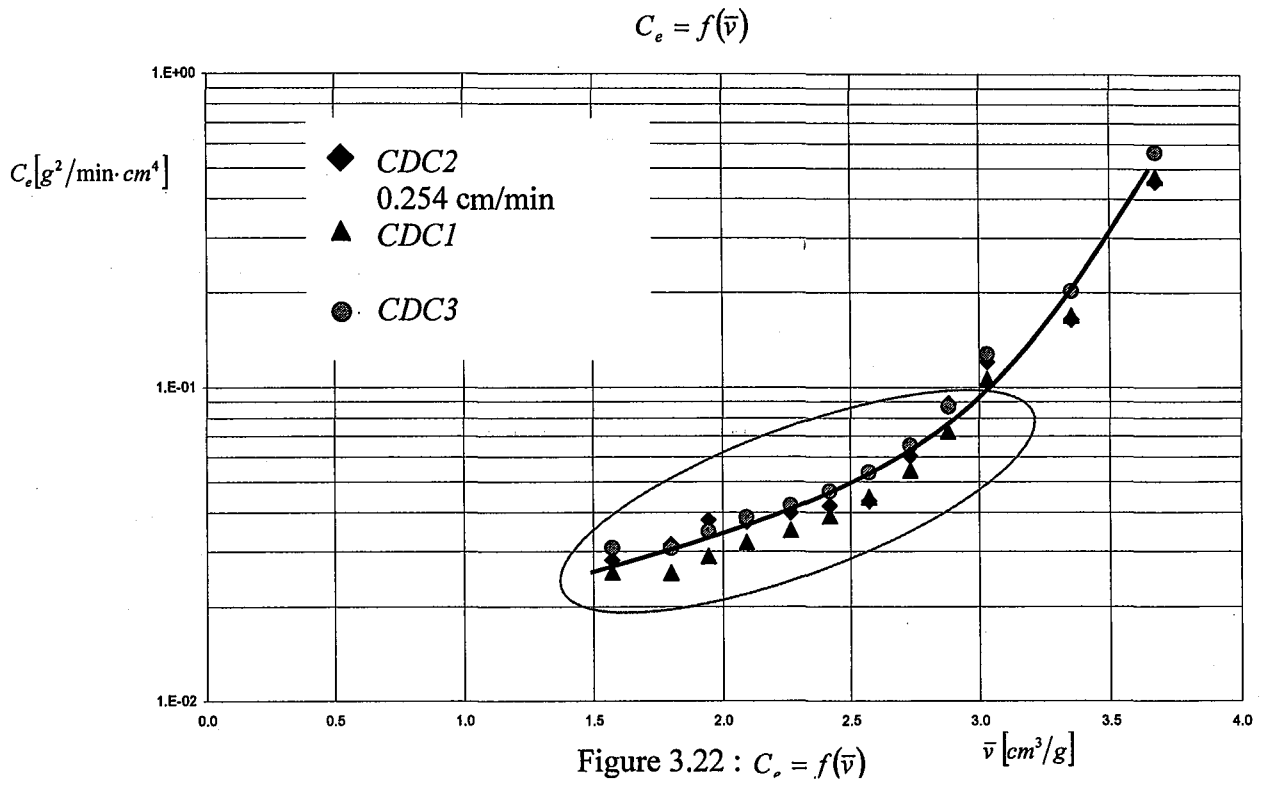
Produit F, pulpes de betteraves



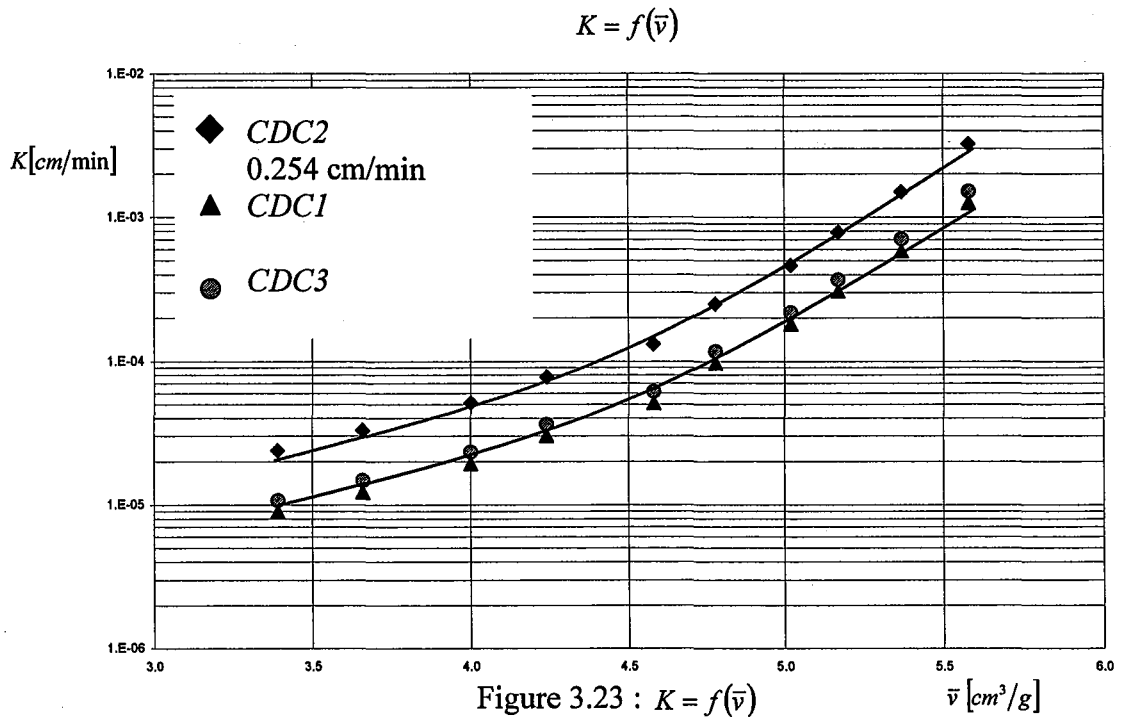


Produit C, protéines lactières coagulées





Produit Cr, aireselles



### 3.6 CONCLUSION GENERALE DE LA CDC

On peut constater à partir des figures 3.18 à 2.23, que seule la perméabilité selon CDC2 se distingue de façon significative des autres approches. Ceci tient au fait qu'aucune hypothèse réductrice n'est faite concernant  $K$  et  $C_e$ . C'est donc la formulation la plus générique et sans doute la plus sûre lorsque les produits et les conditions opératoires ne sont pas encore parfaitement connus ou déterminées. Il faut quand même souligner que plus le volume spécifique progresse vers des faibles valeurs, c'est à dire vers la fin de la compression, plus la différence entre les trois méthodes se précise. Il convient pour s'en convaincre d'examiner les zones cerclées sur les trois figures représentant  $C_e = f(\bar{v})$ , à savoir Fig. 3.18, Fig. 3.20 et Fig. 3.22. Cette observation mérite de retenir l'attention car son analyse, qui dépasse le cadre de ce travail, est sans doute prometteuse.

D'autres aspects sont à prendre en considération :

1. Les couches SPM étudiées restent minces, car même si au départ de la compression ces couches SPM ont une hauteur initiale de 5 cm environ, donnant un  $L/D$  de  $\frac{1}{2}$  qui nous paraît être une limite raisonnable, lorsque la pression hydraulique apparaît la hauteur a déjà été réduite de plus de 50% et diminuera encore de 50% durant la compression finale. Il est donc difficile avec des produits très compressibles, donc des déformations importantes, de simuler une situation de couches épaisses sans risquer d'obtenir des données questionnables en début de compression. Ce dilemme ne se résout pas simplement. Toutefois il est important de garder à l'esprit que seule la méthode CDC2 peut prendre en compte de manière globale et totale la compression accompagnée de larges déformations.
2. Un second élément pouvant justifier les faibles différences observées est à associer à la gamme de produits choisis. Allant du produit semi-solide au produit semi-liquide, en passant par un produit viscoélastique, cette gamme présente des avantages au niveau de l'aspect rhéologique faisant l'objet de travaux en cours mais elle présente aussi le risque majeur d'inclure des produits au comportement apparemment similaires pour les raisons suivantes. Pour l'un d'entre eux,  $C_r$ , c'est davantage l'aspect hydrodynamique qui gouverne le processus de déformation tandis que pour le produit  $C$ , la résistance structurelle ou mécanique de la matrice domine au départ puis l'aspect hydrodynamique vers la fin de la compression. Quant au produit  $F$ , c'est une situation intermédiaire qui tend à prévaloir. Il y a donc toute possibilité d'effets compensatoires desquels résultera une situation en apparence insensible au modèle CDC1, CDC2 ou CDC3 choisi. Dans tous les cas de figures, les produits sont visiblement très différents comme le montrent les analyses fondées sur la variation de  $C_e$  ou du coefficient de perméation.

Dans tous les cas seule la CDC met en valeur de façon précise l'impact de la vitesse de déformation comme on peut le constater pour les trois produits évalués plus complètement.

D'une façon plus générale, la CDC nous a permis, sans hypothèse excessivement restrictive concernant les deux paramètres essentiels et caractéristiques de l'écoulement et de la résistance mécanique de la matrice, de mettre à disposition trois approches théoriques adaptables à une large gamme de situations.

Ces trois approches ont des points communs mais aussi des différences notables quant à l'exploitation des résultats et la rapidité d'extraction d'informations essentielles.



Un des apports extrêmement important de la CDC réside dans la rapidité d'exécution des tests, de l'ordre de plusieurs minutes et non pas de plusieurs heures comme dans le cas de la CPC. Ceci est d'autant plus important que les processus industriels de séparations solide-liquide s'insèrent dans des procédés de plus en plus complexes et rapides.

Nous avons pu souligner, dans nos travaux rapportés dans les publications P9 et P10, que le rapport de pression hydraulique à la pression totale au cours de la compression est un critère important. A ce sujet il est tout à fait concevable de travailler en contrôlant ce rapport. Il s'agirait d'une méthode nouvelle dans le domaine du génie des procédés. La connaissance des états d'équilibres intermédiaires et de la réponse du SPM à la compression en serait élargie.

Il est important de souligner que le choc exercé sur la matière lorsque l'on travaille à pression constante, et qu'il n'y a pas de phase de filtration préliminaire, a des conséquences qui ne sont prévisibles ou mesurables que par l'approche CDC.

Ceci nous amène aux études de la relaxation qui suit la compression CDC. Ces dernières, rapportées dans la publication P10, montrent l'incidence du taux de déformation initial sur les caractéristiques en compression et en relaxation du produit. Ceci ouvre une nouvelle voie de recherche qui pourrait faire usage des relations simples que nous avons développées concernant la relaxation.

Enfin, nous avons développé un outil relativement descriptif des phénomènes de compression de produits poreux saturés. Il reste maintenant, dans la suite de ce travail, à cerner leur degré de compatibilité avec les opérations continues de pressage.

### **La Compression à Déformation Constante -CDC – Résumé des Conclusions**

- 1. Seule la CDC met en valeur de façon précise l'impact de la vitesse de déformation.**
- 2. La CDC nous a permis, sans hypothèse excessivement restrictive, de mettre à disposition trois approches théoriques adaptables à une large gamme de situations.**
- 3. Un des apports extrêmement important de la CDC réside dans la rapidité d'exécution des tests, de l'ordre de plusieurs minutes.**
- 4. Il faudrait systématiser l'approche.**

---

*Chapitre*  
*quatre*

---

## **La Compression Axiale avec Ecoulement Radial et le Pressage à Vis (CAR)**

**Les principaux objectifs de ce chapitre se résument de la façon suivante :**

- 1. Etablir et valider une approche théorique de la compression axiale avec écoulement radial.**
- 2. Valider les résultats expérimentaux obtenus à partir de l'unité pilote construite et mise au point au cours de ces travaux.**
- 3. Rapprocher les modes de compression en cellule piston et en continu par vis.**
- 4. Comparer les comportements respectifs des produits sélectionnés**

Une étude préliminaire a été présentée au cours du cinquième congrès mondial de la filtration à Nice en 1990. Nous reprenons ci-dessous en anglais l'introduction générale de cette présentation car elle reflète très précisément les objectifs décrits, tout en gardant l'authenticité de ce document que nous avons produit pour cette rencontre.

*Concernant les aspects théoriques, nous développons tout d'abord la compression axiale avec écoulement radial central ou périphérique, puis nous l'utilisons pour aborder le cas très général de la compression axiale avec écoulement tridimensionnel que nous réduisons enfin au cas du pressage à vis. Le lecteur pourra avoir l'impression d'un long développement théorique pour un aboutissement restreint au seul pressage à vis. Notre démarche est cohérente avec l'idée que ce mémoire puisse fournir des bases théoriques utiles au-delà des applications sélectionnées. Les détails de calcul sont fournis en annexe A4.*

This chapter focuses mainly on dewatering or compacting of biological products by screw pressing. We propose a simplified theory as well as a practical methodology to predict and assist the design of full scale unit.

One of the main objective of this study is to clarify the pressing mechanism involved during screw expression of biological material. A secondary aim is to establish a relationship between the batch compression test and the observed phenomena occurring during screw pressing. Finally the global objective of the work is to make available theoretical guidance for the operation and design of screw presses.

To meet this objective, a test screw pressing unit, T.S.P.U.©, has been designed. The essential features are depicted on the figure 4.1.

The feed pressure and the discharge back pressure are controlled by compressed air and a spring. The fluid pressure is measured using hydraulic sensor positioned along the external barrel. The screw rotational speed is adjusted using a variable speed motor. The screw has been divided in equally space fractions to allow the collection of juice along the screw. Tight fitting O rings and an external Plexiglass® jacket have been used to fractionate the juice output. A picture of the equipment is provided in the introduction of the thesis. The fractionators used to collect the expressed juice are visible below the main barrel. With this type of devices, other expression flow rates are readily accessible. For example, the juice flow rate distribution along the screw is directly measured as a function of the time for different speeds, feed pressures, discharge pressures and screw types.

The screw is the central part of the press. The screw conveys and forces the solid mixture slurry through the discharge restriction. The screw, similar to a plastic extrusion screw, is also divided in a feed and compression section. We can always debate whether the discharge system plays the role of a metering section. The compression section here represents more than 90% of the screw length. Compression is achieved due to a decrease in the pitch as shown on the top schematic representation.

The Navier-Stokes type of equation, which to a certain extent is represented by Eq. 1.33 and a few soil mechanic approaches such as the very generic one proposed by BARRON(1947), for incompressible flow applies and serves as the basis for the analysis of the compression section (assuming for the ease of figuring the three dimensional profile that the screw channel consists of parallel plates). The basic equation can be solved using boundary conditions, which correspond to a no slip situation at the channel surface. The volumetric outputs and the residence time, which combined with the average compression ratio, can then provide good estimation of the compression characteristics such as the coefficient of compression, the permeability, and eventually the matrix compressibility.

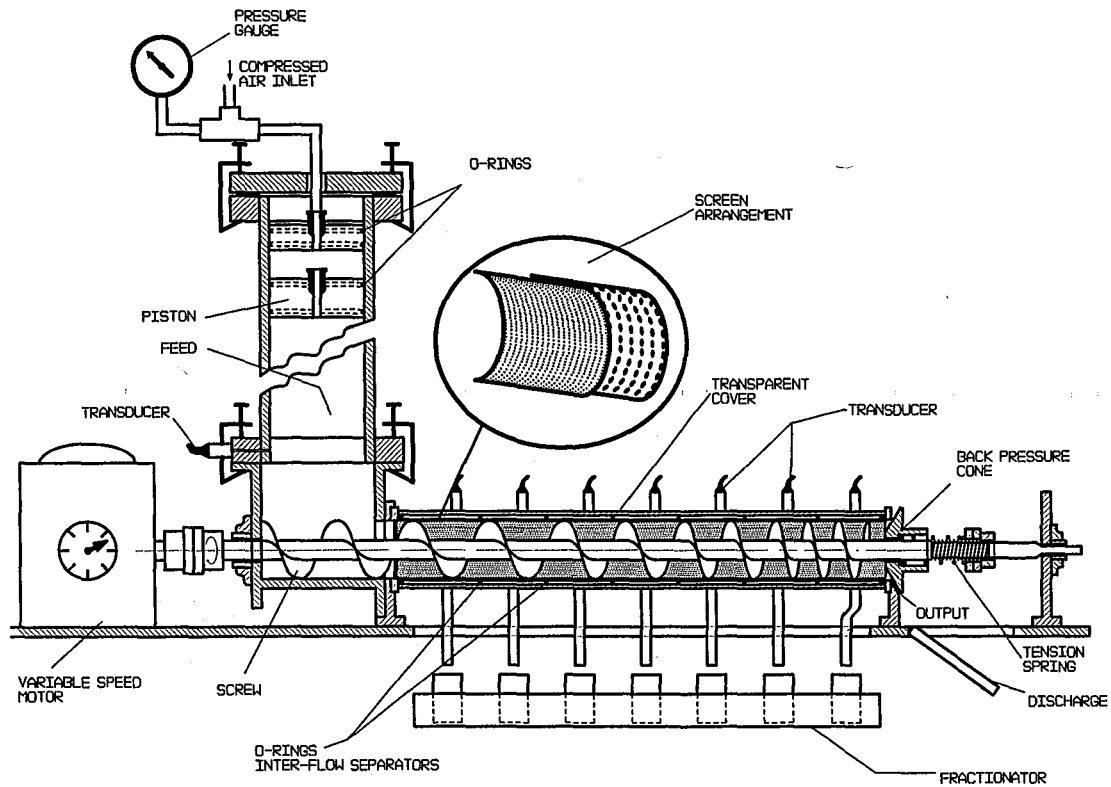


Figure 4.1 : TSPU© -Testing Screw Press Unit© -Unité pilote d' extrusion-pressage à vis

## 4.1 THEORIE

### 4.1.1 L'écoulement radial simple

Les figures 4.2 et 4.3 donnent la configuration schématique correspondant à la compression verticale avec un écoulement radial qui est ici central mais qui pourrait être périphérique.

$$q_x = K_x \frac{\partial h}{\partial x} dydz \quad \text{Eq. 4.1}$$

$$q_y = K_y \frac{\partial h}{\partial y} dx dz \quad \text{Eq. 4.2}$$

$$q_z = K_z \frac{\partial h}{\partial z} dx dy \quad \text{Eq. 4.3}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} = \text{gradients hydrauliques}$$

$q_x, q_y, q_z$  = débits entrants en x, y, z

$K_x, K_y, K_z$  = coefficients de perméabilité en x, y, z

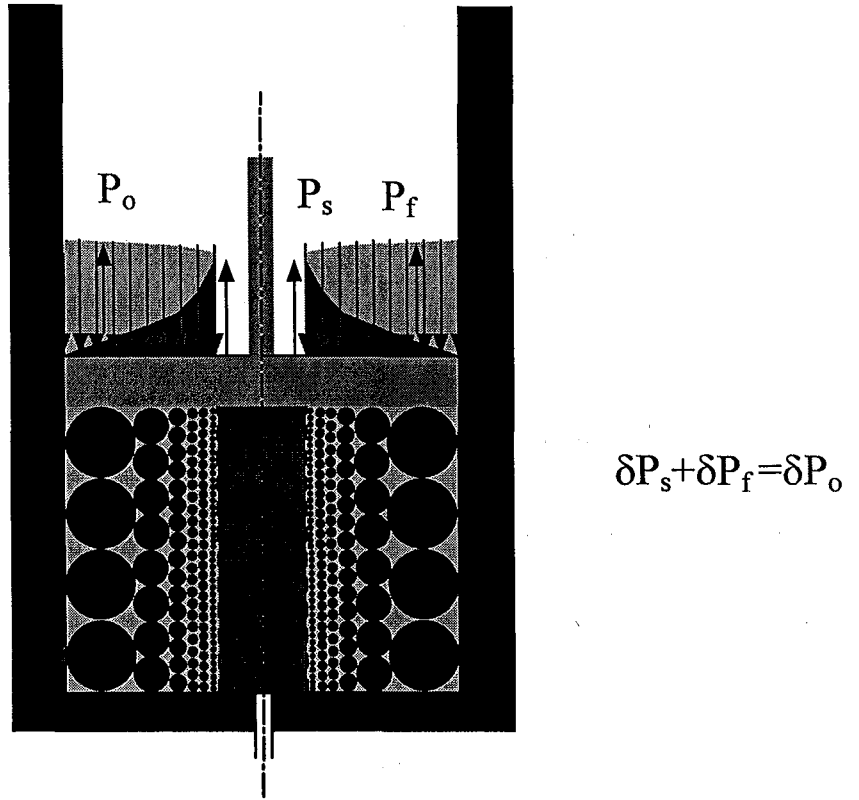


Figure 4.2 : Configuration schématique de la compression verticale avec un écoulement radial central

Cette configuration, Fig. 4.2, correspond à l'une des possibilités de compression à partir de la cellule MMCC© II dont la photographie est fournie en introduction du mémoire. La partie centrale drainante s'insère au centre du piston au fur et à mesure de la progression de la compression verticale.

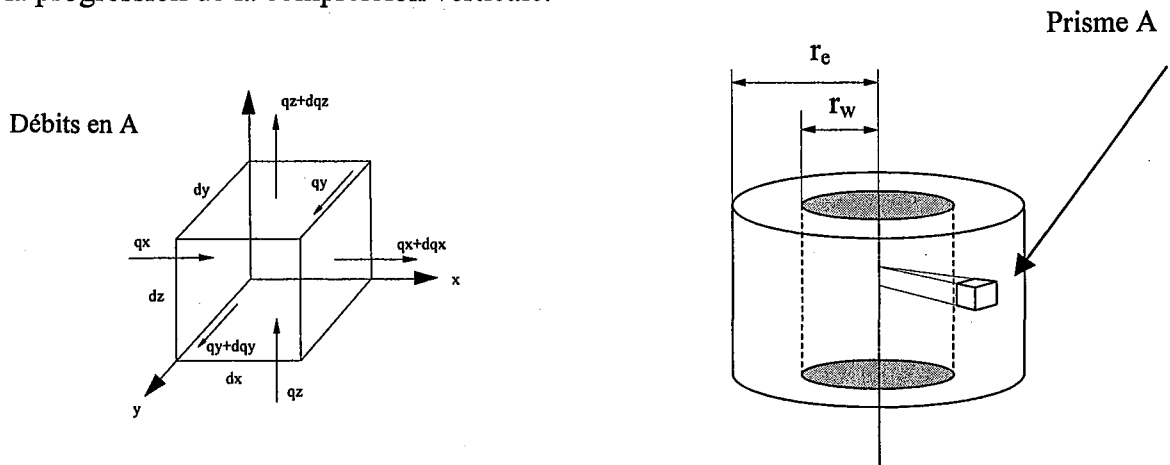


Figure 4.3 : Répartition des débits au niveau du prisme A

De façon générale on peut écrire :

$$\left( K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) dx dy dz = \frac{\partial V_T}{\partial t}$$

En considérant le milieu SPM isotrope, on a  $K_x = K_y = K_z$  :

$$K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dxdydz = \left( K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) dxdydz = \frac{\partial V_T}{\partial t} \quad \text{Eq. 4.4}$$

$$K_x \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) dxdydz = \frac{\partial V_T}{\partial t}$$

$$\text{Or, } h = \frac{P_f}{\gamma_f} \quad \text{Eq. 4.5}$$

$\gamma_f$  : poids spécifique du fluide 9.81 [kN/m<sup>3</sup>]

En substituant l'Eq. 4.5 dans l'Eq. 4.4

$$\frac{K}{\gamma_f} \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_f}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{dxdydz} \frac{\partial V_T}{\partial t} \quad \text{Eq. 4.6}$$

Or,

$$\frac{\partial V_T}{\partial t} = \frac{dxdydz}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad \text{Eq. 4.7}$$

d'où

$$\frac{K}{\gamma_f} \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_f}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{dxdydz} \frac{dxdydz}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad \text{Eq. 4.8}$$

Or,

$$\partial e = a_v \partial P_f \quad \text{Eq. 4.9}$$

d'où

$$\frac{K}{\gamma_f} \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_f}{\partial y^2} \right) = \frac{a_v}{1+e} \frac{\partial P_f}{\partial t} = m_v \frac{\partial P_f}{\partial t} \quad \text{Eq. 4.10}$$

$$m_v : \text{coefficient de compression volumique, } m_v = \frac{a_v}{1+e} \quad \text{Eq. 4.11}$$

Or,

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{K}{\gamma_f \cdot m_v} \cdot \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_f}{\partial y^2} \right) = C_r \cdot \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_f}{\partial y^2} \right) \quad \text{Eq. 4.12}$$

$$C_r : \text{coefficient de compression radial, } C_r = \frac{K}{\gamma_f \cdot m_v} \quad \text{Eq. 4.13}$$

En ce qui concerne le passage en coordonnées polaires :

Soit  $u(x, y)$  fonction de  $x, y$ ,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Prenons

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \theta \\ y &= r \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad \text{alors} \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad \text{et,}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r}$$

Revenons au cas qui nous intéresse :

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = C_r \cdot \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_f}{\partial y^2} \right) \text{ devient } \frac{\partial P_f}{\partial t} = C_r \cdot \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_f}{\partial r} \right) \quad \text{Eq. 4.14}$$

#### 4.1.2 Compression verticale avec écoulement tridimensionnel

Considérons maintenant les cas où l'écoulement est à la fois radial et vertical. Par similitude avec la diffusion décrite par CRANK (1973), on peut écrire :

Si  $P_{f_1} = f_1(r, t)$  est une solution de l'équation de l'écoulement bidimensionnel

$$\frac{\partial P_{f_1}}{\partial t} = C_{vr} \cdot \left( \frac{\partial^2 P_{f_1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{f_1}}{\partial r} \right) \quad \text{Eq. 4.15}$$

et si  $P_{f_2} = f_2(z, t)$  est une solution de l'équation de l'écoulement linéaire

$$\frac{\partial P_{f_2}}{\partial t} = C_{vr} \cdot \frac{\partial^2 P_{f_2}}{\partial z^2} \quad \text{Eq. 4.16}$$

alors  $P_f = f_1(r, t) f_2(z, t)$  est nécessairement une solution de l'équation de l'écoulement tridimensionnel, symétrique par rapport à l'axe  $z$ .

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = C_{vr} \cdot \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} \right) \quad \text{Eq. 4.17}$$

Sur les mêmes bases, on pourra écrire :

$$U_{vr} = 1 - (1 - U_v)(1 - U_r) \quad \text{Eq. 4.18}$$

avec

$U_{vr}$  = le taux de compression avec écoulements simultanés vertical et radial

$U_v$  = taux de compression avec écoulement vertical

$U_r$  = taux de compression avec écoulement radial

Nous nous trouvons dans ce cas confrontés à la compression dite tridimensionnelle d'un milieu SPM isotrope, c'est à dire  $K_x = K_y = K_z$ .

$$\frac{a_v}{1+e} \frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{K_h}{\gamma_f} \cdot \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_f}{\partial r} \right) + \frac{K_v}{\gamma_f} \cdot \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} \quad \text{Eq. 4.19}$$

avec

$$C_{vr} : \text{coefficient de compression [m}^2 \cdot \text{s}^{-1}], C_{vr} = \frac{K}{\gamma_f \cdot m_v} \quad \text{Eq. 4.20}$$

$$m_v : \text{coefficient de compressibilité volumique [m}^2 \cdot \text{N}^{-1}], m_v = \frac{a_v}{1+e} \quad \text{Eq. 4.21}$$

on retrouve l'Eq. 4.17.

La Figure 4.4 donne les conditions aux limites.

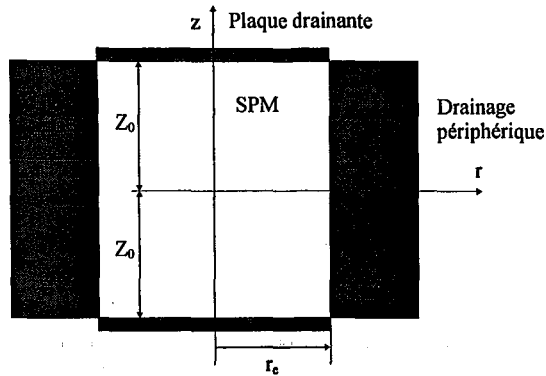


Figure 4.4 : Compression verticale avec écoulement tridimensionnel

Pour obtenir la solution de l'Eq. 4.17, la pression du fluide peut être exprimée par :

$$P_f = P_{f_0} \varphi_1(z, t) \varphi_2(r, t) \quad \text{Eq. 4.22}$$

avec  $\varphi_1(z, t) = \frac{P_{f1}(z, t)}{P_{f_0}}$  et  $\varphi_2(r, t) = \frac{P_{f2}(z, t)}{P_{f_0}}$   $P_{f_0}$  étant la pression du fluide à  $t = 0$

L'Eq. 4.17 peut être séparée selon :

$$\frac{1}{C_{vr}} \frac{\partial P_{f1}}{\partial t} = \frac{\partial^2 P_{f1}}{\partial z^2} \quad \text{Eq. 4.23}$$

$$\frac{1}{C_{vr}} \frac{\partial P_{f2}}{\partial t} = \frac{\partial^2 P_{f2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{f2}}{\partial r} \quad \text{Eq. 4.24}$$

et de façon équivalente,

$$\frac{1}{C_{vr}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{C_{vr}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$$

Les conditions aux limites suivantes doivent être respectées :

pour  $\varphi_1$  :

- $\varphi_1 = 1$  pour  $t = 0$  et  $0 \leq z \leq 2Z_0$
- $\varphi_1 = 0$  pour  $t \rightarrow \infty$  et  $0 \leq z \leq 2Z_0$
- $\varphi_1 = 0$  pour  $0 \leq t \leq \infty$  et  $z = 0, z = 2Z_0$  Eq. 4.25
- $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0$  pour  $0 \leq t \leq \infty$  et  $z = Z_0$

pour  $\varphi_2$  :

- $\varphi_2 = 1$  pour  $t = 0$  et  $0 \leq r \leq r_e$
- $\varphi_2 = 0$  pour  $t \rightarrow \infty$  et  $0 \leq r \leq r_e$
- $\varphi_2 = 0$  pour  $0 \leq t \leq \infty$  et  $r = r_e$  Eq. 4.26
- $\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = 0$  pour  $0 \leq t \leq \infty$  et  $r = 0$



L'Eq. 4.23 est identique à une version simplifiée de l'Eq. 1.33 ou à celles proposées au chapitre 2. La solution s'écrit :

$$\frac{P_{f1}}{P_{f0}} = \sum_{m=0}^{\infty} \left( 2 \cdot \frac{2}{(2m+1)\pi} \right) \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4} \right) \quad \text{Eq. 4.27}$$

$$\text{et } U_v = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M_i^2} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \quad \text{Eq. 4.27b}$$

$$\text{avec } T_v = \frac{C_{vr} t}{Z_0^2} \quad \text{Eq. 4.28}$$

Le coefficient de compression  $C_{vr}$  est défini par l'Eq. 4.20.

En ce qui concerne  $P_{f2}(r, t)$  on peut l'écrire sous la forme suivante:

$$P_{f2} = \phi(r)F(t) \quad \text{Eq. 4.29}$$

Les fonctions  $\phi(r)$  et  $F(t)$  doivent satisfaire l'Eq. 4.24, ainsi

$$\frac{1}{C_{vr}} \phi \frac{\partial F}{\partial t} = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) F \quad \text{Eq. 4.30}$$

ou

$$\frac{1}{C_{vr}} \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{\phi} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad \text{Eq. 4.31}$$

De façon traditionnelle et selon la méthode illustrée par CRANK pour la diffusion, la solution s'obtient comme suit :

$$\frac{1}{C_{vr}} \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial t} = -\lambda^2 \quad \text{Eq. 4.32}$$

$$\text{alors } \frac{\partial F}{\partial t} + C_{vr} \lambda^2 F = 0 \quad \text{Eq. 4.33}$$

conduisant à :

$$F = C \cdot e^{-C_{vr} \lambda^2 t} \quad \text{Eq. 4.34}$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

$$\frac{1}{\phi} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\lambda^2 \quad \text{Eq. 4.35}$$

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \phi \lambda^2 = 0 \quad \text{Eq. 4.36}$$

La solution de cette équation est une fonction de Bessel de première espèce :

$$\phi = J_0(\lambda r) \quad \text{Eq. 4.37}$$

Ainsi la solution générale de l'équation différentielle Eq. 4.24 s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{P_{f2}}{P_{f0}} = C \cdot e^{-C_{vr} \lambda^2 t} J_0(\lambda r) \quad \text{Eq. 4.38}$$

Les conditions aux limites et en particulier  $P_{f2} = 0$  pour  $0 \leq t \leq \infty$  et  $r = r_e$

requièrent :

$$J_0(\lambda r_e) = 0 \quad \text{Eq. 4.39}$$

Les solutions sont disponibles dans les tables mathématiques classiques :

$$J_0(\lambda r_e) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda r_e / 2)^{2k}}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda r_e)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} \quad \text{Eq. 4.40}$$

La fonction de Bessel de première espèce  $J_0(\lambda r_e)$  est représentée par  $J_0(x)$  sur la Figure 4.5 obtenue à l'aide du logiciel mathématique Maple® selon le tableau 4.1.

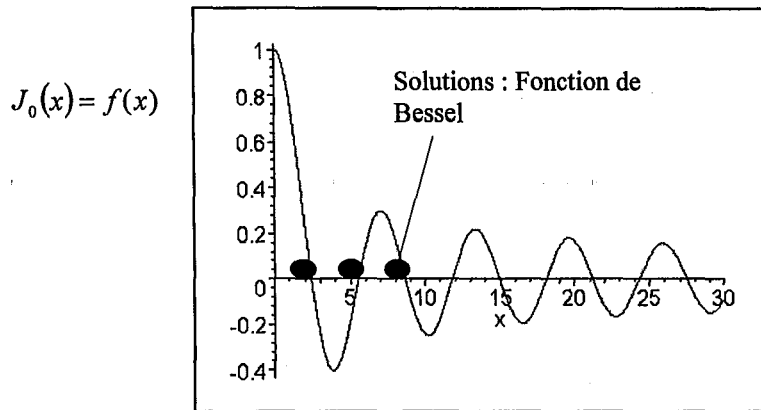


Figure 4.5 : La fonction de Bessel de première espèce  $J_0(\lambda r_e)$  est représentée par  $J_0(x)$ .

$k$	1	2	3	4	5
$r_e \lambda_k$	2.405	5.520	8.654	11.792	14.931
$k$	6	7	8	9	$>9$
$r_e \lambda_k$	18.071	21.212	24.353	27.494	$\frac{\pi}{4}(4k-1) + \frac{1}{\pi(4k-1)}$

Tableau 4.1

Ainsi la solution de l'Eq. 4.24:

$$\frac{P_{f2}}{P_{f0}} = \sum_1^k C_k \cdot e^{-C_{vr} \lambda_k^2 t} J_0(\lambda_k r) \quad \text{Eq. 4.41}$$

avec

$$C_k = \frac{\int_0^{r_e} J_0(\lambda_k r) r dr}{\int_0^{r_e} J_0^2(\lambda_k r) r dr} \quad \text{Eq. 4.42}$$

d'où

$$\frac{P_{f2}}{P_{f0}} = \sum_1^k \frac{\int_0^{r_e} J_0(\lambda_k r) r dr}{\int_0^{r_e} J_0^2(\lambda_k r) r dr} \cdot e^{-C_{vr} \lambda_k^2 t} J_0(\lambda_k r) \quad \text{Eq. 4.43}$$

Pour faciliter le calcul de  $J_0(\lambda_k r)$  on peut utiliser l'intégrale de la fonction de Bessel :

$$J_0(\lambda_k r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\lambda_k r \cdot \sin \theta) d\theta \quad \text{Eq. 4.44}$$

Le taux de compression, dans le cas où  $r = r_e$  (drainage périphérique) et  $P_{f_i} = P_{f_0}$ , s'écrit :

$$U_r = \frac{(1/r_e) \int_0^{r_e} P_{f_i} dr - (1/r_e) \int_0^{r_e} P_{f_2} dr}{(1/r_e) \int_0^{r_e} P_{f_i} dr} = 1 - \frac{(1/r_e) \int_0^{r_e} P_{f_2} dr}{(1/r_e) \cdot P_{f_0} r_e} \quad \text{Eq. 4.45}$$

En substituant l'Eq. 4.43 dans l'Eq. 4.45, alors

$$U_r = 1 - \frac{(1/r_e) P_{f_0} \int_0^{r_e} \sum_{k=1}^k C_k \cdot e^{-C_{vr} \lambda_k^2 t} J_0(\lambda_k r) dr}{(1/r_e) \cdot P_{f_0} r_e} \quad \text{Eq. 4.46}$$

et en simplifiant,  $U_r = 1 - \int_0^{r_e} \sum_{k=1}^k \frac{C_k}{r_e} \cdot e^{-C_{vr} \lambda_k^2 t} J_0(\lambda_k r) dr$

qui prend la forme suivante :  $U_r = 1 - 4 \sum_{k=1}^k \frac{1}{\lambda_k^2} \cdot e^{-\lambda_k^2 T_r} \quad \text{Eq. 4.47}$

représentée sur les figures 4.6 et 4.7.

$\lambda_k$  étant la racine de la fonction de Bessel à l'ordre 0 et  $T_r = \frac{C_{vr} t}{(2 \cdot r_e)^2}$ .

Voici une simulation pour :  $r_e = 7.62 [cm]$ ,  $C_{vr} = 0.289 [cm^2 s^{-1}]$  et  $P_{f_0} = 1 [N \cdot cm^{-2}]$ ,

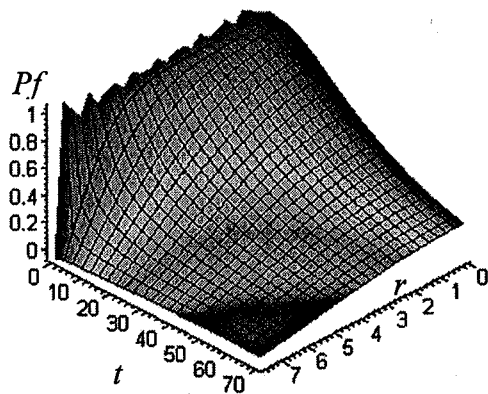


Figure 4.6 :  $P_r = f(t, r)$

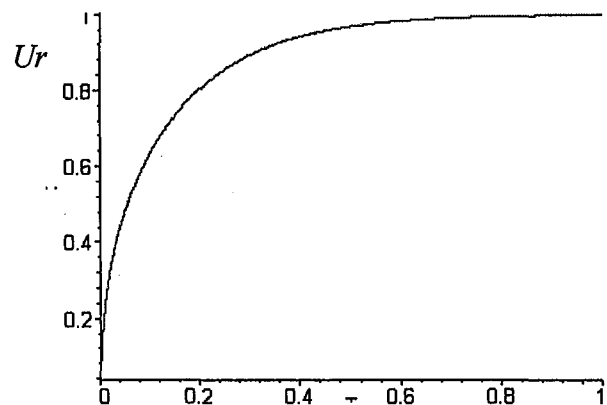


Figure 4.7 : Représentation graphique de l'Eq. 4.47

On peut aussi représenter la contribution purement verticale seule, selon les Eq. 4.27 et 4.27b et obtenir les situations des figures 4.8 et 4.9.

Pour  $Z_0 = 5 \text{ cm}$ , and  $P_{f0} = 1 \text{ [N} \cdot \text{cm}^{-2}]$ ,

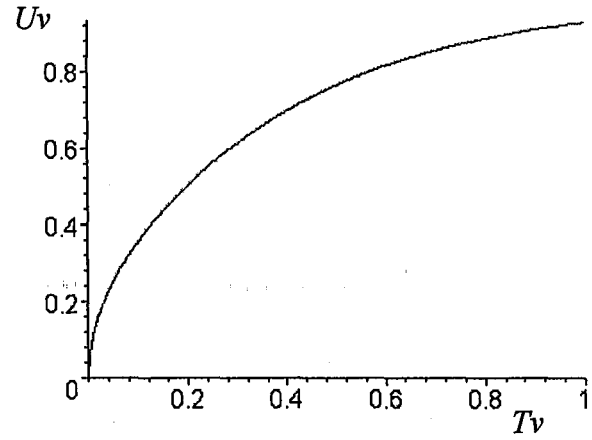
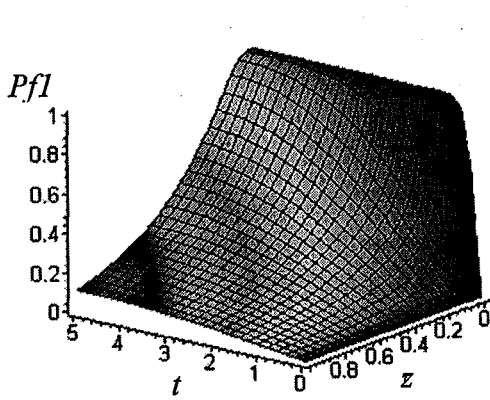


Figure 4.8 Représentations graphiques des Eq. 4.27 et 4.27b Figure 4.9

On peut également représenter la situation correspondant à la compression verticale avec écoulement tridimensionnel, radial et vertical, sachant que selon l'Eq. 4.18 :

$$U_{vr} = 1 - (1 - U_v)(1 - U_r)$$

et en substituant l'Eq. 4.27b et l'Eq. 4.47 dans l'Eq. 4.18, on obtient:

$$U_{vr} = 1 - \left( 1 - \left[ 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M_i^2} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \right] \right) \left( 1 - \left[ 1 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \cdot e^{-\lambda_k^2 T_r} \right] \right) \quad \text{Eq. 4.48}$$

$U_{vr} = f(T_v, T_r)$  est représenté sur la figure 4.9 dans les conditions suivantes :

$$r_e = 7.62 \text{ [cm]}, Z_0 = 5 \text{ [cm]} C_{vr} = 0.289 \text{ [cm}^2 \text{s}^{-1}] \text{ et } P_{f0} = 1 \text{ [N} \cdot \text{cm}^{-2}]$$

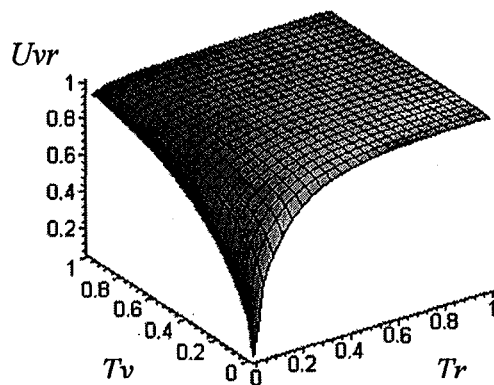


Figure 4.10 : La compression verticale avec écoulement tridimensionnel, radial et vertical, selon l'Eq.4.48

## 4.1.3 Application au pressage à vis

Il s'agit de prendre en compte la compression horizontale, due au pas régressif de la vis centrale, laquelle constitue un barreau imperméable, avec un écoulement radial périphérique. C'est un cas particulier de la situation qui précède sachant que le dispositif expérimental pilote a été construit de façon à compartimenter et fractionner tout au long de la vis. On a donc en première approximation une série de cellules piston, Fig. 4.11, à compression verticale et écoulement radial périphérique. Il faut inclure la présence du barreau central que constitue l'âme de la vis centrale. Soulignons également que la pression à la périphérie du barreau central est une donnée difficile à mesurer du fait de la rotation de cet élément. La compartimentation au niveau de la cage de drainage est alors essentielle car elle permet la collecte du fluide exprimé comme le montre la figure 4.1. Le calcul du taux de compression par compartiment ou cumulé devient alors possible.

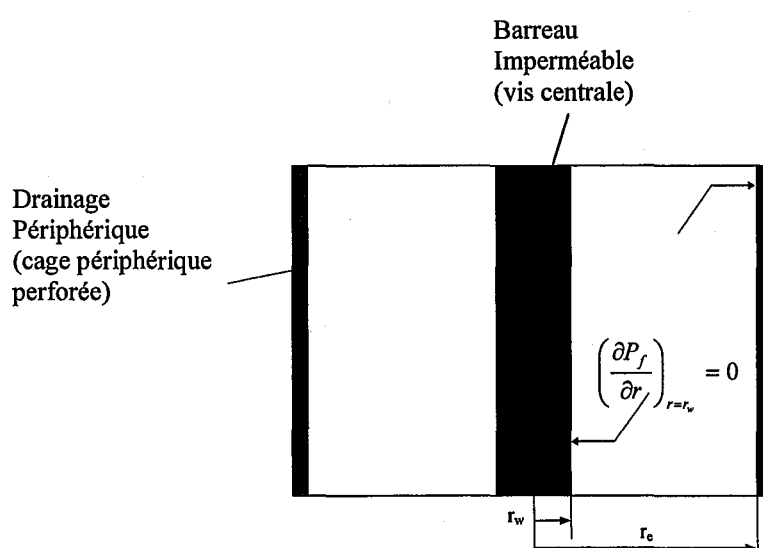


Figure 4.11 : La compression verticale et écoulement radial périphérique, application au pressage à vis

L'expression de la pression du fluide selon le rayon et le temps est tout à fait analogue au calcul de la pression hydraulique  $P_{f2}$  correspondant au drainage périphérique que nous avons vu dans le cas tridimensionnel qui précède, à l'exception près qu'il est nécessaire d'inclure la présence du barreau central que constitue la vis. Nous donnons les étapes principales de ce calcul en annexe A4. Ce dernier fait usage de la résolution classique reposant sur la séparation de variables et les solutions de Bessel dont nous avons déjà donné les bases à plusieurs occasions.

L'expression de la pression du fluide, Eq. 4.49, prend une forme mathématique lourde, sans pour autant être complexe, l'usage d'un traitement numérique à l'aide de Maple® simplifie la tâche.

$$P_{f,r,t} = \left( A_4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\alpha}{r_w} r\right)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + A_5 \left[ \frac{2}{\pi} \left\{ \ln\left(\frac{\alpha}{r_w} r / 2\right) + \gamma \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\alpha}{r_w} r\right)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\left(\frac{\alpha}{r_w} r\right)^2}{2^2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{r_w} r\right)^4}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{\alpha}{r_w} r\right)^6}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots \right) \right] \right) \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{r_w}\right)^2 C_r t}$$

Eq. 4.49

où  $A_4$  et  $A_5$  sont des constantes (voir annexe A4).

Puis en utilisant l'expression du taux de compression radiale  $U_r$  suivante

$$U_r = \frac{(1/r_e) \int_{r_w}^{r_e} P_{f,i} dr - (1/r_e) \int_{r_w}^{r_e} P_f dr}{(1/r_e) \int_{r_w}^{r_e} P_{f,i} dr} = 1 - \frac{(1/r_e) \int_{r_w}^{r_e} P_f dr}{(1/r_e) \cdot P_{f,0} (r_e - r_w)}$$

Eq. 4.50

dans laquelle on substitue l'expression de la pression du fluide on obtient :

$$U_r = 1 - \frac{1}{(r_e - r_w)} \int_{r_w}^{r_e} \left( A_4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\alpha}{r_w} r\right)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + A_5 \left[ \frac{2}{\pi} \left\{ \ln\left(\frac{\alpha}{r_w} r / 2\right) + \gamma \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\alpha}{r_w} r\right)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\left(\frac{\alpha}{r_w} r\right)^2}{2^2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{r_w} r\right)^4}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{\alpha}{r_w} r\right)^6}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots \right) \right] \right) \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{r_w}\right)^2 T_r (2r_e)^2} dr$$

Eq. 4.51

On a donc une relation donnant :  $U_r = f(T_r)$  avec  $T_r = \frac{C_r t}{(2 \cdot r_e)^2}$

Dans le cas de l'unité pilote construite pour cette étude, on a :  $n = \frac{r_e}{r_w} = 3$ , ce qui simplifie énormément l'expression de  $U_r$ . Le traitement numérique (Maple®) de l'Eq. 4.51 utilisant 20 itérations donne la relation suivante pour le taux de compression radial :

$$U_r = 1 - 1 \cdot \text{EXP}(-57.10 \cdot T_r)$$

Eq. 4.52

qui correspond à l'abaque de la figure 4.12 ( $n = r_e / r_w = 3$ ).

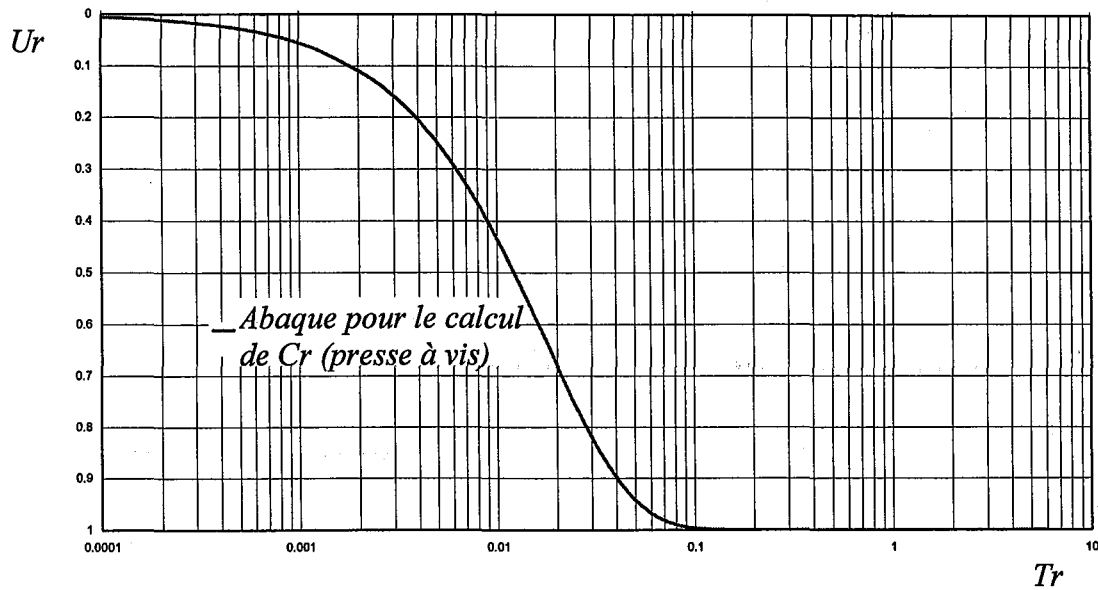


Figure 4.12 : Abaque de calcul de  $C_r$  pour le pressage à vis

Connaissant  $U_r$ , on obtient à partir de cet abaque la valeur correspondante  $T_r$ , dont l'expression,  $T_r = \frac{C_r t}{(2 \cdot r_e)^2}$ , donne accès aux autres paramètres caractéristiques de la compression axiale avec écoulement radial considérée.

**La connaissance du temps de séjour et du taux de compression au sein de la vis, suffisent donc pour calculer le coefficient de compression puis éventuellement le coefficient de perméabilité (pour un gradient hydraulique interne estimé donné). Deux méthodes sont envisagées pour le calcul du temps de séjour à partir des données expérimentales.**

L'exploitation proposée ici ne fait usage que d'une petite partie des possibilités offertes par la théorie développée, nous avons cependant jugé opportun de reprendre l'ensemble de la théorie qui peut être utile à d'autres approfondissements.

## 4.2 ASPECT EXPERIMENTAL

Nous avons maintenant à disposition la base théorique pour accéder aux paramètres de la compression axiale avec écoulement radial qui se produit au sein d'une presse à vis ; ceci dans la mesure où :

- le taux de compression le long de la vis ou au niveau de chaque compartiment est mesurable ; ce qui est possible à l'aide du dispositif construit à cet effet. Rappelons que ce choix vise à éliminer les difficultés d'accès à la distribution de la pression hydraulique, proche du centre de la vis, là où cette dernière est maximale.
- le temps de séjour de la matière SPM en fonction de sa progression le long de l'axe de la vis ou le temps de séjour moyen dans chaque compartiment est accessible.

Par mesure directe, les divers débits solides-liquides au niveau de chaque compartiment sont accessibles et donnent directement accès au taux de compression moyen par compartiment. Nous détaillerons cette méthode de mesure. La première condition concernant le taux de compression se trouve donc éliminée.

La seconde condition peut être remplie de deux manières différentes ; en utilisant le **temps de séjour géométrique** défini par la géométrie de la vis et la position de chaque compartiment le long de l'axe de la vis. Nous l'appelons le temps de séjour géométrique car il ne dépend que du profil de la vis et de la position respective des compartiments collecteurs. Bien entendu, il s'agit d'une translation de la matière sans effet retardant comme le glissement de la matière par rapport à la vis (« patinage ») et l'écoulement à contre-courant.

Le temps de séjour de la matière peut aussi être calculé à partir des débits mesurés et des volumes de chaque compartiment. Nous l'appelons le **temps de séjour volumique**. Ce dernier ne reflète pas directement la géométrie de la vis, cependant il prend en compte de façon plus certaine l'évolution de la matière au sein de la vis pour autant que celle-ci affecte les débits.

Nous présentons pour chacune des deux vis utilisées, LCR et HCR, les deux approches à partir du **temps de séjour géométrique** et du **temps de séjour volumique**.

### 4.2.1 Les temps de séjour

#### 4.2.1.1 Calcul du temps de séjour géométrique

HCR – vis à taux de compression plus élevé (Higher Compression Ratio)

LCR – vis à taux de compression plus réduit (Lower Compression Ratio)

La différence entre les deux vis est cependant peu importante (Fig. 4.14 et Fig. 4.16).

L'établissement des équations de calcul du temps de séjour fait appel à des relations géométriques simples. Seules les principales étapes de calcul sont fournies.

La courbe périphérique de la vis s'exprime, selon la Fig. 4. 12, à partir de l'équation suivante :

$$l = N \sqrt{\pi^2 D^2 + h^2} \quad \text{Eq. 4.53}$$

avec :

$N$  : le nombre de tours

$D$  : le diamètre externe de la vis

$h$  : le pas de la vis



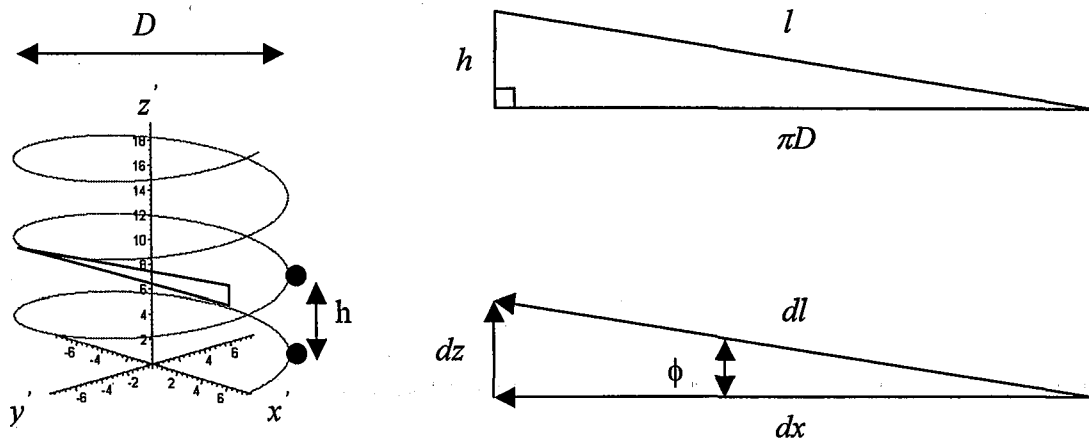


Figure 4.13 : La courbe périphérique de la vis et sa projection

$$\text{De plus : } \tan(\phi) = \frac{dz}{dx} \quad \text{Eq. 4.54}$$

Pour des raisons liées à la construction de ce type de vis à pas variable, la relation suivante est retenue :

$$\phi = \phi_0 - k \cdot x \quad \text{Eq. 4.55}$$

d'où

$$\tan(\phi_0 - k \cdot x) = \frac{dz}{dx} \quad \text{Eq. 4.56}$$

Z étant la projection sur l'axe z', on a :

$$Z = \int_0^x \tan(\phi_0 - k \cdot x) dx \quad \text{Eq. 4.57}$$

En prenant  $X = 2\pi r_e N$  et par intégration :

$$Z = \frac{1}{k} \cdot \ln \left[ \frac{\cos(Xk - \phi_0)}{\cos(\phi_0)} \right] \quad \text{Eq. 4.58}$$

Cette relation donne accès à la projection de tout point, appartenant à la courbe périphérique de la spirale, sur l'axe z' ; ceci si l'on connaît les paramètres de construction et le nombre de tours considéré, à savoir  $\phi_0$ ,  $X$  et  $k$ .  $k$  est accessible à partir des données géométriques portées sur les Fig. 4.14 et Fig. 4.16 en considérant la position relative des pas de la vis.

Ainsi pour la vis HCR (Higher Compression ratio) Fig. 4.14, on a :

$$\phi_0 = 20.8[\text{degree}]$$

$$k = 8.07 \cdot 10^{-2}[\text{degree/cm}]$$

$$\phi = \phi_0 - k \cdot x$$

$$\phi = 20.8 - 8.07 \cdot 10^{-2} \cdot x$$

Eq. 4.59

Et pour la vis LCR (Lower Compression Ratio) Fig. 4.16, on a :

$$\phi_0 = 20.0[\text{degree}]$$

$$k = 5.8 \cdot 10^{-2}[\text{degree/cm}]$$

$$\phi = \phi_0 - k \cdot x$$

$$\phi = 20.0 - 5.8 \cdot 10^{-2} \cdot x$$

Eq. 4.60

Les rayons étant les mêmes pour les deux vis :

$$r_e : \text{rayon externe } r_e = \frac{7.62}{2} [\text{cm}]$$

$$r_w : \text{rayon de l'axe central de la vis } r_w = \frac{2.54}{2} [\text{cm}]$$

Pour avoir accès au temps de séjour le long de l'axe  $z'$  ou pour chaque compartiment, il suffit de connaître la vitesse de translation, dans ce cas dite géométrique, de la

matière, à savoir :  $\frac{dZ}{dt} : [\text{cm/min}]$

Or,

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dN}{dt} \cdot \frac{dZ}{dN}$$

Eq. 4.61

avec:

$$\frac{dN}{dt} : \text{rpm} : [\text{nombre de rotations/min}] \text{ qui est un paramètre expérimental sélectionné.}$$

La translation longitudinale par tour est exprimée par :  $\frac{dZ}{dN} : [\text{cm/tour}]$  selon

$$\frac{dZ}{dN} = -2\pi r_e \tan(2\pi r_e \cdot Nk - \phi_0)$$

Eq. 4.62

On prendra pour **temps de séjour géométrique moyen par compartiment** :

$$t_{sg} = [\text{longueur du compartiment collecteur}] / [60 \times \text{rpm} \times dZ/dN]$$

Les distributions des temps de séjour géométriques moyens sont représentés sur les Fig. 4.15 et Fig. 4.17.

Vis HCR

Dimensions de la vis **HCR** [en cm]:

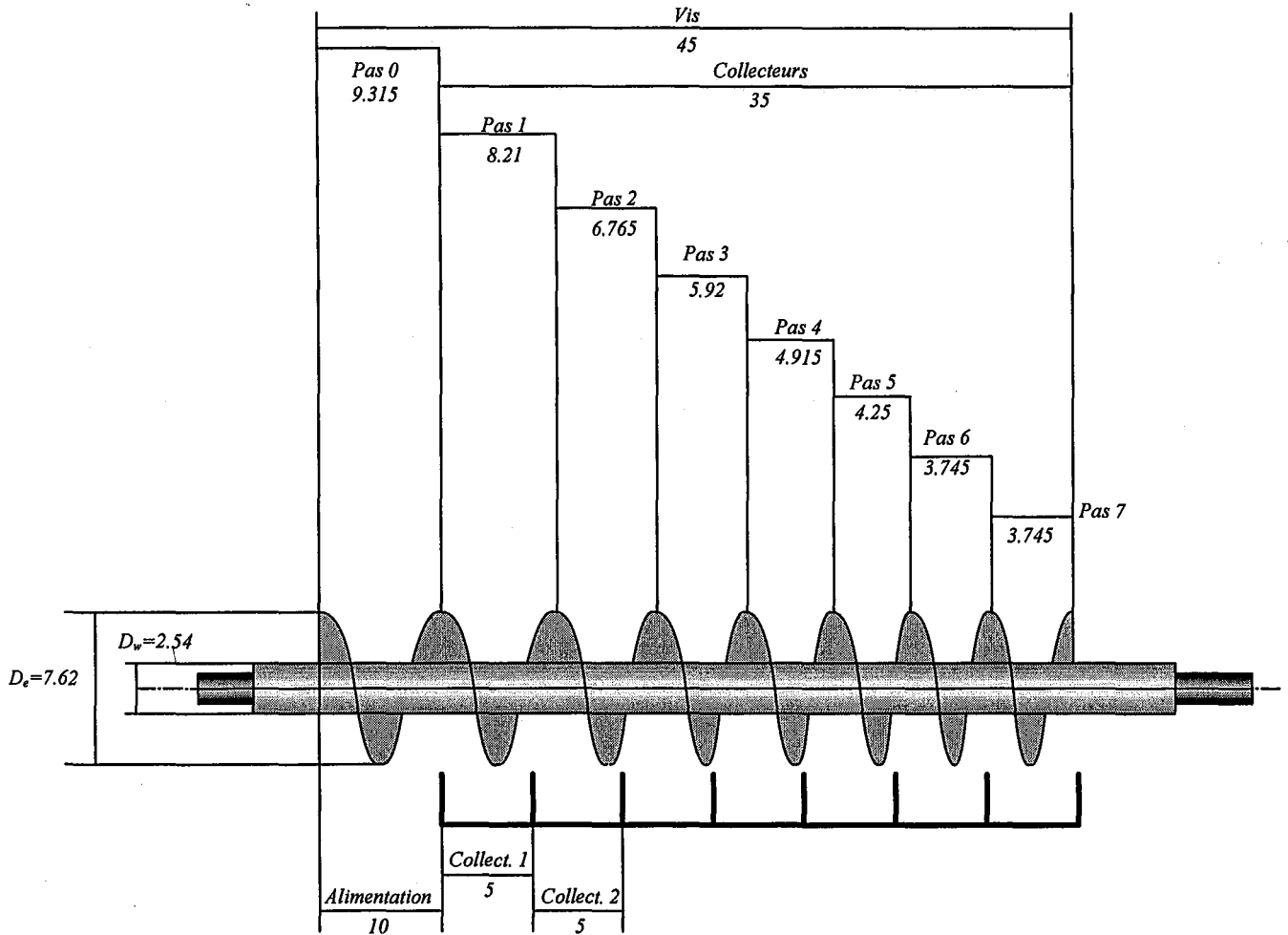
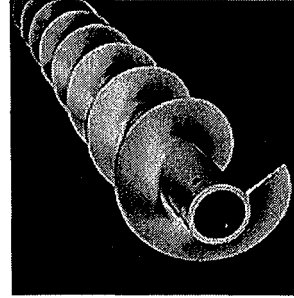


Figure 4.14 : La vis à taux de compression plus élevé (HCR : Higher Compression Ratio) et ses dimensions.

Vis HCR :  $t_{sg} = [\text{longueur du compartiment collecteur}] / [60 \times \text{rpm} \times dZ/dN]$

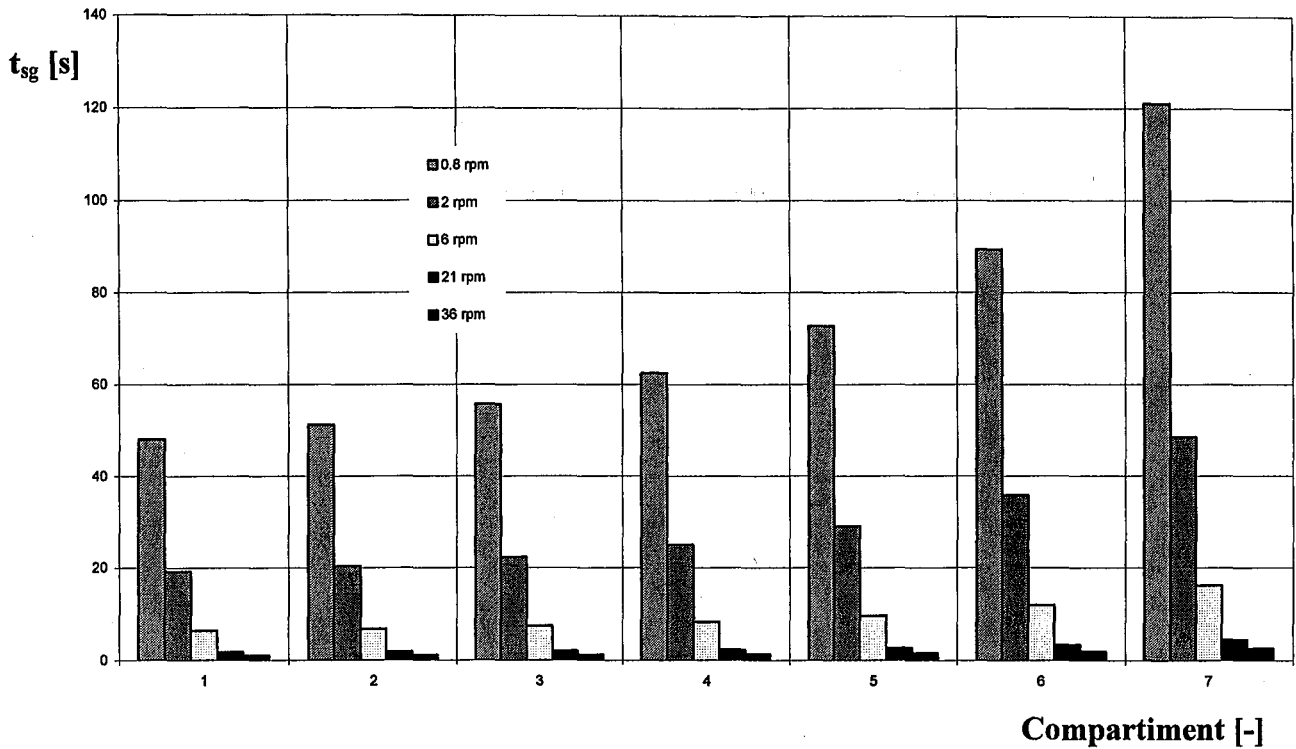


Figure 4.15 : La distribution des temps de séjour géométriques moyens, vis HCR

Dans le tableau 4.2 sont fournies les différentes valeurs de  $t_{sg}$  (en s) pour la vis HCR.

	collecteur 1	collecteur 2	collecteur 3	collecteur 4	collecteur 5	collecteur 6	collecteur 7
<b>rpm</b>							
<b>0.8 rpm</b>	48.01	51.14	55.72	62.44	72.69	89.52	121.12
<b>2 rpm</b>	19.20	20.46	22.29	24.98	29.08	35.81	48.45
<b>6 rpm</b>	6.40	6.82	7.43	8.33	9.69	11.94	16.15
<b>21 rpm</b>	1.83	1.95	2.12	2.36	2.77	3.41	4.61
<b>36 rpm</b>	1.07	1.14	1.24	1.39	1.62	1.99	2.69

Tableau 4.2

Vis LCR

Dimension de la vis [en cm]:

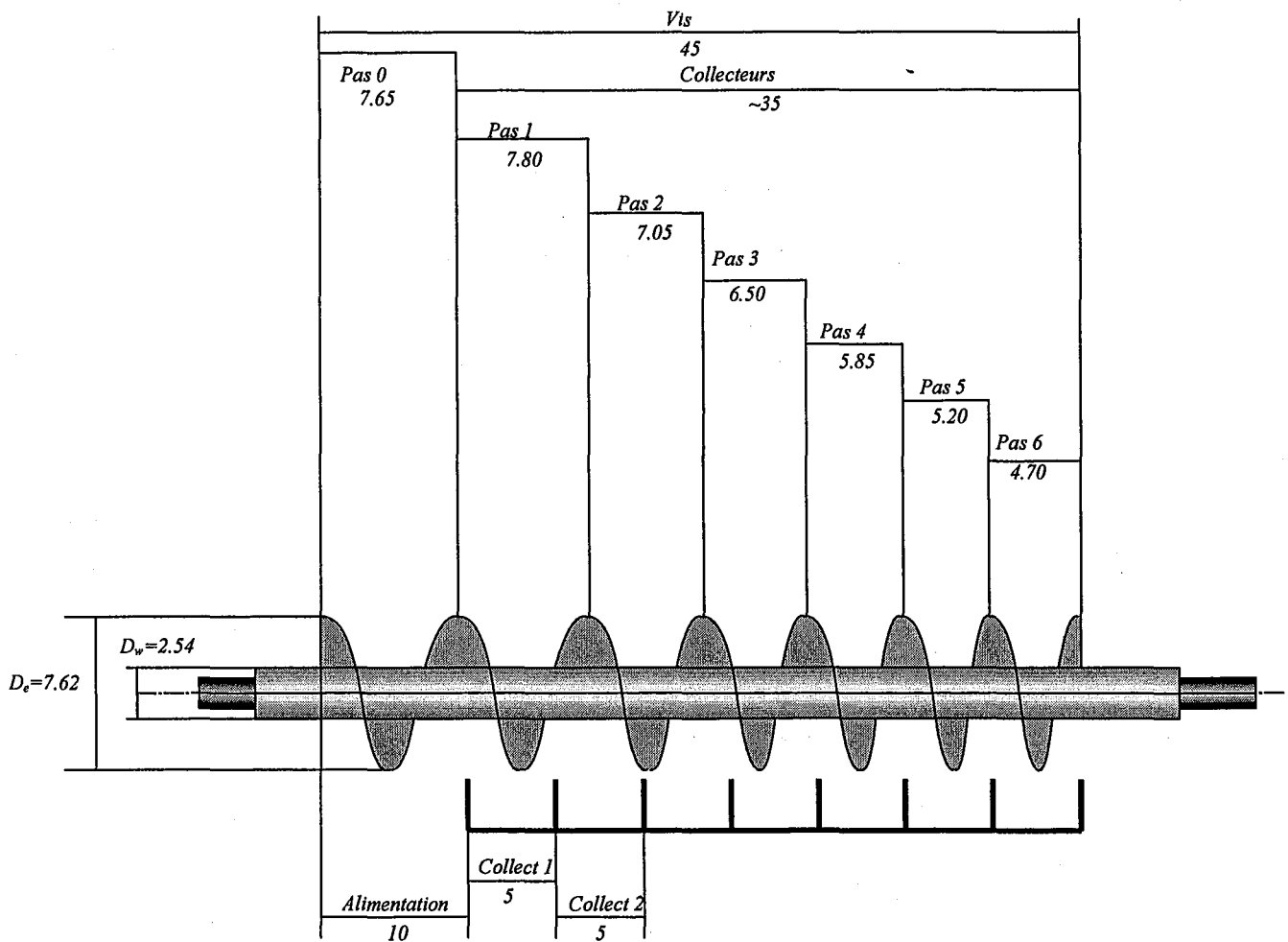
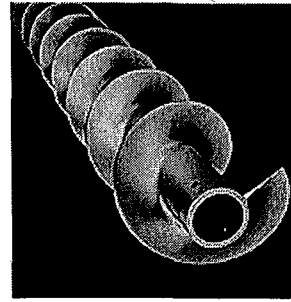


Figure 4.16 : La vis à taux de compression plus réduit (LCR : Lower Compression Ratio) et ses dimensions.

Vis LCR :  $t_{sg} = [\text{longueur du compartiment collecteur}] / [60 \times \text{rpm} \times dZ/dN]$

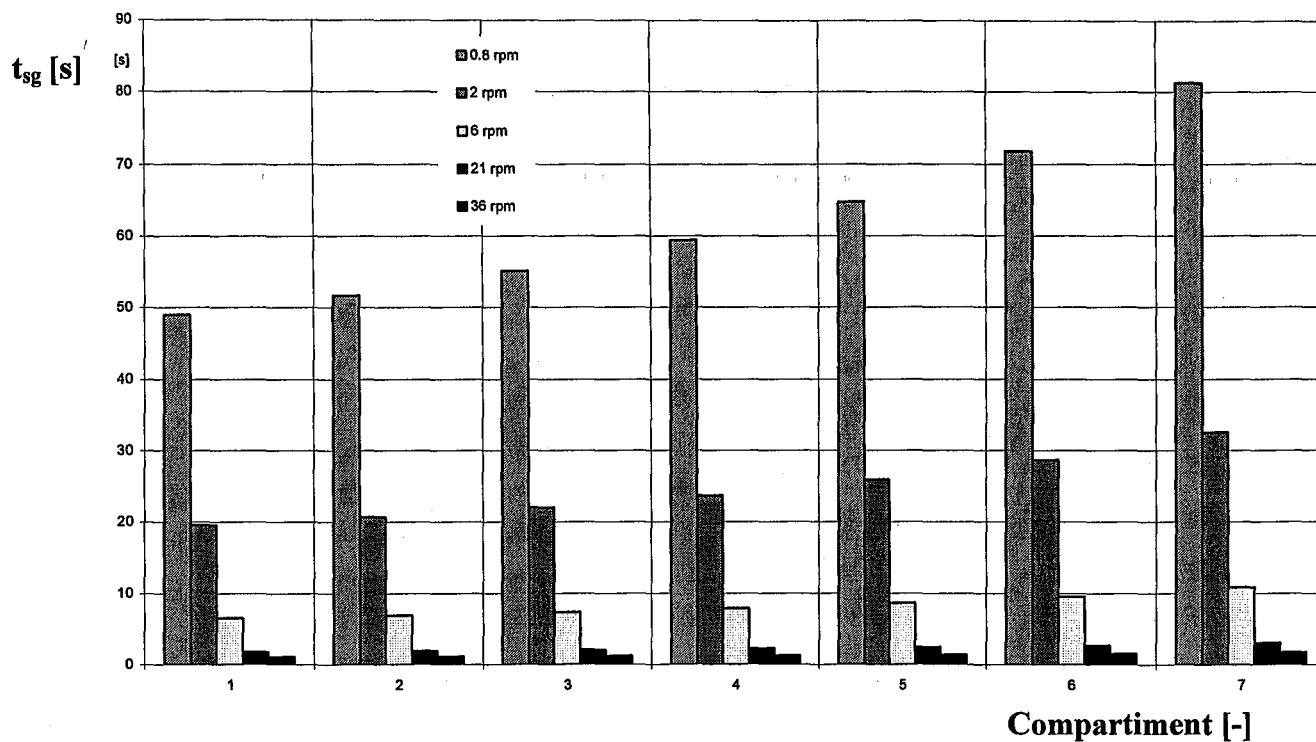


Figure 4.17 : La distribution des temps de séjour géométriques moyens, vis LCR

Dans le tableau 4.3 sont fournies les différentes valeurs de  $t_{sg}$  (en s) pour la vis LCR.

	collecteur	collecteur	collecteur	collecteur	collecteur	collecteur	collecteur
<i>rpm</i>	1	2	3	4	5	6	7
0.8 rpm	48.01	99.15	154.87	217.30	290.00	379.52	500.64
2 rpm	19.20	39.66	61.95	86.92	116.00	151.81	200.25
6 rpm	6.40	13.22	20.65	28.97	38.67	50.60	66.75
21 rpm	1.83	3.78	5.90	8.28	11.05	14.46	19.07
36 rpm	1.07	2.20	3.44	4.83	6.44	8.43	11.13

Tableau 4.3

## 4.2.1.2 Calcul du temps de séjour volumique

Il est défini selon la Fig. 4.18 par la relation :

$$t_{sv} = \frac{Z_0 \cdot \pi (r_e^2 - r_w^2)}{\dot{V}_{feed(S+L)(n)} - \dot{V}_{liquid(n+1)}} = \frac{\text{Volume Compartiment}}{\dot{V}_{feed(S+L)(n+1)}} \Leftrightarrow \frac{\text{volume}}{\text{débit}(n+1)} \quad \text{Eq. 4.63}$$

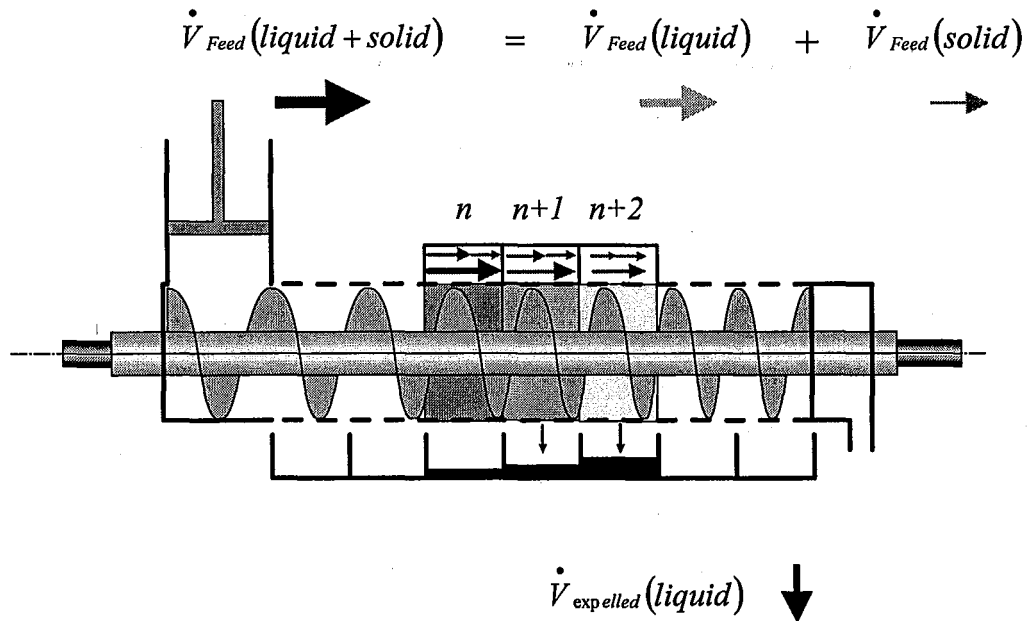


Figure 4.18 : Le temps de séjour volumique

Le taux de compression radial expérimental, utilisable quelque soit le temps de séjour utilisé,  $t_{sv}$  ou  $t_{sg}$  est donné par :

$$U_r = \frac{\dot{V}_{liquid\ expelled(n+1)}}{\dot{V}_{liquid\ feed(n)}} \quad \text{Eq. 4.64}$$

## 4.2.1.2 Illustration expérimentale

Les courbes ci-dessous correspondent, pour les tests en cellule MMCC© et avec l'unité pilote TSPU©, aux résultats obtenus dans les conditions opératoires fournies au chapitre 3, § 3.1, et en annexe A.3. Ces résultats sont discutés au § 4.3 qui suit.

$C_e = f(\bar{v})$  TSPU© - temps de séjour volumique,  $t_{sv}$

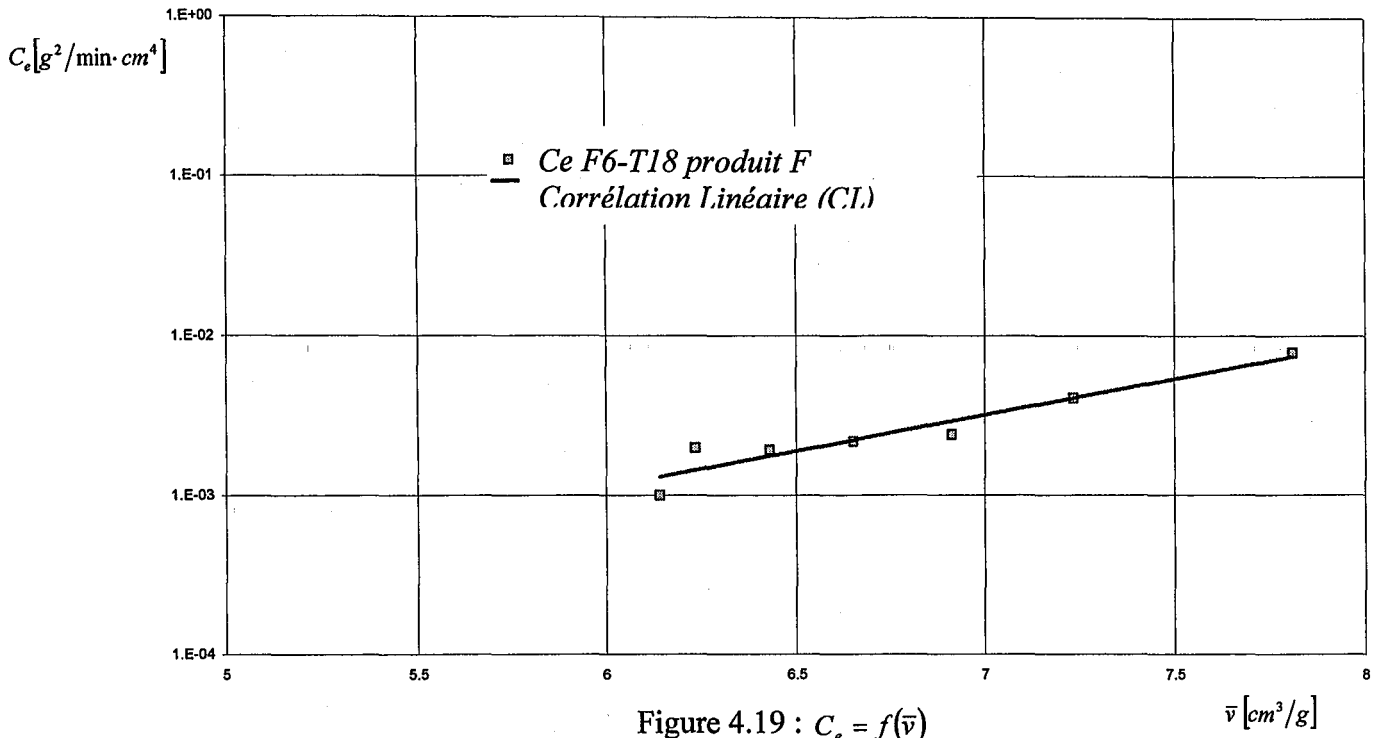


Figure 4.19 :  $C_e = f(\bar{v})$

$C_e = f(\bar{v})$  TSPU© - temps de séjour géométrique  $t_{sg}$

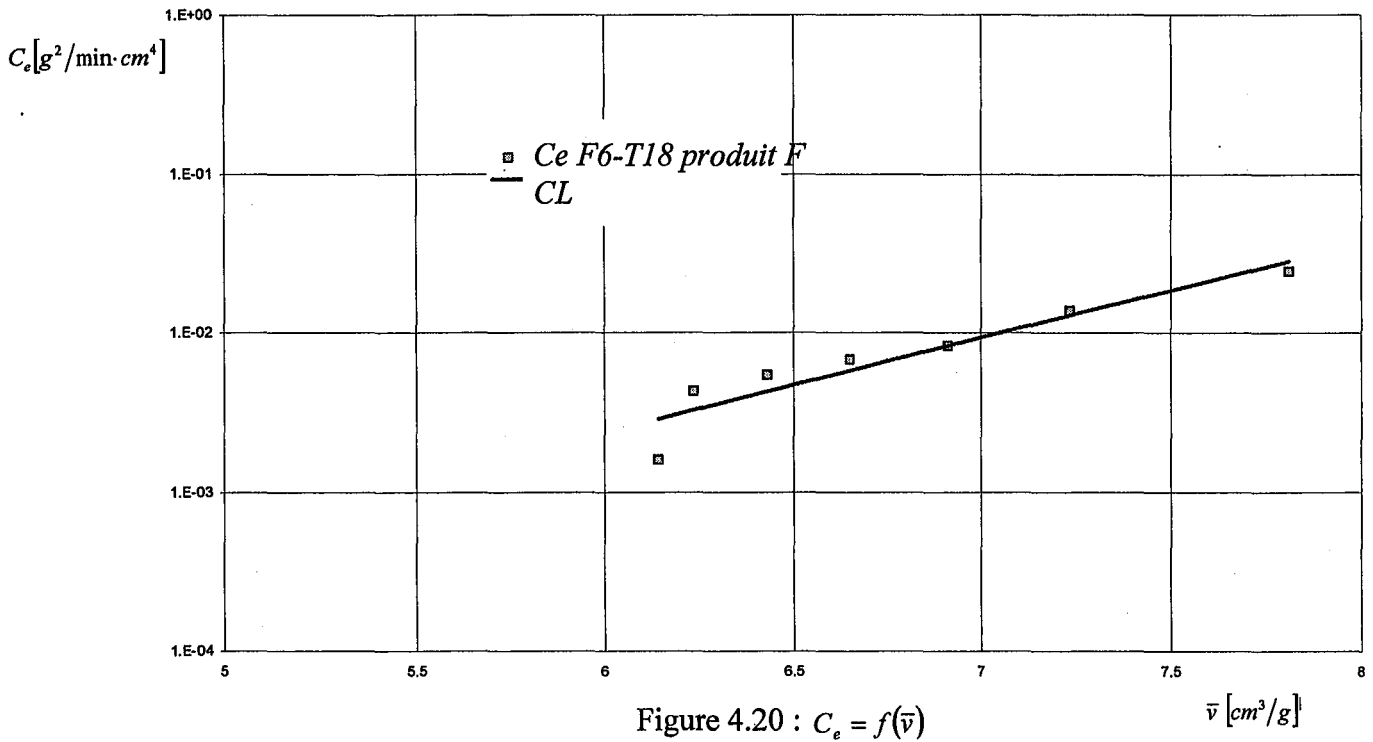


Figure 4.20 :  $C_e = f(\bar{v})$



$$C_e = f(\bar{v}) \text{ TSPU}\textcircled{\text{C}}$$

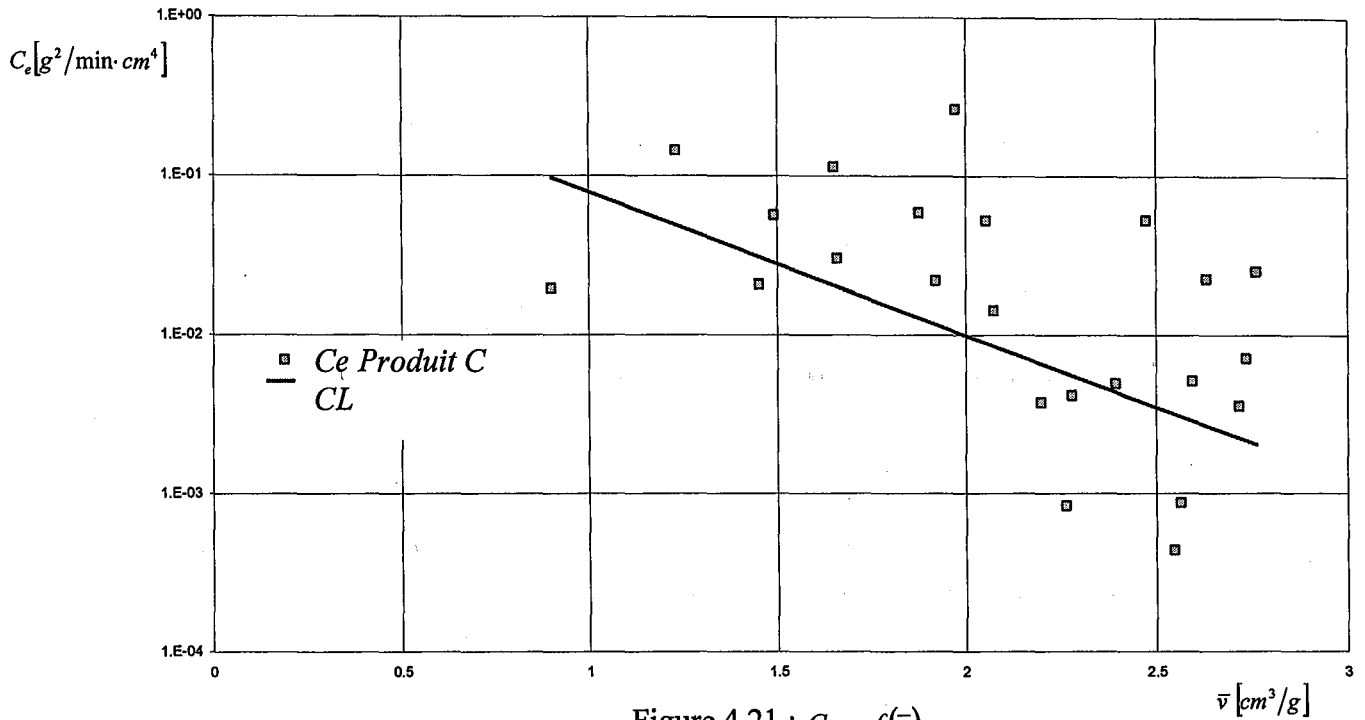


Figure 4.21 :  $C_e = f(\bar{v})$

Fig. 4.21 : produit C, tests Cc6-T38, Cc21-T37, Cc6T11, Cc6-T32

Fig. 4.22 : produit Cr, tests Cr6-T27, Cr21-T27, Cr6b-T27

$$C_e = f(\bar{v}) \text{ TSPU}\textcircled{\text{C}}$$

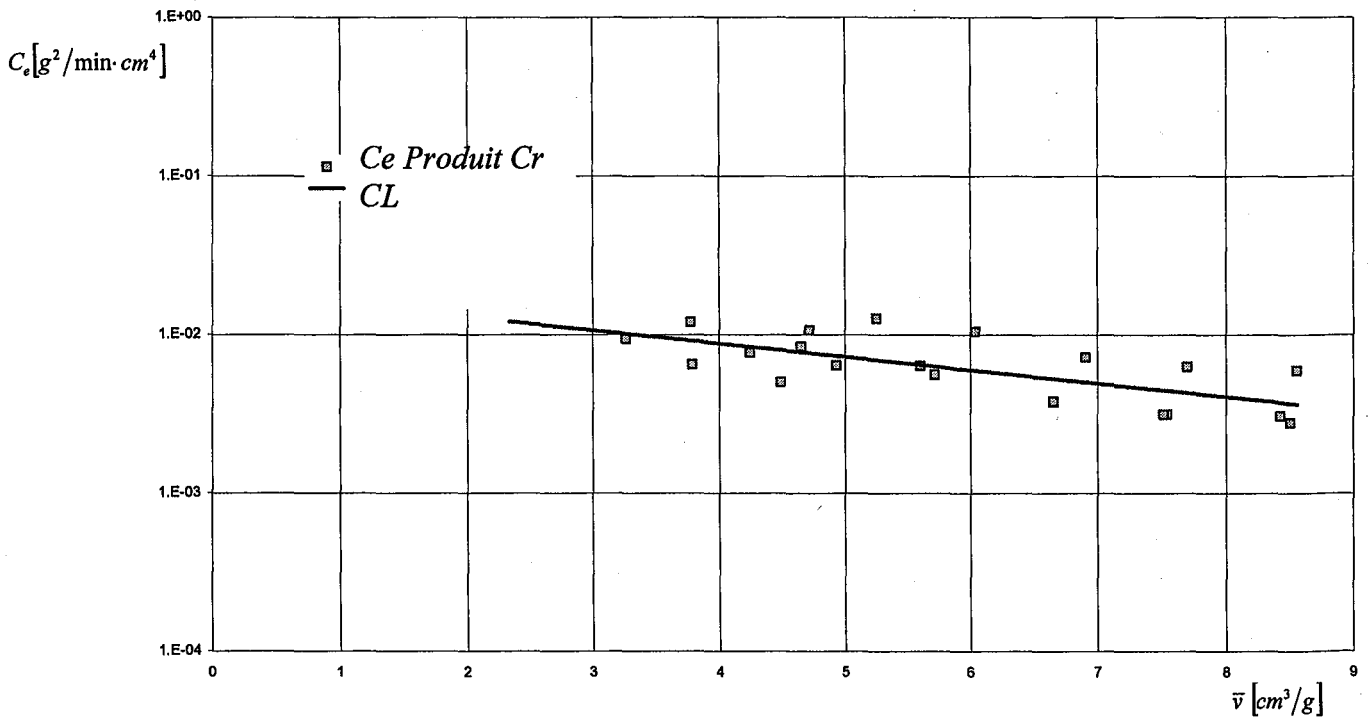


Figure 4.22 :  $C_e = f(\bar{v})$

$$C_e = f(\bar{v})$$

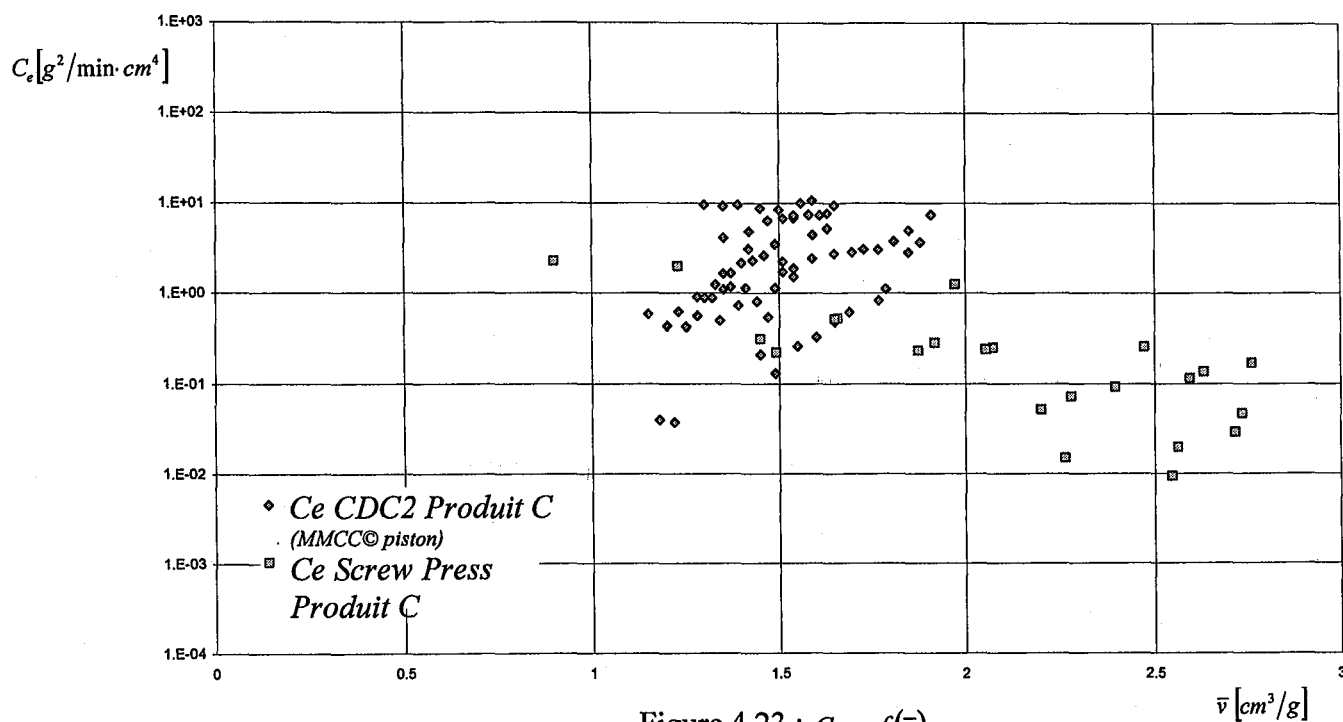
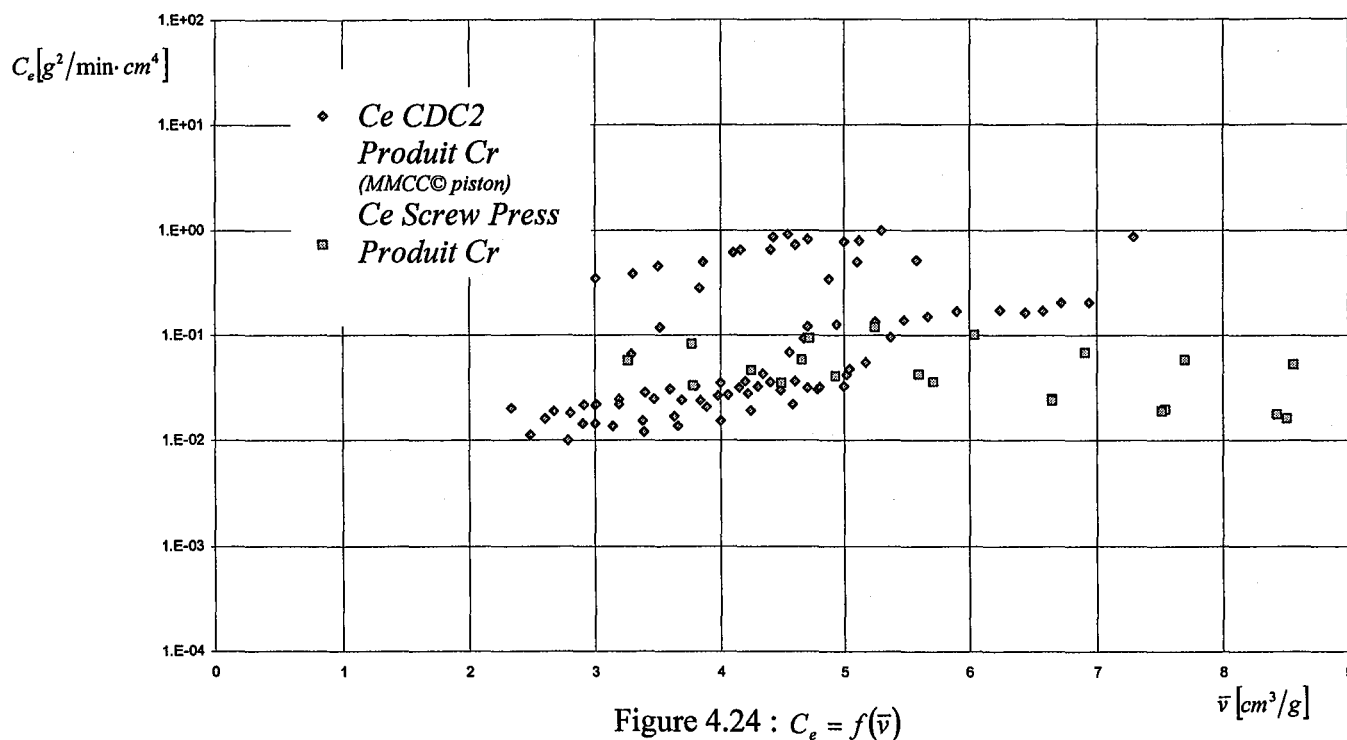
Figure 4.23 :  $C_e = f(\bar{v})$ 

Fig. 4.23 : tests Cc6-T38, Cc21-T37, Cc6T11, Cc6-T32 et de C1 à C8 pour MMCC©  
 Fig. 4.24 : tests Cr6-T27, Cr21-T27, Cr6b-T27 et de Cr1 à Cr9 pour cellule MMCC©

$$C_e = f(\bar{v})$$

Figure 4.24 :  $C_e = f(\bar{v})$

$$C_e = f(v)$$

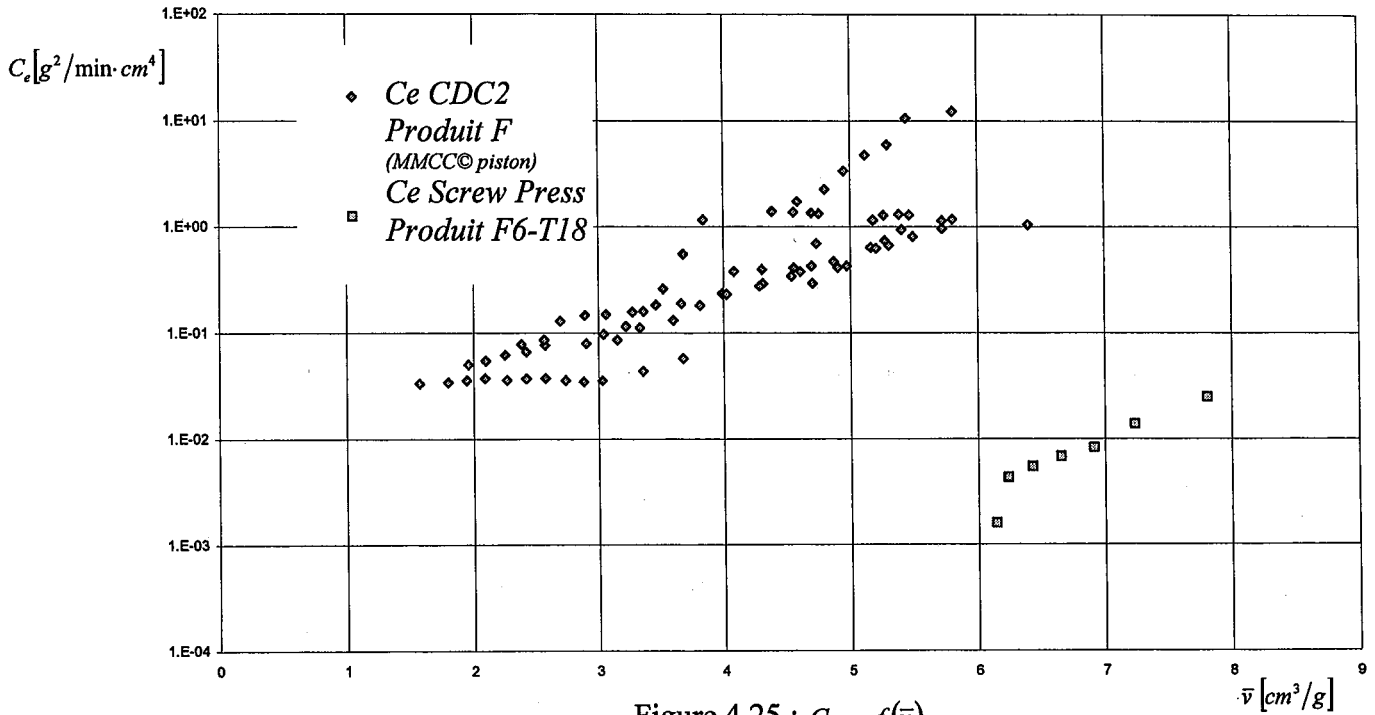


Figure 4.25 :  $C_e = f(\bar{v})$

Fig. 4.25 : tests F6T18 pour TSPU et F1 à F8 en cellule piston MMCC

Fig. 4.26 : tests RDAP08-T26, RDAP21-T26, RADP36-T36 et RDAP01-T25 MMCC

$$C_e = f(\bar{v})$$

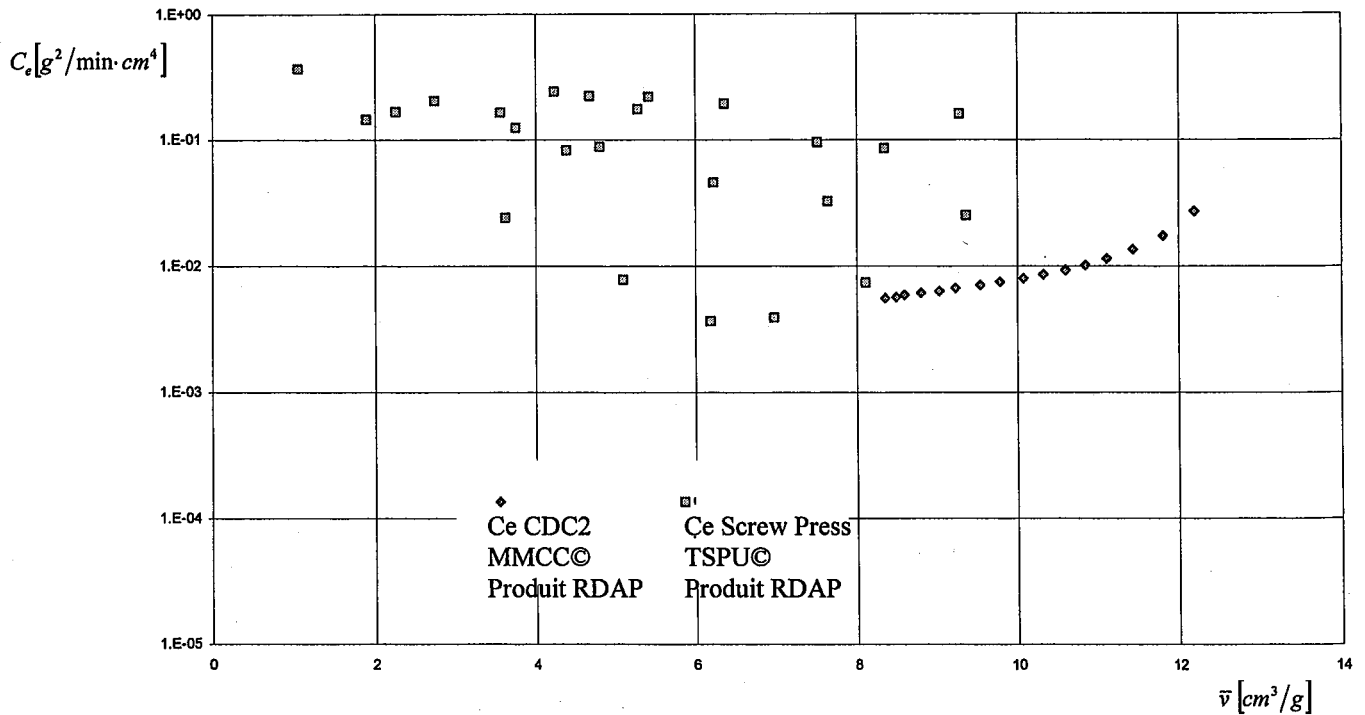
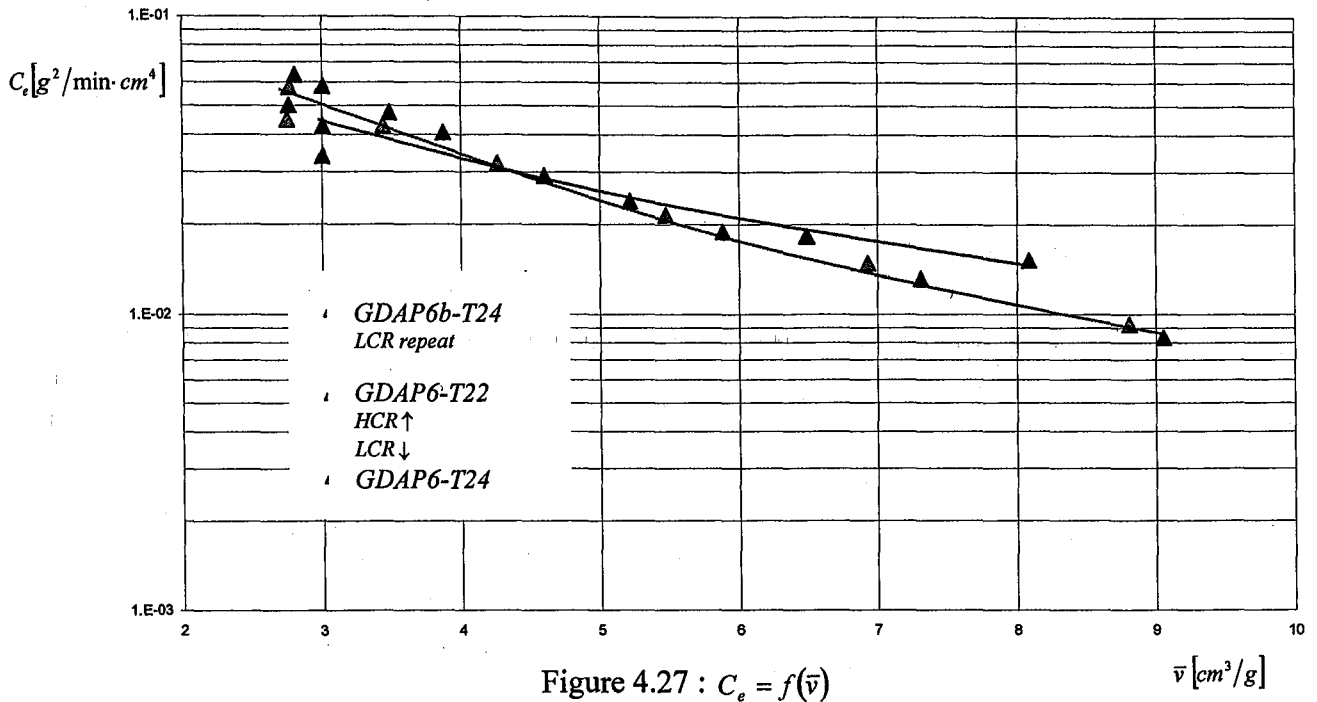
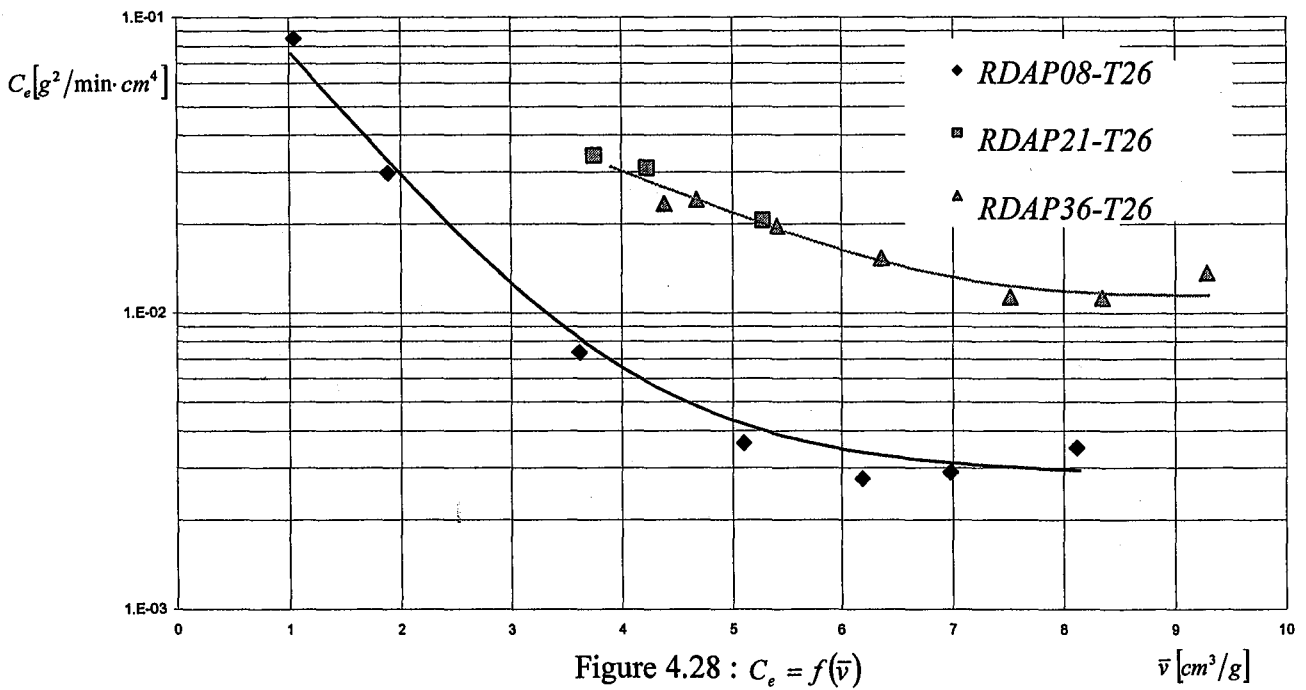


Figure 4.26 :  $C_e = f(\bar{v})$

$$C_e = f(\bar{v}) \text{ TSPU}\textcircled{C}$$



$$C_e = f(\bar{v}) \text{ TSPU}\textcircled{C}$$



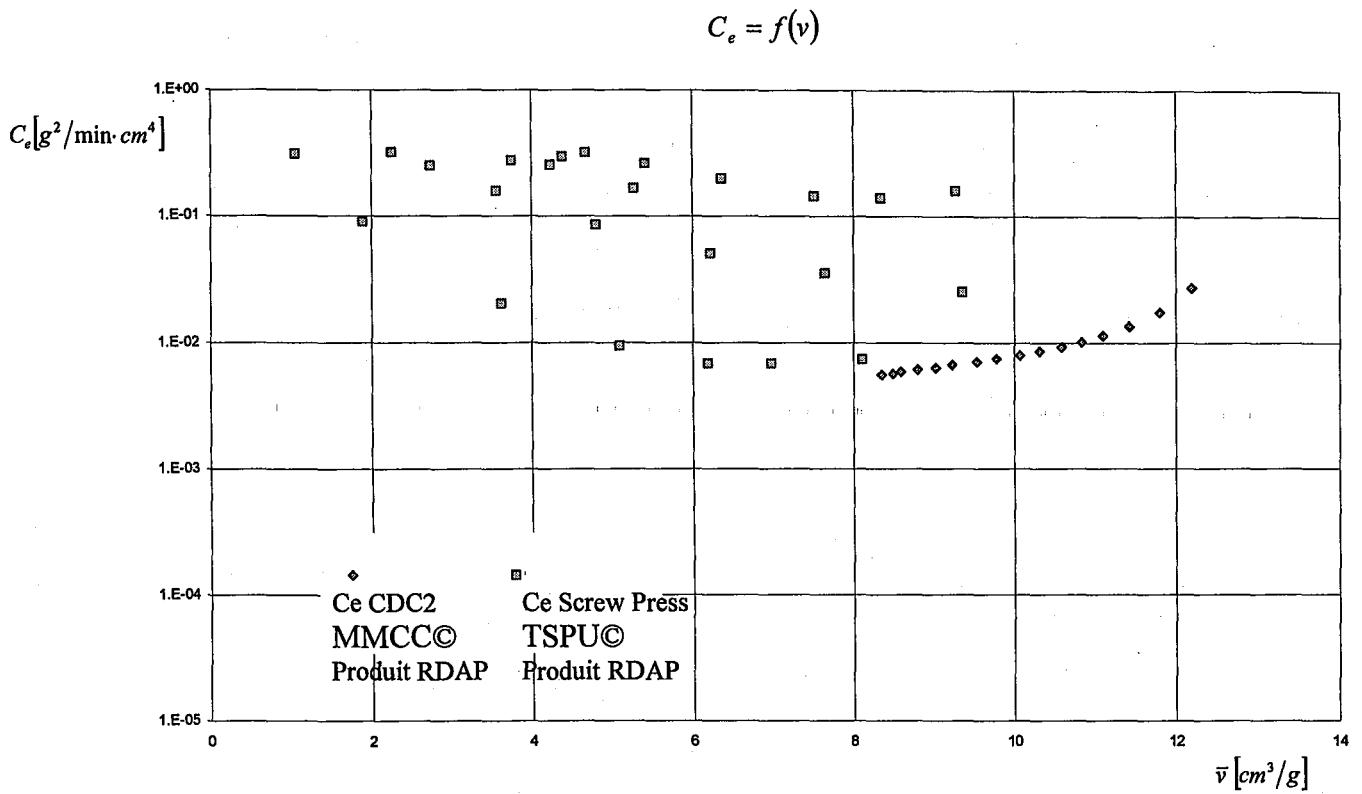


Figure 4.29 :  $C_e = f(\bar{v})$

Fig. 4.29 : tests RDAP08-T26, RDAP21-T26, RADP36-T36 et RDAP01-T25 MMCC (temps de séjour géométriques cumulés et taux de compression cumulés)

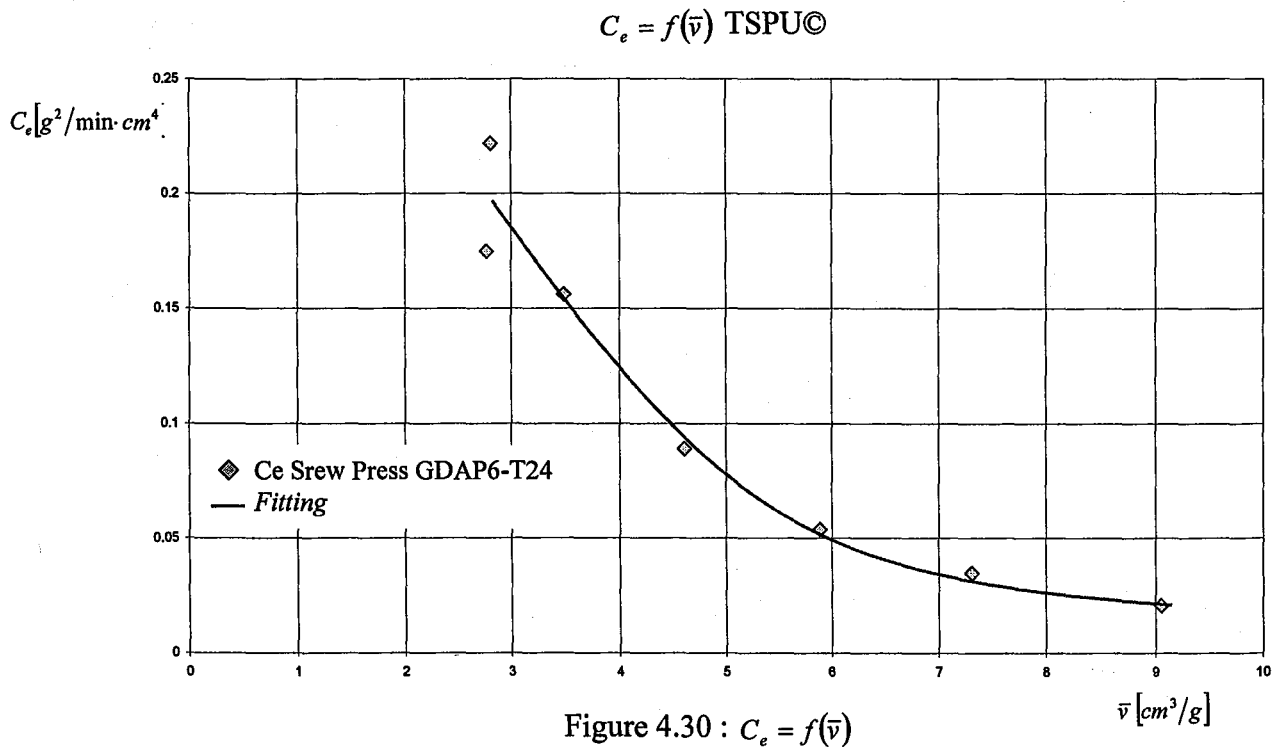


Figure 4.30 :  $C_e = f(\bar{v})$

$$C_e = f(v) \text{ TSPU } \odot$$

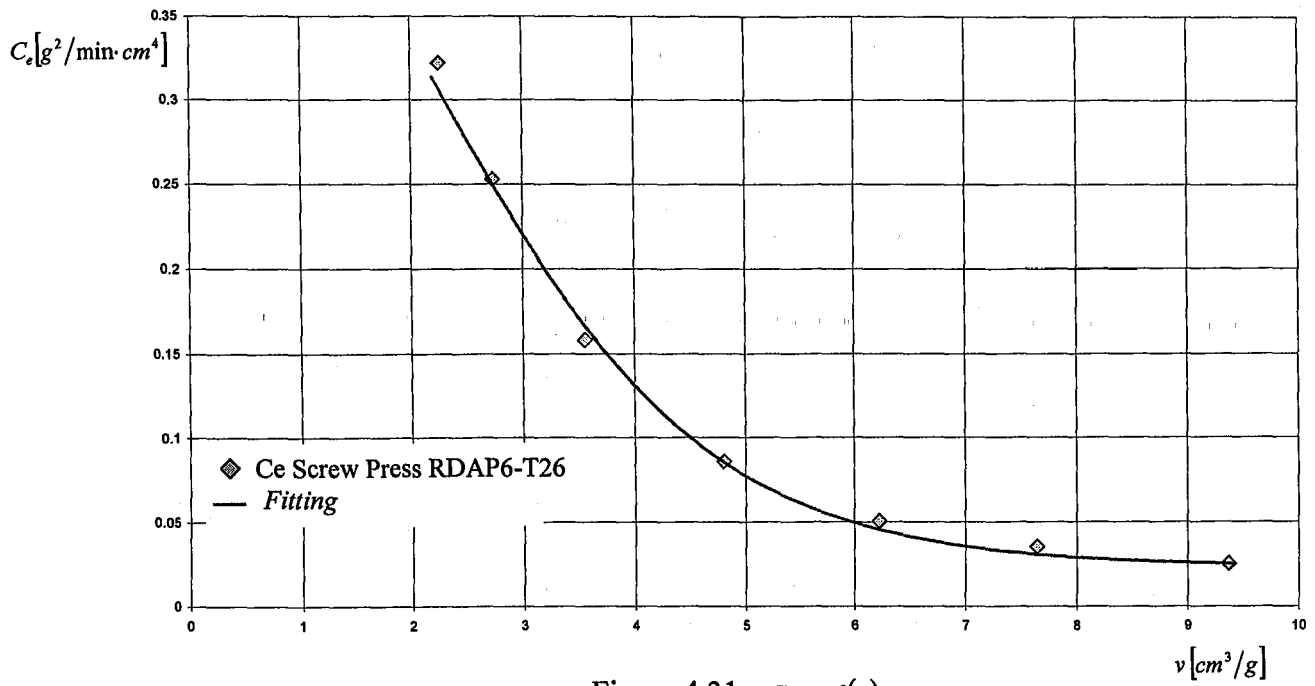


Figure 4.31 :  $C_e = f(\bar{v})$



### 4.3 INTERPRETATION ET CONCLUSION

Rappelons nos principaux objectifs :

1. **Etablir et valider une approche théorique de la compression axiale avec écoulement radial.**
2. **Valider les résultats expérimentaux obtenus à partir de l'unité pilote, TSPU© construite et mise au point au cours de ces travaux.**
3. **Rapprocher les modes de compression en cellule piston et en continu par vis.**
4. **Comparer les comportements respectifs des produits sélectionnés.**

Pour chaque produit étudié, nous avons représenté sur chacune des courbes tous les points concernant la compression en cellule piston sans effectuer de sélection de conditions opératoires particulières, vitesse de déformation et température, ceci afin d'analyser les tendances seulement.

L'examen préliminaire des figures 4.19, 4.20, 4.21, 4.22 ne révèle aucune anomalie. Le modèle radial proposé et la méthode adoptée de calcul de  $C_v$  ( $C_r$ ) et de  $C_e$  semblent cohérents. Ceci se trouve renforcé par les résultats comparatifs entre le comportement des matériaux soumis à la compression en cellule et ceux réalisés par pressage par vis. Comme le montrent les figures 4.23, 4.24, 4.25, 4.26, 4.29, en général les valeurs se rejoignent. Le coefficient de compression radial et le coefficient de compression axial, tous deux notés  $C_e$  sur les figures, sont bien des valeurs spécifiques. Encore faut-il tenir compte des domaines de volumes spécifiques étudiés et considérer ces résultats qu'au niveau des tendances pour l'instant.

On note sur les figures 4.19 et 4.20 que le temps de séjour géométrique donne des valeurs de  $C_e$  légèrement plus élevées que le temps de séjour volumique. Sachant que ni l'un ni l'autre ne prennent complètement en compte le glissement éventuel de la matière, cette différence est tolérable et pourrait faire l'objet du raffinement de la méthode.

Il y a deux autres considérations à prendre en compte. Pour des raisons d'expérimentation, la matière ne se trouve pas toujours dans le même état lors de l'expérience. Pour les expériences en continu on se trouve dans l'obligation de devoir broyer la matière quand il s'agit des aïrelles,  $C_r$ , et des pommes RDAP ou GDAP. Les aïrelles,  $C_r$ , lors des tests de compression en cellule piston, sont tout simplement coupées en deux manuellement. Les pommes sont tranchées en fines lamelles qui sont divisées et découpées. La description de ces préparations est donnée dans les publications P9 et P10 mais aussi au chapitre 3.

Comme nous l'avons vu pour les produits  $C_r$ , aïrelles,  $C_c$ , protéines lactiques coagulées, RDAP, pommes Red Delicious, on constate une corrélation très satisfaisante entre les résultats de compression en cellule piston et lors du pressage à vis (Fig, 4.23, 4.24, 4.26, 4.29). Par contre, un écart plus important apparaît pour les pulpes de betteraves, F. Ceci est explicable si l'on examine les éléments suivants :

- pour les pulpes de betteraves, le pressage par vis n'a permis d'obtenir que de modestes résultats en termes de siccité finale, puisque l'on n'a pas dépassé 15% par vis alors que l'on a atteint jusqu'à 30 % en cellule piston. Cette matière, F, très élastique mériterait un traitement de cisaillement beaucoup plus sévère lors du pressage en continu. Il n'est donc pas surprenant de constater l'usage de presses à double vis équipées d'interrupteurs. Ces lames



transversales soudées sur le barreau central de la vis permettent de malaxer la matière au cours de sa progression le long, autorisant ainsi une relaxation favorable.

- pour les protéines lactiques précipitées, C ou Cc, le pressage par vis a permis d'obtenir des siccités finales atteignant 30 à 50% et, en moyenne, 50% en cellule piston.
- pour les aïrelles, Cr, le pressage par vis a permis d'obtenir des siccités finales atteignant 10 à 18% et de 19 à 30% en cellule piston.

Les tableaux de résultats bruts au chapitre 3 permettent de retrouver ces valeurs.

Il n'est donc pas si surprenant de constater une bonne harmonie des résultats lorsque d'une part, la matière se trouve dans un état comparable pour les deux types de compression et d'autre part, lorsque le niveau de compression induite est comparable. Une autre raison favorable à la bonne concordance des résultats est à associer à la conception même des unités MMCC© et TSPU©, cellule et vis. Le diamètre de la cellule piston est d'environ 133 mm alors que le diamètre externe de la vis de la presse pilote est de 76 mm, donc « comparables ». De plus l'épaisseur du cylindre de matière, représentée par la différence entre le diamètre externe de la vis et le diamètre du barreau, est de 50 mm, ce qui correspond aux hauteurs initiales des gâteaux généralement comprimés en cellule piston (hauteurs allant de 4 à 5 cm au départ pour atteindre de 1 à 2 cm en fin de compression). Les épaisseurs de SPM soumises à la compression sont donc équivalentes, ce qui justifie de bons résultats et qui pourrait expliquer les difficultés rencontrées lors des comparaisons directes de procédés dont les géométries sont trop différentes.

Les figures 4.26 et 4.29 ont été établies à partir des temps de séjour géométriques ; pour la première en considérant chaque compartiment collecteur de la presse séparément et, pour la seconde en cumulant à la fois les taux de compression et les temps de séjour des compartiments qui précèdent le collecteur considéré. On constate des variations identiques de Ce en fonction du volume spécifique moyen, ce qui ne fait que renforcer la cohérence de la démarche.

Les figures 4.27 et 4.28 ont été établies à partir des temps de séjour volumiques. La première établit la reproductibilité de la méthode proposée car les courbes correspondant à des répétitions de test, GDAP6 et GDAP6b, se superposent. Ceci est assez remarquable compte tenu qu'il s'agit d'une unité pilote et de produits naturels présentant une variabilité intrinsèque non négligeable.

La figure 4.27 compare également les deux vis, LCR et HCR, sans montrer de grande différence. Nous avons déjà souligné que les deux géométries se ressemblent ; toutefois une différence est observable sur les courbes, ceci étant possiblement atténué par la nature de la matière considérée qui tend, comme nous le verrons ultérieurement, à être extrudée à travers la grille de drainage. Il faut aussi souligner que la vis HCR offre un taux de compression plus élevé. Toutefois le temps de séjour pour chaque compartiment diffère notablement entre la vis LCR et la vis HCR. On peut donc raisonnablement penser à des phénomènes compensatoires entre le taux de compression appliqué et la durée de compression.

La figure 4.29 nous donne un aperçu de l'influence de la vitesse de rotation qui est tout à fait concordant avec les résultats en cellule piston, à savoir, un accroissement de Ce avec la vitesse de déformation. Cette donnée est essentielle en matière d'ingénierie des équipements de ce type. Ceci dépasse notre propos préliminaire et exploratoire.

Les deux dernières courbes, Fig. 4.30 et Fig. 4.31, montrent la similarité de comportement des deux catégories de pommes, RDAP et GDAP, testées. Plusieurs raisons sont possibles. D'une part, ce sont des matériaux sujets à une évolution

biologique rapide, se traduisant par un brunissement, lorsqu'ils sont broyés. D'autre part, ce type de produit tend à extruder à travers la grille périphérique de drainage du fait de sa structure. Enfin, si l'on considère nos travaux faisant l'objet de la publication P7, on constate que ces deux produits ont un module de déformation très comparable de 1520 kPa pour GDAP et de 1710 kPa pour RDAP. Notons également que la concavité des courbes,  $C_e$  en fonction du volume spécifique, peut souligner la tendance à l'extrusion de ces deux produits.

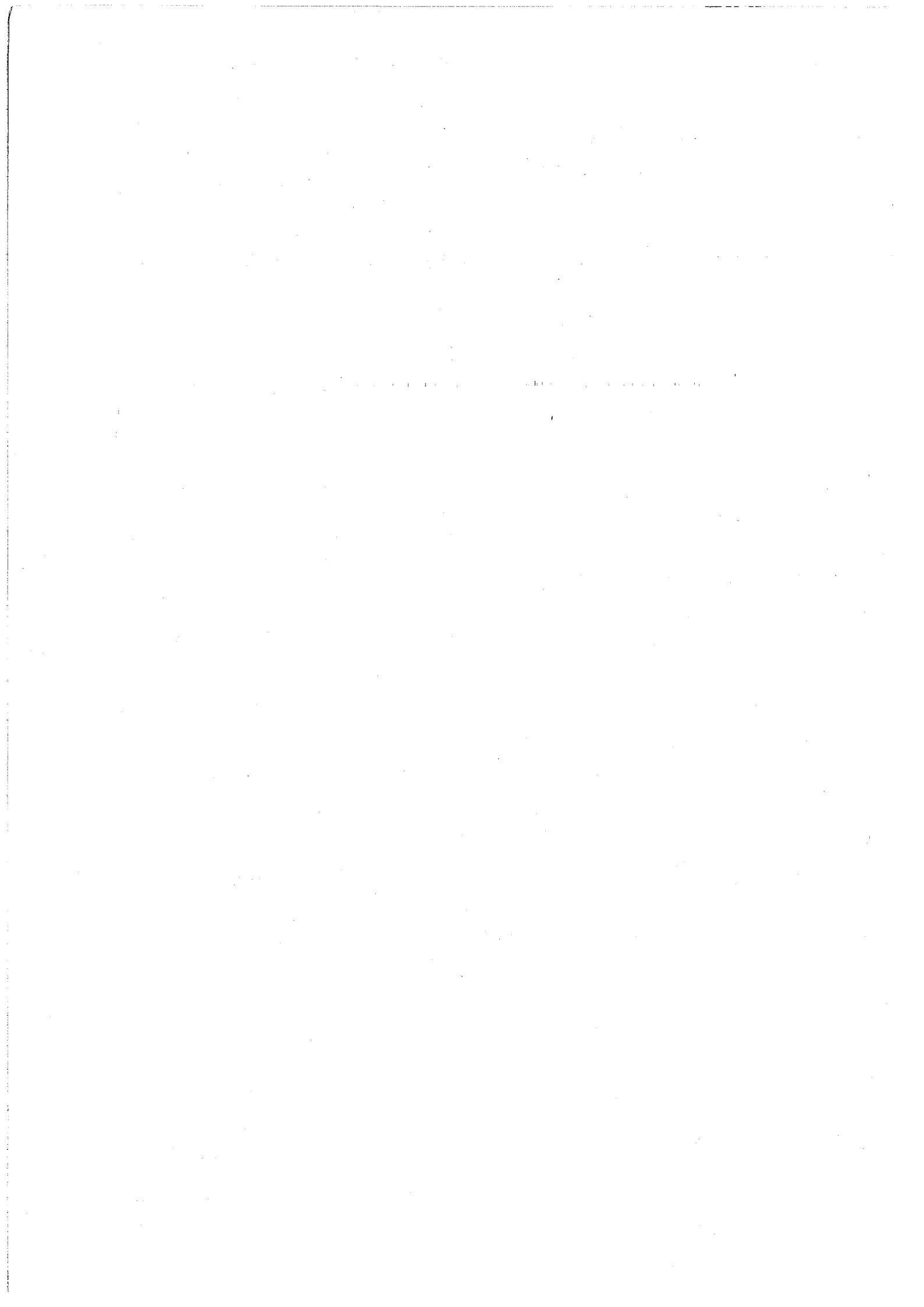
**En conclusion, nous avons développé un équipement de pressage à vis, TSPU©, qui paraît tout à fait représentatif des conditions rencontrées au laboratoire lorsque la cellule MMCC©, que nous avons créée et mise au point, est utilisée. On note un bon degré de prévisibilité des performances du pilote à partir de la cellule de laboratoire.**

**Les facteurs géométriques, rapport du diamètre de cellule et hauteur des couches comprimées, les mesures des pressions hydrauliques et totales, sans oublier la mesure des frictions potentielles réduites à des valeurs négligeables dans de bonnes conditions de lubrification des organes mobiles - y compris de la base de drainage mobile qui est aussi équipée d'un capteur de contrainte - sont autant d'éléments qui ne doivent pas être négligés pour obtenir une bonne cohérence. La préparation des échantillons et en particulier l'homogénéisation de ceux-ci, nécessite un soin particulier car nous avons à faire à des produits biologiques variables. En cellule, l'échantillon est relativement petit, 500 g environ, il doit donc être représentatif. Par contre en continu la masse à traiter est grande et doit être aussi homogène que possible pour éviter des phénomènes dits transitoires et parasites. Le conditionnement en température est également un facteur dont nous apprécierons la valeur ultérieurement.**

**D'un point de vue théorique on peut raffiner l'approche, encore faut-il rester attachés à des paramètres, comme  $C_e$ , qui représentent le mieux et le plus simplement possible ce double phénomène de résistance à l'écoulement et de résistance de la matrice. Les coefficients  $C_e$  ou  $C_v$  se prêtent bien à ce genre d'exploitation, utile sur le plan exploratoire et sans doute suffisante pour l'ingénierie de base lors du choix de certains équipements et de leur dimensionnement.**

**Les trois produits principalement étudiés, viscoélastique non linéaire pour F, semi-solide pour C et semi-liquide pour Cr, se distinguent parfaitement dans leur comportement vis-à-vis de cette double résistance. Ceci parfois de façon compensatoire car une grande résistance à l'écoulement associée à une faible résistance mécanique de la matrice peut correspondre en apparence à une faible résistance à l'écoulement et une grande résistance mécanique. Il convient de méditer sur le fait que le Kaolin floculé testé dans la première partie de nos travaux (tableau 2.1 et publications P1 et P2) présente, à volume spécifique équivalent, un coefficient de compression  $C_e$  proche de celui de la pulpe F.**

**Le raffinement de l'exploitation des résultats qui précèdent aboutirait à entrevoir d'autres aspects plus spécifiques de la matière SPM traitée et de sa rhéologie. Ceci se situe au-delà de l'objectif défini pour cette étape de travail.**



---

*Chapitre**cinq*

---

## **Une Relation Thermodynamique Relais et la Notion de QEV**

### **5.1 UNE RELATION THERMODYNAMIQUE POUVANT SERVIR DE RELAIS POUR LES ETUDES FUTURES**

Dès 1936 dans un article, qui plus tardivement recevra une attention soutenue, EYRING établit une base solide pour l'usage de la mécanique statistique selon la distribution de Boltzmann et de la relation empirique d'Arrhenius pour l'étude de la viscosité, de la plasticité et de la diffusion. La loi d'Arrhenius (1887) est l'une des relations les plus utilisées lorsqu'il s'agit d'associer la variation en fonction de la température de nombreuses grandeurs physiques et de leur taux de variation en fonction du temps.

VILLERMAUX (1981) souligne l'intérêt de cette relation pour les réactions chimiques équilibrées.

**En quoi pourrait-on associer la thermodynamique statistique et la loi d'Arrhenius à la compression qui fait l'objet de ce mémoire ?**



Il paraît pertinent de relier la compression à un changement d'équilibre d'un certain nombre d'atomes, de molécules, de grains, d'agrégats, de couches ... qui sous l'effet d'un gradient de force se déplacent selon une fréquence donnée vers un nouvel état de moindre énergie. Les divers sauts de ces éléments moléculaires et/ou de ces agrégats ne sont en aucun cas « prédestinés » à se faire systématiquement dans la direction du déplacement forcé, d'où l'intérêt d'y associer une certaine probabilité.

Ce chapitre étant davantage orienté vers l'identification d'axes de recherches futures dans le domaine de la compression, nous ne parcourons que superficiellement les fondements théoriques associés. Nous proposons toutefois un rappel succinct de la relation thermodynamique d'Arrhenius associée à la distribution de Boltzmann.

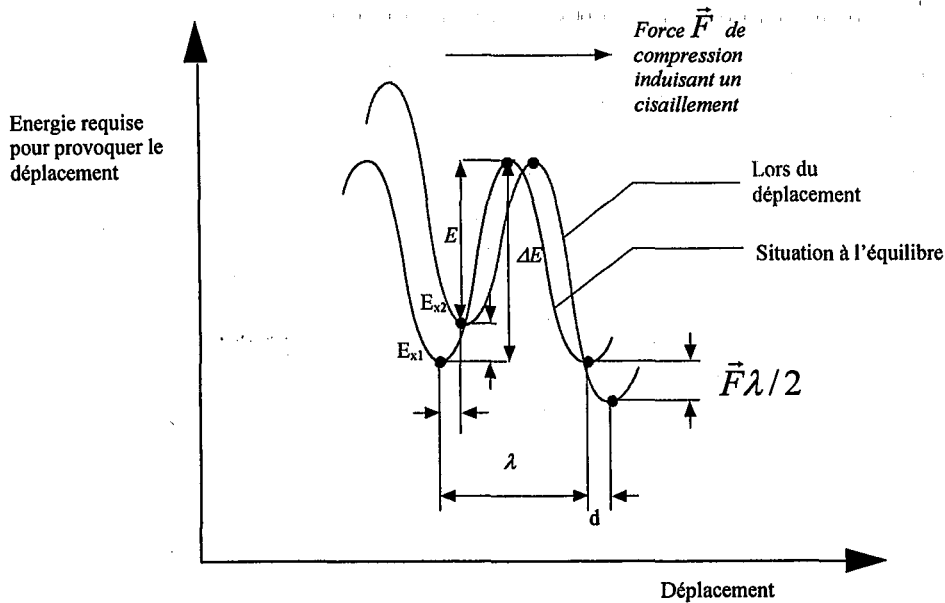


Figure 5.1 : L'énergie requise pour provoquer un déplacement sous l'effet d'une force de compression induisant un cisaillement

La probabilité qu'une unité donnée franchisse une barrière de potentiel  $\Delta E$ , équivalente à la proportion d'unités activées, est généralement décrite par la relation :

$$p(\Delta E) = \exp\left(-\frac{\Delta E}{Nk_b T}\right) \quad \text{Eq. 5.1}$$

dans laquelle  $\Delta H$ , enthalpie souvent rencontrée pour les réactions chimiques, est remplacée par  $\Delta E$ , correspondant, comme le montre la figure 5.1, à la barrière à franchir pour atteindre un nouvel état d'équilibre.

Egalement :

- $T$  : température en degré Kelvin  $[K]$
- $k_b$  : constante de Boltzmann  $(1.38 \cdot 10^{-23} [J \cdot K^{-1}])$
- $h$  : constante de Planck  $(6.6262 \cdot 10^{-34} [J \cdot s])$
- $N$  : nombre d'Avogadro  $N : (6.022 \cdot 10^{23} [mole^{-1}])$
- $N \cdot k_b = R$ , constante des gaz parfaits.

La fréquence d'activation est donnée par :

$$v = \frac{k_b T}{h} \exp\left(-\frac{\Delta E}{Nk_b T}\right) \quad \text{Eq. 5.2}$$

La fréquence nette des déplacements dans le sens de la force appliquée est égale à la différence entre les déplacements dans chacune des directions opposées. A savoir :

$$v(+)-v(-) = 2 \frac{k_b T}{h} \exp\left(-\frac{\Delta E/N}{k_b T}\right) \cdot \sinh\left(\frac{\vec{F}\lambda/2}{k_b T}\right) \quad \text{Eq. 5.3}$$

La force de compression occasionne une distorsion de la courbe d'équilibre d'une quantité  $\vec{F}\lambda/2$  comme le montre la figure 5.1. De ce fait :

$$v(+)=\frac{k_b T}{h} \exp\left(-\frac{\Delta E/N - \vec{F}\lambda/2}{k_b T}\right) \text{ et } v(-)=\frac{k_b T}{h} \exp\left(-\frac{\Delta E/N + \vec{F}\lambda/2}{k_b T}\right).$$

Ces deux équations sont à l'origine de l'Eq. 5.3.

Si le déplacement forcé décrit précédemment est rapporté à l'unité de longueur, on pourra assimiler ce qui précède à un taux de déformation comme celui traité dans l'ensemble de ce mémoire. Ainsi par analogie :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 2\hat{P} \frac{k_b T}{h} \exp\left(-\frac{\Delta E/N}{k_b T}\right) \cdot \sinh\left(\frac{\vec{F}\lambda/2}{k_b T}\right) \quad \text{Eq. 5.4}$$

$\hat{P}$  représentant le taux réel d'unités ayant été déplacées dans la direction du déplacement.

$$\frac{\vec{F}\lambda/2}{k_b T} \text{ étant } > 1 \text{ on peut assimiler, } \sinh\left(\frac{f\lambda/2}{k_b T}\right) = \frac{\exp\left(\frac{f\lambda/2}{k_b T}\right)}{2}, \text{ et de ce fait:}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \hat{P} \frac{k_b T}{h} \exp\left(-\frac{\Delta E/N}{k_b T}\right) \cdot \exp\left(\frac{\vec{F}\lambda/2}{k_b T}\right) \quad \text{Eq. 5.5}$$

Il est utile de remarquer que l'Eq. 5.5 prend la forme des équations rencontrées au chapitre 2, lorsque les éléments rhéologiques, ressorts et amortisseurs, sont combinés pour décrire la compression.

En prenant  $E = \Delta E - \left( \frac{\bar{F}\lambda/2}{k_b T} \right)$  et  $P\left(\frac{k_b T}{h}\right) \approx Cte = A$ , on retrouve la forme traditionnelle de la loi d'Arrhenius :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = A \cdot \left[ \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \right] \quad \text{Eq. 5.6}$$

Il y a plusieurs façons d'exploiter cette relation. Lorsqu'il s'agit d'une réaction chimique classique d'ordre  $k_1$ , on utilise généralement les exploitations graphiques suivantes :

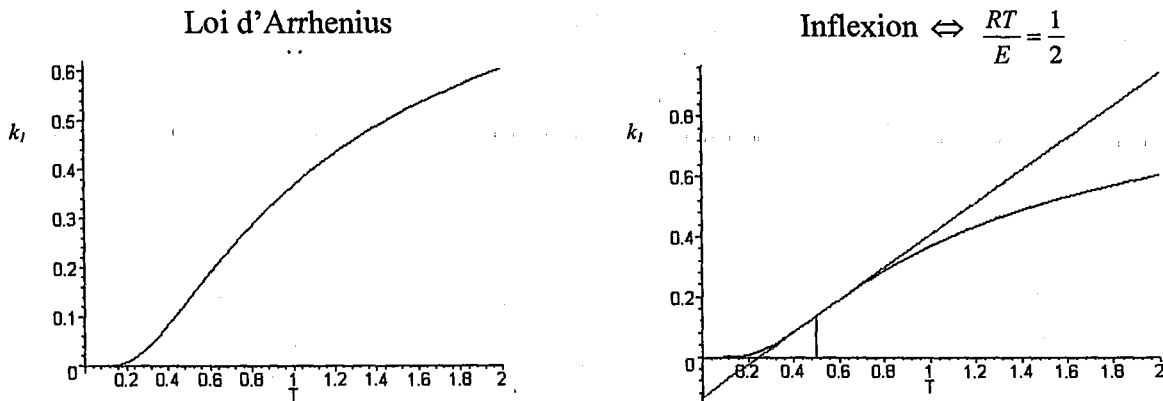


Figure 5.2 : L'exploitation graphique de la loi d'Arrhenius

Pour connaître de façon simple, sans prétendre interpréter au niveau moléculaire, la dépendance vis-à-vis de la température et le contrôle que joue cette dernière sur certains paramètres de la compression, il suffit d'utiliser les relations de « linéarisation » suivantes :

$$\frac{\partial \ln\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} Y\right)}{\partial Y} = -\frac{E}{R} \quad \text{Eq. 5.7}$$

et de façon similaire :

$$\frac{\partial \ln\left(\frac{\partial P}{\partial t} / T\right)}{\partial (1/T)} = -\frac{E}{R} \quad \text{Eq. 5.8}$$

Une série d'expériences de compression a été conduite à partir du produit C, protéines laitières coagulées semi-solides, à différentes températures. Il est important de souligner que la possibilité de contrôler la température au niveau de la cellule de compression MMCC© est essentielle. Peu de cellules présentent cette caractéristique.

Le tableau 5.1 donne la description de ces divers tests. La figure 5.3 reproduit les enregistrements de la pression totale lors des tests à taux de déformation constante.



**Produit C**

rate [cm/min]	sample number	T[°C]
0.254	C1	40-45
0.254	C2	40-45
0.762	C3	45
0.254	C4	26
0.254	C5	26
0.254	C6	11
0.254	C7	11
2.54	C8	45

Tableau 5.1

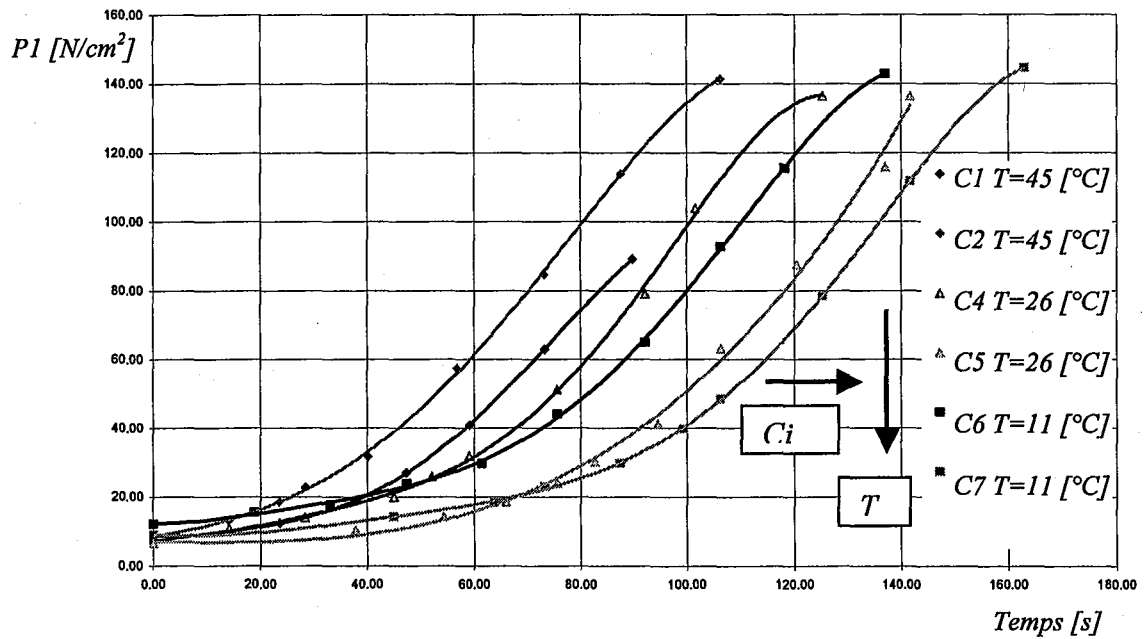


Figure 5.3 : Enregistrements de la pression totale lors des tests CDC conduits à différentes températures

5.1.1 Application à la variation de la pression totale  $P_1$  en fonction du temps

	T [°C]	1/T [1/K]	C ln(dP <sub>1</sub> /dt/T)	slope	Activation energy E [J/mole]
C1	45	0.0031	3.64	-3288.03	2.73E+04
C2	45	0.0031	3.86		
C4	26	0.0033	2.92		
C5	26	0.0033	2.36		
C6	11	0.0035	2.27		
C7	11	0.0035	2.80		

Tableau 5.2

Le tableau 5.2 et la figure 5.4 illustrent la validité de la loi d'Arrhenius dans le cas de la variation de la pression totale  $P_1$  en fonction du temps.

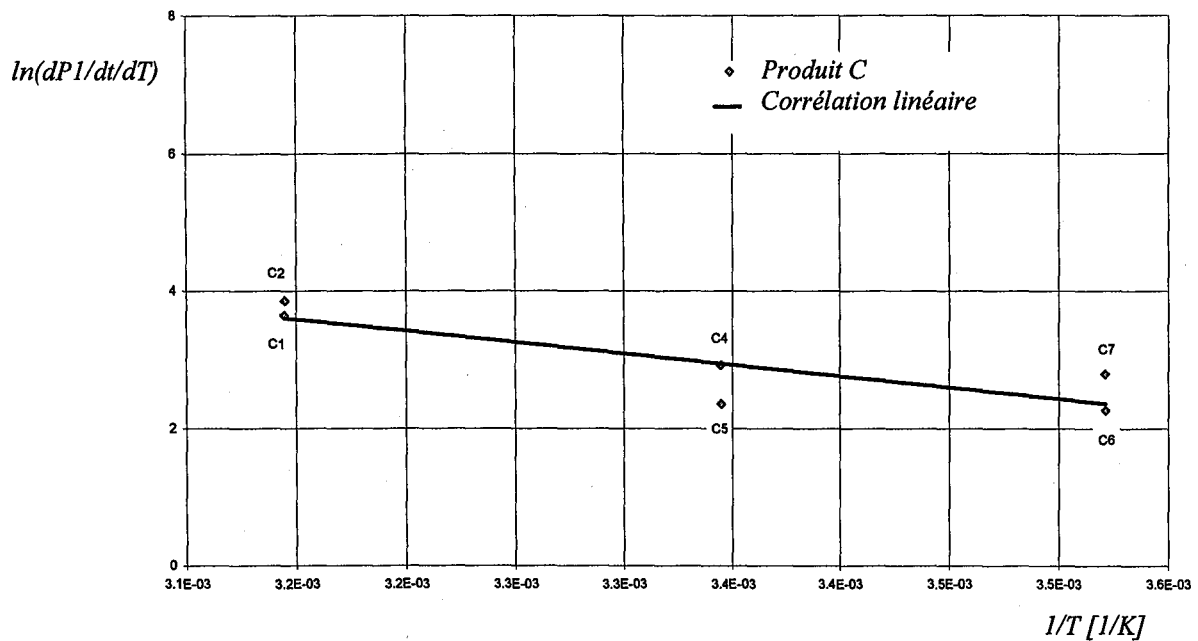


Figure 5.4 : Application de la loi d'Arrhenius à la variation de la pression totale  $P_1$  en fonction du temps et de la température

Il convient alors de vérifier la validité de cette approche pour d'autres paramètres concernant les mêmes expériences.

### 5.1.2. Application à la variation du coefficient de compression, $C_v$ , en fonction du temps

	T [°C]	1/T [1/°K]	C ln(dC <sub>v</sub> /dt)	slope	Activation energy E [J/mole]
C1	45	0.0031	-21.05	-2991.16	2.49E+04
C2	45	0.0031	-17.78		
C4	26	0.0033	-20.95		
C5	26	0.0033	-21.30		
C6	11	0.0035	-21.70		
C7	11	0.0035	-19.29		

Tableau 5.3

Le tableau 5.3 et la figure 5.5 illustrent la validité de la loi d'Arrhenius dans le cas de la variation du coefficient de compression,  $C_v$ , en fonction du temps.

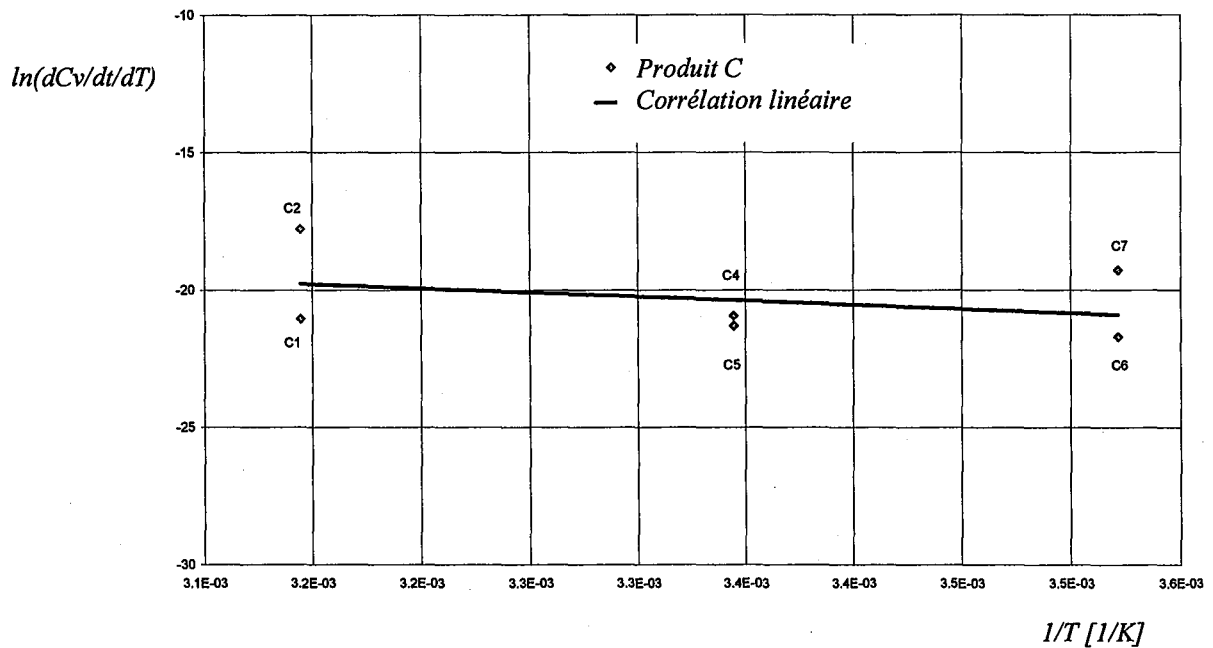


Figure 5.5 : Application de la loi d'Arrhenius à la variation du coefficient de compression,  $C_v$ , en fonction du temps et de la température

On peut également appliquer cette approche à la variation du coefficient de compression,  $C_e$ , en fonction du temps.

5.1.3. Application à la variation du coefficient de compression,  $C_e$ , en fonction du temps

	T [°C]	1/T [1/°K]	C ln(dC <sub>e</sub> /dt/T)	slope	Activation energy E [J/mole]
C1	45	0.0031	-3.38	-2855.51	2.37E+04
C2	45	0.0031	-1.55		
C4	26	0.0033	-2.77		
C5	26	0.0033	-3.83		
C6	11	0.0035	-4.18		
C7	11	0.0035	-2.87		

Tableau 5.4

Le tableau 5.4 et la figure 5.6 illustrent la validité de la loi d'Arrhénius dans le cas de la variation du coefficient de compression,  $C_e$ , en fonction du temps.

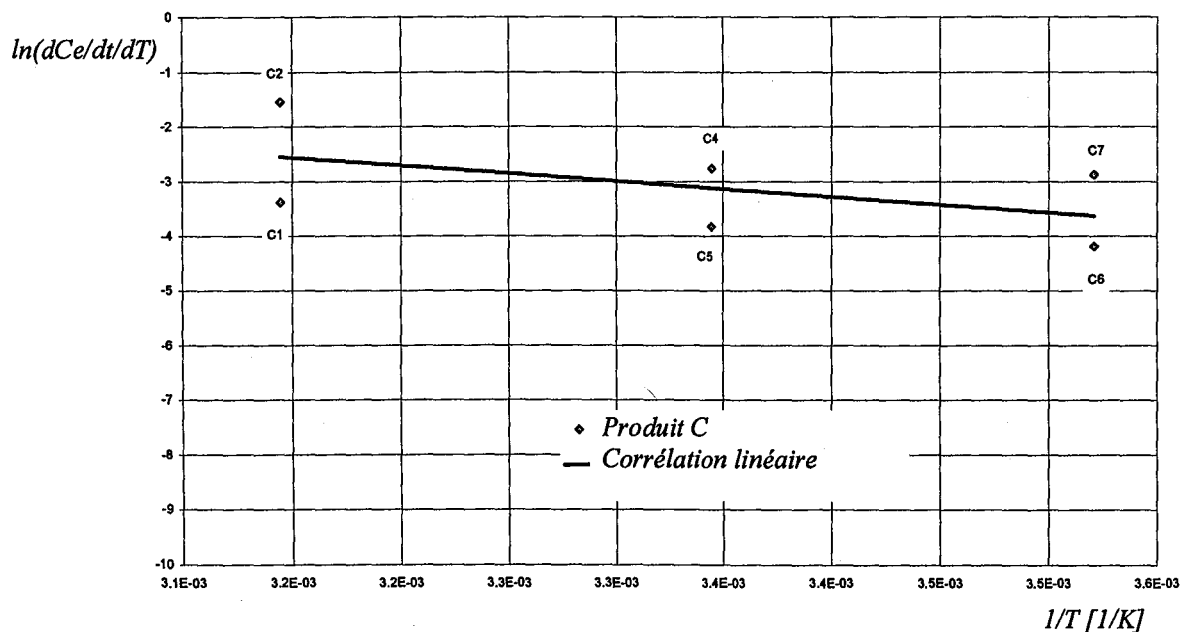


Figure 5.6 : Application de la loi d'Arrhenius à la variation du coefficient de compression,  $C_e$ , en fonction du temps et de la température

## 5.1.4. Conclusion

Le tableau 5.5 résume les valeurs des énergies d'activation associées à la variation en fonction du temps des trois paramètres de compression étudiés. Il est remarquable de constater que la valeur de l'énergie d'activation ne varie pas en fonction du paramètre étudié ; ceci confirme de façon très nette le fait que la compression du produit C est contrôlée par la température.

Function studied	Activation Energy $E$ [kJ/mole]
$P$ [N/m <sup>2</sup> ]	27.3
$C_v$ [m <sup>2</sup> /s]	24.9
$C_e$ [kg <sup>2</sup> /s·m <sup>4</sup> ]	23.7

Tableau 5.5

EYRING (1936) a mesuré et a calculé les énergies d'activation correspondant à des tests de fluage et donne les valeurs suivantes concernant l'eau et les matières plastiques :

$$\text{Eau} \quad E = 16 - 21 \text{ [kJ/mole]}$$

$$\text{Plastiques} \quad E = 30 - 60 \text{ [kJ/mole]}$$

Les valeurs du tableau 5.5 et la référence ci-dessus confirment la nature rhéologique du type de liquide à déplacer lors de la compression de C.

Sans prétendre donner une valeur statistique à ce qui suit, nous avons aussi exploité deux expériences conduites sur le même produit lors des tests de pressage à vis (Tableau 5.6). Ce procédé est bien différent de la compression en cellule piston sur laquelle reposent les données précédentes. De plus, deux points pour décrire une droite c'est « prêter le flanc » ! Toutefois la comparaison est édifiante, comme le montrent le tableau 5.7 et la figure. 5.7.

Reference	Material	temperature [°C]	Screw	rotation [rpm]	P feed [kPa]	P out [kPa]	Out mass Flow Ql [g/s]	Out mass Flow Qs [g/s]	Dry content before process [%]	Dry content after process [%]
Cc6-T38	Cc	38	HCR	6	48.3	132.6	1	1.2	33.5	51.1
Cc6-T11	Cc	11	HCR	6	48.3	119.4	1.8	4.3	33.5	41.7

Tableau 5.6

	T [°C]	1/T [1/°K]	C ln(dCe/dt/T)	slope	Activation energy E [J/mole]
Cc6-T38	38	0.0032	-10.28	3691.34	3.07E+04
Cc6-T11	11	0.0035	-9.15		

Tableau 5.7

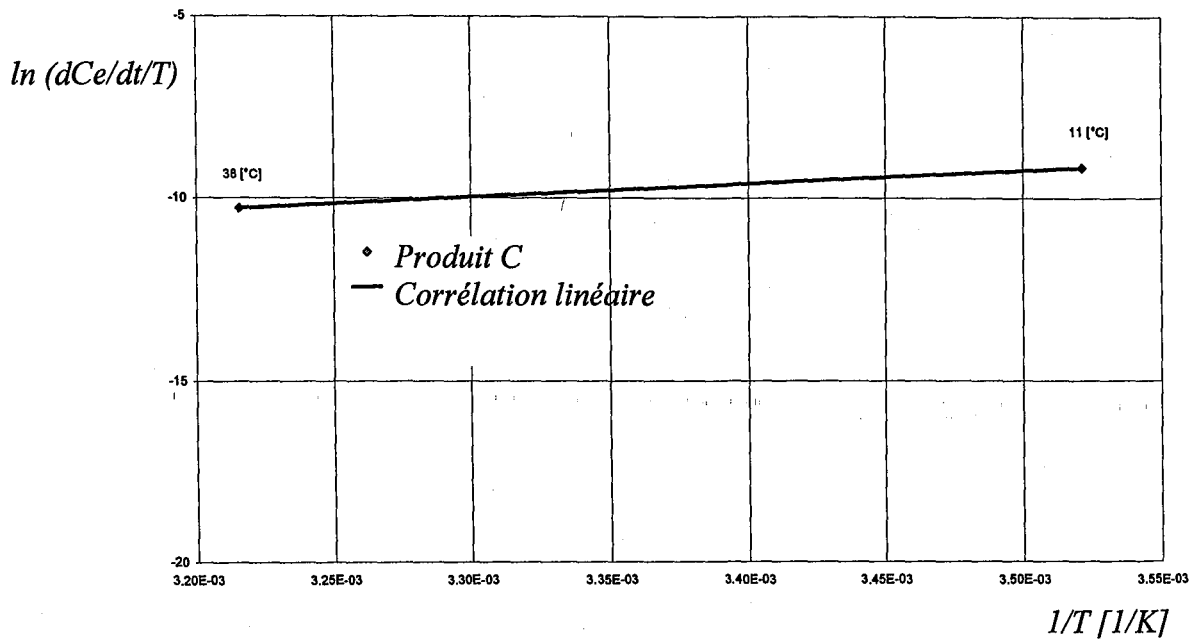


Figure 5.7 : Application de la loi d'Arrhenius à la variation du coefficient de compression,  $C_e$ , en fonction du temps, tests TSPU©

La valeur de l'énergie d'activation de 30.7 kJ/mole reste en accord avec tout ce qui précède. MAFART (1981) cite pour une eau fortement liée à une pâte d'amidon une valeur de 160 Kcal/kg<sup>-1</sup>. Ceci reste dans le domaine d'énergie décrit ci-dessus pour l'eau.

**La corrélation entre les données expérimentales et la loi d'Arrhenius suggère la poursuite de cet axe de recherche, à savoir l'application de la thermodynamique statistique à la compression. A cette évolution, on pourrait ajouter l'influence des tensions de surfaces qui devraient aussi corroborer les énergies mesurées et calculées.**

Sur le plan de l'ingénierie, d'autres approches sont envisageables. Une nouvelle fois sans aucune prétention tant sur le plan prédictif que statistique, nous proposons une autre voie d'accès à des paramètres énergétiques caractéristiques.

## 5.2 D'AUTRES ORIENTATIONS PROMETTEUSES

Nous proposons un critère de calcul de l'énergie de compression fondé sur la grandeur suivante :

**QEV (noté I) = la quantité d'énergie nécessaire à la déformation d'une unité élémentaire de SPM (saturated porous material) par unité de volume de SPM en cours de déformation.**

Définissons succinctement les équations de base.

Rappelons tout d'abord :

$$P(\varepsilon_E) \equiv \frac{\vec{F}}{A} \equiv \text{Force Compressive} / \text{Surface Drainage} : [N \cdot m^{-2}]$$

et

$$\varepsilon : \frac{\Delta Z_0}{Z} \equiv \text{Déplacement} / \text{Hauteur SPM} \equiv [m/m]$$

$$\text{Dans ce cas : } I = \int_0^{\varepsilon} P(\varepsilon) d\varepsilon = [N \cdot m^{-2}] \cdot [m \cdot m^{-1}] = \frac{[N \cdot m]}{[m^3]} = \frac{[J]}{[m^3]} \equiv QEV \quad \text{Eq. 5.9}$$

On peut assez aisément et pour des raisons associées à la nature même des matériaux testés – étude rhéologique qui dépasse le cadre de ce mémoire – établir, comme le montre la figure 5.8, une relation de comportement des matériaux testés sur la base de la relation suivante :

$$P(t) = A(t - t_0)^p + B \quad \text{et} \quad P(\varepsilon) = A(\varepsilon - \varepsilon_0)^p + B \quad \text{Eq. 5.10}$$

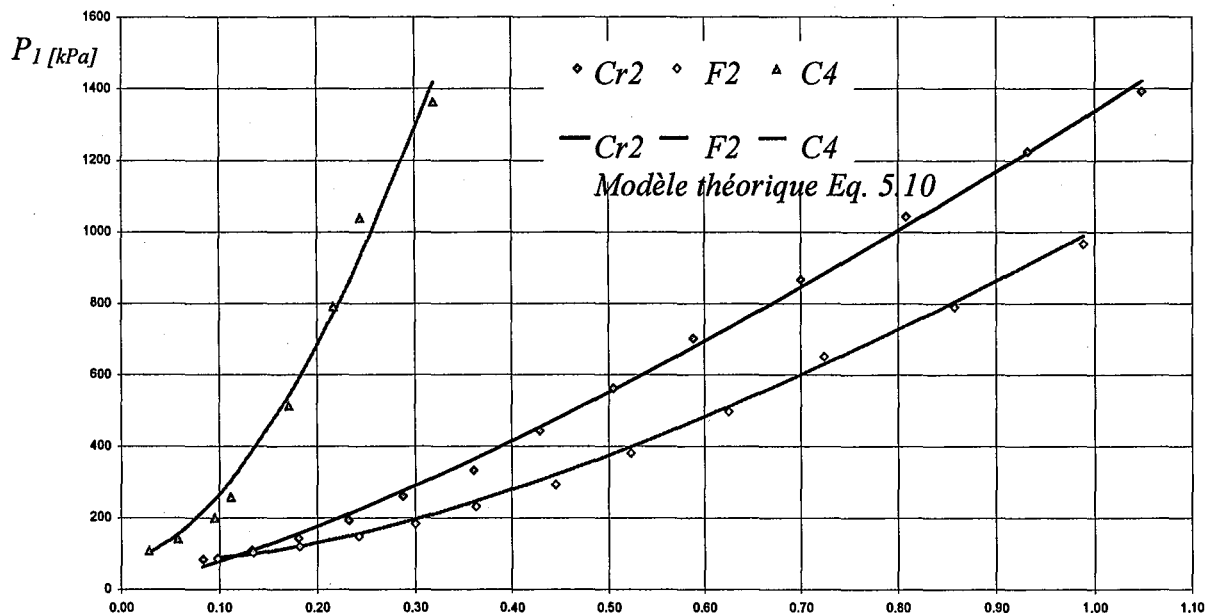


Figure 5.8 : Modélisation des résultats expérimentaux à  $\varepsilon_E$  partir de l'Eq. 5.10

A partir de l'Eq. 5.10, l'intégration de l'Eq. 5.9 se trouve facilitée :

$$I = \int_0^\varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{A}{p+1} (\varepsilon - \varepsilon_0)^{p+1} + B \cdot \varepsilon + Cte \equiv QEV \quad \text{Eq. 5.11}$$

A titre d'illustration, voici une série de figures correspondant aux trois produits principalement étudiés en prenant en compte deux variables opératoires, à savoir le taux de déformation, ou plus simplement la vitesse de descente du piston, et la température.

Energie/volume  
[kJ/m<sup>3</sup>]

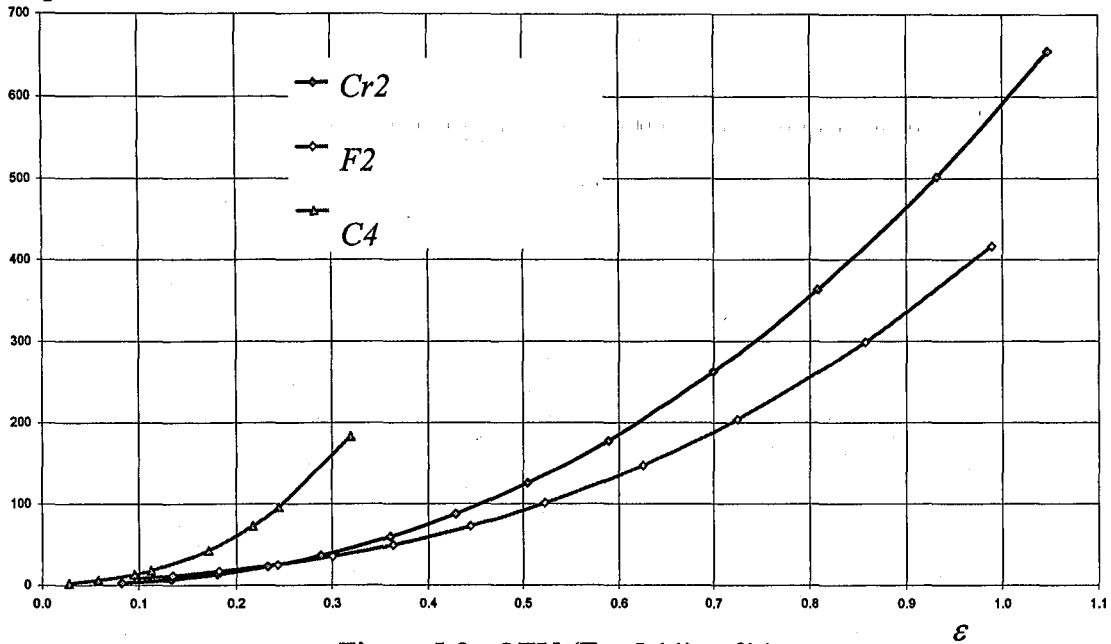


Figure 5.9 : QEV (Eq. 5.11) = f(ε)

Energie/volume  
[kJ/m<sup>3</sup>]

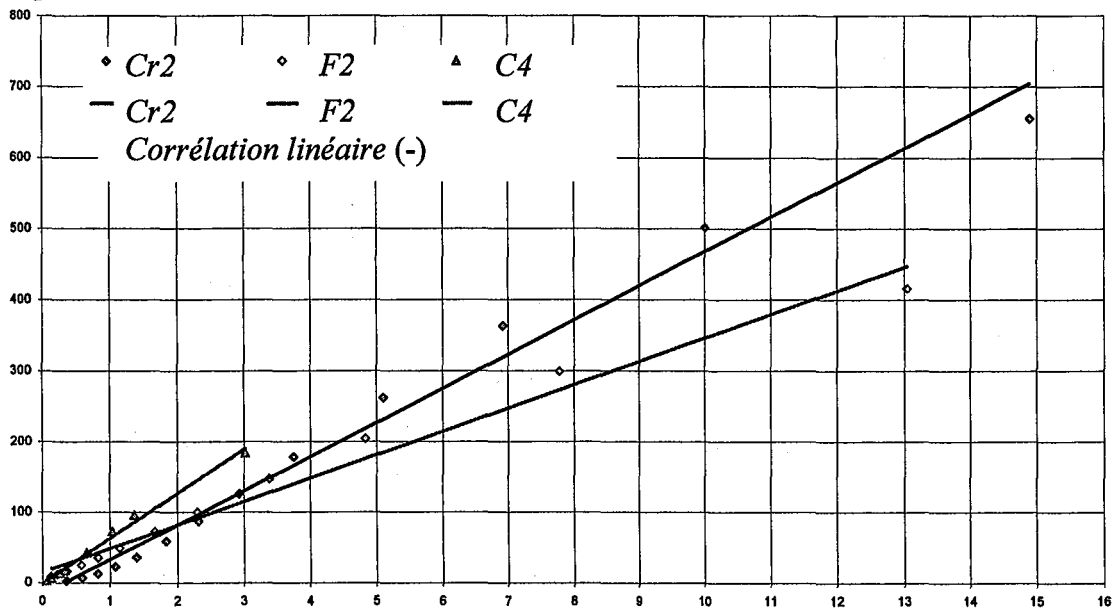


Figure 5.10 : QEV = f(1/Cv)

1/Cv [min/cm<sup>2</sup>]



La figure 5.10 souligne qu'une relation quasi-linéaire existe entre QEV et le rapport  $1/C_v$ , qui permet la classification des produits testés selon la figure 5.11.

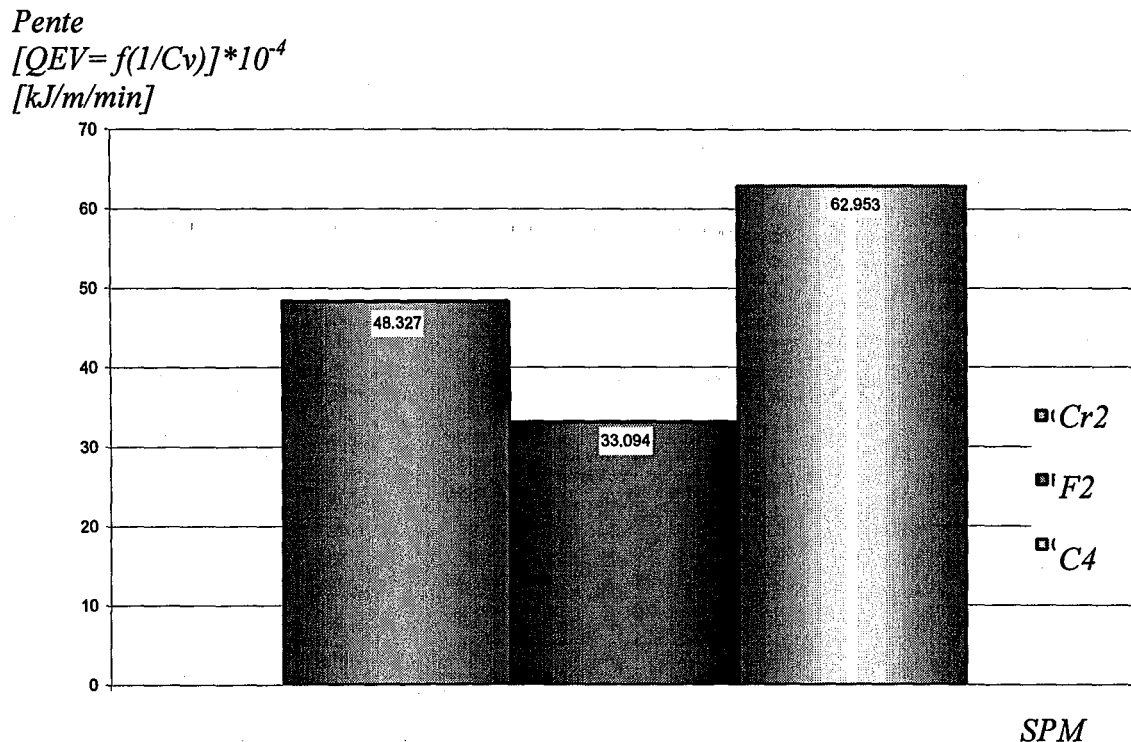


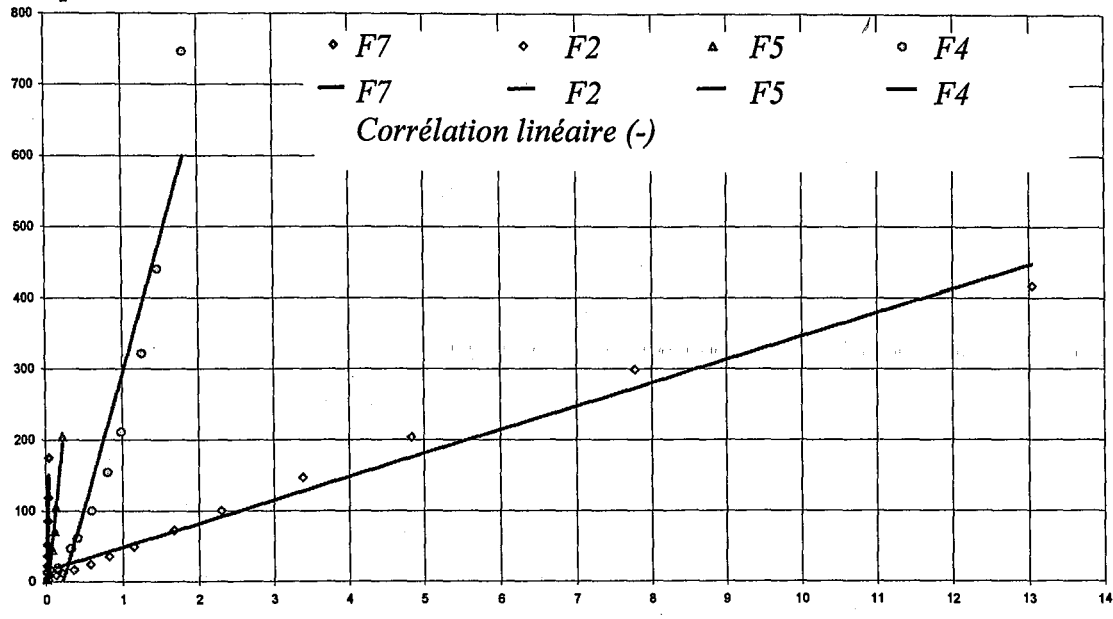
Figure 5.11 : La classification des produits testés à partir de la pente de la relation  $QEV = f(1/C_v)$

La matière la plus élastique, à savoir la pulpe de betterave, F, requière le moins d'énergie, QEV. Ceci fait penser à une contribution de relaxation élastique (elastic recovery) favorable à la surpression interne. Le produit semi-solide, C, protéines lactiques précipitées, quant à lui requière le plus d'énergie, QEV, tandis que le produit semi-liquide, Cr, aïrelles broyées, se place en position intermédiaire. C se caractérise par une forte résistance à la déformation structurelle de la matrice solide tandis que Cr aurait tendance à présenter une perméabilité plus faible, d'où la classification observée.

On peut également selon la même méthode, examiner l'influence de la vitesse de compression sur l'énergie nécessaire QEV. Pour cela nous avons choisi le SPM, F, qui présente des propriétés viscoélastiques non-linéaires. Le taux de déformation ou plus exactement la vitesse de déplacement du piston, varie dans un rapport de 1 à 30.

Les figures 5.12 et 5.13 illustrent la validité de l'approche proposée. Les relations linéaires qui existent entre QEV et  $1/C_v$  (Fig. 5.12) et la pente de ces dernières en fonction du taux de déformation (Fig. 5.13), rendent l'utilisation de cette approche extrêmement convenable pour le calcul anticipatoire des énergies mises en jeu et de leur classement relatif.

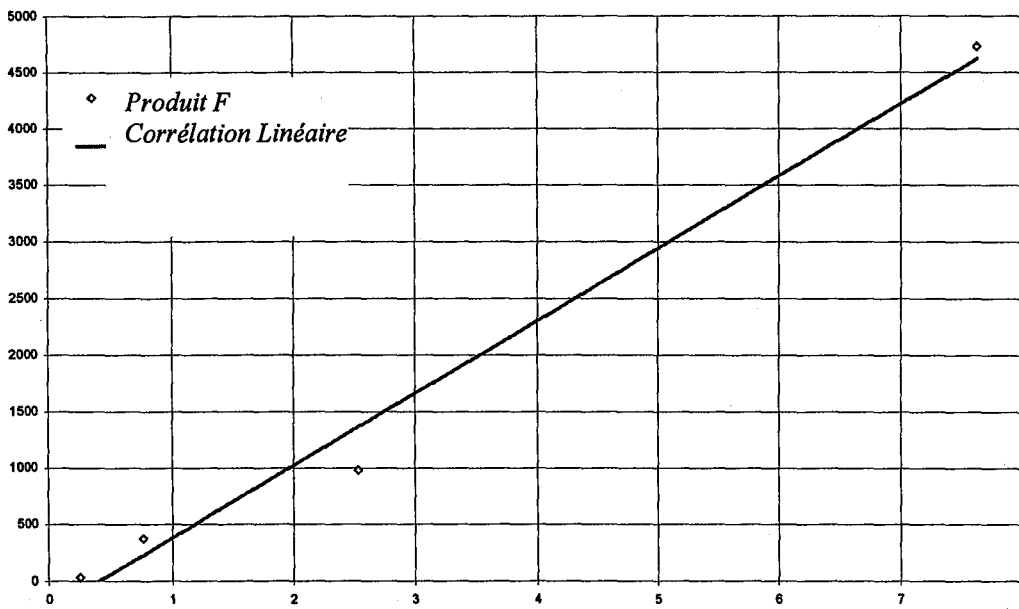
Energie/volume  
[kJ/m<sup>3</sup>]



1/Cv [min/cm<sup>2</sup>]

Figure 5.12 : La variation de QEV = f(1/Cv) avec dZ/dt → pour F7 = 7.62 (cm/min), F5 = 2.54, F4 : 0.762 et F2 : 0.254 (cm/min)

Pente \* 10<sup>-4</sup>  
 QEV = f(1/Cv)  
 [kJ/m/min]



Taux de déformation  
[cm/min]

Figure 5.13 : La variation de la pente de la relation QEV = f(1/Cv) en fonction du taux de déformation

Enfin il serait intéressant de pouvoir corréliser les observations faites en utilisant l'approche fondée sur l'usage de la loi d'Arrhenius et celles que l'on peut faire à partir de QEV. Pour cela les mêmes produits sont analysés.

Energie/volume  
[kJ/m<sup>3</sup>]

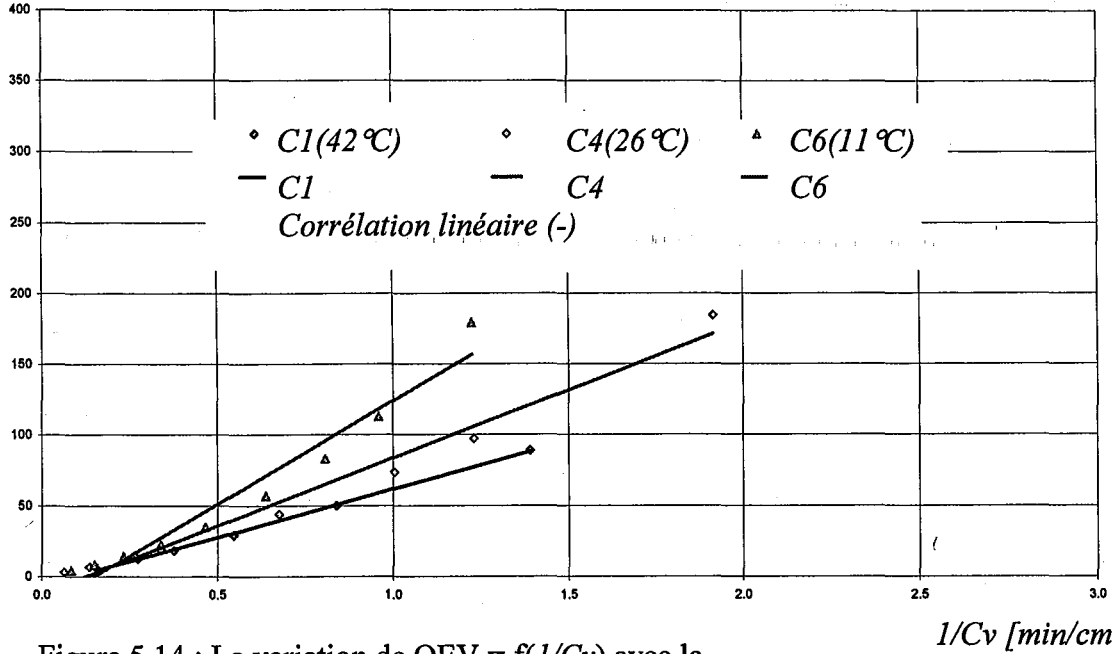


Figure 5.14 : La variation de QEV = f(1/Cv) avec la température du SPM

Pente \* 10<sup>-4</sup>  
QEV = f(1/Cv)  
[kJ/m/min]

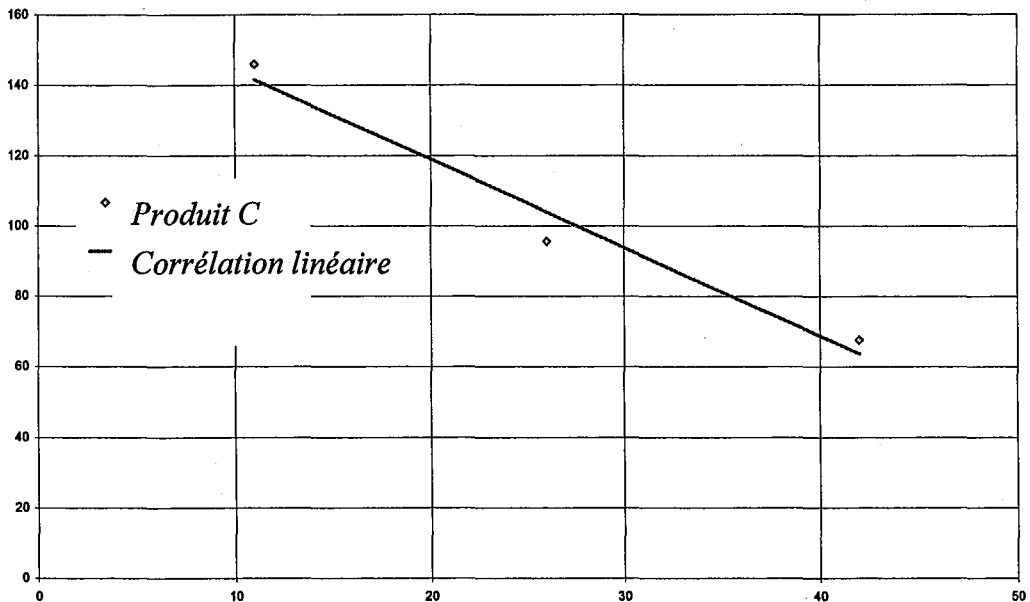


Figure 5.15 : La variation de la pente de QEV = f(1/Cv) avec la température du SPM

Comme le montrent les figures 5.14 et 5.15, une relation existe de façon nette entre la température du SPM,  $C$  et l'énergie requise lors de la compression. Ceci renforce l'idée que les deux approches proposées dans ce chapitre constituent des axes de recherche future attrayants.

**En résumé, les quatre grands axes de recherche que nous préconisons, suite à ces travaux, sont :**

- 1. l'usage de la thermodynamique statistique pour appréhender les phénomènes sensibles à l'échelle moléculaire, au niveau des agrégats et des couches lors de la compression ; ceci quel que soit le mode de déformation envisagé.**
- 2. l'approfondissement de la valeur à l'échelle de l'ingénierie de la quantité d'énergie nécessaire pour provoquer une déformation unitaire rapportée au volume de matière en cours de déformation, QEV. Cette grandeur présente des caractéristiques propres à la matrice déformée mais aussi une sensibilité apparemment significative vis-à-vis des conditions opératoires du procédé sélectionné.**
- 3. la relaxation suivant la compression est aisément « linéarisable » comme nous l'avons montré dans nos travaux P8 et P10 au chapitre 3. Ce phénomène de retour à un équilibre reflète des propriétés intrinsèques à la matière dans son nouvel état déformé. Il serait judicieux d'exploiter les travaux de PELEG pour entrevoir les conséquences associées au point 1 et 2 qui précèdent.**
- 4. Etant donné la dépendance que nous avons démontrée entre les caractéristiques de compression d'un SPM et le rapport des pressions hydraulique et totale ou solide, il devient intéressant de considérer la compression à gradient de pression contrôlé. Cet axe de recherche offre la possibilité de mieux prendre en compte les phénomènes d'interface, comme l'extrusion à travers le médium filtrant, la ségrégation... D'un point de vue thermodynamique l'étude des composantes des contraintes imposées et induites, ainsi que de leurs rapports, pourrait mettre également en évidence le rôle de la tension de surface solide liquide.**



---

## Conclusion

---

Environnement, énergie et développement durable sont intrinsèquement liés. C'est dans ce contexte que se situent les travaux techniques et scientifiques rapportés dans ce mémoire. Un potentiel important de réduction de la consommation d'énergie existe encore dans de nombreux secteurs pouvant faire usage des modes mécaniques de séparation de phases.

Ce sont par exemple les industries **minières, agroalimentaires, papetières, électroniques, pharmaceutiques, biotechnologiques**. Elles ont toutes à traiter de séparations solides-liquides au combien pesantes, non seulement dans leur bilan économique et énergétique global, mais également au niveau de leur « transférabilité ».

Le type de séparation solide-liquide qui nous intéresse ici prend en compte des produits et dérivés provenant de ces six secteurs industriels. Attachés à accroître et à mettre à disposition la compréhension fondamentale et sa composante pratique de la séparation de phases par déformation mécanique multidimensionnelle de milieux poreux saturés, quatre modes de compression sont présentés sur le plan théorique et sont illustrés.

Pour cela plusieurs cellules de compression multi-mode (MMCC©) et une unité pilote de pressage à vis (TSPU©) ont été conçues et favorablement testées vis-à-vis de leur compatibilité et de leur potentiel quant à la prédiction de grandeurs caractéristiques de la compression multidimensionnelle.

Des travaux conduits sur la compression à pression constante, CPC, nous dégagons les conclusions suivantes :

1. Les modèles décrits précédemment suivent bien le comportement des milieux poreux saturés, SPM, d'origine minérale.
2. Ces modèles sont d'usage plus limité lorsqu'il s'agit de traiter des matériaux biologiques.
3. La durée des expériences n'est pas toujours représentative des pratiques.
4. Cet aspect rend quelque peu superflue l'analyse de la phase de compression secondaire. Il faudrait peut-être substituer ces expériences longues par des analyses en relaxation comme nous l'avons illustré dans nos publications jointes.
5. L'effet choc que peut exercer sur le produit l'application d'une pression soudaine est aussi un facteur à surveiller.
6. Il est toujours possible, à partir d'un nombre plus ou moins grand d'éléments placés en série ou en parallèle, de faire coïncider une série de points

expérimentaux à une courbe dite théorique. L'usage des modèles rhéologiques classiques est donc à pratiquer avec prudence.

D'une façon plus générale, la compression à déformation constante, CDC nous a permis, sans hypothèse excessivement restrictive concernant les deux paramètres essentiels et caractéristiques de l'écoulement et de la résistance mécanique de la matrice, de mettre à disposition trois approches théoriques adaptables à une large gamme de situations.

Ces trois approches ont des points communs mais aussi des différences notables quant à l'exploitation des résultats et la rapidité d'extraction d'informations essentielles.

Un des apports extrêmement important de la CDC réside dans la rapidité d'exécution des tests, de l'ordre de plusieurs minutes et non pas de plusieurs heures comme dans le cas de la CPC. Ceci est d'autant plus important que les processus industriels de séparations solide-liquide s'insèrent dans des procédés de plus en plus complexes et rapides.

Nous avons pu souligner, dans nos travaux rapportés dans les publications jointes, que le rapport de la pression hydraulique à la pression totale au cours de la compression est un critère important. A ce sujet il est tout à fait concevable de travailler en contrôlant ce rapport. Il s'agirait d'une méthode nouvelle dans le domaine du génie des procédés. La connaissance des états d'équilibres intermédiaires et de réponse réelle du SPM à la compression en serait élargie.

Il est important de noter que le choc exercé sur la matière lorsque l'on travaille à pression constante, et qu'il n'y a pas de phase de filtration préliminaire, a des conséquences qui ne sont prévisibles ou mesurables que par l'approche CDC.

Ceci nous amène aux études de la relaxation qui suit la compression CDC. Ces dernières, rapportées dans les publications jointes, montrent l'incidence du taux de déformation initial sur les caractéristiques en compression et en relaxation du produit. Ceci ouvre une nouvelle voie de recherche qui pourrait faire usage des relations simples que nous avons développées concernant la relaxation.

En matière de compression avec écoulement multi-axial nous développons tout d'abord la compression axiale avec écoulement radial central ou périphérique, puis nous l'utilisons pour aborder le cas très général de la compression axiale avec écoulement tridimensionnel que nous réduisons enfin au cas du pressage à vis. Notre démarche est cohérente avec l'idée que ce mémoire puisse fournir des bases théoriques utiles au-delà des applications sélectionnées. Pour le pressage à vis, la connaissance du temps de séjour et du taux de compression au sein de la vis, suffisent pour calculer le coefficient de compression puis éventuellement le coefficient de perméabilité (pour un gradient hydraulique interne estimé donné). Deux méthodes sont envisagées pour le calcul du temps de séjour à partir des données expérimentales (TSPU©) qui concourent à valider l'approche théorique.

Nous avons développé un équipement de pressage à vis, TSPU©, qui paraît tout à fait représentatif des conditions rencontrées au laboratoire lorsque la cellule MMCC©, que nous avons créée et mise au point, est utilisée. On note aussi un bon degré de prévisibilité des performances du pilote à partir de la cellule de laboratoire.

Les facteurs géométriques, rapport du diamètre de cellule et hauteur des couches comprimées, les mesures des pressions hydrauliques et totales, et les frictions ne doivent pas être négligés pour obtenir une bonne cohérence. La préparation des

échantillons et en particulier l'homogénéisation de ceux-ci, nécessite un soin particulier car nous avons à faire à des produits biologiques variables.

D'un point de vue théorique on peut raffiner l'approche, encore faut-il rester attachés à des paramètres, comme  $C_e$ , qui représentent le mieux et le plus simplement possible ce double phénomène de résistance à l'écoulement et de résistance de la matrice. Les coefficients  $C_e$  ou  $C_v$  se prêtent bien à ce genre d'exploitation, utile sur le plan exploratoire et sans doute suffisante pour l'ingénierie de base lors du choix de certains équipements et de leur dimensionnement.

Les trois produits principalement étudiés, viscoélastique non linéaire pour les pulpes de betteraves, F, semi-solide pour les protéines laitières coagulées, C et semi-liquide pour les aïrelles, Cr, se distinguent parfaitement dans leur comportement vis-à-vis de cette double résistance. Ceci parfois de façon compensatoire car une grande résistance à l'écoulement associée à une faible résistance mécanique de la matrice peut correspondre en apparence à une faible résistance à l'écoulement et une grande résistance mécanique. Il convient de méditer sur le fait que le Kaolin flocculé testé dans la première partie de nos travaux présente, à volume spécifique équivalent, un coefficient de compression  $C_e$  proche de celui de la pulpe F.

Le raffinement de l'exploitation des résultats qui précèdent aboutirait à entrevoir d'autres aspects plus spécifiques de la matière SPM traitée et de sa rhéologie.

Enfin nous proposons une application de la thermodynamique statistique de BOLTZMANN et le développement du calcul de l'énergie consommée par unité de volume de matière comprimée. Nous avons pu à partir de 3 grandeurs différentes obtenir une valeur de l'énergie d'activation, associée à la compression de milieux poreux saturés étudiés, presque identique ce qui renforce l'à propos de ce concept.

**En résumé, les quatre grands axes de recherche que nous préconisons, suite à ces travaux, sont :**

1. **L'usage de la thermodynamique statistique pour appréhender les phénomènes sensibles à l'échelle moléculaire, au niveau des agrégats et des couches lors de la compression ; ceci quel que soit le mode de déformation envisagé.**
2. **L'approfondissement de la valeur, à l'échelle de l'ingénierie, de la quantité d'énergie nécessaire pour provoquer une déformation unitaire rapportée au volume de matière en cours de déformation, QEV. Cette grandeur présente des caractéristiques propres à la matrice déformée mais aussi une sensibilité apparemment significative vis-à-vis des conditions opératoires du procédé sélectionné.**
3. **La relaxation suivant la compression est aisément « linéarisable » comme nous l'avons montré dans nos travaux. Ce phénomène de retour à un équilibre reflète des propriétés intrinsèques de la matière dans son nouvel état déformé. Il serait judicieux d'exploiter les travaux de PELEG pour entrevoir les conséquences associées au point 1 et 2 qui précèdent.**
4. **Etant donné la dépendance que nous avons démontrée entre les caractéristiques de compression d'un SPM et le rapport des pressions hydraulique et totale, il devient intéressant de considérer la compression à gradient de pression contrôlé. Cet axe de recherche offre la possibilité de mieux prendre en compte les phénomènes d'interface, comme l'extrusion à travers le médium filtrant, la ségrégation...**



- 5. D'un point de vue thermodynamique l'étude des composantes des contraintes imposées et induites, ainsi que leurs rapports, pourrait mettre également en évidence le rôle de la tension de surface solide liquide.**

## Conclusion Générale et Synthèse Prospective

1. CPC : pour l'Orientation
2. CDC : pour la Compréhension
3. CAR : pour l'Application
4. Et au-delà :
  - l'approche thermodynamique
  - l'aspect énergétique QEV
  - la relaxation « réversible »
  - le rapport  $P_1/P_{f1}$
  - l'exploitation MMCC® radiale

*L'auteur,*



*, vous remercie.*

*RS.*



## Nomenclature

$a$	= distance à partir du piston	$[m]$
$a_0$	= distance entre le piston et la surface de drainage	$[m]$
$a_v$	= coefficient de compressibilité	$[m^2 \cdot N^{-1}]$
$A$	= aire de la section du SPM $\approx$ aire de la surface filtrante	$[m^2]$
$A$	= (chap.2 et A2 module de compression du ressort 'a'	$[Pa]$
$A_0$	= distance réduite $A_0 = a_0/Z_0$	$[-]$
$A_1$	= facteur préexponentiel (loi d'Arrhenius) dimension de $k_1$	$[...]$
$A_2$	= facteur préexponentiel (loi d'Arrhenius) dimension de $k_2$	$[...]$
$b$	= rapport des coefficients de perméabilité : $b = K_{h\infty}/K_{h0}$	$[-]$
$b^2$	= constante de séparation	$[-]$
$B$	= (chap.2 et A2 module de compression du ressort 'b'	$[Pa]$
$c$	= coefficient intermédiaire $c = \frac{K(1+e)}{\gamma_f}$ et ( $c = C_v \cdot a_v$ )	$[m^3 s \cdot kg^{-1}]$
$c_c$	= pente de la relation entre $e$ et $\log_{10} P_s$	$[m^2 \cdot N^{-1}]$
$c_k$	= pente de la relation entre $e$ et $\log_{10} K$	$[s \cdot m^{-1}]$
$\frac{\Delta e}{\Delta \log P_s} = C_c$	= indice de compressibilité	$[-]$
$C_e = \frac{C_v}{v^2}$	= coefficient de compression modifié	$[kg^2 m^{-4} s^{-1}]$
$C_{em}$	= coefficient de compression(modèle de Shirato)	$[m^2 s^{-1}]$
$C_r$	= coefficient de compression(radial)	$[m^2 s^{-1}]$
$C_v$	= coefficient de compression $C_v = \frac{K}{\gamma_f \cdot m_v}$	$[m^2 s^{-1}]$
$C_{va}$	= coefficient de compression apparent	$[m^2 s^{-1}]$
$C_{vr}$	= coefficient de compression (vertical et radial)	$[m^2 s^{-1}]$
$\frac{C_c}{1+e} \rightarrow C_\varepsilon$	= indice de compressibilité rapporté à $V_s/V_T$	$[m^3 \cdot kg^{-1}]$
$d$	= distance séparant des niveaux d'énergie minimale	$[m]$
$d_e$	= diamètre externe de l'échantillon $d_e = 2 \cdot r_e$	$[m]$

$d_c$	= diamètre hydraulique	$[-]$
$e = \frac{V_v}{V_s}$	= rapport de vide local	$[-]$
$\bar{e}$	= rapport de vide moyen $\bar{e} = \frac{1}{Z_0} \int_0^{Z_0} e dz$	$[-]$
$e_B$	= rapport de vide à la base du gâteau	$[-]$
$e_T$	= rapport de vide au sommet du gâteau	$[-]$
$e_0$	= rapport de vide initial, $t=0$	$[-]$
$E$	= énergie d'activation	$[J \cdot mole^{-1}]$
$f(d_c)$	= fonction de répartition	$[-]$
$\bar{F}$	= force de compression induisant un cisaillement	$[N]$
$g$	= accélération de la pesanteur ( $9.81 [m \cdot s^{-2}]$ )	$[m \cdot s^{-2}]$
$h(cte)$	= constante de Planck $6.6262 \cdot 10^{-34} [J \cdot s]$	$[J \cdot s]$
$h$	= rapport de contraintes effectives: $h = P_{s\infty} / P_{s0}$	$[-]$
$h_i$	= épaisseur d'une couche SPM (multicouche)	$[m]$
$i$	= gradient hydraulique $i = \partial h / \partial z$	$[-]$
$I$ (QEV)	= énergie par unité de volume	$[J \cdot m^{-3}]$
$j$	= nombre de surfaces de drainage	$[-]$
$J_n(r)$	= fonctions de Bessel de première espèce d'ordre $n$	$[-]$
$k_b$	= constante de Boltzmann, $1.38 \cdot 10^{-23} [J \cdot K^{-1}]$	$[J \cdot K^{-1}]$
$k_1, k_2$	= constante de vitesse (réaction chimique) (dimension variable suivant l'ordre de la réaction)	$[...]$
$K$	= coefficient de perméabilité	$[m \cdot s^{-1}]$
$K_h$	= coefficient de perméabilité horizontale	$[m \cdot s^{-1}]$
$K_{hf}$	= coefficient de perméabilité horizontale en fin de test	$[m \cdot s^{-1}]$
$K_{h0}$	= coefficient de perméabilité horizontale à $t=0$	$[m \cdot s^{-1}]$
$K_{h\infty}$	= coefficient de perméabilité horizontale à $t \rightarrow \infty$	$[m \cdot s^{-1}]$
$K_i$	= coefficient de perméabilité intrinsèque	$[m^2]$
$K_p$	= constante d'équilibre thermodynamique (dimension variable suivant l'ordre de la réaction)	$[...]$
$K_v = K_z$	= coefficient de perméabilité verticale	$[m \cdot s^{-1}]$
$l$	= $l = \frac{T_v}{T_c} \cdot P_c$ charge de compression proportionnelle	$[N \cdot m^{-2}]$
$m$	= entier positif $m \in [0, 1, 2, \dots, \infty[$	$[-]$
$m_v$	= coefficient de compressibilité volumique $m_v = \frac{a_v}{1+e}$	$[m^2 \cdot N^{-1}]$
$\frac{M_v + M_s}{M_s} = m_0$	= rapport initial : masse du gâteau / matière sèche	$[-]$
$M$	= masse initiale totale de l'échantillon	$[kg]$

$M_i$	$= M_i = (2m + 1)\pi/2$	$[-]$
$M_s$	$=$ masse initiale de matière sèche au sein de l'échantillon	$[kg]$
$M_v$	$=$ masse initiale de fluide au sein de l'échantillon	$[kg]$
$n = \frac{V_v}{V_T}$	$=$ porosité	$[-]$
$n$	$=$ (chap. 4) rapport des rayons externe/interne $n = \frac{r_e}{r_w}$	$[-]$
$n$	$=$ ordre d'un polynôme de lissage	$[-]$
$n$	$=$ entier $n \in [1, 3, 5, \dots, \infty[$	$[-]$
$N$	$=$ nombre d'Avogadro, $6.022 \cdot 10^{23} [mole^{-1}]$	$[mole^{-1}]$
$p$	$=$ exposant fonction puissance (lissage de courbes)	$[-]$
$p(\Delta E)$	$=$ probabilité (distribution de Boltzmann)	$[\%]$
$P$	$=$ contrainte totale exercée sur le piston	$[N \cdot m^{-2}]$
$P - P_{fr} \rightarrow P_n$	$=$ contrainte verticale nette (sans frottement latéral $P_{fr}$ )	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_c$	$=$ pression capillaire (milieux poreux insaturés)	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_c$	$=$ pression instantanée du fluide (CPC)	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_f$	$=$ pression du liquide ( $\cong$ fluide)	$[N \cdot m^{-2}]$
$\overline{P_f}$	$=$ pression moyenne du liquide pour l'ensemble du gâteau SPM	$[N \cdot m^{-2}]$
$\overline{P_f}$	$=$ pression réduite du liquide (solution numérique)	$[-]$
$P_{fh}$	$=$ pression hydrostatique	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_{fi}$	$=$ pression initiale du fluide ( $\cong$ liquide)	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_{f0}$	$=$ pression du fluide au niveau de la plaque de drainage	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_{fR}$	$=$ pression liquide de référence (solution numérique)	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_{ft}$	$=$ pression totale interstitielle	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_{f0}$	$=$ pression initiale du fluide $\cong$ constante sur toute l'épaisseur SPM	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_{f1}$	$=$ pression du fluide au niveau du piston (surface non drainante)	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_{f1, i, l}$	$=$ pression du fluide à l'interface de deux SPM	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_s$	$=$ contrainte effective locale ou pression locale du solide	$[N \cdot m^{-2}]$
$\overline{P_s}$	$=$ moyenne de la contrainte effective sur toute l'épaisseur	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_{sf}$	$=$ contrainte effective finale (en fin de compression)	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_{sp}$	$=$ précontrainte de compaction	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_{s0}$	$=$ valeur de $P_s$ au niveau de la surface drainante $z = 0$	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_{s1}$	$=$ valeur de $P_s$ au niveau du piston (non-drainant) $z = Z_0$	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_{s\infty}$	$=$ contrainte effective lorsque $t$ tend vers l'infini	$[N \cdot m^{-2}]$
$\overline{P_{os}}$	$=$ moyenne de la contrainte effective initiale	$[N \cdot m^{-2}]$
$P_i$	$=$ contrainte extérieure totale exercée sur le piston	$[N \cdot m^{-2}]$

$q$	= rapport: $q = c_c / c_k$	$[m^3 \cdot N^{-1} s^{-1}]$
$q_x$	= débit entrant dans la direction $x$	$[m^3 \cdot s^{-1}]$
$q_y$	= débit entrant dans la direction $y$	$[m^3 \cdot s^{-1}]$
$q_z$	= débit entrant dans la direction $z$	$[m^3 \cdot s^{-1}]$
$r$	= rayon	$[m]$
$\bar{r}$	= rayon réduit (solution numérique)	$[-]$
$R$ (cte)	= constant des gaz parfaits, 8.314 $[J \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}]$	$[J \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}]$
$R \rightarrow dZ / dt$	= vitesse de descente du piston $\cong$ vitesse de compaction	$[m \cdot s^{-1}]$
$r_c$	$= r_c = \frac{d\bar{e}}{dt} = Cte$ , CDC test	$[s^{-1}]$
$r_e$	= rayon externe de l'échantillon	$[m]$
$r_R$	= référence initiale, pour le rayon externe (solution numérique)	$[m]$
$R_s$	= rapport adimensionnel $R_s = T_v / T_s$	$[-]$
$r_w$	= rayon interne de l'échantillon	$[m]$
$s$	= épaisseur de la couche SPM	$[m]$
$s(\infty)$	= épaisseur à $t \rightarrow \infty$	$[m]$
SPM (MPS)	= milieu poreux saturé (saturated porous material)	
SR	= rapport des déformations aux extrémités $= \frac{\bar{\varepsilon} \text{ at } A_0 = 1}{\bar{\varepsilon} \text{ at } A_0 = 0}$	$[-]$
$SR(T_v)$	$= SR(T_v) = \frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_T}$ rapport de déformation	$[-]$
$t$	= temps	$[s]$
$T$	= température en Kelvin	$[K^\circ]$
$\bar{t}$	= temps réduit (solution numérique)	$[-]$
$t_a$	= durée d'application d'une charge	$[s]$
$t_c$	= durée d'application d'une charge constante	$[s]$
$t_R$	= référence arbitraire temps (solution numérique)	$[s]$
$T_c$	= temps réduit $T_c = \frac{C_v t_c}{Z_0^2}$	$[-]$
$T_r$	= temps réduit $T_r = \frac{C_r t}{(2 \cdot r_e)^2}$	$[-]$
$T_s$	= temps réduit	$[-]$
$T_v$	= temps réduit $T_v = \frac{C_v t}{Z_0^2}$	$[-]$
$T'$	= temps réduit $T' = Rt / Z_0$ (CDC test)	$[-]$
$U_{av}$	= taux de compression moyen de l'ensemble de la couche $Z_i$	$[-]$

$$U_{av} = \frac{(1/Z_i) \int_0^{z_i} P_{\beta} dz - (1/Z_i) \int_0^{z_i} P_f dz}{(1/Z_i) \int_0^{z_i} P_{\beta} dz}$$

$U_r$	= taux de compression moyen, cas de l'écoulement radial	$[-]$
$U_v$	= taux de compression moyen, cas de l'écoulement vertical	$[-]$
$U_{vr}$	= taux de compression moyen, écoulement radial et vertical	$[-]$
	$U_{av} = 1 - (1 - U_v)(1 - U_r)$	
$U_z$	= taux de compression local à la cote z	$[-]$
	$U_z = \frac{P_{\beta} - P_f}{P_{\beta}} = \frac{\text{fluid pressure dissipated}}{\text{initial fluid pressure}}$	
	= taux de compression au temps t = $(e_0 - e)/(e_0 - e_f)$	$[-]$
$v = \frac{1+e}{\rho_s} = \frac{V_T}{M_s}$	= volume spécifique local = volume du gâteau par unité de masse de solide	$[m^3 \cdot kg^{-1}]$
$\bar{v}$	= valeur moyenne de v pour l'ensemble du gâteau SPM	$[m^3 \cdot kg^{-1}]$
$\vec{v}$	= vitesse du fluide (notation vectorielle)	$[m \cdot s^{-1}]$
$v_f$	= vitesse apparente de la phase liquide	$[m \cdot s^{-1}]$
$\tilde{v}_f$	= vitesse réelle de la phase liquide	$[m \cdot s^{-1}]$
$v_F$	= valeur finale de v	$[m^3 \cdot kg^{-1}]$
$v_0$	= valeur initiale de v	$[m^3 \cdot kg^{-1}]$
$V_f$ ou $V_v$	= volume du liquide (des pores) au sein du SPM	$[m^3]$
$v_s$	= vitesse apparente de la phase solide	$[m \cdot s^{-1}]$
$\tilde{v}_s$	= vitesse réelle de la phase solide	$[m \cdot s^{-1}]$
$V_s$	= volume de solide	$[m^3]$
$V_T$	= volume total $V_T = V_s + V_v$	$[m^3]$
$V_v$ ou $V_f$	= volume des pores (du liquide) au sein du SPM	$[m^3]$
$w = \frac{V_{s(z=z)}}{A}$	= volume de solide par unité de surface filtrante à la distance z de la surface filtrante (Shirato)	$[m^3 \cdot m^{-2}]$
$W = \frac{V_s}{A}$	= rapport : volume de solide total / surface filtrante	$[m^3 \cdot m^{-2}]$
X	= Taux de compactage $1 + e_0 / 1 + e = V_T / V_{T \text{ initial}}$	$[-]$
$Y_n(r)$	= fonctions de Bessel de deuxième espèce d'ordre n	$[-]$
z	= distance à partir de la surface de drainage	$[m]$
$z(a)$	= coordonnée lagrangienne ou spatiale $z(a) = \int_0^a \frac{1}{1+e(a',0)} da'$	$[m^3/m^2]$
$\bar{z}$	= hauteur SPM réduite (solution numérique)	$[-]$
$z_R$	= hauteur initiale de référence du gâteau SPM (solution numérique)	$[m]$



$Z$	= épaisseur totale du gâteau	[m]
$Z_i$	= hauteur initiale du gâteau (2 surfaces de drainage)	[m]
$Z_o$	= hauteur initiale du gâteau	[m]
$Z_o'$	= hauteur fictive initiale du gâteau (cas des multicouches)	[m]

## Lettres grecques

$\alpha$ ( <i>alpha</i> )	= résistance spécifique locale du gâteau	[m · kg <sup>-1</sup> ]
$\alpha'$	= rapport $T_v/T_c$	[-]
$\gamma_f$ ( <i>gamma</i> )	= poids volumique du liquide: pour l'eau 9.81 [kN/m <sup>3</sup> ]	[N · m <sup>-3</sup> ]
$\gamma_s$	= poids volumique du solide	[N · m <sup>-3</sup> ]
$\Gamma(n)$	= fonction Gamma $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r} dr$	[-]
$\partial s$ ( <i>delta</i> )	= variation de l'épaisseur au temps $t$	[m]
$\Delta A_0$	= intervalle, distance (adimensionnel)	[-]
$\Delta H$	= enthalpie $\Delta H = \Delta E$	[J · mole <sup>-1</sup> ]
$\Delta \bar{r}$	= différence de rayon réduit (solution numérique)	[-]
$\Delta \bar{t}$	= intervalle de temps réduit (solution numérique)	[-]
$\Delta T'$	= intervalle de temps (CDC)	[-]
$\Delta \bar{z}$	= différence de hauteur réduite (solution numérique)	[-]
$\varepsilon$ ( <i>epsilon</i> )	= déformation vraie	[-]
$\varepsilon$	= déformation axiale $\partial \varepsilon = \frac{\partial Z_0}{Z_0}$ ,	[-]
$\bar{\varepsilon}$	= déformation apparente	[-]
$\varepsilon_B$	= déformation à la base du gâteau SPM	[-]
$\varepsilon_E$	= déformation eulerienne $\varepsilon_E = \varepsilon_L / (1 - \varepsilon_L) = (Rt / (Z_0 - Rt))$	[-]
$\varepsilon_H$	= déformation (Hooke)	[-]
$\varepsilon_K$	= déformation (Kelvin)	[-]
$\varepsilon_L$	= déformation lagrangienne $\varepsilon_L = (Rt / Z_0)$	[-]
$\varepsilon_T$	= déformation au sommet du gâteau SPM	[-]
$\varepsilon_{\infty}$	= déformation : $t \rightarrow \infty$	[-]
$\lambda$ ( <i>lambda</i> )	= distance séparant des positions successives d'équilibre	[m]
$\lambda_k$	= racine fonction de Bessel d'ordre $n$	[-]

$\mu(mu)$	= viscosité du fluide exprimé	$[N \cdot m^{-2} \cdot s]$
$\nu(mu)$	= fréquence d'activation	$[s^{-1}]$
$\nu(+)$	= accroissement de la fréquence d'activation	$[s^{-1}]$
$\nu(-)$	= décroissement de la fréquence d'activation	$[s^{-1}]$
$\xi(ksi)$	= coordonnée eulerienne ou convective	$[m]$
$\rho_f(rho)$	= masse volumique du fluide	$[kg \cdot m^{-3}]$
$\rho_s$	= masse volumique du solide	$[kg \cdot m^{-3}]$
$\tau(tau)$	= contrainte non linéaire	$[N \cdot m^{-2}]$
$\Phi_s \left( \begin{smallmatrix} \rightarrow \\ \nu \end{smallmatrix} \right) (phi)$	= $\Phi_s \left( \begin{smallmatrix} \rightarrow \\ \nu \end{smallmatrix} \right) = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{N}_u dS$ flux total à travers la surface S	$[m \cdot s^{-1} \cdot m^2]$



---

## Références

---

*Parmi les 700 références répertoriées dans ce mémoire certaines ont été directement fournies par les auteurs au cours de diverses rencontres, il convient dans ce cas de les contacter directement pour examiner la disponibilité de copies éventuelles.*

### Références les plus utilisées

BARRON R.A. Consolidation of fine-grained soils by drain wells. American Society of Civil Engineers, 811-835, (1947).

CRANK J. The Mathematics of Diffusion. Oxford Science Publications, (1973).

EYRING H. Viscosity, plasticity and diffusion as examples of absolute reaction rates. J. Chem. Phys. (4) April (1936), 283-291.

HARPER J.M. Extrusion of Foods. CRC (I), (1987).

HILDEBRAND F.B. Advanced Calculus for Applications. Prentice-Hall, (1975).

PELEG M. Physical characteristics of food powders. AVI Publishing Co, Westport CT, (1983).












SPIEGEL M. Formules et Tables de Mathématiques. Schaum, (1974).

SCHEIDEIGER A.E. The Physics of Flow through Porous Media. University of Toronto Press, (1974).

VILLERMAUX J. Génie de la réaction chimique : Conception et fonctionnement de réacteurs. Tec & Doc (1982).



## Références classées

-  COMPRESSION-RELAXATION : APPROCHE TRADITIONNELLE PRINCIPALEMENT BASEE SUR LA MECANIQUE DES FLUIDES APPLIQUEE A L'ECOULEMENT DANS LES MILIEUX POREUX. P. 208
-  COMPRESSION - RELAXATION : APPROCHE RHEOLOGIQUE BASEE SUR LA DEFORMATION DES MATERIAUX ANISOTROPES. P. 216
-  CONSOLIDATION : APPROCHE BASEE SUR LA MECANIQUE DES SOLS. P. 221
-  COMPRESSION - DESHYDRATATION APPLIQUEE A L'INDUSTRIE SUCRIERE ET AU RECYCLAGE DES PULPES INCLUANT EGALEMENT LA DESHYDRATATION MECANIQUE DES FOURRAGES ET DES BOUES RESIDUAIRES. P. 225
-  COMPRESSION - DESHYDRATATION APPLIQUEE A L'INDUSTRIE DU PAPIER. P. 227
-  COMPRESSION - DESHYDRATATION APPLIQUEE A LA PRODUCTION DE PRODUITS ALIMENTAIRES EN PARTICULIER DES JUS DE FRUIT. P. 229
-  COMPRESSION - FILTRATION : PROCEDES ET EQUIPEMENTS. P. 230
-  FILTRATION : APPROCHE TRADITIONNELLE. P. 235
-  FILTRATION : SEDIMENTATION - DRAINAGE ET ASPECTS CARACTERISATION DES PARTICULES. P. 241
-  PRESSAGE A VIS ET EXTRUSION. P. 243
-  DESHYDRATATION : ASPECTS ECONOMIQUES ET ENERGETIQUES. P. 245



**COMPRESSION-RELAXATION : APPROCHE TRADITIONNELLE PRINCIPALEMENT BASEE SUR LA MECANIQUE DES FLUIDES APPLIQUEE A L'ECOULEMENT DANS LES MILIEUX POREUX.**

ABBOTT G.M. & NASON D. Role of press wall friction in the high-density compression of wool bales. *Textile Research Journal* 56, N° 12, 715-721, (1986).

BALUAIS G., LECLERC D., MOLL M. & LENOEL M. Washing and compression dewatering of brewing mash. European Brewery Convention Symposium on wort production, Maffliers, April 1986, Monograph XI, (1986).

BALUAIS G., LECLERC D. & REBOUILLAT S. Evaluation de la résistance spécifique des boues floculées lors de la déshydratation par compression mécanique. *Filtra* 84, Paris, (1984).

BALUAIS G., REBOUILLAT S., LECLERC D. & DODDS J. Modélisation of compression dewatering and the application to filter design. *Solids/Liquids separation practice*. Leeds (England), 32-41, (1984).

BANKS P.J. Theory of constant-rate expression and subsequent relaxation. 12th Australian Chemical Engineering Conference, Melbourne, (1984).

BEAR J. Dynamics of fluid in porous media. Elsevier, New York, (1972).

BEAVERS C., SPARROW A., HAJJI A. & WITTENBERG M. Fluid flow through a class of highly deformable porous media. *Journal of Fluids Engineering ASME* 103 (9), 432-460, (1981).

BLONDEL J.M. Modélisation informatique de l'opération de filtration-compression. D.E.A., Génie des Procédés, INPL Nancy, (1982).

BORODULYA V.A., TEPLITSKY Y.S., YEPANOV Y.G. & MARKEVICH I.I. Heat transfer between a surface and an infiltrated bed of solid particles. *Int. J. Heat Mass Transfer* 32 (9), 1595-1604, (1989).

CARLETON A.J. Optimization of dewatering filters. *Journal of Separation Proc. Technology* 3 (4), 14-20, (1982).

CHARPENTIER J.C. Hydrodynamics of two phase flow through porous media. *Journal of Powder Bulk Solids Technology* 2, 53-60, (1978).

COLE D.M. Grain size and the compressive strength of ice. U.S. Army Engineering Laboratory, Hanover, New Hampshire.

DELL C.C. & KELEGHAN T.H. The dewatering of polyclay suspensions. *Powder Technology* 7, 189-204, (1973).

DODDS J., BALUAIS G., REBOUILLAT S. & LECLERC D. Diffusion Theories for Dewatering Practice: Modelling compression dewatering of filter cakes. Research Workshop held at Warren Spring Laboratory, Stevenage, Jan. (1985).

DODDS J., BALUAIS G., REBOUILLAT S. & LECLERC D. Diffusion Theories for dewatering Practice: Modelling Compression Dewatering of Filter Cakes. Research Workshop, Warren Spring Laboratory, Stevenage, Jan. (1985).

DODDS J.A. The pore size distribution and dewatering characteristics of packed beds and filter cakes. PhD Thesis, Loughborough University of Technology, England, (1968).

DUAN L. & HEILSCHER K. Berechnung des Gaseinschlusses in Früchten. *Lebensmittelindustrie* 25, 223-224, (1978).



FAM D, DODDS J. & LECLERC D. Déshydratation de résidus d'extraction de mines de phosphate par compression mécanique. UNESCO/ANSTI Chemical engineering subnetwork disciplinary area meeting, 20-23 April 1986, Lagos, (1986).

FLOYD S.L., KOEGEL R.G. & BRUHN H.D. Press throughput and energy input as affected by pulp reorientation. Transactions ASAE 22 (1), 27-29 & 34, (1979).

GOTO K. & SATO A. Compression characteristics of alum sludge and pressure loss in the cake under constant rate dewatering. Wat. Supply 4, 367-376, (1986).

GRACE H.P. Resistance and compressibility of filter cakes. Chemical Engineering Progress. 49, 303-367, (1953).

GRANGER J., DODDS J., LECLERC D. & MIDOUX N. Flow and diffusion of particles in a channel with one porous wall: polarisation chromatography. Chemical Engineering Science, (1986).

GRAY V.R. The dewatering of fine coal. Journal of Institute of Fuel 206, 96-108, (1958).

HAIGHT J.R. Process optimization for dewatering coagulated potato juice protein. Thesis outline, Dpt. Food & Agricultural Eng. UMass, Amherst, (1979).

HAIGHT J.R., ROSENAU J.R. & WHITNEY L.F. Process optimization for dewatering coagulated potato juice protein. American Society of Agricultural Engineers, (1977).

HANRAHAN E.T. Lateral stress in one-dimensional consolidation. Provided by the author.

HEILSCHER K. & STEER U. Neues Verfahren zur Preßbarkeitsbestimmung von Obstmaischen und ähnlichen Gütern. Lebensmittelindustrie 29, 177-179, (1982).

INUJIMA K. & TOKUNAGA K. Belt press filter - Dewatering principle and application of its new technologies. 4th World Filtration Congress, Anvers (1986).

KAWAKITA K. & LÜDDE K.H. Some considerations on powder compression equations. Powder Technology 4, 61-68, (1970/71).

KIM K.H., SUYITNO T. & JINDAL V.K. Factors influencing the pressing and reconstitution characteristics of peanuts. Journal of Food Science 50, 232-237, (1985).

KOEGEL R.G. & STRAUB R.J. Evaluation of a cone press for forage fractionation. American Society of Agricultural Engineers, (1981).

KOEGEL R.G., FOMIN V.I. & BRUHN H.D. Cell rupture properties of alfalfa. American Society of Agricultural Engineers 16 (4), 712-716, (1973).

KÖRMENDY I. Fundamentals of mechanical expression with aspects of generalization of the expression theory. Progress in Food Engineering, Cantarelli & Peri editors, 47-59, (1980).

KÖRMENDY I. Experiments for the determination of the specific resistance of comminuted and pressed apple against its own juice. Acta Alimentaria 8 (4), 321-342, (1979).

KÖRMENDY I. Review of research work in the field "dejuicing of fruit by pressing" with reference to literature. Confructa 20 (2/3), 107-111, (1975).

KÖRMENDY I. A préselt gyümölcszúzat fizikai jellemzői, almapréselési kísérletek újabb eredményei II. Konzerv- és Paprikaipari Kutató Intézet, 109-119, (1974).

KÖRMENDY I, GYÖNÖS K. & SZLADOVITS J. Almafajták összehasonlító vizsgálata préselhetőség szempontjából. Konzerv- és Paprikaipari Kutató Intézet, 17-19, (1974).

- KÖRMENDY I. Contribution to the three-dimensional pressing theory and its one-dimensional application. *Acta Alimentaria* 3 (1), 93-110, (1974).
- KÖRMENDY I. New apparatus to study the pressing process, experimental and evaluation methods. Correlation between pressure and equilibrium juice yield in the case of apple pulp. *Acta Alimentaria* 1 (3-4), 315-340, (1972).
- KÖRMENDY I. A pressing theory with validating experiments on apples. *Journal of Food Science* 29 (5), 631-634, (1964).
- KURITA T. & SUWA S.I. Latest technical tendencies with respect to the automatic expression filter press. 4th World filtration Congress, Anvers, (1986).
- LANOISELLE J.L. Contribution à l'étude du pressage hydraulique des graines oléoprotéagineuses. Mécanisme de pressage et modélisation. Thèse de Doctorat de l'Université Paris XII (1995).
- LANOISELLE J-L., VOROBYOV E. & BOUVIER J-M. Modélisation du pressage à pression constante. Cas des produits à structure cellulaire. *Entropie* 186, 39-50, (1994)
- LECLERC D., BALUAIS G. & REBOUILLAT S. Low pressure compression dewatering. Design and optimization of a press-filter. 4th World Filtration Congress, Anvers, (1986).
- LECLERC D. & REBOUILLAT S. Mathematical Models and Design Methods in Solid-Liquid Separation : Dewatering by compression. NATO ASI Series, 356-391, (1982-1985).
- LECLERC D. & MINERY E. Comparaison du comportement des boues floculées et non floculées lors de leur déshydratation par compression mécanique. *Trib. Cebedeau* 33, 441-449, (1980).
- LECLERC D., MINERY E. & PROST C. Dewatering of flocculated suspensions by filtration and compression. Filtration Society Meeting UMIST Manchester, (1979).
- LECLERC D. & THOUROT J.M. Residence time studies in filter cake washing. 2nd World Filtration Congress. 335-363, Uplands Press Ltd, Croydon, (1979).
- LEE D.J. & WANG C.H. Theory of cake filtration and consolidation and implications to sludge dewatering. *Water Res* 34 (1), 1-20, (2000).
- LE GOFF P. *Energétique industrielle. Tome 2, Technique & Documentation*, Lavoisier, Paris, (1980).
- LEVENSPIEL O. *The Chemical reactor Omnibook*<sup>+</sup> OSU Ed. (Corvallis OR), (1984).
- MACRON J.Y., MOLL M., BALUAIS G. & LECLERC D. Application du génie chimique à l'optimisation d'une salle de brassage. European Brewery Convention Congress 1983, 425-432, Londres, (1983).
- MATHERON G. L'émergence de la loi de Darcy. *Annales des Mines* 5-6, 11-16, (1984).
- MELLOR M. & COLE D.M. Stress/strain/time relations for ice under uniaxial compression. *Cold Regions Science and Technology* 6, 207-230, (1983).
- MUNRO P.A. & VU J.T. Optimal operation of a roller press for the mechanical dewatering of acid casein curd: pilot-scale and industrial-scale experiments. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, 22 (4) 378-384, (1989).
- MURASE T., IWATA M. & LEE W.D. Variable pressure / variable rate expression of semisolid materials with medium resistance. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 23 (4), 485-490, (1990).
- MURASE T., IWATA M., ADACHI T. & WAKITA M. Stress relaxation of expressed cake. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 22 (6), 655-659, (1989).

- MURASE T., IWATA M., ADACHI T., GMACHOWSKI L. & SHIRATO M. An evaluation of compression-permeability characteristics in the intermediate concentration range by use of centrifugal and constant rate compression techniques. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 22 (4), 378-384, (1989).
- MURASE T., IWATA M., WAKITA M., ADACHI T., HAYASHI N. & SHIRATO M. Expansion of consolidated material after release of load. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 22 (2), 195-199, (1989).
- MURASE T., IWATA M. & KATO I. Determination of specific resistance of highly compressed cake by use of expression data. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 21 (2), 204-206, (1988).
- MURASE T., IWATA M., WAKITA M., ADACHI T., HAYASHI N. & SHIRATO M. Variable-pressure / variable-rate expression of semisolid materials. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 20 (6), 603-608, (1987).
- MURASE T., HAYASHI N., SUZUKI H. & SHIRATO M. Two-dimensional expression on a cylindrical filter element. *International Chemical Engineering* 25 (1), 130-137, (1985).
- MURASE T., YAHASHI N., IWATA M., ITOH K. & SHIRATO M. Effect on a locally concentrated, repeated load on the expression of a semisolid material. *International Chemical Engineering* 25 (3), 534-541, (1985).
- NGODDY P.O. The expression of fluid from biological material . The radial flow case. Progress report, University of Massachusetts, (1976).
- NOVAK J.T., HAUGAN B.E. & KNOCKE W.R. Dewatering of sludges that penetrate through filtering media. *Water Sci. and Technol.* 28 (1), (1993).
- NOVAK J.T., AGERGAEK M.L., SORENSEN B.L. & HANSEN J.A. Conditioning, filtering, and expressing waste activated sludge. *J. Environ. Eng.*, 816-824, Sept, (1999).
- O'MEARA G.M. & MUNRO P.A. The precipitation and shrinkage of acid casein curd : a preliminary study. *New Zealand Journal of Dairy Science and Technology* 17, 147-159, (1982).
- PEARCE K.W. Vibratory filtration and expression. 4th World Filtration Congress, Anvers, (1986).
- POMINSKI J., SPADARO J.J. & BAXLEY J.R. Pressing peanuts -- Effects on splits on oil removal. Provided by the authors.
- POPOV I. & VAKRILOV V. Mathematical modelling of the cocoa butter pressing process. *Nauchni Trudove* 23 (2), 247-255, (1976).
- REBOUILLAT S., CAMPANELLA O.H. & LECLERC D. The expression under constant rate of strain and the subsequent relaxation. 7th World Filtration Congress, Budapest, 112-121, (1996).
- REBOUILLAT S., SCHWARTZBERG H.G. & LECLERC D. The expression of biological and food materials under constant rate of strain. 6th World Filtration Congress, Nagoya, 382-387, (1993).
- REBOUILLAT S., SCHWARTZBERG H.G. & LECLERC D. The expression of biological and food materials under constant rate of strain., *Journal of Chemical Engineering of Japan* 29 (1), 29-36, (1993).
- REBOUILLAT S., CAMPANELLA O.H., SCHWARTZBERG H.G. & LECLERC D. An Approach to the Pressing Mechanism Involved During Screw Expression of Food Products. 5th World Filtration. Cong, Nice, France, 5-8 June, 1990
- REBOUILLAT S., CAMPANELLA O.H. & PELEG M. Mechanical characteristics of raw and processed peat. *Powder Technology* 51, 273-275, (1987).

REBOUILLAT S. & SCHWARTZBERG H.G. Food Engineering and Process Application : Dynamic and static filtration resistances during mechanical expressions involving foods. LE MAGUER M. & JELEN P. Ed., Elsevier, (2), 281-292,(1986).

REBOUILLAT S., LECLERC D. & BALUAIS G. Nouvelles perspectives de la filtration-pressage dans les I.I.A. Communication personnelle.

REBOUILLAT S., LECLERC D. & BALUAIS G. La déshydratation par filtration-pressage. Modélisation de la compression unidirectionnelle. Entropie 121, 13-29, (1985).

REBOUILLAT S. Déshydratation par filtration-pressage. Modélisation de la compression unidirectionnelle de produits humides divers. Recherche d'optimums techniques, économiques et énergétiques d'opération de pressage. Thèse de Docteur-Ingénieur, INPL, (1983).

REBOUILLAT S., LECLERC D. & BALUAIS G. Filtration et Pressage. Etude du comportement à la compression mécanique de suspensions floculées, boues résiduaires, produits agro-alimentaires. Filtra 82, Paris, 303-330, (1982).

REBOUILLAT S. Modélisation de la déshydratation par compression mécanique de suspensions industrielles floculées ou non. D.E.A., INPL, (1981).

REICHMAN B. & TOMAS J. Expression behavior of fine suspensions and the consolidated cake strength. J., Powder Tech. 121, 182-189, (2001).

ROSENBROCK H.H. An automatic method for finding the greatest or the least value of a function. Computer Journal 3, 175-180, (1960).

RUSHTON A. & ARAB M.A.A. Internal pressure variations during the filtration and dewatering of thick cakes. Filtration & Separation May-June 1986, 181-186.

SATOH T. & ATSUMI K. Forced expression of liquid from pastry mixture of liquid and fine solid particles and its numerical solution by method of moments. Journal of Chemical Engineering of Japan 3 (1), 92-98, (1970).

SCHWARTZBERG H.G., REBOUILLAT S. HUMBLLOT J. & D., KIM K-H. Analysis of Juice Expression from Apples. Proceedings, 5th World Congress of Chemical Engineering, Vol. II, San Diego, California, July 14-18, 1996, p. 221-226, AIChE, (1996).

SCHWARTZBERG H.G., HUANG B-W. & PERI C. Modelling mechanical expression of fluids from cellular biological solids. AIChE annual meeting, San Francisco CA, (1994).

SCHWARTZBERG H.G., ROSENAU J. & RICHARDSON G. The removal of water by expression. AIChE Symposium Series 73 (163), 177-190, (1977).

SCHWARTZBERG H.G. Physical Properties of Food : Expression-related properties. Ed. Peleg M. & Bagley E.B. AVI Publishing Company Inc. (1983).

SCHWARTZBERG H.G., HUANG B., ABULARACH V. & ZAMAN S. Force requirements for water and juice expression from cellular foods. AIChE meeting, Boston, Aug. 20, (1984).

SCHWARTZBERG H.G., VALLON J. & HUMBLLOT D. Juice expression characteristics of granny smith apples. Provided by the authors.

SCHWARTZBERG H.G., COLLYER T. & WHITNEY L.F. Alfalfa protein recovery by combined imbibition and expression. AIChE Symposium Series 74 (172), 166-174, (1978).

SCHWARTZBERG H.G. Expression of fluid from cellular plant material. Solid-liquid Separation Applications and Equipment, 675-681, (1977).

- SHIRATO M., MURASE T., IWATA M. & HAYASHI N. Deliquoring by expression - part 2: variable-pressure expression. *Drying Technology* 5(1), 1-23, (1987).
- SHIRATO M., IWATA M., WAKITA M., MURASE T. & HAYASHI N. Constant-rate expression of semisolid materials. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 20 (1), 1-6, (1987).
- SHIRATO M., MURASE T., IRITANI E. & NAKATSUKA S. Mechanism of filter cake dewatering by use of difficult-to-filter slurries. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 20 (5), 535-538, (1987).
- SHIRATO M., MURASE T., IRITANI E. & NAKATSUKA S. Analysis of consolidation process in filter cake dewatering by use of difficult-to-filter slurries. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 19 (6), 587-592, (1986).
- SHIRATO M., IRITANI E. & NAKATSUKA S. Filter-cake dewatering by permeation of non-Newtonian fluids and by use of difficult-to-filter slurries. 4th World Filtration Congress, Anvers, (1986).
- SHIRATO M., MURASE T., IRITANI E. & NAKATSUKA S. Filter cake dewatering by formation of bentonite skin layer on cake surface. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 18 (4), 372-376, (1985).
- SHIRATO M., MURASE T., IRITANI E., IWATA M. & HYUNG CHO J. Deliquoring by expression due to changing filtrate flow pattern. *Filtration & Separation* July/Aug. 1985, 250-254.
- SHIRATO M. Recent progresses in filtration and expression - theories and practice. *Proceedings 3rd Congress Asian Pacific Confederation of Chemical Engineering*, Bangkok, (1984).
- SHIRATO M., MURASE T. & MORI H. Centrifugal dehydration of a packed particulate bed. *International Chemical Engineering* 23 (2), 298-306, (1983).
- SHIRATO M., MURASE T. & IRITANI E. Cake-filtration - A technique for evaluating compression-permeability data at low compressive pressure. *Filtration & Separation* Sept./Oct. 1983, 404-406.
- SHIRATO M., MURASE T. & HAYASHI N. Expression theory and its practical utilization. 3rd World Filtration Congress, (1982).
- SHIRATO M., MURASE T. & ATSUMI K. Industrial expression theories and optimization of membrane-compression type filter-press operation. 2nd Chemical Engineering World Congress, Montréal, (1981).
- SHIRATO M., MURASE T. & MORI H. Centrifugal drainage of granular beds. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 7 (4), 408-414, (1981).
- SHIRATO M. Simplified computational method for constant pressure expression of filter cakes. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 13 (5), 397-401, (1980).
- SHIRATO M., MURASE T. & ATSUMI K. Optimization of filter-press operation with membrane compression mechanism. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 6 (6), 643-650, (1980).
- SHIRATO M., MURASE T., ATSUMI K., ARAGAKI T. & NOGUCHI T. Industrial expression equation for semi-solid materials of solid-liquid mixture under constant pressure. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 12 (1), 51-55, (1979).
- SHIRATO M., MURASE T. & ATSUMI K. Simplified equation for constant pressure expression of semisolid materials and filter cakes. 2nd World Filtration Congress, London, (1979).
- SHIRATO M., ARAGAKI T. & MANABE A. Electroforced sedimentation of thick clay suspensions in consolidation region. *AIChE Journal* 25 (5), Sept., 855-863, (1979).

- SHIRATO M., MURASE T., HAYASHI N. & NOGUCHI T. Effects on expression-rate increase of solid-liquid mixture with inserted strings. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 11 (4), 315-318, (1978).
- SHIRATO M., MURASE T., ATSUMI K., NAGAMI T. & SUZUKI H. Creep constants in expression of compressible solid-liquid mixtures. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 11 (4), 334-336, (1978).
- SHIRATO M., MURASE T., HAYASHI N. & FUKUSHIMA T. Constant pressure expression of solid-liquid mixtures with medium resistance. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 10 (2), 154-159, (1977).
- SHIRATO M., MURASE T. & HAYASHI N. Filter-cake dewatering by mechanical expression. 2nd Pacific Chemical Engineering Congress, (PAChEC' 77), volume I, 667-674, (1977).
- SHIRATO M., MURASE T., TOKUNAGA A & YAMADA O. Calculation of consolidation period in expression operations. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 7 (3), 229-231, (1974).
- SHIRATO M., MURASE T., MORIDERA H. & URYU M. Expression of unsaturated mixtures under constant pressure. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 7 (2), 135-139, (1974).
- SHIRATO M., MURASE T. & ARAGAKI T. Analysis of expression operation. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 4 (3), 263-268, (1971).
- SHIRATO M., MURASE T. & ARAGAKI T. Slurry deliquoring by expression. *Dechema-Monographien* 74, 9-39.
- SHIRATO M., MURASE T., NEGAWA M. & MORIDERA H. Analysis of expression operations. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 4 (3), 263-268, (1971).
- SHIRATO M., KATO H., KOBAYASHI K. & SAKAZAKI H. Analysis of settling of thick slurries due to consolidation. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 3 (1), 98-104, (1970).
- SHIRATO M., MURASE T., NEGAWA M. & SENDA T. Fundamental studies of expression under variable pressure. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 3 (1), 105-112, (1970).
- SHIRATO M., MURASE T., KATO H. & FUKAYA S. Fundamental analysis for expression under constant pressure. *Filtration & Separation* 7 (3), 277-282, (1970).
- SHIRATO M., MURASE T., FUKAYA S. & KATO H. Studies on expression of slurries under constant pressure. *Kagaku Kogaku* 31 (11), 1125-1131, (1967).
- SHIRATO M., KATO H. & MURASE T. Studies on expression - Fundamental analysis for mechanism of dehydration by expression. 43 (4), 255-265, (1965).
- SMOLLEN M. Dewaterability of municipal sludges. 2: Sludge characterization and behaviour in terms of SRF and CST parameters. *Water SA*, 12 (3), 133-138, (1986).
- SORENEN P.B. & HANSEN J.A. Extreme solid compressibility in biological sludge dewatering. *Water Sci. Technol.* 28 (1), (1993).
- SRENSSEN P.B., MOLDRUP P. & HANSEN J.A. Filtration and expression of compressible cakes. *Chem. Eng. Sci.*, 51 (6), 967-979, (1996).
- STEFANOVIC D.C. & RISTIC M.M. The consolidation of dispersive powders during the pressing process. *Powder Technology* 30, 37-50, (1981).
- STRAUB R.J. & KOEGEL R.G. Evaluation of a cone press for forage fractionation. ASAE Winter Meeting Chicago IL, (1981).

- SVAROVSKY L. Solid-liquid separation. Ed. B.H., (2000)
- TILLER F.M. & YEH C.S. The role of porosity in filtration - Part XI: filtration followed by expression. *AICHe Journal* 33 (8), 1241-1256, (1987).
- TILLER F.M., CRUMP J.R. Recent advances in compressible cake filtration theory. Mathematical models and design methods in solid-liquid separation. *NATO ASI Series* 88, 3-24, (1985).
- TILLER F.M. & CRUMP J.R. Solid-liquid separation : an overview. *CEP* October 1977, 65-75, (1977).
- TILLER F.M., HAYNES S. & LU W.M. The role of porosity in filtration. Effect of side wall friction in compression permeability cells. *AICHe Journal* 18 (1), 13-20, (1972).
- TONDEUR D. Génie des procédés : Science des Séparations. Tec. et Doc. Ed., chap. 4, 137-191, (1993).
- TONDEUR D. Unifying concepts in non-linear unsteady processes. Solidary travelling waves. *Chemical Engineering Science*, (1987).
- TONDEUR D. & KVALEN E. Equipartition for entropy production : transfer and separation processes. *Ind. Chem. Eng. Res.*, (26), 50, (1987).
- TOSUM I. Mathematical formulation of cake filtration for deformable solid particles. *Chemical Engineering Science* 40 (4), 673-674, (1985).
- TOSUN I., WILLIS M.S. & CHASE G.G. Analysis of drag and particulate stress in porous media flow. 50 (12), *Chem. Eng. Sci.*, 1961-1969, (1995).
- VALLON J., HUMBLLOT D. & SCHWARTZBERG H.G. Juice expression characteristics of granny smith apples. Provided by authors.
- VILLERMAUX J. Génie de la réaction chimique : Conception et fonctionnement de réacteurs. Tec & Doc (1982).
- VOILLEY A., ROSENAU J.R. & SCHWARTZBERG H.G. Diffusivity and activity of water in aqueous solutions. 4<sup>th</sup> ICFE, Engineering and Food, Edmonton, Canada, (1984) Chap 17 in "Food Engineering and Process Applications, Vol 1, Transport Phenomena" M. Le Maguer and P. Jelen, (eds), Elsevier Applied Science Publ., p. 177-187, (1986).
- VOROBIEV E. Contribution à l'étude des opérations de filtration et de pressage dans les industries agro-alimentaires. Mémoire de l'Université de Technologie de Compiègne (1997).
- VOROBIEV E., ANIKEEV J. & SAMOLYOTOV V. Dynamics of filtration and expression : new methods for combined analysis and calculation of the processes due to account of the cake consolidation dynamics and the filter medium compressibility. *Chem. Engng. Proc.*, 32, (1993).
- VU J.T. & MUNRO P.A. Press dewatering of casein curd. *New Zealand Journal of Dairy Science and Technology* 16, 265-272, (1981).
- WAKEMAN R.J. The performance of filtration post-treatment processes. 1. The prediction and calculation of cake dewatering characteristics. *Filtration & Separation* Nov./Dec.1979, 655-660.
- WAKEMAN R.J., RUSHTON A. & BREWIS L.N. Residual saturation of dewatered filter cakes. *The Chemical Engineer* Oct. 1976, 668-670.
- WAKEMAN R.J. Low pressure dewatering kinetics of incompressible filter cakes. 1. Variable total pressure loss. *Int. J. Miner. Process* 5, 379-393, (1979).

WAKEMAN R.J. Low pressure dewatering kinetics of incompressible filter cakes. 2. Constant total pressure loss. *Int. J. Miner. Process* 5, 395-405, (1979).

WARD A.S. Filtration research in Japan - the work of Mopei Shirato. *The Chemical Engineer* Jan.1980, 27-30 & 37.

WHITAKER S. Flow in Porous Media I, A theoretical derivation of Darcy's law. 1, 3-25, (1986).

YUKAWA H., YOSHIDA H., KOBAYASHI K. & HAKODA M. Fundamental study on electroosmotic dewatering of sludge at constant electric current. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 9 (5), 402-407, (1976).

ZHONGLAI W. Analysis of two-dimensional expression of semi-solid materials on cylindrical surfaces. *Chemical Engineering Science* 44 (4), 895-899, (1989).

### **COMPRESSION - RELAXATION : APPROCHE RHEOLOGIQUE BASEE SUR LA DEFORMATION DES MATERIAUX ANISOTROPES.**

BAGLEY E.B. Large deformations in food testing and processing. Ed. Peleg M. & Bagley E.B. AVI Publishing Company Inc. (1983).

BASHFORD L.L. & WHITNEY R.W. A computer program for determining creep and relaxation models. 1973 ASAE annual meeting, Lexington Kentucky, (1973).

BOURNE M.C. Effect of water activity on texture profile parameters of apple flesh. *Journal of Texture Studies* 17, 331-340, (1986).

CALZADA J.F. & PELEG M. Mechanical interpretation of compressive stress-strain relationships of solid foods. *Journal of Food Science* 43, 1087-1092, (1978).

CAMPANELLA O.H. & PELEG M. On food compression by soft machines. *Journal of Texture Studies* 19, 39-50, (1988).

CAMPANELLA O.H. & PELEG M. Note on the relationship between the dynamic viscosity and the relaxation modulus of viscoelastic liquids. *Journal of Rheology* 31 (6), 511-513, (1987).

CAMPANELLA O.H. & PELEG M. Analysis of the transient flow of mayonnaise in a coaxial viscometer. *Journal of Rheology* 31 (6), 439-452, (1987).

CAMPANELLA O.H. Rheological behavior of semi-liquid food. PhD thesis of the University of Massachusetts, (1987).

CARDELLO A.V., MALLER O., KAPSALIS J.G., SEGARS R.A., SAWYER F.M., MURPHY C. & MOSKOWITZ H.R. Perception of texture by trained and consumer panelists. *Journal of Food Science* 47 (4), 1186-1197, (1982).

CHANG H. & LODGE A.S. Comparison of rubber-like liquid theory with stress-growth data for elongation of a low density branched polyethylene melt. *Rheol. Acta* 11 (1), 127-219, (1972).

CHEN P. & FRIDLEY R.B. Analytical method for determining viscoelastic constants of agricultural materials. *Transactions of the ASAE*, 1103-1106, (1972).

CHU C.F. & PELEG M. The compressive behavior of solid food specimens with small height to diameter ratios. *Journal of Texture Studies* 16, 451-464, (1985).

COHEN S.H., SEGARS R.A., CARDELLO A., SMITH J. & ROBBINS F.M. Instrumental and sensory analysis of the action of catheptic enzymes on flaked and formed beef. *Food Microstructure* 1, 99-105, (1982).



- DE BAERDEMAEKER J.G. & SEGERLIND L.J. Determination of the viscoelastic properties of apple flesh. Transactions of the ASAE, 346-353, (1976).
- DICK J.S. & PAWLOWSKI H. Rubber characterization by applied strain variations using the rubber process analyzer. Rubber World Jan. 1995, 20-26.
- DOBBS A.J., PELEG M. & MUDGETT R.E. Some physical characteristics of active dry yeast. Powder Technology 32, 63-69, (1982).
- EYRING H. Viscosity, plasticity and diffusion as examples of absolute reaction rates. J. Chem. Phys., (4) Apr., 283-291, (1936).
- FINKOWSKI J.W. & PELEG M. Some rheological characteristics of soy extrudates in tension. Journal of Food Science 46, 207-211, (1981).
- GROSS M.O., RAO V.N.M. & SMIT J.B. Rheological of characterization of low-methoxyl pectin gel by normal creep and relaxation. Journal of Texture Studies 11, 271-290, (1980).
- HAMANN D.D. Structural failure in solid foods. Ed. Peleg M. & Bagley E.B. AVI Publishing Company Inc.(1983).
- HEILSCHER K. & STEER U. Neues Verfahren zur Preßbarkeitsbestimmung von Obstmaischen und ähnlichen Gütern. Lebensmittelindustrie 29, 177-179, (1982).
- HOLLENBACH A.M., PELEG M. & RUFNER R. Interparticle surface affinity and the bulk properties of conditioned powders. Powder Technology 35, 51-62, (1983).
- HOLLENBACH A.M., PELEG M. & RUFNER R. Effect of four anticaking agents on the bulk characteristics of ground sugar. Journal of Food Science 47, 538-544, (1982).
- HUILGOL R.R. On the concept of the Deborah number. Transactions of the Society of Rheology 19 (2), 297-306, (1975).
- HUNSTON D.L. Some graphical methods for the analysis of mechanical and dielectric relaxation data. Rheol. Acta 13, 33-39, (1974).
- JOHNSON E.A., PELEG M. & SAWYER F.M. Mechanical methods of measuring textural characteristics of fish flesh. Advances in the Refrigerated Treatment of Fish, International Institute of Refrigeration. Paris, France, pp. 93-104, (1981).
- JOHNSON E.A., PELEG M., SEGARS R.A. & KAPSALIS J.G. A generalized phenomenological rheological model for fish flesh. Journal of Texture Studies 12, 413-425, (1981).
- JOHNSON E.A., SEGARS R.A., KAPSALIS J.G., NORMAND M.D. & PELEG M. Evaluation of the compressive deformability modulus of fresh and cooked fish flesh. Journal of Food Science 45, 1318-1320 & 1326, (1980).
- KALETUNC-GENCER G. & PELEG M. Rheological characteristics of selected food gum mixtures in solution. Journal of Texture Studies 17, 61-70, (1986).
- KALETUNC-GENCER G., BARBOSA CANOVAS G.V., NORMAND M.D., ROSENAU J.R. & PELEG M. Determination of the flow parameters of fluid foods using a digitizer and a personal computer. In: Food Engineering and Process Applications, Vol. 1. LeMaguer, M. and Jelen, P. (Eds.), Elsevier Applied Science, pp. 15-21, (1986)
- KALETUNC-GENCER G. & PELEG M. Digitizer aided determination of yield stress in semi-liquid foods. Journal of Food Science 49 (6), 1620-1621, (1984).

LAI W.M., VAN C. MOW & ROTH V. Effects of non-linear strain-dependent permeability and rate of compression on the stress behavior of articular cartilage. *Journal of Biomechanical Engineering* 103, 61-67, (1981).

LEE Y.C., ROSENAU J.R. & PELEG M. Rheological characterisation of tofu. *Journal of Texture Studies* 14, 143-154, (1983).

MARIN J. *Mechanical Behavior of Engineering Materials*. Prentice-Hall, (1962).

MENARD K.P. *Dynamic Mechanical Analysis*. CRC Ed., (1999)

McLAUGHLIN N.B. Statistical models for failure of apple tissue under constant-strain rate loading. *Journal of Texture Studies* 18, 173-186, (1987).

MIMAULT J. & PHAN P.A. Analyse rhéologique de l'évolution des composants structuraux de la pomme, au cours de la maturation et de la conservation. *Lebensm. Wiss. Technol.* 15 (1), 31-35, (1982).

MITTAL J.P., MOHSENIN N.N. & SHARMA M.G. Rheological characterization of apple cortex. *Journal of Texture Studies* 18, 65-93, (1987).

MOREYRA R. & PELEG M. Effect of equilibrium water activity on the bulk properties of selected food powders. *Journal of Food Science* 46, 1918-1922, (1981).

MOSKOWITZ H.R., SEGARS R.A., KAPSALIS J.G. & KLUTER R.A. Sensory ratio scales relating hardness and crunchiness to mechanical properties of space cubes. *Journal of Food Science* 39, 200-202, (1974).

NORMAND M.D., MILLER B.D.F. & PELEG M. Computer simulation of the rheological behavior of solid food materials. McKenna, B. (Ed.) *Engineering and Food*. Elsevier Applied Science Pub., Essex, England, pp. 519-525.

NORMAND M.D. & PELEG M. Determination of the fractal dimension of a particle silhouette using image-processing techniques. *Powder Technology* 45, 271-275, (1986).

NUSSINOVITCH A., KALETUNC G. NORMAND M.D. & PELEG M. Recoverable work versus asymptotic relaxation modulus in agar, carrageenan and gellan gels. *Journal of Texture Studies* 21, 427-438, (1990).

NUSSINOVITCH A., AK M.M., NORMAND M.D. & PELEG M. Characterization of gellan gels by uniaxial compression, stress relaxation and creep. *Journal of Texture Studies* 21, 37-49, (1990).

NUSSINOVITCH A., PELEG M. & NORMAND M.D. A modified Maxwell and a nonexponential model for characterization of the stress relaxation of agar and alginate gels. *Journal of Food Science* 54 (4), 1013-1016, (1989).

O'BEIRNE D. & VAN BUREN J.P. Size distribution of high weight species in pectin fractions from idared apples. *Journal of Food Science* 48, 276-277, (1983).

OGORKIEWICZ R.M. *Engineering properties of thermoplastics*. Ed. Wiley - Interscience London, (1970).

PELEG M. Calculation of the compressive stress-strain relationships of layered arrays of cellular solids using equation solving computer software. *Journal of Cellular Plastics* 29, 285-293, (1993).

PELEG M. & CAMPANELLA O.H. The mechanical sensitivity of soft compressible testing machines. *J. Rheol.* 33, 455-467, (1989).

PELEG M., ROY I., CAMPANELLA O.H. & NORMAND M.D. Mathematical characterization of the compressive stress-strain relationships of spongy bakery products. *J. Food Sci.* 54, 947-949, (1989).

- PELEG M. Physical characteristics of food powders. AVI Publishing Co, Westport CT,(1983).
- PELEG M., NORMAND M.D. & ROSENAU J.R. A distribution function for particle populations having a finite size range and a mode independent of the spread. Powder Technology 46, 209-214, (1986).
- PELEG M. & NORMAND M.D. Characterization of the ruggedness of instant coffee particle shape by natural fractals. Journal of Food Science 50, 829-831, (1985).
- PELEG M. & NORMAND M.D. Mechanical stability as the limit to the fractal dimension of solid particle silhouettes. Powder Technology 43, 187-188, (1985).
- PELEG M. A note on the various strain measures at large compressive deformations. Journal of Texture Studies 15, 317-326, (1984).
- PELEG M. & HOLLENBACH A.M. Flow conditioners and anticaking agents. Food Technology 93-102, March 1984.
- PELEG M. The semantics of rheology and texture. Food Technology 54-61, Nov.1983.
- PELEG M. & NORMAND M.D. Comparison of two methods for stress relaxation data presentation of solid foods. Rheologica Acta 22, 108-113, (1983).
- PELEG M. & POLLAK N. The problem of equilibrium conditions in stress relaxation analyses of solid foods. Journal of Texture Studies 13, 1-11, (1982).
- PELEG M. Linearization of relaxation and creep curves of solid biological materials. Journal of Rheology 24 (4), 451-463, (1980).
- PELEG M. A note on the sensitivity of fingers, tongue and jaws as mechanical testing instruments. Journal of Texture Studies 10, 245-251, (1980).
- PELEG M. A model for creep and early failure. Materials Science and Engineering 40, 197-205, (1979).
- PELEG M. Evaluation by instrumental methods of the textural properties of some tropical fruits. Journal of Texture Studies 10, 45-65, (1979).
- PELEG M. Operational conditions and the stress-strain relationship of solid foods theoretical evaluation. Journal of Texture Studies 8, 283-295, (1977).
- PELEG M., GOMEZ BRITO L. & MALEVSKI Y. Compressive failure patterns of some juicy fruits. Journal of Food Science 41, 1320-1324, (1976).
- PURKAYASTHA S. & PELEG M. Comparison between projected mechanical equilibrium conditions of selected food materials in stress relaxation and creep. Journal of Texture Studies 17, 433-444, (1986).
- PURKAYASTHA S., PELEG M., JOHNSON E.A. & NORMAND M.D. A computer aided characterization of the compressive creep behavior of potato and cheddar cheese. Journal of Food Science 50, 45-55, (1985).
- PURKAYASTHA S., PELEG M. & NORMAND M.D. Presentation of the creep curves of solid biological materials by a simplified mathematical version of the generalized Kelvin-Voigt model. Rheologica Acta 23, 556-563, (1984).
- RAO V.N.M. Stresses in a Maxwell viscoelastic cylinder due to transient temperature and moisture gradients. Transactions of the ASAE, 1165-1169, (1975).

REBOUILLAT S. & PELEG M. Selected physical and mechanical properties of commercial apple cultivars. *Journal of Texture studies* 19 (3), 217-230, (1988).

REBOUILLAT S., CAMPANELLA O.H. & PELEG M. Mechanical characteristics of raw and processed pea. *Powder Technology* 51, 273-275, (1987).

SAWYER F.M., CARDELLO A.V., PRELL P.A., JOHNSON E.A., SEGARS R.A., MALLER O. & KAPSALIS J. Sensory and instrumental evaluation of snapper and rockfish species. *Journal of Food Science* 49 (3), 727-733, (1984).

SCHAEFER R.J. Dynamic properties of rubber.

- Part I. Theory of viscoelasticity. *Rubber World* May 1994, 20-21 & 48
- Part II. Mechanical models. *Rubber World* July 1994, 15-18 & 23.
- Part III. The glass transition temperature. *Rubber World* Sept. 1994, 17-18.
- Part IV. Theory of dynamic properties. *Rubber World* Nov. 1994, 17-18 & 43-45.
- Part V. Influence of compounding ingredients on the dynamic properties of rubber compounds.  
*Rubber World* Jan. 1995, 16-18.
- Part VI. Influence of compounding ingredients on the dynamic properties of rubber compounds.  
*Rubber World* Feb. 1995, 18-19.
- Part VII. Effect of plasticizer. *Rubber World* April 1995, 22-23.
- Part VIII Carbon black. *Rubber World* June 1995, 16-19 & 41.

SCOVILLE E. & PELEG M. Evaluation of the effects of liquid bridges on the bulk properties of model powders. *Journal of Food Science* 46 (1), 174-177, (1981).

SEGARS R.A., JOHNSON E.A., KAPSALIS J.G. & PELEG M. Some tensile characteristics of raw fish flesh. *Journal of Texture Studies* 12, 375-387, (1981).

SEGARS R.A., CARDELLO A.V. & COHEN J.S. Objective and subjective texture evaluation of irradiation sterilized meat products. *Journal of Food Science* 46 (4), 999-1003, (1981).

SEGARS R.A., HAMEL R.G. & KAPSALIS J.G. Use of Poisson's ratio for objective-subjective texture correlations in beef. An apparatus for obtaining the required data. *Journal of Texture Studies* 8, 433-447, (1977).

SEGARS R.A., HAMEL R.G., KAPSALIS J.G. & KLUTER R.A. A punch and die test cell for determining the textural qualities of meat. *Journal of Texture Studies* 6, 211-225, (1975).

SWYNGEDAU S., NUSSINOVITCH A. & PELEG M. Models for the compressibility of layered polymeric sponges. *Polym. Eng. & Sci.*, (1990).

TOBOLSKI A.V. & MURAKAMI K. *Journal of Polymer Science* 40, 443-456, (1959).

TOBOLSKI A.V. & EYRING H. Mechanical properties of polymeric materials. *Journal of Chemical Physics* 11, 125-134, (1943).

SHIRATO M., MURASE T., IWATA M. & NAKATSUKA S. The Terzaghi-Voigt combined model for constant-pressure consolidation of filter cakes and homogeneous semi-solid materials. *Chemical Engineering Science* 41 (12), 3213-3218, (1986).

WAGNER M.H. & LAUN H.M. Nonlinear shear creep and constrained elastic recovery of a LDPE melt. *Rheol. Acta* 17, 138-148, (1978).

ZERBINI P.E. Compression tests on intact golden delicious apples and correlation with other objective measures for quality evaluation. *Lebensm. Wiss. Technol.*, (1980).

#### **CONSOLIDATION : APPROCHE BASEE SUR LA MECANIQUE DES SOLS.**

- ABBOTT M.B. One dimensional consolidation of multi-layered soils. *Geotechnique* 151-165, (1960).
- ADACHI T., OKA F. & MIMURA M. Study on secondary compression of clay. *Sedimentation Consolidation models*, 69-83. Provided by the authors.
- BARDEN L. Primary and secondary consolidation of clay and peat. *Géotechnique* 18, 1-24, (1968).
- BARDEN L. Consolidation of clay with non linear viscosity. *Geotechnique* 15 (4), 345-362, (1965).
- BARRON R.A. Consolidation of fine-grained soils by drain wells. *American Society of Civil Engineers*, 811-835, (1947).
- BERRY P.L. & WILKINSON W.B. The radial consolidation of clay soils. *Geotechnique* 19 (2), 253-284, (1969).
- BISHOP A.W. & DONALD I.B. The experimental study of partly saturated soil in the triaxial apparatus. Provided by the authors.
- BORJA R.I. Free boundary, fluid flow, and seepage forces in excavations. *Journal of Geotechnical Engineering* 118 (1), 125-146, (1992).
- BORJA R.I. & KAVAZANJIAN E. A constitutive model for the stress-strain-time behaviour of wet clays. *Geotechnique* 35 (3), 283-298, (1985).
- BURKE J.J., ALLWOOD R.J. & HYDE A.F. Finite element analysis of soil deformation based on the critical state model and incorporating creep. *Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics, Zurich*, 286-293, (1982).
- BURLAND J.B. On the compressibility and shear strength of natural clays. *Geotechnique* 40 (3), 329-378, (1990).
- CARGILL K.W. Prediction of consolidation of very soft soil. *Journal of Geotechnical Engineering* 110 (6), 775-795, (1984).
- CARMAN P.C. *Flow of gases through porous media*. Butterworths Scientific Publications, (1956).
- CARMAN P.C. Capillary rise and capillary movement in moisture in fine sands. *Soil Science* 52, 1-12, (1941).
- CARRILLO N. Simple two and three dimensional cases in the theory of consolidation of soil. *Math. & Phys.* 21 (1), 1-9, (1962).
- CENTRE D'INSTRUCTION DES SPECIALISTES DU GENIE DE L'AIR. *L'essai Proctor*. U V 2 Laboratoire des sols, 3-16.
- CRANK J. & GUPTA R.S. A method for solving moving boundary problems in heat flow using cubic splines or polynomials. *J. Inst. Maths Applics.* 10, 296-304, (1972).
- CRANK J. *The Mathematics of Diffusion*. Oxford Science Publications (1973).
- CRAWFORD C.B. The resistance of soil structure to consolidation. *Canadian Geotechnical Journal* 2 (2), 90-97, (1965).
- CRAWFORD C.B. Interpretation of the consolidation test. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 90 (SM5), 87-102, (1964).
- DAVIS E.H. & RAYMOND G.P. A non-linear theory of consolidation. *Geotechnique* (15), 161-173, (1965).

- FELIX B. & BOUTAYER N.E. Compressibilité à court terme et saturation imparfaite des sols argileux. *Bull. Liaison Labo. P. et Ch.* 115, 49-60, (1981).
- FELIX B. Fluage héréditaire et consolidation d'un sol quasi-saturé. *Revue Française de Géotechnique* 14, 25-41, (1980).
- FELIX B. Etude théorique et expérimentale du fluage unidimensionnel des sols argileux. *Revue Française de Géotechnique* 13, 31-42, (1980).
- FELIX B. Le fluage et la consolidation unidimensionnelle des sols argileux. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Rapport de recherche N° 94, juin (1980).
- FELIX B. Le fluage des sols argileux. Etude bibliographique. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Rapport de recherche No 93, mai (1980).
- GIBSON R.E. & LO K.Y. A theory of consolidation for soils exhibiting secondary compression. *Norwegian Geotechnical Institut* 41, 3-15, (1961).
- GORMAN C.T., HOPKINS T.C., DEEN R.C. & DRNEVICH V.P. Constant rate of strain and controlled gradient consolidation testing. *Geotechnical Testing Journal* 1 (1), 3-15, (1978).
- GRIM R.E. Structure and properties of the clay minerals. *Applied Clay Mineralogy*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 7-47, (1953).
- GRIM R.E. Clay mineralogy in relation to the engineering properties of clay materials. *Applied Clay Mineralogy*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 204-275, (1953).
- HANSEN J.B. A model law for simultaneous primary and secondary consolidation. Provided by the Danish Geotechnical Institute.
- HELM D.C. Three-dimensional consolidation theory in terms of the velocity of solids. *Géotechnique* 37 (3), 369-392, (1987).
- JANBU N. Consolidation of clay layers based on non-linear stress-strain. *Euro. Conf. On Soil Mechanics Proceedings*, Weisbaden, Germany, (1965).
- KOMAMURA F. & HUANG R.J. New rheological model for soil behavior. *Journal of the Geotechnical Engineering Division* 100 (GT7), 807-824, (1974).
- KONDNER R.L. & VENDRELL J.R. Consolidation coefficient: cohesive soil mixtures. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 90 (SM5), (1964).
- KUHN M.R. & MITCHELL J.K. New perspectives on soil creep. *Journal of Geotechnical Engineering* 119 (3), 507-525, (1993).
- LADANYI B. A engineering theory of creep of frozen soils. *Canadian Geotechnical Journal* 9, 63-80, (1972).
- LEROUEIL S., KABBAJ M. & TAVENAS F. Study of the validity of a consolidation model in in situ conditions. *Soils and Foundations* 28 (3), 13-25, (1988).
- LEROUEIL S., KABBAJ M., TAVENAS F. & BOUCHARD R. Stress-strain / strain rate relation for the compressibility of sensitive natural clays. *Géotechnique* 35 (2), 159-180, (1985).
- LEROUEIL S. TAVENAS F., SAMSON L. & MORIN P. Preconsolidation pressure of Champlain clays. Part II. Laboratory determination. *Canadian Geotechnical Journal* 20, 803-816, (1983).
- LEROUEIL S., TAVENAS F., TRAK B., LA ROCHELLE P. & ROY M. Construction pore pressures in clay foundations under embankments. Part I: the Saint Alban test fills. *Canadian Geotechnical Journal* 15, 54-65, (1978).

- LOUDENOT JP. Décantation des boues polluantes. *Sols et Fondations* 381, 39-58, (1980).
- McNABB A. A mathematical treatment of one-dimensional soil consolidation. *Quarterly of Applied Mathematics* 17 (4), 337-347, (1960).
- MESRI G. & CHOI Y.K. Strain rate behaviour of Saint-Jean-Vianney clay: discussion. *Canadian Geotechnical Journal* 16, 831-834, (1979).
- MESRI G. & ROKHSAR A. *Journal of the Geotechnical Engineering Division* 100 (GT8), 889-904, (1974).
- MESRI G. Coefficient of Secondary Compression. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 99 (SM1), 123-137, (1973).
- MIKASA M. & TAKADA N. Investigation of settlement of Kobe Port Island. *Sedimentation / Consolidation Models Predictions and Validation. Proceedings of ASCE Geotechnical Engineering Division, San Francisco CA, 481-500, (1984).*
- MIKASA M. The consolidation of soft clay - a new consolidation theory and its application. *Japan Society of Civil Engineers*, 21-26, (1964).
- MONTE J.L. & KRIZEK R.J. One-dimensional mathematical model for large-strain consolidation. *Géotechnique* 26 (3), 495-510, (1976).
- MURAYAMA S. & SHIBATA T. Flow and stress relaxation of clays. *Rheology and Soil Mechanics*, Ed. Kravtchenko J - Sirieys P.M., Springer-Verlag, 99-129, (1966).
- OKA F., ADACHI T. & OKANO Y. Two-dimensional consolidation analysis using an elasto-viscoplastic constitutive equation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 10, 1-16, (1986).
- OLSON R.E. Consolidation under time dependent loading. *Journal of the Geotechnical Engineering Division* 103 (GT1), 55-60, (1977).
- POSKITT T.J. The consolidation of saturated clay with variable permeability and compressibility. *Géotechnique* 19 (2), 234-252, (1969).
- SAMARASINGHE A.M., HUANG Y.H. & DRNEVICH V.P. Permeability and consolidation of normally consolidated soils. *Journal of the Geotechnical Engineering Division* 108 (GT6), (1982).
- SANDHU R.S., LEE S.C. & THE H.I. Special finite elements for analysis of soil consolidation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 9, 125-147, (1985).
- SCHIFFMAN R.L., PANE V. & GIBSON R.E. The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays. IV. An overview of non-linear finite strain sedimentation and consolidation. *Sedimentation / Consolidation Models, Symp. Sedimentation and Consolidation Models, ASCE proceedings*, 1-29, (1984).
- SCHIFFMAN R.L. & GIBSON R.E. Consolidation of non-homogeneous clay layers. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 90 (SM5), 1-29, (1964).
- SCHULTZE E. & KRAUSE J. Pore-water pressure and creep in one-dimensional compression of silt. *Rheology and Soil Mechanics*, Ed. Kravtchenko J. - Sirieys P.M., Springer-Verlag, 316-322, (1966).
- SIVARAM B. & SWAMEE P.K. A computational method for consolidation coefficient. *Journal Japanese Soc. Soil Mech. Fund. Eng.* 17, 48-52, (1977).
- SMITH R.E. & WAHLS H.E. Consolidation under constant rates of strain. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 95 (SM2), 519-539, (1969).

- SU H.L. Procedure for rapid consolidation test. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division 84 (SM3)*, (1958).
- SUKLJE L. Zemljina kot nelinearno Kelvinovo telo. *Acta Geotechnica 75*, (1979).
- SUKLJE L. Stresses and strains in non-linear viscous soils. *Acta Geotechnica 74*, (1979).
- SUKLJE L. Consolidation of partly saturated viscous soils. *Acta Geotechnica 54*, 1-20, (1974).
- SUKLJE L. The role of the effective stress speed in the consolidation analysis. *Acta Geotechnica 52*, 233-239, (1974).
- SUKLJE L. Fundamentals of the one-dimensional consolidation of saturated soil. *Rheological Aspects of Soil Mechanics*, Wiley-Interscience London, 120-222, (1969).
- SUKLJE L. Etude sur la consolidation sphérique des sols partiellement saturés soumis à la filtration linéaire. *Rheology and Soil Mechanics*, Ed. Kravtchenko J. – Sirieys P.M., Springer-Verlag, 305-315, (1966).
- TAKADA N. & MIKASA M. Determination of consolidation parameters by self weight consolidation test in centrifuge. *Consolidation of Soils: Testing and Evaluation*, ASTM STP 892, Yong R.N. and Townsend F.C., Eds. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 548-566, (1986).
- TAKADA N. Calculation of steady state of one-dimensional consolidation. *JSSMFE 29 (12)*, (1981).
- TAN TJONG-KIE. Consolidation and secondary time effect of homogeneous anisotropic, saturated clay strata. Provided by the author.
- TAYLOR D.W. & MERCHANT W.A. A theory of clay consolidation accounting for secondary compression. *Journal of Mathematics and Physics 19*, 167-185, (1940).
- THOMAS H.R. & BENDANI K. Primary / secondary compression solution algorithm. *Journal of Computing in Civil Engineering 2 (4)*, 380-397, (1988).
- THOMAS H.R. Solution of some non-linear one-dimensional consolidation problems. *Communications in Applied Numerical Methods 3*, 435-443, (1987).
- UMEHARA Y. & ZEN K. Constant rate of strain consolidation for very soft clayey soils. *Soils and Foundations 20 (2)*, 79-95, (1980).
- VAID Y.P., ROBERTSON P.K. & CAMPANELLA R.G. Strain rate behaviour of Saint-Jean-Vianney clay. *Canadian Geotechnical Journal 16*, 34-42, (1979).
- VOGRINCIC G. & SIMONCIC B. Primerjava preiskav stisljivosti mehanicno in hidravlicno obremenjevanh endometriških vzorcev zemljin. *Acta Geotechnica 59*, 151-169, (1975).
- WISSA A.E., CHRISTIAN J.T., DAVIS E.H. & HEIBERG S. Consolidation at constant rate of strain. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division 97 (SM10)*, (1971).
- WYLLIE M.R. & GARDNER G.M. The generalized Koseny-Carman equation : its application to problems of multiphase flow in porous media. Part I : Review of existing theories. *World Oil 146*, 121-128, (1958).
- YAMAGUCHI H., OHIRA Y. & KOGURE K. Volume change characteristics of undisturbed fibrous peat. *Soils & Foundations 25 (2)*, 119-134, (1985).
- YAMAGUCHI H. & KIMURA T. On the rigorous solutions in one-dimensional consolidation of non-homogeneous clay layers. *Soils and Foundations 7 (1)*, 41-57, (1967).



**COMPRESSION - DESHYDRATATION APPLIQUEE A L'INDUSTRIE SUCRIERE ET AU RECYCLAGE DES PULPES INCLUANT EGALEMENT LA DESHYDRATATION MECANIQUE DES FOURRAGES ET DES BOUES RESIDUAIRES.**

ASSOCIATION FRANÇAISE DE CHIMIURGIE. La déshydratation des produits agricoles Tome II, avril (1966).

BALTRA I. & ACEVEDO F. Filtration characteristics of beet cossette mash fermented by trichoderma reesei. J. Ferment. Technol. 59 (1), 59-64, (1981).

BOGUMIL T. Les propositions pratiques de la diminution de la consommation du combustible dans les sucreries. Przemyst Spozyczy XXXIV 10, 363-367, (1980).

BUCHHOLLZ K., BLIESENER K.M. & BUTTERSACK C. Entwicklungen zur Entwässerung extrahierter Rübenschnitzel bei der Zuckergewinnung. Forschungskreis der Ernährungsindustrie, Karlsruhe, 71-89, (1988).

BUTTERSACK C., BLIESENER K.M., FOOTURCHEH F. & BUCHHOLZ K. Influence of pressing aids on mechanical dewatering of sugar beet pulp. I. Industrial aspects. Int. Sugar Journal 94 (1118), 26-36, (1992).

BUTTERSACK C. & BASLER W. Hydraulic conductivity of cell walls in sugar beet tissue. Plant Science 76, 229-237, (1991).

CARRIERE A., MOTTARD P. & ROUSSEAU G. De l'influence de certaines conditions en diffusion sur la pressabilité des pulpes. Industries Alimentaires et Agricoles 103 (7/8), 629-637, (1986).

CREVOISIER R. Concentration et séchage. Industries Alimentaires et Agricoles, 977-994, (1978).

DE O. MATHAN M. & DUVAL M.P. La déshydratation des fourrages verts devant les problèmes de l'énergie. Industries Alimentaires et Agricoles, 1239-1241, (1981).

GIORGI J.C., GONTIER R. & ROUSSEAU G. Contribution à l'étude du surpressage des pulpes. Sucrerie Française 71, 123-127, (1983).

GIORGI J-C., GONTIER R. & ASCHER R. Y-a-t-il une limite au pressage des pulpes ? Sucrerie Française, 145-152, (1982).

LANGE H. Zerkleinerung und Abpressung von Rübenbruchstücken und Krautteilen. Die Kegelpresse von Selwig & Lange. Zuckerind. 103 (4), 316-324, (1978).

LUCAS J. Procédé de déshydratation par compression d'une matière à élasticité résiduelle et installation pour sa mise en oeuvre. Demande de brevet d'invention N° 82 09149, (1982).

LE GOFF P. & LE BEC L. Energy management and operating costs of extraction processes. LSGC - INPL Nancy. Provided by the authors.

MEUSER F. & KÖHLER F. Einsatz der Membranfiltrationstechnik zur Prozeßwasseraufbereitung in der Kartoffel- und Weizenstärkeindustrie. Chem. Mikrobiol. Technol. Lebensm. 7, 51-61, (1981).

MILLER R.E., ANAYA-SERRANO H., KOHLER G.O., EDWARDS R.H. & CARROAD P.A. Degree of cell rupture determination for leafy material. Winter meeting ASAE, New Orleans LA, paper No 79-6532, (1979).

PONANT J. Procédé d'extraction du jus de betteraves. Demande de brevet d'invention No 82 06586, (1982).

RAMBOURG J.C. Mise au point de la méthode d'analyse de mesure du degré de rupture des cellules végétales. France Luzerne. Brochure technique. janvier (1981).

RHODES L.J. & BERSCH J.W. The horizontal hi-extractor installation and performance at Honokaa Sugar Company. *Hawaiian Planters' Record* 58 (10), 127-146, (1971).

SCHORTER L. La récupération de chaleur latente en déshydratation de pulpes et de luzerne. *Industries Alimentaires et Agricoles*, 633-638, (1981).

SCHULT W. & SCHOPPE D. Filtration von Standardeinzugsgut mit Zentrifugalscheibendruckfiltern in der Zuckerindustrie. *Lebensmittelindustrie* 28 (5), 209-214, (1981).

SHORE M., ADAMS J.A., BROUGHTON N.W., BUMSTEAD N. & JONES G.C. Some aspects of the chemistry of pulp pressing aids. *British Sugar plc., XVII Assemblée Générale Commission Technique de Sucrierie*, Copenhagen, (1983).

SHORE M., ADAMS J.A., BROUGHTON N.W., BUMSTEAD N. & JONES G.C. Gypsum and other pulp pressing aids. *British Sugar plc, 26th Technical Conference*, Eastbourne, July (1982).

SHORE M., ADAMS J.A., BROUGHTON N.W., BUMSTEAD N. & JONES G.C. Gips und SORENEEN anderer Preßhilfsmittel für Schnitzel. *Zuckerindustrie* 107 (11), 1011-1024, (1982).

STEINER P., GALLING G., BUTTERSACK C. & BUCHHOLZ K. Die Ultrastruktur der Zuckerrübe während der industriellen Zuckergewinnung. (The ultrastructure of sugar beet during sugar manufacture.), *Zuckerindustrie* 115 (10), 840-851, (1990).

STEINER P., GALLING G. & BUTTERSACK C. Die Zellwand im Speichergewebe der Zuckerrübenwurzel. (The cell wall in the storage tissue of the sugarbeet root.), *Zuckerindustrie* 115 (2), 95-102, (1990).

WUCHERPFENNIG K. & POSSMANN Ph. Zur Entwicklung der Entsaftungsverfahren. *Flüssiges Obst* 8, 282-289, (1979).

ZAMA F. Considerazioni sulle possibilità di riduzione dei consumi energetici in zuccherificio. *L'Industria Saccarifera Italiana* 2, 27-32, (1977).

#### **COMPRESSION - DESHYDRATATION APPLIQUEE A L'INDUSTRIE DU PAPIER.**

AURIAULT J.L. Non-saturated deformable porous media : quasistatics. *Transp. In Porous Media*. 2(3), 45-64, (1987).

ASKLÖF C.A., LARSSON K.O. & WAHLSTROM P.B. Studies of compressibility and drainage resistance of wet paper webs. *Pulp & Paper Magazine of Canada*, 339-347, Aug. (1964).

ASKLÖF C.A., LARSSON K.O., LINDEROTH J. & WAHLSTROM P.B. Flow conditions in a felt in a plain press nip. *Pulp & Paper Magazine of Canada*, 246-250, June (1964).

BLOCH J.F. & ROUX J.C. A physical modelling of hot pressing of paper. *Second European Congress on Chemical Engineering*. Montpellier (1999).

BLOCH J.F. Transferts de masse et de chaleur dans les milieux poreux déformables non saturés : application au pressage du papier. *Thèse de Doctorat de l'INP de Grenoble* (1995).

BLOCH J.F., SILVY J., ROUX J.C. & AURIAULT J.L. Wet pressing of paper and filtration laws, 7<sup>th</sup> *World Filtration Congress*, May 20-23, Budapest, (1996).

BRITT K.W., UNBEHEND J.E. & SHRIDHARAN R. Observations on water removal in papermaking. *Tappi Journal*, 76-79, July (1986).

CHANG N.L. Dynamic compression of handsheets. *Tappi Journal*, 93-106, (1978).

CONSIDINE J.M., THELIN P. & FELLERS C. Compressive creep behaviour of paperboard in a cyclic humidity environment - exploratory experiment. *Tappi Journal*, 131-136, Nov. (1989).

CREEK J. Application and operation of the double belt filter for sludge dewatering in the North American pulp and paper industry. *Technical Bulletin*.

CRONEWITZ Th. Properties of beet pulp fibers in the mechanical dewatering and subsequently resulting possibilities for further development of beet pulp presses. 18th Assemblée Générale Commission Int. Tech. Sucrière, 153-185, (1982).

DAVIS E.J., STRATTON R.A. & CHANG N.L. Water removal studies with the wet press simulator. *Journal of Pulp and Paper Science* 68-73, July (1983).

GUNDERSON D.E., CONSIDINE J.M. & SCOTT C.T. The compressive load-strain curve of paperboard: rate of load and humidity effects. *Journal of Pulp & Paper Science* 14 (2), 37-41, (1988).

HOERING J.F., ELLIS E.R., JEWETT K.B., CECKLER W.H. & THOMPSON E.V. Dynamic compression of paper. II. Compression behaviour of saturated cellulose mats. *Journal of Pulp and Paper Science* 140-145, Nov. (1983).

JEWETT K.B., CECKLER W.H., BUSKER L.H. & CO A Computer model of a transversal flow press nip. *AIChE Symposium Series* 76 (200), 59-70, (1980).

KUFFERATH W. Dewatering on the paper machine. *Tappi Seminar Notes*, 195-239, (1984).

MCDONALD J.D. & PIKULIK I.I. Evaluating the press dewatering of pulps. *Tappi Journal*, 95-98, Oct. (1989).

MUKHOPADHYAY A.K. & KINGSBURY H.B. A study of two dimensional flow in the press nip. *Dep. Mechanical & Aerospace Engineering, University of Delaware, Newark, DE* 19711.

ÖSTERBERG L.B. Compression of press felts. *Nordic Pulp and Paper Research Journal*, 36-39, (1988).

RAYMOND D.R. & WILLIAMS D.G. Water removal on the Fourdrinier - Prediction of top sheet drainage requirements for linerboard. *AIChE Symposium Series* 207 (77), 26-31, (1981).

ROUX J.C. Modélisation et optimisation du fonctionnement d'une section de presse de machine à papier. *Thèse de Doctorat de l'INP de Grenoble* (1986).

SCALFAROTTO R.E. & TARVIN R.F. Efficiency of polymeric additives in drainage and dewatering. *Tappi Journal* 67 (4), 80-83, (1984).

WAHLSTROM P.B. Our present understanding of the fundamentals of pressing. *Pulp & Paper Magazine of Canada*, 76-96, Oct. (1969).

WAHLSTROM P.B. A long term study of water removal and moisture distribution on a newsprint machine press section. Part I. *Pulp & Paper Magazine of Canada*, 379-401, Aug. (1960).

WAHLSTROM P.B. A long term study of water removal and moisture distribution on a newsprint machine press section. Part II. *Pulp & Paper Magazine of Canada*, 418-442, Sept. (1960).

WRIST P.E. The present state of our knowledge of the fundamentals of wet pressing. *Pulp & Paper Magazine of Canada*, 284-296, July (1964).

**COMPRESSION - DESHYDRATATION APPLIQUEE A LA PRODUCTION DE PRODUITS ALIMENTAIRES EN PARTICULIER DES JUS DE FRUIT.**

- ANTHONEY K. ENNIS D. & COOK P. Lemon juice color evaluation: sensory and instrumental studies. *Journal of Food Science* 49, 1435-1437, (1984).
- BARTSCH J.A. & BLANPIED G.D. Cooling rates of apples in tight and spaced stacking patterns. Staff report N° 84-3, Dept. of Agricultural Eng., New York State College of Agriculture & Life Sciences, Ithaca, NY 14853.
- BATES R.P., MILLS D., MORTENSEN J.A. & CORNELL J.A. Prefermentation treatments affecting the quality of muscadine grape wines. *Am. Jour. Enol. Vitic.* 31 (2), 136-143, (1980).
- BLANPIED G.D. & SMOCK R.M. Storage of fresh market apples. Information Bulletin 191, Cooperative Extension Cornell University, Ithaca NY 14850.
- BRUHN H.D., STRAUB R.J. & KOEGEL R.G. A systems approach to the production of plant juice protein concentrate. *International Grain & Forage Harvesting Conference Proceedings*, (1978).
- CHENCHIN K., YUGAWA A. & YAMAMOTO H.Y. Enzymic degumming of pineapple and pineapple mill juice. *Journal of Food Science* 49, 1327-1329, (1984).
- CLARK R.C. & RAO V.N.M. Dynamic testing of fresh peach texture. *Transactions of the ASAE*, 777-781, (1978).
- COFFELT R.J. & GIANNINI G.R. The serpentine fruit press. *Transactions of the ASAE*, 869-871, (1973).
- DUAN L. & HEILSCHER K. Berechnung des Gaseinschlusses in Früchten. *Lebensmittelindustrie* 25, 223-224, (1978).
- ECCHER T., ECCHER ZERBINI P. & GORINI F.L. La determinazione degli indici di qualità delle mele. Istituto Sperimentale per la Valorizzazione Tecnologica dei Prodotti Agricoli, *Annali I.V.T.P.A.* Vol. VII, 151-165, (1976).
- ECCHER ZERBINI P., ECCHER T. & GORINI F.L. Parametri di qualità di mele Golden Delicious provenienti da frutteti a diversa altitudine. Istituto Sperimentale per la Valorizzazione Tecnologica dei Prodotti Agricoli, *ATTI I.V.T.P.A.* Vol. I, 45-70, (1978).
- EMCH F. Extraktion und kontinuierliche Schönung. *Flüssiges Obst* 46 (1), 12-14, (1979).
- EMCH F. Extraktion und kontinuierliche Schönung. *Flüssiges Obst* 46 (6), 216-229, (1979).
- HAUSHOFER H. & MEIER W. Ergebnisse von Grossversuchen mit zwei kontinuierlichen Schneckenpressen im Vergleich zu horizontalen Spindelpressen bei Traubenmaischen. (Résultats d'essais entrepris à grande échelle dans le but de comparer la performance de deux pressoirs hélicoïdaux continus et celle de pressoirs à vis horizontaux pour le pressurage de raisins foulés.) *Technical Bulletin*.
- HURLER A. & WEY R. Technique of grinding and making the mash. *Confructa Studien* 28 (11), 100-169, (1984).
- KINZER G. & SCHREIER P. Influence of different pressing systems on the composition of volatile constituents in unfermented grape musts and wines. *Am. Jour. Enol. Vitic.* 31 (1), 7-13, (1980).
- LAFON-LAFOURCADE S., DUBOURDIEU D., HADJINICOLAOU D. & RIBEREAU-GAYON P. Incidence des conditions de travail des vendanges blanches sur la clarification et la fermentation des moûts. *Connaissance de la Vigne et du Vin* 14 (2), 127-138, (1980).
- LEMPERLE E. & KERNER E. Untersuchungen zur Qualitätsbeeinflussung der Moste durch Traubenpressen. *Weinberg & Keller* 26, 26-39, (1979).

LOZANO J.E., ELUSTONDO M.P. & ROMAGNOLI J.A. Control studies in an industrial apple juice evaporator. *Journal of Food Science* 49, 1423-1427, (1984).

O'BEIRNE D., VAN BUREN P. & MATTICK L.R. Two distinct fractions from senescent Idared apples extracted using non-degradative methods. *Journal of Food Science* 47, 173-176, (1981).

PERA J. & PERA D. Pressoir à vis. Demande de brevet d'invention N° 82 03408, (1982).

PRIEST K.L. & LOUGHEED E.C. Evaluating apple maturity using the starch-iodine test. Ministry of Agriculture and Food, Ontario, No 81-025, (1981).

SMITH R.B. & CLINE R.A. A laboratory and field study of the relationship between calcium sources and browning in Apple juice. *Journal of Food Science* 49, 1419-1421, (1984).

STRAUB R.J., BRUHN H.D. & BARRINGTON G.P. Plant juice protein separation and recovery. *Transactions of the ASAE* 27 (2), 337-340 & 347, (1984).

STRAUB R.J., BARRINGTON G.P., KOEGEL R.G. & BRUHN H.D. Heating effects on plant juice protein recovery. *Transactions of the ASAE* 26 (3), 673-677, (1983).

#### **COMPRESSION - FILTRATION : PROCEDES ET EQUIPEMENTS.**

ALLENSON S.J., BRADEN M.L. & BANIK J.A. Method for dewatering a slurry using a twin belt press with cationic amine salts. United States Patent N° 4,792,406, (1988).

ARUS-ANDRITZ. Demonstration testings, Arus-Andritz, Mansfield, Texas 76063.

AUSTIN E.P. The filter belt press. Application and design. *Filtration & Separation* July/August 1978, 320-330.

BABBINI Presse à pulpes pour betteraves à sucre, à deux hélices, type Babbini P 18 N, à haute teneur en matière sèche. S.A.S. Fratelli Babbini 47010 Galeata Italie.(1983).

BAGDASARIAN A. & TILLER F.M. Operational features of staged, high pressure, thin cake filters. *Filtration & Separation* Dec. 1978, 594-598.

BARBULESCU A., BOULET R. & LESSARD D. System and method for extracting liquid from a humid mass by compression. United States Patent N° 4,534,868, (1985).

BASKERVILLE R.C., BRUCE A.M. & DAY M.C. Laboratory techniques for predicting and evaluating the performance of a filterbelt press. *Filtration & Separation* Sept./Oct. 1978, 445-450.

BASNETT D. Filter-pressing: an investigation into the causes of moisture-content variation in press-cakes. *British Ceramic Trans. Journal* 88 (3), 97-106, (1989).

BREDESON D.K. Mechanical oil extraction. *Journal of the American Oil Chemists' Society* 60 (2), 211-213, (1983).

BREDESON D.K. Mechanical extraction. *Journal of the American Oil Chemists' Society* 55 (11), 762-764, (1978).

BROWN A. The tube press. *Filtration & Separation* Sept/Oct. 1979, 468-474.

CARLETON A.J. Choosing a compression filter. *The Chemical Engineer* April 1985, 20-23.

CONDOLIOS M.E. Le compactage et le stockage des boues dans les industries extractives. Le compactage des boues par procédé Tasster. 53-56, bulletin technique.

- COVINGTON R.A. & EKINER O.M. Mechanical dewatering process for elastomer slurries. United States patent N° 4,132,845, (1979).
- CREEK J. & BUSCH R.A. The endless double belt filter. The economical answer to the mining industry's refuse dewatering and recovery problems. 108th Annual Meeting of the American Institute of Mining, New Orleans, (1984).
- CRUZ I.E. A study and evaluation of a small-capacity oil expeller. *Phil. J. Coco. Stud.* 5 (2), (1980).
- DAHL H.K. Anwendung der Theorie des Naßpressens für heutige Pressen. (Application of the theory of wet pressing to modern presses). *Wochenblatt für papierfabrikation* 3, 91-101, (1989).
- DERAMMELAERE R.H. & WASP E.J. Mechanical dewatering, thermal drying and dust collection : an integrated approach. Provided by the authors.
- ENGLISH R.R. & RADFORD B.C. Filter presses in coal preparation. Filtration Society meeting "Filter presses ; users' experiences", Stoke on Trent, (1977).
- FERRIANI Presse à pulpes type 2F 1500 SPL. Brochure technique. Ferriani S.p.a. 44047 S. Agostino, Italie, (1982).
- FERRIANI Presse à pulpes type 2F 2000 SPL. Brochure technique. Ferriani S.p.a. 44047 S. Agostino, Italie, (1982).
- FINNEY J.W. Jr. Dewatering of alum sludge at Somerset, Kentucky. Kentucky-Tennessee AWWA annual meeting, Owensboro, (1979).
- FISHER J., BUCHER Fa. & KLETTGAU B. Einsatz von Horizontalpressen in mittelständischen Betrieben. *Flüssiges Obst* 8, 255-257, (1981).
- FISCHER M.C. & SCHILL M.G. The dewatering of fine coal refuse with a continuous high performance belt filter press. Society of Mining Engineers of AIME, fall meeting, Tucson, Arizona, Oct. (1979).
- FOORD B.A. Computer applications in filtration analysis. The second World Filtration Congress, London, (1979).
- GAUDFRIN G. Nouveaux développements du filtre à bande. *Informations Chimie* 289, 97-108, (1987).
- GÜRTLER H.G. Filter media for the filtration of liquids, their properties and applications. Provided by the author.
- GWILLIAM R.D. The E.E.C. tube filter press. *Filtration & Separation* March/April 1971, 173-180.
- HARKER H. Getting the best out of batch filtration. *Processing* Feb. 1979, 34-35.
- HAWORTH P.J. & ROBERTS K. Development and application of filterbelt presses. *Filtration & Separation* Nov./Dec. 1975, 572-576.
- HEATON H.M. The practical application of the membrane filter plate to increase filter press productivity and overall economics. *Filtration & Separation* 15 (3) May/June 1978, 232-238.
- HENRICSON K, PIKKA O. & MÄKELÄ M. Hydraulic pressurized dewatering. *Paperi ja Puu - Paper and Timber* 71 (3), 249-251, (1989).
- HERATH B., ALBANO C., ANTILLA A. & FLYKT B. Empirical modelling of a dewatering process using multivariate data analysis. *Dewatering Technology & Practice*, Brisbane Australia, 129-136, (1989).

HOMANN V.T., KNUTH M., MIKSCH K.D. & STEIN W. Die mechanische Fest-Flüssig-Trennung mittels Seiherschneckenpressen in der Speiseölinindustrie. Fette. Seifen. Anstrichmittel 80 (4), 146-149, ((1978).

IDE T. & KATAOKA K. A technical innovation in sludge blanket clarifiers. The second World Filtration Congress, London, 377-384, (1979).

JACKSON M.E., VINCENT M.E. & VADNAY A. Dispositif de filtration à jeter après usage. Demande de Brevet d'Invention N° 2 525 118, (1983).

JAHREIS C.A. Recent developments in pressure filtration. Chemical Engineering, Feb. 1976, 80-94.

KAWASAKI K., MATSUDA A. & MIZUKAWA Y. Compression characteristics of excess activated sludges treated by freezing-and-thawing process. Journal of Chemical Engineering of Japan 24 (6), 743-748, (1991).

KERR R.M. Development of a band filter for dewatering distillery spent wash. Filtration & Separation. Provided by the author.

KOCH K. Einrichtung zum mechanischen Trennen von Flüssigkeiten aus Flüssigkeitsfeststoffgemischen in einer Schneckenpresse. Bundesrepublik Deutschland Offenlegungsschrift DE 30 43 194 A1, (1980).

KREYE K., RICHTER H-J., RADOBERNTZKY G. & ROCH R. Verfahren zur Herstellung und Dosierung eines Preßhilfsmittels. Deutsche Demokratische Republik, Patentschrift DD 265 430 A1, (1987).

KURITA K. Filtration behaviour of filter presses under constant pressure. Filtration & Separation Jan./Feb. 1969, 31-39.

KURITA T. & SUWA S. The fully automatic filter press used for coal preparation waste water filtration. Filtration & Separation Sept./Oct. 1982, 384-386.

KURITA T. & SUWA S. Filtration and expression of municipal sludges by the automatic press. Filtration & Separation May/June 1980, 242-247.

KURITA T. & SUWA S. How the fully automatic filter press has developed. Filtration & Separation March/April 1979, 109-112.

KWADE A., SCHULZE D. & SCHWEDES J. Determination of the stress ratio in uniaxial compression tests. Powder Handling & Processing 6 (1), 61-65, (1994).

MATTESON M.J. & ORR C. Filtration : Principles and Practices. Marcel Dekker Inc., (1987).

MEIER W.. & BAYER E. Prüfung der pneumatischen Willmespresse UP 600. Mitt. Klosterneuburg 32, 111-116, (1982).

MILLER P.A. & BEATON N.C. The vacuband filter - A new approach to liquid filtration. Filtration Society's Filtech /81 Conference, London, (1981).

MININNI G., SPINOSA L. & MISITI A. Evaluation of filter press performance for sludge dewatering. Journal WPCF 56 (4), 331-336, (1984).

MOIR D.N. Selecting batch pressure filters. Provided by the author.

MORLAND C.D. & GECOSALA S.R. Predicting filtration efficiency performance of fibrous media. World Filtration III, 409-419.

MORRIS K. Microcomputers and microprocessors in filter design and control. Filtration & Separation March/April 1980, 109-112.

MUNRO P.A. & STEVENSON S.R. Evaluation of a commercial belt press for the mechanical dewatering of lactic casein curd. *New Zealand Journal of Dairy Science and Technology* 20, 11-18, (1985).

MUNRO P.A. & VU J.T. Optimal operation of a roller press for the mechanical dewatering of acid casein curd: pilot-scale and industrial-scale experiments. *New Zealand Journal of Dairy Science and Technology* 18, 93-100, (1983).

MUNRO P.A., VU J.T. & MOCKETT R.B. Comparison of three pilot-scale machines for the mechanical dewatering of casein curd. *New Zealand Journal of Dairy Science & Technology* 18, 35-46, (1983).

NELSON J.L. & DUNWODY R.B. Selection of expression equipment for food related operations. AIChE National Meeting, San Francisco CA, Nov. (1984).

NELSON J.L. & DUNWODY R.B. Dewatering of food processing waste streams. AIChE Summer National Meeting, Philadelphia PA, Aug. (1984).

NELSON F.W., BARRINGTON G.P., STRAUB R.J. & BRUHN H.D. Design parameters for rotary extrusion macerators. *Transactions of the ASAE* 26 (4), 1011-1015, (1983).

NELSON F.W., BARRINGTON G.P. & BRUHN H.D. Throughput variables for rotary extrusion macerators. *Transactions of the ASAE* 24 (5), 1146-1148, (1981).

NELSON F.W., BRUHN H.D., KOEGEL R.G. & STRAUB R.J. Rotary extrusion devices. *Transactions of the ASAE* 23 (6), 1596-1599, (1980).

OLDHAM D.J. Filter presses - It's surprising what you save. Filtration Society's meeting "Filter presses users' experiences, Stoke-on-Trent, (1977).

PITT R.E, STRAUB R.J., KOEGEL R.G. & BRUHN H.D. Design criteria for a forage plant fractionation press. *Transactions of the ASAE* 25 (1), 18-22, (1982).

PRINSSSEN A.A.J.A. Enclosed belt filters and the Pannevis Pressbelt device. *Filtration & Separation* Sept./Oct. 1982, 396-398 & 414.

PRINSSSEN A.A.J.A. Vacuum belt filters. *Filtration & Separation* March/April 1979, 176-180.

PURCHAS D.B. Solid / liquid separation technology. Uplands Press, (1981).

REGAN J.M. Filter presses - Still alive and kicking! Filtration Society's meeting "Filter presses Users' experiences, Stoke-on-Trent.

RENCKEN G.E., BUCHAN M.I., TREFFY-GOATLEY K., BUCKLEY C.A. & WATER U. The tubular filter press: A locally developed alternative for sludge dewatering. *ChemSA* August 1989.

RICCI L. Separation techniques, II. Gas / liquid / solid systems. *Chemical Engineering Magazine*, McGraw Hill Publications, (1980).

RIVET P. Guide de la séparation liquide-solide. Société française de filtration, Idexpo, (1981).

ROBERTS K. Theory and practice of filterbelt pressing. Second World Filtration Congress, London, 495-505, (1979).

ROPERTZ G. The successful application of HP filter presses in kaolin processing. *Aufbereitungs - Technik* 4, 226-232, (1989).

ROSENAU J.R. Non-rennet / non-fermentative methods for process cheese manufacture. Ed. Peleg M. & Bagley E.B. AVI Publishing Company Inc. (1983).



- RUSUM G., ROJANSKI V., IANCULESCU S. & FAKEKAS I. Criteria for the filters selection optimization in the waters and waste waters treatment techniques. Provided by the authors.
- SATA H., ETO S. & SUZUKI H. Relationship between amount of bound water and dewatering characteristics of alum sludges. World Filtration Congress III proceedings (1986).
- SCHWALBACH W. The pressbelt drum filter - A continuous filter system of combined vacuum and pressure filtration. *Aufbereitungs-Technik* 30 (2), 91-97, (1989).
- SCHWEIGLER N. & STAHL W. High performance disc filter for dewatering mineral slurries. *Filtration & Separation* Jan./Feb. 1990, 38-41.
- SHIRATO M., MURASE T. & ATSUMI K. Industrial expression theories and optimization of membrane-compression type filter-press operation. 2nd World Congress of Chemical Engineering Montreal Canada, Proceedings IV, 107-110, (1981).
- SHIRATO M., MURASE T. & ATSUMI K. Optimization of filter-press operation with membrane-compression mechanism. *Kagaku Kogaku Ronbunshu* 6 (6), 643-650, (1980).
- SHIRATO M., MURASE T., MORI H., OKADA A., MIZUNO Y. & NIWA H. Air blow drainage of granular beds. *Kagaku Kogaku Ronbunshu* 6 (4), 410-416, (1980).
- SHOEMAKER W. The industrial filtration market for non-wovens. *Filtration & Separation* Jan./Feb. 1975.
- SHOEMAKER W. The spectrum of filter media. *Filtration & Separation* Jan./Feb. 1975.
- SINGER M. Theoretische Erkenntnisse und ihre praktischen Anwendungen bei der Extraktion von Ölsaaten. *Seifen - Öle - Fette - Wachse* 108 (19), 605-607, (1982).
- SINGER M. Theorie und Praxis der Ölgewinnung durch Pressung. *Seifen - Öle - Fette - Wachse* 107 (19), 585-587, (1981).
- SIVIK B. Dehydration of by-products from food industries and catering. University of Lund Sweden, Division of Food Engineering, Dissertation, (1979).
- STEGEMAN G. Benefit from dewatering sludge wastes. *Power* April (1980).
- STRAUB R.J. & KOEGEL R.G. Evaluation of a cone press for forage fractionation. *Transactions of the ASAE* 26 (4), 1016-1021, (1983).
- SWIENTEK J. Expression-type belt press delivers high juice yields. *Food Processing*, 110-111, April (1985).
- SWIENTEK J. Automated apple press system offers high juice recovery with low solids content. *Food Processing*, 134-135, April (1984).
- TAKAMA K, HATANO M. & ZAMA K. Developments in the protein utilization of abundantly caught fatty fish. V. Effects of pressure treatments on eliminated lipids and recovered proteins of fish. *J. of Food Sci.* 30(1), 74-83, (1979).
- TESCHNER F., ILLYES K. & ILLYES A. Über das Auspreßverhalten von Rübenmark. *Die Lebensmittel Industrie* 23, 551-553, (1976).
- THOMAS C.M. Filter media for filter pressing applications. Conference on Fibrous Materials for the Filtration of Liquids at the Shirley Institute, Manchester, (1975).
- TILLER F.M. Bench-scale design of SLS systems. *Chemical Engineering* April 1974, 117-119.

TODOROV T. & MATCHEV Ts. Appareil à presser les saucissons secs. 130-144. Provided by the author.

TOKUNAGA K., YAMAGUCHI N., NAKANO I., MIYAMOTO H. & MORIMINE R. Research on various features of filter cloth of full automatic filter press of the longest endless filter cloth travelling type and single-plate, double side filtration type with compressive mechanism. Provided by the authors.

TRAVINSKI H. Hydrocyclones: Applications and practical operation. Filtration Society's Conference Filtech / 77, London, (1977).

TRUMPLER A.L. & GOSS J.W. Sludge dewatering: current industrial practices in the U.S.A. Filtration & Separation Nov./Dec. 1982, 473-482.

USHER S.P., DE KRESTER R.G. & SCALES P.J. Validation of a new filtration technique for dewaterability characterization. AIChE J., 47 (7), 1561-1570, (2001).

VAN DEELEN W. & STEINBUCH E. Anwendungsbericht über die Ensink-Bandpresse zur Saftherstellung aus Lageräpfeln. Flüssiges Obst 9, 394-397, (1983).

VAN DEELEN W. & STEINBUCH E. Juice making. Application of the ENSINK-belt-press for juice making of stored apples. Flüssiges Obst 9, 423-424, (1983).

VILLIERS R.V. & FARRELL J.B. A look at newer methods for dewatering sewage sludges. Civil Engineering - ASCE Dec. (1977).

VON WEINBAU I. & MAUL D. Arbeitsaufwand und Kosten verschiedener Keltersysteme. Die Weinwirtschaft 12 (6), 311-315, (1982).

VON WEINBAU I. & MAUL D. Arbeitsaufwand und Kosten verschiedener Keltersysteme. Die Weinwirtschaft 12 (3), 316-322, (1981).

WAKEMAN R.J. On the use of compressibility coefficients to model cake filtration processes. 2nd World Filtration Congress, London, 57-65, (1979).

WAYNE L. & OBERLIN D.W. Wastewater sludge dewatering & coolant filtration. Filtration & Separation Jan./Feb. 1982, 58-62.

#### **FILTRATION : APPROCHE TRADITIONNELLE.**

ALT C. Centrifugal separation. NATO Advanced Study Institute, Mathematical models and design methods in solid-liquid separation, Lagos Portugal, (1982).

ARAGAKI T., HIRAOKA S., YAMADA I., MURASE T., IRITANI E. & SHIRATO M. Generalized relation between liquid pressure and solid compressive pressure in non-unidimensional filter cakes. Journal of Chemical Engineering of Japan 22 (4), 358-363, (1989).

ATSUMI K. & AKIYAMA T. A study of cake filtration - Formulation as a stefan problem. Journal of Chemical Engineering of Japan 8 (6), 487-492, (1975).

BENDER W. Filtering, washing and deliquoring of finely dispersed solids. International Chemical Engineering 18 (1), 48-59, (1978).

CHAO C.C-M. & CHANG W.V. Pressure drop across compressible random-fiber porous medium: a unified filtration theory. World Filtration Congress III, 610-617.

CHASE G.G., WILLIS M.S. & DESAI F. Compressive cake filtration. Chem. Eng. Sci., 47 (6), 1373-1381, (1992).

- CHEMTOB M. Filtration en pression. Caractéristiques et domaines d'emploi. Informations Chimie 275, 193-208, (1989).
- CHEN N.H. Liquid-solid filtration: Generalized design and optimization equations. Chemical Engineering July 1978, 97-101.
- CINTRE M., DODDS J. & LECLERC D. Efficiency of particle capture in colloid filtration. Filtration & Separation, 259-263, (1987).
- CINTRE M., CAMBON S., LECLERC D. & DODDS J. Sizing synthetic mixtures of latex and various colloidal suspensions by photon correlation spectrometry. Anal. Chem. 58, 86-90, (1986).
- DARCY A. Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. Dalmont, Paris, (1856).
- DE MOOR A.E.L. & GREGORY J. Automated method for filtrability determination. World Filtration Congress III, 253-261.
- FATHI-NAJAFI M. & THELANDER H. Determination of local filtration properties at constant pressure. Sep. Tech. 5, 165-178, (1995).
- GRANGER J., DODDS J., LECLERC D. & MIDOUX N. Flow and diffusion of particles in a channel with one porous wall : polarization chromatography. Chemical Engineering Science 41 (12), 3119-3128, (1986).
- GRANGER J., DODDS J.A., LECLERC D. & MOLL M. Filtration de la bière et de suspensions de latex de faibles concentrations sur membranes cellulosiques. Bios 16 (1-2), 29-34, (1985).
- GRANGER J., DODDS J. & LECLERC D. Filtration of low concentrations of latex particles on membrane filters. Filtration & Separation, 58-60, (1985).
- HARVEY M.A., BRIDGER K. & TILLER F.M. Apparatus for studying incompressible and moderately compressible cake filtration. Filtration & Separation Jan./Feb. 1988, 21-29.
- HERMIA J. Constant pressure blocking filtration laws - Application to power-law non-newtonian fluids. Institut de Génie Chimique UCL, Louvain-la-Neuve Belgique. Provided by the author.
- HERMIA J. Filter cake washing. Institut de Génie Chimique UCL, Louvain-la-Neuve Belgique. Provided by the author.
- HERMIA J. Constant pressure blocking filtration laws. Trans. Inst. Chem. E.V. 60, 183-187, (1982).
- HERZIG J.P., LECLERC D. & LE GOFF P. Flow of suspensions through porous media. Application to deep filtration. Ind. & Eng. Chem. 62 (5), 9-35, (1970).
- LECLERC D. Vingt-cinq ans de contribution à l'étude de la filtration. Thèse de Docteur es Sciences de L'INPL de Nancy, (1988).
- LECLERC D., DODDS J. & LEITZELEMENT M. La filtration en profondeur. Annales des Mines, 109-112, mai-juin (1984).
- LECLERC D. & LE LEC P. Filtration : théorie. Techniques de l'Ingénieur A 5500, 1-19 & A 5501, 1-7, (1981).
- LECLERC D., LE LEC P. & LE GOFF P. La filtration sur support. Techniques de l'Ingénieur A 5500, 1-19, (1980).
- LECLERC D. Characteristics of unconsolidated filter media. The scientific basic of filtration. Noordhoff, Leyden, (1975).

- LECLERC D. Permeability of filter media. The scientific basic of filtration. NATO ASI E 2, Noordhoff, Leyden, (1975).
- LECLERC D., CHARPENTIER J.C. & LE GOFF P. Le désaéragé des liquides dans les milieux filtrants. 1er Congrès Mondial de la Filtration, Technique et Documentation, Paris, (1974).
- LE GOFF P., LECLERC D. & DODDS J. The structure of packed beds : continuity of research in Nancy and some new results. Powder Technology 42, 47-53, (1985).
- LEITZELEMENT M., DODDS J. & LECLERC D. Measurement of the particle size of submicron mineral particles, emulsions and biological material by hydrodynamic chromatography and photon correlation spectroscopy. Particle size analysis 1985, 619-631, Wiley, Chichester, (1985).
- LLOYD P.J. Particle characterization. Chemical Engineering, 120-122, April (1974).
- LU W-M., TILLER F.M., CHENG F-B. & CHIEN C-T. A new method to determine local porosity and filtration resistance of filter cakes. Journal of Chinese Institute of Chemical Engineers 1, 45-53, (1970).
- MAHGOUB I., PROST C. & DODDS A. Experimental relative permeability curves compared with a new cutting and joining model of porous media with a distribution of pore sizes. Powder Technology 31, 143-151, (1982).
- McTAGGART J.A. Growth in filtration and separation products over the last seven years in the U.S. World Filtration Congress III, 703-706.
- MERIGUET G. Filtration . II. Technologie. Techniques de l'Ingénieur J 1542, (1976).
- MULDOON J. Screens and screening. Chemical Engineering, Feb. 1984, 90-94.
- MURASE T., KOBAYASHI K., IRITANI E., ITO K. & SHIRATO M. Constant-pressure filtration on cylindrical surfaces of power-law non-newtonian fluids. Journal of Chemical Engineering of Japan 18 (3), 230-236, (1985).
- MURASE T., IRITANI E., CHO J.H. & SHIRATO M. Determination of filtration characteristics based upon filtration tests under step-up pressure conditions. Journal of Chemical Engineering of Japan 22 (4), 373-378, (1989).
- NELSON R.W. Approximate theories of filtration and retention. Tappi Journal 47 (12), 752-764, (1964).
- OKAMURA S. & SHIRATO M. Liquid pressure distribution within cakes in the constant pressure filtration. Kagaku Kogaku 19 (3), 104-110, (1955).
- OLSON W.P., ERAS M.H. & PARKS R.G. Problems of industrial filtration and membrane filter testing. World filtration Congress III, 484-490.
- PURCHAS D.B. A practical view of filtration theory. Filtration & Separation March/April 1980, 147-151.
- RUSHTON A., HOSSEINI M. & HASSAN I. The effects of velocity and concentration on filter cake resistance. J. Separ. Proc. Technol. 1 (3), 35-41, (1980).
- RUSHTON A. Centrifugal filtration, dewatering and washing. Chemical Engineering Department UMIST Manchester. Provided by the author.
- SATO H. & ATSUMI K. Forced expression of liquid from pastry mixture of liquid and fine solid particles and its numerical solution by method of moments. Journal of Chemical Engineering of Japan 3 (1), 92-98, (1970).

SECO TORRECILAS A., AUCEJO PEREZ A. & SANCHO-TELLO DE CARRANZA M. Filtration a pression de pastas ceramics. II Estudio de la influencia de la presion y la granulometria sobre la resistencia especifica de la torta. Bol. Soc. Ceram. Vidr. 20 (4), 235-240,

SHIRATO M. & IRITANI E. Filtration principles. Journal of Japan Society of Lubrication Engineers 29 (12), 12-15, (1984).

SHIRATO M. & IRITANI E. Filtration theory for non-newtonian fluids. 3rd Pacific Chemical Engineering Congress, Seoul, (1983).

SHIRATO M., IRITANI E., HAYASHI N. & ITO K. Experimental study on filter cake dewatering by permeation of non-newtonian fluids. Journal of Chemical Engineering of Japan 16 (2), 159-161, (1983).

SHIRATO M., ARAGAKI T., IRITANI E. & FUNAHASHI T. Constant rate and variable pressure-variable rate filtration of power-law non-newtonian fluids. Journal of Chemical Engineering of Japan 13(6), 473-478, (1980).

SHIRATO M., ARAGAKI T. & IRITANI E. Analysis of constant pressure filtration of power-law non-newtonian fluids. Journal of Chemical Engineering of Japan 13 (1), 61-66, (1980).

SHIRATO M., ARAGAKI T. & IRITANI E. Blocking filtration laws for filtration of power-law non-newtonian fluids. Journal of Chemical Engineering of Japan 12 (2), 162-164, (1979).

SHIRATO M., ARAGAKI T., IRITANI E., WAKIMOTO M., FUJIYOSHII S. & NANDA S. Constant pressure filtration of power-law non-newtonian fluids. Journal of Chemical Engineering of Japan 10 (1), 54-60, (1977).

SHIRATO M., MURASE T., SAMBUICHI M. & ARAGAKI T. Industrial filtration - Theory and practice. Kagaku Kogaku 40 (11), 606-612, (1976).

SHIRATO M., MURASE T. & ARAGAKI T. Study on industrial filtration of non-newtonian fluid. Asahi Garasu Kogyo Gijutsu Shorei-kai Kenkyu Hokoku 28, 269-286, (1976).

SHIRATO M., KOBAYASHI K. & TANIMURA M. Analysis of constant pressure filtration of compressible cakes on cylindrical surface. Kagaku Kogaku 37 (1), 76-82, (1973).

SHIRATO M., DOI H. & SHIMAOKA H. Analysis of filtration processes in plate-and frame press. Kagaku Kogaku 36 (7), 781-787, (1972).

SHIRATO M. & ARAGAKI T. Verification of internal flow mechanism theory of cake filtration. Filtration & Separation May/June 1972.

SHIRATO M., ARAGAKI T., ICHIMURA K. & OOTSUJI N. Porosity variation in filter cake under constant-pressure filtration. Journal of Chemical Engineering of Japan 4 (2), 172-177, (1971).

SHIRATO M., SAMBUICHI M., KATO H. & ARAGAKI T. Internal flow mechanism in filter cakes. AIChE Journal 15 (3), 405-409, (1969).

SHIRATO M., ARAGAKI T., MORI R. & IMAI K.. Study on variable-pressure variable-rate filtration. Kagaku Kogaku 33(6), 576-581, (1969).

SHIRATO M. & ARAGAKI T. The relations between hydraulic and compressive pressure in non uni-dimensional filter cakes. Kagaku Kogaku 33 (2), 205-207, (1969).

SHIRATO M., ARAGAKI T., MORI R. & SAWAMOTO K. Predictions of constant pressure and constant rate filtrations based upon an approximate correction for side wall friction in compression permeability cell data. Journal of Chemical Engineering of Japan 1 (1), 86-90, (1968).

- SHIRATO M., MURASE T. & KOBAYASHI K. The method of calculation for non uni-dimensional filtration. *Filtration & Separation* May/June (1968).
- SHIRATO M. & KOBAYASHI K. Studies in non uni-dimensional filtration. Filtration on cylindrical spherical and square surfaces. *Memoire of the Faculty of Engineering, Nagoya University* 19 (2), (1967).
- SHIRATO M., SHIMIZU S. & KAKIZOE M. Measurement of pore size distribution of filter medium. *Kagaku Kogaku* 31 (1), 60-66, (1967).
- SHIRATO M., MURASE T., HIRATE H. & MIURA M. Study on non uni-dimensional filtration - Definition of effective coefficient of filter area. *Kagaku Kogaku* 29 (12), 1007-1013, (1965).
- SHIRATO M., SAMBUICHI M. & MURASE T. Hydraulic pressure distribution in filter-cakes under constant pressure filtration. *Memoires Faculty of Engineering Nagoya Univ.* 16, 68-74, (1964).
- SHIRATO M., SAMBUICHI M. & OKAMURA S. Filtration behavior of a mixture of two slurries. *AIChE Journal* 9 (5), 599-605, (1963).
- SHIRATO M. Recent theory and technique of filtration. *Kagaku Kogaku* 23 (12), 823-830, (1959).
- SHIRATO M. & OKAMURA S. Behaviours of slurry mixtures at constant-pressure filtration. *Kagaku Kogaku* 23 (4), 226-234, (1959).
- SHIRATO M. & OKAMURA S. Behaviours of various kaolin slurries in constant pressure filtration. *Kagaku Kogaku* 23 (1), 11-17, (1959).
- SILVERBLATT C.E., RISBUD H. & TILLER F.M. Batch, continuous processes for cake filtration. *Chemical Engineering*, April 1974, 127-136.
- SMILES D.E., RAATS P.A.C. & KNIGHT J.H. Constant pressure filtration: The effect of a filter membrane. *Chemical Engineering Science* 37 (5), 707-714, (1982).
- TETTAMANTI B. Modelling and scaling of filtration in industry. *International Chemical Engineering* 22(3), 561-571, (1982).
- TILLER F.M., CRUMP J.R. & VILLE F. A revised approach to the theory of cake filtration. *Fine particles processing Vol.2, 1949-1980, Amer. Inst. Min. Met. Pet. Eng.* (1980).
- TILLER F.M., CRUMP J.R. & VILLE F. Filtration theory in its historical perspective, a revised approach with surprises. *The second World Filtration Congress, London*, (1979).
- TILLER F.M. & ANDERSON M.D. Solid-liquid separation : an overview with emphasis on compressible cake filtration. *ASEE Summer School*, (1977).
- TILLER F.M. Bench-scale design of SLS system. *Chemical Engineering*, April 1974, 117-119, (1974).
- TILLER F.M., WILENSKY J. & FARRELL P.J. Pretreatment of slurries. *Chemical Engineering*, April 1974, 123-126.
- TILLER F.M. & RISBUD H. Hydraulic deliquoring of filter cakes. *PACHEC* 72, 80-87.
- TILLER F.M. & LU W-M. The role of porosity in filtration. VIII: cake nonuniformity in compression-permeability cells. *AIChE Journal* 18 (3), 569-572, (1972).
- TILLER F.M., HAYNES S. & LU W-M. The role of porosity in filtration. VII: effect of side-wall friction in compression-permeability cells. *AIChE Journal* 18 (1), 13-20, (1972).
- TILLER F.M. & SHIRATO M. The role of porosity in filtration. VI: New definition of filtration resistance. *AIChE Journal* 10 (1), 61-67, (1964).

TILLER F.M. & COOPER H. The role of porosity in filtration. V: porosity variation in filter cakes. *AIChE Journal* 8 (4), 445-449, (1962).

TILLER F.M. & COOPER H. The role of porosity in filtration. IV: constant pressure filtration. *AIChE Journal* 6 (4), 595-601, (1960).

TILLER F.M. The role of porosity in filtration. III: variable-pressure, variable rate filtration. *AIChE Journal* 4 (2), 170-174, (1958).

TILLER F.M. The role of porosity in filtration. Numerical methods for constant rate and constant pressure filtration based on Kozeny's law. *Chemical Engineering Progress* 49 (9), 467-479, (1953).

TOSUN I. & WILLIS M.S. Cake filtration theory : an overview. 4th World Filtration Congress, Anvers, (1986).

VAN BRAKEL J., KLEIZEN H.H., WYPKEMA. & DOSOUDIL M. Continuous pressure filtration of coal and prediction of cake permeability. *Filtration & Separation* July/August 1987, 268-271.

VAN DEN BERG G.B. & SMOLDERS C.A. Flux decline in membrane processes. *Filtration & Separation* March/April 1988, 115-121.

VAN DOOREN K.G.J. Les tissus filtrants en fibre fluorocarbonée Teflon® dans le dépoussiérage intensif des centrales au charbon, Du Pont de Nemours International S.A. CH1211 Genève.

WAKEMAN R.J. Thickening and filtration: a review and evaluation of recent research. *Trans. IChemE* 59, 147-160, (1981).

WAKEMAN R.J. & RUSHTON A. The removal of filtrate and soluble material from compressible filter cakes. *Filtration & Separation* Sept./Oct. 1976, 450-454.

WILLIS M.S. & TOSUN I. A rigorous cake filtration theory. *Chemical Engineering Science* 35, 2427-2438, (1980).

WILLIS M.S., TOSUN I. & COLLINS R.M. A rigorous filtration theory and a new characterization of filter cakes. *Second World Filtration Congress*, 629-636, (1979).

YOSHIOKA N., UEDA K. & MIYOSHI K. Liquid pressure distribution for filtration through curved leaves. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 5 (3), 77-82, (1972).

#### **FILTRATION : SEDIMENTATION - DRAINAGE ET ASPECTS CARACTERISATION DES PARTICULES.**

AKERS R.J. The compression of flocculated sediments. *Filtration & Separation* July/Aug. 1980, 354-356.

ALEXANDER K.S., AZIZI J., DOLLIMORE D. & PATEL F.A. An interpretation of the sedimentation behavior of pharmaceutical kaolin and other kaolin preparations in aqueous environments. *Drug development and industrial pharmacy* 15 (14-16), 2559-2582, (1989).

BERSA L., SENGUPTA D.K. & ROY S.K. Particle characteristics and their influence on dewatering of kaolin, calcite and quartz suspensions. *Int. J. Mineral Proc.* 59, 89-112, (2000).

BOCKSTAL F., FOUARGE L., HERMIA J. & RAHIER G. Constant pressure cake filtration with simultaneous sedimentation. *Filtration & Separation* July/Aug. 1985, 255-257.

CHRISTENSEN G.L. & DICK R.I. Specific resistance measurements. *Environmental Engineering*, 111, (3), 265-270, (1985).

- CHRISTENSEN G.L. & DICK R.I. Specific resistance measurements: non parabolic data. *Journal of Environmental Engineering* 111 (3), 243-257, (1985).
- DOLLIMORE D., HORRIDGE T.A. & ROBINSON R. The effect of the hydration of the exchangeable cation on the flocculation behaviour of china clay-polyacrylamide suspensions, *Powder Technology* 17, 207-212, (1977).
- DOLLIMORE D. & HORRIDGE T.A. The filtration of beds of china clay flocculated by polyacrylamide. *Powder Technology* 5, 111-114, (1971-1972).
- EL ATTAR SOFI Y., CARQUILLE C., LAMARCHE J.M. & FOISSY A. Influence of calcium and phosphate ions on the adsorption of partially hydrolyzed polyacrylamides on TiO<sub>2</sub> and CaCo<sub>3</sub>. *Prog. Colloid. Polym. Sci.* 82, 43-51, (1990).
- FLOERGER Floclants - essais de laboratoire. Brochure technique.
- FOISSY A., PERSELLO J., LAMARCHE J.M. & ROBERT G. Stability measurement and dispersion process of CaCO<sub>3</sub>. Suspensions in sodium polyacrylate aqueous solutions. *J. Dispers. Sci. Technol.* 3, 105, (1982).
- FOISSY A., EL ATTAR A. & LAMARCHE J.M. Adsorption of polyacrylic acid on titanium dioxide. *Journal of Colloid and Interface Science* 96 (1), 275-287, (1983).
- FRANCOIS R.J., VAN HAUTE A.A. & WINDERICKX G.C. Influence of process parameters of flocculation and floc characteristics. Brochure technique.
- GOTOH K., SAKAI T., KATO H. & SHIRATO M. Sedimentation of flocculated slurry. *Kagaku Kogaku* 32 (11), 1105-1110, (1968).
- GY J. Determination of the filtration characteristics with the aid of the compression permeability measuring technique. *Acta Technica* 89 (1-2), 127-144, (1979).
- HUNTER R.J. & DELL C.C. Development of a fluxmeter for studying the dewatering of flocculated clay. Provided by the authors.
- KAVANAGH B.V. The dewatering of activated sludge: measurement of specific resistance on filtration and capillary suction time. *Water Pollution Control*, 388-398, (1980).
- KOS P. Theory of gravity thickening of flocculent suspensions and a new method of thickener sizing. *Second World Filtration Congress London*, 595-603, (1979).
- LAMARCHE J.M., PERSELLO J. & FOISSY A. Influence of molecular weight of sodium polyacrylate in calcium carbonate aqueous dispersions. I & EC *Product Research & Development* 22, 123-126, (1983).
- LAMARCHE J.M., FOISSY A., ROBERT G., REGGIANI J.C. & BERNARD J. Adsorption d'un polymère de l'acide acrylique sur le dioxyde de titane. Fournie par les auteurs.
- LLOYD P.J. Particle characterization. *Chemical Engineering* April 1974, 120-123.
- MURASE T., IWATA M., KATO I., LEE W.D. & SHIRATO M. Determination of specific resistance of highly compressed cake by use of expression data. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 21 (2), 204-206, (1988).
- NONAKA M. Micro-processes in the sedimentation and thickening processes. *World Filtration Congress III proceedings*, 380-389, (1982)
- PEARSE M.J. & BARNETT J. Chemical treatments for thickening and filtration. *Filtration & Separation* Sept./Oct. 1980, 460-470.



- PIERRE A., LAMARCHE J.M., MERCIER R., FOISSY A. & PERSELLO J. Calcium as potential determining ion in aqueous calcite suspensions. *J. of Disp. Sci. & Technol.* (1990).
- PIERRE A. ET AL. The adsorption of cement superplasticizers on to mineral dispersions. *Adsorption Science & Technology* 6 (4), 219-231, (1989).
- PIERRE A., LAMARCHE J.M., MERCIER R. & FOISSY A. Adsorption d'un fluidifiant du ciment sur le carbonate de calcium. *Cement and Concrete Research* 19, 692-702, (1989).
- POPPING B., DERATANI A., SEBILLE B., DESBOIS N., LAMARCHE J.M. & FOISSY A. The effects of electrical charge on the adsorption of a weak cationic polyelectrolyte onto silica, silicon carbide and calcium fluoride. *Colloids and Surfaces* 64, 125-133, (1992).
- READ A.D. The use of high molecular weight polyacrylamides in the selective flocculation separation of a mineral mixture. *Br. Polym. J.* 4, 253-264, (1972).
- REBOUILLAT S. & SCHWARTZBERG H.G. Dynamic and static filtration resistances during mechanical expressions involving foods. LE MAGUER M. & JELEN P. Ed., Elsevier, (2), 281-292, (1986).
- RUDZINSKI W., CHARMAS R., PARTIKA S. & FOISSY A. A calorimetric - thermodynamic study of ion adsorption at the water/anatase interface, based on the surface complexation model. *New Journal of Chemistry* 15 (5), (1991).
- SHIRATO M., MURASE T., MORI H., MIZUNO Y., OGURA T. & NAKAI E. Gravitational drainage of a granular packed bed. *International Chemical Engineering* 21 (2), 294-302, (1981).
- SHIRATO M., MURASE T., MORI H., OKADA A., MIZUNO Y. & NIWA H. Air blow drainage of granular beds. *Kagaku Kogaku Ronbunshu* 6 (40), 410-416, (1980).
- SYNDICAT D'ETUDE DE L'EAU S.E.D.E. The practical theory of flocculation processes. *Proceedings of S.E.D.E., K.U. Leuven*, 1-20, (1981).
- TAKAI R., ABE H., WATANABE H., HASEGAWA H. & SAKAI Y. Average specific cake resistance determined in the presence of sedimentation in filtration of starch slurry under constant pressure. *Journal of Food Process Engineering* 9, 265-275, (1987).
- WAKEMAN R.J. & HOLDICH R.G. Theoretical and experimental modelling of solids and liquid pressures in batch sedimentation. *World Filtration Congress III*, 346-353, (1982).
- WARD A.S. Pretreatment processes. Department of Chemical Engineering, University of Technology Loughborough, Leics. U.K., (1982).
- WARDEN J.H. Continuous thickening of flocculent sludge. Provided by the author.
- ZEITSCH K. Eine neue Theorie für die Permeabilität eines durch Sedimentation entstandenen Filterkuchens. *Tech. Mitt. Krupp. Forsch. Ber.* 42 (2), 71-76, (1984).
- ZERROUK R., FOISSY A., MERCIER R., CHEVALLIER Y. & MORAWSKI J-C. Study of Ca<sup>2+</sup> - Induced silica coagulation by small angle scattering. *Journal of Colloid and Interface Science* 139 (1), 20-29, (1990).

#### **PRESSAGE A VIS ET EXTRUSION.**

- BONAMICI F. Filtre-presse à vis à étages multiples pour extraire et filtrer les matières solubles contenues dans les matières végétales. *Demande de Brevet d'Invention N° 82 03766*, (1982).

- BOSTANDZHIYAN S.A., BOYARCHENKO V.I. & KARGAPOLOVA G.N. The non-isothermal extrusion of anomalously viscous fluids under complex shear conditions. *International Chemical Engineering* 12 (3), 379-384, (1972).
- BREDESON D.K. The role of the screw press in a modern vegetable oil plant. *AIChE Summer National Meeting*, Denver, (1983).
- BRETSCHNEIDER R., DYNTAR J. & STRANSKY J. Press TL-1000. *Listy Cukrovarnick* 96, 8-16, (1980).
- DYER D.F. A numerical solution for the single-screw extrusion of a polymer melt. *AIChE Journal* 15 (6), 823-828, (1969).
- EDWARDS R.H. & KOHLER G.O. Wet fractionation of forage to reduce energy requirements of dehydration. U.S. Department of Energy Report, DE-AI01-78CS40090, (1982).
- FARMER J. The theory, design and operation of multiple barrelled screw presses for bagasse. *Factory Engineering*. Provided by the author.
- ITO S. & KAJIUCHI T. Mixing effects in a single-screw extruder. *Kagaku Kogaku Ronbunshu* 1 (2), 131-136, (1975).
- ITO S. & KAJIUCHI T. On power characteristics of single-screw extruder. *Kagaku Kogaku* 38 (2), 138-144, (1974).
- ITO S. & KAJIUCHI T. On flow characteristics in single-screw extruder. *Kagaku Kogaku* 37 (6), 581-587, (1973).
- KEMBLOWSKI Z. & SEK J. Residence time distribution in a real single screw extruder. *Polymer Engineering and Science* 21 (18), 1194-1202, (1981).
- LEE M.C. Surimi process technology. *Food Technology*, 69-80, Nov. 1984.
- LEVINE L. & ROCKWOOD J. Simplified Models for estimating operating characteristics of food extruders. *AIChE National Meeting*, San Francisco, (1984).
- LÜTHI H.R. & GLUNK U. Extraktion und kontinuierliche Schönung. 3. Entwicklung der Extraktion von Apfelsaft und Betriebserfahrungen. *Flüssiges Obst* 46, 111-120, (1979).
- MATON A.E. Screw feeder design. *Powder Handling & Processing* 6 (1), 87-89, (1994).
- SCHÜLE H., MEDER S. & MÜLLER C. Determining the residence time behavior in extruders. *Kunststoffe German Plastics* 78 (1), 78-83, (1988).
- SCHÜLE H., MEDER S. & MÜLLER C. Grundlagen des Verweilzeitverhaltens in Extrudern. (Fundamentals of the residence time behaviour in extruders.) *Kunststoffe German Plastics* 77 (12), 1269-1272, (1987).
- SHIRATO M., MURASE T., IWATA M., HAYASHI N. & OGAWA Y. Continuous expression of slurry in a screw press. *International Chemical Engineering* 25 (1), 88-96, (1985).
- SHIRATO M., MURASE T. & IWATA M. Pressure profile of a Bingham fluid in constant-pitch, straight-taper and decreasing-pitch screw extruders. *International Chemical Engineering* 23 (4), 689-698, (1983).
- SHIRATO M., MURASE T., HAYASHI N. & IWATA M. Basic concept and its application of continuous screw expression. *3rd Pacific Chemical Engineering Congress*, Seoul, (1983).

SHIRATO M., MURASE T. & IWATA M. Pressure profile in a power-law fluid in constant-pitch, straight-taper and decreasing-pitch screw extruders. *International Chemical Engineering* 23 (2), 323-332, (1983).

SHIRATO M., MURASE T., IWATA M., HAYASHI N. & OGAWA H. Studies in screw expression of slurries. *Kagaku Kogaku Ronbunshu* 9 (3), 302-308, (1983).

SHIRATO M., MURASE T. & IWATA M. Pressure profiles in constant-pitch, straight-taper and decreasing-pitch screw extruders. *International Chemical Engineering*, 22(3), 470-478, (1982).

SHIRATO M., MURASE T. & IWATA M. Pressure profile of power law non-Newtonian fluids in screw extruders of constant pitch-straight taper type and varying pitch type. *Kagaku Kogaku Ronbunshu* 7 (6), 556-563, (1981).

SHIRATO M., MURASE T. & IWATA M. Pressure profile in screw extruders of constant pitch-straight taper type and varying pitch type. *Kagaku Kogaku Ronbunshu* 6 (5), 461-467, (1980).

SHIRATO M., MURASE T., HAYASHI N., MIKI K., FUKUSHIMA T., SUZUKI T., SAKAKIBARA N. & TAZIMA T. Fundamental studies on continuous extrusion using a screw press. *International Chemical Engineering* 18 (4), 680-688, (1978).

TINDALE L.H. & HILL-HAAS S.R. Current equipment for mechanical oil extraction. *Am. Oil Chemists Soc.* 53, 265-264, (1976).

UNDERWOOD W.M. Experimental method for designing extrusion screws. Provided by the author.

UTVIK A. Liquid/solid separation by twin screw pressing. AICHE Meeting, Denver, (1983).

WARD J.A. Processing high oil content seeds in continuous screw presses. *J. Am. Oil Chemists Soc.* 53, 261-264, (1976).

#### **DESHYDRATATION : ASPECTS ECONOMIQUES ET ENERGETIQUES.**

ASSOCIATION POUR LA PROMOTION INDUSTRIE AGRICULTURE. Le séchage dans les industries agroalimentaires. Aspects énergétiques. 2ème Salon International du Génie Industriel Alimentaire. (1978).

BAUSIER A. Le séchage des pulpes et les économies éventuelles de combustibles. *La Sucrierie Belge* 93 (7), 293-307, (1974).

CARLETON A.J. Dewatering filter cakes by compression. I.CHEM.E. Symposium Series 91, 175-186. Provided by the author.

CONFEDERATION GENERALE DES PLANTEURS DE BETTERAVES L'économie betteravière. Editions SEDA, Paris, (1995).

DEMAUX M. Pressage des pulpes de betteraves. Essai d'optimisation technico-économique. *Ind. Agr. et Ali.* 95 (7-8), 811-820, (1978).

DEMAUX M. La pulpe sèche et les économies d'énergie. *Ind. Agr. et Ali.* 94 (7-8), 737-747, (1977).

FRERE G. Economie d'énergie en déshydratation de produits agricoles. *Ind. Ali. et Agr.*, 491-497, (1981).

GAUTHIER A. & BIMBENET J-J. Simulation et optimisation technico-économique du séchage des fourrages dans les séchoirs à tambour rotatif. *Ind. Ali. et Agr.*, 371-380, (1977).

HAUBRY A. Technical and economical impact of the squeezer in the sludge filtration field. Symposium Société Belge de Filtration Louvain-la-Neuve, (1981).

KOCIENCKI H.L. & ROE R.A. Waste disposal costs reduced 90% by dewatering. *Chemical Processing*, Sept. (1980).

LECLERC D. & REBOUILLAT S. Economic Optimization Strategy in Solid/liquid Separation Processes: Mechanical Dewatering of Flocculated Sludges – Theoretical evaluation of energetic and economic optima. *Int. Symp.*, Louvain-la-Neuve, Belgium, SBF Ed., 283-313, Nov. (1985).

LECLERC D. & REBOUILLAT S. Déshydratation des suspensions solide-liquide par filtration-séchage. *Energétique industrielle*, Tome 3, Technique et Documentation, Lavoisier, Paris, (1982).

LECLERC D. & REBOUILLAT S. Déshydratation des suspensions solide-liquide par filtration-séchage. *Energétique industrielle*, Tome 3, Technique et Documentation, Lavoisier, Paris, (1982).

LE GOFF P. *Energétique industrielle*. Tome 2, Chap. 9 & 10. Tome 3, Chap. 11. & 15, Technique & Documentation, Lavoisier, Paris, (1980).

LE GOFF P. Optimisation énergétique ou optimisation économique des procédés industriels. Application à la séparation des mélanges. Fournie par l'auteur.

LUCAS M., MORIN M. & LEDRU M. Economies d'énergie dans la déshydratation des pulpes et des luzernes par séchage basse température. *Ind. Ali. et Agr.*, 739-742, (1980).

MAFART P. Coût Energétique des Opérations d'Elimination d'Eau. *Tech et Doc Ed.*, Paris, (1980).

MARC M. La filtration en pleine évolution. *Alimentation* 91, 77-84, (1981).

MCGUCKIN J.T., SCHONEY R.A., STRAUB R.J. & KOEGEL R. Wet fractionation system: an economic analysis. *Transactions of the ASAE* 25 (5), 1400-1404, (1982).

MÖHL E. Extraktion und kontinuierliche Schönung. 4. Betriebswirtschaftliche Gesichtspunkte beim Einsatz der Extraktion. *Flüssiges Obst* 46, 168-172, (1979).

REBOUILLAT S., LECLERC D. & BALUAIS G. Evaluation technique et économique du pressage des pulpes de betteraves. Incidences des adjuvants de pressabilité. *Communication personnelle* (1984).

REBOUILLAT S., LECLERC D. & BALUAIS G. La déshydratation par filtration-pressage. Incidence des adjuvants de pressabilité sur le pressage des pulpes de betteraves. *Société Française de Filtration, Bulletin Technique n° 10*, 72-84, (1985).

VILLERMAUX J. Perspectives for chemical engineering research. French policy. *International Chemical Engineering* 23 (4), 634-644, (1983).



---

**Annexes**

---

<b>ANNEXE A1</b>	P. 244
<i>La compression unidirectionnelle à pression constante (CPC) Théorie Traditionnelle</i>	
<b>ANNEXE A2</b>	P. 261
<i>L'usage des modèles rhéologiques pour l'étude théorique de la CPC</i>	
<b>ANNEXE A3</b>	P. 269
<i>La compression unidirectionnelle à déformation constante (CDC) Conditions opératoires / Aspects théoriques de la CDC1 et de la CDC2</i>	
<b>ANNEXE A4</b>	P. 285
<i>La compression axiale avec écoulement radial (CAR) et le pressage à vis</i>	
<b>ANNEXE A5</b>	P. 290
<i>Publication P1</i>	
<b>ANNEXE A6</b>	P. 326
<i>Publication P5</i>	
<b>ANNEXE A7</b>	P. 334
<i>Publication P7</i>	
<b>ANNEXE A8</b>	P. 337
<i>Publication P8</i>	
<b>ANNEXE A9</b>	P. 341
<i>Eléments de réponse aux QFP</i>	



## ANNEXE A1

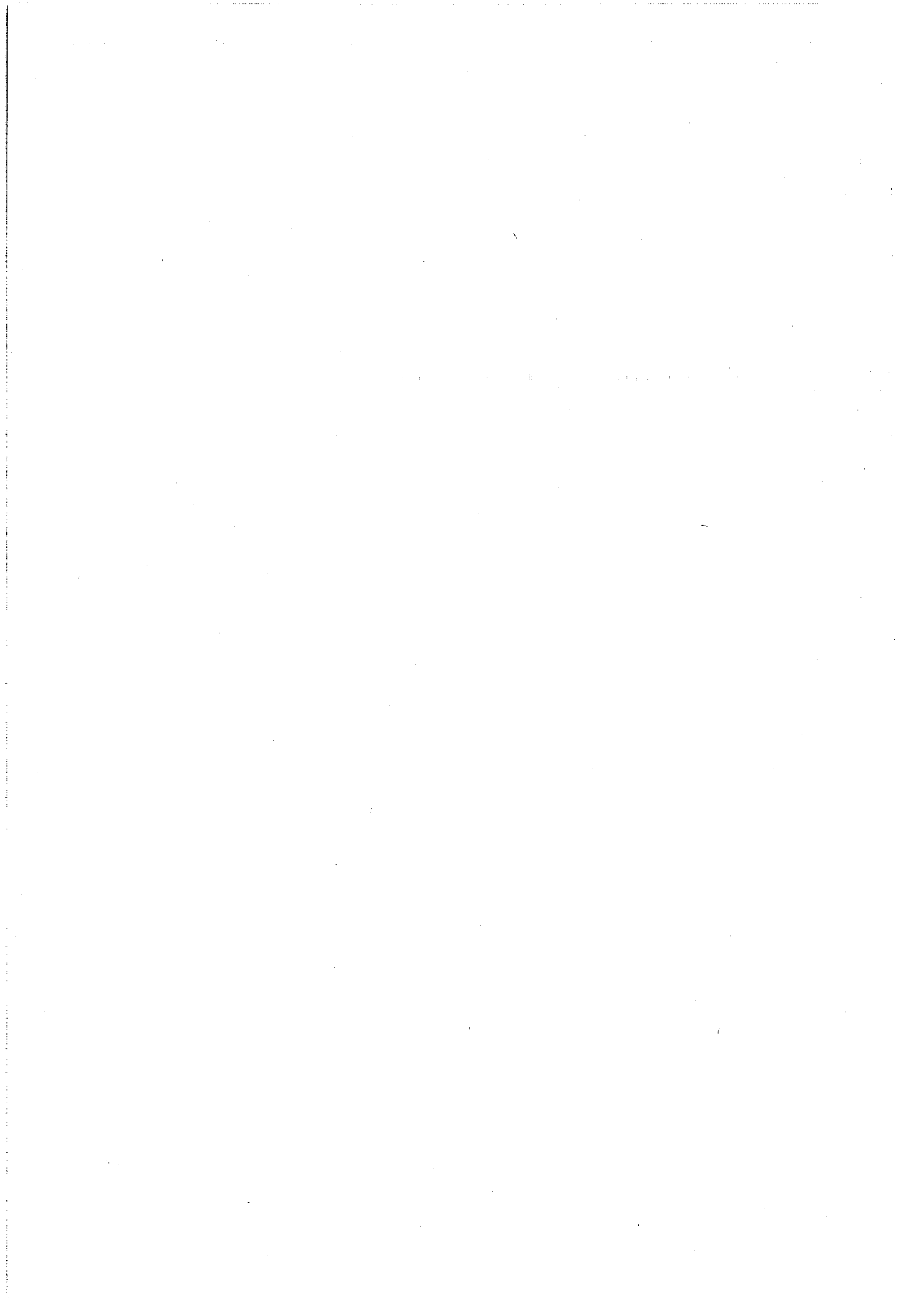
*LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE A PRESSION CONSTANTE (CPC)*

## ASPECT THEORIQUE

**THE THEORY OF ONE-DIMENSIONAL COMPRESSION****THE STUDY OF DIFFERENT CASES REGARDING  $P_f$  VARIATION :**

1. Constant  $P_f$  with cake height
2. Linear variation of  $P_f$  with cake height
3. Sinusoidal variation of  $P_f$  with cake height





### The Theory of one-dimensional Compression

1. The saturated porous material (SPM) is homogeneous.
2. The SPM is saturated.
3. Both the liquid and solid constituents are perfectly incompressible compared to the compressibility of the SPM.
4. The compression of the SPM layer is due to the volume change only, which is due to the expression of liquid from the voids.
5. Darcy's law is applicable.
6. Deformation of SPM takes place in the direction of the load application.
7. The coefficient of compression  $C_v$  is constant during the compression.

In the case of one-dimensional compression the flow of liquid is in one direction ( $z$  direction), so the flows  $q_x$ ,  $q_y$  and  $dq_x$ ,  $dq_y$  are equal to zero (Fig. A1.1) and (Fig. A1.2).

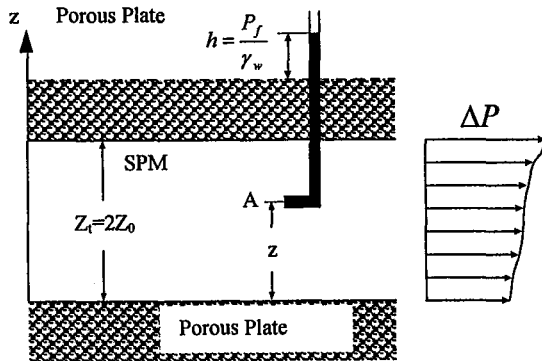


Figure A1.1 : One-dimensional compression

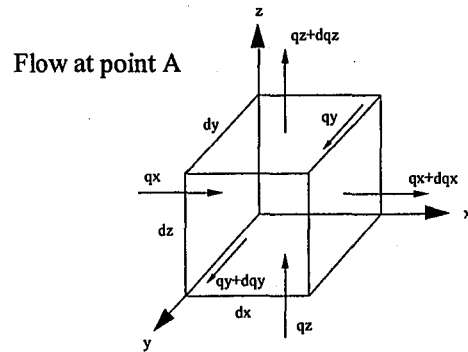


Figure A1.2 : Flow pattern from point A

To calculate the flow  $q_z$  entering the SPM prism at point  $A$  in  $z$  direction, we use Darcy's law:

$$q_z = K_z \frac{\partial h}{\partial z} dx dy \quad \text{Eq. A1.1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \text{hydraulic gradient [-]}$$

$q_z$  = flow entering in direction  $z$  [ $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ]

$K_z$  = coefficient of permeability in direction  $z$  [ $\text{m s}^{-1}$ ]

$h$  = hydraulic head at point  $A$  [m]

$dx dy$  = surface in direction  $z$  [ $\text{m}^2$ ]

We can express  $K_z$  by the relation:

$$K_z = \frac{K_i \cdot \rho \cdot g}{\mu} \quad \text{Eq. A1.1b}$$

$K_i$  : intrinsic coefficient of permeability [ $\text{m}^2$ ]

$\mu$  : fluid viscosity [ $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ ] [ $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ]

$\rho$  : mass density of the fluid [ $kg/m^3$ ]  
 $g$  : Acceleration due to gravity [ $m/s^2$ ]

The flow leaving the prism in  $z$  direction ( $q_z + dq_z$ )

$$\text{with } dq_z = K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dx dy$$

$$\text{Hence, } (q_z + dq_z) = K_z \left( \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dz \right) dx dy \quad \text{Eq. A1.2}$$

Rate of change of volume of the SPM element :

$$\frac{\partial V_T}{\partial t} = (q_z + dq_z) - q_z \quad \text{Eq. A1.3}$$

$$\text{with } V_T = dx dy dz \quad \text{Eq. A1.4}$$

Substituting Eqs. A1.1 and A1.2 into Eq. A1.3, we obtain Eq. A1.5.

$$(q_z + dq_z) - q_z = K_z \left( \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dz \right) dx dy - K_z \frac{\partial h}{\partial z} dx dy = \frac{\partial V_T}{\partial t}$$

$$K \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dx dy dz = \frac{\partial V_T}{\partial t} \quad \text{Eq. A1.5}$$

$K$  : Coefficient of permeability [ $m \cdot s^{-1}$ ]

$$\text{However, } h = \frac{P_f}{\gamma_f} \text{ [m]} \quad \text{Eq. A1.6}$$

$P_f$  : Excess pore fluid pressure [ $N/m^2$ ]

$\gamma_f$  : Unit weight of fluid for water:  $\gamma_f = 9.81 [kN/m^3]$  or [ $kg/m^3 \cdot m/s^2$ ]

Substitution of Eq. A1.6 into Eq. A1.5

$$\frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{1}{dx dy dz} \frac{\partial V_T}{\partial t} \quad \text{Eq. A1.7}$$

We assume that during compression the rate of change of volume is equal to the rate of change of void volume (liquid), the cross section is constant. So,

$$\frac{\partial V_T}{\partial t} = \frac{\partial V_f}{\partial t} \quad \text{Eq. A1.8}$$

$V_f$  = Volume of voids in the SPM element (volume of liquid), and

$$e : \text{Void ratio, } e = \frac{V_f}{V_s} \text{ [-]} \quad \text{Eq. A1.9}$$

$V_s$  = volume of solids in the SPM element (constant), so

$$\frac{\partial V_T}{\partial t} = V_s \frac{\partial e}{\partial t} = V_T \frac{V_s}{V_T} \frac{\partial e}{\partial t} = V_T \frac{V_s}{V_s + V_f} \frac{\partial e}{\partial t} = V_T \frac{V_s/V_s}{V_s/V_s + V_f/V_s} \frac{\partial e}{\partial t} = V_T \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V_T}{\partial t} = \frac{dx dy dz}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t}$$

Eq. A1.10

Substituting the above relation into Eq. A1.7, we get Eq. A1.11.

$$\frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{1}{dx dy dz} \frac{dx dy dz}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad \text{Eq. A1.11}$$

The change in void ratio,  $\partial e$ , is due to the increase of effective stress, assuming that they are linearly related, then

$$\partial e = -a_v \partial(P_s) \quad \text{Eq. A1.12}$$

$a_v =$  coefficient of compressibility  $[m^2/N]$

The increase of effective stress is due to the decrease of excess pore fluid pressure,  $\partial P_f$ .

$$\begin{aligned} \text{In other words :} \quad \partial P_s + \partial P_f &= \partial P \\ \uparrow \text{solid} + \downarrow \text{liquid} &= Cte \end{aligned}$$

Hence,

$$\partial e = a_v \partial P_f \quad \text{Eq. A1.13}$$

$\partial P = Cte = 0$  in the case of CPC.

Combining Eq. A1.11 with Eq. A1.13, we obtain Eq. A1.14

$$\frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{a_v}{1+e} \frac{\partial P_f}{\partial t} = m_v \frac{\partial P_f}{\partial t} \quad \text{Eq. A1.14}$$

$$m_v : \text{Coefficient of volume compressibility } [m^2 N^{-1}], m_v = \frac{a_v}{1+e} \quad \text{Eq. A1.15}$$

or

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{K}{\gamma_f \cdot m_v} \cdot \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = C_v \cdot \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} \quad \text{Eq. A1.16}$$

We can use at this stage the mathematics of diffusion by CRANK (1973).

$$C_v : \text{Coefficient of compression } [m^2 s^{-1}], C_v = \frac{K}{\gamma_f \cdot m_v} \quad \text{Eq. A1.17}$$

Eq. A1.16 can also directly be obtained from Eq. 1.33. Eq. A1.16 is more or less one form of the basic differential equation of TERZAGHI's consolidation theory.

A standard method to obtain a solution of a partial differential equation is to assume that the variables are separable, CRANK (1973). We therefore assume that  $P_f$  is the product of 2 functions,

$$P_f = F(z)G(t) \quad \text{Eq. A1.18}$$

$$\text{So, } \frac{\partial P_f}{\partial t} = F(z) \frac{\partial}{\partial t} G(t) = F(z)G'(t) \quad \text{Eq. A1.19}$$

$$\text{And } \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(z)G(t) = F''(z)G(t) \quad \text{Eq. A1.20}$$

From Eqs. A1.16, A1.19 and A1.20,

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = C_v \cdot \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} \text{ with proper substitution we obtain:}$$

$$F(z)G'(t) = C_v F''(z)G(t) \text{ (The variables are separated)}$$

$$\text{Or } \frac{F''(z)}{F(z)} = \frac{G'(t)}{C_v G(t)} \quad \text{Eq. A1.21}$$

The right part of Eq A1.21 is a function of  $z$  only and independent of  $t$ . The left part is a function of  $t$  and is independent of  $z$ . The ratio must therefore be equal to a constant,  $-b^2$ , this constant is generally called the separation constant, (Advanced Calculus for Applications, second edition, F. B. HILDEBRAND (1975).

$$\frac{F''(z)}{F(z)} = -b^2, \text{ So,}$$

$$F''(z) = -b^2 F(z) \quad \text{Eq. A1.22}$$

A solution to Eq. A1.22 (Equation of 2<sup>nd</sup> order, linear and homogenous) can be given by

$$F''(z) = -b^2 F(z)$$

$$F''(z) + b^2 F(z) = 0$$

$$m^2 + b^2 = 0, \quad m = 0 \pm i\sqrt{b^2}, \quad \text{hence}$$

$$F(z) = e^{0z} (A_1 \cos bz + A_2 \sin bz)$$

$$F(z) = (A_1 \cos bz + A_2 \sin bz) \quad \text{Eq. A1.23}$$

where  $A_1$  and  $A_2$  are constants.

The right-hand side of Eq. A1.21 may be written as

$$\frac{F''(z)}{F(z)} = \frac{G'(t)}{C_v G(t)}$$

$$G'(t) = -b^2 C_v G(t) \quad \text{Eq. A1.24}$$

A solution to Eq. A1.24 (First order linear equation) can be given by:

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = -b^2 C_v$$

$$\rightarrow \text{Integration : } \ln|G(t)| = -b^2 C_v t$$

$$|G(t)| = e^{-b^2 C_v t + C_{te}} \quad \forall -b^2 C_v t + C_{te}, \quad e^{-b^2 C_v t + C_{te}} > 0, \text{ then } |G(t)| = G(t)$$

$$G(t) = e^{-b^2 C_v t} \cdot e^{C_{te}} \quad \text{with } e^{C_{te}} = A_3$$

$$G(t) = A_3 \cdot e^{-b^2 C_v t} \quad \text{Eq. A1.25}$$

where  $A_3$  is a constant. Combining Eqs. A1.18, A1.23, A1.25, ( $P_f = F(z)G(t)$ )

$$P_f = (A_1 \cos bz + A_2 \sin bz) \cdot A_3 \cdot e^{-b^2 C_v t}$$

$$\text{Eq. A1.26}$$

$$P_f = (A_4 \cos bz + A_5 \sin bz) \cdot e^{-b^2 C_v t}$$

$$A_4 = A_1 A_3 \text{ and } A_5 = A_2 A_3$$

The constants in Eq. A1.26 can be calculated using the boundary conditions, which are :

1. At time  $t = 0$ ,  $P_f = P_{fi}$
2.  $P_f = 0$  at  $z = 0$
3.  $P_f = 0$  at  $z = Z_t = 2Z_0$

$Z_0$  is the length of the longest path. In this case, with a two-way drainage system,  $Z_0$  equal to one half of the total thickness of the SPM layer,  $Z_t = 2Z_0$ .

The second boundary condition ( $P_f = 0$  at  $z=0$ ) dictates that  $A_4 = 0$ . Therefore, Eq. A1.26 can be simplified to obtain an expression that satisfies the differential Eq. A1.16.

$$P_f(z,t) = (A_5 \sin bz) \cdot e^{-b^2 C_v t}$$

And from the third boundary condition ( $P_f = 0$  at  $z = Z_t = 2Z_0$ ) one obtains:

$$A_5 \sin(2bZ_0) = 0 \text{ and } A_5 \neq 0$$

$$\text{Or } 2bZ_0 = n\pi \text{ with } n \in [1, \infty], \text{ and } b = \frac{n\pi}{2Z_0}$$

where  $n$  is an **integer**. Consequently  $P_f(z,t)$  is the first particular solution of Eq. A1.16

Further particular solutions have the form given by the Fourier calculation,

$$P_f = \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4}\right) \quad \text{Eq. A1.27}$$

$T_v$  is the nondimensional time given by:  $T_v = \frac{C_v t}{Z_0^2}$  [-]

The first boundary condition ( $t = 0$ ,  $P_f = P_{fi}$ ) is satisfied when we have the coefficient of  $A_n$  in the form as follows,

$$P_{fi} = \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \quad \text{Eq. A1.28}$$

$P_{fi}$  is an uneven periodic function,  $P_{fi}(-z) = -P_{fi}(z)$ , then we can limit the study the Fourier sine series only on the interval  $[0, 2Z_0]$ .

Equation A1.28 being a Fourier sine series,  $A_n$  can be given by

$$A_n = 2 \left[ \frac{1}{2Z_0} \int_0^{2Z_0} P_{fi} \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz \right]$$

$$A_n = \frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} P_{fi} \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz \quad \text{Eq. A1.29}$$

Combining Eqs. A1.27 and A1.29, leads to the general solution Eq. A1.30.

$$P_f = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} P_{fi} \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4}\right) \quad \text{Eq. A1.30}$$

## The Study of different cases regarding $P_f$ variation:

### 1. $P_f$ Constant with SPM height:

Referred to Fig. A1.3

$P_n = P_{f0}$  So, referring to Eq. A1.30

$$A_n = \frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} P_{f0} \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz = \frac{2P_{f0}}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$\text{so, } P_f = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{2P_{f0}}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp\left( \frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4} \right) \quad \text{Eq. A1.31}$$

$(1 - \cos n\pi)$  is zero for cases where  $n$  is even; therefore,  $P_f$  equal to zero as well. For the non-zero situations, it is useful to take  $n = 2m + 1$ , ( $n \in [1, +\infty[$ , then  $m \in [0, +\infty[$ ),  $m$  is an integer. Eq. A1.31 becomes:

$$P_f = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left( \frac{2P_{f0}}{(2m+1)\pi} (1 - \cos(2m+1)\pi) \right) \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2Z_0} \cdot \exp\left( \frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4} \right) \quad \text{Eq. A1.31b}$$

The term  $(1 - \cos(2m+1)\pi)$  always equals 2, where  $m$  is defined in the interval  $[0, \infty[$ , then:

$$P_f = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left( 2 \cdot \frac{2P_{f0}}{(2m+1)\pi} \right) \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2Z_0} \cdot \exp\left( \frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4} \right)$$

$$P_f = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2P_{f0}}{M_i} \cdot \sin \frac{M_i z}{Z_0} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \quad \text{Eq. A1.32}$$

where  $M_i = (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2}$

Simulation, Fig. A1.4

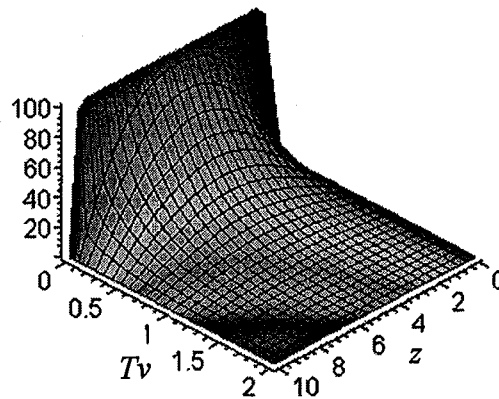


Figure A1.4 : Eq. A1.32 graphical representation,  $P_f = f(T_v, z)$

The degree of compression is defined as a function of  $z$  :

$$U_z = \frac{P_{f_i} - P_f}{P_{f_i}} = 1 - \frac{P_f}{P_{f_i}} = \frac{P_s}{P_{f_i}} = \frac{P_s}{P_{f_0}} = \frac{\text{dissipated fluid pressure}}{\text{initial fluid pressure}} \quad \text{Eq. A1.33}$$

$P_s$  is the local effective stress  $z$  provoked by the compression.

Combining Eqs. A1.32 and A1.33

$$U_z = \frac{P_{f_i} - P_f}{P_{f_i}} = 1 - \frac{P_f}{P_{f_i}} = 1 - \frac{\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2P_{f_0}}{M_i} \cdot \sin \frac{M_i z}{Z_0} \cdot \exp(-M_i^2 T_v)}{P_{f_i}}$$

$$U_z = 1 - \frac{\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2P_{f_0}}{M_i} \cdot \sin \frac{M_i z}{Z_0} \cdot \exp(-M_i^2 T_v)}{P_{f_0}}$$

Hence,

$$U_z = 1 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2}{M_i} \cdot \sin \frac{M_i z}{Z_0} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \quad \text{Eq. A1.34}$$

The simulation, Fig. A1.5

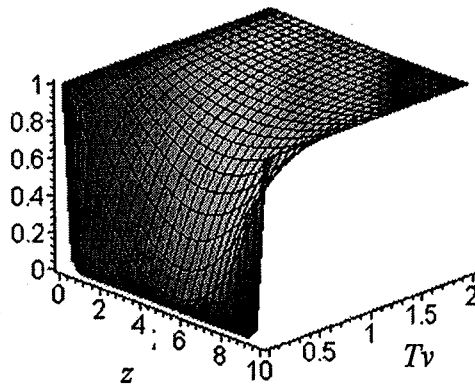


Figure A1.5 : Eq. A1.34 graphical representation,  $U_z = f(T_v, z)$

The average degree of compression for the all SPM cake is given by:

$$U_{av} = \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f_i} dz - (1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f_i} dz} = \frac{\text{compression at any time}}{\text{maximum compression}} \quad \text{Eq. A1.35}$$

For  $Z_t = 2Z_0$ , and  $P_{f_i} = P_{f_0}$

$$U_{av} = \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f_i} dz - (1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f_i} dz} = 1 - \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f_i} dz}$$



$$U_{av} = \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f_0} dz - (1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f_0} dz} = 1 - \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f_0} dz}$$

$$U_{av} = 1 - \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f_0} dz} = 1 - \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2P_{f_0}}{M_i} \cdot \sin \frac{M_i z}{Z_0} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f_0} dz}$$

$$U_{av} = 1 - \frac{(1/Z_t) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2P_{f_0}}{M_i} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \int_0^{Z_t} \sin \frac{M_i z}{Z_0} dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f_0} dz}$$

After integration,

$$U_{av} = 1 - \frac{(1/Z_t) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2P_{f_0}}{M_i} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \left( -\frac{Z_0}{M_i} \cos \frac{M_i z}{Z_0} \right)_0^{Z_t}}{(1/Z_t) (P_{f_0} Z)_0^{Z_t}}$$

$$U_{av} = 1 - \frac{(1/Z_t) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2P_{f_0}}{M_i} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \left( -\frac{Z_0}{M_i} (\cos 2M_i - 1) \right)}{(1/Z_t) (P_{f_0} Z_t)}$$

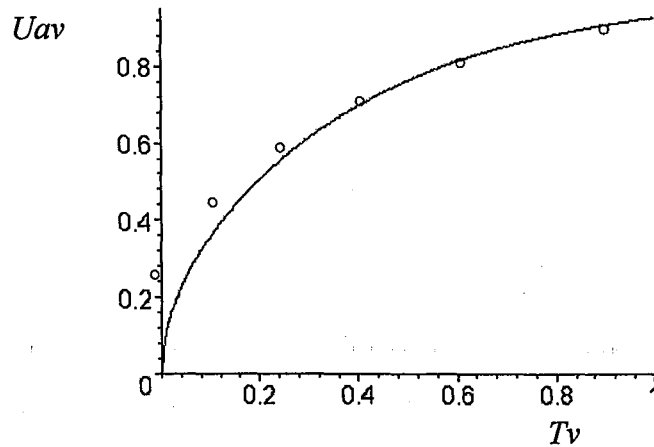
$$U_{av} = 1 - \frac{(1/Z_t) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2P_{f_0}}{M_i} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \left( -\frac{Z_0}{M_i} (-2) \right)}{(1/Z_t) (P_{f_0} Z_t)} = 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2P_{f_0}}{M_i} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \left( \frac{Z_t}{M_i} \right)}{(P_{f_0} Z_t)}$$

Further simplifying,

$$U_{av} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M_i^2} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \quad \text{Eq. A1.36}$$

Simulated on Fig. A1.6:

In addition the empirical model from SIVARAM and SWAMEE (1977) is superimposed to the simulation of Eq. A1.36.



° Sivaram-Swamee

Figure A1.6 : SIVARAM and SWAMEE (1977)'s model is superimposed to the curve of Eq. A1.36  
SIVARAM and SWAMEE (1977) gave the following equation for  $U_{av}$  varying from 0 to 100%:

$$\frac{U_{av} \%}{100} = \frac{\left(\frac{4T_v}{\pi}\right)^{0.5}}{\left[1 + \left(\frac{4T_v}{\pi}\right)^{2.8}\right]^{0.179}} \tag{Eq. A1.37}$$

Or

$$T_v = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\frac{U_{av} \%}{100}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{U_{av} \%}{100}\right)^{5.6}\right]^{0.357}} \tag{Eq. A1.38}$$

**2. Linear variation of  $P_{fi}$  across the SPM cake:**

Referring to Fig. A1.7

$$P_{fi} = P_{f1} - P_{f2} \cdot \frac{Z_0 - z}{Z_0}$$

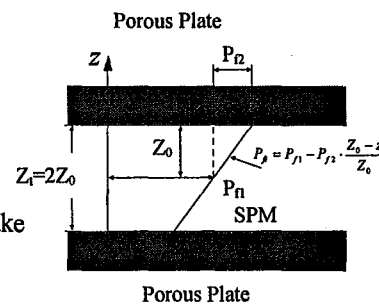
Figure A1.7 : Linear variation of  $P_{fi}$  across the SPM cake

With:

$P_{f1}$  = initial excess pore fluid pressure at  $z = Z_0$

$P_{f2}$  = initial excess pore fluid pressure -  $P_{f1}$  at  $z = 2Z_0$

so  $P_{fi} = P_{f1} + P_{f2}$  at  $z = 2Z_0$



$P_f$  being integrated into Eq. A1.30 yields

$$P_f = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} \left( P_{f1} - P_{f2} \cdot \frac{Z_0 - z}{Z_0} \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4} \right) \quad \text{Eq. A1.39}$$

Simulation, Fig. A1.8

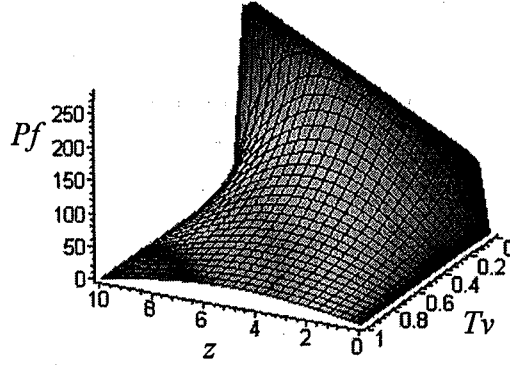


Figure A1.8 : Graphical representation of Eq. A1.39

The average degree of compression: we referred to the definition Eq. A1.35

The average degree of compression at any time is presented as follows, for the

situation where  $Z_t = 2Z_0$  and  $P_f = P_{f1} - P_{f2} \cdot \frac{Z_0 - z}{Z_0}$

$$U_{av} = \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz - (1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz} = 1 - \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}$$

$$U_{av} = 1 - \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} \left( P_{f1} - P_{f2} \cdot \frac{Z_0 - z}{Z_0} \right) dz}$$

$$= 1 - \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} \left( P_{f1} - P_{f2} \cdot \frac{Z_0 - z}{Z_0} \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4} \right) dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} \left( P_{f1} - P_{f2} \cdot \frac{Z_0 - z}{Z_0} \right) dz}$$

After integration,

$$\int_0^{2Z_0} \left( P_{f1} - P_{f2} \cdot \frac{Z_0 - z}{Z_0} \right) \cdot dz = \left( P_{f1}z - P_{f2}z + P_{f2} \frac{z^2}{2Z_0} \right) \Big|_0^{2Z_0} = 2P_{f1}Z_0$$

$$\frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} \left( P_{f1} - P_{f2} \cdot \frac{Z_0 - z}{Z_0} \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz =$$

$$\frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} \left( P_{f1} \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} - P_{f2} \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} + \frac{P_{f2}z}{Z_0} \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \right) \cdot dz$$

$$\frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} \left( P_{f1} - P_{f2} \cdot \frac{Z_0 - z}{Z_0} \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz =$$

$$-2 \frac{P_{f1} \cos(n\pi) \cdot n\pi + P_{f2} \cos(n\pi) \cdot n\pi - 2P_{f2} \sin(n\pi) - P_{f1}(n\pi) + P_{f2}(n\pi)}{n^2 \pi^2}$$

We used the integration by parts for the third term.

With proper substitution we get :

$$U_{av} =$$

$$1 - \frac{\sum_{n=1}^{Z_0} \left( -2 \frac{P_{f1} \cos(n\pi) \cdot n\pi + P_{f2} \cos(n\pi) \cdot n\pi - 2P_{f2} \sin(n\pi) - P_{f1}(n\pi) + P_{f2}(n\pi)}{n^2 \pi^2} \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4} \right) dz}{2P_{f1}Z_0}$$

with  $n = (2m + 1)$

$$U_{av} =$$

$$1 - \frac{\sum_{n=1}^{Z_0} \left( -2 \frac{P_{f1}(-1) \cdot (2m+1)\pi + P_{f2}(-1) \cdot (2m+1)\pi - 2P_{f2} \cdot (0) - P_{f1}((2m+1)\pi) + P_{f2}((2m+1)\pi)}{(2m+1)^2 \pi^2} \right)}{2P_{f1}Z_0}$$

$$\times \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4} \right) dz}{1}$$

$$U_{av} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{Z_0} \left( -2 \frac{-P_{f1} \cdot \pi - P_{f2} \cdot \pi - P_{f1}(\pi) + P_{f2}(\pi)}{(2m+1)\pi^2} \right) \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4} \right) dz}{2P_{f1}Z_0} \times \frac{1}{1}$$

$$U_{av} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{Z_0} \left( -2 \frac{-P_{f1} - P_{f2} - P_{f1} + P_{f2}}{(2m+1)\pi} \right) \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4} \right) dz}{2P_{f1}Z_0} \times \frac{1}{1}$$

$$\begin{aligned}
U_{av} &= 1 - \frac{\int_0^{Z_i} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -2 \frac{-P_{f1} - P_{f2} - P_{f1} + P_{f2}}{(2m+1)\pi} \right) \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2Z_0} \cdot \exp\left(\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4}\right) dz}{2P_{f1}Z_0} \times \frac{1}{1} \\
&= 1 - \frac{\int_0^{Z_i} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -2 \frac{-2P_{f1}}{(2m+1)\pi} \right) \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2Z_0} \cdot \exp\left(\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4}\right) dz}{2P_{f1}Z_0} \times \frac{1}{1} \\
&= 1 - \frac{\int_0^{Z_i} \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2 \frac{1}{(2m+1)\pi} \right) \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2Z_0} \cdot \exp\left(\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4}\right) dz}{Z_0} \quad \text{or } M_i = (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2} \\
U_{av} &= 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{M_i} \int_0^{Z_i} \sin \frac{M_i z}{Z_0} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) dz \right)}{Z_0} = 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{M_i} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \int_0^{Z_i} \sin \frac{M_i z}{Z_0} dz \right)}{Z_0} \\
U_{av} &= 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{M_i} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \frac{Z_0}{M_i} (1 - \cos(2M_i)) \right)}{Z_0} = 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{M_i} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \frac{Z_0}{M_i} \cdot (2) \right)}{Z_0}
\end{aligned}$$

after simplifying

$$U_{av} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M_i^2} \cdot \exp(-M_i^2 T_v)$$

Finally we obtain the same equation than Eq. A1.36 (excess pore fluid pressure is constant with depth)

$$U_{av} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M_i^2} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \quad \text{Eq. A1.40}$$

### 3. Sinusoidal variation of $P_f$ with height:

Referring to Fig. A1.9

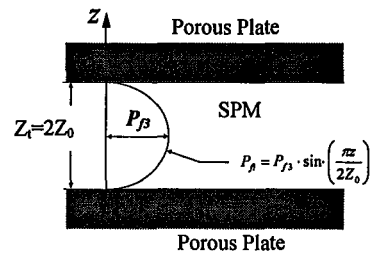


Figure A1.9 : Sinusoidal variation of  $P_f$  with height

$$P_f = P_{f3} \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{2Z_0}\right) \quad \text{Eq. A1.41}$$

Substitution of the above equation into Eq. A1.30 yields

$$P_f = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} P_{f3} \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{2Z_0}\right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4}\right) \quad \text{Eq. A1.42}$$

and the simulation, Fig. A1.10

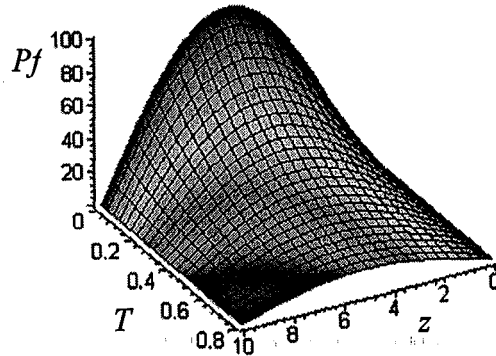


Figure A1.10 : Graphical representation of Eq. A1.42

For the average degree of compression: we refer again to the Eq. A1.35 with  $Z_t = 2Z_0$ :

$$U_{av} = \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f1} dz - (1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f1} dz}$$

$$U_{av} = \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f1} dz - (1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f1} dz} = 1 - \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f1} dz}$$

Using Eq. A1.41:

$$U_{av} = 1 - \frac{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_f dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f3} \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{2Z_0}\right) dz}$$

$$= 1 - \frac{(1/Z_t) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} P_{f3} \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{2Z_0}\right) \cdot \sin\frac{n\pi z}{2Z_0} dz \right) \cdot \sin\frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4}\right) dz}{(1/Z_t) \int_0^{Z_t} P_{f3} \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{2Z_0}\right) dz}$$

Integrating,

$$\int_0^{Z_t} P_{f3} \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{2Z_0}\right) dz = -2 \frac{P_{f3} \cdot Z_0 \cdot (\cos(\pi) - 1)}{\pi} = 4 \frac{P_{f3} \cdot Z_0}{\pi}$$

$$\frac{1}{Z_0} \int_0^{2Z_0} \left( P_{f3} \cdot \sin \left( \frac{\pi z}{2Z_0} \right) \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} dz = -2 \frac{P_{f3} (-\cos(\pi) \cdot \sin(n\pi) + n \sin(\pi) \cdot \cos(n\pi))}{\pi \cdot (n-1)(n+1)}$$

$$= -2 \frac{P_{f3} (\sin(n\pi) + n \sin(\pi) \cdot \cos(n\pi))}{\pi \cdot (n-1)(n+1)}$$

To solve this integration we make use of the transformation:

$$(\sin(A) \sin(B) = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2})$$

We then substitute:

$$U_{av} = 1 - \frac{(1/Z_i) \int_0^{Z_i} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -2 \frac{P_{f3} (\sin(n\pi) + n \sin(\pi) \cdot \cos(n\pi))}{\pi \cdot (n-1)(n+1)} \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-n^2 \pi^2 T_v}{4} \right) dz}{(1/Z_i) \cdot 4 \frac{P_{f3} \cdot Z_0}{\pi}}$$

with  $n = (2m+1)$

$$= 1 - \frac{(1/Z_i) \int_0^{Z_i} \sum_{m=0}^{\infty} \left( -2 \frac{P_{f3} (\sin((2m+1)\pi) + (2m+1) \sin(\pi) \cdot \cos((2m+1)\pi))}{\pi \cdot ((2m+1)-1)((2m+1)+1)} \right) \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4} \right) dz}{(1/Z_i) \cdot 4 \frac{P_{f3} \cdot Z_0}{\pi}}$$

$$= 1 - \frac{(1/Z_i) \int_0^{Z_i} \sum_{m=0}^{\infty} \left( -2 \frac{P_{f3} (\sin((2m+1)\pi) + (2m+1) \sin(\pi) \cdot \cos((2m+1)\pi))}{\pi \cdot (2m)(2m+2)} \right) \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2Z_0} \cdot \exp \left( \frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4} \right) dz}{(1/Z_i) \cdot 4 \frac{P_{f3} \cdot Z_0}{\pi}}$$

With integration, and  $M_i = (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ :

$$U_{av} = 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{P_{f3} (\sin((2m+1)\pi) + (2m+1) \sin(\pi) \cdot -1)}{\pi \cdot (2m)(2m+2)} \right) \cdot \frac{Z_0}{M_i} (1 - \cos(2M_i)) \cdot \exp(-M_i^2 T_v)}{2 \frac{P_{f3} \cdot Z_0}{\pi}}$$

$$U_{av} = 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{P_{f3} (\sin((2m+1)\pi))}{\pi \cdot (2m)(2m+2)} \right) \cdot \frac{Z_0}{M_i} (1 - \cos(2M_i)) \cdot \exp(-M_i^2 T_v)}{2 \frac{P_{f3} \cdot Z_0}{\pi}}$$

$$U_{av} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{P_{f3} (\sin((2m+1)\pi))}{\pi \cdot (2m)(2m+2)} \right) \cdot \frac{Z_0}{M_i} \cdot 2 \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \cdot \frac{\pi}{2P_{f3} Z_0}$$

Now simplify

$$U_{av} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{(\sin((2m+1)\pi))}{(2m)(2m+2)} \right) \cdot \frac{1}{M_i} \cdot \exp(-M_i^2 T_v)$$

with  $M_i = (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
U_{av} &= 1 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \left( -\frac{\sin((2m+1)\pi)}{(2m)(2m+2)} \right) \cdot \frac{2}{\pi(2m+1)} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \\
&= 1 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \left( -\frac{\sin((2m+1)\pi)}{\pi(2m+1)} \right) \cdot \frac{1}{(m)(2m+2)} \cdot \exp\left(\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4}\right) \\
&= 1 - \sum_{m=0}^{m=0} \frac{0}{0} \quad IF
\end{aligned}$$

This is an indeterminate form (IF), for  $m = 0$ , so we should remove this IF by using the L'Hospital-Bernoulli theorem:

$$\lim_{m \rightarrow a} \frac{f(m)}{g(m)} = \lim_{m \rightarrow a} \frac{f'(m)}{g'(m)} \text{ if the limit ratio exists.}$$

In our case we define two functions,

$$f(m) = -\sin((2m+1)\pi) \cdot \exp\left(\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4}\right)$$

$$g(m) = (2m+1)\pi \cdot (m)(2m+2)$$

$$\text{We have: } \lim_{m \rightarrow a} \frac{f(m)}{g(m)} = \frac{0}{0}$$

Hence, calculus of derivatives

$$f'(m) = -2 \cos((2m+1)\pi) \pi \cdot \exp\left(\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4}\right) + \frac{\sin((2m+1)\pi) \pi^2 T_v \cdot \exp\left(\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4}\right)}{2}$$

$$g'(m) = 2\pi \cdot m(2m+2) + \pi \cdot (2m+1) \cdot (2m+2) + 2\pi \cdot (2m+1)m$$

Now we study the limit of the derivative ratio.

$$\lim_{m \rightarrow a} \frac{f'(m)}{g'(m)} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{-2 \cos((2m+1)\pi) \pi \cdot \exp\left(\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4}\right) + \frac{\sin((2m+1)\pi) \pi^2 T_v \cdot \exp\left(\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 T_v}{4}\right)}{2}}{2\pi \cdot m(2m+2) + \pi \cdot (2m+1) \cdot (2m+2) + 2\pi \cdot (2m+1)m}$$

After simplification, we have,

$$\lim_{m \rightarrow a} \frac{f'(m)}{g'(m)} = \frac{1}{4} \cdot \exp\left(\frac{-\pi^2 T_v}{4}\right) \cdot (-4 \cdot \cos(\pi) + \sin(\pi) \pi T_v)$$

$$\lim_{m \rightarrow a} \frac{f'(m)}{g'(m)} = \frac{1}{4} \cdot \exp\left(\frac{-\pi^2 T_v}{4}\right) \cdot (-4 \cdot (-1) + 0) = \exp\left(\frac{-\pi^2 T_v}{4}\right)$$



Finally we obtain:

$$U_{av} = 1 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \left( -\frac{(\sin((2m+1)\pi))}{(2m)(2m+2)} \right) \cdot \frac{2}{\pi(2m+1)} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) \cdot$$

$$= 1 - \lim_{m \rightarrow 0} \frac{f'(m)}{g'(m)} = 1 - \exp\left(\frac{-\pi^2 T_v}{4}\right)$$

This last transition is possible because for  $m \in [1, \infty[$ , the term that contains the sum is always null  $\left( \sum_{m=1}^{m=\infty} \left( -\frac{(\sin((2m+1)\pi))}{(2m)(2m+2)} \right) \cdot \frac{2}{\pi(2m+1)} \cdot \exp(-M_i^2 T_v) = \frac{0}{Cte} \right)$

Then the average degree of compression:

$$U_{av} = 1 - \exp\left(\frac{-\pi^2 T_v}{4}\right) \quad \text{Eq.A1.43}$$

and its representation on Fig. A1.11:

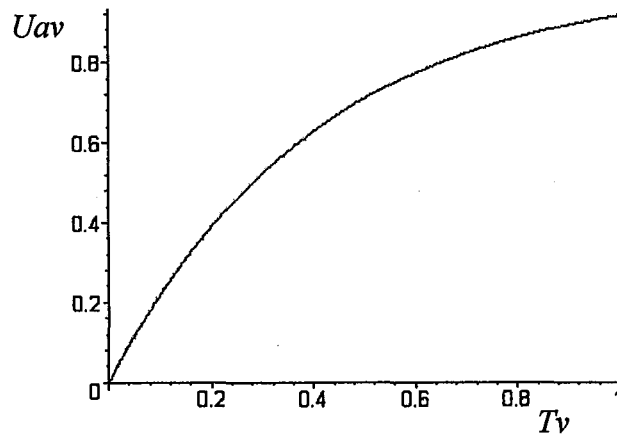


Figure A1.11 : A graphical representation of Eq. A1.43

*LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE A PRESSION CONSTANTE (CPC)*

ASPECT THEORIQUE

**Analysis of saturated porous materials based on linear rheological models**

Saturated porous materials (SPM) as a Hookean Body in series with a Kelvin Body

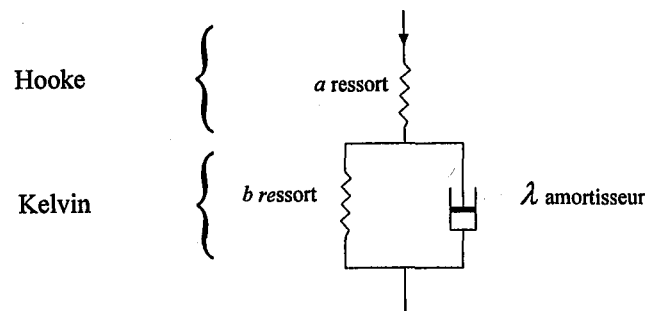


Figure A2.1 : Saturated porous materials (SPM) as a Hookean Body in series with a Kelvin Body

The total strain  $\varepsilon$  is the sum of the strain  $\varepsilon_H$  of the Hookean body and the strain  $\varepsilon_K$  of the Kelvin element:

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_K \quad \text{Eq. A2.1}$$

The modulus of linear compression of the spring 'a' may be denoted by  $A$ .

The modulus of the spring 'b' may be denoted by  $B$ .

The coefficient of viscosity of the dashpot ' $\lambda$ ' may be denoted by  $\lambda$ .

$$\varepsilon_H = m_{vs} P_s(t) \text{ Or } \varepsilon_H = \frac{1}{A} P_s(t) \text{ Hooke law}$$

For Kelvin element (parallel association)

$$P_s = P_{s1} + P_{s2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Then we have the differential equation,

$$\eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + B\varepsilon(t) = P_s \text{ or}$$

$$\frac{\eta}{B} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon(t) = \frac{P_s}{B}$$

Using separate variable method,

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{B}{\eta} \left( \frac{P_s}{B} - \varepsilon(t) \right) \Rightarrow \frac{\eta}{B} \frac{d\varepsilon(t)}{\left( \frac{P_s}{B} - \varepsilon(t) \right)} = dt$$

By integration and assuming  $\varepsilon = 0$ , at time  $t = 0$

$$-\int_0^{\varepsilon_K} \frac{\eta}{B} \frac{d\left(-\varepsilon(t) + \frac{P_s}{B}\right)}{\left(\frac{P_s}{B} - \varepsilon(t)\right)} = \int_0^t dt, \text{ then } -\frac{\eta}{B} \ln\left(\frac{P_s}{B} - \varepsilon(t)\right) \Big|_0^{\varepsilon_K} = t \Rightarrow -\frac{\eta}{B} \left[ \ln\left(\frac{P_s}{B} - \varepsilon_K\right) - \ln\left(\frac{P_s}{B}\right) \right] = t$$

$$\ln \frac{\left(\frac{P_s}{B} - \varepsilon_K\right)}{\left(\frac{P_s}{B}\right)} = -\frac{B}{\eta} t, \text{ then } \frac{\left(\frac{P_s}{B} - \varepsilon_K\right)}{\left(\frac{P_s}{B}\right)} = \exp\left(-\frac{B}{\eta} t\right) \Rightarrow \left(1 - \frac{B}{P_s} \varepsilon_K\right) = \exp\left(-\frac{B}{\eta} t\right)$$

$$\varepsilon_K = \frac{P_s}{B} \left(1 - \exp\left(-\frac{B}{\eta} t\right)\right)$$

In integral notation we have the expression for the Kelvin body

$$\varepsilon_K = \frac{1}{\eta} \int_0^t P_s(\tau) \cdot \exp\left(\frac{B}{\eta}(\tau - t)\right) d\tau$$

Then the combination of spring and the Kelvin body results to Eq. A2.2.

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_K = \frac{1}{A} P_s(t) + \frac{1}{\eta} \int_0^t P_s(\tau) \cdot \exp\left(\frac{B}{\eta}(\tau - t)\right) d\tau \quad \text{Eq. A2.2}$$

The pore pressure dissipation is assumed to be governed by the fundamental differential equation of one-dimensional compression. By substituting

$$\frac{-de}{1+e} = d\varepsilon \quad \text{Eq. A2.3}$$

and assuming the permeability  $K = Cte$ , and the initial hydraulic gradient  $i_0 = 0$ , then

$$\frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad \text{Eq. A2.3}$$

with

$$dP_f = -dP_s \quad \text{Eq. A2.4}$$

Combining Eq. A2.2 and Eq. A2.3 :

$$\frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial^2 P_s}{\partial z^2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

$$\frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial^2 P_s}{\partial z^2} = \frac{\partial \left( \frac{1}{A} P_s(t) + \frac{1}{\eta} \int_0^t P_s(\tau) \cdot \exp\left(\frac{B}{\eta}(\tau-t)\right) d\tau \right)}{\partial t}$$

Eq. A2.5

$$\frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial^2 P_s}{\partial z^2} = \frac{1}{A} \frac{\partial P_s(t)}{\partial t} + \frac{P_s(t)}{\eta} - \frac{B}{\eta^2} \int_0^t P_s(\tau) \cdot \exp\left(\frac{B}{\eta}(\tau-t)\right) d\tau$$

Eq. A2.5 is the general differential equation, with the boundary conditions defined for  $0 \leq t \leq \infty$  (see Fig. A2.2).

1.  $\frac{\partial P_s}{\partial z} = 0$ , at  $z = Z_0$
2.  $P_s = P(t)$ , at  $z = 0$

Eq. A2.6

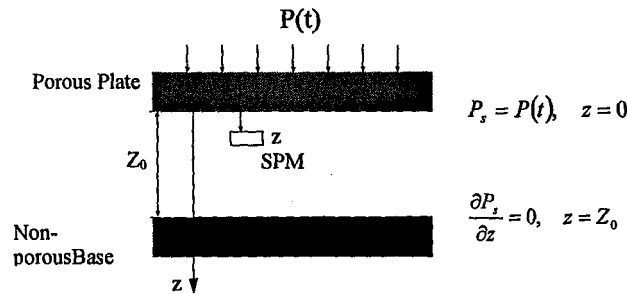


Figure A2.2 : The boundary conditions

Applying a Laplace transform to both sides of Eq. A2.5, and using the convolution theorem for the last term on the right hand side, one can derived equations expressing the compression ratio and the fluid pressure for most types of  $P(t)$  profiles.

With,  $C_v = A \frac{K}{\gamma_f}$  [cm<sup>2</sup>/s] coefficient of compression and  $\beta = \frac{B}{\eta}$ , we have

$$C_v \frac{\partial^2 P_s}{\partial z^2} = \frac{\partial P_s(t)}{\partial t} + A \frac{P_s(t)}{\eta} - \frac{A \cdot \beta}{\eta} \int_0^t P_s(\tau) \cdot \exp(\beta(\tau-t)) d\tau$$

If  $y = P_s(t, z)$ , then

$$C_v \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\partial y}{\partial t} + A \frac{y}{\eta} - \frac{A \cdot \beta}{\eta} \int_0^t y(\tau) \cdot \exp(\beta(\tau-t)) d\tau$$

Eq. A2.7

Using the convolution theorem (HILDEBRAND 1975),

$$\int_0^t y(\tau) \cdot \exp(\beta(\tau-t)) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = f(t) * g(t)$$

We can find the Laplace transform, by identification  $f(\tau) = y(\tau)$ , and  $g(t-\tau) = \exp(-\beta(t-\tau))$

Then  $f(t) * g(t) = \int_0^t y(\tau) \exp(-\beta(t-\tau)) d\tau$ , with  $\tau = u$  (new variable) we have:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t y(u) \exp(-\beta(t-u)) du = \int_0^t y(u) e^{(-\beta(t-u))} du$$

$$f(t) * g(t) = y(t) * e^{-\beta t} \quad \text{Eq. A2.8}$$

So we substitute Eq. A2.8 into Eq. A2.7, we get

$$C_v \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\partial y}{\partial t} + A \frac{y}{\eta} - \frac{A \cdot \beta}{\eta} [y(t) * e^{-\beta t}] \quad \text{Eq. A2.9}$$

for the last term using Laplace transform, then

$$L C_v \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = pY(z, p) - y(z, 0) + \frac{A}{\eta} Y(z, p) - \frac{A \cdot \beta}{\eta} \left[ Y(z, p) \cdot \frac{1}{p + \beta} \right] \quad \text{Eq. A2.10}$$

rearranging

$$C_v \frac{\partial^2 Y(z, p)}{\partial z^2} = Y(z, p) \left[ p + \frac{A}{\eta} - \frac{A \cdot \beta}{\eta} \left[ \frac{1}{p + \beta} \right] \right] - y(z, 0)$$

$$C_v \frac{\partial^2 Y(z, p)}{\partial z^2} = Y(z, p) \left[ p + \frac{A}{\eta} \left\{ 1 - \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right\} \right] - y(z, 0),$$

$$\text{with } y(z, 0) = P_0 \quad \text{Eq. A2.11}$$

$$\text{and } y(0, t) = P \quad \text{Eq. A2.12}$$

$$C_v \frac{\partial^2 Y(z, p)}{\partial z^2} = Y(z, p) \left[ p + \frac{A}{\eta} \left\{ 1 - \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right\} \right] - P_0 = Y(z, p) \frac{p(p + \lambda(A + B))}{(p + \beta)}$$

Eq. A2.13

$$\text{with } V(p) = \left[ p + \frac{A}{\eta} \left\{ 1 - \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right\} \right] = \frac{p(p + \lambda(A + B))}{(p + \beta)} \quad \text{Eq. A2.14}$$

$$\text{Eq. A2.13 can be written, } C_v \frac{\partial^2 Y(z, p)}{\partial z^2} = Y(z, p) \cdot V(p) - P_0 \quad \text{Eq. A2.15}$$

We recognise a second order linear homogenous equation, then

$$\frac{\partial^2 Y(z, p)}{\partial z^2} - Y(z, p) \cdot \frac{V(p)}{C_v} = -\frac{P_0}{C_v} \quad \text{Eq. A2.16}$$

The general solution is defined as:

$$Y(z, p) = C_1 e^{\alpha_1 z} + C_2 e^{\alpha_2 z} + \frac{P_0}{V(p)} \quad \text{Eq. A2.17}$$

$$\text{where } \alpha_1 = \sqrt{\frac{V(p)}{C_v}}, \text{ and } \alpha_2 = -\sqrt{\frac{V(p)}{C_v}} \quad \text{Eq. A2.18}$$

referring to Eq. A2.12, we have  $Y(0, p) = P \cdot \frac{1}{p}$

$$\left. \frac{\partial y(z, t)}{\partial z} \right|_{z=z_0} = 0 \quad \text{Eq. A2.19}$$

With the Laplace transformation, it comes,

$$p \cdot Y(z, p) \Big|_{z=z_0} - y(0, t) = 0 \quad \text{Eq. A2.20}$$

$$y(0, t) = P \text{ and } p \cdot Y(z_0, p) - P = 0 \text{ then}$$

$$Y(z_0, p) = \frac{P}{p}$$

The Eq. A2.17 can be expressed in the form:

$$Y(z_0, p) = C_1 e^{\alpha_1 z_0} + C_2 e^{\alpha_2 z_0} + \frac{P_0}{V(p)} \quad \text{Eq. A2.21}$$

From above and Eq. A2.18 :

$$C_1 + C_2 = \frac{P}{p} - \frac{P_0}{V(p)} \quad \text{Eq. A2.22}$$

$$C_1 e^{\alpha_1 z_0} + C_2 e^{\alpha_2 z_0} = \frac{P}{p} - \frac{P_0}{V(p)}$$

Thus, using Cramer method we have access to  $C_1$  and  $C_2$

$$a_1 C_1 + b_1 C_2 = c_1$$

$$a_2 C_1 + b_2 C_2 = c_2$$

$$C_1 = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} \rightarrow & \rightarrow \\ c; b \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} \rightarrow & \rightarrow \\ a; b \end{pmatrix}} = \frac{\left( \frac{P}{p} - \frac{P_0}{V(p)} \right) (e^{\alpha_2 z_0} - 1)}{e^{\alpha_2 z_0} - e^{\alpha_1 z_0}} \quad \text{Eq. A2.23}$$

$$C_2 = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} \rightarrow & \rightarrow \\ a; c \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} \rightarrow & \rightarrow \\ a; b \end{pmatrix}} = \frac{\left( \frac{P}{p} - \frac{P_0}{V(p)} \right) (-e^{\alpha_1 z_0} + 1)}{e^{\alpha_2 z_0} - e^{\alpha_1 z_0}} \quad \text{Eq. A2.24}$$

$C_1$  and  $C_2$  into Eq.A2.17 give,

$$Y(z, p) = \left[ \frac{\left( \frac{P}{p} - \frac{P_0}{V(p)} \right) (e^{\alpha_2 z_0} - 1)}{e^{\alpha_2 z_0} - e^{\alpha_1 z_0}} \right] \cdot e^{\alpha_1 z} + \left[ \frac{\left( \frac{P}{p} - \frac{P_0}{V(p)} \right) (-e^{\alpha_1 z_0} + 1)}{e^{\alpha_2 z_0} - e^{\alpha_1 z_0}} \right] \cdot e^{\alpha_2 z} + \frac{P_0}{V(p)} \quad \text{Eq. A2.25}$$

considering the term

$$\frac{P_0}{V(p)} = \frac{P_0}{\left[ p + \frac{A}{\eta} \left\{ 1 - \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right\} \right]} \quad \text{Eq. A2.26}$$

$$\frac{P_0}{V(p)} = \frac{P_0}{\left[ p + \frac{A}{\eta} - \frac{A}{\eta} \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right]} = \frac{P_0}{\left[ \frac{p(p + \beta)}{p + \beta} + \frac{(p + \beta) A}{p + \beta} - \frac{A}{\eta} \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right]}$$

$$\frac{P_0}{V(p)} = \frac{P_0}{p(p+\beta) + \frac{A}{\eta}(p+\beta) - \frac{A}{\eta}\beta} = \frac{P_0(p+\beta)}{p(p+\beta) + \frac{A}{\eta}(p+\beta) - \frac{A}{\eta}\beta}$$

$$\frac{P_0}{V(p)} = \frac{P_0(p+\beta)}{p(p+\beta) + \frac{A}{\eta}p + \frac{A}{\eta}\beta - \frac{A}{\eta}\beta} = \frac{P_0(p+\beta)}{p(p+\beta) + \frac{A}{\eta}p} = \frac{P_0(p+\beta)}{p\left[(p+\beta) + \frac{A}{\eta}\right]} \quad \text{Eq. A2.27}$$

splitting the denominator

$$\frac{P_0}{V(p)} = \frac{P_0(p+\beta)}{p\left[(p+\beta) + \frac{A}{\eta}\right]} = \frac{P_0\beta}{\beta + \frac{A}{\eta}} \frac{1}{p} + \frac{P_0\left(-\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) + \beta\right)}{-\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right)} \frac{1}{\left[(p+\beta) + \frac{A}{\eta}\right]}$$

$$\frac{P_0}{V(p)} = \frac{P_0\beta}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right)} \frac{1}{p} + \frac{P_0 \frac{A}{\eta}}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) \left[p + \beta + \frac{A}{\eta}\right]} \quad \text{Eq. A2.28}$$

substituting Eq. A.2.28 into Eq. A2.25, we obtain:

Eq. A2.29

$$Y(z, p) = \frac{\left[ \frac{P}{p} - \frac{P_0\beta}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right)} \frac{1}{p} + \frac{P_0 \frac{A}{\eta}}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) \left[p + \beta + \frac{A}{\eta}\right]} \right] (e^{\alpha_2 z_0} - 1)}{e^{\alpha_2 z_0} - e^{\alpha_1 z_0}} \cdot e^{\alpha_1 z} +$$

$$\left[ \frac{\left[ \frac{P}{p} - \frac{P_0\beta}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right)} \frac{1}{p} + \frac{P_0 \frac{A}{\eta}}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) \left[p + \beta + \frac{A}{\eta}\right]} \right] (-e^{\alpha_1 z_0} + 1)}{e^{\alpha_2 z_0} - e^{\alpha_1 z_0}} \cdot e^{\alpha_2 z} + \frac{P_0\beta}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right)} \frac{1}{p} + \frac{P_0 \frac{A}{\eta}}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) \left[p + \beta + \frac{A}{\eta}\right]} \right]$$

With  $\alpha_1 = \sqrt{\frac{V(p)}{C_v}}$ , and  $\alpha_2 = -\sqrt{\frac{V(p)}{C_v}}$ , then

Eq. A2.30

$$Y(z, p) = \left[ \frac{\left( \frac{P}{p} - \frac{P_0 \beta}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) p} + \frac{P_0 \frac{A}{\eta}}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) \left[p + \beta + \frac{A}{\eta}\right]} \right) \left( e^{-\sqrt{\frac{V(p)}{c_v} z_0} - 1} \right)}{e^{-\sqrt{\frac{V(p)}{c_v} z_0} - e^{-\sqrt{\frac{V(p)}{c_v} z_0}}} \right]} \cdot e^{\sqrt{\frac{V(p)}{c_v} z} + \dots} \right]$$

$$\left[ \frac{\left( \frac{P}{p} - \frac{P_0 \beta}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) p} + \frac{P_0 \frac{A}{\eta}}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) \left[p + \beta + \frac{A}{\eta}\right]} \right) \left( -e^{-\sqrt{\frac{V(p)}{c_v} z_0} + 1} \right)}{e^{-\sqrt{\frac{V(p)}{c_v} z_0} - e^{-\sqrt{\frac{V(p)}{c_v} z_0}}} \right]} \cdot e^{-\sqrt{\frac{V(p)}{c_v} z} + \frac{P_0 \beta}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) p} + \frac{P_0 \frac{A}{\eta}}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) \left[p + \beta + \frac{A}{\eta}\right]} \right]$$

and replace  $V(p)$  into Eq. A2.30,

and we define the total load equal as  $P = P_0$ , then

Eq. A2.31

$$Y(z, p) = \left[ \frac{\left( \frac{P_0}{p} - \frac{P_0 \beta}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) p} + \frac{P_0 \frac{A}{\eta}}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) \left[p + \beta + \frac{A}{\eta}\right]} \right) \left( e^{-\sqrt{\frac{p + \frac{A}{\eta} \left\{ 1 - \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right\}}{c_v} z_0} - 1} \right)}{e^{-\sqrt{\frac{p + \frac{A}{\eta} \left\{ 1 - \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right\}}{c_v} z_0} - e^{-\sqrt{\frac{p + \frac{A}{\eta} \left\{ 1 - \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right\}}{c_v} z_0}}} \right]} \cdot e^{\sqrt{\frac{p + \frac{A}{\eta} \left\{ 1 - \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right\}}{c_v} z} + \dots} \right]$$

$$\left[ \frac{\left( \frac{P_0}{p} - \frac{P_0 \beta}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) p} + \frac{P_0 \frac{A}{\eta}}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) \left[p + \beta + \frac{A}{\eta}\right]} \right) \left( -e^{-\sqrt{\frac{p + \frac{A}{\eta} \left\{ 1 - \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right\}}{c_v} z_0} + 1} \right)}{e^{-\sqrt{\frac{p + \frac{A}{\eta} \left\{ 1 - \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right\}}{c_v} z_0} - e^{-\sqrt{\frac{p + \frac{A}{\eta} \left\{ 1 - \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right\}}{c_v} z_0}}} \right]} \cdot e^{-\sqrt{\frac{p + \frac{A}{\eta} \left\{ 1 - \left[ \frac{\beta}{p + \beta} \right] \right\}}{c_v} z} + \dots} \right]$$

$$+ \frac{P_0 \beta}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) p} + \frac{P_0 \frac{A}{\eta}}{\left(\beta + \frac{A}{\eta}\right) \left[p + \beta + \frac{A}{\eta}\right]}$$

At this level it is far more efficient to use a specialized computerized mathematical tool, such as Maple® to obtain the inverse Laplace transform, nonetheless the result shall be identical to the analytical procedure proposed hereafter.



The inverse Laplace transform then provides the effective pressure ( $P_s(z, t)$ ) as a function of position and time and finally the excess fluid pressure ( $P_f(z, t)$ ).

The analytical route can be outlined as follows:

$$\text{From Eq. A2.16, } \frac{\partial^2 Y(z, p)}{\partial z^2} - Y(z, p) \cdot \frac{V(p)}{C_v} = -\frac{P_0}{C_v}$$

Supposing that at time  $t = 0$ ,  $P = P_0 = 0$ , then Eq. A2.16 can be rewritten:

$$\frac{\partial^2 Y(z, p)}{\partial z^2} - Y(z, p) \cdot \frac{V(p)}{C_v} = 0 \quad \text{Eq. A2.32}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - Y \cdot r^2 = 0$$

$$\text{with } r^2 = \frac{p(p + \lambda(A + B))}{C_v(p + \beta)} \quad \text{Eq. A2.33}$$

We recognise that Eq. A2.33 satisfies the general solution:

$$Y(z, p) = C_1 \frac{e^{(rz)} - e^{(-rz)}}{2} + C_2 \frac{e^{(rz)} + e^{(-rz)}}{2} = C_1 \sinh(rz) + C_2 \cosh(rz) \quad \text{Eq. A2.34}$$

with the boundary conditions

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = 0 \text{ at } z = Z_0, Y = P(p), \text{ at } z = 0$$

it follows that

$$C_1 = -P(p) \cdot \tanh(rZ_0) = -\frac{P}{p} \cdot \tanh(rZ_0)$$

$$C_2 = P(p) = \frac{P}{p}$$

hence  $Y(z, p) = -P(p) \cdot \tanh(rZ_0) \sinh(rz) + P(p) \cosh(rz)$

$$Y(z, p) = -P(p) \cdot \frac{\sinh(rZ_0) \sinh(rz)}{\cosh(rZ_0)} + P(p) \cdot \frac{\cosh(rZ_0) \cosh(rz)}{\cosh(rZ_0)}$$

$$Y(z, p) = P(p) \cdot \frac{\sinh(rZ_0) \sinh(-rz)}{\cosh(rZ_0)} + P(p) \cdot \frac{\cosh(rZ_0) \cosh(-rz)}{\cosh(rZ_0)} \text{ then}$$

$$Y(z, p) = P(p) \frac{\cosh[r(Z_0 - z)]}{\cosh(rZ_0)} = \frac{P}{p} \frac{\cosh[r(Z_0 - z)]}{\cosh(rZ_0)} \quad \text{Eq. A2.35}$$

then the effective pressure is equal to

$$L^{-1} Y(z, p) = P_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{P}{p} \frac{\cosh[r(Z_0 - z)]}{\cosh(rZ_0)} e^{pt} dp, \text{ (HILDEBRAND 1975)}$$

and finally the excess fluid pressure

$$P_f(z, t) = P(t) - P_s = P(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{P}{p} \frac{\cosh[r(Z_0 - z)]}{\cosh(rZ_0)} e^{pt} dp \quad \text{Eq. A2.36}$$

This is the complete mathematical development of the equations utilized to illustrate the use of rheological models in chapter 2.

## ANNEXE A3

LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE A DEFORMATION CONSTANTE  
(CDC)

Réf. : CONDITIONS OPERATOIRES

Pressage à vis (TSPU©)

Pressage Vis  
Conditions Expérimentales

Number	Reference	Material	temperature [°C]	Screw	rotation [rpm]	P feed [kPa]	P out [kPa]	Out-liquid mass Flow Ql [g/s]	Out-solid mass Flow Qs [g/s]	Dry content before process [%]	Dry content after process [%]
1	RDAP6-T26	RDAP	26	HCR	6	75.8	63.2	21.8	6.7	8.1	17.8
2		RDAP	26	HCR	6	0	90.5	9.1	2.6	8.1	19.1
3	RDAP21-T26	RDAP	26	HCR	21	0	73.1	11.4	6.3	8.1	15.6
4	RDAP36-T26	RDAP	26	HCR	36	0	73.1	11.3	7.7	8.1	14.7
5	RDAP08-T26	RDAP	26	HCR	0.8	0	96.3	2.04	0.34	8.1	22.1
6		RDAP									
7		RDAP									
8		RDAP									
9		RDAP									
10		RDAP									
11		RDAP									
12		RDAP									
13		RDAP									
14		RDAP									
15		RDAP									
16		RDAP									
17	F6-T18	F	18	HCR	6	75.8	136	3	8	10.3	13.5
18	Cc6-T38	Cc	38	HCR	6	48.3	132.6	1	1.2	33.5	51.1
19	Cc21-T37	Cc	37	HCR	21	48.3	92.9	6.3	14.2	28.7	43.9
20	Cc6-T11	Cc	11	HCR	6	48.3	119.4	1.8	4.3	33.5	41.7
21	Cc6-T32	Cc	32	HCR	6	75.8	169.1	0.9	1.1	29.3	43.9
22	Cr6-T27	Cr	27	HCR	6	0	109.5	3.8	2.3	9.8	16.4
23	Cr21-T27	Cr	27	HCR	21	0	109.5	6.5	7	9.8	15.6
24	Cr	Cr	27	HCR	6	0	139.3	3.6	2.7	9.8	17.6
25	GDAP6-T22	GDAP	22	HCR	6	0	116.1	9.2	4.3	8.8	16.3
26		GDAP	22	HCR	6	0	141	7.7	4.4	8.8	16
27	GDAP6-T24	GDAP	24	LCR	6	0	109.5	9.9	4.4	8.8	17.2
28	GDAP6b-T24	GDAP	24	LCR	6	0	139.3	9.5	4	8.8	17.4
29		MIAP	24	HCR	6	0	112.8	10.8	3.1	7.7	17.8
30		MIAP	24	HCR	6	0	140.9	12.2	2.6	7.1	18.4

Pressage Vis  
Résultats Expérimentaux

Number	Reference	Material	Feed= Ql Mass flow [g/s]	Collecteur 1 Mass flow [g/s]	Collecteur 2 Mass flow [g/s]	Collecteur 3 Mass flow [g/s]	Collecteur 4 Mass flow [g/s]	Collecteur 5 Mass flow [g/s]	Collecteur 6 Mass flow [g/s]	Collecteur 7 Mass flow [g/s]	Qs Mass flow [g/s]
1	RDAP6-T26	RDAP	28.66	5.46	4.00	3.29	3.30	2.89	1.91	1.11	6.70
2		RDAP									
3	RDAP21-T26	RDAP	17.76	3.10	1.24	1.24	1.93	1.75	1.51	0.69	6.30
4	RDAP36-T26	RDAP	18.96	3.74	1.44	1.27	1.78	1.44	1.14	0.45	7.70
5	RDAP08-T26	RDAP	2.50	0.73	0.23	0.16	0.22	0.30	0.35	0.17	0.34
6		RDAP									
7		RDAP									
8		RDAP									
9		RDAP									
10		RDAP									
11		RDAP									
12		RDAP									
13		RDAP									
14		RDAP									
15		RDAP									
16		RDAP									
17	F6-T18	F	11.47	1.50	0.68	0.38	0.31	0.26	0.23	0.11	6.00
18	Cc6-T38	Cc	2.34	0.06	0.01	0.00	0.05	0.22	0.54	0.26	1.20
19	Cc21-T37	Cc	19.75	0.54	0.15	0.10	0.48	0.89	2.84	0.55	14.20
20	Cc6-T11	Cc	6.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.61	0.82	0.32	4.30
21	Cc6-T32	Cc	1.81	0.10	0.02	0.01	0.08	0.17	0.22	0.11	1.10
22	Cr6-T27	Cr	6.03	0.63	0.57	0.53	0.62	0.56	0.52	0.30	2.30
23	Cr21-T27	Cr	13.96	1.39	1.18	1.08	1.19	1.08	0.73	0.31	7.00
24	Cr6b-T27	Cr	6.24	0.70	0.58	0.53	0.57	0.48	0.42	0.28	2.70
25	GDAP6-T22	GDAP	13.43	3.13	1.88	1.51	1.59	1.02	0.00	0.00	4.30
26		GDAP									
27	GDAP6-T24	GDAP	14.72	2.18	2.28	1.84	1.66	1.45	0.88	0.05	4.40
28	GDAP6b-T24	GDAP	13.44	2.28	2.22	1.72	1.43	0.98	0.79	0.02	4.00
29		MIAP									
30		MIAP									

## Compression en cellule piston (MMCC©)

## Produit C (Protéines lactiques coagulées)

## Données et Résultats Bruts

rate [cm/min]	sample number	vi Vinitial [cm <sup>3</sup> /g]	vf Vfinal [cm <sup>3</sup> /g]	T[C]
0.254	C1	3.42	1.37	40-45
0.254	C2	3.46	1.3	40-45
0.762	C3	3.45	1.15	45
0.254	C4	3.55	1.29	26
0.254	C5	3.56	1.19	26
0.254	C6	3.58	1.49	11
0.254	C7	3.54	1.51	11
2.54	C8	3.45	1.36	45

## C1

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	3.67	4.48	3.42	1.17	
1.93	21.96	3.99	3.05	6.98	
3.94	40.70	3.48	2.66	12.96	
5.91	66.60	2.98	2.24	21.17	
7.91	96.30	2.47	1.89	30.59	
8.90	126.70	2.22	1.69	40.28	
9.45	159.80	2.08	1.59	50.80	0.00
9.88	223.00	1.97	1.50	70.90	9.02
10.31	388.90	1.86	1.41	123.60	31.49
10.55	595.20	1.80	1.37	189.10	70.34
10.67	850.20	1.77	1.35	270.20	130.55
10.94	1285.40	1.70	1.30	408.50	264.75
11.18	1981.60	1.64	1.25	629.70	490.89
11.42	2806.00	1.58	1.20	891.70	760.13

## C2

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	2.74	4.53	3.46	0.87	
1.89	20.00	4.05	3.09	6.36	
3.90	35.20	3.54	2.70	11.18	
5.91	57.60	3.03	2.32	18.30	
7.87	96.40	2.53	1.93	30.60	
8.43	121.40	2.39	1.83	38.60	
8.94	161.30	2.26	1.73	51.30	
9.41	268.00	2.14	1.64	85.20	0.00
9.65	415.00	2.08	1.59	132.00	3.12
9.80	586.00	2.04	1.56	186.00	6.88
9.88	718.00	2.02	1.54	228.00	12.44
10.08	1002.00	1.97	1.50	318.00	20.51
10.35	1801.00	1.90	1.45	572.00	36.83
10.67	2670.00	1.82	1.39	848.00	70.90
10.87	3583.00	1.77	1.35	1138.00	108.90
11.14	4447.00	1.70	1.30	1413.00	228.00

## C3

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	0.63	4.53	3.45	0.20	
0.77	12.38	3.94	2.99	3.94	
1.59	25.70	3.32	2.52	8.18	
2.38	44.20	2.72	2.07	14.05	
2.77	66.80	2.42	1.84	21.25	
2.97	92.30	2.27	1.72	29.30	
3.18	155.90	2.11	1.61	49.50	0.00
3.27	262.40	2.04	1.55	83.40	0.08
3.39	520.00	1.95	1.49	165.20	23.79
3.43	740.00	1.92	1.46	235.20	46.20
3.48	876.00	1.88	1.43	278.40	80.20
3.60	1203.90	1.79	1.37	382.60	259.80
3.66	2004.90	1.74	1.33	637.10	536.00
3.74	2669.20	1.68	1.28	848.30	732.70
3.82	3504.00	1.62	1.23	1113.70	980.70
3.98	4505.00	1.50	1.15	1431.90	1275.60

## C4

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	3.65	4.65	3.55	1.16	
1.89	22.35	4.17	3.18	7.10	
4.41	44.80	3.53	2.69	14.24	
6.97	90.15	2.88	2.20	28.60	
8.23	136.20	2.56	1.95	43.30	
8.86	175.80	2.40	1.83	55.80	
9.37	231.30	2.27	1.73	73.50	0.00
9.65	278.90	2.20	1.68	88.60	0.75
9.88	339.20	2.14	1.63	107.80	11.10
10.12	441.70	2.08	1.59	140.30	31.27
10.35	627.10	2.02	1.54	199.30	67.70
10.51	812.00	1.98	1.51	258.10	95.30
10.63	1001.80	1.95	1.49	318.40	143.00
10.87	1612.80	1.89	1.44	512.50	308.50
11.10	2489.00	1.83	1.39	791.00	565.30
11.38	3269.00	1.76	1.34	1039.00	772.60
11.69	4293.00	1.68	1.28	1364.00	1152.30

C5

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	P1 [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	0.42	4.67	3.56	0.13	
1.81	17.80	4.21	3.21	5.66	
3.86	33.53	3.69	2.82	10.60	
5.87	56.40	3.18	2.43	17.90	
6.85	72.10	2.93	2.23	22.90	
7.83	98.10	2.68	2.04	31.20	
8.90	137.50	2.41	1.84	43.70	0.00
9.80	209.00	2.18	1.66	66.00	0.00
10.43	324.00	2.02	1.54	103.00	23.49
10.79	447.00	1.93	1.47	142.00	65.90
10.91	585.00	1.90	1.45	186.00	117.20
11.10	757.00	1.85	1.42	240.00	195.00
11.14	949.00	1.84	1.40	301.00	265.00
11.38	1299.00	1.78	1.35	412.00	437.00
11.61	1989.00	1.72	1.32	632.00	619.00
11.81	2753.00	1.67	1.28	875.00	861.00
12.09	3645.00	1.60	1.22	1158.00	1081.00
12.28	4290.00	1.55	1.18	1363.00	1178.00

C6

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	P1 [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	2.35	4.69	3.58	0.75	
1.42	24.85	4.33	3.31	7.89	
2.91	44.90	3.95	3.01	14.30	
4.41	77.90	3.57	2.72	24.70	
5.98	125.00	3.17	2.42	39.70	
6.97	186.00	2.92	2.23	59.10	
7.95	286.00	2.67	2.04	91.02	0.00
8.43	394.00	2.55	1.95	122.30	5.73
8.78	485.00	2.46	1.88	154.30	21.08
8.94	557.00	2.42	1.85	177.30	39.27
9.21	752.00	2.35	1.79	239.00	78.50
9.29	933.00	2.33	1.77	296.60	130.90
9.72	1385.00	2.22	1.69	440.30	249.10
9.96	2042.00	2.16	1.65	649.00	441.10
10.24	2922.00	2.09	1.60	928.90	675.30
10.47	3634.00	2.03	1.55	1155.10	909.00
10.79	4492.00	1.95	1.49	1427.90	1185.00

C7

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	P1 [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	3.45	4.65	3.54	1.09	
1.77	31.10	4.20	3.20	9.87	
3.78	68.00	3.69	2.82	21.70	
4.76	93.00	3.44	2.63	29.80	
5.75	129.00	3.19	2.44	41.00	
6.77	189.00	2.93	2.24	60.00	
7.72	288.00	2.69	2.05	91.00	0.00
8.46	450.00	2.50	1.91	143.00	7.00
8.78	579.00	2.42	1.85	184.00	24.14
8.98	754.00	2.37	1.81	230.00	42.30
9.17	936.00	2.32	1.77	297.00	68.00
9.41	1250.00	2.26	1.73	397.00	106.00
9.53	1526.00	2.23	1.70	485.00	127.00
9.80	2468.00	2.16	1.65	784.00	178.00
10.12	3515.00	2.08	1.59	1117.00	266.00
10.51	4550.00	1.98	1.51	1445.00	458.00

C8

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	P1 [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	2.73	4.53	3.45	0.87	
0.19	7.46	4.04	3.08	2.37	
0.39	10.30	3.53	2.69	3.27	
0.59	25.30	3.02	2.30	8.05	
0.80	54.00	2.51	1.92	17.17	0.00
0.89	122.00	2.27	1.73	39.95	0.39
0.93	242.00	2.17	1.65	76.94	26.09
0.94	333.00	2.13	1.63	105.90	44.66
0.95	464.00	2.11	1.61	147.70	74.65
0.97	758.00	2.07	1.58	240.90	143.90
0.99	1100.00	2.01	1.54	370.00	288.50
1.00	1585.00	1.98	1.51	504.00	411.20
1.02	2370.00	1.93	1.47	753.30	582.00
1.05	3273.00	1.86	1.42	1040.20	903.00
1.08	4397.00	1.78	1.35	1397.60	1244.00

## Produit F (pulpes de betteraves)

## Données et Résultats Bruts

rate [cm/min]	sample number	vi Vinitial [cm <sup>3</sup> /g]	vf Vfinal [cm <sup>3</sup> /g]
0.254	F1	11.69	1.57
0.254	F2	11.72	1.78
0.762	F3	11.4	3.15
0.762	F4	11.48	2.38
2.54	F5	11.6	4.28
2.54	F6	11.66	4.08
7.62	F7	11.62	4.58
7.62	F8	11.27	4.38

## F1

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	4.24	4.74	11.69	1.35	
5.41	34.75	3.37	8.31	11.04	
7.69	52.98	2.79	6.88	16.84	
10.00	86.35	2.20	5.43	27.44	
11.80	140.28	1.75	4.30	44.58	
12.29	168.26	1.62	4.00	53.47	0.00
12.80	213.39	1.49	3.68	67.82	4.98
13.31	288.51	1.36	3.35	91.69	18.40
13.83	445.96	1.23	3.03	141.73	46.89
14.07	565.37	1.17	2.88	179.68	75.66
14.31	756.73	1.11	2.73	240.45	120.12
14.56	923.09	1.04	2.57	293.36	185.81
14.81	1255.05	0.98	2.42	398.85	277.36
15.06	1706.50	0.92	2.27	542.33	400.58
15.33	2228.60	0.85	2.09	708.25	548.75
15.57	2764.49	0.79	1.95	878.56	702.45
15.80	3330.68	0.73	1.80	1058.49	888.90
16.16	4250.58	0.64	1.57	1350.84	1152.69

## F2

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
12.64	376.00	1.43	3.52	119.60	4.19
12.83	465.00	1.36	3.36	147.80	7.57
13.07	574.00	1.30	3.22	183.00	16.50
13.35	731.00	1.23	3.04	232.00	28.60
13.58	920.00	1.17	2.90	292.00	47.60
13.82	1200.00	1.10	2.73	381.00	75.30
14.09	1564.00	1.04	2.57	497.00	131.00
14.33	2051.00	0.98	2.42	652.00	209.00
14.61	2488.00	0.91	2.25	790.00	307.00
14.84	3045.00	0.85	2.10	967.00	435.00
15.12	3606.00	0.79	1.96	1146.00	543.00
15.35	4351.00	0.72	1.78	1382.00	697.00

## F3

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	2.64	4.63	11.41	0.83	
0.92	23.11	3.93	9.68	7.34	
1.93	50.65	3.16	7.80	16.09	
2.42	75.77	2.78	6.86	24.08	
2.91	114.71	2.41	5.93	36.45	
3.19	160.08	2.20	5.43	50.87	
3.41	219.81	2.03	5.00	69.86	0.00
3.55	295.01	1.92	4.73	94.07	4.71
3.64	401.96	1.85	4.55	127.74	18.15
3.78	630.96	1.75	4.31	200.52	55.94
3.95	970.88	1.62	3.99	308.55	142.98
4.04	1659.40	1.55	3.81	527.04	320.83
4.16	2504.38	1.46	3.60	795.89	540.95
4.30	3735.42	1.35	3.33	1187.12	832.53
4.39	4225.25	1.28	3.15	1342.78	1157.25

## F4

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	1.27	4.66	11.50	0.41	
0.77	16.40	4.07	10.05	5.40	
1.57	34.00	3.46	8.54	11.40	
2.38	60.00	2.85	7.05	19.90	
3.19	108.00	2.23	5.52	35.60	0.00
3.58	158.00	1.93	4.70	51.90	1.63
3.98	207.00	1.63	4.02	100.00	16.30
4.17	508.00	1.48	3.66	166.00	51.00
4.28	726.00	1.40	3.46	239.00	76.00
4.38	1049.00	1.32	3.27	344.00	155.00
4.49	1592.00	1.24	3.06	522.00	277.00
4.58	2233.00	1.17	2.89	732.00	465.00
4.69	3063.00	1.09	2.69	1004.00	659.00
4.75	3767.00	1.04	2.56	1234.00	888.00
4.86	4366.00	0.96	2.38	1431.00	1194.00

F5

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	0.74	4.71	11.60	0.24	
0.18	6.70	4.25	10.48	2.13	
0.39	22.65	3.73	9.19	7.19	
0.57	46.68	3.25	8.01	14.83	
0.68	65.39	2.98	7.34	20.78	
0.78	96.01	2.73	6.72	30.51	
0.88	155.98	2.47	6.10	49.57	0.00
0.94	239.45	2.32	5.72	76.09	13.22
0.98	346.62	2.22	5.49	110.15	38.22
1.01	536.73	2.14	5.27	170.57	72.75
1.03	717.70	2.09	5.16	228.08	112.68
1.08	1434.22	1.97	4.87	455.79	346.67
1.11	2218.98	1.90	4.69	705.19	551.52
1.13	3067.70	1.84	4.53	974.93	774.00
1.17	4350.50	1.74	4.28	1382.60	1220.59

F6

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	0.95	4.72	11.66	0.30	
0.18	7.00	4.26	10.50	2.25	
0.38	20.00	3.75	9.30	6.60	
0.59	40.00	3.22	7.95	12.90	
0.68	61.00	2.99	7.30	19.60	
0.78	94.00	2.74	6.70	27.00	
0.89	132.00	2.47	6.09	42.00	0.00
0.94	176.00	2.32	5.72	56.00	1.84
0.99	233.00	2.21	5.40	74.00	8.64
1.01	304.00	2.15	5.30	96.00	23.80
1.04	382.00	2.09	5.20	122.00	35.90
1.07	601.00	2.01	4.97	191.00	89.50
1.07	791.00	1.99	4.90	251.00	132.00
1.13	1642.00	1.85	4.60	522.00	393.00
1.17	2794.00	1.75	4.30	888.00	691.00
1.21	4335.00	1.65	4.08	1378.00	1203.00

F7

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	5.73	4.71	11.62	1.82	
0.10	30.19	3.99	9.83	9.59	
0.20	59.29	3.22	7.95	18.53	
0.26	127.00	2.72	6.70	40.36	0
0.31	300.85	2.36	5.80	95.61	11.78
0.33	572.55	2.21	5.44	181.96	63.4
0.34	1008.22	2.15	5.29	320.41	135.52
0.35	1678.64	2.08	5.12	533.47	209.26
0.35	2455.01	2.01	4.95	786.56	324.91
0.36	3368.20	1.95	4.80	1070.41	495.05
0.37	4506.56	1.86	4.58	1432.18	1137.85

F8

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	0.42	4.58	11.30	0.13	
0.06	14.60	4.09	10.10	4.65	
0.13	32.00	3.58	8.80	10.14	
0.20	63.00	3.08	7.60	20.11	
0.23	92.00	2.83	6.98	29.50	0
0.26	140.00	2.58	6.40	44.00	3.35
0.29	241.00	2.35	5.80	76.00	59.00
0.31	412.00	2.22	5.46	130.00	120.00
0.31	533.00	2.18	5.38	169.00	160.00
0.32	699.00	2.13	5.26	222.00	203.00
0.33	865.00	2.10	5.18	275.00	244.00
0.35	1974.00	1.93	4.75	627.00	472.00
0.35	2735.00	1.90	4.69	869.00	510.00
0.36	3659.00	1.84	4.55	1163.00	659.00
0.37	4499.00	1.78	4.38	1429.00	1148.00

## Produit Cr (Airelles)

## Données et Résultats Bruts

rate [cm/min]	sample number	vi Vinitial [cm <sup>3</sup> /g]	vf Vfinal [cm <sup>3</sup> /g]	Openings Filter (mic.)
0.254	Cr1	12.45	3.39	500
0.254	Cr2	12.56	2.64	500
0.254	Cr3	13.1	2.9	100
0.254	Cr4	13.07	2.48	100
0.254	Cr5	13.06	3.01	53
0.254	Cr6	13.08	2.33	53
0.762	Cr7	13.08	3	500
2.54	Cr8	13.28	4.94	500
2.54	Cr9	13.06	5.1	53

## Cr9

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	P1 [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	0.42	4.12	13.08	0.13	
0.19	7.92	3.63	11.50	2.51	
0.39	19.22	3.13	9.91	6.14	
0.59	69.70	2.62	8.31	22.15	0.00
0.69	141.20	2.36	7.48	44.87	18.15
0.74	219.70	2.24	7.10	69.84	35.58
0.76	273.70	2.19	6.95	86.99	50.70
0.79	391.60	2.11	6.88	121.29	82.73
0.81	545.20	2.05	6.48	173.28	127.00
0.83	701.90	2.00	6.35	223.08	177.60
0.85	895.00	1.96	6.22	284.43	224.30
0.88	1344.00	1.88	5.97	427.12	391.00
0.92	2072.00	1.79	5.68	658.54	596.00
0.93	2771.00	1.75	5.55	1100.00	1057.50
0.96	3525.00	1.69	5.36	1120.50	1291.00
0.99	4873.00	1.61	5.10	1549.00	1375.20

Cr1

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	0.21	3.94	12.45	0.07	
0.79	7.88	3.74	11.82	2.51	
1.85	16.94	3.47	10.97	7.39	
3.86	41.38	2.96	9.36	13.14	
5.83	71.59	2.46	7.77	22.75	
6.85	111.76	2.20	6.98	35.52	
7.87	200.93	1.94	6.15	63.86	0.00
8.35	304.81	1.82	5.76	96.87	2.43
8.58	380.57	1.76	5.58	120.94	13.58
8.82	495.42	1.70	5.37	157.44	27.96
9.09	652.88	1.63	5.17	207.48	51.52
9.25	790.64	1.59	5.02	251.26	84.60
9.57	939.16	1.51	4.78	298.46	152.03
9.80	1173.86	1.45	4.58	373.05	273.77
10.24	1846.43	1.34	4.24	596.79	432.73
10.55	2505.46	1.26	4.00	796.23	640.60
10.98	3497.65	1.15	3.66	1111.55	921.30
11.30	4491.93	1.07	3.39	1427.53	1174.66

Cr2

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	1.37	3.97	12.50	0.44	
1.06	6.60	3.70	11.70	2.10	
2.32	18.00	3.38	10.70	5.80	
3.62	28.00	3.05	9.60	9.20	
4.84	36.00	2.74	8.70	11.60	
6.10	52.00	2.42	7.60	16.80	
6.77	63.00	2.25	7.10	20.30	
7.36	79.00	2.10	6.60	25.30	
7.87	97.00	1.97	6.20	31.00	
8.43	124.00	1.83	5.80	39.00	
8.90	172.00	1.71	5.40	54.00	0.00
9.41	261.00	1.58	5.00	83.00	23.60
9.65	344.00	1.52	4.80	109.00	41.60
9.88	450.00	1.46	4.60	143.00	66.00
10.16	609.00	1.39	4.40	193.00	100.00
10.39	820.00	1.33	4.20	260.00	154.00
10.67	1046.00	1.26	4.00	332.00	225.00
10.94	1394.00	1.19	3.80	443.00	319.00
11.18	1771.00	1.13	3.60	562.00	443.00
11.46	2211.00	1.06	3.40	702.00	561.00
11.69	2730.00	1.00	3.19	867.00	712.00
11.89	3287.00	0.95	3.00	1044.00	873.00
12.17	3856.00	0.88	2.80	1225.00	1058.00
12.36	4384.00	0.83	2.60	1393.00	1229.00

Cr3

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	0.11	4.14	13.11	0.03	
2.01	18.52	3.63	11.49	5.89	
4.02	30.10	3.12	9.89	9.56	
6.02	46.73	2.61	8.28	14.85	
7.48	69.04	2.24	7.09	21.94	
8.98	135.88	1.86	5.89	43.18	
9.49	183.24	1.73	5.48	58.23	
9.80	237.78	1.65	5.24	75.56	0.00
10.00	285.55	1.60	5.08	90.75	8.19
10.24	282.17	1.54	4.87	125.00	33.64
10.51	498.57	1.47	4.67	158.45	62.83
10.63	647.61	1.44	4.55	205.81	100.56
10.91	890.22	1.37	4.34	282.91	168.37
11.14	1050.31	1.31	4.15	333.79	222.30
11.46	1519.30	1.23	3.89	482.83	378.75
11.77	2006.41	1.15	3.63	637.64	512.59
12.13	2680.40	1.06	3.38	851.83	705.88
12.40	3662.39	0.99	3.14	1163.90	1000.43
12.72	4467.85	0.91	2.90	1419.90	1234.65

Cr4

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	0.42	4.13	13.07	0.13	
1.93	13.00	3.64	11.50	4.13	
3.94	25.90	3.13	9.90	8.23	
5.94	41.00	2.62	8.30	13.20	
7.91	74.00	2.12	6.70	23.60	
8.94	112.00	1.86	5.90	35.80	
9.61	172.00	1.69	5.40	54.80	0.00
9.88	213.00	1.62	5.10	67.80	12.15
10.39	318.00	1.49	4.70	101.00	43.47
10.91	457.00	1.36	4.30	145.00	99.00
11.22	647.00	1.28	4.06	205.00	155.00
11.50	931.00	1.21	3.84	296.00	239.00
12.52	2631.00	0.95	3.00	836.00	793.00
12.83	3500.00	0.87	2.78	1112.00	1046.00
13.19	4672.00	0.78	2.48	1484.00	1340.00



Cr5

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	$\nu$ [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	0.00	4.12	13.07	1.00	
1.93	17.90	3.63	11.52	5.69	
3.94	39.90	3.12	9.89	12.19	
5.87	53.20	2.63	8.32	18.48	
6.85	83.10	2.38	7.53	26.41	
7.87	117.00	2.12	6.71	37.33	
8.86	186.00	1.87	5.94	59.10	
9.61	305.00	1.68	5.32	97.00	
10.08	448.00	1.56	4.96	142.00	
10.35	606.00	1.49	4.72	192.00	0.00
10.59	791.00	1.43	4.54	251.00	1.21
10.75	937.00	1.39	4.42	297.00	4.40
11.06	1243.00	1.31	4.16	395.00	13.79
11.46	1854.00	1.21	3.83	589.00	52.95
11.85	2697.00	1.11	3.52	857.00	192.00
12.13	3392.00	1.04	3.29	1078.00	568.00
12.48	4572.00	0.95	3.01	1453.00	1237.00

Cr6

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	$\nu$ [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	1.05	4.13	13.08	0.33	
1.97	21.29	3.63	11.49	6.76	
4.02	42.07	3.11	9.86	13.37	
5.98	63.36	2.61	8.28	20.13	
6.97	77.94	2.36	7.48	24.77	
7.99	104.49	2.10	6.67	33.20	0.00
8.98	141.62	1.85	5.87	45.00	1.39
10.00	225.13	1.59	5.04	71.54	5.28
10.43	299.62	1.48	4.70	95.22	27.61
10.67	369.91	1.42	4.48	117.55	44.44
11.02	484.26	1.33	4.22	153.89	68.18
11.34	665.96	1.25	3.98	211.64	104.15
11.69	978.80	1.16	3.69	311.06	173.07
11.97	1251.03	1.09	3.47	397.57	251.73
12.32	1850.37	1.00	3.19	588.04	410.83
12.64	2599.54	0.92	2.91	826.13	599.70
12.95	3380.89	0.84	2.67	1074.76	845.97
13.39	4704.99	0.73	2.33	1495.25	1308.93

Cr7

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	$\nu$ [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	1.99	4.13	13.08	0.63	
0.80	18.80	3.52	11.15	5.99	
1.60	36.00	2.91	9.20	11.00	
2.40	69.00	2.30	7.30	22.00	
2.80	108.00	2.00	6.30	34.00	
3.01	156.00	1.84	5.80	49.00	0.00
3.20	239.00	1.69	5.30	76.00	11.00
3.29	338.00	1.62	5.12	107.00	21.00
3.35	416.00	1.58	5.00	132.00	25.00
3.44	567.00	1.51	4.70	180.00	33.00
3.52	743.00	1.45	4.60	236.00	48.00
3.58	983.00	1.40	4.40	312.00	64.00
3.70	1298.00	1.31	4.10	412.00	94.00
3.82	1923.00	1.22	3.86	611.00	155.00
3.96	2633.00	1.11	3.50	836.00	224.00
4.06	3588.00	1.04	3.30	1140.00	329.00
4.17	4855.00	0.95	3.00	1542.00	1338.00

Cr8

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	$\nu$ [cm <sup>3</sup> /g]	PI [kPa]	PF1 [kPa]
0.00	1.05	4.20	13.28	0.33	
0.20	7.03	3.70	11.73	2.23	
0.39	19.82	3.20	10.13	6.30	
0.59	54.22	2.70	8.51	17.23	0.00
0.69	99.32	2.44	7.59	31.56	0.02
0.75	155.44	2.30	7.29	49.40	13.21
0.79	267.04	2.19	6.94	84.86	47.09
0.82	384.51	2.12	6.72	122.20	73.65
0.83	521.08	2.08	6.58	165.60	121.25
0.85	671.80	2.03	6.44	213.50	157.45
0.88	940.52	1.97	6.24	298.90	230.54
0.92	1473.58	1.86	5.90	468.30	298.31
0.95	1993.55	1.79	5.67	633.50	571.25
0.97	2562.39	1.73	5.48	814.30	742.58
1.00	3377.18	1.66	5.25	1073.20	949.04
1.04	4715.06	1.56	4.94	1498.40	1342.52

Produit RDAP (pommes red delicious)    Produit GDAP (pommes golden delicious)  
Données et Résultats Bruts

RDAP01inch min-T25 piston

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	P1 [kPa]	PFI [kPa]
0.00	5.62	3.57	17.94	56.67	
0.28	21.90	3.50	17.57	59.14	
0.60	33.00	3.42	17.16	59.14	
1.00	37.00	3.32	16.64	64.07	
1.29	48.00	3.24	16.28	66.53	
1.57	48.00	3.17	15.93	71.46	
2.00	48.00	3.06	15.37	78.85	
2.39	48.00	2.96	14.88	86.24	
2.71	80.00	2.88	14.47	96.10	
3.18	103.00	2.76	13.87	113.35	
3.63	142.00	2.65	13.30	133.06	
4.03	222.00	2.55	12.78	179.28	0.00
4.50	269.00	2.43	12.19	191.49	21.11
4.80	321.00	2.35	11.80	211.54	50.84
5.09	376.00	2.28	11.43	239.44	88.42
5.35	465.00	2.21	11.10	271.58	128.66
5.56	574.00	2.16	10.83	302.78	165.72
5.75	731.00	2.11	10.59	335.66	203.22
5.96	920.00	2.06	10.32	375.70	247.26
6.16	1200.00	2.01	10.07	416.75	290.93
6.38	1200.00	1.95	9.79	469.61	345.43
6.57	1200.00	1.90	9.54	519.19	395.08
6.82	1200.00	1.84	9.23	586.71	460.83
6.98	1200.00	1.80	9.03	635.15	506.89
7.15	1200.00	1.75	8.80	691.62	559.58
7.31	1200.00	1.71	8.60	745.83	609.25
7.40	3045.00	1.69	8.49	773.98	634.73
7.51	3606.00	1.66	8.35	814.53	671.07

GDAP01inch min-T25 piston

time [min]	P [lb]	Z0 [cm]	v [cm <sup>3</sup> /g]	P1 [kPa]	PFI [kPa]
0.00	5.62	3.46	17.82	142.92	
0.20	21.90	3.41	17.53	150.31	
0.43	33.00	3.35	17.22	160.16	
0.72	37.00	3.28	16.85	177.41	
1.08	48.00	3.19	16.38	197.13	
1.41	62.00	3.10	15.95	214.37	
1.71	80.00	3.03	15.56	239.01	
2.01	103.00	2.95	15.17	261.19	
2.32	142.00	2.87	14.76	293.22	0.00
2.60	222.00	2.80	14.39	325.11	3.26
2.92	269.00	2.72	13.98	358.91	18.62
3.22	321.00	2.64	13.59	401.49	52.07
3.50	376.00	2.57	13.22	452.36	101.41
3.80	465.00	2.50	12.83	518.35	172.62
4.08	574.00	2.42	12.46	593.57	258.55
4.29	731.00	2.37	12.19	656.17	331.95
4.46	920.00	2.33	11.96	714.86	401.55
4.65	1200.00	2.28	11.72	785.14	485.35
4.82	1564.00	2.24	11.49	855.52	569.42
5.01	2051.00	2.19	11.24	939.09	669.14
5.17	2488.00	2.15	11.04	1014.36	758.68
5.29	3045.00	2.12	10.87	1078.36	834.50
5.34	3606.00	2.10	10.81	1103.23	863.90

Ref. : 3.1 CDC DANS LE CAS DE LA VARIATION LINEAIRE DU RAPPORT DE VIDE – SPM NON-LINEAIRE (CDC1)

$$\frac{K}{\gamma_f} \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = \frac{1}{1 + \left( - \left\{ \frac{\rho_s dZ/dt}{W} \right\} t \left[ 1 - \frac{bW}{\rho_s dZ/dt} \left( \frac{z - 0.5Z_0}{Z_0} \right) \right] + e_0 \right)^x} \quad \text{Eq. A3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( - \left\{ \frac{\rho_s dZ/dt}{W} \right\} t \left[ 1 - \frac{bW}{\rho_s dZ/dt} \left( \frac{z - 0.5Z_0}{Z_0} \right) \right] + e_0 \right)$$

Une solution complète de cette équation, (Eq. 3.6), prend la forme :

$$P_f = \frac{\gamma_f c}{K} \left\{ z Z_0 \left[ \frac{1 + e_0 - bt}{ct(bt)} \right] + \frac{z^2}{2ct} - \left[ \frac{Z_0(1 + e_0)}{ct(bt)} \right] \cdot \left[ \frac{Z_0(1 + e)}{bt} \ln(1 + e) - z \ln \left( 1 + e_0 - ct \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{b}{c} \right) \right) - \frac{Z_0 \left( 1 + e_0 - ct \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{b}{c} \right) \right)}{bt} \ln \left( 1 + e_0 - ct \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{b}{c} \right) \right) \right] \right\} \quad \text{Eq. A3.2}$$

dans laquelle  $c = \frac{\rho_s dZ/dt}{W}$  Eq. A3.3

Ref. : 3.2 CDC DANS LE CAS DES LARGES DEFORMATIONS – SPM LINEAIRE OU NON (CDC2)

Here is an example of the type of finite difference analysis used and the convergence criteria calculation.

Let's take the basic differential equation:

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = C_v \cdot \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} \quad \text{Eq. A3.4}$$

$P_{fR}, t_R, z_R$  are arbitrary references for the fluid pressure, the time and the position within the SPM, therewith:

$$\text{The nondimensional fluid pressure: } \bar{P}_f = \frac{P_f}{P_{fR}} \quad \text{Eq. A3.5}$$

$$\text{The nondimensional time: } \bar{t} = \frac{t}{t_R} \quad \text{Eq. A3.6}$$

$$\text{And the nondimensional position: } \bar{z} = \frac{z}{z_R} \quad \text{Eq. A3.7}$$

With the proper substitution of Eqs. A3.5 and A3.6 in the left-hand side of Eq. A3.4

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{P_{fR}}{t_R} \frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} \tag{Eq. A3.8}$$

With the proper substitution of Eqs. A3.5 and A3.7, in the right-hand side of Eq. A3.4

$$C_v \frac{\partial^2 P_f}{\partial z^2} = C_v \frac{P_{fR}}{z_R^2} \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^2} \tag{Eq. A3.9}$$

Equalling Eqs. A3.8 and A3.9,

$$\frac{P_{fR}}{t_R} \frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} = \frac{C_v \cdot P_{fR}}{z_R^2} \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^2}$$

$$\text{or } \frac{1}{t_R} \frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} = \frac{C_v}{z_R^2} \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^2} \tag{Eq. A3.10}$$

Adopting  $t_R = \frac{z_R^2}{C_v}$  then Eq. A3.10 will be of the form

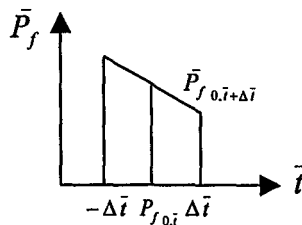
$$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^2} \tag{Eq. A3.11}$$

Using Taylor's series:

with  $\frac{\Delta t}{\Delta \bar{t}} = t_R = \frac{z_R^2}{C_v}$  so,  $\Delta \bar{t} = \frac{C_v \Delta t}{z_R^2}$  then  $\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}}$  becomes

$$\bar{P}_{f,0,\bar{t}+\Delta \bar{t}} = \bar{P}_{f,0,\bar{t}} + \Delta \bar{t} \cdot \left( \frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} \right)_0$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\Delta \bar{t}} \left( \bar{P}_{f,0,\bar{t}+\Delta \bar{t}} - \bar{P}_{f,0,\bar{t}} \right) \tag{Eq. A3.12}$$

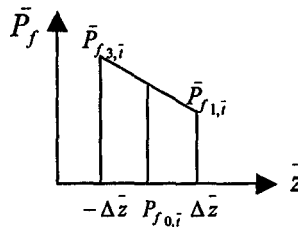


$\bar{P}_{f,0,\bar{t}}$  being the fluid pressure at any position.

Similarly for the right-hand side of Eq. A3.11:

$$\bar{P}_{f,1,T_v} = \bar{P}_{f,0+\Delta \bar{z},T_v}$$

$$\bar{P}_{f,3,T_v} = \bar{P}_{f,0-\Delta \bar{z},T_v}$$



$$\begin{aligned} \bar{P}_{f,1,\bar{i}} &= \bar{P}_{f,0,\bar{i}} + \Delta \bar{z} \left( \frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{z}} \right)_0 + \frac{(\Delta \bar{z})^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^2} \right)_0 + \frac{(\Delta \bar{z})^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^3} \right)_0 + \frac{(\Delta \bar{z})^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^4} \right)_0 + \dots \\ &+ \frac{(\Delta \bar{z})^{(n-1)}}{(n-1)!} \left( \frac{\partial^{(n-1)} \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^{(n-1)}} \right)_0 + R_n \end{aligned}$$

Eq. A3.13

 $R_n$  being the residual part

$$\begin{aligned} \bar{P}_{f,3,\bar{i}} &= \bar{P}_{f,0,\bar{i}} - \Delta \bar{z} \left( \frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{z}} \right)_0 + \frac{(\Delta \bar{z})^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^2} \right)_0 - \frac{(\Delta \bar{z})^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^3} \right)_0 + \frac{(\Delta \bar{z})^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^4} \right)_0 + \dots \\ &+ \frac{(-\Delta \bar{z})^{(n-1)}}{(n-1)!} \left( \frac{\partial^{(n-1)} \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^{(n-1)}} \right)_0 + R_n \end{aligned}$$

Eq. A3.14

Adding these last two equations for  $\bar{P}_{f,1,\bar{i}}$  and  $\bar{P}_{f,3,\bar{i}}$  :

$$\begin{aligned} \bar{P}_{f,1,\bar{i}} + \bar{P}_{f,3,\bar{i}} &= 2\bar{P}_{f,0,\bar{i}} + 0 + \frac{2(\Delta \bar{z})^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^2} \right)_0 + 0 + \frac{2(\Delta \bar{z})^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^4} \right)_0 + \dots \\ &+ \frac{2(\Delta \bar{z})^{(n-1)}}{(n-1)!} \left( \frac{\partial^{(n-1)} \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^{(n-1)}} \right)_0 + 2R_n \end{aligned}$$

Eq. A3.15

 $\Delta \bar{z}$  being small enough, the third and subsequent terms can be neglected.

Then Eq. 3.12 becomes Eq. 3.13.

$$\bar{P}_{f,1,\bar{i}} + \bar{P}_{f,3,\bar{i}} = 2\bar{P}_{f,0,\bar{i}} + (\Delta \bar{z})^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^2} \right)_0 \quad \text{Eq. A3.16}$$

therefore

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{(\Delta \bar{z})^2} \left( \bar{P}_{f,1,\bar{i}} + \bar{P}_{f,3,\bar{i}} - 2\bar{P}_{f,0,\bar{i}} \right) \quad \text{Eq. A3.17}$$

Eqs. A3.12 and A3.17 can be equated to yield:

$$\frac{1}{\Delta \bar{t}} \left( \bar{P}_{f,0,\bar{t}+\Delta \bar{t}} - \bar{P}_{f,0,\bar{t}} \right) = \frac{1}{\left( \Delta \bar{z} \right)^2} \left( \bar{P}_{f,1,\bar{t}} + \bar{P}_{f,3,\bar{t}} - 2\bar{P}_{f,0,\bar{t}} \right)$$

$$\text{or } \bar{P}_{f,0,\bar{t}+\Delta \bar{t}} = \frac{\Delta \bar{t}}{\left( \Delta \bar{z} \right)^2} \left( \bar{P}_{f,1,\bar{t}} + \bar{P}_{f,3,\bar{t}} - 2\bar{P}_{f,0,\bar{t}} \right) + \bar{P}_{f,0,\bar{t}} \quad \text{Eq. A3.18}$$

Now one needs to determine the interval for  $\frac{\Delta \bar{t}}{\left( \Delta \bar{z} \right)^2}$  which provides suitable

convergence, similarly to CRANK(1973) diffusion problem.

$$\text{Since: } \bar{P}_{f,1,\bar{t}} \in \left[ 0, \bar{P}_{f,0,\bar{t}} \right], \bar{P}_{f,3,\bar{t}} \in \left[ 0, \bar{P}_{f,0,\bar{t}} \right] \text{ then } \left( \bar{P}_{f,1,\bar{t}} + \bar{P}_{f,3,\bar{t}} - 2\bar{P}_{f,0,\bar{t}} \right) \in \left[ -2\bar{P}_{f,0,\bar{t}}, 0 \right]$$

At the lower boundary limit  $\bar{P}_{f,1,\bar{t}} = \bar{P}_{f,3,\bar{t}} = 0$ , Eq. A3.18 becomes

$$\bar{P}_{f,0,\bar{t}+\Delta \bar{t}} = \frac{\Delta \bar{t}}{\left( \Delta \bar{z} \right)^2} \left( -2\bar{P}_{f,0,\bar{t}} \right) + \bar{P}_{f,0,\bar{t}} \quad \text{Eq. A3.19}$$

$$\text{provided } \bar{P}_{f,0,\bar{t}+\Delta \bar{t}} \leq \bar{P}_{f,0,\bar{t}} \geq 0 \quad \text{Eq. A3.20}$$

(let's be reminded that the fluid pressure reduces while the solid pressure increases)

$$\bar{P}_{f,0,\bar{t}+\Delta \bar{t}} = \frac{\Delta \bar{t}}{\left( \Delta \bar{z} \right)^2} \left( -2\bar{P}_{f,0,\bar{t}} \right) + \bar{P}_{f,0,\bar{t}} \geq 0$$

$$\bar{P}_{f,0,\bar{t}+\Delta \bar{t}} = \bar{P}_{f,0,\bar{t}} \cdot \left( 1 - \frac{2\Delta \bar{t}}{\left( \Delta \bar{z} \right)^2} \right) \geq 0 \quad \text{Eq. A3.21}$$

$$\text{so } \left( 1 - \frac{2\Delta \bar{t}}{\left( \Delta \bar{z} \right)^2} \right) \geq 0 \text{ which is the convergence condition} \quad \text{Eq. A3.22}$$

$$1 \geq \frac{2\Delta \bar{t}}{\left( \Delta \bar{z} \right)^2} \Rightarrow \frac{\Delta \bar{t}}{\left( \Delta \bar{z} \right)^2} \leq \frac{1}{2} \text{ therefore for Eq. A3.18 to converge, } \Delta \bar{t} \text{ and } \Delta \bar{z} \text{ must be}$$

chosen in such a way that the ratio  $\frac{\Delta \bar{t}}{\left( \Delta \bar{z} \right)^2}$  is less than 0.5.

At the piston or the outflow surface point 3 will be chosen as the mirror image of point 1; thus  $\bar{P}_{f,1,\bar{t}} = \bar{P}_{f,3,\bar{t}}$ . So Eq. A3.18 becomes:

$$\bar{P}_{f,0,\bar{t}+\Delta\bar{t}} = \frac{\Delta\bar{t}}{(\Delta\bar{z})^2} \left( 2\bar{P}_{f,1,\bar{t}} - 2\bar{P}_{f,0,\bar{t}} \right) + \bar{P}_{f,0,\bar{t}} \quad \text{Eq. A3.23}$$

The illustrations of the finite difference calculation previously described are given Fig. A3.1 and Fig. A3.2.

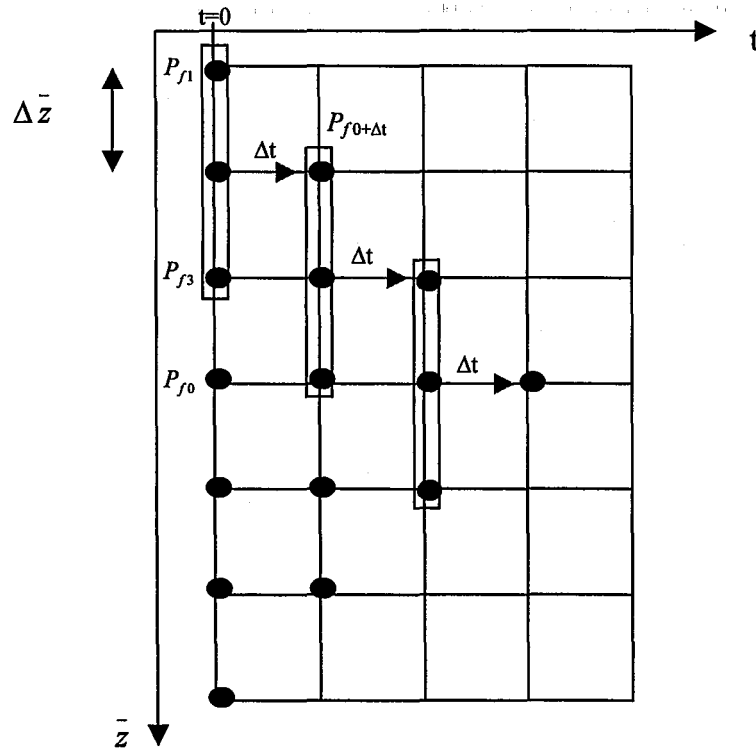


Figure A3.1 : Finite difference calculation grid

**Example**

In this example we assume that both the base and the piston are porous allowing for drainage at the two boundaries, which yields a symmetrical distribution of the pressure as per the centre of the SPM. It is also supposed that the pressure is initially uniformly distributed along the SPM height. This case does not correspond to a real situation but has only been selected to illustrate as simply as possible the calculation method chosen in the corresponding section.

Further assuming that the condition  $\frac{\Delta \bar{t}}{(\Delta \bar{z})^2} < 0.5$  is satisfied by taking

$$\frac{\Delta \bar{t}}{(\Delta \bar{z})^2} = 0.325 \text{ for an SPM total height of 8 cm.}$$

$\bar{P}_f$  At  $t = 0$ :

- At  $\bar{z} = 0$

$$\bar{P}_{f,0,\bar{i}+\Delta \bar{i}} = 0$$

- At  $\bar{z} = 0.25$

$$\bar{P}_{f,0,\bar{i}+\Delta \bar{i}} = 100$$

- At  $\bar{z} = 0.5$

$$\bar{P}_{f,0,\bar{i}+\Delta \bar{i}} = 100$$

- At  $\bar{z} = 0.75$

$$\bar{P}_{f,0,\bar{i}+\Delta \bar{i}} = 100$$

- At  $\bar{z} = 1$

$$\bar{P}_{f,0,\bar{i}+\Delta \bar{i}} = 0$$

then

$\bar{P}_f$  At  $t = 5 \text{ min}$ :

- At  $\bar{z} = 0$

$$\bar{P}_{f,0,\bar{i}+\Delta \bar{i}} = 0$$

- At  $\bar{z} = 0.25$

$$\bar{P}_{f,0,\bar{i}+\Delta \bar{i}} = \frac{\Delta \bar{t}}{(\Delta \bar{z})^2} \left( \bar{P}_{f,1,\bar{i}} + \bar{P}_{f,3,\bar{i}} - 2\bar{P}_{f,0,\bar{i}} \right) + \bar{P}_{f,0,\bar{i}} \quad \text{Eq. A3.18}$$



$$\bar{P}_{f,0,\bar{z}+\Delta\bar{z}} = 0.325(0 + 100 - 2(100)) + 100 = 67.5$$

- At  $\bar{z} = 0.5$  still referring to Eq. A3.18.

$$\bar{P}_{f,0,\bar{z}+\Delta\bar{z}} = 0.325(100 + 100 - 2(100)) + 100 = 100$$

- At  $\bar{z} = 0.75$  still referring to Eq. A3.18.

$$\bar{P}_{f,0,\bar{z}+\Delta\bar{z}} = 0.325(100 + 0 - 2(100)) + 100 = 67.5$$

- At  $\bar{z} = 1$

$$\bar{P}_{f,0,\bar{z}+\Delta\bar{z}} = 0$$

and further on for  $t = 10 \text{ min}$

The corresponding data and graphic representation of  $\bar{P}_f = f(\bar{z}, t)$ :

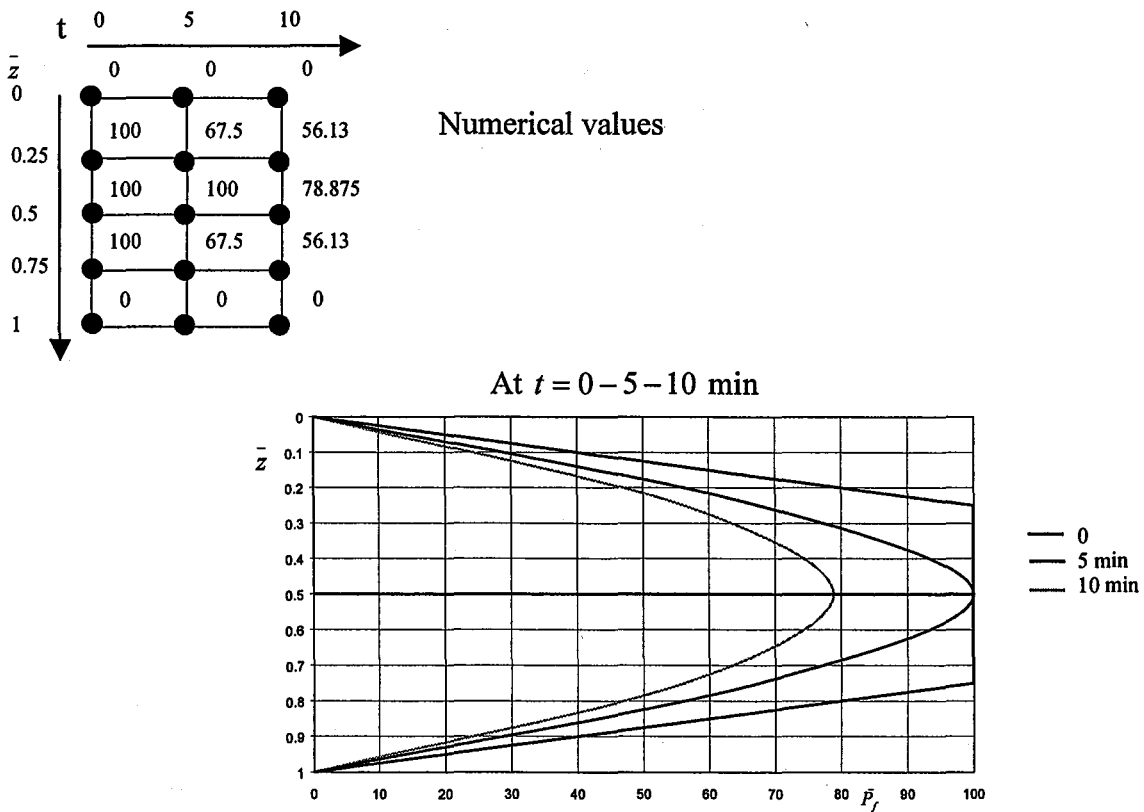


Figure A3.2 : Numerical calculation and graphical representation  $\bar{P}_f = f(\bar{z}, t)$

## ANNEXE A4

## LA COMPRESSION AXIALE A ECOULEMENT RADIAL (CAR) ET LE PRESSAGE PAR VIS

Réf. : 4.1.3 Application au pressage à vis

For radial drainage the basic differential equation can be written as:

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = C_r \cdot \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_f}{\partial r} \right) \quad \text{Eq. A4.1}$$

To solve the equation  $P_f$  is assumed to be the product of 2 independent functions, CRANK (1973):

$$P_f = F(r)G(t) \quad \text{Eq. A4.2}$$

$$\text{So, } \frac{\partial P_f}{\partial t} = F(r) \frac{\partial}{\partial t} G(t) = F(r)G'(t)$$

$$\text{And } \frac{\partial P_f}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} F(r)G(t) = F'(r)G(t)$$

$$\frac{\partial^2 P_f}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} F(r)G(t) = F''(r)G(t)$$

Therefore

$$F(r)G'(t) = C_r \left( F''(r)G(t) + \frac{1}{r} \cdot F'(r)G(t) \right) = C_r \cdot G(t) \left( F''(r) + \frac{1}{r} \cdot F'(r) \right)$$

$$\text{or } \frac{\left( F''(r) + \frac{1}{r} \cdot F'(r) \right)}{F(r)} = \frac{G'(t)}{C_r \cdot G(t)} \quad \text{Eq. A4.3}$$

Independent right-hand side left-hand side can only be equal to a constant,  $-b^2$ , generally called separate constant, therefore:

$$\frac{\left( F''(r) + \frac{1}{r} \cdot F'(r) \right)}{F(r)} = -b^2, \text{ so,}$$

$$r^2 F''(r) + r \cdot F'(r) + b^2 r^2 \cdot F(r) = 0 \quad \text{Eq. A4.4}$$

Eq. A4.4 is analogue to the Bessel function, then can be written as follows:

Which solution, according to standard mathematical tables, is given by:

$$F(r) = r^{-p} \left( c_1 J_{q/r} \left( \frac{\alpha}{s} r^s \right) + c_2 Y_{q/r} \left( \frac{\alpha}{s} r^s \right) \right) \quad \text{where } q = \sqrt{p^2 - \beta^2} \quad \text{Eq. A4.5}$$

then

$$F(r) = 1 \cdot \left( c_1 J_0 \left( \frac{b}{1} r^1 \right) + c_2 Y_0 \left( \frac{b}{1} r^1 \right) \right) = (c_1 J_0(br) + c_2 Y_0(br)) \quad \text{Eq. A4.6}$$

with  $J_n(r)$  Bessel function of first kind of n order

$$J_n(r) = \frac{r^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{r^2}{2(2n+2)} + \frac{r^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (r/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)}$$

$$J_0(br) = \frac{1}{1 \cdot \Gamma(0+1)} \left\{ 1 - \frac{(br)^2}{2(2 \cdot 0+2)} + \frac{(br)^4}{2 \cdot 4(2 \cdot 0+2)(2 \cdot 0+4)} - \dots \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (br/2)^{2k}}{k! \Gamma(k+1)}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot \Gamma(1)} \left\{ 1 - \frac{(br)^2}{2(2 \cdot 0+2)} + \frac{(br)^4}{2 \cdot 4(2 \cdot 0+2)(2 \cdot 0+4)} - \dots \right\}$$

and gamma function  $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r} dr$

Then  $J_0(br)$  becomes

$$J_0(br) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (br/2)^{2k}}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (br)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}}$$

and  $Y_n(r)$  Bessel function of second kind of n order

$$Y_n(r) = \frac{2}{\pi} \{ \ln(r/2) + \gamma \} J_n(r) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} (r/2)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{ \phi(k) + \phi(n+k) \} \frac{(r/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

$\gamma = 0.5772156\dots$  Euler constant

$$Y_0(br) = \frac{2}{\pi} \{ \ln(br/2) + \gamma \} J_0(br) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{-1} \frac{(k-1)!}{k!} (br/2)^{2k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{ 2 \cdot \phi(k) \} \frac{(br/2)^{2k}}{(k!)^2}$$

$$Y_0(br) = \frac{2}{\pi} \{ \ln(br/2) + \gamma \} J_0(br) + \frac{2}{\pi} \left( \frac{(br)^2}{2^2} - \frac{(br)^4}{2^2 4^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{(br)^6}{2^2 4^2 6^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right)$$

Substitute  $J_0(r)$  and  $Y_0(r)$  in Eq. A4.6 and finally:

Eq. A4.7

$$F(r) = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (br)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + c_2 \left[ \frac{2}{\pi} \{ \ln(br/2) + \gamma \} J_0(br) + \frac{2}{\pi} \left( \frac{(br)^2}{2^2} - \frac{(br)^4}{2^2 4^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{(br)^6}{2^2 4^2 6^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right) \right]$$

$$F(r) = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (br)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + c_2 \left[ \frac{2}{\pi} \{ \ln(br/2) + \gamma \} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (br)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{(br)^2}{2^2} - \frac{(br)^4}{2^2 4^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{(br)^6}{2^2 4^2 6^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right) \right]$$

The right-hand side of Eq. A4.3 can be written as.

$$\frac{\left( F''(r) + \frac{1}{r} \cdot F'(r) \right)}{F(r)} = \frac{G'(t)}{C_r G(t)}$$

$$G'(t) = -b^2 C_r G(t) \tag{Eq. A4.8}$$

$$G(t) = A_3 \cdot e^{-b^2 C_r t} \tag{Eq. A4.9}$$

where  $A_3$  is a constant.

Since  $P_f = F(r)G(t)$  then combining Eqs. A4.7 and A4.9 provides:

$$P_f = (c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (br)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + c_2 \left[ \frac{2}{\pi} \{ \ln(br/2) + \gamma \} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (br)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{(br)^2}{2^2} - \frac{(br)^4}{2^2 4^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{(br)^6}{2^2 4^2 6^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right) \right] \cdot A_3 \cdot e^{-b^2 c_1 t}$$

$$A_4 = c_1 A_3 \text{ and } A_5 = c_2 A_3$$

Eq. A4.10

$$P_f = (A_4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (br)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + A_5 \left[ \frac{2}{\pi} \{ \ln(br/2) + \gamma \} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (br)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{(br)^2}{2^2} - \frac{(br)^4}{2^2 4^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{(br)^6}{2^2 4^2 6^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right) \right] \cdot e^{-b^2 c_1 t}$$

The constants can be evaluated from the boundary conditions.

Selecting the separate constant  $b = \frac{\alpha}{r_w}$ , where  $r_w$  is the intern radius, gives:

$$P_{f,r,t} = (A_4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left( \frac{\alpha}{r_w} r \right)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + A_5 \left[ \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \left( \frac{\alpha}{r_w} r / 2 \right) + \gamma \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left( \frac{\alpha}{r_w} r \right)^{2k}}{(k!)^2 (2)^{2k}} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\left( \frac{\alpha}{r_w} r \right)^2}{2^2} - \frac{\left( \frac{\alpha}{r_w} r \right)^4}{2^2 4^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{\left( \frac{\alpha}{r_w} r \right)^6}{2^2 4^2 6^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right) \right] \cdot e^{-\left( \frac{\alpha}{r_w} \right)^2 c_1 t}$$

Eq. A4.11

Using the Eq. A4.11, we can consider and resolve 2 experimental situations.

- The fluid is expressed vertically and flows centrally:

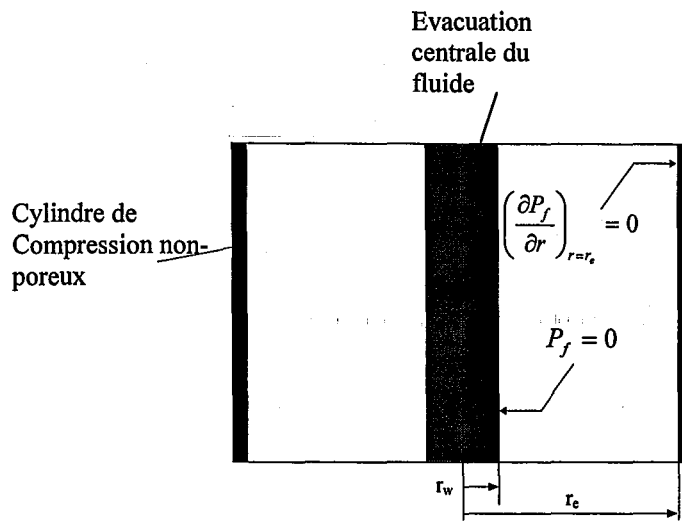


Figure A4.1: The fluid is expressed vertically and flows centrally

Simulation:

(Here below is a simulation which is based on the same dimensions than the TPSU©).  
 for  $r_e = 7.62 [cm]$ ,  $r_w = 2.54 [cm]$ ,  $C_r = 0.01 [cm^2 s^{-1}]$  and  $P_{f0} = 1 [N \cdot cm^{-2}]$

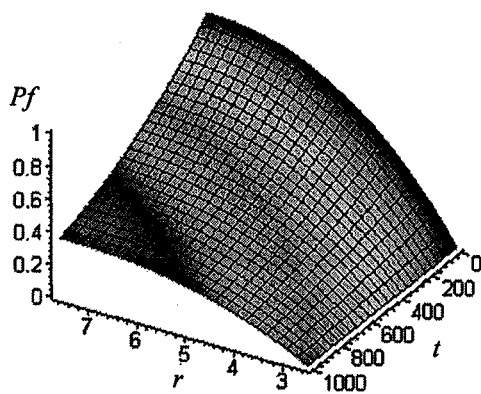


Figure A4.2

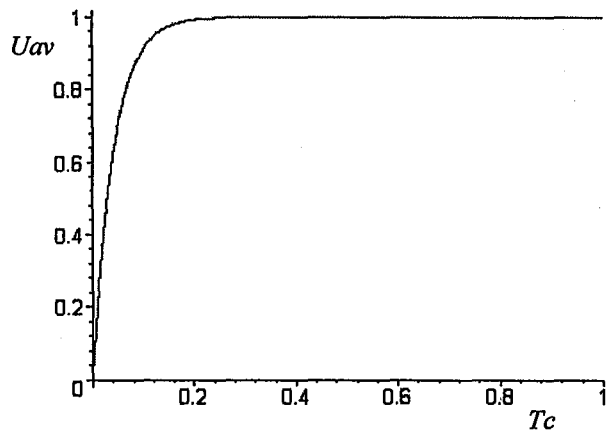


Figure A4.3

Figure A4.2 and A4.3: Graphical representations based on Eq. A4.11 and the configuration described on Figure A4.1

- Peripheral fluid flow and solid mandrel in the centre.  
(A section / collector of the TSPU is equivalent to the situation depicted below.)

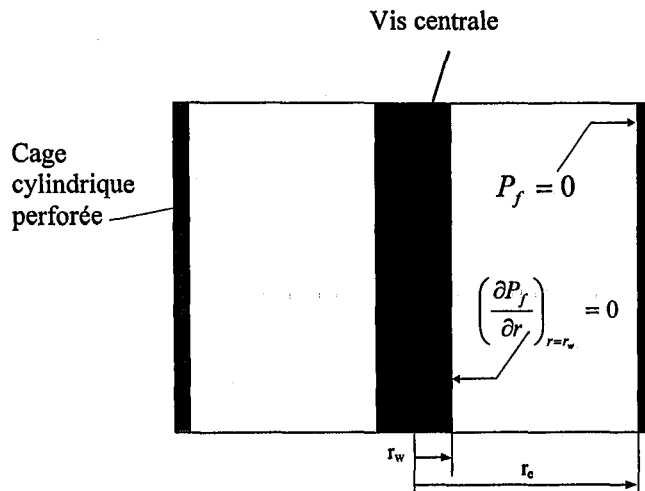


Figure A4.4: Peripheral fluid flow and solid mandrel in the centre

Simulation:

(Here below is a simulation, which is based on the same dimensions than the TSPU©.)

for  $r_e = 7.62 [cm]$ ,  $r_w = 2.54 [cm]$ ,  $C_r = 0.01 [cm^2 s^{-1}]$  and  $P_{f0} = 1 [N \cdot cm^{-2}]$ , with peripheral drainage at  $r = r_e$

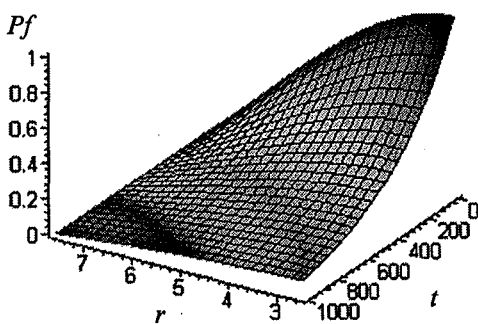


Figure A4.5

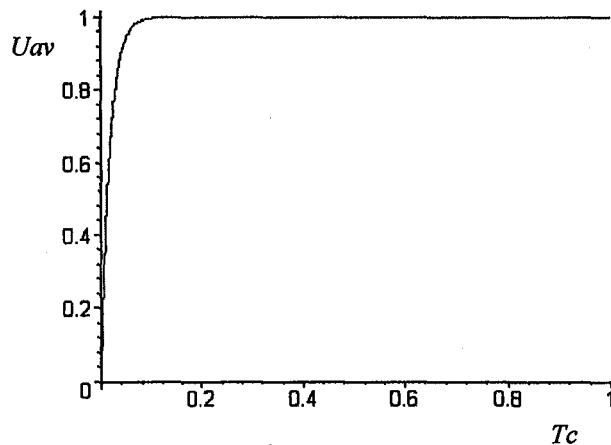


Figure A4.6

Figure A4.5 and A4.6: Graphical representations based on Eq. A4.11 and the configuration described on Figure A4.4

As expected, for the same coefficient of consolidation  $C_r$  and the same geometrical parameters  $r_e$ ,  $r_w$ , the radial compression occurs much faster when the drainage occurs peripherally.



## ANNEXE A5

*LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE A PRESSION CONSTANTE (CPC)*

## PUBLICATION P1

Etablie sur la base du DEA soutenu en 1981 à l'INPL, cette communication scientifique a fait l'objet du congrès NATO « Mathematical Models and Design Methods in Solid-Liquid Separation » à Lagos / Algarve au Portugal en 1982. Elle illustre avant tout l'usage et l'exploitation de la théorie développée dans le chapitre 2. La version complète est fournie dans cette annexe A5.

LECLERC D. & REBOUILLAT S. *Mathematical Models and Design Methods in Solid-Liquid Separation: Dewatering by compression.* NATO ASI Series, 356-391, (1982-1985).





## DEWATERING BY COMPRESSION

D. LECLERC and S. REBOUILLAT

Laboratoire des Sciences du Génie Chimique - ENSIC-CNRS -  
1 rue Grandville - 54042 NANCY CEDEX (FRANCE)CONTENTS

## INTRODUCTION

## FUNDAMENTAL EQUATIONS FOR CONSTANT PRESSURE COMPRESSION

Basic Equations and the Terzaghi Model  
The Voigt Model and Secondary Compression  
Semi-Theoretical Equations of Compression

## EXPERIMENTAL ILLUSTRATION OF BASIC EQUATIONS

Experimental Procedure and Apparatus  
Analysis of Experimental Results  
Terzaghi Voigt Model  
Simplified ModelSYMBOLS

B	constant representing the secondary consolidation, (-)
C <sub>c</sub>	constant in the relation e versus p <sub>s</sub> , (-)
C <sub>e</sub>	compression coefficient, (L <sup>2</sup> .T <sup>-1</sup> )
C <sub>e</sub> <sup>i</sup>	modified consolidation coefficient, (L <sup>2</sup> .T <sup>-1</sup> )
E	stiffness coefficient in the Voigt's model, (ML <sup>-1</sup> .T <sup>-2</sup> )
E <sub>0</sub>	constant in the relation e versus p <sub>s</sub> , (-)
e, e <sub>x</sub>	ratio of void volume to solid volume, (-)
e <sub>i</sub>	void ratio of filter cake surface, (-)
e <sub>iav</sub>	average void ratio of filter cake surface, (-)
G	viscous rubbing coefficient in Voigt's model, (-)
g <sub>c</sub>	gravitational acceleration, (LT <sup>-2</sup> )
i	number of drainage surface, (-)
K <sub>e</sub>	consolidation constant, (T <sup>-1</sup> )

$K, K_{sj}$	Ruth's filtration coefficient, ( $L^2.T^{-1}$ )
$L$	thickness of compressed cake at time $\theta_c$ or $\theta_c'$ , (L)
$L_1$	thickness of filter cake at time $\theta_c = 0$ , (L)
$L_1'$	hypothetical thickness of filter cake at time $\theta_c = 0$ , (L)
$L_2$	theoretical final thickness of cake, (L)
$L_\infty$	final thickness of cake when $\theta_c = \infty$ , (L)
$m$	ratio of wet to dry filter cake mass, (-)
$m_v$	volume change coefficient, ( $M^{-1}.L.T^2$ )
$n$	compressibility factor, ( $ML^{-1}.T^{-2}$ )
$P$	applied pressure, ( $ML^{-1}.T^{-2}$ )
$p_s$	local pressure of the solid, ( $ML^{-1}.T^{-2}$ )
$p_x$	local pressure of the liquid, ( $ML^{-1}.T^{-2}$ )
$s, s_j$	mass fraction solids, (-)
$T_c$	compression time factor, (-)
$T_c'$	modified compression time factor, (-)
$U_c$	average compression rate, (-)
$U_c'$	modified average compression rate, (-)
$u_x$	liquid velocity at the distance $x$ of the medium, ( $L.T^{-1}$ )
$\bar{\alpha}$ or $\alpha_{av}$	average specific resistance, ( $L.M^{-1}$ )
$\alpha_0, \alpha_x$	local specific resistance, ( $L.M^{-1}$ )
$\epsilon_j$	porosity at the surface of the cake, (-)
$\epsilon_x$	local porosity of the cake, (-)
$\eta$	secondary compression coefficient, ( $T^{-1}$ )
$\theta$	time, (T)
$\theta_f$	filtration time, (T)
$\theta_c$	compression time, (T)
$\theta_c'$	hypothetical compression time, (T)
$\theta_f'$	fictitious filtration time for a volume $(L_1' - L)\Omega$ , (T)
$\mu$	viscosity of liquid, ( $M.L^{-1}.T^{-1}$ )
$\rho$	density of liquid, ( $M.L^{-3}$ )
$\rho_s$	density of solid, ( $M.L^{-3}$ )
$v$	consolidation behaviour index concerning creep characteristic of materials, (-)
$\omega_0$	total solid volume per unit area, (L)
$\omega_x$	dry solid mass per unit area, ( $M.L^{-2}$ )
$\Omega$	filter area, ( $L^2$ )

### INTRODUCTION

On an overall basis about 20 % of the combustion energy used by French industry is used in operations for eliminating water. This has led to a considerable development in techniques for dehydrating at low energetic cost.

Mechanical compression is particularly well suited to the present situation as it uses about 20 times less energy than thermal processes. This has led to the need for models of the kinetics of filtration and compression.

Here we present the principal analytic equations which describe water elimination by pressing and detail the main difficulties encountered in using earlier models.

It is certain that the complete mathematical expressions for the simulation of compression kinetics are a very important scientific basis for the design of pressing units. However their complexity makes them difficult to apply in industrial practice and reduces the possibilities of improving on the empirical approach to pressing processes used until now. For this reason the second part of our paper is on the use of simplified models. We will illustrate the use of these semi-theoretical models initially developed Shirato.

The use of these mathematical tools is illustrated by our experimental results obtained with flocculated suspensions of talc and kaolin.

### 1 FUNDAMENTAL EQUATIONS FOR CONSTANT PRESSURE COMPRESSION

Sludge dewatering by compression can be theoretically divided into two stages : first filtration, second consolidation. As the filtration step has been described previously, we will not deal with its theoretical interpretation.

Filtration stage : pressure applied on the piston of a filtration-compression cell (Fig. 1) causes an immediate increase of the hydraulic pressure which is uniformly distributed through the whole suspension starting a constant pressure filtration.

Transition point between the filtration phase and the consolidation phase can be determined by the Ruth equation (1). In a further section we will develop a methodology for experimental determination of the cake thickness  $L_1$  at the end of filtration.

Compression stage : During this phase, the mechanism of dewatering is characterized by a continuous decrease of hydraulic pressure through the cake. When this pressure reaches zero, a slight decrease

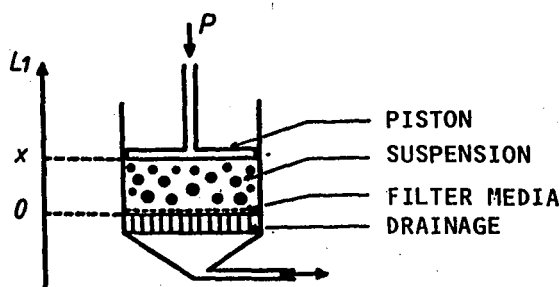


Fig. 1. Simplified scheme for the filtration-compression cell.

in cake thickness can still be observed. The kinetic of this phenomenon mainly depends on the plastic characteristic of the solid particles. It is called secondary compression.

Thus compression can be divided into two phases : primary compression and secondary compression. These two phases occur simultaneously but can be distinguished by the fact that secondary compression which is a characteristic of the compressed particles carries on at zero pressure.

### 1.1 Basic Equations and the Terzaghi Model

1.1.1 Simplified presentation of the Terzaghi analogy. For better understanding of cake behaviour during compression, sludge can be imagined to be a spring on which a pressure  $p_s$  is applied (Fig. 2).

On 1 : the spring is immersed in a cylinder full of water, no pressure is applied on the liquid. The local hydraulic pressure  $p_x = 0$ , and the local pressure applied to the cake (here to the spring),  $p_s = 0$ .

On 2 : a pressure  $p$  is applied on a frictionless piston. A tap on the piston is shut. So that the piston cannot move down and the pressure  $p$  is entirely supported by liquid.  $p_x = p$  and  $p_s = 0$ .

On 3 : the tap is opened and the descent of the piston is slowed by the stiffness of the spring. Liquid pressure  $p_x$  diminishes progressively as the liquid flows out.  $p_s = p - p_x$ .

On 4 : an equilibrium is reached. Liquid does not flow any more and the total applied pressure is supported by the compressed spring.  $p_x = 0$  and  $p_s = p$ .

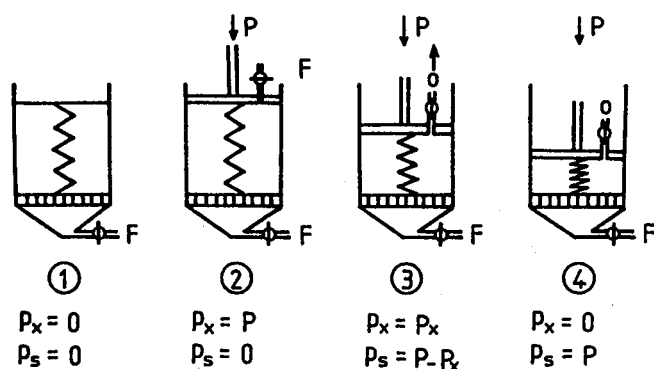


Fig. 2. Terzaghi's piston spring analogy.

360

The analogy supposes a uniform pressure through the whole depth of the cylinder. In a cake, compression begins at the level of the drainage surface and progresses through the cake. Uniform pressure is only obtained at the end of compression phase. This constitutes an important limit to the validity of Terzaghi analogy.

1.1.2 Fundamental equations. These are based on four main hypotheses :

- complete saturation of the media
- unidirectional fluid flow and unidirectional compression
- properties of solid do not change with pressure.

There are three basic equations which apply to a thin layer (Fig. 3).

1 - Darcy's law gives the approach velocity through a thin layer of particles whose mass is  $dM = \Omega \cdot d\omega_x$

$$u_x = - \frac{1}{\alpha_x \mu} \frac{\partial p_x}{\partial \omega_x} \quad (1)$$

2 - The consolidation law, which in soil mechanics gives the proportionality coefficient between change of liquid volume in a thin layer and the variation of applied pressure.

$$m_v = - \frac{1}{1+e_x} \cdot \frac{de_x}{dp_s} = \frac{1}{1+e_x} \cdot \frac{de_x}{dp_x} \quad (2)$$

where  $e_x$  is the void index, that is to say the ratio between the void volume and the solid volume. If  $\epsilon$  is the porosity of the layer

$$e_x = \frac{\epsilon_x}{1-\epsilon_x}$$

3 - A continuity equation : the change of flowrate through the layer is equal to the variation of the void index

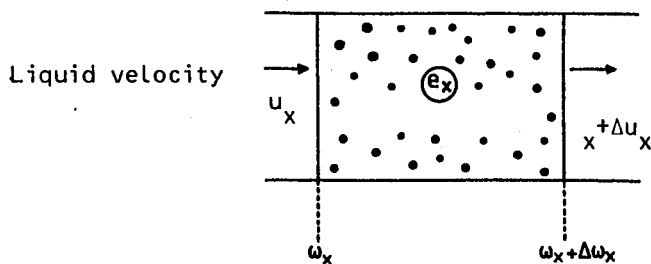


Fig. 3. Mass balance.

$$\frac{\partial u_x}{\partial \omega_x} = -\frac{1}{\rho_s} \cdot \frac{\partial e_x}{\partial \theta} \quad (3)$$

Substituting Eq. (2) in Eq. (1), we obtain by differentiation :

$$\frac{\partial u_x}{\partial \omega_x} = -\frac{C_e}{\rho_s} \cdot \frac{\partial^2 e_x}{\partial \omega_x^2} \quad (4)$$

from Eq. (3) and Eq. (4) :

$$\frac{\partial e_x}{\partial \theta} = C_e \frac{\partial^2 e_x}{\partial \omega_x^2} \quad (5)$$

in which  $C_e$  is a supposed constant coefficient which in soil mechanics is called the "compressibility coefficient"

$$C_e = \frac{\rho_s}{\mu \alpha_x (1+e_x) m_v} = \frac{\rho_s^2}{(1+e_x)^2} C_v \quad (5')$$

$C_v$  is a compressibility coefficient defined by Terzaghi.

Eq. (5) is similar to the characteristic equation of diffusion. It can be solved by Laplace transform. Analytical solutions are given by

$$U_c = 1 - \exp \left[ -\frac{\pi^2 T_c}{4} \right] \quad (6)$$

for a sinusoidal distribution of initial hydraulic pressures through a cake and by

$$U_c = 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2N-1)^2} \exp \left[ -\frac{(2N-1)^2 \pi^2}{4} T_c \right] \quad (7)$$

for an initially uniform distribution of hydraulic pressure.

Generally, it can be considered that the initial profile of hydraulic pressure is sinusoidal through the whole thickness of cakes obtained by filtration.

For concentrated sludges which are too concentrated to be filtered, it is considered that there is a linear initial profile of hydraulic pressure. These sludges are called "semi-solids sludges".

$U_c$  is a mean consolidation ratio  $U_c = \frac{L_1 - L}{L_1 - L_2}$  (8)

362

with  $L_1$  = cake thickness at the beginning of compression phase  
 $L_2$  = theoretical final thickness of compressed cake.

$$T_c \text{ is a reduced compression time } T_c = \frac{i^2 e_{\theta_c}}{\omega} \quad (9)$$

The Terzaghi model adapted by Shirato (1) (1971) to filtration-compression operations is useful for determining the consolidation ratio versus  $\theta_c$  when initial conditions are known.

### 1.2 Voigt Model and Secondary Compression

Eq. (6) and Eq. (7) are frequently insufficient to get a complete and precise description of compression phenomena especially when secondary consolidation is important.

To solve this problem, Voigt introduced the notion of secondary compression due to the creep effects on the solid. Adapted by Shirato (2) (1974), to the filtration-compression operations, the Terzaghi-Voigt model gives more a precise description of compression phenomena.

Previously, we considered that during the compression phase, the local void ratio  $e$  was only dependent of local pressure  $p_s$  without taking into account the creep effect.

To take this effect into account it is necessary to consider that variation of void ratio is due partly to the variation of local pressure  $p_s$  and partly to the effect of secondary compression characteristic of the solid under consideration.

In this case, the continuity equation becomes :

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_c} + \frac{\partial e}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial p_s}{\partial \theta_c} = - \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\rho_s}{\mu \alpha} \cdot \frac{\partial p_s}{\partial \omega} \right) \quad (10)$$

in which  $\omega$  is the mass of solid per unit area of filtration,  $\theta_c$  the consolidation time,  $\rho_s$  the density of solid,  $\mu$  the liquid viscosity and  $\alpha$  the local specific resistance.

First term of Eq. (10) gives the variation of void fraction due to secondary compression and the second term the variation due to variation of applied pressure  $p_s$  on the particles.

If we represent the Voigt model schematically by Fig. 4, the variation of void fraction vs time can be calculated by



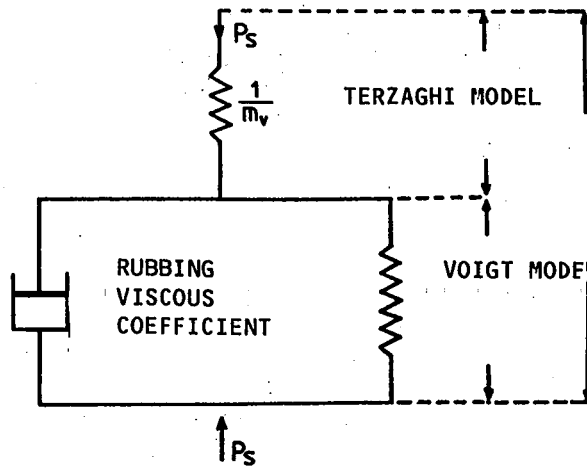


Fig. 4. Rheological model for the consolidation.

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_c} = \frac{1+e}{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_c} \int_0^{\theta_c} \frac{\partial}{\partial e} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{E}{G} (\theta_c - \tau) \right) \right] (p_s - p_{s(o)}) \cdot d\tau \quad (11)$$

where  $(p_s)_o$  is the local pressure of solid at  $\theta_c = 0$ .

From Eq. (10) and Eq. (11) :

$$c_e \frac{\partial p_s^2}{\partial \omega^2} = \frac{\partial p_s}{\partial \theta_c} + \beta \eta \frac{\partial}{\partial \theta_c} \int_0^{\theta_c} (p_s - (p_s)_o) \exp(-\eta(\theta_c - \tau)) d\tau \quad (12)$$

$$\text{with } \beta = \frac{1}{m_v E} \quad \eta = \frac{E}{G} \quad c_e = \frac{\rho_s}{\mu \alpha m_v (1+e)}$$

- $m_v$  is the proportionality coefficient previously defined in Terzaghi model
- $E$  and  $G$  are respectively the viscosity coefficient and the rigidity in Voigt model.

To a first approximation, it can be considered that  $\beta$ ,  $\eta$  and  $c_e$  are constant during consolidation. This makes it possible to solve Eq. (12) but gives too complex solutions. Generally, secondary compression presents far slower kinetics than primary compression so we can consider that

$$\eta \ll c_e (i\pi/2\omega_o)^2$$

364

The initial sinusoidal distribution of pressure through filter cakes conduces to a simplified solution

$$U_c = B \left( 1 - \exp(-\eta\theta_c) + (1-B) \left[ 1 - \exp \left( - \frac{i^2 \pi^2 c_e}{4\omega_o^2} \theta_c \right) \right] \right) \quad (13)$$

By rearranging Eq. (13) and identification with Eq. (6) from Terzaghi, gives :

$$U_c = \underbrace{1 - (1-B) \exp \left( - \frac{i^2 \pi^2 c_e}{4\omega_o^2} \theta_c \right)}_{\text{TERZAGHI MODEL}} - \underbrace{B \exp(-\eta\theta_c)}_{\text{VOIGT MODEL}} \quad (14)$$

combined model TERZAGHI-VOIGT

For an initially uniform distribution of pressure solution of Eq. (12) leads to

$$U_c = (1-B) \left[ 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2N-1)^2} \exp \left( - \frac{(2N-1)^2}{4} \pi^2 T_c \right) \right] + B \left( 1 - \exp(-\eta\theta_c) \right) \quad (15)$$

where N as a positive integer.

### 1.3 Semi-Theoretical Equations of Compression

Previous fundamental equations are rather complicated and difficult to use for designing filtration compression equipment. Shirato (3)(4) has adapted a simplified model based on the shape of consolidation curves and presented first by Sivaram and Swamee.

This empirical model is easily introduced in the case of linear profile of hydraulic pressures (semi-solid sludges). It can still be used with sinusoidal profiles by using a fictitious cake with uniform porosity distribution.

1.3.1 Empirical model of Sivaram and Swamee. In the case of a linear profile of hydraulic pressures (semi-solid sludges), the shape of the curves giving consolidation ratio versus  $\sqrt{\theta_c}$  has two main characteristics :

- when secondary compression is negligible, it is a straight line up to  $U_c = 0.53$ ,
- then asymptotic to  $U_c = 1$  for large values of  $\sqrt{\theta_c}$ .

Sivaram and Swamee proposed the empirical equation :

$$U_c = \frac{L_1 - L}{L_1 - L_\infty} = \sqrt{\frac{\frac{4}{\pi} T_c}{\left(1 + \left(\frac{4}{\pi} T_c\right)^{2.8}\right)^{1/2.8}}} \quad (16)$$

with a reduced compression time :  $T_c = \frac{c_e i^2 \theta_c}{\omega_o^2}$

This equation fits the primary compression of semi-solid sludges with a precision of about 3 %. Eq. (7) is the full description of this

$$U_c = 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{8}{(2N-1)^2 \pi^2} \exp\left[-\frac{(2N-1)^2 \pi^2}{4} \cdot \frac{c_e i^2}{\omega_o^2} \theta_c\right] \quad (7)$$

It is clear that Eq. (16) is easier to use than Eq. (7) but it cannot be applied to secondary compression. Shirato therefore proposed a modification to the Sivaram and Swamee equation.

1.3.2 Adaptation of Sivaram and Swamee equation to compression of semi-solid sludges with secondary compression. When secondary compression occurs the variation of consolidation ratio versus  $\sqrt{\theta_c}$  retains the same shape but deviate earlier from the initial straight line. To fit this deviation, Shirato proposed to replace the Sivaram and Swamee coefficient 2.8 by a constant  $\nu$  which would characterize the importance of secondary compression. Then

$$U_c = \sqrt{\frac{\frac{4}{\pi} T_c}{\left(1 + \left(\frac{4}{\pi} T_c\right)^\nu\right)^{1/\nu}}} \quad (17)$$

The validity of this Eq. (17) will be discussed later in the experimental part of the paper.

1.3.3 Extension of empirical equation to the description of filter cake compression. In contrast to semi-solid sludges, filter cakes have a sinusoidal profile of hydraulic pressure and the consolidation ratio versus  $\sqrt{\theta_c}$  curves present a S shape.

The origin of those differences can be found in the fact that filtration does not lead to a uniform cake structure. Oldest layers near filter media are partially compressed and then porosity increases progressively from the media to the inlet surface of cakes, where the cakes are wetter.

366

To use empirical equations for consolidation of filter cake, it is necessary to avoid the S shape. This can be done by imagining that the compression of the true cake can be replaced by the compression of a fictitious semi-solid cake with an initial uniform porosity equal to porosity  $\varepsilon_i$  of the inlet layer (Fig. 5). Then we will have to replace the initial thickness of cake  $L_1$  by  $L_1'$  and to define a mean modified consolidation coefficient

$$U'_c = \frac{L_1' - L}{L_1' - L_\infty} \quad (18)$$

Then Shirato's equation can be written :

$$U'_c = \sqrt{\frac{\frac{4}{\pi} T'_c}{\left[1 + \left(\frac{4}{\pi} T'_c\right)^v\right]^{1/v}}} \quad (19)$$

$T'_c$  is a fictitious reduced time ;  $T'_c = C_e' i^2 \theta_c' / \omega_0^2$  (20)

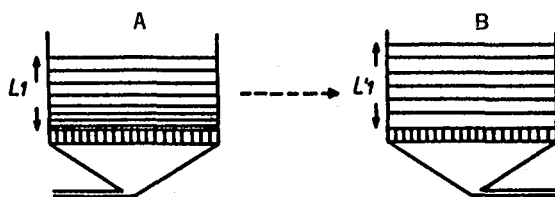
$\theta_c'$  is a fictitious time of consolidation which can be determined by the following considerations.

- Fictitious initial filter cake depth  $L_1'$  can be calculated from

$$L_1' = (1 + e_i) \omega_0 \quad (21)$$

$e_i$  is the value of void ratio in a thin layer of cake where cake pressure is zero. It is extremely difficult to determine this value experimentally. So we will use the  $E_0$  value from empirical equation previously used by Tiller (5) for the determination of the void ratio versus  $p_s$

$$e = E_0 - C_c \ln p_s$$



A. Filter cake

B. Fictitious cake

Fig. 5. Schematic illustration of the non-uniform void ratio distribution through a filter cake.

Theoretically  $E_0$  is the void ratio value for  $p_s = 1$  and depends on the units of pressure used. To be near  $p_s = 0$ , we will chose to express  $p_s$  in hectopa.

From Tiller, this constitutes a reasonable approximation of  $E_0$ .

- Fictitious time  $\theta'_c$ . Fictitious time  $\theta'_c$  is equal to true time of consolidation more an hypothetical time  $\theta'_f$  necessary to filter a sludge volume equivalent to  $L'_1 - L_1$  :

$$\theta'_c = \theta'_f + \theta_c \quad (22)$$

$\theta'_f$  is the fictitious time necessary to obtain a volume of filtrate per unit surface  $L'_1 - (L_1/i)$  from sludge with concentration  $s_i$  equal to the concentration at inlet surface of real cake.

By using the Ruth's equation :  $L'_1 - L_1 = i\sqrt{K_{s_i}\theta'_f}$  (23)

$K_{s_i}$  is Ruth's coefficient :

$$K_{s_i} = \frac{2p(1-ms_i)}{\mu\alpha_{av}\rho s_i}$$

with  $\alpha_{av}$  : mean specific resistance  
 $m$  : ratio between mass of wet cake and mass of solid in cake  
 $\mu, \rho$  : viscosity and density of filtrate.

Combining Eq. (22) and Eq. (23) with elimination of  $\theta'_f$  :

$$\theta'_c = \theta_c + \frac{L_1 - L}{iK_{s_i}} = \theta_c + \frac{\mu\alpha_{av}\rho s_i^2 \omega_o^2}{2i^2 p} (e_i - e_{iav}) \quad (24)$$

$e_{iav}$  is the mean void ratio in true cake

$$e_{iav} = \frac{\rho_s (m-1)}{\rho} \quad (25)$$

## 2 EXPERIMENTAL ILLUSTRATION OF BASIC EQUATIONS

### 2.1 Experimental Procedure and Apparatus

The theoretical study of dewatering by expression leads to a relation for the average consolidation ratio  $U_c$  versus  $\theta_c$ .

$U_c$  is the fractional approach, at time  $\theta_c$  to the limiting value  $U_{c\infty}$  at  $\theta_{\infty}$ . The degree of compression  $U_c$  can be compared with the

368

transfer efficiency, and is given by :

$$U_c = \frac{L_1 - L}{L_1 - L_\infty}$$

where  $L_1$ ,  $L_\infty$ ,  $L$  have their conventional signification.

The variation of  $U_c$  in terms of  $\theta_c$  is measured by experiments in the filtration compression cell represented on Fig. 6.

This cell is fitted with a dial gauge to give the filtrate volume obtained between the beginning  $\theta_0$  and  $\theta_f$ . The gauge is also used to follow the decrease in the thickness of the cake during the compression period.

The filtration compression cell, as indicated on Fig. 6, has a lips-ring placed at the end of the piston to prevent slurry leakage. Friction between the walls of the cylinder and the piston are considerably reduced by three teflon guides placed on the piston. An hydraulic jack moves the piston and a pressure up to 20 bar can be obtained. One or two porous plates are used on this equipment.

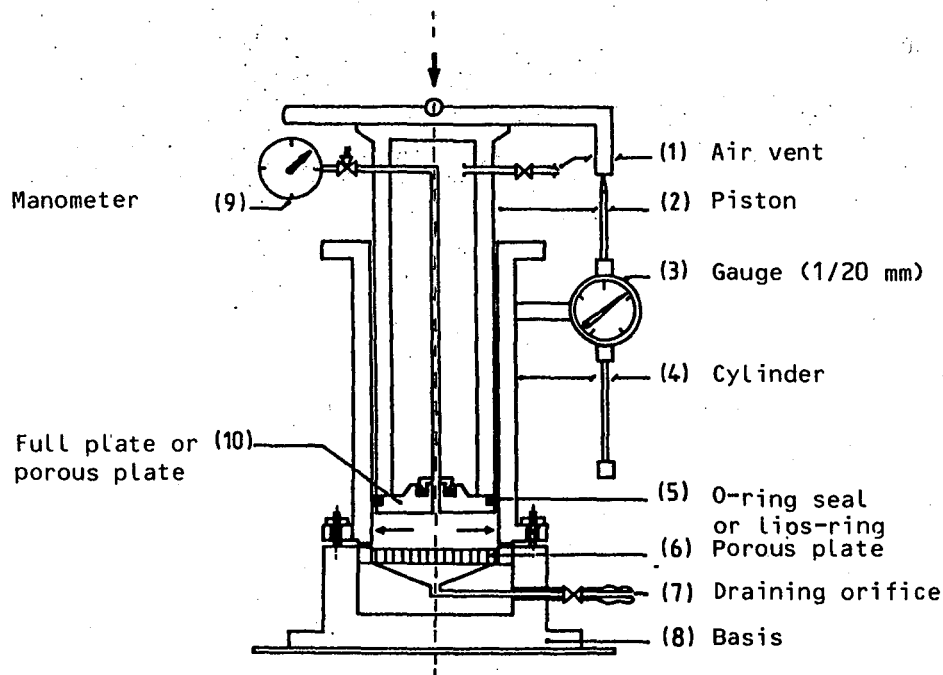


Fig. 6. Filtration-compression cell.

The variation  $L$  versus  $\theta_f$  or  $\theta_c$  is directly accessible with experiment realized with this cell. The values  $L_1$  and  $L_\infty$ , previously mentioned are obtained graphically from the curve  $L = f(\theta_f, \theta_c)$ . This allows us to get experimental variations  $U_c$  vs  $\theta_c$  for different suspensions.

These types of experiments will be used to illustrate the applicability of theoretical models. These mathematical tools are studied in order to simplify industrial data analysis and previsions.

## 2.2 Analysis of Experimental Results

To plot  $U_c$  vs  $\sqrt{\theta_c}$  curves, we require two values  $L_1$  and  $L_\infty$  which are obtained as follows.

2.2.1 Thickness of the cake at the beginning of the expression period :  $L_1$ . The transition point  $(L_1, \theta_1)$  characteristic of the end of the filtration period is determined graphically from the classical Ruth's equation

$$(V_f + V_0)^2 = K(\theta_f + \theta_0) \quad (26)$$

where  $V_0$  and  $\theta_0$  are fictitious values which correspond to the filter support ( $V_f \equiv \Omega \cdot \Delta L$ ).

During the filtration period, the ratio  $\Delta L / \Delta \sqrt{\theta_f}$  is constant. The transition point is represented by the intersection of the two linear points of the curve. An illustration is given by Fig. (7) where (A), (B), (C) are different transition points for various experiments carried at constant pressure.

2.2.2 Theoretical final thickness  $L_2$ . According to the analytical relationship for  $U_c$  vs  $\theta_c$ , agreement between experiment and theory is possible when the two variables  $C_e$  and  $L_\infty$  are well determined. The mathematical relations (6) and (7) have characteristics which are very useful to obtain the theoretical value  $L_2$  and to the operational variable  $C_e$ .  $L_2$  and  $C_e$  are determined by plotting  $(L_1 - L)$  vs  $\sqrt{\theta_c}$ . This transformation of the exponential curve is illustrated on Fig. (8) and leads to the following relations :

- For a linear initial distribution of the hydraulic pressure

$$\frac{A^* C^*}{A^* B^*} = 1.15 \quad \text{and} \quad C_e = \frac{0.848 \omega_0^2}{i^2 \cdot \theta_{90}} \quad (27)$$

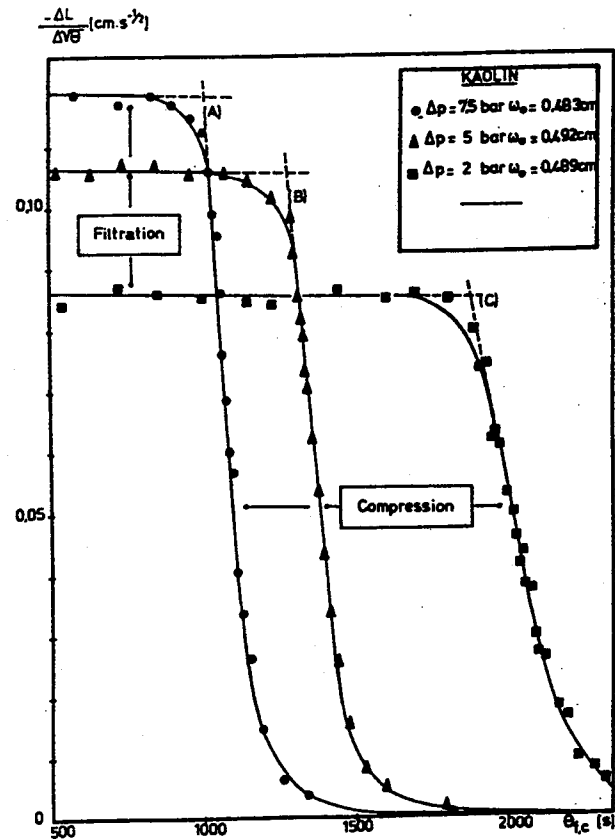


Fig. 7. Graphical determination of the transition point (A,B,C)

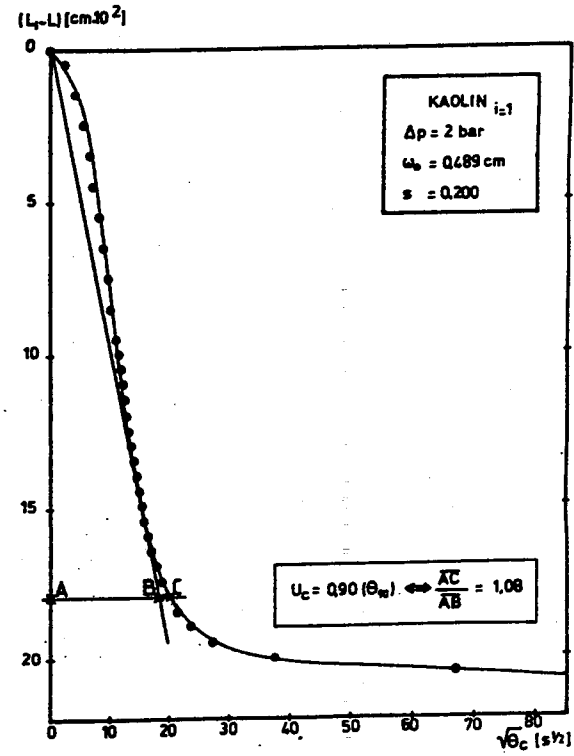


Fig. 8. Graphical determination of the theoretical thickness for the infinitesimal compressed layer



- For a sinusoidal initial distribution of the hydraulic pressure

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 1.08 \text{ and } c_e = \frac{0.933\omega_0^2}{i^2_{\theta_{90}}} \quad (28)$$

These relations are verified when  $U_c = 0.90$ . Thus, point C corresponds to a compression ratio  $U_c = 0.90$  and is defined as indicate in Fig. (8).

Generally good agreement is obtained between  $L_\infty$  and  $L_2$ . We obtained an average ratio of 0.982 for expression of kaolin suspensions under different pressures and for various values of  $\omega_0$ . However precautions must be taken when secondary consolidation is important.

2.2.3 The two particular shapes of the curves  $U_c$  vs  $\sqrt{\theta_c}$ . Fig. (9) gives two examples of experimental curves of  $U_c = f\sqrt{\theta_c}$  for flocculated and non-flocculated kaolin. The fundamental difference between these two curves is in their respective form.

Non-flocculated kaolin gives a S shaped compression curve. Thus, as is predicted by the analytic expressions for the pressing of filter cakes, the filtration compression of non-flocculated kaolin leads to a sinusoidal initial hydraulic pressure distribution through the cake.

Recently we showed that the compression of flocculated kaolin sludges gives a linear variation of dehydration with time during the primary dewatering phase. This leads us to think that the flocculated kaolin behaves the same as semi-solid sludges. This hypothesis is supported by the fact that the flocculation of kaolin leads to a rapid sedimentation. Thus in this case the compression process is performed on a sludge obtained by eliminating the excess water by simple drainage. In this case we have substituted for  $s$  the term  $M$  which corresponds to the mass of dry solid involved.

We will now present the analysis of these two types of curve. We mention the principal difficulties in this modelisation and show the necessity having a simple mathematical model to simulate behaviour of filter cakes and sludges under expression.

### 2.3 Terzaghi-Voigt Model

Over the last ten years analytical expression for consolidation have been established and perfected to give greater precision on design. This experimental investigation on the dehydration of filter cakes and pressing of semi-solid sludges has shown the extra precision brought by these developments and allowed us to test and outline

372

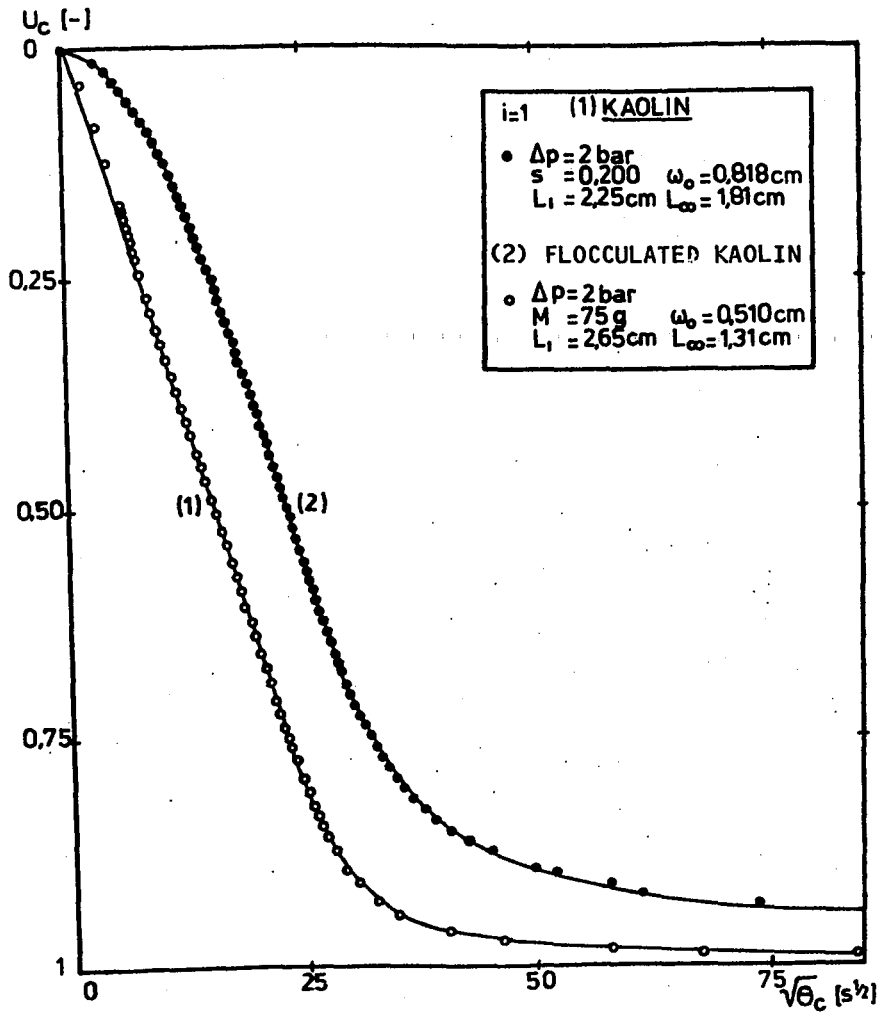


Fig. 9. Comparison of dewatering behaviour of flocculated and non-flocculated kaolin.

the applicability of the theoretical expressions.

The Terzaghi (6) model was initially developed to describe the primary compression phase which was the only compression really envisaged at that time. We will show that this model is effectively limited to this initial phase.

The theoretical development of the Voigt's model led to considering the compression to be composed of two simultaneous steps and allowed the introduction of secondary compression (7). We will show

that the Terzaghi-Voigt combined model gives a good prediction of the two phases of compression.

2.3.1 Filter-cakes compression. Figs. (10, 11, 12) give consolidation curves  $U_c$  vs  $\sqrt{\theta_c}$ . Fig. (10) illustrates the evolution of the dewatering kinetics with the initial thickness  $L_1$ . Fig. (11) shows the influence of the pressure and Fig. (12) completes this experimental illustration.

In order to get the theoretical values of  $U_c$ , according to Eq. (14), three operational values :  $B$ ,  $\eta$  which depend on secondary consolidation and  $C_e$  for the primary compression.

In most cases,  $U_c$  variation is much less during primary compression than during the secondary consolidation. This means that for large  $\theta_c$  values,  $\eta \ll C_e (i\pi/2\omega_0)^2$  and the Eq. (14) may be written as follows :

$$U_c \sim 1 - B \exp(-\eta\theta_c)$$

The variables  $B$  and  $\eta$  may be obtained by linearisation of this expression. Then by subtracting the fraction of secondary consolidation to the overall process, a simple mathematical treatment will lead to  $C_e$ . (Fig. 13).

$$1 - (U_c)_{\text{corr}} = \frac{U_c - (1 - B \exp(-\eta\theta_c))}{(1 - B)} = \exp \left[ - \frac{i^2 \pi^2 C_e}{4\omega_0^2} \cdot \theta_c \right] \quad (29)$$

The left hand side of this relation can be obtained graphically from the experiments, so the linearisation of Eq. (29) will permit calculation of the operational value  $C_e$ .

Shirato presents a similar treatment and incorporates the average corrected consolidation ratio

$$(U_c)_{\text{corr}} = \frac{(L_1 - L) - B(L_1 - L_2) \cdot (1 - \exp(-\eta\theta_c))}{(1 - B)(L_1 - L_2)}$$

This notation has the advantage of giving the expression of the primary consolidation process initially developed by Terzaghi

$$(U_c)_{\text{corr}} = 1 - \exp \frac{-i^2 \pi^2 C_e}{4\omega_0^2} \cdot \theta_c$$

This relation is equivalent to Eq. (6) initially developed on

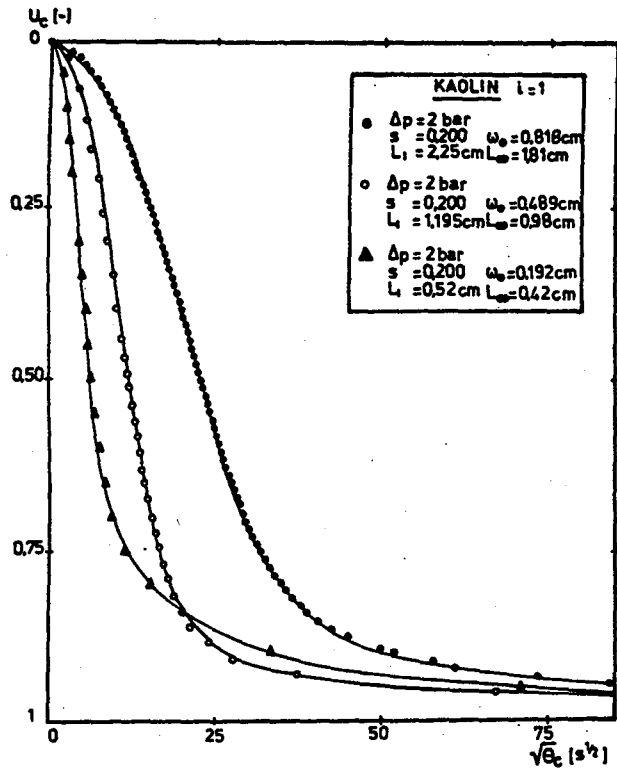


Fig. 10. Kinetics of the compression process versus cake thickness.

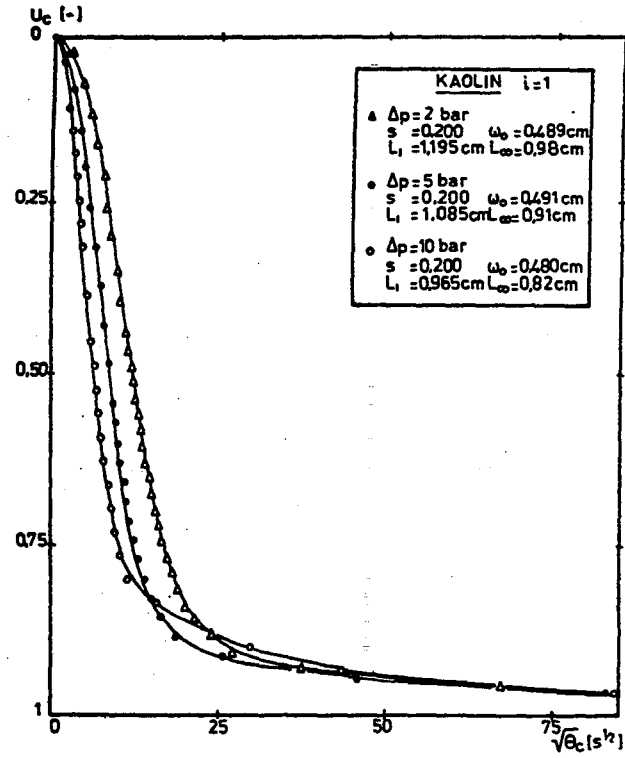


Fig. 11. Influence of the hydraulic pressure upon the water elimination velocity by pressing.

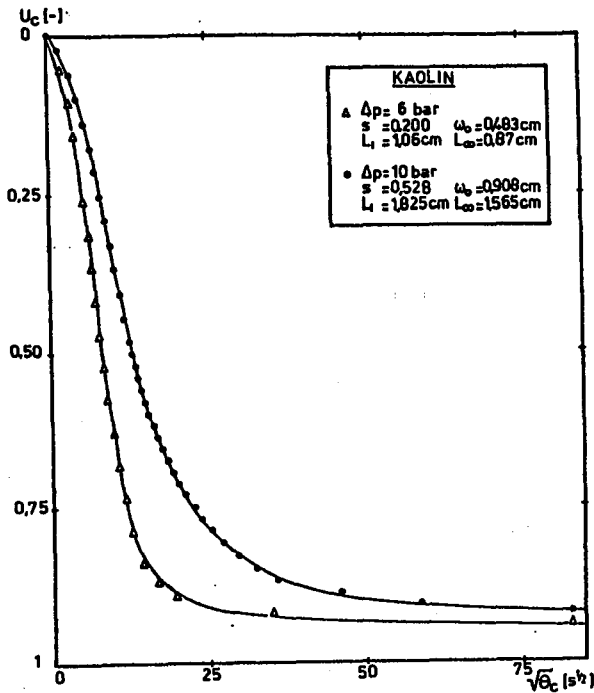


Fig. 12. Influence of the initial mass fraction solids in slurry upon the dewatering kinetics.

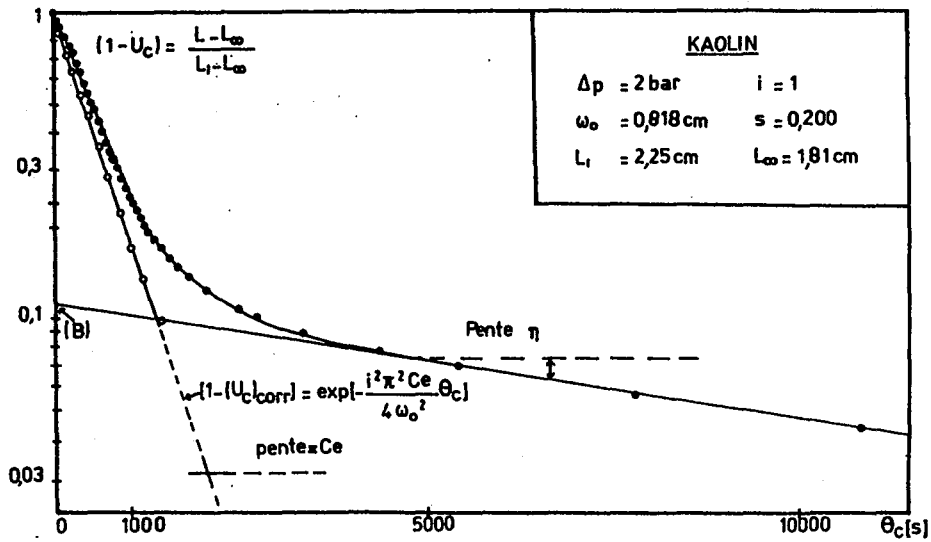


Fig. 13. Graphical determination of the secondary consolidation characteristics (B,  $\eta$ ) and the primary compression coefficient  $C_e$ .

376

the basis of Terzaghi theory.

Value of the coefficient  $C_e$  can be obtained by two methods. The first is the linearisation mentioned previously and the second is the calculation of this value with graphical and mathematical treatment of the expression of  $(U_c)_{\text{corr}}$ . This latter value is based on the calculation of  $C_e$  from the Eq. (27). These two methods are illustrated with an example based on experiments with the filtration-compression cell. Figs. (14) and (15) show the good agreement of experimental values with theoretical calculations. A good accuracy is achieved with the overall process of primary and secondary consolidation. As illustrated on Fig. (14), the contribution of Voigt elements is important. The Terzaghi model gives a good accuracy during the primary period of consolidation.

Experimental results indicate that the dewatering mechanism by primary consolidation is well described by calculations based on the Terzaghi model. However a better understanding and a more accurate description are given by the Terzaghi-Voigt theory.

Incorporation of all these theoretical considerations by Shirato improved the efficiency in the calculations.

Influence of the initial thickness of the cake on the rate of dewatering by pressing. This influence is illustrated on Fig. (10). Fig. (16) completes this description and shows that the mechanical compression under 10 bars of a filter cake 1 cm thick is kinetically equivalent to the expression under 2 bars of a thickness cake of 0.5 cm.

2.3.2 Expression of semi-solid sludges illustrated by mechanical dewatering of flocculated sludges. Eqs. (7) and (15) describe the kinetics of the consolidation process when the initial distribution of hydraulic pressures is linear. We recently showed that the dewatering of flocculated sludges by mechanical pressing leads to such a distribution. So we will illustrate the behaviour of semi-solid materials with this example. Figs. (17, 18, 19) represent different experiments performed to demonstrate typical behaviour of semi-solid materials during compression.

Variation of the dehydration kinetics with applied pressure is represented on Fig. (17). The initial thickness of sludge has an important influence on the pressing process. Fig. (18) illustrates this effect. The method used to analyse results is very similar to the analytical treatment previously described for filter cakes. In order to model the overall process we need the values of  $B$  and  $\eta$  which depend on secondary consolidation. As previously reported, these variables are obtained directly from the curve  $\ln(1-U_c) = f(\theta_c)$ . Secondly, by reducing the Eq. (15), we will get the simplified expression which will give  $(U_c)_{\text{corr}}$ .

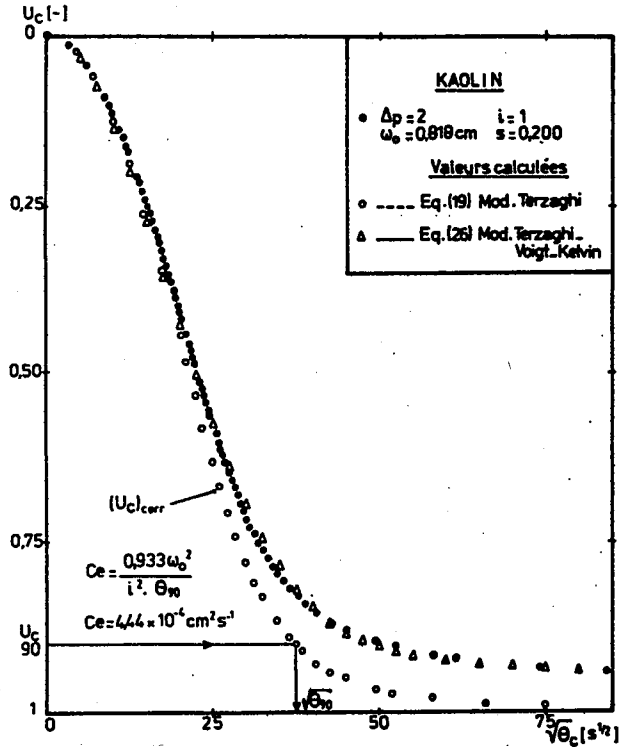


Fig. 14. Determination of the primary compression coefficient. Validity of the Terzaghi-Voigt model.

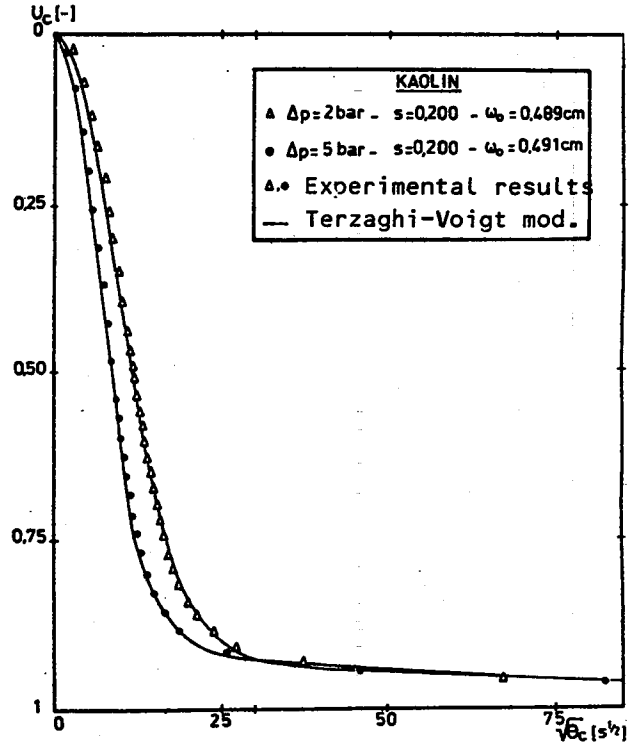


Fig. 15. Validity of the Terzaghi-Voigt model.

378

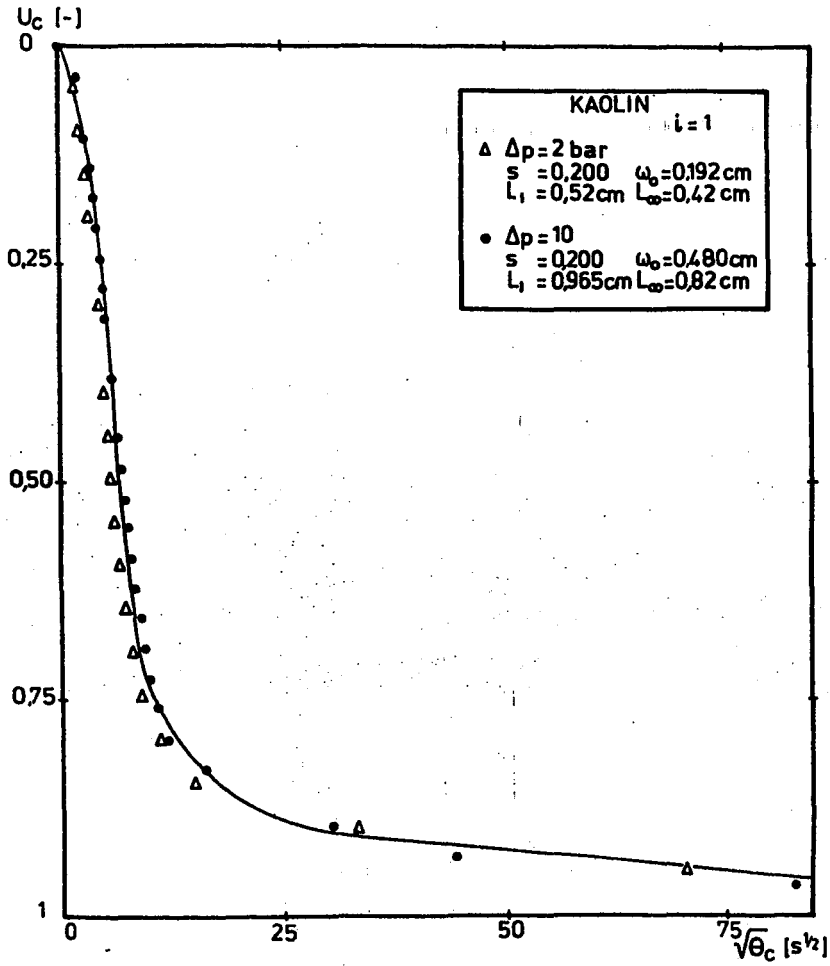


Fig. 16. Influence of the cake thickness upon the dewatering kinetics.



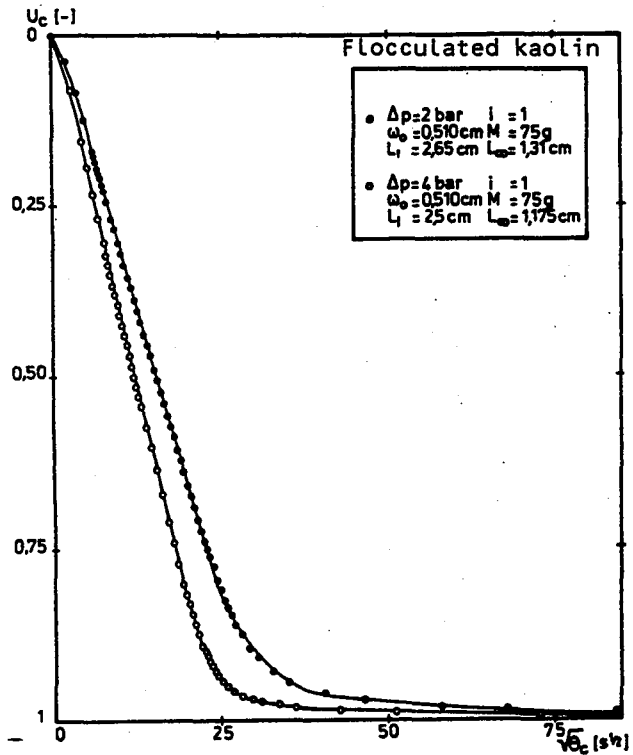


Fig. 17. Evolution of the dewatering kinetics for flocculated slurries vs pressure.

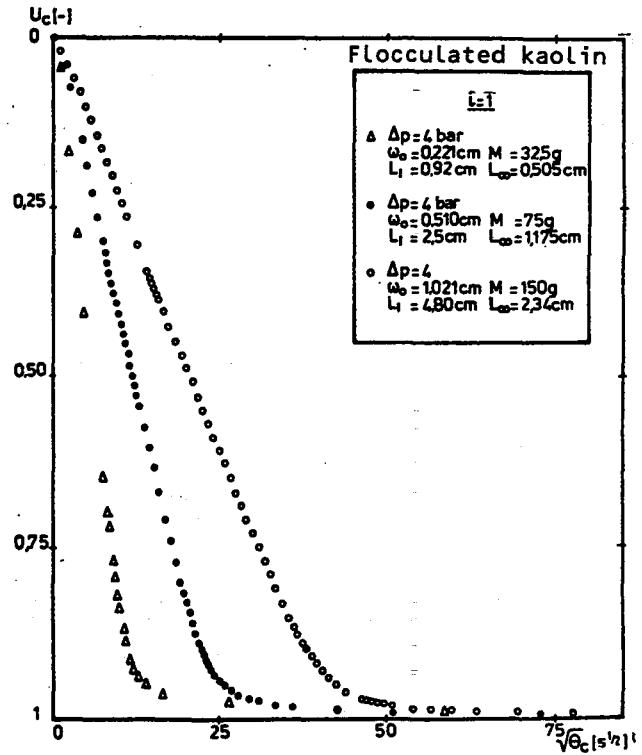


Fig. 18. Influence of the initial slurry thickness upon the dewatering kinetics by compression.

310

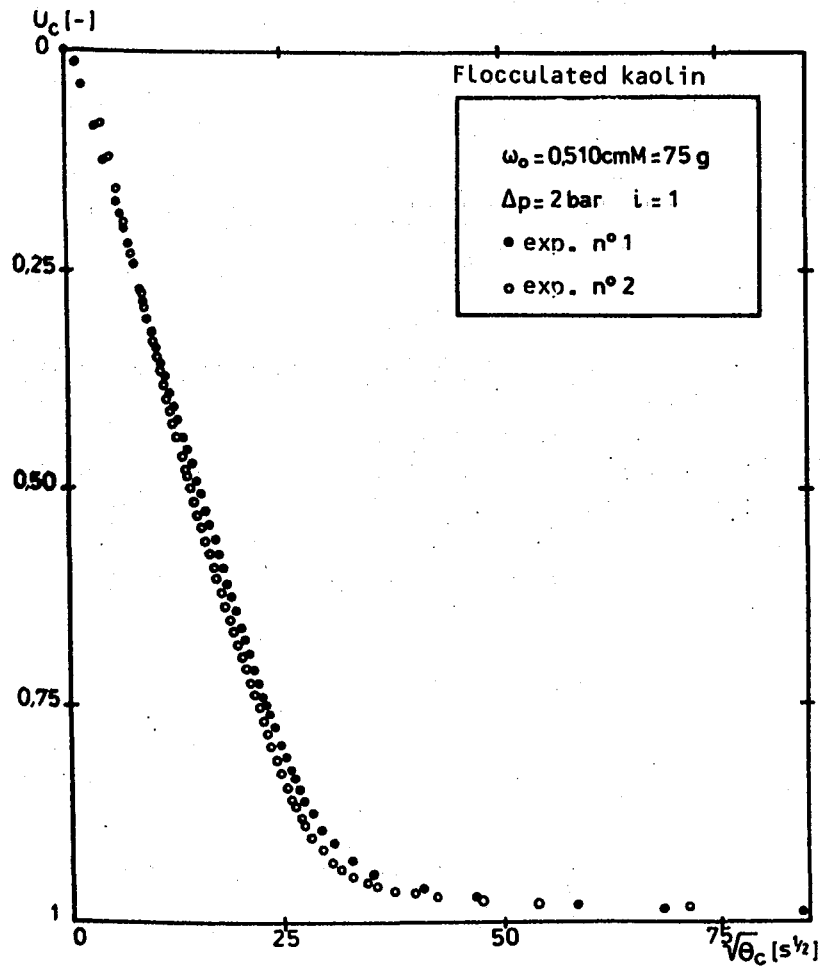


Fig. 19. Reproducibility of compression test for the filtration-compression cell.

$$(U_c)_{\text{corr}} = \frac{(L_1 - L) - B(L_1 - L_2)(1 - \exp(-\eta \theta_c))}{(1 - B)(L_1 - L_2)} = 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \frac{8}{(2N-1)^2 \pi^2} \cdot \exp \left[ - \frac{(2N-1)^2 \pi^2}{4} \cdot \frac{C_e i^2}{\omega_o^2} \cdot \theta_c \right] \right\} \quad (30)$$

This equation is similar to Eq. (7) which is based on the Terzaghi theory. The operational variable  $C_e$  is determined graphically from Eq. (27), from the  $(U_c)_{\text{corr}}$  vs  $\sqrt{\theta_c}$  curve.

The three variables  $B$ ,  $\eta$ ,  $C_e$  are known and we can now consider the modelling. In order to demonstrate that semi-solid materials and more particularly flocculated sludges behave as Eq. (15) predicts, we modelise with the two following possibilities (Fig. 20)

- sinusoidal initial distribution of hydraulic pressure, Eq. (14)
- linear distribution of hydraulic pressure, Eq. (15).

Obviously Eq. (14) does not simulate the behaviour of flocculated sludges under compression. However when the applied pressure is high and the initial thickness  $L_1$  sufficiently small Eq. (14) may be used.

But according to Fig. (21), we can observe the difference in the shape of the theoretical and the experimental curves. Because of a greater simplicity, this modelisation based on Eq. (14) is sometimes useable (8).

These considerations demonstrate that our simulation of the behaviour of flocculated sludges is correct and that such materials may be used to illustrate the applicability and use of basic Eq. (15).

Fig. (22) strengthens these considerations and shows the good agreement between theoretical and experimental values. The accuracy brought by Voigt elements in Terzaghi theory is also clearly demonstrated. In this case, the difference between the simulation based on Eqs. (7) and (15) is less observable because flocculated sludges have a different behaviour during secondary consolidation.

## 2.4 Simplified Model

2.4.1 Analytical relations previously developed and illustrated by experimental results are a very important scientific basis for design. However their complexity makes them difficult to apply in in-

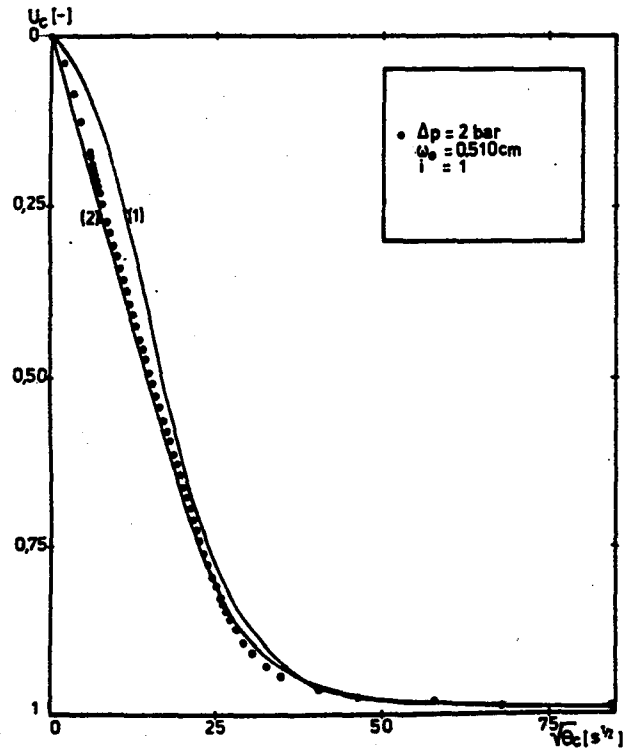


Fig. 20. Simulation of compression curves for flocculated slurries of kaolin  
 (1) sinusoidal hydraulic pressure distribution  
 (2) linear hydraulic pressure distribution.

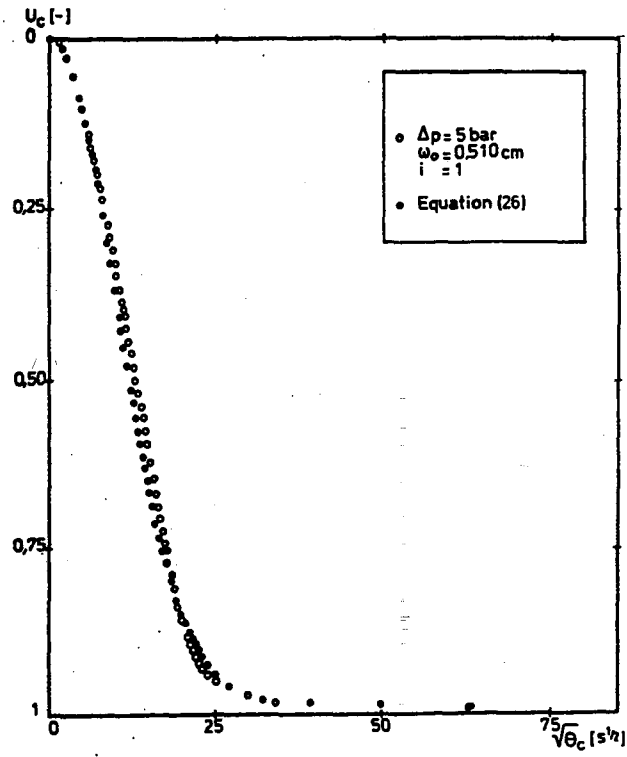


Fig. 21. Simulation of behaviour of flocculated slurries of kaolin using the equations of the filtration cake compression.

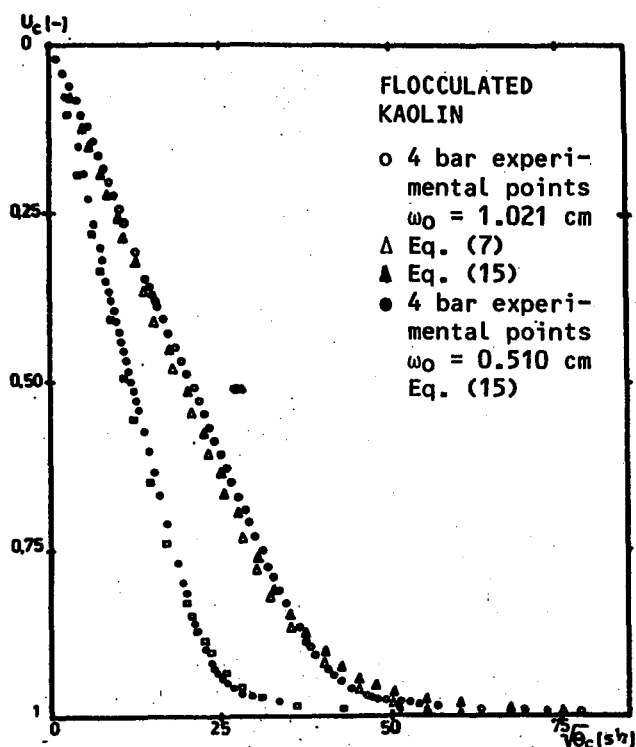


Fig. 22. Modelisation of compression curves for flocculated slurries.

dustrial practice and leads to maintain a certain empiricism during the application of pressing technology.

In order to answer real industrial problems, it is important to have simplified models. For this reason, we have chosen to present analytical expressions directly adaptable to a simple numerical treatment.

Thus we will detail the utilization of Sivaram and Swamee equation for modelling pressing process. First illustrations will be given for semi-solid materials because their behaviour under expression is generally simulated by Eq. (15) which is the most difficult to apply in industrial practise. As an example, we will give our own results recently obtained for flocculated sludges. Then we will detail the application of modified Sivaram and Swamee equation in filter cake dewatering.

Previously, we developed the basic equations which have been used by Shirato for the adaptation of soils mechanics, theory to the

modelling of the behaviour of filter cakes and semi-solid materials under mechanical compression. Thus we will only outline the main difficulties encountered during the utilization of these equations. Instead of overloading our presentation with numerical or theoretical calculations, we will present and described some figures which really demonstrate the simplicity brought by these new mathematical tools.

2.4.2 Modelling of semi-solid materials expression, illustrated by experiments on flocculated kaolin sludges. Fig. (23) gives theoretical curves, obtained according to Eq. (17) in which  $\nu$  is the compression index and  $T_c$  is a dimensionless time related to the compression time by

$$\frac{4}{\pi} \cdot T_c = K e^{-\theta_c} = \frac{4i^2}{\pi\omega_0^2} \cdot C e^{-\theta_c} \quad (31)$$

The index of compression  $\nu$  is characteristic of the secondary consolidation phase. For  $\nu = 2.8$ , the theoretical curve is analogous to the curve obtained with Eq. (7). That means a negligible second-

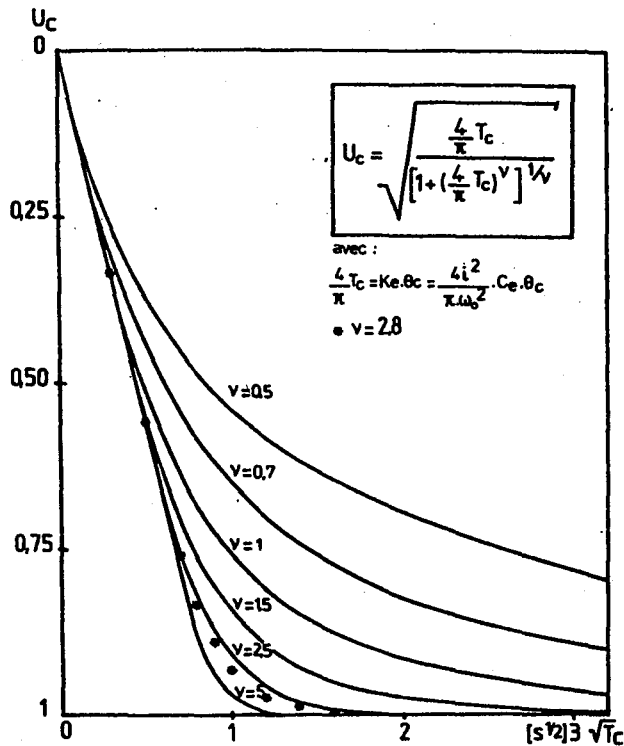


Fig. 23. Theoretical diagram  $U_c$  vs  $\sqrt{T_c}$ .

ry compression phase. The secondary consolidation appear on this theoretical curves when  $\nu < 2.8$ .

Analysis of experimental results. The first step consists in the determination of  $K_e$  and  $C_e$ . The  $U_c$  vs  $\sqrt{\theta_c}$  experimental curves present a linear curve during the primary consolidation. Thus, to obtain the operational variables, we have only to use the square of the slope of this linear part. Obviously,  $C_e$  will be calculated from Eq. (31).

The second step consists in the determination of the index  $\nu$ . When  $K_e$  or  $C_e$  are known, the  $U_c$  vs  $f/\sqrt{T_c}$  curves can be plotted. A simple comparison with these one and the diagram will give to us  $\nu$ .

Figs. (24) and (25) show the agreement between theoretical calculations and experimental results. On Fig. (25), we can observe the analogy between calculations based on Terzaghi-Voigt model (Eqs. 7 and 15) and theoretical values obtained with modified Sivaram and Swamee (Eq. 17).

Our experimental results illustrate the great simplicity brought by simplified models. These considerations are very important for design and industrial application of dewatering and pressing processes.

2.4.3 Simulation of filter cakes behaviour, under compression with simplified models. Fig. (5) illustrated the problem encountered by Shirato in order to extend the application of preceding Eq. (17). Theoretical considerations have been previously detailed. They justify the present method.

The principal stages will only be mentioned to outline precautions which should be taken.

1. Determination of the fictitious thickness  $L_1'$ .  $L_1'$  is given by the Eq. (21) which is approximatively equivalent to :  $L_1' = (1+E_0)\omega_0$ . Fig. (26) gives our experiments results used to evaluate  $E_0$  in the chosen example. This procedure is general.

2. Determination of the fictitious compression time  $\theta_c'$ . This time is given by Eq. (24) in which the variables  $e_{j_{av}}$  and  $\alpha_{av}$  are determined by classical filtration experiments. Fig. (27) shows the variation of the average specific resistance with  $\Delta P$  for the example chosen as illustration.

3. Expression of the modified average consolidation ratio  $U_c'$ .

4. Transformation of the curves  $U_c = f\sqrt{\theta_c}$  to  $U_c' = f\sqrt{\theta_c'}$ .  $U_c'$  is given by Eq. (19) in which  $T_c'$  is a fictitious dimensionless time.  $T_c'$  is bound to  $C_e'$  by the relation :

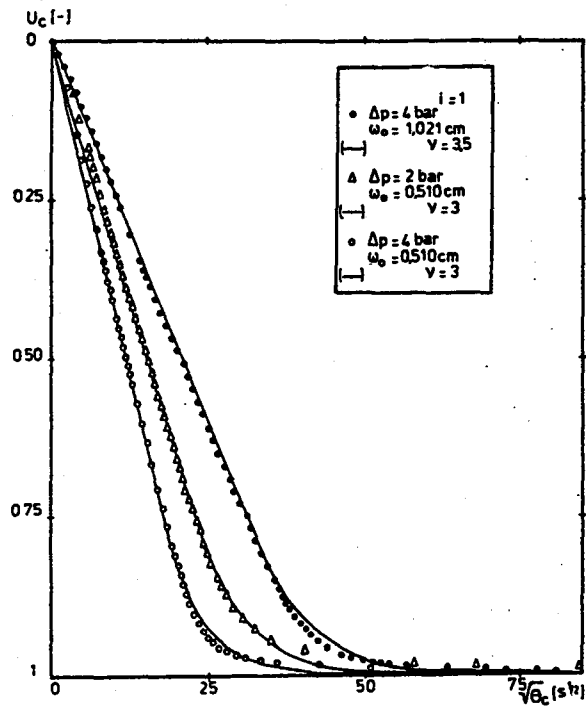


Fig. 24. Experimental illustration of the semi-theoretical equation  $U_c$  vs  $\sqrt{\theta_c}$  for flocculated kaolin (Eq. 16).

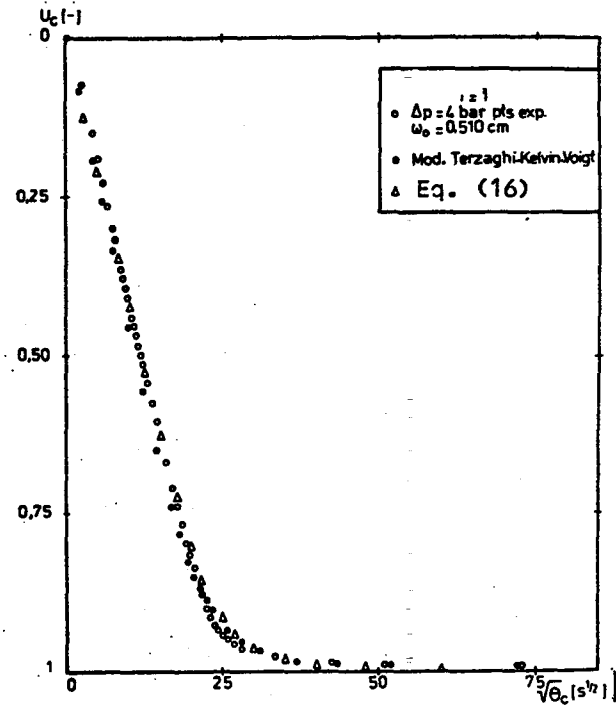


Fig. 25. Simulation of behaviour towards compression of flocculated slurries using simplified semi-theoretical models (Eq. 16).



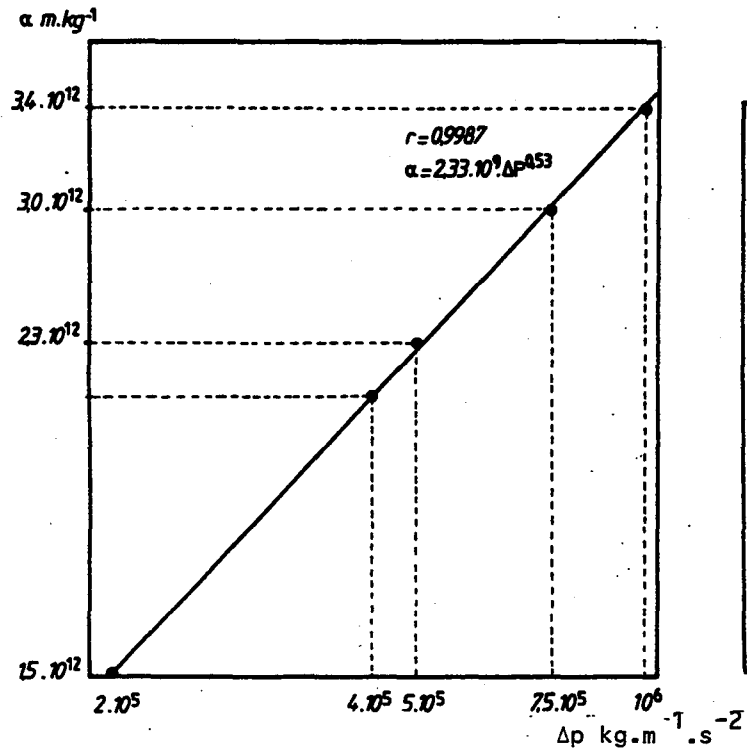


Fig. 26. Variation of void ratio for infinite compression vs pressure.

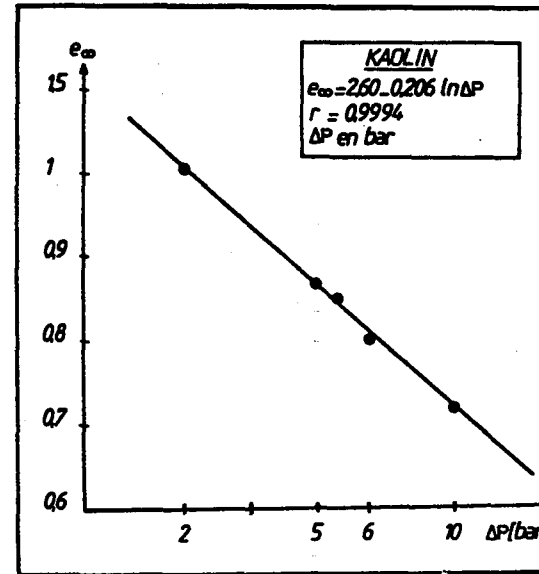


Fig. 27. Variation of the average specific resistance for kaolin versus pressure drop.

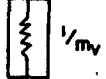
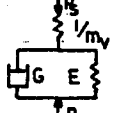
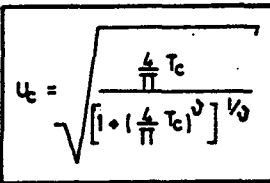
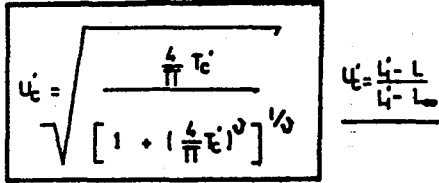
Ref.	MODEL	HYDRAULIC PRESSURE DIAGRAM	ANALYTICAL EXPRESSIONS OF AVERAGE COMPRESSION RATE $U_c$
(1971)	TERZAGHI-SHIRATO 	SINUSOIDAL FILTER CAKE	$U_c = 1 - \text{Exp} \left( - \frac{\pi}{4} \frac{C_e}{\omega_0^2} \cdot \theta_c \right)$ $\frac{L_1 - L}{L_1 - L_0} = U_c$
		LINEAR SEMI-SOLID SLURRIES	$U_c = 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \left[ \frac{8}{(2N-1)\pi^2} \text{Exp} \left\{ - \frac{(2N-1)^2 \pi^2}{4} \cdot \frac{C_e}{\omega_0^2} \cdot \theta_c \right\} \right]$
(1974)	TERZAGHI-VOIGT-SHIRATO 	SINUSOIDAL FILTER CAKE	$U_c = (1-B) \left( 1 - \text{Exp} \left( - \frac{\pi}{4} \tau_c \right) \right) + B \left( 1 - \text{Exp} \left( - \eta \theta_c \right) \right)$
		LINEAR SEMI-SOLID SLURRIES	$U_c = (1-B) \cdot \left[ 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2N-1)^2} \text{Exp} \left( - \frac{(2N-1)^2 \pi^2}{4} \tau_c \right) \right] + B \left( 1 - \text{Exp} \left( - \eta \theta_c \right) \right)$
SEMI-THEORETICAL MODELS		SIMPLIFIED EXPRESSIONS	
SIVARAM-SWAMEE-SHIRATO (1979)		SHIRATO (1980)	
SEMI-SOLID SLURRIES		FILTER CAKE	
			

Fig. 30. Recapitulatory of theoretical models of the dewatering by mechanical compression.

390

$$T'_c \equiv i^2 c'_e \theta'_c / \omega_0^2$$

To get  $C'_e$  and model the experimental curve, we must transform  $U_c$  vs  $\sqrt{\theta_c}$  curves to  $U'_c$  vs  $\sqrt{\theta'_c}$ . The following considerations lead directly to this transformation :

$$U'_c = \frac{L'_1 - L}{L'_1 - L_{2,\infty}}$$

$L'_1$  is calculated according Eq. (21) and so  $U'_c$  can be obtained for each of the values of  $\theta'_c$  calculated previously. Thus the transformation is possible and this passage from  $U_c$  vs  $\sqrt{\theta_c}$  to  $U'_c$  vs  $\sqrt{\theta'_c}$  is illustrated by Figs. (10) and (28).

5. Modelling  $U'_c$  vs  $\sqrt{\theta'_c}$  curves. For small  $\theta_c$  values, Eq. (17) can be written :

$$U'_c = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{i^2 c'_e}{\omega_0^2} \cdot \theta'_c} \quad (32)$$

Thus the slope of the early stage of the curve will lead to  $C'_e$ .

By reducing the  $U'_c$  vs  $\sqrt{\theta'_c}$  curve, we will be able to plot  $U'_c$  vs  $\sqrt{T'_c}$  curve and make the modelling possible. The index  $\theta$  will be given by direct comparison of these curves with Fig. (22).

Figs. (28) and (29) illustrate the agreement between these theoretical considerations and the experimental results. However we must mention that the extension of the semi-solid simplified equation brings less simplifications than those reported for modelling the behaviour of semi-solid sludges.

#### REFERENCES

1. Shirato M., Murase T., Kato H. and Fukaya S., Fundamental analysis for expression under constant pressure. *Filtration and Separation* 7 (1970) 277-282.
2. Shirato M., Murase T., Tokunaga A. and Yamada O., Calculations of consolidation period in expression operations, *Journal of Chemical Engineering of Japan* 7 (1974) 229-231.
3. Shirato M., Murase T., Atsumi K., Aragaki T. and Noguchi T., Industrial expression equation for semi-solid materials of solid-liquid mixture under constant pressure. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 12 (1979) 51-55.

4. Shirato M., Murase T. and Atsumi K., Simplified computational method for constant pressure expression of filter cakes. Journal of Chemical Engineering of Japan 13 (1980) 397-401.
5. Tiller F.M., Stewart Haynes, J.R. and Wei-Ming Lu. The role of porosity in filtration VII. Effect of side-wall friction in compression-permeability cells. AIChE Journal 18 (1972) 13-20.
6. Shirato M., Murase T., Negawa M. and Moridera H. Analysis of expression operations. Journal of Chemical Engineering of Japan 4 (1971) 263-
7. Shirato M., Murase T., Moridera H. and Uryu M. Expression of unsaturated mixtures under constant pressure. Journal of Chemical Engineering of Japan 7 (1974) 229-231.
8. Leclerc D. and Minery E. Comparaison du comportement des boues floculées et non floculées lors de leur déshydratation par compression mécanique. La Tribune Cebedeau 33 (1980) 441-449.



*LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE A PRESSION CONSTANTE (CPC)*

## PUBLICATION P5

Etablie sur la base du chapitre « Recherche d'Optima Techniques, Economiques et Energétiques d'Opérations de Pressage » de la thèse de Docteur-Ingénieur soutenue à l'INPL en 1983, cette publication est une synthèse de la méthode développée à cette époque.

REBOUILLAT S., LECLERC D. & BALUAIS G. *La déshydratation par filtration-pressage. Incidence des adjuvants de pressabilité sur le pressage des pulpes de betteraves.* Société Française de Filtration, Bulletin Technique n° 10, 72-84, (1985).

Version complète.



L'UF et la MFT apportent des avantages techniques importants :

- obtention d'un vin très bien clarifié, en une seule opération et à partir d'un produit très chargé
- c'est un procédé continu.

Par contre l'introduction de cette technique modifie le schéma traditionnel de traitement et de stabilisation des vins, en particulier au niveau de la prévention des précipitations tartriques.

Si les coûts de traitement ne sont pas prohibitifs, l'UF et la MFT devraient se développer rapidement dans le milieu viticole dans les prochaines années.

## LA DESHYDRATATION PAR FILTRATION-PRESSAGE. INCIDENCE DES ADJUVANTS DE PRESSABILITE SUR LE PRESSAGE DES PULPES DE BETTERAVES.

S. REBOUILLAT, D. LECLERC, G. SALUAI  
Laboratoire des Sciences du Génie Chimique  
E.N.S.I.C. / C.N.R.S., 1 rue Grandville, 54042 Nancy Cedex

### 1. INTRODUCTION

La réduction des coûts opératoires passe par la diminution de la consommation en énergie combustible et ceci concerne particulièrement le domaine des Industries Agricoles et Alimentaires (I.A.A.). C'est pourquoi on assiste actuellement à un développement important des techniques de déshydratation par pressage mécanique qui consomment environ 20 fois moins d'énergie que les procédés thermiques.

De ce point de vue, l'exemple du pressage des pulpes de betteraves est significatif et mesure bien l'enjeu économique. La production française de betteraves à sucre durant la campagne 1981-82 a été de 33 Mt, la teneur moyenne en matière sèche des pulpes étant de 2 %MS. En fin d'opération de déshydratation, la production de pellets (88% MS) a atteint 1,5 Mt ce qui correspond à l'élimination de 6 Mt d'eau/an. Les pulpes surpressées avaient une teneur moyenne en matières sèches de 23% MS. Un gain de 2% sur la siccité des pulpes avant séchage thermique (23 → 25 %MS) correspondait à 30 000 TEP/an d'économie soit environ 40 MF/an.

Dans cette branche d'activité, on dix ans (1972-82), le taux de matières sèches des pulpes surpressées a augmenté de 5 points en passant de 18 à 23% ce qui a permis de diminuer la consommation spécifique de fuel de 37% (figure 1a.). Au cours de la même période le prix du fuel a été multiplié par 11, mais la réduction de la consommation a limité l'augmentation du coût de séchage thermique (figure 1b.).

L'effort réalisé est important et se poursuit notamment par l'optimisation de la chaîne de déshydratation (pressage+séchage) au niveau des séchoirs (récupération des excédents énergétiques par recompression des huées,...). Mais si l'on se limite à la partie pressage de cette chaîne, deux voies sont possibles et complémentaires pour améliorer cette étape :

- modifier l'état physico-chimique des pulpes par adjonction de certains composés (sulfate d'alumine, sels de calcium...) qui en agissant sur le pH, augmentent la perméabilité des parois celluloseuses.

- rechercher des innovations technologiques au niveau du matériel de pressage, ces nouveaux "séparateurs" permettant d'obtenir des pulpes ayant des siccités supérieures à 30%. En effet les matériels les plus couramment utilisés dans les sucreries ne peuvent fournir régulièrement que des pulpes surpressées au environ de 22 %MS.



Evolution de la siccité des pulpes et de la consommation de fuel durant la dernière décennie

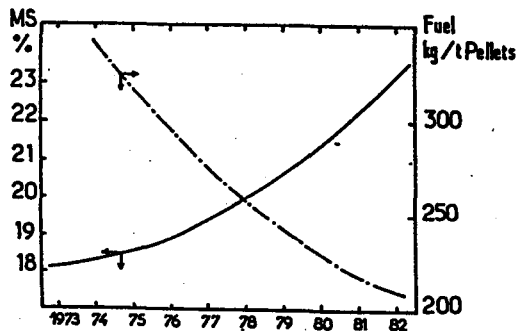


Figure 1a.

Evolution des coûts du fuel et du séchage durant la dernière décennie

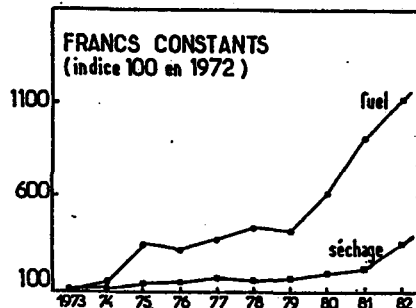


Figure 1b.

## 2. REVUE DES MATERIELS DE PRESSAGE DANS LES IAA.

La liste de matériels qui va être présentée dans la suite de cet exposé ne se prétend pas exhaustive. Elle mentionne les matériels classiques que l'on peut d'ailleurs rencontrer dans des domaines variés, extérieurs aux IAA.

Les équipements de filtration-pressage sont souvent classés en distinguant les appareils alimentés par une suspension pompable de ceux qui nécessitent une alimentation par un produit possédant une structure semi-solide.

### 2.1 Suspensions pompables

Les filtres presses sont des appareils bien connus dans le domaine des IAA. Toutefois pour obtenir des gâteaux de forte siccité, ces matériels ont dû être modifiés afin de pouvoir presser le matériau après la phase de filtration. Pour cela deux types de dispositifs sont apparus.

Dans le premier type d'appareils, un vérin rapproche les plateaux ce qui réduit le volume des chambres et comprime donc fortement le gâteau (figure 2). Les pressions ainsi exercées au pressage sont normalement de 20 bars mais peuvent aller jusqu'à 400 bars pour certains produits comme le beurre de cacao. Sur ce type de filtre, les cycles n'excèdent pas 10 min à condition de former des gâteaux d'environ 10 mm. Le débatissage est automatisé avec bascule des plateaux.

L'autre technologie consiste à utiliser des plateaux chambrés (figure 3) c'est à dire composés de membranes en élastomères qui, gonflées avec de l'eau ou de l'air sous pression, vont comprimer le gâteau et réduire ainsi son humidité. Ce système permet d'atteindre des pressions d'environ 16 bars au sein du gâteau.

### 2.2 Produits pâteux ou pulpeux

Pour ce genre de produits obtenus naturellement ou après conditionnement, la technologie des filtres à bandes presseuses peut être appliquée. Dans la première partie de la bande on procède à l'égouttage du produit à traiter puis la compression

Figure 2. Filtre presse à plateaux

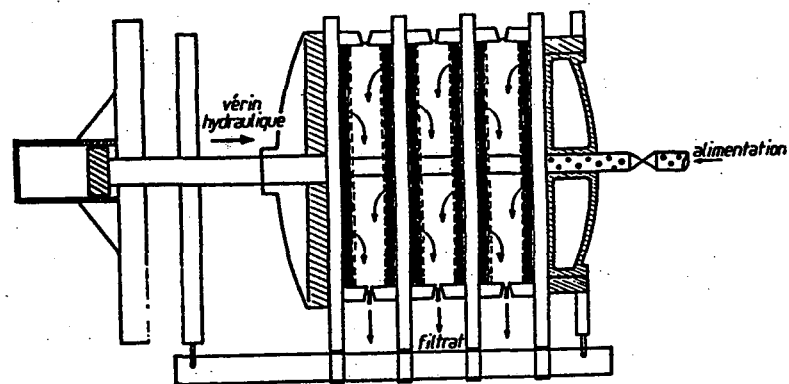


Figure 3. Principe de fonctionnement des filtres à membrane presseuse

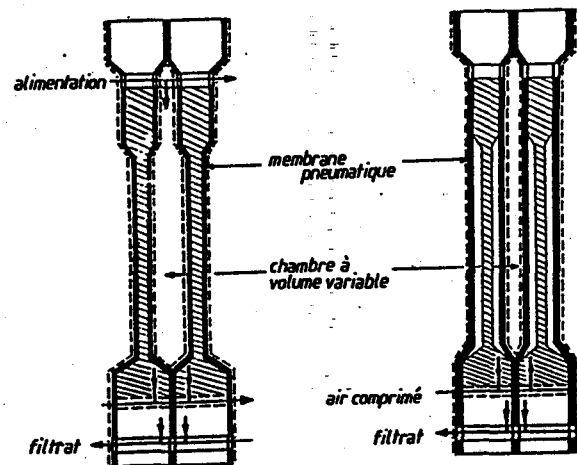


Figure 4. Presse à vis simple

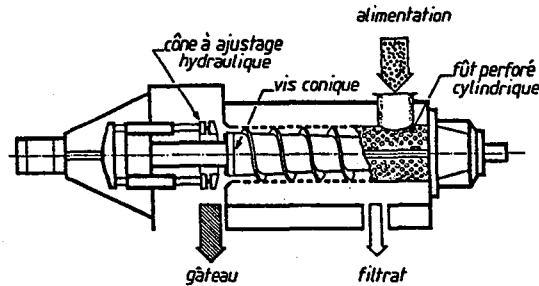


Figure 5. Organe principal des presses à double vis

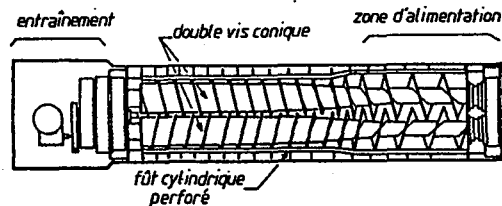
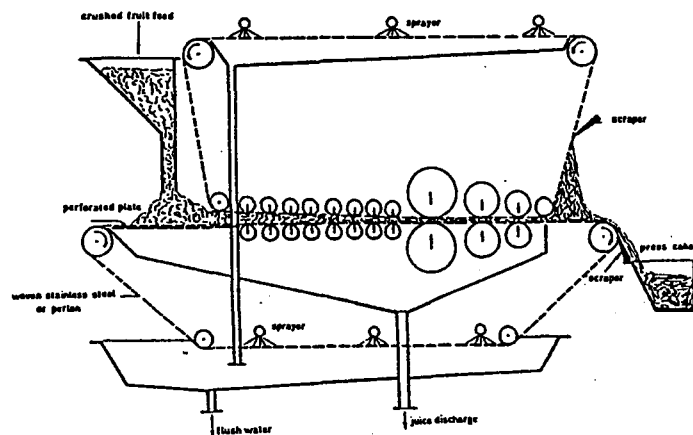


Figure 6. Filtre à bande presseuse



s'opère par passage du gâteau déposé entre des rouleaux (figure 6). Les pressions exercées dans ce type de filtre restent modestes (5 à 10 bars maxi) car il y a souvent un phénomène de fluage du matériau et des problèmes de résistance mécanique de la toile. Sur certains de ces filtres, après la phase d'égouttage, on peut réaliser un lavage de la pulpe (non représenté à la figure 6) très efficace. Cette technologie s'applique parfaitement lorsqu'on ne recherche pas un produit très sec et qu'un procédé continu présente un intérêt.

À côté de ces matériels de filtration-pressage, les presses à vis, simple ou double, sont très souvent rencontrées (figures 4 et 5). Ces appareils fonctionnent en continu, le mouvement des parois (vis) provoquant la compression. Étant donné qu'il n'y a pas formation de gâteau, les fines particules sont souvent entraînées avec l'eau ce qui donne des effluents relativement riches en matière en suspension. En raison des effets de cisaillement et des frottements parois-solide, ces machines sont relativement consommatrices en énergie (1 à 5 kWh/t MS).

### 3. APPROCHE ET MODELISATION DU PRESSAGE

Pour dimensionner un filtre presseur du type présenté aux figures 2 et 3, nous avons développé une méthodologie basée sur des essais de laboratoire effectués sur cellule de filtration-compression. Cette cellule, schématisée à la figure 7, est une petite presse unidirectionnelle équipée de capteurs qui permettent un enregistrement continu de l'épaisseur du gâteau et de la pression appliquée. Le vérin qui actionne le piston est asservi afin de définir avec précision le profil d'application de la pression.

L'efficacité du pressage est traduite par le taux de compression:

$$U_c = (L_1 - L) / (L_1 - L_{\infty})$$

où  $L_1$  est l'épaisseur initiale du gâteau,  $L$  l'épaisseur à l'instant  $t_c$  et  $L_{\infty}$  l'épaisseur théorique finale.

En faisant les trois hypothèses simplificatrices suivantes: saturation complète du milieu, écoulement et compression unidirectionnels, loi de Darcy applicable; on peut déterminer les expressions analytiques du taux de compression  $U_c$  en fonction du temps de compression  $t_c$  à partir de modèles analogiques, en distinguant le cas où le gâteau est obtenu après une phase de filtration (gâteau de filtration) et le cas où le produit initial est plus concentré (produit semi-solide) et donc où il n'y a pas de filtration avant pressage. Les différents modèles sont résumés au tableau I. Les expressions sont plus ou moins complexes suivant que l'on prend en compte la compression primaire seule (modèles élastiques) où les phases de compression primaire et secondaire (modèles viscoélastiques). Dans le cas des produits semi-solides un modèle empirique à deux paramètres est souvent utilisé. Ces deux paramètres sont: le coefficient de compression primaire et  $\nu$  paramètre d'ajustement qui dépend du produit et

Tableau I. Résumé des modèles de consolidation unidirectionnelle

**GATEAU DE FILTRATION**

Modèle élastique	$U_c = 1 - \exp[-K_1 \cdot C_e \cdot t_c]$
Modèle visco-élastique	$U_c = 1 - (1-B) \cdot \exp[-K_1 \cdot C_e \cdot t_c] - B \cdot \exp[-\eta \cdot t_c]$

$$K_1 = (\pi i A / 2M)^2$$

**PRODUIT SEMI-SOLIDE**

Modèle élastique	$U_c = 1 - \sum_{N=1}^{\infty} (8/\pi^2 (2N-1)^2) \cdot \exp[-K_2 C_e \cdot t_c]$
Modèle visco-élastique	$U_c = B \cdot (1 - \exp[-\eta \cdot t_c]) + (1-B) \cdot (1 - \sum_{N=1}^{\infty} (8/\pi^2 (2N-1)^2) \cdot \exp[-K_2 \cdot C_e \cdot t_c])$
Modèle empirique	$U_c = \left[ \frac{K_e \cdot t_c}{(1 + (K_e \cdot t_c)^\gamma)^{1/\gamma}} \right]^{0.5}$

$$K_2 = (2N-1)^2 \cdot K_1$$

$$K_e = (2iA/M)^2 / \pi \cdot C_e$$

avec

- A : aire de la surface filtrante (m<sup>2</sup>)
- B : fraction du taux de compression obtenu par compression secondaire (-)
- C<sub>e</sub> : coefficient de compression primaire (kg<sup>2</sup>·m<sup>-4</sup>·s<sup>-1</sup>)
- i : nombre de surface de drainage
- K<sub>e</sub> : coefficient de compression (s<sup>-1</sup>)
- M : masse de solide déposé (kg)
- N : entier positif (-)
- t<sub>c</sub> : temps de compression (s<sup>-1</sup>)
- U<sub>c</sub> : taux moyen de compression (-)
- η : coefficient de consolidation secondaire (s<sup>-1</sup>)
- γ : paramètre d'ajustement

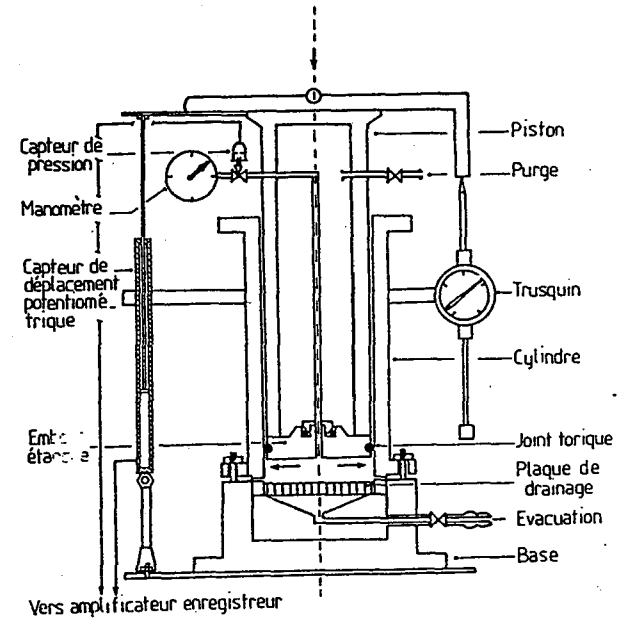


Figure 7. Cellule de filtration-compression

Figure 8a.

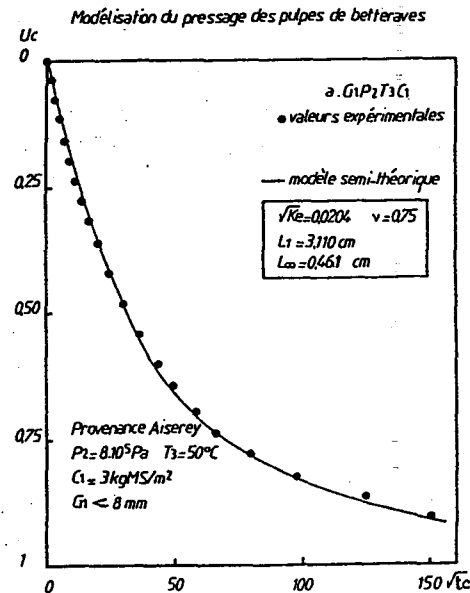
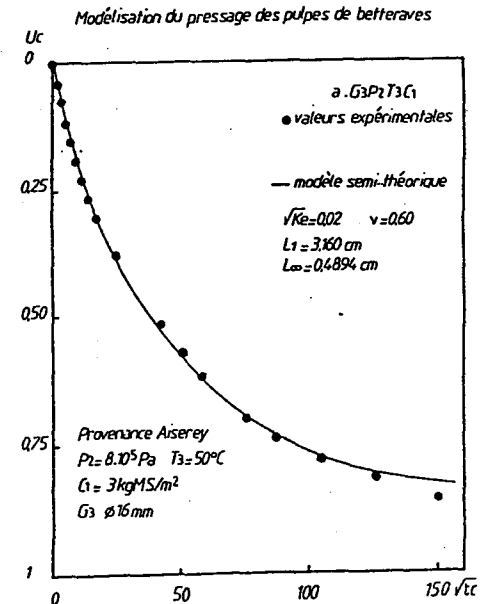


Figure 8b.



peu des conditions opératoires.

La validation de ce modèle est faite, par exemple, aux figures 8a et 8b avec des pulpes fraîches ayant des tailles de cossettes de 8 et 16 mm. Ces essais sont réalisés à 8 bars avec une charge de 3 kgMS/m<sup>2</sup>.

#### 4. INFLUENCE DES PARAMETRES OPERATOIRES SUR LE PRESSAGE DES PULPES DE BETTERAVES.

Pour optimiser une séparation solide-liquide, il faut fixer les facteurs qui interviennent et faire ressortir ceux qui sont prépondérants afin de cerner le ou les optimums dans un plan d'expérience.

Dans le cas des pulpes de betteraves, nous avons étudié l'influence du vieillissement des pulpes, de la charge (quantité de solide à presser / m<sup>2</sup>), de la pression, de la taille des cossettes, de la vitesse de pressage et de la teneur en adjuvant de pressabilité [1]. Nous ne présenterons ici que quelques résultats significatifs.

- Le vieillissement des pulpes est un paramètre important lorsque l'on entreprend une expérimentation dans un laboratoire hors du site. A titre indicatif, le même essai est répété après conservation de la pulpe 48 h à 10°C. Les performances sont 20% meilleures lorsque la pulpe est fraîche. Ceci impose donc que l'expérimentation soit réalisée à proximité d'une sucrerie.
- Plus les gâteaux sont minces, meilleures sont les performances. Lorsque l'on réduit la charge de 50 %, on peut gagner 3 points sur la siccité des pulpes.
- La pression dans le domaine 3 à 17 bars et la taille des cossettes dans la gamme 8 à 16 mm, ne semblent pas être des facteurs prépondérants.
- La vitesse d'application de la pression, par contre, est très influente. Si l'on divise par 20 cette vitesse, la quantité d'eau éliminée double.
- Un apport de chlorure de calcium à raison de 0,5 kg/tB permet un accroissement de 38% de la cinétique de pressage (figure 9).

#### 5. OPTIMISATION DE L'APPORT D'ADJUVANT DE PRESSABILITE.

Des essais réalisés sur une presse à vis industrielle (presse à simple vis STORD, FERRIANI 800t/j) ont permis d'établir les courbes de variation de la figure 10.

Un gain de 2,2% peut être obtenu sur ce type de presse avec une vitesse de rotation de 2,5 tr/min.

La séquence simplifiée de pressage -séchage des pulpes de betterave est représentée à la figure 11a. L'ensemble constitué de deux éléments I et II fonctionne en régime permanent. Les différents flux sont :

Figure 9. Pressage des pulpes de betteraves. influence de la teneur en calcium: dose de 0,5 kg CaCl<sub>2</sub>/tB.

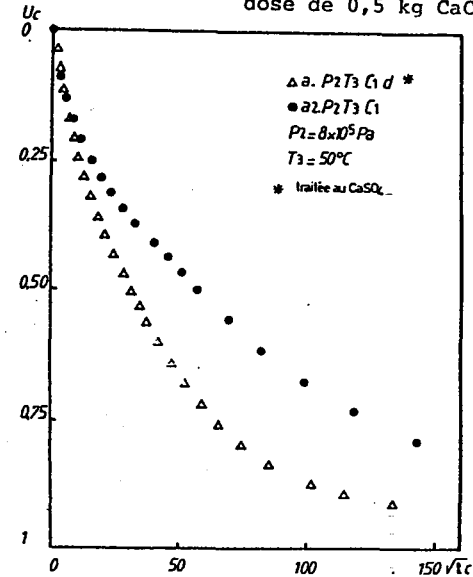
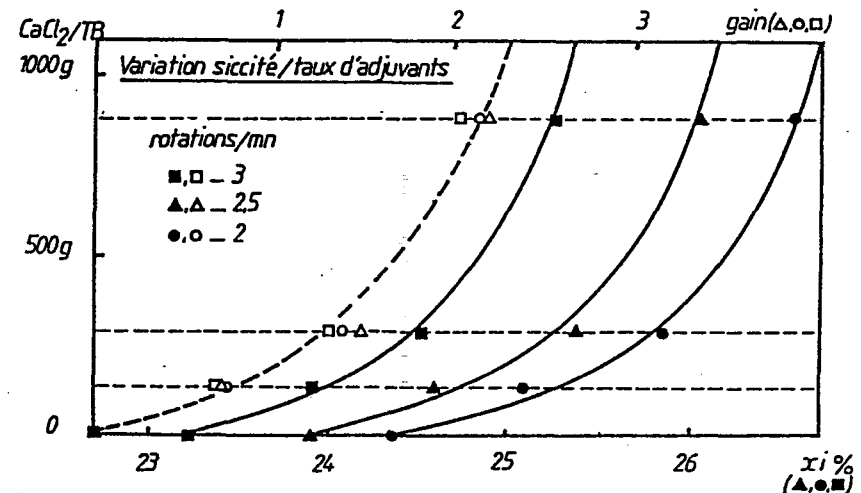


Figure 10. Siccité (x<sub>1</sub> %) et gain de siccité x<sub>1</sub> en fonction de la dose d'adjuvant et de la vitesse de rotation de la presse à vis (d'après La Sucrerie Belge, 96, 1977).



**INTRANTS** :  $\dot{M}$ , débit de pulpes fraîches;  $\dot{A}$ , débit d'adjuvant de pressabilité;  $W$ , flux d'énergie mécanique;  $Q$ , flux d'énergie thermique

**EXTRANTS** :  $\dot{P}$ , débits de pellets;  $\dot{M}_i$ , débit de pulpes surpressées;  $R_p$ , débit de jus de presse;  $R_s$ , débit d'eau évaporée

Les pulpes sont arrosées à la sortie du diffuseur avec une solution de sulfate de calcium obtenue par acidification des écumes.

On cherche à optimiser la siccité  $x_i$ , valeur intermédiaire qui représente la siccité due à l'apport d'adjuvant en considérant la séquence fictive de la figure 11b.  
La formulation du problème est résumée ci-dessous :

**Rendement**

$$\eta_e = \frac{\dot{P}}{\dot{M} \cdot x_e}$$

$$\eta_e = \eta_{e,max} \frac{\dot{A}}{\dot{A} + \dot{A}_0}$$

**Coût Opérateur Unitaire en Francs**

$$COUF (F/tP) = \frac{\dot{A} \cdot v_a}{\dot{P}} + \frac{\dot{Q} \cdot v_e}{\dot{P}} + \frac{C_F}{\dot{P}}$$

Coûts = adjuvant + énergie + fixe

**Coût Opérateur Unitaire en Energie Primaire**

$$COUEP (tep/tP) = \frac{\dot{A} \cdot CE_a}{\dot{P}} + \frac{\dot{Q} \cdot CE_e}{\dot{P}} + \frac{CE_F}{\dot{P}}$$

Consommations = adjuvant + énergie + annexe

- avec
- $\eta_e$  = rendement de séparation due à l'adjuvant (figure 12)
  - $x_e$  = teneur en matière sèches des pulpes
  - $A_0$  = consommation spécifique (kg CaCl<sub>2</sub>/tB)
  - $v_a, v_e$  = valeur de l'adjuvant (F/kg) et de l'énergie (F/kwhe)
  - $CE_a, CE_e$  = contenu énergétique de l'adjuvant (tep/kg) et de l'énergie (tep/kwhe)
  - $C_F$  = coûts fixes
  - $CE_F$  = contenu énergétique des coûts fixes

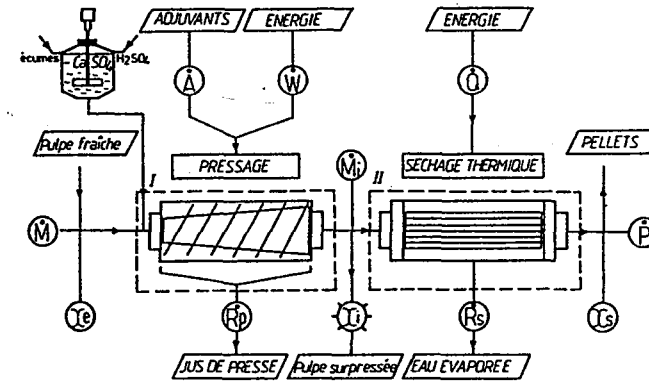


Figure 1a. Séquence pressage séchage des pulpes

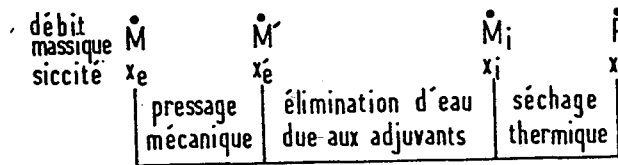


Figure 11b. Séquence fictive de pressage-séchage

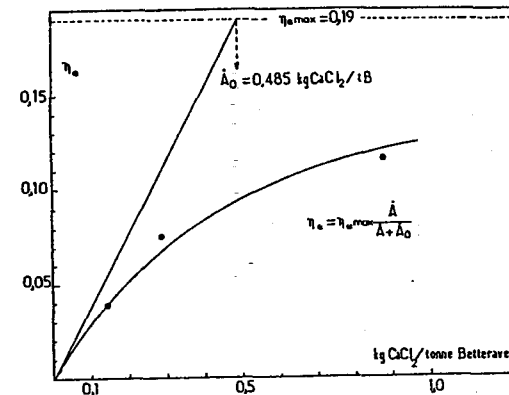


Figure 12. Rendement de pressage  $\eta_e$  dû à l'adjuvant en fonction de la dose d'adjuvant

P. LEGOFF [2,3] a proposé d'appeler "diagrammes CARactéristiques Energie Coût (CAREC) les graphes donnant la variation du coût opératoire unitaire (COUF) en fonction de la consommation opératoire en énergie primaire (COUEP). Cette courbe met en évidence les minimums monétaire et énergétique (figure 13). Le décideur technique, au sein d'une entreprise de déshydratation cherchera à minimiser le coût opératoire en se plaçant au voisinage du point  $COUF_{opt}$  de la CAREC. Dans un programme d'économie d'énergie, les animateurs rechercheront au contraire la consommation minimale d'énergie primaire et s'approcheront donc du point  $COUEP_{opt}$ . Dans notre cas, les deux tendances se rejoignent car les deux optimums sont proches, la parabole CAREC étant relativement pointue.

## 6. CONCLUSION

Durant la campagne 1981/82, la siccité moyenne des pulpes était de 23%. L'optimum monétaire en francs et l'optimum énergétique en TEP (Tonne Equivalent Pétrole) correspondent, pour un pressage avec adjuvant, à des pulpes ayant une siccité de 25 %MS. Ce calcul est très approché mais donne une indication sur les coûts liés à l'adjonction, au cours du pressage, de produits chimiques ayant un contenu énergétique identique aux produits courants (4,3 TEP / t). Dans un avenir proche, des conceptions nouvelles en matière de pressage vont intervenir. P. LEGOFF [2], en 1980 dans une étude qui portait sur l'optimisation de la chaîne complète de pressage-séchage des pulpes de betteraves, estimait l'optimum énergétique pour une siccité des pulpes de 32 %MS. Depuis 1980, le prix de l'énergie ayant évolué à la hausse, l'optimum doit se situer actuellement entre 35 et 40 %MS ce qui montre le bien fondé des recherches importantes menées par plusieurs centres actuellement pour atteindre ces performances.

## BIBLIOGRAPHIE

1. S. REBOILLAT ; Déshydratation par filtration-pressage ; Thèse de Docteur Ingénieur ; INPL / ENSIC ; Nancy, 1983.
2. P. LE GOFF ; Energétique Industrielle ; Tome 2 ; Technique et Documentation ; Paris, 1980.
3. P. LE GOFF ; Energétique Industrielle ; Tome 3 ; Technique et Documentation ; Paris ; 1982.

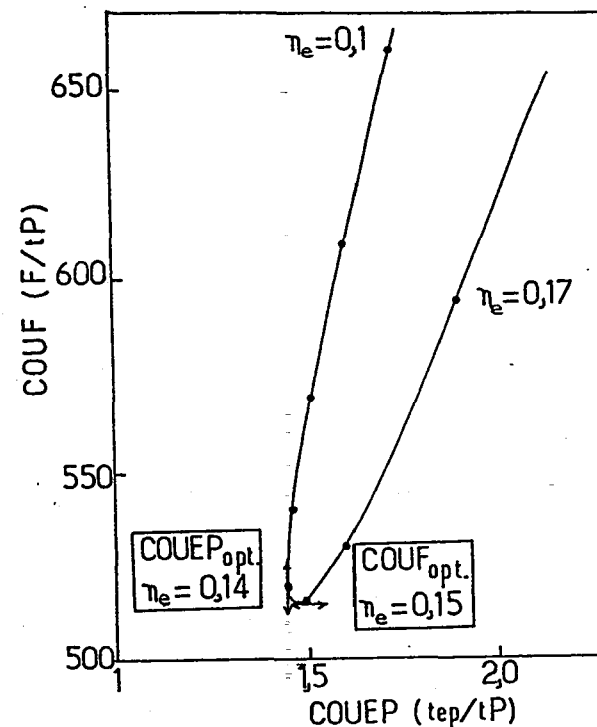


Figure 13. Optimisation de l'apport d'adjuvant de pressabilité. CARactéristique Energie Coût .



## ANNEXE A7

*LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE A DEFORMATION CONSTANTE  
(CDC)*

## PUBLICATION P7

REBOUILLAT S. & PELEG M. *Selected physical and mechanical properties of commercial apple cultivars*. Journal of Texture studies 19 (3), 217-230, (1988). Abstract provided in A7.

Les propriétés mécaniques des produits biologiques ne sont pas systématiquement considérées comme essentielles, sans doute du fait de leur variabilité et du manque de procédures établies. Les résultats que nous présentons, à partir de douze variétés de pommes, sont importants quant à la prise en compte de la déformation vraie, par rapport à la déformation apparente, qui prend encore plus d'importance lors de déformations importantes de matériaux non linéaires, comme le sont beaucoup de produits de ce type. Les précautions expérimentales au niveau de la préparation des échantillons et de la mesure du fluage proprement dit sont décrites. L'analyse statistique n'est pas aussi défavorable que l'on pourrait imaginer avec des produits naturels. Le taux de déformation n'influe pas significativement dans le domaine des faibles vitesses. Ce genre d'étude peut s'avérer très utile pour l'anticipation des tests de compression en cellule. Dans tous les cas la caractérisation des produits, même à forte variabilité intrinsèque, devrait rester une préoccupation pour faciliter la progression scientifique. Cette publication, reproduite en annexe séparée, est disponible sur demande. Le résumé des résultats se trouve dans cette annexe A7.





## RESEARCH NOTE

SELECTED PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES  
OF COMMERCIAL APPLE CULTIVARS<sup>1</sup>S. REBOUILLAT<sup>2</sup>

Laboratory of Chemical Engineering Science (LSQC)  
University of Nancy  
Nancy, France

and

M. PELEG

Department of Food Engineering  
University of Massachusetts  
Amherst, MA 01003

Manuscript received November 9, 1987; in final form February 22, 1988.

## ABSTRACT

*The compressive modulus of deformability, strength and strain of failure of apple flesh of 12 commercial apple cultivars were determined using a Universal Testing Machine. The deformability modulus, calculated from the linear part of the corrected stress-Hencky's strain relationship was between 1.5 to 2.3 MPa with a coefficient of variation of 9-26%. The apparent upper limit of the strain in the linear region was on the order of 0.08-0.2. The compressive strength was on the order of 160-280 kPa, with the Baldwin apples a notable exception with strength twice as large. Failure usually occurred at a strain of 0.12-0.16 with the exception of the Baldwin and Granny Smith apples for which failure occurred at a strain of 0.25 and 0.2, respectively. The variability in the failure parameters*

<sup>1</sup>Contribution of the Massachusetts Agricultural Experiment Station at Amherst

<sup>2</sup>Currently with DuPont de Nemours International S.A., Case Postale 50-52, Route des Acacias CH-1211, Geneva, Switzerland

*expressed as the coefficient of variation was usually on the order of 15-20%. Neither the total soluble solid content nor the fruit density could serve as a predictor of the flesh mechanical properties. The effects of the specimen dimensions and the deformation rate (in the range of 0.5-2 cm min<sup>-1</sup>) had only minor influence on the flesh mechanical behavior.*

## INTRODUCTION

The mechanical properties of apple flesh have received much attention in the food literature. This is primarily because of the economic significance of apple, but also because the flesh is a relatively uniform tissue that enables testing the applicability of mechanical theories to the data interpretation. The latter included failure criteria (Hamann 1983; Miles and Rehkugler 1973; McLaughlin 1987), viscoelastic effects (Sharma and Rafie 1983; Mittal *et al.* 1987; Calzada and Peleg 1978). The role of turgor pressure and water activity (Lin and Pitt 1986; Bourne 1986) and the role of the specimen dimensions and friction (Hamann 1983). In most cases, the reported data refer to fruits of a single apple cultivar or a limited number of cultivars. It is therefore of interest to compare the behavior of fruits of various cultivars under the same test conditions. This communication is a report of such comparison, made with fruits as they were offered to the consumer in a local supermarket. It was done to determine the common and different mechanical features of the different apples and to assess their range of variation within the experimental lot size.

## EXPERIMENTAL

Apples of twelve commercial cultivars, mainly locally grown, were purchased at a local supermarket in the middle of their harvest season. They are listed in alphabetical order in Table 1. Individual fruit was characterized by its total soluble solids (TSS), determined by a refractometer and expressed in °Brix, density determined by flotation, and the diameter at the equator, measured by a caliper. External color was measured with a Hunter Lab color difference meter at equally spaced locations, covering about 2/3 of the total area, and the results were averaged. Summary of these physical measurements is given in Table 1.

Individual fruits were peeled, halved, and their seeds removed. Cylindrical specimens were bored from the flesh using cork borers of different diameters. The cylinders were trimmed to the desired height by a pair of parallel blades. The nominal dimensions of the specimens were as follows:

## ANNEXE A8

*LA COMPRESSION UNIDIRECTIONNELLE A DEFORMATION CONSTANTE  
(CDC)*

## PUBLICATION P8

REBOUILLAT S., CAMPANELLA O.H. & PELEG M. *Mechanical characteristics of raw and processed peat*. Powder Technology 51, 273-275, (1987).

La tourbe est une source d'énergie mise en valeur dans certains pays comme l'Irlande, la Finlande et l'URSS. Sa déshydratation initiale subit les aléas climatiques et sa valorisation s'en trouve affectée. La littérature scientifique est peu abondante quant aux caractéristiques physiques et mécaniques de ce produit. Nos travaux sur la compressibilité et la relaxation de la tourbe sont donc uniques. Des modèles simples de caractérisation du fluage et de la relaxation sont développés et laissent entrevoir la possibilité de mieux utiliser la relaxation pour atteindre des paramètres de compressibilité ; ceci dans la mesure où les tests de compression garantissent une certaine réversibilité. Il serait donc intéressant de tenter d'analyser la relaxation suivant la compression en cellule -piston, de nombreuses données ont été recueillies dans le cadre de ce projet. Leur exploitation dépasse l'objectif de ce rapport. La publication P8 figure en totalité dans cette annexe A8.



## Short Communication

### Mechanical Characteristics of Raw and Processed Peat

S. REBOULLAT, O. H. CAMPANELLA  
and M. PELEG

Department of Food Engineering, University of  
Massachusetts, Amherst, MA 01003 (U.S.A.)

(Received February 23, 1987; in revised form March  
16, 1987)

Peat is a product of decaying organic matter and is apparently one of the initial stages in the formation of coal. It is usually considered as a low-grade energy source, primarily because of its high moisture content. In certain areas though, notably in the U.S.S.R., Finland and Ireland, it is used to fire power stations and as a domestic and industrial fuel [1]. Currently, in the U.S.A., peat is mainly used in agriculture and horticulture [2]. It is, however, considered a potential energy resource and raw material for a variety of chemical and fermentation processes [2]. There is little in the literature on the mechanical properties of peat and the effect of dewatering and processing on its physical characteristics.

The objective of this note is to demonstrate the applicability of methods previously used to characterize food and other powders [3] to raw and dewatered peat.

#### Experimental

The bulk density of raw (78% moisture) and industrially dewatered (49% moisture) Canadian peat was determined using a metal cell with a known volume. The cell was then mounted on an Instron Universal Testing Machine, model TM, and its contents compressed, at a crosshead speed of 1.0 cm min<sup>-1</sup>, recording the force-displacement curves [3]. In other experiments, the peat was compressed, at the same crosshead speed, to a predetermined deformation where the crosshead was locked in position and the force relaxation recorded.

The compressive force-deformation curves were transformed to bulk density ( $\rho_B$ )-normal stress ( $\sigma_N$ ) relationships. The latter, as has been the case with a variety of powders at this stress range [4], could be described by

$$\log_{10} \rho_B = a + b \log_{10} \sigma_N \quad (1)$$

where  $a$  and  $b$  are empirical constants. The constant  $b$  representing the change in bulk density by the applied stress has been referred to as the powder compressibility.

The recorded force relaxation curves were normalized and linearized by [5]

$$\frac{F(0)t}{F(0) - F(t)} = k_1 + k_2 t \quad (2)$$

where  $F(0)$  is the force at time zero,  $F(t)$  is the decaying force after time  $t$  and  $k_1$  and  $k_2$  are constants. The reciprocal of constant  $k_2$  in eqn. (2) represents an asymptotic level of the stress decay and can be used to calculate an asymptotic residual modulus  $E_A$  from [3]

$$E_A = \frac{F(0)}{A\epsilon} \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) \quad (3)$$

where  $A$  is the cross-sectional area of the specimen and  $\epsilon$  the strain.

#### Results and discussion

The fit of eqns. (1) and (2) by which the peat compressibility and asymptotic modulus were calculated is demonstrated in Figs. 1 and 2, respectively. Statistical analysis of all the experimental data yielded the following regression coefficients. For the compression results, the range was  $0.976 < r^2 < 0.994$ , and for the relaxation data  $0.996 < r^2 < 0.999$ , with a corresponding significance level of 0.001 or better. Consequently, the methodology used for food powders under low normal stresses (*i.e.*, up to  $10^5$  Pa or  $1 \text{ kgf cm}^{-2}$ ) could also be used for peat.

The mechanical parameters of raw and dewatered peat are listed in the Table. It shows that both the compression and relaxation tests were highly reproducible, thus

TABLE

Mechanical characteristics of raw and dewatered peat

Type	Density		Compressibility <sup>a</sup>		Henky's strain (—)	Relaxation parameters			
	Mean	C.O.V.	Mean	C.O.V.		Density		Asymptotic modulus <sup>b</sup>	
	(g cm <sup>-3</sup> )	(%)	(—)	(%)		Mean	C.O.V.	Mean	C.O.V.
						(g cm <sup>-3</sup> )	(%)	(kPa)	(%)
Raw	0.63	1	0.11	10	0.27	0.81	1	21	3
						1.02	0.6	53	5
Dewatered	0.53	3.5	0.06	12	0.23	0.66	0.9	50	13
						0.79	0.7	173	4

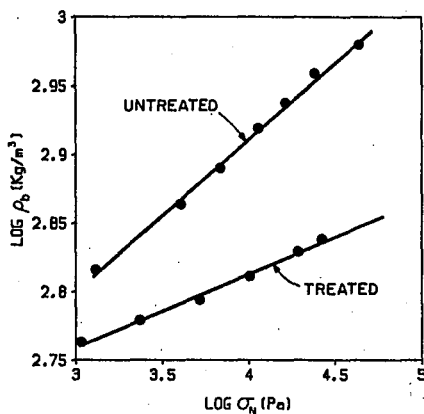
<sup>a</sup>The parameter  $b$  in eqn. (1).<sup>b</sup>The parameter  $E_A$  calculated using eqn. (3).

Fig. 1. Typical linearized compression curves of raw (untreated) and dewatered (treated) peat.  $\rho_B$  is the density and  $\sigma_N$  the applied compressive stress. (See eqn. (1).)

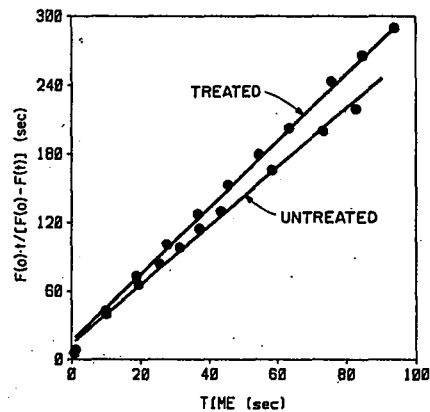


Fig. 2. Typical linearized relaxation curves of raw (untreated) and dewatered (treated) peat.  $F(0)$  is the initial force and  $F(t)$  the force after time  $t$  in relaxation. (See eqn. (2).)

strengthening the view that the reported parameters are useful to characterize the mechanical properties of the peat. The bulk density of the processed peat was lower than that of the raw peat. This was mainly a result of the differences in water content. Therefore, the initial density could not serve as a cohesiveness indicator, as is the case in proper powders [3, 6].

The difference in compressibility, however, was of the same character that is observed in food powders, *i.e.*, the more moist the powder, the larger was its compressibility. In peat though, since the moisture content is by far higher than that found even in very wet powders, the moisture-compressibility relation is most probably a measure of the plasticity of the material itself rather than the openness of the bed structure as a result

of attractive interactions between the particles. As could be expected, the relaxation pattern also indicated that dewatering reduced the material plasticity. This was evident from the higher asymptotic moduli of the processed peat. The magnitude of these moduli is an index of solidity, where zero means that the sample cannot sustain unrelaxed stress and is therefore a liquid by definition. It is therefore clear that dewatered peat particles, both individually and in bulk, have significantly more rigid structure than in their original wet state.

Support for this conclusion also comes from the observation that the asymptotic residual modulus of the dewatered peat was higher than that of raw peat even when the differences in density are taken into account. This excludes the alternative explanation that

the compactness of the structure was the primary cause of the higher observed moduli.

#### Conclusions

It has been shown that the compressibility and stress relaxation pattern of peat can be described by simple relationships (eqns. (1) and (2)) whose applicability, as well as parameters, can be tested and determined by linear regression. No attempt was made to analyze peat of different sources and/or after different kinds of treatments. The good fit of the mathematical equations and the high reproducibility of the tests, however, suggest that the described methodology can be used as a convenient means to characterize different peats and the effects of dewatering and other processes on their mechanical properties.

#### Acknowledgement

The work was supported by the Massachusetts Agricultural Experiment Station in Amherst. The authors express their thanks to Mr. A. B. Allen for contributing the peat for the study as well as background material.

#### References

- 1 L. A. Kristoferson and V. Bokalders, *Renewable Energy Technologies*, Pergamon, Oxford, 1986.
- 2 A. B. Allen, Private communication, 1987.
- 3 A. J. Dobbs, M. Peleg, R. E. Mudgett and R. Rufner, *Powder Technol.*, 32 (1982) 69.
- 4 J. Malave, G. V. Barbosa-Canovas and M. Peleg, *J. Food Sci.*, 50 (1985) 1473.
- 5 M. Peleg and R. Moreyra, *Powder Technol.*, 23 (1979) 277.
- 6 A. H. Hollenbach, M. Peleg and R. Rufner, *Powder Technol.*, 35 (1983) 51.





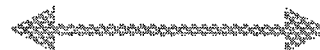
## ANNEXE A9

## LA DEFORMATION DES MILIEUX POREUX SATURES

ELEMENTS DE REPONSE AUX QUESTIONS LES PLUS FREQUEMMENT  
POSEES (QFP)L'Influence de la Température sur la Compression :  
Écoulement Hydrodynamique et Déformation de la  
Structure ?

	T: 11 [°C]	T: 45 [°C]		T: 11 [°C]	T: 45 [°C]	
$\nu$ [cm <sup>3</sup> /g]	$Ce_{11}$ [g <sup>2</sup> .cm <sup>-4</sup> .min <sup>-1</sup> ]	$Ce_{45}$ [g <sup>2</sup> .cm <sup>-4</sup> .min <sup>-1</sup> ]	$Ce_{45}/Ce_{11}$	$\eta_{11}$ 10 <sup>-3</sup> [Pa.s]	$\eta_{45}$ 10 <sup>-3</sup> [Pa.s]	$\eta_{45}/\eta_{11}$
1.5	0.32	7.1	22	1.259	0.586	0.5

22



2

Initiale

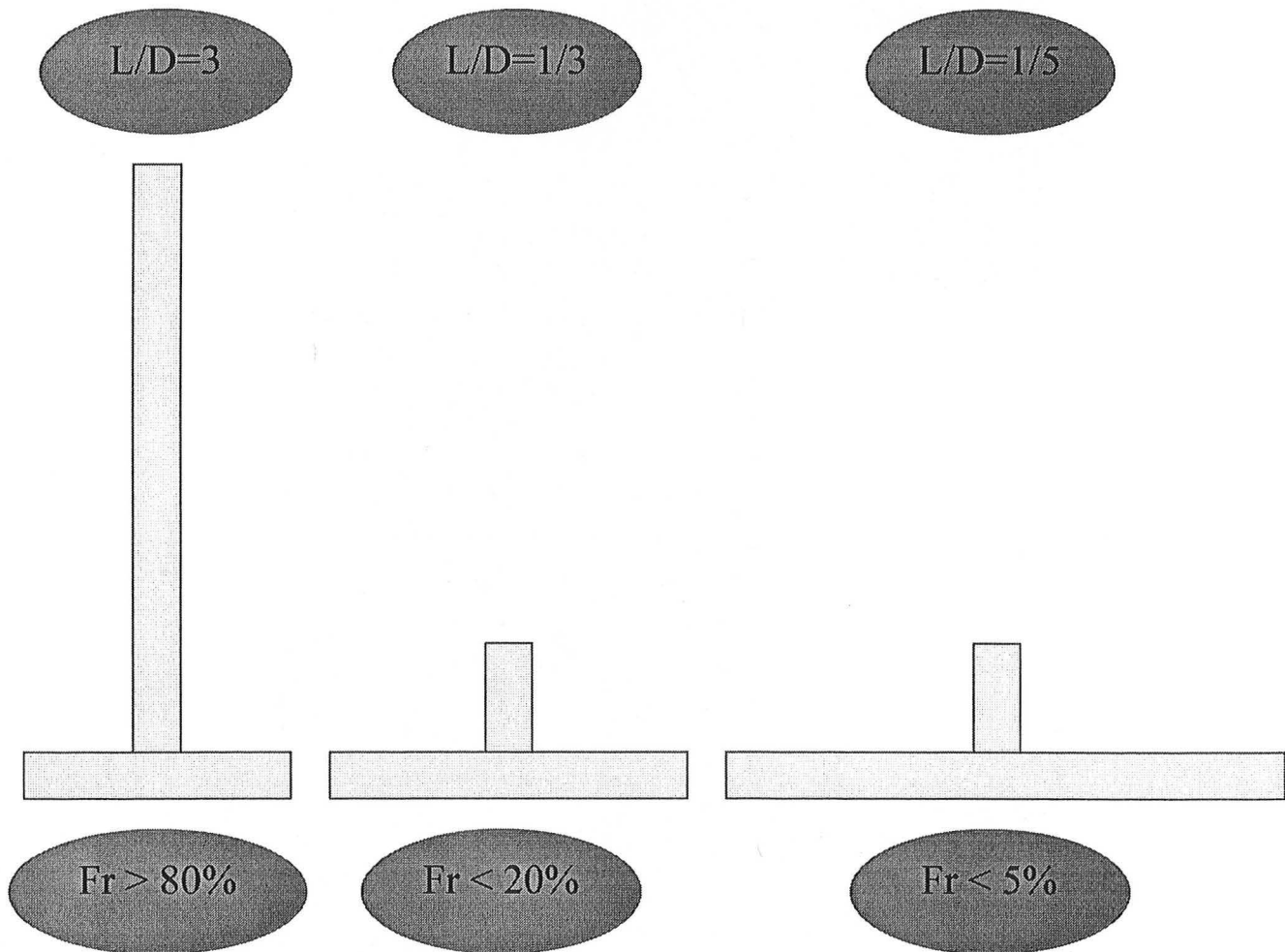
Reference	Z [cm]	MS [%]	$v$ [cm <sup>3</sup> /g]	$M_T$ [g]	$M_s$ [g]	w [-]	$V_T$ [cm <sup>3</sup> ]	$M_f$ [g]	$\gamma_s$ [g/cm <sup>3</sup> ]
F1	1.62	22.5	4.00	232	52	3.45	208	180	1.84
C5	2.18	47.8	1.66	360	172	1.09	281	188	1.86
Cr2	1.71	17.0	5.40	241	41	4.88	220	200	2.01

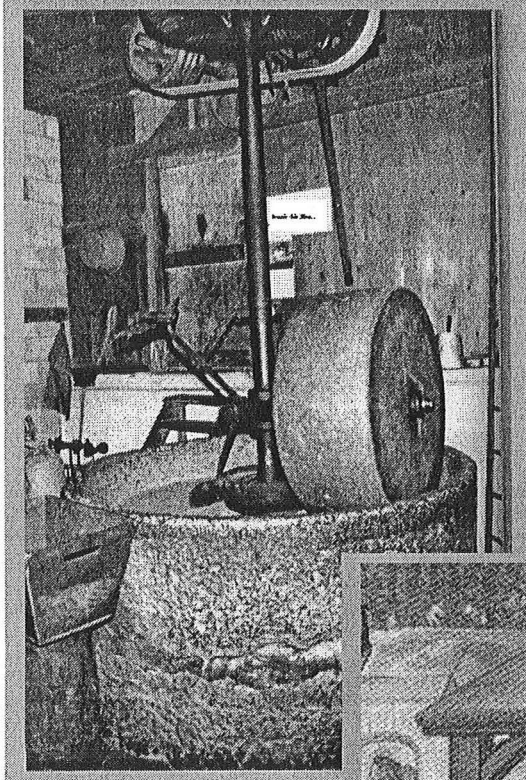
### La Compressibilité du Solide ?

Reference	Z [cm]	MS [%]	$v$ [cm <sup>3</sup> /g]	$M_T$ [g]	$M_s$ [g]	w [-]	$V_T$ [cm <sup>3</sup> ]	$M_f$ [g]	$\gamma_s$ [g/cm <sup>3</sup> ]
F1	0.64	30.4	1.57	106	52	2.29	82	54	1.87
C5	1.55	49.0	1.19	280	172	1.04	205	107	1.77
Cr2	0.83	30.5	2.64	127	41	2.28	108	87	1.90

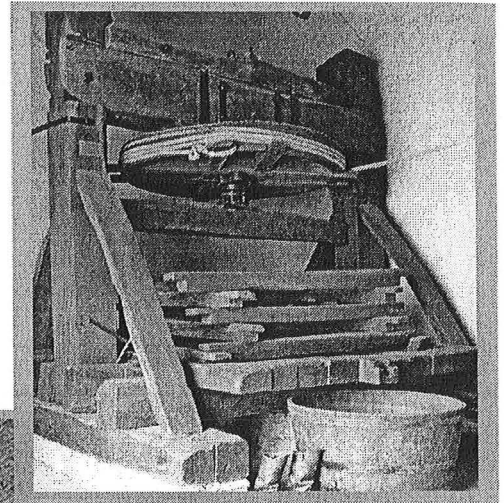
Finale

$L/D$  (hauteur de l'échantillon/diamètre cellule)  
rapport critique ?





*Pressoir Olives et Noix*



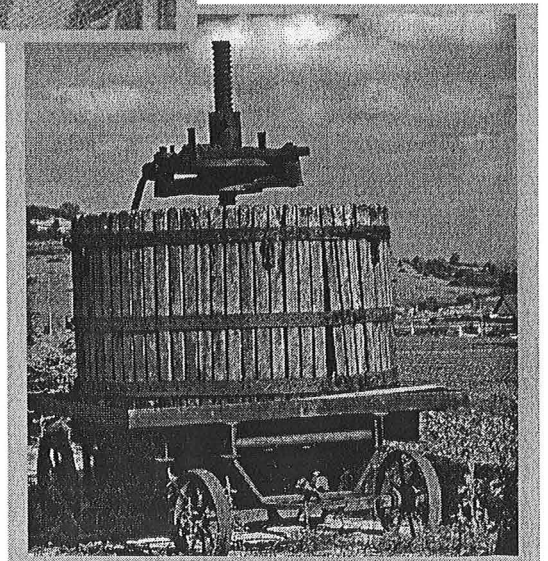
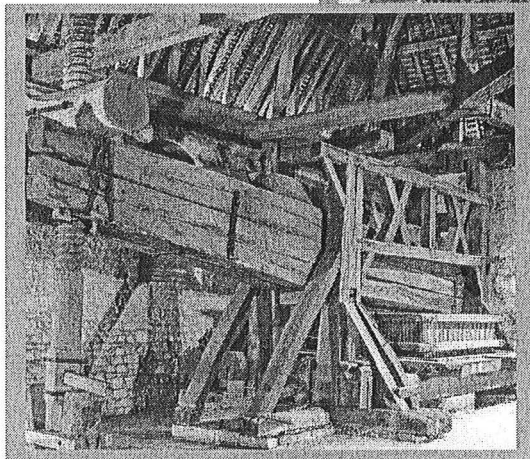
*Pressoir à Corde*



*Scène de pressage 1500*

*Pressoir VII<sup>e</sup>*

*Pressoir du Village*



En hommage à Henry Philibert Gaspard Darcy (1803-1858)  
A l'approche du 200<sup>ème</sup> anniversaire de sa naissance à Dijon ...

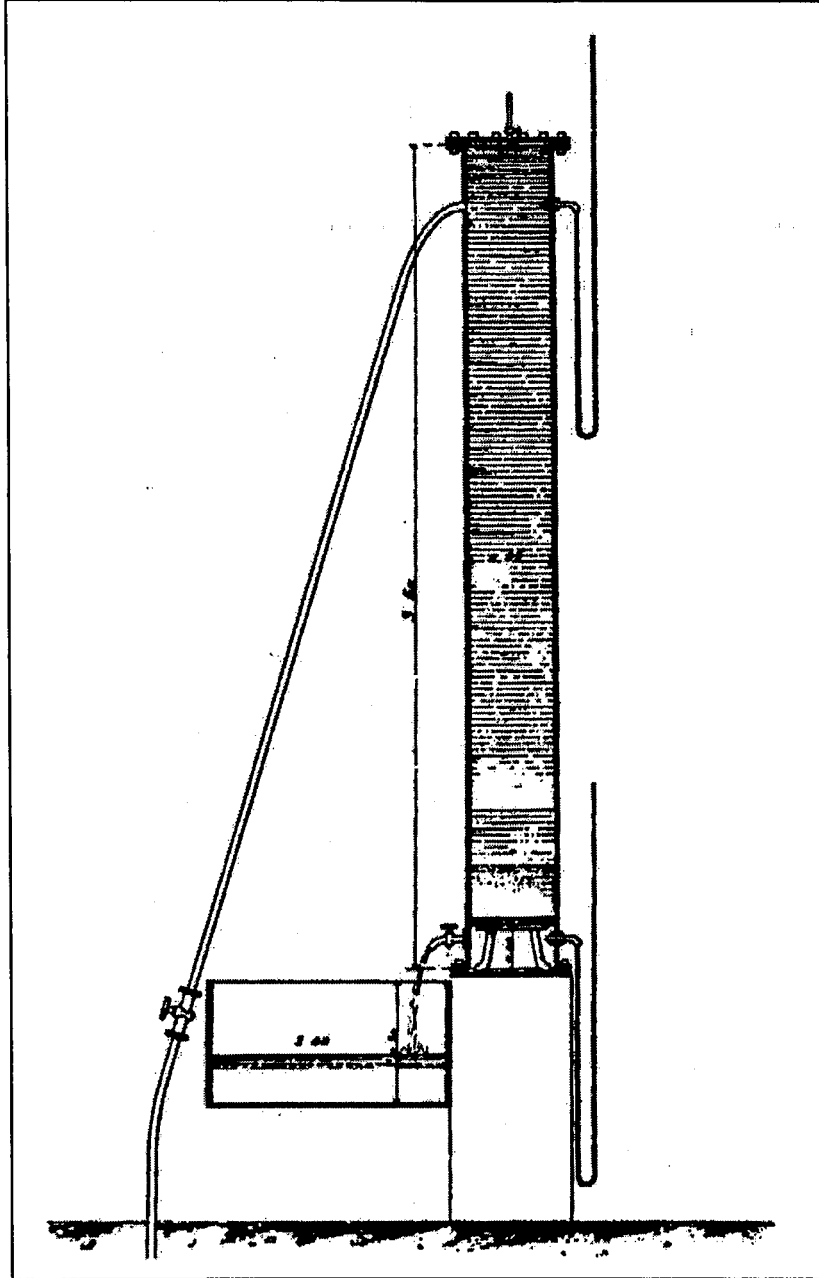


Schéma de l'appareil utilisé par Darcy pour déterminer la loi de l'écoulement de l'eau à travers le sable.



INSTITUT NATIONAL  
POLYTECHNIQUE  
DE LORRAINE

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT D'ETAT**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur HERMIA Jacques, Professeur, Université Catholique de Louvain, Belgique

Monsieur LECLERC Dominique, Professeur, LSGC-ENSIC

Monsieur ROUX Jean-Claude, Professeur, Ecole Française de Papeterie et des Industries Graphiques, Saint Martin d'Hères

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Monsieur REBOUILLAT Serge**

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,  
une thèse intitulée :

« Contribution à l'étude fondamentale de la déformation de milieux poreux saturés ».

en vue de l'obtention du grade de :

**DOCTEUR D'ETAT  
SCIENCES**

Spécialité : ~~CHIMIE PHYSIQUE~~ **GÉNIE DES PROCÉDÉS**

NANCY BRABOIS  
2, AVENUE DE LA  
FORET DE HAYE  
BOITE POSTALE 3  
F - 54501  
VANDOEUVRE CEDEX

Fait à Vandoeuvre le, 28 octobre 2002

Le Président de l'IN.P.L.

**L. SCHIMMELCKER**  
Le Secrétaire Général

**S. RIVIERE**

Service Commun de la Documentation  
INPL  
Nancy - Brabois

TEL 33/03.83.59.59.59  
FAX 33/03.83.59.59.59





# THESE DE DOCTORAT D'ETAT - SCIENCES - INPL- NANCY – Serge REBOUILLAT

## RESUME

Environnement, énergie et développement durable sont intrinsèquement liés. C'est dans ce contexte que se situent les travaux rapportés dans ce mémoire riche de 700 références.

Un potentiel important de réduction de la consommation d'énergie existe dans les industries **minières, agroalimentaires, papetières, électroniques, pharmaceutiques et biotechnologiques**, qui ont toutes à traiter de séparations solides-liquides ô combien pesantes. Le type de séparation solide-liquide considéré dans ce travail scientifique prend en compte des produits et dérivés provenant de ces six secteurs. La démarche scientifique présente un intérêt fondamental pour la caractérisation des écoulements hydrodynamiques et des déformations rapides. Elle pourrait s'étendre à la déformation des sols lors des catastrophes « dites naturelles ».

Plus axée sur la compréhension fondamentale et la composante pratique des déformations multidimensionnelles de milieux poreux saturés, cette étude privilégie quatre modes de compression.

Plusieurs cellules de compression multi-mode (MMCC©) et une unité pilote de pressage à vis (TSPU©) ont été conçues et favorablement testées pour la compression multidimensionnelle.

La compression à pression constante, CPC, et les modèles proposés conviennent à l'étude du comportement des milieux saturés d'origine minérale comme le talc et le kaolin. La compression à déformation constante, CDC, sans hypothèse excessivement restrictive, permet de mettre à disposition trois approches théoriques adaptables à une large gamme de situations. Un des apports importants de la CDC réside dans la rapidité des tests. Une base est ainsi établie pour l'étude à gradient de pression contrôlé. Les études de la relaxation, qui suit la compression CDC, ouvrent de nouvelles voies de recherche.

En matière de compression avec écoulement multi-axial, sont développées la compression axiale avec écoulement radial central ou périphérique et de façon plus générale la compression axiale avec écoulement tridimensionnel puis son extension au pressage à vis. On note un bon degré de prévisibilité des performances du pilote (TSPU©) à partir de la cellule de laboratoire, MMCC©.

Enfin une application de la thermodynamique statistique et le développement du calcul de l'énergie consommée par unité de volume comprimé semblent très prometteurs.

TITLE: Fundamental Study of the Deformation of Saturated Porous Materials

## ABSTRACT

This thesis describes a method, which uses a new theory to access the dynamic compression coefficient of biological and food materials. A multi-mode large diameter expression cell has been built to study the dynamic compression characteristics of saturated porous materials.

An important theoretical background has been developed regarding multidimensional expression such as the one occurring during axial compression and radial flow. This set of equations is also useful to model a screw pilot press designed and instrumented for this study. Both the coefficients of compression obtained during piston-cell compression and during screw pressing agree, leading the way to more meaningful engineering and scientific database.

It has also been shown that the pressure relaxation pattern can be described by simple equations. Finally, relationships between the expression parameters and the Arrhenius law are shown.

Energy wise the dewatering of bio-products remains a huge potential area for energy saving as being reported in some of the 700 publications included in this thesis. It is also applicable to the new dynamic dimension, which take so-called natural catastrophes.

DISCIPLINE : SCIENCES

## MOTS-CLES

Compression, consolidation, déformation, pressage, compactage, essorage, filtration, perméation, écoulement, dynamique, radial, axial, multi-axial, cellule de compression multi-mode, optima énergétiques et économiques, milieux poreux saturés, produits agroalimentaires, biotechnologie, poudres minérales, boues organiques, pulpes, tourbes, céramique, protéines, plastique, élastique, visco-élastique, rhéologie, loi de Darcy généralisée.

## KEYWORDS

Compression, consolidation, deformation, filtration, permeability, radial, multi-axial, multi-mode compression cell, energy, saturated porous materials, food and agricultural products, biotechnology, mineral powders, pulps, peat, proteins, visco-elastic, rheology, generalised Darcy law.

ADRESSE : Laboratoire des Sciences du Génie Chimique, ENSIC, rue Henri Déglin, 54001 Nancy Cedex

DIRECTEUR DE RECHERCHE : Pr. Dominique LECLERC, Université Henri Poincaré, Nancy