

Homogénéisation d'une classe de problèmes non linéaires avec des conditions de Fourier dans des ouverts perforés

Salaheddine Bendib

▶ **To cite this version:**

Salaheddine Bendib. Homogénéisation d'une classe de problèmes non linéaires avec des conditions de Fourier dans des ouverts perforés. Autre [cs.OH]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004. Français. NNT : 2004INPL079N . tel-01749821

HAL Id: tel-01749821

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749821

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

136367929

OGINPL0793

(NT) 2004 BENDIB, S

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (*L.E.M.T.A.*)

Thèse

présentée à

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

pour obtenir le titre de

Docteur de L'I.N.P.L.

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

par

Salaheddine BENDIB

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

Homogénéisation d'une classe de problèmes non linéaires avec des conditions de Fourier dans des ouverts perforés

Soutenue publiquement le 22 octobre 2004, devant la commission d'examen

Membres du jury

Rapporteurs :

Alain BRILLARD	**Professeur, Université du haute-Alsace**
Hélène DUMONTET	**Professeur, Université Cergy Pontoise**

Examinateur :

Patrizia DONATO	**Professeur, Université Paris 6**

Directeur de thèse :

Gérard MAURICE	**Professeur, I.N.P.L. Nancy**

Co-directeurs de thèse

M'Barek TAGHITE	**Maître de conférences (H.D.R), I.N.P.L. Nancy**
Khalid TAOUS	**Maître de conférences, Université de Metz**

A mes parents

Table des matières

Avant-propos 3

Introduction générale 4

CHAPITRE I : Homogénéisation d'un problème de Fourier non linéaire et non homogène dans des domaines perforés 7

1. Introduction 7

2. Présentation du problème 8

3. Existence et unicité de la solution du problème 9

4. Lemmes de base 17

5. Homogénéisation 20

CHAPITRE II : Homogénéisation d'un problème de Fourier non linéaire et non homogène dans des domaines faiblement connectés 40

1. Introduction 40

2. Description et géomètrie du problème 42

3. Lemmes de base 47

4. Homogénéisation 57

Chapitre III : Calcul des coefficients homogénéisés et de la solution limite du problème étudié au chapitre I 77

1. Introduction 77

2. Présentation de FreeFem++ 78

3. Position et formulation du problème numérique 78

4. Approximation numérique de (3.4) 80

5. Calcul numérique des fonctions auxiliaires 82

6. Calcul numérique des coefficients homogénéisés du problème 83

Conclusion générale 87

Bibliographie générale 88

Annexe .....

Avant - propos

Je remercie tout d'abord Monsieur Gérard MAURICE qui m'a acceuilli dans son équipe et qui m'a dirigé dans mes recherches avec beaucoup de générosité, de patience et de compétence.

Ma gratitude va également aux Messieurs M'Barek TAGHITE et Monsieur Khalid TAOUS qui par leurs conseils constants et leurs remarques tout au long de ce travail m'ont aidé à préciser le cadre de ce travail, qu'il me soit permis de les remercier et de leur exprimer ici ma profonde reconnaissance.

Monsieur Alain BRILLARD m'a fait beaucoup d'honneur en rapportant sur cette thèse, je le remercie beaucoup pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Je tiens à remercier vivement Madame Hélène DUMONTET qui m'a fait l'honneur pour avoir rapporter sur cette thèse et pour ses remarques qui m'ont aidé à mieux préparer celle-ci.

J'adresse également mes vifs remerciements au professeur Patrizia DONATO pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury de ma thèse et pour l'intérêt qu'elle a porté au présent travail et en présidant le jury.

Ce mémoire est dédié à feu le professeur Madame Jeannine SAINT-JEAN-PAULIN avec qui ce travail a débuté, et que je remercie énormément pour tout ce qu'elle m'a apporté.

Enfin, à toute ma famille, je dis un grand merci pour le soutien moral et l'aide apportée, ce qui a largement facilité la conclusion de ce travail.

Introduction générale

La méthode utilisée dans ce travail est l'homogénéisation dont le but réside dans la recherche d'une équation dite "homogénéisée" ou "macroscopique" décrivant des phénomènes qui ont lieu dans un milieu non homogène et dont les caractéristiques sont très difficiles à calculer, puisqu'un maillage satisfaisant d'un matériau comportant de très nombreuses cellules de très petite taille requiert un temps de calcul prohibitif. Ces caractéristiques vont être approchées de manière satisfaisante par celles d'un matériau fictif, dit "homogénéisé", facile à étudier, car un maillage plus grossier est suffisant pour les calculs (on n'a pas à tenir compte de particularités géométriques car le matériau est homogène).
Dans le cas d'une structure générale, il existe des méthodes différentes (échelles multiples, Γ-convergence, G-convergence, H-convergence, convergence multi-échelle) qui permettent la démonstration de la convergence du processus d'homogénéisation. On définit un petit paramètre strictement positif (noté en général par ε). Ici, nous nous intéressons en particulier au cas des matériaux à structure périodique, et donc, au passage à la limite $\varepsilon \longrightarrow 0$ d'un milieu non homogène à un milieu homogène équivalent en termes de caractéristiques thermiques. Pour cela, une des méthodes souvent utilisée est la méthode de l'énergie.
L'exploitation des gisements pétroliers, l'industrie chimique et les problèmes hydrauliques constituent quelques exemples d'application pratique de la méthode de l'homogénéisation. L'enfouissement des déchets radioactifs dans le sol offre un intéressant problème d'application pratique des procédés d'homogénéisation. Dans ce cas, on considère une matrice de granite contenant des centaines de trous cylindriques très profonds et très fins, ces trous sont destinés à recueillir des déchets. On souhaite étudier la circulation de l'eau dans l'ensemble matrice-puits.
Tout calcul est évidemment exclu sur le site réel, à cause des dimensions globales de ce site et de la finesse des trous. On remplace alors le domaine réel par un domaine homogénéisé, dans lequel les calculs pratiques sont possibles.
De très nombreux matériaux présentent un comportement thermique non linéaire, même dans des conditions d'exploitation classiques. Pour certains d'entre eux, la conductivité thermique dépend de manière non linéaire du gradient de température et pour d'autres c'est une dépendance en fonction de la température elle même que l'on observe.
L'assemblage périodique de divers matériaux de type et de trous dans des configurations non standards constitue des matériaux composites qui font l'objet de ce travail. Nous utilisons la méthode d'homogénéisation des structures périodiques pour déterminer le comportement macroscopique de tels composites soumis à des conditions aux limites non standards sur le contour des trous.
Des matériaux très classiques tels que les verres [15] présentent une conductivité dépendant de la température pour les températures élevées, leur conductivité présente une courbe croissante variant de 0,01 cal/s x cm x c à 0,2 cal/s x cm x c environ.

D'autres matériaux présentent une conductivité dépendant de la température, c'est le cas de l'Aluminium [15], des matériaux semi conducteurs dont la conductivité n'est pas monotonne en fonction de la température, des céramiques [15] dont la conductivité est décroissante en fonction de la température. La conductivité du bois est elle aussi fonction croissante de la température [15], ce matériau présente à lui seul une structure composite relevant de notre étude, la structure intime [15] laisse apparaître des cellules dont la géométrie rappelle celle que nous avons retenue dans notre étude.

Pour l'homogénéisation des problèmes linéaires dans différents types de géométries, il existe une littérature abondante. A partir des années 90, les auteurs ont commencé à s'intéresser à l'homogénéisation des problèmes non linéaires. Les opérateurs traitant la non linéarité sont souvent monotonnes, ce sont des opérateurs où les coefficients dépendent du gradient de la solution de manière monotonne. Cependant, l'homogénéisation des problèmes quasilinéaires reste rare voire inexistante dans la littérature. Dans ces derniers problèmes les coefficients des opérateurs dépendent de manière non linéaire de la solution. Le problème que nous traitons fait partie de cette dernière classe.

Le travail que nous présentons dans cette thèse est partagé en trois chapitres, avec une bibliographie générale à la fin. L'objectif du premier chapitre est l'homogénéisation d'un problème de Fourier non linéaire et non homogène dans des ouverts perforés. Dans la première partie, on donne la formulation du problème, ainsi que le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème. Les résultats de convergence obtenus généralisent des résultats antérieurs de Cioranescu-Donato [10], puisqu'on considère ici des coefficients a_{ij} qui dépendent de la fonction inconnue de manière lipschitzienne, d'où la difficulté de passer à la limite dans quelques termes, surtout ceux contenant des conditions de Fourier non linéaires et non homogènes sur le bord des trous. On utilisera donc les fonctions auxiliaires introduites par Cioranescu-Donato [10], pour pouvoir transformer les intégrales de surface en intégrales de volume. Le cas des conditions de Fourier homogènes pour les équations de Stokes et Navier-Stokes a été étudié par Conca [12], le problème pour des trous "petits" a été traité par Conca-Donato [13]. Enfin, le cas de Neumann homogène a été étudié par Cioranescu-Saint Jean Paulin [11].

Et, selon la moyenne de la donnée g sur le bord des trous, nous donnons deux problèmes limites différents. Ces problèmes sont obtenus en utilisant d'une part la méthode de l'énergie dans le cas où la moyenne de g est non nulle, et d'autre part une démonstration qui utilise des techniques du théorème de compacité par compensation [21], dans le cas où cette moyenne est nulle.

Dans le second chapitre, nous reprenons le même problème qu'au premier chapitre avec les mêmes objectifs, dans le cas où on a des domaines faiblement connectés Ω_ε, notion qui a été introduite par E. Ja. Hruslov [18] pour l'homogénéisation de l'équation de Laplace, puis utilisée par M. Briane [7] pour étudier le problème de Neumann. Le domaine Ω_ε est inclus dans un ouvert borné fixé Ω de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, et est composé de deux parties disjointes $\Omega_{1\varepsilon}$ et $\Omega_{2\varepsilon}$ reliées par un ensemble de ponts très fins. Les

domaines $\Omega_{1\varepsilon}$ et $\Omega_{2\varepsilon}$ sont ε-périodiques.
Nous donnons le problème limite pour trois géométries différentes selon la connexité de $\Omega_{1\varepsilon}$ et de $\Omega_{2\varepsilon}$, et pour chaque géométrie, on étudiera trois cas selon la taille des ponts. Toutefois, on doit préciser quelques difficultés qu'on a dû surmonter pour résoudre ce problème. D'abord, et comme dans le premier chapitre, la présence de conditions de Fourier non linéaires et non homogènes sur le bord des trous. Ensuite, le fait que la cellule de base dépende du paramètre ε à cause des ponts, ce qui va nous obliger à chercher le problème adéquat et les bonnes estimations pour pouvoir transformer les intégrales de surface en intégrales de volume. La preuve des résultats est basée essentiellement sur la méthode d'énergie en introduisant différentes fonctions tests.
Dans le dernier chapitre, nous développons une méthode numérique permettant de calculer de manière explicite les coefficients limites. Le but est donc le calcul numérique des coefficients homogénéisés correspondant au problème étudié au premier chapitre. Il s'agit d'approcher notre problème non linéaire par une suite de problèmes linéaires, par une méthode itérative qui consiste à construire une suite de coefficients limites. Et, comme il s'agit de problèmes non linéaires, tous les différents paramètres qui interviennent dans ce calcul dépendent de la solution limite u du problème homogénéisé, la méthode itérative choisie pour résoudre notre problème est la méthode du point fixe. Après une étape d'initialisation, on calcule dans la première étape, la solution du problème limite définie dans tout le domaine, ensuite on calcule sur une cellule de base plusieurs fonctions auxiliaires qui interviennent dans la détermination des coefficients homogénéisés.
Enfin, tous ces calculs seront réalisés grâce au logiciel de résolution d'équations aux dérivées partielles FreeFem+. Le programme permettant le calcul de la solution du problème limite dans tout le domaine est donné en annexe.

CHAPITRE I
Homogénéisation d'un problème de Fourier non linéaire et non homogène dans des ouverts perforés

1. Introduction

Dans tout ce qui suit, on utilise de façon systématique la convention de sommation sur les indices répétés.
On se propose d'étudier le problème suivant :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x/\varepsilon,\delta u_\varepsilon)\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\Big) = f_\varepsilon \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \\ a_{ij}(x/\varepsilon,\delta u_\varepsilon)\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\nu_j + \alpha\varepsilon^\mu u_\varepsilon = g_\varepsilon \quad \text{sur} \quad \partial T_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et Ω_ε est le domaine perforé périodiquement (de période ε) par des trous qui sont les homothétiques de rapport ε d'un ouvert borné fixé T. Les paramètres α et μ sont des nombres réels positifs avec $\mu \geq 1$.
La normale unitaire ν est dirigée vers l'extérieur de Ω_ε.
On note par Y la cellule de référence dans laquelle on construit le trou T, et on pose $Y = \prod_{i=1}^{n}[0, a_i[$ avec $a_i > 0$.
La fonction $y \to g(y)$ est Y- périodique, $g \in L^2(\partial T)$ et $g_\varepsilon(x) = g(x/\varepsilon)$. Dans toute la suite, on prendra :

$$(1.2)\qquad \delta = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m_{\partial T}(g) = 0 \\ \varepsilon & \text{si} \quad m_{\partial T}(g) \neq 0, \end{cases}$$

où on note par $m_{\partial T}(g) = \dfrac{1}{|\partial T|}\displaystyle\int_{\partial T} g(y)\,dy$ la moyenne sur ∂T de g. La notation $|E|$ désigne la mesure de Lebesgue d'un ensemble E.
Il s'agit d'un problème avec des conditions de Fourier non linéaires non homogènes sur le bord des trous (où les coefficients de diffusion a_{ij} dépendent de la fonction inconnue de manière lipschitzienne), et on va montrer que la méthode d'énergie due à Tartar peut être utilisée ici comme dans le cas linéaire. Les résultats d'homogénéisation obtenus généralisent des résultats antérieurs de Cioranescu-Donato [10] parce que nous prenons des coefficients a_{ij} qui dépendent de la solution (ce qui nous empêche de passer à la limite directement dans des termes en appliquant la méthode d'énergie).
Le même problème mais avec des coefficients a_{ij} indépendants de u_ε et des conditions de Fourier au bord des trous a été traité par la méthode de l'énergie par Cioranescu-Donato [10]. Si $\alpha = 0$, on trouve une condition de Neumann non homogène. Le

cas avec condition de Neumann homogène a été traité dans Cioranescu-Saint Jean Paulin [11], et par la Γ-convergence par Mortola-Profeti [20]. Le cas des conditions de Fourier homogènes pour les équations de Stokes et Navier-Stokes a été étudié par Conca [12]. Le problème de Neumann non homogène pour des trous "petits" (l'ordre de grandeur du trou est plus petit que l'ordre de la grandeur de la période) a été traité par Conca-Donato [13].
Le but de ce travail est d'approcher le matériau troué par un matériau homogène qui occupe Ω tout entier et qui a un comportement global facile à décrire, c'est-à-dire faire tendre ε vers 0, ce qui est un processus d'homogénéisation classique. Ici, on considère le cas des trous ayant le même ordre de grandeur ε que celui de la période.

Les deux cas :

$$\int_{\partial T} g(y)\, d\sigma = 0 \tag{1.3}$$

$$\int_{\partial T} g(y)\, d\sigma \neq 0 \tag{1.4}$$

sont traités séparément, et ceci parce que les estimations a priori ne sont pas du même ordre en ε.

La suite de ce travail se présente comme suit :
1. Position du problème.
2. Théorème d'existence et d'unicité.
3. Lemmes de base.
4. Homogénéisation.

2. Présentation du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) et Y la cellule de référence. On pose $Y^* = Y \setminus \bar{T}$. On suppose que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

(2.1) T est un ouvert régulier à frontière de classe C^2.

(2.2) Y^* est localement d'un seul côté de ∂T et ∂T est la réunion d'un nombre fini de segments de droites si $n = 2$, ou d'un nombre fini de faces planes si $n = 3$.

Dans les deux cas T est de frontière lipschitzienne. On se donne un petit paramètre ε destiné à tendre vers zéro et on définit $\tau(\varepsilon\bar{T})$ qui est l'ensemble de tous les translatés de $\varepsilon\bar{T}$ de la forme $\varepsilon(k + \bar{T})$, $k \in \mathbb{Z}^n$. De cette manière on a percé périodiquement $\mathbb{R}^n$ par des trous dont la taille est de l'ordre de la période.
On suppose que :

(2.3) les trous $\tau(\varepsilon\bar{T})$ ne coupent pas la frontière $\partial\Omega$.

Soit T_ε l'ensemble des trous contenus dans Ω et $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{T}_\varepsilon$.
On considère le problème :

$$(2.4)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\Big) = f_\varepsilon \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \\ a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\nu_i + \alpha\varepsilon^\mu u_\varepsilon = g_\varepsilon \quad \text{sur} \quad \partial T_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où la normale unitaire ν est orientée vers l'extérieur de Ω_ε.
On pose

$$V_\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon), \quad v_{|\partial\Omega} = 0\}.$$

On suppose que

$$(2.5)\qquad f_\varepsilon \in V_\varepsilon'.$$

La formulation variationnelle du problème (2.4) est pour tout $v \in V_\varepsilon$:

$$(2.6)\qquad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon v\,d\sigma = < f_\varepsilon, v >_{V_\varepsilon', V_\varepsilon} + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon v\,d\sigma.$$

Pour obtenir des estimations a priori pour u_ε et pouvoir passer à la limite, on va établir des lemmes permettant la transformation des intégrales de surface en intégrales de volume. Mais, avant de faire cela, on établira un théorème d'existence et d'unicité de la solution.

3. Existence et d'unicité de la solution du problème

On définit les coefficients a_{ij}^ε par :

$$a_{ij}^\varepsilon(x, \lambda) = a_{ij}(x/\varepsilon, \lambda),$$

et on fait les hypothèses suivantes (cf. André-Chipot [3], Artola-Duvaut [4])

$$(3.1)\qquad \begin{cases} (i) \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad y \to a_{ij}(y, \lambda) \text{ est mesurable et } Y - \text{périodique} \\ (ii) \quad \exists M, \quad \sup\limits_{y,\lambda} |a_{ij}(y, \lambda)| \le M \\ (iii) \quad \exists\alpha_0 > 0, \quad a_{ij}(y, \lambda)\xi_i\xi_j \ge \alpha_0|\xi|^2 \quad p.p \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \\ (iv) \quad a_{ij}(y, \lambda) \text{ est lipschitzienne en } \lambda \text{ i.e. } \exists K \ge 0 \\ \qquad |a_{ij}(y, \lambda) - a_{ij}(y, \beta)| \le K|\lambda - \beta| \quad p.p \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\lambda, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall i, j. \end{cases}$$

Théorème 3.1. *Soit f_ε vérifiant (2.5) et $g \in L^2(\partial T)$ une fonction Y- périodique, alors sous les hypothèses $(3.1-i)$ à $(3.1-iv)$ il existe une solution unique $u_\varepsilon \in V_\varepsilon$ du problème (2.4).*

Démonstration :

Existence : On utilisera le théorème du point fixe de Schauder que nous rappelons pour la commodité du lecteur.

Tout d'abord, on vérifie que la solution est bornée dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$, puis on construit une application S continue d'un compact K dans K de telle manière que $S(K)$ soit relativement compact. Enfin, on applique le théorème de Schauder pour obtenir l'existence d'un point fixe qui sera solution de (2.4).

Théorème 3.2. (cf. Gilbarg-Trudinger [16]) *Soit K un convexe fermé d'un espace de Banach. Soit S une application continue de K dans K telle que $S(K)$ soit relativement compact (i.e $\overline{S(K)}$ est compact dans K). Alors S a un point fixe dans K.*

Soit $w \in L^2(\Omega_\varepsilon)$.
Il est bien connu que le problème

$$(3.2)\quad \begin{cases} \text{trouver} \quad u_\varepsilon \in V_\varepsilon \quad \text{tel} \quad \text{que} : \quad \forall v \in V_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, w)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon v\,d\sigma = < f_\varepsilon, v >_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon v\,d\sigma \end{cases}$$

possède une et une seule solution u_ε dans Ω_ε.
Définissons $S : L^2(\Omega_\varepsilon) \longrightarrow L^2(\Omega_\varepsilon)$ par $S(w) = u_\varepsilon$ où u_ε est la solution de (3.2).
Vérifions maintenant qu'il existe une constante c_ε dépendant éventuellement de ε telle que :

$$(3.3)\qquad \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \leq c_\varepsilon.$$

On prend donc u_ε comme fonction test dans la formulation variationnelle (3.2) :

$$(3.4)\quad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, w)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\,dx = < f_\varepsilon, u_\varepsilon >_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon u_\varepsilon\,d\sigma - \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} {u_\varepsilon}^2\,d\sigma.$$

Le dernier terme de l'égalité (3.4) étant positif, il vient alors

$$(3.5)\quad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, w)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\,dx \leq c_\varepsilon \|f_\varepsilon\|_{V'_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + c_\varepsilon \|g_\varepsilon\|_{L^2(\partial T_\varepsilon)} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

car

$$(3.6)\qquad r \circ \gamma_0 : H^1(\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{\gamma_0} L^2(\partial\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{r} L^2(\partial T_\varepsilon)$$

est linéaire continue, où γ_0 est la norme de l'application trace de $H^1(\Omega_\varepsilon)$ dans $L^2(\partial T_\varepsilon)$ et r est la restriction de $\partial\Omega_\varepsilon$ à ∂T_ε.
On a donc

$$(3.7) \qquad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, w)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\,dx \leq c_\varepsilon\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + c_\varepsilon\|g_\varepsilon\|_{L^2(\partial T_\varepsilon)}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

En utilisant (3.1-iii) dans (3.7), on trouve :

$$(3.8) \qquad \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \Big(c_\varepsilon + c_\varepsilon\|g_\varepsilon\|_{L^2(\partial T_\varepsilon)}\Big),$$

où $(c_\varepsilon + c_\varepsilon\|g_\varepsilon\|_{L^2(\partial T_\varepsilon)})$ est une constante dépendant éventuellement de ε.
Et comme l'inégalité de Poincaré reste valable sur V_ε (voir remarque 4.5), on a bien

$$(3.9) \qquad \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c_\varepsilon.$$

Donc il existe une constante c_ε :

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c_\varepsilon.$$

Soit

$$(3.10) \qquad K = B(0, c_\varepsilon) = \{v \mid v \in L^2(\Omega_\varepsilon) \quad , |v|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c_\varepsilon\},$$

où c_ε est la constante de (3.9). K est un convexe fermé de $L^2(\Omega_\varepsilon)$, et on a

$$(3.11) \qquad S(K) \subset \{u_\varepsilon \mid \quad \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \leq c_\varepsilon\} \subset K,$$

et $S(K)$ est donc relativement compact dans K car l'injection de $H^1(\Omega_\varepsilon)$ dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$ est compacte. Il reste à démontrer que S est continue, et à appliquer le théorème de Schauder pour obtenir l'existence d'un point fixe qui sera solution de (2.5) et donc de (2.4).
On veut montrer que pour toute suite (w_n) telle que w_n converge vers w dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$, on a $S(w_n)$ converge vers $S(w)$ dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$. On pose $u_n^\varepsilon = S(w_n)$; la suite (u_n^ε) vérifie pour tout $v \in V_\varepsilon$

$$(3.12) \qquad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, w_n)\frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_n^\varepsilon v\,d\sigma = < f_\varepsilon, v >_{V_\varepsilon', V_\varepsilon} + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon v\,d\sigma.$$

Par les calculs précédents, on sait qu'il existe une constante c_ε telle que

$$\|u_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c_\varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

On peut extraire une sous-suite de (u_n^ε) notée $(u_{n_k}^\varepsilon)$ telle que :

$$\begin{cases} u_{n_k}^\varepsilon \longrightarrow u_*^\varepsilon \text{ dans } L^2(\Omega_\varepsilon) \text{ fort} \\ u_{n_k}^\varepsilon \rightharpoonup u_*^\varepsilon \text{ dans } H^1(\Omega_\varepsilon) \text{ faible} \\ u_{n_k}^\varepsilon \longrightarrow u_*^\varepsilon \text{ p.p. dans } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.14}$$

Si on montre que $u_*^\varepsilon = u_\varepsilon = S(w)$ alors (u_n^ε) aura une seule valeur d'adhérence dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$, et donc $u_n^\varepsilon \longrightarrow u_\varepsilon$.
On a :

$$w_{n_k} \longrightarrow w \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega_\varepsilon).$$

Après extraction éventuelle d'une autre sous-suite on a

$$a_{ij}(x/\varepsilon, w_{n_k}) \longrightarrow a_{ij}(x/\varepsilon, w) \text{ p.p. dans } \Omega_\varepsilon, \tag{3.15}$$

et

$$\begin{cases} a_{ij}(x/\varepsilon, w_{n_k})\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \longrightarrow a_{ij}(x/\varepsilon, w)\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \quad \text{p.p.} \\ |a_{ij}(x/\varepsilon, w_{n_k})\dfrac{\partial v}{\partial x_j}| \leq C|\nabla v| \in L^2(\Omega_\varepsilon). \end{cases} \tag{3.16}$$

L'application du théorème de convergence dominée de Lebesgue montre alors que

$$a_{ij}(x/\varepsilon, w_{n_k})\frac{\partial v}{\partial x_j} \longrightarrow a_{ij}(x/\varepsilon, w)\frac{\partial v}{\partial x_j} \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega_\varepsilon). \tag{3.17}$$

Or, d'après (3.14)

$$\frac{\partial u_{n_k}^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u_*^\varepsilon}{\partial x_i} \text{ dans } L^2(\Omega_\varepsilon) \text{ faible}, \tag{3.18}$$

et

$$\alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_n^\varepsilon v \, d\sigma \longrightarrow \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_*^\varepsilon v \, d\sigma. \tag{3.19}$$

Finalement, on a pour tout $v \in V_\varepsilon$

$$(3.20)\quad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, w)\frac{\partial u_*^\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon v\,d\sigma - \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_*^\varepsilon v\,d\sigma + < f_\varepsilon, u_\varepsilon >_{V_\varepsilon', V_\varepsilon},$$

d'où l'on déduit

$$(3.21)\quad u_*^\varepsilon = u_\varepsilon = S(w);$$

ceci démontre la continuité de S; par conséquent, en appliquant le théorème du point fixe de Schauder, le système (1.4) possède au moins une solution.

Unicité : Nous allons procéder comme dans André-Chipot [3].
On pose :

$$(3.22)\quad m(t) = \sup_{|u_\varepsilon - v_\varepsilon|\le t;\ 1\le i,j\le n;\ x\in\Omega_\varepsilon} |a_{ij}(x, \delta u_\varepsilon) - a_{ij}(x, \delta v_\varepsilon)|,$$

et

$$(3.23)\quad \int_{0+} \frac{dt}{m(t)} = \lim_{x\to 0+} \int_x^y \frac{dt}{m(t)},$$

où y est une valeur finie choisie de telle manière que $\displaystyle\int_x^y \frac{dt}{m(t)} < +\infty$.
D'après l'hypothèse (3.1-iv), on a $m(t) \le ct$, d'où

$$(3.24)\quad \int_{0+} \frac{dt}{m(t)} = +\infty.$$

Soient u_ε et v_ε deux solutions de (2.4). Montrons que $u_\varepsilon = v_\varepsilon$.
Soit d un petit paramètre ($d > 0$) destiné à tendre vers 0. On pose :

$$(3.25)\quad F_d(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_d^x \frac{dt}{m(t)^2} & \text{si} \quad x \ge d \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

On a, pour tout $w \in V_\varepsilon$:

$$(3.26)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon w\,d\sigma = < f_\varepsilon, w >_{V_\varepsilon', V_\varepsilon} + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon w\,d\sigma \\ \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta v_\varepsilon)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} v_\varepsilon w\,d\sigma = < f_\varepsilon, w >_{V_\varepsilon', V_\varepsilon} + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon w\,d\sigma, \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

$$(3.27)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon w\,d\sigma \\ \displaystyle = \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta v_\varepsilon)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} v_\varepsilon w\,d\sigma \quad \forall w \in V_\varepsilon. \end{cases}$$

En ajoutant le terme $\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial F_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i}\,dx$ dans les deux membres de l'égalité (3.27), et en prenant $w = F_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon) \in V_\varepsilon$ comme fonction test; il vient alors

$$(3.28)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\frac{\partial(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_j}\frac{\partial F_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i}\,dx \\ \displaystyle = -\int_{\Omega_\varepsilon}\Big[a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon) - a_{ij}(x/\varepsilon, v_\varepsilon)\Big]\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial F_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i}\,dx \\ \displaystyle -\alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)F_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\,d\sigma. \end{cases}$$

D'après (3.25), on a :

$$(3.29)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_E a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\frac{1}{m^2(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}\frac{\partial(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i}\frac{\partial(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_j}\,dx \\ \displaystyle = -\int_E\Big[a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon) - a_{ij}(x/\varepsilon, \delta v_\varepsilon)\Big]\frac{1}{m^2(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i}\,dx \\ \displaystyle -\alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)F_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\,d\sigma, \end{cases}$$

où $E = [u_\varepsilon - v_\varepsilon > d]$. On pose maintenant

$$(3.30)\qquad G_d(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_d^t \frac{ds}{m(s)} & \text{si} \quad t \geq d \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a : $G_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon) \in V_\varepsilon$, et

$$
(3.31)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_E a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon) \frac{1}{m^2(u_\varepsilon - v_\varepsilon)} \frac{\partial(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i} \frac{\partial(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_j}\, dx \\
&\qquad = \int_E a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon) \frac{\partial G_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i} \frac{\partial G_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_j}\, dx \\
&\qquad = -\int_E \Big[a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon) - a_{ij}(x/\varepsilon, \delta v_\varepsilon)\Big] \frac{1}{m^2(u_\varepsilon - v_\varepsilon)} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i}\, dx \\
&\qquad -\alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} (u_\varepsilon - v_\varepsilon) F_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\, d\sigma \\
&\qquad \le \int_E \frac{|a_{ij}(x/\varepsilon, \delta v_\varepsilon) - a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)|}{m^2(u_\varepsilon - v_\varepsilon)} |\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}| |\frac{\partial(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i}\, dx| \\
&\qquad \le K \sum_{i,j} \int_E |\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}| |\frac{\partial(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i} \frac{1}{m(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}\, dx|.
\end{aligned}
\right.
$$

D'où :

$$
(3.32)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon) \frac{1}{m^2(u_\varepsilon - v_\varepsilon)} \frac{\partial(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i} \frac{\partial(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_j}\, dx \\
&\qquad \le K \sum_{i,j} \int_E |\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}| \Big|\frac{\partial(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i} \frac{1}{m(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}\Big|\, dx.
\end{aligned}
\right.
$$

On a donc

$$
(3.33)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon) \frac{\partial G_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_i} \frac{\partial G_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)}{\partial x_j}\, dx \\
&\qquad \le n^2 K \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v_\varepsilon| |\nabla G_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)|\, dx,
\end{aligned}
\right.
$$

d'où l'on déduit

$$
(3.34)\qquad \alpha_0 \Big(\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla G_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)|^2\, dx\Big)^{1/2} \le n^2 \Big(\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v_\varepsilon|^2\Big)^{1/2}.
$$

Il découle de l'application de l'inégalité de Poincaré que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |G_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon)|^2 \, dx \leq C, \tag{3.35}$$

où C est une constante indépendante de d. On fait tendre d vers 0,

$$G_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon) \longrightarrow \int_{0+}^{(u_\varepsilon - v_\varepsilon)} \frac{ds}{m(s)} = +\infty. \tag{3.36}$$

Or

$$G_d(u_\varepsilon - v_\varepsilon) \longrightarrow \phi \text{ dans } L^2(\Omega),$$

où ϕ est finie presque partout.
De ces deux résultats contradictoires on déduit que

$$\text{mesure}(u_\varepsilon - v_\varepsilon > 0) = 0, \tag{3.37}$$

et on a donc

$$u_\varepsilon - v_\varepsilon \leq 0. \tag{3.38}$$

En échangeant les rôles de u_ε et v_ε, on obtient

$$v_\varepsilon - u_\varepsilon \leq 0 \quad \text{p.p.} \tag{3.39}$$

Soit finalement

$$u_\varepsilon = v_\varepsilon. \tag{3.40}$$

4. Lemmes de base

Pour traiter la non linéarité de l'opérateur $a_{ij}(y,u)$, on aura besoin de lemmes auxiliaires dus à Artola-Duvaut [4], et que nous rappelons ici pour faciliter la lecture.

Soit une fonction β définie par :

$$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(y,\lambda) \longmapsto \beta(y,\lambda)$$

possédant les propriétés suivantes :

$$(4.1)\quad \begin{cases} (i) \quad (y,\lambda) \to \beta(y,\lambda)\ Y- \text{ périodique en } y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \\ (ii) \quad \exists c \quad \text{telle que} \quad \sup\limits_{\lambda} \int_Y |\beta(y,\lambda)|^2\, dy \le c. \\ (iii) \quad \exists K>0 \text{ telle que } |\beta(y,\lambda)-\beta(y,\mu)| \le K|\lambda-\mu|, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On introduit

$$(4.2)\qquad \beta^\varepsilon(x,\lambda) = \beta(x/\varepsilon,\lambda).$$

Lemme 4.1. (cf. Artola-Duvaut [4]) *Si β est une fonction vérifiant* (4.1), *alors,* $\forall p \ge 1$,

$$(4.3)\qquad \int_\Omega |\beta^\varepsilon(x,\phi(x)) - \beta^\varepsilon(x,\psi(x))|^p\, dx \le K^p \int_\Omega |\phi(x)-\psi(x)|^p\, dx, \quad \forall \phi,\psi \in L^p(\Omega),$$

$$(4.4)\qquad \int_\Omega |\frac{\partial \beta^\varepsilon}{\partial \lambda}(x,\phi(x))|^p |\frac{\partial \phi}{\partial x_i}|^p\, dx \le K^p \int_\Omega |\frac{\partial \phi}{\partial x_i}|^p\, dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Pour la démonstration de ce lemme, voir Artola-Duvaut [4].

On note $\mathbb{L}^2(Y) = [L^2(Y)]^n$, $\mathbb{H}^1(Y) = [H^1(Y)]^n$...

Pour étudier le comportement des u_ε pour $\varepsilon \to 0$, on est obligé de les prolonger sur Ω tout entier (les fonctions u_ε étant définies sur des domaines variables Ω_ε). On va utiliser les lemmes suivants

Lemme 4.2. (cf. Cioranescu-Saint Jean Paulin [11]) *Il existe un opérateur de prolongement $P \in \mathcal{L}(H^1(Y^*);H^1(Y))$ et il existe une constante c tels que :*

$$(4.5)\qquad \|\nabla P\phi\|_{\mathbb{L}^2(Y)} \le c\, \|\nabla \phi\|_{\mathbb{L}^2(Y^*)}, \qquad \forall \phi \in H^1(Y^*).$$

Lemme 4.3. (cf. Cioranescu-Saint Jean Paulin [11]) *Ils existent un opérateur de prolongement $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(V_\varepsilon; H_0^1(\Omega)$ et une constante c indépendante de ε tels que*

$$\|\nabla P_\varepsilon w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c \, \|\nabla w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall w \in V_\varepsilon. \tag{4.6}$$

Remarque 4.4. D'après le lemme 4.3, on a l'inégalité de Poincaré dans V_ε : il existe une constante K indépendante de ε telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall v \in V_\varepsilon. \tag{4.7}$$

Preuve :
On a $\Omega = \Omega_\varepsilon \cup (\Omega \backslash \Omega_\varepsilon)$, d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \|v\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} |P_\varepsilon v|^2 \, dx + \int_{\Omega \backslash \Omega_\varepsilon} |P_\varepsilon v|^2 \, dx \\ \\ \qquad = \displaystyle\int_\Omega |P_\varepsilon v|^2 \, dx = \|P_\varepsilon v\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{array} \right. \tag{4.8}$$

ce qui entraîne

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|P_\varepsilon v\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.9}$$

Or $P_\varepsilon v \in H_0^1(\Omega)$, et l'inégalité de Poincaré est vérifiée dans $H_0^1(\Omega)$; donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \|P_\varepsilon v\|_{L^2(\Omega)} \leq K' \|\nabla P_\varepsilon v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ \\ \qquad \leq K' c \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)}, \end{array} \right. \tag{4.10}$$

(d'après le lemme 4.3). On a donc

$$\|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K' c \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall v \in V_\varepsilon. \tag{4.11}$$

On va désigner par c_g la constante :

$$c_g = \frac{1}{|Y^*|} \int_{\partial T} g(y) \, d\sigma. \tag{4.12}$$

On introduit la fonction ψ_g (cf. Cioranescu-Donato [10]) solution du problème :

$$(4.13)\qquad \begin{cases} \Delta\psi_g = c_g \text{ dans } Y^* \\ \dfrac{\partial\psi_g}{\partial n} = g \text{ sur } \partial T \\ \psi_g \text{ est } Y-\text{périodique et de moyenne nulle.} \end{cases}$$

En posant $\psi_g^\varepsilon(x) = \psi_g(x/\varepsilon)$ pour $x \in \Omega_\varepsilon$, on a :

$$(4.14)\qquad \begin{cases} \Delta\psi_g^\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^2} c_g \text{ dans } \mathbb{R}^n \setminus \tau(\varepsilon\bar{T}) \\ \dfrac{\partial\psi_g^\varepsilon}{\partial n} = \dfrac{1}{\varepsilon}\, g(x/\varepsilon) \text{ sur } \partial\tau(\varepsilon\bar{T}). \end{cases}$$

On peut démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.5. (cf. Cioranescu-Donato [10]) *Soit $g \in L^2(\partial T)$, la solution ψ_g^ε de (4.13) appartient à $W^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$, alors :*

$$(4.15)\qquad \varepsilon \int_{\partial T_\varepsilon} g(x/\varepsilon) v(x)\, d\sigma = \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} (\frac{\partial\psi_g}{\partial y_i})(x/\varepsilon) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + c_g \int_{\Omega_\varepsilon} v(x)\, dx$$

pour tout $v \in W^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ tel que $v_{|\partial\Omega} = 0$.

Ce lemme nous permettra de transformer des intégrales de surface en intégrales de volume. Cette technique a été introduite par Vanninathan pour l'étude du problème de Steklov [25].

5. Homogénéisation

5.1. Estimations a priori

On supposera dans toute la suite qu'il existe une constante c positive et indépendante de ε telle que :

$$\|f_\varepsilon\|_{V'_\varepsilon} \leq c, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{5.1}$$

Cette hypothèse est vérifiée par exemple si (f_ε) est bornée dans $L^2(\Omega)$ indépendamment de ε.

Proposition 5.1. *Soit u_ε la solution du problème (2.4) avec f_ε vérifiant (5.1). Il existe alors deux constantes positives c_1 et c_2 indépendantes de ε telles que :*

$$c_2 \frac{|c_g|}{\varepsilon} \leq \|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c_1\Big(\frac{|c_g|}{\varepsilon} + 1\Big), \tag{5.2}$$

la constante c_g étant définie par (4.12).

Démonstration : On commence par montrer la deuxième inégalité de (5.2) en prenant u_ε comme fonction test dans (2.5). Après, on vérifie la première inégalité de (5.2).

i) On prend u_ε comme fonction test dans la formulation variationnelle (2.5) :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\, dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon^2\, d\sigma = < f_\varepsilon, u_\varepsilon >_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon u_\varepsilon\, d\sigma, \tag{5.3}$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\, dx = < f_\varepsilon, u_\varepsilon >_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon u_\varepsilon\, d\sigma - \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon^2\, d\sigma.$$

La dernière intégrale est positive, d'où en utilisant (4.7), (5.1) et grâce aux hypothèses sur ψ_g :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\, dx &\leq c\|f_\varepsilon\|_{V'_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_y \psi_g(x/\varepsilon) \nabla u_\varepsilon\, dx \\ &\quad + \frac{c_g}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\, dx \\ &\leq c' \|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla_y \psi_g\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} \|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{c_g}{\varepsilon} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq c' \|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} + c\|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} + c\frac{c_g}{\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned} \right. \tag{5.4}$$

(où on a utilisé (3.7)). Par suite

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{c}{\varepsilon}(|c_g| + \varepsilon), \tag{5.5}$$

la constante c étant indépendante de ε. L'inégalité de droite de (5.2) est démontrée. Il reste à démontrer l'inégalité de gauche.
ii) Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega), v > 0$. D'après la formulation variationnelle on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx - \frac{c_g}{\varepsilon}\int_{\Omega_\varepsilon} v(x)\,dx =< f_\varepsilon, v >_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial \psi_g}{\partial y_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \\ \\ \qquad\qquad -\alpha\varepsilon \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} v u_\varepsilon\,d\sigma, \end{array} \right. \tag{5.6}$$

Pour le dernier terme, on applique de nouveau le lemmme 4.5 avec $g = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx - \frac{c_g}{\varepsilon}\int_{\Omega_\varepsilon} v(x)\,dx =< f_\varepsilon, v >_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial \psi_g}{\partial y_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \\ \\ \qquad\qquad -\alpha\varepsilon \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_i}(x/\varepsilon)\frac{\partial (v u_\varepsilon)}{\partial x_i}\,dx - \alpha c_1 \int_{\partial\Omega_\varepsilon} v u_\varepsilon\,dx, \end{array} \right. \tag{5.7}$$

d'où

$$\frac{|c_g|}{\varepsilon}\int_{\Omega_\varepsilon} v(x)\,dx \leq c\|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)}\|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|f_\varepsilon\|_{V'_\varepsilon}\|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + c\|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{5.7}$$

On en déduit que pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega), v > 0$:

$$\frac{|c_g|}{\varepsilon} \leq c\|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)}\Big(\frac{\|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\int_\Omega v(x)\,dx}\Big) + c'\Big(\frac{\|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\int_\Omega v(x)\,dx}\Big), \tag{5.8}$$

où le terme $\Big(\dfrac{\|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\int_\Omega v(x)\,dx}\Big)$ est une constante positive.
Finalement pour ε suffisamment petit, on a

$$c'\frac{|c_g|}{\varepsilon} \leq \|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)}. \tag{5.9}$$

Corollaire 5.2. *Sous les hypothèses de la proposition (5.1), on a*

(5.10) i) $\|\varepsilon u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c$ *si* $m_{\partial T}(g) \neq 0$.

(5.11) ii) $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c$ *si* $m_{\partial T}(g) = 0$.

5.2. Passage à la limite. Cas où $m_{\partial T}(g) \neq 0$.

Il est question dans ce paragraphe, de faire tendre ε vers zéro et de trouver le problème limite. Mais, avant d'énoncer le théorème de convergence, nous avons besoin de quelques notations supplémentaires.
Posons

$$K(\alpha,\mu) = \begin{cases} \alpha\dfrac{|\partial T|}{|Y|} & \text{si} \quad \mu = 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad \mu > 1, \end{cases} \tag{5.12}$$

et

$$\theta = \frac{|Y^*|}{|Y|}. \tag{5.13}$$

Introduisons, pour $i \in \{1,2,...,n\}$, les fonctions $\chi^i(y,\lambda)$ solutions du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_k}(a_{lk}(y,\lambda)\dfrac{\partial}{\partial y_l}(\chi^i(y,\lambda) - y_i) = 0 \text{ dans } Y^* \\ \left[a_{lk}(y,\lambda)\dfrac{\partial}{\partial y_l}(\chi^i(y,\lambda) - y_i)n_k\right] = 0 \text{ sur } \partial T \\ \chi^i(y,\lambda) \quad Y- \text{ périodique et de moyenne nulle,} \end{cases} \tag{5.14}$$

Pour λ fixé dans $\mathbb{R}$, l'existence et l'unicité des fonctions χ^i (à une constante prés) est donnée par le cas classique.

La formulation variationnelle de (2.4) est

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon v\,d\sigma = < f_\varepsilon, v >_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon v\,d\sigma, \tag{5.15}$$

où ici $\delta = \varepsilon$ puisque $m_{\partial T}(g) \neq 0$.

On démontre le théorème suivant :

Théorème 5.3. *Soit u_ε la solution du problème (2.4) avec f_ε vérifiant (5.1). On suppose que $m_{\partial T}(g) \neq 0$. Alors lorsque ε tend vers zéro, on a*

$$P_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon) \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible,}$$

où u est la solution du problème

$$\text{(5.16)} \qquad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left\{q_{ij}(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right\} + K(\alpha,\mu)u = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\partial T} g(y)\,d\sigma, \end{cases}$$

et les coefficients homogénéisés q_{ij} sont donnés par :

$$\text{(5.17)} \qquad q_{ij}(u) = \frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} a_{kl}(y,u)\frac{\partial(\chi^i - y_i)}{\partial y_k}\frac{\partial(\chi^j - y_j)}{\partial y_l}\,dy.$$

Dans tout ce qui suit, c désigne différentes constantes positives indépendantes de ε et on notera par $\widetilde{\ }$ tout prolongement par zéro en dehors de Ω_ε.

Démonstration : Nous allons ici utiliser la méthode de l'énergie, on aura recours aux lemmes 4.5 et 4.1 pour résoudre les difficultés propres à notre cas résulant de la présence des termes sur le bord des trous et de la non linéarité.

D'après le corollaire 5.2, on a

$$\|\varepsilon u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c,$$

et après extraction éventuelle d'une sous-suite, on a

$$\text{(5.18)} \qquad P_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon) \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.}$$

On pose :

$$C_\varepsilon = \Big(a_{ij}(x/\varepsilon, \varepsilon u_\varepsilon)\varepsilon\nabla u_\varepsilon\Big) \text{ dans } \Omega_\varepsilon,$$

et l'on vérifie que

$$\text{(5.19)} \qquad \begin{cases} -\text{ div } C_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ C_\varepsilon.n + \alpha\varepsilon^{\mu+1}u_\varepsilon = \varepsilon g_\varepsilon \text{ sur } \partial T_\varepsilon. \end{cases}$$

Grâce aux estimations a priori sur u_ε, on vérifie sans peine que C_ε est borné dans $\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)$. En extrayant éventuellement une sous-suite, on a

$$\text{(5.20)} \qquad \widetilde{C_\varepsilon} \rightharpoonup C^* \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.}$$

En prenant $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ comme fonction test dans (5.15) et utilisant (5.19), on trouve

$$(5.21)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \widetilde{C_\varepsilon}.\nabla\phi\, dx =< \varepsilon f_\varepsilon, \phi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \int_{\partial T_\varepsilon} C_\varepsilon.n\phi\, d\sigma \\ \qquad\qquad =< \varepsilon f_\varepsilon, \phi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \varepsilon \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon \phi\, d\sigma - \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} (\varepsilon u_\varepsilon)\phi\, d\sigma. \end{cases}$$

En vertu du lemme 4.5, on a

$$(5.22)\qquad \varepsilon \int_{\partial T_\varepsilon} g(x/\varepsilon)v(x)\, d\sigma = \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} (\frac{\partial \psi_g}{\partial y_i})(x/\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + c_g \int_{\Omega_\varepsilon} v(x)\, dx,$$

par suite

$$(5.23)\quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon \phi\, d\sigma = (\frac{1}{|Y|}\int_{\partial T} g(y)\, d\sigma) \int_\Omega \phi(x)\, dx \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} \alpha(\varepsilon u_\varepsilon)\phi\, d\sigma = K(\alpha,\mu) \int_\Omega u\phi(x)\, dx. \end{cases}$$

Et, en passant à la limite dans (5.21), on obtient donc

$$(5.24)\qquad \int_\Omega C^*\nabla\phi\, dx = \Big(\frac{1}{|Y|}\int_{\partial T} g(y)\, d\sigma\Big) \int_\Omega \phi(x)\, dx - \int_\Omega K(\alpha,\mu)u\phi(x)\, dx.$$

Le premier terme du membre de droite de (5.24) est borné indépendamment de ε, donc converge vers zéro quand ε tend vers zéro; de plus

$$c_g \chi_{\Omega_\varepsilon} \rightharpoonup c_g \frac{|Y^*|}{|Y|} \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible } *,$$

et donc

$$c_g \chi_{\Omega_\varepsilon} \longrightarrow \frac{1}{|Y|}\int_{\partial T} g(y)\, d\sigma \text{ dans } W^{-1,\infty}(\Omega) \text{ fort.}$$

On en déduit que

$$c_g \chi_{\Omega_\varepsilon} \longrightarrow \frac{1}{|Y|}\int_{\partial T} g(y)\, d\sigma \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort.}$$

Il en découle que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon \phi\, d\sigma = (\frac{1}{|Y|}\int_{\partial T} g(y)\, d\sigma) \int_\Omega \phi(x)\, dx,$$

De même, pour la limite de $\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} \alpha(\varepsilon u_\varepsilon)\phi \, d\sigma$, on prend $g = 1$ dans le lemme 4.5, ce qui donne

$$\alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} \varepsilon u_\varepsilon \phi \, d\sigma = \alpha\varepsilon^\mu \int_{\Omega_\varepsilon} (\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i})(x/\varepsilon) \frac{\partial(\varepsilon u_\varepsilon \phi)}{\partial x_i} \, dx + c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon u_\varepsilon \phi(x) \, dx,$$

et en utilisant (5.20), (5.23) et le raisonnement ci-dessus, on obtient (5.24).
L'équation vérifiée par C^* s'écrit donc

$$-\text{ div } C^* + K(\alpha, \mu)u = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial T} g(y) \, d\sigma. \tag{5.25}$$

Identification de C^* : On pose $\forall \lambda \in \mathbb{R}^N$, $w^i(y,\lambda) = y_i - \chi^i(y,\lambda)$ où les $\chi^i(y,\lambda)$ sont définies par (5.14), alors les fonctions $w^i(y,\lambda) \in H^1(Y^*)$ sont solutions du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_k}\Big(a_{lk}(y,\lambda)\dfrac{\partial}{\partial y_l}(w^i(y,\lambda)\Big) = 0 \text{ dans } Y^* \\ \\ \Big[a_{lk}(y,\lambda)\dfrac{\partial}{\partial y_l}(w^i(y,\lambda)n_k\Big] = 0 \text{ sur } \partial T \\ \\ w^i(y,\lambda) - y_i \quad Y - \text{ périodique et de moyenne nulle.} \end{cases} \tag{5.26}$$

On introduit

$$w^\varepsilon(x,\lambda) = P_\varepsilon(\varepsilon w(x/\varepsilon,\lambda)) = \zeta.x - \varepsilon P\chi(x/\varepsilon,\lambda), \text{ où } \zeta \in \mathbb{R}^n, \tag{5.27}$$

On aura besoin du lemme suivant dont la démonstration est dans Artola-Duvaut [4].

Lemme 5.4. (cf. Artola-Duvaut [4]) *Si les (a_{ij}) sont réguliers, et vérifient (3.1), alors les fonctions χ^i et η_j vérifient aussi (4.1).*

On déduit du lemme 5.4 que $\chi(x/\varepsilon, \varepsilon u_\varepsilon)$ est majorée indépendamment de $y \in \mathbb{R}^n$. ce qui entraîne que

$$w^\varepsilon(x, u_\varepsilon) \longrightarrow \zeta.x \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \text{ fort.} \tag{5.28}$$

Rappelons que

$$\frac{d}{dx_j} w^\varepsilon(x, u_\varepsilon) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_j} w^\varepsilon(x,\lambda)_{|\lambda = u_\varepsilon}\Big) + \Big(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \lambda}(x,\lambda)_{|\lambda = u_\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}. \tag{5.29}$$

Et, d'après le lemme 5.4 puis le lemme 4.1, on a $\big(\frac{\partial}{\partial\lambda}\chi(x/\varepsilon,\lambda)_{|\lambda=\, u_\varepsilon}\big)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}$ est borné dans $\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)$.

Il en résulte que

$$(5.30)\Big(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\lambda}(x,\lambda)_{|\lambda=\, u_\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} = -\varepsilon\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}\chi(x/\varepsilon,\lambda)_{|\lambda=\, u_\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ fort.}$$

On pose :

$$\eta_j^\varepsilon(x,u_\varepsilon) = \Big(a_{ji}^\varepsilon(x,P_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon)\Big)\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i} \text{ dans } \Omega_\varepsilon.$$

L'équation vérifiée par η_ε est

$$(5.31) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}\eta^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \eta^\varepsilon.n = 0 \text{ sur } \partial T_\varepsilon. \end{cases}$$

Montrons que

$$(5.32) \qquad \widetilde{\eta^\varepsilon}(x,u_\varepsilon) \rightharpoonup \mathcal{A}\zeta \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible,}$$

où $\mathcal{A}$ est la matrice définie par

$$\forall\zeta\in\mathbb{R}^n, \quad \mathcal{A}\zeta = \frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} A(y,\lambda)\nabla w(y,\lambda)\,dy,$$

avec $\Big(A(y,\lambda)\Big)_{ij} = a_{ij}(y,\lambda)$.

En effet

$$(5.33) \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \widetilde{\eta^\varepsilon}(x,u_\varepsilon)\phi(x)\,dx = \int_\Omega a_{ij}^\varepsilon(x,\widetilde{P_\varepsilon}(\varepsilon u_\varepsilon))\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i}\phi\,dx \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_\Omega \Big[a_{ij}^\varepsilon(x,\widetilde{P_\varepsilon}(\varepsilon u_\varepsilon)) - a_{ij}^\varepsilon\widetilde{(x,u)}\Big]\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i}\phi\,dx + \int_\Omega a_{ij}^\varepsilon\widetilde{(x,u)}\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i}\phi\,dx. \end{cases}$$

Et, l'on a d'après (3.1-iv)

$$(5.34) \begin{cases} |\displaystyle\int_\Omega \Big[a_{ij}^\varepsilon(x,\widetilde{P_\varepsilon}(\varepsilon u_\varepsilon)) - a_{ij}^\varepsilon\widetilde{(x,u)}\Big]\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i}\phi\,dx| \le K\int_{\Omega_\varepsilon} |P_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon) - u||\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i}||\phi|\,dx \\ \qquad\qquad \le Kc\|P_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon) - u\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Or $P_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon) \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ fort, ce qui implique que lorsque ε tend vers zéro, le premier terme du membre de droite de (5.33) tend vers zéro, et par suite

$$(5.35)\quad \int_\Omega \Big[a_{ij}^\varepsilon(\widetilde{x,\varepsilon u_\varepsilon})\Big(\frac{\partial Pw}{\partial y_i}\Big)\Big](x/\varepsilon,\lambda)\phi\,dx \longrightarrow \int_\Omega \Big[\frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} a_{ij}(y,u)\Big(\frac{\partial w}{\partial y_i}\Big)(y,\lambda)\Big]\phi\,dydx,$$

ce qui montre (5.32).
On multiplie (5.19) par ϕw^ε et (5.31) par $\phi P_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon)$ respectivement, et on intègre; il vient pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(5.36)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega C_\varepsilon w^\varepsilon \nabla\phi\,dx + \int_\Omega C_\varepsilon \phi\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} w^\varepsilon(x,\lambda)_{|\lambda=\,u_\varepsilon}\Big)\,dx \\ \displaystyle + \int_\Omega C_\varepsilon\phi\Big(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\lambda}(x,\lambda)_{|\lambda=\,u_\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega \varepsilon f_\varepsilon \phi w^\varepsilon\,dx \\ \displaystyle\qquad = \int_{\partial T_\varepsilon}(\varepsilon g_\varepsilon)\phi w^\varepsilon\,d\sigma + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon}(\varepsilon u_\varepsilon) w^\varepsilon \phi\,d\sigma, \end{cases}$$

et

$$(5.37)\quad \int_\Omega \Big(\eta^\varepsilon(\nabla\phi)P_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon) + \eta_j^\varepsilon \phi \frac{\partial}{\partial x_j}(P_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon)\Big)\,dx = 0.$$

En faisant la différence (5.36)-(5.37), on trouve encore pour tout ϕ dans $\mathcal{D}(\Omega)$

$$(5.38)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega C_\varepsilon(\nabla\phi)w^\varepsilon\,dx - \int_\Omega \eta^\varepsilon(\nabla\phi)P_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon)\,dx - \int_{\partial T_\varepsilon}(\varepsilon g_\varepsilon)\phi w^\varepsilon\,d\sigma \\ \displaystyle\qquad + \int_\Omega C_\varepsilon\phi\Big(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\lambda}(x,\lambda)_{|\lambda=\,u_\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\,dx + \alpha\varepsilon^\mu\int_{\partial T_\varepsilon}(\varepsilon u_\varepsilon)w^\varepsilon\phi\,d\sigma = <\varepsilon f_\varepsilon,\phi>. \end{cases}$$

On fait tendre ε vers zéro, et on utilise (5.28) et (5.30), et d'après le lemme 4.5, on obtient

$$(5.39)\quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} C_\varepsilon(\nabla\phi)w^\varepsilon\,dx = \int_\Omega C^*\nabla\phi\zeta.x\,dx \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} C_\varepsilon\phi\Big(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\lambda}(x,\lambda)_{|\lambda=\,u_\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\,dx = 0 \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha\varepsilon^\mu\int_{\partial T_\varepsilon}(\varepsilon u_\varepsilon)\phi w^\varepsilon\,d\sigma = K(\alpha,\mu)\int_\Omega u\zeta.x\phi(x)\,dx. \end{cases}$$

On obtient $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(5.40)\quad \int_\Omega C^*(\nabla\phi)\zeta.x\,dx - \int_\Omega \mathcal{A}\zeta u(\nabla\phi)\,dx - \frac{1}{|Y|}\int_{\partial T} g\phi\zeta.x\,d\sigma + K(\alpha,\mu)\int_\Omega u\zeta.x\phi\,dx = 0.$$

En intégrant par parties, on trouve pour tout ϕ dans $\mathcal{D}(\Omega)$

$$(5.41)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Big((-\text{ div } C^*)\zeta.x - C^*\zeta\Big)\phi\,dx + \int_\Omega \mathcal{A}\zeta(\nabla u)\phi\,dx = \frac{1}{|Y|}\int_{\partial T} g\phi\zeta.x\,d\sigma \\ \qquad\qquad -K(\alpha,\mu)\displaystyle\int_\Omega u\zeta.x\phi\,dx. \end{cases}$$

En utilisant (5.23), on obtient

$$(5.42)\qquad C^* = \mathcal{A}\nabla u \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

en prenant $\zeta = e_i$, $\{e_k\}_{k=1,..,n}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, l'écriture par composantes de

$$\mathcal{A}\zeta = \frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} A(y,\lambda)\nabla w(y,\lambda)\,dy,$$

devient

$$(\mathcal{A}e_i)_j = q_{ij} = \frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} a_{ij}(y,\lambda)\frac{\partial w^i}{\partial x_j}(y,\lambda)\,dy,$$

où $w^i = -\chi^i + y_i$.
Donc en remplaçant (5.41) dans (5.24), on obtient

$$(5.42)\qquad -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{q_{ij}(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big\} + K(\alpha,\mu)u = \frac{1}{|Y|}\int_{\partial T} g(y)\,d\sigma,$$

avec les (q_{ij}) définis par (5.17).

Remarque 5.5.

D'après la condition limite de Fourier donnée sur le bord des trous, on constate que le terme en g influe sur le membre de droite alors que f_ε ne joue plus aucun rôle dans l'équation homogénéisée, tandis que le terme $\alpha\varepsilon u_\varepsilon$ donne une contribution dans l'opérateur limite.

Il reste maintenant à montrer qu'on a la convergence de toute la suite $P_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon)$ et non seulement d'une sous-suite.
Pour cela, il suffit de montrer que le problème homogénéisé (5.16) obtenu admet une solution unique. On a alors la proposition suivante

Proposition 5.6. *Sous les hypothèses (3.1-i) (3.1-iv), le problème (5.16) admet une et une seule solution.*

Démonstration : Le problème (5.16) est du même type que le problème (2.4), on suit donc le même raisonnement que celui utilisé pour montrer l'unicité de la solution du problème (2.4), il suffit de vérifier qu'on a les deux hypothèses suivantes :

(i) $K(\alpha,\mu) \geq 0$

(ii) $\exists K \geq 0 \qquad |q_{ij}(u) - q_{ij}(v)| \leq K|u-v| \qquad \forall u,v \in \mathbb{R}, \quad \forall i,j.$

(i) est bien vérifié (d'après la définition de $K(\alpha,\mu)$).

Pour (ii), les coefficients $q_{ij}(u)$ sont donnés par :

$$q_{ij}(u) = \frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} a_{kj}(y,u)\frac{\partial w^i}{\partial y_k}(y,u)\,dy.$$

Soient $u, v \in \mathbb{R}$, on a :

$$q_{ij}(u) - q_{ij}(v) = \frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} a_{kj}(y,u)\frac{\partial w^i}{\partial y_k}(y,u)\,dy - \frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} a_{kj}(y,v)\frac{\partial w^i}{\partial y_k}(y,v)\,dy.$$

Dans le terme de droite, on retranche et on ajoute la quantité

$$\frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} a_{kj}(y,v)\frac{\partial w^i}{\partial y_k}(y,u)\,dy,$$

on obtient alors

$$\left\{\begin{array}{l} |q_{ij}(u) - q_{ij}(v)| \leq \dfrac{1}{|Y|}\Big|\displaystyle\int_{Y^*} a_{kj}(y,u)\frac{\partial w^i}{\partial y_k}(y,u)\,dy - \frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} a_{kj}(y,u)\frac{\partial w^i}{\partial y_k}(y,v)\,dy \\ \qquad + \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{Y^*} a_{kj}(y,v)\frac{\partial w^i}{\partial y_k}(y,u)\,dy - \frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} a_{kj}(y,v)\frac{\partial w^i}{\partial y_k}(y,v)\,dy \\ \qquad \leq \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{Y^*}\Big(a_{kj}(y,u) - a_{kj}(y,v)\Big)\frac{\partial w^i}{\partial y_k}(y,u)\,dy \\ \qquad + \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{Y^*} a_{kj}(y,v)\Big(\frac{\partial w^i}{\partial y_k}(y,u) - \frac{\partial w^i}{\partial y_k}(y,v)\Big)\,dy. \end{array}\right.$$

En vertu du lemme 5.4, les fonctions $\eta^j = a_{kj}(y,u)\dfrac{\partial w^i}{\partial y_k}(y,u)$ vérifient (4.1), et du fait que les a_{ij} satisfont (4.1), on conclut que

$$|q_{ij}(u) - q_{ij}(v)| \leq K_1|u-v| + K_2|u-v|,$$

soit enfin

$$|q_{ij}(u) - q_{ij}(v)| \leq K|u-v| \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad \forall i, j,$$

où $K1, K2$ et K sont des constantes réelles, ce qui achève la preuve de la proposition (5.5).

5.2. Passage à la limite. Cas où $m_{\partial T}(g) = 0$.

Théorème 5.7. *Soit u_ε la solution du problème (1.4) avec g telle que $m_{\partial T}(g) = 0$. Alors il existe $f^* \in H^{-1}(\Omega)$ et une sous-suite extraite de $\{\varepsilon\}$, notée encore $\{\varepsilon\}$ (pour simplifier), tels que si P_ε est l'opérateur de prolongement donné par le lemme 4.3 on ait :*

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u^* \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \text{ faible},$$

où u^* est la solution du problème :

$$\text{(5.44)} \qquad \begin{cases} u^* \in H_0^1(\Omega) \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left\{q_{ij}(u^*)\dfrac{\partial u^*}{\partial x_j}\right\} + K(\alpha,\mu)u^* = f^*. \end{cases}$$

Démonstration : D'après le lemme 4.3 et ii) du corollaire 5.2, on a

$$\text{(5.45)} \qquad \|P_\varepsilon u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c.$$

Après extraction éventuelle d'une sous-suite, on a

$$\text{(5.46)} \qquad P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u^* \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.}$$

Maintenant, il reste à démontrer que u^* est solution de (5.44). Pour ce faire, introduisons la fonction $\rho_\varepsilon \in V_\varepsilon$, solution du problème :

$$\text{(5.47)} \qquad \begin{cases} -\Delta\rho_\varepsilon = f_\varepsilon \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \nu} = g_\varepsilon \text{ sur } \partial T_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Posons

$$q_i^\varepsilon = \Big[\delta_{ik} - \widetilde{\frac{\partial \chi^i}{\partial y_k}}(x/\varepsilon, \lambda)\Big] \widetilde{\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_k}}, \tag{5.48}$$

avec $\chi^i(y, \lambda)$ définie par (5.14).
On a

$$\|q^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^1(\Omega)} \leq c. \tag{5.49}$$

On en déduit qu'à une sous-suite extraite près, on a

$$q_\varepsilon \rightharpoonup q^* \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^n, \tag{5.50}$$

où q^* est une mesure de Radon vectorielle.
Posons

$$\xi_\varepsilon^i = a_{ij}(x/\varepsilon, u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i}. \tag{5.51}$$

Grâce à (5.1), on vérifie sans peine que

$$\begin{cases} \|\rho_\varepsilon\|_{V_\varepsilon} \leq c \\ \|\widetilde{\xi_\varepsilon}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c. \end{cases} \tag{5.52}$$

Il découle de (5.52) qu'à une sous-suite extraite près, on a

$$\widetilde{\xi_\varepsilon} \rightharpoonup \xi^* \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.} \tag{5.53}$$

En reportant (5.52) dans (2.4) et en utilisant (5.47), on vérifie facilement que

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \xi_\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \xi_\varepsilon . n + \alpha \varepsilon^\mu u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial T_\varepsilon. \end{cases} \tag{5.54}$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Multiplions la première équation de (5.54) par ϕ et intégrons par parties ; on trouve

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \xi_\varepsilon \nabla\phi \, dx = -\alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon \phi \, d\sigma. \tag{5.55}$$

En vertu du lemme 4.5, on a

$$\alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon \phi \, d\sigma = \alpha\varepsilon^\mu \int_{\Omega_\varepsilon} (\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i})(x/\varepsilon) \frac{\partial (u_\varepsilon \phi)}{\partial x_i} \, dx + c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \phi(x) \, dx, \tag{5.56}$$

d'où

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \xi_\varepsilon . \nabla\phi \, dx = -\alpha\varepsilon^\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_y \psi^1_\varepsilon . \nabla(u_\varepsilon \phi) \, dx - c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon(x) \phi(x) \, dx. \tag{5.57}$$

Or

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon(x)\phi(x) \, dx = \int_\Omega \chi_{\Omega_\varepsilon} (P^\varepsilon u_\varepsilon) \phi(x) \, dx \longrightarrow \int_\Omega \theta u^* \phi(x) \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5.58}$$

Si $\mu > 1$, comme les termes $\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_y \psi^1_\varepsilon . \nabla(u_\varepsilon \phi) \, dx$ et $\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon(x)\phi(x) \, dx$ sont bornés indépendamment de ε, on en déduit que

$$\alpha\varepsilon^\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_y \psi^1_\varepsilon . \nabla(u_\varepsilon \phi) \, dx - c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon(x)\phi(x) \, dx \longrightarrow 0,$$

d'où, en passant à la limite dans (5.55), on obtient :

$$\int_\Omega \xi^* . \nabla\phi \, dx = 0, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5.59}$$

Et, en intégrant par parties, on trouve

$$-\operatorname{div} \xi^* = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{5.60}$$

Si $\mu = 1$, alors on a $\displaystyle\alpha\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_y \psi^1_\varepsilon . \nabla(u_\varepsilon \phi(x)) \, dx \longrightarrow 0$ et

$$\alpha c_1 \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon(x)\phi(x) \, dx \longrightarrow \alpha c_1 \int_\Omega \theta u^*(x)\phi(x) \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En passant à la limite, dans (5.55), on obtient

$$\int_\Omega \xi^*.\nabla\phi\,dx = \alpha c_1 \int_\Omega \theta u^*(x)\phi(x)\,dx, \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5.61}$$

Et, en intégrant par parties, on trouve

$$-\text{ div } \xi^* = -\theta\alpha\frac{|\partial T|}{|Y^*|}u^* \text{ dans } \Omega, \tag{5.62}$$

$$\Big(\text{car } \; c_g = \frac{1}{|Y^*|}\int_{\partial T} g(y)\,dy \quad \text{entraîne que} \quad c_1 = \frac{1}{|Y^*|}\int_{\partial T} dy = \frac{|\partial T|}{|Y^*|}\Big).$$

Finalement l'équation homogénéisée est donnée par

$$-\text{ div } \xi^* + K(\alpha,\mu)u^* = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{5.63}$$

avec $K(\alpha,\mu)$ définie par (5.12).

Identification de ξ^* :
Soit $h \in \mathcal{D}(\Omega)$; on introduit $r_\varepsilon \in V_\varepsilon$ tel que :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x/\varepsilon, u_\varepsilon)\dfrac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i}) = h \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \Big(a_{ij}(x/\varepsilon, u_\varepsilon)\dfrac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i}\Big)\nu_j = 0 \text{ sur } \partial T_\varepsilon. \end{cases} \tag{5.64}$$

Le système (5.64) est linéaire, de sorte que l'application des résultats de Cioranescu-Saint Jean Paulin [11] montre que

$$P_\varepsilon r_\varepsilon \rightharpoonup r \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}, \tag{5.65}$$

et ceci en admettant que r est la solution du système

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(q_{ij}(u^*)\dfrac{\partial r}{\partial x_i}\Big) = \theta h \text{ dans } \Omega \\ r = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.66}$$

Posons maintenant

$$\eta_\varepsilon = \widetilde{\xi_\varepsilon}.\nabla(P_\varepsilon r_\varepsilon), \tag{5.67}$$

avec ξ_ε définie par (5.52).
Montrons que

$$\eta_\varepsilon \rightharpoonup \xi^*.\nabla r \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{5.68}$$

En utilisant le lemme 4.5 et les relations (5.65) et (5.52), des calculs simples montrent que pour tout élément ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} < \eta_\varepsilon, \phi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = -\alpha\varepsilon^\mu \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon \phi r_\varepsilon \, d\sigma - \int_\Omega \widetilde{\xi_\varepsilon}.\nabla\phi(P_\varepsilon r_\varepsilon)\, dx \\ \\ \qquad = -\alpha\varepsilon^\mu \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\psi_1^\varepsilon}{\partial y_i}\frac{\partial(u_\varepsilon\phi r_\varepsilon)}{\partial x_i}\, dx - c_1\alpha\varepsilon^{\mu-1}\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\phi r_\varepsilon\, dx - \int_\Omega \widetilde{\xi_\varepsilon}.(\nabla\phi)(P_\varepsilon r_\varepsilon)\, dx \\ \\ \qquad = -\alpha\varepsilon^\mu \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\psi_1^\varepsilon}{\partial y_i}\frac{\partial(u_\varepsilon\phi r_\varepsilon)}{\partial x_i}\, dx - c_1\alpha\varepsilon^{\mu-1}\int_\Omega \chi_{\Omega_\varepsilon}(P_\varepsilon u_\varepsilon)\phi(P_\varepsilon r_\varepsilon)\, dx \\ \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_\Omega \widetilde{\xi_\varepsilon}.(\nabla\phi)(P_\varepsilon r_\varepsilon)\, dx. \end{array}\right. \tag{5.69}$$

Le passage à la limite dans (5.69) donne

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \alpha\varepsilon^\mu \displaystyle\int_{\Omega\varepsilon} \frac{\partial\psi_1^\varepsilon}{\partial y_i}\frac{\partial(u_\varepsilon\phi r_\varepsilon)}{\partial x_i}\, dx = 0 \quad \forall\mu \geq 1 \\ \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} c_1\alpha\varepsilon^{\mu-1}\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \chi_{\Omega_\varepsilon}(P_\varepsilon u_\varepsilon)\phi(P_\varepsilon r_\varepsilon)\, dx = K(\alpha,\mu)(\int_\Omega u^*\phi r\, dx) \\ \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_\Omega \widetilde{\xi_\varepsilon}.(\nabla\phi)(P_\varepsilon r_\varepsilon)\, dx = \int_\Omega \xi^*.(\nabla\phi) r\, dx. \end{array}\right. \tag{5.70}$$

On en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \eta_\varepsilon, \phi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = -\int_\Omega \xi^*.(\nabla\phi) r\, dx - K(\alpha,\mu)(\int_\Omega u^*\phi r\, dx), \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

et donc en intégrant par parties et en utilisant (5.63), on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} < \eta_\varepsilon, \phi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega \xi^*.(\nabla\phi) r\, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ce qui démontre (5.68).
D'autre part, montrons aussi que

$$\eta_\varepsilon \rightharpoonup q_{ij}(u^*)\frac{\partial u^*}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_i} - q_i^*\frac{\partial r}{\partial x_i} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{5.71}$$

On a

$$\begin{cases} \eta_\varepsilon = \Big(\big(a_{ij}(x/\varepsilon, u_\varepsilon)\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\big)^{\sim} - \widetilde{\dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i}}\Big)\dfrac{\partial (P_\varepsilon r_\varepsilon)}{\partial x_i} \\ \\ \quad = \big(a_{ij}(x/\varepsilon, u_\varepsilon)\dfrac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i}\big)^{\sim}\dfrac{\partial (P_\varepsilon u_\varepsilon)}{\partial x_j} - \widetilde{\dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i}}\dfrac{\partial (P_\varepsilon r_\varepsilon)}{\partial x_i}. \end{cases} \tag{5.72}$$

Le théorème de compacité par compensation (cf. Murat [21]) nous donne

$$\big(a_{ij}(x/\varepsilon, u_\varepsilon)\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i}\big)^{\sim}\frac{\partial (P_\varepsilon u_\varepsilon)}{\partial x_j} \rightharpoonup q_{ij}(u^*)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial u^*}{\partial x_j} \quad \text{dans} \quad [\mathcal{D}'(\Omega)]^n. \tag{5.73}$$

Avant de démontrer (5.73), notons le théorème suivant, dit "théorème de compacité par compensation" dû à Murat [21].

Théorème 5.8. *Soit Ω un ouvert (borné ou non) de $\mathbb{R}^n$ et soient les espaces $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ définis par :*

$$\begin{cases} X(\Omega) = \Big\{u \in \mathbb{L}^2(\Omega),\ div\ u \in L^2(\Omega)\Big\} \\ Y(\Omega) = \Big\{v \in \mathbb{L}^2(\Omega),\ rot\ v \in (\mathbb{L}^2(\Omega))^2\Big\}, \end{cases} \tag{5.74}$$

que l' on munit des normes

$$\begin{cases} \|u\|_{X(\Omega)} = \Big[\ \|u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\ div\ u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big]^{1/2} \\ \|v\|_{Y(\Omega)} = \Big[\ \|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\ rot\ v\|^2_{(\mathbb{L}^2(\Omega))^2}\Big]^{1/2}. \end{cases} \tag{5.75}$$

Si deux suites u_n et v_n vérifient :

$$(5.76)\qquad \begin{cases} u_n \text{ est bornée dans } X(\Omega);\ u_n \rightharpoonup u \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible} \\ v_n \text{ est bornée dans } Y(\Omega);\ v_n \rightharpoonup v \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible,} \end{cases}$$

alors on a

$$(5.77)\qquad < u_n, v_n > \ \rightharpoonup\ < u, v > \ \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Posons donc

$$\begin{cases} p_\varepsilon^i = \widetilde{\left(a_{ij}(x/\varepsilon, u_\varepsilon)\dfrac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_j}\right)} \\ q_\varepsilon^i = \dfrac{\partial (P_\varepsilon u_\varepsilon)}{\partial x_i}, \end{cases}$$

et vérifions que ces deux suites satisfont les hypothèses du théorème de compacité par compensation.

i) $\underline{p_\varepsilon^i \in X(\Omega), q_\varepsilon^i \in Y(\Omega).}$

• On a $p_\varepsilon^i \in L^2(\Omega)$,

et div $p_\varepsilon = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x/\varepsilon, u_\varepsilon)\dfrac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_j}) = h \in \mathcal{D}(\Omega)$, ce qui entraîne que $p_\varepsilon^i \in X(\Omega)$.

• D'après l'inégalité de Poincaré sur V_ε, il est évident que $q_\varepsilon^i \in Y(\Omega)$.

ii) $\underline{p_\varepsilon^i \text{ et } q_\varepsilon^i \text{ sont bornées respectivement par une constante indépendante de } \varepsilon \text{ dans } X(\Omega) \text{ et } Y(\Omega).}$

• On a $\|p_\varepsilon^i\|^2_{X(\Omega)} = \|p_\varepsilon^i\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\text{ div } p_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \|p_\varepsilon^i\|^2_{X(\Omega)} &= \int_\Omega |a_{ij}(x/\varepsilon, u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}|^2\, dx + \|h\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M^2\|u_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} + c_2 \\ &\leq c_1 + c_2 = c, \end{aligned}$$

avec c, c_1 et c_2 des constantes indépendantes de ε.

Par suite p_ε^i est bien bornée dans $X(\Omega)$.

• q_ε^i est bornée dans $Y(\Omega)$, (d'après (5.45)).

iii) $\underline{q_\varepsilon^i \rightharpoonup q^i \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.}}$

En effet, on a

$$q_\varepsilon^i = (\frac{\partial(P_\varepsilon u_\varepsilon)}{\partial x_i}) \rightharpoonup (\frac{\partial u^*}{\partial x_i}) = q^i \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.}$$

iv) $\underline{p_\varepsilon^i \rightharpoonup p^i \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.}}$

Dans ce cas, on retranche et on ajoute le terme $(a_{ij}(x/\varepsilon, u^*)\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_j})$, on obtient

$$\Big((a_{ij}(x/\varepsilon, P_\varepsilon u_\varepsilon) - a_{ij}(x/\varepsilon, u^*))\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_j}\Big)^{\sim} + a_{ij}(x/\varepsilon, u^*)\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_j}.$$

Le deuxième terme converge vers $q_{ij}(u^*)\dfrac{\partial r}{\partial x_j}$, et le premier terme converge vers zéro, car

$$\int_\Omega |(a_{ij}(x/\varepsilon, P_\varepsilon u_\varepsilon) - a_{ij}(x/\varepsilon, u^*))||\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_j}|\,dx \leq k\|P_\varepsilon u_\varepsilon - u^*\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)},$$

et le résultat découle de (5.46) et (5.67), d'où l'on déduit que

$$p_\varepsilon^i \rightharpoonup p^i \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Par conséquent, toutes les hypothèses du théorème de compacité par compensation sont vérifiées, et on conclut que

$$< p_\varepsilon^i, q_\varepsilon^i > \rightharpoonup < p^i, q^i > \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

soit

$$(a_{ij}(x/\varepsilon, u_\varepsilon)\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i})^{\sim}\frac{\partial(P_\varepsilon u_\varepsilon)}{\partial x_j} \rightharpoonup q_{ij}(u^*)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial u^*}{\partial x_j} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

ce qui achève la démonstration de (5.73).

D'autre part, on a

$$(\widetilde{\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i}})(\frac{\partial(P_\varepsilon r_\varepsilon)}{\partial x_i}) \rightharpoonup q_i^*\frac{\partial r}{\partial x_i} \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^n \text{ (voir Murat [21]).} \tag{5.78}$$

En effet, d'après [21], le développement asymptotique de r_ε est donné par

$$r_\varepsilon(x) = r(x) - \varepsilon\chi^k(x/\varepsilon, r_\varepsilon)\frac{\partial r}{\partial x_k}(x) + R_\varepsilon(x), \tag{5.79}$$

avec R_ε vérifiant

$$\|R_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c\varepsilon^{1/2}. \tag{5.80}$$

Grâce à (5.80) on sait que

$$\widetilde{\nabla R_\varepsilon} \longrightarrow 0 \text{ dans } \quad \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ fort.}$$

On vérifie aisément que

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i}} \dfrac{\partial (P_\varepsilon r_\varepsilon)}{\partial x_i} = \widetilde{\dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i}} \widetilde{\dfrac{\partial (r_\varepsilon)}{\partial x_i}} \\ \qquad\qquad = q_k^\varepsilon \dfrac{\partial r}{\partial x_k} + \widetilde{\dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_k}} \widetilde{\dfrac{\partial R_\varepsilon}{\partial x_k}} - \varepsilon \chi^k(x/\varepsilon, r_\varepsilon) \dfrac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_i} \widetilde{\dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i}}. \end{array} \right. \tag{5.81}$$

On obtient(5.78) en remarquant que les deux derniers termes du membre de droite de (5.81) tendent vers zéro. En combinant alors (5.72), (5.73) et (5.78), on obtient (5.71). En tenant compte de (5.68), on remarque que

$$\xi_i^* \frac{\partial r}{\partial x_i} = q_{ij}(u^*) \frac{\partial u^*}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_i} - q_i^* \frac{\partial r}{\partial x_i}. \tag{5.82}$$

Puisque le choix de r est arbitraire pour u^* fixé, il découle de (5.67) que :

$$-q_i^* = \xi_i^* - q_{ij}(u^*) \frac{\partial u^*}{\partial x_j}, \tag{5.83}$$

donc

$$-\text{ div } (q^*) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(q_{ij}(u^*) \frac{\partial u^*}{\partial x_j} \Big) + K(\alpha, \mu) u^*. \tag{5.84}$$

On prend alors $f^* = -\text{ div } (q^*) \in H^{-1}(\Omega)$, et on obtient donc (5.44), ce qui achève la démonstration.

Précisons que la limite f^* est liée à la fonction f_ε via la forme auxiliaire ρ_ε et à travers différentes relations de convergence.
Remarquons aussi que si l'on suppose que $f_\varepsilon \in L^2(\Omega), \quad f_\varepsilon \longrightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$ fort, on obtient le même problème limite que (5.44) avec f à la place de f^* et une convergence de toute la suite u_ε.

5.4. Cas g_ε quelconque

Dans ce cas on suppose que

$$g_\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ avec } g_\varepsilon \rightharpoonup g \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible}, \tag{5.85}$$

(g_ε n'est pas obtenue à partir d'une fonction définie sur la cellule de base par la transformation $y \longrightarrow x/\varepsilon$ et on suppose que g n'est pas identiquement nulle, sinon u_ε convergerait vers zro, on se retrouve alors dans le cas où c'est la suite $\varepsilon u_\varepsilon$ qui converge vers une solution homogénéisée).

Théorème 5.9. *Soit u_ε la solution de (2.4) avec f_ε et g_ε vérifiant respectivement (5.1) et (5.85). Si P_ε est l'opérateur défini par le lemme 4.3, alors, lorsque ε tend vers zéro, on a*

$$P_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon) \rightharpoonup u_l \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible},$$

où u_l est la solution du problème :

$$\begin{cases} u_l \in H_0^1(\Omega) \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left\{q_{ij}(u_l)\dfrac{\partial u_l}{\partial x_j}\right\} + K(\alpha,\mu)u_l = \dfrac{|\partial T|}{|Y|} g \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.86}$$

avec les q_{ij} donnés par (5.17).

Démonstration : On utilise les mêmes techniques que dans la démonstration du théorème 5.6.

CHAPITRE II

HOMOGÉNÉISATION D'UN PROBLÈME DE FOURIER NON LINÉAIRE ET NON HOMOGÈNE DANS DES DOMAINES FAIBLEMENT CONNECTÉS

CHAPITRE II
Homogénéisation d'un problème de Fourier non linéaire et non homogène dans des domaines faiblement connectés

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le même cadre que le travail de M. Briane [7], mais nous considérons le cas où l'opérateur A_ε est non linéaire, et avec des conditions de Fourier non linéaires et non homogènes sur le bord des trous (où les coefficients de diffusion a_{ij} dépendent de la solution inconnue).
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, et $\varepsilon > 0$ un paramètre destiné à tendre vers zéro, et notons par Y une cellule de $\mathbb{R}^N$, pour des raisons de simplicité, on choisit la cellule unité $Y =]0,1[^N$.
Le but de ce travail est l'homogénéisation du problème suivant dans un domaine faiblement connecté Ω_ε

$$(1.1) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}\,(A(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon) = f_\varepsilon \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \\ A(x/\varepsilon, \delta u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon \nu + \alpha\varepsilon^\mu u_\varepsilon = g_\varepsilon \quad \text{sur} \quad \partial T_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, est défini comme suit : $\Omega_\varepsilon = \Omega_{1\varepsilon} \cup \Omega_{2\varepsilon} \cup w_\varepsilon$ et $\Omega_{i\varepsilon} (i = 1,2)$ sont deux ouverts disjoints obtenus par εY-périodicité des deux ouverts Y_i de la cellule représentative Y. Le domaine w_ε est défini par

$$w_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \backslash (\Omega_{1\varepsilon} \cup \Omega_{2\varepsilon}),$$

il représente l'ensemble des ponts liant les deux matériaux.
Le domaine w_ε est par exemple l'ensemble des ponts cylindriques très fins qui lient $\Omega_{1\varepsilon}$ à $\Omega_{2\varepsilon}$; chaque cylindre est de longueur ε, l'aire de sa base est $\varepsilon^{N-1+\gamma}$ avec $\gamma > 0$; on dit alors que Ω_ε est faiblement connecté (voir figure 1.1).
On désigne par $T_\varepsilon = \Omega \backslash \Omega_\varepsilon$ l'ensemble de tous les trous contenus dans Ω, c'est-à-dire l'union des translatés de $\varepsilon \overline{T_Y^\varepsilon}$ distribués périodiquement dans Ω avec une période ε, où T_Y^ε est un ouvert régulier inclus dans Y représentant le trou. La notation $|E|$ désigne la mesure de Lebesgue d'un ensemble E.
On suppose que Ω_ε est recouvert d'un nombre entier de périodes et que les trous ne coupent pas le bord de Ω.
La normale unitaire ν est dirigée vers l'extérieur de Ω_ε, et la fonction $y \to g(y)$ est Y-périodique, $g \in \mathbb{L}^2(\partial T_Y^\varepsilon)$ et $g_\varepsilon(x) = g(x/\varepsilon)$, et $f_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$.
Comme dans le premier chapitre, on suppose que la matrice $A_\varepsilon(.,.)$ est εY-periodique par rapport à la première variable et dépend de la solution u_ε, elle est de la forme

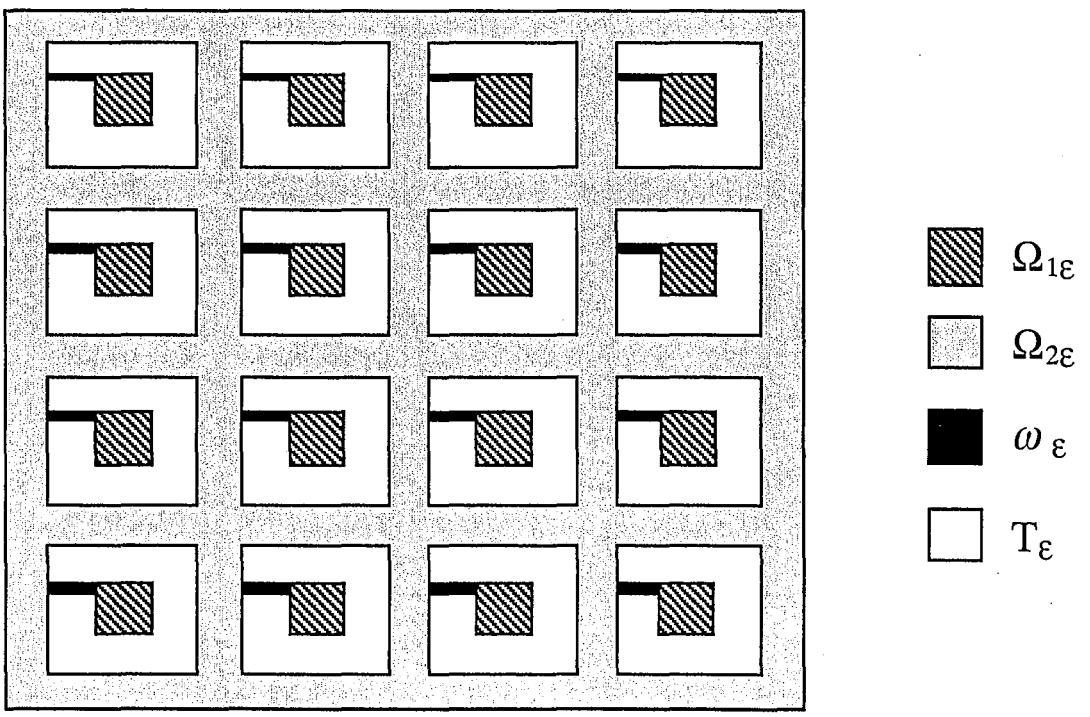
$A_\varepsilon(x,\lambda) = A(x/\varepsilon,\lambda) = (a_{ij}(x/\varepsilon,\lambda))$ où les fonctions a_{ij} sont définies sur $Y \times \mathbb{R}$ et vérifient les conditions suivantes, pour tout $i,j = 1...N$:

(i) $\forall \eta \in \mathbb{R}, \quad y \to a_{ij}(y,\eta)$ est mesurable et Y- périodique.
(ii) $\exists M > 0, \quad \sup_{y,\eta} |a_{ij}(y,\eta)| \leq M$
(iii) $\exists \alpha_0 > 0, \quad a_{ij}(y,\eta)\xi_i\xi_j \geq \alpha_0|\xi|^2 \quad i.e \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$
(iv) $a_{ij}(y,\eta)$ est Lipschitzienne par rapport à η i.e. $\exists K \geq 0$
$|a_{ij}(y,\eta_1) - a_{ij}(y,\eta_2)| \leq K|\eta_1 - \eta_2| \quad i.e \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}.$

Les paramètres α et μ sont des nombres réels strictement positifs.
Le paramètre δ est lié à la moyenne de la fonction g de la manière suivante :

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m_{\partial T_Y^\varepsilon}(g) = 0 \\ \varepsilon & \text{si} \quad m_{\partial T_Y^\varepsilon}(g) \neq 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

où on note par $m_{\partial T_Y^\varepsilon}(g) = \dfrac{1}{|\partial T_Y^\varepsilon|} \displaystyle\int_{\partial T_Y^\varepsilon} g(y)\, dy$ est la moyenne de g sur ∂T_Y^ε.
Hormis la figure 2.1, toutes les figures sont réalisées dans le cas $N = 2$.



$$\Omega_\varepsilon = \Omega_{1\varepsilon} \cup \Omega_{2\varepsilon} \cup w_\varepsilon$$
Figure 1.1 : domaine faiblement connecté

Les difficultés dans notre cas proviennent de la présence de termes sur le bord des trous dans la formulation variationnelle, et surtout du fait que la cellule de base dépende du

paramètre ε à cause des ponts, ce qui va nous obliger à chercher le problème adéquat et les bonnes estimations pour pouvoir transformer les intégrales de surface en intégrales de volumes.

Un problème avec la même géométrie est traité dans le cas linéaire (où les coefficients a_{ij} ne dépendent pas de la solution u_ε) dans M. Briane [7], on montre qu'on a pratiquement les mêmes résultats pour l'équation de la chaleur dans le cas linéaire, nos résultats d'homogénéisation généralisent alors des résultats obtenus dans Cioranescu-Donato [10] (obtenus pour un domaine perforé et périodique en utilisant la méthode de l'énergie), et dans M. Briane [7] puisque les coefficients a_{ij} qu'on utilise dépendent de la solution u_ε (ce qui nous empêche de passer directement à la limite dans certains termes en utilisant la méthode de l'énergie [24]).
La dépendance non linéaire des conductivités en fonction de la température est d'une importance vitale non seulement pour l'étude des matériaux et des structures (A.K. Noor and W.S. Burton [22]) mais aussi pour la modélisation du comportement des tissus biologiques (F. Bardati and G. Gerosa [5]).
Le cas particulier des conditions de Neumann homogènes a été traité dans Cioranescu-Saint Jean Paulin [11]. On peut aussi voir les résultats de Mortela-Profeti [20] obtenus en utilisant la théorie de la Γ-convergence. Dans [13], Conca et Donato ont étudié le problème de Neumann non homogène dans le cas de petits trous (l'ordre de grandeur du trou est plus petit que celui de la période). Le cas des conditions de Fourier homogènes pour les équations de Stokes et Navier-Stokes a été étudié par in Conca [12].
La notion des matériaux faiblement connectés a été introduite par E. Ja. Hruslov [18] pour l'homogénéisation de l'équation de Laplace; puis, utilisée par M. Briane [7] pour l'homogénéisation du problème de Neumann.

Selon la connexité de $\Omega_{1\varepsilon}$ et $\Omega_{2\varepsilon}$, on va distinguer trois géométries différentes pour le problème (1.1), et on étudiera pour chaque géométrie trois cas qui correspondent à la taille des ponts. La preuve des résultats est basée sur la méthode d'énergie en introduisant différentes fonctions tests.
La suite de ce travail se présente comme suit

1. Description et géométrie du problème.
2. Lemmes de base.
3. Homogénéisation.

2. Description et géométrie du problème

Dans tout ce qui suit, nous allons utiliser de façon systématique la convention de sommation sur les indices répétes, et pour simplifier, on désignera par c différentes constantes indépendantes de ε.
La géométrie dans laquelle nous allons étudier l'homogénéisation du problème de Fourier se présente comme suit :

Soit $Y =]0,1[^N$ le cube unité de $\mathbb{R}^N$ représentant la cellule de référence dans laquelle on construit le trou T_Y^ε qui est un ouvert régulier à frontière de classe C^2 (au moins par morceaux), et tel que $\overline{T_Y^\varepsilon} \subset Y$.
On définit Y_1 et Y_2 deux ouverts connexes de Y tels que

$$\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} = \emptyset.$$

On note par Q_ε et R_ε deux ouverts de Y de mesure $\varepsilon^{N+\gamma}$ tels que

$$\overline{Q_\varepsilon} \cap \overline{R_\varepsilon} = \emptyset.$$

Et, on définit Y_ε par

$$\overline{Y_\varepsilon} = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2} \cup \overline{Q_\varepsilon} \cup \overline{R_\varepsilon}.$$

Le trou T_Y^ε est donné par la relation

$$Y \backslash Y_\varepsilon = T_Y^\varepsilon,$$

où Y_ε est défini ci-dessus.
Désignons par $F_{i\varepsilon}$ $(i = 1,2)$ l'ensemble formé de la réunion des translatés de εY_i, c'est-à-dire l'ouvert obtenu par εY-périodicité à partir de εY_i.
Le domaine $\Omega_{i\varepsilon} = \Omega \cap F_{i\varepsilon}$ $(i = 1,2)$ est l'ouvert occupé par le matériau i, et dont la période est εY_i.
On appellera F_ε la réunion des translatés de $\varepsilon Y_\varepsilon$, c'est-à-dire les ouverts obtenus par εY-périodicité à partir de εY, et donc $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap F_\varepsilon$ est le domaine perforé de période $\varepsilon Y_\varepsilon$.
L'ensemble des ponts w_ε est composé des εY- translatés à partir de $\varepsilon(Q_\varepsilon \cup R_\varepsilon)$:

$$w_\varepsilon = \Omega \cap (F_\varepsilon \setminus (F_{1\varepsilon} \cup F_{2\varepsilon})),$$

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_\varepsilon \cup \overline{T}_\varepsilon = \overline{\Omega}_{1\varepsilon} \cup \overline{\Omega}_{2\varepsilon} \cup \overline{T}_\varepsilon \cup \overline{w}_\varepsilon.$$

Les ponts Q_ε et R_ε sont tels que $|w_\varepsilon| \sim c\varepsilon^\gamma$, où $c = \frac{|\Omega|}{|Y|}$ est une constante indépendante de ε.
On considére $\varepsilon(Q_\varepsilon \cup R_\varepsilon)$, la relation liant F_ε à $F_{i\varepsilon}$ est donnée par $F_\varepsilon \backslash (F_{1\varepsilon} \cup F_{2\varepsilon})$ qui est l'ensemble de tous les translatés de $\varepsilon(Q_\varepsilon \cup R_\varepsilon)$ de la forme $\varepsilon\big((Q_\varepsilon \cup R_\varepsilon) + k\big)$ avec $k \in \mathbb{Z}^N$, soit

$$F_\varepsilon \backslash (F_{1\varepsilon} \cup F_{2\varepsilon}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^N} \big[\varepsilon(k + (Q_\varepsilon \cup R_\varepsilon))\big].$$

1^er cas : Les deux ouverts $\Omega_{1\varepsilon}$ et $\Omega_{2\varepsilon}$ sont connexes, ce qui implique que $N \geq 3$.

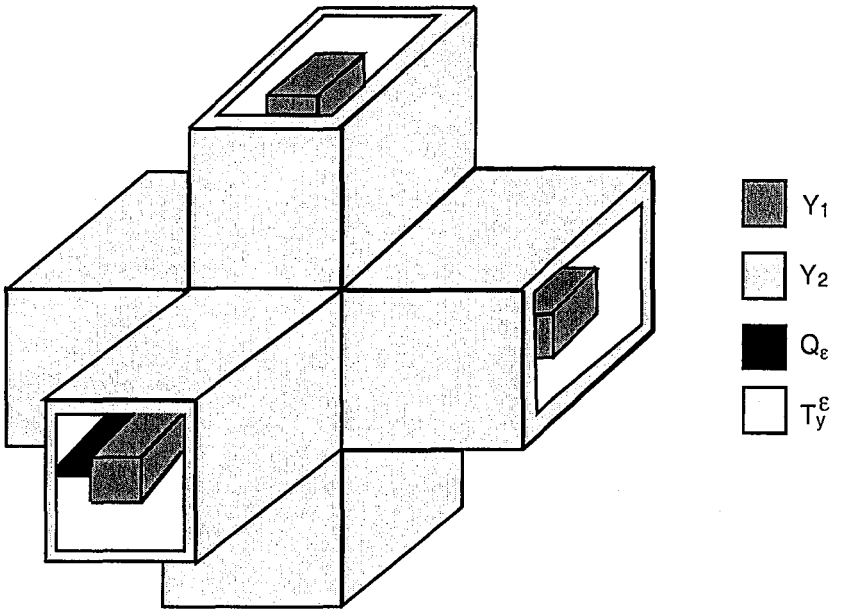


Figure 2.1 : cellule de base Y_ε, matériaux 1 et 2 connectés

$(G1)$ $\qquad F_{i\varepsilon}$ est connexe $(i = 1, 2)$ et $R_\varepsilon = \emptyset$;

2ème cas : L'ouvert $\Omega_{1\varepsilon}$ est divisé en multiples composantes connexes, alors que $\Omega_{2\varepsilon}$ est toujours connexe : on dit dans ce cas que le matériau 1 est isolé (voir figure 2.2).

$(G2)$ $\qquad F_{2\varepsilon}$ est connexe, $R_\varepsilon = \emptyset$ et $\overline{Y_1} \cap \partial Y = \emptyset$.

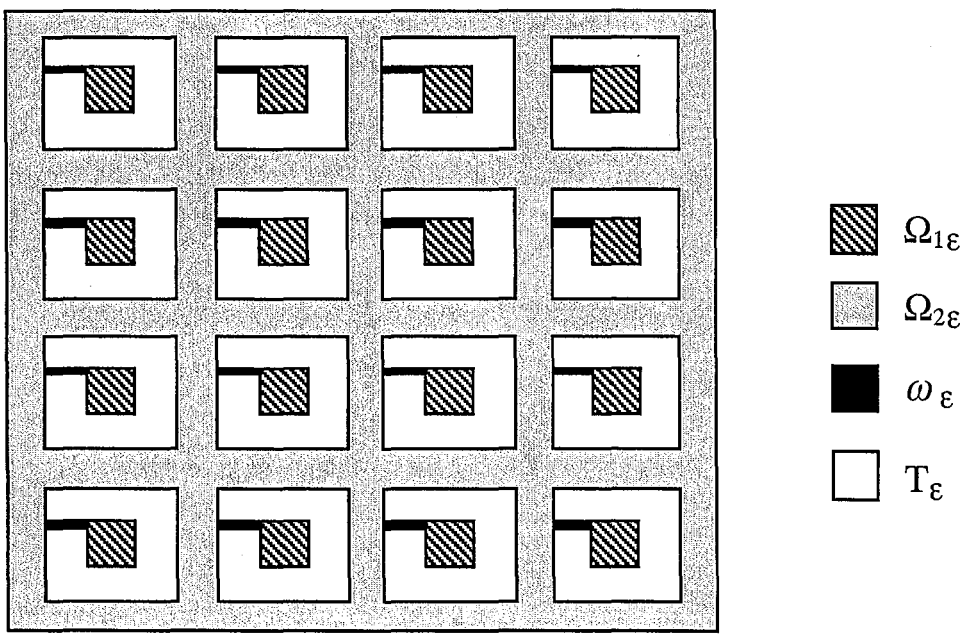


Figure 2.2 : matériau 1 isolé, matériau 2 connecté

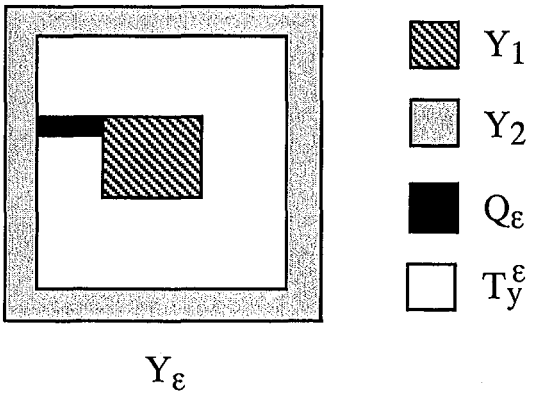


Figure 2.3 : cellule de base Y_ε (correspond à la figure 2.2)

Exemple bidimensionnel

Donnons un exemple de cellule de référence dans le cas $N = 2$, dans lequel chaque pont est un rectangle de longueur ε et de largeur $\varepsilon^{\gamma+1}$.

Soit $Y =]-1,1[^2$ et soient b, b_1 et b_2 trois réels tels que $b_1 \leq b_2$, $|b_1 - b_2| = 1$ et $0 < b < \varepsilon$.

Les parties qui constituent la cellule de base sont définies comme suit

- $Y_1 =]-(3/4-b),(3/4-b)[^2$
- $Y_2 =]-1,1[^2 \setminus]-3/4,3/4[^2$
- $Q_\varepsilon = \left\{(y_1,y_2)/\ -3/4 \leq y_1 \leq -(3/4-b),\ b_1\varepsilon^{\gamma+1} \leq y_2 \leq b_2\varepsilon^{\gamma+1}\right\}$
- $R_\varepsilon = \emptyset$.

<u>3ème cas :</u> $\Omega_{1\varepsilon}$ et $\Omega_{2\varepsilon}$ sont tous les deux divisés en multiples composantes connexes, i.e. les deux matériaux sont isolés (voir figure 2.4).

$$(G3) \qquad \begin{cases} R_\varepsilon \neq \emptyset \\ \overline{Y_1 \cup Q_\varepsilon} \cap \overline{R_\varepsilon} = \emptyset \\ \overline{Y_i} \cap \partial Y = \emptyset, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

De plus, pour chacune des trois géométries, on étudiera trois cas qui correspondent à la taille des ponts :

i) Cas critique : $|w_\varepsilon| \sim c\varepsilon^2$, i.e. $\gamma = 2$.

ii) Cas surcritique (grands ponts) : $\varepsilon^2 \ll |w_\varepsilon| \ll 1$, i.e. $\gamma < 2$.

iii) Cas souscritique (petits ponts) : $|w_\varepsilon| \ll \varepsilon^2$, i.e. $\gamma > 2$.

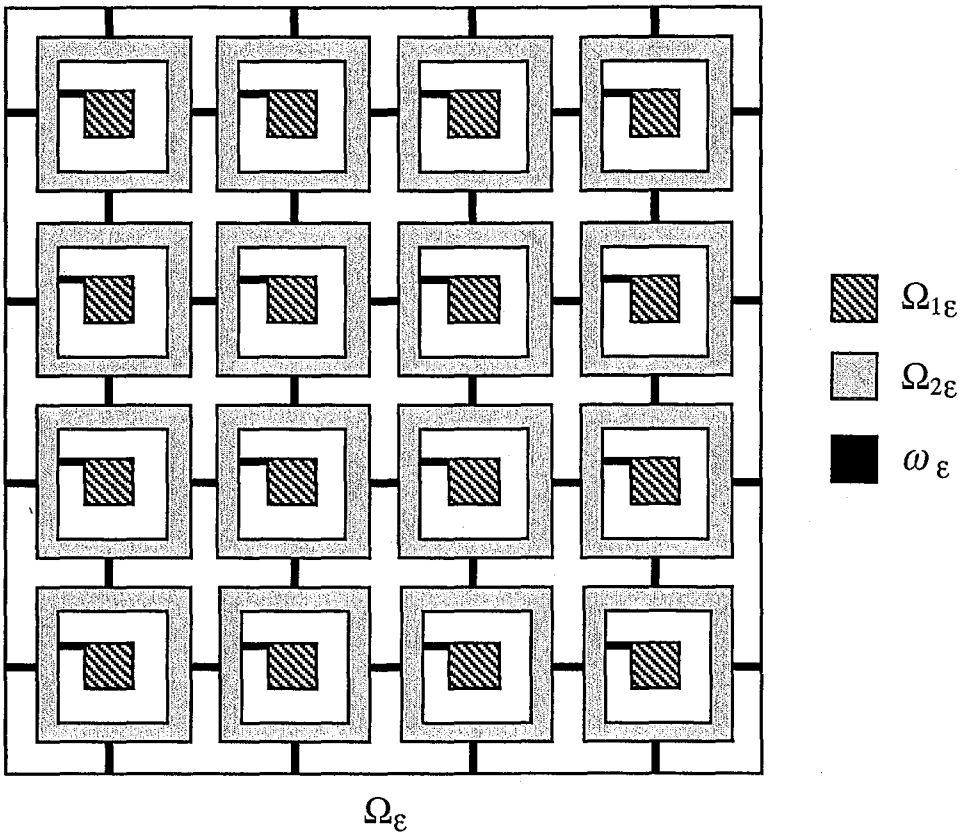


Figure 2.4 : matériaux 1 et 2 isolés

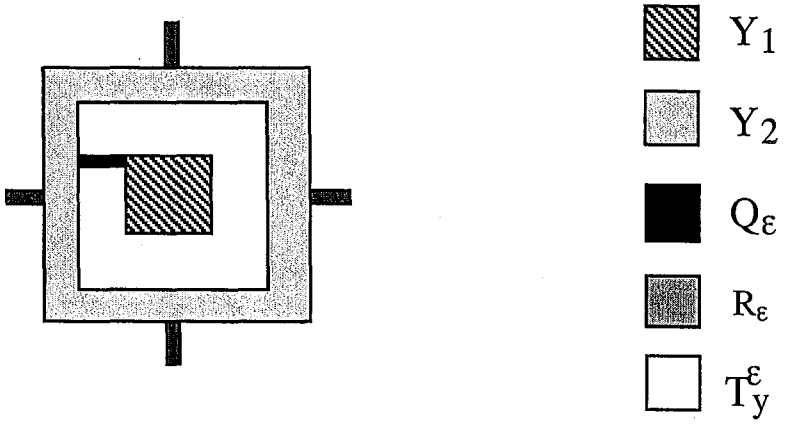


Figure 2.5 : cellule de base Y_ε (correspond à la figure 2.4)

Les résultats d'homogénéisation sont obtenus pour une structure géométrique générale, et en particulier pour des ponts cylindriques. Avant d'énoncer les résultats concernant l'homogénéisation du problème (1.1), on va établir des lemmes préliminaires utiles,

notamment des lemmes nous permettant de transformer en intégrales de volume les intégrales de surface qui apparaîssent à cause de la présence d'une condition de Fourier sur le bord des trous, notre difficulté principale provenant du fait que la cellule de base dépend de ε à cause de la faible épaisseur des ponts. Finalement, on rappellera d'autres résultats d'homogénéisation dans le cas d'un seul matériau.

3. Lemmes de base

3.1. Introduction des fonctions auxiliaires ψ^ε_{hY}

Dans tout ce qui suit, on note $\mathbb{L}^2(Y) = [L^2(Y)]^n$, $\mathbb{H}^1(Y) = [H^1(Y)]^n$... et on désignera par c différentes constantes indépendantes de ε.

On sera amené, dans la suite, à introduire des fonctions ψ^ε_{hY} définies dans la cellule de base Y, qui sont Y-périodiques. Ces fonctions déjà introduites dans Cioranescu-Donato [10], vont être adaptées à notre cas, puisque la cellule de référence présente une géométrie différente; plus précisemment, elle dépend de ε par le biais des ponts. On note par Z_1^ε et Z_2^ε deux parties de Y telles que

$$Y = \overline{Z_1^\varepsilon} \cup \overline{Z_2^\varepsilon},$$

où Z_1^ε représente le trou T_Y^ε, et Z_2^ε son complémentaire dans Y.
Pour chaque fonction h donnée dans $L^2(\partial T_Y^\varepsilon)$ et Y-périodique, on définit la fonction $\psi^\varepsilon_{hY} \in H^1(Y)$ comme solution du problème :

$$(3.1)\qquad \begin{cases} -\Delta\psi^\varepsilon_{hY} = \Big(\dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\partial T_Y^\varepsilon} h(y)\,d\sigma\Big) \text{ dans chaque } Z_i^\varepsilon, i = 1,2 \\ \Big[\Big[\psi^\varepsilon_{hY}\Big]\Big] = 0 \quad \text{sur } \partial T_Y^\varepsilon \\ \Big[\Big[\dfrac{\partial\psi^\varepsilon_{hY}}{\partial n}\Big]\Big] = -h \quad \text{sur } \partial T_Y^\varepsilon \\ \psi^\varepsilon_{hY} \text{ est Y-périodique, } \displaystyle\int_Y \psi^\varepsilon_{hY}\,dy = 0, \end{cases}$$

où : $[[\psi]]$ désigne le saut de ψ sur l'interface entre Z_1^ε et Z_2^ε (la valeur de ψ dans Z_1^ε moins la valeur de ψ dans Z_2^ε).
On suppose de plus que

$$(3.2)\qquad \|h\|_{L^2(\partial T_Y^\varepsilon)} \leq c.$$

La normale n est orientée vers l'extérieur de Z_1^ε.

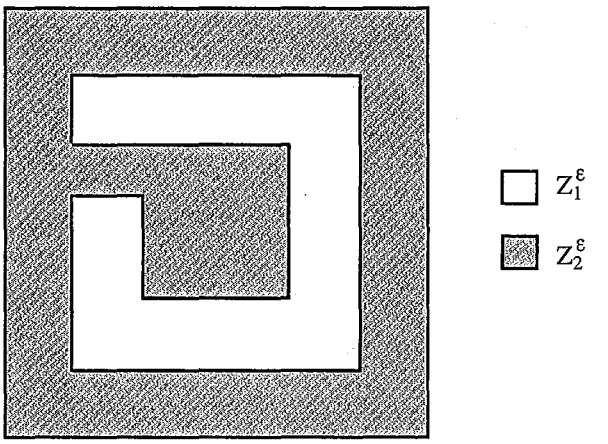


Figure 3.1 : cellule Y (correspond à la figure 2.2)

La formulation variationnelle du problème (3.1) est

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_Y \nabla\psi_{hY}^\varepsilon.\nabla\phi\,dy = \Big(\frac{1}{|Y|}\int_{\partial T_Y^\varepsilon} h(y)\,d\sigma\Big)\int_Y \phi\,dy - \int_{\partial T_Y^\varepsilon} h\phi\,d\sigma \\ \forall\phi \in H^1(Y),\ \text{et } Y-\text{périodique.} \end{cases}$$

3.2. Estimations a priori sur les fonctions ψ_{hY}^ε

Dans toute la suite du paragraphe 3, et pour des raisons de simplicité des calculs, les schémas et calculs explicites correspondent au cas de la dimension $N = 2$, et à la figure 2.3 représentant la cellule de référence. Ces résultats restent valables dans le cas général.
En choisissant $\psi_{hY}^\varepsilon \in H^1(Y)$ solution de (3.1) comme fonction test dans (3.3), on obtient

$$(3.4) \qquad \int_Y \nabla\psi_{hY}^\varepsilon.\nabla\psi_{hY}^\varepsilon\,dy = \Big(\frac{1}{|Y|}\int_{\partial T_Y^\varepsilon} h\,d\sigma\Big)\int_Y \psi_{hY}^\varepsilon\,dy - \int_{\partial T_Y^\varepsilon} h\psi_{hY}^\varepsilon\,d\sigma,$$

ce qui implique

$$(3.5) \qquad \begin{cases} \|\nabla\psi_{hY}^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2(Y)} \le \Big(\dfrac{1}{|Y|}\|h\|_{L^2(\partial T_Y^\varepsilon)}|\partial T_Y^\varepsilon|^{1/2}\Big)\Big(|Y|^{1/2}\|\psi_{hY}^\varepsilon\|_{L^2(Y)}\Big) \\ \qquad\qquad +\|h\|_{L^2(\partial T_Y^\varepsilon)}\|\psi_{hY}^\varepsilon\|_{L^2(\partial T_Y^\varepsilon)}. \end{cases}$$

Cette estimation combinée avec (3.2), donne

$$(3.6) \qquad \|\nabla\psi_{hY}^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2(Y)} \le c|Y|^{-1/2}|\partial T_Y^\varepsilon|^{1/2}\|\psi_{hY}^\varepsilon\|_{L^2(Y)} + c\|\psi_{hY}^\varepsilon\|_{L^2(\partial T_Y^\varepsilon)}.$$

Or, on peut majorer la mesure de ∂T_Y^ε par une constante indépendante de ε. Vérifions-le explicitement dans le cas particulier de la figure 3.2 ci-dessous,

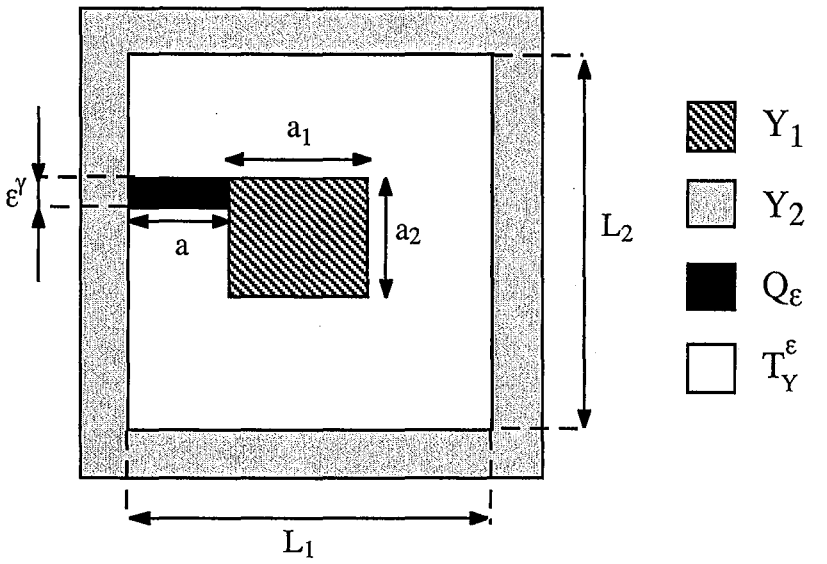


Figure 3.2 : cellule de base Y_ε (correspond à la figure 2.2)

on a

$$\begin{cases} |\partial T_Y^\varepsilon| = 2L_1 + 2L_2 + 2a_1 + 2a_2 + 2a - 2\varepsilon^\gamma \\ \qquad\qquad \leq 2(a + a_1 + a_2 + L_1 + L_2) \\ \qquad\qquad \leq c, \end{cases}$$

d'où

$$|\partial T_Y^\varepsilon| \leq c; \tag{3.7}$$

(ce calcul peut s'adapter aisément à une géométrie plus générale).
Il en découle que

$$\|\nabla \psi_{hY}^\varepsilon\|^2_{L^2(Y)} \leq c\|\psi_{hY}^\varepsilon\|_{L^2(Y)} + c\|\psi_{hY}^\varepsilon\|_{L^2(\partial T_Y^\varepsilon)}. \tag{3.8}$$

Or, puisque ψ_{hY}^ε est de moyenne nulle, l'inégalité de Poincaré-Wirtinger nous donne

$$\|\psi_{hY}^\varepsilon\|_{L^2(Y)} \leq C_p\|\nabla \psi_{hY}^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(Y)}, \tag{3.9}$$

où C_p est la constante de Poincaré ne dépendant que de Y, du fait que ψ_{hY}^ε est définie dans Y tout entier.
Avec la continuité de la trace de $H^1(Y)$ dans $L^2(\partial T_Y^\varepsilon)$ on a

$$\|\nabla \psi_{hY}^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2(Y)} \leq c\, C_p\|\nabla \psi_{hY}^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(Y)} + c\Big\{C_t^\varepsilon\Big(\|\psi_{hY}^\varepsilon\|^2_{L^2(Y)} + \|\nabla \psi_{hY}^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2(Y)}\Big)^{1/2}\Big\}, \tag{3.10}$$

où C_t^ε est la norme de l'application trace de $H^1(Y)$ dans $L^2(\partial T_Y^\varepsilon)$.
En utilisant à nouveau l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, il découle

$$(3.11)\|\nabla\psi_{hY}^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2(Y)} \leq c\,C_p\|\nabla\psi_{hY}^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(Y)}+c\Big\{C_t^\varepsilon\Big(C_p^2\|\nabla\psi_{hY}^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2(Y)}+\|\nabla\psi_{hY}^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2(Y)}\Big)^{1/2}\Big\}.$$

On en déduit que

$$\|\nabla\psi_{hY}^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2(Y)} \leq \Big(c\,C_p + c\,C_t^\varepsilon\sqrt{C_p^2+1}\Big)\,\|\nabla\psi_{hY}^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(Y)},$$

par conséquent

$$\|\nabla\psi_{hY}^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(Y)} \leq \Big(c\,C_p + c\,C_t^\varepsilon\sqrt{C_p^2+1}\Big),$$

et donc

$$\|\nabla\psi_{hY}^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(Y)} \leq c + c\,C_t^\varepsilon,$$

où c désigne différentes constantes indépendantes de ε; et sachant que la constante C_p de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger ne dépendant que de Y, on a aussi

$$(3.12)\qquad \|\psi_{hY}^\varepsilon\|_{L^2(Y)} \leq c + c\,C_t^\varepsilon.$$

Il reste donc à estimer la constante C_t^ε, ce qui fera l'objet de l'étude du paragraphe suivant. Celle-ci sera donnée par (3.20).

3.3. Estimation de la norme de l'application trace

Dans le but d'estimer la norme C_t^ε de l'application trace définie de $H^1(Y)$ dans $L^2(\partial T_Y^\varepsilon)$, nous allons partitionner le bord de T_Y^ε en plusieurs morceaux.
On écrit

$$\partial T_Y^\varepsilon = \Big(\bigcup_{i=1}^{3} K_i^\varepsilon\Big) \cup \Sigma_\varepsilon \cup \Sigma.$$

La partie Σ_ε représente les deux segments reliant Y_1 à Y_2, et Σ (indépendant de ε) est constitué du bord de T_Y^ε auquel on a enlevé Σ_ε et les $K_i^\varepsilon, (i = 1, 3)$.
Les K_i^ε étant une partie du bord de T_Y^ε comme le montre la figure 3.3-d.

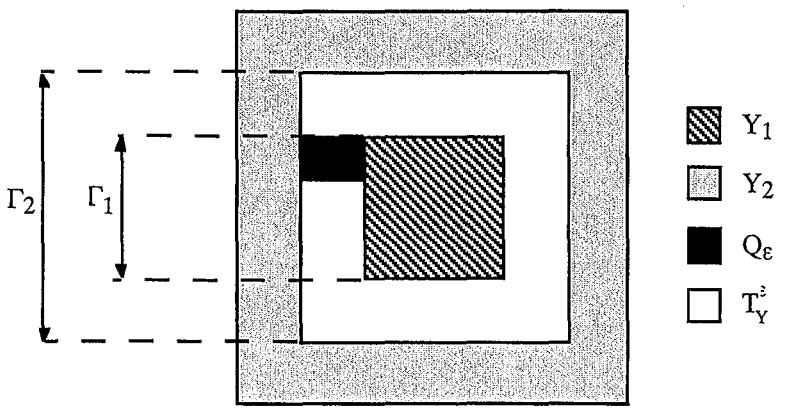


Figure 3.3-a : Les parties Γ_1 et Γ_2 de la cellule Y_ε (correspond à la figure 2.2)

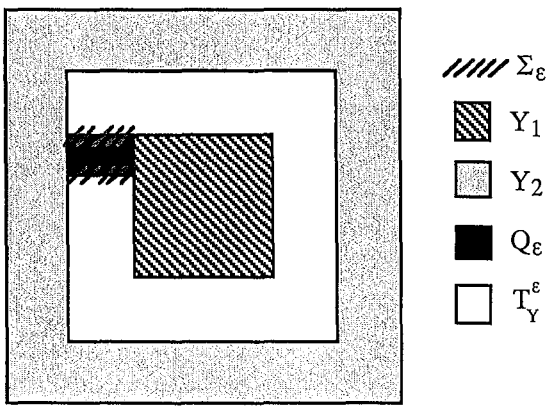


Figure 3.3-b : La partie Σ_ε de la cellule Y_ε (correspond à la figure 2.2)

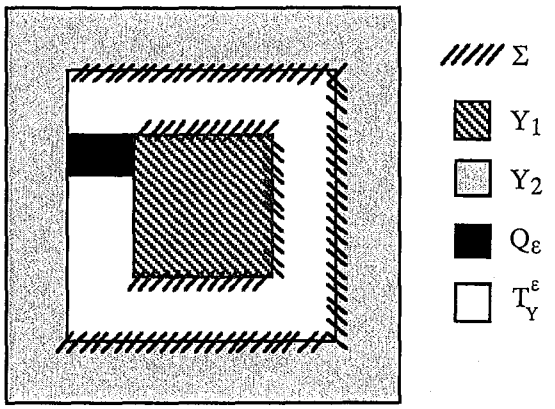


Figure 3.3-c : La partie Σ de la cellule Y_ε (correspond à la figure 2.2)

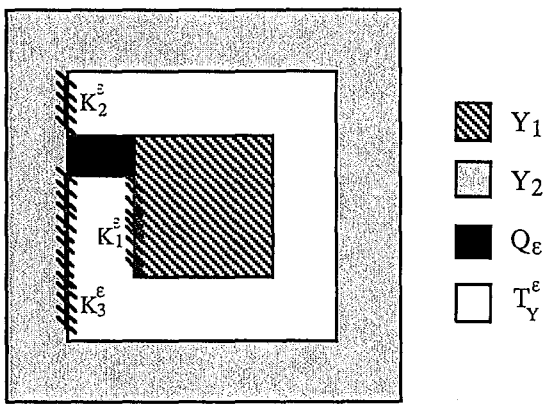


Figure 3.3-d : Les parties $K_i^\varepsilon (i = 1, 3)$ de la cellule Y_ε (correspond à la figure 2.2)

Soit $\theta \in H^1(Y)$, on a (voir figures 3.3-a 3.3-d)

$$\text{(3.13)} \qquad \begin{cases} \|\theta\|^2_{L^2(\partial T_Y^\varepsilon)} = \displaystyle\int_{\partial T_Y^\varepsilon} \theta^2(y)\, d\sigma \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{\Sigma} \theta^2(y)\, d\sigma + \int_{K_1^\varepsilon \cup K_2^\varepsilon \cup K_3^\varepsilon} \theta^2(y)\, d\sigma + \int_{\Sigma_\varepsilon} \theta^2(y)\, d\sigma. \end{cases}$$

Le premier terme du membre de droite est fixe (ne dépend pas de ε), le dernier terme peut être majoré facilement par une constante indépendante de ε, en effet, lorsque $K_i^\varepsilon (i = 1, 3)$ varie avec ε, la longueur de Σ_ε ne change pas mais sa position varie, et donc seules les ordonnées des points de Σ_ε changent à une translation près. Etudions donc le terme $\displaystyle\int_{\left(\bigcup_{i=1}^3 K_i^\varepsilon\right)} \theta^2(y)\, d\sigma.$

On a (voir figures 3.3-a et 3.3-d)

$$(3.14)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{K_1^\varepsilon} \theta^2(y)\,d\sigma = \int_{\Gamma_1} \theta^2(y)\,d\sigma - \int_{\partial w_1^\varepsilon} \theta^2(y)\,d\sigma \\ \displaystyle\int_{K_2^\varepsilon \cup K_3^\varepsilon} \theta^2(y)\,d\sigma = \int_{\Gamma_2} \theta^2(y)\,d\sigma - \int_{\partial w_2^\varepsilon} \theta^2(y)\,d\sigma, \end{cases}$$

la partie $\partial w_i^\varepsilon (i = 1, 2)$ étant le côté commun entre Q_ε et Y_i, c'est-à-dire

$$\partial w_i^\varepsilon = \overline{Q}_\varepsilon \cap \overline{Y}_i \quad i = 1, 2,$$

et Γ_i est le côté de ∂Y_{int_i} (la frontière intérieure de Y_i) lié par le pont Q_ε.
Etudions par exemple le terme $\displaystyle\int_{K_2^\varepsilon \cup K_3^\varepsilon} \theta^2(y)\,d\sigma$.
Là aussi, d'après (3.14), le premier terme du membre de droite est fixe (ne dépend pas de ε), reste alors à majorer le terme $\displaystyle\int_{\partial w_2^\varepsilon} \theta^2(y)\,d\sigma$, et c'est l'objet de l'étude qui suit.
Choisissons la dimension 2 comme exemple (pour des raisons de simplicité des calculs).

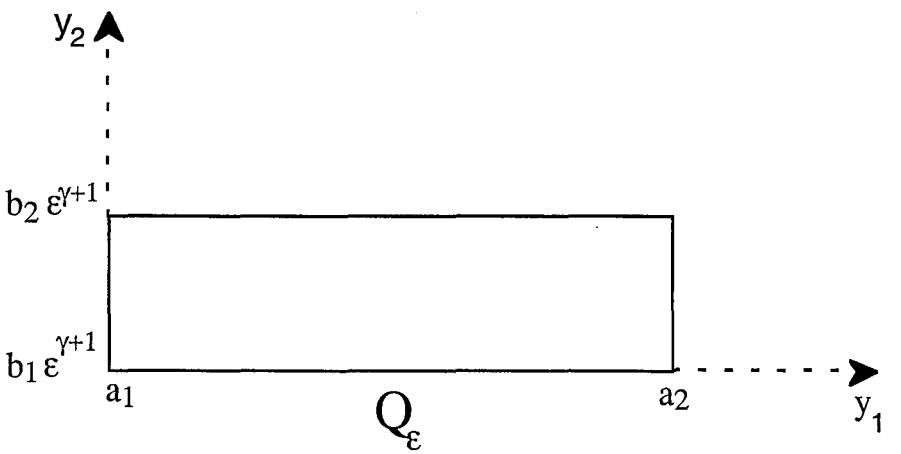


Figure 3.4 : le pont Q_ε en dimension 2

On a (voir figure 3.4)

$$(3.15)\qquad \begin{cases} Q_\varepsilon = \left\{(y_1, y_2)/\ a_1 \le y_1 \le a_2,\ b_1\varepsilon^{\gamma+1} \le y_2 \le b_2\varepsilon^{\gamma+1}\right\} \\ \partial w_2^\varepsilon = \left\{(a_1, y_2)/\ b_1\varepsilon^{\gamma+1} \le y_2 \le b_2\varepsilon^{\gamma+1}\right\}. \end{cases}$$

On a donc

$$\int_{\partial w_2^\varepsilon} \theta^2(y)\, d\sigma = \int_{b_1\varepsilon^{\gamma+1}}^{b_2\varepsilon^{\gamma+1}} \theta^2(a_1, y_2)\, dy_2. \tag{3.16}$$

En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{y_2}{\varepsilon^{\gamma+1}}$ (voir figure 3.5), on obtient

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\partial w_2^\varepsilon} \theta^2(y)\, d\sigma = \int_{b_1\varepsilon^{\gamma+1}}^{b_2\varepsilon^{\gamma+1}} \theta^2(a_1, y_2)\, dy_2 \\ \\ \qquad\qquad = \varepsilon^{\gamma+1} \displaystyle\int_{b_1}^{b_2} \theta^2(a_1, \varepsilon^{\gamma+1}t)\, dt. \end{cases} \tag{3.17}$$

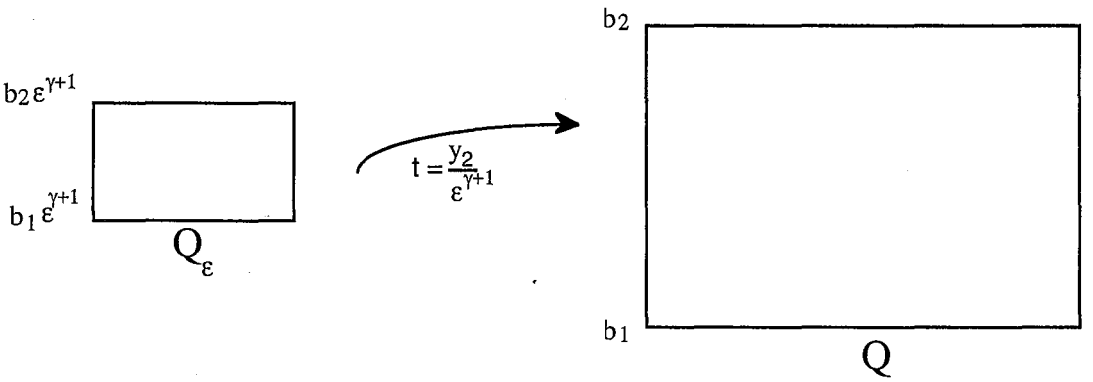


Figure 3.5 : transformation macroscopique du pont $Q_\varepsilon (N = 2)$.

où Q est le rectangle obtenu via le changement de variable $t = \dfrac{y_2}{\varepsilon^{\gamma+1}}$.
Et, puisque $\{a_1\} \times [b_1, b_2] \subset \partial Q$, grâce au théorème de trace, on déduit que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{b_1}^{b_2} \theta^2(a_1, \varepsilon^{\gamma+1}t)\, dt =: \int_{b_1}^{b_2} k_\varepsilon^2(a_1, t)\, dt = \|k_\varepsilon\|^2_{L^2([b_1,b_2])} \\ \\ \qquad\qquad \leq \|k_\varepsilon\|^2_{L^2(\partial Q)} \leq c\|k_\varepsilon\|^2_{H^1(Q)}, \end{cases} \tag{3.18}$$

où la fonction k_ε est définie par $k_\varepsilon(a_1, t) = \theta(a_1, \varepsilon^{\gamma+1}t)$.
On en déduit alors que

$$\int_{\partial w_2^\varepsilon} \theta^2(y)\, d\sigma \leq \varepsilon^{\gamma+1} c\Big[\int_Q k_\varepsilon^2(y_1, t)\, dy_1 dt + \int_Q (\nabla k_\varepsilon)^2\, dy_1 dt\Big]. \tag{3.19}$$

La constante C_t^ε est donnée de manière explicite par

$$C_t^\varepsilon = \varepsilon^{\gamma+1} c. \tag{3.20}$$

Par le changement de variable inverse, on revient au domaine initial.
On pose donc $y_2 = \varepsilon^{\gamma+1} t$, ce qui nous donne

$$\begin{cases} \displaystyle\int_Q k_\varepsilon^2(y_1,t)\, dy_1 dt = \frac{1}{\varepsilon^{\gamma+1}} \int_{Q_\varepsilon} \theta^2(y_1,y_2)\, dy_1 dy_2 \\ \displaystyle\int_Q (\nabla k_\varepsilon)^2\, dy_1 dt = \frac{1}{\varepsilon^{\gamma+1}} \int_{Q_\varepsilon} \Big[(\frac{\partial \theta}{\partial y_1})^2 + \varepsilon^{(\gamma+1)^2} (\frac{\partial \theta}{\partial y_2})^2 \Big]\, dy_1\, dy_2. \end{cases} \tag{3.21}$$

En réinjectant les égalités (3.21) dans (3.19), on obtient

$$\int_{\partial w_2^\varepsilon} \theta^2(y)\, d\sigma \le c \Big[\int_{Q_\varepsilon} \theta^2(y)\, dy + \int_{Q_\varepsilon} (\nabla \theta)^2\, dy \Big], \tag{3.22}$$

(car $\varepsilon^{(\gamma+1)^2} \le 1$ avec $\gamma > 0$).
On fait exactement la même chose pour le bord K_1^ε, d'où en utilisant (3.13) et (3.14), il vient

$$\|\theta\|_{L^2(\partial T_Y^\varepsilon)} \le c\, \|\theta\|_{L^2(Q_\varepsilon)}, \tag{3.23}$$

où c est une constante ne dépendant pas de ε.
Par suite

$$\|\theta\|_{L^2(\partial T_Y^\varepsilon)} \le c\, \|\theta\|_{L^2(Y_\varepsilon)}, \tag{3.24}$$

car $Q_\varepsilon \subset Y_\varepsilon$; d'où le lemme suivant

Lemme 3.1. *$\forall \theta \in H^1(Y)$, on a*

$$(\int_{\partial T_Y^\varepsilon} \theta^2\, d\sigma) \le c \|\theta\|^2_{H^1(Y)}, \tag{3.25}$$

avec c une constante indépendante de ε.

Donc, d'après le lemme 3.1 et les relations (3.5) et (3.7), il découle

$$\|\psi_{hY}^\varepsilon\|_{H^1(Y)} \le c, \tag{3.26}$$

avec c constante indépendante de ε.

On note par $Z_{1\varepsilon}$ et $Z_{2\varepsilon}$ deux parties disjointes de Ω_ε telles que

$$\Omega_\varepsilon = Z_1^\varepsilon \cup Z_2^\varepsilon,$$

où Z_1^ε représente l'ensemble des trous T_ε, et Z_2^ε son complémentaire dans Ω. Introduisons l'espace de Hilbert suivant

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \{v \mid v \in H^1(\Omega_\varepsilon),\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \tag{3.27}$$

Posons $\psi^\varepsilon_{h\Omega}(x) = \psi^\varepsilon_{hY}(x/\varepsilon)$ p.p. sur Ω_ε, alors $\psi^\varepsilon_{h\Omega}$ est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\psi^\varepsilon_{h\Omega} = -\varepsilon^{-2}\Big(\dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\partial T_Y^\varepsilon} h\,d\sigma\Big) & \text{dans chaque } Z_i^\varepsilon \\ \Big[\Big[\psi^\varepsilon_{h\Omega}\Big]\Big] = 0 \quad \text{sur } \partial T^\varepsilon \\ \Big[\Big[\dfrac{\partial\psi^\varepsilon_{h\Omega}}{\partial n}\Big]\Big] = -\varepsilon^{-1}h(x/\varepsilon) \quad \text{sur } \partial T^\varepsilon, \end{cases} \tag{3.28}$$

dont la formulation variationnelle est de la forme

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\psi^\varepsilon_{h\Omega}\nabla\phi\,dx - \varepsilon^{-1}\int_{\partial T_\varepsilon} h^\varepsilon\phi\,d\sigma = -\varepsilon^{-2}\Big(\frac{1}{|Y|}\int_{\partial T_Y^\varepsilon} h\,d\sigma\Big)\int_{\Omega_\varepsilon}\phi\,dx \quad \forall\phi\in\mathcal{V}_\varepsilon \\ \psi^\varepsilon_{h\Omega} \in H^1(\Omega_\varepsilon). \end{cases} \tag{3.29}$$

Enonçons donc le lemme suivant qui nous permettra la transformation d'intégrales de surface en intégrales de volume.

Lemme 3.2. *Soit $h \in L^2(\partial T_\varepsilon)$ et $\psi^\varepsilon_{h\Omega} \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, alors*

$$\begin{cases} \varepsilon\displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} h(x/\varepsilon)v(x)\,d\sigma = \varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon}(\nabla_y\psi^\varepsilon_{hY})(x/\varepsilon)(\nabla_x v)\,dx + \Big(\frac{1}{|Y|}\int_{\partial T_Y^\varepsilon} h\,d\sigma\Big)\int_{\Omega_\varepsilon} v(x)\,dx \\ \forall v \in \mathcal{V}_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.30}$$

4. Homogénéisation.

4.1. Rappels

Avant d'énoncer les résultats concernant l'homogénéisation du problème (1.1), on va rappeler des résultats connus d'homogénéisation du problème de Fourier avec des trous, dûs à Cioranescu-Donato [10], dans le cas d'un seul matériau.

Dans la suite, on aura besoin des notations suivantes :

$$\begin{cases} \theta_i = \dfrac{|Y_i|}{|Y|} \\ \theta = \theta_1 + \theta_2, \end{cases} \tag{4.1}$$

et

$$K(\alpha,\mu) = \begin{cases} \alpha\dfrac{|\partial T|}{|Y|} & \text{si} \quad \mu = 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad \mu > 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

on définit Y_i^* par $Y_i^* = Y_i \setminus \overline{T}$.
Pour prolonger les fonctions $u_{i\varepsilon}$ définies sur $\Omega_{i\varepsilon}$, on va utiliser le lemme suivant (voir Cioranescu-Saint Jean Paulin [11]).

Lemme 4.1. *Soit $\mathcal{V}_{i\varepsilon}$ l'espace défini par*

$$\mathcal{V}_{i\varepsilon} = \{v \in H^1(\Omega_{i\varepsilon}),\ v = 0 \text{ on } \partial\Omega_{i\varepsilon} \cap \partial\Omega\}.$$

Si $\Omega_{i\varepsilon}$ est connexe, il existe un opérateur de prologement $P_{i\varepsilon} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_{i\varepsilon}; H_0^1(\Omega)$ et une constante c indépendante de ε tels que

$$\|\nabla P_{i\varepsilon} v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c\, \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{i\varepsilon})}, \quad \forall v \in \mathcal{V}_{i\varepsilon}. \tag{4.3}$$

On considére le problème de Fourier suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_k}\Big(a_{kj}(x/\varepsilon, \delta u_{i\varepsilon})\dfrac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial x_j}\Big) = f \quad \text{dans} \quad \Omega_{i\varepsilon} \\ a_{kj}(x/\varepsilon, \delta u_{i\varepsilon})\dfrac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial x_j}\nu_j + \alpha\varepsilon^{\mu} u_{i\varepsilon} = g_\varepsilon \quad \text{sur} \quad \partial T_\varepsilon \\ u_{i\varepsilon} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

La fonction $y \to g(y)$ est Y- périodique, $g \in L^2(\partial T_Y^\varepsilon)$ et $g_\varepsilon(x) = g(x/\varepsilon)$. La fonction $f_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$.

Les coefficients a_{kj}^{ε} vérifient les hypothèses (i)-(iv) définies précédemment.

Proposition 4.2. *On suppose que l'une des conditions géométriques G1, G2 ou G3 est satisfaite par le matériau i pour i=1,2. Soit $u_{i\varepsilon}$ la solution du problème (4.4), et soit P_ε l'opérateur de prolongement donné par le lemme 4.1. Alors lorsque ε tend vers zéro, on a*

$$P_\varepsilon(\varepsilon u_{i\varepsilon}) \rightharpoonup u_i \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}$$

où u_i est la solution du problème

$$\text{(4.6)} \qquad \begin{cases} u_i \in H_0^1(\Omega) \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_k}\Big\{q_{kj}(u_i)\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big\} + K(\alpha,\mu)u_i = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\partial T} g(y)\,d\sigma, \end{cases}$$

et les coefficients homogénéisés q_{kj} sont donnés par :

$$\text{(4.7)} \qquad q_{kj}(u_i) = \frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} a_{ml}(y,u_i)\frac{\partial(w_i^k(y,\eta))}{\partial y_m}\frac{\partial(w_i^j(y,\eta))}{\partial y_l}\,dy,$$

avec w_i^k solution du problème

$$\text{(4.8)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_m}\Big(a_{lm}(y,\eta)\dfrac{\partial}{\partial y_l}(w_i^\lambda(y,\eta)\Big) = 0 \text{ dans } Y_i^* \\ \Big[a_{lm}(y,\eta)\dfrac{\partial}{\partial y_l}(w_i^\lambda(y,\eta)n_m\Big] = 0 \text{ sur } \partial T \\ w_i^\lambda(y,\eta) - \lambda.y \quad Y - \text{périodique et de moyenne nulle.} \end{cases}$$

Proposition 4.3. *On suppose que l'une des conditions géométriques G1, G2 ou G3 est satisfaite par le matériau i pour i=1,2. Soit $u_{i\varepsilon}$ la solution du problème (4.4). Si de plus $m_{\partial T}(g) = 0$, alors on a :*

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u_i^* \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \text{ faible,}$$

où u_i^* est la solution du problème :

$$\text{(4.9)} \qquad \begin{cases} u_i^* \in H_0^1(\Omega) \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_k}\Big\{q_{kj}(u_i^*)\dfrac{\partial u_i^*}{\partial x_j}\Big\} + K(\alpha,\mu)u_i^* = \theta f, \end{cases}$$

avec les q_{kj} donnés par (4.7).

On notera τ la limite de $|\partial T_Y^\varepsilon|$ quand ε tend vers 0, et

$$\text{(4.10)} \qquad K_\mu = \begin{cases} \alpha\dfrac{\tau}{|Y|} & \text{si} \quad \mu = 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad \mu > 1. \end{cases}$$

On désignera par $\mathcal{C}$ le contour défini par

$$\mathcal{C} = \partial\overline{Y}_1 \cup \partial_{int}\overline{Y}_2 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2. \tag{4.11}$$

où γ_1 et γ_2 sont les deux segments reliant Y_1 à Y_2 (voir figure 4.1).

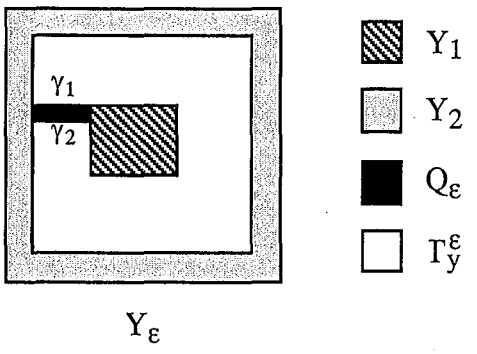


Figure 4.1 : cellule Y_ε

Enfin, on fait l'hypothèse :

$$\Big|\int_{\partial T_Y^\varepsilon} g(y)\,d\sigma\Big| \leq C_g, \tag{4.12}$$

où C_g est une constante indépendante de ε.
On sait qu'il existe $u_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon$ solution unique de du problème (1.1) vérifiant

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon(x,u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon \nabla v\,dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon v\,d\sigma = \int_{\Omega_\varepsilon} fv\,dx + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon v\,d\sigma \quad \forall v \in \mathcal{V}_\varepsilon \\ u_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon, \end{cases} \tag{4.13}$$

ce qui est la formulation faible du problème (1.1).
Cherchons maintenant les estimations a priori sur u_ε; pour cela, on prend u_ε comme fonction test dans (4.13), ce qui donne

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon(x,u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx = \int_{\Omega_\varepsilon} fu_\varepsilon\,dx + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon u_\varepsilon\,d\sigma - \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon^2\,d\sigma \\ \qquad \leq c'\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} + \Big|\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla_y \theta_g^\varepsilon)(x/\varepsilon)(\nabla_x u_\varepsilon)\,dx\Big| \\ \qquad + \Big|\dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\partial T_Y^\varepsilon} g\,d\sigma\Big| \dfrac{1}{\varepsilon}\Big|\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\,dx\Big|, \end{cases} \tag{4.14}$$

où on a utilisé le lemme 3.2 avec g à la place de h.
En tenant compte de nouveau de l'inégalité de Poincaré, ainsi que l'hypothèse (4.5-iii), on a aisément

$$c\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c'\|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla_y \theta_g^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)}\|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{C_g}{\varepsilon}\|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)},$$

soit d'après (3.24)

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c + c\frac{C_g}{\varepsilon} = \frac{c}{\varepsilon}(\varepsilon + C_g). \tag{4.15}$$

On remarque aussi que si $m_{\partial T_Y^\varepsilon}(g) = 0$ alors le dernier terme de l'inégalité (4.14) s'annule, et donc

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c. \tag{4.16}$$

On a donc la proposition suivante

Proposition 4.4. *Si u_ε est solution de (1.1), et sous l'hypothèse (4.5), on a*

(4.17) i) $\|\varepsilon u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c.$

(4.18) ii) $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c$ *si de plus* $m_{\partial T_Y^\varepsilon}(g) = 0.$

Dans tout ce qui suit, le $\tilde{}$ désigne tout prolongement par zéro en dehors de Ω_ε.

On désigne par $F_{\#Y}(X)$ l'ouvert obtenu par répétition de X par Y-périodicité , et on note par $H^1_\#(X)$ l'ensemble des fonctions Y-périodiques dans $H^1_{loc}(F_{\#Y}(X))$.
Comme dans l'article de Briane [7], on fera des hypothèses supplémentaires sur les ponts dans le cas critique et surcritique.
On suppose que dans le cas critique ($|w_\varepsilon| \sim c\varepsilon^2$), les ponts vérifient une sorte d'estimation de la capacité

$$|\partial Q_\varepsilon \cap \partial Y_i| \leq c_i|Q_\varepsilon|, \quad i = 1, 2,$$

et, $\exists \hat{V}_\varepsilon$(resp $\hat{V}_\varepsilon{}^*$, adjoint de $\hat{V}_\varepsilon$) dans $H^1_\#(Y_\varepsilon)$ telles que :

$$(H) \quad \begin{cases} \hat{V}_\varepsilon = 1 \text{ dans } Y_1 \\ \hat{V}_\varepsilon = 0 \text{ dans } Y_2 \cup R_\varepsilon \\ \text{div } (A\nabla\hat{V}_\varepsilon) = 0 \text{ dans } Q_\varepsilon \\ A\nabla\hat{V}_\varepsilon.n = 0 \text{ sur } \partial Q_\varepsilon \backslash (\partial Y_1 \cap \partial Y_2), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} Q_\varepsilon \text{ de frontière lipschitzienne} \\ A\nabla\hat{V}_\varepsilon.n = 0 \text{ borné dans } L^\infty(\partial Q_\varepsilon) \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{1}{\varepsilon^2|Y_\varepsilon|} \displaystyle\int_{Y_\varepsilon} A\nabla\hat{V}_\varepsilon.\nabla\hat{V}_\varepsilon \, dy = l \in \mathbb{R}_+^*, \end{cases}$$

(respectivement $(\widetilde{H})$ où A est remplacée par son adjoint A^*), la matrice A désignant la même matrice $A(y,\eta)$ apparaîssant dans (1.1) avec η fixé dans $\mathbb{R}$. Les fonctions $\hat{V}_\varepsilon$ dépendent implicitement du paramètre η, pour des raisons de simplicité nous omettons cet indice.
Voici un exemple de ponts qui satisfont l'hypothèse (H).
En dimension 2, soient les ponts Q_ε et R_ε définis par

$$Q_\varepsilon = \left\{(y_1,y_2)/\ -\frac{3}{4} \le y_1 \le \frac{3}{4},\ -\varepsilon^2 \le y_2 \le \varepsilon^2\right\} \text{ et } R_\varepsilon = \emptyset;$$

et soit la fonction $\hat{V}_\varepsilon$ définie par

$$\hat{V}_\varepsilon(y) = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad y_1 \in [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}].$$

On vérifie aisément que

$$\begin{cases} \hat{V}_\varepsilon = 1 \text{ dans } Y_1 \\ \hat{V}_\varepsilon = 0 \text{ dans } Y_2, \end{cases}$$

et $\hat{V}_\varepsilon$ vérifie bien l'hypothèse (H).

Dans le cas surcritique ($\varepsilon^2 \ll |w_\varepsilon| \ll 1$), on fait sur les ponts l'hypothèse suivante $\exists(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de C^1-difféomorphismes d'un domaine fixé Z vers $Y_\varepsilon\backslash\bar{R}_\varepsilon$ et une constante $c \ge 1$ telles que :

$$(\widetilde{H}) \qquad \forall\varepsilon \ge 0,\ |\nabla\psi_\varepsilon| \le c, \text{ et } |\det(\nabla\psi_\varepsilon)| \ge c^{-1}|Q_\varepsilon| \text{ dans } Z.$$

L'hypothèse $(\widetilde{H})$ signifie que la déformation des ponts est contrôlée.

On aura besoin de déterminer chaque fonction $u_i (i = 1,2)$. Pour cela, on sépare les domaines $\Omega_{1\varepsilon}$ et $\Omega_{2\varepsilon}$ par des fonctions bien "choisies" qui satisfont une équation similaire à (1.1).
Introduisons alors $V_{i\varepsilon}$ (fonctions introduites par Hruslov [18] et utilisées par Briane [7]) solutions dans $H^1_\#(Y_\varepsilon)$ du problème

$$(4.19) \qquad \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon^2} \text{ div } (A\nabla V_{i\varepsilon}) = \chi_{Y_i} \text{ dans } Y_\varepsilon \\ A\nabla V_{i\varepsilon}.n = 0 \text{ sur } \partial Y_\varepsilon, \end{cases}$$

où χ_{Y_i} est la fonction caractéristique du domaine Y_i $(i = 1, 2)$.
On pose $v_{i\varepsilon}(x) = V_{i\varepsilon}(x/\varepsilon)$ dans F_ε p.p.
Il est facile de voir que l'on a, grâce à (4.19)

$$(4.20) \qquad \begin{cases} -\text{ div } (A_\varepsilon \nabla v_{i\varepsilon}) = \chi_{\Omega_{i\varepsilon}} \text{ dans } F_\varepsilon \\ \\ A_\varepsilon \nabla v_{i\varepsilon}.n = 0 \text{ sur } \partial F_\varepsilon. \end{cases}$$

La fonction $\hat{V}_\varepsilon$ définie dans (H), et les fonctions $V_{i\varepsilon}$ définies par (4.19) pour $i = 1, 2$ vérifient les estimations données par le lemme suivant dû à Briane [7]

Lemme 4.5. *i) Dans le cas critique et sous l'hypothèse (H), il existe* $0 < r < 1$, *et une constante positive c telles que*

$$(4.21) \qquad \begin{cases} \left| \frac{1}{\varepsilon^2 |Y_\varepsilon|} \int_{Y_\varepsilon} A \nabla \hat{V}_\varepsilon . \nabla V \, dy - l_\varepsilon \frac{1}{|Y_1|\varepsilon^2} \int_{Y_1} V \, dy + l_\varepsilon \frac{1}{|Y_2|\varepsilon^2} \int_{Y_2} V \, dy \right| \leq c \, \varepsilon^{-r} \|\nabla V\|_{L^2(Y_\varepsilon)} \\ \\ \forall V \in H^1(Y_\varepsilon), \end{cases}$$

où

$$(4.22) \qquad l_\varepsilon = \left(\frac{1}{\varepsilon^2 |Y_\varepsilon|}\right) \int_{Y_\varepsilon} A \nabla \hat{V}_\varepsilon . \nabla \hat{V}_\varepsilon \, dy \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} l.$$

ii) Dans le cas surcritique et sous l'hypothèse $(\widetilde{H})$,

$$(4.23) \qquad \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{Y_\varepsilon} |\nabla V_\varepsilon|^2 \, dy + \int_{Y_\varepsilon} \left(V_{i\varepsilon} - \frac{\theta_i}{\theta} \right)^2 dy \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

iii) Dans le cas souscritique

$$(4.24) \qquad \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{Y_\varepsilon} |\nabla V_\varepsilon|^2 \, dy + \int_{Y_\varepsilon} (V_{i\varepsilon} - \chi_{Y_i})^2 \, dy \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Preuve
Nous suivrons la démonstration du lemme 3.1 dans Briane [7].

4.2. Cas où les deux matériaux sont connectés

Supposons donc que la condition G1 est satisfaite.

4.2.1. Cas critique

Le cas critique correspond à $|w_\varepsilon| \sim c\varepsilon^2$, i.e. $\gamma = 2$.

Théorème 4.6. *Dans le cas critique, et sous l'hypothèse (H), il existe deux fonctions*

$u_i (i = 1, 2)$ *dans* $H^1(\Omega)$ *et deux matrices* $A_j(u_i)(j = 1, 2)$ *telles que*

$$(4.25) \qquad \begin{cases} \widetilde{\varepsilon u_\varepsilon} \rightharpoonup \theta_1 u_1 + \theta_2 u_2 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \widetilde{\varepsilon u_{i\varepsilon}} \rightharpoonup \theta_i u_i \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible,} \end{cases}$$

où les fonctions u_i *sont solutions du système suivant*

$$(4.26) \qquad \begin{cases} -\, div\,(A_1(u_1)\nabla u_1) + (\theta l + \theta_1 K_\mu)u_1 - \theta l u_2 = \dfrac{1}{|Y|}\theta_1 \displaystyle\int_C g(y)\, d\sigma \text{ dans } \Omega \\ -\, div\,(A_2(u_2)\nabla u_2) + (\theta l + \theta_2 K_\mu)u_2 - \theta l u_1 = \dfrac{1}{|Y|}\theta_2 \displaystyle\int_C g(y)\, d\sigma \text{ dans } \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où l *et* C *sont définis respectivement par (4.22) et (4.11), les matrices* A_1 *et* A_2 *sont données par (4.40a).*
Si de plus $m_{\partial T_Y^\varepsilon}(g) = 0$, *on a*

$$(4.27) \qquad \begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup \theta_1 u_1 + \theta_2 u_2 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \widetilde{u}_{i\varepsilon} \rightharpoonup \theta_i u_i \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible,} \end{cases}$$

où les fonctions u_i *sont solutions du système suivant*

$$(4.28) \qquad \begin{cases} -\, div\,(A_1(u_1)\nabla u_1) + (\theta l + \theta_1 K_\mu)u_1 - \theta l u_2 = \theta_1 f \text{ dans } \Omega \\ -\, div\,(A_2(u_2)\nabla u_2) + (\theta l + \theta_2 K_\mu)u_2 - \theta l u_1 = \theta_2 f \text{ dans } \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Démonstration :
Dans toute la suite, on ne donnera les démonstrations que dans le premier cas. Si de plus $m_{\partial T_Y^\varepsilon}(g) = 0$, la preuve des théorèmes est similaire à celle dans le cas où la moyenne est non nulle, sauf que c'est u_ε qui converge au lieu de $\varepsilon u_\varepsilon$.

On note

$$\xi_{i\varepsilon} = \chi_{\Omega_{i\varepsilon}} A_\varepsilon(x, \varepsilon u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon.$$

La première étape de la démonstration consiste à exprimer la limite faible ξ_i de $\xi_{i\varepsilon}$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ en fonction de u_i.
Tout d'abord, d'après (4.17) et par prolongement, on a bien $\widetilde{\varepsilon u_\varepsilon}$ borné dans $L^2(\Omega)$, et vu les hypothèses faites sur l'opérateur A_ε, il en est de même pour la quantité $\xi_\varepsilon = \widetilde{A_\varepsilon(x, u_\varepsilon)}\nabla(\varepsilon u_\varepsilon)$.

On pose $\widetilde{u}_{i\varepsilon} = \chi_{\Omega_{i\varepsilon}} u_\varepsilon$, on sait qu'après extraction de sous-suites, on a

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{i\varepsilon} \rightharpoonup \theta_i u_i \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \xi_{i\varepsilon} \rightharpoonup \xi_i \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible,} \end{cases} \tag{4.29}$$

et d'après les estimations a priori vérifiées par la solution u_ε, on sait d'après Cioranescu-Donato [10], qu'il existe deux opérateurs de prolongement $P_{i\varepsilon} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_{i\varepsilon}, H^1(\Omega))$ et des sous suites extraites de u_ε tels que

$$P_{i\varepsilon}(u_\varepsilon|_{\Omega_{i\varepsilon}}) = u_{i\varepsilon} \rightharpoonup u_i \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.} \tag{4.30}$$

Soient $w_{i\varepsilon}(i = 1, 2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^N$ et $\eta \in \mathbb{R}$ des fonctions définies par

$$\begin{cases} w^\lambda_{i\varepsilon}(x, \eta) = \lambda.x + \varepsilon\psi_i(x/\varepsilon) P_{i\varepsilon}[(w^\lambda_i(y, \eta) - \lambda.y)(x/\varepsilon)] \\ w^\lambda_{i\varepsilon}(x, \eta) = w^\lambda_i(x/\varepsilon, \eta) \text{ dans } \Omega_{i\varepsilon}, \end{cases} \tag{4.31}$$

où les fonctions $w^\lambda_i(y, \eta)$ sont définies par (4.8), et où les ψ_i sont des fonctions de $C^1(\mathbb{R}^N)$, Y-périodiques telles que

$$\begin{cases} \psi_i = 1 \text{ dans } F_{i1} \\ \psi_i = 0 \text{ dans } F_{j1} \text{ pour } j \neq i. \end{cases} \tag{4.32}$$

Sous les hypothèses (i)-(iv) sur les coefficients a_{ij} et en utilisant un résultat d'Artola-Duvaut[4] (comme dans le premier chapitre), on montre que le fonctions $w^\lambda_{i\varepsilon}$ vérifient que :

$$\int_\Omega |w^\lambda_{i\varepsilon}(x, \eta_1(x)) - w^\lambda_{i\varepsilon}(x, \eta_2(x))|^2 \, dx \leq K^2 \int_\Omega |\eta_1(x) - \eta_2(x)|^2 \, dx, \forall \eta_1, \eta_2 \in L^2(\Omega),$$

$$\int_\Omega |\frac{\partial w^\lambda_{i\varepsilon}}{\partial \eta}(x, \eta(x))|^2 |\frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x)|^2 \, dx \leq K^2 \int_\Omega |\frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x)|^2 \, dx, \forall \eta \in W^{1,2}_0(\Omega).$$

Les fonctions $w^\lambda_{i\varepsilon}$ sont bornées dans $H^1_{loc}(\Omega)$ et vérifient

$$w_{i\varepsilon}(x) \rightharpoonup \lambda.x \text{ dans } H^1_{loc}(\Omega) \text{ faible.} \tag{4.33}$$

Pour passer à la limite dans le terme $\xi_\varepsilon.\nabla w_{i\varepsilon}$, on utilisera le lemme de compacité par compensation (voir Murat [21]) suivant

Lemme 4.7. *Si on a*

$$\text{(4.34)} \qquad \begin{cases} p_\varepsilon \in \mathbb{L}^2(\Omega) \\ p_\varepsilon \rightharpoonup p_0 \ \textit{dans}\ \mathbb{L}^2(\Omega)\ \textit{faible} \\ \textit{div}\ p_\varepsilon \longrightarrow \ \textit{div}\ p_0\ \textit{dans}\ H^{-1}(\Omega)\ \textit{fort,} \end{cases}$$

et

$$\text{(4.35)} \qquad \begin{cases} q_\varepsilon \in H^1(\Omega) \\ q_\varepsilon \rightharpoonup q_0\ \textit{dans}\ H^1(\Omega)\ \textit{faible,} \end{cases}$$

alors on a

$$\text{(4.36)} \qquad < p_\varepsilon, \nabla q_\varepsilon > \rightharpoonup < p_0, \nabla q_0 > \ \textit{dans}\ \mathcal{D}'(\Omega).$$

Posons donc

$$\begin{cases} p_\varepsilon = \xi_\varepsilon \\ q_\varepsilon^i = w_{i\varepsilon}, \end{cases}$$

et vérifions que ces deux suites satisfont les hypothèses du lemme 4.5.

i) $\underline{p_\varepsilon \in \mathbb{L}^2(\Omega),\ q_\varepsilon^i \in H^1(\Omega).}$

- On a bien $p_\varepsilon \in \mathbb{L}^2(\Omega)$,
- Les solutions $w_{i\varepsilon}$ de (4.8) sont dans $H^1(\Omega)$, donc $q_\varepsilon^i \in H^1(\Omega)$.

ii) $\underline{p_\varepsilon \rightharpoonup p_0 \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.}}$

On a $\|p_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c$, en effet $\|p_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|\xi_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c$,
car ξ_ε est bornée dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Donc

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p_0 \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.}$$

iii) $\underline{\text{div } p_\varepsilon \to \text{ div } p_0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort.}}$

On a $\text{div } p_\varepsilon = \text{ div } \xi_\varepsilon = \chi_{\omega_\varepsilon} f \in L^2(\Omega)$, par suite

$$\| \text{ div } p_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} = \|\chi_{\omega_\varepsilon} f\|_{L^2(\Omega)} \leq c,$$

et alors

$$\text{div } p_\varepsilon \to \text{ div } p_0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort.}$$

iv) $q_\varepsilon^i \rightharpoonup q^i$ dans $H^1(\Omega)$ faible.

En effet, d'après les estimations a priori sur $w_{i\varepsilon}$, on sait que les fonctions $w_{i\varepsilon}$ sont bornées dans $H^1(\Omega)$, et par suite

$$q_\varepsilon^i = w_{i\varepsilon} \rightharpoonup \lambda.x = q^i \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.}$$

Par conséquent, toutes les hypothèses du lemme de compacité par compensation sont vérifiées, et on conclut que

$$< p_\varepsilon, \nabla q_\varepsilon^i > \ \rightharpoonup \ < p, \nabla q^i > \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

ce qui se traduit par

$$\xi_\varepsilon.\nabla w_{i\varepsilon} \rightharpoonup (\xi_1 + \xi_2).\lambda \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.37}$$

Et puisqu'on a $|w_\varepsilon| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$, on vérifie aisément que

$$\chi_{w_\varepsilon} \xi_\varepsilon \nabla w_{i\varepsilon} \to 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.38}$$

De plus, d'après les convergences (4.29) et (4.33), on a :

$$\xi_{j\varepsilon}.\lambda = \xi_{j\varepsilon}.\nabla w_{i\varepsilon} \rightharpoonup \xi_j.\lambda \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \ j \neq i. \tag{4.39}$$

Des résultats classiques dans le cas périodique (voir Cioranescu-Saint Jean Paulin [11]), il en découle

$$A_\varepsilon^* \nabla w_{i\varepsilon}(x) \rightharpoonup A_i^* \lambda \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.} \tag{4.40}$$

où

$$A_i(\eta) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_i} A(y,\eta) \nabla w_i^\lambda(y,\eta)\, dy \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}. \tag{4.40a}$$

Le lemme 4.7 de compacité par compensation appliquée cette fois à $p_\varepsilon = \xi_{i\varepsilon}$ et $q_\varepsilon^i = w_{i\varepsilon}$, nous donne

$$\xi_{i\varepsilon}.\nabla w_{i\varepsilon}(x, \varepsilon u_{i\varepsilon}) \rightharpoonup A_i(u_i) \nabla u_i.\lambda \text{ dans } (\mathcal{D}'(\Omega))^N, \tag{4.41}$$

puisque $\xi_{i\varepsilon}.\nabla w_{i\varepsilon} = \nabla u_{i\varepsilon} . \chi_{\Omega i\varepsilon} A_\varepsilon^* w_{i\varepsilon}$.
On en déduit que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \ (\xi_1 + \xi_2).\lambda = A_i \nabla u_i.\lambda + \xi_j.\lambda, \quad j \neq i. \tag{4.42}$$

Soit enfin

$$\xi_i = A_i \nabla u_i. \tag{4.43}$$

Or la formultion variationnelle du problème (1.1) est pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon(x, u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon \nabla v \, dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon v \, d\sigma = \int_{\Omega_\varepsilon} f v \, dx + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon v \, d\sigma, \tag{4.44}$$

soit

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \xi_\varepsilon \nabla v \, dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} (\varepsilon u_\varepsilon) v \, d\sigma = \int_{\Omega_\varepsilon} f v \, dx + \varepsilon \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon v \, d\sigma,$$

et, moyennant le lemme 3.2, on a

$$\begin{cases} \alpha\varepsilon^\mu \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} (\varepsilon u_\varepsilon) v \, d\sigma = \alpha\varepsilon^\mu \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla \theta_{1Y}^\varepsilon)(x/\varepsilon) \nabla_x v \, dx + \frac{\alpha}{|Y|} |\partial T_Y^\varepsilon| \varepsilon^{\mu-1} \int_{\Omega_\varepsilon} (\varepsilon u_\varepsilon) v(x) \, dx \\ \varepsilon \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} g(x/\varepsilon) v \, d\sigma = \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla \theta_{gY}^\varepsilon)(x/\varepsilon) \nabla_x v \, dx + \Big(\frac{1}{|Y|} \int_{\partial T_Y^\varepsilon} g(y) \, d\sigma \Big) \int_{\Omega_\varepsilon} v \, dx. \end{cases} \tag{4.45}$$

A présent, intéressons nous au passage à la limite dans les termes $|\partial T_Y^\varepsilon|$ et $\displaystyle\int_{\partial T_Y^\varepsilon} g(y) \, d\sigma$.

On a

$$\partial T_Y^\varepsilon = \mathcal{C} \setminus (\partial w_1^\varepsilon \cup \partial w_2^\varepsilon), \tag{4.46}$$

avec

$$\mathcal{C} = \partial \overline{Y}_1 \cup \partial_{int} \overline{Y}_2 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

(qui est fixe, voir figure (4.1)),

par suite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\partial T_Y^\varepsilon| = |\mathcal{C}| - \lim_{\varepsilon \to 0} |\partial w_1^\varepsilon \cup \partial w_2^\varepsilon|.$$

Or, quand ε tend vers zèro

$$|\partial w_1^\varepsilon \cup \partial w_2^\varepsilon| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0. \tag{4.47}$$

On en déduit que

$$|\partial T_Y^\varepsilon| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} |\mathcal{C}| = \tau.$$

On a alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\partial T_Y^\varepsilon| = \tau. \tag{4.48}$$

D'autre part

$$\int_{\partial T_Y^\varepsilon} g(y)\,d\sigma = \int_C g(y)\,d\sigma - \int_{\partial w_1^\varepsilon \cup \partial w_2^\varepsilon} g(y)\,d\sigma,$$

et, l'on a

$$\begin{cases} \Big|\int_{\partial w_1^\varepsilon \cup \partial w_2^\varepsilon} g(y)\,d\sigma\Big| \le \|g\|_{L^2(\partial w_1^\varepsilon \cup \partial w_2^\varepsilon)} |\partial w_1^\varepsilon \cup \partial w_2^\varepsilon|^{1/2} \\ \qquad\qquad \le c\ |\partial w_1^\varepsilon \cup \partial w_2^\varepsilon|^{1/2}. \end{cases}$$

On conclut d'après (4.47) que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial T_Y^\varepsilon} g(y)\,d\sigma = \int_C g(y)\,d\sigma, \tag{4.49}$$

par conséquent, en passant à la limite quand ε tend vers zéro dans (4.45)

$$\int_\Omega (\xi_1+\xi_2)\nabla v + K_\mu \int_\Omega (\theta_1 u_1 + \theta_2 u_2) v\,dx = \Big(\frac{1}{|Y|}\int_C g(y)\,d\sigma\Big)\theta \int_\Omega v\,dx. \tag{4.50}$$

Soit

$$\begin{cases} \int_\Omega \Big(A_1(u_1)\nabla u_1 + A_2(u_2)\nabla u_2\Big)\nabla v + K_\mu \int_\Omega (\theta_1 u_1 + \theta_2 u_2) v\,dx = \\ \qquad = \Big(\frac{1}{|Y|}\int_C g(y)\,d\sigma\Big)\theta \int_\Omega v\,dx. \end{cases} \tag{4.51}$$

A ce stade, intéréssons nous à la détermination de chaque fonction $u_i (i=1,2)$ solution de l'équation (4.51). D'abord, si on suppose que $f \in L^\infty(\Omega)$, alors grâce au principe de Maximum, on peut dire que la solution de (1.1) est bornée uniformément dans $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$.
En utilisant l'hypothèse (H), la fonction $v_\varepsilon^*(x) = V_\varepsilon^*(x/\varepsilon)$ vérifie :

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon\to 0} \Big(\|v_\varepsilon^* - \chi_{\Omega_{1\varepsilon}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|1 - v_\varepsilon^* - \chi_{\Omega_{2\varepsilon}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\Big) = 0 \\ \|\nabla v_\varepsilon^*\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le c. \end{cases} \tag{4.52}$$

Soit la fonction test $\psi = \phi_1 v_\varepsilon^* + \phi_2(1 - v_\varepsilon^*)$, où les $\phi_i (i=1,2)$ sont des fonctions de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, et on pose $\phi = \phi_1 - \phi_2$.
On obtient

$$\begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon (\nabla v_\varepsilon^*)\phi\,dx + \int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \Big[\, v_\varepsilon^* \nabla\phi_1 + (1-v_\varepsilon^*)\nabla\phi_2 \Big]\,dx \\ -\int_{\Omega_\varepsilon} f\Big[\, v_\varepsilon^*\phi_1 + (1-v_\varepsilon^*)\phi_2\Big]\,dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon \Big[v_\varepsilon^*\phi_1 + (1-v_\varepsilon^*)\phi_2\Big]\,d\sigma \\ -\int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon \Big[\, v_\varepsilon^*\phi_1 + (1-v_\varepsilon^*)\phi_2\Big]\,d\sigma \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \end{cases} \tag{4.53}$$

et, donc

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla(\varepsilon u_\varepsilon)\phi \nabla v_\varepsilon^*\, dx + \int_\Omega (\xi_{1\varepsilon}\nabla\phi_1 + \xi_{2\varepsilon}\nabla\phi_2)\, dx \\
\\
\displaystyle -\int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon f(\phi_1\chi_{1\varepsilon} + \phi_2\chi_{2\varepsilon})\, dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} \varepsilon u_\varepsilon \Big[\, v_\varepsilon^*\phi_1 + (1 - v_\varepsilon^*)\phi_2\Big]\, d\sigma \\
\\
\displaystyle -\varepsilon \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon \Big[v_\varepsilon^*\phi_1 + (1 - v_\varepsilon^*)\phi_2\Big]\, d\sigma \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,
\end{array}
\right. \tag{4.54}
$$

(car v_ε^* est approchée par $\chi_{\Omega_{1\varepsilon}}$ dans $\Omega_{1\varepsilon}$, et $(1 - v_\varepsilon^*)$ par $\chi_{\Omega_{2\varepsilon}}$ dans $\Omega_{2\varepsilon}$).
Or, en faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega (\xi_{1\varepsilon}\nabla\phi_1 + \xi_{2\varepsilon}\nabla\phi_2)\, dx = \int_\Omega \Big(A_1(u_1)\nabla u_1 \nabla\phi_1 + A_2(u_2)\nabla u_2\nabla\phi_2\Big)\, dx \\
\\
\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon f(\phi_1\chi_{1\varepsilon} + \phi_2\chi_{2\varepsilon})\, dx = 0 \\
\\
\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} (\varepsilon u_\varepsilon)\Big[v_\varepsilon^*\phi_1 + (1 - v_\varepsilon^*)\phi_2\Big]\, d\sigma = K_\mu \int_\Omega (\theta_1 u_1\phi_1 + \theta_2 u_2\phi_2)\, dx,
\end{array}
\right. \tag{4.55}
$$

en effet, d'après le lemme 3.2

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} (\varepsilon u_\varepsilon)\Big[\chi_{1\varepsilon}\phi_1 + \chi_{2\varepsilon}\phi_2\Big]\, d\sigma = \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} \Big[(\varepsilon u_\varepsilon\chi_{1\varepsilon})\phi_1 + (\varepsilon u_\varepsilon\chi_{2\varepsilon})\phi_2\Big]\, d\sigma \\
\\
\displaystyle \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} \Big[\widetilde{u}_{1\varepsilon}\phi_1 + \widetilde{u}_{2\varepsilon}\phi_2\Big]\, d\sigma \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} K_\mu \int_\Omega (\theta_1 u_1\phi_1 + \theta_2 u_2\phi_2)\, dx.
\end{array}
\right. \tag{4.56}
$$

Toujours en utilisant le lemme 3.2, on a

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon \Big[v_\varepsilon^*\phi_1 + (1 - v_\varepsilon^*)\phi_2\Big]\, d\sigma = \Big(\frac{1}{|Y|}\int_C g(y)dy\Big) \int_\Omega \theta_1\phi_1 + \theta_2\phi_2\, dx. \tag{4.57}
$$

Donc, d'après les convergences précédentes, on a

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla(\varepsilon u_\varepsilon)\phi\nabla v_\varepsilon^*\, dx + \int_\Omega (A_1\nabla u_1\nabla\phi_1 + A_2\nabla u_2\nabla\phi_2)\, dx \\
\\
\displaystyle -\int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon f(\phi_1\chi_{1\varepsilon} + \phi_2\chi_{\Omega_{2\varepsilon}})\, dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} \varepsilon u_\varepsilon\Big[v_\varepsilon^*\phi_1 + (1 - v_\varepsilon^*)\phi_2\Big]\, d\sigma \\
\\
\displaystyle +K_\mu \int_\Omega (\theta_1 u_1\phi_1 + \theta_2 u_2\phi_2)\, dx - \Big(\frac{1}{|Y|}\int_C g(y)dy\Big)\int_\Omega \theta_1\phi_1 + \theta_2\phi_2\, dx\Big) = 0.
\end{array}
\right. \tag{4.58}
$$

Il reste donc à calculer la limite du terme $\int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla(\varepsilon u_\varepsilon)\phi \nabla v_\varepsilon^*$, et on sait que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla(\varepsilon u_\varepsilon)\phi \nabla v_\varepsilon^* = \int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon^* \nabla v_\varepsilon^* \nabla(\varepsilon u_\varepsilon \phi) - \int_{w_\varepsilon} A_\varepsilon^* \nabla v_\varepsilon^* (\varepsilon u_\varepsilon)\nabla\phi; \tag{4.59}$$

et puisque $|w_\varepsilon| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, et $(\varepsilon u_\varepsilon)$ est bornée uniformément dans $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, le dernier terme de l'égalité (4.59) converge vers 0; ce qui revient à calculer la limite de $\int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon^* \nabla v_\varepsilon^* \nabla(\varepsilon u_\varepsilon \phi)\, dx$.
Montrons maintenant que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon^* \nabla v_\varepsilon^* \nabla(\varepsilon u_\varepsilon \phi)\, dx = \int_\Omega \theta l \phi (u_1 - u_2)\, dx. \tag{4.60}$$

On considére donc Y_ε^k, $(k \in \mathbb{N})$, un recouvrement de E_ε par des εY-translatés de $\varepsilon Y_\varepsilon$, et soit N_ε le nombre de tous les Y_ε^k inclus dans Ω_ε.
En appliquant l'estimation (4.21) du lemme 4.5 à $(\varepsilon u_\varepsilon \phi)$, on a

$$\begin{cases} \Big| \int_{Y_\varepsilon^k} A_\varepsilon^* \nabla v_\varepsilon^* \nabla(u_\varepsilon\phi) - \delta_\varepsilon \dfrac{|Y_\varepsilon|}{|Y_1|} \int_{Y_\varepsilon^k} \chi_{\Omega_{1\varepsilon}} \phi u_\varepsilon + \delta_\varepsilon \dfrac{|Y_\varepsilon|}{|Y_2|} \int_{Y_\varepsilon^k} \chi_{\Omega_{2\varepsilon}} \phi u_\varepsilon \Big| \\ \qquad \le c\, \varepsilon^{N/2} \varepsilon^{1-r} \|\nabla(u_\varepsilon\phi)\|_{L^2(Y_\varepsilon^k)}. \end{cases} \tag{4.61}$$

En sommant sur k, on obtient

$$\begin{cases} \Big| \int_{Y_\varepsilon^k} A_\varepsilon^* \nabla v_\varepsilon^* \nabla(u_\varepsilon\phi) - \int_{\Omega_\varepsilon} \delta_\varepsilon \phi |Y_\varepsilon| \Big(\dfrac{1}{|Y_1|} \widetilde{u}_{1\varepsilon} - \dfrac{1}{|Y_2|} \widetilde{u}_{2\varepsilon} \Big) \Big| \\ \qquad \le c\, \varepsilon^{N/2} \varepsilon^{1-r} \sqrt{N_\varepsilon} \Big(\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \|\nabla(u_\varepsilon\phi)\|^2_{L^2(Y_\varepsilon^k)} \Big)^{1/2} \\ \qquad \le c\, \varepsilon^{1-r} \|\nabla(u_\varepsilon\phi)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \end{cases} \tag{4.62}$$

Et, l'on déduit que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon^* \nabla v_\varepsilon^* \nabla(u_\varepsilon\phi) - \int_{\Omega_\varepsilon} \delta_\varepsilon \phi |Y_\varepsilon| \Big(\frac{1}{|Y_1|} \widetilde{u}_{1\varepsilon} - \frac{1}{|Y_2|} \widetilde{u}_{2\varepsilon} \Big) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{4.63}$$

En combinant (4.63) avec (4.29), on obtient la convergence (4.60).

On trouve enfin

$$
(4.64)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Big(A_1(u_1)\nabla u_1\nabla\phi_1 + A_2(u_2)\nabla u_2\nabla\phi_2\Big) + \theta l\int_\Omega \phi(u_1-u_2)\,dx \\ \\ \displaystyle +K_\mu\int_\Omega(\theta_1 u_1\phi_1+\theta_2 u_2\phi_2)\,dx = \Big(\frac{1}{|Y|}\int_C g(y)dy\Big)\int_\Omega(\theta_1\phi_1+\theta_2\phi_2)\,dx \\ \\ \forall\phi_i\in\mathcal{D}(\overline{\Omega}),\ i=1,2, \end{cases}
$$

égalité qui reste vraie $\forall\phi_i\in H_0^1(\Omega)$ (par densité, car Ω est régulier);
ce qui achève la démonstration du cas critique.

Dans ce cas, on remarque que le problème limite obtenu est un système couplé avec un terme d'interaction.

4.2.2. Cas surcritique

Le cas surcritique (grands ponts) correspond à : $\varepsilon^2 \ll |w_\varepsilon| \ll 1$, i.e. $\gamma < 2$.

Théorème 4.8. *Dans le cas surcritique, et sous l'hypothèse $(\widetilde{H})$, il existe deux fonctions $u_i (i=1,2)$ dans $H^1(\Omega)$ telles que*

$$
(4.65)\qquad \begin{cases} \widetilde{\varepsilon u}_\varepsilon \rightharpoonup \theta_1 u_1+\theta_2 u_2 \ \textit{dans}\ L^2(\Omega)\ \textit{faible} \\ \\ \widetilde{\varepsilon u}_{i\varepsilon} \rightharpoonup \theta_i u_i \ \textit{dans}\ L^2(\Omega)\ \textit{faible}, \end{cases}
$$

où les fonctions u_i sont solutions du système suivant

$$
(4.66)\qquad \begin{cases} u_1=u_2=u \ \textit{dans}\ \Omega \\ \\ -\ \textit{div}\Big[(A_1(u)+A_2(u))\nabla u\Big] + \theta K_\mu u = \dfrac{1}{|Y|}\theta\displaystyle\int_C g(y)\,d\sigma \ \textit{dans}\ \Omega \\ \\ u=0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega. \end{cases}
$$

Si de plus $m_{\partial T_Y^\varepsilon}(g)=0$, on a

$$
(4.67)\qquad \begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup \theta_1 u_1+\theta_2 u_2 \ \textit{dans}\ L^2(\Omega)\ \textit{faible} \\ \\ \widetilde{u}_{i\varepsilon} \rightharpoonup \theta_i u_i \ \textit{dans}\ L^2(\Omega)\ \textit{faible}, \end{cases}
$$

où les fonctions u_i sont solutions du système suivant

$$
(4.68)\qquad \begin{cases} u_1=u_2=u \ \textit{dans}\ \Omega \\ \\ -\ \textit{div}\Big[(A_1(u)+A_2(u))\nabla u\Big] + \theta K_\mu u = \theta f \ \textit{dans}\ \Omega \\ \\ u=0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega. \end{cases}
$$

Démonstration :

Pour avoir (4.66), on utilise exactement les mêmes arguments que ceux utilisés dans le théorème 4.6.
En utilisant (4.23) du lemme 4.5, la fonction $v_{1\varepsilon}$ définie par (4.20), vérifie

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\|\nabla v_{1\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+\|v_{1\varepsilon}-(\theta_1/\theta)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\right)=0; \tag{4.69}$$

et, en choisissant ϕu_ε comme fonction test dans (4.20), où $\phi\in\mathcal{D}(\Omega)$, on obtient

$$\int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon\nabla v_{1\varepsilon}(\nabla\phi u_\varepsilon)\,dx+\int_{\Omega_\varepsilon} v_{1\varepsilon}\phi u_\varepsilon\,dx=\int_{\Omega_\varepsilon}\phi\widetilde{u}_{1\varepsilon}\,dx; \tag{4.70}$$

et, d'après les convergences (4.29) et (4.69), on déduit en passant à la limite que

$$(\theta_1/\theta)\int_\Omega(\theta_1u_1+\theta_2u_2)\phi\,dx=\int_\Omega\theta_1u_1\phi\,dx\quad\forall\phi\in\mathcal{D}(\Omega), \tag{4.71}$$

ce qui entraîne que

$$\frac{1}{\theta}(\theta_1u_1+\theta_2u_2)=u_1.$$

D'où

$$u_1=u_2. \tag{4.72}$$

En combinant (4.72) avec la formulation variationnelle (4.51), on obtient facilement l'équation (4.66).

Dans ce cas, on peut expliquer l'égalité des deux fonctions u_1 et u_2 par le fait que le pont Q_ε est suffisamment large pour connecter complétement les deux matériaux.

4.2.3. Cas souscritique

Le cas souscritique (petits ponts) correspond à : $|w_\varepsilon|\ll\varepsilon^2$, i.e. $\gamma>2$.

Théorème 4.9. *Dans le cas souscritique, il existe deux fonctions $u_i(i=1,2)$ dans $H^1(\Omega)$ telles que*

$$\begin{cases}\widetilde{\varepsilon u}_\varepsilon\rightharpoonup\theta_1u_1+\theta_2u_2\ \text{dans } L^2(\Omega)\ \text{faible}\\ \\ \widetilde{\varepsilon u}_{i\varepsilon}\rightharpoonup\theta_iu_i\ \text{dans } L^2(\Omega)\ \text{faible},\end{cases} \tag{4.73}$$

où les fonctions u_i sont solutions du système suivant qui dépend fortement de la moyenne de g sur le bord des trous.

$$\begin{cases}-\,div\,(A_1(u_1)\nabla u_1)+\theta_1K_\mu u_1=\dfrac{1}{|Y|}\theta_1\displaystyle\int_C g(y)\,d\sigma\ \text{dans }\Omega\\ \\ -\,div\,(A_2(u_2)\nabla u_2)+\theta_2K_\mu u_2=\dfrac{1}{|Y|}\theta_2\displaystyle\int_C g(y)\,d\sigma\ \text{dans }\Omega\\ \\ u_1=u_2=0\ \text{sur }\partial\Omega.\end{cases} \tag{4.74}$$

Si de plus $m_{\partial T_Y^\varepsilon}(g) = 0$, *on a*

$$(4.75)\qquad \begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup \theta_1 u_1 + \theta_2 u_2 \ \textit{dans}\ L^2(\Omega)\ \textit{faible} \\ \widetilde{u}_{i\varepsilon} \rightharpoonup \theta_i u_i \ \textit{dans}\ L^2(\Omega)\ \textit{faible}, \end{cases}$$

où les fonctions u_i *sont solutions du système suivant*

$$(4.76)\qquad \begin{cases} -\ \textit{div}\ (A_1(u_1)\nabla u_1) + \theta_1 K_\mu u_1 = \theta_1 f\ \textit{dans}\ \Omega \\ -\ \textit{div}\ (A_2(u_2)\nabla u_2) + \theta_2 K_\mu u_2 = \theta_2 f\ \textit{dans}\ \Omega \\ u_1 = u_2 = 0\ \textit{sur}\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Démonstration :

On choisit la fonction $\phi_i v_{i\varepsilon}$ comme fonction test dans la formulation variationnelle (4.13), où $\phi_i \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, 2$

$$(4.77)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon(x, u_\varepsilon)(\nabla u_\varepsilon)\phi_i \nabla v_{i\varepsilon} + \int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon(x, u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon(\nabla \phi_i) v_{i\varepsilon}\, dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial T_\varepsilon} u_\varepsilon \phi_i v_{i\varepsilon}\, d\sigma \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} f\phi_i v_{i\varepsilon}\, dx + \int_{\partial T_\varepsilon} g_\varepsilon \phi_i v_{i\varepsilon}\, d\sigma; \end{cases}$$

puis en utilisant (4.24) du lemme 4.5, les fonctions $v_{i\varepsilon}$ vérifient

$$(4.78)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\|\nabla v_{i\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|v_{i\varepsilon} - \chi_{\Omega_{i\varepsilon}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\Big) = 0.$$

Et, l'on déduit que

$$(4.79)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \xi_{i\varepsilon}\nabla\phi_i\, dx + \frac{\alpha}{|Y|}|\partial T_Y^\varepsilon| \int_\Omega \widetilde{u}_{i\varepsilon}\phi_i\, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f\phi_i v_{i\varepsilon}\, dx \\ \displaystyle + \Big(\frac{1}{|Y|}\int_{\partial T_Y^\varepsilon} g\, d\sigma\Big)\int_\Omega \chi_{\Omega_{i\varepsilon}}\phi_i\, dx. \end{cases}$$

Alors en utilisant (4.29) et (4.43), il découle

$$(4.80)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A_i(u_i)(\nabla u_i)\phi_i + K_\mu \int_\Omega \theta_i u_i \phi_i\, dx = \Big(\frac{1}{|Y|}\int_C g(y)\, d\sigma\Big)\int_\Omega \theta_i\phi_i\, dx, \\ \\ \forall \phi_i \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

cette égalité reste vraie $\forall \phi_i \in H^1(\Omega)$ en utilisant un argument de densité (Ω est régulier). L'équation (4.80) correspond donc à la formulation variationnelle de (4.74).

Dans ce cas, on remarque que les fonctions u_i sont solutions d'un système totalement découplé où u_1 n'apparaît pas dans l'équation vérifiée par u_2 et vice versa, on peut expliquer cela par le fait que le pont Q_ε est suffisamment petit pour séparer complétement les deux matériaux.

4.3. Cas où le matériau 1 est isolé

Supposons donc que la condition G2 est satisfaite.

4.3.1. Cas critique

Théorème 4.10. *Dans le cas critique, et sous l'hypothèse (H), il existe deux fonctions $(u_1, u_2) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ vérifiant (4.29) telles que :*

$$
(4.81) \quad \begin{cases} (\theta l + \theta_1 K_\mu) u_1 - \theta l u_2 = \dfrac{1}{|Y|} \theta_1 \displaystyle\int_C g(y)\, d\sigma \ \text{ dans } \Omega \\ \\ -\ div\ (A_2(u_2)\nabla u_2) + (\theta l + \theta_2 K_\mu) u_2 - \theta l u_1 = \dfrac{1}{|Y|} \theta_2 \displaystyle\int_C g(y)\, d\sigma \ \text{ dans } \Omega \\ \\ u_2 = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}
$$

Si de plus $m_{\partial T_Y^\varepsilon}(g) = 0$, on a

$$
(4.82) \quad \begin{cases} (\theta l + \theta_1 K_\mu) u_1 - \theta l u_2 = \theta_1 f \ \text{ dans } \Omega \\ \\ -\ div\ (A_2(u_2)\nabla u_2) + (\theta l + \theta_2 K_\mu) u_2 - \theta l u_1 = \theta_2 f \ \text{ dans } \Omega \\ \\ u_2 = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}
$$

où les fonctions u_i sont définies par (4.27).

Démonstration :

Dans ce cas, comme le matériau 1 est isolé et donc le domaine $\Omega_{1\varepsilon}$ n'est pas connexe, la fonction $u_\varepsilon|_{\Omega_{1\varepsilon}}$ ne peut pas être prolongée à une fonction dans $H^1(\Omega)$ avec les propriétés requises en homogénéisation pour définir les fonctions auxiliares $w_{1\varepsilon}^\lambda$ comme dans (4.31).
Le matériau 1 est isolé, on a alors $\overline{Y_1} \cap \partial Y = \emptyset$, et donc une solution w_1 définie par (4.8) est de la forme $w_1(y) = \lambda.\beta$ dans chaque Y-translaté de la forme $\beta + Y_1$ de Y_1,

d'où la fonction w_1 est constante dans chaque composante connexe de F_{11}, et d'après (4.7), on déduit que $A_1(u_1) = 0$.
De la même façon que dans (4.31), on définit la fonction

$$w_{1\varepsilon}(x) = \lambda.x + \varepsilon\psi_1(x/\varepsilon)[(w_1 - \lambda.y)(x/\varepsilon)], \tag{4.83}$$

où w_1 est constante dans chaque composante connexe du support de ψ_1.
La fonction $w_{1\varepsilon}$ satisfait

$$\begin{cases} w_{1\varepsilon}(x) \rightharpoonup \lambda.x \text{ dans } W^{1,\infty}_{loc}(\Omega) \text{ faible,} \\ \\ \nabla w_{1\varepsilon}(x) = 0 \text{ dans } \Omega_{1\varepsilon} \\ \\ w_{1\varepsilon}(x) = \lambda.x \text{ dans } \Omega_{2\varepsilon}; \end{cases} \tag{4.84}$$

et en procédant comme dans la partie 4.2, on obtient

$$\begin{cases} \xi_1 = 0 \\ \\ \xi_2 = A_2(u_2)\nabla u_2; \end{cases} \tag{4.85}$$

et le reste de la démonstration est similaire à celui de la partie 4.2.1. Le matériau 1 étant, dans ce cas, isolé, la fonction v^*_ε ne peut plus être approchée par la fonction caractéristique du domaine $\Omega_{1\varepsilon}$ dans le sens de (4.52), pour justifier les passages à la limite de type (4.55) et (4.56), nous utilisons le lemme 3.1 de Briane[8]. Ce lemme permet, sous des hypothèses, le passage à la limite dans un produit de type $\widetilde{u}_{1\varepsilon}v^*_\varepsilon$ (on retrouve cette même technique de passage à la limite dans Damlamian-Donato[14]). Les hypothèses de ce lemme portent sur l'ordre de grandeur des constantes de Poincaré-Wirtinger's, qui sont assurées dans notre cas par l'hypothèse $(\widetilde{H})$.

4.3.2. Cas surcritique et souscritique

Théorème 4.11.
i) Dans le cas surcritique, et sous l'hypothèse $(\widetilde{H})$, il existe deux fonctions $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ vérifiant (4.29) telles que :

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u \text{ dans } \Omega \\ \\ - \text{ div } \Big(A_2(u)\Big)\nabla u + \theta K_\mu u = \dfrac{1}{|Y|}\theta \displaystyle\int_C g(y)\, d\sigma \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.86}$$

Si de plus $m_{\partial T^\varepsilon_Y}(g) = 0$, on a

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u \text{ dans } \Omega \\ \\ - \text{ div } \Big(A_1(u) + A_2(u)\Big)\nabla u + \theta K_\mu u = \theta f \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.87}$$

où les fonctions u_i sont définies par (4.27).
ii) Dans le cas souscritique, il existe deux fonctions $(u_1, u_2) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ vérifiant (4.29) telles que :

$$\text{(4.88)} \qquad \begin{cases} K_\mu u_1 = \dfrac{1}{|Y|}\theta \displaystyle\int_C g(y)\, d\sigma \ \ dans\ \Omega \\ -\ div\ (A_2(u_2)\nabla u_2) + \theta K_\mu u_2 = \dfrac{1}{|Y|}\theta_2 \displaystyle\int_C g(y)\, d\sigma \ \ dans\ \Omega \\ u_2 = 0 \ \ sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Si de plus $m_{\partial T_Y^\varepsilon}(g) = 0$, on a

$$\text{(4.89)} \qquad \begin{cases} K_\mu u_1 = f \ \ dans\ \Omega \\ -\ div\ (A_2(u_2)\nabla u_2) + \theta K_\mu u_2 = \theta f \ \ dans\ \Omega \\ u_2 = 0 \ \ sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

où les fonctions u_i sont définies par (4.27).

Démonstration :

En tenant compte du fait que $A_1(u_1) = 0$, le schéma de la preuve des deux cas surcritiques et souscritique est exactement le même que celui dans les parties 4.2.2 et 4.2.3. Là aussi, on aura recours, comme dans le cas critique, au lemme 3.1 de Briane[8] pour justifier les passages à la limite dans des expressions de type (4.70) et (4.77).

4.4. Cas où les deux matériaux sont isolés

Supposons que la condition G3 est satisfaite.

Théorème 4.12. *Dans les trois cas : critique plus l'hypothèse (H), surcritique plus l'hypothèse $(\widetilde{H})$ et souscritique, il existe deux fonctions $(u_1, u_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ vérifiant (4.29) telles que :*

$$\text{(4.90)} \qquad u_1 = u_2 = \frac{1}{K_\mu}\Big(\frac{1}{|Y|}\theta \int_C g(y)\, d\sigma\Big) \ \ dans\ \Omega.$$

Si de plus $m_{\partial T_Y^\varepsilon}(g) = 0$, on a

$$\text{(4.91)} \qquad u_1 = u_2 = \frac{1}{K_\mu} f \ \ dans\ \Omega,$$

où les fonctions u_i sont définies par (4.27).

CHAPITRE III

CALCUL NUMÉRIQUE DES COEFFICIENTS HOMOGÉNÉISÉS ET DE LA SOLUTION LIMITE DU PROBLÈME ÉTUDIÉ AU CHAPITRE I

CHAPITRE III

Calculs numériques des coefficients homogénéisés et de la solution limite du problème étudié au chapitre I

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons développer une méthode numérique permettant le calcul explicite des coefficients limites. Le but est donc le calcul des coefficients homogénéisés du problème étudié au premier chapitre, et qui sont définis par la formule

$$q_{ij}(u) = \frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} a_{kl}(y,u)\frac{\partial(\chi^i(u)-y_i)}{\partial y_k}\frac{\partial(\chi^j(u)-y_j)}{\partial y_l}\,dy, \tag{1.1}$$

où u désigne la solution limite du problème de Fourier non linéaire et non homogène défini dans des ouverts perforés étudié au premier chapitre.
Les fonctions auxiliaires $\chi^k(u^*)$ sont solutions des problèmes adjoints correspondant au problème de Fourier, et les coefficients a_{ij} sont Y- périodiques, de classe C^1 et lipschitziens (Y étant la cellule de référence).
Pour cela, on essaiera d'abord de calculer les différentes quantités figurant dans cette formule (essentiellement les fonctions $\chi^i(y,u)$ calculées sur une cellule de base), puis en deuxième lieu, on introduira des formules de quadrature, qui consistent à calculer les intégrales en question de manière approchée. Pour résoudre ce problème, on aura recours à une méthode itérative de type point fixe.
Et comme il s'agit d'un problème non linéaire, les calculs des coefficients et de la solution limite sont couplés, contrairement au cas linéaire où les aspects sont découplés. Donc, même si le prix à payer est de travailler sur le non linéaire, on calcule non seulement les coefficients homogénéisés mais pour le même coût, on calcule aussi la solution du problème limite, et le procédé numérique utilisé reste raisonnable.
Pour cela, on approchera le problème initial par une suite de problèmes linéaires via une méthode itérative qui consiste à construire, à partir d'une étape d'initialisation de q_{ij}^0, une suite q_{ij}^n dont on espère qu'elle converge. Cette suite est définie par une relation de récurrence du type $q_{ij}^{n+1} = G(q_{ij}^n)$, avec un choix initial de q_{ij}^0.
Parallélement, on construit deux suites u_n^* (qui nous permet de calculer la solution du problème limite dans le domaine Ω tout entier) et χ_n^k, toutes les deux nécessaires pour approcher les coefficients q_{ij}^n.
Le logiciel retenu pour la résolution de notre problème est FreeFem++, qui est une implémentation d'un langage dédié aux éléments finis qui permet de résoudre des équations aux dérivées partielles simplement sur différents maillages dont on rappellera brièvement les points forts ci-dessous.

2. Présentation de FreeFem++

FreeFem++ est un compilateur, un langage typé, polymorphe avec une syntaxe proche du langage C++ (ou java), ce logiciel permet de résoudre numériquement des EDP elliptiques dans des domaines bidimensionnels par la méthode des éléments finis. Sa dernière version permet la définition des problèmes linéaires selon leurs formulations variationnelles avec une écriture très proche de l'écriture mathématique et en utilisant de nombreux types d'éléments finis, il permet aussi de faire de l'adaptation de maillages, pour raffiner le maillage (il suffit d'augmenter le nombre de points sur le bord). Le logiciel a été porté sous les environnements Unix, MacOS et Windows.

Le langage de FreeFem++ permet une spécification rapide des EDP et de faire un choix parmi plusieurs possibilités de résolution :

- Une définition de nombreux éléments finis tels que P1, P2 Lagrange, P1 discontinu, élément fini de Raviart-Thomas, mini-élément, ...
- Une interpolation automatique de toutes les fonctions éléments finis
- Une définition du problème linéaire par la formulation variationnelle avec la possibilité d'accéder aux matrices ou aux vecteurs si nécessaire.
- Une définition analytique de la frontière.
- Un générateur de maillage automatique basé sur la méthode de Delaunay.
- Un générateur de maillage anisotrope pour faire de l'adaptation de maillages, avec un constructeur de métrique automatique si nécessaire.
- Des solveurs linéaires LU, Cholesky, Crout, CG, GMRES.
- Des méthodes de calcul de valeurs et vecteurs propres.
- Une visualisation graphique.
- De nombreux exemples traités : Navier-Stokes, élasticité, fluide structure, problème aux valeurs propres, méthode de décomposition de domaine de Schwarz, indicateur par résidu, problème frontière libre ...

3. Position et formulation du problème

On rappelle que notre problème est

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x/\varepsilon, u_\varepsilon)\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} = f_\varepsilon \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \\ \\ a_{ij}(x/\varepsilon, u_\varepsilon)\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\nu_j + \alpha\varepsilon^\mu u_\varepsilon = g_\varepsilon \quad \text{sur} \quad \partial T_\varepsilon \\ \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

et, dont le problème homogénéisé, dans le cas où $m_{\partial T}(g) \neq 0$, est

$$(3.2) \qquad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big\{q_{ij}(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\Big\} + K(\alpha,\mu)u = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\partial T} g(y)\,d\sigma, \end{cases}$$

où les données $K(\alpha,\mu), g, \alpha...$ sont définies dans le premier chapitre.

Comme les coefficients homogénéisés $q_{ij}(u)$ et les fonctions auxiliaires $\chi^i(y,u^*)$ dépendent tous les deux de la solution u^* du problème limite, qui lui aussi dépend de $q_{ij}(u^*)$, on utilisera la méthode du point fixe pour résoudre le problème dont le schéma itératif est de la forme $q_{ij}^{n+1} = G(q_{ij}^n)$, avec un choix initial de q_{ij}^0. On peut remarquer qu'on peut choisir de démarrer de u^0, pour calculer les χ_n^i, donc les q_{ij}^0 et ensuite calculer u^1 et ainsi de suite...Et le problème reste équivalent puisque le choix de u^0 est arbitraire.
On introduit les notations suivantes

$$(3.3) \qquad \begin{cases} q_{ij}^n = q_{ij}(x,u_n) = q_{ij}(u_n) \\ \\ \chi_n^i = \chi_n^i(y,u_n), \text{ où } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Il s'agit donc d'approcher notre problème par une suite de problèmes linéaires par la méthode itérative citée ci-dessus.
Soient les trois problèmes suivants

$$(3.4) \qquad \begin{cases} q_{ij}^0 \text{ donnée} \\ \\ \text{pour } n \geq 1, u_n^* \in H_0^1(\Omega) \text{ est solution de} \\ \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big\{q_{ij}^{n-1}\dfrac{\partial u_n^*}{\partial x_j}\Big\} + K(\alpha,\mu)u_n^* = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\partial T} g(y)\,d\sigma. \end{cases}$$

$$(3.5) \qquad \begin{cases} u_n^* \text{ donnée, rechercher } \chi_n^i \in H_0^1(Y^*) \text{ telles que} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y_k}\Big[a_{lk}(y,u_n^*)\dfrac{\partial}{\partial y_l}(\chi_n^i - y_i)\Big] = 0 \text{ dans } Y^* \\ \\ \Big[a_{lk}(y,u_n^*)\dfrac{\partial}{\partial y_l}(\chi_n^i - y_i).n_k\Big] = 0 \text{ sur } \partial T \\ \\ \chi_n^i \quad Y- \text{ périodique et de moyenne nulle.} \end{cases}$$

On construit alors, pour u_*^n et χ_n^i données, les coefficients

$$q_{ij}^n = \frac{1}{|Y|}\int_{Y^*} a_{kl}(y,u_n^*)\frac{\partial(\chi_n^i - y_i)}{\partial y_k}\frac{\partial(\chi_n^j - y_j)}{\partial y_l}\,dy. \tag{3.6}$$

Au départ, après le choix d'une initialisation q_{ij}^{n-1}, on calcule numériquement dans tout le domaine Ω, la solution u_n^* du problème (3.4) (décalé d'un rang), qu'on utilisera pour calculer les fonctions χ_n^i solutions du problème (3.5) dans la cellule de base Y^* du matériau.
Enfin, à l'aide de formules de quadratures, on évaluera les intégrales q_{ij}^n dans (3.6).
L'algorithme est alors le suivant :

1 Initialisation : choix de q_{ij}^0 ($q_{ij}^0 = \delta_{ij}$ par exemple), choix de la précision ε du test d'arrêt.
2 Etape initiale : on calcule la solution limite u_1 dans tout Ω, puis χ_1^1 et χ_1^2 dans la cellule de base. χ_1^1 nous permet d'avoir q_{11}^1 et q_{21}^1, alors que χ_1^2 nous permet de calculer q_{22}^1 et q_{12}^1.
3 Etape n : on suppose calculé q_{ij}^{n-1}, on calcule u_n^* solution de (3.4), puis on calcule les deux solutions χ_n^1 et χ_n^2 de (3.5). Enfin, on calcule q_{ij}^n donnés par (3.6).
4 Si $\|q_{ij}^n - G(q_{ij}^n)\| = \sup_n |q_{ij}^n - q_{ij}^{n+1})| < \varepsilon$, on s'arrête, sinon on change n en $n+1$ et on retourne à l'étape précédente.

Précisons que notre algorithme étant basé sur la méthode du point fixe, sa convergence quand $n \to \infty$, doit être prouvée sans problème puisque les hypothèses lipschitziennes sur la matrice initiale se transportent de manière simple dans notre cas.

4. Approximation numérique de (3.4)

4.1. Formulation variationnelle

Comme dans les cas classiques, on obtient par des intégrations par parties la forme faible du problème (3.4)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega q_{ij}^{n-1}\frac{\partial u_n^*}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx + K(\alpha,\mu)\int_\Omega u_n^* w\,dx = \int_\Omega \Big(\frac{1}{|Y|}\int_{\partial T} g(y)\,d\sigma\Big) w\,dx \\ \forall w \in H_1^0(\Omega). \end{cases} \tag{4.1}$$

La constante $K(\alpha,\mu)$ étant positive, pour que le problème variationnel admette une solution unique, il suffit que l'hypothèse suivante soit satisfaite

$$\exists \alpha,\beta > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad \alpha|\xi|^2 \le q_{ij}\xi_i\xi_j \le \beta|\xi|^2. \tag{4.2}$$

Nous allons à présent décrire l'approximation par éléments finis P^1 de la formulation variationnelle (4.1).

4.2. Discrétisation du problème variationnel

Nous supposons que le domaine Ω est doté d'une triangulation régulière $(T_k), k \in \{1, ..., n_t\}$, où n_t est le nombre de triangles, les n_s sommets du maillage étant notés $q^i, i \in \{1, ..., n_s\}$, nous définissons l'espace discret V_h par

$$(4.3) \quad \begin{cases} V_h = \Big\{ \phi_h : \Omega_h \rightharpoonup \mathbb{R},\ \phi_h \text{ est continue sur } \Omega_h, \forall k \in \{1, ..., n_t\}, \phi_h|_{T_k} \text{ est une} \\ \qquad \text{fonction affine, et } \phi_h(q^i) = 0,\ \forall q^i \text{ sommet de } \partial\Omega_h, \text{ frontière de } \Omega_h \Big\}, \end{cases}$$

où $\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_t} T_k$.

La fonction ϕ_h étant dans l'espace V_h, sa valeur en chacun des sommets frontières du maillage est entièrement déterminée, ce qui montre que la dimension de cet espace est égale à $n_s - n_f$, où n_f est le nombre de sommets frontières.
Puis, nous résolvons (4.1) dans cet espace d'approximation, ce qui revient à approcher u_n^* par une fonction $\phi_h \in V_h$ solution du problème suivant

$$(4.4) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \phi_h \in V_h \quad \text{tel que } \forall w_h \in V_h \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} q_{ij}^{n-1} \frac{\partial \phi_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i}\, dx + K(\alpha, \mu) \int_{\Omega_h} \phi_h w_h\, dx = \int_{\Omega_h} \Big(\frac{1}{|Y|} \int_{\partial T} g(y)\, d\sigma \Big) w_h\, dx. \end{cases}$$

L'espace V_h est un sous espace vectoriel de $H_0^1(\Omega)$, dont une base est formée des fonctions chapeaux $(w^i)_{i \in I_\Omega}$, et I_Ω étant l'ensemble des indices i de tous les noeuds internes du maillage, i.e. l'ensemble des indices i tels que $q^i \notin \partial\Omega$, $w^i(q^j) = \delta_{ij}$. Ceci nous permet de chercher la solution de (4.4) sous forme d'une combinaison linéaire de ces fonctions

$$(4.5) \qquad \phi_h(x) = \sum_{i \in I_\Omega} \phi_i w^i(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Ainsi formulé, et en injectant l'écriture (4.5) dans (4.4), le problème variationnel se réduit alors à la résolution d'un système linéaire, d'inconnue $\Phi = (\phi_i)_{i \in I_\Omega}$

$$(4.6) \qquad A.\Phi = F,$$

où Φ est le vecteur de composantes $(\phi_i)_{i \in I_\Omega}$.
La matrice $A = (A_{ij}^n)_{(i,j) \in I_\Omega^2}$, et le second membre $F = (F_i)_{i \in I_\Omega}$ étant définis respectivement par

$$(4.7) \qquad A_{ij}^n = \int_{\Omega_h} q_{kl}^{n-1} \frac{\partial w^i}{\partial x_l} \frac{\partial w^j}{\partial x_k}\, dx + K(\alpha, \mu) \int_{\Omega_h} w^i w^j\, dx, \qquad (i,j) \in I_\Omega^2.$$

$$F_j = \int_{\Omega_h} \Big(\frac{1}{|Y|} \int_{\partial T} g(y)\, d\sigma \Big) w^j\, dx, \quad j \in I_\Omega. \tag{4.8}$$

5. Calcul numérique des fonctions auxiliaires

5.1. Formulation variationnelle

Nous allons à présent, calculer les fonctions auxiliaires χ_n^k qui interviennent dans les calculs des coefficients homogénéisés. Précisons que pour chaque noeud du domaine Ω, on doit calculer les χ_n^k correspondants, on aura donc autant de problèmes en χ_n^k que de noeuds. Il s'agit de résoudre numériquement le problème suivant

Trouver $\chi_n^k \in H^1(Y^*)$ solutions du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_i}\Big[a_{ij}(y,u_n^*)\dfrac{\partial}{\partial y_j}(\chi_n^k - y_k)\Big] = 0 \text{ dans } Y^* \\ \Big[a_{ij}(y,u_n^*)\dfrac{\partial}{\partial y_j}(\chi_n^k - y_k).n_i\Big] = 0 \text{ sur } \partial T \\ \chi_n^k \quad Y- \text{ périodique et de moyenne nulle.} \end{cases} \tag{5.1}$$

Dans (5.1), la fonction u_n^* ne représente qu'un paramètre donné.
Soit $\phi \in H^1(Y^*)$, Y-périodique, et on multiplie (1.3) et on intégre

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{Y^*} a_{ij}(y,u_n^*)\frac{\partial}{\partial y_j}(\chi_n^k - y_k)\frac{\partial \phi}{\partial y_i}\, dy = \int_{\partial Y^*} a_{ij}(y,u_n^*)\frac{\partial}{\partial y_j}(\chi_n^k - y_k)\nu_i \phi\, d\sigma \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{\partial Y} a_{ij}(y,u_n^*)\frac{\partial}{\partial y_j}(\chi_n^k - y_k)\nu_i \phi\, d\sigma \\ \qquad\qquad = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

car $\Big[a_{ij}(y,u_n^*)\dfrac{\partial}{\partial y_j}(\chi_n^k - y_k)\Big]$ est Y- périodique pour u_n^* fixé.
On en déduit que $\forall \phi \in H^1_{\#}(Y^*)$, la formulation variationnelle de (5.1) est

$$\int_{Y^*} a_{ij}(y,u_n^*)\frac{\partial \chi_n^k}{\partial y_j}\frac{\partial \phi}{\partial y_i}\, dy = \int_{Y^*} a_{ij}(y,u_n^*)\frac{\partial \phi}{\partial y_i}\delta_{kj}\, dy. \tag{5.3}$$

Comme dans le paragraphe 4.2, on utilisera l'approximation par éléments finis P^1 pour la résolution numérique de ce problème, mais avec des modifications supplémentaires dues au problème des conditions aux limites périodiques qu'on va décrire dans le paragraphe 5.3. En dimension 2 par exemple, on est amené à résoudre deux problèmes. Trouver $\chi_n^1 \in H^1(Y^*)$ telles que

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}(y,u_n^*)\dfrac{\partial}{\partial y_j}(\chi_n^1 - y_1)\right] = 0 \text{ dans } Y^* \\ \\ \left[a_{ij}(y,u_n^*)\dfrac{\partial}{\partial y_j}(\chi_n^1 - y_1).n_i\right] = 0 \text{ sur } \partial T \\ \\ \chi_n^1 \quad Y- \text{ périodique,} \end{cases}$$

La formulation variationnelle est de la forme suivante

$$(5.5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{Y^*} a_{ij}(y,u_n^*)\frac{\partial \chi_n^1}{\partial y_j}\frac{\partial \phi}{\partial y_i}\,dy = \int_{Y^*} a_{ij}(y,u_n^*)\frac{\partial \phi}{\partial y_i}\delta_{1j}\,dy \\ \\ \forall \phi \in H^1_{\#}(Y^*). \end{cases}$$

La fonction χ_n^2 sera solution d'un problème identique en échangeant y_1 en y_2 et δ_{1j} en δ_{2j} et où χ_n^2 est périodique.
Pour $j=1$, $i=1,2$ le calcul de χ_n^1 nous permet d'avoir les coefficients q_{11}^n et q_{21}^n, et si $j=2$, $i=1,2$ le calcul de χ_n^2 nous permet d'avoir les coefficients q_{22}^n et q_{12}^n.

5.2. Maillage

Pour réaliser le maillage du domaine en question, on a utilisé le mailleur de FreeFem++.

6. Calcul numérique des coefficients homogénéisés du problème

Dans la pratique, notre algorithme consiste en les étapes suivantes :
On démarre d'une température initiale donnée T_0, puis on calcule la température en m points du maillage (dans ce calcul, on a opté pour quatre points), ensuite on calcule les fonctions locales χ_1^i ainsi que les coefficients homogénéisés correspondants à ces points, après, en utilisant une interpolation de Lagrange des m matrices homogénéisées obtenues, on obtient une matrice homogénéisée définie partout en ces m points (cette interpolation nous évite de faire les calculs des fonctions χ^i en chaque point du maillage dans la cellule).
Enfin, on résoud le problème complet dans le domaine entier pour avoir la nouvelle température T_1 qu'on réinjecte dans notre algorithme et ainsi de suite jusqu'à convergence.

6.1 Quelques exemples numériques

Nous donnerons dans les exemples suivants deux cas de figures selon que a_{ij} est symétrique ou non.

Exemple 1 :

Dans cet exemple, on démarre de $q_{ij}^0 = \delta_{ij}$, et on choisit une matrice a_{ij} (non isotrope) de la forme

$$A(x,u) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/2 & 1 \\ 1 & u/4 \end{pmatrix},$$

qui s'écrit sous la forme $A(y,u) = A^0(y)B^0(u) + A^1(y)B^1(u)$ avec

$$A^0(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B^0(u) = 1,$$

$$A^1(y) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, B^1(u) = u.$$

On choisit $\eta = 10^{-4}$ comme test d'arrêt, après quatre itérations, les coefficients homogénéisés en un point du maillage deviennent constants et sont donnés par

$$\begin{pmatrix} q_{11}^{(4)} & q_{12}^{(4)} \\ q_{21}^{(4)} & q_{22}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.248 & 2.7\ 10^{-3} \\ 2.67\ 10^{-3} & 0.248 \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

On constate que la matrice q_{ij} obtenue est bien symétrique.

Exemple 2 :

La matrice a_{ij} est choisie de la forme

$$A(x,u) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/2 & 1 \\ 9 & u/4 \end{pmatrix},$$

Après trois itérations, les coefficients homogénéisés deviennent constants et sont donnés, en un point du maillage pris au hasard, par

$$\begin{pmatrix} q_{11}^{(1)} & q_{12}^{(1)} \\ q_{21}^{(1)} & q_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.359 & 1.37\ 10^{-3} \\ 0.9\ 10^{-3} & 0.36 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} q_{11}^{(2)} & q_{12}^{(2)} \\ q_{21}^{(2)} & q_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.359 & 1.38\ 10^{-3} \\ 0.88\ 10^{-3} & 0.359 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} q_{11}^{(3)} & q_{12}^{(3)} \\ q_{21}^{(3)} & q_{22}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.359 & 1.379\ 10^{-3} \\ 0.88\ 10^{-3} & 0.359 \end{pmatrix}.$$

On constate que dans notre cas les valeurs des coefficients calculés s'approchent beaucoup de celles qu'on trouve dans le cas linéaire. On peut expliquer cela par le fait qu'on linéarise notre problème pour pouvoir le résoudre numériquement.

6.2.b Autres exemples :

Les courbes suivantes représentent un tracé de la conductivité en fonction de la température de quelques matériaux physiques concrets.

En utilisant des techniques d'interpolation, on peut approcher par exemple la courbe des briques réfractaires (voir ci-dessous) par une méthode de type suivant :

$$a(u(x)) = 4,7418 \exp(-0,0006u(x)).$$

Remarquons que a(u(x)) est bien lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $\eta = 10^{-4}$ comme test d'arrêt, après deux itérations, les coefficients homogénéisés en un point du maillage deviennent constants et sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} q_{11}^{(1)} & q_{12}^{(1)} \\ q_{21}^{(1)} & q_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8778 & 3.34974\ 10^{-5} \\ 3.34974\ 10^{-5} & 2.87785 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} q_{11}^{(2)} & q_{12}^{(2)} \\ q_{21}^{(2)} & q_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.87867 & 3.35075\ 10^{-5} \\ 3.35075\ 10^{-5} & 2.87871 \end{pmatrix}.$$

Le tracé de la conductivité en fonction de la température pour cet exemple est donné par la figure2.

Pour mettre en évidence la non linéarité de la conductivité en fonction de la température, on fait une coupe qui traverse toutes les isovaleurs pour représenter la matrice homogénéisée $K((1/2, y_i), u(1/2, y_i))$ en fonction de la température $u(1/2, y_i)$, ceci revient à associer à chaque isovaleur I_j, représentant une température $u_j(x)$, une matrice de coefficients homogénéisés $A(u(x))$.
Signalons aussi que si l'on choisit des coupes qui, par exemple, ne traversent pas assez d'isovaleurs, les tracés de la conductivité en fonction de la température seront non parlants.

La courbe du Zircon (voir ci-dessous) peut être approchée par la méthode :

$$a(u(x)) = 13,261(1+x^2)^{(-0,1255)},$$

qui est lipschitzienne sur tout $\mathbb{R}$.

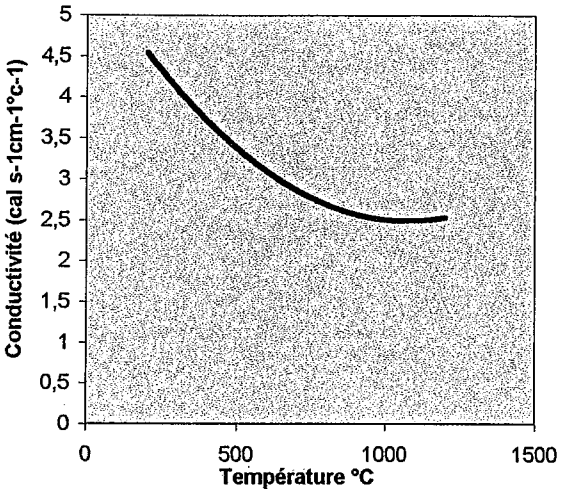
Pour $\eta = 10^{-4}$ comme test d'arrêt, après deux itérations, les coefficients homogénéisés en un point du maillage deviennent constants et sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} q_{11}^{(1)} & q_{12}^{(1)} \\ q_{21}^{(1)} & q_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.12226 & 3.63429\ 10^{-5} \\ 3.63429\ 10^{-5} & 3.12231 \end{pmatrix}.$$

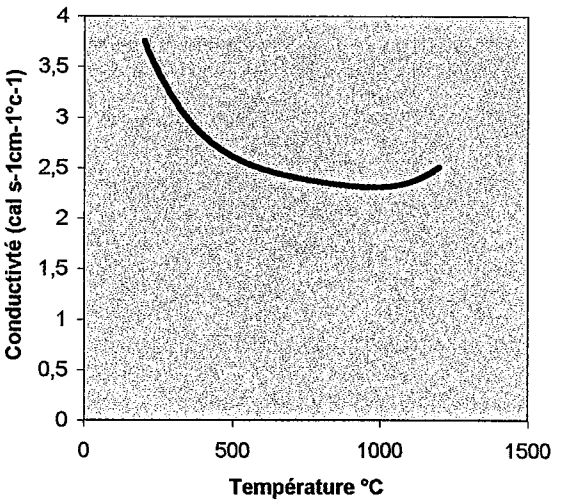
$$\begin{pmatrix} q_{11}^{(2)} & q_{12}^{(2)} \\ q_{21}^{(2)} & q_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.12892 & 3.64204\ 10^{-5} \\ 3.64204\ 10^{-5} & 3.12897 \end{pmatrix}.$$

Le tracé de la conductivité en fonction de la température pour cet exemple est donné par la figure1.

Briques réfractaires (99%Al_2O_3)



Zircon



Silice

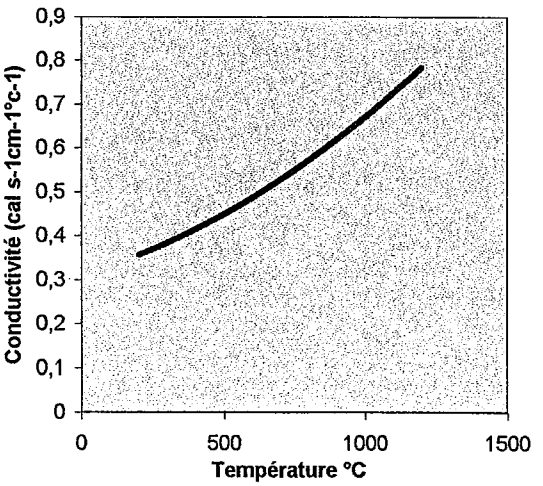


Figure 1 : Zircon

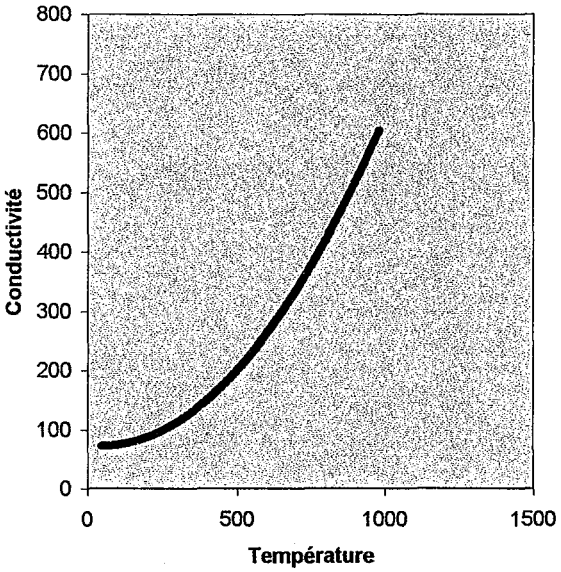
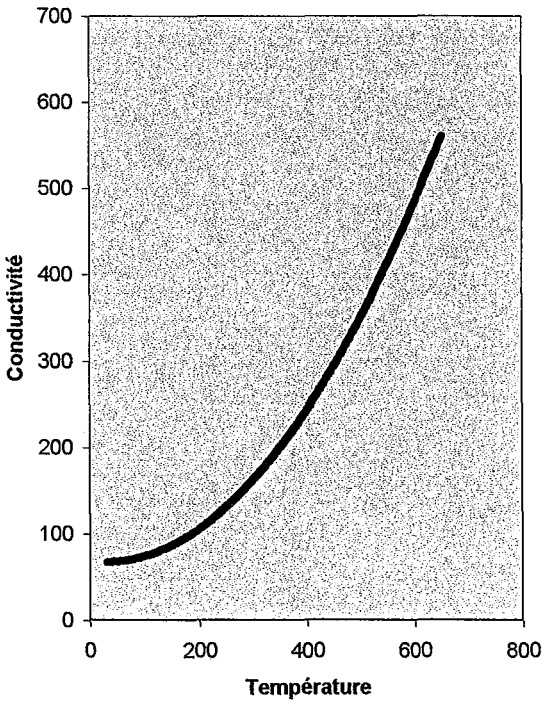


Figure 2 : Briques réfractaires



Conclusion générale

Dans ce travail, nous nous sommes intéréssés à l'homogénéisation d'une classe de problèmes non linéaires et non homogènes avec des conditions de Fourier dans des ouverts perforés, les premiers résultats de convergence obtenus généralisent des résultats antérieurs de Cioranescu-Donato [10], puisqu'on considère ici des coefficients a_{ij} qui dépendent de la solution de manière lipschitzienne.
Les différents problèmes homogénéisés sont obtenus en utilisant la méthode de l'energie selon que la moyenne de la donnée g sur le bord des trous soit nulle ou non.
Ensuite, on s'est intéréssé au même problème mais cette fois dans des domaines faiblement connectés, trois cas ont été étudiés selon la connexité des deux matériaux ainsi que la taille des ponts les reliant.
Dans le cas complexe où les deux matériaux sont connectés et quand les ponts sont suffisamment petits pour séparer complétement les matériaux (cas sous critique), on obtient deux problèmes non couplés pour les materiaux 1 et 2. Lorsque les ponts sont suffisamment larges pour connecter complétement les deux matériaux (cas surcritique), on obtient un problème homogénéisé commun. Finalement, dans le cas où les ponts ne sont ni suffisamment petits ni suffisamment larges, on obtient un système couplé avec des termes d'interaction entre les matériaux.
Dans le cas où l'un des matériaux est isolé, on obtient un problème elliptique pour la solution homogénéisée pour le matériau connecté et une deuxième solution homogénéisée exprimée de manière explicite en fonction de la première pour le matériau isolé.
Notons que le fait que les systèmes soient couplés ou non est du à la connexité des matériaux, comme la taille des ponts a une influence directe sur la forme des équations homogénéisées.
Enfin, une méthode numérique est développée pour le calcul explicite des coefficients homogénéisés calculés auparavant. Le problème non linèaire est approché par une suite de problèmes linèaires en utilisant une méthode itérative définie par une relation de récurrence de type $q_{ij}^{n+1} = f(q_{ij}^{n})$ avec un choix initial de q_{ij}^{0}.

Bibliographie générale

[1] E. ACERBI, V. CHIADO PIAT, G. DAL MASO, D. PERCIVALE, *An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains.* Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications, Vol. 18, $N°$ 5, 481-495, (1992).

[2] G. ALLAIRE, F. MURAT, *Homogenization of the Neumann problem with non isolated holes.* Asymptotic Analysis, 7, 81-95, (1993).

[3] N. ANDRE et M. CHIPOT, *A remark on uniqueness for quasilinear elliptic equations.* Proceeding of a symposium, Warsaw, Poland. Warsaw : Polish Academy of Sciences, Inst of Mathematics, Banach cent. Publ. 33, 9-18 (1996).

[4] M. ARTOLA et G. DUVAUT, *Homogénéisation d'une classe de problèmes non linéaires.* C. R. Acad. Sci. Paris, t 288 (1979) série A, 775-778.

[5] F. BARDATI and G. GEROSA, *On the solution of the nonlinear bio heat equation,* 1990, J. Biomechanics 23, 791-798.

[6] A. BENSSOUSSAN, J.-L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures,* Nord Holland, Amsterdam, 1978

[7] M. BRIANE, *Homogenization in some weakly connected domains.* Ric. Mat. 47, No.1,(1998) 51-94.

[8] M. BRIANE, *Poincaré-Wirtinger's inequality for the homogenization in perforated domains.* Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B11, No.1, (1997) 53-82.

[9] A. BRILLARD, *Thèse 3ème cycle. Université d'Orsay, 1983.*

[10] D. CIORANESCU et P. DONATO, *Homogénéisation du problème de Neumann non homogène dans des ouverts perforés,* Asymptotic Analysis, 1 (1988) 115-138.

[11] D. CIORANESCU et J. SAINT JEAN PAULIN, *Homogenization in open sets with holes.* J. Math. Anal. Appl. 71 (1979), 590-607.

[12] C. CONCA, *On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid* mechanics. J. Maths. Pures. Appl. 64 (1985), 31-75.

[13] C. CONCA et P. DONATO, *Non-homogeneous Neumann's problems in domains with small holes. Modélisation mathématique et analyse numérique.* Vol. 22, n 4, (1988), 561-607.

[14] A. DAMLAMIAN et P. DONATO, *Which sequences of holes are admissible for periodic homogenization with Neumann boundary condition? ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8(2002), 555-585.*

[15] *Enceclopedia of material science and Engineering,* tome3, p 2109, tome7, p 4917-4919, p 4950, p 5455.

[16] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differencial equations of second order.* 2nd. ed. Berlin-New York : Springer-Verlag, 1983.

[17] F. Hecht, O. Pironneau, K. Ohtsuka *Manuel FreeFem++*

[18] E. YA. HRUSLOV, *The asymptotic behavior of solutions of the second boundary value problems under fragmentation of the boundary of the domain. maths. USSR Sbornik,* 35, $N°2$, (1979).

[19] B. LUCQUIN, O. PIRONNEAU, *Introduction au calcul scientifique, collection mathématiques appliquées, Masson,* 1996

[20] S. MORTOLA et A. PROFETI, *On the convergence of the minimum points of non equicoercive quadratic functionals. Comm. in Part. Diff.* Eqs 7 (6) (1982), 645-673.

[21] F. MURAT, *Compacité par compensation. Anali. Scuola. Norm. Sup. di Pisa,* 5 (1978), 489-507.

[22] A.K. NOOR and W.S. BURTON, *Computational models for high-temperature multilayered composite plates and shells,* 1992, Appl. Mech.Rev. 45,419-445.

[23] J. SAINT JEAN PAULIN et L. R. TCHEUGOUE TEBOU, *Contrôlabilité interne dans les domaines perforés avec une condition aux limites de Fourier sur le bord des trous,* Asymptotic Analysis 14 (1997) 193-221.

[24] L. TARTAR, *Cours Peccot, Collège de France, non publié,* 1977.

[25] M. VANNINATHAN, *Homogenization of eignvalue problems in perforated domains.* Proc. of Indian Acad. of. Sciences 90 (3) (1981), 239-271.

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Madame Hélène DUMONTET, Professeur, Lm2S, IUP, EragnyNeuville S/Oise, Cergy Pontoise
Monsieur Alain BRILLARD, Professeur, Université de Haute-Alsace, Mulhouse

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur BENDIB Salaheddine

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

"Homogénéisation d'une classe de problèmes non linéaires avec des conditions de Fourier dans des ouverts perforés"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **mécanique et énergétique** »

Fait à Vandoeuvre, le
Le Président de l'I.N.P.L.
L. SCHUFFENECKER

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANDŒUVRE CEDEX

TEL. 33/03.83.59.59.59
FAX. 33/03.83.59.59.55

Homogénéisation d'une classe de problèmes non linéaires avec des conditions de Fourier dans des ouverts pérforés

Cette thèse est consacrée à l'homogénéisation d'une classe de problèmes non linéaires et non homogènes dans des ouverts perforés avec des conditions de Fourier sur le bord des trous. Dans le premier chapitre, les résultats de convergence obtenus généralisent des résultats antérieurs de Cioranescu-Donato, puisqu'on considère ici des coefficients a_{ij} qui dépendent de la solution de manière lipschitzienne. Après le théorème d'existence et d'unicité de la solution, des théorèmes d'homogénéisation sont établis. Le deuxième chapitre est lui consacré à l'étude du comportement limite de la solution du même problème mais dans des domaines faiblement connectés, les résultats d'homogénéisation ont été obtenus dans trois géomètries différentes selon la connexité des deux matériaux ainsi que la taille des ponts les reliant. Enfin, une méthode numérique est développée pour le calcul explicite des coefficients homogénéisés calculés auparavant. Le problème non linéaire est approché par une suite de problèmes linéaires en utilisant une méthode itérative définie par une relation de récurrence.

Homogenization of a class of nonlinear problems with Fourier conditions in perforated domains

This thesis is devoted to the homogenization of an elliptic quasi-linear problem in a perforated domain with Fourier conditions on boundary of the holes. First, the Results of homogenization that we obtain generalize anterior results of Cioranescu-Donato because the coefficients a_{ij} depend on the solution, what prevent us of passing directly to the limit on some terms. In addition to the homogenization results, a theorem of existence and uniqueness of the solution is proved. In the second chapter, we studied the limit behavior the solution of the same problem but in weakly connected domains, the homogenization results are proved in three different geometries according to the connectedness of materials and according to the size of the bridges. In the last chapter, a numerical method is developed to calculate explicitly the homogenized coefficients established before, the non linear problem is approached by a suite of linears problems by using an iterative method.

Mots-clés Homogénéisation - non linéaire - Fourier