Modélisation thermique des composants électroniques de puissance par la méthode des quadripôles

Gaël Maranzana

▶ **To cite this version:**

Gaël Maranzana. Modélisation thermique des composants électroniques de puissance par la méthode des quadripôles. Autre [cond-mat.other]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2005. Français. NNT : 2003INPL016N . tel-01749824

HAL Id: tel-01749824
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749824

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

136021823 5

inpl
Institut National
Polytechnique de Lorraine

Ecole Doctorale EMMA

TH 2003 MARANZANA, G.

N° attribué par la bibliothèque
BINPL016N

THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

Spécialité : Mécanique et Energétique

Par

Gaël MARANZANA
ingénieur ENSEM

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

Modélisation thermique des composants électroniques de puissance par la méthode des quadripôles

Soutenue le 25 mars 2003 devant la commission d'examen composée de :

Rapporteurs :	M. Jean-Christophe BATSALE	Professeur, ENSAM, Bordeaux
	M. Jean-Bernard SAULNIER	Professeur, ENSMA, Poitiers
Examinateurs :	M. Roger MARTIN *	Professeur, Université de Provence, Marseille
	M. Robert PERRET	Professeur, INPG, Grenoble
	Mme Isabelle PERRY	Maître de Conférences, UHP, Nancy
	M. Denis MAILLET	Professeur, INPL, Nancy
Invités :	M. Alain DEGIOVANNI	Professeur, INPL, Nancy
	M. Stéphane RAEL	Maître de Conférences, INPL, Nancy

* président du jury

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée
CNRS UMR 7563
2, avenue de la Forêt de Haye BP 160
F-54504 VANDOEUVRE-LES-NANCY

Avant propos

Ce travail de thèse effectué au sein du Laboratoire d'énergétique et de mécanique théorique et appliquée n'aurait pu être réalisé sans le concours et le soutien de plusieurs personnes.
Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Denis MAILLET, pour sa contribution scientifique et son enthousiasme communicatif, entre autres... Je remercie également Isabelle PERRY pour son soutien non dénué de gentillesse.

Je suis très honoré par la présence de Monsieur Roger MARTIN, Professeur à l'Université de Provence, et tiens à le remercier pour avoir bien voulu présider le jury.

Que Messieurs Jean-Christophe BATSALE, Professeur à l'ENSAM de Bordeaux et Jean-Bernard SAULNIER, Professeur à l'ENSMA de Poitiers, trouvent ici l'expression de mes plus vifs remerciements pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce travail.

Je remercie Messieurs Alain DEGIOVANNI et Stéphane RAEL pour leur gentillesse, leur collaboration fructueuse et leur participation au Jury.

Mes remerciements vont également aux nombreuses personnes du LEMTA qui ont su éveiller ma curiosité et me donner goût à la science : Messieurs Christian MOYNE, Benjamin REMY, Mostafa FOURAR, Stéphane ANDRE, Didier STEMMELEN, Giovanni RADILLA, Madame Sophie DIDIER-JEAN.

Je tiens à remercier chaleureusement mes collègues et amis du laboratoire pour leur sympathie et l'accueil qu'ils m'ont réservé : Sébastien, Pascal, Bruno, Thomas, Sepehr, Samuel, Jeorge, Thibault, Julien, Amélie, Guillaume, Fabien, Michel, Laurence, Valérie, Catherine, Frank et bien d'autres.

Enfin, je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à ma famille, à Séverine et à tous mes amis qui, de multiples façons, m'ont soutenu tout au long de ce travail.

à ma famille,
à ma belle Noiseuse,

La curiosité, pas moins que la dévotion, fait les pèlerins.
[A. Cowley]

Table des matières

Introduction 5

Premier chapitre : Modélisation

I. La méthode des quadripôles thermiques 5

I.1 Un peu d'histoire 5

I.2 Les quadripôles en géométrie 1D 6

I.2.1 Principe 6

I.2.2 Transferts globalement monodimensionnels 9

I.3 Les quadripôles en géométrie 2D 9

I.3.1 Problème de Sturm – Liouville 9

I.3.2 Résolution des structures multicouches monoblocs (rappels) 14

I.3.3 Résistances de contact (rappels) 15

I.3.4 Une condition limite supplémentaire 16

I.3.5 Quadripôle d'une couche hétérogène 18

I.4 Les quadripôles monoblocs en géométrie 3D (rappels) 24

I.4.1 Troncature 25

I.4.2 Convention de réorganisation des spectres sous forme de vecteurs 26

I.4.3 Résistance de contact non uniforme 27

I.4.4 Couplage à un écoulement fluide par la face latérale 27

I.5 Conclusion 29

II. La conversion de spectre 31

II.1 Cas de géométries en 2 dimensions aux faces latérales isolées 31

II.1.1 Conversion dite « des plus petits vers le plus grand » 32

II.1.2 Conversion dite « du plus grand vers les plus petits » 34

II.1.3 Choix des ordres de troncature 35

II.1.4 Majoration de l'erreur due à la troncature 37

II.1.5 Pourquoi $\boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{E}^{-1}$? 40

II.1.6 Application : condition limite mixte 41

II.1.7 Cas de conditions limites latérales différentes, généralisation 45

II.2 Cas de géométries tridimensionnelles 47

II.2.1 Découpage des surfaces libres 48
II.2.2 Formalisme « des plus petits vers le plus grand » 51
II.2.3 Formalisme « du plus grand vers les plus petits » 51
II.3 Conclusion **52**

III. Formalisme **53**
III.1 Approche 'des plus petits vers le plus grand', notion de chemin **53**
III.2 Approche 'du plus grand vers les plus petits', notion de chemin **55**
III.3 Cas des structures non pyramidales **56**
III.4 Conclusion **58**

IV. Limitations d'ordre théorique **59**
IV.1 Limitations géomètriques **59**
IV.2 Limitations dues aux non-linéarités **60**
IV.3 Conclusion **61**

V. Mise en œuvre, limitations d'ordre numérique **62**

VI. Conclusion du premier chapitre **64**

VII. Bibliographie relative au premier chapitre **65**

Second chapitre : Validation, Simulation, Optimisation

I. Modélisation d'un module IGBT 69

I.1 Structure macroscopique d'un module IGBT 70

I.2 Simulation en régime permanent 74

I.2.1 Quelques résultats 74

I.2.2 Validation par comparaison à deux codes commerciaux 76

I.2.3 Convergence en fonction du nombre d'harmoniques conservées 79

I.2.4 Performances en terme de temps de calcul 80

I.3 Simulation en régime transitoire 82

I.4 Résistance de contact non-uniforme 84

I.5 Conclusion 85

II. Modélisation fine de radiateurs 86

II.1 Couplage de la méthode des quadripôles et d'un modèle réduit d'ailette 86

II.1.1 Modélisation d'une ailette en régime transitoire 86

II.1.2 Couplage au modèle fin de conduction 88

II.2 Modélisation d'un canal à section rectangulaire 93

II.3 Couplage au fluide de refroidissement 97

II.4 Conclusion 99

III. Conception optimale d'un diffuseur 100

III.1 Cas d'un radiateur diffuseur monocouche 102

III.1.1 Cas général 102

III.1.2 Cas particuliers 105

III.1.3 Optimisation d'un diffuseur pour trois puces 114

III.2 Cas d'un radiateur diffuseur multicouche 116

III.3 Conclusion 120

IV. Conclusion du deuxième chapitre 120

V. Bibliographie relative au deuxième chapitre 121

Toisième chapitre : caractérisation expérimentale

I. Caractérisation de résistances thermiques de contact 125

I.1 Dispositif expérimental 125

I.2 Modélisation 127

I.2.1 Modèle direct 127

I.2.2 Influence du dépôt d'oxyde de titane 129

I.2.3 Simulation de l'estimation 129

I.3 Résultats expérimentaux 131

I.3.1 Première série de mesures 131

I.3.2 Deuxième série de mesures 132

I.3.3 Troisième série de mesures 132

I.4 Exploitation des mesures 133

I.4.1 Echantillon n°27 133

I.4.2 Echantillon n°45 134

I.5 Conclusion 135

II. Mesure de température sur un module IGBT 136

II.1 Les techniques existantes 136

II.1.1 Mesure électrique d'un paramètre thermosensible 136

II.1.2 Thermographie infrarouge 136

II.1.3 Phosphorescence induite UV 137

II.1.4 Fluorescence 138

II.1.5 Cristaux liquides thermochromiques 138

II.1.6 Photoreflectomètrie 138

II.1.7 Microscopie à micro-ondes évanescentes 139

II.2 Dispositif expérimental 139

II.2.1 Module IGBT Toshiba 140

II.2.2 Dispositif d'alimentation électrique de puissance 142

II.2.3 Dispositif de refroidissement 142

II.2.4 Dispositif de mesure de température. 143

II.3 Métrologie de température par thermographie infrarouge sur un IGBT 144

II.3.1 Hypothèses sur la température de la face avant 146

II.3.2 Deux modèles de rayonnement 148

II.4 Résultats expérimentaux **152**
II.4.1 Cartes des émissivités 152
II.4.2 Mesure de température en régime permanent et excitation électrique 158
II.4.3 Mesure en régime transitoire 158
II.4 Conclusion **162**

III. Caractérisation expérimentale d'un diffuseur **163**
III.1 Cas d'un seul bloc en deux dimensions **163**
III.2 Cas classique en trois dimensions **165**
III.3 Conclusion **166**

IV. Conclusion du troisième chapitre **168**

V. Bibliographie relative au troisième chapitre **169**

Conclusion 173

Anexe 1 : condition limite de lit fluide 175
Anexe 2 : quadripôle hétérogène 182
Anexe 3 : calcul de la matrice de convolution ***R*** permettant la prise en compte de résistance non uniforme dans l'espace en 3D 192
Anexe 4 : cas du refroidissement par un coté 194
Anexe 5 : calcul des matrices de conversion de spectre en 2D 199
Anexe 6 : majoration de l'erreur commise lors du changement de base 204
Anexe 7 : calcul des matrices de conversion de spectre en 3 D 208
Anexe 8 : mise en œuvre numérique et symbolique 210
Anexe 9 : calcul des matrices de conversion de spectre entre un bloc isolé sur ses faces latérales et un bloc échangeant sur sa face de droite 235

Introduction

Les applications de l'électronique de puissance se sont considérablement développées depuis le début des années 1980. Dans des domaines tels que les transports (voiture hybride, bus, tram, ferroviaire...), les énergies renouvelables, les télécommunications, le spatial, etc, elles exigent un accroissement de la vitesse de réponse des dispositifs, une réduction de la taille, des fonctionnalités plus complexes et une meilleure fiabilité. La loi de Moore, qui prédit que les performances des semiconducteurs doublent tous les dix-huit mois, continue de se vérifier depuis le début des années 1970.

Le contrôle thermique est alors devenu un point clef de la conception des équipements électroniques. En effet les caractéristiques de fonctionnement des composants et la fiabilité des systèmes dépendent fortement de la température. La miniaturisation et l'accroissement des fréquences de commutation conduisent à des densités de puissance dissipées de plus en plus élevées. Celles-ci atteignent maintenant des valeurs de l'ordre de 400 Wcm^{-2} en électronique de puissance : le facteur thermique est devenu dans de nombreux cas le facteur limitant la puissance commutable. Un outil de modélisation fine et rapide des transferts de chaleur dans les composants électroniques de puissance s'avérerait donc très utile pour optimiser leur structure d'un point de vue thermique, minimiser leur température de fonctionnement pour une puissance dissipée donnée, ou pour uniformiser leur température afin de réduire les contraintes thermomécaniques.

Les transferts de chaleur dans les composants électroniques de puissance (CEP), dont la structure caractéristique est multicouche, typiquement composée d'empilements de blocs de forme parallélépipédique, sont essentiellement des transferts par conduction. Les puces situées au sommet de l'empilement dissipent de l'énergie électrique, générant ainsi un flux de chaleur qui traverse l'ensemble des blocs pour être échangé avec le milieu ambiant par un radiateur. Il existe deux grandes classes de méthodes permettant le calcul des champs de température et de densité de flux au sein des CEP : les méthodes numériques et les méthodes à caractère analytique [1]. Les méthodes numériques sont de loin les plus utilisées car elles sont adaptées à tous les types de géométries et de conditions limites et permettent également de considérer des non-linéarités (thermodépendance des propriétés thermophysiques). De nombreux codes commerciaux, basés sur les techniques d'éléments finis (Ansys®, FlexPDEase®...), de volumes finis (Flotherm®, Fluent®..) et d'éléments frontières (Rebeca3D®) permettent la résolution de l'équation de la chaleur. Ces codes sont attractifs du fait de leur simplicité d'utilisation mais présentent le désavantage de consommer des temps de calcul importants ; ils sont donc peu adaptés à l'optimisation thermique des CEP. Les méthodes semi-analytiques [2,3,4,5,6,7], toutes basées sur les solutions obtenues par la méthode de séparation des variables, sont plus rapides mais limitées à des géométries simples. Elles peuvent difficilement prendre en compte les caractères non-linéaires des transferts de chaleur. De plus, leur application aux structures

mutliblocs, caractéristiques des CEP, nécessite la discrétisation des interfaces entre blocs de dimensions latérales différentes et l'emploi d'algorithmes itératifs [7]. Ceci a pour conséquence l'introduction de nombreux hyperparamètres comme des pas de discrétisation, des coefficients de relaxation, c'est-à-dire qu'en pratique le caractère analytique est perdu. Elles présentent également des problèmes de convergence et sont par conséquent limitées a un certain nombre de couches empilées.

Nous proposons ici une nouvelle technique, dont l'originalité réside dans l'introduction de matrices de conversion de spectre, qui relient les spectres spatiaux des températures et densités de flux à l'interface de deux blocs de dimensions latérales différentes et qui permettent d'éviter ainsi une démarche itérative. Il s'agit d'une extension de la méthode des quadripôles thermiques, formalisme développé au Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée de Nancy (LEMTA) depuis le début des années 1980 et qui consiste à écrire une relation entrée-sortie entre les diverses conditions limites appliquées au système.
Ce mémoire est structuré selon trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la mise en place des outils de modélisation. Il regroupe quelques rappels concernant la méthode des quadripôles thermiques appliquée aux structures monoblocs, c'est-à-dire composées d'un empilement de couches de mêmes dimensions latérales et dont les faces latérales sont soumises aux mêmes conditions limites. Quelques nouveautés viennent étayer ses rappels. La technique de conversion de spectre est ensuite introduite ; elle consiste en un changement de base de fonctions propres. Les fonctions propres associées à un bloc, sur lesquelles sont projetées la température et la densité de flux, dépendent des dimensions latérales du bloc ainsi que des conditions limites imposées sur ses faces latérales. L'écriture, dans l'espace transformé, de la condition d'interface entre deux blocs de dimensions différentes nécessite alors d'exprimer la base de fonctions propres d'un bloc en fonction de celle de l'autre, c'est-à-dire de faire intervenir une matrice de conversion de spectre, dont le rôle est de convertir les spectres spatiaux de la température et de la densité de flux d'une base à l'autre.
Un code de calcul, basé sur cette méthode et permettant la simulation des transferts de chaleur dans les CEP, à été réalisé.

Le deuxième chapitre est centré sur la validation et l'estimation des performances de la méthode. La simulation thermique d'un module IGBT (Insulated Gate Bipolar Transistor) est réalisée. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats produits par deux codes de calcul commerciaux (FlexPDEase® et Flotherm®), ce qui permet une validation croisée des différentes méthodes. Il s'avère que les performances en terme de temps de calcul de la méthode des quadripôles sont très supérieures aux performances des deux codes numériques lorsqu'une faible précision spatiale est demandée (par exemple pour déterminer la température moyenne des puces). La méthode permet alors l'optimisation thermique des systèmes de puissance ; une procédure de conception optimale d'un diffuseur est proposée. La faisabilité de la prise en

compte par la méthode des quadripôles thermiques du couplage entre un canal fluide et ses parois solides, ou de la modélisation d'un radiateur à ailettes, est également démontrée.

Le troisième et dernier chapitre est consacré à la mise au point d'outils de caractérisation d'empilements, de métrologie de température sur les IGBTs et de fluxmètrie par conduction inverse. L'estimation expérimentale de résistances de contact entre une couche de cuivre et une couche de silicium est mise en œuvre. Une procédure de mesure de température sur la surface d'un composant est également mise au point en collaboration avec le GREEN (Groupe de Recherche en Electrotechnique et Electronique de Nancy). La mesure est réalisée par thermographie infrarouge, phosphorescence induite U.V. et par l'intermédiaire d'un paramètre thermosensible afin de procéder à la cartographie des émissivités. La perspective d'utiliser un composant électronique comme fluxmètre est également envisagée : les mesures de la température et de la densité de flux en face avant permettent l'estimation de la densité de flux en face arrière. Ceci pourrait permettre de caractériser divers « extracteurs » de chaleur comme des radiateurs, des diffuseurs, des caloducs, ou des systèmes à micro-canaux, systèmes qui sont de plus en plus couramment utilisés en électronique et dont il est difficile actuellement de quantifier précisément les performances.

Premier Chapitre

MODELISATION

I La méthode des quadripôles thermiques

La méthode des quadripôles est une méthode explicite exacte de représentation des systèmes linéaires. Basée sur les solutions analytiques des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles résolus par une méthode de transformée intégrale ou de séparation des variables, elle constitue un formalisme qui permet la résolution rapide et efficace de problèmes dont la géométrie est suffisamment simple. Nous l'appliquerons ici aux transferts thermiques par conduction.

De la même façon que la méthode des éléments frontières, cette méthode détermine la relation, intrinsèque au système, liant les conditions limites entre elles. Ceci implique une transformée de Laplace sur le temps et une transformée intégrale de type Fourier-cosinus (par exemple) sur une ou deux variables d'espace selon que le problème est en 2 ou 3 dimensions.
Le retour dans l'espace réel est exécuté d'une façon numérique ; la méthode peut donc être qualifiée de semi-analytique.

L'intérêt de la méthode des quadripôles est son caractère analytique rendant transparent le formalisme qui en résulte. Elle permet des études paramétriques simples, des études de sensibilité, des estimations de paramètres par méthodes inverses. Le nombre d'hyperparamètres, c'est-à-dire de paramètres qui ne sont pas présents dans la formulation mathématique du problème qu'on cherche à résoudre mais qui sont introduits pour obtenir une solution numérique (nombre d'itérations, ordre de troncature..), introduit, est très faible comparé aux méthodes numériques dont les solutions nécessitent une discrétisation du temps et de l'espace. De plus sa mise en œuvre informatique conduit à des calculs rapides qui en font une méthode bien adaptée à l'optimisation des systèmes.

I.1 Un peu d'histoire

Le concept à la base de la méthode des quadripôles thermiques apparaît dès 1921 avec Carslaw (*Introduction to the mathemaical theory of heat in solids*, Macmillan) qui considérait alors une représentation complexe (amplitudes complexes ou phaseurs inspirés du domaine des systèmes électriques) pour décrire l'évolution temporelle de la température et du flux en régime périodique. En 1959, Carslaw et Jaeger [8] utilisent la représentation de Laplace (à la place des phaseurs) et font référence à la similitude qui existe entre un système thermique monodimensionel homogène isotrope et un circuit électrique : ces deux systèmes peuvent être modélisés en régime transitoire par un quadripôle, la température jouant le rôle du potentiel et le flux celui du courant.

La méthode des quadripôles thermiques est développée au LEMTA depuis le début des années 1980 à l'initiative d'Alain Degiovanni qui lui donna sont caractère matriciel. Le premier article date de 1988. Il est intitulé « Conduction dans un mur multicouche avec sources ; extension de la notion de quadripôles » [9]. Deux traités pour les Techniques de l'Ingénieur [10,11] complètent la description de cette méthode. Les quadripôles thermiques sont au départ

limités à la résolution des transferts monodimensionnels, ou globalement monodimensionnels, et sont utilisés principalement comme un outils de modélisation pour déterminer expérimentalement par techniques inverses les propriétés thermophysiques des matériaux. C'est en 1993, suite à un article intitulé « A two-port netwok formalism for 3D heat conduction analysis in multilayered media » [5], rédigé par l'équipe de P. Leturcq et J.M. Dorkel du LAAS de Toulouse et utilisant les transformées spatiales de Fourier, que la méthode devient utilisable en 2 et 3 dimensions. L'idée d'utiliser les transformations intégrales à la fois temporelles (Laplace) et spatiales (Fourier) pour étendre le domaine d'application de la méthode en 2 et 3 dimensions naît à la même époque au LEMTA, puisque en 1994 J.C. Batsale et col. publient « Extension de la méthode des quadripôles thermiques à l'aide de transformations intégrales »[12]. Dans les années qui suivent, la méthode est employée pour estimer des résistances d'interface non uniformes dans l'espace [13] et déterminer diverses propriétés thermophysiques, notamment dans le domaine de l'électronique [14]. Parallèlement, le LAAS mettait au point une méthode permettant de résoudre les problèmes d'empilements pyramidaux à partir d'un couplage numérique aux interfaces entre les blocs [7], le but étant de modéliser un composant électronique de puissance. Mais la méthode utilisée nécessitait de mettre en œuvre un algorithme itératif pour faire converger les champs de température de part et d'autre des interfaces entre blocs différents, ce qui lui fait perdre son caractère analytique. De plus, des problèmes de convergence limitent le nombre des couches qui peuvent être empilées et de nombreux hyperparamètres comme la discrétisation des interfaces doivent être introduits. En 2000, le livre « Thermal quadrupoles » [2] récapitule près de 20 années de recherche sur le sujet au LEMTA et constitue la base de cette thèse.

Dans la suite de cette partie, nous allons successivement passer en revue les principes de la méthode et introduire divers aspects originaux.

I.2 Les quadripôles en géométrie 1D [2]

I.2.1 Principe

Considérons l'exemple simple d'un mur homogène isotrope de dimensions latérales infinies comme représenté sur la *figure I.1.*

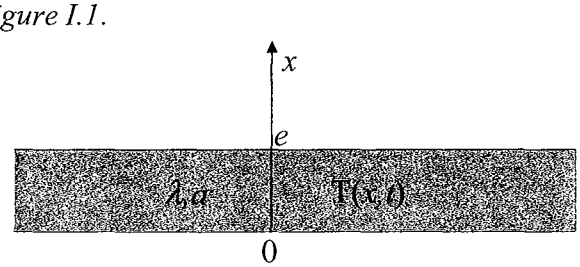


figure I.1 : mur isotrope, homogène de conductivité thermique λ et de diffusivité thermique a

Dans ce mur, l'équation de la chaleur 1D s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \tag{I.1}$$

Si on effectue une transformée de Laplace sur le temps, en considérant que la température initiale est nulle, l'équation (I.1) devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x,p) = \frac{p}{a}\theta(x,p) \tag{I.2}$$

où p est la variable de Laplace, et θ la transformée de Laplace de la température.
La solution de (I.2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi = -\lambda\dfrac{\partial \theta}{\partial x} \end{pmatrix}(x,p) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\left(\sqrt{p/a}x\right) & \mathrm{sh}\left(\sqrt{p/a}x\right) \\ -\lambda\sqrt{p/a}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{p/a}x\right) & -\lambda\sqrt{p/a}\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{p/a}x\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \tag{I.3}$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes que l'on détermine à partir des conditions limites en $x = e$:

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\left(\sqrt{p/a}e\right) & \mathrm{sh}\left(\sqrt{p/a}e\right) \\ -\lambda\sqrt{p/a}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{p/a}e\right) & -\lambda\sqrt{p/a}\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{p/a}e\right) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}(e,p) \tag{I.4}$$

ce qui nous permet de déterminer la relation entre température et flux à l'entrée et à la sortie :

$$\begin{pmatrix} \theta(0,p) \\ \phi(0,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\left(\sqrt{\frac{p}{a}}e\right) & sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}e\right)\Big/\lambda\sqrt{\frac{p}{a}} \\ \lambda\sqrt{\frac{p}{a}}sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}e\right) & ch\left(\sqrt{\frac{p}{a}}e\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta(e,p) \\ \phi(e,p) \end{pmatrix} \tag{I.5}$$

que l'on écrit :

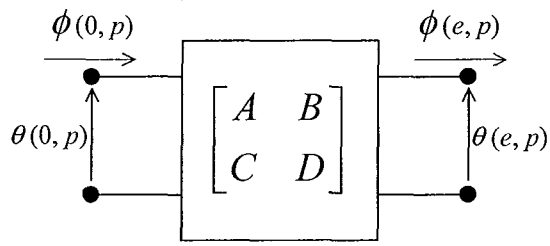
$$\begin{pmatrix} \theta(0,p) \\ \phi(0,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta(e,p) \\ \phi(e,p) \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}\begin{pmatrix} \theta(e,p) \\ \phi(e,p) \end{pmatrix} \tag{I.6}$$

Ici, $\boldsymbol{M}$ est une matrice de transfert inverse liant l'entrée vectorielle (en x=0) à la sortie vectorielle (en $x = e$). A ce niveau, il est utile de rappeler que l'égalité matricielle (I.5) est strictement équivalente à l'équation aux dérivées partielles (I.1) (à condition initiale nulle). En terme de

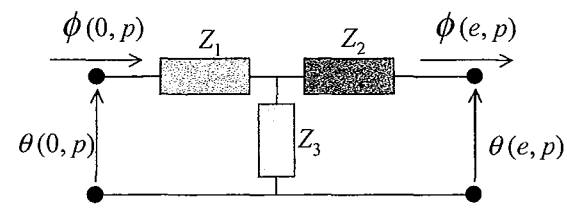
modélisation des systèmes, on a remplacé un modèle d'état (interne) par un modèle d'entrée/sortie (externe). Par contre, une fois les conditions limites données et le système résolu pour les conditions limites manquantes, il est possible d'obtenir la température et le flux dans toute la structure en utilisant (I.3) et (I.4). La méthode des quadripôles thermiques constitue à la fois une représentation externe et une représentation interne du problème.
L'obtention des températures et densités de flux réelles nécessite une transformée de Laplace inverse, que l'on réalise numériquement [16].

Analogie électrique :

Le concept de quadripôle est ici étendu à la thermique. Il provient du domaine des systèmes électriques : un quadripôle lie tensions et courants à l'entrée et à la sortie d'un système. Comme en électricité, il existe deux façons équivalentes pour représenter un quadripôle thermique : le quadripôle en forme de T et en forme de pi ; en thermique on a coutume d'utiliser la représentation en T. Sur la *figure I.2* est représenté d'un point de vue schématique matriciel et du point de vue de l'analogie électrique un quadripôle sans source :



représentation matricielle



représentation sous forme de réseau

figure I.2 : les deux représentations du quadripôle

Les trois impédances thermiques Z_1, Z_2 et Z_3 valent respectivement :

$$Z_1 = \frac{A-1}{C},\ Z_2 = \frac{D-1}{C} \text{ et } Z_3 = \frac{1}{C} \tag{I.7}$$

La représentation sous forme de réseau permet l'utilisation de logiciels adaptés à la résolution de circuits électriques. Pour notre part, nous utiliserons plutôt la représentation sous forme de matrices car nous effectuerons des calculs sous Matlab®, un code qui gère très bien les produits matriciels.

Cette méthode est particulièrement bien adaptée à la résolution de structures multicouches dont un exemple est représenté en *figure I.3*. Du point de vue de l'analogie électrique, les quadripôles sont en série.

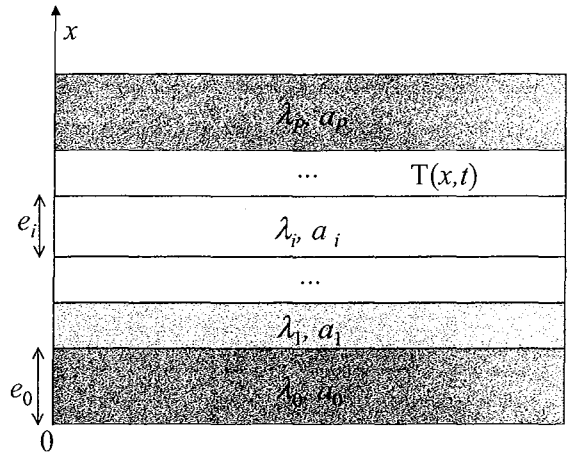


figure I.3 : mur multicouche

L'entrée de la couche i est égale à la sortie de la couche i-1, donc la matrice de transfert du système vaut le produit de toutes les matrices de transfert des différentes couches :

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}(0,p) \\ \tilde{\varphi}(0,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^0 & \boldsymbol{B}^0 \\ \boldsymbol{C}^0 & \boldsymbol{A}^0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^i & \boldsymbol{B}^i \\ \boldsymbol{C}^i & \boldsymbol{A}^i \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^P & \boldsymbol{B}^P \\ \boldsymbol{C}^P & \boldsymbol{A}^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T}(e,p) \\ \tilde{\varphi}(e,p) \end{pmatrix} \tag{I.8}$$

Nous obtenons donc la matrice de transfert intrinsèque au mur multicouche, matrice qui lie les différentes conditions limites externes entre elles.

I.2.2 Transferts globalement monodimensionnels

La modélisation de l'épanouissement, ou de la constriction, des lignes de flux par une impédance équivalente (impédance exacte ou approchée) permet la résolution de problèmes non strictement monodimensionnels appelés problèmes « globalement monodimensionnels », c'est-à-dire les problèmes pour lesquels on connaît les surfaces latérales d'un tube de flux au sein duquel le transfert peut être considéré monodimensionnel en « moyenne ». La relation quadripolaire s'écrit alors entre les températures et densités de flux moyennes. Cette notion est largement développée dans [2,15] et sera l'objet d'une étude au chapitre **2**.III.

I.3 Les quadripôles en géométrie 2D

I.3.1 Problème de Sturm – Liouville

Considérons le bloc en 2 dimensions, de largeur L, d'épaisseur e, de conductivités λ_x et λ_z suivant $0x$ et $0z$, représenté sur la *figure I.4*. Les faces latérales en $x = 0$ et $x = L$ sont soumises à

des conditions limites de première ($h \to \infty$), seconde ($h=0$) ou troisième espèce suivant les valeurs des deux coefficients d'échange sur les faces latérales.

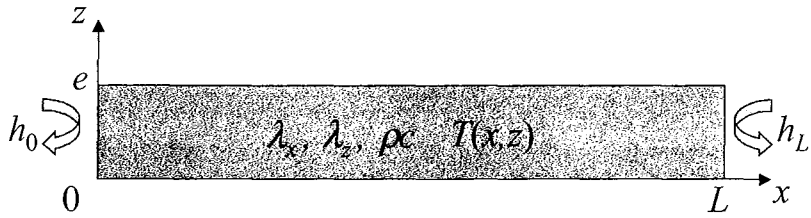


figure I.4 : bloc homogène anisotrope en 2 dimension

L'équation de la chaleur en régime permanent dans le bloc s'écrit :

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{I.9}$$

$$-\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + h_0 T = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + h_L T = 0 \text{ en } x = L \tag{I.10}$$

Résolvons ce système d'équations par la méthode de séparation des variables.
Soient $X(x)$ et $\theta(z)$ deux fonctions telles que :

$$T(x,z) = X(x)\,\theta(z) \tag{I.11}$$

(I.9) et (I.10) deviennent :

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\lambda_z}{\lambda_x \theta}\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}z^2} = 0 \tag{I.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} - \frac{h_0}{\lambda_x} X = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} + \frac{h_L}{\lambda_x} X = 0 \tag{I.13}$$

donc

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\lambda_z}{\lambda_x \theta}\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}z^2} = -\alpha^2 \tag{I.14}$$

où α est une constante positive.

c'est-à-dire :

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \alpha^2 X = 0 \tag{I.15}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}z^2} - \alpha^2 \frac{\lambda_x}{\lambda_z}\theta = 0 \tag{I.16}$$

Le problème constitué des équations (I.15) et (I.13) est un problème de Strum-Liouville [2,17]. Les fonctions X satisfaisant ce système sont appelées fonctions propres, chaque fonction propre étant associée à une valeur propre α.
L'équation (I.15) implique qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que :

$$X(x) = K_1 \cos(\alpha x) + K_2 \sin(\alpha x) \tag{I.17}$$

L'équation (I.13) conduit à l'équation transcendante permettant le calcul des valeurs propres [2] :

$$\tan(\alpha_n L) = \frac{\lambda_x \alpha_n (h_0 + h_L)}{(\lambda_x \alpha_n)^2 - h_0 h_L} \tag{I.18}$$

Nous avons donc déterminé la base des fonctions propres du problème :

$$\left(X_n(\alpha_n, x) = \cos(\alpha_n x) + \frac{h_0}{\lambda_x \alpha_n} \sin(\alpha_n x) \right)_{0 \le n \le \infty} \tag{I.19}$$

Cette famille de fonctions propres est une base orthogonale sur laquelle la température peut être projetée. Elle définit un produit scalaire correspondant à la transformée intégrale qui apparaît naturellement dans ce problème :

$$\theta_n(z) = \langle T(x,z), X_n(x) \rangle = \int_0^L T(x,z) X_n(x) \mathrm{d}x \quad \text{avec } 0 \le n \le \infty \tag{I.20}$$

La norme associée à ce produit scalaire vaut :

$$N(\alpha_n) = \langle X_n(x), X_n(x) \rangle = \frac{1}{2L\alpha_n^2} \left[\left(\left(\frac{h_0 L}{\lambda_x} \right)^2 + (\alpha_n L)^2 \right) \left(1 + \frac{\frac{h_L L}{\lambda_x}}{\left(\frac{h_L L}{\lambda_x} \right)^2 + (\alpha_n L)^2} \right) + \frac{h_0 L}{\lambda_x} \right] \tag{I.21}$$

Et la transformée inverse est définie par :

$$T(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle T(x,z), X_n(x) \rangle}{\langle X_n(x), X_n(x) \rangle} X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n(x)}{N_n} \theta_n(z) \tag{I.22}$$

θ_n vérifiant l'équation (I.16), cette dernière ayant exactement la même forme que l'équation (I.2) (cas 1D transitoire) en remplaçant p/a par $\alpha_n^2 \lambda_x / \lambda_z$. Si on fait apparaître la transformée spatiale $\phi_n = -\lambda_z \partial \theta_n / \partial z$ de la densité de flux $\varphi = -\lambda_z \partial T / \partial z$ dans la direction z (correspondant à la direction de l'épaisseur du bloc), on obtient une relation « quadripôlaire » analogue à l'équation (I.6) :

$$\begin{pmatrix}\theta_n\\ \phi_n\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\left(\alpha_n\sqrt{\lambda_x/\lambda_z}e\right) & \dfrac{\mathrm{sh}\left(\alpha_n\sqrt{\lambda_x/\lambda_z}e\right)}{\sqrt{\lambda_x\lambda_z}\alpha_n}\\ \sqrt{\lambda_x\lambda_z}\alpha_n\mathrm{sh}\left(\alpha_n\sqrt{\lambda_x/\lambda_z}e\right) & \mathrm{ch}\left(\alpha_n\sqrt{\lambda_x/\lambda_z}e\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_n\\ \phi_n\end{pmatrix}(e) \tag{I.23}$$

En pratique il est nécessaire de tronquer le spectre à N modes, ce qui conduit à une inversion ((I.22)) en remplaçant le symbole ∞ par N. La relation (I.23) s'écrit alors sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}(e) \tag{I.24}$$

où les matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ sont des matrices carrées diagonales de taille N+1 et où $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\phi}$ sont les vecteurs spectres de la température et de la densité de flux (selon 0z) dans la base de fonctions propres correspondante :

$$\boldsymbol{\theta}=(\theta_0\cdots\theta_N)^t \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\phi}=(\phi_0\cdots\phi_N)^t \tag{I.25}$$

La relation (I.24) est équivalente aux N+1 relations (I.23). Nous utilisons ici la notion de vecteur spectre $\boldsymbol{\theta}$ ou $\boldsymbol{\phi}$ non indispensable dans les problèmes diagonaux mais qui va se révéler très efficace si le problème à résoudre correspond à un couplage des modes.

La densité de flux réelle suivant 0x est quant à elle donnée par la relation suivante :

$$\varphi_x(x,z)=-\lambda_x\frac{\partial T(x,z)}{\partial x}=-\lambda_x\sum_{n=0}^{N}\frac{\partial X_n(x)}{\partial x}\frac{\theta_n(z)}{N_n} \tag{I.26}$$

En résumé, à chaque couple de conditions limites latérales correspond une base de fonctions propres sur laquelle sont projetées la température et la densité de flux suivant 0z (voir *tableau I.1* pour la liste des différentes familles de fonctions propres). La matrice de transfert est formée de 3 sous matrices carrées diagonales $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ dépendant des valeurs propres associées à la base de fonctions propres. Le caractère diagonal de ces matrices quadripolaires traduit un découplage entre les différents modes de la température et de la densité de flux, ainsi la méthode peut être qualifiée d'«exacte à l'ordre de troncature près».

Cette technique fait partie de la classe des méthodes appelées « méthodes de transformations intégrales» qui sont une généralisation de la méthode de séparation des variables et dont le principe consiste à projeter l'ensemble des potentiels du problème sur un espace de fonctions qui vérifient le problème homogène associé. L'ouvrage de Mikhailov et Ozisik [18] regroupe la plupart des travaux sur l'analyse exacte des transferts de chaleur et de masse par diffusion employant la méthode classique de transformée intégrale. Ces vingt dernières années, cette

approche s'est progressivement étendue pour permettre la résolution analytique approchée d'un plus grand éventail de problèmes *a priori* non transformables [19, 20]. En particulier Cotta et Mikhailov [20] ont développé une technique appelée « technique de transformée intégrale généralisée » qui est une méthode hybride analytique-numérique permettant de résoudre certains problèmes multidimensionnels, couplés et non linéaires. L'outil numérique est alors utilisé essentiellement pour résoudre des systèmes différentiels ordinaires.

Cas	Condition limite en $x=0$	Condition limite en $x=L$	Valeurs propre α_n	Fonctions propres X_n	Norme $N(\alpha_n)$
1	$X=0$	$X=0$	$n\pi/L$ $(n=1,2..)$	$\sin(\alpha_n x)$	$L/2$
2	$X=0$	$\dfrac{\partial X}{\partial x}=0$	$\dfrac{(n+1/2)\pi}{L}$ $(n=0,1,2..)$	$\sin(\alpha_n x)$	$L/2$
3	$X=0$	$\lambda\dfrac{\partial X}{\partial x}+hX=0$	solutions positives de $\tan(\alpha_n L)=-\lambda\alpha_n/h$	$\sin(\alpha_n x)$	$\dfrac{L}{2}\left(1+\dfrac{hL/\lambda}{(hL/\lambda)^2+(\alpha_n L)^2}\right)$
4	$\dfrac{\partial X}{\partial x}=0$	$X=0$	$\dfrac{(n+1/2)\pi}{L}$ $(n=0,1,2..)$	$\cos(\alpha_n x)$	$L/2$
5	$\dfrac{\partial X}{\partial x}=0$	$\dfrac{\partial X}{\partial x}=0$	$\dfrac{n\pi/L}{(n=0,1,2..)}$	$\cos(\alpha_n x)$	pour $n=0$: L pour $n=1,2..$: $L/2$
6	$\dfrac{\partial X}{\partial x}=0$	$\lambda\dfrac{\partial X}{\partial x}+hX=0$	solutions positives de $\cot\tan(\alpha_n L)=\lambda\alpha_n/h$	$\cos(\alpha_n x)$	$\dfrac{L}{2}\left(1+\dfrac{hL/\lambda}{(hL/\lambda)^2+(\alpha_n L)^2}\right)$
7	$-\lambda\dfrac{\partial X}{\partial x}+hX=0$	$X=0$	solutions positives de $\tan(\alpha_n L)=-\lambda\alpha_n/h$	$\sin(\alpha_n(L-x))$	$\dfrac{L}{2}\left(1+\dfrac{hL/\lambda}{(hL/\lambda)^2+(\alpha_n L)^2}\right)$
8	$-\lambda\dfrac{\partial X}{\partial x}+hX=0$	$\dfrac{\partial X}{\partial x}=0$	solutions positives de $\cot\tan(\alpha_n L)=\lambda\alpha_n/h$	$\cos(\alpha_n(L-x))$	$\dfrac{L}{2}\left(1+\dfrac{hL/\lambda}{(hL/\lambda)^2+(\alpha_n L)^2}\right)$
9	$-\lambda\dfrac{\partial X}{\partial x}+h_1X=0$	$\lambda\dfrac{\partial X}{\partial x}+h_2X=0$	solutions positives de $\tan(\alpha_n L)=\dfrac{\lambda\alpha_n(h_1+h_2)}{(\lambda\alpha_n)^2-h_1h_2}$	$\cos(\alpha_n x)+\dfrac{h_1}{\lambda\alpha_n}\sin(\alpha_n x)$	$\dfrac{1}{2L\alpha_n^2}\left[\left((h_1L/\lambda)^2+(\alpha_n L)^2\right)\right.$ $\times\left(1+\dfrac{h_2L/\lambda}{(h_2L/\lambda)^2+(\alpha_n L)^2}\right)+\dfrac{h_1L}{\lambda}\left.\right]$

Tableau I.1 : différentes fonctions propres associées aux différentes conditions aux limites[2]

I.3.2 Résolution des structures multicouches monobloc (rappels)

Considérons la structure représentée sur la *figure I.5* composée de l'empilement de P couches de même largeur, toutes isolées sur leurs faces latérales. Ceci définit ce que nous entendons par structure monobloc : les couches constituées par différents matériaux possèdent des épaisseurs différentes, mais les mêmes dimensions transverses et les mêmes conditions limites latérales. Selon le *tableau I.1* (cas n°5), la base des fonctions propres est la famille des $\left(X_n(\alpha_n,x)=\cos(\alpha_n x)\right)_{0\le n\le\infty}$ avec $\alpha_n = n\pi/L$, c'est-à-dire que la transformée intégrale est dans ce cas particulier une transformée de Fourier-cosinus.

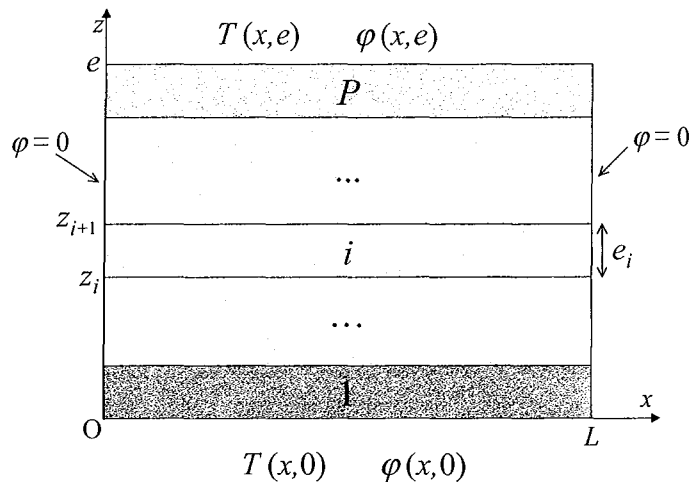


figure I.5 : monobloc multicouche

L'égalité des températures à l'interface entre les couches i et i+1 s'écrit :

$$T^i(z_i+e_i,x)=T^{i+1}(z_{i+1},x) \tag{I.27}$$

d'où, si on applique la transformée intégrale relative au bloc i :

$$\int_0^L T^i(z_i+e_i,x)\cos(\alpha_n x)\,\mathrm{d}x=\int_0^L T^{i+1}(z_{i+1},x)\cos(\alpha_n x)\,\mathrm{d}x,\quad 1\le n \tag{I.28}$$

Les transformées intégrales sont donc identiques dans les blocs i et i+1 :

$$\theta_n^i(z_i+e_i)=\theta_n^{i+1}(z_{i+1}) \tag{I.29}$$

La densité normale de flux se conservant à l'interface, il en est de même de sa transformée :

$$\phi_n^i(z_i+e_i)=\phi_n^{i+1}(z_{i+1}) \tag{I.30}$$

En conclusion, lorsque les bases de fonctions propres sont les mêmes, l'égalité des températures et des densités normales de flux dans l'espace réel se conserve dans l'espace transformé. A cette condition, la matrice de transfert de la structure multibloc est le produit des matrices relatives aux différentes couches ; nous pouvons égaler les vecteurs spectres aux interfaces :

$$\begin{bmatrix} \theta(0) \\ \phi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1 & B^1 \\ C^1 & D^1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A^i & B^i \\ C^i & D^i \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A^P & B^P \\ C^P & D^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(e) \\ \phi(e) \end{bmatrix} \tag{I.31}$$

Notons que pour ce problème diagonal, l'écriture vectorielle n'est pas une nécessité. La résolution peut être traitée mode par mode.

Par contre nous ne pouvons pas égaler deux spectres qui seraient exprimés dans deux bases différentes, donc nous ne pouvons pas résoudre simplement le problème de l'empilement de deux blocs dont les bases de fonctions propres associées sont différentes. En pratique, cela signifie que l'on ne peut pas empiler des blocs de largeur différente, de conditions limites latérales différentes, voire de conductivité thermique différentes (certaines fonctions propres dépendent de la conductivité lorsque au moins un des deux coefficients d'échange latéraux n'est ni nul ni infini).
La solution à ce problème est de convertir les deux spectres dans la même base (d'exécuter un changement de base) pour les égaler, technique qui sera détaillée dans le chap.1.II.

Nous allons maintenant étudier deux cas où la méthode des quadripôles nécessite la prise en compte d'un couplage entre les modes spatiaux dans une configuration pourtant monobloc.

I.3.3 Résistances de contacts (rappels)

La modélisation d'une résistance de contact uniforme R entre deux blocs est réalisée par l'introduction d'une matrice de transfert relative à l'interface :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{R} \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \tag{I.32}$$

où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité de taille l'ordre de troncature considéré et $\boldsymbol{R} = R\,\boldsymbol{I}$.
Dans le cas où la résistance n'est pas uniforme dans l'espace [13], la matrice $\boldsymbol{R}$ est pleine et s'exprime en fonction du spectre de $R(x)$ que l'on note $(\rho_n)_{n\leq 2N}$:

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} \rho_0 & 2\rho_1 & 2\rho_2 & \cdots & 2\rho_N \\ \rho_1 & \rho_0+\rho_2 & \rho_1+\rho_3 & \cdots & \rho_{N-1}+\rho_{N+1} \\ \rho_2 & \rho_1+\rho_3 & \rho_0+\rho_4 & \cdots & \rho_{N-2}+\rho_{N+2} \\ \rho_3 & \rho_2+\rho_4 & \rho_1+\rho_5 & \cdots & \rho_{N-3}+\rho_{N+3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_N & \rho_{N-1}+\rho_{N+1} & \rho_{N-2}+\rho_{N+2} & \cdots & \rho_0+\rho_{2N} \end{bmatrix} \qquad \text{(I.33)}$$

On peut remarquer que la différence de température de part et d'autre de l'interface correspond dans le domaine spectral à une convolution entre les spectres de la résistance $R(x)$ et de la densité normale de flux $\varphi(x,z)$, ce qui signifie que $\boldsymbol{R}$ est une matrice de convolution.
Cette matrice pleine traduit un couplage entre les différents modes ; la méthode perd alors son caractère diagonal et n'est plus exacte à l'ordre de troncature près. Chaque harmonique des spectres des conditions limites inconnues dépend de l'ensemble des spectres des conditions limites connues, si bien que la troncature nécessaire des spectres des conditions limites connues induit une erreur, y compris sur les harmoniques de plus bas ordre des spectres des conditions limites inconnues.

I.3.4 Une condition limite supplémentaire

La méthode des quadripôles permet de considérer différents types de conditions limites imposées sur les faces supérieure ou inférieure des blocs. Jusqu'à présent, sept espèces de conditions limites différentes peuvent être traitées par la méthode [2]. Nous proposons ici un nouveau type de condition limite permettant de coupler le problème de conduction à un problème de convection simple. Considérons la structure de la *figure I.6* : un bloc en deux dimensions isolé sur ses faces latérales est refroidi sur sa face inférieure par un canal fluide d'épaisseur e dans lequel circule un fluide avec une vitesse débitante V suivant $0x$. Le fluide de capacité calorifique ρc est chauffé (ou refroidi) par le bloc supérieur au cours de sa traversée, donc sa température moyenne débitante T^f va dépendre de l'abscisse x et du temps. Nous supposons dans un premier temps que la face inférieure du canal (en $z = -e$) est isolée.

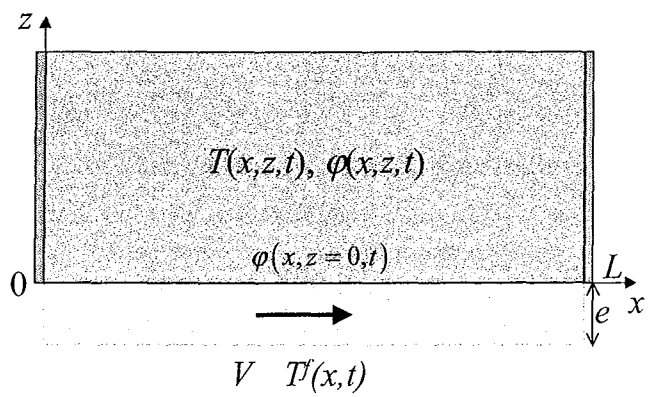


figure I.6 : condition aux limite de canal fluide

La température du fluide à l'entrée (en $x = 0$) ainsi que sa température initiale sont nulles. On appelle φ la densité de flux suivant $0z$ à l'interface entre le fluide et le bloc (en $z = 0$). Le bilan d'énergie sur une tranche d'épaisseur dx à l'abscisse x se traduit par :

$$\rho c e \mathrm{d}x\big(T(x,t+\mathrm{d}t)-T(x,t)\big)=\rho c e V \mathrm{d}t\big(T(x,t)-T(x+\mathrm{d}x,t)\big)+-\varphi(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \tag{I.34}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{-\varphi(x,t)}{\rho c e V}=\frac{\partial T^f(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{V}\frac{\partial T^f(x,t)}{\partial t} \tag{I.35}$$

La résolution de l'équation (I.35) permet de déterminer la matrice de couplage $\boldsymbol{G}$ entre la face inférieure du bloc et le fluide dans l'espace de Fourier. Cette matrice, dont la valeur analytique est donnée en Annexe 1, lie le spectre de la température du fluide au spectre de la densité de flux à l'interface solide/fluide. Dans le cas où la température initiale du système est égale à la température d'entrée de l'eau et vaut 0°C :

$$\boldsymbol{\theta}^f(p)=\boldsymbol{G}(p)\big(-\boldsymbol{\phi}(z=0,p)\big) \tag{I.36}$$

où p est la variable de LAPLACE.
Si l'échange a lieu au travers d'un coefficient d'échange h uniforme en x : $\boldsymbol{\phi}=h\big(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}^f\big)$, la relation quadripolaire équivalente à la condition limite vaut :

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}/h\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ -\boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}(p,z=0) \tag{I.37}$$

Considérons maintenant un canal fluide entre deux blocs comme représenté sur la *figure I.7*.

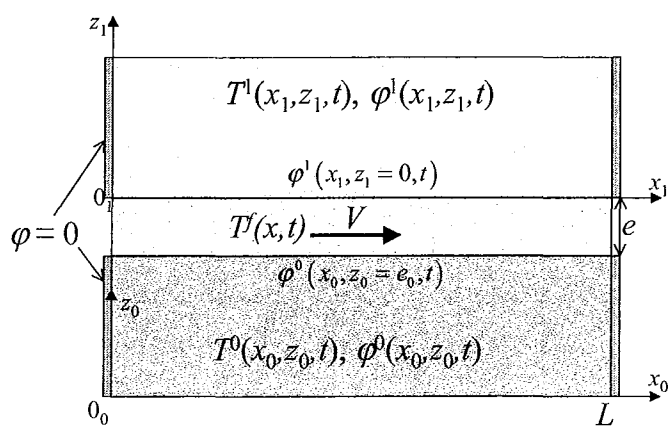


figure I.7 : canal fluide entre 2 blocs

L'équation régissant la température du fluide est :

$$\frac{\varphi^0(x_0,e_0,t)-\varphi^1(x_1,0,t)}{\rho ceV}=\frac{\partial T^f(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{V}\frac{\partial T^f(x,t)}{\partial t} \tag{I.38}$$

On en déduit la relation matricielle entre les différents spectres, compte tenu de la linéarité qui consiste à remplacer $-\boldsymbol{\phi}$ par $(\boldsymbol{\phi}^0-\boldsymbol{\phi}^1)$ dans l'équation (I.36):

$$\boldsymbol{\theta}^f=\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{\phi}^0(e_0)-\boldsymbol{\phi}^1(0)\right) \tag{I.39}$$

La matrice quadripolaire relative au canal fluide (matrice de transfert) apparaît alors naturellement , dans le cas où le coefficient d'échange est infini sur les deux parois :

$$\boldsymbol{\theta}^0(z_0=e_0)=\boldsymbol{\theta}^f=\boldsymbol{\theta}^1(z_1=0) \tag{I.40}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^0(e_0)\\ \boldsymbol{\phi}^0(e_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ \boldsymbol{G}^{-1} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^1(0)\\ \boldsymbol{\phi}^1(0)\end{pmatrix} \tag{I.41}$$

où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité de même taille que la matrice $\boldsymbol{G}$
Dans le cas où l'échange se fait suivant un coefficient d'échange h uniforme et identique sur les deux parois, on a alors :

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^0(e_0)\\ \boldsymbol{\phi}^0(e_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}/h\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ \boldsymbol{G}^{-1} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}/h\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^1(0)\\ \boldsymbol{\phi}^1(0)\end{pmatrix} \tag{I.42}$$

Une application numérique de cette modélisation est réalisée dans le chap.**2**.II.3. Ce modèle est par ailleurs tout à fait adapté à la modélisation d'un échangeur à plaques parallèles.

Nous verrons également par la suite (chap.**1**.II) comment traiter le cas des conditions limites mixtes, pour lesquelles la température est imposée sur une partie de la surface, et la densité de flux imposée sur la partie complémentaire. Ce type de condition limite ne peut pas être traité d'une façon simple par la méthode des quadripôles car, comme on ne connaît totalement ni la densité de flux, ni la température, on ne peut pas évaluer la transformée intégrale de l'excitation.

I.3.5 Quadripôle d'une couche hétérogène

La restriction principale introduite par le fait de transformer la dimension longitudinale $0x$ est due à la dépendance des fonctions propres des conditions limites latérales. Cette méthode ne

permet pas d'empiler longitudinalement plusieurs blocs. Fudym et al. [21] ont résolu ce problème en mêlant méthode des quadripôles et méthode numérique.

Nous proposons dans ce paragraphe une modélisation analytique d'un contact latéral entre deux blocs. Nous déterminerons les fonctions propres associées à cette géométrie en résolvant le problème de Sturm-Liouville puis formerons la matrice quadripolaire. Considérons la structure de la *figure I.8* : deux blocs de conductivité λ_1 et λ_2, de même épaisseur e, sont en contact parfait selon une de leurs faces latérales. Les deux faces latérales extrêmes sont isolées.

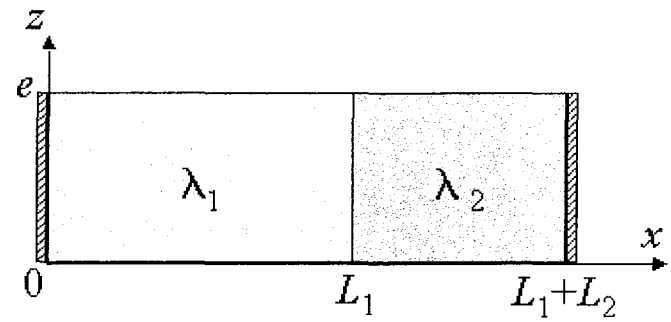


figure I.8 : quadripôle composite

Résolvons l'équation de la chaleur dans cette structure par la méthode de séparation des variables :

$$\lambda(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{d\lambda}{dx}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda(x)\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \tag{I.43}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 \quad \text{en } x=0 \quad \text{et } x=L_1+L_2 \tag{I.44}$$

Soient $X(x)$ et $Z(z)$ deux fonctions telles que $T(x,z)=X(x)Z(z)$.

Les variables sont séparables, donc il existe une constante α positive telle que :

$$\frac{X''}{X}+\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{X'}{X}=-\frac{Z'}{Z}=-\alpha^2 \tag{I.45}$$

donc,
$$X''(x)+\frac{\lambda'}{\lambda}X'(x)+\alpha^2 X=0 \tag{I.46}$$

et
$$X'(0)=X'(L_1+L_2)=0 \tag{I.47}$$

Ceci constitue un problème de Sturm-Liouville :

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda(x)\frac{dX}{dx}(x,\alpha)\right]+\lambda(x)\alpha^2 X=0 \tag{I.48}$$

$$X'(0)=X'(L_1+L_2)=0 \tag{I.49}$$

(Nous savons que l'hypothèse de la continuité de $\lambda(x)$ n'est pas vérifiée ici)

La résolution de (I.48)-(I.49) passe par l'écriture de deux sous problèmes sur les espaces I_1 et I_2 sachant qu'un raccordement doit être écrit à leur frontière commune ($x = L_1$) :

$$X(x) = X_1(x) \quad \text{sur} \quad [0\ L_1] = I_1 \tag{I.50}$$

$$X(x) = X_2(x) \quad \text{sur} \quad [L_1\ L_1+L_2] = I_2 \tag{I.51}$$

Donc le problème devient :

$$X_1''(x) + \alpha^2 X_1 = 0 \qquad 0 \le x \le L_1 \tag{I.52}$$

$$X_2''(x) + \alpha^2 X_2 = 0 \qquad L_1 \le x \le L_1 + L_2 \tag{I.53}$$

$$X_1'(0) = 0, \quad X_2'(L_1 + L_2) = 0 \tag{I.54}$$

$$X_1(L_1) = X_2(L_1), \quad -\lambda_1 X_1'(L_1) = -\lambda_2 X_2'(L_1) \tag{I.55}$$

La résolution de ce système, présentée en Annexe 2, permet de déterminer la base de fonctions propres associée à cette géométrie et aux conditions limites latérales. Nous constatons qu'il existe trois familles de fonctions propres intervenant ou non suivant la valeur du rapport des longueurs des deux blocs (L_2/L_1) :

- S'il existe (p,k) (p et k entiers et inférieurs à l'ordre de troncature) tel que :

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{2k}{2p-1} - 1 = \frac{2(k-p)+1}{2p-1} \tag{I.56}$$

la 1ère famille de fonction propre est alors :

$$\Psi_1 = \begin{cases} X_1 = \cos\alpha_k x \\ X_2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\cos\alpha_k x \end{cases} \quad ; \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{L_1 + L_2} \tag{I.57}$$

Arithmétiquement, cette famille correspond au cas où le rapport des longueurs L_2/L_1 est un nombre rationnel qui s'écrit comme un rapport de deux entiers impaires.

- S'il existe (p,k) tel que :

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{k}{p} - 1 = \frac{k-p}{p} \tag{I.58}$$

la 2ème famille de fonctions propres est alors :

$$\Psi_2 = \begin{cases} X_1 = \cos\alpha_k x \\ X_2 = \cos\alpha_k x \end{cases} \quad ; \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{L_1 + L_2} \tag{I.59}$$

Cette famille correspond au cas où le rapport des longueurs L_2/L_1 est un nombre rationnel.

- Les autres valeurs propres sont déterminées en résolvant numériquement l'équation transcendante suivante :

$$\lambda_1 \tan(\alpha_k L_1) + \lambda_2 \tan(\alpha_k L_2) = 0 \tag{I.60}$$

la 3ème famille de fonctions propres est alors :

$$\Psi_3 = \begin{cases} X_1 = \cos \alpha_k x \\ X_2 = \dfrac{\cos \alpha_k L_1}{\cos \alpha_k L_2} \cos \alpha_k (L_1 + L_2 - x) \end{cases} \tag{I.61}$$

Lorsque les deux blocs possèdent des largeurs multiples l'une de l'autre, les valeurs propres sont uniquement analytiques ; la troisième famille de fonctions propres n'intervient pas (voir l'Annexe 2). Dans le cas général, les trois familles de fonctions propres peuvent intervenir en même temps, mais en pratique, lorsque les largeurs des deux blocs ne sont pas multiples l'une de l'autre, nous nous arrangeons pour éviter de faire intervenir les familles de fonctions propres Ψ_1 et Ψ_2 en décalant soit L_1 soit L_2 d'une valeur infinitésimale afin d'éviter les rapports particuliers des deux largeurs (voir (I.56) et (I.58)) et de simplifier la mise en œuvre. L'oublie d'une famille de fonction propre, dans le cas général, se traduit par un mauvais conditionnement du système linéaire dont la solution est le spectre des conditions limites inconnues. Lorsque l'ordre de troncature tend vers l'infini nous remarquons que l'ensemble des rapports particuliers de L_2/L_1 qui font intervenir les deux premières familles de fonctions propres devient l'ensemble des nombres rationnels.

Le calcul du spectre de la densité de flux en fonction du spectre de la température (voir Annexe 2) permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\phi} = -\boldsymbol{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{\theta} \tag{I.62}$$

où $\boldsymbol{\Lambda}$ est une matrice analytique pleine baptisée matrice conductivité-hétérogène par analogie au cas homogène. Dans le cas particulier où les deux blocs possèdent la même conductivité λ, cette matrice est naturellement la matrice identité que multiplie la conductivité λ.
A partir de cette relation nous sommes en mesure de déterminer la relation quadripolaire (voir Annexe 2) :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(0) \\ \boldsymbol{\phi}(0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \\ \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(e) \\ \boldsymbol{\phi}(e) \end{pmatrix} \tag{I.63}$$

Nous constatons donc, comme la matrice conductivité hétérogène est une matrice pleine, que les modes sont couplés. De la même façon que pour la résistance de contact non uniforme, la méthode n'est plus ici exacte à l'ordre de troncature près.

Application :

Considérons un isolant contre un conducteur :
$\lambda_1 = 380\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$, $L_1 = 1\mathrm{cm}$, $\lambda_2 = 10\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$, $L_2 = 1\ \mathrm{cm}$, $e = 6\ \mathrm{mm}$.
Le flux d'excitation ($10^7\ \mathrm{Wm^{-1}}$) de spectre $\phi(e)$ est imposé sur la moitié centrale de la face supérieure. La face inférieure est maintenue à 0°C. 40 harmoniques sont conservées.
La relation (I.63) nous permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{0} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}(e) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\phi}(\mathrm{e}) \tag{I.64}$$

Donc le spectre de la température en face avant est donnée par :

$$\boldsymbol{\theta}(e) = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\phi}(\mathrm{e}) \tag{I.65}$$

Ensuite, les spectres de la température et de la densité de flux à l'intérieure de la structure sont obtenu directement par (voir Annexe 2):

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}(z)\\ \boldsymbol{\phi}(z)\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}(z) & -\boldsymbol{B}(z)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\\ -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C}(z) & \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}(e)\\ \boldsymbol{\phi}(e)\end{pmatrix} \tag{I.66}$$

Le champs de température ainsi que la densité de flux sont représentés sur la *figure I.9.*

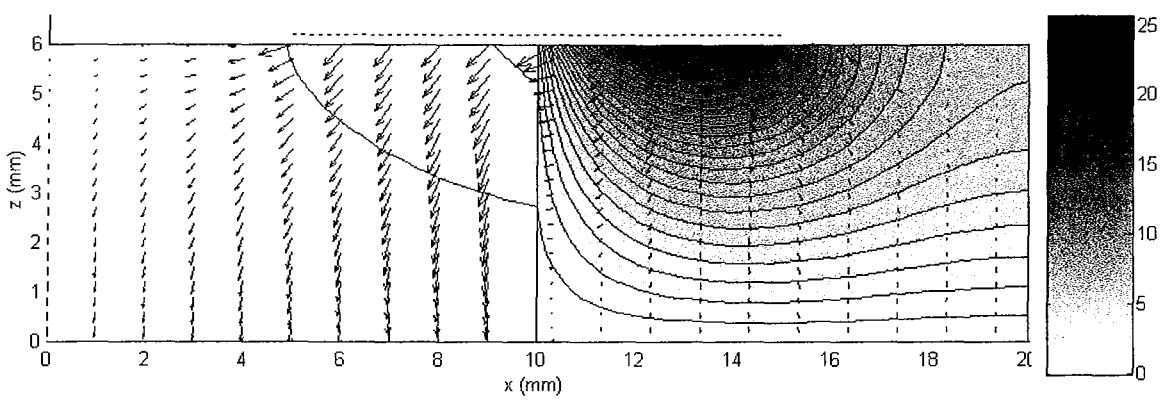


figure I.9 : champs de température en (°C) et densité de flux dans la structure hétérogène.

La méthode est validée par comparaison aux résultats produits par le code de calcul aux éléments finis FlexPDEase® (2000 nœuds) : voir la *figure I.10.*

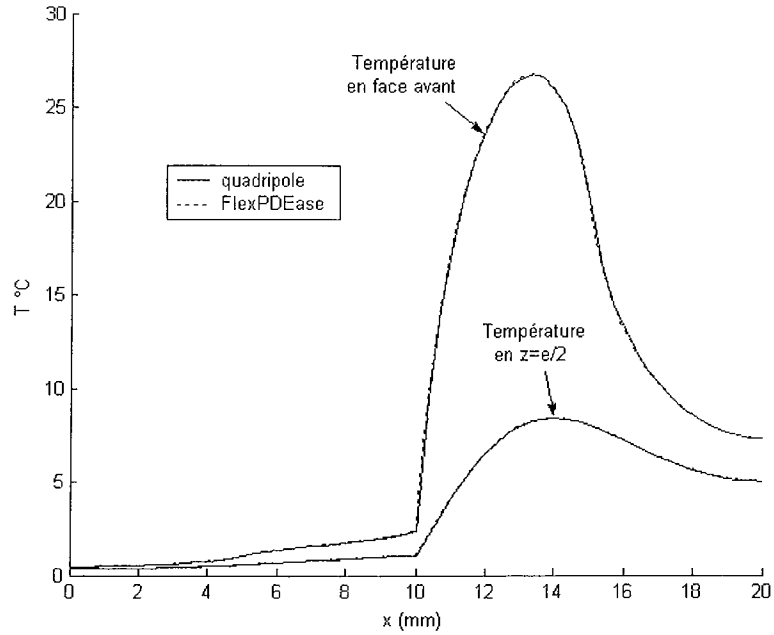


figure I.10 : température en face avant et au milieu de la structure calculée par deux méthodes

Les deux méthodes correspondent au dixième de degrés près. Cette méthode est applicable à des contrastes de conductivité inférieurs à 1000 car plus les conductivités des matériaux sont différentes, plus la matrice conductivité-hétérogène est mal conditionnée, voir *figure I.11*.

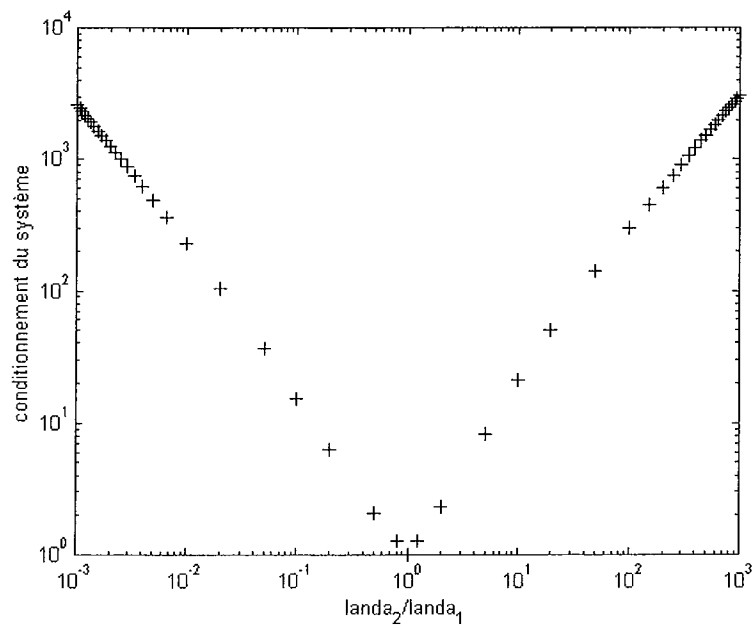


figure I.11 : conditionnement de la matrice de conductivité-hétérogène en fonction du rapport des conductivités des deux matériaux

I.4 Les quadripôles monobloc en géométrie 3D (rappels)

La méthode des quadripôles thermiques, associée au repère cartésien, permet de modéliser les monoblocs de forme parallélépipédique dont un exemple est représenté sur la *figure I.12*.

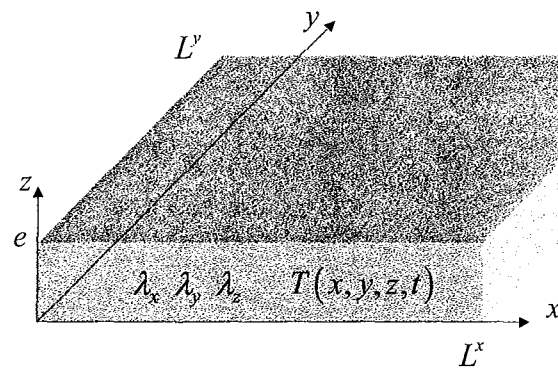


figure I.12 : bloc en 3 dimensions

Le principe est le même qu'en deux dimensions : les directions latérales (selon $0x$ et $0y$) sont transformées en utilisant les bases adaptées de fonctions propres. Par exemple, dans le cas où toutes les faces latérales sont isolées :

$$\theta_{n,m}(z,p) = \int_{y=0}^{L^y} \int_{x=0}^{L^x} \int_{t=0}^{\infty} T(x,y,z,t)\exp(-pt)\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{I.67}$$

$$\phi_{n,m}(z,p) = \int_{y=0}^{L^y} \int_{x=0}^{L^x} \int_{t=0}^{\infty} \left(-\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right)(x,y,z,t)\exp(-pt)\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{I.68}$$

L'équation de la chaleur transformée devient donc :

$$\frac{\partial^2 \theta_{n,m}}{\partial z^2}(z,p) = \left(\frac{p}{a} + \alpha_n^2 + \beta_m^2\right)\theta_{n,m}(z,p) \tag{I.69}$$

dont la forme est toujours similaire à (I.2).

Les spectres de la température et de la densité de flux étant bidimensionnels, il convient de les ordonner suivant un vecteur pour écrire la relation matricielle entre l'entrée et la sortie, et également préciser la méthode de troncature.

I.4.1 Troncature

Les spectres de la température et du flux sont de dimension 2. Leur troncature peut alors être réalisée de différentes façons, la méthode la plus simple étant de conserver les harmoniques $\theta_{n,m}$ (ou $\phi_{n,m}$) pour lesquelles $n \leq N$ et $m \leq M$:

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_{0,0} & \cdots & \theta_{0,M} \\ \cdots & \theta_{n,m} & \cdots \\ \theta_{N,0} & \cdots & \theta_{N,M} \end{pmatrix} \tag{I.70}$$

Il peut être intéressant d'envisager d'autres méthodes de troncature pour optimiser le nombre et le poids des inconnues [22]. Sur la *figure I.13* est représenté le spectre de la température sur la face supérieure d'une puce ainsi que deux méthodes de troncature. Les harmoniques de la partie hachurée ne constituent qu'une part négligeable du signal. Un moyen de tronquer le spectre consiste alors de ne conserver que les harmoniques de la partie non hachurée.

Une propriété intéressante de la transformation bidimensionnelle de Fourier (transformation intégrale associée aux blocs isolés sur leur faces latérales) est la suivante : si la température T est de classe C^1, alors sa transformée $\theta_{n,m}$ est de l'ordre de $1/nm$ [23], ce qui nous amène à choisir la méthode de troncature représentée sur la *figure I.13.a* : la limite entre les harmoniques conservées et celles qui sont tronquées est une hyperbole dans le plan *n-m*. Cependant en pratique, pour des raisons de simplicité de mise en œuvre, nous utiliserons la méthode de troncature représentée sur la *figure I.13.b*. Nous définissons un taux d'élimination de spectre τ comme le rapport du nombre total d'harmoniques conservées par cette méthode de troncature sur le nombre total d'harmoniques conservées par l'emploi de la méthode de troncature simple définie par (I.70).

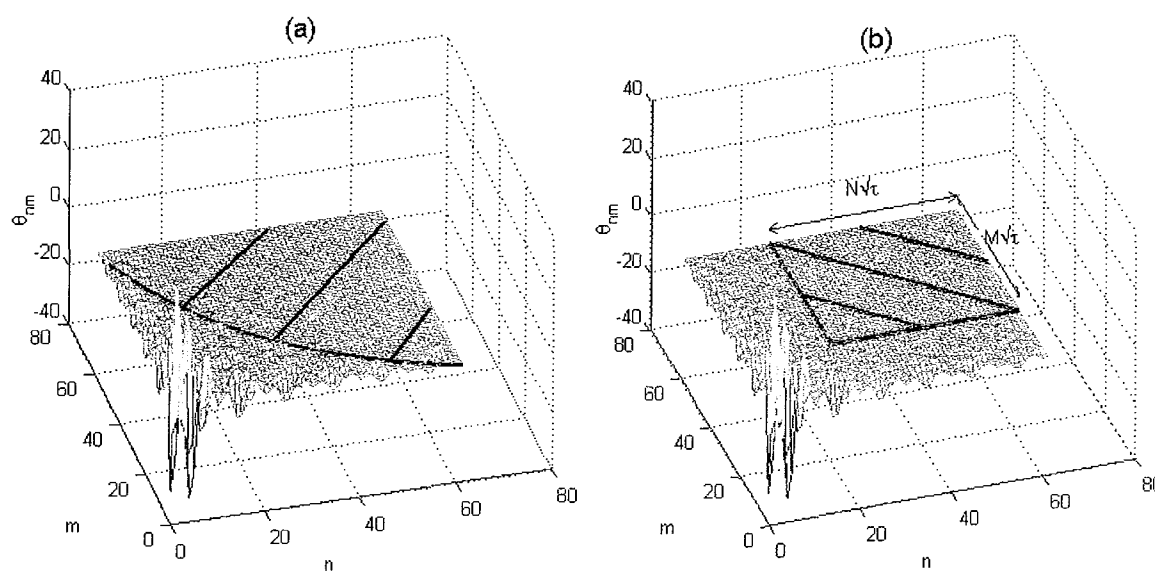


figure I.13 : deux méthodes de troncature

Ce choix de la méthode de troncature introduit donc un hyperparamètre supplémentaire.

I.4.2 Convention de réorganisation des spectres sous forme de vecteurs

Pour appliquer la méthode des quadripôles, écrire la relation matricielle entre l'entrée et la sortie, nous devons également ordonner les spectres bidimensionnels sous forme de vecteurs, et ainsi éviter de transformer les matrices quadripolaires en tenseurs d'ordre quatre.
La convention choisie est de disposer les vecteurs colonnes les uns à la suite des autres, c'est-à-dire, dans le cas de la méthode de troncature la plus simple :

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_{0,0} & \cdots & \theta_{0,M} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_{N,0} & \cdots & \theta_{N,M} \end{pmatrix} \quad \text{devient:} \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_{0,0} \\ \updownarrow \\ \theta_{N,0} \\ \cdots \\ \theta_{0,m} \\ \updownarrow \\ \theta_{N,m} \\ \cdots \end{pmatrix} \tag{I.71}$$

La matrice quadripolaire s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{B}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_1 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{B}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{A}_M & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{B}_M \\ \boldsymbol{C}_0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{D}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C}_1 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{D}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{C}_M & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{D}_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}(e) \tag{I.72}$$

$$\text{avec, } \boldsymbol{A}_m = \begin{pmatrix} ch\left(\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_m^2 + p/a}\, e\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ch\left(\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_m^2 + p/a}\, e\right) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & ch\left(\sqrt{\alpha_N^2 + \beta_m^2 + p/a}\, e\right) \end{pmatrix} \tag{I.73}$$

où α_n, β_m sont les valeurs propres suivant $0x$ et $0y$. On procède de même pour $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$.

Le formalisme est alors le même qu'en deux dimensions :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(0,p) \\ \boldsymbol{\phi}(0,p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(e,p) \\ \boldsymbol{\phi}(e,p) \end{bmatrix} \tag{I.74}$$

où les matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ sont carrées diagonales de dimension le nombre total d'harmoniques conservées, c'est-à-dire : $(N+1)\times(M+1)\times(1-\tau)$.

I.4.3 Résistance de contact non uniforme

Il est également possible, comme en deux dimensions, de considérer des résistances de contact non uniformes dans l'espace $R(x,y)$ de spectre $(\rho_{n,m})_{n\leq 2N,\ m\leq 2M}$ [22]. Considérons deux blocs numérotés 1 et 2 et isolés sur leurs faces latérales. Il sont séparés par la résistance de contact $R(x,y)$. Par définition, à l'interface :

$$T^2(x,y) - T^1(x,y) = R(x,y)\varphi(x,y) \tag{I.75}$$

Appliquons la transformée de Fourier :

$$\theta^2_{n,m} - \theta^1_{n,m} = \int_0^{L_x}\int_0^{L_y} R(x,y)\varphi(x,y)\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{I.76}$$

Cette égalité s'écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^1 = \tilde{\tilde{\boldsymbol{R}}}\,\tilde{\boldsymbol{\phi}} \tag{I.77}$$

où $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^1$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^2$, $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ sont les spectres sous forme matricielle de T^1, T^2, φ et $\tilde{\tilde{\boldsymbol{R}}}$ un tenseur du quatrième ordre. Après réorganisation des spectres sous forme de vecteurs, on obtient :

$$\boldsymbol{\theta}^2 - \boldsymbol{\theta}^1 = \tilde{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{\phi} \tag{I.78}$$

Le calcul analytique détaillé des coefficients de la matrice $\tilde{\boldsymbol{R}}$ est donné en Annexe 3.

I.4.4 Couplage à un écoulement fluide sur une face latérale

Le couplage à un écoulement fluide sur la face supérieure ou inférieure d'un bloc en trois dimensions est possible, par extension de la méthode présentée en **1**.I.3.4. Nous allons introduire

une nouvelle condition limite latérale (qu'on ne peut pas rencontrer en deux dimensions) qui modélise l'écoulement d'un fluide sur la face latérale d'un bloc.

Considérons la structure de la *figure I.14*. Un bloc est refroidi sur sa face latérale en $x = L^x$ par un écoulement dans un canal de longueur L^y, de section $l \times e$, de vitesse moyenne débitante V, de température moyenne débitante $T(y)$ et de propriétés thermophysiques connues. Le coefficient d'échange supposé uniforme imposé par l'écoulement est h.

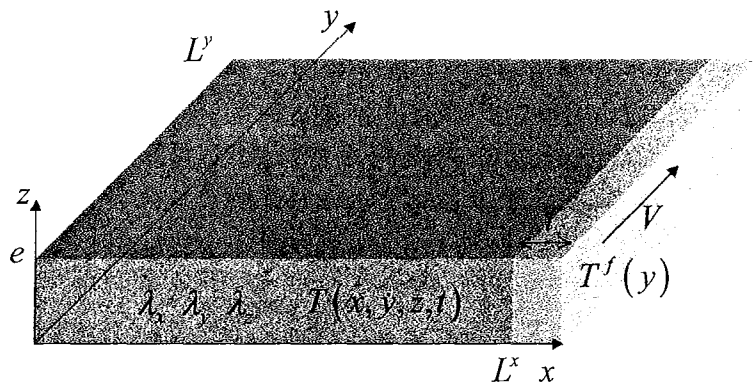


figure I.14 : bloc refroidi par une face latérale

Nous nous plaçons ici dans le cas où les trois autres faces latérales sont isolées.

Une première étape consiste à déterminer les transformées intégrales à appliquer pour résoudre le problème. Nous connaissons déjà ces transformées dans le cas où la température du fluide est constante et égale à 0°C (voir *tableau I.1*, cas 6). La résolution du problème de Sturm-Liouville nous indique que les transformées intégrales restent inchangées lorsque la température du fluide dépend de la position y. Par contre un terme source apparaît dans la relation quadripolaire (le calcul est donné en Annexe 4) :

$$\begin{pmatrix}\theta_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(\gamma_{n,m}e) & \dfrac{\mathrm{sh}(\gamma_{n,m}e)}{\lambda\gamma_{n,m}}\\ \lambda\gamma\,\mathrm{sh}(\gamma_{n,m}e) & \mathrm{ch}(\gamma_{n,m}e)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(e)+\begin{pmatrix}\left(\mathrm{ch}(\gamma_{n,m}e)-1\right)\left(\dfrac{\beta_m^2}{\gamma_{n,m}^2}-1\right)\theta_{n,m}^f\\ \lambda\gamma_{n,m}\ \mathrm{sh}(\gamma_{n,m}e)\left(\dfrac{\beta_m^2}{\gamma_{n,m}^2}-1\right)\theta_{n,m}^f\end{pmatrix} \qquad \text{(I.79)}$$

avec α_n solution positives de $\cot an(\alpha_n)=\dfrac{\lambda}{h}\alpha_n$, $\beta_m = m\pi/L^y$ et $\gamma_{n,m}=\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2}$.

Que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}(e)+\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q\theta}^f\\ \boldsymbol{S\theta}^f\end{pmatrix} \qquad \text{(I.80)}$$

A partir de cette équation, le problème du transfert thermique dans la couche est résolu si trois conditions limites sont connues en plus du coefficient d'échange. Le coefficient d'échange sur la paroi latérale ne peut pas être une inconnue car il intervient dans les fonctions propres.

La seconde étape consiste à coupler le bloc au fluide de refroidissement, c'est-à-dire exprimer la température du fluide en fonction des températures et densités de flux en $z = e$.
Le bilan d'énergie sur le fluide en régime permanent se traduit par :

$$\frac{\int_0^e -\lambda \frac{\partial T(L_x, y, z)}{\partial x} \, dz}{\rho c l e V} = \frac{dT^f(y)}{dy} \tag{I.81}$$

Nous pouvons alors déterminer (voir l'Annexe 4) la relation liant le spectre de la température du fluide aux spectres des température et densité de flux en $z = e$:

$$\boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{\theta}^f = \boldsymbol{M}_2 \boldsymbol{\theta}(z=e) + \boldsymbol{M}_3 \boldsymbol{\phi}(z=e) \tag{I.82}$$

où les matrices $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ et $\boldsymbol{M}_3$ sont des matrices pleines contenant les propriétés de l'écoulement.
En conjuguant cette relation et la relation quadripolaire (I.79), nous pouvons écrire la relation entrée-sortie de la structure considérée :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{B} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_3 \\ \boldsymbol{C} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{A} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix}(e) \tag{I.83}$$

ce qui définit le quadripôle « refroidissement latéral par un fluide à débit et propriétés fixés ».

Nous sommes donc à présent capables de modéliser d'une manière analytique un canal de section rectangulaire en 3 dimensions avec couplage au fluide de refroidissement par un coefficient h uniforme. Il suffit pour cela d'assembler deux blocs avec refroidissement sur le côté et deux blocs avec refroidissement sur les faces supérieures et inférieures. Cependant la mise en œuvre est assez complexe, les matrices $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ et $\boldsymbol{M}_3$ n'étant plus diagonales et n'ayant plus des expressions très simples (voir Annexe 4).

I.5 Conclusion

La méthode des quadripôles thermiques permet donc jusqu'à présent de résoudre les problèmes de diffusion linéaires multidimensionnels transitoires dans des géomètries monoblocs, constituées de l'empilement de différentes couches de mêmes dimensions latérales et soumises

aux mêmes conditions limites latérales. Divers types de conditions limites latérales ou d'entrée et de sortie peuvent être considérées.

La principale restriction de la méthode est donc la faible diversité des géométries auxquelles elle peut être appliquée. Nous proposons dans la suite une extension de cette méthode, afin de permettre la résolution des transferts de chaleur dans les structures multiblocs, empilements de blocs parrallélépipédiques de tailles et conditions limites latérales différentes.

II La conversion de spectre

La technique des quadripôles thermiques n'était jusqu'à présent pas transposable aux structures multiblocs, dont un exemple très simple est représenté sur la *figure I.15* en deux dimensions.

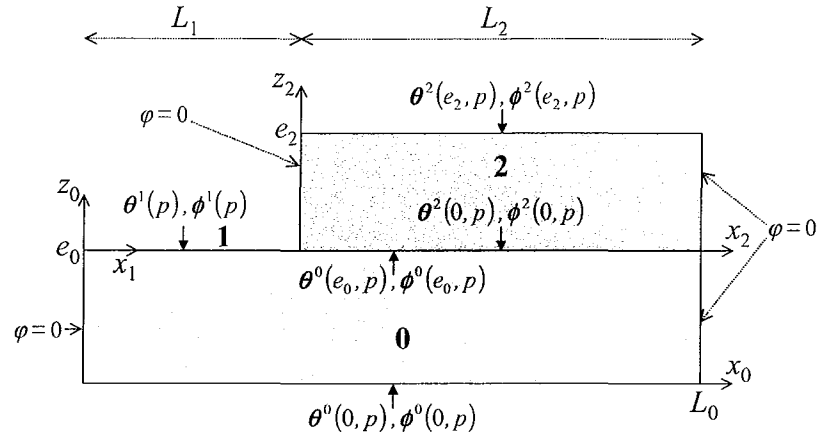


figure I.15 : structure pyramidale bibloc en 2 dimensions

En effet les valeurs propres ($\alpha_n^i = n\pi/L_i$) relatives aux blocs 0 et 2 sont différentes, donc les spectres de la température et de la densité de flux ne sont pas exprimés dans les mêmes bases de fonctions propres. L'égalité des spectres à l'interface n'est plus valable.

Seules des méthodes itératives nécessitant la discrétisation de l'interface afin de coupler les transferts dans ces deux blocs ont été pour le moment utilisées. Dorkel et col. [7] ont développé la méthode en trois dimensions et régime permanent. Beck et al. [24] s'est intéressé à la méthode intitulée «USE » pour *unsteady surface element,* qui découle de la même idée mais est adaptée à la résolution du problème transitoire. Ces méthodes itératives introduisent de nombreux hyperparamètres comme des pas de discrétisation, des coefficients de relaxation, etc... De plus elles présentent des problèmes de convergence et sont par conséquent limitées à un empilement d'un faible nombre de couches.

Nous proposons ici une nouvelle technique permettant de convertir les spectres de la température et densité de flux d'une base de fonctions propres relative à un bloc dans la base de fonctions propres relative au bloc superposé ou sous-jacent. Nous allons donc introduire une matrice de changement de base que l'on appellera matrice de conversion de spectre [22,25,26,27].

II.1 Cas de géométries en deux dimensions aux faces latérales isolées

Dans le cas monobloc considéré précédemment (cas L_1=0 et L_2=L_0 sur la *figure I.15*), il est équivalent d'exprimer les vecteurs spectres de température et de densité de flux en z = 0 en

fonction des vecteurs correspondants en $z = e_0+e_2$ ou de faire l'inverse, c'est-à-dire exprimer ces vecteurs en $z = e_0+e_2$ en fonction des mêmes vecteurs en $z = 0$ (Les matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ restent inchangées au signe près). Dans le cas bibloc, nous pouvons exprimer les spectres relatifs au bloc inférieur en fonction des spectres relatifs aux blocs supérieurs (technique baptisée « des plus petits vers le plus grand »), ou exprimer les spectres relatifs aux blocs supérieurs en fonction des spectres relatifs au bloc inférieur (technique baptisée « du plus grand vers les plus petits »).

Reprenons l'exemple simple de la *figure I.15* : un bloc noté 2 est empilé sur un bloc plus large, noté 0. La surface supérieure du bloc 0 est donc divisée en deux parties : la surface libre 1 et l'interface avec le bloc 2. D'une manière générale, à chaque bloc i de largeur L_i, d'épaisseur e_i, est attribué un repère $(0_i x_i z_i)$ centré sur son coin inférieur gauche et à chaque surface libre i de largeur L_i est attribué un repère $(0_i x_i)$ centré sur son extrémité gauche.

La continuité de la température à l'interface entre le bloc 0 et les blocs et surfaces libres 2 et 1 s'écrit :

$$\begin{cases} T^0(x_0, z_0 = e_0) = T^1(x_1) \quad \text{pour} \quad 0 \le x_0 \le L_1 & \text{(I.84)} \\ T^0(x_0, z_0 = e_0) = T^2(x_2, z_2 = 0) \quad \text{pour} \quad L_1 \le x_0 \le L_0 & \text{(I.85)} \end{cases}$$

sachant que $$x_1 = x_0 - \delta_0 \quad \text{et} \quad x_2 = x_0 - \delta_2 \qquad \text{(I.86)}$$

où les δ_i représentent le décalage suivant 0_0x_0 du repère relatif au bloc ou surface libre i par rapport au repère relatif au bloc inférieur. Ici, $\delta_0 = 0$ et $\delta_2 = L_1$.

II.1.1 Conversion dite « des plus petits vers le plus grand » [22,25,27]

Considérons la température à l'interface dans la base 0. Intégrons la de 0 à L_0 après multiplication par les fonctions propres du bloc 0 : $\cos(\alpha_n^0 x_0)$. Selon (I.84) et (I.85) :

$$\int_0^{L_0} T^0(x_0, z_0 = e_0)\cos(\alpha_n^0 x_0)\,dx_0 = \int_0^{L_1} T^1(x_1)\cos(\alpha_n^0 x_0)\,dx_0 + \int_{L_1}^{L_0} T^2(x_2, z_2 = 0)\cos(\alpha_n^0 x_0)\,dx_0 \qquad \text{(I.87)}$$

Par définition, le membre de gauche de l'égalité est l'harmonique d'ordre n de la température dans le bloc 0. Remplaçons dans (I.87) les températures par leurs expressions développées :

$$\begin{aligned} \theta_n^0(z_0 = e_0) = &\int_0^{L_1} \left(\frac{\theta_0^1}{L_1} + \frac{2}{L_1}\sum_{m=1}^{N_1} \theta_m^1 \cos(\alpha_m^1 x_1) \right) \cos(\alpha_n^0 x_0)\,dx_0 \\ &+ \int_{L_1}^{L_0} \left(\frac{\theta_0^2(z_2 = 0)}{L_2} + \frac{2}{L_2}\sum_{m=1}^{N_2} \theta_m^2(z_2 = 0)\cos(\alpha_m^2 x_2) \right) \cos(\alpha_n^0 x_0)\,dx_0 \end{aligned} \qquad \text{(I.88)}$$

Cette expression (I.88), après intégration, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\theta_n^0(z_0 = e_0) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{m=0}^{N_i} E_{n,m}^i \, \theta_m^i \quad , \quad 0 \le n \le N_0 \tag{I.89}$$

Dans le cas plus général où I surfaces libres ou blocs se partagent la surface supérieure du bloc 0, l'expression (I.89) devient :

$$\theta_n^0(z_0 = e_0) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{m=0}^{N_i} E_{n,m}^i \, \theta_m^i \quad , 0 \le n \le N_0 \tag{I.90}$$

c'est-à-dire sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{\theta}^0(e_0) = \begin{bmatrix} \theta_0^0(e_0) \\ \theta_1^0(e_0) \\ \vdots \\ \theta_{N_0}^0(e_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}^1 & \boldsymbol{E}^2 & \ldots & \boldsymbol{E}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^1(0) \\ \boldsymbol{\theta}^2(0) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}^I(0) \end{bmatrix} = \boldsymbol{E} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^1(0) \\ \boldsymbol{\theta}^2(0) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}^I(0) \end{bmatrix} \tag{I.91}$$

où la matrice $\boldsymbol{E}^i$ est la matrice de conversion de spectre entre le bloc ou surface libre i et son bloc inférieur dans le formalisme « des plus petits vers le plus grand ». La matrice $\boldsymbol{E}$ constituée de la concaténation horizontale des matrices $\boldsymbol{E}^i$ peut être appelée matrice de passage de l'interface dans le formalisme « des plus petits vers le plus grand ».

Le calcul analytique de cette matrice, reporté en Annexe 5, conduit à :

$$\left(\boldsymbol{E}^i\right)_{i=1,..,I} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \; 0 \; \cdots \; 0 \\ \hline \dfrac{1}{2}\dfrac{L_0}{L_i} \mathrm{f}_1\left(n, \dfrac{\delta_i}{L_0}, \dfrac{L_i}{L_0}\right) & \dfrac{L_0}{L_i}\left\{\mathrm{f}_2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{f}_3\left(n, m, \dfrac{\delta_i}{L_0}, \dfrac{L_i}{L_0}\right)\right\} \end{array}\right], \begin{matrix} 1 \le n \le N_0 \\ 1 \le m \le N_i \end{matrix} \tag{I.92}$$

de taille $(N_0+1)\times(N_i+1)$ avec

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{f}_1\left(n, \dfrac{\delta_i}{L_0}, \dfrac{L_i}{L_0}\right) = \dfrac{2}{n\pi}\left(\sin\left(n\pi\left(\dfrac{L_i}{L_0} + \dfrac{\delta_i}{L_0}\right)\right) - \sin\left(n\pi\dfrac{\delta_i}{L_0}\right)\right) \\ \mathrm{f}_2\left(n, m, \dfrac{\delta_i}{L_0}, \dfrac{L_i}{L_0}\right) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{n}{n^2 - m^2\left(L_0/L_i\right)^2}\left[(-1)^m \sin\left(n\pi\left(\dfrac{\delta_i}{L_0} + \dfrac{L_i}{L_0}\right)\right) - \sin\left(n\pi\dfrac{\delta_i}{L_0}\right)\right] \\ \mathrm{f}_3\left(n, \dfrac{\delta_i}{L_0}, \dfrac{L_i}{L_0}\right) = \dfrac{L_i}{L_0}\cos\left(n\pi\dfrac{\delta_i}{L_0}\right), \quad \mathrm{f}_3 \text{ remplaçant } \mathrm{f}_2 \text{ si } \dfrac{n}{m} = \dfrac{L_0}{L_i} \end{array}\right. \tag{I.93}$$

La densité de flux étant projetée sur la même base de fonctions propre que la température, nous avons également :

$$\boldsymbol{\phi}^0(e_0) = \boldsymbol{E}\begin{bmatrix}\phi^1(0)\\ \phi^2(0)\\ \vdots\\ \phi^J(0)\end{bmatrix} \tag{I.94}$$

II.1.2 Conversion dite « du plus grand vers les plus petits »

Il s'agit ici de déterminer la matrice qui permet de convertir le spectre dans la base relative au bloc inférieur 0 en fonction des spectres dans les bases relatives aux blocs et surfaces libres supérieures (1 et 2 sur l'exemple de la *figure I.15*).
L'intégration de (I.84) multipliée par $\cos(\alpha_n^1 x_1)$ entre 0 et L_1 conduit à :

$$\int_0^{L_1} T^1(x_1)\cos(\alpha_n^1 x_1)\,\mathrm{d}x_1 = \int_0^{L_1} T^0(x_0, z_0 = e_0)\cos(\alpha_n^1 x_1)\,\mathrm{d}x_1 \tag{I.95}$$

c'est-à-dire après remplacement de T^0 par son expression développée :

$$\theta_n^1 = \int_0^{L_1}\left(\frac{\theta_0^0}{L_0} + \frac{2}{L_0}\sum_{m=1}^{N_0}\theta_m^0\cos(\alpha_m^0 x_0)\right)\cos(\alpha_n^1 x_1)\,\mathrm{d}x_1 \tag{I.96}$$

ce qui peut être écrit (voir Annexe 5):

$$\theta_n^1 = \sum_{m=0}^{N_0} F_{n,m}^1\,\theta_m^0\ ,\quad 0 \le n \le N_1 \tag{I.97}$$

De même, l'intégration de (I.85) conduit au résultat similaire :

$$\theta_n^2 = \sum_{m=0}^{N_0} F_{n,m}^2\,\theta_m^0\ ,\ 0 \le n \le N_2 \tag{I.98}$$

D'une manière plus générale, nous avons déterminé une relation matricielle pour chaque bloc ou surface libre i de la face supérieure du bloc 0 :

$$\boldsymbol{\theta}^i = \boldsymbol{F}^i\boldsymbol{\theta}^0 \tag{I.99}$$

La matrice $\boldsymbol{F}^i$ de taille $(N_i+1)\times(N_0+1)$ définit donc la conversion de spectre de la base 0 dans la base i (ou matrice de conversion de spectre du bloc 0 dans le bloc ou surface libre i).
La matrice de passage de l'interface dans le formalisme « du plus grand vers les plus petits » est donc définie par la concaténation verticale des matrices $\boldsymbol{F}^i$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{\theta}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}^I \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^1 \\ \boldsymbol{F}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^I \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^0(e_0) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\theta}^0(e_0) \tag{I.100}$$

La matrice $\boldsymbol{F}$ exprime les spectres dans leur base propre, côté supérieur, en fonction du spectre dans la base du bloc inférieur.
Le calcul analytique des matrices $\boldsymbol{F}^i$, reporté en Annexe 5, conduit à :

$$\left(\boldsymbol{F}^i\right)_{i=1,2..I} = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{L_i}{L_0} & \mathrm{f}_1\left(m,\dfrac{\delta_i}{L_0},\dfrac{L_i}{L_0}\right) \\ \hline 0 & \\ \vdots & \left\{\mathrm{f}_2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{f}_3\left(n,m,\dfrac{\delta_i}{L_0},\dfrac{L_i}{L_0}\right)\right\} \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right], \quad \begin{array}{l} 1 \le m \le N_0 \\ 1 \le n \le N_i \end{array} \tag{I.101}$$

où les fonctions $(\mathrm{f}_i)_{i=1,2,3}$ ont été définies en (I.93).
De même que précédemment, nous écrivons pour la densité de flux :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^1 \\ \boldsymbol{\phi}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}^K \end{bmatrix}(0) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\phi}^0(e_0) \tag{I.102}$$

II.1.3 Choix des ordres de troncature

Jusqu'à présent, aucune hypothèse n'a été faite sur les ordres de troncature N_i (sur la dimension des bases de fonctions associées aux différents blocs ou surfaces libres).

Nous allons voir que la résolution des problèmes de transfert dans les structures multiblocs impose que les matrices de passage, formées à partir des matrices de conversions de spectre ($\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$), soient inversibles, c'est-à-dire que ces matrices $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ soient carrées. On doit en effet pouvoir passer d'une représentation dans la base à support le plus grand à celles correspondant à une partition de son support de façon réversible. Les applications linéaires associées à $\boldsymbol{E}$ ou $\boldsymbol{F}$

doivent donc être bijectives. Ceci revient à dire que la somme des dimensions des bases relatives aux blocs supérieurs et surfaces libres doit être égale à la dimension de la base relative au bloc inférieur :

$$(N_0+1)=\sum_{i=1}^{I}(N_i+1) \tag{I.103}$$

De plus, une condition à vérifier est que ces matrices de passage $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ soient conditionnées de façon optimale, pour que les erreurs numériques (de troncature des nombres par exemple) ne soient pas amplifiées au passage des interfaces. Examinons par exemple la structure interne d'une matrice $\boldsymbol{E}^i$: sur la *figure I.16* est représentée la valeur absolue des coefficients de la matrice $\boldsymbol{E}^1$, dans l'exemple de la *figure I.15* avec $L_1=L_2=L_0/2$.

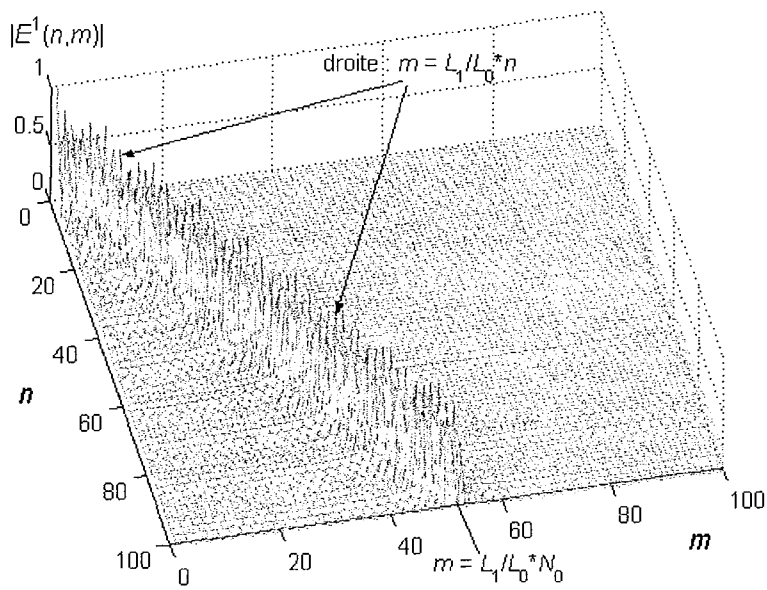


figure I.16 : valeur absolue des coefficients de la matrice $\boldsymbol{E}^1$

Pour cet exemple, $N_0=N_1=100$. L'information, dans cette matrice, est concentrée principalement de part et d'autre d'une droite qui a pour équation :

$$m=\frac{L_1}{L_0}n \tag{I.104}$$

L'ordre de troncature optimal pour la surface libre 1 est donc la partie entière de $N_0\,L_1/L_0$. Choisir un ordre de troncature plus élevé revient à ajouter à la matrice $\boldsymbol{E}^1$ des vecteur colonnes quasiment égaux à zéros, donc qui vont affecter son conditionnement. Il semblerait donc que le nombre d'harmoniques à conserver pour décrire la température sur un bloc doive être proportionnel à la largeur du bloc. La *figure I.17* confirme ce corollaire. D'après (I.103)

$N_0+1=N_1+N_2+2$, donc si N_0 est fixé, nous pouvons tracer les nombres de conditionnement des matrices $\boldsymbol{E}^1$ et $\boldsymbol{E}^2$ en fonction du nombre adimensionnel $N^* = N_1 L_2 / N_2 L_1$: voir *figure I.17.*

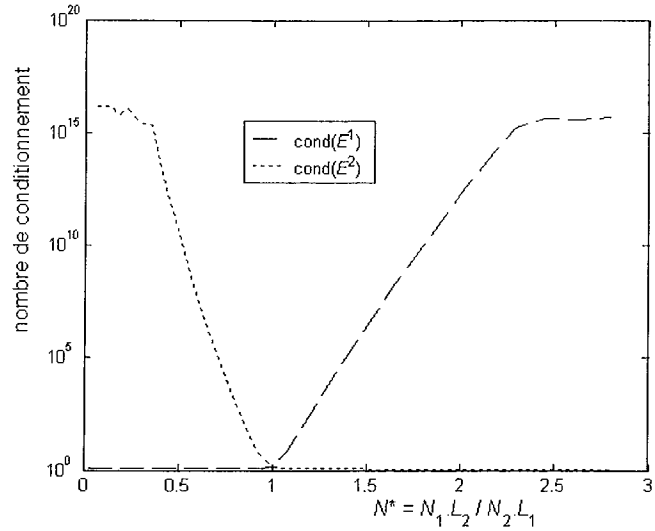


figure I.17 : Influence des ordres de troncature sur les nombres de conditionnement

Le meilleur compromis se rencontre lorsque $N^* = 1$, c'est-à-dire lorsque le nombre d'harmoniques conservées est proportionnel à la longueur.
Au final, le nombre d'harmoniques conservées pour décrire la température et la densité de flux sur chaque bloc ou surface libre de la structure est déterminé par un seul paramètre (qui est le seul hyperparamètre du problème en 2D) : le nombre de modes conservés par unité de longueur, appelé également « densité de spectre » et noté f (en modes par mètre).

II.1.4 Majoration de l'erreur due à la troncature

Les matrices de conversion de spectre étant des matrices pleines, elles introduisent un couplage entre les différents modes, de manière similaire au cas où une résistance de contact non uniforme dans l'espace est introduite (voir plus haut). Le caractère diagonal de la méthode des quadripôles est alors perdu. Par exemple, dans le formalisme « des plus petits vers le plus grand », chaque harmonique dans la base du bloc 0 dépend de l'ensemble des spectres dans les bases des blocs et surfaces libres supérieurs. Comme les spectres dans les bases supérieures sont tronqués, il en résulte une erreur sur chaque harmonique dans la base du bloc inférieur. Cette erreur résulte du changement de base. Le but de ce paragraphe est de donner un majorant de cette erreur.

Considérons d'un point de vue mathématique un segment 0 sur lequel le champ de température est noté $T^0(x_0)$. Ce segment peut être divisé en deux sous segments complémentaires 1 et 2 sur lesquels le champ de température est noté $T^1(x_1)$ et $T^2(x_2)$, voir *figure I.18.*

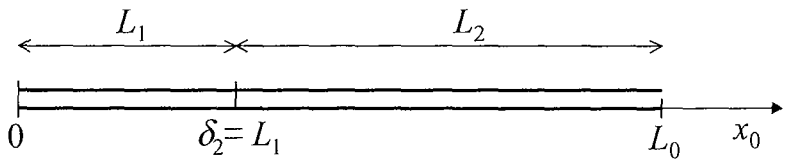


figure I.18 :surface composée de la somme directe de deux surfaces

II.1.4.1 Cas du formalisme « des plus petits vers le plus grand »

Supposons connues les deux fonctions $T^1(x_1)$ et $T^2(x_2)$, et essayons de quantifier l'erreur commise sur le spectre de $T^0(x_0)$ due aux troncatures des spectres de T^1 et de T^2.
Si $\boldsymbol{\theta}_\infty^0$, $\boldsymbol{\theta}_\infty^1$ et $\boldsymbol{\theta}_\infty^2$ sont les spectres, de dimension infinie ($N_0 = N_1 = N_2 = \infty$), des températures sur les surfaces 0, 1 et 2, l'équation (I.91) devient :

$$\boldsymbol{\theta}_\infty^0 = \boldsymbol{E}_1^\infty \boldsymbol{\theta}_\infty^1 + \boldsymbol{E}_2^\infty \boldsymbol{\theta}_\infty^2 \tag{I.105}$$

Cette équation est exacte. Cependant les spectres $\boldsymbol{\theta}_\infty^1$ et $\boldsymbol{\theta}_\infty^2$ doivent être tronqués ; donc une erreur $\Delta\boldsymbol{\theta}^0$ est commise sur le spectre de la température dans la base 0. Nous appelons ici $\boldsymbol{\theta}^0$, $\boldsymbol{\theta}^1$ et $\boldsymbol{\theta}^2$ les spectres tronqués et $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ les matrices de conversion correspondantes :

$$\boldsymbol{\theta}^0 + \Delta\boldsymbol{\theta}^0 = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{\theta}^1 + \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{\theta}^2 \tag{I.106}$$

Cette erreur dépend de l'ordre du mode et peut être majorée (voir Annexe 6) :

$$\left|\Delta\theta_{m=0}^0\right| = 0 \tag{I.107}$$

$$\left|\Delta\theta_m^0\right| \le \frac{2}{\pi}\sum_{i=1,2}\left[\Psi\left(N_i + Ent(m\frac{L_i}{L_0}) + 1\right) - \Psi\left(N_i - Ent(m\frac{L_i}{L_0}) - 1\right)\right]\max_{N_i+1\le n}\left(\left|\theta_n^i\right|\right) \tag{I.108}$$

où $1 \le m \le N_0$, où $\Psi(N) + \gamma = \sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}$ est la fonction d'Euler, et où la fonction *Ent* désigne la fonction partie entière.

Ce changement de base n'introduit donc pas d'erreur sur le fondamental du spectre de la température dans la base du bloc 0 (voir (I.107)). En effet, la moyenne de la température sur la surface 0 est la moyenne pondérée des températures sur les surfaces 1 et 2.
Par contre les autres harmoniques du spectre sont évaluées avec une erreur qui dépend de l'ordre de l'harmonique *m* (voir (I.108)). En effet, plus le degré de l'harmonique est important, plus l'erreur est importante.
Soit *f* la fonction telle que :

$$f(N,m)=\frac{2}{\pi}\left[\Psi\left(N+Ent(m\frac{L_i}{L_0})+1\right)-\Psi\left(N-Ent(m\frac{L_i}{L_0})-1\right)\right] \qquad \text{(I.109)}$$

L'erreur due à la troncature (I.108) s'écrit :

$$\left|\Delta\theta_m^0\right| \le \sum_{k=1,2} f(N_k,m) \max_{N_k+1\le n}\left(\left|\theta_n^k\right|\right) \qquad \text{(I.110)}$$

f est donc un majorant de la sensibilité de l'harmonique m dans la base 0 aux normes des deux erreurs de troncature dans les bases 1 et 2. La *figure I.19.a* donne la fonction $f(30,m)$.

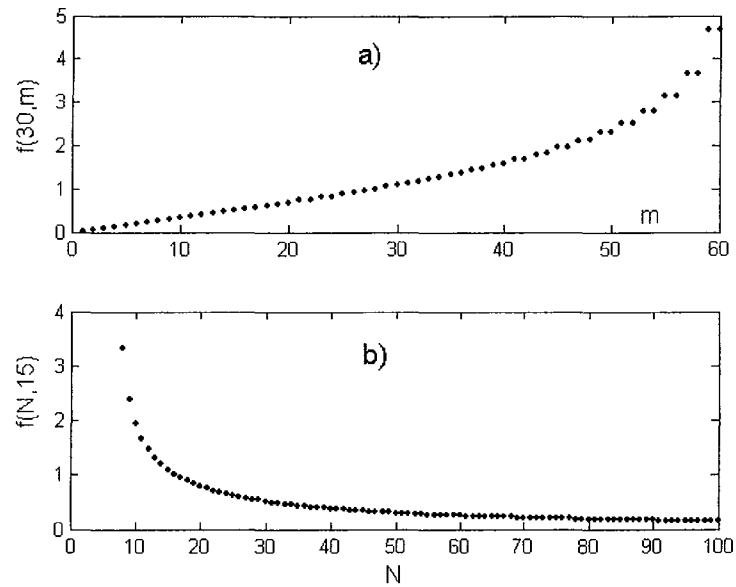


figure I.19 : a) fonction f(30,m) b)fonction f(N,15) pour L_1=L_2=L_0/2

Bien sûr, plus on conserve d'harmoniques pour décrire les températures sur les surfaces 1 et 2 (plus N est grand), plus l'erreur commise sur le spectre de la température dans la base 0 est faible : la *figure I.19.b* représente la fonction $f(N,15)$.

Le changement de base introduit une erreur d'autant plus importante que le degré de l'harmonique est élevé (*figure I.19.a*) et cette conclusion peut être vérifiée qualitativement à partir de la *figure I.16* : plus n est grand, plus il y a d'information perdue (rappelons que l'ordre de troncature est $N_0\, L_1/L_0$) car dans la matrice $\boldsymbol{E}^i$ l'information sur chaque ligne est répartie suivant une courbe en cloche dont le maximum est situé sur la droite d'équation $m = L_1/L_0\, n$. Par exemple, pour le calcul de l'harmonique de degré N_0 ($\theta_{N_0}^0$), la moitié de la cloche est tronquée (pour $m \ge N_0\, L_1/L_0$) alors que pour le calcul de l'harmonique de degrès 1 (θ_1^0), l'information est bien contenue dans la matrice de conversion de spectre, la partie tronquée de la cloche contient des valeurs très proches de zéro.

La forme des profils de température sur les surfaces 1 et 2 joue également : plus celle-ci est dure (spectre très étendu), plus l'erreur est importante. Par contre, s'il n'y a aucune information perdue par troncature des spectres des températures sur les surfaces 1 et 2 ($\max_{N_1+1\le n}\left(\left|\theta_n^1\right|\right)=\max_{N_2+1\le n}\left(\left|\theta_n^2\right|\right)=0$) l'erreur est nulle. En conclusion, ce changement de base altère la résolution spatiale locale mais conserve les valeurs moyennes.

II.1.4.2 Cas du formalisme « du plus grand vers les plus petits »

Supposons connue la température $T^0(x_0)$ et essayons de quantifier l'erreur commise sur les spectres de $T^1(x_1)$ et $T^2(x_2)$, due au changement de base.
Si $\boldsymbol{\theta}_\infty^0$, $\boldsymbol{\theta}_\infty^1$ et $\boldsymbol{\theta}_\infty^2$ sont les spectres de dimension infinie ($N_0 = N_1 = N_2 = \infty$) des températures sur les surfaces 0, 1 et 2, l'équation (I.100) devient :

$$\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\theta}_\infty^1 = \boldsymbol{F}_1^\infty \boldsymbol{\theta}_\infty^0 \\ \boldsymbol{\theta}_\infty^2 = \boldsymbol{F}_2^\infty \boldsymbol{\theta}_\infty^0\end{matrix}\right\} \tag{I.111}$$

Cette équation est exacte. Cependant le spectre $\boldsymbol{\theta}_\infty^0$ doit être tronqué donc des erreurs $\Delta\boldsymbol{\theta}^1$ et $\Delta\boldsymbol{\theta}^2$ sont commises sur les spectres des températures dans les bases 1 et 2. Considérons le cas de la surface i (i=1,2):

$$\boldsymbol{\theta}^i + \Delta\boldsymbol{\theta}^i = \boldsymbol{F}_i\, \boldsymbol{\theta}^0 \tag{I.112}$$

Cette erreur $\Delta\boldsymbol{\theta}^i$ dépend de l'ordre de l'harmonique. Pour ce formalisme, nous n'avons pas pu déterminer de majorant de l'erreur : voir l'Annexe 6. L'erreur n'est plus nulle sur le fondamental des spectres. En effet, la connaissance de la seule température moyenne sur la surface 0 ne peut pas suffire à déterminer les températures moyennes sur les surfaces 1 et 2 :

$$\theta_0^0 = \frac{1}{L_0}\left(L_1\theta_0^1 + L_2\theta_0^2\right) \tag{I.113}$$

Ce changement de base ne conserve donc pas rigoureusement les moyennes.

II.1.5 Pourquoi $\boldsymbol{F \neq E^{-1}}$?

Les deux applications de changement de base dans un sens et dans l'autre semblent être deux applications réciproques, puisque (I.91) et (I.100) s'écrivent respectivement :

$$\theta^0 = \boldsymbol{E}\begin{bmatrix}\theta^1\\ \theta^2\\ \vdots\\ \theta^I\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix}\theta^1\\ \theta^2\\ \vdots\\ \theta^I\end{bmatrix} = \boldsymbol{F}\theta^0 \tag{I.114}$$

Ceci est bien vrai en dimension infinie : nous avons bien $\boldsymbol{E}_\infty = \boldsymbol{F}_\infty^{-1}$ car les relations (I.105) et (I.111) sont exactes.

Cependant, en dimension finie, les relations (I.114) ne sont plus exactes du fait de la troncature des spectres dans les bases de départ. Elles s'écrivent plus rigoureusement comme suit :

$$\theta^0 + \Delta\theta_E^0 = \boldsymbol{E}\begin{bmatrix}\theta^1\\ \theta^2\\ \vdots\\ \theta^I\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix}\theta^1 + \Delta\theta_F^1\\ \theta^2 + \Delta\theta_F^2\\ \vdots\\ \theta^I + \Delta\theta_F^I\end{bmatrix} = \boldsymbol{F}\theta^0 \tag{I.115}$$

où θ^0, $\theta^1 .. \theta^I$ sont les spectres tronqués mais exacts des températures T^0, $T^1 .. T^I$.

Les erreurs $(\Delta\theta_E^0, \Delta\theta_F^i)$ induites par le changement de base ont été étudiées dans le paragraphe précédent.

Ceci implique :

$$\theta^0 + \Delta\theta_E^0 = \boldsymbol{EF}\theta^0 - \boldsymbol{E}\begin{bmatrix}\Delta\theta_F^1\\ \Delta\theta_F^2\\ \vdots\\ \Delta\theta_F^I\end{bmatrix} \tag{I.116}$$

donc

$$(\boldsymbol{EF} - \boldsymbol{I})\theta^0 = \Delta\theta_E^0 + \boldsymbol{E}\begin{bmatrix}\Delta\theta_F^1\\ \Delta\theta_F^2\\ \vdots\\ \Delta\theta_F^I\end{bmatrix} \neq 0 \tag{I.117}$$

Les matrices de passage bâties sur les matrices de conversion de spectre associées aux deux formalismes ne sont donc pas rigoureusement inverses l'une de l'autre.

II.1.6 Application : conditions aux limites mixtes

Une première application fondamentale de cette conversion de spectre, peut être la résolution d'un problème à conditions limites mixtes sur une même frontière, problème qui ne pouvait

jusqu'à présent pas être résolu par la méthode des quadripôles. Ce problème a déjà été étudié par Gatto [15]. Considérons la géométrie de la *figure I.20* où un bloc de cuivre d'épaisseur e et de largeur L, est soumis aux conditions limites suivantes : toutes les faces sont isolées à part la face supérieure qui est soumise à une condition limite mixte :
Pour $0 \le x \le L/2$ (surface 1) la densité de flux φ est imposée à 10^5 W/m.
Pour $L/2 \le x \le L$ (surface 2) la température est imposée à 0°C.

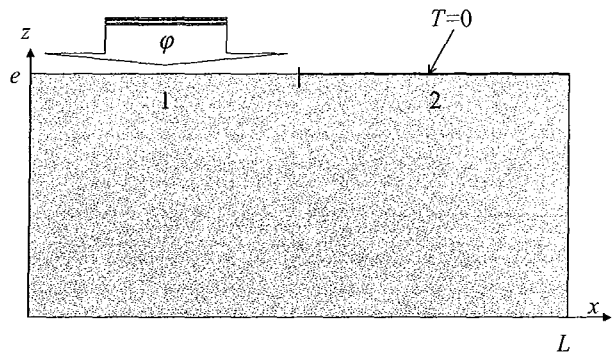


figure I.20 : bloc soumis à une condition limite mixte

La méthode des quadripôles s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0(z=0) \\ \boldsymbol{\phi}^0(z=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^0 & \boldsymbol{B}^0 \\ \boldsymbol{C}^0 & \boldsymbol{D}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0(z=e) \\ \boldsymbol{\phi}^0(z=e) \end{pmatrix} \tag{I.118}$$

puis :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0(z=e) \\ \boldsymbol{\phi}^0(z=e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}^1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{E}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{\phi}^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{E}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^2 \\ \boldsymbol{\phi}^2 \end{pmatrix} \tag{I.119}$$

L'assemblage des relations (I.118) et (I.119) conduit à :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0(z=0) \\ \boldsymbol{\phi}^0(z=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^0 & \boldsymbol{B}^0 \\ \boldsymbol{C}^0 & \boldsymbol{A}^0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}^1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{E}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{\phi}^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{E}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^2 \\ \boldsymbol{\phi}^2 \end{pmatrix} \right] \tag{I.120}$$

Si on introduit les conditions limites connues, $\boldsymbol{\phi}^1_{exci}$ étant la transformée de Fourier de $-\varphi$.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0(z=0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^0 & \boldsymbol{B}^0 \\ \boldsymbol{C}^0 & \boldsymbol{A}^0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}^1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{E}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{\phi}^1_{exci} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{E}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\phi}^2 \end{pmatrix} \right] \tag{I.121}$$

La deuxième ligne de (I.121) conduit à :

$$0 = \boldsymbol{C}^0 \boldsymbol{E}^1 \boldsymbol{\theta}^1 + \boldsymbol{A}^0 \boldsymbol{E}^1 \boldsymbol{\phi}^1_{exci} + \boldsymbol{A}^0 \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{\phi}^2 \tag{I.122}$$

c'est à dire :

$$-\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{E}^1\boldsymbol{\phi}^1_{exci} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}^0\boldsymbol{E}^1 & \boldsymbol{A}^0\boldsymbol{E}^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^1\\ \boldsymbol{\phi}^2\end{pmatrix} \tag{I.123}$$

Comme $N_0+1=N_1+N_2+2$, la matrice $[\boldsymbol{C}^0\boldsymbol{E}^1 \quad \boldsymbol{A}^0\boldsymbol{E}^2]$ est carrée et la solution du système linéaire donne les conditions limites inconnues sur la surface supérieure. Ensuite, le calcul direct à partir de cette solution permet de déterminer la température et la densité de flux dans tout le bloc.

Application numérique : L=10 cm, e=3 cm, 40 harmoniques sont conservées, $\varphi=10^5$ Wm^{-1}.
Le champ de température est représenté sur la *figure I.21*.

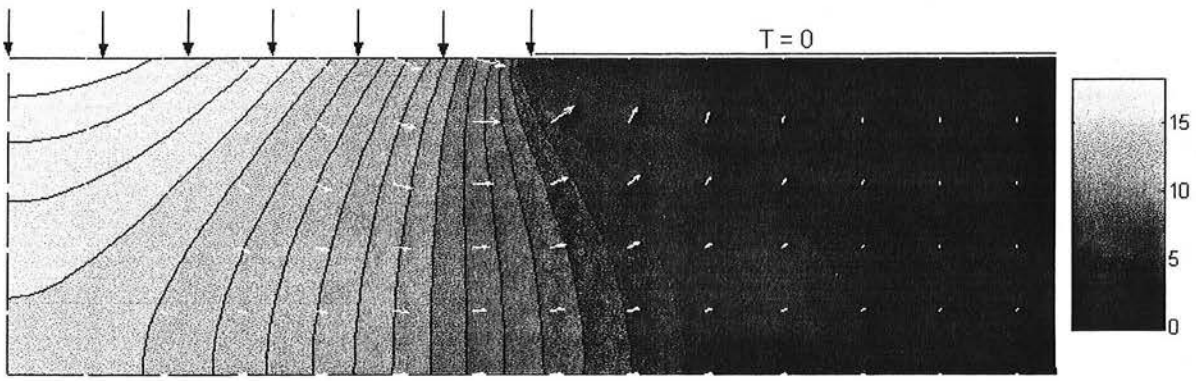


figure I.21 : champs de température et de densité de flux dans la structure

Théoriquement, la densité de flux est infinie sur la face supérieure en x=L/2. Cette méthode étant toujours juste en moyenne, aucun problème de divergence n'apparaît. En effet la conservation du flux est toujours vérifiée de par la nature de la méthode. Plus on conserve d'harmoniques, plus la forme de la densité de flux sur la face supérieure est dure. La *figure I.22* montre l'évolution de la forme de la densité de flux sur la surface supérieure en fonction du nombre d'harmoniques conservées.

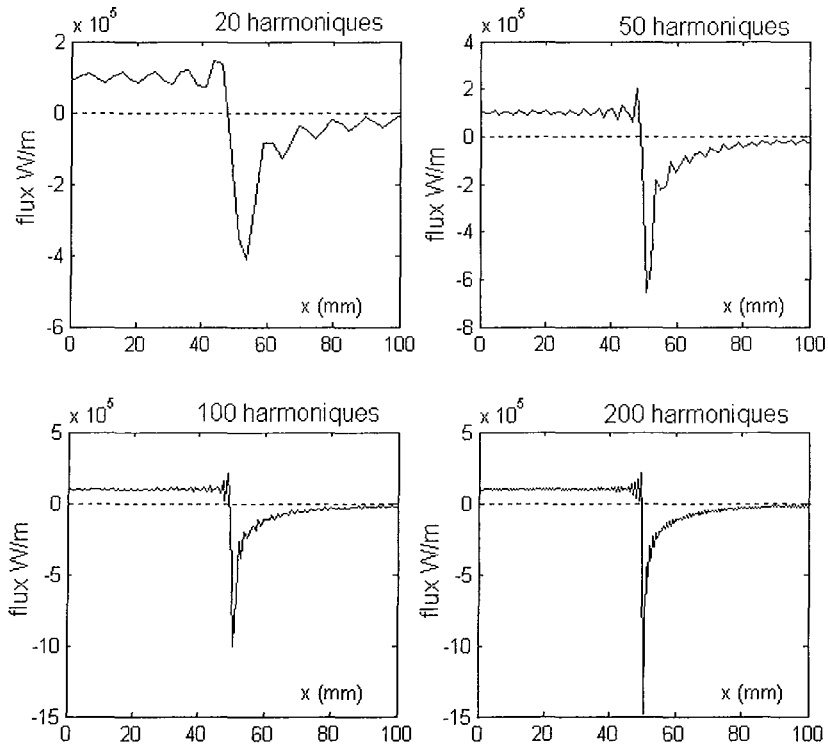


figure I.22 : densité de flux sur la surface supérieure pour 4 ordres de troncature

L'intégrale du flux est nulle exactement et cela, quel que soit l'ordre de troncature.

La température est une fonction beaucoup plus douce de la position, elle est donc moins sensible à l'ordre de troncature. La *figure I.23* présente la température sur la face supérieure du bloc pour quatre ordres de troncature différents.

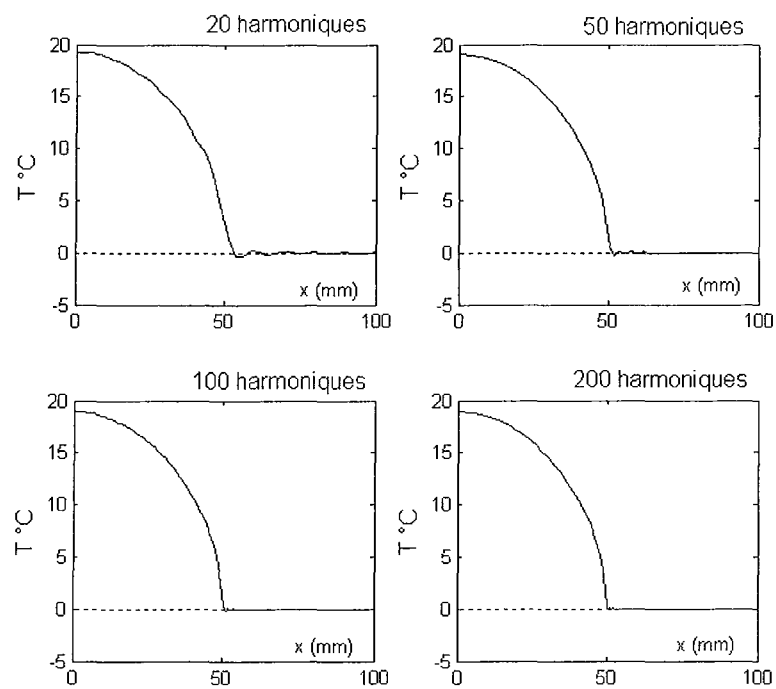


figure I.23 : Température sur la surface supérieure pour 4 ordres de troncature

La température possède une forme plus molle ; son spectre converge rapidement vers zéro, donc un ordre de troncature faible est suffisant pour la décrire.

II.1.7 Cas de conditions limites latérales différentes, généralisation.

A chaque type de condition limite latérale et à chaque largeur de bloc correspond une famille de fonctions propres sur laquelle la température et la densité de flux sont projetées. Dès que l'on souhaite empiler deux blocs dont les conditions limites latérales ou les largeurs sont différentes, nous devons donc introduire une matrice de conversion de spectre. Si n est le nombre de types de conditions limites latérales, il existe $2n^n$ matrices de conversion de spectre différentes. Nous ne ferons donc pas ici le recensement ou le calcul de toutes les matrices de conversion de spectre. Il convient de les calculer lorsqu'elles se présentent ; par contre nous pouvons donner leur expression générale.

Soit un bloc de base 0 de largeur L_0 comportant sur sa face supérieure P blocs où surfaces libres. A chaque bloc ou surface libre est attribué un repère $0_p x_p y_p$ centré sur son coin inférieur gauche.
Soit l'espace E^0 de $L^2([0\,;L_0])$ (espace des fonctions de carré sommable ou d'énergie finie) généré par l'ensemble des fonctions propres normées $\left(X_i^0\right)_{i\le N_0}$ associées au bloc 0 de support $I^0=[0\,;L_0]$. Cet espace est muni du produit scalaire :

$$\langle Y,Z\rangle_0=\int_0^{L_0} Y(x_0)Z(x_0)\mathrm{d}x_0 \tag{I.124}$$

et la base des fonction propres $\left(X_i^0\right)_{i\le N_0}$ est la base canonique orthonormale de E^0.

Soit l'espace E^p de $L^2([0\,;L_p])$ généré par l'ensemble des fonctions propres $\left(X_i^p\right)_{i\le N_p}$ associées au bloc ou surface libre p. Chaque espace E^p est muni d'un produit scalaire :

$$\langle Y,Z\rangle_p=\int_0^{L_p} Y(x_p)Z(x_p)\mathrm{d}x_p \tag{I.125}$$

et la base des fonction propres $\left(X_i^p\right)_{i\le N_p}$ est la base canonique orthonormale de E^p.

Nous devons déterminer la matrice de passage entre les bases canoniques de E^0 et de E^p. Pour cela, nous devons exprimer les supports des diverses bases de fonctions dans le même repère.
Les familles de fonctions $\left(X_i^p\right)_{i\le N_p}$ peuvent être définies sur I^0 (voir *figure I.24*) :

Si $x_0<\delta_p$ ou $x_0>L_p+\delta_p$, alors $X_i^p(x_0)=0$.

Si $\delta_p \le x_0 \le L_p + \delta_p$, alors $X_i^p(x_0) = X_i^p(x_p)$.

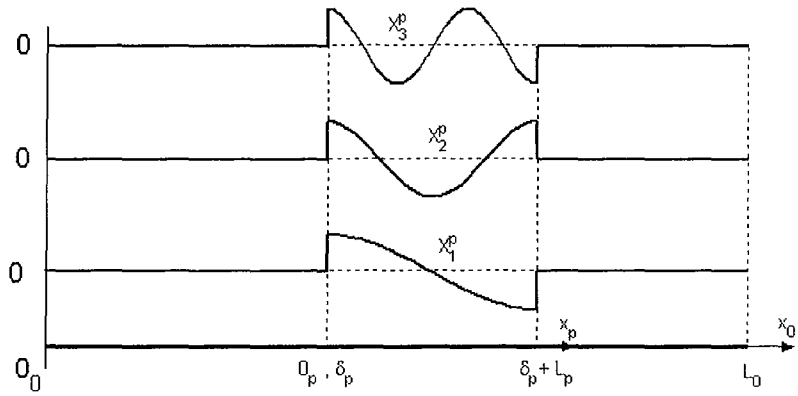


figure I.24 : prolongement du support des fonctions propres du bloc ou surface libre p

A ce stade, il n'est pas inintéressant de tenter de procéder ici à un rapprochement avec une méthode récente développée en traitement du signal. La décomposition du potentiel dans les espaces E^p constitue typiquement une transformation de Fourier à fenêtre adaptative (ondelettes de Malvar [28]). Le principe consiste à décomposer le potentiel en une série de potentiels correspondant chacun à une portion du potentiel initial. La méthode de décomposition doit permettre une reconstruction parfaite, c'est-à-dire sans perte ni redondance d'information, ainsi l'ensemble des portions doit constituer une partition du support $[0\ ;L_0]$: $I^0 = \bigoplus_{p=1}^{P} I^p$. Les ondelettes de Malvar sont couramment utilisées dans le domaine du traitement du signal. La fenêtre est définie, par analogie à une note de musique jouée avec un instrument, par trois temps caractéristiques (ici trois longueurs caractéristiques) qui sont la durée de l'attaque, de la partie stationnaire, et de l'amortissement. Dans le cas présent, les longueurs d'attaque et d'amortissement sont nulles. La longueur de la partie stationnaire vaut L_p.

Soit T un potentiel défini sur I^0. Nous pouvons projeter cette fonction sur la base canonique de l'espace E^0 ou sur l'ensemble des bases canoniques des espaces E^p.

Donc

$$T(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\langle T, X_i^0 \right\rangle_0 X_i^0(x_0) \tag{I.126}$$

et

$$T(x_0) = \sum_{p=1}^{P} \sum_{i=0}^{\infty} \left\langle T, X_i^p \right\rangle_0 X_i^p(x_0) \tag{I.127}$$

ainsi

$$\left\langle T, X_n^0 \right\rangle_0 = \sum_{p=1}^{P} \sum_{m=0}^{\infty} \left\langle T, X_m^p \right\rangle_0 \left\langle X_m^p, X_n^0 \right\rangle_0 \tag{I.128}$$

expression qui donne les composantes du potentiel T dans la base canonique de E^0 en fonction de ses coordonnées dans les bases canoniques de E^p.

Nous avons ainsi déterminé l'expression générale des matrices de conversion de spectre $\boldsymbol{E}^p$:

$$E^p_{n,m} = \left\langle X^0_n, X^p_m \right\rangle_0 \tag{I.129}$$

Pour que le changement de base soit valide, la matrice de passage $\boldsymbol{E}$ constituée de la concaténation horizontale des matrices de conversion de spectre doit être carrée :

$$\begin{bmatrix} \langle T, X^0_0 \rangle_0 \\ \langle T, X^0_1 \rangle_0 \\ \vdots \\ \langle T, X^0_{N_0} \rangle_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}^1 & \boldsymbol{E}^2 & \dots & \boldsymbol{E}^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle T, X^1_0 \rangle_0 \\ \vdots \\ \langle T, X^1_{N_1} \rangle_0 \\ \vdots \ \vdots \\ \langle T, X^P_0 \rangle_0 \\ \vdots \\ \langle T, X^P_{N_P} \rangle_0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E} \begin{bmatrix} \langle T, X^1_0 \rangle_0 \\ \vdots \\ \langle T, X^1_{N_1} \rangle_0 \\ \vdots \ \vdots \\ \langle T, X^P_0 \rangle_0 \\ \vdots \\ \langle T, X^P_{N_P} \rangle_0 \end{bmatrix} \tag{I.130}$$

ce qui impose la relation entre les ordres de troncature : $N_0 + 1 = \sum_p \left(N_p + 1 \right)$

II.2 Cas de géométries tridimensionnelles [22]

Le principe est le même qu'en deux dimensions. Considérons la structure composée de l'empilement de deux blocs représentée sur la *figure I.25* vue de dessus. Les notations sont conservées, un indice x ou y est ajouté pour préciser de quelle dimension il s'agit.

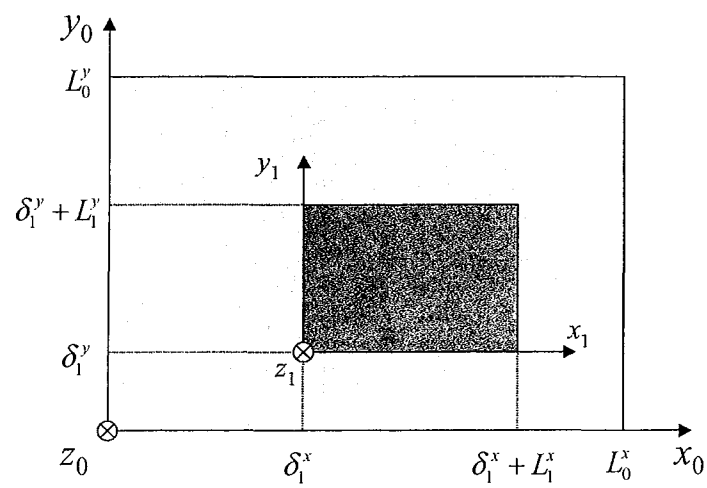


figure I.25 : empilement de 2 blocs en 3 dimensions.

II.2.1 Découpage des surfaces libres

De même que l'on considère ici des blocs à section rectangulaire, on ne considérera que des surfaces libres de forme rectangulaire. Il est ainsi nécessaire de découper la surface supérieure libre du bloc de base 0 en plusieurs surfaces rectangulaires. Ce découpage peut être effectué de différentes façons ; la *figure I.26* présente deux exemples de découpage. Nous introduisons ainsi en trois dimensions un hyperparamètre supplémentaire qui est le mode de découpage des surfaces libres.

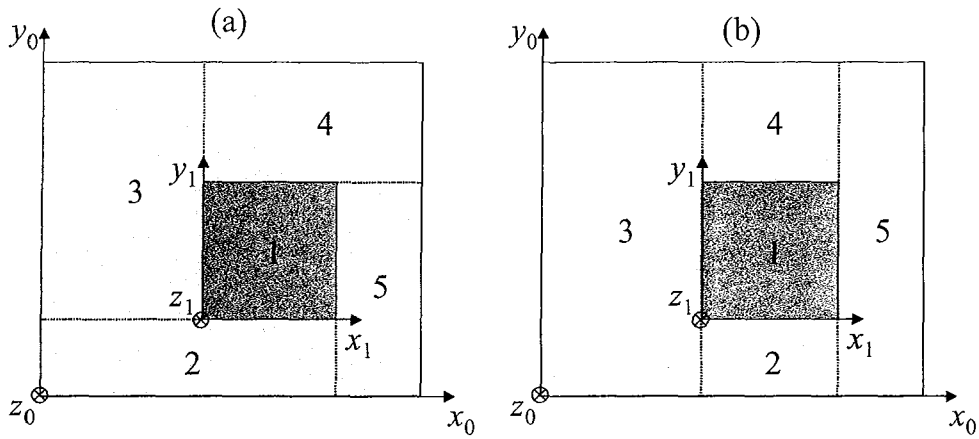


figure I.26 : exemple de deux découpages de surface libre différents

On peut ainsi se poser la question du découpage optimum. D'un point de vue qualitatif, le découpage optimum sera celui qui introduira le moins de perte d'information par troncature. Il sera donc celui pour lequel les formes de la température et de la densité de flux seront les plus molles sur chacun des sous-domaines rectangulaires. C'est-à-dire que l'on cherchera le découpage pour lequel le facteur $\max_{N_1+1\le n}\left(\left|\theta_n^i\right|\right)$ intervenant dans l'équation de majoration de l'erreur sur θ^0 (I.108) est minimal. Afin d'étudier ce problème d'une manière plus quantitative, ou d'illustrer l'influence du choix du découpage, considérons un exemple simple en deux dimensions. Soit un segment de largeur unité, représenté sur la *figure I.27*, sur lequel règne une température (ou une densité de flux) en forme d'échelon d'intensité unité. Nous souhaitons diviser ce segment en deux segments complémentaires (1 et 2) de façon optimale, de manière à ce que le changement de base des deux petits segments vers le grand se fasse avec le moins de perte d'information possible.

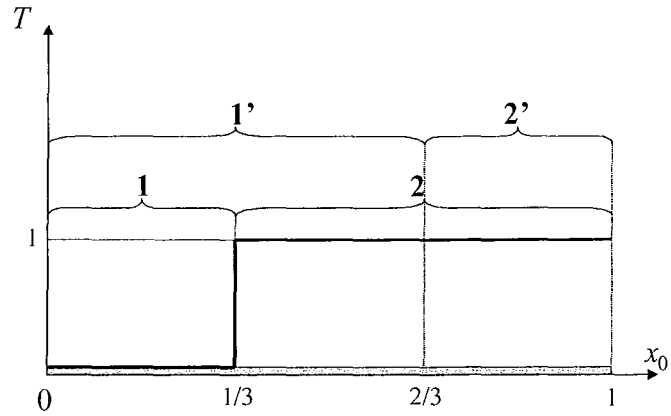


figure I.27 : deux découpage différents

Considérons par exemple les deux découpages (1,2) et (1',2').

* Le spectre de la température sur la partie inférieure 0 vaut :

$$\theta_n^0 = \int_0^1 T^0(x_0)\cos(n\pi)\mathrm{d}x,\ n \geq 0 \tag{I.131}$$

c'est-à-dire

$$\theta_0^0 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \theta_n^0 = \frac{-\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n\pi}, n \geq 1 \tag{I.132}$$

* Le spectre sur la partie 1 est nul :

$$\theta_n^1 = 0,\ n \geq 0 \tag{I.133}$$

La troncature de ce spectre n'entraîne donc pas de perte d'information.

* Le spectre sur la partie 2 vaut :

$$\theta_0^2 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \theta_n^2 = 0, n \geq 1 \tag{I.134}$$

La troncature de ce spectre n'entraîne pas non plus de perte d'information.

* Le spectre sur la partie 1' vaut :

$$\theta_0^{1'} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \theta_n^0 = \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n\pi}, n \geq 1 \tag{I.135}$$

Ici une troncature provoque une perte d'information

* Le spectre sur la partie 2' vaut :

$$\theta_0^{2'} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \theta_n^{2'} = 0, n \geq 1 \tag{I.136}$$

La troncature de ce spectre n'entraîne pas de perte d'information.

A partir des spectres de la température sur les parties 1 et 2 ou 1' et 2' nous pouvons déterminer le spectre sur la partie inférieure en utilisant les matrices de conversion de spectre $\boldsymbol{E}^i$ et $\boldsymbol{E}^{i'}$ et comparer les résultats obtenus.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}^1 & \boldsymbol{E}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{\theta}^2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}^{0'} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}^{1'} & \boldsymbol{E}^{2'} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^{1'} \\ \boldsymbol{\theta}^{2'} \end{pmatrix} \tag{I.137}$$

Sur la *figure I.28*, sont représentées les deux erreurs commises lors du changement de base correspondant aux deux découpages différents. C'est à dire $Err_n = \left|\hat{\theta}_n^0 - \theta_n^0\right|$ et $Err'_n = \left|\hat{\theta}_n^{0'} - \theta_n^0\right|$.

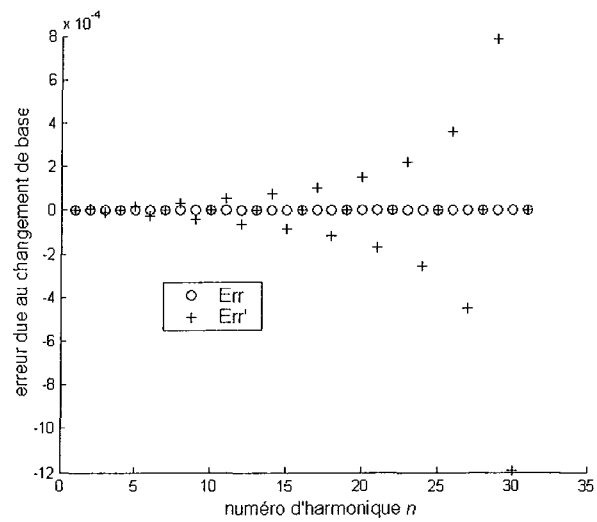


figure I.28 : erreur de changement de base pour deux découpages différents

Nous remarquons bien que le premier découpage (1 ;2), pour lequel aucune information n'est perdue par troncature, n'introduit pas d'erreur. L'égalité ($\max_{N_1+1 \leq n} \left(\left|\theta_n^i\right| \right) = 0$ implique une erreur nulle comme le montre également l'équation (I.108). Par contre le second découpage (1' ;2') introduit une erreur qui est d'autant plus importante que l'ordre de l'harmonique est élevé (voir équation (I.108) et étude de l'erreur).

En conclusion, le découpage optimal est celui qui rejette les fortes variations de flux et de température (ou les discontinuités) aux frontières des surfaces. Les spectres sur les surfaces ainsi composées sont peu étendus et l'erreur due au changement de base minimisée.
Bien sûr on ne connaît pas les champs de température et de densité de flux avant d'avoir résolu le problème, un premier découpage peut alors être intuitif et un second basé sur les résultats du premier calcul. En pratique, à part dans les cas où une très grande précision est nécessaire, le découpage des surfaces libres se fera d'une manière systématique facilement programmable et non optimisée.

II.2.2 Formalisme « des plus petits vers le plus grand » [22]

Considérons la géométrie de la *figure I.25* et un découpage de la surface libre en I surfaces rectangulaires comme sur la *figure I.26a* ou *I.26b*. Soit $\boldsymbol{E}_x^i$ la matrice de conversion de spectre entre le bloc ou surface libre i et le bloc 0 selon $0x$. Cette matrice est définie par l'équation (I.92) , en remplaçant L_i par L_i^x, δ_i par δ_i^x. Soit $\boldsymbol{E}_y^i$ la matrice de conversion de spectre entre le bloc ou surface libre i et le bloc 0 selon $0y$. Cette matrice est définie par l'équation (I.92) en remplaçant L_i par L_i^y, δ_i par δ_i^y.
Le calcul montre (voir Annexe 7) que :

$$\boldsymbol{\theta}^0(e_0) = \sum_{i=1}^{I} \boldsymbol{E}^i \boldsymbol{\theta}^i(0) \tag{I.138}$$

où les $\boldsymbol{\theta}^i$ sont les spectres ordonnés en vecteurs colonnes et où les matrices de conversion de spectre $\boldsymbol{E}^i$ sont définies par :

$$\left(\boldsymbol{E}^i\right)_{i=1..I} = \begin{pmatrix} E_y^i(0,0)\boldsymbol{E}_x^i & \cdots & E_y^i(0,N_y^i)\boldsymbol{E}_x^i \\ \cdots & E_y^i(n,m)\boldsymbol{E}_x^i & \cdots \\ E_y^i(N_y^0,0)\boldsymbol{E}_x^i & \cdots & E_y^i(N_y^0,N_y^i)\boldsymbol{E}_x^i \end{pmatrix} \tag{I.139}$$

La matrice de conversion de spectre 3D est donc fonction des matrices de conversions de spectre 2D suivant les deux directions.

II.2.3 Formalisme « du plus grand vers les plus petits »

De même que pour le formalisme « des plus petits vers le plus grand », le calcul réalisé en Annexe 7 montre que la matrice de conversion de spectre 3D est fonction des matrices de conversions de spectre 2D suivant les deux directions $0x$ et $0y$:

$$\boldsymbol{\theta}^i(0) = \boldsymbol{F}^i \boldsymbol{\theta}^0(e_0) \tag{I.140}$$

avec

$$\left(\boldsymbol{F}^i\right)_{i=1..I} = \begin{pmatrix} F_y^i(0,0)\boldsymbol{F}_x^i & \cdots & F_y^i(0,N_y^0)\boldsymbol{F}_x^i \\ \cdots & F_y^i(n,m)\boldsymbol{F}_x^i & \cdots \\ F_y^i(N_y^i,0)\boldsymbol{F}_x^i & \cdots & F_y^i(N_y^i,N_y^0)\boldsymbol{F}_x^i \end{pmatrix} \tag{I.141}$$

II.3 Conclusion

Le passage d'un bloc à un autre est donc résolu en introduisant une matrice de conversion de spectre, ou une matrice de changement de base, qui exprime la base de fonctions propres relative à un bloc en fonction de la base de fonctions propres relative à l'autre bloc. Ce changement de base ou conversion de spectre ne s'effectue pas sans perte d'information ; chaque composante du spectre dans la nouvelle base dépend de l'ensemble du spectre dans l'ancienne base. Ainsi la nécessaire troncature des spectres introduit une erreur que nous avons pu majorer dans le cas de l'approche « des plus petits vers les plus grands ».

Nous allons nous intéresser maintenant au formalisme de la résolution des structures multiblocs.

III Formalisme

Cette partie est consacrée a l'écriture de la relation entrée/sortie du problème. Les formalismes en deux et trois dimensions étant rigoureusement identiques, considérons par exemple la structure simple représentée sur la *figure I.29*. Il s'agit de l'empilement d'un bloc numéroté 2 sur un bloc de base 0, la surface supérieure du bloc 0 laissée libre est numérotée 1.

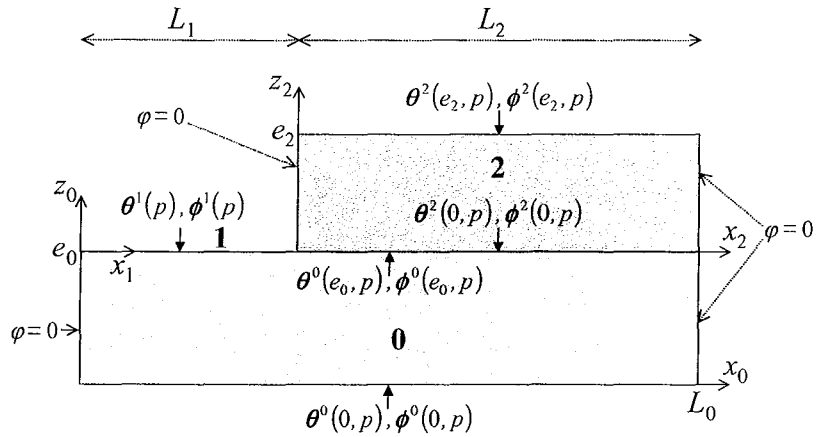


figure I.29 : empilement de deux blocs.

La résolution de ce problème pyramidal par la méthode des quadripôles peut se faire suivant les deux approches appelées : « du plus grand vers les plus petits » et « des plus petits vers le plus grand ».

III.1 Approche 'des plus petits vers le plus grand', notion de chemin

Les deux relations quadripolaires (ou relation entrée/sortie des blocs) s'écrivent :

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^0(z_0=0)\\ \boldsymbol{\phi}^0(z_0=0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^0 & \boldsymbol{B}^0\\ \boldsymbol{C}^0 & \boldsymbol{A}^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^0(z_0=e_0)\\ \boldsymbol{\phi}^0(z_0=e_0)\end{pmatrix} \tag{I.142}$$

et

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^2(z_2=0)\\ \boldsymbol{\phi}^2(z_2=0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{B}^2\\ \boldsymbol{C}^2 & \boldsymbol{A}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^2(z_2=e_2)\\ \boldsymbol{\phi}^2(z_2=e_2)\end{pmatrix} \tag{I.143}$$

Le couplage des spectres à l'interface est réalisé par des matrices de conversion de spectre :

$$\boldsymbol{\theta}^0(z_0=e_0) = \boldsymbol{E}^1\boldsymbol{\theta}^1 + \boldsymbol{E}^2\boldsymbol{\theta}^2(z_2=0) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\phi}^0(z_0=e_0) = \boldsymbol{E}^1\boldsymbol{\phi}^1 + \boldsymbol{E}^2\boldsymbol{\phi}^2(z_2=0) \tag{I.144}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^0(z_0=e_0)\\ \boldsymbol{\phi}^0(z_0=e_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}^1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{E}^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^1\\ \boldsymbol{\phi}^1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}^2 & 0\\ 0 & \boldsymbol{E}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^2(z_2=0)\\ \boldsymbol{\phi}^2(z_2=0)\end{pmatrix} \tag{I.145}$$

Les relations (I.142),(I.143) et (I.145) permettent d'écrire la relation entrée/sortie du problème, la relation liant toutes les conditions limites entre elles :

$$\begin{pmatrix}\theta^0(z_0=0)\\ \phi^0(z_0=0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A^0 & B^0\\ C^0 & A^0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}E^1 & 0\\ 0 & E^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta^1\\ \phi^1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}E^2 & 0\\ 0 & E^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^2 & B^2\\ C^2 & A^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta^2(z_2=e_2)\\ \phi^2(z_2=e_2)\end{pmatrix}\right] \quad \text{(I.146)}$$

ou :

$$\begin{pmatrix}\theta^0(z_0=0)\\ \phi^0(z_0=0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A^0 & B^0\\ C^0 & A^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E^1 & 0\\ 0 & E^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta^1\\ \phi^1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}E^2 & 0\\ 0 & E^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^2 & B^2\\ C^2 & A^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta^2(z_2=e_2)\\ \phi^2(z_2=e_2)\end{pmatrix} \quad \text{(I.147)}$$

Si l'on note :

$$\boldsymbol{u}^i = \begin{pmatrix}\theta^i(z_i=e_i)\\ \phi^i(z_i=e_i)\end{pmatrix}_{i\geq 1},\quad \boldsymbol{u}^0 = \begin{pmatrix}\theta^0(z_0=0)\\ \phi^0(z_0=0)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{m}^i = \begin{pmatrix}A^i & B^i\\ C^i & A^i\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_E^{0\to i} = \begin{pmatrix}E^i & 0\\ 0 & E^i\end{pmatrix} \quad \text{(I.148)}$$

l'équation (I.147) devient :

$$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{m}^0\boldsymbol{p}_E^{0\to 1}\boldsymbol{u}^1 + \boldsymbol{m}^0\boldsymbol{p}_E^{0\to 2}\boldsymbol{m}^2\boldsymbol{u}^2 \quad \text{(I.149)}$$

ou

$$\boldsymbol{u}^0 = \left[\boldsymbol{m}^0\boldsymbol{p}_E^{0\to 1} \quad \boldsymbol{m}^0\boldsymbol{p}_E^{0\to 2}\boldsymbol{m}^2\right]\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}^1\\ \boldsymbol{u}^2\end{pmatrix} \quad \text{(I.150)}$$

Nous voyons donc apparaître deux matrices de transfert relatives aux deux chemins que peut emprunter le flux thermique. La matrice de transfert $\boldsymbol{m}^0\boldsymbol{p}_E^{0\to 1}$ caractérise le chemin 1 (voir *figure I.30*) et la matrice de transfert $\boldsymbol{m}^0\boldsymbol{p}_E^{0\to 2}\boldsymbol{m}^2$ caractérise le chemin 2.

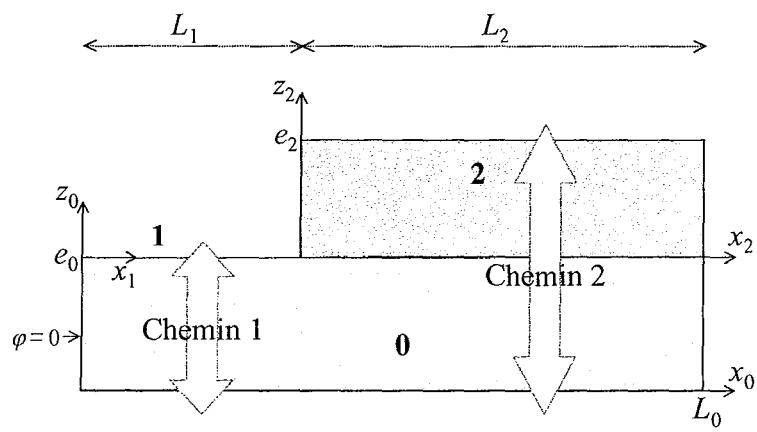


figure I.30 : les deux chemins thermiques

Cette méthode conduit donc à un formalisme très transparent, en relation directe avec la géométrie.

L'introduction des conditions limites connues dans (I.150) permet alors la résolution du problème. Par exemple, si la température de la face inférieure du bloc 0 est imposée à 0°C, si la

surface 1 est isolée et si une densité de flux (de spectre ϕ_{exci}, ici négatif) est imposée sur la surface supérieure de 2, la relation (I.146) devient :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi^0(z_0=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 & B^0 \\ C^0 & A^0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} E^1 & 0 \\ 0 & E^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E^2 & 0 \\ 0 & E^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^2 & B^2 \\ C^2 & A^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta^2(z_2=e_2) \\ \phi_{exci} \end{pmatrix}\right] \quad \text{(I.151)}$$

La première ligne de ce système s'écrit alors :

$$0 = \left[A^0E^1 \quad A^0E^2A^2 + B^0E^2C^2\right]\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2(z_2=e_2) \end{pmatrix} + \left(A^0E^2B^2 + B^0E^2A^2\right)\phi_{exci} \quad \text{(I.152)}$$

La solution du système (I.152) donne les températures sur les faces supérieures des blocs (ou température en face avant) :

$$\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2(z_2=e_2) \end{pmatrix} = \left[A^0E^1 \quad A^0E^2A^2 + B^0E^2C^2\right]^{-1}\left(A^0E^2B^2 + B^0E^2A^2\right)(-\phi_{exci}) \quad \text{(I.153)}$$

A partir de ces températures en face avant nous pouvons calculer les températures et les densités de flux dans toute la structure par méthode directe. Le problème est donc résolu.
En pratique, l'utilisation d'un logiciel de calcul symbolique du type de Maple permet de déterminer l'expression analytique (I.153) ; il reste alors à remplacer les expressions analytiques des diverses matrices par leurs valeurs numériques et à inverser le système pour obtenir la solution. Ce formalisme très transparent est facilement automatisable en vue de la construction d'un logiciel basé sur cette méthode, nous le vérifierons par la suite.

III.2 Approche 'du plus grand vers les plus petits', notion de chemin

Les deux relations quadripolaires n'ont pas changé, mais nous considérons cette fois les relations inverses :

$$\begin{pmatrix} \theta^0(z_0=e_0) \\ \phi^0(z_0=e_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 & -B^0 \\ -C^0 & A^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta^0(z_0=0) \\ \phi^0(z_0=0) \end{pmatrix} \quad \text{(I.154)}$$

et

$$\begin{pmatrix} \theta^2(z_2=e_2) \\ \phi^2(z_2=e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & -B^2 \\ -C^2 & A^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta^2(z_2=0) \\ \phi^2(z_2=0) \end{pmatrix} \quad \text{(I.155)}$$

la relation propre à l'interface vaut quand à elle :

$$\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\theta}^1 = \boldsymbol{F}^1\boldsymbol{\theta}^0\left(z_0 = e_0\right) \\ \boldsymbol{\theta}^2\left(z_2 = 0\right) = \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{\theta}^0\left(z_0 = e_0\right)\end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\phi}^1 = \boldsymbol{F}^1\boldsymbol{\phi}^0\left(z_0 = e_0\right) \\ \boldsymbol{\phi}^2\left(z_2 = 0\right) = \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{\phi}^0\left(z_0 = e_0\right)\end{array}\right\} \tag{I.156}$$

c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{\phi}^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{F}^1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F}^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^0\left(z_0 = e_0\right) \\ \boldsymbol{\phi}^0\left(z_0 = e_0\right)\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^2\left(z_2 = 0\right) \\ \boldsymbol{\phi}^2\left(z_2 = 0\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{F}^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^0\left(z_0 = e_0\right) \\ \boldsymbol{\phi}^0\left(z_0 = e_0\right)\end{pmatrix}\end{array}\right\} \tag{I.157}$$

La relation entrée/sortie s'écrit donc :

$$\left\{\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{\phi}^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{F}^1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F}^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^0 & -\boldsymbol{B}^0 \\ -\boldsymbol{C}^0 & \boldsymbol{A}^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^0\left(z_0 = 0\right) \\ \boldsymbol{\phi}^0\left(z_0 = 0\right)\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^2\left(z_2 = e_2\right) \\ \boldsymbol{\phi}^2\left(z_2 = e_2\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^2 & -\boldsymbol{B}^2 \\ -\boldsymbol{C}^2 & \boldsymbol{A}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^0 & -\boldsymbol{B}^0 \\ -\boldsymbol{C}^0 & \boldsymbol{A}^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^0\left(z_0 = 0\right) \\ \boldsymbol{\phi}^0\left(z_0 = 0\right)\end{pmatrix}\end{array}\right\} \tag{I.158}$$

Si l'on note :

$$\boldsymbol{u}^i = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^i\left(z_i = e_i\right) \\ \boldsymbol{\phi}^i\left(z_i = e_i\right)\end{pmatrix}_{i\geq 1}, \boldsymbol{u}^0 = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^0\left(z_0 = 0\right) \\ \boldsymbol{\phi}^0\left(z_0 = 0\right)\end{pmatrix}, \boldsymbol{m}^i = \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^i & -\boldsymbol{B}^i \\ -\boldsymbol{C}^i & \boldsymbol{A}^i\end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_F^{i\to 0} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{F}^i & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F}^i\end{pmatrix} \tag{I.159}$$

l'équation (I.158) devient :

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}^1 \\ \boldsymbol{u}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_F^{1\to 0}\boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}^2\boldsymbol{p}_F^{2\to 0}\boldsymbol{m}^0\end{pmatrix}\boldsymbol{u}^0 \tag{I.160}$$

Nous voyons donc apparaître également deux matrices de transferts chacune relative à un chemin emprunté par le flux thermique. La matrice de transfert du système est composée de la concaténation verticale de ces deux sous matrices de transfert.

III.3 Cas des structures non pyramidales

Nous allons comprendre dans ce paragraphe comment résoudre les problèmes de transfert dans une structure non pyramidale dont un exemple simple est donné sur la *figure I.31*. Il s'agit de l'empilement non pyramidal de trois blocs. Le bloc de base est noté 0, le bloc intermédiaire 1 et le bloc supérieur 4. La surface libre sur le bloc 0 (respectivement sur le bloc 4) est noté 1 (respectivement 3).

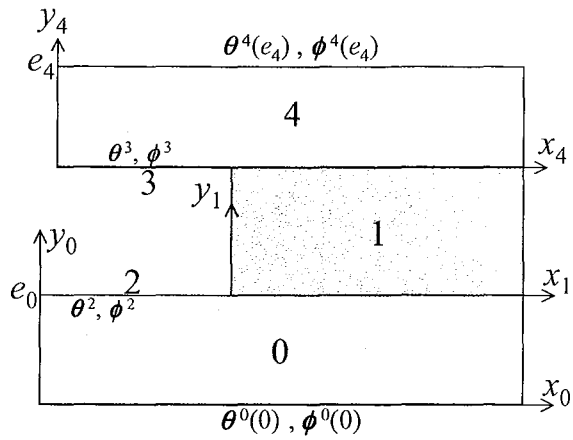


figure I.31 : structure non pyramidale

Résolvons le problème en partant du bas. Nous avons toujours :

$$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{m}^0 \left(\boldsymbol{p}_E^{0\to 2} \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{p}_E^{0\to 1} \boldsymbol{m}^1 \boldsymbol{u}^1 \right) \tag{I.161}$$

De plus, toujours d'après le paragraphe précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u}^1 = \boldsymbol{p}_F^{1\to 4} \boldsymbol{m}^4 \boldsymbol{u}^4 \\ \boldsymbol{u}^3 = \boldsymbol{p}_F^{3\to 4} \boldsymbol{m}^4 \boldsymbol{u}^4 \end{array} \right\} \tag{I.162}$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{m}^0 \left(\boldsymbol{p}_E^{0\to 2} \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{p}_E^{0\to 1} \boldsymbol{m}^1 \boldsymbol{p}_F^{1\to 4} \boldsymbol{m}^4 \boldsymbol{u}^4 \right) \\ \boldsymbol{u}^3 = \boldsymbol{p}_F^{3\to 4} \boldsymbol{m}^4 \boldsymbol{u}^4 \end{array} \right\} \tag{I.163}$$

Nous aboutissons donc au système carré :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^0 \\ \boldsymbol{u}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}^0 \boldsymbol{p}_E^{0\to 2} & \boldsymbol{m}^0 \boldsymbol{p}_E^{0\to 1} \boldsymbol{m}^1 \boldsymbol{p}_F^{1\to 4} \boldsymbol{m}^4 \\ 0 & \boldsymbol{p}_F^{3\to 4} \boldsymbol{m}^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^2 \\ \boldsymbol{u}^4 \end{pmatrix} \tag{I.164}$$

qui lie les conditions limites sur les faces inférieures des blocs ($\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^3$) aux conditions limites sur les faces supérieures ($\boldsymbol{u}^2, \boldsymbol{u}^4$).

Nous voyons alors apparaître 3 chemins thermiques des faces inférieures vers les faces supérieures des blocs, voir *figure I.32* :

* **Chemin 1** de matrice de transfert associée $\boldsymbol{m}^0 \boldsymbol{p}_E^{0\to 2}$.
* **Chemin 2** de matrice de transfert associée $\boldsymbol{m}^0 \boldsymbol{p}_E^{0\to 1} \boldsymbol{m}^1 \boldsymbol{p}_F^{1\to 4} \boldsymbol{m}^4$.
* **Chemin 3** de matrice de transfert associée $\boldsymbol{p}_F^{3\to 4} \boldsymbol{m}^4$.

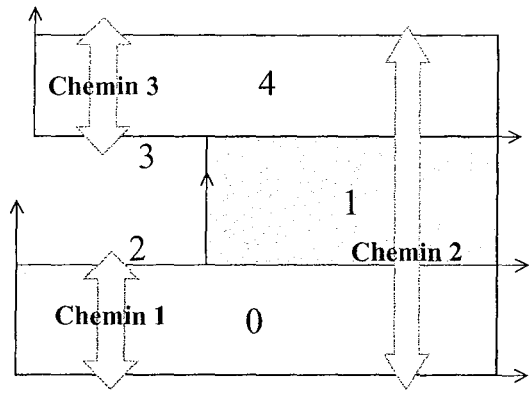


figure I.32 : chemins thermiques dans une structure non pyramidale

La résolution des problèmes non pyramidaux nécessite donc l'utilisation des deux approches « du plus grand vers les plus petits » et « des plus petits vers le plus grand ».

Ce problème peut également être résolu en partant du haut :

$$\begin{pmatrix} u^2 \\ u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_F^{2\to 0} m^0 & 0 \\ m^4 p_E^{4\to 1} m^1 p_F^{1\to 0} m^0 & m^4 p_E^{4\to 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ u^3 \end{pmatrix} \tag{I.165}$$

Les deux matrices de transfert ne sont pas ici rigoureusement les inverses l'une de l'autre.

III.4 Conclusion

Le formalisme permettant l'écriture de la relation entrée/sortie dans le cas des structures multiblocs est donc très transparent puisqu'il est en relation directe avec la géométrie : chaque chemin possible pour le flux de chaleur est associé à une matrice de transfert particulière. Cette caractéristique permet une automatisation relativement simple des calculs en vue de la construction d'un logiciel.

Le paragraphe suivant regroupe les principales limitations du point de vue théorique de la méthode, sachant qu'il existe également des limitations d'ordre numérique.

IV Limitations d'ordre théorique

Le caractère analytique de la méthode des quadripôles thermiques est très intéressant mais il impose également quelques limitations. La géométrie du problème doit être simple, les conditions limites du type de celles décrites précédemment, et le problème linéaire. Cette partie résume les principales limitations d'ordre théorique sachant que nous rencontrerons également par la suite des limitations d'ordre numérique lors de la mise en œuvre de la méthode.

IV.1 Limitations géométriques

La méthode présentée ici permet de résoudre les transferts conductifs dans des structures composées d'empilements de blocs parallélépipédiques. De plus, tous les blocs doivent être orientés suivant la même direction : dans un repère absolu $0xyz$ les cotés des blocs doivent être parallèles soit à $0x$, soit à $0y$, soit à $0z$. L'exemple de la *figure I.33* montre quel type de structure est (a) ou n'est pas (b) adapté à cette méthode.

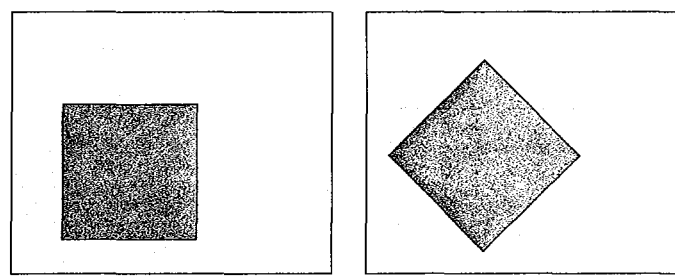


figure I.33 : vue de dessus d'un empilement de deux blocs : a) géométrie adaptée à la méthode des quadripôles thermiques. b) ne peut pas être résolu par une simple application de la méthode.

De plus la méthode ne permet pas de considérer des structures concaves dans le plan. La prise en compte d'un contact latéral entre deux blocs est possible (voir chap**1**.I.3.5) si les deux blocs sont associés suivant une section, voir *figure I.34.a.* Les structures du type représenté sur la *figure I.34.b* ne peuvent pas encore être modélisées.

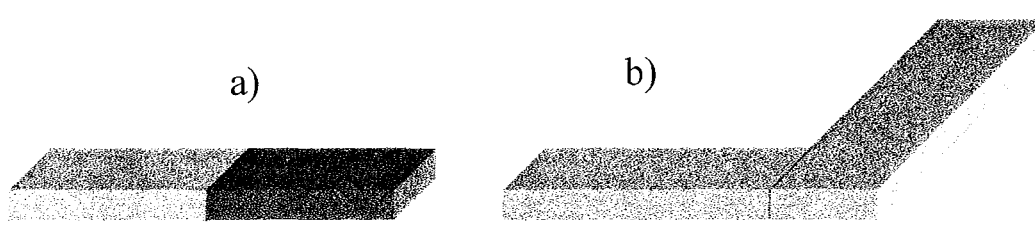


figure I.34: modélisation d'une piste par assemblage latéral de deux blocs

IV.2 Limitations dues aux non-linéarités

D'un point de vue général, la méthode des quadripôles permet de résoudre les problèmes linéaires, même si l'on montre ci-dessous que certaines transformations peuvent permettre de considérer une non-linéarité de la conductivité par exemple. Cette limitation peut être assez importante lorsque l'on souhaite modéliser des échauffements brusques de certains matériaux comme le silicium dont les propriétés thermophysiques dépendent fortement de la température. De même les conditions limites de type radiatif ne peuvent pas être considérées sans hypothèse simplificatrice (linéarisation).

Une technique permettant de prendre en compte des effets non linéaires en régime permanent est la transformation de Kirchhoff [17,29]. L'équation de la chaleur s'écrit en 3 dimensions et en régime permanent :

$$\lambda(T)\left(\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial z^2}\right)=0 \tag{I.166}$$

La transformée de Kirchhoff est définie comme ci-dessous :

$$\Theta=\frac{1}{\lambda_0}\int_{T_0}^{T}\lambda(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{I.167}$$

où λ_0 est la conductivité du matériau lorsque la température vaut T_0.

soit

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}=\frac{\lambda(T)}{\lambda_0} \tag{I.168}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}=\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}=\frac{\lambda(T)}{\lambda_0}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} \tag{I.169}$$

et

$$\varphi_z=-\lambda(T)\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}=-\lambda_0\frac{\partial \Theta}{\partial z} \tag{I.170}$$

L'équation de la chaleur devient donc :

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}=0 \tag{I.171}$$

La méthode des quadripôles peut alors être appliquée. La résolution se passe comme si la conductivité était constante égale à λ_0, puis à la fin des calculs la température réelle est déterminée. Malheureusement, cette technique ne fonctionne pas en régime transitoire quand la

diffusivité dépend de la température. On peut tout de même faire l'hypothèse d'une conductivité variable et d'une diffusivité constante (ce qui n'est pas une bonne hypothèse pour le silicium). Dans le cas du silicium [30]:

$$\lambda(T) = \lambda(T_0)\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\alpha} \tag{I.172}$$

avec $\lambda(T_0) = 100\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-2}}$ pour $T_0 = 425K$ et $\alpha = -1.324$

c'est à dire :

$$\Theta = \frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{T^{\alpha+1}}{T_0^{\alpha}} - T_0\right] \tag{I.173}$$

et

$$T = \left(T_0^{\alpha+1} + (\alpha+1)T_0^{\alpha}\Theta\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \tag{I.174}$$

IV.3 Conclusion

La méthode des quadripôles est donc limitée à la résolution des problèmes de diffusion linéaire (ou faiblement non linéaire en régime permanent) et dont la géométrie est constituée d'empilements de blocs parallélépipédiques. Il s'avère que les composants électroniques de puissances (CEP) présentent cette structure. La méthode des quadripôles thermiques est donc tout à fait adaptée à la modélisation des transferts thermiques par conduction dans les CEP. Dans un deuxième temps, il est possible d'utiliser une autre méthode pour approcher plus finement les aspects non-linéaires (thermodépendance) en transitoire.

A ces limitations d'ordre théorique, vient s'ajouter des limitations d'ordre numérique, dont nous allons dresser la liste dans le paragraphe suivant.

V Mise en œuvre, limitations d'ordre numérique

La méthode développée précédemment nous a permis de construire un code sous Matlab® [31,32] qui accepte en entrée la géométrie de la structure, les conditions limites supérieures et inférieures connues et donne en sortie les champs de température et de densité de flux selon des plans de coupe définis par l'utilisateur. Les calculs sont automatisés grâce à l'utilisation du calcul formel et de la boîte à outils « symbolic toolbox »[33]. Une interface utilisateur, rendant plus conviviale l'utilisation du logiciel, a également été développée. Le programme, en l'état actuel, est adapté aux structures parallélépipédiques dont les blocs sont isolés sur les faces latérales.

La description de l'architecture du programme et des différents algorithmes utilisés est reportée en Annexe 8. Le lecteur intéressé pourra y trouver en particulier les méthodes utilisées pour reconditionner et résoudre le système linéaire, une description de la méthode asymptotique permettant de calculer les champs de températures aux temps très courts, la mise en œuvre d'une méthode de convolution permettant de résoudre rapidement des problèmes pour une grande variété d'excitations temporelles, et enfin une explication du principe de « zoom spectral » permettant d'améliorer la précision spatiale. Revenons néanmoins sur les quelques limitations d'ordre numérique associées à la méthode des quadripôles thermiques.

Il s'avère que compte tenu de la nature des matrices quadripolaires, le système linéaire, dont la solution est le vecteur des spectres des conditions limites inconnues, peut devenir assez vite mal conditionné. Par exemple, rappelons l'expression de la matrice quadripolaire $\boldsymbol{A}$ (en deux dimensions) :

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2+\frac{p}{a}}\,e\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{ch}\left(\sqrt{\left(\frac{N\pi}{L}\right)^2+\frac{p}{a}}\,e\right) \end{bmatrix} \qquad \text{(I.175)}$$

où p est la variable de Laplace, L la largeur du bloc, N l'ordre de troncature associé au bloc, a la diffusivité thermique et e l'épaisseur du bloc. Le plus grand élément de $\boldsymbol{A}$ croît exponentiellement avec l'ordre de troncature N , avec le rapport e/L, ou avec $\sqrt{p/a}$, alors que le plus petit élément reste égal à 1. Ceci à pour effet de déséquilibrer la matrice constitutive du système qui est fonction des matrices quadripolaies.

Nous indiquons ici les trois limitations d'ordre numérique de la méthode des quadripôles :

- Limitation de l'ordre de troncature. De même que les méthodes numériques ne peuvent prendre en compte un nombre infini de noeuds ou de cellules, cette méthode ne peut prendre en compte qu'un nombre fini de modes.

- Limitation du rapport de forme des blocs. Cette méthode n'est pas adaptée aux strucutres composées de blocs de grande épaisseur par rapport à leur largeur (sauf pour les blocs "portant" les faces externes des empilements, voir Annexe 8). La solution consiste à introduire de nouveaux modèles pour représenter ces blocs, comme des modèles d'ailette par exemple.

- Limitation des temps très courts. Le système linéaire "explose" aux temps très courts ($\sqrt{p/a}$ grand). Ce problème est résolu par l'introduction de modèles asymptotiques valables pour les temps très courts, voir Annexe 8.

VI Conclusion du premier chapitre

La méthode des quadripôles thermiques est donc une méthode semi-analytique permettant la résolution des transferts thermiques multidimensionnels transitoires ou permanents par conduction dans les structures composées d'empilements de blocs parallèlèpipédiques. Le nombre d'hyperparamètres introduits, c'est-à-dire la densité de spectre retenue (qui fixe la résolution spatiale) et, pour le cas tridimensionnel, la méthode de troncature des spectres et le type de découpage des surfaces libres, est très faible comparé à celui des méthodes numériques qui nécessitent une discrétisation de l'espace et du temps. Le caractère analytique de la méthode garantit la conservation du flux et facilite la résolution du problème grâce à son formalisme transparent, en relation directe avec la géométrie.

La résolution des structures multiblocs n'est plus exacte à l'ordre de troncature près, contrairement au cas monobloc, car le couplage entre les modes et la nécessaire troncature des spectres se traduit par l'introduction d'une erreur à chaque changement de base (ou conversion de spectre). Cependant, cette erreur est d'autant plus faible que l'ordre du mode est peu élevé. Ainsi les erreurs commises concernent les variations locales de la température ou de la densité de flux. Nous avons également dressé la liste non exhaustive des limitations associées à cette méthode. De par leur structure multibloc parallélépipédique, les composants électroniques peuvent être modélisés par cette méthode, comme nous allons le voir dans le prochain chapitre.

Celui-ci est consacré à la validation de la méthode, à l'estimation de ses performances et à quelques applications qui tirent parti de ses qualités. On s'intéressera en particulier aux temps de calculs associés à la mise en œuvre de celle-ci.

Bibliographie relative au chapitre « Modélisation »

[1] Janicki M., Napieralski A., Fedasyuk D., Petrov D., 2000, Thermal modelling of hybrid circuits : simulation method comparison, Microelectronics Reliability, 40, pp. 541-546.

[2] Maillet D., André S., Batsale J. C., Degiovanni A., Moyne C., 2000, Thermal Quadrupoles, Wiley ed., Chichester.

[3] Salt H., 1983, Transient conduction in a two-dimensional composite slab, Theorical development of temperature modes, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 26, n°11, pp. 1611-1616.

[4] Székely V., Poppe A., Rencz M., Rosental M., Teszéri T., 2000, THERMAN : a thermal simulation tool for IC chips, microstructures and PW boards, Microelectronics Reliability, 40, pp. 517-524.

[5] Leturcq P., Dorkel J.M., Ratolojanahary F. E., 1993, A Two-Port Network Formalism for 3D Heat Conduction Analysis in Multilayered Media, Int. J. Heat Mass Transfer, 36, n° 9, pp. 2317-2326.

[6] Gerstenmaier Y.C., Wachutka G., 1999, A new Procedure for the Calculation of the Temperature Development in Electronic Systems, EPE'99-Lausanne.

[7] Dorkel J. M., Tounsi P. and Leturcq P., 1996, Three-dimensional thermal modeling based on the two-port network theory for hybrid or monolithic integrated power circuits, IEEE trans. on Components, Packaging and Manufacturing Technology, Part A, Vol. 19, n° 4, pp. 501-507.

[8] Carslaw H.S., Jaeger J.C., 1959, Conduction of heat in solids, 2ème édition, Oxford University Press, New York.

[9] Degiovanni A ., 1988, Conduction dans un mur multicouche avec sources ; extension de la notion de quadripôles, Int. J. Heat Mass Transfer, 31, pp. 553-557.

[10] Degiovanni A ., 1990, Conduction, Techniques de l'ingénieur, traité Généralités, Transmission de l'energie thermique, Paris, A1 530, pp.1-16.

[11] Degiovanni A ., 1999, Conduction, Techniques de l'ingénieur, traité Généralités énergétique, Transmission de l'energie thermique, Paris, BE 8 200, pp. 1-26.

[12] Batsale J.C., Maillet D. and Degiovanni A., 1994, Extention de la méthode des quadripoles thermiques à l'aide de transformations intégrales – Calcul d'un transfert thermique au travers d'un défaut plan, Int. J. Heat Mass Transfer, 37, pp. 111-127.

[13] Bendada A., Maillet D., Batsale J.C., Degiovanni A., 1998, Reconstruction of a non-uniform interface thermal resistance by inverse conduction, Inverse Problems in Engineering, Vol. 6, pp. 79-123.

[14] Philippi I., Bendada A., Rémy B. and Maillet D., 1998, Thermal characterization of electronic boards, Proc. Eurotherm Semi. 58, Therm. Manage. Electron. Syst. III, Nantes, 24-26 September 1997, J. P. Bardon, E. Beyne and J. B. Saulnier, eds, Elsevier, pp. 246-253

[15] Gatto V., 2002, Etude des phénomènes thermiques dans les composants électroniques de puissance et systèmes d'interconnexion associés en vue de leur implémentation dans l'environnement d'un moteur automobile, Thèse de l'Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes.

[16] Stehfest H., Remarks on algorithm 368, 1970, Numerical inversion of Laplace transforms, comm. A.C.M., n°13, 624.

[17] Ozisik M.N., 1993, Heat Conduction, 2nd edn, Wiley, New York.

[18] Mikhailov M.D., Ozisik M.N., 1984, Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion, John Wiley, New York.

[19] Cotta R.M., 1993, Integral Transforms in Computational Heat ans Fliud Flow, CRC Press, Boca Raton.

[20] Cotta R.M., Mikhailov M.D., 1997, Heat Conduction, John Wiley, Chichester.

[21] Fudym O., Ladevie B., Batsale J.C., 2002, A Seminumerical Approach for Heat Diffusion in Heterogeneous Media: One Extension of the Analytical Quadrupole Method, Num. Heat Transfer B., Vol 42, pp 325-348

[22] Maranzana G., Perry I., Maillet D., 2002, Quasi-analytical simulation of conduction heat transfer through a pyramidal multilayer multiblock by the quadrupole method, Num. Heat Transfer B., 42, pp. 499-521.

[23] Auliac G., 2000, Techniques mathematiques pour la physique, Ellipse, Paris, France.

[24] Beck J.V., Cole K.D., Hadji-Sheikh A., Litkouhi B.,1992, Heat Conduction Using Green Functions, Hemisphere, London.

[25] Maranzana G., Perry I., Maillet D., 2001, Modélisation de structures multiblocs multicouches par la méthode des quadripôles thermiques, actes du congrès SFT2001, pp. 647-651, Elsevier.

[26] Maranzana G., Perry I., Maillet D., Raël S., 2002, Couplage d'un modèle d'ailette et d'un modèle fin de conduction par la méthode des quadripôles thermiques, actes du congrès SFT2002, pp. 573-578, Elsevier.

[27] Maranzana G., Perry I., Maillet D., 2002, Quadrupole thermal modeling of a pyramidal multilayer multiblock, proc 12th Int. Heat Transfer Conference, Elsevier, Grenoble, pp. 735-739.

[28] Meyer Y., 1992, Ondelettes et algorithme concurrents, Hermannn, Paris, pp. 19-29.

[29] Dupuy P., 1998, Modèle thermiques et méthodologie d'analyse thermique pour circuits intégrés de puissance de type «smartpower », Thèse de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse.

[30] Selberherr S., 1984, Analysis and Simulation of Semiconductor Devices, Springer-Verlag Wien, New York.

[31] Mokhtari M., Meshab A., 1997, Apprendre et maîtriser Matlab, Springer-Verlag.

[32] Site internet de Mathworks France : www.mathworks.fr, support technique.

[33] Levine A., 1998, Introduction à Maple, Ellipse.

[34] Matlab 6.1 Help, External Interfaces / Creating Fortran MEX-Files.

[35] Lascaud P., Théodor R., 1986, Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur, Masson.

[36] Press W.H., Vetterling W.T., Teukolsky S.A., Flannery B. P., 1992, Numerical Recipes, Second Edition, Cambridge University Press, pp. 47-49.

[38] Barrett R., Berry M., Chan T. F. , 1994, Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, SIAM, Philadelphia.

[39] Site Internet de MathWorks, www.mathworks.com, Cleve's Corner, Floating points.

[40] Wilkinson, 1971, Handbook for Automatic Computation, Linear Algebra, Vol. 2.

[41] Hsu J., Dranoff J.S., 1987, Numerical inversion of certain Laplace transforms by the direct application of the fast Fourier transform algorithm, Comput. Chem Eng, 11(2), pp. 101-110.

[42] Davies J., Martin B., 1979, Numerical inversion of theLaplace transform : A survey and comparison of methodes, J. Comp. Phys, 33, pp.1-32.

[43] Beck J.V., Cole K.D., Hadji-Sheikh A., Litkouhi B., 1992, Heat Conduction Using Green Functions, Hemisphere, London.

[44] Matlab 6.1 Help, Building GUI.

Deuxième Chapitre

SIMULATION
VALIDATION
OPTIMISATION

Cette partie regroupe quelques applications concrètes qui permettent de valider la méthode des quadripôles thermiques multiblocs et d'évaluer ses performances.

I Modélisation d'un module IGBT

La fonction de base de l'électronique de puissance est la fonction interrupteur [1,2]. Avant l'apparition du transistor bipolaire à grille isolée ou *Insulated Gate Bipolar Transistor* (IGBT) en 1982-1983, cette fonction était principalement réalisée à partir du transistor bipolaire de puissance ou *Bipolar Junction Transistor* (BJT) et du transistor MOS de puissance ou *Metal Oxyde semiconductor Field Effect Transistor* (MOSFET) [3]. Ces deux technologies possèdent de nombreux avantages mais aussi des inconvénients. Le transistor bipolaire présente une faible chute de tension à l'état passant et une fréquence de commutation acceptable. Cependant, il se commande en courant et nécessite par conséquent un circuit de commande complexe et coûteux. Le transistor MOSFET est quant à lui commandé en tension. Sa commande est donc simple ; il possède une fréquence de commutation élevée, mais les pertes en conduction qui lui sont associées sont assez importantes (pour les tenues en tension importantes).
Le Transistor Bipolaire à Grille Isolée (IGBT) [1,2,4] est né de l'association de ces deux technologies sur le même substrat en silicium afin d'obtenir de bonnes caractéristiques en conduction (Bipolaire) et une commande simple (MOSFET). Sa structure microscopique est représentée sur la *figure II.1*, son schéma équivalent sur la *figure II.2.a* et son symbole sur la *figure II.2.b*.

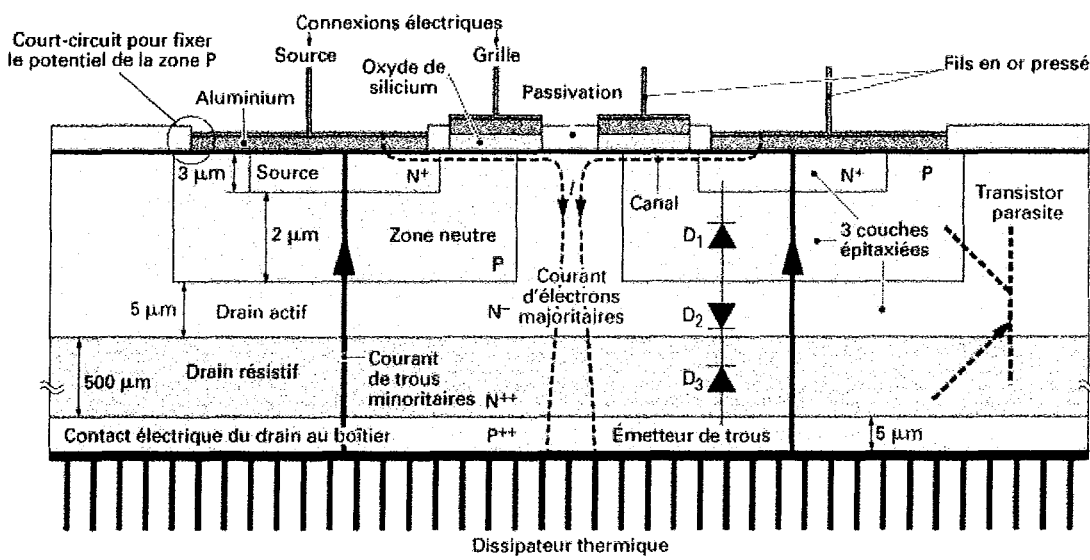


figure II.1 : structure d'une puce IGBT [2]

Dans ce transistor, la grille isolée par un film d'oxyde de silicium est portée à un potentiel positif par rapport à la source ; elle repousse alors les trous de la zone P par simple effet électrostatique. Cette répulsion entraîne une augmentation inversement proportionnelle du nombre d'électrons et

un canal de porteurs négatifs se crée juste en face de la grille. Le courant électrique ainsi créé excite la zone P ++ , qui émet un courant de trous en sens opposé. Ce courant de trous a pour effet de réduire la résistivité de la zone N de tenu en tension. Nous nous retrouvons donc en présence d'une structure de type Darlington, où le MOSFET de commande excite le transistor bipolaire de puissance.

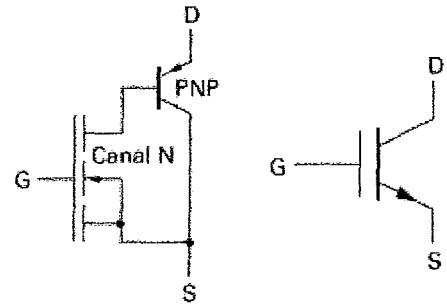


figure II.2 : a. schéma équivalent d'un transistor IGBT, association d'un transistor bipolaire et d'un transistor MOS. b. symbole du transistor IGBT. [2]

Les pôles G, D et S représentent respectivement la grille, le drain et la source.

Depuis ses débuts ce transistor de puissance a connu de nombreuses évolutions visant à augmenter ses performances et sa miniaturisation. C'est ainsi que les densités de puissance dissipées atteignent actuellement des valeurs proches de 400 Wcm^{-2} (d'un point de vue macroscopique en moyenne sur la puce) . La compréhension et l'optimisation des transferts thermiques dans ces composants sont devenues primordiales. Le facteur thermique est bien souvent le facteur limitant la puissance commutable. Ce paragraphe concerne l'étude les transferts thermiques dans le transistor d'un point de vue macroscopique. La structure interne de la puce n'est pas modélisée. Le flux dissipé est supposé uniformément réparti sur la surface supérieure de la puce.

I. 1 Structure macroscopique d'un module IGBT

Afin de permettre de traiter des courants importants, les puces IGBT sont associées en parallèle pour former des modules. Un module peut comporter de 2 à 24 puces. Par exemple, un module IGBT composé de 2 puces IGBT et de deux diodes de roue libre est représenté sur la *figure II.3*. Le rôle des diodes de roue libre (bypass) est de faciliter les commutations en évitant que trop d'énergie soit dissipée lors des commutations quand le composant fonctionne en hacheur.

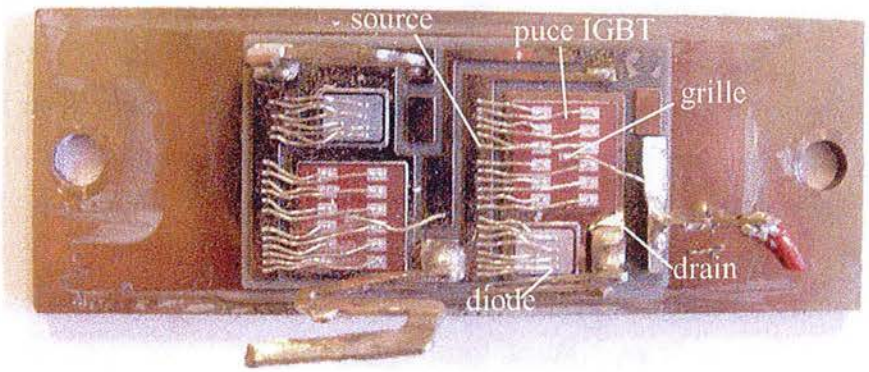


figure II.3 : photo d'un module IGBT 2 puces.

Sur la *figure II.4* est représenté le schéma du module IGBT qui nous servira de cas test pour l'évaluation des performances de la méthode des quadripôles et du code de calcul.

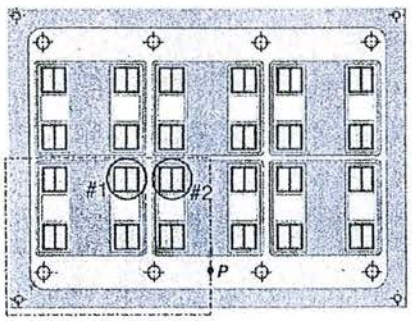


figure II.4 : module IGBT 24 puces modélisé par Khatir et al. [5] en vue de dessus

Ce module comporte 24 puces mais, si l'on fait l'hypothèse qu'elles dissipent toutes la même puissance, la structure et les transferts sont symétriques par rapport au centre du module. Il est alors suffisant de ne modéliser qu'un quart du module. Sur la *figure II.5* est représenté un quart de module en vue éclatée.

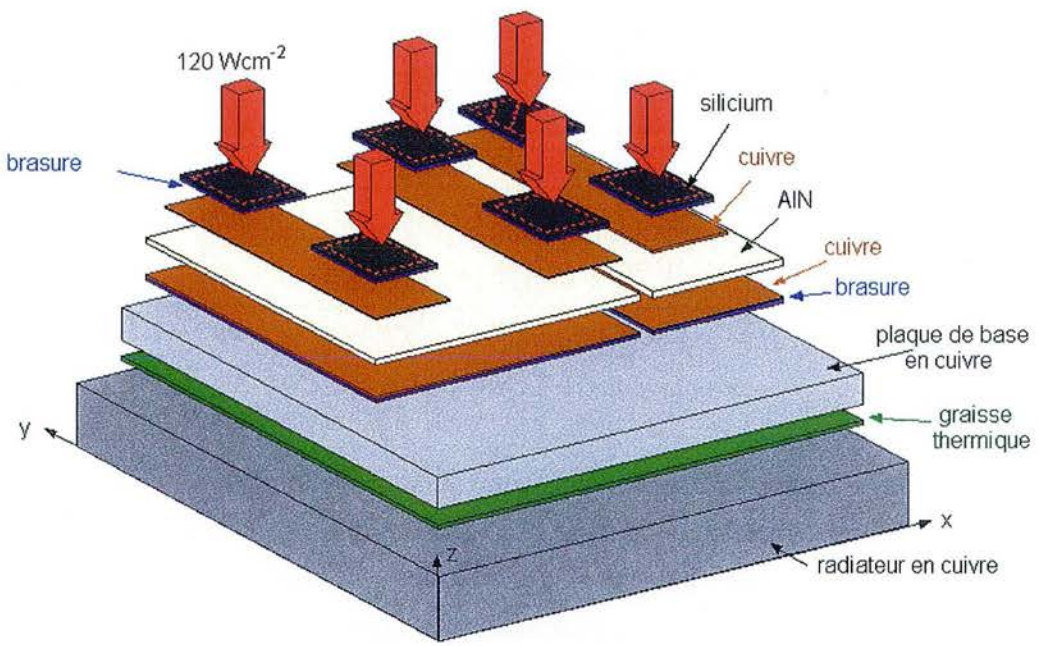


figure II.5 : un quart du module en vue éclatée

Les caractéristiques des différentes couches constituant le module sont données dans le *tableau II.1* établi par Khatir et col. [5] qui ont également modélisé cette structure par la méthode des éléments de frontières. Cet empilement est classique : les puces sont liées au DBC (Double Bound Copper) par une brasure haute température. La nature des soudures (solder) constitue le savoir faire des constructeurs et il est très difficile d'obtenir des informations précises à ce propos. Elles sont généralement formées d'un alliage d'étain, de plomb et d'argent (alliage ternaire tendre) pour le report de la puce sur le substrat DBC et d'un alliage d'étain et de plomb (alliage binaire plus dur) pour le report du substrat sur la semelle. Le substrat DBC est constitué de deux couches de cuivre prenant en sandwich un isolant électrique qui est ici de l'AlN. Le choix de ce matériau est dû à ses propriétés d'isolant électrique, de tenue en tension, mais également à son aptitude à bien conduire la chaleur (conductivité thermique). Les deux liaisons cuivre-céramique sont de très bonne qualité [6,7]. Nous négligerons dans un premier temps leur influence sur les transferts thermiques.

La semelle du module est ensuite fixée à un radiateur, de la graisse thermique venant améliorer le contact. L'évaluation de l'épaisseur de la couche de graisse thermique constitue un problème délicat [8]. Cette couche n'est bien sûr pas d'épaisseur uniforme mais comme nous ne disposons pas de modèle, nous ferons l'hypothèse d'uniformité en épaisseur. Elle a par ailleurs tendance à vieillir de part les successions des cycles supportés par le module, ce qui pose également la question de l'homogénéité de ses propriétés thermophysiques. Pour ces deux raisons, nous verrons par la suite comment considérer une résistance de contact non uniforme dans l'espace.

Material	Thick $x10^{-2}$(m)	Area $x10^{-4}$(m^2)	conductivity (W/mK)	diffusivity $x10^{-5}$(m^2/s)
Silicon chip (puce IGBT) *zone active*	0.035	1.37x1.37 *1.1 x 1.1*	108	6.4
Solder (brasure)	0.008	1.37x1.38	35	2.7
Copper (cuivre)	0.03	1.67x4.56	360	10.6
AlN (nitrure d'aluminium)	0.1	5.84x4.96	170	5.2
Copper (cuivre)	0.03	5.84x4.96	360	10.6
Solder (brasure)	0.008	5.84x4.96	35	2.7
Copper base plate (semelle en cuivre)	0.5	18.7x13.7	360	10.6
Thermal grease (graisse thermique)	0.005	18.7x13.7	0.7	0.07
Copper heat sink (radiateur en cuivre)	1	20.7x15.7	360	10.6

tableau II.1 : caractéristiques des différentes couches [5]
- structure totale (avant partition en 4)

La simulation de ce composant nécessite la connaissance des propriétés thermophysiques des matériaux constituant les différentes couches. Les valeurs regroupées dans le *tableau II.1* sont issues de la littérature mais peuvent être discutées. L'estimation des ces propriétés thermophysiques peut être réalisée par la méthode flash [9] par exemple.

Hypothèses

* Les 24 puces dissipent la même puissance.
* La puissance dissipée est uniforme sur la zone active des puces (en pointillé sur la *figure II.5*) et est équivalente à une condition limite de densité de flux imposée sur la surface supérieure des puces. Cette hypothèse est justifiée par la faible épaisseur (350 μm) des puces et le très faible gradient de température qui existe dans leur épaisseur. Il est évident qu'il ne s'agit là que d'une réduction locale de modèle, la dissipation de puissance étant en fait volumique et non surfacique au sein de chaque puce.
* La face supérieure du module est considérée comme isolée. La méthode permet de considérer un échange entre la face supérieure du module et l'extérieur, mais en pratique le gel de silicone de passivation enrobant le module (isolant électrique et protection contre l'oxydation de l'air) ainsi que le boîtier du module constituent une barrière thermique très importante par rapport à la semelle et au radiateur ; le transfert peut alors être considéré dans un seul sens : des puces vers le radiateur.
* Les faces latérales des différentes couches sont considérées comme isolées. Les couches constituant le module sont toutes très fines et le gel de silicone isole leurs faces latérales. La densité de flux traversant ces faces est donc très faible par rapport à la densité de flux traversant le module des puces vers le dissipateur.
* La couche de graisse thermique est considérée d'épaisseur uniforme. Cette hypothèse est une hypothèse forte. En effet, la sensibilité du champ de température à cette épaisseur est assez importante.
* Les fils d'alimentation ne sont pas modélisés ici, ce qui revient à négliger leur effet. La méthode des quadripôles permet néanmoins de modéliser ces fils par des ailettes.
* Les transferts par rayonnement sont négligés. Certains matériaux comme le silicium sont semi-transparents dans le domaine de l'infrarouge, mais ces effets ne sont pas pris en compte. Nous ne nous intéressons donc pas à la modélisation microscopique fine locale de la puce.
* Les propriétés thermophysiques des matériaux constituant les couches sont indépendantes de la température et données par le *tableau II.1*.

Le code décrit dans l'Annexe 8 permet la simulation de cette structure assez complexe puisqu'elle comporte 9 couches (niveaux). Nous n'avons pas voulu modifier les dimensions des blocs pour simplifier la géométrie : par exemple les puces ont une largeur un peu inférieure aux couches de cuivre sur lesquelles elles reposent (voir *figure II.5*), ce qui introduit de nombreuses surfaces libres. Le but est d'estimer les performances de la méthode sur un cas complexe. Le code divise la structure en 57 blocs et surfaces libres (en pratique, nous avons traité 2 couches superposées situées dans le même bloc comme 2 blocs différents avec des matrices de conversion de spectres égales à l'identité).

I. 2 Simulation en régime permanent

I.2.1 Quelques résultats

Nous considérons ici que les puces dissipent chacune une puissance de 233 W uniformément répartie sur leur surface active carrée (surface délimitée par des pointillés sur la *figure II.5* : 1.1cm×1.1cm centrée sur la puce) et que la température de la face inférieure du radiateur est imposée à 38.5 °C. Si l'on conserve un peu moins de 400 harmoniques par mètre et que l'on fixe le taux d'élimination du spectre à 50%, le nombre total d'harmoniques conservées (qui est également la taille du système linéaire à résoudre) est de 966. La température calculée à l'interface entre le radiateur et la graisse thermique est alors représentée sur la *figure II.6* (coupe suivant un plan horizontal).

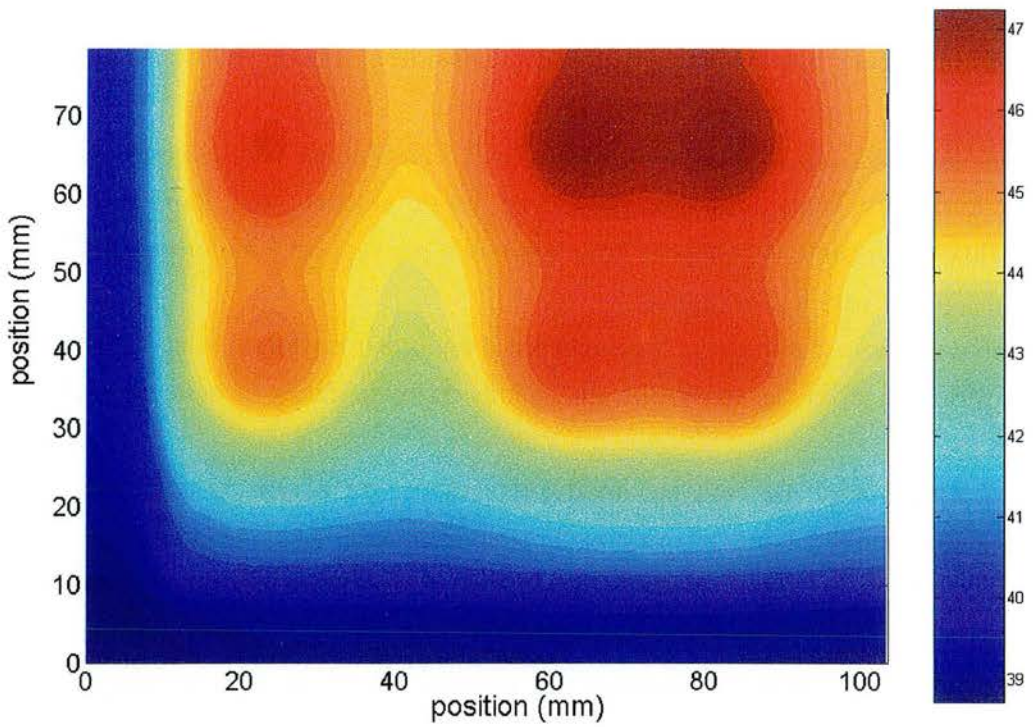


figure II.6 : champ de température sur la face supérieure du radiateur pour un nombre total d'harmoniques conservées de 966.

Sur la *figure II.7* est représenté le champ de température selon un plan de coupe à x constant qui passe par le centre de la deuxième rangée de puces. La *figure II.7.a* correspond à la condition de température imposée à 38.5 °C sur la face inférieure du radiateur et la *figure II.7.b* correspond à une condition limite de type échange convectif uniforme avec $h = 3000\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$.

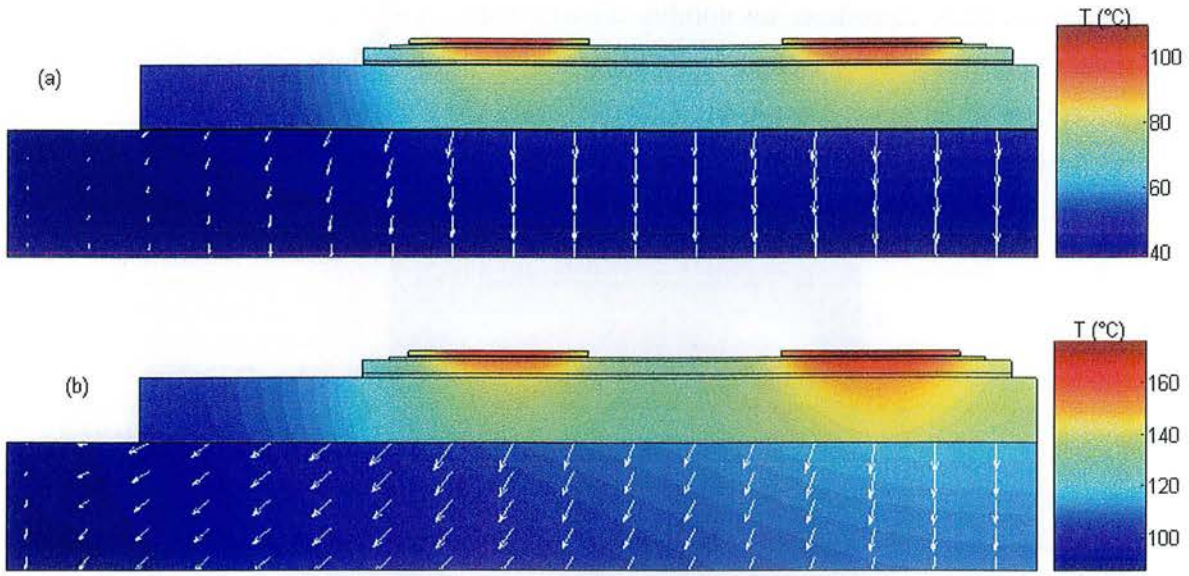


figure II.7 : coupe à x constant passant par le centre de la deuxième rangée de puces. a) condition de température imposée sur la face inférieure du radiateur (38°C). b) condition limite convective ($h = 3000\ Wm^{-2}K^{-1}$).

Dans le cas de l'échange convectif, le radiateur joue un rôle de diffuseur, permettant l'épanouissement des lignes de flux. Cet effet est très peu marqué dans le cas d'un échange parfait (*h* infini ou température imposée). Nous verrons par la suite qu'il existe une épaisseur optimale du radiateur (fonction du coefficient d'échange) qui minimise la température des puces.

Zoom spectral

Comme on ne conserve que 400 harmoniques par mètre, la température sur les puces est déterminée avec 400×0.0137 soit 5 harmoniques selon 0*x* et 0*y*, ce qui est peu pour obtenir une bonne précision spatiale. Nous pouvons alors appliquer la méthode du zoom spectral (Annexe 8) en tenant compte du fait que l'isolant AlN est un filtre passe bas. Nous relevons donc le spectre de la température sur la face inférieure de l'isolant associé à la puce dont la surface est hachurée (voir *figure II.5*) et utilisons ces valeurs comme conditions limites pour le problème plus simple représenté en *figure II.8*.

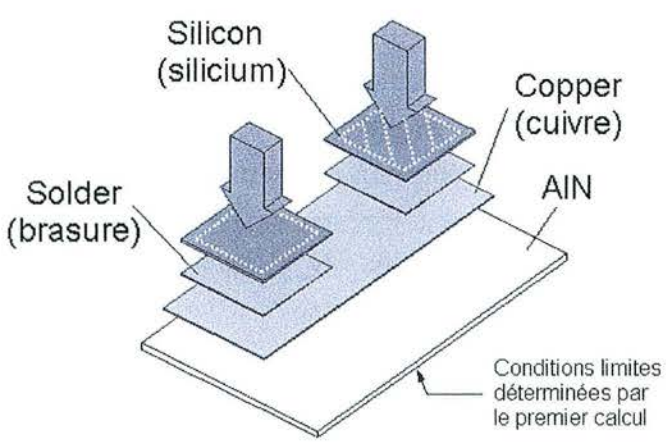


figure II.8 : sous problème résolu pour augmenter la précision spatiale sur la puce hachurée

Nous pouvons alors considérer un nombre d'harmoniques par unité de longueur plus grand. Choisissons par exemple de conserver 1500 harmoniques par mètre, ce qui fait 20 harmoniques suivant $0x$ et $0y$ pour la puce, c'est-à-dire (20*20*0.5=) 200 harmoniques au total pour la puce. La température de la face supérieure de la puce hachurée est alors représentée sur la *figure II. 9*.

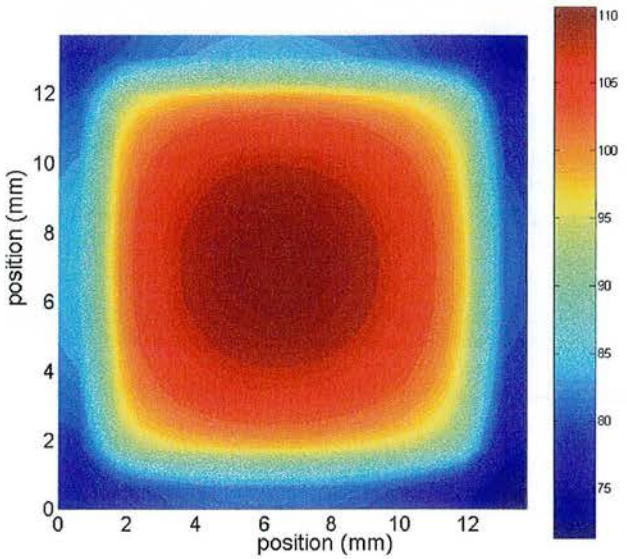


figure II.9 : champ de température sur la face supérieure de la puce hachurée sur la figure II.8, calculé par deux calculs successives (zoom spectral)

On reconnaît ici l'effet d'excitation partielle sur un carré qui est visible sur les isothermes les plus froides. La bonne précision spatiale nous permet de constater les forts gradients de température longitudinaux qui existent au sein du silicium (de l'ordre de 6°C/mm) et qui sont à l'origine de contraintes thermomécaniques très fortes, particulièrement en régime cyclé, au niveau de la brasure.

I.2.2 Validation par comparaison à deux codes commerciaux

Nous avons naturellement cherché à valider le code construit en comparant nos résultats à ceux produits par les deux codes commerciaux que sont FlexPDEase® et Flotherm®.

Le code FlexPDEase® est un code aux éléments finis avec maillage adaptatif, c'est-à-dire que le maillage s'adapte automatiquement en fonction des valeurs du gradient de la température. La simulation a été réalisée avec 200 000 nœuds environ. Le champ de température obtenu à l'interface entre le radiateur et la graisse thermique est représenté sur la *figure II.10*, pour une condition limite de température imposée à 38.5 °C sur la face inférieure du radiateur.

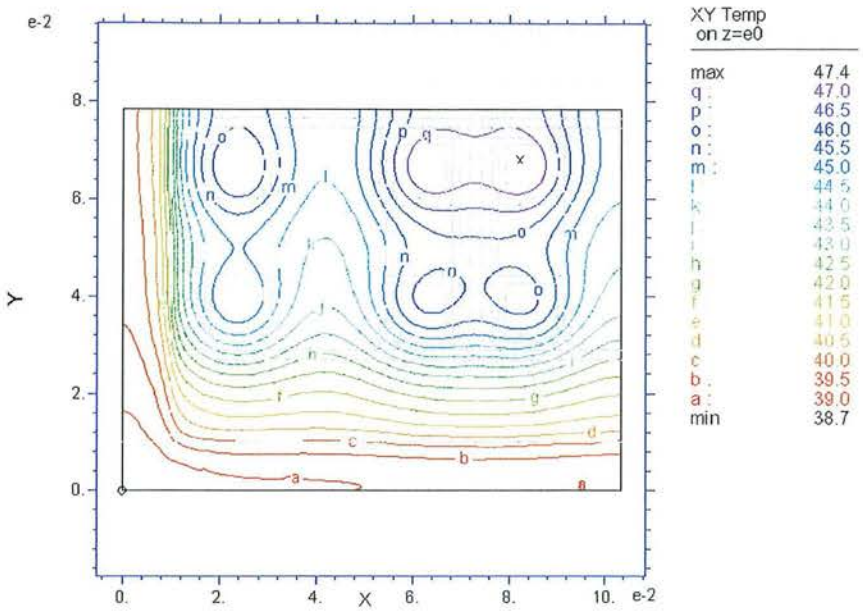


figure II.10 : champ de température sur la face supérieure du radiateur obtenu par FlexPDEase (200 000 nœuds)

Ce résultat est tout à fait comparable (au degré près) au résultat donné par la méthode des quadripôles (*figure II.6*).

Le code Flotherm® est basé sur la méthode des volumes finis, le maillage de type cartésien n'est pas adaptatif. Ce code est largement utilisé par la communauté des électroniciens qui s'intéressent à la modélisation thermique de leurs systèmes. Nous avons choisi de considérer 200 milles mailles en adoptant un maillage à pas variable. Le maillage dans le sens de l'épaisseur des couches suit une loi puissance, si bien que plus on se rapproche des interfaces, plus le maillage est fin. De plus, les zones proches des sources de chaleur sont maillées plus finement.
Pour les mêmes conditions que précédemment la température sur la surface extérieure du module est représentée sur la *figure II.11*.

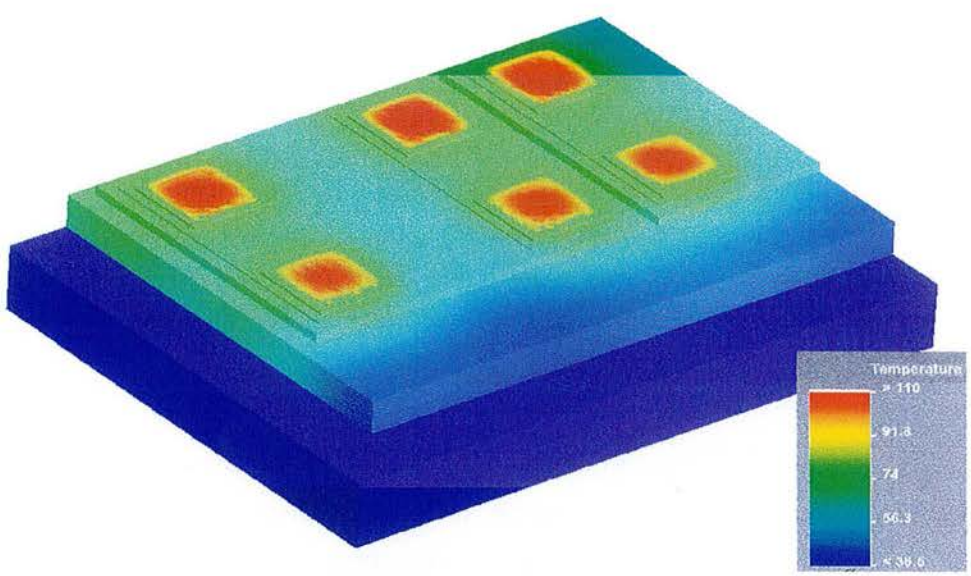


figure II.11 : champ de température sur la surface supérieure du module déterminé par Flotherm (200 000 cellules)

D'une manière générale, le plus grand désaccord entre les trois méthodes concerne la température en face avant, sur la surface supérieure des puces. Sur la *figure II.12* est représenté ce champ de température calculé par la méthode des quadripôles (13.a), par Flotherm (13.b), par FlexPDEase (13.c) et par Khatir et col.[5] (13.d) en utilisant la méthode des éléments frontières.

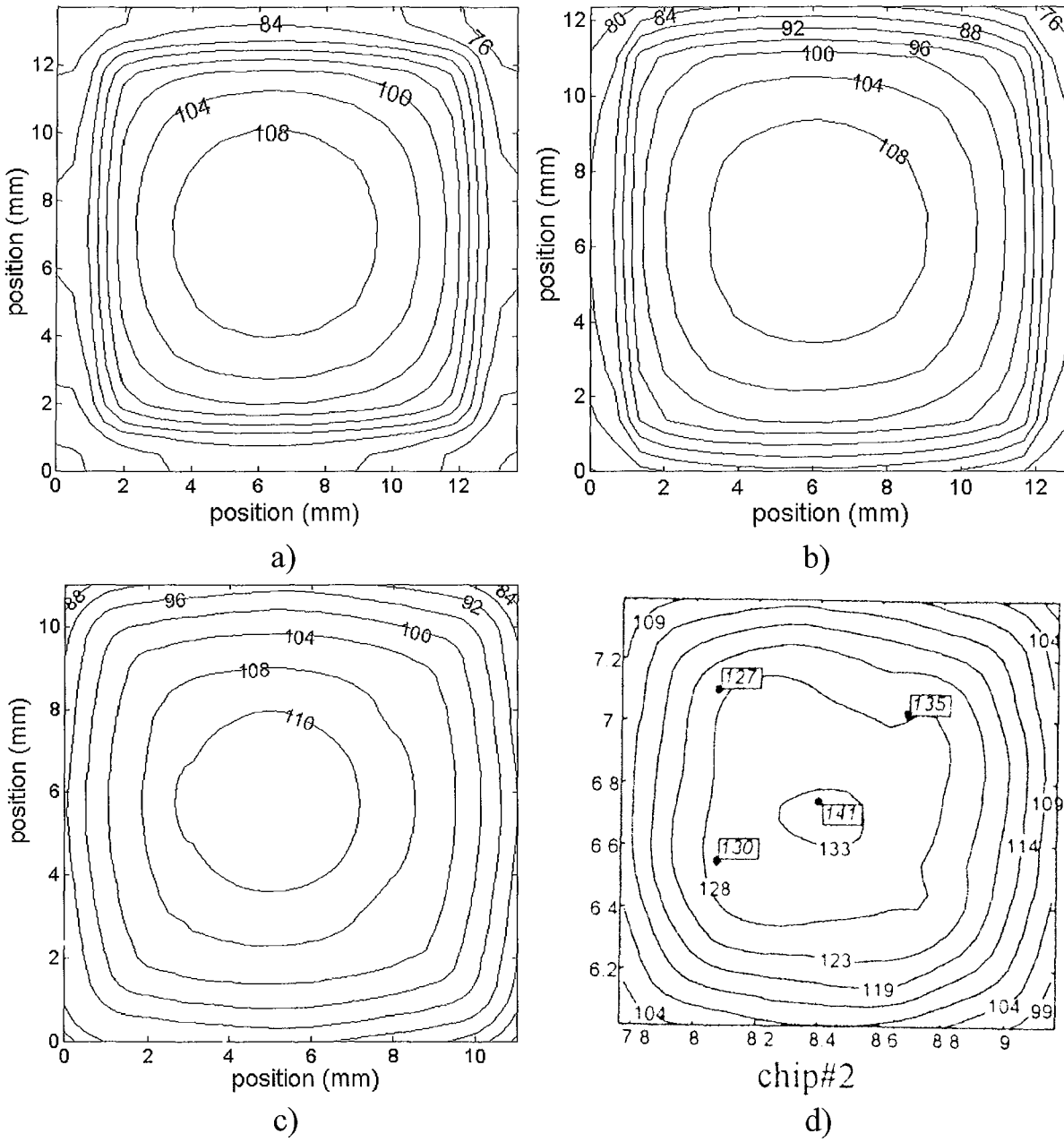


figure II.12 : température sur la face supérieure de la puce hachurée (voir figure II.5). a) méthode des quadripôles. b) Flotherm(200 000 cellules). c) FlexPDEase (200 000 nœuds). d) Khatir et al [5], les valeurs encadrées sont expérimentales.

Les niveaux de température déterminés par Khatir et al. [5] ne correspondent pas aux niveaux de température déterminés par les trois autres méthodes. Khatir et al. modélisent les brasures ainsi que la graisse thermique par des résistances thermiques de contact, alors que dans les trois autres méthodes, les soudures sont des blocs d'épaisseur finie. Les soudures assimilées à des

résistances de contact ne participent pas à l'épanouissement des lignes de flux (effet 3D) et il s'en trouve donc que les températures simulées sont supérieures. Les mesures expérimentales réalisées par Khatir et al. (valeurs encadrées) ne correspondent pas à la simulation : afin de faire correspondre les mesures expérimentales et les résultats de la simulation, il conviendrait de reconsidérer l'hypothèse de température imposée sur la face inférieure du radiateur qui doit être à l'origine de ces écarts entre simulation et expérience. En effet, on peut remarquer sur la *figure II.7.b* que la sensibilité de la température des puces au coefficient d'échange est assez importante : par exemple, remplacer la condition de température imposée par une condition limite de troisième espèce avec un coefficient d'échange uniforme de 3000 $Wm^{-2}K^{-1}$ a pour effet une augmentation de la température maximale des puces de 60°C .

La méthode des quadripôles (13.a) et Flotherm® (13.b) produisent les mêmes résultats au degré près avec un petit avantage pour la méthode des quadripôles qui, semblerait-il, respecte un peu mieux la condition limite latérale d'adiabacité : les isothermes doivent joindre les bords de la puce perpendiculairement à ceux-ci. Cette remarque correspond au maillage utilisé ici dans Flotherm : un maillage plus serré pourrait donner de meilleurs résultats.

Les résultats issus de FlexPDEase® (13.c) diffèrent sensiblement des deux résultats précédents ; la condition limite d'adiabacité des parois latérales n'est pas bien respectée. Le niveau de température déterminé est d'environ 5°C supérieur. Alors que les résultats sont corrects à l'intérieur de la structure, ils sont nettement moins bons en face avant.

En conclusion, la comparaison des résultats issus de la méthode des quadripôles avec ceux produits par deux codes numériques nous permettent de montrer que le principal aspect « non analytique » de notre méthode, à savoir la nécessaire troncature des spectres, semble être correctement maîtrisée : il s'agit donc d'une validation mutuelle des différentes méthodes.
Il reste à étudier l'influence du choix des ordres de troncature et à vérifier que les performances, en terme de temps de calcul, sont dignes d'intérêt.

I.2.3 Convergence en fonction du nombre d'harmoniques conservées

Nous avons remarqué dans la première partie que le passage d'un bloc à un autre et la conversion de spectre associée introduisaient une erreur. Nous avons donné un majorant de cette erreur, mais il n'est pas possible de l'estimer systématiquement en pratique. Nous allons alors étudier sur l'exemple précédent l'influence du choix du nombre d'harmoniques conservé. Sur la *figure II.14* sont représentées les températures maximale et moyenne de la puce hachurée en fonction du nombre d'harmoniques conservées par unité de longueur (toujours pour $\tau = 50\%$). Ces résultats sont comparés à ceux des deux codes FlexPDEase® et Flotherm®.

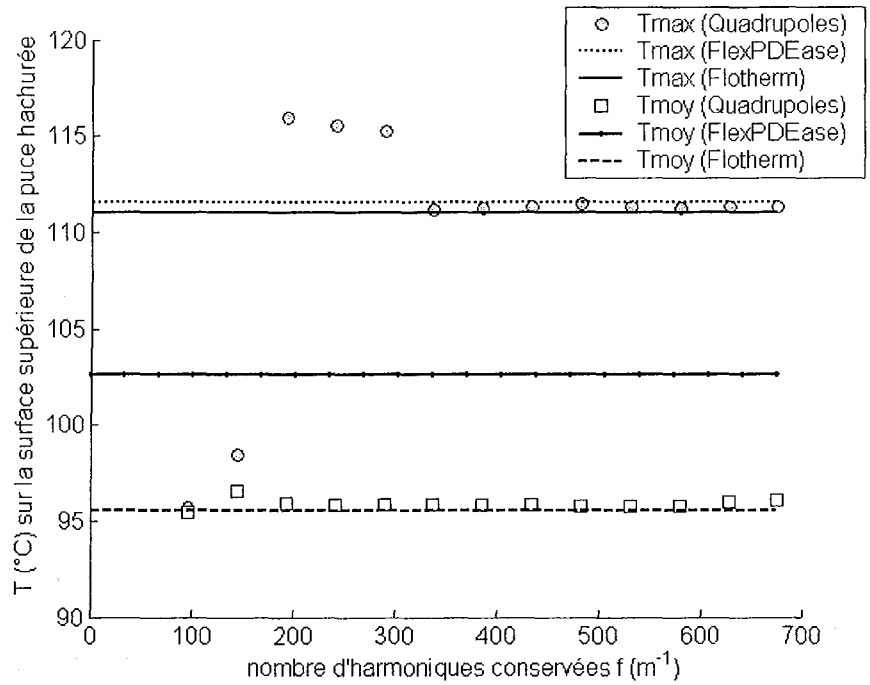


figure II.14 : convergence des résultats en fonction de la densité spectrale utilisée (taux d'élimination du spectre de 50% sans zoom spectral).

La température moyenne de la puce, ou le fondamental du spectre, converge bien plus rapidement que sa température maximale qui dépend de l'ensemble du spectre de température. Cette expérience est en accord avec l'analyse réalisée dans la première partie qui démontre que la conversion de spectre introduit une erreur d'autant plus importante que le degré de l'harmonique est élevé. La méthode reste juste en moyenne. C'est une caractéristique très intéressante de la méthode : les calculs réalisés avec très peu d'harmoniques, donc très rapides, resteront acceptables en valeur moyenne.

I.2.4 Performances en terme de temps de calcul

Il est très difficile dans l'absolu de comparer plusieurs méthodes de résolution. Le temps de calcul consommé par Flotherm® ou FlexPDEase® dépend du nombre de mailles ou de nœuds choisi, nombre qui fixe la précision spatiale. Le critère de convergence influe également sur les temps de calcul associés à ces deux méthodes, mais leur comparaison reste assez aisée. Par contre, comment peut-on comparer rigoureusement une méthode numérique et une méthode spectrale telle que la méthode des quadripôles ? Il faudrait comparer les temps de calculs pour une précision spatiale équivalente ; la méthode du zoom spectral ne facilite pas cette comparaison. Nous allons donc nous contenter d'une comparaison grossière des performances des différentes méthodes.

Les temps nécessaires au calcul de la température de la face supérieure de la puce hachurée représentée sur la *figure II.5*, par les trois méthodes, sont regroupés dans le *tableau II.2*. L'ordinateur est un PC 700 MHz 256 Mo de Ram.

méthode des quadripoles		Flotherm 200 000 cellules	FlexPDEase 200 000 nœuds
premier calcul : (structure totale) 190 harmoniques par mètre	25 s	**82 s**	**310 s**
zoom spectral : (sous strusture supérieure) 1500 harmoniques par mètre	90 s		
total	**115 s**		

tableau II.2 : temps de calcul associés aux trois méthodes

Les trois méthodes conduisent à peu près aux mêmes temps de calculs, Flotherm® est légèrement plus rapide que la méthode des quadripôles et FlexPDEase® moins performant. Cette analyse est relative aux maillages utilisés, aux ordres de troncature choisis, etc... La conclusion est donc que la méthode des quadripôles est pour ce type de calcul, pour lequel on souhaite obtenir une bonne précision spatiale sur un petit objet, aussi rapide que les méthodes existantes. Par contre, pour ce qui est du calcul de la température moyenne de la puce, la méthode des quadripôles est très rapide (**15** s avec une densité spectrale de 100 modes par mètre). Pour déterminer cette température moyenne, les deux codes commerciaux doivent mailler assez finement la structure et peuvent difficilement utiliser moins de 200 000 mailles ou nœuds car certaines couches, comme les soudures, sont très fines. Le calcul très rapide des températures moyennes est exploitable pour réaliser notamment de l'optimisation. Nous verrons par la suite que le formalisme de la méthode est également adapté à la réalisation d'optimisations très performantes, sans avoir recours à des modèles réduits.

La *figure II.15*, qui indique le temps de calcul en fonction de la densité spectrale, montre bien l'utilité de la technique de zoom spectral : obtenir une bonne précision en un seul calcul coûte très cher.

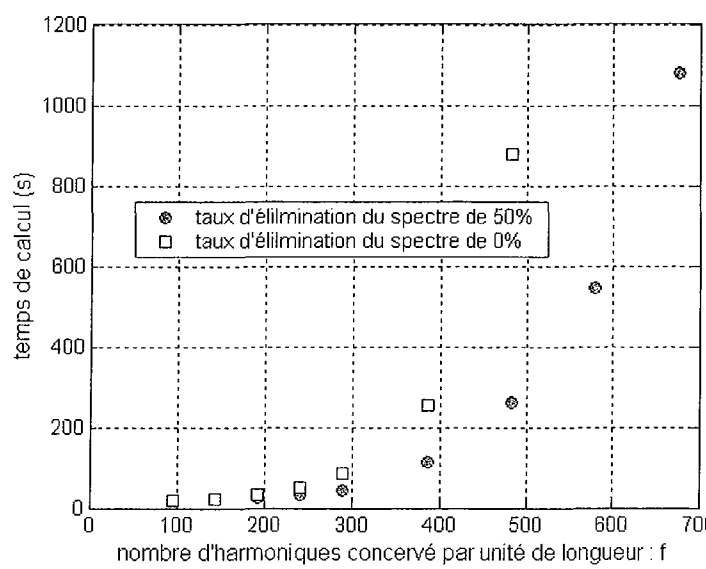


figure II.15 : temps de calcul en fonction de la densité de spectre, sans zoom spectral.

Par exemple, passer d'une densité de spectre de 300 harmoniques par mètre à 600 harmoniques par mètre multiplie le temps de calcul par un facteur 10.

Une dernière remarque est que le code est écrit en langage Matlab et n'est que partiellement optimisé ; des gains de performance peuvent encore être réalisés.

I.4 Simulation en régime transitoire

Comme nous l'avons montré dans la première partie, nous pouvons calculer directement, point par point, l'évolution de la température pour une excitation donnée : la *figure II.16* présente l'évolution de la température maximale de la puce hachurée et de la température du point *P* (x=10.35cm ; y=1.89cm, voir *figure II.5*) en fonction du temps pour une excitation en échelon. 340 harmoniques par mètre sont conservées. Le résultat est comparé à celui produit par Flotherm®. On constate un effet déjà relevé par d'autres auteurs en conduction 1D transitoire [11] : en face avant, les méthodes basées sur une discrétisation spatiale ont tendance à exhiber un retard par rapport aux solutions analytiques. Ici, ce retard est très faible et correspond à un écart de quelques dixièmes de degrés.

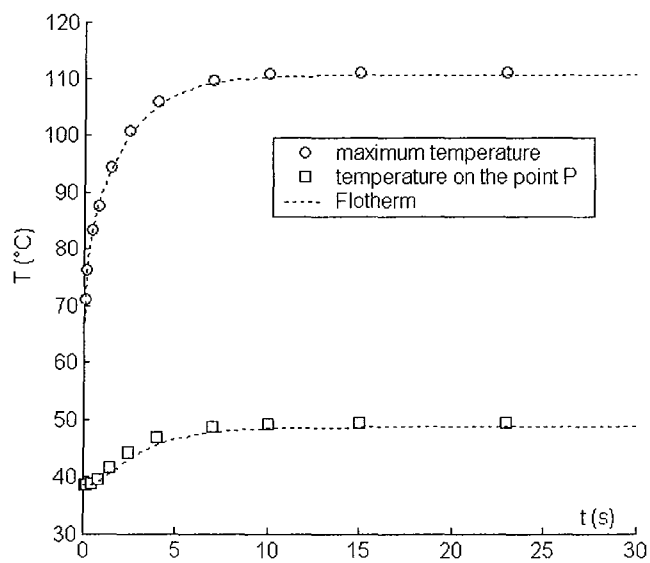


figure II.16 : réponses à une excitation en échelon : température maximale de la puce hachurée et température du point P sans zoom spectral ; comparaison à Flotherm®.

Technique « fonction de transfert »

Une autre méthode consiste à déterminer la réponse impulsionnelle du module en quelques points de contrôle. A partir de cette réponse nous pouvons calculer la réponse à une excitation quelconque par un simple produit de convolution. Sur la *figure II.17* est représentée la

température moyenne de la puce hachurée en réponse à une impulsion de Dirac temporelle de densité de flux. Une bonne précision pour cette température en face avant nécessite l'utilisation d'un modèle asymptotique pour les temps très courts (voir Annexe 8).

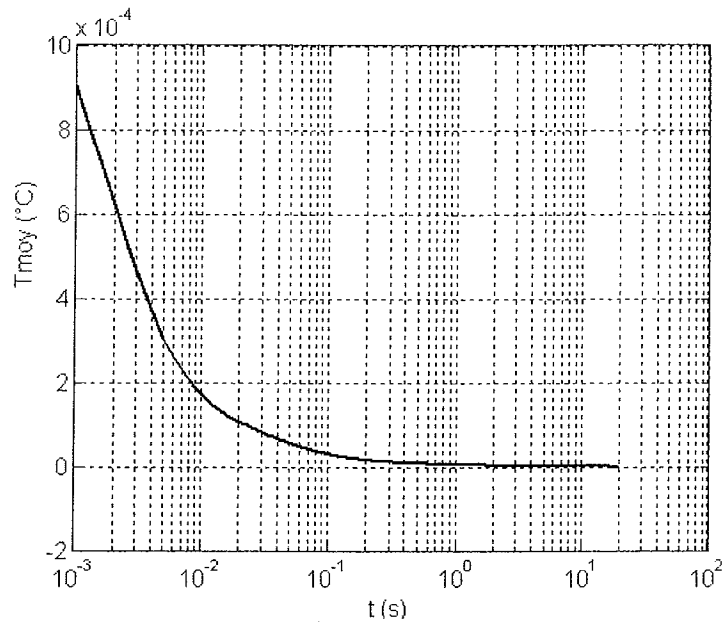


figure II.17 : température moyenne de la puce hachurée pour une excitation impulsionnelle

Une fois cette réponse impulsionnelle déterminée, le produit de convolution est très rapide, il peut éventuellement être réalisé en temps réel pour prédire la température de la puce en mesurant la puissance d'excitation. Par exemple, sur la *figure II.18* est donnée l'évolution de la température moyenne de la puce pour une excitation particulière en créneaux.

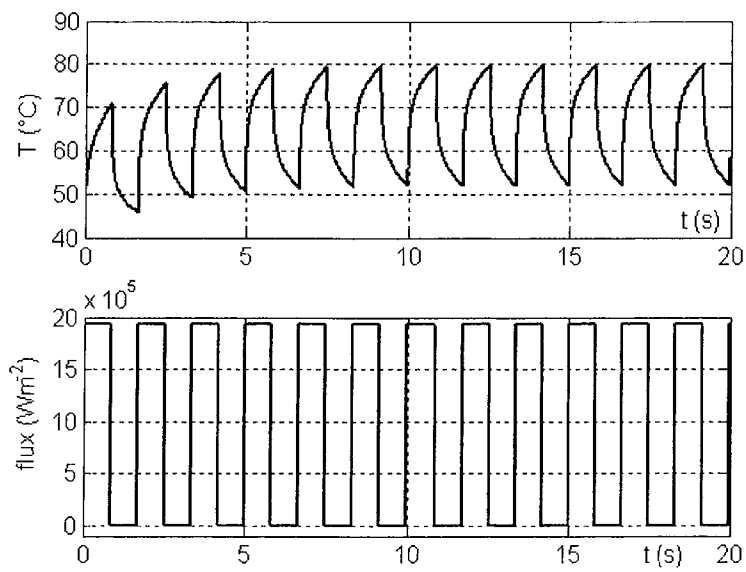


figure II.18 : température moyenne de la puce hachurée en fonction du temps pour une excitation périodique en créneaux.

Le régime établi est atteint ici au bout de 7s.

I. 3 Résistance de contact non-uniforme

Une des raisons principales de défaillance des modules IGBTs est la détérioration des soudures [5,10]. Il a été observé que celles-ci se décollent dans les coins. La résistance thermique de contact s'en trouve alors augmentée, le système chauffe plus, ce qui entraîne à terme la destruction du module.

Comme nous l'avons montré au cours du premier chapitre, la méthode des quadripôles permet de considérer une résistance de contact non-uniforme dans l'espace. Par exemple, la *figure II.19* présente deux blocs de cuivre identiques séparés par une résistance d'interface qui correspond à un décollement de 10% de la surface totale. La résistance thermique de contact dans les coins est choisie égale à 1 $KW^{-1}m^{-2}$, ce qui est équivalent à une résistance infinie. Les blocs en cuivre sont d'épaisseur 1 mm, de coté 10 mm et leur conductivité est de 380 $Wm^{-1}K^{-1}$. Une densité de flux de 10^7 Wm^{-2} est imposée sur la surface supérieure du bloc supérieur alors que la face inférieure du bloc inférieur voit sa température imposée à 0°C.

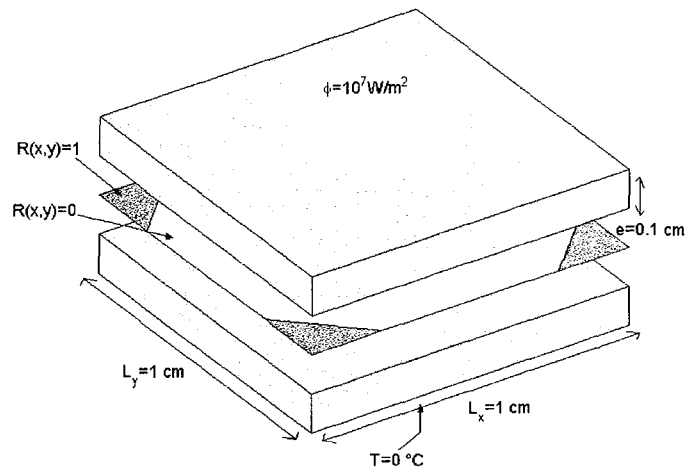


figure II.19 : modélisation d'une résistance de contact non uniforme dans l'espace

La température à l'interface est présentée sur la *figure II.20.* 6000 harmoniques par mètre sont conservées et le taux d'élimination du spectre est de 0%.

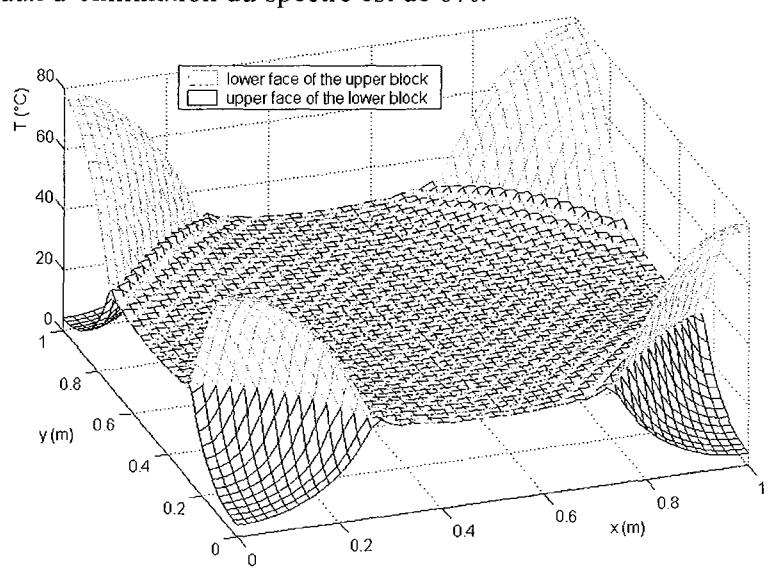


figure II.20 : température à l'interface des deux blocs

Le décollement des coins se traduit par une discontinuité de température. Cette technique nécessite l'emploi d'un grand nombre d'harmoniques pour obtenir des résultats corrects. Nous pouvons ainsi calculer l'augmentation de la résistance thermique globale équivalente à l'empilement des deux blocs.
Lorsque la soudure est parfaite :

$$R = \frac{e}{\lambda L_x L_y} = 0.0526 \text{ °C W}^{-1} \qquad \text{(II.1)}$$

Pour un décollement de 10% localisé dans les coins, le calcul détermine une température moyenne de face avant de 56.0°C ce qui conduit à une résistance thermique globale équivalente de 0.0560 °C W^{-1} soit une augmentation de 6.5% de la résistance thermique globale.

I. 4 Conclusion

La modélisation d'un module IGBT complexe par la méthode des quadripôles thermiques et la comparaison des résultats obtenus à ceux produits par deux codes commerciaux nous à donc permis de montrer que le principal aspect « non analytique » de notre méthode, à savoir la nécessaire troncature des spectres, semble être correctement maîtrisée. Lorsque l'on souhaite obtenir une résolution spatiale importante, particulièrement sur un petit espace, les performances de la méthode des quadripôles sont équivalentes aux performances des codes commerciaux. Par contre, lorsque l'on peut se satisfaire d'une résolution spatiale réduite, (si l'on s'intéresse aux températures moyennes des puces par exemple) la méthode des quadripôles est bien plus performante. Cette qualité peut être exploitée pour réaliser de l'optimisation, comme nous le montrerons par la suite. En régime transitoire, la méthode permet la détermination précise de la réponse impulsionnelle du système. Une fois cette fonction de transfert déterminée, la réponse à une excitation quelconque est obtenue par un simple produit de convolution ; le temps de calcul est alors quasiment négligeable, ce qui pourrait permettre la réalisation de calculs embarqués en temps réel.

Les paragraphes suivants sont consacrés à la modélisation plus fine des radiateurs de l'électronique, car jusqu'ici, le radiateur était modélisé par une condition limite de troisième espèce (coefficient d'échange h uniforme), et à l'optimisation des diffuseurs utilisés classiquement pour épanouir les lignes de flux de la source de chaleur vers le radiateur.

II Modélisation fine de radiateurs

Jusqu'à présent, le radiateur est modélisé d'une façon simple, par une condition de 3ème espèce (coefficient d'échange h éventuellement variable dans l'espace). Le modèle ne prend pas en compte les géométries particulières des radiateurs, ou les paramètres relatifs au fluide de refroidissement comme par exemple sa surchauffe lors de la traversée du radiateur. Nous proposons dans cette partie quelques modélisations de radiateurs en utilisant la méthode des quadripôles thermiques qui, couplées aux modèles de composants existants, permettront de prendre en compte d'une manière plus fine les transferts au niveau des radiateurs. Nous verrons également comment le caractère analytique de cette méthode peut être exploité pour réaliser l'estimation de paramètres ou de fonctions (conduction inverse).

Pour des raisons pédagogiques et afin de ne pas égarer le lecteur dans des développements trop techniques, les modèles sont développés ici en deux dimensions.

II. 1 Couplage de la méthode des quadripôles et d'un modèle réduit d'ailette

L'application de la méthode des quadripôles à des structures dont les faces latérales ne sont plus adiabatiques est possible mais présente une plus grande difficulté de mise en œuvre. Par exemple, la modélisation fine d'une ailette échangeant par ses faces latérales selon un coefficient d'échange convectif h nécessite un calcul numérique des valeurs propres (voir *tableau I.1* page 13). Ce paragraphe est consacré à la modélisation d'un radiateur à ailettes en deux dimensions en régime transitoire, le modèle fin de conduction 2D y est couplé à un modèle d'ailette. La méthode est validée par une comparaison aux résultats produits par le code de calcul aux éléments finis FlexPDEase®.

II.1.1 Modélisation d'une ailette en régime transitoire [12]

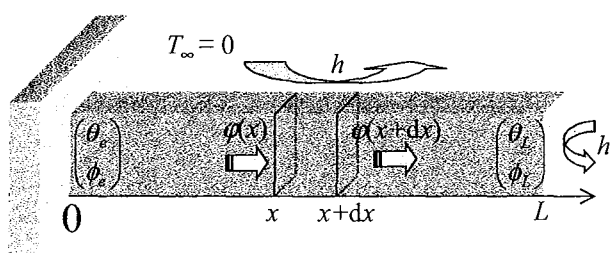


figure II.21 : ailette

Soit l'ailette représentée sur la *figure II.21*, de périmètre m, de longueur L, de conductivité λ, de capacité thermique volumique ρc, de diffusivité a. Soit h le coefficient d'échange uniforme

entre cette ailette et le fluide extérieur dont la température est supposée nulle. L'équation vérifiée par la température de l'ailette est la suivante :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{hm}{\lambda S} T(x,t) = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \tag{II.2}$$

Appliquons une transformée de Laplace en supposant que la température initiale est nulle :

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}(x,p)}{\partial x^2} = \alpha^2 \tilde{T}(x,p) \quad \text{avec} \quad \alpha^2 = \frac{p}{a} + \frac{hm}{\lambda S} \tag{II.3}$$

La solution de cette équation en fonction des température et flux d'entrée ($T_e(t)$ et $\varphi_e(t)$) est :

$$\tilde{T}(x,p) = ch(\alpha x)\ \tilde{T}_e(x=0,p) - \frac{sh(\alpha x)}{\lambda \alpha S}\ \tilde{\varphi}_e(x=0,p) \tag{II.4}$$

Ce qui nous permet de déterminer la matrice de transfert entre l'entrée et la sortie de l'ailette :

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_e \\ \tilde{\varphi}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\alpha L) & sh(\alpha L)/\lambda \alpha S \\ \lambda \alpha S\, sh(\alpha L) & ch(\alpha L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T}_L \\ \tilde{\varphi}_L \end{pmatrix} \tag{II.5}$$

De plus, l'extrémité de l'ailette n'est pas isolée mais échange suivant un coefficient h :

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_L \\ \tilde{\varphi}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ hS & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T}_L \\ 0 \end{pmatrix} \tag{II.6}$$

donc

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_e \\ \tilde{\varphi}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\alpha x) & sh(\alpha x)/\lambda \alpha S \\ \lambda \alpha S\, sh(\alpha x) & ch(\alpha x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ hS & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T}_L \\ 0 \end{pmatrix} \tag{II.7}$$

Ce qui nous permet de calculer l'impédance équivalente à une ailette :

$$Z = \frac{\tilde{T}_e}{\tilde{\varphi}_e} = \frac{1}{\alpha \lambda S} \frac{1 + \frac{h}{\alpha \lambda} th(\alpha L)}{th(\alpha L) + \frac{h}{\alpha \lambda}} \tag{II.8}$$

II.1.2 Couplage au modèle fin de conduction

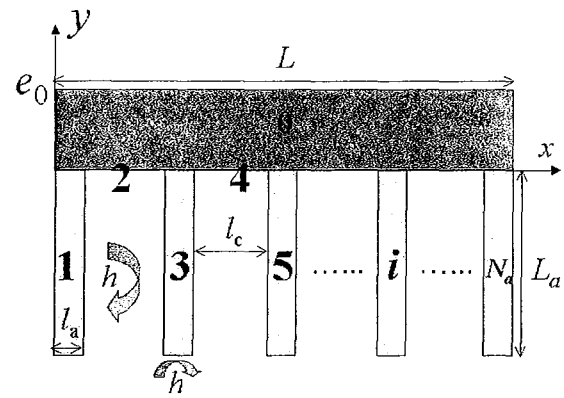


figure II.22 : radiateur à ailette

Considérons le radiateur en deux dimensions constitué de N_a ailettes et d'un dissipateur numéroté 0 représenté sur la *figure II.22*. Nous supposons uniforme la température dans une section d'ailette et donc, en particulier, sur la surface de base (pied) de l'ailette. Pour décrire la température sur la surface de l'ailette en contact avec le dissipateur nous considérons donc uniquement le fondamental du spectre.

La densité de flux est comptée positivement dans le sens de $0y$ et on appelle T^f la température du fluide. φ^{fi} (i impaire) ou φ^{fj} (j pair) est la densité de flux cédée par le fluide au solide et rapportée aux sections des ailettes ou aux surfaces libres (en y = 0). On peut introduire les transformées de Fourier-cosinus de cette température dans les bases locales :

* Sur le pied d'ailette i (i est impaire, voir *figure II.22*) :

$$\theta_0^{fi} = l_a T^f \tag{II.9}$$

$$\phi_0^{fi} = l_a \varphi^f \tag{II.10}$$

Nous ne considérons que le fondamental du spectre sur le pied d'ailette.

* Sur la surface libre j (j est impaire) :

$$\boldsymbol{\theta}_0^{fj} = \begin{pmatrix} l_e T^f & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^t \tag{II.11}$$

$$\boldsymbol{\phi}_0^{fj} = \begin{pmatrix} l_e \varphi^f & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^t \tag{II.12}$$

Sur les surfaces libres entre les ailettes, les spectres ont pour dimension l'ordre de troncature choisi.

Ainsi, dans les bases locales, nous avons les relations suivantes :

* Pour chaque ailette i :

$$\theta_0^{fi} = \theta_0^i(p) + Z(p)\ \phi_0^i(p) \qquad \text{et} \qquad \phi_0^{fi}(p) = \phi_0^i(p) \tag{II.13}$$

* Pour chaque partie libre *j* du dissipateur (entre les ailettes):

$$\boldsymbol{\theta}^{fj} = \boldsymbol{\theta}^j(p) + \boldsymbol{\phi}^j(p)/h \tag{II.14}$$

où $\boldsymbol{\theta}^j$ et $\boldsymbol{\phi}^j$ sont des vecteurs spectre ayant pour taille le nombre d'harmoniques conservées (ordre de troncature) pour décrire la température et le flux sur la surface libre *j*.

L'utilisation des matrices de conversion de spectre $\boldsymbol{F}$ permet d'effectuer le passage des bases locales à la base relative au dissipateur :

* Pour chaque ailette *i* :

$$\theta_0^i(p) = \boldsymbol{F}^i\ \boldsymbol{\theta}^0(p, y=0) \text{ et } \phi_0^i(p) = \boldsymbol{F}^i\ \boldsymbol{\phi}^0(p, y=0) \tag{II.15}$$

Cette relation exprime les fondamentaux des température et de densité de flux en pied des ailettes en fonction des spectres de température et de densité de flux sur la face inférieure du dissipateur. Les matrices $\boldsymbol{F}^i$ sont alors des vecteurs ligne.

* Pour les parties libres *j* du dissipateur :

$$\boldsymbol{\theta}^j(p) = \boldsymbol{F}^j\ \boldsymbol{\theta}^0(p, y=0) \text{ et } \boldsymbol{\phi}^j(p) = \boldsymbol{F}^j\ \boldsymbol{\phi}^0(p, y=0) \tag{II.16}$$

Cette relation exprime les spectres de température et de densité de flux sur la partie libre *j* en fonction des spectres de température et de densité de flux sur la face inférieure du dissipateur.

La méthode des quadripôles permet alors d'écrire :

* Pour chaque ailette *i* :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_0^{fi} \\ \boldsymbol{\phi}_0^{fi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^i & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^0 & \boldsymbol{B}^0 \\ \boldsymbol{C}^0 & \boldsymbol{A}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0 \\ \boldsymbol{\phi}^0 \end{pmatrix} (y = e_0) \tag{II.17}$$

Cette relation lie le fondamental de la densité de flux et de la température dans le fluide aux spectres sur la face supérieure du dissipateur.

* Pour chaque surface libre *j*:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^{fj} \\ \boldsymbol{\phi}^{fj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}^j & \boldsymbol{I}^j/h \\ 0 & \boldsymbol{I}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^j & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^0 & \boldsymbol{B}^0 \\ \boldsymbol{C}^0 & \boldsymbol{A}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0 \\ \boldsymbol{\phi}^0 \end{pmatrix} (y = e_0) \tag{II.18}$$

Cette relation lie les spectres du flux et de la température dans le fluide à l'infini aux spectres sur la surface supérieure du dissipateur, avec $\boldsymbol{I}^j$ la matrice identité de taille le nombre d'harmoniques conservées pour décrire la température ou la densité de flux sur la surface libre j.

La mise en forme de toutes ces relations nous donne le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^1 \\ \boldsymbol{u}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}^{N_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}^2 & \boldsymbol{I}^2/h \\ 0 & \boldsymbol{I}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F}^2 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^{N_a} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F}^{N_a} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^0 & \boldsymbol{B}^0 \\ \boldsymbol{C}^0 & \boldsymbol{A}^0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}^0(y=e_0) \tag{II.19}$$

avec $$u^k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^{fk} \\ \boldsymbol{\phi}^{fk} \end{pmatrix}_{k\geq 1} \text{ et } u^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0 \\ \boldsymbol{\phi}^0 \end{pmatrix} \tag{II.20}$$

Cette relation s'écrit formellement :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^1 \\ \boldsymbol{u}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}^{N_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{eq} & \boldsymbol{B}_{eq} \\ \boldsymbol{C}_{eq} & \boldsymbol{A}_{eq} \end{pmatrix} \boldsymbol{u}^0(y=e_0) \tag{II.21}$$

Dans le cas où la température du fluide est imposée à zéro et où le flux excitateur (de spectre $\boldsymbol{\phi}^0_{exci}$ négatif) est imposé sur la surface supérieure du dissipateur, ce système devient :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^1\boldsymbol{A}_0 + Z\boldsymbol{F}^1\boldsymbol{C}_0 \\ \boldsymbol{F}^3\boldsymbol{A}_0 + Z\boldsymbol{F}^3\boldsymbol{C}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{I}^2/h\boldsymbol{F}^2\boldsymbol{C}_0 \\ \vdots \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0 = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^1\boldsymbol{B}_0 + Z\boldsymbol{F}^1\boldsymbol{A}_0 \\ \boldsymbol{F}^3\boldsymbol{B}_0 + Z\boldsymbol{F}^3\boldsymbol{A}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{I}^2/h\boldsymbol{F}^2\boldsymbol{A}_0 \\ \vdots \end{pmatrix} \boldsymbol{\phi}^0_{exci} \tag{II.22}$$

La solution de ce système est la transformée de Laplace du spectre de la température sur la face supérieure du dissipateur. Le calcul direct permet ensuite d'obtenir les transformées de Laplace des spectres de température et de densité de flux à l'intérieur du dissipateur. Il reste ensuite à appliquer une transformée inverse de Laplace et de Fourier pour obtenir les valeurs réelles des températures et des densités de flux.

Cette modélisation étant réalisée, on peut bien sûr empiler sur le dissipateur différentes couches de matériaux de différentes tailles matérialisant le composant à refroidir ; il s'agit là d'une simple application de la méthode des quadripôles. L'extension au cas tridimensionnel permet la modélisation des radiateurs à aiguilles. De plus, chaque ailette (ou surface libre) peut se voir attribuer un coefficient d'échange qui lui est propre. Cette méthode permet donc la prise en compte de coefficients d'échange variables constants par morceaux.

Application numérique :

Le dissipateur est un bloc de cuivre (λ=380Wm^{-1}K^{-1}) d'épaisseur 2cm, de largeur 10cm. Huit ailettes en cuivre, de 2.5mm d'épaisseur et de 6cm de longueur sont considérées. Le coefficient d'échange h est fixé à 10 Wm^{-2}K^{-1}(convection naturelle et rayonnement linéarisé dans l'air) ; un échelon de flux de 10^4 Wm^{-2} (pour une profondeur de 1m) est imposé uniformément au temps $t = 0$ sur la partie centrale de la surface supérieure du dissipateur (pour $L/4 < x < 3L/4$). L'inversion de Laplace est réalisée suivant l'algorithme de Stehfest.
Le radiateur est également modélisé en utilisant le code aux éléments finis FlexPDEase® (4700 nœuds), les ailettes étant modélisées sans hypothèse particulière (pas d'hypothèse d'ailette), si ce n'est un coefficient d'échange uniforme. *La figure II.23* donne l'évolution de la température du point situé au milieu de la surface supérieure du dissipateur en fonction du temps.

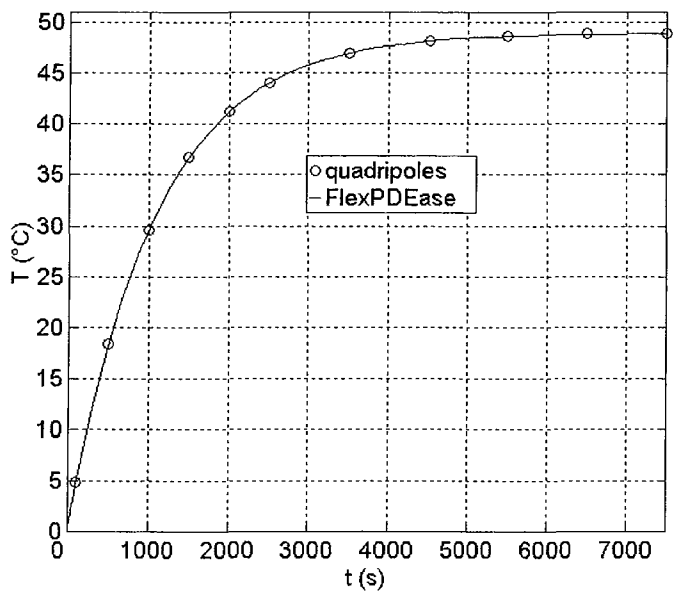


figure II.23 : température du centre de la face supérieure du dissipateur en fonction du temps (30 harmoniques).

Les résultats produits par les deux méthodes correspondent parfaitement. La *figure II.24* présente le champ de température et de densité de flux dans le dissipateur une fois le régime permanent atteint.

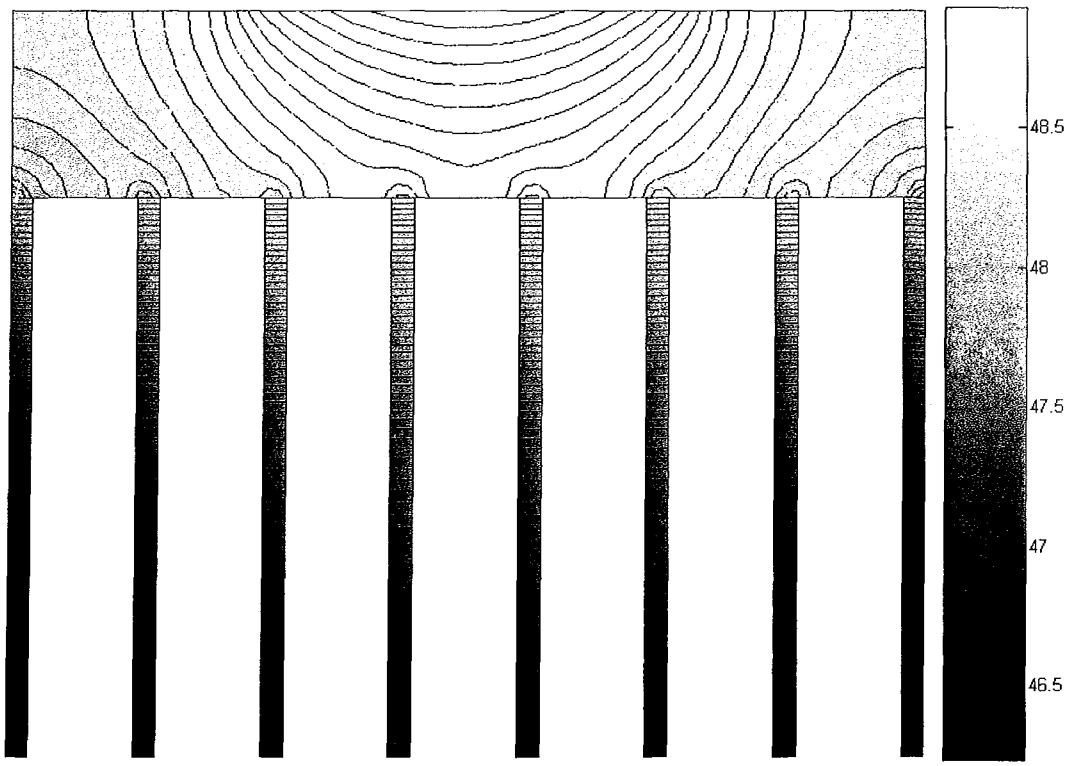


figure II.24 : champ de température et densité de flux dans le dissipateur en régime permanent

La *figure II.25* permet la comparaison des résultats issus de la méthode des quadripôles, pour deux ordres de troncature différents, à ceux produits par FlexPDEase® en face avant et arrière (sur la section de la base des ailettes). Très peu d'harmoniques, donc un temps de calcul très faible, sont nécessaires au calcul de la température en face avant (notre méthode est environ 50 fois plus rapide que FlexPDEase®).

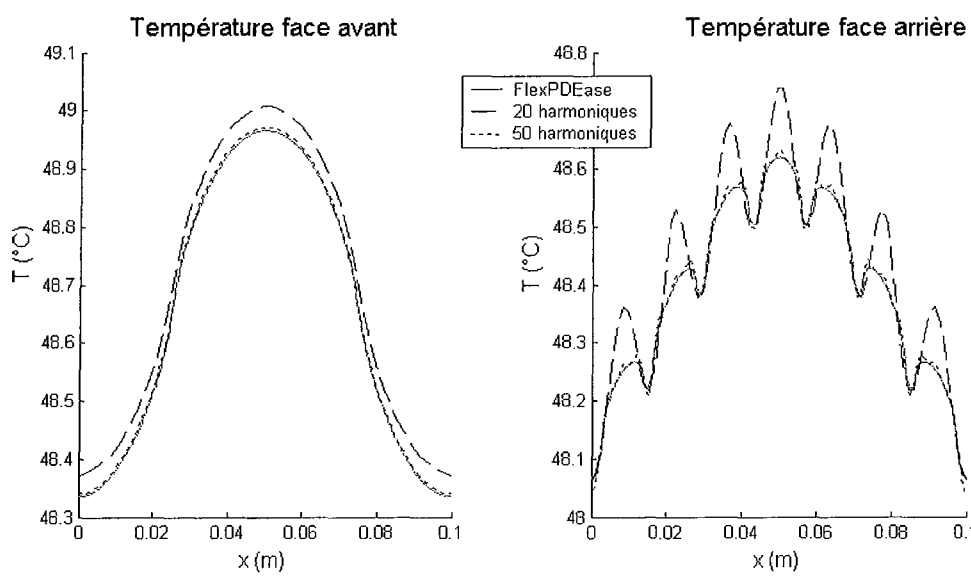


figure II.25 : température en face avant et arrière pour deux ordres de troncature et FlexPDEase®

II. 2 Modélisation d'un canal à section rectangulaire

Dans le cas d'un refroidissement par plaque à eau, le modèle d'ailette est bien sûr inutilisable. Nous proposons ici une modélisation fine d'un canal à section rectangulaire à l'intérieur duquel s'écoule un fluide. Le coefficient d'échange de convection forcée h est supposé uniforme. Pour fixer les idées, considérons que la densité de flux d'excitation φ_{exci} est uniforme sur la face supérieure de la plaque à eau. Dans ces conditions, le système est symétrique et il suffit d'en modéliser la moitié (voir *figure II.26*).

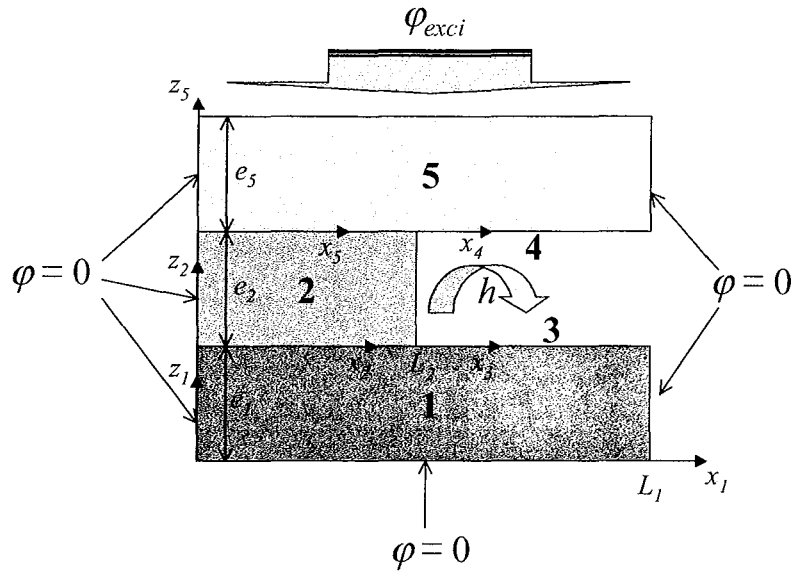


figure II.26 : un demi canal

La moitié de canal est donc constituée d'un empilement de trois blocs dont deux sont isolés sur leurs faces latérales (blocs n°1 et n°5). Le bloc intermédiaire n°2 échange quant à lui par sa face latérale de droite. La famille des fonctions propres associées à ce bloc n'est donc plus la famille des $(\cos(n\pi x_2/L_2))_{0\leq n}$ (voir *tableau I.1* page 13), mais la famille des $(\cos\alpha_n x_2))_{0\leq n}$ où les valeurs propres α_n sont les solutions positives de l'équation suivante :

$$\frac{\cos(\alpha_n L)}{\sin(\alpha_n L)} = \frac{\lambda}{h}\alpha_n \tag{II.23}$$

associées à la norme :

$$No_n = \frac{L_2}{2}\left[1 + \frac{hL_2/\lambda}{(hL_2/\lambda)^2 + (\alpha_n L_2)^2}\right] \tag{II.24}$$

Les valeurs propres sont donc calculées en résolvant numériquement (II.23).

Il reste à déterminer les matrices de conversion de spectre qui permettront de relier les interfaces des 3 blocs, c'est-à-dire de convertir les spectres d'une base à l'autre.

- A l'interface $z_1 = e_1$

$$\boldsymbol{\theta}^1(z_1 = e_1) = E^{1\to 2}\boldsymbol{\theta}^2(z_2 = 0) + E^{1\to 3}\boldsymbol{\theta}^3 \tag{II.25}$$

- A l'interface $z_2 = e_2$

$$\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\theta}^2(z_2 = e_2) = F^{2\to 5}\boldsymbol{\theta}^5(z_5 = 0) \\ \boldsymbol{\theta}^4 = F^{4\to 5}\boldsymbol{\theta}^5(z_5 = 0) \end{array}\right\} \tag{II.26}$$

Les matrices de conversion de spectre entre le bloc n°1 et la surface libre n°3 $E^{1\to 3}$ et entre le bloc n°5 et la surface libre n°4 $F^{4\to 5}$ sont des matrices de conversion classique (voir annexe 5). Par contre, les matrices de conversion de spectre entre les blocs n°1 et n°2 $E^{1\to 2}$ et entre les blocs n°2 et n°5 $F^{2\to 5}$ doivent être déterminées car les fonctions propres relatives au bloc n°2 sont de nature différente. Les calculs sont effectués en Annexe 9.

L'écriture en cascade des quadripôles se traduit donc par :

$$\boldsymbol{u}^1(z_1 = 0) = \boldsymbol{m}^1\left(\boldsymbol{p}_E^{1\to 3}\boldsymbol{u}^3 + \boldsymbol{p}_E^{1\to 2}\boldsymbol{m}^2\boldsymbol{p}_F^{2\to 5}\boldsymbol{m}^2\boldsymbol{u}^5\right) \tag{II.27}$$

$$\boldsymbol{u}^4 = \boldsymbol{p}_F^{4\to 5}\boldsymbol{m}^5\boldsymbol{u}^5 \tag{II.28}$$

où les notations sont celles du premier chapitre. Ceci peut être écrit également :

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^1(z_1=0)\\ \boldsymbol{\phi}^1(z_1=0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^1 & \boldsymbol{B}^1\\ \boldsymbol{C}^1 & \boldsymbol{A}^1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}E^{1\to 3} & 0\\ 0 & E^{1\to 3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^3\\ \boldsymbol{\phi}^3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}E^{1\to 2} & 0\\ 0 & E^{1\to 2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{B}^2\\ \boldsymbol{C}^2 & \boldsymbol{A}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F^{2\to 5} & 0\\ 0 & F^{2\to 5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^5 & \boldsymbol{B}^5\\ \boldsymbol{C}^5 & \boldsymbol{A}^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^5(z_5=e_5)\\ \boldsymbol{\phi}^5(z_5=e_5)\end{pmatrix}\right) \quad \text{(II.29)} \\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^4\\ \boldsymbol{\phi}^4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F^{4\to 5} & 0\\ 0 & F^{4\to 5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^5 & \boldsymbol{B}^5\\ \boldsymbol{C}^5 & \boldsymbol{A}^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^5(z_5=e_5)\\ \boldsymbol{\phi}^5(z_5=e_5)\end{pmatrix} \quad \text{(II.30)} \end{array}\right.$$

Ces quatre équations à huit inconnues constituent la relation entrée/sortie du système, c'est-à-dire le lien entre les huit conditions limites.
Il reste à introduire quatre conditions limites connues :

$$\boldsymbol{\phi}^1(z_1 = 0) = 0,\ \boldsymbol{\phi}^3 = h\boldsymbol{\theta}^3,\ \boldsymbol{\phi}^4 = -h\boldsymbol{\theta}^4 \text{ et } \boldsymbol{\phi}^5(z_5 = e_5) = -\boldsymbol{\phi}_{exci} \tag{II.31}$$

Un outil de calcul symbolique du type de Maple est pratique pour la formation du système linéaire à résoudre :

$$\boldsymbol{L}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^5(z_5 = e_5)\\ \boldsymbol{\theta}^3\end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \tag{II.32}$$

où la matrice $\boldsymbol{L}$ est carrée de taille (N_0+1=N_5+N_3+2).

La solution de ce système donne les spectres des températures sur la face supérieure de la plaque à eau ainsi que sur la surface libre n°3. A partir de ces températures, la méthode directe permet le calcul des températures et de la densité de flux selon 0z dans toute la structure. La densité de flux suivant 0x est déterminée en dérivant la température ; par définition de la transformée inverse dans les blocs n°1 et n°5, on a :

$$T(x,z,p)=\frac{\theta_0(y,p)}{L}+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{N}\cos(n\pi x/L)\theta_n(z,p) \tag{II.33}$$

donc

$$\varphi_x(x,z,p)=-\lambda\frac{\partial T(x,z,p)}{\partial x}=\frac{2\lambda}{L}\sum_{n=1}^{N}(n\pi/L)\sin(n\pi x/L)\theta_n(z,p) \tag{II.34}$$

Dans le bloc n°2 :

$$T(x,z,p)=\sum_{n=0}^{N}\cos(\alpha_n x)\frac{\theta_n(z,p)}{N_n} \tag{II.35}$$

où les valeurs propres ont été calculées numériquement avec la précision de l'ordinateur.
Donc

$$\varphi_x(x,z,p)=-\lambda\frac{\partial T(x,z,p)}{\partial x}=\lambda\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\sin(\alpha_n x)\frac{\theta_n(z,p)}{N_n} \tag{II.36}$$

Application numérique :

Considérons une plaque à eau en cuivre de 5 cm de largeur, de 1.5 cm de hauteur, excitée par un flux uniforme de 10^5 Wm^{-2} pour une profondeur (troisième dimension) unité du canal. On suppose ici que l'écoulement est un puits de chaleur à température T^f nulle et que le coefficient d'échange est uniforme. La hauteur du canal vaut le tiers de la hauteur de la plaque et sa largeur vaut la moitié de celle de la plaque. Le champ de température dans la plaque à eau ainsi que la densité de flux sont représentés sur la *figure II.27* pour plusieurs coefficients d'échange.

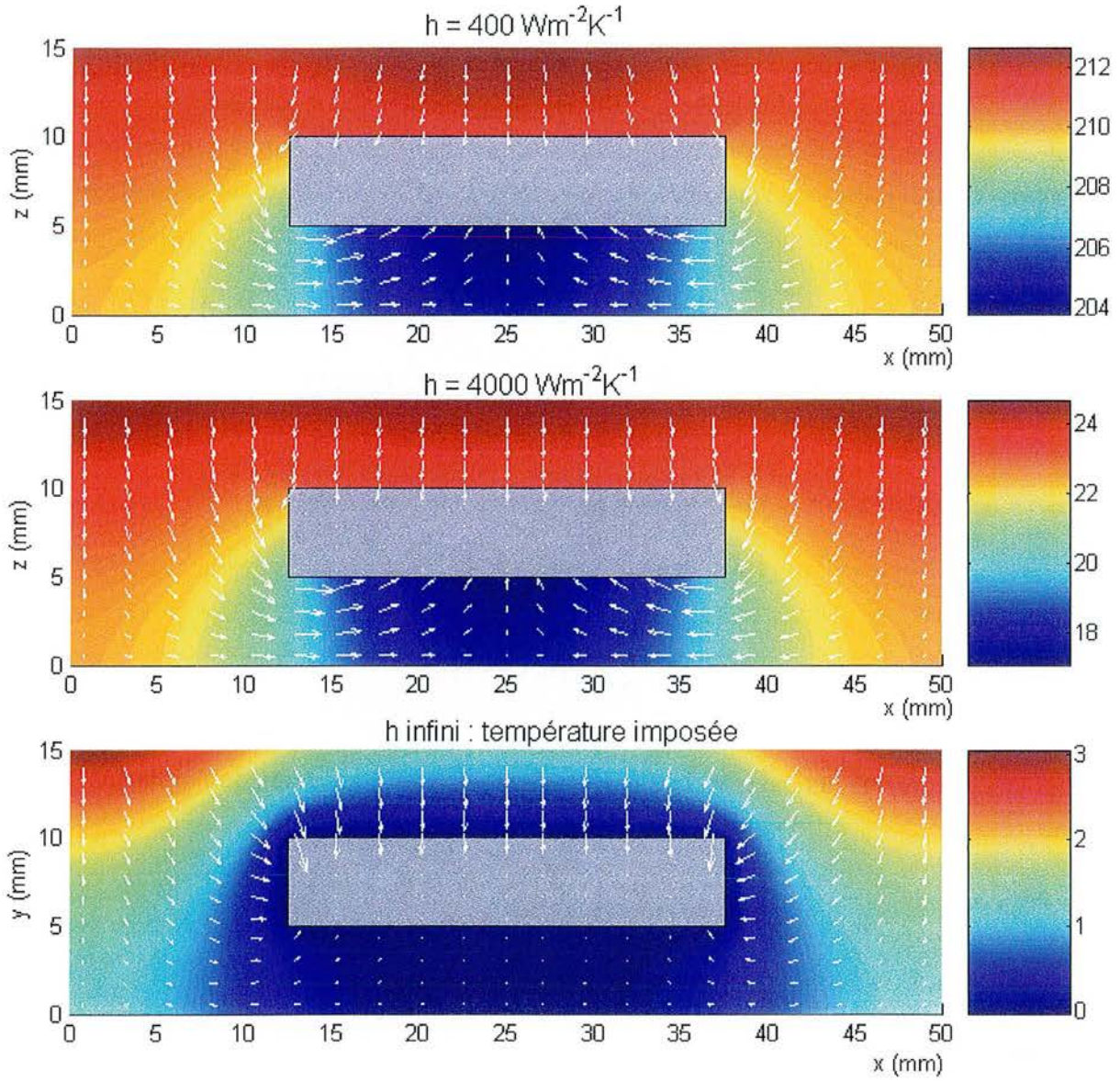


figure II.27 : champ de température et de densité de flux dans la boîte à eau pour trois coefficients d'échange différents

Lorsque le coefficient d'échange est relativement faible, la température maximale de la plaque se situe au centre de la face supérieure. Les bords profitent de l'épanouissement des lignes de flux. Pour un coefficient d'échange de 4000 $Wm^{-2}K^{-1}$, la température de la face supérieure de la plaque à eau est quasiment uniforme et pour un coefficient d'échange plus important, voire une température imposée à la paroi, la température maximale se situe sur la face supérieure en $x = 0$ et $x = L$. Le nombre de Biot caractéristique du problème est alors important et l'effet d'épanouissement des lignes de flux est négligeable devant le caractère résistif du cuivre. A partir de ce modèle, il est possible de déterminer la résistance thermique équivalente du radiateur en fonction des différents paramètres ou d'empiler différents blocs modélisant les composants sur la surface supérieure.

II. 3 Couplage au fluide de refroidissement

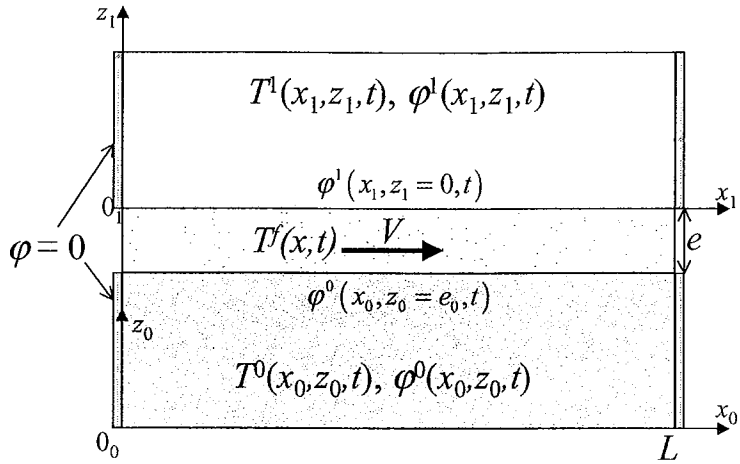


figure II.28 : canal fluide entre 2 blocs

Il s'agit ici de prendre en compte l'évolution de la température du fluide de refroidissement lors de sa traversée du radiateur. Comme nous l'avons montré au cours du premier chapitre, le système solution du problème représenté sur la *figure II.28* est :

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^0(0)\\ \boldsymbol{\phi}^0(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^0 & \boldsymbol{B}^0\\ \boldsymbol{C}^0 & \boldsymbol{A}^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}/h\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ \boldsymbol{G}^{-1} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}/h\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^1 & \boldsymbol{B}^1\\ \boldsymbol{C}^1 & \boldsymbol{A}^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}^1(e_1)\\ \boldsymbol{\phi}^1(e_1)\end{pmatrix} \qquad \text{(II.37)}$$

Application numérique directe

Le flux d'excitation est uniforme de 3.10^4 Wm^{-2} (pour une profondeur de canal unité), imposé sur la face supérieure du bloc n°1. La face inférieure du bloc n°0 est isolée. Les deux blocs sont en silicium (λ = 135 $Wm^{-1}K^{-1}$) de largeur 10 mm et d'épaisseur 500µm. Le canal d'épaisseur 100 µm convoie de l'eau à la vitesse débitante de 5 cms^{-1} . Le régime de l'écoulement est laminaire (*Re* = 7.7), donc dans le cas où la température des parois du micro-canal est constante, le coefficient d'échange, supposé uniforme selon 0*x*, est donné par la relation : *Nu* = 7.541 (solution analytique pour un écoulement de Couette), c'est-à-dire h = 47500 $Wm^{-2}K^{-1}$. Les températures et densités de flux sont données sur les *figures II.29* et *II.30*.

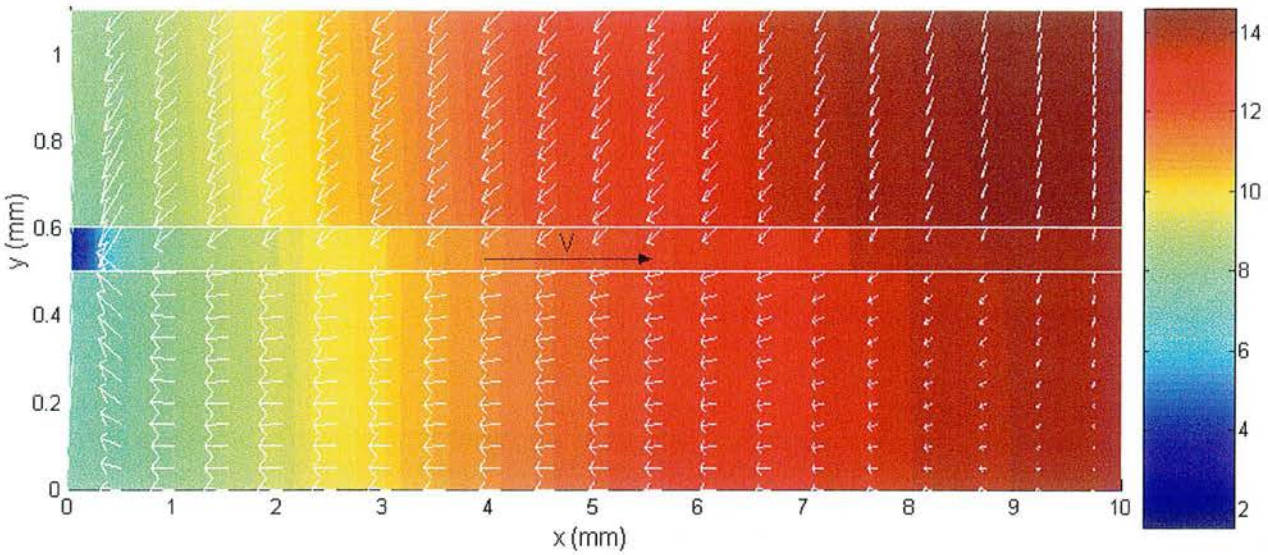


figure II.29 : champ de température et densité de flux dans le système

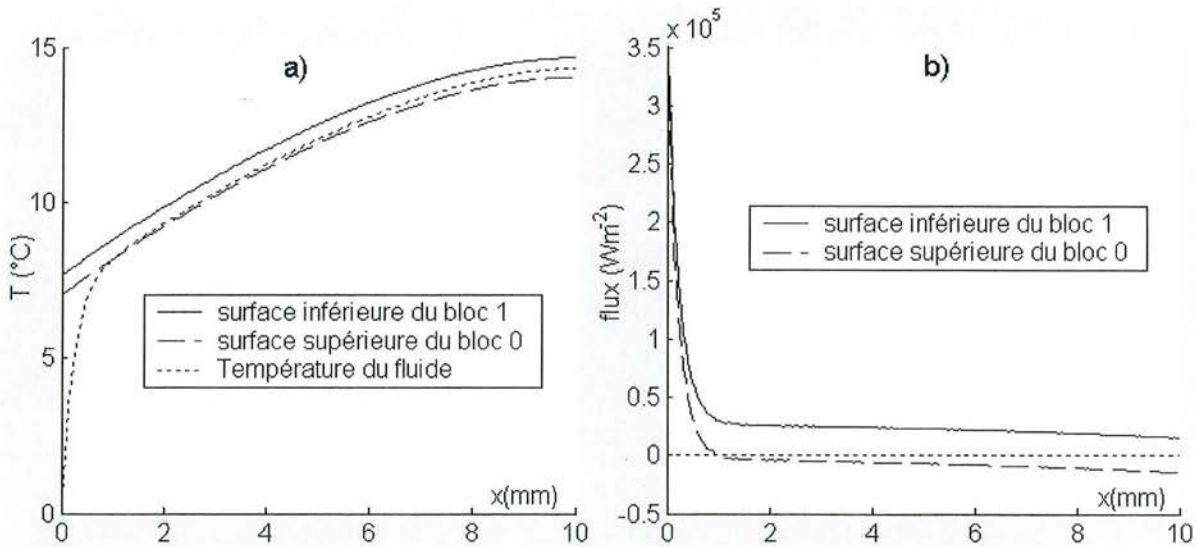


figure II.30 : températures et densités de flux à l'interface fluide-solide

Sur cet exemple, nous constatons qu'environ la moitié du flux est communiquée au fluide lors du premier millimètre de microcanal. Le flux net reçu par le bloc n°0 est bien nul, ce bloc aide cependant à l'uniformisation de la température selon 0*x*. A partir de 1 millimètre de micro-canal, le bloc n°0 reçoit du flux de la part du fluide. La chaleur correspondante lui est rétrocédée en amont.

Application à la mesure d'un coefficient d'échange dans un microcanal

Les effets d'échelle sur le transfert de chaleur dans les micro-canaux ne sont pas scientifiquement clairement établis. Divers expérimentateurs ont essayé de quantifier les échanges dans des microcannaux. Pour Qu et al. [13], le nombre de Nusselt est fortement affecté (réduction allant jusque 72 % du transfert thermique) dans des microcanaux trapézoïdaux. Ces

résultats sont en opposition avec les conclusions de Choi et al. [14] qui ont observé une augmentation du transfert thermique par rapport à la théorie en régime turbulent.
Le point commun de toutes ces expérimentations est d'une part l'utilisation de thermocouples pour réaliser les mesures (caractère intrusif) et d'autre part la mise en œuvre d'un modèle unidimensionnel pour réaliser l'inversion des mesures. Or, nous avons constaté sur la *figure II.30*, que la densité de flux à l'interface était loin d'être constante, ceci étant d'autant plus vrai que le nombre de Reynolds est faible : des conditions limites uniformes en x (excitation uniforme, coefficient d'échange uniforme) ne garantissent pas une distribution uniforme du flux pariétal entrant dans le fluide : les modèles monodimensionnels ne sont donc pas adaptés.

Cette modélisation analytique bidimensionnelle pourrait permettre par une mesure non intrusive en face avant (thermographie infrarouge par exemple) de déterminer le coefficient d'échange. Une simulation d'expérience a été réalisée sur l'exemple précédent. La température en face avant ($z = e_1$) est supposée être échantillonnée suivant 240 pixels, ce qui représente la taille de la matrice de capteurs d'une caméra infrarouge. Un bruit Gaussien de moyenne nulle et d'écart type 0.1°C est ajouté pour former la température expérimentale. La méthode des moindres carrés permet l'estimation du coefficient d'échange moyen, sans aucune régularisation.

Le coefficient d'échange estimé vaut 47510 $Wm^{-1}K^{-2}$ c'est-à-dire le coefficient d'échange simulé au millième près. A titre de comparaison, le modèle monodimensionel développé dans [15] qui considère un flux uniforme à la paroi en contact avec le fluide et une température du fluide variant linéairement en fonction de la coordonnée x, conduit à un coefficient d'échange moyen : $\overline{h} = \overline{\varphi}/[\overline{T}(z_1 = 0) - (T^f(x = L) + T^f(x = 0))/2] = 6100\ Wm^{-2}K^{-1}$, ce qui n'est pas le bon ordre de grandeur. Il est également possible, à partir de la méthode des quadripôles, d'estimer un coefficient d'échange non uniforme dans l'espace $h(x)$ [16].
Cette technique est également adaptée à la modélisation des échangeurs à plaques parallèles.

II. 4 Conclusion

La méthode des quadripôles multiblocs rend possible la modélisation analytique de radiateurs dont les géométries sont non triviales mais restent multiblocs parallélépipédiques. Le couplage de la méthode à des modèles réduits comme celui de l'ailette conduit à un gain de temps de calcul non négligeable. La condition limite d'écoulement fluide devrait permettre l'estimation par technique inverse de coefficients d'échange dans des micro-canaux au sein desquels les transferts sont multidimensionnels.

III Conception optimale d'un diffuseur

Le refroidissement des puces en électronique [17,18] passe par l'utilisation de diffuseurs thermiques (spreader) dont la fonction est de permettre un épanouissement des lignes de flux dans les 3 directions de l'espace afin d'augmenter la surface d'échange avec le fluide de refroidissement.

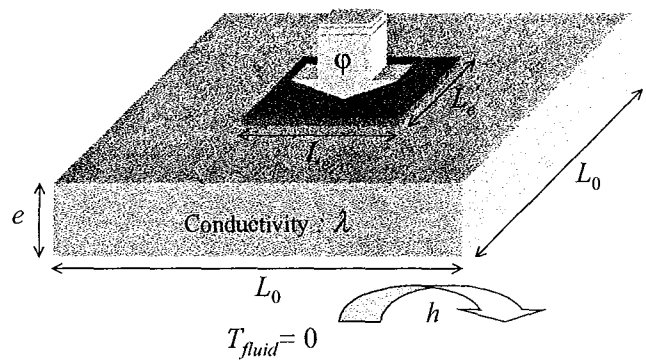


figure II.31 : diffuseur monocouche

Il est coutume de modéliser un diffuseur du type représenté sur la *figure II.31* par une somme de 3 résistances thermiques (R_d, R_c et R_f) caractérisant respectivement le diffuseur non perturbé, la constriction des lignes de flux et l'échange avec le fluide :

$$R_t = R_d + R_c + R_f \tag{II.38}$$

$$R_d = \frac{e}{\lambda L_0^2},\ R_f = \frac{1}{hL_0^2} \qquad \text{(dans le cas de la } \textit{figure II.31}\text{)} \tag{II.39}$$

la résistance totale étant définie par rapport à la température maximale ou à la température moyenne de la source, le fluide étant pris à température nulle.
Le calcul de la résistance de constriction R_c peut être effectuée en utilisant différentes corrélations existant dans la littérature. Par exemple, Degiovanni et al. [19,12] proposent pour les diffuseurs épais :

$$R_c = \frac{8}{3\pi^{\frac{3}{2}}\lambda L_e}\left(1 - 1.288\frac{L_e}{L_0} + 0.288\left(\frac{L_e}{L_0}\right)^{3.75}\right) \tag{II.40}$$

De même, selon Negus et al. [20] :

$$R_c = \frac{0.475 - 0.62\frac{L_e}{L_0} + 0.13\left(\frac{L_e}{L_0}\right)^2}{\lambda L_e} \tag{II.41}$$

Ces corrélations ont été déterminées à partir de géométries cylindriques mais restent encore valables dans le cas d'un diffuseur et d'une source à bases carrées. Ces résistances sont définies

par rapport à la température moyenne de la surface excitée, sachant que le flux d'excitation est uniforme. Ce type de corrélation n'est valable que pour les diffuseurs épais, dont l'épaisseur est du même ordre de grandeur que les dimensions latérales car elles ne prennent pas en compte l'échange avec le fluide. La résistance de constriction d'un diffuseur n'est pas intrinsèque au diffuseur, celle-ci dépend également de l'échange convectif, ou plus globalement des conditions limites. En effet, par exemple, plus l'échange est faible plus les lignes de flux s'épanouissent.

En pratique, les diffuseurs rencontrés en électronique ne sont généralement pas assez épais pour pouvoir considérer des résistances de constriction indépendantes des conditions limites ; ainsi Yovanovich et Antonetti [21] ont établi des abaques donnant la résistance de constriction pour un diffuseur d'épaisseur quelconque avec une condition de température imposée sur la face en contact avec le fluide. Song et al. [22] ont établi une corrélation intégrant le coefficient d'échange ainsi que l'épaisseur du diffuseur :

$$R_c = \frac{\left(1-{L_e}/{L_0}\right)^{3/2}}{2\lambda L_e} \frac{\dfrac{\lambda}{h}\left(\dfrac{\pi^{3/2}}{L_0}+\dfrac{1}{L_e}\right)+\tanh\left(\left(\dfrac{\pi^{3/2}}{L_0}+\dfrac{1}{L_e}\right)e\right)}{1+\dfrac{\lambda}{h}\left(\dfrac{\pi^{3/2}}{L_0}+\dfrac{1}{L_e}\right)\tanh\left(\left(\dfrac{\pi^{3/2}}{L_0}+\dfrac{1}{L_e}\right)e\right)} \qquad \text{(II.42)}$$

Cette corrélation est valable selon ces auteurs à 10% près dans les applications courantes de l'électronique. On peut montrer que R_c est alors une fonction décroissante de l'épaisseur du diffuseur e.

En résumé, nous pouvons tracer, pour l'exemple de la *figure II.31*, les différentes corrélations et le modèle exact défini plus loin (voir eq. (II.59)), la résistance totale du diffuseur en fonction de l'épaisseur, pour $h = 1000$ Wm^{-2}K^{-1}, $\lambda = 400$ Wm^{-1}K^{-1}, $L_0 = 100$ mm, $L_e = 20$ mm : voir *figure II.32*.

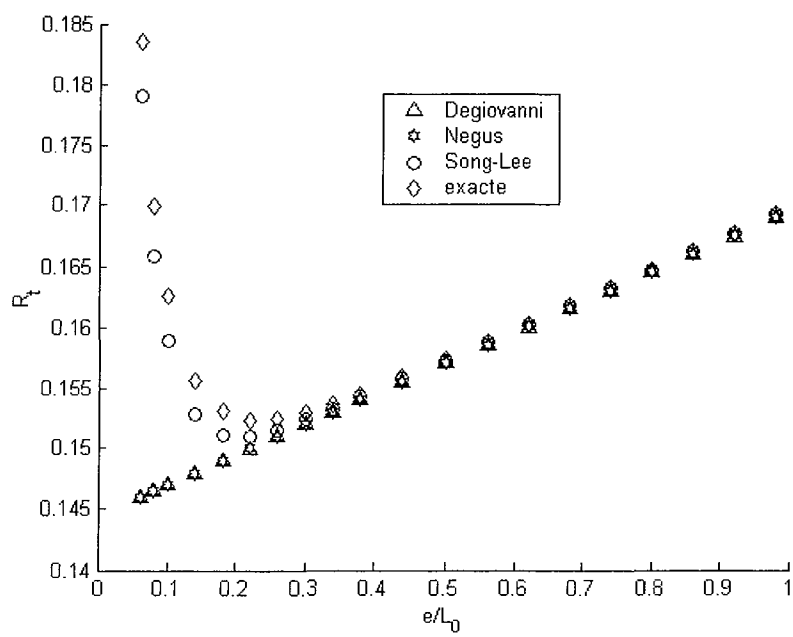


figure II.32 : résistance thermique totale du système en fonction de l'épaisseur du diffuseur pour les différentes corrélations comparées à la valeur exacte.

Les corrélations de Degiovanni et Negus donnent les mêmes résultats, résultats valables sur cet exemple à partir d'une épaisseur qui vaut la moitié de la largeur du diffuseur. La corrélation de Song est quant à elle valable sur le domaine entier des épaisseurs avec une assez bonne précision. Nous pouvons remarquer dès à présent qu'il existe une épaisseur optimale qui minimise la résistance thermique totale. Cet effet a été étudié récemment par Gatto [23] en géométrie cylindrique.

La partie qui suit présente une méthodologie pour le dimensionnement et l'optimisation de tels diffuseurs. Etant donné les dimensions des sources de chaleur à refroidir, la conductivité du matériau utilisé pour réaliser le diffuseur et le coefficient d'échange dont on dispose, quelles sont les dimensions du diffuseur et la position des sources qui minimisent leurs températures ?
Comme le montre l'exemple traité précédemment, il existe un optimum sur l'épaisseur du diffuseur. Par contre, il n'existe pas d'optimum sur son aire de base car plus celle-ci est importante, plus la surface d'échange est importante et plus les lignes de flux peuvent s'épanouir. Il conviendra donc de faire intervenir un critère supplémentaire pour déterminer cette surface de base, qui peut être la température maximale admissible de la source ou un encombrement maximal du diffuseur à ne pas dépasser.

III. 1 Cas d'un radiateur diffuseur monocouche

III.1.1 Cas général

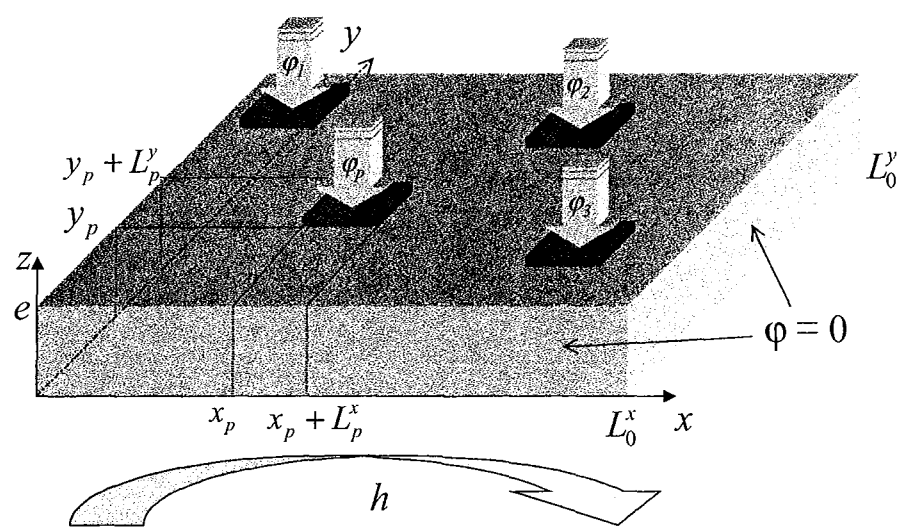


figure II.33 : diffuseur thermique monocouche, cas général

Considérons le diffuseur monocouche destiné au refroidissement d'un ensemble de P sources représenté sur la *figure II.33*. Ses dimensions latérales sont notées L_0^x et L_0^y, son épaisseur e, sa conductivité λ. La face inférieure du diffuseur est soumise à un échange convectif (de coefficient uniforme h), les faces latérales étant adiabatiques. La source p, de dimensions L_p^x suivant $0x$ et

L_p^y suivant 0*y*, de position $[x_p, y_p]$, dissipe un flux surfacique vers le diffuseur $\varphi_p(x,y)$ supposé connu.

L'augmentation de l'épaisseur du diffuseur se traduit par un meilleur épanouissement des lignes de flux (diminution de R_c) mais aussi par une augmentation de la résistance du diffuseur non perturbé ($R_d = e/\lambda L_0^x L_0^y$). On comprend donc qu'il existe une épaisseur optimale minimisant la température des sources. Cette épaisseur est celle qui assure le meilleur compromis entre un bon épanouissement des lignes de flux et une résistance 1D entre source et fluide pas trop importante. Par contre il n'existe pas d'optimum sur les dimensions latérales du diffuseur (L_0^y, L_0^x) car, plus celles-ci sont grandes, plus les lignes de flux peuvent s'épanouir (R_c décroît en fonction de $L_0^y \times L_0^x$) et plus la surface d'échange est importante ($R_f = 1/hL_0^xL_0^y$ décroît). Il conviendra donc de déterminer ces dimensions suivant un critère supplémentaire qui peut porter sur la température plafond des sources, ou sur l'encombrement du diffuseur. Néanmoins, à surface de base fixée ($L_0^y \times L_0^x$ fixé) un optimum existe sur la forme du diffuseur, à savoir sur le rapport L_0^y/L_0^x. Il existe également bien sûr un (ou plusieurs) optimum(s) sur la position des sources.

Le but de cette partie est donc d'optimiser l'épaisseur du diffuseur (*e*), la forme du diffuseur (L_0^y/L_0^x) et la position des sources ($[x_p, y_p]$) en fonction de plusieurs paramètres de contrôle qui sont l'aire de base du diffuseur ($L_0^y \times L_0^x$), les densités de flux dissipées ($\varphi_p(x,y)$), les dimensions des sources (L_p^x et L_p^y), le coefficient de convection (*h*) et la conductivité du matériau utilisé (λ) pour réaliser le diffuseur.

La méthode des quadripôles thermiques [12] (appliquée en géométrie 3D monobloc) permet de déterminer rapidement l'expression analytique de la température *T* de la face supérieure du diffuseur en fonction du flux surfacique imposé. Dans cette configuration, les modes sont découplés. La relation quadripolaire s'écrit donc, pour chaque couple (*n*;*m*) :

$$\begin{pmatrix} \theta_{n,m} \\ \phi_{n,m} \end{pmatrix}(e) = \begin{pmatrix} A_{n,m} & B_{n,m} \\ C_{n,m} & A_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{n,m} \end{pmatrix}(0) \tag{II.43}$$

Les transformées de Fourier-cosinus de la température s'écrivent donc :

$$\theta_{0,0} = \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h}\right)\phi_{0,0} \tag{II.44}$$

$$\theta_{n,m} = \frac{1}{h} \frac{1 + \dfrac{h}{\lambda\gamma_{n,m}} \tanh(\gamma_{n,m} e)}{1 + \dfrac{\lambda\gamma_{n,m}}{h} \tanh(\gamma_{n,m} e)} \phi_{n,m} \quad \text{pour } (n,m) \neq (0,0) \tag{II.45}$$

où $\theta_{n,m}$ et $\phi_{n,m}$ sont les transformées de Fourier-cosinus de la température T et de la densité de flux s'exerçant sur la face supérieure ($z = e$).

$$\theta_{n,m} = \int_0^{L_0^x}\int_0^{L_0^y} T(x,y,z=e)\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\,dy\,dx,$$

$$\phi_{n,m} = \int_0^{L_0^x}\int_0^{L_0^y} \varphi(x,y,z=e)\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\,dy\,dx \qquad \text{(II.46)}$$

$$\text{avec} \qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{L_0^x}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{L_0^y}, \quad \gamma_{n,m} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \qquad \text{(II.47)}$$

Le spectre de la densité de flux imposée sur la surface supérieure du diffuseur vaut quant à lui :

$$\phi_{n,m} = \sum_{p=1}^{P} \int_{x_p}^{x_p+L_p^x} \int_{y_p}^{y_p+L_p^y} \varphi_p(x,y)\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\,dy\,dx \qquad \text{(II.48)}$$

Nous sommes donc en mesure de calculer la valeur analytique du spectre de la température de la face supérieure du diffuseur en fonction des paramètres géométriques et des conditions limites imposées. A partir de cette valeur analytique du spectre de la température en face avant, nous pouvons calculer la température réelle par une transformation inverse de Fourier rapide (IFFT) ou conserver le caractère analytique de la méthode :

$$T(x,y,z=e) = \frac{\theta_{0,0}}{L_0^x L_0^y} + \frac{2}{L_0^x L_0^y}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}(2-\delta_{n,0}-\delta_{0,m})\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\theta_{n,m} \qquad \text{(II.49)}$$

où N et M sont les ordres de troncature selon $0x$ et $0y$ des sommes de Fourier et δ le symbole de Kronecker : $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Reste à former la fonction objectif du problème qui peut être, si on fait l'hypothèse que les sources sont isothermes dans le sens de leur épaisseur, soit le maximum des températures moyennes des sources, soit le maximum local de la température des sources :

$$T_{moy} = \max_p \left(\frac{1}{L_p^x L_p^y} \int_{xp}^{xp+L_p^x} \int_{yp}^{yp+L_p^y} T(x,y,e)\,dx\,dy \right) \quad \text{ou} \quad T_{max} = \max_{x,y}\left(T(x,y,e)\right) \qquad \text{(II.50)}$$

Le choix de conserver le caractère analytique de la méthode conduit donc à une valeur analytique de la fonction objectif et à l'utilisation d'une méthode d'optimisation performante s'appuyant sur des valeurs analytiques de son gradient (que l'on peut calculer en utilisant un outil de calcul symbolique du type de Maple par exemple).

III.1.2 Cas particuliers

Le but de cette partie est de permettre une analyse de la fonction de diffuseur en considérant quelques exemples simples.

III.2.2.1 Conception d'un diffuseur monosource

Nous nous intéressons ici à la définition d'une procédure de conception optimale d'un diffuseur utilisé pour refroidir une source de chaleur à base carrée ($L_e^x = L_e^y = L_e$) dissipant un flux uniforme sur sa surface. La position optimale de la source est bien sûr le centre du diffuseur. D'après la symétrie, il suffit de ne modéliser que le quart de la structure ; le rapport de forme ($r = L_0^Y / L_0^x$) optimal du diffuseur vaut 1 (le diffuseur est également à base carrée, $L_0^x = L_0^y = L_0$). Sont supposés également connus les dimensions de la source L_e, la densité de flux uniforme dissipé par la source φ, le coefficient d'échange h ainsi que la conductivité du matériau constituant le diffuseur λ. Le problème comporte donc un paramètre à optimiser qui est l'épaisseur e et un paramètre de réglage qui est la dimension latérale L_0. Nous allons calculer la fonction objectif du problème.
Une première étape est le calcul du spectre du flux imposé sur la surface supérieure du diffuseur en utilisant la relation (II.48) :

$$\phi_{n,m} = \varphi \int_0^{L_0/2} \int_0^{L_0/2} \cos(2\alpha_n x)\cos(2\beta_m y)\,dy\,dx \qquad \text{(II.51)}$$

car nous ne modélisons que ¼ de la structure . (ici, L_0 et L_e sont remplacées par $L_0/2$ et $L_e/2$)
donc

$$\phi_{0,0} = \varphi(L_e/2)^2 \qquad \text{(II.52)}$$

$$\underset{(m\geq 1)}{\phi_{0,m}} = \varphi\frac{L_e}{2}\frac{\sin(\beta_m L_e)}{2\beta_m},\ \underset{(n\geq 1)}{\phi_{n,0}} = \varphi\frac{L_e}{2}\frac{\sin(\alpha_n L_e)}{2\alpha_n},\ \underset{(n,m\geq 1)}{\phi_{n,m}} = \varphi\frac{\sin(\alpha_n L_e)}{2\alpha_n}\frac{\sin(\beta_m L_e)}{2\beta_m} \qquad \text{(II.53)}$$

Deux fonctions objectif peuvent être considérées : la température moyenne ou la température maximale de la puce :

$$T_{moy} = \frac{4}{L_e^2}\int_0^{L_e/2}\int_0^{L_e/2} T(x,y,e)\,dy\,dx \quad \text{ou} \quad T_{max} = \max_{x,y\leq L_e/2}\left(T(x,y,e)\right) \qquad \text{(II.54)}$$

III.2.2.1.1 La fonction objectif est la température moyenne de la puce

D'après (II.44), (II.45), (II.49) et (II.52)-(II.54), on a :

$$T_{moy}=\frac{\varphi L_e^2}{L_0^2}\left(\frac{e}{\lambda}+\frac{1}{h}\right)+\frac{\varphi L_e}{\lambda}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{n,m}^{moy}\frac{\dfrac{2\lambda\gamma_{n,m}}{h}+\tanh\left(2\gamma_{n,m}e\right)}{1+\dfrac{2\lambda\gamma_{n,m}}{h}\tanh\left(2\gamma_{n,m}e\right)} \tag{II.55}$$

avec

$$a_{n,m}^{moy}\left(L_e/L_0\right)=\frac{L_0}{\pi^3 L_e}\left[\frac{2L_0^2/L_e^2\left(1-\left(\delta_{n,0}+\delta_{0,m}\right)+\delta_{n,0}\delta_{0,m}\right)}{n^2m^2\pi^2\sqrt{n^2+m^2}}\sin^2\left(n\pi\frac{L_e}{L_0}\right)\sin^2\left(m\pi\frac{L_e}{L_0}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\delta_{0,m}-\delta_{n,0}\delta_{0,m}\right)}{n^3}\sin^2\left(n\pi\frac{L_e}{L_0}\right)+\frac{\left(\delta_{n,0}-\delta_{n,0}\delta_{0,m}\right)}{m^3}\sin^2\left(m\pi\frac{L_e}{L_0}\right)\right] \tag{II.56}$$

Remarque : la résistance thermique équivalente au système complet vaut :

$$R_t=\frac{T_{moy}}{\varphi L_e^2} \tag{II.57}$$

donc si l'on soustrait la résistance propre à l'échange convectif et la résistance du diffuseur non perturbée, la résistance de constriction s'écrit :

$$R_c=R_t-\frac{1}{hL_0^2}-\frac{e}{\lambda L_0^2} \tag{II.58}$$

c'est-à-dire, en utilisant (II.55)-(II.58) :

$$R_c\left(h,\lambda,L_e,L_0\right)=\frac{1}{\lambda L_e}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{n,m}^{moy}\frac{\dfrac{2\lambda\gamma_{n,m}}{h}+\tanh\left(2\gamma_{n,m}e\right)}{1+\dfrac{2\lambda\gamma_{n,m}}{h}\tanh\left(2\gamma_{n,m}e\right)} \tag{II.59}$$

Ceci constitue l'expression de la résistance de constriction sous forme d'une série, dont une approximation est la relation de Song (II.42). Cette résistance dépend toujours du coefficient d'échange, ce qui confirme bien que la résistance thermique de constriction n'est pas intrinsèque au diffuseur, mais dépend également des conditions limites. Lorsque l'épaisseur du diffuseur devient suffisamment grande devant ses dimensions latérales (hypothèse de Degiovanni et Negus), les termes en $\tanh\left(2\gamma_{n,m}e\right)$ (dans(II.59)) tendent vers 1, la résistance R_c ne dépend plus du coefficient d'échange :

$$R_c\left(\lambda, L_e, L_0\right) = \frac{1}{\lambda L_e} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} a_{n,m}^{moy}\left(L_e / L_0\right) \tag{II.60}$$

Afin de donner à notre étude un caractère plus général, nous allons adimensionnaliser la fonction objectif. Le but du diffuseur étant de réduire la température de la puce par rapport à une configuration dans laquelle le transfert serait monodimensionnel, la température maximale que l'on pourra déterminer est la température pour un refroidissement de la puce sans diffuseur :

$$T_{1D} = \frac{\varphi}{h} \tag{II.61}$$

Ainsi,

$$T_{moy}^{*} = \frac{T_{moy}}{T_{1D}} \tag{II.62}$$

Nous pouvons faire apparaître dans (II.55),(II.61),(II.62) les nombres adimensionnels qui constitueront les paramètres du problème d'optimisation.

* $B_{L0} = \frac{hL_0}{2\lambda}$: le nombre de Biot relatif aux dimensions latérales du diffuseur.
* $B_e = \frac{he}{2\lambda}$: le nombre de Biot relatif à l'épaisseur du diffuseur.
* $B_{L_e} = \frac{hL_e}{2\lambda}$: le nombre de Biot relatif aux dimensions de la puce.

La fonction objectif dépend donc de 3 paramètres, elle peut s'écrire fonctionnellement de la façon suivante :

$$T_{moy}^{*} = \Omega_{moy}\left(\frac{L_0}{L_e}, B_{Le}, B_e\right) \tag{II.63}$$

Moyennant un logiciel de calcul symbolique du type de Maple® nous disposons donc de la valeur analytique du gradient de la fonction objectif ($\partial T_{moy}^{*} / \partial B_e$), et pouvons donc mettre en œuvre une méthode efficace de minimisation de la fonction objectif pour déterminer de le nombre de Biot optimal relatif à l'épaisseur pour différentes valeurs de B_{Le} et de L_0/L_e.

Nous sommes ainsi en mesure de construire les abaques permettant l'optimisation du diffuseur, c'est-à-dire donner le nombre de Biot optimal relatif à l'épaisseur $\left(B_e\right)_{opt}$ en fonction du nombre de Biot relatif à la largeur de la source B_{Le} et du rapport de la largeur du diffuseur sur la largeur de la source (L_0/L_e) : voir *figure II.34.a.* Cet abaque peut être représenté par la fonction Ψ_{moy} :

$$\frac{\partial \Omega_{moy}}{\partial B_e}\left(\frac{L_0}{L_e}, B_{Le}, \left(B_e\right)_{opt}\right) = 0 \tag{II.64}$$

ou $$\left(B_e\right)_{opt} = \Psi_{moy}\left(L_0/L_e, B_{Le}\right) \tag{II.65}$$

Il convient également de donner la valeur de la température moyenne adimensionnelle de la puce (fonction objectif adimensionnelle) pour ce nombre de Biot optimal relatif à l'épaisseur, afin de permettre le choix de la largeur du diffuseur sur laquelle il n'existe pas d'optimum (*figure II.34.b*). Cet abaque peut être représenté par la fonction Ω_{moy}^{opt} :

$$\frac{hT_{moy}^{opt}}{\varphi} = \Omega_{moy}\left(L_0/L_e, B_{Le}, \left(B_e\right)_{opt}\right) = \Omega_{moy}^{opt}\left(L_0/L_e, B_{Le}\right) \tag{II.66}$$

où Ω_{moy} est défini par l'équation (II.63).

Les nombres de Biot sont des longueurs réduites (e, L_e et L_0) dans les commentaires que nous allons faire.

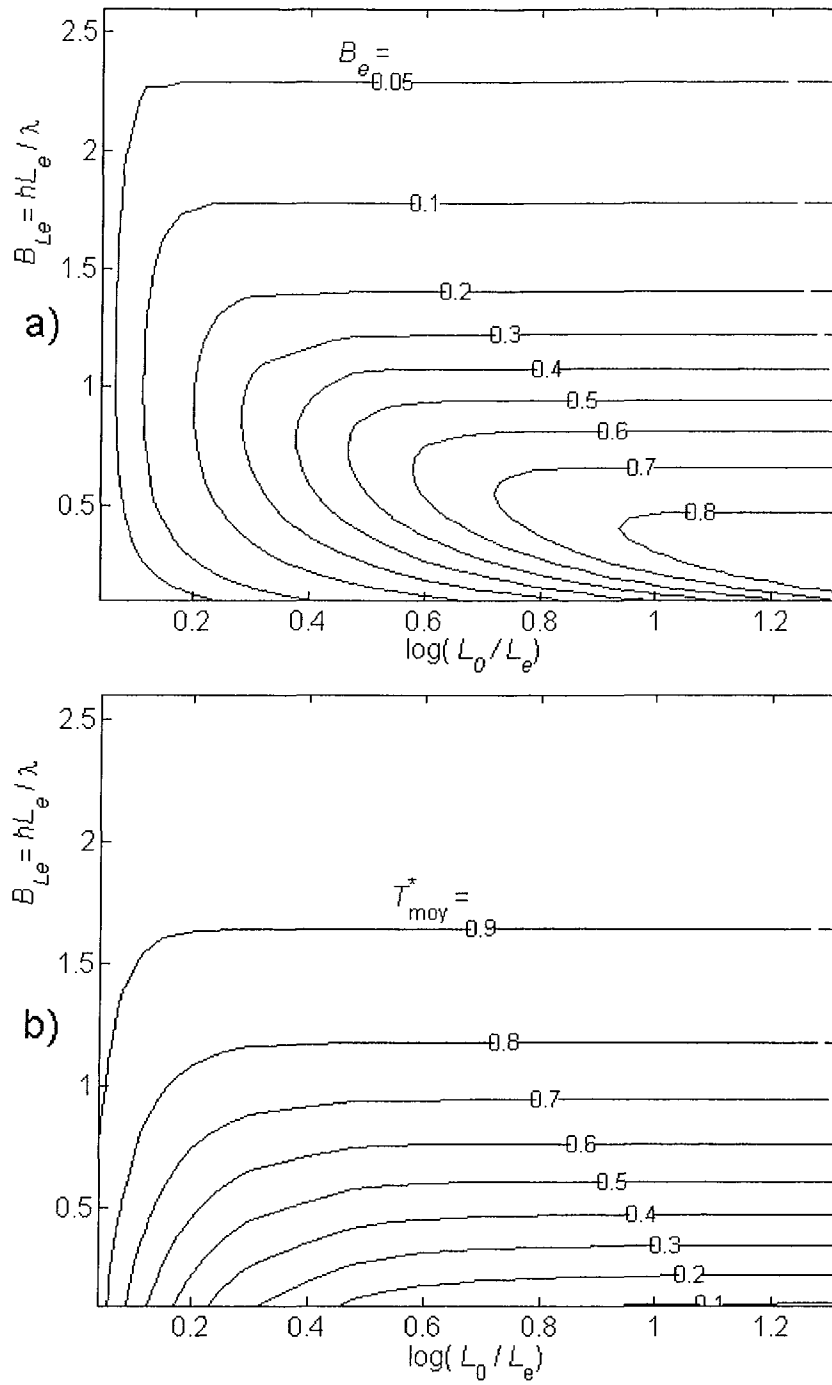


figure II.34: a) fonction Ψ: épaisseur optimale (pour la température moyenne) en fonction des tailles du diffuseur et de la source. b) fonction Ω^{opt}_{moy} : température moyenne minimum en fonction des tailles du diffuseur et de la source.

La *figure II.35* est un zoom de la *figure II.34* dans une plage usuelle de nombres de Biot relatifs aux dimensions de la source.

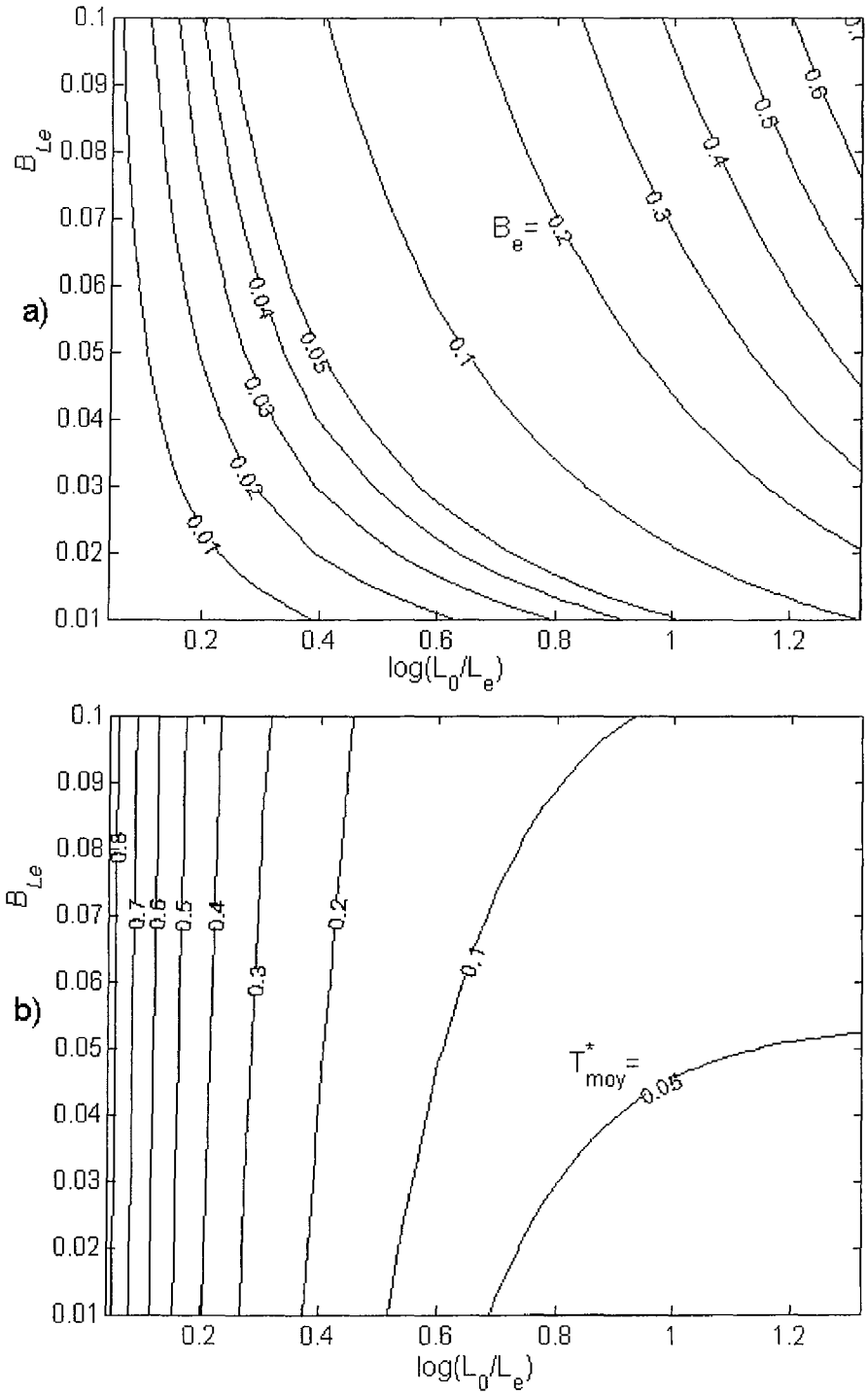


figure II.35 a) et *b) : zoom de la figure II.34 dans une plage usuelle de nombres de Biot relatifs à la largeur de la source.*

A partir des abaques *34.b* et *35.b*, connaissant la température moyenne adimensionnelle que la puce ne peut pas dépasser, la largeur de la puce L_e et les paramètres h et λ, nous pouvons déterminer la largeur du diffuseur, puis déterminer l'épaisseur optimale correspondante à partir de *34.a* et *35.a*.

Interprétations

Même si les interprétations qui vont suivre concernent rigoureusement le cas particulier du refroidissement d'une unique source de base carrée par un diffuseur monocouche, elle peuvent être généralisées, d'un point de vue qualitatif, à des cas plus généraux.

* A largeur de source (L_e) fixée, l'épaisseur optimale du diffuseur (e) est une fonction croissante de sa largeur (L_0) (voir l'abaque *34.a*, progression selon une horizontale). Cette fonction finit par atteindre un palier à partir duquel l'augmentation de la largeur du diffuseur a très peu d'effet sur la réduction de la température moyenne de la puce (voir *figure II.34.b*). Ce palier est d'autant plus vite atteint que le nombre de Biot relatif à la largeur d'excitation (hL_e/λ) est important. Il existe donc une largeur de diffuseur, ou une surface d'échange, qu'il n'est pas intéressant de dépasser.

* A rapport L_0 / L_e fixé, si on augmente les dimensions du système (B_{Le} et B_{L0}), l'épaisseur optimale va augmenter dans un premier temps pour permettre aux lignes de flux de s'épanouir puis diminuer dans un deuxième temps pour atteindre la valeur nulle (voir *figure II.34.a*, progression sur une verticale). L'épaisseur optimale ne peut augmenter indéfiniment, la résistance du diffuseur non perturbé R_d deviendrait alors trop importante. Cette épaisseur optimale étant limitée, plus les dimensions du système (B_{Le} et B_{L0}) augmentent, plus le transfert devient un transfert localement monodimensionnel, particulièrement en [x=0 , y=0]. Dans ces conditions, l'épaisseur optimale devient l'épaisseur nulle. L'épaisseur optimale du diffuseur n'est donc pas une fonction strictement croissante des dimensions de la source ; à partir d'un certain nombre de Biot relatif à la taille de la source mieux vaut diminuer l'épaisseur du diffuseur que de l'augmenter. D'un autre point de vue, si l'échange est très intense il est possible que l'épaisseur optimale soit nulle. Ainsi, au lieu de permettre un meilleur refroidissement de la source, le diffuseur augmenterait sa température.

* Dans tous les cas, le nombre de Biot relatif à l'épaisseur optimale est inférieur à une valeur limite qui est de l'ordre de 1 (voir *figure II.34.a*). Il est donc inutile de choisir une épaisseur de diffuseur qui rendrait ce nombre de Biot (he/λ) supérieur à 1.

III.2.2.1.2 La fonction objectif est la température maximale de la puce

Cette fonction objectif est moins utilisée que la précédente car sa valeur ne peut être obtenue expérimentalement par une mesure électrique [24]. Néanmoins, la température maximale (point chaud) peut être responsable de la dégradation des composants.

$$T_{max} = \max_{x,y \le L_0/2} \left(T(x,y,z=e) \right) = T(0,0,e) \qquad \text{(II.67)}$$

car la température sera maximale au centre de la source, en
$x=0$; $y=0$], lorsqu'on ne modélise que ¼ du système d'après la symétrie.
La résistance de constriction basée sur la température maximale s'écrit sous forme de série:

$$R_c = \frac{1}{\lambda L_e}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{max}\frac{\frac{2\lambda\gamma_{n,m}}{h}+\tanh\left(2\gamma_{n,m}e\right)}{1+\frac{2\lambda\gamma_{n,m}}{h}\tanh\left(2\gamma_{n,m}e\right)} \tag{II.68}$$

$$\begin{aligned} a_{n,m}^{max}\left(L_e/L_0\right) = {} & \frac{2L_e/L_0\left(1-\left(\delta_{n,0}+\delta_{0,m}\right)+\delta_{n,0}\delta_{0,m}\right)}{\pi^2 nm\sqrt{n^2+m^2}}\sin\left(n\pi L_e/L_0\right)\sin\left(m\pi L_e/L_0\right) \\ & +\frac{\left(\delta_{0,m}-\delta_{n,0}\delta_{0,m}\right)}{\pi^2 n^2}\sin\left(n\pi L_e/L_0\right)+\frac{\left(\delta_{n,0}-\delta_{n,0}\delta_{0,m}\right)}{\pi^2 m^2}\sin\left(m\pi L_e/L_0\right) \end{aligned} \tag{II.69}$$

De même que précédemment, la fonction objectif adimensionnalisée s'exprime en fonction de trois paramètres :

$$T_{max}^{*} = \Omega_{max}\left(L_0/L_e, B_e, B_{Le}\right) = \Omega_{max}^{opt}\left(L_0/L_e, B_{Le}\right) \tag{II.70}$$

Nous pouvons alors construire de façon similaire les abaques de la *figure II.36*.

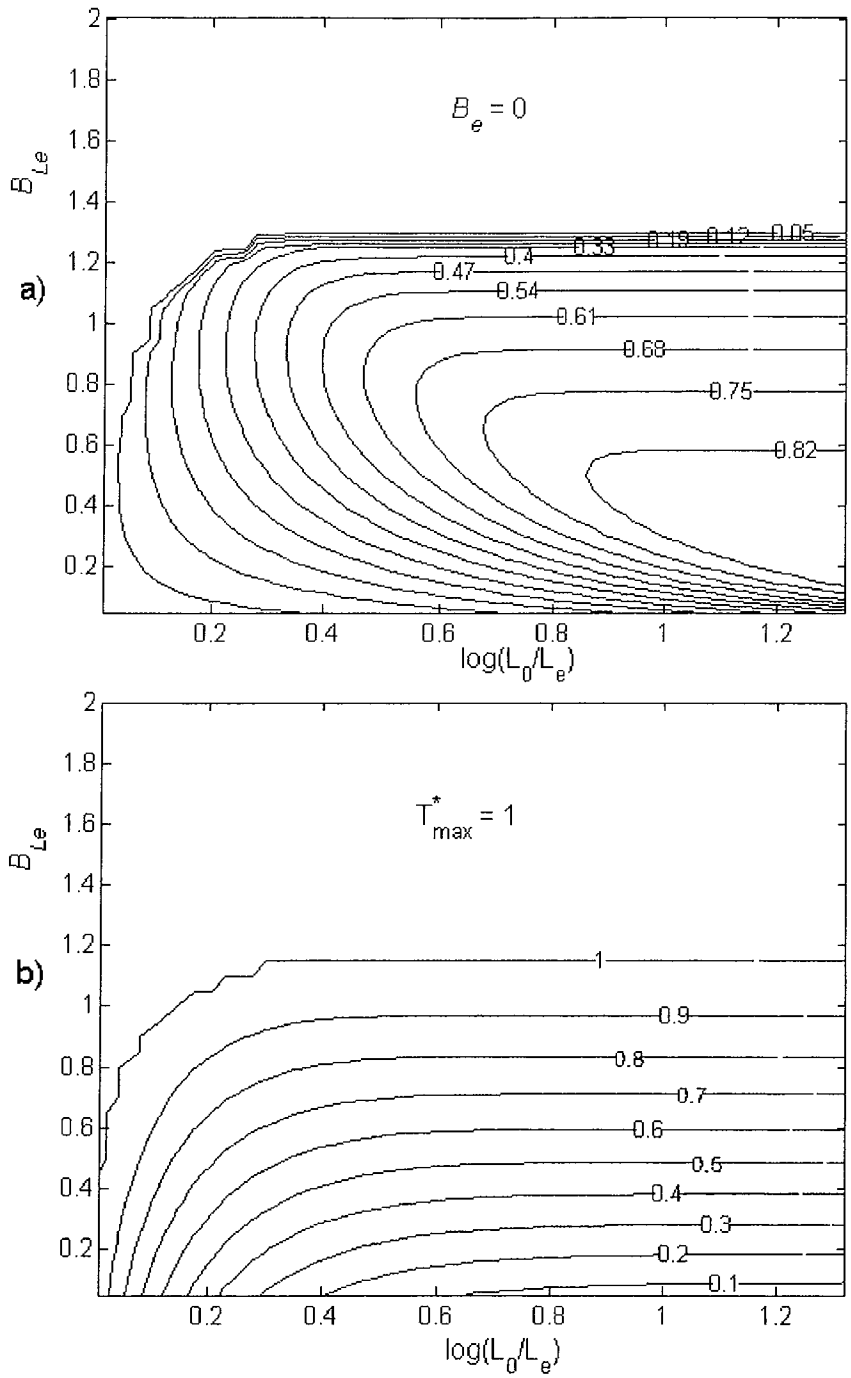


figure II.36: a) fonction Ψ: épaisseur optimale (pour la température maximale) en fonction des tailles du diffuseur et de la source. b) fonction Ω^{opt}_{moy} : température maximale minimum en fonction des tailles du diffuseur et de la source.

Au-delà d'un nombre de Biot relatif aux dimensions de la source (B_{Le}) de 1.3, il n'existe plus d'épaisseur qui minimise la température maximale de la source alors qu'il existe toujours une épaisseur qui minimise sa température moyenne. Ceci s'explique par le fait que plus le nombre de Biot relatif à la largeur de la source est grand, plus le transfert est localement monodimensionnel au centre de la puce où la température est maximum. Le transfert sur les bords de la puce garde quant à lui toujours son caractère tridimensionnel, ce qui explique que la

température moyenne de la puce profite bien plus longtemps de l'effet d'épanouissement des lignes de flux que la température maximale.

III.2.2.1.3 Application

Les abaques précédentes permettent la conception d'un diffuseur à partir des dimensions de la source à refroidir, de la puissance qu'elle dissipe, du coefficient d'échange dont on dispose (gamme de ventilateur, de plaque à eau..) et de la conductivité du matériau avec lequel on souhaite construire le diffuseur. Par exemple, considérons une puce carrée de 10 mm de coté dissipant un flux total de 100W. Nous souhaitons construire un diffuseur en cuivre (λ=380W/mK) refroidi par plaque à eau sachant que la pompe dont nous disposons permet d'obtenir un coefficient d'échange supposé uniforme h de 5000 W/m^{2}K. La température d'entrée de l'eau est de 10°C et nous désirons que la température moyenne de la puce reste inférieure à 50°C. Le problème est celui schématisé sur la *figure II.31.*
Calculons la température moyenne maximale de la puce, c'est-à-dire sa température dans le cas où le diffuseur est inexistant :

$$T_{1D} = \frac{\Phi}{hL_e^2} = \frac{100}{5000\times(10.10^{-3})^2} = 200\ °C \qquad \text{(II.71)}$$

donc la température de la puce pour un refroidissement sans diffuseur serait de 200+10=210°C.
Comme nous souhaitons une température moyenne maximale de 50°C :

$$T^*_{moy} = \frac{50-10}{200} = 0.2 \qquad \text{(II.72)}$$

De plus,

$$B_{Le} = \frac{5000\times10.10^{-3}}{2\times380} = 6{,}58.10^{-2} \qquad \text{(II.73)}$$

L'abaque de la *figure II.35.b* nous permet de relever $\log(L_0/L_e) = 0.42$ d'où $L_0/L_e = 2{,}6$. Donc pour respecter la contrainte en température, la dimension du côté du diffuseur doit être de 26 mm (2.6*10mm =26mm).
L'abaque de la *figure II.35.a* nous permet de déterminer l'épaisseur du diffuseur correspondant : $B_e = 0{,}07$ donc l'épaisseur vaut 5,3 mm.
Le diffuseur optimal est ainsi parfaitement défini.

III.1.3 Optimisation d'un diffuseur pour trois puces

Considérons maintenant le problème du refroidissement de trois sources carrées de 1 cm de côté, dissipant chacune uniformément 100 W, par une plaque à eau carrée de 5 cm de côté en cuivre (λ = 380 W/mK) et dont la face inférieure est soumise à un échange convectif de

coefficient uniforme h=5000 W/m^{2}K. La géométrie est celle de la *figure II.33*, pour P= 3. La fonction objectif est la température maximale de la face supérieure du diffuseur.

Il s'agit d'optimiser ici l'épaisseur e du diffuseur ainsi que les positions $[x_p,y_p]$ des 3 puces. Nous avons donc affaire à un problème d'optimisation à **7** paramètres. L'application directe de la méthode décrite plus haut, couplée à une méthode d'optimisation de type quadratique séquentielle (utilisation de la fonction *fmincon* [25] de Matlab®) conduit au résultat présenté sur la *figure II.37.a*. La solution n'est pas unique du fait des symétries entre différentes variables. La résolution a nécessité 15 s de temps de calcul sur un PC 700 Mhz en choisissant comme vecteur paramètre initial : [e = 5mm ; $x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = y_3$ = 20mm].

Le résultat de l'optimisation est le suivant :

$$[e=6.9\ ;\ x_1=24.3\ ;\ x_2=5.0\ ;\ x_3=31.0\ ;\ y_1=34.9\ ;\ y_2=15.7\ ;\ y_3=8.9]\ \text{(mm)} \qquad \text{(II.74)}$$

Nous remarquons que la structure optimisée est symétrique par rapport à une diagonale du diffuseur, une telle intuition pressentie au départ nous aurait permis de réduire le nombre de paramètres à 3.

Si maintenant nous souhaitons optimiser par ailleurs la forme du diffuseur en imposant une contrainte sur sa surface de base ($L_x \times L_y$=25 cm^2), le problème devient un problème d'optimisation à **9** paramètres avec une contrainte non linéaire. La géométrie optimale, déterminée par un calcul de l'ordre de 2 minutes, est alors celle de la *figure II.37.b*. Cette géométrie est celle pour laquelle L_x=3*L_y : chaque source est implantée au centre d'un carré dont la surface vaut le tiers de la surface du diffuseur. Ce résultat est trivial mais souligne les performances de la méthode des quadripôles pour résoudre les problèmes d'optimisation.

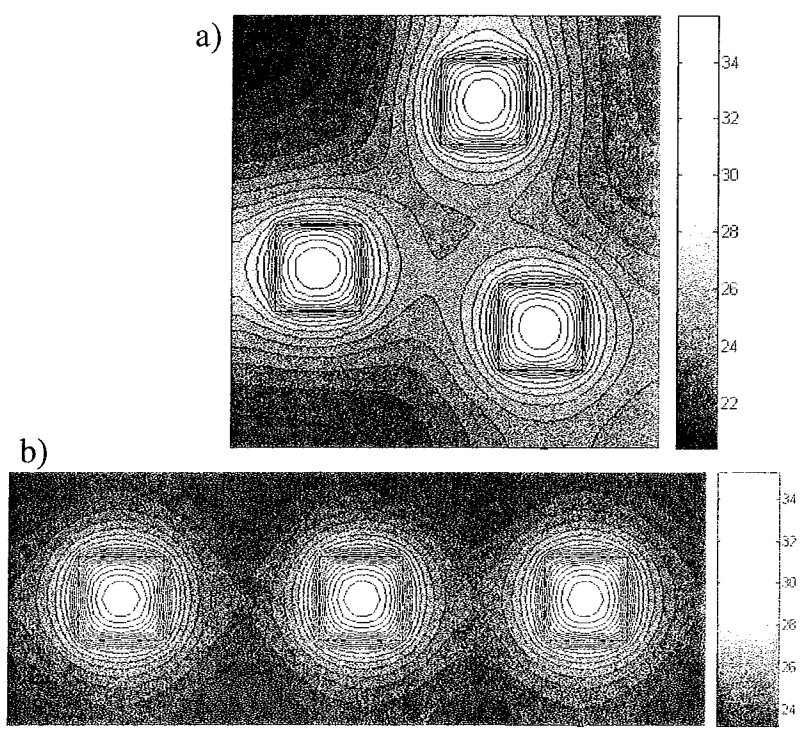


figure II.37 : a) température (°C) de la face supérieure du diffuseur après optimisation de son épaisseur et de la position des sources. b) température (°C) de la face supérieure du diffuseur après optimisation de son épaisseur, de sa forme et de la position des sources.

III.2 Cas d'un radiateur diffuseur multicouche

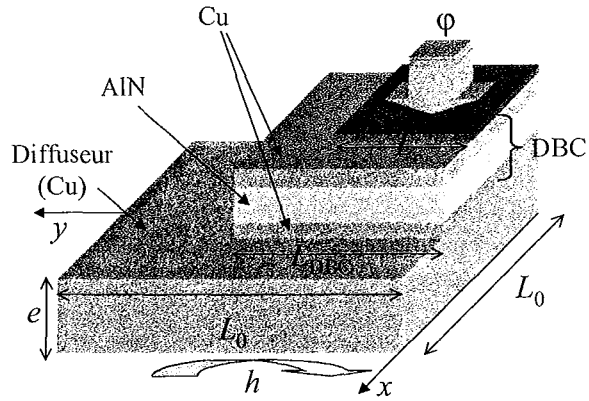


figure II.38 : diffuseur multibloc

D'une manière générale, tout ce qui a été réalisé précédemment peut être généralisé au cas d'un diffuseur multicouche. La solution reste explicite [12] lorsque les couches possèdent les mêmes dimensions latérales et devient semi-analytique lorsque la géométrie est multiblocs (*figure II.38*). Dans ce dernier cas, la recherche d'une solution analytique pour la fonction objectif et son gradient n'est pas possible. Cependant, la rapidité de la résolution par la méthode des quadripôles permet l'optimisation. Considérons par exemple la structure multibloc présentée sur la *figure II.38*. Toutes les couches ont une base carrée, le substrat DBC (direct bound copper) de 7.5 mm de côté est constitué de deux couches de cuivre (λ=380 $Wm^{-1}K^{-1}$) d'épaisseur 0.3 mm et d'une couche d'AlN (λ=170 $Wm^{-1}K^{-1}$) de 1 mm d'épaisseur. La puce de 5 mm de côté qu'on suppose isotherme dans le sens de l'épaisseur est modélisée par un flux surfacique uniforme imposé sur le DBC de 200 Wcm^{-2}. Le coefficient d'échange h est de 1000 Wm^2K^{-1}, la température du fluide de refroidissement de 0°C. Le diffuseur est en cuivre (λ=380$Wm^{-1}K^{-1}$).
La méthode des quadripôles permet d'écrire la relation entre toutes les conditions limites du système. Avec les notations définies précédemment :

$$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{m}^0\left[\boldsymbol{p}^{0\to1}\boldsymbol{u}^1 + \boldsymbol{p}^{0\to2}\boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{p}^{0\to3}\boldsymbol{m}^3\boldsymbol{m}^4\boldsymbol{m}^5\left[\boldsymbol{p}^{5\to6}\boldsymbol{u}^6 + \boldsymbol{p}^{5\to7}\boldsymbol{u}^7 + \boldsymbol{p}^{5\to8}\boldsymbol{m}^8\boldsymbol{u}^8\right]\right] \qquad \text{(II.75)}$$

où l'indice 0 est relatif au diffuseur, les indices 1 et 2 relatifs aux surfaces libres de la face supérieure du diffuseur, l'indice 3 relatif à la première couche de cuivre du DBC, l'indice 4 relatif à la couche l'AlN, l'indice 5 relatif à la deuxième couche de cuivre, les indices 6 et 8 relatifs aux deux surfaces libres sur la face supérieure de la deuxième couche de cuivre et l'indice 8 relatif à la puce. Si on suppose les surfaces libres isolées : $\phi_1 = \phi_2 = \phi_6 = \phi_7 = 0$ et un flux d'excitation sur la surface supérieure de la puce : $\phi_8 = -\phi_{exci}$.

Dans le cas où l'on souhaite optimiser l'épaisseur du diffuseur, la première ligne du système (II.75) peut s'écrire :

$$\left(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{A}_0/h\right)\boldsymbol{L}_8\boldsymbol{\phi}_{exci} = \left(\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{C}_0/h\right)\left[\boldsymbol{L}_1 \quad \boldsymbol{L}_2 \quad \boldsymbol{L}_6 \quad \boldsymbol{L}_7 \quad \boldsymbol{L}_8\right]\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_6\\ \theta_7\\ \theta_8\end{pmatrix} \tag{II.76}$$

où les $\boldsymbol{L}_i$ sont des matrices ne dépendant pas de l'épaisseur du diffuseur qui est uniquement présente dans les matrices $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$ et $\boldsymbol{C}_0$. La solution de ce système donne les températures en face avant. Nous constatons donc que la détermination de la température de la puce (fonction objectif du problème) en fonction de l'épaisseur du diffuseur nécessite de ne calculer qu'une seule fois les matrices $\boldsymbol{L}_i$. Ainsi l'optimisation de l'épaisseur du diffuseur est très rapide : à chaque pas de l'algorithme de minimisation, il suffit de réaliser deux produits matriciels et de résoudre un système linéaire. Le formalisme de la méthode des quadripôles est bien adapté à la réalisation d'optimisation ; en fonction des paramètres que l'on souhaite optimiser, un grand nombre de produits matriciels ne sont calculés qu'une seule fois, ce qui réduit considérablement le temps de calcul (rappelons que la réalisation de l'ensemble des produits matriciels est l'étape qui nécessite le plus de temps de calcul). Cette technique est facilement automatisable, un code performant destiné à l'optimisation des composants électroniques pourrait être réalisé assez simplement.

La méthode de minimisation que nous avons choisi est une méthode de type SQP « Sequential Quadratic Programming » (fonction *fmincon* [25] de Matlab®), sans prise en compte de valeur analytique pour le gradient de la fonction objectif puisque la méthode des quadripôles multiblocs ne le permet pas, du moins d'une façon simple.

Nous sommes ainsi en mesure de donner l'épaisseur optimale du diffuseur en fonction de ses dimensions latérales et la température maximale de puce correspondante (*figure II.39*). Nous avons également exécuté le calcul dans le cas d'un diffuseur monobloc avec le flux de la puce réparti uniformément à l'interface du DBC et du diffuseur.

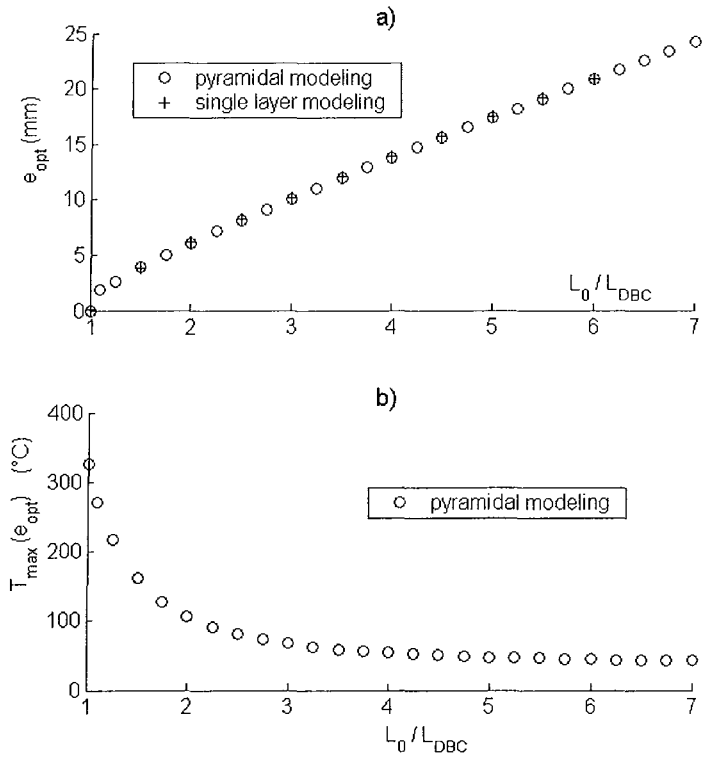


figure II.39 : a) épaisseur optimale en fonction de la dimension latérale du diffuseur, pour une modélisation multibloc et monobloc équivalente. b) température maximale de la puce pour une épaisseur optimale de diffuseur, modélisation multibloc.

Nous constatons sur cet exemple que le fait de remplacer l'ensemble puce-DBC par une condition limite de flux uniforme sur l'interface DBC/diffuseur change très peu l'épaisseur optimale du diffuseur en fonction de ses dimensions latérales (alors que la densité de flux exacte n'est pas uniforme : voir *figure II.40*). L'étude précédente et la détermination de l'épaisseur optimale peut donc bien se faire dans un certain nombre de cas en remplaçant le composant à refroidir par une condition de flux uniforme sur sa surface de contact avec le diffuseur. Bien sûr la température maximale de la puce est alors inconnue. La sensibilité de la température maximale de la puce aux dimensions latérales du diffuseur quand l'épaisseur est optimale (dérivée de courbe de *la figure II.39.b*) est importante aux faibles largeurs de diffuseur ; elle décroît ensuite jusqu'à la valeur nulle. La *figure II.39* permet le choix des dimensions du diffuseur en fonction d'une température de puce à ne pas dépasser dans le cas où toute la structure est modélisée (cas multibloc).

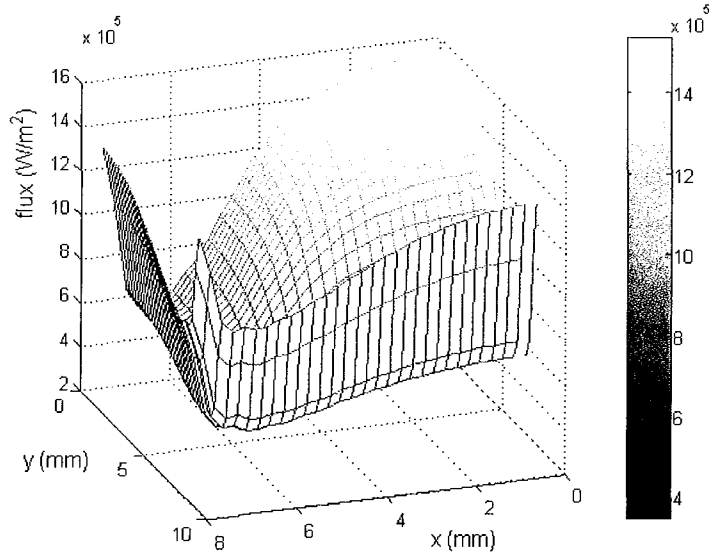


*figure II.40 : densité de flux sur la face inférieure du DBC pour L_0=2*Le*

On remarque sur la *figure II.40* que la densité de flux selon 0z sur la face inférieure du DBC n'est pas uniforme : elle est plus importante au centre car la puce est centrée sur ce bloc mais également aux endroits où le transfert bénéficie d'un caractère multidimensionnel important, c'est-à-dire au niveau du coin (transfert localement 3D) et des arrêtes (transfert localement 2D).

III.3 Conclusion

La conception optimale de diffuseurs thermiques pour l'électronique de puissance nécessite de connaître les conditions de fonctionnement (répartition de puissance dissipée, coefficient d'échange) ainsi que la géométrie et la structure interne du composant. A largeur de diffuseur fixée, il existe pour les conditions usuelles de fonctionnement une épaisseur optimale qui minimise la température maximale (ou moyenne) de la puce. Nous avons déterminé les limites d'existence de cet optimum : au delà d'un nombre de Biot relatif aux dimensions de la source de 1.3, mieux vaut ne pas utiliser de diffuseur. L'augmentation de la largeur du diffuseur permet de réduire la température de la source jusqu'à une certaine valeur limite que l'on peut relever sur les abaques dans le cas d'un diffuseur monocouche.

Une hypothèse de flux uniforme sur la semelle du composant permet au concepteur, en première approximation, de s'affranchir de la connaissance de la structure interne du composant et d'utiliser les abaques construites ici pour déterminer l'épaisseur optimale d'un diffuseur dont les dimensions latérales sont connues.

Notre méthode s'avère bien adaptée à l'optimisation thermique des composants de puissance en trois dimensions. Les temps de calculs très faibles qui lui sont associés permettent une optimisation qui ne nécessite pas un recours systématique à des modèles réduits dont l'utilisation peut conduire à certains biais.

IV. Conclusion du deuxième chapitre

Au cour de ce chapitre, nous avons appliqué la méthode des quadripôles à un module IGBT complexe pour évaluer ses performances et apporter des éléments de validation. Nous avons également proposé plusieurs modèles de radiateurs destinés à permettre le refroidissement de composants électroniques et cherché à optimiser la forme des diffuseurs utilisés classiquement en électronique pour épanouir les lignes de flux de la source de chaleur, généralement de petites dimensions, vers le radiateur. La méthode des quadripôles thermiques s'avère être tout à fait performante comme outil de modélisation pour optimiser les transferts thermiques dans les composants électroniques de puissance.

Nous avons également remarqué que la réalisation de simulations nécessite la connaissance précise des propriétés thermophysiques des matériaux utilisés ainsi que des différentes résistances de contact constituées par les soudures ou la graisse thermique. Nous allons ainsi commencer le prochain chapitre, qui est consacré à la caractérisation expérimentale des composants électroniques de puissance, par une étude visant à estimer la résistance de contact entre une couche de cuivre et une couche de silicium liées par une fine couche d'oxyde de silicium.

Bibliographie relative au deuxième chapitre

[1] Leturcq P., 1999, Techniques de l'ingénieur, Composants semi-conducteurs de puissance : caractères propres, D3100.

[2] Bernot F., 2000, Techniques de l'ingénieur, Composants de l'électronique de puissance, traité Électronique, E 3960.

[3] Leturcq P., 1999, Techniques de l'ingénieur, physique des semi-conducteurs de puissance, D3102.

[4] Azzopardi S., 1998, Contribution à la caractèrisation et à la modélisation de l'IGBT en vue d'une hybridation destinée à fonctionner à température élevée pour le véhicule électrique, Thèse de l'université de Bordeaux.

[5] Khatir Z., Lefebvre S., 2000, Thermal analysis of high power IGBT modules, 12th International Symposium on Power Semiconductor Devices, Toulouse.

[6] Dorkel J.M., Napieralski A., Leturcq P., Simon J.J., Picault R, 1989, La méthode des coefficients d'influence : son application à l'identification des paramètres thermiques d'une technologie d'assemblage hybride, 3ème Colloque sur la Thermique, l'Energie et l'Environnement, Perros-Guirec, Trégastel.

[7] Dorkel J.M., Napieralski A., Leturcq P., Monrani E., Picault R., Simon J.J., 1990, Conception thermique d'un commutateur hybride de puissance, EPF'90, pp. 109-114, Toulouse.

[8] Hamidi A., Coquery G., Lallemand R., Vales P., Dorkel J.M., 1998, Temperature measurments and thermal modeling of high power IGBT multichip modules for reliability investigations in traction applications, Microelectronics Reliability, 38, pp.1353-1359.

[9] Philippi I., Bendada A., Rémy B. and Maillet D., 1997, Thermal characterization of electronic boards, Proc. Eurotherm Semi. 58, Therm. Manage. Electron. Syst. III, Nantes, 24-26 September 1997, J. P. Bardon, E. Beyne and J. B. Saulnier, eds, Elsevier, pp. 246-253

[10] Coquery G., 1999, Reliability improvement of the soldering thermal fatigue with AlSiC technology on traction high power IGBT modules, Proc. Of EPE'99, Lausanne.

[11] Broussely M., 2000, Réduction de modèles thermiques par la théorie des réseaux, application à la surveillance d'une machine asynchrone par couplage d'un modèle thermique réduit avec schéma équivalent électrique, Thèse de l'Université de Poitiers.

[12] Maillet D., André S., Batsale J. C., Degiovanni A., Moyne C., 2000, Thermal Quadrupoles, Wiley ed., Chichester.

[13] Qu W., Mala G.M., Li D., 2000, Pressure-driven water flows in trapezoidal silicon microchannels, Int J. of Heat and Mass Transfer, 43, pp. 3925-3936.

[14] Choi S.B., Warrington R.R., 1991, Fluid Flow and Heat Transfer in Micro Tubes, ASME DSC 40, pp. 89-93.

[15] Le Person S., Favre-Marinet M., 2002, Des mini aux micro-canaux : Effets d'échelle sur les lois d'évolution des coefficients de frottement et d'échanges thermiques, actes du congrès SFT2002, Elsevier, pp. 59-64.

[16] Bendada A., Maillet D., Batsale J.C., Degiovanni A., 1998, Reconstruction of a non-uniform interface thermal resistance by inverse conduction, Inverse Problems in Engineering, vol. 6, pp. 79-123.

[17] Incropera F.P., 1999, Liquid cooling of electronic devices by single-phase convection, Eds. Wiley-Interscience.

[18] Kraus A.D., Bar-Cohen A., 1995, Design and analysis of heat sinks, Eds. Wiley-Interscience.

[19] Degiovanni A., Sinicki G., Gery A., Laurent M., 1984, Un modèle de résistance thermique de contact en régime permanent, Revue Générale de Thermique, n°267, pp.161-175.

[20] Negus, K.J., Yovanovich, M.M., and Beck, J.V., 1989, On the Non-Dimensionalization of Constriction Resistance for Semi-Infinite Heat Flux Tubes, ASME, JHT, 3, pp. 804-807.

[21] Yovanovich, Antonetti, 1988, Application of Thermal Contact Resistance Theory to Electronic Packages, Advances in thermal modeling of electronic components and systems, Vol 1, Eds. Hemisphere, New York, pp. 79-128.

[22] Song S., Lee S. and Au V., 1994, Closed-Form Equation for thermal Constriction/Spreading Resistances with Variable Resistance Boundary Condition, Proceedings of the 1994 International Electronics Packaging Conference, Atlanta, Georgia, pp. 111-121.

[23] Gatto V., 2002, Etude des phénomènes thermiques dans les composants électroniques de puissance et systèmes d'interconnexion associés en vue de leur implémentation dans l'environnement d'un moteur automobile, Thèse de l'Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes.

[24] Raël S., 1996, Méthodologie de conception des modules de puissance : étude électrothermique de l'association en parallèle, thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.

[25] Forsythe G. E., Malcolm M. A. and Moler C. B., 1976, Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice-Hall.

Troisième Chapitre

CARACTÉRISATION EXPÉRIMENTALE

Ce chapitre est consacré à la caractérisation expérimentale des composants électroniques de puissance (CEP). La première partie concerne l'estimation de résistances de contact, la seconde définit une procédure rigoureuse de mesure de température sur la surface supérieure des composants et la troisième vise à déterminer les champs de température et de densité de flux à l'intérieur des composants et/ou du radiateur à partir de la mesure en face avant.

I Caractérisation de résistances thermiques de contact

La simulation des systèmes électroniques de puissance nécessite de connaître d'une part les caractéristiques thermophysiques des matériaux employés et d'autre part les ordres de grandeur des résistances thermiques de contact entre les différentes couches. Le but de cette étude est de déterminer la résistance thermique de contact constituée par une couche d'oxyde de Silicium interfaçant une couche de silicium et une couche de cuivre. Nous avons caractérisé deux échantillons provenant du LEG (Laboratoire d'Electronique de Grenoble) par la méthode flash. Le cuivre ayant une émissivité très faible, nous avons préalablement fait recouvrir ces échantillons par une fine couche d'oxyde de titane (T_i-O-N) d'un micron d'épaisseur.

Le schéma indiquant la structure des échantillons est présenté sur la *figure III.1*.

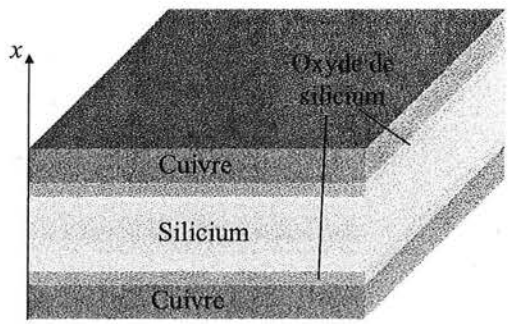


figure III.1 : schéma des échantillons

* n°27 : Cu 10 µm - SiO_2 0.05 µm - Si 500 µm - SiO_2 0.05 µm – Cu 10 µm
* n°45 : Cu 10 µm - SiO_2 0.5 µm - Si 500 µm - SiO_2 0.5 µm – Cu 10 µm

I.1 Dispositif expérimental

La méthode employée est la méthode « flash » [1] c'est-à-dire que la face avant des échantillons reçoit un flash lumineux dans le visible et la température est observée en fonction du temps sur la face arrière grâce à un détecteur photonique HgCdTe sensible dans l'infrarouge (bande de 8 à12 µm), voir *figure III.2*.

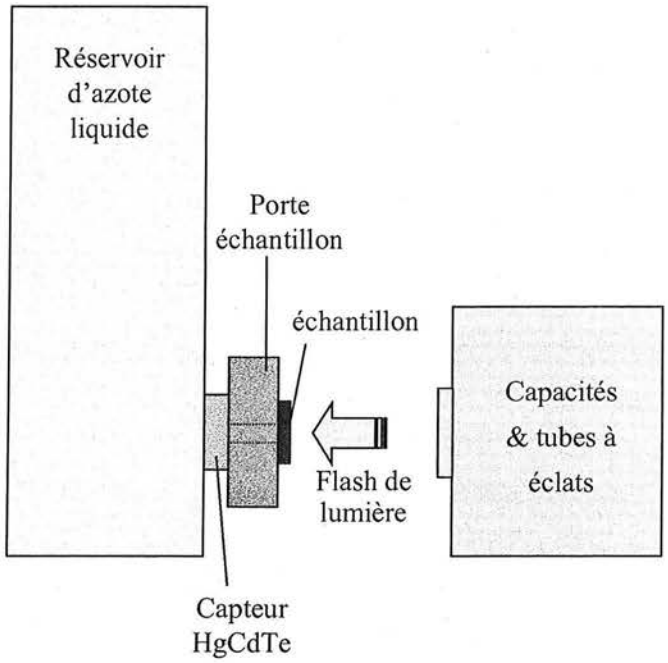


Figure III.2 : schéma de principe du dispositif expérimental

Une photo du porte échantillon vu de derrière est représenté sur la *figure III.3*.

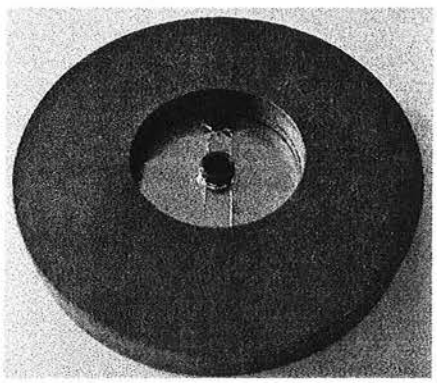
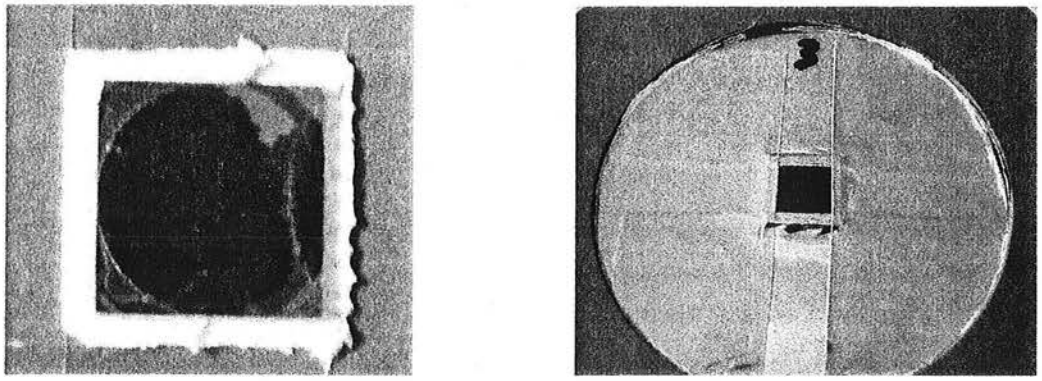


figure III.3 : porte échantillon vu de derrière

Un tube en cuivre est plaqué (avec un faible jeu) sur la face arrière de l'échantillon afin de servir de guide d'onde entre cette face et le détecteur. La face du porte-échantillon en vis à vis avec la fenêtre du détecteur est recouverte de papier d'aluminium de faible émissivité pour obtenir un signal de fond le plus faible possible et ainsi utiliser un gain d'amplification maximal. Les échantillons sont collés directement sur le porte échantillon avec du scotch double face dans un premier temps, puis recouverts partiellement de papier d'aluminium dans un deuxième temps pour empêcher le passage du flash entre l'échantillon et le porte-échantillon : *voir figure III.4*.



a) b)

figure III.4 : échantillon et porte-échantillon vu de devant. a) non recouvert de papier d'aluminium. b) recouvert partiellement de papier d'aluminium.

Sur la *figure III.4.a* nous pouvons également remarquer que le dépôt d'oxyde de titane a été partiellement détruit suite à un flash de très forte énergie.

I.2 Modélisation

I.2.1 Modèle direct

Les échantillons sont préalablement recouverts d'oxyde de titane par dépôt sous vide pour assurer une absorptivité correcte en face avant et une émissivité suffisante en face arrière. L'empilement est représenté sur *la figure III.5*. Le contact entre le cuivre et le silicium, via l'oxyde de silicium, est modélisé par une résistance de contact R_1.

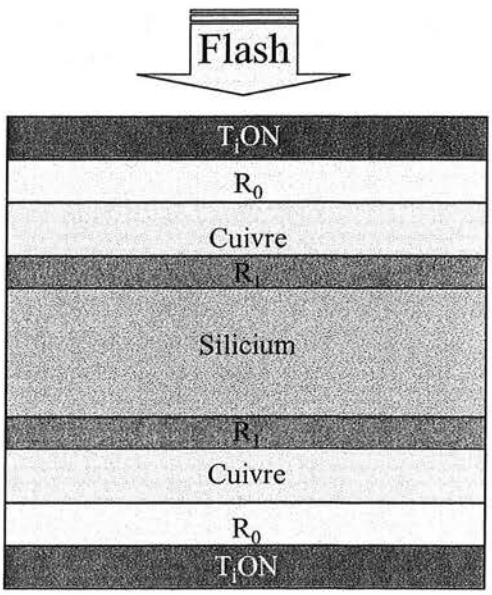


figure III.5 : empilement constituant les échantillons

Les caractéristiques des couches sont les suivantes :

* Oxyde de titane : 1 µm, conductivité de 10 $Wm^{-1}K^{-1}$, diffusivité de $4{,}2.10^{-6}$ m^2s^{-1}.

* Résistance de contact R_0 entre l'oxyde de titane et le cuivre : inconnue.
* Cuivre : 10 µm , conductivité de 380 $Wm^{-1}K^{-1}$, diffusivité de $10{,}6.10^{-5}$ m^2s^{-1}.
* Résistance de contact R_1 (contacts et oxyde de Silicium) inconnue, à déterminer.
*Silicium : 500 µm.

Nous considérerons deux couples de valeurs pour les propriétés thermophysiques du silicium. Une série de mesures par méthode flash effectuée dans le cadre d'un précédent contrat entre la SAT et le LEMTA a permis d'estimer expérimentalement une conductivité thermique à la température ambiante de **132** $Wm^{-1}K^{-1}$, et une diffusivité de $\mathbf{8{,}5.10^{-5}}$ m^2s^{-1} (pour une épaisseur de 3 mm). Selberherr et al. [2] ont déterminé une conductivité à température ambiante de **162** $Wm^{-1}K^{-1}$ et une diffusivité de $\mathbf{9{,}8.10^{-5}}$ m^2s^{-1}.

Compte tenu des temps de réponse caractéristiques de ces échantillons (quelques millisecondes), on ne modélise pas les pertes par convection ou conduction vers le porte échantillon. La relation quadripôlaire entrée/sortie s'écrit, à partir des transformées de Laplace de la température et de la densité de flux :

$$\begin{pmatrix}\theta_{av}\\ \phi_{av}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{Ti02} & B_{Ti02}\\ C_{Ti02} & A_{Ti02}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & R_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{cu} & B_{cu}\\ C_{cu} & A_{cu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & R_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{al} & B_{al}\\ C_{al} & A_{al}\end{pmatrix}$$
$$\cdots\begin{pmatrix}1 & R_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{cu} & B_{cu}\\ C_{cu} & A_{cu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & R_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{Ti02} & B_{Ti02}\\ C_{Ti02} & A_{Ti02}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_{ar}\\ \phi_{ar}=0\end{pmatrix} \qquad \text{(III.1)}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix}\theta_{av}\\ \phi_{av}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{eq} & B_{eq}\\ C_{eq} & A_{eq}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_{ar}\\ \phi_{ar}=0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta_{ar}=\frac{\phi_{av}}{C_{eq}} \qquad \text{(III.2)}$$

Après normalisation du thermogramme face arrière par la température adiabatique du système, on obtient :

$$T_\infty=\frac{\phi_{av}}{capacité\ \ du\ \ système}=\frac{\phi_{av}}{c_s} \qquad \text{(III.3)}$$

avec

$$c_s=\sum_i(\rho ce)_i$$

$$\theta^*_{ar}=L\left(T^*=\frac{T}{T_\infty}\right)=\frac{c_s}{C_{eq}} \qquad \text{(III.4)}$$

Nous disposons donc de l'expression de la température normalisée en face arrière.

I.2.2 Influence du dépôt d'oxyde de titane

Le dépôt d'oxyde de titane réalisé permet d'augmenter l'émissivité des surfaces mais introduit une résistance de contact inconnue. Il convient donc, soit de l'estimer, soit d'apporter la preuve que cette résistance, ou la sensibilité associée, est négligeable. La *figure III.6* représente les variations des sensibilités réduites ($\chi_\beta = \beta \frac{\partial T^*}{\partial \beta}$ avec $\beta = R_0, R_1$ ou λ_{Si}) à quelques paramètres en fonction du temps.

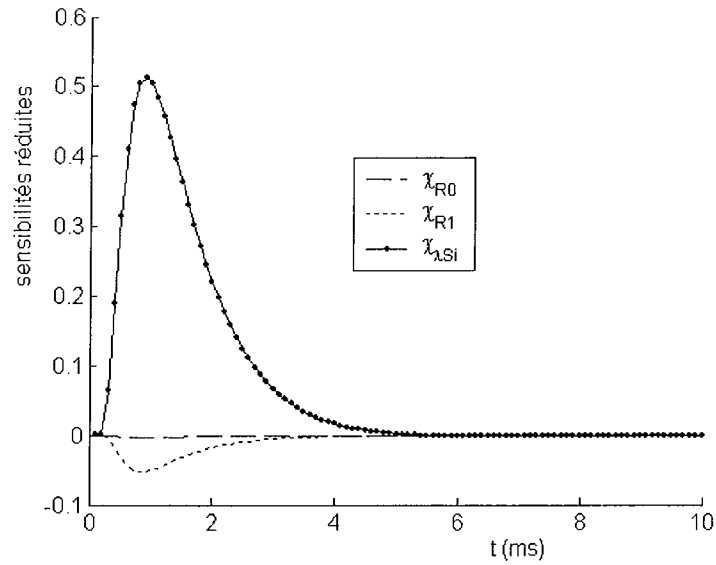


figure III.6 : sensibilités réduites aux résistances de contact R_0=10^{-6} °CW^{-1}, R_1=10^{-6} °CW^{-1}et à la conductivité du Silicium (λ_{Si} = 132 $Wm^{-1}K^{-1}$).

La sensibilité à la résistance R_0 introduite par le dépôt d'oxyde de titane est très faible (30 fois inférieure) devant celle à la résistance R_1. On peut penser, en outre, que la résistance R_0 qui modélise le contact entre l'oxyde de Titane et le cuivre est très inférieure à la résistance R_1 qui modélise la fine couche d'oxyde de silicium ainsi que les contacts entre celle-ci et le cuivre et le silicium. Pour toutes ces raisons, nous ferons l'hypothèse que la résistance R_0 est négligeable.
Nous remarquons que la sensibilité à la conductivité du silicium est très grande mais n'est pas exactement corrélée à la sensibilité à la résistance R_1 (les maxima des deux courbes ne sont pas situés exactement aux mêmes instants), ce qui laisse entrevoir la possibilité d'estimer ce paramètre en même temps que la résistance R_1.

I.2.3 Simulation de l'estimation

L'estimation de la résistance de contact R_1 et de la conductivité du silicium doit être réalisée par une méthode des moindres carrés non linéaire puisque le retour dans l'espace réel est effectué par une transformée inverse de Laplace numérique (Stehfest [4]).

Nous allons simuler un thermogramme en choisissant R_1=10^{-6} $KW^{-1}m^2$ et λ_{Si}=132 $Wm^{-1}K^{-1}$ puis lui ajouter un bruit de mesure gaussien de moyenne nulle, d'écart type 1% de la température maximale et mettre en œuvre après normalisation la procédure d'estimation pour retrouver les paramètres simulés. La capacité calorifique du silicium est considérée constante et égale à $1,59.10^6$ $Jm^{-3}K^{-1}$.

* Les thermogrammes simulés et estimés sans bruit ajouté sont présentés sur la *figure III.6.*

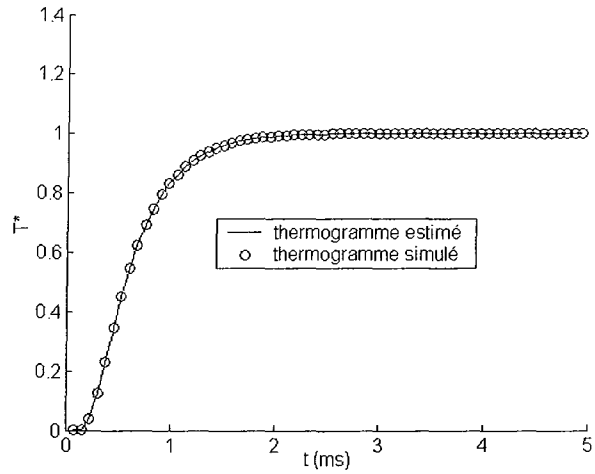


figure III.6 : thermogrammes simulés et estimés sans bruit ajouté

La résistance R_1 et la conductivité λ_{Si} estimées par la méthode des moindres carrés sont exactement (à la précision de l'ordinateur près) les paramètres simulés.

* Les thermogrammes simulés bruités avec un bruit gaussien de moyenne nulle d'écart type 1% de la valeur maximale de la température et recalculés sont présentés sur la *figure III.7.*

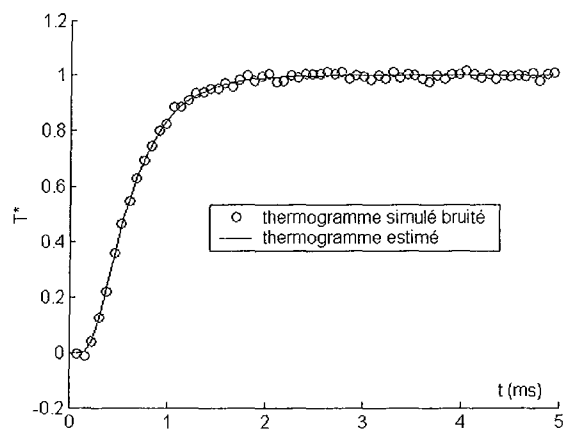


figure III.7 : thermogrammes simulés bruités et recalculés

Pour cette réalisation, la résistance estimée est de $9,86.10^{-7}$ KW^{-1} et la conductivité de 132,2 $Wm^{-1}K^{-1}$. La précision est donc supérieure à 2%.

Les principales sources d'erreurs seront donc :

* les incertitudes sur les propriétés thermophysiques des couches.
* le fait de négliger la résistance de contact entre l'oxyde de titane et le cuivre.
* la simplification du modèle (pas de perte, milieux strictement opaques)
* les conditions expérimentales.

I.3 Résultats expérimentaux

I.3.1 Première série de mesures

Cette série a été réalisée dans les conditions de la *figure III.4.a*, sans couverture d'aluminium, en utilisant une énergie de flash assez importante. Les thermogrammes bruts sont présentés sur la *figure III.8*.

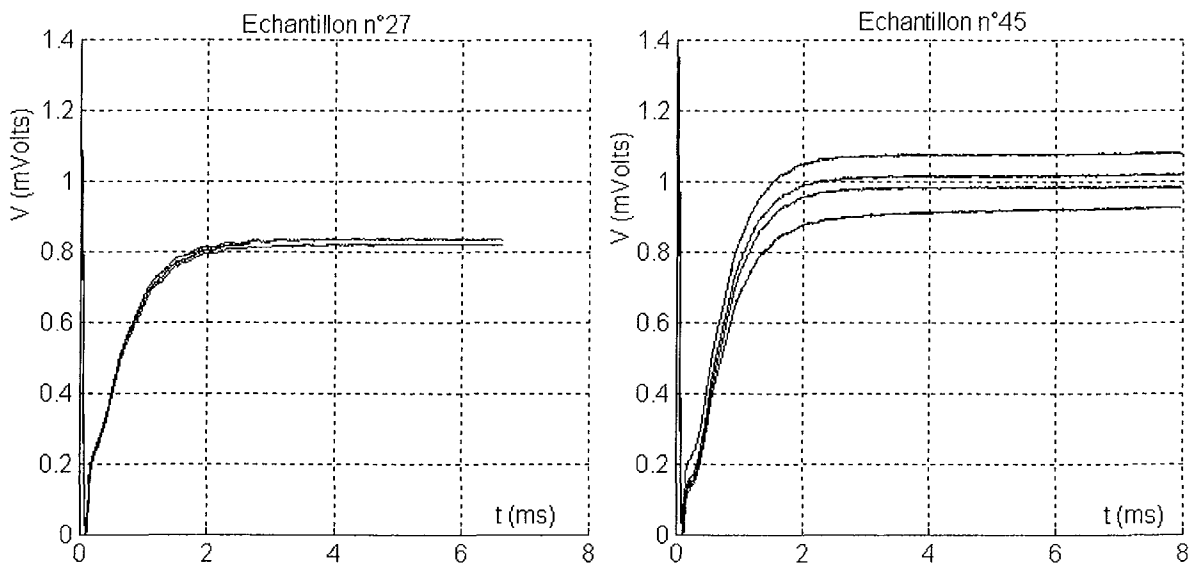


figure III.8 : première série de mesure : thermogrammes bruts.

Nous remarquons une oscillation des thermogrammes, particulièrement sur ceux relatifs à l'échantillon n°27, qui pourrait être due à une oscillation mécanique de l'échantillon à sa fréquence propre provoquée par l'excitation mécanique, conséquence de la forte dilatation de la face avant par rapport à la face arrière [5].

Nous remarquons également une petite « bosse » aux temps courts qui peut être due à plusieurs facteurs :

* un caractère semi-transparent des échantillons.
* un passage du flash entre l'échantillon et le porte échantillon qui exciterait directement la face arrière.
* une non instantanéité du flash (donnée à 0.1 ms).

* une double réflexion parasite du porte échantillon sur l'échantillon.

Afin d'essayer de répondre à cette question, nous avons réalisé une deuxième série de mesures en recouvrant partiellement l'échantillon d'aluminium (cas de la *figure III.4.b*) pour limiter le passage du flash directement vers la face arrière.

I.3.2 Deuxième série de mesures

Cette série à été réalisée avec les échantillons partiellement recouverts de feuilles d'aluminium (conditions de la *figure III.4.b*) et une intensité de flash assez importante. Les thermogrammes bruts sont présentés sur la *figure III.9*.

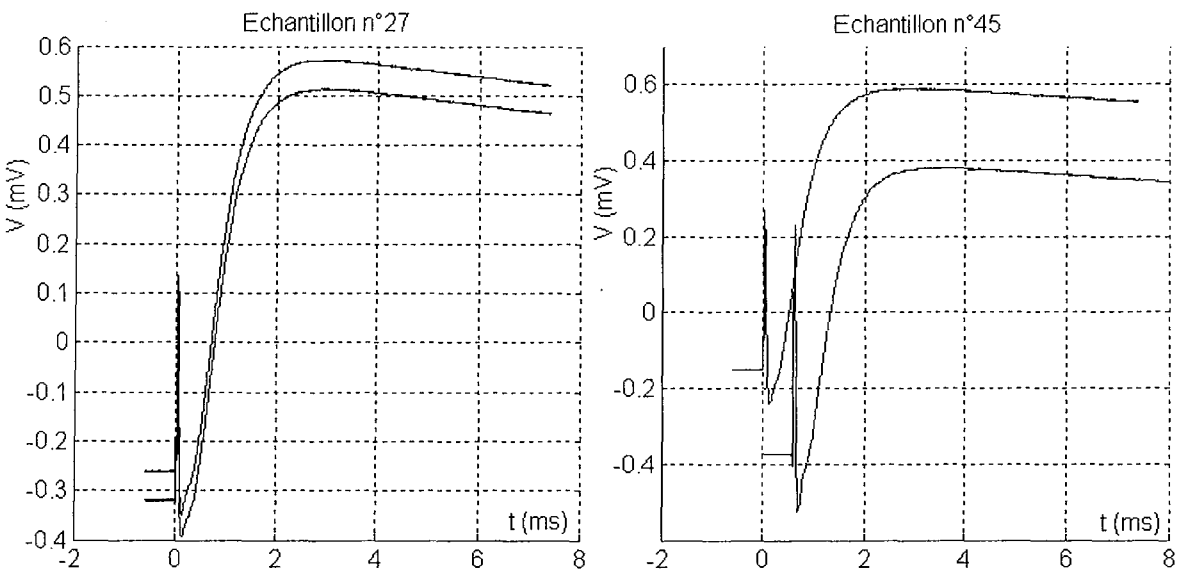


figure III.9 : deuxième série de mesure : thermogrammes bruts.

La couverture en aluminium introduit donc des effets 2D (principalement une excitation partielle de la face avant) et/ou des pertes importantes (effet d'ailette dans le plan des feuilles d'aluminium). Nous avons alors effectué une troisième série de mesures en utilisant une puissance de flash réduite afin de minimiser les perturbations électromagnétiques aux temps courts, et sans couverture pour conserver le caractère monodimensionel du transfert.

I.3.3 Troisième série de mesures

Les conditions d'expérience sont les mêmes que pour la première série (*figure III.4.a*) mais en utilisant un flash d'énergie plus réduite. Les thermogrammes bruts sont présentés sur la *figure III.10*.

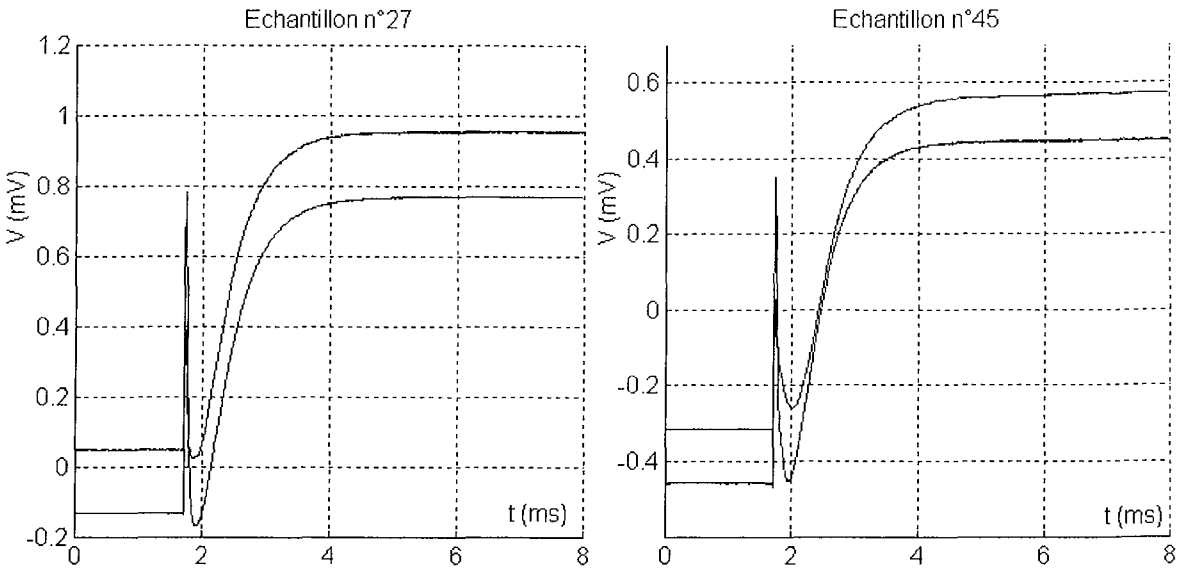


figure III.10 : troisième série de mesure : thermogrammes bruts.

Le début du thermogramme (après le flash) se situe parfois à un niveau inférieur au niveau de référence. On peut l'imputer à des perturbations électromagnétiques ou à un décalage intempestif de l'offset.

I.4 Exploitation des mesures

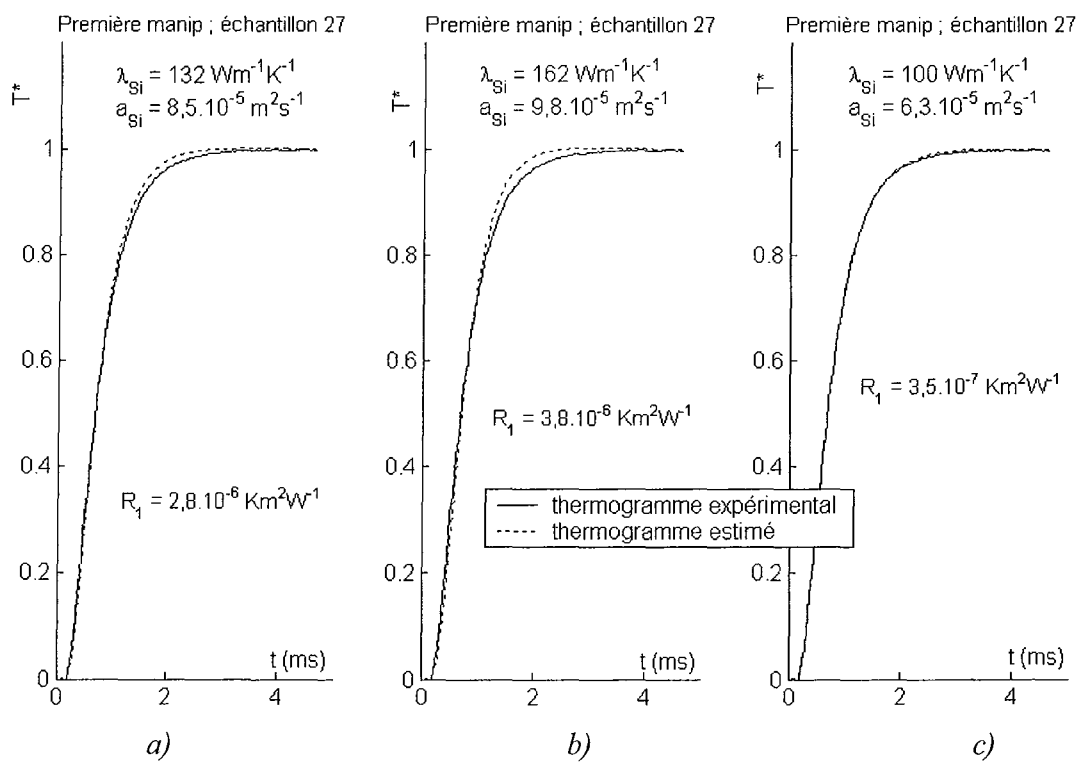
Alain Degiovanni [6] a démontré que lorsque la durée du flash n'était pas négligeable par rapport au temps de réponse de l'échantillon, la correction à réaliser revenait à choisir comme temps initial le barycentre du flash. Nous allons procéder ainsi en relevant également l'offset.
La série de manipulations n°3 constitue le meilleur compromis entre une dérive relativement faible et un passage du flash entre l'échantillon et le porte échantillon plutôt limité.

Pour chacun des deux échantillons, nous avons estimé la résistance de contact R_1 en considérant deux couples de propriétés thermophysiques pour le silicium, puis estimé la résistance R_1 en même temps que la conductivité du silicium en imposant $\rho c_{Si}=1{,}59.10^6$ $Jm^{-3}K^{-1}$ (le silicium n'est paramètré que par sa conductivité). Les résultats des estimations sont regroupés dans le *tableau III.1*.

R_1 (Km^2W^{-1})		Estimation du seul paramètre R_1		Estimation de R_1 et λ_{Si}	
		λ_{Si}=132 $Wm^{-1}K^{-1}$ a_{Si}=8.5 m^2s^{-1}	λ_{Si}=162 $Wm^{-1}K^{-1}$ a_{Si}=9.8 m^2s^{-1}	R_1	λ_{Si}
Manip 1	n°27	**$2{,}8.10^{-6}$**	**$3{,}8.10^{-6}$**	**$3{,}5.10^{-7}$**	**100**
	n°45	**$3{,}0.10^{-6}$**	**$4{,}1.10^{-6}$**	**$3{,}7.10^{-7}$**	**101**
Manip 2	n°27	**$2{,}4.10^{-6}$**	**$3{,}5.10^{-6}$**	**$2{,}5.10^{-7}$**	**99**
	n°45	**$2{,}6.10^{-6}$**	**$3{,}7.10^{-6}$**	**$2{,}6.10^{-7}$**	**98**

Tableau III.1 : résistance thermique estimée entre la couche de cuivre de la couche de silicium.

La reproductibilité semble donc correcte. Cependant la valeur absolue de la résistance calculée ici dépend assez fortement des caractéristiques thermophysiques du silicium. La conductivité du silicium estimée est assez différente des valeurs à température ambiante que l'on peut trouver dans la littérature. Les thermogrammes expérimentaux et recalculés pour la première manipulation relative à l'échantillon n°27 sont représentés sur la *figure III.11*.



a) *b)* *c)*

figure III.11 : thermogrammes expérimentaux adimensionnels et thermogrammes recalculés pour l'échantillon n°27. a) et b) λ_{Si} imposé, R_1 estimée. c) λ_{Si} et R_1 estimées.

Dans les deux premiers cas (*a)* et *b)*), les résidus sont corrélés, ce qui signifie qu'il subsiste une erreur dans le modèle ou que le type de silicium utilisé ici possède une conductivité l'ordre de celle estimée.

Bien que la couche d'oxyde de silicium soit 10 fois plus épaisse pour l'échantillon n°45, la résistance estimée est du même ordre de grandeur que pour l'échantillon n°27. Ceci est compréhensible car l'épaisseur de 0.5 µm de $Si0_2$ représente une résistance de l'ordre de 5.10^{-8} $KW^{-1}m^2$, valeur qui est de l'ordre de l'incertitude expérimentale. Toute la résistance de contact est due aux interfaces SiO_2/Si et SiO_2/Cu qui provoquent probablement des constrictions importantes dans cette couche de faible épaisseur.

Après coup, compte tenu de la rapidité des temps de réponses des échantillons, nous nous sommes posé la question d'une éventuelle influence du filtre passe-bas (4 ou 40 kHz) sélectionné pour l'amplificateur. Nous avons alors convolué le modèle par une fonction de transfert de type « Butterworth » ((III.5)), mais les conductivités estimées (dans le cas d'une fréquence de coupure à 4kHz) étaient également de l'ordre de 100 $Wm^{-1}K^{-1}$ et les résidus d'estimations encore plus mauvais. Le filtrage à 40 kHz n'a pas apporté de modifications significatives par rapport aux estimations présentées dans le *tableau III.1*.

$$H(p)=\frac{1}{1+p/w_c}\ ;\ w_c=2\pi F_c\ \ ;\ F_c=4000 \text{ ou } 40000 \text{ Hz} \qquad \text{(III.5)}$$

N.B. : cette convoluiton a été effectuée par le simple produit de la réponse (III.2) dans l'espace de Laplace par la fonction de transfert opérationnelle $H(p)$ dans laquelle F_c représente la fréquence de coupure du filtre.

I.5 Conclusion

Les résistances de contact mesurées dépendent fortement des caractéristiques thermophysiques choisies pour le silicium. Le modèle correspond à l'expérience (très faibles résidus) lorsque la conductivité et diffusivité du silicium sont choisies environ égales respectivement à 100 $Wm^{-1}K^{-1}$ et à $6{,}3.10^{-5}$ m^2s^{-1}. Dans ce cas, la résistance thermique de contact entre le cuivre et le silicium est de l'ordre de 3.10^{-7} $KW^{-1}m^2$. Compte tenu des incertitudes expérimentales, nous n'avons pas pu mettre en évidence la différence entre les échantillons 27 et 45. On peut légitimement s'interroger sur le type de silicium utilisé dans ces deux échantillons. Une expérience de caractérisation de ces substrats doit être réalisée avant de conclure définitivement. Remarquons que le caractère semi-transparent du silicium se traduit par une dépendance de la conductivité apparente à l'épaisseur de substrat considérée. En effet, les effets radiatifs liés à une semi-transparence conduisent plutôt à une surestimation de la diffusivité (qui inclus alors une contribution radiative) ; ce n'est pas le cas ici.

Ceci souligne l'important travail de caractérisation des composants qu'il est nécessaire d'effectuer si l'on souhaite pouvoir simuler avec réalisme les transferts dans un module IGBT. La partie suivante de ce chapitre sera consacrée au problème de mesure de température en face avant d'un tel circuit.

II Mesure de température sur un module IGBT

Une première étape dans nos prospections pour caractériser expérimentalement les transferts thermiques en électronique de puissance est de définir une méthodologie rigoureuse de mesure de température sur les composants.

II.1 Les techniques existantes [7]

De nombreuses techniques ont déjà été employées pour déterminer les champs de température à la surface de composants électroniques. Ces champs sont caractérisés par de forts gradients sur des petites surfaces, et des variations très rapides au cours du temps ; il est donc nécessaire de développer des méthodologies adaptées.

II.2.1 Mesure électrique d'un paramètre thermosensible [8]

La méthode la plus couramment utilisée, parce que la plus simple d'utilisation, est basée sur une mesure électrique. Il s'agit de mesurer un paramètre électrique sensible à la température. Il existe plusieurs paramètres thermosensibles, le plus utilisé étant la chute de tension directe, c'est-à-dire la tension entre la source et le drain lorsqu'un faible courant constant traverse le transistor. Plus ce courant est important, plus la sensibilité de la tension à la température est importante, mais plus la puissance dissipée dans le transistor est grande également, ce qui a pour effet de modifier la température de la jonction, et plus la chute de tension d'origine ohmique est importante. Un bon compromis est un courant d'environ 10 mA/cm^2. Cette technique nécessite un étalonnage préliminaire du composant et donne la « température de jonction ». Son principal avantage est une assez grande facilité de mise en œuvre : il n'est pas nécessaire d'ouvrir le composant pour réaliser cette mesure, la mesure est non destructive. Sa principale limitation est de ne fournir une information que sur une « température de jonction », qui n'est pas rigoureusement la température moyenne de la jonction mais se situe entre la température maximale et la température moyenne. De plus, cette mesure ne peut être effectuée lorsque le transistor fonctionne, elle n'est possible que lors des phases de refroidissement.

II.2.2 Thermographie infrarouge [9]

La seconde méthode la plus utilisée en électronique de puissance est la thermographie infrarouge. Cette technique permet d'obtenir simplement le champ de température à la surface des composants, la principale difficulté étant de déterminer les émissivités associées aux différentes surfaces. Cette méthode est rapide, peu intrusive et sa résolution spatiale acceptable. La résolution spatiale minimale d ne peut dépasser la limite de diffraction :

$$d = \frac{0.5\lambda}{O.N.} \approx \lambda \qquad \text{(III.6)}$$

où *O.N.* est l'ouverture numérique du microscope infrarouge (0< *O.N.* <1) et où λ est la longueur d'onde du rayonnement considéré (3.5-5µm pour une caméra à ondes courtes). En pratique, la résolution spatiale ne peut dépasser environ 5 à 10 µm. Un inconvénient de cette méthode est la nécessité d'avoir accès à la surface du composant. Il faut donc extraire celui-ci de son boîtier : la méthode est destructive. Cette technique nécessite de connaître en outre les émissivités des différentes surfaces dont on souhaite mesurer la température. Il convient donc, soit de les déterminer expérimentalement au préalable, soit de recouvrir les surfaces d'une peinture ou d'un substrat dont l'émissivité est connue. Cette couche supplémentaire doit être non conductrice de l'électricité et assez fine pour que la température de sa surface extérieure soit très peu différente de la température de la surface du composant. Un facteur favorable, qui limite le caractère intrusif de cette mise en peinture en face avant, est que les échanges convecto-radiatifs sur la surface externe de la puce sont généralement assez faibles, l'essentiel de la puissance dissipée s'évacuant vers le puits de chaleur situé sur la face opposée du circuit.

II.2.3 Phosphorescence induite UV

Une autre technique permettant la mesure de température sur les composants de puissance est la phosphorescence induite UV. Une lumière ultra-violette excite les électrons d'atomes de phosphore, et les fait monter "plus haut" que l'orbitale correspondant à la transition "lente" qui produit la phosphorescence. Puis, les électrons se désexcitent, mais pas complètement. A force de chocs entre atomes, ils se désexcitent tout doucement, et atterrissent en douceur sur l'orbitale qui produit la phosphorescence. La transition entre cette orbitale et l'état fondamental de l'électron se fera lentement, avec émission de lumière. Plus les chocs entre les atomes sont importants (plus la température est élevée), plus la désexcitation est rapide. Le temps caractéristique d'évolution de l'intensité de phosphorescence permet donc d'estimer la température. Le dépôt de phosphore peut se trouver à l'extrémité d'une fibre optique comme c'est le cas pour l'instrument de mesure dont nous avons fait l'acquisition : il s'agit du « Luxtron » de la société « Luxtron corporation ». Cette technique permet une mesure ponctuelle (le diamètre des sondes est de 500 µm) avec un temps de réponse de l'ordre du quart de seconde. Les principales limitations de cette méthode sont son caractère ponctuel et sa faible résolution spatiale (conséquence du diamètre important de la sonde). De plus, cette méthode est intrusive puisqu'il faut amener la sonde au contact du composant et son temps de réponse est assez fort. Par contre, son utilisation couplée à la thermographie infrarouge permet de déterminer les émissivités des différentes surfaces du composant. L'utilisation de thermocouples n'est pas possible ici du fait des fortes perturbations électromagnétiques régnant au contact des puces.

II.2.4 Fluorescence [10,11]

Une lumière ultraviolette vient exciter un film constitué d'une substance fluorescente dont l'efficacité de fluorescence suit une loi de type exponentielle dépendant de la température. La durée de vie très brève de l'état excité (quelques nanosecondes suivant les substances utilisées) confère à cette méthode un temps de réponse très faible. La précision spatiale est quant à elle limitée par le critère de diffraction de la lumière émise, c'est-à-dire de l'ordre de 0.5 µm. La fluorescence et la phosphorescence se distinguent par le temps de l'émission lumineuse. Au contraire de la phosphorescence, la fluorescence ne dépends pas de l'interaction entre les atomes ou molécules et est beaucoup plus rapide. Cette méthode n'est cependant pas facile à mettre en œuvre. La loi d'émission dépend de paramètres variant en fonction du temps d'exposition au rayonnement UV, etc...

II.2.5 Cristaux liquides thermochromiques [12,13,14,15]

L'utilisation des cristaux liquides thermochromiques, dont la couleur dépend de la température, conduit également à de bons résultats. Une source de lumière blanche suffisamment stable, puissante, et débarrassée de sa composante infrarouge, irradie les cristaux liquides uniformément répartis sur la surface dont on souhaite mesurer la température. Il s'ensuit une réflexion de certaines couleurs en fonction de la température des cristaux et de l'angle d'observation. Le champ de température est alors obtenu par traitement d'image avec une bonne précision spatiale (inférieure à 1µm si la taille totale de l'image est raisonnable).
L'inconvénient majeur de cette technique est une mise en œuvre assez difficile ; c'est une méthode intrusive, les cristaux doivent être au contact de la surface. De plus, l'apport d'énergie par le faisceau lumineux d'excitation peut modifier sensiblement la température des cristaux.

II.2.6 Photoreflectomètrie [16,17]

Une variation de la température de surface d'un métal ou d'un semi-conducteur induit une variation de sa réflectivité. Un laser envoie un flux lumineux périodique en temps sur la surface dont on souhaite connaître la température et une photodiode capte le rayonnement réfléchi. On en déduit ainsi les variations de température. Cette méthode possède une sensibilité de l'ordre du milliKelvin, et une bande passante de l'ordre de 5MHz, ce qui est assez rapide. La précision spatiale est limitée par le critère de diffraction. Cependant, l'obtention d'une cartographie en température nécessite un balayage de la surface en question.

II.2.7 Microscopie à micro-ondes évanescentes [18,19,20]

Le principe de microscopie à micro-ondes évanescentes a été appliqué à la mesure de champs de température sur des composants électroniques notamment par Ciocan et al. Cette technique, qui consiste à analyser le champ électromagnétique au voisinage des surfaces (champ proche), permet d'obtenir des résolutions spatiales inférieures au critère de diffraction, de l'ordre de 0.5 à 1 µm. Cette technique est assez difficile à mettre en œuvre.

Compte tenu de l'expérience acquise par notre laboratoire dans le domaine de la mesure par thermographie infrarouge, l'association de cette technique et de la phosphorescence induite UV pour déterminer la carte des émissivités semble être un bon compromis. Dans un premier temps nous nous satisferons d'une précision spatiale de l'ordre de 40µm. Nous utiliserons également la technique de mesure électrique d'un paramètre thermosensible.

II.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental (voir *figure III.12*) est constitué d'un module IGBT-2 puces de marque « Toshiba », d'un dispositif d'alimentation électrique, d'un dispositif de refroidissement, d'un banc de mesure de température par thermographie infrarouge, par phosphorescence induite UV et par mesure électrique de la chute de tension directe. La partie électronique du dispositif expérimental a été réalisée par Stéphane Raël du GREEN (Groupe de Recherche en Electrotechnique et Electronique de Nancy)

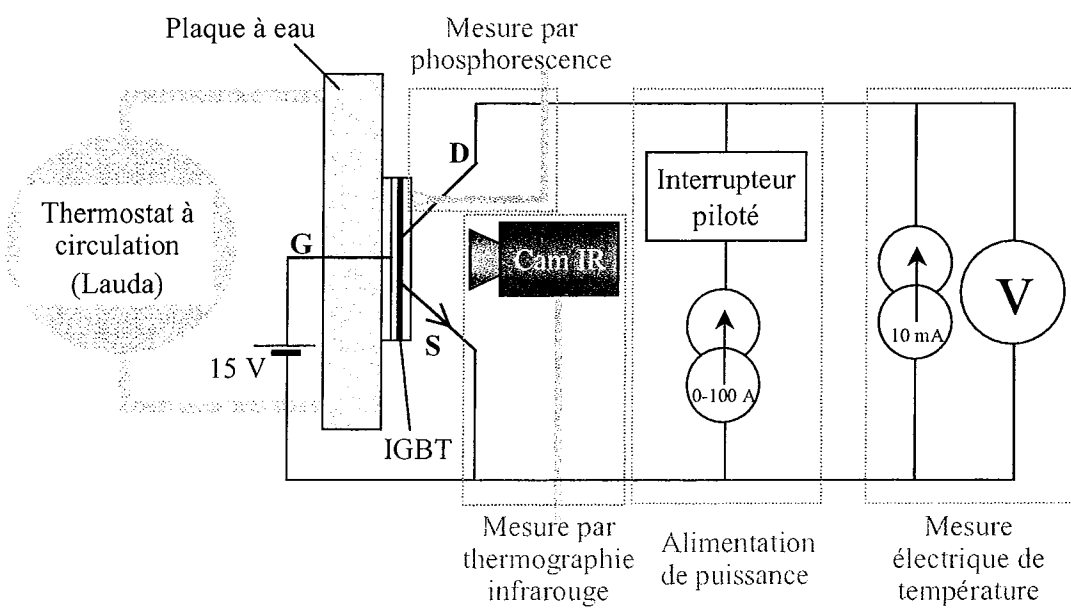


figure III.12 : schéma de principe du dispositif expérimental

II.2.1 Module IGBT Toshiba de référence : MG100J2YS50

Ce module IGBT, dont le schéma équivalent est représenté sur la *figure III.13*, est destiné particulièrement à des applications de contrôle de moteur électrique.

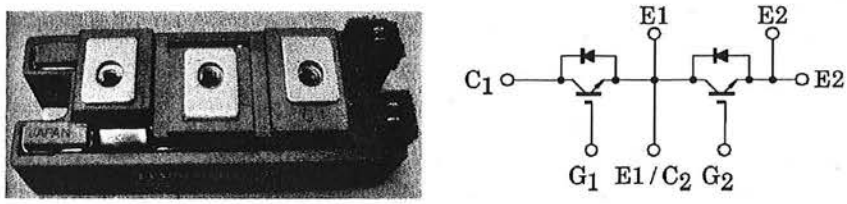


figure III.13 : photo et schéma équivalent du module IGBT

Ses caractéristiques sont représentées dans le *tableau III.2*.

MAXIMUM RATINGS (Ta = 25°C)

CHARACTERISTIC		SYMBOL	RATING	UNIT
Collector-Emitter Voltage		V_{CES}	600	V
Gate-Emitter Voltage		V_{GES}	±20	V
Collector Current	DC	I_C	100	A
	1ms	I_{CP}	200	
Forward Current	DC	I_F	100	A
	1ms	I_{FM}	200	
Collector Power Dissipation (Tc=25°C)		P_C	450	W
Junction Temperature		T_j	150	°C
Storage Temperature Range		T_{stg}	−40~125	°C
Isolation Voltage		V_{Isol}	2500 (AC 1 min.)	V
Screw Torque (Terminal / Mounting)		—	3 / 3	N·m

ELECTRICAL CHARACTERISTICS (Ta = 25°C)

CHARACTERISTIC		SYMBOL	TEST CONDITION	MIN.	TYP.	MAX.	UNIT
Gate Leakage Current		I_{GES}	V_{GE}=±20V, V_{CE}=0	—	—	±500	nA
Collector Cut-off Current		I_{CES}	V_{CE}=600V, V_{GE}=0	—	—	1.0	mA
Gate-Emitter Cut-off Voltage		$V_{GE(off)}$	I_C=10mA, V_{CE}=5V	5.0	7.0	8.0	V
Collector-Emitter Saturation Voltage		$V_{CE(sat)}$	I_C=100A, V_{GE}=15V	—	2.10	2.70	V
Input Capacitance		C_{ies}	V_{CE}=10V, V_{GE}=0, f=1MHz	—	9000	—	pF
Switching Time	Turn-on Delay Time	$t_{d(on)}$	Inductive Load V_{CC}=300V I_C=100A V_{GE}=±15V R_G=13Ω (Note 1)	—	0.08	0.16	μs
	Rise Time	t_r		—	0.12	0.24	
	Turn-on Time	t_{on}		—	0.40	0.80	
	Turn-off Delay Time	$t_{d(off)}$		—	0.20	0.40	
	Fall Time	t_f		—	0.15	0.30	
	Turn-off Time	t_{off}		—	0.50	1.00	
Forward Voltage		V_F	I_F=100A, V_{GE}=0	—	2.30	3.00	V
Reverse Recovery Time		t_{rr}	I_F=100A, V_{GE}=−10V di / dt=100A / μs	—	0.08	0.15	μs
Thermal Resistance		$R_{th(j-c)}$	Transistor Stage	—	—	0.28	°C / W
			Diode Stage	—	—	0.69	

tableau III.2 : caractéristiques du module

Le constructeur donne la résistance thermique équivalente du module (0.28 °CW^{-1}), mais on ignore les conditions de fonctionnement correspondantes. La résistance thermique équivalente, définie par la relation (III.7), est maximale lorsque les deux transistors dissipent simultanément.

$$R_{moy} = \frac{\varphi}{T_{puce}^{moy} - T_{semelle}^{moy}} \qquad \text{(III.7)}$$

où la température $T_{semelle}^{moy}$ est la température moyenne de la face de la semelle au contact avec le radiateur, où φ est le flux total dissipé par la puce et où T_{puce}^{moy} est la température de jonction de la puce.

La procédure d'ouverture du module, qui permet de le séparer de son boîtier est assez délicate, les pattes d'arrivée du courant sont assez fragiles et se décollent assez facilement de la couche d'isolant, entraînant ainsi une résistance thermique supplémentaire. Nous avons ainsi choisi d'observer la puce se trouvant le plus loin des pattes d'arrivée du courant, voir *figure III.14*. La couche de résine supérieure dans laquelle sont noyés les fils et arrivées de courant est assez difficile à usiner, le gel de silicone de passivation, qui sert à isoler électriquement les composants du boîtier et à éviter leur oxydation, a été dissous par du trichloréthylène.

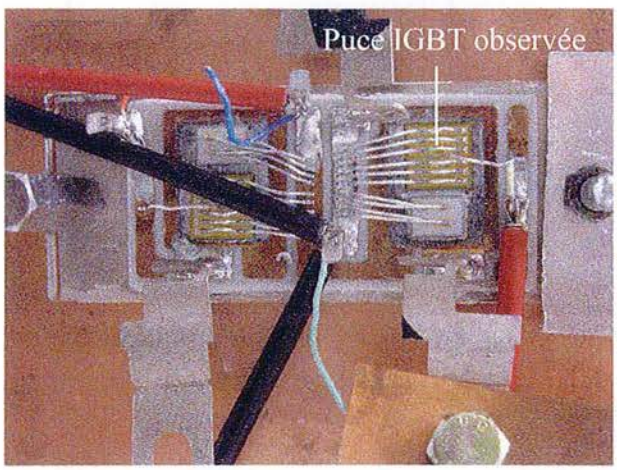


Figure III.14 : module désencapsulé sur le banc de mesure

Afin de pouvoir mesurer la température de jonction du transistor par la mesure de la chute de tension directe, nous avons étalonné cet IGBT en le plaçant dans un four. L'évolution de la température en fonction de la tension est représentée sur la *figure III.15*.

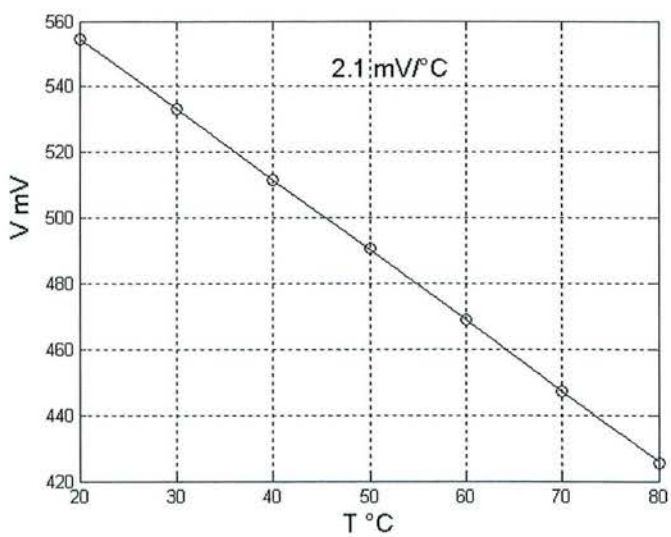


figure III.15 : tension V_{DS} (pour un courant de 10mA) en fonction de la température de jonction.

II.2.2 Dispositif d'alimentation électrique de puissance

Une alimentation classique (+15V) permet d'imposer la tension de grille et une alimentation de puissance (250 A max) stabilisée régulée en tension ou courant permet de faire fonctionner le transistor en générateur de courant. La caractéristique courant-tension de cette alimentation est représentée sur la *figure III.16.*

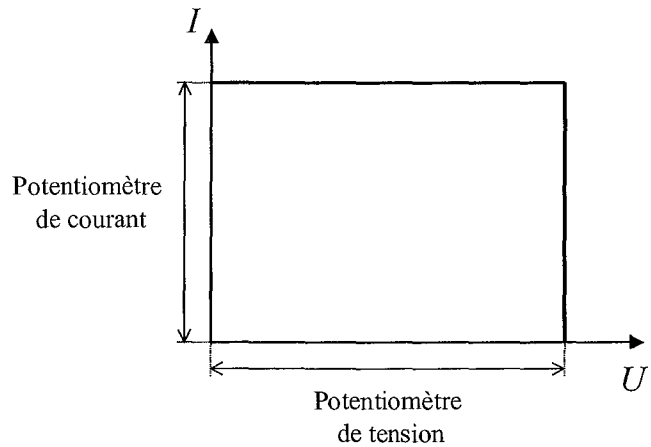


figure III.16 : caractéristique tension courant de l'alimentation de puissance

Le courant ou la tension aux bornes du transistor entre la source et le drain ne peuvent jamais dépasser les valeurs du courant ou de la tension définies par les potentiomètres.

Le circuit d'alimentation en puissance est ouvert et fermé par l'intermédiaire d'un interrupteur piloté par un générateur de fonctions. Cet interrupteur est lui-même réalisé à partir d'un module IGBT et permet d'ouvrir le circuit plus ou moins rapidement. Plus l'ouverture est rapide, plus les perturbations électromagnétiques dues aux impédances parasites sont importantes. Plus elle est lente, plus la mesure électrique de température par l'intermédiaire du paramètre thermosensible est faussée car la puce refroidit pendant la durée d'ouverture. Les temps caractéristiques relatifs aux transferts thermiques sont bien plus importants que les temps caractéristiques relatifs à ces phénomènes électriques : nous pourrons ici ouvrir le circuit avec « douceur », en 1 ms environ.

II.2.3 Dispositif de refroidissement

Le refroidissement est assuré par une plaque à eau, schématisée sur la *figure III.17.* Celle-ci est constituée d'un disque de cuivre de 15 mm d'épaisseur et de 200 mm de diamètre dont la face arrière est soumise à un échange convectif. La circulation d'eau est assurée par un thermostat à circulation de marque Lauda. La températures d'entrée de l'eau est régulée au centième de degrés près. Cette masse de cuivre constitue un puits thermique : nous pourrons considérer dans de nombreuses applications que sa température est uniforme. Des tiges filetées sont encastrées

dans ce diffuseur en cuivre permettant la fixation du module en son centre par l'intermédiaire de simples écrous. Ainsi le couple de serrage peu être contrôlé. L'entrée de l'eau se fait suivant deux tubes disposés à 60°. La plaque à eau est fixée au banc verticalement pour permettre l'utilisation de caméra infrarouge refroidie à azote liquide dont la position doit rester horizontale.

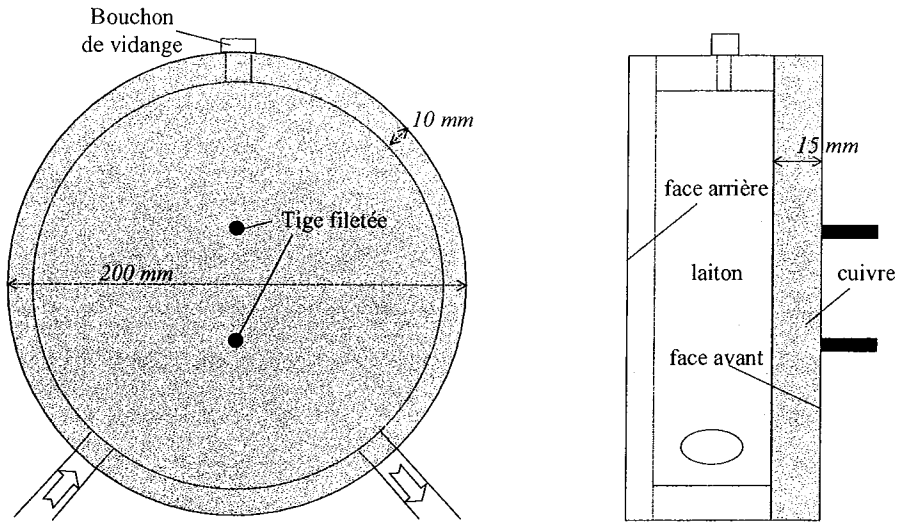


figure III.17 : schéma de la plaque à eau

II.2.4 Dispositif de mesure de température.

Une caméra I.R. à balayage ondes courtes (3.5-5µm) de marque Agema est utilisée actuellement. Afin d'obtenir une résolution suffisante, à partir des objectifs dont nous disposons, il est nécessaire d'utiliser des bagues allonges qui déforment sensiblement la géométrie sur les bords de l'image. Cette caméra donne en sortie un signal en unités arbitraires (Unités Isothermes U.I.). La courbe d'étalonnage relative au système caméra et objectif permet à partir de ces unités de déterminer la température apparente T^* de l'objet visé. Cette courbe d'étalonnage est de la forme suivante :

$$V = \frac{A}{\exp\left(\frac{B}{T^*}\right) - 1} \tag{III.8}$$

où A et B sont deux constantes à déterminer par un étalonnage.
L'étalonnage réalisé en utilisant un corps noir grande surface régulé en température donne le résultat présenté sur la *figure III.18*, pour un objectif de 20° et une bague allonge de 30mm.

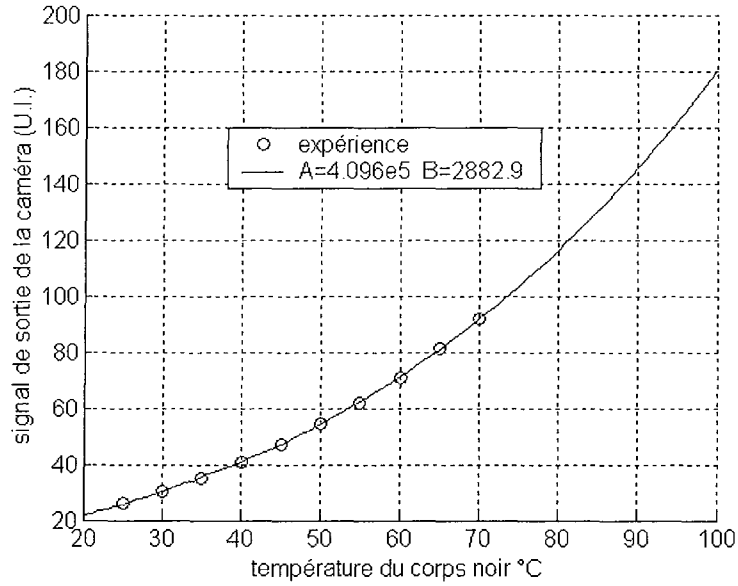


figure III.18 : Unités isothermes en fonction de la température du corps noir pour l'objectif de 20° et une bague allonge de 30mm.

Nous en déduisons par une méthode des moindres carrés les deux constantes A et B.

La fonction Ψ donnant la température apparente en fonction du signale de sortie de la caméra est ainsi déterminée :

$$T^* = \Psi(V) = \frac{B}{\ln\left(\frac{A}{V}+1\right)} \qquad \text{(III.9)}$$

Un appareil de mesure de température par phosphorescence induite UV (Luxtron) vient compléter la mesure par thermographie infrarouge. La sonde de diamètre 0.5 mm est fixée par l'intermédiaire d'un porte mine à une platine de déplacement 3D. Le porte mine est lui-même en liaison avec la platine par l'intermédiaire d'un ressort qui permet d'imposer un contact de pression reproductible.

II.3 Métrologie de température par thermographie infrarouge sur un IGBT

La principale difficulté associée à la mesure de température par thermographie infrarouge est de déterminer la carte des émissivités de la surface dont on souhaite mesurer la température. Comme le montre la *figure III.14*, la face supérieure d'un module IGBT est loin de posséder une émissivité uniforme. De plus, une difficulté supplémentaire provient du fait que la face supérieure de la puce est soumise à de nombreuses réflexions parasites, notamment de la part des fils d'alimentation. Nous allons néanmoins tenter de déterminer la carte des émissivités de la

surface supérieure du module en faisant l'hypothèse que ces réflexions sont indépendantes de la température de l'eau.
La procédure expérimentale d'estimation de l'émissivité de la face extérieure du module consiste à mesurer à l'aide de la caméra le rayonnement infrarouge provenant des différentes surfaces, tout en connaissant leur température absolue. La température du module est fixée par la température de l'eau circulant dans la boite à eau, qui peut varier de 0°C à 80°C, et qui est régulée théoriquement au centième de degrés près. Le paragraphe suivant consiste à vérifier que la température de la surface du module, soumise à la convection naturelle dans l'air, est bien uniforme. Nous proposerons ensuite deux modèles de rayonnement.

II.3.1 Hypothèses sur la température de la face avant

Si l'on néglige l'influence des fils d'amenée du courant, qui jouent le rôle d'ailettes, le nombre de Biot, défini comme le rapport de la résistance de convection naturelle et de la résistance interne entre l'eau et la surface du module, vaut :

$$B = hSR_s = 10\times10^{-4}\times0.3 = 3.10^{-4} \ll 0.1 \qquad \text{(III.10)}$$

où S est l'aire de la puce (1 cm^2), h le coefficient de convection naturelle dans l'air (10 $Wm^{-2}K^{-1}$) et R_s la résistance thermique équivalente au système module-radiateur (environs 0.3 KW^{-1}).
Ce nombre de Biot étant très petit devant l'unité, le fait de négliger l'influence des fils d'amenée du courant revient à considérer le module comme un petit corps à température uniforme égale à la température de l'eau.

Les douze fils en aluminium (λ=230$Wm^{-1}K^{-1}$) vont jouer le rôle d'ailettes et un modèle plus sophistiqué doit être mis en œuvre pour vérifier l'hypothèse d'uniformité de la température. Ce modèle peut être celui développé dans le deuxième chapitre (chap.**2**.II.1), mais nous pouvons faire plus simple [21]. Considérons en première approximation la géométrie de la *figure III.19* qui représente la cellule élémentaire d'étude. La puce et les douze fils soudés sur sa surface peuvent être représentés par douze de ces cellules mises en parallèle. La cellule est composée d'une ailette de longueur L cylindrique de diamètre d qui modélise un fil d'amenée du courant et d'une base de diamètre D dont l'aire vaut un douzième de l'aire de la puce. D=3.2 mm ; d=0.5 mm. On suppose également l'égalité des coefficients d'échanges: h_1=h_2=10$Wm^{-1}K^{-1}$

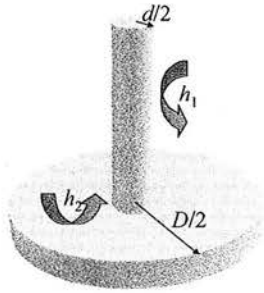


figure III.19 : cellule représentative

La méthode des quadripôles [21, page 239] permet de construire le schéma électrique équivalent : voir *figure III.20* :

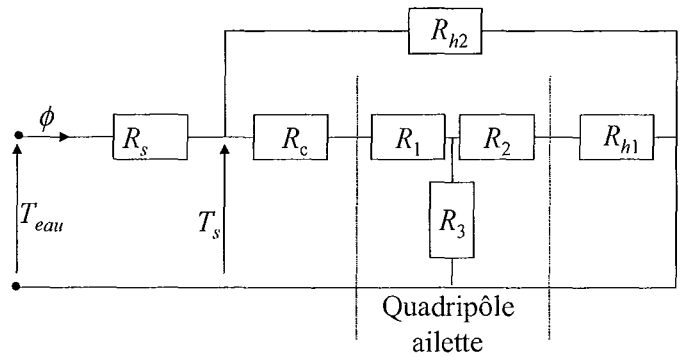


figure III.20 : réseau de résistances thermiques équivalent à la cellule

La résistance R_s représente le système module-radiateur, et est donc égale à douze fois la résistance du système car les cellules sont en parallèle :

$$R_s = 12\times0.3 = 3.6\ \mathrm{KW}^{-1} \tag{III.11}$$

La résistance R_c modélise la constriction des lignes de flux [21, page 240]:

$$R_c = \frac{16}{3\pi^2\lambda d}\left[1-1.288\frac{d}{D}+0.288\left(\frac{d}{D}\right)^{3.75}\right] = 4\ KW^{-1} \tag{III.12}$$

La résistance R_{h2} représente l'échange par convection sur la surface de l'anneau :

$$R_{h2} = \frac{4}{h_2\pi(D^2-d^2)} = 12750\ \mathrm{KW}^{-1} \tag{III.13}$$

Les résistances R_1, R_2, R_3 forment le quadripôle équivalent à l'ailette.

$$R_1 = R_2 = 2\frac{ch\left(\sqrt{4h_1/\lambda d}L\right)-1}{\pi\sqrt{\lambda h_1}d^{3/2}sh\left(\sqrt{4h_1/\lambda d}L\right)} \tag{III.14}$$

$$R_3 = \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda h_1}d^{3/2}sh\left(\sqrt{4h_1/\lambda d}L\right)} \tag{III.15}$$

Dans le cas le plus défavorable où les fils sont de longueur infinie :

$$R_1 = R_2 = 1100\ \mathrm{KW}^{-1} \quad ; \quad R_3 = 0\ \mathrm{KW}^{-1} \tag{III.16}$$

La résistance R_{h1} correspond à la résistance du bout de l'ailette. Cette résistance est donc nulle si les fils sont considérés de longueur infinie.
La résistance R_3 court-circuite la résistance R_2, donc le schéma de la *figure III.20* se réduit au schéma présenté sur la *figure III.21* :

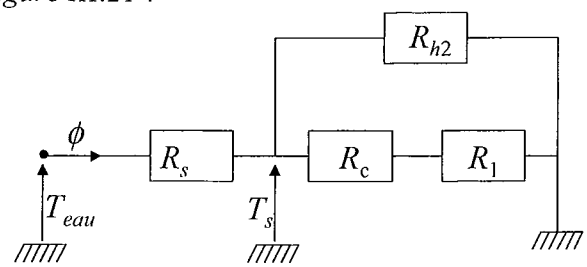


figure III.21 : réseau de résistances thermiques équivalent à la cellule dans le cas d'un fil infini

La résistance équivalente à la cellule est donc la suivante :

$$R_{eq} = R_s + \left[\frac{1}{R_{h2}} + \frac{1}{R_c + R_1}\right]^{-1} \tag{III.17}$$

Nous pouvons donc conclure :

$$\frac{T_s}{T_{eau}} = \frac{\left[\frac{1}{R_{h2}} + \frac{1}{R_c + R_1}\right]^{-1}}{\left[\frac{1}{R_{h2}} + \frac{1}{R_c + R_1}\right]^{-1} + R_s} = 0.9964 \tag{III.18}$$

où T_s est la température moyenne de surface de la puce.
Les fils entraînent donc au maximum (hypothèse de fils infinis) une baisse de 0.4% du niveau de température moyen de la face supérieure de la puce, c'est-à-dire une baisse de 0.24°C si l'eau est à 80°C et l'air à 20°C. Nous ferrons donc l'hypothèse que la température de la surface extérieure du module est uniforme et égale à la température de l'eau.

Vérifions de plus si les fils sont bien à la température supposée uniforme de la puce, c'est-à-dire celle de l'eau et de la surface extérieure de la puce. Soit L l'abscisse curviligne le long des fils toujours considérés de longueur infinie. D'après le modèle de l'ailette (avec une température d'air nulle) :

$$\frac{T(L)}{T(0)} = \mathrm{ch}(\alpha L) - \mathrm{sh}(\alpha L) = e^{-\alpha L} \tag{III.19}$$

avec

$$\alpha = \sqrt{\frac{h\pi d}{\lambda\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{4h}{\lambda d}} = \sqrt{\frac{4\times 10}{230\times 5.10^{-4}}} = 18.7\ \mathrm{m}^{-1} \qquad \text{(III.20)}$$

On en déduit la température le long des fils : voir *figure III.22.*

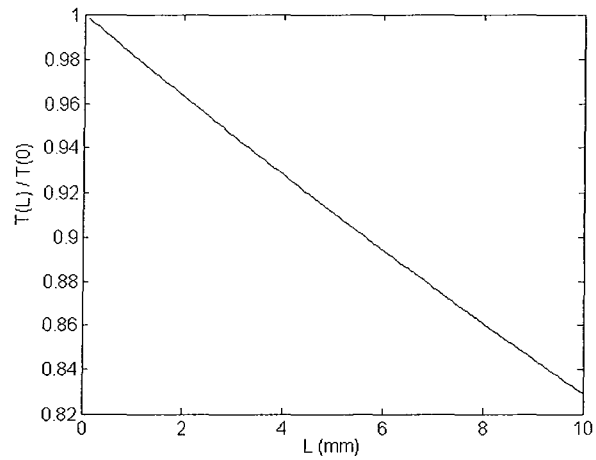


figure III.22 : rapport de la température à l'abscisse L et de la température à la base du fil

Donc, nous constatons que les fils ne sont pas rigoureusement à la température uniforme de l'eau. Au bout de 3mm de fil, l'écart est déjà de 6%.

En conclusion, lorsque le module est chauffé par une circulation d'eau, sa température de surface est quasiment uniforme et égale à la température de l'eau (hypothèse du petit corps). Nous avons par ailleurs vérifié ce résultat en mesurant expérimentalement la température de la surface de la puce avec le Luxtron (en quelques points) et par l'intermédiaire du paramètre thermosensible. Ces deux mesures donnent la température de l'eau à l'incertitude expérimentale près.

La température des fils n'est pas rigoureusement uniforme. Pour établir ce résultat, nous nous somme placé dans le cas le plus défavorable en considérant des fils de longueur infinie, ce qui n'est pas le cas en réalité.

II.3.2 Deux modèles de rayonnement

Afin d'estimer la carte des émissivités et ensuite d'estimer la carte des températures sur la surface extérieure du module, nous avons considéré deux modèles de rayonnement. Le premier présuppose que le milieu extérieur, qui se réfléchit partiellement sur la face avant du module, est un corps noir à la température ambiante uniforme. Le second présuppose que chaque pixel de la surface du module réfléchit le rayonnement infrarouge provenant d'un corps noir à la

température T_{eq}. Cette température équivalente d'environnement varie en fonction du pixel et est estimée en même temps que l'émissivité.
Les hypothèses communes aux deux modèles sont les suivantes :
* Les matériaux constituants la surface extérieure du module sont des corps gris dans la bande de la caméra (3-5µm).
* Le facteur de transmission de l'air est égal à un.
* La température de la surface du module et des fils, imposée par la température de l'eau de refroidissement, est uniforme.

II.3.2.1 Milieu ambiant vu comme un corps noir à température uniforme T_a

L'équation thermographique s'écrit selon ces hypothèses :

$$L^* = \varepsilon L^o(T) + (1-\varepsilon) L^o(T_a) \tag{III.21}$$

où L^* est la luminance apparente mesurée par la caméra.
Cette équation peut-être également écrite en terme de signal de sortie de la caméra :

$$V^* = \varepsilon V^o(T) + (1-\varepsilon) V^o(T_a) \tag{III.22}$$

car la sortie caméra est proportionnelle à la luminance reçue ou luminance apparente.
La courbe d'étalonnage de la caméra est la suivante :

$$V^o(T) = \frac{A}{\exp\left(\frac{B}{T}\right)-1} \quad \text{et} \quad V^o(T_a) = \frac{A}{\exp\left(\frac{B}{T_a}\right)-1} \tag{III.23}$$

La relation (III.22) constitue un problème d'estimation de paramètre linéaire. V^* est le signal expliqué et $V^o(T)$ la variable explicative. Nous allons pouvoir ainsi en déduire l'émissivité, pour chaque pixel, par une méthode des moindres carrés.

II.3.2.2 Milieu ambiant vu comme un corps noir à température non uniforme $T_{eq}(i,j)$

Compte tenu de la proximité de l'objectif et de l'échantillon, la portion d'espace occupée par l'objectif est assez importante. Or la luminance issue de l'objectif ne correspond pas à la luminance du corps noir à la température ambiante puisque la matrice de détecteurs est à la température de l'azote liquide (77 K). Il s'ensuit que le rayonnement réfléchi par la surface de l'échantillon est moins important dans les zones proches de l'objectif. Ce phénomène est appelé

effet Narcisse. Soit T_{eq} la température du corps noir équivalant au milieu environnant constitué de l'objectif et de la salle de manipulation considérée comme un paramètre supplémentaire. Cette température équivalente est celle du corps noir qui émet le rayonnement réfléchi par l'objet en direction de l'objectif. Elle dépend donc de la position.

L'équation thermographique devient :

$$L^* = \varepsilon L^o(T) + (1-\varepsilon) L^o(T_{eq}) \tag{III.24}$$

C'est à dire :

$$V^* = \varepsilon V^o(T) + (1-\varepsilon) V^o(T_{eq}) \tag{III.25}$$

Posons :

$$\beta = (1-\varepsilon) V^o(T_{eq}) \tag{III.26}$$

L'égalité (III.25) devient donc :

$$V^* = \varepsilon V^o(T) + \beta \tag{III.27}$$

Ce problème est un problème d'estimation de paramètres linéaire.
Pour chaque pixel, l'émissivité et la température équivalente d'environnement sont déterminées par la méthode des moindres carrés.

Estimation de l'erreur associée à l'estimation

Nous établissons ici le calcul des écart-types des émissivités et des températures équivalentes d'environnement qui peuvent être estimées par la méthode des moindres carrés linéaire.
Soit b le bruit sur le signal de la caméra supposé additif, d'écart type constant et non corrélé σ_V.
Soit N le nombre de niveaux de température d'eau considéré (nombre de réalisations) et X la matrice de sensibilité :

$$V^*_{\exp} = V^* + b \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} V^0(T_1) & 1 \\ V^0(T_2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ V^0(T_N) & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = (X^t X)^{-1} X^t \begin{pmatrix} V^*_{\exp}(T_1) \\ V^*_{\exp}(T_2) \\ \vdots \\ V^*_{\exp}(T_N) \end{pmatrix} \tag{III.28}$$

Un estimateur de l'écart type du bruit correspondant à ces hypothèses peut être obtenu grâce au calcul des résidus d'estimation, voir l'ouvrage de J.V.Beck [22] :

$$\hat{\sigma}_V = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(V^*_{\exp}(T_i) - V^*\left(\hat{\varepsilon},\hat{\beta},T_i\right)\right)^2}{N-2}} \tag{III.29}$$

De plus, la matrice de variance-covariance des estimations est la suivante :

$$\operatorname{cov}\begin{pmatrix}\hat{\varepsilon}\\ \hat{\beta}\end{pmatrix} = \hat{\sigma}_V^2\left(X'X\right)^{-1} = \frac{\hat{\sigma}_V^2}{N\sum_{i=1}^{N}\left(V^0(T_i)\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}V^0(T_i)\right)^2}\begin{pmatrix} N & -\sum_{i=1}^{N}V^0(T_i)\\ -\sum_{i=1}^{N}V^0(T_i) & \sum_{i=1}^{N}\left(V^0(T_i)\right)^2\end{pmatrix} \tag{III.30}$$

Nous pouvons donc en déduire les estimateurs des écarts types des deux paramètres estimés :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}} = \hat{\sigma}_V\left(\frac{N}{N\sum_{i=1}^{N}\left(V^0(T_i)\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}V^0(T_i)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_V\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(V^0(T_i)\right)^2}{N\sum_{i=1}^{N}\left(V^0(T_i)\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}V^0(T_i)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{III.31}$$

Déterminons maintenant l'écart type de la température d'environnement équivalente.
Par définition :

$$\beta = (1-\varepsilon)V^0\left(T_{eq}\right) \tag{III.32}$$

Notons e_x, l'erreur stochastique (aléa) sur la grandeur x et $\hat{x}$ sa valeur estimée (x sera sa valeur exacte).

Ainsi $\hat{\varepsilon} = e_\varepsilon + \varepsilon$ et $\hat{\beta} = e_\beta + \beta$ et $\hat{V}^0\left(T_{eq}\right) = V^0\left(T_{eq}\right) + e_{V^0(T_{eq})}$,

d'où
$$\hat{\beta} = \beta + e_\beta = (1-\varepsilon-e_\varepsilon)\left(V^0\left(T_{eq}\right) + e_{V^0(T_{eq})}\right) \tag{III.33}$$

donc
$$\beta + e_\beta = (1-\varepsilon)V^0\left(T_{eq}\right) - e_\varepsilon V^0\left(T_{eq}\right) + (1-\varepsilon)e_{V^0(T_{eq})} - e_\varepsilon e_{V^0(T_{eq})} \tag{III.34}$$

soit au premier ordre :
$$e_\beta = -e_\varepsilon V^0\left(T_{eq}\right) + (1-\varepsilon)e_{V^0(T_{eq})} \tag{III.35}$$

De plus, d'après la loi d'étalonnage supposée exacte :

$$\hat{V}^0\left(T_{eq}\right) = V^0\left(\hat{T}_{eq}\right) = A\exp\left(\frac{-B}{\hat{T}_{eq}}\right) = A\exp\left(\frac{-B}{T_{eq}\left(1+e_{\hat{T}_{eq}}/T_{eq}\right)}\right) \tag{III.36}$$

Soit, après linéarisation, au premier ordre :
$$\hat{V}^0\left(T_{eq}\right) = V^0\left(T_{eq}\right) + V^0\left(T_{eq}\right)\frac{B}{T_{eq}^2}e_{T_{eq}} \tag{III.37}$$

donc

$$e_{V^0(T_{eq})} = V^0(T_{eq})\frac{B}{T_{eq}^2}e_{T_{eq}} \tag{III.38}$$

La relation (III.35) conduit alors à :

$$e_\beta = -e_\varepsilon V^0(T_{eq}) + (1-\varepsilon)V^0(T_{eq})\frac{B}{T_{eq}^2}e_{T_{eq}} \tag{III.39}$$

c'est-à-dire :

$$e_\beta = -e_\varepsilon V^0(T_{eq}) + \beta\frac{B}{T_{eq}^2}e_{T_{eq}} \tag{III.40}$$

Donc,

$$e_{T_{eq}} = \frac{T_{eq}^2}{B\beta}\left(e_\varepsilon V^0(T_{eq}) + e_\beta\right) = \frac{T_{eq}^2}{B\beta}\begin{bmatrix} V^0(T_{eq}) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_\varepsilon \\ e_\beta\end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} e_\varepsilon \\ e_\beta\end{bmatrix} \tag{III.41}$$

Ainsi,

$$\sigma_{T_{eq}}^2 = G\,\mathrm{cov}\begin{pmatrix} e_\varepsilon \\ e_\beta\end{pmatrix}G^t = \sigma_V^2 G\left(X^t X\right)^{-1}G^t \tag{III.42}$$

Expression qui nous donne un estimateur de l'écart type de la température équivalente d'environnement. Tout calcul fait on obtient :

$$\hat{\sigma}_{T_{eq}} = \hat{\sigma}_V\frac{\hat{T}_{eq}^2}{B\hat{\beta}}\left(\frac{N\hat{\beta}^2\Big/(1-\hat{\varepsilon})^2 - 2\hat{\beta}\sum_{i=1}^{N}V^0(T_i)\Big/(1-\hat{\varepsilon}) + \sum_{i=1}^{N}\left(V^0(T_i)\right)^2}{N\sum_{i=1}^{N}\left(V^0(T_i)\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}V^0(T_i)\right)^2}\right)^{1/2} \tag{III.43}$$

II.4 Résultats expérimentaux

II.4.1 Cartes des émissivités

Nous avons fait varier la température de l'eau, de la température ambiante à la température de 80°C par pas de 10°C ($N = 7$). L'expérience est réalisée en utilisant plusieurs grossissements.

II.4.1.1 Grossissement moyen

L'objectif de 20° est associé à une bague allonge de 20mm. Ce grossissement nous donne une image de 18 mm de coté. Les sept images brutes obtenues qui vont être utilisées pour l'estimation de l'émissivité et de la température équivalente d'environnement sont représentées sur la *figure III.23.*

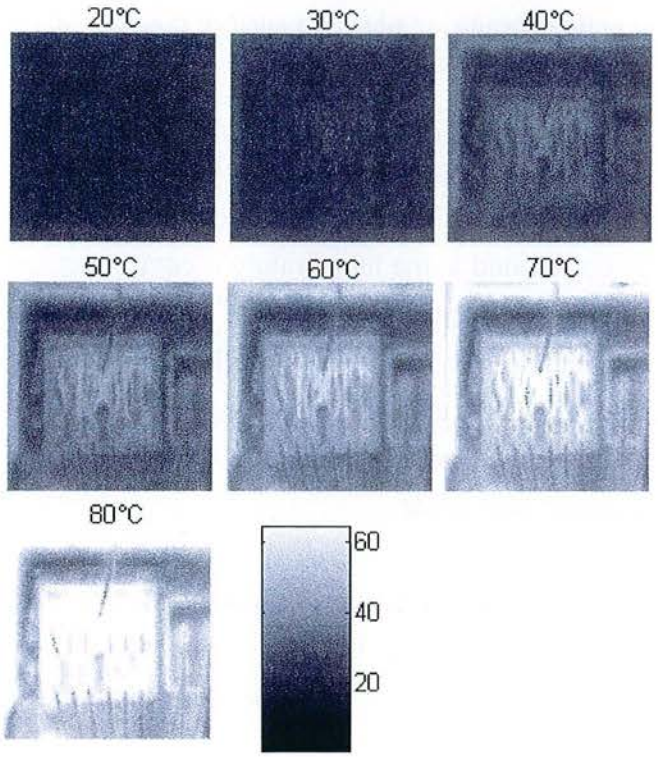
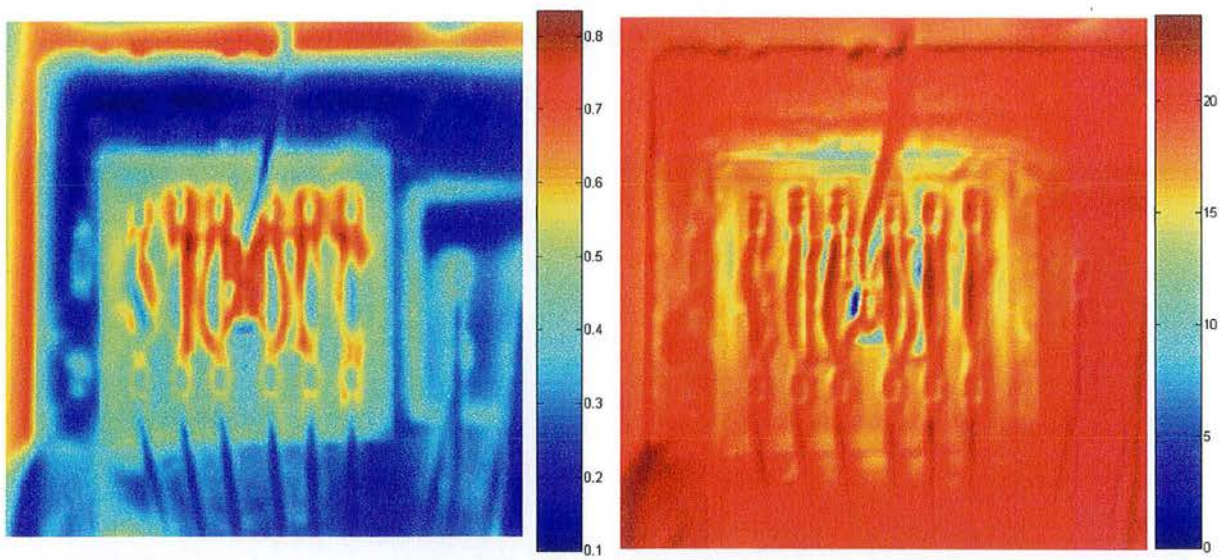


figure III.23 : Sortie caméra en U.I. , pour différentes températures, grossissement moyen .

Ceci nous permet de déterminer la carte des émissivités de la surface extérieure du module. La température de corps noir équivalente au milieu environnant ainsi que l'émissivité sont représentées en fonction de la position (du pixel) sur la *figure III.24.*



a) b)

figure III.24 : a) carte des émissivités
b) température de corps noir équivalente au milieu extérieur (°C)

Nous constatons que l'émissivité estimée entre les fils est importante. Ceci peut venir du fait qu'il subsiste à ce niveau un peu de gel de silicone ou provenir simplement d'une « rugosité

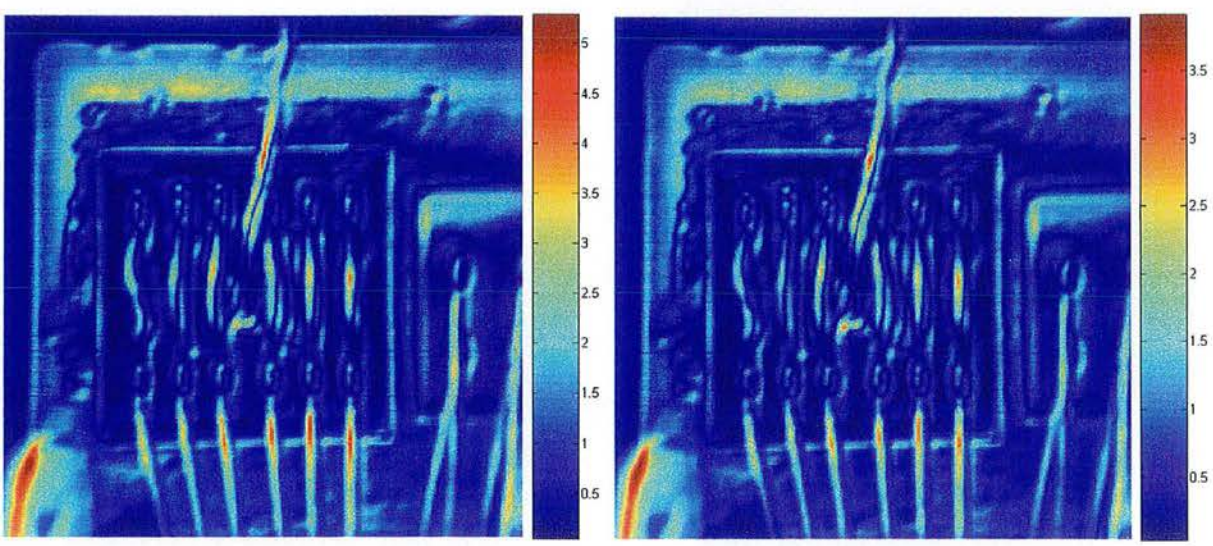
importante » créée par cette géométrie : plus une surface possède de creux et de bosses, plus elle est émissive.

La périphérie de la carte de température équivalente T_{eq} nous indique une température d'environnement « vue » uniforme à 20°C, valeur qui correspond à la température ambiante. Par contre la partie centrale correspond à une température d'environnement plus faible mettant ainsi en évidence l'effet Narcisse (le capteur est a 77K). Les fils en aluminium situés au centre correspondent à une température de 20°C, car ils réfléchissent un rayonnement provenant du milieu extérieur et non de l'objectif : cette réflexion est spéculaire. Seules les zones qui reçoivent le rayonnement provenant de l'objectif suivant une incidence normale correspondent à une température d 'environnement plus faible.

La *figure III.25.a* donne une estimation de l'écart-type du bruit sur le signal V^* à partir des résidus locaux quadratiques moyens en U.I. définis pour chaque pixel par (III.29) et la *figure III.25.b* donne une estimation du bruit sur la température apparente en °C définis comme ci-dessous :

$$\hat{\sigma}_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{7}\left(T_{\exp}\left(\hat{\varepsilon},\hat{\beta},A,B,V^*_{\exp}\left(T_i^{eau}\right)\right)-T_i^{eau}\right)^2}{5}} \qquad \text{(III.44)}$$

$\hat{\sigma}_T$ est une estimation de l'écart-type du bruit en température apparente (rigoureusement ce n'est exact que si la loi détalonnage est linéarisée et si le modèle utilisé correspond bien aux mesures)

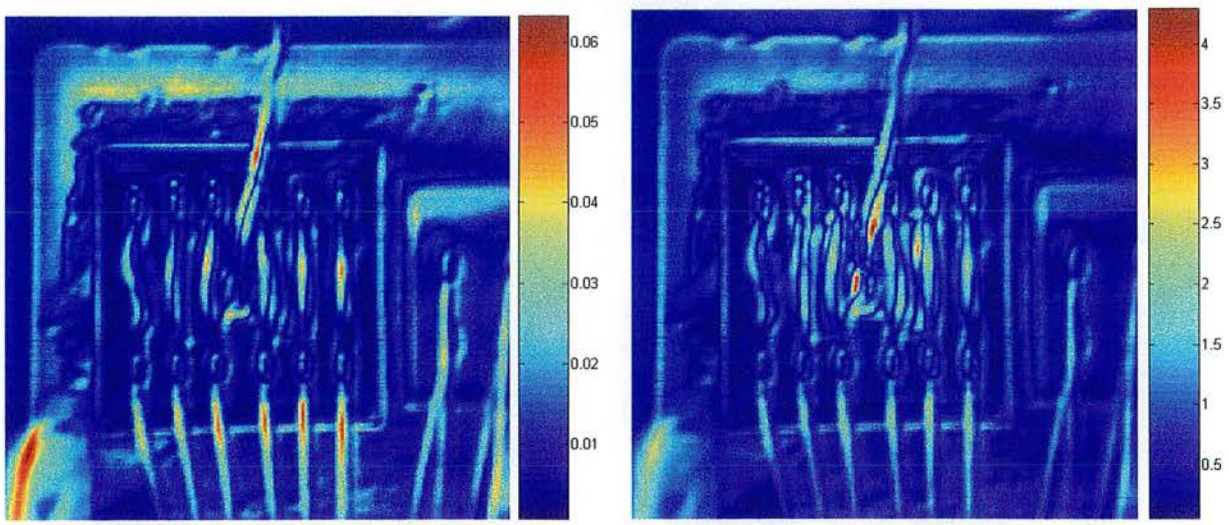


a) **b)**

figure III.25 : a) estimation de l'écart type du bruit (mesure+modèle) en U.I à partir des résidus b) estimation de type de l'écart type du bruit en température apparente (°C) à partir des résidus

L'écart type estimé du bruit est fonction du bruit de mesure et de la qualité du modèle. Le bruit de mesure est de l'ordre de $0.1/\sqrt{50} = 0.015\,°C$ car chaque réalisation est la moyenne de 50 images et le bruit de mesure associé à la caméra est de l'ordre de 0.1°C. Etant donné le faible niveau du bruit de mesure, la *figure III.25* correspond donc à une signature (en norme) du biais de modèle. Elle indique que ce biais est inférieur à 0.5°C sur la majeure partie de l'image, ce qui est très correct. Les zones sur lesquelles le modèle à température équivalente d'environnement est mis en défaut sont principalement les fils d'amenée du courant, la patte en cuivre en bas à gauche, et la zone en cuivre de très faible émissivité (≈0.1) au dessus de la puce. Ce modèle est trop simple pour prendre en compte les réflexions spéculaires au niveau des fils. L'environnement des fils est constitué de la salle, de l'objectif de la caméra mais également de la surface de la puce dont la température varie en fonction de la température de l'eau. De plus leur émissivité a été déterminée en considérant que leur température était uniforme, ce qui n'est pas rigoureusement vérifié (d'autant moins vérifié pour la patte en bas à gauche). Une troisième source d'erreur provient de la focalisation du détecteur de la caméra sur la surface de la puce et non sur les fils (effet de flou dû à une profondeur de champ insuffisante).

A partir de la *figure III.25.a* et des relations (III.31) et (III.43) nous pouvons estimer l'erreur sur l'émissivité et sur la température équivalente d'environnement, voir *figure III.26*. L'emissivité est estimée suivant une très bonne précision sur la majeure partie de l'image. L'erreur moyenne commise sur la température équivalente d'environnement est de 0.7°C, ce qui est tout à fait correct.



a) **b)**

figure III.26 : a) estimation de l'écart type de l'émissivité
b) estimation de l'écart type de la température équivalente d'environnement(°C).

II.4.1.2 Fort grossissement.

L'association de l'objectif de 20° et d'une bague allonge de 30mm nous permet d'obtenir une image de 12 mm de coté contenant 280×280 pixels, voir *figure III.27*. La résolution spatiale est

alors au mieux de 12/280 = 40 µm. Malheureusement, il existe une corrélation entre les différents pixels. Nous avons estimé que pour notre caméra Agema, deux pixels sont decorrélés s'ils sont distants d'au moins 4 pixels, ainsi la résolution spatiale serait ici de 0.16 mm environ. Une plus grande bague allonge peut améliorer la résolution jusqu'au critère de diffraction, mais des phénomènes de distorsion peuvent apparaître dans les coins de l'image et nous souhaitons, pour cette première approche, disposer de l'image de toute la puce IGBT.

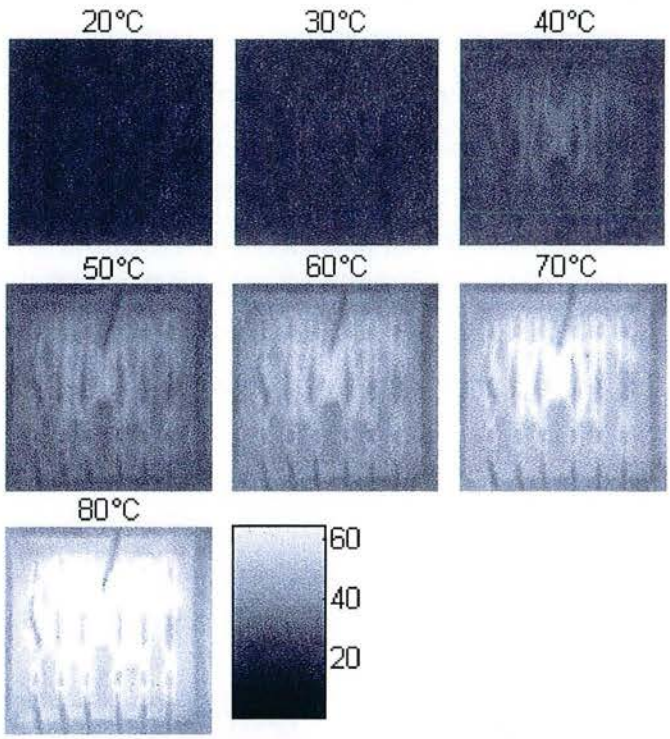


figure III.27 : signal caméra (U.I.) en fonction de la température de l'eau, fort grossissement

Le calcul des cartes d'émissivité et de température équivalente d'environnement conduit aux résultats présentés sur les *figures III.28* et *III.29*.

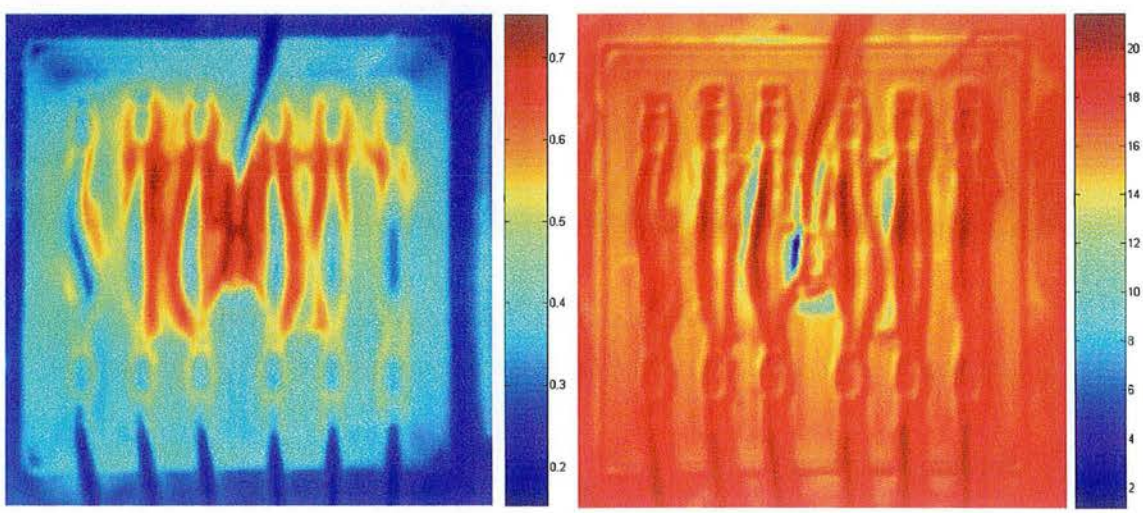


figure III.28 : carte des émissivités et températures équivalentes d'environnement

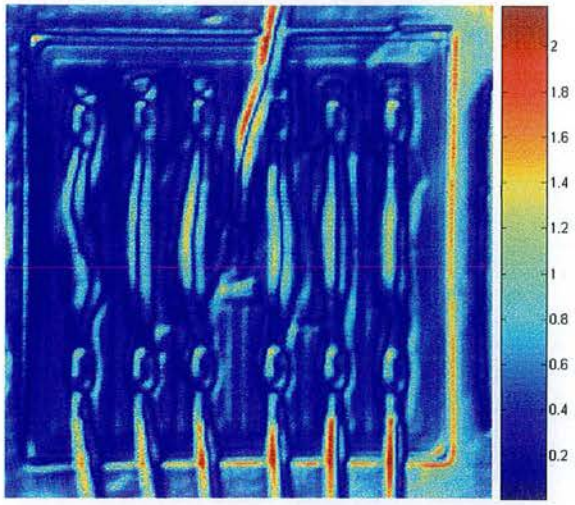


figure III.29 : estimation du bruit local(en température apparente(°C)) à partir des résidus

Nous constatons sur la *figure III.29* que le biais de modèle est maximum pour les positions situées juste en dessous des fils d'amenée du courant. Ces surfaces réfléchissent de façon spéculaire le rayonnement provenant de la salle mais également provenant des fils dont la température est proche de celle de l'eau. Notre modèle ne prend pas en compte cet environnement à température variable en fonction de la température de l'eau et il en résulte une erreur plus grande sur ces parties. Nous constatons également un erreur plus importante au niveau des coins droits de l'image, erreur qui peut être due à une distorsion du fait de l'utilisation de la bague allonge de 30mm.

II.4.1.3 Faible grossissement.

L'association de l'objectif de 20° et d'une bague allonge de 10mm nous permet d'obtenir une image de 30 mm de coté, voir *figure III.31*.

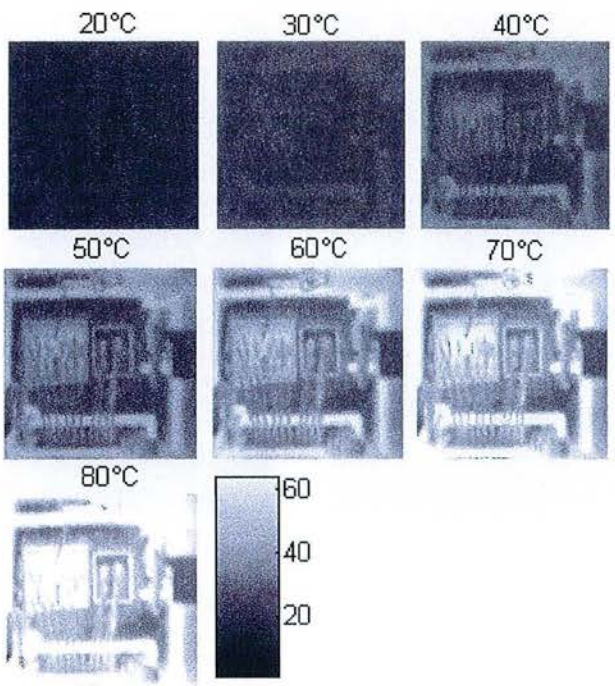


figure III.31 : signal de sortie caméra (U.I.) pour différentes températures

Les cartes des émissivités et de température équivalente d'environnement sont représentées sur la *figure III.32.*

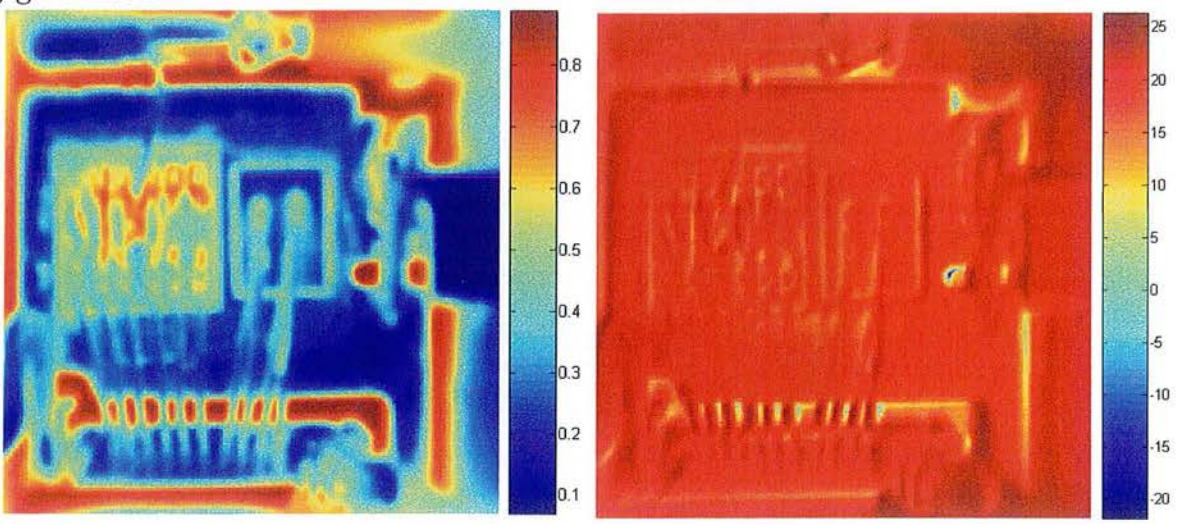
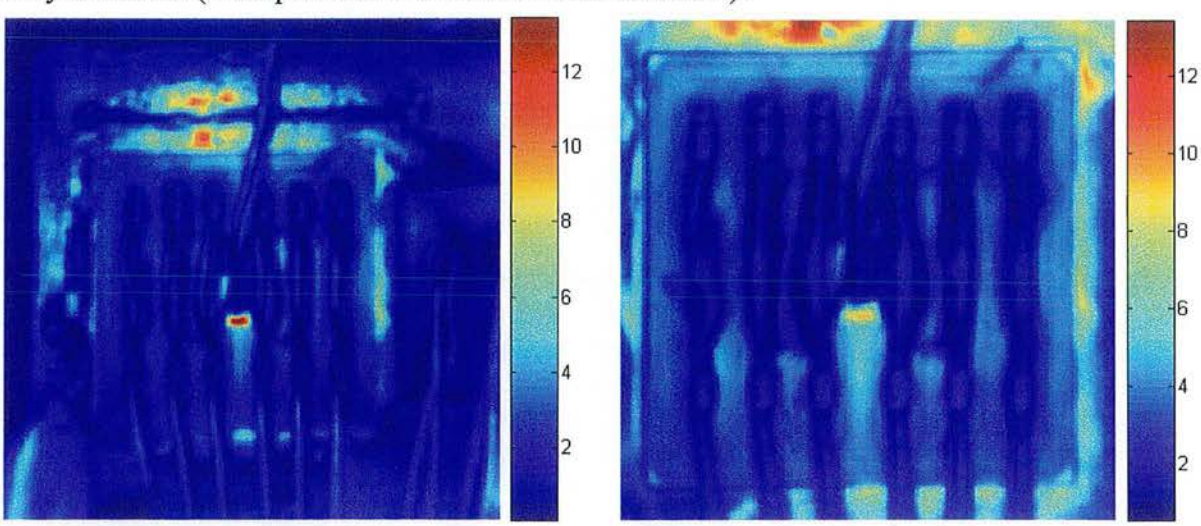


figure III.32 : carte des emissivités et température équivalente d'environnement (°C)

L'effet Narcisse a quasiment disparu puisque, pour ce faible grossissement, l'objectif est à plus de 30 cm de la puce. Les seules zones affectées sont les surface très peu diffusantes rigoureusement orthogonales aux capteurs.

II.4.14 Comparaison des deux modèles de rayonnement

L'objet de ce paragraphe est de comparer les résultats produits par les deux modèles de rayonnement, afin de justifier l'utilisation du modèle à température équivalente d'environnement variant en fonction de la position. Sur les *figures III.33.a* et *III.33.b* sont représentées les estimations de l'écart type du bruit (en °C) calculées à partir des résidus issus du premier modèle de rayonnement (à température d'environnement constante).



a) b)

figure III.33 : Estimations des écart-type du bruit en °C à partir du modèle de rayonnement à température d'environnement constante. a) grossissement moyen. b) fort grossissement.

Ces figures, qui constituent une signature du biais de modèle, sont à comparer respectivement avec les *figures III.25.b* et *III.29*. Nous constatons que le modèle simple, qui présuppose une température d'environnement constante est beaucoup moins performant que le modèle à température équivalente d'environnement variable en fonction de la position. Ceci étant d'autant plus vrai que l'émissivité est faible. En effet, plus l'émissivité est faible, plus la sensibilité à l'environnement est grande.

Pour le grossissement moyen, les biais de modèle moyens (moyenne sur les pixels) estimés sont de 1.6°C pour le modèle à température d'environnement constante et de 0.6°C pour le modèle à température équivalente d'environnement variable. Ces biais moyens sont de 3°C et de 0.4°C pour le fort grossissement. Nous remarquons ici l'effet Narcisse : plus l'objectif est proche de la puce, plus le modèle à température d'environnement constante est biaisé.
La *figure III.34* présente le résidus quadratique moyen par image ((III.45)), en fonction de la température de l'eau, pour les deux modèles et les deux grossissements :

$$r(T_{eau}) = \sqrt{\frac{\sum_{pixels}\left(V^{*}_{\exp} - V^{*}_{recalculé}\left(\hat{\varepsilon},\hat{\beta},T_{eau}\right)\right)^{2}}{nombre\ de\ pixels}} \qquad \text{(III.45)}$$

Il s'agit d'une estimation de l'évolution de la dispersion moyenne de l'ajustement avec la température de l'eau. Cette figure est un indicateur de la qualité de l'ajustement :

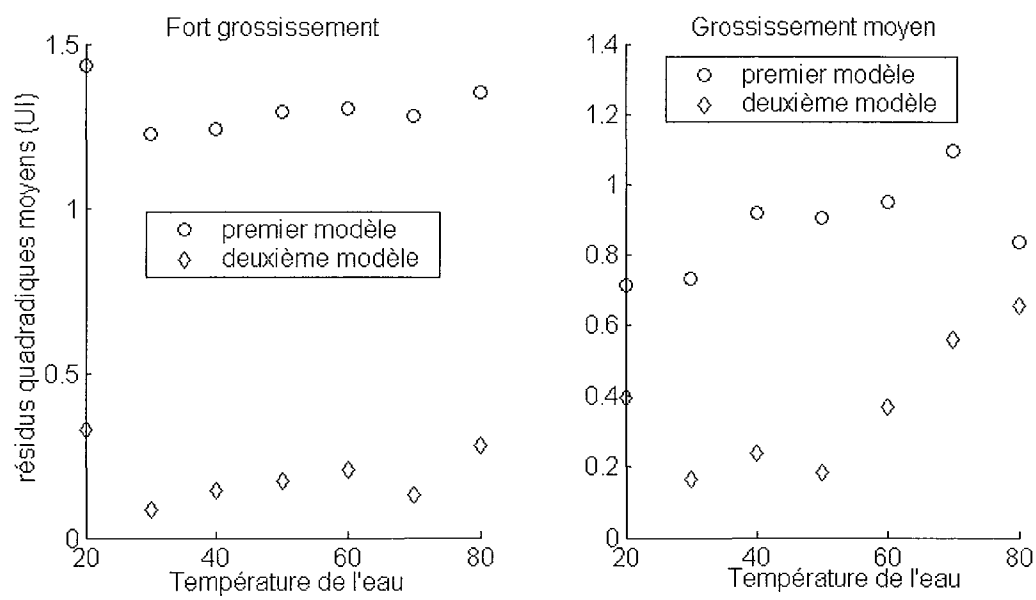


figure III.34: résidus d'estimation quadratique moyen en fonction de la température de l'eau

L'ajustement est bien sûr de meilleur qualité pour le modèle à température équivalente d'environnement variable puisque l'on estime deux paramètres (la pente et l'ordonnée à l'origine) au lieu d'un paramètre (la pente) pour le modèle à température d'environnement constante.

II.4.2 Mesure de température en régime permanent et excitation électrique

Pour chaque essai, la température de l'eau est imposée à 20°C. La puissance totale dissipée dans la puce est calculée en multipliant l'intensité la parcourant par la tension à ses bornes. Les champs de température mesurés sont représentés sur la *figure III.35*.

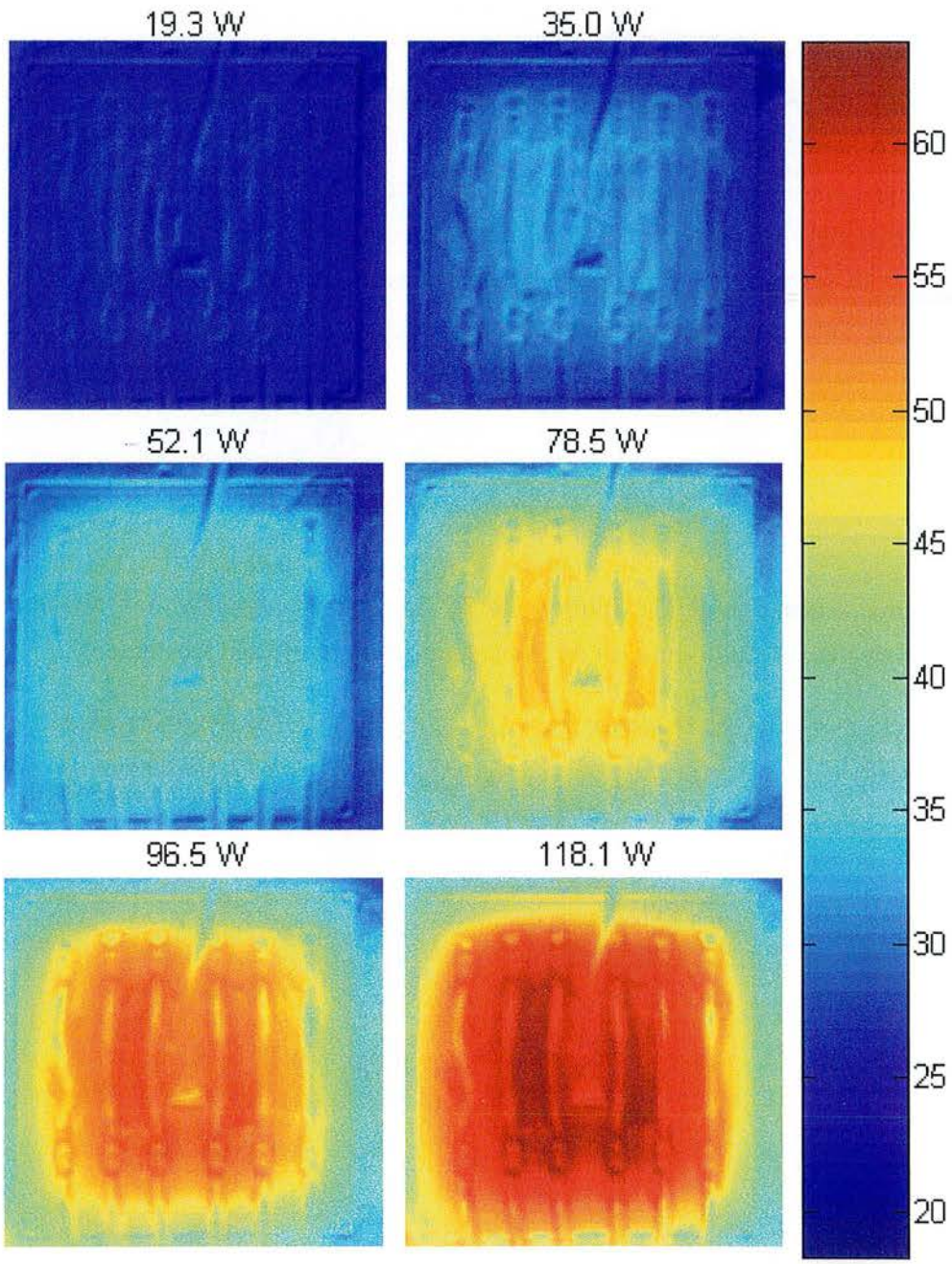


figure III.35: champs de température (°C) sur la puce pour plusieurs puissances électriques dissipées

Pour la puissance dissipée de 120W, le gradient de température sur la puce est supérieur à 4°Cmm^{-1}. Ces valeurs de gradient de température dans le plan sur la puce chauffée sont parfaitement cohérentes avec les gradients simulés sur le même type de structure (*figure II.13*)

Nous pouvons ainsi tracer les températures maximale et moyenne de la puce en fonction de la puissance dissipée et les convertir en résistance thermique équivalente au module et au système de refroidissement, voir *figure III.36.*

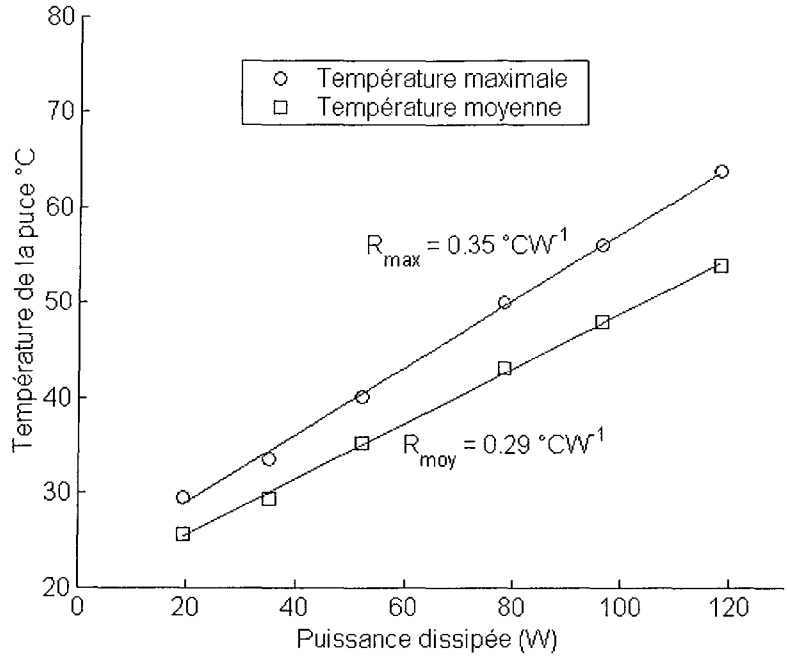


figure III.36 : température de la puce en fonction de la puissance dissipée

La résistance thermique équivalente du système est donc déterminée : elle vaut 0.352 °CW^{-1} relativement à la température maximale et 0.294 °CW^{-1} relativement à la température moyenne de la puce. Ces valeurs de résistance sont valables uniquement lorsque une seule puce IGBT dissipe de la puissance. Si l'on fait l'hypothèse que la face de la plaque à eau au contact de l'eau est imposée à la température de l'eau (coefficient d'échange infini), sa résistance équivalente vaut 0.097 °CW^{-1} (cette résistance conductive additionelle, sans résistance de contact a été calculée par la méthode des quadripôles 3D). La résistance équivalente du module lorsqu'une seule puce IGBT fonctionne serait donc de 0.294-0.097= 0.2°CW^{-1}. Le constructeur donne une résistance équivalente de 0.28 °CW^{-1}, mais ne précise pas dans quelles conditions de fonctionnement. La résistance du module seul, relative à la température maximale, ne peut pas être calculée car rigoureusement cette définition de résistance n'entraîne pas les propriétés d'additivité.

II.4.3 Mesure en régime transitoire

Nous avons fait fonctionner la puce IGBT en lui faisant dissiper une puissance crête de 170 W en créneaux dont la période est de 50s. La mesure de température peut être effectuée de façon continue par thermographie infrarouge et pendant les phases de refroidissement par mesure électrique. L'évolution de la température moyenne de la face supérieure de la puce mesurée par

thermographie est présentée sur la *figure III.37* Le calcul de la température moyenne a été réalisée en omettant les pixels relatifs aux fils.

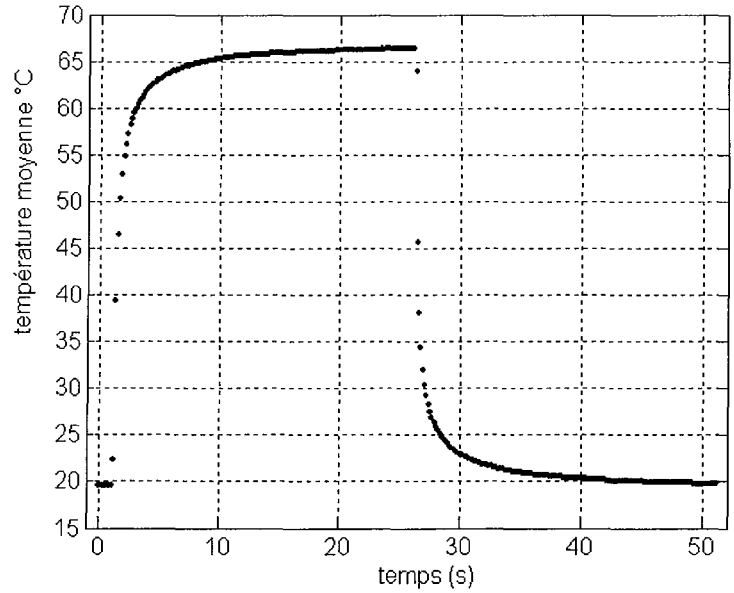


figure III.37 : température moyenne de la puce en réponse à un échelon de puissance de 170 W suivit d'une relaxation.

Nous remarquons la très grande rapidité des régimes transitoires : la puce atteint 80% de sa température maximale en une seconde. La puce, et le module dans son ensemble, sont donc soumis à des chocs thermiques très importants.

Une comparaison des mesures par thermographie et par l'intermédiaire du paramètre électrique thermosensible est montrée sur la *figure III.38*.

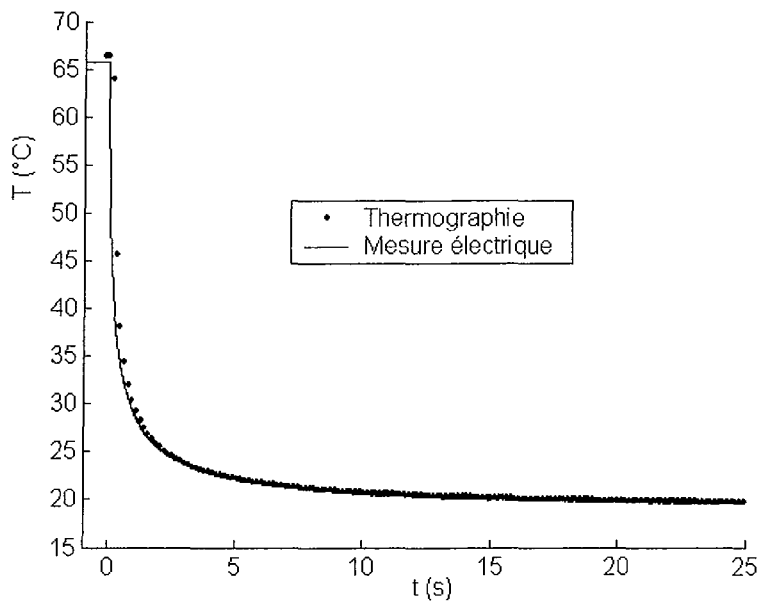


figure III.38 : température moyenne de surface et de jonction lors d'une relaxation

Les deux mesures correspondent. La mesure par thermographie soufre d'une incertitude sur le temps initial de l'ordre de 0.16 seconde car la caméra produit une image toutes les 160 ms. L'écart entre les deux courbes est contenu dans cet intervalle d'incertitude mise à part au temps initial où la mesure par thermographie indique une température moyenne de surface de 66.3 °C alors que la mesure par l'intermédiaire du paramètre thermosensible indique une température de jonction de 65.7 °C. A priori, la température de jonction devrait être comprise entre la température maximale et moyenne de la puce. Ce qui n'est pas le cas ici. La thermographie infrarouge, sans application de peinture, permet tout de même de déterminer la température de jonction de la puce avec une précision inférieure au degrés pour ces niveaux de température.

II.5 Conclusion

Une procédure rigoureuse de mesure de température sur un composant électronique a été mise au point. La proximité de l'objectif de la caméra et du composant, donc la non uniformité de la température de l'environnement, est prise en compte par le modèle de rayonnement. Cette température d'environnement variable suivant la position considérée est estimée en même temps que l'émissivité. La carte des émissivités de la face supérieure du composant est déterminée en fixant la température du composant à différentes valeurs uniformes en variant le niveau de température de l'eau circulant dans la boîte à eau. La dispersion et le biais des températures recalculées sont satisfaisants. Les mesures en régime transitoire sont comparées à la température de jonction déterminée par une mesure électrique. La précision des mesures semble correcte même si elle est moindre sur les zones de très faible émissivité comme les surfaces de cuivre. Une solution radicale serait de recouvrir la face extérieure du module par une fine couche de peinture dont l'émissivité serait connue. Cette première réalisation expérimentale montre l'intérêt d'utiliser les nouvelles caméras à matrices de détecteurs qui devraient permettre d'améliorer considérablement les résolutions spatiales, thermographiques et temporelles en surface de puce.

Ce type de mesure de température en face avant, associée à la mesure du flux de chaleur dissipé, pourrait permettre de déterminer les champs de température et de densité de flux dans toute la structure et ainsi d'utiliser le composant comme un fluxmètre pour caractériser un radiateur dont les caractéristiques sont inconnues. Nous nous proposons de tester la faisabilité de cette idée en procédant à une simulation d'expérience et d'inversion dans la partie suivante.

III Caractérisation expérimentale d'un diffuseur

La méthode des quadripôles thermiques permet, à partir d'une condition limite en température et en flux sur une face (par exemple en face avant), de déterminer la température et le flux sur l'autre face (par exemple en face arrière). La mesure de la température en face avant en utilisant une caméra infrarouge, et du flux dissipé en utilisant une mesure électrique, permet donc en théorie de calculer la température et le flux à l'interface entre le composant et le radiateur, sans modéliser le radiateur. Cette technique pourrait permettre la caractérisation expérimentale d'un radiateur. L'étude de faisabilité est effectuée ici à partir d'une simulation d'expériences.

III.1 Cas d'un seul bloc en deux dimensions

Soit le bloc en deux dimensions représenté sur la *figure III.39.*

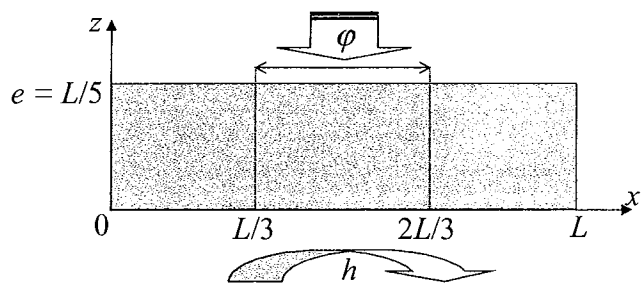


figure III.39 : bloc en deux dimensions

Les conditions de simulation sont les suivantes :
$h = 5000\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$; $\varphi = 10^6\ \mathrm{Wm^{-1}}$; $L = 10$ cm ; $\lambda = 380\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$.
La méthode des quadripôles monoblocs permet donc de déterminer la température et la densité de flux aux limites, voir *figure III.40.*

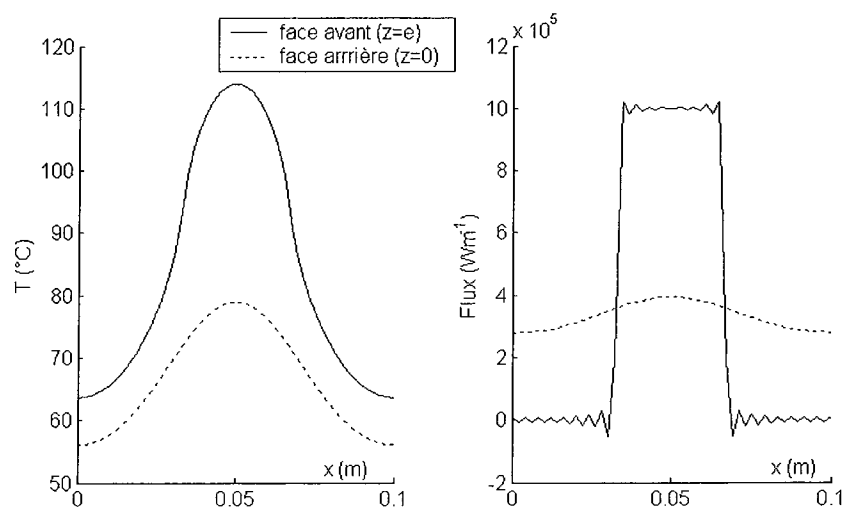


figure III.40 : température et densité de flux simulées aux limites, 50 modes

Considérons maintenant que la température en face avant est une donnée expérimentale. La caméra virtuellement utilisée possède une matrice de 240 capteurs (240 pixels) et le bruit résultant de la mesure est un bruit Gaussien de moyenne nulle, d'écart type 0.3°C. Un bruit Gaussien de moyenne nulle et d'écart type 10^3 Wm^{-1} est également ajouté à la densité de flux dissipée en face avant que l'on suppose uniforme sur le segment de longueur $L/3$ (hypothèse forte) et que l'on détermine par une mesure électrique.

A partir de la température et de la densité de flux expérimentales en face avant, nous pouvons calculer la température et la densité de flux en face arrière. La relation quadripolaire s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}(z=0) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}(z=e) \tag{III.46}$$

Dans le cas où l'on souhaite estimer la densité de flux :

$$\phi(z=0) = C\theta(z=e) + A\phi(z=e) \tag{III.47}$$

Il est donc nécessaire de calculer les transformées de Fourier de la température et de la densité de flux expérimentales en face avant. Comme nous disposons de 240 pixels, selon le théorème de Gibbs (ou de Shannon), un maximum de 120 harmoniques pourra être calculé.

A partir de ces transformées expérimentales calculées par quadrature numérique (méthode des trapèzes), la relation (III.47) permet le calcul direct du spectre de la densité de flux en face arrière. Une transformée inverse de Fourier donne la valeur réelle de cette densité de flux. Sur la *figure III.41* sont représentées les densités de flux simulée et estimée pour différents ordres de troncature considérés.

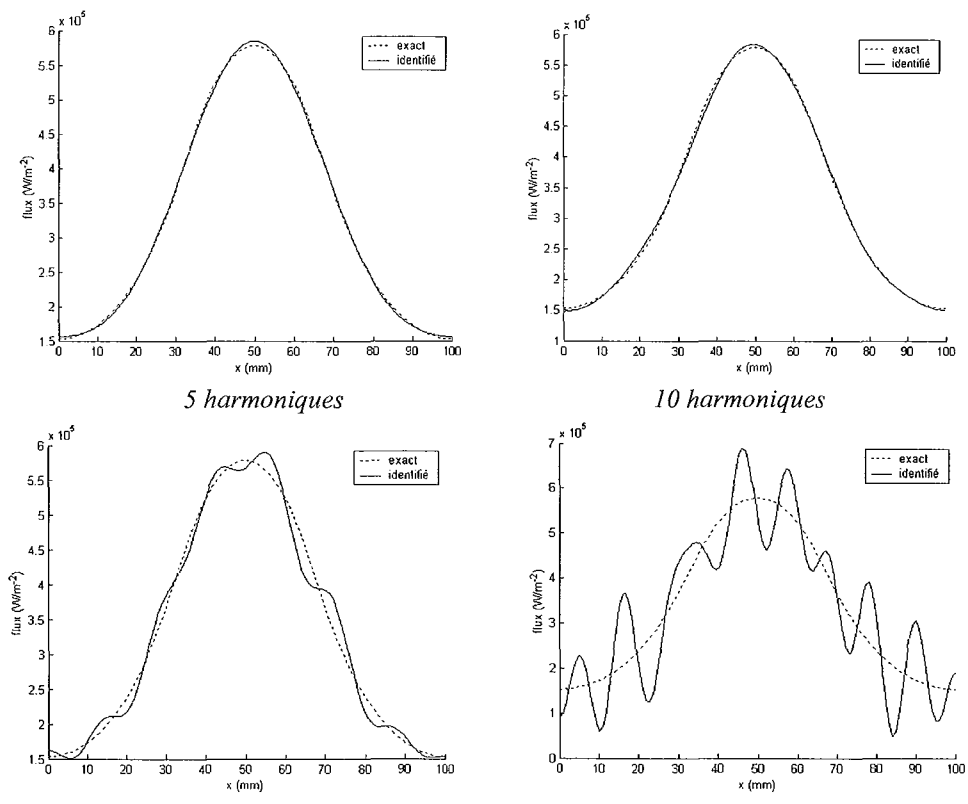


figure III.41 : densités de flux en face arrière, simulée et estimée

Nous constatons donc que les harmoniques de faible ordre sont correctement estimées alors que les harmoniques de haut degré posent problème. Ceci s'explique par la nature des matrices quadripolaires ; l'harmonique expérimentale de degré n est multipliée par un coefficient de l'ordre de $\exp\left(\frac{n\pi}{L}e\right)$ (voir équation (III.47)), ainsi l'erreur expérimentale sur les harmoniques d'ordres élevés est fortement amplifiée. Comme le bloc joue un rôle de filtre passe bas, un faible nombre d'harmoniques suffi et le calcul de la densité de flux en face arrière est possible à partir de 5 harmoniques.

III.2 Cas classique en trois dimensions

Réalisons l'estimation précédente dans le cas d'une géométrie classique en trois dimensions composée d'un DBC (propriétés thermophysiques et épaisseurs données par le *tableau II.1*) empilé sur une semelle de cuivre, toutes les couches étant carrées. Compte tenu de la symétrie, un quart de la structure est modélisé (*voir figure III.42*).

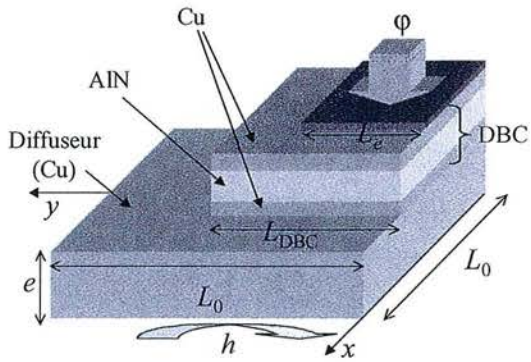


figure III.42 : un quart de la structure considérée

Pour h=5000 $Wm^{-2}K^{-1}$, L_0=5 cm, e_0= 5mm, L_{DBC}=3*L_0/4, L_e=3* L_{DBC} /4, φ = 100 Wcm^{-2}, 60 harmoniques conservées et 10 % du spectre éliminé, la température simulée en face avant et la densité de flux simulée en face arrière sont représentées sur la *figure III.43*.

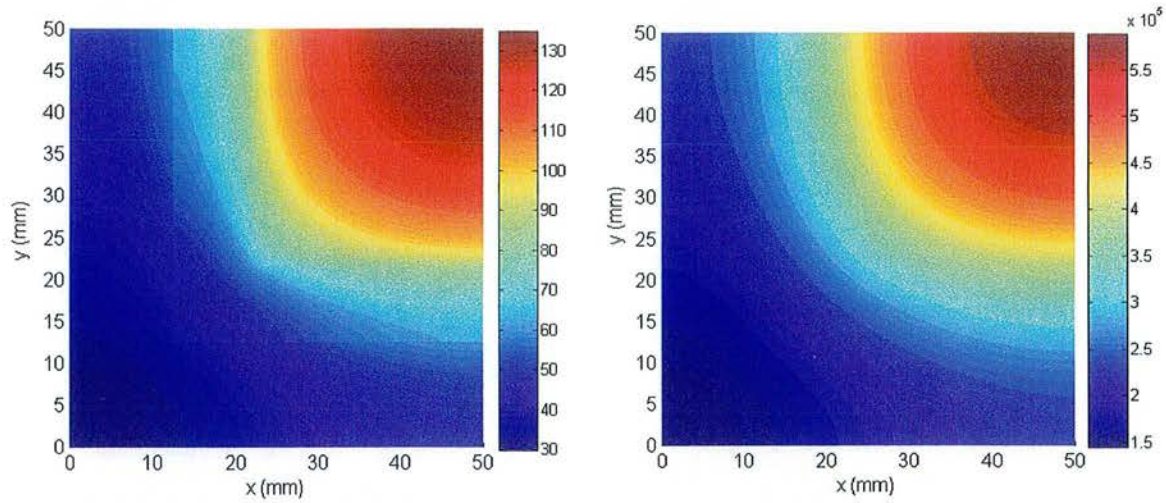


figure III.43 : température (°C) en face avant (vue de dessus) et densité de flux (Wm^{-2}) en face arrière, simulées.

La température en face avant est échantillonnée suivant une matrice de 240×240 pixels puis bruitée selon un bruit Gaussien de moyenne nulle et d'écart type 1°C. La transformée de Fourier 2D expérimentale est alors calculée à partir de ce thermogramme bruité (quadrature numérique), puis la densité de flux en face arrière est estimée en utilisant la méthode directe. 600 modes par mètre sont conservés, le taux d'élimination du spectre est de 10% et le résultat final est tronqué à 100 modes par unité de longueur. Il en résulte la densité de flux estimée représentée sur la *figure III.44*. L'erreur moyenne d'estimation est de 2% sur cette réalisation.

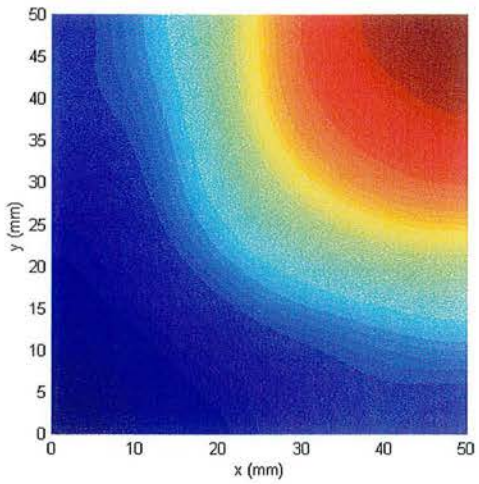


figure III.44 : densité de flux en face arrière estimée

La structure jouant le rôle d'un filtre passe-bas, très peu de modes sont nécessaires à l'estimation du flux en face arrière. Ce problème inverse est bien posé car l'on mesure la température sur la source, c'est-à-dire là où elle est élevée (signal important avec fort contraste spatial) et on cherche à remonter à la densité de flux en face arrière qui est caractérisée par des profils beaucoup plus « mous ».

III.3 Conclusion

Cette simulation d'expérience laisse entrevoir la possibilité de caractériser des radiateurs ou des diffuseurs tels que des caloducs utilisés de plus en plus fréquemment en électronique [23] et dont le fonctionnement, notamment en régime transitoire, n'est pas encore très bien connu. L'utilisation de composants électroniques comme fluxmètres peut donc être envisagée, sachant qu'une hypothèse forte concernant la densité de flux d'excitation subsiste. En effet, la densité de puissance dissipée n'est pas rigoureusement uniforme dans la jonction. La caractérisation des « extracteurs » de chaleur devra donc être vraisemblablement réalisée en utilisant des sources de chaleurs bien connues.

Un autre problème subsistera alors : on doit connaître parfaitement les caractéristiques de l'empilement (épaisseurs, propriétés thermophysiques des couches, résistances de contact) pour pouvoir utiliser la structure comme fluxmètre. Si ce n'est pas le cas, on est alors ramené à la

résolution préalable d'un problème d'identification de système linéaire de structure connu. Il faut alors connaître à la fois les entrées (excitation) et les sorties (mesures) pour, en principe, remonter aux matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ de la strucutre.

IV Conclusion du troisième chapitre

Nous avons montré (ou rappelé) au cours de ce chapitre comment le caractère analytique de la méthode des quadripôles thermiques se prêtait à la réalisation d'estimations de paramètres par technique inverse. Nous avons également mis au point, en collaboration avec le GREEN (S. Raël), une méthode rigoureuse de mesure de température sur un composant IGBT. Le choix de la thermographie infrarouge, associé à la mesure électrique par l'intermédiaire du paramètre thermosensible et à la mesure par phosphorescence U.V, s'avère être un choix relativement facile à mettre en œuvre et conduit à des résultats satisfaisants pour une résolution spatiale supérieure au critère de diffraction.

Bibliographie relative au troisième chapitre

[1] Philippi, I., Bendada, A., Rémy, B. and Maillet, D., 1997, Thermal characterization of electronic boards, Proc. Eurotherm Semi. 58, Therm. Manage. Electron. Syst. III, Nantes, 24-26 September 1997, J. P. Bardon, E. Beyne and J. B. Saulnier, eds, Elsevier, pp. 246-253

[2] Selberherr S., 1984, Analysis and Simulation of Semiconductor Devices, Springer-Verlag Wien, New York.

[3] Khatir, S. Lefebvre, 2000, Thermal analysis of high power IGBT modules, 12th International Symposium on Power Semiconductor Devices, Toulouse.

[4] Stehfest H., 1970, Remarks on algorithm 368, Numerical inversion of Laplace transforms, comm. A.C.M., n°13, 624.

[5] Remy B., 1998, Mesure de propriétés thermophysiques de matériaux minces et de dépôts par méthode Flash : « Application aux films polycristallins de diamant », thèse de l'Institut Polytechnique de Lorraine.

[6] Degiovanni A., 1987, correction de la longueur d'impulsion pour la mesure de la diffusivité thermique par méthode flash, Int. J. Heat Mass Transfer., Vol. 30, No10, pp. 2199-2200.

[7] Soden J. M., Anderson R.E., 1993, IC Failure Analysis : Techniques and tools for quality and reliability Improvement , Proc. Of the IEEE, vol.81, n°5, pp 703-715.

[8] Raël S., 1996, Méthodologie de conception des modules de puissance : étude électrothermique de l'association en parallèle, thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.

[9] Ashauer M., Ende J., Glosh H., Haffner H., Hiltmann K., 1997, Thermal characterization of microsystems by means of high-resoluiton thermography, Microelectronics Journal 28, pp. 327-335.

[10] Romano V., Zweig A.D., Frenz M., Weber H.P., 1989, Time resolved thermal microscopy with Fluorescent Films, Appl. Phys, B49, pp 527-533.

[11] Barton D.L., Tangyunyong P., 1996, Fluorescent microthermal imaging, theory and methodology of achieving high thermal resolution images, microelectronic engineering 31, pp 271-279.

[12] Picart B., De Trogoff F., 1992, VLSI chip testing method using ferroelectric liquid crystals, ISTFA, 18th International Symposium for Testing and Failure Analysis, pp 107-116.

[13] Wieberneit M., Lackmann R., 1996, Time resolved Liquid Crystal Voltage Contrast : new method for testing of digital integrated circuits, Microelectronic Engineering, 31, pp. 129-138.

[14] Azar K., Benson J.R., Manno V.P., 1991, Liquid Crystal Imaging for temperature Measurment of Electronic Devices, Proceedings of IEEE Semiconductor Thermal Measurment and Management Symposium, Phoenix AZ, pp 23-33.

[15] Levezac F., 1996, Mesure de température de surface par cristaux liquides thermochromiques. Application a la détermination de flux convectif, thèse de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, ONERA-CERT, Toulouse.

[16] Cleys W., Dilhaire S., Quintard V., Danto Y., 1993, Thermoreflectance optical Test Probe for the measurment of current induced temperature changes in microelectronic Components, Quality and reliability Engineering Internationel, Vol 9, pp. 303-308

[17] Cleys W., Dilhaire S., Quintard V., 1994, Laser probing of thermal behaviour of electronic components ans its application in quality and reliability testing, Microelectronic Engineering, 24, pp. 411-420.

[18] Ciocan R., Tabib-Azar M., 1999, transient thermography of semiconductors using the evanescent microwave microscope, microscale thermopysical Engineering, 3, pp. 253-262.

[19] Majumdar A., Carrejo J.P., Lai J., 1993, Thermal imaging using atomic force microscope, Appl. Phys. Lett. 62(20), pp 2501-2503.

[20] Oesterschulze E., Stopka M., 1996, Imaging of thermal properties and topogrphy by combined scanning thermal and scanning tunneling microscopy, Microelectronic Engineering 31, pp 241-248.

[21] Maillet D., André S., Batsale J. C., Degiovanni A., Moyne C., 2000, Thermal Quadrupoles, Wiley ed., Chichester.

[22] Beck, J. V., Arnold K. J., 1977, Parameter Estimation in Engineering and Science, Wiley, New York.

[23] Avenas Y., Etude et réalisation de caloducs plats miniatures pour l'intégration en électronique de puissance, thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 2002.

Conclusion

Conclusion générale

Jusqu'à présent, la méthode des quadripôles thermiques permettait de résoudre les problèmes multidimensionnels transitoires de diffusion de la chaleur dans des structures monoblocs, constituées d'un empilement de couches de mêmes dimensions latérales et dont les faces latérales étaient soumises aux mêmes conditions limites. Les différentes fonctions propres définissant les transformées intégrales à appliquer étaient identiques dans chaque couche et le problème était diagonal ; la résolution était exacte à l'ordre de troncature près. La prise en compte des structures multiblocs a nécessité l'introduction de matrices de conversion de spectre (de changement de base de fonctions propres) qui a mécaniquement entraîné un couplage des modes, c'est-à-dire un même effet que l'introduction de résistances de contact variables dans l'espace. La conséquence est que la résolution n'est plus exacte à l'ordre de troncature près ; la nécessaire troncature des spectres, du fait du couplage, introduit une erreur à chaque passage d'un bloc à l'autre. Cette erreur est d'autant moins importante que l'ordre du mode est faible, ainsi la méthode reste relativement précise en « moyenne » ; du moins, les modes de faible ordre convergent plus rapidement que les modes d'ordre élevé lorsqu'on augmente la densité spectrale. Nous avons démontré sur un exemple complexe que ce principal aspect « non analytique » de notre méthode semblait être correctement maîtrisé.

La principale limitation associée à la méthode est l'impossibilité de considérer des non-linéarités en régime transitoire. L'étude précise des transferts de chaleur transitoires, particulièrement au niveau de la puce en silicium (matériau très non linéaire), n'est pas possible à partir de cette méthode. De plus, elle ne peut s'appliquer qu'à des géométries simples, composées d'empilements de blocs parallélépipédiques. La modélisation d'un contact latéral entre deux blocs n'est réalisable que si l'association des deux blocs en question est convexe. Il existe également des limitations d'ordre numérique : par exemple, les matrices de transfert « explosent numériquement » (coefficients tendant vers l'infini) lorsque l'épaisseur d'un bloc, non situé aux extrémités de l'empilement, augmente.

Les performances en terme de temps de calcul de la méthode sont équivalentes à celles des codes numériques commerciaux lorsqu'il s'agit de déterminer les températures et densités de flux avec une précision spatiale importante. En effet l'introduction des matrices de conversion de spectre qui sont des matrices pleines, contrairement aux matrices quadripôlaires, a multiplié considérablement le temps de calcul. Par contre, la méthode est beaucoup plus performante lorsqu'il s'agit de déterminer les champs de température et de densité de flux avec une précision spatiale relativement modeste (température moyenne des puces par exemple). C'est pourquoi son utilisation comme « solver » dans le but d'effectuer des optimisations est très intéressante : le recours à des modèles réduits, sources de biais, n'est plus systématiquement nécessaire.
D'autres qualités de la méthode découlent de son caractère analytique. La conservation du flux est automatiquement assurée. Des études paramétriques, de sensibilité, des estimations de

paramètres peuvent être rapidement et relativement facilement réalisées. De plus, le formalisme quadripôlaire est très transparent, en relation directe avec la géométrie, ce qui nous a permis entre autre, de réaliser un logiciel basé sur un programme de calcul symbolique. Enfin, le nombre d'hyperparamètres nécessaire à la résolution est très faible comparé aux méthodes numériques dont les solutions dépendent de la discrétisation du temps et de l'espace.

La caractérisation des transferts thermiques dans les composants électroniques de puissance passe également par l'expérimentation. Nous avons ainsi déterminer une procédure de mesure de température par thermographie infrarouge. Une mesure par phosphorescence induite U.V. nous a permis d'estimer la carte des émissivités à la surface d'un composant ainsi que la température équivalente de l'environnement que nous avons considérée non-uniforme du fait de la proximité de l'objectif et de la puce. La mesure électrique d'un paramètre thermosensible est venue compléter ces outils de métrologie. La nouvelle génération de caméra infrarouge matricielles plus performante (haute résolution spatiale, temporelle, bas bruit) va probablement permettre de reculer les limites actuelles de la thermographie infrarouge pour la caractérisation de composants électroniques. Elle va également permettre d'étudier les régimes transitoires rapides (chocs thermiques) auxquels peuvent être soumis les composants.

Le principal domaine d'application de la méthode des quadripôles restera vraisemblablement le domaine de la caractérisation thermique des matériaux et des systèmes. De la même façon que les modèles monoblocs ont permis l'estimation des propriétés thermophysiques de matériaux par méthode flash, la méthode des quadripôles multiblocs devrait permettre la caractérisation de divers « extracteurs » de chaleur comme les radiateurs, les diffuseurs, les caloducs, ou les systèmes à micro-canaux, systèmes qui sont de plus en plus couramment utilisés en électronique et dont il est difficile actuellement de quantifier précisément les performances.

Annexes

Annexe 1 :
condition limite de lit fluide

Considérons le bloc en deux dimensions refroidi sur sa face inférieure par un écoulement fluide d'épaisseur e de capacité calorifique volumique ρc, de vitesse débitante V et de température moyenne débitante $T^f(x,t)$, comme représenté sur la *figure 1*. La température d'entrée du fluide (en $x = 0$) ainsi que sa température initiale est T_e^f.

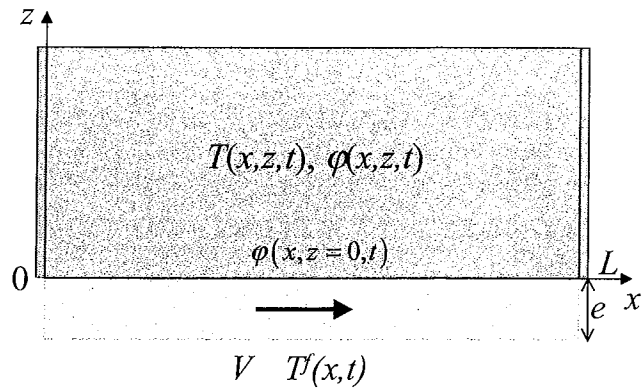


figure 1 : condition limite de lit fluide

L'équation régissant la température du fluide est :

$$\frac{-\varphi(x,0,t)}{\rho ceV} = \frac{\partial T^f}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{V}\frac{\partial T^f}{\partial t}(x,t) \tag{A1.1}$$

C'est-à-dire si on applique une transformée de LAPLACE :

$$\frac{-\overline{\varphi}(x,0,p)}{\rho ceV} = \frac{\partial \overline{T}^f(x,p)}{\partial x} + \frac{1}{V}p\left(\overline{T}^f(x,p) - T_e^f\right) \tag{A1.2}$$

où encore :

$$\frac{-\overline{\varphi}(x,0,p)}{\rho ceV} = \frac{\partial \Delta\overline{T}^f(x,p)}{\partial x} + \frac{1}{V}p\Delta\overline{T}^f(x,p) \tag{A1.3}$$

L'intégration de (A1.3) par la méthode de la variation de la constante conduit à :

$$\Delta\overline{T}^f(x,p) = \frac{\int_0^x -\overline{\varphi}(x,0,p)e^{\frac{p}{V}x}\,dx}{\rho ceV}e^{-\frac{p}{V}x} \tag{A1.4}$$

Soit après remplacement de la densité de flux par son expression développée :

$$\Delta\overline{T}^f(x,p) = \frac{-\int_0^x\left(\sum_{q=0}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\cos(\alpha_q x)\right)e^{\frac{p}{V}x}\,dx}{\rho ceV}e^{-\frac{p}{V}x} \tag{A1.5}$$

Une première étape consiste donc à calculer $\int_0^x \cos(\alpha x)e^{\frac{p}{V}x}dx$:

- Si q=0 :

$$\int_0^x e^{\frac{p}{V}x}\,dx = \frac{e^{\frac{p}{V}x}-1}{p/V} \tag{A1.6}$$

- Si q≠0

$$\int_0^x \cos(\alpha x)e^{\frac{p}{V}x}\,dx = \int_0^x \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha x}.e^{\frac{p}{V}x}\right)dx \tag{A1.7}$$

$$\int_0^x \cos(\alpha x)e^{\frac{p}{V}x}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_0^x e^{\left(\frac{p}{V}+i\alpha\right)x}\,dx\right) \tag{A1.8}$$

$$\int_0^x \cos(\alpha x)e^{\frac{p}{V}x}\,dx = \mathrm{Re}\left(\frac{\left(e^{\left(\frac{p}{V}+i\alpha\right)x}-1\right)}{\frac{p}{V}+i\alpha}\right) \tag{A1.9}$$

$$\int_0^x \cos(\alpha x)e^{\frac{p}{V}x}\,dx = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{p}{V}-i\alpha\right)\frac{e^{\frac{p}{V}x}\left(\cos(\alpha x)+i\sin(\alpha x)\right)-1}{\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha^2}\right) \tag{A1.10}$$

$$\int_0^x \cos(\alpha x)e^{\frac{p}{V}x}\,dx = \frac{\frac{p}{V}\left(e^{\frac{p}{V}x}\cos(\alpha x)-1\right)+\alpha e^{\frac{p}{V}x}\sin(\alpha x)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha^2} \tag{A1.11}$$

$$\int_0^x \cos(\alpha x)e^{\frac{p}{V}x}\,dx = \frac{\frac{p}{V}\left(\cos(\alpha x)-e^{-\frac{p}{V}x}\right)+\alpha\sin(\alpha x)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha^2}e^{\frac{p}{V}x} \tag{A1.12}$$

Donc, si on revient à l'expression de la température du fluide :

$$\Delta\bar{T}^f(x) = -\frac{\frac{e^{\frac{p}{V}x}-1}{p/V}\frac{\phi_0}{N_0}+\sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{\frac{p}{V}\left(\cos(\alpha_q x)-e^{-\frac{p}{V}x}\right)+\alpha_q\sin(\alpha_q x)}{(p/V)^2+\alpha_q{}^2}e^{\frac{p}{V}x}}{\rho ceV}e^{-\frac{p}{V}x} \tag{A1.13}$$

ou

$$\Delta\bar{T}^f(x) = \frac{-1}{\rho ceV}\left(\frac{1-e^{-\frac{p}{V}x}}{p/V}\frac{\phi_0}{N_0}+\sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{\frac{p}{V}\left(\cos(\alpha_q x)-e^{-\frac{p}{V}x}\right)+\alpha_q\sin(\alpha_q x)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha_q{}^2}\right) \tag{A1.14}$$

Nous pouvons alors intégrer cette expression pour déterminer le spectre de l'échauffement du fluide :

- Cas du fondamental ($n = 0$) :

$$\Delta\theta_0{}^f = \int_0^L \frac{-1}{\rho c e V}\left[\frac{1-e^{-\frac{p}{V}x}}{p/V}\frac{\phi_0}{N_0} + \sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{\frac{p}{V}\left(\cos(\alpha_q x) - e^{-\frac{p}{V}x}\right) + \alpha_q \sin(\alpha_q x)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2 + \alpha_q{}^2}\right] dx \tag{A1.15}$$

$$\Delta\theta_0{}^f = \frac{-1}{\rho c e V}\left[\frac{\int_0^L\left(1-e^{-\frac{p}{V}x}\right)dx}{p/V}\frac{\phi_0}{N_0} + \sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{\frac{p}{V}\left(\int_0^L \cos(\alpha_q x)\,dx - \int_0^L e^{-\frac{p}{V}x}\,dx\right) + \int_0^L \alpha_q \sin(\alpha_q x)\,dx}{\left(\frac{p}{V}\right)^2 + \alpha_q{}^2}\right] \tag{A1.16}$$

$$\Delta\theta_0{}^f = \frac{-1}{\rho c e V}\left[\sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{\frac{p}{V}\left(\int_0^L \cos(\alpha_q x)\,dx - \int_0^L e^{-\frac{p}{V}x}\,dx\right) + \int_0^L \alpha_q \sin(\alpha_q x)\,dx}{\left(\frac{p}{V}\right)^2 + \alpha_q{}^2} + \frac{\phi_0}{N_0}\frac{\frac{p}{V}\left(\int_0^L dx - \int_0^L e^{-\frac{p}{V}x}\,dx\right)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2}\right] \tag{A1.17}$$

$$\Delta\theta_0{}^f = \frac{-1}{\rho c e V}\left[\sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{\frac{p}{V}\left(0-\left(-\frac{V}{p}\right)\left(e^{-\frac{p}{V}L}-1\right)\right)-\left(\cos(\alpha_q L)-1\right)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha_q{}^2} + \frac{\phi_0}{N_0}\frac{\frac{p}{V}\left(L-\left(-\frac{V}{p}\right)\left(e^{-\frac{p}{V}L}-1\right)\right)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2}\right] \tag{A1.18}$$

$$\Delta\theta_0{}^f = \frac{-1}{\rho c e V}\left[\sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{e^{-\frac{p}{V}L}-\cos(\alpha_q L)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha_q{}^2} + \frac{\phi_0}{N_0}\frac{\frac{p}{V}L + e^{-\frac{p}{V}L} - 1}{\left(\frac{p}{V}\right)^2}\right] \tag{A1.19}$$

$$\Delta\theta_0{}^f = \frac{1}{\rho c e V}\left(\sum_{q=1}^{Q}\frac{e^{-\frac{p}{V}L}-(-1)^q}{\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha_q{}^2}\frac{(-\phi_q)}{N_q} + \frac{\frac{p}{V}L-1+e^{-\frac{p}{V}L}}{\left(\frac{p}{V}\right)^2}\frac{(-\phi_0)}{N_0}\right) \tag{A1.20}$$

- Cas des harmoniques ($n \geq 1$):

$$\Delta\theta_n{}^f = \frac{-1}{\rho c e V}\int_0^L\left[\frac{1-e^{-\frac{p}{V}x}}{p/V}\frac{\phi_0}{N_0} + \sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{\frac{p}{V}\left(\cos(\alpha_q x) - e^{-\frac{p}{V}x}\right) + \alpha_q \sin(\alpha_q x)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2 + \alpha_q{}^2}\right]\cos(\alpha_n x)\,dx \tag{A1.21}$$

$$\Delta\theta_n{}^f = \frac{-1}{\rho ceV}\left[\sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{\frac{p}{V}\int_0^L \cos(\alpha_q x)\cos(\alpha_n x)\,dx - \frac{p}{V}\int_0^L e^{-\frac{p}{V}x}\cos(\alpha_n x)\,dx + \int_0^L \alpha_q \sin(\alpha_q x)\cos(\alpha_n x)\,dx}{\left(\frac{p}{V}\right)^2 + \alpha_q{}^2} + \frac{\phi_0}{N_0}\frac{\frac{p}{V}\int_0^L \cos(\alpha_n x)\,dx - \frac{p}{V}\int_0^L e^{-\frac{p}{V}x}\cos(\alpha_n x)\,dx}{\left(\frac{p}{V}\right)^2}\right] \tag{A1.22}$$

$$\Delta\theta_n{}^f = \frac{-1}{\rho ceV}\left[\sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{\frac{p}{V}\int_0^L \cos(\alpha_q x)\cos(\alpha_n x)\,dx}{\left(\frac{p}{V}\right)^2 + \alpha_q{}^2} + \sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{-\frac{p}{V}\int_0^L e^{-\frac{p}{V}x}\cos(\alpha_n x)\,dx}{\left(\frac{p}{V}\right)^2 + \alpha_q{}^2} + \sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{\int_0^L \alpha_q \sin(\alpha_q x)\cos(\alpha_n x)\,dx}{\left(\frac{p}{V}\right)^2 + \alpha_q{}^2} + \frac{\phi_0}{N_0}\frac{\frac{p}{V}\int_0^L \cos(\alpha_n x)\,dx - \frac{p}{V}\int_0^L e^{-\frac{p}{V}x}\cos(\alpha_n x)\,dx}{\left(\frac{p}{V}\right)^2}\right] \tag{A1.23}$$

- Calcul de $I^1_{q,n} = \int_0^L \cos(\alpha_q x)\cos(\alpha_n x)\,dx$, q>0, n>0 :

$$I^1_{q,n} = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos\left((\alpha_q + \alpha_n)x\right) + \cos\left((\alpha_q - \alpha_n)x\right)\right]dx \tag{A1.24}$$

si $n \neq q$: $$I^1_{q,n} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left((\alpha_q + \alpha_n)x\right)}{\alpha_q + \alpha_n} + \frac{\sin\left((\alpha_q - \alpha_n)x\right)}{\alpha_q - \alpha_n}\right]_0^L = 0 \tag{A1.25}$$

si $n=q$: $$I^1_{n,n} = \int_0^L \cos^2(\alpha_n x)\,dx = \frac{L}{2} \tag{A1.26}$$

- Calcul de $I^2_{q,n} = \int_0^L e^{-\frac{p}{V}x}\cos(\alpha_n x)\,dx$, n>0, ne dépend pas de q :

D'après (A1.12) :

$$\int_0^L \cos(\alpha x)e^{\frac{p}{V}x}\,dx = \frac{\frac{p}{V}\left(\cos(\alpha L) - e^{-\frac{p}{V}L}\right)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2 + \alpha^2}e^{\frac{p}{V}L} \tag{A1.27}$$

donc

$$I_{q,n}^2 = \frac{\frac{-p}{V}\left(\cos(\alpha_n L) - e^{\frac{p}{V}L}\right)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2 + \alpha_n{}^2} e^{\frac{-p}{V}L} = \frac{\frac{-p}{V}\left((-1)^n e^{-\frac{p}{V}L} - 1\right)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2 + \alpha_n{}^2} \tag{A1.28}$$

- Calcul de $I_{q,n}^3 = \int_0^L \alpha_q \sin(\alpha_q x)\cos(\alpha_n x)\,dx$, n>0, q>0 :

si $n \neq q$: $$I_{q,n}^3 = \frac{\alpha_q}{2}\int_0^L \left[\sin\left((\alpha_q + \alpha_n)x\right) + \sin\left((\alpha_q - \alpha_n)x\right)\right]dx \tag{A1.29}$$

$$I_{q,n}^3 = \frac{\alpha_q}{2}\left[\frac{1-\cos\left((\alpha_q+\alpha_n)L\right)}{\alpha_q+\alpha_n} + \frac{1-\cos\left((\alpha_q-\alpha_n)L\right)}{\alpha_q-\alpha_n}\right] \tag{A1.30}$$

$$I_{q,n}^3 = \frac{\alpha_q}{2}\left[\frac{1-(-1)^{n+q}}{\alpha_q+\alpha_n} + \frac{1-(-1)^{n+q}}{\alpha_q-\alpha_n}\right] \tag{A1.31}$$

$$I_{q,n}^3 = \frac{\left(1-(-1)^{n+q}\right)\alpha_q}{2}\left[\frac{2\alpha_q}{\alpha_q^2-\alpha_n^2}\right] \tag{A1.32}$$

$$I_{q,n}^3 = \frac{q^2}{q^2-n^2}\left(1-(-1)^{n+q}\right) \tag{A1.33}$$

si $n=q$: $$I_{n,n}^3 = \frac{\alpha_n}{2}\int_0^L \sin(2\alpha_n x)\,dx = 0 \tag{A1.34}$$

- De plus $I_{q,n}^4 = \int_0^L \cos(\alpha_n x)\,dx = 0$, n>0, q>0

Donc

$$\Delta\theta_n{}^f = \frac{-1}{\rho c e V}\left[\sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{\frac{p}{V}I_{q,n}^1}{\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha_q{}^2} + \sum_{q=0}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{-\frac{p}{V}I_{q,n}^2}{\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha_q{}^2} + \sum_{q=1}^{Q}\frac{\phi_q}{N_q}\frac{I_{q,n}^3}{\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha_q{}^2} + \frac{\phi_0}{N_0}\frac{\frac{p}{V}I_{q,n}^4}{\left(\frac{p}{V}\right)^2}\right] \tag{A1.35}$$

$$\Delta\theta_n^{\ f} = \frac{1}{\rho ceV}\left[\frac{\frac{p}{V}\frac{L}{2}}{\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha_n^{\ 2}}\frac{-\phi_n}{N_n}+\sum_{q=0}^{Q}\frac{\left(\frac{p}{V}\right)^2\left((-1)^n e^{-\frac{p}{V}L}-1\right)}{\left(\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha_q^{\ 2}\right)\left(\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha_n^{\ 2}\right)}\frac{-\phi_q}{N_q}\right.$$
$$\left.+\sum_{\substack{q=1\\q\neq n}}^{Q}\frac{\frac{q^2}{q^2-n^2}\left(1-(-1)^{n+q}\right)}{\left(\frac{p}{V}\right)^2+\alpha_q^{\ 2}}\frac{-\phi_q}{N_q}\right] \tag{A1.36}$$

En régime permanent, il suffit de faire tendre p vers 0 dans (A1.20) et (A1.36) :

$$\Delta\theta_0^{\ f} = \frac{L}{2\rho ceV}\left((-\phi_0)+\sum_{q=1}^{Q}\frac{4}{\pi^2}\frac{1-(-1)^q}{q^2}(-\phi_q)\right) \tag{A1.37}$$

$$\Delta\theta_n^{\ f} = \frac{L}{2\rho ceV}\left(-\frac{2}{\pi^2}\frac{1-(-1)^n}{n^2}(-\phi_0)+\sum_{\substack{q=1\\q\neq n}}^{Q}\frac{4}{\pi^2}\frac{1-(-1)^{n+q}}{q^2-n^2}(-\phi_q)\right) \tag{A1.38}$$

De plus, si on exprime le spectre de l'échauffement du fluide en fonction du spectre de la température absolue, on a :

$$\Delta\boldsymbol{\theta}^f = \boldsymbol{\theta}^f - \theta_e^f \tag{A1.39}$$

où θ_e^f est le spectre de la température d'entrée T_e^f du fluide $\boldsymbol{\theta}_e^f = \begin{pmatrix} LT_0^f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ car cette température

est un scalaire indépendant de la coordonnée x.

On peut donc écrire :

$$\boldsymbol{\theta}^f = \boldsymbol{\theta}_e^f - \boldsymbol{G}\boldsymbol{\phi}(z=0) \tag{A1.40}$$

avec, en régime permanent :

$$\boldsymbol{G}_{n,q} = \frac{L}{2\rho ceV}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \frac{4}{\pi^2}\frac{1-(-1)^q}{q^2} & \cdots & \frac{4}{\pi^2}\frac{1-(-1)^N}{N^2} \\ \vdots & 0 & & & & \\ \frac{2}{\pi^2}\frac{(-1)^n-1}{n^2} & 0 & & \frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^{n+q}-1}{n^2-q^2} & & \\ \vdots & \frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^{n+q}-1}{n^2-q^2} & \ddots & & & \\ \vdots & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{A9.41}$$

En résumé, cette condition limite s'écrit dans le formalisme des quadripôles :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_e^f \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^f \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \tag{A1.42}$$

où $\boldsymbol{\phi}$ est le spectre du flux à l'interface fluide-solide.

Dans le cas où l'échange a lieu suivant un coefficient d'échange h uniforme en x :

$$\boldsymbol{\phi} = h\left(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^f\right) \tag{A1.43}$$

et donc la relation quadripolaire équivalente à cette condition limite vaut :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_e^f \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}/h \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} (z = 0, p) \tag{A1.44}$$

Cas du canal fluide :

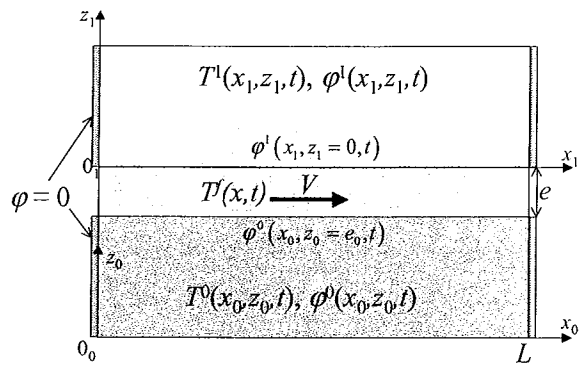


figure 2 : canal fluide entre 2 blocs

L'équation régissant la température du fluide est :

$$\frac{\varphi^0(x_0,e_0,t) - \varphi^1(x_1,0,t)}{\rho c e V} = \frac{\partial T^f(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{V}\frac{\partial T^f(x,t)}{\partial t} \tag{A1.45}$$

d'où la relation matricielle entre les différents spectres, compte tenu de la linéarité :

$$\boldsymbol{\theta}^f - \boldsymbol{\theta}_e^f = \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{\phi}^0(e_0) - \boldsymbol{\phi}^1(0)\right) \tag{A1.46}$$

La matrice quadripolaire relative au canal fluide (matrice de transfert) apparaît alors naturellement, dans le cas où le coefficient d'échange est infini :

$$\boldsymbol{\theta}^0(z_0 = e_0) - \boldsymbol{\theta}_e^f = \boldsymbol{\theta}^f - \boldsymbol{\theta}_e^f = \boldsymbol{\theta}^1(z_1 = 0) - \boldsymbol{\theta}_e^f \tag{A1.47}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0(e_0) - \boldsymbol{\theta}_e^f \\ \boldsymbol{\phi}^0(e_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{G}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^1(0) - \boldsymbol{\theta}_e^f \\ \boldsymbol{\phi}^1(0) \end{pmatrix} \tag{A1.48}$$

où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité de même taille que la matrice $\boldsymbol{G}$

Un changement de variable nous permet de prendre comme température de référence la température d'entrée du fluide. Ainsi le canal fluide est représenté par le quadripôle suivant :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0(e_0) \\ \boldsymbol{\phi}^0(e_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{G}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^1(0) \\ \boldsymbol{\phi}^1(0) \end{pmatrix} \tag{A1.49}$$

Dans le cas où l'échange se fait suivant un coefficient d'échange h identique sur les deux faces, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0(e_0) \\ \boldsymbol{\phi}^0(e_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}/h \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{G}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}/h \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^1(0) \\ \boldsymbol{\phi}^1(0) \end{pmatrix} \tag{A1.50}$$

Annexe 2 :
quadripôle hétérogène

Considérons la structure de la *figure 1*, deux blocs de conductivité λ_1 et λ_2 de même épaisseur e sont en contact parfait selon une de leur face latérale. Les deux faces latérales extrêmes sont isolées.

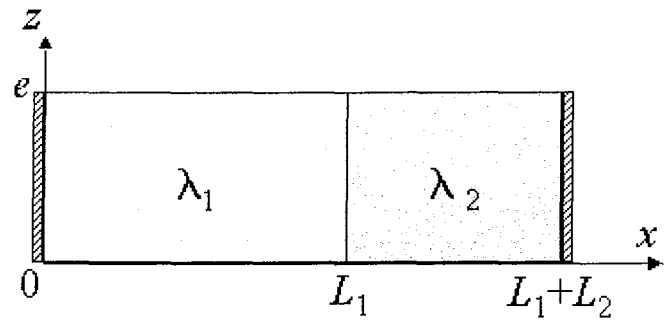


figure 1 : quadripôle composite

Résolvons l'équation de la chaleur dans cette structure par la méthode de séparation des variables :

$$\lambda(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{d\lambda}{dx}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda(x)\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \qquad \text{(A2.1)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 \quad \text{en } x=0 \quad \text{et } x=L_1+L_2 \qquad \text{(A2.2)}$$

Soient $X(x)$ et $Z(z)$ deux fonctions telles que $T(x,z)=X(x)Z(z)$.

Les variables sont séparables donc il existe une constante α positive telle que :

$$\frac{X''}{X}+\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{X'}{X}=-\frac{Z''}{Z}=-\alpha^2 \qquad \text{(A2.3)}$$

donc,
$$X''(x)+\frac{\lambda'}{\lambda}X'(x)+\alpha^2 X=0 \qquad \text{(A2.4)}$$

et
$$X'(0)=X'(L_1+L_2)=0 \qquad \text{(A2.5)}$$

ce qui constitue un problème de Sturm-Liouville :

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda(x)\frac{dX}{dx}(x,\alpha)\right]+\lambda(x)\alpha^2 X=0 \qquad \text{(A2.6)}$$

$$X'(0)=X'(L_1+L_2)=0 \qquad \text{(A2.7)}$$

(sachant que l'hypothèse de la continuité de $\lambda(x)$ n'est pas vérifiée)

La résolution de (A2.6)-(A2.7) passe par l'écriture de deux sous problèmes sur les espaces I_1 et I_2 sachant que le raccord doit être fait à leur frontière commune :

$$X(x)=X_1(x) \quad \text{sur} \quad [0\ L_1]=I_1 \qquad \text{(A2.8)}$$

$$X(x)=X_2(x) \quad \text{sur} \quad [L_1\ L_1+L_2]=I_2 \qquad \text{(A2.9)}$$

Donc le problème devient :

$$X_1''(x)+\alpha^2 X_1=0 \qquad 0\le x\le L_1 \qquad \text{(A2.10)}$$

$$X_2''(x)+\alpha^2 X_2 = 0 \qquad L_1 \le x \le L_1 + L_2 \tag{A2.11}$$

$$X_1'(0) = 0 \tag{A2.12}$$

$$X_2'(L_1 + L_2) = 0 \tag{A2.13}$$

$$X_1(L_1) = X_2(L_1) \tag{A2.14}$$

$$-\lambda_1 X_1'(L_1) = -\lambda_2 X_2'(L_1) \tag{A2.15}$$

La résolution de ce système permet de déterminer la base de fonction propre associée à cette géométrie et conditions limites latérales.

Les relations (A2.10) et (A2.11) impliquent :

$$\begin{cases} X_1 = A_1 \cos(\alpha x) + B_1 \sin(\alpha x) \\ X_2 = A_2 \cos(\alpha x) + B_2 \sin(\alpha x) \end{cases} \tag{A2.16}$$

où A_1, B_1, A_2, B_2, sont des constantes à déterminer.

D'après (A2.12) :

$$B_1 = 0 \tag{A2.17}$$

$$\text{et} \qquad X_1 = A_1 \cos(\alpha x) \tag{A2.18}$$

Les fonctions propres étant définies à une constante multiplicative près, nous pouvons choisir $A_1 = 1$. Ainsi :

$$X_1 = \cos(\alpha x) \tag{A2.19}$$

D'après (A2.13) :

$$A_2 \sin(\alpha(L_1 + L_2)) = B_2 \cos(\alpha(L_1 + L_2)) \tag{A2.20}$$

Reste donc à déterminer les constantes A_2 et B_2.

I Cas général

Suivant (A2.20), trois cas doivent être considérés :

Soit $\alpha = \dfrac{k\pi}{L_1 + L_2}$, soit $\alpha = \dfrac{k\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_1 + L_2}$ ou $\alpha \neq \dfrac{k\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_1 + L_2}$ et $\alpha \neq \dfrac{k\pi}{L_1 + L_2}$

I.1 Cas où $\alpha = \dfrac{k\pi}{L_1 + L_2}$

Dans ce cas, la relation (A2.20) implique B_2=0 donc : $X_2 = A_2 \cos(\alpha x)$ (A2.21)

Et la continuité de la température (A2.14), se traduit par : $\cos(\alpha L_1) = A_2 \cos(\alpha L_1)$ (A2.22)

Deux sous cas apparaissent : $\alpha = \dfrac{p\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_1}$ ou $\alpha \neq \dfrac{p\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_1}$

I.1.1 Cas où $\alpha = \dfrac{p\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_1}$

Dans ce cas, d'après (A2.22), A_2 peut être quelconque.

La continuité du flux se traduit par : $\lambda_1 \sin(\alpha L_1) = A_2 \lambda_2 \sin(\alpha L_1)$, ce qui donne $A_2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

En conclusion, dans tous les cas où : $\exists (p,k)$ entiers tels que $\dfrac{p\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_1} = \dfrac{k\pi}{L_1 + L_2}$ c'est-à-dire :

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{2k}{2p-1} - 1 \tag{A2.23}$$

La valeur propre est

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{L_1 + L_2} \tag{A2.24}$$

et est associée à la fonction propre :

$$\begin{cases} X_1 = \cos(\alpha x) \\ X_2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \cos(\alpha x) \end{cases} \tag{A2.25}$$

I.1.2 Cas où $\alpha \neq \dfrac{p\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_1}$

Dans ce cas $A_2 = 1$, $X_1 = \cos(\alpha x)$ et $X_2 = \cos(\alpha x)$.

La continuité du flux se traduit par $\lambda_1 \, sin(\alpha L_1) = \lambda_2 \, sin(\alpha L_1)$.

Si $\alpha = \dfrac{p\pi}{L_1}$, le problème de Sturm-Liouville est vérifié.

En conclusion, dans tous les cas où : $\exists (p,k)$ entiers tel que $\dfrac{p\pi}{L_1} = \dfrac{k\pi}{L_1 + L_2}$ c'est-à-dire :

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{k}{p} - 1 \tag{A2.26}$$

la valeur propre est :

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{L_1 + L_2} \tag{A2.27}$$

et est associée à la fonction propre :

$$\begin{cases} X_1 = \cos(\alpha x) \\ X_2 = \cos(\alpha x) \end{cases} \tag{A2.28}$$

I.2 Cas où $\alpha = \dfrac{k\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_1 + L_2}$

Dans ce cas, la relation (A2.20) implique A_2=0 donc :

$$X_2 = B_2 \sin(\alpha x) \tag{A2.29}$$

Et la continuité de la température (A2.14), se traduit par :

$$\cos(\alpha L_1) = B_2 \sin(\alpha L_1) \tag{A2.30}$$

Le cas $\alpha = \dfrac{p\pi}{L_1}$ est impossible (car conduit à ±1=0), donc $\alpha \neq \dfrac{p\pi}{L_1}$ et

$$X_2 = \frac{\sin \alpha x}{\tan \alpha L_1} \tag{A2.31}$$

La continuité du flux se traduit par :

$$\tan^2(\alpha L_1) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{A2.32}$$

qui n'admet pas de solution. Ce cas est donc impossible.

I.3 Cas où $\alpha \neq \dfrac{k\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_1 + L_2}$ et $\alpha \neq \dfrac{k\pi}{L_1 + L_2}$

Dans ce cas, la relation (A2.20) implique :

$$X_2 = A_2\left(\cos(\alpha x) + \tan\left(\alpha(L_1 + L_2)\right)\sin(\alpha x)\right) \tag{A2.33}$$

Et la continuité de la température (A2.14), se traduit par :

$$\cos(\alpha L_1) = A_2\left(\cos(\alpha L_1) + \tan\left(\alpha(L_1 + L_2)\right)\sin(\alpha L_1)\right) \tag{A2.34}$$

Deux sous cas apparaissent : $\alpha = \dfrac{p\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_2}$ ou $\alpha \neq \dfrac{p\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_2}$

I.3.1 Cas où $\alpha \neq \dfrac{p\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_2}$

Dans ce cas,

$$X_2 = \frac{\cos \alpha L_1}{\cos \alpha L_2} \cos \alpha(L_1 + L_2 - x) \tag{A2.35}$$

et la continuité du flux se traduit par :

$$\lambda_1 \tan(\alpha L_1) + \lambda_2 \tan(\alpha L_2) = 0 \tag{A2.36}$$

équation transcendante qui doit être résolue numériquement.

I.3.2 Cas où $\alpha = \dfrac{p\pi - \dfrac{\pi}{2}}{L_2}$

Dans ce cas, la continuité de la température est vérifiée uniquement si $L_1 = L_2$. Et la continuité du flux amène à une contradiction. Ce cas est impossible.

I.4 Résumé

Il convient donc d'examiner 3 cas différents pour la détermination des valeurs propres et fonctions propres associées. Une des manières de procéder peut être la suivante :

* On se donne la géométrie, soit le rapport $\dfrac{L_2}{L_1}$.

* On détermine l'ensemble des couples (p,k) tel que $\dfrac{L_2}{L_1} = \dfrac{2k}{2p-1} - 1$ (p et k entiers et inférieurs à l'ordre de troncature choisi). Ce qui nous donne un ensemble de valeurs propres particulières $\mathbf{E}^1$ ($\alpha_k = \dfrac{k\pi}{L_1 + L_2}$).

* De même pour $\dfrac{L_2}{L_1} = \dfrac{k}{p} - 1$, nous obtenons l'ensemble $\mathbf{E}^2$.

* Reste à déterminer les valeurs propres restantes à partir de l'équation transcendante (A2.36) , ce qui nous donne l'ensemble $\mathbf{E}^3$.

A chaque ensemble de valeurs propres est associée une fonction propre :

à $\mathbf{E}^1$ est associée :

$$\Psi_1 = \begin{cases} X_1 = \cos\alpha x \\ X_2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\cos\alpha x \end{cases} \qquad \text{(A2.37)}$$

à $\mathbf{E}^2$ est associée :

$$\Psi_2 = \begin{cases} X_1 = \cos\alpha x \\ X_2 = \cos\alpha x \end{cases} \qquad \text{(A2.38)}$$

et à $\mathbf{E}^3$ est associée :

$$\Psi_3 = \begin{cases} X_1 = \cos\alpha x \\ X_2 = \dfrac{\cos\alpha L_1}{\cos\alpha L_2}\cos\alpha(L_1 + L_2 - x) \end{cases} \qquad \text{(A2.39)}$$

Ce qui nous permet de définir la transformation intégrale :

$$\theta_n(z) = \int_0^{L_1+L_2} \lambda(x) T(x,z) \psi_i(x,\alpha_n)\, dx\,, \qquad i = 1,2 \text{ ou } 3 \text{ suivant la valeur de } n \qquad \text{(A2.40)}$$

et la transformée inverse :

$$T(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_i(x,\alpha_n)\theta_n(z)\frac{1}{N_n^i} \tag{A2.41}$$

avec $$N_n^i=\int_0^{L_1+L_2}\lambda(x)\ \psi_i^2(x,\alpha_n)\ \mathrm{d}x \tag{A2.42}$$

En pratique, on peut éviter les valeurs particulières du rapport L_2/L_1 qui conduisent à des fonctions propres différentes, par exemple en modifiant d'une valeur infinitésimale L_1 ou L_2. Ceci simplifie nettement la mise en œuvre. On remarque que lorsque l'ordre de troncature tend vers l'infini, l'ensemble des valeurs particulières du rapport L_2/L_1 qu'il faut éviter devient l'ensemble des nombres rationnels. C'est un phénomène intéressant qui pourrait provenir de la non continuité de la conductivité (hypothèse du problème de Sturm-Liouville que l'on n'a pas respecté).

Ainsi, pour la famille de fonctions propres 3, la norme est la suivante :

$$N_n=\frac{\lambda_1 L_1}{2}+\frac{\lambda_2 L_2}{2}\left(\frac{\cos\alpha_n L_1}{\cos\alpha_n L_2}\right)^2 \tag{A2.43}$$

$$N_0=\lambda_1 L_1+\lambda_2 L_2 \tag{A2.44}$$

I.5 Détermination de la relation quadripolaire

Le but est d'exprimer le spectre de la température et du flux à l'entrée en fonction du spectre de la température et du flux à la sortie.

$$T(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi(x,\alpha_n)\theta_n(z)\frac{1}{N_n} \tag{A2.45}$$

$$\varphi(x,z)=-\lambda(x)\frac{\partial T(x,z)}{\partial z}=\sum_{n=0}^{\infty}-\lambda(x)\psi(x,\alpha_n)\frac{\partial\theta_n(z)}{\partial z}\frac{1}{N_n} \tag{A2.46}$$

$$\phi_m=\int_0^{L_1+L_2}\lambda(x)\psi(x,\alpha_m)\varphi(x,z)\,\mathrm{d}x=-\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{L_1+L_2}\lambda^2(x)\psi(x,\alpha_n)\psi(x,\alpha_m)\frac{\partial\theta_n(z)}{\partial z}\frac{1}{N_n}\mathrm{d}x \tag{A2.47}$$

$$\phi_m=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{L_1+L_2}\lambda^2(x)\psi(x,\alpha_n)\psi(x,\alpha_m)dx\right)\frac{\partial\theta_n(z)}{\partial z}\frac{1}{N_n} \tag{A2.48}$$

$$\phi_m=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{L_1+L_2}\frac{\lambda^2(x)\psi(x,\alpha_n)\psi(x,\alpha_m)}{N_n}dx\right)\frac{\partial\theta_n(z)}{\partial z} \tag{A2.49}$$

$$\boldsymbol{\phi}=-\left[\left(\int_0^{L_1+L_2}\frac{\lambda^2(x)\psi(x,\alpha_i)\psi(x,\alpha_j)}{N_i}dx\right)\right]\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\theta} \tag{A2.50}$$

$$\text{soit, } \boldsymbol{\phi}=-\boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\theta} \tag{A2.51}$$

On voit donc apparaître une matrice que l'on baptise, par analogie au cas classique, "matrice conductivité hétérogène".

Déterminons alors la relation quadripolaire. L'intégration de (A2.3) conduit à :

$$\theta_n(z) = K_1 ch(\alpha_n z) + K_2 sh(\alpha_n z) \tag{A2.52}$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes d'intégration que nous allons déterminer en fonction des conditions limites. En $z = 0$:

$$\theta_n(0) = \theta_n^e \tag{A2.53}$$

Donc d'un point de vu matriciel :

$$\boldsymbol{\theta}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ch(\alpha_n z) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^e + \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & sh(\alpha_n z) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \boldsymbol{K}_2 \tag{A2.54}$$

Donc

$$\boldsymbol{\phi}(z) = -\boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial z} = -\boldsymbol{\Lambda}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n sh(\alpha_n z) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^e - \boldsymbol{\Lambda}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n ch(\alpha_n z) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \boldsymbol{K}_2 \tag{A2.55}$$

Ce qui veut dire que :

$$\boldsymbol{\phi}(0) = \boldsymbol{\phi}^e = -\boldsymbol{\Lambda}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \boldsymbol{K}_2 \tag{A2.56}$$

Soit,

$$\boldsymbol{K}_2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\phi}^e \tag{A2.57}$$

Donc :

$$\boldsymbol{\theta}(e) = \boldsymbol{\theta}^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ch(\alpha_n e) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^e - \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{sh(\alpha_n e)}{\alpha_n} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\phi}^e \tag{A2.58}$$

$$\boldsymbol{\phi}(e) = \boldsymbol{\phi}^s = -\boldsymbol{\Lambda}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n sh(\alpha_n e) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^e + \boldsymbol{\Lambda}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ch(\alpha_n e) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\phi}^e \tag{A2.59}$$

Ceci définit la matrice quadripôlaire :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(e) \\ \boldsymbol{\phi}(e) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \\ -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(0) \\ \boldsymbol{\phi}(0) \end{pmatrix} \tag{A2.60}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(0) \\ \boldsymbol{\phi}(0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \\ \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(e) \\ \boldsymbol{\phi}(e) \end{pmatrix} \tag{A2.61}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & ch(\alpha_n e) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}e & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{sh(\alpha_n e)}{\alpha_n} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_n sh(\alpha_n e) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots\end{bmatrix} \tag{A2.62}$$

les matrices $\boldsymbol{\Lambda C}$ et $\boldsymbol{B\Lambda}^{-1}$ n'étant plus diagonales.

L'expression de $\boldsymbol{\Lambda}$ est analytique :

$$\Lambda_{ij}=\int_0^{L_1+L_2}\frac{\lambda^2(x)\psi(x,\alpha_i)\psi(x,\alpha_j)}{N_i}\mathrm{d}x \tag{A2.63}$$

$$\Lambda_{ij}N_i=\int_0^{L_1+L_2}\lambda^2(x)\psi(x,\alpha_i)\psi(x,\alpha_j)\mathrm{d}x \tag{A2.64}$$

- si $i\neq j$, $i>0, j>0$

$$\begin{aligned}\Lambda_{ij}N_i=&\frac{\lambda_1^2}{2}\left[\frac{sin(\alpha_i+\alpha_j)L_1}{\alpha_i+\alpha_j}+\frac{sin(\alpha_i-\alpha_j)L_1}{\alpha_i-\alpha_j}\right]\\&+\frac{\lambda_2^2}{2}\left[\frac{cos\,\alpha_i L_1\,cos\,\alpha_j L_1}{cos\,\alpha_i L_2\,cos\,\alpha_j L_2}\right]\left[\frac{sin(\alpha_i+\alpha_j)L_2}{(\alpha_i+\alpha_j)}+\frac{sin(\alpha_i-\alpha_j)L_2}{(\alpha_i-\alpha_j)}\right]\end{aligned} \tag{A2.65}$$

- si $i=j$, $i>0, j>0$:

$$\begin{aligned}\Lambda_{ii}N_i=&\frac{\lambda_1^2L_1}{2}+\frac{\lambda_1^2}{4\alpha_i}sin\,2\alpha_iL_1\\&+\lambda_2^2\left(\frac{cos\,\alpha_iL_1}{cos\,\alpha_iL_2}\right)^2\left[\frac{L_2}{2}+\frac{sin\,2\alpha_iL_2}{4\alpha_i}\right]\end{aligned} \tag{A2.66}$$

- si $i=0$, $j=0$:

$$\Lambda_{00}=\frac{\lambda_1^2L_1+\lambda_2^2L_2}{\lambda_1L_1+\lambda_2L_2} \tag{A2.67}$$

- si $i=0, j>0$:

$$\Lambda_{0j}N_0=\frac{\lambda_1^2}{\alpha_j}sin\,\alpha_jL_1+\frac{\lambda_2^2}{\alpha_j}\frac{cos\,\alpha_jL_1}{cos\,\alpha_jL_2}sin\,\alpha_jL_2 \tag{A2.68}$$

- si $i>0, j=0$:

$$\Lambda_{i0}N_i=\frac{\lambda_1^2}{\alpha_i}sin\,\alpha_iL_1+\frac{\lambda_2^2}{\alpha_i}\frac{cos\,\alpha_iL_1}{cos\,\alpha_iL_2}sin\,\alpha_iL_2 \tag{A2.69}$$

Voilà pour la matrice conductivité hétérogène. Son inverse est calculé numériquement.

II Cas particulier : $L_1 = L_2 = L$

Ce cas est intéressant dans la mesure où il conduit à des valeurs propres analytiques. Les cas $L_1 = k*L_2$ (k entier) peuvent être traités de la même façon.

D'après les calculs précédents, la solution du problème de Sturm-Liouville est la suivante :
Les valeurs propres analytiques sont

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{2L} \tag{A2.70}$$

Seules les fonctions propres des familles 1 et 2 interviennent, suivant la parité de n :

$$\psi(x,\alpha) = \begin{cases} n \text{ pair} : \begin{cases} X_1(x) = \cos\alpha x \\ X_2(x) = \cos\alpha x \end{cases} \\ n \text{ impair} : \begin{cases} X_1(x) = \cos\alpha x \\ X_2(x) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\cos\alpha x \end{cases} \end{cases} \tag{A2.71}$$

La norme est la suivante :

$$\begin{cases} n \text{ pair} : N_n = \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)}{2}L \\ n \text{ impair} : N_n = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)}{2}L \\ n = 0 : N_0 = (\lambda_1+\lambda_2)L \end{cases} \tag{A2.72}$$

La matrice conductivité est la suivante :
* i pair, j pair , $i>0, j>0,\ i \neq j$:

$$\Lambda_{ij} = 0 \tag{A2.73}$$

* i pair, j pair , $i>0, j>0,\ i = j$:

$$N_i\Lambda_{ii} = \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{2}L \tag{A2.74}$$

* i impair, j impair , $i>0, j>0,\ i \neq j$:

$$\Lambda_{ij} = 0 \tag{A2.75}$$

* i impair, j impair , $i>0, j>0,\ i = j$:

$$N_i\Lambda_{ii} = \lambda_1^2 L \tag{A2.76}$$

* i pair, j impair , $i>0, j>0$:

$$N_j\Lambda_{ij} = \lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)\frac{\alpha_j}{\alpha_i^2-\alpha_j^2}(-1)^{\frac{i+j+1}{2}} \tag{A2.77}$$

* i impair, j pair , $i>0, j>0$:

$$N_j\Lambda_{ij} = \lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)\frac{\alpha_i}{\alpha_i^2-\alpha_j^2}(-1)^{\frac{i+j-1}{2}} \tag{A2.78}$$

* $i=0, j$ pair , $j>0$:

$$\Lambda_{0j} = 0 \tag{A2.79}$$

* $i=0, j$ impair , $j>0$:

$$N_j \Lambda_{0j} = \frac{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{\alpha_j}(-1)^{\frac{j-1}{2}} \tag{A2.80}$$

* $j = 0$, i pair , $i > 0$:

$$\Lambda_{i0} = 0 \tag{A2.81}$$

* $j = 0$, j impair , $i > 0$:

$$N_0 \Lambda_{i0} = \frac{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{\alpha_i}(-1)^{\frac{i-1}{2}} \tag{A2.82}$$

* $i = 0, j = 0$:

$$\Lambda_{00} = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{A2.83}$$

II.1 Application

On se propose ici de vérifier si le cas général, dont les valeurs propres sont calculées numériquement tend bien vers ce cas particulier (L_1=L_2) pour lequel les valeurs propres sont analytiques (familles 1 et 2). On choisit L_2 = 1.000001*L_1 pour le programme général (famille 3). L'excitation (4.0e4 Wm^{-1}) est uniforme sur toute la longueur du bloc composite. L = 1 m ;λ_1 = 80 $Wm^{-1}K^{-1}$; λ_2 = 380 $Wm^{-1}K^{-1}$; e = 0.2 m ; 100 harmoniques conservées. Sur la *figure 2* sont représenté la température en face avant et au milieu du bloc suivant les deux méthodes de calcul.

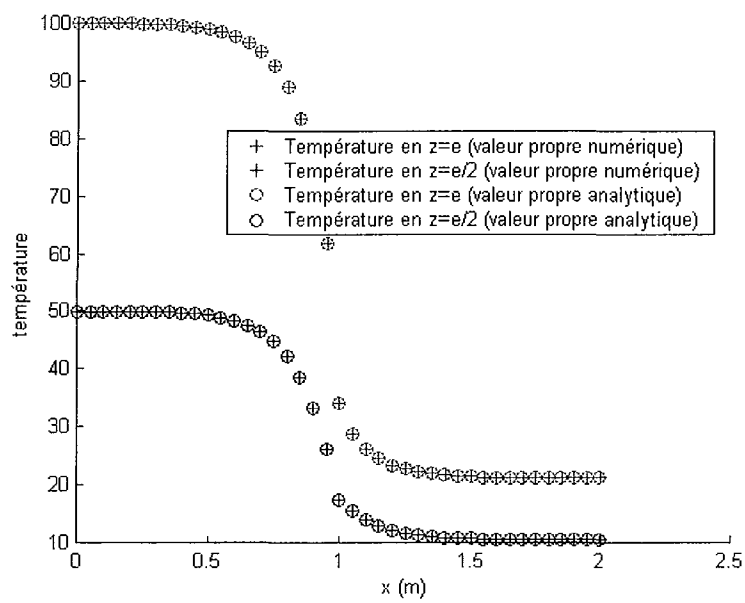


figure 2 : température en face avant et au milieu du bloc calculée par deux méthodes différentes.

Nous constatons donc bien que la méthode générale tend vers le cas particulier. Ce qui prouve entre autres que l'on calcule correctement les valeurs propres numériques.

Annexe 3 :
Calcul de la matrice de convolution *R* permettant la prise en compte de résistance non uniforme dans l'espace en 3D

Par définition :

$$T^2(x,y)-T^1(x,y)=R(x,y)\varphi(x,y) \tag{A3.1}$$

Si on applique la transformée de Fourier :

$$\theta^2_{n,m}-\theta^1_{n,m}=\int_0^{L_x}\int_0^{L_y} R(x,y)\,\varphi(x,y)\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y \tag{A3.2}$$

Nous allons remplacer la densité de flux par son expression développée :

$$\varphi(x,y)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\phi_{p,r}}{N_{p,r}}cos(\alpha_p x)cos(\beta_r y) \tag{A3.3}$$

où $N_{p,r}$ est la norme du produit scalaire :

$$N_{p,r}=\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\cos^2(\alpha_p x)\cos^2(\beta_r x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{A3.4}$$

$$N_{0,0}=L_xL_y,\qquad (N_{0,n})_{n\geq 1}=(N_{n,0})_{n\geq 1}=\frac{L_xL_y}{2},\qquad (N_{n,m})_{n,m\geq 1}=\frac{L_xL_y}{4} \tag{A3.5}$$

donc
$$\theta^2_{n,m}-\theta^1_{n,m}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\left[\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}R(x,y)cos(\alpha_n x)cos(\beta_m y)cos(\alpha_p x)cos(\beta_r y)dxdy\right]\frac{\phi_{p,r}}{N_{p,r}} \tag{A3.6}$$

$R(x,y)$ est ensuite remplacée par son expression développée :

$$\theta^2_{n,m}-\theta^1_{n,m}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\left[\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\sum_{i,j}\frac{\rho_{i,j}}{N_{i,j}}cos(\alpha_i x)cos(\beta_j y)cos(\alpha_n x)cos(\beta_m y)cos(\alpha_p x)cos(\beta_r y)dxdy\right]\frac{\phi_{p,r}}{N_{p,r}} \tag{A3.7}$$

$$\theta^2_{n,m}-\theta^1_{n,m}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\left[\sum_{i,j}\frac{\rho_{i,j}}{N_{i,j}}\int_0^{L_x}cos(\alpha_n x)cos(\alpha_p x)cos(\alpha_i x)dx\int_0^{L_y}cos(\beta_m y)cos(\beta_r y)cos(\beta_j y)dy\right]\frac{\phi_{p,r}}{N_{p,r}} \tag{A3.8}$$

on appelle alors $F^L_{npi}=\int_0^L cos(\alpha_n x)cos(\alpha_p x)cos(\alpha_i x)dx$ (A3.9)

$$\theta^2_{n,m}-\theta^1_{n,m}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\left[\sum_{i,j}\frac{\rho_{i,j}}{N_{i,j}}F^{L_x}_{npi}F^{L_y}_{mrj}\right]\frac{\phi_{p,r}}{N_{p,r}} \tag{A3.10}$$

$F^L_{npi}=0$ à part pour certaines valeurs particulières des indices :

* $F^L_{000}=L$ (A3.11)

* if $k\geq 1$, $F^L_{0kk}=F^L_{k0k}=F^L_{kk0}=\frac{L}{2}$ (A3.12)

* if $n,p\geq 1$, $n\neq p$, $F^L_{npn+p}=F^L_{np|n-p|}=\frac{L}{4}$ (A3.13)

Ainsi, si $n,m\geq 1$:

$$\theta^2_{0,0}-\theta^1_{0,0}=\sum_{p\geq 0}\sum_{r\geq 0}\rho_{p,r}\frac{\phi_{p,r}}{N_{p,r}} \tag{A3.14}$$

$$\theta^2_{0,m} - \theta^1_{0,m} = \sum_{p\geq 0} \rho_{p,m} \frac{\phi_{p,0}}{N_{p,0}} + \sum_{p\geq 0} \frac{\rho_{p,0} + \rho_{p,2m}}{2} \frac{\phi_{p,m}}{N_{p,m}} + \sum_{\substack{p\geq 0 \\ p\neq n}} \sum_{\substack{r\geq 1 \\ r\neq m}} \left(\frac{\rho_{p,n+r} + \rho_{p,|m-r|}}{2} \right) \frac{\phi_{p,r}}{N_{p,r}} \qquad \text{(A3.15)}$$

$$\theta^2_{n,0} - \theta^1_{n,0} = \sum_{r\geq 0} \rho_{n,r} \frac{\phi_{0,r}}{N_{0,r}} + \sum_{r\geq 0} \frac{\rho_{0,r} + \rho_{2n,r}}{2} \frac{\phi_{n,r}}{N_{n,r}} + \sum_{r\geq 0} \sum_{\substack{p\geq 1 \\ p\neq n}} \left(\frac{\rho_{n+p,r} + \rho_{|n-p|,r}}{2} \right) \frac{\phi_{p,r}}{N_{p,r}} \qquad \text{(A3.16)}$$

$$\begin{aligned}
\theta^2_{n,m} - \theta^1_{n,m} = {} & \rho_{n,m} \frac{\phi_{0,0}}{N_{0,0}} + \frac{\rho_{n,0} + \rho_{n,2m}}{2} \frac{\phi_{0,m}}{N_{0,m}} + \frac{\rho_{0,m} + \rho_{2n,m}}{2} \frac{\phi_{n,0}}{N_{n,0}} + \frac{\rho_{0,0} + \rho_{0,2m} + \rho_{2n,0} + \rho_{2n,2m}}{4} \frac{\phi_{n,m}}{N_{n,m}} \\
& + \sum_{\substack{r\geq 1 \\ r\neq m}} \left(\frac{\rho_{n,m+r} + \rho_{n,|m-r|}}{2} \right) \frac{\phi_{0,r}}{N_{0,r}} + \sum_{\substack{r\geq 1 \\ r\neq m}} \left(\frac{\rho_{0,m+r} + \rho_{0,|m-r|} + \rho_{2n,m+r} + \rho_{2n,|m-r|}}{4} \right) \frac{\phi_{n,r}}{N_{n,r}} \\
& + \sum_{\substack{p\geq 1 \\ p\neq n}} \left(\frac{\rho_{n+p,m} + \rho_{|n-p|,m}}{2} \right) \frac{\phi_{p,0}}{N_{p,0}} + \sum_{\substack{p\geq 1 \\ p\neq n}} \left(\frac{\rho_{n+p,0} + \rho_{|n-p|,0} + \rho_{n+p,2m} + \rho_{|n-p|,2m}}{4} \right) \frac{\phi_{p,m}}{N_{p,m}} \\
& + \sum_{\substack{p\geq 1 \\ p\neq n}} \sum_{\substack{r\geq 1 \\ r\neq m}} \left(\frac{\rho_{n+p,m+r} + \rho_{n+p,|m-r|} + \rho_{|n-p|,m+r} + \rho_{|n-p|,|m-r|}}{4} \right) \frac{\phi_{p,r}}{N_{p,r}}
\end{aligned} \qquad \text{(A3.17)}$$

ce qui constitue l'expression analytique de $\boldsymbol{R}$ en fonction du spectre de $R(x,y)$ $\left(\rho_{n,m}\right)_{n\leq 2N,\, m\leq 2M}$

.

Annexe 4 :
cas du refroidissement par un côté

Considérons la structure de la *figure 1* : un bloc est refroidi sur sa face latérale en $x = L^x$ par un écoulement dans un canal de section $l \times e$, de vitesse moyenne débitante V, de température moyenne débitante $T(y)$ et de propriétés thermophysiques connues. Le coefficient d'échange supposé uniforme imposé par l'écoulement est h.

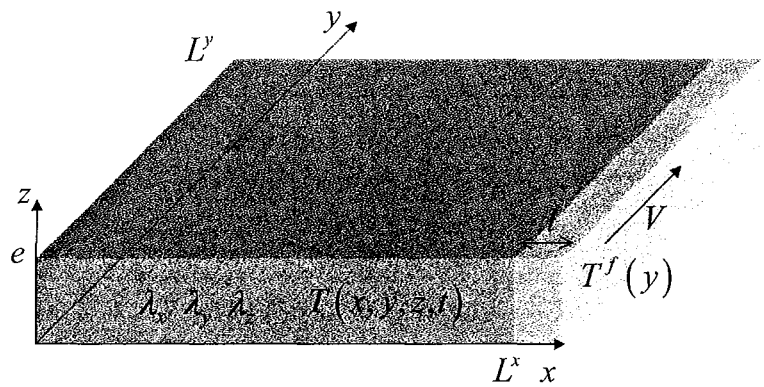


figure 1 : bloc en trois dimensions refroidi par une face latérale

La température du fluide dépendant de la variable y, elle ne peut être choisie égale à zéro.
En régime permanent, le problème s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \qquad \text{(A4.1)}$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0 \qquad \text{(A4.2)}$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=L_x}=h\left(T-T^f(y)\right) \qquad \text{(A4.3)}$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0,y=L_y}=0 \qquad \text{(A4.4)}$$

Appliquons le changement de variable suivant : $\overline{T}(x,y,z)=T(x,y,z)-T^f(y)$
Le système devient :

$$\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial z^2}=-\frac{d^2T^f}{dy^2} \qquad \text{(A4.5)}$$

$$-\lambda\frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0 \qquad \text{(A4.6)}$$

$$-\lambda \left.\frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\right|_{x=L_x} = h\left(\overline{T}\right) \tag{A4.7}$$

$$-\lambda \left.\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\right|_{y=0,y=L_y} = 0 \tag{A4.8}$$

Appliquons la double transformée intégrale correspondant à ces conditions limites latérales (voir *tableau 1, cas 6*) :

$$\overline{\theta}_{n,m} = \int_0^{L^y}\int_0^{L^x} \overline{T}(x,y,z)\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{A4.9}$$

où $\beta_m = m\pi/L^y$ et où les valeurs propres α_n sont les solutions positives de :

$$\frac{\cos(\alpha_n L^x)}{\sin(\alpha_n L^x)} = \frac{\lambda}{h}\alpha_n \tag{A4.10}$$

La norme associée à cette transformation intégrale est quant à elle :

$$N_n = \frac{L^x}{2}\left[1+\frac{hL^x/\lambda}{\left(hL^x/\lambda\right)^2+\left(\alpha_n L^x\right)^2}\right] \tag{A4.11}$$

L'équation (A4.5) devient donc, à condition que la dérivée de la température du fluide soit nulle à l'entrée et à la sortie du canal (entrée et sortie isolées) :

$$\frac{\partial^2 \overline{\theta}_{n,m}}{\partial z^2} - \left(\alpha_n^2+\beta_m^2\right)\overline{\theta}_{n,m} = \beta_m^2 \theta^f_{n,m} \tag{A4.12}$$

$$\text{où } \theta^f_{n,m} = \int_0^{L^x}\int_0^{L^y} T^f(y)\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{A4.13}$$

La solution de cette équation est :

$$\overline{\theta}_{n,m}(z) = A\mathrm{ch}\left(\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2}\,z\right) + B\mathrm{sh}\left(\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2}\,z\right) - \frac{\beta_m^2}{\alpha_n^2+\beta_m^2}\theta^f_{n,m} \tag{A4.14}$$

Soit $\gamma^2 = \alpha_n^2+\beta_m^2$, les conditions aux limites en z permettent de calculer les 2 constantes d'intégration :

$$A = \overline{\theta}_{n,m}(0) + \frac{\beta_m^2}{\alpha_n^2+\beta_m^2}\theta^f_{n,m}, \qquad B = -\frac{\phi_{n,m}(0)}{\lambda\gamma} \tag{A4.15}$$

ainsi :

$$\overline{\theta}_{n,m}(z) = \mathrm{ch}(\gamma z)\overline{\theta}_{n,m}(0) - \frac{\mathrm{sh}(\gamma z)}{\lambda\gamma}\phi_{n,m}(0) + \left(\mathrm{ch}(\gamma z)-1\right)\frac{\beta_m^2}{\alpha_n^2+\beta_m^2}\theta^f_{n,m} \tag{A4.16}$$

$$\phi_{n,m}(z) = -\lambda\gamma\,\mathrm{sh}(\gamma z)\overline{\theta}_{n,m}(0) + \mathrm{ch}(\gamma z)\phi_{n,m}(0) - \lambda\gamma\,\mathrm{sh}(\gamma z)\frac{\beta_m^2}{\alpha_n^2+\beta_m^2}\theta^f_{n,m} \tag{A4.17}$$

La relation quadripolaire devient donc pour chaque harmonique :

$$\begin{pmatrix}\overline{\theta}_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(e) = \begin{pmatrix}\mathrm{ch}(\gamma e) & -\dfrac{\mathrm{sh}(\gamma e)}{\lambda\gamma}\\ -\lambda\gamma\,\mathrm{sh}(\gamma e) & \mathrm{ch}(\gamma e)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\theta}_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(0) + \begin{pmatrix}\left(\mathrm{ch}(\gamma e)-1\right)\dfrac{\beta_m^2}{\gamma^2}\theta^f_{n,m}\\ -\lambda\gamma\,\mathrm{sh}(\gamma e)\dfrac{\beta_m^2}{\gamma^2}\theta^f_{n,m}\end{pmatrix} \tag{A4.18}$$

ou

$$\begin{pmatrix}\bar{\theta}_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(\gamma e) & \dfrac{\mathrm{sh}(\gamma e)}{\lambda\gamma}\\ \lambda\gamma\mathrm{sh}(\gamma e) & \mathrm{ch}(\gamma e)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\theta}_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(e)+\begin{pmatrix}\left(\mathrm{ch}(\gamma e)-1\right)\dfrac{\beta_m^2}{\gamma^2}\theta^f_{n,m}\\ \lambda\gamma\mathrm{sh}(\gamma e)\dfrac{\beta_m^2}{\gamma^2}\theta^f_{n,m}\end{pmatrix} \tag{A4.19}$$

De plus, $\bar{\theta}_{n,m}=\theta_{n,m}-\theta^f_{n,m}$ car la double transformée est linéaire

Donc :

$$\begin{pmatrix}\theta_{n,m}-\theta^f_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(\gamma e) & \dfrac{\mathrm{sh}(\gamma e)}{\lambda\gamma}\\ \lambda\gamma\mathrm{sh}(\gamma e) & \mathrm{ch}(\gamma e)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_{n,m}-\theta^f_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(e)+\begin{pmatrix}\left(\mathrm{ch}(\gamma e)-1\right)\dfrac{\beta_m^2}{\gamma^2}\theta^f_{n,m}\\ \lambda\gamma\mathrm{sh}(\gamma e)\dfrac{\beta_m^2}{\gamma^2}\theta^f_{n,m}\end{pmatrix} \tag{A4.20}$$

$$\begin{pmatrix}\theta_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(\gamma e) & \dfrac{\mathrm{sh}(\gamma e)}{\lambda\gamma}\\ \lambda\gamma\mathrm{sh}(\gamma e) & \mathrm{ch}(\gamma e)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(e)+\begin{pmatrix}\left(\left(\mathrm{ch}(\gamma e)-1\right)\dfrac{\beta_m^2}{\gamma^2}-\mathrm{ch}(\gamma e)+1\right)\theta^f_{n,m}\\ \left(\lambda\gamma\mathrm{sh}(\gamma e)\dfrac{\beta_m^2}{\gamma^2}-\lambda\gamma\mathrm{sh}(\gamma e)\right)\theta^f_{n,m}\end{pmatrix} \tag{A4.21}$$

d'où la relation quadripolaire avec source :

$$\begin{pmatrix}\theta_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(\gamma e) & \dfrac{\mathrm{sh}(\gamma e)}{\lambda\gamma}\\ \lambda\gamma\mathrm{sh}(\gamma e) & \mathrm{ch}(\gamma e)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(e)+\begin{pmatrix}\left(\mathrm{ch}(\gamma e)-1\right)\left(\dfrac{\beta_m^2}{\gamma^2}-1\right)\theta^f_{n,m}\\ \lambda\gamma\mathrm{sh}(\gamma e)\left(\dfrac{\beta_m^2}{\gamma^2}-1\right)\theta^f_{n,m}\end{pmatrix} \tag{A4.22}$$

que l'on écrit :

$$\begin{pmatrix}\theta_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}A & B\\ C & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_{n,m}\\ \phi_{n,m}\end{pmatrix}(e)+\begin{pmatrix}Q\theta^f_{n,m}\\ S\theta^f_{n,m}\end{pmatrix} \tag{A4.23}$$

D'où la relation matricielle

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}(e)+\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q\theta}^f\\ \boldsymbol{S\theta}^f\end{pmatrix} \tag{A4.24}$$

Les modes étant découplés, les matrices sont diagonales. Nous retrouvons la relation quadripolaire classique avec un terme source qui traduit l'évolution de la température $T^f(y)$.

Trois conditions limites sont à connaître pour déterminer les deux restantes.

Application numérique :

Considérons un bloc de cuivre carré de 10 cm de côté, d'épaisseur 3cm, dont la face supérieure est soumise à un flux uniforme de 5.10^4 Wm^{-2} et dont la face inférieure est isolée. Seule la face latérale en $x=L^x$ n'est pas isolée et échange de la chaleur avec le fluide au travers d'un coefficient d'échange h=5000 $Wm^{-2}K^{-1}$, la température du fluide dont la vitesse est suivant $0y$ varie linéairement de 0°C à 10°C.

Sur la *figure 2* est représentée la température dans le plan de coupe y = 5cm et sur la *figure 3* la température sur la face de l'échange $x=L^x$. 30×30 harmoniques sont conservées.

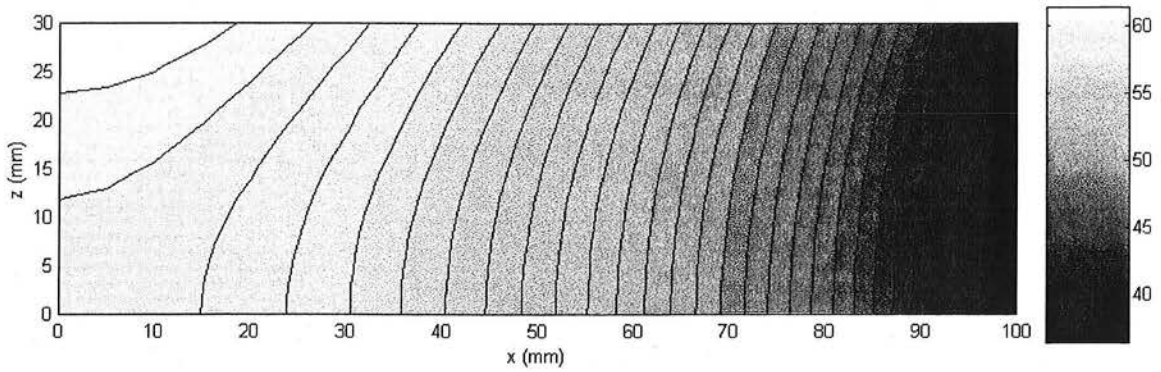


figure 2 : champ de température dans le plan $y=L^y/2$

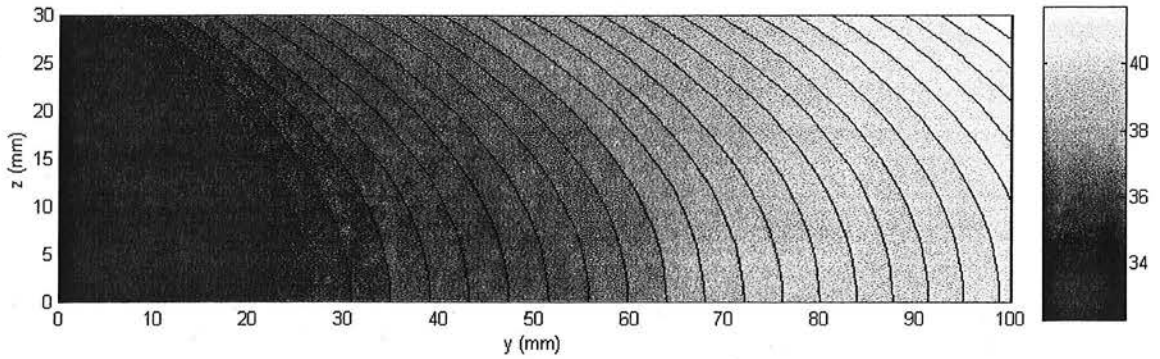


figure 3 : champ de température dans le plan $x=L^x$ (paroi du canal)

Ce premier problème étant résolu, il reste à coupler la structure à l'échange convectif, c'est-à-dire exprimer la température du fluide en fonction des paramètres de l'écoulement et des conditions limites sur la face supérieure ou inférieure.

Couplage au fluide

Le but ici est de déterminer la relation entre le spectre de la température du fluide et les spectres de température et de densité de flux en $z = e$ pour disposer finalement de la relation entrée sortie du bloc en fonction des paramètres régissant l'écoulement du fluide. On suppose que les trois autres parois de la veine fluide sont isolées.
Le bilan d'énergie sur le fluide se traduit par :

$$\frac{\int_0^e -\lambda \frac{\partial T(L_x, y, z)}{\partial x} \, dz}{\rho c l e V} = \frac{\partial T^f(y)}{\partial y} \qquad \text{(A4.25)}$$

Or, $$-\lambda\frac{\partial T(L^x,y,z)}{\partial x}=\lambda\sum_{i,j}\frac{\alpha_i}{N_{i,j}}\sin(\alpha_i L^x)\cos(\beta_j y)\theta_{i,j}(z) \quad \text{(A4.26)}$$

De plus, d'après la relation quadripolaire (A4.21) :

$$\theta_{i,j}(z)=\mathrm{ch}(\gamma_{i,j}(e-z))(\theta_{i,j}(z=e))+\frac{\mathrm{sh}(\gamma_{i,j}\ (e-z))}{\lambda\gamma_{i,j}}\phi_{i,j}(z=e)+(\mathrm{ch}(\gamma_{i,j}(e-z))-1)\left(\frac{\beta_j^2}{\gamma_{i,j}^2}-1\right)\theta_{i,j}^f \quad \text{(A4.27)}$$

soit

$$\theta_{i,j}(z)=\mathrm{ch}(\gamma_{i,j}(e-z))\ \ \theta_{i,j}^s+\frac{\mathrm{sh}(\gamma_{i,j}(e-z))}{\lambda\gamma_{i,j}}\phi_{i,j}^s+(\mathrm{ch}(\gamma_{i,j}(e-z))-1)\left(\frac{\beta_j^2}{\gamma_{i,j}^2}-1\right)\theta_{i,j}^f \quad \text{(A4.28)}$$

l'indice s désignant l'altitude $z = e$, donc

$$\int_0^e\theta_{i,j}(z)\mathrm{d}z=\int_0^e\left(\mathrm{ch}(\gamma_{i,j}(e-z))\theta_{i,j}^s+\frac{\mathrm{sh}(\gamma_{i,j}\ (e-z))}{\lambda\gamma_{i,j}}\phi_{i,j}^s+(\mathrm{ch}(\gamma_{i,j}(e-z))-1)\left(\frac{\beta_j^2}{\gamma_{i,j}^2}-1\right)\theta_{i,j}^f\right)\mathrm{d}z \quad \text{(A4.29)}$$

$$\int_0^e\theta_{i,j}(z)\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{sh}(\gamma_{i,j}e)}{\gamma_{i,j}}\theta_{i,j}^s+\frac{(\mathrm{ch}(\gamma_{i,j}e)-1)}{\lambda\gamma_{i,j}^2}\phi_{i,j}^s+\left(\frac{\mathrm{sh}(\gamma_{i,j}e)}{\gamma_{i,j}}-e\right)\left(\frac{\beta_j^2}{\gamma_{i,j}^2}-1\right)\theta_{i,j}^f \quad \text{(A4.30)}$$

Nous pouvons donc calculer la relation linéaire qu'il existe entre les spectres de la température du fluide et les spectres de la température et de la densité de flux sur la face supérieure du bloc :

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\theta}^f=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{\theta}^s+\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{\phi}^s \quad \text{(A4.31)}$$

$\boldsymbol{M}_1$ est une matrice carrée à priori inversible donc :

$$\boldsymbol{\theta}^f=\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{\theta}^s+\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{\phi}^s \quad \text{(A4.32)}$$

Ce qui lie la température du fluide aux température et densité de flux de sortie.

Or nous avions : $$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}(L_z)+\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\theta}^f\\ \boldsymbol{S}\boldsymbol{\theta}^f\end{pmatrix} \quad \text{(A4.33)}$$

La relation quadripolaire entrée sortie devient donc :

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_2&\boldsymbol{B}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_3\\ \boldsymbol{C}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_2&\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}(L_z) \quad \text{(A4.34)}$$

Ce qui définit le quadripôle avec refroidissement sur le coté par un fluide à débit et propriétés fixés.

Annexe 5 :
calcul des matrices de conversion de spectre en 2D

Soit la structure représentée sur la *figure 1*. Les deux blocs sont isolés sur leurs faces latérales.

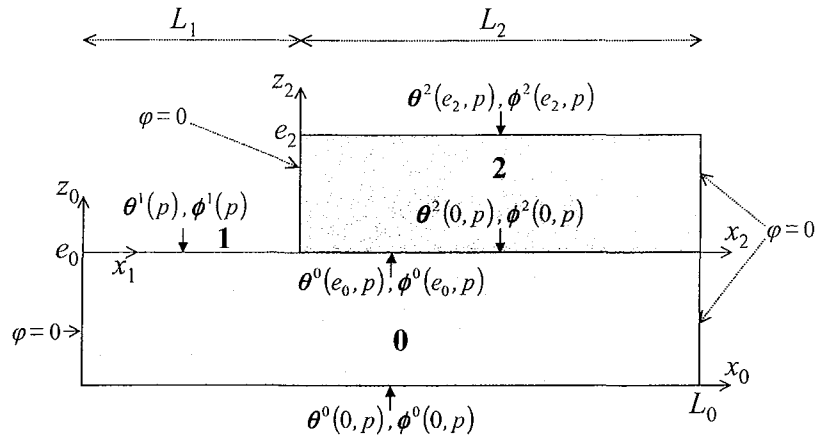


figure 1 : empilement de deux blocs en deux dimensions.

Nous allons calculer les matrices de conversion de spectre en nous appuyant sur cet exemple simple pour fixer les idées puis nous généraliserons leur expression.

La continuité de la température à l'interface entre le bloc 0 et les blocs et surfaces libres 2 et 1 s'écrit :

$$\begin{cases} T^0(x_0, z_0 = e_0) = T^1(x_1) \quad \text{pour} \quad 0 \le x_0 \le L_1 & \text{(A5.1)} \\ T^0(x_0, z_0 = e_0) = T^2(x_2, z_2 = 0) \quad \text{pour} \quad L_1 \le x_0 \le L_0 & \text{(A5.2)} \end{cases}$$

sachant que

$$x_1 = x_0 - \delta_1 \quad \text{et} \quad x_2 = x_0 - \delta_2 \qquad \text{(A5.3)}$$

où les δ_i représentent le décalage suivant 0_0x_0 du repère relatif au bloc ou surface libre i par rapport au repère relatif au bloc inférieur. Ici, $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = L_1$.

I Expression des spectre supérieur en fonction du spectre inférieur : formalisme « du plus grand vers les plus petits »

Il s'agit ici de déterminer l'application de changement de base qui convertit la base relative au bloc inférieur 0 dans les bases relatives aux blocs et surfaces libres supérieures (1 et 2 sur l'exemple de la figure 1).

L'intégration de (A5.1) multipliée par $\cos(\alpha_n^1 x_1)$ entre 0 et L_1 conduit à :

$$\int_0^{L_1} T^1(x_1)\cos(\alpha_n^1 x_1)\,dx_1 = \int_0^{L_1} T^0(x_0, z_0 = e_0)\cos(\alpha_n^1 x_1)\,dx_1 \qquad \text{(A5.4)}$$

c'est-à-dire après remplacement de T^0 par son expression développée :

$$\theta_n^1 = \int_0^{L_1} \left(\frac{\theta_0^0}{L_0} + \frac{2}{L_0} \sum_{m=1}^{N_0} \theta_m^0 \cos\left(\alpha_m^0 x_0\right) \right) \cos\left(\alpha_n^1 x_1\right) \mathrm{d}x_1 \tag{A5.5}$$

soit :

$$\theta_n^1 = \int_0^{L_1} \left(\frac{\theta_0^0}{L_0} + \frac{2}{L_0} \sum_{m=1}^{N_0} \theta_m^0 \cos\left(\alpha_m^0 \left(x_1 + \delta_1\right)\right) \right) \cos\left(\alpha_n^1 x_1\right) \mathrm{d}x_1 \tag{A5.6}$$

$$\theta_n^1 = \frac{\theta_0^0}{L_0} \int_0^{L_1} \cos\left(\alpha_n^1 x_1\right) \mathrm{d}x_1 + \frac{2}{L_0} \sum_{m=1}^{N_0} \theta_m^0 \int_0^{L_1} \cos\left(\alpha_m^0 \left(x_1 + \delta_1\right)\right) \cos\left(\alpha_n^1 x_1\right) \mathrm{d}x_1 \tag{A5.7}$$

- si $n = 0$

$$\theta_0^1 = \frac{\theta_0^0}{L_0} L_1 + \frac{2}{L_0} \sum_{m=1}^{N_0} \theta_m^0 \int_0^{L_1} \cos\left(\alpha_m^0 \left(x_1 + \delta_1\right)\right) \mathrm{d}x_1 \tag{A5.8}$$

soit :

$$\theta_0^1 = \frac{\theta_0^0}{L_0} L_1 + \frac{2}{L_0} \sum_{m=1}^{N_0} \theta_m^0 \int_0^{L_1} \cos\left(\alpha_m^0 \left(x_1 + \delta_1\right)\right) \mathrm{d}x_1 \tag{A5.9}$$

$$\theta_0^1 = \frac{\theta_0^0}{L_0} L_1 + \frac{2}{L_0} \sum_{m=1}^{N_0} \frac{\sin\left(\alpha_m^0 \left(L_1 + \delta_1\right)\right) - \sin\left(\alpha_m^0 \delta_1\right)}{\alpha_m^0} \theta_m^0 \tag{A5.10}$$

qui s'écrit :

$$\theta_0^1 = \sum_{m=0}^{N_0} F_{0,m}^1 \, \theta_m^0 \tag{A5.11}$$

avec

$$F_{0,0}^1 = \frac{L_1}{L_0} \tag{A5.12}$$

et

$$F_{0,m}^1 = \frac{2}{m\pi} \left[\sin\left(m\pi \left(\frac{L_1}{L_0} + \frac{\delta_1}{L_0} \right) \right) - \sin m\pi \left(\frac{\delta_2}{l_0} \right) \right] = \mathrm{f}_1 \left(m, \frac{L_1}{L_0}, \frac{\delta_1}{L_0} \right) \tag{A5.13}$$

- si n > 0

$$\theta_n^1 = \frac{2}{L_0} \sum_{m=1}^{N_0} \theta_m^0 \int_0^{L_1} \cos\left(\alpha_m^0 \left(x_1 + \delta_1\right)\right) \cos\left(\alpha_n^1 x_1\right) \mathrm{d}x_1 \tag{A5.14}$$

que l'on écrit :

$$\theta_n^1 = \sum_{m=1}^{N_0} F_{n,m}^1 \theta_m^0 \tag{A5.15}$$

avec

$$F_{n,m}^1 = \frac{2}{L_0} \int_0^{L_1} \cos\left(\alpha_m^0 \left(x_1 + \delta_1\right)\right) \cos\left(\alpha_n^1 x_1\right) \mathrm{d}x_1 \tag{A5.16}$$

c'est-à-dire pour $m > 0$ et $n > 0$ et $\frac{n}{m} \neq \frac{L_1}{L_0}$:

$$F^1_{n,m} = \frac{2}{\pi}\frac{m}{m^2 - n^2\left(L_0/L_1\right)^2}\left[(-1)^n \sin\left(m\pi\left(\frac{\delta_1}{L_0}+\frac{L_1}{L_0}\right)\right) - \sin\left(m\pi\frac{\delta_1}{L_0}\right)\right] = \mathrm{f}_2\left(m,n,\frac{\delta_1}{L_0},\frac{L_1}{L_0}\right) \quad \text{(A5.17)}$$

pour $n > 0$:

$$F^1_{n,0} = 0 \quad \text{(A5.18)}$$

et pour $m > 0$ et $n > 0$ et $\frac{n}{m} = \frac{L_1}{L_0}$:

$$F^1_{n,m} = \frac{L_1}{L_0}\cos\left(m\pi\frac{\delta_1}{L_0}\right) = \mathrm{f}_3\left(m,\frac{\delta_1}{L_0},\frac{L_1}{L_0}\right) \quad \text{(A5.19)}$$

Le calcul de la matrice de conversion de spectre entre le bloc 0 et le bloc 2 est rigoureusement identique. Nous pouvons alors écrire la relation matricielle entre les différents spectres à l'interface :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{\theta}^2(z_2 = 0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^1 \\ \boldsymbol{F}^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^0(z_0 = e_0) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\theta}^0(z_0 = e_0) \quad \text{(A5.20)}$$

avec :

$$F^i = \left[\begin{array}{c|c} L_i/L_0 & \mathrm{f}_1(m,\delta_i/L_0,L_i/L_0) \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{f}_2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{f}_3(n,m,\delta_i/L_0,L_i/L_0) \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right]_{i=1,2} \quad \text{(A5.21)}$$

De taille $(N_i+1)\times(N_0+1)$.
Du point de vue de la méthode des quadripôles, la matrice F est la matrice de transfert de l'interface.

Le calcul est généralisable au cas de I blocs supérieurs : on considère, sur la largeur $[0\ L_0]$ du bloc inférieur 0, I intervalles $[\delta_i \quad \delta_i + L_i]$ avec :

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{i-1} L_i \ ; \ \delta_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{I} L_i = L_0 \quad \text{(A5.22)}$$

La matrice de conversion de spectre F (de dimension $\left(\sum_i (N_i+1)\right)\times(N_0+1)$) est alors définie de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^1(z_1 = 0) \\ \boldsymbol{\theta}^2(z_2 = 0) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}^I(z_I = 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^1 \\ \boldsymbol{F}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^i \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^I \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^0(z_0 = e_0) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\theta}^0(z_0 = e_0) \quad \text{(A5.23)}$$

II Expression du spectre inférieur en fonction des spectres supérieurs : formalisme « des plus petits vers le plus grand »

Considérons la température à l'interface dans la base 0. Intégrons la de 0 à L_0 après multiplication par $\cos\left(\alpha_n^0 x_0\right)$. Selon (A5.1) et (A5.2) :

$$\int_0^{L_0} T^0\left(x_0, z_0 = e_0\right)\cos\left(\alpha_n^0 x_0\right)\mathrm{d}x_0 = \int_0^{L_1} T^1\left(x_1\right)\cos\left(\alpha_n^0 x_0\right)\mathrm{d}x_0 + \int_{L_1}^{L_0} T^2\left(x_2, z_2 = 0\right)\cos\left(\alpha_n^0 x_0\right)\mathrm{d}x_0 \quad \text{(A5.24)}$$

Par définition, le membre de gauche de l'égalité est l'harmonique d'ordre n de la température dans le bloc 0. Remplaçons dans (A5.24) les températures par leur expression développée :

$$\begin{aligned}\theta_n^0\left(z_0 = e_0\right) = &\int_0^{L_1}\left(\frac{\theta_0^1}{L_1} + \frac{2}{L_1}\sum_{m=1}^{N_1}\theta_m^1\cos\left(\alpha_m^1 x_1\right)\right)\cos\left(\alpha_n^0 x_0\right)\mathrm{d}x_0 \\ &+ \int_{L_1}^{L_0}\left(\frac{\theta_0^2\left(z_2 = 0\right)}{L_2} + \frac{2}{L_2}\sum_{m=1}^{N_2}\theta_m^2\left(z_2 = 0\right)\cos\left(\alpha_m^2 x_2\right)\right)\cos\left(\alpha_n^0 x_0\right)\mathrm{d}x_0\end{aligned} \quad \text{(A5.25)}$$

$$\begin{aligned}\theta_n^0 = &\frac{\theta_0^1}{L_1}\int_0^{L_1}\cos\left(\alpha_n^0 x_0\right)\mathrm{d}x_0 + \frac{2}{L_1}\sum_{m=1}^{N_1}\theta_m^1\int_0^{L_1}\cos\left(\alpha_m^1\left(x_0 - \delta_1\right)\right)\cos\left(\alpha_n^0 x_0\right)\mathrm{d}x_0 \\ &+ \frac{\theta_0^2}{L_2}\int_{L_1}^{L_0}\cos\left(\alpha_n^0 x_0\right)\mathrm{d}x_0 + \frac{2}{L_2}\sum_{m=1}^{N_2}\theta_m^2\int_{L_1}^{L_0}\cos\left(\alpha_m^1\left(x_0 - \delta_1\right)\right)\cos\left(\alpha_n^0 x_0\right)\mathrm{d}x_0\end{aligned} \quad \text{(A5.26)}$$

Cette expression (A5.26), après intégration, peut se mettre sous la forme suivante, de la même façon que dans le cas précédent :

$$\theta_n^0\left(z_0 = e_0\right) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{m=0}^{N_i} E_{n,m}^i\,\theta_m^i\left(z_i = 0\right) \quad , \quad 0 \le n \le N_0 \quad \text{(A5.27)}$$

Dans le cas plus général où I surface(s) libre(s) ou bloc(s) se partagent la surface supérieure du bloc 0, l'expression (A5.27) devient :

$$\theta_n^0\left(z_0 = e_0\right) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{m=0}^{N_i} E_{n,m}^i\,\theta_m^i\left(z_i = 0\right) \quad , \quad 0 \le n \le N_0 \quad \text{(A5.28)}$$

c'est-à-dire sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{\theta}^0\left(e_0\right) = \begin{bmatrix}\theta_0^0\left(e_0\right)\\ \theta_1^0\left(e_0\right)\\ \vdots\\ \theta_{N_0}^0\left(e_0\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{E}^1 & \boldsymbol{E}^2 & \dots & \boldsymbol{E}^I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}^1(0)\\ \boldsymbol{\theta}^2(0)\\ \vdots\\ \boldsymbol{\theta}^I(0)\end{bmatrix} = \boldsymbol{E}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}^1(0)\\ \boldsymbol{\theta}^2(0)\\ \vdots\\ \boldsymbol{\theta}^I(0)\end{bmatrix} \quad \text{(A5.29)}$$

où la matrice $\boldsymbol{E}^i$ est la matrice de conversion de spectre entre le bloc ou surface libre i et son bloc inférieur dans le formalisme « des plus petits vers le plus grand ». La matrice $\boldsymbol{E}$ constituée de la concaténation horizontale des matrices $\boldsymbol{E}^i$ est appelée matrice de transfert de l'interface dans le formalisme « des plus petits vers le plus grand ».

De la même façon que précédemment :

$$\left(\boldsymbol{E}^{i}\right)_{i=1,..,1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 0 \\ \hline \frac{1}{2}\frac{L_0}{L_i}\mathrm{f}_1\left(n, \frac{\delta_i}{L_0}, \frac{L_i}{L_0}\right) & \frac{L_0}{L_i}\left\{\mathrm{f}_2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{f}_3\left(n, m, \frac{\delta_i}{L_0}, \frac{L_i}{L_0}\right)\right\} \end{array}\right] \begin{array}{l} 1 \le n \le N_0 \\ 1 \le m \le N_i \end{array} \qquad \text{(A5.30)}$$

de taille $(N_0+1)\times(N_i+1)$

Annexe 6 : majoration de l'erreur commise lors du changement de base

Cette partie est dédiée au calcul de l'erreur commise lors des changements de bases. D'un point de vue mathématique, considérons une surface 0 partagée en deux sous-surfaces représentées sur la *figure 1* :

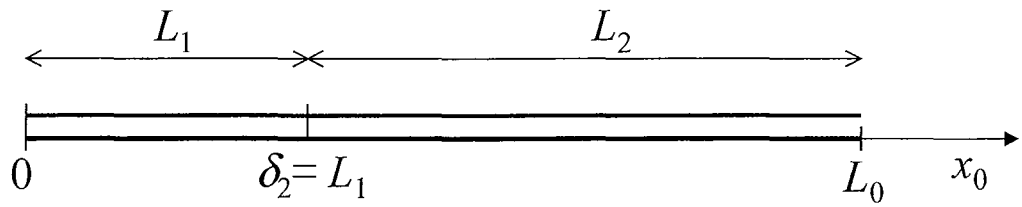


figure 1 :surface partitionnée en deux sous-surfaces

I Cas du formalisme « des plus petits vers le plus grand »

Supposons connues les deux températures $T^1(x_1)$ et $T^2(x_2)$, et essayons de quantifier l'erreur commise sur le spectre de $T^0(x_0)$ due au changement de base.
Si $\boldsymbol{\theta}_\infty^0$, $\boldsymbol{\theta}_\infty^1$ et $\boldsymbol{\theta}_\infty^2$ sont les spectres de dimension infinie ($N_0 = N_1 = N_2 = \infty$) des températures sur les surfaces 0, 1 et 2, la relation de changement de base s'écrit :

$$\boldsymbol{\theta}_\infty^0 = \boldsymbol{E}_\infty^1 \boldsymbol{\theta}_\infty^1 + \boldsymbol{E}_\infty^2 \boldsymbol{\theta}_\infty^2 \tag{A6.1}$$

Cette équation est exacte. Cependant, les spectres $\boldsymbol{\theta}_\infty^1$ et $\boldsymbol{\theta}_\infty^2$ doivent être tronqués donc une erreur $\Delta\boldsymbol{\theta}^0$ est commise sur le spectre de la température dans la base 0 :

$$\boldsymbol{\theta}^0 + \Delta\boldsymbol{\theta}^0 = \boldsymbol{E}^1 \boldsymbol{\theta}^1 + \boldsymbol{E}^1 \boldsymbol{\theta}^2 \tag{A6.2}$$

Cette erreur dépend de l'ordre de l'harmonique et peut être majorée. Soient $\boldsymbol{r}^0$, $\boldsymbol{r}^1$ et $\boldsymbol{r}^2$ les vecteurs résidus de troncature, c'est-à-dire les harmoniques non prises en compte :

$$\boldsymbol{\theta}_\infty^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0 + \Delta\boldsymbol{\theta}^0 \\ \boldsymbol{r}^0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\theta}_\infty^1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{r}^1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\theta}_\infty^2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^2 \\ \boldsymbol{r}^2 \end{pmatrix} \tag{A6.3}$$

L'équation (A6.1) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0 + \Delta\boldsymbol{\theta}^0 \\ \boldsymbol{r}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}^1 & \boldsymbol{E}_{12}^1 \\ \boldsymbol{E}_{21}^1 & \boldsymbol{E}_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{r}^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}^2 & \boldsymbol{E}_{12}^2 \\ \boldsymbol{E}_{21}^2 & \boldsymbol{E}_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^2 \\ \boldsymbol{r}^2 \end{pmatrix} \tag{A6.4}$$

La première ligne de cette équation s'écrit :

$$\boldsymbol{\theta}^0 + \Delta\boldsymbol{\theta}^0 = \boldsymbol{E}^1 \boldsymbol{\theta}^1 + \boldsymbol{E}_{12}^1 \boldsymbol{r}^1 + \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{\theta}^2 + \boldsymbol{E}_{12}^2 \boldsymbol{r}^2 \tag{A6.5}$$

Or, par définition du vecteur erreur,

$$\boldsymbol{\theta}^0 = \boldsymbol{E}^1 \boldsymbol{\theta}^1 + \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{\theta}^2 \tag{A6.6}$$

et

$$\Delta\boldsymbol{\theta}^0 = \boldsymbol{E}_{12}^1 \boldsymbol{r}^1 + \boldsymbol{E}_{12}^2 \boldsymbol{r}^2 \tag{A6.7}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta_0^0 \\ \vdots \\ \Delta\theta_n^0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \frac{L_0}{L_i}\frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2 - m^2\left(L_0/L_i\right)^2}\left[(-1)^m \sin\left(n\pi\left(\frac{\delta_i}{L_0}+\frac{L_i}{L_0}\right)\right) - \sin\left(n\pi\frac{\delta_i}{L_0}\right)\right] & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^i_{N_i+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta^i_\infty \end{pmatrix} \quad \text{(A6.8)}$$

La première ligne donne

$$\Delta\theta_0^0 = 0 \quad \text{(A6.9)}$$

et pour n≠0 :

$$\Delta\theta_n^0 = \sum_{i=1,2}\sum_{m=N_i+1}^{\infty} \frac{L_0}{L_i}\frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2 - m^2\left(L_0/L_i\right)^2}\left[(-1)^m \sin\left(n\pi\left(\frac{\delta_i}{L_0}+\frac{L_i}{L_0}\right)\right) - \sin\left(n\pi\frac{\delta_i}{L_0}\right)\right]\theta_m^i \quad \text{(A6.10)}$$

Donc,

$$\left|\Delta\theta_n^0\right| \le \sum_{i=1,2}\sum_{m=N_i+1}^{\infty} \frac{L_0}{L_i}\frac{2}{\pi}\frac{n}{m^2\left(L_0/L_i\right)^2 - n^2}\left|(-1)^m \sin\left(n\pi\left(\frac{\delta_i}{L_0}+\frac{L_i}{L_0}\right)\right) - \sin\left(n\pi\frac{\delta_i}{L_0}\right)\right|\left|\theta_m^i\right| \quad \text{(A6.11)}$$

En majorant les sinus par 1 :

$$\left|\Delta\theta_n^0\right| \le \frac{4}{\pi}\sum_{i=1,2}\sum_{m=N_i+1}^{\infty} \frac{L_0}{L_i}\frac{n}{m^2\left(L_0/L_i\right)^2 - n^2}\left|\theta_m^i\right| \quad \text{(A6.12)}$$

On peut également majorer $\left|\theta_m^i\right|$ par $\max_{N_i+1\le m}\left(\left|\theta_m^i\right|\right)$ qui est bien souvent (lorsque les fonctions sont assez régulières) $\max_{N_i+1\le m\le N_i+10}\left(\left|\theta_m^i\right|\right)$.

L'équation (A6.12) devient alors :

$$\left|\Delta\theta_n^0\right| \le \frac{4}{\pi}\sum_{i=1,2}\frac{L_0}{L_i}\max_{N_i+1\le m}\left(\left|\theta_m^i\right|\right)\sum_{m=N_i+1}^{\infty}\frac{n}{m^2\left(L_0/L_i\right)^2 - n^2} \quad \text{(A6.13)}$$

Si *Ent* est la fonction partie entière :

$$\left|\Delta\theta_n^0\right| \le \frac{4n}{\pi}\sum_{i=1,2}\frac{L_i}{L_0}\max_{N_i+1\le m}\left(\left|\theta_m^i\right|\right)\sum_{m=N_i+1}^{\infty}\frac{1}{m^2 - \left(Ent\left(n\left(L_i/L_0\right)\right)+1\right)^2} \quad \text{(A6.14)}$$

Soit l'entier positif $a_{n,i} = Ent\left(n\left(L_i/L_0\right)\right)+1$,

Reste à calculer :

$$I_n = \sum_{m=N_i+1}^{\infty}\frac{1}{m^2 - a_{n,i}^2} \quad \text{(A6.15)}$$

$$I_{n,i} = \sum_{m=N_i+1}^{\infty}\frac{1}{m^2 - a_{n,i}^{\ 2}} = \frac{1}{2a_{n,i}}\sum_{m=N_i+1}^{\infty}\left(\frac{1}{m-a_{n,i}} - \frac{1}{m+a_{n,i}}\right) \quad \text{(A6.16)}$$

$$I_{n,i} = \frac{1}{2a_{n,i}}\sum_{m=N_i+1}^{N_i+2a}\frac{1}{m-a_{n,i}} \quad \text{(A6.17)}$$

$$I_{n,i} = \frac{1}{2a_{n,i}}\left(\sum_{p=1}^{N_i+a_{n,i}}\frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{N_i-a_{i,n}}\frac{1}{p}\right) \quad \text{(A6.18)}$$

soit :

$$I_{n,i} = \frac{1}{2a_{n,i}}\left[\Psi\left(N_i + a_{n,i}\right) + \gamma - \Psi\left(N_i - a_{n,i}\right) - \gamma\right] \tag{A6.19}$$

où $\Psi(N) + \gamma = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p}$ est la fonction d'Euler. $a_{n,i} = Ent\left(n\left(L_i / L_0\right)\right) + 1$

Donc

$$\left|\Delta\theta_n^0\right| \le \frac{2}{\pi}\sum_{i=1,2}\left[\Psi\left(N_i + Ent\left(n\left(L_i / L_0\right)\right) + 1\right) - \Psi\left(N_i - Ent\left(n\left(L_i / L_0\right)\right) - 1\right)\right] \max_{N_i+1 \le m}\left(\left|\theta_m^i\right|\right) \tag{A6.20}$$

avec $1 \le n \le N_0$

II Cas du formalisme « du plus grand vers les plus petits»

Supposons connue la température $T^0(x_0)$ et essayons de quantifier l'erreur commise sur les spectres de $T^1(x_1)$ et $T^2(x_2)$, due au changement de base.
Si $\boldsymbol{\theta}_\infty^0$, $\boldsymbol{\theta}_\infty^1$ et $\boldsymbol{\theta}_\infty^2$ sont les spectres de dimension infinie ($N_0 = N_1 = N_2 = \infty$) des températures sur les surfaces 0, 1 et 2, l'équation de changement de base s'écrit :

$$\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{\theta}_\infty^1 = \boldsymbol{F}_\infty^1 \boldsymbol{\theta}_\infty^0 \\ \boldsymbol{\theta}_\infty^2 = \boldsymbol{F}_\infty^2 \boldsymbol{\theta}_\infty^0 \end{matrix}\right\} \tag{A6.21}$$

Cette équation est exacte. Cependant, le spectre $\boldsymbol{\theta}_\infty^0$ doit être tronqué donc des erreurs $\Delta\boldsymbol{\theta}^1$ et $\Delta\boldsymbol{\theta}^2$ sont commises sur les spectres des températures dans les bases 1 et 2. Considérons le cas de la surface $i(i=1,2)$:

$$\boldsymbol{\theta}^i + \Delta\boldsymbol{\theta}^i = \boldsymbol{F}^i \boldsymbol{\theta}^0 \tag{A6.22}$$

Soient $\boldsymbol{r}^0$, $\boldsymbol{r}^1$et $\boldsymbol{r}^2$ les vecteurs résidus de troncature :

L'équation (A6.21) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^i + \Delta\boldsymbol{\theta}^i \\ \boldsymbol{r}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^i & \boldsymbol{F}_{12}^i \\ \boldsymbol{F}_{21}^i & \boldsymbol{F}_{22}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^0 \\ \boldsymbol{r}^0 \end{pmatrix} \tag{A6.23}$$

La première ligne donne :

$$\Delta\boldsymbol{\theta}^i = \boldsymbol{F}_{12}^i \boldsymbol{r}^0 \tag{A6.24}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta_0^i \\ \vdots \\ \Delta\theta_n^i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{m\pi}\left(\sin\left(m\pi\left(\dfrac{L_i}{L_0} + \dfrac{\delta_i}{L_0}\right)\right) - \sin\left(m\pi\dfrac{\delta_i}{L_0}\right)\right) \\ \vdots \\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{m}{m^2 - n^2\left(L_0 / L_i\right)^2}\left[(-1)^n \sin\left(m\pi\left(\dfrac{\delta_i}{L_0} + \dfrac{L_i}{L_0}\right)\right) - \sin\left(m\pi\dfrac{\delta_i}{L_0}\right)\right] \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{N_0+1}^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_\infty^0 \end{pmatrix} \tag{A6.25}$$

- Cas du fondamental :

$$\Delta\theta_0^i = \sum_{m=N_0+1}^{\infty} \frac{2}{m\pi}\left(\sin\left(m\pi\left(\frac{L_i}{L_0}+\frac{\delta_i}{L_0}\right)\right)-\sin\left(m\pi\frac{\delta_i}{L_0}\right)\right)\theta_m^0 \tag{A6.26}$$

donc

$$\Delta\theta_0^i \le \sum_{m=N_0+1}^{\infty} \frac{4}{\pi}\frac{\left|\theta_m^0\right|}{m} \tag{A6.27}$$

Nous savons que cette expression converge car $\left|\theta_m^0\right|$ est de l'ordre de $\frac{1}{m}$ mais on ne peut déterminer a priori aucun majorant dans le cas général.

- Cas de l'harmonique d'ordre n.

$$\Delta\theta_n^i = \sum_{m=N_0+1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{m}{m^2-n^2\left(L_0/L_i\right)^2}\left[\left(-1\right)^n\sin\left(m\pi\left(\frac{\delta_i}{L_0}+\frac{L_i}{L_0}\right)\right)-\sin\left(m\pi\frac{\delta_i}{L_0}\right)\right]\theta_m^0 \tag{A6.28}$$

$$\left|\Delta\theta_n^i\right| \le \sum_{m=N_0+1}^{\infty} \frac{4}{\pi}\frac{m}{m^2-n^2\left(L_0/L_i\right)^2}\left|\theta_m^0\right| \tag{A6.29}$$

Soit $a_{n,i}^2 = n^2\left(L_0/L_i\right)^2$

Reste à calculer

$$I_{n,i} = \sum_{m=N_0+1}^{\infty} \frac{m}{m^2-a_{n,i}^2} \tag{A6.30}$$

$$I_{n,i} = \frac{1}{2}\sum_{m=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{m-a_{n,i}}+\frac{1}{m+a_{n,i}} \tag{A6.31}$$

Comme dans le cas du fondamental, la série converge, mais on ne peut pas déterminer de majorant dans le cas général.

Annexe 7 : calcul des matrices de conversion de spectre en 3 D

Pour fixer les idées, considérons la structure simple représentée sur la *figure 1*. Un bloc numéroté 1 est empilé sur un bloc de base numéroté 0. La surface libre supérieure du bloc 0 est divisée en 4 surfaces libres de forme rectangulaire numérotées 2, 3, 4 et 5.

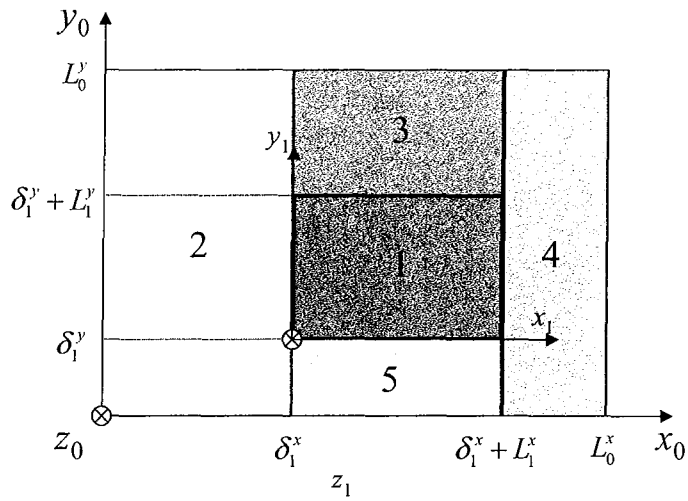


figure 1 : empilement de 2 blocs vue de dessus.

Chaque bloc possède un repère qui lui est propre ($0_i\, x_i\, y_i\, z_i$) ; de même à chaque surface libre est attribué un repère ($0_i\, x_i\, y_i$).

I Formalisme « du plus grand vers les plus petits »

Calculons la matrice de conversion de spectre entre le bloc de base 0 et le bloc ou surface libre *i*. La continuité de la température dans le repère relatif associé au bloc ou surface libre *i* se traduit par :

$$T^i\left(x_i, y_i, z_i = 0\right) = T^0\left(x_i + \delta_i^x, y_i + \delta_i^y, z_0 = e_0\right) \tag{A7.1}$$

Si l'on applique une première transformée selon $0x$:

$$\int_0^{L_i} T^i\left(x_i, y_i, z_i = 0\right)\cos\left(\alpha_n^i x_i\right)\mathrm{d}x_i = \int_0^{L_i} T^0\left(x_i + \delta_i^x, y_i + \delta_i^y, z_0 = e_0\right)\cos\left(\alpha_n^i x_i\right)\mathrm{d}x_i T^0 \tag{A7.2}$$

que l'on écrit, d'après le calcul réalisé en 2D (le « ~ » désignant la transformée en x) :

$$\tilde{T}^i\left(\alpha_n^i, y_i, z_i = 0\right) = \sum_{p=0}^{N_0^x} F_{n,m}^x\left(\frac{\delta_i^x}{L_0^x}, \frac{L_i^x}{L_0^x}\right)\tilde{T}^0\left(\alpha_p^0, y_i + \delta_i^y, z_i = e_0\right) \tag{A7.3}$$

où $F_{n,m}^x\left(\frac{\delta_i^x}{L_0^x}, \frac{L_i^x}{L_0^x}\right)$ est défini dans l'Annexe 5.

Si l'on applique maintenant la transformée suivant $0y$:

$$\theta^i\left(\alpha_n^i,\beta_m^i,z_i=0\right)=\sum_{p=0}^{N_0^x}\sum_{q=0}^{N_0^y}F_{n,p}^x\left(\frac{\delta_i^x}{L_0^x},\frac{L_i^x}{L_0^x}\right)\theta^0\left(\alpha_p^0,\beta_q^0,z_i=e_0\right)F_{m,q}^y\left(\frac{\delta_i^y}{L_0^y},\frac{L_i^y}{L_0^y}\right) \tag{A7.4}$$

c'est-à-dire en utilisant une notation plus contractée :

$$\theta_{n,m}^i=\sum_{p=0}^{N_0^x}\sum_{q=0}^{N_0^y}F_{n,p}^x\theta_{p,q}^0F_{m,q}^y \tag{A7.5}$$

Relation qui s'écrit matriciellement :

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^i=\boldsymbol{F}^x\tilde{\boldsymbol{\theta}}^0\left(\boldsymbol{F}^y\right)^t \tag{A7.6}$$

où $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ est le spectre sous forme de matrice.

Il est toujours possible de réordonner ces spectres en les transformant en vecteurs colonnes, de la même façon que pour les matrices quadripolaires, de manière à avoir :

$$\boldsymbol{\theta}^i=\boldsymbol{F}^i\boldsymbol{\theta}^0 \tag{A7.7}$$

Dans ce cas, suivant la convention de réorganisation du spectre choisi (voir équation I.71), la matrice de conversion de spectre en 3 dimension s'écrit :

$$\boldsymbol{F}^i=\begin{pmatrix}F_i^y(0,0)\boldsymbol{F}_i^x & \cdots & F_i^y(0,N_0^y)\boldsymbol{F}_i^x\\ \cdots & F_i^y(q,p)\boldsymbol{F}_i^x & \cdots\\ F_i^y(N_i^y,0)\boldsymbol{F}_i^x & \cdots & F_i^y(N_i^y,N_0^y)\boldsymbol{F}_i^x\end{pmatrix} \tag{A7.8}$$

II Formalisme « des plus petits vers le plus grand »

Un calcul similaire au cas précédent permet d'arriver à la conclusion suivante :

$$\boldsymbol{\theta}^0=\sum_{i=1}^{I}\boldsymbol{E}^i\boldsymbol{\theta}^i \tag{A7.9}$$

avec

$$\left(\boldsymbol{E}^i\right)_{i=1..I}=\begin{pmatrix}E_i^y(0,0)\boldsymbol{E}_i^x & \cdots & E_i^y(0,N_i^y)\boldsymbol{E}_i^x\\ \cdots & E_i^y(n,m)\boldsymbol{E}_i^x & \cdots\\ E_i^y(N_0^y,0)\boldsymbol{E}_i^x & \cdots & E_i^y(N_0^y,N_i^y)\boldsymbol{E}_i^x\end{pmatrix} \tag{A7.10}$$

Annexe 8 : mise en œuvre numérique et symbolique

Cette annexe est consacrée à la description du code qui a été écrit sous Matlab® [31,32] à partir de la méthode développée dans la partie modélisation. Il s'agit également de signaler les difficultés d'ordre numérique rencontrées et de donner les solutions envisagées pour les résoudre.

Le programme a été écrit sous Matlab®. Il accepte, en entrée, la géométrie de la structure, les conditions limites supérieures et inférieures connues et donne en sortie le champ de température et de densité de flux selon des plans de coupe définis par l'utilisateur. Les calculs sont automatisés grâce à l'utilisation du calcul formel et de la boîte à outils « symbolic toolbox »[33].

I Hypothèses

Les hypothèses sont les suivantes :

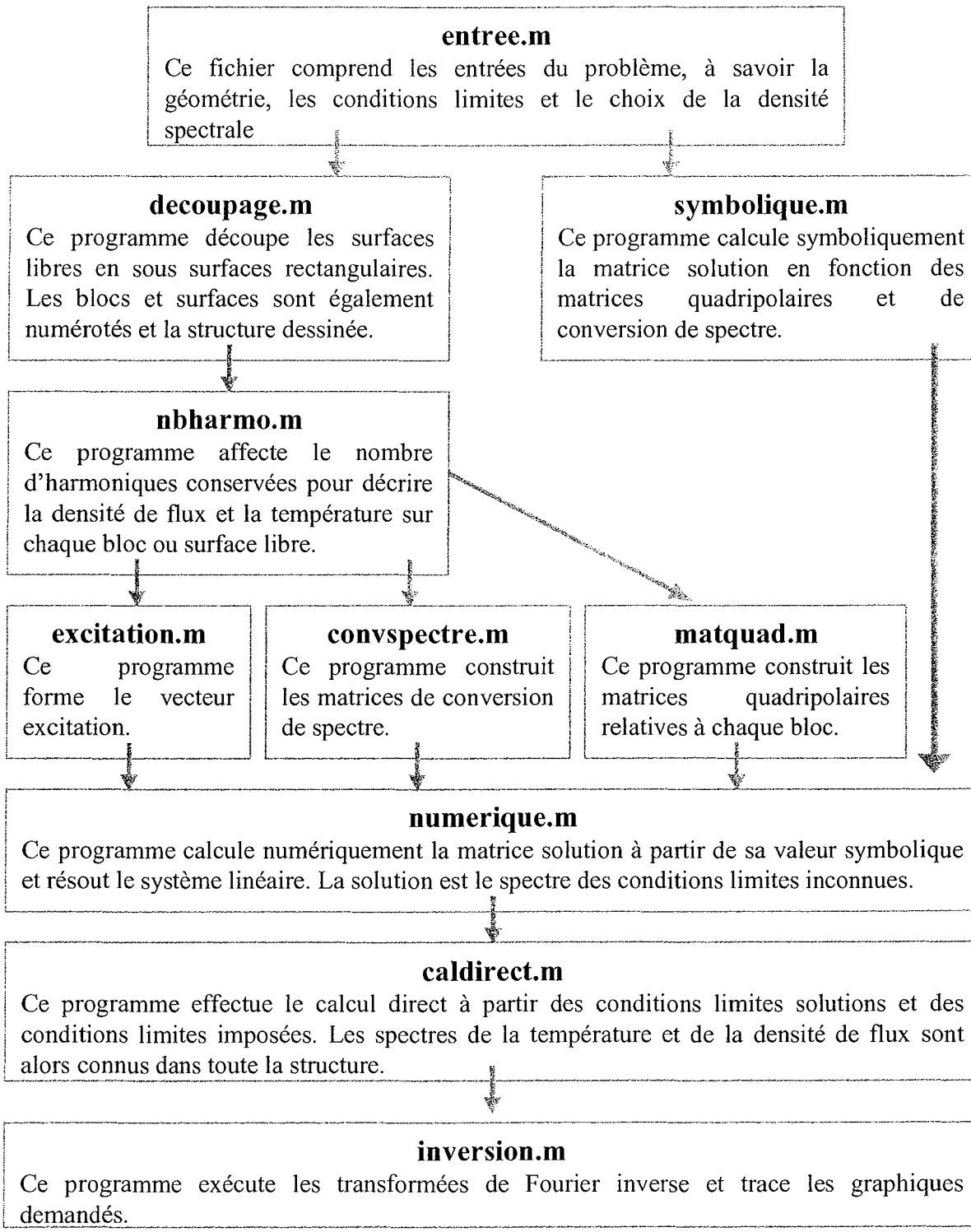
* Les blocs parrallélépipédiques sont isolés sur leur faces latérales. La transformée intégrale est donc une transformée de Fourier-cosinus. La transformée inverse peut alors se faire suivant l'algorithme de transformée inverse rapide.

* L'empilement est pyramidal. Ce programme peut être étendu aux structures non pyramidales, seul le sous programme de calcul symbolique est à modifier.

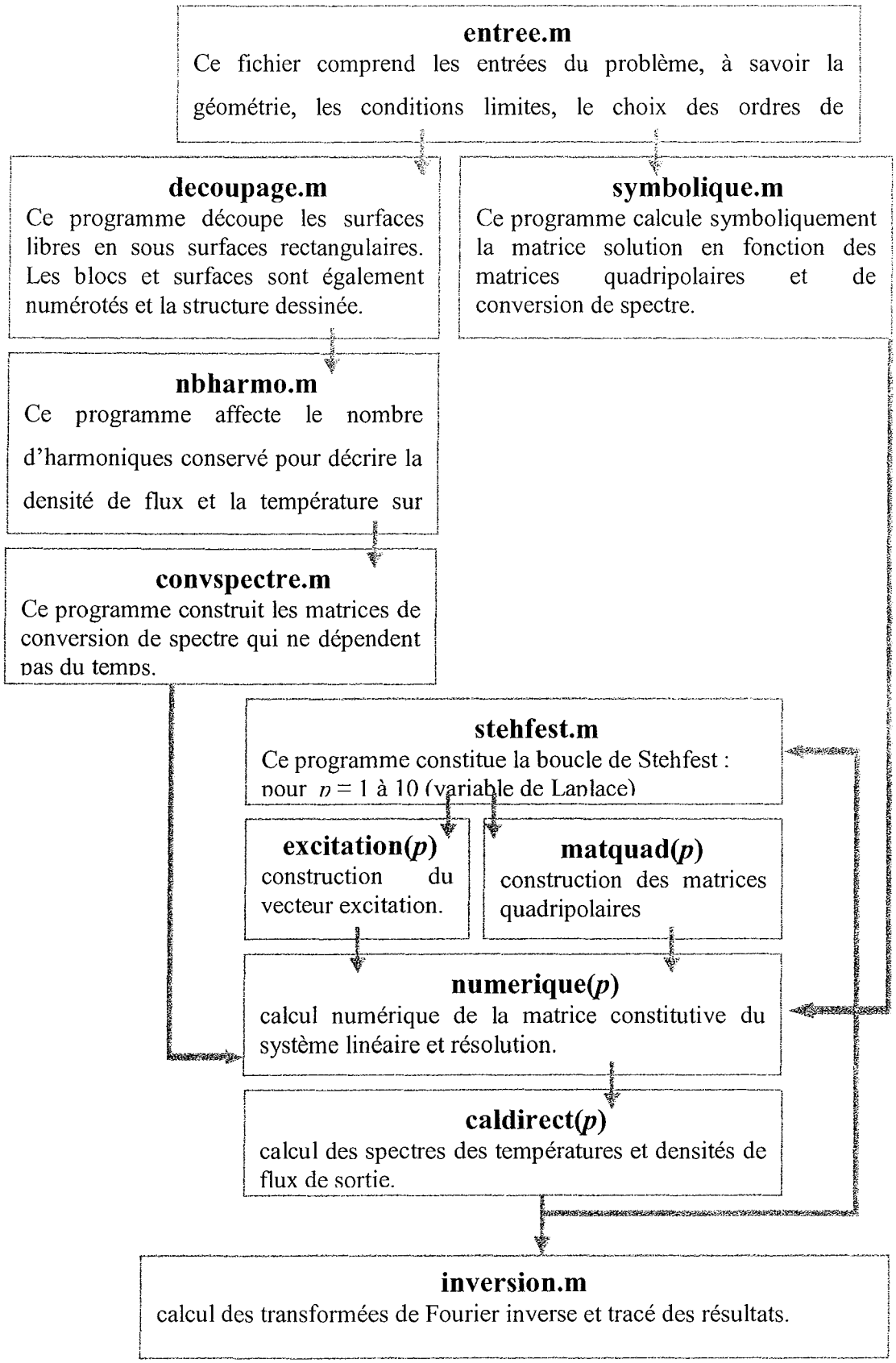
* Nous utilisons les matrices de conversion de spectre $\boldsymbol{E}$ dans le formalisme « des plus petits vers le plus grand »

II Organigrammes

II.1 Régime permanent



II.2 Régime transitoire



III Les variables

La structure est représentée par l'objet *structure*(i,j) où la variable i représente la couche à laquelle appartient le bloc (ou surface libre) et où j est le numéro du bloc (ou surface libre) dans la couche. Par exemple, la couche de base sur laquelle repose tout l'empilement est l'objet *structure*(1,1).

Les champs associés à *structure*(i,j) sont :

nom : le nom du bloc, par exemple 'semelle'
x : l'abscisse du repère associé au bloc (ou surface libre).
Lx : la longueur du bloc (ou surface libre) suivant $0x$.
y : l'ordonnée du repère associé au bloc (ou surface libre).
Ly : la longueur du bloc (ou surface libre) suivant $0y$.
z : l'altitude du repère associé au bloc (ou surface libre).
e : l'épaisseur du bloc. Pour les surfaces libres, ce champ est vide.
cond : la conductivité du bloc. Pour les surfaces libres, ce champ est vide.
a : la diffusivité du bloc. Pour les surfaces libres, ce champ est vide.
h : le coefficient d'échange imposé sur la partie supérieure du bloc si le bloc possède une surface libre sur sa face supérieure.
rc : la résistance thermique de contact présente entre la partie inférieure du bloc et le bloc sous-jacent.
nbhx : le nombre d'harmoniques suivant $0x$ considérées pour décrire la température et la densité de flux dans le bloc (ou surface libre).
nbhy : le nombre d'harmoniques suivant $0y$ considérées pour décrire la température et la densité de flux dans le bloc (ou surface libre).
cx : indice de troncature selon $0x$ (voir sa définition dans la suite).
cy : indice de troncature $0y$ (voir sa définition dans la suite).
fluxintensite : l'intensité en Wm^{-2} du flux imposé sur la partie supérieure du bloc.
[*fluxdebutx fluxfinx*] : l'intervalle selon $0x$ sur lequel le flux est imposé.
[*fluxdebuty fluxfiny*] : l'intervalle selon $0y$ sur lequel le flux est imposé.
blocinf : le numéro j du bloc sous-jacent.
num : le numéro du bloc (ou surface libre). On numérote les blocs et surfaces libres de 0 au nombre total de blocs et surfaces libres.
nbsup : le nombre de blocs et surfaces libres que le bloc possède sur sa partie supérieure.
Ts : le vecteur des harmoniques de la température supérieure du bloc.
Tb : le vecteur des harmoniques de la température inférieure du bloc.
Fs : le vecteur des harmoniques de la densité de flux supérieure du bloc.
Fb : le vecteur des harmoniques de la densité de flux inférieure du bloc.

Les autres variables principales du problème sont le coefficient d'échange imposé sur la face inférieure du bloc de base 0, les matrices de conversion de spectre « ***Enum*** », les matrices quadripolaires « ***Anum***, ***Bnum***, ***Cnum***, ou ***Dnum*** », la matrice constitutive du système linéaire « ***L*** », le vecteur membre de droite du système linéaire « ***b*** »(voir equations A8.9), le nombre d'harmoniques conservées par unité de longueur « **f** » (densité de spectre), le taux de réduction du spectre « τ» qui permet de calculer les champs *cx* et *cy* et le nombre de strates par bloc « *nspb* » qui permet de définir la précision spatiale selon 0z des sorties.

IV Les différents algorithmes

Cette partie est consacrée au descriptif des différents algorithmes intervenant dans les sous programmes constituant les organigrammes, ainsi qu'à la résolution des difficultés numériques rencontrées.

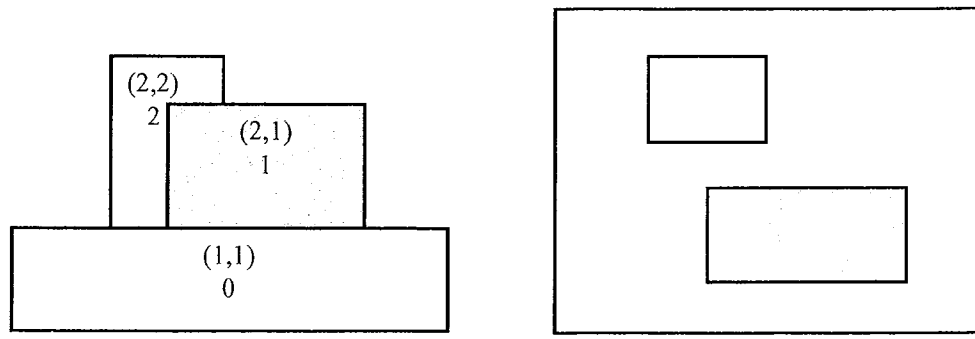
IV.1 Fichier d'entrée (entree.m)

Ce fichier comprend la position, les dimensions, la conductivité et la diffusivité des blocs ainsi que les conditions limites connues. Il contient également les deux hyperparamètres du problème qui sont le nombre d'harmoniques conservé par unité de longueur **f** et le taux d'élimination du spectre τ. Enfin, il contient la définition des sorties, à savoir les plans de coupe selon lesquels nous désirons connaître les résultats de la simulation et le nombre de strates par bloc *nspb*.

IV.2 Découpage des surfaces libres (decoupage.m)

Nous avons montré dans le paragraphe II.2.1 qu'il est nécessaire de découper les surfaces libres des blocs pour n'avoir à considérer que des surfaces rectangulaires. Le rôle de ce sous-programme nommé « **decoupage.m** » est d'effectuer cette tâche. Il n'est pas question ici d'optimiser ce découpage, mais d'adopter plutot une procédure systématique.

Considérons, pour fixer les idées, la structure de la *figure 1* : la première couche est constituée du bloc de coordonnées (1,1) numéroté 0, et de deux blocs de coordonnées (2,1) (numéroté 1) et (2,2) (numéroté 2) constituent le deuxième niveau.



Vue de face Vue du dessus

figure 1 : structure composée de trois blocs (2 couches)

L'algorithme de découpage de la surface libre du bloc 0 est alors le suivant :

1. diviser la face supérieure du bloc 0 à partir des coordonnées des blocs 1 et 2, le résultat est représenté sur la *figure 2*.

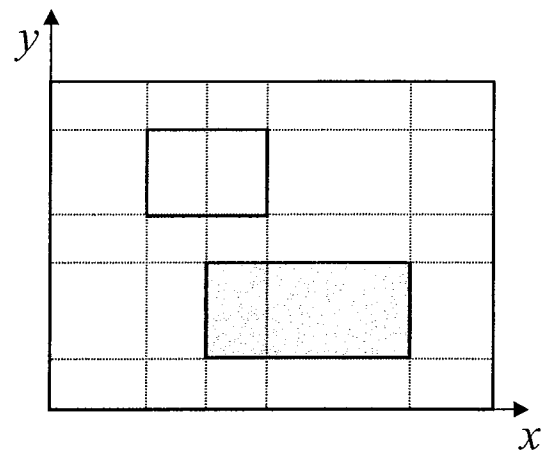


figure 2 : première étape du découpage

2. Fusionner les surfaces ainsi définies en donnant une priorité à une direction. C'est à dire que l'on cherche dans un premier temps à fusionner les surfaces rectangulaires suivant 0*y*, voir *figure 3.a*. Dans un second temps, elles sont fusionnées suivant 0*x*, voir *figure 3.b*.

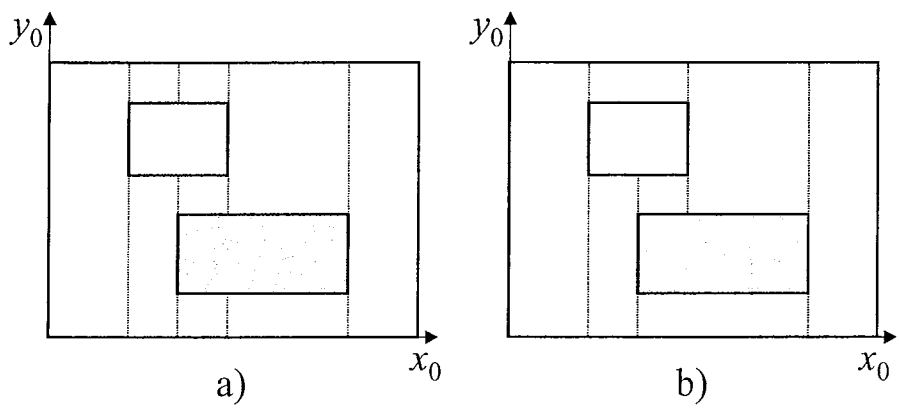


figure 3 : procédure de fusion des surfaces rectangulaires créées.

Cette procédure de fusion des surfaces rectangulaires permet de limiter le nombre de surfaces. L'étape suivante consiste à les numéroter : chaque surface se voit attribuer un numéro de couche *i* (ici 2), un numéro de bloc *j* (de 3 à 9) dans la couche et un numéro absolu (de **3** à **9**), voir *figure 4*.

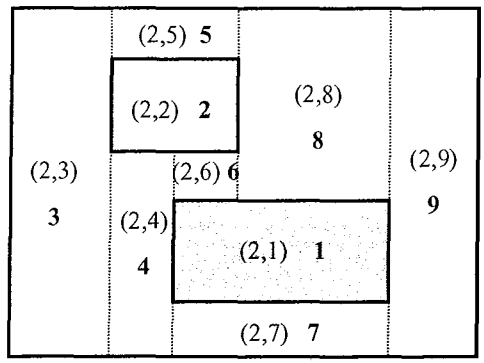


figure 4 : numérotation des surfaces libres

IV.3 Attribution des ordres de troncature (nbharmo.m)

Les nombres d'harmoniques conservés suivant $0x$ et $0y$ pour le bloc (ou surface libre) de coordonnées (i,j), (notés *structure(i,j).nbhx* et *structure(i,j).nbhy*) sont directement proportionnels aux dimensions du bloc (ou surface libre) Lx et Ly conformément au paragraphe II.2.2. Le facteur de proportionnalité est le nombre d'harmoniques conservées par unité de longueur **f** . Cependant, le nombre d'harmoniques conservées est un nombre entier, et suivant l'arrondi il peut y avoir non correspondance du nombre d'harmoniques conservé entre une couche et sa couche sous-jacente. Sur l'exemple de la *figure 4*, une condition qui doit être respectée pour que le problème soit carré (voir paragraphe II.1.3) est que la somme de toutes les harmoniques conservées pour les blocs et surfaces libres de la partie supérieure (de **1** à **9**) soit égale au nombre d'harmoniques conservées pour le bloc inférieur 0.

De plus, une condition qui doit être vérifiée est par exemple que le nombre d'harmonique conservé selon 0y pour la surface **3** doit être égal à la somme des nombres d'harmoniques selon 0y des blocs et surfaces **2**, **4** et **5**. Voilà pourquoi l'attribution des nombres d'harmoniques conservées est faite dès l'étape de la *figure 2*. La fusion de deux surfaces entraîne ensuite l'addition de leur nombre d'harmoniques et toutes les conditions sont alors vérifiées.

De même pour les indices d'élimination du spectre cx et cy définis comme suit :

$$cx = Ent\left(\sqrt{\tau}\ nbhx\right) \tag{A8.1}$$

$$cy = Ent\left(\sqrt{\tau}\ nbhy\right) \tag{A8.2}$$

où τ est le taux d'élimination du spectre (voir paragraphe I.4.1) et *Ent* la fonction partie entière.

IV.4 Calcul symbolique (symbo.m)

Ce sous programme exécute le calcul symbolique de la structure, c'est à dire qu'il détermine la matrice solution du système linéaire en fonction des matrices quadripôlaires des différents blocs et des matrices de conversion de spectre. L'avantage de ce calcul symbolique est qu'il réduit les calculs en permettant d'appliquer simplement le formalisme déterminé précédemment.

Pour éviter de refaire plusieurs fois le même calcul, on définit pour chaque bloc qui n'est pas aux extrémités une variable « *mtp_num* » qui est la matrice de transfert (ou de chemin) entre la partie inférieure du bloc de base et la surface supérieure du bloc de numéro *num*.
Par exemple dans le cas de la résolution de la structure en 2 dimensions représentée en *figure 5* :

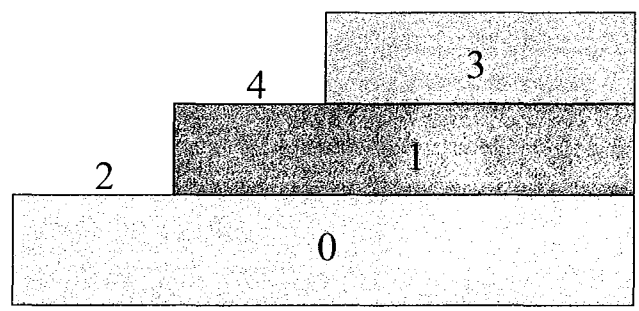


figure 5 : exemple d'empilement

au lieu d'écrire :

$$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{m}^0 \boldsymbol{p}_E^{0\to 2} \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{m}^0 \boldsymbol{p}_E^{0\to 1} \boldsymbol{m}^1 \boldsymbol{p}_E^{1\to 4} \boldsymbol{u}^4 + \boldsymbol{m}^0 \boldsymbol{p}_E^{0\to 1} \boldsymbol{m}^1 \boldsymbol{p}_E^{1\to 3} \boldsymbol{m}^3 \boldsymbol{u}^3 \quad \text{(A8.3)}$$

ou

$$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{mt2}\ \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{mt4}\ \boldsymbol{u}^4 + \boldsymbol{mt3}\ \boldsymbol{u}^3 \quad \text{(A8.4)}$$

où les notations sont celles du chapitre 1 - section II.1,
on écrira :

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{m}^0 \boldsymbol{p}_E^{0\to 2} \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{mtp1}\ \boldsymbol{p}_E^{1\to 4} \boldsymbol{u}^4 + \boldsymbol{mtp3}\ \boldsymbol{u}^3 \quad \text{(A8.5)}$$

avec

$$\boldsymbol{mtp1} = \boldsymbol{m}^0 \boldsymbol{p}_E^{0\to 1} \boldsymbol{m}^1 \text{ et } \boldsymbol{mtp3} = \boldsymbol{mtp1}\ \boldsymbol{p}_E^{1\to 3} \boldsymbol{m}^3 \quad \text{(A8.6)}$$

Ainsi, le produit $\boldsymbol{m}^0 \boldsymbol{p}_E^{0\to 1} \boldsymbol{m}^1$ n'est calculé qu'une seule fois, nous profitons du caractère récursif de la méthode. Les matrices $\boldsymbol{mtpnum}$ (ou $\boldsymbol{num}$ est le numéro du bloc) sont appelées matrices de transferts partielles. Chaque bloc possède une matrice de transfert partielle qui lie les conditions limites sur sa face supérieure aux conditions limites sur la face inférieure du bloc de base 0.
Cette première égalité (A8.5) étant écrite, les valeurs de $\boldsymbol{m}^{num}$, $\boldsymbol{p}_E^{i\to num}$ et $\boldsymbol{mtpnum}$ sont remplacées par leur valeur matricielle :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Anum} & \boldsymbol{Bnum} \\ \boldsymbol{Cnum} & \boldsymbol{Dnum} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{Enum} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{Enum} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{mtpAnum} & \boldsymbol{mtpBnum} \\ \boldsymbol{mtpCnum} & \boldsymbol{mtpDnum} \end{pmatrix} \quad \text{(A8.7)}$$

Le calcul est développé et mis sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2_{eq}\theta_2 + B^2_{eq}\phi_2 + A^3_{eq}\theta_3 + B^3_{eq}\phi_3 + A^4_{eq}\theta_4 + B^4_{eq}\phi_4 \\ C^2_{eq}\theta_2 + D^2_{eq}\phi_2 + C^3_{eq}\theta_3 + D^3_{eq}\phi_3 + C^4_{eq}\theta_4 + D^4_{eq}\phi_4 \end{pmatrix} \quad \text{(A8.8)}$$

où les matrices $A^i_{eq}, B^i_{eq}, C^i_{eq}, D^i_{eq}$ sont fonction des matrices quadripolaires, de conversion de spectre et des composantes des matrices de transfert partielles (matrices présentes dans (A8.7)). Les conditions limites connues et inconnues sont ensuite regroupées selon deux vecteurs, par exemple, si les inconnues sont ici les températures en face avant et que l'on connaît les flux en face avant et la température en face arrière, (A8.8) s'écrit :

$$\theta_0 = L_1 \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \quad \text{(A8.9)}$$

$$\phi_0 = L_2 \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \quad \text{(A8.10)}$$

où les matrices carrées L_i et S_i sont fonction des matrices présentes dans (A8.7)

Dans le cas où la température est connue en face arrière (θ_0) et où les flux sont connus en face avant (ϕ_2 ϕ_3 ϕ_4), l'équation (A8.9) à elle seule permet la résolution en terme de température en face avant. Le calcul symbolique nous permet de ne calculer que les deux matrices L_1 et S_1, le temps de calcul est donc très réduit par rapport à une méthode sans calcul symbolique préalable qui nécessite le calcul de la matrice de transfert complète directement à partir de (A8.3) ou (A8.5).

IV.5 Calcul numérique des différentes matrices (convspectre.m et matquad.m)

Le calcul numérique des matrices quadripolaires (***matquad.m***) n'est pas coûteux en temps de calcul, car ces matrices sont diagonales. Par contre le calcul des matrices de conversion de spectre (***convspectre.m***) représente une part non négligeable du temps de calcul total (environ un quart du temps de calcul total en régime permanent et beaucoup moins en régime transitoire car elles ne dépendent pas du temps). De plus le programme de construction de ces matrices nécessite de nombreuses boucles, donc il est intéressant de réaliser la routine en Fortran et d'établir le lien avec Matlab en utilisant un lien « dll » (fichier.mex) [34]. Cette technique nous permet de réduire le temps de calcul des matrices de conversion de spectre par un facteur 5.

IV.6 Formation et résolution du système linéaire (numerique.m)

La matrice constitutive du système linéaire est calculée à partir de sa valeur symbolique donnée par le programme de calcul symbolique et des valeurs numériques des différentes matrices. Le vecteur du second membre est calculé à partir de sa valeur symbolique, des valeurs numériques des différentes matrices et des valeurs numériques des spectres des conditions aux limites connues. C'est cette étape qui nécessite le plus de temps de calcul et comme il s'agit de produits matriciels, l'écriture de ce sous programme en Fortran n'apporte rien (Matlab est très performant pour ce qui est des calculs matriciels). Cette étape représente plus de la moitié du temps de calcul total et semble a priori incompressible. Un autre problème posé par la construction numérique du système linéaire est le besoin de beaucoup de mémoire (quand beaucoup d'harmoniques sont conservées pour une grande précision spatiale) car toutes les matrices, particulièrement les matrices de conversion de spectre, sont chargées en mémoire en même temps. Afin d'éviter la saturation de la mémoire, la matrice constitutive du système linéaire et le second membre sont construits morceau par morceau. La contre partie est un temps de calcul augmenté du fait des ouvertures et fermetures de fichiers. Si le nombre d'harmoniques conservées est faible (faible précision spatiale), la quantité de mémoire nécessaire est faible et cette option de construction du système par morceaux peut être invalidée.

L'étape suivante consiste en la résolution du système linéaire. Il s'avère que compte tenu de la nature des matrices quadripolaires, le système linéaire peut devenir assez vite mal conditionné. Par exemple, rappelons l'expression de la matrice quadripolaire $\boldsymbol{A}$ (en deux dimensions) :

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2+\frac{p}{a}}\,e\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{ch}\left(\sqrt{\left(\frac{N\pi}{L}\right)^2+\frac{p}{a}}\,e\right) \end{bmatrix} \qquad \text{(A8.11)}$$

où p est la variable de Laplace, L la largeur du bloc, N l'ordre de troncature associés au bloc, a la diffusivité thermique et e l'épaisseur du bloc. Le plus grand élément de $\boldsymbol{A}$ croit exponentiellement avec l'ordre de troncature N , avec le rapport e/L, ou avec $\sqrt{p/a}$, alors que le plus petit élément reste égal à 1. Ceci à pour effet de déséquilibrer la matrice constitutive du système qui est fonction des matrices quadripolaires.
Nous remarquons dès lors les trois limitations d'ordre numérique de la méthode des quadripôles :

- Limitation de l'ordre de troncature. De même que les méthodes numériques ne peuvent prendre en compte un nombre infini de noeuds ou de cellules, cette méthode ne peut prendre en compte qu'un nombre fini de modes.

- Limitation du rapport de forme des blocs. Cette méthode n'est pas adaptée aux strucutres composées de blocs de grande épaisseur par rapport à leur largeur. La solution consiste à introduire de nouveaux modèles pour représenter ces blocs, comme des modèles d'ailettes par exemple. Une exception concerne les blocs des extrémités ; nous verrons par la suite comment un reconditionnement analytique permet de considèrer des blocs d'épaisseur quelconques à condition qu'ils soient positionnés aux extrémités de l'empilement.

- Limitations liées aux temps très courts. Le système linéaire explose aux temps très courts ($\sqrt{p/a}$ grand). Ce problème est résolu par l'introduction de modèles asymptotiques valables pour les temps très courts.

De plus, il convient de définir une procédure optimale de résolution du système linéaire, de majorer l'erreur commise lors de l'inversion et d'essayer de reconditionner au mieux le système linéaire.

IV.6.1 Méthode de résolution du système linéaire

Il existe deux classes de méthode adaptées à la résolution des sytèmes linéaires [35], les méthodes directes du type de la méthode de Gauss, de Householder ou factorisation QR et les méthodes itératives du type de la méthode du gradient conjugué. Les méthodes itératives sont plutôt adaptées aux matrices symétriques ou creuses mais peuvent être utilisées dans le cas présent de matrice pleine non symétrique. Le problème des méthodes itératives est qu'elles introduisent un hyperparamètre supplémentaire qui est le nombre d'itérations ou le critère de convergence. Ces méthodes ne convergent pas lorsque le système est mal conditionné. Notre préférence est allée à la méthode de Gauss du pivot partiel.

Dans les cas extrêmes où le système est très mal conditionné et où une très grande précision est demandée, une méthode pour améliorer la précision de la résolution est de résoudre une fois le système (par la méthode de Gauss), de calculer les résidus, puis de le résoudre une seconde fois en prenant comme vecteur du second membre les résidus et ainsi de suite [36]:
soit le système :

$$\boldsymbol{LX} = \boldsymbol{b} \tag{A8.12}$$

La première solution est $\boldsymbol{X}^0$ et le résidu $\boldsymbol{r}^0$:

$$\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{b} \tag{A8.13}$$

On peut résoudre

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^0 = \boldsymbol{r}^0 \tag{A8.14}$$

de solution $\boldsymbol{X}^1$ et calculer le résidu $\boldsymbol{r}^1$ et ainsi de suite jusqu'à ce que la norme du résidus ne décroisse plus, la solution optimisée est alors :

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^0 + \boldsymbol{X}^1 + \ldots + \boldsymbol{X}^n \tag{A8.15}$$

En règle générale, 2 itérations suffisent à améliorer sensiblement le résultat de l'inversion.

Une deuxième solution pour améliorer l'inversion est de programmer la méthode de Gauss du pivot total qui consiste à choisir comme pivot le plus grand élément de la matrice [35, p234]. Cet algorithme a été programmé sous Matlab et la solution diverge en effet moins rapidement avec l'augmentation du nombre de conditionnement du système. Cependant les gains ne sont pas suffisants pour justifier l'augmentation du temps de calcul associé à cette méthode (la méthode du pivot partiel est compilée, donc bien plus rapide). En conclusion, cette inversion par le pivot de Gauss partiel avec itération sur les résidus est la plus adaptée à la résolution de notre problème lorsque le conditionnement est mauvais. Lorsque le conditionnement est raisonnable, l'itération sur les résidus n'est pas nécessaire. Cependant lorsque la taille du système linéaire devient trop importante (le nombre d'harmoniques conservées pour le bloc de base très important, par exemple supérieur à 2000), une méthode itérative du type de la méthode du gradient conjugué [38] doit être utilisée car à partir de cette taille, comme le montre le paragraphe suivant, la méthode de Gauss n'est plus performante. Le programme laisse le choix de la méthode d'inversion à utiliser : 4 méthodes (Gauss partiel, Gauss total, Gauss partiel avec itération sur les résidus et méthode itérative du gradient conjugué carré (fonction ***cgs*** dans Matlab)) sont programmées.

IV.6.2 Majoration de l'erreur commise lors de la résolution du système linéaire par la méthode de Gauss du pivot partiel

Matlab représente les nombres en virgule flottante par 16 chiffres significatifs (double précision), l'erreur relative maximale commise est de 2^{-52} [39]. Cette erreur intervient à chaque fois qu'une opération (+-*/) est réalisée donc, plus on exécute d'opérations, plus on cumule ces erreurs d'arrondi. On est en mesure de majorer l'erreur cumulée commise lors de la factorisation *LU* (méthode de Gauss) [35, p271-280] :
Soit le système linéaire :

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \tag{A8.16}$$

La méthode de Gauss consiste à écrire $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LU}$, avec $\boldsymbol{U}$ triangulaire supérieure, $\boldsymbol{L}$ triangulaire inférieure et $\boldsymbol{P}$ une matrice de permutation sur laquelle aucune erreur n'est commise. Si l'on tient compte des erreurs d'arrondis, le produit $\boldsymbol{LU}$ est calculé avec l'erreur $\boldsymbol{E}_{rr}$:

$$\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{L}_c\boldsymbol{U}_c + \boldsymbol{E}_{rr} \tag{A8.17}$$

$\boldsymbol{E}_{rr}$ résulte de l'accumulation des erreurs d'arrondis et vérifie en valeur absolue :

$$\left|\boldsymbol{E}_{rr}\right| \leq 3.K_n.\varepsilon.\boldsymbol{F} \tag{A8.18}$$

Avec :

- K_n le plus grand des coefficients, en valeur absolue, de toutes les matrices qui interviennent au cours de la factorisation de Gauss. Une majoration de ce coefficient est : $2^{n-1}.K_1$ avec K_1 plus grand élément de $\boldsymbol{A}$, mais selon Wilkinson [40] il est rare que K_n dépasse $10K_1$.
- ε une majoration de l'erreur relative qui résulte de l'arrondi des nombres ($\varepsilon=2^{-52}$).
- $$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 \end{bmatrix}$$

donc

$$\left|\boldsymbol{E}_{rr}\right| \leq 3.K_1.2^{n-1}\varepsilon.\boldsymbol{F} \tag{A8.19}$$

Si l'on choisit comme norme, la norme infinie :

$$\left\|\Delta\boldsymbol{A}\right\|_\infty = \left\|\boldsymbol{E}_{rr}\right\|_\infty \leq 3.K_1.2^{n-1}\varepsilon.(n-1) \tag{A8.20}$$

donc

$$\frac{\left\|\Delta\boldsymbol{A}\right\|_\infty}{\left\|\boldsymbol{A}\right\|_\infty} \leq \frac{3.K_1.2^{n-1}\varepsilon.(n-1)}{K_1} = 3.2^{n-1}\varepsilon.(n-1) \tag{A8.21}$$

Or, toujours d'après Lascaux et Théodor [35, p174] :

$$\frac{\left\|\Delta\boldsymbol{X}\right\|_\infty}{\left\|\boldsymbol{X}+\Delta\boldsymbol{X}\right\|_\infty} \leq cond_\infty(\boldsymbol{A}).\frac{\left\|\Delta\boldsymbol{A}\right\|_\infty}{\left\|\boldsymbol{A}\right\|_\infty} \tag{A8.22}$$

donc, si on considère un $\Delta\boldsymbol{X}$ petit (on se situe avant la divergence) :

$$\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq cond_\infty(A).3.2^{n-1}\varepsilon.(n-1) \tag{A8.23}$$

En conclusion, l'erreur relative lors de l'inversion est d'autant plus grande que la matrice est grande (n grand) et que la matrice est mal conditionnée. Ceci explique pourquoi la méthode de Gauss n'est pas adaptée à la résolution de systèmes de trop grandes tailles. La majoration réalisée en (A8.23) est assez large mais peut donner une idée de l'erreur commise.

IV.6.3 Reconditionnement du système

Un moyen d'améliorer la résolution du système linéaire est de le reconditionner en multipliant la matrice constitutive du système à droite et à gauche par deux matrices diagonales bien choisies.

Soit le système linéaire suivant :

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \tag{A8.24}$$

Le but est de déterminer les deux matrices diagonales $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ inversibles telles que :

$$\text{cond}(\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_2) = \inf_{\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2}\left[\text{cond}(\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_2)\right] \tag{A8.25}$$

relativement à une norme déterminée.
Il s'avère que le choix de $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ telles que donnés ci-dessous est un bon choix [35, p234-235] :

$$\boldsymbol{D}_2(j,j) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left|\boldsymbol{A}_{i,j}\right|} \qquad \boldsymbol{D}_1(i,i) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\left|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_2)_{i,j}\right|} \tag{A8.26}$$

où n est la dimension du système.
Cette opération étant supposée effectuée, la résolution du système linéaire (A8.24) se fait en résolvant le système :

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_2\,\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{Y} \end{cases} \tag{A8.27}$$

En pratique nous constatons que cette technique réduit assez notablement le nombre de conditionnement de la matrice constitutive du système linéaire. Cependant, ce reconditionnement numérique nécessite des calculs supplémentaires, donc induit des erreurs d'arrondis supplémentaires et n'améliore pas le résultat de la résolution. La précision de la solution dépend du conditionnement de la matrice mais également du nombre d'opérations effectuées lors de l'inversion. Un surplus d'opération conduit à une accumulation d'erreurs d'arrondis.

Ainsi, nous allons envisager de reconditionner le système linéaire d'une manière analytique. Par exemple, si on considère l'exemple de la *figure 5*, le système linéaire (A8.9) s'écrit en fonction des matrices quadripolaires et de conversion de spectre :

$$\left[A_{eq}^{2} \vdots A_{eq}^{4} \vdots A_{eq}^{3}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}_2\\ \boldsymbol{\theta}_4\\ \boldsymbol{\theta}_3\end{bmatrix}=\left[B_{eq}^{2} \vdots B_{eq}^{4} \vdots B_{eq}^{2}\right]\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\phi}_2\\ -\boldsymbol{\phi}_4\\ -\boldsymbol{\phi}_3\end{bmatrix} \tag{A8.28}$$

Si les inconnues sont les températures supérieures, la matrice $\boldsymbol{L}$ constitutive du système est :

$$\boldsymbol{L}=\left[A_{eq}^{2} \vdots A_{eq}^{4} \vdots A_{eq}^{3}\right] \tag{A8.29}$$

Une solution pour rééquilibrer $\boldsymbol{L}$ est de factoriser à gauche par $\boldsymbol{A}_0$ et à droite par $\boldsymbol{A}_4$, le système devient :

$$A_0^{-1}\left[A_{eq}^{2} \vdots A_{eq}^{4} \vdots A_{eq}^{3}A_3^{-1}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}_2\\ \boldsymbol{\theta}_4\\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{\theta}_3\end{bmatrix}=-A_0^{-1}\left[\boldsymbol{B}_{eq}^{2} \vdots \boldsymbol{B}_{eq}^{4} \vdots \boldsymbol{B}_{eq}^{2}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}_2\\ \boldsymbol{\phi}_4\\ \boldsymbol{\phi}_3\end{bmatrix} \tag{A8.30}$$

La matrice associée au système linéaire devient donc :

$$\boldsymbol{L}=\left[A_0^{-1}A_{eq}^{2} \vdots A_0^{-1}A_{eq}^{4} \vdots A_0^{-1}A_{eq}^{3}A_3^{-1}\right] \tag{A8.31}$$

Or, les composantes de $A_0^{-1}A_{eq}^{2}$, $A_0^{-1}A_{eq}^{4}$ et $A_0^{-1}A_{eq}^{3}$ s'expriment analytiquement en fonction de :

$$\tanh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_0}\right)^2+\frac{p}{a_0}}\,e_0\right) \quad \text{au lieu de} \quad \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_0}\right)^2+\frac{p}{a_0}}\,e_0\right) \tag{A8.32}$$

De plus, les composantes de $A_{eq}^{3}A_3^{-1}$ s'expriment analytiquement en fonction de :

$$\tanh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_4}\right)^2+\frac{p}{a_4}}\,e_4\right) \quad \text{au lieu de} \quad \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_4}\right)^2+\frac{p}{a_4}}\,e_4\right) \tag{A8.33}$$

Donc, les composantes de la matrice constitutive du système relatives aux blocs 0 et 3 sont toutes du même ordre quand n devient grand (d'ordre 1), ce qui permet de considérer pour ces deux blocs situés aux extrémités des épaisseurs quelconques sans déséquilibrer le système. Par contre, il n'est pas possible de faire intervenir ces termes en tangente hyperbolique pour les blocs intermédiaires, donc la limitation subsiste pour ces blocs. Une solution pour modéliser les blocs très épais par rapport à leur largeur peut être d'introduire des modèles réduits comme des modèles d'ailette. En pratique, pour la modélisation des composants électroniques de puissance, cette limitation n'est pas un problème car les couches sont fines ; seul le radiateur peut être assez

épais et comme il constitue le bloc de base, le reconditionnement *analytique* suffit à permettre l'inversion.

IV.6.4 Modèles asymptotiques pour les temps très courts

Un problème se pose également lorsque la variable de Laplace p est très grande, ce qui correspond aux temps très courts. Pour ces temps très courts, il n'est pas nécessaire de modéliser toute la structure, on modélise la puce (où la zone excitée) par un milieu semi-infini ou par un milieu fini avec une condition limite de température imposée assez loin de la source et on effectue alors un raccordement au modèle complet.

Par exemple, considérons l'exemple de la *figure 6*. Il s'agit de l'empilement de 2 blocs isolés sur leurs faces latérales. La face inférieure du bloc de base est imposée à 0°C alors que la face supérieure du bloc 1 est excitée suivant une impulsion Dirac de densité de flux. Cette excitation permet de déterminer la réponse impulsionnelle de la structure et donc de déterminer ensuite la réponse à une excitation quelconque par produit de convolution. La surface libre 2 est isolée.

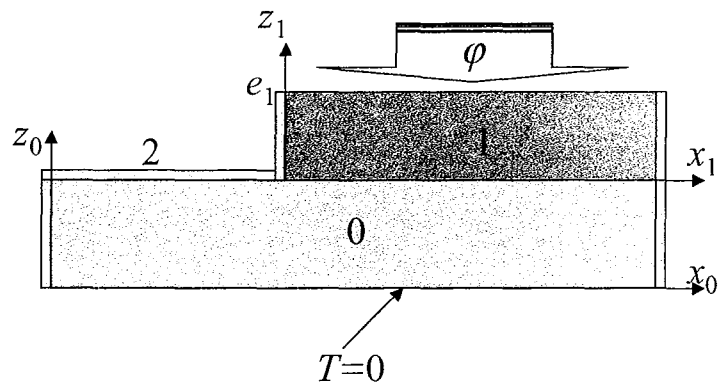


figure 6 : bibloc de test

Si l'excitation est uniforme en espace sur la face supérieure du bloc 1, un modèle unidirectionnel semi infini peut être utilisé pour les temps courts :

$$\overline{T}(p)=\frac{1}{\sqrt{\lambda\rho cp}} \qquad \text{(A8.34)}$$

Dans le cas contraire, nous pouvons utiliser un modèle un peu plus sophistiqué qui prend en compte le caractère bidimensionnel ; la température est imposée à la température initiale sur la surface inférieure du bloc 1 :

$$\theta_n(z_1 = e_1, p) = \frac{\tanh\left(\sqrt{\frac{p}{a_1} + \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2}\, e_1\right)}{\lambda_1 \sqrt{\frac{p}{a_1} + \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2}} \phi_n(z_1 = e_1, p) \qquad \text{(A8.35)}$$

Ce modèle en tangente hyperbolique n'explose pas aux temps courts.

Il reste à déterminer le temps caractéristique de raccordement des deux modèles. La *figure 7*, représente la réponse à un Dirac de densité uniforme selon les deux modèles.

L_0 = 10 mm ; e_0 = 2 mm ; L_1 = 7 mm ; e_1 = 1.5 mm. Les deux blocs sont en cuivre.

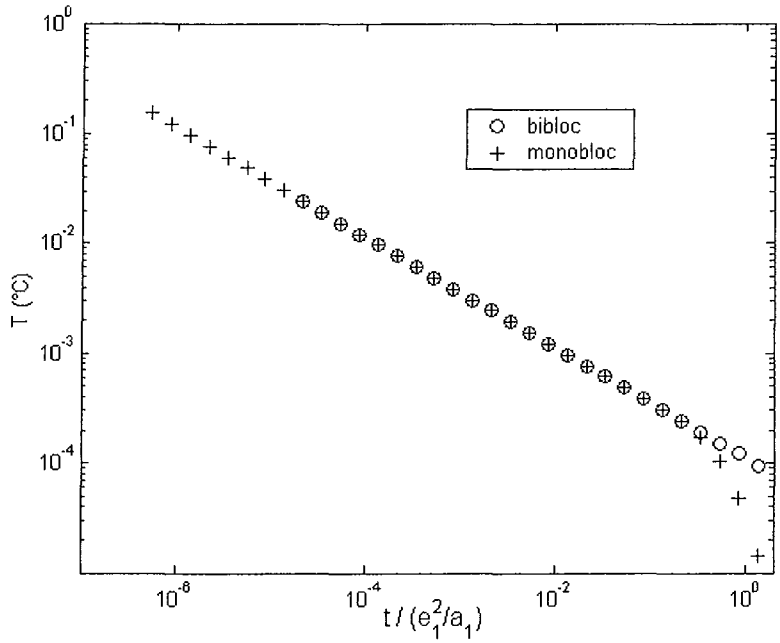


figure 7 : réponse à une impulsion Dirac de densité de flux uniforme pour deux modèles, température au milieu de la face supérieure du bloc 1.

Sur cet exemple, les deux modélisations correspondent jusqu'au temps caractéristique adimensionnel de 0.1. En pratique, nous avons pu constater qu'un temps caractéristique de raccordement de 0.01 donnait de bons résultats.

Le recours à ces modèles asymptotiques, qui sont tout de même assez faciles à mettre en œuvre, est nécessaire pour obtenir une réponse impulsionnelle aux temps courts suffisamment précise afin d'exécuter de bons produits de convolution et traiter le cas d'une excitation quelconque. Le calcul à partir des modèles asymptotiques pourrait être implanté dans le programme.

IV.7 Régime transitoire, inversion de la transformée de Laplace

La méthode étant semi-analytique à partir de la résolution du système linéaire, l'inversion des transformées de Laplace ne peut être réalisée que numériquement. Il existe plusieurs méthodes d'inversion numérique des transformées de Laplace [16, 41, 42], les deux les plus couramment utilisées étant la méthode basée sur une transformée de Fourier [41] et la méthode de Stehfest [16]. La méthode de Stehfest présente l'avantage de ne nécessiter aucun paramètre à ajuster (hyperparamètre supplémentaire), contrairement à la méthode de Fourier. De plus, le calcul du champ de température (ou de densité de flux) à un instant t quelconque ne nécessite le calcul de la température transformée (ou densité de flux transformée) que pour 10 valeurs de p différentes. C'est-à-dire que la détermination du champ de température dans la structure considérée à un instant t quelconque nécessite 10 formations de matrice solution et 10 résolutions de système linéaire. La méthode de Fourier nécessite de connaître la température transformée pour un grand nombre de valeurs de p mais donne la valeur de la température pour un nombre équivalent de temps t. Donc, la méthode de Stehfest est intéressante si l'on souhaite obtenir la température (ou la densité de flux) à un nombre d'instants donnés assez faible, c'est-à-dire inférieur à 30. Un dernier avantage de la méthode de Stehfest est qu'elle s'accommode relativement bien des variations brutales de température (ou de densité de flux), alors que la méthode utilisant les transformées de Fourier nécessitera un grand nombre d'harmoniques temporelles, (c'est-à-dire un grand nombre de valeurs de la température transformée) si les variations sont brutales ; comme nous chercherons en pratique la réponse impulsionnelle en face avant, la forme de la température sera assez dure.
Pour toutes ces raisons, nous avons choisi d'utiliser la méthode de Stehfest [16]

Comme le montre également l'organigramme du programme en régime transitoire, pour chaque instant t, toutes les variables dépendant de la variable de Laplace p doivent être calculées 10 fois. C'est-à-dire que les matrices quadripolaires doivent être calculées 10 fois et que surtout la valeur numérique de la matrice constitutive du système linéaire (étape qui nécessite plus de la moitié du temps de calcul en régime permanent) doit être calculée 10 fois. Par contre, les matrices de conversion de spectre ne sont calculées qu'une fois car elle ne dépendent que de la géométrie. En conclusion, le temps de calcul en régime transitoire pour chaque instant t vaut sensiblement 10 fois le temps de calcul en régime permanent.

En régime transitoire, un système linéaire est entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle (réponse à un flash ou Dirac de densité de flux par exemple). A partir de cette réponse impulsionnelle, la réponse à une excitation quelconque est obtenue par produit de convolution [43]. Si $T_\delta(x,y,z,t)$ est l'évolution de la température au cours du temps suite à une excitation impulsionnelle et $\varphi(t)$ l'excitation imposée, alors la variation de température au cours du temps, conséquence de cette excitation, vaut :

$$T(x,y,z,t) = \int_0^t T_\delta(x,y,z,t-\tau)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(A8.36)}$$

La principale difficulté liée à cette méthode réside dans le calcul du produit de convolution avec suffisamment de précision par la méthode des trapèzes (quadrature). Ceci suppose un calcul précis de la réponse impulsionnelle en utilisant des modèles asymptotiques décrits dans la partie précédente et une optimisation de la discrétisation du temps. En effet, en face avant, la réponse impulsionnelle est infinie au temps initial. Il convient alors pour cette position d'utiliser de très petits intervalles de temps aux temps courts.

Selon la position dans la structure du point auquel nous désirons connaître la réponse impulsionnelle, la discrétisation temporelle optimale varie.

Pour le cas de la face avant qui est le cas le plus délicat, nous pouvons imaginer une méthode à pas de temps variable qui s'adapterait en fonction de l'estimation de la dérivée : aux temps très courts (la température varie comme $\frac{1}{\sqrt{t}}$: milieu semi-infini), donc :

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \propto \frac{1}{t^{3/2}} \qquad \text{(A8.37)}$$

Donc le choix d'un pas de temps qui varie en $t^{3/2}$ conduira à des écarts de température, entre deux pas de temps, constants.

Les réponses impulsionnelles à l'intérieur de la structure étant plus molles, une discrétisation uniforme du temps peut alors suffire.

Une illustration simple est ici donnée pour le cas du bloc en une dimension représentée sur la *figure 8*.

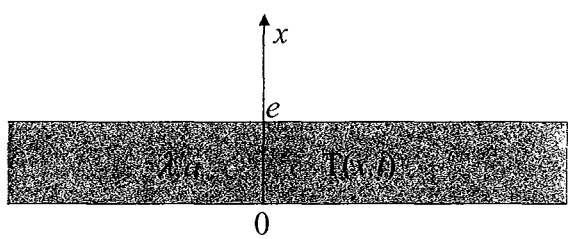


figure 8 : mur isotrope, homogène
de conductivité thermique λ et de diffusivité thermique a

Ce bloc de cuivre possède une épaisseur de 2mm et la température de sa face inférieure est imposée à 0°C. La température en face avant est donnée par :

$$\bar{T}(x=e,p) = \frac{\tanh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}e\right)}{\sqrt{\lambda\rho cp}}\bar{\varphi}(x=e,p) \qquad \text{(A8.38)}$$

et au milieu du bloc :

$$\overline{T}(x=e/2,p)=\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\frac{e}{2}\right)\overline{T}(x=e,p)+\frac{1}{\sqrt{\lambda\rho cp}}\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\frac{e}{2}\right)\overline{\varphi}(x=e,p) \qquad \text{(A8.39)}$$

Ceci nous permet donc de déterminer par la méthode de Stehfest la réponse impulsionnelle en face avant et au milieu du bloc, voir *figure 9*.

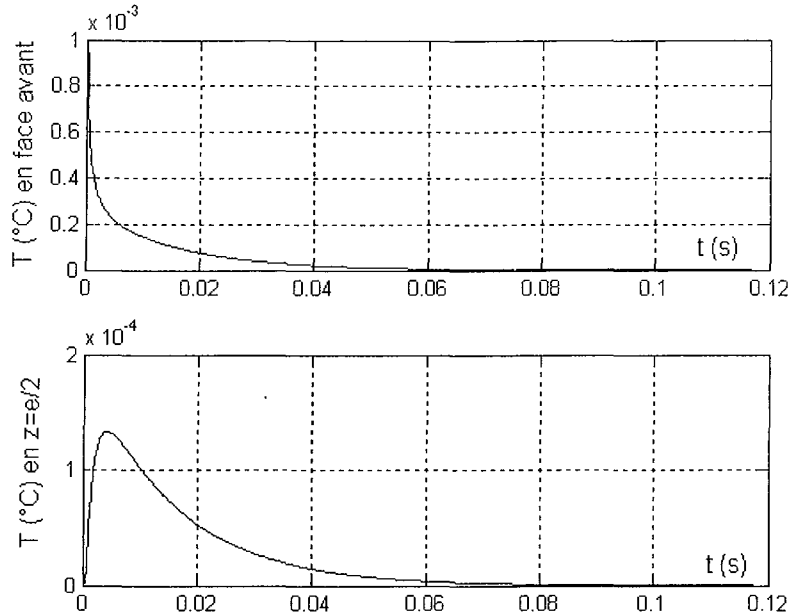


figure 9 : réponse impulsionnelle en face avant et au milieu du bloc, pour un pas de temps de 10^{-4} s

A partir de cette réponse impulsionnelle, la réponse indicielle (excitation en échelon) peut être déterminée en exécutant le produit de convolution, et ceci pour différents pas de temps de discrétisation. Le résultat obtenu peut alors être comparé avec le résultat fourni directement par la méthode de Stehfest en considérant une excitation indicielle.

Sur la *figure 10* sont comparés les deux calculs en choisissant comme pas de discrétisation pour calculer la quadrature un pas uniforme de 10^{-4} s

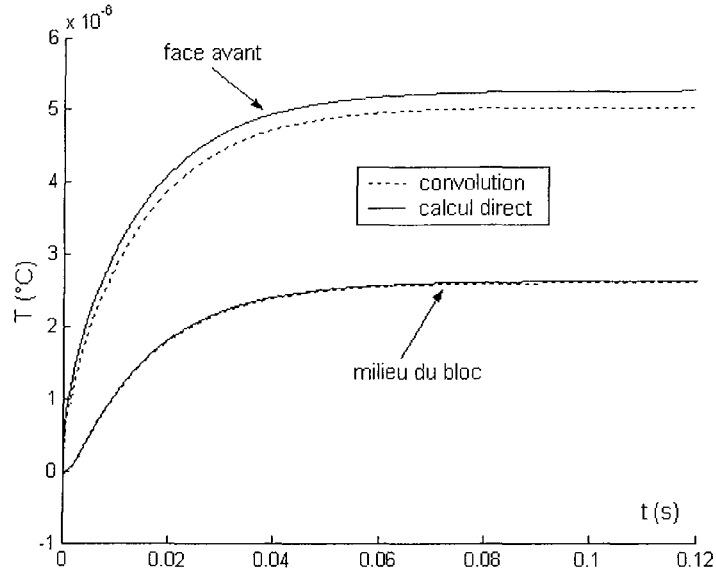


figure 10 : réponse à un échelon unité de densité de flux, pas de temps de 10^{-4} s

Le produit de convolution donne bien l'évolution dans le temps de la température au milieu du bloc, par contre, le résultat est moins bon en face avant. Pour améliorer le calcul de la quadrature en face avant, nous pouvons choisir un pas de temps plus petit, sur la *figure 11* sont représentés les thermogrammes pour un pas de temps de 10^{-5}.

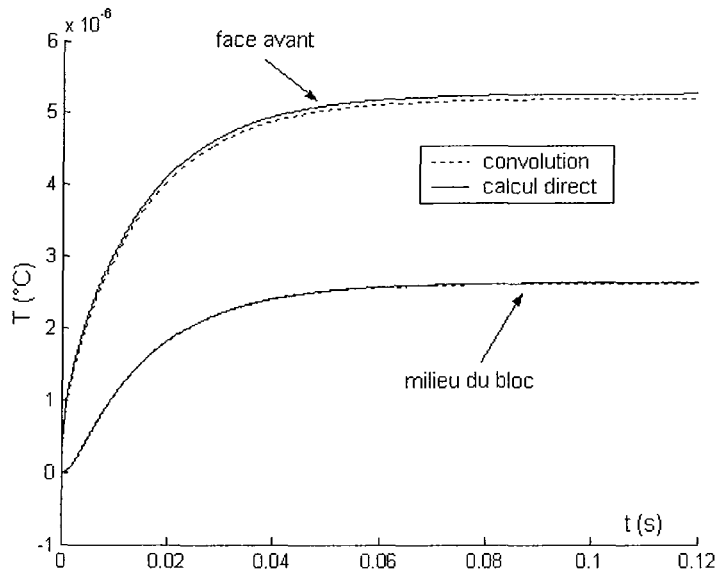


figure 11 : réponse à un échelon unité de densité de flux, pas de temps de 10^{-5} s

Le résultat est bien meilleur en face avant (voir *figure 10*), mais il subsiste un petit écart avec le calcul exact. De plus, on ne peut pas réduire le pas de temps indéfiniment car le temps de calcul nécessaire à la détermination de la réponse impulsionnelle deviendrait trop important. La solution consiste à considérer pour la température en face avant un pas de temps variable. Si l'on utilise la relation (A8.37) comme définition du pas de temps variable ($\Delta t(i) = t(i)^{3/2}$; $t(1)=10^{-6}$s)

le thermogramme calculé par le produit de convolution est pratiquement confondu avec le thermogramme exact, voir *figure 12*.

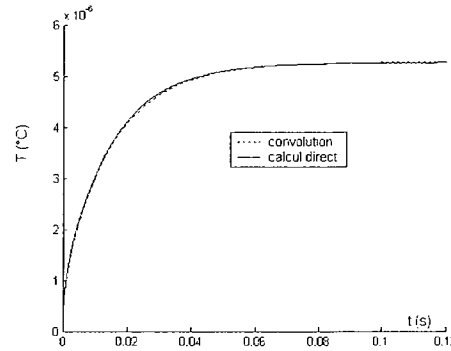


figure 12 : température en face avant en réponse à une excitation indicielle, calculée directement ou par l'intermédiaire de la réponse impulsionnelle, pas de temps variable

Donc à partir de la réponse impulsionnelle calculée judicieusement une fois pour toutes, nous pouvons déterminer par simple produit de convolution les réponses à des excitations quelconques. Sur la *figure 12*, sont représentées quelques réponses à des excitations classiques pour le bloc de la *figure 8*.

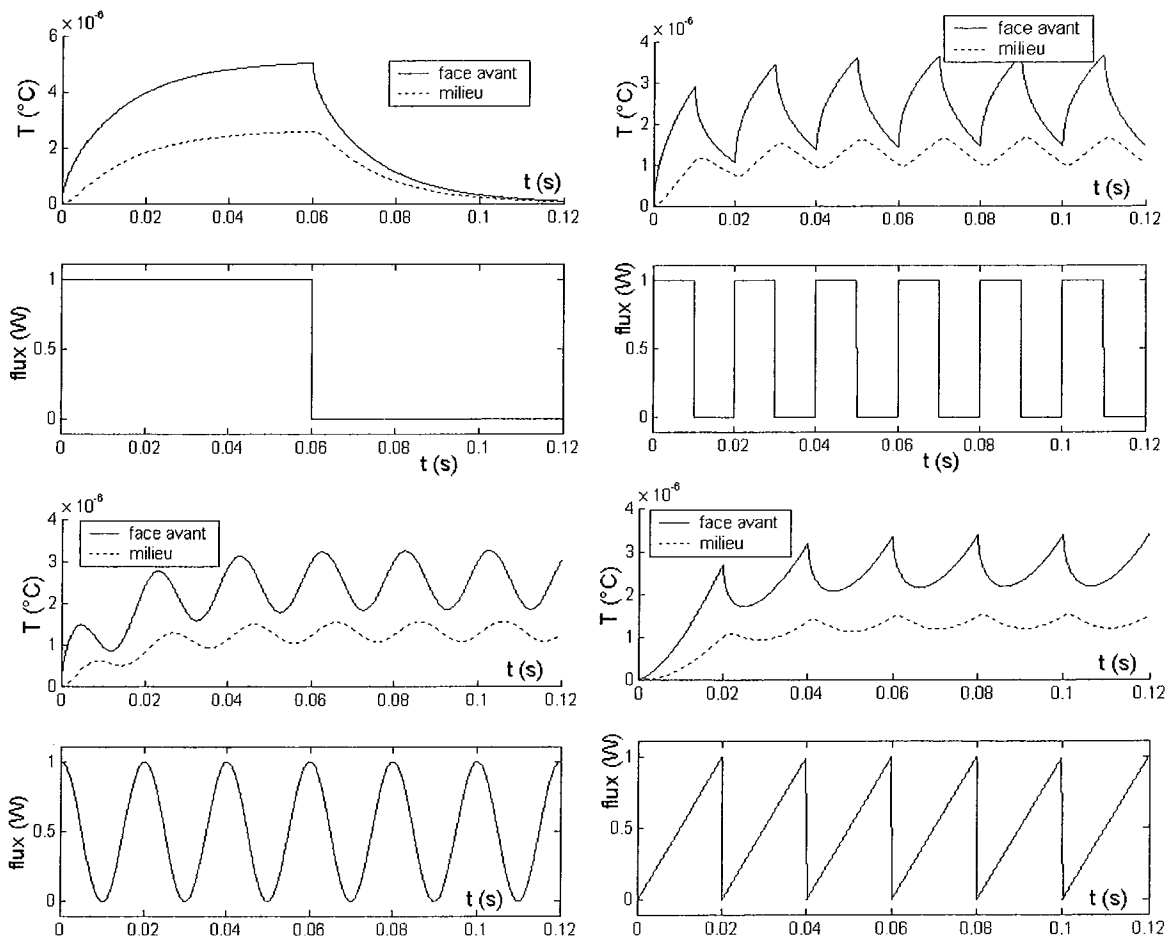


figure 12 : quelques réponses du bloc à des excitations classiques.

Nous vérifions bien que le bloc est un filtre passe bas.
A titre de remarque, la méthode de Stehfest ne permet pas d'obtenir ces réponses directement.
Elle n'est pas adaptée à ce type d'excitation temporelle périodique.

IV.8 Calcul direct (caldirect.m)

Le programme **caldirect.m** est consacré au calcul des spectres de la température et de la densité de flux dans toute la structure à partir des conditions limites connues et calculées par la résolution du système linéaire. Pour ce faire, il nous faut définir un pas en profondeur (selon 0z) pour chaque bloc pour lequel nous désirons connaître la température. Nous définissons ainsi un nombre de strates par bloc (*nspb*). Si cette variable est fixée à zéro, la température et la densité de flux seront calculées uniquement sur les faces supérieures et inférieures des blocs, si elle est fixée à 1, la température et la densité de flux seront calculées également dans le plan de coupe médian du bloc...etc. Plus le nombre de strates par bloc est important, plus la résolution spatiale selon 0z en sortie sera importante.

IV.9 Inversion des transformées de Fourier (inversion.m)

Le rôle du sous programme **inversion.m** est de calculer les valeurs réelles des températures et densités de flux à partir de leurs spectres. L'algorithme utilisé est l'algorithme d'inversion rapide par transformées de Fourier, c'est-à-dire que les spectres bidimensionnels sont complétés par des zéros pour que leur taille devienne une puissance de 2. De plus, ce programme construit les graphiques de sortie définis par l'utilisateur. Ces graphiques donnent la température ou densité de flux suivant des plans de coupe à x ou y ou z constant. Le programme calcule également la densité de flux suivant $0x$ et $0y$ à partir des harmoniques de la température.

IV.10 Principe du zoom spectral

Une condition à remplir pour résoudre le problème des empilements pyramidaux à partir de la méthode des quadripôles est de conserver pour chaque bloc un nombre d'harmoniques qui doit être proportionnel à sa taille. Cette condition peut poser des problèmes lorsque l'on souhaite considérer des structures composées d'empilements de blocs de taille très différentes comme représenté en *figure 13.*

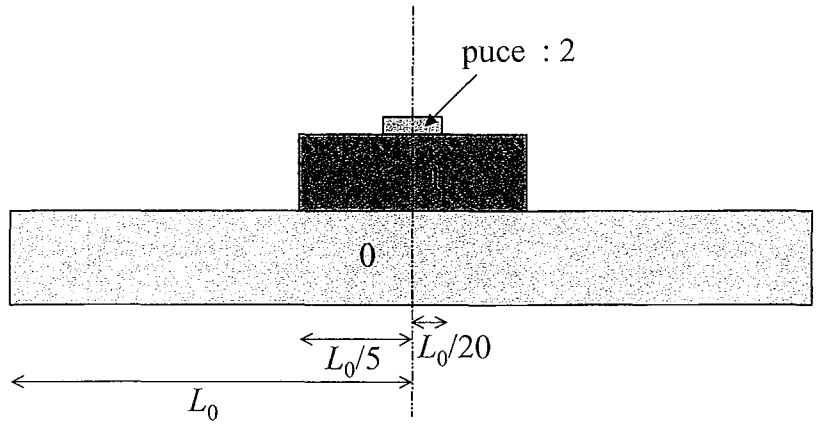


figure 13 : empilement de blocs de tailles très différentes

En effet, si l'on souhaite obtenir une précision spatiale relativement importante sur la puce (par exemple si on conserve 50 harmoniques pour ce bloc), on est contraint de conserver un très grand nombre d'harmoniques pour le bloc de base (à savoir 50×20=1000 harmoniques), ce qui se traduit par un temps de calcul très important, et des erreurs commises lors de la résolution du système linéaire qui est de la taille du nombre d'harmoniques conservées pour le bloc de base 0. Une solution qui permet de contourner ce problème est d'exploiter le fait que les blocs ont un caractère passe bas (c'est-à-dire qu'ils atténuent les harmoniques d'ordre élevé). L'idée est donc de réaliser un premier calcul en considérant un nombre réduit d'harmoniques pour la puce (par exemple 10 harmoniques, ce qui fait un total de 200), de relever la température sur la partie inférieure du bloc intermédiaire 1 et de s'en servir comme condition limite pour un deuxième calcul, qui ne prend alors pas en compte le bloc de base 0 et pour lequel nous conservons 50 harmoniques pour la puce. Le total des harmoniques conservées pour ce deuxième problème est alors de 50×4 = 200. Comme le bloc 1 joue un rôle de passe bas, les 10×4=40 harmoniques conservées lors du premier calcul suffisent à décrire la température et la densité de flux sur sa face inférieure. De plus, les deux calculs réalisés nécessitent beaucoup moins de temps qu'un calcul pour lequel on conserverait 1000 harmoniques.
La possibilité de réaliser ces zooms spectraux est intégrée au code.

V L'interface graphique

Le but de cette interface est de rendre plus conviviale l'utilisation du code ; elle est réalisée également sous Matlab 6.1 [44]. Une vue d'ensemble est représentée sur la *figure 14*.

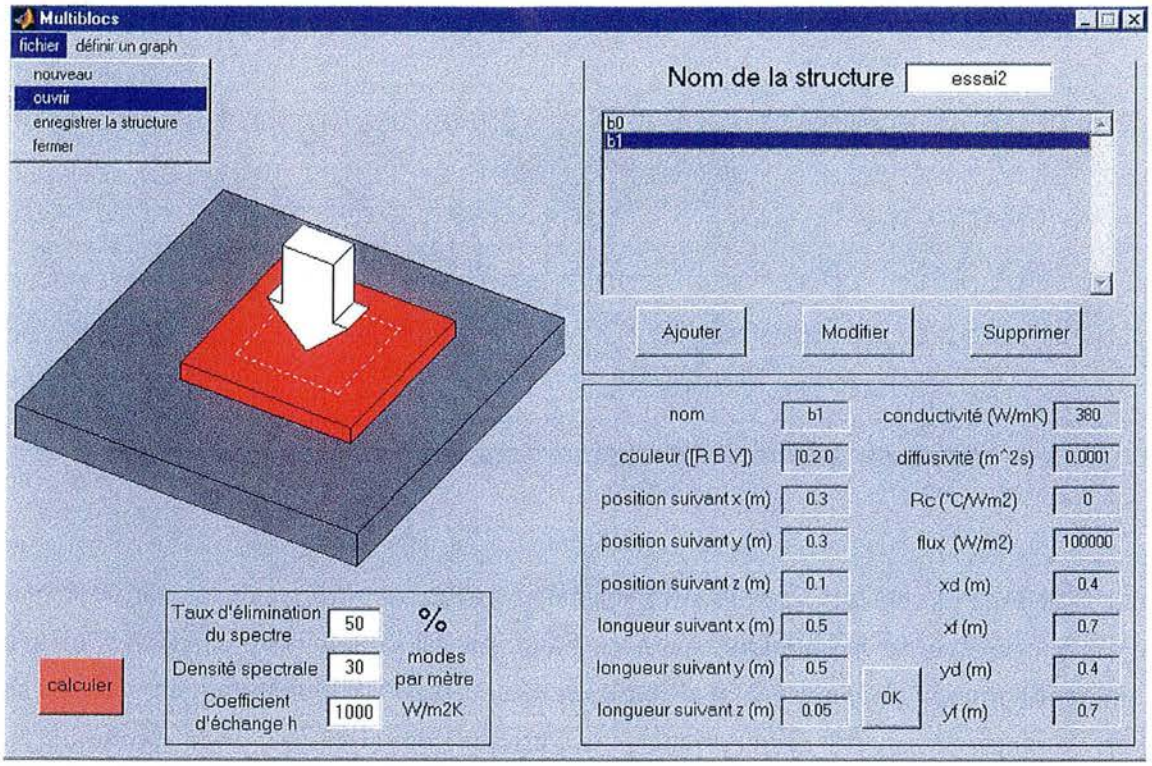


figure 14 : interface utilisateur

La structure en construction est tracée dans la fenêtre graphique, l'utilisateur peut sélectionner un bloc dans la liste pour le modifier, celui-ci devient alors de couleur rouge (cas ici du bloc b1). Le menu « fichier » permet d'enregistrer la structure et d'ouvrir une structure existante. Le menu « définir un graph » (voir *figure 15*) permet à l'utilisateur de définir un plan de coupe dans lequel la température et la densité de flux calculées sont tracées sous forme de contour.

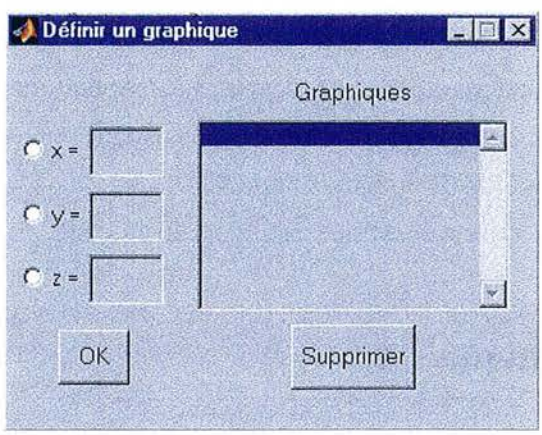


figure 15 : menu « définir un graph »

Le bouton « calculer » en bas à gauche de la fenêtre principale permet de lancer le calcul.

Annexe 9 : calcul des matrices de conversion de spectre entre un bloc isolé sur ses faces latérales et un bloc échangeant sur sa face de droite

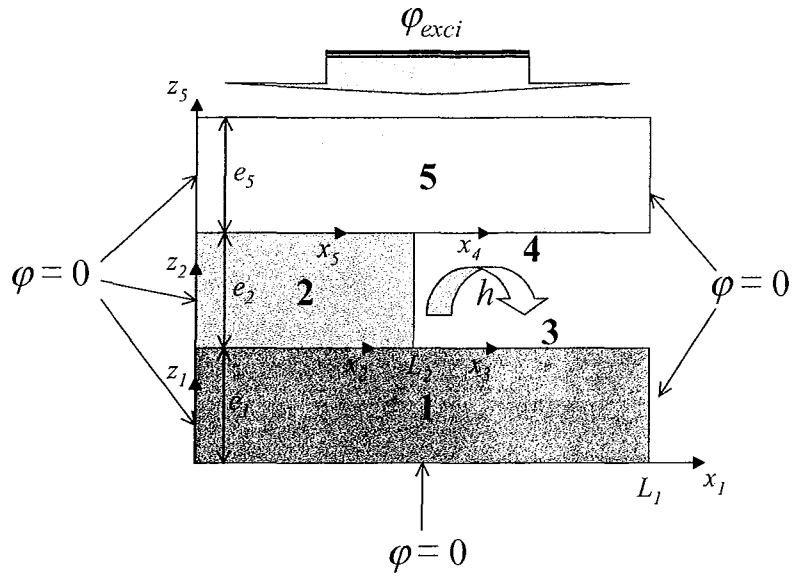


figure 1 : un demi canal

I. Passage du bloc n°1 au bloc n°2

*Dans la base associée au bloc n°1, la température à l'interface s'écrit :

$$T^1(x_1, z_1 = e_1) = \sum_{n=0}^{N_1} \cos\left(\alpha_n^1 x_1\right) \frac{\theta_n^1(z_1 = e_1)}{No_n^1} \tag{A9.1}$$

où $\alpha_n^1 = n\pi / L_1$ et $No_n^1 = \begin{Bmatrix} n = 0 : L_1 \\ n \geq 1 : L_1/2 \end{Bmatrix}$.

*Dans la base associée au bloc n°2, la température à l'interface s'écrit :

$$T^2(x_2, z_2 = 0) = \sum_{n=0}^{N_2} \cos\left(\alpha_n^2 x_2\right) \frac{\theta_n^2(z_2 = 0)}{No_n^2} \tag{A9.2}$$

où les valeur propres α_n^2 sont les solutions positives de :

$$\frac{\cos(\alpha_n L)}{\sin(\alpha_n L)} = \frac{\lambda}{h} \alpha_n \tag{A9.3}$$

et où la norme No_n^2 est définie par

$$No_n = \frac{L_2}{2}\left[1 + \frac{hL_2/\lambda}{(hL_2/\lambda)^2 + (\alpha_n L_2)^2}\right] \tag{A9.4}$$

La continuité de la température entre les bloc 1 et 2 impose :

$$\begin{aligned}\int_0^{L_1} T^1(x_1, y_1 = e_1, p)\cos\left(\alpha_n^1 x_1\right)\mathrm{d}x_1 &= \theta_n^1(y_1 = e_1, p)\\ &= \int_0^{L_2} T^2(x_1, y_2 = 0, p)\cos\left(\alpha_n^1 x_1\right)\mathrm{d}x_1 + \int_{L_2}^{L_2+L_3} T^3(x_3, p)\cos\left(\alpha_n^1 x_1\right)\mathrm{d}x_1\end{aligned} \tag{A9.5}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\theta_n^1(y_1 = e_1, p) = &\int_0^{L_2}\sum_{n=0}^{N_2}\cos\left(\alpha_n^2 x_1\right)\cos\left(\alpha_n^1 x_1\right)\frac{\theta_n^2(y_2 = 0, p)}{No_n^2}\,\mathrm{d}x_1\\ &+ \int_{L_2}^{L_1}\sum_{n=0}^{N_3}\cos\left(\alpha_n^3(x_1 - L_2)\right)\cos\left(\alpha_n^1 x_1\right)\frac{\theta_n^3(p)}{No_n^3}\,\mathrm{d}x_1\end{aligned} \tag{A9.6}$$

C'est à dire, après intégration :

$$\begin{aligned}\theta_n^1(y_1 = e_1, p) = &\sum_{m=0}^{N_2}\left(\frac{\sin\left(\left(\alpha_n^1 + \alpha_m^2\right)L_2\right)}{\alpha_n^1 + \alpha_m^2} + \frac{\sin\left(\left(\alpha_n^1 - \alpha_m^2\right)L_2\right)}{\alpha_n^1 - \alpha_m^2}\right)\frac{\theta_m^2(y_2 = 0, p)}{2No_m^2}\\ &+ \sum_{m=0}^{N_3}\boldsymbol{E}_{1\to 3}(n,m)\theta_m^3(p)\end{aligned} \tag{A9.7}$$

Où la matrice de conversion de spectre $\boldsymbol{E}_{1\to 3}$ est une matrice classique.

Nous pouvons ainsi définir la matrice de conversion de spectre $\boldsymbol{E}_{1\to 2}$ de taille $(N_1 \times N_2)$ telle que :

$$\boldsymbol{\theta}^1(y_1 = e_1, p) = \boldsymbol{E}_{1\to 2}\boldsymbol{\theta}^2(y_2 = 0, p) + \boldsymbol{E}_{1\to 3}\boldsymbol{\theta}^3(p) \tag{A9.8}$$

$$\boldsymbol{E}_{1\to 2}(n,m) = \frac{1}{2No_m^2}\left(\frac{\sin\left(\left(\alpha_n^1 + \alpha_m^2\right)L_2\right)}{\alpha_n^1 + \alpha_m^2} + \frac{\sin\left(\left(\alpha_n^1 - \alpha_m^2\right)L_2\right)}{\alpha_n^1 - \alpha_m^2}\right) \tag{A9.9}$$

II. Passage du bloc n°2 au bloc n°5

La continuité de la température à l'interface entre les blocs n°2 et n°5 s'écrit :

$$T^2(x_2, y_2 = e_2, p) = T^5(x_5 = x_2, y_5 = 0, p) \tag{A9.10}$$

multiplions (A9.10) par $\cos\left(\alpha_n^2 x_2\right)$ et intégrons de 0 à L_2 :

$$\begin{aligned}\int_0^{L_2} T^2(x_2, y_2 = e_2, p)\cos\left(\alpha_n^2 x_2\right)\mathrm{d}x_2 &= \theta_n^2(y_2 = e_2, p)\\ &= \int_0^{L_2} T^5(x_5, y_5 = 0, p)\cos\left(\alpha_n^2 x_2\right)\mathrm{d}x_2\end{aligned} \tag{A9.11}$$

(A9.11) devient, après remplacement de T^5 par son expression développée :

$$\theta_n^2(y_2 = e_2, p) = \sum_{m=0}^{N_5}\frac{1}{2No_m^5}\left(\frac{\sin\left(\left(\alpha_n^2 + \alpha_m^5\right)L_2\right)}{\alpha_n^2 + \alpha_m^5} + \frac{\sin\left(\left(\alpha_n^2 - \alpha_m^5\right)L_2\right)}{\alpha_n^2 - \alpha_m^5}\right)\theta_m^5(y_5 = 0, p) \tag{A9.12}$$

donc nous pouvons définir la matrice de conversion de spectre $\boldsymbol{F}_{2\to 5}$ de taille ($N_2 \times N_5$) telle que :

$$\boldsymbol{\theta}^2\left(y_2 = e_2, p\right) = \boldsymbol{F}_{2\to 5}\ \boldsymbol{\theta}^5\left(y_5 = 0, p\right) \tag{A9.13}$$

avec

$$\boldsymbol{F}_{2\to 5}\left(n,m\right) = \frac{1}{2No_m^5}\left(\frac{\sin\left(\left(\alpha_n^2 + \alpha_m^5\right)L_2\right)}{\alpha_n^2 + \alpha_m^5} + \frac{\sin\left(\left(\alpha_n^2 - \alpha_m^5\right)L_2\right)}{\alpha_n^2 - \alpha_m^5}\right) \tag{A9.14}$$

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur Jean-Christophe BATSALE, Professeur, LEPT/ENSAM, Talence

Monsieur Jean-Bernard SAULNIER, Professeur, LET/ENSMA, Futuroscope Chasseneuil

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur MARANZANA Gaël

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

" Modélisation thermique des composants électroniques de puissance "

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Mécanique et Energétique** »

Fait à Vandoeuvre, le 13 mars 2003
Le Président de l'I.N.P.L.,
L. SCHUFFENECKER

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANŒUVRE CEDEX

TEL. 33/03.83.59.59.59
FAX. 33/03.83.59.59.55

Mots-Clés : Modélisation Thermique Analytique, Quadripôle Thermiques, Multicouche, Composant Electronique de Puissance, Thermographie Infrarouge, Estimation de Paramètres.

Résumé : Le contrôle thermique est un point clef de la conception des équipements électroniques. En effet les caractéristiques de fonctionnement des composants et la fiabilité des systèmes dépendent fortement de la température. Nous avons développé un outil de modélisation des transferts de chaleur dans les composants électroniques de puissance qui permet d'optimiser leur structure d'un point de vue thermique. Ses performances en terme de temps de calcul permettent cette optimisation sans avoir recours à des modèles réduits. La méthode ne nécessite pas de maillage de la structure et son caractère analytique en fait une méthode adaptée à la caractérisation expérimentale des composants.

Le premier chapitre est consacré à la mise en place des outils de modélisation thermique de structures à géométrie multibloc, c'est-à-dire de structures composées d'empilements pyramidaux de blocs parallélépipédiques, géométries caractéristiques des composants électroniques de puissance.

Le deuxième chapitre est centré sur la validation et l'estimation des performances de la méthode. La simulation thermique d'un module IGBT (Insulated Gate Bipolar Transistor) est réalisée. Une procédure de conception optimale d'un diffuseur est proposée. La faisabilité de la prise en compte par la méthode des quadripôles thermiques du couplage entre un canal fluide et ses parois solides, ou de la modélisation d'un radiateur à ailettes, est également démontrée.

Le troisième et dernier chapitre est consacré à la mise au point d'outils de caractérisation d'empilements, de métrologie de température sur les IGBTs et de fluxmètrie par conduction inverse. Une procédure de mesure de température sur la surface d'un composant est également mise au point. La mesure est réalisée par thermographie infrarouge, phosphorescence induite U.V. et par l'intermédiaire d'un paramètre thermosensible afin de procéder à la cartographie des emissivités. La perspective d'utiliser un composant électronique comme fluxmètre est également envisagée.

Key-Words : Thermal Analytical Modelling, Thermal Quadrupoles, Multilayer Material, Power Electronic Component, Infrared Thermography, Parameter Estimation.

Abstract : "Thermal Modeling of Power Electronic Components, Using the Quadrupole Method". Thermal monitoring is a key point in the design of electronic equipment because working features of components and reliability of systems strongly depend on temperature. We have developed a heat transfer modeling tool for power electronic components. It allows to optimize their structure in a thermal point of view. Its performance in terms of running time (CPU time) permits this optimization without using reduced models. The method does not need any meshing of the structure and its analytical character is well suited to characterize components experimentally.

The first chapter is dedicated to the introduction of the thermal modeling tools of multibloc structures, that is to say of structures made of pyramidal stacks of parallelepipedic blocs, which is the specific geometry of power electronic components.

The second chapter is centered on the validation and on the performance evaluation of the method. Thermal simulations of an IGBT (Insulated Gate Bipolar Transistor) module are realized. An optimal design method is proposed for a spreader (heat sink). The modeling of a channel, that takes into account the coupling between its solid walls and the coolant , and the modeling of a fin heat sink, are also realized.

The third and last chapter is dedicated to the implementation of characterization tools for multilayer materials, to temperature measurements on IGBTs and to heat flux measurements through inverse conduction. A procedure of temperature measurements on the surface of components is finalized. Measurements are carried out by infrared thermography, U.V. induced phosphorescence and through a thermosensitive parameter in order to determine the emissvity map. The prospect to