HAL
open science

Homogénéisation du comportement élastique des composites avec la prise en compte de l'endommagement

Aimé Agbassah Broohm

To cite this version:

Aimé Agbassah Broohm. Homogénéisation du comportement élastique des composites avec la prise en compte de l'endommagement. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2003. Français. NNT : 2003METZ022S . tel-01749841

HAL Id: tel-01749841

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749841v1

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à

L' UNIVERSITE DE METZ

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 2003065S
Cote S/M 03/22
Loc

UNIVERSITÉ DE METZ

PAR

Aimé Agbassah BROOHM

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR DE L' UNIVERSITE DE METZ

SPECIALITE **SCIENCES DE L' INGENIEUR**
OPTION **MECANIQUE ET MATERIAUX**

HOMOGENEISATION DU COMPORTEMENT ELASTIQUE DES COMPOSITES AVEC LA PRISE EN COMPTE DE L'ENDOMMAGEMENT

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ
031 520559 2

Soutenance le 7 Mars 2003 à 14 h a l'ENIM devant le jury compose de :

Paul LIPINSKI	ENIM, Metz	*Directeur de thèse*
Pascal VIEVILLE	ENIM, Metz	*Codirecteur de thèse*
Moussa. NAÏT-ABDELAZIZ	EUDI de Lille	*Rapporteur*
Tomasz LODYGOWSKI	Université Polytechnique de Pozan	*Rapporteur*
Hafid SABAR	ENIM, Metz	*Examinateur*
Yves REMOND	IMFS de Strasbourg	*Examinateur*
Sonnou TIEM	ENSI de Lomé	*Invité*

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, U.M.R. CNRS 7554
Ile du Saulcy - F- 57045 METZ Cedex 01 tél : (33) 03 87 31 53 60 – FAX (33) 03 87 31 53 66

A la mémoire de Florence, ma mère !

Celle qui a su me témoigner du maximum

d'amour et soutien qu'un être puisse donner

A mon père, mes sœurs et frères.
A toute ma famille.
A mes amis.

REMERCIEMENTS

Les travaux de recherche décrits dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (L.P.M.M.) de l'Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique (I.S.G.P.) de l'Université de Metz. Cette thèse n'aurait pas pu être menée à son terme sans l'implication de certaines personnes à qui je tiens à exprimer toute ma gratitude.

Je ne saurais suffisamment remercier Paul LIPINSKI, qui m'a initié à la recherche depuis le DEA et a dirigé avec une rigueur scientifique tous mes travaux aussi bien théoriques que numériques. Je suis particulièrement touché par sa confiance et la patience dont il a fait preuve à mon égard pendant toutes ces années que nous avons passées ensemble.

Je remercie Pascal VIEVILLE, Codirecteur de mes travaux, pour sa disponibilité, ses conseils et son implication personnelle dans la rédaction de cette thèse.

J'exprime ma gratitude à Sonnou TIEM pour sa participation au jury. Il m'a donné les premières bases de la mécanique des milieux continus à l'ENSI de Lomé et cette thèse n'aurait probablement pas pu se faire sans son aide et la confiance qu'il a eue en moi.

Que les Professeurs Moussa NAIT ABDELAZIZ et Tomasz LODYGOWSKI trouvent ici l'expression de mes remerciements pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire et pour l'intérêt qu'ils y ont porté. Je suis conscient du travail que leur a demandé l'examen de cette étude.

Je remercie également le Professeur Yves REMOND qui m'a fait l'honneur d'être président du jury ainsi que le Professeur Hafid SABAR pour sa participation au jury.

Je remercie Alain CARMASOL pour ses conseils et encouragements.

Je remercie tous les membres du LPMM pour l'ambiance agréable dans laquelle se sont déroulées mes recherches sans oublier tous ceux qui m'ont apporté leur aide à l'ENIM.

Une mention spéciale à mes camarades (ex-)thésards du LPMM, Patrick ZATTARIN, Frédéric BUMBILIER, Zakaria RHADBANE, Laurent LANGLOIS, Raphaëlle KRUMEICH, Amadou OUANE, Yazid BONFOH, Koffi HOLNOU et autres.

Un grand merci à tous mes amis, sœurs, frères, cousines et cousins, je ne cite pas de noms de peur d'en oublier, pour leur solide soutien, pendant mes moments de faiblesse et de doute.

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS

INTRODUCTION GENERALE 1

CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES MILIEUX HETEROGENES ET COMPOSITES 5

I.1 - MATERIAUX COMPOSITES ET HETEROGENES 6

I.1.1 - Présentation et historique 6

I.1.2 - Classification et caractéristiques générales des composites 8

I.1.2.1- Classification 8

I.1.2.2 - Caractéristiques générales 10

I.2 – LES MODELES D'APPROCHE DES MILIEUX HETEROGENES 16

I.2.1 - Introduction 16

I.2.2 - Méthode continue 16

I.2.3 - Approche micromécanique 18

I.2.4 - Conclusion 20

CHAPITRE 2 : MODELISATION DU MILIEU EFFECTIF 21

A- MODELISATION DU MILIEU SAIN

II.1 - INTRODUCTION 22

II.2 - SCHEMA AUTOCOHERENT 22

II.2.1 - Hypothèses 24

II.2.2 - Equations locales en élasticité 25

II.2.3 - Transition d'échelle 26

II.3 - EQUATION INTEGRALE CINEMATIQUE 27

II.3.1 - Problème adjoint 28

II.3.2 - Solution de l'équation pour une paire d'inclusions 30

II.4 - APPROXIMATION AUTOCOHERENTE 31

II.4.1 - Calcul du tenseur de localisation 31

II.4.2 - Calcul des tenseurs d'interaction 34

II.5 - APPLICATIONS 36

II.6 - CONCLUSION 39

B- SCHEMA INCREMENTAL

II.7 - INTRODUCTION 39

II.8 - PRINCIPE DU SCHEMA INCREMENTAL (I.S.) 40

II.8.1 - Cas d'une famille d'inclusions 42
II.8.2 - Cas de n familles d'inclusions 43
II.8.3 - Etude de la convergence 46
II.9 - SCHEMA INCREMENTAL EN APPROXIMATION MONOSITE 47
II.10 - SCHEMA INCREMENTAL EN APPROXIMATION MULTI-SITES 51

CHAPITRE 3 : ENDOMAGEMMENT MICROMECANIQUE .....
III.1 – REMARQUES PRELIMINAIRES 56
III.2 – ENDOMMAGEMENT DES MILIEUX HETEROGENES: CONSTATATIONS EXPERIMENTALES
III.2.1 - Critères d'endommagement fragile 59
III.2.2 - Critère d'endommagement par décohésion 64
III.3 –MODELES MICROMECANIQUES 68
III.3.1 - Modèle du renfort casse 68
III.3.1.1 - Estimation de l'ouverture de la fissure 71
III.3.1.2 - Détermination des nouvelles fractions volumiques 78
III.3.2 - Modèle du renfort décollé 79
III.3.2.1 - Calcul des contraintes dans l'interface 79
III.3.2.2 - Condition energetique de la propagation de la rupture 82
III.3.2.3 - Réactualisation de la microstructure 84
III.4 - ASPECT PROBABILISTE DE L'ENDOMMAGEMENT 85

CHAPITRE 4 : ALGORITHME ET CALCUL .....
IV.1 - INTRODUCTION 90
IV.2 - LES DIFFERENTS PARAMETRES DE CALCUL 92
IV.2.1 - Les paramètres de la structure interne 92
IV.2.2 - Les paramètres de chargement 93
IV.3 - PHASE D'HOMOGENEISATION 94
IV.3.1 - Détermination de l'élément de volume 94
IV.3.2 - Choix du schéma d'homogénéisation 96
IV.3.3 - Choix d'itération 96
IV.4 - CRITERE D'ARRET 97
IV.5 - DETERMINATION DU CRITERE D'ENDOMMAGEMENT 99
IV.6 - ENDOMMAGEMENT ET CINETIQUE DE LA MICROSTRUCTURE 102
IV.6.1 - Création de la fissuration 102

IV.6.2 - Création de la décohésion 103

CHAPITRE 5 : VALIDATION ET DISCUSSIONS .....

V.1 - PRELIMINAIRES 105

V.2 - ESSAIS DE TRACTION SIMPLE 108

V.2.1 - Composite à renforts sphériques 109

V.2.1.1 - Critère en contrainte 109

V.2.1.2 - Critère en déformation 112

V.2.2 - Composite à renforts cylindriques 114

V.2.2.1 - Critère en contrainte 115

V.2.2.2 - Critère en déformation 116

V.2.3 - Composite à renforts discoïdaux 118

V.2.3.1 - Critère en contrainte 119

V.2.3.2 - Critère en déformation 120

V.3 - SURFACES DE CHARGES A LA RUPTURE 122

V.3.1 - Composite à renforts sphériques 122

V.3.2 - Composite à renforts discoïdaux 123

V.3.3 - Composite à renforts ellipsoïdaux(cylindriques) 124

CONCLUSION

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ANNEXES

NOTATIONS

E : module de Young ou d'élasticité

μ, G : module de cisaillement

K : module de compressibilité

f, f : fraction volumique

σ, Σ : tenseur représentant le champ de contrainte

ε, E : tenseur représentant le champ de déformation

D : paramètre d'endommagement

C,S,c,s :tenseur de caractéristiques élastiques

A, B : tenseurs de localisation en déformation et en contrainte

U,u :champ de déplacement

N : nombre de famille d'inclusions

m : nombre d'étapes de calcul en incrémental

τ : contrainte critique de cission

σ_n : contrainte normale de traction à une interface

CCOD : crack centre opening displacement

φ : « fraction » de fraction volumique

U_o : énergie stockée dans un renfort avant sa rupture

$\mathcal{G}$: énergie restituée à la rupture

S : surface de rupture

P : probabilité de rupture

INTRODUCTION GENERALE

A - MOTIVATIONS ET OBJECTIFS

Depuis toujours, et de façon plus intense encore aujourd'hui, les sciences de l'ingénieur, au sens large, ont porté une attention particulière au comportement des matériaux sur plusieurs aspects : tenue thermomécanique (résistance, flexibilité, dilatation, ...), comportement chimique (corrosion, contact alimentaire, rejet biologique, ...), conductivité électrique (isolation,...), et bien d'autres encore. Mettre au point un type de matériau allie désormais plusieurs compétences et techniques. Certaines utilisations exigent parfois une caractéristique et son contraire, exemple d'un comportement mécanique résistant à la torsion dans une direction et favorable dans la direction perpendiculaire. Ce genre de problème, qui fait appel à la géométrie et à la résistance des matériaux élémentaires, constitue un riche domaine de recherche pour la mécanique des matériaux qui a vu apparaître le concept de modélisation de matériaux « composites » ou « hétérogènes ». Ce sont des matériaux qui ont l'aptitude d'être conçus à la carte suivant les besoins.

Aujourd'hui, on remarque une progression importante dans l'emploi des matériaux composites dans des domaines d'application aussi divers et variés que sont :

- l'aéronautique, l'espace ou la biomécanique avec des composites carbone-carbone et des composites céramiques, alliant légèreté et résistance.
- l'automobile avec en particulier des pneumatiques de plus en plus sophistiqués,
- l'imprimerie et l'emballage avec les papiers et les cartons,
- la menuiserie et le bâtiment avec les panneaux de particules ou de fibres,
- le génie civil avec les différents types de bétons,
- le sport en particulier la voile avec des toiles enduites et des coques très optimisées,

et bien d'autres encore.

L'essor des matériaux composites est dû en partie à la recherche continuelle de matériaux de plus en plus économiques et légers avec des propriétés mécaniques élevées et fiables. Il y a environ 30 ans, lorsqu'on parlait de pièce mécanique résistante, on n'avait que le choix des différentes nuances d'acier. De nos jours, sont développés des matériaux tels que l'aluminium, le titane et des composites à fibres de carbone dont la rigidité est similaire à celle de l'acier pour un poids nettement inférieur.

Malgré la multitude d'études déjà consacrées aux milieux composites et hétérogènes pour

leur fabrication et caractérisation, la complexité des phénomènes qui entrent en jeu, lors de leur conception ou de leurs utilisations, continue à alimenter les sujets de recherche en vue d'une meilleure maîtrise de ces « nouveaux matériaux ». Les lois et les outils micromécaniques sont largement sollicités pour leur description ou modélisation. Ce domaine a ainsi connu le même essor que celui des matériaux en général avec de nouvelles formulations. On a acquit aujourd'hui les bases mathématiques et mécaniques permettant d'étudier plusieurs aspects, en particulier la rupture et sa propagation sous chargement que nous essayerons d'explorer le long des pages de ce document.

B - PROBLÉMATIQUE ET CADRE D'ÉTUDE

La possibilité d'utilisation des matériaux est limitée par les risques de déformation ou de rupture des pièces : il est donc important de connaître, pour un matériau donné, à la fois les conditions pour lesquelles la rupture est susceptible de se produire et les raisons physiques de cette rupture. Ces connaissances sont nécessaires, d'une part pour utiliser rationnellement la matière, donc assurer la fiabilité des constructions, et d'autre part pour avoir des idées directrices en vue de la mise au point de matériaux ou alliages nouveaux plus performants. L'étude de la rupture est ainsi l'un des problèmes importants qui se posent à l'ingénieur en matériaux et cela explique en partie la grande place faite aux essais mécaniques dans les laboratoires de recherche. Cependant, les indications que donnent les machines d'essais ne sont pas toujours suffisantes pour préciser où et comment la fissure prend naissance, et de quelle façon elle se propage dans un matériau dont on connaît la structure. Elles doivent, dans certains cas, être confrontées par exemple avec les résultats de l'examen des surfaces de cassure. Cet examen apporterait alors des indications variées sur le faciès, l'origine et l'amorçage des cassures, sur l'hétérogénéité, la ductilité et parfois la grosseur des constituants du matériau. Les observations expérimentales amènent à une compréhension des mécanismes d'endommagement, aident à affiner l'analyse de leur incidence sur les propriétés mécaniques et à reformuler les modèles d'endommagement ou de fissuration. L'usage des méthodes d'homogénéisation par changement d'échelle pour l'étude de l'endommagement (SUQUET, 1981 ; LENE et LEGUILLON, 1981 ; ANDRIEUX, 1983 ; REMOND, 1984, ANDRIEUX *et al*, 1986 ; BASTE *et al*, 1991 ; BARRET *et al*, 1999) s'est très vite imposé grâce à la connaissance de plus en plus fine de la microstructure des composites et à la mise en œuvre de techniques de mesure de plus en plus sophistiquées. Les approches purement phénoménologiques

(LEMAITRE et CHABOCHE, 1978 ; LADEVEZE, 1983 ; CHABOCHE, 1992) sont désormais couplées à des études microscopiques pour donner des approches multi-échelles (ALLIX *et al*, 1993, BURR, 1995 ; POTTIER, 1998). Cette forte tendance à utiliser des approches mixtes macro-micromécanique se traduit par la production d'une multitude de publications (FITOUSSI *et al*, 1994 ; DERIEN *et al*, 1998 ; LE PEN et BAPTISTE, 1998 ; ...). Toutes ces modélisations déductives, permettent de réduire les coûts de la mise au point des matériaux et de prévoir leur comportement en service.

Le présent travail se situe dans le cadre d' une proposition d'outils d'intégration et de modélisation micromécanique de l'endommagement (principalement fragile) par fissuration et décohésion de matériaux hétérogènes. Cette modélisation permet d'analyser le comportement effectif de tels matériaux d'abord dans la phase précédent l'endommagement, puis au cours de l'endommagement et jusqu'à la ruine. Elle est basée sur une transition d'échelle micro-macro permettant de prendre en compte toutes les hétérogénéités dans la description du milieu macroscopique.

Les généralités sur les composites et milieux hétérogènes sont abordées dans le premier chapitre qui présente une brève historique ainsi qu'une description de notre matériau d'étude. Nous y présentons également une discussion sur les différentes approches de modélisation.

Le deuxième chapitre porte sur la présentation de notre choix de modèle pour la détermination du milieu effectif. Dans un premier temps, le schéma autocohérent est exposé en monosite et multisite. Un rappel de sa formulation classique et des hypothèses de son application est fait, suivi de l'établissement des équations constitutives. La complexité des équations oblige à renoncer à la recherche d'une solution exacte et à adopter une résolution approchée itérative. Cette solution fait intervenir des tenseurs d'interaction calculés à partir des propriétés mécaniques et géométriques des divers constituants. A cette étape, aucune évocation n'est faite de l'endommagement et les hétérogénéités sont prises en compte quelles que soient leur nature et forme. Une discussion des résultats est ensuite effectuée. Les imperfections de l'approche, liées principalement à l'écart entre les propriétés mécaniques des constituants, sont corrigées au cours de ce chapitre dans un deuxième paragraphe par l'introduction du schéma incrémental. Cette correction est surtout nécessaire pour le

traitement des inclusions vides dont les propriétés mécaniques sont nulles par rapport à celles des inclusions rigides.

En introduction à la modélisation des fissures, l'étude de la porosité dans les matériaux constitue une transition importante dans notre approche de résolution. Il peut arriver que la masse volumique mesurée expérimentalement pour un matériau composite ne coïncide pas avec la valeur calculée à partir des masses de constituants introduites. Dans ce cas où ce décalage dépasse les précisions expérimentales, il peut être attribué à la présence de porosité. La fraction volumique de porosité peut être mesurée par la différence entre la masse volumique calculée et la masse volumique expérimentale mesurée. Cette présence de porosité dans un composite peut entraîner une diminution significative de ses caractéristiques mécaniques. La porosité augmente également la sensibilité du matériau composite à l'environnement extérieur : augmentation de l'absorption de l'humidité, diminution de la résistance aux produits chimiques, etc. Elle peut mathématiquement être considérée comme une inclusion de propriétés mécaniques nulles. Ainsi dans les lois de comportement, on passera du renfort plus ou moins rigide à la porosité qui est une discontinuité volumique. Le passage à l'aplatissement de la porosité donne la fissure avec une discontinuité surfacique.

Dans un milieu composite, selon la nature des constituants et des sollicitations mises en jeu, on distingue plusieurs types de fissurations, de l'apparition de réseau de microfissures dans la matrice à la rupture des renforts en passant par le délaminage fibre-matrice. Tous ces phénomènes complexes ne sauraient être traités en même temps.

Le troisième chapitre expose la formulation complète de l'endommagement micromécanique tel que nous avons envisagé de le traiter. Les différents modèles d'endommagement sont présentés ainsi que leur mise en œuvre. Chaque modèle intègre dans sa formulation ses différents critères d'endommagement associés. L'incorporation de ces différents modèles et de leurs influences sur la microstructure du milieu est la phase d'assemblage du modèle global d'homogénéisation. Chaque modèle d'endommagement micromécanique crée une dégradation correspondant à une forme d'inclusion vide qui sera introduite dans la microstructure. Tout l'algorithme du processus est ensuite détaillé au chapitre IV. Enfin au chapitre V nous présentons nos résultats permettant de suivre l'évolution du comportement endommagé dans les différentes directions matérielles ainsi que les modifications des surfaces de chargement.

CHAPITRE I

I.1 - MATERIAUX COMPOSITES ET HETEROGENES .....

I.1.1 - Présentation et historique.....

I.1.2 - Classification et caractéristiques générales des composites .....

I.1.2.1 Classification .....

I.1.2.2 Caractéristiques générales .....

I.2 – LES MODELES D'APPROCHE DES MILIEUX HETEROGENES .....

I.2.1 - Introduction.....

I.2.2 - Méthode continue .....

I.2.3 - Approche micromecanique.....

I.2.4 - Conclusion .....

GENERALITES SUR LES MATERIAUX HETEROGENES

I.1 - MATERIAUX COMPOSITES ET HETEROGENES

I.1.1 - PRÉSENTATION ET HISTORIQUE

On désigne par composite un mélange de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes (les phases), se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont les performances sont supérieures à celles des constituants pris séparément. Ce sont des matériaux hétérogènes dont les propriétés physiques peuvent varier d'un point à l'autre.

Dans la compréhension collective, quand on parle de matériau composite, on entend un matériau hétérogène performant. L'attention est beaucoup plus fixée sur l'aspect performance que sur l'hétérogénéité qui est à la base des modifications des propriétés. En effet, il existe plusieurs degrés d'hétérogénéité et ceci a généralement une influence sur l'approche à mettre en œuvre. Il existe des composites naturels, exemple du matériau bois, et des composites artificiels comme le béton. Le composite artificiel est couramment constitué d'une ou de plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase discontinue, habituellement plus rigide, avec des propriétés mécaniques supérieures, est appelée le renfort tandis que la phase continue est dénommée matrice. Notons toutefois qu'il existe plusieurs exceptions à cette description dont le cas des matériaux poreux que nous examinerons plus loin dans les autres chapitres. La matrice permet de conserver la disposition géométrique des renforts et de leur transmettre les sollicitations auxquelles est soumis le matériau composite.

Le « composite », au sens moderne du terme, est en réalité apparu pour la première fois vers le milieu du XXème siècle dans l'industrie aéronautique. Cette apparition est motivée par le besoin d'utilisation de matériaux plastiques dans les constructions aéronautiques en alliant la rigidité et la résistance de différentes fibres. On trouve dans la littérature d'excellents documents concernant l'étude générale des composites, en particulier par KELLY (1983) et BERTHELOT (1992).

Les plastiques synthétiques modernes ont été découverts la première fois au début des années 1900. Les propriétés recherchées étaient une aisance de formabilité, une densité faible par comparaison aux métaux, une excellente finition extérieure et l'absence de corrosion. Cependant, il leur manquait une rigidité et une résistance suffisante, d'où la nécessité de la présence d'un agent de renforcement. Les fibres de verre n'étant pas encore disponibles, elles

n'ont été produites en quantité que vers 1940, des fibres naturellement développées telles que le lin textile ou le jute ont été utilisées comme additifs pour renforcer le plastique, le plus souvent en structure tissée (figure I.1.a et figure I.1.b).

(a) (b)

Figure I.1 : *composites à renforts en textile*

D'autres types de fibres auraient pu être utilisés, en particulier l'amiante qui présente une forte raideur mais n'est pas disponible en de grandes longueurs continues. Le principal inconvénient lié à l'utilisation des fibres naturelles est celui de l'humidité qui dégrade les propriétés du composite. Il faut donc traiter ces renforts, à base de cellulose, pour une utilisation confortable, en leur trouvant en même temps des substituts beaucoup plus performants comme les fibres de verre, de carbone, etc.

Ce concept de « composés fibreux » en tant que moyen d'amélioration considérable des propriétés mécaniques des plastiques est resté une perspective très importante. Presque tous les plastiques en utilisation pouvaient être mélangés à des fibres de toutes sortes et à des particules qui amoindrissaient les coûts de fabrication du fait de leur abondance sur le marché. L'addition de fibres a ainsi suivi une progression, de même que les techniques de fabrication. Les premières méthodes naturelles d'incorporation des renforts dans le plastique impliquaient des techniques de mélange, de manière à produire un matériau homogène pour lequel peu ou aucune attention n'est prêtée à l'arrangement relatif des particules de fibres. Si une telle procédure est suffisante pour des particules ayant des axes à peu près équivalents (particules sphériques ou cubiques), elle se trouve très vite limitée si les avantages d'incorporer des fibres doivent être maximisés : la fibre confère une rigidité maximale à l'ensemble du matériau dans la direction parallèle à son axe et seulement dans cette direction. La microstructure interne peut donc également ajouter ou soustraire de la performance. Une haute résistance demande un grand contrôle de la microstructure sans oublier l'aspect extérieur. Ces facteurs contrôlant

la résistance et la rigidité des fibres ont été très vite identifiés et des fibres très raides et optimisées ont été élaborées dans des matériaux tels que le bore ou le graphite. Ces fibres sont nettement moins denses que la plupart des métaux.

Il existe une deuxième manière d'imaginer les matériaux composites qui explique différemment la description que nous venons de faire. Il s'agit de se poser la question d'utilisation des propriétés mécaniques attrayantes des fibres, à savoir rigidité, résistance et faible densité, qui par elles-mêmes ne peuvent seulement être employées que sous forme de cordage. La seule façon de leur donner une réelle utilité dans les constructions mécaniques est de les incorporer dans un autre matériau de consistance volumique : la matrice. L'un des matériaux les plus attrayants est la résine. On remarque encore la nécessité de la présence de deux milieux mécaniques complémentaires. Encore une fois, la rigidité développée par les fibres est maximale quand ces dernières sont parallèles les unes aux autres et c'est dans cette configuration qu'elles sont utilisées dans les applications de hautes performances. La matrice dans ce cas, en plus de sa fonction d'assemblage, confère aux fibres la stabilité nécessaire dans le cas des sollicitations quelconques. Les fibres sont également utilisées sous forme tissée et doivent être capables de se prêter à des processus de tissage modernes.

Les contours et le contenu de l'intérêt porté à l'étude des composites sont maintenant clairs. Il s'agit des propriétés de rigidité et de résistance des fibres, de la manière dont elles sont fabriquées et comment les fibres affectent les propriétés mécaniques des matrices qui sont utilisées pour les lier. Les fibres nécessitent la présence d'une matrice pour pouvoir être utiles à l'ingénieur. Les propriétés physiques des composites dépendent des propriétés mécaniques, des fractions volumiques et de l'arrangement spatial de leurs divers constituants. Une analyse minutieuse des différents composés est souvent indispensable. De nouvelles méthodes de description et de caractérisation de la distribution et orientation des fibres incluent de nos jours des considérations de propriétés non mécaniques telles que la conductivité thermique ou/et électrique, résistance à la corrosion, etc.

I.1.2 - CLASSIFICATION ET CARACTERISTIQUES GENERALES DES COMPOSITES

I.1.2.1 CLASSIFICATION

L'étude d'un composite peut être spécifique du fait de sa catégorie. Les composites peuvent être classés suivant la forme ou la nature des composants.

Du point de vue forme géométrique des constituants, les composites sont rangés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à

fibres.

On désigne par composite à fibres les matériaux ayant des renforts sous forme allongée. Les fibres utilisées se présentent sous forme continue ou discontinue (fibres coupées, fibres courtes etc.). L'arrangement des fibres et leur orientation permettent de moduler à volonté les propriétés mécaniques pour obtenir des matériaux fortement anisotropes ou, au contraire, isotropes dans un plan ou dans toutes les directions. Il est à noter l'importance accordée aux composites à fibres, surtout ceux à fibres parallèles.

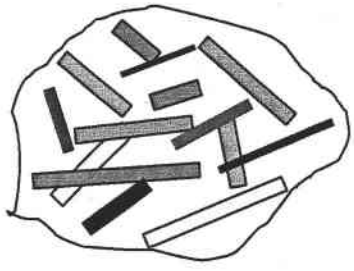


Figure I.2 : *composite à fibres*

Lorsque le renfort utilisé est sous forme compacte, on parle de composite à particules. Une particule, par opposition à une fibre, ne possède pas de dimension privilégiée. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés comme la rigidité globale, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution de retrait, etc. Dans certains cas, les particules sont simplement utilisées pour réduire le coût de fabrication, sans diminuer les caractéristiques.

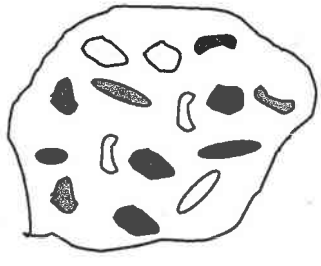


Figure I.3 : *composite à particules*

La classification suivant la nature des constituants révèle trois classes principales :

- les composites à matrice organique (résine et élastomère) avec des fibres minérales (verre, carbone) ou des fibres organiques (kevlar, polyamides) ou des fibres métalliques (bore, aluminium),

- les composites à matrices métalliques (alliages d'aluminium, de magnésium ou de titane) avec des fibres minérales (carbone, carbure de silicium SiC) ou des fibres métalliques ou des fibres métallo-minérales,
- les composites à matrice minérale (céramique) avec des fibres métalliques ou des particules métalliques (cermets) ou des particules minérales (carbures, nitrures).

I.1.2.2 CARACTERISTIQUES GENERALES

De façon brute, déterminer les propriétés d'un composite revient à faire un « mélange » des propriétés de ses divers constituants tout en tenant compte de leurs concentrations volumiques ou massiques, des interactions et des géométries. Par géométrie nous désignons la forme, la taille, l'orientation, etc. Les modélisations descriptives ne tiennent compte que de certains paramètres, du fait de la complexité des phénomènes mis en jeu. La forme des renforts est, la plupart du temps, approchée par des sphères ou des cylindres. La distribution des renforts est aussi très importante. Une distribution uniforme assure l'homogénéité du matériau à l'échelle macroscopique conférant aux composites des propriétés (toujours à l'échelle macroscopique) indépendantes de l'endroit de mesure. Dans le cas de distribution non uniforme, il existera des zones pauvres en renforts qui constituent les sièges d'initiation d'éventuelles futures ruptures. Ce dernier cas n'est pas forcément négatif et peut expressément être voulu afin d'obtenir un état de contrainte uniforme à l'intérieur du matériau, lorsque la sollicitation extérieure n'est pas uniforme. Dans le cas de matériaux composites dont le renfort est constitué de fibres, l'orientation des fibres est un facteur principal déterminant l'anisotropie du matériau. Cet aspect constitue une des caractéristiques fondamentales des composites : la possibilité de contrôler l'anisotropie du produit fini par une conception et une fabrication adaptées aux propriétés souhaitées. De façon générale, pour une famille de composites donnée, on ne s'intéresse qu'à un ensemble de caractéristiques mécaniques qui sont prépondérantes pour la configuration de renforts. Les premières approches mécaniques de caractérisation des composites étaient purement macroscopiques et/ou phénoménologiques pour des assemblages en série ou parallèle. Nous rappelons ici une telle démarche qui nous semble utile pour la discussion menée dans la suite de ce travail.

Considérons un composite biphasé à fibres longues et soumis à un chargement parallèle à l'axe des fibres. C'est la configuration la plus simple pour bien décrire les caractéristiques.

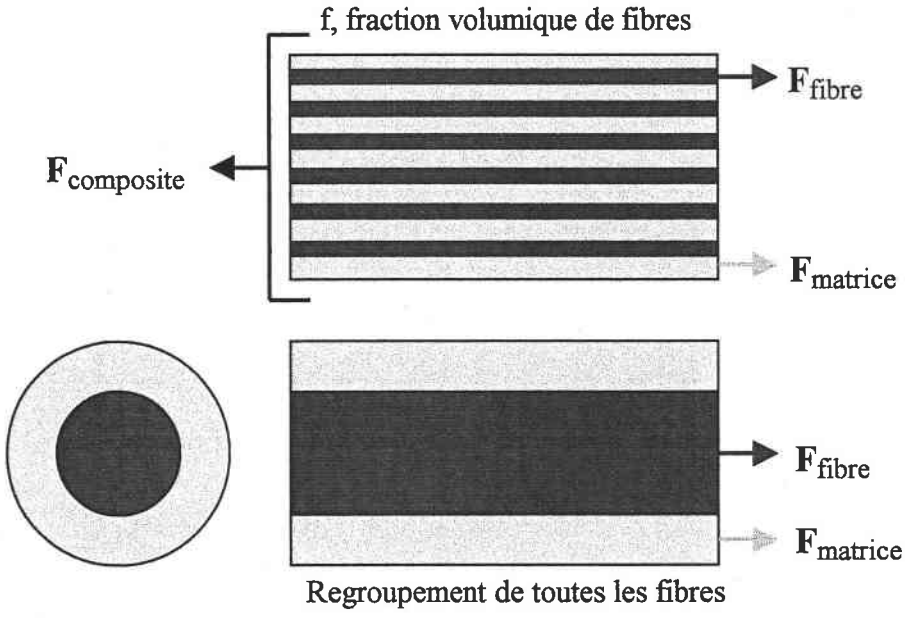


Figure I.4 : *composite à fibres parallèles sous chargement axial*

De simples considérations d'équilibre et de continuité permettent de déterminer les principales caractéristiques mécaniques de ce matériau, à savoir le module d'élasticité (E), le module de cisaillement (G) et le module de compressibilité (K). Ces modules sont, dans ce cas, relatifs à la direction principale, qui est ici l'axe des fibres.

Notons F_f la force totale supportée par les fibres, F_m celle supportée par la matrice et désignons par F la force totale appliquée sur le composite. De façon générale, les expressions sans indice feront référence à une valeur effective, c'est-à-dire au composite dans sa globalité. La section totale du composite parallèlement à l'axe des fibres est A et f représente la fraction volumique de fibres. En résistance des matériaux on parle plutôt de la contrainte, qui est définie par le rapport de la force par la surface sur laquelle elle s'applique. Supposons que dans notre cas toutes les fibres sont regroupées au centre du matériau, voir figure I.4. L'équilibre des forces nous permet d'écrire :

$$F = F_m + F_f \tag{I.1}$$

Appliquons la relation contrainte-force pour obtenir :

$$\sigma\ A = \sigma_m (1-f)\ A + \sigma_f f\ A \tag{I.2}$$

Puis finalement en simplifiant par l'aire A,

$$\sigma = (1-f)\sigma_m + f\,\sigma_f \tag{I.3}$$

Les contraintes dans la fibre et dans la matrice ne sont pas identiques. Nous pouvons alors utiliser la loi de Hooke qui stipule que la contrainte est proportionnelle à la déformation en dessous de la limite élastique.

$$\sigma = E\,\varepsilon \tag{I.4}$$

La condition de compatibilité impose une déformation identique dans les fibres et dans la matrice. Nous pouvons alors réécrire l'équation 3 sous la forme :

$$E_{\square}\ \varepsilon = (1-f)\ E_m\ \varepsilon + f\ E_f\ \varepsilon \tag{I.5}$$

De là, nous déduisons :

$$E_{\square} = (1-f)\ E_m + f\ E_f \tag{I.6}$$

où $E_{\square}$ désigne le module de Young du composite dans la direction parallèle aux fibres.

C'est un résultat assez simple qui traduit une règle que nous appellerons dans ce travail *loi de mélange arithmétique*. Le module global $E_{\square}$ dépend linéairement de la fraction volumique *f*. Ce n'est pas le cas en ce qui concerne le module $E_{\perp}$ dans la direction perpendiculaire à l'axe des fibres, dont la détermination se base sur l'allongement du matériau :

$$E_{\perp} = \left(\frac{E_f\ E_m}{(1-f)\ E_f + f\ E_m} \right) \tag{I.7}$$

C'est une *loi de mélange harmonique* qui est appliquée dans ce cas. Le tracé de la courbe $E_{\perp}$ en fonction de la fraction volumique *f* par la relation (I.7) montre bien une évolution non linéaire. De même, les évolutions des modules caractéristiques G et K pour des sollicitations perpendiculaires aux fibres sont non-linéaires.

Il est possible, toujours avec des considérations macroscopiques, de s'intéresser à la rupture d'un tel composite à fibres. Nous pouvons considérer que le composite se rompt à la limite de déformation de la matrice ou à celle des fibres. Ceci fait apparaître deux cas d'étude, le premier où c'est la matrice qui se fissure d'abord et le second où c'est les fibres qui cèdent d'abord. Ces différents comportements dépendent de la nature des constituants. A partir d'analyses macroscopiques de la répartition des charges et des limites de tenue mécanique, on peut aisément évaluer les contraintes dans la matrice ou dans les fibres juste avant et après la rupture du composite.

Considérons le cas où c'est la matrice qui se rompt en premier pour une sollicitation dans la direction parallèle aux fibres. Pour une fraction volumique faible de fibres, la majeure

partie de la charge appliquée est supportée par la matrice. Toutefois, lorsque la déformation dans le composite atteint la limite de déformation de la matrice, celle-ci se rompt en libérant toute sa charge qui se trouvera alors transférée dans les fibres. Les fibres, occupant un espace beaucoup moindre, subiront un important saut de contrainte pour leur chargement et rompront à leur tour si leur limite est également dépassée. Pendant la déformation élastique, le module E reste constant. La loi de Hooke permet d'écrire à la limite de déformation élastique ε_m de la matrice :

$$\sigma = E \ \ \varepsilon = E \ \ \varepsilon_m \tag{I.8}$$

ou encore en utilisant la relation (I.3)

$$\begin{aligned} \sigma &= f\,\sigma_f + (1-f)\sigma_m \\ &= f\,E_f\,\varepsilon_m + (1-f)\sigma_m \end{aligned} \tag{I.9}$$

Avant que la matrice ne cède, le chargement (en force) dans le composite a atteint la valeur de :

$$F = \sigma\ A = \left(f\,E_f\,\varepsilon_m + (1-f)\sigma_m\right)A \tag{I.10}$$

En supposant qu'à la rupture la section utile du composite soit réduite à celle des fibres, la contrainte s'exprime sous la forme :

$$\sigma = \frac{F}{f\,A} = \frac{f\,E_f\,\varepsilon_m + (1-f)\sigma_m}{f} \tag{I.11}$$

Le saut de contrainte subi par les renforts est donc de :

$$\Delta\sigma = \left(\frac{1}{f} - 1\right)\sigma_m = \left(\frac{1}{f} - 1\right)E_m\,\varepsilon_m \tag{I.12}$$

La ruine du matériau interviendra si ce saut conduit à une augmentation de la contrainte dans les fibres au-delà de leur limite, sinon le chargement peut continuer jusqu'à la valeur de :

$$\sigma = f\,E_f\,\varepsilon_{m(ultime)} = f\sigma_f \tag{I.13}$$

Considérons maintenant le second cas où les fibres se rompent en premier pour le même type de chargement. C'est le cas lorsque la matrice est suffisamment ductile, avec une limite de déformation supérieure à celle des fibres ou lorsque la fraction volumique des fibres est assez importante pour marginaliser la présence de la matrice qui ne sert alors que de liant pour les renforts. De la même manière que plus haut, à la limite de déformation des fibres, le comportement du composite est décrit par :

$$\begin{aligned} \sigma &= f\,\sigma_f + (1-f)\sigma_m \\ &= f\,E_f\varepsilon_f + (1-f)E_m\varepsilon_f \end{aligned} \tag{I.14}$$

La force totale exercée est :

$$\begin{aligned} F &= \sigma\, A \\ &= \left(f\, E_f \varepsilon_f + (1-f) E_m\, \varepsilon_f\right) A \end{aligned} \tag{I.15}$$

A la rupture des fibres, supposée totale, la contrainte est :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{(1-f)A} \\ &= E_m\, \varepsilon_f + \frac{f}{1-f} E_f\, \varepsilon_f \end{aligned} \tag{I.16}$$

Le saut de contrainte dans la matrice est alors de :

$$\Delta\sigma = \frac{f}{1-f}\sigma_f \tag{I.17}$$

De l'intensité de ce saut, qui est une fonction de la fraction volumique *f*, dépendra la poursuite ou non du processus de rupture dans la matrice. Nous pouvons facilement remarquer que la résistance à la traction du composite dans lequel les fibres se rompent à une contrainte inférieure à celle de la matrice, diminue tout d'abord jusqu'à atteindre un minimum et augmente ensuite si l'on faisait varier la fraction volumique. Il y a donc une fraction minimum de fibres à ajouter dans le composite pour avoir une résistance au moins égale à celle de la matrice seule. En reprenant l'équation (I.14) :

$$f\, E_f \varepsilon_f + (1-f) E_m \varepsilon_f = \sigma_m \tag{I.18}$$

ou encore

$$\begin{aligned} f_{\min}(E_f\, \varepsilon_f - E_m\, \varepsilon_f) + E_m\, \varepsilon_f &= \sigma_m \\ f_{\min}(\sigma_f - E_m\, \varepsilon_f) + \sigma_{matrice}(\varepsilon_f) &= \sigma_m \end{aligned} \tag{I.19}$$

et finalement

$$f_{\min} = \frac{\sigma_m - \sigma_{matrice}(\varepsilon_f)}{\sigma_f\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \tag{I.20}$$

Nous voyons encore une nouvelle fois l'importance du contrôle de la fraction volumique de renforts dans le comportement global du composite. La manipulation de la fraction contribue à la fabrication des matériaux composites à la carte.

Toutefois, à cause de l'arrangement géométrique et de la nécessité d'entourer les renforts par un liant (la matrice), certaines valeurs de fraction ne peuvent être atteintes. Prenons l'exemple de renforts à sections circulaires identiques, cas de fibres cylindriques ou de billes sphériques. Nous nous limiterons également à une analyse surfacique dans la section

maximale. Même si la disposition spatiale des renforts n'est pas toujours rigoureuse, on peut parler de deux modèles simples de base.

- Il y a le modèle cubique.

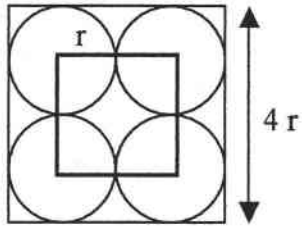


Figure I.5 : *Rangement des renforts en réseau cubique*

Avec ce type d'organisation, la fraction maximale des fibres (cylindres) vaut :

$$f_{max} = \frac{\pi r^2}{4 r^2} = 0{,}78 \qquad \textbf{(I.21)}$$

- le second modèle est la disposition en hexagonal.

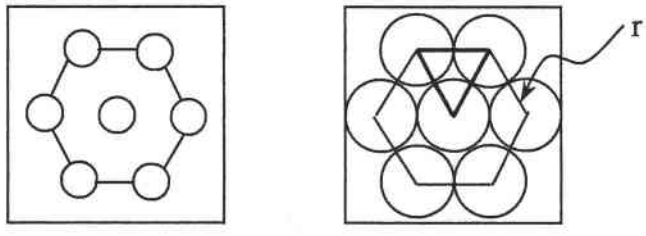


Figure I.6 : *Rangement des renforts en réseau hexagonal*

Nous pouvons considérer une cellule représentative triangulaire pour le calcul de la fraction, soit :

$$f_{max} = \frac{\pi r^2 / 2}{r \cdot 2 r \sin(\pi / 6)} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0{,}9 \qquad \textbf{(I.22)}$$

A partir des deux figures, il est tout à fait évident qu'une fraction supérieure à 90% pour des fibres de diamètre constant est impossible à obtenir et même qu'il serait très difficile de réaliser le chargement de 78% de fibres. En pratique, les fractions volumiques maximales se situent autour de 60%.

Ces premières approches macroscopiques de caractérisation des composites ne permettent pas l'analyse des structures avec une complexité relativement élevée et/ou un chargement quelconque. Pour ce faire, un passage à une modélisation mathématique plus complète et générale est nécessaire.

I.2 - LES MODELES D'APPROCHE DES MILIEUX HETEROGENES

I.2.1 - INTRODUCTION

L'objectif ici est de décrire, à partir des propriétés des constituants et de la microstructure du matériau "échantillon", le comportement global de ce dernier. Depuis la naissance du concept de matériaux composites, beaucoup de modèles ont vu le jour et n'ont cessé de subir des améliorations. En science des matériaux, deux approches sont habituellement adoptées. Une discussion complète et détaillée de ces approches peut être trouvée chez KRÖNER (1958). La première consiste à prendre en compte dans la description du matériau sa microstructure à des échelles différentes, et à en déduire son comportement à l'échelle supérieure. Nous appellerons cette description approche "micromécanique". La deuxième traite le comportement du matériau à l'échelle de son utilisation (structure) et surtout intègre des résultats d'observations relevés expérimentalement. Il s'agit, dans notre langage, de l'approche "phénoménologique" ou "continue". Cette subdivision en deux familles découle de deux modélisations mathématiques des milieux mécaniques, modélisations ne représentant dans la réalité que des cas particuliers issus de la théorie statistique des milieux mécaniques. Chacun de ces modèles présente ses avantages et inconvénients.

Si au début, les scientifiques se sont limités à la modélisation de matériaux hétérogènes sains, très vite les besoins et les utilisations faites ont exigé de s'intéresser à leur comportement dégradé. On applique au niveau de la microstructure les théories d'endommagement par variation de l'énergie ou par discontinuités géométriques. Dans les paragraphes suivants, nous donnerons un aperçu succinct des deux modélisations, en soulignant particulièrement la description de l'endommagement.

I.2.2 - MÉTHODE CONTINUE

Les modèles continus utilisent des variables internes pour décrire les variations de l'état thermodynamique. Cette approche est, comme énoncée plus haut, expérimentale. Elle travaille en terme d'équations d'état cherchant à relier l'entrée et la sortie d'un système (le matériau à caractériser) sous l'influence d'un environnement.

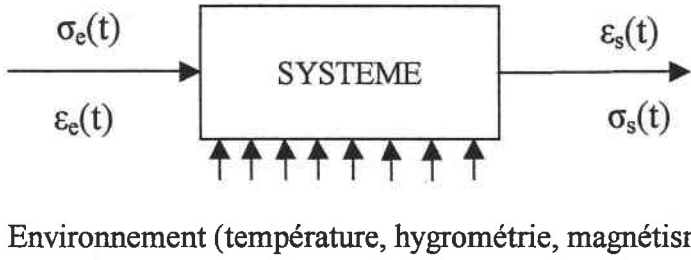


Figure I.7 : *concept continu de la modélisation*

L'avantage de ce type d'approche vient de la simplicité de l'écriture de la loi constitutive et de l'implémentation dans les codes numériques. Les paramètres du modèle sont la plupart du temps identifiés à partir des essais macroscopiques. Ces modèles phénoménologiques conviennent particulièrement pour des analyses structurelles. Toutefois, il est souvent très difficile de trouver expérimentalement les paramètres caractéristiques permettant notamment la bonne description de l'anisotropie du matériau. Cependant l'approche continue reste valable et applicable pour la modélisation de matériaux sains, et est également beaucoup utilisée pour des comportements dégradés. En effet, toute rupture ou discontinuité matérielle, qui se traduit par la création d'une nouvelle surface, correspond à une restitution de l'énergie interne reconvertie en énergie surfacique ou dissipée pendant la création de cette surface.

La naissance de la mécanique de l'endommagement est liée aux noms de RABOTNOV (1970) et KACHANOV L. (1958). En France, LEMAITRE et CHABOCHE (1978, 1985) ont fondé les bases thermodynamiques de la théorie d'endommagement. L'idée novatrice de RABOTNOV et KACHANOV consiste en l'introduction d'un paramètre scalaire D décrivant l'état d'endommagement d'une section S d'un échantillon. Ce paramètre prend la valeur 0 pour un matériau sain et devient égal à 1 pour un matériau cassé.

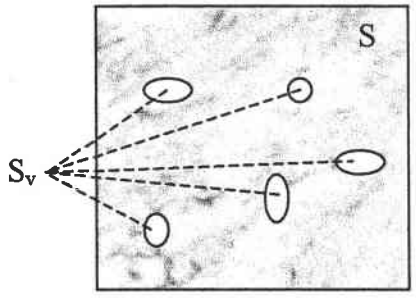


Figure I.8 : *rapport de vide dans un matériau*

Si l'aire des vides présents dans cette section est notée S_v, nous sommes en mesure de donner une définition mathématique de ce paramètre :

$$D = \frac{S_v}{S} \tag{I.23}$$

Pour un matériau sain élastique et isotrope, nous démontrons que le même matériau endommagé reste isotrope avec une valeur du module de Young apparent ou effectif qui vaut :

$$E_D = E(1-D) \tag{I.24}$$

L'isotropie du comportement de matériau endommagé est due à la tentative de caractériser cet endommagement par un scalaire prenant en compte uniquement la surface des vides. Les informations telles que la forme, l'orientation et la répartition des vides sont complètement négligées. Comme d'habitude, la simplicité du modèle qui est son principal atout, est en même temps la source de son principal défaut. En réalité, la répartition et la forme des vides ne sont pratiquement jamais isotropes et par conséquent la réponse du matériau endommagé est toujours anisotrope. Pour palier à cet inconvénient LEMAITRE et CHABOCHE, en s'inspirant de l'approche de RABOTNOV et KACHANOV L. et de la relation (I.24) qui peut être considérée comme une définition de l'endommagement, introduisent l'hypothèse d'équivalence de la densité d'énergie complémentaire pour en déduire un tenseur d'endommagement d'ordre 4.

La voie ouverte par LEMAITRE et CHABOCHE continue d'être exploitée par de nombreux chercheurs. On peut citer les travaux de KACHANOV M. (1980), DRAGON et al. (1994), et autres. Les modèles proposés essaient de prendre en compte l'influence du trajet de chargement (différence de comportement en traction et compression) liée à la fermeture des défauts en compression. On pourrait citer les travaux de modélisation proposée par HALM et DRAGON (1996) qui présentent des résultats intéressants en particulier pour des méso-défauts. Le critère d'ouverture/fermeture d'un défaut retenu par ces auteurs est celui de CHABOCHE qui stipule qu'une fissure est ouverte si la contrainte normale est positive.

De façon générale, les informations concernant l'état de fissuration sont contenues dans des variables internes dont la signification physique est parfois obscure. Il est alors très difficile de décrire les fissures en terme de densité pour une variable d'endommagement donnée.

I.2.3 - APPROCHE MICROMECANIQUE

De façon générale, la méthode micromécanique de modélisation permet la recherche du comportement global ou effectif à partir des propriétés des différents constituants, des interfaces et des interactions.

Le problème de base à considérer est celui de la détermination de la réponse d'un échantillon représentatif soumis à un type quelconque de chargement. En supposant un

comportement élastique en tout point de l'échantillon, le champ de contrainte est lié au champ de déformation par le tenseur des modules élastiques c_{ijkl} :

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{I.25}$$

La nature hétérogène de l'échantillon suppose une variation du tenseur des modules élastiques au sein du volume. A partir des comportements locaux, un passage au comportement effectif de l'échantillon est effectué par une transition d'échelle micro-macro. Les premiers modèles simples ont été proposés par VOIGT (1889) pour un chargement en déplacement imposé et par REUSS (1929) pour une traction imposée. Ces modèles, comme le montrera plus tard HILL (1952), fournissent respectivement les bornes supérieure et inférieure des constantes élastiques effectives. L'importance de ce résultat n'est pas dans sa qualité, mais dans le principe même de son existence. Il offre une référence de comparaison, ou de première estimation, pour les approches postérieures à celles de VOIGT et REUSS. Presque toutes les approches micromécaniques utilisent dans leur formulation un milieu de référence prépondérant qui peut être la matrice (ou encore l'hétérogénéité importante) ou même le milieu effectif à déterminer. Les subdivisions effectuées dans les approches de résolution sont souvent liées au choix du milieu de référence.

Les travaux d'ESHELBY (1957) ont servi de base au modèle de MORI-TANAKA (1970, 1972) et au schéma autocohérent de KRÖNER (1958) sur lesquels nous reviendrons plus loin. D'un autre côté apparaissent de nouvelles méthodes concourant toujours à une meilleure intégration de la structure micro hétérogène des matériaux composites. C'est le cas des méthodes variationnelles de HASHIN et SHTRIKMAN (1962,1963) qui ont permis de resserrer les bornes des constantes élastiques effectives. Ces méthodes sont basées sur le postulat que le comportement effectif d'un échantillon hétérogène est le résultat d'une perturbation (par une petite variation des propriétés micromécaniques) du comportement d'un autre échantillon homogène. Cette hypothèse permet alors d'utiliser les connaissances mathématiques des développements en série de perturbation avec une généralisation au cas de variations non négligeables. Sur le même principe, nous pouvons mentionner les méthodes du type schéma différentiel, proposé pour la première fois par BRUGGEMAN (1935). Ce schéma est basé sur le principe d'une construction progressive du milieu hétérogène. Les avantages et inconvénients de ces différents modèles sont liés en partie à la description faite de la microstructure.

Après cette généralité sur les approches micromécaniques, nous pouvons nous intéresser en détail aux approches de type ESHELBY, dont le centre de considération est une inclusion noyée et interagissant avec un milieu environnant. Toutes les méthodes dérivées ne

diffèrent l'une de l'autre que par les hypothèses formulées et la façon de résoudre l'équation de comportement. Ce sont des approches qui offrent une compréhension plus naturelle pour l'interprétation et la manipulation de la microstructure et ceci de la première approximation de KRÖNER supposant un milieu de référence identique à l'hétérogénéité jusqu'à l'approximation autocohérente.

I.2.4 - CONCLUSION

L'approche continue phénoménologique, du fait de l'importance qui est accordée aux résultats et observations expérimentaux, exprime mieux la réalité matérielle. En revanche, les détails de la microstructure sont noyés dans des paramètres compensatoires dont la signification physique n'est pas forcément évidente. Le travail de prise en compte de l'endommagement que nous envisageons de faire par la suite nous amènera à effectuer des analyses minutieuses au niveau de la microstructure de nos échantillons. Nous avons donc opté pour le choix d'une approche micromécanique pour la modélisation du milieu effectif. Cette approche réadaptée et enrichie est basée sur le schéma d'homogénéisation autocohérent bien maîtrisé au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz.

CHAPITRE II

A- MODELISATION DU MILIEU HETEROGENE SAIN

II.1 - INTRODUCTION .....

II.2 - SCHEMA AUTOCOHERENT.....

II.2.1 - hypothèses.....

II.2.2 - équations locales en élasticité.....

II.2.3 - transition d'échelle.....

II.3 - EQUATION INTEGRALE CINEMATIQUE .....

II.3.1 - problème adjoint.....

II.3.2 - Solution de l'équation pour une paire d'inclusions.....

II.4 - APPROXIMATION AUTOCOHERENTE.....

II.4.1 - Calcul du tenseur de localisation.....

II.4.2 - Calcul des tenseurs d'interaction.....

II.5 – APPLICATIONS.....

II.6 – CONCLUSION.....

B- SCHEMA INCREMENTAL

II.7 – INTRODUCTION.....

II.8 - PRINCIPE DU SCHEMA INCREMENTAL (I.S.).....

II.8.1 - Cas d'une famille d'inclusions.....

II.8.2 - Cas de n familles d'inclusions.....

II.8.3 - Etude de la convergence.....

II.9 - SCHEMA INCREMENTAL EN APPROXIMATION MONOSITE.....

II.10 - SCHEMA INCREMENTAL EN APPROXIMATION MULTI-SITES.....

MODELISATION DU MILIEU EFFECTIF

A . MODELISATION DU MILIEU HETEROGENE SAIN

II.1 - INTRODUCTION

Nous exposons les bases de la modélisation du comportement des matériaux hétérogènes dans le cadre de la méthode autocohérente. Cette méthode a été présentée, en mécanique des matériaux, indépendamment par HILL (1952), HERSHEY (1954) et KRONER (1958). Le développement que nous proposons ici est basé sur l'équation intégrale obtenue par DEDERICH et ZELLER (1973).

Dans le cas d'un matériau composite biphasé, KRÖNER a montré qu'en présence d'un désordre parfait, le modèle autocohérent à un site, limité à l'étude de l'interaction inclusion-matrice, conduit à la solution exacte pour la prévision du comportement élastique du biphasé. Toutefois, ce modèle s'avère inadapté pour traiter les composites ordonnés, multiphasés périodiques, du fait d'une description insuffisante de la microstructure du matériau. Pour cela, à partir de la solution du problème d'interactions de la paire d'inclusions hétérogènes, BERVEILLER et FASSI-FEHRI (1985,1986) ont proposé une nouvelle méthode autocohérente à N-sites prenant en compte les interactions entre inclusions. Nos travaux reprennent les dernières formulations et résultats de cette méthode (ZATTARIN et LIPINSKI).

II.2 - SCHEMA AUTOCOHERENT

Les premiers schémas autocohérents appliqués à la mécanique des milieux hétérogènes élastiques sont dus à HERSHEY (1954) et à KRÖNER (1958). En fait, le schéma autocohérent constitue une classe de méthodes intermédiaires entre les modèles simples de VOIGT et REUSS et les modèles systématiques statistiques.

Dans le cadre du couple inclusion-matrice et en mécanique linéaire, le champ de déformation dans l'inclusion peut être relié au champ de déformations du milieu environnant par la relation générique proposée par MANDEL (1960):

$$\varepsilon_{ij}^{I} = A_{ijkl}^{I}\left(C^{0}, C^{I}\right)\varepsilon_{kl}^{0}, \qquad \textbf{(II.1)}$$

où

- A_{ijkl}^{I} est le tenseur de localisation qui dépend à la fois des caractéristiques C^{o} du milieu réel environnant et C^{I} de l'inclusion.

- ε_{kl}^{0} représente le champ réel de déformations du milieu environnant

La relation (II.1), inexploitable dans l'état, conduit aux différents modèles approchés par un remplacement des grandeurs réelles C^{O} et ε_{kl}^{0} par des grandeurs plus accessibles. Il est alors possible d'utiliser la solution d'ESHELBY (1957) de l'inclusion ellipsoïdale dans un milieu infini homogène environnant. Cette transformation permet de dériver principalement trois grands modèles :

- Le schéma autocohérent consiste à remplacer le milieu réel (propriétés et champ de déformations) par le milieu homogène équivalent dont on cherche les caractéristiques. La relation (II.1) devient alors :

$$< \varepsilon_{ij} >^{I} = A_{ijkl}^{I} \left(C^{eff}, C^{I}\right) E_{kl}, \qquad \textbf{(II.2)}$$

- Le modèle de MORI-TANAKA consiste à remplacer le milieu réel environnant par la matrice :

$$< \varepsilon_{ij} >^{I} = A_{ijkl}^{I} \left(C^{M}, C^{I}\right) < \varepsilon_{kl}^{M} > \qquad \textbf{(II.3)}$$

- Le modèle dilué d'ESHELBY pour lequel les caractéristiques du milieu réel sont remplacées par celles de la matrice et le champ réel de déformations remplacé par la déformation moyenne :

$$< \varepsilon_{ij} >^{I} = A_{ijkl}^{I} \left(C^{M}, C^{I}\right) E_{kl} \qquad \textbf{(II.4)}$$

où $< \varepsilon_{ij} >^{I}$ représente la déformation moyenne dans l'inclusion I.

Chacune des relations (II.2), (II.3), (II.4) tend vers la solution exacte lorsque la fraction volumique d'inclusion tend vers zéro.

Les distorsions engendrées par les trois modèles sont d'autant plus grandes que la fraction en inclusions est importante et que la différence de raideur entre inclusion et matrice est sensible. Une alternative consiste alors à renforcer le composite en plusieurs étapes. Dans ce cas le matériau constitutif de la matrice est le matériau homogène équivalent calculé à l'étape précédente, c'est le schéma incrémental qui sera présenté plus tard.

Comme il a été évoqué plus haut, il y a le modèle autocohérent monosite et le modèle multisite. Le point de départ du schéma à un site est l'étude de l'hétérogénéité élémentaire dans son milieu environnant dont la solution est donnée par ESHELBY (1957). Ce schéma autocohérent a été enrichi par le modèle multisite qui permettra entre autre d'améliorer la description des milieux périodiques, en prenant en compte la texture topologique de la

microstructure par l'intermédiaire d'une « cellule hétérogène élémentaire » constituée de plusieurs inclusions représentatives de la microstructure totale.

II.2.1 - HYPOTHESES

Les calculs du modèle se font sur un échantillon de volume élémentaire représentatif de l'ensemble du matériau. Par son principe même, la méthode autocohérente requiert que le matériau satisfasse la double condition de "micro-hétérogénéité et de macro-homogénéité", toute autre configuration serait à exclure.

Le graphe de propriétés de la configuration qui intéresse est alors le suivant :

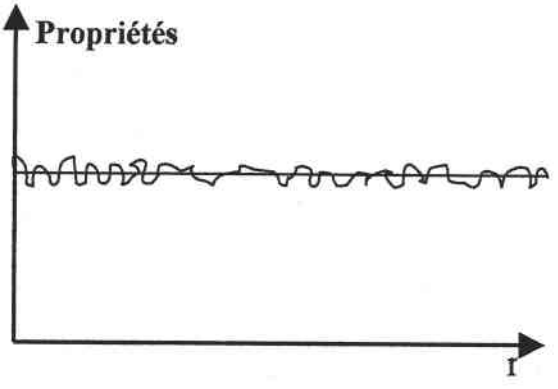


Figure II.1 : *micro-hétérogénéité et macro-homogénéité*

Considérons donc un milieu hétérogène de dimension L dont on extrait un volume élémentaire représentatif (VER) de taille caractéristique l.

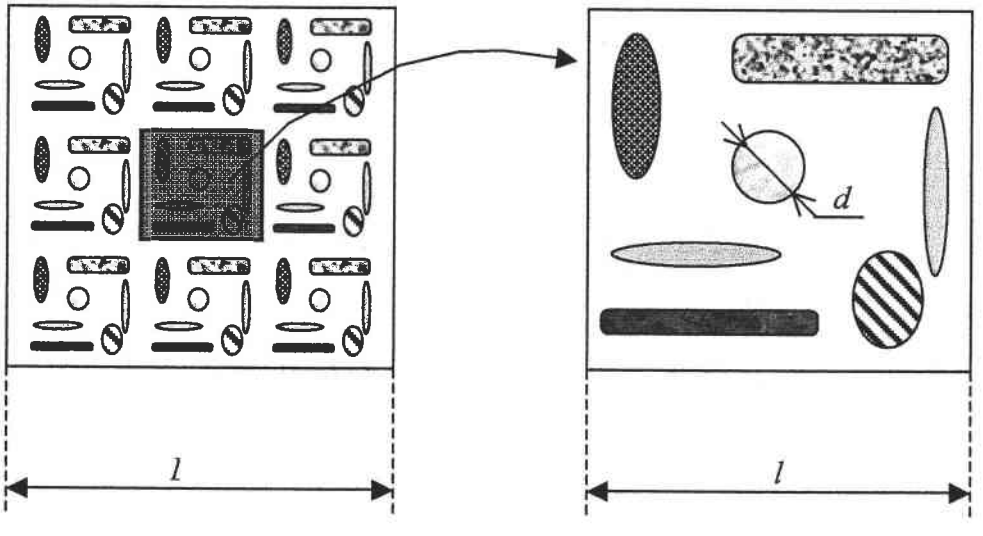


Figure II.2 : *identification du VER*

Soit d la taille caractéristique des hétérogénéités. Pour satisfaire la condition de micro-hétérogénéité, il faut que d soit très petite par rapport à la taille l, elle-même suffisamment

grande pour que le VER considéré soit réellement représentatif du matériau. Autrement dit, le VER doit être statistiquement équivalent quelle que soit la partie du matériau hétérogène et sa taille très petite par rapport à la dimension L : c'est la condition de macro-homogénéité. Toutefois la taille d doit être supérieure à la limite de validité d_O des lois de la mécanique des milieux continus. Donc on devrait avoir : $d_O << d << l << L$

II.2.2 - EQUATIONS LOCALES EN ELASTICITE

L'homogénéisation d'un matériau hétérogène se déroule en deux phases successives :

- tout d'abord, il faut préciser la forme des relations de comportement local,
- ensuite, par des transitions d'échelles, on établit des liens entre les grandeurs locales et les grandeurs macroscopiques et ceci par la détermination des tenseurs de localisation.

Nous nous intéressons à l'élasticité linéaire en petites déformations. Considérons un milieu infini soumis sur ses frontières à un champ de déplacements U^d donné. Si E_{ij} est la déformation macroscopique imposée, x_j un point du contour, alors dans la direction i on a :

$$U_i^d = E_{ij} x_j \qquad \textbf{(II.5)}$$

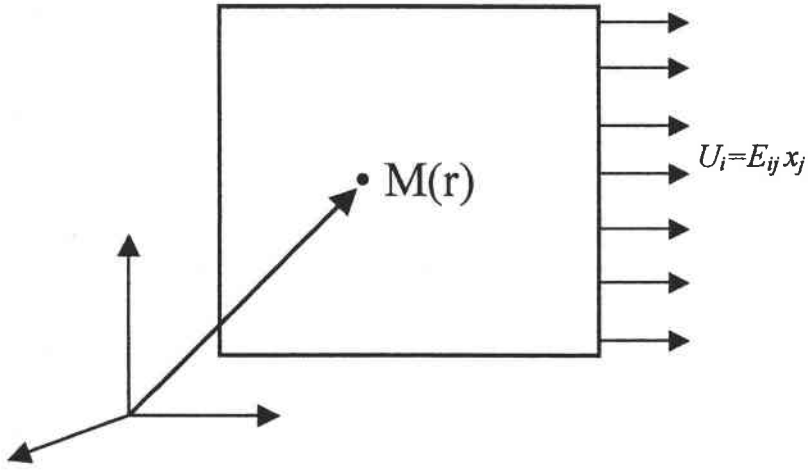


Figure II.3 : *comportement local*

En un point *M(r)* la loi de HOOKE donne :

$$\sigma_{ij}(r) = c_{ijkl}(r)\varepsilon_{kl}(r), \qquad \textbf{(II.6)}$$

où σ est le champ de contraintes et ε le champ de déformations.

Les conditions d'équilibre quasi statique s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j}(r) + f_i(r) = 0 \qquad \textbf{(II.7)}$$

$$\sigma_{ij}(r) = \sigma_{ji}(r)$$

A forces volumiques nulles ($f_i(r)=0$), cette équation devient :

$$\sigma_{ij,j}(r) = 0 \qquad \textbf{(II.8)}$$

Le champ de déformations dérivant d'un champ de déplacements $u(r)$, il s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}(r) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}(r) + u_{j,i}(r)\right) \qquad \textbf{(II.9)}$$

Il vérifie les équations de compatibilité.

A partir de ces équations locales donnant le comportement microscopique, la transition d'échelle permet d'établir le passage vers le comportement global.

II.2.3 - TRANSITION D'ECHELLE

La loi de HOOKE à l'échelle macroscopique s'écrit :

$$\Sigma_{ij} = C^{eff}_{ijkl} E_{kl} \qquad \textbf{(II.10)}$$

Σ est le champ de contraintes macroscopiques et C^{eff} le tenseur des constantes élastiques effectives .

Pour tout champ de contraintes σ statiquement admissible ($div\ \sigma = 0$ dans V et $\sigma.n=\Sigma n$ sur le contour) et pour tout champ de déplacements u cinématiquement admissible ($u=E.x$ sur le contour et ε compatible dérivant de u), les valeurs locales sont liées aux valeurs globales par les relations suivantes (voir MANDEL, 1963; HILL, 1952 ; LIPINSKI, 1993 etc.) :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{v}\int_v \sigma_{ij}(r)dv = \overline{\sigma} \qquad \textbf{(II.11)}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{v}\int_v \varepsilon_{ij}(r)dv = \overline{\varepsilon} \qquad \textbf{(II.12)}$$

Le passage inverse s'effectue grâce à des opérateurs de localisation 'A' et 'B'.

$$\varepsilon_{ij}(r) = A_{ijkl}(r)E_{kl} \qquad \textbf{(II.13)}$$

$$\sigma_{ij}(r) = B_{ijkl}(r)\Sigma_{kl} \qquad \textbf{(II.14)}$$

La loi de comportement locale s'écrit alors

$$\sigma_{ij}(r) = c_{ijkl}(r)A_{klmn}(r)E_{mn} \qquad \textbf{(II.15)}$$

et on a :

$$\Sigma_{ij} = \overline{\sigma_{ij}} = \overline{c_{ijkl}(r)A_{klmn}(r)E_{mn}} = \overline{c_{ijkl}(r)A_{klmn}(r)}\ E_{mn} \qquad \textbf{(II.16)}$$

En faisant une identification avec la loi de comportement globale, le tenseur des constantes élastiques effectives s'écrit alors :

$$C^{eff}_{ijkl} = \overline{c_{ijmn}(r)\,A_{mnkl}(r)} \qquad \textbf{(II.17)}$$

Les relations de moyenne appliquées aux expressions (II.13 et II.14) montrent que :

$$\overline{A_{ijkl}(r)} = \overline{B_{ijkl}(r)} = I_{ijkl} \qquad \textbf{(II.18)}$$

où I est le tenseur identité d'ordre 4.

$c(r)$ étant supposé connu, le calcul de C^{eff} se ramène à une détermination du tenseur de localisation A(r). De plus, à partir des relations (II.14, II.15 et II.17) on obtient :

$$B_{ijkl}(r) = c_{ijmn}(r)A_{mnpq}(r)\left(C^{eff}_{pqkl}\right)^{-1} \qquad \textbf{(II.19)}$$

La détermination du tenseur de localisation (en déformation) 'A' se fait par l'intermédiaire d'une équation intégrale cinématique reliant la déformation locale du milieu hétérogène aux conditions imposées sur la surface extérieure du solide.

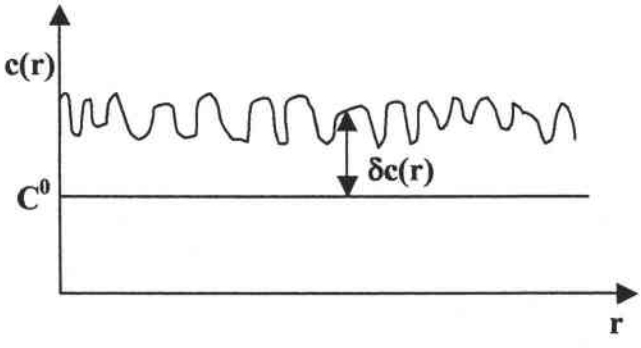
II.3 - EQUATION INTEGRALE CINEMATIQUE

Considérons un milieu hétérogène à comportement mécanique supposé élastique ayant subi une déformation donnée. La loi de comportement élastique s'écrit :

$$\sigma_{ij}(r) = c_{ijkl}(r)u_{k,l}(r)$$

Or $\sigma_{ij,j} = 0$ donc $\left(C_{ijkl}(r)u_{k,l}(r)\right)_{,j} = 0$ **(II.20)**

Le matériau étant macro-homogène, introduisons comme milieu de référence un milieu homogène de comparaison dont le tenseur des constantes élastiques est C^o.



$$c(r) = C^0 + \delta c(r) \qquad \textbf{(II.21)}$$

Figure II.4 : *écart de propriétés entre les constituants et un milieu de référence*

L'équation (II.20) devient :

$$C^0_{ijkl}u_{k,lj}(r)+[\delta c_{ijkl}(r)u_{k,l}(r)]_{,j}=0 \qquad \textbf{(II.22)}$$

ou encore

$$C^0_{ijkl}u_{k,lj}(r)+f_i=0 \qquad \textbf{(II.23)}$$

avec $f_i=[\delta c_{ijkl}(r)\,u_{k,l}(r)]_{,j}$ **(II.24)**

C'est l'équation de NAVIER.

Pour résoudre ce problème on peut utiliser la méthode de GREEN qui consiste à trouver une fonction de GREEN définie par un problème adjoint.

II.3.1 - PROBLÈME ADJOINT

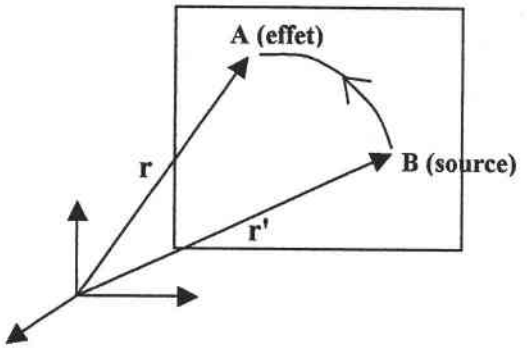


Figure II.5 : *interaction entre deux points matériels*

De façon schématique, on cherche le champ de déplacements en un point *A* dû à une force fj appliquée au point *B*. La force f_j se met sous la forme :

$$f_j(r)=\delta_{jn}\delta(r-r') \qquad \textbf{(II.25)}$$

– δ_{jn} est le symbole de KRONECKER

– $\delta(r-r')$ est la distribution de DIRAC

Le déplacement dans la direction *i* est G_{in}. Par définition, le tenseur de GREEN G_{in} désigne le déplacement au point *r* dans la direction *i* provoqué par une force unité $f_i=\delta_{im}\delta(r-r')$ appliquée dans la direction m.

G et *f* doivent vérifier l'équation de NAVIER :

$$C^o_{ijkl}G_{km,lj}(r-r')+\delta_{im}\delta(r-r')=0 \qquad \textbf{(II.26)}$$

En généralisant ces résultats au cas d'un milieu continu pour lequel nous ne considérerons plus une force ponctuelle, mais une force totale ($f_k.dV'$) s'exerçant sur un élément de volume dV' entourant r', le déplacement s'exprime sous la forme :

$$u_m(r)=\int_v u_k(r')\delta_{km}\delta(r-r')dV' \qquad \textbf{(II.27)}$$

D'après (II.26) et la relation $G_{im,l} = -G_{im,l'}$, l'équation (II.27) devient :

$$u_m(r) = -\int_v C^o_{ijkl} G_{im,j'l'} u_k(r')dV' \qquad \textbf{(II.28)}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} G_{im,j'l'}\, u_k &= (G_{im,j'}\, u_k),l' - G_{im,j'}\, u_{k,l'} \\ &= (G_{im,j'}\, u_k),l' - (G_{im} u_{k,l'})_{,j'} + G_{im} u_{k,l'j'} \end{aligned} \qquad \textbf{(II.29)}$$

L'équation (II.28) devient, en utilisant le théorème de STOKES et (II.29):

$$\begin{aligned} u_m(r) = &-\int_s C^o_{ijkl} G_{im,j'}(r-r')u_k(r')n_{l'}ds' + \int_s C^o_{ijkl} G_{im}(r-r')u_{k,l'}(r')n_{j'}ds' \\ &- \int_v C^o_{ijkl} G_{im}(r-r')u_{k,l'j'}(r')dV' \end{aligned} \qquad \textbf{(II.30)}$$

La première intégrale représente le champ de déplacements dans un solide homogène, de géométrie et de conditions aux limites identiques à celles du solide considéré. Ce champ de déplacements sera noté u^0.

La deuxième intégrale représente les conditions aux limites statiques et peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \int_S C^0_{ijkl} G_{im}(r-r')u_{k,l'}(r')n'_j dS' &= \int_S G_{im}(r-r')\sigma_{ij}(r')n'_j dS' \\ &= \int_S G_{im}(r-r')T^d_i(r')dS' \end{aligned} \qquad \textbf{(II.31)}$$

Les conditions aux limites appliquées au solide étant uniquement des conditions de déplacements imposés, par conséquent cette intégrale est nulle.

Finalement (II.30) s'écrit, en utilisant (II.22) :

$$u_m(r) = u^0_m(r) + \int_V G_{im}(r-r')\left(\delta c_{ijkl}(r')u_{k,l}(r')\right)_{,j'} dV' \qquad \textbf{(II.32)}$$

ou encore :

$$u_m(r) = u^0_m(r) + \int_V G_{im}(r-r')\left(\delta c_{ijkl}(r')\,\varepsilon_{kl}(r')\right)_{,j'} dV' \qquad \textbf{(II.33)}$$

En introduisant (II.33) dans (II.9), on obtient alors :

$$\varepsilon_{mn}(r) = \varepsilon^0_{mn}(r) + \int_V \frac{1}{2}\left(G_{mi,n}(r-r') + G_{ni,m}(r-r')\right)\left(\delta c_{ijkl}(r')\varepsilon_{kl}(r')\right)_{,j'} dV' \qquad \textbf{(II.34)}$$

Comme précédemment, on peut décomposer l'intégrale, et de plus, si on suppose qu'elle s'annule à la frontière, on trouve :

$$\varepsilon_{mn}(r) = \varepsilon^0_{mn}(r) - \int_V \frac{1}{2}\left(G_{mi,nj'}(r-r') + G_{ni,mj'}(r-r')\right)\delta c_{ijkl}(r')\varepsilon_{kl}(r')\, dV' \qquad \textbf{(II.35)}$$

Finalement, en posant

$$\Gamma_{mnij}(r-r') = -\frac{1}{2}\left(G_{mi,nj}(r-r') + G_{ni,mj}(r-r')\right) \qquad \textbf{(II.36)}$$

On obtient :

$$\varepsilon_{mn}(r) = \varepsilon^0_{mn}(r) \; - \int_V \Gamma_{mnij}(r-r')\, \delta c_{ijkl}(r')\, \varepsilon_{kl}(r')\, dV' \qquad \textbf{(II.37)}$$

C'est cette forme de l'équation intégrale qui sera utilisée pour traiter le problème de la paire d'inclusion et permettra d'établir l'approximation autocohérente.

II.3.2 - SOLUTION DE L'EQUATION POUR UNE PAIRE D'INCLUSIONS

Considérons un milieu infini de constantes élastiques C^0 contenant deux inclusions I et J de volume V_I et V_J, de constantes élastiques C^I et C^J, supposées uniformes dans V_I et V_J, voir figure ci-dessous:

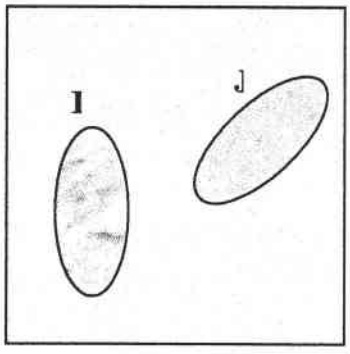


Figure II.6 : *Paire d'inclusions*

On peut alors écrire :

$$\delta c_{ijkl}(r) = \left(C^I_{ijkl} - C^0_{ijkl}\right)\theta^I(r) \; + \; \left(C^J_{ijkl} - C^0_{ijkl}\right)\theta^J(r) \qquad \textbf{(II.38)}$$

Où θ^I et θ^J représentent les fonctions indicatrices d'HEAVISIDE :

$$\theta^I(r) = \begin{cases} 1 \; si \; r \in V_I \\ 0 \; si \; r \notin V_I \end{cases} \qquad \textbf{(II.39)}$$

(II.38) peut se mettre sous la forme :

$$\delta c_{ijkl}(r) = \Delta C^I_{ijkl}\, \theta^I(r) \; + \; \Delta C^J_{ijkl}\, \theta^J(r) \qquad \textbf{(II.40)}$$

La déformation moyenne dans l'inclusion I est donnée par :

$$\varepsilon^I_{mn} = \frac{1}{V_I}\int_{V_I} \varepsilon_{mn}(r) dV \qquad \textbf{(II.41)}$$

En introduisant (II.37) et (II.40) dans (II.41), nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\varepsilon^{I}_{mn} = \varepsilon^{0}_{mn} &- \frac{1}{V_I}\int_{V_I}\int_{V}\Gamma_{mnij}(r-r')\,\Delta C^{I}_{ijkl}\,\theta^{I}(r)\,\varepsilon_{kl}(r')\,dV'dV \\ &- \frac{1}{V_I}\int_{V_I}\int_{V}\Gamma_{mnij}(r-r')\,\Delta C^{J}_{ijkl}\,\theta^{J}(r)\,\varepsilon_{kl}(r')\,dV'dV\end{aligned} \tag{II.42}$$

ou en utilisant les propriétés de θ^{I},

$$\begin{aligned}\varepsilon^{I}_{mn} = \varepsilon^{0}_{mn} &- \frac{1}{V_I}\int_{V_I}\int_{V_I}\Gamma_{mnij}(r-r')\,\Delta C^{I}_{ijkl}\,\theta^{I}(r)\,\varepsilon_{kl}(r')\,dV'dV \\ &- \frac{1}{V_I}\int_{V_I}\int_{V_J}\Gamma_{mnij}(r-r')\,\Delta C^{J}_{ijkl}\,\theta^{J}(r)\,\varepsilon_{kl}(r')\,dV'dV\end{aligned} \tag{II.43}$$

La solution exacte de cette équation est encore trop complexe et difficile à obtenir en général.

En posant :

$$T^{II}_{mnij} = \int_{V_I}\int_{V_I}\Gamma_{mnij}(r-r')dV'dV \tag{II.44}$$

et :

$$T^{IJ}_{mnij} = \int_{V_I}\int_{V_J}\Gamma_{mnij}(r-r')dV'dV \tag{II.45}$$

(II.43) devient alors :

$$\varepsilon^{I}_{mn} = \varepsilon^{0}_{mn} - \frac{1}{V_I}T^{II}_{mnij}\,\Delta C^{I}_{ijkl}\,\varepsilon^{I}_{kl} - \frac{1}{V_I}T^{IJ}_{mnij}\,\Delta C^{J}_{ijkl}\,\varepsilon^{J}_{kl} \tag{II.46}$$

On a une équation analogue pour l'inclusion J.

Dans le paragraphe suivant, on montrera comment, à partir de cette équation et du modèle autocohérent, on peut approcher les constantes élastiques du milieu homogène équivalent.

II.4 - APPROXIMATION AUTOCOHERENTE

II.4.1 - CALCUL DU TENSEUR DE LOCALISATION

En reprenant l'équation (II.46) du problème de la paire d'inclusions hétérogènes et en notant C^{SC} l'approximation de C^{eff} dans le cadre du modèle autocohérent, on a alors :

$$\varepsilon^I_{mn} = E_{mn} - \frac{1}{V_I} T^{II}_{mnij} \Delta C^I_{ijkl} \varepsilon^I_{kl} - \frac{1}{V_I} T^{IJ}_{mnij} \Delta C^J_{ijkl} \varepsilon^J_{kl} \qquad \textbf{(II.47)}$$

où :

$$\Delta C^I_{ijkl} = C^I_{ijkl} - C^{sc}_{ijkl} \qquad \textbf{(II.48)}$$

Considérons un composite ou un polycristal, alors l'équation (II.47) peut se généraliser de la façon suivante :

$$\varepsilon^I_{mn} = E_{mn} - \frac{1}{V_I} T^{II}_{mnij} \Delta C^I_{ijkl} \varepsilon^I_{kl} - \frac{1}{V_I} \sum_{J \neq I} T^{IJ}_{mnij} \Delta C^J_{ijkl} \varepsilon^J_{kl} \qquad \textbf{(II.49)}$$

où J représente les inclusions (ou monocristaux) qui constituent la " cellule hétérogène élémentaire ". Pour un tel matériau, nous pouvons écrire :

$$C_{ijkl}(r) = \sum_{I=1}^{N} C^I_{ijkl} \theta^I(r) \qquad \textbf{(II.50)}$$

N étant le nombre de monocristaux ou d'inclusions (en plus de la matrice) qui forment le volume élémentaire représentatif.
En introduisant cette équation dans la relation de moyenne volumique pour les contraintes, on obtient :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sum_{I=1}^{N} C^I_{ijmn} \theta^I(r) \varepsilon_{mn}(r) dV \qquad \textbf{(II.51)}$$

En sortant la sommation de l'intégrale :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{I=1}^{N} C^I_{ijmn} \int_{V_I} \varepsilon_{mn}(r) dV . \qquad \textbf{(II.52)}$$

Et si l'on pose :

$$f^I = \frac{V^I}{V} \qquad \textbf{(II.53)}$$

nous obtenons :

$$\Sigma_{ij} = \sum_{I=1}^{N} f^I C^I_{ijmn} \varepsilon^I_{mn} \qquad \textbf{(II.54)}$$

Dans le matériau considéré, l'équation de localisation (II.13) devient :

$$\varepsilon^I_{mn} = A^I_{mnkl} E_{kl} \qquad \textbf{(II.55)}$$

Que l'on introduit dans (II.54) pour obtenir :

$$\Sigma_{ij} = \sum_{I=1}^{N} f^I C^I_{ijmn} A^I_{mnkl} E_{kl} \tag{II.56}$$

En comparant avec (II.10) on identifie :

$$C^{eff}_{ijkl} = \sum_{I=1}^{N} f^I C^I_{ijmn} A^I_{mnkl} \tag{II.57}$$

Le tenseur de localisation se détermine en remplaçant (II.55) dans (II.47) :

$$\varepsilon^I_{mn} = E_{mn} - \frac{1}{V_I} T^{II}_{mnij} \Delta C^I_{ijkl} \varepsilon^I_{kl} - \frac{1}{V_I} \sum_{J \neq I} T^{IJ}_{mnij} \Delta C^J_{ijkl} A^J_{klpq} E_{pq} \tag{II.58}$$

Ce qui peut être mis sous la forme :

$$\left(I_{mnkl} + \frac{1}{V_I} T^{II}_{mnij} \Delta C^I_{ijkl} \right) \varepsilon^I_{kl} = \left(I_{mnpq} - \frac{1}{V_I} \sum_{J \neq I} T^{IJ}_{mnij} \Delta C^J_{ijkl} A^J_{klpq} \right) E_{pq} \tag{II.59}$$

En comparant avec (II.55), on obtient finalement :

$$A^I_{klpq} = \left(I_{mnkl} + \frac{1}{V_I} T^{II}_{mnij} \Delta C^I_{ijkl} \right)^{-1} \left(I_{mnpq} - \frac{1}{V_I} \sum_{J \neq I} T^{IJ}_{mnij} \Delta C^J_{ijkl} A^J_{klpq} \right) \tag{II.60}$$

Cette équation, gardée sous cette forme, donnera lieu à l'approximation autocohérente multisite où les T^{IJ} (I≠J) symbolisent les interactions entre les constituants. Pour une approximation à 1-site ces tenseurs d'interaction sont simplement négligés.

L'approximation de C^{eff} par l'équation (II.57) doit passer par la détermination des tenseurs de localisation A^I. Le calcul de chaque tenseur A^I dépend de C^{SC} et de tous les autres tenseurs A^J, ce qui fait que la détermination de C^{eff} se révèle être un processus implicite. Cela implique une construction itérative des propriétés effectives. Ce processus peut être initialisé en supposant que la valeur initiale de C^{SC} est obtenue à partir du modèle de VOIGT

$$C^0_{ijkl} = \sum_{I=1}^{N} f^I C^I_{ijkl} \tag{II.61}$$

Ceci revient à initialiser les tenseurs de localisation au tenseur unité :

$$A^I_{ijkl} = I_{ijkl} \qquad I = 1,\ldots,N \tag{II.62}$$

Si ces conditions sont respectées, alors en suivant l'algorithme proposé, le tenseur C^{SC} doit converger. Dans les applications numériques, nous constaterons des cas pour lesquels il n'y a pas de convergence. Afin de stopper le processus, il est nécessaire de définir un critère d'arrêt. Souvent le critère proposé est basé sur la comparaison des normes :

$$\frac{\left| \left\| C^{n+1}_{ijkl} \right\| - \left\| C^{n}_{ijkl} \right\| \right|}{\left\| C^{n+1}_{ijkl} \right\|} \leq \delta \tag{II.63}$$

où C^n représente l'approximation de C^{eff} à l'itération n et δ l'écart maximal admis.

Le dernier pas pour cerner les paramètres intervenant dans le calcul de C^{eff} est la détermination des tenseurs d'interaction.

II.4.2 - CALCUL DES TENSEURS D'INTERACTION

Le calcul de ces tenseurs passe par la détermination du tenseur de GREEN G_{km} qui est très complexe. KNEER (1965), MURA (1987) et LAWS (1977) en particulier se sont beaucoup intéressés à sa détermination. Pour sa part, FASSI-FEHRI (1985) a développé une méthode de calcul basée sur les techniques de transformée de FOURIER du tenseur de GREEN qui est définie par :

$$\widetilde{G}_{km}(k) = \int_V G_{km}(r) e^{ik_i r_i} dV \qquad \textbf{(II.64)}$$

k étant le vecteur conjugué de r.

La transformée de FOURIER inverse est donnée par :

$$G_{km}(r) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_k} \widetilde{G}_{km}(k) e^{-ik_i r_i} dV_k \qquad \textbf{(II.65)}$$

En dérivant deux fois par rapport à la position r, on obtient :

$$G_{km,lj}(r) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_k} -k_l k_j \widetilde{G}_{km}(k) e^{-ik_i r_i} dV_k \qquad \textbf{(II.66)}$$

De plus, la transformée de FOURIER de la fonction de DIRAC est donnée par :

$$\widetilde{\delta}(k) = \int_V \delta(r) e^{ik_i r_i} dV = 1 \qquad \textbf{(II.67)}$$

et la transformée inverse :

$$\delta(r) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_k} e^{-ik_i r_i} dV_k \qquad \textbf{(II.68)}$$

En remplaçant (II.66) et (II.68) dans la relation qui définit le tenseur de GREEN, on trouve :

$$\frac{1}{8\pi^3} C_{ijkl} \int_{V_k} -k_l k_j \widetilde{G}_{km}(k) e^{-ik_i r_i} dV_k + \frac{1}{8\pi^3} \delta_{im} \int_{V_k} e^{-ik_i r_i} dV_k = 0 \qquad \textbf{(II.69)}$$

Ce qui donne :

$$C_{ijkl} \widetilde{G}_{km}(k) k_l k_j = \delta_{im} \qquad \textbf{(II.70)}$$

Or,

$$T^{II}_{klmj} = \int_{V_I}\int_{V_I} -\frac{1}{2}\left(G_{km,lj}(r-r') + G_{lm,kj}(r-r')\right)dV'dV \qquad \textbf{(II.71)}$$

Posons :

$$T^{II}_{klmj} = \frac{1}{2}\left(t^{II}_{klmj} + t^{II}_{lkmj}\right) \qquad \textbf{(II.72)}$$

où :

$$t^{II}_{klmj} = -\int_{V_I}\int_{V_I} G_{km,lj}(r-r')dV'dV \qquad \textbf{(II.73)}$$

Et d'après (II.66) :

$$t^{II}_{klmj} = \frac{1}{8\pi^3}\int_{V_I}\int_{V_I}\int_{V_k} k_l k_j \tilde{G}_{km}(k) e^{-ik_i r_i} e^{ik_i r'_i} dV_k dV' dV \qquad \textbf{(II.74)}$$

De la même façon on peut obtenir l'équivalent de t^{IJ}.

Ces expressions, encore complexes, peuvent de manière générale se mettre sous la forme :

$$t = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{j=0}^{2\pi} f(\theta, j)\, dj\, d\theta \qquad \textbf{(II.75)}$$

La détermination des T^{II} et T^{IJ} se ramène donc au calcul d'intégrales doubles. Dans le cas d'inclusions sphériques placées dans un milieu isotrope on peut calculer ces intégrales de façon analytique. Dans le cas contraire, une résolution numérique s'impose. LIPINSKI et CARMASOL (1995) ont proposé une optimisation de la précision de calcul du tenseur d'interaction dans un premier temps. Dans notre travail, nous utiliserons les résultats de ZATTARIN (1995) qui, à partir des travaux de LIPINSKI et CARMASOL et d'un développement en série de Fourier, a proposé un calcul des tenseurs T plus performant en précision et en temps.

Il est facilement montré que les fonctions $f(\theta,\varphi)$ sont périodiques par rapport au variables θ et φ , et la période est 2π. Lorsqu'une fonction g(θ) est 2π-périodique, elle peut être approchée par une série de FOURIER tronquée :

$$g(\theta) \approx h(\theta) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\right) \qquad \textbf{(II.76)}$$

L'approximation de l'intégrale de la fonction g(θ) est alors donnée par :

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} g(\theta_k) \qquad \textbf{(II.77)}$$

Avec :

$$\theta_k = \frac{2\pi}{2n+1}(k-1) \tag{II.78}$$

La généralisation de cette méthode à une fonction à 2 variables donne :

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{j=0}^{2\pi} f(\theta, j)\, dj\, d\theta = \frac{2\pi^2}{(2n+1)(2m+1)} \sum_{i=1}^{2n+1} \sum_{j=1}^{2m+1} f(\theta_i, j_j) \tag{II.79}$$

Avec :

$$\begin{cases} \theta_i = \dfrac{\pi}{2n+1}(i-1) \\ \varphi_j = \dfrac{2\pi}{2m+1}(j-1) \end{cases} \tag{II.80}$$

II.5 - APPLICATIONS

Considérons le composite biphasé, constitué d'une matrice isotrope d'époxy renforcée par des fibres longues de bore, dont les caractéristiques élastiques sont :

Époxy : E = 4,14 GPa et $\nu = 0{,}35$

Bore : E = 414 GPa et $\nu = 0{,}2$.

Les fibres cylindriques ont été modélisées par des ellipsoïdes étirés ayant une longueur 1000 fois plus importante que les deux autres dimensions. L'approximation autocohérente ou encore *self consistent scheme* (SCS) est effectuée en multisite, en considérant que les centres des fibres sont situés sur les sommet d'un carré.

Ce matériau, a été étudié par S. K. Garg (1973) qui en donne des résultats expérimentaux. Nous établirons également des comparaisons avec les modèles de WHITNEY-RILEY et HASHIN-ROSEN.

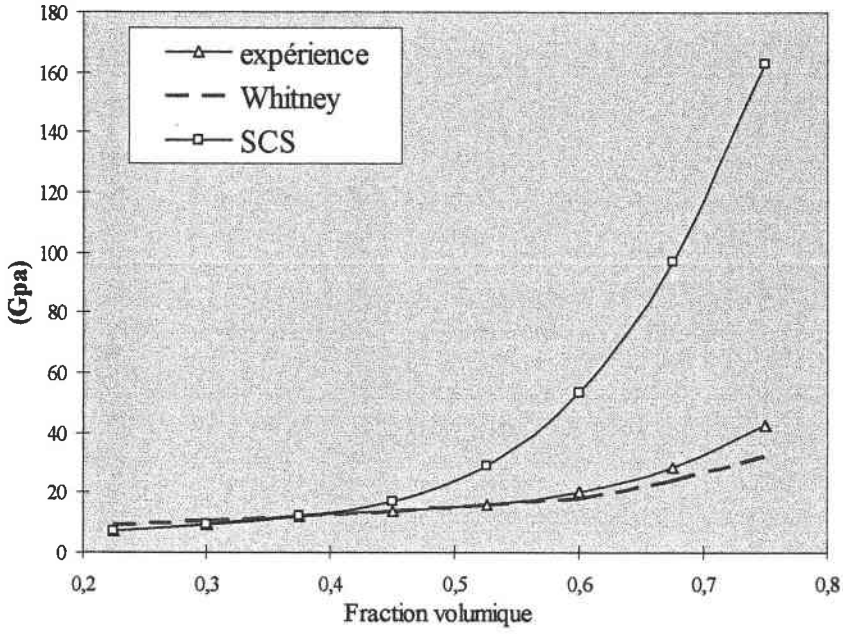


Figure II.7: *Module de Young transversal*

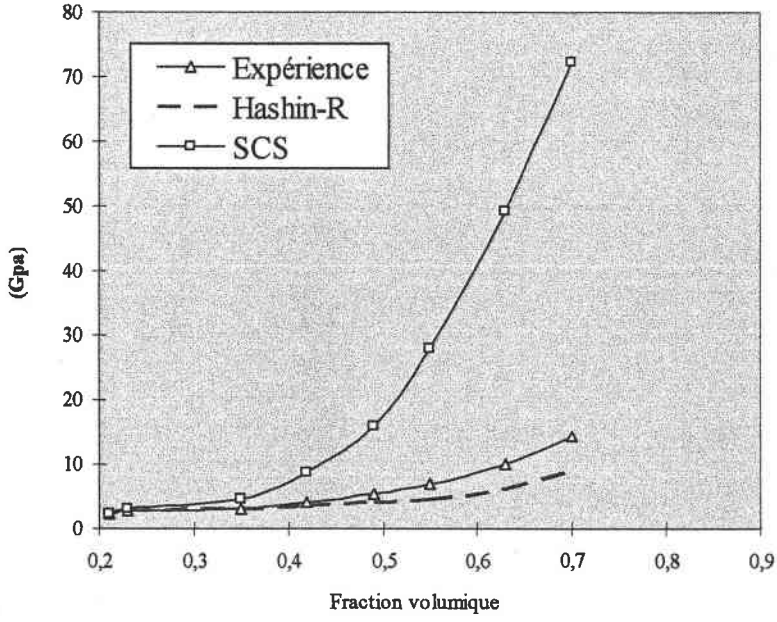


Figure II.8: *Module de cisaillement axial*

Le matériau des deux figures ci-dessus présente un rapport de modules de YOUNG $\frac{E^{fibre}}{E^{matrice}} = 100$ qui est une valeur déjà importante. Que ce soit pour le module de YOUNG transversal ou le module de cisaillement axial, les remarques à formuler sont les mêmes. Pour

de faibles fractions, les points expérimentaux et les résultats donnés par tous les modèles coïncident. Mais pour de fortes fractions on voit nettement la distorsion des résultats donnés par le schéma auto-cohérent. Ce résultat n'est pas lié seulement à ce type de matériau à fibres. En considérant le matériau composite constitué d'une matrice de polyuréthanne renforcée par des billes de verre, le même constat s'impose :

Polyuréthanne : $G = 1{,}4$ MPa $\nu = 0{,}499$

Verre : $G = 30{,}2$ GPa $\nu = 0{,}16$

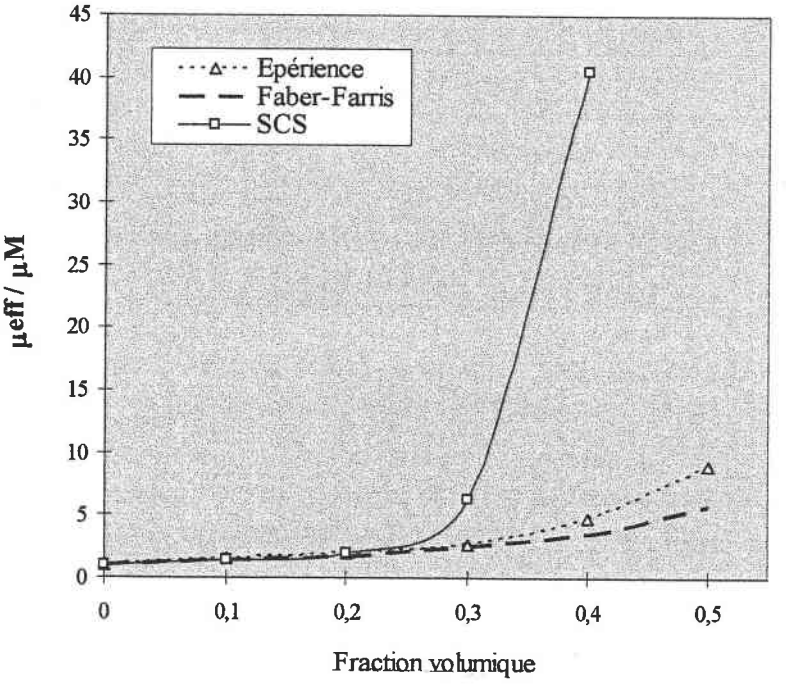


Figure II.9: *Polyuréthanne renforcé de billes de verre aléatoirement réparties*

Pour ce matériau, le rapport entre les modules de cisaillement des constituants est de 21571. L'approximation SCS est effectuée en monosite à cause de la répartition aléatoire des inclusions.

Examinons également le cas d'inclusions plus molles que la matrice. Soit donc le matériau biphasé périodique, constitué d'une matrice isotrope renforcée de particules sphériques disposées en un réseau cubique simple. Le rapport des modules de cisaillement est $r=\mu^M/\mu^I = 20$, avec $\mu^M = 200$ MPa et $\nu^I = \nu^M = 0{,}3$.

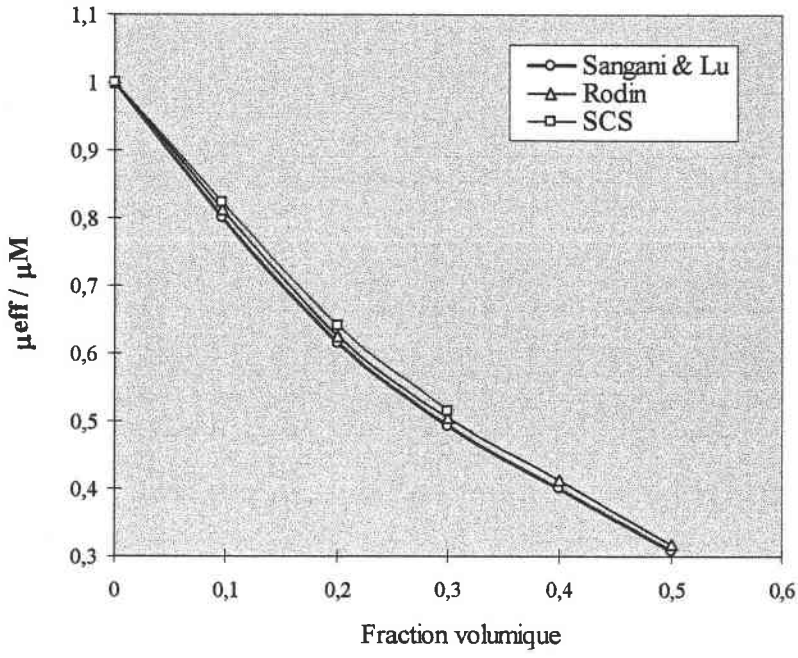


Figure II.10: *Particules sphériques disposées en réseau cubique simple dans une matrice isotrope (r=20)*

La figure 10 met en évidence un cas de divergence du schéma autocohérent. Pour de petites fractions (en dessous de 30 % de particules), le calcul par approximation autocohérente converge et donne des résultats analogues à ceux des modèles de RODIN (1993) et de SANGANI & LU (1987). Mais au-delà de la fraction limite de 30 %, le calcul par cette approximation ne converge plus.

II.6 - CONCLUSION

Les résultats que nous venons d'analyser ont montré les limites d'application du schéma autocohérent. Lorsque l'inclusion est très rigide par rapport à la matrice, le processus d'homogénéisation converge toujours vers une valeur, et ceci quel que soit la fraction volumique d'inclusions. Une courbe d'évolution des propriétés (constantes élastiques par exemple) montre l'existence d'une valeur limite pour la fraction. En dessous de cette valeur qui varie suivant le rapport de rigidité entre l'inclusion et la matrice, il y a concordance entre les résultats du schéma autocohérent et les résultats expérimentaux. Mais au-delà de la valeur limite, les résultats du schéma autocohérent se démarquent clairement des résultats expérimentaux. L'approximation est dans ce cas erronée.

Pour des inclusions plus molles que la matrice, le phénomène est similaire à celui observé pour les inclusions rigides. Toutefois il existe une particularité : au-delà de la valeur limite, le processus d'homogénéisation ne converge plus. Dans le cas limite des inclusions creuses, la plage de validité est très réduite, c'est ce que nous verrons dans le paragraphe que y nous consacrerons

B . SCHEMA INCREMENTAL

II.7 - INTRODUCTION

Comme constaté dans la partie précédente, l'approximation autocohérente se heurte à une distorsion liée à la fois à ΔC (écart entre les constantes élastiques) et à la fraction volumique d'inclusions. Cette distorsion peut conduire à d'importantes erreurs sur certaines composantes du module effectif ou mener, dans les cas extrêmes des inclusions vides, à des calculs numériques divergents. Pour limiter ces effets, il faudrait chercher de nouvelles façons d'aborder les écarts ΔC ou la fraction volumique.

Pour le cas des fibres cylindriques parallèles à section circulaire, OSHIMA (1985) par le biais d'un modèle de construction dû à KERNER, a proposé un modèle en interposant entre l'inclusion et le milieu homogène équivalent un tube constitué par la matrice.

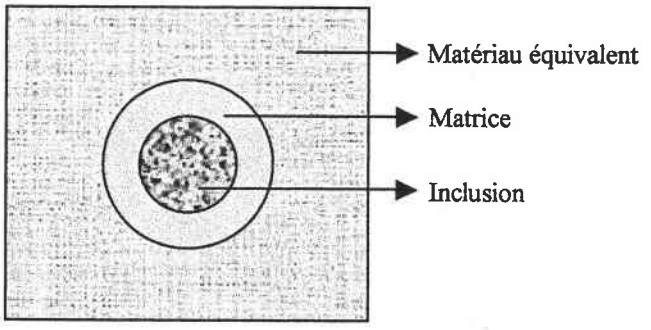


Figure II.11 : *construction du milieu hétérogène sur le modèle de Kerner-Oshima*

Evidemment, ce modèle qui a donné des résultats intéressants est limité au cas particulier des fibres cylindriques parallèles à section circulaire.

Une autre méthode d'approximation est le schéma différentiel. Ce schéma est dans un certain sens lié au schéma autocohérent. Les premières formulations de cette méthode d'approximation ont été énoncées par BRUGGEMAN (1935) qui les classait sous la dénomination de la « théorie du milieu effectif ». Le schéma autocohérent, *Self Consistent Scheme* (SCS), a tout d'abord connu une évolution fulgurante jusqu'à ce qu'il révèle ses faiblesses notamment pour la description des matériaux poreux. BUDIANSKY et O'CONNEL (1976) qui furent les premiers à utiliser le SCS pour des fissures elliptiques aléatoirement reparties dans une matrice isotrope, constatèrent également cette faiblesse. BOUCHER (1975) a montré que l'approximation par le schéma différentiel pour les milieux poreux ne rencontre pas les problèmes des autres approximations basées sur le SCS, mais qu'en plus, ses prédictions coïncidaient bien avec les résultats expérimentaux. A partir de cet instant, ce schéma a commencé par intéresser beaucoup de chercheurs. R. MCLAUGHLIN (1977) l'utilisa pour étudier d'autres matériaux composites. A.N. NORRIS (1985) utilisa également cette méthode ainsi que Z. HASHIN (1988) pour étudier les fissures. Dans la même suite d'idées,

VIEVILLE (1992) dans sa thèse, en étudiant le bois (un composite très complexe), a émis l'idée d'une approximation autocohérente par étapes. Les résultats qu'il a obtenus dans le cas d'une famille et plusieurs familles d'inclusions et en approximation 1-site ont été très satisfaisants. Dans cette partie, nous généraliserons sa méthode à l'approximation multisite.

II.8 - PRINCIPE DU SCHEMA INCREMENTAL (I.S.)

L'idée de base est de faire des approximations autocohérentes, non plus en considérant les fractions d'inclusion dans leur globalité, mais en injectant les inclusions en fractions partielles par plusieurs étapes. Ainsi à chaque étape la disposition des inclusions est la même et toutes les catégories d'inclusions sont prises en compte. Le schéma est celui de la figure 12. Pour un processus qui doit être achevé en *m* étapes, l'on veut que la fraction d'inclusions augmente du même incrément de fraction partielle après chaque étape. Il reste donc à déterminer la fraction à introduire pour respecter cette condition. Pour cela il existe deux approches parfaitement identiques : l'une consiste à préserver le volume de l'inclusion et à augmenter progressivement le volume élémentaire considéré ; l'autre se base au contraire sur une préservation du volume élémentaire et une croissance progressive des inclusions. Nous choisissons ici la deuxième approche.

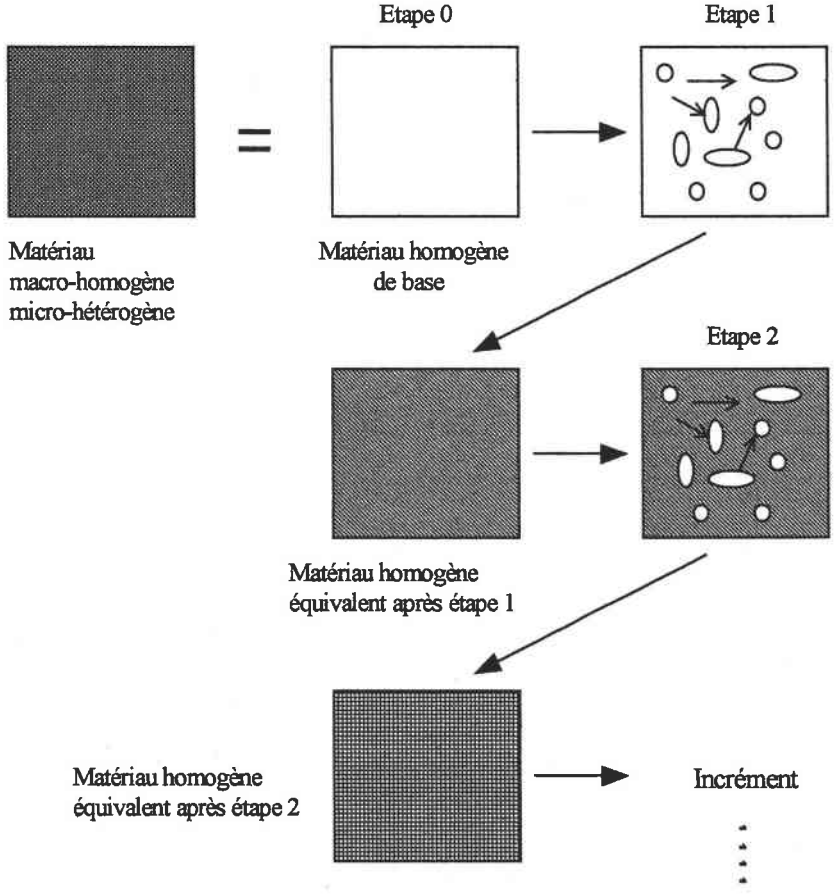


Figure II.12 : *Processus incrémental*

II.8.1 - CAS D'UNE FAMILLE D'INCLUSIONS

Considérons un matériau biphasé hétérogène constitué d'une matrice de volume caractéristique unitaire a, et d'une famille d'inclusions de volume unitaire b.

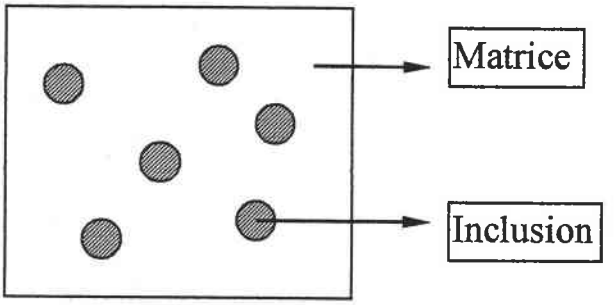


Figure II.13: *Une seule famille d'inclusions*

Soit f_t la fraction totale d'inclusions que l'on veut traiter au bout de m étapes. L'incrément de fraction est $f_p = \frac{f_t}{m}$ tel qu'après l'étape i, on aurait dans le matériau homogène équivalent $i \times f_p$ comme fraction d'inclusions.

Supposons qu'à l'étape i, avant d'introduire une nouvelle fraction d'inclusions, on ait un matériau homogène équivalent de volume caractéristique unitaire c_{i-1}. Si f_{ia} est la fraction d'inclusions déjà contenue dans la matrice, alors on a :

$$f_{ia}.b+(1-f_{ia}).a=1\times c_{i-1} \qquad \textbf{(II.81)}$$

Le matériau de volume caractéristique c_{i-1} sera considéré comme la matrice à l'introduction d'une nouvelle fraction f_i d'inclusions à cette étape i, ce qui donnera :

$$\begin{aligned} f_i.b + (1-f_i).c_{i-1} &= i.f_p.b + (1-i.f_p).a \\ &= 1\times c_i \end{aligned} \qquad \textbf{(II.82)}$$

En introduisant (II.81) dans (II.82) on obtient :

$$(1-f_i)[(1-f_{ia}).a + f_{ia}.b] + f_i.b = (1-i.f_p).a + i.f_p.b \qquad \textbf{(II.83)}$$

Une identification membre à membre par rapport à a et b de l'équation (II.83) donne :

$$\begin{cases} (1-f_i)(1-f_{ia}) = 1 - i.f_p \\ (1-f_i).f_{ia} + f_i = i.f_p \end{cases} \qquad \textbf{(II.84)}$$

Or la fraction f_{ia} à chaque étape est donnée par la relation :

$$f_{ia} = (i-1)f_p \qquad \textbf{(II.85)}$$

En combinant les équations de (II.84) on obtient :

$$i.f_p = (1-f_i)(i-1).f_p + f_i \qquad \textbf{(II.86)}$$

et finalement,

$$f_i = \frac{f_p}{1-(i-1).f_p} \qquad \textbf{(II.87)}$$

C'est la fraction d'inclusions à introduire dans le matériau équivalent de l'étape (*i-1*) lorsqu'on est à l'étape *i*.

A partir de cette formule, VIEVILLE (1992) a pu améliorer, dans le cas des matériaux biphasés et plus tard pour les multiphasés viscoélastiques, l'approximation autocohérente en monosite. Examinons maintenant le cas de plusieurs familles d'inclusions.

II.8.2 - CAS DE N FAMILLES D'INCLUSIONS

Considérons un matériau hétérogène contenant plusieurs familles d'inclusions.

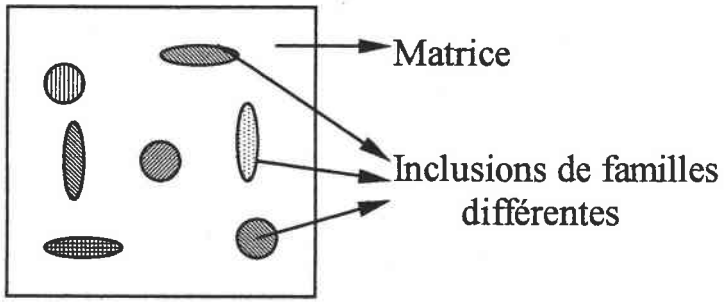


Figure II.14: *Plusieurs familles d'inclusions*

Nous disposons de N familles de fraction totale f_t^J $J=1,N$ donnant lieu (pour un nombre total *m* d'étapes) à *N* fractions partielles $f_p^J = \frac{f_t^J}{m}$.

Comme précédemment, à l'étape i, avant d'injecter les inclusions, le matériau équivalent a un volume unitaire caractéristique c_{i-1}. Les différentes familles ont pour leur part b^J comme volume unitaire. A ce niveau si f_{ia}^J est la fraction d'inclusions déjà contenue dans le matériau équivalent pour la famille *J*, on a la relation :

$$\sum_{j=1}^{N} f_{ia}^J.b^J + \left(1-\sum_{j=1}^{N} f_{ia}^J.b^J\right).a = 1\times c_{i-1} \qquad \textbf{(II.88)}$$

et à l'introduction d'une nouvelle fraction f_i^J pour chaque famille d'inclusions, on aura :

$$\sum_{J=1}^{N} f_i^J.b^J + \left(1-\sum_{J=1}^{N} f_i^J\right).c_{i-1} = i.\sum_{J=1}^{N} f_p^J.b^J + \left(1-i.\sum_{J=1}^{N} f_p^J\right).a = 1\times c_i \qquad \textbf{(II.89)}$$

ceci, pour respecter la condition d'augmentation incrémentale.

En introduisant (II.88) dans (II.89) on obtient :

$$\left(1-\sum_J f_i^J\right)\left(1-\sum_J f_{ia}^J\right)a + \left(1-\sum_J f_i^J\right)\sum_J f_{ia}^J\, b^J + \sum_J f_i^J\, b^J = \left(1-i\sum_j f_p^J\right)a + i\sum_J f_p^J\, b^J \qquad \textbf{(II.90)}$$

Après identification de chaque volume caractéristique, on aboutit a :

$$\sum_{J=1}^{N} f_i^J = \frac{\sum_J f_p^J}{1-(i-1)\sum_J f_p^J} \tag{II.91}$$

et pour chaque famille K

$$\left(1-\sum_J f_i^J\right)(i-1)f_p^K + f_i^K = i.f_p^K \tag{II.92}$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme :

$$\left[\frac{1}{(i-1)f_p^K}-1\right]f_i^K - \sum_{J\neq K} f_i^J = \frac{1}{i-1}$$
$$i = 2, m \tag{II.93}$$
$$K = 1, N$$

Cette relation implicite (qui ne peut être résolution qu'itérativement) écrite pour toutes les familles, est mise sous la forme d'un système :

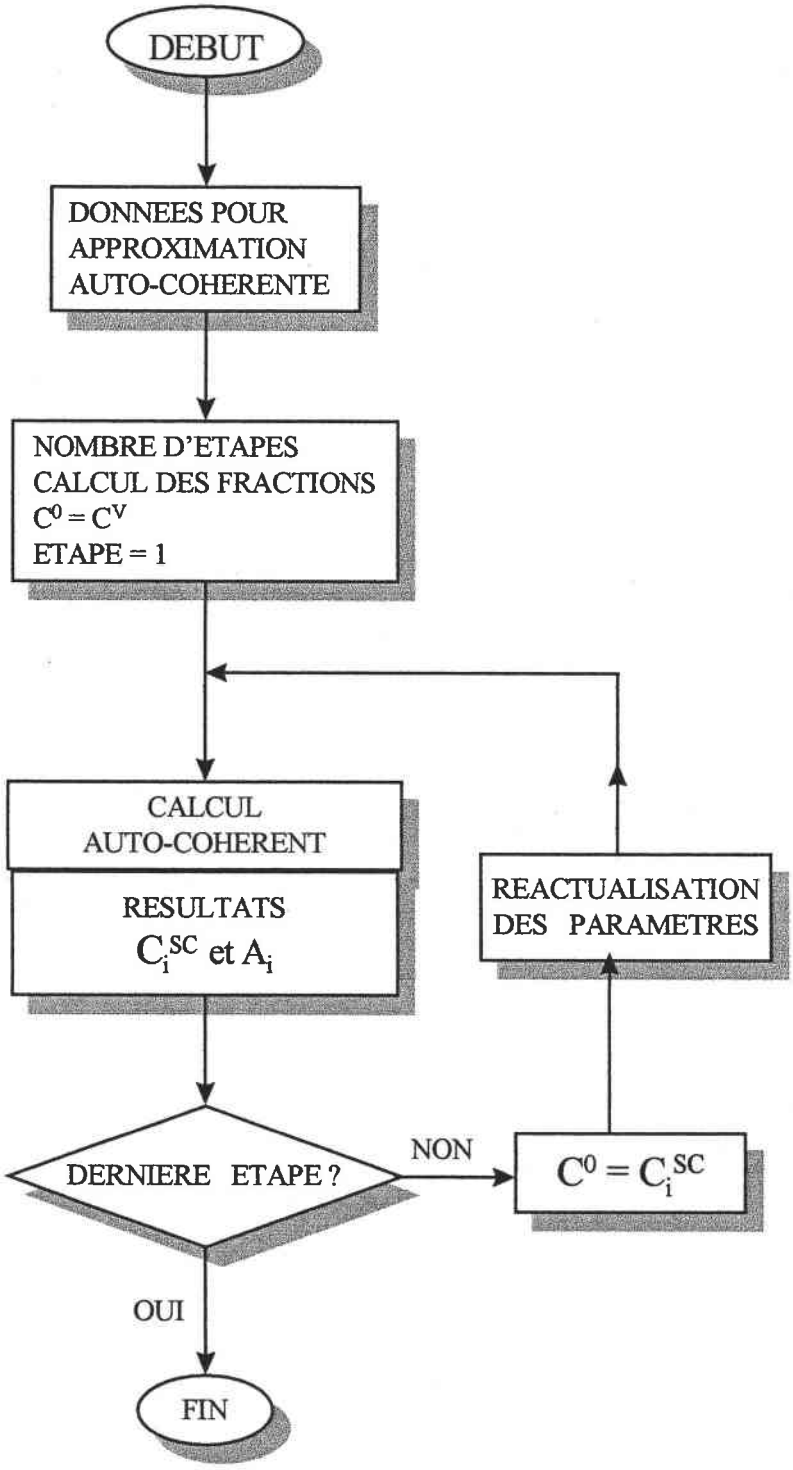
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{(i-1)f_p^1}-1 & -1 & \cdot\cdot & -1 & \cdot\cdot & -1 \\ -1 & \frac{1}{(i-1)f_p^2}-1 & \cdot\cdot & -1 & \cdot\cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \cdot\cdot & \frac{1}{(i-1)f_p^K}-1 & \cdot\cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot\cdot & -1 & \cdot\cdot & \frac{1}{(i-1)f_p^N}-1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i^1 \\ f_i^2 \\ \cdot \\ f_i^K \\ \cdot \\ f_i^N \end{Bmatrix} = \frac{1}{i-1}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \\ \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{II.94}$$

La résolution de ce système donne :

$$f_i^K = \frac{f_p^K}{1-(i-1)\sum_J f_p^J} \tag{II.95}$$

A partir de cette formule, pour un nombre d'étapes donné, on fait évoluer les fractions d'inclusions incrément par incrément jusqu'aux fractions désirées. A chaque étape, après détermination des paramètres de calcul, une approximation autocohérente est effectuée. Cette tactique permet d'améliorer considérablement la prédiction du comportement des matériaux

micro-hétérogènes. Le schéma de principe est donné sur la figure II .15.



SCHEMA D'APPROXIMATION INCREMENTALE

Figure II.15: *Algorithme incrémental*

II.8.3 - ETUDE DE LA CONVERGENCE

Nous nous appliquons ici à déterminer la convergence de la méthode en fonction du nombre d'étapes ou d'incréments.

Considérons le composite constitué d'une matrice en polyuréthanne avec 50% en fraction volumique de billes de verre disposées au hasard. Les deux constituants, supposés isotropes, ont pour caractéristiques

Polyuréthanne : $G = 1{,}4$ MPa $\nu = 0{,}499$

Verre : $G = 30{,}2$ GPa $\nu = 0{,}16$

Les calculs sont effectués en approximation 1-site. Pour ce matériau, analysons la variation de son module de Young ainsi que le module de compressibilité en fonction du nombre d'étapes *m*.

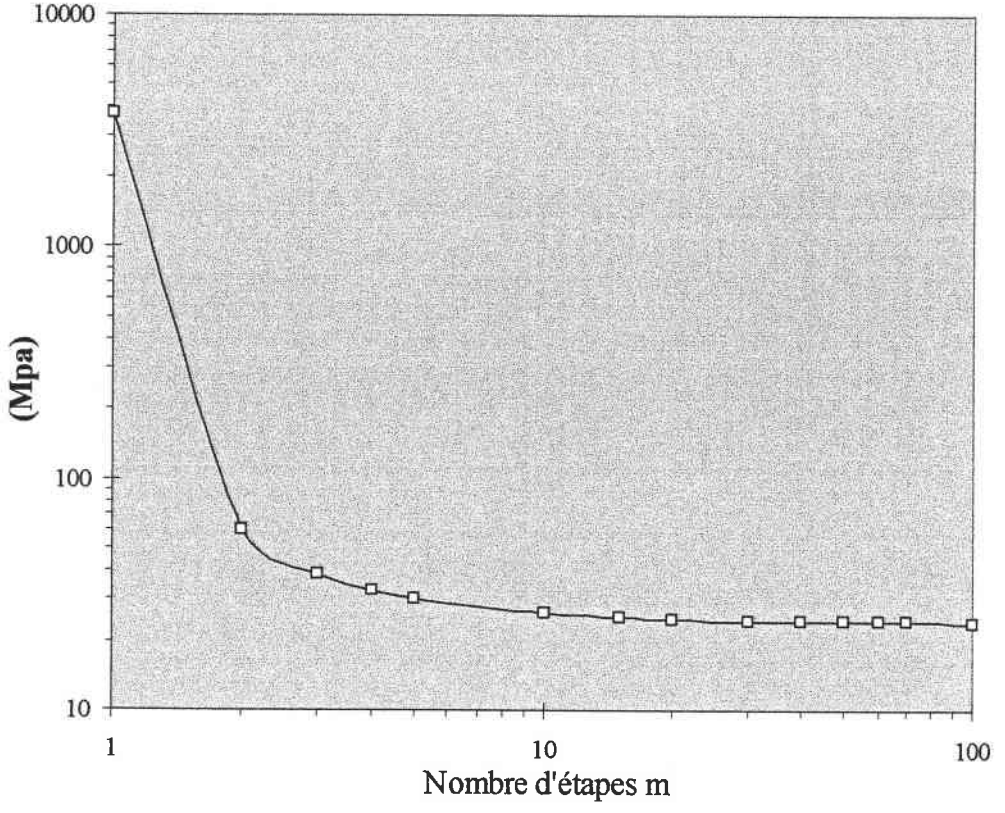


Figure II.16: *Convergence du module de Young E*

Remarque : La figure ci-dessus est à l'échelle logarithmique.

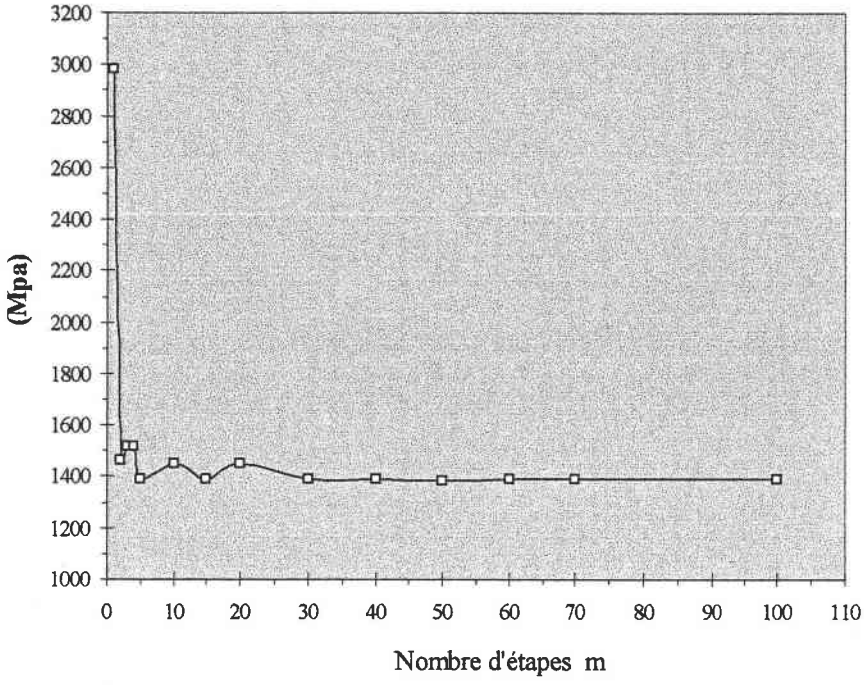


Figure II.17: *Convergence du module de compressibilité K*

L'approximation incrémentale, par son principe même, est plus longue en temps de calcul que le SCS. Mais sur les graphes ci-dessus, pour une erreur admissible ≈ 0.01%, on remarque qu'il est inutile d'augmenter le nombre d'étapes (nombre d'incréments) au-delà de 30. Par contre dans le cas d'un fort pourcentage de l'inclusion vide (>70%), ce nombre d'étape peut aisément atteindre la centaine. Le même test réalisé pour d'autres matériaux révèle un comportement similaire. L'approximation incrémentale est donc une procédure qui converge très vite. Evidemment si l'on accepte d'y consacrer le temps nécessaire en augmentant m, on doit aboutir aux résultats donnés par le schéma différentiel ($df \rightarrow 0$).

II.9 - SCHEMA INCREMENTAL EN APPROXIMATION MONOSITE

Dans cette partie nous ferons des comparaisons du schéma incrémental avec d'autres modèles, ceci dans le cas des matériaux à constituants désordonnés.

Considérons maintenant du verre poreux pour lequel nous évaluons le module de compressibilité K en fonction de la fraction volumique de pores. Les pores ici sont des cavités supposées sphériques.

Verre : E = 0,75 Mbar ν = 0,23

Pores : E = 0 Mbar

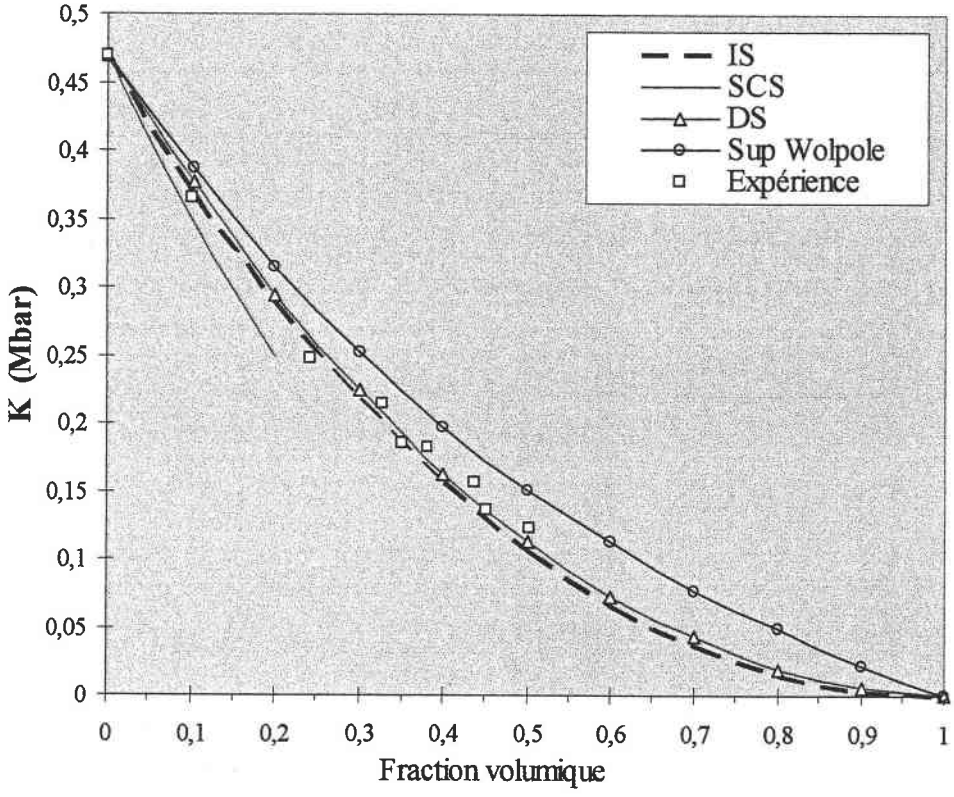


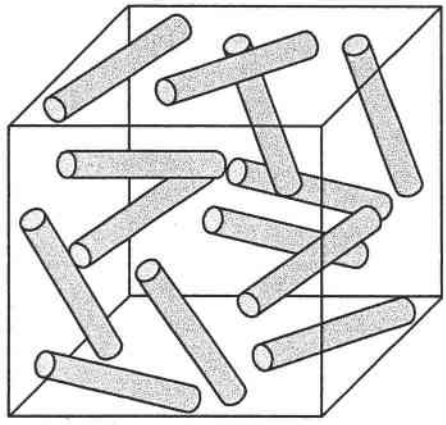
Figure II.18: *Effet de la porosité sur la compressibilité du verre*

La figure 18 présente les résultats de notre schéma de calcul avec m=20, ceux trouvés par BOUCHER (1975) en utilisant le schéma différentiel (DS), les valeurs déduites du SCS, comparés aux valeurs expérimentales de WALSH et al. (1965) et à la borne supérieure de WALPOLE. Sur le graphe, on retrouve les insuffisances du SCS qui, à partir de 20% de pores, ne peut plus donner de résultats (les calculs divergent). Par contre pour des approximations effectuées à 20 étapes, le schéma incrémental donne des prédictions très proches des points expérimentaux et de ceux du DS. Le même constat se retrouve pour d'autres constantes élastiques et d'autres types de renforts.

Considérons le composite constitué d'une matrice en époxy renforcée par des fibres de verre hachées et disposées au hasard, de caractéristiques :

Résine : E = 3105 MPa ν = 0,35

Verre : E = 69345 MPa ν = 0,22



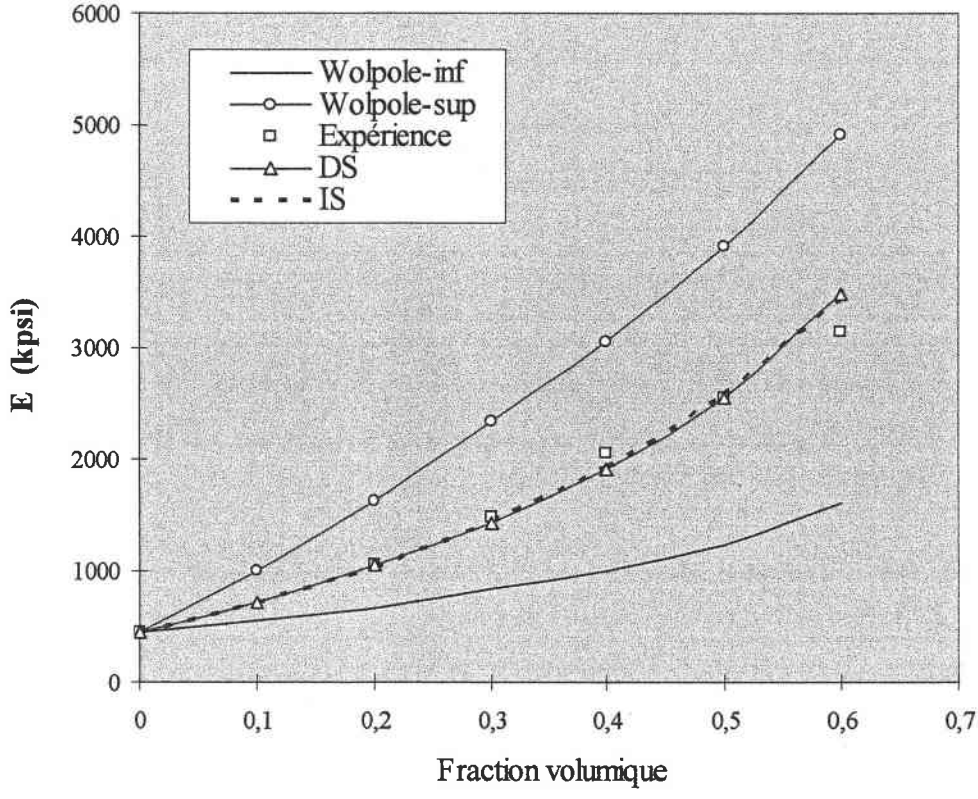


Figure II.19 : *Module d'Young d'époxy renforcé par des fibres de verre hachées*

Nous avons modélisé les fibres hachées par des ellipsoïdes allongés, avec une moyenne de 10 pour les rapports de forme. Si a, b et c désignent les valeurs des demi-axes des ellipsoïdes, on aura : a/b = a/c = 10. Ensuite, pour illustrer approximativement l'état de désordre dans le matériau, les ellipsoïdes ont été orientés de façon à représenter un maximum de direction dans l'espace. Le calcul est effectué ici avec soixante fibres.

Sur la figure ci-dessus représentant l'évolution du module de YOUNG en fonction de la fraction volumique, on peut bien constater la concordance de nos résultats avec les résultats expérimentaux.

Nous avons également considéré le cas du verre contenant une dispersion de particules sphériques de tungstène (W) pour lequel D.P.H. HESSELMAN et R.M. FALRATH (1972) ont analysé expérimentalement le comportement mécanique. Les données utilisées ici pour le DS sont ceux de BOUCHER (1975).

Verre :	E = 805 kbar	$\nu = 0{,}197$
Tungstène :	E = 3550 kbar	$\nu = 0{,}198$

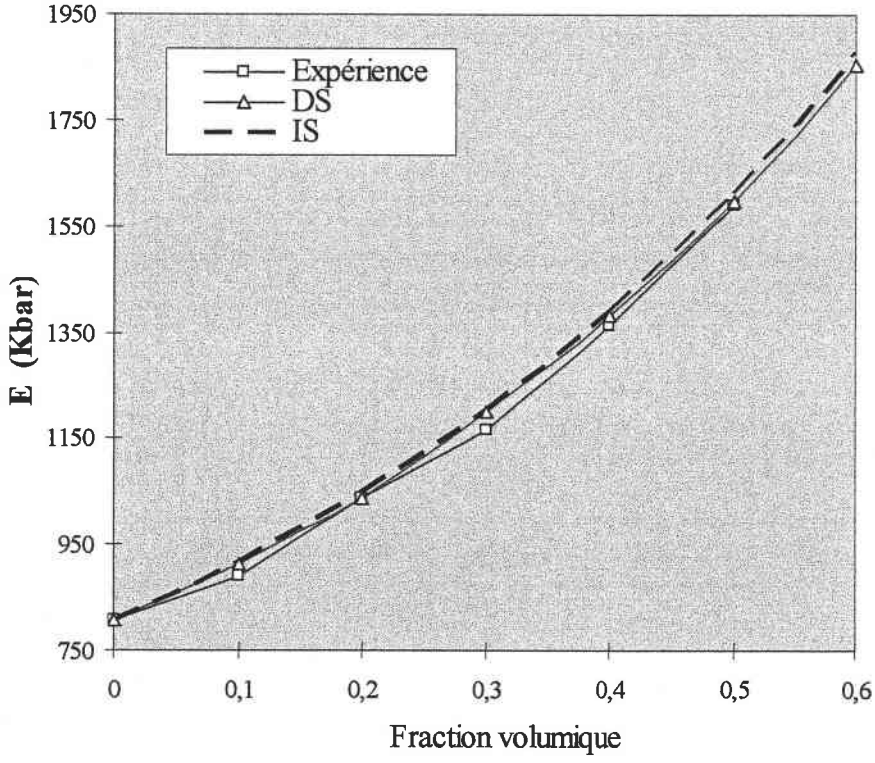


Figure II.20 : *Verre renforcé par une dispersion aléatoire de particules sphériques de tungstène*

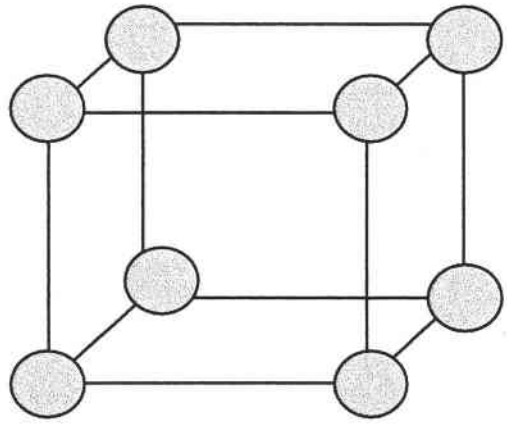
A travers toutes les comparaisons de cette partie, nous avons pu mesurer les performances du schéma incrémental en approximation monosite. Partout, il y a eu coïncidence avec les résultats expérimentaux. Ces comparaisons ont eu lieu parce que tous les matériaux hétérogènes que nous avons analysés dans cette partie sont caractérisés par une disposition désordonnée des inclusions. Le schéma incrémental, tout comme le schéma différentiel s'est montré efficace pour la prédiction du comportement mécanique de tous ces matériaux quel que soit le genre d'inclusions et la fraction volumique considérée. Analysons maintenant le cas des matériaux hétérogènes à structure ordonnée.

II.10 - SCHEMA INCREMENTAL EN APPROXIMATION MULTI-SITES

Le schéma différentiel, malgré ses performances, ne peut être appliqué correctement aux matériaux ordonnés. Par contre, le schéma incrémental peut être utilisé en prenant en compte la description de l'ordre de la structure du matériau.

Dans le cas d'inclusions élastiques nous comparons notre modèle à d'autres modèles de calcul pour différentes valeurs du rapport $r=\mu^I/\mu^M$: le modèle de SANGANI & LU (1987), celui de RODIN (1993) et le modèle d'EL MOUDEN et MOLINARI (1995) basé sur la méthode du cluster: $v^I = v^M = 0,3$ $\mu^M=200$.

Les inclusions sont des particules sphériques isotropes réparties en un réseau cubique simple.



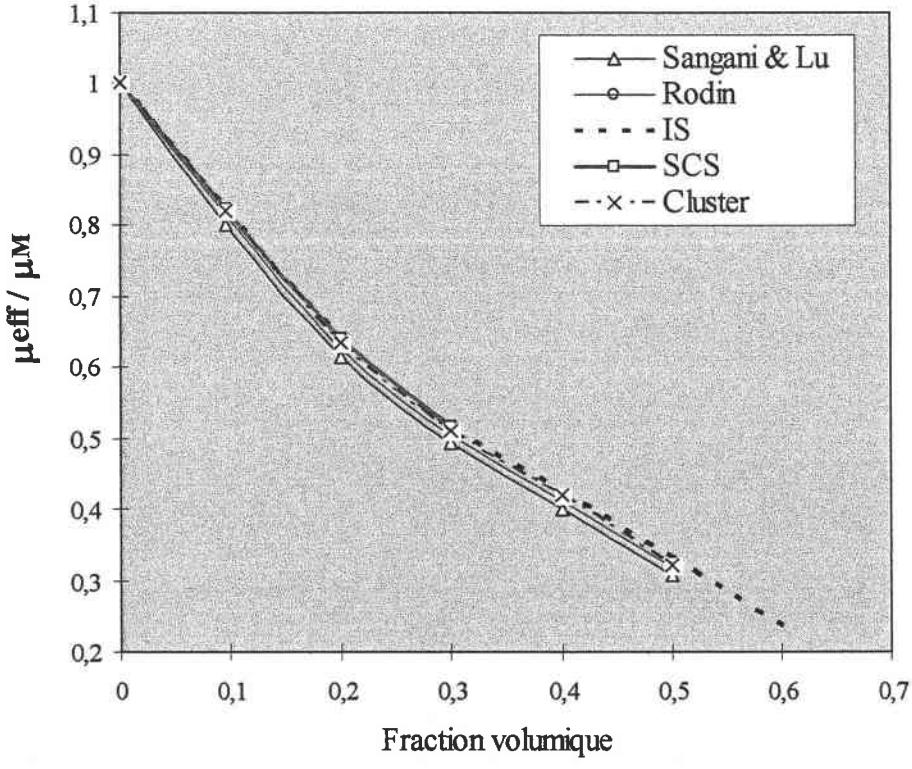


Figure II.21 : *Particules sphériques réparties en réseau cubique simple dans une matrice isotrope (r=1/20)*

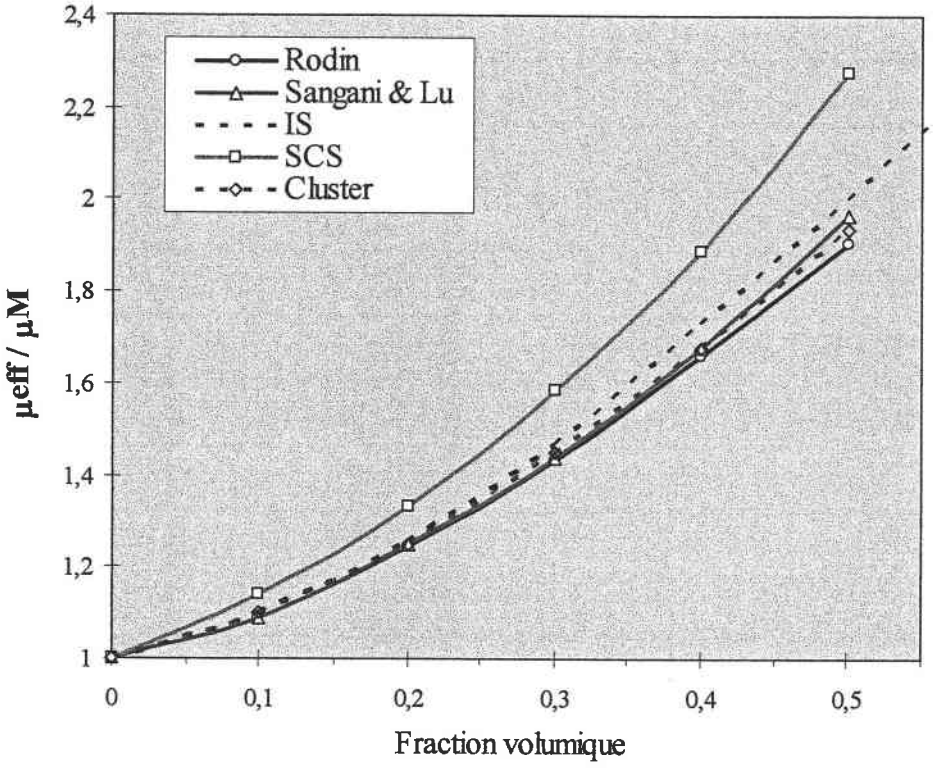


Figure II.22 : *Particules sphériques disposées en réseau cubique simple dans une matrice isotrope(r=5)*

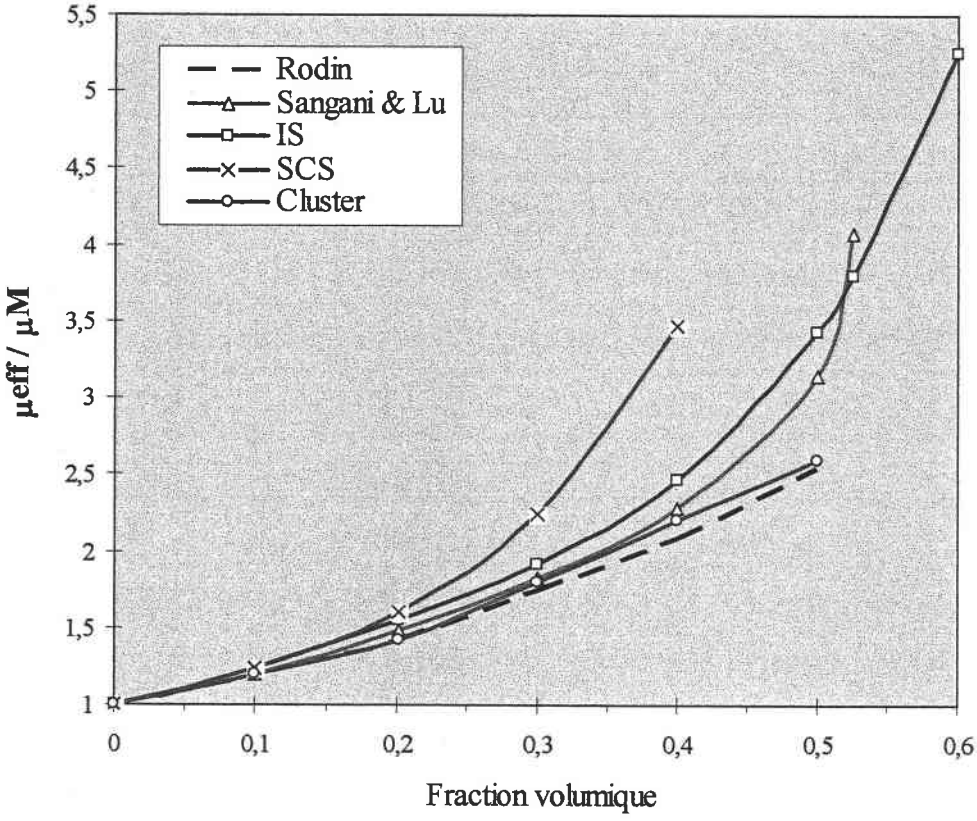


Figure II.23 : *Particules sphériques disposées en réseau cubique simple dans une matrice isotrope (r=40)*

Sur la figure 21, on remarque que la méthode autocohérente classique est limitée à f=0,3 lorsque le rapport des modules de cisaillement de l'inclusion et de la matrice est de 0.05, autrement dit lorsque l'inclusion est très molle par rapport à la matrice. Cependant, en dessous de cette fraction, tous les résultats concordent. Pour un rapport de 5 (figure 22), bien que les résultats ne soient pas identiques, les écarts entre les différents résultats ne sont pas très prononcés. Lorsque le rapport vaut 40 (figure 23), il y a un phénomène intéressant qui s'opère. En dessous de 20%, il y a concordance pour tous les résultats. Mais au-delà de cette valeur, il apparaît un écart net entre les prédictions des différents modèles. Le SCS classique est le premier à tendre dangereusement vers le rapport μ^I/μ^M. A la fraction de 50%, le modèle de SANGANI & LU amorce aussi sa grimpée. Seuls le modèle de RODIN, le schéma incrémental et le modèle basé sur les clusters gardent une allure raisonnable. Sachant qu'à la fraction de 1 (lorsque le matériau équivalent n'est constitué que de l'inclusion) on devrait avoir $\mu^{eff}/\mu^M = \mu^I/\mu^M = 40$, on peut dire que les modèles de cluster et celui de RODIN sous-estiment le comportement mécanique du matériau effectif. Le schéma incrémental multisite apparaît ainsi comme une solution intéressante.

Nous allons dans la suite effectuer une confrontation de notre schéma de calcul avec des résultats expérimentaux. Le matériau considéré est constitué d'époxy renforcé de fibres de verre. Ce sont des fibres longues cylindriques dont les sections droites forment un réseau rectangulaire.

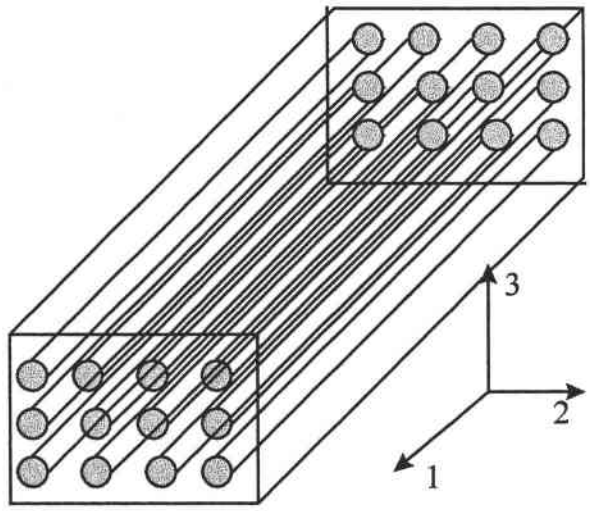


Figure II.24 : *configuration de renforts en fibres longues*

Nous avons modélisé les fibres par des ellipsoïdes ayant un rapport de forme égal à 1000. La fraction de fibres est de 50 % dans le matériau. Ce composite a été étudié expérimentalement par S. FREDERIKSEN (1997) avec des méthodes acoustiques (essai non destructif). Il existe également pour ce matériau des résultats provenant d'essais mécaniques. Nous analyserons ici sept modules caractéristiques.

Méthode	E_1(Gpa)	E_2(Gpa)	G_{12}(Gpa)	ν_{12}	ν_{21}	G_{13}(Gpa)	G_{23}(Gpa)
S. FREDERIKSEN	42.4	11.6	4.68	0.305	0.083	4.55	4.07
ESSAI MECA	43.4	10.2	-	0.320	0.075	-	-
SCS N-sites	36.5764	26.455	2.626	0.1779	0.12	2.5085	12.5
IS N-sites	38.603	9.380	3.672	0.263	0.0667	3.5929	3.017

Avec le choix raisonnable de la forme des ellipsoïdes pour modéliser les fibres de verre, les prédictions du schéma incrémental se rapprochent au mieux des valeurs expérimentales. Cette approximation est effectuée en 30 étapes avec un critère d'arrêt admissible de 0,1 %. Le SCS est appliqué avec une ''erreur'' de 0,01 %. Pour le module de YOUNG longitudinal, il y a une harmonie entre tous les résultats. Quant aux autres caractéristiques, alors que le schéma incrémental prédit des valeurs cohérentes, les prévisions du SCS sont très démarquées des valeurs expérimentales.

L'étude du schéma incrémental a montré une stabilisation rapide de la méthode. En outre, les résultats obtenus aussi bien en monosite qu'en multisite prouvent par leur cohérence avec les résultats expérimentaux la validité de ce processus d'homogénéisation qu'est le schéma incrémental. Sur les exemples présentés, on remarque bien la similitude qui existe entre le schéma différentiel et le schéma incrémental, résultat prévisible puisque les deux méthodes utilisent le même principe. Mais la similitude s'arrête là, car seul le schéma incrémental peut être appliqué à la totalité des matériaux hétérogènes, des plus simples aux plus compliqués : matériaux à renforts orientés aléatoirement ou ordonnés, matériaux à renforts rigides dans une matrice souple, matériaux fortement poreux, etc... Cette versatilité permet au schéma incrémental d'être l'outil privilégié pour décrire l'influence au niveau macroscopique des mécanismes d'endommagement survenus au niveau méso/microscopique.

CHAPITRE III

III.1 – REMARQUES PRELIMINAIRES .....

III.2 – ENDOMMAGEMENT DES MILIEUX HETEROGENES: CONSTATATIONS EXPERIMENTALES .....

III.2.1 - Critères d'endommagement fragile .....

III.2.2 - Critère d'endommagement par décohésion .....

III.3 –MODELES MICROMECANIQUES .....

III.3.1 - Modèle du renfort casse .....

III.3.1.1 - Estimation de l'ouverture de la fissure.....

III.3.1.2 - Détermination des nouvelles fractions volumiques.....

III.3.2 - Modèle du renfort décollé .....

III.3.2.1 - Calcul des contraintes dans l'interface.....

III.3.2.2 - Condition energetique de la propagation de la rupture.....

III.3.2.3 - Réactualisation de la microstructure.....

III.4 - ASPECT PROBABILISTE DE L'ENDOMMAGEMENT.....

L'ENDOMMAGEMENT MICROMECANIQUE

III.1 - REMARQUES PRELIMINAIRES

Dans la littérature, le terme **endommagement** est employé pour évoquer différents modes de dégradation du matériau, instantanés ou différés dans le temps. Dans la classification habituelle [FRANÇOIS, PINEAU, ZAOUI (1991)], on parle de l'endommagement volumique, surfacique ou mixte. L'endommagement brutal ou instantané est pratiquement exclusivement volumique. Les endommagements surfacique et mixte font principalement penser à l'action des agents agressifs ou aux chargements répétitifs (fatigue). Les modes de dégradations que nous prenons en compte dans notre étude correspondent à la première catégorie, c'est-à-dire à l'endommagement brutal volumique. Cette détérioration qui se manifeste sous différentes formes peut avoir plusieurs origines, plus ou moins compliquées, en incluant les disparités dans les géométries et dans les propriétés thermoélastiques du système renfort-matrice. Les approches conventionnelles à l'étude micromécanique d'endommagement des milieux hétérogènes supposent invariablement l'existence d'une parfaite continuité ou adhérence entre les renforts et la matrice environnante, on pourrait consulter entre autre CHRISTENSEN (1979), SELVADURAI (1994), HASHIN et HERAKOVICH (1983), KELLY et RABOTNOV (1983) et DVORAK (1991). Ceci n'exclut pas l'importance accordée aux travaux prenant en compte, toujours dans le même cadre micro-mécanique, un glissement à l'interface fibre-matrice auquel se sont intéressé entre autre GHAHREMANI et al., SELVADURAI et DASGUPTA (1990). Dans la plupart des cas, qu'il soit d'origine chimique, acoustique, magnétique ou autre, l'endommagement se finalise par une dégradation des propriétés mécaniques du matériau. Ceci explique l'importance accordée à la recherche sur les lois de comportement et les critères de rupture des matériaux en général. Notre objectif n'est pas de descendre à l'échelle atomique où tous les critères sont concentrés en un seul phénomène qui est la rupture des liaisons atomiques, mais de nous situer à une échelle où nous pouvons utiliser valablement les techniques de localisation au niveau des contraintes et des déformations.

L'endommagement d'un matériau est synonyme de la séparation de la matière. Le phénomène de séparation est de nature essentiellement irréversible. Les nouvelles surfaces créées peuvent rentrer en contact mais ne peuvent s'adhérer au sens de la mécanique des surfaces. Le processus de séparation correspond alors à la dissipation de l'énergie consommée

pour la création des nouvelles surfaces et/ou de déformations irréversibles (plastiques). Un classement sommaire des phénomènes de rupture observés peut se baser sur la présence ou non de déformation plastique.

- La séparation se produit sans déformation appréciable pendant la phase de croissance du défaut. Il n'y a pas de plasticité macroscopique observable, sauf éventuellement au niveau de la fissure. C'est la rupture fragile, phénomène que nous examinerons minutieusement plus loin.
- La séparation se produit après une déformation plastique importante de la structure pendant cette même phase de croissance. C'est la rupture qualifiée de ductile.

Cette analyse peut s'avérer insuffisante. En effet, dans la phase précédant la propagation, il peut y avoir des déformations plastiques importantes, surtout au voisinage de la ligne de la future discontinuité. Mais ce ne sont pas ces déformations qui caractérisent l'endommagement ductile. Une pièce peut se déformer de façon notable juste avant de se rompre brutalement, sans déformation plastique supplémentaire. Il arrive aussi que des métaux se rompent avec une plasticité globale importante, avant et pendant la phase de croissance, bien qu'au niveau de la surface de rupture il n'y ait pas de grande déformation visible des grains.

Les notions de ductilité et de fragilité sont en fait plus complexes et demandent une analyse complète au niveau macroscopique ou microscopique. La définition de fragilité adoptée plus haut est motivée par l'aspect macroscopique de la rupture. La véritable fragilité se manifeste au niveau de la surface de rupture, qui est plus ou moins brillante. L'aspect brillant de la surface est le reflet des diverses facettes cristallographiques mises à nu par clivage à l'intérieur des grains. Par contre une rupture véritablement ductile est caractérisée par la présence d'aspérités et de cupules au niveau des grains de la surface de rupture, montrant une très grande déformation plastique à ce niveau, il s'agit du phénomène de cavitation. Mais ces déformations ne se traduisent pas nécessairement à l'échelle macroscopique par une déformation plastique de la structure, tant qu'elles se limitent à la surface de rupture. Dans ce cas, bien que le mécanisme de rupture soit différent de ce qui précède (par clivage pur), la faible plasticité globale de la structure permet de dire que le milieu continu se comporte élastiquement, la rupture est alors fragile au sens macroscopique. Ainsi nous qualifierons de fragile un certain nombre de phénomènes macroscopiques, tels que la fissuration de fatigue, la corrosion chimique, alors qu'en toute rigueur on ne peut les considérer comme tels en se plaçant au niveau microscopique. La définition macroscopique

de fragilité est motivée par le fait que, quelle que soit la nature réelle des phénomènes de rupture, lorsque la plasticité globale de la structure est négligeable devant la déformation élastique, on peut faire la même analyse mécanique de la rupture, comme si le matériau entier était fragile. Les faciès de rupture dépendent évidemment des mécanismes réels. Ils dépendent aussi du mode de chargement. En ce qui concerne la fissuration de fatigue par exemple, le plan de la rupture est perpendiculaire à la direction de la plus grande tension, comme pour le cas de chargement quasi-statique par une tension croissante. La surface de rupture présente un aspect plus ou moins lisse. L'examen au microscope peut révéler des stries liées aux cycles de charge.

La distinction macroscopique entre ces types de rupture, ductile et fragile, est très claire lorsqu'on examine la réponse mécanique de la structure tout entière à des sollicitations extérieures, par exemple à des charges croissantes Q_i, auxquelles correspondent les déplacements généralisés d_i. Le point de rupture R se trouve soit dans la partie élastique de la réponse (rupture fragile), soit dans la partie plastique (rupture ductile).

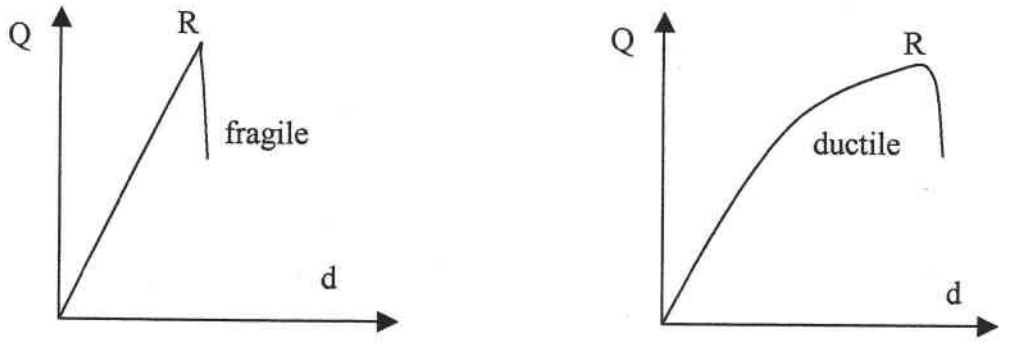


Figure III. 1 : *comportements fragile et ductile*

Le processus ou mécanisme de rupture varie fortement avec la structure du matériau. Pour un composite unidirectionnel à fibres par exemple, la rupture finale est le résultat d'une accumulation de divers mécanismes élémentaires (figure III.2), à savoir la rupture des fibres (cas 4, 5 et 7), la rupture transverse de la matrice (cas 1 et 2), la rupture longitudinale de la matrice (cas 6) et la rupture de l'interface fibre-matrice (cas 3 et 7). Il n'est pas rare d'observer des processus mixtes, c'est-à-dire une rupture de renfort suivi d'un décollement interfacial (cas 7) ou suivi d'un déchirement matriciel. Tous ces mécanismes élémentaires de rupture se retrouvent également dans les matériaux composites à particules.

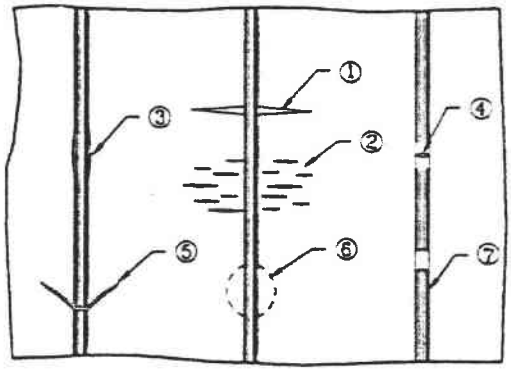


Figure III. 2: *les différentes formes de dégradations dans un composite à fibres*

De façon générale, un mécanisme de rupture n'est pas isolé, mais divers mécanismes coexistent et forment le plus souvent une chaîne de processus consécutifs et cumulatifs. Bien évidemment les mécanismes se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées. Les observations microscopiques pendant les essais 'in-situ' on permis de comprendre les mécanismes d'évolution des discontinuités. Les résultats de ces essais ont montré une nette variation de l'état de fissuration corrélé au déviateur de contrainte et une tendance générale des fissures à s'orienter dans la direction normale à la contrainte principale la plus intense.

III.2 - ENDOMMAGEMENT DES MILIEUX HETEROGENES : CONSTATATIONS EXPERIMENTALES

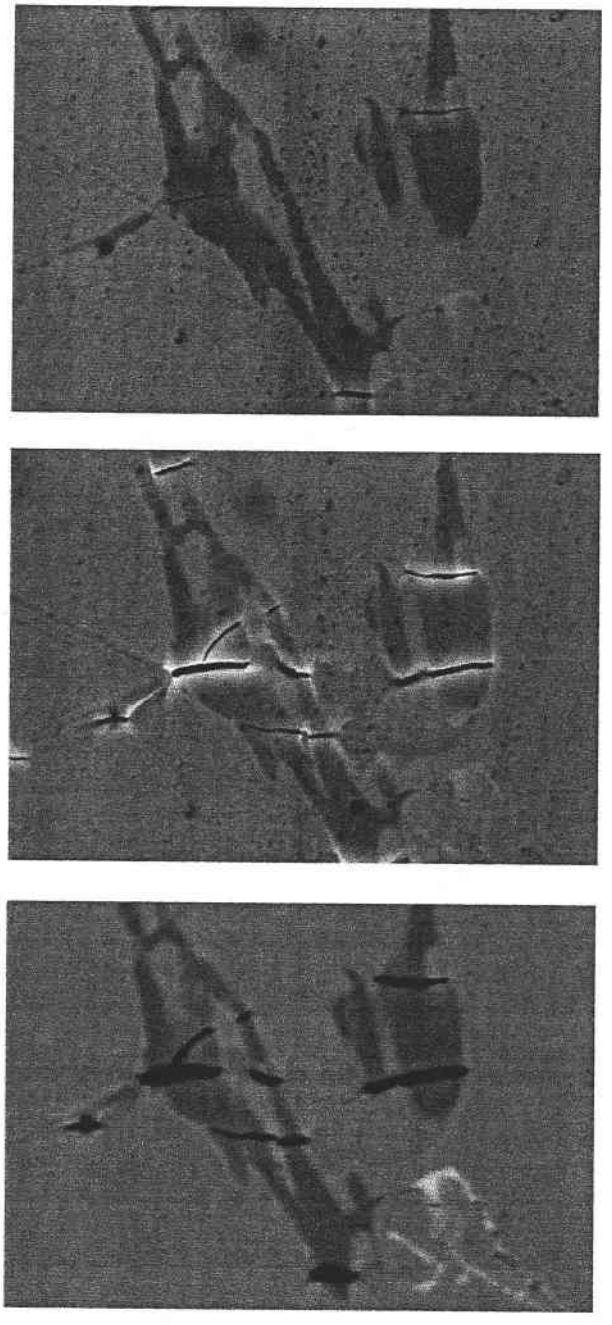
Dans le cas des matériaux hétérogènes, l'endommagement se situe majoritairement aux interfaces des constituants. La perte de cohésion aux interfaces, en particulier des renforts compacts dans une matrice ductile, peut entraîner la nucléation de l'inclusion induisant une augmentation brusque du pourcentage de vide. Le deuxième mécanisme de dégradation correspond à la rupture des renforts et/ou le déchirement de la matrice. Ces deux principaux modes d'endommagement sont abordés dans cette étude.

III.2.1 - CRITERES D'ENDOMMAGEMENT FRAGILE

Le clivage est observé principalement dans les matériaux possédant une structure cristalline tels que les métaux ou céramiques. Il est qualifié d'endommagement fragile. Toutefois la rupture dans les matériaux amorphes, tels que les verres ou le béton, se produit de manière semblable et le terme clivage est également employé dans ce cas. L'endommagement fragile des matériaux composites, qui nous intéresse au premier chef, correspond à la rupture des renforts ou au décollement des interfaces de renforts, de fibres ou des inclusions. Lors de l'étude des matériaux à structure hétérogène, on constate que les renforts, étant fréquemment très rigides, atteignent rapidement leur point de rupture et donnent naissance aux micro-

fissures (phase 1, figure 3). Elles se propagent rapidement dans le plan perpendiculaire à la direction de chargement. Aucun phénomène de plastification à l'intérieur des renforts ne bloque leur progression qui se poursuit jusqu'à l'interface avec la matrice (phase 2). Nous parlons alors de clivage des renforts.

Par contre une plastification confinée de la matrice permet de dissiper l'énergie libérée par le déplacement des lèvres de la fissure. La progression de la fissure est alors très fortement ralentie et la fissure s'arrête dans un premier temps. La propagation de la dégradation dans la matrice nécessitera une énergie supplémentaire suffisante pour vaincre la plasticité confinée en bout de fissure (phase 3).



Phase 1

Phase 2

Phase 3

Figure III. 3 : *Les différentes phases d'une rupture*

Dans la littérature, l'amorçage de la rupture des renforts est souvent envisagé sous forme d'un critère en contraintes. Nous parlons de la contrainte critique de clivage. Une estimation de la contrainte nécessaire pour écarter les plans de clivage conduit à une valeur théorique de cette contrainte de l'ordre de 0,1÷0,2 E, où E est le module de Young du matériau. Cette contrainte critique théorique est très élevée et directement proportionnelle au module élastique du matériau. Cependant, généralement on a observé que des matériaux dépourvus de fissures se rompent pour des contraintes appliquées beaucoup plus faibles que les valeurs théoriques, exemple des matériaux mentionnés dans le tableau ci-après.

Matériaux	σ_C : contrainte à la rupture (GPa)	E : module d'Young (GPa)	E/σ_C
Fibre de silice	24,6	99	4
Whisker de fer	13,4	301	23
Whisker de silicium	6,6	169	26
Silicium	5,3	169	32
Whisker d'aluminium	15,3	506	33
Chlorure de sodium	1,3	44	40
Acier „ausformé"	3,2	204	64
Corde de piano	2,8	204	72
Bore	2,5	358	145

Tableau III. 1

Au vu de ces remarques, on est alors conduit à admettre qu'il existe dans ces matériaux des « amplificateurs » de contrainte qui permettent d'atteindre localement la valeur critique σ_c. Cette concentration de contraintes peut être obtenue par un certain nombre de causes et en particulier dans les cas suivants:

1. une fissure (ou une entaille) préexistante produit à son extrémité, si sa taille est supérieure à une longueur critique, des contraintes de l'ordre de σ_c, comme l'avait prouvé GRIFFITH (1920),
2. des défauts peuvent être formées à la surface par corrosion, tout spécialement aux joints de grains, et être le lieu de concentration de contraintes,
3. une indentation ou même une marche de glissement concentre également les contraintes,
4. une distribution inhomogène de dislocations obtenue par déformation plastique peut produire localement des contraintes de l'ordre de σ_c et initier une micro-fissure.

On ne peut analyser convenablement les phénomènes de micro-fissuration sans s'intéresser de près aux mécanismes de déformation plastique, même dans les matériaux hyper fragiles. ZENER (1948) a été le premier à émettre l'hypothèse qu'une déformation plastique inhomogène pouvait entraîner l'initiation de micro-fissures.

Deux observations expérimentales mettent bien en évidence la corrélation entre la déformation plastique et la rupture.

1. La contrainte de rupture fragile du fer polycristallin est égale à la limite élastique dans un large domaine de taille de grains.

   Cette corrélation indique qu'une faible quantité de déformation plastique est suffisante pour provoquer la rupture à des contraintes appliquées inférieures à la valeur critique.
2. Une autre observation faite par GILMAN (1958) est qu'à –196°C les cristaux de zinc se rompent par clivage dans un plan (0001) sous une faible contrainte σ_R. Cependant des contraintes élevées sont requises si la déformation plastique est supprimée. Ceci s'obtient en orientant l'axe de traction normalement aux plans de glissement (0001). La cission résolue dans le plan de glissement et la déformation plastique deviennent alors nulles tandis que la contrainte normale devient maximale. On constate alors que la contrainte pour cliver le zinc augmente rapidement.

La déformation plastique est le résultat d'une accumulation de la désorganisation au niveau microstructural. ESHELBY, FRANK et NABARRO (1951) ont montré qu'un empilement de dislocations produit, en tête, une concentration de contraintes. De façon générale, les empilements sont obtenus par déformation plastique par glissement ou par déformation plastique par maclage.

Conformément aux remarques formulées précédemment, un des intérêts lié à l'emploi des méthodes de transition d'échelles réside principalement dans la simplicité d'écriture des critères formulés au niveau local (microscopique). Rappelons par exemple le critère de Schmit d'activation des systèmes de glissement plastique. Utilisé dans les méthodes d'homogénéisation, il permet pourtant de prédire les formes très complexes des surfaces de plasticité, ainsi que leur évolution en fonction du chargement, voir LIPINSKI et al (1990), BONFOH et al (2003). De la même manière, il semble raisonnable de penser que les critères de rupture simples, formulés au niveau des constituants des composites, permettront de prédire la réponse macroscopique complexe de ces matériaux et leurs surfaces de rupture dans l'espace des contraintes ou de déformations.

Le critère de rupture des renforts que nous proposons dans cette étude peut être écrit comme suit :

$$\sigma_I \leq \sigma_C \qquad \textbf{(III.1)}$$

où σ_I représente la contrainte principale maximale ($\sigma_I = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$). Il est intéressant de remarquer que ce simple critère est tridimensionnel, valable pour des sollicitations quelconques définies par le tenseur de contraintes complet.

Cependant, l'emploi d'un tel critère pour des sollicitations en compression simple (ou bi ou tri–axiales) ne permet pas d'expliquer l'apparition des fissures contenues dans des plans parallèles à la direction de compression. En effet, l'ouverture de telles fissures se ferait sous contraintes nulles. Un tel endommagement est observé dans des matériaux céramiques, le béton ou des roches. Pour pallier à cette insuffisance, nous sommes amenés à proposer un critère en déformation. En effet, la déformation dans la direction transversale par rapport à l'axe de compression est positive (allongement de la matière). Elle permet d'expliquer l'apparition des fissurations du matériau sous contraintes négatives. En reprenant la structure de l'expression (III.1), nous proposons un critère de rupture fragile valable pour les céramiques, le béton ou les roches :

$$\varepsilon_I \leq \varepsilon_C \qquad \textbf{(III.2)}$$

Dans cette inégalité, ε_C correspond à la déformation critique de rupture fragile et ε_I est la déformation principale maximale. Les essais réalisés sur le béton par KUPFER, HILDORF et RUSH (1969) en état de contraintes multiaxial semblent confirmer cette idée. La déformation critique qui résulte du dépouillement de ces essais est estimée à environ $\varepsilon_c = 10^{-4}$. En utilisant les outils de la théorie de transition d'échelles, MAZARS (1986) a élaboré un critère de déformation qui permet de reproduire assez fidèlement les essais de KUPFER et al (1973).

Dans le chapitre V de ce manuscrit, nous utiliserons cette valeur de déformation critique pour établir la surface de rupture d'un composite qui pourrait être assimilé au béton.

Les deux critères (III.1) et (III.2) constituent une condition nécessaire et suffisante pour que la rupture de renfort, modélisé à l'aide d'une inclusion ellipsoïdale, ait lieu. En effet, puisque l'état de contraintes et de déformations est identique en tous points du renfort, ces critères sont vérifiés dans toute section du renfort.

III.2.2 - CRITERE D'ENDOMMAGEMENT PAR DECOHESION

La cavitation apparaît lors de la déformation intense des matériaux. Elle précède la rupture ductile des constituants qui résulte de la coalescence des cavités. D'une manière générale, l'amorçage de la cavitation se produit sur les particules dures (non déformables) présentes dans le matériau. La fraction volumique, la distribution spatiale et géométrique, la forme et la dureté relative de ces particules par rapport à la matrice environnante influencent considérablement la ductilité du matériau global. La naissance des cavités dépend en partie de la cohésion entre les particules et la matrice. Si cette cohésion est faible, les cavités peuvent apparaître pour des déformations relativement faibles. La présence de ce type de particules induit une localisation de contraintes internes à cause des incompatibilités de comportement thermomécanique entre la matrice et la particule. Par contre, lorsque la force de cohésion entre la particule et la matrice est grande, des contraintes localisées très élevées sont nécessaires pour initier la décohésion.

Les premiers travaux consacrés à l'étude du champ de contraintes généré par la présence d'une particule dans une matrice sous sollicitation élastique datent de 1933 et sont dus à GOODIER (1933). Si la particule est moins dure que la matrice, les contraintes élevées sont localisées à l'équateur, comme pour un trou. Par contre, pour des particules dures, les concentrations de contraintes apparaissent aux pôles des particules. Les résultats de GOODIER donnent une idée sur les zones dangereuses autour de la particule.

L'amorçage, première étape du processus d'endommagement est caractérisé par l'apparition dans la matière des discontinuités. La description des mécanismes de l'amorçage suppose la connaissance des causes microscopiques de l'endommagement. On peut envisager deux mécanismes de création de cavités dans un matériau.

- Un mécanisme hétérogène lié à la présence des inclusions, des particules de seconde phase ou toute autre discontinuité de structure.
- Un mécanisme homogène basé sur les interactions entre les dislocations et la migration des lacunes.

Notre travail est consacré à la modélisation du comportement élastique des composites, le deuxième mécanisme peut être négligé pour de tels matériaux.

Les matériaux modernes comportent toujours une certaine teneur d'éléments étrangers ou d'impuretés, les composites par leur conception sont hétérogènes. Le comportement de l'inclusion ou du précipité au cours de la déformation dépend de sa rhéologie spécifique et de celle de la matrice environnante. Sa forme, le site qu'elle occupe au sein du matériau, et son orientation par rapport aux sollicitations mécaniques imposées et enfin la nature de l'interface

inclusion-matrice influencent également ce comportement. L'orientation des inclusions par rapport aux sollicitations imposées conditionne les concentrations de contrainte et de déformation au voisinage de l'inclusion. De même, la résistance de l'interface inclusion-matrice, paramètre important du comportement du système inclusion-matrice, dépend de la nature de ces deux constituants. Selon la loi de comportement de l'inclusion et de la matrice, la forme de l'inclusion et le site qu'elle occupe ainsi que la résistance de l'interface et de la sollicitation imposée, l'amorçage de l'endommagement peut se produire dans l'inclusion, dans la matrice, ou à l'interface inclusion-matrice. Ici nous focalisons notre attention sur l'amorçage prenant place à l'interface ou dans la matrice au voisinage de l'inclusion. La décohésion interfaciale dépend de l'état des contraintes à l'interface, de sa résistance et des comportements de l'inclusion et de la matrice.

Le premier but de la modélisation micro - mécanique est d'élaborer un critère pour l'amorçage de l'endommagement lié à la présence des hétérogénéités. Très fréquemment la solution du problème de l'inclusion a été utilisée pour estimer les contraintes d'interface et proposer un critère de décohésion en termes de contrainte critique, voir par exemple TANAKA et *al* (1970), BEREMIN (1981), GILORMINI (1992).

Dans le cas de composites, le critère de cette nature a été utilisé par exemple par FITOUSSI et al. (1994). La méthode de MORI-TANAKA a été employée par ces auteurs pour déterminer le comportement effectif. Le modèle ainsi imaginé a été appliqué à la description du comportement des matériaux composites de type S.M.C. (composite organique à renforts discontinus) ou Al-SiCp. Les auteurs déterminaient la rigidité d'un système correspondant à un renfort endommagé (cassé ou décollé) en suivant la propagation de la fissure dans l'interface. Un renfort équivalent, au sens de sa rigidité, remplaçait la fibre endommagée.

Dans ces travaux FITOUSSI et al. (1994) ont envisagé deux types de rupture de l'interface : par décollement suivant une normale à l'interface et/ou par glissement de l'interface. Leur critère de rupture s'écrivait sous forme proposée d'abord par COULOMB. Il est basé sur la connaissance de la contrainte normale σ_n et tangentielle τ à l'interface matrice - inclusion :

$$\sigma_n + \beta\tau \leq \sigma_d \qquad \textbf{(III.3)}$$

où :

$$\sigma_n = n_i \sigma_{ij}^m n_j \qquad \textbf{(III.4)}$$

et

$$\tau = \sqrt{n_j \sigma_{ji}^m \sigma_{ik}^m n_k - \sigma_n^2}\,. \qquad \textbf{(III.5)}$$

Les constantes β et σ_d décrivent la résistance de l'interface à la décohésion. Elles doivent être identifiées expérimentalement.

Dans ce travail, le même critère, proposé par de FITOUSSI et al., est retenu. Les figures III.4 et III.5 ci-dessous illustrent bien le processus de la décohésion d'un renfort, l'amorçage ayant lieu sur les renforts compacts rigides noyés dans une matrice ductile.

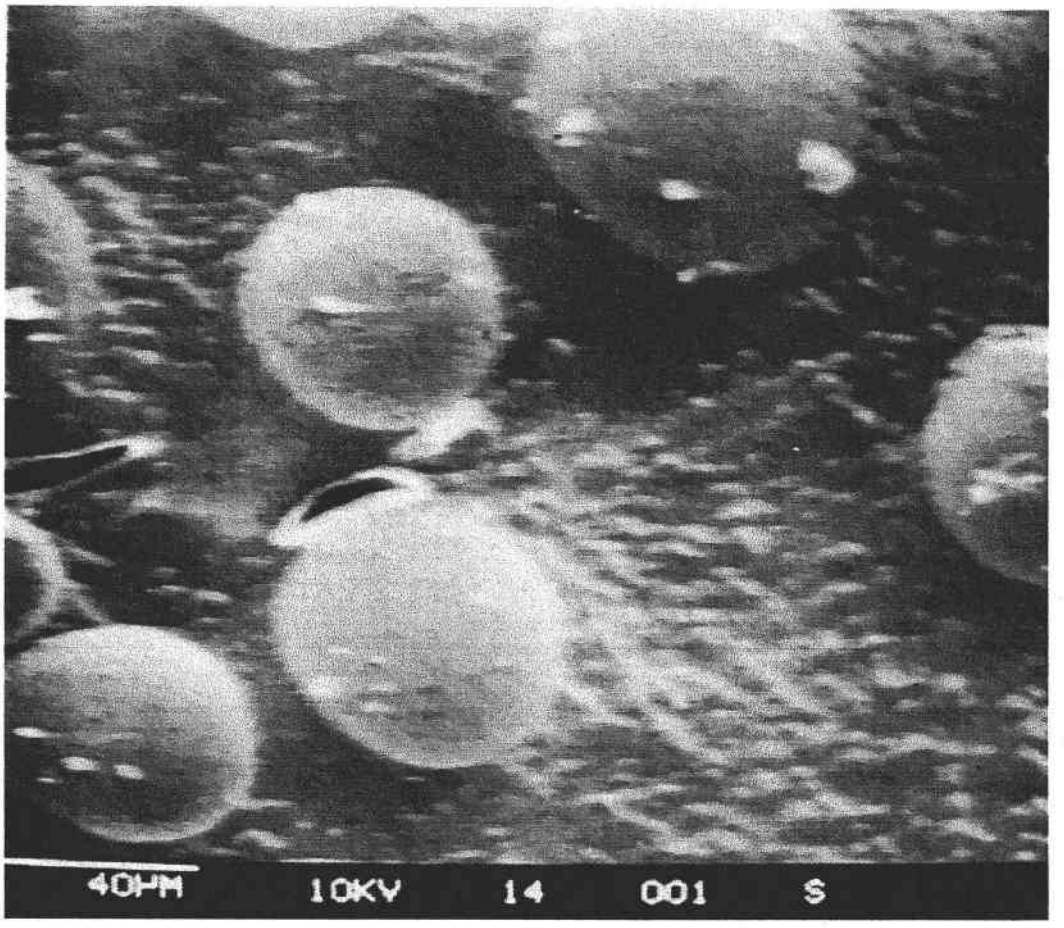


Figure III. 4 : *Amorçage de la décohésion sur une particule dure (d'après ROULIN-MOLONEY et al.)*

Ce critère est une condition nécessaire de la décohésion de la matrice. Cependant pour que la décohésion soit complète une deuxième condition doit également être vérifiée. La naissance d'une cavité dans un matériau est liée à la création de nouvelles surfaces. Ceci est possible lorsque la relaxation des contraintes dans le renfort libère assez d'énergie. Cette énergie restituée par décohésion de l'interface est proportionnelle au volume de l'inclusion et fonction croissante du niveau de contrainte et de déformation atteint dans l'inclusion.

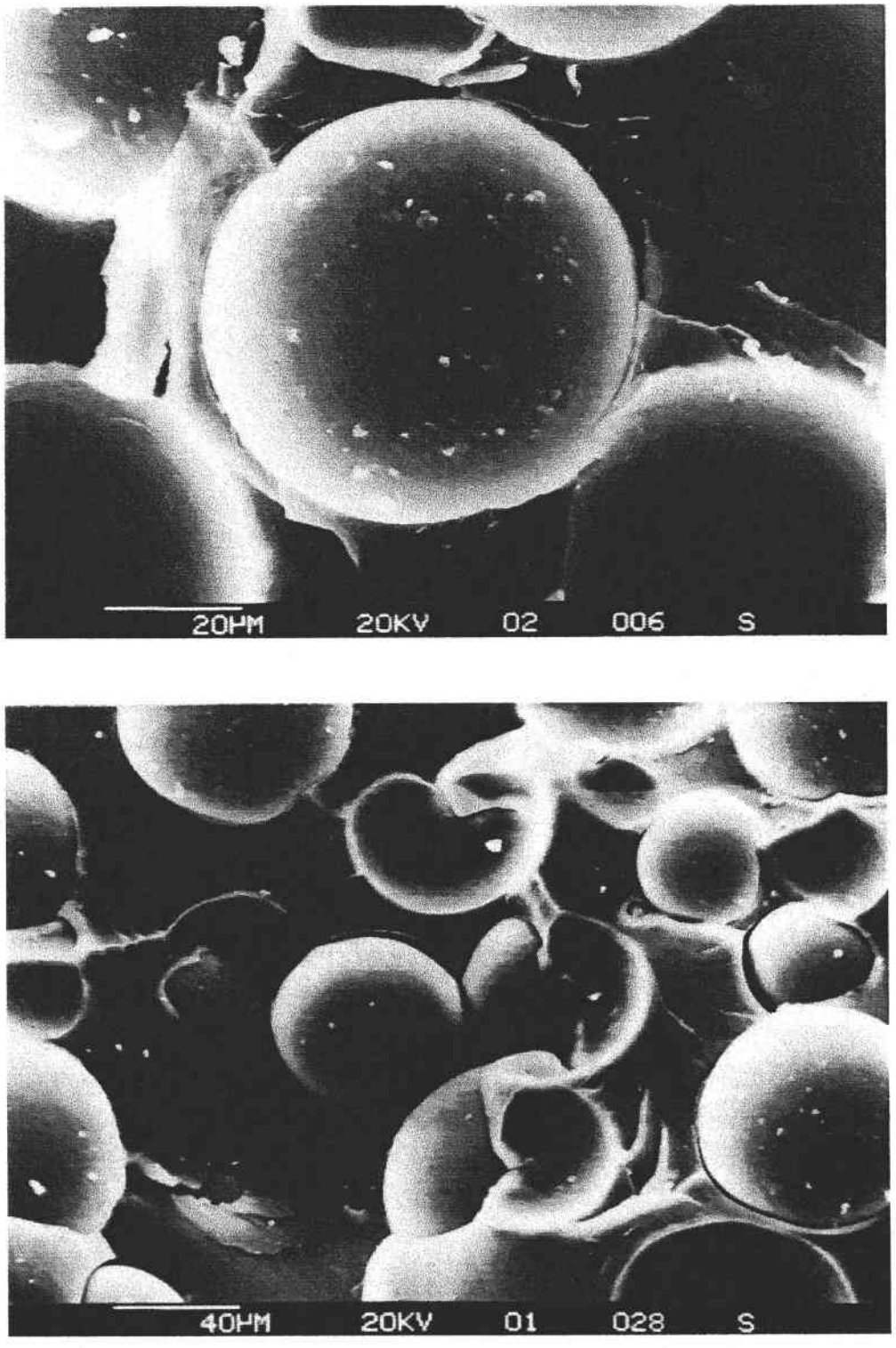


Figure III. 5 : *Amorçage et décohésion des renforts sphériques de verre dans une matrice de résine d'époxyde d'après* CANTWELL *et al.*

La condition de propagation de décohésion peut alors se traduire par la relation :

$$\mathcal{G} \geq S \qquad \textbf{(III.6)}$$

où $\mathcal{G}$ et S désignent respectivement l'énergie restituée par le processus de décohésion de l'inclusion et l'énergie dissipée à la création de la nouvelle surface. Cette condition correspond au critère de GRIFFITH (1920).

Cette approche de la condition énergétique a été développée par plusieurs auteurs pour des cas particuliers. Ainsi, GURLAND et PLATEAU (1963) l'appliquent à l'étude d'une inclusion sphérique isolée dans une matrice sollicitée en traction uniaxiale.

TANAKA et *al.*(1972), s'inspirent d'une solution approchée du problème de l'inclusion déformée élastiquement dans une matrice sous déformation plastique uniforme déduite des travaux d'ESHELBY (1957). Ces auteurs suggèrent un critère énergétique plus général que celui de GURLAND et PLATEAU (1963). Un peu plus tard, BROWN et STOBBS (1976) ont proposé un critère d'endommagement par décohésion basé sur une condition énergétique à partir d'une approche associant la mécanique des milieux continus et la métallurgie physique.

Les différents travaux discutés ci-dessus prennent diversement en compte l'effet de taille. Cet effet de taille est prévu par la condition (III.6). Il sera discuté dans le paragraphe consacré à la micro–modélisation de la décohésion.

III.3 - MODELES MICROMECANIQUES

Dans le paragraphe précédent, nous avons envisagé deux modes d'endommagement des composites. Le premier correspond à la rupture fragile d'un renfort avec une fissure traversante débouchant sur la matrice environnante. Le deuxième traduit les ruptures ou les décollements des interfaces renfort–matrice. Le principal but de cette étude est la modélisation du comportement du matériau endommagé à différents stades de chargement. Nous chercherons à quantifier l'influence, des défauts correspondants, sur les propriétés effectives du composite endommagé (tenseur de constantes élastiques) mais également sur la courbe contrainte–déformation macroscopique décrivant la réponse du matériau pour un chargement donné.

III.3.1 - MODELE DU RENFORT CASSE

Pour élaborer ce modèle nous supposons que la rupture d'un renfort est gouvernée par le critère de la contrainte critique (voir équation III.1), ou celui de la déformation critique

(relation III.2). La figure (III.3) et la micrographie suivante (figure III.6) illustrent bien ce mécanisme.

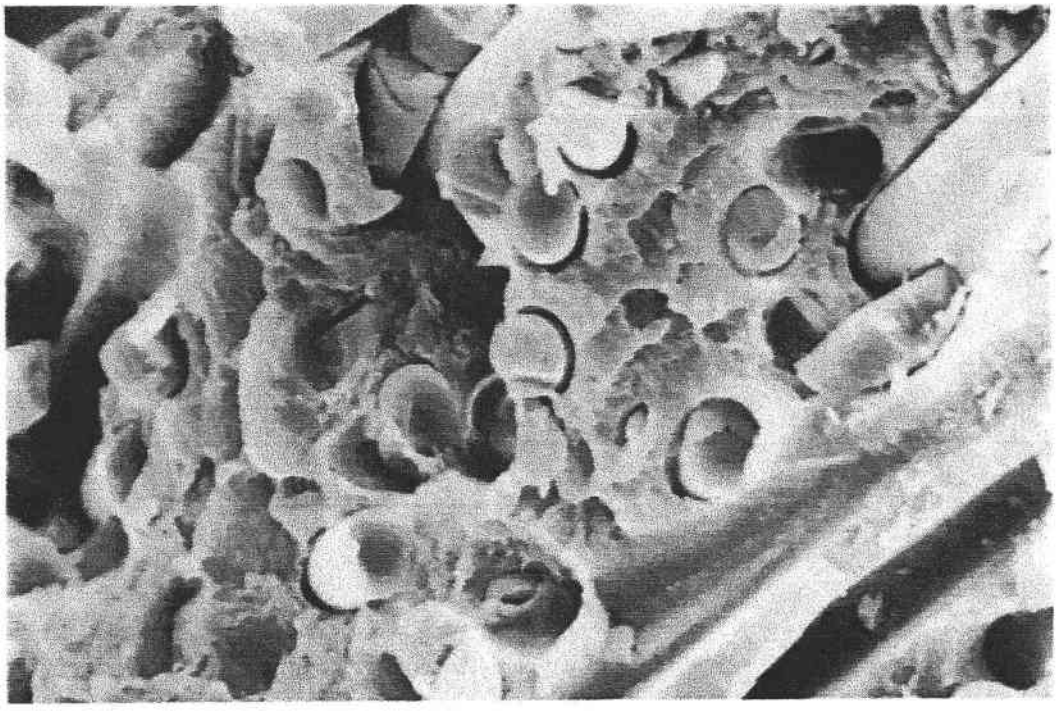


Figure III. 6 : *Rupture transversale des fibres dans un composite d'après K. FRIEDRICH*

Soit un renfort (I) isolé dans une matrice de propriétés élastiques connues, voir figure (III.7). Admettons que la contrainte macroscopique (globale) appliquée au composite vaut Σ_{ij}. Nous supposons que l'état de contraintes σ_{ij}^{I} ou de déformations ε_{ij}^{I} dans le renfort de forme ellipsoïdale (de demi axes a, b, c) est tel qu'un de ces deux critères ne soit plus satisfait. La suite du raisonnement est basée sur l'emploi du critère en contraintes. La construction du modèle pour le critère en déformation reste strictement identique.

La diagonalisation du tenseur des contraintes permet le calcul de la contrainte principale maximale σ_1 et de la direction principale qui lui est associée $\vec{n}^{(1)}$. La rupture du renfort est amorcée quand :

$$\sigma_1 \geq \sigma_c \qquad \textbf{(III.7)}$$

Le plan de la fissure est défini par le vecteur $\vec{n}^{(1)}$. Sa position, par rapport au renfort, peut être quelconque puisque l'état de contrainte est identique en tout point du renfort.

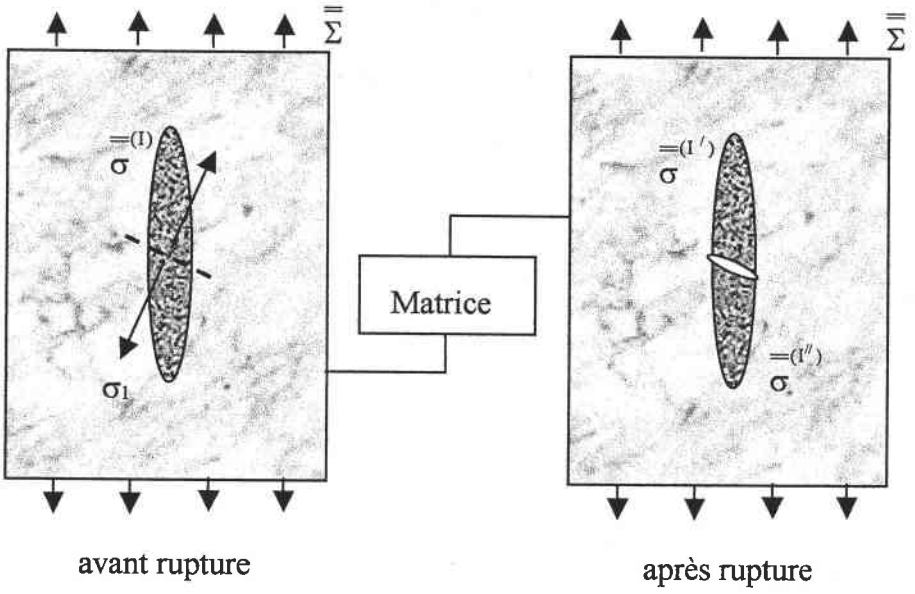


Figure III. 7 : *les fractions volumiques à la rupture d'une inclusion*

Deux possibilités simples sont envisageables : une déterministe et l'autre probabiliste. Dans le premier cas nous admettons que le renfort (I) se casse en deux morceaux de volumes identiques $V^{(I')} = V^{(I'')}$. En introduisant la fraction volumique φ d'un des morceaux du renfort,

$$\varphi = \frac{V^{(I')}}{V^{(I)}} \qquad \textbf{(III.8)}$$

Cette proposition correspond à la valeur de $\varphi = 0.5$. Dans le deuxième cas, en supposant qu'un défaut initial peut être situé dans une section quelconque du renfort, la fraction volumique du premier morceau est générée aléatoirement ($0 < \varphi < 1$). Dans tous les cas, puisque le renfort est supposé ellipsoïdal, sa rupture correspond à l'apparition d'une fissure elliptique. Notons a_f et b_f respectivement le demi axe majeur et mineur de la fissure elliptique. Ces demi axes s'expriment en fonction de la géométrie du renfort (a, b, et c), de la fraction φ et du vecteur normal $\vec{n}^{(1)}$ et s'obtiennent par la résolution du problème d'intersection d'un ellipsoïde avec un plan, voir Annexe I.

III.3.1.1 ESTIMATION DE L'OUVERTURE DE LA FISSURE

Dans toutes les études rappelées au début de ce chapitre, voir par exemple WALSH (1965), BUDIANSKY et O'CONNELL (1976), HOENIG (1979), BENVENISTE (1986) ou HASHIN (1988), les fissures ont été modélisées comme des plans mathématiques (d'épaisseur nulle). Une telle modélisation ne permet pas de reproduire d'une manière fiable la raideur du matériau fissuré. En effet, toutes les fissures sous chargement, ou suite à un chargement, sont ouvertes. Cette ouverture est liée à la déformation irréversible observée principalement à la pointe de la fissure. Le troisième demi axe de la fissure c_f peut être estimé à partir de la connaissance du champ de déplacement des lèvres d'une fissure elliptique chargée en mode d'ouverture par une contrainte appliquée au loin

$$\sigma_n = n_i^{(1)} \Sigma_{ij}\, n_j^{(1)} \qquad \textbf{(III.9)}$$

La solution exacte de ce problème, y compris pour les matériaux élastiques anisotropes, peut être trouvée par exemple chez MURA (1982). Cette solution n'est pas fermée et demande l'estimation numérique des intégrales y figurant. Eu égard aux approximations que nous avons adoptées concernant par exemple la géométrie du renfort, il nous semble judicieux d'estimer cet axe par un calcul simplifié. En effet nous admettons, d'une part, que le demi axe c_f correspond au déplacement de la lèvre supérieure de la fissure en son centre. En appelant le double de ce déplacement CCOD (Crack Centre Opening Displacement), nous avons :

$$c_f = \frac{1}{2} CCOD \qquad \textbf{(III.10)}$$

D'autre part, deux solutions correspondant aux configurations géométriques simples conduisent au résultat suivant, obtenu par IRWIN (1962):

$$CCOD = 4K_I \frac{(1-\nu^m)}{\mu^m} \sqrt{\frac{b_f}{2\pi}} \qquad \textbf{(III.11)}$$

où μ^m et ν^m sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de POISSON de la matrice.

La première configuration concerne une fissure traversante en état de déformations planes. Dans ce cas nous avons :

$$a_f \to \infty \quad \text{ou} \quad \frac{b_f}{a_f} = 0 \qquad \textbf{(III.12)}$$

et

$$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi b_f} \qquad \textbf{(III.13)}$$

La deuxième configuration correspond à une fissure circulaire. Dans ce cas nous avons :

$$a_f = b_f \quad \text{ou} \quad \frac{b_f}{a_f} = 1 \qquad \textbf{(III.14)}$$

et

$$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma_n \sqrt{\pi b_f} \qquad \textbf{(III.15)}$$

En première approximation, nous proposons de généraliser ce résultat au cas d'une fissure elliptique de forme quelconque ($0 \leq \frac{b_f}{a_f} \leq 1$) par l'interpolation linéaire ci-dessous :

$$CCOD = 4\, K_I\left(\frac{b_f}{a_f}\right) \frac{(1-\nu^m)}{\mu^m} \sqrt{\frac{b_f}{2\pi}} \qquad \textbf{(III.16)}$$

où

$$K_I\left(\frac{b_f}{a_f}\right) = \left(1 + \frac{2-\pi}{\pi} \frac{b_f}{a_f}\right) \sigma_n \sqrt{\pi b_f} \qquad \textbf{(III.17)}$$

Cette solution, purement élastique, ne prend pas en compte la plastification de la matrice au voisinage du front de la fissure et par conséquent sous-estime l'ouverture de cette dernière. Pour pallier ce déficit, nous avons introduit dans notre modélisation deux approximations basées sur le modèle d'IRWIN et de DUGDALE-BARENBLATT. Dans les deux modèles nous admettons l'existence d'une contrainte limite de la matrice σ_o^m au-delà de laquelle il y a une déformation irréversible qui apparaît dans le matériau. Avant d'aborder cette construction, il est utile de rappeler les formules de base valables pour les fissures elliptiques.

IRWIN (1962) a établi les résultats suivants :

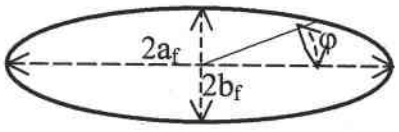


Figure III. 8 : *ouverture d'une fissure*

- Le facteur d'intensité de contraintes varie le long du front de la fissure elliptique.

$$K_I(\varphi)=\frac{\sigma_n\sqrt{\pi b_f}}{\Phi}\left(\sin^2\varphi+\frac{b_f^2}{a_f^2}\cos^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(III.18)}$$

avec

$$\Phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{a_f^2-b_f^2}{a_f^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}d\varphi\approx\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{4}\frac{a_f^2-b_f^2}{a_f^2}-\frac{3}{64}\left(\frac{a_f^2-b_f^2}{a_f^2}\right)^2-\ldots\right] \qquad \textbf{(III.19)}$$

- Le facteur d'intensité de contraintes est maximal sur l'axe mineur de la fissure.

$$K_I\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sigma_n\sqrt{\pi b_f}}{\Phi} \qquad \textbf{(III.20)}$$

- Le facteur d'intensité de contraintes est minimal sur l'axe majeur de la fissure.

$$K_I(0)=\frac{\sigma_n\sqrt{\pi\frac{b_f^2}{a_f}}}{\Phi} \qquad \textbf{(III.21)}$$

- ***CORRECTION PLASTIQUE D'IRWIN***

Ce modèle a été élaboré en 1958 dans le cas de fissures traversantes. En régime élastique et au voisinage de la pointe, la contrainte normale, dans le plan de la fissure, est donnée par $\sigma_{yy}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$. Ainsi à la pointe de la fissure on obtient $\sigma_{yy}(r=0)=\infty$. Une telle contrainte est physiquement inadmissible, d'où l'existence d'une zone plastique de taille r_p^* (voir figure III.9). Dans cette zone, la contrainte est limitée à la contrainte d'écoulement plastique σ_{ys}:

$$\sigma_{yy}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p^*}}=\sigma_{ys}\Rightarrow r_p^*=\frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{ys}^2} \qquad \textbf{(III.22)}$$

Cette expression de la taille de zone plastifiée n'est pas tout à fait juste car elle ne respecte pas l'équilibre des forces entre le profil élastique et le profil élasto-plastique. Une correction est donc nécessaire, voir figure III.9.

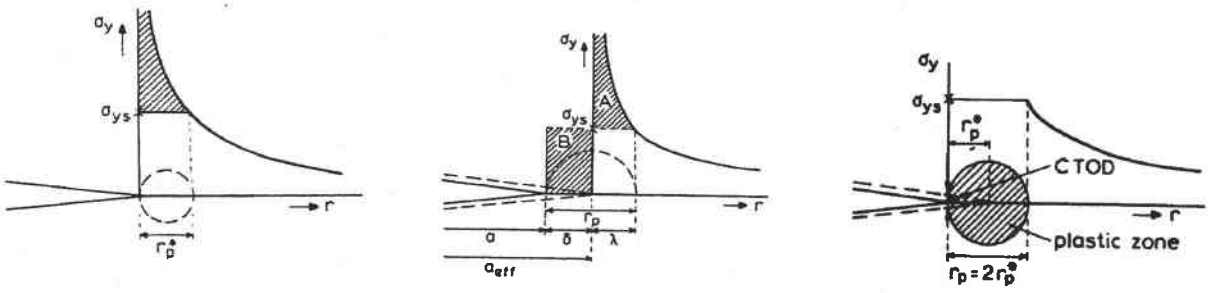


Figure III. 9 : *plastification confinée à la pointe d'une fissure*

Après calcul, la valeur de la largeur de la zone plastifiée est estimée à :

$$r_p = 2 \quad r_p^* = \frac{K_I^2}{\pi \sigma_{ys}^2}. \qquad \textbf{(III.23)}$$

Conformément au deuxième schéma de la figure III.7 nous pouvons préserver la solution élastique du problème en introduisant une fissure fictive de longueur :

$$a_{eff} = a + r_p^*. \qquad \textbf{(III.24)}$$

En suivant la même démarche nous pouvons calculer les demi axes de la fissure fictive elliptique :

$$\begin{aligned} a_{eff} &= a_f + r_a^* \\ b_{eff} &= b_f + r_b^* \end{aligned} \qquad \textbf{(III.25)}$$

Les étendus des zones plastiques sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} r_a^* &= \frac{K_I^2(0)}{2\pi\left(\sigma_o^m\right)^2} = \frac{1}{2} b_f \frac{b_f}{a_f}\left(\frac{\sigma_n}{\Phi\ \sigma_o^m}\right)^2 \\ r_b^* &= \frac{K_I^2(\frac{\pi}{2})}{2\pi\left(\sigma_o^m\right)^2} = \frac{1}{2} b_f \left(\frac{\sigma_n}{\Phi\ \sigma_o^m}\right)^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(III.26)}$$

En introduisant ce résultat dans (III.25) nous obtenons les dimensions de la fissure elliptique fictive :

$$\begin{aligned} a_{eff} &= a_f\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_f}{a_f}\frac{\sigma_n}{\Phi\ \sigma_o^m}\right)^2\right] \\ b_{eff} &= b_f\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_n}{\Phi\ \sigma_o^m}\right)^2\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(III.27)}$$

Ces valeurs permettent le calcul du facteur d'intensité de contraintes fictif K_{Ieff} grâce à l'expression (III.17)

$$K_{Ieff}\left(\frac{b_{eff}}{a_{eff}}\right) = \left(1 + \frac{2-\pi}{\pi}\frac{b_{eff}}{a_{eff}}\right)\sigma_n\sqrt{\pi b_{eff}}. \qquad \textbf{(III.28)}$$

et finalement l'estimation du troisième demi axe de l'inclusion vide grâce à expression (III.16) :

$$c_f = \frac{1}{2} CCOD = 2\, K_{Ieff}\left(\frac{b_{eff}}{a_{eff}}\right) \frac{(1-\nu^m)}{\mu^m} \sqrt{\frac{b_{eff}}{2\pi}}\,. \qquad \text{(III.29)}$$

- ***Correction plastique de Dugdale – Barenblatt***

Tout comme IRWIN, DUGDALE (1960) et BARENBLATT (1962) ont considéré l'existence d'une fissure effective de longueur 2a+2ρ, qui reste fermée sur une longueur ρ en bout de fissure. La taille de ρ est choisie de telle sorte que la singularité en contrainte disparaisse. Il faudrait donc que l'intensité de contrainte K_σ due à la contrainte uniforme σ_n soit compensée par l'intensité de contrainte K_ρ créée par la contrainte de fermeture σ_{ys} :

$K_\sigma = -K_\rho$.

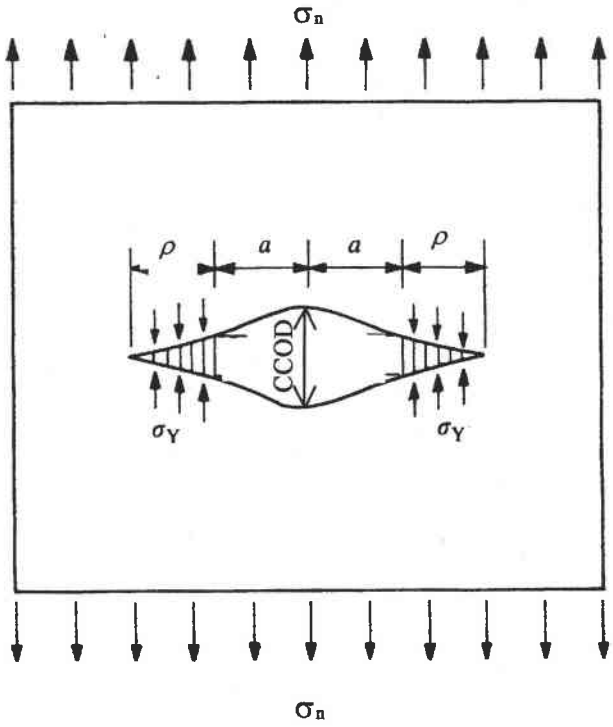


Figure III. 10 : *ouverture de la fissure (DUGDALE-BARENBLATT)*

Après calcul on trouve que :

$$\rho = \frac{\pi^2 \sigma^2 a}{8\sigma_{ys}^2} = \frac{\pi K_I^2}{8\sigma_{ys}^2} \qquad \textbf{(III.30)}$$

D'une manière semblable au modèle d'IRWIN, nous introduisons la notion d'une fissure fictive de longueur :

$$a_{eff} = a + \frac{\rho}{2} \qquad \textbf{(III.31)}$$

permettant le calcul de l'ouverture centrale de la fissure avec la prise en compte de la plastification de la matière.

Dans le cas de la fissure elliptique, nous déterminons les demi axes de la fissure fictive en utilisant les formules (III.24). Les étendues des zones plastiques sont données cette fois-ci par les expressions suivantes :

$$r_a^* = \frac{\rho_a}{2} = \frac{\pi K_I^2(0)}{16\left(\sigma_o^m\right)^2} = \frac{\pi^2}{16} b_f \frac{b_f}{a_f}\left(\frac{\sigma_n}{\Phi\ \sigma_o^m}\right)^2$$
$$r_b^* = \frac{\rho_b}{2} = \frac{\pi K_I^2(\frac{\pi}{2})}{16\left(\sigma_o^m\right)^2} = \frac{\pi^2}{16} b_f \left(\frac{\sigma_n}{\Phi\ \sigma_o^m}\right)^2 \qquad \textbf{(III.32)}$$

Les prévisions des deux modèles (et de DUGDALE) diffèrent par les facteurs $\frac{1}{2}$ pour celui de IRWIN et $\frac{\pi^2}{16}$ pour celui de DUGDALE. Le modèle de DUGDALE prédit une zone plastifiée plus grande, le rapport entre les deux étendues étant $\frac{\pi^2}{8}$ soit environ 1,234.

Pour déterminer l'ouverture de la fissure dans son centre, et par conséquent le troisième demi axe de la fissure, nous utilisons les relations (III.27) et (III.28).

Pour terminer ce paragraphe, comparons les prévisions des deux modèles. Supposons que la contrainte à l'infinie vaut $\sigma_n = q\ \sigma_o^m$. Supposons également, pour simplifier la comparaison, qu'il s'agit d'une fissure circulaire (penny shape) pour laquelle $\Phi = \frac{\pi}{2}$. En notant $K_I = \frac{2}{\pi}\sigma_n\sqrt{\pi b_f}$, nous avons alors:

Modèle de IRWIN	Modèle de DUGDALE
$r_a^* = r_b^* = \frac{1}{2} b_f \left(\frac{\sigma_n}{\Phi\ \sigma_o^m}\right)^2 = 2\left(\frac{q}{\pi}\right)^2 b_f$	$r_a^* = r_b^* = \frac{\pi^2}{16} b_f \left(\frac{\sigma_n}{\Phi\ \sigma_o^m}\right)^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 b_f$
$a_{eff} = b_{eff} = b_f\left[1+2\left(\frac{q}{\pi}\right)^2\right]$	$a_{eff} = b_{eff} = \left[1+\left(\frac{q}{2}\right)^2\right] b_f$
$K_{Ieff} = K_I\sqrt{1+2\left(\frac{q}{\pi}\right)^2}$	$K_{Ieff} = K_I\sqrt{1+\left(\frac{q}{2}\right)^2}$
$c_{Irwin} = 2K_I \frac{\left(1-\nu^m\right)}{\mu^m}\sqrt{\frac{b_f}{2\pi}}\left[1+2\left(\frac{q}{\pi}\right)^2\right]$	$c_{Dugdale} = 2K_I \frac{\left(1-\nu^m\right)}{\mu^m}\sqrt{\frac{b_f}{2\pi}}\left[1+\left(\frac{q}{2}\right)^2\right]$

Tableau III. 2 : *comparaison des modèles d'IRWIN et de DUGDALE-BARENBLATT*

Il en résulte que :

$$\frac{C_{Dugdale}}{C_{Irwin}} = \frac{1+\left(\frac{q}{2}\right)^2}{1+2\left(\frac{q}{\pi}\right)^2} \qquad \textbf{(III.33)}$$

c'est-à-dire que ce rapport vaut environ 1,011 pour q=0,5 et passe à 1,039 pour q=1,0. Les deux modèles conduisent alors, dans le cas du comportement élastique de la matrice ($\sigma_n < \sigma_o^m$) étudié dans ce travail, aux estimations du volume de vide, résultant de la rupture d'un renfort, comparables.

III.3.1.2 DETERMINATION DES NOUVELLES FRACTIONS VOLUMIQUES

La rupture d'un renfort change la microstructure du volume élémentaire représentatif. En effet, suite à cet événement le renfort rompu se sépare en deux et une nouvelle inclusion vide apparaît (trois nouveaux constituants ou lieu d'un renfort). Si la fraction initiale du renfort rompu est f^I, après la rupture nous obtenons deux renforts des mêmes propriétés élastiques, de la même orientation morphologique et cristallographique, mais de la morphologie différente. Conformément à l'expression (III.8), leurs fractions volumiques sont maintenant :

$$\begin{aligned} &\varphi\, f^I && \text{pour le premier morceau} \\ &(1-\varphi) f^I && \text{pour le deuxième morceau} \end{aligned} \qquad \textbf{(III.34)}$$

Si, par exemple, la rupture s'opère de telle manière que l'axe c du renfort est affecté, les nouvelles morphologies des renforts sont :

$$\begin{aligned} &c^{I'} = \varphi\, c^I && \text{pour le premier morceau} \\ &c^{I''} = (1-\varphi) c^I && \text{pour le deuxième morceau} \end{aligned} \qquad \textbf{(III.35)}$$

La création d'une nouvelle inclusion vide change le volume total du VER. Estimons en premier lieu la fraction volumique de ce vide. Il est facile de démontrer que, si la fraction volumique initiale du renfort vaut f^I, alors la fraction volumique du vide f^V vaut :

$$f^V = f^I \frac{V^V}{V^I} = f^I \frac{a_f b_f c_f}{abc} \qquad \textbf{(III.36)}$$

car a_f, b_f, et c_f s'expriment uniquement en fonction de a, b, et c – les demi axes du renfort, voir l'Annexe I et l'expression (III.29).

L'ajout de l'inclusion vide change le volume du VER ou la fraction totale des constituants. En effet, si avant la rupture cette fraction volumique totale valait 1, suite à la rupture elle vaut $1+f^V$. Il est donc indispensable de normaliser ces fractions volumiques pour tous les constituants. Les nouvelles fractions s'écrivent maintenant :

$$f^I := \frac{f^I}{1+f^V} \qquad \textbf{(III.37)}$$

où l'indice I parcourt les valeurs de 1 à N+2, et N est le nombre de constituants avant la rupture, les deux nouveaux constituants sont le deuxième morceau de la fibre cassée et le fissure (vide).

III.3.2 - MODELE DU RENFORT DECOLLE

D'une manière semblable à celle proposée par FITOUSSI et al. (1994), nous déterminons les contraintes dans l'interface. Si leur niveau est suffisamment élevé, c'est-à-dire si le critère (III.3) n'est plus vérifié, nous admettons qu'une microfissure est initiée dans l'interface, côté matrice. Cette fissure peut se propager, en provoquant le décollement du renfort, si l'énergie élastique restituée par sa propagation est plus grande que l'énergie consommée à la création des nouvelles surfaces. Ceci est conforme avec la condition (III.6).

III.3.2.1 CALCUL DES CONTRAINTES DANS L'INTERFACE

Analysons la configuration présentée sur la figure suivante. Un renfort de propriétés élastiques c^I_{ijkl} et de forme ellipsoïdale, orienté à l'aide de trois angles (par exemple les angles d'Euler) par rapport au repère dans lequel ses propriétés élastiques sont exprimées, est noyé dans une matrice des propriétés élastiques c^m_{ijkl} données dans le même repère.

Dans ce renfort s'exerce une contrainte dont les composantes, par rapport au même repère, sont les σ^I_{ij}. Cette contrainte est supposée constante dans l'ellipsoïde (solution d'ESHELBY). En tout point de l'interface peut être calculé le vecteur normal extérieur au renfort, des composantes n_i. Pour déterminer les contraintes s'exerçant dans l'interface du côté de la matrice, nous utilisons la technique des opérateurs interfaciaux développée par HILL (1952) et WALPOLE (1967). Elle est basée sur l'hypothèse de la continuité des vecteurs de contrainte et de déplacement à travers l'interface (hypothèse de l'adhésion parfaite du renfort).

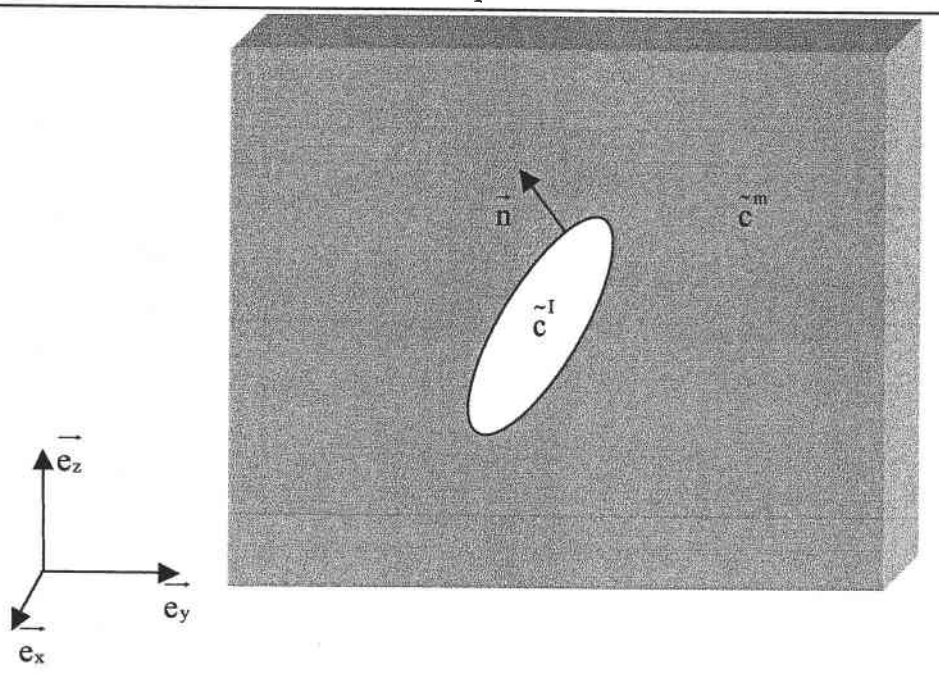


Figure III. 11 : *traction à l'interface inclusion-matrice*

En adoptant les notations de WALPOLE, nous introduisons tout d'abord un ensemble des tenseurs idempotents, résultats de la décomposition du tenseur unité d'ordre 2 et 4. Nous avons :

$$\delta_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \textbf{(III.38)}$$

où :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= n_i n_j \\ b_{ij} &= \delta_{ij} - n_i n_j \end{aligned} \qquad \textbf{(III.39)}$$

et

$$I_{ijkl} = E^1_{ijkl} + E^2_{ijkl} + E^3_{ijkl} + E^4_{ijkl} \qquad \textbf{(III.40)}$$

où

$$\begin{aligned} E^1_{ijkl} &= \frac{1}{2} b_{ij} b_{kl} \qquad\qquad E^2_{ijkl} = a_{ij} a_{kl} \\ E^3_{ijkl} &= \frac{1}{2}\left(b_{ik} b_{jl} + b_{jk} b_{il} - b_{ij} b_{kl}\right) \\ E^4_{ijkl} &= \frac{1}{2}\left(b_{ik} a_{jl} + b_{il} a_{jk} + b_{jl} a_{ik} + b_{jk} a_{il}\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(III.41)}$$

Le saut de contraintes et de déformations à travers l'interface du renfort s'écrit :

$$\sigma^I_{ij} - \sigma^m_{ij} = Q^{I*}_{ijkl}\left(s^m_{klmn} - s^I_{klmn}\right)\sigma^m_{mn} = -Q^{m*}_{ijkl}\left(s^I_{klmn} - s^m_{klmn}\right)\sigma^I_{mn} \qquad \textbf{(III.42)}$$

$$\varepsilon_{ij}^{I}-\varepsilon_{ij}^{m}=P_{ijkl}^{I*}\left(c_{klmn}^{m}-c_{klmn}^{I}\right)\varepsilon_{mn}^{m}=-P_{ijkl}^{m*}\left(c_{klmn}^{I}-c_{klmn}^{m}\right)\varepsilon_{mn}^{I} \qquad \textbf{(III.43)}$$

s_{ijkl}^{I} et s_{ijkl}^{m} (respectivement c_{ijkl}^{I} et c_{ijkl}^{m}) représentent les composantes des tenseurs de souplesses (constantes) élastiques du renfort et de la matrice et σ_{ij}^{m} (respectivement ε_{ij}^{m}) est le tenseur de contrainte (déformation) dans un point de l'interface côté matrice. Ce point est défini par le vecteur normal à l'interface. Les tenseurs $P_{ijkl}^{\alpha*}$ et $Q_{ijkl}^{\alpha*}$ (avec $\alpha = I$ ou m), sont définis par les relations :

$$P_{ijkl}^{\alpha*}=\frac{1}{4}\left(k_{ik}^{\alpha}n_jn_l+k_{il}^{\alpha}n_jn_k+k_{jk}^{\alpha}n_in_l+k_{il}^{\alpha}n_jn_k\right) \qquad \textbf{(III.44)}$$

$$Q_{ijkl}^{\alpha*}=c_{ijkl}^{\alpha}-c_{ijmn}^{\alpha}P_{mnpq}^{\alpha*}c_{pqkl}^{\alpha} \qquad \textbf{(III.45)}$$

$$k_{ij}^{\alpha}=\left(h_{ij}^{\alpha}\right)^{-1}=\left(c_{ikjl}^{\alpha}n_kn_l\right)^{-1} \qquad \textbf{(III.46)}$$

Le tenseur h_{ij}^{α} du milieu α ($= I$ ou m) s'appelle tenseur de KELVIN-CHRISTOFFEL ou tenseur acoustique. L'analyse des relations (III.42 et 43) permet de constater que le saut de contraintes (déformations) peut être déterminé de deux manières différentes qui ne sont pas du tout équivalentes du point de vue de l'effort (temps de calcul) à fournir. En effet, nous pouvons obtenir la contrainte (déformation) en tout point de l'interface en calculant le tenseur P_{ijkl}^{I*} (respectivement Q_{ijkl}^{I*}) pour tous les renforts du composite ou en effectuant une fois, pour tous les autres cas, le calcul du tenseur P_{ijkl}^{m*} (respectivement Q_{ijkl}^{m*}) en passant par les propriétés de la matrice. D'autre part, nous constatons que l'obtention du tenseur Q_{ijkl}^{m*} passe par le calcul du tenseur P_{ijkl}^{m*} et la relation (III.45) correspond aux manipulations des tenseurs d'ordre 4. Il semble donc plus judicieux de déterminer en premier lieu la déformation dans l'interface du côté matrice, et de calculer ensuite la contrainte en utilisant la loi de HOOKE. Cette analyse suggère l'approche suivante : à partir des équations (III.44 et 46), nous calculons pour un ensemble des orientations définies par les vecteurs $\vec{n}$:

$$k_{ij}^{m}=\left(h_{ij}^{m}\right)^{-1}=\left(c_{ikjl}^{m}n_kn_l\right)^{-1} \qquad \textbf{(III.47)}$$

$$P_{ijkl}^{m*}=\frac{1}{4}\left(k_{ik}^{m}n_jn_l+k_{il}^{m}n_jn_k+k_{jk}^{m}n_in_l+k_{il}^{m}n_jn_k\right). \qquad \textbf{(III.48)}$$

L'équation (III.43) peut être résolue par rapport à la déformation de l'interface côté matrice : $\varepsilon_{ij}^{m}=\left[I_{ijmn}+P_{ijkl}^{m*}\left(c_{klmn}^{I}-c_{klmn}^{m}\right)\right]\varepsilon_{mn}^{I}$ (III.49)

Nous constatons alors qu'il est possible de calculer, pour tous les matériaux correspondant aux renforts du composite, le tenseur χ_{ijkl}^{m-I} d'ordre 4 permettant l'estimation de la déformation en tout point de l'interface et tel que :

$$\chi_{ijmn}^{m-I} = I_{ijmn} - P_{ijkl}^{m*} c_{klmn}^{m} + P_{ijkl}^{m*} c_{klmn}^{I} \qquad \textbf{(III.50)}$$

$$\varepsilon_{ij}^{m} = \chi_{ijmn}^{m-I} \varepsilon_{mn}^{I} \qquad \textbf{(III.51)}$$

$$\sigma_{ij}^{m} = c_{ijkl}^{m} \varepsilon_{kl}^{m} \qquad \textbf{(III.52)}$$

Cette procédure se simplifie beaucoup quand la matrice est isotrope. Dans ce cas le tenseur de constantes élastiques prend la forme :

$$c_{ijkl}^{m} = \kappa^{m} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^{m} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \qquad \textbf{(III.53)}$$

avec κ^m et μ^m le module de compressibilité et de cisaillement de la matrice. On démontre, voir WALPOLE (1969), que le tenseur acoustique et son inverse s'écrivent alors :

$$h_{ij}^{m} = \left(\kappa^{m} + \frac{4}{3} \mu^{m} \right) a_{ij} = \left(\kappa^{m} + \frac{4}{3} \mu^{m} \right) n_i n_j$$

$$k_{ij}^{m} = \frac{a_{ij}}{\left(\kappa^{m} + \frac{4}{3} \mu^{m} \right)} + \frac{b_{ij}}{\mu^{m}} \qquad \textbf{(III.54)}$$

De la même manière, le tenseur P_{ijkl}^{m*} devient :

$$P_{ijkl}^{m*} = \frac{E_{ijkl}^{2}}{\kappa^{m} + \frac{4}{3} \mu^{m}} + \frac{E_{ijkl}^{4}}{2\mu^{m}} \qquad \textbf{(III.55)}$$

C'est cette formulation particulière qui est utilisée dans toutes les applications présentées dans le chapitre 5 de ce mémoire. L'emploi des formules (III.51, III.52) et (III.4 et III.5) permet le calcul de la contrainte normale σ_n et tangentielle τ puis la vérification du critère (III.3).

III.3.2.2 CONDITION ENERGETIQUE DE LA PROPAGATION DE LA RUPTURE

Pour que la rupture totale du renfort advienne, l'énergie libérée par la décohésion du renfort doit être au moins égale à l'énergie consommée pour la création de la surface libre. L'estimation de la quantité de l'énergie restituée $\mathcal{G}$ passe en première approximation, par le calcul suivant. L'énergie élastique stockée dans le renfort avant rupture vaut :

$$U_o = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{I} \varepsilon_{ij}^{I} V^{(I)} = \frac{4}{6} \pi abc \sigma_{ij}^{I} s_{ijkl}^{I} \sigma_{kl}^{I} \qquad \textbf{(III.56)}$$

où s^{I}_{ijkl} est le tenseur de souplesses élastiques du renfort.

Si nous admettons que le renfort est entièrement décollé de la matrice, son énergie de déformation élastique vaut zéro :

$$U_r = 0 \qquad \textbf{(III.57)}$$

Admettons également que les propriétés effectives du composite n'évoluent que très peu suite à cette fissuration, c'est-à-dire qu'une faible fraction de renforts est décollée et que la décohésion se fait à déformation macroscopique constante. Alors, nous pouvons négliger, en première approximation, la variation de l'énergie de déformation du milieu environnant ainsi que le travail des forces extérieures. Dans ce cas, l'énergie restituée par le processus de décohésion vaut

$$\mathcal{G} = U_o = \frac{4}{6}\pi abc\,\sigma^{I}_{ij}\, s^{I}_{ijkl}\, \sigma^{I}_{kl} \qquad \textbf{(III.58)}$$

Pour déterminer l'énergie surfacique de la rupture, nous postulons l'existence d'une énergie spécifique surfacique γ_c (postulat de GRIFFITH, 1920). Par conséquent, l'énergie consommée à la création de nouvelle surface S vaut :

$$S = 2A^{I}\gamma_c \qquad \textbf{(III.59)}$$

où A^{I} représente l'aire de la surface extérieure du renfort. La décohésion du renfort est alors possible quand $\mathcal{G} = S$ soit :

$$\sigma^{I}_{ij}\, s^{I}_{ijkl}\, \sigma^{I}_{kl} = \frac{3}{\pi abc} A^{I}\gamma_c \qquad \textbf{(III.60)}$$

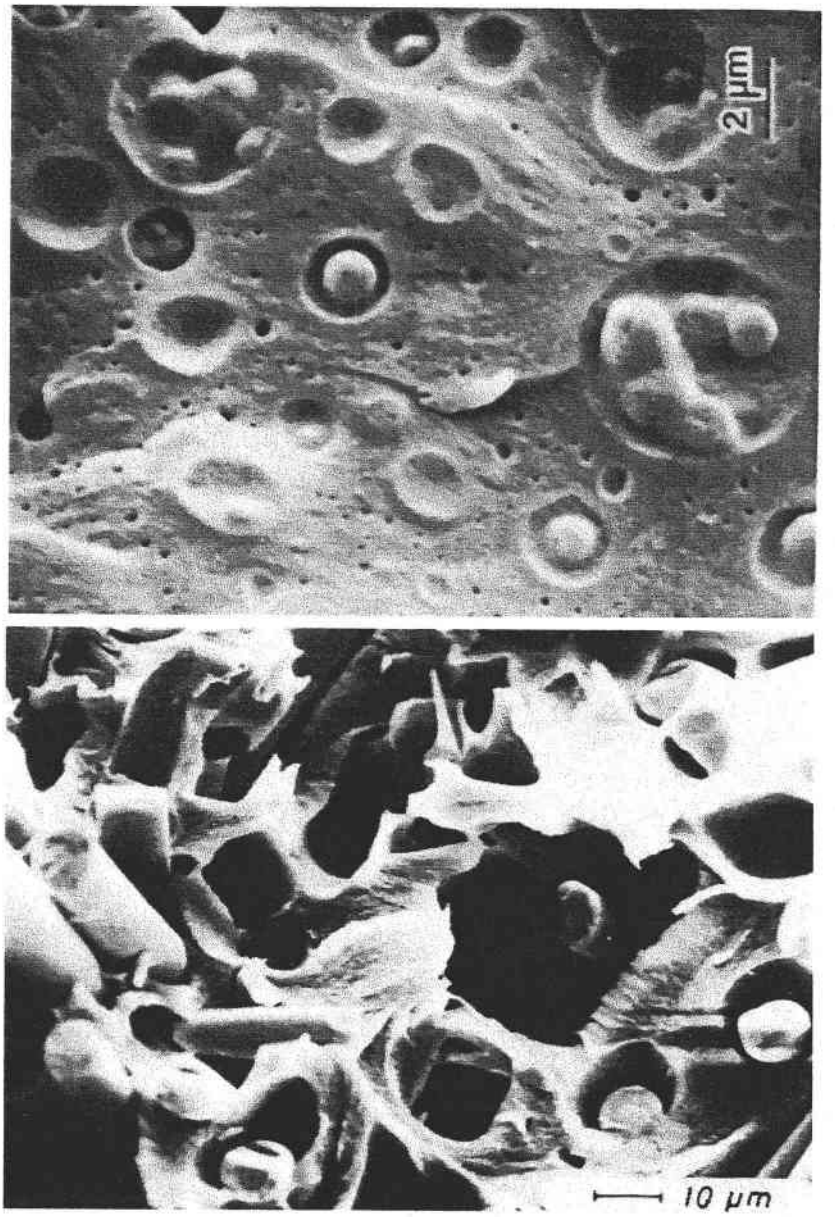
ou encore :

$$\sigma^{I}_{ij}\, s^{I}_{ijkl}\, \sigma^{I}_{kl} = \frac{4A^{I}}{V^{I}}\gamma_c \qquad \textbf{(III.61)}$$

Le membre de droite représente la densité critique de l'énergie de décohésion du renfort. L'analyse de son expression montre que cette quantité est fonction de la taille du constituant. En effet, le rapport $\frac{A^{I}}{V^{I}}$ est inversement proportionnel au diamètre du renfort. Il en résulte que les renforts de grande taille sont plus faciles à endommager que les petits renforts. BONFOH et al. (2003) ont mis en évidence cette propriété dans le cas de l'écrouissage des polycristaux avec des précipités intra-granulaires.

III.3.2.3 REACTUALISATION DE LA MICROSTRUCTURE

La décohésion complète du renfort a pour l'effet l'annulation de la contrainte et de la déformation dans ce constituant. Sa participation dans le comportement global du composite s'annule.



a)

b)

Figure III. 12 : *Exemple de décollement des renforts.*

a) Cas des composites à renfort compact, d'après A. F. YEE et al.

b) Cas des renforts allongés, d'après K. FRIEDRICH et al.

Il est alors raisonnable de remplacer un tel renfort par un vide de propriétés élastiques nulles :

$$c^{I}_{ijkl} = 0 \qquad \textbf{(III.62)}$$

Cette opération n'affecte pas les fractions volumiques des constituants ni leur morphologie ou leurs orientations morphologique et cristallographique. Tous les paramètres décrivant la microstructure du composite restent alors inchangés.

III.4 - ASPECT PROBABILISTE DE L'ENDOMMAGEMENT

Contrairement à l'endommagement ductile par cavitation, la rupture fragile des renforts proposée plus haut est insensible à la taille du volume représentatif ou des constituants. Cependant, l'expérience montre que, plus l'élément constitutif d'une structure est grand, plus faible est la contrainte qui provoque son endommagement. Pour prendre en compte cet effet de taille, des approches statistiques son fréquemment utilisées. La théorie la plus répandue est celle du maillon le plus faible élaborée par WEIBULL (1939). C'est cette approche que nous avons adoptée dans notre étude. Elle est basée sur plusieurs hypothèses simplificatrices dont la plus importante est celle de l'indépendance des éléments constitutifs du point de vue de la rupture. Nous admettons que, dans un matériau, les ruptures par clivage se déroulent dans des éléments microstructuraux (grains, fibres,...) qui présentent une certaine distribution statistique. C'est l'élément le moins résistant (élément de plus grande taille et favorablement orienté pour rompre) qui cède le premier en déclenchant le processus de ruine.

Lorsque cette hypothèse est bien vérifiée, on associe à chaque élément une probabilité de rupture sous une contrainte (ou une déformation) donnée. Si cette probabilité cumulée est notée $P_0(\sigma_1)$, la probabilité de survie est égale à 1- $P_0(\sigma_1)$, avec σ_1 = contrainte principale maximale. Celle des N éléments vaut par conséquent $[1- P_0(\sigma_1)]^N$ en vertu de l'hypothèse d'indépendance. Alors la probabilité de rupture de l'ensemble des éléments est donnée par:

$$P_R(\sigma_1) = 1 - \left[1 - P_0(\sigma_1)\right]^N \qquad \textbf{(III.63)}$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme:

$$P_R(\sigma_1) = 1 - \exp\left\{-N \; Ln\left(\frac{1}{1 - P_0(\sigma_1)}\right)\right\} \qquad \textbf{(III.64)}$$

La fonction de probabilité $P_0(\sigma_1)$ étant inconnue, diverses hypothèses peuvent être introduites pour en donner une représentation mathématique simple. Si le volume de chaque élément est V_o et V correspond au volume de l'ensemble, on a $N=V/V_o$. La formule précédente montre bien que la probabilité de rupture augmente avec le volume. Elle se réécrit :

$$P_R(\sigma_1,V)=1-\exp\left[-\frac{V}{V_o}f(\sigma_1)\right] \qquad \textbf{(III.65)}$$

où

$$f(\sigma_1)=Ln\left(\frac{1}{1-P_0(\sigma_1)}\right) \qquad \textbf{(III.66)}$$

La probabilité élémentaire $P_0(\sigma_1)$ étant inconnue, la fonction $f(\sigma_1)$ l'est également. Cette fonction de rupture peut être représentée par une loi semi phénoménologique. Nous retiendrons la proposition de WEIBULL qui l'exprime sous la forme :

$$f(\sigma_1)=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_o}{\sigma_u}\right)^m \qquad \textbf{(III.67)}$$

Dans cette expression :

- σ_o représente un seuil de contrainte en dessous duquel la probabilité de rupture est nulle.
- σ_u est la contrainte ultime de rupture.
- m est un paramètre qui donne une idée de la dispersion des résultats des essais rupture. Il s'appelle module de WEIBULL.

Par conséquent, la probabilité de rupture d'un constituant peut être écrite :

$$P_R(\sigma_1,V)=1-\exp\left[-\frac{V}{V_o}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_o}{\sigma_u}\right)^m\right] \qquad \textbf{(III.68)}$$

ou en introduisant le paramètre $w = V_o(\sigma_u)^m$

$$P_R(\sigma_1,V)=1-\exp\left[-\frac{V}{w}(\sigma_1-\sigma_o)^m\right] \qquad \textbf{(III.69)}$$

Cette loi dépend de trois paramètres qui sont, dans notre cas :

- V – le volume élémentaire représentatif,
- w - le paramètre définissant la contrainte de rupture moyenne d'un échantillon de volume V_o.
- σ_o - le seuil de non – rupture.

Dans les méthodes d'homogénéisation la taille des constituants n'intervient pas. Uniquement leur forme, approchée pratiquement toujours par un ellipsoïde, est prise en compte. Les données décrivant une famille de renforts sont dans ce cas :

- a^I, b^I, c^I - les demi-axes de l'ellipsoïde ou plus exactement les rapports $\frac{a^I}{c^I}$ et $\frac{b^I}{c^I}$,
- f^I- sa fraction volumique.

Dans les applications prenant en compte l'endommagement nous définirons également le volume du VER et les paramètres w et σ_o pour chaque matériau constituant le composite. Pratiquement, pour éviter un nombre important de cassures d'une famille de renforts donnée (théoriquement infini), ce nombre sera défini par l'utilisateur. Par conséquent, la première rupture adviendra pour une contrainte :

$$\sigma_1(1) = \sigma_o + \left[-\frac{w}{V} \ln\left(\frac{\aleph}{\aleph + 1} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \qquad \textbf{(III.70)}$$

où $\aleph$ est le nombre de paliers de rupture. Cette rupture concerne alors la fraction volumique des renforts de la famille I qui vaut :

$$f^I(1) = \frac{f^I}{\aleph} \qquad \textbf{(III.71)}$$

La dernière rupture de cette famille de fibre arrive pour une contrainte :

$$\sigma_1(1) = \sigma_o + \left[-\frac{w}{V} \ln\left(\frac{1}{\aleph + 1} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \qquad \textbf{(III.72)}$$

Cette rupture concerne la même fraction de fibre définie par l'expression (III.71).

La figure ci-dessous retrace la variation de la contrainte de rupture en fonction de la fraction volumique des renforts cassés pour deux valeurs de volumes V. Les données utilisées pour tracer ces courbes sont :

V_o=0,1 mm^3, σ_o=200 MPa, σ_u =570 MPa, V_1=1,0 mm^3 et V_2=5,0 mm^3.

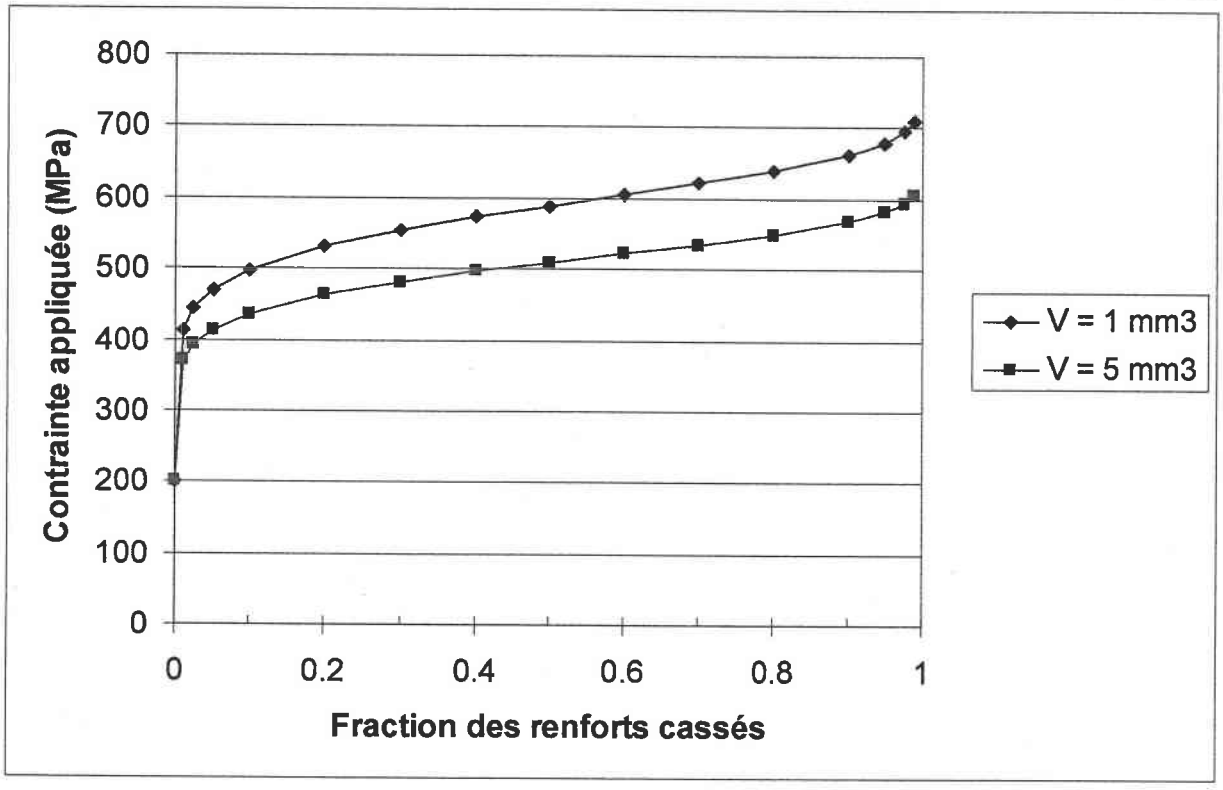


Figure III. 13

On constate que la première rupture à lieu pour une contrainte de 200MPa. Le volume plus grand est endommagé pour des contraintes plus faibles. En effet, pour une contrainte de 600 MPa dans le volume de 1 mm^3 pratiquement 58% de renforts sont cassés. Cette fraction atteint quasiment 100% pour le volume de 5 mm^3.

CHAPITRE IV

IV.1 - INTRODUCTION.....

IV.2 - LES DIFFERENTS PARAMETRES DE CALCUL.....

IV.2.1 - Les paramètres de la structure interne.....

IV.2.2 - Les paramètres de chargement.....

IV.3 - PHASE D'HOMOGENEISATION.....

IV.3.1 - Détermination de l'élément de volume.....

IV.3.2 - Choix du schéma d'homogénéisation.....

IV.3.3 - Choix d'itération.....

IV.4 - CRITERE D'ARRET.....

IV.5 - DETERMINATION DU CRITERE D'ENDOMMAGEMENT.....

IV.6 - ENDOMMAGEMENT ET CINETIQUE DE LA MICROSTRUCTURE.....

IV.6.1 - Création de la fissuration.....

IV.6.2 - Création de la décohésion.....

ALGORITHME ET CALCUL

IV.1 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous exposerons la démarche de construction et de structuration de notre programme de simulation. Nous avons adopté une démarche qui est classique dans ce domaine, à savoir une phase statique linéaire ou pseudo-linéaire suivie d'une seconde phase introduisant la cinétique d'évolution. L'algorithme est structuré autour des deux grands axes que sont l'homogénéisation et la simulation d'endommagement. La phase d'homogénéisation, théoriquement indépendante dans son fonctionnement et aux contours bien délimités par rapport au reste du programme, rassemble toutes les procédures qui à un instant donné, à partir de la « photographie » instantanée de la microstructure et des différents paramètres réactualisés, déterminent le comportement et les propriétés effectifs du matériau. La phase d'endommagement, quant à elle, rassemble les procédures permettant, à partir des sollicitations mécaniques, dans un premier temps, de faire le choix du ou des types d'endommagement susceptibles de s'activer puis de créer l'état d'endommagement dans un deuxième temps. L'ensemble du processus d'évolution décrivant l'organigramme du logiciel est schématisé par le diagramme de la figure IV.1.

L'idéal pour ce type d'application est de construire une structure de la façon la plus modulaire possible pour deux principales raisons :

- une clarté de lecture
- une simplicité pour son évolution.

Mais il n'est pas toujours possible de satisfaire complètement ces conditions du fait des interactions existant entre les différents thèmes à traiter.

L'organigramme du logiciel se compose de cinq grandes étapes fonctionnelles.

- La tâche A, que nous avons nommée « paramètres » correspond à la lecture de toutes les données du problème.
- Dans la tâche B réalise la recherche du comportement effectif du matériau. A ce stade le programme peut être arrêté.
- Vérification du critère d'arrêt – tâche C. Si le but de la simulation est uniquement la recherche des propriétés effectives du matériau, le programme s'arrête.

- Dans le cas contraire, il passe à l'estimation du risque d'endommagement – tâche D.
- Après quoi, si l'endommagement a eu lieu, une réactualisation de la microstructure du matériau est effectuée – tâche E.

Les tâches B à E sont répétées dans une boucle, jusqu'à ce qu'un des critères d'arrêt du programme soit vérifié. Dans la suite de ce chapitre nous discutons en détail ces différentes phases du logiciel.

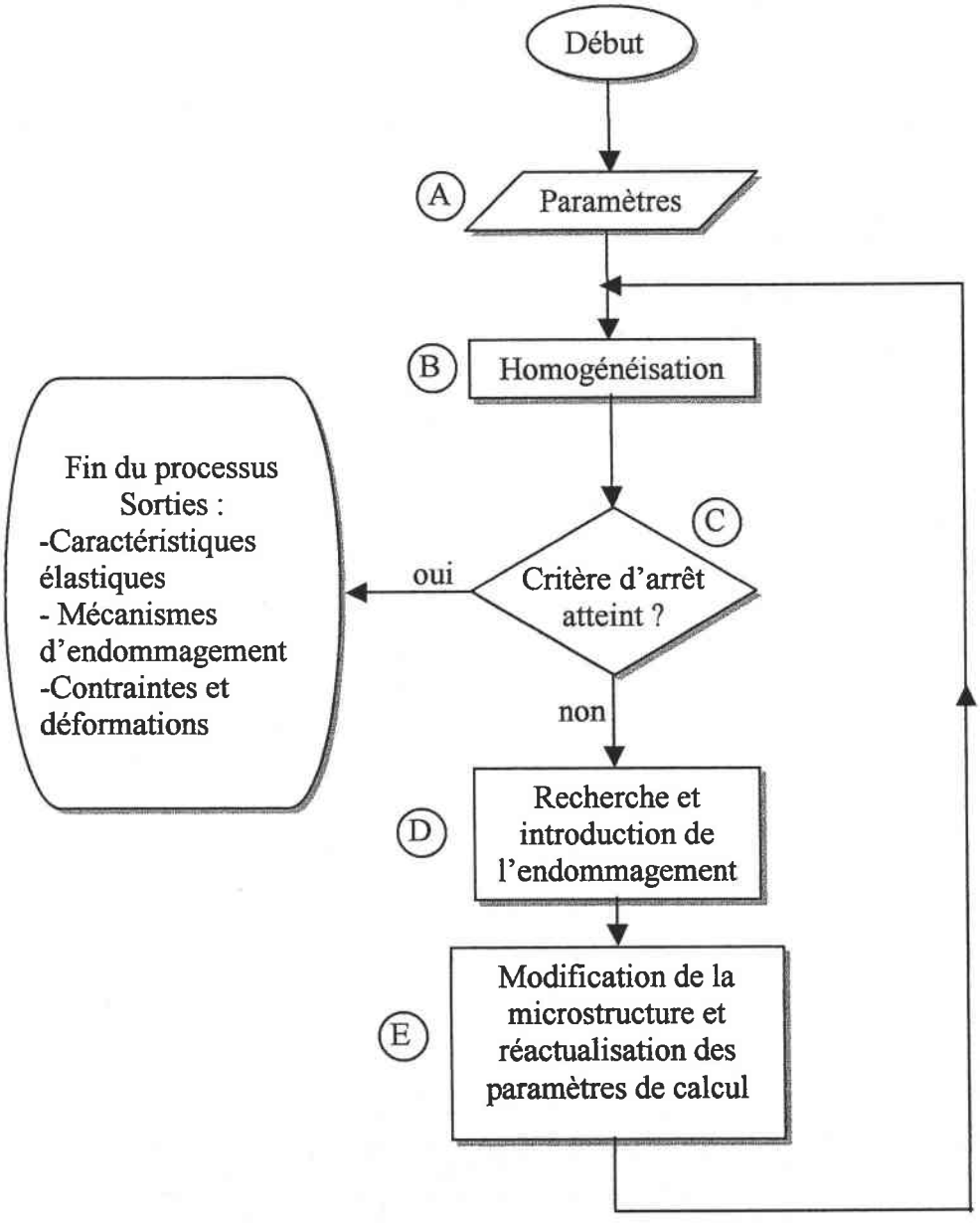


Figure IV. 1: *Vu d'ensemble du processus d'endommagement*

IV.2 - LES DIFFERENTS PARAMETRES DE CALCUL

Sous ce terme, nous regroupons les données classiques de description géométrique de la structure et du comportement mécanique des constituants de l'échantillon, ainsi que toutes les valeurs permettant de piloter la simulation. La procédure d'acquisition des données lit dans un premier temps des variables élémentaires à partir desquelles elle reconstruit et prépare tous les paramètres selon toutes les formes d'investigation que l'on envisage d'effectuer.

IV.2.1 - LES PARAMÈTRES DE LA STRUCTURE INTERNE

La microstructure du matériau est construite par les hétérogénéités ou « grains » qui sont classées en termes de phases et de familles. Une phase regroupe tous les grains ayant les mêmes propriétés mécaniques. C'est aussi à ce niveau que sont introduits les seuils qui piloteront la ruine locale. Les paramètres de phase sont alors :

- les constantes élastiques C_{ijkl},
- la contrainte ou la déformation critique de rupture,
- l'énergie de création de surface,
- les coefficients de dilatation thermique, etc.

Une première série de chiffres renseigne sur le nombre total de phases présentes dans l'échantillon et indique par des variables binaires prenant les valeurs 0 ou 1 les effets d'environnement qui pourraient éventuellement être pris en compte. Les valeurs caractérisant chaque état d'environnement activé (variable binaire = 1) seront alors précisées pour chaque phase. Pour les propriétés mécaniques, tous les types de réseaux cristallographiques courants (cubique, hexagonal, tétraédrique, orthorhombique, orthotropique) sont pris en compte avec une possibilité d'extension à d'autres types de réseaux plus complexes (matériau quelconque). Nous avons adopté un codage, qui permet lorsque le type de réseau est renseigné, de ne donner que le strict minimum de valeurs caractéristiques. Ainsi pour un réseau cristallographique isotrope, seuls les coefficients de Lamé λ et μ seront demandés. A partir de ces valeurs, tout le tenseur C_{ijkl} est construit. Les propriétés mécaniques ou d'environnement des phases sont des paramètres qui restent fixes pendant toute l'exécution du programme. En effet, le processus d'endommagement tel que nous l'envisageons ne fait intervenir aucun phénomène de transformation de phase même si cette éventualité pouvait aisément être intégrée dans les routines de calcul. L'endommagement par décohésion introduit par contre une disparition de constituant qui pourrait laisser supposer une disparition de phase. Mais du

fait des considérations statistiques abordées au chapitre précédent, il restera toujours dans le VER des constituants résiduels pour représenter la phase considérée.

Pour une phase donnée, une forme géométrique combinée à une orientation de l'ellipsoïde, ainsi que l'orientation cristallographique de son réseau, constitue une famille de grains. Sous le terme de forme géométrique nous désignons les rapports de demi axes $\frac{a^I}{c^I}$ et $\frac{b^I}{c^I}$ de l'ellipsoïde symbolisant l'inclusion. Son orientation est définie par trois angles d'Euler α, β et γ permettant le passage entre le repère de l'échantillon (VER) et le repère principal de l'inclusion. Les trois autres angles d'Euler φ_1, Φ, φ_2 orientent le repère cristallin du matériau par rapport au repère du VER. C'est le constituant (grain) qui est considéré dans le VER et pour lequel les tenseurs de localisation en contrainte et en déformation sont calculés. La fraction volumique pour une phase est donc calculée en faisant la somme des fractions de touts les constituants ayant les propriétés mécaniques identiques.

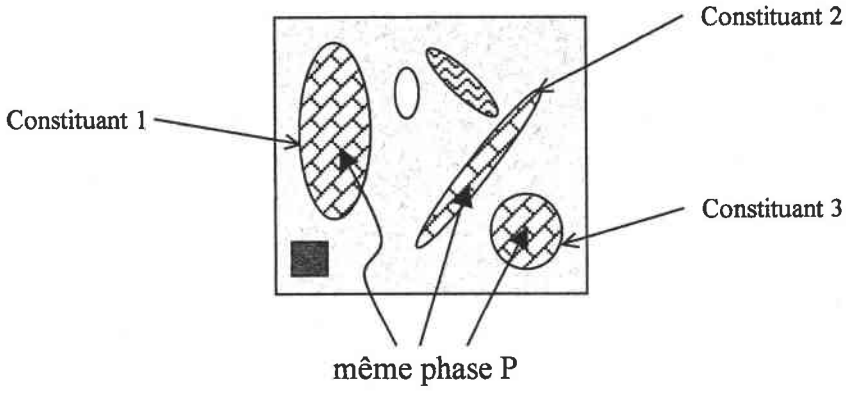


Figure IV. 2 : *paramètres de désignation des hétérogénéités*

Le nombre de constituants dépend de la finesse de la description du VER. Ce nombre de grains (ou de constituants) évolue tout le long du processus d'endommagement. Généralement, la rupture d'une famille fait apparaître au minimum une nouvelle famille correspondant à une inclusion type renfort ou vide. C'est aussi un paramètre important sur lequel nous pouvons par exemple construire notre critère d'arrêt de calcul.

IV.2.2 - LES PARAMÈTRES DE CHARGEMENT

En dehors des paramètres relatifs à la microstructure, il y a des données de présélection des critères d'endommagement et des données de sollicitation de la structure.

La présélection correspond à l'activation des critères d'endommagement qui seront vérifiés durant le calcul. Dans la version actuelle du programme uniquement trois critères présentés dans le chapitre précédent sont disponibles. La construction modulaire du code permet, sans une modification quelconque du logiciel, de construire d'autres critères imaginés par l'utilisateur. Des routines vides sont attachées au code permettant cette programmation.

Les données de sollicitation sont :

- le type de chargement qui peut être une sollicitation en contrainte ou en déformation,
- la forme qui est définie par une matrice [X] de taille 3x3 symétrique permettant par exemple un chargement uni- axial, bi- axial ou quelconque.

Ce tenseur est donc défini par :

$$X_{ij} = \begin{cases} \Sigma_{ij} \Rightarrow \textit{sollicitation en contrainte} \\ E_{ij} \Rightarrow \textit{sollicitation en déformation} \end{cases}$$

La forme de la matrice de sollicitation peut être changée en cours du calcul offrant ainsi la liberté de simuler des chargements non-radiaux et non-monotones.

IV.3 - PHASE D'HOMOGENEISATION

C'est la phase descriptive permettant d'obtenir le comportement de l'échantillon. L'homogénéisation est basée comme nous l'avions annoncée précédemment sur le schéma autocohérent à un ou plusieurs sites suivant la structure du volume élémentaire représentatif (VER), tout en intégrant les possibilités d'utilisation des routines de calcul incrémental. Nous n'allons pas revenir sur l'algorithme du schéma autocohérent dont nous avons déjà débattu au chapitre deux, mais nous souhaitons reconsidérer ici certains aspects et paramètres qui ont une grande importance dans le cas de structure endommagée, à savoir le choix du VER, le type de schéma (monosite ou multisite) et le type d'itération (approximation en mono-étape ou multi étapes) en particulier.

IV.3.1 - DÉTERMINATION DE L'ÉLÉMENT DE VOLUME

La notion de volume élémentaire représentatif VER est très importante dans tous les calculs de modélisation, surtout lorsque l'objet d'étude est la simulation d'endommagement.

Le volume d'étude doit être statistiquement identique dans sa structure au matériau réel macroscopique dont on cherche à décrire ou à prédire le comportement. Nous ne nous sommes pas étendu sur le sujet dans les chapitres précédents lorsqu'il s'agissait d'une simple homogénéisation ou d'une homogénéisation par étapes du fait que la structure interne du matériau, au cours du processus de calcul, reste figée (approximation autocohérente multisite ou monosite) ou évolue homothétiquement par rapport à un premier VER supposé statistiquement correct (approximation incrémentale multisite ou monosite).

Dans une approximation monosite, le choix du VER se fait simplement de manière à avoir une représentation maximale des différentes hétérogénéités sur les plans géométrique et caractéristiques mécaniques. En effet, nous avions vu par exemple que, dans ce cas, le tenseur de localisation des déformations, tenseur à partir duquel le tenseur des constantes élastiques effectives peut être calculé, s'exprime en se basant sur l'équation II.56 sous la forme :

$$A^I = \left(I + \frac{1}{V_I} T^{II} : \Delta C^I \right)^{-1} . \qquad \text{(IV.1)}$$

Dans cette formulation le seul paramètre environnant qui intervient provient de la matrice ou du milieu environnant de référence que l'on se fixe. Pour un ensemble d'hétérogénéités ayant des constantes élastiques identiques mais de formes géométriques différentes, un mauvais choix du VER ferait disparaître certaines valeurs de tenseur d'auto-interaction T^{II} et fausserait l'anisotropie globale du matériau. Ainsi le choix est principalement axé sur les propriétés mécaniques et la forme géométrique des constituants.

L'avantage de l'approximation multisite est de prendre en compte les interactions entre hétérogénéités. Le voisinage doit être le plus représentatif possible. Il est déterminé non pas en terme de phases mais par rapport aux familles. Le rayon de voisinage est une donnée supplémentaire pour une homogénéisation multisites. Il détermine un volume dans lequel toutes les interactions du grain central avec les grains de son voisinage proche sont prises en compte.

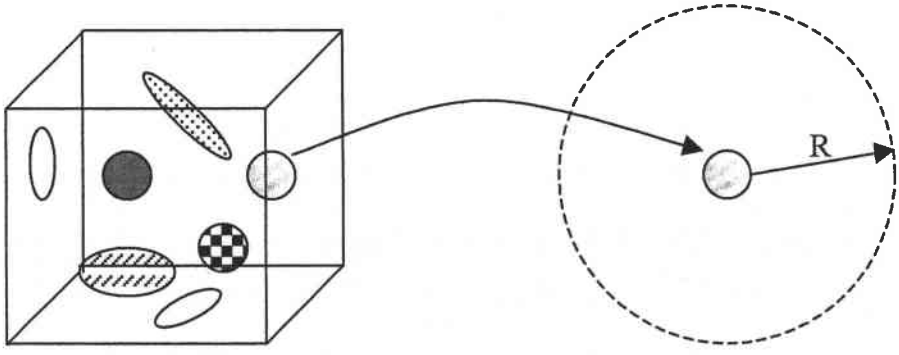


Figure IV. 3 : *interaction famille et voisinage*

Il est intéressant de remarquer que le rayon de voisinage R peut prendre des valeurs plus grandes que les dimensions du VER. Toutefois, il est impératif que dans les volumes décrivant les voisinages ne se retrouvent que des familles de grains décrites par le VER.

IV.3.2 - CHOIX DU SCHÉMA D'HOMOGÉNÉISATION

Par souci de simplicité et de clarté, nous avons encore gardé deux codes de programmes séparés, l'un pour le schéma autocohérent monosite et l'autre pour le schéma multisite. Rappelons que le schéma monosite qui ne tient compte que de l'interaction entre l'inclusion et le milieu environnant est plus adapté aux cas de désordre parfait au niveau des inclusions alors que le schéma multisite, plus lourd, permet de prendre en compte toutes les interactions et s'adapte parfaitement aux structures ordonnées, voire périodiques. Du choix du schéma dépend la précision des résultats mais également le temps du calcul.

Remarquons que dans le cas où le schéma multisite est utilisé, le réseau de fissures ou de cavités qui est créé est positionné par rapport aux inclusions rigides. Les interactions sur le « proche voisinage » peuvent être prises en compte, ceci n'est pas le cas pour le schéma monosite. Or, au cours du processus d'endommagement, et surtout dans le cas de rupture de renfort, la fissure qui est créée interagit directement avec les deux morceaux d'inclusions en les déchargeant. Il serait intéressant de remplacer ce triplet par un milieu équivalent obtenu par un calcul intégrant les interactions des deux nouveaux morceaux de renforts avec la fissure. Cette approche est permise dans le schéma multisite.

IV.3.3 - CHOIX D'ITÉRATION

Le schéma incrémental offre la possibilité de fixer le nombre d'étapes à utiliser au cours de l'approximation. Ce nombre d'étapes agit directement sur la convergence et la précision des résultats. Nous avons vu au paragraphe II.4 que le schéma autocohérent donne généralement des résultats acceptables lorsque, par exemple, pour un biphasé la fraction volumique est inférieure à 20%. En début d'endommagement, et surtout dans le cas d'apparition des premières fissurations, la fraction de vide correspondante est très faible. Dans le but d'accélérer les calculs, le nombre d'étape est fixé à un et évolue progressivement au fur et à mesure que la fissuration s'effectue. Si le contraste dans les propriétés des constituants est également fort, alors l'augmentation du nombre d'étapes devient indispensable (confère chapitre 2). En général, la décohésion accélère la vitesse de création de cavité impliquant des sauts importants dans l'évolution de la fraction volumique de vide, on introduit dans ce cas un critère seuil sur le niveau de vide à partir duquel le schéma incrémental devient indispensable.

IV.4 - CRITERE D'ARRET

Au niveau fonctionnel le critère d'arrêt n'a pas la même importance que les autres étapes de notre organigramme. En réalité, ce critère permet seulement de constater la ruine du matériau. Cette ruine est une caractéristique totalement macroscopique. Il est difficile de fixer ses contours de manière objective. La principale difficulté réside dans l'évaluation de la possibilité ou non d'obtenir un état stable au cours du processus de redistribution des énergies et de la structure interne après incrémentation de la charge extérieure. Plusieurs éventualités seraient donc à prévoir.

L'idée la plus simple est de se fixer le seuil de la fraction volumique du vide à atteindre dans la simulation (critère actuellement utilisé). Ce critère d'arrêt est bien adapté pour la simulation de la décohésion des renforts. Par contre, dans les simulations introduisant les fissurations des constituants la fraction volumique du vide reste toujours relativement faible. Il est plus judicieux dans ce cas de raisonner en densité surfacique des fissures, paramètre introduit dans les travaux classiques concernant l'homogénéisation des milieux fissurés, voir par exemple HASHIN (1988).

Dans les deux cas le matériau est déclaré totalement endommagé lorsque les caractéristiques des inclusions vides (fraction volumique, forme, orientation) permettent d'atteindre le seuil de percolation. Une autre approche plus physique consiste à traduire le seuil limite de l'endommagement à partir de l'évolution des caractéristiques mécaniques du matériau, la stabilité étant directement corrélée avec la vitesse d'évolution de ces caractéristiques.

Une autre approche peut être envisagée en faisant référence à une variable d'endommagement D telle que celle utilisée dans les modélisations en approche continue, l'obtention du point de ruine pouvant être schématisée en quatre phases.

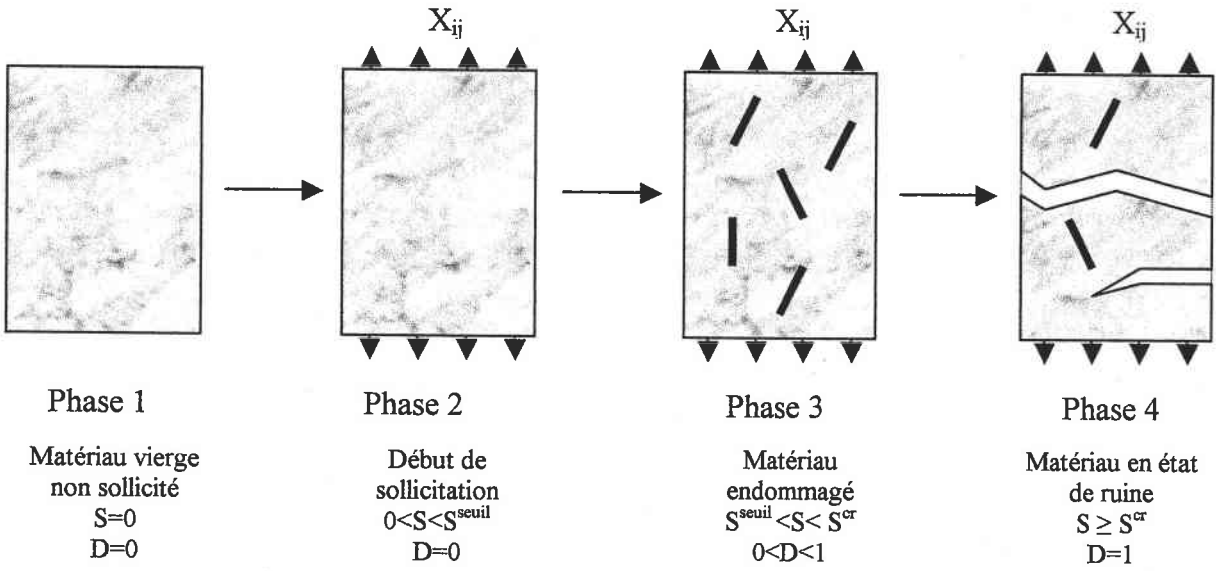


Figure IV. 4 : *Caractérisation d'un « état endommagement »*

S représente symboliquement la valeur principale maximale du tenseur X défini au paragraphe sur les paramètres. S^{seuil} et S^{cr} sont respectivement les équivalents macroscopiques de la contrainte seuil σ_0 et de la contrainte ultime de rupture σ_u qui sont utilisées dans l'expression de la probabilité de rupture (confère III.4). En toute rigueur, l'état de ruine se situe entre la phase 3 et la phase 4 et correspond à $S = S^{cr}$. La recherche exacte de ce point de ruine est particulièrement difficile surtout dans les nouveaux matériaux où le caractère hétérogène empêche une stabilité des résultats. Notre objectif n'étant pas d'obtenir le point exact de destruction totale du matériau, nous nous contenterons de critères basés simplement sur une approximation.

Du fait de la variation de volume du matériau, il n'est pas abusif de considérer un critère basé sur l'état de déformation de l'échantillon. Il faudra chercher une déformation globale à partir de laquelle on peut déclarer le matériau complètement ruiné. Sa valeur peut être fixée en corrélation avec des résultats expérimentaux. Une autre idée est de voir l'évolution de la déformation par rapport au niveau de contrainte de sollicitation. Ceci n'est envisageable que dans le cas d'un pilotage de simulation par une sollicitation en contrainte. Il reste finalement le critère correspondant au nombre total d'hétérogénéités qui est celui utilisé fréquemment au cours de nos calculs. Ceci traduit en fait l'évolution du rapport de forme des renforts. On sait qu'au cours d'une sollicitation mécanique ce sont les renforts de plus grande taille et de rapport de forme élevé qui ont une probabilité de rupture ou de décohésion élevée. Notre démarche étant basée principalement sur la rupture et la décohésion à l'interface, à partir d'une certaine taille des renforts l'endommagement du matériau ne peut plus se

poursuivre par ce schéma. La recherche du rapport de forme qui rend un renfort donné non-endommageable ne pouvant pas être très objective, nous avons opté pour le choix du nombre total d'hétérogénéités, paramètre équivalant plus facilement contrôlable.

IV.5 - DETERMINATION DU CRITERE D'ENDOMMAGEMENT

Cette détermination fait partie de la phase prédictive mettant en concurrence les différents critères d'endommagement activés pour chacune des hétérogénéités afin d'amorcer ou de faire évoluer la dégradation de la microstructure.

La structure algorithmique de cette phase est liée à la façon de piloter l'expérience. Il existe deux possibilités de pilotage de l'endommagement : une évolution à incréments contrôlés et une évolution à valeur déterminée. La conduite de la simulation en approche incrémentale, c'est-à-dire une augmentation progressive suivant un pas imposé, suppose un choix adéquat de valeur pour trouver un compromis entre des calculs longs (dus à un incrément très petit) et une perte de précision (incrément trop grand). Pour contourner ce problème, nous avons choisi un processus déterministe qui permettra de trouver la sollicitation à appliquer, l'objectif étant de déterminer le plus petit facteur multiplicatif du chargement macroscopique ramenant un des constituants à l'état critique.

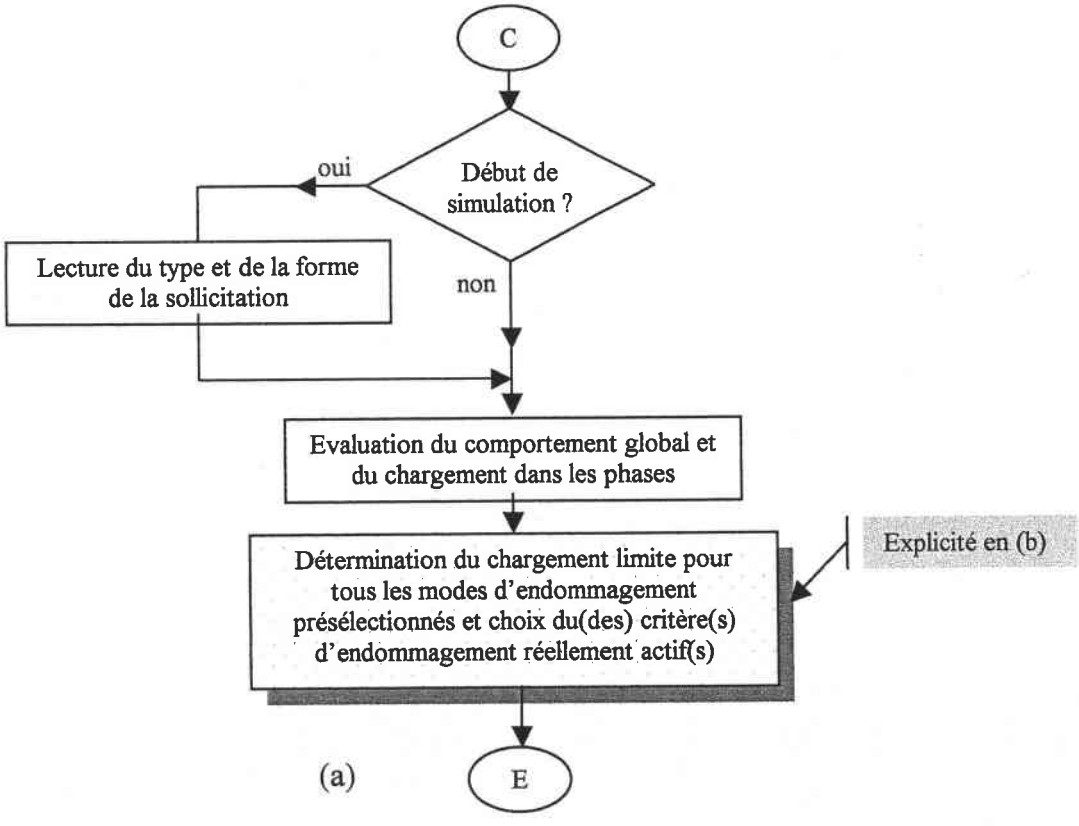


Figure IV. 5a : *recherche du critère d'endommagement*

L'algorithme détaillé de cette recherche est schématisé sur la figure 5a ci-dessus. En début de simulation, une sollicitation conforme à la structure du tenseur $\boldsymbol{X}$ mais aux valeurs faibles est appliquée pour obtenir un niveau de contrainte et de déformation dans les différentes phases. Ces valeurs ne sont pas complètement arbitraires et sont choisies de façon à rester dans la phase élastique linéaire pour le comportement global. Les relations de localisation de contrainte ou de déformation (II.9 et II.10) étant de nature linéaire pour un état figé de microstructure, nous cherchons le facteur multiplicatif permettant de sortir de la phase élastique linéaire. Ce facteur est simplement obtenu par une règle de trois pour chaque critère choisi et successivement pour tous les constituants. La vérification pour un critère donné se fait indépendamment des autres critères.

Pour les deux critères de contrainte et de déformation actuellement introduits, on considère le rapport de la valeur principale maximale et de la valeur critique. En revanche pour le critère en décollement on vérifie sur toute la surface du constituant un premier critère d'amorçage avant de calculer le rapport de l'énergie stockée dans le constituant et de l'énergie critique à travers toute sa surface. Pour un constituant donné le facteur retenu est le plus faible donné par les critères.

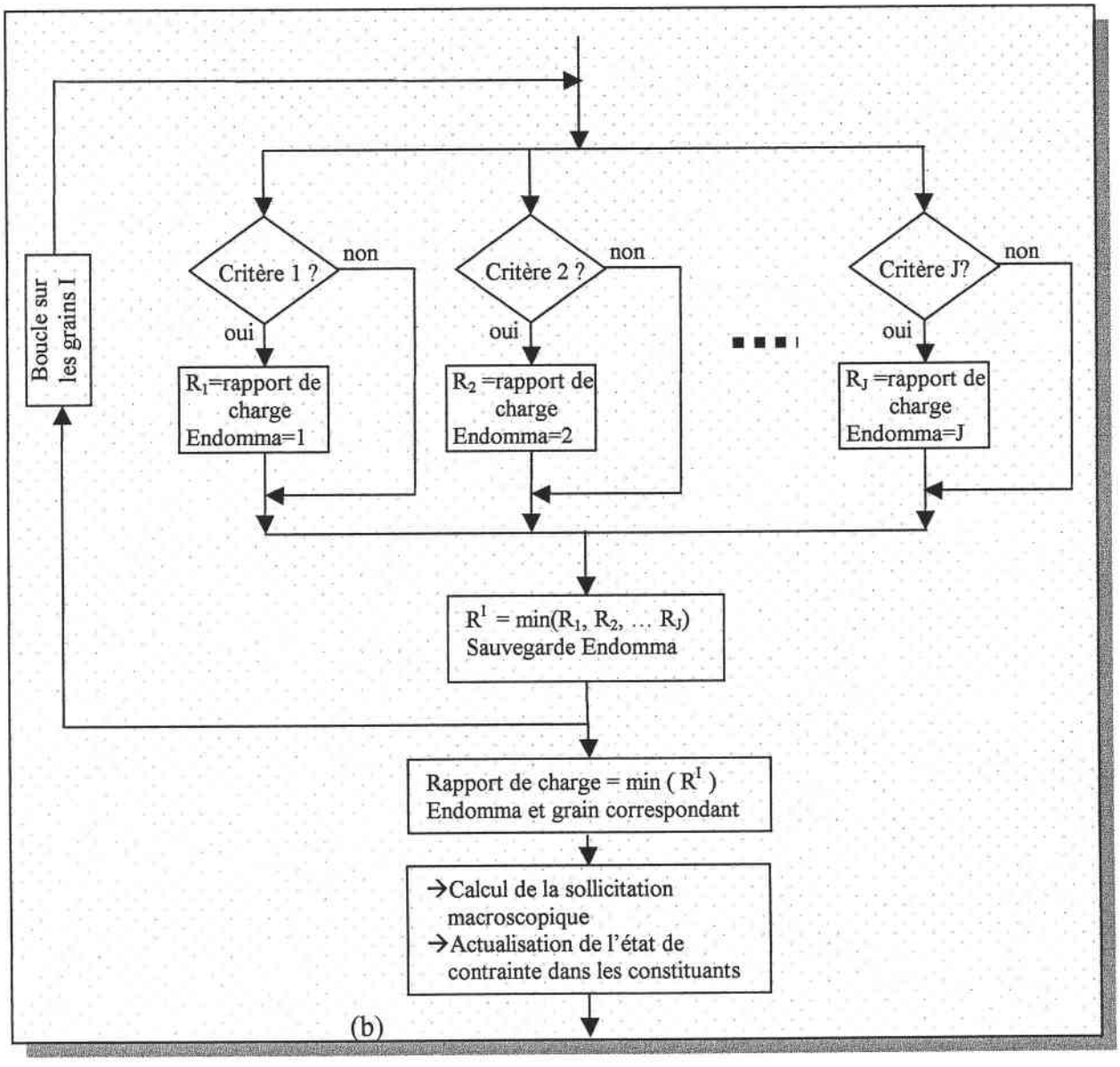


Figure IV. 5b : *recherche du critère d'endommagement*

On termine la sélection en désignant, sur l'ensemble des constituants, le plus faible. C'est la valeur minimale du facteur qui est choisie puisque ce sont en général les constituants les moins résistants qui s'endommagent tout d'abord. Finalement on retient en fin de recherche le critère, le facteur de charge ainsi que le constituant le plus tôt endommageable.

Une fois le facteur de charge déterminé, on évalue la valeur réelle de la sollicitation à appliquer pour créer l'endommagement. Une réactualisation de l'état de contrainte dans les constituants est ensuite nécessaire. La phase suivante est la création effective de l'endommagement selon le critère trouvé.

UNIVERSITE DE METZ
S. C. D.

IV.6 - ENDOMMAGEMENT ET CINETIQUE DE LA MICROSTRUCTURE

Le critère d'endommagement étant déterminé ainsi que la valeur de la sollicitation mécanique à appliquer, il reste à introduire la dégradation correspondante. Dans l'état actuel de nos démarches, nous distinguons deux modes de dégradation :

- la fissuration
- la décohésion.

La recherche de critère ayant permis de trouver la famille de grains la plus endommageable, le grain représentant cette famille dans le VER est soit rompu en deux en donnant naissance à une famille de fissures supplémentaire soit il est déclaré décollé et dans ce cas est remplacé par une porosité de la même taille. Ces nouvelles familles d'hétérogénéités sont intégrées dans le VER dont la structure se modifie.

IV.6.1 - CRÉATION DE LA FISSURATION

La fissuration est introduite quand les critères d'endommagement par contrainte ou déformation critique sont actifs. En principe, sa mise en œuvre est très simple. Le constituant sélectionné est rompu en deux et une fissure s'intercale entre les deux nouveaux morceaux de renfort. Mais ceci pose le problème de la section de rupture, de son orientation et du dimensionnement de la fissure. La localisation de la section est déterminée en appliquant la formule III.7 où une valeur de $\varphi = 0.5$ est généralement utilisée par soucis de simplicité. En revanche, l'orientation du plan de fissure est directement liée à la contrainte (ou la déformation) dans le constituant.

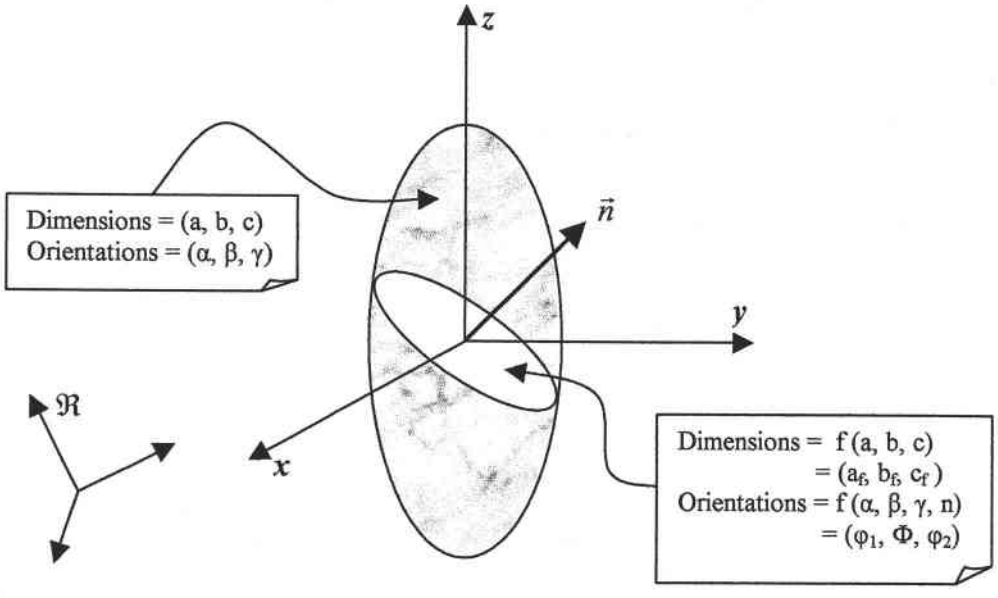


Figure IV.6: *Dimensions et orientation de la fissuration*

La fissuration est faite en mode d'ouverture. De ce fait, la normale au plan de fissure est parallèle à la direction principale correspondant à la contrainte principale maximale. Une fois cette normale déterminée, on cherche dans un premier temps les dimensions (a_f , b_f) de l'ellipsoïde dans le plan de la fissure et dans un deuxième temps, on calcule l'ouverture (c_f) en utilisant les expressions du CCOD détaillées au paragraphe III.3.1.1 sur l'estimation de l'ouverture de fissure. Les dimensions a_f et b_f sont calculées en faisant l'intersection entre le plan de fissure et la surface de l'ellipsoïde représentant le renfort de base. L'orientation de la normale $\boldsymbol{n}$ permet de trouver les angles d'Euler de la fissure ouverte. Les dimensions des deux morceaux de renfort doivent également être réévaluées. Une seule dimension est à peu près connue puisqu'on sait avec quel rapport la rupture s'est opérée le long d'un des axes de l'ellipsoide. Connaissant la nouvelle fraction volumique (non encore actualisée par rapport au VER), les deux autres axes sont estimés par comparaison aux valeurs d'avant rupture. Les fractions volumiques des nouveaux renforts et de la fissure ouverte (inclusion vide) sont réactualisées en appliquant les formules III.34 et III.35.

IV.6.2 - CRÉATION DE LA DÉCOHÉSION

Nous avons supposé une décohésion complète et instantanée du grain dès que le critère d'amorçage est satisfait. En négligeant les phénomènes résiduels de dilation de l'interface, l'endommagement par décohésion introduit dans la microstructure une cavitation dont les dimensions sont celles du grain décollé. Le grain est remplacé par une inclusion ellipsoïdale mais de propriétés mécaniques nulles. La fraction de vide correspondant est également celle du grain avant décohésion.

CHAPITRE V

V.1 - PRELIMINAIRES .....
V.2 - ESSAIS DE TRACTION SIMPLE .....
V.2.1 - Composite à renforts sphériques .....
V.2.1.1 Critère en contrainte .....
V.2.1.2 Critère en déformation .....
V.2.2 - Composite à renforts cylindriques .....
V.2.2.1 Critère en contrainte .....
V.2.2.2 Critère en déformation .....
V.2.3 - Composite à renforts discoïdaux .....
V.2.3.1 Critère en contrainte .....
V.2.3.2 Critère en déformation .....
V.3 - SURFACES DE CHARGES A LA RUPTURE .....
V.3.1 - Composite à renforts sphériques .....
V.3.2 - Composite à renforts discoïdaux .....
V.3.3 - Composite à renforts ellipsoïdaux(cylindriques) .....

VALIDATION ET DISCUSSIONS

V.1 - PRELIMINAIRES

Les résultats que nous présentons dans cette partie de la thèse ne reflètent que très partiellement les possibilités de simulations que nous offre le logiciel basé sur les fondements théoriques développés dans les chapitres précédents. Nous nous limitons ici uniquement à illustrer les prévisions des endommagements obtenus selon les deux critères locaux sur les trois qui sont introduits précédemment. Il s'agit du critère de la contrainte normale maximale et de l'allongement relatif maximal. Faute de temps, les prévisions basées sur le critère de décohésion n'ont pas pu être abordées dans ce travail.

Le premier résultat, qui nous sert à illustrer les principales caractéristiques de toutes les simulations présentées plus loin, correspond à un composite constitué d'une famille de renforts de forme ellipsoïdale de demi axes respectant les rapports suivant :

$$\frac{a}{c}=10 \quad \frac{b}{c}=2. \tag{V.1}$$

L'inclusion est orientée à l'aide de trois angles d'EULER

$$\alpha=\beta=\gamma=0, \tag{V.2}$$

c'est-à-dire son axe "a" est confondu avec l'axe X du repère du VER, son axe "b" est parallèle à l'axe Y et l'axe "c" à l'axe Z. La fraction volumique de renforts retenue pour ce calcul correspond à f = 0,2. De plus, nous admettons que les renforts se cassent toujours en deux parties de volume identique ($\varphi = 0.5$).

Les propriétés élastiques de renforts sont définies par le module de YOUNG, supposé égal à $E = 26\,000$ MPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ (μ=10 000 MPa). La matrice, également isotrope, est supposée 100 fois plus souple. Le VER est sollicité en traction simple dans la direction 1 (ou X). Nous supposons que la valeur critique de la contrainte en traction du renfort vaut $\sigma_c = 100$ MPa. La matrice est caractérisée par sa limite d'élasticité $\sigma_o = 20$ MPa et sa contrainte ultime vaut $\sigma_u = 40$ MPa. Deux modèles d'ouverture de la fissure sont testés, à savoir le modèle d'IRWIN et celui de DUGDALE-BARENBLATT. La figure (V.1) illustre les résultats obtenus. La différence entre les valeurs d'ouverture des fissures obtenues selon les deux modèles (IRWIN et DUGDALE-BARENBLATT) est très faible, voir paragraphe (III.3.1.1). Au niveau du comportement global, en particulier l'évolution de la

contrainte macroscopique Σ_{11} en fonction de la déformation macroscopique E_{11}, cette différence est pratiquement invisible et les deux choix d'ouverture de fissure conduisent au même résultat. On peut donc utiliser indifféremment l'une ou l'autre des deux méthodes. Pour la suite nous adoptons le choix du modèle d'Irwin.

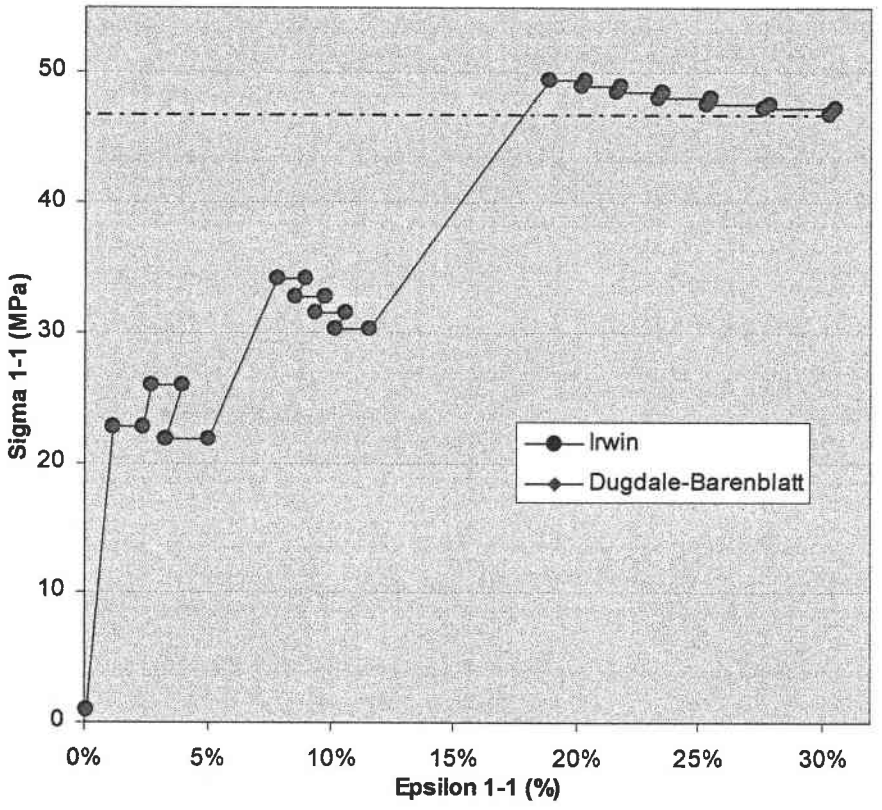


Figure V.1 *Comparaison Irwin / Dugdale-Barenblatt*

La courbe de traction s'étale par paliers. Le premier palier sur cette figure correspond à la rupture de l'inclusion (20% des renforts) pour une contrainte axiale macroscopique de 22,7 MPa. Cette rupture introduit dans le composite une fissure ouverte (noyée dans la matrice) dont le demi axe 'a_f' (dans la direction de traction) vaut :

$a_f = 0,00546 \cdot a$. Ceci correspond à la fraction volumique du vide de 0,10%. Le composite est constitué maintenant de deux renforts de forme :

$$\frac{a}{c} = 5 \quad \frac{b}{c} = 2 \tag{V.3}$$

d'une fissure de forme :

$$\frac{a_f}{c_f} = 0,0546 \quad \frac{b_f}{c_f} = 2, \tag{V.4}$$

et de la matrice dont la fraction volumique est égale $f_M = 0.799125$.

Bien que les deux renforts soient identiques leur rupture ne se produit pas à la même charge, en respectant le critère probabiliste présenté dans le chapitre (III). Ce constat est observé sur la figure (V.1) au niveau du second palier. Un des renforts casse pour une contrainte macroscopique de 26 MPa. Le matériau équivalent devient plus souple et le deuxième renfort se rompt plus tard avec une contrainte macroscopique différente. Suite à cette troisième rupture la microstructure est constituée maintenant de quatre renforts, trois fissures ouvertes dont la fraction volumique vaut 0.61% et d'une matrice dont la fraction volumique diminue lentement mais progressivement. Ce processus se poursuit en plusieurs étapes conduisant à la fin à une microstructure contenant (pour cette simulation) une quinzaine de fissures différentes de fraction volumique f_f = 15,24%. A partir de cette configuration de microstructure, le comportement devient instable ce qui devrait correspondre à la ruine de notre VER. Le phénomène est mis en évidence sur la figure (V.2) où nous remarquons la chute brutale des contraintes dans la matrice.

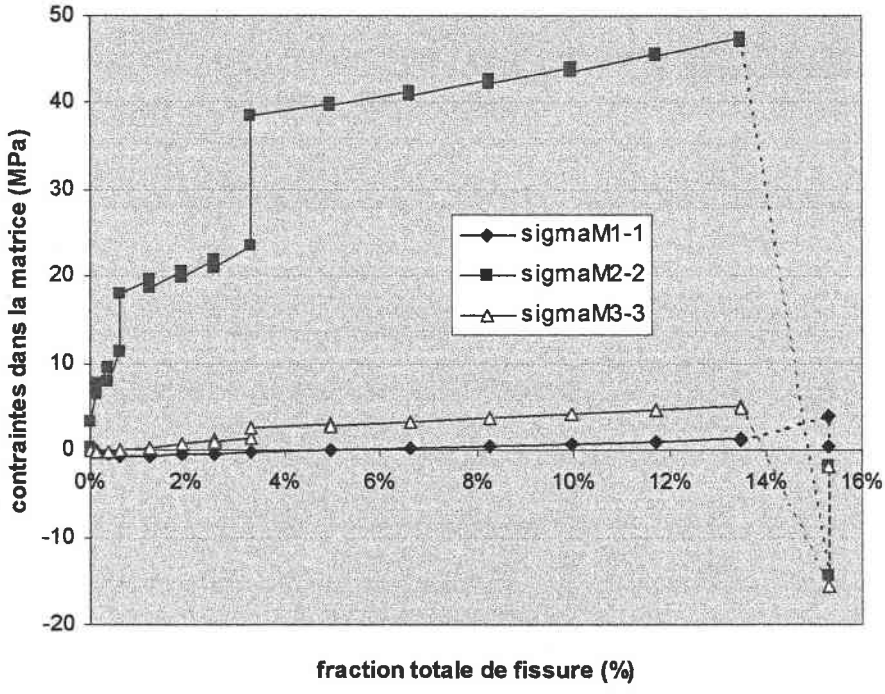


Figure V . 2 : *évolution des contraintes dans la matrice*

Dans la suite de ce chapitre nous analysons les résultats suivants :

- l'influence de la forme des renforts sur le processus d'endommagement en traction simple selon les deux critères évoqués plus haut,

- les surfaces de charge à la rupture dans le sous-espace Σ_{11}-Σ_{22} de l'espace de contraintes à six dimensions.

Trois géométries de renforts sont étudiées : sphériques, cylindriques de rapport de forme 10 et discoïdaux de rapport de forme 0.1. Les matériaux utilisés dans ces simulations sont définis par le Tableau (V.1). Il s'agit de matériaux isotropes dont le rapport de rigidités est de 20 (renfort/matrice).

	μ (Mpa)	λ (Mpa)	σ_{cr} (Mpa)	σ_u (Mpa)	ε_{cr} (Mpa)	ε_u (Mpa)
renfort	6000	9000	150	165	0.854	0.939
matrice	300	450	20	22	-	-

Tableau V.1 : *Propriétés des matériaux*

Comme dans l'exemple présenté ci-dessus, nous supposons que les renforts cassent toujours en deux moitiés.

Il est important de souligner que les valeurs critiques de la contrainte et de la déformation ont été choisies de manière à obtenir une première rupture du composite en traction pour approximativement la même valeur de la contrainte macroscopique.

V.2 - ESSAIS DE TRACTION SIMPLE

Les essais de traction sont réalisés sur le composite à 20% de renforts. Conformément au critère de rupture probabiliste la contrainte (déformation) de rupture de renforts prend une des dix valeurs possibles dans la plage σ_o et σ_u (respectivement ε_o et ε_u). Par conséquent la rupture d'une famille de renforts se fait en dix fois.

Pour chaque type de renfort et les deux critères de rupture nous dépouillons :

- la courbe contrainte macroscopique de traction (Σ_{11}) en fonction de la déformation correspondante (E_{11}),
- l'évolution des modules de Young, selon trois directions orthogonales du VER, en fonction de la fraction volumique des vides (f_f). Ces modules son définis par la relation ci-dessous

$$E_X^{eff} = E_1^{eff} = \frac{1}{S_{1111}^{eff}}$$
$$E_Y^{eff} = E_2^{eff} = \frac{1}{S_{2222}^{eff}} \qquad \textbf{(V.5)}$$
$$E_Z^{eff} = E_3^{eff} = \frac{1}{S_{3333}^{eff}}$$

- l'évolution de la contrainte de traction dans la matrice (σ_{11}^{M}) en fonction de la fraction des vides (f_f).

V.2.1 - COMPOSITE A RENFORTS SPHERIQUES

V.2.1.1 CRITERE EN CONTRAINTE

Le VER est chargé en traction dans la direction X. La figure (V.3) montre la courbe de traction obtenue pour le matériau décrit plus haut. Comme précédemment, nous observons une réponse en paliers. Nous constatons, conformément à la construction du modèle, que les portions rectilignes de cette courbe apparaissant après la rupture de toutes les inclusions de la même forme, passe par l'origine du graphe. Les pentes de ces segments correspondent aux valeurs du module de Young pour l'état de microstructure obtenue. Le comportement de chaque phase reste alors linéaire. La première rupture advient pour une contrainte macroscopique de 82 MPa.

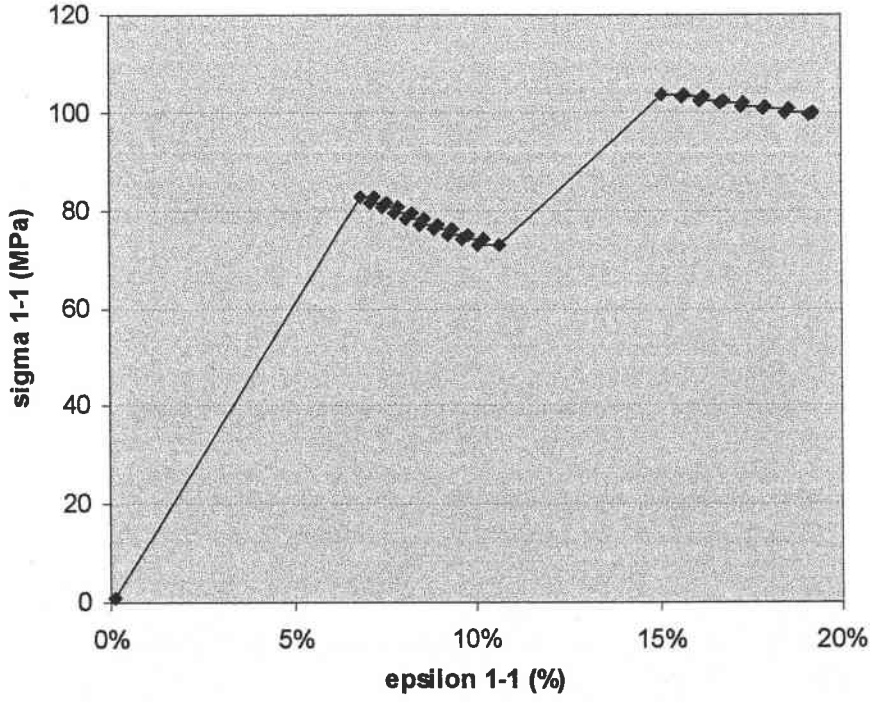


Figure V. 3 : *Courbe de traction d'un composite à renforts sphériques – critère en contrainte*

Nous rappelons que la contrainte critique du renfort vaut 150 MPa. Le rapport entre les deux valeurs témoigne de la localisation de la contrainte dans les renforts. La dernière rupture de l'inclusion sphérique demande une contrainte macroscopique inférieure. En effet, cette rupture a lieu pour une contrainte d'environ 74 MPa. En même temps la déformation macroscopique correspondant à ces deux événements vaut respectivement 6% et 11.5%. L'assouplissement de la structure est due d'une part à l'apparition des fissures ouvertes et d'autre part à un transfert de charge moins important vers les inclusions qui deviennent plus courtes dans la direction de traction. Pour continuer à rompre les nouvelles inclusions de forme discoïdale ($\frac{a}{c} = 0.5$; $\frac{b}{c} = 1$) la contrainte macroscopique doit augmenter. La première rupture des nouvelles inclusions discoïdale demande une contrainte macroscopique de 105 MPa et correspond à une déformation de 15 %. Le processus continue de la même manière au delà de ce chargement.

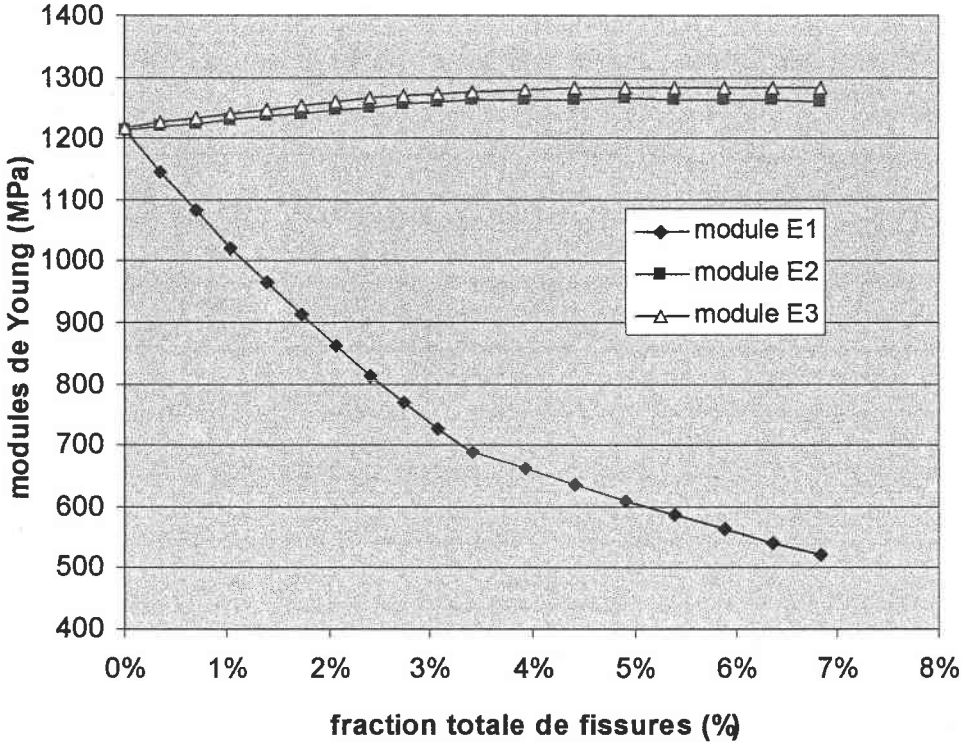


Figure V. 4 : *Evolution des modules de Young – critère en contrainte*

La figure ci-dessus illustre la variation des modules de Young de composite à renfort sphérique. Au départ les trois modules ont la même valeur de 1220 MPa. Le module de Young dans la direction de traction diminue pratiquement linéairement dans la phase de rupture des inclusions sphériques pour atteindre une valeur de 680 MPa quand toutes les

inclusions sont discoïdales de rapport de forme 0.5. Ce module décroît de nouveau linéairement dans la phase de rupture des nouvelles inclusions discoïdales. A la fin de la simulation, c'est-à-dire pour une fraction volumique de fissure d'environ 7%, il vaut 530 MPa. L'évolution de deux autres modules est semblable. Leur valeur croit légèrement pour passer à 1270 MPa à la fin de la simulation.

Cette évolution témoigne du comportement orthotrope du matériau fissuré effectif.

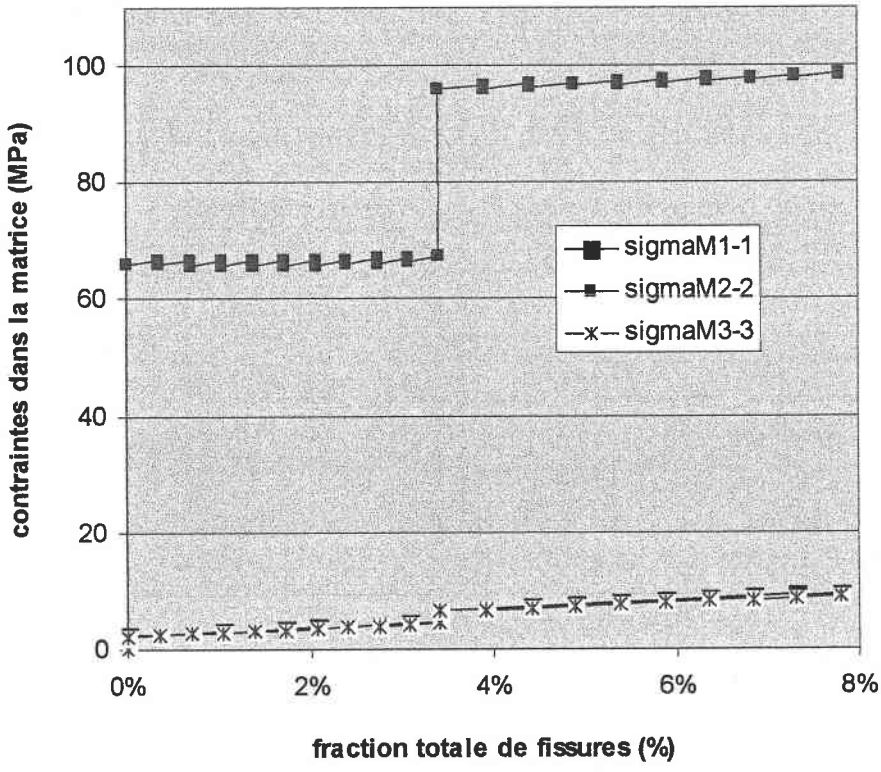


Figure V. 5 : *Evolution des contraintes dans la matrice – critère en contrainte*

La figure V.5 montre l'évolution des trois composantes normales du tenseur de contrainte de la matrice. Au fur et à mesure de l'évolution de l'endommagement du matériau, la matrice reprend le chargement extérieur. La contrainte dans la direction de traction vaut 65 MPa au moment de la première rupture de fibres. Elle reste pratiquement constante pendant la première phase de l'endommagement pour passer à une valeur proche de 90 MPa dans la deuxième phase. Elle continue à croître légèrement pendant les ruptures successives des renforts discoïdaux. Les composantes σ_{22}^{M} et σ_{33}^{M} évoluent faiblement en passant d'une valeur proche de zéro au début du processus à une valeur de 10 MPa pour une fraction finale de vide.

V.2.1.2 CRITERE EN DEFORMATION

Le critère en déformation donne pour cette configuration (inclusion sphérique et chargement en contrainte) des résultats parfaitement identiques à ceux du critère en contrainte et révèle bien la dualité entre les deux critères pour des configurations simples. Les différentes caractéristiques sont représentées sur les trois figures qui suivent.

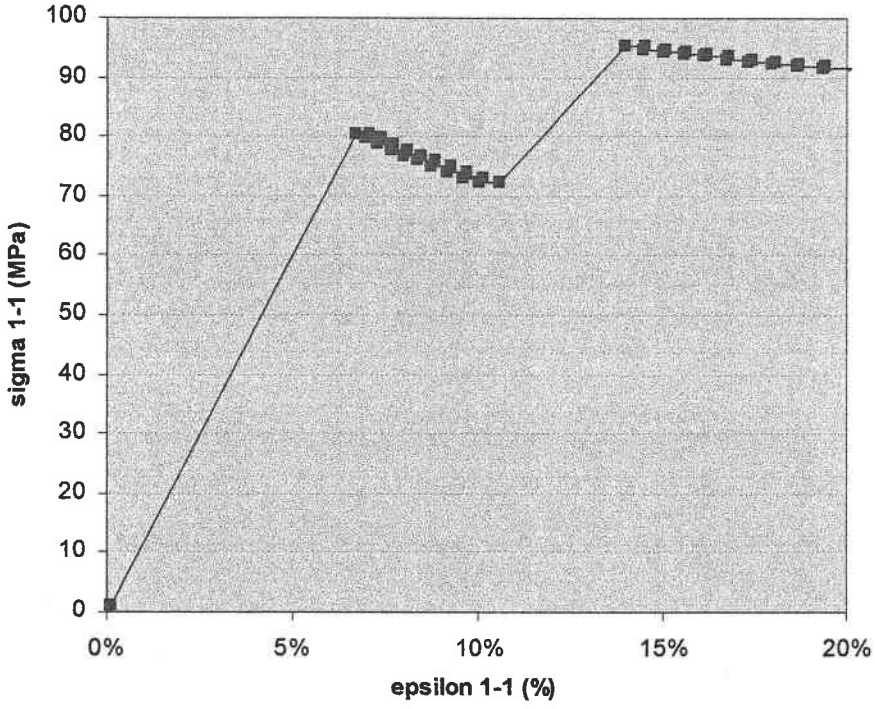


Figure V.6 : *Courbe de traction d'un composite à renforts sphériques – critère en déformation*

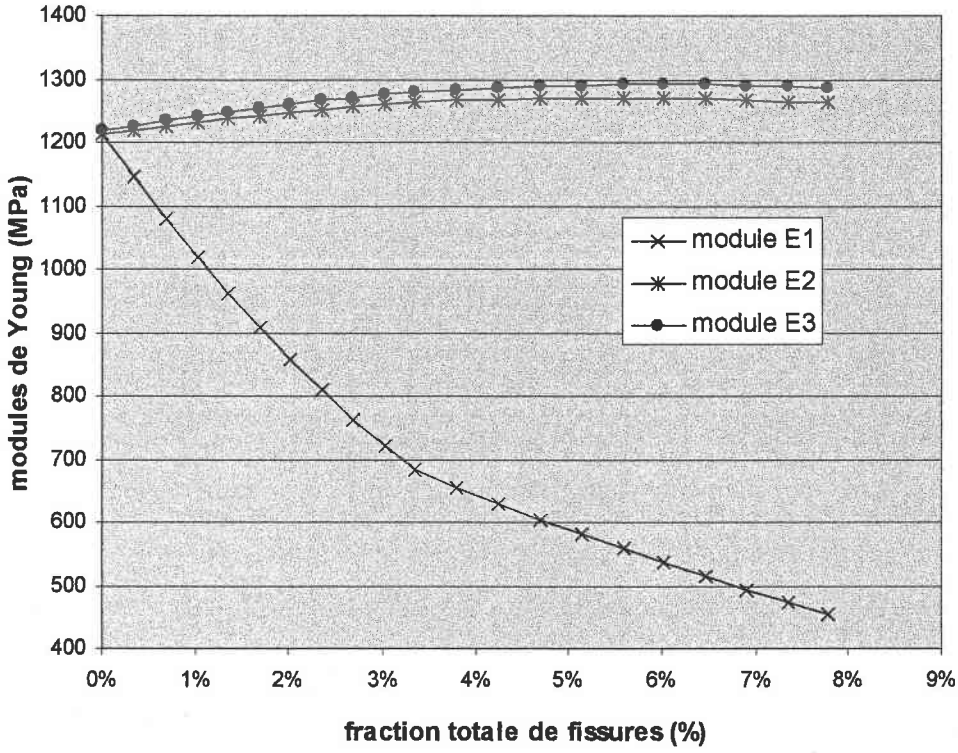


Figure V. 7 : *Evolution des modules de Young – critère en déformation*

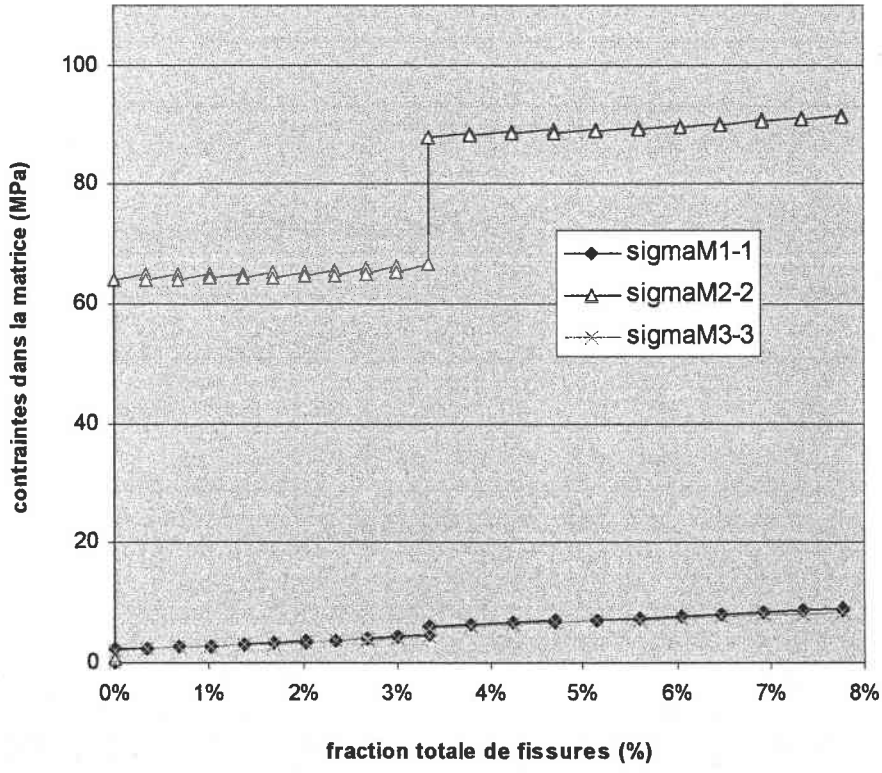


Figure V. 8 : *Evolution des contraintes dans la matrice – critère en déformation*

La figure suivante (V.9) représente la comparaison des courbes de traction sur le composite à renforts sphériques obtenues suivant les deux critères. Nous constatons que l'allure générale de ces courbes est semblable.

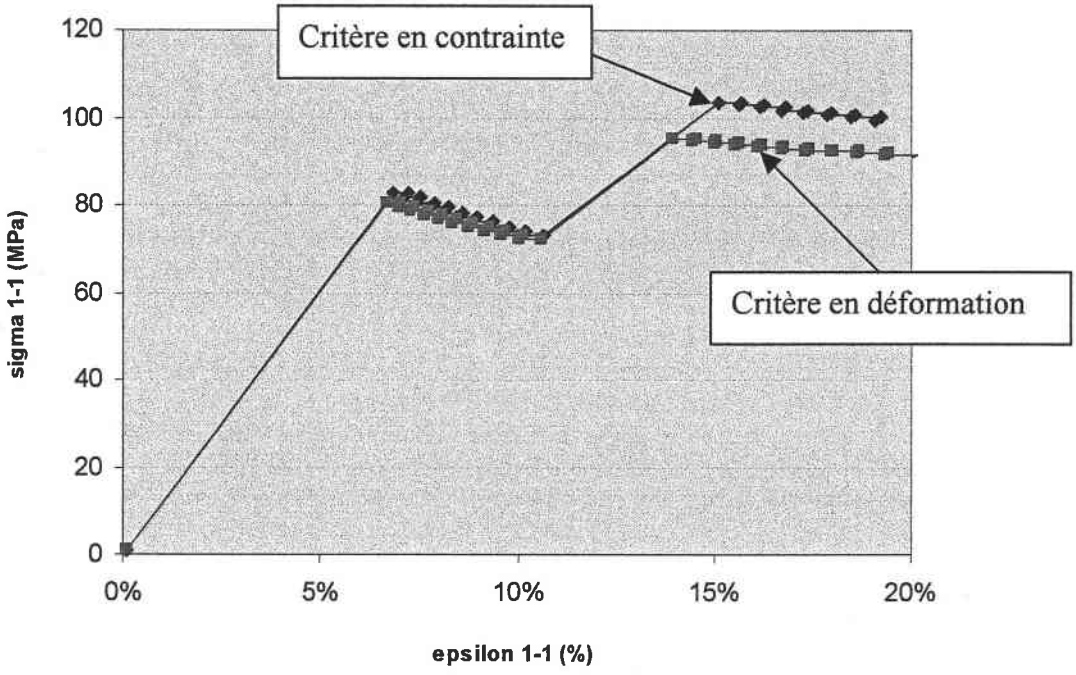


Figure V.9 : *Comparaison de courbes de traction d'un composite à renforts sphériques Obéissant au critères d'endommagement en contrainte et en déformation*

V.2.2 - COMPOSITE A RENFORTS CYLINDRIQUES

Pour un VER comportant des renforts cylindriques allongés dans la direction de traction, l'allure générale des différents comportements est identique à celle d'un VER à renforts sphériques. Toutefois, la création des fissures est beaucoup plus rapide et fait apparaître rapidement des tassements de paliers de rupture. De façon générale, la désorganisation de la microstructure intervient pour une fraction volumique totale de fissure assez faible. Par contre, le nombre de fissures créées et par conséquent le taux de fissuration est très élevé. En effet, lors d'une première rupture d'un renfort allongé « *r* » pour une sollicitation macroscopique donnée, pour dissiper totalement l'énergie provenant de la désorganisation introduite après la rupture des éventuels voisins de « *r* », les deux premiers morceaux de renforts obtenus pour ce dernier reste suffisamment long pour se rompre à nouveau sans augmentation du chargement macroscopique. C'est ce phénomène qui explique la multiplication des fissures. D'un autre côté, l'ouverture des fissures étant corrélée à la contrainte matricielle qui est plus faible que dans le cas sphérique (le caractère allongé des renforts permettant à ces derniers de concentrer plus de contrainte), la faible valeur de la

fraction volumique de fissures se trouve ainsi expliquée. Les différents résultats sont présentés ci-dessous.

V.2.2.1 CRITERE EN CONTRAINTE

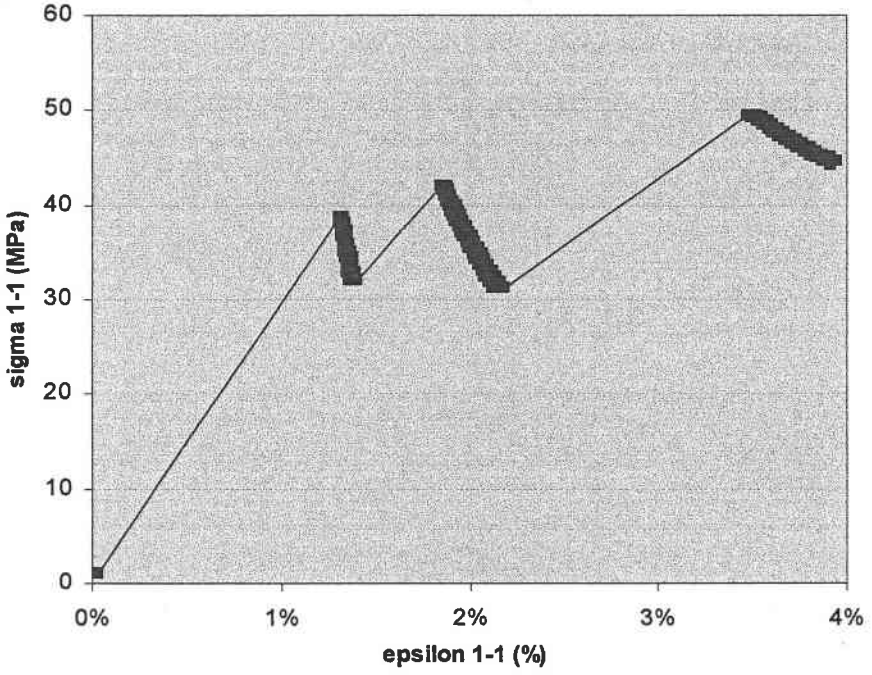


Figure V.10: *Courbe de traction d'un composite à renforts cylindriques – critère en contrainte*

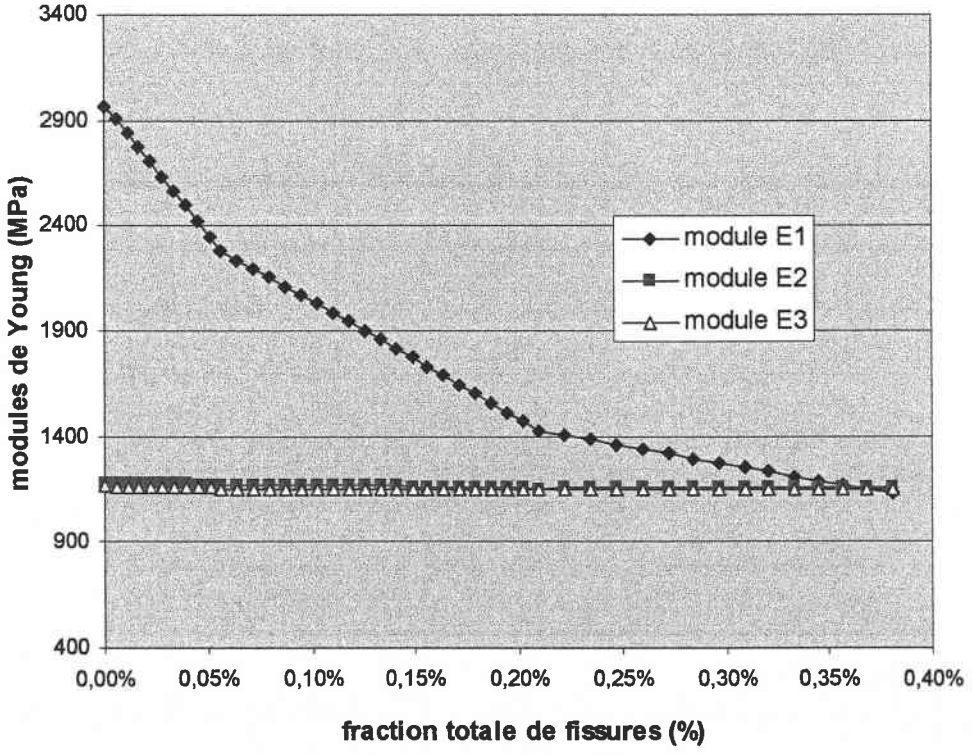


Figure V.11: *Evolution des modules de Young – critère en contrainte*

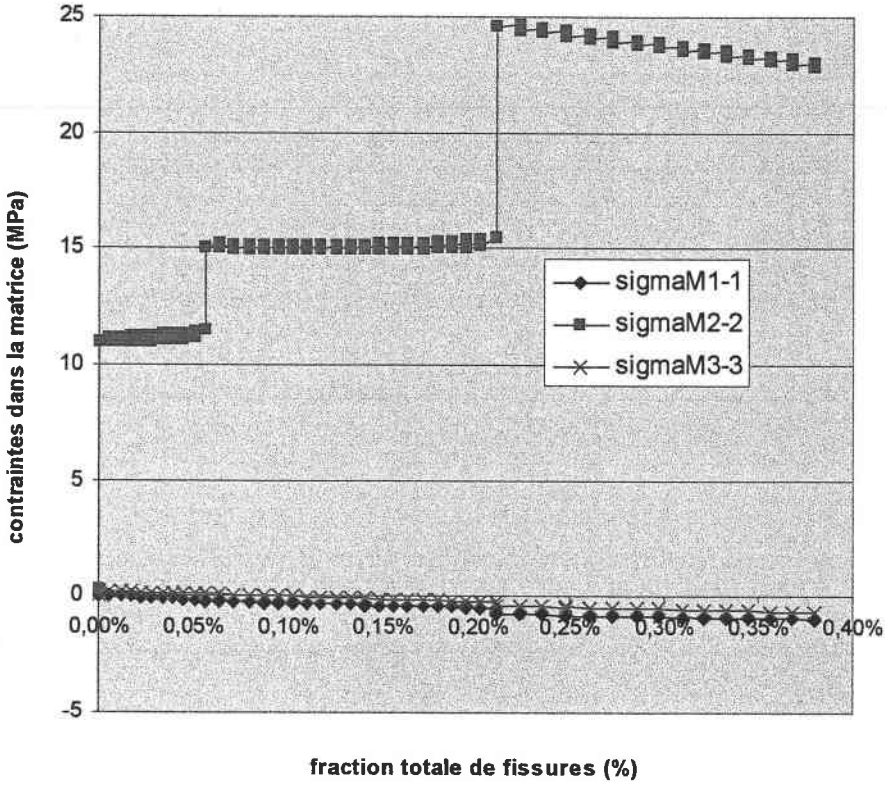


Figure V.12: *Evolution des contraintes dans la matrice – critère en contrainte*

V.2.2.2 CRITERE EN DEFORMATION

A la différence de l'application du critère en contrainte, l'utilisation du critère en déformation permet d'obtenir des fractions volumiques plus élevées.

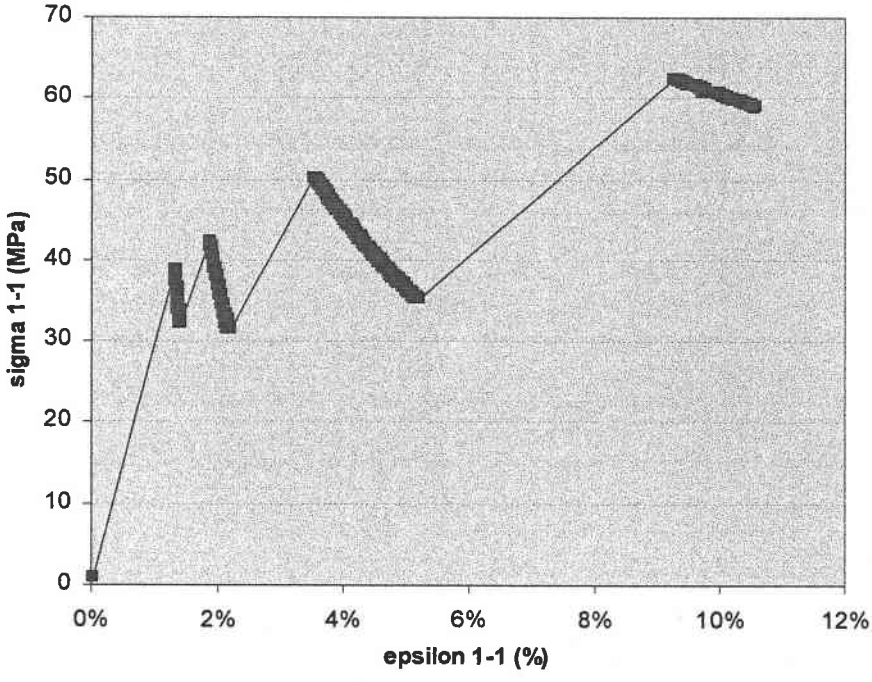


Figure V.13 : *Courbe de traction d'un composite à renforts sphériques – critère en déformation*

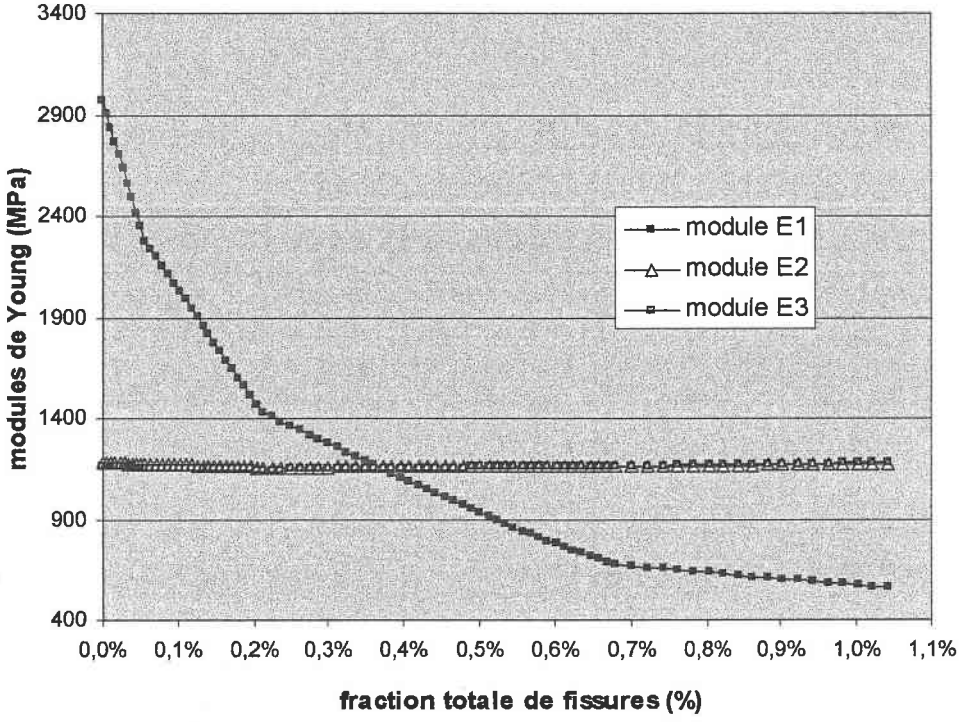


Figure V. 14 : *Evolution des modules de Young – critère en déformation*

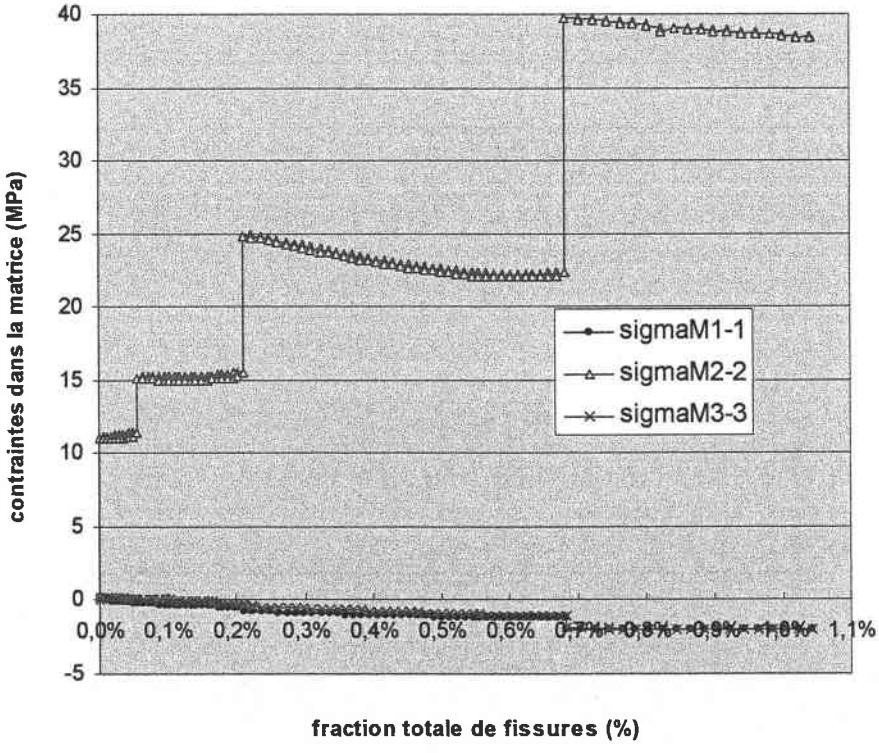


Figure V. 15 : *Evolution des contraintes dans la matrice – critère en déformation*

V.2.3 - COMPOSITE A RENFORTS DISCOÏDAUX

Pour cette configuration, la traction s'effectuant dans la direction de l'axe des renforts discoïdes, il est évident que le niveau de contrainte pour effectuer une rupture de renfort sera très élevé. De façon générale les comportements sont identiques selon les deux critères. Dans notre simulation la première rupture intervient même pour une valeur de contrainte macroscopique presque égale à la contrainte critique de rupture des renforts, c'est-à-dire que les renforts concentrent la presque totalité de la sollicitation macroscopique. Cette rupture intervient donc pour déformation macroscopique assez élevée. Tout se passe comme si la tenue mécanique était seulement garantie par les renforts. La pente de la courbe de traction (à la première rupture) correspond pratiquement au module de Young du renfort discoïde. D'un autre côté la contrainte dans la matrice, en particulier dans la direction de traction, est également très élevée et pratiquement égale à la contrainte macroscopique, une valeur largement supérieure à sa contrainte critique de rupture. L'endommagement de la matrice n'étant pas encore pris en compte dans notre simulation, dans cette configuration la matrice se comporte comme les renforts. Ces critères basés sur la rupture des renforts trouvent ici leur limite. Ceci justifie l'introduction d'autres critères d'endommagement comme celui du décollement de l'inclusion ou décohésion interfaciale qui devrait s'activer lorsque la rupture devient difficile ou impossible.

V.2.3.1 CRITERE EN CONTRAINTE

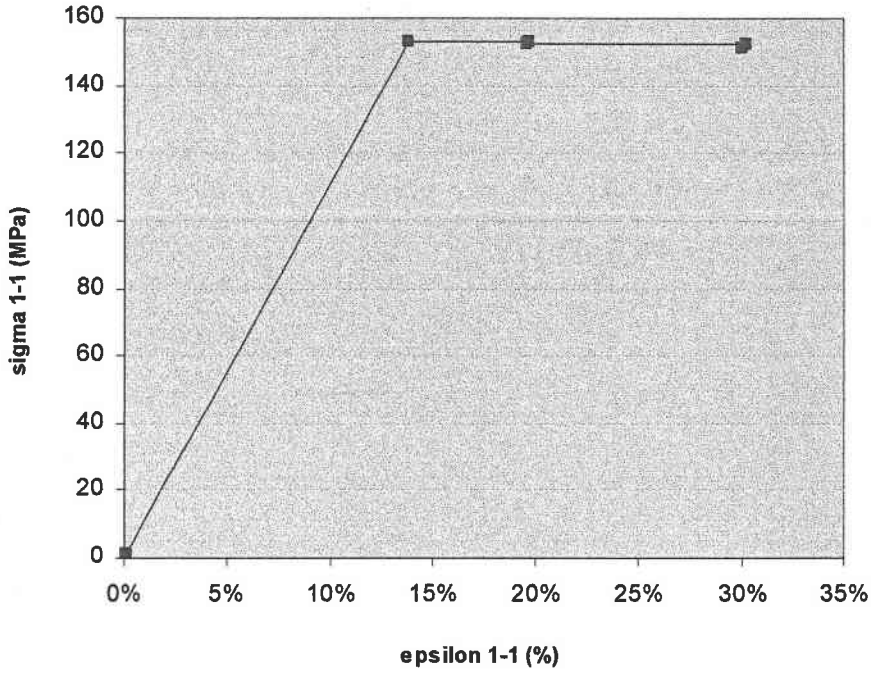


Figure V. 16 : *Courbe de traction d'un composite à renforts discoïdaux– critère en contrainte*

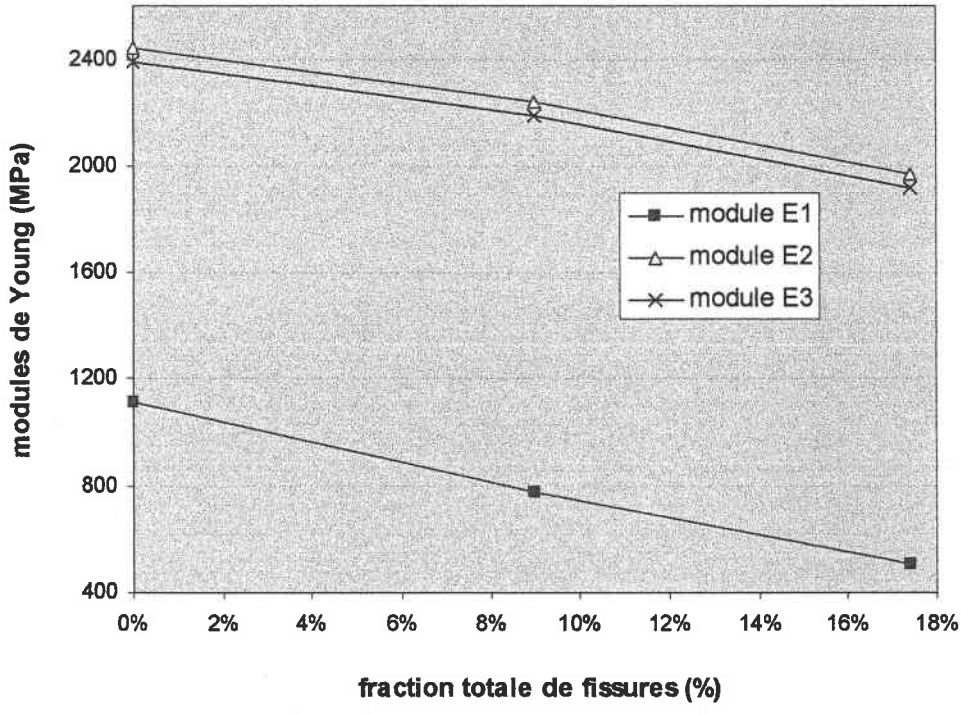


Figure V. 17 : *Evolution des modules de Young – critère en contrainte*

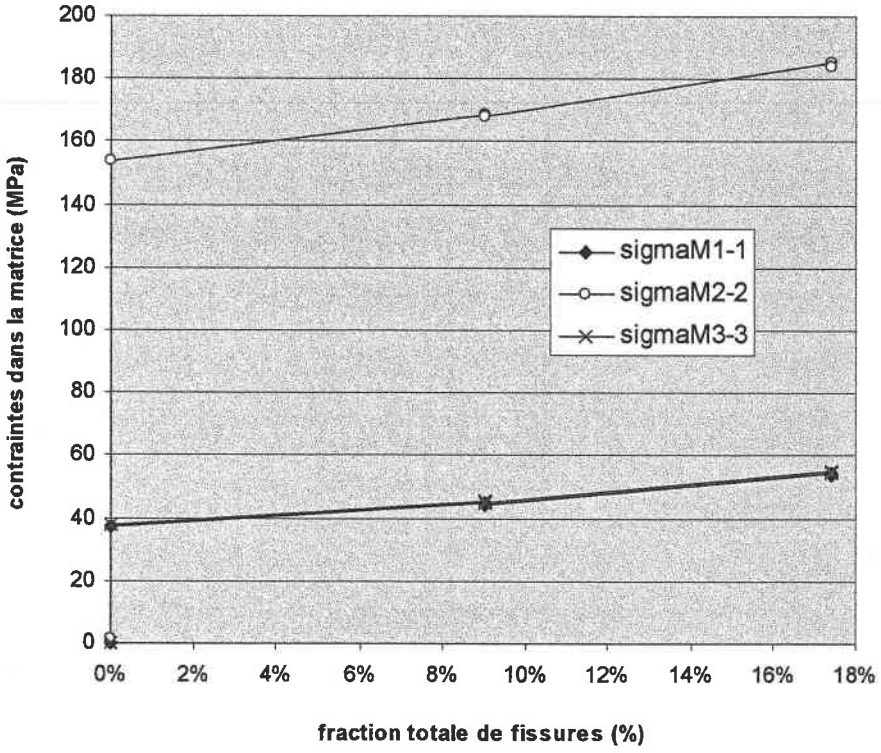


Figure V. 18 : *Evolution des contraintes dans la matrice – critère en contrainte*

V.2.3.2 CRITERE EN DEFORMATION

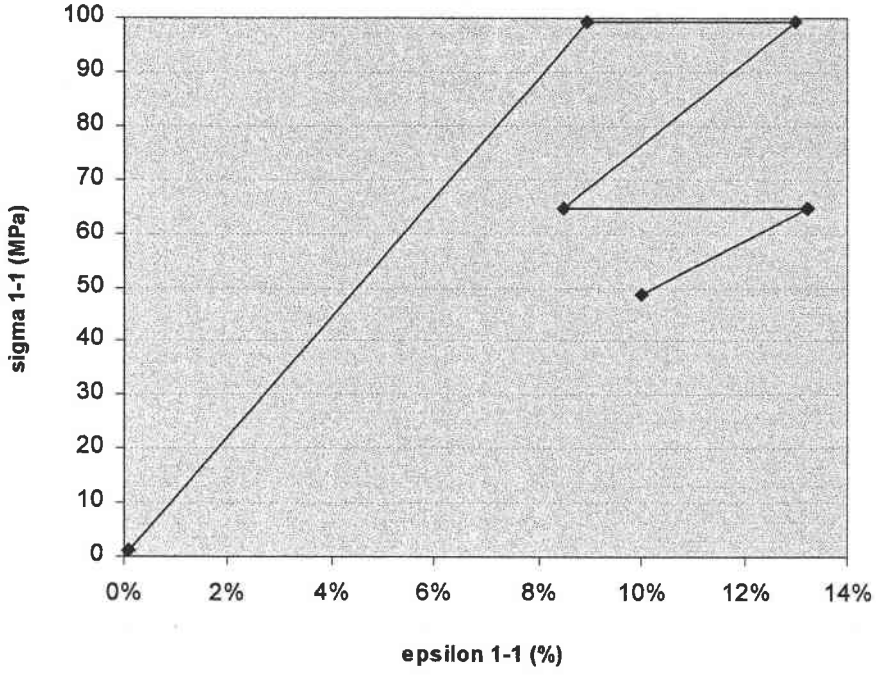
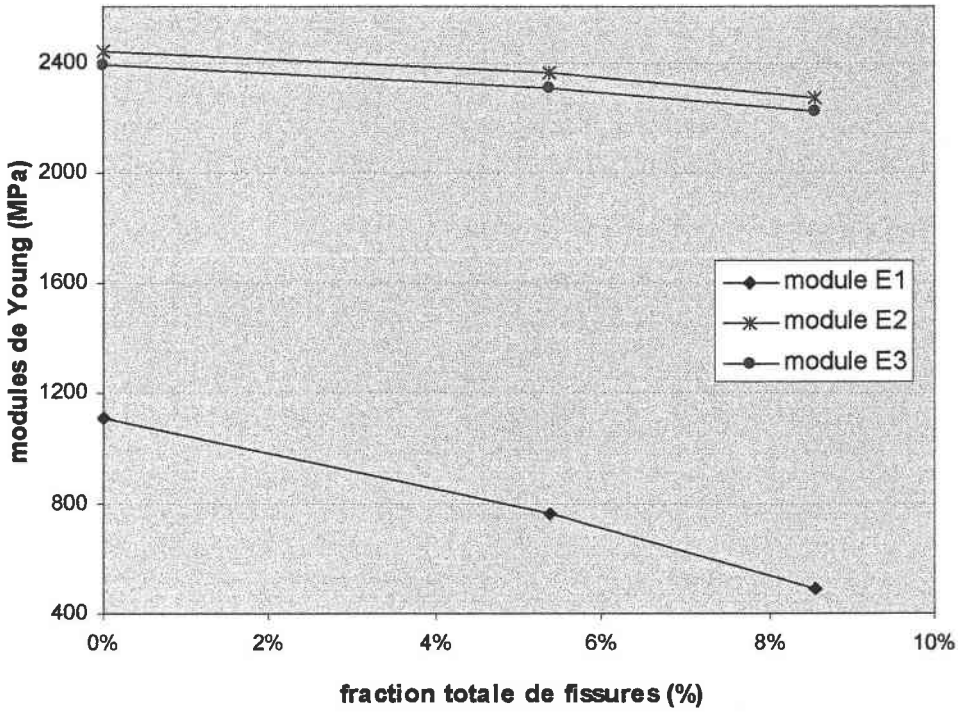


Figure V. 19 : *Courbe de traction d'un composite à renforts discoïdaux– critère en déformation*



FigureV. 20 : *Evolution des modules de Young – critère en déformation*

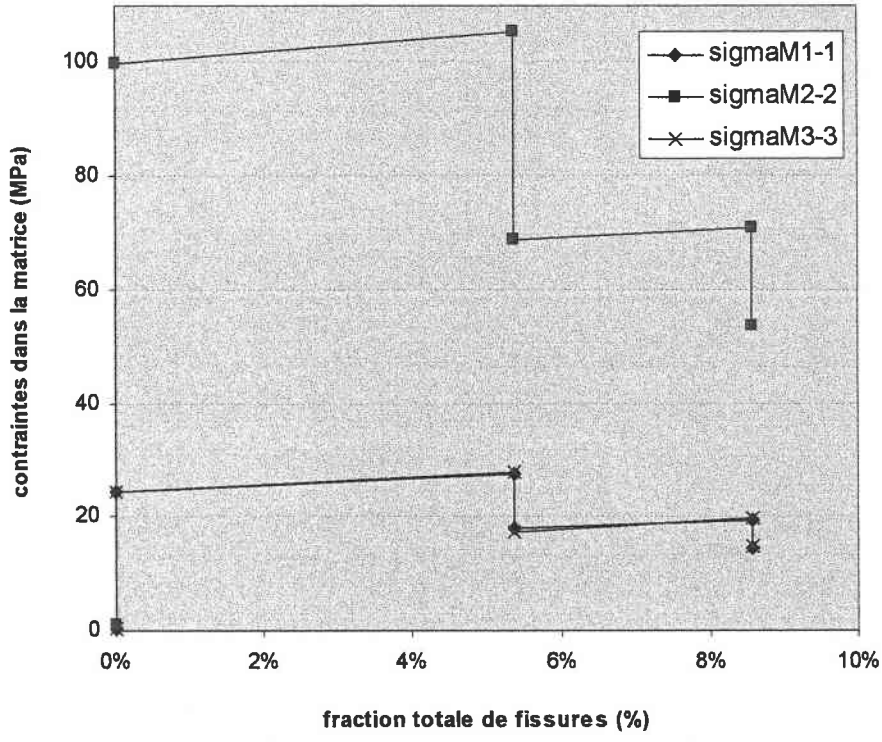


Figure V. 21 : *Evolution des contraintes dans la matrice – critère en déformation*

V.3 - SURFACES DE CHARGES A LA RUPTURE

Dans cette partie sont présentées quelques surfaces de chargement à la rupture pour les trois formes de renforts que nous nous sommes fixées.

V.3.1 - COMPOSITE A RENFORTS SPHERIQUES

Le critère de rupture utilisé ici est celui de la contrainte critique. La surface est triangulaire avec des valeurs très élevées en compression. Ce qui nécessite un zoom graphique sur le quadrant des contraintes positives.

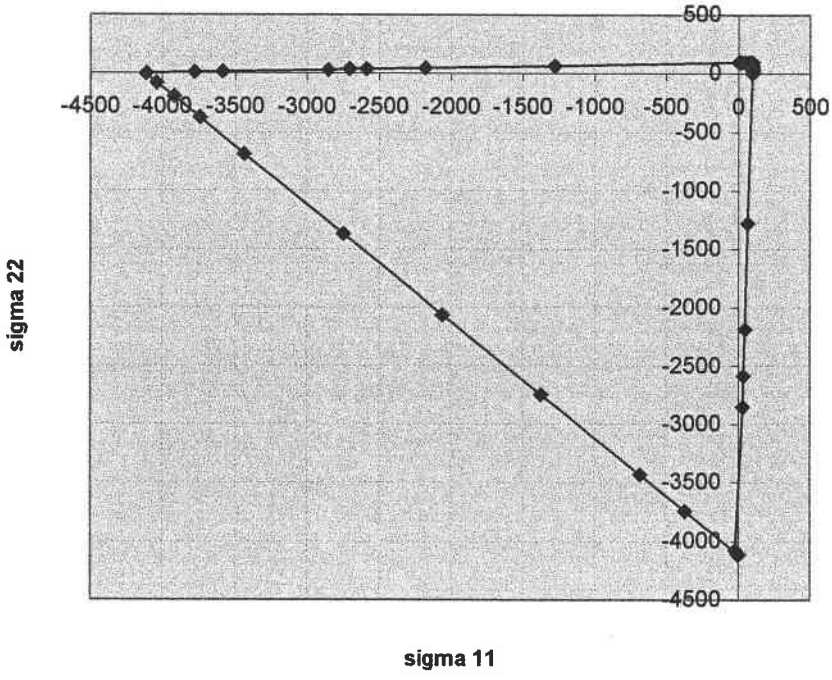


Figure V. 22 : *surface de chargement à la rupture pour un renfort sphérique*

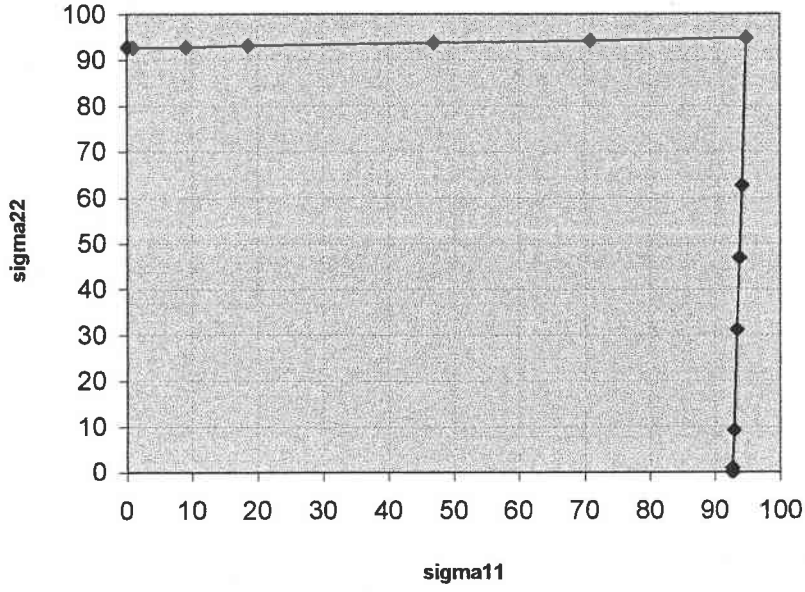


Figure V.23 : *surface de chargement à la rupture pour des contraintes positives*

V.3.2 - COMPOSITE A RENFORTS DISCOÏDAUX

Pour ces renforts, le critère en contrainte ne permet pas de fermer la surface de chargement. D'ou l'intérêt à utiliser le critère en déformation. Un exemple est effectué plus loin pour les renforts cylindriques.

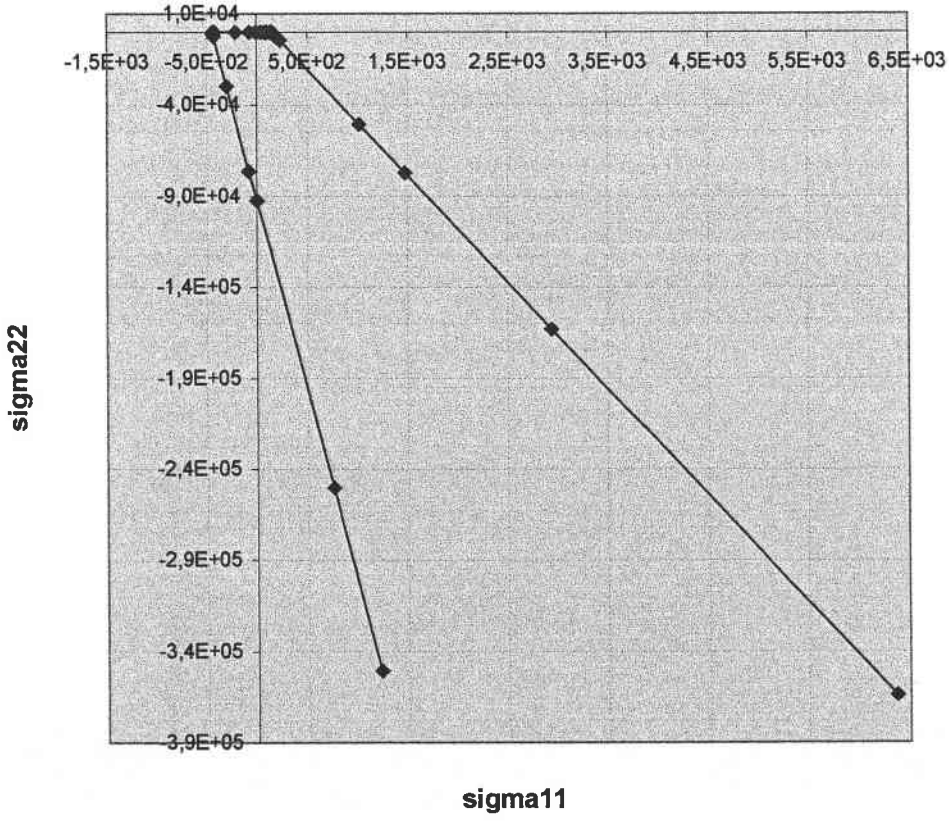


Figure V.24 : *surface de chargement pour des renforts discoïdaux*

V.3.3 - COMPOSITE A RENFORTS ELLIPSOÏDAUX (CYLINDRIQUES)

Pour un critère en contrainte, on obtient bien une surface elliptique sauf que les contraintes sont extrêmement élevées pour les zones de compression.

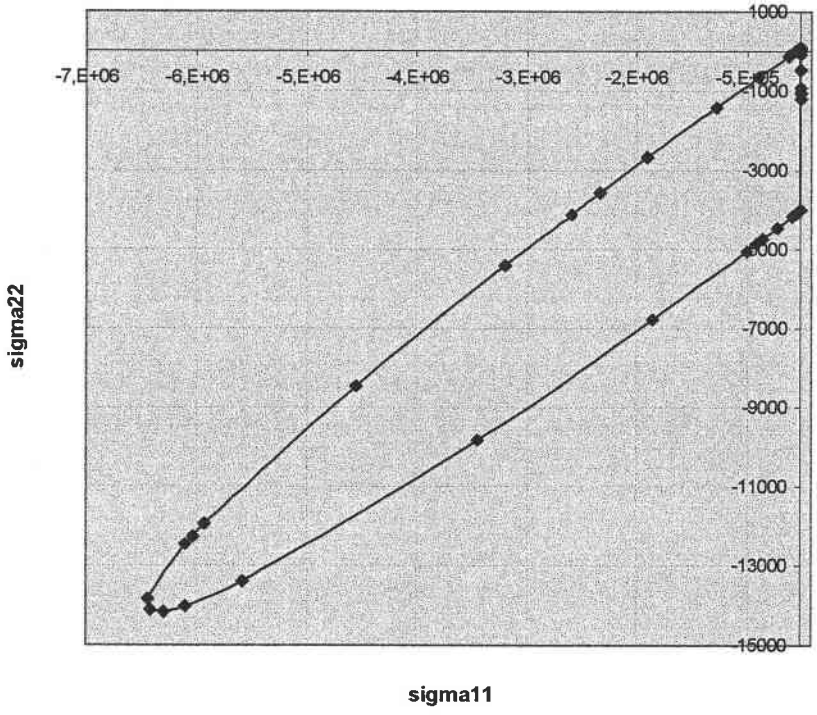


Figure V.25 : *surface de rupture pour des renforts cylindriques avec un critère en contrainte*

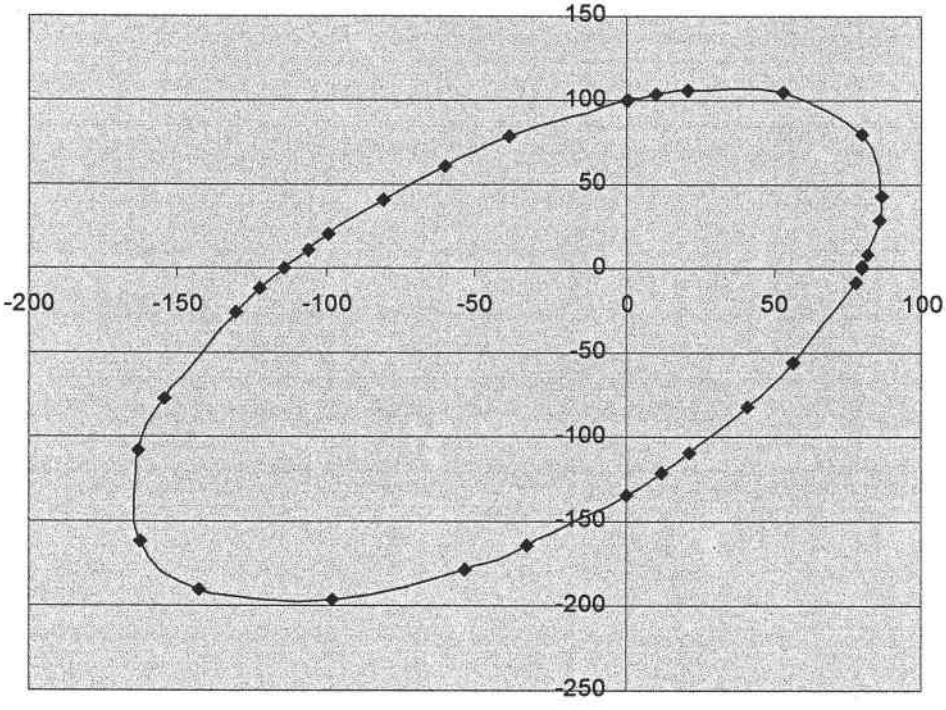


Figure V.26 : *surface de chargement à la rupture avec le critère en déformation*

CONCLUSION

La rupture macroscopique observée et quantifiable au niveau d'un échantillon est souvent le résultat d'un phénomène complexe et cumulatif de micro-dégradation de la structure interne. Comprendre et bien cerner ces manifestations micromécaniques offre plus de possibilité de prévoir exactement l'endommagement macroscopique.

A l'heure actuelle, l'ingénieur doit être en mesure de choisir de façon optimale non seulement la structure de l'objet qu'il conçoit, mais aussi les matériaux qui en constituent la substance.

Si les outils de simulations en concurrence sur le marché, permettent de traiter de façon classique et efficace l'aspect optimisation de structure, les outils de simulation des phénomènes internes aux matériaux sont encore au stade du développement.

Notre étude a proposé une nouvelle approche de modélisation et de simulation d'endommagements de matériaux hétérogènes en se basant sur des considérations micromécaniques. L'approche de résolution que nous avons adoptée est basée en partie sur des techniques d'homogénéisation d'un milieu hétérogène. Il a donc fallu dans un premier temps choisir une méthode ou technique de caractérisation nous permettant de mieux conduire nos simulations. Nous avons ainsi adopté l'homogénéisation par la méthode autocohérente. Mais très vite nous nous sommes rendu compte des limites de cette technique. La résolution des inconvénients du schéma autocohérent nous a amené à l'élaboration d'une technique d'homogénéisation incrémentale. Cette approche fut développée pour les configurations en monosite ou multisite et permet de traitement une gamme beaucoup large de matériaux hétérogènes.

La méthode d'homogénéisation étant adoptée et bien mise en place, elle s'est enrichie par l'introduction de l'endommagement micromécanique basé sur trois critères d'endommagement à savoir :

- endommagement par contrainte critique
- endommagement par déformation critique
- et endommagement par décohésion interfaciale

Toute la théorie sur ces différents critères est exposée. Toutefois les applications pour le critère en décollement manque encore.

Le comportement élastique linéaire des différents constituants est le seul comportement que nous avons actuellement considéré. Ceci nous a permis d'obtenir un comportement global élastique non-linéaire pour le matériau effectif. De façon générale, ce travail ouvre la voie à un large domaine d'investigation pour le comportement des composites dégradés micromécaniquement. Nous avons insisté particulièrement sur le côté modulaire de notre démarche qui offre l'avantage d'intégrer progressivement toutes les hypothèses ou réflexions du processus d'étude que l'on est en droit de formuler. Une grande part est également faite à la mécanique de la rupture, surtout pour traduire les phénomènes de fissuration d'une façon la plus proche possible de la réalité. Nous nous sommes particulièrement basés sur des observations fractographiques justifiant les hypothèses que nous avons formulées.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Allix O., Cluzel C., Gasser A., Ladevèze P., (1993) *Modélisation des composites céramique-céramique à différentes échelles,* Revue des composites et des matériaux avancés, 3, 277-297.

Andrieux S. (1983) *Un modèle de matériau microfissuré. Application aux roches et aux bétons.,* Thèse de l'Ecole Nationale ds Ponts et Chaussées.

Andrieux S., Bamberger Y., Marigo J.J., (1986) *un modèle de matériaux fissurés pour les bétons et les roches,* J. Méch. Th. Appl., 5, 471-513.

Barenblatt G. I. (1962) *The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture,* Advances in Appl. Mech., vol. 7, pp.55-129.

Barret C., Baste S., (1999) *induced damage by ellipsoidal crack in anaisotropic medium,* Int. J. Solids Structures, 36, 3709-3729.

Baste S., Audoin B., (1991) *On internal variable in anisotropic damage,* Eur. J. Méch., A/Solids, 10, 587-606.

Benveniste Y. (1986) *On the Mori-Tanaka's method in cracked bodies,* Mech. Rech. Comm. 13, 193-201.

Beremin F. M. (1981) Met. Trans. 12 A, p.723.

Berveiller M. Fassi-Fehri O et Hihi A. (1986) *Détermination du comportement élastique effectif d'un matériau composite à partir d'un modèle autocohérent à plusieurs sites,* Compte rendus des 5èmes Journées Nationales sur les composites (JNC5), Paris, pp.237-247.

Berveiller M. Fassi-Fehri O et Hihi A. (1987) *The problem of two inclusions in an anisotropic medium.* Int. J. Engng. Sci. 25, pp. 691-709.

Berthelot J. M. (1992) *Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures,* éditions Masson.

Bonfoh N., Lipinski P. and Carmasol A. (2003). Modeling of intra-crystalline hardening of materials with particles. Int. J. Plasticity 19.

Bonfoh, N., Lipinski P., Carmasol, A., Tiem, S. (2003). Micromechanical modeling of the ductile damage of polycrystalline materials with heterogeneous particles. Int. J. Plasticity.

Boucher S. *Modules effectifs de matériaux composites quasi homogènes et quasi isotropes constitués d'une matrice élastique et d'inclusions élastiques*

- Cas des concentrations infinitésimales en inclusions, *Revue M*, 21, N°3, (1975).
- Cas des concentrations finies en inclusions, *Revue M*, 22, N°1, (1976)

Brown L. M. and Stobbs W. N. (1976) Philos. Mag. 34, p.351.

Bruggeman D.A.G. (1935) *Berchnung verschiedener physkalisher konstante von heterogene substansen*, Ann physik, 24, 636.

Budiansky B., O'Connell R. J. (1976) *Elastic moduli of a cracked solid*, int. J. solids structures vol. 12, pp. 81-97.

Burr A., (1995) *Micromécanique et comportement de matériaux hétérogènes*, Thèse de l'Université de Paris 6.

Cantwell W.J. and Roulin-Moloney A. N. (1989) *Fractography and failure mechanisms of unfilled and particulate filled epoxy resins*, fractography and failure mechanisms of polymers and composites, Elsevier, pp 233-290.

Carmasol A. et Lipinski P. (1995) *Influence de la précision du calcul du tenseur d'Eshelby sur les propriétés macroscopiques des matériaux*, 2ème congrès Marocain.

Chaboche J.L., (1992) *Damage induced anisotropy : On the difficulties associate in a 2D woven C/SiC composite under mechanical loading. Part I: mechanical characterization*, C. Sci. and Tech., 56, 1363-1372.

Christensen R. M. (1979), *Mechanics of composites materials*, Wiley-Interscience, New-York.

Christensen R. M. (1990), *A critical evaluation for a class of micromechanics models*, J. Mech. Phys. Solids 38, pp.379-404.

Cottrell A. H. (1965) Proc. Roy. Soc. A285

Dederich P. H. et Zeller R. (1973) Z. Phys. 259, pp. 103-113.

Derien K. (1997) *Modélisation par des méthodes d'homogénéisation de l'endommagement et de la rupture de composites AL/SiCp*, Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.

Derien K., Baptiste D., Guedra-Degeorges D., Foulquier J., (1998) *Influence d'une hétérogénéité de répartition sur le comportement à rupture de composites à matrice métallique : approche micromécanique*, Comptes-rendus des JNC11, 3, 1245-1252.

Dragon A., Halm D. (1994) *Modélisation de l'endommagement par mésofissuration : comportement unilatéral et anisotropie induite*, C. R. Acad. Sci. Paris, t322, Série IIb, pp. 275-282

Dugdale D. S. (1960) *Yielding of steel sheets containing slits*, J. Mech. Phys. Solids, vol. 8, pp.100-108.

Dvorak G. J. (1991) *Inelastic deformation of composite materials*, Proc. IUTAM

Gilman J. J. (1958) J. Appl. Phys. 29, 747.

El Mouden M. and Molinari A. (1995) *A cluster approach of the elastic interaction of inclusions*, C. R. Acad. Sci. Paris Série II.

EL Mouden M. (1995) *Une nouvelle méthode d'homogénéisation des matériaux composites élastiques*. Thèse de doctorat, ISGMP Metz

Eshelby J. D. (1957) *The détermination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems*, Proc. R. Soc. Lond., Series A241, pp. 376-396

Fassi-Fehri O. (1985) *Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice anisotrope*, Thèse de Doctorat d'Etat, Metz .

Fitoussi J., Guo G., Gineste B., Baptiste D. (1994) *Détermination d'un critère tridimensionel de rupture à l'interface fibre-matrice d'un composite organique à renforts discontinus*. Comptes rendus des JNC9.

François D. Pineau A. Zaoui A. (1991) Comportement mécanique des matériaux, volume 1, Hermès, Paris.

Frederiksen P. S. (1997) *Experimental procedure and results for the identication of elastic constants of thick orthotropic plates*, *J. of Composite Materials*, Vol 31, N°4 , pp.360 – 381

Friedrich K.and Karger-Kocsis J. (1989) *Fractography and failure mechanisms of unfilled and short reinforced semi-crystalline thermoplastics*, fractography and failure mechanisms of polymers and composites, Elsevier, pp 437-494.

Gilormini P. (1992) *Application d'un modèle autocohérent à un aggrégat élastique isotrope transverse incompressible*, C.R. Acad. Sci. Paris Série II 314, pp.333-338.

Goodier J. N. (1933) *Concentration of stress arround spherical and cylindrical inclusions and flaws*, J. Appl. Mech. 1, pp.39-44

Graig P. D. and Summerscales J. () *Poisson's Rations in Glass Fibre Reinforced plastics*, Composite Structure, 9, pp.173-188.

Griffith A. A. (1920) Phil. Trans. Roy. Soc. London, A221

Griffith A. A. (1924) Proc. First Int. Cong. Appl. Mech. Delft

Gurland J. and Plateau J. (1963) *The mechanics of ductile rupture of metals containing inclusions*, Trans. Quaterly ASME, vol. 56, p.442.

Halm D., Dragon A. (1996) *Endommagement par messofissuration : ansotropie, comportement unilatéral et frottement*, C. R. Acad. Sci. Paris, t322, Série Iib.

Hashin Z. (1983) *Analysis of composite materials*, J Appl. Mech. 50, pp. 481-505.

Hashin Z. (1988) *The differential scheme and its application to cracked materials*, J. Mech. Phys. Solids 21, pp. 236-241.

Hashin Z. and Herakovich C. T. (1983) *Mechanics of composites materials: recent advances* , Proc. IUTAM Symposium on mechanics of composites materials, Blacksburg, Va., Pergamon Press, N.Y

Hashin Z., Shtrikman S., (1962), *On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity,* J. Mech. Phys. Solids, 10, 335-343.

Hashin Z., Shtrikman S., (1963), *A variational approach to the elastic behaviour of multiphase materials,* J. Mech. Phys. Solids, 11, 127-240.

Hershey A. V. (1954) *The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals*, J. Appl. Mech. 21, pp. 236-241

Hesselman D.P.H. and Falrath R.M. (1972) J. of the Amer. Ceram. Soc., 12, N°1.

Hill R. (1952) *The elastic behavior of crystalline aggregate*, Proc. Phys. Soc. A65, pp.349-354.

Hoenig A. (1979) Int. J. Solids Struct. 15, 137.

Irwin G.R. (1962) *Crack extension force for a part-through crack in a plate*, J. Appl. Mech.

Ishai O. and Cohen L. J. (1967) *Elastic properties of filled and porous epoxy composites*, Int. J. Mech. Sci. Vol. 9, pp.539-546.

Kachanov L. (1958) *Rupture time under creep condition*, Izv. Acd. Nauk SSSR, OTN, 8, 26-31, 1958.

Kachanov M. (1980) *Microcrack model of rock inelasticity*, Ph.D. Thesis, Brown University

Kachanov M. (1980) *Continuum model of medium with cracks*, J ; eng. Mech. Div. 06, pp.1039-1051.

Kelly A. and Rabotnov Yu (1983) *Handbook of composites*, vol.1-4, Noth Holland, Amsterdam, The Nethrelands.

Kelly A., Zweben C. H. (2000) *Fiber reinforcements and general theory of composites*, Comprehensive composite material, Vol 1,Pergamon

Kneer G. (1965) Uber die berechnung der elastizitätsmoduln vielkristalliner aggregate mit textur, Phys. Stat. Sol. 9, pp.825-838

Kröner E., (1958) *Kontinuums Theorie der Versetzungen und Eigenspannungen* (Springer Verlag).

Kröner E., (1971) *statistical continuum mechanics.*

Kupfer, H.B., Hildorf, H.K., and Rusch, H. (1969), "*Behavior of Concrete under Biaxial Stresses,*" *J. of ACI,* Vol. 66, No. 8, 656-666.

Kupfer, H.B. and Gerstle, K.H. (1973), "*Behavior of Concrete under Biaxial Stresses,*" *J. of Eng. Mech. Div., ASCE,* Vol. 99(4), 852-866.

Ladevèze P. (1983) S*ur une théorie de l'endommagement anisotrope,* Rapport interne LMT Cachan.

Laws N. (1977) *The determination of stress and strain concentration at an ellipsoidal inclusion in a anisotropic material*, J. of Elasticity Vol. 7, No. 1.

Lemaître J., Chaboche J. L. (1978) *Aspect phenoménologique de la rupture par endommagement*, J. Mech. ; Appl. 2, 317-365.

Lemaître J. et Chaboche J.L. (1985) *Mécanique des matériaux solides*, Dunond, Paris.

Léné F., Leguillon D., (1981) *Homogéneized constitutive law for a partially cohesive composite material,* Int. J. Solids Structures, 18, 443-458.

Le Pen E., Baptiste D., (1998) *Etude micromécanique du comportement en fatigue d'un matériau composite à matrice aluminium renforcé par fibres d'alumine,* Comptes-rendus JNC11 , 3, 443-458.

Lipinski,P., (1993) *Modélisation du comportement des matériaux, en transformations élastoplastiques finies, à partir des méthodes de transition d'échelles.* Thèse d'habilitation, Université de Metz.

Lipinski P., Berveiller M. and Corvasce F. (1998) *Statical approach to elastoplastic behavior of polycrystals at finite deformation.* Arch. Mech. 40, 725-740.

Lipinski, P., Berveiller, M., (1989) *Elasto-plasticity of micro-inhomogeneous metals at large strains,* Int. J. Plast. 5, 149-172.

Lipinski P., Krier J., Berveiller M., (1990) *Elastoplasticité des métaux en grandes transformations : comportement global et évolution de la structure interne*, Revue Phys. Appl. **25**, 361.

Mandel J., (1960) *Introduction à l'étude de la rhéologie.* Chapitre 5.

Mandel J., Dantu, P. (1963) *Contribution à l'étude théorique et expérimentale du coefficient d'élasticité d'un milieu hétérogène, mais statistiquement homogène.* Mémoires et Documents, pp.115-145.

Mazars J., (1986), *A description of micro- and macroscale damage on concrete structures*, Engng. Fract. Mech., 25, 729-737

McLaughlin R. (1977) *A study of the differential scheme for composite materials*, Int. J. Engng. Sci., 15, 237-244.

Mori T., Tanaka K. (1973), *Average stress in matrix and average energy of material with misfitting inclusions,* Acta Metall. 21, 571-574.

Mura T. and Cheng P. C. (1978) *An equivalent inclusion method for a three-dimensional lens-shaped crack in anisotropic media*, Fracture ed. D.M.R. Taplin, Univ. of Waterloo Press, pp.191-196.

Mura T., Jasiuk I. and Tsuchida E. (1985) *The stress field of a sliding inclusion*, Int. J. Solids Structures, vol. 21, pp.1165-1179.

Mura T. (1987) *Micromechanics of defects in solids*, Kluwer Academic Publishers.

Norris A. N. (1985) *A differential scheme for the effective moduli of composites*, Mech. Mater. 4, pp.1-16.

Oshima N., Nomura S.(1985), *A method to calculate effective modules of hybrid composite material*, Journal of composite material.

Pottier T. (1998) *Modélisation multi-échelles du comportement et de l'endommagement des composites à matrices métallique,* Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Rabotnov YU.N., Mileiko, S.T. (1970), *Short-Time Creep*, Moscow, Nauka Publishers

Rémond Y., (1984) *Sur la reconstitution du comportement mécanique d'un matériau composite 3D à partir de ses constituants,* Thèse de l'Université de Paris 6.

Reuss A. (1929) *Berechnung der fliessgrenze von mischkristalen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle*, Z. Angew. Math. Mech. 9, pp.49-58.

Rodin G. J. (1993) *The overall elastic response of materials containing spherical inhomogeneities*, Int. J. Solids Structure, 30, pp. 1849-1863.

Roulin-Moloney A. C. (1989) *Scanning electron microscopy, fractography and failure mechanisms of polymers and composites*, Elsevier, pp 43-86.

Sabodh S. G. (1973) *Analysis of structural composite materials*, M. Dekker in New-York.

Sangani A. S. and Lu W. (1987) *Elastic coefficients of composites containing spherical inclusions in a periodic array*, J. Mech. Phys. Solids 35, pp.1-21.

Selvadurai A. P. S. and Dasgupta G. (1990) *steady oscillations of a rigid spherical inclusion smoothly embedded in an elastic solid*, J. Eng. Mech. Proc. ASCE, vol 116, pp.1945-1958.

Selvadurai A. P. S. (1994), *Matrix crack extension at a frictionally constrained fiber*, J. Eng. Mater. And Tech. Vol. 116, pp. 398-402.

Suquet P. (1981) *Approche par homogénéisation d'une forme d'endommagement* - C. R. Acad. Sc., Paris, série II.

Tanaka K., Mori T., (1970), *The hardening of crystals by non-deforming particles and fibres*, Act. Metall., 18, 931-941.

Tanaka K., Mori T., (1972), *Note on volume integrals of the elastic field around an ellipsoidal inclusion*, J. elasticity, 2.

Tetelman A. S. and McEvily JR (1967) : *Fracture of structural materials*

Vieville P. (1992) *Influence des paramètres architecturaux sur les caractéristiques du bois à ses différentes échelles d'hétérogénéités*, Thèse de l'institut Polytechnique de Lorraine.

Viéville P., Lipinski P. (1994) *Application du schéma autocohérent par étapes à la modélisation des propriétés viscoélastiques des composites*, JNC9.

Voigt L. J. (1889) *Uber die bezichung zwischen den beiden elastizitäts konstanten isotroper körper*, Wied. Ann. 33, pp. 573-587.

Walpole L. J. (1966) *On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems- I*, J. Mech. Phys. Solids 14, pp. 151-162.

Walpole L. J. (1966) *On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems- II*, J. Mech. Phys. Solids 14, pp. 151-162.

Walpole L. J. (1967) *The elastic field of an inclusion in anisotropic medium*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 300, pp. 270-289.

Walpole L. J. (1969) *On the overall elastic moduli of composite materials*, J. Mech. Phys. Solids 17, pp. 235-251.

Walpole L. J. (1970) *Strengthening effects in elastics solids*, J. Mech. Phys. Solids 18, pp. 343-358.

Walsh J. B., Brace W. F. And England A. W. (1965) *The effect of porosity on compressibility of glass*, J. Am. Ceram. Soc. 48, pp.605-608.

Weibull W. (1939) Ing. Vetensk. Akad. Proc. 151, No 153.

Yee A.F. and Pearson R. A. (1989) *Fractography and failure mechanisms of rubber modified epoxide resins*, fractography and failure mechanisms of polymers and composites, Elsevier, pp 291-350.

Yilmer U. and Farris R. J. (1983) *Mechanical beheviour and dilatation of particulate-filled thermosets in the rubbery state*, *J. Appl. Polym. Sci.*, 28, pp. 3369-3386.

Zattarin P., Carmasol A. et Lipinski P. (1995) *Une nouvelle approche numérique pour calculer les interactions entre deux inclusions dans un milieu anisotrope*, 2ème congrès Marocain.

Zattarin P., Lipinski P. et Vieville P. (1997) *Modélisation à sites multiples du comportement anisotrope des composites ordonnés*, 3ème congrès de mécanique Tétoua (Maroc).

Zener C. (1948)Trans. ASM, A40 –3.

Symposium, Troy, New York, Springer-Verlag, Berlin.

ANNEXE

Le calcul de l'ouverture de la fissure, que ce soit par la formulation d'IRWIN ou celle de DUGDALE-BARENBLATT, utilise les dimensions a_f et b_f de la fissure fermée. La fissure fermée est géométriquement déterminée par l'intérieur de l'intersection entre le plan de fissure (Π) et l'ellipsoïde (Ω) symbolisant l'inclusion. Nous cherchons à relier les dimensions de la fissure (Φ) à celles de l'ellipsoïde. Le repère absolu considéré est celui du VER et noté $\Re$, toutefois notre repère principal de travail $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sera celui de l'ellipsoïde. Le plan de fissuration (Π) est orienté par la normale $\vec{n}$. La direction de cette normale est celle de la contrainte principale maximale dans le grain considéré.

Vocabulaire : par comodité, les termes ellipsoïde, grains, hétérogénéité désignerons la même entité qui est l'inclusion. De même nous ferons une fusion d'usage entre ellipse et fissure pour désigner la fissure plane à l'état fermé.

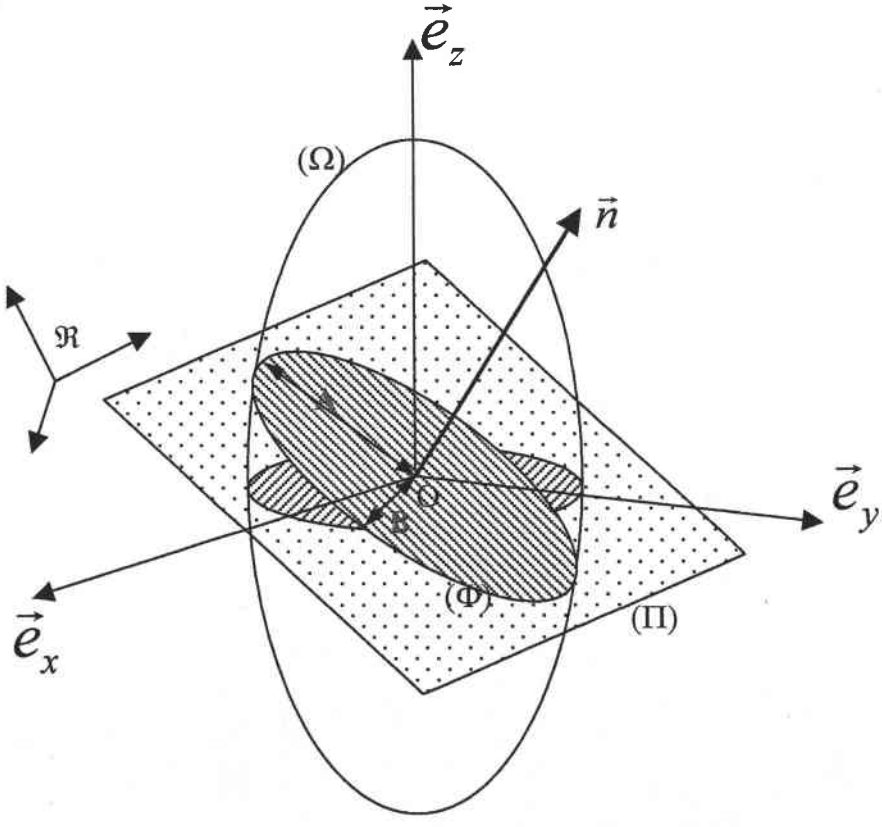


Figure A - 1 : *Intersections des plans avec l'ellipsoïde*

Les dimensions de la fissure sont désignées par :

$$a_f = A$$
$$b_f = B \qquad \textbf{(A. 1)}$$

L'équation cartésienne de l'ellipsoïde d'axes (a , b , c) est :

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 + \left(\frac{Z}{c}\right)^2 = 1 \qquad \textbf{(A. 2)}$$

Il est toujours possible de déterminer la normale unitaire $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ par deux angles d'orientation θ et φ tels que :

$$\begin{cases} n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \\ n_1 = \cos(\theta) \\ n_2 = \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ n_3 = \sin(\theta)\sin(\varphi) \end{cases} \qquad \textbf{(A. 3)}$$

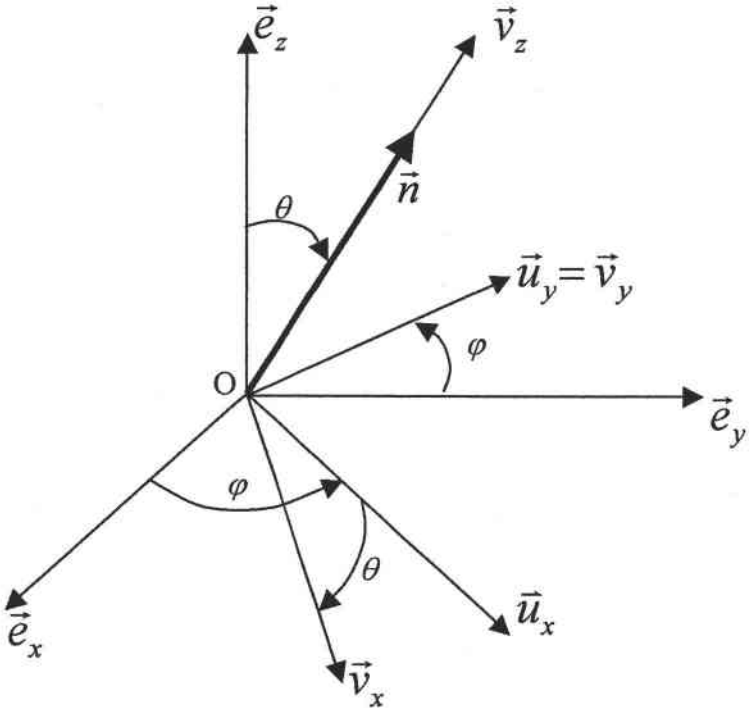


Figure A - 2 : *Orientations de la normale*

Le repère $(O, \vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z)$ est celui caractérisant le plan de fissure. Le passage d'une base vectorielle à l'autre est obtenu par les équations qui suivent :

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \rightarrow (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_x} = \cos\varphi \ \overrightarrow{e_x} + \sin\varphi \ \overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{u_y} = -\sin\varphi \ \overrightarrow{e_x} + \cos\varphi \ \overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{e_z} \end{cases} \tag{A. 4}$$

Ou encore,

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \tag{A. 5}$$

Et pour le passage $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z) \rightarrow (\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_x} = \cos\theta \ \overrightarrow{u_x} - \sin\theta \ \overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{v_y} = \overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{v_z} = \sin\theta \ \overrightarrow{u_x} + \cos\theta \ \overrightarrow{u_z} \end{cases} \tag{A. 6}$$

exprimé sous la forme

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \tag{A. 7}$$

Le passage global est obtenu par :

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \ \cos\varphi & \cos\theta \ \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta \ \cos\varphi & \sin\theta \ \sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \tag{A. 8}$$

Notons A, la matrice de passage entre le repère de l'ellipsoïde et celui de la fissure. La relation entre les deux bases vectorielles s'écrit :

$$\overrightarrow{v_i} = A_{ij} \ \overrightarrow{e_j} \tag{A. 9}$$

Tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace s'exprime dans les deux bases par :

$$\vec{t} = t_i \ \overrightarrow{e_i} = t_j^* \ \overrightarrow{v_j} \tag{A. 10}$$

C'est-à-dire,

$$t_i \ \overrightarrow{e_i} = t_j^* \ A_{ji} \ \overrightarrow{e_i} \tag{A. 11}$$

$$t_i = {}^t A_{ij} \ t_j^*$$

Considérons maintenant un point de l'ellipsoïde ayant pour coordonnées (X, Y, Z) dans le repère $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ et (x, y, z) dans le repère $(O,\vec{v}_x,\vec{v}_y,\vec{v}_z)$, en d'autres termes :

$$\begin{cases} X = \cos\theta\cos\varphi\ x - \sin\varphi\ y + \sin\theta\cos\varphi\ z \\ Y = \cos\theta\sin\varphi\ x + \cos\varphi\ y + \sin\theta\sin\varphi\ z \\ Z = -\sin\theta\ x + \cos\theta\ z \end{cases} \qquad \textbf{(A. 12)}$$

Le plan de fissuration ( ) a pour équation dans le repère $(O,\vec{v}_x,\vec{v}_y,\vec{v}_z)$:

$$z = 0 \qquad \textbf{(A. 13)}$$

Nous rappelons que la fissure est l'intersection entre le plan de fissuration et l'ellipsoïde. L'équation de l'intersection exprimée dans le repère de l'ellipsoïde est alors :

$$\left(\frac{\cos\theta\cos\varphi\ x - \sin\varphi\ y}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos\theta\sin\varphi\ x + \cos\varphi\ y}{b}\right)^2 + \left(\frac{-\sin\theta\ x}{c}\right)^2 = 1 \qquad \textbf{(A. 14)}$$

C'est l'équation d'une ellipse. Le développement de cette équation donne :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2}\right)x^2 + \\ &\left(\frac{-2\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}{a^2} + \frac{2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{b^2}\right)x\,y + \left(\frac{\sin^2\varphi}{a_2} + \frac{\cos^2\varphi}{b^2}\right)y^2 = 1 \end{aligned} \qquad \textbf{(A. 15)}$$

En posant

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \dfrac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{c^2} \\ c_2 = 2\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}\right) \\ c_3 = \dfrac{\sin^2\varphi}{a_2} + \dfrac{\cos^2\varphi}{b^2} \end{cases} \qquad \textbf{(A. 16)}$$

on obtient finalement:

$$c_1\ x^2 + c_2\ x\,y + c_3\ y^2 = 1 \qquad \textbf{(A. 17)}$$

C'est l'équation de la fissure dans le repère lié au plan de fissure. Les constantes c_1, c_2 et c_3 sont parfaitement déterminées en connaissant les dimensions a, b, c de l'hétérogénéité et les composants n_1, n_2 et n_3 de la normale $\vec{n}$.

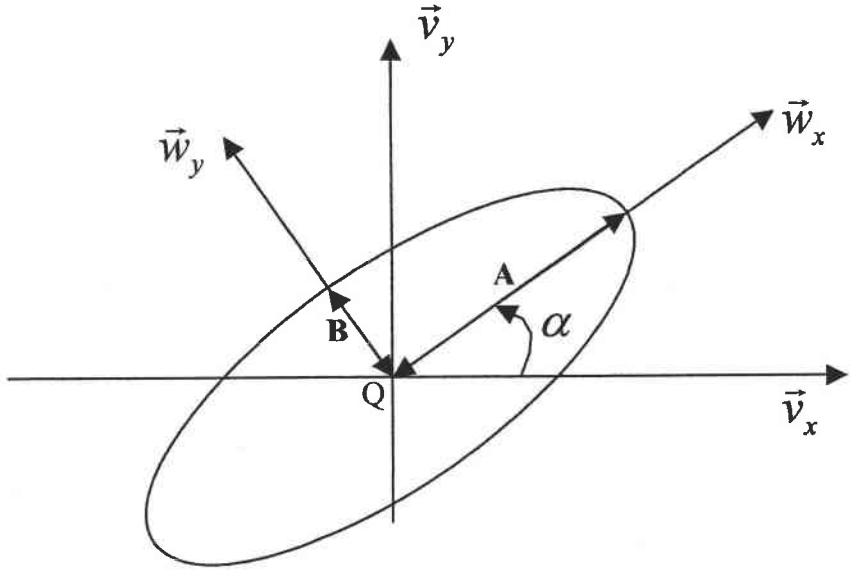


Figure A - 3 : *orientation et dimensions de la fissure dans le plan de fissuration*

Nous supposons que les axes principaux de la fissure ont une orientation de α par aux axes du repère du plan de fissuration. Dans le repère $(Q, \vec{w}_x, \vec{w}_y)$ de la fissure, son équation se simplifie sous la forme :

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{B}\right)^2 = 1 \qquad \textbf{(A. 18)}$$

Les coordonnées d'un point quelconque dans les deux repères $(Q, \vec{v}_x, \vec{v}_y)$ et $(Q, \vec{w}_x, \vec{w}_y)$ sont reliées par les équations :

$$\begin{cases} \xi = \cos\alpha\ x + \sin\alpha\ y \\ \eta = -\sin\alpha\ x + \cos\alpha\ y \end{cases} \qquad \textbf{(A. 19)}$$

ce qui permet de réécrire (A.18) sous la forme :

$$\left(\frac{\cos\alpha\ x + \sin\alpha\ y}{A}\right)^2 + \left(\frac{-\sin\alpha\ x + \cos\alpha\ y}{B}\right)^2 = 1 \qquad \textbf{(A. 20)}$$

Pour finalement obtenir :

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{A^2} + \frac{\sin^2\alpha}{B^2}\right)x^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2}\right)x\,y + \left(\frac{\sin^2\alpha}{A^2} + \frac{\cos^2\alpha}{B^2}\right)y^2 = 1 \qquad \textbf{(A. 21)}$$

Par comparaison aux équations (A.15) et (A.17) nous aboutissons à un système d'équations dont la résolution nous permettra d'obtenir les dimensions A et B de la fissure.

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\cos^2\alpha}{A^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{B^2} \\ c_2 = 2\sin\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{1}{A^2} - \dfrac{1}{B^2}\right) \\ c_3 = \dfrac{\sin^2\alpha}{A^2} + \dfrac{\cos^2\alpha}{B^2} \end{cases} \quad \textbf{(A. 22)}$$

Après résolution, on obtient :

- $$tg\,2\alpha = \frac{c_2}{c_1 - c_3} \quad \textbf{(A. 23)}$$

- $$A^2 = \frac{2}{c_1 + c_3 + \sqrt{(c_1 - c_3)^2 + c_2^2}} \quad \textbf{(A. 24)}$$

Et

- $$B^2 = \frac{2}{c_1 + c_3 - \sqrt{(c_1 - c_3)^2 + c_2^2}} \quad \textbf{(A. 25)}$$

La procédure consiste à calculer les constantes c_1, c_2 et c_3 à partir des équations (A.16) et à évaluer ensuite α, A et B.

Résumé

L'étude propose une modélisation du comportement élastique de matériaux hétérogènes s'endommageant sous un chargement mécanique. Elle est basée sur une technique d'homogénéisation par transition d'échelle permettant une meilleure prise en compte de la microstructure et une comparaison de l'endommagement à l'apparition d'hétérogénéités ayant des propriétés mécaniques nulles. Pour se faire, dans un premier temps le modèle autocohérent dont les performances sont limitées à des matériaux peu hétérogènes et pour de faibles fractions volumiques d'inclusions est reformulé en approche incrémentale. Le schéma incrémental consiste en une introduction progressive des inclusions par fractions préalablement fixées, un calcul autocohérent étant réalisé à chaque étape. Les applications présentées, aussi bien en monosite qu'en multisite attestent de l'amélioration en termes de prédiction des propriétés effectives comparativement à l'autocohérent classique et de son large domaine d'utilisation.
La deuxième partie du travail introduit l'endommagement par la formulation de deux modèles de dégradation. Le premier, fondé sur la rupture des renforts, prend en compte deux critères de rupture : un critère sur la contrainte principale maximale et un second sur la déformation principale maximale. Une fois la rupture ou la fissure déclarée, son ouverture dépend en partie de contrainte dans la matrice. Le second modèle est celui de la décohésion des hétérogénéités caractérisant la dégradation de l'interface matrice inclusion. Nous avons, en première approche, formulé un critère basé sur le bilan énergétique entre le volume d'inclusion et la surface de l'interface qui stipule un décollement total de l'inclusion.
L'intégration de ces différents modèles d'endommagement dans le module d'homogénéisation avec des concepts probabilistes a permis de simuler différents comportements endommagés.

Mots clés : homogénéisation, monosite, multisite, schéma incrémental, endommagement, rupture, décohésion

---

Abstract

The study proposes a modeling of the elastic heterogeneous material behaviour damaging itself under a mechanical loading. It is based on a homogenisation technique by scale transition allowing taking into account the microstructure and an evaluation of the damage by appearance of heterogeneities having null mechanical properties. Initially the self-coherent model whose performances are limited to less heterogeneous materials and for weak volume fractions of inclusions is reformulated in incremental approach. The incremental scheme consists of a progressive introduction of inclusions by beforehand fixed volume fractions; a self-consistent calculation is realized with each step. The applications presented, as well in one-site as multi-site show improvement in terms of prediction of the effective properties compared to traditional self-consistent and its broad field of application.
The second part of this work introduces the damage by the formulation of two models of degradation. The first model, founded on the rupture of the reinforcements, takes into account two criteria of rupture: a first criterion on the maximum principal stress and a second on the maximum principal strain. Once the rupture or the crack is declared, it's opening depends partly on stress in the matrix. The second model is that of the separation of heterogeneities characterizing the ruin of the interface matrix-inclusion. We, in first approach, formulated a criterion based on the energy balance between the volume of inclusion and the surface of the interface, which stipulates a total detachment of inclusion.
The integration of these various models of damage in the homogenisation module with probabilistic concepts leads us to simulate various damaged behaviours.

Key words: homogenisation one-site, multi-site, incremental scheme, damage, crack, interface debonding