



**HAL**  
open science

# Estimation de la fiabilité de la résistance mécanique du cristal soumis à un choc thermique

Jena Jeong

► **To cite this version:**

Jena Jeong. Estimation de la fiabilité de la résistance mécanique du cristal soumis à un choc thermique. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2003. Français. NNT : 2003METZ019S . tel-01749858

**HAL Id: tel-01749858**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749858v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

année : 2003

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	20030565
Cote	S/M7 03/19
Loc	

# THESE

Présentée à  
**UNIVERSITE DE METZ**  
UFR Mathématiques, Informatique, Mécanique

*pour obtenir le titre de*

**DOCTEUR**  
**en Mécanique des Matériaux**

Spécialité : Sciences de l'Ingénieur

soutenue par  
**Jena JEONG**

le 11 juillet 2003

**Estimation de la fiabilité de la résistance  
mécanique du cristal  
soumis à un choc thermique**

## Jury

- (Rapporteur)  
C. ROBIN : *Professeur, Ecole des Mines de Douai*  
D. CIOCLOV : *Professeur, Université de SARREBRÜCK, Allemagne*
- (Examineurs)  
M. LEBIENVENU : *Professeur, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Metz*  
A. DEGIOVANNI : *Professeur, Ecole Européenne d'Ingénieurs en Génie des Matériaux*  
G. PLUVINAGE : *Professeur, Université de Metz*
- (Invité)  
E. D DOSSOU : *Ingénieur de Recherche, société française de Céramique*

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 486252 9

année : 2003

# THESE

*Présentée à*

**UNIVERSITE DE METZ**

UFR Mathématiques, Informatique, Mécanique

*pour obtenir le titre de*

**DOCTEUR**

**en Mécanique des Matériaux**

Spécialité : Sciences de l'Ingénieur

soutenue par  
**Jena JEONG**

le 11 juillet 2003

**Estimation de la fiabilité de la résistance  
mécanique du cristal  
soumis à un choc thermique**

Jury

**(Rapporteur)**

C. ROBIN : *Professeur, Ecole des Mines de Douai*

D. CIOCLOV : *Professeur, Université de SARREBRÜCK, Allemagne*

**(Examineurs)**

M. LEBIENVENU : *Professeur, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Metz*

A. DEGIOVANNI : *Professeur, Ecole Européenne d'Ingénieurs en Génie des Matériaux*

G. PLUVINAGE : *Professeur, Université de Metz*

**(Invité)**

E. D DOSSOU : *Ingénieur de Recherche, société française de Céramique*



# Résumé

Directeur de Thèse : Pr. Guy PLUVINAGE

La protection de l'environnement conduit à envisager de réduire la teneur en oxyde de plomb dans le cristal à une échéance certaine mais indéterminée dans les pays de l'Union Européenne. Le remplacement de l'oxyde de plomb par d'autres oxydes a des conséquences sur les propriétés physiques et les propriétés mécaniques du matériau. C'est ainsi que le coefficient de dilatation et la résistance à la rupture vont être modifiés. L'augmentation du coefficient de dilatation thermique accroît les risques de choc thermique lors de toute opération de lavage à l'eau chaude.

Le cristal est un matériau fragile qui peut devenir très sensible sous l'effet d'un choc thermique à cause de sa faible valeur de conductivité thermique. Les contraintes dues à un choc thermique peuvent devenir suffisamment élevées pour dépasser la valeur de la résistance à la rupture. Elles sont considérées comme issues d'un chargement dynamique qui génère une onde de choc. Pourtant la plupart des travaux concernant le choc thermique ne tiennent pas suffisamment compte de la vitesse du chargement. Sous l'effet d'un chargement dynamique, la résistance du cristal n'est pas intrinsèque au matériau mais dépend de la durée du chargement.

La contrainte de rupture du cristal sous chargement dynamique a été mesurée à l'aide des "Barres d'Hopkinson". La contrainte due à un choc thermique a été trouvée par la méthode des éléments finis (CASTEM2000) et la méthode analytique. En tenant compte des résultats obtenus et à l'aide d'une approche probabiliste de la rupture, nous avons déterminé la variation théorique de la résistance du cristal en fonction d'une teneur en oxyde de plomb à laquelle on substitue de l'oxyde de sodium.

# Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Fiabilité Mécanique, Université de Metz.

Que Monsieur G. PLUVINAGE, directeur du Laboratoire accepte ma reconnaissance pour l'attention qu'il m'a prodiguée et pour son implication dans la direction scientifique de mes recherches.

Que M. LEBIENVENU de l'Ecole National d'Ingénieur de Metz et A. DEGIOVANNI de l'Ecole Européenne d'Ingénieurs en Génie des Matériaux, membres du jury soient vivement remerciés.

Je remercie Mademoiselle Claude ROBIN de l'Ecole des Mines de Douai et Monsieur D. CIOCLOV du Fraunhofer-Institute Non Destructive Testing d'Allemagne, rapporteurs de cette thèse, pour la pertinence de leurs conseils.

Que Monsieur Dossouvi DOSSOU de la Société Française de Céramique, membre du jury, soit vivement remercié pour sa grande disponibilité.

J'adresse mes remerciements à Monsieur HEITZ, chef de projet Verres et Emaux de la Société CRITT Matériaux-LNE pour m'avoir aimablement fourni les photos de mes éprouvettes effectuées à l'aide d'un microscope électronique à balayage. Je témoigne ma gratitude à Monsieur CHO pour son aide apportée lors du calcul des ondes des contraintes du choc thermique.

Je ne saurai oublier Monsieur P. JORDIN et tous les membres du labo pour leur disponibilité et leurs remarques constructives.

A mon frère

# Table des matières

<b>I</b>	<b>RAPPEL THEORIQUE</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Rupture des Verres</b>	<b>2</b>
1.1	Rupture statique . . . . .	3
1.1.1	Théorie de la rupture de Griffith . . . . .	3
1.1.2	Schéma de Feddersen . . . . .	5
1.1.3	Analyse de la distribution des contraintes autour d'un défaut	7
1.1.4	Critère de rupture «expérimental» . . . . .	11
1.2	Rupture dynamique . . . . .	17
1.2.1	Problématique . . . . .	17
1.2.2	Méthode expérimentale (Barres d'Hopkinson) . . . . .	18
1.2.3	Influence de la vitesse de sollicitation . . . . .	19
1.2.4	Théorie de l'écaillage . . . . .	22
1.2.5	Critère d'endommagement en dynamique . . . . .	23
1.3	Conclusion . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Choc thermique</b>	<b>29</b>
2.1	Contrainte thermique . . . . .	30
2.1.1	Contrainte thermique à température uniforme . . . . .	30
2.1.2	Contrainte thermique due à un gradient de température «choc thermique» . . . . .	31
2.2	Calcul du champ thermique . . . . .	38
2.2.1	Transfert thermique . . . . .	38
2.2.2	Méthode analytique . . . . .	39
2.3	Problématique . . . . .	48
2.3.1	Choc thermique . . . . .	48
2.3.2	Onde de choc thermique . . . . .	48
2.4	Conclusion . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Critère de rupture du verre</b>	<b>52</b>
3.1	Critère probabiliste de rupture du verre . . . . .	53
3.1.1	Loi Normale . . . . .	53
3.1.2	Loi de Weibull [40] . . . . .	54
3.2	Conclusion . . . . .	57

<b>4</b>	<b>Conclusion I</b>	<b>59</b>
<b>II</b>	<b>Travaux expérimentaux</b>	<b>60</b>
<b>5</b>	<b>Eprouvette de cristal</b>	<b>61</b>
5.1	Eprouvette de cristal . . . . .	62
5.2	Relation d'additivité . . . . .	62
5.2.1	Matériau verre et cristal . . . . .	62
5.2.2	Relation d'additivité . . . . .	63
5.3	Conclusion . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Essais quasi-statiques</b>	<b>65</b>
6.1	Description du dispositif . . . . .	65
6.2	Résultats . . . . .	67
6.2.1	Phénomène de rupture du disque Brésilien perforé au centre	67
6.2.2	Examen microscopique des surfaces de rupture . . . . .	68
6.2.3	Distribution des contraintes . . . . .	70
6.2.4	Analyse des résultats (Loi de Weibull) . . . . .	71
6.3	Conclusion . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Résistance dynamique du cristal</b>	<b>73</b>
7.1	Barres d'Hopkinson . . . . .	73
7.1.1	Montage des barres d'Hopkinson . . . . .	73
7.1.2	Chaîne de mesure . . . . .	75
7.2	Résultats . . . . .	77
7.2.1	Contrainte de rupture . . . . .	77
7.2.2	Variation des contraintes en fonction du temps critique . .	79
7.3	Conclusion . . . . .	80
<b>8</b>	<b>Conclusion II</b>	<b>81</b>
<b>III</b>	<b>Simulation numérique</b>	<b>82</b>
<b>9</b>	<b>Choc thermique</b>	<b>83</b>
9.1	Géométrie du cylindre . . . . .	84
9.2	Variation de température en fonction du temps . . . . .	85
9.2.1	Introduction . . . . .	85
9.2.2	Résultat du calcul . . . . .	86
9.2.3	Nombre de Biot . . . . .	86
9.3	Contrainte thermique . . . . .	88
9.3.1	Modélisation par éléments finis . . . . .	88

9.3.2	Onde de contrainte générée par le choc thermique dans le cylindre (Méthode analytique) . . . . .	90
<b>10</b>	<b>Conclusion III</b>	<b>92</b>
<b>IV</b>	<b>Estimation de la fiabilité du cristal soumis à un choc thermique</b>	<b>93</b>
<b>11</b>	<b>Approche de la théorie statistique</b>	<b>94</b>
11.1	Choix d'une loi de distribution de probabilité . . . . .	95
11.1.1	Introduction . . . . .	95
11.1.2	Analyse des résultats des essais dynamiques réalisés sur le cristal avec la loi Normale et la loi de Weibull . . . . .	95
11.1.3	Coefficient de corrélation . . . . .	97
11.2	Utilisation du coefficient de variation dans l' étude de fiabilité . . . . .	99
11.2.1	Coefficient de variation . . . . .	99
11.2.2	Application du coefficient de variation dans l'analyse de la distribution . . . . .	99
11.3	Comparaison de deux séries de mesure provenant des résultats expérimentaux . . . . .	103
11.3.1	Loi de student et t-test[22][28] . . . . .	103
11.3.2	Comparaison des résultats d'essai statique et dynamique . . . . .	103
11.4	Critère de rupture . . . . .	105
11.4.1	Fiabilité . . . . .	105
11.4.2	Facteur de sécurité pour le dimensionnement (LRFD : Load and Resistance Factor Design) . . . . .	106
11.5	Conclusion . . . . .	108
<b>12</b>	<b>Fiabilité du cristal soumis à un choc thermique</b>	<b>110</b>
12.1	Approche probabiliste . . . . .	111
12.1.1	Hypothèse 1 (application du "CV") . . . . .	111
12.1.2	Hypothèse 2 . . . . .	113
12.2	Fiabilité de la résistance du cristal soumis à un choc thermique . . . . .	116
12.2.1	Critère de rupture . . . . .	116
12.2.2	Variation de la fiabilité du cristal en fonction de la teneur en oxyde de plomb . . . . .	117
12.3	Conclusion . . . . .	119
<b>13</b>	<b>Conclusion IV</b>	<b>121</b>

<b>V Synthèse</b>	<b>122</b>
<b>VI Annexes et Bibliographie</b>	<b>125</b>
<b>A Théorie du transfert thermique</b>	<b>126</b>
A.1 Notion de base . . . . .	126
A.2 Bilan d'énergie . . . . .	127
A.3 Résistance thermique . . . . .	128
<b>B Chargement par train d'ondes</b>	<b>131</b>
B.1 Equation fondamentale du mouvement . . . . .	131
B.2 Onde de contrainte dans l'échantillon . . . . .	133
<b>C Résolution analytique sur un cylindre</b>	<b>135</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>138</b>

# Liste des tableaux

1.1	Comparaison des valeurs de la contrainte maximale de l'essai flexion 3 points et de traction indirecte en fonction de l'épaisseur de l'échantillon [15]	12
1.2	Résultats obtenus à partir des échantillons pré-fissurés différemment	13
1.3	Résultats expérimentaux des contraintes à la rupture en fonction de l'épaisseur de l'échantillon [5]	15
2.1	Valeurs de $\lambda$	43
2.2	Valeurs de $C_n$	43
5.1	Composition chimique du cristal	62
5.2	Composition de quelques verres industriels [25]	63
5.3	Propriétés mécaniques de la composition chimique du cristal	64
5.4	Propriétés mécaniques du cristal	64
6.1	Résultats expérimentaux des contraintes de rupture	67
7.1	Caractéristiques mécaniques de l'acier utilisé	73
7.2	Résultats des essais dynamiques réalisés sur le cristal	78
9.1	Propriétés thermo-physiques du cristal	85
11.1	Comparaison de la valeur du coefficient de variation et du type de matériau.	102
11.2	Résultats des essais statiques et dynamiques réalisés sur le cristal	104
12.1	Résultat des calculs de probabilité de rupture.	119



# Table des figures

1.1	Variation de l'énergie au cours de la propagation des fissures . . . .	4
1.2	Défaut central dans une plaque soumise à une tension uniformément répartie . . . . .	5
1.3	Diagramme de Feddersen . . . . .	6
1.4	Trois Modes de rupture . . . . .	7
1.5	Schéma d'une fissure et les coordonnées . . . . .	8
1.6	Schéma de la distribution des contraintes de Creager . . . . .	9
1.7	Distribution des contraintes en fond de fissure et d'entaille dans un diagramme bi-logarithmique . . . . .	11
1.8	Géométrie de l'éprouvette de type « disque Brésilien modifié » : de profil (à droite), de face (à gauche) . . . . .	14
1.9	Evolution de la fonction $k(\lambda)$ en fonction du rapport des diamètres $\lambda=D/L$ . . . . .	15
1.10	Classification des phénomènes dynamiques en fonction d'un temps caractéristique de variation de chargement . . . . .	17
1.11	Barre d'Hopkinson en compression. . . . .	18
1.12	Evolution des facteurs d'intensité des contraintes statique et dynamique d'entaille du verre float en fonction du rayon d'entaille[5].	20
1.13	Représentation schématique de l'évolution temporelle de la fonction de correction dynamique, d'après [5] . . . . .	21
1.14	Principe de l'écaillage par impact de barre. . . . .	23
1.15	Rupture type par écaillage . . . . .	24
1.16	Présentation schématique du volume affecté par l'impact . . . . .	25
1.17	Relation entre la contrainte de rupture et le temps critique pour des éprouvettes en verre soumise à l'essai d'impact par barres d'Hopkinson et chute de bille[35][10] . . . . .	26
1.18	Evolution du paramètre d'endommagement $D$ en fonction de la contrainte appliquée à différentes vitesses de chargement . . . . .	27
2.1	Corps fixé entre deux supports soumis à un changement thermique $T_1 - T_0$ avec le coefficient dilatation thermique $\alpha$ . . . . .	30
2.2	Contraintes induites lors de chocs thermiques « descendant » et « ascendant » . . . . .	32
2.3	Variation de $\Psi$ en fonction de $\beta$ [31] . . . . .	35

2.4	Variation des contraintes non dimensionnelles en fonction du temps non dimensionnel et du nombre de Biot . . . . .	36
2.5	Transferts thermiques dans une plaque infinie refroidie par deux faces. . . . .	42
2.6	Variation de la température en fonction du temps sur la plaque infinie soumise à un choc thermique $100^{\circ}\text{C} \rightarrow 20^{\circ}\text{C}$ . . . . .	44
2.7	Variation de la température en fonction du temps ( $< 1$ seconde à gauche, $< 0.1$ seconde à droite) sur la surface extérieure ( $x=L$ ) et au centre de la plaque ( $x=0$ ). . . . .	45
2.8	Variation de la température en fonction du temps ( $< 0.01$ seconde à gauche, $< 0.0001$ seconde à droite) sur la surface extérieure ( $x=L$ ) et au centre de la plaque ( $x=0$ ). . . . .	46
2.9	Variation de la température en fonction du temps ( $< 0.00001$ seconde à gauche, $t=1$ $\mu$ seconde à droite) sur la surface extérieure ( $x=L$ ) et au centre de la plaque ( $x=0$ ). . . . .	47
2.10	Onde de déplacement radiale à travers l'épaisseur du cylindre [18]	50
3.1	Présentation de la distribution de la loi de Normale . . . . .	54
3.2	Présentation de l'effet du paramètre $\beta$ (a), $\eta$ (b), et $\gamma$ (c) sur la densité de probabilité de Weibull $f(x)$ . . . . .	56
3.3	Présentation de la comparaison du paramètre $\beta$ entre les verres avec un traitement de la surface différent [39] . . . . .	57
5.1	Géométrie du disque : de face (à gauche), de profil (à droite) . . .	62
6.1	Dispositif d'essai quasi-statique. . . . .	65
6.2	Courbe «charge-déplacement» obtenue sur un échantillon cristal .	67
6.3	Phénomène de rupture en statique. . . . .	68
6.4	Localisation des zones d'amorçage des fissures (a) et agrandissement de cette zone (b) . . . . .	69
6.5	Représentation de la géométrie du disque Brésilien troué au centre et le maillage utilisé pour la simulation . . . . .	70
6.6	Distribution des contraintes le long du ligament . . . . .	71
6.7	Essai statique : Estimation des paramètres de Weibull « m » . . .	72
7.1	Dispositif de « Barres d'Hopkinson » pour l'essai de compression .	74
7.2	Evolution des contraintes dynamiques en fonction du temps . . .	77
7.3	Comparaison du module de Weibull entre la résistance en statique et en dynamique . . . . .	78
7.4	Phénomène de fragmentation sous rupture dynamique du cristal .	79
7.5	Présentation des valeurs de contrainte de rupture dynamique déterminées sur disque Brésilien modifié . . . . .	80

9.1	Géométrie du cylindre et localisation des deux points examinés P1 et P2 . . . . .	84
9.2	Evolution des températures en fonction du temps au point P1 et P2	86
9.3	Variation en température en fonction du nombre de Biot $\beta$ : $\beta = 2.5, 0.25, 0.025$ . . . . .	87
9.4	Présentation du maillage du cylindre . . . . .	88
9.5	Distribution de la contrainte maximale sur l'épaisseur du cylindre	89
9.6	Onde de contrainte axiale . . . . .	90
9.7	Onde de contrainte circonférentielle . . . . .	91
11.1	Comparaison de la distribution de la loi de Weibull et de la loi Normale à partir des résultats d'essais dynamiques sur cristal. . .	96
11.2	Représentation de la fonction de répartition selon la loi Normale .	97
11.3	Représentation de la fonction de répartition selon la loi de Weibull	98
11.4	Représentation de la relation entre le paramètre de Weibull « m » et le coefficient de variation inversé [27]. . . . .	102
11.5	Représentation des résultats d'essais statique et dynamique à partir de la loi de Weibull cumulative. . . . .	104
11.6	Représentation de l'intersection de deux distributions Normales pour la résistance et la contrainte appliquée . . . . .	107
11.7	Présentation de la définition de la distribution Normale Z avec le coefficient de sécurité $\beta$ . . . . .	108
12.1	Distribution de la loi Normale du chargement thermique dans le cristal . . . . .	112
12.2	Variation de distribution de la loi Normale pour le cristal soumis à un choc thermique en fonction de la teneur en oxyde de plomb .	113
12.3	Variation de la distribution de Résistance en fonction de la teneur en oxyde de plomb . . . . .	114
12.4	Agrandissement de la distribution dans la Figure 12.3 . . . . .	114
12.5	Présentation de la zone de rupture . . . . .	117
12.6	Variation de la distribution de la Résistance et du Chargement en fonction de la teneur en oxyde de plomb . . . . .	118
A.1	Couche limite . . . . .	129
B.1	Présentation d'un élément «dx» soumis à un chargement dynamique compressif . . . . .	131
B.2	Présentation de l'échantillon cylindrique soumis à une compression uni-axiale dans le dispositif de « Barre d'Hopkinson » . . . . .	133
C.1	Géométrie d'un cylindre creux . . . . .	135

Première partie

**RAPPEL THEORIQUE**

# Chapitre 1

## Rupture des Verres

Le verre est un matériau isotrope, homogène et très fragile ayant un comportement élastique jusqu'à la rupture brutale qui ne laisse pas de traces de plasticité apparente. Le comportement du verre est caractérisé par une résistance en compression très élevée. Pourtant, sa résistance à la traction est extrêmement faible et aléatoire. Sa résistance à la rupture obtenue expérimentalement présente une grande dispersion et reste très inférieure à la valeur théorique appelée la résistance cohésive inter-atomique qui est la contrainte maximale nécessaire pour rompre la liaison entre deux atomes. En 1920, pour la première fois, Griffith [7] a expliqué ce phénomène par la présence des défauts et l'effet volumique. L'auteur a repris les résultats de plusieurs travaux précédents concernant les contraintes maximales autour d'un défaut pour lesquelles tous les phénomènes de rupture n'ont pu être expliqués. Grâce aux essais menés sur une série de tiges en verre, Griffith a expliqué le phénomène de rupture à partir de la variation d'énergie totale au cours du processus de rupture.

## 1.1 Rupture statique

### 1.1.1 Théorie de la rupture de Griffith

#### *Calcul de la variation d'énergie totale*

Considérons un corps élastique comportant une fissure de surface « $A$ » soumise à une force. La loi de conservation d'énergie permet d'écrire le bilan suivant :

$$\dot{W} = \dot{E} + \dot{K} + \dot{\Gamma} \quad (1.1)$$

- $\dot{W}$  : le travail des forces extérieures pour une unité de temps
- $\dot{E}$  : la variation temporelle de l'énergie interne ( $E = U^e + U^p$ )
- $\dot{K}$  : la variation temporelle de l'énergie cinétique.
- $\dot{\Gamma}$  : l'énergie dépensée par une unité de temps pour augmenter la surface de la fissure.
- $U^e$  : l'énergie de la déformation élastique,
- $U^p$  : le travail plastique.

Pour un matériau fragile idéal soumis à un chargement statique, les valeurs de l'énergie cinématique et de l'énergie de déformation plastique sont négligeables. L'expression de la variation d'énergie s'exprime alors à nouveau par :

$$\frac{\partial W}{\partial A} = \frac{\partial U^e}{\partial A} + \frac{\partial \Gamma}{\partial A} \quad (1.2)$$

L'équation 1.2 représentant la variation d'énergie au cours de la propagation de la fissure s'écrit alors :

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial A} = \frac{\partial \Gamma}{\partial A} \quad (1.3)$$

d'où  $\Pi = U^e - W$

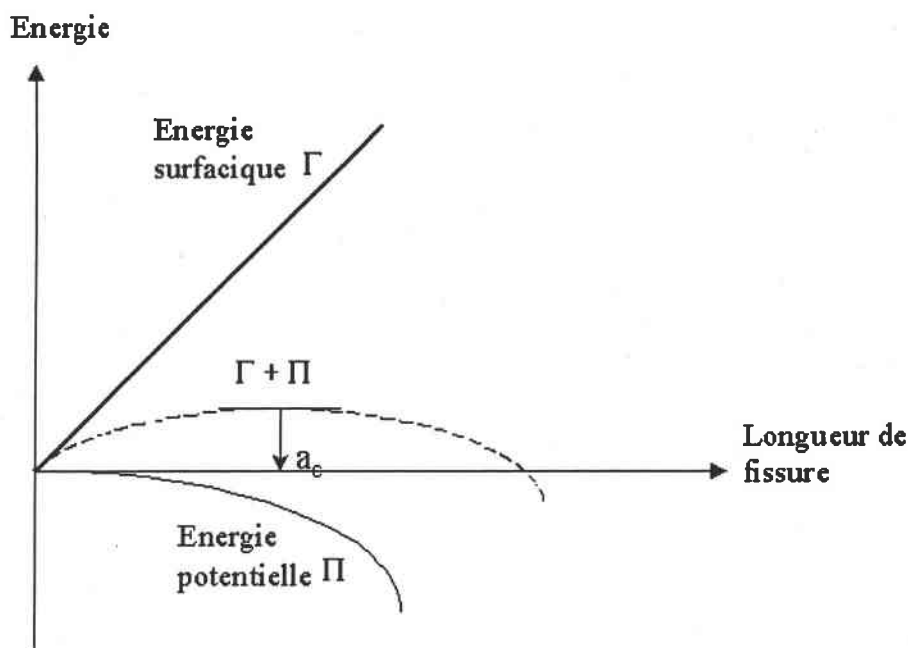


FIG. 1.1 – Variation de l'énergie au cours de la propagation des fissures

Griffith a déterminé la condition de la propagation des fissures à partir de la variation d'énergie totale :

$$\frac{\partial^2[\Pi + \Gamma]}{\partial A^2} \quad (1.4)$$

C'est à dire :

– la fissure est instable :

si la variation d'énergie totale est maximum  $\Rightarrow \frac{\partial^2(\Pi+\Gamma)}{\partial A^2} > 0$

– la fissure est stable :

si la variation d'énergie totale est minimum  $\Rightarrow \frac{\partial^2(\Pi+\Gamma)}{\partial A^2} < 0$

La Figure 1.1 représente la variation d'énergie totale dans le système. L'énergie totale dans le système ( $\Pi+\Gamma$ ) présente un maximum pour la taille critique de la fissure  $a_c$ . Ceci correspond à l'instabilité dans le système.

### 1.1.2 Schéma de Feddersen

L'évolution de la résistance du matériau en fonction de la taille d'un défaut a été étudiée par Feddersen [11] à partir d'une approche phénoménologique. Il a montré le concept de l'application du facteur d'intensité des contraintes et son utilisation en fonction de la taille du défaut.

Considérons un défaut central de longueur  $2a$  dans une plaque ayant une largeur  $W$  soumise à une tension uniforme  $\sigma_g$  (Figure 1.2)

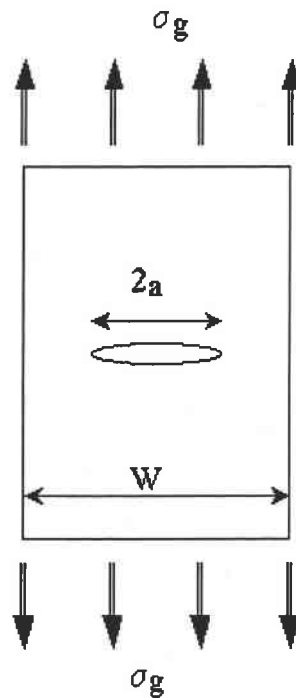


FIG. 1.2 – Défaut central dans une plaque soumise à une tension uniformément répartie

Dans un premier temps, le chargement montre un comportement linéaire avec le déplacement. Sous l'effet de l'accroissement de la tension, le défaut présente une zone plastique qui grandit jusqu'à la rupture. Selon les matériaux, la rupture se déclenche soit après propagation lente de la fissure soit de façon brutale.

Dans un graphe donnant la valeur de la contrainte critique en fonction de la



taille de défaut, le processus de rupture est classé en deux grandes catégories :

- instabilité élastique et rupture fragile
- instabilité plastique et rupture ductile

Ces deux grandes catégories du processus de rupture sont présentées dans la Figure 1.3.

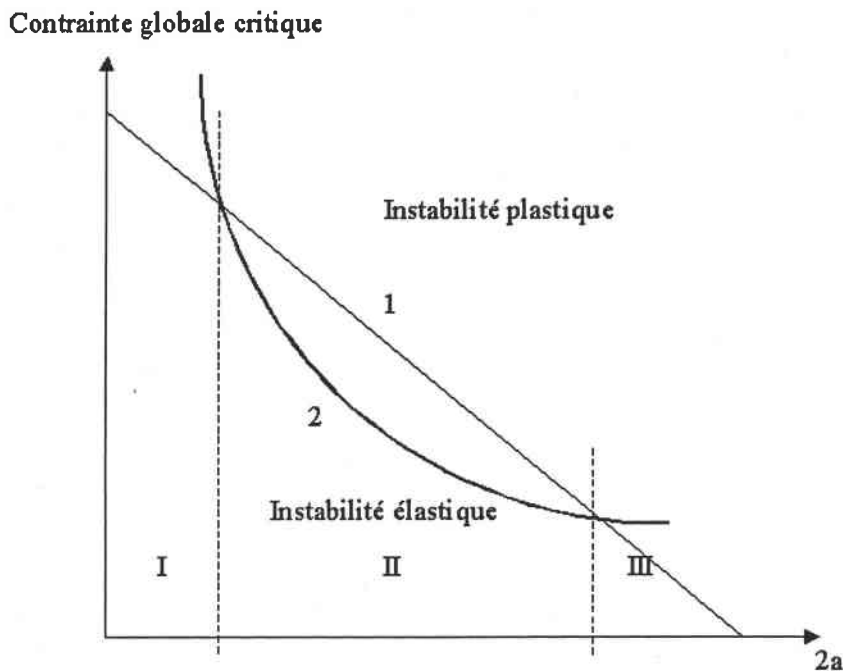


FIG. 1.3 – Diagramme de Feddersen

D'après l'expérience, la rupture due à l'instabilité plastique se situe sur la ligne 1 dans la Figure 1.3. En revanche, la rupture par rupture fragile se situe en dessous cette ligne et sur la courbe 2 dans la zone II. Le diagramme Feddersen montre trois zones en tenant compte de la taille du défaut :

- zone I : la taille du défaut est très petite, la rupture est due à la contrainte ultime qui est l'objet de notre travail,
- zone II : la théorie de Griffith et le facteur d'intensité des contraintes «K» s'appliquent pour caractériser la rupture,
- zone III : la taille de défaut est grande, la rupture est due à rupture fragile.

### 1.1.3 Analyse de la distribution des contraintes autour d'un défaut

Dans l'étude de la mécanique de rupture, il y a trois modes de rupture qui peuvent être distingués :

- Le mode I qui correspond à un écartement relatif des deux surfaces de la fissure qui se traduit par une ouverture angulaire,
- Le mode II qui correspond à un déplacement dans le même plan des deux surfaces de la fissure, en sens opposé, dans une direction perpendiculaire au front de la fissure,
- Le mode III qui correspond à un déplacement dans le même plan des deux surfaces de la fissure, en sens opposé, mais cette fois dans une direction parallèle au front de la fissure.

Ces trois modes de rupture sont présentés dans la figure suivante :

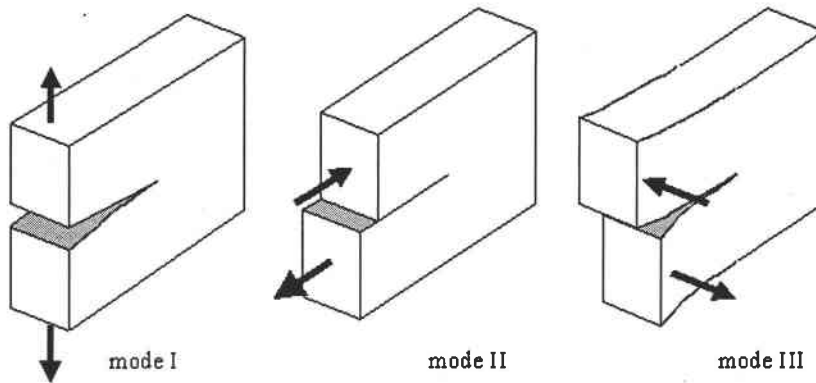


FIG. 1.4 – Trois Modes de rupture

#### *Facteur d'intensité des contraintes pour une fissure*

Griffith a utilisé une approche globale pour déterminer les conditions de rupture. En revanche, Irwin [20] a développé une approche locale à partir du champ de contrainte en fond d'une fissure. Dans ce critère, la rupture se produit lorsque le facteur d'intensité des contraintes en fond d'une fissure atteint une valeur critique.

Irwin propose de décrire la distribution des contraintes au voisinage du front d'une fissure par la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1.5)$$

D'après l'auteur, la distribution des contraintes dépend trois paramètres :  $K_I$ ,  $r$  et  $\theta$ . Le facteur d'intensité des contraintes  $K_I$  dans l'expression 1.5 représente l'amplitude de la distribution des contraintes en mode de rupture I, les paramètres  $r$  et  $\theta$  définis dans la Figure 1.5 correspondent aux coordonnées polaires de la zone étudiée d'une fissure.

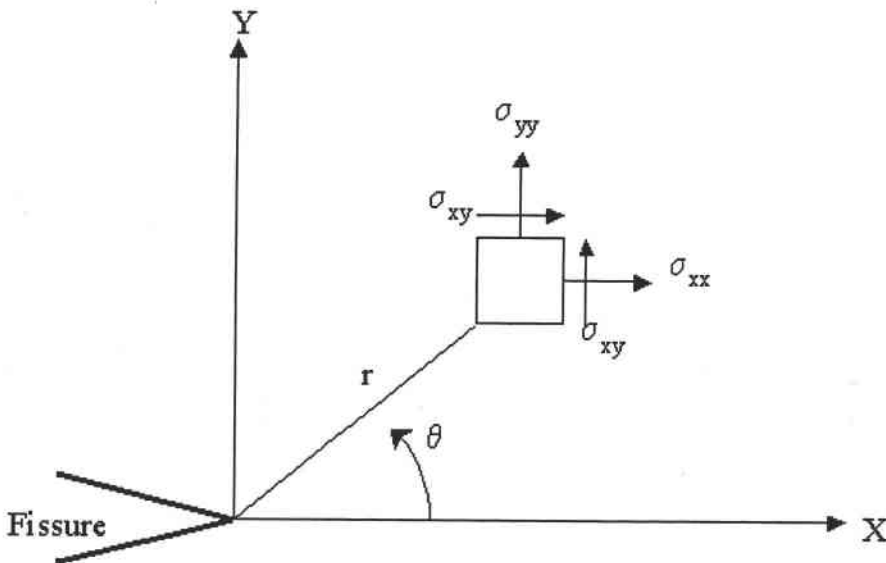


FIG. 1.5 – Schéma d'une fissure et les coordonnées

Irwin montre que la seule connaissance du facteur d'intensité des contraintes  $K_I$  permet de décrire la distribution des contraintes au voisinage du fond de fissure.

On remarque que les contraintes deviennent infinies à la pointe de la fissure ( $r \rightarrow 0$ ). Ceci constitue une singularité mathématique due aux hypothèses d'un matériau continu et d'une fissure infiniment mince. Le coefficient angulaire  $f_{ij}(\theta)$  et le facteur d'intensité des contraintes  $K_I$  déterminent l'intensité du champ local des contraintes.

D'une manière générale,  $K_I$  est une fonction de la longueur de la fissure  $a$ , de la géométrie de la structure et du mode de chargement. L'équation 1.6 est une expression générale de  $K_I$  pour une plaque ayant une largeur  $W$ , qui contient une fissure  $a$  soumis à une tension  $\sigma$  avec la correction de géométrie de  $f(a/W)$ .

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} * f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (1.6)$$

### *Distribution des contraintes en fond d'entaille*

Dans le cas d'une fissure émoussée, le champ des contraintes se trouve influencé par le rayon en fond d'entaille. Diverses méthodes analytiques permettent de décrire le champ de distribution des contraintes soit à l'aide du facteur d'intensité de contraintes, soit à l'aide du facteur de concentration des contraintes.

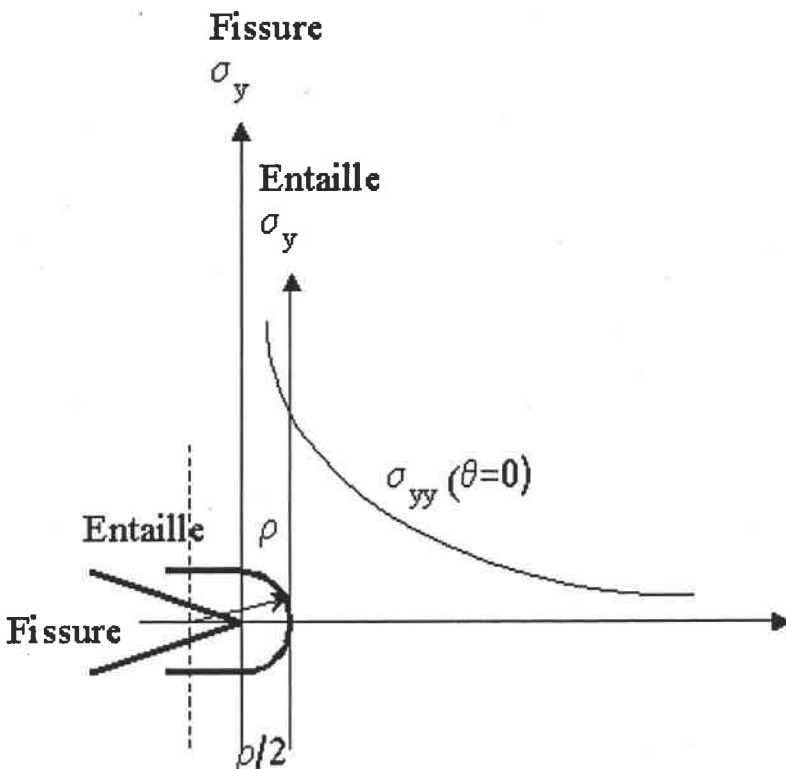


FIG. 1.6 – Schéma de la distribution des contraintes de Creager

Creager [12] a étendu l'analyse d'Irwin pour exprimer le champ des contraintes au voisinage d'une entaille en U. Il considère un défaut elliptique dans une plaque de dimension infinie soumise à une contrainte globale de traction  $\sigma_g$  dans la direction du petit axe d'un défaut elliptique. La Figure 1.6 (p.9) montre le schéma de la distribution des contraintes autour d'une entaille en U.

La distribution des contraintes en fond d'entaille est identique à celle d'une fissure, mais décalée dans la direction du fond d'entaille d'une distance égale à  $\rho/2$ . Dans ces conditions, le champ des contraintes en mode I s'exprime par :

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (1.7a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (1.7b)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3\theta}{2} \quad (1.7c)$$

Les champs des contraintes sont modifiés par l'influence du rayon en fond d'entaille par rapport à ceux d'une fissure.

### *Distribution des contraintes présentée dans un diagramme bi-logarithmique*

Le facteur d'intensité des contraintes (Equation 1.6, p.9) est défini à partir de la distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  en fond d'une fissure et s'exprime par :

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yy}(r, \theta) r^{\frac{1}{2}} \quad (1.8)$$

A partir de la solution de Ceager (Equation 1.7), le facteur d'intensité de contraintes est défini lorsque le rayon d'entaille tend vers zéro comme ci-dessous :

$$K_I^* = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{yy} \left[ r = \frac{\rho}{2}, \theta = 0 \right] \rho^{\frac{1}{2}} \quad (1.9)$$

La Figure 1.7 représente la variation des contraintes en fond de fissure et d'entaille dans un diagramme bi-logarithmique :

–  $\sigma_N$  : contrainte nominale

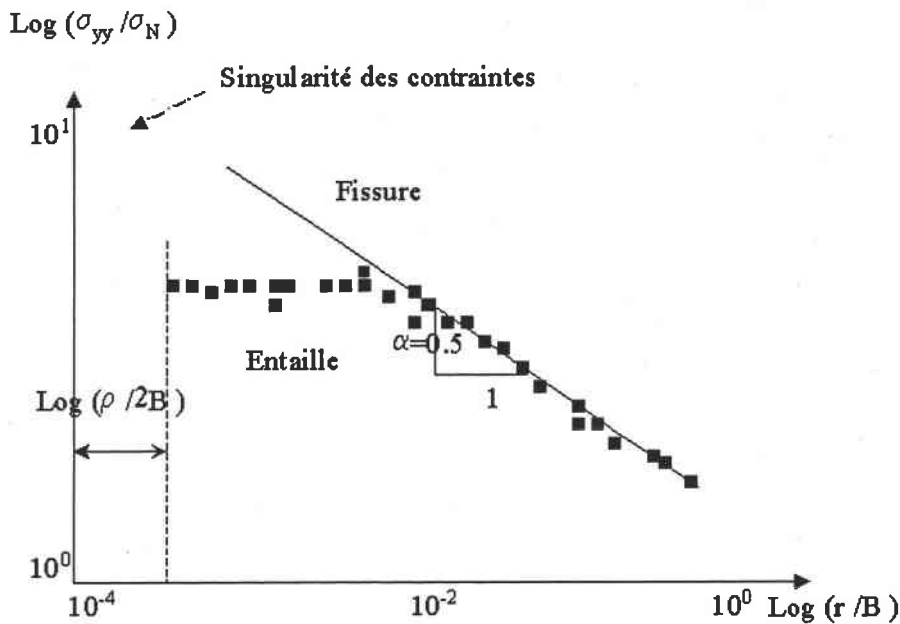


FIG. 1.7 – Distribution des contraintes en fond de fissure et d'entaille dans un diagramme bi-logarithmique

- $r$  : longueur du défaut
- $B$  : taille du ligament
- $\alpha$  : exposant du terme singulier de la distribution des contraintes.

#### 1.1.4 Critère de rupture «expérimental»

Afin de garantir la fiabilité de structure, il convient de définir les conditions ultimes de chargement que la structure peut tolérer sans risque de rupture. Dans le cas de rupture d'un matériau qui contient des défauts de «petite» taille, le critère de rupture est celui de la «zone I» dans le diagramme de Feddersen (Figure 1.3, p.6). Dans ces conditions, le critère de rupture est réalisé par une «contrainte ultime» du matériau.

##### *Contrainte ultime*

En raison de la difficulté d'alignement et de serrage des éprouvettes dans les machines de traction, les essais de rupture sur les matériaux du type de verre sont souvent réalisés en flexion (trois points, quatre points) sur les barreaux à

section rectangulaire ou circulaire.

Les essais de rupture sur le verre fournissent des valeurs très aléatoires. Cela provient de plusieurs raisons : état des surfaces de l'échantillon, mode de chargement, distribution des contraintes et présence de défaut interne ou externe...,etc.

La variation de la résistance du verre selon le mode de chargement et la forme de l'échantillons a été mentionnée fréquemment dans la littérature scientifique. Dans un travail récent réalisé par F.A. Veer et al.[15] pour le verre float, la contrainte maximale obtenue par l'essai de flexion 3 points est plus élevée par rapport à celle obtenue par l'essai de traction indirecte. Les résultats sont présentés dans le Tableau 1.1.

TAB. 1.1 – Comparaison des valeurs de la contrainte maximale de l'essai flexion 3 points et de traction indirecte en fonction de l'épaisseur de l'échantillon [15]

Epaisseur(mm)	Flexion		Traction indirecte	
	Moyenne (MPa)	Ecart type(%)	Moyenne (MPa)	Ecart type(%)
2	50	40	50.36	11
8	48.3	20	22.9	15

Les auteurs ont expliqué ces différentes valeurs de contrainte critique par une concentration des contraintes localisée pendant l'essai de flexion. Les auteurs ont conclu que la méthode de l'essai traction indirecte donne des résultats plus fiables compte tenu de la valeur de l'écart-type.

### *Critère global de rupture statique*

Le critère de rupture pour un matériau qui contient des défauts de taille «moyenne» est celui de la «zone II» dans le diagramme de Fedderssen (Figure 1.3, p.6). Le critère de rupture global et statique utilisé est le facteur d'intensité des contraintes ( $\text{MPa}\sqrt{m}$ ). Ce seul paramètre suffit pour décrire la distribution des contraintes et des déformations à la pointe d'un défaut (fissure, entaille).

On postule que l'extension de la fissure en mode I (Figure 1.4, p. 7) se produit si le facteur d'intensité de contraintes  $K_I$  atteint une valeur critique  $K_{IC}$  appelée la « ténacité » du matériau. Le critère de rupture s'exprime par :

$$K_I = K_{IC} \quad (1.10)$$

La valeur de la ténacité du matériau peut être obtenue à partir d'une éprouvette pré-fissurée. En générale, la ténacité en statique du verre est comprise dans l'intervalle allant de  $0,6 \text{ MPa}\sqrt{m}$  à  $0,9 \text{ MPa}\sqrt{m}$ .

Dans le travail réalisé récemment par Boccacini et al. [8] pour obtenir la ténacité du verre à silice, le phénomène de la sensibilité des défauts a été mise en évidence. Les auteurs ont utilisé une série d'éprouvettes en verre de silice pré-fissurées pour déterminer la ténacité de ce matériau avec deux différents type de fissure : une entaille d'angle de  $90^\circ$  de type de «chevron» et une fissure droite

D'après leurs résultats, la valeur de la ténacité issue d'une échantillon avec une fissure de  $90^\circ$  est plus élevée par rapport à celle obtenue à partir d'un échantillon possède une fissure droite. Les résultats des essais sont présentés dans le tableau 1.2.

TAB. 1.2 – Résultats obtenus à partir des échantillons pré-fissurés différemment

Echantillon pré-fissuré	$K_{Ic}$	Module de Weibull
Fissure droite	0.79	m=6
Fissure $90^\circ$	0.69	m=9

Les auteurs expliquent ce phénomène par la forme de la fissure qui influence la distribution de la contrainte dans l'échantillon : la forme de la fissure droite permet à la contrainte appliquée de s'étaler sur une plus grande partie de l'échantillon par rapport à celle d'une entaille d'angle de  $90^\circ$ . Ceci explique la faible valeur de la contrainte critique et la valeur plus élevée du module de Weibull pour l'échantillon qui contient une entaille d'angle  $90^\circ$ . Cette échantillon présente un comportement stable sous le chargement jusqu'à la rupture.

### *Essai de traction indirecte «Disque Brésilien»*

Il existe une autre méthode pour déterminer indirectement la contrainte critique en traction : l'essai sur « disque Brésilien ». Il s'agit d'appliquer la compres-



sion sur un échantillon en forme d'un cylindre plein. La rupture apparaît lorsque la traction générée par la compression appliquée atteint la valeur critique d'un matériau. C'est un essai souvent utilisé pour déterminer la résistance des matériaux fragiles comme le béton, les rochers...,etc. Toutefois, on constate l'existence d'un désaccord sur l'interprétation physique des mécanismes qui gouvernent la rupture, notamment la localisation du point d'amorçage des fissures [6].

Dans notre travail, nous utiliserons l'éprouvette du type « disque Brésilien » mais modifié. La géométrie de cette éprouvette est présentée dans la Figure 1.8 (p.14). L'échantillon en forme de disque est chargé en compression le long de son diamètre. Pour localiser correctement le point du départ de la rupture, une entaille de forme circulaire est perforée au centre du disque.

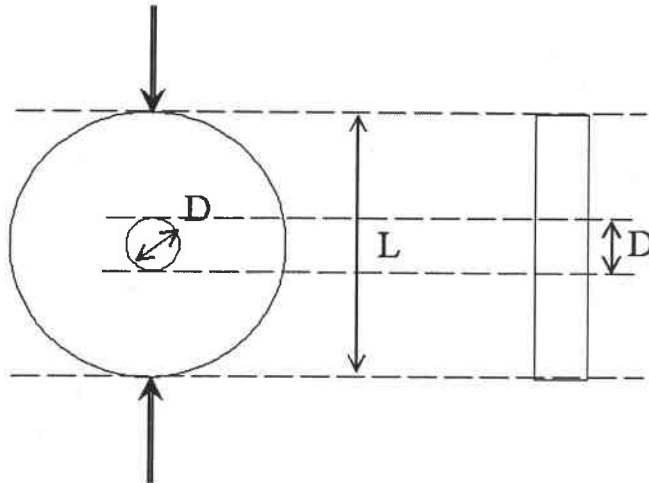


FIG. 1.8 – Géométrie de l'éprouvette de type « disque Brésilien modifié » : de profil (à droite), de face (à gauche)

La rupture se produit si la contrainte d'ouverture atteint une valeur critique  $\sigma_r$ . L'expression de la contrainte critique  $\sigma_r$  d'un anneau [43] est donnée par l'équation 1.11 :

$$\sigma_r = \frac{2.k.P_r}{L.D.\pi} \quad (1.11)$$

- $k$  : coefficient du facteur de concentration contrainte
- $P_r$  : chargement maximal
- $L$  : diamètre du disque

–  $D$  : diamètre du cercle au centre

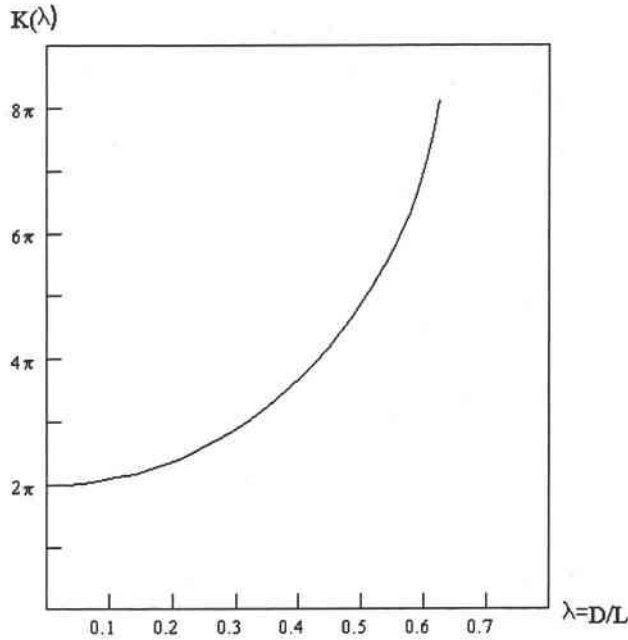


FIG. 1.9 – Evolution de la fonction  $k(\lambda)$  en fonction du rapport des diamètres  $\lambda=D/L$

TAB. 1.3 – Résultats expérimentaux des contraintes à la rupture en fonction de l'épaisseur de l'échantillon [5]

Epaisseur (mm)	Contrainte de rupture (MPa)	Ecart type (MPa)
5	96.3	13.66
10	82.94	21.63
20	69.19	10.4

$k$  est équivalent à un facteur de concentration de contrainte de la forme  $k(\lambda)$  avec  $\lambda=D/L$ . L'évolution de la fonction  $k(\lambda)$  est représentée sur la Figure 1.9.

Les contraintes critiques sur un verre float ont été obtenues expérimentalement à partir des échantillons « disque Brésilien modifié ( $D=2\text{mm}$ ,  $L=20\text{mm}$ ) » par Nyoungue [5]. Le Tableau 1.3 présente les résultats de ses essais. L'auteur

a expliqué la diminution de la contrainte maximale en fonction du volume de l'échantillon par un effet statistique comme «Effet volumique». C'est-à-dire que l'augmentation du volume se traduit par l'accroissement de la probabilité de la présence de défauts susceptibles de provoquer la rupture des matériaux.

## 1.2 Rupture dynamique

### 1.2.1 Problématique

La modélisation du comportement thermomécanique des matériaux d'ingénierie s'est longtemps développée dans le cadre principal de deux grands secteurs assez cloisonnés. D'un côté, les applications classiques restent l'objet de sollicitation relativement lente, dite « quasi-statiques » appliquées à l'échelle de la minute à la seconde. D'un autre côté, les applications militaires (et une moindre part, géophysiques et astrophysiques) ont constitué le moteur principal de l'étude de sollicitations rapides appliquées à l'échelle de la milli à la microseconde. Ce cloisonnement tend actuellement à s'estomper sous l'impulsion de nouvelles problématiques. Certaines applications industrielles ont besoin de plus en plus d'exploiter des phénomènes rapides (par exemple, crash automobile, chutes lors d'accidents de manutention, verres soumis à un choc thermique, bâtiments soumis aux séismes...,etc.)

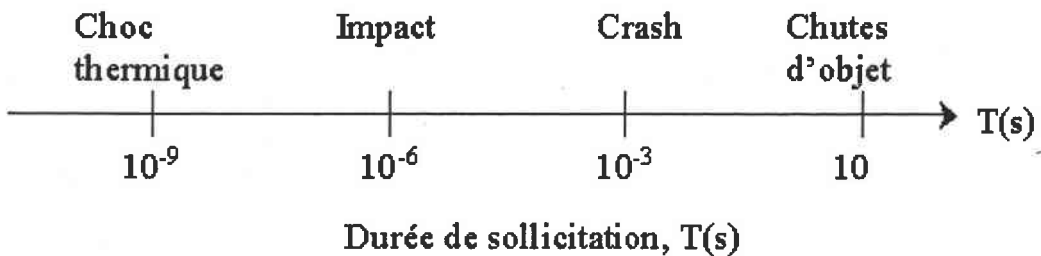


FIG. 1.10 – Classification des phénomènes dynamiques en fonction d'un temps caractéristique de variation de chargement

La Figure 1.10 présente quelques exemples de telles applications par ordre croissant de rapidité [4]. Les sollicitations rapides sont souvent qualifiées de « dynamiques » lorsque les effets d'inertie ne peuvent plus être négligés et que l'énergie cinétique mise en jeu n'est plus négligeable vis à vis de l'énergie de déformation.

En conséquence, le dimensionnement des structures est plus difficile à effectuer avec les données relatives d'un chargement quasi-statique.

La mécanique de la rupture dynamique ne concerne pas seulement les struc-

tures chargées de façon rapide mais, aussi les cas de propagation rapide des fissures. Dans la littérature, il existe beaucoup de méthodes pour déterminer le facteur d'intensité des contraintes selon le type de problème : par exemple, amorçage, propagation et arrêt de la fissure. Ces problèmes ne seront pas traités dans le cadre de cette étude.

### 1.2.2 Méthode expérimentale (Barres d'Hopkinson)

Dans le domaine des sollicitations rapides, l'expérimentation est difficile à réussir à cause du nombre de paramètres qui sont en jeu : comme le temps significatif est très court, il est nécessaire d'avoir un nombre suffisant d'essais, l'analyse du signal d'enregistrement doit être correcte...,etc.

Les techniques mises en jeu pour étudier les caractéristiques des matériaux soumis à un chargement rapide sont variées : essai Charpy, essai de corps tombant, machine à choc (Barres d'Hopkinson)...,etc. Ces essais sont différents selon la vitesse du chargement. Pour l'étude de la rupture des matériaux à grande vitesse de déformation ( $100/s \rightarrow 5000/s$ ), la méthode des barres d'Hopkinson est très utilisée : c'est une technique qui consiste à charger un train d'onde sur un échantillon placé entre deux barres à l'impédance mécanique identique.

#### *Barres d'Hopkinson*

Le profil d'une onde élastique se propageant dans un barreau cylindrique à section circulaire a été examiné pour la première fois par B. Hopkinson [13].

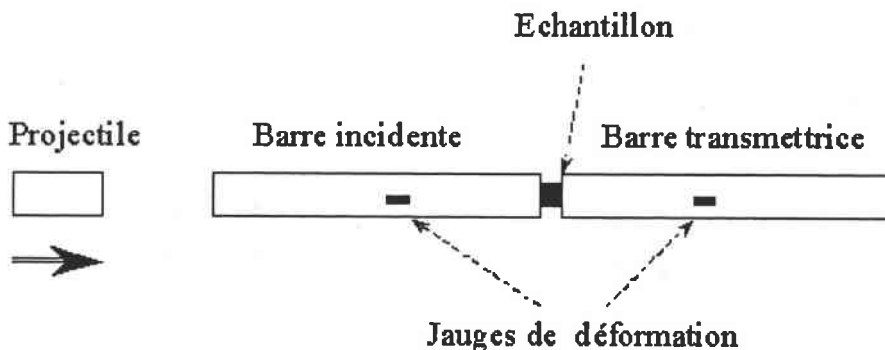


FIG. 1.11 – Barre d'Hopkinson en compression.

En 1949, Kolsky [26] utilise le concept de barres d'Hopkinson pour déterminer les déformations et les contraintes dynamiques auxquelles est soumis un échantillon en compression et intercalé entre deux barres (Figure 1.11). Le montage présenté dans la Figure 1.11 permet de mesurer les courbes contrainte-déformation et d'obtenir la loi de comportement.

Le principe de Barre d'Hopkinson est d'utiliser l'onde élastique longitudinale non dispersive provenant de l'impact d'un projectile contre la barre incidente. Cette onde de compression traverse la barre incidente. A l'arrivée d'échantillon, à cause de la différence de l'impédance entre la barre et l'échantillon une partie de l'onde est réfléchiée et l'autre partie traverse l'échantillon en provoquant la rupture.

Pour que les hypothèses (contrainte uni-axiale, état de déformation homogène dans l'échantillon, comportement élastique de la barre incidente) soient valables, la géométrie de la barre incidente est importante :

$$\frac{L}{d} \geq 10 \quad (1.12)$$

C'est-à-dire que le rapport entre le diamètre «d» et la longueur de la barre «L» doit être plus grand que 10. En générale, le diamètre de la barre est compris entre 12.7 mm et 19.05 mm, la longueur entre 1524 mm et 1828 mm [37].

L'analyse dynamique de la propagation de l'onde de compression dans l'échantillon et la déformation sont précisés dans l'Annexes B (p.135).

Depuis, de nombreux dispositifs d'essais inspirés des Barres d'Hopkinson sont été mis en oeuvre pour obtenir différents types de sollicitation : traction, compression, flexion ou torsion. Notre présentation se limitera aux techniques se rapportant à l'essai de compression.

### 1.2.3 Influence de la vitesse de sollicitation

La résistance du matériau soumis à un chargement rapide n'est pas intrinsèque du matériau. Elle dépend de la vitesse de chargement. En d'autre termes, la contrainte à la rupture augmente lorsque le temps de rupture décroît.

La variation de la résistance à la rupture des matériaux fragiles avec une

vitesse de chargement élevée a été vérifiée expérimentalement par Nyoungue [5]. L'auteur a réalisé l'essai en flexion trois points à l'aide de barres d'Hopkinson sur un barreau de verre float ayant différents rayons d'entaille. Il a remarqué que la contrainte critique du verre float augmente en fonction de la diminution du temps critique. Il a aussi mesuré l'évolution de la ténacité du verre float en fonction du rayon d'entaille et du chargement statique et dynamique.

**Ténacité ( $\text{MPa}\sqrt{m}$ )**

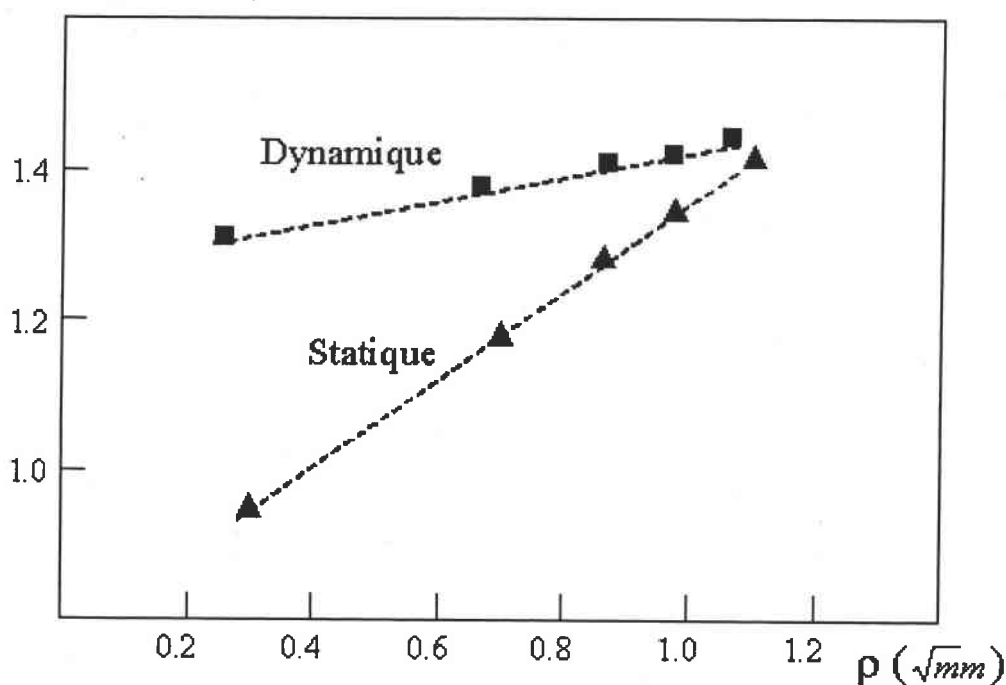


FIG. 1.12 – Evolution des facteurs d'intensité des contraintes statique et dynamique d'entaille du verre float en fonction du rayon d'entaille[5].

Les courbes dans la Figure 1.12 montrent que la ténacité du verre float augmente avec la vitesse de déformation et le rayon d'entaille.

D'un point de vue phénoménologique, cet accroissement est généralement attribué à un processus de multi-activation des défauts se produisant à grande vitesse de déformation. La multi-activation des défauts est analysée dans le cas de rupture de type « Ecaillage » pour laquelle la mécanique de la rupture n'est plus applicable.

**Facteur d'intensité des contraintes dynamiques**

La singularité des champs mécaniques à la pointe de la fissure est la même en élastostatique et en élastodynamique pour les déplacements et les contraintes [5]. La différence entre les modes de sollicitations statiques et dynamiques réside dans la définition des fonctions angulaires. En dynamique, elles dépendent explicitement de la vitesse de propagation de la fissure  $\dot{a}$ .

$$\sigma_{ij}(\theta, \dot{a}) = \frac{K_I(\theta, \dot{a})}{\sqrt{2\pi r}} F_{ij}(\theta, \dot{a}) \tag{1.13}$$

Le facteur d'intensité de contrainte dynamique  $K_I^{dyna}$  peut être défini en fonction du facteur d'intensité de contraintes quasi-statique  $K_I^{qstat}$  par la relation :

$$K_I^{dyna} = k_I * K_I^{qstat} \tag{1.14}$$

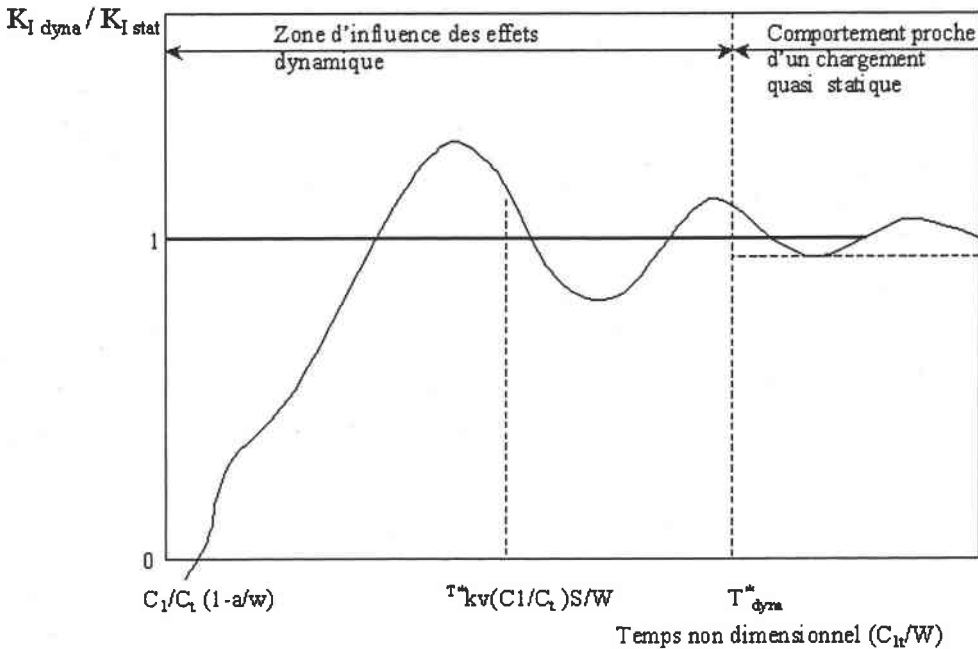


FIG. 1.13 – Représentation schématique de l'évolution temporelle de la fonction de correction dynamique, d'après [5]



La fonction de correction dynamique  $k_I$  décrit la différence entre les états quasi-statiques et dynamiques, en prenant compte l'influence des effets dynamiques au niveau de la fissure. L'évolution de cette fonction est représentée sur la Figure 1.13.

Pour des temps de rupture courts, les effets dynamiques sont importants et le facteur d'intensité de contrainte dynamique peut dépasser de 30% sa valeur quasi-statique.

Par contre, lorsque le temps de sollicitation est très supérieur au temps de parcours de l'onde longitudinale dans l'éprouvette, les sollicitations dynamiques sont de faible amplitude, et la rupture se produit dans un état de chargement proche de l'état quasi-statique pour lequel la fonction de correction dynamique  $k_I$  est égale à 1.

#### 1.2.4 Théorie de l'écaillage

L'écaillage est le cas de rupture dynamique sans précurseur. Il est engendré par la mise en traction d'un matériau au croisement de deux ondes de détente.

Dans le cas de l'essai «Barre Hopkinson» l'impact d'un projectile sur l'échantillon génère deux ondes de compression qui se propagent le long de l'éprouvette et le projectile. Par réflexion sur les surfaces libres, ces ondes sont transformées en onde de détente. Le principe de l'écaillage est schématisé sur la Figure 1.14 :

Le mouvement des particules qui en résulte produit un état de traction à l'intérieur de l'éprouvette : la coalescence des micros cavités entraîne la formation de «l'écaille» au sein du matériau. Elle se produit si la contrainte engendrée par le choc est supérieure à la résistance à la traction du matériau.

La Figure 1.15 représente l'analyse microscopique du faciès de rupture d'un verre float réalisé par Nyoungue [5]. La Figure 1.15 à gauche montre la propagation d'une fissure en forme d'étoile émanant d'un micro défaut ou d'une inclusion.

La formation de ces écailles est due à l'intensité des ondes de contrainte qui se propagent dans l'éprouvette pendant l'essai.

La Figure 1.15 à droite montre l'évolution de la rupture par écaillage.

La rupture par le phénomène d'écaillage dans le matériau verre ne peut pas être traité par la mécanique de rupture. C'est à dire que l'utilisation des

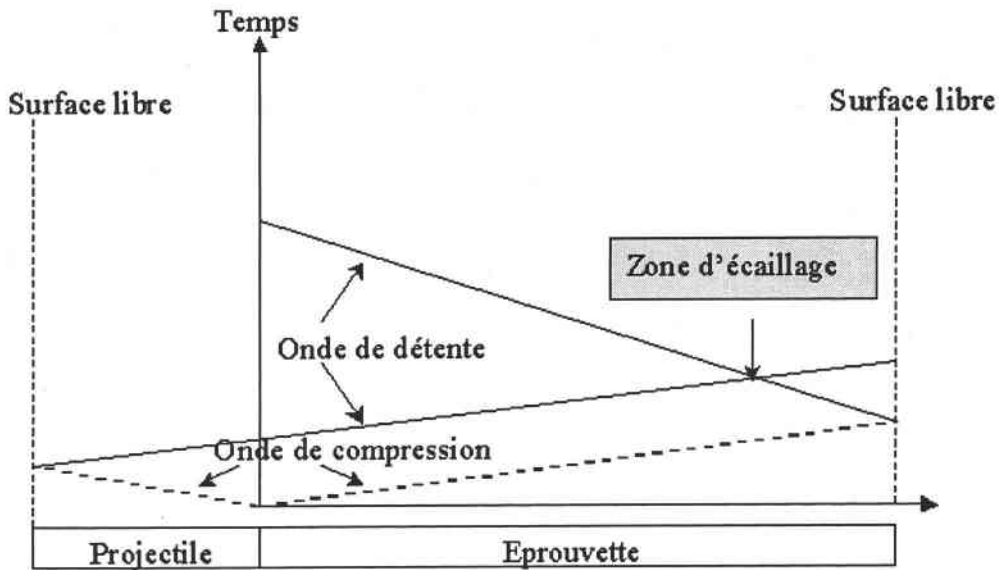


FIG. 1.14 – Principe de l'écaillage par impact de barre.

contraintes ultimes ni le facteur d'intensité de contrainte ne sont pas appropriés dans ce problème. Car, le phénomène de rupture est différent. C'est à dire que non seulement la rupture commence dans le volume entier mais aussi la rupture dépend de la vitesse du chargement non pas à partir d'un point précis.

La caractéristique de la rupture par écaillage est liée au fait que la contrainte critique croît fortement quand le temps critique décroît. L'approche de l'endommagement par écaillage appliquée dans le matériau verre sera précisée dans la section suivante.

### 1.2.5 Critère d'endommagement en dynamique

Des travaux concernant la rupture dynamique et le temps critique ont été réalisés par de nombreux auteurs notamment Tuler et Butcher [34].

Ces derniers ont proposé un critère pour lequel la rupture n'est pas instantanée mais nécessite un temps d'incubation pour l'amorçage des fissures à partir des micro défauts. L'amplitude du pulse de contrainte de tension  $\sigma$  et sa durée d'application  $\Delta t$  sont reliés par l'équation suivante :

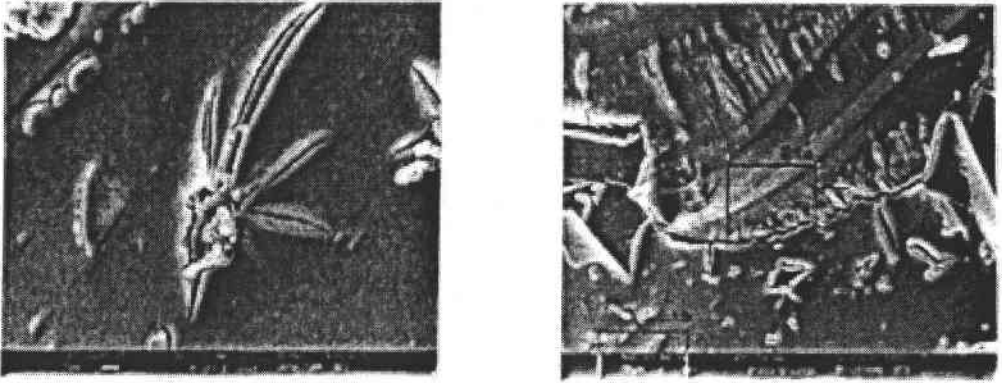


FIG. 1.15 – Rupture type par écaillage

$$\sigma^\lambda \Delta t = C \quad (1.15)$$

où  $\lambda$  et  $C$  sont des constantes propres au matériau.

Lorsque la valeur du membre gauche de l'équation 1.15 devient égale ou supérieure à la constante  $C$ , la rupture s'amorce. Pour des temps de chargement très longs, le terme  $\sigma^\lambda$  tend vers  $\sigma_0$  « limite de rupture quasi-statique ».

$$(\sigma - \sigma_0)^\lambda \Delta t = C \quad \text{avec} \quad \sigma_0 < \sigma \quad (1.16)$$

Ce critère est étendu dans sa forme cumulative pendant l'intervalle de temps ;

$$\int_0^{t_c} (\sigma - \sigma_0)^\lambda dt = C \quad (1.17)$$

où  $\sigma_0$  est la contrainte seuil et  $t_c$  est le temps à la rupture (ou temps critique).

Bouزيد [35][10] a travaillé sur le critère d'endommagement par impacts à partir des hypothèses suivantes :

- le verre contient une grande quantité de micro défauts distribués de manière aléatoire,
- le volume affecté par l'impact est défini par le fait que le projectile sphérique en contact avec la cible génère un certain volume de contact dans lequel l'onde de contrainte se propage et produit l'activation des micro défauts.

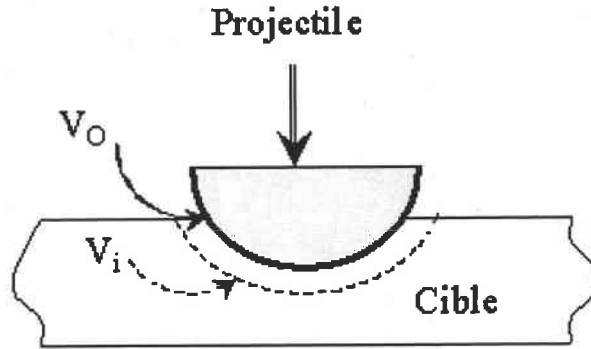


FIG. 1.16 -- Présentation schématique du volume affecté par l'impact

La fonction d'endommagement proposée s'exprime par le rapport du volume affecté par l'impact  $V_0$  (volume seuil en dessous duquel il n'y a pas de rupture) et le volume qui provoque la rupture  $V_c$  ( $V_c > V_0$ ). Ce volume correspond à un temps à rupture «  $t_c$  » sous la contrainte de rupture  $\sigma_c$ .

Par hypothèse, le nombre de micro-défauts activés est proportionnel au volume. Ainsi l'expression de l'endommagement s'écrit à partir de la variable interne d'endommagement «  $D$  » comme ci-dessous :

$$D = 1 - \frac{V_0}{V_i} = 1 - \frac{1}{V_v} \quad (1.18)$$

d'où  $V_v$  est un volume affecté par l'impact.

Si  $V_i$  est égal à  $V_0$ , la rupture ne se produit pas, et  $D$  est nul. Lorsque  $V_i$  est supérieur à  $V_0$ , les micro-fissures dans le matériau atteignent une taille critique conduisant à des macro-fissures. Dans ce cas, la rupture se produit et  $D$  est différent de zéro. L'auteur a développé le concept de l'endommagement à partir de la contrainte appliquée  $\sigma$  :

$$\dot{D}(1 - D)^n = A(\sigma - \sigma_0)^n \quad (1.19)$$

où  $\dot{D} = -\frac{1}{V_i} \frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{V_0}{V_i^2} \frac{\partial V_i}{\partial t}$  et  $A$  est une constante calculée à partir de la condition limite suivante : la contrainte appliquée provoque la perforation pour un temps

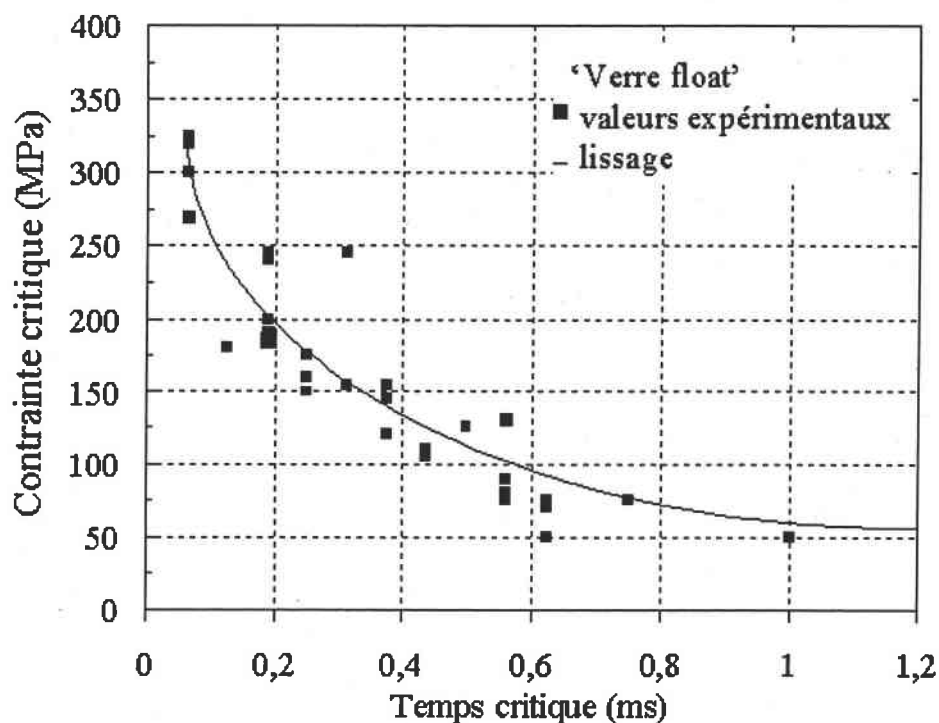


FIG. 1.17 – Relation entre la contrainte de rupture et le temps critique pour des éprouvettes en verre soumise à l'essai d'impact par barres d'Hopkinson et chute de bille[35][10]

critique  $t_P$  (si  $t=t_P$ ,  $D=1$ ).

En conséquence, le critère proposé par Bouzid est traduit par la relation suivante :

$$\int_{t_0}^{t_c} (\sigma - \sigma_0)^n dt = \left( \frac{1}{A(n+1)} \right) \left( 1 - \frac{V_0^{n+1}}{V_c^{n+1}} \right) \quad (1.20)$$

où  $A$  et  $n$  sont des constantes qui dépendent du matériau. La constante  $A$  est calculée à partir des conditions aux limites. L'équation 1.20 correspond bien à la fonction de Tuler et Bucher (Equation 1.17, p.24). C'est à dire que la partie droite dans l'équation 1.20 décrit le taux d'endommagement et est équivalent à la constante  $C$ .

L'auteur a utilisé deux dispositifs expérimentaux de choc : les barres d'Hopkinson et l'essai de bille tombante normalisé «*Drop Ball Test*». La Figure 1.17

montre les résultats d'essai. A partir des résultats expérimentaux, l'auteur a trouvé les constantes du modèle proposé (Equation 1.20) pour le verre plat :  $\sigma_0=40$  MPa,  $n=1.25$ ,  $t_0=1.6$  ms et  $A = 9 * 10^{-1.25} s^{-1}$ .

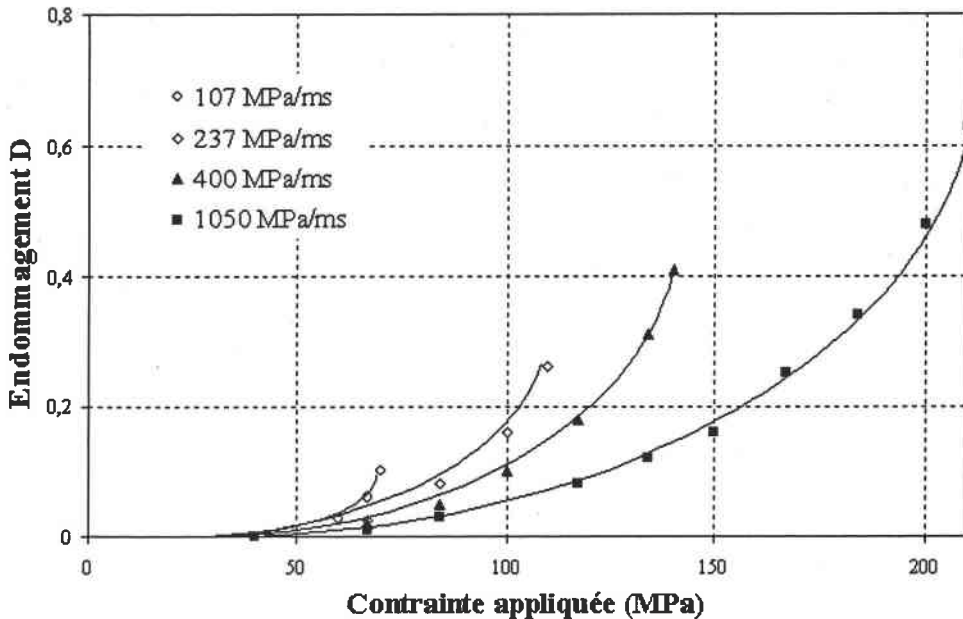


FIG. 1.18 – Evolution du paramètre d'endommagement D en fonction de la contrainte appliquée à différentes vitesses de chargement

Les Figures 1.17 et 1.18 représentent les résultats des essais dynamiques : la Figure 1.17 montre la relation obtenue entre la contrainte critique et le temps de rupture à partir de deux types de dispositifs expérimentaux. la relation calculée entre la sévérité d'endommagement et la contrainte appliquée est présentée dans la Figure 1.18.

Le modèle d'endommagement semi-empirique développé par Bouzid permet de comprendre le phénomène de la rupture dynamique du verre et l'endommagement lié au temps critique sous chargement dynamique.

### 1.3 Conclusion

Dans le chapitre 1, nous avons montré la mécanique de la rupture statique et dynamique pour le matériau verre. La mécanique de la rupture sous le charge-

ment statique a été abordée au travers de diverses modélisations : la théorie de Griffith, l'analyse de la distribution des contraintes autour d'un défaut, le facteur d'intensité des contraintes. Dans le cas où le matériau contient des défauts de « petite » taille, la résistance du matériau se traduit par des contraintes ultimes. Nous avons également montré l'avantage de l'utilisation de l'échantillon du type « Disque Brésilien » pour sa grande homogénéité dans la distribution des contraintes par rapport à l'essai de flexion 3 ou 4 points. Dans le domaine dynamique, les caractéristiques du verre ne sont plus intrinsèques au matériau. Cela dépend de la vitesse du chargement et du temps de rupture. L'augmentation de la résistance mécanique du matériau verre sous le chargement dynamique a été montrée par divers auteurs. D'un point de vue phénoménologique, cet accroissement est attribué à un processus de multi-activation des défauts qui se produisent à une grande vitesse de déformation. Dans le cas de la rupture dynamique sans précurseur, la rupture est traitée à partir de la théorie de l'écaillage. Ce phénomène se produit au croisement de deux ondes de détente. Il est nécessaire de connaître le champ thermique avant de trouver la contrainte appliquée par le chargement température. Pour cette raison, nous avons fait un rappel de la théorie du transfert thermique.

## Chapitre 2

# Choc thermique

L'étude des contraintes engendrées par variation de température n'est pas un sujet récent. En 1838, Duhamel [26] développa l'équation donnant la contrainte engendrée par un gradient de température dans un cylindre. Depuis, de nombreux travaux ont été réalisés et développés sur ce sujet. Dans ce chapitre, nous allons rappeler brièvement la théorie de la contrainte thermique et celle due à un choc thermique.

La contrainte thermique est un problème important et inévitable. Nous pouvons citer le problème quotidien et courant des contraintes générées dans les fenêtres à cause de la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur de l'immeuble ou les lavages des verres à l'eau chaude dans une cuisine ou considérer un problème plus particulier comme une navette spatiale rentrant dans l'atmosphère...,etc. Si la contrainte thermique devient importante dans le matériau, elle peut dépasser la résistance du matériau.

On peut distinguer deux parties dans l'origine de la contrainte thermique :

- la contrainte thermique à température uniforme,
- la contrainte thermique due à un gradient de température.

Toutefois, le verre trempé constitue une exception à ce qui précède : en effet, la température de recuit du verre étant voisine de sa température de fusion, la contraction de la surface au début du refroidissement n'est pas limitée par le coeur encore ductile. Une fois rigidifiée, la peau est ensuite mise en compression lors de la solidification du coeur.



## 2.1 Contrainte thermique

### 2.1.1 Contrainte thermique à température uniforme

Considérons un corps qui a subi un changement en température de  $T_0$  à  $T_1$  uniformément réparti. Le corps va se dilater simplement d'une grandeur  $\alpha(T_1 - T_0)$  où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique.

Si le corps est homogène, isotrope et libre de se déplacer, la contrainte ne peut pas se développer. En revanche, il existe un certain cas où le corps est libre de se déplacer mais les contraintes apparaissent à cause de la différence du coefficient de dilatation thermique dans le matériau, par exemple, dans les matériaux composites, polycristallins avec structure anisotrope...,etc.

Considérons un corps homogène et isotrope mais qui ne soit pas libre de se dilater ou de se rétracter (Figure 2.1). Dans ce corps, une contrainte apparaît à cause des conditions aux limites.

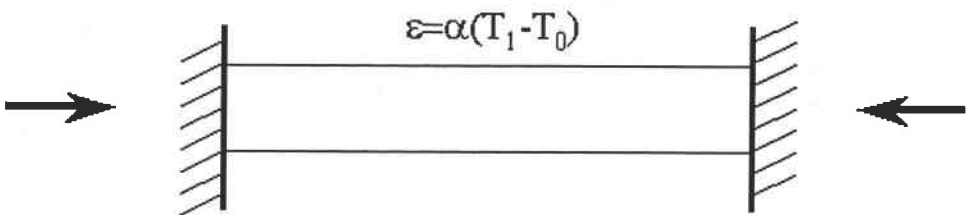


FIG. 2.1 – Corps fixé entre deux supports soumis à un changement thermique  $T_1 - T_0$  avec le coefficient dilatation thermique  $\alpha$

La Figure 2.1 représente l'empêchement du mouvement d'un corps soumis à une variation thermique dans tout le corps d'une valeur de  $(T_1 - T_0)$ <sup>1</sup> par deux supports rigides. Dans cette situation, les contraintes thermiques sont obtenues à partir de l'expression du comportement thermoélastique<sup>2</sup> :

<sup>1</sup> $T_1$  est la température finale,  $T_0$  est la température initiale

<sup>2</sup>"loi de Hooke"

$$\begin{pmatrix} \sigma_{ii} \\ \sigma_{jj} \\ \sigma_{kk} \\ \sigma_{ij} \\ \sigma_{jk} \\ \sigma_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{ii} - \alpha_i \Delta T \\ \epsilon_{jj} - \alpha_j \Delta T \\ \epsilon_{kk} - \alpha_k \Delta T \\ \gamma_{ij} \\ \gamma_{jk} \\ \gamma_{ki} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

où  $\sigma$  est la tenseur des contraintes,  $\epsilon$  est la tenseur des déformations,  $\gamma$  est appelé souvent distorsion angulaire,  $C_{ii}$  sont les constantes élastiques,  $\alpha_i$  est le coefficient de dilatation thermique,  $\Delta T$  est la variation thermique. Quand il s'agit d'un corps homogène isotrope soumis à un chargement thermique sans application de force, le calcul des contraintes devient très simple en éliminant la partie du chargement mécanique :

$$\sigma = \epsilon_{\text{mécanique}} + \epsilon_{\text{thermique}} \quad (2.2a)$$

$$= \epsilon_{\text{thermique}} \quad (2.2b)$$

$$= C\alpha\Delta T \quad (2.2c)$$

avec :

- $C^3 = E \Rightarrow$  pour un corps à 1 dimension ( $E$  : module de Young)
- $C = E/1-\nu \Rightarrow$  pour un corps à 2 dimensions ( $\nu$  : coefficient de Poisson)
- $C = E/1-2\nu \Rightarrow$  pour un corps à 3 dimensions.

### 2.1.2 Contrainte thermique due à un gradient de température «choc thermique»

Les contraintes thermiques peuvent aussi apparaître dans un corps libre. Les gradients de température dans le corps sont en cause. C'est le cas du choc thermique proprement dit. L'origine de la contrainte due à un choc thermique est différente par rapport à la contrainte thermique en soi : la contrainte due à un choc thermique provient d'un gradient de température dans le matériau. Il est

<sup>3</sup>Cette hypothèse correspond au matériau isotrope.

donc nécessaire de connaître la variation de la température en fonction du temps à l'endroit où on veut analyser cette contrainte.

Lorsqu'un solide est brutalement placé dans un milieu dont la température est inférieure à la température initiale du solide, le choc thermique est dit « descendant » : la surface refroidie tend à se contracter mais le coeur est encore chaud, dilaté et s'oppose à cette contraction. Il en résulte des contraintes de traction en surface et de compression à coeur. Lorsque la température du milieu de la trempe est supérieure à la température initiale du solide le processus est inversé et la surface du solide est comprimée alors que le coeur est tendu. Le choc thermique est dit « ascendant ».

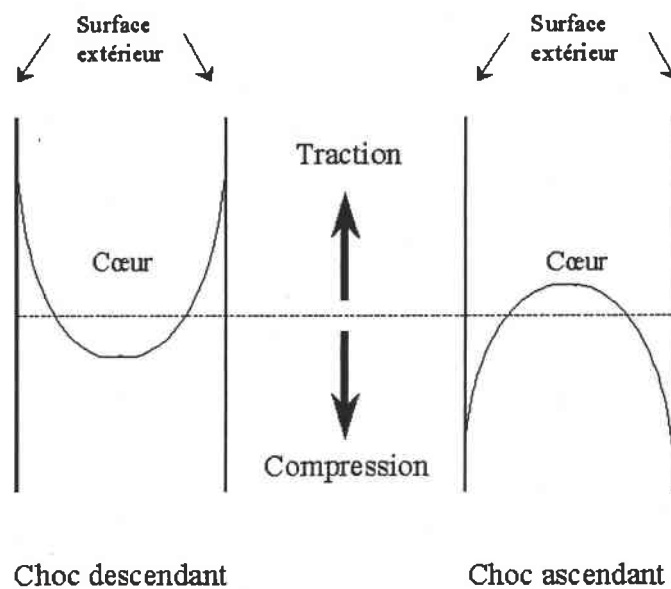


FIG. 2.2 – Contraintes induites lors de chocs thermiques « descendant » et « ascendant ».

La Figure 2.2 représente qualitativement la répartition des contraintes dans une plaque infinie soumise à un choc thermique par ses deux faces. Ainsi, le matériau se fissure si la contrainte induite thermiquement atteint localement sa contrainte à rupture.

**Nombre de Biot**

Soit un solide de volume  $V$  et de surface  $A$  porté à une température  $T_{volume}$  et placé dans un fluide de température  $T_{fluide}$ . Le système étant hors équilibre thermodynamique, il apparaît des transferts thermiques parmi lesquels il faut distinguer :

-les transferts en volume dans le solide. Ils sont assurés par conduction et reliés au coefficient de conductivité thermique «  $k$  ».

-les transferts à l'interface. Ils sont assurés par convection et rayonnement. Ils sont reliés au coefficient d'échange superficiel «  $h$  ».

Par analogie avec la loi d'Ohm ( $U=R.i$ ), il est possible de définir la résistance thermique «  $R$  » par :

$$\Delta T = R.\Phi \quad (2.3)$$

A l'interface, les transferts thermiques s'écrivent :

$$\Phi_{interface} = h.\Delta T_{interface} \quad (2.4)$$

La résistance thermique à l'interface vaut donc :  $R_{interface} = 1/h$

En volume, les transferts thermiques s'écrivent :

$$\Phi_{volume} = k.\frac{dT}{dx} \quad (2.5)$$

$$\approx k.\frac{\Delta T_{volume}}{L} \quad (2.6)$$

où  $L$  est une dimension caractéristique du solide.

Le rapport de la résistance thermique en volume à la résistance thermique de l'interface est un nombre sans dimension appelé  $\beta$ , «nombre de Biot» :

$$\beta = \frac{R_{volume}}{R_{interface}} \quad (2.7)$$

$$= \frac{L.h}{k} \quad (2.8)$$

En effet, la distribution de température dépend 3 paramètres<sup>4</sup> :

- coefficient du transfert thermique  $h$  (W/m<sup>2</sup> °K),
- coefficient de la conduction  $k$  (W/m °K)
- épaisseur de la structure  $L$  (m).

Ce rapport exprime schématiquement la diminution de température en volume par rapport à la diminution de température à l'interface. (voir ANNEXE A p.131). Ce nombre de Biot est étroitement lié à la notion de sévérité de choc thermique et donne l'écart de température entre la surface et le volume. La contrainte obtenue pendant le choc thermique peut être alors exprimé à partir du nombre de Biot en fonction du temps non dimensionnel

### *Approche analytique de la contrainte due à un choc thermique*

Le calcul de la contrainte due à un choc thermique a été développée par Kingery [41]. Cette approche en terme de contraintes suppose un matériau homogène, isotrope et de comportement mécanique linéaire élastique parfaitement fragile.

La pièce initialement à la température  $T_0$  est brutalement placée dans un milieu dont la température est  $T_1$ .

Nous supposons dans un premier temps le cas « idéal » où la surface de la pièce adopte instantanément la température  $T_1$ . La surface refroidie tend à se contracter mais le coeur encore chaud impose sa dilatation à la surface de la pièce. La surface est donc soumise à une contrainte dont l'expression est donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma = E\epsilon f(\nu) \quad (2.9)$$

où  $E$  est le module d'Young du matériau,  $f(\nu)$  est le facteur géométrique dépendant du coefficient de Poisson. Il vaut respectivement 1,  $\frac{1}{1-\nu}$  et  $\frac{1}{1-2\nu}$  pour des contraintes uni-axiales, bi-axiales et tri-axiales.  $\epsilon = \alpha(T_1 - T_0)$  avec  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique linéaire.

La contrainte induite en surface dans le cas où les sollicitations sont bi-axiales a donc pour expression :

$$\sigma_{idal} = \frac{E\alpha(T_1 - T_0)}{1 - \nu} \quad (2.10)$$

Il y aura la dégradation de la pièce si la contrainte induite par le choc thermique atteint localement la contrainte de rupture du matériau. Pour les matériaux fragiles comme le verre, la contrainte générée par le choc thermique peut entraîner une rupture inattendue. Or, le matériau verre présentent une résistance à la rupture en compression plusieurs fois supérieure à la résistance à rupture en traction.

L'expression 2.10 correspond au cas limite idéal où les échanges thermiques à l'interface ont lieu instantanément. Elle définit la contrainte maximale qui peut se développer

<sup>4</sup>Ses paramètres sont précisés dans le chapitre 2.2.1 (p.39)

à la surface d'une pièce soumise à un choc thermique. En réalité, la contrainte induite en surface est inférieure à  $\sigma_{idal}$ . C'est-à-dire que la température de surface ne diminue pas instantanément : le coeur commence à se contracter en évacuant de la chaleur par conduction.

La contrainte réellement induite en surface a donc l'expression suivante :

$$\sigma = \psi \sigma_{idal} \quad (2.11)$$

où  $\psi$  est un nombre sans dimension appelé le « coefficient de réduction de contraintes ». Il permet de prendre en compte les conditions réelles du choc thermique. Il sera d'autant plus proche de 1 que les conditions de choc thermique seront proches du cas idéal. En conséquence, en tenant compte de l'écart de température entre la surface intérieure et extérieure, le nombre de Biot  $\beta = L * h/k$  est lié à un coefficient de réduction des contraintes.

Il existe dans la littérature plusieurs expressions de la relation entre la valeur  $\psi$  et la valeur de  $\beta$  selon le type de géométrie.

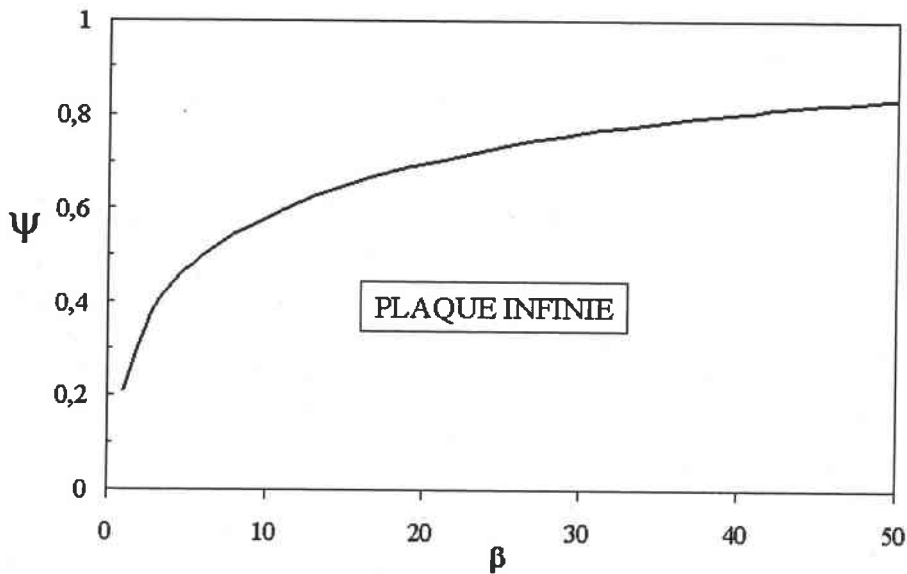


FIG. 2.3 – Variation de  $\Psi$  en fonction de  $\beta$  [31]

La Figure 2.3 représente la variation du coefficient de réduction des contraintes  $\psi$  en fonction du nombre de Biot  $\beta$  dans le cas d'une plaque infinie.

L'équation 2.11 et 2.10 donne donc une expression de l'écart de température qui peut être un des paramètres de résistance du matériau au choc thermique :

$$\Delta T = \frac{f(v)\sigma}{E\alpha} \quad (2.12)$$

D'après ce critère un matériau résiste bien au chocs thermiques sévères dont l'écart de température est important si :

- $\alpha$  petit : faible déformation entre la surface refroidie et le coeur dilaté,
- E faible : bonne accommodation de la surface aux déformations imposées,
- $\sigma$  : grande résistance à la rupture en tension.

### Choc thermique : phénomène transitoire

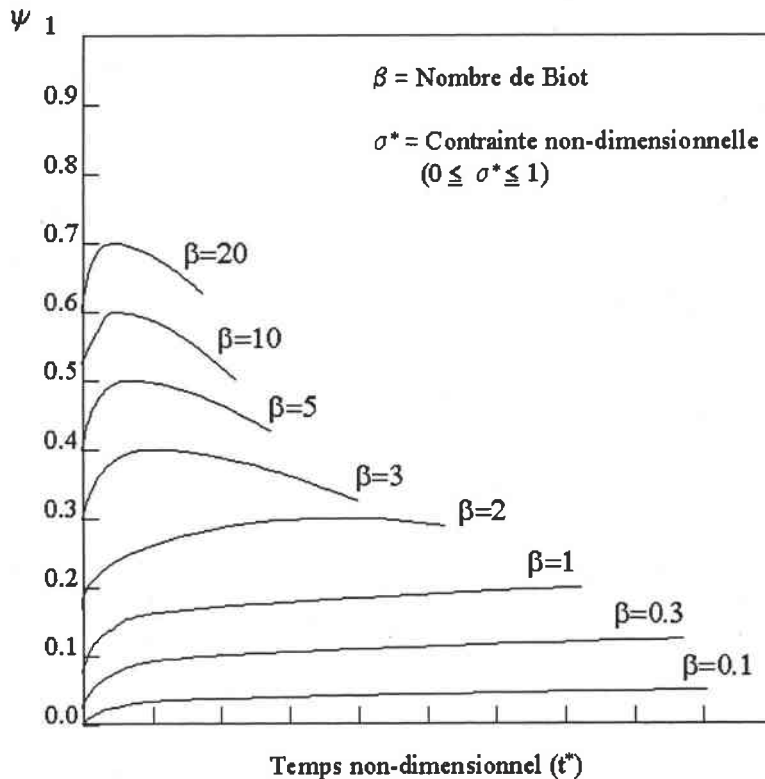


FIG. 2.4 – Variation des contraintes non dimensionnelles en fonction du temps non dimensionnel et du nombre de Biot

Lors d'un choc thermique réel, les contraintes thermiques superficielles ne se développent pas instantanément. Elles n'atteignent leur valeur maximale qu'au bout d'un temps qui est d'autant plus court que le nombre de Biot est élevé. Elles diminuent ensuite au fur à mesure que les températures s'uniformisent dans le matériau.

En vue de décrire l'évolution de la contrainte thermique avec le temps, de nombreux auteurs considèrent que le facteur de réduction de contrainte  $\psi$  évolue dans le temps.

La Figure 2.4 représente la relation entre le coefficient de réduction de contrainte  $\psi$  et le nombre de Biot  $\beta$  en fonction du temps non dimensionnel. La valeur du coefficient de la réduction des contraintes (ou encore appelé contrainte non dimensionnelle)  $\psi$  varie de 0 à 1. Si  $\beta$  est plus grand que 20, la valeur de  $\psi$  devient égale à 1. Cela signifie

que la température de la surface atteint «instantanément» la valeur de la température ambiante : c'est le cas du choc thermique sévère.

Bien que sa simplicité et son manque de précision soient parfois critiqués par certains auteurs, l'utilisation de l'expression de Kingery est très fréquente dans de nombreux travaux.

Il est évident que le calcul de la contrainte thermique en un point donné nécessite d'abord la connaissance de la température en ce point.



## 2.2 Calcul du champ thermique

### 2.2.1 Transfert thermique

L'énergie thermique est définie comme l'activité atomique ou moléculaire sous forme de vibration des atomes et de leurs liaisons.

La chaleur se propage selon les 3 modes différents :

- la conduction,
- la convection,
- le rayonnement.

#### *Conduction*

La conduction est le mécanisme de transfert d'énergie qui s'effectue du point le plus chaud vers le point le plus froid par la transmission d'une «onde» induite par le mouvement des atomes «agités thermiquement» sans déplacement de matière. La loi de Fourier traduit ce phénomène physique dans le cas d'un milieu isotrope, la densité de flux est proportionnelle au gradient de température.

$$\Phi = -k \text{grad}(T) \quad (2.13)$$

- $\Phi$  = densité de flux de la chaleur ( $W/m^2$ )
- $k$  = constante caractéristique du matériau appelée «conductivité thermique» ( $W/m^\circ C$ )
- $\text{grad}(T)$  = gradient de thermique ( $^\circ C/m$ )

Le signe (-) veut dire que la chaleur va vers les températures décroissantes.

La remarque la plus importante est le fait que « $k$ » dépend en général de la température et des coordonnées du point considéré ;  $k(x, y, z, T)$ . Dans le cas de milieu homogène, « $k$ » ne dépend donc que de la température.

Le verre est un matériau solide qui a une faible valeur de la conductivité thermique ; « $k$ » varie d'une valeur inférieure à 1 «comme le bois, le béton et le verre à vitre ...,etc.» à plus de 100 pour des matériaux comme «l'aluminium, cuivre, or...,etc.» au température ambiante.

#### *Convection*

Dans les gaz et les fluides, la chaleur se déplace d'une autre manière ; la matière se déplace sous l'influence de la différence de température. L'existence d'un champ de température non uniforme modifie localement la masse volumique de ces fluides. Ceci entraîne des mouvements de matière sous l'effet de la pesanteur et par conséquent des transferts de chaleur, dits de «convection naturelle». Si le fluide est entraîné artificiellement, la convection est alors dite «forcée».

Le transfert de la chaleur est exprimé par l'équation suivante :

$$\Phi = h(T_s - T_f) \quad (2.14)$$

- $\Phi$  = flux de la chaleur ( $W/m^2$ )
- $h$  = coefficient d'échange superficiel ( $W/m^2 \cdot ^\circ C$ )
- $T_s$  = température du solide
- $T_f$  = température du fluide

La détermination du coefficient d'échange superficiel est très délicate et sa mesure est rarement réalisée.

\*Convection en milieu liquide :

Le milieu de transfert liquide le plus couramment utilisé est l'eau. Il conduit aux coefficients d'échanges les plus élevés : entre 300 et 170 000  $W/m^2 \cdot ^\circ C$ .

En convection naturelle, la valeur de «  $h$  » dépend de l'orientation de l'interface d'échange par rapport aux forces de pesanteur.

\*Convection en milieu gazeux :

La convection naturelle en milieu gazeux occasionne des coefficients d'échange superficiels très faibles compris entre 6 et 30  $W/m^2 \cdot ^\circ C$ .

### Rayonnement

Le troisième mode de déplacement de la chaleur est le rayonnement électromagnétique. Il est assuré par les émissions d'ondes électromagnétiques. Il traverse le vide, isolant parfait et non convectif. Dans notre étude, nous avons négligé ce mode de transfert de la chaleur.

## 2.2.2 Méthode analytique

Dans notre cas, nous considérons uniquement un corps homogène sans source interne.

### Equation générale de la chaleur

A partir d'un bilan énergétique (voir ANNEXE A p.131) dans un volume ( $Q_1 + Q_2 = Q_3$ ,  $Q_1$  : la chaleur rentrant à l'intérieur du corps,  $Q_2$  : la source interne,  $Q_3$  : l'équation de la calorimétrie), l'équation générale de la chaleur  $T(x, y, z, t)$  à un point donné à l'intérieur de ce volume [3] s'exprime dans le régime transitoire par l'équation 2.15 :

$$\Delta = \frac{1}{a} * \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.15)$$

- $a$  : la diffusivité thermique ( $m^2/s$ )  $a = k/\rho c$
- $k$  : la conductivité ( $W/m \cdot ^\circ C$ )
- $\rho$  : la masse volumique ( $kg/m^3$ )

–  $c$  : la chaleur massique (J/kg °C)

pour les coordonnées cartésiennes :

$$\Delta = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.16)$$

pour les coordonnées cylindriques :

$$\Delta = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\partial r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.17)$$

### Résolution :

Dans notre étude, nous limiterons au cas où les paramètres  $k$ ,  $\rho$  et  $c$  ne dépendent pas de la température ni du milieu.

L'équation générale du transfert thermique aux dérivées partielles (Equation 2.15) peut être résolue par la méthode de «*Séparation des Variables*». Cela donne deux équations différentielles homogènes (Equation 2.19, p.40)

On écrit la variation de la température sous la forme :

$$T(r, t) = \Psi(r) * \Gamma(t) \quad (2.18)$$

En introduisant cette expression dans l'équation du transfert thermique :

$$\frac{1}{\Psi(r)} \Delta \Psi(r) = \frac{1}{a} \frac{1}{\Gamma(t)} \frac{d\Gamma(t)}{dt} \quad (2.19a)$$

$$= -\lambda^2 \quad (2.19b)$$

Dans l'expression ci-dessus, le membre de gauche ne dépend que de  $r$ , celui de droite que de  $t$ . Ceci est possible si ces deux termes sont constant "- $\lambda^2$ ". La solution de  $\Gamma(t)$  et  $\Psi(r)$  est présentée ci-dessous :

**[Détermination de  $\Gamma(t)$ ]** La solution de  $\Gamma(t)$  peut être obtenue facilement à partir de l'équation différentielle :

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} + a\lambda^2\Gamma(t) = 0 \quad (2.20)$$

qui admet d'une solution générale :

$$\Gamma(t) = C \exp(-a\lambda^2 t) \quad (2.21)$$

[*Détermination de  $\Psi(r)$* ] L'équation spatiale s'écrit sous une forme de :

$$\Delta\Psi(r) + \lambda^2\Psi(r) = 0 \quad (2.22)$$

La fonction  $\Delta\Psi(r)$  peut se résoudre à partir d'une condition aux limites :

$$k_i \frac{\partial T}{\partial n_i} + h_i T = 0 \quad (2.23)$$

La solution générale de l'équation de la chaleur (Equation 2.15, p.39) est obtenue par une combinaison linéaire des solutions particulières :

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Psi_n(r) \exp(-a\lambda_n^2 t) \quad (2.24)$$

La solution de l'équation 2.24 doit satisfaire la condition initiale  $T(r, 0) = F(r)$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \Psi_n(r) = F(r) \quad (2.25)$$

L'utilisation des propriétés d'orthogonalité des fonctions propres permet d'obtenir la valeur  $C_n$  :

$$\int \Psi_n(r) * \Psi_m(r) * dr = 0 \quad n \neq m \quad (2.26a)$$

$$= N_n \quad n = m \quad (2.26b)$$

soit :

$$C_n = \frac{1}{N_n} \int \Psi_n(r) * F(r) dr \quad (2.27)$$

### *Exemple : plaque infinie*

Considérons une plaque infiniment longue avec une demi-longueur  $L$  et portée à la température uniforme  $100^\circ\text{C}$  puis trempée brutalement dans de l'eau froide à  $20^\circ\text{C}$ . La plaque va être refroidie par les deux faces (Figure 2.5) Les transferts thermiques en surface sont de type convectif «forcé».

Pour simplifier le problème, nous travaillons en température réduite.

$$\theta(x, t) = \frac{T(x, t) - T_f}{T_i - T_f} \quad (2.28)$$

d'où  $T_i$  température initiale,  $T_f$  température finale.

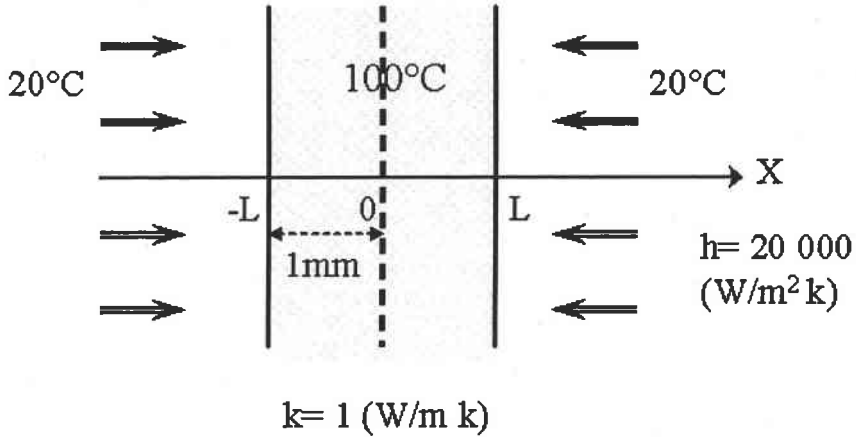


FIG. 2.5 – Transferts thermiques dans une plaque infinie refroidie par deux faces.

En conséquence, l'équation générale de chaleur à résoudre (Equation 2.15, p.39) devient pour ce problème :

$$\Delta\theta(x, t) = \frac{1}{a} \frac{\partial\theta(x, t)}{\partial t} \quad (2.29)$$

et encore :

$$\theta(x, t) = \Psi(x) * \Gamma(t) \quad (2.30)$$

L'équation spatiale uni directionnelle (Equation 2.22, p.41) devient pour un problème :

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \lambda^2\Psi(x) = 0 \quad (2.31)$$

Cette simple équation ordinaire différentielle admet la solution :

$$\Psi(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \quad (2.32)$$

Les deux constantes A et B doivent être déterminées par les conditions aux limites :  
\*  $x=0$

$$\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x} = 0 \quad (2.33)$$

d'où  $B=0$

\*  $x=L$

$$k \frac{d\Psi(x)}{dx} + h\Psi(x) = 0 \quad (2.34)$$

d'où

$$(\lambda L)tg(\lambda L) = \beta \tag{2.35}$$

avec  $\beta = \frac{h}{k}L$  (nombre de Biot). Les valeurs  $\lambda_n$  qui sont racines de l'équation 2.35 peuvent être obtenues aisément.

TAB. 2.1 – Valeurs de  $\lambda$

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$
1496.5	4491.5	7495.4	10500	13541.9	16586.4	19643.9	22713.1
$\lambda_9$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{14}$	$\lambda_{15}$	$\lambda_{16}$
25792.3	31974.8	35075.7	38181.6	41291.7	44405.4	47522.2	50641.6

La solution de l'équation de la chaleur obtenue par une combinaison linéaire (Equation 2.24, p.41) devient donc :

$$\theta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp(-a\lambda_n^2 t) \cos(\lambda_n x) \tag{2.36}$$

A partir de condition initiale :

$$\theta(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n x) = 1 \tag{2.37}$$

L'utilisation des propriétés d'orthogonalité des fonctions propres permet d'obtenir la valeur  $C_n$  (voir Equation 2.26 , p.41) :

$$C_n = \frac{\int \cos(\lambda_n x) dx}{\int \cos(\lambda_m x) \cos(\lambda_n x) dx} \tag{2.38}$$

TAB. 2.2 – Valeurs de  $C_n$

$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$
1.269	-0.414	0.239	-0.161	0.118	-0.09	0.07	-0.056
$C_9$	$C_{10}$	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{14}$	$C_{15}$	$C_{16}$
0.046	0.032	-0.027	0.024	-0.021	0.018	-0.016	0.014

L'expression de la température réduite (Equation 2.29, p.42) devient donc :

$$\frac{T(x, t) - 20}{100 - 20} = \sum_{n=1}^{n=16} C_n \cos(\lambda_n x) \exp(-a\lambda_n^2 t) \tag{2.39}$$

La Figure 2.6 montre le résultat du calcul de la variation de la température en fonction du temps sur la surface extérieure ( $x=L$ ) et au centre de la plaque ( $x=0$ ).

D'après le résultat du calcul, la surface extérieure a subi un changement de température brutal ( $< 1$  seconde) et atteint la température finale ( $20^{\circ}\text{C}$ ) au bout de 4 secondes. Pour un temps très court ( $< 1$  seconde), il est nécessaire d'avoir des termes plus nombreux. Pour cette raison, nous avons utilisé la méthode numérique. Les résultats du calcul sont présentés dans les deux figures suivantes (Figure 2.7, p.45, Figure 2.8, p.46 et Figure 2.9, p.47). On constate une petite élévation de température dans la zone transitoire de la paroi en contact avec le fluide.

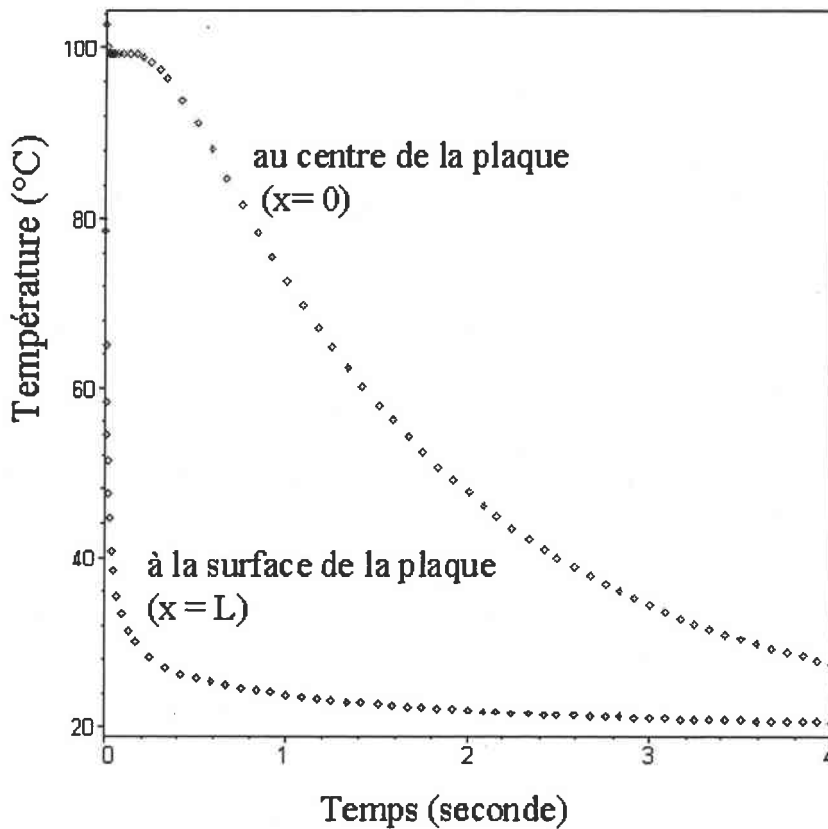


FIG. 2.6 – Variation de la température en fonction du temps sur la plaque infinie soumise à un choc thermique  $100^{\circ}\text{C} \rightarrow 20^{\circ}\text{C}$

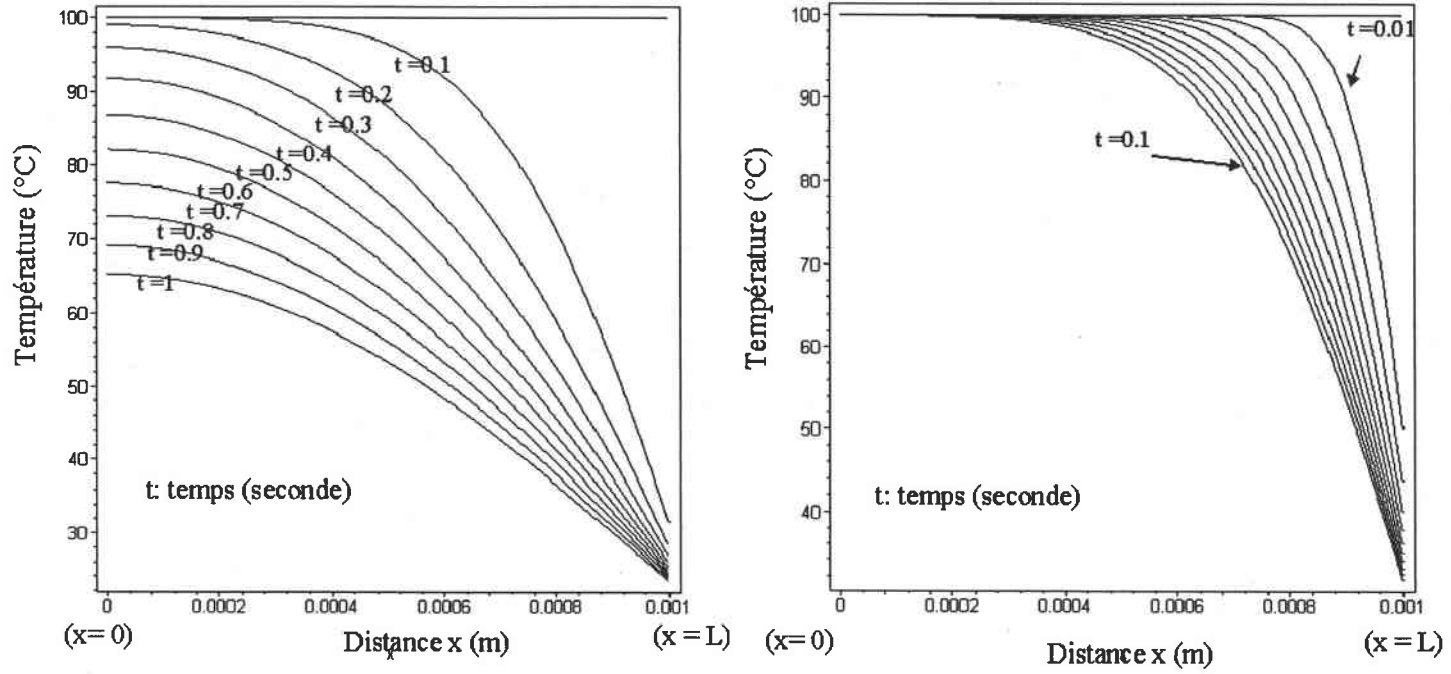


FIG. 2.7 – Variation de la température en fonction du temps ( $< 1$  seconde à gauche,  $< 0.1$  seconde à droite) sur la surface extérieure ( $x=L$ ) et au centre de la plaque ( $x=0$ ).



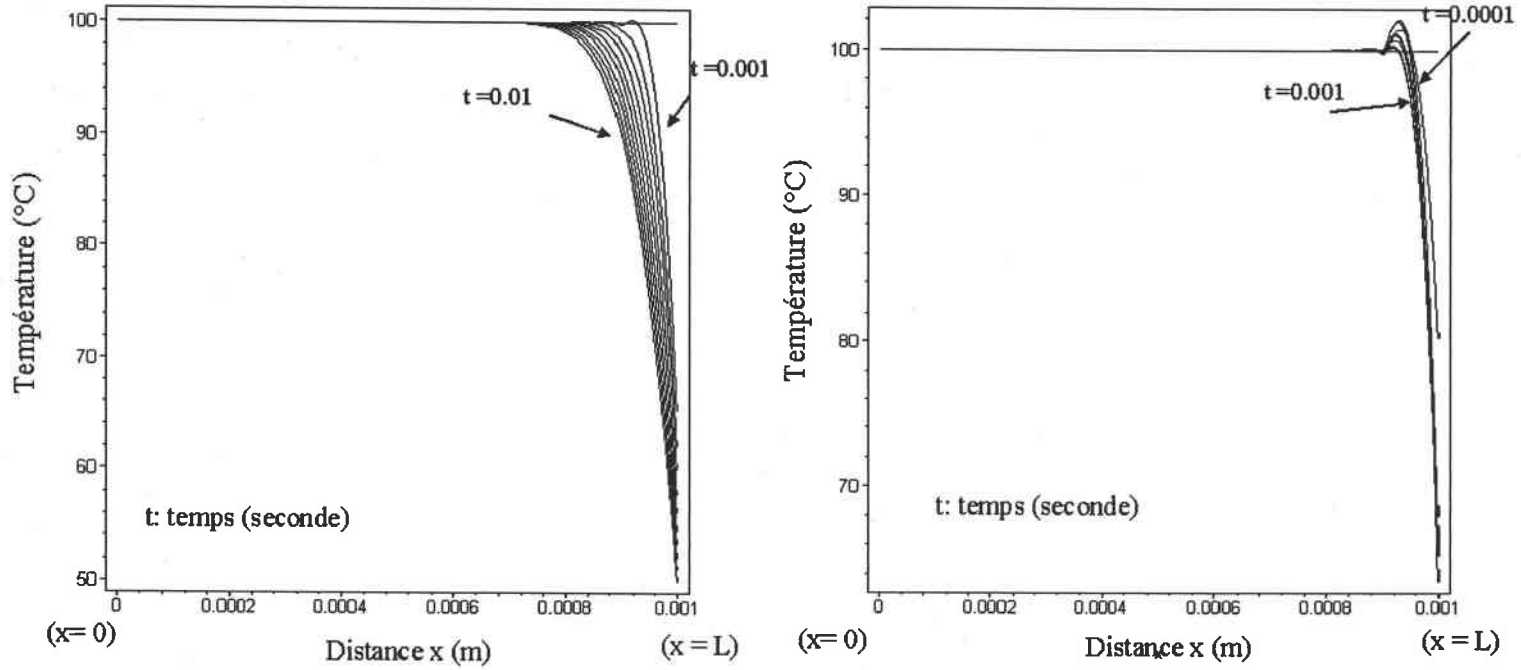


FIG. 2.8 – Variation de la température en fonction du temps ( $< 0.01$  seconde à gauche,  $< 0.0001$  seconde à droite) sur la surface extérieure ( $x=L$ ) et au centre de la plaque ( $x=0$ ).

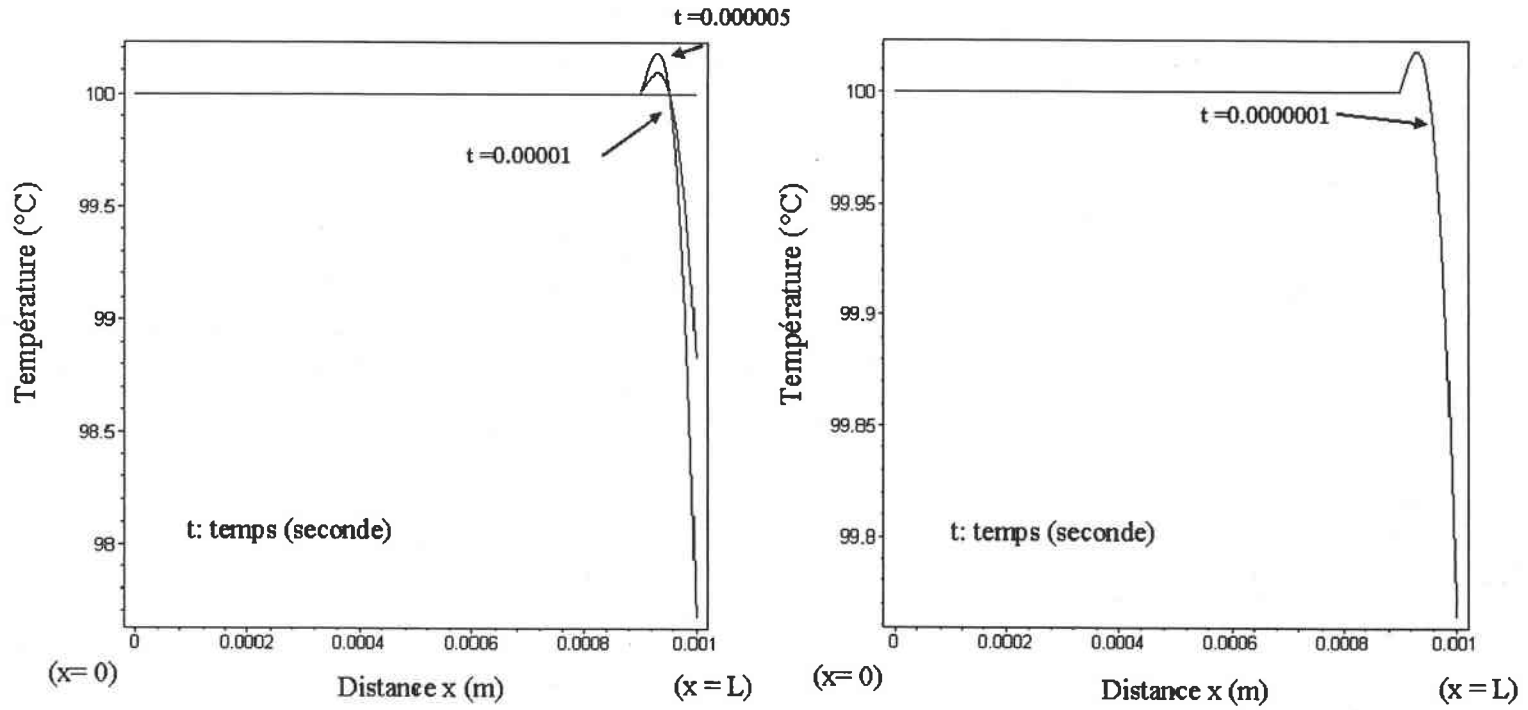


FIG. 2.9 – Variation de la température en fonction du temps ( $< 0.00001$  seconde à gauche,  $t=1 \mu$ seconde à droite) sur la surface extérieure ( $x=L$ ) et au centre de la plaque ( $x=0$ ).

## 2.3 Problématique

### 2.3.1 Choc thermique

De nombreux travaux concernant la résistance du matériau soumis à un choc thermique sont constamment proposés dans la littérature scientifique. Dans la plupart des travaux, la théorie de Kingery est utilisée. Dans ce cas, la résistance du matériau soumis à un choc thermique est déterminée par l'écart de température que le matériau peut supporter sans endommagement ni rupture brutale.

Dans l'approche décrite ci-dessus, on ne tient pas compte de l'augmentation de la contrainte critique du matériau en fonction du temps de la rupture que nous avons déjà mentionné dans la section 1.2.3 (p.22) et la section 1.2.4 (p.23). En considérant la vitesse du chargement thermique, il est donc relativement rare de prendre en compte la relation entre la vitesse du chargement thermique équivalent à la sévérité du choc et la caractéristique du matériau sous chargement dynamique. Cela provient de l'absence de lien entre le domaine de la mécanique de rupture en dynamique et le domaine thermique. En effet, il est fréquent dans la littérature que la réalisation de l'essai de flexion 3 ou 4 points soit utilisée pour obtenir la contrainte maximale que le matériau peut supporter quand il est soumis à un choc thermique en raison de la similitude de la distribution des contraintes.

Pour cette approche paradoxale décrite ci-dessus, nous avons appliqué le chargement dynamique pour obtenir la résistance du matériau soumis à un choc thermique sévère.

Dans la partie expérimentale qui sera présentée dans le chapitre suivant, la résistance mécanique du matériau cristal obtenue par chargement dynamique sera comparée avec la contrainte maximale sous le chargement statique. Ensuite, nous choisirons la contrainte maximale sous le chargement dynamique pour comparer avec la contrainte thermique due à un choc thermique que nous obtenons par la méthode des éléments finis à l'aide du code CASTEM2000 et par la méthode analytique.

### 2.3.2 Onde de choc thermique

Les ondes de contrainte dues à un choc thermique dans le matériau ont été calculées par H. Cho et G.A. Kardomateas à l'aide d'une méthode analytique [2]. Ils ont résolu l'équation d'équilibre qui contient à la fois le champ thermique et l'effet d'inertie.

L'expression de l'équation d'équilibre dans le matériau s'écrit avec des coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r(r, \theta, z, t)}{\partial t^2} \quad (2.40)$$

Les expressions des déformations en terme de déplacement sont :

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial U(r, t)}{\partial r}, \epsilon_{\theta\theta} = \frac{U(r, t)}{r}, \epsilon_{zz} = f(t) \quad (2.41)$$

avec  $\gamma_{\theta z} = \gamma_{rz} = \gamma_{r\theta} = 0$ .

En introduisant l'expression de la loi de Hooke (Equation 2.2, p.31) et l'expression des déformations (Equation 2.41) dans l'équation d'équilibre (Equation 2.40), on obtient la nouvelle équation suivante :

$$c_{11} \left( \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r, t)}{\partial r} \right) - \frac{c_{22}}{r^2} U(r, t) \quad (2.42a)$$

$$= q1 \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + q2 \frac{T(r, t)}{r} + (c_{23} - c_{13}) \frac{f(t)}{r} + \rho \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial t^2} \quad (2.42b)$$

d'où  $q1$  et  $q2$  sont des constantes :

$$q1 = c_{11}\alpha_r + c_{12}\alpha_\theta + c_{13}\alpha_z$$

$$q2 = (c_{11} - c_{12})\alpha_r + (c_{12} - c_{22})\alpha_\theta + (c_{13} - c_{23})\alpha_z.$$

- «  $r, \theta, z$  » représentent respectivement la distance radiale, l'angle et l'axe
- «  $t$  » est le temps
- «  $\rho$  » est la masse volumique
- «  $c_{ij}$  » sont les constantes élastiques.

La solution de l'équation d'équilibre dans le matériau a été calculée en deux temps :

- 1. le déplacement de thermo-élasticité pour la partie quasi-statique ( la partie 1 et la partie 2 ),
- 2. la partie dynamique ( la partie 1 et la partie 3 ).

Pour la partie quasi statique, le déplacement a été trouvé précédemment par Kardomateas [18]. Il a adopté la transformation de Hankel et la transformation de Laplace pour résoudre l'équation différentielle non homogène de la partie dynamique.

### **Exemple :**

M. Cho et G.A. Kardomateas ont trouvé la valeur des ondes de choc thermique dans le cylindre creux orthotrope (verre/epoxy).

La dimension de ce cylindre est de 40mm de diamètre et de 20mm d'épaisseur. Une température de 300°C est appliquée soudainement à l'intérieur du cylindre. La température extérieure est celle de l'air ambiant. Le transfert thermique est réalisé par convection naturelle. En conditions initiales, le déplacement est nul et il n'y a pas de forces appliquées sur les surfaces extérieure ni l'intérieure du cylindre.

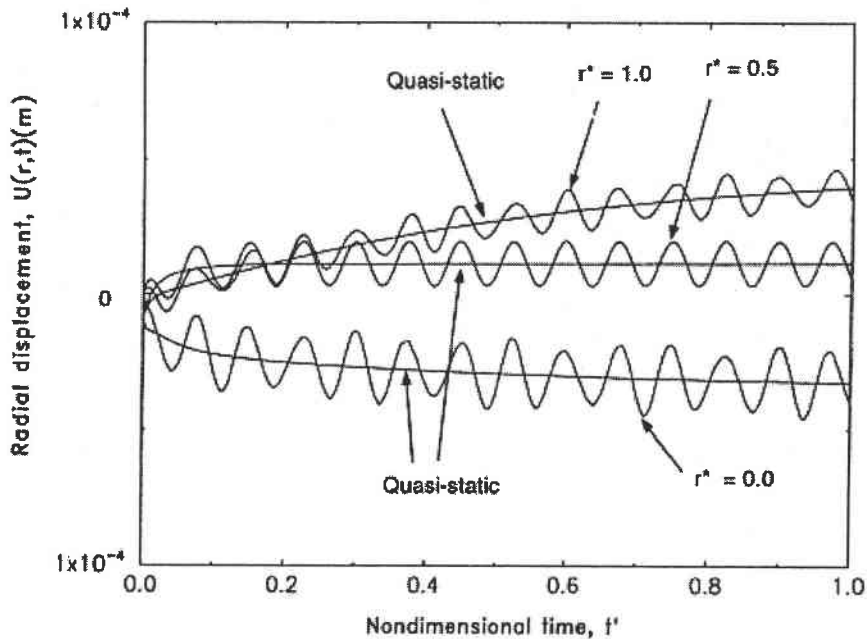


FIG. 2.10 – Onde de déplacement radiale à travers l'épaisseur du cylindre [18]

La Figure 2.10 présente les résultats de leur calcul pour l'onde de déplacement radiale dans ce cylindre. Les coordonnées non dimensionnelles  $r=0, 0.5$  et  $1$  représentent respectivement la position à l'intérieur, au centre et à l'extérieur du cylindre.

Il est important de remarquer que la compression est appliquée à l'intérieur et la traction à l'extérieur du cylindre. Un deuxième point important est que les contraintes d'un choc thermique ont un caractère dynamique : elles arrivent rapidement à l'état d'équilibre, tandis que les composants dynamiques de l'effet d'inertie oscillent avec une faible amplitude autour de la valeur d'équilibre, pendant un intervalle de temps assez long.

## 2.4 Conclusion

Dans le chapitre 2, nous avons présenté les notions suivantes : le transfert thermique, les contraintes dues à un changement de température et le choc thermique.

Les contraintes dues à un gradient de température correspondent à un choc thermique. Ceci est présenté à partir du nombre de Biot. La théorie développée par Kingery permet de simplifier le problème du choc thermique. Malgré son manque de précision, l'utilisation de cette théorie est très fréquente dans la littérature. D'après la théorie de Kingery, la contrainte réelle due à un choc thermique est exprimée à partir d'un paramètre  $\Psi$  qui représente la sévérité du choc. La valeur de  $\Psi$  est également exprimée par le nombre de Biot : si la valeur du nombre de Biot est plus grande que 20, la valeur de  $\Psi$  devient 1. Ceci correspond à un cas idéal où le changement de température se réalise instantanément.

La variation de la température en fonction du temps a été calculée à l'aide de la méthode analytique pour une plaque infiniment longue. Pour un temps très court ( $< 1$  seconde), le recours à la méthode numérique est nécessaire pour résoudre le problème.

En tenant compte de l'augmentation de la résistance mécanique du matériau et de la caractéristique dynamique de la contrainte due à un choc thermique, la résistance du matériau soumis à un choc thermique doit être comparée à la résistance mécanique sous chargement dynamique.

## Chapitre 3

# Critère de rupture du verre

Le fait que les mécanismes de rupture des matériaux fragiles s'amorcent à partir de défaut répartis de manière aléatoire, entraîne la dispersion du résultats des contraintes critiques.

Cette contrainte critique ne serait donc qu'une grandeur indicative : elle ne permet pas de donner une valeur de la résistance à la rupture exacte et fiable. Pour cela, une analyse statistique des résultats des valeurs expérimentaux est nécessaire pour estimer correctement la résistance à la rupture des matériaux.

Il existe plusieurs méthodes statistiques pour l'estimation de la résistance du matériau qui ont un comportement aléatoire : divers lois de probabilité et l'outil statistique. Dans cette section, nous présentons la distribution la plus répandue, «la loi Normale» et «la loi de Weibull», la plus utilisée pour analyser la caractéristique de la résistance du matériau verre. Pourtant, il faut garder toujours l'esprit que le calcul des probabilités permet de dominer le hasard en précisant numériquement les conditions dans lesquelles tel événement devient très peu probable ou , au contraire, devient presque certain, mais le calcul des probabilités n'explique pas, bien entend, pourquoi cet événement est en partie imprévisible.

## 3.1 Critère probabiliste de rupture du verre

### 3.1.1 Loi Normale

La distribution Normale a été développée par De Moivre en 1733 à partir de la distribution Binomiale. En 1783, Laplace utilise cette courbe pour décrire la distribution d'erreur. Opportunément, Gauss utilise la courbe normale pour analyser les données astronomiques en 1809. La courbe normale est souvent appelée la «distribution de Gauss». C'est une courbe symétrique qui est souvent utilisée pour analyser les données de tous les domaines scientifiques et sociaux : car,

En effet :

- 1. la «Normalité» se produit naturellement dans beaucoup de domaines physiques, biologiques et sociaux,
- 2. la «Normalité» est importante pour la déduction statistique.

La distribution Normale est caractérisée par deux paramètres : la moyenne « $\mu$ » et l'écart type « $\sigma$ ». A partir d'une densité de probabilité  $f(x)$ , l'expression de la distribution Normale est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.1)$$

Cette densité de probabilité  $f(x)$  est telle que :

$$dF(X \in [x, x + dx]) = f(x)dx \quad (3.2a)$$

$$F(x^*) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x^*} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (3.2b)$$

Nous avons l'expression de la valeur de la moyenne et de la variance pour une densité de probabilité  $f(x)$  :

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} X f(x) dX \quad (3.3)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dX \quad (3.4)$$

La Figure 3.1 représente la distribution de la loi Normale et la probabilité  $F(x)$ . En effectuant le changement de variable :

$$T = \frac{(x-\mu)}{\sigma} \quad (3.5)$$

On obtient une nouvelle variable aléatoire  $T$  dont la densité de probabilité est donnée par :



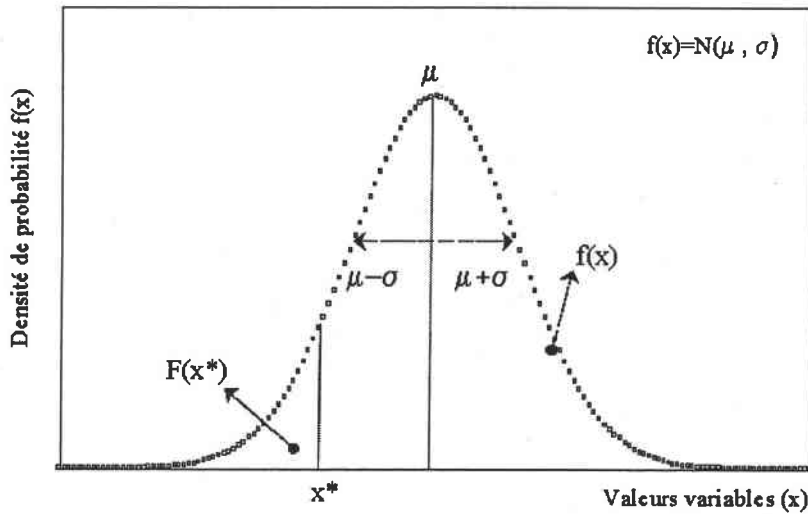


FIG. 3.1 – Présentation de la distribution de la loi de Normale

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (3.6)$$

On dit que cette densité de probabilité définit la loi Normale centrée réduite pour laquelle la moyenne  $\mu = 0$  et l'écart type  $\sigma = 1$ .

### 3.1.2 Loi de Weibull [40]

La loi de Weibull est utilisée sous certaines hypothèses :

- la contrainte provoquant la rupture de l'échantillon est supposée uniforme,
- l'échantillon est assimilé à un ensemble de volume et sa rupture est amorcée à partir du lien contenant le défaut le plus important et le mieux orienté par rapport à la sollicitation,
- les défauts présents sur l'échantillon sont distribués de manière aléatoire et supposés indépendants. Pris individuellement, ils entraînent une contrainte de rupture  $\sigma_r$ .

La densité de la probabilité de Weibull  $f(x)$  à trois paramètres  $(\eta, \beta, \gamma)$  s'exprime par :

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x - \gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x - \gamma}{\eta}\right)^\beta\right] \quad (3.7)$$

où  $f(x) \geq 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\eta > 0$ ,  $\gamma \geq 0$ , et  $-\infty < \gamma < \infty$ . Trois paramètres  $\eta, \beta, \gamma$  déterminent la forme de la distribution de la probabilité (Figure 3.2, p.56)

La distribution cumulative de la loi de Weibull est :

$$P_r = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right] \quad (3.8a)$$

$$= 1 - P_s \quad (3.8b)$$

où  $P_r$  est la probabilité de rupture,  $P_s$  est la probabilité de survie.

Si la paramètre  $\gamma$  qui détermine la position de la courbe est égale à zéro, la distribution de Weibull à trois paramètres donne la distribution de Weibull à deux paramètres.

A partir des deux expressions de la valeur moyenne (Equation 3.3) et la variance (Equation 3.4), la valeur moyenne pour la distribution de Weibull est :

$$\mu = \beta \Gamma \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \quad (3.9)$$

et la valeur de la variance :

$$\sigma^2 = \beta^2 \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{2}{m} \right) - \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \right]^2 \right] \quad (3.10)$$

Une des méthodes pour trouver la valeur des paramètres est d'utilisation de la régression linéaire. A partir de la technique de la régression linéaire, l'équation 3.8 peut être transformée comme ceci :

$$\text{Ln} \left[ \text{Ln} \left( \frac{1}{1 - P_r} \right) \right] = \beta \text{Ln}(x) + \beta \text{Ln}(1/\beta) \quad (3.11)$$

avec  $P_r = \frac{i}{m+1}$  qui est la statistique de l'ordre :  $m$  est le nombre d'essai,  $i$  est l'ordre de l'essai. En mettant la partie à gauche sur l'ordre et la partie à droite sur l'abscisse, nous avons la valeur de  $\beta$  qui représente la tangente de la courbe linéaire (Figure 3.2, p.56).

Dans l'analyse des résultats d'essais expérimentaux, la paramètre  $\beta$  signifie la rapidité avec laquelle la résistance chute lorsqu'on s'approche de  $\eta$  : Plus  $\beta$  est petit et que la variabilité de la résistance est grande : la brique, le ciment ou le verre ont la valeur autour de  $\beta=5$ , [5] [21], les céramiques techniques ont des valeurs de  $\beta$  de l'ordre de 10 ou 20 [23]. Pour  $\beta=100$ , un matériau peut être considéré comme ayant une résistance à la rupture unique et bien définie. La dispersion des résultats est d'autant plus grande que le module de Weibull est faible.

La Figure 3.3 montre les résultats d'essai de la flexion pour les verres avec deux type de traitement de surface «dry et polissage». Les auteurs ont montré l'augmentation de la résistance du matériau verre après un polissage ( $\mu = 95\text{MPa}$ ) par rapport à un autre traitement ( $\mu = 67\text{MPa}$ ). Pourtant ce verre présente la dispersion du résultat

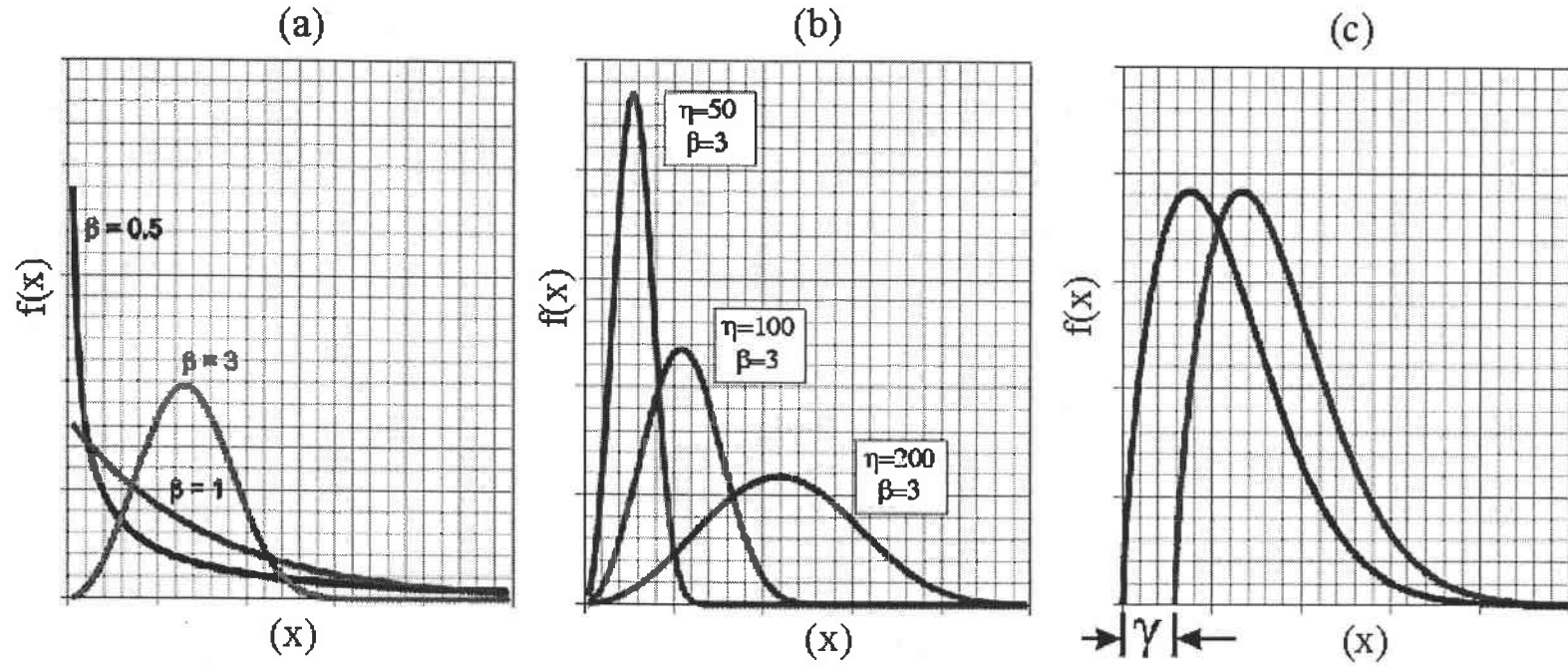


FIG. 3.2 – Présentation de l'effet du paramètre  $\beta$  (a),  $\eta$  (b), et  $\gamma$  (c) sur la densité de probabilité de Weibull  $f(x)$

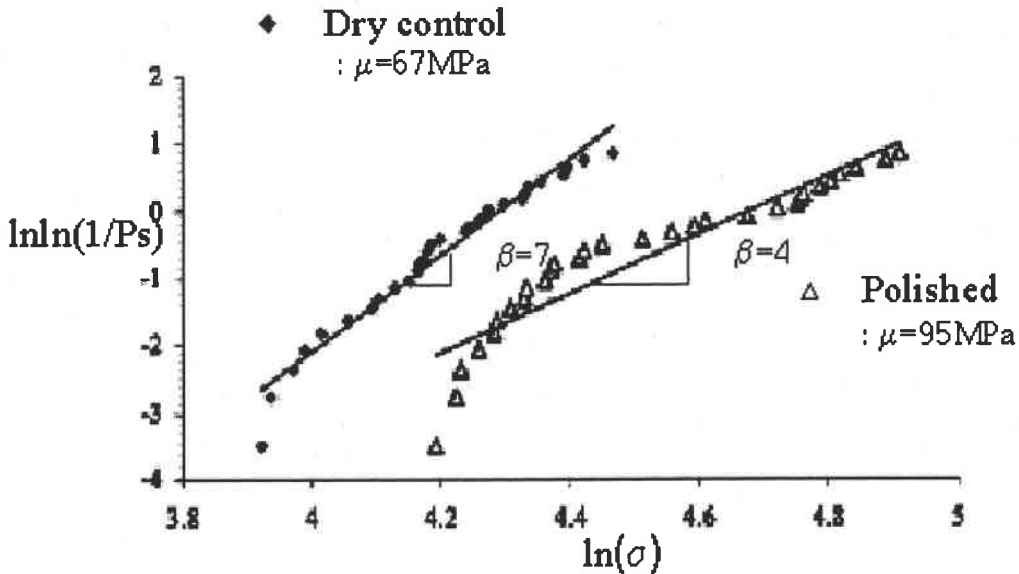


FIG. 3.3 – Présentation de la comparaison du paramètre  $\beta$  entre les verres avec un traitement de la surface différent [39]

plus importante ( $\beta=4$ ) par rapport au verre ( $\beta=7$ ).

L'utilisation de la loi de Weibull pour estimer la caractéristique de la résistance des matériaux fragiles soumis à un choc thermique a été mentionnée par White [24]. Selon le critère conventionnel de la rupture par le choc thermique, la rupture apparaît quand la contrainte induite atteint son maximum à n'importe quel point dans le matériau. Tandis que, la loi de Weibull indique que la probabilité de rupture atteint un maximum non pas à la contrainte maximale mais quand le niveau des contraintes générales est élevé.

## 3.2 Conclusion

Dans le chapitre 3, nous avons abordé l'approche probabiliste.

La résistance mécanique est très aléatoire pour le matériau verre comme pour d'autres matériaux fragiles. Par conséquent, les résultats d'essais mécaniques sont dispersés. Pour cette raison, l'approche probabiliste est nécessaire pour évaluer la résistance du matériau. Cette grande dispersion de la résistance provient de sa sensibilité aux défauts.

La dispersion des résistances peut être analysée à l'aide de la loi la plus répandue, la loi Normale ou de la loi de Weibull. La loi Normale peut être simplifiée, ce qui donne une loi Normale centrée réduite pour laquelle la valeur moyenne et la valeur de l'écart-

type sont 0 et 1 respectivement. La loi de Weibull est une loi très flexible, s'exprimant avec trois paramètres. Sa forme cumulative à deux paramètres est souvent utilisée pour estimer la sensibilité des défauts dans le matériau fragile notamment le verre. La valeur du module de Weibull présente la dispersion de la résistance du matériau. En général, la valeur du module de Weibull avoisine 5 pour le matériau verre.

# Chapitre 4

## Conclusion I

La modélisation de la résistance d'un matériau fragile comme le verre soumis à un choc thermique fait appel à 3 domaines : mécanique, thermique et statistique.

Dans le domaine mécanique, nous avons abordé la mécanique de la rupture : la théorie de Griffith, l'intensité des contraintes, l'augmentation de la résistance du matériau verre sous le chargement dynamique. Le chargement dynamique a été traité par une théorie d'endommagement pour laquelle la rupture n'est pas instantanée mais nécessite le temps d'incubation des fissures à partir des micro-défauts dans le matériau. Egalement, nous avons montré que la résistance du matériau verre augmente sous le chargement dynamique.

Il est nécessaire de connaître le champ thermique avant de trouver la contrainte appliquée par le changement de température. Pour cette raison, nous avons fait un rappel de la théorie du transfert thermique. La sévérité du choc thermique est liée au nombre de Biot.

Dans le domaine thermique, nous nous sommes basés sur la méthode analytique pour trouver le champ thermique du matériau. Ceci est exprimé à partir d'un paramètre «Nombre de Biot». Deux méthodes analytiques pour trouver les contraintes générées par le choc thermique ont été présentées. D'après la théorie de Kingery, la contrainte générée par le choc est équivalente à la contrainte idéale si le nombre de Biot est plus grand que la valeur 20. D'après la résolution de l'équation linéaire thermo-dynamique par Cho et Kardomateas, les contraintes générées par le choc thermique présentent un caractère dynamique ayant une forme d'onde qui oscille autour d'une valeur statique.

D'après notre étude bibliographique, nous considérons le chargement dû à un choc thermique comme un chargement dynamique sous lequel la résistance du matériau verre augmente.

En tenant compte d'une grande dispersion des résistances mécaniques, nous estimons la résistance du matériau cristal soumis à un choc thermique à partir de l'approche probabiliste.

Deuxième partie  
Travaux expérimentaux

# Chapitre 5

## Eprouvette de cristal

Dans cette partie, nous décrivons les caractéristiques mécaniques du matériau testé (cristal), les dispositifs expérimentaux utilisés lors des essais statiques et dynamiques pour trouver la contrainte critique du cristal, et l'analyse des résultats. La résistance mécanique du cristal a été examinée en deux temps, sous chargement statique et dynamique à partir d'échantillons du type de «disque Brésilien modifié» : c'est un échantillon en forme de disque perforé au centre (Figure 5.1). Dans un premier temps, nous évoquerons la méthode expérimentale pour obtenir la contrainte maximale du cristal en statique. Le phénomène de rupture a été analysé et observé par microscopie optique et par microscopie électronique à balayage. Nous avons choisi les «Barres d'Hopkinson» pour obtenir la résistance mécanique de rupture en dynamique du cristal. Ce travail sera présenté dans la deuxième partie. Ensuite, les résistances en statique et en dynamique du cristal sont comparées et étudiées. En tenant compte des résultats très dispersifs et aléatoires, la résistance du cristal en statique et en dynamique sera analysée à partir de la loi de probabilité (Loi de Weibull).



## 5.1 Eprouvette de cristal

L'éprouvette dit «disque Brésilien modifié» a été utilisée pour déterminer la résistance à la rupture en statique et en dynamique du cristal. Les échantillons ont une forme d'anneau dont le diamètre est de 20 mm, celui du trou étant de 2 mm et l'épaisseur 6 mm. La figure 5.1 présente la géométrie du disque.

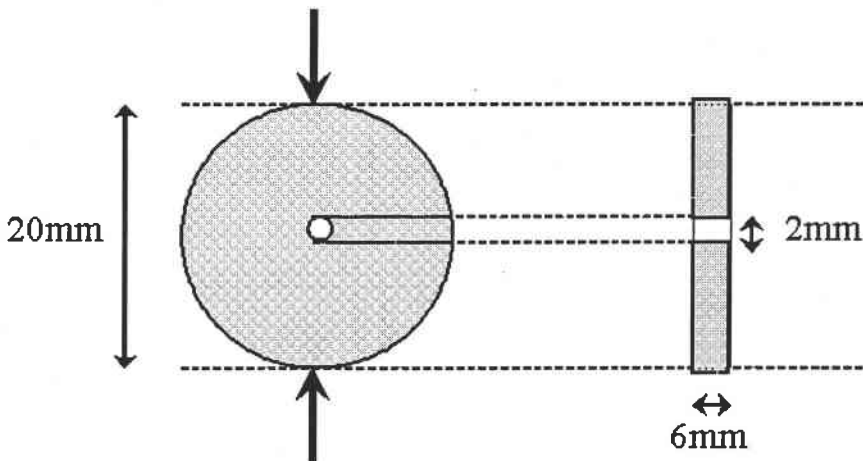


FIG. 5.1 – Géométrie du disque : de face (à gauche), de profil (à droite)

La composition chimique de ce cristal est indiquée dans le tableau 5.1 :

TAB. 5.1 – Composition chimique du cristal

oxyde	$SiO_2$	$PbO$	$Na_2O$	$K_2O$
teneur (%)	58	28.85	5.43	6.73

## 5.2 Relation d'additivité

### 5.2.1 Matériau verre et cristal

Une définition générale des verres est celle-ci [1] : «solide non cristallin obtenu par figeage d'un liquide surfondu» En d'autres termes, la structure d'un verre contrairement à bon nombre de minéraux n'est pas constituée d'un empilement géométrique ordonné d'atomes. Lorsqu'on chauffe un solide à une certaine température (appelée «température de fusion  $T_f$ »), il commence à fondre et donc à se liquéfier. Si on effectue le chemin inverse, le liquide redevient solide en dessous de la température «  $T_f$  ». Dans certaines

conditions, on observe que le liquide reste liquide au dessous de «  $T_f$  ». Ce phénomène s'appelle « surfusion ». Ce liquide surfondu est dans un état instable et peut cristalliser brusquement si on introduit une impureté, si on lui applique un choc...,etc.

TAB. 5.2 – Composition de quelques verres industriels [25]

-	$SiO_2$	$B_2O_3$	$Al_2O_3$	$Na_2O$	$K_2O$	$CaO$	$MgO$	$PbO$
verre plat	72.5	-	1	1.5	13	0.3	9.3	3
verre à bouteilles	73	-	1	15	-	0.3	10	-
pyrex	80.6	12.6	2.2	4.2	-	0.1	0.05	-
fibre de verre	54.6	8.0	14.8	0.6	-	17.4	4.5	-
cristal	55.5	-	-	-	11	-	-	33
verre de lampes	73	-	1	16	1	5	4	-

D'après ce qui précède on conçoit volontiers que la surfusion est un phénomène fugace, transitoire. Pourtant dans certains cas on constate que des corps voient leur viscosité (ils épaississent) augmenter lentement avec le refroidissement qu'on leur impose et qu'ils finissent par figer sans se cristalliser. C'est ce qu'on appelle « l'état vitreux ».

On pourrait imaginer tout l'art et la technologie qui interviendra dans la maîtrise de ce phénomène : nature des produits, compositions des mélanges, conditions de refroidissement..., etc.

Une composition chimique principale du matériau verre est la silice. Elle fond vers  $1800^\circ C$  si on ajoute de la chaux ou plus généralement des oxydes d'alcalins-terreux, on obtient ainsi le mélange ternaire à la base des verres usuels : les silico-sodo-calciques. Dans ce mélange de base, on ajoute divers oxydes afin d'obtenir des propriétés particulières. Par exemple, l'ajout d'oxyde de plomb augmente l'indice de réfraction et on a du « cristal ». L'ajout d'anhydride borique diminue le coefficient de dilatation et conduit au pyrex...,etc.

Selon les caractéristiques de la composition chimique, le verre peut avoir une grande diversité en fonction de son utilisation. Le Tableau 5.2 présente divers type de verre selon différente composition chimique.

## 5.2.2 Relation d'additivité

Le caractère du verre est donc lié à la composition chimique et aux propriétés physiques et mécaniques des composants chimiques. Il est donc possible et très fréquent de calculer et de prévoir les caractéristiques mécaniques et physiques d'un verre à partir de sa composition chimique. En conséquence, nous pouvons obtenir ces caractéristiques théoriques du cristal. Nous présentons d'abord les propriétés mécaniques de composants chimiques du cristal utilisé pour l'échantillon dans le Tableau 5.3.

TAB. 5.3 – Propriétés mécaniques de la composition chimique du cristal

-	<i>SiO<sub>2</sub></i>	<i>PbO</i>	<i>Na<sub>2</sub>O</i>	<i>K<sub>2</sub>O</i>
E(10 <sup>8</sup> Pa)	7	4.6	6.1	4
$\nu^*(1/100)$	0.1533	0.267	0.431	0.3969
$\alpha^*(10^{-8}/^{\circ}\text{C})$	2.67	13	33.3	28.32

Il existe une formule de type «Relation d'additivité» [25] qui permet de calculer les propriétés mécanique de ce cristal à partir des propriétés mécaniques de chaque élément de sa composition chimique.

La relation d'additivité est exprimée comme ci-dessous :

$$X = \sum C_i X_i \quad (5.1)$$

- $C_i$  : coefficients qui déterminent la proportion de chaque composant
- $X_i$  : facteurs qui représentent la contribution à la propriété «  $X$  » d'un composant

Les résultats des calculs sont présentés dans le Tableau 5.4 où E est le module de Young,  $\nu$  coefficient de Poisson,  $\alpha$  coefficient de dilatation thermique.

TAB. 5.4 – Propriétés mécaniques du cristal

propriétés mécaniques	E (GPa)	$\nu$	$\alpha$ (*10 <sup>-6</sup> /°C)
valeurs	59	0.218	9.01

## 5.3 Conclusion

Dans le chapitre 4, nous avons présenté un échantillon en cristal utilisé qui contient 58% de *SiO<sub>2</sub>*, 28.85% de *PbO*, 5.43% de *Na<sub>2</sub>O* et 6.73% de *K<sub>2</sub>O* pour déterminer la résistance mécanique du cristal. L'échantillon du type «disque Brésilien modifié» a été choisi pour déterminer la résistance sous chargement statique et dynamique. Nous avons également présenté les caractéristiques du matériau verre et du cristal comme un solide non cristallin qui contient divers composants chimiques contribuant aux propriétés physiques et mécaniques du matériau. C'est ce qu'on appelle la «Relation d'additivité». C'est une formule qui permet de prévoir théoriquement les propriétés physiques et mécaniques. Le cristal est un matériau verre dans lequel on ajoute de l'oxyde de plomb pour augmenter l'indice de réfraction. Dans notre cas, nous diminuerons théoriquement la teneur en oxyde de plomb dans le cristal. Ensuite, nous évaluerons la variation de la résistance mécanique du cristal soumis à un choc thermique en fonction de sa teneur en oxyde de plomb.

# Chapitre 6

## Essais quasi-statiques

### 6.1 Description du dispositif

Nous avons utilisé une machine de traction-compression conventionnelle de type INSTRON 4302 disponible au laboratoire pour réaliser des essais quasi-statiques de compression diamétrale sur les éprouvettes de cristal.

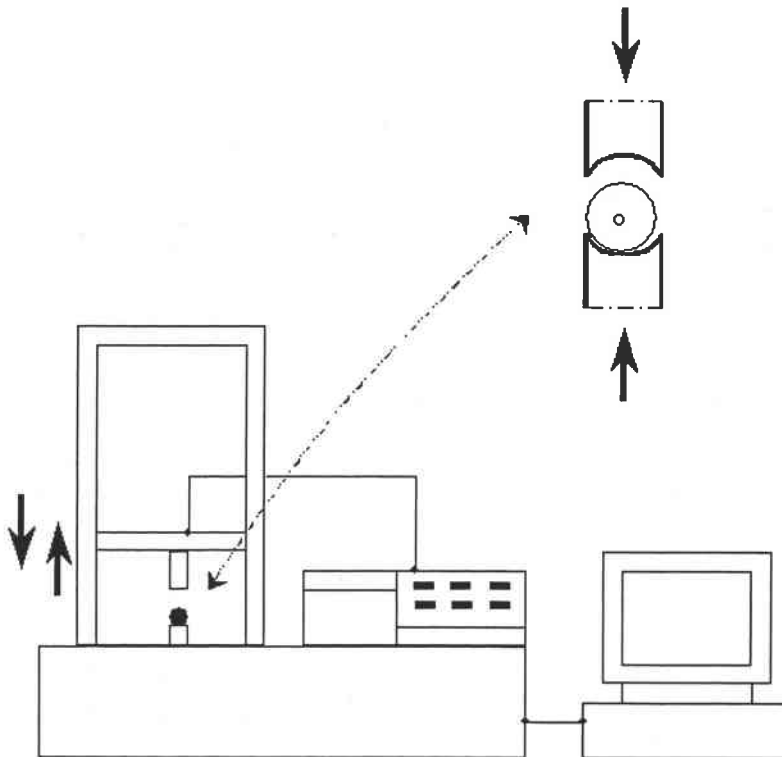


FIG. 6.1 – Dispositif d'essai quasi-statique.

Le principe d'essai est très simple et pratique. Un plateau qui se déplace verticale-

ment est guidé à partir d'un ordinateur de commande. Il existe les différentes capacités de chargement dans la gamme de 1kN, 10KN et différents vitesses du chargement.

Selon la nature de l'essai et du matériau, l'amplitude de chargement de la cellule et la vitesse du chargement sont déterminées. Dans notre cas, en tenant compte de la fragilité du matériau cristal, le chargement du cellule de 1 KN et la vitesse de chargement de 0.1 mm/min ont été appliqués. Les mesures de déplacement sont faites par un capteur qui est déjà installé dans la machine. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des jauges de déformation. Le pilotage des essais et l'acquisition des données expérimentales se font à travers une interface numérique **IEEE** par l'intermédiaire d'un ordinateur et d'un programme réalisé sous **LABVIEW**.

La Figure 6.1 présente l'ensemble du dispositif utilisé lors des essais quasi-statiques et l'agrandissement du montage d'essai de compression.

Une précaution à prendre pendant les essais mécaniques pour un matériau très fragile comme le verre ou le cristal est de prévoir la résistance minimale afin de prévenir l'éclatement d'échantillon.

## 6.2 Résultats

### 6.2.1 Phénomène de rupture du disque Brésilien perforé au centre

L'essai a été effectué sur 10 échantillons à température ambiante. Etant donné le caractère fragile du cristal, ce matériau présente un comportement linéaire élastique jusqu'à la rupture brutale de l'éprouvette. La Figure 6.2 montre un des résultats des courbes de « charge-déplacement » de l'essai de traction indirecte.

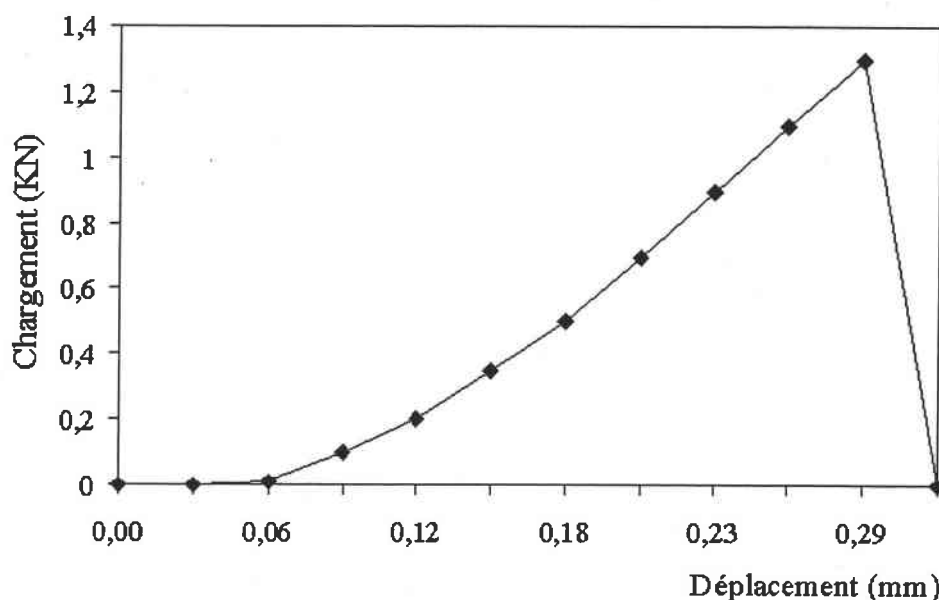


FIG. 6.2 – Courbe «charge-déplacement» obtenue sur un échantillon cristallin

A partir des résultats obtenus sur les chargeements maximal, nous avons calculé les contraintes à la rupture selon l'équation 1.11 (p.14). Elles sont regroupés et présentés en terme de paramètres statistiques, la moyenne et l'écart type, dans le Tableau 6.1.

TAB. 6.1 – Résultats expérimentaux des contraintes de rupture

Nombre d'essai	Moyenne (MPa)	Ecart type (MPa)
10	46.7 MPa	7.4 MPa

Nous avons constaté que soumise à une sollicitation statique, les éprouvettes se rompent systématiquement en plusieurs morceaux autour du diamètre de chargement.

Ce phénomène de rupture (illustré dans la Figure 6.3) s'explique par la concentration des contraintes provoquées par la présence d'un trou au centre de l'éprouvette. La

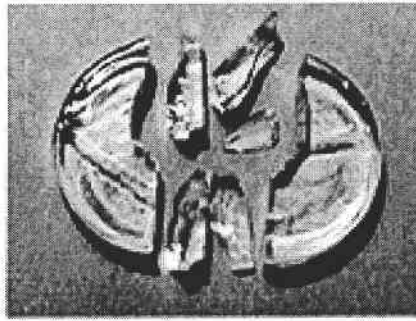


FIG. 6.3 – Phénomène de rupture en statique.

distribution des contraintes qui règne dans l'échantillon sera déterminée plus loin par la méthode des éléments finis.

### 6.2.2 Examen microscopique des surfaces de rupture

Dans le but de comprendre le processus de rupture dans l'essai du disque perforé, nous avons analysé la surface de rupture à l'aide d'un microscope électronique à balayage.

En localisant la zone miroir sur la surface de rupture, l'observation au microscope optique montre que la fissure démarre effectivement à partir d'un défaut situé au voisinage du trou (Figure 6.4, (a)). L'examen au microscope électronique à balayage a mis en évidence le point de rupture (Figure 6.4, (b)).

Dans le cas d'un essai sur disque Brésilien, le calcul théorique de la distribution des contraintes montre une traction uniforme dans le plan contenant les génératrices suivant lesquelles s'appliquent les efforts. Dans le cas d'une éprouvette annulaire, cette distribution est perturbée par la présence du trou.

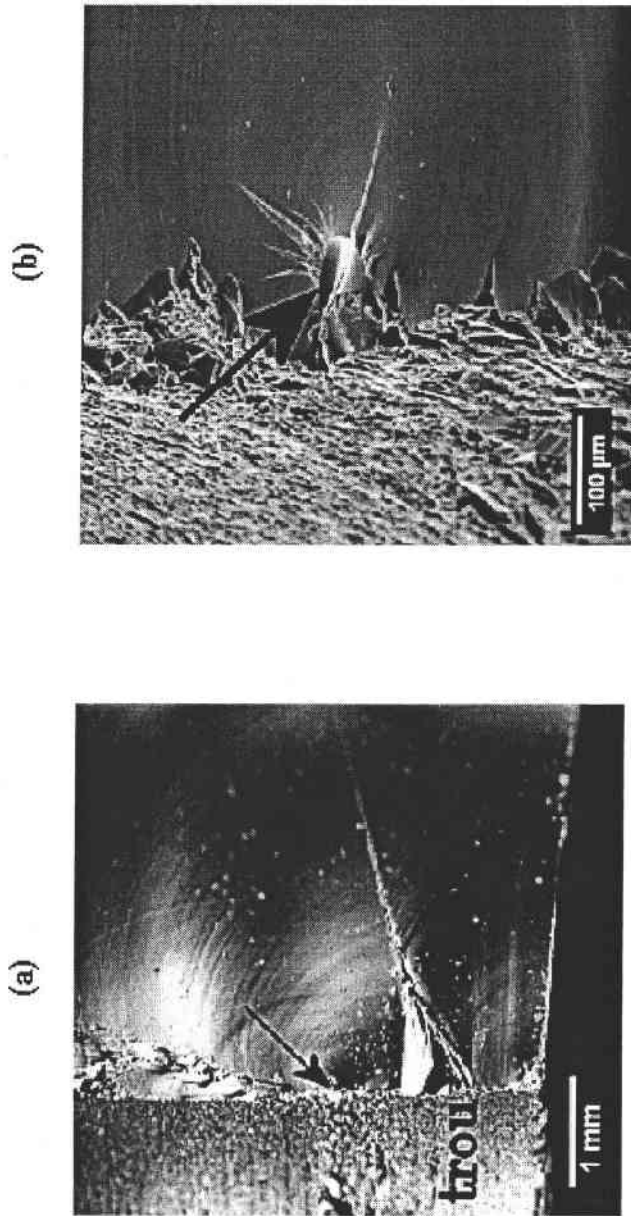


FIG. 6.4 – Localisation des zones d'amorçage des fissures (a) et agrandissement de cette zone (b)



### 6.2.3 Distribution des contraintes

Nous avons effectué la simulation de l'essai de traction indirecte à partir du « disque Brésilien modifié » en utilisant la méthode numériques des éléments finis «CAS-TEM2000».

En tenant compte de la géométrie de l'échantillon, un chargement en contraintes planes a été appliqué sur un quart d'échantillon pour déterminer le champ des contraintes dans l'échantillon. Les paramètres introduits pour la simulation sont identiques à ceux de l'essai. La Figure 6.5 présente le maillage utilisé pour la simulation.

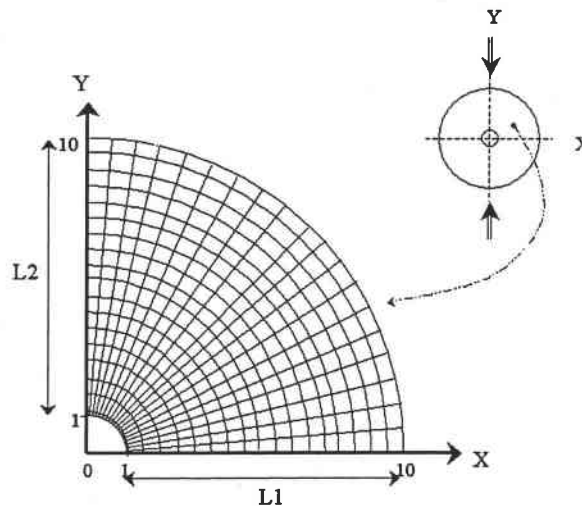


FIG. 6.5 – Représentation de la géométrie du disque Brésilien troué au centre et le maillage utilisé pour la simulation

La comparaison de la distribution des contraintes d'ouverture obtenues le long des ligaments L1 et L2 est présentée dans la Figure 6.6.

L'observation de la distribution des contraintes le long des ligaments L1 et L2 montre qu'au proche voisinage du centre de l'échantillon, la contrainte de traction présente un fort gradient ( $\sigma_{xx}$ , L2). Cette contrainte se répartit ensuite uniformément le long du diamètre de chargement. Quant à la contrainte de compression ( $\sigma_{yy}$ , L1), son évolution est quasi constante du centre jusqu'à la périphérie.

Les résultats de la simulation numérique indiquent une forte concentration des contraintes autour du centre. C'est ce qui provoque l'amorçage de rupture et un point vérifié par l'observation de la surface de rupture de l'échantillon par microscope (Figure 6.4, p.69).

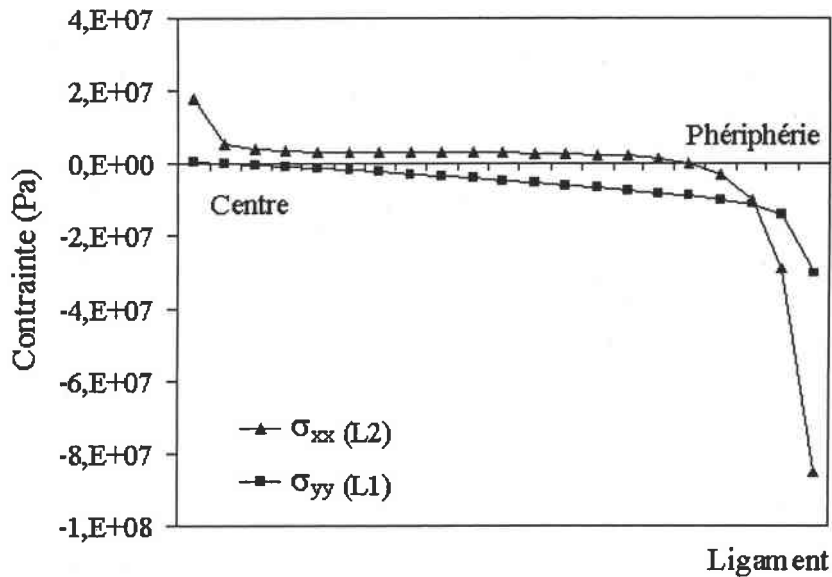


FIG. 6.6 – Distribution des contraintes le long du ligament

#### 6.2.4 Analyse des résultats (Loi de Weibull)

Etant donné le caractère fragile du cristal, la contrainte critique montre une grande dispersion dans les résultats. A cause de cette dispersion importante, les résultats expérimentaux sont analysés par méthode statistique : la loi de Weibull cumulative à deux paramètres (Equation 6.1)

$$P_r(\sigma) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (6.1)$$

A partir d'une résolution de la régression linéaire, les valeurs de deux paramètres  $\sigma_0$  et  $m$  sont déterminés et présentés dans la Figure 6.7.

Les résultats indiquent la valeur de la pente  $m = 5.8$  et de la contrainte de normalisation  $\sigma_0 = 48.9$  MPa pour le cristal.

Toutefois, la valeur du module de Weibull «  $m$  » et la contrainte de normalisation «  $\sigma_0$  » dépendent fortement de la forme de l'échantillon. Un travail récent montre une valeur de 7 pour le module de Weibull et de 100 MPa pour la contrainte de normalisation en effectuant les essais sur une bulle de verre du type sodocalcique [14].

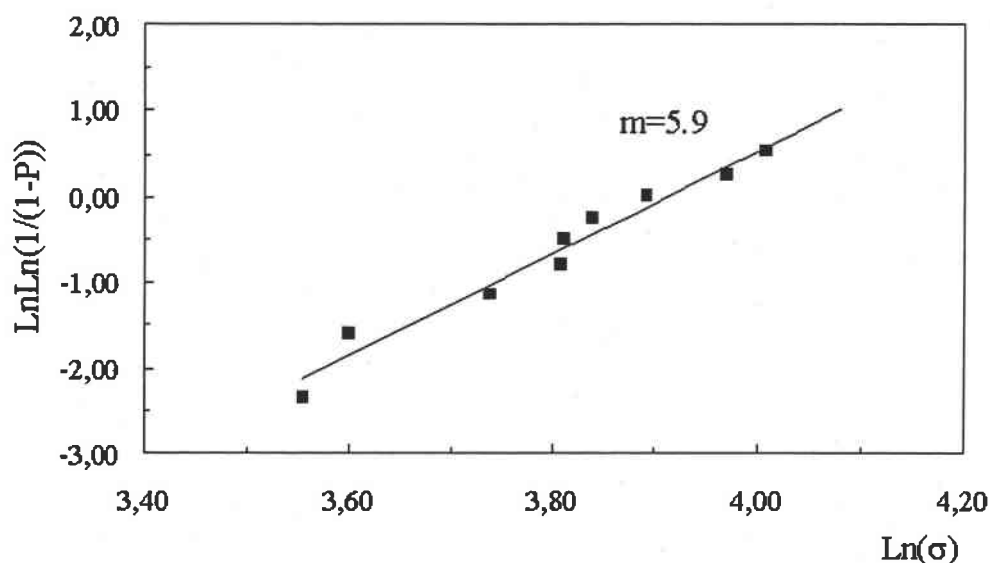


FIG. 6.7 – Essai statique : Estimation des paramètres de Weibull « m »

### 6.3 Conclusion

Dans le chapitre 5, nous avons présenté la résistance du cristal sous le chargement statique obtenue à l'aide de l'essai expérimental.

Etant donné le caractère fragile du matériau, le cristal montre un comportement élastique linéaire jusqu'à la rupture brutale. Sous le chargement statique, l'échantillon du type «disque Brésilien» se rompt en plusieurs morceaux autour du chargement diamétral. L'observation de la surface de rupture à l'aide d'un microscope optique et d'un microscope électronique à balayage met en évidence le fait que le départ de rupture est un défaut situé à proximité du trou situé au centre de l'échantillon.

Dans le cas d'un essai sur le disque Brésilien, le calcul théorique de la distribution des contraintes montre une traction uniforme dans le plan contenant les génératrices suivant lesquelles s'appliquent les efforts. Dans le cas d'une éprouvette annulaire, cette distribution est perturbée par la présence du trou. Ce phénomène est démontré à l'aide de la méthode des éléments finis. Les résultats de la simulation numérique indiquent une forte concentration des contraintes autour du centre. C'est ce qui provoque l'amorçage de rupture en un point vérifié par l'observation de la surface de rupture de l'échantillon par microscope.

En raison d'une grande dispersion des résultats d'essai, la loi de probabilité (loi de Weibull cumulative à deux paramètres) a été choisie pour analyser la résistance du cristal. D'après les analyses, la valeur du module de Weibull « m » est 5.3. Cette valeur est proche des valeurs de 5 à 10 qui signifient la variabilité de la résistance pour le matériau verre.

# Chapitre 7

## Résistance dynamique du cristal

### 7.1 Barres d'Hopkinson

#### 7.1.1 Montage des barres d'Hopkinson

Afin d'étudier le comportement dynamique du cristal, nous avons placé les éprouvettes de cristal sur le dispositif d'essai dynamique «Barres d'Hopkinson» déjà disponible dans le laboratoire. La composition chimique (Tableau 5.1, p.62) et la dimension des échantillons (Figure 5.1, p.62) sont identiques à celles utilisées pour l'essai statique.

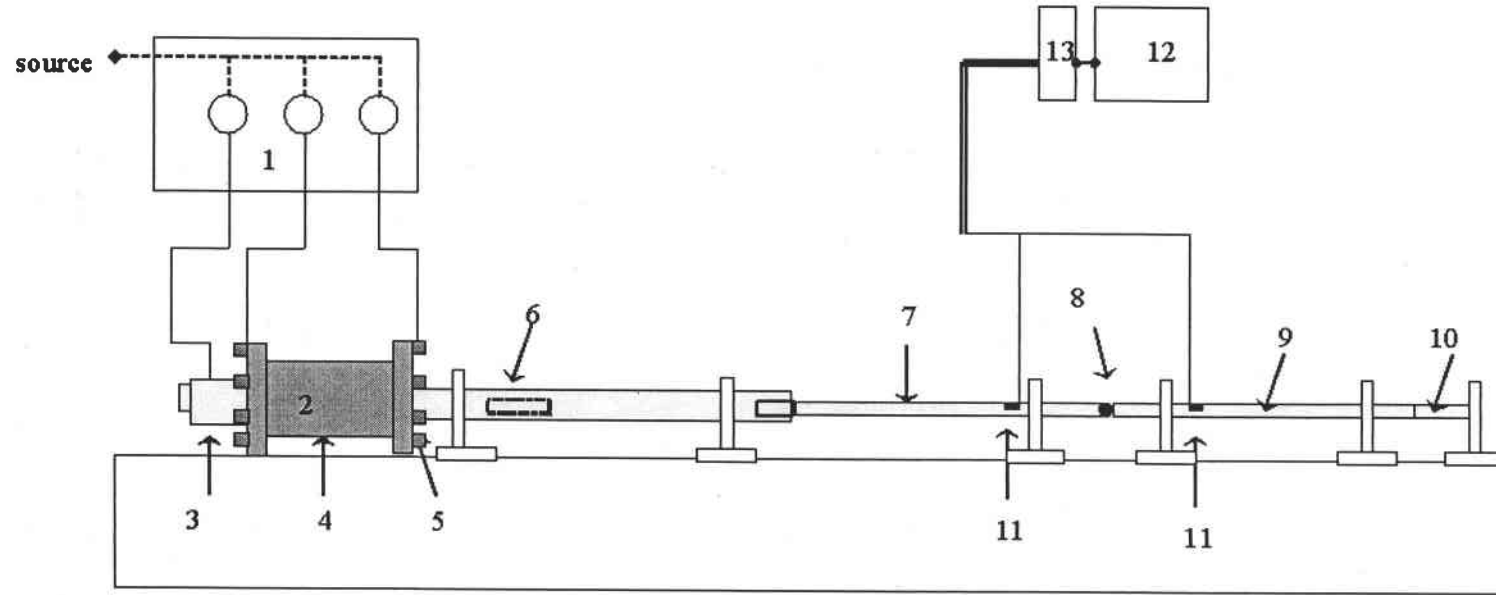
Une précaution importante à prendre en effectuant cet essai est qu'il faut obligatoirement isoler l'échantillon afin d'éviter la dispersion d'éclats dangereux.

Le montage expérimental présenté dans la Figure 7.1, est constitué d'une chambre de compression (n°2) reliée à un dispositif de contrôle (n°1), le barreau projectile (n°6), deux barres incidente (n°7) et transmise (n°9), un amortisseur (n°10) et un appareil de mesure, l'amplificateur (n°13) et l'oscilloscope (n°12). Dans le cadre de nos essais, nous avons utilisé des barres en acier d'un diamètre de 20 mm et un longueur 1 m.

Les caractéristiques mécaniques de ce matériau sont reportées dans le tableau 7.1 (p.73).

TAB. 7.1 – Caractéristiques mécaniques de l'acier utilisé

E (GPa)	C (m/s)	$\nu$	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )
210	5690	0.3	7750



- |                         |                     |                            |
|-------------------------|---------------------|----------------------------|
| 1 : Panneau de contrôle | 6 : Projectile      | 11 : Jauges de déformation |
| 2 : Chambre             | 7 : Barre incidente | 12 : Oscilloscope          |
| 3 : Chambre1            | 8 : Echantillon     | 13 : Amplificateurs        |
| 4 : Chambre2            | 9 : Barre transmise |                            |
| 5 : Chambre3            | 10 : Amortissement  |                            |

FIG. 7.1 – Dispositif de « Barres d'Hopkinson » pour l'essai de compression

## 7.1.2 Chaîne de mesure

### *Chargement dynamique*

Nous pouvons comprimer de l'air à partir du dispositif de contrôle (n°1) vers la chambre de compression (n°2). Une fois que toutes les chambres (n°3, 4 et 5) sont chargées par la source jusqu'à la pression voulue, une action sur la manette de contrôle permet de libérer l'air de la chambre en propulsant le barreau projectile (n°6) jusqu'à l'impact.

C'est un essai assez simple à réaliser par rapport aux autres types d'essai qui existe à partir des Barres d'Hopkinson. Malgré tout, cela reste un essai qui exige des attentions particulières comme beaucoup d'autres d'essais dynamiques. C'est à dire :

- l'alignement parfait du barreau projectile et des deux barres dites incidente et transmise,
- le choix du matériau de la barre qui correspond à la différence nette d'impédance mécanique entre la barre et l'échantillon,
- la barre ne doit pas dépasser la limite d'élasticité,
- le diamètre et les caractéristiques du matériau de la barre projectile doivent être identiques à ceux des barres incidente et transmise.

### *Mesure de déformation*

Pour la mesure de la déformation, nous avons collé deux jauges de déformation sur les barres : l'une sur la barre incidente enregistre l'onde appliquée et la deuxième enregistre l'onde transmise. La jauge qui enregistre l'onde incidente et transmise est collée au milieu de la barre pour éviter la superposition de l'onde incidente et réfléchi. En tenant compte des caractéristiques mécaniques du cristal et des barres, nous avons choisi une jauge de déformation conçue pour capter une onde très faible dans la barre d'acier. Les jauges utilisées présentent les caractéristiques suivantes :

- alliage « constantan » auto compensé en température
- 1.57mm de longueur active
- 2.05 de facteur de jauge

Un câble relie les deux jauges à un amplificateur. Les câbles soudés sur les jauges sont reliés à un amplificateur et ensuite à un oscilloscope pour transmettre les signaux. La préparation pour l'essai dynamique à partir de la Barre d'Hopkinson demande rigueur et précision pour coller les jauges, faire les soudures, analyser les signaux...,etc. Ces paramètres conditionnent la réussite de l'essai.

### *Principe de mesure*

La calibration a été effectuée en mettant la barre incidente contre la barre transmise. Lors d'un impact, à partir de la relation linéaire ( $\sigma = \rho cv$ ,  $\sigma$  est une contrainte compressive,  $\rho$  est la masse volumique et  $c$  est la célérité.), l'équation reliant la vitesse particulière de la barre  $V^*$  à celle du projectile  $V_p$  est donnée par la théorie de la propagation des ondes :

$$V_* = \frac{(\rho C)_1 V_p}{(\rho C)_1 + (\rho C)_2} \quad (7.1)$$

Lorsque le projectile et la barre sont de même matériau, cette relation s'écrit :

$$V_* = \frac{V_p}{2} \quad (7.2)$$

Par conséquent la valeur théorique de la déformation s'écrit :

$$\epsilon_{th} = \frac{V_p}{2C} \quad (7.3)$$

Cette dernière relation permet de relier la déformation et la vitesse du projectile. L'approche théorique pour obtenir la relation entre la déformation qui transmet à un signal électrique et la contrainte appliquée est détaillé dans la partie ANNEXE B (p.135). Le projectile en acier est propulsé dans une chambre de compression à une vitesse  $V_p$ . La relation qui lie la pression de l'air à la vitesse du projectile a été obtenue précédemment par (Dekiouk [33]). Elle est exprimée comme ci-dessous :

$$V_p = -1.1 + 5.7x$$

où  $x$  est la pression,  $V_p$  la vitesse du projectile.

Dans notre essai, le projectile a été lancé à une vitesse de 7.45 m/s pour tous les échantillons. Cela correspond à une vitesse de déformation de 275/s contre  $8.3 * 10^{-5}$ /s pour un essai statique.

L'utilisation du pont interne dans le conditionneur permet aussi de calibrer les jauges et de trouver l'amplitude de la déformation.

Après l'impact, la déformation du signal électrique est transmise à un conditionneur. Le signal amplifié est visualisé ensuite sur l'oscilloscope numérique.

## 7.2 Résultats

### 7.2.1 Contrainte de rupture

Les essais dynamiques ont été réalisés sur 10 échantillons : deux échantillons ne sont pas exploitables en raison d'un temps de rupture trop faible. En effet pour assurer l'état d'équilibre en contrainte dans l'échantillon, il est nécessaire que l'échantillon soit parcouru au moins 3 fois, par l'onde de compression [29].

La Figure 7.2 montre l'un des résultats d'essai qui représente la contrainte de rupture dynamique du cristal au cours du temps.

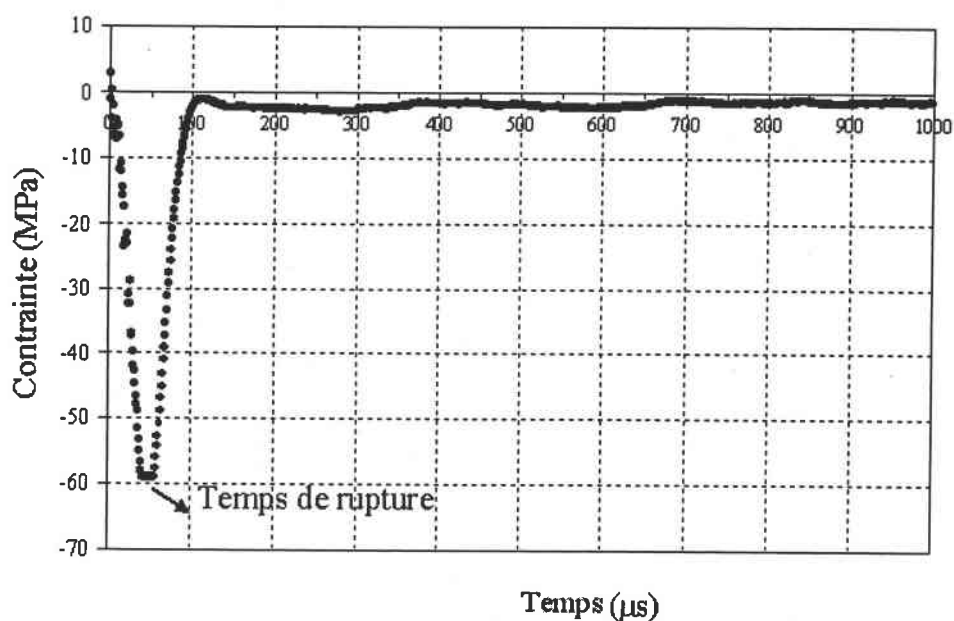


FIG. 7.2 – Evolution des contraintes dynamiques en fonction du temps

Sur cette courbe, nous observons les faits suivants :

- le caractère fragile du matériau cristal sous un chargement aussi bien statique que dynamique
- l'amorçage de la rupture correspond au pic de chargement en tenant compte de la fragilité du cristal

Dans l'exemple représenté sur la Figure 7.2, la rupture a donc lieu  $60 \mu\text{s}$  après la mise en charge. La résistance à la rupture de l'éprouvette correspond à une contrainte d'une valeur de  $59 \text{MPa}$ . L'ensemble des caractéristiques des éprouvettes est regroupé dans le Tableau 7.2.



TAB. 7.2 – Résultats des essais dynamiques réalisés sur le cristal

Nombre d'échantillons	Valeur moyenne (MPa)	Ecart-type (MPa)	Temps de rupture ( $\mu s$ )
8	93	21	55

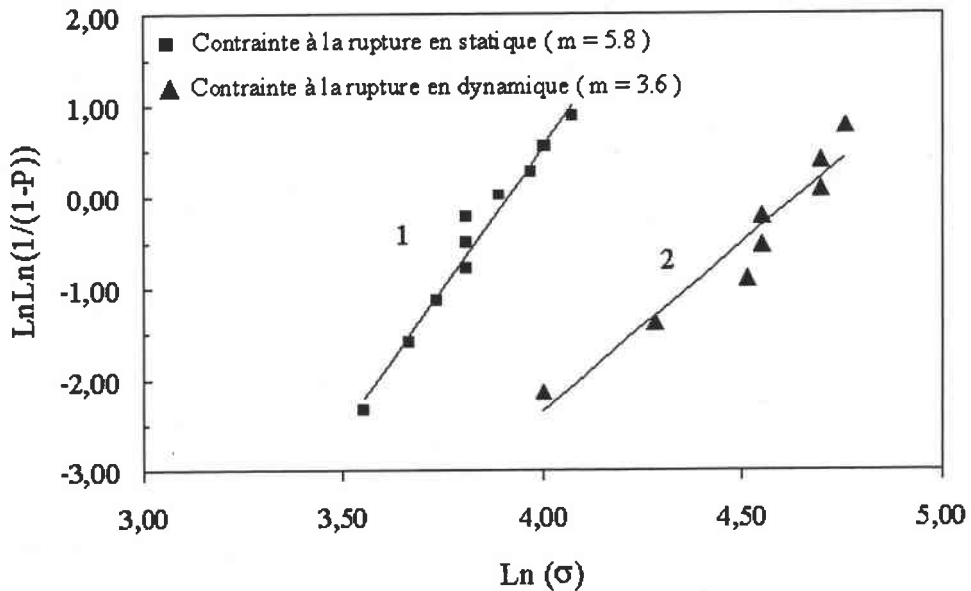


FIG. 7.3 – Comparaison du module de Weibull entre la résistance en statique et en dynamique

### Loi de Weibull

Les résultats des essais dynamiques et la dispersion du défaut dans le cristal ont été analysés une nouvelle fois à partir de la loi de Weibull cumulative à deux paramètres.

Ensuite, ils sont comparés avec les résultats statiques. D'après nos résultats, le cristal montre une plus grande dispersion de la résistance sous le chargement dynamique que sous le chargement statique : à partir d'une résolution de la régression linéaire, nous avons obtenu le module de Weibull de ( $m = 3.7$ ) pour un essai dynamique contre le module ( $m = 5.8$ ) pour un essai statique. Le résultat du calcul est montré dans la Figure 7.3.

Cette grande dispersion de la résistance du cristal sous chargement dynamique peut s'expliquer par une théorie de « multi-activation » des défauts. C'est-à-dire que la rupture du matériau n'est pas causée à partir d'un point ou d'un défaut, mais dans l'ensemble du matériau. Ce qui explique la rupture de la fragmentation du matériau

sous la sollicitation dynamique. Ce phénomène est présenté dans la Figure 7.4.

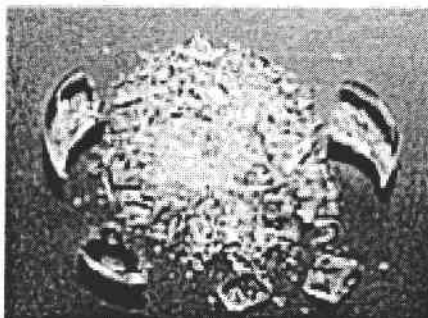


FIG. 7.4 – Phénomène de fragmentation sous rupture dynamique du cristal

Dans l'essai statique, la rupture est faite par fendage (Figure 6.3, p.68).

Le phénomène de rupture dynamique par fragmentation multiple a été aussi observé récemment par Brajer 2003 [14]. Ceci explique l'augmentation de la dispersion des résultats.

### 7.2.2 Variation des contraintes en fonction du temps critique

La contrainte de rupture n'est pas intrinsèque au matériau pour un chargement dynamique. En effet, la contrainte de rupture du matériau augmente avec la diminution du temps critique. Les travaux concernant la rupture dynamique et le temps critique ont été analysés principalement par Tuler et Butcher [34]. Ce fait a été encore observé récemment pour le verre float par Nyoungue [5].

Nous avons présenté les résultats d'essai dynamique dans un diagramme de contrainte de rupture - temps critique (Figure 7.5). Ensuite, les résultats sont comparés avec ceux du verre float réalisés par Nyoungue sur des échantillons du type de disque Brésilien modifié. Les points ■ et ▲ représentent les valeurs moyennes de la contrainte à rupture du verre float et les résultats d'essai sur du cristal.

A partir des valeurs des points ■, nous avons trouvé aisément la valeur des constantes ( $C=3 * 10^3$ ,  $\lambda=0.95$ ) du critère de rupture en dynamique de Tuler et Butcher et représenté comme ci-dessous :

$$\sigma^\lambda \Delta t = C \quad (7.4)$$

D'après les résultats d'essai et la courbe obtenue à partir des valeurs des constantes  $C$  et  $\lambda$  et de l'essai dynamique réalisé par Nyoungue, nous constatons que la contrainte de rupture dynamique du cristal se place sur la même courbe compte tenu de la dispersion.

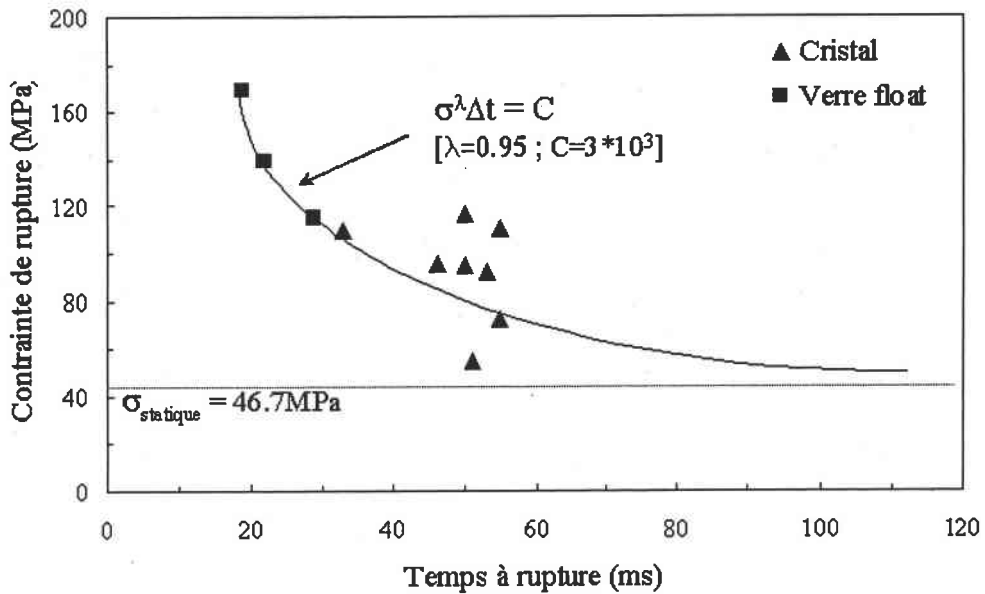


FIG. 7.5 – Présentation des valeurs de contrainte de rupture dynamique déterminées sur disque Brésilien modifié

### 7.3 Conclusion

Dans le chapitre 6, nous avons présenté la résistance du cristal sous chargement dynamique obtenue à l'aide d'un essai expérimental (Barre d'Hopkinson).

Etant donné le caractère fragile du matériau, le cristal montre un comportement élastique linéaire jusqu'à la rupture brutale sous chargement dynamique aussi bien que statique.

En revanche, le phénomène de rupture est différent entre deux types de chargement : la rupture se fait par fendage sous chargement statique et par multi-fragmentation sous chargement dynamique. Ce phénomène se traduit par une multi-activation des défauts qui sont activés à une vitesse de déformation élevée. Aussi, ce phénomène s'explique par l'augmentation de la dispersion des résultats en comparant avec les résultats statiques. Ceci est traduit par la valeur du module de Weibull  $m = 3.6$ .

D'après les résultats d'essais, nous avons obtenu une contrainte maximale en moyenne de 93 MPa et un écart-type de 21 MPa. L'augmentation de la résistance mécanique du cristal sous chargement dynamique a été vérifiée dans un diagramme de « contrainte maximale et le temps de rupture ». Dans le cas du cristal, l'utilisation du critère de rupture dynamique de Tuler et Bucher nous a permis d'obtenir des valeurs constantes des matériaux  $C = 3 \cdot 10^3$  et  $\lambda = 0.95$ .

# Chapitre 8

## Conclusion II

La résistance du cristal a été obtenue à l'aide d'essais expérimentaux.

Sous chargement mécanique, le cristal présente un comportement élastique fragile jusqu'à rupture brutale. D'après les résultats d'essai, nous avons obtenu la contrainte maximale moyenne de 46.7 MPa et un écart-type de 7.4 MPa sous chargement statique. En revanche, nous avons observé l'augmentation de la contrainte maximale sous chargement dynamique (la valeur de contrainte maximale en moyenne étant de 93 MPa et l'écart-type de 21 MPa). Cette variation des contraintes de rupture se traduit par la diminution de la valeur du module de Weibull à 5.3 en statique et jusqu'à 3.6 en dynamique. Ce phénomène est expliqué par la théorie de « multi-activation » des défauts dans le matériau.

Nous avons choisi la contrainte maximale sous chargement dynamique pour estimer la résistance du cristal soumis à un choc thermique en raison du caractère dynamique des contraintes thermiques. Il est nécessaire de connaître la théorie du champ thermique avant d'obtenir les contraintes induites par le choc. C'est pourquoi nous devons aborder le champ thermique pour trouver le champ thermique et la distribution des contraintes générées par le champ en température.

**Troisième partie**  
**Simulation numérique**

## Chapitre 9

### Choc thermique

La contrainte générée par le choc thermique a été calculée à l'aide d'une méthode numérique «CASTEM2000». CASTEM2000 est un logiciel de calcul de structures par la méthode des Eléments finis : il a été développé au Département de Mécanique et Technologie (DMT) du Commissariat à l'Energie Atomique (CEA). Dans un première temps, nous avons déterminé la distribution des températures en fonction du temps sur un cylindre creux initialement à 100°C et refroidi par la convection forcée. Ensuite, nous avons introduit cette distribution des températures finales dans le code de calcul CASTEM2000 pour trouver le champ de contrainte résultant du choc thermique. L'utilisation de la méthode numérique à partir d'un code de calcul est très fréquente dans la littérature scientifique et pratique. Mais l'application des résultats due à cette méthode demande toujours une grande attention. C'est-à-dire, il faut vérifier et comparer les résultats par une autre méthode comme la méthode analytique ou expérimentale voire même l'estimation par l'outil statistique. Pour cette raison, nous avons calculé le champ de contrainte due à ce choc thermique à partir d'une méthode analytique mentionnée précédemment dans la section 2.1.2 (p.38) en gardant les mêmes conditions du chargement et de géométrie.

A la fin, nous comparerons la valeur des contraintes obtenues par la simulation numérique à celle calculée à partir d'une méthode analytique.

## 9.1 Géométrie du cylindre

Nous avons choisi un cylindre creux en raison de sa similitude avec la forme d'un «verre à boire». Les dimensions de ce cylindre sont 50mm pour la hauteur et le diamètre et de 1mm pour l'épaisseur. La géométrie de ce cylindre est présentée dans la Figure 9.1.

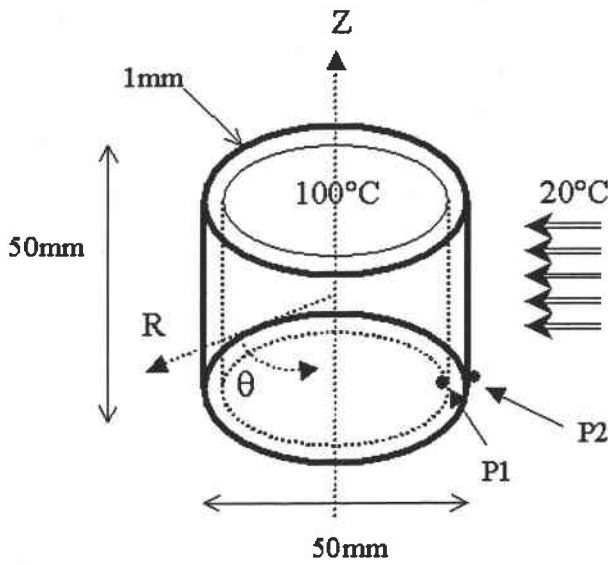


FIG. 9.1 – Géométrie du cylindre et localisation des deux points examinés P1 et P2

Ayant une température de 100°C initialement, ce cylindre est plongé brutalement dans une eau à 20 °C. Seule la surface extérieure du cylindre est soumise à ce changement thermique.

La connaissance de la distribution des températures est d'abord nécessaire pour obtenir la contrainte générée dans le cylindre. Pour cela, nous abordons pour le première étape, le problème du champ thermique.

## 9.2 Variation de température en fonction du temps

### 9.2.1 Introduction

Bien évidemment, les caractéristiques de ce cylindre sont les mêmes que celles du cristal utilisé pour les essais expérimentaux. Les caractéristiques thermo-physiques de ce cylindre ont été calculées par la méthode de «Relation d'aditivité» (section 5.2.2, p.64) et regroupées dans le Tableau 9.1.

TAB. 9.1 – Propriétés thermo-physiques du cristal

Masse volumique	Conductivité	Chaleur massique	diffusivité
4350 (Kg/m <sup>3</sup> )	0.8 (W/m.k)	639 (J/kg.k)	0.29*10 <sup>-6</sup> (m <sup>2</sup> /s)

La distribution des températures dans le régime transitoire sur une plaque infiniment longue a été calculée par la méthode analytique dans la section 2.2.2. (p. 44)

Nous rappelons ici l'équation générale du transfert de chaleur dans un cylindre dans le régime transitoire.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\partial r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} * \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9.1)$$

- a : diffusivité thermique (m<sup>2</sup>/s) a = k/ρc
- k : conductivité (W/m°C)
- ρ : masse volumique (kg/m<sup>3</sup>)
- c : chaleur massique (J/kg°C)

Le calcul analytique sur un cylindre creux infiniment long est présenté dans l'ANNEXE C (p.138). Une des paramètres importants qui détermine le degré du choc est la valeur du coefficient du transfert thermique «h». Il intervient également dans la valeur du nombre de Biot «β».

En considérant que le choc thermique est très sévère, nous avons choisi la valeur du transfert thermique 20 000 W/m<sup>2</sup> K pour une convection forcée. Cela donne la valeur de 25 pour le nombre de Biot (Equation 2.8, p.33).

D'après Kingery [41], cela signifie que la contrainte maximale non dimensionnelle σ\* est égale à 1. Ainsi la température de la surface atteint instantanément la valeur de la température ambiante, la température intérieure reste toujours égale à la température initiale.



### 9.2.2 Résultat du calcul

La distribution des températures dans le régime transitoire sur une plaque infiniment longue a été trouvée par une méthode analytique dans la section 2.2.2, (p.44). Pour résoudre le problème en 3D, nous avons fait appel à un code de calcul. « FlexPDE » qui est un code de calcul de résolution des équations aux dérivées partielles. pour trouver le champ de température en fonction du temps dans le cylindre.

Le résultat du calcul est présenté dans la figure suivante :

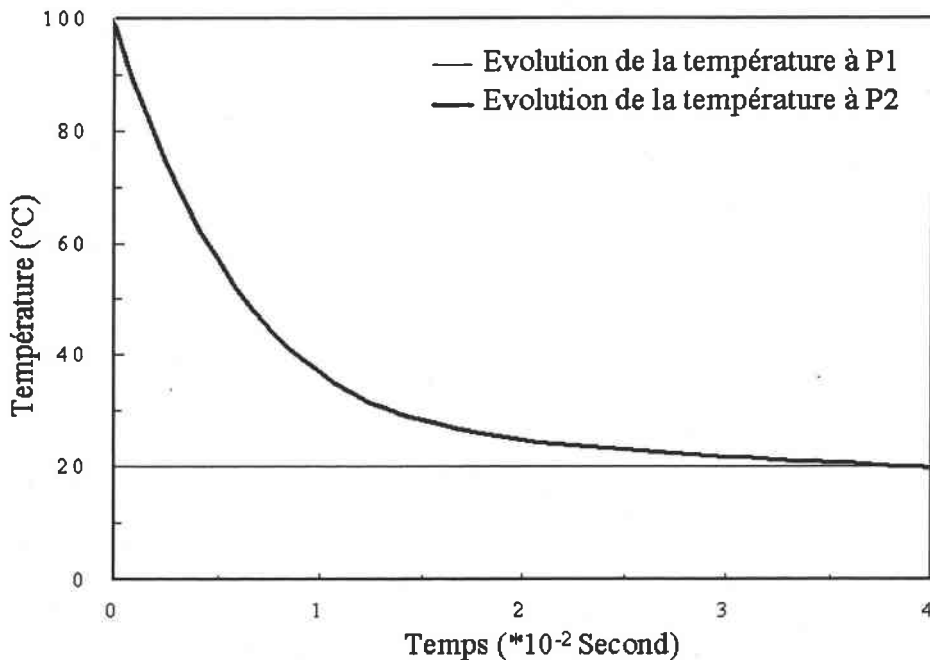


FIG. 9.2 – Evolution des températures en fonction du temps au point P1 et P2

Selon les conditions aux limites imposées et la valeur du coefficient du transfert thermique imposée ( $h=20000 \text{ W/m}^2.\text{K}$ ) pour une convection forcée dans l'eau, la surface intérieure du cylindre P1 voit sa température inchangée tandis que la surface extérieure P2 subit un changement brutal de température : la température de la surface extérieure atteint presque instantanément (40 milli-secondes) la température ambiante.

### 9.2.3 Nombre de Biot

Pour mieux caractériser le temps nécessaire pour atteindre la température ambiante en fonction de la valeur du coefficient du transfert thermique et du

nombre de Biot, nous avons effectué plusieurs calculs. L'influence du nombre de Biot «  $\beta$  » sur la variation de température est présentée dans la Figure 9.3.

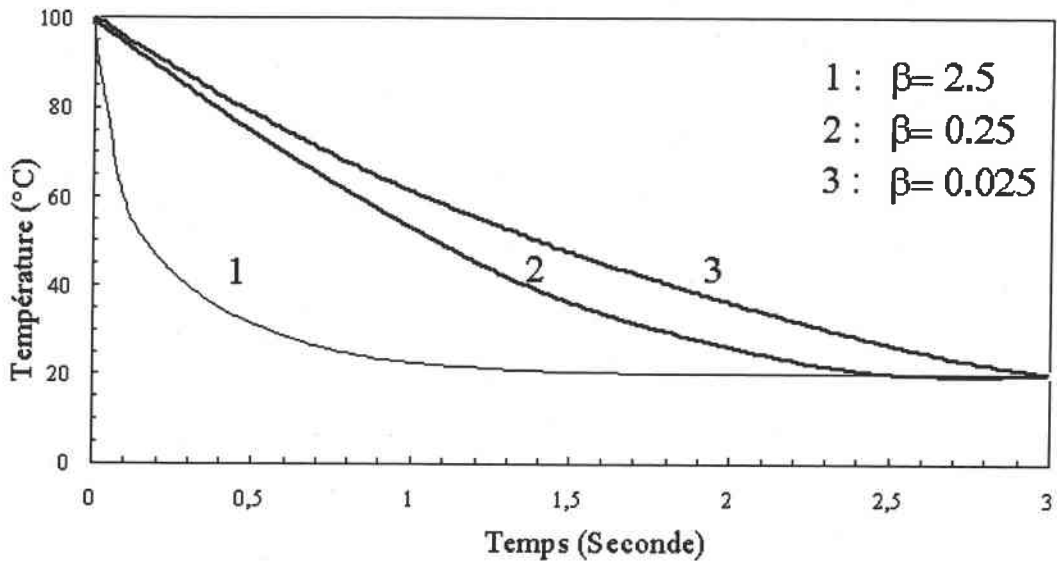


FIG. 9.3 – Variation en température en fonction du nombre de Biot  $\beta$  :  $\beta = 2.5, 0.25, 0.025$

La Figure 9.3 nous montre l'importance du nombre de Biot qui détermine la sévérité du choc thermique : plus la valeur de  $\beta$  augmente, plus rapidement le champ de température atteint à son équilibre. Dans cette situation, c'est la différence de température dans les matériaux qui va provoquer une distribution de contrainte. En d'autres termes, la différence de température est liée directement à l'amplitude de contrainte. Pourtant, non seulement la résistance des matériaux dépend de l'amplitude des contraintes appliquées, mais elle aussi dépend de la durée du chargement.

## 9.3 Contrainte thermique

### 9.3.1 Modélisation par éléments finis

La contrainte thermique due à ce choc thermique ( $100^{\circ}\text{C} \rightarrow 20^{\circ}\text{C}$  et  $\beta = 25$ ) a été calculé par une méthode de simulation à partir du code de calcul d'éléments finis « CASTEM 2000 ».

La simulation a été réalisée en mode axisymétrique en tenant compte des caractéristiques géométriques. Le cylindre (Figure 9.1, 84) est empêché de se déplacer dans l'axe Z. Les propriétés mécaniques ont déjà été calculées précédemment (Tableau 5.4, p.64). La distribution des températures obtenue auparavant (le Figure 9.2, p.86) est ensuite introduite dans le « CASTEM2000 » pour trouver les contraintes générées par le choc. Le maillage du cylindre est présenté suivante :

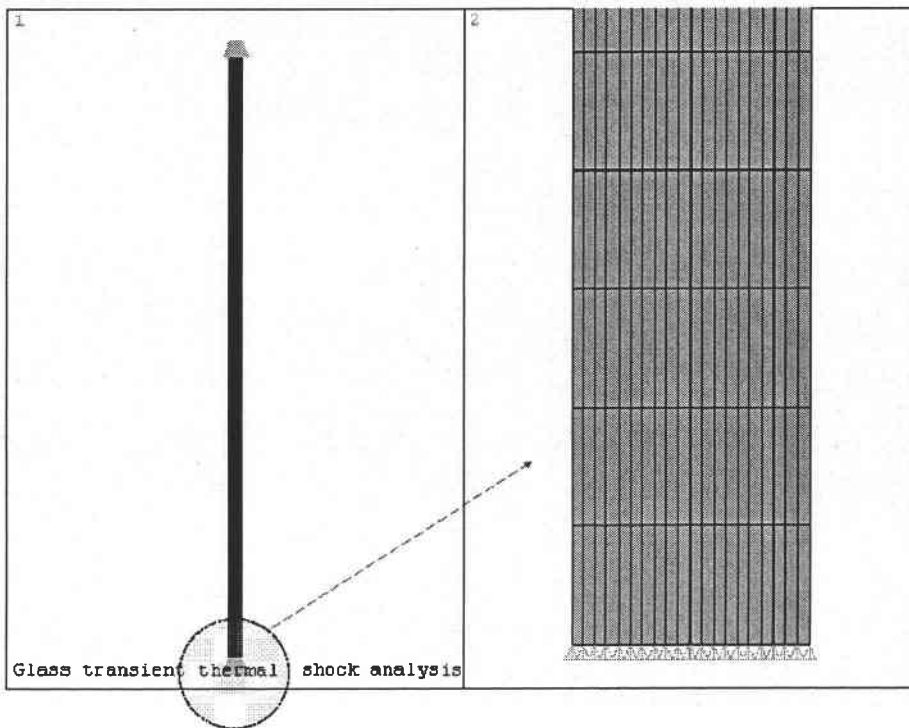


FIG. 9.4 – Présentation du maillage du cylindre

D'après les résultats de cette simulation, la contrainte maximale se situe dans la direction axiale et octogonale et est donc relative à la contrainte axiale et la contrainte circonférentielle. En revanche, la contrainte radiale présente la valeur minimale négligeable (environs 5 MPa) par rapport aux contraintes axiales et circonférentielles. Cela est dû aux conditions aux limites et aux caractéristiques de géométrie : l'épaisseur du cylindre est trop fine par rapport au diamètre du

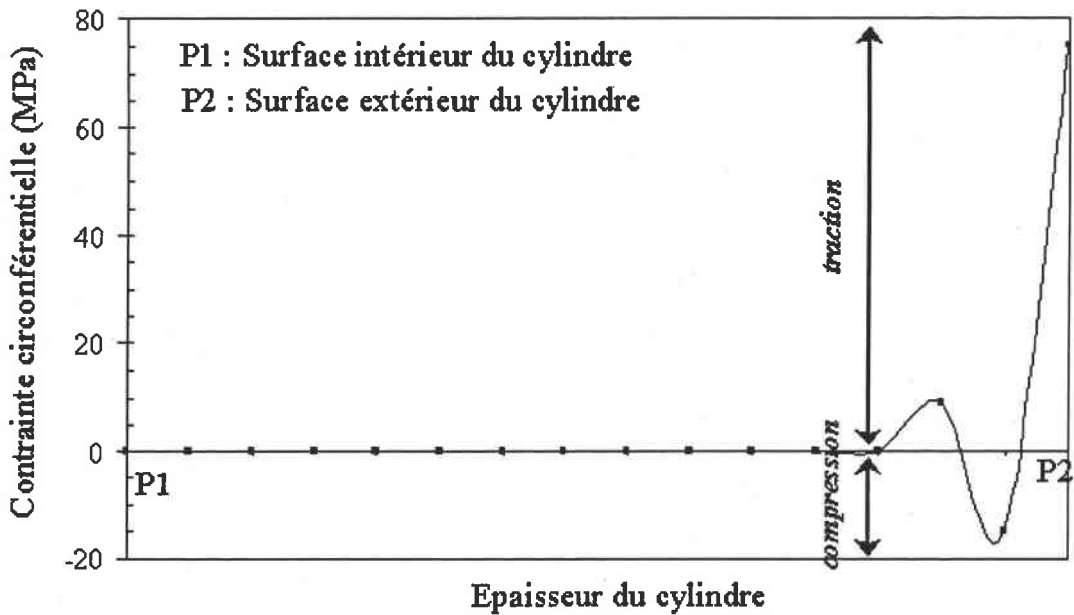


FIG. 9.5 – Distribution de la contrainte maximale sur l'épaisseur du cylindre

cylindre et à la sévérité du chargement thermique.

La Figure 9.5 représente la contrainte circonférentielle qui est maximale aux points P1 et P2 située le long de l'épaisseur du cylindre. La majorité de l'épaisseur du cylindre est soumise à une compression très faible (500 Pa) cependant près de la surface extérieure, on met en évidence une traction importante (75 MPa).

Nous avons vérifié que la valeur maximale en traction est en bonne concordance avec celle calculée par la théorie de Kingery.

Les contraintes dues au même choc thermique ont été également calculées à partir de la méthode analytique. Ceci permet de comprendre que les contraintes dues à un choc thermique ont un caractère dynamique.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les résultats du calcul de contrainte à partir de la méthode analytique et nous comparerons les résultats du calcul avec ceux de la simulation.

### 9.3.2 Onde de contrainte générée par le choc thermique dans le cylindre (Méthode analytique)

Dans le chapitre 2.3.1 (p.48) nous avons montré que le choc thermique est une sollicitation dynamique qui génère une onde dynamique. Dans notre étude, les ondes de choc thermique dans le cylindre creux ont été calculées également à partir d'une méthode analytique mentionnée précédemment.

Le calcul a été réalisé pour un cylindre creux infiniment long (déformation plane) ayant exactement les mêmes dimensions que celle du cylindre utilisé lors de la simulation. Les caractéristiques du matériau et la sévérité du choc thermique sont identiques à celles utilisées pour obtenir la contrainte appliquée à partir de la méthode des éléments finis précédemment : le cylindre creux (50 mm x 50 mm x 1mm) à 100°C est plongé brutalement dans l'eau de 20°C.

Les résultats du calcul analytiques sont présentés dans les Figures 9.6 et 9.7. Dans ces figures, les ondes de contraintes axiales et circonférentielles sont présentées en fonction du temps non dimensionnel. Du fait que l'épaisseur soit très fine par rapport à son diamètre, la contrainte radiale est négligeable et la contrainte circonférentielle est importante avec une valeur 1.5 fois plus grande que la contrainte axiale.

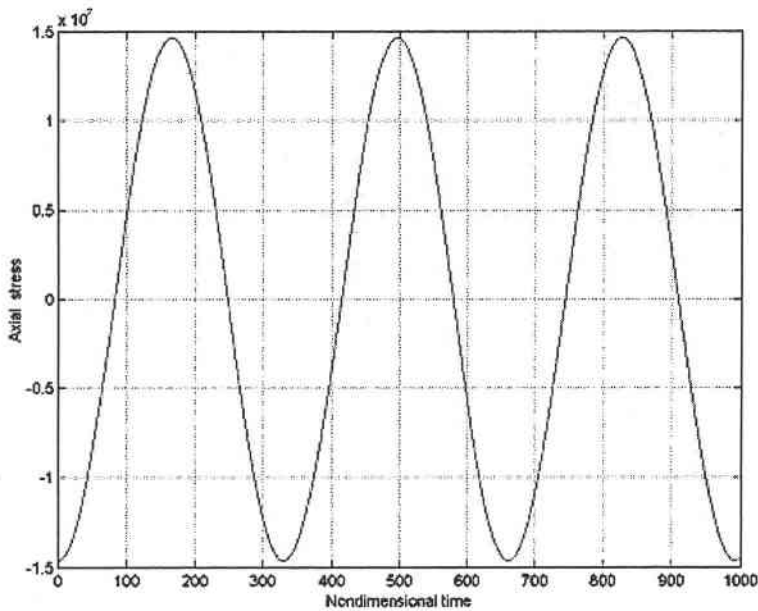


FIG. 9.6 – Onde de contrainte axiale

D'après les résultats du calcul analytique, l'amplitude de la contrainte circonférentielle atteint environ 70 MPa.

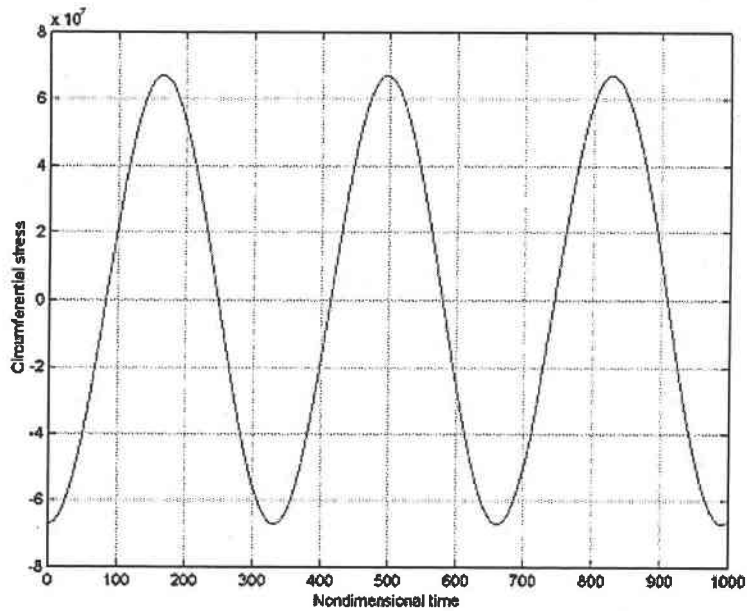


FIG. 9.7 – Onde de contrainte circonférentielle

En comparant l'amplitude de cette onde générée par le choc thermique et la contrainte maximale obtenue précédemment à l'aide de la méthode des éléments finis, nous constatons que la valeur maximale de l'onde de contrainte a une bonne concordance avec celle obtenue par la méthode des éléments finis. Pour cette raison, nous choisissons la valeur 75 MPa pour une valeur maximale de la contrainte induite dans le cylindre soumis à ce choc thermique.

# Chapitre 10

## Conclusion III

La distribution des contraintes induites par le choc thermique a été obtenue à l'aide de la méthode des éléments finis.

Nous avons choisi le cylindre creux en raison de sa forme similaire avec « le verre à boire ». Les caractères physiques et mécaniques sont identiques à ceux utilisés pour les essais mécaniques. Le cylindre initialement à 100°C est plongé brutalement dans une eau à 20°C. Ce phénomène justifie la valeur du coefficient de convection ( $h = 20000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ) qui correspond à une convection « forcée ». On obtient une valeur du nombre de Biot de 25 à partir de la valeur «  $h$  », la valeur de conduction «  $k$  » ( $=0.8$ ) et l'épaisseur du cylindre 1 mm. Ce qui équivaut à une contrainte idéale où la variation en température se réalise « instantanément ». Ce phénomène est vérifié en obtenant le temps nécessaire pour la surface extérieure pour atteindre la température initiale ( $< 1$  seconde).

La distribution des contraintes induites par ce choc implique que la contrainte maximale se situe dans la direction circonférentielle et axiale sur la surface extérieure. Ceci s'explique par son épaisseur trop fine par rapport au diamètre. En revanche, la majorité de l'épaisseur du cylindre est soumise à une compression négligeable. D'après la simulation, la contrainte maximale sous ce choc thermique est de 75 MPa. Nous avons également calculé les contraintes thermiques dues au même choc thermique appliquées sur le même cylindre dont nous avons gardé exactement les mêmes caractères physiques, mécaniques et dimensionnels. D'après le calcul, nous avons constaté des contraintes dues à un choc thermique qui présentent un caractère dynamique ayant une forme d'onde et une contrainte maximale de 70 MPa sur la surface extérieure dans la direction circonférentielle. C'est pourquoi, nous choisirons une valeur de 75 MPa pour la contrainte maximale induite dans ce cylindre.

## Quatrième partie

### Estimation de la fiabilité du cristal soumis à un choc thermique



# Chapitre 11

## Approche de la théorie statistique

L'approche statistique et probabiliste pour prévoir la durée de l'utilisation d'une structure ou la résistance des matériaux est toujours nécessaire et inévitable. C'est un concept très réaliste et indispensable pour les mécaniciens qui doivent en tenir en compte dans le dimensionnement.

En générale, l'estimation de la résistance mécanique d'un matériau fragile comme par exemple le verre ou la céramique se fait avec une approche probabiliste à cause de leur comportement aléatoire et imprévisible. Dans la littérature, l'utilisation de la loi de Weibull est très fréquente. Surtout, cette loi s'applique bien pour le verre.

Dans notre travail, la résistance mécanique du matériau cristal est estimée par une approche statistique en tenant compte des variations des propriétés de ce matériau (par exemple, la grande dispersion de la résistance mécanique due à la sensibilité aux défauts et à la fragilité) d'après nos résultats d'essais.

L'estimation de la fiabilité du matériau cristal est une tâche très difficile à réaliser à cause des nombreux paramètres qui sont en jeu : l'erreur dans les essais, la mauvaise analyse du chargement, le type de géométrie utilisé et des variables inconnus..., etc.

L'analyse théorique de la fiabilité de la résistance du matériau cristal dans cette partie se limitera naturellement au cas où le chargement par choc thermique est de 100°C à 20°C avec la valeur du nombre de Biot  $\beta=25$ . Ce chargement sera appliqué à une géométrie du type de cylindre creux mentionné dans la chapitre (Chapitre 9.1, p.84).

## 11.1 Choix d'une loi de distribution de probabilité

### 11.1.1 Introduction

L'estimation de la fiabilité d'un matériau à partir de l'approche probabiliste exige faire le choix d'une loi de distribution de probabilité. Pour cela il est nécessaire d'analyser les résultats obtenus à partir d'essais expérimentaux et de trouver une loi qui représentent au mieux les données.

Pour l'étude statistique, la loi de Weibull est fortement utilisée dans la littérature scientifique surtout quand il s'agit d'un matériau fragile comme les verres, les céramiques et les roches ..., etc. Cette méthode est très appliquée pour analyser l'homogénéité d'un matériau.

De nos jours, l'utilisation de la distribution de Weibull bien que très répandue conduit toutefois à des interrogations sur sa flexibilité et sa facilité à estimer les paramètres à partir des données[27]. Pourtant, il est rare de comparer différentes lois de probabilité obtenues avec les mêmes données. Il est alors essentiel de choisir une loi de probabilité qui présente la meilleure adéquation au sens statistique avec les données. Pour cette raison, l'analyse de nos résultats d'essais expérimentaux a été menés avec deux distributions de probabilité : les distributions Normale et de Weibull

### 11.1.2 Analyse des résultats des essais dynamiques réalisés sur le cristal avec la loi Normale et la loi de Weibull

Les résultats des essais dynamiques réalisés sur cristal ont été analysés selon deux loi de probabilité « la loi Normale et la loi de Weibull »

Nous avons choisi la loi de Weibull à deux paramètres :

$$f(x) = \frac{m}{x} \left[ \frac{x}{\beta} \right]^m \exp \left[ -\frac{x}{\beta} \right]^m \quad (11.1)$$

où « $m$ », « $\beta$ » représentant les constantes qui déterminent la forme de la densité de probabilité, « $x$ » est la variable aléatoire.

Nous avons l'expression de la valeur de la moyenne (Equation 11.2) et de la variance (Equation 11.3) pour une densité de probabilité  $f(x)$  :

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} X f(X) dX \quad (11.2)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 f(X) dX \quad (11.3)$$

A partir des deux expressions ci-dessus, la valeur moyenne pour la distribution de Weibull est :

$$\mu = \beta \Gamma \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \quad (11.4)$$

et la valeur de la variance :

$$\sigma^2 = \beta^2 \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{2}{m} \right) - \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \right]^2 \right] \quad (11.5)$$

La densité de probabilité de la loi Normale est telle que :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad (11.6)$$

où « $\sigma$ », « $\mu$ » sont l'écart type et la moyenne.

A partir des expressions (11.1), (11.4), (11.5) et (11.6), nous avons établi les deux distributions de probabilité de la loi de Weibull et de la loi Normale obtenue à partir de nos résultats d'essais de rupture dynamique du cristal.

La Figure 11.1 présente une comparaison de deux densités de probabilité.

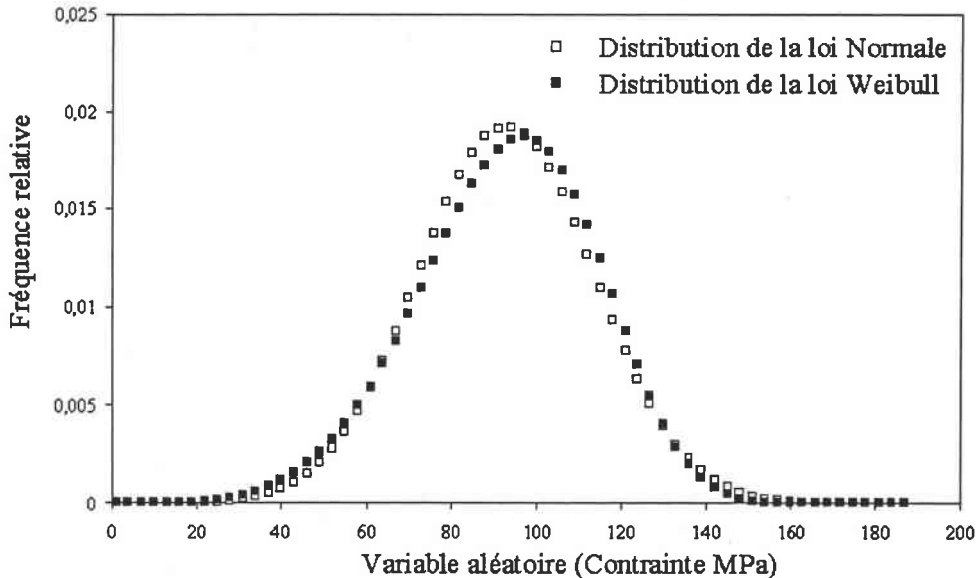


FIG. 11.1 – Comparaison de la distribution de la loi de Weibull et de la loi Normale à partir des résultats d'essais dynamiques sur cristal.

Les représentations de la densité de probabilités selon ces deux lois ne montrent pas une grande différence dans notre cas. Pour cette raison, nous avons analysé les valeurs du coefficient de corrélation.

### 11.1.3 Coefficient de corrélation

Le calcul du coefficient de corrélation linéaire « $R^2$ » permet de distinguer aisément la loi de probabilité la plus adaptée à nos résultats d'essai de la rupture dynamique du cristal avec précision. Nous avons établi d'abord la valeur de la fonction de répartition à partir de la loi de Weibull et Normale.

La fonction de répartition  $F(x)$  est définie à partir de la densité de probabilité  $f(x)$  pour une variable continue  $x$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \tag{11.7}$$

La fonction de répartition  $F(x)$  est une fonction croissante telle que  $F(-\infty)=0$  et  $F(\infty)=1$ .

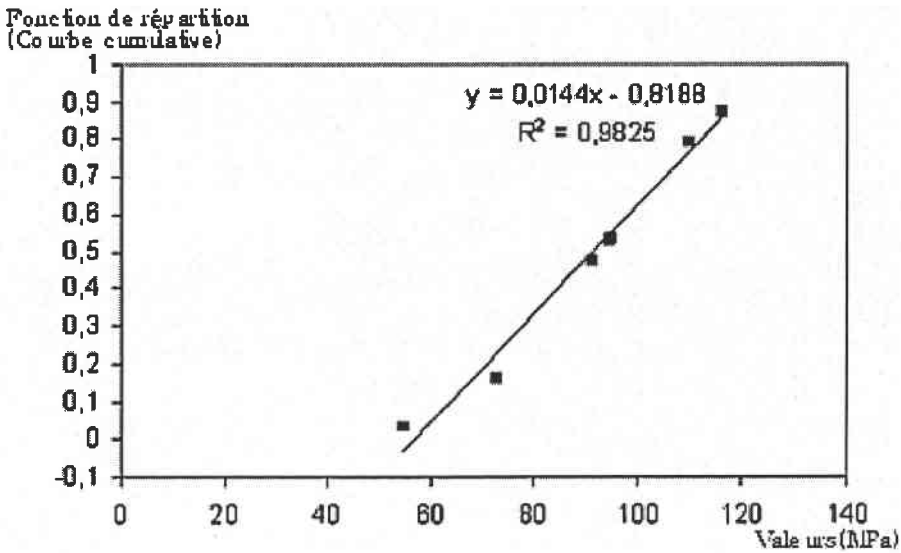


FIG. 11.2 – Représentation de la fonction de répartition selon la loi Normale

Ensuite, l'évaluation de la valeur de la fonction de répartition de la distribution et les valeurs aléatoires sont tracées dans un graphe pour la distribution de Weibull et Normale. Ces résultats sont présentés dans les Figures 11.2 et 11.3.

Les Figures 11.2 et 11.3 donnent la comparaison des coefficient de corrélation 0.9825 pour la distribution Normale et 0.9748 pour la loi de Weibull. Ceci indique

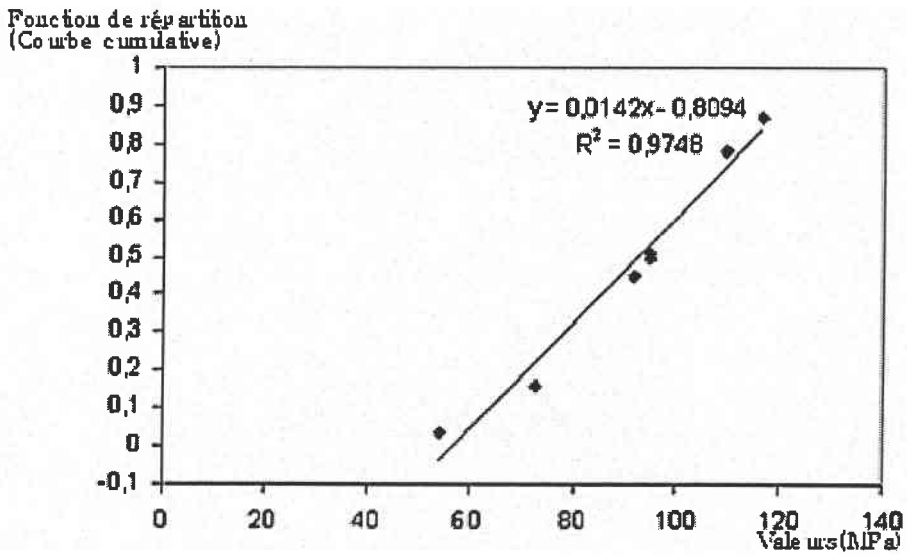


FIG. 11.3 – Représentation de la fonction de répartition selon la loi de Weibull

une légère supériorité de la distribution Normale par rapport à la loi de Weibull dans nos résultats d'essais.

D'après notre analyse, la distribution de la loi Normale représente mieux la rupture dynamique de cristal que celle de la loi de Weibull. Il est inutile de répéter qu'il est nécessaire d'avoir un nombre de données suffisantes pour analyser les résultats avec précision.

## 11.2 Utilisation du coefficient de variation dans l'étude de fiabilité

### 11.2.1 Coefficient de variation

Le dimensionnement et la conception mécanique basée sur la fiabilité nécessitent l'utilisation de paramètres statistiques aléatoires complexes comme la résistance du matériau et la condition du chargement appliqué. Pourtant, il n'est pas toujours possible d'obtenir tous les paramètres statistiques nécessaires. Il n'est en outre pas simple de relier entre eux tous les paramètres statistiques. Ces relations complexes peuvent être transformées à une forme simple en utilisant le «coefficient de variation».

L'utilisation et le rôle du coefficient de variation dans l'étude de fiabilité du matériau et des structures présentent un intérêt croissant dans la littérature scientifique [42][38].

Dans une approche de probabiliste, trois distributions sont fréquemment utilisées pour analyser la rupture, la contrainte et la fiabilité du matériau. Ce sont les lois Exponentielle, Log-Normale et Weibull. Pour analyser la fiabilité du matériau, la loi exponentielle est utilisée souvent pour la rupture ductile, la loi Log-Normale pour la fatigue et la loi de Weibull pour la rupture fragile. L'utilisation du concept du coefficient de variation permet de simplifier énormément le calcul des paramètres statiques de ces trois distributions.

Le coefficient de variation est défini comme le rapport entre la valeur de l'écart type «  $\sigma$  » et de la moyenne «  $\mu$  » :

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad (11.8)$$

L'expression de l'équation (11.8) représente le «coefficient de variation CV» [16]. C'est un indicateur de la dispersion des données par rapport à la valeur moyenne.

### 11.2.2 Application du coefficient de variation dans l'analyse de la distribution

#### *Loi exponentielle*

L'expression de la densité de probabilité de loi exponentielle s'écrit comme :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (11.9)$$

où le paramètre  $\lambda$  est une constante qui représente le taux de la rupture.  $x$  est la variable aléatoire.

A partir de l'équation 11.10 et 11.11 l'expression de la valeur moyenne est :

$$\mu = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda} dx = \frac{1}{\lambda} \quad (11.10)$$

et la variance est :

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \quad (11.11)$$

Donc, l'expression de la valeur du coefficient de variation est :

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = 1 \quad (11.12)$$

Ceci signifie que le coefficient de variation  $CV$  est indépendant des valeurs de paramètre de la distribution et que la distribution reste identique pendant la durée d'utilisation. Il est donc inadapté pour analyser la fatigue des matériaux et des structures.

### Loi Log-Normale

Dans l'étude de la fatigue, la distribution de la Log-Normale est souvent utilisée. L'expression de la loi de log Normale s'exprime comme :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_{Le} X \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu_{Le} x)^2}{2\sigma_{Le}^2}\right) \quad (11.13)$$

où  $x$  est les valeurs variables.  $\mu_{Le}$  et  $\sigma_{Le}^2$  sont la moyenne et la variance de  $\ln(x)$ .

En appliquant l'équation 11.13 dans l'équation 11.10 et 11.11, la valeur du moyenne  $\mu$  et la variance  $\sigma$  peuvent être déduites comme ci-dessous :

$$\mu = \exp\left(\mu_{Le} + \frac{1}{2}\sigma_{Le}^2\right) \quad (11.14)$$

$$\sigma^2 = \exp(2\mu_{Le} + \sigma_{Le}^2)[\exp(\sigma_{Le}^2) - 1] \quad (11.15)$$

Donc, l'expression du coefficient de variation est :

$$C = [\exp(\sigma^2) - 1]^{\frac{1}{2}} \quad (11.16)$$



Encore, la fonction exponentielle peut s'écrire encore en utilisant l'expression :

$$\exp(\sigma_{Le}^2) = 1 + \frac{1}{1!}(\sigma_{Le}^2) + \frac{1}{2!}(\sigma_{Le}^2)^2 + \dots \quad (11.17)$$

En appliquant l'équation 11.17 dans l'équation 11.16, nous obtenons une autre expression :

$$C = \sigma_{Le} \left[ 1 + \frac{1}{2}\sigma_{Le}^2 + \dots \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11.18)$$

Si  $\sigma_{Le}$  est très petit ( $\sigma_{Le} \leq 0.35$ ), l'équation 11.18 devient comme :

$$C \approx \sigma_{Le} \quad (11.19)$$

L'équation 11.19 montre que la valeur du coefficient de variation  $CV$  est presque égale à la valeur de l'écart type obtenu à partir de la fonction logarithmique  $x$ . Si la valeur de la variance est petite et que la valeur de  $CV$  est importante, l'asymétrie de la distribution de Log-Normale est importante.

### Loi Weibull

En utilisant les expressions de la valeur moyenne et de l'écart type (Equation 11.10 et 11.11, p.100), nous obtenons le coefficient de variation  $CV$  qui représente une caractéristique de la distribution statistique. La loi de Weibull peut être également analysée à partir de  $CV$ .

En prenant la loi de Weibull à deux paramètres (Equation 11.9), l'expression de la valeur de la moyenne (Equation 11.10, p.100) et de la variance (Equation 11.11, p.100) sont obtenues précédemment. L'expression du coefficient de variation est :

$$CV = \left[ \frac{\Gamma(1 + (2/m))}{(\Gamma(1 + (1/m)))^2} - 1 \right]^{1/2} \quad (11.20a)$$

$$\approx m^{-0.93} \quad (11.20b)$$

où  $\Gamma$  est la fonction de Gamma. Dans l'équation 11.20, le coefficient de variation  $CV$  est une fonction de  $m$  et indépendante de  $\beta$ . C'est à dire, si  $m$  est petit, le coefficient de variation  $CV$  est grand. C'est ce qui est souvent le cas de la distribution statistique des propriétés mécaniques de la rupture d'un matériau fragile.



Le Figure 11.4 explique pourquoi le paramètre de Weibull «  $m$  » est considéré comme une caractéristique du matériau. La relation entre la valeur de la constante de Weibull «  $m$  » et de l'inverse du coefficient de variation  $CV$  pour sa valeur de entre 3.5 et 28.5 est présenté dans le graphe suivant [27] :

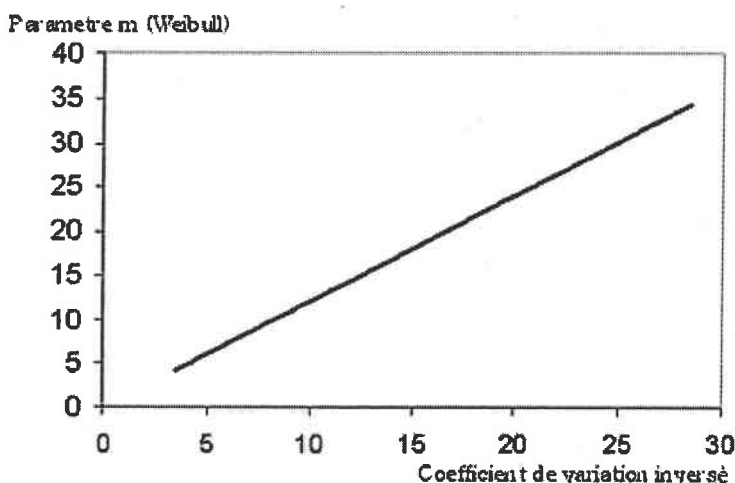


FIG. 11.4 – Représentation de la relation entre le paramètre de Weibull «  $m$  » et le coefficient de variation inversé [27].

Nous avons regroupé différentes valeurs du coefficient de variation dans le Tableau 11.1 en fonction du type matériaux :

TAB. 11.1 – Comparaison de la valeur du coefficient de variation et du type de matériau.

type de matériau	CV	auteur
Matériau composite en fibre de verre	0.2	[19]
Verre à silice (disque brésilien)	0.14	[5]
Alminox	0.07	[27]
Cristal (disque brésilien)	0.16	résultats d'essais statiques

En conséquence, le coefficient de variation peut être utilisé pour la conception du dimensionnement mécanique basée sur la fiabilité. Le concept du coefficient de variation  $CV$  est appliqué dans notre cas pour trouver les valeurs aléatoires à partir de la valeur déterministe. Cette partie sera précisée dans le chapitre suivant.

## 11.3 Comparaison de deux séries de mesure provenant des résultats expérimentaux

### 11.3.1 Loi de student et t-test[22][28]

Dans une étude statistique, il est souvent demandé de comparer les résultats expérimentaux de deux séries de mesures d'une même grandeur physique «  $x_i$  ». La comparaison de deux séries de mesures peut souvent être réalisée à partir de la «Loi de Student» en supposant que ces deux séries suivent la loi Normale. La variable «t» de la loi de Student permet de distinguer la relation de deux mesures à partir des valeurs moyennes de deux groupes de mesure et de la dispersion des valeurs variables . C'est à dire de préciser si les valeurs moyennes de deux groupes sont différents «statistiquement» l'un par rapport à l'autre.

L'utilisation de la variable «t» de Student dans le domaine mécanique est fréquente pour comparer les résultats des deux essais différents [44][9]. Ce test s'appelle souvent «t test».

Pour deux séries de mesure  $x_{1i}$  et  $x_{2j}$  et un nombre d'échantillon de deux series  $n_1$  et  $n_2$ , nous avons les valeurs moyennes  $m_1$  et  $m_2$  donnée par l'équation suivante :

$$m_1 = \left(\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}\right)/n_1; \quad m_2 = \left(\sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}\right)/n_2 \quad (11.21)$$

L'expression du «t-test» est :

$$t = \frac{m_2 - m_1}{s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \quad (11.22)$$

où la valeur de s est :

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left[ \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - m_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - m_2)^2 \right] \quad (11.23)$$

On montre alors que  $t$  est une valeur particulière d'une variable aléatoire  $T$  qui suit une «Loi de Student» à  $n_1 + n_2 - 2$  degrés de liberté. Le formule de «t-test» (Equation 11.22) est un rapport entre la différence de deux valeurs moyennes.

### 11.3.2 Comparaison des résultats d'essai statique et dynamique

Les résultats d'essai statique et dynamique ont été analysés à partir des distributions différents de la loi de probabilité : loi de Normale, loi de Weibull cu-

mulative et loi de Student.

Le tableau suivant présente les résultats d'essais expérimentaux.

TAB. 11.2 – Résultats des essais statiques et dynamiques réalisés sur le cristal

Type d'essai	Moyenne (MPa)	Ecart type (MPa)	Module de Weibull
Statique	46.7	7.39	5.8
Dynamique	93	20.75	3.7

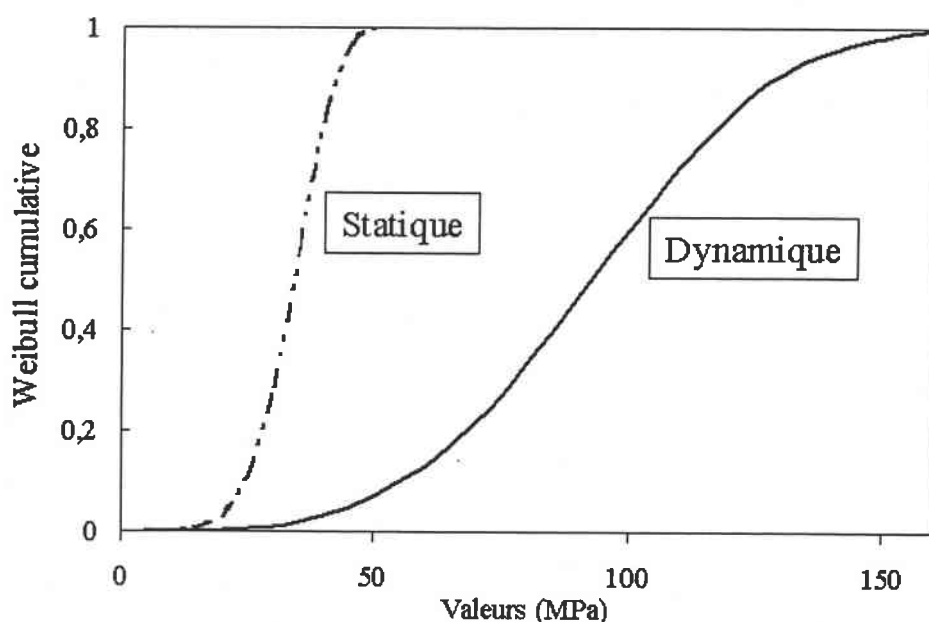


FIG. 11.5 – Représentation des résultats d'essais statique et dynamique à partir de la loi de Weibull cumulative.

La Figure 11.5 représentant la loi de Weibull cumulative obtenue à partir des résultats d'essais expérimentaux montre la sensibilité de la rupture du cristal en fonction de la vitesse de chargement.

Le rapport entre des résultats d'essais statiques et dynamiques est à nouveau analysé à partir de «t-test» de la loi de Student.

Nous avons obtenu une valeur de  $t=5.48$ . Ceci correspond à une très faible probabilité ( $P < 0.01$ ). C'est à dire que la différence entre la valeur des résultats d'essai statique et dynamique n'est pas accidentelle.

L'application de t-test de la loi de Student montre qu'il est possible de confirmer que la différence entre la valeur des résultats d'essai statique et dynamique est importante en terme statistique.

## 11.4 Critère de rupture

### 11.4.1 Fiabilité

La fiabilité est un mot provenant de l'adjectif «fiable». Elle est définie de la façon suivante : « aptitude d'un système d'un matériel à fonctionner sans incident pendant un temps donné , d'après 'Le Petit Robert' ». Actuellement, l'étude de la fiabilité est devenue une discipline à part entière. Car, prévoir la fiabilité d'un système est essentiel pour des raisons de sécurité et d'économie.

#### *Approche déterministe*

Globalement, deux approches sont utilisées pour décrire les critères de rupture : les approches déterministe et probabiliste.

Selon l'approche déterministe, la rupture apparaît si,

$$\sigma_{ap} > R \quad (11.24)$$

où  $\sigma_{ap}$  est une contrainte appliquée, R est la résistance.

Une des méthodes déterministe est l'utilisation du diagramme intégrité-rupture de type «R6» [17]. Pourtant cette approche (Equation 11.24) ne permet pas une estimation correcte du risque de rupture car il n'est pas toujours possible d'avoir le nombre des données nécessaires pour connaître la valeur minimale de résistance à la rupture pour des raisons de temps et d'économie. D'ailleurs, il n'est pas rationnel d'utiliser l'approche déterministe pour le cristal qui présente une résistance mécanique aléatoire.

#### *Approche probabiliste*

L'approche de la fiabilité donne l'estimation de la résistance du matériau à partir de la loi de probabilité en tenant compte de tous les événements incertains mais possibles. L'application de l'outil statistique pour estimer la fiabilité pour les problèmes de la résistance des matériaux et des structures fait l'objet de nombreuses présentations dans la littérature. En raison de procédure très complexe avec des données importantes pour les paramètres, l'utilisation de la méthode numérique à partir d'un algorithme est fréquente et pratique. On utilise par exemple, la méthode de Monte Carlo.,etc.

Pour une approche globale, l'approche de probabiliste pour estimer la fiabilité des structures et des matériaux compare les valeurs de ces deux termes :

#### *Résistance et Chargement*

Ces deux termes sont présentés par une loi de probabilité et par les valeurs de variables aléatoires. Celles ci peuvent être des paramètres mécaniques, le temps ou autre.

La fiabilité peut s'exprimer comme la probabilité de survies à partir des valeurs variables quelconques «  $x_i$  » :

$$P_s = 1 - P_r \quad (11.25)$$

où  $P_s$  est la probabilité de survie,  $P_r$  est la probabilité de rupture.

La question est de savoir quelle est l'expression de la probabilité de rupture  $P_r$ . Toutes les méthodes numériques utilisent une fonction performance «g» qui relie entre les résultats (ou la fiabilité des structures ou des matériaux dans notre cas) et les valeurs des données [30] [36] :

$$g(x) = \bar{y}(x) - y(x) \quad (11.26)$$

où  $g$  : fonction performance,  $\bar{y}$  : la valeur limite,  $y(x)$  : la variable performance.

La fonction de performance  $g(x)$  peut suivre une distribution de probabilité. En conséquence, la probabilité de rupture est définie à nouveau par :

$$P_f = Pr[g(x) < 0] \quad (11.27)$$

### 11.4.2 Facteur de sécurité pour le dimensionnement (LRFD : Load and Resistance Factor Design)

Dans le dimensionnement des structures et des matériaux, l'utilisation de facteur de sécurité est très fréquente. Celle ci peut être obtenu à partir de l'approche probabiliste. Une des méthodes est LRFD « Load and Resistance Factor Design » [32]. Celle ci consiste en l'application de l'intersection entre les deux distributions Normales (la résistance et le chargement) et le facteur de sécurité. La méthode de « LRFD » est basée sur l'hypothèse suivante :

*“la résistance et le chargement suivent une distribution de Normale” .*

La Figure 11.6 montre la zone d'intersection de deux distributions Normales relative à la résistance et la contrainte appliquée. La zone d'intersection est équivalente à une zone de rupture.

La zone de rupture peut à nouveau être normalisée de la manière suivante :

$$m_z = m_r - m_c \quad (11.28)$$

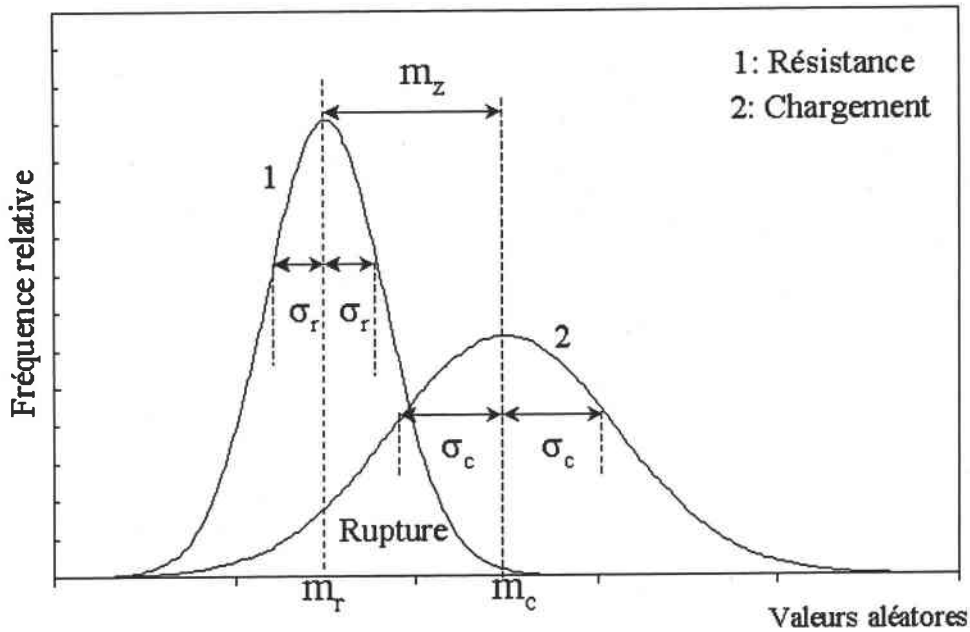


FIG. 11.6 – Représentation de l’intersection de deux distributions Normales pour la résistance et la contrainte appliquée

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_c^2} \tag{11.29}$$

$$\beta = \frac{m_z}{\sigma_z} \tag{11.30}$$

où  $m_r$  : la valeur moyenne pour la « Résistance »,  $m_c$  : la valeur moyenne pour le « Chargement »,  $\sigma_r$  : la valeur de l’écart type pour la « Résistance »,  $\sigma_c$  : la valeur de l’écart type pour le « Chargement ».

Cette distribution  $z$  permet d’avoir une estimation de probabilité de rupture. La valeur  $\beta$  représente le coefficient de sécurité. Elle est liée directement à la probabilité de rupture. c’est à dire que la probabilité de rupture est grande pour une faible valeur de  $\beta$ .

Pour le dimensionnement des structures et des matériaux, « $\beta$ » représente deux facteurs importantes «le facteur de la résistance  $\phi$  et le facteur du chargement  $\alpha$ » :

$$\lambda\phi R_n \geq \sum_{i=1}^n \alpha Q_n \tag{11.31a}$$

$$\text{Sollicitation} \geq \text{Résistance} \tag{11.31b}$$

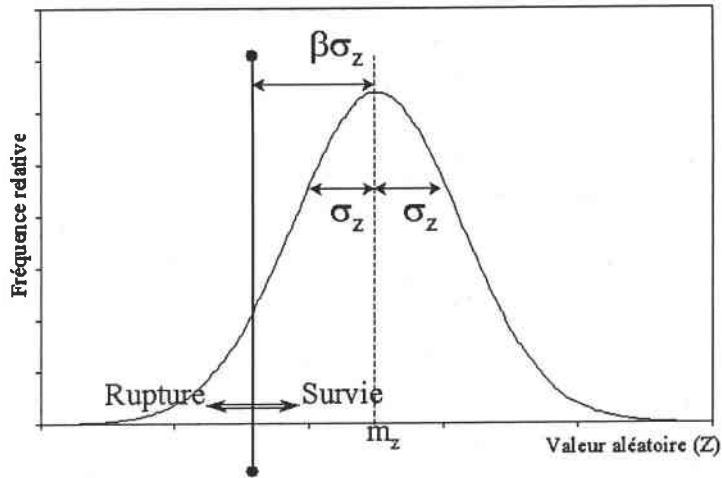


FIG. 11.7 – Présentation de la définition de la distribution Normale  $Z$  avec le coefficient de sécurité  $\beta$

Les équations 11.31 sont une forme simple pour présenter la relation entre la Sollicitation et la Résistance dans la méthode de LRFD. Il existe dans la littérature beaucoup d'études à partir de méthodes sophistiquées pour trouver les valeurs de  $\beta$ ,  $\phi$  et de  $\alpha$ . Ces grandeurs varient selon le type de matériaux et les paramètres mis en jeu.

## 11.5 Conclusion

En raison de la grande dispersion des résultats d'essai mécanique, nous avons analysé la résistance mécanique du cristal à partir de la loi de probabilité. Deux lois de probabilité ont été choisies pour estimer la résistance du cristal : la loi Normale et la loi de Weibull.

D'après notre analyse, la comparaison entre deux distributions de densité de la loi de probabilité ne montre pas une grande différence. Dans ce cas, l'utilisation des valeurs du coefficient de corrélation est pratique et permet de distinguer la loi la plus adaptée aux résultats d'essai.

D'après notre calcul du coefficient de corrélation, la loi Normale représente mieux la résistance mécanique du cristal sous chargement dynamique avec une très faible valeur de 0.9825 contre la valeur de 0.9748 pour la loi de Weibull. Pour cette raison, nous choisirons la loi Normale pour présenter la résistance du cristal sous chargement dynamique.

Egalement, nous avons montré l'utilisation du coefficient de variation qui permet de simplifier les paramètres statistiques. Le coefficient de variation est défini à partir du rapport entre la valeur d'écart-type et la valeur moyenne. Nous avons

obtenu la valeur du coefficient de variation de 0.16 pour le cristal.

Nous avons aussi analysé les résultats d'essai statique et dynamique à partir de la loi de Student qui nous a permis de comprendre que la différence entre les résultats d'essai statique et dynamique n'est pas accidentelle, ce qui est important en terme statistique.

Globalement, deux approches sont utilisées pour décrire les critères de rupture : approche déterministe et approche probabiliste. Contrairement à l'approche déterministe, l'approche probabiliste permet d'estimer la "probabilité" de rupture. Ce qui convient bien aux matériaux fragiles ayant une rupture très aléatoire comme le cristal.



## Chapitre 12

# Fiabilité du cristal soumis à un choc thermique

L'analyse de la résistance des structures et des matériaux basés sur la théorie probabiliste et statistique demande toujours une certaine vigilance lors de l'obtention des données et l'expression des résultats : choix du type de distribution de probabilité, application de l'outil statistique (méthode numérique, analytique ou l'utilisation du code commerciale), vérification des résultats...,etc.

Nos analyses dans le chapitre précédent sont utilisées pour estimer la fiabilité mécanique du cristal soumis à un choc thermique. Nous avons trouvé d'abord, la loi de probabilité (chapitre 11.1.2, p.97).

Les résultats de nos analyses (chapitre 11.2.1, p.99 et chapitre 11.3.2, p.104) nous permettent de proposer des hypothèses qui sont présentés dans cette section. Ces hypothèses seront utilisées pour l'estimation de la fiabilité du cristal et celle de la variation en fonction de la teneur en oxyde de plomb remplacé par l'oxyde de sodium.

Deux termes généraux "*Résistance et Chargement*" sont représentés par une loi de probabilité (loi Normale dans notre cas) et par une variable aléatoire. Elle peut être la résistance mécanique, le temps ou autre chose (valeur du chargement mécanique dans notre cas).

Dans notre cas, nous avons une variable aléatoire pour la Résistance et une valeur déterministe pour le Chargement. Pour ces raisons mentionnées ci-dessus, nous proposons les hypothèses suivantes :

## 12.1 Approche probabiliste

### 12.1.1 Hypothèse 1 (application du "CV")

Nous avons des valeurs déterministes pour le chargement (dû à un choc thermique) obtenues à partir de la méthode numérique CASTEM 2000. C'est à dire que le changement de la teneur en oxyde de plomb dans le cristal influence la valeur du coefficient de la dilatation thermique et par conséquent le chargement thermique.

Nous avons besoin de la distribution de probabilité du chargement thermique pour appliquer la méthode de fiabilité.

L'application du coefficient de variation  $CV$  nous a permis d'obtenir la distribution de probabilité pour le chargement thermique à partir de sa valeur déterministe. Nous avons considéré que cette valeur déterministe est la valeur moyenne et la valeur du coefficient de variation  $CV$  de la résistance est identique à celui du chargement. C'est à dire :

1. la valeur de  $CV_r$  est obtenu à partir des résultats d'essais dynamiques (Résistance)

$$CV_r = \frac{\sigma_r}{\mu_r} \quad (12.1a)$$

$$= 0.22 \quad (12.1b)$$

2. la valeur de  $CV_r$  est identique à celle du chargement thermique (Chargement)

$$CV_r = CV_c \quad (12.2a)$$

$$= \frac{\sigma_c}{\mu_c} \quad (12.2b)$$

$$= 0.22 \quad (12.2c)$$

où  $CV_r$  : le coefficient de variation de la Résistance,  $CV_c$  : le coefficient de variation du Chargement,  $\sigma_r$  : la valeur de l'écart type pour la Résistance,  $\sigma_c$  : la valeur de l'écart type pour le Chargement,  $\mu_r$  : la valeur moyenne pour la Résistance,  $\mu_c$  : la valeur moyenne pour le Chargement

A partir de l'équation 12.1 et 12.2, la distribution de la loi Normale est obtenue et présenté dans la Figure 12.1 :

### *Variation de distribution du chargement en fonction de la teneur en oxyde de plomb*

La variation du chargement thermique en fonction de la teneur en oxyde de plomb peut être obtenue par le même concept mentionné auparavant. C'est-à-dire

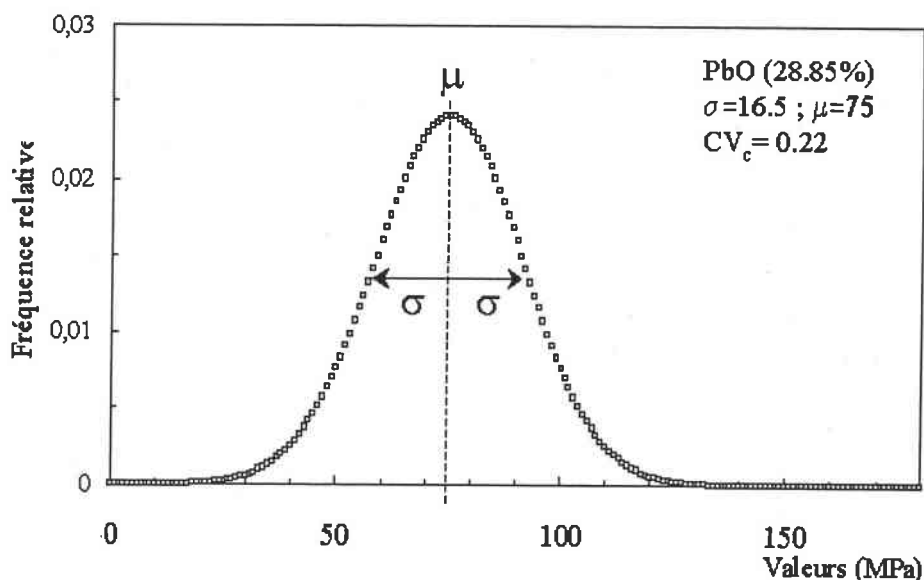


FIG. 12.1 – Distribution de la loi Normale du chargement thermique dans le cristal

que la valeur du coefficient de variation  $CV_c (=0,22)$  est identique pour chaque chargement obtenu par la méthode numérique. Dans notre cas, nous avons diminué la teneur en oxyde de plomb en remplaçant par de l'oxyde de sodium.

La procédure du calcul est ainsi :

1. obtention de la valeur théorique du coefficient de dilatation thermique en fonction de la teneur en oxyde de plomb à partir de la «Relation d'additivité» (section 5.2.2, p.64).

2. application de la valeur obtenue dans la procédure précédente pour trouver le chargement thermique due au même choc thermique par la méthode des Eléments finis

3. la valeur obtenue dans le procédure 2 est égale à la valeur moyenne

4. la valeur de l'écart type est obtenue à partir de la valeur du coefficient de variation  $CV_c (=0,22)$ .

Les résultats du calcul sont présentés dans la Figure 12.2.

La Figure 12.2 montre la variation de la distribution de probabilité en fonction de la teneur en oxyde de plomb et la sensibilité au chargement thermique qui est influencée par la diminution de la teneur en oxyde de plomb remplacé par l'oxyde de sodium.

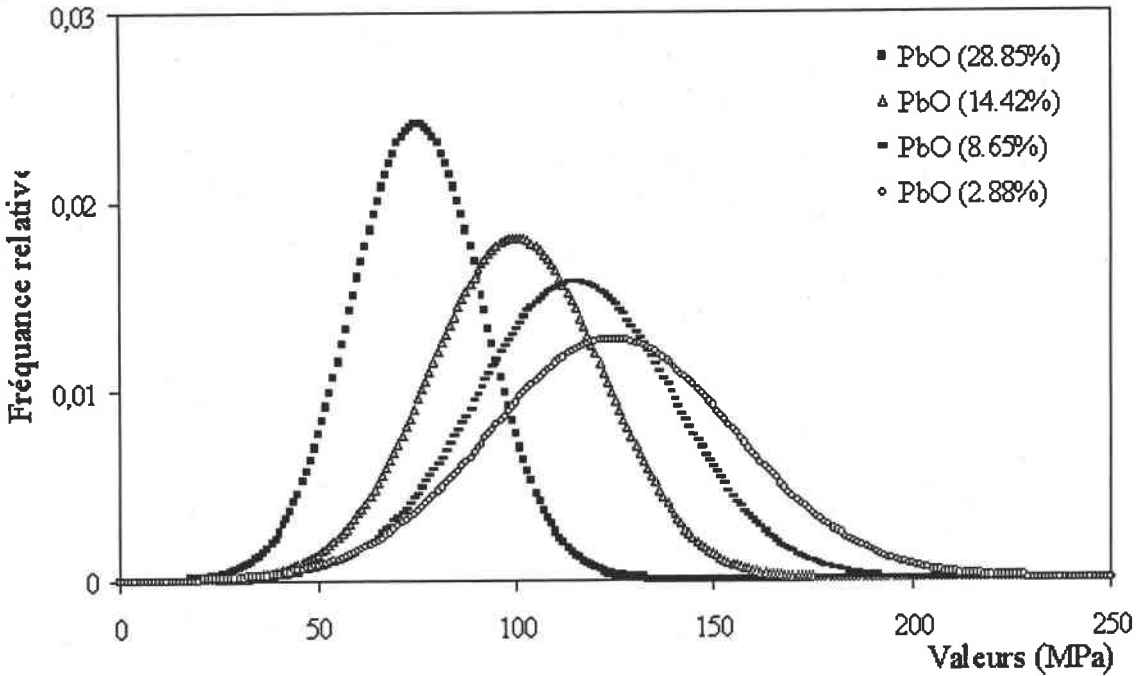


FIG. 12.2 – Variation de distribution de la loi Normale pour le cristal soumis à un choc thermique en fonction de la teneur en oxyde de plomb

### 12.1.2 Hypothèse 2

L'utilisation de la méthode de t-test pour comprendre le rapport entre deux mesures différentes a été déjà mentionnée dans le chapitre 11.3.2.(p.104) Dans notre étude statistique, les résultats d'essais statiques et dynamiques sont analysés sur le rapport entre les valeurs «moyennes» des résultats d'essais statiques et dynamiques. La valeur de ce rapport dans ce cas est ensuite utilisée pour présenter la différence entre les deux distributions Normales pour le cas statique et le cas dynamique.

Nous appelons cet rapport  $C^*$  :

$$C^* = \frac{\mu_s}{\mu_d} \tag{12.3}$$

où  $\mu_s$  et  $\mu_d$  sont les valeurs moyennes des résultats d'essais statiques et dynamiques. L'expression 12.3 prend la valeur  $C^*=0.68$  pour du cristal soumis au chargement statique et dynamique.

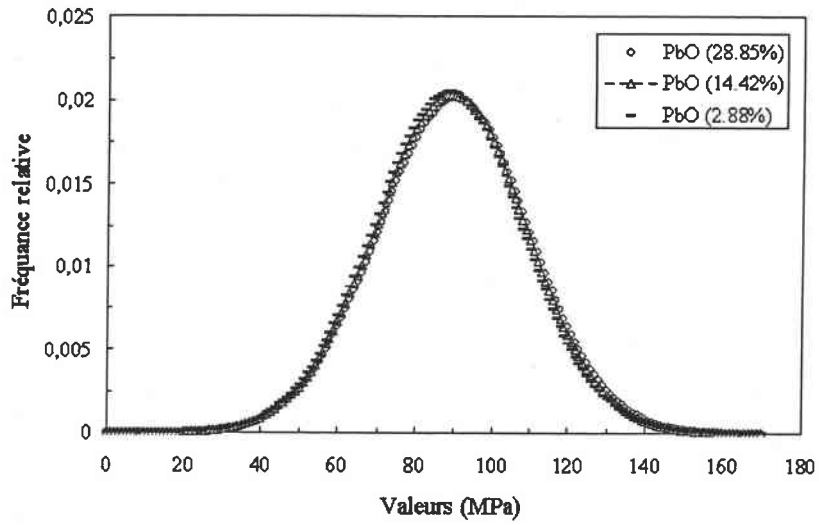


FIG. 12.3 – Variation de la distribution de Résistance en fonction de la teneur en oxyde de plomb

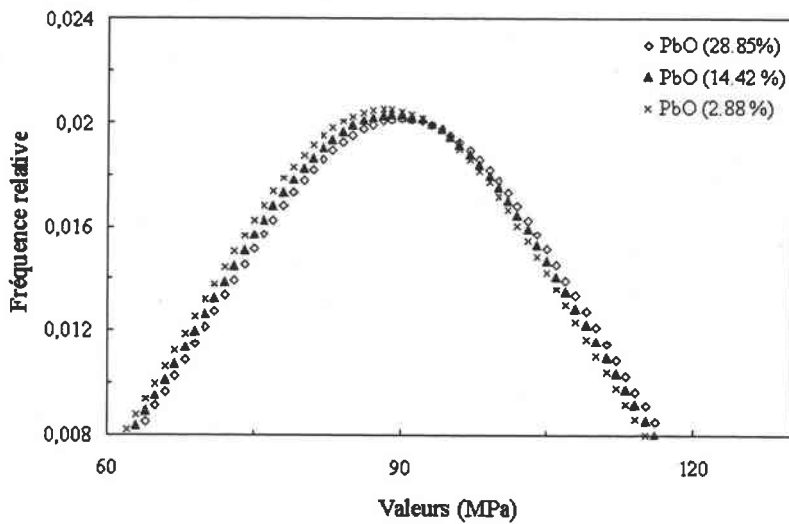


FIG. 12.4 – Agrandissement de la distribution dans la Figure 12.3

### *Variation de la distribution de Résistance en fonction de la teneur en oxyde de plomb*

La valeur théorique de la résistance statique du cristal et sa variation théorique en fonction de la teneur en oxyde de plomb peuvent être obtenues par la «Relation d'additivité» (chapitre 5.2.2, p.64).

Mais, nous avons besoin de la distribution des résistances sous sollicitation dynamique. Pour cette raison, la même valeur du coefficient  $C^* = 0.68$  a été utilisée.

La procédure de calcul est alors la suivante :

1. le calcul théorique de la valeur de la résistance statique du cristal pour chaque teneur en oxyde de plomb remplacée par la même teneur en oxyde de sodium

2. la valeur obtenue dans le procédure 1 est une valeur moyenne statique

3. l'obtention de la valeur moyenne en dynamique à partir de l'utilisation de la valeur  $C^* (=0.68)$

4. le calcul de l'écart type grâce au coefficient de variation (Hypothèse 1)

La Figure 12.3 représente la variation théorique de la distribution de la résistance du cristal en fonction de la teneur en oxyde de plomb. Nous avons constaté que l'augmentation du chargement thermique dû au changement de la teneur en oxyde de plomb et remplacé par la même teneur en oxyde de sodium est plus important que celle de la résistance.

## 12.2 Fiabilité de la résistance du cristal soumis à un choc thermique

### 12.2.1 Critère de rupture

Le concept de la méthode statistique (Equation 11.8, p.99 et chapitre 12.1.2, p.116) et de LRFD (chapitre 11.4.2, p.108) mentionnée précédemment ont été utilisés dans notre cas pour évaluer le risque de rupture du cristal soumis à un choc thermique.

Dans notre étude, la fiabilité basée sur une approche probabiliste considère deux événements (la contrainte appliquée « $\sigma_{ap}$ » et la résistance « $R$ ») et les valeurs aléatoires de la contrainte « $\sigma^*$ ».

L'estimation de la résistance mécanique du cristal soumise à un choc thermique dans le langage statistique est la suivante :

1. la probabilité pour que la contrainte appliquée soit supérieure à une valeur donnée  $\sigma^*$  est

$$P(\sigma_{ap} > \sigma^*)$$

2. la probabilité pour que la résistance à la rupture soit inférieure à la contrainte  $\sigma^*$  est

$$P(R < \sigma^*)$$

La rupture apparaît si les deux conditions décrites ci-dessus sont satisfaites en même temps. Ceci peut être exprimé par :

$$P(\sigma_{ap} > R) \tag{12.4}$$

La zone de la rupture du cristal (Equation 12.4) soumis à un choc thermique dans notre cas est constituée par la zone d'intersection des distributions de probabilité de la « Résistance » et le « Chargement » : bien évidemment, la résistance représente les résultats d'essai dynamique, le chargement est la contrainte appliquée par le choc thermique.

La Figure 12.5 présente la zone de rupture du cristal contenant 28.85% d'oxyde de plomb et le point d'intersection «  $X_p$  » entre la « Résistance » et le « Chargement ».

La zone de rupture est encore exprimée mathématiquement dans notre cas comme ci-dessous :

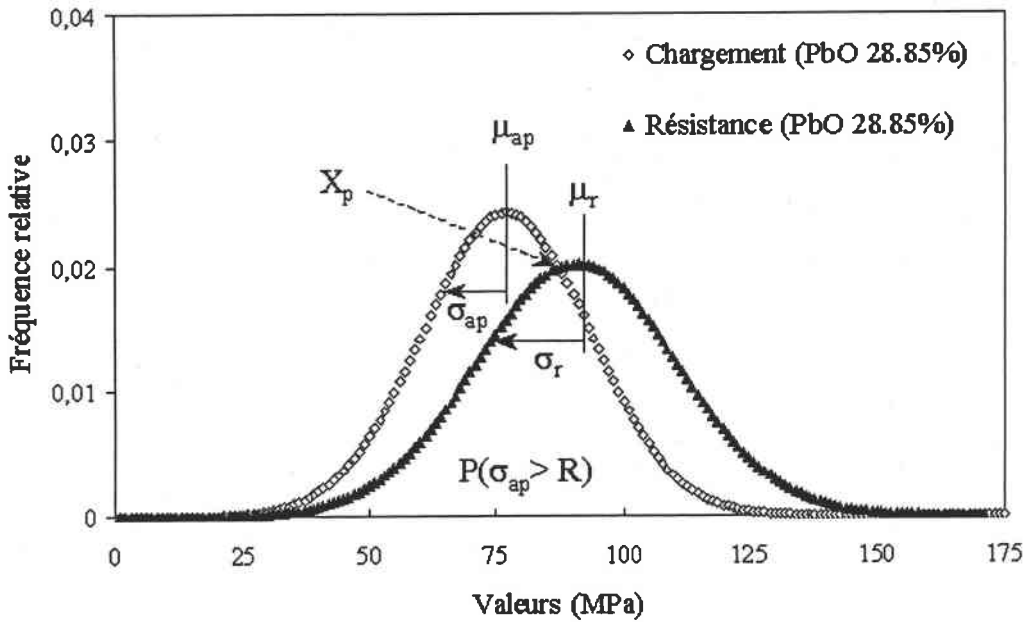


FIG. 12.5 – Présentation de la zone de rupture

$$P(\sigma_{ap} > R) = \frac{1}{\sigma_{ap}\sqrt{2\pi}} \int_{X_p}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \mu_{ap})^2}{2\sigma_{ap}^2}\right) dx \tag{12.5a}$$

$$+ \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{X_p} \exp\left(-\frac{(x - \mu_r)^2}{2\sigma_r^2}\right) dx \tag{12.5b}$$

### 12.2.2 Variation de la fiabilité du cristal en fonction de la teneur en oxyde de plomb

A nouveau, la variation de la fiabilité du cristal soumis à un choc thermique en fonction de la teneur en oxyde de plomb (28.85% → 2.88%) a été trouvée à partir de l'équation 12.5. Ces résultats sont présentés dans la Figure 12.6.

A partir de l'équation 12.5 et le Figure 12.6, nous avons calculé la zone de rupture. Les résultats du calcul sont regroupés dans un Tableau 12.1.

La probabilité de rupture  $P(\sigma_{ap} > R)$  varie entre 0 et 1. Si  $P(\sigma_{ap} > R)$  atteint à une valeur de 1, nous pouvons considérer que la probabilité de rupture est une certitude. Au contraire, si  $P(\sigma_{ap} > R)$  atteint à une valeur de 0, la probabilité de rupture est quasiment nul.



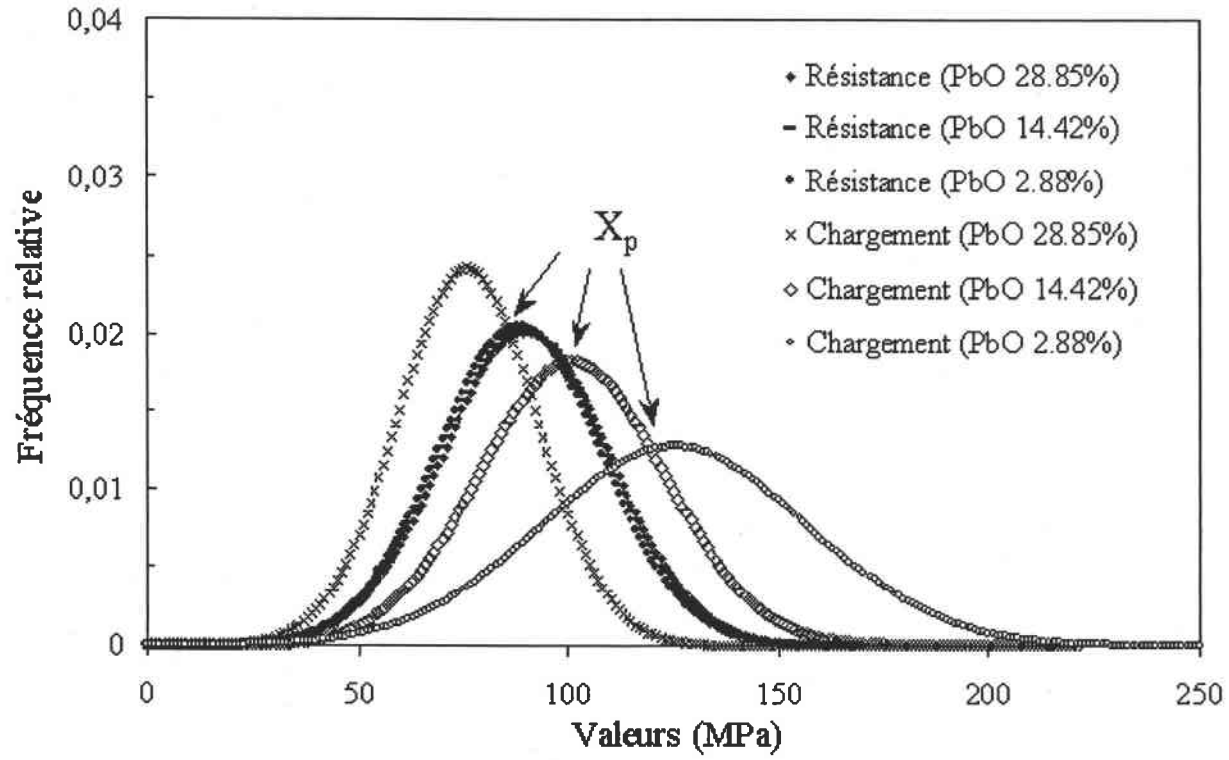


FIG. 12.6 – Variation de la distribution de la Résistance et du Chargement en fonction de la teneur en oxyde de plomb

TAB. 12.1 – Résultat des calculs de probabilité de rupture.

teneur(%)	28.85	25.96	23.08	20.2	17.31	14.42	11.54	8.65	5.77	2.88
Xp(MPa)	87.2	90	93.9	100	100.4	101.5	103.3	105.1	106	108.4
$P(\sigma_{ap} > R)$	0.623	0.74	0.851	0.958	0.942	0.847	0.575	0.676	0.6	0.531

D'après les résultats, ayant la valeur  $P(\sigma_{ap} > R)=0.623$  pour un cristal dont la teneur en oxyde de plomb est 28.85%, la valeur de  $P(\sigma_{ap} > R)$  augmente et atteint à son maximum (=0.958) pour un cristal dont la teneur en oxyde de plomb est 20.2 %. Ensuite, la valeur de  $P(\sigma_{ap} > R)$  diminue jusqu'à son minimum (=0.531) pour un cristal dont la teneur en oxyde de plomb est 2.88%.

## 12.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la fiabilité du cristal à partir de la théorie statistique et la probabilité mentionnées dans le chapitre précédent. Nous avons considéré deux termes : « Résistance » et « Chargement ». Dans notre cas, « Résistance » est la contrainte maximale sous chargement dynamique présentée à partir de la loi de Normale, « Chargement » étant la contrainte induite par le choc thermique obtenue à partir de la méthode des éléments finis.

Nous avons proposé deux hypothèses :

-1. La valeur du coefficient de variation ( $CV=0.22$ ) obtenue à partir de l'essai dynamique est identique à celle de la contrainte appliquée :

l'hypothèse 1 permet de calculer la valeur de l'écart type en considérant la contrainte maximale comme la valeur moyenne pour le chargement. Le calcul théorique de la variation du coefficient de dilatation thermique en fonction de la teneur en oxyde de plomb permet d'obtenir à nouveau la contrainte induite par le même choc thermique à partir de la simulation. En considérant que cette valeur est une valeur moyenne, l'application de l'hypothèse 1 permet d'obtenir la variation de la densité de probabilité du chargement en fonction de la teneur en oxyde de plomb,

-2. Le rapport entre la valeur de la contrainte maximale moyenne en statique et en dynamique est une constante :

l'hypothèse 2 permet de calculer la valeur moyenne de la résistance du cristal en fonction de la teneur en oxyde de plomb à partir de la valeur théorique de la résistance statique.

Dans notre cas, le critère de rupture se situe sur la zone d'intersection entre la densité de probabilité « Résistance » et « Chargement ». Ainsi, la probabilité de rupture  $P$  varie de 0 à 1. Si  $P$  atteint la valeur 1, nous pouvons considérer que la probabilité de rupture est une certitude. D'après notre calcul, nous avons obtenu une valeur de  $P$  de 0.958. Ce qui est le maximum pour un cristal qui contient 20.2% d'oxyde de plomb.

# Chapitre 13

## Conclusion IV

Dans notre cas, deux hypothèses ont été proposées pour estimer la résistance du cristal soumis à un choc thermique à partir des paramètres statistiques présentés précédemment.

La première hypothèse consiste à trouver la distribution Normale pour le chargement thermique. Autrement, l'égalité entre la valeur de la variation du coefficient de chargement thermique et de la résistance dynamique. C'est une constante qui représente la dispersion des données autour de la valeur moyenne. Cette constante est aussi appliquée pour trouver la variation de la distribution Normale pour le chargement thermique en fonction de la teneur en oxyde de plomb. En effet, la variation du chargement thermique vient du changement de la valeur du coefficient de dilatation thermique, ce dernier étant lié à la réduction de la teneur en oxyde de plomb. Ceci présente les mêmes origines du problème.

La deuxième hypothèse est de trouver la variation de la distribution Normale pour la résistance en fonction de la teneur en oxyde de plomb. Le concept de la « loi de Student » est appliqué pour trouver le rapport entre la valeur statique et la valeur dynamique. Ce rapport correspond à la constante  $C^*$ . Ensuite, nous avons supposé que la valeur de  $C^*$  est identique pour chaque teneur en oxyde de plomb.

Le critère de rupture est représenté par la zone d'intersection entre la distribution Normale pour la résistance dynamique et le chargement thermique obtenu précédemment. D'après les calculs, le cristal qui contient 20.2% d'oxyde de plomb présente la probabilité de rupture la plus élevée.

## Cinquième partie

### Synthèse

---

## Synthèse

« L'estimation de la fiabilité de la résistance mécanique du cristal soumis à un choc thermique » a été effectuée dans le but tout d'abord d'une contribution à l'avancement de la recherche scientifique et aussi du fait de l'intérêt industriel pour les cristalliers.

Dans le domaine de la recherche, ce travail permet de relier le domaine thermique et mécanique par le biais d'une approche probabiliste et statistique, l'approche déterministe n'étant pas convenable pour estimer la durée de service du matériau. D'autre part, on constate dans la littérature, l'absence d'influence de la vitesse du chargement thermique sur l'accroissement de la résistance du matériau verre sous le chargement dynamique.

Egalement, les caractéristiques mécaniques très dispersives du matériau verre ne permettent pas d'avoir une valeur exacte de sa résistance. Ceci demande une analyse statistique qui est souvent négligée pour la conception des matériaux et des structures par les mécaniciens.

Le comportement mécanique du cristal a été obtenu à l'aide d'essais : statique (Instron) et dynamique (Barre d'Hopkinson). Aussi les résultats des essais nous ont permis de mettre en évidence le comportement linéaire élastique jusqu'à rupture brutale et aléatoire sous chargement statique et dynamique.

L'utilisation de l'échantillon « disque Brésilien » perforé au centre nous permet de comprendre les différents processus de rupture par fendage en statique et par multi-fragmentation en dynamique et de constater l'accroissement de la résistance du cristal quand il est soumis à un chargement rapide par rapport à un chargement statique.

En imaginant le cas d'un choc sévère avec une valeur du nombre de Biot égale à 25, nous avons obtenu la contrainte induite par choc thermique à l'aide de la simulation de la méthode des éléments finis dans un cylindre creux (bien évidemment, les caractéristiques physiques et mécaniques du cylindre sont identiques à celles utilisées pour les essais mécaniques). Nous avons également obtenu la distribution des contraintes dues au même choc thermique par la méthode analytique tout en gardant la même condition aux limites, les caractéristiques physiques et mécaniques et la géométrie identiques à celles du cristal utilisé pour la simulation. Ce résultat de calcul montre bien que la contrainte du choc thermique a un

---

caractère dynamique avec une forme d'onde.

Etant donné le caractère fragile du cristal, l'approche statistique a été choisie pour estimer la résistance du cristal soumis à un choc thermique et sa variation théorique en fonction de la teneur en oxyde de plomb. C'est pourquoi nous avons établi deux distributions de densité de la loi Normale : l'une représente la «Résistance» à savoir la résistance du cristal sous chargement dynamique, l'autre représente le «Chargement» à savoir la contrainte induite par le choc thermique. Le critère de rupture du cristal est défini par la zone d'intersection entre les deux distributions. La variation des deux distributions en fonction de la teneur en oxyde de plomb a été trouvée à partir du coefficient de dilatation thermique et de la valeur de résistance statique du cristal qui varient en fonction de la teneur en oxyde de plomb, remplacé par l'oxyde de sodium. D'après notre analyse, le cristal contenant 58% d'oxyde de silice, 28.88% d'oxyde de plomb, 5.42% d'oxyde de sodium et 6.73% d'oxyde de potassium, présente une valeur de probabilité de rupture équivalent à  $P = 0.623$ . Quand au cristal qui contient 58% d'oxyde de silice, 20.2% d'oxyde de plomb, 14.09% d'oxyde de sodium et 6.73% d'oxyde de potassium, il présente une probabilité maximale de rupture équivalent à  $P=0.958$ .

Nous avons abordé le problème de la résistance mécanique du cristal soumis à un choc thermique en diminuant la teneur en oxyde de plomb et en remplaçant l'oxyde de plomb par de l'oxyde de sodium. Nous avons négligé l'effet de la diminution de l'indice de réfraction qui donne la brillance du cristal. Ceci signifie une perte de brillance initiale du cristal qui contient plus d'oxyde de plomb. Car, notre travail est axé uniquement sur la variation de la résistance du cristal. Il n'en va pas de même pour les cristalliers qui prendront en compte l'effet de la variation de la résistance et de la perte de brillance selon la teneur en oxyde de plomb. Lors de cette étude, l'augmentation de la résistance du cristal selon la vitesse de chargement a été vérifiée à l'aide des essais. En revanche, les contraintes dues aux chocs thermiques ont été obtenues de manière purement théorique. Il est donc fortement recommandé de réaliser l'essai du choc thermique. Une manière d'affiner le résultat de mes recherches concernant la vitesse de chargement dans le domaine dynamique et thermique consisterait à partir du temps à redéfinir et à relier la sévérité du choc thermique au temps de rupture dynamique.

**Sixième partie**  
**Annexes et Bibliographie**



# Annexe A

## Théorie du transfert thermique

### A.1 Notion de base

Dans l'étude thermique, les notions de chaleur « $Q$ », le flux de chaleur « $\Phi$ » et de la densité de flux de chaleur « $J$ » sont primordiales.

La chaleur « $Q$ » est une forme d'énergie exprimée en joule (J) dans le système international. La température « $T$ » est la manifestation de la chaleur stockée. On utilise souvent le degré « Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) » de telle sorte qu'une variation de température de  $1^{\circ}\text{C}$  est égale à une variation de température de 1K. Une variation de la chaleur stockée « $\delta Q$ » dans un matériau entraîne une variation de température « $\delta T$ ». S'il n'y a pas de changement de phase, par unité de volume, on a la relation suivante :

$$\delta Q = \rho C \delta T \quad (\text{A.1})$$

où  $\rho$  et  $C$  sont respectivement la masse volumique ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) et la capacité calorifique ( $\text{J}/\text{kg.K}$ ).

Le flux de chaleur « $\Phi$ » est la quantité de chaleur qui traverse une surface par unité de temps. Dans le système international, l'unité est le watt « $W$ ».

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{A.2})$$

La densité de flux de chaleur « $\vec{J}$ » est la quantité de chaleur qui traverse une surface unité par unité de temps. L'unité est le watt par mètre carré ( $W/\text{m}^2$ ).

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = \int_s \vec{J} dS \quad (\text{A.3})$$

A la surface de séparation de deux milieux, il y a continuité de la température « T » et de la densité de flux «  $\vec{J}$  ».

## A.2 Bilan d'énergie

On considère un volume « v » de matériau entouré par une surface fermée « S ». A l'intérieur du volume, il peut y avoir la production de chaleur. Cette production de chaleur est traduite par la puissance thermique P ( $W/m^3$ ). La chaleur produite peut également sortir du volume. Si on néglige les changements de phase traduits par une chaleur latente de liquéfaction ou de vaporisation, on peut faire le bilan d'énergie par unité de temps :

$$\int_v P dv = \int_v \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dv + \int_S \vec{J} d\vec{S} \quad (A.4)$$

En utilisant le théorème de la divergence, on peut écrire :

$$\int_v P dv = \int_v \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dv + \int_v \text{div} \vec{J} d\vec{S} \quad (A.5)$$

On peut écrire le bilan d'énergie sous une forme locale :

$$P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \vec{J} \quad (A.6)$$

Les échanges de chaleur peuvent être réalisés à partir de 3 modes différents : la conduction, la convection et le rayonnement. Le phénomène de l'échange de chaleur par la conduction est décrit par la « Loi de Fourier » :

$$\vec{J} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} \quad (A.7)$$

où  $\lambda$  est le coefficient de conductivité thermique ( $W/m.K$ ) et  $\overrightarrow{\text{grad}T}$ <sup>1</sup> est un gradient de température.

La loi de Fourier permet d'écrire la relation entre la densité de flux de chaleur et la température. On peut reporter cette loi dans le bilan d'énergie sous forme locale (Equation A.6) et on obtient :

<sup>1</sup>pour une fonction scalaire f (x,y,z), le gradient de f est une fonction du vecteur ainsi  $\text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$  avec i, j et k comme vecteurs unité

$$P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) \quad (\text{A.8})$$

Lorsque le coefficient de conductivité thermique est uniforme<sup>3</sup> alors :

$$P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \nabla^2 T \quad (\text{A.9})$$

### A.3 Résistance thermique

#### Résistance thermique de contact :

Le contact entre deux solides rugueux n'est jamais parfait. La discontinuité de la nature des matériaux entraîne une perturbation dans le champ de température. Il existe entre les deux une couche d'air (en général) dont l'épaisseur est très variable. On peut définir la résistance thermique de contact pour qu'il y ait conservation du flux de chaleur :

$$R = \frac{\Delta T}{\Phi} \quad (\text{A.10})$$

#### Couche limite entre solide et fluide :

Quand on considère une paroi en contact avec un fluide, la mécanique des fluides indique qu'il existe au voisinage de la paroi une «couche limite» due à la convection. L'épaisseur de cette couche est en général très difficile à évaluer car elle dépend de nombreux paramètres. Il existe également au voisinage de la paroi un gradient thermique important. Le flux de chaleur dans cette couche limite est proportionnel à la surface d'échange «  $S$  » et à la différence de température  $T_p - T_f$  entre la paroi et le fluide (Figure A.1). Pour traduire l'échange de chaleur, on écrit la «loi de Newton» :

$$\Phi = hS(T_p - T_f) \quad (\text{A.11})$$

où  $h$  est le coefficient de transfert superficiel (ou coefficient de convection) qui s'exprime en  $W.m^{-2}.K^{-1}$ .

Lorsque le mouvement du fluide est imposé (convection forcée), le coefficient «  $h$  » ne dépend pas de la température. La proportionnalité entre flux de chaleur et la différence de température n'est plus vérifiée lorsque la convection est libre. Le coefficient  $h$  est très difficile à évaluer. On peut préciser les ordres de grandeur :

<sup>2</sup>pour une fonction de vecteur  $v(x,y,z)$ ,  $\text{div } v = \nabla * v = \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) * (v_1 i + v_2 j + v_3 k)$

<sup>3</sup>Cette hypothèse suppose en fait que  $\lambda$  est indépendant de la température  $T$

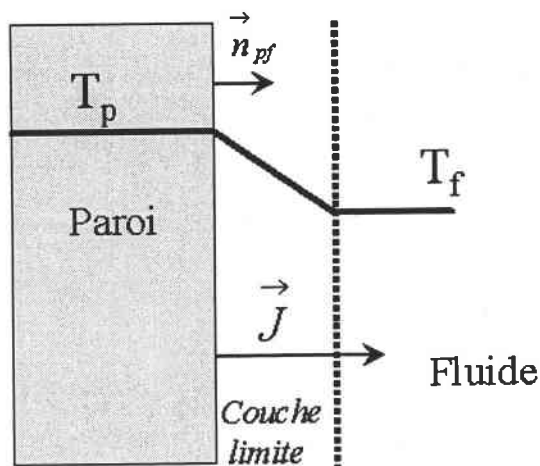


FIG. A.1 – Couche limite

-convection naturelle :  $5 < h < 10^3 \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

-convection forcée :  $10 < h < 10^5 \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

On peut définir la résistance thermique de la couche limite :

$$R_{cl} = \frac{T_p - T_f}{\Phi} = \frac{1}{hS} \quad (\text{A.12})$$

### Conduction en régime non permanent :

Compte tenu de ce que l'on appelle dans le langage courant l'inertie thermique, la température dans un système, si elle varie dans le temps, ne peut le faire que très lentement. Les deux nombres adimensionnels «nombre de Biot» et «nombre de Fourier» souvent utilisés permettent de trouver aisément la distribution de la température dans le temps.

### Nombre de Biot :

On peut toujours définir une longueur  $L$  caractéristique d'un système. Pour un mur, par exemple, cette longueur dépend de l'épaisseur. Pour un système à une dimension, à l'interface située en «  $x_0$  » entre une paroi et un fluide, la «continuité du flux de chaleur» doit être assurée. Pour une unité de surface, on a :

$$\Phi_s = \Phi_f \quad (\text{A.13})$$

$$J * S = h * S(T_s - T_f) \quad (\text{A.14})$$

$$-\lambda(\text{grad}T) = h * S(T_s - T_f) \quad (\text{A.15})$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_0} = h * S(T_s - T_f) \quad (\text{A.16})$$

Si on effectue le changement de variable  $\bar{x} = x/L$ , cette relation devient :

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{x}}\right)_{\bar{x}_0} = h * S(T_s - T_f) \quad (\text{A.17})$$

On montre ainsi que le rapport «  $hL/\lambda$  » est un nombre sans dimension. C'est le « nombre de Biot » noté  $B$  :

$$B = \frac{hL}{\lambda} \quad (\text{A.18})$$

#### Nombre de Fourier :

D'autre part, l'équation de la chaleur (Equation A.6, p.127), dans le cas d'un système à une dimension s'écrit :

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.19})$$

Avec le même changement de variable que précédemment, on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} = \frac{L^2}{D} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.20})$$

Ceci montre que le rapport  $Dt/L^2$  est sans dimension. On définit ainsi le « nombre de Fourier » :

$$F_0 = \frac{Dt}{L^2} \quad (\text{A.21})$$

Celui-ci est proportionnel au temps. Les deux notions non dimensionnelles « Nombre de Biot » et « Nombre de Fourier » sont pratiques pour obtenir la variation de température dans le régime transitoire

# Annexe B

## Chargement par train d'ondes

### B.1 Equation fondamentale du mouvement

L'analyse de la propagation de l'onde de compression appliquée à un élément « $dx$ » se fait à partir d'une théorie d'équilibre mécanique et la « loi de Hooke » (Figure B.1).

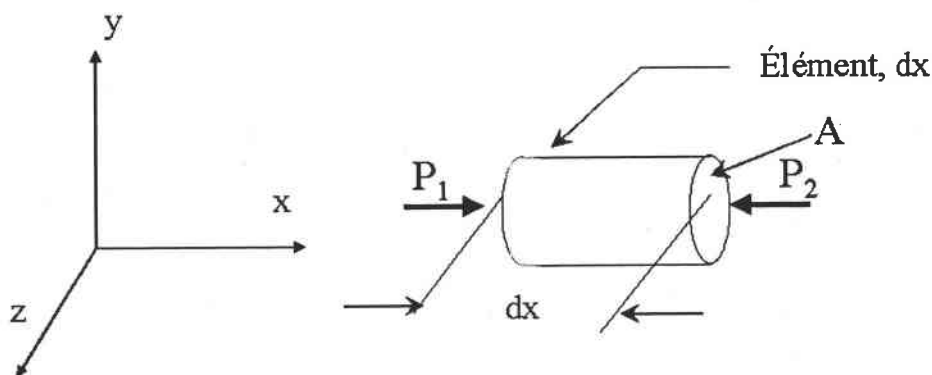


FIG. B.1 – Présentation d'un élément « $dx$ » soumis à un chargement dynamique compressif

A partir de l'hypothèse que la barre a un comportement élastique parfait,<sup>1</sup> nous avons deux forces compressives  $P_1$  et  $P_2$  appliquées sur la surface  $A$ . La Figure B.1 présente la force uni-axiale en compression appliquée sur la surface  $A$  d'un élément « $dx$ ». En conséquence, nous avons déduit l'équation d'équilibre suivante :

<sup>1</sup>Cette hypothèse permet d'appliquer la loi de Hook « $\sigma = E\epsilon$ »

$$P_1 = P_2 \quad (\text{B.1})$$

$$AE \frac{\partial u_1}{\partial x} = -AE \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (\text{B.2})$$

où  $\frac{\partial u_1}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u_2}{\partial x}$  représentent les déformations de l'élément « dx ».

L'expression ci-dessus peut s'écrire à nouveau en appliquant la « loi de Newton » :

$$\sum F = ma \quad (\text{B.3a})$$

$$AE \frac{\partial u_1}{\partial x} - AE \frac{\partial u_2}{\partial x} = A\rho dx \frac{d^2 u_1}{dt^2} \quad (\text{B.3b})$$

où  $\rho$  est la densité de la barre,  $\frac{d^2 u_1}{dt^2}$  est l'accélération de la particule dans le matériau, E est le module élastique. Supposons que le matériau est homogène dans la surface A :

$$C^2 \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] = \frac{d^2 u_1}{dt^2} dx \quad (\text{B.4})$$

où  $C = \sqrt{E/\rho}$ .

L'équation B.4 représente une relation fondamentale de mouvement pour l'élément « dx ». A partir de l'expression du déplacement «  $u_1$  », «  $u_2$  » peut être défini comme :

$$u_2 = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} * dx \quad (\text{B.5})$$

Encore,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} * dx \quad (\text{B.6})$$

En application de l'équation B.5 et B.6 dans l'équation fondamentale de mouvement (Equation B.4), nous avons une autre expression :

$$C^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{d^2 u_1}{dt^2} \quad (\text{B.7})$$

L'expression B.7 représente une équation de mouvement simplifiée pour un élément « dx » qui est homogène, soumis à une déformation axiale et uniforme. Cette expression est utilisée pour simplifier la relation entre la contrainte appliquée dans l'échantillon et sa déformation.

## B.2 Onde de contrainte dans l'échantillon

Supposons d'abord que l'échantillon est en équilibre avant d'appliquer le chargement uni-axiale (Figure B.2).

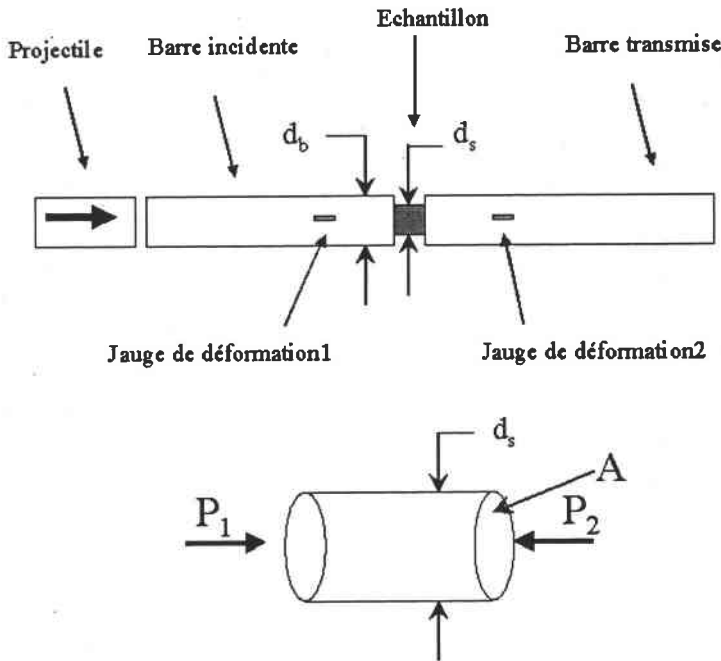


FIG. B.2 – Présentation de l'échantillon cylindrique soumis à une compression uni-axiale dans le dispositif de « Barre d'Hopkinson »

Dans la Figure B.2, les forces «  $P_1$  » et «  $P_2$  » proviennent du contact entre la barre incidente et transmise et l'échantillon. «  $d_b$  » et «  $d_s$  » représentent le diamètre de la barre et celui de l'échantillon. Ces deux forces dans l'échantillon sont compressives et variables en fonction du temps pendant le chargement et le déchargement de l'échantillon.

Ces deux forces «  $P_1$  » et «  $P_2$  » peuvent être exprimées à partir de l'onde incidente, réfléchie et transmise qui sont obtenues et analysées à l'aide des jauges de déformation. En conséquence, nous avons l'expression :

$$P_1 = E[\epsilon_I(t) + \epsilon_R(t)] \frac{\pi d_b^2}{4} \quad (\text{B.8})$$

$$P_2 = E[\epsilon_T(t)] \frac{\pi d_b^2}{4} \quad (\text{B.9})$$



Dans l'équation B.8 et B.9, «  $\epsilon_I(t)$  » représente le signal de déformation dans la barre incidente, «  $\epsilon_R(t)$  » étant celui dans la barre de réflexion et «  $\epsilon_T(t)$  », celui dans la barre de transmission.

D'un autre côté, nous avons la valeur moyenne des contraintes «  $\sigma_m$  »<sup>2</sup> appliquées dans l'échantillon :

$$\sigma_m(t) = \frac{(P_1(t) + P_2(t))/2}{A} \quad (\text{B.10a})$$

$$= \frac{P_1(t) + P_2(t)}{2 * \frac{\pi d_s^2}{4}} \quad (\text{B.10b})$$

Pour développer une expression "plus pratique", les contraintes moyennes appliquées dans l'échantillon doivent être réécrites à partir de l'histoire des déformations «  $\epsilon_I(t)$  », «  $\epsilon_T(t)$  » et «  $\epsilon_R(t)$  ». En mettant l'équation B.8 et B.9 dans les contraintes moyennes, nous avons une autre expression :

$$\sigma_m(t) = \frac{E d_b^2}{2 d_s^2} [\epsilon_I(t) + \epsilon_R(t) + \epsilon_T(t)] \quad (\text{B.11})$$

En rappelant l'hypothèse que la déformation dans l'échantillon est uni-axiale et uniforme, la déformation totale dans la barre incidente (=  $\epsilon_I + \epsilon_R$ ) doit être égale à la déformation totale dans la barre transmise (=  $\epsilon_T$ ).

$$\epsilon_I(t) + \epsilon_R(t) = \epsilon_T(t) \quad (\text{B.12})$$

L'application de l'équation B.12 dans l'équation B.11, conduit à l'expression :

$$\sigma_m(t) = E \epsilon_T(t) \frac{d_b^2}{d_s^2} \quad (\text{B.13})$$

Autrement dit, les contraintes moyennes appliquées dans l'échantillon sont proportionnelles à la déformation totale dans la barre transmise.

---

<sup>2</sup> $\sigma = \frac{P}{A}$

# Annexe C

## Résolution analytique sur un cylindre

Considérons un cylindre creux soumis à un changement de température.

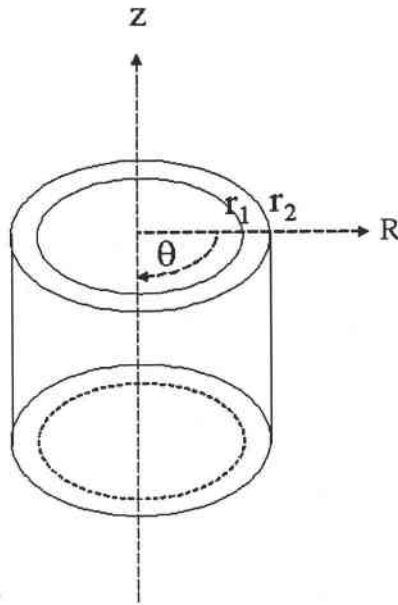


FIG. C.1 – Géométrie d'un cylindre creux

Dans notre cas, nous travaillons à température réduite pour simplifier le problème.

$$\theta(r, t) = \frac{T(r, t) - T_f}{T_i - T_f} \quad (C.1)$$

d'où «  $T_i$  » température initiale, «  $T_f$  » température finale. A partir de l'équation de transfert de chaleur (voir p. 128), en négligeant la source interne, nous avons dans un régime transitoire pour un cylindre l'équation de transfert de chaleur suivante :

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = k \nabla^2 \theta \quad (C.2)$$

avec

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{\partial r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}}_{=0} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (C.3)$$

Dans notre étude, nous nous limiterons au cas où les paramètres «  $\rho$  », «  $c$  », «  $k$  » ne dépendent ni de la température, ni du milieu. Nous négligeons également l'échange thermique à l'intérieur et au bord du cylindre.

Le principe du calcul est le même que pour la plaque infini, ainsi, l'équation de transfert thermique aux dérivées partielles est résolue par la méthode « Séparation des Variables » :

$$\theta(r, t) = \Psi(r) * \Gamma(t) \quad (C.4)$$

En introduisant cette expression dans l'équation du transfert thermique (Equation C.2) :

$$\frac{1}{\Psi(r)} \Delta \Psi(r) = \frac{1}{a} \frac{1}{\Gamma(t)} \frac{d\Gamma(t)}{dt} \quad (C.5a)$$

$$= -\lambda^2 \quad (C.5b)$$

avec  $a = k/\rho c$ .

D'abord, nous définissons la condition initiale (Equation C.6) et les conditions aux limites (Equation C.7 et C.8) :

$t=0$  :

$$\theta(r, 0) = 1 \quad (C.6)$$

$r=r_1$  :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad (C.7)$$

$r=r_2$  :

$$-k \frac{\partial \Psi}{\partial t} = h \Psi(r) \quad (\text{C.8})$$

La solution de  $\Gamma(t)$  a été obtenue auparavant (voir Equation 2.20, p. 40).  
L'équation spatiale s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \Psi(r)}{\partial (r)^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r)}{\partial r} + \lambda \Psi(r) = 0 \quad (\text{C.9})$$

Cette équation peut avoir une solution de « fonction de Bessel » en utilisant la transformation,  $s = \lambda r$

$$s^2 \frac{d^2 \Psi}{ds^2} + s \frac{d\Psi}{ds} + s^2 \Psi = 0 \quad (\text{C.10})$$

Et encore :

$$\Psi(s) = AJ_0(s) + BY_0(s) \quad (\text{C.11})$$

$$\Psi(\lambda r) = AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r) \quad (\text{C.12})$$

où  $J_0$  et  $Y_0$  sont respectivement des « fonctions de Bessel de 1<sup>me</sup> et 2<sup>me</sup> ordre ».

A partir de la condition aux limites  $r = r_1$  :

$$-AJ_1(\lambda r_1) - BY_1(\lambda r_1) = 0 \quad (\text{C.13})$$

A partir de la condition aux limites  $r = r_2$  :

$$-k[-\lambda AJ_1(\lambda r_2) - \lambda BY_1(\lambda r_2)] = h[AJ_0(\lambda r_2) + BY_0(\lambda r_2)] \quad (\text{C.14})$$

Encore :

$$k\lambda AJ_1(\lambda r_2) + k\lambda BY_1(\lambda r_2) - hAJ_0(\lambda r_2) - hBY_0(\lambda r_2) = 0 \quad (\text{C.15})$$

A partir de la valeur du déterminant obtenue à partir de l'équation C.13 et C.15, nous en déduisons la valeur de  $\lambda$  :

$$\begin{vmatrix} J_1(\lambda r_1) & Y_1(\lambda r_1) \\ k\lambda J_1(\lambda r_2) - hJ_0(\lambda r_2) & (k\lambda Y_1(\lambda r_2) - hY_0(\lambda r_2)) \end{vmatrix} = 0$$

La valeur de  $\lambda_n$  est de :

$$[k\lambda Y_1(\lambda r_2) - hY_0(\lambda r_2)]J_1(\lambda r_1) - [k\lambda J_1(\lambda r_2) - hJ_0(\lambda r_2)]Y_1(\lambda r_1) = 0 \quad (C.16)$$

Nous avons la valeur du coefficient « B » à partir de l'équation C.13 :

$$B = -A \frac{J_1(\lambda_n r_1)}{Y_1(\lambda_n r_1)} \quad (C.17)$$

Nous avons donc la solution de l'équation C.12 en utilisant l'équation C.17 :

$$\Psi(\lambda_n r) = A \left[ J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n r_1)}{Y_1(\lambda_n r_1)} Y_0(\lambda_n r) \right] \quad (C.18)$$

La solution générale de l'équation transfert thermique (Equation C.4) s'écrit alors :

$$\theta(r, t) = A \int_{r_2}^{r_1} \exp^{-\lambda_n^2 at} \left[ J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n r_1)}{Y_1(\lambda_n r_1)} Y_0(\lambda_n r) \right] \quad (C.19)$$

L'utilisation des propriétés octogonales des fonctions propres (voir équation 2.38, p.43) permet d'obtenir la valeur A.

La propriété octogonale de « fonction de Bessel » :

$$\int r J_n(\lambda_{np} r) J_n(\lambda_{nq} r) dr = 0 \quad p \neq q \quad (C.20)$$

Nous obtenons la valeur du coefficient A à partir de la condition initiale  $\theta(r, 0) = A\Psi(\lambda_n r) = 1$  :

$$A = \frac{\int_{r_2}^{r_1} r \Psi(\lambda_n r) dr}{\int_{r_2}^{r_1} r \Psi(\lambda_n r) \Psi(\lambda_m r) dr} \quad (C.21)$$

avec  $m = n$ .

# Bibliographie

- [1] . *Technique de l'ingénieur vol. AF4, fascicule A 238.*
- [2] **H. Cho, G.A. Kardomateas.** Thermal shock stresses dues to heat convection at a bounding surface in a thick orthotropic cylindrical shell. *International Journal of Solids and Structures*, 2001.
- [3] **A. Degiovanni.** Transfert de chaleur. *Cours de 2ème année de l'Ecole Européenne d'Ingénieurs en Génie des Matériaux*, 2000-2001.
- [4] **A. Dragon, F. Hild, L. Rota.** Modélisation du comportement et de la rupture des matériaux sous sollicitations dynamiques. *Mec. Ind.*, 2000, 521-537.
- [5] **A. Nyoungue.** Comportement à la rupture des matériaux fragiles sous sollicitation dynamiques applicationsur le verre. *Thèse doctorat, Université de Metz*, 2001.
- [6] **A. Nyoungue, Z. Azari, G. Pluvinage.** Chronologie de la rupture statique et dynamique d'un anneau en verre float. *XVème Congrès Français de Mécanique*, 2001, 3-7 Septembre.
- [7] **A.G. Griffith.** The phenomena of rupture and flow in solid. *Philo. Trans. Roy. Soc. London A 221*, 1920, 163-193.
- [8] **A.R. Boccaccini, R.D. Rawlings, I. Dlouhy.** Reliability of the chevron-notch technique for fracture toughness determination in glass. *Material Sciences and Engineering*, 2003.
- [9] **A.R. Boccaccini, R.D. Rawlings, I. Dlouhy.** Reliability of the chevron-notch technique for fracture toughness determination in glass. *Materials Science and Engineering*, (2003).
- [10] **Bouزيد.** Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Jour. of Applied Mechanics*, n° 24, 1957, 361-364.
- [11] **C.E. Feddersen.** Evaluation and prediction of the residual strength of center cracked tension panels. *American Society for Testing and Materials*, 1971, 50-78.
- [12] **Creager.** Elastic field equation for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking. *Inter. Jour. of Fract. vol 3*, 1967, 247-252.

- 
- [13] **D. Hopkinson.** A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosive or by the impact of bullets. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 213, 1914, 437-452.
- [14] **F. Hild, X. Brajer, P. Forquin, R. Gy.** The role of surface and volume defects in the fracture of glass under quasi-static and dynamic loadings. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 2003, 42-53.
- [15] **F.A. Veer, A. Van den Berg, M.M.A. Van der Sluijs.** The strength of glass. *ECF14, Fracture Mechanics Beyond, vol3*, 2000, 503-510.
- [16] **G. Baillargeon.** Introduction au calcul des probabilités. *Les éditions SMG.*
- [17] **G. Pluvinage.** Cours de DEA 'mécanique de la rupture elasto-plastique. (2000).
- [18] **G.A. Kardomateas.** Transient thermal stresses in cylindrical orthotropic composite tubes. *Journal of Applied Mechanics ASME* 56, 1989.
- [19] **G. Pluvinage, V.T. Sapounov.** Résistance et conception de la sécurité pour les matériaux composites. *XV<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, (2001).
- [20] **G.R. Irwin.** Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Jour. of Applied Mechanics*, n° 24, 1957, 361-364.
- [21] **J. Gong.** Indentation toughness of ceramics : statistical analysis. *Ceramics International* 28., 2002, 767-772.
- [22] **J. Renault.** Formulaire de probabilité et de statistiques. *DUNOD, Paris*, (1992), 127-130.
- [23] **J. Tinschert, D. Zvez, R. Marx, K.J. Anusavice.** A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Dentistry*, 2000, 529-535.
- [24] **J. White.** Some general considerations on thermal shock. *Symposium on Thermal shock*, 1958.
- [25] **J. Zarzycki.** Les verres et l'état vitreux. *Edit. Masson*, 1982, pp. 301-303.
- [26] **J.M.C. Duhamel.** Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides. *Mémoires... de l'institut de France*, V, 1838, 440.
- [27] **Jorn M. Sonnergaard.** Distribution of crushing strength of tablets. *European Journal of Pharmaceutics and Biopharmaceutics* 53, (2002), 353-359.
- [28] **K. Protassov.** Analyse statistique des données expérimentales. *EDP science*, (2002), 75-100.
- [29] **L. Ninan, J. Tsai, C.T. Sun.** Use of split hopkinson pressure bar for testing off-axis composites. *International Journal of Impact Engineering*, 2001, 291-313.
- [30] **M. Di Sciuva, D. Lomario.** A comparison between monte carlo and formes in calculating the reliability of a composite structure. *Composite Structures* 59, (2003), 155-162.

- 
- [31] **P. Peigne.** Resistance aux choc thermiques des ceramiques thermo-mécaniques. *Thèse de doctorat, L'institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, (1991), p.31.
- [32] **Patrick D.T. O'connor.** Practical reliability engineering. *John Wiley and sons Ltd*, (1985), 101-120.
- [33] **R. Dekioug.** Etude et relation de l'influence de la vitesse de déformation sur la dimension fractale et sur la ténacité dans le cas d'un polycarbonate. *Thèse doctorat, Université de Mets*, 1997, 72-83.
- [34] **R. Tuler, M. Butcher.** A criterion for the time dependance of dynamic fracture. *The International Journal of Fracture Mechanics, vol4*, 1968, December.
- [35] **S. Bouzid, A. Nyoungue, Z. Azari, G. Pluinage.** Fracture criterion for glass under impact loading. *International journal of impact engineering*, 2001, 831-845.
- [36] **S. Rahman, J.S. Kim.** Probabilistic fracture mechanics for nonlinear structures. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, (2001),261-269.
- [37] **Steven David Swantek.** An optical method of strain measurement in the split hopkinson pressure bar. *Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute*, (2000), p.27.
- [38] **Thomas Nilsen et al.** Practical reliability engineering. *John Wiley and sons Ltd*, (1985), 101-120.
- [39] **W. M. Palin, G. J. P. Fleming, P. M. Marquis .** An evaluation of the mechanical properties of hydrothermal dental glass after immersion and surface polishing. *Dental Materials Volume 19,*, (2003), March.
- [40] **W. Weibull.** A statistical distribution function of wide applicability. *Jour. of Appl. Mech.*, 1951, 437-452.
- [41] **W.D. Kingery.** Factors affecting thermal stress resistance of ceramic materials. *Journal of American Ceramic Society*, january 1955.
- [42] **X. He, S.O. Oyadiji.** Application of coefficient of variation in reliability-based mechanical design and manufacture. *Journal of Materials Processing Technology 119*, (2001).
- [43] **Y. Hiramatus, Y. Oka.** *Proceeding for second congress of Inter. Society of Rock*, 1970, 190-206.
- [44] **Zude Feng, Jae Rho, Seung Han, Israel Ziv .** Orientation and loading condition dependence of fracture toughness in cortical bone. *Materials Science and Engineering*, (2000).



*Le développement de la science et la maîtrise des conditions matérielles ont apporté un degré de confort et de bonheur extérieur très élevé ; c'est certainement excellent, mais ces progrès scientifiques et technologiques n'empêchent pas l'esprit de rester dans la méconnaissance de lui-même et d'être, de ce fait, conditionné et affligé de nombreuses manières, par la souffrance, la frustration et l'angoisse.*

*Kalou Rinpoché, "La voie du Bouddha selon la tradition tibétaine"*