Traitement des signaux à échantillonnage irrégulier : application au suivi temporel de paramètres cardiaques

Ludovic Fontaine

▶ **To cite this version:**

Ludovic Fontaine. Traitement des signaux à échantillonnage irrégulier : application au suivi temporel de paramètres cardiaques. Informatique [cs]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1999. Français. NNT : 1999INPL127N . tel-01749909

HAL Id: tel-01749909
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749909

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

136019409 9

99 INPL 127 N

Institut National Polytechnique de Lorraine
Ecole Doctorale IAE+M
DFD Automatique et Production Automatisée
Centre de Recherche en Automatique de Nancy

[T] 1999 FONTAINE. L.

THESE

Présentée pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

Spécialité Automatique et Traitement Numérique du Signal

par

Ludovic FONTAINE

(ingénieur E.N.S.E.M.)

Traitement des signaux à échantillonnage irrégulier Application au suivi temporel de paramètres cardiaques

Soutenue publiquement le 30 novembre 1999 devant la commission d'examen

Président :	D. WOLF	Professeur à Metz (ENIM), directeur de recherche à Nancy (INPL)
Rapporteurs :	J. DUCHENE	Professeur à Troyes (UTT)
	G. GIMENEZ	Professeur à Lyon (INSA)
Examinateurs :	E. ALIOT	Professeur praticien hospitalier en cardiologie au CHRU de Nancy
	Y. GRANJON	Professeur à Nancy (INPL - EEIGM), directeur de thèse
	J. RAGOT	Professeur à Nancy (INPL - ENSG), co-directeur de thèse
	A. RIPART	Directeur ELA Medical France SA à Paris

CRAN CNRS UPRES-A 7039 - INPL
2, avenue de la Forêt de Haye - F-54516 Vandœuvre-Les-Nancy Cedex
Tel : +33.(0)3.83.59.59.59 - Fax : +33.(0)3.83.59.56.44 - http://www.ensem.u-nancy.fr/CRAN

Remerciements

"On ne voit bien qu'avec le coeur.
L'essentiel est invisible pour les yeux."
LE PETIT PRINCE, 1943

Antoine de SAINT-EXUPÉRY (1900-1944, France)

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Centre de Recherche en Automatique de Nancy, à l'Institut National Polytechnique de Lorraine.

Je tiens tout d'abord à remercier Yves GRANJON pour m'avoir accepté au sein de son équipe de recherche, pour avoir encadré et dirigé mes travaux de recherche, et pour le soutien apporté et la confiance accordée durant ces années.

J'adresse également mes remerciements à José RAGOT dont la présence et la disponibilité m'ont permis de bénéficier d'un encadrement scientifique permanent et dont les nombreux conseils et discussions m'ont permis de progresser.

J'exprime toute ma reconnaissance à Jacques DUCHENE et Gérard GIMENEZ pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, et pour la rigueur scientifique apportée lors des corrections.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Didier WOLF pour avoir présidé mon jury de thèse, à Etienne ALIOT et Alain RIPART pour avoir accepté d'examiner mon mémoire de thèse.

J'adresse mes remerciements à tous les membres du CRAN pour leur aide apportée et l'ambiance donnée à la vie du laboratoire. Je remercie plus particulièrement Edouard YVROUD, Pierre ROUILLION, Gilles MOUROT, Soraya MALLEM, Frédéric JAFFRY, Valérie LOUIS-DORR, Françoise ODILLE-HIRTT et Marjorie SCHWARTZ pour leur participation, leur soutien et leur aide à un moment ou à un autre de ces années de recherche.

J'aurais une pensée particulière à Christelle pour son soutien tout au long de ces années et, plus particulièrement, pour son aide et sa patience lors de la phase de rédaction.

Enfin, je porterais une attention particulière à mes parents à qui j'exprime toute ma reconnaissance, et sans qui je n'aurais pu mener à bien toutes mes études.

A mes Parents

A Christelle

Tables des matières

"Ce n'est pas de vivre selon la science qui procure le bonheur ; ni même de réunir toutes les sciences à la fois, mais de posséder la seule science du bien et du mal."
DIALOGUES DE LA SAGESSE

PLATON (427-347 avant J.-C., Grèce)

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE **1**

CHAPITRE 1ER. COMPRESSION DES SIGNAUX **5**

I. OBJECTIFS DE LA COMPRESSION 7
II. QUALITÉ DE LA COMPRESSION / DÉCOMPRESSION 7
II.1. Taux de compression *7*
II.2. Fidélité de la compression / décompression *8*
III. MÉTHODES DE COMPRESSION 9
III.1. Compression directe des données *9*
III.2. Transformation des données *16*
III.3. Extraction de paramètres *17*
IV. SYNTHÈSE EN VUE DE L'ÉCHANTILLONNAGE À PAS VARIABLE 18

CHAPITRE 2. COMPRESSION PAR LE PRINCIPE DE L'EPV **19**

I. CONTEXTE DE LA COMPRESSION 21
II. TECHNIQUE D'ÉCHANTILLONNAGE À PAS VARIABLE 21
II.1. Méthode EPV *21*
II.2. Algorithme de la méthode d'échantillonnage à pas variable à partir d'un signal échantillonné à pas fixe *22*
II.3. Algorithme de ré-échantillonnage à pas variable *23*
II.4. Paramètre de réglage du seuil d'erreur *24*
II.5. Evaluation de la méthode d'échantillonnage à pas variable *26*
III. COMPARAISON AVEC LES AUTRES MÉTHODES DE COMPRESSION 29
IV. REPRÉSENTATION DU SIGNAL EPV, SYNTHÈSE EN VUE DES TRAITEMENTS 30

CHAPITRE 3. OUTILS DE TRAITEMENT DES SEPV **33**

I. INTRODUCTION 35
II. PRÉSENTATION DE L'ÉCHANTILLONNAGE IRRÉGULIER 35
III. HISTORIQUE 38
III.1. Analyse spectrale *39*
III.2. Reconstruction *41*
III.3. Synthèse des outils disponibles *44*
IV. RECONSTRUCTION D'ÉCHANTILLONS INTERMÉDIAIRES 45
V. OPÉRATIONS SIMPLES 46
VI. STATISTIQUES 46
VII. ANALYSE SPECTRALE PAR TRANSFORMÉE DE FOURIER 50
VIII. FILTRAGE 53
VIII.1. Préambule sur le traitement des SEPV *53*
VIII.2. Chaîne de traitement d'un SEPV *54*
VIII.3. Etude de la pertinence des différents types de filtrage *55*
VIII.4. Filtrage passe-bas du premier ordre *61*
VIII.5. Filtrage passe-bas du deuxième ordre *65*
VIII.6. Filtrage passe-bas et passe-bande d'ordre N par résolution et discrétisation de la représentation d'état *76*
VIII.7. Correction de phase du filtrage *89*
VIII.8. Synthèse sur le filtrage EPV *91*
IX. SYNTHÈSE DES OUTILS DE TRAITEMENT DES SEPV 92

CHAPITRE 4. IDENTIFICATION DE SYSTÈMES À ENTRÉE ET SORTIE EPV 93

I. OBJECTIFS 95
II. PROPOSITION 95
III. MÉTHODE DES FONCTIONS MODULATRICES 96
III.1. Identification d'un système du premier ordre 96
III.2. Identification d'un système général 97
III.3. Application à l'identification de fonctions de transfert 99
IV. MÉTHODE DES MOMENTS 104
IV.1. Identification d'un système du premier ordre 104
IV.2. Application à l'identification d'une fonction de transfert 106
IV.3. Identification d'un système général 107
V. MÉTHODE D'IDENTIFICATION SIMULTANÉE DES PARAMÈTRES ET ÉTATS MANQUANTS 108
V.1. Définition des variables pour un modèle du premier ordre 108
V.2. Définition du critère, estimation du modèle et des échantillons manquants 110
V.3. Application à l'identification d'un système du premier ordre 111
VI. SYNTHÈSE DES MÉTHODES D'IDENTIFICATION 115

CHAPITRE 5. DÉTECTION DES PRINCIPALES ONDES DE L'ECG 117

I. OBJECTIF 119
II. EN VUE DU SUIVI TEMPOREL 119
II.1. Description des ondes de l'ECG 119
II.2. Informations à recueillir 120
III. COMPLEXE QRS 121
III.1. Etapes de la chaîne de traitement 121
III.2. Module de filtrage 128
III.3. Modules de détection des complexes QRS 136
III.4. Résultats 143
III.5. Conclusion sur la détection des complexes QRS 152
IV. ONDES P ET T 152
IV.1. Etat de l'art des méthodes de détection de l'onde T 152
IV.2. Elaboration du détecteur d'onde T 161
IV.3. Surface et énergie des ondes 166
IV.4. Détection de l'onde P 168
IV.5. Conclusion 170
V. SYNTHÈSE SUR LA DÉTECTION DU COMPLEXE QRS ET DES ONDES P ET T 170

CHAPITRE 6. EXTRACTION ET SUIVI TEMPOREL DE PARAMÈTRES CARDIAQUES 171

I. OBJECTIF 173
II. EVOLUTION TEMPORELLE DES PARAMÈTRES DE L'ECG 173
II.1. Définition des paramètres 173
II.2. Suivi des paramètres au cours du temps 176
II.3. Synthèse sur l'évolution des paramètres 188
III. ANALYSE DE L'ECG PAR CORRÉLATIONS ET DÉCOMPOSITIONS 188
III.1. Stationnarité des cycles de l'ECG 188
III.2. Choix de l'intervalle de travail 189
III.3. Normalisation en temps 190
III.4. Normalisation en amplitude 191
III.5. Construction des signaux de référence 192

III.6. Corrélation *194*
III.7. Décomposition d'un battement *194*
III.8. Décomposition des battements d'un ECG *197*
III.9. Synthèse sur la décomposition *201*
IV. SYNTHÈSE SUR LE SUIVI TEMPOREL DES PARAMÈTRES CARDIAQUES 201

CONCLUSION... PERSPECTIVES 203

BIBLIOGRAPHIE 207

I. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES GÉNÉRALES 209
II. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES PERSONNELLES 219
II.1. Colloques nationaux avec comité de lecture et actes *219*
II.2. Colloques internationaux avec comité de lecture et actes *219*

ANNEXES ..... A

I. SEGMENTATION D'ÉLECTROCARDIOGRAMMES PAR RÉSEAU DE MODÈLES LOCAUX C
I.1. Contexte ..... *c*
I.2. Introduction ..... *c*
I.3. Représentation par modèles locaux ..... *d*
I.4. Représentation par un réseau de modèles locaux ..... *g*
I.5. Segmentation d'électrocardiogrammes ..... *k*
I.6. Conclusion ..... *l*
II. L'ÉLECTROCARDIOGRAMME ..... M
II.1. Électrophysiologie du cœur ..... *m*
II.2. Électrocardiogramme ..... *q*
II.3. Arythmies cardiaques ..... *s*

TABLE DES FIGURES

FIGURE I.1 : MÉTHODE FAN 12
FIGURE I.2 : ALGORITHME FAN 13
FIGURE I.3 : RÈGLES D'ADAPTATION DES PENTES RESTRICTIVES 14
FIGURE I.4 : MÉTHODE SAPA 15
FIGURE II.1 : ALGORITHME D'ÉCHANTILLONNAGE À PAS VARIABLE 23
FIGURE II.2 : CR ET PRD EN FONCTION DU NOMBRE D'ÉCHANTILLONS SERVANT À L'ADAPTATION D'ERREUR 25
FIGURE II.3 : CR ET PRD DE QUELQUES ECG 27
FIGURE II.4 : FIDÉLITÉ DE RECONSTRUCTION EN FONCTION DE LA DURÉE DE L'ECG 28
FIGURE II.5 : TAUX DE COMPRESSION EN FONCTION DE LA DURÉE DE L'ECG 28
FIGURE II.6 : COMPARAISON DU CR ET DU PRD DE DIFFÉRENTES MÉTHODES DE COMPRESSION 30
FIGURE III.1 : ORIGINES DES SIGNAUX À ÉCHANTILLONNAGE IRRÉGULIER 35
FIGURE III.2 : SYSTÈME À DÉLIVRANCE D'INFORMATION ALÉATOIRE 36
FIGURE III.3 : SYSTÈME À TRANSMISSION DÉFAILLANTE 36
FIGURE III.4 : SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ IRRÉGULIÈREMENT PAR COMPRESSION ET RECONSTRUIT PAR BLOQUEURS D'ORDRE 0 ET 1 37
FIGURE III.5 : VARIATIONS DE LA PÉRIODE D'ÉCHANTILLONNAGE 37
FIGURE III.6 : DÉCALAGE TEMPOREL DE L'ÉCHANTILLONNAGE RÉGULIER 38
FIGURE III.7 : MÉTHODE GÉNÉRALE DE RECONSTRUCTION D'UN SIGNAL À ÉCHANTILLONS MANQUANTS 42
FIGURE III.8 : RECONSTRUCTION PAR INTERPOLATION LINÉAIRE 45
FIGURE III.9 : OPÉRATION SUR DEUX SIGNAUX APRÈS RECONSTRUCTION PARTIELLE 46
FIGURE III.10 : SIGNAUX GÉNÉRAUX POUR LA COMPARAISON DES MOYENNES ET VARIANCES ... 49
FIGURE III.11 : ALLURE THÉORIQUE DU SPECTRE 52
FIGURE III.12 : SUPERPOSITION DES DEUX SPECTRES 52
FIGURE III.13 : SYSTÈME ÉCHANTILLONNÉ À PAS VARIABLE 54
FIGURE III.14 : CHAÎNE DE TRAITEMENT DES SEPV 55
FIGURE III.15 : CONTOUR DU SPECTRE D'UN SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ 56
FIGURE III.16 : GABARIT D'UN FILTRE PASSE-BAS 56
FIGURE III.17 : GABARIT D'UN FILTRE PASSE-HAUT 57
FIGURE III.18 : GABARIT D'UN FILTRE PASSE-BANDE 58
FIGURE III.19 : GABARIT D'UN FILTRE COUPE-BANDE 58
FIGURE III.20 : ÉCHELON UNITAIRE ET RÉPONSE D'UN FILTRE PASSE-BAS À CET ÉCHELON EN FONCTION DU TEMPS RÉDUIT 59
FIGURE III.21 : FILTRES ANALOGIQUE ET NUMÉRIQUE DU 1^{ER} ORDRE 63
FIGURE III.22 : ZONE TRIANGULAIRE DES COUPLES $\{K_1,K_2\}$ FORMANT LA STABILITÉ 69
FIGURE III.23 : DOMAINE DE TEMPS T_1 ET T_2 POSITIFS VÉRIFIANT LA STABILITÉ 71
FIGURE III.24 : DOMAINE DE TEMPS T_1 ET T_2 POSITIFS ET NÉGATIFS VÉRIFIANT LA STABILITÉ 71
FIGURE III.25 : ZONE LIMITE DE STABILITÉ POUR LES INTERVALLES DE TEMPS POSITIFS 72
FIGURE III.26 : ZONE DE CONVERGENCE MONOTONE DANS LES REPÈRES $\{K_1,K_2\}$ ET $\{T_1,T_2\}$ 74
FIGURE III.27 : FILTRE PASSE-BAS D'ORDRE 3, FC = 20, 50, 100 HZ 81
FIGURE III.28 : FILTRE PASSE-BAS D'ORDRE 3, FC = 20, 50, 100 HZ 82
FIGURE III.29 : FILTRAGE PASSE-BANDE D'ORDRE 5, F_{CH} = 5, 20 HZ ET F_{CB} = 20, 50, 100 HZ ... 85
FIGURE III.30 : FILTRAGE PASSE-BANDE D'ORDRE 5, F_{CH} = 5, 20 HZ ET F_{CB} = 20, 50, 100 HZ ... 85
FIGURE III.31 : FILTRAGE PASSE-BAS D'ORDRE 6 DE TYPE BUTTERWORTH, FC = 10 HZ 87
FIGURE III.32 : FILTRAGE PASSE-BAS D'ORDRE 6 DE TYPE BUTTERWORTH, FC = 10 HZ 87

FIGURE III.33 : FILTRAGE PASSE-BANDE D'ORDRE 3, TYPE BUTTERWORTH, F_0 = 14 HZ, B = 22 HZ 88
FIGURE III.34 : FILTRAGE PASSE-BANDE D'ORDRE 3, TYPE BUTTERWORTH, F_0 = 14 HZ, B = 22 HZ 89
FIGURE III.35 : DIAGRAMMES DE BODE D'UN FILTRE 89
FIGURE III.36 : SIGNAUX D'ENTRÉE ET DE SORTIE, ET DÉCALAGE TEMPOREL 90
FIGURE VI.1 : IDENTIFICATION D'UN SYSTÈME À ENTRÉE ET SORTIE EPV 95
FIGURE IV.2 : SIGNAUX D'ENTRÉE ET DE SORTIE, FONCTIONS MODULATRICES EPF 100
FIGURE IV.3 : PÔLES ET ZÉROS DES FONCTIONS DE TRANSFERT IDENTIFIÉES 103
FIGURE IV.4 : ENTRÉES ET SORTIES PERMETTANT L'IDENTIFICATION, PUIS SORTIES SIMULÉES EN EPF, APRÈS INTERPOLATION ET EN EPV 103
FIGURE IV.5 : IDENTIFICATION SIMULTANÉE (PARAMÈTRES, ÉTATS MANQUANTS), K=0,5 114
FIGURE IV.6 : IDENTIFICATION SIMULTANÉE (PARAMÈTRES, ÉTATS MANQUANTS), SIGNAL D'ENTRÉE BRUITÉ, K=2 115
FIGURE V.1 : ONDES DE L'ÉLECTROCARDIOGRAMME 120
FIGURE V.2 : CHAÎNE GLOBALE DE DÉTECTION DES COMPLEXES QRS 125
FIGURE V.3 : ORGANIGRAMME D'EXTRACTION DE COMPLEXES QRS PAR RECONNAISSANCE DE FORMES 127
FIGURE V.4 : CHAÎNE DE TRAITEMENT DE NOTRE DÉTECTEUR DE COMPLEXES QRS 127
FIGURE V.5 : DISCONTINUITÉ DE LA LIGNE ISOÉLECTRIQUE 129
FIGURE V.6 : SUPERPOSITION DE L'ÉLECTROMYOGRAMME SUR LES 4 PREMIÈRES SECONDES ... 129
FIGURE V.7 : ONDULATIONS DE LA LIGNE DE BASE SUIVANT LA RESPIRATION 130
FIGURE V.8 : SATURATION DU SIGNAL ECG 130
FIGURE V.9 : SPECTRES DES ONDES DE L'ECG ET DES PERTURBATIONS 131
FIGURE V.10 : SPECTRES DE QUELQUES COMPLEXES QRS SUR DEUX ECG 132
FIGURE V.11 : SPECTRES DES COMPLEXES QRS ET FILTRE DE BUTTERWORTH S'Y RAPPROCHANT 133
FIGURE V.12 : GABARIT SPECTRAL DU FILTRE 135
FIGURE V.13 : MODULE DE CALCULS STATISTIQUES 137
FIGURE V.14 : RÈGLES DE DÉCISION SUR DEUX PARAMÈTRES STATISTIQUES 138
FIGURE V.15 : ÉCARTS D'AMPLITUDE AVANT E_{AV} ET APRÈS E_{AP} 139
FIGURE V.16 : RELATION ENTRE A ET S_A 139
FIGURE V.17 : RELATION ENTRE A_M ET A_0 141
FIGURE V.18 : SUIVI DES SIGNAUX EN SORTIE DE CHAQUE MODULE 142
FIGURE V.19 : PERFORMANCES DE DÉTECTIONS DES COMPLEXES QRS SUR LES ECG 147
FIGURE V.20 : COMPARAISON DES PERFORMANCES 150
FIGURE V.21 : INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE FILTRAGE SUR LES PERFORMANCES, ECG203 151
FIGURE V.22 : INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE FILTRAGE SUR LES PERFORMANCES, ECG121 151
FIGURE V.23 : INTERVALLES DE TEMPS EN RAPPORT À L'ONDE T 153
FIGURE V.24 : DÉTECTION DE LA FIN DE L'ONDE T 155
FIGURE V.25 : MODÉLISATION DES INSTANTS REPRÉSENTATIFS DES ONDES P ET T 157
FIGURE V.26 : BANDES SPECTRALES DE L'INTERVALLE QT 158
FIGURE V.27 : INTERVALLES, AMPLITUDE ET SURFACE À QUANTIFIER 162
FIGURE V.28 : FENÊTRE DE RECHERCHE DE LA FIN DE L'ONDE T 163
FIGURE V.29 : LES QUATRE TYPES D'ONDES T COURAMMENT RENCONTRÉES 164
FIGURE V.30 : DÉTERMINATION DES INSTANTS $T_{DÉBUT}$, T_{MAX} ET T_{FIN} (ECG123) 165
FIGURE V.31 : ALGORITHME D'EXTRACTION DES PARAMÈTRES DE L'ONDE T 166
FIGURE V.32 : SURFACE ET ÉNERGIE DU COMPLEXE QRS ET DE L'ONDE T (ECG103) 168
FIGURE V.33 : DÉTECTION DE LA PRÉSENCE OU DE L'ABSENCE DE L'ONDE P (ECG103) 169
FIGURE VI.1 : PARAMÈTRES EXTRAITS SUR CHAQUE CYCLE CARDIAQUE 175

FIGURE VI.2 : ALGORITHME D'OBTENTION DES PARAMÈTRES 176
FIGURE VI.3 : ÉVOLUTION DES PARAMÈTRES DE L'ECG 113 179
FIGURE VI.4 : ÉVOLUTION DES PARAMÈTRES DE L'ECG 202 181
FIGURE VI.5 : ÉVOLUTION DES PARAMÈTRES DE L'ECG 232 183
FIGURE VI.6 : ÉVOLUTION DES PARAMÈTRES DE L'ECG 231 185
FIGURE VI.7 : ÉVOLUTION DES PARAMÈTRES DE L'ECG 114 187
FIGURE VI.8 : STATIONNARITÉ DES CYCLES NORMAUX DE L'ECG 189
FIGURE VI.9 : STATIONNARITÉ DES CYCLES ANORMAUX DE L'ECG 189
FIGURE VI.10 : INTERVALLE RR, ET INTERVALLE 2RR 190
FIGURE VI.11 : NORMALISATION TEMPORELLE DES INTERVALLES RR 191
FIGURE VI.12 : INTERVALLES RR NORMALISÉS EN TEMPS ET AMPLITUDE, ET CONCATÉNATION DE DEUX INTERVALLES RR 192
FIGURE VI.13 : RÉFÉRENCES D'UN BATTEMENT NORMAL ET D'UN BATTEMENT VENTRICULAIRE PRÉMATURÉE 193
FIGURE VI.14 : ALGORITHME DE LA DÉCOMPOSITION 197
FIGURE VI.15 : DÉCOMPOSITION SUR LA BASE $\{F^N,F^V\}$ 198
FIGURE VI.16 : DÉCOMPOSITION SUR LES BASES $\{F^N,F^V\}$ ET $\{F^N,F^A\}$ 200
FIGURE A.1 : SIGNAL APPROXIMABLE PAR $(N+1)$ SEGMENTS ..... E
FIGURE A.2 : ALGORITHME ITÉRATIF D'ESTIMATION DES PARAMÈTRES ..... J
FIGURE A.3 : SEGMENTATION DE BATTEMENTS NORMAUX ..... K
FIGURE A.4 : SEGMENTATION DE BATTEMENTS NORMAUX ET ANORMAUX L
FIGURE A.5 : POTENTIEL DE REPOS ET POTENTIEL D'ACTION D'UNE CELLULE ..... N
FIGURE A.6 : CELLULES CARDIAQUES À ACTIVITÉ AUTOMATIQUE ..... O
FIGURE A.7 : CELLULES ÉLECTRIQUES PROVOQUANT L'ACTIVITÉ CARDIAQUE ..... P
FIGURE A.8 : ONDES DE L'ÉLECTROCARDIOGRAMME ..... S

TABLE DES TABLEAUX

TABLEAU II.1 : COMPARAISON DU CR ET DU PRD DE DIFFÉRENTES MÉTHODES DE COMPRESSION 29
TABLEAU III.1 : COMPARAISON DES STATISTIQUES 49
TABLEAU IV.1 : IDENTIFICATION PAR LA MÉTHODE DES MOMENTS 107
TABLEAU V.1 : ARYTHMIES RENCONTRÉES DANS LES ECG 144
TABLEAU V.2 : PERFORMANCES DE DÉTECTION DES COMPLEXES QRS PAR TYPE D'ARYTHMIE 146
TABLEAU V.3 : PERFORMANCES DE DÉTECTIONS DES COMPLEXES QRS SUR LES ÉLECTROCARDIOGRAMMES 147
TABLEAU VI.1 : STATISTIQUES DES PARAMÈTRES DE L'ECG 113 178
TABLEAU VI.2 : STATISTIQUES DES PARAMÈTRES DE L'ECG 202 180
TABLEAU VI.3 : STATISTIQUES DES PARAMÈTRES DE L'ECG 232 182
TABLEAU VI.4 : STATISTIQUES DES PARAMÈTRES DE L'ECG 231 184
TABLEAU VI.5 : STATISTIQUES DES PARAMÈTRES DE L'ECG 114 186
TABLEAU VI.6 : BASES DE DÉCOMPOSITION 195
TABLEAU VI.7 : VALEURS THÉORIQUES DES COEFFICIENTS 199

Introduction générale

"Puisqu'on ne peut être universel et savoir tout ce qu'on peut savoir sur tout, il faut savoir un peu de tout. Car il est bien plus beau de savoir quelque chose de tout, que de savoir tout d'une chose ; cette universalité est la plus belle."
PENSÉES

Blaise PASCAL (1623-1662, France)

La compression des signaux et leur traitement numérique jouent un rôle important de nos jours, dans différents domaines, surtout si nous désirons transmettre des informations ou les stocker. Certains systèmes ne fournissent des informations qu'à des intervalles de temps irréguliers. D'autres ne conservent d'un signal que les échantillons les plus représentatifs dans le but de réduire la quantité d'informations à enregistrer et / ou à transmettre. Au cours de ces dernières décades, des méthodes de décompression et ré-échantillonnage ont vu le jour, afin de travailler sur les signaux originaux après reconstruction. Une manière originale de traiter de tels signaux échantillonnés irrégulièrement est de prendre en compte la principale caractéristique de ces signaux, à savoir l'intervalle de temps variable entre deux échantillons consécutifs.

Les travaux présentés dans ce mémoire montrent des traitements réalisés sur des signaux compressés lorsque ceux-ci sont stockés — et, par conséquent, disponibles — sous la forme d'un couple {temps, amplitude}. Nous développerons alors divers outils classiques en traitement numérique du signal, ceux-ci pouvant être appliqués directement à des signaux échantillonnés irrégulièrement, sans avoir recours à une reconstruction totale des signaux originaux. Les principaux thèmes abordés sont les opérations simples, les statistiques, l'analyse spectrale, le filtrage, l'identification et la décomposition.

Une application de ces outils à l'extraction d'informations dans le signal biomédical qu'est l'électrocardiogramme sera ensuite proposée. En effet, le recueil de l'électrocardiogramme sur une très longue durée permet au cardiologue d'isoler des événements rares, et la détection d'une pathologie peut être plus pertinente lorsque l'analyse de l'électrocardiogramme est effectuée sur une longue durée issue d'enregistrement par système Holter. Or, le stockage de cet enregistrement nécessite une importante place mémoire ; et la compression permet de la réduire. Mais cette compression nécessite, quant à elle, une décompression de manière à ce que le signal soit traité ultérieurement par les outils classiques en traitement numérique. Par conséquent, nous suggérons de réaliser une compression particulière de l'électrocardiogramme fournissant ainsi un signal à échantillonnage irrégulier. Ceci permettra alors d'utiliser les outils élaborés pour de tels signaux en vue de déterminer diverses informations sur chaque battement cardiaque. Ensuite, l'évolution de l'ensemble de ces informations sera envisagée au cours du temps, et une continuité en terme de fusion pour l'interprétation et le diagnostic sera proposée.

Ainsi, l'originalité du travail exposé dans ce mémoire réside dans le traitement direct des signaux à échantillonnage irrégulier en ayant développé des outils adaptés.

Le premier chapitre expose diverses méthodes de compression des signaux en commençant par rappeler les critères de qualités liés à la compression. Les techniques de compression avec pertes d'informations permettent de réduire la quantité de mémoire nécessaire au stockage des données, sans trop altérer le signal. Parmi les catégories de méthodes de compression, se situe la compression directe des données utilisant le principe de redondance sur les échantillons du signal. La méthode FAN semble intéressante pour l'objectif fixé en traitement des signaux à échantillonnage irrégulier, et c'est pourquoi elle sera plus particulièrement décrite.

La méthode de compression par le principe de l'échantillonnage à pas variable sera exposée au cours du deuxième chapitre. Basé sur la méthode FAN, un algorithme de compression alliant taux de compression et qualité du signal compressé sera élaboré. Après avoir décrit le principe de la compression dite d'échantillonnage à pas variable, nous la comparerons aux autres méthodes de compression, et formulerons une représentation particulière du signal compressé de manière à pouvoir le traiter de telle sorte par la suite.

Le troisième chapitre, important de part sa taille et de part les outils qui y sont présentés, est composé majoritairement de trois parties. Après une présentation, dans la première partie, des différentes formes d'échantillonnage irrégulier, nous considérons qu'un signal échantillonné irrégulièrement peut se mettre sous la forme d'une suite de couples {temps, amplitude} pouvant alors être ainsi traité. L'historique sur les traitements déjà réalisés sur de tels signaux nous mènera à stipuler, dans une deuxième partie, qu'il existe un large choix de méthodes de reconstruction / ré-échantillonnage des signaux, mais que les outils classiques en traitement du signal semblent pour l'instant inexistants. Par conséquent, dans une troisième partie, seront développés des outils s'appliquant directement à des signaux échantillonnés à pas variable, dont les grandes catégories sont les opérations simples, les statistiques, l'analyse spectrale et le filtrage. Divers outils de chacune de ces catégories seront alors exposés.

Le thème de l'identification sera abordé dans le quatrième chapitre. Nous proposerons trois méthodes d'identification d'un système ayant des entrée et sortie échantillonnées irrégulièrement.

Le cinquième chapitre montre comment les outils théoriques développés dans le chapitre trois peuvent s'appliquer à des signaux échantillonnés à pas variable, afin de les manipuler, de les traiter, et d'en extraire des informations. Nous nous intéresserons ici à l'application sur le signal électrocardiographique. Les informations à extraire en vue d'en suivre ultérieurement l'évolution temporelle, seront inventoriées. Puis, l'extraction des complexes QRS, et des ondes

P et T sera détaillée en utilisant les outils développés précédemment. Les méthodes de détection utilisées feront lieu d'une synthèse préalable à celles rencontrées dans la littérature. A l'issu de ces extractions, nous aurons à disposition un certain nombre d'instants caractéristiques pour chaque battement cardiaque, permettant de définir divers paramètres (temps, amplitude, énergie, forme...).

A partir des instants extraits précédemment et des informations quantifiées (temps, amplitude, énergie, forme), nous établirons, dans la première partie du sixième chapitre, une liste de paramètres dont l'évolution temporelle permettrait de déceler des dysfonctionnements dans l'activité électrique du cœur. Leurs évolutions seront suivies au cours du temps afin de détecter des ruptures. Dans un deuxième temps, nous exposerons une méthode de décomposition de chaque cycle cardiaque sur des bases de battements de références, toujours en travaillant sur les électrocardiogrammes échantillonnés à pas variable. Cette méthode s'apparente à une reconnaissance de forme. L'évolution au cours du temps des coefficients de la décomposition sera observée. Dans une dernière partie, une méthode de fusion de l'ensemble des paramètres permettant d'interpréter en terme d'arythmie chacun des battements cardiaques sera proposée.

Nous tenons à souligner certaines parties innovantes et originales. Tout d'abord, l'algorithme de compression par échantillonnage à pas variable, présenté dans le chapitre 2, permet de ne conserver d'un signal que ses échantillons représentatifs. Puis, la manière particulière de représenter les signaux échantillonnés irrégulièrement par un couple {temps, amplitude} permet de développer des outils de traitement sans reconstruire le signal original, comme nous l'exposons à partir du cinquième paragraphe du chapitre 3. L'identification exposée dans le chapitre 4 et la décomposition exposée dans le chapitre 6 viennent s'ajouter à la liste des outils. Enfin, nous montrons, dans le chapitre 5, qu'avec de tels outils conçus pour des signaux échantillonnés à pas variable, il est possible de traiter et extraire des informations dans des signaux comme l'électrocardiogramme.

Ce mémoire s'achève par une conclusion où quelques perspectives de futures recherches sont évoquées.

En annexe, une méthode de segmentation d'électrocardiogrammes par réseaux de modèles locaux a été ajoutée. Cette méthode semble prometteuse et mériterait d'être étendue à des signaux échantillonnés irrégulièrement, afin d'effectuer les analyses sur un modèle mathématique et non sur un signal bruité.

Chapitre I

Compression des signaux

"Science sans conscience n'est que ruine dans l'âme."
PANTAGRUEL

François RABELAIS (1494-1553, France)

CHAPITRE 1ER. COMPRESSION DES SIGNAUX 5

I. OBJECTIFS DE LA COMPRESSION 7

II. QUALITÉ DE LA COMPRESSION / DÉCOMPRESSION 7

II.1. Taux de compression 7

II.2. Fidélité de la compression / décompression 8

III. MÉTHODES DE COMPRESSION 9

III.1. Compression directe des données 9

III.2. Transformation des données 16

III.3. Extraction de paramètres 17

IV. SYNTHÈSE EN VUE DE L'ÉCHANTILLONNAGE À PAS VARIABLE 18

I. Objectifs de la compression

Le stockage des signaux numériques demande une importante place en mémoire dès lors que la durée du signal augmente. La compression de données consiste à utiliser le principe de redondance afin de ne conserver que les éléments utiles du signal et de les stocker de manière à ce qu'ils soient contenus dans un espace plus réduit que le signal original.

Nous nous intéressons dans un premier temps aux critères de qualité du signal compressé que sont le taux de compression et la fidélité du signal reconstitué. Nous détaillerons alors les méthodes de compression avec pertes de données pouvant s'appliquer, entre autre, à des électrocardiogrammes. Nous nous attacherons plus particulièrement à la méthode FAN qui servira au développement de la méthode de compression dite d'échantillonnage à pas variable, que nous exposerons par la suite.

II. Qualité de la compression / décompression

Deux variables permettent principalement de quantifier la qualité d'une compression, à savoir le taux de compression et la fidélité du signal reconstruit par rapport au signal original.

II.1. Taux de compression

Le taux de compression[1] (CR = Compression Rate) donne le gain de place réalisé entre le stockage du signal original et celui du signal compressé [Furth, 1988] [Kulkarni, 1997] [Sateh, 1990]. Il est habituellement défini comme le rapport de la quantité d'information du signal original sur la quantité d'information du signal compressé. Deux définitions sont couramment utilisées.

Dans le premier cas, le taux de compression est en rapport avec la quantité d'information stockée en bits, soit :

$$CR = \frac{\text{nombre de bits nécessaires au stockage du signal original}}{\text{nombre de bits nécessaires au stockage du signal compressé}}. \qquad \text{(I-1)}$$

[1] Nous avons pris le sigle anglais CR couramment rencontré dans la littérature. Dans la suite du mémoire, ce sigle désignera toujours le taux de compression, et non le produit de deux variables.

Dans le deuxième cas, le taux de compression est en rapport avec le nombre d'échantillons stockés, soit :

$$CR = \frac{\text{nombre d'échantillons du signal original}}{\text{nombre d'échantillons du signal compressé}}. \quad \text{(I-2)}$$

Un taux de compression supérieur à 1 signifie qu'un gain de place est réalisé, tandis qu'un taux de compression inférieur à 1 signifie que le signal compressé prend plus de place que celui d'origine. Un taux de compression égal à 1 signifie qu'aucune compression n'a été réalisée.
La première définition, au sens de la quantité d'information stockée en nombre de bits, permet une quantification du taux de compression plus juste, mais elle nécessite la connaissance du codage de chaque échantillon. Dans la suite, nous utiliserons la deuxième définition concernant le nombre d'échantillons puisque nous nous intéresserons au traitement des échantillons des signaux plutôt qu'au codage et au stockage des signaux compressés.

II.2. Fidélité de la compression / décompression

La fidélité permet de savoir si la reconstruction du signal, après compression, est très proche du signal original ou bien si des déformations et distorsions sont apparues. La fidélité[2] est communément définie par la différence au sens des moindres carrés entre le signal original x_{org} et le signal reconstruit x_{rec}, ramenée à un pourcentage, soit le *PRD* (Percent Root-mean-square Difference) [Kulkarni, 1997] [Sateh, 1990] [Furth, 1988] [Abenstein, 1982].

$$PRD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_{org}(i) - x_{rec}(i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} x_{org}^2(i)}} \times 100 \quad \text{(I-3)}$$

N est le nombre d'échantillons contenus dans chacun des signaux x_{org} et x_{rec} ; i représente l'indice du $i^{ème}$ échantillon de ces signaux. Plus le *PRD* est proche de 0 %, plus le signal reconstruit est fidèle à l'original. La fidélité peut aussi être considérée par le taux de corrélation entre x_{org} et x_{rec}, mais celui-ci n'est pas particulièrement utilisé dans la littérature sur la compression d'électrocardiogrammes.

[2] Le sigle anglais PRD vient lui aussi de la littérature et représentera toujours la fidélité de reconstruction dans la suite du mémoire. Il ne s'agit donc pas d'un produit de trois variables.

III. Méthodes de compression

Il existe deux types de méthodes de compression de données : les méthodes sans perte et celles avec pertes. Les méthodes de compression sans perte de données sont utilisées lorsque l'on veut que les données reconstruites à partir des données compressées soient rigoureusement identiques aux données originales. Le *PRD* est nul alors que le taux de compression est supérieur à 1. Dans le cas des méthodes de compression avec pertes d'information, les données reconstruites ne sont pas forcément identiques aux données d'origines, mais l'objectif est qu'elles s'en rapprochent le plus possible. Le *PRD* n'est donc plus nul.

Dans le cas de la compression d'électrocardiogrammes que nous examinerons par la suite, il n'est pas nécessaire d'utiliser une méthode de compression sans perte car beaucoup de parasites comme le bruit sont bien souvent inutiles à conserver. Nous ne nous intéresserons donc pas aux méthodes de compression de données sans perte d'information.

Les méthodes de compression de données avec pertes sont classées en trois catégories : la compression directe des données, la transformation des données, et l'extraction de paramètres [Sateh, 1990] [Cardenas, 1999]. Nous allons maintenant examiner chacune des trois catégories avec les principaux algorithmes de compression s'y rattachant.

III.1. Compression directe des données

La compression directe des données est basée sur la détection de redondance dans l'analyse directe du signal au cours du temps. Un nombre successif d'échantillons voisins est examiné et des méthodes de prédiction et d'interpolation sont utilisées afin de déterminer les échantillons redondants. Lorsque le signal est compressé, on peut reconstruire un signal d'origine approximé par un processus inverse à celui établissant la compression. Parmi les méthodes de compression directe d'ECG les plus courantes, on distingue les méthodes AZTEC, AZTEC modifié, TP, CORTES, FAN, SAPA et DPCM. Remarquons que ces méthodes ont été développées pour la compression d'ECG mais qu'elles peuvent majoritairement s'appliquer à tout type de signaux. Examinons chacune d'elles.

III.1.a. AZTEC

La méthode AZTEC (Amplitude Zone Time Epoch Coding) [Cox, 1968] possède un bon taux de compression (CR=10) mais elle provoque trop de discontinuités et de distorsions lors de la reconstruction, particulièrement aux ondes P et T (PRD=28%). L'aspect visuel n'est pas

acceptable à la vue des cardiologues [Kulkarni, 1997] [Sateh, 1990] [Furth, 1988] [Abenstein, 1982].

La segmentation du signal se fait en lignes horizontales (plateaux) et en pentes. Les lignes horizontales sont produites sur le principe de l'interpolation d'ordre zéro dont le niveau d'erreur est fixé au départ. L'information est codée par l'amplitude et le nombre d'échantillons de la ligne horizontale. Une pente est sélectionnée à chaque fois que le nombre d'échantillons pouvant former un plateau est inférieur à trois. La pente est codée par sa durée en nombre d'échantillons et l'amplitude du dernier point.

III.1.b. AZTEC modifié

Cette technique de compression est une modification de l'algorithme AZTEC [Furth, 1988]. Le niveau d'erreur de l'interpolateur d'ordre zéro est adapté selon les variations du signal. Le calcul de paramètres statistiques (moyenne, écart type et moment d'ordre 3) permet de ré-estimer le niveau d'erreur à chaque pas d'échantillonnage. Cette technique donne un meilleur compromis entre le taux de compression (CR=7) et la fidélité de reconstruction du signal [Kulkarni, 1997].

III.1.c. TP

La méthode TP (Turning Point) [Mueller, 1978] consiste à analyser la tendance du signal sur trois échantillons (un échantillon de référence et deux échantillons consécutifs) et à stocker un échantillon de chacune des paires d'échantillons consécutifs, ceci dépendant de l'échantillon préservant la tendance de la pente. Les extremums relatifs pour lesquels la pente du signal change, sont retenus. Le taux de compression est fixe (CR=2) puisque l'on conserve un échantillon sur deux. L'algorithme TP a été développé à l'origine dans le but de réduire la fréquence d'échantillonnage d'un signal ECG de 200 Hz à 100 Hz sans diminuer l'amplitude du complexe QRS. Le signal reconstruit est quasi identique au signal original, sur lequel ont été ajoutés quelques distorsions (PRD=5,3%). Un inconvénient de la méthode TP réside dans le fait que les échantillons sauvegardés sont espacés d'intervalles de temps irréguliers, mais ils sont considérés comme étant espacés d'intervalles de temps constants lors de la reconstruction du signal. En itérant ce processus de compression, on obtient un taux de compression de $2N_I$, N_I étant le nombre d'itérations [Kulkarni, 1997] [Sateh, 1990] [Furth, 1988] [Abenstein, 1982].

III.1.d. CORTES

La méthode CORTES (COordinate Reduction Time Encoding System) est une méthode hybride faisant intervenir les méthodes AZTEC et TP [Abenstein, 1982]. La méthode AZTEC est utilisée pour les régions proches de la ligne isoélectrique (potentiel électrique du cœur au repos) et la méthode TP pour les régions comprenant des fréquences plus élevées (complexe QRS). Le choix de l'une ou l'autre méthode se fait en comparant la longueur d'un segment déterminé par la méthode AZTEC, à une longueur de référence. Si la longueur du segment est supérieure à la référence, alors on procède au stockage par la méthode AZTEC sinon par la méthode TP. Un marqueur est utilisé pour les transitions entre les deux méthodes. Seules les lignes horizontales de la méthode AZTEC sont générées, les pentes ne sont pas utilisées. Le taux de compression (CR=4,8) et la fidélité (PRD=7%) sont aussi fonctions des deux méthodes [Furth, 1988] [Kulkarni, 1997] [Sateh, 1990].

III.1.e. FAN

La méthode FAN est basée sur l'interpolation du premier ordre avec deux degrés de liberté [Sateh, 1990] [Saxena, 1997]. [Gardenhire, 1965a 1965b] a originellement décrit la méthode, et plusieurs applications ont été apportées [Davisson, 1967] [Dipersio, 1985] [Pollard, 1987]. Le nom FAN (de l'anglais "éventail") a été donné par la forme d'éventail en étoile formée par les lignes entre le point d'origine et les points suivants. Le signal est approximé par une suite de polynômes d'ordre 1, ce qui revient à dire que le signal est défini par une suite de segments de droite. L'algorithme détermine la ligne la plus longue entre le point de départ et le point final afin que tous les échantillons intermédiaires soient compris dans une marge de tolérance ε spécifiée. Deux pentes, supérieure et inférieures (p_s et p_i) — associés aux droites D_{S1} et D_{I1} —, sont calculées entre l'échantillon d'origine (à l'instant t_0) et l'échantillon courant (à l'instant t_1) auquel on ajoute la marge de tolérance ($\pm\varepsilon$). A l'instant courant (t_1), la droite supérieure D_{S1} passe alors par un point dont l'amplitude est ε supérieure à l'amplitude de l'échantillon courant, tandis que la droite inférieure D_{I1} passe par un point dont l'amplitude est ε inférieure à l'amplitude de l'échantillon courant. Si l'échantillon suivant (à l'instant t_2) se situe à l'intérieur de la zone délimitée par les deux droites, alors de nouvelles droites supérieure et inférieure (D_{S2} et D_{I2}) sont déterminées entre l'échantillon d'origine (à l'instant t_0) et le nouvel échantillon courant (à l'instant t_2) auquel on ajoute la marge de tolérance ($\pm\varepsilon$). Les pentes de ces nouvelles droites (D_{S2} et D_{I2}) sont comparées aux pentes (p_s et p_i) des droites précédemment stockées (D_{S1} et D_{I1}) et les pentes des droites encadrant le plus restrictivement

l'échantillon courant sont retenues (pentes des droites D_{S1} et D_{I2} dans le cas de l'exemple montré sur la figure I.1). Les pentes supérieure et inférieure (p_s et p_i) contiennent alors les coefficients directeurs des droites encadrant l'échantillon courant. On répète cette méthode en comparant l'amplitude des échantillons successifs suivants aux pentes restrictives. Lorsqu'un échantillon se situe en dehors de la zone délimitée par les pentes restrictives, l'échantillon précédant immédiatement l'échantillon courant est sauvegardé et considéré comme nouvel échantillon d'origine.

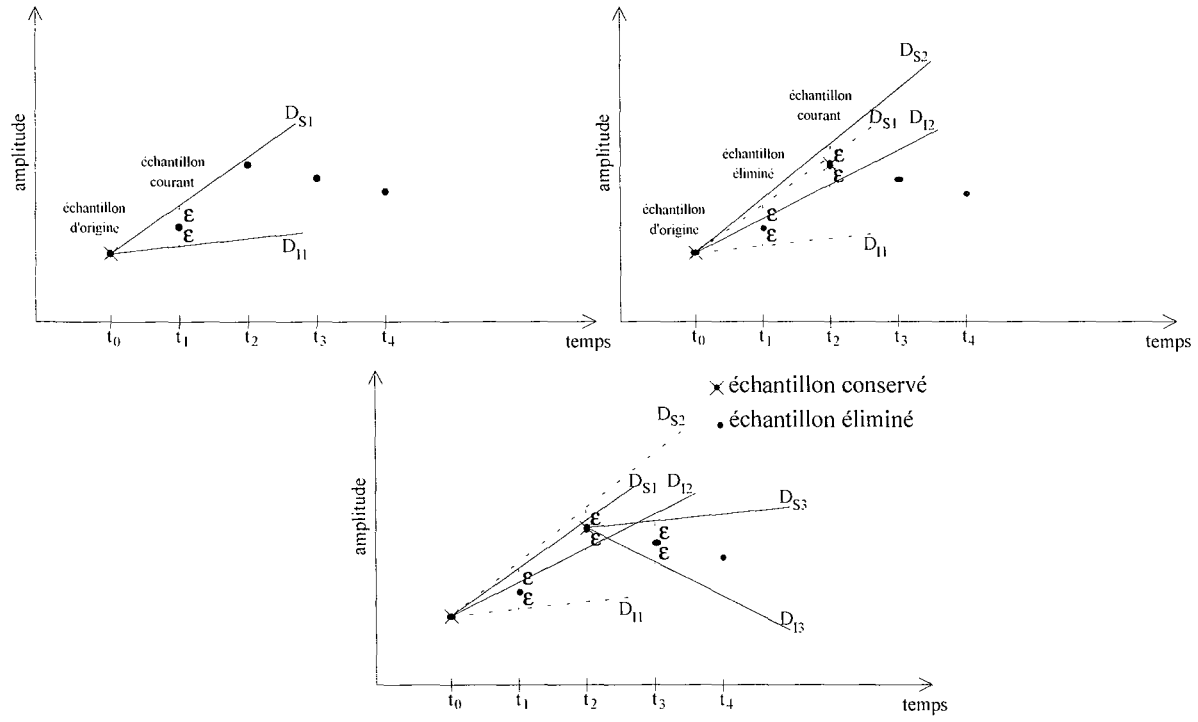


Figure I.1 : méthode FAN

La méthode FAN étant à la base de l'algorithme de compression qui sera développé dans le chapitre 2, nous exposons ici son algorithme. Considérons le signal $x(t)$ échantillonné à la fréquence F_e, que nous désirons échantillonner irrégulièrement et ainsi obtenir le signal[3] $\breve{x}(\breve{t})$. Le signal $x(t)$ est composé de N échantillons $x(1)$ à $x(N)$. La figure I.2 représente l'algorithme FAN dont les variables sont les suivantes :

i : échantillon du signal $x(t)$

k : échantillon du signal $\breve{x}(\breve{t})$

N : nombre d'échantillons contenus dans le signal $x(t)$

[3] Dans la suite du mémoire, le symbole $\breve{}$ au dessus d'une variable désignera toujours une variable échantillonnée irrégulièrement.

p : pente courante entre l'échantillon $x(i)$ et l'échantillon $\breve{x}(k)$

p_s : pente restrictive supérieure

p_i : pente restrictive inférieure

p_t : pente permettant la mise à jour des pentes restrictives supérieure p_s et inférieure p_i

ε : seuil positif adaptatif de l'erreur

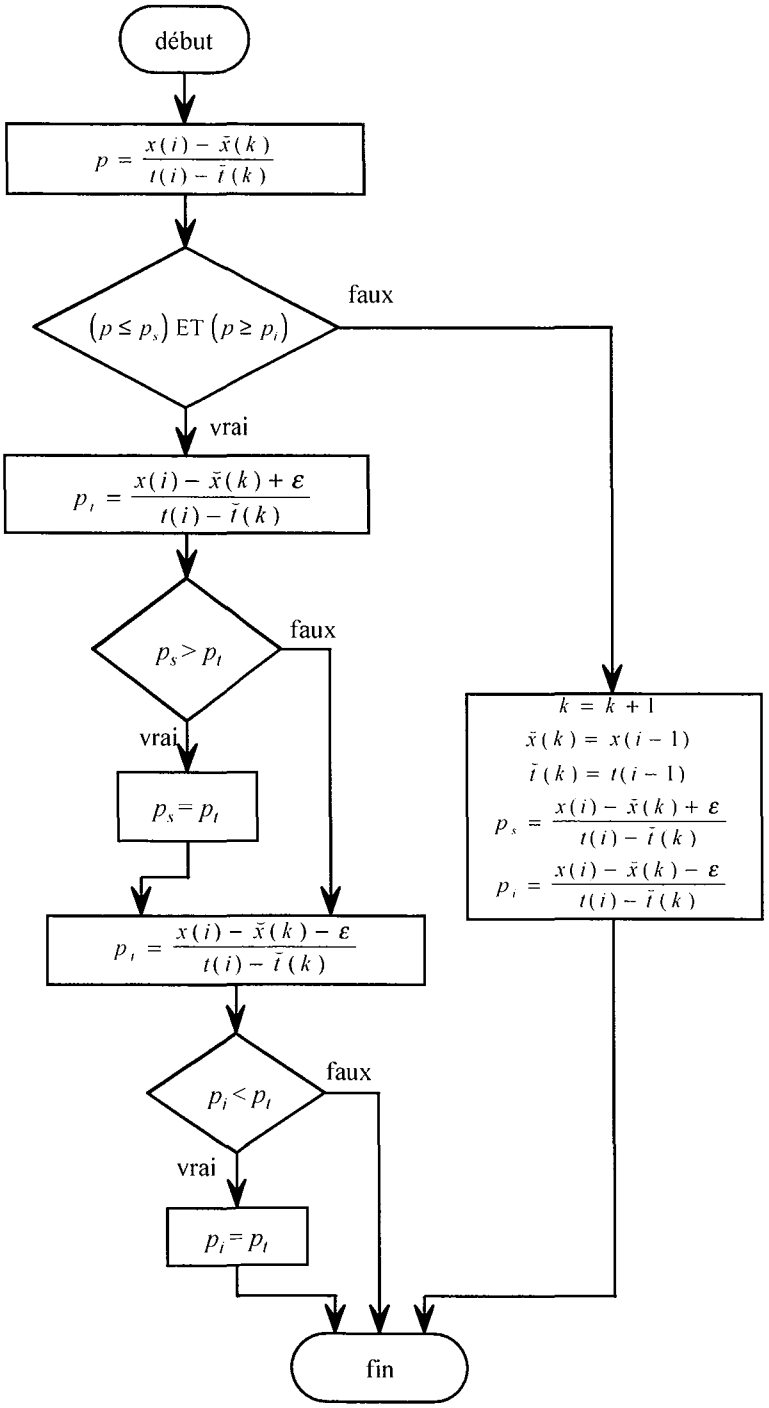


Figure I.2 : algorithme FAN

L'initialisation de l'algorithme FAN est :

$$\breve{t}(1) = t(1),\ \breve{x}(1) = x(1)$$
$$i = 3,\ k = 1$$
$$p_s = \frac{x(2) - \breve{x}(1) + \varepsilon}{t(2) - \breve{t}(1)}$$
$$p_i = \frac{x(2) - \breve{x}(1) - \varepsilon}{t(2) - \breve{t}(1)}$$

Ensuite, l'algorithme FAN commence par calculer la pente courante. Si celle-ci se situe dans l'intervalle délimité par les pentes inférieure et supérieure, alors on procède à l'adaptation des pentes restrictives et l'échantillon courant n'est pas conservé. Si tel n'est pas le cas, on conserve alors l'échantillon courant et les pentes restrictives sont réinitialisées.

Afin de mieux cerner l'adaptation des pentes restrictives p_s et p_i, la figure I.3 montre, d'une part, l'adaptation de la pente restrictive supérieure p_s en fonction de la pente courante p et du seuil d'erreur ε, et, d'autre part, l'adaptation de la pente restrictive inférieure p_i. On note p_{s0} et p_{i0} l'initialisation des pentes supérieure et inférieure lors de la consevartion d'un échantillon et la mise en place d'un nouvel échantillon d'origine. On pose $\Delta = \frac{\varepsilon}{t(i) - te(k)}$.

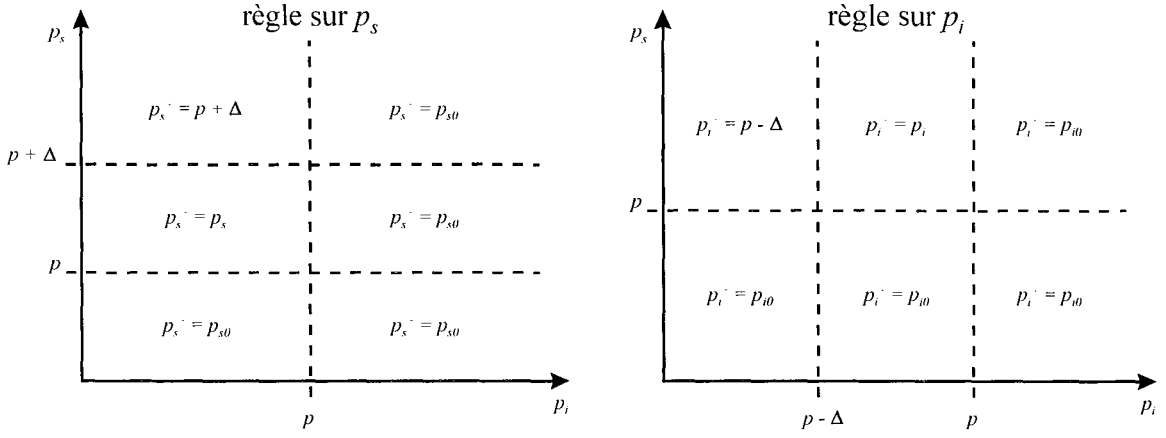


Figure I.3 : règles d'adaptation des pentes restrictives

A la reconstruction, les échantillons retenus sont reliés par des segments de droites (interpolation linéaire d'ordre 1). La méthode FAN fournit de bonnes performances, que ce soit au niveau du taux de compression (CR=3) ou au niveau de la fidélité (PRD=4%). Des comparaisons entre la méthode FAN et d'autres méthodes, d'une part, et des tests sur la robustesse de la méthode FAN, d'autre part, ont été réalisés et ont montré que la méthode FAN donnait les meilleures performances, tant sur des ECG de synthèse que sur des ECG

réels, offrant ainsi un bon compromis entre le taux de compression et l'erreur de reconstruction [Blanchard, 1985] [Dipersio, 1985]. Un intervalle [ε^{α} ε^{β}] à l'intérieur duquel on peut choisir l'erreur ε donnant de bonnes performances a aussi été défini. La valeur ε^{α} est la plus petite valeur de ε pour laquelle il n'y a pas de différence visible entre l'ECG d'origine et l'ECG reconstruit après avoir été compressé, en dehors de quelques parasites comme le bruit. La valeur ε^{β} est la plus grande valeur de ε au delà de laquelle l'onde P de l'ECG est perdue ; il manque alors des informations dans le signal compressé [Dipersio, 1985]. Pour un échantillonnage d'origine à 1000 Hz, l'intervalle est défini ainsi: ε^{α} = 10 µV, ε^{β} = 30 µV. Cet intervalle a aussi été modifié pour l'utilisation de la méthode FAN sur des potentiels cardiaques intracellulaires et extracellulaires [Pollard, 1987].

III.1.f. SAPA

La méthode SAPA (Scan Along Polygonal Approximation) est basée sur l'interpolation du premier ordre [Kulkarni, 1997] [Sateh, 1990], Elle fut originellement décrite par [Ishijima, 1983]. Les premiers travaux ayant contribués à l'élaboration de cette méthode furent l'approximation polygonale de courbes [Sklansky, 1980]. Un segment de droite est tracé entre le point courant et le dernier point sauvegardé pris comme référence, de manière à ce que le segment se situe entièrement dans la zone délimitée par le signal muni d'une marge de tolérance (±ε) fixée (voir figure I.4). La méthode, tout comme les performances, sont proches de la méthode FAN [Barr, 1985].

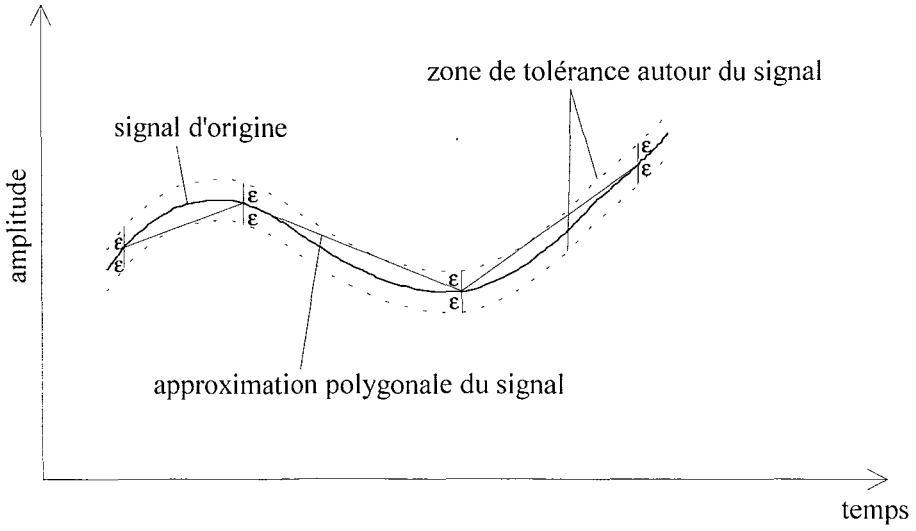


Figure I.4 : méthode SAPA

III.1.g. Autres méthodes de compression directe

Plus récemment, des méthodes un peu plus complexes à mettre en œuvre ont vu le jour. Nous en citons quelques-unes ci-dessous.

La méthode DPCM (Differential Pulse Code Modulation) ou code delta est basée sur le fait que la différence d'amplitude entre des échantillons successifs est plus petite que l'amplitude des échantillons eux-mêmes [Sateh, 1990] [Furth, 1988].

La méthode CCSP (Cardinality Constrained Shortest Path) [Haugland, 1997] recherche, pour un taux de compression donné, l'ensemble des échantillons représentatifs du signal tel que le PRD soit minimal. Le principe utilise la théorie des graphes et la longueur des chemins. En fixant le taux de compression voulu, il n'existe pas de meilleur codage au sens des moindres carrés, car l'optimisation est directement faite sur le PRD. L'inconvénient majeur est le temps de calcul très long pour trouver le meilleur chemin reliant p échantillons parmi n, en minimisant le PRD et avec CR=n/p. Néanmoins, cette méthode très récente obtient de très bonnes performances.

La méthode RPC (Recursive Partitioning Compression) permet de segmenter un signal de manière récursive [Schluter, 1981] [Moody, 1988]. A partir des deux échantillons symbolisant les extrémités d'une portion du signal, un segment est représenté par interpolation linéaire entre les extrémités. Au point intermédiaire le plus distant de la ligne interpolée, le segment est divisé en deux segments plus petits. Cette procédure est appliquée récursivement à chacun des segments jusqu'à ce que l'erreur maximum soit inférieure à un seuil fixé.

La méthode LADT (Linear Approximation Distance Thresholding) permet de segmenter les signaux en examinant la distance euclidienne séparant un échantillon d'un segment de droite [Li Gang, 1994]. D'autres distances peuvent être prises en compte [Koski, 1996].

Sans développer leurs principes de compression, citons encore la méthode SLOPE [Tai, 1991], la méthode TRIM (Turning point / Recursive IMprovement) qui est une combinaison des méthodes TP et RPC [Moody, 1988], et la méthode ALZ77 (Approximate Ziv-Lempel) [Horspool, 1995].

III.2. Transformation des données

La compression de données par transformation est basée sur la détection de redondance dans l'analyse de la distribution transformée (spectrale et/ou d'énergie) du signal sur un intervalle de temps. Ce type de compression est souvent employé sur des ECG à plusieurs dérivations.

Les échantillons originaux du signal sont soumis à une transformation (linéaire) sur une base orthogonale et la compression, basée sur le phénomène de redondance, est alors réalisée dans le domaine transformé. Lorsque le signal est compressé, on peut reconstruire un signal d'origine approximé par une transformation inverse à celle établissant la compression [Ahmed, 1975a], [Ahmed, 1975b], [Anant, 1995], [Chen, 1998], [Crowe, 1992], [Kuklinski, 1983], [Philips, 1992], [Rao, 1976], [Thakor, 1993], [Womble 1977]. Parmi les méthodes de compression les plus courantes par transformation, on distingue la transformée de Fourier dont nous allons décrire une version particulière, à savoir la méthode FD.

La méthode FD (Fourier Descriptors) [Reddy, 1986] utilise la détermination des coefficients de la transformée de Fourier sur un intervalle fermé du signal et ne conserve que les coefficients significatifs représentant le signal. Sur un cycle cardiaque, deux intervalles de temps sont considérés : le complexe QRS et l'intervalle SQ. Le complexe QRS comprenant les fréquences élevées de l'ECG est déterminé par seuillage de la dérivée première. La transformée de Fourier rapide (FFT : Fast Fourier Transform) est réalisée sur chacun des 2 intervalles QRS et SQ et les coefficients prédominants sont retenus. Sur le complexe QRS, le taux de compression est de l'ordre de CR=3 et atteint CR=10 sur l'intervalle SQ. En globalité, le taux de compression vaux CR=7,4 et la fidélité de reconstruction vaut PRD=7 %.

III.3. Extraction de paramètres

L'extraction de paramètres consiste à dégager du signal une série de paramètres et caractéristiques (en amplitude, temps, forme, etc...). Ces caractéristiques sont ensuite utilisées pour une classification des portions du signal ; classification basée sur une connaissance a priori des informations contenues dans le signal. La méthode d'extraction de paramètres est un processus irréversible, il n'est donc pas possible, à partir de l'ensemble des paramètres retenus, de reconstruire exactement le signal d'origine [Nave, 1993]. Nous présentons ici quelques méthodes d'extraction de paramètres s'appliquant aux ECG.

III.3.a. Prédiction linéaire

La méthode LTP (Long Term Prediction) [Nave, 1993] est une méthode de compression basée sur le modèle SAR (Sub Auto Regressive) utilisant un codage de prédiction linéaire. L'erreur entre la prédiction et le signal est étudiée et permet de réduire les redondances entre échantillons voisins. L'analyse de la fonction d'autocorrélation de l'erreur permet ensuite de réduire les redondances entre deux battements consécutifs. Un DPCM (Differential Pulse

Code Modulation) avec prédicteur d'ordre 1 est enfin utilisé pour obtenir la prédiction d'erreur. Le résidu entre l'erreur et l'erreur prédite est stocké, tout comme les coefficients des modèles utilisés. La compression se fait donc en deux étapes.

III.3.b. Forme syntaxique

La reconnaissance de formes par approche de formes syntaxiques permet la compression du signal ECG [Trahanias, 1990]. La forme des ondes tout au long de l'ECG est représentée par une chaîne de symboles appartenant à un alphabet, chaque symbole représentant une forme primitive. Deux types de formes primitives sont généralement considérés : les formes composées de deux points, ce sont les segments de droites ; les formes composées de trois points, une courbe reliant alors les trois points. Ainsi, on peut créer un alphabet Σ contenant les symboles K^+ pour les pics positifs, K^- pour les pics négatifs, E pour les segments de droite, Π pour les segments paraboliques passant par 3 points. Alors l'alphabet est $\Sigma=\{K^+, K^-, E, \Pi\}$. On peut maintenant, à partir de l'ECG, extraire les formes primitives et obtenir une représentation linguistique de l'électrocardiogramme. Cette suite de symboles primitifs représente alors l'électrocardiogramme compressé.

III.3.c. Réseaux de neurones

Parmi les méthodes plus récemment utilisées, nous trouvons des algorithmes de compression de données basés sur les réseaux de neurones (ANN : Artificial Neural Network) [Iwata, 1990] [Nagasaka, 1993] [Saxena, 1997]. Ces méthodes obtiennent un taux de compression élevé (CR=16) pour des électrocardiogrammes assez bruités.

IV. Synthèse en vue de l'échantillonnage à pas variable

Nous avons exposé diverses méthodes de compression de signaux s'appliquant à des électrocardiogrammes. Nous avons vu que ces méthodes se classent en trois catégories dont nous avons détaillé celles concernant la compression directe, et cité les méthodes par transformation et extraction de paramètres. Nous n'avons pas développé davantage les deux dernières catégories du fait que nous n'utiliserons pas leurs principes dans l'élaboration de notre algorithme de compression. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, notre contexte de traitement des signaux impose plus particulièrement une méthode basée sur une compression directe des données, avec une particularité (cf. paragraphe III du chapitre 2) quant à la représentation du signal compressé.

Chapitre II

Compression par le principe de l'EPV

"La pensée n'est qu'un éclair au milieu de la nuit. Mais c'est cet éclair qui est tout."
LA VALEUR DE LA SCIENCE

Henri POINCARE (1854-1912, France),

CHAPITRE 2. COMPRESSION PAR LE PRINCIPE DE L'EPV 19

I. CONTEXTE DE LA COMPRESSION 21

II. TECHNIQUE D'ÉCHANTILLONNAGE À PAS VARIABLE 21

II.1. Méthode EPV 21

II.2. Algorithme de la méthode d'échantillonnage à pas variable à partir d'un signal échantillonné à pas fixe 22

II.3. Algorithme de ré-échantillonnage à pas variable 23

II.4. Paramètre de réglage du seuil d'erreur 24

II.5. Evaluation de la méthode d'échantillonnage à pas variable 26

III. COMPARAISON AVEC LES AUTRES MÉTHODES DE COMPRESSION 29

IV. REPRÉSENTATION DU SIGNAL EPV, SYNTHÈSE EN VUE DES TRAITEMENTS 30

I. Contexte de la compression

Nous désirons développer une méthode de compression avec faibles pertes de données, permettant de conserver l'allure générale du signal ainsi que ses plus faibles variations. Le taux de compression doit être satisfaisant mais ne doit pas primer sur la qualité du signal compressé. De plus, afin de pouvoir traiter directement le signal compressé, et éviter ainsi toute décompression / reconstruction, il est nécessaire de stocker le signal compressé sous la forme de couple {temps, amplitude}. Enfin, nous considérons que ces traitements peuvent s'effectuer en ligne ou hors ligne. A partir de toutes ces directives, un compromis est réalisé et la méthode dite d'échantillonnage à pas variable que nous allons développer permet de respecter ce cahier des charges. Après avoir décrit la méthode de compression d'échantillonnage à pas variable, nous la situerons par rapport aux autres techniques de compression des électrocardiogrammes.

II. Technique d'échantillonnage à pas variable

II.1. Méthode EPV

La méthode d'échantillonnage à pas variable — notée EPV — a été développée au laboratoire par Damien Manoeuvre [Manoeuvre, 1994] [Manoeuvre, 1995], reprise, modifiée et nommée par Ludovic Fontaine.

Le principe de l'échantillonnage à pas variable consiste à supprimer une partie des échantillons du signal considérés comme peu représentatifs de l'information contenue dans le signal. L'EPV est basé sur la méthode FAN décrite au chapitre 1, mais des modifications au niveau du calcul du seuil d'erreur ε ont été apportées. La méthode FAN utilise une erreur fixée par l'utilisateur, valeur pouvant toutefois être prise dans un intervalle de confiance $[\varepsilon^{\alpha}\ \varepsilon^{\beta}]$. Dans le cas de l'EPV, le seuil d'erreur est calculé en fonction du contenu du signal et, plus particulièrement, à partir de la moyenne des variations du signal enregistrées sur une courte portion précédente du signal. A savoir, le seuil d'erreur associé au $i^{ème}$ échantillon $x(i)$ du signal $x(t)$ est :

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} \sum_{j=i-\eta+1}^{i} \left| \frac{x(j) - x(j-1)}{t(j) - t(j-1)} \right|$$

où η permet de régler le nombre d'échantillons pris en compte dans le calcul de la moyenne. Nous étudierons l'effet de ce paramètre η après avoir décrit l'algorithme. Il est à noter que,

pour les l premiers échantillons $x(l)$ avec $l \in [1, \eta - 1]$, l'erreur n'est établie que sur la moyenne de l valeurs.

Ainsi, on obtient une valeur ε qui augmente lorsque le signal présente de fortes variations, et diminue lorsque l'amplitude des variations décroît. Le résultat d'un échantillonnage à pas variable est composé de deux suites de valeurs : l'une correspondant aux instants d'échantillonnage des points conservés et l'autre correspondant aux amplitudes associées aux instants.

II.2. Algorithme de la méthode d'échantillonnage à pas variable à partir d'un signal échantillonné à pas fixe

Considérons le signal $x(t)$ échantillonné à la fréquence F_e, que nous désirons échantillonner à pas variable et ainsi obtenir le signal $\breve{x}(\breve{t})$. Le signal $x(t)$ est composé de N échantillons $x(1)$ à $x(N)$. L'algorithme d'échantillonnage à pas variable est composé d'une première étape d'initialisation de plusieurs variables internes dont le paramètres de réglage η que nous étudierons par la suite. Après cette initialisation, se trouve l'étape itérative permettant de prendre en compte chaque échantillon du signal l'un après l'autre. Les deux étapes de l'itération sont l'adaptation du seuil d'erreur et l'algorithme FAN proprement dit.

La figure II.1 représente l'algorithme d'échantillonnage à pas variable ainsi composé de l'initialisation, de l'adaptation du seuil d'erreur ε et de l'algorithme FAN issu de la méthode décrite au premier chapitre, figure I.2.

Les variables utilisées sont les suivantes :

d_i : valeur absolue de la dérivée du signal $x(t)$ à l'échantillon i

i : échantillon du signal $x(t)$

k : échantillon du signal $\breve{x}(\breve{t})$

N : nombre d'échantillons contenus dans le signal $x(t)$, connu lors d'un traitement hors ligne, et infini lors d'un traitement en ligne

p_s : pente restrictive supérieure

p_i : pente restrictive inférieure

m : vecteur de valeurs servant à élaborer la moyenne des variations du signal $x(t)$ et permettant le calcul de l'erreur

η : nombre de valeurs du vecteur moyenne m

S : somme des valeurs du vecteur m

ε : seuil adaptatif de l'erreur

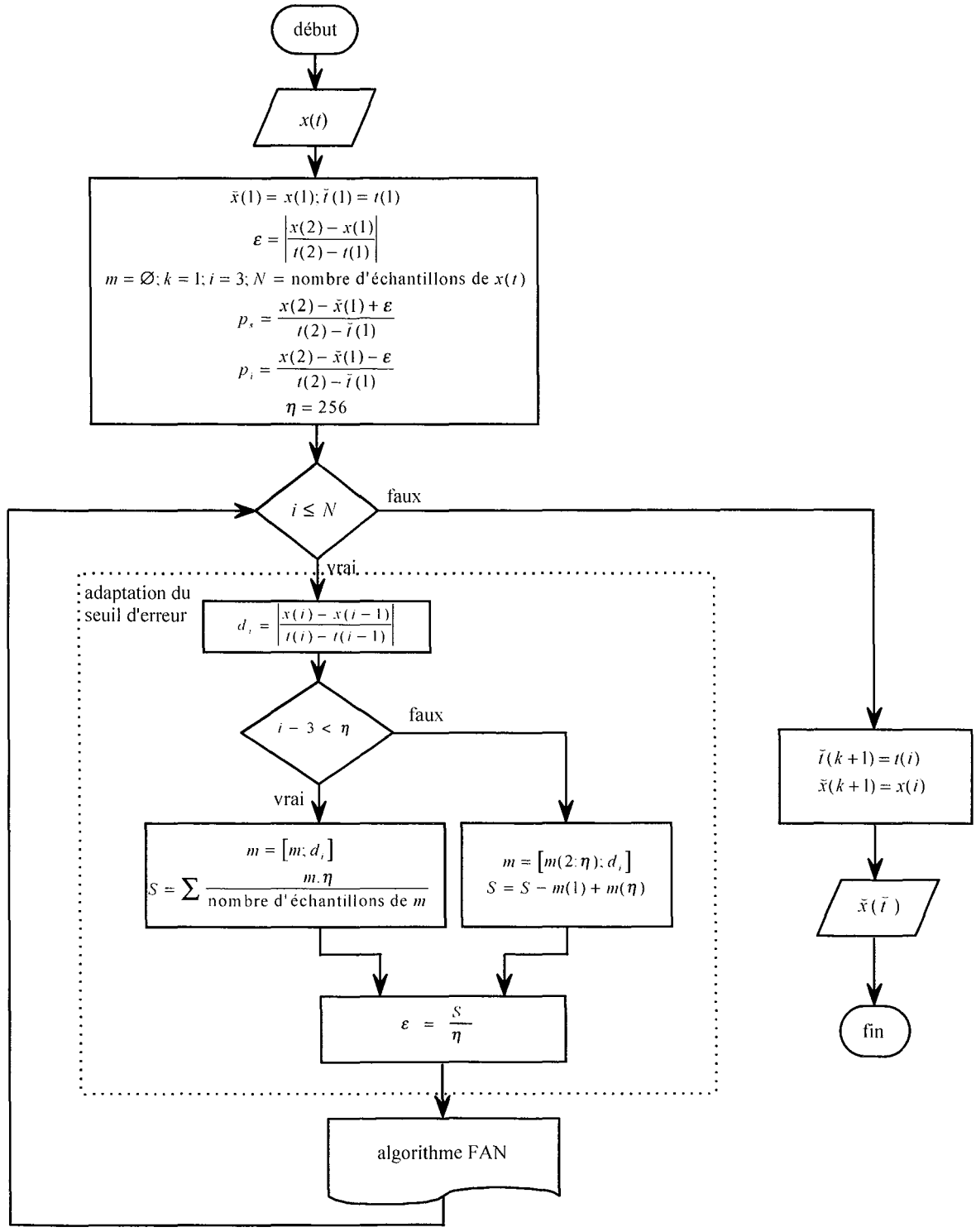


Figure II.1 : algorithme d'échantillonnage à pas variable

II.3. Algorithme de ré-échantillonnage à pas variable

Lors de l'acquisition d'un signal ou après traitement d'un signal échantillonné à pas variable, il se peut que l'on désire optimiser le nombre d'échantillons caractérisant le SEPV. Ainsi, le ré-échantillonnage à pas variable permet d'échantillonner à pas variable un signal déjà

échantillonné à pas variable. Ceci est une adaptation de l'algorithme précédent où les différentes pentes calculées tiennent alors compte des intervalles de temps variables. L'adaptation de l'erreur est aussi fonction des intervalles de temps, qui, afin que le poids de chaque échantillon soit équi-réparti, sont pris en compte de manière à ce qu'ils aient la même influence que les intervalles de temps à pas fixe.

Dans l'algorithme d'échantillonnage à pas variable, le dénominateur de la quantité d_i était constant puisqu'égal à la période d'échantillonnage T_e. Pour chaque nouvel échantillon, on ajoutait d_i et on retranchait $d_{i-\eta}$ qui avait été ajoutée η échantillons auparavant. L'erreur était alors la moyenne des η quantités d_i à $d_{i-\eta+1}$. Afin de prendre en compte l'aspect irrégulier des intervalles de temps dans le ré-échantillonnage à pas variable, il convient de faire intervenir la période d'échantillonnage fixe T_e. A chaque nouvel échantillon $\breve{x}(j)$, on ajoute $\frac{\breve{t}(j)-\breve{t}(j-1)}{T_e}$ composantes de valeur $d_i = \left|\frac{\breve{x}(j)-\breve{x}(j-1)}{\breve{t}(j)-\breve{t}(j-1)}\right|$ au vecteur m, tout en retranchant les $\frac{\breve{t}(j)-\breve{t}(j-1)}{T_e}$ plus anciennes composantes de ce vecteur. Ainsi, le vecteur m a toujours η composantes dont la moyenne forme l'erreur :

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{\eta} m_j$$

II.4. Paramètre de réglage du seuil d'erreur

Le paramètre de réglage est le nombre d'échantillons à prendre en compte lors du calcul du seuil d'erreur ε. En effet, le seuil d'erreur est calculé en fonction des variations du signal sur une portion précédant l'instant considéré. Dans l'organigramme de l'algorithme d'échantillonnage à pas variable, nous avons pris un nombre d'échantillons η=256. L'adaptation du seuil d'erreur se fait donc en prenant en considération les fluctuations du signal sur η échantillons précédant l'instant considéré.

Afin d'optimiser ce nombre η d'échantillons sur lequel est basée l'adaptation d'erreur, nous allons représenter, en fonction du nombre d'échantillons η, pour un ECG donné, les graphiques CR=f(η) et PRD=f(η), représentant respectivement le taux de compression et la fidélité de reconstruction. Nous établissons ceci sur d'autres ECG et allons déterminer une valeur optimale du nombre d'échantillons montrant un bon compromis entre le taux de compression CR et la fidélité PRD.

La figure II.2 montre l'évolution du taux de compression CR et de la fidélité PRD en % pour quatre ECG sur 30 secondes, en fonction du nombre d'échantillons pris en compte, dont nous avons pris les valeurs 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 et 1024. Les électrocardiogrammes sont issus de la base de données du MIT [Moody, 1992].

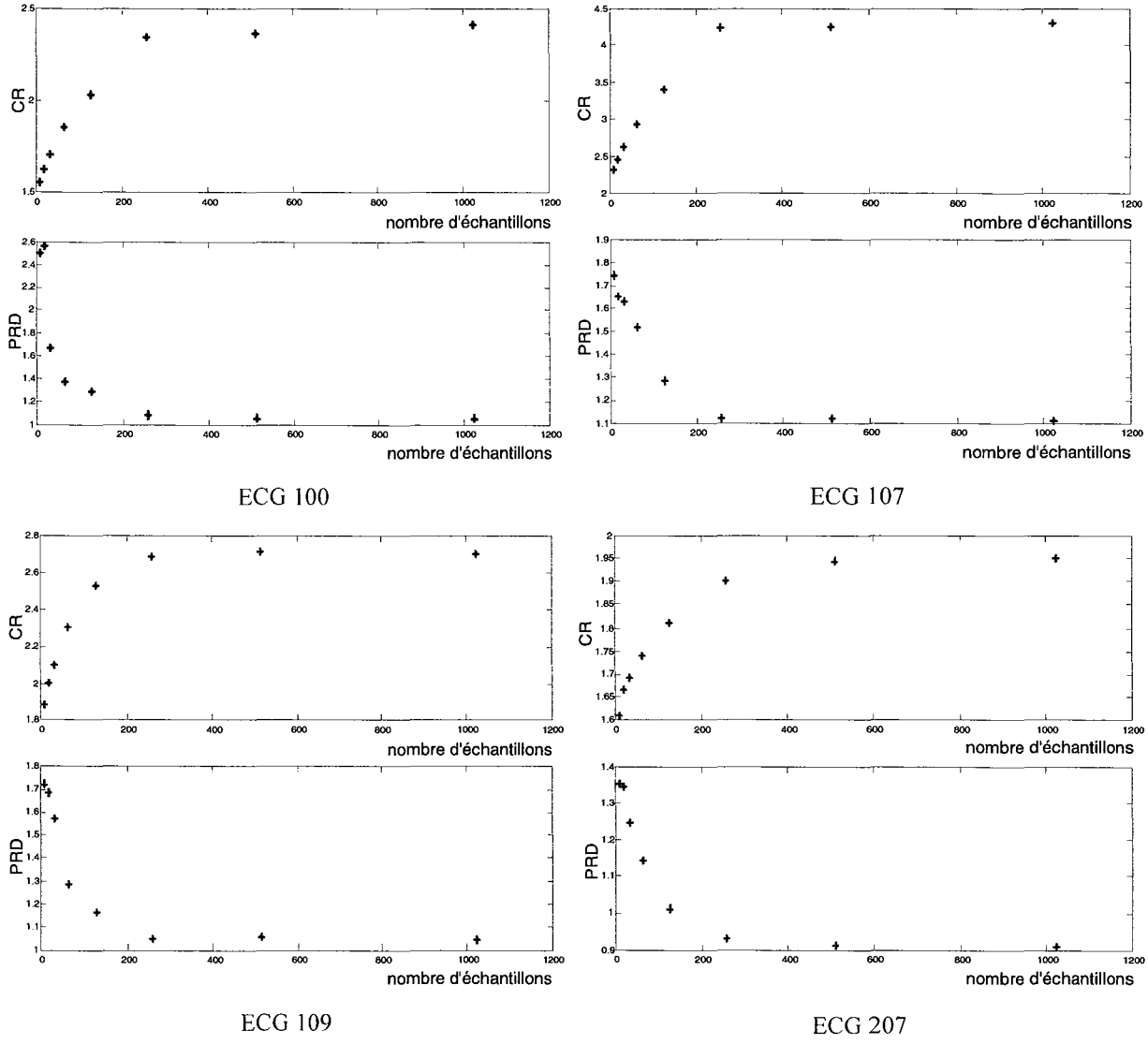


Figure II.2 : CR et PRD en fonction du nombre d'échantillons servant à l'adaptation d'erreur

Nous remarquons que pour un nombre d'échantillons faible (8, 16, 32), le taux de compression est faible et la fidélité représentée par le PRD est élevée. Plus nous augmentons le nombre d'échantillons intervenant dans le calcul du seuil d'erreur, plus le taux de compression augmente et la fidélité s'améliore. Lorsque nous atteignons un nombre d'échantillons élevé (256, 512, 1024), nous nous apercevons que le taux de compression et la fidélité se stabilisent. Il est évident que le temps nécessaire à l'échantillonnage à pas variable d'un signal avec η

faible, est inférieur au temps nécessaire à l'échantillonnage à pas variable d'un signal avec η élevé, du fait du nombre d'échantillons à prendre en considération pour le calcul du seuil d'erreur. Un bon compromis entre le taux de compression, la fidélité et le temps de calcul semble être un nombre d'échantillons η=256. Ceci n'est pas particulièrement lié aux signaux ECG utilisés. Des essais sur des signaux de synthèse (notamment un signal télégraphique bruité) donnent un résultat équivalent.

II.5. Evaluation de la méthode d'échantillonnage à pas variable

Afin de pouvoir, par la suite, comparer notre méthode de compression aux autres méthodes, il est nécessaire de mesurer les performances de la technique de compression qu'est l'échantillonnage à pas variable. Pour ce faire, nous allons dans un premier temps, échantillonner des ECG à pas variable et calculer le taux de compression représenté par CR, puis, dans un deuxième temps, reconstruire le signal par interpolation linéaire et le comparer à l'original afin de calculer la fidélité représentée par le PRD.

Le taux de compression a été calculé sur la durée totale de chacun des électrocardiogrammes, c'est-à-dire un peu plus de 30 minutes. Les ECG étant échantillonnés à 360 Hz, chaque ECG original compte 650000 échantillons. Après échantillonnage à pas variable, nous relevons le nombre d'échantillons contenus dans le signal compressé et nous calculons le taux de compression défini par l'équation (I-2)

$$CR = \frac{\text{nombre d'échantillons du signal original}}{\text{nombre d'échantillons du signal compressé}}.$$

Si nous voulions calculer le taux de compression réel en termes de place mémoire en octets, il faudrait définir le nombre de bits utilisés pour le stockage des différentes valeurs de temps et d'amplitude.

La fidélité a été calculée sur une durée de 5 minutes pour chacun des électrocardiogrammes. Après compression des électrocardiogrammes, nous avons reconstruit les échantillons intermédiaires manquants par interpolation linéaire d'ordre 1 et nous avons calculé le PRD défini par l'équation (I-3).

Nous avons alors regroupé sur la figure II.3, la fidélité en fonction du taux de compression pour 17 électrocardiogrammes de la base de données du MIT.

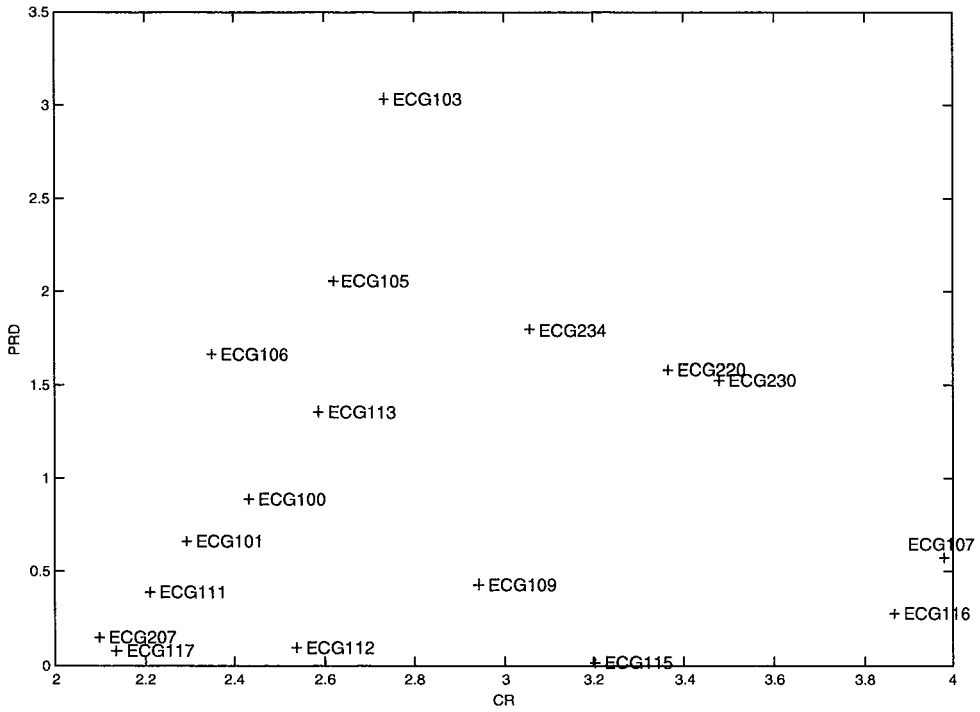


Figure II.3 : CR et PRD de quelques ECG

A la vue du nuage de points, il semble difficile d'obtenir une relation PRD=f(CR) par identification. Nous remarquons que le taux de compression varie entre 2 et 4 et que le taux de compression moyen est proche de 3. Quant à la fidélité, nous en déduisons un PRD moyen de l'ordre de 1 mais le PRD n'est pas une valeur très significative et par conséquent peu comparable à d'autres méthodes. En effet, le PRD varie en fonction de la durée du signal sur laquelle il est calculé. Pour bien percevoir ce phénomène, traçons, pour un ECG donné, le PRD en fonction de la durée sur lequel il est calculé. Nous allons ainsi voir l'évolution du PRD tout au long des 30 minutes du signal ECG.

Nous avons pris ici l'électrocardiogramme ayant le PRD le plus défavorable et avons tracé sur la figure II.4, la fidélité en fonction de la durée de l'électrocardiogramme sur laquelle est reconstruit le signal. Notons que les fluctuations montrées sur cette courbe sont particulières à l'ECG103. La forme importe peu ; il est intéressant de retenir la plage de variation des valeurs du PRD tout au long de la durée considérée de l'ECG.

Nous remarquons que la fidélité varie beaucoup en fonction de la durée prise en compte pour le calcul du PRD. Ceci nous amène à stipuler que la fidélité représentée par le PRD n'est pas une valeur de comparaison très significative du fait qu'elle dépend de la durée prise en compte pour le calcul. Ceci n'est pas le cas du taux de compression comme nous le voyons pour le même électrocardiogramme ECG103 sur la figure II.5.

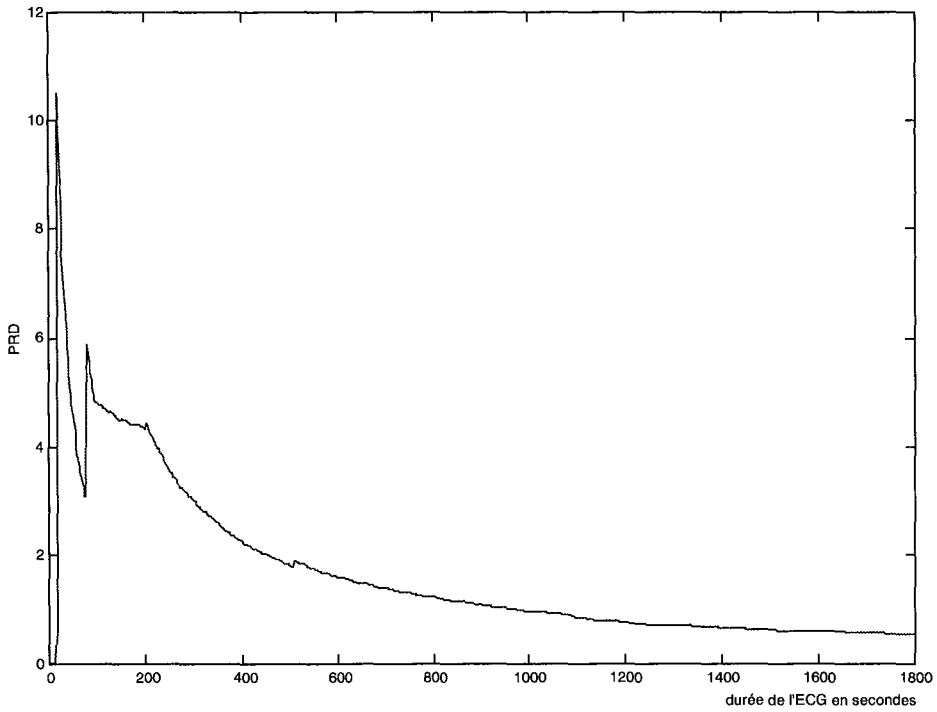


Figure II.4 : fidélité de reconstruction en fonction de la durée de l'ECG

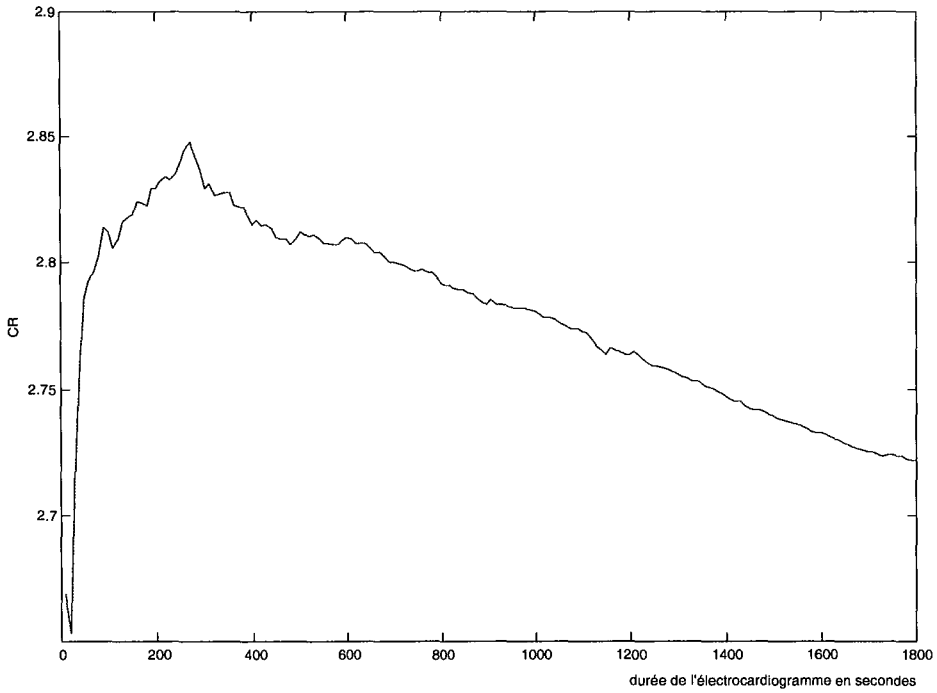


Figure II.5 : taux de compression en fonction de la durée de l'ECG

Nous remarquons que le taux de compression varie faiblement en fonction de la durée de l'ECG. Ici, le taux de compression varie de 2,65 à 2,85 alors que la valeur finale (taux de

compression des 30 minutes d'ECG) est 2,72, ce qui montre que, lorsque le signal évolue de la même manière au cours du temps, le taux de compression est pratiquement indépendant de la durée sur laquelle est effectuée la compression.

III. Comparaison avec les autres méthodes de compression

Afin d'évaluer la méthode de compression par échantillonnage à pas variable, nous allons comparer le taux de compression et la fidélité de reconstruction des différentes méthodes couramment utilisées pour la compression d'électrocardiogrammes. Le tableau II.1 donne le taux de compression CR et la fidélité de reconstruction PRD de chacune des méthodes. Dans ce tableau figurent également la fréquence d'échantillonnage du signal original, ainsi que la manière dont chaque échantillon est codé en nombre de bits. Il aurait été intéressant de comparer les méthodes sur la compression d'ECG issus d'une même base de données, mais ceci n'a malheureusement pas pus être réalisé.

Méthode	CR	PRD (%)	Fe (Hz)	Codage (bits)	Références
AZTEC	10	28	500	12	Cox 1968, Sateh 1990, Saxena 1997
AZTECm	5,79	5,36			Furth 1988
TP	2	5,3	200	12	Sateh 1990, Saxena 1997
CORTES	4,8	7	250	12	Sateh 1990, Saxena 1997
FAN / SAPA	3	4	250		Sateh 1990, Saxena 1997
ALZ77	13,38		250	8	Horspool 1995
Fourier Descriptors	7,4	7	250	12	Reddy 1986
Wavelet Transform	9,9		500		Crowe 1992
Peak-peaking (spline) entropy encoding	10	14	500	8	Cardenas 1999
BP et PCA neural networks	20	13	360	11	Nagasaka 1993
Classified VQ	8,6	24,5	200	12	Cardenas 1999
Long Term Prediction	28,17	10	250	8	Nave 1993
EPV	3	1	360		

Tableau II.1 : comparaison du CR et du PRD de différentes méthodes de compression

De manière à mieux visualiser la fidélité de reconstruction en fonction du taux de compression, nous faisons apparaître les couples {CR,PRD} pour chaque méthode, sur la figure II.6.

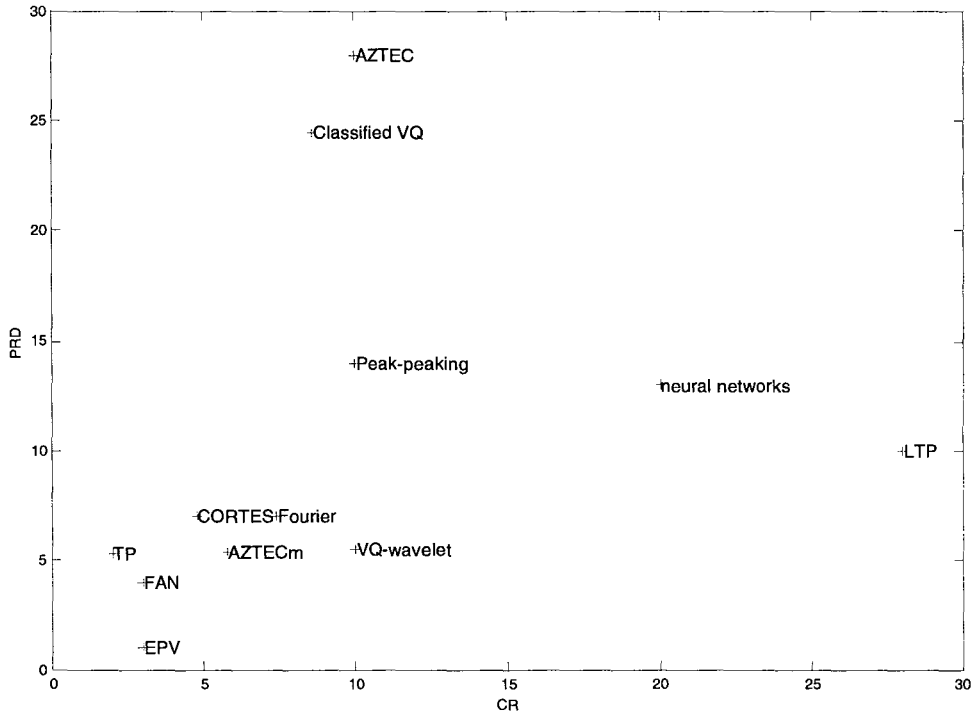


Figure II.6 : comparaison du CR et du PRD de différentes méthodes de compression

Nous remarquons que la méthode EPV a le même taux de compression que la méthode FAN sur laquelle elle est adaptée. Quant à la fidélité de reconstruction, elle semble faible par rapport aux autres méthodes, mais ceci est difficilement comparable comme nous l'avons vu précédemment. Aussi, certains auteurs ré-échantillonnent à une fréquence plus élevée un ECG avant de le compresser ; il en découle logiquement un taux de compression supérieur, comme le montre [Kulkarni, 1997]. Enfin, certains calculent le PRD sur une durée de 12 secondes, d'autres sur une durée de 30 secondes, alors que la durée considérée influence le calcul du PRD, comme nous l'avons vu.

IV. Représentation du signal EPV, synthèse en vue des traitements

Chaque échantillon d'un signal contient en réalité un couple de valeurs qui sont l'instant d'apparition de l'échantillon et la valeur correspondante de la grandeur représentative du signal. Lorsque le signal est échantilloné à pas fixe, il n'est pas nécessaire de conserver chaque

instant du signal ; seuls la fréquence d'échantillonnage et le rang de l'échantillon servent à connaître son instant d'apparition.

Dans le cas d'un signal échantillonné à pas variable, nous avons supprimé certains échantillons et il n'est donc plus possible de connaître son instant d'apparition à partir du rang de l'échantillon, et de la fréquence d'échantillonnage qui est devenue fonction des variations du signal. Il est alors nécessaire de représenter chaque échantillon du signal par un couple de valeurs {temps,amplitude}.

Dans la suite de ce mémoire, un SEPV sera représenté par le signal $\breve{x}(\breve{t})$ où le $i^{\text{ème}}$ échantillon sera désigné indifféremment par $\breve{x}(\breve{t}_i)$ ou $\{\breve{x}_i, \breve{t}_i\}$.

C'est à partir de signaux représentés de cette manière que nous allons développer dans le chapitre 3 plusieurs outils de traitement des signaux échantillonnés à pas variable.

Chapitre III

Outils de traitement des SEPV

"Non, la science n'est pas une illusion, mais ce serait une illusion de croire que nous puissions trouver ailleurs ce qu'elle ne peut pas nous donner."
L'AVENIR D'UNE ILLUSION

Sigmund FREUD (1856-1939, Autriche)

CHAPITRE 3. OUTILS DE TRAITEMENT DES SEPV 33

I. INTRODUCTION 35

II. PRÉSENTATION DE L'ÉCHANTILLONNAGE IRRÉGULIER 35

III. HISTORIQUE 38

III.1. Analyse spectrale 39

III.2. Reconstruction 41

III.3. Synthèse des outils disponibles 44

IV. RECONSTRUCTION D'ÉCHANTILLONS INTERMÉDIAIRES 45

V. OPÉRATIONS SIMPLES 46

VI. STATISTIQUES 46

VII. ANALYSE SPECTRALE PAR TRANSFORMÉE DE FOURIER 50

VIII. FILTRAGE 53

VIII.1. Préambule sur le traitement des SEPV 53

VIII.2. Chaîne de traitement d'un SEPV 54

VIII.3. Etude de la pertinence des différents types de filtrage 55

VIII.4. Filtrage passe-bas du premier ordre 61

VIII.5. Filtrage passe-bas du deuxième ordre 65

VIII.6. Filtrage passe-bas et passe-bande d'ordre N par résolution et discrétisation de la représentation d'état 76

VIII.7. Correction de phase du filtrage 89

VIII.8. Synthèse sur le filtrage EPV 91

IX. SYNTHÈSE DES OUTILS DE TRAITEMENT DES SEPV 92

I. Introduction

Dans ce chapitre consacré au développement d'outils pour le traitement des signaux échantillonnés à pas variable (SEPV), nous commencerons par présenter les différentes techniques d'échantillonnage irrégulier, puis nous exposerons un historique sur le traitement des signaux échantillonnés irrégulièrement. Enfin, nous développerons des outils concernant les opérations simples, les statistiques, l'analyse spectrale et le filtrage, applicables à des SEPV.

II. Présentation de l'échantillonnage irrégulier

L'échantillonnage irrégulier — aussi appelé échantillonnage aléatoire, échantillonnage non constant ; en anglais, irregular sampling, nonuniform sampling, nonequispaced data — peut apparaître dans plusieurs domaines scientifiques et plus particulièrement dans celui du traitement du signal. Trois catégories se présentent où le signal à traiter soit échantillonné irrégulièrement [Bensaoud, 1994]. La figure III.1 montre les origines possibles d'un signal à échantillonnage irrégulier.

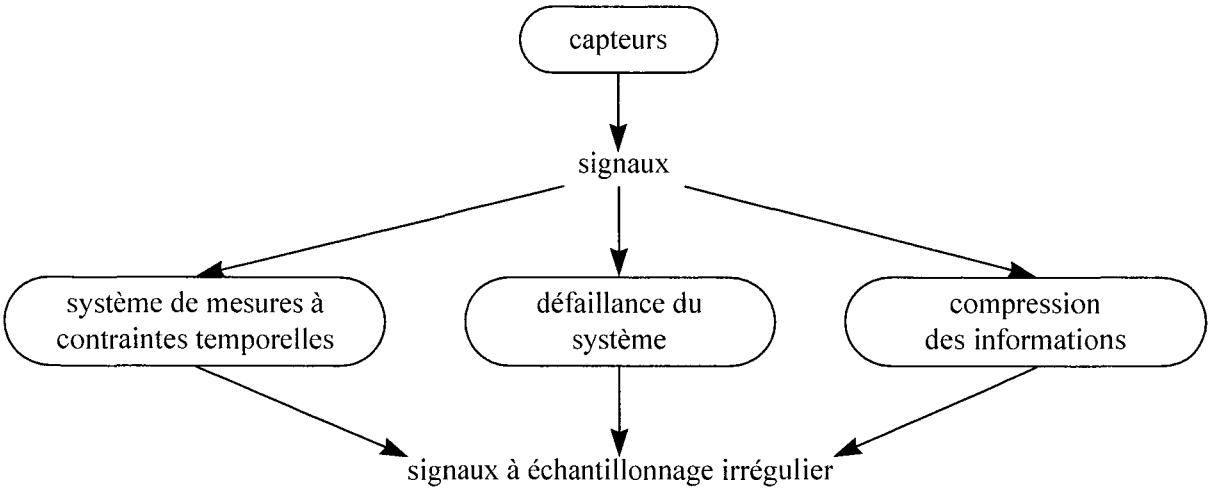


Figure III.1 : origines des signaux à échantillonnage irrégulier

La première catégorie vient d'un système qui, de part sa conception, délivre des informations à des intervalles de temps non constant. Il arrive aussi qu'il ne soit possible de recueillir les informations que selon une certaine contrainte temporelle. Ceci a pour conséquence l'obtention d'un signal dont les intervalles de temps entre deux échantillons consécutifs sont aléatoires comme le montre la figure III.2.

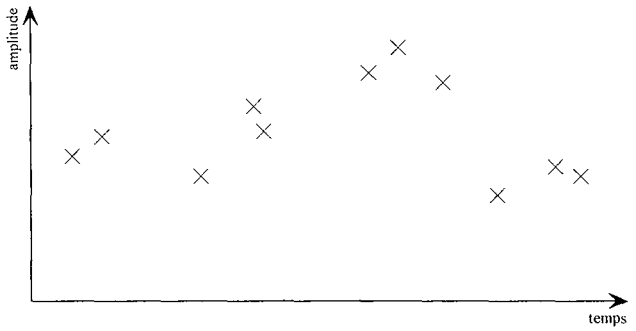


Figure III.2 : système à délivrance d'information aléatoire

La deuxième catégorie provient d'un système délivrant les informations à intervalles de temps réguliers, mais avec un système de transmission défaillant. Par conséquent, les informations ne sont pas disponibles sur un certain laps de temps comme le montre la figure III.3.

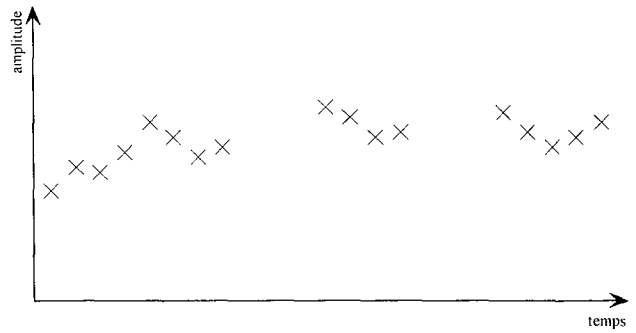


Figure III.3 : système à transmission défaillante

La troisième catégorie est plus particulièrement liée à la compression de signaux. Le signal n'est disponible ou n'est transmis que lorsqu'il contient une information. On peut aisément considérer que le signal n'a pas besoin d'être transmis lorsque son amplitude est constante (un bloqueur d'ordre 0 assure alors la reconstruction), ou lorsque la dérivée du signal est constante (un bloqueur d'ordre 1 assure alors la reconstruction). La figure III.4 montre un signal reconstruit avec un bloqueur d'ordre 0 à partir des échantillons transmis, et un signal reconstruit avec un bloqueur d'ordre 1 à partir des mêmes échantillons transmis. La méthode de compression par échantillonnage à pas variable que nous avons développée au chapitre 2 se situe dans cette troisième catégorie et peut par conséquent subir une reconstruction par interpolation linéaire lorsque cela sera nécessaire.

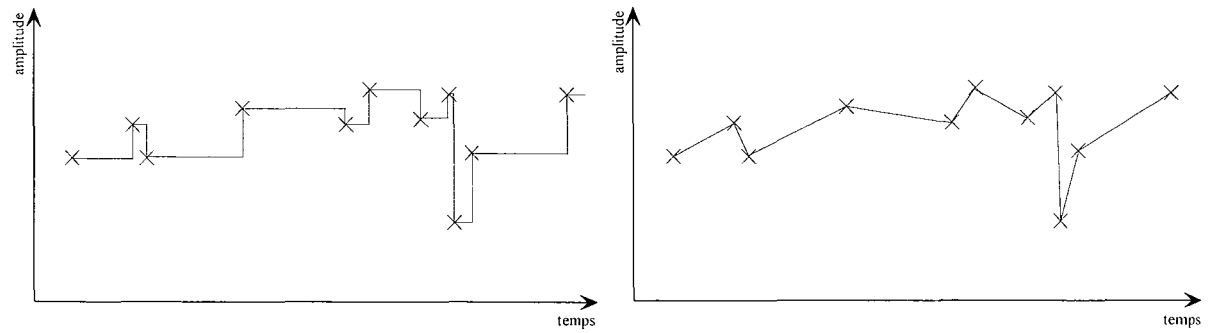


Figure III.4 : signal échantillonné irrégulièrement par compression et reconstruit par bloqueurs d'ordre 0 et 1

Outre ces trois catégories d'échantillonnage irrégulier, il peut arriver qu'un système à échantillonnage régulier dévie de sa période d'échantillonnage constante. Le système délivre alors les informations dans un intervalle de temps ΔT autour de la période d'échantillonnage constante T comme montré figure III.5. Ainsi, pour un instant d'échantillonnage t_n, on a $|t_n - nT| \leq \frac{\Delta T}{2}$. Ce type d'échantillonnage irrégulier est souvent noté "jittered sampling" dans la littérature.

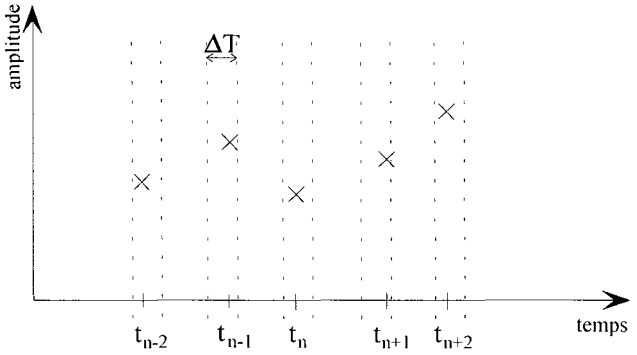


Figure III.5 : variations de la période d'échantillonnage

Enfin, il se peut qu'une rupture du système de transmission ou une défaillance momentanée vienne perturber le système et que les échantillons t_n soient décalés d'un temps Δ à partir d'un instant 0 comme le montre la figure III.6. Ainsi $t_n = \begin{cases} nT \text{ si } n \leq 0 \\ \Delta + nT \text{ si } n > 0 \end{cases}$.

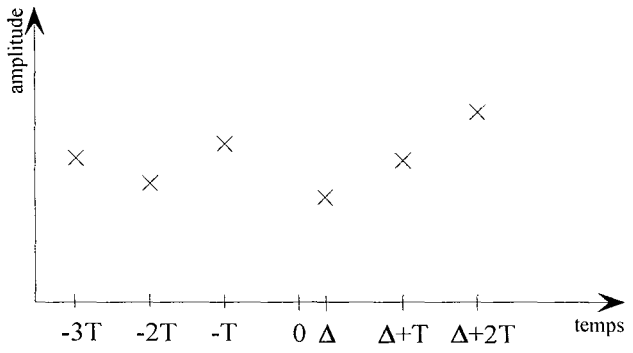


Figure III.6 : décalage temporel de l'échantillonnage régulier

Il est évident que cette liste de types de signaux échantillonnés irrégulièrement n'est pas exhaustive. Un système peut très bien délivrer les échantillons irréguliers selon une loi de distribution décrite par une quelconque fonction. Dans tous les cas, nous avons à traiter un signal $x_n(t_n)$ dont les amplitudes x_n des échantillons sont connues à intervalles de temps $t_n - t_{n-1}$ irréguliers.

III. Historique

On trouve dans la littérature plusieurs travaux relatifs à l'échantillonnage irrégulier. Le premier est l'analyse spectrale qui permet d'obtenir une estimation de la densité spectrale de puissance. L'essentiel des travaux concerne la reconstruction d'un signal continu ou d'un signal échantillonné à intervalles de temps constants à partir d'un signal échantillonné irrégulièrement. Enfin, plusieurs auteurs ont contribué à élaborer une théorie regroupant la reconstruction des signaux à bande spectrale limitée et l'analyse spectrale associée.
Nous allons dans un premier temps faire un historique des méthodes développées autour de l'échantillonnage irrégulier, puis nous développerons les aspects de l'analyse spectrale et de la reconstruction / ré-échantillonnage. Enfin, nous conclurons sur les avantages et inconvénients de la reconstruction en général, et le manque d'outils spécifiques au traitement numérique des signaux échantillonnés irrégulièrement.

Dans les années 1960, Papoulis — auteur de plusieurs ouvrages et publications dans les domaines des mathématiques statistiques et du traitement du signal — évoque l'échantillonnage irrégulier. Dans le même temps, Jones propose de combler les échantillons manquants d'un signal en leur allouant soit une valeur moyenne du signal déterminée dans un intervalle de temps où le signal est régulièrement échantillonné, soit la valeur nulle ou encore

une valeur tenant compte d'autres tests statistiques. Ceci constitue les premiers travaux sur l'échantillonnage irrégulier [Papoulis, 1962] [Papoulis, 1965] [Jones, 1962].
Dans les années 1970 - 1980 se développent bon nombre de méthodes de reconstruction des signaux, soit par interpolation en identifiant un modèle ou une fonction aux données, soit par transformée de Fourier et transformée inverse.
Par la suite, dans les années 1990, d'autres méthodes sont venues optimiser la reconstruction en faisant intervenir une procédure itérative comme l'ont montré Marvasti et Feichtinger. On parle alors de reconstruction de signaux à bande spectrale limitée [Marvasti, 1993] [Feichtinger, 1994]. A partir de la théorie de l'échantillonnage irrégulier et des méthodes de reconstruction, Feichtinger et al. ont développé une base d'outils de reconstruction des signaux dans l'environnement logiciel Matlab de Mathworks sous le nom de IRSATOL (IRregular SAmpling TOoLbox) [Feichtinger, 1992a].

III.1. Analyse spectrale

Nous allons, dans cette partie, décrire les différents moyens relevés dans la littérature pour effectuer une analyse spectrale sur un signal à échantillonnage irrégulier.
Jones semble être le premier à partir des années 1960 à s'intéresser au problème [Jones, 1962], [Jones, 1972]. Si le pourcentage d'observations manquantes est faible, on peut reconstruire le signal en allouant aux observations manquantes une valeur fixe. Ainsi, on obtient un signal échantillonné régulièrement et une méthode traditionnelle de transformée de Fourier donnera des résultats satisfaisants. La valeur fixe à attribuer est selon le cas, soit la valeur nulle 0, soit une valeur moyenne du signal. Si le pourcentage d'observations manquantes est plus élevé, un interpolateur d'ordre 1 permettra alors la reconstruction des échantillons manquants et le calcul de la densité spectrale de puissance pourra alors être mené par une méthode traditionnelle [Jones, 1977].

Marvasti établie une relation entre le spectre d'un signal échantillonné à pas fixe et celui d'un signal échantillonné irrégulièrement. A partir du signal continu $x(t)$, il génère le signal échantillonné irrégulièrement $x_n(t_n)$. Puis, il détermine le spectre théorique du signal échantillonné irrégulièrement $x_n(t_n)$ en calculant la convolution de la transformée de Fourier du signal continu $x(t)$ avec la transformée de Fourier du peigne de Dirac contenant les instants d'échantillonnage irréguliers t_n [Marvasti, 1984]. Ainsi, le signal $x_n(t_n)$ s'écrit :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t_n)\delta(t-t_n) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_n) = x(t)s(t) \text{ avec } s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_n).$$

Le spectre du signal échantillonné irrégulièrement est la convolution $X(f)*S(f)$ où $X(f)$ est la transformée de Fourier du signal $x(t)$ et $S(f)$ la transformée de Fourier du peigne de Dirac $s(t)$.

Lorsque l'échantillonnage irrégulier suit une loi de distribution uniforme ou de Poisson, et en reprenant le principe de la convolution, Marvasti montre que la puissance spectrale d'un signal échantillonné irrégulièrement est composé de la puissance spectrale du signal continu à laquelle s'ajoute un bruit non corrélé [Marvasti, 1986]. En effet, la puissance spectrale de la séquence d'impulsions aléatoires $\delta(t-t_n)$ est fonction de la puissance spectrale $\delta(f)$ d'une impulsion selon la loi $S(f) = \lambda + \lambda^2\delta(f)$, où λ est le nombre moyen d'impulsions par intervalle unitaire de temps. Alors le spectre du signal échantillonné irrégulièrement est $X(f)*S(f) = \lambda\overline{x^2} + \lambda^2 X(f)$, où $\overline{x^2}$ est la moyenne du signal $x(t)$ élevé au carré.

Plus récemment, Dutt et Rokhlin ont développé des algorithmes généralisant la transformée de Fourier discrète rapide dans le cas de pas d'échantillonnage non équirépartis et pris dans un ordre aléatoire [Dutt, 1993] [Dutt, 1995]. Pour un signal $x_n(t_n)$ avec $n = \{1,2,\ldots,N\}$, où les N instants d'échantillonnage irréguliers sont pris de manière aléatoire dans l'intervalle $\left[-\frac{N}{2};\frac{N}{2}\right]$, le calcul de la transformée de Fourier est effectuée à partir de $f_k = \sum_{n=1}^{N} x_n e^{jt_n 2\pi k/N}$ où f_k représente la densité spectrale de puissance. L'algorithme réduit le nombre de sommations à effectuer et utilise la transformée de Fourier discrète et inverse afin de réduire les temps de calcul.
De manière analogue, la transformée de Fourier discrète inverse rapide dans le cas de fréquences non équiréparties a aussi été étudiée.

Enfin, afin d'étudier une plage particulière de fréquences ou une répartition aléatoire de fréquences, Bagchi propose une méthode permettant d'établir la transformée de Fourier d'un signal composé de N échantillons équirépartis dans le domaine temporel, en N valeurs d'amplitude non équiréparties dans le domaine fréquentiel [Bagchi, 1996].

Nous remarquons que, pour effectuer une analyse spectrale, les algorithmes utilisent soit une reconstruction des échantillons manquants, soit une approximation à l'aide de la transformée de Fourier discrète rapide et de sa transformée inverse. Aucun algorithme ne semble utiliser la particularité de l'échantillonnage irrégulier, à savoir l'intervalle de temps irrégulier entre deux échantillons consécutifs.

III.2. Reconstruction

plusieurs scientifiques se sont intéressés au problème de reconstruction des échantillons manquants — voire du signal continu dans sa globalité — à partir du signal échantillonné irrégulièrement. Nous allons dans cette partie voir quelques méthodes utilisées à des fins de reconstruction / ré-échantillonnage de signaux.

III.2.a. Interpolation polynomiale

La première reconstruction venant à l'esprit est l'interpolation polynomiale. De manière simple, elle peut être d'ordre 0 lorsque l'amplitude x_n de l'échantillon n à l'instant t_n est conservée jusqu'à l'instant t_{n+1}. De manière linéaire à l'ordre 1, un segment de droite relie l'échantillon n d'amplitude x_n à l'instant t_n à l'échantillon n+1 d'amplitude x_{n+1} à l'instant t_{n+1}. Le signal ainsi reconstruit est continu, mais il n'en est pas de même pour ses dérivées.

De manière plus générale, on peut utiliser un modèle polynomial d'ordre P défini par $\tilde{x}(t) = \tilde{\theta}_P t^P + \tilde{\theta}_{P-1} t^{P-1} + \ldots + \tilde{\theta}_1 t + \tilde{\theta}_0$. Une identification des paramètres θ_i par moindres carrés permet d'obtenir les valeurs estimées $\tilde{\theta}_i$ des coefficients. A partir de la fonction polynomiale $\tilde{x}(t)$, il devient alors possible de reconstruire les échantillons manquants [Bensaoud, 1994]. Le choix du degré P du polynôme doit être judicieux pour prendre en compte les fluctuations locales et globales du signal. Enfin, la bande spectrale théorique dans laquelle est défini le signal n'intervient pas ici dans l'estimation des coefficients $\tilde{\theta}_i$. Par conséquent, la bande spectrale du signal reconstruit peut être différente de la bande spectrale théorique du signal.

III.2.b. Reconstruction à partir du spectre

Lorsque, par une méthode de transformation quelconque, on arrive à obtenir le spectre d'un signal échantillonné irrégulièrement, il devient alors possible de reconstruire le signal continu ou échantillonné régulièrement à l'aide de la transformée de Fourier inverse. L'analyse spectrale locale du signal permet de reconstruire les détails du signal alors que l'analyse

spectrale globale permet de reconstruire l'allure générale du signal. Néanmoins, les méthodes d'analyses spectrales de signaux échantillonnés irrégulièrement se servent souvent de reconstruction et d'interpolation pour estimer le spectre du signal, et la reconstruction s'en trouve alors altérée. La reconstruction peut aussi être assurée par une transformation de type interpolation de Karhunen-Loeve [Sankur, 1973].

III.2.c. Reconstruction récursive

La majeure partie des travaux concernant la reconstruction / ré-échantillonnage des signaux contenus dans une bande spectrale limitée s'effectue en associant plusieurs outils comme l'interpolation, l'analyse spectrale, le filtrage et la récursivité. Généralement, à partir du signal échantillonné irrégulièrement, une première interpolation (polynomiale, par spline [Sankur, 1973]) est effectuée afin d'obtenir un signal à échantillonnage régulier. Une analyse spectrale de ce signal est ensuite réalisée. Puis, à partir de la largeur de bande théorique du signal original, une projection spectrale (filtrage) est appliquée afin de ne tenir compte que des fréquences effectivement contenues dans la bande spectrale. Enfin, par itérations récursives, la reconstruction est affinée en tenant compte du signal, de son spectre et de sa bande spectrale théorique Ω. La figure III.7 résume les étapes de la reconstruction d'un signal à échantillons manquants.

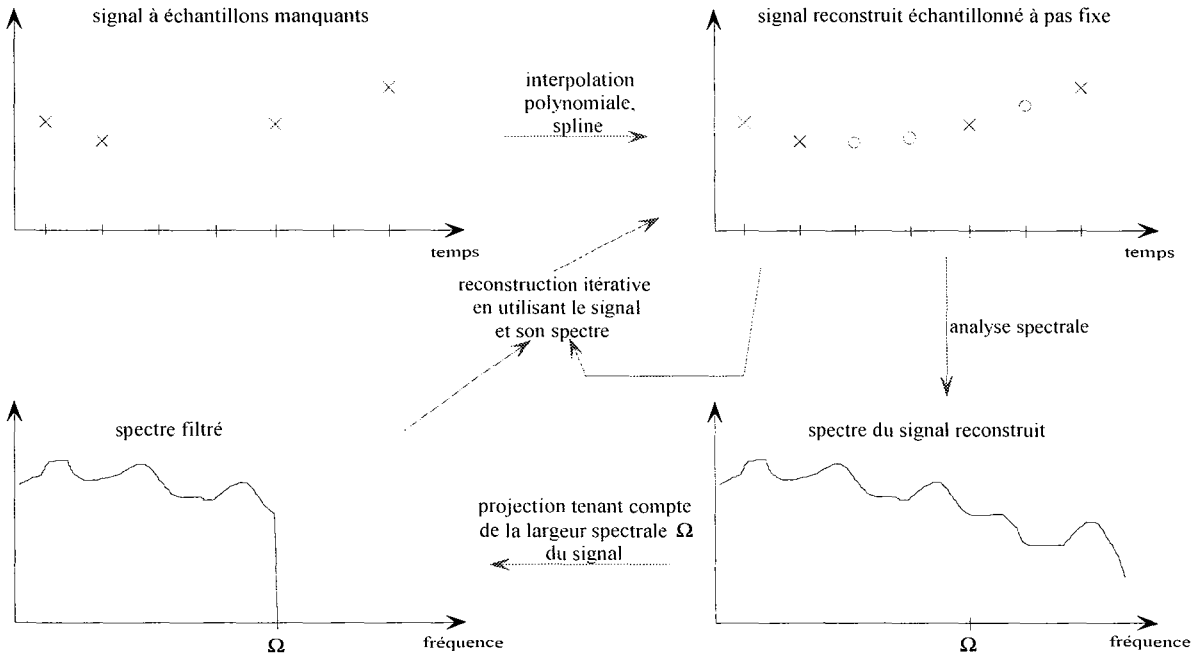


Figure III.7 : méthode générale de reconstruction d'un signal à échantillons manquants

Ainsi, la première étape consiste en une reconstruction sommaire du signal échantillonné à pas fixe $S_{EPF}(t)$ à partir du signal échantillonné à pas variable $S_{EPI}(t)$ et du spectre explicite ou de la largeur de bande du signal. La deuxième étape consiste à optimiser la reconstruction par une procédure itérative. La procédure itérative est de la forme :

$$S_{EPF}^{(r+1)}(t_i) = P_{\Omega}\left(A.S_{EPF}^{(r)}(t_i)\right)$$

$S_{EPF}^{(0)}(t_i)$ étant déterminé par l'interpolation polynomiale du signal $S_{EPI}(t)$

A est un opérateur d'approximation utilisant les échantillons à l'itération (r), et P_{Ω} est une projection orthogonale du signal $S_{EPF}^{(r)}(t)$ vers l'espace des signaux à bande limitée de spectre Ω. Des opérateurs A fixes ont été élaborés par Wiley/Marvasti [Wiley, 1978] [Marvasti, 1989] et Sauer/Allebach [Sauer, 1989], et des opérateurs A adaptatifs d'une itération à l'autre ont été développés comme ceux de Feichtinger et Cenker [Feichtinger, 1991a 1991b 1991c]. Razafinjatovo précise que l'intervalle de temps entre deux instants d'échantillonnage consécutifs peut être plus important lorsque le nombre de dérivées considérées augmente, si celles-ci sont disponibles aux instants d'échantillonnage irréguliers [Razafinjatovo, 1995].
L'étape de reconstruction peut être facilitée en utilisant un filtre passe-bas idéal s'appliquant au signal échantillonné irrégulièrement. La réponse impulsionnelle du filtre passe-bas (une fonction sinus cardinal) est utilisée comme interpolateur et le signal échantillonné irrégulièrement est en fait traité comme s'il était échantillonné de manière uniforme [Sankur, 1973].

III.2.d. Extension à la reconstruction d'images

Par analogie avec les méthodes de reconstruction itératives de signaux à une dimension, à bande spectrale limitée, il est possible de reconstruire des signaux multi-dimensions à bande spectrale limitée dans l'espace L^p [Feichtinger, Gröchenig, 1989]. En ce qui concerne les signaux bidimensionnels comme les images, l'extension de la reconstruction 1D à la reconstruction 2D a été abordée. Dans une telle image échantillonnée irrégulièrement, des lignes et colonnes entières sont manquantes et une reconstruction permet de recueillir l'image originale. En particulier, des travaux ont été réalisés sur la reconstruction d'images à bande spectrale limitée [Feichtinger, 1993], et la méthode itérative de poids adaptatifs semble très performante.

III.2.e. Reconstruction optimale

On pourrait trouver une méthode de reconstruction optimale et universelle. Or, les méthodes décrites dans la littérature, bien que leurs objectifs soient de reconstruire, n'utilisent pas les mêmes fondements ni les mêmes outils. Leur efficacité se juge plutôt en termes de qualité qu'en terme quantitatif d'erreur. Nous allons donc, en guise de synthèse, énumérer les diverses qualités dont nous devons prendre en compte les plus pertinentes pour le cas particulier de reconstruction à traiter [Feichtinger, 1991a] [Feichtinger, 1995b] :

- Qualité en terme de *précision* lorsque le signal à reconstruire peut être décrit par une fonction. La méthode doit permettre une reconstruction fidèle en tenant compte de la précision numérique de l'ordinateur.
- Qualité en terme de *robustesse* lorsque les signaux réels sont bruités contrairement aux signaux théoriques sur lesquels ont été développés les méthode de reconstruction. En effet, il est essentiel d'obtenir une approximation raisonnable des échantillons manquants du signal, même si le signal est bruité.
- Qualité en terme de *voisinage* dans le sens où les variations des signaux ne doivent pas se répercuter loin du lieu où elles se sont produites. En d'autres termes, il doit être possible de reconstruire une partie du signal à partir des échantillons voisins de la zone d'intérêt.
- Qualité en terme de *globalité* puisque la méthode doit aussi être capable de travailler globalement de manière à reconstruire le signal lorsqu'il est manquant sur une large portion.
- Qualité en terme de *vitesse* afin de trouver un bon compromis entre la méthode nécessaire à la reconstruction en fonction des échantillons à traiter, le temps de calcul et la mémoire requise par l'ordinateur.

III.3. Synthèse des outils disponibles

En conclusion de cet historique sur le traitement des signaux échantillonnés irrégulièrement, nous nous apercevons que seuls des travaux concernant la reconstruction de signaux a été abordée dans la littérature. Les outils classiques de traitement numérique du signal sont ensuite utilisés sur les signaux reconstruits. Aucun outil concernant les statistiques, le filtrage, la comparaison, l'identification ne semble avoir été abordé dans le cas de signaux échantillonnés irrégulièrement depuis le début du traitement numérique des signaux. Plus généralement, le problème suivant se pose : peut-on traiter des signaux à échantillonnage irrégulier sans avoir recours à une méthode de reconstruction totale d'un signal échantillonné à

pas fixe ? Nous allons maintenant répondre à cette question en nous attachant à l'élaboration de tels outils.

IV. Reconstruction d'échantillons intermédiaires

Comme nous l'avons vu dans l'historique de l'échantillonnage irrégulier, il existe plusieurs méthodes permettant la reconstruction d'un signal continu ou d'un signal échantillonné à pas fixe à partir d'un signal échantillonné irrégulièrement. Nous rappelons ici la reconstruction par interpolation linéaire, méthode que nous utiliserons chaque fois qu'il sera nécessaire d'utiliser un échantillon intermédiaire manquant. On approxime alors le signal entre deux instants d'échantillonnage irrégulier consécutifs par un segment de droite. La figure III.8 présente l'interpolation linéaire où les variables utilisées sont les suivantes :

t_i : temps à pas fixe

$\breve{t}_i$: temps à pas variable

x_i : amplitude de l'échantillon au temps t_i

$\breve{x}_i$: amplitude de l'échantillon au temps $\breve{t}_i$

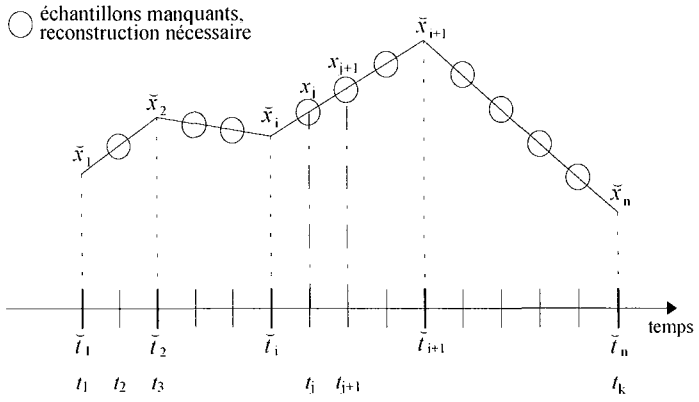


Figure III.8 : reconstruction par interpolation linéaire

L'équation du segment de droite dans l'intervalle de temps $t = \left[\breve{t}_i \ \breve{t}_{i+1}\right]$ est $x = at + b$ où la pente est $a = \dfrac{\breve{x}_{i+1} - \breve{x}_i}{\breve{t}_{i+1} - \breve{t}_i}$ et l'ordonnée à l'origine est $b = \dfrac{\breve{x}_i \breve{t}_{i+1} - \breve{x}_{i+1} \breve{t}_i}{\breve{t}_{i+1} - \breve{t}_i}$. Ainsi, un échantillon intermédiaire à l'instant $t_j \in \left[\breve{t}_i \ \breve{t}_{i+1}\right]$ peut être reconstruit et a pour amplitude $x_j = at_j + b$.

Ceci permet de reconstruire un SEPF lorsque les instants t_j sont choisis à pas constant ; ceci permet également de reconstruire un SEPV lorsque des instants particuliers t_j sont pris en compte.

V. Opérations simples

Les premières opérations simples à effectuer sur des SEPV sont l'addition et la soustraction. La multiplication, quant à elle, sert principalement dans les produits de convolution. Ces opérations simples nécessitent l'obtention de la valeur de chacun des signaux pour l'ensemble des instants d'échantillonnage des deux signaux. Par conséquent, il est nécessaire de reconstruire certains échantillons intermédiaires par interpolation linéaire afin d'effectuer l'opération terme à terme de manière temporelle. La figure III.9 montre deux SEPV avec des instants d'échantillonnage différents dont nous reconstruisons les valeurs manquantes. Ainsi, chaque signal a le même nombre d'instants d'échantillonnage, ceux-ci étant identiques.

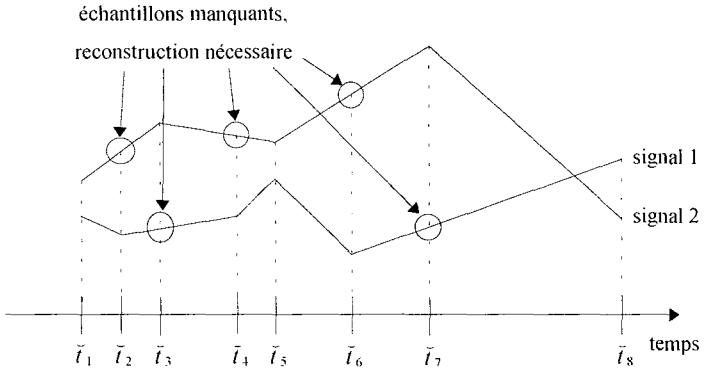


Figure III.9 : opération sur deux signaux après reconstruction partielle

Aux instants $\breve{t}_1$, $\breve{t}_5$ et $\breve{t}_8$, l'amplitude est connue pour chacun des deux signaux, alors qu'aux instants $\breve{t}_2$, $\breve{t}_3$, $\breve{t}_4$, $\breve{t}_6$ et $\breve{t}_7$, l'amplitude n'est connue que pour un des deux signaux. Une reconstruction est donc nécessaire avant de procéder à l'addition, la soustraction ou la multiplication entre les signaux.

Plus généralement, notons E_1 l'ensemble des instants d'échantillonnage du premier signal et E_2 l'ensemble des instants d'échantillonnage du deuxième signal. Une fois que l'amplitude des deux signaux est connue pour chaque instant d'échantillonnage issu de la réunion des ensembles E_1 et E_2, il devient possible d'additionner (soustraire, multiplier) terme à terme leurs amplitudes. Il est ainsi possible d'effectuer des opérations simples sur des SEPV.

VI. Statistiques

A partir des opérations simples que sont l'addition et la multiplication, nous pouvons maintenant redéfinir quelques notions statistiques comme la moyenne, la variance et, de manière globale, le moment d'ordre *k*. Nous expliciterons également la moyenne mobile, la variance mobile, la covariance et le coefficient de corrélation linéaire.

Commençons par la moyenne (moment d'ordre 0) déterminée de manière continue sur l'intervalle [0;T] pour un signal $x(t)$ par :

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

Lorsqu'on discrétise le signal $x(t)$, celui-ci devient le SEPV $\breve{x}(\breve{t})$ et on peut approximer l'intégrale par une sommation de surfaces rectangulaires ou trapézoïdales. Si on considère des surfaces rectangulaires, deux moyennes peuvent être prises en compte : moyenne par avance lorsque l'amplitude $\breve{x}_i$ génère le rectangle de base $\breve{t}_i - \breve{t}_{i-1}$; et moyenne par retard lorsque l'amplitude $\breve{x}_{i-1}$ génère le rectangle de même base. D'où les deux expressions :

$$\bar{x}_A = \frac{1}{\breve{t}_N - \breve{t}_1}\sum_{i=2}^{N} \breve{x}_i(\breve{t}_i - \breve{t}_{i-1})$$

$$\bar{x}_R = \frac{1}{\breve{t}_N - \breve{t}_1}\sum_{i=2}^{N} \breve{x}_{i-1}(\breve{t}_i - \breve{t}_{i-1})$$

La moyenne par retard est en fait la moyenne du signal continu après reconstruction par bloqueur d'ordre 0. Elle est généralement utilisée lors d'un traitement en ligne.

La méthode des trapèzes permet de mieux prendre en compte l'aspect de continuité du SEPV. Ainsi les surfaces considérées tiennent compte de l'éventuelle reconstruction par interpolation linéaire. Nous avons alors :

$$\bar{x}_T = \frac{1}{\breve{t}_N - \breve{t}_1}\sum_{i=2}^{N} \frac{\breve{x}_i + \breve{x}_{i-1}}{2}.(\breve{t}_i - \breve{t}_{i-1})$$

Les moyennes décrites sont des moyennes pondérées puisque les intervalles $\breve{t}_i - \breve{t}_{i-1}$ ne sont pas de durées identiques. La moyenne pondérée par la méthode des trapèzes sera utilisée par la suite dès lors qu'une statistique de moyenne sera nécessaire.

Cette moyenne par trapèzes peut être définie de manière récurrente en ajoutant un échantillon à la moyenne précédente ; ces deux valeurs étant pondérées par leur intervalle de temps respectif. Nous obtenons :

$$\bar{x}_{T,n} = \frac{\bar{x}_{T,n-1}(\breve{t}_{n-1} - \breve{t}_1) + \frac{\breve{x}_n + \breve{x}_{n-1}}{2}(\breve{t}_n - \breve{t}_{n-1})}{\breve{t}_n - \breve{t}_1}$$

Il est aussi possible de définir une moyenne mobile pondérée par la méthode des trapèzes. Contrairement au SEPF où la moyenne mobile est définie sur un nombre constant d'échantillons donc un intervalle de temps constant, la moyenne mobile d'un SEPV est définie sur un nombre constant d'échantillons, et sur un intervalle de temps variable. La moyenne mobile $\bar{x}_{M,n}$ sur N_1 échantillons avant et N_2 échantillons après l'indice courant n est :

$$\bar{x}_{M,n} = \frac{1}{\breve{t}_{n+N_2} - \breve{t}_{n-N_1-1}} \sum_{i=n-N_1}^{n+N_2} \frac{\breve{x}_i + \breve{x}_{i-1}}{2} \left(\breve{t}_i - \breve{t}_{i-1}\right)$$

Sous forme récurrente, en ajoutant l'échantillon suivant et en retranchant le premier échantillon, la moyenne mobile par la méthode des trapèzes s'exprime :

$$\bar{x}_{M,n} = \frac{\bar{x}_{M,n-1}\left(\breve{t}_{n-1+N_2} - \breve{t}_{n-N_1-2}\right) - \left(\frac{\breve{x}_{n-1-N_1} + \breve{x}_{n-2-N_1}}{2}\right)\left(\breve{t}_{n-1-N_1} - \breve{t}_{n-N_1-2}\right) + \left(\frac{\breve{x}_{n+N_2} + \breve{x}_{n+N_2-1}}{2}\right)\left(\breve{t}_{n+N_2} - \breve{t}_{n-1+N_2}\right)}{\breve{t}_{n+N_2} - \breve{t}_{n-1-N_1}}$$

Après la moyenne et la moyenne mobile, intéressons-nous maintenant à la variance (moment d'ordre 1). La variance pondérée par avance est définie par :

$$\mathrm{var}_A(\breve{x}) = \frac{1}{\breve{t}_N - \breve{t}_1} \sum_{i=2}^{N} \left(\breve{x}_i - \bar{x}_T\right)^2 \left(\breve{t}_i - \breve{t}_{i-1}\right)$$

De la même manière que pour la moyenne mobile, nous définissons la variance mobile pondérée par avance $\mathrm{var}_{M,n}(\breve{x})$ en prenant N_1 échantillons avant et N_2 échantillons après l'indice courant n :

$$\mathrm{var}_{M,n}(\breve{x}) = \frac{1}{\breve{t}_{n+N_2} - \breve{t}_{n-N_1-1}} \sum_{i=n-N_1}^{n+N_2} \left(\breve{x}_i - \bar{x}_{T,n}\right)^2 \left(\breve{t}_i - \breve{t}_{i-1}\right)$$

Dans un but de comparaison des moyennes et variances entre SEPF et SEPV, nous construisons deux signaux. Le premier est un signal télégraphique bruité $s_1(t)$ et le second est la somme de trois signaux sinusoïdaux et d'un polynôme du premier ordre de la forme :

$$s_2(t) = \sum_{i=1}^{3} a_i \sin(2\pi f_i t) + \alpha t + \beta$$

Ces deux signaux sont échantillonnés à pas fixe à la fréquence d'échantillonnage de 300 Hz, puis à pas variable ; les moyennes et variances sont ensuite calculées à pas fixe et à pas variable selon le cas. La figure III.10 montre les deux signaux de test et le tableau III.1 donne les statistiques recueillies.

Malgré une erreur importante sur la variance du deuxième signal, les moyennes et variances des SEPF et SEPV sont très proches.

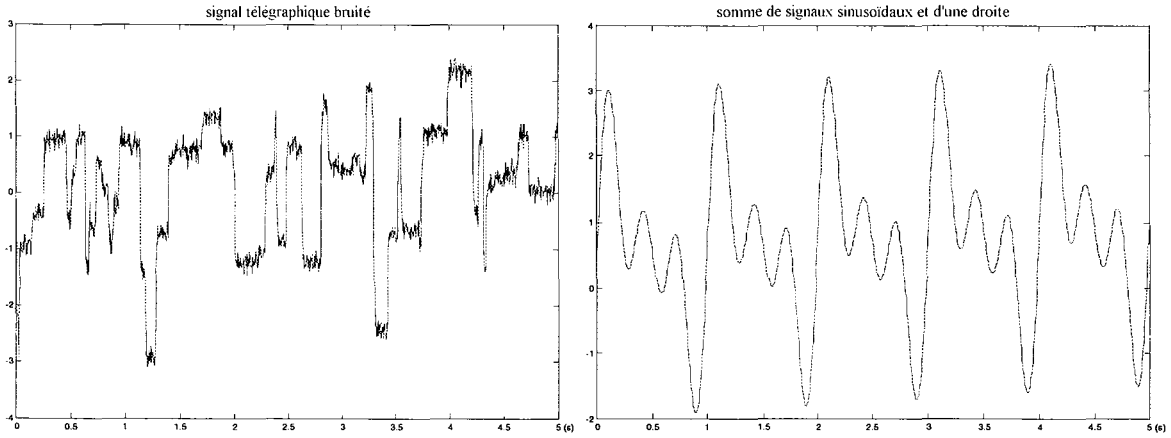


Figure III.10 : signaux généraux pour la comparaison des moyennes et variances

	signal 1	signal 2
nombre d'échantillons EPF / EPV	1500 / 961	1500 / 180
moyenne EPF	0,1349	0,7500
moyenne EPV par avance	0,1345	0,7327
moyenne EPV par retard	0,1358	0,7669
moyenne EPV par trapèzes	0,1348	0,7498
erreur sur la moyenne par trapèzes	$7{,}4\ 10^{-2}$ %	$2{,}6\ 10^{-2}$ %
variance EPF	1,2104	1,4625
variance EPV	1,2101	1,5360
erreur sur la variance par trapèzes	$2{,}4\ 10^{-2}$ %	5,0 %

Tableau III.1 : comparaison des statistiques

De façon plus générale, nous pouvons définir le moment d'ordre k d'un SEPV $\breve{x}(\breve{t})$ par la relation :

$$M^k(\breve{x}) = \frac{1}{\breve{t}_N - \breve{t}_1} \sum_{i=2}^{N} \left(\breve{x}_i - \bar{x}_T\right)^k \left(\breve{t}_i - \breve{t}_{i-1}\right)$$

De même, la covariance de deux SEPV $\breve{x}(\breve{t}^a)$ et $\breve{y}(\breve{t}^b)$ dont la base de temps comprenant tous les instants d'échantillonnage est $\breve{t} = \breve{t}^a \cup \breve{t}^b$ est définie par :

$$\mathrm{cov}_A(\breve{x},\breve{y}) = \frac{1}{\breve{t}_N - \breve{t}_1}\sum_{i=2}^{N}(\breve{x}_i - \bar{x}_T)(\breve{y}_i - \bar{y}_T).(\breve{t}_i - \breve{t}_{i-1})$$

A partir de la variance et de la covariance, nous avons ainsi redéfini le coefficient de corrélation linéaire :

$$\mathrm{corr}_A(\breve{x},\breve{y}) = \frac{\mathrm{cov}_A(\breve{x},\breve{y})}{\sqrt{\mathrm{var}_A(\breve{x})\,\mathrm{var}_A(\breve{y})}}$$

En résumé, les calculs statistiques de moyenne, variance, covariance et coefficient de corrélation sont utilisables pour des SEPV en pondérant les amplitudes par les intervalles de temps séparant deux échantillons consécutifs.

VII. Analyse spectrale par transformée de Fourier

De manière à déterminer les composantes spectrales d'un SEPV et envisager alors le filtrage du signal, nous procédons maintenant à l'analyse spectrale du SEPV en adaptant la transformée de Fourier. Nous avons vu que des bloqueurs d'ordre 0 et d'ordre 1 peuvent être utilisés pour reconstruire le signal. Nous allons définir la transformée de Fourier d'un SEPV afin d'obtenir une analyse spectrale d'un SEPV en utilisant des bloqueurs d'ordre 0 et 1. Deux cas sont envisagés selon l'ordre du bloqueur.

La transformée de Fourier d'un signal continu $x(t)$ est :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

En considérant N pas d'échantillonnage non constant $\breve{t}_i$, la transformée de Fourier se décompose comme suit :

$$X(f) = \sum_{i=2}^{N}\left\{\int_{\breve{t}_{i-1}}^{\breve{t}_i} \breve{x}(t)e^{-j2\pi ft}\,dt\right\}$$

Considérons dans un premier temps le bloqueur d'ordre 0. Celui-ci conserve l'amplitude $\breve{x}_{i-1}$ du signal à l'instant $\breve{t}_{i-1}$ jusqu'à l'instant $\breve{t}_i$. La transformée de Fourier discrète $X_0(f)$ par bloqueur d'ordre 0 est alors définie par :

$$X_0(f) = \sum_{i=2}^{N}\left\{\int_{\breve{t}_{i-1}}^{\breve{t}_i} \breve{x}_{i-1}e^{-j2\pi ft}\,dt\right\},$$

soit encore :

$$X_0(f) = \frac{1}{-j2\pi f}\sum_{i=2}^{N} \breve{x}_{i-1}\left(e^{-j2\pi f\breve{t}_i} - e^{-j2\pi f\breve{t}_{i-1}}\right).$$

Considérons maintenant le bloqueur d'ordre 1 qui impose une interpolation linéaire de l'amplitude du signal $x(t)$ entre les instants $\breve{t}_{i-1}$ et $\breve{t}_i$, soit $x(t) = a_i t + b_i$ pour $t \in [t_{i-1}; t_i]$ avec $a_i = \frac{\breve{x}_i - \breve{x}_{i-1}}{\breve{t}_i - \breve{t}_{i-1}}$ et $b_i = \frac{\breve{x}_{i-1}\breve{t}_i - \breve{x}_i\breve{t}_{i-1}}{\breve{t}_i - \breve{t}_{i-1}}$. La transformée de Fourier discrète $X_1(f)$ par bloqueur d'ordre 1 est alors définie par :

$$X_1(f) = \sum_{i=2}^{N}\left\{\int_{\breve{t}_{i-1}}^{\breve{t}_i}(a_i t + b_i)e^{-j2\pi ft}dt\right\},$$

soit encore :

$$X_1(f) = \frac{1}{j2\pi f}\sum_{i=2}^{N}\left\{\left[-(a_i t + b_i)e^{-j2\pi ft}\right]_{\breve{t}_{i-1}}^{\breve{t}_i} - \left[\frac{a_i e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f}\right]_{\breve{t}_{i-1}}^{\breve{t}_i}\right\},$$

et enfin :

$$X_1(f) = \frac{1}{j2\pi f}\sum_{i=2}^{N}\left\{-e^{-j2\pi f\breve{t}_i}\left(\breve{x}_i + \frac{a_i}{j2\pi f}\right) + e^{-j2\pi f\breve{t}_{i-1}}\left(\breve{x}_{i-1} + \frac{a_i}{j2\pi f}\right)\right\}, \qquad \text{(III-1)}$$

cette dernière expression évitant le calcul des coefficients b_i.

Le spectre fréquentiel en amplitude $S_X(f)$ définissant l'amplitude en fonction de la fréquence positive est caractérisé par la norme :

$$S_X(f) = \frac{2\|X(f)\|}{N} \qquad \text{(III-2)}$$

pour une fréquence $f \in [0; F_e/2]$, où F_e est la fréquence d'échantillonnage du signal $x(t)$.

La transformée de Fourier par bloqueur d'ordre 1 et son spectre associé permettra de comparer les spectres des SEPV entre eux ou à ceux des SEPF. Nous définissons le critère de comparaison des spectres $S_1(f)$ et $S_2(f)$ dans la bande de fréquences $f \in [0; F_e/2]$ par :

$$\Phi = \frac{2}{F_e}\int_0^{\frac{Fe}{2}} |S_1(f) - S_2(f)|df\ . \qquad \text{(III-3)}$$

Dans l'historique concernant l'analyse spectrale, Dutt et al. ont décrit une transformée de Fourier discrète rapide avec des pas d'échantillonnage non équirépartis et pris dans un ordre aléatoire [Dutt et al., 1993]. Comparons leur méthode au spectre de la transformée de Fourier par bloqueur d'ordre 1 que nous venons d'expliciter. Définissons un signal $x(t) = 1\sin 2\pi f_1 t + 2\sin 2\pi f_2 t$ avec $f_1 = 4$ Hz et $f_2 = 10$ Hz. Nous échantillonnons ce signal $x(t)$ à la fréquence F_e=60 Hz, puis nous l'échantillonnons à pas variable, grâce à l'algorithme que nous avons développé au chapitre 2, afin de recueillir N échantillons non équirépartis. L'allure théorique du spectre du signal $x(t)$ pour $f \in \left[-F_e/2; F_e/2\right]$ est montrée figure III.11.

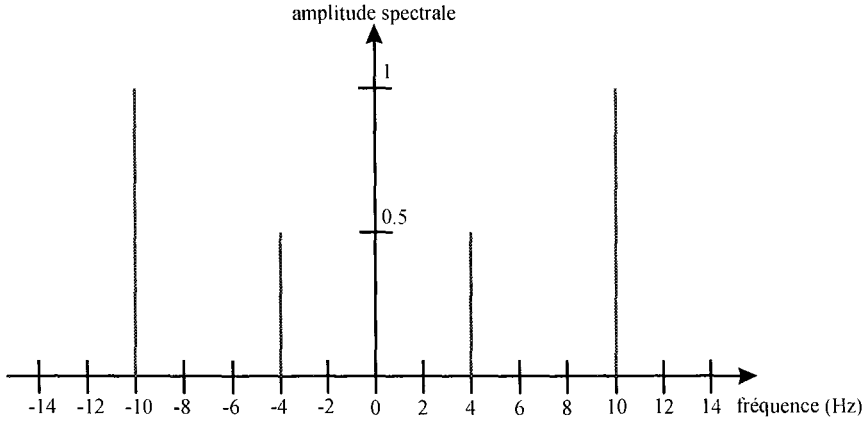


Figure III.11 : allure théorique du spectre

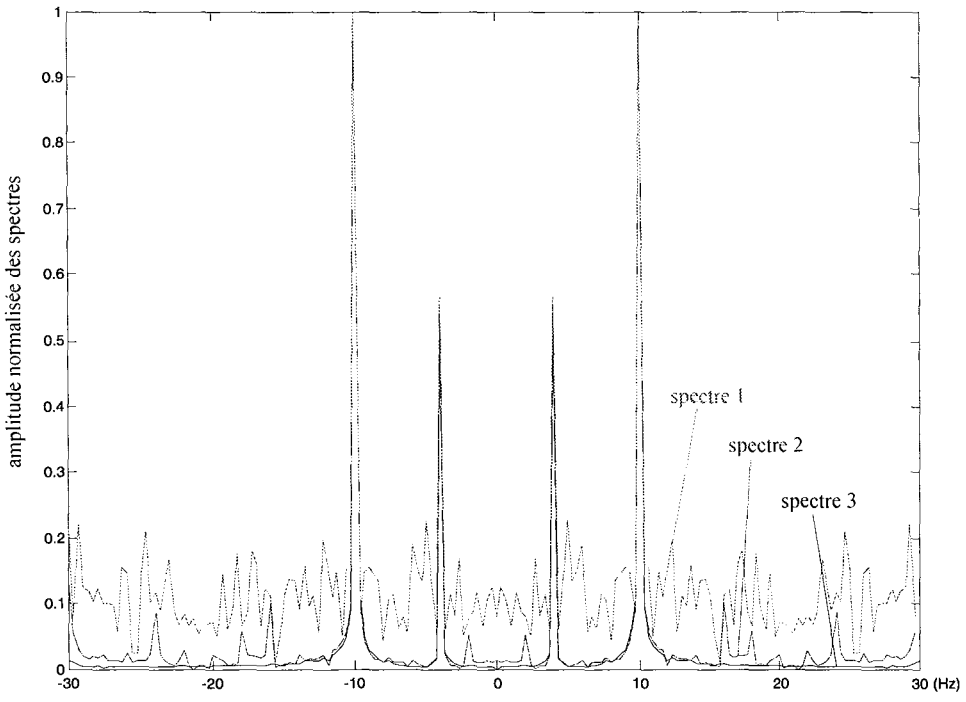


Figure III.12 : superposition des deux spectres

Nous déterminons alors les spectres du SEPV successivement par la méthode de Dutt et par la nôtre et nous superposons les spectres sur la figure III.12. Le spectre 1 correspond à l'analyse spectrale par Dutt du signal dont les instants d'échantillonnage sont pris de manière aléatoire (certaines fluctuations du signal sont alors inhibées). Le spectre 2 correspond à l'analyse spectrale par Dutt du signal échantillonné à pas variable. Le spectre 3 correspond à notre analyse spectrale du signal échantillonné à pas variable.

Nous remarquons que le spectre 3 établi par notre méthode est très proche du spectre théorique ($\Phi = 0{,}011$) alors que le spectre 2 établi par la méthode de Dutt en prenant le signal échantillonné à pas variable s'en éloigne en dehors des raies théoriques ($\Phi = 0{,}020$). Quant au spectre 1 établi en prenant les échantillons aléatoirement, la méthode de Dutt donne une vague approximation de l'analyse spectrale ($\Phi = 0{,}110$). Ceci est dû au fait que nous tenons compte des intervalles temporels variables, ce qui n'est pas le cas pour les autres méthodes.

VIII. Filtrage

Un des outils les plus utilisés en traitement du signal est le filtrage. Après avoir établi un outil d'analyse spectrale, il convient maintenant d'élaborer des filtres pouvant s'appliquer à des SEPV. L'originalité de la procédure réside en l'absence de reconstruction totale du signal d'origine. Pour ce faire, après un préambule théorique sur le traitement des SEPV, nous commencerons par définir une chaîne de traitement d'un SEPV par filtrage en mettant en évidence l'étape de reconstruction d'échantillons intermédiaires lorsque cela s'avère nécessaire. Nous étudierons ensuite la pertinence des quatre types de filtres que sont les filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande. Nous établirons ensuite une relation entre le pas d'échantillonnage et la reconstruction d'échantillons intermédiaires. Enfin, nous réaliserons un filtre passe-bas du premier ordre, un filtre passe-bas du deuxième ordre, et nous généraliserons à la réalisation de filtres passe-bas et passe-bande d'ordre N en résolvant et discrétisant la représentation d'état.

VIII.1. Préambule sur le traitement des SEPV

Considérons un système continu d'entrée $x(t)$, de sortie $y(t)$ et de réponse impulsionnelle $f(t)$. La sortie est alors définie comme le produit de convolution :

$$y(t) = x(t) * f(t) = \int_0^t x(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

Si nous échantillonnons indépendamment l'entrée, la sortie et la réponse impulsionnelle à pas variable, le système devient celui décrit figure III.13 où τ_i, τ_j et τ_k représentent respectivement les instants d'échantillonnage de l'entrée, de la réponse impulsionnelle et de la sortie.

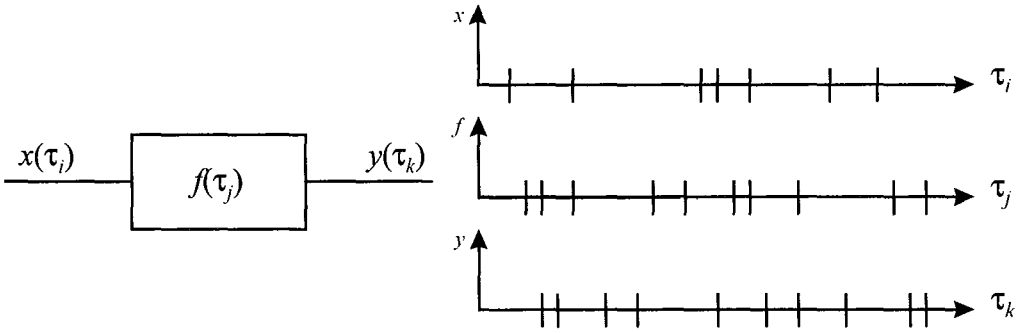


Figure III.13 : système échantillonné à pas variable

Si nous connaissons la réponse impulsionnelle $f(t)$, nous pouvons l'échantillonner à pas variable et ainsi obtenir $f(\tau_j)$. La transformée de Laplace $\widetilde{f}(s)$ peut alors être déterminée par une méthode analogue à celle utilisée pour la transformée de Fourier en prenant une interpolation linéaire entre deux échantillons consécutifs $[\tau_{j(l)} ; \tau_{j(l+1)}]$.

De la même manière, nous obtenons la transformée de Laplace de l'entrée $x(\tau_i)$, à savoir $\widetilde{x}(s)$.

Dans le domaine de Laplace, le produit de convolution $y(t) = x(t) * f(t)$ temporel se transforme en produit simple $\widetilde{y}(s) = \widetilde{x}(s)\widetilde{f}(s)$. La transformée de Laplace inverse permet de recueillir le signal de sortie $y(t)$. Il est donc théoriquement possible d'obtenir le signal de sortie d'une fonction de transfert lorsque le signal d'entrée est échantillonné à pas variable et que la réponse impulsionnelle est finie. D'un point de vue pratique, ceci entraîne d'importants calculs et nous allons, dans ce qui suit, élaborer divers filtres s'appliquant à des SEPV.

VIII.2. Chaîne de traitement d'un SEPV

La chaîne de traitement va permettre de réaliser une opération de filtrage en tenant compte d'une reconstruction éventuelle d'échantillons. En effet, lorsque les intervalles de temps sont trop grands pour le traitement à réaliser, celui-ci peut générer des instabilités ou fournir une sortie qui ne soit pas fidèle à la réalité. Dans ce cas, il convient de reconstruire un échantillon intermédiaire (REI) par interpolation linéaire. Nous déterminerons ultérieurement la relation entre l'opération à réaliser et l'intervalle de temps à considérer. De plus, après traitement, il convient de ré-échantillonner le signal à pas variable de manière à optimiser le nombre

d'échantillons constituant le signal de sortie. En tenant compte des observations faites précédemment, le traitement d'un SEPV se résume ainsi, figure III.14 :

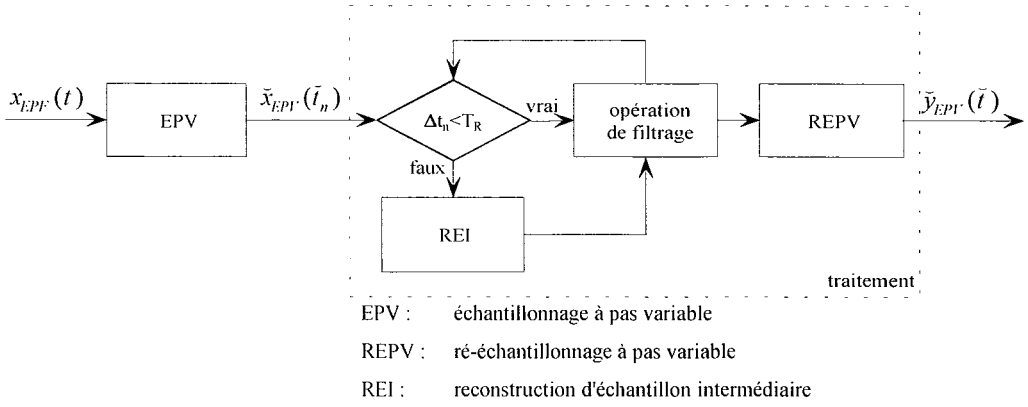


Figure III.14 : chaîne de traitement des SEPV

Dans le cas où nous avons à traiter un SEPV, celui-ci constituera alors le signal d'entrée $\breve{x}_{EPV}(\breve{t}_n)$ du traitement. Dans le cas où nous avons à traiter un SEPF, il convient au préalable de l'échantillonner à pas variable (EPV) afin d'obtenir le signal $\breve{x}_{EPV}(\breve{t}_n)$.

Vient alors un comparateur d'intervalle de temps $\Delta t_n = \breve{t}_n - \breve{t}_{n-1}$ au pas de reconstruction T_R fonction de l'opération (filtrage) à réaliser. Si Δt_n est supérieur à T_R il est alors nécessaire de reconstruire un échantillon intermédiaire avant de procéder à l'opération de filtrage.

Enfin, à l'issu du filtrage, il convient d'optimiser le nombre d'échantillons représentatifs du signal par ré-échantillonnage à pas variable (REPV) et obtenir le signal de sortie $\breve{y}_{EPV}(\breve{t})$.

L'ensemble de ces modules assure le traitement général des SEPV, le filtrage étant un traitement particulier.

VIII.3. Etude de la pertinence des différents types de filtrage

Un signal échantillonné à la fréquence F_e contient des composantes de fréquences comprises entre 0 Hz (signal continu) et la moitié de la fréquence d'échantillonnage ($F_e/2$) ; ceci se justifie par le théorème de Shannon qui stipule qu'un signal numérique doit être échantillonné à une fréquence au moins égale au double de la fréquence la plus élevée contenue dans le signal. Le spectre d'un tel signal est donc contenu dans le contour suivant :

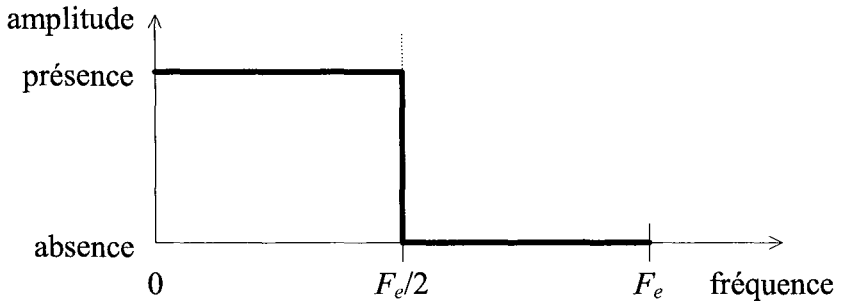


Figure III.15 : contour du spectre d'un signal échantillonné

Nous allons examiner, dans ce qui suit, si les quatre types de filtres (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande) sont réalisables en EPV et s'ils méritent d'être réalisés. Puis nous nous intéresserons à l'adaptation de la fréquence de reconstruction de sorte que l'écart instantané entre le signal EPV obtenu après traitement et le signal EPF obtenu par le même traitement soit inférieur à un seuil donné.

VIII.3.a. Filtre passe-bas

Du point de vue spectral, le filtre passe-bas a pour objectif d'éliminer les composantes fréquentielles supérieures à une fréquence particulière appelée fréquence de coupure F_c, tout en conservant les fréquences inférieures à cette fréquence de coupure. La fréquence de coupure est comprise entre 0 et $F_e/2$. Le gabarit idéal d'un filtre passe-bas est le suivant :

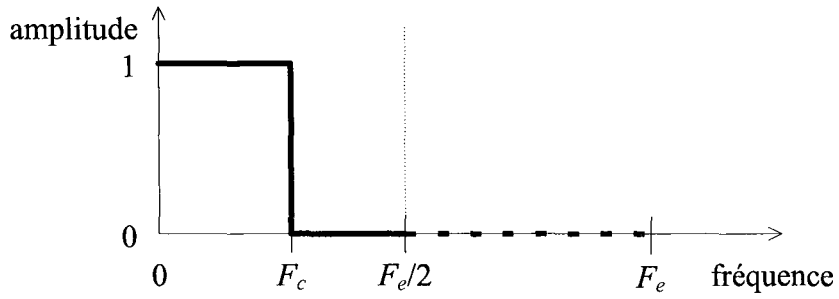


Figure III.16 : gabarit d'un filtre passe-bas

Pour un SEPV, afin de conserver les fréquences comprises entre 0 et F_c, il conviendra de reconstruire le signal à une fréquence d'échantillonnage au moins double de la fréquence la plus élevée du signal filtré, soit le double de la fréquence de coupure F_c. Cette fréquence de reconstruction sera alors comprise entre $2F_c$ et F_e, ce qui est tout a fait possible. De ce fait, nous nous intéresserons au développement de filtres passe-bas EPV.

VIII.3.b. Filtre passe-haut

Du point de vue spectral, le filtre passe-haut a pour objectif d'éliminer les composantes fréquentielles inférieures à F_c, tout en conservant les fréquences supérieures à cette fréquence de coupure. La fréquence de coupure est comprise entre 0 et $F_e/2$. Le gabarit idéal d'un filtre passe-haut est le suivant :

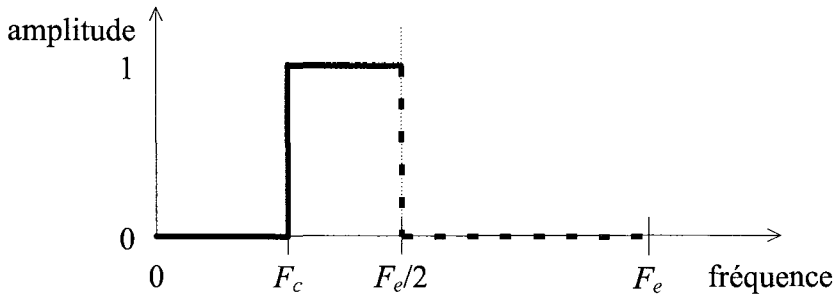


Figure III.17 : gabarit d'un filtre passe-haut

Pour un SEPV, afin de conserver les fréquences comprises entre F_c et $F_e/2$, il conviendra de reconstruire le signal à une fréquence d'échantillonnage au moins double de la fréquence la plus élevée du signal filtré, soit le double de la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Cette fréquence de reconstruction sera alors la fréquence d'échantillonnage d'origine F_e. Il semble donc nécessaire de reconstruire tous les échantillons pour réaliser un filtre passe-haut EPV. Ceci n'est pas le but recherché ; il est préférable d'utiliser une méthode de reconstruction d'un signal EPF puis d'effectuer un traitement conventionnel de filtrage. Ou bien, en associant le filtre passe-haut EPV à un filtre passe-bas EPV de manière à former un passe-bande EPV, la fréquence de reconstruction sera fonction de la fréquence de coupure du filtre passe-bas et l'élaboration du filtre passe-haut aura alors un sens.

VIII.3.c. Filtre passe-bande

Du point de vue spectral, le filtre passe-bande a pour objectif d'éliminer les composantes fréquentielles inférieures à une fréquence de coupure basse Fc_B et supérieures à une autre fréquence de coupure haute Fc_H, tout en conservant les fréquences comprises entre les fréquences de coupure basse et haute. Cette plage de fréquences s'appelle la bande passante. Les fréquences de coupure sont comprises entre 0 et $F_e/2$. Le gabarit idéal d'un filtre passe-bande est le suivant :

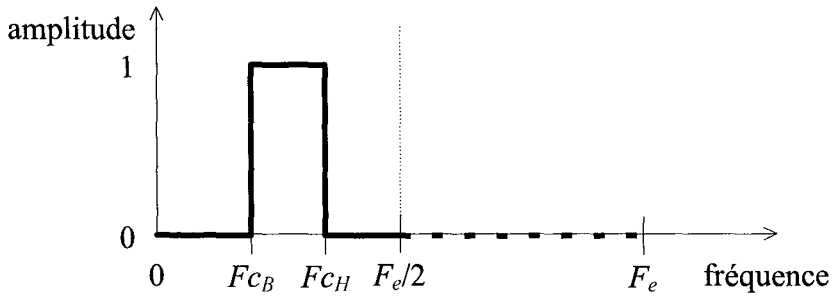


Figure III.18 : gabarit d'un filtre passe-bande

Pour un SEPV, afin de conserver les fréquences comprises entre Fc_B et Fc_H, il conviendra de reconstruire le signal à une fréquence d'échantillonnage au moins double de la fréquence la plus élevée du signal filtré, soit la fréquence de coupure haute Fc_H. Cette fréquence de reconstruction sera alors comprise entre $2\,Fc_H$ et F_e, ce qui est tout a fait possible. Nous nous intéresserons donc au développement de filtres passe-bande EPV.

VIII.3.d. Filtre coupe-bande

Du point de vue spectral, le filtre coupe-bande ou réjecteur de bande a pour objectif d'éliminer les composantes fréquentielles comprises entre la fréquence de coupure basse Fc_B et la fréquence de coupure haute Fc_H, tout en conservant les fréquences inférieures à la fréquence de coupure basse et supérieures à la fréquence de coupure haute. La plage de fréquences comprises entre Fc_B et Fc_H s'appelle la bande de réjection. Les fréquences de coupure sont comprises entre 0 et $F_e/2$. Le gabarit idéal d'un filtre coupe-bande est le suivant :

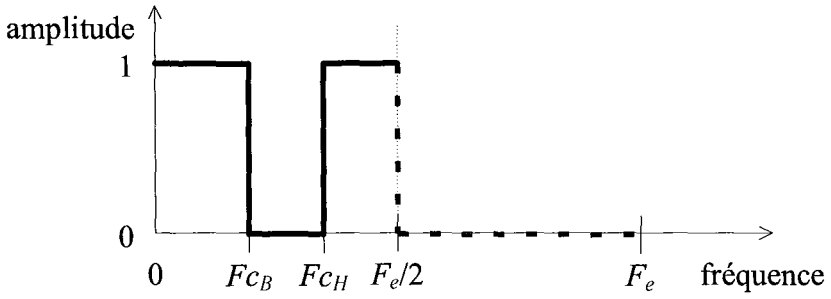


Figure III.19 : gabarit d'un filtre coupe-bande

Pour un SEPV, afin de conserver les fréquences comprises entre 0 et Fc_B et entre Fc_H et $F_e/2$, il conviendra de reconstruire le signal à une fréquence d'échantillonnage au moins égale au double de la fréquence la plus élevée du signal filtré, soit le double de la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Cette fréquence de reconstruction sera alors la fréquence d'échantillonnage d'origine F_e. Il semble donc nécessaire de reconstruire tous les échantillons

pour réaliser un filtre coupe-bande EPV, ce qui n'est pas le but recherché. Il convient alors d'utiliser une méthode de reconstruction d'un signal EPF puis d'effectuer un traitement de manière conventionnelle.

VIII.3.e. Choix du pas de reconstruction des échantillons intermédiaires

Dans le cas où on conserve en sortie du filtre les mêmes instants d'échantillonnage t_n qu'à l'entrée de ce filtre, la plage de fréquences dans laquelle sera choisie la fréquence de coupure f_0 du filtre, sera limitée du fait des pas d'échantillonnage. En effet, soit T_0 le plus grand pas d'échantillonnage : $T_0 = \max_n \{t_n - t_{n-1}\}$. Ce pas correspond à une fréquence $F_0 = \frac{1}{T_0}$. D'après le théorème de Shannon, la fréquence de coupure f_0 du filtre devra donc être inférieure à $\frac{F_0}{2}$, c'est-à-dire $f_0 \leq \frac{1}{2 \cdot \max_n \{t_n - t_{n-1}\}}$.

Afin de ne pas limiter la fréquence de coupure et de la choisir dans la plage de fréquences définie par chacun des quatre types de filtres, il est nécessaire de reconstruire des échantillons d'entrée intermédiaires lorsque le pas d'échantillonnage est trop grand par rapport au temps de réponse du filtre à une entrée en échelon (voir chaîne de traitement de la figure III.14). Ce temps de réponse est fonction de la fréquence de coupure f_0.

A titre d'exemple, considérons le cas d'un filtre passe-bas d'ordre 1, de gain statique unité dont l'entrée est un échelon, et traçons sa réponse en fonction de la variable sans dimension temps réduit $\frac{t}{\tau}$, $\tau = \frac{1}{2\pi f_0}$ étant la constante de temps du filtre (figure III.20).

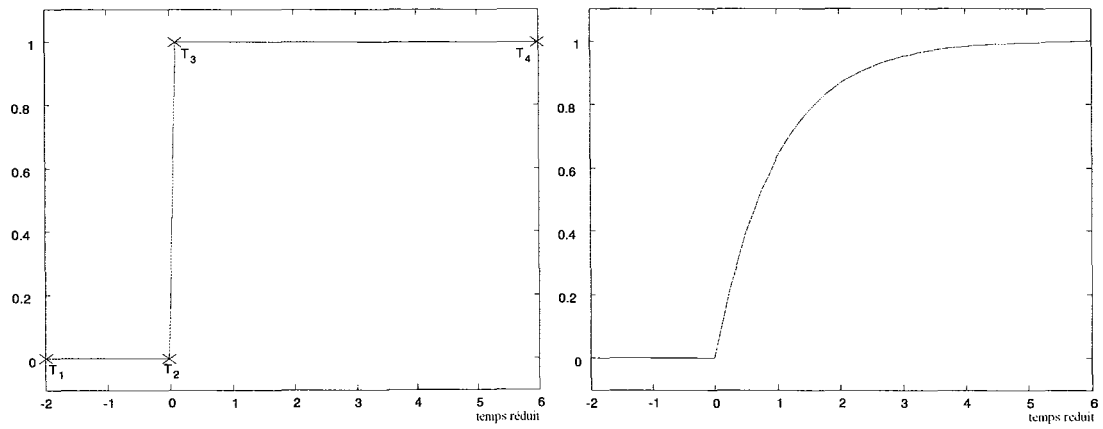


Figure III.20 : échelon unitaire et réponse d'un filtre passe-bas à cet échelon en fonction du temps réduit

On vérifie facilement que l'amplitude du signal de sortie atteint 66% de sa valeur finale au bout d'une durée τ, 95% au bout de 3τ, et 99% au bout de 5τ.

Pour un SEPV, l'échelon en entrée du filtre sera composé de quatre instants d'échantillonnage : l'instant initial T_1 correspondant à une amplitude 0 du signal, l'instant T_2 juste avant la commutation, l'instant T_3 juste après la commutation et l'instant final T_4 correspondant à une amplitude 1 du signal. Considérons l'instant T_3 juste après la commutation et l'instant T_4 en fin du signal. En sortie du filtre, dans le cas où le pas $T_4 - T_3$ est trop grand, l'amplitude à l'instant T_3 vaudra $y(T_3) = 0$ et celle à l'instant T_4 vaudra $y(T_4) = 1$, mais aucun échantillon ne traduira l'évolution de la montée entre ces deux instants. Pour pallier ce manque d'information, on peut alors générer, par exemple, un échantillon intermédiaire en entrée à 5τ, à 3τ ou à τ, correspondant respectivement à des erreurs de reconstruction élevée, moyenne ou faible.

Ainsi, en prenant une fréquence de reconstruction :

$$F_R = \frac{1}{\tau} = 2\pi f_0, \tag{III-4}$$

correspondant au pas de reconstruction :

$$T_R = \frac{1}{F_R} = \frac{1}{2\pi f_0},$$

nous pouvons utiliser les fréquences de coupure dans les plages définies pour chaque type de filtre, tout en s'assurant de la bonne réponse du filtre à de fortes variations du signal d'entrée. Par conséquent, nous reconstruisons, par interpolation linéaire d'ordre 1, un échantillon intermédiaire (REI) lorsque $t_n - t_{n-1} > T_R$. Nous remarquons que la fréquence de reconstruction est au moins double de la fréquence de coupure, soit $F_R \geq 2f_0$. Bien sûr, si la fréquence de reconstruction F_R est supérieure à la fréquence d'échantillonnage F_e, nous reconstruirons alors le signal à la fréquence d'échantillonnage d'origine F_e.

Cependant, il n'est peut-être pas nécessaire de reconstruire en permanence au pas T_R. En effet, la reconstruction de certains échantillons semble parfois inutile ; ces échantillons n'apportant rien à l'évolution du signal. C'est pourquoi nous suggérons, en perspectives, une amélioration à apporter en prédisant l'instant de reconstruction d'un échantillon à partir des fluctuations du signal d'entrée EPV, du signal de sortie EPV, et de la fonction de transfert du filtre ; tout ceci en satisfaisant le ré-échantillonnage à pas variable du signal de sortie. L'optimisation du

nombre d'échantillons à reconstruire permettrait dans certains cas de réduire le temps de calcul.

VIII.4. Filtrage passe-bas du premier ordre

Dans cette partie, nous allons construire un filtre passe-bas EPV. Nous commencerons par rappeler la correspondance existant entre un filtre analogique et un filtre numérique. Nous exposerons ensuite le lien entre la fonction de transfert continue et la fonction de transfert discrète d'un filtre passe-bas d'ordre 1. Enfin, nous établirons l'expression de la fonction de transfert discrète EPV d'un filtre passe-bas d'ordre 1.

VIII.4.a. Rappel sur la correspondance entre filtre analogique et filtre numérique

Avant d'établir des liaisons entre fonctions de transfert continue, discrète et discrète EPV, rappelons, dans ce paragraphe, la correspondance entre un filtre analogique et un filtre numérique.

Soit $H(s)$ la fonction de transfert continue du filtre passe-bas d'ordre m : $H(s)=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{s+p_i}$

Sa réponse impulsionnelle est : $H(t)=\sum_{i=1}^{m}A_i e^{-p_i t}$

On désire que la réponse impulsionnelle du filtre numérique soit identique en chaque instant d'échantillonnage à la réponse impulsionnelle du filtre analogique, soit : $H(nT)\equiv H(t)$ pour chaque instant $t=nT$, T étant la période d'échantillonnage fixe.

Alors : $H(nT)=\sum_{i=1}^{m}A_i e^{-nTp_i}$

Or, la fonction de transfert discrète est $H(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}H(nT)z^{-n}$, soit :

$$H(z)=\sum_{i=1}^{m}A_i\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nTp_i}z^{-n}=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{1-e^{-p_iT}z^{-1}}$$

avec $\left|e^{-p_iT}z^{-1}\right|<1$ satisfaisant la convergence de la série géométrique.

Ainsi, la correspondance entre fonctions de transfert continue et discrète est :

$$H(s)=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{s+p_i}\Leftrightarrow H(z)=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{1-e^{-p_iT}z^{-1}}\text{ , avec } s=j\omega,\ z=e^{j\omega T},\ \left|e^{-p_iT}z^{-1}\right|<1. \qquad \text{(III-5)}$$

VIII.4.b. Fonctions de transfert continue et discrète

Nous allons maintenant rappeler les expression des fonctions de transfert continue et discrète d'un filtre passe-bas d'ordre 1, et nous comparerons leur gain respectif.

Un filtre analogique passe-bas d'ordre 1 est représenté par la fonction de transfert continue $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{A}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}, \tag{III-6}$$

$\omega_0=2\pi f_0$, ω_0 étant la pulsation de coupure, f_0 étant la fréquence de coupure, et A le gain statique. Le gain de cette fonction de transfert est :

$$|H(j\omega)| = H(\omega) = \frac{A}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Par ailleurs, un filtre numérique d'ordre 1 et de gain statique A, a pour fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{A(1-K)}{1 - Kz^{-1}}$$

Sous forme récursive, la relation entre les échantillons d'entrée et ceux de sortie est :

$$y_n = Ky_{n-1} + A(1-K)x_n \tag{III-7}$$

Le filtre numérique est stable lorsque les racines du polynôme en z du dénominateur de $G(z) = \frac{A(1-K)z}{z-K}$ ont toutes un module inférieur à 1. L'unique racine est $z_0=K$. La stabilité du filtre est donc vérifiée si $|K| < 1$.

La valeur de K déduite à partir de la conversion transformée de Laplace - transformée en z (équation III-5) permettant d'obtenir une équivalence entre la réponse temporelle continue et celle discrète est :

$$K = e^{-\omega_0 T} \tag{III-8}$$

Cette valeur satisfait la stabilité du filtre puisque $\omega_0 T>0$.

Le gain de la fonction de transfert discrète, obtenu à partir de $G(z)$ est :

$$|G(j\omega)| = G(\omega) = \frac{A(1-K)}{\sqrt{1+K^2-2K\cos(\omega T)}}$$

Comparons maintenant le gain $H(\omega)$ de la fonction de transfert continue, au gain $G(\omega)$ de la fonction de transfert discrète. D'après le théorème de Shannon, la fréquence d'échantillonnage est supérieure où égale à deux fois la fréquence la plus élevée du signal. Il en résulte que, puisque l'on échantillonne à la période T, le filtre numérique est donc applicable pour une pulsation $\omega < \frac{\pi}{T}$ ou une fréquence $f < \frac{1}{2T}$; ceci définissant la plage de fréquences pour lesquelles le filtre numérique est défini. La fréquence de coupure du filtre sera donc $f_0 < \frac{1}{2T}$.

A titre d'exemple, la figure III.21 représente le gain en décibel des filtres passe-bas analogique et numérique du premier ordre en fonction de la pulsation réduite ω/ω_0 égale à la fréquence réduite f/f_0.

T=1/200 s

f_0=20 Hz

A=1

$K = e^{-2\pi f_0 T} = 0.5335$

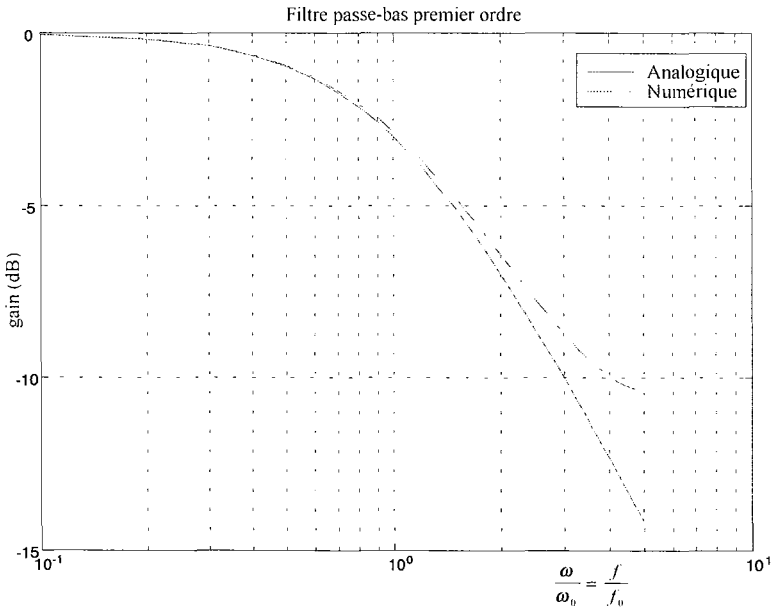


Figure III.21 : filtres analogique et numérique du 1er ordre

Nous remarquons que les gains $H(\omega)$ et $G(\omega)$ sont quasi identiques pour des pulsations basses. Lorsque la pulsation augmente, le filtre analogique atténue plus fortement que le filtre numérique.

VIII.4.c. Fonction de transfert discrète EPV

Nous allons à présent établir l'expression récursive entre les échantillons du signal de sortie EPV et les échantillons du signal d'entrée EPV, d'un filtre passe-bas du premier ordre.

L'équation différentielle régissant le filtre passe-bas du 1er ordre, établie à partir de la fonction de transfert (équation III-6), est $\tau\dot{y} + y = Ax$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$. L'approximation arrière de la dérivée première du signal de sortie à l'instant t_n donne $\dot{y}_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$. L'équation différentielle mène alors à l'équation discrète $\tau \frac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + y_{n-1} = Ax_n$, soit :

$$y_n = \frac{\tau - t_n + t_{n-1}}{\tau} y_{n-1} + A\frac{t_n - t_{n-1}}{\tau} x_n \qquad \text{(III-9)}$$

En comparant les expressions récursives des équations (III-7) et (III-9), nous remarquons que pour un signal échantillonné à pas variable, la valeur de K varie en fonction des instants des échantillons. En effet, l'expression récursive (III-7) peut s'écrire, en remplaçant la valeur constante K par une valeur K_n variable en fonction des instants d'échantillonnage :

$$y_n = K_n y_{n-1} + A(1 - K_n)x_n \qquad \text{(III-10)}$$

En comparant les expressions (III-9) et (III-10), nous identifions la valeur particulière :

$$\hat{K}_n = 1 - \frac{t_n - t_{n-1}}{\tau}$$

Considérons maintenant que, dans l'expression (III-8), nous remplacions la période d'échantillonnage T par $T = t_n - t_{n-1}$, nous obtenons alors la valeur :

$$K_n = e^{-\frac{t_n - t_{n-1}}{\tau}} = e^{-2\pi f_0 (t_n - t_{n-1})} \qquad \text{(III-11)}$$

et $\hat{K}_n$ est le développement limité à l'ordre 1 de K_n.

Les réponses continue et discrète échantillonnée à pas variable à une entrée en échelon s'avèrent identiques. En effet, la réponse continue du filtre passe-bas d'ordre 1 de gain statique A et de fréquence de coupure f_0 à un échelon d'amplitude E à l'instant t_0 est $S(t) = AE\left(1 - e^{-\frac{t - t_0}{\tau}}\right)$ pour $t \geq t_0$. La réponse discrète avec des pas d'échantillonnage irréguliers est :

$$y(t_0) = 0$$

$$y(t_1) = AE(1-K_1) + K_1 y(t_0) = AE\left(1 - e^{-\frac{t_1 - t_0}{\tau}}\right)$$

$$y(t_2) = AE(1-K_2) + K_2 y(t_1) = AE\left(1 - e^{-\frac{t_2 - t_1}{\tau}}\right)$$

Soit, par récurrence pour un instant t_n quelconque : $y(t_n) = AE\left(1 - e^{-\frac{t_n - t_0}{\tau}}\right)$. Pour $t=t_n$, on obtient $S(t = t_n) \equiv y(t = t_n)$. Les réponses continue et discrète échantillonnée à pas variable sont donc identiques pour une excitation en échelon.

Regardons maintenant le domaine de fréquences dans lequel la fréquence de coupure peut être choisie. Soit T_0 la plus grande période d'échantillonnage : $T_0 = \max_n \{t_n - t_{n-1}\}$ correspondant à une fréquence $F_0 = \frac{1}{T_0}$. D'après le théorème de Shannon, la fréquence de coupure f_0 du filtre devra donc être inférieure à $\frac{F_0}{2}$, soit $f_0 \leq \frac{F_0}{2}$, c'est-à-dire $f_0 \leq \frac{1}{2 \max_n \{t_n - t_{n-1}\}}$. La fréquence de coupure f_0 est donc limitée du fait des périodes d'échantillonnage.

Nous avons donc défini dans cette première partie un filtre passe-bas EPV en prenant en considération les intervalles de temps irréguliers entre deux échantillons consécutifs (équations III-10 et III-11).

VIII.5. Filtrage passe-bas du deuxième ordre

Nous allons procéder à l'élaboration d'un filtre passe-bas du deuxième ordre d'une manière analogue à celle que nous venons de voir. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la stabilité de la fonction de transfert et aux intervalles de temps irréguliers pour lesquels le filtrage est stable.

VIII.5.a. Fonctions de transfert continue et discrète

Nous rappelons ici les fonctions de transfert continue et discrète d'un filtre passe-bas d'ordre 2, ainsi que la condition de stabilité de la fonction de transfert discrète.

Un filtre analogique passe-bas d'ordre 2 et de gain statique A est représenté par la fonction de transfert $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{A\omega_0^{\,2}}{\omega_0^{\,2} + 2\xi\omega_0 j\omega + (j\omega)^2} \tag{III-12}$$

où ω_0 est la pulsation de coupure et ξ le coefficient d'amortissement. Une étude générale des filtres passe-bas analogique a largement été développée dans la littérature [Deluzurieux, 1990a et 1990b], [Kunt, 1984], [Labarrère, 1982]. Nous ne nous étendons alors pas davantage sur ce filtre analogique.

Le filtre numérique obtenu à partir de la relation (III-5) de correspondance entre un filtre analogique et un filtre numérique et dont le gain statique est A, a pour fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{A(1 + K_1 + K_2)z^{-1}}{1 + K_1 z^{-1} + K_2 z^{-2}} \tag{III-13}$$

avec

$$\begin{aligned} K_1 &= -2e^{-\xi\omega_0 T}\cos\left(\omega_0 T\sqrt{1-\xi^2}\right) \\ K_2 &= e^{-2\xi\omega_0 T} \end{aligned} \tag{III-14}$$

Cette fonction de transfert est stable lorsque les racines du polynôme en z du dénominateur ont toutes un module inférieur à 1. La fonction de transfert $G(z)$ peut être mise sous la forme $G(z) = \dfrac{A(1 + K_1 + K_2)z}{z^2 + K_1 z + K_2} = \dfrac{N(z)}{D(z)}$.

Le discriminant de $D(z)$ est $\Delta = K_1^{\,2} - 4K_2 = -4e^{-2\xi\omega_0 T}\sin^2\left(\omega_0 T\sqrt{1-\xi^2}\right)$. Or, Δ est toujours négatif puisque $\xi\omega_0 T > 0$. Les racines sont donc :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{-K_1 + j\sqrt{|K_1^{\,2} - 4K_2|}}{2} = e^{-\xi\omega_0 T}\left(\cos\left(\omega_0 T\sqrt{1-\xi^2}\right) + j\sin\left(\omega_0 T\sqrt{1-\xi^2}\right)\right) \\ Z_2 &= \frac{-K_1 - j\sqrt{|K_1^{\,2} - 4K_2|}}{2} = e^{-\xi\omega_0 T}\left(\cos\left(\omega_0 T\sqrt{1-\xi^2}\right) - j\sin\left(\omega_0 T\sqrt{1-\xi^2}\right)\right) \end{aligned} \tag{III-15}$$

Le module des racines est $|Z_1| = |Z_2| = e^{-\xi\omega_0 T}$. Ce filtre est donc stable puisque $\xi\omega_0 T > 0$.

VIII.5.b. Fonction de transfert discrète avec pas d'échantillonnage irréguliers

L'équation différentielle d'un filtre passe-bas du deuxième ordre, établie à partir de la fonction de transfert (équation III-12), est :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + y = Ax \text{ avec } a = \frac{1}{\omega_0^2} \text{ et } b = \frac{2\xi}{\omega_0} \tag{III-16}$$

L'approximation arrière de la dérivée seconde et de la dérivée première du signal de sortie à l'instant t_n donne : $\ddot{y}_n = \dfrac{\dfrac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{t_{n-1} - t_{n-2}}}{t_n - t_{n-1}}$ et $\dot{y}_n = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$. L'équation différentielle conduit alors à l'équation discrète récurrente permettant de filtrer un signal échantillonné à pas variable :

$$y_n = \left[\frac{a(t_n - t_{n-2}) + b(t_n - t_{n-1})(t_{n-1} - t_{n-2}) - (t_n - t_{n-1})^2(t_{n-1} - t_{n-2})}{(t_{n-1} - t_{n-2})(a + b(t_n - t_{n-1}))}\right] y_{n-1}$$
$$+ \left[\frac{-a(t_n - t_{n-1})}{(t_{n-1} - t_{n-2})(a + b(t_n - t_{n-1}))}\right] y_{n-2} + \left[\frac{A(t_n - t_{n-1})^2}{a + b(t_n - t_{n-1})}\right] x_{n-1}$$

soit encore

$$y_n = -K_1 y_{n-1} - K_2 y_{n-2} + \alpha x_{n-1}$$

formant la fonction de transfert discrète EPV :

$$G(z) = \frac{\alpha z^{-1}}{1 + K_1 z^{-1} + K_2 z^{-2}}$$

avec

$$\begin{cases} K_1 = \left[\dfrac{-a(t_n - t_{n-2}) - b(t_n - t_{n-1})(t_{n-1} - t_{n-2}) + (t_n - t_{n-1})^2(t_{n-1} - t_{n-2})}{(t_{n-1} - t_{n-2})(a + b(t_n - t_{n-1}))}\right] \\ K_2 = \left[\dfrac{a(t_n - t_{n-1})}{(t_{n-1} - t_{n-2})(a + b(t_n - t_{n-1}))}\right] \\ \alpha = \left[\dfrac{A(t_n - t_{n-1})^2}{a + b(t_n - t_{n-1})}\right] \end{cases} \tag{III-17}$$

Cas particuliers : si dans l'équation différentielle du 2ème ordre nous prenons a=0 et b=1/ω_0, nous devons normalement retrouver les coefficients du filtre passe-bas d'ordre 1, ce qui est le cas puisque nous obtenons :

$$\begin{cases} K_1 = -1 + \omega_0(t_n - t_{n-1}) \\ K_2 = 0 \\ \alpha = A\omega_0(t_n - t_{n-1}) \end{cases}$$

qui sont les développements limités du premier ordre des coefficients du filtre passe-bas d'ordre 1.

Nous remarquons également que si nous prenons $t_n - t_{n-1} = t_{n-1} - t_{n-2} = T$, nous obtenons l'expression de la fonction de transfert discrète (III-13) en considérant les développements limités à l'ordre 2 des coefficients (III-14).

Nous voyons que les coefficients K_1 et K_2 dépendent à la fois des intervalles de temps $t_n - t_{n-1}$ et $t_{n-1} - t_{n-2}$ et que α ne dépend que de l'intervalle de temps $t_n - t_{n-1}$. Il n'est donc plus possible d'identifier les coefficients K_1, K_2 et α de la fonction de transfert en échantillonnage à pas variable aux coefficients K_1, K_2 et α de la fonction de transfert en échantillonnage à pas fixe comme nous l'avions fait dans le cas du filtre passe-bas du premier ordre. Nous allons donc étudier la stabilité de $G(z)$ afin de déterminer les intervalles $t_n - t_{n-1}$ et $t_{n-1} - t_{n-2}$ plausibles au filtrage du 2ème ordre.

VIII.5.c. Etude de la stabilité, racines du polynôme en z à l'intérieur du cercle de rayon R

Nous allons étudier de manière globale, dans ce paragraphe, la stabilité de la fonction de transfert discrète EPV.

La fonction de transfert $G(z) = \dfrac{\alpha \cdot z}{z^2 + K_1 z + K_2} = \dfrac{N(z)}{D(z)}$ est stable lorsque les racines du polynôme en z du dénominateur $D(z)$ ont toutes un module inférieur à 1. D'une manière générale, recherchons la zone de stabilité du filtre lorsque l'on s'impose comme condition de stabilité que les racines du polynôme en z doivent se trouver à l'intérieur du cercle de rayon $R \leq 1$. Nous déterminons dans un premier temps l'ensemble des couples $\{K_1, K_2\}$ formant la zone de stabilité puis dans un deuxième temps nous remonterons aux intervalles de temps $t_n - t_{n-1}$ et $t_{n-1} - t_{n-2}$ satisfaisant la stabilité.

Les racines du dénominateur $D(z)$ sont $Z_1 = \dfrac{-K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4K_2}}{2}$ et $Z_2 = \dfrac{-K_1 - \sqrt{K_1^2 - 4K_2}}{2}$.

Leur module doit être inférieur à R, soit $|Z_1| < R$ et $|Z_2| < R$.

Après étude des modules des racines, l'ensemble des couples $\{K_1, K_2\}$ formant la zone de stabilité est délimitée par :

$$\begin{cases} RK_1 + K_2 + R^2 > 0 \\ -RK_1 + K_2 + R^2 > 0 \\ K_2 < R^2 \end{cases} \qquad \text{(III-18)}$$

Les couples $\{K_1, K_2\}$ formant cette zone de stabilité (III-18) sont alors situés à l'intérieur du triangle AEH dans le repère $\{K_1, K_2\}$, figure III.22 :

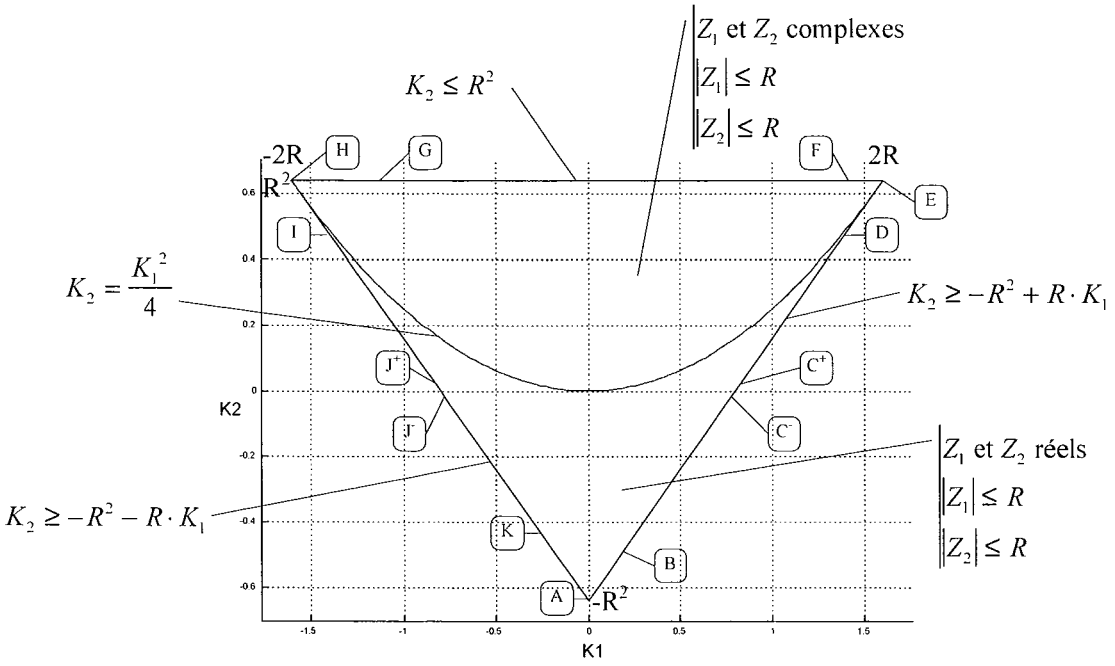


Figure III.22 : zone triangulaire des couples $\{K_1,K_2\}$ formant la stabilité

Le domaine délimitée par $K_2 > \frac{K_1^2}{4}$ et $K_2 \le R^2$ correspond aux racines Z_1 et Z_2 complexes, tandis que le domaine complémentaire correspond aux racines Z_1 et Z_2 réelles.

Les coefficients K_1 et K_2 dépendent de t_n, t_{n-1}, t_{n-2} et, plus précisément des intervalles de temps :

$$T_1 = t_n - t_{n-1} \text{ et } T_2 = t_{n-1} - t_{n-2}.$$

Cherchons maintenant les couples $\{T_1, T_2\}$ garantissant la stabilité à partir des couples $\{K_1, K_2\}$ à partir des expressions (III-17). Pour cela, nous recherchons T_1 et T_2 en fonction de K_1 et K_2. Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} T_1^2 - b(K_1 + K_2 + 1)T_1 - a(K_1 + K_2 + 1) = 0 \\ T_2 = \dfrac{aT_1}{K_2(a + bT_1)} \end{cases} \quad \text{(III-19)}$$

Le discriminant $\Delta = b^2(K_1 + K_2 + 1)^2 + 4a(K_1 + K_2 + 1)$ de l'équation du 2ème ordre en T_1 est toujours positif puisque $K_1 + K_2 + 1 > 0$ est une condition de stabilité déjà établie (inclue dans (III-18)). A partir du polynôme du deuxième ordre (III-19), nous obtenons deux racines réelles

dont l'une est toujours positive et l'autre toujours négative. Nous ne gardons que la racine positive puisque $T_1 = t_n - t_{n-1}$ doit être positif. En remplaçant a et b par leurs valeurs — expressions (III-16) — nous obtenons les expressions de T_1 et T_2 en fonction de K_1 et K_2 :

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{\xi(K_1 + K_2 + 1) + \sqrt{\xi^2(K_1 + K_2 + 1)^2 + K_1 + K_2 + 1}}{\omega_0} \\ T_2 = \dfrac{T_1}{K_2(1 + 2\xi\omega_0 T_1)} \end{cases}$$

Déterminons maintenant le lieu des couples $\{T_1, T_2\}$ formant la zone de stabilité.

En étudiant le lieu des couples $\{T_1, T_2\}$ en fonction des couples $\{K_1, K_2\}$ dans leur repère respectif, nous déterminons dans le repère $\{T_1, T_2\}$:

- une asymptote en $T_{1a}^1 = \dfrac{\xi(1-R) + \sqrt{\xi^2(1-R)^2 + (1-R)}}{\omega_0}$ lorsque $K_2 \to 0$ et $K_1 < 0$
- une asymptote en $T_{1a}^2 = \dfrac{\xi(1+R) + \sqrt{\xi^2(1+R)^2 + (1+R)}}{\omega_0}$ lorsque $K_2 \to 0$ et $K_1 > 0$
- un temps minimum $T_{1m} = \dfrac{\xi(1-R)^2 + \sqrt{\xi^2(1-R)^4 + (1-R)^2}}{\omega_0}$
- un temps maximum $T_{1M} = \dfrac{\xi(1+R)^2 + \sqrt{\xi^2(1+R)^4 + (1+R)^2}}{\omega_0}$
- une zone où T_2 est négatif. Cette zone, correspondant aux valeurs négatives de K_2, n'est pas solution puisque $T_2 = t_{n-1} - t_{n-2}$ doit être positif. Une contrainte supplémentaire à appliquer est donc $K_2>0$.

Les intervalles de temps $T_1 = t_n - t_{n-1}$ et $T_2 = t_{n-1} - t_{n-2}$ pour lesquels la fonction de transfert discrète du filtre passe-bas du 2ème ordre échantillonné à pas variable est stable (le module des racines du polynôme en z est inférieur à R), se situent à l'intérieur de la zone définie par :

$$T_1 \in \left[T_{1m} \; ; \; T_{1M}\right]$$

$$T_2 > \frac{T_1}{R^2(1 + 2\xi\omega_0 T_1)} \text{ pour } T_1 \in \left[T_{1m} \; ; \; T_{1M}\right]$$

$$T_2 < \frac{-(1-R)T_1}{R\left(\omega_0^2 T_1^2 - 2\xi\omega_0(1-R)T_1 - (1-R)\right)} \text{ pour } T_1 \in \left[T_{1m} \; ; \; T_{1a}^1\right]$$

$$T_2 < \frac{(1+R)T_1}{R\left(\omega_0{}^2 T_1^2 - 2\xi\omega_0(1+R)T_1 - (1+R)\right)} \text{ pour } T_1 \in \left[T_{1a}^2 \; ; \; T_{1M}\right]$$

A titre d'exemple, la figure III.23 représente le domaine de temps positifs T_1 et T_2 vérifiant la stabilité. Nous avons pris $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, f_0=5 Hz et R=0,9.

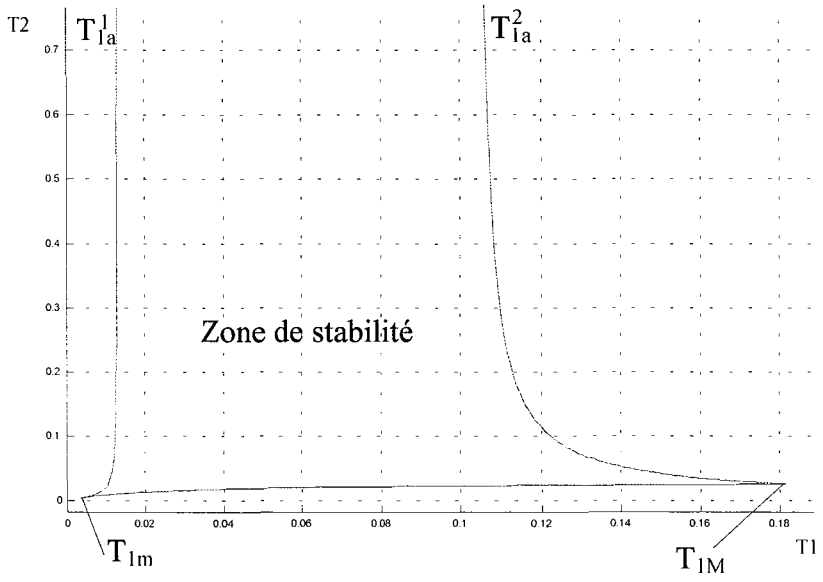


Figure III.23 : domaine de temps T_1 et T_2 positifs vérifiant la stabilité

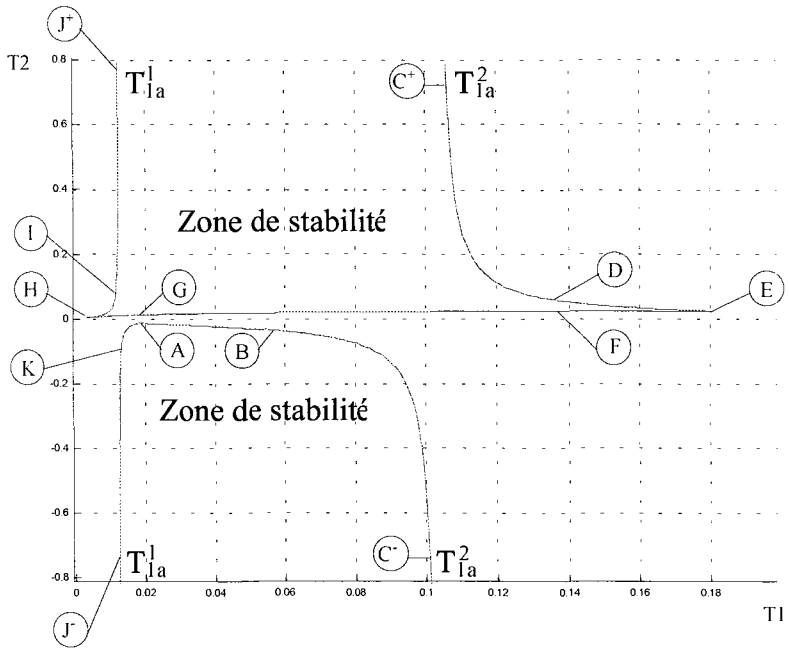


Figure III.24 : domaine de temps T_1 et T_2 positifs et négatifs vérifiant la stabilité

De manière globale, la figure III.24 représente, quant à elle, la zone d'intervalles de temps T_1 et T_2 positifs et négatifs vérifiant la stabilité. Ceci permet de mettre en évidence les

asymptotes, et de mettre en correspondance le contour de la zone de stabilité dans le repère $\{K_1, K_2\}$ au contour dans le repère $\{T_1, T_2\}$.

Remarque 1 :

Lorsque R tend vers 0, les intervalles de temps T_{1a}^1, T_{1a}^2, T_{1m} et T_{1M} tendent tous vers une unique valeur $T_{1l} = \dfrac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}}{\omega_0}$.

Remarque 2 :

Pour R=1, définissant la plus large zone de stabilité, les intervalles de temps $T_1 = t_n - t_{n-1}$ et $T_2 = t_{n-1} - t_{n-2}$ pour lesquels la fonction de transfert numérique du filtre passe-bas du 2ème ordre échantillonné à pas variable est stable, se situent à l'intérieur de la zone délimitée par :

$$T_1 > 0$$

$$T_2 > \frac{T_1}{1 + 2\xi\omega_0 T_1} \text{ pour } T_1 \in \left]0 \; ; \; \frac{4\xi + \sqrt{16\xi^2 + 4}}{\omega_0}\right]$$

$$T_2 < \frac{2T_1}{\omega_0{}^2 T_1^2 - 4\xi\omega_0 T_1 - 2} \text{ pour } T_1 \in \left]\frac{2\xi + \sqrt{4\xi^2 + 2}}{\omega_0} \; ; \; \frac{4\xi + \sqrt{16\xi^2 + 4}}{\omega_0}\right]$$

A titre d'exemple, la figure III.25 représente le plus large domaine de temps positifs T_1 et T_2 vérifiant la stabilité. Nous avons pris R=1, $\xi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et f_0=5 Hz.

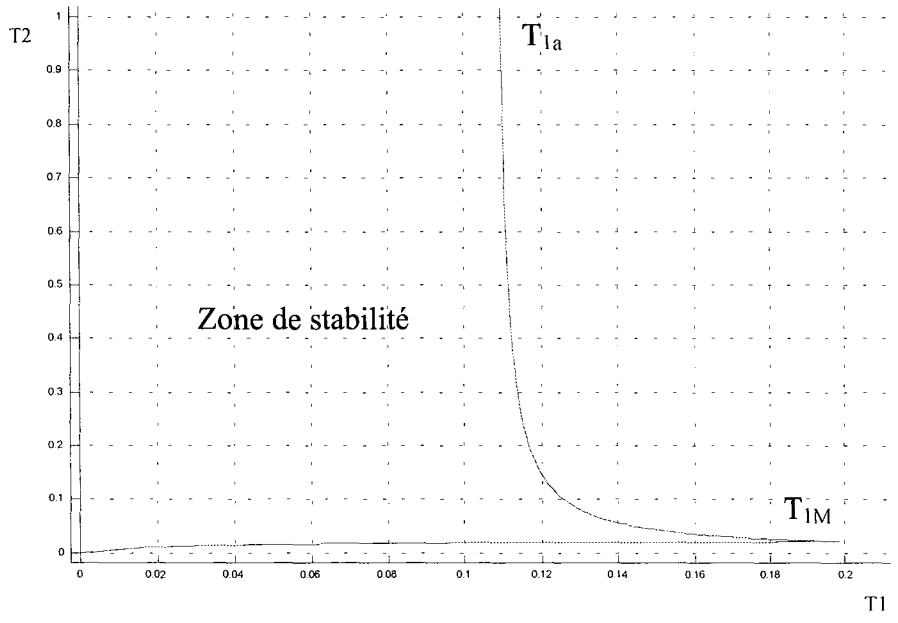


Figure III.25 : zone limite de stabilité pour les intervalles de temps positifs

Remarque 3 :

De même que pour le filtre passe-bas du 1er ordre, d'après le théorème de Shannon, la fréquence de coupure f_0 est limitée du fait des périodes d'échantillonnage :

$$f_0 \leq \frac{1}{2\max_n\{t_n - t_{n-1}\}}.$$

La reconstruction d'échantillons intermédiaires permet de passer outre cette limitation.

VIII.5.d. Lieu des pôles Z_1 et Z_2 de la fonction de transfert

Nous allons dégager, dans ce paragraphe, des lieus particuliers des pôles Z_1 et Z_2 apportant une amélioration sur la stabilité de la fonction de transfert discrète EPV.

La succession des amplitudes des échantillons de sortie du filtre numérique EPV forme une suite de valeurs. Lorsque les pôles de la fonction de transfert discrète sont à partie réelle positive, nous sommes en présence d'une suite à convergence monotone. Lorsque les pôles sont à partie réelle négative, nous sommes en présence d'une suite à convergence alternée. Afin que la sortie du filtre soit non oscillante à la réponse d'un échelon en entrée, il convient de choisir des pôles à partie réelle positive.

Déterminons alors les zones des couples $\{K_1,K_2\}$ et $\{T_1,T_2\}$ correspondant à des pôles à partie réelle positive et satisfaisant la stabilité de la fonction de transfert. Une telle zone est définie par $|Z_1| < R$, $|Z_2| < R$, $Re(Z_1)>0$, $Re(Z_2)>0$.

En inversant les relations donnant les pôles Z_1 et Z_2 en fonction de K_1 et K_2 (expressions (III-15)), on obtient pour des couples $\{Z_1,Z_2\}$ réels ou complexes conjugués :

$$\begin{cases} K_1 = -Z_1 - Z_2 \\ K_2 = Z_1 Z_2 \end{cases} \qquad \text{(III-20)}$$

On en déduit les coefficients K_1 et K_2 :

$$\begin{cases} RK_1 + K_2 + R^2 > 0 \\ K_1 < 0 \\ 0 < K_2 < R^2 \end{cases}$$

En remontant à la zone d'intervalles de temps $\{T_1,T_2\}$ à partir des couples $\{K_1,K_2\}$, nous observons :

- une asymptote verticale $T_{1l} = \dfrac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}}{\omega_0}$
- un temps $T_{1c} = \dfrac{\xi(1+R^2) + \sqrt{\xi^2(1+R^2)^2 + (1+R^2)}}{\omega_0}$

Les intervalles de temps T_1 et T_2 où la convergence de la suite, définie par la succession des échantillons de sortie, est monotone, se situent dans la zone délimitée par :

$$T_1 \in [T_{1m} \; ; \; T_{1c}]$$

$$T_2 > \frac{T_1}{R^2(1+2\xi\omega_0 T_1)} \text{ pour } T_1 \in [T_{1m} \; ; \; T_{1c}]$$

$$T_2 < \frac{-(1-R)T_1}{R\left(\omega_0{}^2 T_1^2 - 2\xi\omega_0(1-R)T_1 - (1-R)\right)} \text{ pour } T_1 \in [T_{1m} \; ; \; T_{1a}^{\,l}]$$

$$T_2 < \frac{T_1}{\omega_0{}^2 T_1^2 - 2\xi\omega_0 T_1 - 1} \text{ pour } T_1 \in [T_{1l} \; ; \; T_{1c}]$$

La figure III.26 montre la zone de coefficients K_1 et K_2 et la zone d'intervalles de temps T_1 et T_2 positifs vérifiant la stabilité de la fonction de transfert discrète EPV, et la monotonie de la suite des échantillons de sortie. Nous avons pris $\xi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, f_0=5 Hz et R=0,9.

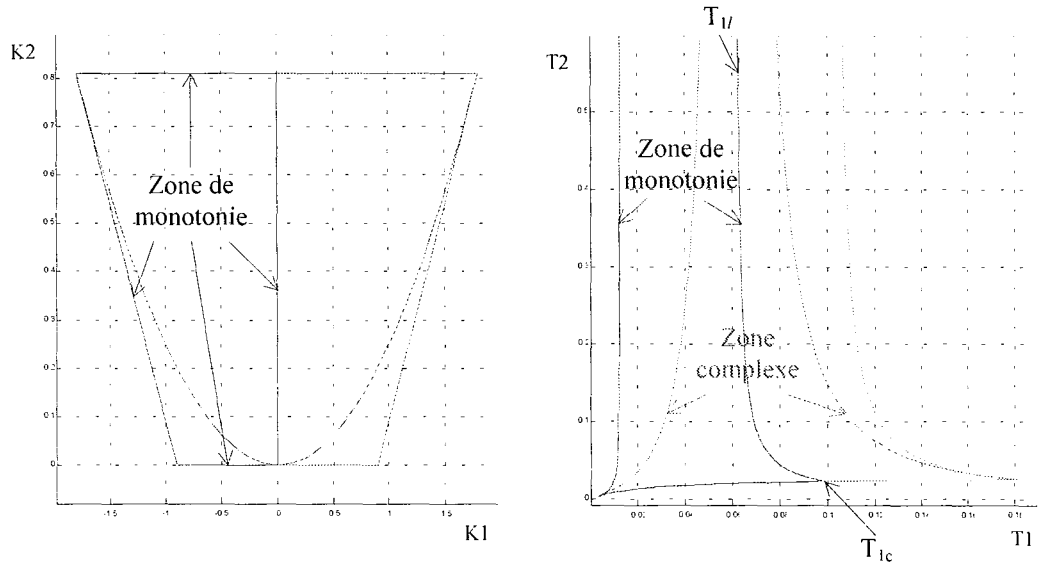


Figure III.26 : zone de convergence monotone dans les repères $\{K_1,K_2\}$ et $\{T_1,T_2\}$

Ainsi, à partir des valeurs temporelles $T_1 = t_n - t_{n-1}$ et $T_2 = t_{n-1} - t_{n-2}$ représentant les intervalles de temps variables de la fonction de transfert discrète EPV, il est possible de déterminer si la fonction de transfert est stable, et si la convergence de la suite formée par les

échantillons de sortie est monotone lors d'une entrée en échelon. Si tel n'est pas le cas, une reconstruction d'échantillons intermédiaires s'impose comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

VIII.5.e. Reconstruction d'instants d'échantillonnage intermédiaires

Deux conditions imposent la reconstruction d'instants d'échantillonnage intermédiaires :

- les couples $\{T_1,T_2\}$ doivent se situer dans la zone de stabilité
- la réponse discrète du filtre à un échelon doit être fidèle à la réponse continue

Zone de stabilité

Tous les couples $\{T_1,T_2\}$ ne se trouvant pas dans la plus large zone de stabilité pour R=1 provoquent une instabilité du filtre. Il est donc nécessaire dans ce cas de reconstruire des échantillons intermédiaires afin que les nouveaux couples $\{T_1,T_2\}$ se trouvent bien dans la zone de stabilité. De plus, afin d'améliorer la convergence du signal de sortie, on peut restreindre la zone de stabilité avec une valeur de R inférieure à 1. Enfin, afin d'atténuer les oscillations du signal de sortie, on peut restreindre la zone de stabilité à la zone de monotonie.

Temps de réponse

Le facteur d'amortissement ξ influe sur la réponse d'un système du deuxième ordre à un échelon. Si $\xi>1$ la réponse est fortement amortie, si $\xi=1$ l'amortissement est critique, si $\xi<1$ l'amortissement est faible.

Dans ce dernier cas, le régime transitoire est oscillatoire amorti. Les amplitudes maximales du signal de sortie se trouvent sur la courbe d'équation $S = AE\left(1+\frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$, et les amplitudes minimales sur la courbe d'équation $S = AE\left(1-\frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ avec E représentant l'entrée du filtre, S la sortie et A le gain statique.

Les maxima du signal de sortie correspondent aux instants $t_M = (2M+1)\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ avec $M \in [1,2,3,\ldots]$, et les minima aux instants $t_m = 2m\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ avec $m \in [1,2,3,\ldots]$. La pseudo-période T_p est définie comme l'intervalle de temps séparant deux maxima ou deux minima

consécutifs et est $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$. Il est donc nécessaire de reconstruire des instants d'échantillonnage intermédiaires à un pas au maximum égal à $T_p/2$ (théorème de Shannon).

VIII.5.f. Synthèse sur le filtrage passe-bas d'ordre 2

L'élaboration d'un tel filtre est complexe et fortement contraignante lorsque les intervalles de temps entre les échantillons consécutifs ne sont pas dans la zone de stabilité. Il deviendrait difficile d'élaborer des filtres passe-bas d'ordre supérieur et des filtres passe-bande selon le principe utilisé ici. C'est pourquoi nous allons revenir aux équations différentielles que nous transformerons en système d'état. Ceci nous permettra de développer des filtres passe-bas et passe-bande comme nous allons maintenant l'exposer.

VIII.6. Filtrage passe-bas et passe-bande d'ordre N par résolution et discrétisation de la représentation d'état

Nous nous intéresserons, dans cette partie, à la réalisation de filtres classiques et de type Butterworth d'ordre *N*. Dans un premier temps, nous rappellerons la correspondance entre l'équation différentielle régissant un filtre et la représentation d'état. Puis, nous résoudrons et discrétiserons à pas variable cette représentation d'état afin de pouvoir réaliser divers filtres numériques EPV.

VIII.6.a. Passage des équations différentielles à une représentation d'état

On rappelle dans ce paragraphe comment obtenir une représentation d'état continue d'un système à partir de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert correspondante de ce système. Soit u la grandeur d'entrée du système et y sa grandeur de sortie. Nous considérons un système à une seule entrée et une seule sortie, caractérisé par l'équation différentielle d'ordre N :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m u}{dt^m} \text{ avec } a_N = 1 \qquad \text{(III-21)}$$

Mettons l'équation différentielle d'ordre N (III-21) sous la forme d'une représentation d'état [Labarrère, 1982], [Borne, 1990] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \qquad \text{(III-22)}$$

où $u \in \Re^1$ est le vecteur de commande ou d'entrée du système,

$y \in \Re^1$ est le vecteur de sortie,

$x \in \Re^{N\times 1}$ est le vecteur d'état

et $A \in \Re^{N\times N}$, $B \in \Re^{N\times 1}$, $C \in \Re^{1\times N}$, $D \in \Re^1$ sont les matrices d'état.

L'équation différentielle (III-21) conduit aux vecteurs d'état et matrices d'état suivants :

$$x = \begin{pmatrix} y^{(0)} \\ \vdots \\ y^{(N-1)} \end{pmatrix} \tag{III-23}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{N-2} & -a_{N-1} \end{bmatrix} \tag{III-24}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{III-25}$$

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{M-1} \end{bmatrix} - b_M \begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_{N-1} \end{bmatrix} \text{ si } M = N \\ &= \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_M & \underbrace{0 \cdots 0}_{N-M-1} \end{bmatrix} \text{ si } M < N \end{aligned} \tag{III-26}$$

$$\begin{aligned} D &= b_M \text{ si } M = N \\ &= 0 \text{ si } M < N \end{aligned} \tag{III-27}$$

VIII.6.b. Résolution et discrétisation de la représentation d'état en EPV

Nous allons, dans ce paragraphe, montrer comment à partir de la représentation d'état continue obtenue précédemment, résoudre le système d'état et obtenir l'expression de la sortie y en fonction de l'entrée u échantillonnée à pas variable.

Reprenons la représentation d'état (III-22) : $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

Afin d'obtenir la sortie $y(t)$ en fonction de l'entrée $u(t)$, nous intègrons le système d'état [Labarrère, 1982]. Ceci conduit aux équations continues suivantes :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad \text{(III-28)}$$

Désirant obtenir une représentation discrète des équations continues précédentes, avec un pas d'échantillonnage variable, nous posons $t=t_n$ et $t_0=t_{n-1}$. Les équations continues (III-28) deviennent :

$$x(t_n) = e^{A(t_n-t_{n-1})}x(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{A(t_n-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$
$$y(t_n) = Cx(t_n) + Du(t_n)$$

Nous allons à présent calculer l'intégrale de l'équation discrète. En utilisant un bloqueur d'ordre 0 pour l'entrée $u(t)$ et sachant que [Grahm, 1981] :

$$e^{A} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$
$$\int_{t_0}^{t_1} e^{At}dt = A^{-1}\left[e^{At}\right]_{t_0}^{t_1} = A^{-1}\left(e^{At_1} - e^{At_0}\right),$$

nous obtenons les équations discrètes EPV récurrentes :

$$x(t_n) = e^{A(t_n-t_{n-1})}x(t_{n-1}) - A^{-1}\left(I - e^{A(t_n-t_{n-1})}\right)Bu(t_{n-1}) \qquad \text{(III-29)}$$
$$y(t_n) = Cx(t_n) + Du(t_n) \qquad \text{(III-30)}$$

Ainsi, à partir de l'une des trois formes : fonction de transfert continue, équations différentielles ou représentation d'état, il est possible d'obtenir une forme discrète récurrente avec un pas d'échantillonnage variable, de la sortie $y(t_n)$ à l'instant t_n en fonction de l'entrée $u(t_{n-1})$ à l'instant quelconque t_{n-1} précédent t_n (équations (III-29) et (III-30)). Grâce aux équations d'état, nous allons pouvoir filtrer un signal échantillonné à pas variable.

La fonction de transfert continue est stable lorsque les racines du polynôme de son dénominateur ont leur partie réelle négative. Le filtre EPV est alors stable si la fonction de transfert continue est stable, puisqu'elle en découle.

Afin de ne pas perdre trop d'informations entre le signal de sortie $y_{EPI}(t)$ et le signal de sortie $y_{EPF}(t)$, il est nécessaire, lorsque $t_n - t_{n-1}$ est trop grand par rapport à une valeur dépendante des fréquences de coupure, de reconstruire un échantillon intermédiaire du signal d'entrée à un instant compris entre t_{n-1} et t_n. Ainsi, le filtre peut répondre à de brusques variations du signal d'entrée $x_{EPI}(t)$ comme il l'aurait fait avec le signal d'entrée $x_{EPF}(t)$.

VIII.6.c. Réalisation de filtres EPV

Nous allons maintenant nous intéresser à la réalisation de différents filtres en appliquant la méthode décrite ci-dessus. Nous nous limiterons aux filtres classiques et aux filtres de type Butterworth. Nous appliquerons les divers types de filtres réalisés à deux sortes de signaux. Le premier signal de synthèse est la somme de signaux sinusoïdaux ayant des fréquences comprises entre 1 Hz et $F_e/2$. Ce signal présente l'avantage d'avoir des composantes fréquentielles réparties sur tout le spectre. Ainsi, en regardant l'amplitude du spectre en sortie du filtre, il est aisé de voir le gabarit spectral du filtre. Aussi, dans le domaine temporel, le signal présente à la fois de fortes variations et de faibles variations. Nous pouvons alors voir comment réagit le filtre à un tel signal. Le deuxième signal de synthèse est un signal de style télégraphique ayant des variations lentes auxquelles est superposé un bruit blanc. Nous examinerons l'effet des filtres sur ces deux signaux et comparerons le filtrage EPF au filtrage EPV.

Les filtres classiques se décomposent souvent en produits de filtres du premier et du deuxième ordre. Nous verrons le filtre passe-haut et nous nous intéresserons plus particulièrement aux filtres passe-bas et passe-bande.

VIII.6.d. Filtre passe-bas classique d'ordre N

Le filtre passe-bas du premier ordre est caractérisé par un gain statique G_0, une fréquence de coupure f_0, et a pour fonction de transfert :

$$FT_{\text{Passe Bas Ordre 1}}(s) = \frac{G_0}{1 + \frac{s}{2\pi f_0}}.$$

Le passage au filtre passe-bas du premier ordre échantillonné à pas variable se déduit de l'équation (III-29). Nous retrouvons alors l'équation récurrente obtenue auparavant en EPV (équations III-10 et III-11) :

$$y(t_n) = K_n y(t_{n-1}) + G_0(1 - K_n)u(t_{n-1}) \text{ avec } K_n = e^{-2\pi f_0 (t_n - t_{n-1})}.$$

La fréquence de reconstruction F_R est supérieure ou égale au double de la fréquence de coupure f_0, soit $F_R \geq 2f_0$. Conformément à l'équation (III-4), il convient de prendre $F_R = 2\pi f_0$.

Le filtre passe-bas du second ordre est caractérisé par un gain statique G_0, une fréquence propre f_0, un facteur d'amortissement ξ et a pour fonction de transfert :

$$FT_{\text{Passe Bas Ordre 2}}(s) = \frac{G_0}{1 + 2\xi\frac{s}{2\pi f_0} + \frac{s^2}{(2\pi f_0)^2}}$$

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre N peut être prise sous la forme :

$$FT_{\text{Passe Bas Ordre N}}(s) = \frac{G_0}{\prod_{i=1}^{N}\left(1 + \frac{s}{2\pi f_i}\right)} \qquad \text{(III-31)}$$

où G_0 est le gain statique, f_1 à f_N les N fréquences de coupure. En prenant des fréquences de coupure réelles, nous obtenons un filtre apériodique qui se décompose en une succession de filtres passe-bas du premier ordre. Si l'on prend des fréquences de coupure réelles et complexes conjuguées, nous obtenons un filtre qui se décompose en une succession de filtres passe-bas du premier ordre et de filtres passe-bas du deuxième ordre.

La généralisation au filtre passe-bas d'ordre N échantillonné à pas variable se fait en mettant la fonction de transfert analogique précédente (III-31) sous forme d'état, puis en utilisant les équations discrètes EPV donnant la sortie y en fonction de l'entrée u et des 4 matrices d'état A, B, C et D déduites de la fonction de transfert (III-29) et (III-30).

La fréquence de reconstruction doit être au moins égale au double de la fréquence de coupure la plus élevée, soit $F_R \geq 2\max\{f_1,\ldots,f_N\}$. Conformément à l'équation (III-4), nous prenons $F_R = 2\pi\max\{f_1,\ldots,f_N\}$.

La figure III.27 montre les signaux d'entrée et de sortie issus du filtrage passe-bas d'ordre 3 pour le premier signal de synthèse (signal résultant de la somme de signaux sinusoïdaux), en EPF et en EPV. Les fréquences de coupures sont f_1=20 Hz, f_2=50 Hz et f_3=100 Hz ; la fonction de transfert s'obtient à partir de l'équation (III-31) et a pour expression :

$$FT(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{40\pi}\right)\left(1 + \frac{s}{100\pi}\right)\left(1 + \frac{s}{200\pi}\right)}.$$

Sur la partie de gauche, nous avons représenté respectivement de haut en bas :

- le signal original ayant 901 échantillons en EPF et comportant seulement 250 échantillons en EPV,

- le signal EPF filtré,
- le signal EPV filtré successivement par trois filtres passe-bas d'ordre 1 sans optimisation du nombre d'échantillons,
- le signal EPV filtré par les équations d'état (III-29) et (III-30), et ayant 174 échantillons.

Le nombre d'échantillons est indiqué à droite de chacun des graphiques.

Sur la partie de droite sont représentés les spectres des signaux de la partie de gauche dont les graduations sont marquées sur les axes des ordonnées à gauche des graphiques, ainsi que le gabarit spectral du filtre utilisé, en trait pointillé, et dont les graduations sont marquées sur les axes des ordonnées à droite des graphiques. Nous remarquons visuellement que les spectres des trois signaux filtrés sont similaires et que le signal EPF filtré et le signal EPV filtré par équations d'état sont très ressemblant malgré leur nombre d'échantillons différents.

Les spectres sont obtenus grâce aux équations (III-1) et (III-2) et le critère de comparaison des spectres défini à l'équation (III-3) permet de quantifier l'écart entre deux spectres. Prenons comme spectre de référence celui du signal filtré EPF. En comparant avec le spectre du signal EPV filtré par filtres passe-bas d'ordre 1, nous obtenons un critère $\Phi_1 = 0{,}0187$. De la même manière, si nous comparons maintenant le spectre de référence au spectre du signal EPV filtré par équations d'état, nous obtenons le critère $\Phi_2 = 0{,}0358$. Nous remarquons que ces deux valeurs sont faibles, malgré un critère Φ_2 plus élevé que le critère Φ_1.

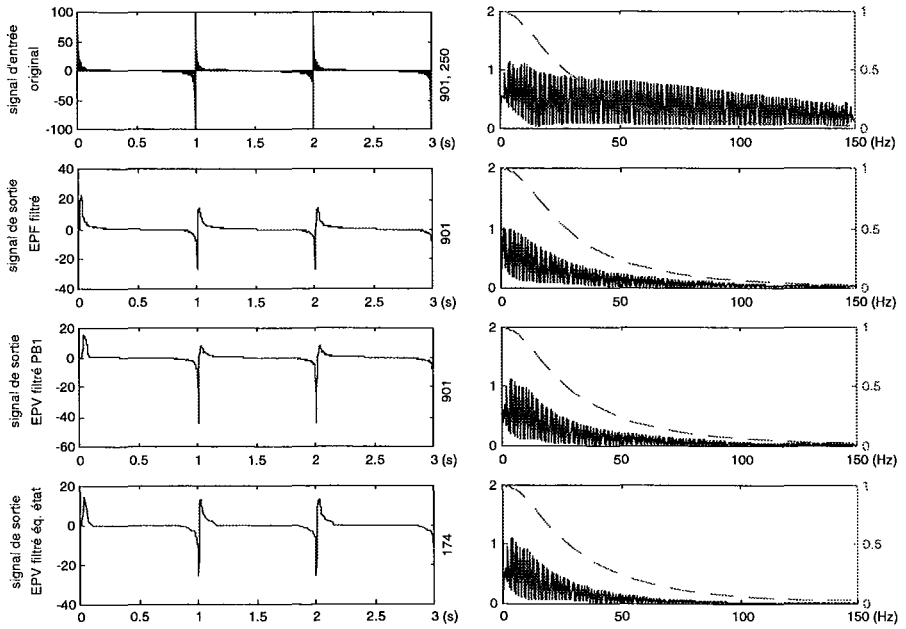


Figure III.27 : filtre passe-bas d'ordre 3, Fc = 20, 50, 100 Hz

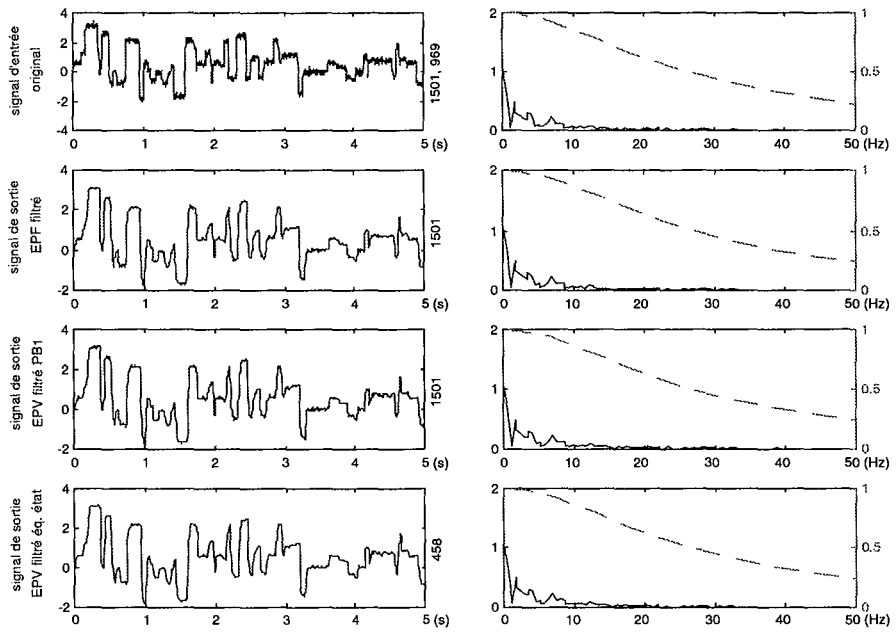


Figure III.28 : filtre passe-bas d'ordre 3, Fc = 20, 50, 100 Hz

La figure III.28 montre les signaux d'entrée et de sortie issus du filtrage passe-bas d'ordre 3 pour le deuxième signal de synthèse (signal télégraphique). Nous remarquons que le filtre a eu pour effet d'éliminer le bruit hautes fréquences. Les signaux EPF filtré et EPV filtré par équations d'état ainsi que leurs spectres sont visuellement semblables malgré les 458 échantillons du signal EPV filtré et les 969 échantillons du signal EPV original, comparés aux 1501 échantillons des signaux EPF.

Prenons comme spectre de référence celui du signal filtré EPF. Comme précédemment, nous le comparons au spectre du signal EPV filtré par filtres passe-bas d'ordre 1, ainsi qu'au spectre du signal EPV filtré par équations d'état. Nous obtenons alors respectivement les critères $\Phi_1 = 4{,}63.10^{-4}$ et $\Phi_2 = 4{,}75.10^{-4}$, ce qui montre le faible écart entre les différents spectres.

VIII.6.e. Filtre passe-haut classique d'ordre N

Comme nous l'avons vu précédemment, le filtre passe-haut n'a pas lieu d'être développé pour des SEPV. Néanmoins, nous le présentons ici afin qu'il puisse servir à la réalisation de filtres passe-bande par la suite.

Le filtre passe-haut du premier ordre est caractérisé par un gain statique G_0, une fréquence de coupure f_0, et a pour fonction de transfert :

$$FT_{\text{Passe Haut Ordre 1}}(s) = \frac{G_0 \dfrac{s}{2\pi f_0}}{1 + \dfrac{s}{2\pi f_0}}$$

Le passage au signal de sortie échantillonné à pas variable issu du filtre passe-haut du premier ordre s'effectue à l'aide des équations d'état (III-22) à (III-27) et de la résolution (III-29) et (III-30). Nous trouvons l'équation récurrente analogue à celle du filtre passe-bas du premier ordre, c'est-à-dire :

$$y(t_n) = K_n y(t_{n-1}) + G_0 K_n u(t_{n-1}) - G_0 K_n u(t_{n-2})$$

avec $K_n = e^{-2\pi f_0 (t_n - t_{n-1})}$

Dans le cas où le filtre passe-haut n'est pas associé à un filtre passe-bas, la fréquence de reconstruction F_R est supérieure ou égale au double de la fréquence d'échantillonnage F_e, soit $F_R \geq 2F_e$. Dans le cas où le filtre passe-haut est associé à un ou plusieurs filtre passe-bas, la fréquence de reconstruction F_R est supérieure ou égale au double de la fréquence de coupure basse f_0 la plus élevée, soit $F_R \geq 2f_0$.

La généralisation à un filtre passe-haut d'ordre N se fait en mettant la fonction de transfert continue sous forme d'équations d'état puis en utilisant les équations discrètes EPV donnant la sortie y en fonction de l'entrée u et des 4 matrices d'état A, B, C et D déduites de la fonction de transfert.

Un filtre passe-haut d'ordre N est caractérisé par un gain statique G_0 et N fréquences de coupure f_1 à f_N. Sa fonction de transfert peut s'écrire :

$$FT_{\text{Passe Haut Ordre N}}(s) = \frac{G_0 s^N}{\prod_{i=1}^{N} (s + 2\pi f_i)}$$

En prenant des fréquences de coupure réelles, nous obtenons un filtre apériodique qui se décompose en une succession de filtres passe-haut du premier ordre. Si l'on prend des fréquences de coupure réelles et complexes conjuguées, nous obtenons un filtre qui se décompose en une succession de filtres passe-haut du premier ordre et de filtres passe-haut du deuxième ordre.

VIII.6.f. Filtre passe-bande classique d'ordre N+M

Un filtre passe-bande d'ordre N+M est caractérisé par un gain statique G_0, N fréquences de coupure basse f_{B1} à f_{BN} et M fréquences de coupure haute f_{H1} à f_{HN}. Sa fonction de transfert est alors :

$$FT_{\text{Passe Bande Ordre N+M}}(s) = \frac{G_0 s^M}{\prod_{i=1}^{N}(s+2\pi f_{Bi}).\prod_{j=1}^{M}(s+2\pi f_{Hi})} \qquad \text{(III-32)}$$

La fréquence de reconstruction est au moins égale au double de la fréquence de coupure la plus élevée, soit $F_R \geq 2\max\{f_{B1},\ldots,f_{BN},f_{H1},\ldots,f_{HM}\}$. Conformément à l'équation (III-4), nous prenons $F_R = 2\pi\max\{f_{B1},\ldots,f_{BN},f_{H1},\ldots,f_{HM}\}$.

La figure III.29 montre les signaux d'entrée et de sortie résultant du filtrage passe-bande d'ordre 5 du premier signal de synthèse, en EPF et en EPV. Les fréquences de coupure du filtre passe-bas sont f_{B1}=20 Hz, f_{B2}=50 Hz et f_{B3}=100 Hz ; les fréquences de coupure du filtre passe-haut sont f_{H1}=5 Hz et f_{H2}=20 Hz. L'expression de la fonction de transfert est obtenue à partir de l'équation (III-32). Ceci a pour effet d'éliminer les fluctuations lentes proches du continu ainsi que les fluctuations rapides. Nous remarquons que les allures spectrales des signaux filtrés sont semblables.

En prenant toujours comme référence le spectre du signal EPF filtré, nous comparons ce spectre à celui du signal EPV filtré par la succession de filtres passe-bas et passe-haut, puis à celui du signal EPV filtré par équations d'état. Nous obtenons respectivement les critères $\Phi_1 = 0{,}0295$ et $\Phi_2 = 0{,}0324$, montrant le bon respect du filtrage EPV par rapport au filtrage EPF.

La figure III.30 montre les signaux d'entrée et de sortie résultant du même filtrage passe-bande d'ordre 5 du signal télégraphique. Nous remarquons que les fluctuations lentes et le bruit hautes fréquences sont éliminés et que les signaux EPF filtré et EPV filtré par équations d'état sont identiques tant dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel.

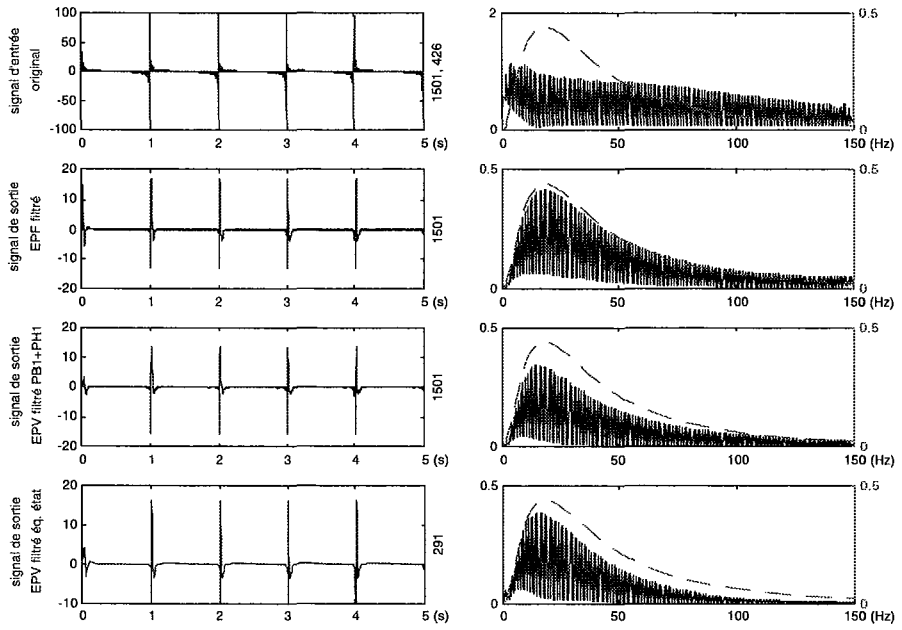


Figure III.29 : filtrage passe-bande d'ordre 5, F_{cH} = 5, 20 Hz et F_{cB} = 20, 50, 100 Hz

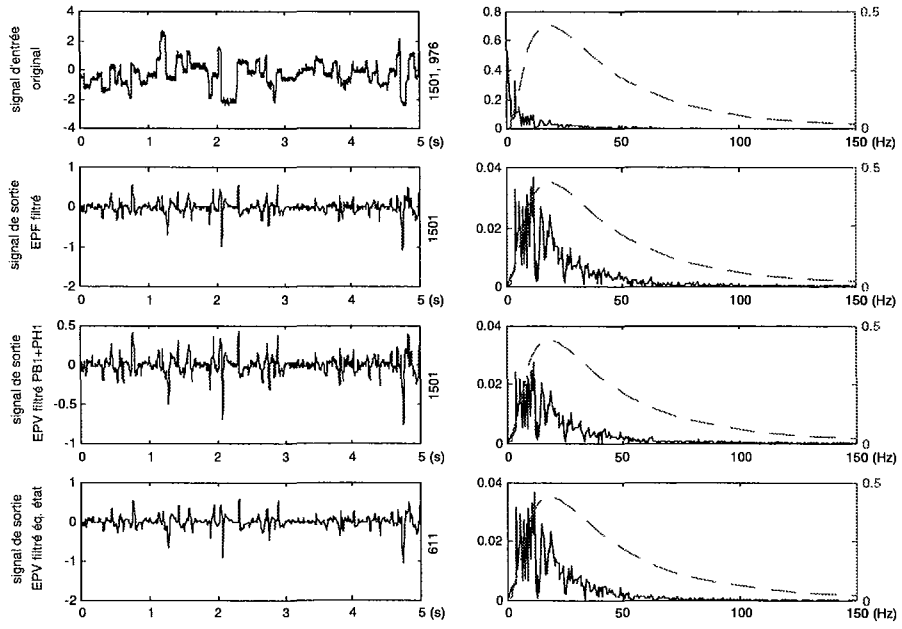


Figure III.30 : filtrage passe-bande d'ordre 5, F_{cH} = 5, 20 Hz et F_{cB} = 20, 50, 100 Hz

En itérant le processus de comparaison, nous obtenons les critères $\Phi_1 = 9{,}4.10^{-4}$ et $\Phi_2 = 3{,}8.10^{-4}$, montrant ici que le filtrage par équations d'état est de meilleure qualité comparé au filtrage par succession de filtres passe-bas et passe-haut.

VIII.6.g. Filtre passe-bas de Butterworth d'ordre N

Les filtres passe-bas de type Butterworth sont caractérisés par le gain statique G_0, la fréquence de coupure f_0 et l'ordre N [Labarrère, 1982]. La réponse fréquentielle d'un tel filtre est :

$$|H(f)| = \frac{G_0}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^N}}$$

Sa fonction de transfert est :

si N est pair

$$FT_{\text{pair}}(s) = \frac{G_0}{\prod_{n=1}^{\frac{N}{2}} \left\{ \left(\frac{s}{2\pi f} - e^{i\left(\frac{(2n-1)\pi}{2N}+\frac{\pi}{2}\right)} \right) \left(\frac{s}{2\pi f} - e^{-i\left(\frac{(2n-1)\pi}{2N}+\frac{\pi}{2}\right)} \right) \right\}} \qquad \text{(III-33)}$$

si N est impair

$$FT_{\text{impair}}(s) = \frac{G_0}{\left(\frac{s}{2\pi f_0}+1\right) \cdot \prod_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \left\{ \left(\frac{s}{2\pi f_0} - e^{i\left(\frac{(2n-1)\pi}{2N}+\frac{\pi}{2}\right)} \right) \left(\frac{s}{2\pi f_0} - e^{-i\left(\frac{(2n-1)\pi}{2N}+\frac{\pi}{2}\right)} \right) \right\}}$$

Une fois la fonction de transfert continue obtenue, on procède de la même manière que pour le filtre passe-bas normal d'ordre N : conversion en représentation d'état, puis utilisation des équations discrètes EPV donnant la sortie y en fonction de l'entrée u et des 4 matrices d'état A, B, C et D déduites de la fonction de transfert (III-29) et (III-30).

La fréquence de reconstruction F_R est supérieure ou égale au double de la fréquence de coupure f_0, soit $F_R \geq 2f_0$. Selon l'équation (III-4), nous prenons $F_R = 2\pi f_0$.

La figure III.31 montre les signaux de sortie issus du filtrage passe-bas de type Butterworth d'ordre 6 du premier signal de synthèse (signal résultant de la somme de signaux sinusoïdaux), en EPF et en EPV, et la figure III.32 montre les signaux de ce même filtrage sur le signal télégraphique. Nous remarquons, dans les deux cas, l'élimination des composantes fréquentielles supérieures à la fréquence de coupure f_0 et la bonne conservation des autres composantes fréquentielles. Dans le domaine temporel, les allures des signaux EPF filtré et EPV filtré par équations d'état sont très semblables.

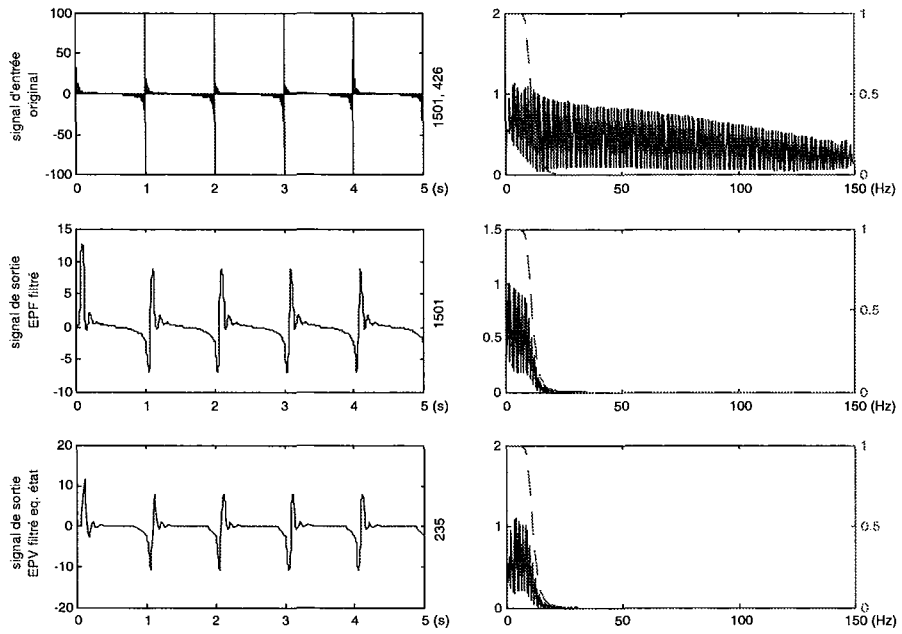


Figure III.31 : filtrage passe-bas d'ordre 6 de type Butterworth, Fc = 10 Hz

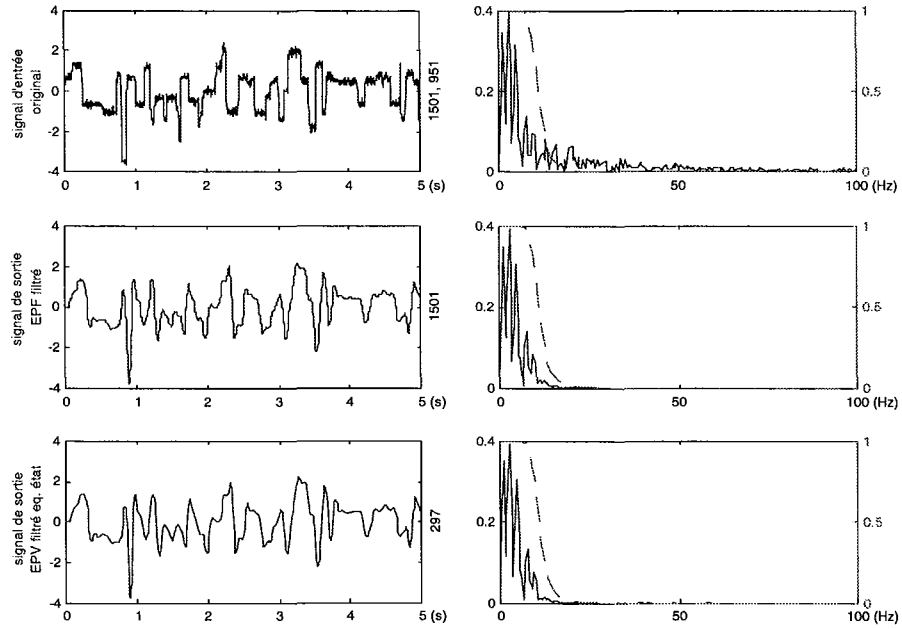


Figure III.32 : filtrage passe-bas d'ordre 6 de type Butterworth, Fc = 10 Hz

L'application du critère de comparaison des spectres entre celui du signal EPF filtré et celui du signal EPV filtré par équations d'état, donne $\Phi = 0{,}0078$ dans le cas du signal résultant de la somme de signaux sinusoïdaux, et $\Phi = 0{,}00051$ dans le cas du signal télégraphique.

VIII.6.h. Filtre passe-bande de Butterworth d'ordre N

On obtient la fonction de transfert d'un filtre passe-bande de type Butterworth d'ordre N, de fréquence de coupure f_0 et de bande passante B, à partir de la fonction de transfert d'un filtre

passe-bas de type Butterworth d'ordre N et de fréquence de coupure f_0, dans lequel on substitue le rapport entre l'opérateur de Laplace s et la pulsation de coupure $2\pi f_0$, soit $\frac{s}{2\pi f_0}$, à $\frac{1}{B_N}\left(\frac{s}{2\pi f_0}+\frac{2\pi f_0}{s}\right)$, où B_N est la bande passante normalisée $B_N = \frac{f_H - f_B}{f_0}$, la fréquence de coupure f_0 devenant la fréquence centrale et valant $f_0 = \sqrt{f_H f_B}$. La bande passante est $B = f_H - f_B$; f_H et f_B sont respectivement les fréquences de coupure haute et basse à -3 dB.

A l'inverse, $f_B = \frac{-B+\sqrt{B^2+4f_0^2}}{2}$ et $f_H = \frac{B+\sqrt{B^2+4f_0^2}}{2}$.

La figure III.33 montre les signaux d'entrée et de sortie résultant du filtrage passe-bande de type Butterworth d'ordre 3 du premier signal de synthèse, en EPF et en EPV, tandis que la figure III.34 montre les signaux issus du même filtrage sur le signal télégraphique. Nous remarquons que les composantes spectrales à l'extérieur de la bande passante sont éliminées et que les deux types de filtrage EPF et EPV sont très semblables.

De manière analogue, le critère de comparaison des spectres donne $\Phi = 0{,}038$ dans le cas de la somme de signaux sinusoïdaux, et $\Phi = 0{,}0017$ dans le cas du signal télégraphique, montrant une bonne adéquation entre le filtrage EPF et le filtrage EPV.

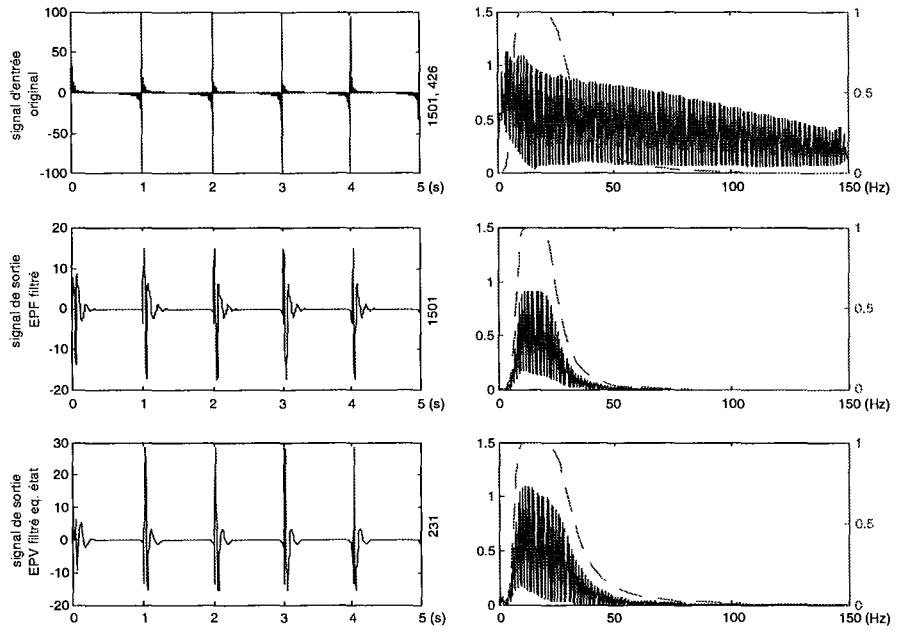


Figure III.33 : filtrage passe-bande d'ordre 3, type Butterworth, f_0 = 14 Hz, B = 22 Hz

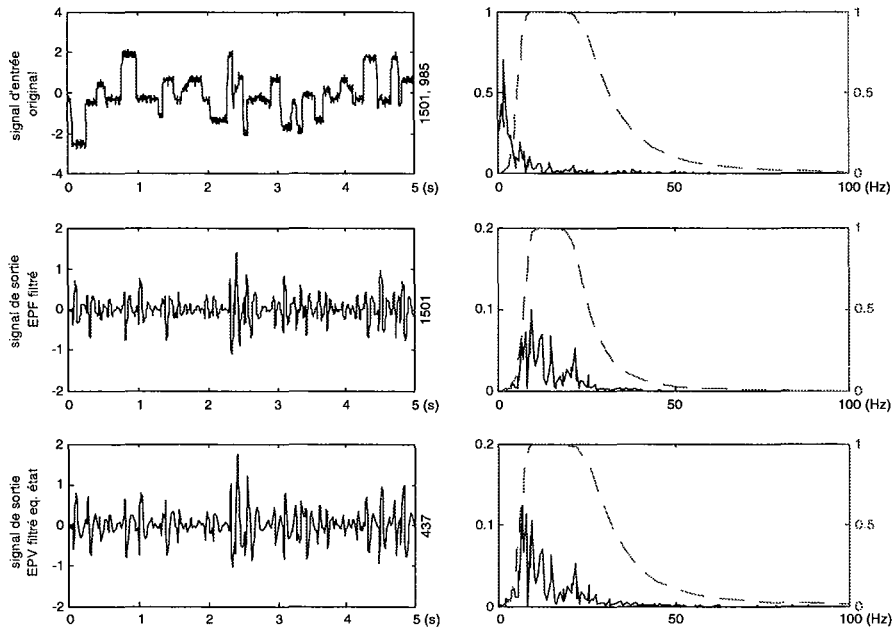


Figure III.34 : filtrage passe-bande d'ordre 3, type Butterworth, f_0 = 14 Hz, B = 22 Hz

VIII.7. Correction de phase du filtrage

La fonction de transfert d'un filtre impose non seulement un gain variant en fonction de la fréquence, mais aussi un déphasage. Il peut arriver que le déphasage généré par le filtre décale du point de vue temporel la détection d'un événement. Le biais entre l'instant détecté et le véritable instant d'occurrence de l'événement peut devenir gênant. Nous proposons ici une méthode permettant de diminuer le déphasage en retranchant un décalage temporel moyen au signal de sortie.

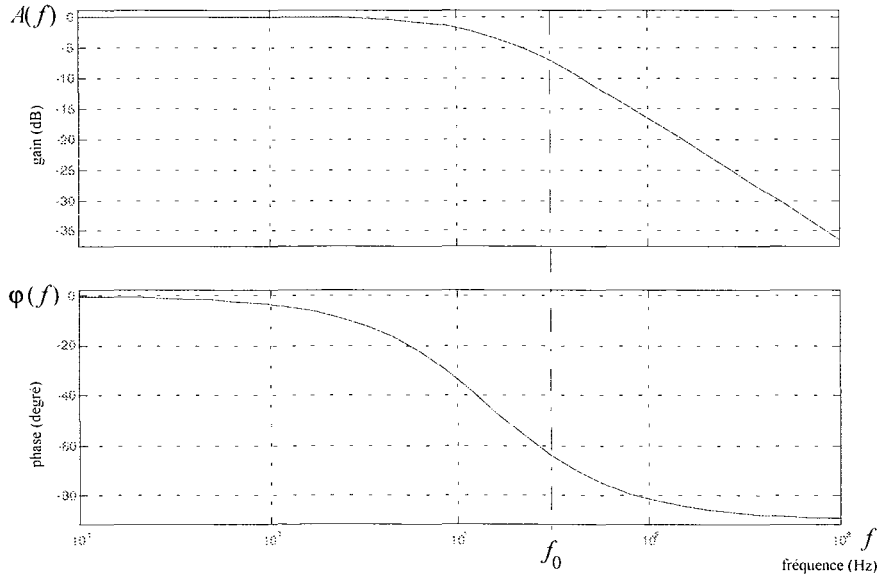


Figure III.35 : diagrammes de Bode d'un filtre

Considérons le signal $E(t) = \cos(2\pi ft)$ en entrée d'un filtre dont $A(f)$ et $\varphi(f)$ représentent respectivement le gain et la phase représentés par les diagrammes de Bode (figure III.35). Le signal de sortie du filtre est alors :

$$S(t) = A(f)\cos\left(2\pi ft + \varphi(f)\right) \tag{III-34}$$

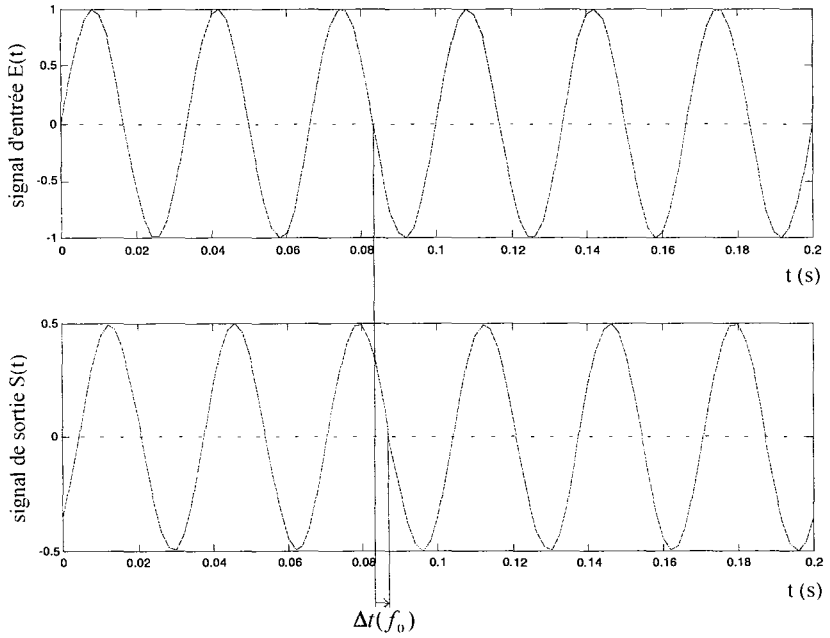


Figure III.36 : signaux d'entrée et de sortie, et décalage temporel

Pour une fréquence particulière $f = f_0$, le déphasage se matérialise par un décalage temporel entre les signaux $E(t)$ et $S(t)$ au gain $A(f)$ près. Notons $\Delta t(f_0)$ le décalage temporel. La figure III.36 montre un exemple de signaux d'entrée et de sortie, ainsi que le décalage temporel. Exprimons à présent ce décalage temporel $\Delta t(f_0)$.

$$2\pi f_0 \Delta t(f_0) + \varphi(f_0) = 0$$

$$\text{Alors } \Delta t(f_0) = -\frac{\varphi(f_0)}{2\pi f_0} = -\frac{\varphi°(f_0)}{360 f_0}$$

Nous pouvons donc quantifier le décalage temporel entre $E(t)$ et $S(t)$ pour la fréquence particulière f_0 à partir du déphasage $\varphi(f_0)$. Lorsque le signal d'entrée présente un spectre quelconque, le décalage temporel du signal de sortie ne sera plus constant comme cela l'était pour la fréquence particulière f_0. Néanmoins, un déphasage moyen $\tilde{\varphi}$ correspondant à la fréquence $\tilde{f}$ peut être considéré. On détermine alors le décalage temporel moyen :

$$\Delta\tilde{t} = -\frac{\tilde{\varphi}}{2\pi\tilde{f}}$$

La fréquence $\tilde{f}$ peut être prise égale à la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas de Butterworth, ou égale à la fréquence centrale d'un filtre passe-bande de Butterworth.

En décalant de manière temporelle le signal $S(t)$ du temps $\Delta\tilde{t}$, il est alors possible de diminuer le déphasage entre $S(t)$ et $E(t)$. Au lieu de recueillir le signal de sortie de l'équation (III-34), nous obtenons le signal de sortie :

$$S(t-\Delta\tilde{t}) = A(f)\cos\left(2\pi ft + \varphi(f)\right)$$

Nous pouvons ainsi diminuer l'effet de déphasage du filtre en retranchant un décalage temporel moyen au signal de sortie.

VIII.8. Synthèse sur le filtrage EPV

Nous avons vu, dans les paragraphes précédents, les fonctions de transfert des filtres généraux se décomposant en produits de filtres du 1er et du 2ème ordre ainsi que les fonctions de transfert des filtres de type Butterworth. Dans tous les cas, nous avons pu, à partir de la fonction de transfert, réaliser le filtre numérique échantillonné à pas variable équivalent en passant par une représentation d'état.

Dans certains cas, la reconstruction d'échantillons intermédiaires s'avère utile afin de suivre fidèlement la réponse du filtre, et le ré-échantillonnage permet d'optimiser le nombre d'échantillons à conserver pour représenter le signal filtré. La comparaison entre filtrage EPF et filtrage EPV donne de bons résultats, sans perdre notablement d'informations et en travaillant avec un nombre réduit d'échantillons. Les signaux obtenus par filtrage à pas variable et ceux obtenus par filtrage à pas fixe sont très semblables que ce soit du point de vue temporel comme du point de vue fréquentiel.

Il existe d'autres types de filtres analogiques tels que les filtres de Legendre, Bessel, Tchebyscheff et Cauer dont les coefficients polynomiaux des fonctions de transfert sont connus [Labarrère, 1982]. Nous ne développons pas ici les expressions de leurs fonctions de transfert respectives ; on imagine aisément que l'on peut procéder de la même manière à partir de la fonction de transfert continue pour obtenir le filtre numérique équivalent échantillonné à pas variable.

Toutefois, il resterait à étudier le cas où le filtre est donné sous sa forme discrète échantillonné à un pas fixe (par sa transformée en z, par exemple). Dans ce cas, il serait nécessaire de

convertir le filtre numérique en une forme analogique, que ce soit une fonction de transfert continue, une forme différentielle ou une forme d'équations d'état continues. Ainsi, tous les filtres analogiques et numériques pourraient être convertis en filtres numériques EPV.

Enfin, nous remarquons qu'il est possible de filtrer un signal échantillonné à pas variable sans avoir recours à une reconstruction totale d'un signal échantillonné à pas fixe. Néanmoins, les calculs à entreprendre pour un filtre EPV sont plus complexes comparés aux calculs liés au filtre numérique classique équivalent, avec des pas d'échantillonnage fixes. Cette complexité se ressent dans le temps de calcul. Celui-ci est de 5 à 25 fois plus lent pour un filtre EPV, selon la fonction de transfert utilisée et le taux de compression du signal d'entrée. Ce temps de calcul est non seulement dû aux calculs matricielles dans la représentation d'état, mais aussi à la reconstruction de certains instants d'échantillonnage intermédiaires, nécessaire au bon suivi de la sortie du filtre. Une optimisation du pas de reconstruction permettrait une réduction des temps de calculs.

IX. Synthèse des outils de traitement des SEPV

Dans ce troisième chapitre, nous avons élaboré divers outils de traitement des signaux échantillonnés à pas variable ou irrégulièrement. Tout d'abord, nous avons vu les opérations simples d'addition et multiplication de deux signaux, ainsi que des opérations de statistiques comme les moments d'ordre 0 et 1. Puis, nous avons défini une analyse spectrale par transformée de Fourier et développé des filtres passe-bas et passe-bande.

L'originalité des méthodes et outils développés ici repose sur la prise en compte des intervalles de temps irréguliers afin d'éviter la reconstruction d'un signal échantillonné à pas fixe. Cet ensemble d'outils forme une base dans le traitement des signaux échantillonnés irrégulièrement en dehors des méthodes de reconstruction.

Il est à noter que l'ensemble de ces outils de traitement des SEPV a été développé dans l'environnement logiciel Matlab de Mathworks©. Chaque outil fait l'objet d'une fonction ; l'ensemble des fonctions étant regroupé dans une boite à outils (toolbox) intitulée TSEPV (Traitement des Signaux Echantillonnés à Pas Variable).

Nous allons appliquer ces outils, dans le cinquième chapitre, à l'analyse de l'électrocardiogramme. Mais intéressons-nous auparavant, dans le quatrième chapitre, à l'identification de systèmes avec des signaux d'entrée et de sortie échantillonnés à pas variable de manière indépendante.

Chapitre IV

Identification de systèmes à entrée et sortie EPV

"On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres une maison."
LA SCIENCE ET L'HYPOTHÈSE

Henri POINCARE (1854-1912, France)

CHAPITRE 4. IDENTIFICATION DE SYSTÈMES À ENTRÉE ET SORTIE EPV 93

I. OBJECTIFS 95
II. PROPOSITION 95
III. MÉTHODE DES FONCTIONS MODULATRICES 96
III.1. Identification d'un système du premier ordre 96
III.2. Identification d'un système général 97
III.3. Application à l'identification de fonctions de transfert 99
IV. MÉTHODE DES MOMENTS 104
IV.1. Identification d'un système du premier ordre 104
IV.2. Application à l'identification d'une fonction de transfert 106
IV.3. Identification d'un système général 107
V. MÉTHODE D'IDENTIFICATION SIMULTANÉE DES PARAMÈTRES ET ÉTATS MANQUANTS 108
V.1. Définition des variables pour un modèle du premier ordre 108
V.2. Définition du critère, estimation du modèle et des échantillons manquants 110
V.3. Application à l'identification d'un système du premier ordre 111
VI. SYNTHÈSE DES MÉTHODES D'IDENTIFICATION 115

I. Objectifs

Dans le chapitre 3, nous avons développé des outils de traitement numérique s'appliquant à des SEPV. Nous connaissions le signal d'entrée EPV, le traitement à réaliser (statistiques, analyse spectrale, filtrage), et nous recherchions alors la sortie EPV résultant du traitement.
Nous partons maintenant du fait, dans ce chapitre 4, que nous connaissons l'entrée EPV et la sortie EPV. Nous recherchons alors le modèle du système transformant l'entrée EPV en sortie EPV, et plus particulièrement, l'estimation des paramètres du modèle. Un problème d'identification de système avec entrée et sortie EPV se pose alors (figure VI.1).

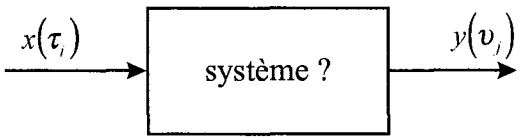


Figure VI.1 : identification d'un système à entrée et sortie EPV

Nous considérons alors un système dont l'entrée et la sortie sont connues à des instants non synchrones. Le problème qui se pose est celui de l'estimation des paramètres du modèle décrivant le comportement du système. On se place dans le cas restrictif, mais cependant réaliste, où les échantillons des différents signaux ont été obtenus à des instants irréguliers mais tous multiples d'un pas d'échantillonnage connu. Nous disposons donc de deux séries finies : l'une d'entrée $x(\tau_i)$ et l'autre de sortie $y(\upsilon_j)$ où τ_i et υ_j sont des multiples du pas d'échantillonnage T. Les signaux $x(\tau_i)$ et $y(\upsilon_j)$ étant échantillonnés irrégulièrement, nous ne disposons pas de tous les échantillons aux instants multiples de T. De ces deux séries nous désirons extraire les paramètres du modèle à identifier. Eventuellement, nous pourrons reconstruire les échantillons manquants des signaux d'entrée et de sortie.

II. Proposition

En raison des informations partielles disponibles, les méthodes classiques d'identification ne s'appliquent pas directement, car elles supposent très généralement de disposer de séries temporelles à pas constant. Plusieurs solutions peuvent être envisagées :

- à partir des échantillons $x(\tau_i)$ et $y(\upsilon_i)$, nous pouvons reconstruire au moyen d'une procédure d'interpolation des séries à pas constant $x(kT)$ et $y(kT)$. Puis, il est alors possible d'appliquer à ces séries les techniques habituelles d'estimation. Dans la suite nous écarterons les méthodes utilisant la reconstruction par interpolation.

- adapter certaines des méthodes habituelles pour prendre en compte l'aspect parcellaire des mesures. C'est le cas de méthodes fondées sur l'utilisation d'intégrales continues, ces dernières pouvant être évaluées avec des informations à pas irrégulier (méthode des fonctions modulatrices, méthode des moments, décomposition sur une base de fonctions).
- considérer que l'on est en présence d'un système à mesures partielles et que le problème d'estimation des paramètres du système doit se faire avec cette contrainte. Le problème peut également se formuler en un problème plus général d'estimation de paramètres et d'états non mesurés.

Nous allons développer la méthode des fonctions modulatrices, la méthode des moments et l'estimation des paramètres et états non mesurés avec des signaux échantillonnés à pas variable.

III. Méthode des fonctions modulatrices

Pour simplifier la présentation de la méthode des fonctions modulatrices, le modèle sera pris sous la forme d'un premier ordre dans un premier temps, il sera généralisé à des structures d'ordre plus élevé par la suite.

III.1. Identification d'un système du premier ordre

Considérons un modèle sous forme continue et des signaux d'entrée et de sortie connus entre un instant initial t_i et un instant final t_f :

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Kx(t) \tag{IV-1}$$

Nous allons estimer les coefficients du modèle (IV-1) pour les signaux d'entrée et sortie pris dans l'intervalle de temps $\left[t_i, t_f\right]$.

Soit une fonction modulatrice φ obéissant aux propriétés suivantes :

φ de classe C^1

$\varphi(t_i) = \varphi(t_f) = 0$

En multipliant l'équation (IV-1) par $\varphi(t)$ puis en intégrant le résultat obtenu sur l'intervalle de temps $\left[t_i, t_f\right]$, on obtient :

$$-T\int_{t_i}^{t_f} \dot{\varphi}(t)y(t)dt + \int_{t_i}^{t_f} \varphi(t)y(t)dt = K\int_{t_i}^{t_f} \varphi(t)x(t)dt \tag{IV-2}$$

En appliquant cette procédure à deux fonctions modulatrices différentes (éventuellement sur deux intervalles temporels différents), on obtient le système linéaire par rapport aux paramètres du modèle :

$$\begin{pmatrix} \int_{t_i}^{t_f} \varphi_1(t)x(t)dt & \int_{t_i}^{t_f} \dot{\varphi}_1(t)y(t)dt \\ \int_{t_i}^{t_f} \varphi_2(t)x(t)dt & \int_{t_i}^{t_f} \dot{\varphi}_2(t)y(t)dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{t_i}^{t_f} \varphi_1(t)y(t)dt \\ \int_{t_i}^{t_f} \varphi_2(t)y(t)dt \end{pmatrix} \tag{IV-3}$$

Chacune des six intégrales apparaissant dans ce système peut être évaluée numériquement par une méthode appropriée, ce qui permet ensuite d'évaluer K et T. Cette méthode doit bien sûr prendre en compte la particularité des signaux d'entrée et de sortie qui sont connus à des instants irrégulièrement répartis ; une intégration par la technique des trapèzes est tout à fait simple à appliquer. De façon générale, l'intégrale continue :

$$I = \int_{t_i}^{t_f} f(t)dt$$

est approximée numériquement par la somme discrète :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\tau_i=t_i}^{t_{f-1}} \left(f(\tau_i) + f(\tau_{i+1}) \right) \left(\tau_{i+1} - \tau_i \right)$$

Ainsi, les coefficients K et T du modèle peuvent être estimés en présence de signaux d'entrée et de sortie échantillonnés à pas variable.

III.2. Identification d'un système général

Généralisons maintenant, à l'aide de fonctions modulatrices, l'identification d'un système quelconque. Considérons le modèle sous forme continue :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m x^{(m)}(t) \tag{IV-4}$$

$n \in [0; N]$ représente l'ordre des dérivées du signal de sortie du modèle et $m \in [0; M]$ représente l'ordre des dérivées du signal d'entrée du modèle. On peut toujours se ramener à un système dont le coefficient a_0 est égal à un.

Définissons $N + M + 1$ fonctions modulatrices φ_k obéissant aux propriétés suivantes :

φ_k de classe C^N pour tout $k \in [1; N+M+1]$

$$\varphi_k^{(j)}(t_i) = \varphi_k^{(j)}(t_f) = 0 \text{ pour tout } j \in [0; N-1] \quad \text{(IV-5)}$$

Nous choisissons comme fonctions modulatrices des fonctions polynomiales de la forme :

$$\varphi_k(t) = (t-t_i)^{k+N-1}(t-t_f)^{k+N-1} \quad \text{(IV-6)}$$

En multipliant l'équation (IV-4) par chacune des k fonctions modulatrices φ_k puis en intégrant le résultat obtenu sur l'intervalle de temps $[t_i; t_f]$, nous obtenons N+M+1 équations :

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n \int_{t_i}^{t_f} \varphi_k^{(n)}(t)y(t)dt = \sum_{m=0}^{M}(-1)^m b_m \int_{t_i}^{t_f} \varphi_k^{(m)}(t)x(t)dt \quad \text{(IV-7)}$$

Mettons l'équation (IV-7) sous forme matricielle en posant au préalable :

$$Y_k^n = (-1)^{n+1}\int_{t_i}^{t_f} \varphi_k^{(n)}(t)y(t)dt$$

$$X_k^m = (-1)^m \int_{t_i}^{t_f} \varphi_k^{(m)}(t)x(t)dt$$

Chacune de ces intégrales peut être évaluée numériquement en prenant en compte les instants d'échantillonnage irrégulièrement répartis des signaux d'entrée et de sortie. Comme dans la première partie avec l'identification du système d'ordre un, une intégration par la technique des trapèzes peut s'appliquer.

Les N+M+1 équations (IV-7) peuvent se mettre sous la forme du système suivant :

$$\begin{bmatrix} Y_1^N & \cdots & Y_1^1 & X_1^M & \cdots & X_1^0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{N+M+1}^N & \cdots & Y_{N+M+1}^1 & Y_{N+M+1}^M & \cdots & Y_{N+M+1}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_N \\ \vdots \\ a_1 \\ b_M \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_1^0 \\ \vdots \\ -Y_{N+M+1}^0 \end{bmatrix} \quad \text{(IV-8)}$$

Ceci s'apparente à un système $A\theta = B$ linéaire par rapport aux paramètres θ du modèle. Si la matrice A est inversible, les paramètres du modèle s'expriment par $\theta = A^{-1}B$.

III.3. Application à l'identification de fonctions de transfert

A partir de la méthode des fonctions modulatrice décrite précédemment, nous allons, dans cette partie, identifier les paramètres d'une fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre, puis les paramètres d'une fonction de transfert d'un ordre plus élevé.

La fonction de transfert continue du filtre passe-bas du premier ordre que nous avons choisi est :

$$F(s) = \frac{1,5}{5s+1}$$

Nous construisons un signal télégraphique filtré passe-bas (nous réduisons ainsi le bruit) échantillonné à pas fixe $x_{EPF}(t)$ constituant l'entrée de la fonction de transfert. Nous obtenons en sortie du système le signal échantillonné à pas fixe $y_{EPF}(t)$. Puis, nous échantillonnons à pas variable ces deux signaux afin d'obtenir les signaux $x_{EPV}(\breve{t})$ et $y_{EPV}(\breve{t})$. A partir de ces signaux échantillonnés irrégulièrement, nous reconstruisons les signaux interpolés linéairement $x_{INT}(t)$ et $y_{INT}(t)$. Nous disposons alors de trois couples de signaux nous permettant d'identifier le système. Les signaux d'entrée et de sortie échantillonnés à pas fixe, et ceux reconstruit par interpolation linéaire comptent 305 échantillons, tandis que le signal d'entrée EPV comporte 65 échantillons et celui de sortie EPV comporte 47 échantillons. Les signaux d'entrée et sortie $x_{EPV}(\breve{t})$ et $y_{EPV}(\breve{t})$ proviennent de l'échantillonnage à pas variable des signaux $x_{EPF}(t)$ et $y_{EPF}(t)$, comme ceci est décrit au chapitre 2. Ceci justifie le nombre réduit d'échantillons.

Nous allons à présent identifier les coefficients de la fonction de transfert à l'aide des fonctions modulatrices polynomiales. Conformément aux équations (IV-4) et (IV-5), nous avons M=0 et N=1. Nous générons alors les deux fonctions modulatrices polynomiales à l'aide de l'équation (IV-6) :

$$\varphi_1(t) = (t - t_i)(t - t_f)$$
$$\varphi_2(t) = (t - t_i)^2 (t - t_f)^2 \quad \text{avec } t_i = 0 \text{ et } t_f = 61$$

Ces deux fonctions modulatrices sont elles aussi échantillonnées à pas fixe et à pas variable. Nous procédons à l'identification des coefficients de la fonction de transfert, grâce aux

fonctions modulatrices, sur quatre cas différents en ce qui concerne l'échantillonnage des signaux d'entrée et de sortie et l'échantillonnage des fonctions modulatrices.

- Nous utilisons, dans le premier cas, les signaux d'entrée et de sortie échantillonnés à pas fixe $x_{EPF}(t)$ et $y_{EPF}(t)$, et les fonctions modulatrices échantillonnées à pas fixe. L'identification mènera à la fonction de transfert $F_{EPF}(s)$.
- Dans le deuxième cas, nous utiliserons les signaux d'entrée et de sortie après reconstruction par interpolation $x_{INT}(t)$ et $y_{INT}(t)$, et les fonctions modulatrices échantillonnées à pas fixe. L'identification mènera à la fonction de transfert $F_{INT}(s)$.
- Nous utiliserons, dans le troisième cas, les signaux d'entrée et de sortie échantillonnés à pas variable $x_{EPV}(\breve{t})$ et $y_{EPV}(\breve{t})$, et les fonctions modulatrices prises aux instants d'échantillonnage de l'entrée EPV ou de la sortie EPV, selon le calcul à effectuer. Nous constatons que certaines fluctuations des fonctions modulatrices sont inhibées du fait de l'échantillonnage à pas variable des signaux d'entrée ou de sortie, au lieu de l'échantillonnage à pas variable des fonctions modulatrices elles-mêmes. L'identification mènera à la fonction de transfert $F_{EPV1}(s)$.
- Enfin, nous utiliserons dans le quatrième cas, les signaux d'entrée et de sortie échantillonnés à pas variable $x_{EPV}(\breve{t})$ et $y_{EPV}(\breve{t})$, et les fonctions modulatrices échantillonnées à pas variable selon leurs propres fluctuations. L'identification mènera à la fonction de transfert $F_{EPV2}(s)$.

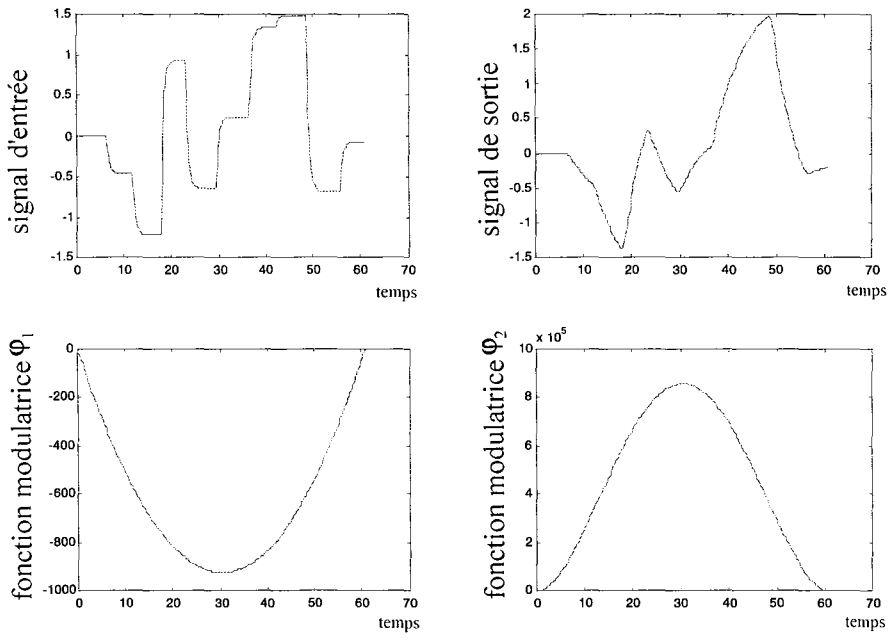


Figure IV.2 : signaux d'entrée et de sortie, fonctions modulatrices EPF

Afin de comparer les fonctions de transfert des différents cas, nous considérons le critère quadratique entre la sortie $y(t)$ et la sortie simulée $\hat{y}(t)$ après identification du système.

$$\Phi = \frac{\int_{t_i}^{t_f} \left(y(t) - \hat{y}(t)\right)^2 dt}{\int_{t_i}^{t_f} y^2(t) dt} \qquad \text{(IV-9)}$$

La figure IV.2 montre les signaux d'entrée et de sortie, et les fonctions modulatrices échantillonnés à pas fixe. L'identification à l'aide des fonctions modulatrices par chacune des quatre cas donne les fonctions de transfert et les critère suivants :

$$F_{EPF}(s) = \frac{1,5}{5s+1} \qquad \Phi_{EPF} = 1,4.10^{-9}$$

$$F_{INT}(s) = \frac{1,5}{4,951s+1} \qquad \Phi_{INT} = 6,6.10^{-6}$$

$$F_{EPV1}(s) = \frac{1,521}{4,659s+1} \qquad \Phi_{EPV1} = 1,2.10^{-4}$$

$$F_{EPV2}(s) = \frac{1,505}{4,907s+1} \qquad \Phi_{EPV2} = 6,8.10^{-5}$$

Nous remarquons qu'à pas fixe ou après interpolation linéaire, nous retrouvons une bonne estimation des coefficients de la fonction de transfert. A pas variable, avec les fonctions modulatrices prises aux instants d'échantillonnage des entrée et sortie, l'estimation est moins bonne du fait du manque de certaines fluctuations des fonctions modulatrices. Enfin, lorsque les fonctions modulatrices sont elles aussi échantillonnées à pas variable, l'estimation des coefficients est très satisfaisante. Par conséquent, l'identification avec entrée, sortie et fonctions modulatrices EPV donne une bonne approximation de la fonction de transfert du filtre passe-bas du premier ordre. Aussi, il serait intéressant d'examiner l'influence du choix des fonctions modulatrices dans l'identification de la fonction de transfert, ainsi que le taux de corrélation entre les fonctions modulatrices. Afin que ce taux soit faible et que la matrice de l'équation (IV-8) soit mieux conditionnée, nous proposons, en remplacement de la relation (IV-6), des fonctions modulatrices de la forme :

$$\varphi_k(t) = \frac{\psi_k(t)}{\max_{t \in [t_i;t_f]} \left(\psi_k(t)\right)} \text{ avec } \psi_k(t) = \left(t - t_i\right)^{k+N-1} \left(t - t_k\right) \left(t - t_f\right)^{k+N-1} \text{ où } t_k \in \left[t_i; t_f\right]$$

On se propose maintenant d'appliquer la méthode des fonctions modulatrices à l'identification d'une fonction de transfert continue d'un ordre plus élevé, à savoir :

$$F(s) = \frac{s+3}{6s^2+4s+1}$$

Comme dans la première partie avec la fonction de transfert du premier ordre, nous construisons le même signal télégraphique et générons les divers signaux d'entrée et sortie $x_{EPF}(t)$, $x_{EPV}(\breve{t})$, $x_{INT}(t)$, $y_{EPF}(t)$, $y_{EPV}(\breve{t})$ et $y_{INT}(t)$.

Nous disposons alors de trois couples de signaux nous permettant d'identifier le système. Le taux d'échantillonnage de l'entrée EPV est 60 / 321, et le taux d'échantillonnage de la sortie EPV est 52 / 321.

Conformément aux équations (IV-4) et (IV-5), nous générons quatre fonctions modulatrices de forme polynomiale grâce à l'équation (IV-6) :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= (t-t_i)^2(t-t_f)^2 \\
\varphi_2(t) &= (t-t_i)^3(t-t_f)^3 \\
\varphi_3(t) &= (t-t_i)^4(t-t_f)^4 \\
\varphi_4(t) &= (t-t_i)^5(t-t_f)^5
\end{aligned} \quad \text{avec } t_i = 0 \text{ et } t_f = 63$$

Nous procédons à l'identification des coefficients de la fonction de transfert à l'aide des fonctions modulatrices pour les quatre cas décrits précédemment, et nous obtenons l'estimations des paramètres inclus dans les fonctions de transfert suivantes :

$$F_{EPF}(s) = \frac{1{,}002s+3}{5{,}999s^2+4{,}001s+1} \qquad \Phi_{EPF} = 6{,}5.10^{-8}$$

$$F_{INT}(s) = \frac{1{,}289s+3{,}007}{6{,}303s^2+4{,}105s+1} \qquad \Phi_{INT} = 2{,}2.10^{-4}$$

$$F_{EPV1}(s) = \frac{0{,}5878s+3{,}014}{4{,}219s^2+3{,}753s+1} \qquad \Phi_{EPV1} = 1{,}0.10^{-2}$$

$$F_{EPV2}(s) = \frac{10{,}04s+3{,}003}{16{,}84s^2+6{,}791s+1} \qquad \Phi_{EPV2} = 3{,}7.10^{-2}$$

Afin de comparer les quatre fonctions de transfert, nous avons calculé le critère quadratique entre la sortie et la sortie simulée après identification des paramètres pour chaque fonction de

transfert. Nous représentons maintenant sur la figure IV.3 les pôles et zéros de chacune des fonctions de transfert.

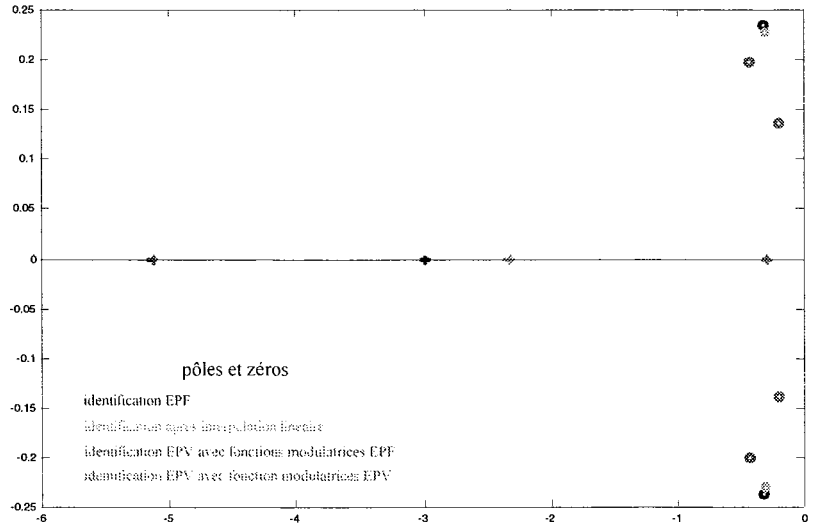


Figure IV.3 : pôles et zéros des fonctions de transfert identifiées

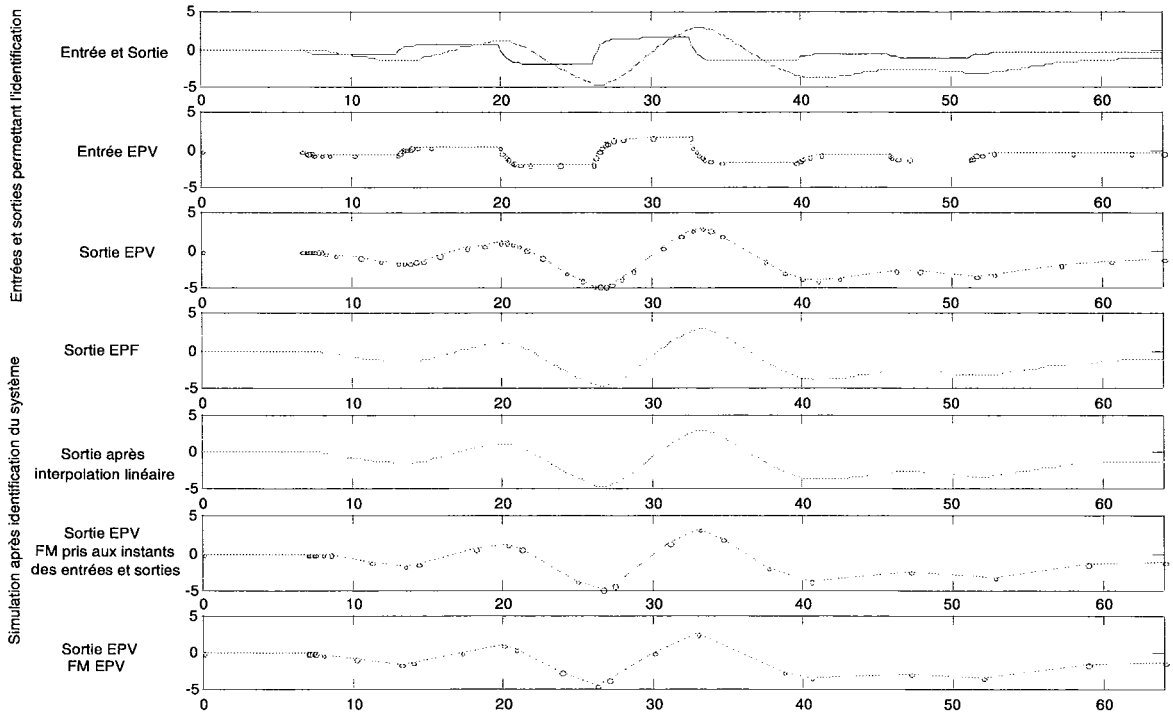


Figure IV.4 : entrées et sorties permettant l'identification, puis sorties simulées en EPF, après interpolation et en EPV

La figure IV.4 représente successivement les signaux d'entrée et de sortie EPF et EPV, la sortie simulée avec la fonction de transfert identifiée en EPF, celle simulée avec la fonction de transfert identifiée après interpolation, celle simulée avec la fonction de transfert identifiée en EPV avec les fonctions modulatrices prises aux instants d'échantillonnage d'entrée et de sortie

EPV, et celle simulée avec la fonction de transfert identifiée en EPV avec les fonctions modulatrices échantillonnées elles aussi à pas variable.

Nous constatons que l'identification des coefficients de la fonction de transfert donne des résultats s'éloignant sensiblement de la fonction de transfert d'origine. Néanmoins, leurs dynamiques sont équivalentes puisque leurs pôles sont proches et leurs sorties simulées sont semblables. Nous avons identifié différentes autres fonctions de transfert d'ordre 1 à 3 par la méthode des fonctions modulatrices. Les mêmes constatations ont été relevées. Un premier outil d'identification d'un système à partir de signaux d'entrée et sortie EPV utilisant des fonctions modulatrices peut donc s'appliquer. Néanmoins, il conviendrait de choisir des fonctions modulatrices ayant un faible taux de corrélation entre elles. Enfin, des techniques de validation de modèles, telles que des tests statistiques sur les résidus $y(t) - \hat{y}(t)$, permettrait de mieux comparer les quatre cas d'identification.

IV. Méthode des moments

Nous exposons, dans cette partie, une méthode d'identification des paramètres d'une fonction de transfert continue, à l'aide du calcul des moments pondérés des signaux d'entrée et de sortie EPV. Dans un premier temps, nous développerons l'identification d'un système du premier ordre. Puis, nous l'appliquerons à l'estimation des coefficients de la fonction de transfert continue du premier ordre que nous avons utilisée dans la partie concernant l'identification avec les fonctions modulatrices ; ceci nous permettra de comparer les méthodes. Enfin, nous examinerons l'extension à l'ordre N de la méthode des moments.

IV.1. Identification d'un système du premier ordre

Afin de développer la méthode d'identification d'un système du premier ordre par la méthode des moments, commençons par définir ces moments.

Le moment pondéré d'ordre i d'un signal ou d'une fonction $f(t)$ est défini par :

$$M_f^i = \int_0^\infty t^i e^{-\alpha t} f(t) dt \qquad \text{(IV-10)}$$

α est un paramètre positif permettant la convergence de l'intégrale. Il sera choisi de manière à ce que $t_f^i e^{-\alpha t_f}$ soit inférieur à un certain seuil.

Dans le domaine de Laplace, ce moment s'évalue simplement à partir de la transformée de Laplace de $f(t)$, notée $F(s)$:

$$M_f^i = (-1)^i \left. \frac{dF(s)}{ds} \right|_{s=\alpha} \tag{IV-11}$$

Tout comme pour la méthode des fonctions modulatrices, considérons un modèle sous forme continue dont les entrée et sortie sont connues entre un instant initial t_i et un instant final t_f (équation IV-1) :

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Kx(t) \tag{IV-12}$$

De manière à pouvoir calculer les moments M_f^i, il convient de prendre $t_i = 0$, et de choisir α tel que $t^i e^{-\alpha t}$ soit inférieur à un seuil ε (10^{-8} par exemple) pour $t \geq t_f$. Ainsi, le calcul de l'intégrale (IV-10) entre 0 et l'infini peut se limiter au calcul de l'intégrale sur l'intervalle $\left[t_i = 0; t_f\right]$.

En multipliant l'équation (IV-12) d'une part par $e^{-\alpha t}$, et d'autre part par $te^{-\alpha t}$, puis en intégrant sur l'intervalle $\left[t_i; t_f\right]$, on établit le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
&\alpha T \int_{t_i}^{t_f} y(t)e^{-\alpha t}dt + T\left[y(t)e^{-\alpha t}\right]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} y(t)e^{-\alpha t}dt = K\int_{t_i}^{t_f} x(t)e^{-\alpha t}dt \\
&-T\int_{t_i}^{t_f} y(t)e^{-\alpha t}dt + \alpha T\int_{t_i}^{t_f} y(t)te^{-\alpha t}dt + T\left[y(t)te^{-\alpha t}\right] + \int_{t_i}^{t_f} y(t)te^{-\alpha t}dt = K\int_{t_i}^{t_f} x(t)te^{-\alpha t}dt
\end{aligned} \tag{IV-13}$$

Afin de résoudre ce système avec uniquement les moments pondérés des signaux d'entrée et de sortie EPV, il convient d'annuler les deux termes :

$$\begin{aligned}
&\left[y(t)e^{-\alpha t}\right]_{t_i}^{t_f} = 0 \\
&\left[y(t)te^{-\alpha t}\right]_{t_i}^{t_f} = 0
\end{aligned}
\text{, soit encore }
\begin{aligned}
&y(t_f)e^{-\alpha t_f} - y(t_i)e^{-\alpha t_i} = 0 \\
&y(t_f)t_f e^{-\alpha t_f} - y(t_i)t_i e^{-\alpha t_i} = 0
\end{aligned}$$

Ceci est possible en prenant $y(t_i) = 0$, puisque $t_i = 0$ et $t_f e^{-\alpha t_f} \leq \varepsilon$. On déduit alors du système (IV-13) les deux relations suivantes entre les deux premiers moments de l'entrée et de la sortie du système :

$$\begin{cases}
M_y^0 = \dfrac{K}{1+\alpha T} M_x^0 \\
M_y^1 = \dfrac{K}{1+\alpha T} M_x^1 + \dfrac{KT}{(1+\alpha T)^2} M_x^0
\end{cases}$$

avec les moments :

$$M_x^0 = \int_{t_i}^{t_f} x(t)e^{-\alpha t}\,dt\,,\ M_x^1 = \int_{t_i}^{t_f} x(t)te^{-\alpha t}\,dt\,,\ M_y^0 = \int_{t_i}^{t_f} y(t)e^{-\alpha t}\,dt\,,\ M_y^1 = \int_{t_i}^{t_f} y(t)te^{-\alpha t}\,dt\,.$$

On en déduit les valeurs des paramètres du modèle :

$$\begin{cases} T = \dfrac{A}{1-\alpha A} \\ K = \dfrac{M_y^0}{M_x^0} \end{cases} \text{ avec } A = \frac{M_y^1}{M_y^0} - \frac{M_x^1}{M_x^0} \qquad \text{(IV-14)}$$

Pour estimer ces paramètres, il suffit donc d'évaluer dans un premier temps de façon numérique les deux premiers moments de l'entrée et de la sortie, puis de résoudre le système (IV-14) dans un deuxième temps.

Comme dans la méthode des fonctions modulatrices, les intégrales sont à évaluer en tenant compte du pas d'échantillonnage propre à chaque signal.

IV.2. Application à l'identification d'une fonction de transfert

Afin de pouvoir comparer les méthodes d'identification entre elles, prenons la même fonction de transfert du premier ordre et les mêmes signaux d'entrée et de sortie que dans le paragraphe précédent avec les fonctions modulatrices. Nous déterminons les moments d'ordre 0 et d'ordre 1 de l'entrée x et de la sortie y, et nous en déduisons les valeurs des coefficients K et T de la fonction de transfert continue :

$$F(s) = \frac{1{,}5}{5s+1} \qquad \text{(IV-15)}$$

Le tableau IV.1 regroupe les moments et les fonctions de transfert identifiées en fonction des signaux permettant le calcul des moments. Nous prenons $\alpha = 0{,}5$. Afin de pouvoir comparer les trois fonctions de transfert identifiées, nous calculons le critère quadratique Φ défini par l'équation (IV-9) entre la sortie $y(t)$ et la sortie simulée $\hat{y}(t)$ après identification.

Nous remarquons que les valeurs calculées de chaque moment sont très proches les unes des autres quelque soit le signal utilisé : signal EPF, signal après interpolation, ou signal EPV. Néanmoins, le calcul des coefficients K et T s'éloignent davantage des valeurs initiales des coefficients de la fonction de transfert (IV-15). Ceci est principalement dû à l'erreur d'estimation des moments provoquant l'erreur de calcul sur l'estimation des coefficients de la fonction de transfert.

	signaux EPF	signaux interpolés	signaux EPV
M_x^0	-0,150	-0,149	-0,152
M_x^1	-0,960	-0,954	-0,964
M_y^0	-0,064	-0,064	-0,064
M_y^1	-0,504	-0,503	-0,498
K	1,490	1,486	1,583
T	4,950	4,895	5,547
Fonction de transfert identifiée	$\frac{1,490}{4,950s+1}$	$\frac{1,456}{4,895s+1}$	$\frac{1,583}{5,547s+1}$
Critère Φ	$1,3.10^{-3}$	$1,2.10^{-2}$	$3,7.10^{-2}$

Tableau IV.1 : identification par la méthode des moments

IV.3. Identification d'un système général

Etendons maintenant l'identification d'une fonction de transfert d'ordre 1 par les moments pondérés, à l'identification d'une fonction de transfert d'un système d'ordre N :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m x^{(m)}(t) \qquad \text{(IV-16)}$$

De manière à estimer les moments (IV-10) par l'intégrale sur l'intervalle $[t_i; t_f]$, nous prenons $t_i = 0$, et nous choisissons α tel que $t^i e^{-\alpha t}$ soit inférieur à un seuil ε pour $t \geq t_f$. Multiplions l'équation (IV-16) par $t^k e^{-\alpha t}$ pour $k \in [0; N]$, puis intégrons sur l'intervalle $[t_i; t_f]$. Nous obtenons N+1 équations :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \int_{t_i}^{t_f} y^{(n)}(t) t^k e^{-\alpha t} dt = \sum_{m=0}^{M} b_M \int_{t_i}^{t_f} x^{(m)}(t) t^k e^{-\alpha t} dt \qquad \text{(IV-17)}$$

Intégrons par partie le terme de gauche de cette égalité. Celui-ci devient :

$$\int_{t_i}^{t_f} a_0 y(t) t^k e^{-\alpha t} dt + \sum_{n=1}^{N} a_n \left[y^{(n-1)}(t) t^k e^{-\alpha t} \right]_{t_i}^{t_f} - \sum_{n=1}^{N} a_n \int_{t_i}^{t_f} y^{(n-1)}(t) \left(k t^{k-1} e^{-\alpha t} - \alpha t^k e^{-\alpha t} \right) dt \text{ pour } k \geq 1$$

$$\int_{t_i}^{t_f} a_0 y(t) e^{-\alpha t} dt + \sum_{n=1}^{N} a_n \left[y^{(n-1)}(t) e^{-\alpha t} \right]_{t_i}^{t_f} - \sum_{n=1}^{N} a_n \int_{t_i}^{t_f} y^{(n-1)}(t) \left(-\alpha e^{-\alpha t} \right) dt \text{ pour } k = 0$$

Afin de recueillir uniquement des moments pondérés et ainsi résoudre le système d'équations, il convient d'annuler chacun des termes :

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \left[y^{(n-1)}(t) t^k e^{-\alpha t} \right]_{t_i}^{t_f} = 0 \text{ pour } k \geq 0$$

ou encore en développant un terme de la somme :

$$a_n y^{(n-1)}(t_f) t_f^k e^{-\alpha t_f} - a_n y^{(n-1)}(t_i) t_i^k e^{-\alpha t_i} = 0 \text{ pour } k \geq 0 \text{ et } n \in [1; N]$$

Or $t_f^k e^{-\alpha t_f} \leq \varepsilon$ pour $k \geq 0$, et $t_i = 0$. La condition ci-dessus est alors vérifiée pour tout $k \geq 1$.

Lorsque $k = 0$, il convient d'annuler les dérivées successives de $y(t)$ pour $t = t_i$, soit :

$$\left. \frac{\partial^{(i)} y(t)}{\partial t^{(i)}} \right|_{t=t_i} = 0 \text{ pour } i \in [0; N-1]$$

De même, une condition analogue est utile pour l'intégration du terme de droite de l'égalité (IV-17) :

$$\left. \frac{\partial^{(j)} x(t)}{\partial t^{(j)}} \right|_{t=t_i} = 0 \text{ pour } j \in [0; M-1]$$

Ces contraintes étant difficilement réalisables, voir impossibles à réaliser, nous ne développerons pas plus cette méthode d'identification par les moments pondérés. Celle-ci reste valable, bien que moins performante en ce qui concerne les résultats, pour un système d'ordre 1 dont l'entrée et la sortie sont EPV.

V. Méthode d'identification simultanée des paramètres et états manquants

L'objectif de cette méthode d'identification est de prendre en compte l'aspect parcellaire des mesures et d'estimer les coefficients (paramètres) des modèles et ainsi pouvoir obtenir, grâce au modèle estimé, les échantillons manquants des signaux d'entrée et de sortie.

Dans un premier temps, nous définirons les variables intervenant dans la mise en forme de cette méthode d'identification. Puis, nous détaillerons les étapes nécessaires à l'estimation des paramètres du modèle et échantillons manquants des signaux d'entrée et de sortie. Enfin, nous appliquerons cette méthode à l'identification d'un système du premier ordre.

V.1. Définition des variables pour un modèle du premier ordre

Soit x le signal d'entrée du système à identifier et y son signal de sortie. Considérons le modèle discret du premier ordre suivant :

$$\begin{array}{l} y_n = a y_{n-1} + b x_{n-1} \\ y_0 \text{ connu} \end{array} \text{ avec } n \in [1;N] \qquad \text{(IV-18)}$$

On note $Z \in \Re^K$ le vecteur des variables mesurées contenant les échantillons EPV disponibles en entrée $\tilde{x}$ et sortie $\tilde{y}$; les échantillons non disponibles ne sont bien sûr pas inclus dans ce vecteur. K est le nombre de composantes du vecteur Z.

$$Z = \left(\underbrace{\tilde{y}_1 \quad \tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2 \quad \tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4 \quad \cdots \quad \tilde{x}_{N-2} \quad \tilde{y}_{N-1} \quad \tilde{y}_N}_{K \text{ composantes}} \right)^T$$

lorsque les valeurs $\tilde{y}_2$, $\tilde{x}_3$, $\tilde{x}_{N-1}$ sont, entre autres, manquantes.

Le vecteur $\hat{Z} \in \Re^{2N-1}$ des estimations contenant tous les échantillons d'entrée et de sortie EPF est :

$$\hat{Z} = \left(\hat{y}_1 \quad \hat{x}_1 \quad \hat{y}_2 \quad \hat{x}_2 \quad \cdots \quad \hat{y}_{N-1} \quad \hat{x}_{N-1} \quad \hat{y}_N \right)^T$$

Mettons la relation (IV-18) sous forme matricielle, en faisant intervenir le vecteur $\hat{Z}$:

$$M(\theta)\hat{Z} = 0$$

avec le vecteur des paramètres :

$$\theta = \left(a \quad b \right)^T$$

La matrice $M(\theta) \in \Re^{N-1 \times 2N-1}$ s'écrit alors :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & -1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & -1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & a & b & -1 \end{pmatrix}$$

Sachant qu'une partie seulement des variables est mesurée, on note $H \in \Re^{K \times 2N-1}$ la matrice qui réalise la sélection des valeurs mesurées à partir de toutes les valeurs :

$H(k,i) = 1$ si la $i^{\text{ème}}$ valeur du vecteur $\hat{Z}$ est associée à la $k^{\text{ème}}$ valeur du vecteur Z

et 0 sinon, pour $k \in [1;K]$ et $i \in [1;2N-1]$.

Ainsi, $H\hat{Z}$ est un vecteur dont la $k^{\text{ème}}$ composante contient la valeur estimée correspondante à la $k^{\text{ème}}$ composante du vecteur de mesures Z.

V.2. Définition du critère, estimation du modèle et des échantillons manquants

Dans cette partie, nous allons estimer les valeurs des composantes du vecteur de paramètres θ, ainsi que le vecteur $\hat{Z}$ contenant tous les échantillons des signaux d'entrée et de sortie EPF.

Le Lagrangien associé au problème d'estimation s'explicite :

$$L = \frac{1}{2}\left\|H\hat{Z} - Z\right\|^2 + \lambda^T M(\theta)\hat{Z} + k\left\|C\hat{Z}\right\|^2 \qquad \text{(IV-19)}$$

avec $\lambda \in \Re^{N-1}$, $\theta \in \Re^p$

Le premier terme du Langrangien concerne l'écart entre les valeurs mesurées et les valeurs estimées de l'entrée x et de la sortie y ; le deuxième terme est celui de l'estimation du modèle, et le dernier terme sert à filtrer le signal d'entrée afin que l'écart entre deux échantillons consécutifs ne soit pas trop important. La matrice $C \in \Re^{N-2\times 2N-1}$ est définie comme suit et le coefficient k règle l'influence du filtre :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estimons maintenant les paramètres du modèle et les échantillons manquants en déterminant un extremum du Lagrangien. Les dérivées premières du Lagrangien valent[1] :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{Z}} = H^T\left(H\hat{Z} - Z\right) + M^T(\theta)\lambda + kC^T C\hat{Z} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M(\theta)\hat{Z} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \left(I_p \otimes \lambda^T\right)\frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta}\hat{Z} = 0 \qquad \text{(IV-20)}$$

A partir de l'annulation des dérivées premières, on montre que :

$A \in \Re^{n.m}$ $B \in \Re^{m.q}$ $\theta \in \Re^{r.s}$

[1] $\dfrac{\partial A(\theta)B(\theta)}{\partial \theta} = \dfrac{\partial A(\theta)}{\partial \theta}\left(I_s \otimes B(\theta)\right) + \left(I_r \otimes A(\theta)\right)\dfrac{\partial B(\theta)}{\partial \theta}$

$$\lambda = \left(M(\theta)Q^{-1}M^T(\theta)\right)^{-1} M(\theta)Q^{-1}H^T Z$$

$$\hat{Z} = Q^{-1}\left(H^T Z - M^T(\theta)\lambda\right)$$

$$Q = H^T H + M^T(\theta)M(\theta) + kC^T C$$

Finalement, le vecteur d'estimation des échantillons d'entrée et de sortie est :

$$\hat{Z} = \left(I_{2N-1} - Q^{-1}M^T(\theta)\left(M(\theta)Q^{-1}M^T(\theta)\right)^{-1} M(\theta)\right)Q^{-1}H^T Z \qquad \text{(IV-21)}$$

On note que si $M(\theta)$ est de plein rang ligne, ce qui est toujours le cas compte tenu de sa structure, alors la matrice $M^T(\theta)M(\theta)$ est régulière. Il en est de même pour les matrices H et C. La matrice Q est alors inversible, tout comme la matrice $M(\theta)Q^{-1}M^T(\theta)$. L'équation (IV-20) étant non-linéaire par rapport à θ, on estime ce paramètre par une méthode itérative. La méthode du gradient, de pas Δ, donne à l'itération courante $i+1$:

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \Delta\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)_i \qquad \text{(IV-22)}$$

La méthode de Newton-Raphson peut aussi être utilisée :

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \Delta\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\theta\partial\theta^T}\right)_i^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)_i \qquad \text{(IV-23)}$$

mais elle nécessite le calcul du Hessien du Lagrangien, dont les expressions deviennent assez complexes. Nous l'exposerons au cours d'un exemple sur un modèle discret d'ordre 1.

Ainsi, une procédure itérative à deux niveaux permet d'obtenir, au premier niveau, l'estimation des signaux d'entrée et de sortie EPF de manière analytique par l'équation (IV-21), puis, au deuxième niveau, d'estimer les coefficients du modèle par la méthode du gradient (équation IV-22) ou par la méthode de Newton-Raphson (équation IV-23).

V.3. Application à l'identification d'un système du premier ordre

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer la méthode décrite précédemment à l'identification des paramètres d'un modèle du premier ordre, ainsi que l'estimation des valeurs manquantes des échantillons d'entrée et de sortie.

Considérons le modèle discret du premier ordre suivant :

$$y_n = ay_{n-1} + bx_{n-1} \qquad \text{(IV-24)}$$

Nous désirons identifier les coefficients a et b du modèle et retrouver une estimation de l'entrée x et de la sortie y. Déterminons le gradient et le Hessien du critère donné équation (IV-19). On pose au préalable :

$$M_a = \frac{\partial M}{\partial a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_b = \frac{\partial M}{\partial b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le gradient du critère est :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial a} \\ \frac{\partial L}{\partial b} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{matrix} \frac{\partial L}{\partial a} = \lambda^T M_a \hat{Z} \\ \frac{\partial L}{\partial b} = \lambda^T M_b \hat{Z} \end{matrix}$$

Les dérivées secondes du critère sont :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a^2} = \frac{\partial \lambda^T}{\partial a} M_a \hat{Z} + \lambda^T M_a \frac{\partial \hat{Z}}{\partial a}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b^2} = \frac{\partial \lambda^T}{\partial b} M_b \hat{Z} + \lambda^T M_b \frac{\partial \hat{Z}}{\partial b}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a \partial b} = \frac{\partial \lambda^T}{\partial b} M_a \hat{Z} + \lambda^T M_a \frac{\partial \hat{Z}}{\partial b}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b \partial a} = \frac{\partial \lambda^T}{\partial a} M_b \hat{Z} + \lambda^T M_b \frac{\partial \hat{Z}}{\partial a}$$

avec

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a} = \left(MQ^{-1}M^T\right)^{-1}\left(M_a Q^{-1} H^T Z^T - \left(M_a Q^{-1} M^T + MQ^{-1} M_a^T\right)\lambda\right)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b} = \left(MQ^{-1}M^T\right)^{-1}\left(M_b Q^{-1} H^T Z^T - \left(M_b Q^{-1} M^T + MQ^{-1} M_b^T\right)\lambda\right)$$

$$\frac{\partial \hat{Z}}{\partial a} = -Q^{-1}\left(M_a^T \lambda + M^T \frac{\partial \lambda}{\partial a} \right)$$

$$\frac{\partial \hat{Z}}{\partial b} = -Q^{-1}\left(M_b^T \lambda + M^T \frac{\partial \lambda}{\partial b} \right)$$

Et le Hessien du critère est alors :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \theta^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 L}{\partial b^2} \end{pmatrix}$$

Attribuons maintenant des valeurs numériques aux paramètres a et b. Le modèle (IV-24) devient :

$$y_n = 0{,}9 y_{n-1} + 0{,}2 x_{n-1}$$

Afin de pouvoir comparer les modèles identifiés, nous calculons le critère quadratique Φ défini à l'équation (IV-9) entre la sortie $y(t)$ et la sortie simulée $\hat{y}(t)$ après identification.

Nous effectuons deux simulations. Dans la première simulation, un signal d'entrée filtré passe-bas EPF est généré, donnant naissance au signal de sortie EPF. Ces deux signaux sont échantillonnés à pas variable de manière à obtenir un manque de quelques échantillons. Nous procédons alors à l'estimation du modèle et à l'obtention des signaux d'entrée et de sortie estimés par la méthode de Newton-Raphson. La figure IV.5 montre sur le premier graphique les signaux d'entrée et de sortie EPF (en trait continu) et EPV (symboles '+'). Sur le deuxième et le troisième graphique sont montrés respectivement les entrées et sorties EPV (symboles '+') auxquelles ont été superposées les entrée et sortie simulées après estimation des coefficients du modèle (trait continu). Avec une convergence en une dizaine d'itérations, l'identification du modèle donne, pour $k = 0$:

$$a = 0{,}898\,,\ b = 0{,}203 \text{ et } \Phi = 4{,}4.10^{-5}$$

Les signaux estimés se superposent aux signaux d'origine EPF. L'identification du modèle par la même procédure avec le paramètre $k = 0{,}5$ donne :

$$a = 0{,}889\,,\ b = 0{,}224 \text{ et } \Phi = 1{,}4.10^{-4}$$

On remarque l'effet de filtrage de l'entrée, obtenu avec ce paramètre.

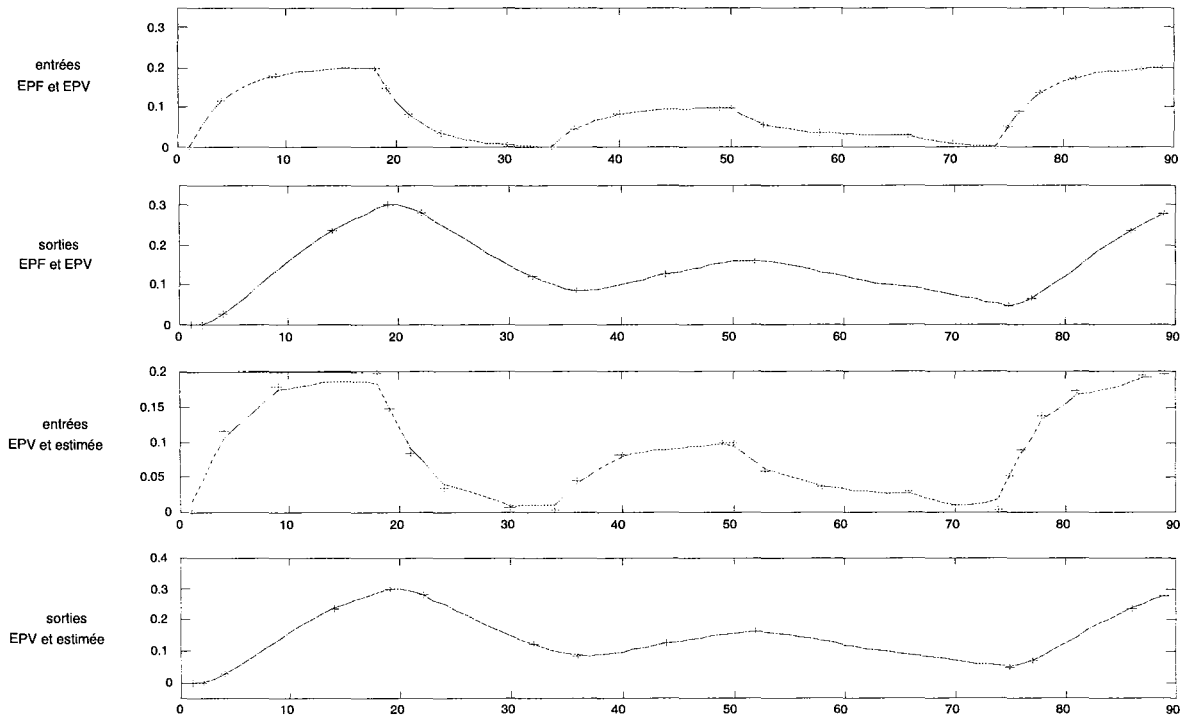


Figure IV.5 : identification simultanée (paramètres, états manquants), k=0,5

Dans la deuxième simulation, nous ajoutons au signal d'entrée filtré passe-bas un bruit blanc et nous procédons à l'estimation du modèle et des signaux de la même manière. La figure IV.6 montre alors la simulation. Avec une convergence en une dizaine d'itérations, l'identification du modèle donne pour $k = 0$:

$$a = 0{,}903,\ b = 0{,}199 \text{ et } \Phi = 1{,}5.10^{-3}$$

Les signaux estimés se superposent aux signaux d'origine EPF. L'identification du modèle par la même procédure avec le paramètre $k = 2$ donne :

$$a = 0{,}895,\ b = 0{,}213 \text{ et } \Phi = 3{,}2.10^{-3}$$

Nous remarquons que, quelques soient les signaux utilisés en EPV, nous obtenons une bonne estimation des paramètres a et b du modèle, et les signaux simulés, après l'estimation des paramètres du modèle, sont proches des signaux EPF. Des estimations sur d'autres modèles du premier ordre (en changeant les valeurs des coefficients a et b) ont été réalisées et ont donné des résultats similaires. Notons également que la méthode décrite ici peut se généraliser à des modèles d'ordre plus élevé, mais l'estimation des paramètres sera plus conséquente à mettre en œuvre. C'est pourquoi nous ne montrons pas d'application à l'identification d'un modèle plus complexe.

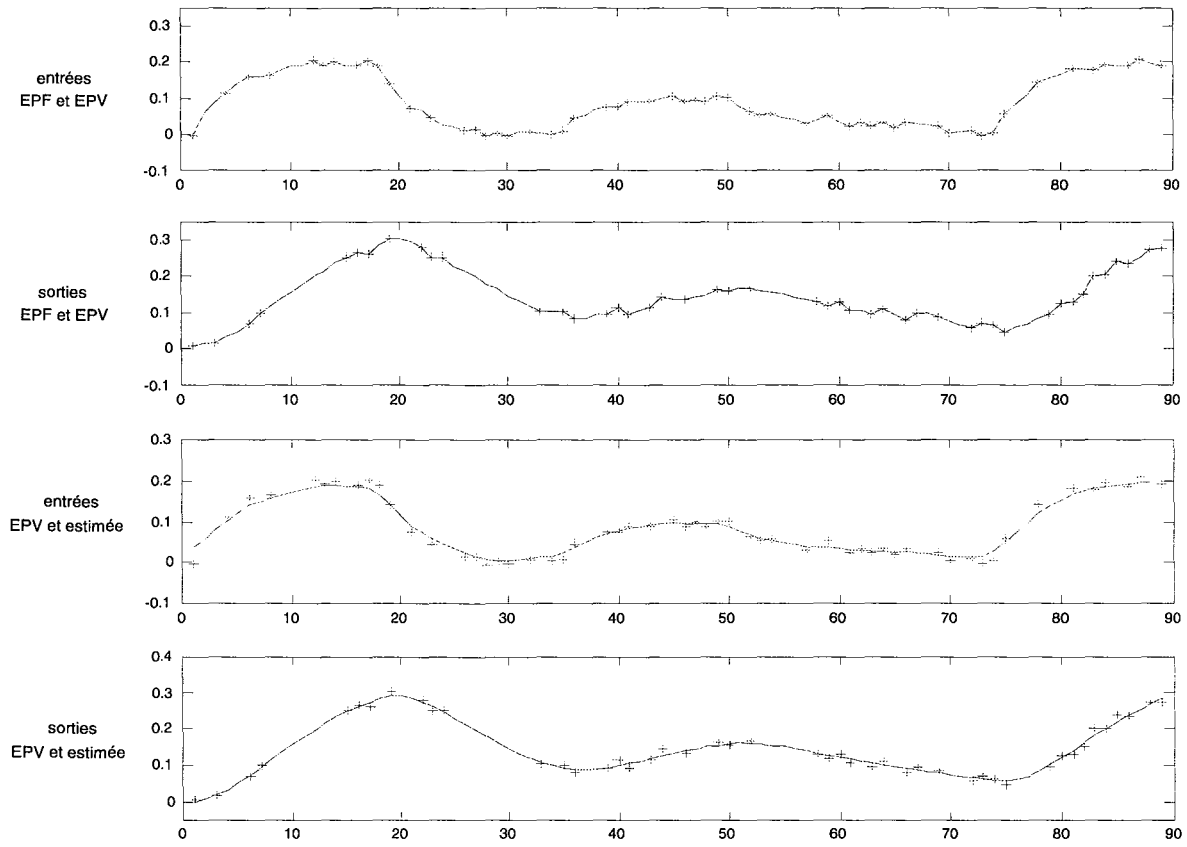


Figure IV.6 : identification simultanée (paramètres, états manquants), signal d'entrée bruité, k=2

Nous constatons que l'identification des coefficients du modèle donne de bons résultats même en présence de bruit. Un outil d'identification des paramètres d'un système à partir de signaux d'entrée et sortie EPV peut donc s'appliquer. Simultanément, les états manquants des signaux d'entrée et sortie sont simulés. Des identifications de systèmes d'ordre plus élevé pourraient être établis afin d'étendre la validation de cette méthode. Enfin, des techniques de validation de modèles, telles que des tests statistiques sur les résidus $y(t) - \hat{y}(t)$, permettrait de mieux comparer les modèles identifiés.

VI. Synthèse des méthodes d'identification

Nous avons présenté, dans ce quatrième chapitre, trois méthodes d'identification de systèmes ayant des entrée et sortie échantillonnées à pas variable. Tout d'abord, l'identification à l'aide des fonctions modulatrices a été développée et appliquée à des systèmes d'ordre N. Bien que les coefficients estimés des modèles s'éloignent de ceux des modèles d'origine, leurs dynamiques sont conservées. Puis, l'identification à l'aide des moments pondérés des signaux d'entrée et de sortie a été développée pour un système du premier ordre, et nous avons montré

l'extension à un ordre plus élevé. Enfin, la troisième méthode exposée concerne une identification simultanée des paramètres du modèle et des échantillons manquants des signaux EPV. Sa mise en œuvre s'effectue en deux niveaux. Cette méthode nécessiterait une extension à des modèles d'ordre élevé afin de pouvoir la comparer à la méthode d'identification utilisant les fonctions modulatrices. Enfin, notons que pour les trois méthodes exposées, nous identifions les paramètres d'un modèle dont l'ordre était connu. Il serait opportun de s'intéresser au cas où l'ordre du modèle est inconnu.

Chapitre V

Détection des principales ondes de l'ECG

"Ce n'est pas de faire des pas qui doivent un jour mener au but, chaque pas doit être lui-même un but en même temps qu'il nous porte en avant."
CONVERSATIONS, 1823

Johann Wolfgang von GOETHE (1749-1832, Allemagne)

CHAPITRE 5. DÉTECTION DES PRINCIPALES ONDES DE L'ECG 117

I. OBJECTIF 119

II. EN VUE DU SUIVI TEMPOREL 119

II.1. Description des ondes de l'ECG 119

II.2. Informations à recueillir 120

III. COMPLEXE QRS 121

III.1. Etapes de la chaîne de traitement 121

III.2. Module de filtrage 128

III.3. Modules de détection des complexes QRS 136

III.4. Résultats 143

III.5. Conclusion sur la détection des complexes QRS 152

IV. ONDES P ET T 152

IV.1. Etat de l'art des méthodes de détection de l'onde T 152

IV.2. Elaboration du détecteur d'onde T 161

IV.3. Surface et énergie des ondes 166

IV.4. Détection de l'onde P 168

IV.5. Conclusion 170

V. SYNTHÈSE SUR LA DÉTECTION DU COMPLEXE QRS ET DES ONDES P ET T 170

I. Objectif

Nous allons, dans ce chapitre, traiter des électrocardiogrammes compressés par l'algorithme d'échantillonnage à pas variable en vue de suivre l'évolution temporelle de différents paramètres cardiaques dans le chapitre 6. La compression réalise un gain de place mémoire nécessaire au stockage d'ECG de longue durée. Grâce à la représentation sous la forme {temps, amplitude} des SEPV, nous pouvons appliquer les outils vus dans le chapitre 3 de manière à extraire les principales ondes de l'ECG que sont le complexe QRS et les ondes P et T. Avant de procéder à leur détection, intéressons-nous brièvement à la description de l'électrocardiogramme, ainsi qu'aux informations principales à en extraire.

II. En vue du suivi temporel

Nous allons décrire dans un premier temps l'électrocardiogramme. Puis, nous examinerons les divers ondes et paramètres semblant utile d'être détectés dans le but de suivre l'évolution au cours du temps de plusieurs paramètres et informations. La fusion de ces informations pourra mener à la détection d'arythmies cardiaques.

II.1. Description des ondes de l'ECG

Dans ce paragraphe, nous allons décrire brièvement chacune des ondes formant l'électrocardiogramme (ECG). L'électrophysiologie du cœur donnant naissance à l'électrocardiogramme est décrite en deuxième annexe où une description sommaire des principales arythmies rencontrées dans les ECG est aussi abordée.

L'électrocardiogramme normal est recueilli sur la dérivation D2 correspondant à une orientation suivant le grand axe du cœur. La courbe représentative de cet ECG comporte des ondes séparées de segments dont chaque partie décrit l'activité électrique du cœur (figure V.1). On compte cinq ondes principales : P, Q, R, S et T. Les ondes Q, R et S forment le complexe QRS.

- Onde P : elle dure environ 120 ms et correspond à la dépolarisation des oreillettes (systole auriculaire). Son amplitude varie de 0,1 mV à 0,3 mV.
- Intervalle PR : il dure environ 180 ms et correspond au délai de transition de l'onde dû au nœud auriculo-ventriculaire.

- Complexe QRS : il dure 120 ms au maximum et correspond à la dépolarisation des ventricules (systole ventriculaire). Son amplitude est d'environ 1 mV. Les oreillettes se repolarisent.
- Segment ST : il dure environ 220 ms et correspond à l'intervalle de temps entre la dépolarisation totale et le début de la repolarisation des ventricules.
- Onde T : elle dure environ 200 ms et correspond à la repolarisation des ventricules. Son amplitude varie de 0,1 mV à 0,6 mV.
- Segment TP : il correspond au temps de repos général (diastole).
- Ligne isoélectrique ou ligne de base : aucun phénomène électrique ne survient dans le cœur.

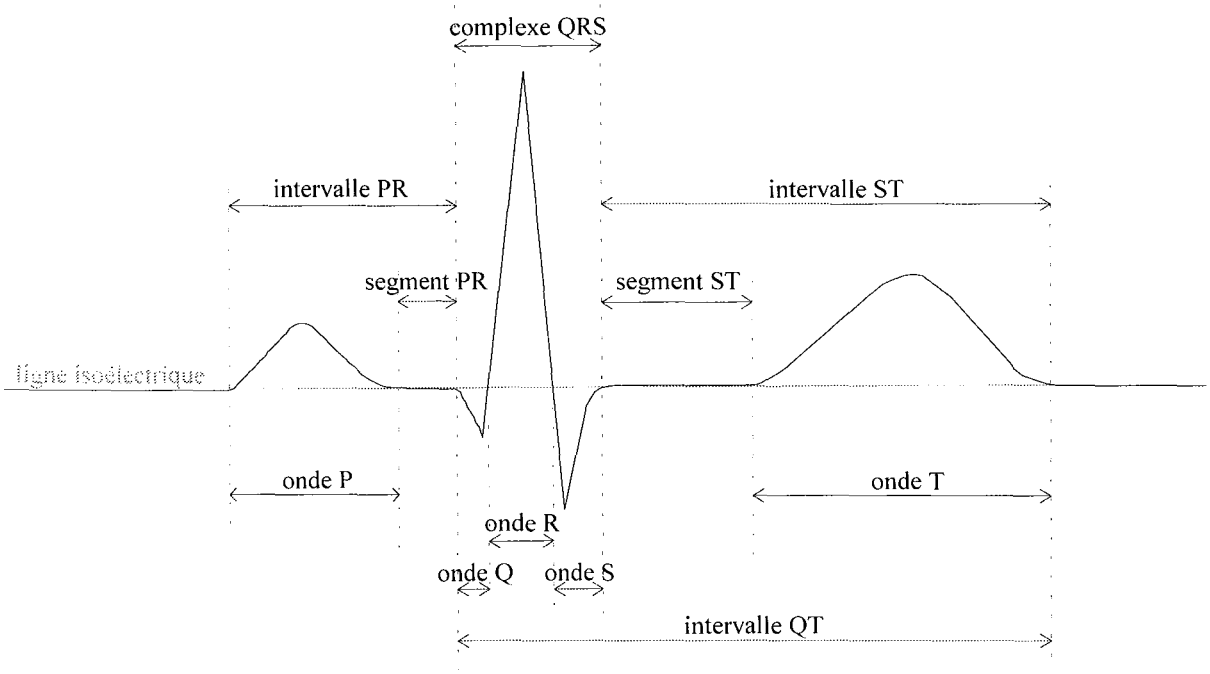


Figure V.1 : ondes de l'électrocardiogramme

II.2. Informations à recueillir

Après avoir vu la description de l'électrocardiogramme, nous allons maintenant nous intéresser aux différentes ondes à détecter.

Afin d'obtenir le suivi temporel d'une grande quantité d'information, nous allons détecter un maximum de paramètres temporels et d'amplitudes. Comme tous les logiciels de monitoring cardiaque proposent le suivi au cours du temps du rythme cardiaque représenté par l'intervalle RR, nous allons bien sûr prendre en compte ce paramètre, d'autant plus qu'il est à la base de la détection d'arythmies.

Les logiciels suivent aussi l'évolution de l'intervalle QT qui est généralement analyser sur un cycle cardiaque moyen issu de la moyenne de plusieurs cycles sur une durée fixe, 30 secondes par exemple [Tavernier, 1995]. Ceci à pour conséquence d'inhiber un intervalle QT anormal local. Par conséquent, la détection de chacun des paramètres se fera cycle par cycle, tout comme leur suivi temporel.

Ainsi, nous détecterons le complexe QRS dans sa globalité, à savoir son début, son extremum, sa fin et son amplitude, puis l'onde T dans sa globalité.

Enfin, d'après le cardiologue, il semble plus important de savoir si une onde P a déclenché le complexe QRS ou si celui-ci a été provoqué par un foyer ectopique sans onde P. Nous examinerons alors la présence ou l'absence d'onde P au cours du temps.

La détection de toutes ces informations va se dérouler en deux temps. En effet, au regard du signal cardiaque, la première forme d'onde à détecter est le complexe QRS : il a la plus forte amplitude et son spectre fréquentiel est le plus large. De plus, il donne le rythme cardiaque qui influence alors la recherche des ondes P et T.

Par conséquent, nous détecterons dans un premier temps l'onde R qu'elle soit positive ou négative, puis l'ensemble du complexe QRS. Dans un deuxième temps, nous déterminerons la présence des ondes P et T, et nous localiserons leurs instants caractéristiques.

III. Complexe QRS

La détection des complexes QRS constitue la première étape dans le traitement de l'électrocardiogramme en vue de suivre le rythme cardiaque et d'identifier des arythmies. Nous allons dans un premier temps décrire l'inventaire des étapes constituant la chaîne d'extraction des complexes QRS, puis, en incluant les outils développés sur le traitement des signaux échantillonnés à pas variable, nous détaillerons le traitement que nous utiliserons, à commencer par le filtrage dans la deuxième partie, puis la détection proprement dite dans la troisième partie. Enfin, nous appliquerons l'algorithme à la base de données du MIT afin de détecter les complexes QRS. Nous analyserons alors les performances et nous les comparerons à celle de la littérature.

III.1. Etapes de la chaîne de traitement

Dans cette partie, nous allons dans un premier temps, faire l'inventaire des méthodes d'extraction de complexes QRS, puis nous élaborerons notre propre chaîne de détection des complexes QRS.

III.1.a. Méthodes d'extraction du complexe QRS

Dans le signal ECG, l'onde ayant principalement la plus forte amplitude est le complexe QRS. La détection des complexes permet le calcul de la pulsation cardiaque instantanée encore appelée rythme cardiaque en nombre de battements par minute. L'objectif des méthodes d'extraction est de détecter tous les types de complexes QRS, qu'ils soient normaux ou anormaux. Le détecteur doit pouvoir s'adapter au signal fourni et doit être capable de suivre les brusques changements du rythme cardiaque. Les méthodes de détection du complexe QRS peuvent être classées en 3 catégories :

- Le seuillage
- La reconnaissance syntaxique
- L'association mixte

La première catégorie regroupe des opérateurs linéaires et/ou non linéaires (filtrage, dérivées, moyennes mobiles) auxquels sont associées des règles de décision portant sur des comparaisons entre des signaux obtenus à partir de ces opérateurs et des seuils adaptatifs ou non. Quant à la seconde catégorie, elle utilise la reconnaissance de formes. La troisième catégorie fait intervenir les deux premières. Examinons plus en détail chaque catégorie.

Le seuillage

A l'origine, les détecteurs de complexes QRS étaient analogiques et réalisés à l'aide de composants électroniques. Puis les détecteurs sont devenus des algorithmes numériques implantés soit sur ordinateur, soit sur microprocesseur. D'une manière générale, les détecteurs, qu'ils soient analogiques ou numériques mettent en scène une association en cascade de filtres, dérivées première et/ou seconde, collecteur d'énergie, moyenneur, seuillage... Cette structure permet de conserver et de mettre en forme le signal utile (le complexe QRS) afin d'augmenter le contraste.

Examinons en détail chacun des blocs linéaires et non linéaires permettant la mise en forme successive des signaux amenant à la prise de décision : est-on en présence d'un complexe QRS ou non ?

- Filtrage du signal ECG

  La majeure partie du spectre d'un complexe QRS se situe dans l'intervalle de fréquences 5 à 30 Hz. Il est donc fortement utile de filtrer le signal ECG recueilli afin d'éliminer tous les bruits parasites ajoutés et ne conserver que les fréquences du complexe. Un filtre passe-

haut éliminera les ondulations de la ligne de base et quelques artefacts. Un filtre passe-bande éliminera en plus le bruit musculaire et le signal à 50/60 Hz du réseau d'alimentation électrique.

En ce qui concerne la conception des filtres numériques, la plupart des algorithmes proposent des filtres passe-bande [Börjesson et al., 1982], [Ligtenberg et al., 1983], [Pahlm et al., 1984], [Pan et al., 1985].

D'une manière générale, la réponse du filtre peut être mise sous la forme $y(n) = \sum_{i=n-N_1}^{n-1} a(n-i)y(i) + \sum_{j=n-N_2}^{n} b(n-j)x(j)$, les coefficients a et b et les ordres N_1 et N_2 devant être déterminés suivant la nature du filtre, les fréquences de coupure, les bandes passantes. La fonction du filtre est de rejeter le bruit et conserver le signal utile.

- Dérivées première et seconde du signal filtré

La dérivée première permet d'obtenir les variations du signal. L'onde R est caractérisée par une forte pente positive suivie d'une forte pente négative. La dérivée donnera donc un signal de fortes amplitudes positive et négative lors de l'onde R contenue dans le complexe QRS. Néanmoins, lorsque le rapport signal/bruit est faible, la dérivée accentuera le bruit et le QRS ne sera plus contrasté.

Dans le domaine fréquentiel, une dérivée idéale est modélisée par un filtre passe-haut. Les hautes fréquences sont amplifiées tandis que les basses fréquences sont atténuées. En pratique, les hautes fréquences (supérieures à 40 Hz) dues au bruit ne sont pas amplifiées. On utilisera, à la place du filtre passe-haut, un filtre passe-bande dont le gain sera proche du filtre passe-haut dans le domaine de fréquences inférieures à 30/40Hz et atténuant rapidement les fréquences au-delà.

La fonction de transfert d'un tel filtre numérique passe-bande permettant de dériver le signal est par exemple [Ligtenberg et al., 1983], [Pan et al., 1985] : $H(z) = \frac{1}{8T}\left(-z^{-2} - 2z^{-1} + 2z^{1} + z^{2}\right)$.

La réponse fréquentielle est $\left|H(2\pi fT)\right| = \frac{\sin(4\pi fT) + 2\sin(2\pi fT)}{4T}$.

D'autres formes de filtres numériques permettent aussi d'obtenir la dérivée du signal [Engelse et al., 1979], [Okada, 1979].

D'une façon plus simple et largement utilisée [Fraden et al., 1980], [Mahoudeaux et al., 1981], [Balda et al., 1977], [Gustafson et al., 1977], [Holsinger et al., 1971], la dérivée première numérique est définie par la différence des valeurs des indices supérieur et inférieur $D_1(n) = x(n+1) - x(n-1)$, ou encore en utilisant les valeurs des deux indices supérieurs et inférieurs $D_1(n) = -2x(n-2) - x(n-1) + x(n+1) + 2x(n+2)$.

La dérivée seconde donne les variations de la dérivée première. Elle est naturellement définie comme étant la dérivée de la dérivé première [Balda et al., 1977], soit $D_2(n) = D_1(n+1) - D_1(n-1) = x(n+2) - 2x(n) + x(n-2)$

- Collecteur d'énergie et moyenneur

  Le collecteur d'énergie est un opérateur non linéaire permettant d'augmenter le contraste du signal et obtenir un signal positif [Balda et al., 1977], [Friesen et al., 1990], [Fraden et al., 1980], [Pan et al., 1985], [Pahlm et al., 1984], [Ligtenberg et al., 1983], [Ahlstrom et al., 1983].

  Le plus simple collecteur est la valeur absolue, $C(n) = |x(n)|$.

  Le plus souvent rencontré est l'élévation au carré, $C(n) = (x(n))^2$.

  Enfin, les dérivées première et seconde sont parfois combinées entre elles de manière à former une dérivée globale D_g définie par une somme pondérée des valeurs absolues $D_g(n) = a_1|D_1(n)| + a_2|D_2(n)|$, ou par le module algébrique $D_g(n) = \sqrt{a_1 D_1^{\,2}(n) + a_2 D_2^{\,2}(n)}$.

  Cette dérivée globale sert alors de collecteur d'énergie.

  La sortie du collecteur d'énergie est souvent moyennée sur une fenêtre mobile. Ceci apporte un lissage du signal.

- Enveloppe d'un signal

  On peut utiliser comme collecteur d'énergie, un opérateur non linéaire déterminant l'enveloppe du signal [Pahlm et al., 1984]. L'enveloppe d'un signal est définie [De Coulon] comme étant le module du signal analytique $\underline{\underline{x}}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$. La partie réelle est le signal dont on désire déterminer l'enveloppe. La partie imaginaire est la transformée de Hilbert du signal $x(t)$, définie par le produit de convolution : $\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$.

  L'enveloppe du signal $x(t)$ est alors le module $r(t) = |\underline{\underline{x}}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + \hat{x}(t)^2}$.

- Contrôle automatique du gain

  En substitution des modules de dérivées et collecteur d'énergie, on peut contrôler le gain d'amplification appliqué à l'ECG filtré [Thakor et al., 1983]. Le signal ainsi amplifié sera soumis aux règles de décision sur des seuils fixes. C'est à partir du signal amplifié qu'une régulation est établie et que le gain va être automatiquement contrôlé afin que l'amplitude moyenne en entrée du module de décision soit à peu près constante.

- Règles de décision sur seuillage adaptatif ou non

  Lorsque le signal ECG a été filtré, on extrait ses dérivées dont on prend le module, et on obtient un signal appelé résultante, dont l'amplitude est normalement importante lors d'un QRS, et faible ailleurs. C'est alors que l'on doit décider des complexes QRS candidats. Les règles de décision s'effectuent sur des comparaisons avec des seuils de la résultante, de l'amplitude du signal ECG et d'autres signaux intermédiaires. Lorsque ces comparaisons sont localement vérifiées, un complexe QRS est alors détecté.

  Les seuils de comparaison peuvent être fixes ou peuvent varier de manière à s'adapter aux diverses fluctuations de l'ECG. Il est évident que les résultats issus de comparateurs à seuils adaptatifs ont de meilleures performances que ceux à seuils fixes. La plupart des seuils sont établis en prenant un pourcentage de la valeur maximale du signal à comparer.

  La chaîne permettant la détection du complexe QRS se résume alors ainsi, figure V.2 :

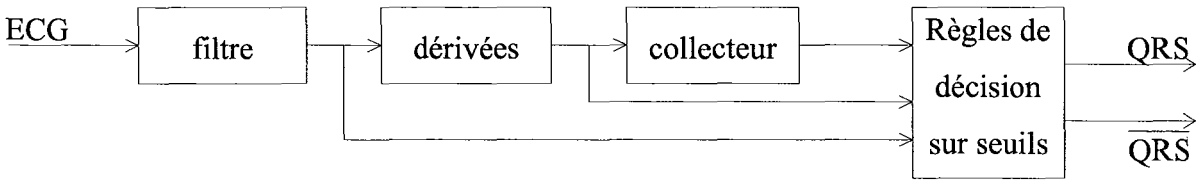


Figure V.2 : chaîne globale de détection des complexes QRS

- Améliorations de la détection

  Afin de réduire les fausses détections (en général interprétation d'une onde T à forte amplitude en complexe QRS), il est possible de rejeter de la détection ces ondes en interdisant toute détection dans un certain intervalle suivant la détection du QRS. En effet, physiologiquement, on ne peut pas avoir 2 complexes consécutifs séparés de moins de 200 ms sauf en cas de flutter et fibrillation (rythme cardiaque > 300 bpm). Si un QRS

apparaît dans une période de 200 ms à 360 ms (rythme cardiaque de 170 bpm à 300 bpm), il se peut que ce soit l'onde T [Pan et al., 1985], [Pahlm et al., 1984].

Afin d'éviter les manques à la détection, il est possible lorsqu'un QRS n'a pas été trouvé dans les 166% de l'intervalle RR moyen, de détecter le pic maximal dans cet intervalle de temps suivant le dernier QRS détecté, et de considérer ce pic comme étant un QRS plausible. Un inconvénient à cette technique est l'irrégularité du rythme cardiaque [Pan et al., 1985].

La reconnaissance syntaxique

Cette méthode de détection de QRS, constituant la seconde catégorie d'extraction du complexe QRS, s'appuie sur la reconnaissance de formes. On utilise pour cela une classe de formes primitives servant à décomposer le signal en ces formes primitives. L'association de certaines formes entre elles composera des groupes de formes pouvant représenter le complexe QRS, les ondes P et T [Koski, 1996], [Koski et al., 1995], [Trahanias et al., 1989], [Trahanias et al., 1990].

On trouve généralement deux types de formes primitives : les formes composées de deux points (ce sont les segments de droites), et les formes composées de trois points (une courbe reliant alors les trois points). C'est à partir de ces formes primitives que l'on va former un alphabet dont les lettres représentées par des symboles seront les formes primitives. Ainsi, on peut par exemple créer un alphabet Σ contenant les symboles K^+ pour les pics positifs, K^- pour les pics négatifs, E pour les segments de droite, Π pour les segments paraboliques passant par 3 points. L'alphabet est alors $\Sigma=\{K^+, K^-, E, \Pi\}$. On peut maintenant, à partir de l'ECG, extraire les formes primitives et obtenir une représentation linguistique. La grammaire de reconnaissance de forme est l'ensemble des règles permettant de représenter de manière linguistique l'évolution du signal.

Une description syntaxique des formes caractéristiques de l'ECG devra être établie. Dans l'exemple de l'alphabet Σ, le complexe QRS sera représenté par $[K^-, K^+, K^-, K^+]$, l'onde P et l'onde T par $[\Pi]$, et les divers segments entre les ondes par [E]. Un évaluateur grammatical reconnaîtra les formes caractéristiques de l'ECG à partir des formes primitives et de la description syntaxique des formes à reconnaître. L'organigramme d'une telle extraction est le suivant (figure V.3) :

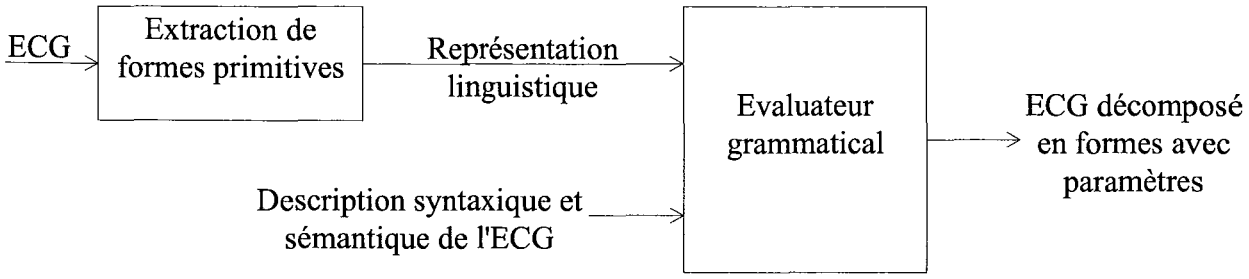


Figure V.3 : Organigramme d'extraction de complexes QRS par reconnaissance de formes

Beaucoup de formes primitives peuvent être incluses dans l'alphabet. Parmi les plus couramment utilisés on trouve : segment à forte pente positive, segment à faible pente positive, segment à pente nulle, segment à forte pente négative, segment à faible pente négative, pic positif, pic négatif, forme parabolique dôme vers le haut, forme parabolique dôme vers le bas. L'extraction de formes primitives est souvent le résultat d'une segmentation du signal. Ce type d'extraction permet d'identifier plusieurs classes de QRS possibles suivant la présence de l'onde S, les grandeurs des ondes Q et R.

D'autres détecteurs utilisent les réseaux de neurones et la logique floue, comme le propose [Xu et al., 1992]. Nous ne les exposons pas ici.

III.1.b. Elaboration du détecteur de complexes QRS

A l'aide des différents modules explicités auparavant, nous avons établi une chaîne d'extraction des complexes QRS sur des ECG échantillonnés à pas variable. Les outils développés dans le chapitre 3 concernant le traitement des SEPV sont utilisés dans chacun des modules. Parmi les catégories d'extracteurs décrites, nous nous sommes intéressés au seuillage plus facilement adaptable aux SEPV. Nous résumons alors la chaîne de détection des complexes QRS sur la figure V.4 :

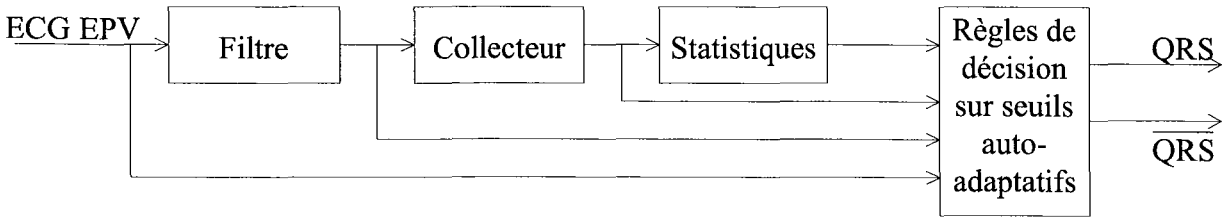


Figure V.4 : chaîne de traitement de notre détecteur de complexes QRS

Nous remarquons que la majorité des modules employés ici sont ceux utilisés dans la littérature. Dans ce qui suit, nous concevrons le module de filtrage à partir du spectre des

complexes QRS, puis nous expliciterons les modules de collecteur d'énergie, de statistiques et de règles de décisions, avant d'appliquer l'algorithme de détection des complexes QRS à la base de données du MIT.

III.2. Module de filtrage

Avant de concevoir le filtre EPV adéquat, intéressons-nous aux perturbations rencontrées dans les ECG et devant être éliminées, ainsi qu'à l'analyse spectrale des ondes de l'ECG.

III.2.a. Perturbations dans les signaux électrocardiographiques

Afin de pouvoir traiter le signal ECG de manière analogique ou numérique, une chaîne d'acquisition permet de le recueillir. A partir du cœur, on rencontre successivement les tissus composant le corps humain, la peau, les électrodes de mesure et les appareils électroniques permettant de recueillir les informations issus des capteurs. Tout au long de cette chaîne, des interférences vont s'ajouter au signal originel et le signal à étudier sera alors bruité. Parmi les interférences venant souiller l'ECG, on trouve les perturbations du réseau d'alimentation électrique, les contacts électrodes peau, les contractions musculaire, la respiration et l'appareillage électronique [Börjesson et al., 1982], [Friesen et al., 1990], [Thakor et al., 1983]. Examinons chacune de ces interférences devant être réduites voire éliminées par le module de filtrage.

Alimentation réseau électrique à 50/60 Hz

Cette interférence provenant de l'alimentation du réseau électrique est modélisée par un signal sinusoïdal à 50 ou 60 Hz et ses harmoniques, suivant le lieu où l'on se situe. L'amplitude est généralement faible mais peut aller jusqu'à 50% de l'amplitude de l'ECG lorsque certains composants ne sont pas ou peu blindés.

Contacts électrodes - peau

Cette interférence est due à la perte de contact et au mauvais contact entre les électrodes d'acquisition et la peau du patient. En cas de perte de contact, des discontinuités apparaissent dans le signal et sont modélisées par un saut de la ligne de base provoquant un régime transitoire de l'ordre d'une seconde. Ces discontinuités peuvent être intermittentes si l'électrode est correctement recollée, ou permanentes si l'électrode se colle et se décolle en fonction des mouvements du patient. D'autres régimes transitoires de la ligne de base sont dus au changement de l'impédance électrode - peau avec les vibrations et mouvements du patient. Cette perturbation est modélisée par un signal ressemblant à un cycle d'une onde sinusoïdale

d'une durée de 100 à 500 ms et d'amplitude pouvant atteindre 500% de l'amplitude de l'ECG. Le changement de l'impédance électrode - peau provoque aussi des variations sur l'amplitude du signal. Enfin, toutes ces perturbations apportent des modifications dans la morphologie du signal, ceci pouvant arriver soudainement d'un complexe QRS au suivant. Un exemple de discontinuité est représenté figure V.5 :

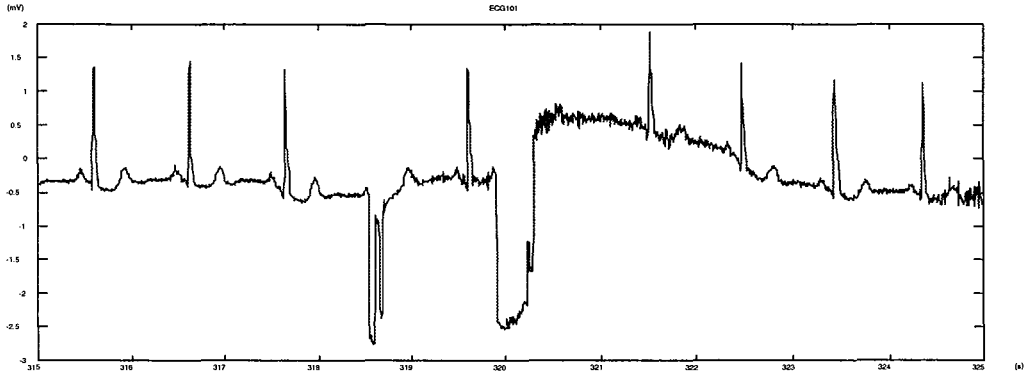


Figure V.5 : discontinuité de la ligne isoélectrique

Contractions musculaires

L'amplitude de l'électromyogramme (EMG) est de l'ordre du μV et est souvent non significative dans le signal ECG ayant une amplitude de l'ordre du mV. Cependant l'amplitude du bruit musculaire peut atteindre 10% de l'amplitude de l'ECG en cas de certaines contractions musculaires couvrant un domaine fréquentiel allant du continu à des fréquences de l'ordre de 1 kHz (figure V.6).

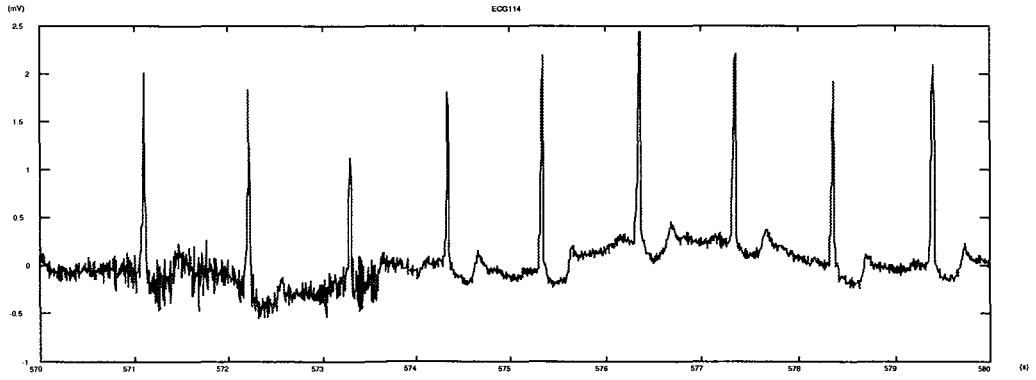


Figure V.6 : superposition de l'électromyogramme sur les 4 premières secondes

Respiration

La respiration du patient provoque une ondulation du signal ECG. Le déplacement de la ligne de base avec la respiration peut alors être modélisé par une composante sinusoïdale à la fréquence de la respiration ajoutée à l'ECG. L'amplitude de cette modulation peut aller jusqu'à

150% de l'amplitude de l'ECG à la fréquence de 0,15 à 0,30 Hz correspondant au rythme respiratoire. L'amplitude du signal ECG peut aussi varier de 15% avec la respiration (figure V.7).

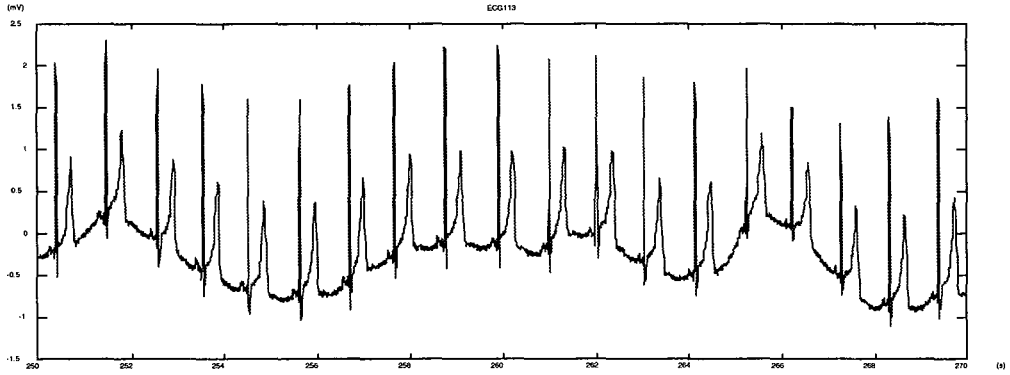


Figure V.7 : ondulations de la ligne de base suivant la respiration

Equipement électronique

Les électrodes utilisées pour l'acquisition du signal peuvent parfois provoquer une saturation de l'instrumentation de mesure. Aucune information concernant l'ECG ne peut alors être recueillie (figure V.8). D'autres équipements électriques et/ou magnétiques peuvent noyer le signal ECG dans des bruits de forte amplitude et de fréquences très variées.

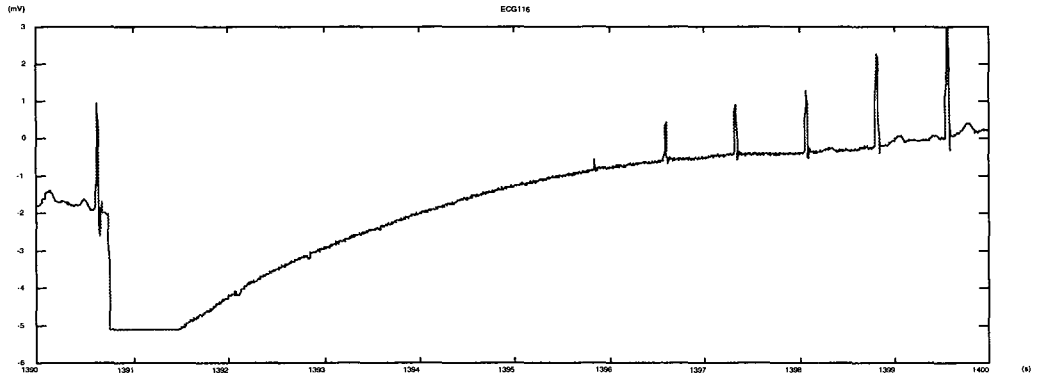


Figure V.8 : saturation du signal ECG

Toutes ces perturbations, survenant à n'importe quel instant, s'ajoutent au signal électrocardiographique et forment alors du bruit pouvant plus ou moins gêner le traitement à effectuer sur le signal. Il est donc nécessaire d'effectuer un traitement préalable afin de diminuer le bruit et pouvoir alors entreprendre des détections, identifications et modélisations.

III.2.b. Etude spectrale de l'électrocardiogramme

Avant d'élaborer un filtre réduisant les perturbations que nous venons d'énumérer, intéressons-nous au spectre des différentes ondes de l'ECG et, plus particulièrement, au spectre du complexe QRS.

Spectres des ondes de l'ECG

Dans le signal ECG, l'onde ayant principalement la plus forte amplitude est le complexe QRS. La majeure partie du spectre d'un complexe QRS se situe dans l'intervalle de fréquences 5 à 30 Hz (figure V.9). Dans les basses fréquences, on trouve le spectre des ondes P et T entre 2 et 7 Hz. Dans cette même bande de fréquences se situe le spectre des divers artefacts. Le bruit musculaire, quant à lui, couvre tout le domaine spectral de l'ECG [Thakor 1984].

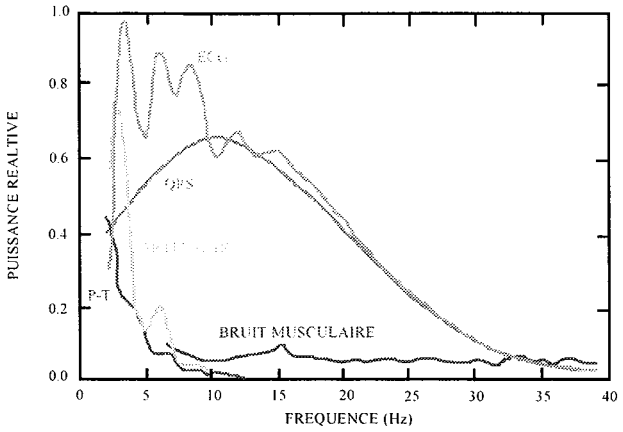


Figure V.9 : spectres des ondes de l'ECG et des perturbations

Spectre du complexe QRS

Afin de s'intéresser au domaine spectral des complexes QRS, regardons l'analyse fréquentielle de quelques QRS. Pour cela, nous isolons manuellement le signal contenant le complexe du reste du cycle cardiaque et nous en faisons une transformée de Fourier de manière à en recueillir le spectre. Afin d'obtenir une vue plus globale des spectres, nous établissons une moyenne sur le spectre de dix complexes QRS. La figure V.10 représente l'allure spectrale des complexes QRS de deux ECG. La fréquence centrale ainsi que la largeur de bande à -3 dB sont repérées.

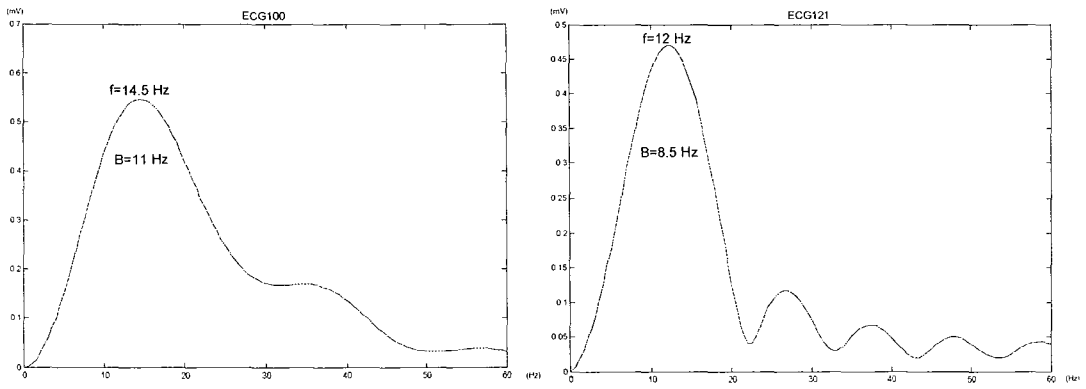


Figure V.10 : spectres de quelques complexes QRS sur deux ECG

Après analyse de plusieurs spectres, nous concluons que le spectre des complexes s'étend de 5 Hz à 27 Hz et qu'en majorité la fréquence centrale varie de 8 à 18 Hz et la bande passante de 8 à 13 Hz. Ceci correspond à l'intervalle de fréquences donné dans la littérature.

III.2.c. Définition du filtre

Nous allons maintenant établir le filtre numérique EPV en tenant compte des observations précédentes concernant le spectre du complexe QRS devant être conservé, et des perturbations devant être minimisées. Dans un premier temps, nous déterminerons le type de filtre à élaborer, puis nous établirons sa fonction de transfert continue servant à la conception du filtre numérique EPV comme nous l'avons vu dans le chapitre 3. Enfin, nous détaillerons un exemple du filtre numérique EPV.

Choix du filtre

Compte tenu de l'allure spectrale des complexes QRS, il semble normal d'identifier sa fonction de transfert à celle d'un filtre passe-bande éliminant les ondulations basses fréquences de la ligne de base ainsi que les perturbations hautes fréquences. Le spectre d'un filtre passe-bande de type Butterworth d'ordre 2 se rapproche de façon correcte du spectre des complexes QRS.

Reprenons le premier graphique de la figure V.10 et superposons le spectre d'un filtre passe-bande de Butterworth d'ordre 2 avec la fréquence centrale de 14,5 Hz et la largeur de bande de 11 Hz obtenues précédemment (figure V.11).

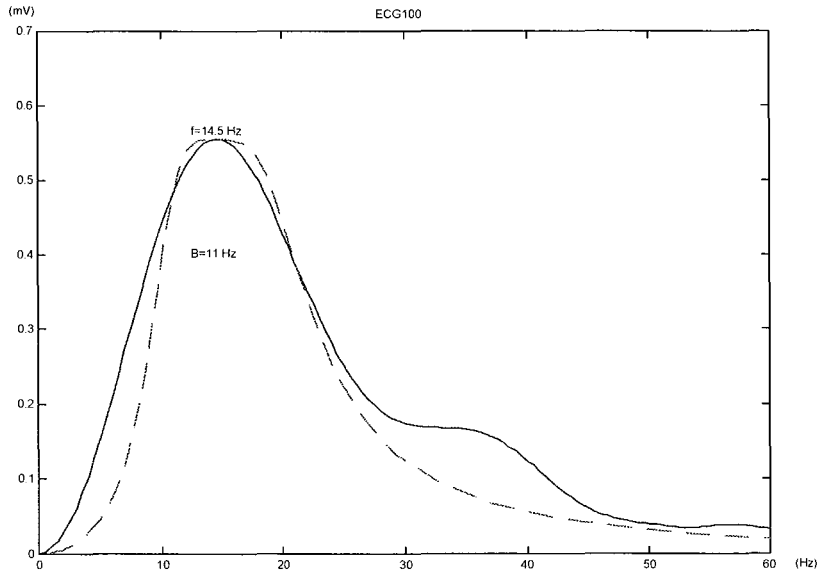


Figure V.11 : spectres des complexes QRS et filtre de Butterworth s'y rapprochant

Conception du filtre EPV

Maintenant que nous savons quel filtre utiliser pour conserver le domaine de fréquences des complexes QRS, nous allons procéder à la conception de ce filtre passe-bande de Butterworth d'ordre 2, de fréquence centrale f_0, de bande passante B et d'amplification A. Commençons par déterminer la fonction de transfert du filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 2 en utilisant l'expression (III-33) du chapitre 3 sur les outils de traitement des SEPV. Soit alors :

$$FT_{\text{Passe Bas Butterworth ordre 2}}(s) = \frac{A}{\frac{s^2}{(2\pi f_0)^2} + \frac{\sqrt{2}s}{2\pi f_0} + 1}$$

Afin d'obtenir la fonction de transfert du filtre passe-bande, substituons $\frac{1}{B_N}\left(\frac{s}{2\pi f_0} + \frac{2\pi f_0}{s}\right)$ à $\frac{s}{2\pi f_0}$, où B_N est la bande passante normalisée $B_N = \frac{f_H - f_B}{f_0}$, la fréquence centrale valant $f_0 = \sqrt{f_H f_B}$. La bande passante est $B = f_H - f_B$ où f_H et f_B sont respectivement les fréquences de coupure haute et basse à -3 dB.

Nous obtenons alors la fonction de transfert du filtre désiré :

$$FT(s) = \frac{4AB^2\pi^2 s^2}{s^4 + 2\sqrt{2}B\pi s^3 + \left(8\pi^2 f_0^2 + 4B^2\pi^2\right)s^2 + 8\sqrt{2}f_0^2 B\pi^3 s + 16\pi^4 f_0^4}$$

Le gain de ce filtre est :

$$|FT(f)| = \frac{AB^2\pi^2 f^2}{\sqrt{\left(f^2 - f_0^2\right)^2 + B^4 f^4}}$$

Nous remarquons que pour les fréquences de coupure basse

$$f_B = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4f_0^2}}{2}$$

et haute

$$f_H = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4f_0^2}}{2}$$

le gain vaut $\frac{A}{\sqrt{2}}$ correspondant à une atténuation de 3 dB par rapport au gain à la fréquence centrale.

Fréquence de reconstruction

Lors du traitement de signaux échantillonnés à pas variable, il est nécessaire de reconstruire des échantillons intermédiaires afin de pouvoir assurer une réponse correcte du filtre. Conformément à l'équation (III-4), la fréquence de reconstruction F_R vaut :

$$F_R = 2\pi f_H$$

f_H étant la fréquence de coupure haute du filtre.

Conception numérique

Comme nous l'avons vu précédemment, la fréquence centrale et la bande passante varient dans les plages de fréquences respectives 8 à 18 Hz et 8 à 13 Hz. La fréquence de coupure haute varie donc de 12,9 Hz à 25,6 Hz et la fréquence de reconstruction varie alors de 81 Hz à 161 Hz. La borne supérieure de la fréquence de reconstruction reste bien inférieure à la fréquence d'échantillonnage d'origine de 360 Hz. Nous ne reconstruisons donc pas tous les échantillons du signal original.

A titre d'exemple, détaillons la conception du filtre numérique échantillonné à pas variable pour une fréquence centrale de 14 Hz, une bande passante de 10 Hz et une amplification de 3 :

$f_0 = 14$ Hz

$B = 10$ Hz

$A = 3$

La fonction de transfert est :

$$FT(s) = \frac{11843.52s^2}{s^4 + 88{,}85s^3 + 19423{,}38s^2 + 687560{,}11s + 59873082{,}25}$$

Les fréquences de coupure basse et haute sont :

$f_B = 9{,}866$ Hz

$f_H = 19{,}866$ Hz

La fréquence d'échantillonnage d'origine est :

$Fe = 360$ Hz

La figure V.12 représente le gabarit de ce filtre. Les fréquences de coupure basse et haute sont aussi mentionnées.

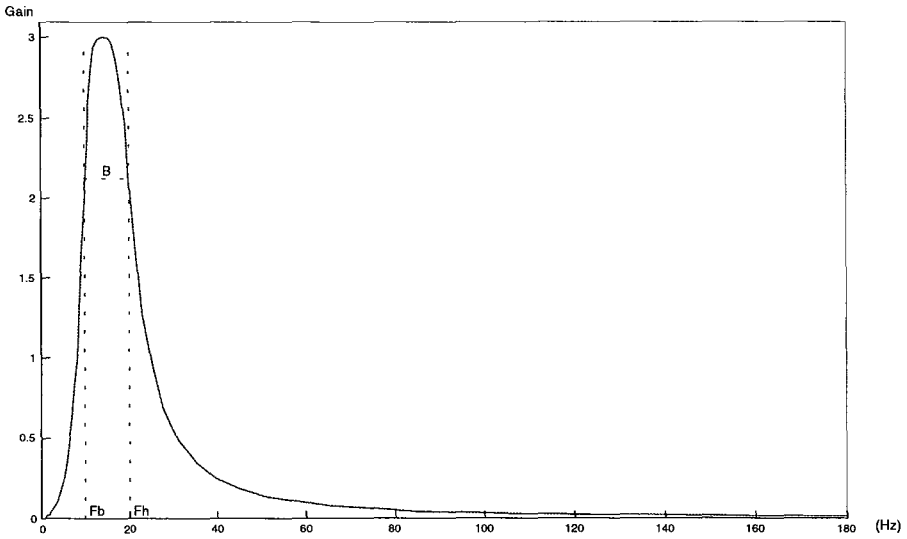


Figure V.12 : gabarit spectral du filtre

La fréquence de reconstruction est :

$F_R = 124{,}82$ Hz

Afin de pouvoir filtrer des signaux échantillonnés à pas variable, il est nécessaire de convertir la fonction de transfert en une forme de système d'état dont les matrices d'état sont définies par les expressions (III-24) à (III-27) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -59873082{,}25 & -687560{,}11 & -19423{,}38 & -88{,}85 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11843{,}52 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [0]$$

Le conditionnement de la matrice A est de l'ordre de 6.10^7, indiquant que la matrice peut être inversée sans erreur de calcul. Lorsque nous prenons un filtre d'ordre supérieur, les autres paramètres restant inchangés, le conditionnement devient supérieur à 10^{15} à partir de l'ordre 4, signifiant que la matrice A ne peut pas être manipulée sans erreur de calcul.

Ainsi, nous avons décrit, dans cette partie, l'étape de filtrage EPV de la chaîne de traitement pour la détection des complexes QRS. L'étape suivante concerne la détection proprement dite des complexes QRS.

III.3. Modules de détection des complexes QRS

Après avoir filtré le signal ECG, il convient à présent d'extraire les complexes QRS. Pour cela nous procédons en trois étapes. Le collecteur d'énergie contraste les complexes QRS, puis le calcul de statistiques permet ensuite la détection des QRS sur règles de décision aux seuils autoadaptatifs. A l'issu de ces trois étapes, nous recueillons des ensembles d'échantillons susceptibles d'être des complexes QRS. Une dernière étape d'améliorations est inclue à l'étape des règles de décision et permet de savoir si les complexes détectés sont réellement des complexes QRS. Cette étape permet également de positionner les complexes QRS dans le temps. Examinons chacune des quatre étapes.

III.3.a. Collecteur d'énergie

L'objectif de ce module est d'obtenir un signal dont l'amplitude est positive et concentrant l'énergie du signal issu du module de filtrage. On trouve dans la littérature deux principaux opérateurs non linéaires permettant d'obtenir un signal d'amplitude positive et contrastant

l'énergie du signal : la valeur absolue et l'élévation au carré. Nous construisons le collecteur d'énergie en combinant les deux opérateurs. Soit $x(t)$ l'entrée du module et $y(t)$ sa sortie :

$$y(t) = |x(t)| \text{ si } x(t) \in [-1 ; 1]$$
$$= x^2(t) \text{ si } x(t) \notin [-1 ; 1]$$

Lorsque l'amplitude du signal d'entrée $x(t)$ est faible (inférieure à 1 mV), il convient de ne pas atténuer davantage cette amplitude. Ceci explique le choix de la valeur absolue en remplacement de l'élévation au carré. Le signal de sortie $y(t)$ est alors positif et son amplitude est importante lors d'un complexe QRS, et faible ailleurs.

III.3.b. Statistiques

Le module de statistiques produit une moyenne mobile (par la méthode des trapèzes) et une variance mobile à partir du signal issu du collecteur d'énergie. C'est à partir de ces deux paramètres statistiques que seront détectés les ondes candidates à être des complexes QRS. Alors que la moyenne mobile $\bar{y}_M(t)$ provoque un lissage du signal $y(t)$, la variance mobile $\text{var}_M(y(t))$ peut être considérée comme une variance instantanée locale du fait du nombre d'échantillons mis en jeu pour son calcul (figure V.13).

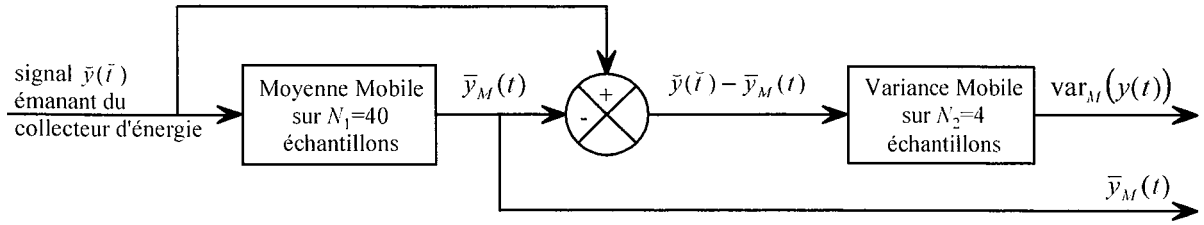


Figure V.13 : module de calculs statistiques

Compte tenu de l'échantillonnage à pas variable des signaux, il convient d'utiliser les outils de moyenne mobile et variance mobile explicités dans le chapitre 3 des outils de traitement des SEPV. Les paramètres N_1 et N_2 mériteraient, en perspectives, d'être adaptés afin d'optimiser la détection des complexes QRS.

III.3.c. Règles de décision

Les deux paramètres statistiques calculés servent de base à la détection d'un complexe QRS. La règle de détection est la suivante : si à un instant t, le signal $\text{var}_M(y(t))$ est supérieur au signal $\bar{y}_M(t)$, alors l'échantillon de l'ECG à cet instant t fait partie d'un complexe QRS

possible (figure V.14). Le paramètre k vaut 1. L'optimisation et l'adaptation de cette valeur permettrait d'augmenter les performances de détection des complexes QRS.

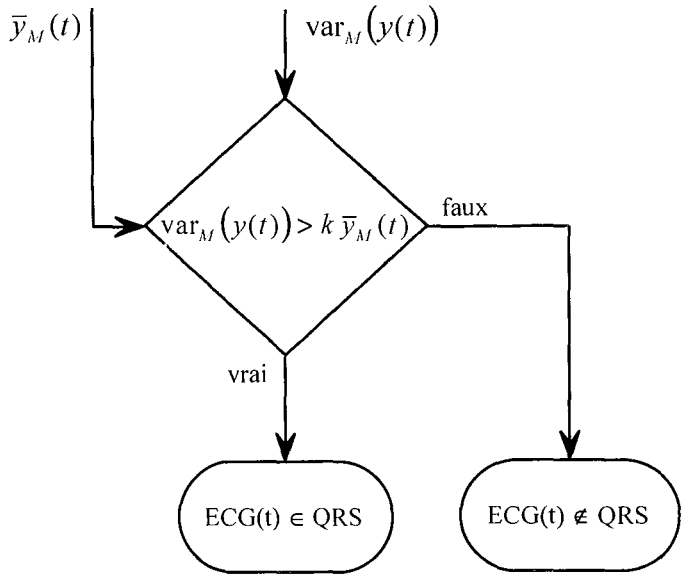


Figure V.14 : règles de décision sur deux paramètres statistiques

Pour tous les groupes d'échantillons successifs formant un complexe QRS possible, nous déterminons ensuite les instants dont l'amplitude de l'ECG est maximale et minimale. Ce couple d'instants $\{R_m(i), R_M(i)\}$, correspondant aux extremums du $i^{ème}$ groupe d'échantillons, détermine alors l'intervalle de temps d'un complexe QRS candidat, et servira dans la partie suivante à l'amélioration de détection des complexes QRS..

Remarquons qu'aucun seuil fixe n'intervient dans la règle de décision. A cette règle simple viendront se greffer toutes les règles d'amélioration décrites ci-après.

III.3.d. Améliorations de la détection

L'adaptation des paramètres de filtrage et des règles de décision permet d'améliorer notablement la détection. Nous avons apporté deux améliorations permettant de mieux cerner les complexes. La première amélioration concerne la prise en compte de l'amplitude et de la forme du complexe et la deuxième amélioration concerne un ajustement des paramètres de filtrage.

Amélioration grâce à l'amplitude de l'onde R

Pour connaître quelle valeur du couple d'instants $\{R_m(i), R_M(i)\}$ représentera l'instant de l'extremum du $i^{ème}$ complexe $QRS(i)$, il est nécessaire de regarder la forme de l'onde R de ce complexe.

D'une part, pour chacune des deux valeurs temporelles R_m et R_M d'un couple, nous délimitons une zone temporelle de 60 ms avant et 60 ms après l'instant de l'extremum considéré. Nous définissons alors deux valeurs. La première E_{av} est définie comme le plus grand écart d'amplitude dans la zone temporelle de 60 ms avant l'instant de l'extremum. Par analogie, la deuxième valeur E_{ap} est définie comme le plus grand écart d'amplitude dans la zone temporelle de 60 ms après l'instant de l'extremum. La figure V.15 illustre ces deux valeurs d'écart définies pour les deux extremums.

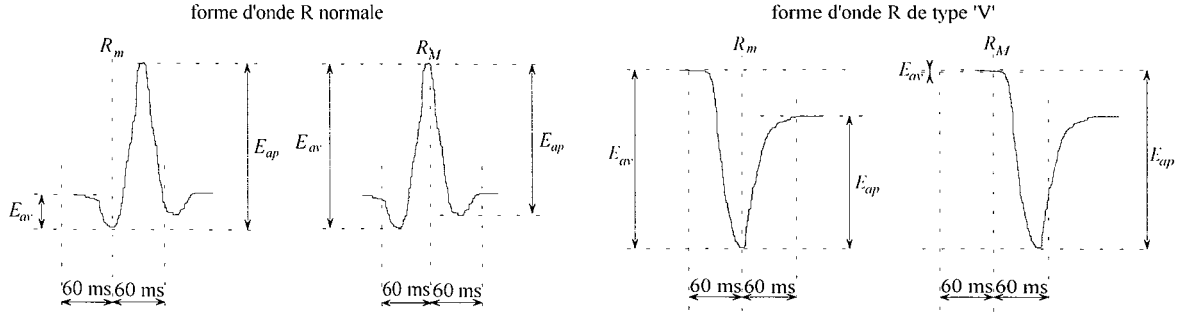


Figure V.15 : écarts d'amplitude avant E_{av} et après E_{ap}

Ainsi pour chaque complexe *QRS*(*i*), quatre valeurs sont définies : les écarts d'amplitude $E_{av}(R_m(i))$ et $E_{ap}(R_m(i))$ autour de l'instant $R_m(i)$, et les écarts d'amplitude $E_{av}(R_M(i))$ et $E_{ap}(R_M(i))$ autour de $R_M(i)$.

D'autre part, nous définissons un seuil d'amplitude S_A fonction du gain statique A du filtre passe-bande. Cette relation est donnée figure V.16.

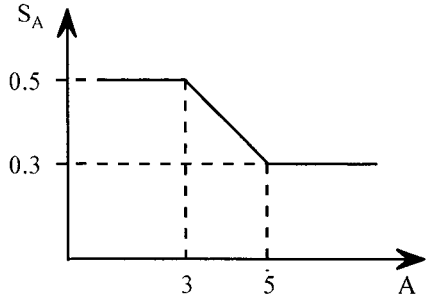


Figure V.16 : relation entre A et S_A

Deux tests suivent ensuite, vérifiant l'amplitude des ondes R. Deux variables booléennes sont générées : $ondeR_m(i)$ et $ondeR_M(i)$.

SI $E_{av}(R_m(i)) > S_A$ ET $E_{ap}(R_m(i)) > S_A$

ALORS $ondeR_m(i) = \text{VRAI}$

SINON $ondeR_m(i) = \text{FAUX}$

SI $E_{av}(R_M(i)) > S_A$ ET $E_{ap}(R_M(i)) > S_A$

ALORS $ondeR_M(i) = \text{VRAI}$

SINON $ondeR_M(i) = \text{FAUX}$

Enfin, en fonction des deux tests précédents, on détermine l'instant d'occurrence du complexe QRS :

SI $ondeR_m(i) = \text{VRAI}$ ET $ondeR_M(i) = \text{FAUX}$ ALORS $t_{QRS}(i) = R_m(i)$

SI $ondeR_m(i) = \text{FAUX}$ ET $ondeR_M(i) = \text{VRAI}$ ALORS $t_{QRS}(i) = R_M(i)$

SI $ondeR_m(i) = \text{VRAI}$ ET $ondeR_M(i) = \text{VRAI}$ ALORS $t_{QRS}(i) = \dfrac{R_m(i) + R_M(i)}{2}$

SI $ondeR_m(i) = \text{FAUX}$ ET $ondeR_M(i) = \text{FAUX}$ ALORS il n'y a pas de complexe QRS

Par cette manière, nous avons un regard sur la forme et l'amplitude des complexes QRS, nous permettant de déterminer si le complexe QRS candidat est classé comme réel complexe QRS, ou non. Si tel est le cas, l'instant d'occurrence du complexe $QRS(i)$ est $t_{QRS}(i)$.

Amélioration grâce à l'ajustement des paramètres du filtre de Butterworth

Nous avons vu que tous les complexes QRS n'ont pas le même spectre. La fréquence centrale et la bande passante varient et il semble nécessaire de réajuster ces paramètres régulièrement afin que le gabarit spectral du filtre englobe correctement le spectre des complexes à détecter. Dans un premier temps, nous considérons le premier complexe QRS détecté sur la période d'analyse de l'ECG. En fait, nous connaissons de ce complexe l'instant de l'extremum de l'onde R positive ou négative. Nous construisons alors le complexe QRS comme étant le signal ECG d'une durée de 50 ms avant et 50 ms après l'instant du pic R. Nous supposons pour notre analyse que le complexe dure 100 ms. Nous retirons ensuite la moyenne de ce complexe de manière à ce que l'amplitude spectrale soit nulle pour la fréquence nulle. Nous établissons alors le spectre du complexe et déterminons la fréquence F_0 pour laquelle l'amplitude spectrale est maximale ainsi que la largeur de bande B_0 à -3 dB. Notons A_M l'amplitude spectrale maximale.

Nous ajustons alors la fréquence centrale f_0 et la bande passante B du filtre EPV en moyennant les anciennes valeurs f_0 et B aux valeurs issues du spectre du complexe QRS analysé, à savoir F_0 et B_0. Ainsi, nous obtenons :

$$f_0 = \frac{f_0 + F_0}{2}$$

$$B = \frac{B + B_0}{2}$$

De plus, l'amplitude de l'onde R, bien que de l'ordre du millivolt, fluctue au cours du temps. Afin que l'amplitude du signal filtré soit toujours du même ordre de grandeur, nous allons donc, à partir de l'amplitude maximale A_M du spectre du complexe QRS en question, ajuster la valeur du gain statique A du filtre EPV. Pour ce faire, nous établissons une relation entre l'amplitude maximale A_M issue du spectre du complexe QRS et une amplification A_0 du filtre donnée sur la figure V.17.

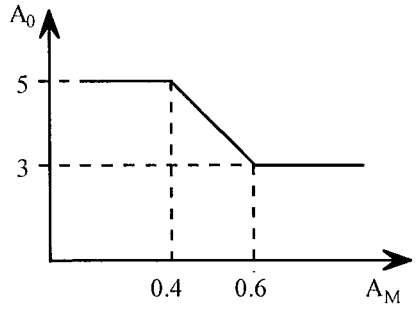


Figure V.17 : relation entre A_M et A_0

De la même manière que précédemment, nous moyennons l'ancienne valeur d'amplification A du filtre EPV à la nouvelle valeur A_0.

$$A = \frac{A + A_0}{2}$$

Ainsi, les trois paramètres A, f_0 et B du filtre de Butterworth sont adaptés régulièrement afin de suivre au mieux le gabarit spectral des complexes QRS. Nous avons choisi d'adapter ces trois paramètres toutes les 20 secondes. Ce temps d'adaptation pourrait être optimisé en satisfaisant un compromis entre les fluctuations des caractéristiques des complexes QRS détectés et les temps de calculs nécessaires à l'adaptation des paramètres du filtre passe-bande.

Suivi des signaux en sortie de chaque module

La figure V.18 représente un extrait de 5 secondes d'un électrocardiogramme de la base de données du MIT. Deux types de complexes QRS sont présents.

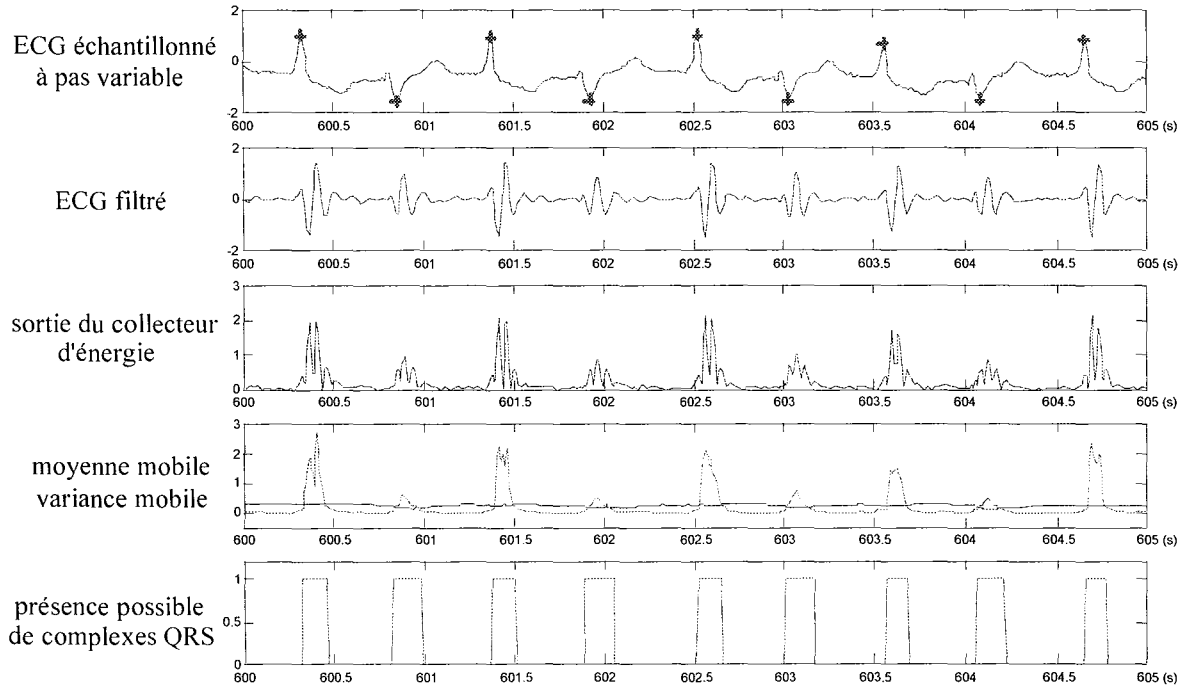


Figure V.18 : suivi des signaux en sortie de chaque module

Nous obtenons après filtrage, le deuxième signal où nous remarquons la présence de faibles amplitudes, tout comme de fortes oscillations. Ces oscillations sont mises en évidence en sortie du collecteur d'énergie où l'amplitude du signal est positive, augmentant ainsi le contraste. La moyenne mobile et la variance mobile sont ensuite calculées. Lorsque l'amplitude de la variance mobile est supérieure à celle de la moyenne mobile, la possible présence d'un complexe QRS est alors montrée sur le dernier graphique. La forme de chaque complexe QRS candidat est enfin étudiée afin de déterminer l'instant d'occurrence de celui-ci ; les croix représentées sur le premier graphique montrent ces instants.

Par conséquent, nous avons décrit, dans cette partie, les différents modules servant à la détection des complexes QRS : un module de filtrage permettant de conserver le spectre des complexes QRS, puis un module de collecteur d'énergie et un module d'analyses statistiques, et enfin, un module de règles de décision. A ce dernier module ont été ajoutées deux améliorations en s'intéressant à l'amplitude et à la forme des complexes d'une part, et en ajustant les paramètres du filtre EPV d'autre part.

III.4. Résultats

Une fois l'algorithme de détection défini, il convient de l'appliquer à une base de données reconnue afin de comparer les performances de notre méthode de détection aux méthodes de la littérature. Définissons tout d'abord les critères de performances, puis examinons les arythmies des ECG de la base de données du MIT, et analysons ensuite les résultats concernant la détection des complexes QRS sur les ECG échantillonnés à pas variable.

III.4.a. Quantification des performances

Afin de comparer les algorithmes de détection de QRS, il convient de mesurer certaines performances [Forbes et al., 1987], [Pahlm et al., 1984], [Pan et al., 1985]. On définit couramment les 3 termes suivant :

- la Bonne Détection = *BD*. Ce sont les événements détectés par l'algorithme comme appartenant à la catégorie recherchée et qui en font effectivement partie.
- le Manque à la Détection = *MD*. Ce sont tous les événements qui appartiennent normalement à la catégorie recherchée mais qui n'ont pas été détectés par l'algorithme.
- la Sur-Détection = *SD*. Ce sont des événements détectés par l'algorithme comme appartenant à la catégorie recherchée mais qui n'en font normalement pas partie.

Le nombre de complexes QRS détectés par l'algorithme est alors *BD*+*SD*. Appelons *VD* la Vraie Détection contenant le nombre réel de complexes contenus dans le signal et devant être détectés. On a alors *BD*+*MD*=*VD*. Les performances sont généralement mesurées en termes de taux de fausses détections et taux de bonnes détections, soit :

- taux d'échec à la détection ou de Fausse Détection *TFD* :

$$TFD = \frac{SD + MD}{VD}$$

- taux de réussite à la détection ou de Bonne Détection *TBD* :

$$TBD = \frac{BD}{VD}$$

Ces taux s'exprime en %. Les meilleures performances de détection sont obtenues lorsque *TFD* tend vers 0% et *TBD* vers 100%. Les algorithmes de détection ayant souvent des paramètres ajustables, il convient d'ajuster au mieux ces paramètres en trouvant un compromis pour obtenir un taux de bonne détection correct sans pénaliser le taux de fausse détection. Le tracé de la courbe *TBD* en fonction de *TFD* est alors un bon moyen de détermination des

meilleurs paramètres à utiliser. Ainsi, nous utiliserons ces taux de bonne détection et fausse détection pour l'analyse des performances de notre algorithme de détection des complexes QRS.

III.4.b. Base de données du MIT

Afin que les performances des algorithmes développés par diverses personnes soient comparables entre différents laboratoires et pays, une base de données servant de référence doit être commune à tout le monde. Ainsi le Massachusetts Institute of Technology (MIT) [Moddy, 1992], [Moddy, 1995] propose un large éventail d'ECG contenant une large gamme d'arythmies comme base de données de référence afin de pouvoir comparer les algorithmes entre eux. Nous utiliserons cette base de données d'électrocardiogrammes pour mesurer les performances du détecteur de complexes QRS que nous avons élaboré. Cette base de données n'est pas unique ; d'autres sont disponibles comme celle de American Heart Association [AHA, 1994].

Le tableau V.1 regroupe les différentes arythmies rencontrées dans les ECG de la base de données du MIT ainsi que leur symbole.

Symbole	Signification anglaise	Signification française
N	Normal beat	Battement normal
L	Left bundle branch block beat	Bloc de branche gauche
R	Right bundle branch block beat	Bloc de branche droite
A	Atrial premature beat	Battement auriculaire prématurée
a	Aberrated atrial premature beat	Battement auriculaire prématurée aberrant
J	Nodal (junctional) premature beat	Battement nodal (jonctionnel) prématuré
S	Supraventricular premature beat	Battement supraventriculaire prématuré
V	Premature ventricular contraction	Contraction ventriculaire prématurée
F	Fusion of ventricular and normal beat	Fusion de battement ventriculaire et normal
!	Ventricular flutter wave	Flutter ventriculaire
e	Atrial escape beat	Echappement auriculaire
j	Nodal (junctional) escape beat	Echappement nodal (jonctionnel)
E	Ventricular escape beat	Echappement ventriculaire
P	Paced beat	Battement artificiel par stimulateur cardiaque
f	Fusion of paced and normal beat	Fusion d'un battement normal et artificiel
p	Non-conducted P-wave (blocked APB)	Onde P non conduite
Q	Unclassifiable beat	Battement non classifiable
|	Isolated QRS-like artifact	Artefact ressemblant à un QRS isolé
+	Change in heart rate	Changement de rythme cardiaque
"	Missed beat	Onde P non conduite

Tableau V.1 : arythmies rencontrées dans les ECG

III.4.c. Résultats obtenus sur les ECG de la base de données du MIT

Nous allons maintenant détecter les complexes QRS de tous les ECG échantillonnés à pas variable de la base de données du MIT. Nous déterminerons alors les performances, nous les analyserons et les comparerons aux performances issues de la littérature. Enfin, nous regarderons l'effet des paramètres de filtrage sur les performances.

Performances du détecteur de complexes QRS

Pour chaque ECG de la base de données du MIT, le type de complexe QRS et l'instant d'occurrence sont répertoriés et classés dans une liste. Notre algorithme détecte les complexes QRS avec l'instant d'occurrence t_{QRS} mais sans se préoccuper du type de complexe (arythmie). Nous avons donc obtenu grâce à notre détecteur, pour chacun des ECG, une liste d'instants auxquels un complexe QRS est survenu. En comparant notre liste à celle du MIT, nous pourrons voir pour chaque ECG, combien de QRS de chacun des types nous avons détecté, combien de QRS nous avons manqué et combien de QRS en trop nous avons retenu. A l'aide de ces résultats, nous pourrons calculer les cinq performances mentionnées, à savoir :

- la Bonne Détection = *BD* (True Positive)
- le Manque à la Détection = *MD* (False Negative)
- la Sur-Détection = *SD* (False Positive)
- le taux d'échec à la détection ou de Fausse Détection = *TFD* (False Detection)
- le taux de réussite à la détection ou de Bonne Détection = *TBD* (True Detection).

Quarante six électrocardiogrammes de la base de données du MIT possèdent la dérivation modifiée D2 sur laquelle fonctionne notre algorithme. Chacun des ECG dure 30 minutes et 6 secondes. La fréquence d'échantillonnage d'origine est de 360 Hz. Les ECG ont été échantillonnés à pas variable puis les complexes QRS ont été détectés.

Pour chacun des électrocardiogrammes étudiés, le tableau V.2 regroupe les performances de détection par type de complexes QRS correspondant aux différentes arythmies. Le tableau comporte deux colonnes pour chaque arythmie : la première (nommée 'MIT') correspond au nombre de complexes QRS de l'arythmie en question ayant été détectés par le MIT, tandis que la deuxième colonne (nommée 'algo') correspond au nombre de complexes que nous avons détectés.

ECG	Normal		V		A		a		Q		L		F		P		J		R		S		'		e		j		E		f		p		]	
	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo	MIT	algo
100	2239	2239	1	1	33	33																														
101	1860	1859			3	3			2	1																									4	1
103	2082	2082			2	2																														
105	2526	2493	41	41					5	3																										
106	1507	1505	520	496																																
107			59	48											2078	1935																				
108	1740	1582	16	16	4	4							2	2													1	1					11	0	8	0
109			38	36							2492	2475	2	2																						
111			1	1							2123	2086																								
112	2537	2533			2	1																														
113	1789	1781					6	6																												
114	1820	1809	43	43	10	10							4	4			2	2																	1	0
115	1953	1953																																	6	0
116	2302	2272	109	105	1	1																														
117	1534	1534			1	1																														
118			16	15	96	96													2166	2136													10	0		
119	1543	1541	444	394																																
121	1861	1826	1	1	1	1																														
122	2476	2476																																	2	0
123	1515	1512	3	3																																
124			47	27	2	2							5	5			29	29	1531	1531							5	5								
200	1743	1689	826	813	30	30							2	1																						
201	1625	1624	198	26	30	30	97	32					2	0			1	1									10	10					37	0		
202	2061	2060	19	1	36	35	19	16					1	1																					2	1
203	2529	2367	444	391			2	2	4	1			1	1																					25	8
205	2571	2569	71	58	3	3							11	10																					1	0
207			105	44	107	107					1457	1443							86	85			472	50					105	100					2	1
208	1586	1556	992	647					2	0			373	358							2	2													8	4
209	2621	2596	1	0	382	382																													7	3
210	2423	2416	194	157			22	17					10	8															1	1					1	0
212	923	922																	1825	1825															1	0
213	2641	2546	220	162	25	23	3	3					362	355																						
214			256	234					2	2	2002	1957	1	1																					5	3
215	3196	3099	164	155	2	2							1	0																						
217	244	243	162	160											1542	1467															260	237			1	0
219	2082	2082	64	43	7	7							1	1																			133	0		
220	1954	1954			94	94																														
221	2031	2030	396	385																																
222	2062	2053			208	208											1	1									212	212								
223	2029	2029	473	468	72	72	1	1					14	14											16	16										
228	1688	1547	362	318	3	3																													24	4
230	2255	2236	1	1																															1	1
231	314	314	2	2	1	1													1254	1254													2	0		
232					1382	1378													397	396							1	1								
233	2230	2221	831	827	7	7							11	11																					2	0
234	2700	2700	3	2													50	50																		

Total	74792	73850	7123	6121	2544	2536	150	77	15	7	8074	7961	803	774	3620	3402	83	83	7259	7227	2	2	472	50	16	16	229	229	106	101	260	237	193	0	101	26
Performances	98.74%		85.93%		99.69%		51.33%		46.67%		98.60%		96.39%		93.98%		100.00%		99.56%		100.00%		10.59%		100.00%		100.00%		95.28%		91.15%		0.00%		25.74%	

Tableau V.2 : performances de détection des complexes QRS par type d'arythmie

Le tableau V.3, quant à lui, regroupe les cinq performances énumérées précédemment. Ainsi, nous connaissons, pour chaque ECG, le nombre de complexes QRS réellement contenu dans l'ECG, la bonne détection, le manque à la détection et la sur-détection. Ceci permet le calcul du taux de bonne détection et du taux de fausse détection.

La figure V.19 reprend les performances en termes de taux de bonne détection et taux de fausse détection afin de visualiser facilement les résultats obtenus.

ECG	Arythmies	Vraie Détection	Bonne Détection	Manque à la Détection	Sur-Détection	Taux de Bonne Détection	Taux de Fausse Détection
100	NAV	2273	2273	0	0	100,00%	0,00%
101	NAQn	1865	1863	2	1	99,89%	0,16%
103	NAn	2084	2084	0	0	100,00%	0,00%
105	NVQn	2572	2537	35	36	98,64%	2,76%
106	NV	2027	2001	26	13	98,72%	1,92%
107	VP	2137	1983	154	115	92,79%	12,59%
108	NAVFjp	1774	1605	169	60	90,47%	12,91%
109	LVF	2532	2513	19	17	99,25%	1,42%
111	LVn	2124	2087	37	19	98,26%	2,64%
112	NA	2539	2534	5	0	99,80%	0,20%
113	Na	1795	1787	8	7	99,55%	0,84%
114	NAJVFn	1879	1868	11	0	99,41%	0,59%
115	N	1953	1953	0	0	100,00%	0,00%
116	NAVn	2412	2378	34	4	98,59%	1,58%
117	NA	1535	1535	0	0	100,00%	0,00%
118	RAVp	2288	2247	41	2	98,21%	1,88%
119	NV	1987	1935	52	19	97,38%	3,57%
121	NAV	1863	1828	35	0	98,12%	1,88%
122	N	2476	2476	0	0	100,00%	0,00%
123	NV	1518	1515	3	1	99,80%	0,26%
124	RAJVFj	1619	1599	20	2	98,76%	1,36%
200	NAVF	2601	2533	68	11	97,39%	3,04%
201	NAaJVFjp	2000	1723	277	1	86,15%	13,90%
202	NAaVF	2136	2113	23	1	98,92%	1,12%
203	NaVFQ	2980	2762	218	53	92,68%	9,09%
205	NAVF	2656	2640	16	0	99,40%	0,60%
207	LRAV!E	2332	1829	503	31	78,43%	22,90%
208	NSVFQ	2955	2563	392	47	86,73%	14,86%
209	NAV	3004	2978	26	11	99,13%	1,23%
210	NaVFE	2650	2599	51	7	98,08%	2,19%
212	NR	2748	2747	1	2	99,96%	0,11%
213	NAaVF	3251	3089	162	17	95,02%	5,51%
214	LVFQ	2261	2194	67	18	97,04%	3,76%
215	NAVF	3363	3256	107	2	96,82%	3,24%
217	NVPf	2208	2107	101	85	95,43%	8,42%
219	NAVFp	2287	2133	154	0	93,27%	6,73%
220	NA	2048	2048	0	0	100,00%	0,00%
221	NV	2427	2415	12	3	99,51%	0,62%
222	NAJj	2483	2474	9	3	99,64%	0,48%
223	NAaVFe	2605	2600	5	2	99,81%	0,27%
228	NAV	2053	1868	185	29	90,99%	10,42%
230	NV	2256	2237	19	3	99,16%	0,98%
231	NRAVp	1573	1571	2	0	99,87%	0,13%
232	RAj	1780	1775	5	3	99,72%	0,45%
233	NAVF	3079	3066	13	1	99,58%	0,45%
234	NJVn	2753	2752	1	0	99,96%	0,04%
Total		105741	102673	3068	626	97,10%	3,49%

Tableau V.3 : performances de détections des complexes QRS sur les électrocardiogrammes

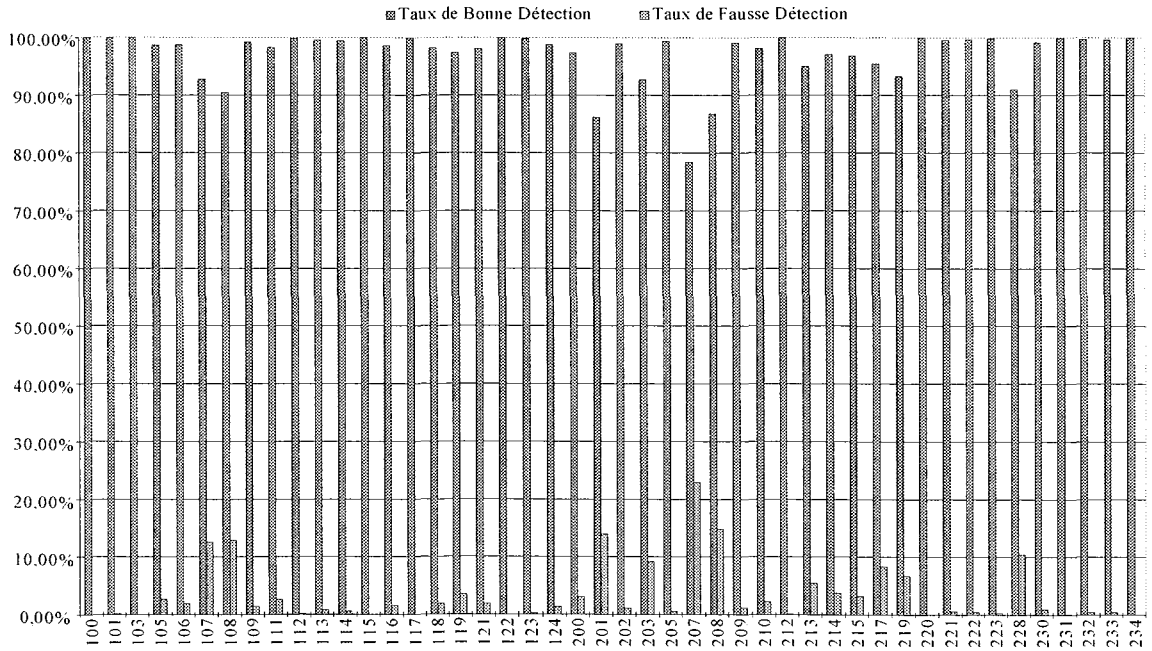


Figure V.19 : performances de détections des complexes QRS sur les ECG

Analyse des performances

Afin d'analyser au mieux les performances obtenues, nous allons dans un premier temps faire une analyse globale des performances, puis dans un deuxième temps nous regarderons en détail les performances sur chaque type de complexes QRS. Enfin, nous comparerons nos résultats avec des résultats issus de la littérature.

A partir des résultats regroupés dans le tableau V.3, nous remarquons que plus de 97 % des complexes QRS tous types confondus ont été détectés et que les taux de manque à la détection et sur-détection totalisent à peine 3,5 %. Sur six électrocardiogrammes, la réussite est complète puisque nous avons détecté la totalité des complexes QRS et obtenu *TBD*=100 % et *TFD*=0 %. Sur 38 des 46 électrocardiogrammes, le taux de bonne détection est supérieur à 95 % et seuls 3 électrocardiogrammes ont leur taux de bonne détection inférieur à 90 %, celui-ci restant néanmoins supérieur à 78 %. Quant au taux de fausse détection, il reste inférieur à 5 % sur 36 électrocardiogrammes et seuls 6 électrocardiogrammes ont leur taux de fausse détection supérieur à 10 %, celui-ci restant néanmoins inférieur à 23 %.

Sur les six électrocardiogrammes dont les performances sont les meilleures, les types de complexes QRS sont "N", "A" et "V", ces deux derniers types étant des arythmies fréquemment rencontrées, le premier type étant le rythme cardiaque normal.

Au regard du tableau V.2, nous pouvons analyser les détections par type de complexes QRS détectés. Ainsi nous remarquons que les complexes de types "N", "A", "L", "F", "J", "R", "S", "e", "j" et "E" sont relativement bien détectés puisque leur taux de réussite à la détection varie de 95 à 100 %.

Nous constatons également que les complexes de type "p" ne sont pas détectés. Ceci s'explique par le fait que l'arythmie correspondante est une onde P qui n'a pas été conduite par les fibres musculaires cardiaques et n'a donc pas donné naissance à un complexe QRS. Cette arythmie n'ayant pas de complexe, celui-ci ne peut pas être détecté.

Enfin, les complexes de type "!" sont très mal détectés car la forme de l'ECG lors d'un flutter ventriculaire ressemble davantage à une onde sinusoïdale de grande amplitude qu'à un complexe QRS classique.

Finalement, les trois électrocardiogrammes ayant les performances les plus médiocres voient leur signal fortement perturbé par moment ou encore l'amplitude des complexes QRS très faible.

Les complexes de type "|", qui ne sont pas en fait des complexes QRS mais des artefacts ressemblant à des complexes, ne doivent normalement pas être détectés. De tels complexes détectés ne sont pas pris en compte dans la bonne détection mais dans la sur-détection.

Si nous comparons maintenant nos résultats avec ceux issus de la littérature, il est évident que notre algorithme de détection est moins performant pour plusieurs raisons. La majeure raison est que nous travaillons sur des ECG échantillonnés à pas variable et que les traitements réalisés sur de tels signaux ne sont pas aussi poussés que sur des signaux échantillonnés à une fréquence fixe, ceci étant dû au fait de la complexité des calculs et de la durée de recherche sur le traitement des SEPV. Néanmoins, nous réussissons à filtrer, calculer des statistiques et détecter les événements recherchés. Une autre raison est que nous nous servons d'une seule dérivation, la dérivation D2 modifiée, pour détecter les complexes QRS alors que bons nombres d'algorithmes travaillent sur plusieurs dérivations en même temps. Ainsi, [Pan et al., 1985] a détecté les complexes QRS sur les ECG de la base de données du MIT en utilisant les deux dérivations à disposition. Sachant qu'ils n'ont pas pris en compte les complexes de type "!" et "p" et qu'ils ont surestimé le nombre total de battements, il convient d'adapter leurs performances et les nôtres afin de pouvoir les comparer. Leurs performances sont *TBD*=99,53 %, *TFD*=0,71 % et les nôtres sont *TBD*=97,66 %, *TFD*=3,46 %. Il semble évident que des informations bruitées ou inexistantes sur une dérivation peuvent paraître claires sur une autre, et ainsi, la décision de détection est plus fiable.

Comparaison des performances obtenues en EPV à celles obtenues en EPF

Afin de connaître la part d'erreur, dans les performances de détection des complexes QRS, due à l'algorithme, et celle due à l'échantillonnage à pas variable, nous déterminons les résultats et performances pour 8 ECG échantillonnés à pas fixe, en choisissant des ECG ayant obtenu de bonnes performances, ainsi que des ECG ayant obtenu des performances médiocres. Pour chaque ECG, nous avons représenté sur la figure V.20, les taux de bonne détection et fausse détection déterminés à partir des ECG échantillonnés à pas variable suivis des taux déterminés à partir des ECG échantillonnés à pas fixe.

Nous remarquons que les performances en EPF sont meilleures que celles en EPV, mais il arrive qu'elles soient identiques pour l'ECG 207 par exemple. Néanmoins, certains signaux étant très fortement bruité, il semblerait difficile d'améliorer considérablement les performances.

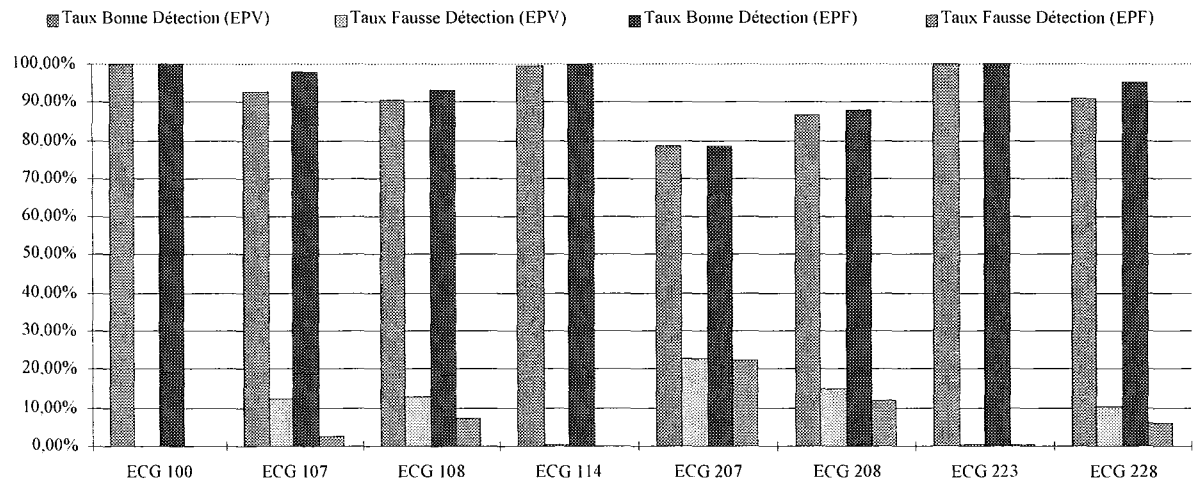


Figure V.20 : comparaison des performances

L'erreur de détection est donc due à l'échantillonnage à pas variable, mais aussi à l'algorithme de détection. Une optimisation des paramètres en déterminant la courbe COR entre le taux de bonne détection et le taux de fausse détection permettrait d'améliorer les performances de l'algorithme pour la détection des complexes QRS. Il resterait alors, dans la quantification des performances, la part d'erreur due à l'échantillonnage à pas variable.

Influence des paramètres de filtrage Fc et B sur la détection

Dans les détections faites précédemment, les paramètres de filtrage que sont la fréquence centrale f_0 et la bande passante B étaient régulièrement adaptés en cours de traitement en fonction du spectre des complexes QRS dans le signal électrocardiographique. Nous allons maintenant regarder l'influence de ces deux paramètres de filtrage sur les performances à la détection. Pour ce faire, nous allons les fixer à des valeurs que nous allons déterminer, puis nous procéderons à la détection des complexes et regarderons les performances. Nous établirons ces performances pour différentes valeurs du couple fréquence centrale et bande passante.

Dans un premier temps, nous choisissons deux électrocardiogrammes sur lesquels on examinera l'influence des paramètres de filtrage. Ces deux électrocardiogrammes sont l'ECG203 et l'ECG121. Du fait de l'amplitude moyenne des complexes des ECG, nous fixons l'amplification A du filtre respectivement à 3 pour le premier et 5 pour le deuxième électrocardiogramme. Puis, pour chacune des valeurs de fréquence centrale f_0=[8, 10, 12, 14, 16, 18 Hz] et chacune des valeurs de bande passante B=[8, 9, 10, 11, 12, 13 Hz], nous détectons les complexes QRS et recueillons les performances *TBD* et *TFD*. Enfin, nous

regroupons sous forme de graphiques les deux performances *TBD* et *TFD* en fonction des deux paramètres de filtrage f_0 et B (figures V.21 et V.22).

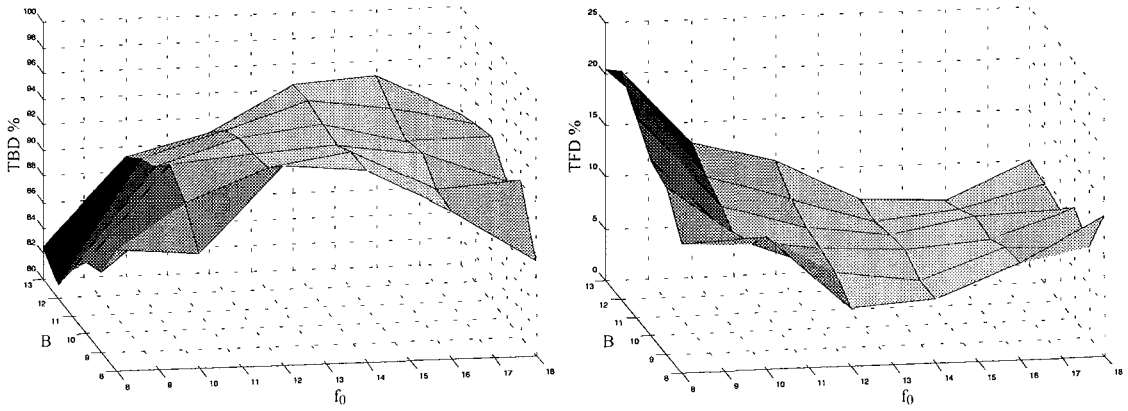


Figure V.21 : influence des paramètres de filtrage sur les performances, ECG203

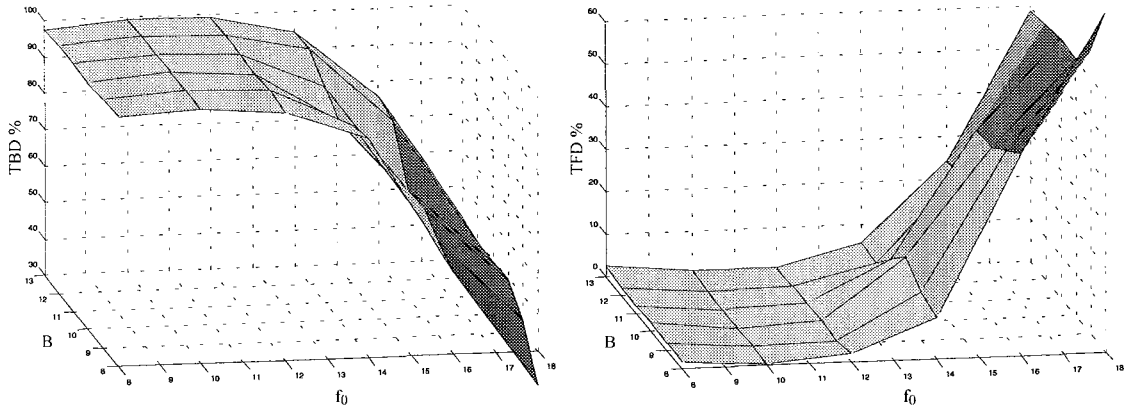


Figure V.22 : influence des paramètres de filtrage sur les performances, ECG121

Au regard de la figure V.21 et de la figure V.22, nous remarquons que les paramètres de filtrage f_0 et B ont une forte participation à la détection des complexes. Ainsi, une fréquence centrale de l'ordre de 14 Hz semble optimale pour l'ECG203 alors que la fréquence centrale optimale pour l'ECG121 serait de l'ordre de 10 Hz. D'autre part, nous remarquons que l'influence de la bande passante est moindre comparé à la fréquence centrale mais reste tout de même appréciable pour affiner la détection des complexes. Il est donc nécessaire, comme nous l'avons fait, d'ajuster ces paramètres régulièrement afin de suivre au mieux les caractéristiques des complexes QRS.

Nous avons, dans cette partie, détecté les complexes QRS des ECG (de la base de données du MIT) que nous avons échantillonnés à pas variable. Puis, nous avons déterminé les performances en termes de taux de bonne détection et taux de fausse détection, et avons analyser les résulats. Enfin, nous avons montré l'influence des paramètres du filtre et la

nécessité de les adapter régulièrement en fonction des caractéristiques spectrales des complexes QRS.

III.5. Conclusion sur la détection des complexes QRS

Nous venons de détailler la chaîne de traitement que nous avons utilisée pour détecter les complexes QRS ainsi que les résultats et performances que nous avons obtenus. Les performances de bonnes détection sont en majorité supérieures à 95 % et les performances de fausse détection sont en majorité inférieures à 5 %. Globalement, les performances sont bonnes mais restent néanmoins inférieures à celles des autres algorithmes, ceci étant principalement dû au fait que nous traitons des signaux ECG échantillonnés à pas variable. Enfin, l'analyse des résultats nous permet de montrer qu'il est possible de traiter des ECG échantillonnés à pas variable et d'en extraire les complexes QRS afin de suivre le rythme cardiaque.

IV. Ondes P et T

Après la détection du complexe QRS constituant la principale onde de l'ECG, il convient de s'intéresser à l'onde T constituant la deuxième onde importante de l'ECG. Cette onde permet de suivre la repolarisation des ventricules. Par conséquent, une mesure temporelle autour de cette onde permettra de connaître la durée de repolarisation des ventricules. Nous allons dans un premier temps faire l'inventaire des méthodes d'extraction des paramètres de l'onde T, puis nous détaillerons la méthode que nous avons choisie pour parvenir à quantifier les paramètres temporels et d'amplitude liés à l'onde T. Ensuite, nous établirons l'expression de quelques autres paramètres liés à l'onde T comme la surface et l'énergie. Enfin, nous examinerons la présence de l'onde P avant un complexe QRS. La détection des divers instants, amplitudes, surfaces, énergies et présence d'onde servirons au suivi temporel de paramètres cardiaques dans le chapitre 6.

IV.1. Etat de l'art des méthodes de détection de l'onde T

Dans le signal ECG, l'onde ayant la deuxième plus forte amplitude est généralement l'onde T. La détection de la fin de l'onde T permet de quantifier la durée de repolarisation du muscle ventriculaire.

Nous allons dans un premier temps déterminer quels sont les paramètres rattachés à l'onde T contenant une information pertinente, puis nous définirons une fenêtre de travail dans laquelle

la fin de l'onde T est susceptible d'apparaître. Enfin, nous décrirons les méthodes de détection de l'onde T.

IV.1.a. Paramètres liés à l'onde T

L'intervalle QT, défini comme l'intervalle de temps entre le début de l'onde Q et la fin de l'onde T, permet d'obtenir la durée de repolarisation des ventricules. Aussi, la durée normale de cet intervalle fluctue avec le rythme cardiaque. C'est pourquoi il a été défini [Bazett, 1920] un intervalle QT corrigé, noté QT_c, n'étant normalement plus fonction du rythme cardiaque :

$$QT_c = \frac{QT}{\sqrt{RR}}$$

L'intervalle RR fait référence au temps compris entre les deux complexes QRS qui précédent l'onde T considérée. L'intervalle de confiance de QT_c est $QT_c \leq 440$ ms.

De plus, il est parfois difficile de déterminer avec exactitude le début de l'onde Q. Afin de détourner ce problème, certains considèrent alors l'intervalle RT, défini comme l'intervalle de temps entre le sommet de l'onde R et la fin de l'onde T. Le sommet de d'onde R étant facilement défini par le rythme cardiaque, la seule difficulté réside en la détermination de la fin de l'onde T. Afin de détourner ce deuxième problème, certains considèrent alors l'instant d'apparition du maximum de l'onde T et définissent les intervalles QT' et RT' [Critelli et al., 1982] [Speranza et al., 1993].

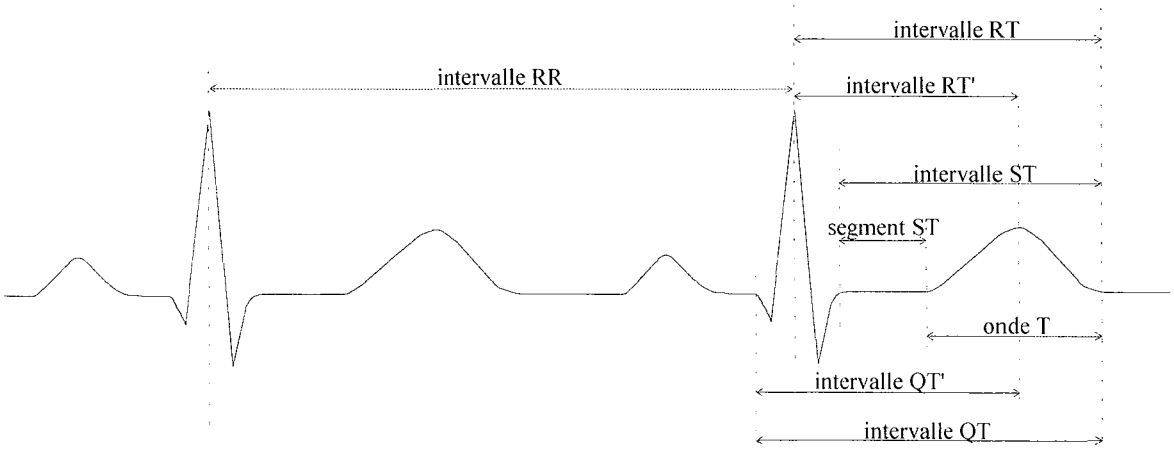


Figure V.23 : intervalles de temps en rapport à l'onde T

La figure V.23 regroupe les différents intervalles de temps considérés. Tout comme pour l'intervalle *QT*, les intervalles *RT*, *QT'* et *RT'* ont été corrigés afin d'être ramenés à des valeurs indépendantes du rythme cardiaque :

$$RT_c = \frac{RT}{\sqrt{RR}},\ QT_c' = \frac{QT'}{\sqrt{RR}},\ RT_c' = \frac{RT'}{\sqrt{RR}}.$$

A partir de ce lien entre *RR* et *QT*, il a été montré [Franz, 1988], [Franz, 1992] que l'intervalle *QT* n'est pas seulement lié à l'intervalle *RR* précédent mais à la moyenne des intervalles *RR* sur une période de *N* cycles avant l'intervalle *QT* en question. Ainsi, une autre définition peut être donnée à l'intervalle *QT* corrigé, à savoir :

$$QT_C = \frac{QT}{\frac{1}{N}\sqrt{\sum RR}}$$

Enfin, il peut être intéressant de quantifier le segment *ST* aussi appelé segment *JT*, l'intervalle *ST*, la durée et l'amplitude de l'onde T. La quantification de tous ces paramètres permettra leur suivi temporel dans le dernier chapitre de ce mémoire.

IV.1.b. Fenêtre de travail

Parmi les intervalles suscités, il convient majoritairement de quantifier l'intervalle *QT*. Aussi, il est nécessaire de définir la fin de l'onde T. Pour ce faire, divers auteurs ont réduit la recherche de la fin de l'onde T dans une fenêtre de travail.

[Laguna, 1990] limite la fenêtre de travail par (t_d, t_f) tel que :

$$(t_d, t_f) = \begin{cases} (140,\ 500)\ \text{ms si RR} > 700\ \text{ms} \\ (100,\ 0.7\ \text{RR})\ \text{ms si RR} < 700\ \text{ms} \end{cases}$$

avec pour origine le sommet de l'onde R.

[Speranza, 1993] définit l'intervalle de la fenêtre de travail (t_d, t_f) en fonction de l'intervalle RT précédent, soit :

$$t_d = 0.5\ \text{RT}_{n-1} \text{ et } t_f = 1.1\ \text{RT}_{n-1}$$

avec pour origine le sommet de l'onde R. L'intervalle RT_{n-1} définissant la durée de l'intervalle RT précédent.

[Algra, 1987] tient compte de la relation entre l'intervalle QT et l'intervalle RR et propose une fenêtre de travail $\left(t_d, t_f\right)$ telle que

$$360 \text{ ms} \leq QT_c = \frac{QT}{\sqrt{RR}} \leq 550 \text{ ms}$$

soit encore

$$t_d = 0{,}36\sqrt{RR} \text{ et } t_f = 0{,}55\sqrt{RR}$$

avec pour origine le début de l'onde Q.

Dans tous les cas, l'intervalle de travail est choisi en fonction soit de l'intervalle RR, soit de la précédente mesure de la fin de l'onde T.

Après avoir déterminé les principaux paramètres liés à l'onde T et la fenêtre temporelle de recherche de la fin de l'onde T, nous allons maintenant nous intéresser aux méthodes de détection de l'onde T. Elles peuvent être classées en deux catégories : le seuillage, et la reconnaissance syntaxique et morphologique.

IV.1.c. Méthodes basées sur le seuillage

Tout comme pour la détection du complexe QRS, la détection de la fin de l'onde T nécessite plusieurs étapes. Les trois principales étapes utilisées sont le filtrage, une transformation linéaire ou non linéaire, et le seuillage.

Le module de filtrage n'est pas toujours utilisé. Pourtant, il permet d'éliminer les bruits hautes fréquences afin d'obtenir un lissage du signal et de mieux identifier chacune des ondes. Le choix de la transformation (linéaire ou non linéaire) est à la base de chacune des méthodes. Parmi ces transformations, on trouve généralement la dérivation ou un filtrage s'y rapprochant, ou encore une transformation par longueur de courbe. Enfin, le seuillage permet de déterminer l'instant de fin de l'onde T. Le ou les seuils peuvent être fixes ou adaptatifs et s'appliquer à un ou plusieurs paramètres issus du module de transformation.

Afin de détecter la fin de l'onde T, une chaîne de traitement est présentée sur le schéma de la figure V.24.

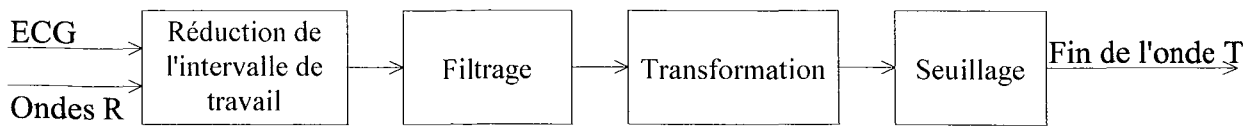


Figure V.24 : détection de la fin de l'onde T

Examinons maintenant différentes chaînes de traitement permettant la détection des ondes T. Certaines des méthodes exposées incluent aussi la détection des ondes P, dont nous déterminerons leur présence par la suite.

Seuillage sur pente

Algra ne filtre pas le signal ECG et ne détermine donc pas la fin de l'onde T lorsque le signal est bruité ou lorsque le complexe QRS est une contraction ventriculaire prématurée [Algra et al., 1987]. Dans le cas contraire, la recherche s'effectue sur une fenêtre de travail réduite. On recherche un segment plat de dérivée nulle ou quasi nulle d'une durée d'au moins 40 ms. Si un tel segment est trouvé, le début de ce segment marquera la fin de l'onde T. L'inconvénient majeur réside en la non considération des fluctuations possibles de la ligne de base. Sur un ECG comportant 1587 complexes QRS, seuls 836 intervalles QT ont été quantifiés, soit 53 %.

Pisani propose deux méthodes de détection de la fin de l'onde T [Pisani et al., 1985]. La première consiste à comparer le signal ECG à une ligne de base théorique définie comme un segment de droite entre les segments PQ de deux battements consécutifs. L'intervalle de recherche est défini par l'intervalle entre l'onde S et la fin théorique de l'onde T. La fin réelle de l'onde T est déterminée par l'intersection entre l'ECG et la ligne de base théorique précédente.

La deuxième méthode est plus en regard de la morphologie de l'onde T en analysant la valeur absolue de la dérivée du signal ECG dans le même intervalle de travail défini pour la première méthode. Une onde T voit le signal ECG quitter la ligne de base, atteindre un maximum ou un minimum, puis retourner vers la ligne de base. En comparant la dérivée à un seuil fixe, on détermine l'instant de fin de l'onde T.

On remarque, pour ces méthodes, que le signal ECG n'est pas filtré. Par conséquent, un signal ECG bruité mènera à une quantification fausse de l'instant de fin de l'onde T.

Lissage du signal puis seuillage sur pentes

On peut détecter les ondes P et T en effectuant un lissage de l'ECG puis en seuillant sur la pente du signal lissé [Goutas A. et al., 1994]. Après avoir détecté les complexes QRS, on applique un lissage sur le signal ECG compris entre deux complexes QRS consécutifs ; ces intervalles comprennent les ondes P et T et la ligne isoélectrique. Le lissage pondéré sur 5 points s'effectue en *m* étapes. Le signal d'origine est $X_{(0)(n)}$, (0) étant l'étape de départ, (n) étant l'échantillon. Le signal final dont l'échantillon (n) a subi (m) étapes de lissage est $X_{(m)(n)}$.

$$X_{(m)(n)} = 0.1X_{(m-1)(n-2)} + 0.2X_{(m-1)(n-1)} + 0.4X_{(m-1)(n)} + 0.2X_{(m-1)(n+1)} + 0.1X_{(m-1)(n+2)}.$$

Ce type de lissage atténue les hautes fréquences, mais est difficilement réalisable en EPV puisqu'il faut au préalable convertir le filtre numérique en filtre EPV.

La figure V.25 représente une modélisation d'un ECG comprenant divers instants caractéristiques.

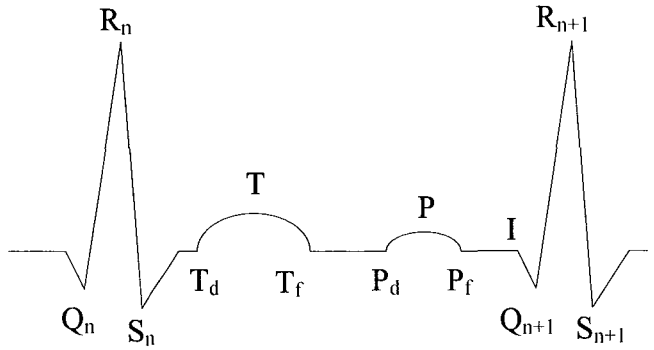


Figure V.25 : modélisation des instants représentatifs des ondes P et T

Pour la détection de l'onde P, Goutas travaille sur l'ECG passé m=3 fois dans l'opération de lissage [Goutas et al., 1994]. En partant de Q_{n+1} il localise le point I en se déplaçant vers la gauche. Dès que la pente entre le point d'indice j et le point d'indice j-5 devient inférieure à la pente de seuil S_1, le point I est détecté. En continuant à se déplacer vers la gauche, il détermine le point P_f dès que la pente est supérieure à la pente de seuil S_2.

La durée de l'onde P est comprise entre 80 ms et 110 ms. A partir de P_f, on se déplace vers la gauche de 160 ms de manière à se retrouver sur la ligne isoélectrique avant l'onde P. En se déplaçant alors vers la droite, on localise le point P_d dès que la pente est supérieure à la pente seuil S_2.

Pour la détection de l'onde T, Goutas procède d'une manière analogue à l'onde P.

Ici, le lissage est équivalent à un filtrage. Il est donc possible de déterminer les instants caractéristiques des ondes P et T, même si le signal ECG est bruité.

Longueur de courbe puis seuillage

La longueur de la courbe du signal entre deux instants permet de détecter les ondes P et T [Gritzali P. et al., 1989]. Soit un signal discret dont l'amplitude des échantillons est x_n et le temps correspondant t_n. La longueur de la courbe $x_n(t_n)$ entre les échantillons k et $k+q$ est :

$$L(k,q) = \sum_{i=k}^{k+q-1} \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}.$$

A partir de cette longueur de courbe, Gritzali détecte toutes les ondes de l'ECG : ondes P et T, et complexe QRS.

- Détection de l'onde T

  On détermine la courbe de longueur $L(k,q)$ pour les échantillons k compris entre 2 complexes QRS consécutifs. On choisit un nombre d'échantillons q égal à la durée normale de l'onde T multiplié par la fréquence d'échantillonnage du signal. On considère que le début de l'onde T est la fin du complexe QRS. On détecte la fin de l'onde T en seuillant (seuil=S_T) la courbe de longueur $L(k,q)$.

- Détection de l'onde P

  On détermine la courbe de longueur $L(k,q)$ pour les échantillons k compris entre la fin de l'onde T et le début du complexe QRS suivant. On choisit un nombre d'échantillons q égal à la durée normale de l'onde P multiplié par la fréquence d'échantillonnage du signal. On détecte le début et la fin de l'onde P en seuillant (seuil=S_P) la courbe de longueur $L(k,q)$.

- Détection du complexe QRS

  Cette méthode permet aussi de détecter les complexes QRS en adaptant q à la durée normale d'un QRS puis en seuillant (seuil=S_{QRS}).

Cette méthode de longueur de courbe pourrait très bien s'adapter à l'échantillonnage à pas variable, en normalisant la longueur par la durée correspondante des q échantillons.

Filtrage puis seuillage sur pente

Laguna effectue un filtrage passe-bas à une fréquence de coupure de 12 Hz sur plusieurs dérivations de l'ECG, puis détermine la fin de l'onde T par une méthode de seuillage [Laguna et al., 1992]. L'avantage de cette méthode réside dans l'utilisation de plusieurs dérivations, ce qui améliore la localisation des instants et la quantification des intervalles recherchés.

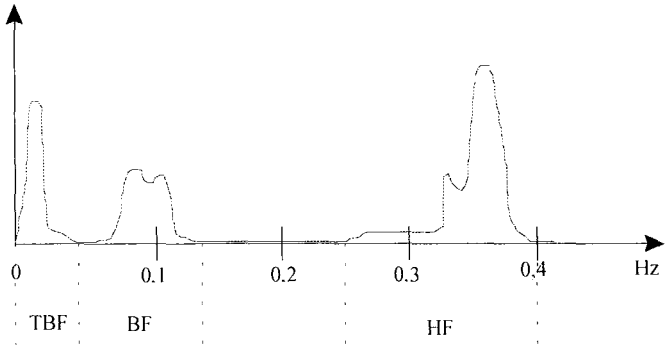


Figure V.26 : bandes spectrales de l'intervalle QT

Nollo effectue lui aussi un filtrage passe-bas mais à la fréquence de coupure de 10 Hz sur la dérivation V5 [Nollo et al., 1990]. Puis des techniques de corrélation croisée et de seuillage sont appliquées. Enfin, une fois l'intervalle QT déterminé, l'analyse spectrale de cet intervalle QT révèle 3 bandes de fréquences distinctes (voir figure V.26) :

- Très Basses Fréquences (TBF) : 0,001 à 0,05 Hz
- Basses Fréquences (BF) : 0,06 à 0,12 Hz
- Hautes Fréquences (HF) : 0,25 à 0,4 Hz

L'application à une base de données de 21 ECG de 20 minutes, issus de 21 volontaires normaux, a permis de quantifier les résultats des divers intervalles de temps sous la forme d'histogrammes d'occurrence dont nous relevons ici la moyenne et l'écart type [Nollo et al., 1992] :

	Moyenne	Ecart type
RR :	918 ms	57 ms
QT :	391 ms	5,4 ms
RT :	347 ms	4,3 ms

Speranza détermine l'intervalle RT au lieu de l'intervalle QT [Speranza et al., 1993]. La recherche de la fin de l'onde T s'effectue dans une fenêtre réduite après filtrage passe-bas à une fréquence de coupure de 19 Hz. Les modules de transformation et seuillage sont basés sur [Nollo et al., 1990], [Nollo et al., 1992]. L'analyse statistique de l'intervalle RT donne :

	Moyenne	Minimum	Maximum
RT' :	234 ms	226 ms	240 ms
RT :	315 ms	290 ms	330 ms

Nous remarquons qu'un filtrage passe-bas semble fort utile avant la recherche de la fin de l'onde T.

Filtrage, morphologie et seuillage

[Laguna et al., 1990] propose une méthode tenant compte de la morphologie de l'onde T pour déterminer la fin de l'onde. La détection est alors mise à profit pour la quantification de l'intervalle QT. Cette détection est effectuée en deux temps : début de l'onde Q, et fin de l'onde T.

Dans un premier temps, le début du complexe QRS est détecté. On a à disposition l'extremum de l'onde R, soit l'instant R_p, et s'il existe l'extremum inversé de l'onde Q, soit l'instant Q_p. Si l'intervalle de temps $R_p - Q_p$ est supérieur à 80 ms alors l'onde Q n'existe pas. Deux cas se

présentent alors : il existe une onde Q ou il n'existe pas d'onde Q. A partir de Q_p (ou de R_p s'il n'y a pas d'onde Q), on recherche en arrière sur la dérivée de l'ECG un point Q_i (ou R_i) ayant la pente maximale. On définit alors un seuil $H_Q = \frac{dQ_i}{K_Q}$ (ou $H_R = \frac{dR_i}{K_R}$, dR_i et dQ_i représentent la dérivée du signal ECG filtré aux instants R_i et Q_i). Expérimentalement K_Q=2 et K_R=5.
A partir de Q_i (ou R_i), on recherche en arrière l'intersection entre la dérivée et le seuil H_Q (ou H_R). Ce point d'intersection, noté QRS_d, est l'instant de début du complexe QRS.

Dans un deuxième temps, on détermine la fin de l'onde T. A partir de R_p, on définit une fenêtre de recherche délimitée par (t_d, t_f) comme vu dans un précédent paragraphe. De plus, on appelle $f(k)$ le signal issus du filtrage passe-bande (dérivée + passe-bas) de l'ECG à la fréquence centrale de 14 Hz. Dans la fenêtre (t_d, t_f), on recherche les valeurs minimale f_m et maximale f_M du signal $f(k)$. Les instants correspondant sont t_m et t_M.
D'un point de vue morphologique, quatre types d'ondes T sont considérés :

- onde T normale (↗↘)
- onde T inversée (↘↗)
- onde T montante (↗)
- onde T descendante (↘)

On identifie maintenant la morphologie de l'onde T et on lui associe le point à l'instant T_i de la dernière plus forte pente de l'onde T.
Si l'instant t_M du maximum f_M est avant l'instant t_m du minimum f_m alors

Si $|f_M| > 4|f_m|$
alors onde T montante (↗), $T_i = t_M$
sinon onde T normale (↗↘), $T_i = t_m$

Si l'instant t_m du minimum f_m est avant l'instant t_M du maximum f_M alors on recherche le minimum local f_l entre l'instant t_M et la fin de la fenêtre. L'instant correspondant au minimum local est t_l.

Si $|f_M| < 4|f_l|$
alors onde T normale (↗↘), $T_i = t_l$
sinon si $|f_m| > 4|f_M|$
alors onde T descendante (↘), $T_i = t_m$
sinon onde T inversée (↘↗), $T_i = t_M$

$f(T_i)$ est alors suivant le cas f_m, f_M ou f_l. L'intersection de $f(k)$ avec le seuil $H_T = \frac{f(T_i)}{K_T}$ après l'instant T_i définit l'instant T_f de fin de l'onde T. Expérimentalement K_T=2.

Enfin, soit T_m l'instant de sommet de l'onde T défini par le premier passage par 0 de $f(k)$ avant T_i. On connaît maintenant le début du complexe QRS (QRS_d), le pic de l'onde T (T_m) et la fin de l'onde T (T_f). On peut alors calculer les intervalles :

$$QT = T_f - QRS_d$$

$$QT' = T_m - QRS_d$$

et leurs intervalles corrigés.

Nous remarquons que cette méthode peut s'appliquer au cas des ECG échantillonnés à pas variable.

IV.1.d. Méthodes basées sur la reconnaissance syntaxique et morphologique

Plus récemment, la logique floue et les réseaux de neurones sont utilisés pour la détection, l'identification, la classification de paramètres. Ces outils sont particulièrement adaptés à la reconnaissance syntaxique et à la reconnaissance de formes.

Ainsi, Grauel utilise l'amplitude et la durée des ondes P, T et complexe QRS, les 12 dérivations du signal ECG et bon nombre de règles de base pour analyser l'ECG et établir une décision [Grauel et al., 1998].

Endenbrandt utilise les réseaux de neurones pour classer la forme des segments et intervalles ST en 7 catégories (normal, élévation anormal du segment ST, montée convexe dans la première partie du segment, amplitude négative dans la fin du segment, onde T négative, pente descendante dans la première partie du segment, intervalle ST plat). Les résultats montrent que 95 % des intervalles ST sont correctement classés [Endenbrandt et al., 1992].

Nous ne nous étendons pas plus sur ces méthodes puisque nous n'avons pas développé les outils de traitement des SEPV dans le but de les associer à des réseaux de neurones.

Après avoir fait un inventaire des méthodes de détection de la fin de l'onde T, nous allons à présent élaborer notre propre détecteur en choisissant les différents modules.

IV.2. Elaboration du détecteur d'onde T

Dans ce paragraphe, nous allons construire pas à pas un détecteur d'onde T avec quantification des instants de début, sommet et fin de l'onde T, amplitude de l'onde T et début du complexe

QRS. Ainsi, nous pourrons déterminer les divers intervalles de temps dont nous désirons suivre l'évolution au cours du temps. Mais, dans un premier temps, nous allons définir exactement quels intervalles de temps, amplitudes et autres paramètres nous voulons quantifier. Puis, nous définirons la fenêtre de travail pour la recherche de la fin de l'onde T. Enfin, nous décrirons la méthode permettant de déterminer les différents instants caractéristiques de l'onde T.

IV.2.a. Paramètres à quantifier

L'intervalle de temps QT correspondant à la durée de la dépolarisation/repolarisation des ventricules se doit d'être quantifié. Néanmoins, dans le cas d'un signal bruité ou d'une contraction ventriculaire prématurée, la fin de l'onde T ne peut être déterminée. C'est pourquoi, en complément, nous désirons également quantifier le segment ST correspondant au temps de latence entre la dépolarisation totale et le début de la repolarisation des ventricules. De plus, lorsque la fin de l'onde T ne peut pas être déterminée, il devient intéressant de détecter le sommet de l'onde T afin d'obtenir l'intervalle de temps QT'. Enfin, la détermination du début du complexe QRS n'étant pas toujours aisée, il est alors avantageux de prendre comme origine le sommet du complexe QRS et de quantifier les intervalles RT et RT'.

Ainsi, nous quantifierons les intervalles de temps QT, QT', RT, RT', et le segment ST. Nous ajouterons également l'amplitude de l'onde T définie comme la différence d'amplitude entre le sommet de l'onde T et la ligne de base. Enfin, la surface comprise entre l'onde T et la ligne de base peut aussi être étudiée puisqu'elle correspond à l'énergie de repolarisation des ventricules. Ces différents paramètres sont regroupés sur la figure V.27.

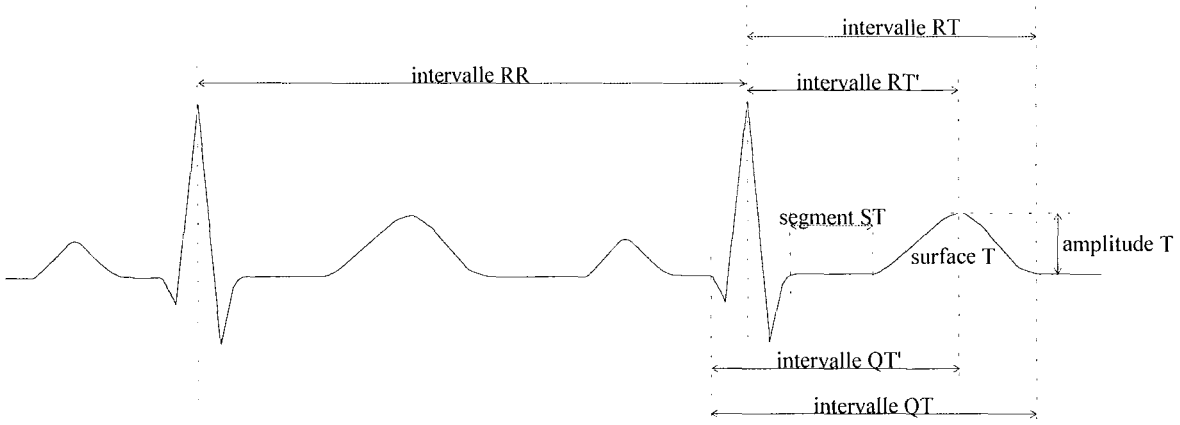


Figure V.27 : intervalles, amplitude et surface à quantifier

IV.2.b. Fenêtre de travail

D'après des concepts physiologique et statistique, l'intervalle RR ou la moyenne des intervalles RR, et l'intervalle QT sont liés et il convient de prendre en considération l'intervalle QT corrigé. Comme il a été précédemment décrit, il s'avère plus judicieux de chercher la fin de l'onde T dans une fenêtre de travail dont certains la définissent à partir du sommet de l'onde R et d'autres avec pour origine le début de l'onde Q. La figure V.28 regroupe sur le graphique de gauche les largeurs des fenêtres de recherche en fonction de la durée de l'intervalle RR, et ce pour les divers cas [Laguna, 1990] [Algra, 1987] [Speranza, 1993].

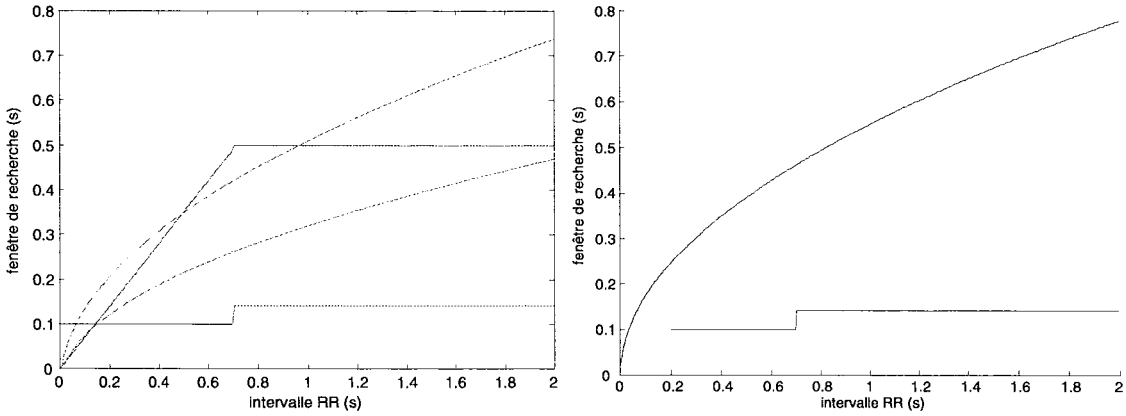


Figure V.28 : fenêtre de recherche de la fin de l'onde T

Après quelques essais comparatifs sur la fenêtre de recherche de la fin de l'onde T, nous avons retenu la fenêtre délimitée par :

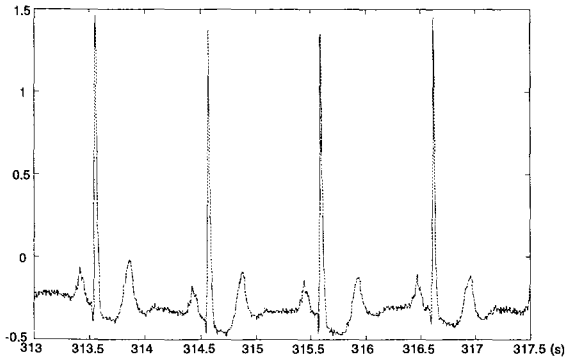
$$t_d = \begin{cases} 100 \text{ ms si RR} < 700 \text{ ms} \\ 140 \text{ ms si RR} > 700 \text{ ms} \end{cases} \text{ et } t_f = 0{,}55\sqrt{RR} \text{ s}$$

avec pour origine le sommet de l'onde R puisque celui-ci est parfaitement défini. Sur le graphique de droite de la figure V.28 est montré l'intervalle de recherche retenu en fonction de l'intervalle RR. Il est bien évident que cette fenêtre de travail sert exclusivement à la recherche de la fin de l'onde T.

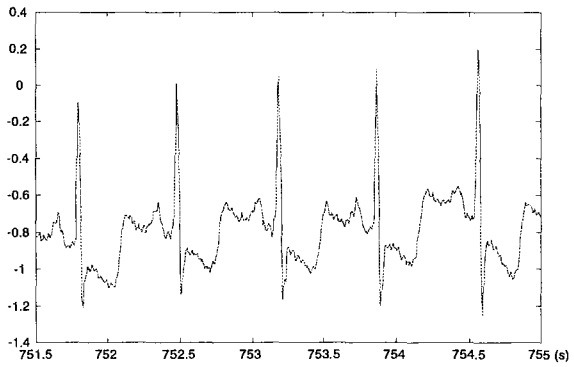
IV.2.c. Description de la méthode

Parmi les diverses méthodes décrites précédemment, nous avons choisi une méthode utilisant le filtrage pour atténuer les bruits parasites, la morphologie pour recueillir la forme de l'onde T, et le seuillage pour détecter l'instant de fin de l'onde T. Nous allons donc adapter la méthode proposée par [Laguna, 1990] aux signaux ECG échantillonnés à pas variable, et l'orienter pour détecter les intervalles, amplitude et surface que nous désirons quantifier.

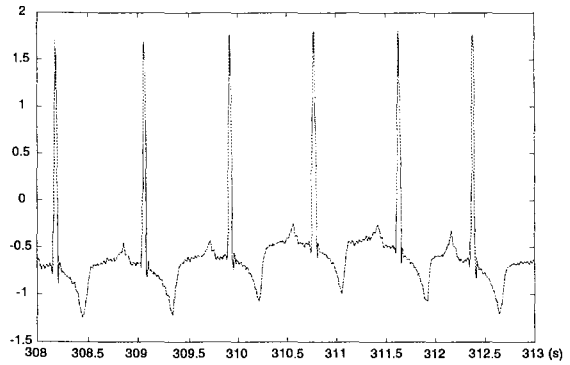
Le sommet de l'onde T correspond au maximum de l'onde et se détermine par le changement de signe de la dérivée du signal filtré dans l'intervalle de temps compris entre T_d et T_f. L'instant d'apparition du sommet de l'onde T est noté T_{max}.



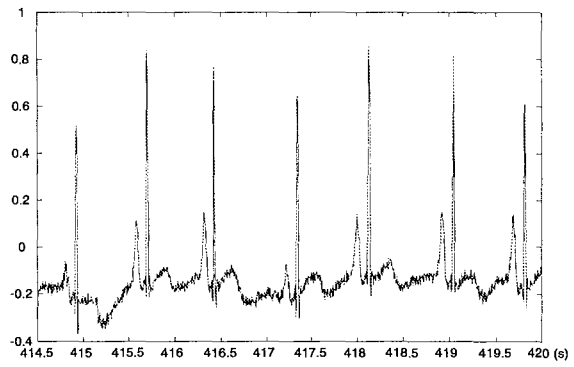
Onde T normale (ECG101)



Onde T montante (ECG112)



Onde T inversée (ECG219)



Onde T descendante (ECG222)

Figure V.29 : les quatre types d'ondes T couramment rencontrées

Dans un premier temps, il est nécessaire de filtrer le signal cardiaque par un filtre passe-bas. Etant données les fréquences comprises dans l'analyse spectrale de l'onde T, nous utilisons un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 2 et de fréquence de coupure de 15 Hz. Ainsi, le bruit parasite est éliminé mais les fluctuations lentes de la ligne de base et de l'onde T sont conservées. Nous dérivons ensuite le signal filtré afin d'en étudier les variations. Dans l'intervalle de travail délimité par les instants t_d et t_f, nous recherchons les deux instants correspondant respectivement à la dérivée positive de plus forte amplitude et à la dérivée négative de plus forte amplitude. A partir de ces deux instants et de l'amplitude de leur dérivée, nous déterminons la morphologie de l'onde T (normale, inversée, montante, descendante) selon la méthode décrite par [Laguna, 1990] (cf. le paragraphe sur les méthodes de détection de l'onde T basées sur le filtrage, la morphologie et le seuillage). La variable T_{type} contient cette morphologie. La figure V.29 montre les quatre sortes d'ondes T susceptibles d'être détectées.

Par la même occasion, nous déterminons l'instant T_f de la dernière plus forte pente et l'instant T_d de la première plus forte pente. Les instants T_d et T_f servent maintenant à déterminer les instants de début et de fin de l'onde T. Pour la fin de l'onde T, à partir de l'instant T_f, on détermine l'instant T_{fin} pour lequel la dérivée du signal filtré devient égale au seuil défini par la dérivée maximale à l'instant T_f divisée par un coefficient K_f=5. On procède de la même manière pour l'instant $T_{début}$ du début de l'onde T avec comme instant de départ T_d et le coefficient K_d=3. Les valeurs des coefficients K_f et K_d proviennent de [Laguna, 1990].

La figure V.30 montre la détermination des instants $T_{début}$, T_{max} et T_{fin} par seuillage de la dérivée.

L'amplitude de l'onde T est calculée à partir des trois instants caractéristiques de l'onde en établissant la différence entre l'amplitude du sommet et la moyenne des amplitudes en début et fin d'onde, soit :

$$T_{amplitude} = ECG(T_{\max}) - \frac{ECG(T_{début}) + ECG(T_{fin})}{2}$$

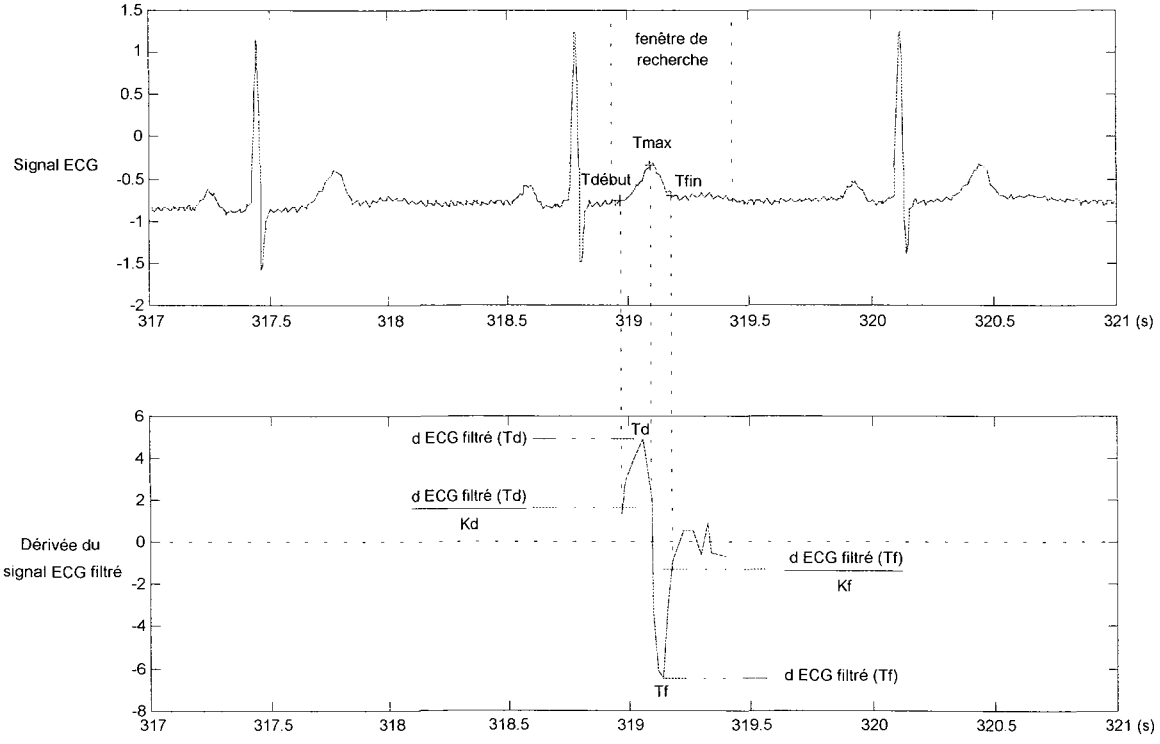


Figure V.30 : détermination des instants $T_{début}$, T_{max} et T_{fin} (ECG123)

La figure V.31 regroupe les diverses étapes d'extraction des caractéristiques de l'onde T.

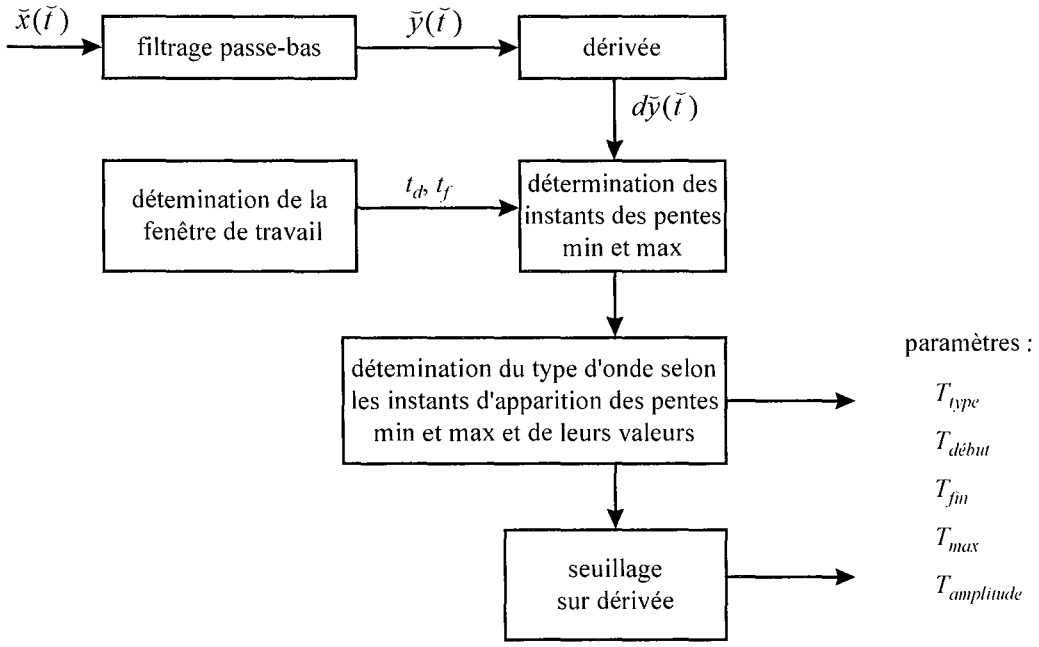


Figure V.31 : algorithme d'extraction des paramètres de l'onde T

IV.3. Surface et énergie des ondes

Comme nous l'avons vu en début de cette partie sur l'onde T, il peut être intéressant de calculer une quantité significative d'une énergie aux abords du complexe QRS et de l'onde T. En effet, le complexe QRS correspond à la dépolarisation du ventricule alors que l'onde T correspond à la repolarisation du ventricule. Nous pouvons alors calculer une énergie de dépolarisation et une énergie de repolarisation. Nous allons donc ajouter deux paramètres au suivi temporel : une valeur proportionnelle à l'énergie du complexe QRS et une valeur proportionnelle à celle de l'onde T.

Dans un premier temps, il convient de prendre en compte la ligne de base aux abords du complexe QRS et de l'onde T. De plus, l'amplitude du signal cardiaque s'exprimant en mV, il convient d'intégrer cette amplitude au carré afin d'obtenir une quantité proportionnelle à une énergie. Nous quantifierons également la surface de chacune des ondes et complexes. Commençons par l'onde T.

Nous considérons que la ligne de base $L_T(t)$ aux abords de l'onde T est un segment de droite reliant l'amplitude $\breve{x}(T_{début})$ du début de l'onde T à l'amplitude $\breve{x}(T_{fin})$ de la fin de l'onde T. Alors :

$$L_T(t) = \frac{\breve{x}(T_{fin}) - \breve{x}(T_{début})}{T_{fin} - T_{début}} te + \frac{\breve{x}(T_{début})T_{fin} - \breve{x}(T_{fin})T_{début}}{T_{fin} - T_{début}}$$

Nous quantifions l'aire A_T de l'onde T, comprise entre le signal cardiaque et la ligne de base, soit :

$$A_T = \int_{T_{début}}^{T_{fin}} \left| \breve{x}(t) - L_T(t) \right| dt$$

et l'énergie E_T de repolarisation :

$$E_T = \int_{T_{début}}^{T_{fin}} \left(\breve{x}(t) - L_T(t) \right)^2 dt$$

En ce qui concerne le complexe QRS, nous définissons la ligne de base autour du complexe QRS comme :

$$L_{QRS}(t) = \frac{\breve{x}(QRS_{fin}) - \breve{x}(QRS_{début})}{QRS_{fin} - QRS_{début}} t + \frac{\breve{x}(QRS_{début})QRS_{fin} - \breve{x}(QRS_{fin})QRS_{début}}{QRS_{fin} - QRS_{début}}$$

et calculons l'aire A_{QRS} du complexe QRS :

$$A_{QRS} = \int_{QRS_{début}}^{QRS_{fin}} \left| \breve{x}(t) - L_{QRS}(t) \right| dt$$

ainsi que l'énergie E_{QRS} de dépolarisation :

$$E_{QRS} = \int_{QRS_{début}}^{QRS_{fin}} \left(\breve{x}(t) - L_{QRS}(t) \right)^2 dt$$

La figure V.32 montre, pour un battement, le début et la fin du complexe QRS et de l'onde T sur le graphique supérieur. Le graphique du milieu montre la valeur absolue du signal cardiaque dont nous avons retranché la ligne de base de l'onde considérée, et le graphique inférieur montre la différence au carré entre le signal cardiaque et la ligne de base.

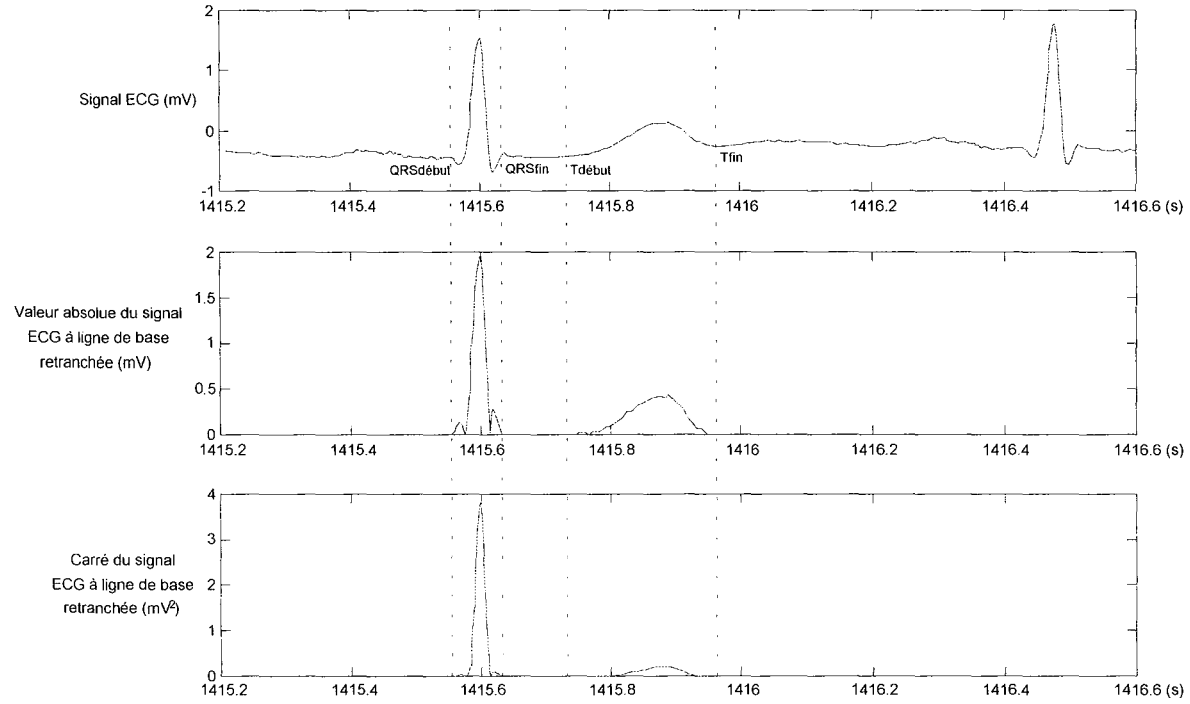


Figure V.32 : surface et énergie du complexe QRS et de l'onde T (ECG103)

Le tableau suivant donne les valeurs des surfaces et énergies calculées sur le battement présenté ci-dessus.

	Complexe QRS	Onde T
Surface (mV.s)	0,0453	0,0415
Energie (mV^2.s)	0,0621	0,0133

Les quatre valeurs de surface et énergie du complexe QRS et de l'onde T, tout comme les divers intervalles et amplitude liés à l'onde T, seront suivies au cours du temps dans le chapitre 6.

IV.4. Détection de l'onde P

L'onde P correspond à la dépolarisation de l'oreillette qui déclenchera la dépolarisation du ventricule (complexe QRS). L'onde P est souvent de faible amplitude et il est difficile de déterminer avec précision ses instants de début et de fin. Nous avons vu dans le paragraphe des généralités sur le cœur que si le noeud sinusal ne générait pas d'impulsion, celle-ci peut être générée ailleurs et déclencher la dépolarisation du ventricule. Ainsi, un complexe QRS survient mais aucune onde P n'est apparue. Par conséquent, il peut être préférable de déterminer s'il y a présence ou absence de l'onde P plutôt que de connaître avec exactitude son instant d'apparition. Nous nous intéressons donc dans ce paragraphe à la détection de la présence de l'onde P avant un complexe QRS.

L'état de l'art des méthodes de détection de l'onde P ayant été établi en même temps que celui sur les ondes T, nous rappelons ici que la majorité des méthodes utilise un seuillage sur la dérivée du signal ECG. Cela permet l'extraction du début et de la fin de l'onde T.

IV.4.a. Description de la méthode

L'onde P, si elle existe, se situe entre la fin de l'onde T du battement précédent et le début du complexe QRS du battement courant. Par conséquent, cet intervalle de temps définit la fenêtre de recherche pour la détection de la présence de l'onde P.

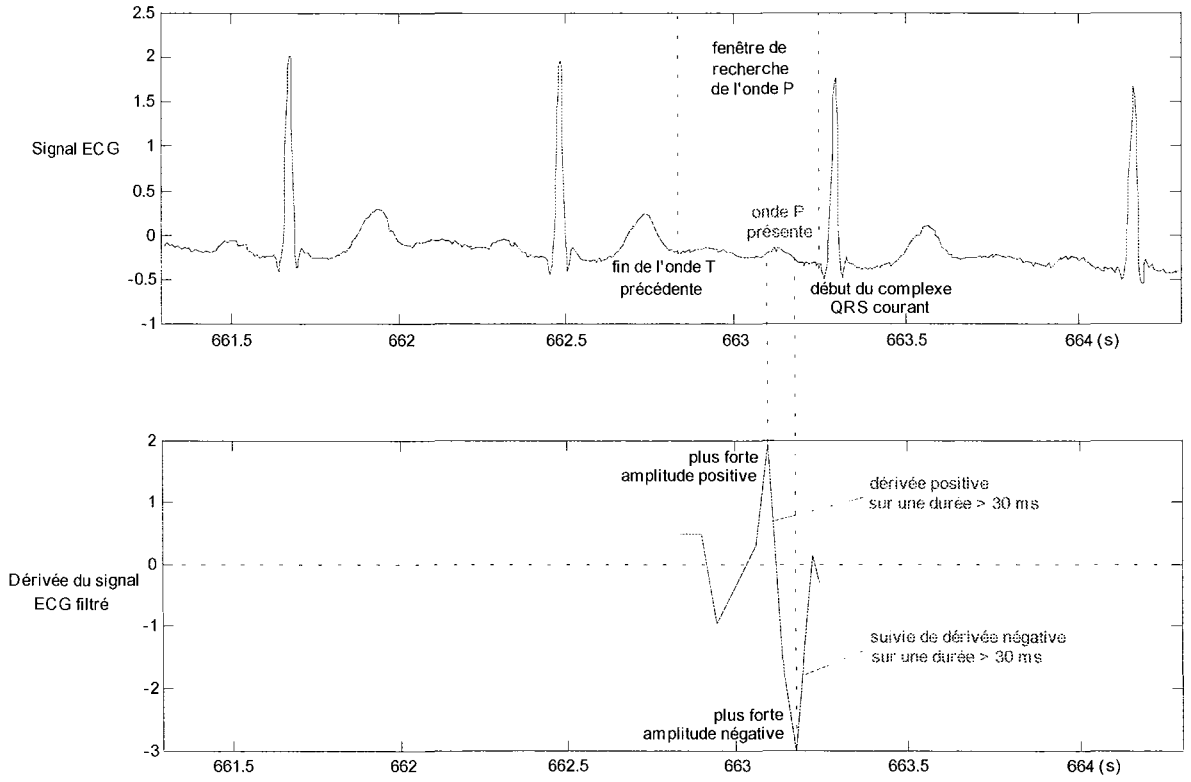


Figure V.33 : détection de la présence ou de l'absence de l'onde P (ECG103)

L'onde P ayant des composantes basses fréquences, il convient de filtrer le signal ECG par un filtrage passe-bas de manière à atténuer le bruit et obtenir ainsi les fluctuations lentes de l'onde. Nous utilisons un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 2 et de fréquence de coupure de 15 Hz. Puis nous dérivons ce signal filtré afin de recueillir ses variations. L'onde P est normalement constituée d'une partie montante suivie d'une partie descendante dont la durée globale est de l'ordre de 120 ms. Afin de ne pas fixer une contrainte temporelle trop importante, nous détecterons une onde P lorsque la dérivée du signal filtré sera positive pendant au moins 30 ms, puis négative pendant au moins 30 ms. Si cette condition n'est pas satisfaite, nous ne détecterons pas de présence de l'onde P, ce qui ne voudra pas forcement

dire que l'onde P ne sera effectivement pas présente. En effet, il se peut que l'onde soit d'amplitude trop faible, de durée trop courte, ou qu'elle soit déformée. La figure V.33 montre les étapes de détection de l'onde P d'un battement cardiaque.
Ainsi, nous savons si le complexe QRS a été déclenché suite à une onde P, grâce à la présence ou à l'absence de l'onde P.

IV.5. Conclusion

Dans cette partie, nous avons déterminé divers instants caractéristiques comme le début et la fin des complexes QRS et des ondes T ainsi que le sommet de l'onde T, l'amplitude du complexe QRS et de l'onde T, la surface et l'énergie du complexe QRS et de l'onde T, la présence de l'onde P. La base de données du MIT est correctement annotée pour l'instant d'occurrence et le type de complexe QRS, mais aucune information n'est fournie sur les ondes P et T. Il n'est donc pas possible d'exposer de résultats comparatifs sous forme de performances comme nous l'avions fait pour les complexes QRS. Associées au rythme cardiaque (intervalle RR), tous les paramètres déterminés ici servirons à la quantification de divers intervalles de temps et informations dont nous suivrons l'évolution au cours du temps tout au long de l'ECG.

V. Synthèse sur la détection du complexe QRS et des ondes P et T

Nous avons vu dans ce chapitre la détection des complexes QRS déterminant le rythme cardiaque, puis la détection des ondes P et T avec les différents instants et amplitudes se rattachant à ces ondes et complexes. Rappelons que tous les traitement effectués sur les signaux ECG étaient issus des outils de traitement des signaux échantillonnés à pas variable.
L'ensemble de ces détections permettra par la suite dans le chapitre 6, de suivre l'évolution au cours du temps de différents paramètres, intervalles de temps et informations sur les ECG, dans un but de fusionner toutes ces données et obtenir une interprétation en terme d'arythmie.

Chapitre VI

Extraction et suivi temporel de paramètres cardiaques

"Savoir que l'on sait ce que l'on sait, et savoir que l'on ne sait pas ce que l'on ne sait pas : voilà la véritable science."
DOCTRINE ; LE LUN-YU

Kung Fu Tse, dit CONFUCIUS (551-479 avant J.-C., Chine)

CHAPITRE 6. EXTRACTION ET SUIVI TEMPOREL DE PARAMÈTRES CARDIAQUES 171

I. OBJECTIF 173

II. EVOLUTION TEMPORELLE DES PARAMÈTRES DE L'ECG 173

II.1. Définition des paramètres 173

II.2. Suivi des paramètres au cours du temps 176

II.3. Synthèse sur l'évolution des paramètres 188

III. ANALYSE DE L'ECG PAR CORRÉLATIONS ET DÉCOMPOSITIONS 188

III.1. Stationnarité des cycles de l'ECG 188

III.2. Choix de l'intervalle de travail 189

III.3. Normalisation en temps 190

III.4. Normalisation en amplitude 191

III.5. Construction des signaux de référence 192

III.6. Corrélation 194

III.7. Décomposition d'un battement 194

III.8. Décomposition des battements d'un ECG 197

III.9. Synthèse sur la décomposition 201

IV. SYNTHÈSE SUR LE SUIVI TEMPOREL DES PARAMÈTRES CARDIAQUES 201

I. Objectif

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir l'évolution au cours du temps de plusieurs paramètres issus des diverses extractions de caractéristiques sur l'ECG. A partir des détections d'ondes effectuées dans le chapitre précédent, nous commencerons par définir les paramètres (temps, amplitude, surface, énergie, présence, type) intéressants à surveiller et nous analyserons leurs évolutions. Dans un deuxième temps, nous expliciterons une méthode de décomposition de chaque battement cardiaque sur une base composée d'un battement normal et d'un battement de chacune des arythmies couramment rencontrées dans les électrocardiogrammes. Une suite logique au suivi de ces paramètres serait la fusion de l'ensemble de ces paramètres afin d'interpréter, en termes d'arythmie, chaque battement cardiaque.

II. Evolution temporelle des paramètres de l'ECG

A partir des caractéristiques détectées sur les ondes des ECG échantillonnés à pas variable dans le chapitre 5, nous allons maintenant établir une liste de paramètres et informations dont nous suivrons l'évolution au cours du temps. Puis, nous établirons quelques corrélations entre les paramètres et les arythmies rencontrées.

II.1. Définition des paramètres

L'évolution de divers intervalles de temps comme l'intervalle RR et l'intervalle QT est très largement utilisée dans le monitoring cardiaque [Pahlm, 1984], [Pan, 1985]. En ce qui concerne l'intervalle RR, son évolution permet de suivre au cours du temps le rythme cardiaque. Le suivi de ce paramètre est le plus important et il est déterminé cycle après cycle. Pour ce qui est de l'intervalle QT, il est généralement analysé sur un cycle cardiaque moyen issu de la moyenne de plusieurs cycles cardiaques sur un intervalle de temps donné. L'inconvénient de cette analyse réside dans le manque à la détection et à la prise en compte d'une anomalie, lorsque celle-ci est ponctuelle en n'intervenant que sur un battement. Le fait de moyenner les signaux inhibe l'anomalie qui n'est alors pas détectée. Seules les anomalies répétées sur plusieurs cycles le sont. Il est donc important de suivre l'évolution des paramètres cycle après cycle, bien que ceux-ci ne soient pas toujours quantifiables.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, nous détectons alors le début et la fin des complexes QRS et des ondes T lorsque cela est possible, ainsi que le sommet de l'onde T et sa forme (normale, inversée, montante, descendante, absente). A partir de la détection de ces

différents instants caractéristiques de chacune des ondes de l'ECG, nous pouvons quantifier les intervalles de temps suivants :

- RR : intervalle de temps entre deux battement consécutifs, inversement proportionnel au rythme cardiaque en battements par minute (bpm)
- QT : intervalle comprenant la dépolarisation puis la repolarisation des ventricules
- QT' : modification de l'intervalle QT lorsque la fin de l'onde T n'est pas disponible
- RT : modification de l'intervalle QT lorsque le début du complexe QRS n'est pas disponible
- RT' : modification de l'intervalle QT lorsque le début du complexe QRS et la fin de l'onde T ne sont pas disponibles
- ST : intervalle de temps entre la fin de la dépolarisation totale des ventricules et le début de leur repolarisation

Les intervalles de temps sont exprimés en secondes hormis l'intervalle RR que nous transformons en rythme cardiaque exprimé en battements par minute.

Ayant détecter le complexe QRS et l'onde T dans leur globalité, nous pouvons déterminer leur amplitude respective exprimée en mV et ainsi obtenir deux paramètres supplémentaires :

- amplitude du complexe QRS
- amplitude de l'onde T

A ces paramètres temporels et d'amplitudes, nous ajoutons la forme de l'onde T obtenue par analyse morphologique, ainsi que la présence de l'onde P. Soit :

- forme de l'onde T
- présence de l'onde P

De plus, lorsque le complexe QRS et l'onde T sont correctement délimités, il peut être intéressant de quantifier la surface comprise entre l'ECG et la ligne de base dans l'intervalle de temps considéré par le complexe QRS ou l'onde T. Nous obtenons alors les deux paramètres de surface suivants :

- surface du complexe QRS
- surface de l'onde T

Enfin, si nous élevons au carré le signal électrocardiographique et que nous estimons la surface comme précédemment, les quantités recueillies sont alors proportionnelles à des énergies. En effet, l'énergie s'exprime en [W.s] soit encore en $[V^2.\Omega^{-1}.s]$, et la surface engendrée par l'élévation au carré du signal ECG s'exprime en $[V^2.s]$. Le coefficient de

proportionnalité est en fait l'inverse de la résistance électrique moyenne du corps humain entre les électrodes recueillant la différence de potentielle de la dérivation considérée de l'ECG. La résistance électrique moyenne du corps est de l'ordre de 1 kΩ, mais elle peut varier de 200 Ω à 2 kΩ. Nous quantifions alors l'énergie (en fait, une quantité proportionnelle à une énergie, exprimée en [V^2.s]) du complexe QRS et de l'onde T, à savoir :

- énergie du complexe QRS
- énergie de l'onde T

La première quantité est représentative de l'énergie de dépolarisation des ventricules, tandis que la deuxième quantité est représentative de l'énergie de repolarisation des ventricules.

En prenant le même raisonnement, les surfaces des complexes QRS et des ondes T correspondent à des quantités proportionnelles à des quantités d'électricité exprimées en Coulomb.

La figure VI.1 regroupe les différents paramètres venant d'être décrits.

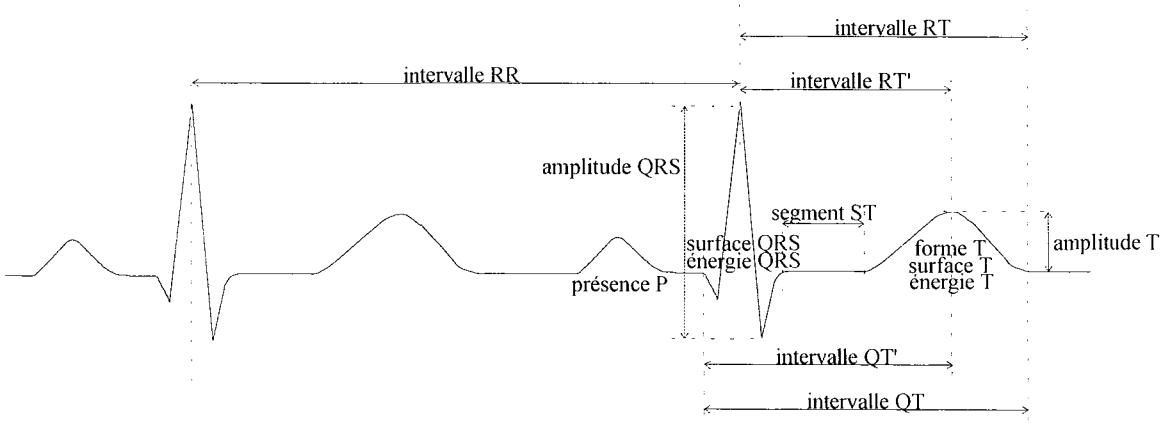


Figure VI.1 : paramètres extraits sur chaque cycle cardiaque

Ainsi, quatorze paramètres (intervalles RR, QT, QT', RT, RT', ST, amplitude du complexe QRS, amplitude de l'onde T, forme de l'onde T, présence de l'onde P, surface du complexe QRS, surface de l'onde T, énergie du complexe QRS, énergie de l'onde T) sont quantifiables pour chaque cycle cardiaque.

La figure VI.2 regroupe l'ensemble des étapes nécessaires à l'obtention de tous ces paramètres.

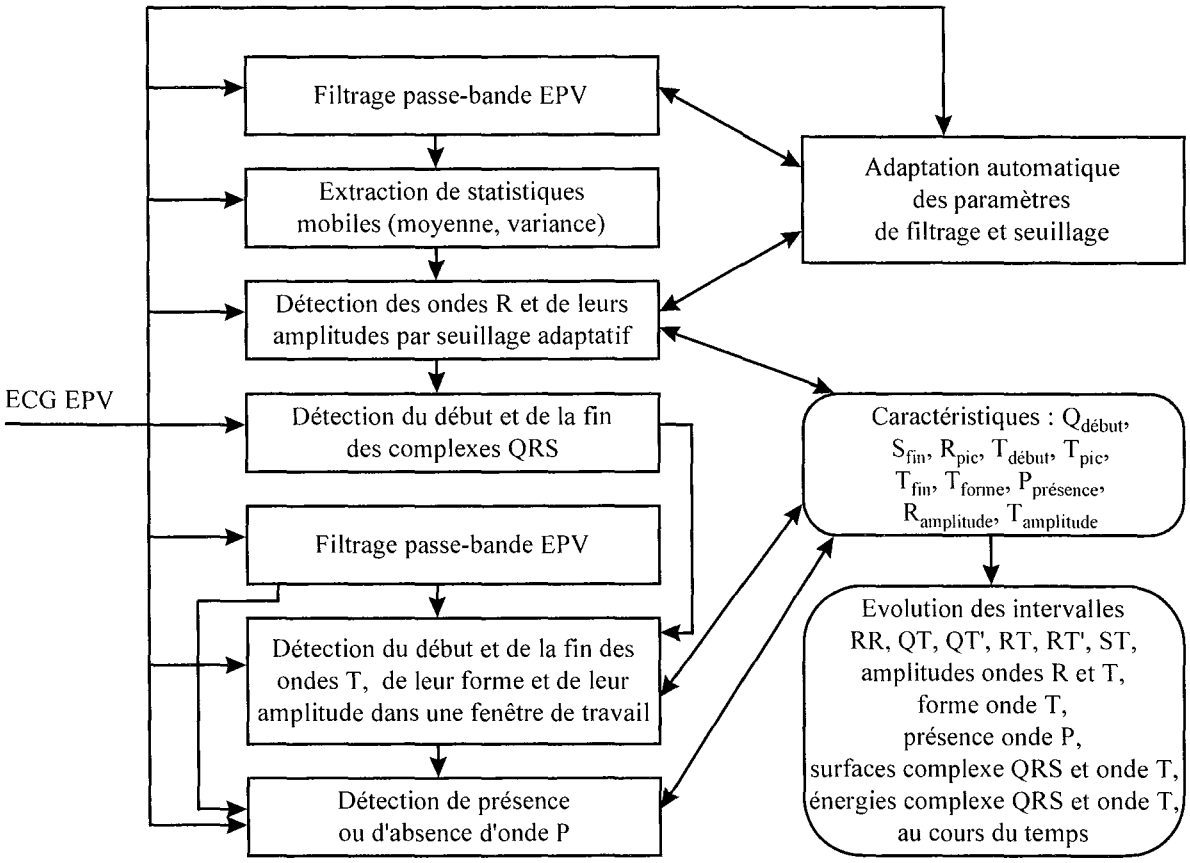


Figure VI.2 : algorithme d'obtention des paramètres

Un filtrage passe-bande EPV met en évidence les complexes QRS tout en atténuant les perturbations. Des statistiques de moyennes et variances mobiles EPV permettent la détection des complexes QRS par seuillage autoadaptatif. Après un autre filtrage passe-bande EPV, les ondes T et leurs formes sont détectées dans une fenêtre de travail selon le principe morphologique [Algra, 1987] [Laguna, 1990] [Speranza, 1993] en l'adaptant à des signaux échantillonnés à pas variable. Il en est de même pour la détection de la présence ou de l'absence de l'onde P. A l'issu de ces traitements, nous recueillons les instants caractéristiques du cycle cardiaque et calculons les paramètres précédemment énumérés.

II.2. Suivi des paramètres au cours du temps

Nous allons montrer, dans cette partie, l'évolution des paramètres au cours du temps sur des ECG de la base de données du MIT. Il est évident que tous les ECG ne peuvent pas être exposés ici, et c'est pourquoi nous nous limiterons à cinq extraits. Nous remarquerons que certains paramètres sont sensibles à certaines arythmies, d'autres n'apportent que peu d'intérêt, ou encore sont redondants. Néanmoins, une plus large étude des fluctuations de ces

paramètres permettrait de mieux mettre en évidence le degré d'importance de chaque paramètre à être significatif de telle ou telle arythmie.

Les figures de chacun des cinq exemples qui vont suivre sont toutes organisées de la même manière, à savoir :

- 1er graphique : intervalle RR exprimé en bpm, donnant le rythme cardiaque.
- 2ème au 5ème graphiques : intervalles RT, RT', QT, et segment ST exprimés en secondes. Comme nous l'avons déjà explicité, l'intervalle QT est quantifié lorsque les ondes sont correctement définies, sinon l'intervalle RT' donne une approximation (forcément plus faible) de l'intervalle QT. Nous avons représenté également l'intervalle RT alors que nous avons éliminé l'intervalle QT' ; ces deux intervalles étant à mi-distance entre RT' et QT.
- 6ème et 7ème graphiques : amplitudes du complexe QRS et de l'onde T, exprimées en mV.
- 8ème graphique : un point '•' représente la présence ou l'absence de l'onde P du cycle cardiaque à l'instant d'occurrence du complexe QRS. Nous rappelons qu'une absence d'onde P peut signifier que celle-ci est trop faible pour être détectée, ou mal formée. A l'inverse, sa présence peut être provoquée par une fluctuation particulière de la ligne de base.
- 9ème graphique : un point '•' représente la morphologie de l'onde T si celle-ci a correctement été détectée. Les ondes T peuvent avoir la forme normale, inversée, montante, descendante, absente. En revanche, même si la forme de l'onde a été classée, il se peut très bien que ses instants caractéristiques aient mal été quantifiés, et les calculs en découlant seront par conséquent altérés.
- 10ème et 11ème graphiques : surface et énergie des complexes QRS. La surface est exprimée en [V.s], et la quantité proportionnelle à une énergie est exprimée en [V^2.s]. Certains complexes plus étroits ou dont les instants caractéristiques sont difficilement détectables, voient leur surface et/ou énergie chuter par rapport à la moyenne.
- 12ème et 13ème graphiques : surface et énergie des ondes T. La surface est exprimée en [V.s], et la quantité proportionnelle à une énergie est exprimée en [V^2.s].

Les signaux tracés sur les graphiques 1 à 13 ont été générés par les algorithmes de détection des complexes QRS, ondes P et T sur des ECG échantillonnés à pas variable. Seuls les trois signaux suivants (graphiques 14 à 16) sont issus de la base de données du MIT dont les cycles cardiaques ont été annotés par des experts.

- 14ème graphique : rythme cardiaque du MIT en bpm.

- 15ème graphique : chaque point '•' représente le type de chaque cycle cardiaque en terme d'arythmies.
- 16ème graphique : électrocardiogramme sur lequel sont effectuées les détections et analyses précédentes. Nous y avons superposé, en symbole '+', les complexes QRS que nous avons détectés.

Notons que la base de temps de tous les signaux est exprimée en secondes. Nous allons à présent exposer les cinq cas d'évolution de paramètres. Nous y ajouterons quelques statistiques sur certains paramètres et essayerons de trouver des analogies entre les paramètres et les arythmies.

II.2.a. Premier cas de suivi de paramètres

La figure VI.3 présente le suivi des paramètres de l'ECG113 entre les instants 250 s et 300 s. Ce patient ne comporte que des cycles normaux. Néanmoins, l'intervalle RR fluctue périodiquement entre 49 bpm et 67 bpm ; il en est de même pour l'amplitude de l'onde R. Ceci est dû à une arythmie sinusale où le rythme cardiaque est influencé par la respiration. Sur l'ECG, il n'est pas aisé de distinguer la présence des ondes P ; ceci se retrouve par quelques absences d'ondes P, ce qui n'est pas le cas en réalité. Les ondes T sont clairement visibles et leur forme est normale. L'énergie du complexe QRS est supérieure à celle de l'onde T, hormis pour deux artefacts sans doute dus à une mauvaise estimation des instants délimitant les complexes.

Le tableau VI.1 regroupe les statistiques de minimum, maximum, moyenne et écart type de quelques-uns des paramètres sur l'intervalle de temps ayant servi à l'analyse.

	minimum	maximum	moyenne	écart type
RR MIT (bpm)	49,8	67,0	57,8	1,93
RR (bpm)	49,7	67,2	57,8	1,94
RT' (s)	0,283	0,350	0,322	0,116
QT (s)	0,408	0,506	0,452	0,142
ST (s)	0,028	0,191	0,142	0,165
Amplitude QRS (mV)	1,58	2,79	2,52	0,48
Amplitude T (mV)	0,88	1,17	1,03	0,26
Energie QRS (mV^2.s)	0,00709	0,10748	0,08184	0,14550
Energie T (mV^2.s)	0,04710	0,08893	0,07059	0,09884

Tableau VI.1 : statistiques des paramètres de l'ECG 113

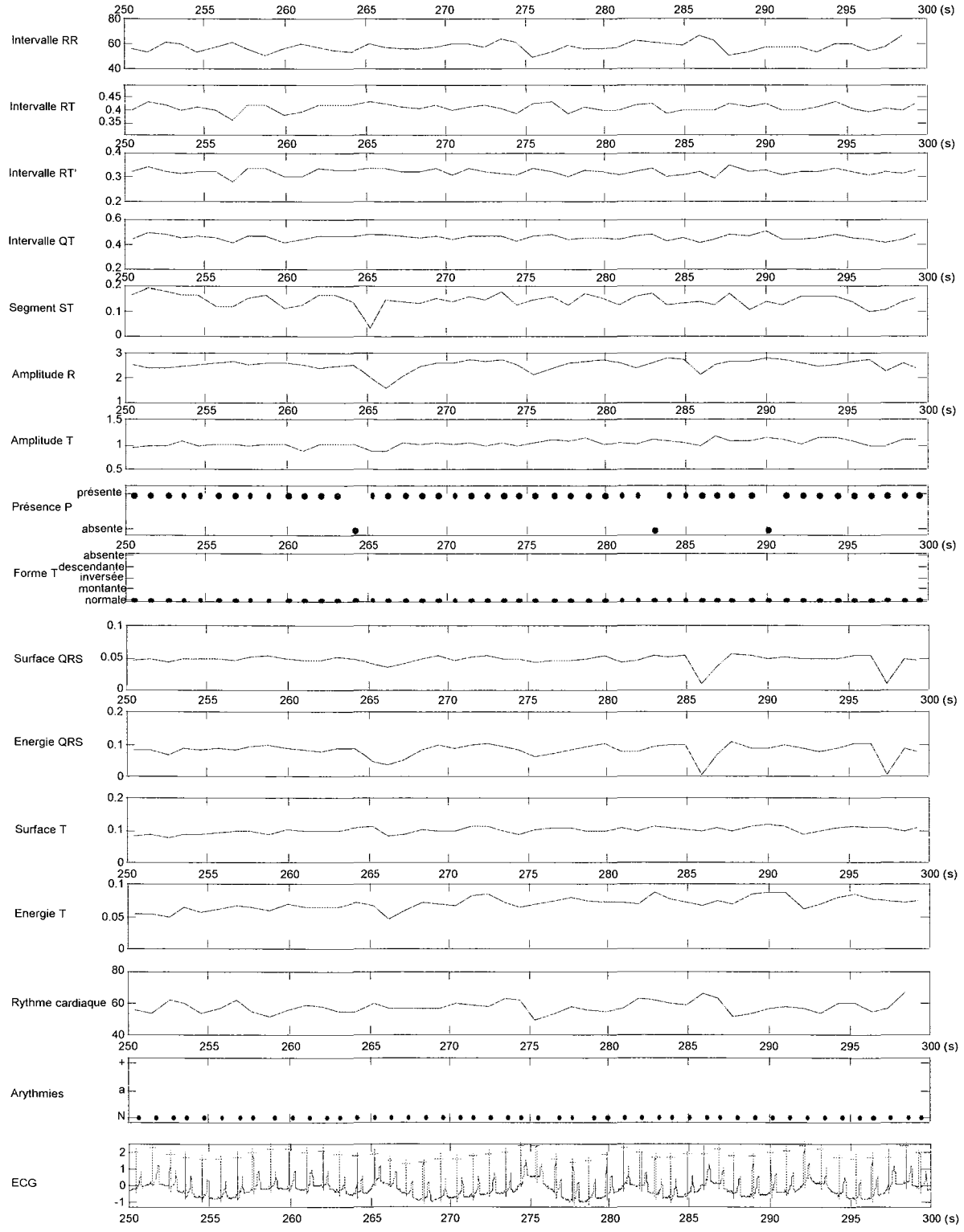


Figure VI.3 : évolution des paramètres de l'ECG 113

II.2.b. Deuxième cas de suivi de paramètres

La figure VI.4 présente le suivi des paramètres de l'ECG202 entre les instants 1550 s et 1570 s. Ici, le rythme cardiaque est élevé, de l'ordre de 130 bpm : le patient présente une tachycardie auriculaire. Hormis ce rythme élevé, notons la présence d'ondes T inversées dont certaines ne peuvent être détectées (cinq absences). Sur d'autres ondes T inversées, les instants caractéristiques de l'onde ne sont pas correctement quantifiés ce qui annule leurs surfaces et énergies. Il en est de même pour certains complexes QRS. La forme des ondes T et l'enchaînement rapide des ondes P provoquent deux absences d'ondes P non justifiées. Enfin, notons qu'en absence d'onde T, les intervalles de temps RT, QT et ST ne sont pas quantifiés, mais que l'extremum local dans l'intervalle de recherche de l'onde T permet d'estimer l'intervalle RT'. De plus l'intervalle ST semble presque nulle du fait de l'enchaînement direct entre les complexes QRS et les ondes T.

Le tableau VI.2 regroupe les statistiques de quelques paramètres sur l'intervalle de temps ayant servi à l'analyse.

	minimum	maximum	moyenne	écart type
RR MIT (bpm)	124,8	144,9	134,3	2,23
RR (bpm)	124,7	144,9	134,3	2,240
RT' (s)	0,050	0,180	0,147	0,173
QT (s)	0,297	0,433	0,352	0,167
ST (s)	0	0,017	0,009	0,019
Amplitude QRS (mV)	1,29	1,65	1,46	0,296
Amplitude T (mV)	0,155	0,312	0,204	0,188
Energie QRS (mV^2.s)	0,0352	0,0639	0,0505	0,0815
Energie T (mV^2.s)	0,0011	0,2339	0,1338	0,2479

Tableau VI.2 : statistiques des paramètres de l'ECG 202

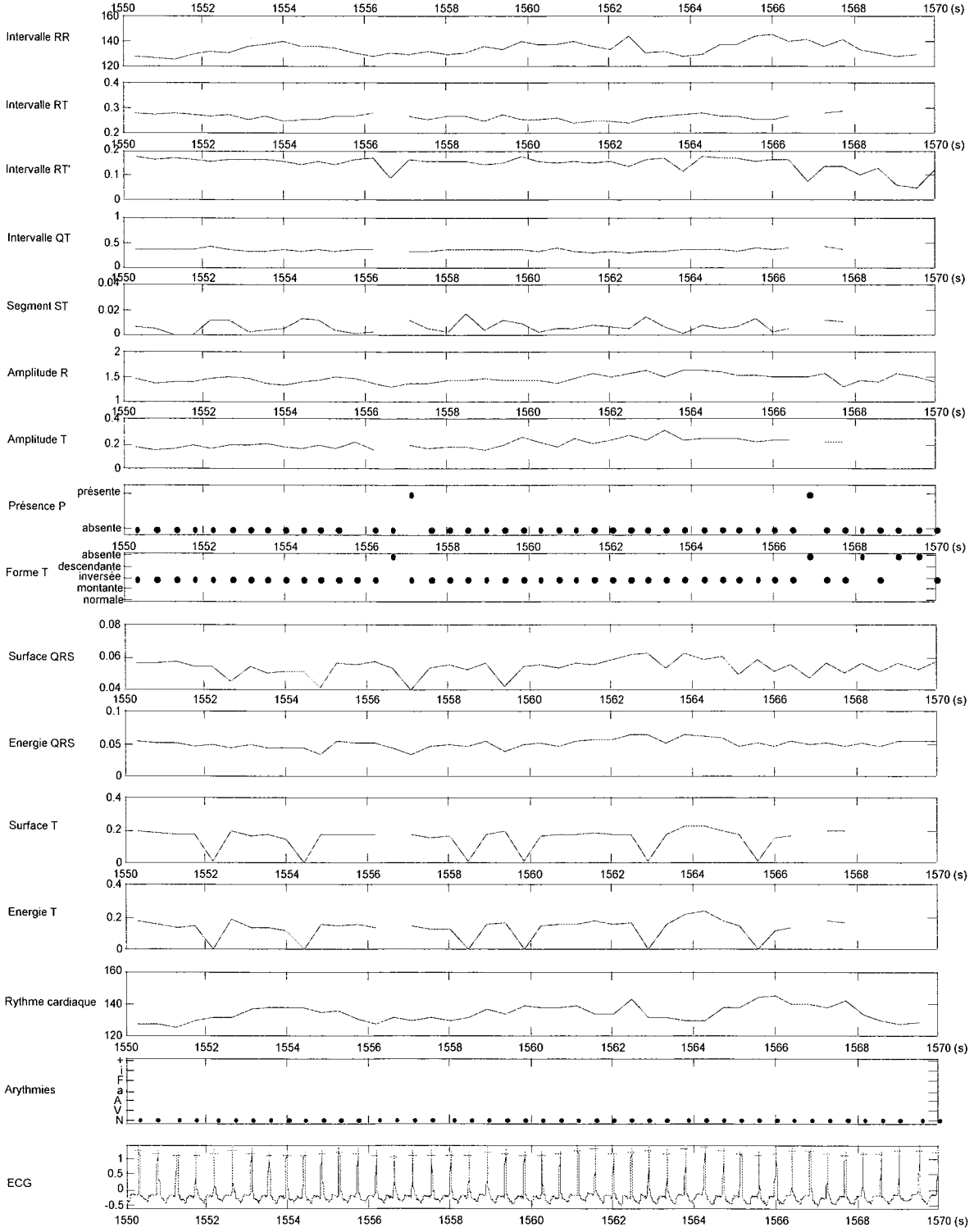


Figure VI.4 : évolution des paramètres de l'ECG 202

II.2.c. Troisième cas de suivi de paramètres

La figure VI.5 présente le suivi des paramètres de l'ECG232 entre les instants 10 s et 20 s. Le rythme cardiaque de cet ECG est en deux temps : proche de 100 bpm par moments, et inférieur à 40 bpm à d'autres moments. En moyenne, le rythme est normal à 70 bpm. Ceci est dû à des battement auriculaires prématurés où l'onde P est déclenchée plus tôt que la normale (arythmie de type 'A'). Lors d'une arythmie de type 'R', l'onde P est détectée présente, mais ceci n'est pas le cas pour les arythmies de type 'A' : l'onde P, bien que présente, est soit noyée dans le bruit, soit superposée à l'onde T précédente. La forme des ondes T est détectée comme normale mais le bruit ne permet pas la détermination correcte de ses instants caractéristiques ; les surfaces et énergies ne sont donc pas représentatives. Les intervalles de temps sont, quant à eux, quasiment constants.

Le tableau VI.3 regroupe les statistiques de quelques paramètres sur l'intervalle de temps ayant servi à l'analyse.

	minimum	maximum	moyenne	écart type
RR MIT (bpm)	34,4	90,3	69,7	5,08
RR (bpm)	34,5	90,3	69,7	5,08
RT' (s)	0,273	0,497	0,327	0,281
QT (s)	0,386	0,652	0,476	0,274
ST (s)	0,017	0,406	0,180	0,336
Amplitude QRS (mV)	0,67	0,95	0,82	0,32
Amplitude T (mV)	0,004	0,251	0,163	0,308
Energie QRS ($mV^2.s$)	0,0045	0,0094	0,0066	0,0384
Energie T ($mV^2.s$)	0,0001	0,0207	0,0040	0,0780

Tableau VI.3 : statistiques des paramètres de l'ECG 232

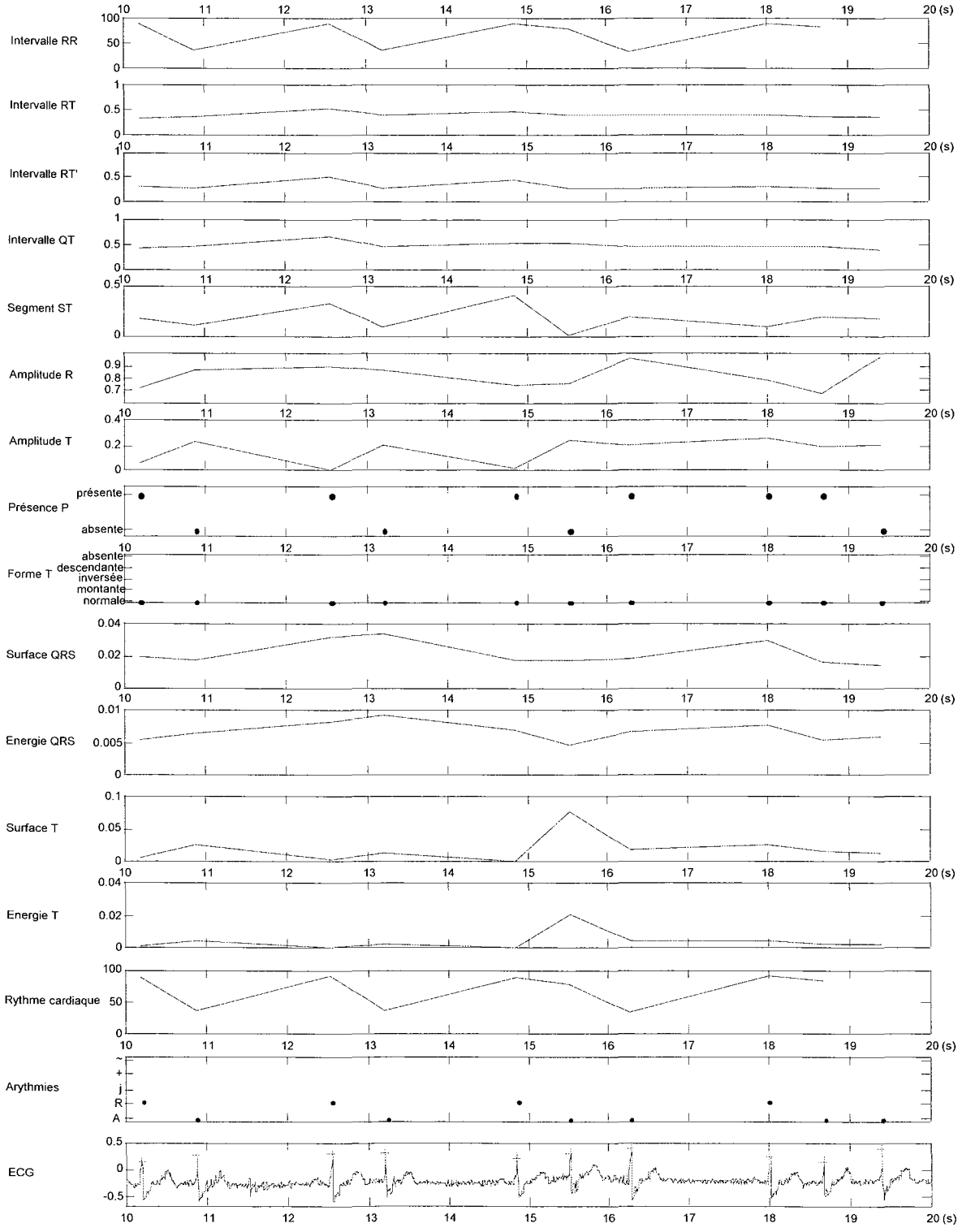


Figure VI.5 : évolution des paramètres de l'ECG 232

II.2.d. Quatrième cas de suivi de paramètres

La figure VI.6 présente le suivi des paramètres de l'ECG231 entre les instants 90 s et 110 s. Le rythme cardiaque commence à 70 bpm, puis oscille de 30 à 70 bpm pour se stabiliser à environ 30 bpm. En fait, dans cette dernière partie, le rythme aurait été double (et, par conséquent, normal) si les ondes P avaient toutes conduit à des complexes QRS, ce qui n'est pas le cas une fois sur deux (symboles " sur le graphique des arythmies, signifiant : onde P non conduite). De plus, nous remarquons que l'intervalle QT, tout comme les intervalles RT, RT' et ST, est de plus faible amplitude en présence de l'arythmie de type "R", qu'en présence de battements normaux. Les ondes P, T et les complexes QRS ont tous été détectés correctement, permettant le suivi des amplitudes, surfaces et énergies. Notons que l'amplitude de l'onde T a diminué lors du passage au battement normal. Enfin, l'énergie du complexe QRS est supérieure à celle de l'onde T.

Le tableau VI.4 regroupe les statistiques de quelques paramètres sur l'intervalle de temps ayant servi à l'analyse.

	minimum	maximum	moyenne	écart type
RR MIT (bpm)	34,2	69,0	47,0	3,93
RR (bpm)	34,1	68,8	46,9	3,94
RT' (s)	0,309	0,716	0,498	0,424
QT (s)	0,464	0,822	0,611	0,396
ST (s)	0,025	0,608	0,209	0,478
Amplitude QRS (mV)	2,0	2,6	2,2	0,37
Amplitude T (mV)	0,197	0,458	0,325	0,316
Energie QRS ($mV^2.s$)	0,0457	0,0571	0,0509	0,0573
Energie T ($mV^2.s$)	0,0012	0,0299	0,0158	0,1026

Tableau VI.4 : statistiques des paramètres de l'ECG 231

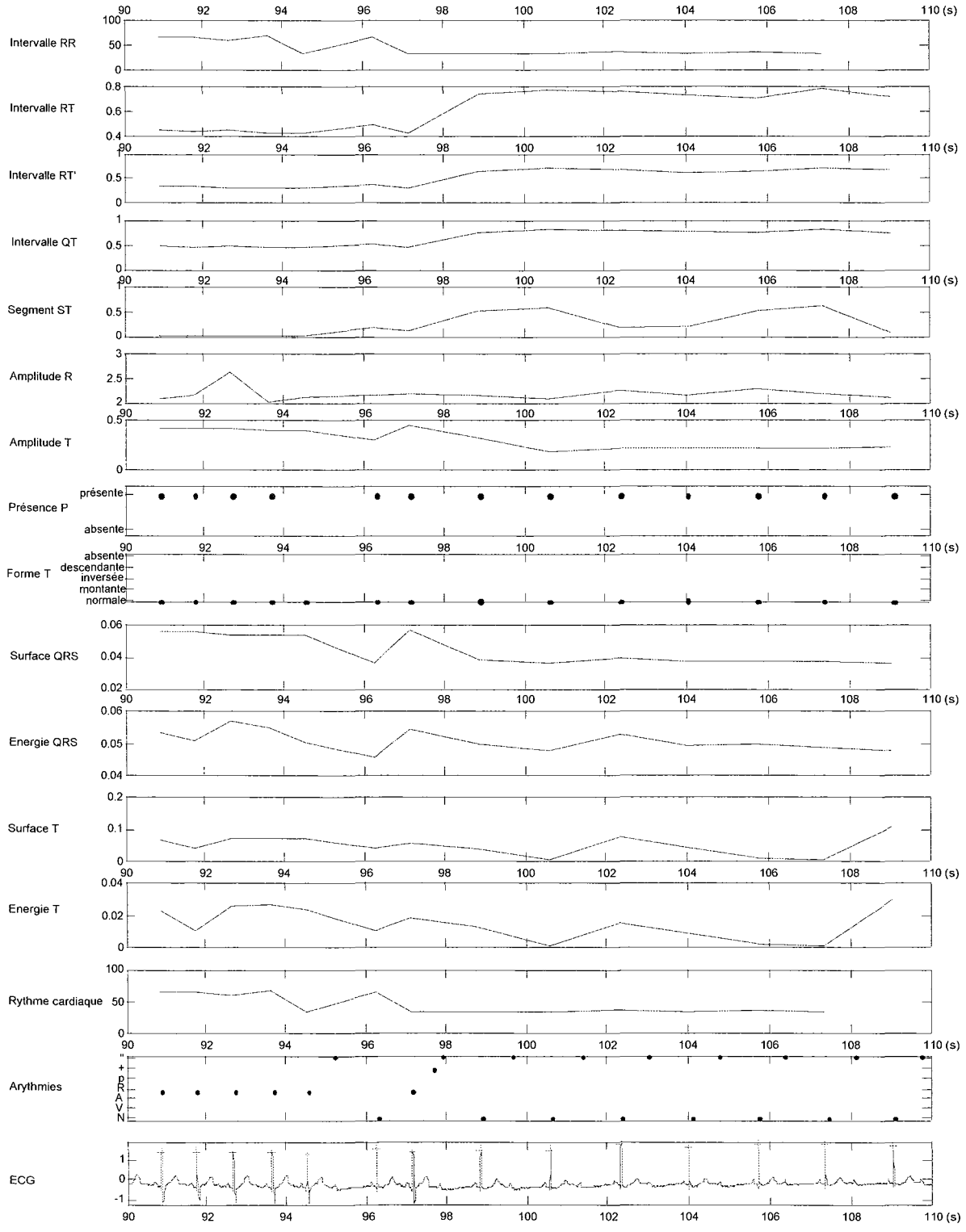


Figure VI.6 : évolution des paramètres de l'ECG 231

II.2.e. Cinquième cas de suivi de paramètres

La figure VI.7 présente le suivi des paramètres de l'ECG114 entre les instants 240 s et 280 s. Seuls quelques battements semblent augmenter momentanément le rythme cardiaque. Les intervalles de temps RT' et QT ont aussi fluctué aux abords de ces battements. Mais on remarque surtout que l'amplitude des ondes T passe de 0.1 mV à plus de 1 mV, entraînant par la même occasion un saut dans le suivi de la surface et de l'énergie de ces ondes T. Aussi, l'onde P est absente des battements où l'onde T est disproportionnée, alors que l'amplitude et l'énergie des complexes QRS semblent constantes. Ces fluctuations autour de l'onde T sont caractéristiques de battements ventriculaires prématurés (arythmie de type 'V'). Ceci pourra se confirmer par la décomposition des cycles cardiaques que nous verrons par la suite ; la forme d'un battement de type 'V' étant particulière. Nous avons vu ici l'importance de la détermination de l'amplitude des ondes ainsi que l'évaluation de leur énergie.

Le tableau VI.5 regroupe les statistiques de quelques paramètres sur l'intervalle de temps ayant servi à l'analyse.

	minimum	maximum	moyenne	écart type
RR MIT (bpm)	38,4	118	57,8	3,96
RR (bpm)	38,4	123	58,2	4,13
RT' (s)	0,253	0,344	0,299	0,146
QT (s)	0,369	0,619	0,499	0,233
ST (s)	0	0,206	0,117	0,219
Amplitude QRS (mV)	1,3	2,1	1,9	0,40
Amplitude T (mV)	0,073	1,132	0,294	0,557
Energie QRS ($mV^2.s$)	0,0595	0,1152	0,0818	0,1110
Energie T ($mV^2.s$)	0,0010	0,0918	0,0155	0,1701

Tableau VI.5 : statistiques des paramètres de l'ECG 114

Remarque :

Les valeurs estimées des intervalles de temps QT et RT' sont du même ordre de grandeur que celles exposées dans le chapitre 5 [Nollo et al., 1990 et 1992], [Speranza et al., 1993].

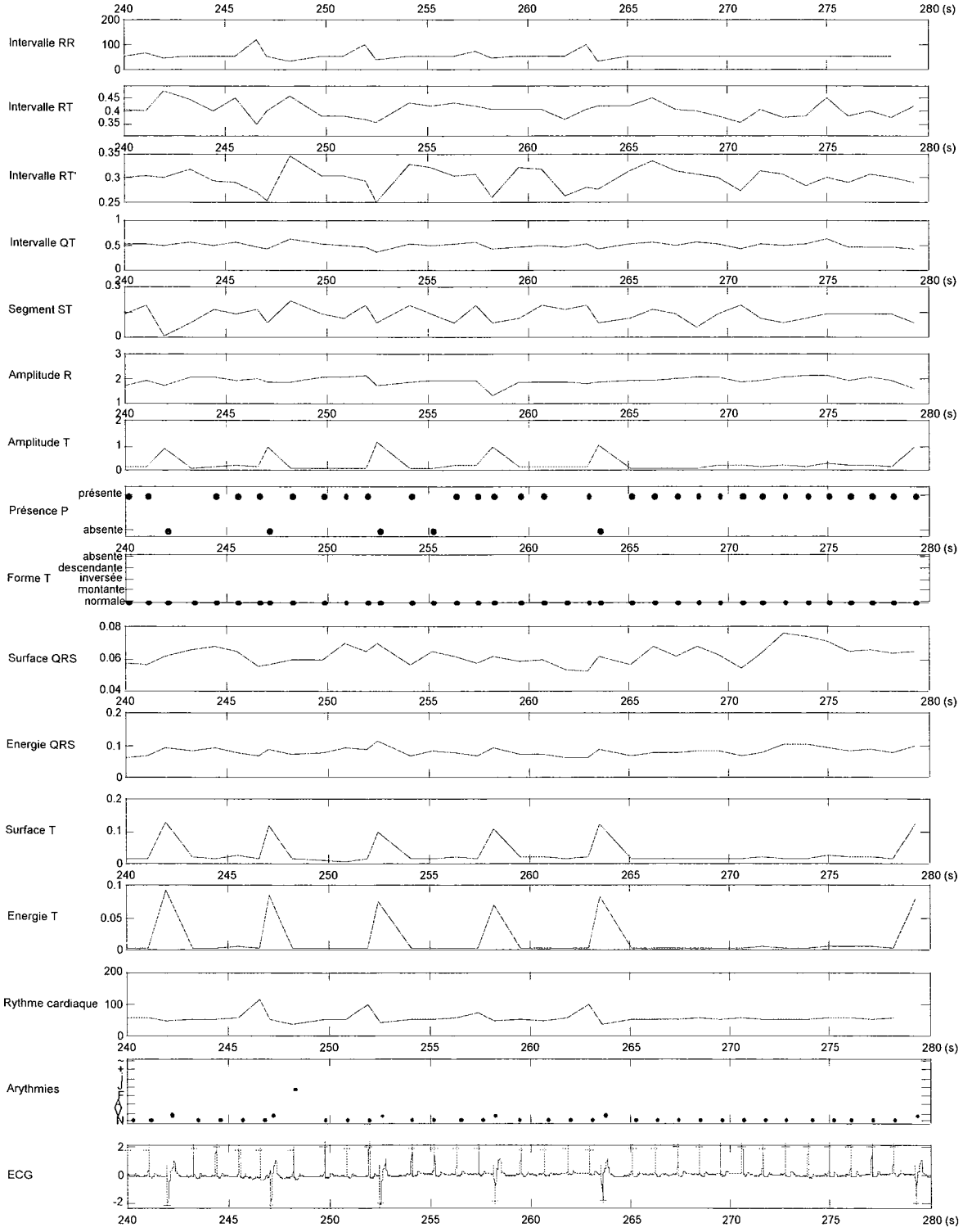


Figure VI.7 : évolution des paramètres de l'ECG 114

II.3. Synthèse sur l'évolution des paramètres

Les cinq cas étudiés nous ont permis de voir que certains paramètres comme les intervalles RR et QT peuvent être à la base de la détection de pathologies particulières, mais que les autres paramètres sont aussi très intéressants à prendre en compte. Ceci se confirme par l'étude de l'évolution des paramètres sur une trentaine d'ECG choisis parmi ceux ayant obtenus les meilleurs taux de bonne détection des complexes QRS.

Néanmoins, une étude exhaustive doit être menée sur un plus large nombre d'ECG afin de mieux mettre en évidence les paramètres caractéristiques de telle ou telle pathologie. Ainsi, une méthode de fusion pourrait donner le degré d'appartenance d'un cycle cardiaque à une arythmie. Mais avant d'évoquer une possible fusion de paramètres, examinons la décomposition de l'ECG échantillonné à pas variable sur des bases de différents battements.

III. Analyse de l'ECG par corrélations et décompositions

Dans cette deuxième partie, nous désirons décomposer chaque battement cardiaque sur une base comprenant la forme de chacune des arythmies. L'analyse des coefficients de la décomposition revient alors à identifier la forme de chaque cycle à une forme moyenne de référence d'un battement normal ou anormal. Ces coefficients compléteront la liste de paramètres établie précédemment. Pour ce faire, nous allons exposer la décomposition d'une manière générale, puis nous montrerons la décomposition d'un ECG EPV selon les bases que nous allons définir.

III.1. Stationnarité des cycles de l'ECG

A la vue du signal ECG, nous remarquons une certaine stationnarité de chaque cycle. En effet, l'activité électrique du cœur est répétitive et les ondes P, QRS et T se succèdent à la vitesse du rythme cardiaque. Ceci est valable aussi bien pour les battements normaux entre eux, que pour chaque type de battements anormaux. Si nous considérons comme origine le sommet du complexe QRS et que nous superposons une succession de deux intervalles RR consécutifs de battements sains, nous remarquons sur la figure VI.8 que l'ensemble des courbes forme une enveloppe englobant un cycle cardiaque moyen, malgré une certaine disparité dans la durée des intervalles RR et dans l'amplitude des ondes.

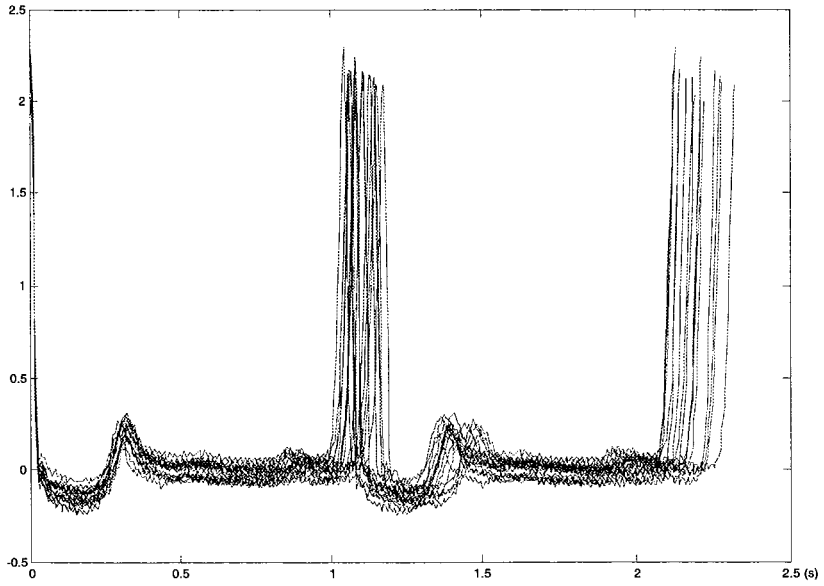


Figure VI.8 : stationnarité des cycles normaux de l'ECG

La figure VI.9 montre la même superposition, mais pour des battements ventriculaires prématurés.

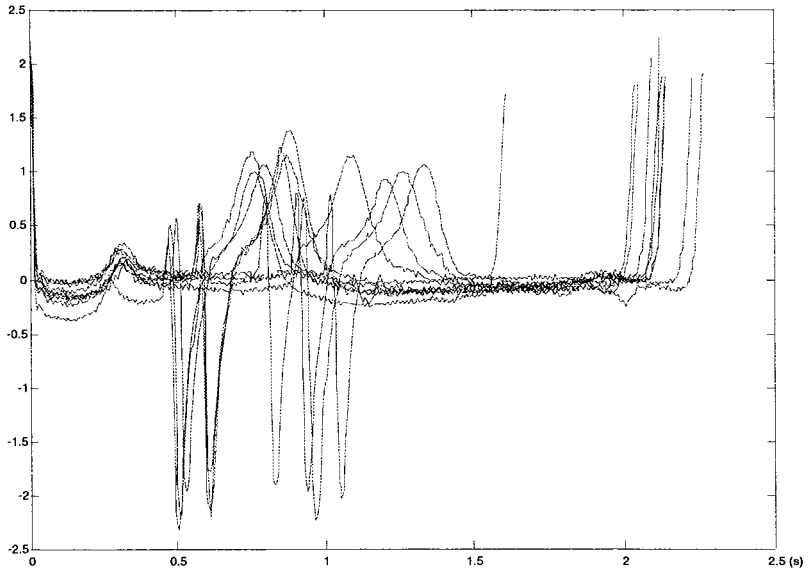


Figure VI.9 : stationnarité des cycles anormaux de l'ECG

Afin de comparer les cycles entre eux, nous allons commencer par normaliser en temps et amplitude chaque cycle cardiaque. Mais avant cela, choisissons un intervalle de travail sur lequel nous allons normaliser les cycles cardiaques.

III.2. Choix de l'intervalle de travail

Nous pouvons nous poser une question : comment définir le cycle cardiaque à normaliser ? En effet, un cycle cardiaque commence par l'onde P et se termine par l'onde T. Néanmoins, le

complexe QRS reste la première forme détectée dans l'ECG. Par conséquent, si nous considérons un cycle comme l'intervalle entre deux ondes R consécutives (intervalle RR), nous n'aurons en réalité que la fin d'un battement et le début du suivant (premier graphique de la figure VI.10). En revanche, si nous considérons un cycle comme l'intervalle entre trois ondes R consécutives (intervalle 2RR), nous aurons la fin d'un battement, le battement suivant en entier, et le début d'un troisième (deuxième graphique de la figure VI.10).

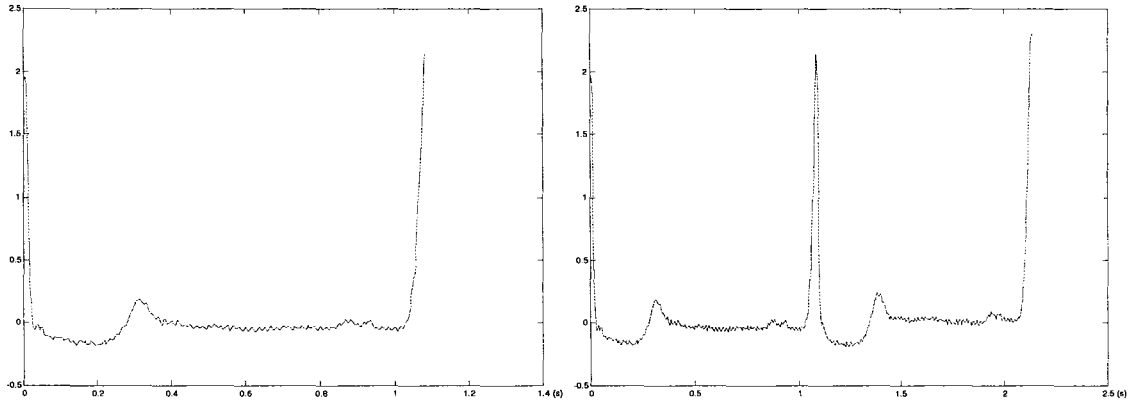


Figure VI.10 : intervalle RR, et intervalle 2RR

Par conséquent, nous normaliserons en temps et amplitude chacun des intervalles RR, puis nous les accolerons deux par deux afin d'étudier le cycle complet se trouvant dans l'intervalle 2RR normalisé.

III.3. Normalisation en temps

Soit $f(t)$ le signal ECG, et t_i l'instant d'apparition du sommet du $i^{ème}$ complexe QRS. Soit T l'intervalle de temps normalisé et $\tilde{t}_i$ l'instant normalisé relatif à t_i. Une homothétie réalise la dilatation ou la compression et nous obtenons :

$$\tilde{t}_{i+1} = iT + t_1$$

Nous choisissons T=1 seconde, et notons $f_i(t)$ le signal normalisé entre les instants $\tilde{t}_i$ et $\tilde{t}_{i+1}$. Il est à noter que, pour des signaux à échantillonnage irrégulier, le nombre d'échantillons entre deux ondes R consécutives reste le même avant et après la normalisation temporelle. Les intervalles de temps irréguliers d'un même intervalle RR subissent tous une dilatation ou une compression identique ; aucune interpolation n'est effectuée. Ainsi, nous pouvons superposer chacun des intervalles RR normalisé comme le montre la figure VI.11.

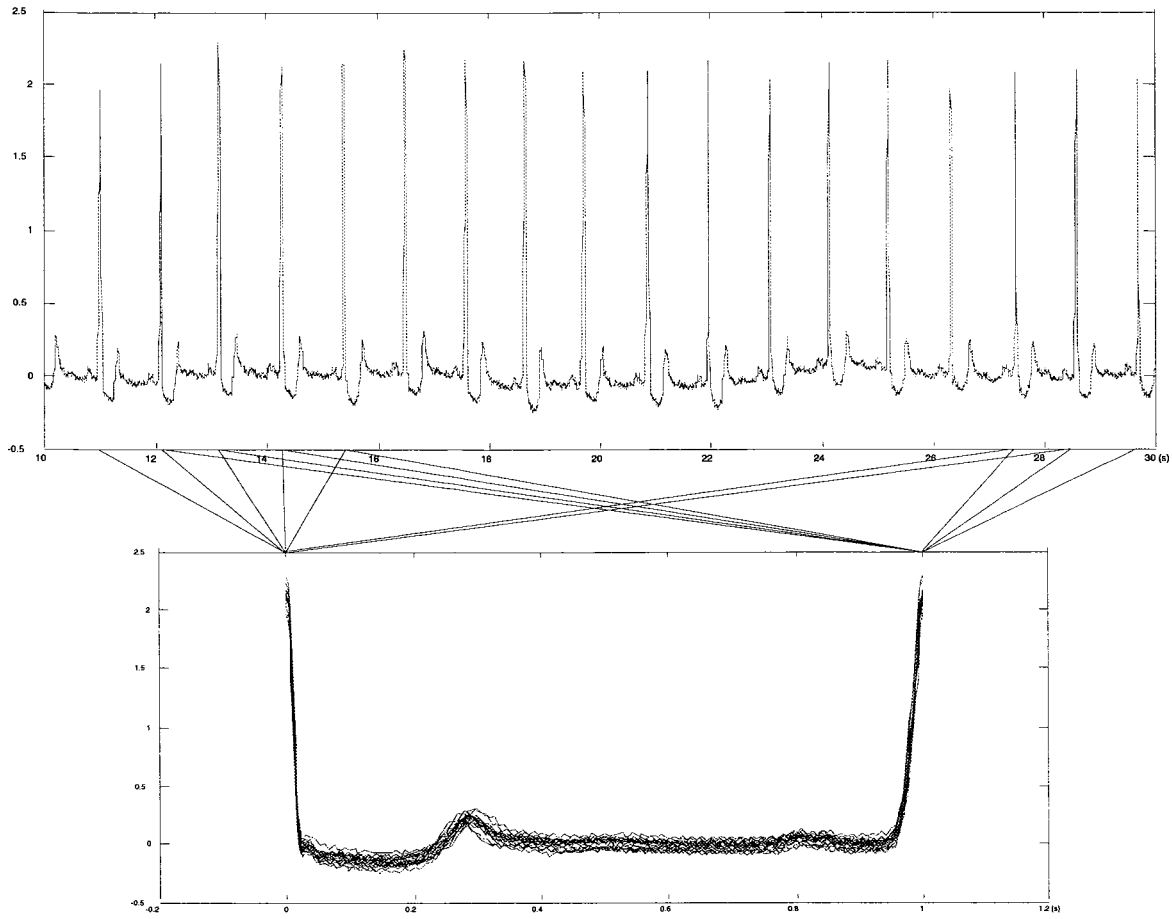


Figure VI.11 : normalisation temporelle des intervalles RR

III.4. Normalisation en amplitude

Nous considérons maintenant les intervalles 2RR normalisés que nous allons normaliser en amplitude dans l'intervalle [0, 1]. Soit $\hat{f}_i(t)$ la concaténation des signaux $f_i(t)$ et $f_{i+1}(t)$. Le signal normalisé en temps et en amplitude est alors :

$$\tilde{f}_i(t) = \frac{\hat{f}_i(t) - \hat{f}_i^{\min}}{\hat{f}_i^{\max} - \hat{f}_i^{\min}}$$

avec

$$\hat{f}_i^{\min} = \min_{t \in [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+2}]} \hat{f}_i(t)$$

$$\hat{f}_i^{\min} = \max_{t \in [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+2}]} \hat{f}_i(t)$$

La figure VI.12 montre la superposition des ECG normalisés en temps et amplitude, par intervalles RR à gauche, et par intervalles 2RR à droite. Nous remarquons clairement que la

superposition par intervalles 2RR forme une enveloppe englobant un signal cardiaque moyen compris entre l'instant 0,6 s et l'instant 1,6 s, comme nous le verrons par la suite.

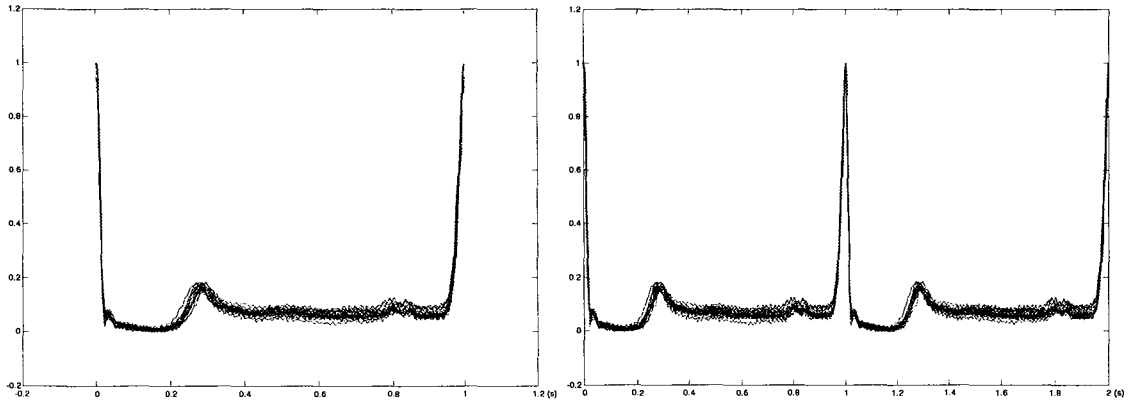


Figure VI.12 : intervalles RR normalisés en temps et amplitude, et concaténation de deux intervalles RR

III.5. Construction des signaux de référence

Nous avons maintenant des signaux normalisés en temps et amplitude, permettant de mieux faire apparaître les ressemblances mais aussi les dissemblances entre les différents battements. Nous allons à présent générer les signaux de référence sur lesquels sera décomposé chaque battement.

Les signaux servant à établir la base de références doivent être expertisés afin de connaître leur classification en terme d'arythmies. La base de données du MIT sur laquelle nous travaillons ayant été expertisée, nous pouvons facilement prélever des cycles cardiaques typiques de chaque arythmie, et du battement normal.

Dans le cas général d'un signal inconnu lors d'un traitement en ligne par exemple, nous pouvons supposer qu'un expert cardiologue puisse rapidement identifier, pour un patient donné, une portion d'enregistrement reflétant un rythme normal, et d'autres portions reflétant des pathologies particulières.

Soit $\widetilde{f}_i^{R_j}(t)$ les signaux ECG normalisés servant à la génération de la référence de type R_j. Dans le cas pratique, R_j prendra la lettre symbolisant le type de signal (normal ou arythmies) dont la liste est inventoriée tableau V.1. Nous définissons la référence normalisée de type R_j par :

$$\bar{f}^{R_j}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{f}_i^{R_j}(t)$$

La figure VI.13 montre, sur le graphique de gauche, en traits grisés, les signaux ECG sains normaux (type R_j='N') et, en trait noir, le signal de référence obtenu par la moyenne décrite ci-dessus.

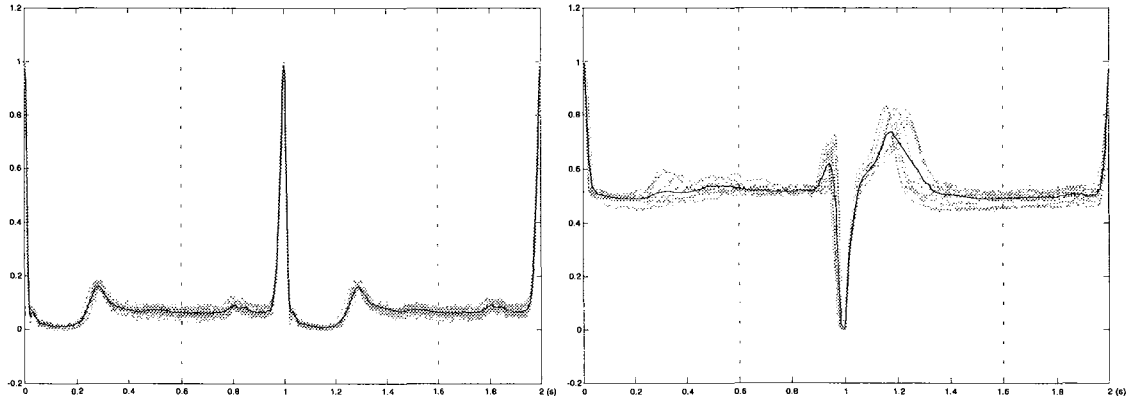


Figure VI.13 : références d'un battement normal et d'un battement ventriculaire prématurée

Un intervalle de tolérance autour de cette référence peut être défini comme la variance de l'ensemble des signaux normaux servant à la construction de la référence, soit :

$$\mathrm{var}\left(\bar{f}^{R_j}(t)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{f}_i^{R_j}(t) - \bar{f}^{R_j}(t)\right)^2$$

Sur le graphique de droite de la figure VI.13 sont représentés en traits grisés les signaux anormaux de type R_j='V' servant à la construction de la référence représentée en trait noir.

Ces graphiques sont bien sûr représentés sur un intervalle de temps 2RR, mais seul le cycle complet du milieu nous intéresse et sert de référence. Il est donc nécessaire de délimiter de part et d'autre du cycle complet ses instants normalisés de début et de fin. Sachant que la durée normalisée du cycle est 1 seconde, nous fixons la séparation entre deux cycles consécutifs à mi-distance des ondes T et P, et définissons l'instant normalisé de début à 0,6 s et l'instant normalisé de fin à 1,6 s. Notons $f_i^{R_j}(t)$ le signal de référence $\bar{f}_i^{R_j}(t)$ restreint à l'intervalle de temps compris entre 0,6 et 1,6 s. Notons également que le signal de référence normalisée dure alors une seconde.

Ainsi, nous avons normalisé en temps et amplitude chaque intervalle RR ; puis nous avons accolé deux intervalles RR consécutifs afin de former un cycle complet sur un intervalle 2RR normalisé ; et nous considérons uniquement le signal compris entre 0,6 s et 1,6 s que ce soit pour générer les références $f^{R_j}(t)$, mais aussi pour les corrélations et décompositions à venir.

Nous notons $g_i(t)$ le signal $\widetilde{f}_i(t)$ du $i^{ème}$ battement restreint à l'intervalle de temps compris entre 0,6 et 1,6 s, et où l'extremum du complexe QRS est situé à 1s.

III.6. Corrélation

A partir des signaux de référence $f^{R_j}(t)$, nous pouvons maintenant détecter les battements normaux des battements anormaux par simple calcul de distance entre le battement $g_i(t)$ à analyser et les battements de référence $f^{R_j}(t)$. Nous avons choisi ici le taux de corrélation défini par :

$$C_{i,j}\left(g_i, f^{R_j}\right) = \frac{\sum_{t=0,6}^{1,6} g_i(t) f^{R_j}(t)}{\sqrt{\sum_{t=0,6}^{1,6} \left(g_i(t)\right)^2 \sum_{t=0,6}^{1,6} \left(f^{R_j}(t)\right)^2}}$$

où i représente le $i^{ème}$ battement et j la $j^{ème}$ référence R_j. Bien entendu, nous utilisons le coefficient de corrélation EPV comme il a été défini dans le chapitre 3.

Nous pouvons aussi utiliser le coefficient de corrélation de rang permettant de comparer les sens de croissance des deux signaux. Pour cela, nous déterminons les rangs de classement des différentes amplitudes des signaux à comparer et nous calculons le coefficient de corrélation des séries formées par les rangs. Nous n'expliciterons pas davantage ce type de corrélation, mais il pourrait être envisagé pour fournir des paramètres supplémentaires lors de la fusion pour l'interprétation en terme d'arythmies.

III.7. Décomposition d'un battement

Une façon élégante de détecter des modifications de formes de battements consiste à analyser la décomposition du battement courant $g_i(t)$ sur une base de battements $R_k(t)$. Cette base peut être composée de battements de référence comme nous l'avons exposé précédemment, et/ou des battements précédant le battement courant. Le tableau VI.6 propose des exemples de bases de décomposition possible.

$R_1(t)$	$R_2(t)$	$R_3(t)\ldots R_n(t)$	Remarques
$g_{i-1}(t)$	$g_{i-2}(t)$	$g_{i-3}(t)\ldots g_{i-n}(t)$	Décomposition sur un ou plusieurs battements précédents le battement courant. Permet de suivre l'évolution du changement de forme des battements
$g_{i-1}(t)$	$f^{R_1}(t)$	$f^{R_2}(t)\ldots f^{R_{n-1}}(t)$	Décomposition sur le battement précédent et une ou plusieurs références
1	$f^{R_1}(t)$	$f^{R_2}(t)\ldots f^{R_{n-1}}(t)$	Décomposition sur une constante et une ou plusieurs références
$f^{R_1}(t)$	$f^{R_2}(t)$	$f^{R_3}(t)\ldots f^{R_n}(t)$	Décomposition sur une ou plusieurs références
$f^{R_1='N'}(t)$ $\vdots$ $f^{R_1='N'}(t)$	$f^{R_2}(t)$ $\vdots$ $f^{R_n}(t)$		Succession de décompositions sur un battement de référence normal et un battement de référence d'un arythmie

Tableau VI.6 : bases de décomposition

Nous reviendrons sur cette dernière base de décomposition qui présente l'avantage de recueillir des coefficients de décomposition complémentaires en présence de l'arythmie contenue dans la base.

Ainsi, à partir de l'une des bases choisie, la décomposition peut s'exprimer d'une manière générale :

$$g_i(t) = \sum_k a_k R_k(t)$$

L'obtention des valeurs $\hat{a}_k$ des coefficients a_k s'établit en minimisant le critère défini par la norme :

$$\Phi_i = \left\| g_i(t) - \hat{g}_i(t) \right\|^2_{p(t)}$$

avec

$$\hat{g}_i(t) = \sum_k \hat{a}_k R_k(t)$$

La fonction poids $p(t)$ permet d'accentuer la décomposition sur des intervalles de temps particuliers, et d'éliminer l'influence sur d'autres intervalles.

Différents indicateurs peuvent alors témoigner de la variabilité du signal à analyser. En particulier, on peut analyser les évolutions des paramètres $\hat{a}_k$ par rapport à des paramètres de référence $\bar{a}_k$ obtenus sur les battements de référence, comme nous le verrons au paragraphe suivant. Le critère résiduel $\Phi_i(\hat{a}_k)$ permet aussi de suivre les tendances au cours du temps.

Nous formons la matrice X composée de la base de références :

$$X = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_1(t) & R_2(t) & \cdots & R_n(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

et le vecteur Y composé du signal $g_i(t)$ à analyser :

$$Y = \begin{bmatrix} \vdots \\ g_i(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Nous déterminons une estimation du vecteur des paramètres $\hat{a}_k$ par minimisation du critère des moindres carrés pondérés et régularisés :

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{bmatrix} = \left(X^T P X + \lambda I\right)^{-1} X^T P Y$$

La matrice P est une matrice diagonale de pondération, pouvant être la matrice identité si aucune accentuation ni inhibition n'est nécessaire.

$$P = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & p(t) & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

Le terme λI permet une régularisation de type "ridge", en ajoutant au critère Φ_i le terme $\lambda \theta^T \theta$.

Afin que l'estimation des paramètres $\hat{a}_k$ soit possible en EPV, il est nécessaire que chaque vecteur composant la matrice X et le vecteur Y ait le même nombre de composantes avec les mêmes instants d'échantillonnage. Une reconstruction d'échantillons intermédiaires aux instants adéquats permet cela.

Nous allons, dans le paragraphe suivant, définir une base de décomposition et appliquer la méthode décrite ici à la décomposition des battements d'un ECG. Ceci permettra alors le suivi temporel des coefficients de la décomposition.

III.8. Décomposition des battements d'un ECG

Comme nous l'avons vu à l'issu de l'énumération des bases (tableau VI.6), la décomposition sur le battement de référence normal $f^{R_i='N'}(t)$ et sur un battement de référence $f^{R_j}(t)$ d'une arythmie présente l'avantage de pouvoir comparer les coefficients de décomposition $\hat{a}_k$ à des valeurs de références $\overline{a}_k$. En effet, considérons la décomposition suivante :

$$g_i(t) = a_N f^N(t) + a_{V'} f^{V'}(t)$$

Dans le cas où le battement $g_i(t)$ est normal, le coefficient $\hat{a}_N$ doit être proche de 1 et le coefficient $\hat{a}_{V'}$ proche de 0. Dans le cas contraire où le battement $g_i(t)$ est de type 'V', $\hat{a}_N$ doit être proche de 0 et $\hat{a}_{V'}$ proche de 1. Ainsi, les coefficients $\hat{a}_N$ et $\hat{a}_{V'}$ sont complémentaires lorsque l'on est en présence de battements normaux ou de type 'V'.

La figure VI.14 présente l'algorithme de décomposition de chaque battement normalisé dans l'intervalle 0,6 à 1,6 s sur la base composée d'un battement de référence normal et d'un battement de référence d'une arythmie. Les instants d'occurrence des complexes QRS sont issus de la détection des complexes QRS vus dans le chapitre 5.

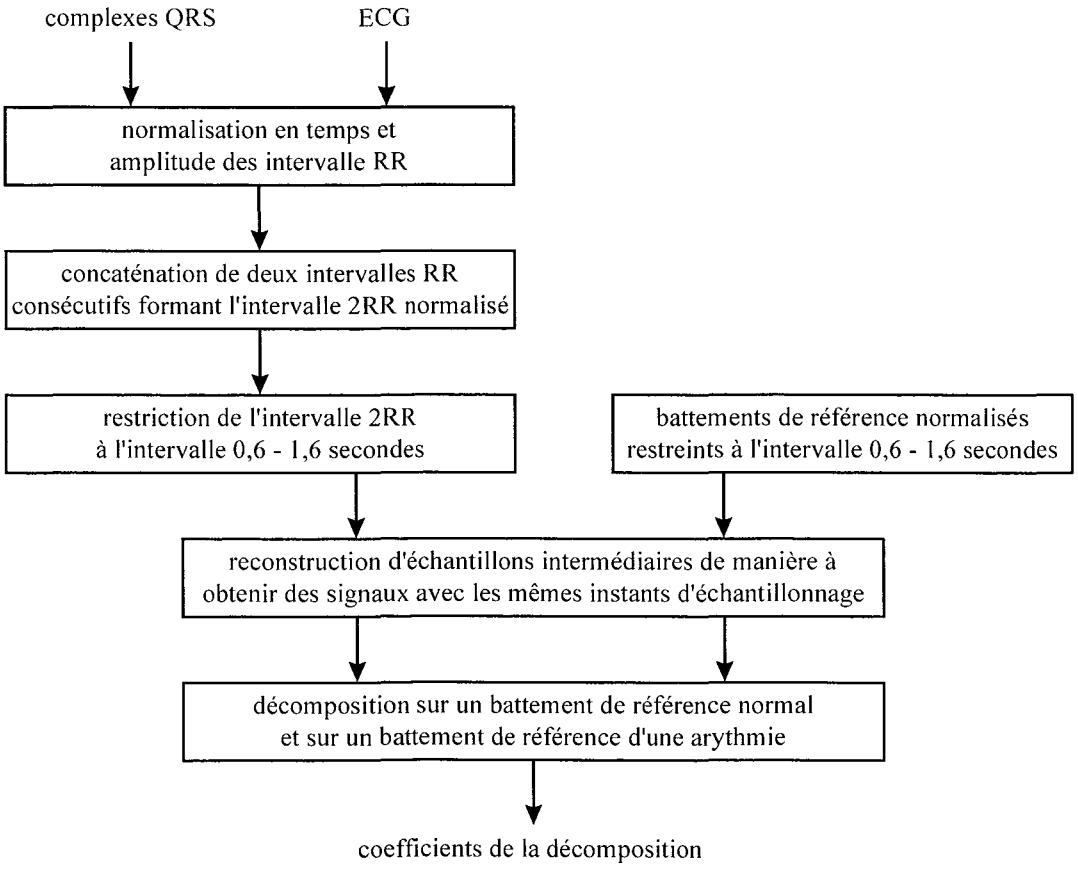


Figure VI.14 : algorithme de la décomposition

Examinons maintenant la décomposition des battements de l'ECG114 de la base de données du MIT, comprenant des battements de type 'N', 'A', 'V', 'F' et 'J'. Dans une première partie, nous décomposerons une portion de l'ECG sur la base $\{f^N, f^V\}$, puis dans une deuxième partie, nous décomposerons une autre portion de l'ECG sur les bases $\{f^N, f^V\}$ d'une part, et $\{f^N, f^A\}$ d'autre part.

Soit dans un premier temps, la décomposition de l'ECG selon :

$$g_i(t) = a_N f^N(t) + a_V f^V(t)$$

Les références $f^N(t)$ et $f^V(t)$ ont été établies comme cela a été décrit dans le paragraphe approprié. Les valeurs $\hat{a}_N$ et $\hat{a}_V$ des coefficients a_N et a_V sont obtenues par minimisation du critère :

$$\Phi_i(\hat{a}_N, \hat{a}_V) = \left\| g_i(t) - \hat{a}_N f^N(t) - \hat{a}_V f^V(t) \right\|^2$$

Le premier graphique de la figure VI.15 représente l'ECG114 entre les instants 235 s et 435 s. Les deuxième et troisième graphiques montrent respectivement l'évolution des coefficients $\hat{a}_N$ et $\hat{a}_V$, tandis que le quatrième graphique montre l'instant d'apparition et le type d'arythmie de chaque battement, selon les experts de la base de données du MIT. Nous remarquons que le coefficient $\hat{a}_N$ est proche de 1 lorsque l'on est en présence de battements normaux, et proche de 0 en présence des battement de type 'V'. A l'inverse, $\hat{a}_V$ est proche de 0 en présence de battements normaux, mais proche de 1 en présence des arythmies de type 'V'. La reconnaissance de forme par décomposition permet donc d'identifier le type de chaque battement.

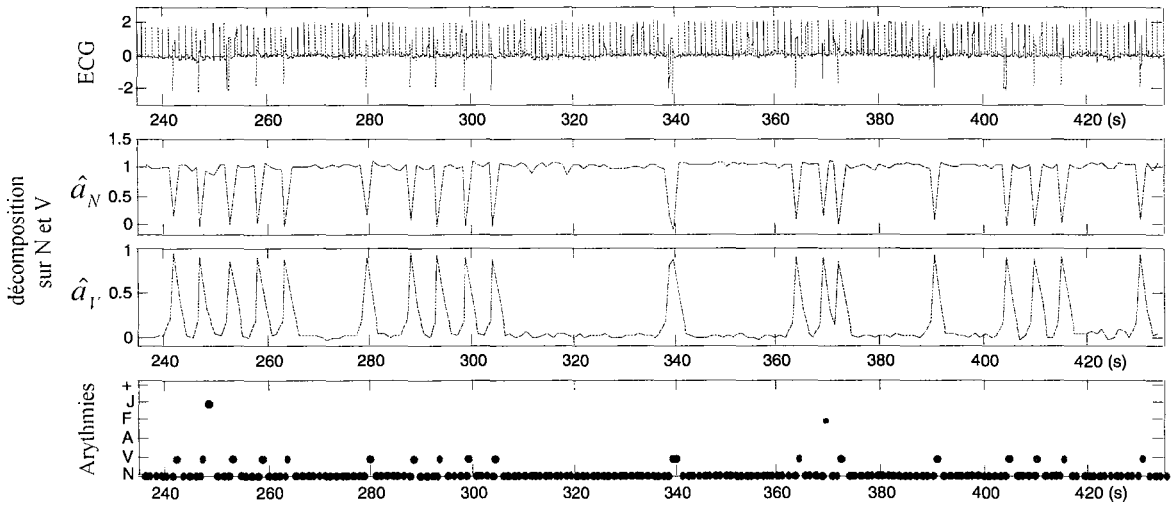


Figure VI.15 : décomposition sur la base $\{f^N, f^V\}$

Dans un deuxième temps, la décomposition de l'ECG s'effectue sur deux bases, à savoir :

$$g_i(t) = a_N^{NI'} f^N(t) + a_{I'}^{NI'} f^{I'}(t)$$
$$g_i(t) = a_N^{NA} f^N(t) + a_A^{NA} f^A(t)$$

La référence $f^A(t)$ a été établie de la même manière que l'ont été les références $f^N(t)$ et $f^{I'}(t)$. Deux critères indépendants l'un de l'autre permettent d'estimer les valeurs $\hat{a}_N^{NI'}$, $\hat{a}_{I'}^{NI'}$, $\hat{a}_N^{NA}$ et $\hat{a}_A^{NA}$ des coefficients $a_N^{NI'}$ et $a_{I'}^{NI'}$ de la première décomposition et, a_N^{NA} et a_A^{NA} de la deuxième décomposition :

$$\Phi_i^{NI'}\left(\hat{a}_N^{NI'}, \hat{a}_{I'}^{NI'}\right) = \left\| g_i(t) - \hat{a}_N^{NI'} f^N(t) - \hat{a}_{I'}^{NI'} f^{I'}(t) \right\|^2$$
$$\Phi_i^{NA}\left(\hat{a}_N^{NA}, \hat{a}_A^{NA}\right) = \left\| g_i(t) - \hat{a}_N^{NA} f^N(t) - \hat{a}_A^{NA} f^A(t) \right\|^2$$

Le tableau VI.7 regroupe les valeurs théoriques des coefficients en fonction du type d'arythmies rencontrées.

$f_i(t)$	$\hat{a}_N^{NI'}$, $\hat{a}_N^{NA}$	$\hat{a}_{I'}^{NI'}$	$\hat{a}_A^{NA}$
normal type 'N'	≈ 1	≈ 0	≈ 0
arythmie type 'V'	≈ 0	≈ 1	≈ 0
arythmie type 'A'	≈ 0	≈ 0	≈ 1

Tableau VI.7 : valeurs théoriques des coefficients

Le premier graphique de la figure VI.16 représente l'ECG114 de la base de données du MIT entre les instants 695 s et 715 s. Cet extrait présente une succession de battement auriculaires prématurés suivis d'un battement ventriculaire prématuré. Le type d'arythmie de chaque battement est représenté sur le deuxième graphique. Nous avons ensuite regroupé sur cet exemple l'évolution de quelques paramètres énoncés dans la première partie de ce sixième chapitre, ainsi que les coefficients de la décomposition. Nous remarquons un rythme cardiaque augmentant en présence d'arythmies sur le troisième graphique. L'amplitude et l'énergie de l'onde T augmentent elles aussi lors de la contraction ventriculaire prématurée, et l'onde P est absente (graphiques quatre à six). Les septième et huitième graphiques montrent respectivement l'évolution des coefficients $\hat{a}_N^{NI'}$ et $\hat{a}_{I'}^{NI'}$ de la première décomposition, tandis que les neuvième et dixième graphiques montrent l'évolution des coefficients $\hat{a}_N^{NA}$ et $\hat{a}_A^{NA}$ de la deuxième décomposition. Examinons les coefficients de la décomposition sur f^N et $f^{I'}$. Le coefficient $\hat{a}_N^{NI'}$ devient proche de 0 et le coefficient $\hat{a}_{I'}^{NI'}$ proche de 1 lors de la contraction

ventriculaire prématurée, alors que l'opposé se produit ailleurs. De même, pour la décomposition sur f^N et f^A, le coefficient $\hat{a}_N^{NA}$ devient proche de 0 et le coefficient $\hat{a}_A^{NA}$ proche de 1 lors des contractions auriculaires prématurées, alors que l'opposé se produit ailleurs. Nous remarquons que les variations des quatre coefficients suivent les instants d'apparition des arythmies s'y rapportant.

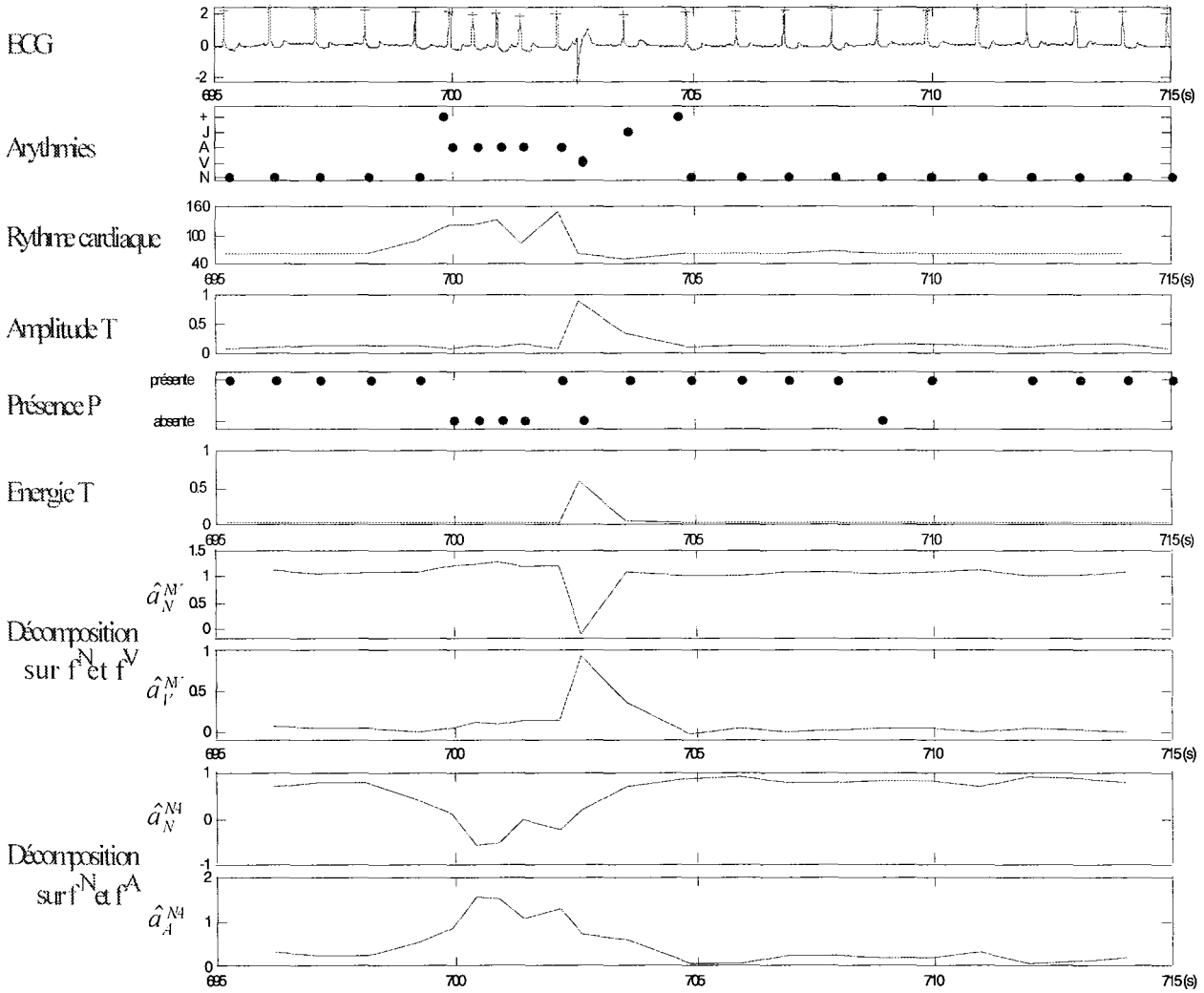


Figure VI.16 : décomposition sur les bases $\{f^N, f^V\}$ et $\{f^N, f^A\}$

Nous remarquons également que des arythmies de type 'F' et 'J' apparaissent. Nous n'avons pas fait ici de décomposition sur les bases $\{f^N, f^F\}$ et $\{f^N, f^J\}$, car le nombre de battements de ces arythmies est insuffisant pour générer les références (deux battements dans le cas du type 'J', et quatre battements dans le cas du type 'F').

Enfin, signalons que le symbole '+' rencontré dans le suivi des types d'arythmies correspond à un changement du rythme cardiaque.

Chacun des paramètres exploratoires peut jouer un rôle important dans la prise de décision en terme d'arythmies.

III.9. Synthèse sur la décomposition

Nous avons décomposé chaque cycle cardiaque sur des bases composées d'un battement de référence normal et d'un battement de référence de type 'A' ou 'V' ; le tout se faisant pour des signaux échantillonnés à pas variable, en normalisant en temps et amplitude les intervalles RR, et en considérant un cycle normalisé entre 0,6 s et 1,6 s de l'intervalle 2RR.

Le suivi des coefficients de chaque décomposition ainsi que des critères résiduels associés s'ajoute au suivi temporel du coefficient de corrélation, afin de former un ensemble de paramètres évoluant au cours des cycles cardiaques.

Un des désavantages de cette décomposition, que nous n'avons pas illustré ici, réside dans les fluctuations de la ligne de base en présence de bruits comme ceux cités dans le chapitre 5. En effet, si la ligne de base n'est pas régulière, le cycle cardiaque après normalisation aura une forme différente de la normale, et la décomposition s'en trouvera alors altérée. Par conséquent, un filtrage passe-bande éliminant les fluctuations de la ligne de base et les parasites hautes fréquences peut être mis en œuvre avant la normalisation et la décomposition.

Il serait aussi intéressant de générer un battement de référence de chacune des arythmies pouvant être répertoriées dans les ECG afin de pouvoir établir une décomposition selon chacune des bases composées de la référence normale $f^N(t)$ et d'une référence d'arythmie $f^{R_j}(t)$; soient les bases $\{f^N, f^{R_2}\}$ à $\{f^N, f^{R_j}\}$. Ceci serait l'extension directe des décompositions sur les bases $\{f^N, f^V\}$ et $\{f^N, f^A\}$, et permettrait de suivre l'évolution des coefficients de décomposition sur chaque type d'arythmies. Ainsi, une meilleure identification des arythmies pourrait être poursuivie dans la fusion des paramètres que nous allons maintenant décrire.

IV. Synthèse sur le suivi temporel des paramètres cardiaques

Dans ce chapitre 6, nous avons, d'une part, extrait diverses informations sur chaque cycle de l'ECG EPV afin d'étudier les variations de bon nombre de paramètres au cours du temps. Cette liste de paramètres n'est pas exhaustive, et il se peut très bien qu'un paramètre non mentionné ici, soit majoritairement significatif d'une pathologie particulière. Encore faut-il expliciter ce paramètre.

D'autre part, nous avons détaillé une méthode de décomposition de chaque battement cardiaque normalisé sur une base de références. L'évolution des paramètres / coefficients des diverses décompositions semble tout aussi intéressante à analyser, et à ajouter au suivi des paramètres de la première partie.

Une méthode de fusion de l'ensemble de ces paramètres et informations (temps, amplitudes, surfaces, énergies, présences, formes, coefficients) pourrait ensuite être envisagée, afin d'interpréter en termes d'arythmies chaque battement ou groupe de battements cardiaques. Une étude exhaustive des paramètres sur un large nombre d'ECG permettrait d'établir des corrélations entre paramètres et arythmies, et faciliterait le choix des diverses fonctions utilisées dans la fusion de données. Les paramètres extraits dont nous suivons l'évolution temporelle sont issus d'un milieu vivant où une classification par logique floue semblerait préférable à une classification par seuils sur des variables statistiques.

Conclusion... Perspectives

"Croire tout découvert est une erreur profonde ;
c'est prendre l'horizon pour les bornes du monde."
UTILITÉ DES DÉCOUVERTES

Antoine-Marin LEMIERRE (1723-1793, France)

Les travaux développés dans ce mémoire concernent l'élaboration d'outils s'appliquant à des signaux échantillonnés à pas variable. Après avoir défini les différentes façons de recueillir un signal échantillonné irrégulièrement, et les méthodes de compression délivrant un tel signal obtenues dans la littérature, il nous a semblé intéressant de proposer une méthode de compression et un stockage particulier des échantillons représentatifs du signal, sous la forme {temps, amplitude}. Ceci a constitué le point de départ de nos recherches.

Puis, nous avons élaboré un ensemble d'outils de traitement des signaux échantillonnés à pas variable, afin de combler un manque apparu à l'issu d'un historique sur les signaux à échantillonnage irrégulier. En effet, seules des méthodes de reconstruction couvraient le domaine. Nous avons, par conséquent, redéfini :

- les opération simples que sont l'addition, la soustraction et la multiplication,
- les statistiques comme la moyenne, la variance, la covariance et le coefficient de corrélation,
- l'analyse spectrale par transformée de Fourier,
- le filtrage passe-bas et passe-bande d'ordre N par résolution et discrétisation de la représentation d'état,
- l'identification,
- la décomposition sur des bases non orthogonales.

Ces outils ont été élaborés de manière à ce qu'ils puissent être directement appliqués à des signaux échantillonnés à pas variable, sans pour autant établir une reconstruction totale du signal. Nous avons accordé une importance particulière au développement et à la construction de filtres permettant l'obtention d'un signal propre à la détection d'événements. L'ensemble de ces travaux a constitué un des points clés de nos recherches.

Enfin, afin de valoriser les outils théoriques développés, nous avons cherché à suivre l'évolution temporelle d'un ensemble de paramètres extraits d'électrocardiogrammes. Ainsi, le rythme cardiaque, les divers intervalles de temps, d'amplitudes, de formes d'ondes, de surfaces et d'énergies ont été quantifiés pour chaque battement. Toutes ces opérations ont été effectuées après avoir détecté les instants caractéristiques de chacun des complexes QRS et des ondes P et T. Une décomposition de chaque battement sur des bases de références met aussi en évidence des coefficients fluctuant en fonction du type d'arythmie rencontrée. L'évolution de l'ensemble des paramètres et informations a été observée au cours du temps, afin de mettre en

valeur des liens entre paramètres et arythmies. Ces études ont été illustrées par plusieurs exemples d'électrocardiogrammes issus de la base de données du MIT, reconnue comme référence en la matière.

Ce travail constitue un nouveau pas dans le domaine du traitement des signaux à échantillonnage irrégulier. Nous avons abordé et proposé des outils de traitement destinés à de tels signaux échantillonnés irrégulièrement. Les méthodes et outils évoqués ici nécessitent des améliorations. Comme nous l'avons envisagé au cours de ce mémoire, l'optimisation de la reconstruction d'échantillons intermédiaires dans l'opération de filtrage, permettrait une réduction des temps de calcul. De plus, de nombreux autres outils et méthodes demeurent à explorer, notamment l'étude générale des systèmes à entrées et sorties échantillonnées irrégulièrement : filtrage, identification, optimisation, contrôle / commande, régulation...

En ce qui concerne l'application au suivi temporel de paramètres cardiaques dans un but de diagnostiquer des arythmies, bon nombre de voies restent ouvertes. Tout d'abord, la mise en œuvre de la fusion des paramètres reste une étape importante à entreprendre afin de classifier chaque battement ou groupe de battements en terme d'arythmie. Ceci pourra avoir lieu après une étude approfondie des paramètres et de leur degré d'importance envers la caractérisation d'une arythmie. Puis, les études portées sur des ECG de 30 minutes issus de la base de données du MIT pourraient être étendues à des ECG de longues durées comme les enregistrements par système Holter sur 24 heures. Enfin, l'extraction des caractéristiques a été réalisée sur une seule dérivation de l'électrocardiogramme, et la prise en compte de plusieurs dérivations permettrait d'améliorer les différentes quantifications des paramètres et ainsi établir une certaine robustesse vis à vis du diagnostic porté à chaque battement. Cette liste d'améliorations n'est bien entendu pas exhaustive.

Par ailleurs, il est clair que ces outils définis au cours de nos recherches peuvent s'étendre à de vastes domaines de l'automatique et du traitement du signal — voire du traitement d'images. En étendant ces recherches dans des applications particulières, la persévérance suscitera alors l'élaboration de nouveaux outils.

Bibliographie

"Car enfin, qu'est-ce que l'homme dans la nature ?
Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre rien et tout."
PENSÉES

Blaise PASCAL (1623-1662, France)

BIBLIOGRAPHIE **207**

I. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES GÉNÉRALES 209

II. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES PERSONNELLES 219

II.1. Colloques nationaux avec comité de lecture et actes *219*

II.2. Colloques internationaux avec comité de lecture et actes *219*

I. Références bibliographiques générales

ABENSTEIN J.P., TOMPKINS W.J., *A new data reduction algorithm for real time ECG analysis*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 29, pp. 43-48, 1982

AHA American Heart Association, *Heart and Stroke Facts*, 1994

AHLSTROM Mark L., TOMPKINS Willis J., *Automated High-Speed Analysis of Holter Tapes with Microcomputers*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. BME-30, n° 10, pp. 651-657, Octobre 1983

AHMED N., MILNE P.J., HARRIS S.G., *Electrocardiographic data compression via orthogonal transforms*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME-22, pp. 484-487, Nov 1975 (a)

AHMED N., RAO K.R., *Orthogonal transform for digital signal processing*, New York : Springer, 1975 (b)

ALGRA A. et al., *An algorithm for computer measurement of QT intervals in the 24 hour ECG*, Computers in Cardiology, IEEE Computer Society Press, pp. 117-119, 1987

ANANT K., DOWLA F., RODRIGUE G., *Vector quantization of ECG walvelet coefficient*, IEEE Signal Processing Lett., vol. 2, n° 7, pp. 129-131, July 1995

BAGCHI S., MITRA SK., *The nonuniform discrete Fourier transform and its applications in filter design I. 1D*, IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and digital signal processing, vol. 43, n° 6, pp. 422-433, 1996

BALDA R.A. et al., *The HP ECG analysis program*, Trends in Computer-Processed Electrocardiograms, J.H. VanBemnel and J.L. Willems, Eds. North Holland, pp. 197-205, 1977

BARR R.C., BLANCHARD S.M., DIPERSIO D.A., *SAPA-2 is the FAN*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME-32, p. 337, May 1985

BAZETT H.C., *An analysis of the time-relations of electrocardiograms*, Heart Journal, pp. 353-370, 1920

BENSAOUD O., OKSMAN J., *Reconstruction en temps réel de signaux à échantillonnage non périodique*, Traitement du Signal, vol. 11, fasc. 3, pp. 283-293, 1994

BENVENISTE A., METIVIER M., PRIOURET P., *Algorithme adaptatifs et approximations stochastiques. Théorie et applications à l'identification, au traitement du signal et à la reconnaissance de formes*, Edition Masson, Paris, ISBN : 2-225-81221-7, ISSN : 0762-8218, 1987

BLANCHARD S.M., BARR R.C., *Comparison of methods for adaptive sampling of cardiac electrograms and electrocardiograms*, Med. Biol. Eng. Comput., vol. 23, pp. 401-410, Sept 1985

BÖRJESSON P.O., PAHLM O., et al., *Adaptative QRS Detection Based on Maximum A Posteriori Estimation*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME-29, n°5, pp. 341-350, May 1982

BORNE P., DAUPHIN-TANGUY G, et al., *Commande et optimisation des processus*, Méthodes et techniques de l'ingénieur, Editions Technip 27 rue Ginoux, 75737 Paris Cedex 15, ISBN 2-7108-0599-5, 1990

BOUKHRIS A., MOUROT G., GIULIANI S., RAGOT J., *Utilisation des concepts flous pour la modélisation de la relation pluie-débit*, Rencontres francophones sur la logique floue et ses applications, LFA'96, Nancy, France, 4-5 décembre 1996

BOUKHRIS A., MOUROT G., RAGOT J., *Identification de modèles dynamiques non-linéaires à base de règles*, Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, LFA'97, Lyon, France, 3-4 décembre 1997

CARDENAS J.L., LORENZO J.V., *Mean-shape vector quantizer for ECG signal compression*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 46, n° 1, pp. 62-70, january 1999

CHEN J., ITOH S., *A wavelet transform-based ECG compression method guaranteeing desired signal quality*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 45, n° 12, pp. 1414-1419, december 1998

CIARLINI P. BARONE P., *A recursive algorithm to compute the baseline drift in recorded biological signals*, Computers and biomedical research, vol. 1, pp. 21-26, 1988

COGGINS R.J., JABRI M.A., *A low-complexity intracardiac electrogram compression algorithm*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 46, n° 1, pp. 82-91, january 1999

COX J.R., NOLLE F.M., FOZZARD H.A., OLIVER G.C., *AZTEC a preprocessing program for real-time ECG rythm analysis*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 15, pp. 128-129, 1968

CRITELLI G., *QT interval measurements of long-term ECG recordings. Applications to an automatic Holter analysis system*, Computers in Cardiology, IEEE Computer Society Press, pp. 481-484, 1982

CROWE J.A., GIBSON N.M., WOOLFSON M.S., SOMEKH M.G., *Wavelet transform as a potential tool for ECG analysis and compression*, J. Biomed. Eng., vol. 14, pp. 268-272, May 1992

DALE, DUBIN, *Lecture accélérée de l'ECG*, 4ème édition, éd. Maloine, ISBN 2-224-02162-3, 1992

DAVISSON L.D., *The Fan method of data compression*, 1966 Goddard Summer workshop, NASA TM X-55742, X-700-67-94, Final Rep., pp. 23-30, 1967

DE COULON Frédéric, *Théorie et Traitement des Signaux, Volume VI*, Traité d'électricité de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Editions Georgi, ISBN (série) : 2-604-00002-4, ISBN (volume) : 2-604-00008-3

DELUZURIEUX A., RAMI M., *Cours d'électronique analogique, Tome 1 : étude temporelle et fréquentielle des signaux et systèmes*, BTS, IUT, Maitrise EEA, Ecoles d'ingénieurs, Editions Eyrolles, 61 boulevard Saint Germain, 75005 PARIS, 1990 (a)

DELUZURIEUX A., RAMI M., *Cours d'électronique analogique, Tome 2 : analyse fréquentielle des signaux et des systèmes, analyse de Laplace*, BTS, IUT, Maitrise EEA, Ecoles d'ingénieurs, Editions Eyrolles, 61 boulevard Saint Germain, 75005 PARIS, 1990 (b)

DIPERSIO D.A., BARR R.C., *Evaluation of the Fan method of adaptive sampling on human electrocardiograms*, Med. Biol. Eng. Comput., vol. 23, pp. 401-410, Sept 1985

DUTT A., ROKHLIN V., *Fast Fourier transform for nonequispaced data*, SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 14, fasc. 6, pp. 1368-1393, Nov. 1993

DUTT A., ROKHLIN V., *Fast Fourier transform for nonequispaced data, II*, Applied and Computational Harmonic Anamysis, vol. 2, pp. 85-100, 1995

EDENBRANDT L., DEVINE B., MACFARLANE PW., *Neural networks for classification of ECG ST-T segments*, J. Electrocardiol., vol. 25, pp. 167-173, 1992

ENGELSE W.A.H. and ZEELENBERG C., *A single scan algorithm for QRS detection and feature extraction*, IEEE Comput. Card., Long Beach : IEEE Computer Society, pp. 37-42, 1979

FEICHTINGER H.G., GRÖCHENIG K., *Multidimensional irregular sampling of band-limited functions in L^p-spaces*, Conf. Oberwolfach, pp. 135-142, ISNM 90, Birkhäuser, Feb. 1989

FEICHTINGER H.G., GRÖCHENIG K., HERMANN M., *Iterative methods in irregular sampling theory : numerical results*, Aachener Symposium für Signaltheorie, ASST 1990, Aachen, Informatik Fachber, pp. 160-166, 1990

FEICHTINGER H.G., CENKER C., HERMANN M., *Iterative algorithms in irregular sampling : a first comparison of methods*, Conf. ICCCP'91, Phoenix AZ, pp. 483-489, March 1991 (a)

FEICHTINGER H.G., CENKER C., STEIER H., *Fast iterative and non-iterative reconstruction methods in irregular sampling*, Conf. ICASSP'91, Toronto, pp. 1773-1776, May 1991 (b)

FEICHTINGER H.G., *Pseudo-inverse matrix methods for signal reconstruction from partial data*, SPIE-Conf. Visual Comm. And Image Proc. Boston, pp. 766-772, 1991 (c)

FEICHTINGER H.G., STROHMER T., *IRSATOL - Irregular sampling of band-limited signals toolbox*, In K. Dette, D. Haupt, C. Polze, editors, Conf. Computers for teacing, Berlin, pp. 277-284, 1992 (a)

FEICHTINGER H.G., GRÖCHENIG K., *Irregular sampling theorems and series expansions of band-limited functions*, J. Math. Anal. Appl., vol. 167, pp. 530-556, 1992 (b)

FEICHTINGER H.G., GRÖCHENIG K., *Error analysis in regular and irregular sampling theory*, Applicable analysis, vol. 50, pp. 167-189, 1992 (c)

FEICHTINGER H.G., STROHMER T., *Fast iterative reconstruction of band-limited images from irregular sampling values*, Computer analysis of images and patterns, Conf. CAIP Budapest 93, pp. 82-91, 1993

FEICHTINGER H.G., GROCHENIG K., *Theory and practice of irregular sampling*, Wavelets : Mathematics and applications CRC Press, pp. 305-363, 1994

FEICHTINGER H.G., GROCHENIG K., STROHMER T., *Efficient numerical methods in non-uniform sampling theory*, Numerische Mathematik, vol. 69, pp. 423-440, 1995 (a)

FEICHTINGER H.G., *Iterative methods for scattered data approximation of smooth signals*, Proc. Conf. Samp. TA-95, Riga/Latvia, 1995 (b)

FEICHTINGER H.G., KOZEK W., STROHMER T., *Reconstruction of signals from irregular samples of its short-time Fourier transform*, Proc. SPIE95, San Diego, July 1995 (c)

FELBLINGER J., *Acquisition, traitement du signal ECG et détection automatique de la fibrillation ventriculaire*, Thèse INPL, 1990

FORBES A.D., JIMISON H.B., *A QRS Detection Algorithm*, Journal Of Clinical Monitoring, vol. 3, n° 3, pp.53-63, January 1987

FRADEN J., NEUMAN M.R., *QRS wave detection*, Med. & Biol. Eng. & Comput., vol. 18, pp. 125-132, March 1980

FRANZ MR, SWERDLOW CD, LIEM BL, et al., *Cycle length dependence of human action potential duration in vivo : effects of single extrastimuli, sudden sustained rate acceleration and deceleration and different steady-state frequencies.*, J. Clin. Invest. ; vol. 82, pp. 972-979, 1988

FRANZ MR., *Relation between repolarization and refractoriness in the human ventricule : cycle length dependence and effect of procainamide*, Journal of the american college of cardiology, vol. 19, n° 3, pp. 614-618, 1992

FRIESEN G.M., JANNETT T.C. et al., *A Comparison of the Noise Sensitivity of Nine QRS Detection Algorithms*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. 37, n° 1, pp. 85-98, Janvier 1990

FURTH B., PEREZ A., *An adaptive real-time ECG compression algorithm with variable threshold*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 35, pp. 489-494, 1988

GANG Li, JING Feng, LING Lin, QILIAN Yu, *Fast realization of the LADT ECG data compression method*, IEEE Eng. Med. Biol. Mag., pp. 255-258, April/May 1994

GARDENHIRE L.W., *Data redundancy reduction for biomedical telemetry*, Biomedical telemetry, C.A. Caceres, ed. New York : academic, chapter 11, pp. 255-298, 1965 (a)

GARDENHIRE L.W., *Redundancy reduction - the key to adaptive telemetry*, Biomedical telemetry - Data compression for biomedical telemetry - Proceedings of the National Telemetry Conference, C.A. Caceres, ed. New York : academic, chapter 11, pp. 1-16, 1965 (b)

GAY J., DESNOS M., BENOIT P., *L'électrocardiogramme*, Editions Frison-Roche

GOUTAS A., KAOUA M., HERBEVAL JP., et al., *Détection automatique des principaux paramètres ECG des sportifs*, RBM, vol. 16, fasc. 1, pp. 9-13, 1994

GRAHM A., *Kronecker products and matrix calculus, with applications*, Editions Ellis Horwood Ltd, 1981

GRAUEL A., LUDWIG L.A, KLENE G., *ECG diagnostics by fuzzy decision making*, International Journal of Uncertaintiy, Fuzziness and knowledge-based systems, world scientific, vol. 6.2, 1998

GRITZALI F., FRANGAKIS G., PAPAKONSTANTINOU G., *Detection of P and T waves in an ECG*, Computers Biomed. Res., vol. 22, pp. 83-91, 1989

GUSTAFSON D. et al., *Automated VCG interpretation studies using signal analysis techniques*, R-1044 Charles Stark Draper Lab., Cambridge, 1977

GUYTON A.C., *Traité de physiologie médicale*, éd. Douin, 8 place de l'Odéon, 75006 Paris, ISBN 2-7040-0127-8, 1980

HAMILTON P.S., TOMPKINS W.J., *Quantitative investigation of QRS detection rules using the MIT/BIH arrhythmia database*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME 33, n°12, pp. 1157-1165, December 1986

HATHAWAY Richard J., BEZDEK James C., *Switching Regression Models and Fuzzy Clustering*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 1, n° 3, pp. 195-204, August 1993

HAUGLAND D., HEBER J.G., HUSOY J.H., *Compression data by shortest path methods*, Ed. Zimmermann et al., Operations research proceedings, Springer, Berlin, Germany, pp. 145-150, 1996

HAUGLAND D., HEBER J.G., HUSOY J.H., *Optimisation algorithms for ECG data compression*, Medical & Biomedical Engineering & Computing, vol. 35, fasc. 4, pp. 420-424, july 1997

HOLSINGER W.P. et al., *A QRS preprocessor based on digital differentiation*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME-18, pp. 212-217, 1971

HORSPOOL R.N., WINDELS W.J., *ECG compression using Ziv-Lempel techniques*, Comput. Biomed. Res., vol. 28, pp. 67-86, 1995

ISHIJIMA M., SHIN S., HOSTETTER G.H., SKLANSKY J., *Scan-along polygonal approximation for data compression of electrocardiograms*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 30, pp. 723-729, 1983

IWATA A., NAGASAKA Y., SUZUMARA N., *Data compression of the ECG using neural network for digital Holter monitor*, IEEE Eng. Med. Biolo. Mag., pp. 53-57, Sept 1990

JONES R.H., *Spectral analysis with regularly missed observations*, Ann. Math. Statist., vol. 3, pp. 455-461, 1962

JONES R.H., *Spectrum estimation with missed observations*, Ann. Instit. Statist. Math., vol. 23, pp. 387-398, 1972

JONES R.H., *Spectrum estimation from unequally spaced data*, Fifth conference on probability and statistics, pp. 277-282, 1977

JONES R.H., *Maximum likelihood fitting of ARMA models to time series with missing observations*, Technometrics, vol. 22, pp. 389-395, Aug. 1980

KOSKI A., JUHOLA M., MERISTE M., *Syntactic Recognition of ECG Signals by Attributed Finite Automata*, Pattern Recognition, vol. 28, n° 12, pp. 1927-1940, 1995

KOSKI A., JUHOLA M., *Segmentation of Digital Signals Based on Estimated Compression Ratio*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 43, fasc. 9, pp. 928-938, 1996

KOSKI A., *Modelling E.C.G signals with hidden markov models*, Artificial intelligence in medecine, vol. 8, fasc. 5, pp. 453-471, oct 1996

KOSKI Antti, *On Structural Recognition and Analysis Methods Applied to ECG Signals*, Computer Science, University of Turku, Lemminkäisenkatu 14 A, 20520 Turku, Finland, February 1997

KUKLINSKI W.S., *Fast Walsh transform data compression algorithm for ECG application*, Med. Biol. Eng. Comput., vol. 21, pp. 465-473, July 1983

KULKARNI P.K., VINOD KUMAR, VERMA H.K., *Direct data compression techniques for ECG signals : effect of sampling frequency on performances*, International Journal of Systems Science, vol. 28, fasc. 3, pp. 217-228, 1997

KUNDU M., NASIPURI M., BASU D.K., *A knowledge-based approach to ECG interpretation using fuzzy logic*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B : Cybernetics, vol. 28, n° 2, pp. 237-243, april 1998

KUNT M., *Traitement numérique des signaux*, ISBN Bordas 2-04-011588-9, 1984

LABARRERE M., KRIEF J.P., GIMONET B., *Le filtrage et ses applications*, Editions Cepadues, ISBN 2-85428-079-2, 1982

LAGUNA P., THAKOR M.V., CAMINAL P., JANE R., HYUNG-RO YOON, *New algorithm for QT interval analysis in 24-hour Holter ECG : performance and applications*, Med. & Biol. Eng. & Comput., vol. 28, pp. 67-73, 1990

LAGUNA P., BOGATELL E., JANE R., CAMINAL P., *Automatic detection of characteristic points in the ECG*, Proceedings of the IV international symposium on biomedical engineering, Peñiscola (Spain), pp. 338-339, 1991

LAGUNA P., VIGO D., JANE R., CAMINAL P., *Automatic waves onset and offset determination in ECG signals : validation with the CSE database*, Computer in Cardiology, Los Alamitos IEEE Compuetr Society Press, pp. 167-170, 1992

LI GANG et al., *Fast realization of the LADT ECG data compression method*, IEEE Eng. Med. Biol. Mag., pp. 255-258, April/May 1994

LIGTENBERG A., KUNT M., *A robust-digital QRS-detection algorithm for arrhythmia monitoring*, Computers Biomed. Res., vol. 16, pp. 273-286, 1983

MAHOUDEAUX P.M. et al., *Single microprocessor based system for on-line ECG analysis*, Med. & Biol. Eng. & Comput., vol. 19, pp. 497-500, 1981

MANOEUVRE D., MULLER L., GRANJON Y., YVROUD E., *Study of a method of optimal sampling for biomedical signals*, Abstract of the World Congress on Medical Physics an Biomedical Engineering, 21 - 26 August 1994, Rio de Janero, Brazil, Physics in Medicine and Biology, vol 39a, p. 918, 1994

MANOEUVRE D., TASLER M., MULLER L., GRANJON Y., *Optimization of memory space for long time data collects by adaptive sampling : application to a new strains sensor for hip join*, 21st Proceedings of the 1995 IEEE Annual Northeast Bioengineering Conference, pp 53-54, May 22 - 23, 1995

MARVASTI F., *Spectrum of nonuniform samples*, Electron. Lett., vol. 20, N°. 21, pp. 896-897, 1984

MARVASTI F., *Signal recovery from nonuniform samples and spectral analysis of random samples*, IEEE Proceedings on ICASSP, Tokyo, pp. 1649-1652, Apr. 1986

MARVASTI F., *An iterative method to compensate for the interpolation distortion*, IEEE Trans. ASSP 37/10, pp. 1617-1621, 1989

MARVASTI F., *Nonuniform sampling,* Editions ROBERT J. Marks II, Advanced topics in Shannon sampling and interpolation theory, ISBN 0-387-97906-9 Springer-Verlag NewYork Berlin Heidelberg London Paris, pp. 121-183, 1993

MARVASTI F., *Nonuniform sampling theorems for bandpass signals at or below the Nyquist density*, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 44, N°. 3, pp. 572-576, March 1996

MEHTA S.S, SAXENA S.C, VERNA H.K., *Recognition of P and T waves in electrocardiograms using fuzzy theory*, Proceedings of the 1 st regional conference, I.E.E.E engineering in medecine and biology society and 14 th conference of the biomedical engineering society of India, pp. 2/54-55, feb 1995

MOODY G. B., KAMBIZ S., MARK R. G., *ECG data compression for tapeless ambulatory monitors*, Computers in Cardiology (Los Alamitos ; California, USA : IEEE Computer Society Press), pp. 467-470, 1988

MOODY G.B., *The MIT-BIH Arrhythmia Database CD-ROM*, Harvard-MIT Division of Health Sciences and Technology, August 1992

MOODY G.B., *ECG Database Guides*, "ECG database applications guide.", "ECG database programmer's guide.", "Wave user's guide.", "MIT-BIH arrhytmia database directory", Harvard-MIT division of Health Sciences and Technology, 1995

MORELLE A., CABANES P.A., CHEVALLIER E., BAZIN D., *Le guide médical pratique*, 2ème édition, ed. Prat/Europa, 34 rue Truffaut, 75017 Paris, ISBN 2-85890-167-8, 1991

MOUROT G. ET RAGOT J., *Identification of Takagi-Sugeno model. Application to modelling of ozone concentration*, Journal Eurpéen des Systèmes Automatisés, à paraître, 1998

MUELLER W.C., *Arrhythmia detection software for an ambulatory ECG monitor*, Biomed. Science Instrument., vol. 14, pp. 81-85, 1978

MURRAY-SMITH, R., JOHANSEN, T.A., *Multiple model approaches to modelling and control*, Taylor & Francis, London, 1997

NAGASAKA Y., IWATA A., *Data compression of the long time ECG recording using BP and PCA neural networks*, IEICE Trans. Inform. Syst., vol. E76-D, n° 12, pp. 1434-1442, Dec. 1993

NAVE G., COHEN A., *ECG compression using long-term prediction*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 40, fasc. 9, pp. 877-885, 1993

NOLLO G., SPERANZA G., *Dynamic measurement of the QT interval*, Computers in Cardiology, pp. 463-466, 1990

NOLLO G., SPERANZA G., et al., *Spontaneous Beat-to-Beat Variability of the Ventricular Repolarization Duration*, Journal of Electrocardiology, vol. 25, pp. 9-17, 1992

OKADA M., *A digital filter for the QRS complex detection*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME-26, pp. 700-703, 1979

PAHLM O., SÖRNMO L., *Software QRS detection in ambulatory monitoring - a review*, Med. & Biol. Eng. & Comput., vol. 22, pp. 289-297, July 1984

PAN J., TOMPKINS W.J., *A Real-Time QRS Detection Algorithm*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME-32, n°3, pp. 230-236, March 1985

PAPOULIS A., *The Fourier integral and its application*, New York Mc Graw-Hill, Mc Graw electronic science series, 1962

PAPOULIS A., *Probability, random variables and stochastic processes*, New York Mc Graw-Hill, Mc Graw electronic science series, 1965

PHILIPS W., JONGHE G.D., *Data compression of ECG's by high degree polynomial approximation*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. 39, pp. 330-337, 1992

PISANI E., PELLEGRINI E., ANSUINI G., DI NOTO G., RIMATORI C., RUSSO P., *Performance evaluation of algorithms for QT interval measurements in ambulatory ECG recording*, Computers in Cardiology, IEEE Computer Society Press, pp. 459-462, 1985

POLLARD E.A., BARR R.C., *Adaptive sampling of intracellular and extracellular cardiac potentials with the Fan method*, Med. Biol. Eng. Comput., vol. 25, pp. 261-268, May 1987

PORAT B., FRIENDLANDER B., *ARMA spectral estimation of time series with missing observations*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT 35, N°. 6, pp. 342-349, 1984

RAO K.R., AHMED N., *Orthogonal transform for digital signal processing*, IEEE Internat. Conf. ASSP., pp. 136-140, 1976

RAO K.D., *DWT based detection of R-peaks and data compression of ECG signals*, IETE Journal of Research, vol. 43, n° 7, pp. 345-349, sept. oct. 1997

RAZAFINJATOVO H.N., *Iterative Reconstructions in irregular sampling with derivatives*, Journ. Fourier Anal. Appl., vol. 1, N°. 3, pp.281-295, 1995

REDDY B. R. S., MURTHY I. S. N., *ECG data compression using Fourier descriptors*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 33, pp. 428-433, 1986

ROBERT J. Marks II, *Advanced topics in Shannon sampling and interpolation theory*, ISBN 0-387-97906-9 Springer-Verlag NewYork Berlin Heidelberg London Paris, 1993

ROMERO L., *Reconstitution d'un signal échantillonné avec un pas non uniforme*, Thèse Mastère, Ecole supérieure électricité Gif/Yvette, 1990

ROZEN Y., PORAT B., *Optimal ARMA parameter estimation based on the sample covariances for data with missing observations*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 35, N°. 2, pp. 342-349, 1989

SAKAI M., AIZAWA K., HATORI M., *An adaptive filter with adaptation to nonuniformly spaced samples*, Electronics and communications in Japan, vol. 79 ; fasc. 6 ; pp. 35-46, juin 1996

SANKUR B., GERHARDT LA., *Reconstruction of signals from non-uniform samples*, IEEE Int. Conf. Commun., Conf. Rec., vol. 9.1, pp. 15.13-15.18, 1973

SATEH M.S. JALALEDDINE et al., *ECG data compression techniques. A unified approach*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol 37, n°4, pp. 329-343, 1990

SAUER K.D., ALLEBACH J.P., *Iterative reconstruction of band-limited images from nonuniformly spaced samples*, IEEE Trans. ASSP 37/10, pp. 1617-1621, 1989

SAXENA S.C., SHARMA A., CHAUDHARY S.C., *Data compression and feature extraction of ECG signals*, International Journal of Systems Science, vol. 28, fasc. 5, pp. 483-498, 1997

SCHLUTER P.S., *The design and evaluation of a bedside cardiac arrhythmia monitor*, Ph. D. Thesis MIT department of electrical engineering and computer science, Cambridge, MA, 1981

SKLANSKY J., GONZALEZ V., *Fast polygonal approximation of digitized curves*, Pattern Recognition, vol. 12, pp. 327-331, 1980

SLAMA, MOTTE, *Aide mémoire de rythmologie*, éd. Flammarion

SPERANZA G., NOLLO G., RAVELLI F., ANTOLINI R., *Beat-to-beat measurement and analysis of the R-T interval in 24 h ECG Holter recordings*, Med. & Biol. Eng. & Comput., vol. 31, pp. 487-494, 1993

TAKAGI T., SUGENO M., *Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control*, IEEE Trans. on Systems Man and Cybernetics, vol. 15, pp. 116-132, 1985

TAI S.C., *SLOPE - A real time ECG data compressor*, Med. Biol. Eng. Comput., vol. 29, pp. 175-179, 1991

TAVERNIER R., CARTON F., COURVILLE J., JORDAENS L.J., *Automatic QT measurements and dynamic QT behaviour an a 2 channel 24 hour recording : importance of lead selection and QT offset determination*, Computers in Cardiology, pp. 773-776, 1995

THAKOR N.V., WEBSTER J.G., *Optimal QRS detector*, Med. & Biol. Eng. & Comput., vol. 21, pp. 343-350, May 1983

THAKOR N.V., WEBSTER J.G., TOMPKINS W.J., *Estimation of QRS complex power spectra for design of QRS filter*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME-31, pp. 702-705, 1984

THAKOR N.V., SUN Y., RIX H., CAMINAL P., *Multiwave : a wavelet-based ECG data compression algorithm*, IEICE Trans. Inform. Syst., vol. E76-D, n° 12, pp. 1462-1469, 1993

TRAHANIAS P., SKORDALAKIS E., PAPAKONSTANTINOU G., *A syntactic method for the classification of the QRS patterns*, Pattern Recogintion Lett., vol. 9, pp. 13-18, 1989

TRAHANIAS P., SKORDALAKIS E., *Syntactic pattern recognition of the ECG*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 12, pp. 648-657, 1990

WILEY R.G., *Recovery of band-limited signals from unequaly spaced samples*, IEEE Trans. On Comm., vol. COM-26/1, pp. 135-138, 1978

WOMBLE M.E., HALLIDAY J.S., MITTER S.K., LANCASTER M.C., TRIEBWASSER J.H., *Data compression for storing and transmitting ECGs/VCGs*, Proc. IEEE, vol. 65, pp. 702-706, May 1977

XU QIUZHEN, YU HEN HU, TOMPKINS W.J., *Neural-network-based adaptive matched filtering for QRS detection*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. 39, n°4, pp. 317-329, April 1992

XU QIUZHEN, REDDY S., *New algorithm for QT dispersion analysis*, Computers in Cardiology, pp. 293-296, 1996

ZURRO V.R., STELLE A.L., NADAL J., *Detection of Atrial Persistent Rhythm Based on P-wave Recognition and RR Interval Variability*, Computers in Cardiology, pp. 185-188, 1995

II. Références bibliographiques personnelles

II.1. Colloques nationaux avec comité de lecture et actes

FONTAINE L., GRANJON Y., RAGOT J., *Filtrage passe bas du premier ordre de l'électrocardiogramme échantillonné à pas variable*, 9ème Forum de Jeunes Chercheurs en Génie Biologique et Médical, Brest 14-15 mai 1998, pp. 46-47, 1998

II.2. Colloques internationaux avec comité de lecture et actes

FONTAINE L., GRANJON Y., RAGOT J., ALIOT E., *Events detection in irregularly sampled electrocardiograms*, Proceedings of the World Congress on Medical Physics and Biomedical Engineering at Nice - France, September 14-19 1997, Medical & Biological Engineering & Computing, vol. 35, supplement part I, p. 436, 1997

GUTIÉRREZ J., **FONTAINE L.**, WOLF D., RAGOT J., *Cardiac arrhythmia detection*, Fifth conference of the European Society for Engineering and Medicine, Barcelona - Spain, May 30th - June 2nd 1999, pp. 397-398, 1999

FONTAINE L., MOUROT G., RAGOT J., *Segmentation d'électrocardiogrammes par réseau de modèles locaux*, 3ème conférence internationale sur l'Automatisation Industrielle, Associastion Internationale pour l'Automatisation Industrielle, Montréal - Canada, 7-9 juin 1999, ISBN 2-9802946-2-4, pp. 18.17-18.20, 1999

GUTIÉRREZ J., **FONTAINE L.**, WOLF D., RAGOT J., *Détection d'arythmies cardiaques à partir d'ECG*, 3ème conférence internationale sur l'Automatisation Industrielle, Montréal - Canada, 7-9 juin 1999, Associastion Internationale pour l'Automatisation Industrielle, ISBN 2-9802946-2-4, pp. 7.5-7.8, 1999

FONTAINE L., MOUROT G., RAGOT J., *Identification of local modal network ; application to electrocardiogram segmentation*, 14th world congress of International Federation of Automatic Control, Beijing P.R. China, 5-9 July 1999, ISBN 0 08 043248 4, vol. I-3a-18-6, pp. 171-176, 1999

Annexes

"Il y a toujours, dans notre enfance, un moment où la porte s'ouvre et laisse entrer l'avenir."
LA PUISSANCE ET LA GLOIRE

Graham GREENE (1904-1991 , Angleterre)

ANNEXES ..... **A**

I. SEGMENTATION D'ÉLECTROCARDIOGRAMMES PAR RÉSEAU DE MODÈLES LOCAUX C

I.1. Contexte ..... *c*

I.2. Introduction ..... *c*

I.3. Représentation par modèles locaux ..... *d*

I.4. Représentation par un réseau de modèles locaux ..... *g*

I.5. Segmentation d'électrocardiogrammes ..... *k*

I.6. Conclusion ..... *l*

II. L'ÉLECTROCARDIOGRAMME ..... M

II.1. Électrophysiologie du cœur ..... *m*

II.2. Électrocardiogramme ..... *q*

II.3. Arythmies cardiaques ..... *s*

I. Segmentation d'électrocardiogrammes par réseau de modèles locaux

I.1. Contexte

Au début des travaux concernant l'extraction de paramètres sur les ECG (temps, amplitudes, énergie...), nous avions entrepris cette méthode de segmentation sur des signaux échantillonnés régulièrement. Cette technique, permettant de modéliser les ondes de l'ECG par des modèles locaux, est très prometteuse. C'est pourquoi nous l'exposons ici, sachant qu'elle peut s'étendre assez facilement à des signaux échantillonnés irrégulièrement.

Nous proposons alors une méthode de segmentation et de modélisation du signal ECG par réseau de modèles locaux dans le but de réaliser un diagnostic de ces signaux pour détecter une pathologie particulière. D'un point de vue technique, les principaux problèmes à résoudre sont l'estimation des paramètres des modèles locaux, l'estimation des domaines d'influence des modèles locaux et le choix du nombre et de la structure de chaque modèle local. Dans ce qui suit, nous nous attacherons à proposer des solutions pour les deux premiers problèmes, pour une structure de modèles de forme polynomiale.

I.2. Introduction

Depuis quelques années, on assiste à un développement très sensible de techniques capables de représenter le fonctionnement d'un système dans un large domaine. C'est un problème difficile dès que le comportement du système dépend du domaine dans lequel il se trouve. De façon naturelle, la première technique qui fut utilisée a consisté à représenter le système dans chacun des domaines où il est susceptible d'évoluer et à établir une stratégie de commutation ou de glissement d'un modèle à un autre lorsque le domaine de fonctionnement évolue ; on imagine aisément alors les difficultés que cela peut induire au niveau de la commutation d'un modèle à un autre. Le problème de l'adoucissement du passage d'un modèle à un autre, s'est vite révélé et les techniques dites floues ont permis de proposer des solutions pour ces structures à plusieurs modes de représentation [Takagi et al., 1985]. Ces techniques floues ont conduit à développer des réseaux de modèles dans lesquels, cependant, les notions de flou ont pratiquement disparu [Murray-Smith et al., 1997], [Boukhris et al., 1996 et 1997], [Mourot et al., 1998].

Ce qui vient d'être très rapidement évoqué dans le cadre de la modélisation des systèmes vaut également pour la représentation des signaux et des données. La nature non linéaire des

phénomènes conduit aussi à distinguer dans des données des classes privilégiées, et, dans les signaux, des zones suffisamment distinctes les unes des autres pour qu'on puisse y déceler des changements de comportement. On s'intéresse donc à cet aspect particulier bien connu dans le domaine du diagnostic lorsqu'on souhaite mettre en évidence des ruptures de signal traduisant un dysfonctionnement, dans le domaine de la reconnaissance de forme pour reconnaître une situation, et dans le domaine de la segmentation où on recherche dans un signal des caractéristiques d'un événement particulier.

Notre propos concerne l'application des réseaux de modèles locaux, encore appelé multi-modèle, à la segmentation de signal avec, comme cible particulière, les électrocardiogrammes. La troisième partie de cette annexe est un rappel sur les modèles locaux d'un signal. On montre ensuite dans la quatrième partie comment définir une structure multi-modèle et estimer les paramètres de cette structure. L'application à la segmentation des ECG est présentée dans le cinquième paragraphe.

I.3. Représentation par modèles locaux

Les modèles locaux permettent de prendre en compte des caractéristiques locales du signal et de le représenter par une fonction mathématique globale. Les caractéristiques à considérer sont les suivantes : nombre de modèles, structure, domaine d'influence et transition de chaque modèle.

I.3.a. Structure du modèle

La figure A.1 fait apparaître, pour un signal caractérisé par deux variables x et y, $(n+1)$ domaines, chacun permettant de décrire la relation $y = F(x)$ par un modèle local simple ; n étant le nombre d'instants de commutation. On a donc la description suivante :

si $x < \sigma_1$, alors $f_1(x) = a_1 x + b_1$

si $\sigma_1 < x < \sigma_2$, alors $f_2(x) = a_2 x + b_2$

...

si $\sigma_n < x$, alors $f_{n+1}(x) = a_{n+1} x + b_{n+1}$

Remarque :

Des modèles locaux linéaires ont été choisis, mais ceci n'est pas une restriction fondamentale.

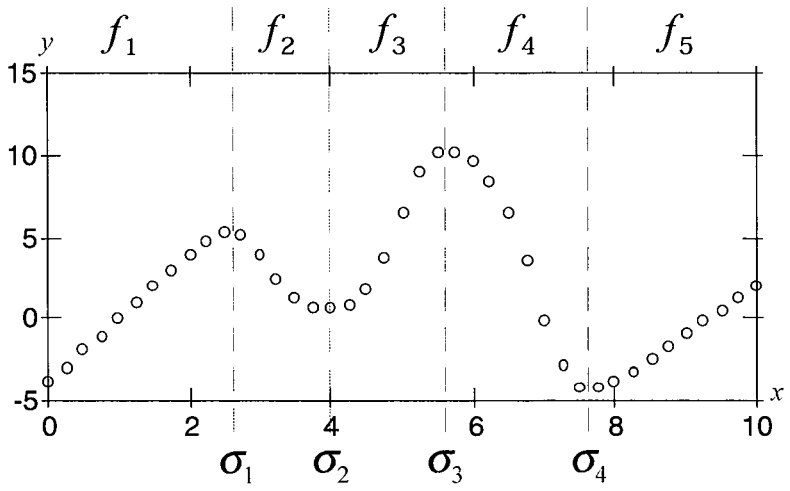


Figure A.1 : signal approximable par (*n*+1) segments.

Pour éviter la condition logique précédente et afin d'obtenir une seule équation de description du signal, l'agrégation des différentes équations peut se faire de proche en proche. On note $F_n(x)$ le modèle résultant de l'agrégation de n modèles locaux à partir du premier. On a successivement :

$$F_1(x) = f_1(x)$$

$$F_2(x) = F_1(x)\big(1-\delta_1(x-\sigma_1)\big)+f_2(x)\delta_1(x-\sigma_1)$$

...

$$F_{n+1}(x) = F_n(x)\big(1-\delta_n(x-\sigma_n)\big)+f_{n+1}(x)\delta_n(x-\sigma_n)$$

avec :

$$\delta_n(x-\sigma_n) = \frac{1+\mathrm{sgn}(x-\sigma_n)}{2}$$

où sgn, la fonction "signe", prend uniquement les valeurs -1 ou 1 suivant celles de l'argument $x-\sigma_n$.

On peut ainsi facilement montrer que :

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) = {} & \big(f_1(x)-f_2(x)\big)\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_n + \\ & \big(f_2(x)-f_3(x)\big)\Delta_2\ldots\Delta_n + \\ & \big(f_3(x)-f_4(x)\big)\Delta_3\ldots\Delta_n + \\ & +\ldots+ \\ & \big(f_n(x)-f_{n+1}(x)\big)\Delta_n + \\ & f_{n+1}(x) \end{aligned} \qquad \text{(eq. A-1)}$$

avec :

$$\Delta_n(x-\sigma_n) = 1-\delta_n(x-\sigma_n) = \frac{1-\mathrm{sgn}(x-\sigma_n)}{2}$$

où Δ_n prend uniquement les valeurs 0 ou 1 suivant celles de l'argument $x-\sigma_n$.

Sous forme vectorielle, l'équation (A-1) s'écrit :

$$\begin{cases} F_1(x) = f_1(x) \\ F_{n+1}(x,\Delta(\sigma)) = f_{n+1}(x) + \varphi^T(x) g(x,\Delta(\sigma)) \end{cases} \qquad \text{(eq. A-2)}$$

avec les définitions :

$$\varphi = \begin{pmatrix} f_1 - f_2 \\ f_2 - f_3 \\ \cdots \\ f_n - f_{n+1} \end{pmatrix} \qquad g(x,\Delta(\sigma)) = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{n} \Delta_i(x-\sigma_i) \\ \prod_{i=2}^{n} \Delta_i(x-\sigma_i) \\ \cdots \\ \prod_{i=n}^{n} \Delta_i(x-\sigma_i) \end{pmatrix} \qquad \Delta(x,\sigma) = \begin{pmatrix} \Delta_1(x,\sigma_1) \\ \Delta_2(x,\sigma_2) \\ \cdots \\ \Delta_n(x,\sigma_n) \end{pmatrix}$$

Une deuxième forme du modèle peut être donnée à partir de l'équation (A-2) :

$$F_{n+1}(x,\Delta(\sigma)) = \psi^T(x,\Delta(\sigma))\,\theta \qquad \text{(eq. A-3)}$$

avec :

$$\psi(x,\Delta(\sigma)) = \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ -x & x & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & & & \\ 0 & -x & & & \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & -x & x \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x,\Delta(\sigma)) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \theta = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \text{(eq. A-4)}$$

L'expression (A-3) présente l'avantage de mettre en évidence les paramètres θ qui interviennent de façon linéaire.

I.3.b. Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres est réalisée en recherchant le minimum du critère Φ à partir des mesures disponibles x_k et y_k :

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(y_k - F_{n+1}(x_k, \Delta, \sigma)\right)^2$$

Si les paramètres σ_i sont connus, on peut remarquer que F_{n+1} est linéaire par rapport aux paramètres a_i et b_i des modèles locaux et peuvent donc facilement être estimés par une méthode des moindres carrés. Si, par contre, les paramètres σ_i sont inconnus, le problème est plus difficile à résoudre car ces paramètres interviennent de façon non linéaire et non différentiable. Dans ce cas, une solution envisageable consiste en une recherche itérative du vecteur de paramètres σ. Pour cela, on peut proposer une mise en œuvre utilisant un partitionnement sans recouvrement du critère selon les zones de fonctionnement indiquées sur la figure A.1. Les premiers paramètres, a_i et b_i, seront donc obtenus de façon analytique, alors que les seconds, σ_i, seront obtenus par une méthode de programmation non linéaire.

Cependant, pour réduire le temps de calcul lié à une recherche purement itérative des valeurs de commutation σ, et surtout avec la perspective de l'utilisation de modèles plus complexes, c'est-à-dire comportant un grand nombre de modèles locaux et de degré plus élevé, on propose de remplacer la fonction signe par une fonction continue et dérivable.

I.4. Représentation par un réseau de modèles locaux

On se propose donc de remplacer la fonction de commutation $sgn(x)$ par une fonction d'interpolation $\mu(x)$ continue et dérivable disposant d'un seul paramètre de réglage traduisant la vitesse de commutation. La fonction tangente hyperbolique joue parfaitement ce rôle :

$$\mu(x) = \tanh\left(\frac{x}{p}\right)$$

où le paramètre p permet de définir la pente de la fonction tanh à l'origine (on peut prendre p très petit pour avoir une approximation convenable de la fonction signe ou plus grand pour assurer une commutation progressive d'un modèle à un autre).

Le modèle (A-3) prend donc une forme continûment dérivable par rapport à l'ensemble de ses paramètres. En définitive, l'expression (A-3) (ou (A-2) de façon équivalente) fournit le modèle du signal à partir de l'agrégation de modèles locaux en général choisis avec une structure très

simple. Le lecteur pourra comparer cette structure avec celle issue de considérations floues ou multi-modèles [Takagi et al., 1985], [Murray-Smith et al., 1997] et une étude plus précise pourrait être conduite sur ce point.

Ayant défini la structure du modèle du signal, on peut maintenant réexaminer le problème de l'estimation de ces paramètres.

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(y_k - F_{n+1}(x_k, \Delta(\sigma, p))\right)^2$$

avec :

$$\Delta_n(x-\sigma_n) = \frac{1-\tanh\left(\dfrac{x-\sigma_n}{p_n}\right)}{2}$$

Afin de prendre en compte à la fois les instants de commutation σ_i et les pentes associées p_i, on pose:

$$\beta = \begin{pmatrix} \sigma \\ p \end{pmatrix}$$

De plus, nous généralisons le modèle à un polynôme d'ordre M :

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^{M} a_j x^j$$

Le vecteur θ regroupant les coefficients a_j des modèles locaux est :

$$\theta = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix}$$

Comme précédemment, si le vecteur des paramètres β est connu, on peut remarquer que F_{n+1} est linéaire par rapport aux paramètres θ des modèles locaux, les paramètres β intervenant eux de façon non-linéaire. Les premiers paramètres θ seront donc obtenus de façon analytique par moindres carrés, alors que les seconds, β, seront obtenus par une méthode itérative de type gradient ou Hessien approché. Compte tenu de cette classification, une procédure d'estimation hiérarchisée à deux niveaux est utilisable, les deux niveaux étant relatifs à l'estimation des paramètres θ d'une part et des paramètres β, d'autre part.

On utilise pour cela le gradient de la fonction critère :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{N} \left(y_k - F_{n+1}\left(x_k, \Delta(\beta)\right)\right) \frac{\partial F_{n+1}(x_k, \Delta(\beta))}{\partial \theta} \qquad \text{(eq. A-5)}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = \sum_{k=1}^{N} \left(y_k - F_{n+1}\left(x_k, \Delta(\beta)\right)\right) \frac{\partial F_{n+1}(x_k, \Delta(\beta))}{\partial \beta} \qquad \text{(eq. A-6)}$$

Les gradients de Φ sont évalués à partir des expressions (A-3) et (A-4) du modèle :

$$\frac{\partial F_{n+1}\left(x, \Delta(\beta)\right)}{\partial \theta} = \psi\left(x, \Delta(\beta)\right) \qquad \text{(eq. A-7)}$$

$$\frac{\partial F_{n+1}\left(x, \Delta(\beta)\right)}{\partial \beta} = \frac{\partial g^T\left(\Delta(x, \beta)\right)}{\partial \beta} \varphi(x) \qquad \text{(eq. A-8)}$$

$$\frac{\partial g^T\left(\Delta(x, \beta)\right)}{\partial \beta} = \frac{\partial\left(\Delta^T(x, \beta)\right)}{\partial \beta} \frac{\partial g^T\left(\Delta(x, \beta)\right)}{\partial \Delta} \qquad \text{(eq. A-9)}$$

$$\frac{\partial g^T\left(\Delta(\sigma)\right)}{\partial \Delta} = \begin{pmatrix} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq 1}}^{n} \Delta_i & 0 & & \cdots & 0 \\ \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n} \Delta_i & \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq 2}}^{n} \Delta_i & 0 & \cdots & 0 \\ \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq 3}}^{n} \Delta_i & \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq 3}}^{n} \Delta_i & \prod_{\substack{i=3 \\ i\neq 3}}^{n} \Delta_i & 0 \quad \cdots \quad 0 & \\ \cdots & & & \ddots & \vdots \\ \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq n}}^{n} \Delta_i & \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq n}}^{n} \Delta_i & \prod_{\substack{i=3 \\ i\neq n}}^{n} \Delta_i & \prod_{\substack{i=4 \\ i\neq n}}^{n} \Delta_i \quad \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(eq. A-10)}$$

$$\frac{\partial\left(\Delta^T(x, \beta)\right)}{\partial \sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(\Delta_1(x, \sigma_1, p_1)\right)}{\partial \sigma_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\partial\left(\Delta_n(x, \sigma_n, p_n)\right)}{\partial \sigma_n} \end{pmatrix} \qquad \text{(eq. A-11)}$$

$$\frac{\partial\left(\Delta^T(x, \beta)\right)}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(\Delta_1(x, \sigma_1, p_1)\right)}{\partial p} \\ \vdots \\ \frac{\partial\left(\Delta_n(x, \sigma_n, p_n)\right)}{\partial p} \end{pmatrix}^T \qquad \text{(eq. A-12)}$$

Ainsi, le vecteur des paramètres θ peut donc être estimé analytiquement par :

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{k=1}^{N} \psi\left(x_k, \Delta(\sigma)\right) \psi\left(x_k, \Delta(\sigma)\right)^T + \lambda_\theta I \right)^{-1} \sum_{k=1}^{N} \psi\left(x_k, \Delta(\sigma)\right) y_k \qquad \text{(eq. A-13)}$$

où λ_θ est un facteur de régularisation.

Quant au vecteur des paramètres β, il peut être estimé itérativement par une technique de type Levenberg-Marquardt :

$$\hat{\beta}^{(t+1)} = \hat{\beta}^{(t)} - \left(H_a^{(t)} + \lambda_\beta I \right)^{-1} G^{(t)} \qquad \text{(eq. A-14)}$$

$G^{(t)}$ est le gradient du critère à l'itération t :

$$G^{(t)} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right|_{\beta=\hat{\beta}^{(t)}} = \sum_{k=1}^{N} \left(y_k - F_{n+1}\left(x_k, \Delta(\sigma)\right) \right) \frac{\partial F_{n+1}(x_k, \Delta(\beta))}{\partial \beta} \qquad \text{(eq. A-15)}$$

$H_a^{(t)}$ est le Hessien approché à l'itération t, obtenu en négligeant les dérivées secondes du critère :

$$H_a = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F_{n+1}^T(x_k, \Delta(\beta))}{\partial \beta} \frac{\partial F_{n+1}(x_k, \Delta(\beta))}{\partial \beta} \qquad \text{(eq. A-16)}$$

λ_β est un facteur de régularisation.

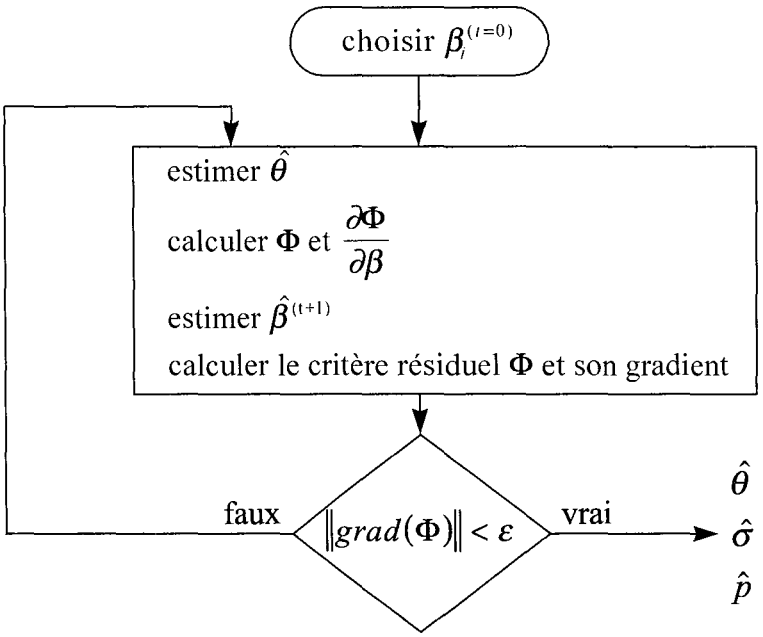


Figure A.2 : algorithme itératif d'estimation des paramètres

La procédure de calcul est regroupée sur la figure A.2. Après avoir choisi, à l'instant initial, les instants de commutation σ_i et les pentes associées p_i, on estime le vecteur des paramètres $\hat{\theta}$ (équation A-13), puis on évalue le gradient et le Hessien approché (équations A-5 à A-12, A-15 et A-16). On estime alors le vecteur des paramètres β (équation A-14). Enfin, on calcule à nouveau le gradient du critère. Si celui-ci est supérieur à un seuil de référence, on reprend le calcul de l'ensemble des paramètres de manière itérative, sinon, nous avons à disposition les paramètres $\hat{\theta}$ des modèles locaux, et les paramètres $\hat{\sigma}$ et $\hat{p}$ des fonctions de commutation.

I.5. Segmentation d'électrocardiogrammes

La figure (A.3) illustre les résultats de la méthode proposée à la segmentation de deux battements normaux d'un signal ECG. La segmentation s'effectue battement par battement. Nous nous sommes limités ici à des modèles sous la forme de segments de droite. Le premier graphique représente l'ECG mesuré, le deuxième graphique montre la superposition de l'ECG mesuré et de son modèle ; modèle que nous retrouvons sur le troisième graphique où apparaissent clairement les différents segments ainsi que les liaisons continues entre chaque segment. Sur le quatrième graphique sont représentées les fonctions de commutation où nous avons fixé la vitesse de transition (facteur p).

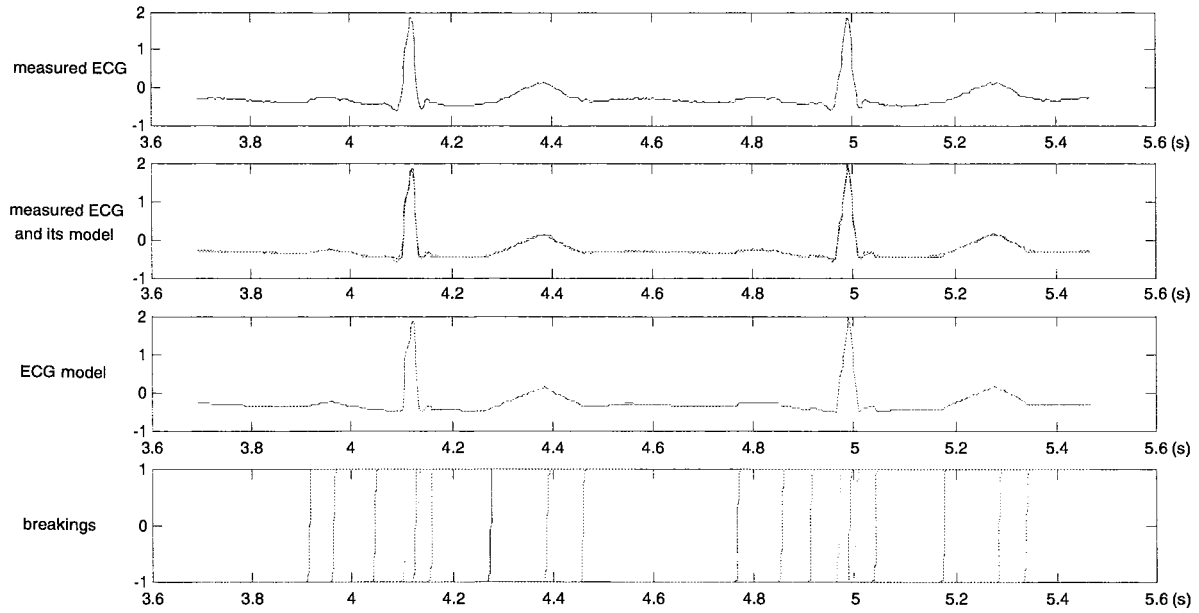


Figure A.3 : segmentation de battements normaux

Bien évidemment, la qualité de l'approximation du signal est liée au nombre de segments choisi, majoré ici à dix (ce choix sera lié, dans la démarche de diagnostic, au type d'événements à détecter) ; elle dépend aussi de la forme des fonctions d'interpolation

caractérisée ici par la raideur p que l'on peut optimiser de la même façon que les paramètres σ_i comme nous l'avons montré avec le vecteur β. Enfin des améliorations peuvent être recherchées en utilisant un critère d'approximation pondéré donnant une importance privilégiée à certaines parties du signal. Cette procédure peut être comparée à l'algorithme "Fuzzy c-Regression Models" proposé dans [Hathaway et al. 1993] qui est une extension de l'algorithme "Fuzzy C-Means" où les prototypes des classes sont des fonctions (droites...).

Une deuxième application à un ECG comprenant une arythmie ventriculaire est réalisée figure A.4. Comme précédemment, la segmentation de chaque battement est indépendante. Nous remarquons une bonne modélisation du signal y compris en présence des petites fluctuations du battement ventriculaire prématuré. La segmentation ayant été réalisée par des modèles d'ordre un, les ondes P et T sont modélisées par deux segments. Il serait préférable de les modéliser chacune, par un polynôme d'ordre deux. Cela permettrait de mieux prendre en compte la forme des ondes.

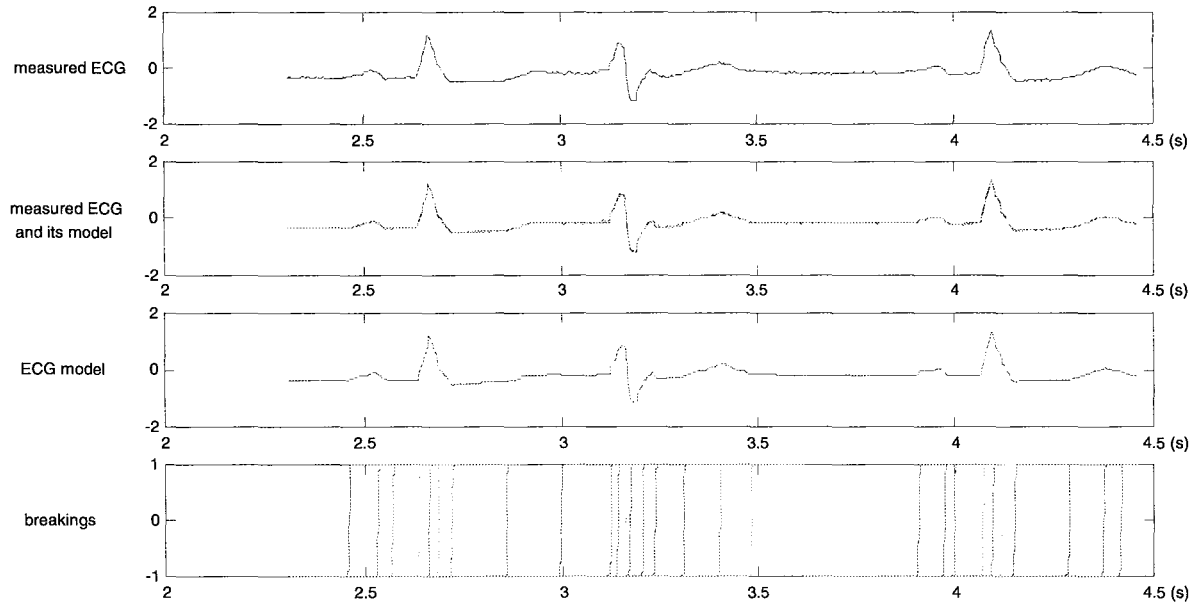


Figure A.4 : segmentation de battements normaux et anormaux

I.6. Conclusion

La technique proposée permet de modéliser un signal par réseau de modèles locaux, encore appelé multi-modèle, résultant de l'agrégation de modèles locaux de structures peu complexes. Une procédure d'estimation à deux niveaux, établie à partir d'une hiérarchisation entre estimation par voie analytique (des paramètres des modèles locaux) et estimation par voie itérative (des paramètres des fonctions d'agrégation), donne des résultats intéressants en terme

de temps de calcul. La technique proposée fournie aussi une segmentation du signal permettant ainsi de le caractériser.

Bien que la segmentation ait été présentée avec des facteurs de pentes p_i constants et des modèles d'ordre 1, l'algorithme développé permet d'estimer les facteurs de pente p_i de la même manière que sont estimer les instants de commutation σ_i, ainsi que la prise en compte de modèles sous la forme de polynômes d'ordre *M*. Selon les simulations effectuées, des modèles locaux du deuxième ordre permettent de mieux modéliser les ondes P et T.

Enfin, puisque le nombre de modèles a été majoré au départ, il semble nécessaire de mettre en œuvre une technique de régularisation afin de réduire ce nombre.

Par la suite, la segmentation obtenue ainsi que l'expression analytique du modèle constitueront la base d'une procédure d'analyse de signaux ECG afin de détecter des dysfonctionnements. La forme analytique du modèle du signal devrait ainsi permettre l'extraction de caractéristiques géométriques (maxima, pentes, durées, surface, ...) de façon plus aisée qu'avec le signal brut puisque les bruits de mesure sont alors inexistants.

Cette méthode de segmentation ayant été développée pour des signaux échantillonnés à pas fixe, il conviendrait de l'étendre à des signaux échantillonnés irrégulièrement, ce qui ne devrait pas poser trop de problèmes.

II. L'électrocardiogramme

Dans ce paragraphe, nous allons décrire l'électrophysiologie du cœur donnant naissance à l'électrocardiogramme (ECG). Nous aborderons aussi une description sommaire des principales arythmies rencontrées dans les ECG. Ce paragraphe a pour objectif d'apporter les informations nécessaires en rapport à l'application biomédicale évoquée aux chapitres 5 et 6 de ce mémoire.

II.1. Électrophysiologie du cœur

Commençons, dans cette partie, par regarder l'activité électrique d'une cellule, puis examinons l'activité électrique particulière des cellules cardiaques donnant naissance à l'électrocardiogramme.

II.1.a. Activité électrique d'une cellule

Les tissus biologiques formant le corps humain sont composés de cellules. Une cellule est isolée du milieu extérieur par une membrane. Lorsque la cellule est au repos, une importante

accumulation d'ions positifs, les ions sodium Na^+, est observée dans le milieu extracellulaire, tandis que les ions potassium K^+ sont à l'intérieur de la cellule. La cellule est polarisée, et on mesure une différence de potentiel entre l'intérieur et l'extérieur de la cellule de -90 mV : c'est le potentiel de repos. Les cellules réagissent plus ou moins à des stimulations mécanique, chimique, électrique, thermique ou à des rayonnements, en fonction de leur intensité. En stimulant brièvement une cellule, celle-ci se dépolarise et reprend rapidement son potentiel de repos qui présente un état stable. Si on augmente l'intensité ou la durée de stimulation, la dépolarisation se poursuivra et, passé un certain seuil de stimulation, le processus devient automatique et indépendant du milieu extérieur : les ions potassium passent dans le milieu extracellulaire alors que les ions sodium passent dans le milieu intracellulaire. Ainsi, l'extérieur de la cellule devient négatif par rapport à l'intérieur. On mesure une différence de potentiel entre l'intérieur et l'extérieur de la cellule de 40 mV. C'est le potentiel d'action. Dès que ce maximum est atteint, la cellule se repolarise pour reprendre son potentiel de repos. La phase qui va du seuil de dépolarisation à la repolarisation totale s'appelle la période réfractaire. La figure A.5 présente l'activité électrique d'une cellule.

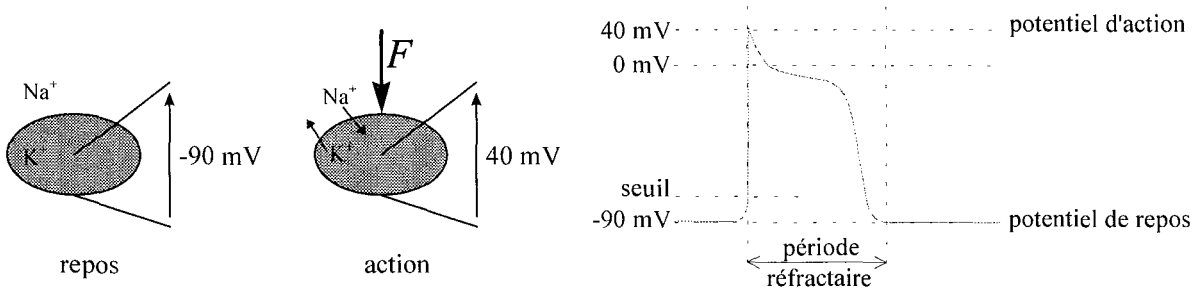


Figure A.5 : potentiel de repos et potentiel d'action d'une cellule

Au niveau d'une fibre musculaire, une stimulation provoque la dépolarisation puis la repolarisation de la fibre qui réagit alors à cette activité en se contractant puis en se relâchant.

II.1.b. Activité électrique du cœur

Les cellules cardiaques [Felblinger, 1990], [Guyton, 1980], [Morelle, 1991], [Slama] peuvent transmettre les ondes de dépolarisation comme toutes les cellules musculaires, mais elles ont la particularité d'avoir trois propriétés fondamentales :

- automaticité : les cellules du myocarde n'ont pas besoin de stimulus pour atteindre le seuil de dépolarisation. Elles présentent la propriété de se dépolariser spontanément puis de se repolariser à un certain rythme.

- très grande période réfractaire : leur temps de repolarisation est de 50 à 100 fois plus grand que pour les autres muscles, ce qui allonge considérablement leur période réfractaire.
- chemin de conduction privilégié : l'onde de dépolarisation traverse normalement un muscle de façon uniforme. Dans le myocarde, certaines cellules spécialisées offrent un chemin de conduction privilégié qui récupère les ondes électriques.

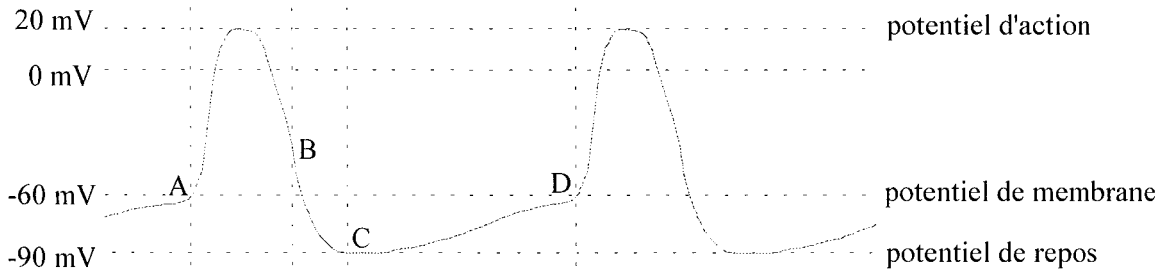


Figure A.6 : cellules cardiaques à activité automatique

La figure A.6 montre l'activité automatique des cellules cardiaques. La période réfractaire absolue (portion AB) dure en moyenne 250 ms et la période réfractaire relative (portion BC) dure en moyenne 50 ms. Dès que le potentiel de repos est atteint (point C), la membrane cellulaire laisse passer une faible quantité d'ions sodium Na^+ créant un courant de fuite (portion CD) dont la pente varie en fonction de l'emplacement des cellules dans le cœur. Puis la cellule se dépolarise à nouveau.

L'activité musculaire du cœur est donc indépendante du cerveau, mais est due à une excitation propre interne pouvant cependant être influencée par d'autres phénomènes physiologiques tels que l'effort et l'émotion. Les cellules du nœud sinusal de Keith et Flack sont situées sur la face interne supérieure (endocarde) de l'oreillette droite et commande le rythme cardiaque normale par dépolarisation spontanée au rythme d'environ 70 dépolarisations par minute. Ces impulsions se propagent dans les tissus myocardiques et dépolarisent (contractent) l'oreillette droite au bout de 25 ms, puis l'oreillette gauche au bout de 60 ms. Dans le septum, à la jonction entre les oreillettes et les ventricules, se trouvent les cellules formant le nœud auriculo-ventriculaire ou nœud d'Aschoff-Tawara. Il offre un chemin de conduction privilégié par rapport aux tissus environnants et recueille l'onde de dépolarisation émanant des oreillettes. L'onde traverse le nœud d'Aschoff-Tawara en 70 ms avant d'être transmis au faisceau de His qui se sépare en deux branches desservant chacune un ventricule. Le faisceau de His est prolongé par le réseau de Purkinje constitué de fibres hautement conductrices qui recouvrent l'endocarde ventriculaire et conduisent l'impulsion. Finalement, les deux

ventricules se dépolarisent environ 200 ms après la génération de l'onde par le nœud de Keith et Flack.

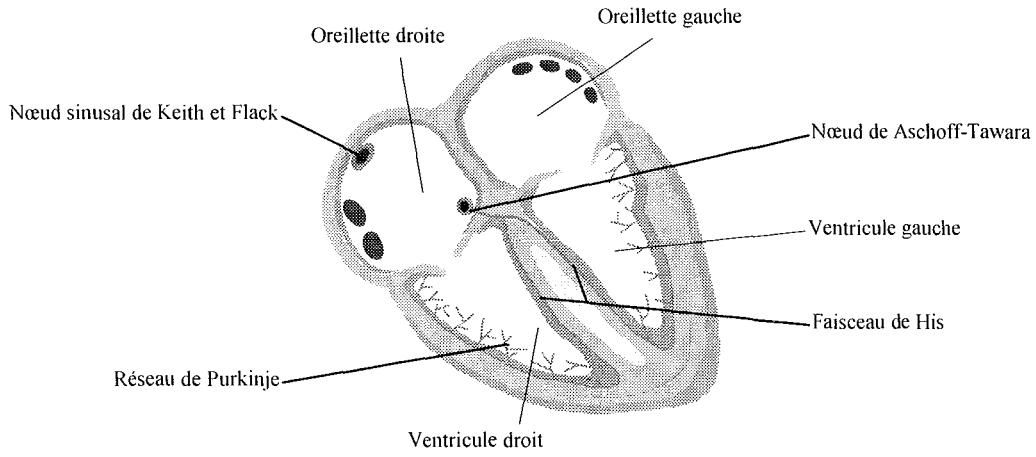


Figure A.7 : cellules électriques provoquant l'activité cardiaque

La figure A.7 montre une coupe du cœur laissant apparaître le système de conduction électrique. Chaque partie du système de conduction propage l'onde de dépolarisation à une vitesse propre, dont l'ordre de grandeur est :

nœud auriculo-ventriculaire	0,2 cm/s
oreillettes	1 cm/s
faisceau de His	3 cm/s
réseau de Purkinje	0,4 cm/s

II.1.c. Foyers ectopiques

Les foyers ectopiques sont des fibres musculaires cardiaques qui peuvent assurer la stimulation cardiaque si le mécanisme normale vient à faire défaut, ou émettre occasionnellement une impulsion électrique spontanée ou une série d'impulsions rapides se superposant à l'activité électrique normale. Ces foyers électriques se situent dans les oreillettes, à la jonction auriculo-ventriculaire et dans les ventricules.

La perméabilité de la membrane cellulaire vis-à-vis des ions sodium Na^+ est variable d'un emplacement à l'autre du cœur, d'où des courants de fuite à pente variable. Plus la pente est faible, plus il faut de temps pour atteindre le seuil de dépolarisation automatique. Par conséquent, la fréquence de dépolarisation varie d'un type de cellules à l'autre :

nœud sino auriculaire	70 bpm (battements par minute)
foyer ectopique auriculaire	60 à 80 bpm
nœud auriculo ventriculaire	65 bpm
foyer ectopique jonctionnel	40 à 60 bpm
faisceau de His	55 bpm
réseau de Purkinje	45 à 50 bpm
myocarde	35 à 45 bpm
foyer ectopique ventriculaire	20 à 40 bpm

II.2. Électrocardiogramme

Les activités électriques de toutes les cellules cardiaques se superposent et l'ensemble des ondes se propage par conduction dans tout le corps jusqu'à la peau [AHA, 1994], [Dale, 1992], [Felblinger, 1990], [Guyton, 1980]. Deux électrodes suffisamment distantes placées à la surface du corps présenteront une différence de potentiel variable au cours du temps due à l'activité électrique du cœur. Ce signal électrique de faible amplitude représente un électrocardiogramme. A chaque emplacement de deux électrodes sur le corps correspond une dérivation électrocardiographique. Dix points de mesure standards sont utilisés :

- R : le bras droit
- L : le bras gauche
- F : la jambe gauche
- N : la jambe droite servant de potentiel de référence
- V1 à V6 : les précordiales, réparties sur le thorax

Ces emplacements standards d'électrodes donnent naissance à des dérivations bipolaires et unipolaires, formant un ensemble de douze dérivations :

- Dérivations bipolaires ou dérivations d'Einthoven

Elles sont trois : D1, D2, D3 et mesurent l'électrocardiogramme entre deux électrodes parmi R, L et F. L'électrode N étant le potentiel de référence.

$$D1 = L - R$$

$$D2 = F - R$$

$$D3 = F - L$$

- Dérivations unipolaires ou dérivation de Goldberger

Elles sont trois AVR, AVL, AVF et mesurent l'électrocardiogramme entre une électrode et la moyenne des 2 autres.

$$AVR = R - \frac{L+F}{2}$$

$$AVL = L - \frac{R+F}{2}$$

$$AVF = F - \frac{L+R}{2}$$

- Dérivations précordiales ou dérivation de Wilson

Elles mesurent l'électrocardiogramme entre une électrode exploratrice placée sur le thorax (précordiale V1 à V6) et la moyenne des tensions recueillies sur les trois électrodes des membres L, R et F.

$$AVV_i = V_i - \frac{R+L+F}{3}$$

Un électrocardiogramme complet comporte les 12 dérivations : D1, D2, D3, AVR, AVL, AVF, V1, V2, V3, V4, V5, V6.

L'électrocardiogramme normal est recueilli sur la dérivation D2 correspondant à une orientation suivant le grand axe du cœur. La courbe représentative de cet ECG comporte des ondes séparées de segments dont chaque partie décrit l'activité électrique du cœur (figure A.8). On compte cinq ondes principales : P, Q, R, S et T. Les ondes Q, R et S forment le complexe QRS.

- Onde P : elle dure environ 120 ms et correspond à la dépolarisation des oreillettes (systole auriculaire). Son amplitude varie de 0,1 mV à 0,3 mV.
- Intervalle PR : il dure environ 180 ms et correspond au délai de transition de l'onde dû au nœud auriculo-ventriculaire.
- Complexe QRS : il dure 120 ms au maximum et correspond à la dépolarisation des ventricules (systole ventriculaire). Son amplitude est d'environ 1 mV. Les oreillettes se repolarisent.
- Segment ST : il dure environ 220 ms et correspond à l'intervalle de temps entre la dépolarisation totale et le début de la repolarisation des ventricules.
- Onde T : elle dure environ 200 ms et correspond à la repolarisation des ventricules. Son amplitude varie de 0,1 mV à 0,6 mV.
- Segment TP : il correspond au temps de repos général (diastole).
- Ligne isoélectrique ou ligne de base : aucun phénomène électrique ne survient dans le cœur.

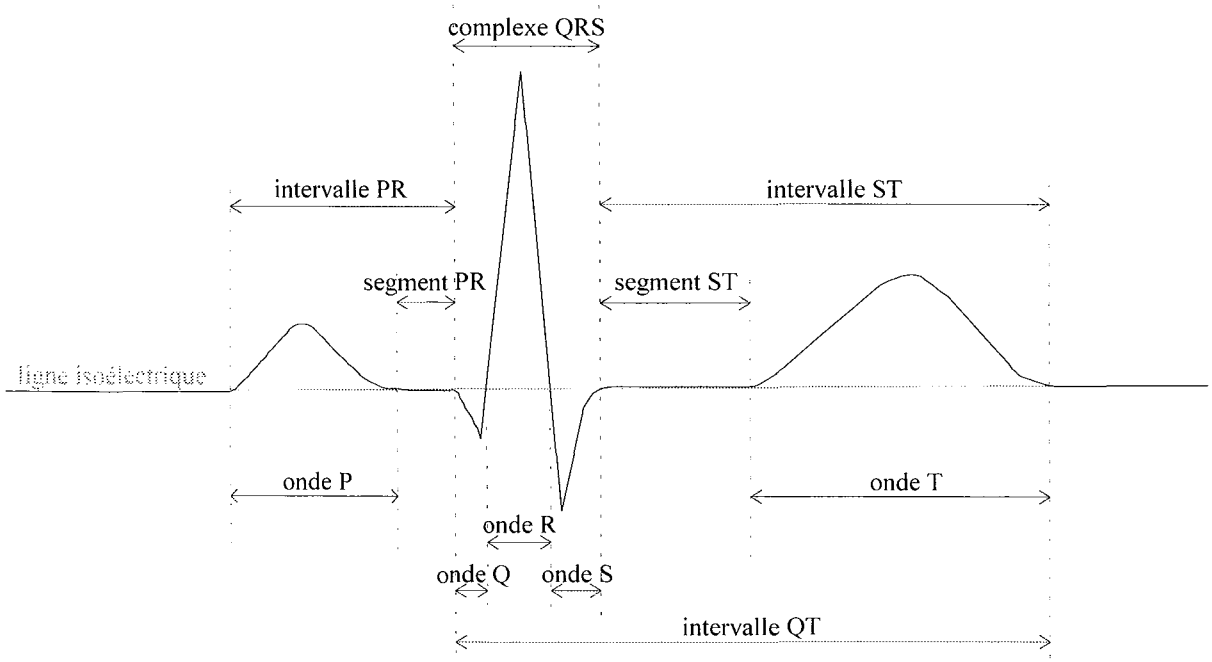


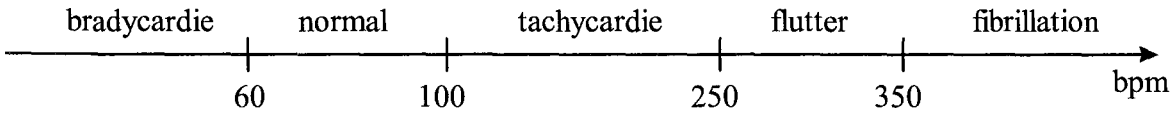
Figure A.8 : ondes de l'électrocardiogramme

II.3. Arythmies cardiaques

L'arythmie cardiaque est le trouble de la conduction électrique et le trouble du rythme [AHA, 1994], [Dale, 1992], [Guyton, 1980], [Morelle, 1991]. Le dysfonctionnement électrique du cœur est dû à des anomalies dans la génération de l'onde d'excitation cardiaque ou à des anomalies de conduction de cette onde d'excitation cardiaque. Ces anomalies peuvent modifier le rythme cardiaque ; elles sont générées au niveau des oreillettes, des ventricules, et à la jonction entre les oreillettes et les ventricules.

II.3.a. Modification de la fréquence cardiaque

- Rythme sinusal : c'est le rythme normal régulier réglé par le nœud sinusal (nœud de Keith et Flack) à la fréquence de 60 à 100 bpm.
- Bradycardie : la fréquence cardiaque est inférieure à 60 bpm. Les ondes sont normales et groupées bien que les cycles cardiaques soient espacés.
- Tachycardie : la fréquence cardiaque est supérieure à 100 bpm. Les ondes sont normales.
- Flutter : la fréquence cardiaque est supérieure à 250 bpm.
- Fibrillation : la fréquence cardiaque est supérieure à 350 bpm.



- Arythmie sinusale : c'est un rythme irrégulier qui varie avec la respiration. Toutes les ondes de chacun des cycles sont normales, de forme et de taille identiques, mais il y a un changement de la fréquence continu et progressif : accélération à l'inspiration et ralentissement à l'expiration.
- Extrasystole : c'est un battement prématuré provoqué par la décharge spontanée d'un foyer ectopique qui entraîne un battement survenant de façon soudaine, plus tôt que prévu. La morphologie de l'extrasystole peut être normale ou différente.

II.3.b. Troubles auriculaires

Les troubles auriculaires se situent dans les oreillettes ou le nœud sino auriculaire (nœud SA ou nœud sinusal de Keith et Flack).

- Bloc sino auriculaire ou pause ou battement manquant : le nœud de Keith et Flack ne délivre plus d'impulsion de façon temporaire. Il n'y a ni onde P ni complexe QRS. Il manque alors un battement et il faut attendre l'impulsion suivante pour que l'ECG redevienne normal.
- Extrasystole auriculaire (ESA) : un foyer ectopique dans les oreillettes émet une impulsion qui emprunte le chemin normal de conduction. L'onde P prend une forme inhabituelle mais l'onde R reste normale.

II.3.c. Troubles jonctionnels

Ils trouvent leur origine dans le nœud auriculo ventriculaire (nœud AV ou nœud de Tawara) à la jonction des oreillettes et des ventricules.

- Bloc du 1er degré : l'impulsion générée par le nœud de Keith et Flack est anormalement ralentie par le nœud de Tawara. La durée du segment PR augmente mais les ondes gardent leur forme normale.
- Bloc du 2ème degré : le nœud de Tawara bloque certaines impulsions générées par le nœud de Keith et Flack, généralement à un rythme régulier. L'onde P n'est alors pas suivie de complexe QRS.
- Bloc du 3ème degré : le nœud de Tawara bloque totalement toutes les impulsions générées par le nœud de Keith et Flack. Le nœud auriculo ventriculaire bat alors à son propre

rythme, entraînant des contractions normales des ventricules mais sans aucune synchronisation avec les ondes P en plus grand nombre que les ondes R.

II.3.d. Troubles ventriculaires

- Extrasystole ventriculaire (ESV) : un foyer ectopique ventriculaire émet une impulsion qui se transmet par conduction directe aux ventricules et entraîne une extra-contraction. Il n'y a pas d'onde P et le complexe QRS est très différent de la normale et élargi suivant le lieu du foyer ectopique.
- Flutter ventriculaire : il s'agit d'une série rapide d'onde d'allure sinusoïdale naissant d'un seul foyer ectopique ventriculaire.
- Fibrillation ventriculaire : chacune des fibres musculaires du myocarde émet des impulsions électriques à fréquence élevée sans aucune synchronisation. Les parois des ventricules sont animées d'une sorte de tremblotement et le sang ne circule plus. L'ECG ne présente plus aucune des ondes caractéristiques, mais des oscillations de formes sinusoïdales, de fréquence et d'amplitude variables. La fibrillation ventriculaire est souvent précédée d'extrasystoles ventriculaires.

II.3.e. Troubles généraux

- Arrêt cardiaque ou asystole : il est dû à une cessation de l'activité électrique ventriculaire, voire même à un arrêt total de toute activité électrique. L'ECG ne présente plus que des ondes P ou se trouve complètement plat.

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur DUCHENE Jacques, Professeur, Université de Troyes
Monsieur GIMENEZ Gérard, Professeur, CREATIS, Villeurbanne

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur FONTAINE Ludovic

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

"Traitement des signaux à échantillonnage irrégulier. Application au suivi temporel de paramètres cardiaques".

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : **"AUTOMATIQUE ET TRAITEMENT NUMERIQUE DU SIGNAL"**

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANDŒUVRE CEDEX

Fait à Vandoeuvre le, 22 novembre 1999

Le Président de l'I.N.P.L.,
J. HARDY

Pour le Président
Le Vice-Président
J. Cl. BRAUN

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE NANCY

TEL. 33/03.83.59.59.59
FAX. 33/03.83.59.59.55

Traitement des signaux à échantillonnage irrégulier
Application au suivi temporel de paramètres cardiaques

Bon nombre de méthodes de compression font du signal originel un signal échantillonné irrégulièrement. Par ailleurs, certains systèmes, de part leur conception, ne permettent de recueillir que des signaux à échantillonnage irrégulier. Afin de pouvoir traiter ces signaux, diverses méthodes de reconstruction sont apparues depuis quatre décades. Une manière originale de traiter de tels signaux échantillonnés irrégulièrement est de prendre en compte la principale caractéristique de ces signaux, à savoir l'intervalle de temps variable entre deux échantillons consécutifs. Nous avons voulu, dans ce travail, développer des outils de traitement de signaux à échantillonnage irrégulier, sans avoir recours à une reconstruction totale d'un signal à échantillonnage régulier.

Afin d'obtenir un signal à échantillonnage irrégulier, nous avons développé une méthode de compression du signal, dite d'échantillonnage à pas variable, alliant taux de compression et fidélité de reconstruction, et générant ainsi un signal irrégulièrement échantillonné. L'idée originale consiste à traiter directement ce signal à échantillonnage irrégulier. Nous avons, par conséquent, redéfini les méthodes et outils suivants : opérations simples ; opérations statistiques ; analyse spectrale par transformée de Fourier ; filtrage passe-bas et passe-bande ; identification ; décomposition.

L'ensemble de ces outils et méthodes a été appliqué à la détection d'événements dans l'électrocardiogramme. Une compression par échantillonnage à pas variable permet de réduire la mémoire de stockage de l'ECG. D'une part, l'extraction d'informations caractéristiques de chaque cycle de l'ECG permet de recueillir et de suivre l'évolution temporelle d'intervalles de temps, d'amplitudes, de formes d'ondes, d'énergies... D'autre part, chaque cycle cardiaque de l'ECG échantillonné à pas variable est décomposé sur des bases comprenant un battement normal sain et un battement de chaque arythmie. L'évolution au cours du temps des coefficients de la décomposition peut être associée à l'évolution des paramètres précédemment décrits afin de les fusionner, d'en étudier les variations, et d'améliorer la prise de décision en terme d'arythmie.

Mots clés : traitement du signal, échantillonnage irrégulier, analyse spectrale, filtrage, identification, décomposition, détection, électrocardiogramme.

Processing of irregularly sampled signals
Application to time analysis of cardiac parameters

Many compression methods turn the original signal into an irregularly sampled signal. Otherwise, systems, owing to their creation, only allow to gather signals with an irregular sampling. In order to be able to process these signals, various reconstruction methods have appeared since four decades. An original way to process such irregularly sampled signals is to take the main characteristic of these signals into account, namely the variable time interval between two consecutive samples. In this work, we wanted to develop tools for the process of irregularly sampled signals, without having recourse to a total reconstruction of a regularly sampled signal.

After having compressed the signal by a method allying compression ratio and fidelity of reconstruction, we obtain a non-equispaced sampled signal. The original idea consists in directly processing the irregularly sampled signal, and therefore, we have redefined the following methods and tools : addition, subtraction and multiplication of signals ; statistical operations such as zero and first order moments ; spectral analysis by Fourier transform ; low-pass and band-pass filterings ; identification, expansion.

The whole of the tools and methods have been applied to the events detection in the electrocardiogram. A compression by our algorithm allows to reduce the storage memory of the ECG. On the one hand, the extraction of characteristic information of each beat of the ECG allows to collect and to follow the temporal evolution of time intervals, amplitudes, waveforms, energies... On the other hand, we realize the decomposition of each cardiac cycle of the irregularly sampled ECG on bases including a healthy normal beat and a beat of each arythmia. The evolution, in course of the time, of the decomposition coefficients can be joined to the evolution of the previously described parameters in order to merge them, to study their variations, and to improve the decision making in terms of arythmia.

Keywords : signal processing, irregular sampling, spectral analysis, filtering, identification, expansion, detection, electrocardiogram.