



HAL
open science

Modélisations couplées thermo-hydro-mécaniques en milieux poreux partiellement saturés : solutions linéaires et non linéaires

Gilles Thouvenon

► **To cite this version:**

Gilles Thouvenon. Modélisations couplées thermo-hydro-mécaniques en milieux poreux partiellement saturés : solutions linéaires et non linéaires. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1999. Français. NNT : 1999INPL051N . tel-01749931

HAL Id: tel-01749931

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749931>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

1360190701

95 INPL051N

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
Ecole Nationale Supérieure de Géologie de Nancy
Laboratoire Environnement, Géomécanique & Ouvrages

Ecole Doctorale PROMEMA

(M) 1999 THOUVENIN, G.

THESE

présentée à l'I.N.P.L.
en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'I.N.P.L.
en Génie civil – Hydrosystèmes – Géotechnique

par

Gilles THOUVENIN

Ingénieur de l'Ecole Nationale Supérieure de Géologie de Nancy

Modélisations couplées thermo-hydro-mécaniques en milieux poreux partiellement saturés : solutions linéaires et non linéaires

Soutenu le 22 Juin 1999 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Mme	Françoise	HOMAND	Directeur de Thèse, Président du Jury
M.	Olivier	COUSSY	Rapporteur
M.	Antonio	GENS	Rapporteur
M.	Albert	GIRAUD	Codirecteur de Thèse
M.	Gilles	ROUSSET	Examineur
M.	Maurice	BOUTECA	Examineur
M.	Thierry	DUFORESTEL	Examineur

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

A ma femme Sandrine et mon fils Arthur

A ma famille

Avant-propos

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à Madame Françoise Homand, Professeur des Universités à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, et Directeur-adjoint du Laboratoire Environnement, Géomécanique et Ouvrages, pour son accueil au sein de son équipe. Elle a su me faire partager son expérience et ses connaissances, et me transmettre le goût et l'envie de la recherche.

Je tiens ensuite à exprimer ma plus grande reconnaissance à Monsieur Albert Giraud, Maître de Conférence à l'INPL, tant pour sa rigueur scientifique que pour son amitié. Ce travail lui doit beaucoup par son étroite collaboration et ses précieux conseils.

C'est un grand honneur que me fait Monsieur Olivier Coussy, Directeur de Recherche au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, en acceptant d'être rapporteur de ma thèse. Je lui suis très reconnaissant de l'intérêt qu'il a porté à ce travail et de l'aide que m'ont procurée ses éminents ouvrages.

Je voudrais témoigner également ma profonde gratitude à Monsieur Antonio Gens, Professeur à l'Universidad Politécnica de Cataluña, pour avoir consacré de son précieux temps à l'examen de mon travail, en acceptant d'assumer la tâche de rapporteur.

Je remercie Gilles Rousset, Chef du Département MTC de la Division des Etudes et de la Recherche d'EDF, d'avoir jugé mon travail à la lumière de sa riche expérience.

Monsieur Maurice Boutéca, Ingénieur de Recherche à l'Institut Français du Pétrole, a bien voulu lire ce mémoire et y apporter sa caution scientifique. Je lui adresse mes plus vifs remerciements.

Je remercie également Monsieur Thierry Duforestel, Ingénieur de Recherche d'EDF (DER-ADEB), de m'avoir fait bénéficier de précieux renseignements et de participer au jury de ma thèse.

Ce travail a été réalisé en partie sur un contrat EDF et en étroite collaboration avec différentes personnes qui ont su me faire profiter de leur aide en toute sympathie : je souhaite donc exprimer ma profonde gratitude à Messieurs Olivier Didry, Jean-Marc Ruck, Patrick Hornet et Thierry Duforestel (EDF-DER), ainsi qu'à Monsieur Thierry Lassabatère et Mademoiselle Estelle Olchitsky (CEA-DESD).

Ces années de thèse m'ont permis de côtoyer quotidiennement des personnes, enseignants, chercheurs, thésards et autres membres du LAEGO, dont l'amitié m'a été d'un précieux secours. Je pense notamment à Mireille, Danièle, Nicole, Mountaka, Dashnor, Patrick, Eric, Laurent, Stéphane, Constantin, Michel, ...et tous les autres.

Ces remerciements ne sauraient être complets si je n'y associais ma femme Sandrine pour son soutien, mon fils Arthur pour sa joie de vivre, mon frère et mes parents pour leur présence de tous les instants.

Résumé

Partant du principe qu'un matériau artificiel comme un béton, ou bien un matériau naturel tel qu'une roche argileuse, peuvent être considérés comme des matériaux poreux polyphasiques, au sein desquels se produisent des interactions entre les phases solide, liquide et éventuellement gazeuse, les équations différentielles régissant le comportement couplé thermo-hydro-mécanique ont été établies dans le formalisme défini par Coussy (1995), par une démarche rigoureuse s'appuyant sur des arguments thermodynamiques.

Pour certains problèmes, dans le cas de géométrie unidimensionnelle, une approche linéarisée peut être envisagée. Le schéma de résolution pour une étude linéaire est de type semi-explicite : les techniques existantes ont été étendues pour pouvoir résoudre des problèmes couplés thermo-hydro-mécaniques et deux méthodes d'inversion numérique des transformées de Laplace ont plus particulièrement été étudiées et validées (Stehfest, 1970 ; Piessens et al., 1983). L'intérêt des approches semi-explicites est double puisqu'elles permettent de valider les codes de calcul et qu'elles sont également très utiles du fait de leur rapidité pour réaliser des études de sensibilité. D'autre part, un code aux éléments finis a été développé au LAEGO pour résoudre le système d'équations généralement non linéaires.

Ce cadre théorique et ces outils ont ensuite été mis à profit pour modéliser trois applications présentant un fort intérêt industriel, en relation avec Electricité de France. Une première étude concerne le stockage des déchets radioactifs de haute activité par le concept de Barrière Ouvragée (BO), et s'intéresse à la cinétique de ressaturation. Cette couche argileuse est initialement non saturée et s'hydrate progressivement en contact avec le massif environnant pour former une barrière autour des conteneurs de déchets. La deuxième étude traite du phénomène de retrait de dessiccation : après une étude générale sur des structures en béton idéales, une analyse de la ventilation dans une galerie argileuse est proposée pour expliquer le lien entre la dessaturation du massif et l'apparition d'une fissuration en paroi de la galerie, comme cela a pu être observé sur le site de Tournemire. Enfin, une troisième étude est relative au problème d'isolation thermique des murs de bâtiment. Un mur de bâtiment est modélisé comme un ensemble constitué de plusieurs couches (plâtre, béton, isolant, enduit) et deux agencements différents sont étudiés (isolation par l'intérieur ou l'extérieur). Les fortes variations climatiques extérieures induisent l'apparition de contraintes de traction dans le modèle qui peuvent être à l'origine de décohésion entre les matériaux.

Summary

On the basis of the principle that an artificial material like a concrete, or well a natural material such as a clay, can be regarded as polyphase porous materials, in which occur interactions between the phases solid, liquid and possibly gas, the differential equations governing the thermo-hydro-mechanical coupled behaviour were established in the formalism defined by Coussy (1995), by a rigorous step being based on thermodynamic arguments.

For certain problems, in the case of one-dimensional geometry, a linearized approach can be considered. The diagram of resolution for a linear study is of semi-explicit type: the existing techniques were wide to be able to solve coupled problems and two numerical methods of inversion of the Laplace transforms were more particularly studied and validated (Stehfest, 1970; Piessens et al., 1983). The interest of the semi-explicit approaches is double since they make it possible to validate computer codes and they are also very useful to make sensitivity analyses thanks to their calculation speed. In the other hand, a finite elements computer code, PARSAT, was developed in LAEGO to solve the system of equations which is generally non-linear.

This theoretical framework and these tools were then made profitable to model three applications being of strong industrial interest, in relation to EDF, the French electricity company. A first study relates to the storage of the high activity radioactive waste with the concept of Clay Barrier (CB), and is interested in the kinetics of resaturation of the CB. This clay layer is initially not saturated and is hydrated gradually in contact with the surrounding rock mass to form a barrier around the waste containers. The second application is based on the phenomenon of desiccation shrinkage. After a general study on ideal concrete structures, an analysis of distribution in a clay gallery is proposed to explain the link between the dessaturation of the rock mass and the appearance of a cracking in the wall of the gallery, as it could be observed on the site of Tournemire. Lastly, a third study relates to the problem of insulating building wall. A wall is modelled like a unit made up of several layers (plaster, brick-masonry, polystyrene, rendering) and two different layouts are studied (internal or external insulation). The strong external climatic variations induce the appearance of tensile stresses in the model which can be at the origin of decohesion between materials.

Sommaire

LISTE DES FIGURES.....	viii
LISTE DES TABLEAUX.....	xiii
NOMENCLATURE.....	xv

INTRODUCTION.....	1
--------------------------	----------

CHAPITRE 1 : CADRE THEORIQUE DE LA MECANIQUE DES MILIEUX POREUX PARTIELLEMENT SATURES ET METHODOLOGIE DES RESOLUTIONS NUMERIQUES ET SEMI-EXPLICITES.

1.1 - CADRE THEORIQUE.....	5
1.1.1 - Structure du milieu poreux.....	5
1.1.2 - Modèle de comportement thermo-poro-élastique linéaire isotrope en milieu saturé.....	6
1.1.3 - Modèle de comportement thermo-poro-élastique non linéaire isotrope en milieu non saturé.....	7
1.1.3.1 - Hypothèses.....	7
1.1.3.2 - Etablissement des équations de champ.....	8
1.1.3.3 - Comparaison des modèles THMNL et de Thomas.....	29
1.2 - METHODOLOGIE DE RESOLUTION.....	35
1.2.1 - Analogie entre les formulations en milieux saturés et partiellement saturés.....	35
1.2.2 - Approche non linéaire : résolution par éléments finis avec PARSAT.....	36
1.2.3 - Approche linéaire : résolution semi-explicite.....	36
1.3. SOLUTIONS SEMI-EXPLICITES : METHODE DE RESOLUTION DE PROBLEMES COUPLES THERMO-HYDRO-MECANQUES.....	37
1.3.1 - Importance de la méthode de linéarisation.....	37
1.3.2 - Détail de la méthode de résolution dans le cas particulier d'un modèle bicouche en géométrie cylindrique.....	40
1.3.2.1 - Recherche de solutions générales dans le domaine transformé.....	40
1.3.2.2 - Recherche de solutions particulières à partir des conditions aux limites et de continuité.....	42
1.3.3 - Inversion numérique des solutions transformées.....	45
1.3.4 - Intérêt de ces solutions.....	46
1.3.4.1 - Validation de codes de calculs.....	46
1.3.4.2 - Etudes de sensibilité.....	47

CHAPITRE 2 : METHODES D'INVERSION NUMERIQUE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE
--

2.1 - LES METHODES D'INVERSION RETENUES : DESCRIPTION ET MISE EN ŒUVRE.....	50
2.1.1 - Méthode de Stehfest (1970).....	50
2.1.2 - Méthode de Talbot modifiée par Piessens et al. (1983).....	51
2.2 - ANALYSE CRITIQUE DE CES DEUX METHODES.....	55
2.2.1 - Limite de la méthode de Stehfest (1970).....	55
2.2.1.1 - Validation pour une sphère pleine en diffusion pure.....	55
2.2.2.2 - Instabilités en géométrie cylindrique.....	60
2.2.2 - Validité de la méthode de Talbot modifiée par Piessens et al. (1983).....	62
2.2.2.1 - Conditions exercées à une limite finie.....	62
2.2.2.2 - Adaptation aux temps réduits petits.....	63
2.2.2.3 - Modèle multi-couches et discontinuités.....	67
2.2.2.4 - Phasage et état initial discontinu.....	69

CHAPITRE 3 : APPLICATION AU STOCKAGE DE DECHETS RADIOACTIFS EN COUCHES GEOLOGIQUES PROFONDES : RESSATURATION DE LA BARRIERE OUVRAGEE

3.1 - INTRODUCTION.....	79
3.2 - CARACTERISATION DE LA BARRIERE OUVRAGEE ET DU MASSIF HOTE.....	79
3.2.1 - Modèle de comportement de la BO et du massif.....	79
3.2.2 - Méthodes de linéarisation des courbes de pression capillaire.....	80
3.2.3 - Application au cas particulier du bicouche BO-massif.....	83
3.3 - GEOMETRIES ET CONDITIONS AUX LIMITES.....	84
3.4 - ETUDE MONOCOUCHE.....	85
3.4.1 - Modèle linéaire.....	85
3.4.1.1 - Principaux résultats.....	85
3.4.1.2 - Etude de sensibilité.....	86
3.4.2 - Comparaison du modèle linéaire et des modèles non linéaires.....	88
3.4.2.1 - Modèle avec courbe de pression capillaire non linéaire et conductivité au liquide constante.....	88
3.4.2.2 - Modèle avec courbe de pression capillaire linéaire et conductivité au liquide non linéaire.....	90
3.4.2.3 - Modèle avec les deux non-linéarités.....	91
3.5 - ETUDE BICOUCHE.....	92
3.5.1 - Différences entre les modèles monocouche et bicouche.....	92
3.5.2 - Modèle linéaire.....	93
3.5.2.1 - Principaux résultats.....	93
3.5.2.2 - Analyse de sensibilité des paramètres du modèle.....	94
3.5.2.3 - Comparaison avec une étude de sensibilité discrète non linéaire.....	101
3.5.3 - Modèle non linéaire.....	103
3.5.3.1 - Discrétisations spatiale et temporelle.....	103
3.5.3.2 - Nécessité du lissage de la courbe de pression capillaire non linéaire.....	104
3.5.3.3 - Comparaison linéaire/non linéaire.....	106
3.5.3.4 - Etude de sensibilité discrète de quelques paramètres du modèle.....	107
3.6 - CONCLUSIONS.....	109

CHAPITRE 4 : APPLICATION AU RETRAIT DE DESSICCATION

4.1 - INTRODUCTION.....	112
4.2 - STRUCTURES EN BETON.....	112
4.2.1 - Géométrie et conditions aux limites.....	112
4.2.2 - Propriétés hydro-mécaniques du béton.....	113
4.2.3 - Influence de la géométrie sur la cinétique.....	113
4.2.4 - Influence de la géométrie sur le couplage H→M.....	114
4.2.5 - Influence des conditions initiales et aux limites sur le couplage H→M.....	116
4.2.6 - Conclusions.....	117
4.3 - VENTILATION DANS UNE GALERIE PROFONDE.....	117
4.3.1 - Introduction.....	117
4.3.2 - Géométrie et conditions aux limites.....	118
4.3.3 - Caractéristiques physiques du massif rocheux.....	118
4.3.3.1 - Argilite de Tournemire.....	118
4.3.3.2 - Argilite de l'Est.....	120
4.3.4 - Etude non linéaire.....	122
4.3.4.1 - Discrétisations spatiale et temporelle.....	122
4.3.4.2 - Nécessité du lissage de l'isotherme au voisinage de la saturation.....	122
4.3.4.3 - Etude du modèle pour l'échantillon A avec $k = 10^{-19} \text{ m}^2$	122
4.3.4.4 - Influence des différentes courbes de pression capillaire.....	125
4.3.4.5 - Influence de la perméabilité intrinsèque.....	127
4.3.4.6 - Influence des perméabilités relatives au liquide et au gaz.....	128
4.3.4.7 - Influence du couplage H→M.....	130
4.3.4.8 - Les principales différences entre argilite de Tournemire et argilite de l'Est.....	131
4.3.5 - Etude linéaire.....	132
4.3.5.1 - Méthodes de linéarisation de la courbe de pression capillaire.....	132
4.3.5.2 - Influence des différentes méthodes sur les réponses hydrique et mécanique.....	134
4.3.6 - Prise en compte de l'influence du creusement de la galerie.....	134
4.3.6.1 - Phasage du problème.....	139
4.3.6.2 - Application au modèle linéaire.....	140
4.3.7 - Conclusions.....	141

CHAPITRE 5 : APPLICATION A L'ISOLATION THERMIQUE DU BATIMENT

5.1 - INTRODUCTION.....	143
5.2 - GEOMETRIES.....	143
5.3 – CARACTERISTIQUES DES DIFFERENTS MATERIAUX DU MUR.....	144
5.4 - ETUDE THERMO-MECANIQUE.....	147
5.4.1 - Régime permanent : solutions analytiques.....	147
5.4.2 - Régime transitoire : solutions semi-explicites.....	150
5.4.3 - Modèle tricouche/quadricouche : importance du plâtre.....	152
5.4.4 - Influence des conditions aux limites : température constante imposée.....	153
5.5 - ETUDE THERMO-HYDRO-MECANIQUE.....	154
5.5.1 - Discrétisations spatiale et temporelle.....	154
5.5.2 - Modèle linéaire.....	155
5.5.2.1 - Solutions semi-explicites.....	155
5.5.2.2 - Validation du régime permanent avec PARSAT.....	155
5.5.2.3 - Validation du régime transitoire pour un modèle simplifié.....	157
5.5.3 - Modèle non linéaire quadricouche.....	158
5.5.3.1 - Cas de référence.....	158
5.5.3.2 - Importance des couplages hydriques.....	160
5.5.3.3 - Importance des couplages thermiques.....	162
5.5.3.4 - Type d'isolation : isolation classique par l'intérieur (modèle ITI).....	163
5.5.3.5 - Influence des conditions aux limites extérieures.....	165
5.5.3.6 - Sorption du polystyrène : matériau hygroscopique ou non.....	167
5.5.3.7 - Couplage H→M dans la couche d'enduit.....	168
5.5.3.8 - Importance de la diffusion de Fick de la vapeur.....	170
5.5.3.9 - Non-linéarité de la conductivité thermique.....	173
5.6 - CONCLUSIONS.....	174

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....177

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....181

ANNEXES**ANNEXE 1 : BIBLIOGRAPHIE DES METHODES D'INVERSION NUMERIQUE
DES TRANSFORMEES DE LAPLACE**

- A1.1 - Echantillonnage de f
- A1.2 - Calcul de f comme combinaison linéaire d'exponentielles
- A1.3 - Méthode utilisant la quadrature de Gauss
- A1.4 - Méthode utilisant une transformation bilinéaire de s
- A1.5 - Expression de f en série de Fourier

ANNEXE 2 : VALIDATION DES METHODES D'INVERSION

- A2.1 - Quelques fonctions mathématiques simples
 - A2.1.1 - Fonctions testées avec succès par la méthode de Stehfest (1970)
 - A2.1.2 - Fonctions testées avec succès par la méthode de Piessens et al. (1983)
- A2.2 - Quelques exemples de problèmes 1D
 - A2.2.1 - Sphère d'argile chauffée (Djéran, 1991)
 - A2.2.2 - Creusement d'une galerie (Detournay & Cheng, 1988)
 - A2.2.3 - Déformations autour d'une cavité (Senjuntichai & Rajapakse, 1993)
 - A2.2.4 - Pulse-test dans un aquifère (Cooper et al, 1966)
 - A2.2.5 - Stockage de déchets en milieu multicouche (Giraud & Thouvenin, 1997)
 - A2.2.6 - Transport d'un polluant par dispersion, convection, adsorption et décroissance radioactive
- A2.3 - Diffusion de chaleur 2D en régime permanent
- A2.4 - Diffusion de chaleur 2D en régime transitoire
 - A2.4.1 - Diffusion de chaleur en géométrie cartésienne
 - A2.4.2 - Transport d'un polluant par dispersion-convection (Leij & Dane, 1990)

ANNEXE 3 : REPONSE INSTANTANEE ET REGIME ASYMPTOTIQUE

- A3.1 - Réponse hydrique instantanée
 - A3.1.1 - Milieu poreux saturé
 - A3.1.2 - Milieu poreux partiellement saturé
- A3.2 - Réponse mécanique instantanée
 - A3.2.1 - Les paramètres élastiques non drainés
 - A3.2.2 - Evolution instantanée des variables mécaniques
 - A3.2.3 - Application : milieu bicouche plein fini
- A3.3 - Régime asymptotique

ANNEXE 4 : RESOLUTION PAR ELEMENTS FINIS AVEC LE LOGICIEL PARSAT**ANNEXE 5 : CARACTERISTIQUES PHYSIQUES GENERALES**

Liste des figures

Chapitre 1

Figure 1. Structure du milieu poreux saturé.....	5
Figure 2. Structure du milieu poreux partiellement saturé.....	5
Figure 3. Schématisation des couplages thermo-hydro-mécaniques dans le milieu poreux.....	7
Figure 4. Schématisation des couplages en milieu poreux partiellement saturé.....	27
Figure 5. Géométrie de la zone de stockage.....	29
Figure 6. Ajustement du flux de chaleur dégagé avec les données de Pollock (1986).....	29
Figure 7. Courbe de pression capillaire du massif limoneux.....	30
Figure 8. Perméabilité relative du massif limoneux.....	31
Figure 9. Evolution temporelle de la température au centre du stockage.....	31
Figure 10. Evolution spatiale de la température et de la saturation (formulation de Thomas).....	32
Figure 11. Evolution spatiale de la température et de la saturation (formulation THMNL).....	33
Figure 12. Résultats présentés par Pollock (1986).....	34
Figure 13. Courbe de pression capillaire non linéaire.....	38
Figure 14. Linéarisation par la méthode de la tangente.....	39
Figure 15. Linéarisation par la méthode de la corde.....	39
Figure 16. Géométrie.....	42
Figures 17 (a et b). Contours d'intégration dans le plan complexe.....	46
Figure 18. Décomposition du domaine d'étude grâce aux méthodes probabilistes.....	48

Chapitre 2

Figure 19. Erreur relative en fonction du paramètre N	51
Figure 20. Valeurs de N optimales pour différentes fonctions.....	51
Figure 21. Contour d'intégration proposé par Talbot (1979).....	52
Figure 22. Contour d'intégration proposé par Piessens et al. (1983).....	53
Figure 23. Algorithme utilisé pour calculer les intégrales.....	54
Figure 24. Géométrie.....	55
Figure 25. Courbe de pression capillaire linéarisée.....	56
Figures 26. Evolutions de quelques variables (solutions exactes et semi-explicites).....	58
Figures 27. Evolutions de la saturation pour différents maillages.....	59
Figure 28. Instabilités localisées de la méthode de Stehfest (1970).....	61
Figure 29. Géométrie et conditions aux limites.....	62

Figure 30. Géométrie et conditions aux limites.....	64
Figure 31. Evolution de la concentration dans le mur d'enceinte.....	67
Figure 32. Géométrie.....	68
Figures 33. Evolutions spatiales de quelques variables pour différents temps.....	69
Figure 34. Modèle tricouche Colis - BO - Massif.....	70
Figure 35. Phase 1 : état initial.....	71
Figure 36. Phase 2 : creusement du massif.....	71
Figure 37. Phase 3 : mise en place du conteneur et de la BO en problème tricouche.....	72
Figure 38. Phase 3 : mise en place du conteneur et de la BO en problème bicouche.....	72
Figure 39. Réponse mécanique instantanée.....	73
Figures 40 Evolutions spatiales de quelques variables en modèle bicouche.....	74
Figures 41. Evolutions spatiales de quelques variables en modèle tricouche.....	75
Figures 42. Evolution spatiale de la pression pour différentes valeurs de λ_H dans le conteneur.....	76

Chapitre 3

Figure 43. Les deux non-linéarités de la BO et du massif.....	80
Figure 44. Méthode énergétique à saturation constante.....	81
Figure 45. Méthode énergétique à pression capillaire constante.....	81
Figure 46. Méthode énergétique avec point sur la courbe non linéaire.....	82
Figure 47. Les différentes méthodes de linéarisation de la courbe de pression capillaire.....	82
Figure 48. Schématisation du chemin de ressaturation dans les deux matériaux.....	83
Figure 49. Linéarisation de la courbe de pression capillaire du massif.....	83
Figure 50. Géométries monocouche et bicouche.....	84
Figure 51. Discontinuité initiale de saturation du modèle bicouche.....	85
Figure 52. Carte d'occurrence de l'événement dans le plan des variables principales.....	88
Figure 53. Evolution du rapport des valeurs propres linéaire et non linéaire.....	89
Figure 54. Courbe de pression capillaire et point de tangence.....	89
Figure 55. Distribution de la saturation : modèles L et NL avec λ_{lq} constant.....	90
Figure 56. Evolution du rapport des conductivités au liquide L et NL.....	91
Figure 57. Distribution de la saturation : modèle L et modèle avec λ_{lq} NL.....	91
Figure 58. Distribution de la saturation : modèles L et NL.....	92
Figure 59. Distribution de la saturation dans la BO : modèles mono et bicouche.....	93
Figure 60. Evolution temporelle de la saturation.....	93
Figure 61. Distribution de la pression capillaire et de la saturation.....	94
Figure 62. Les trois courbes de pression capillaire du massif pour l'étude de sensibilité.....	95
Figure 63. Facteurs d'importance en fonction du temps.....	96
Figure 64. Influence des courbes de pression capillaire sur les facteurs d'importance.....	97
Figure 65. Plan des variables principales à 10 ans.....	97
Figure 66. Plan des variables principales à 100 ans.....	98
Figure 67. Plan des variables principales à 1000 ans.....	98
Figure 68. Saturation dans le plan (b, λ_{lq}) à 10 ans.....	99
Figure 69. Saturation dans le plan $(b, r\lambda_{lq})$ à 100 ans.....	99
Figure 70. Probabilité d'occurrence de l'événement.....	100
Figure 71. Facteurs d'importance en fonction du temps.....	100
Figure 72. Plan des variables principales à 50 ans.....	101
Figure 73. Temps de ressaturation (résultats CEA).....	102

Figure 74. Temps de ressaturation (solutions semi-explicites).....	102
Figure 75. Maillage du modèle 1D bicouche.....	103
Figure 76. Comparaison des schémas implicite et explicite.....	104
Figure 77. Problème du nœud de l'interface BO/massif.....	104
Figure 78. Valeurs calculées aux nœuds de la pression capillaire pour l'élément i+1.....	104
Figure 79. Interpolation de la pression capillaire sur l'élément de contact i+1.....	105
Figure 80. Lissage de la courbe de pression capillaire du massif : $\varepsilon = 0.001$ et $p_{cpo}^a = 0.01$	106
Figure 81. Lissage de la courbe de pression capillaire de la BO : $\varepsilon = 0.001$ et $p_{cpo}^a = 0.1$	106
Figure 82. Evolutions temporelles et spatiales de saturation L et NL ($r = a$).....	107
Figure 83. Etude de sensibilité discrète de la variable b.....	108
Figure 84. Influence de b sur le temps de ressaturation.....	108
Figure 85. Influence de $r\lambda_{lq}$ sur le temps de ressaturation.....	109

Chapitre 4

Figure 86. Géométries et conditions aux limites.....	112
Figure 87. Evolution de la saturation pour les trois géométries.....	113
Figure 88. Evolution de la déformation volumique pour les trois géométries.....	114
Figure 89. Evolution de la contrainte moyenne pour les trois géométries.....	115
Figure 90. Fissuration observée dans la galerie de Tournemire.....	117
Figure 91. Géométrie de la galerie.....	118
Figure 92. Orientation de l'anisotropie de l'argilite de Tournemire.....	119
Figure 93. Courbes de pression capillaire expérimentales pour l'argilite de Tournemire (d'après Daupley, 1997).....	120
Figure 94. Courbes de pression capillaire expérimentales de l'argilite de l'Est.....	121
Figure 95. Maillage de la galerie pour PARSAT.....	122
Figure 96. Valeurs instantanées de la pression capillaire dans l'élément 1.....	122
Figure 97. Evolution spatiale de l'humidité et de la pression capillaire.....	123
Figure 98. Evolution spatiale de la saturation en liquide.....	124
Figure 99. Evolution spatiale de la contrainte radiale et du déplacement.....	124
Figure 100. Evolution des contraintes orthoradiale et axiale.....	125
Figures 101 (a et b). Influence de la pente de la courbe de pression capillaire sur l'évolution de la saturation.....	126
Figure 102. Evolution de la pente de la courbe de pression capillaire.....	127
Figure 103. Influence de la perméabilité intrinsèque sur l'évolution de l'humidité.....	128
Figure 104. Exemples de perméabilités relatives au liquide et au gaz.....	129
Figure 105. Evolutions de la saturation et de la contrainte orthoradiale avec des Perméabilités relatives non linéaires.....	129
Figure 106. Influence de la dessaturation en paroi sur la contrainte orthoradiale.....	130
Figure 107. Traction maximale et résistance à la traction.....	131
Figure 108. Relation entre les contraintes maximales et la saturation en paroi.....	132
Figure 109. Linéarisation de la courbe de pression capillaire par une méthode énergétique.....	133
Figure 110. Autres linéarisations de la courbe de pression capillaire.....	133
Figure 111. Erreur relative sur la saturation avec le modèle linéaire énergétique.....	134
Figure 112. Evolution de la saturation avec les modèles non linéaire et linéaire énergétique.....	135
Figure 113. Erreur relative sur les contraintes maximales avec le modèle linéaire énergétique.....	136

Figure 114. Choix des points de référence en fonction du paramètre α	136
Figure 115. Evolution de la saturation en paroi et des contraintes maximales en fonction de α	137
Figure 116. Erreur relative sur la saturation en paroi et les contraintes maximales avec le modèle linéaire mécanique.....	138
Figure 117. Phase 1 : état initial et massif non perturbé.....	139
Figure 118. Phase 2 : creusement de la galerie et réponse instantanée.....	139
Figure 119. Phase 3 : dessaturation du massif.....	140
Figure 120. Evolutions instantanées des contraintes.....	140

Chapitre 5

Figures 121. Modèles de mur de bâtiment avec les concepts ITE et ITI.....	143
Figure 122. Courbe de pression capillaire du béton.....	145
Figure 123. Courbe de pression capillaire du plâtre.....	145
Figure 124. Courbe de pression capillaire de l'enduit.....	146
Figure 125. Courbes de pression capillaire du polystyrène.....	146
Figure 126. Profil initial de saturation dans le mur.....	147
Figure 127. Evolution de la température en régime permanent.....	148
Figure 128. Evolutions de la contrainte orthoradiale et du déplacement en régime permanent.....	149
Figure 129. Evolution de la température en régime transitoire (modèle ITI).....	150
Figure 130. Evolution de la température en régime transitoire (modèle ITE).....	151
Figure 131. Evolution de la contrainte orthoradiale en régime transitoire (modèle ITI).....	151
Figure 132. Evolution de la contrainte orthoradiale en régime transitoire (modèle ITE).....	151
Figure 133. Evolution de la température avec (4c) et sans (3c) la couche de plâtre.....	152
Figure 134. Evolution de la contrainte orthoradiale avec (4c) et sans (3c) la couche de plâtre.....	153
Figure 135. Influence des CL (échanges ou T fixée) sur la température.....	153
Figure 136. Influence des CL (échanges ou T fixée) sur la contrainte orthoradiale.....	154
Figure 137. Discrétisation spatiale du mur (modèles ITI et ITE).....	154
Figure 138. Comparaison des résultats en RP : PARSAT/solutions semi-explicites.....	156
Figure 139. Evolution de la température pour le modèle simplifié (PARSAT et semi-expl.).....	157
Figure 140. Evolution de la contrainte pour le modèle simplifié (PARSAT et semi-expl.).....	157
Figure 141. Evolution de la température dans le cas de référence.....	158
Figure 142. Equilibre instantané de la pression de mélange.....	159
Figure 143. Evolution de la pression capillaire dans le cas de référence.....	159
Figure 144. Evolution de la saturation dans le cas de référence.....	160
Figure 145. Evolution de la contrainte orthoradiale dans le cas de référence.....	160
Figure 146. Importance du couplage $H \rightarrow T$ sur l'évolution thermique.....	161
Figure 147. Influence du couplage $H \rightarrow T$ sur l'évolution hydrique.....	161
Figure 148. Influence du couplage $H \rightarrow M$ dans les différentes couches.....	162
Figure 149. Importance du couplage $T \rightarrow H$	162
Figure 150. Importance du couplage $T \rightarrow M$	163
Figure 151. Evolution thermique avec le modèle ITI.....	163
Figure 152. Evolution de la pression capillaire avec le modèle ITI.....	164
Figure 153. Evolution de la saturation avec le modèle ITI.....	164
Figure 154. Evolution de la contrainte orthoradiale avec le modèle ITI.....	165

Figure 155. Evolution thermique pour un été sec.....	165
Figure 156. Répercussion d'un été sec sur la contrainte orthoradiale.....	166
Figure 157. Evolution de la pression capillaire pour un hiver humide.....	166
Figure 158. Répercussion d'un hiver humide sur la contrainte orthoradiale.....	167
Figure 159. Polystyrène hygroscopique et évolution de la saturation.....	167
Figure 160. Polystyrène hygroscopique et évolution de la contrainte orthoradiale.....	168
Figure 161. Courbes de pression capillaire pour des enduits plus hygroscopiques.....	168
Figure 162. Evolution des contraintes orthoradiales avec les nouvelles courbes de pression capillaire de l'enduit.....	169
Figure 163. Effet de la diffusion de Fick seule sur l'évolution de la pression capillaire.....	170
Figure 164. Influence de fortes valeurs de F sur l'évolution de la saturation ($F \approx 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$).....	171
Figure 165. Influence de fortes valeurs de F sur l'évolution de la saturation ($F \approx 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$).....	172
Figure 166. Effet d'une forte valeur de F sur l'évolution de la température ($F \approx 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$).....	172
Figure 167. Conductivité thermique non linéaire et évolution de la température.....	173
Figure 168. Répercussion de la non-linéarité de la conductivité thermique sur la contrainte.....	174
Figure 169. Les couplages thermo-hydro-mécaniques dans le mur.....	174
Figure 170. Couplages majeurs observés dans le mur.....	175

Liste des tableaux

Chapitre 1

Tableau 1. Synthèse des différentes formulations couplées.....	9
Tableau 2. Quelques formes de courbes de pression capillaire.....	10
Tableau 3. Termes de couplages de capacité pour la conservation de l'eau liquide.....	12
Tableau 4. Différentes formulations de la loi de Darcy pour la phase liquide.....	12
Tableau 5. Quelques formes de courbe de perméabilité relative au liquide.....	13
Tableau 6. Termes de couplages de capacité pour la conservation de l'eau vapeur.....	15
Tableau 7. Vitesses et flux des constituants du mélange gazeux.....	16
Tableau 8. Termes de couplages de conductivité pour la conservation de l'eau vapeur.....	20
Tableau 9. Termes de couplages de capacité pour la conservation de l'air sec.....	22
Tableau 10. Termes de couplages de conductivité pour la conservation de l'air sec.....	22
Tableau 11. Les différentes formulations de l'emmagasinement de la chaleur.....	24
Tableau 12. Les différentes formulations du mouvement de la chaleur.....	25

Chapitre 2

Tableau 13. Caractéristiques thermo-hydrauliques de la sphère de béton.....	56
Tableau 14. Erreur relative entre les solutions numériques et explicites pour différents maillages.....	59
Tableau 15. Erreur relative entre les solutions numériques et explicites pour différents pas de temps.....	60
Tableau 16. Valeurs de la pression avec la méthode de Stehfest (1970) pour différents couples (r, t).....	61
Tableau 17. Propriétés thermo-hydro-mécaniques des deux matériaux.....	68
Tableau 18. Caractéristiques physiques des trois matériaux.....	70
Tableau 19. Valeurs propres et temps caractéristiques dans les différents matériaux.....	75

Chapitre 3

Tableau 20. Domaines de variations des paramètres pour l'étude de sensibilité.....	87
Tableau 21. Facteurs d'importance pour les approches théorique et expérimentale.....	87

Tableau 22. Comparaison de la saturation obtenue avec les modèles L et NL.....	92
Tableau 23. Intervalles de variation pour l'analyse de sensibilité.....	95
Tableau 24. Evénements de l'analyse de sensibilité.....	96

Chapitre 4

Tableau 25. Influence des conditions initiales et aux limites sur $\Delta\varepsilon_v$ et ε_v^∞	116
Tableau 26. Valeurs de a et b pour l'ajustement de la courbe de pression capillaire de l'argilite de Tournemire.....	120
Tableau 27. Valeurs de a et b pour l'ajustement de la courbe de pression capillaire de l'argilite de l'Est.....	121
Tableau 28. Relation entre les contraintes maximales dans le massif et la saturation en paroi.....	127
Tableau 29. Etendue de la zone dessaturée suivant la valeur de la perméabilité intrinsèque.....	128
Tableau 30. Influence des courbes de pression capillaire sur le comportement hydro-mécanique..	131
Tableau 31. Estimation de la saturation en paroi avec le modèle linéaire énergétique.....	134
Tableau 32. Estimation des contraintes maximales avec le modèle linéaire énergétique.....	135
Tableau 33. Saturation et contraintes maximales avec le modèle linéaire mécanique.....	138

Chapitre 5

Tableau 34. Caractéristiques des matériaux du mur.....	144
Tableau 35. Influence des courbes de pression capillaire et des variations hygrométriques extérieures sur les contraintes orthoradiales maximales dans l'enduit.....	169

Nomenclature

Indices :

as	air sec
gz	mélange gazeux
lq	liquide
s	solide
vp	vapeur
o	état initial
o+	état instantané
∞	état asymptotique

Sous- et sur-lignements :

\underline{X}	vecteur
$\underline{\underline{X}}$	tenseur
\tilde{X}	matrice
\overline{X}	variable dans le domaine des transformées de Laplace

Opérateurs :

div	divergence
$\underline{\text{grad}}$	gradient
∇^2	Laplacien

Etats saturé et non saturé :

C	capacité calorifique volumique	[PaK ⁻¹]
E _o (E)	module d'Young drainé (non drainé)	[Pa]
K _o (K)	module d'incompressibilité drainé (non drainé)	[Pa]
q	vecteur courant de chaleur	[Wm ⁻²]
S	entropie	[PaK ⁻¹]
t	temps	[s]
T	température	[K]

u	déplacement	[m]
α_o	coefficient de dilatation thermique	[K ⁻¹]
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	tenseur des déformations	
ε_v	déformation volumique	
ϕ	porosité	
$\lambda_o (\lambda)$	coefficient de Lamé drainé (non drainé)	[Pa]
λ_T	conductivité thermique	[Wm ⁻¹ K ⁻¹]
μ	module de cisaillement	[Pa]
$\nu_o (\nu)$	coefficient de Poisson drainé (non drainé)	
$\underline{\underline{\sigma}}$	tenseur des contraintes	
σ_m	contrainte moyenne	[Pa]

Etat saturé :

b	coefficient de Biot	
m	apport de masse fluide	[kgm ⁻³]
M	module de Biot	[Pa]
\underline{M}	vecteur courant de masse fluide	[kgm ⁻² s ⁻¹]
P	pression interstitielle	[Pa]
Q	production volumique interne de chaleur	[Wm ⁻³]
s_m^{fl}	entropie massique du fluide	[Jkg ⁻¹ K ⁻¹]
α_m	coefficient de dilatation thermique différentielle fluide/liquide	[K ⁻¹]
λ_H	conductivité hydraulique	[m ³ kg ⁻¹ s ⁻¹]
ρ_o^{fl}	masse volumique du fluide	[kgm ⁻³]

Etat non saturé :

b_i	coefficients de Biot	
C_i	concentration molaire de la phase i	
C_{ij}	coefficients de couplage de capacité	
c_m^i	chaleur spécifique (massique) de la phase i	[Jkg ⁻¹ K ⁻¹]
D_{aum}	diffusivité moléculaire de la vapeur d'eau dans l'air	[m ² s ⁻¹]
F	coefficient de Fick	[m ² s ⁻¹]
H	coefficient (de Henry) de solubilité de l'air sec dans l'eau	
h_i	enthalpie massique de la phase i	[Jkg ⁻¹]
h_r	humidité relative	
$\underline{J}_i, \underline{J}_i^*$	flux massiques de la phase i par rapport à \underline{V}_{gz} et \underline{V}_{gz}^*	[kgm ⁻² s ⁻¹]
$\underline{J}_i^{ol}, \underline{J}_i^{ol*}$	flux molaires de la phase i par rapport à \underline{V}_{gz} et \underline{V}_{gz}^*	[molm ⁻² s ⁻¹]
k	perméabilité intrinsèque du sol	[m ²]

K_{ij}	coefficients de couplage de conductivité	
K_{lq}, K_s	module d'incompressibilité du liquide et des grains	[Pa]
$K_{lq}^{rel}, K_{gz}^{rel}$	perméabilités relatives du liquide et du mélange	
L	chaleur latente de vaporisation de l'eau	[Jkg ⁻¹]
m_i	apport de masse de la phase i	[kgm ⁻³]
$m_{lq \rightarrow vp}$	taux d'évaporation représentant l'échange liquide-vapeur	[kgs ⁻¹]
M_i	masse molaire de la phase i	[kgmole ⁻¹]
M_{ij}	modules de Biot	[Pa]
$\underline{M}_i, \underline{M}_i^{mol}$	flux massiques et molaires de la phase i par rapport à des axes stationnaires.	
n_i	nombre de moles de la phase i	[mole]
n_p	facteur de flux massique	
P_{cp}	pression capillaire	[Pa]
p_i	pression partielle de la phase i	[Pa]
R	constante spécifique des gaz parfaits = 8.32	[JK ⁻¹ mol ⁻¹]
S_i	saturation de la phase i	
$\underline{V}_{gz}, \underline{V}_{gz}^*$	vitesse moyennes molaire et massique du mélange	[ms ⁻¹]
\underline{V}_i	vitesse de la phase i dans un repère stationnaire	[ms ⁻¹]
α_i	coefficient de dilatation thermique de la phase i	[K ⁻¹]
α_m^i	coefficient de dilatation thermique différentielle de la phase i	[K ⁻¹]
ϕ_i	fraction volumique de la phase i	
$\phi_{lq \rightarrow vp}$	taux d'évaporation représentant l'échange liquide-vapeur	[s ⁻¹]
γ_i	poids volumique = $\rho_i g$	[Pam ⁻¹]
$\lambda_{lq}, \lambda_{gz}$	conductivité hydraulique des phases liquide et gaz	[m ³ kg ⁻¹ s ⁻¹]
λ_T^i	conductivité thermique de la phase i	[Wm ⁻¹ K ⁻¹]
μ_{lq}, μ_{gz}	viscosités du liquide et du mélange	[kgm ⁻¹ s ⁻¹]
π_{vp}	perméabilité à la vapeur d'eau	[s]
ρ_i	masse volumique de la phase i	[kgm ⁻³]
ρ_{vp}^0	densité de vapeur d'eau en milieu saturé	[kgm ⁻³]
τ	facteur de tortuosité	
ω_i	fraction massique de la phase i	
σ	tension superficielle	[Pa]
ψ	potentiel capillaire	[m] ou [Pa] ou [m ² s ⁻²]

Introduction

« De nombreux matériaux, tant naturels qu'artificiels, sont des matériaux poreux dont l'espace interstitiel est saturé par un ou plusieurs fluides. La compréhension de leur comportement est importante dans plusieurs domaines d'application, comme le Génie Civil ou la Géophysique. Ces matériaux et les problèmes d'évolution de domaines qui en sont constitués représentent d'ailleurs l'objet essentiel d'étude des disciplines plus spécifiques que sont la Mécanique des Sols et la Mécanique des Roches. ». Ainsi débute l'avant-propos du livre de O. Coussy (1991). Ces quelques phrases présentent parfaitement la démarche qui a été choisie pour mener ces travaux de recherche. En effet, un matériau artificiel tel que le béton, ou bien un matériau naturel tel qu'une roche argileuse, peuvent être considérés comme des matériaux poreux polyphasiques, au sein desquels se produisent des interactions entre les phases solide, liquide et éventuellement gazeuse. Ces interactions se répercutent sur le comportement du milieu poreux, dont les évolutions thermique, hydraulique et mécanique ne peuvent être considérées séparément.

Coussy (1995) propose une loi de comportement couplée thermo-poro-élastique non linéaire isotrope, qui est reprise également par Lassabatère (1994, 1998), Olchitsky et al. (1998), Coussy et Lassabatère (1995). Pour pouvoir modéliser des problèmes couplés dans le cadre de la mécanique des milieux poreux, les équations différentielles régissant le comportement ont été établies dans le formalisme défini par Coussy, par une démarche rigoureuse s'appuyant sur des arguments thermodynamiques. Par la suite, la démarche qui a été suivie pour résoudre ce système d'équations est double. En général, les caractéristiques physiques des matériaux considérés varient de façon non linéaire, et un code de calcul aux éléments finis, PARSAT, a été développé au LAEGO pour résoudre des problèmes non linéaires partiellement saturés dans le cas particulier de géométrie unidimensionnelle. Mais pour certains problèmes, une approche linéarisée peut être envisagée, sachant qu'une linéarisation de ce type de problème n'est justifiée que par rapport au critère précis choisi pour linéariser et que sa validité ne s'étend pas au delà. Le modèle de référence à partir duquel est évaluée la qualité de la linéarisation est le modèle non linéaire.

Le schéma de résolution pour une étude linéaire est de type semi-explicite : les techniques existantes ont été étendues pour pouvoir résoudre les problèmes couplés thermo-hydro-mécaniques. Le principe est assez simple puisqu'il consiste à appliquer une transformation de Laplace au système d'équations de champ couplées et de rechercher les solutions générales du problème dans le domaine transformé. L'étape suivante est un peu plus délicate car la détermination des solutions particulières à partir des conditions aux limites conduit à des systèmes de n équations à n inconnues avec l'entier n qui est souvent proche de la dizaine, ce qui nécessite l'utilisation d'un logiciel de calcul formel pour mener à bien les calculs. Ces calculs sont de nature purement analytique, mais du

fait de la complexité des solutions dans le domaine transformé, le recours à des méthodes numériques d'inversion des transformées de Laplace s'impose (et justifie le terme de méthodes semi-explicites). L'intérêt de telles méthodes semi-explicites est grand car elles permettent de valider des codes de calcul et d'étendre la gamme des problèmes accessibles par les méthodes analytiques. En outre, du fait de la rapidité des calculs, elles sont très bien appropriées pour la réalisation d'études de sensibilité des paramètres des modèles.

Un travail conséquent sur ces méthodes d'inversion a été nécessaire car la bibliographie propose un éventail assez diversifié, et en général, leur simplicité et leur facilité de mise en œuvre sont inversement proportionnelles à leur précision et leur stabilité. Deux méthodes ont plus particulièrement retenu notre attention : la méthode de Stehfest (1970), qui se présente sous la forme des premiers termes d'une série, est très simple et rapide mais ne s'avère essentiellement adaptée que pour les problèmes en géométries cartésienne et sphérique. La seconde méthode, l'algorithme de Talbot modifié par Piessens (Piessens et al., 1983), est très proche de l'inversion analytique : elle opère dans le plan complexe et propose un contour d'intégration particulier qui conduit finalement au calcul de trois intégrales. Elle est compatible avec les différentes géométries, elle est très stable et précise, mais requiert une mise en œuvre plus conséquente. Une analyse critique de ces deux méthodes est présentée à partir de plusieurs problèmes simples. Cela permet de montrer d'une part leur limite d'utilisation, mais d'autre part leurs avantages par rapport à des méthodes analytiques plus classiques (prise en compte d'un état initial discontinu, de conditions aux limites complexes, d'hétérogénéités, ...).

Nous avons ainsi à notre disposition un cadre théorique et les outils nécessaires pour simuler le comportement couplé de milieux poreux pour des problèmes en géométrie unidimensionnelle. Cette simplification au niveau de la géométrie permet de se concentrer sur le comportement du matériau et la diversité des couplages qui peuvent le caractériser. Une prise en compte générale de couplages thermo-hydro-mécaniques sur des problèmes à géométrie simple est en effet nécessaire pour guider les éventuelles hypothèses simplificatrices (découplage, linéarisation) souvent indispensables en pratique pour analyser le comportement de structures complexes. Ce problème se pose de manière encore plus cruciale dans les milieux poreux partiellement saturés que dans les milieux poreux saturés. Ces outils ont été mis à profit pour modéliser trois problèmes présentant un fort intérêt industriel.

En relation avec la Division des Etudes et de la Recherche d'EDF, nous nous sommes tout d'abord intéressés au problème du stockage éventuel de déchets radioactifs de haute activité en couches géologiques profondes. En France, un tel stockage repose sur un concept multi-barrières : une couche d'argile partiellement saturée est placée entre le conteneur de déchets et le massif hôte. En contact avec ce milieu saturé, la couche argileuse se resature progressivement et forme ainsi une barrière naturelle, dite « Barrière Ouvragée (BO) ». La cinétique de resaturation est fortement conditionnée par les caractéristiques du massif et de la BO, ainsi que par le dimensionnement de l'ouvrage. Cette première étude met l'accent sur les processus de diffusion hydrique en négligeant les couplages thermiques et mécaniques. Elle s'attache à faire ressortir l'importance relative sur le temps de resaturation des non-linéarités et de la géométrie du modèle (monocouche ou bicouche). En outre, elle propose une étude de sensibilité originale réalisée à partir du modèle linéarisé en couplant les solutions explicites avec le logiciel PROBAN utilisé par EDF : grâce à des méthodes probabilistes, ce logiciel est capable de classer les facteurs les plus importants sur le temps de resaturation, et apparaît ainsi comme un outil de décision très intéressant pour orienter et cibler les investigations expérimentales.

La deuxième application concerne le phénomène de retrait de dessiccation qui avait été abordé par Lassabatère (1994). Cet auteur a présenté des solutions analytiques du comportement hydro-mécanique linéaire d'un mur de béton et cette étude a été complétée en recherchant des solutions semi-explicites pour les deux autres géométries. Le fait de prendre en compte une sphère pleine ou un poteau cylindrique modifie nettement la cinétique des processus hydriques et conduit également à des profils très différents des variables mécaniques. De façon similaire, on constate dans les ouvrages souterrains que des variations d'hygrométrie mettent en jeu des couplages hydro-mécaniques dans le massif rocheux. Une diminution d'humidité relative de l'air ambiant dans une cavité profonde se traduit par une dessaturation du massif proche qui peut s'accompagner dans des roches telles que des marnes et argilites d'une fissuration au voisinage de la paroi, comme cela peut s'observer dans la galerie de Tournemire. Cette fissuration peut être attribuée à des effets de couplage hydro-mécanique : en effet, une dessaturation est susceptible d'engendrer des variations de contraintes de traction. Une étude de la ventilation dans une galerie argileuse est donc présentée et montre qu'un modèle couplé non linéaire permet bien de traduire les phénomènes observés in situ. Elle est complétée par des approches linéarisées qui apparaissent relativement bien adaptées pour évaluer les contraintes de traction maximales apparaissant en paroi de galerie.

Enfin, une dernière étude s'intéresse au problème de l'isolation thermique et hydrique du bâtiment. En effet, EDF cherche à revaloriser le chauffage électrique et étudie différentes techniques de construction et d'isolation de bâtiments. Ainsi un mur de bâtiment a été modélisé par un ensemble quadricouche formé d'une couche intérieure de plâtre et une couche extérieure d'enduit. Entre les deux, une couche de béton et une autre de polystyrène (jouant le rôle d'isolant) sont placées différemment selon le concept d'isolation par l'intérieur (classique) ou par l'extérieur. Une telle étude permet de montrer comment les variations climatiques extérieures (thermiques et hygrométriques) se répercutent sur le comportement mécanique du mur par le biais des couplages. En effet, les couplages peuvent induire des variations de contraintes tangentielles plus ou moins fortes selon les matériaux, ce qui peut faire craindre une éventuelle décohésion entre deux matériaux due aux fortes discontinuités de part et d'autre de l'interface. En outre, cette étude met en évidence l'intérêt du modèle d'isolation par l'extérieur dans lequel la couche de béton est protégée de l'extérieur (et de ses fortes variations climatiques) par la couche de polystyrène. De plus, l'influence de différents paramètres et scénarios est analysée : outre une étude précise des couplages, on s'intéresse également à l'effet du coefficient de Fick sur la diffusion de la vapeur ainsi qu'aux conséquences des fluctuations climatiques saisonnières sur le comportement du mur.

Pour des raisons de clarté, on adopte dans ce mémoire une notation simplifiée pour désigner les couplages. Une flèche entre les processus couplés indique le sens du couplage, comme par exemple :

H→M : Couplage de l'Hydraulique sur la Mécanique.

Chapitre

1

Cadre théorique de la mécanique des milieux poreux partiellement saturés et méthodologie des résolutions numériques et semi-explicites

*« Chercher n'est pas une chose et trouver
une autre, mais le gain de la recherche,
c'est la recherche même. »*

S' Grégoire de Nysse (335-394)

1.1 - CADRE THEORIQUE

1.1.1 - Structure du milieu poreux

En se plaçant dans le cadre de la mécanique des milieux poreux défini par Coussy (1991, 1995), un milieu poreux est un milieu constitué d'une matrice solide et d'un espace interstitiel connecté saturé par une ou plusieurs phases fluides. Lorsque l'espace poreux est constitué d'un seul fluide, on parle de milieu poreux saturé, alors que la présence de plusieurs fluides définit des milieux poreux partiellement saturés. Dans l'ensemble des problèmes qui vont nous intéresser, la phase fluide des milieux saturés sera assimilée à une phase liquide (figure 1), et dans le cas de milieux partiellement saturés, nous considérerons un espace poreux formé par deux phases, une phase liquide et une phase gazeuse, cette dernière étant constituée par un mélange de vapeur d'eau et d'air sec ; de plus, on prendra en compte le phénomène de changement de phase de l'eau sous ses deux formes liquide et vapeur (figure 2).

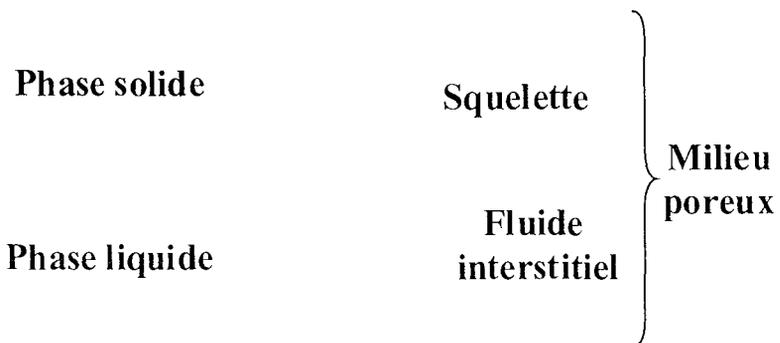


Figure 1. Structure du milieu poreux saturé.

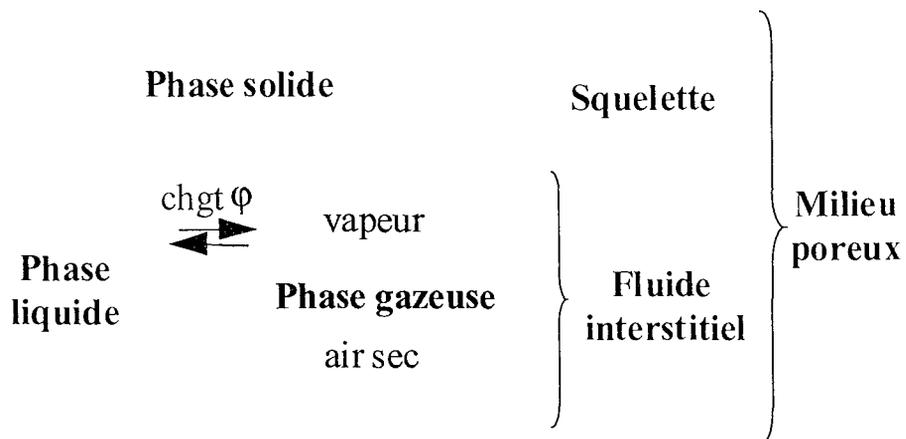


Figure 2. Structure du milieu poreux partiellement saturé.

Les interactions entre les différentes phases sont prises en compte par l'intermédiaire d'un modèle de comportement couplé. Dans le cas des milieux poreux saturés, on dispose d'une loi de comportement thermo-poro-élastique linéaire isotrope, et les travaux utilisant cette loi sont assez nombreux dans la bibliographie (Giraud, 1993 ; Charlez, 1995). Pour les milieux partiellement saturés, Lassabatère (1994) a formulé de manière détaillée un modèle de comportement poro-élastique isotrope non linéaire en conditions isothermes. Le modèle que nous utilisons est le modèle thermo-poro-élastique non linéaire isotrope formulé par Coussy (1995, chap.10). Nous

redétaillerons ce modèle en le comparant avec les formulations d'autres auteurs, notamment Thomas et al. (1996), Pollock (1986) et Moyne (1987).

1.1.2 - Modèle de comportement thermo-poro-élastique linéaire isotrope en milieu saturé

Coussy (1995) définit le comportement thermo-poro-élastique par l'absence de dissipation intrinsèque dans toute évolution et donc de variables internes. Ainsi, l'énergie libre du milieu poreux s'exprime uniquement en fonction des variables d'état externes que sont le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$, la température T , et l'apport de masse fluide m . Sous l'hypothèse des petites perturbations, l'auteur donne alors une expression de l'énergie libre qui permet d'établir les équations d'état du milieu poreux. Dans le cas d'un milieu isotrope, elles se mettent sous la forme de relations linéaires liant les variations de contraintes $\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0$, de pression interstitielle $P - P_0$ et d'entropie volumique $S - S_0$ aux variables d'état :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0 &= \left(K_0 - \frac{2\mu}{3} \right) \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} - b(P - P_0) \underline{\underline{1}} - 3\alpha_0 K_0 (T - T_0) \underline{\underline{1}} \\ \frac{m}{\rho_0^{\text{fl}}} &= b \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{P - P_0}{M} - 3\alpha_m (T - T_0) \\ S - S_0 - m s_{m0}^{\text{fl}} &= 3\alpha_0 K_0 \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} - 3\alpha_m (P - P_0) + \frac{C_\varepsilon^0}{T_0} (T - T_0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ces relations de comportement sont caractérisées par sept variables physiques indépendantes : les modules de cisaillement μ et d'incompressibilité drainé K_0 , le coefficient b et le module M de Biot, les coefficients de dilatation thermique linéique, drainé α_0 et différentielle du fluide par rapport au liquide α_m , et la chaleur volumique drainée à déformation volumique constante C (Coussy, 1991).

On définit ensuite les lois de conduction de la chaleur et de la masse fluide respectivement à partir de la loi de Fourier et de la loi de Darcy (exprimée en négligeant les forces de volume) :

$$\underline{\underline{q}} = -\lambda_T \underline{\underline{\text{grad}}} T \quad \frac{\underline{\underline{M}}}{\rho^{\text{fl}}} = -\lambda_H \underline{\underline{\text{grad}}} P \quad (1.2)$$

avec $\underline{\underline{q}}$ et $\underline{\underline{M}}$ représentant respectivement les vecteurs courant de chaleur et de masse fluide, λ_T et λ_H les conductivités thermique et hydraulique.

De plus, les équations de conservation de la chaleur et de la masse fluide s'écrivent (avec Q la production volumique de chaleur interne au milieu poreux) :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\text{div} \underline{\underline{M}} \quad T \left[\frac{\partial S}{\partial t} + \text{div}(s_m \underline{\underline{M}}) \right] = -\text{div} \underline{\underline{q}} + Q \quad (1.3)$$

Enfin, une dernière équation traduit l'équilibre mécanique (où $\underline{\underline{F}}$ représente les efforts massiques) :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \underline{\underline{F}} = 0 \quad (1.4)$$

En combinant les équations de conservation et de conduction, et en y introduisant les relations de la loi de comportement, on peut établir trois équations de champ :

- équation de Navier :

$$\left(K_o + \frac{4\mu}{3} \right) \underline{\text{grad}}\varepsilon_v - \mu \underline{\text{rot}}[\underline{\text{rot}}(\underline{u})] - b \underline{\text{grad}}P - 3\alpha_o K_o \underline{\text{grad}}T = \underline{0} \quad (1.5)$$

- équation de diffusion de la chaleur :

$$\lambda_H \text{div}[\underline{\text{grad}}P] = \frac{1}{M} \frac{\partial P}{\partial t} + b \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - 3\alpha_m \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.6)$$

- équation de diffusion hydraulique :

$$\lambda_T \text{div}[\underline{\text{grad}}T] = C \frac{\partial T}{\partial t} + 3\alpha_o K_o T_o \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - 3\alpha_m T_o \frac{\partial P}{\partial t} - Q \quad (1.7)$$

Les différents termes qui apparaissent devant les opérateurs (dérivation temporelle, divergence, gradient) constitue les termes de couplages entre les processus thermique, hydraulique et mécanique. Suivant le problème étudié, ils ont une importance relative variable mais d'une manière générale, ils peuvent être schématisés comme le montre la figure 3.

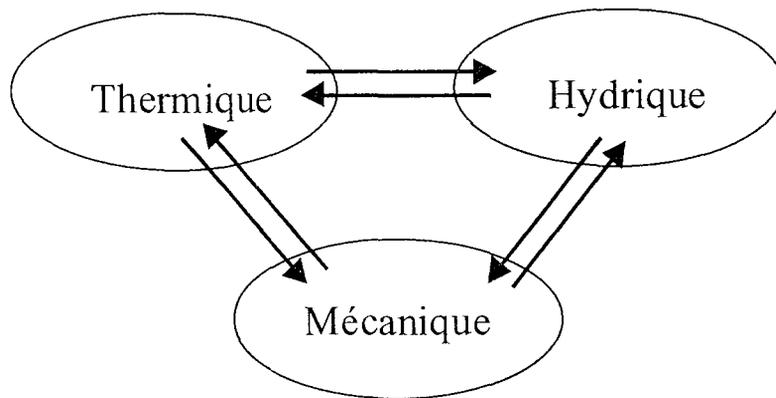


Figure 3. Schématisation des couplages thermo-hydro-mécaniques dans le milieu poreux.

1.1.3 - Modèle de comportement thermo-poro-élastique non linéaire isotrope en milieu non saturé

1.1.3.1 - Etablissement des équations de champ

Le modèle de comportement couplé thermo-poro-élastique non linéaire que nous prendrons en compte sur la base de Coussy (1991, 1995) repose sur les hypothèses de base suivantes :

H0 : Hypothèses des petites perturbations.

H1 : Comportement isotrope.

H2 : Evolutions réversibles.

H3 : Grains solides incompressibles en conditions isothermes ($K_s \rightarrow \infty$).

H4 : Liquide incompressible en conditions isothermes ($K_{lq} \rightarrow \infty$).

H5 : Changement de phase liquide-vapeur non dissipatif.

H6 : Vapeur et air sec assimilés à des gaz parfaits.

Ce modèle constitue une première approche. La principale hypothèse qu'il sera nécessaire de réexaminer concerne le comportement réversible du milieu. En effet, de nombreux matériaux présentent un comportement irréversible que l'on peut représenter par des modèles poroplastiques (Gens, 1995 ; Alonso et al., 1998) ou endommageables (Carmeliet, 1998 ; Shao et al, 1998).

1.1.3.2 - Etablissement des équations de champ

La loi de comportement couplée thermo-poro-élastique non linéaire isotrope est caractérisée par les équations constitutives suivantes :

$$\begin{aligned} d\underline{\underline{\sigma}} &= \lambda_o d\varepsilon_v \underline{\underline{1}} + 2\mu d\underline{\underline{\varepsilon}} - b_j dp_j \underline{\underline{1}} - 3\alpha_o K_o dT \underline{\underline{1}} \\ dp_i &= M_{ij} \left[-b_j d\varepsilon_v + \frac{dm_j}{\rho_j^o} + 3\alpha_m^j dT \right] \\ dS &= s_m^j dm_j + 3\alpha_o K_o d\varepsilon_v - 3\alpha_m^j dp_j + \frac{C}{T} dT \end{aligned} \quad (1.8)$$

avec les coefficients et modules de Biot définis par :

$$\begin{aligned} M_{vpvp} = M_{vplq} = M_{lqvp} &= \frac{p_{vp}}{\phi_{gz}} & M_{lqlq} &= -\frac{1}{\phi_o + \varepsilon_v} \frac{dp_{cp}}{dS_{lq}} - \frac{p_{gz}}{\phi_{gz}} \\ M_{asas} = M_{aslq} = M_{lqas} &= \frac{p_{as}}{\phi_{gz}} & b_{lq} &= S_{lq} \\ M_{asvp} = M_{vpas} &= 0 & b_{as} = b_{vp} &= 1 - S_{lq} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Les apports de masse des différents constituants m_i sont définis par Lassabatère (1994 p52) à partir des bilans de masse élémentaires :

$$\begin{aligned} m_{lq} &= (1 + \varepsilon_v) \rho_{lq} \phi_{lq} - \rho_{lq}^o \phi_{lq}^o \\ m_{vp} &= (1 + \varepsilon_v) \rho_{vp} \phi_{vp} - \rho_{vp}^o \phi_{vp}^o \\ m_{as} &= (1 + \varepsilon_v) \rho_{as} \phi_{as} - \rho_{as}^o \phi_{as}^o \end{aligned} \quad (1.10)$$

ce qui conduit, sous forme incrémentale, à :

$$\begin{aligned} dm_{lq} &= (1 + \varepsilon_v) d(\rho_{lq} \phi_{lq}) + \rho_{lq} \phi_{lq} d\varepsilon_v \\ &= \rho_{lq} (1 + \varepsilon_v) d\phi_{lq} + \phi_{lq} (1 + \varepsilon_v) d\rho_{lq} + \rho_{lq} \phi_{lq} d\varepsilon_v \\ &\approx \rho_{lq} d\phi_{lq} + \phi_{lq} d\rho_{lq} + \rho_{lq} \phi_{lq} d\varepsilon_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dm_{vp} &\approx \rho_{vp} d\phi_{vp} + \phi_{vp} d\rho_{vp} + \rho_{vp} \phi_{vp} d\varepsilon_v \\ dm_{as} &\approx \rho_{as} d\phi_{as} + \phi_{as} d\rho_{as} + \rho_{as} \phi_{as} d\varepsilon_v \end{aligned} \quad (1.11)$$

Les fractions volumiques ϕ_i (avec $i = lq, vp, as$) sont caractérisées par (Bear & Bachmat, 1991 p328 ; Coussy, 1995 p402) :

$$\phi_i = \frac{\text{volume de la phase } i}{\text{volume total}}, \quad 0 \leq \phi_i \leq \phi, \quad \sum_i \phi_i = \phi, \quad \phi_i = \phi S_i \quad (1.12)$$

ϕ désigne la porosité du milieu poreux, soit le rapport du volume des vides connectés et saturés par les différents fluides sur le volume total, et $(1 - \phi)$ représente donc la fraction volumique de solide.

On se propose d'établir les trois équations différentielles non linéaires de diffusion régissant les variations couplées de température, pression de liquide, pression d'air sec et déformation dans le cadre défini par Coussy (1995) et sous les hypothèses précédentes. En considérant en outre l'équation d'équilibre mécanique, le modèle couplé thermo-hydro-mécanique est ainsi complètement défini. Une synthèse est réalisée à partir des différentes formulations relevées dans les articles suivants : Pollock (1986), Geraminegad & Saxena (1986), Moyne (1987), Ewen & Thomas (1989), Thomas & King (1992), Thomas & Sansom (1995), Thomas & Li (1995), Selvadurai (1996), Thomas, He, Sansom & Li (1996), Kanno, Kato & Yamagata (1996), Thomas, Rees & Sloper (1998). Les différents articles considérés sont caractérisés par le tableau 1.

Tableau 1. Synthèse des différentes formulations couplées.

	Nature	Matériau	Porosité	Inconnues	ψ ou p_{cp}
Pollock (1986)	TLVA	Limon	0.35	T, S_{lq} , P_{gz}	$\psi = p_{lq} - p_{gz}$
Geraminegad & Saxena (1986)	TLVA	Sol		T, ψ , P_{gz}	
Lassabatère (1994)	MLVA	Béton	0.35		$p_{cp} = p_{gz} - p_{lq}$
Moyne (1987)	TLVA	Béton	0.79	T, $X(a^*S_{lq})$, P_{gz}	
Ewen & Thomas (1989)	TLV	Sable	0.389	T, ψ	$\psi = (p_{lq} - p_{gz}) / \rho_{lq}^0$
Thomas & King (1992)	TLV	Sable	0.389	T, ψ	$\psi = (p_{lq} - p_{gz}) / \gamma_{lq}$
Thomas & Sansom (1995)	TLVA	Sable	0.389	T, ψ , P_{gz}	$\psi = (p_{lq} - p_{gz}) / \gamma_{lq}$
Thomas & Li (1995)	TLV	Sable	0.415	T, ϕ_{lq}	$\psi = (p_{lq} - p_{gz}) / \gamma_{lq}$
Selvadurai (1996)	TLV			T, ϕ_{lq}	
Thomas et al. (1996, cas 1)	TLV	Sable	0.415	T, ψ	$\psi = (p_{lq} - p_{gz}) / \gamma_{lq}$
Thomas et al. (1996, cas 2)	TLVA	Limon	0.35	T, ψ , P_{gz}	$\psi = (p_{lq} - p_{gz}) / \gamma_{lq}$
Kanno et al. (1996)	TLV	Bentonite	0.333	T, ψ	$\psi = (p_{lq} - p_{gz}) / \gamma_{lq}$
Thomas et al. (1998)	TLVA	Sable	0.389	T, ψ , P_{gz}	$\psi = (p_{lq} - p_{gz}) / \gamma_{lq}$

avec M: mécanique, T : température, L : liquide, V : vapeur, A : air sec

Conservation de la masse d'eau

L'application du principe de conservation de la masse à la phase liquide (Coussy 1991, (6) p 403) permet d'établir l'équation :

$$\frac{\partial m_{lq}}{\partial t} = -\text{div}(\underline{M}_{lq}) - m_{lq \rightarrow vp} \quad (1.13)$$

ou encore en terme de saturation en liquide, puisque c'est cette forme qu'utilisent tous les auteurs (sauf Lassabatère, 1994) :

$$\rho_{lq}^o \phi \frac{\partial S_{lq}}{\partial t} = -\text{div}(\underline{M}_{lq}) - \rho_{lq}^o \phi_{lq \rightarrow vp} \quad (1.14)$$

Le premier terme représente l'emmagasinement de la phase liquide, le second le mouvement de cette même phase et le troisième le changement de phase liquide-vapeur.

Grâce à la loi de comportement, on peut exprimer l'apport de masse liquide en fonction des pressions partielles et de la température :

$$dm_{lq} = \rho_{lq}^o \phi \frac{dS_{lq}}{dp_{gz}} dp_{gz} - \rho_{lq}^o \phi \frac{dS_{lq}}{dp_{lq}} dp_{lq} - 3\rho_{lq}^o \alpha_m^{lq} dT + \rho_{lq}^o S_{lq} d\varepsilon_v \quad (1.15)$$

Dans cette formulation, la saturation en liquide est une fonction non linéaire de la pression capillaire : cette courbe est appelée courbe de pression capillaire. La bibliographie offre différentes formes pour la courbe de pression capillaire présentées dans le tableau 2.

Tableau 2. Quelques formes de courbes de pression capillaire.

Alonso et al. (1998) Matériau : argile (BO et argile de Boom)	$S_{lq}(p_{cp}) = a + b \times (1 - \text{Exp}[-c \times p_{cp}])$ trois constantes a, b, c
Gens (1995) Matériau : sol	$S_{lq}(p_{cp}) = a + b \times \text{Tanh}[-c \times p_{cp}]$ trois constantes a,b,c (a=1, p. 138)
Ozanam (1988, p.161) citant Van Genuchten simplifié Matériau : sol	$S_{lq}(p_{cp}) = S_{lq}^{irr} + \frac{1 - S_{lq}^{irr}}{\sqrt{1 + \left(\alpha \frac{p_{cp}}{9865.65}\right)^\beta}}, \beta = 2$
Olivella et al. (1998) citant Van Genuchten Matériau : sol	$S_{lq}(p_{cp}) = (S_{max} - S_{min}) \left(1 + \left(\frac{p_{cp}}{P}\right)^{1-\lambda}\right)^{-\lambda} + S_{min}$ deux constantes λ et P
Lassabatère (1994) Béton PWT p205 et béton CO p209:	$S_{lq}(p_{cp}) = \left[1 + (a \times p_{cp})^b\right]^c$
Kanno et al. (1996)	$S_{lq}(p_{cp}) = \text{Exp}[-c \times p_{cp}], c = -7.95 \cdot 10^{-5} / \gamma_l$

Thomas & King (1992) Ewen & Thomas (1989) Thomas et al. (1996)	$S_{lq}(p_{cp}) = \frac{a}{(b + 10^{-3} \times p_{cp})^c}$ a=0.0691, b=-2.41, c=0.5714
BO (données expérimentales CEA) Olchitsky (1995) Ajustement avec une loi de type Vachaud & Vauclin	$S_{lq}(p_{cp}) = \frac{a}{a + (10^{-4} \times p_{cp})^b}$ a=175, b=0.69
Données expéri. (Rakotondratsima, 1995) Schistes carton sains, compacts p116 Schistes carton broyés-recompactés p117 Bentonite compactée p118 Données expéri. (Daupley, 1997) Ajustement avec différentes lois	$S_{lq}(p_{cp}) = a - b \times \text{Exp}[-c \times p_{cp}^d]$ Weibull $S_{lq}(p_{cp}) = \frac{a \times b + c \times p_{cp}^d}{b + p_{cp}^d}$ MMF

Pour les autres auteurs (Thomas et al., 1996 ; Moyne, 1987) qui formulent la conservation de la masse en terme de saturation, l'influence de la température sur cette loi en conditions anisothermes est introduite par l'intermédiaire de la tension superficielle (appelée également énergie de surface dans le cas d'une interface liquide-gaz) σ qui n'est fonction que de la température et qui est indépendante du matériau considéré :

$$p_{cp}(S_{lq}, T) = p_{cp}^r(S_{lq}) \frac{\sigma(T)}{\sigma(T^r)} \quad \text{avec} \quad \sigma(T) = 0.1171 - 1.51610^{-4} T \quad (1.16)$$

Dans ce cas, le terme d'emmagasinement peut être développé sous la forme :

$$\rho_{lq}^o \phi \frac{\partial S_{lq}}{\partial t} = \rho_{lq}^o \phi \left[\left(\frac{\partial S_{lq}}{\partial p_{cp}} \right)_T \frac{\partial p_{cp}}{\partial t} + \left(\frac{\partial S_{lq}}{\partial T} \right)_{p_{cp}} \frac{\partial T}{\partial t} \right] \quad (1.17)$$

Quels que soient les auteurs, on a donc une forme générale du terme d'emmagasinement :

$$C_{lqlq}^{(1)} \frac{\partial p_{lq}}{\partial t} + C_{lqgz}^{(1)} \frac{\partial p_{gz}}{\partial t} + C_{lqT}^{(1)} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{lqu}^{(1)} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (1.18)$$

avec les termes de couplages développés dans le tableau 3 (pour Pollock, le terme de couplage avec la température est nul, et le couplage avec la mécanique n'est pris en compte que par Lassabatère, 1994).

L'influence de la température sur la courbe S_{lq} - p_{cp} n'est pas prise en compte dans le modèle que nous utiliserons par la suite. Un tel modèle constitue une première approche qu'il faudra compléter par les résultats de récents travaux (Olchitsky et al., 1998) utilisant une loi $S_{lq}(p_{cp}, T)$.

Tableau 3. Termes de couplages de capacité pour la conservation de l'eau liquide.

	Lassabatère	Thomas
$C_{lqlq}^{(1)}$	$-\rho_{lq}^o \phi \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}}$	$-\rho_{lq}^o \phi \left(\frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} \right)_T$
$C_{lqgz}^{(1)}$	$\rho_{lq}^o \phi \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}}$	$\rho_{lq}^o \phi \left(\frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} \right)_T$
$C_{lqT}^{(1)}$	$-3\rho_{lq}^o \alpha_m^{lq}$	$\rho_{lq}^o \phi \left(\frac{\partial S_{lq}}{\partial T} \right)_{p_{cp}}$

En ce qui concerne le mouvement de la phase liquide, on tient compte de la loi de Darcy généralisée pour expliciter le flux de liquide mais, dans les articles étudiés, on retrouve deux écritures de cette loi de Darcy : soit les auteurs considèrent que le potentiel du flux de liquide est composé des potentiels de pression de liquide et gravitationnel, tel que Coussy (1991, (82) p 76) le précise, soit ils remplacent la pression de liquide par la pression capillaire. Les différentes formulations de la loi de Darcy sont regroupées dans le tableau 4.

Tableau 4. Différentes formulations de la loi de Darcy pour la phase liquide.

	Loi de Darcy pour le liquide
Pollock (1986) Thomas & Sansom (1992) Moyne (1987)	$\underline{M}_{lq} = -\rho_{lq}^o \lambda_{lq} \underline{\text{grad}}(p_{lq} + \gamma_{lq} z)$
Lassabatère (1994)	$\underline{M}_{lq} = -\rho_{lq}^o \lambda_{lq} \underline{\text{grad}} p_{lq}$
Thomas & al. (1996) Kanno & al. (1996) Ewen & Thomas (1989) Thomas & King (1992)	$\underline{M}_{lq} = -\rho_{lq}^o \lambda_{lq} \underline{\text{grad}}(p_{cp} + \gamma_{lq} z)$

Lassabatère (1994) néglige la gravité, ce qui se justifie dans le cas du problème qu'il traite. La troisième formulation fait intervenir la pression capillaire : cela revient à considérer que la pression de mélange reste constante alors que la première est plus générale. De manière à simplifier les écritures, on négligera par la suite les termes de gravité.

Le terme de mouvement de la phase liquide peut donc se mettre sous la forme :

$$\text{div} \left(K_{lqlq}^{(1)} \underline{\text{grad}} p_{lq} \right) \quad \text{avec} \quad K_{lqlq}^{(1)} = \rho_{lq}^o \lambda_{lq} \quad (1.19)$$

La perméabilité relative au liquide est en général une fonction de la saturation et la viscosité une fonction de la température :

$$\lambda_{lq}(S_{lq}, T) = \frac{k K_{lq}^{\text{rel}}(S_{lq})}{\mu_{lq}(T)} \quad (1.20)$$

et l'éventail des lois proposées dans la littérature pour la perméabilité relative au liquide est assez large (sauf pour les roches). Le tableau 5 en propose quelques exemples.

Tableau 5. Quelques expressions de la perméabilité relative au liquide.

Loi linéaire (cas particulier $a=0$: perméabilité relative constante)	$K_{lq}^{rel}(S_{lq}) = \alpha \times S_{lq} + \beta$ β : perméabilité relative résiduelle
Bovet et al. (1995, p.160) Matériau : sol	$K_{lq}^{rel}(S_{lq}) = \alpha \times (S_{lq})^\beta$ $\alpha = 1, \beta = 5$
Loi de Brooks & Corey citée dans Schrefler & Zhan (1993) Matériau : sol	$K_{lq}^{rel}(S_{lq}) = \left(\frac{S_{lq} - S_{lq}^{irr}}{1 - S_{lq}^{irr}} \right)^{((2+3\lambda)/\lambda)}$ deux constantes : S_{lq}^{irr}, λ Sable : $S_{lq}^{irr} = 0.2, \lambda = 2.0$
Loi de Van Genuchten simplifiée citée dans Ozanam (1988) Matériau : sol	$K_{lq}^{rel}(S_{lq}) = \left(\frac{S_{lq} - S_{lq}^{irr}}{1 - S_{lq}^{irr}} \right)^3$
Loi de Van Genuchten (1980) citée dans Alonso & Battle (1995) p. 361 Matériau : sol	$K_{lq}^{rel}(p_{cp}) = S_{lq}^{irr} + \frac{S_{sn} - S_{lq}^{irr}}{\left[1 + (a \times p_{cp})^b \right]^{(1-1/b)}}$ quatre constantes : $S_{sn}, S_{lq}^{irr}, a, b$
Loi de Parker et al. (1987) citée dans Lassabatère (1994, p.168) Matériau : béton	$K_{lq}^{rel}(S_{lq}) = S_{lq}^{1/2} \times \left[1 - \left(1 - (S_{lq})^{-1/c} \right)^{-c} \right]$ Le paramètre c est celui utilisé dans l'ajustement de la courbe de pression capillaire $S_{lq}(p_{cp})$
Alonso et al. (1998), voir également Alonso et Battle (1995, p.362) Matériau : argile (BO et argile de Boom)	$K_{lq}^{rel}(p_{cp}) = \left[1 + a \times (p_{cp})^b \right]^c$ trois constantes a, b, c ($c=-1$)
Ajustement avec une loi de type Vachaud & Vaucelin Matériau argile (BO : données expé.)	$K_{lq}^{rel}(p_{cp}) = \frac{a}{a + (10^{-4} \times p_{cp})^b}$ $a=200, b=0.75$
Moyne (1987) Matériau : béton	$K_{lq}^{rel}(S_{lq}) = \left(\frac{1.463 S_{lq} - 0.07}{1.393} \right)^4$
Kanno et al. (1996) Matériau : bentonite compactée	$K_{lq}^{rel} = \left(\frac{\phi S_{lq} - 0.05}{\phi - 0.05} \right)^q$ $q = 2$ ou $3,$
Thomas & King (1992) Ewen & Thomas (1989) Matériau : sable	$K_{lq}^{rel}(S_{lq}) = 1.5 \cdot 10^{-10} \text{Exp}[a \times S_{lq} + b \times S_{lq}^2]$ $a=28.061, b=-12.335$
Pollock (1986) Thomas et al (1996) Matériau : limon	$K_{lq}^{rel}(S_{lq}) = \frac{(S_{lq} - 1)^7}{0,9^7}$ si $0,1 < S_{lq} < 1$ $K_{lq}^{rel}(S_{lq}) = 0$ si $0 < S_{lq} < 0,1$

Néanmoins, Olivella et al. (1998) ont montré que, pour des argiles à faible perméabilité, la perméabilité intrinsèque ne peut être considérée constante mais fonction du degré de saturation. Un modèle à double porosité (macroscopique ϕ_M et microscopique ϕ_m) est alors introduit : lorsque le milieu est presque sec, la porosité macroscopique prédomine alors que la porosité est essentiellement microscopique quand on s'approche de la saturation. Avec cette formulation, la perméabilité intrinsèque est une fonction exponentielle de la saturation et les auteurs proposent :

$$k(\phi_M) = k_o \frac{(1 - \phi_o)^2}{\phi_o^3} \frac{\phi_M^3}{(1 - \phi_M)^2} \quad (1.21)$$

$$\text{avec } \phi_M = \phi_o \exp(-\beta S_{lq}), \phi_o = 0.44, k_o = 10-13, \beta = 4.75$$

De la même façon que pour la phase liquide, on applique le principe de conservation de la masse à la phase vapeur (Coussy 1991, (7) p 403) :

$$\frac{\partial m_{vp}}{\partial t} = -\text{div}(\underline{M}_{vp}) + m_{lq \rightarrow vp} \quad (1.22)$$

Chez tous les auteurs (sauf Lassabatère, 1994), on retrouve une formulation en saturation avec un flux de vapeur qui est décomposé en deux :

$$\rho_{lq}^o \frac{\partial \phi_{vp}}{\partial t} = -\text{div}(\underline{J}_{vp}^* + \rho_{vp} \underline{V}_{gz}^*) + \rho_{lq}^o \phi_{lq \rightarrow vp} \quad (1.23)$$

Le premier terme représente l'emménagement de la phase vapeur, le second le mouvement d'une partie de la vapeur par diffusion du fait d'un gradient de pression de vapeur (loi de Fick/de Vries), le troisième le flux d'une partie de la vapeur sous l'effet du mouvement du mélange (loi de Darcy généralisée) et le quatrième le changement de phase liquide-vapeur.

Dans l'approche de Lassabatère (1994), la masse de vapeur est exprimée à partir de la loi de comportement :

$$\begin{aligned} dm_{vp} = & \left(\phi \rho_{vp} \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} + \frac{\phi_{gz} M_{vp} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o RT} \right) dp_{lq} - \left(\phi \rho_{vp} \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} + \frac{\phi_{gz} M_{vp} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o RT} \right) dp_{gz} \\ & + \left[-3\rho_{vp} \alpha_m^{vp} + \frac{\rho_{vp}^2 \phi_{gz}}{\rho_{lq}^o p_{vp} T} \left[p_{cp} + \rho_{lq}^o (L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o)) \right] \right] dT + \rho_{vp} (1 - S_{lq}) d\varepsilon_v \end{aligned} \quad (1.24)$$

Les autres auteurs traduisent l'hypothèse selon laquelle la phase liquide est à tout moment en équilibre avec la phase vapeur par une équation de la forme (de Vries, 1958) :

$$\phi_{vp} = \frac{(\phi - \phi_{lq}) \rho_{vp}^o h_r}{\rho_{lq}^o} \quad (1.25)$$

Puis par différentiation, on obtient le terme d'emmagasinement sous la forme :

$$C_{lqlq}^{(2)} \frac{\partial p_{lq}}{\partial t} + C_{lqgz}^{(2)} \frac{\partial p_{gz}}{\partial t} + C_{lqT}^{(2)} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{lqu}^{(2)} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (1.26)$$

Les expressions développées des termes de couplages sont présentées dans le tableau 6.

Tableau 6. Termes de couplages de capacité pour la conservation de l'eau vapeur.

	Lassabatère	Thomas
$C_{lqlq}^{(2)}$	$\phi \rho_{vp} \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} + \frac{\phi_{gz} M_{vp} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o RT}$	$\phi \rho_{vp} \left(\frac{\partial S_{lq}}{\partial p_{cp}} \right)_T + \frac{\phi_{gz} M_{vp} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o RT}$
$C_{lqgz}^{(2)}$	$-\phi \rho_{vp} \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} - \frac{\phi_{gz} M_{vp} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o RT}$	$-\phi \rho_{vp} \left(\frac{\partial S_{lq}}{\partial p_{cp}} \right)_T - \frac{\phi_{gz} M_{vp} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o RT}$
$C_{lqT}^{(2)}$	$-3\rho_{vp} \alpha_m^{vp} + \frac{\rho_{vp}^2 \phi_{gz}}{\rho_{lq}^o p_{vp} T} \left[p_{cp} + \rho_{lq}^o (L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o)) \right]$	$-\phi \rho_{vp} \left(\frac{\partial S_{lq}}{\partial T} \right)_{p_{cp}} + \phi_{gz} \left(h_r \frac{d\rho_{vp}^o}{dT} + \frac{\rho_{vp} p_{cp} M_{vp}}{\rho_{lq}^o RT^2} \right)$

Différentes méthodes sont proposées pour exprimer le vecteur flux de vapeur. Cette diversité est inhérente au fait que l'on peut définir un flux molaire et un flux massique, et cela par rapport à une vitesse moyenne molaire ou massique. En outre, ces quatre flux peuvent être reliés à différentes variables : nombre de moles par unité de volume, masse volumique, concentration molaire, fraction massique (Welty et al., 1984 p473 ; Bird et al., 1960 p498). De plus, dans un tel problème avec deux phases vapeur et air sec, les définitions des flux de vapeur et d'air sec sont étroitement liées. Il est donc nécessaire de définir les différentes variables, vitesses et expressions de flux avant de s'intéresser à la formulation choisie par les différents auteurs.

On peut tout d'abord définir la concentration massique d'un constituant comme le rapport entre la masse de ce constituant et le volume du mélange. Elle est aussi appelée masse volumique ou densité massique. La concentration massique totale est alors reliée à la concentration massique des différents constituants :

$$\rho_{gz} = \rho_{vp} + \rho_{as} \quad (1.27)$$

La fraction massique représente alors le rapport entre la concentration massique d'un constituant et la concentration massique du mélange :

$$\omega_{vp} = \frac{\rho_{vp}}{\rho_{gz}} \quad \omega_{as} = \frac{\rho_{as}}{\rho_{gz}} \quad \omega_{vp} + \omega_{as} = 1 \quad (1.28)$$

On peut aussi définir le nombre de moles d'un constituant rapporté au volume de mélange. Celui-ci peut, par définition, être relié à la concentration massique, et dans le cas particulier où les constituants et le mélange peuvent être considérés comme des gaz parfaits, aux pressions partielles :

$$n_{vp} = \frac{\rho_{vp}}{M_{vp}} = \frac{p_{vp}}{RT} \quad n_{as} = \frac{\rho_{as}}{M_{as}} = \frac{p_{as}}{RT} \quad n_{vp} + n_{as} = n_{gz} = \frac{p_{gz}}{RT} \quad (1.29)$$

Enfin, on peut introduire la fraction (ou concentration) molaire qui est définie par les expressions suivantes :

$$C_{vp} = \frac{n_{vp}}{n_{gz}} = \frac{p_{vp}}{p_{gz}} \quad C_{as} = \frac{n_{as}}{n_{gz}} = \frac{p_{as}}{p_{gz}} \quad C_{vp} + C_{as} = 1 \quad (1.30)$$

La définition des flux (tableau 7) peut se faire par rapport à différentes vitesses :

- vitesse moyenne massique \underline{V}_{gz}^* :

$$\underline{V}_{gz}^* = \frac{\rho_{vp} \underline{V}_{vp} + \rho_{as} \underline{V}_{as}}{\rho_{gz}} = \omega_{vp} \underline{V}_{vp} + \omega_{as} \underline{V}_{as} \quad (1.31)$$

- vitesse moyenne molaire \underline{V}_{gz} :

$$\underline{V}_{gz} = \frac{n_{vp} \underline{V}_{vp} + n_{as} \underline{V}_{as}}{n_{gz}} = C_{vp} \underline{V}_{vp} + C_{as} \underline{V}_{as} \quad (1.32)$$

Tableau 7. Vitesses et flux des constituants du mélange gazeux.

Expression	Par rapport à des axes stationnaires	Par rapport à une vitesse moyenne massique \underline{V}_{gz}^*	Par rapport à une vitesse moyenne molaire \underline{V}_{gz}
Vitesse du constituant A (A = vp, as)	\underline{V}_A	$\underline{V}_A - \underline{V}_{gz}^*$	$\underline{V}_A - \underline{V}_{gz}$
Flux massique de A	$\underline{M}_A = \rho_A \underline{V}_A$	$\underline{J}_A^* = \rho_A (\underline{V}_A - \underline{V}_{gz}^*)$	$\underline{J}_A = \rho_A (\underline{V}_A - \underline{V}_{gz})$
Flux molaire de A	$\underline{M}_A^{mol} = n_A \underline{V}_A$	$\underline{J}_A^{ol*} = n_A (\underline{V}_A - \underline{V}_{gz}^*)$	$\underline{J}_A^{mol} = n_A (\underline{V}_A - \underline{V}_{gz})$
Somme des flux massiques	$\underline{M}_{vp} + \underline{M}_{as} = \rho_{gz} \underline{V}_{gz}^*$	$\underline{J}_{vp}^* + \underline{J}_{as}^* = 0$	$\underline{J}_{vp} + \underline{J}_{as} = \rho_{gz} (\underline{V}_{gz}^* - \underline{V}_{gz})$
Somme des flux molaires	$\underline{M}_{vp}^{mol} + \underline{M}_{as}^{mol} = n_{gz} \underline{V}_{gz}$	$\underline{J}_{vp}^{ol*} + \underline{J}_{as}^{ol*} = n_{gz} (\underline{V}_{gz}^* - \underline{V}_{gz})$	$\underline{J}_{vp}^{mol} + \underline{J}_{as}^{mol} = 0$
Différentes relations entre les flux	$\underline{M}_A^{mol} = \frac{\underline{M}_A}{M_A}$	$\underline{J}_A^* = \underline{M}_A - \omega_A (\underline{M}_A + \underline{M}_B)$	$\underline{J}_A^{ol} = \underline{M}_A^{mol} - C_A (\underline{M}_A^{mol} + \underline{M}_B^{mol})$
	$\underline{M}_A = \underline{J}_A^* + \rho_A \underline{V}_{gz}^*$	$\underline{J}_A^{ol*} = \frac{\underline{J}_A^*}{M_A}$	$\underline{J}_A = \frac{M_{gz}}{M_B} \underline{J}_A^*$
	$\underline{M}_A^{mol} = \underline{J}_A^{mol} + n_A \underline{V}_{gz}$	$\underline{J}_A^{ol*} = \frac{M_B}{M_{gz}} \underline{J}_A^{ol}$	$\underline{J}_A = M_A \underline{J}_A^{ol}$

Ces différentes vitesses s'expriment sous la forme de gradients de différentes variables, d'où les expressions de flux suivantes (avec D le coefficient de diffusion massique) :

$$\underline{J}_A^* = -\rho_{gz} D \underline{\text{grad}}(\omega_A) = -\frac{n_{gz}^2 M_{vp} M_{as} D}{\rho_{gz}} \underline{\text{grad}}(C_A) \quad (1.33)$$

$$\underline{J}_A^{ol} = -n_{gz} D \underline{\text{grad}}(C_A) = -\frac{\rho_{gz}^2 D}{M_{vp} M_{as} n_{gz}} \underline{\text{grad}}(\omega_A) \quad (1.34)$$

Lassabatère (1994) raisonne avec des vitesses molaires et exprime les flux massiques de vapeur et d'air sec en utilisant la relation donnée par Coussy (1995, p405) :

$$\frac{\underline{M}_{vp}}{\rho_{vp}} - \frac{\underline{M}_{as}}{\rho_{as}} = \phi_{gz} (\underline{V}_{vp} - \underline{V}_{as}) = -F \underline{\text{grad}} C_{vp} \quad (1.35)$$

De plus, les flux molaires des constituants du mélange gazeux sont reliés au flux molaire du mélange :

$$\underline{M}_{vp}^{mol} + \underline{M}_{as}^{mol} = n_{gz} \phi_{gz} \underline{V}_{gz} = \underline{M}_{gz}^{mol} \quad (1.36)$$

ou encore, en exprimant le flux molaire du mélange gazeux à partir de la loi de Darcy généralisée :

$$\frac{\underline{M}_{vp}}{M_{vp}} + \frac{\underline{M}_{as}}{M_{as}} = -\frac{\rho_{gz} \lambda_{gz}}{M_{gz}} \underline{\text{grad}} p_{gz} \quad (1.37)$$

On peut alors en déduire l'expression des deux flux massiques de vapeur et d'air sec :

$$\begin{cases} \underline{M}_{vp} = -\rho_{vp} F (1 - C_{vp}) \underline{\text{grad}}(C_{vp}) - \rho_{vp} \lambda_{gz} \underline{\text{grad}}(p_{gz}) \\ \underline{M}_{as} = \rho_{as} F C_{vp} \underline{\text{grad}}(C_{vp}) - \rho_{as} \lambda_{gz} \underline{\text{grad}}(p_{gz}) \end{cases} \quad (1.38)$$

Pollock (1986) et Moyne (1987) explicitent les flux massiques de vapeur et d'air sec (noté \underline{j}_v et \underline{j}_a par les deux auteurs) avec un raisonnement basé sur les vitesses massiques en fonction des fractions massiques (en citant Bird et al., 1960) :

$$\begin{cases} \underline{J}_{vp}^* = -D_{atm} f \rho_{gz} \underline{\text{grad}}(\omega_{vp}) \\ \underline{J}_{as}^* = -D_{atm} f \rho_{gz} \underline{\text{grad}}(\omega_{as}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \underline{M}_{vp} = \underline{J}_{vp}^* + \rho_{vp} \underline{V}_{gz}^* \\ \underline{M}_{as} = \underline{J}_{as}^* + \rho_{as} \underline{V}_{gz}^* \end{cases} \quad (1.39)$$

avec f appelé facteur de résistance à la diffusion par Moyne (1987) (il en donne une valeur numérique pour le problème qu'il traite) et que Pollock (1986) définit de la forme suivante :

$$f = \tau \phi_{gz} \quad (1.40)$$

avec τ un facteur de tortuosité et D_{atm} un coefficient de diffusion moléculaire.

Les deux flux massiques de vapeur et d'air sec sont donc de la forme :

$$\begin{cases} \underline{M}_{\text{vp}} = -\rho_{\text{gz}} D_{\text{atm}} f \underline{\text{grad}}(\omega_{\text{vp}}) - \rho_{\text{vp}} \lambda_{\text{gz}} \underline{\text{grad}}(p_{\text{gz}}) \\ \underline{M}_{\text{as}} = \rho_{\text{gz}} D_{\text{atm}} f \underline{\text{grad}}(\omega_{\text{vp}}) - \rho_{\text{as}} \lambda_{\text{gz}} \underline{\text{grad}}(p_{\text{gz}}) \end{cases} \quad (1.41)$$

Thomas et al. (1996) raisonnent également avec les vitesses massiques et ils expriment le flux massique de vapeur (noté \underline{q}_v) en fonction du gradient de la masse volumique de vapeur en s'appuyant sur les travaux de de Vries (1958) :

$$\underline{J}_{\text{vp}}^* = -D_{\text{atm}} n_p \tau \phi_{\text{gz}} \underline{\text{grad}}(\rho_{\text{vp}}) \quad \text{avec} \quad n_p = \frac{p_{\text{gz}}}{p_{\text{gz}} - p_{\text{vp}}} \quad (1.42)$$

mais leur approche est un peu particulière puisqu'ils considèrent que le flux d'air sec est nul (la diffusion de l'air sec ne se fait que par un processus de diffusion du mélange de type Darcy généralisé).

Quel que soit l'auteur, que son raisonnement soit basé sur des vitesses molaires ou massiques, on a montré que l'on aboutit toujours à l'expression des flux massiques de vapeur et d'air sec par rapport à des axes stationnaires. Les hypothèses de base des différentes formulations étant les mêmes, les flux massiques doivent être égaux :

$$\underbrace{-\rho_{\text{vp}} F(1 - C_{\text{vp}}) \underline{\text{grad}}(C_{\text{vp}})}_{\underline{J}_{\text{vp}}} = \underbrace{-\rho_{\text{gz}} D_{\text{atm}} f \underline{\text{grad}}(\omega_{\text{vp}})}_{\underline{J}_{\text{vp}}^*} \quad (1.43)$$

On développe alors l'expression des flux en fonction des mêmes inconnues :

- Lassabatère (1994) :

$$\underline{\text{grad}}(C_{\text{vp}}) = \underline{\text{grad}}\left(\frac{p_{\text{vp}}}{p_{\text{gz}}}\right) = \frac{1}{p_{\text{gz}}} \underline{\text{grad}}(p_{\text{vp}}) - \frac{p_{\text{vp}}}{p_{\text{gz}}^2} \underline{\text{grad}}(p_{\text{gz}}) \quad (1.44)$$

De plus, à partir de l'équilibre thermodynamique liquide-vapeur, on montre que le gradient de densité de vapeur peut s'écrire comme une combinaison linéaire des gradients de température et de pressions partielles (les constantes A, B et C sont explicitées un peu plus loin) :

$$\underline{\text{grad}}(p_{\text{vp}}) = A \underline{\text{grad}}(T) + B \underline{\text{grad}}(p_{\text{liq}}) + C \underline{\text{grad}}(p_{\text{gz}}) \quad (1.45)$$

d'où l'expression développée du flux de vapeur :

$$\underline{J}_{\text{vp}} = -\frac{F \rho_{\text{vp}} (1 - C_{\text{vp}})}{p_{\text{gz}}} \left[A \underline{\text{grad}}(T) + B \underline{\text{grad}}(p_{\text{liq}}) + (C - C_{\text{vp}}) \underline{\text{grad}}(p_{\text{gz}}) \right] \quad (1.46)$$

- Moyne (1987) / Pollock (1986) :

On peut écrire le gradient de fraction massique de vapeur en fonction des inconnues, et en se servant à nouveau de l'expression générale du gradient de densité de vapeur, on trouve :

$$\underline{J}_{vp}^* = -D_{atm} f \frac{\rho_{vp}}{\rho_{vp}} \left(1 - \frac{M_{vp} - M_{as} \rho_{vp}}{M_{vp} \rho_{gz}} \right) \left[A \underline{\text{grad}}(T) + B \underline{\text{grad}}(p_{lq}) + (C - C_{vp}) \underline{\text{grad}}(p_{gz}) \right] \quad (1.47)$$

Si on identifie les expressions des deux flux \underline{J}_{vp} et \underline{J}_{vp}^* , on aboutit à une forme unique du coefficient F fonction non linéaire des trois inconnues :

$$F(T, p_{lq}, p_{gz}) = \frac{D_{atm} \tau \phi (1 - S_{lq})}{C_{vp} (1 - C_{vp})} \left(1 - \frac{M_{vp} - M_{as} \rho_{vp}}{M_{vp} \rho_{gz}} \right) \quad (1.48)$$

où D_{atm} est une fonction non linéaire de T et p_{gz} (Pollock, 1986 citant Krischner & Rohnalter, 1940 ; Moyne, 1987). Le coefficient τ est alors le seul degré de liberté intervenant dans cet expression du coefficient de Fick.

Il faut maintenant, pour expliciter le flux massique de vapeur en fonction des inconnues du problème, développer l'expression de ρ_{vp} et pour cela, on tient compte de l'hypothèse selon laquelle les phases liquide et vapeur sont en équilibre thermodynamique. Par conséquent, on obtient, en introduisant les équations d'état du liquide et de la vapeur, l'équation traduisant la loi de Clapeyron généralisée (Coussy 1995, p396) :

$$\frac{1}{\rho_{vp}} \frac{dp_{vp}}{dT} - \frac{1}{\rho_{lq}} \frac{dp_{lq}}{dT} = s_m^{vp} - s_m^{lq} = \frac{L}{T} \quad (1.49)$$

avec L la chaleur latente de vaporisation qui est une fonction de la température et qui peut être approchée, dans une gamme de température assez large, par une expression de la forme (Coussy, 1991, p.409) :

$$L(T) = L_o - \beta(T - T_o) \quad (1.50)$$

En effet, loin d'une température critique qui est en général nettement supérieure aux températures qui concernent les problèmes considérés, ce coefficient β s'écrit (Bruhat, 1962, p.258 ; Coussy, 1995 p.396) :

$$\beta = c_m^{lq} - c_m^{vp} \quad (1.51)$$

avec c_m^{lq} et c_m^{vp} les chaleurs massiques du liquide et de la vapeur à pression constante.

Dangla (communication personnelle) propose une forme générale que l'on adopte pour les calculs :

$$\ln \left[\frac{p_{vp}(T, p_{cp})}{p_{vp}(T = T_o, p_{cp} = 0)} \right] = \frac{M_{vp}}{RT} \left[-\frac{p_{cp}}{\rho_{lq}^o} + \frac{L_o}{T_o} (T - T_o) + (c_m^{lq} - c_m^{vp}) \left(T - T_o - T \ln \left(\frac{T}{T_o} \right) \right) \right] \quad (1.52)$$

à partir de laquelle on retrouve la formule de Kelvin établie en conditions isothermes pour l'humidité :

$$h_r(T_o, p_{cp}) = \frac{p_{vp}(T_o, p_{cp})}{p_{vp}(T_o, p_{cp} = 0)} = \frac{p_{vp}(T_o, p_{cp})}{p_{vp}^{sat}(T_o)} = \text{Exp} \left[-\frac{M_{vp} p_{cp}}{RT_o \rho_{lq}^o} \right] \quad (1.53)$$

En adoptant cette formulation, le gradient de pression de vapeur peut donc se mettre sous la forme :

$$\underline{\text{grad}}(p_{vp}) = A \underline{\text{grad}}(T) + B \underline{\text{grad}}(p_{lq}) + C \underline{\text{grad}}(p_{gz}) \quad (1.54)$$

avec les coefficients A, B et C définis par :

$$\begin{cases} A = \frac{M_{vp} p_{vp}}{\rho_{lq}^o RT^2} \left[p_{cp} + \rho_{lq}^o (L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o)) \right] \\ B = \frac{M_{vp} p_{vp}}{\rho_{lq}^o RT} = -C \end{cases} \quad (1.55)$$

Quels que soient les auteurs, en tenant compte de l'expression développée du gradient de pression de vapeur, et du flux de vapeur, le terme de mouvement de la vapeur se met sous la forme :

$$\text{div} \left(K_{lqlq}^{(2)} \underline{\text{grad}} p_{lq} \right) + \text{div} \left(K_{lqgz}^{(2)} \underline{\text{grad}} p_{gz} \right) + \text{div} \left(K_{lqT}^{(2)} \underline{\text{grad}} T \right) \quad (1.56)$$

avec les termes de couplages présentés dans le tableau 8.

Tableau 8. Termes de couplages de conductivité pour la conservation de l'eau vapeur.

	Lassabatère	Thomas
$K_{lqlq}^{(2)}$	$\frac{(1 - C_{vp}) F \rho_{vp}^2}{\rho_{lq}^o p_{gz}}$	$\frac{D_{atm} n_p \phi M_{vp} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o RT}$
$K_{lqgz}^{(2)}$	$\rho_{vp} \frac{k K_{gz}^{rel}}{\mu_{gz}} - \frac{(1 - C_{vp}) F \rho_{vp}}{p_{gz}} \left(C_{vp} + \frac{\rho_{vp}}{\rho_{lq}^o} \right)$	$\rho_{vp} \frac{k K_{gz}^{rel}}{\mu_{gz}} - \frac{D_{atm} n_p \phi M_{vp} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o RT}$
$K_{lqT}^{(2)}$	$\frac{(1 - C_{vp}) F \rho_{vp}^2}{\rho_{lq}^o p_{gz} T} \left[p_{cp} + \rho_{lq}^o (L_o + (c_m^{vp} - c_m^{lq})(T - T_o)) \right]$	$D_{atm} n_p \phi \left(h_r \beta + \frac{\rho_{vp} p_{cp} M_{vp}}{\rho_{lq}^o RT^2} \right)$

En faisant la somme membre à membre des deux équations de conservation pour le liquide et la vapeur, de manière à faire le bilan de conservation de la masse d'eau (ce qui revient à éliminer le terme de changement de phase), on obtient une équation de conservation de la masse liquide-vapeur de la forme :

$$C_{lqlq} \frac{\partial p_{lq}}{\partial t} + C_{lqgz} \frac{\partial p_{gz}}{\partial t} + C_{lqT} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{lqu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \text{div}(K_{lqlq} \underline{\text{grad}} p_{lq}) + \text{div}(K_{lqgz} \underline{\text{grad}} p_{gz}) + \text{div}(K_{lqT} \underline{\text{grad}} T) \quad (1.57)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} C_{lqlq} = -C_{lqgz} = C_{lqlq}^{(1)} + C_{lqlq}^{(2)} \\ C_{lqT} = C_{lqT}^{(1)} + C_{lqT}^{(2)} \\ C_{lqu} = C_{lqu}^{(1)} + C_{lqu}^{(2)} \\ K_{lqlq} = K_{lqlq}^{(1)} + K_{lqlq}^{(2)} \\ K_{lqgz} = K_{lqgz}^{(2)} \\ K_{lqT} = K_{lqT}^{(2)} \end{cases} \quad (1.58)$$

Conservation de la masse d'air sec

En ce qui concerne le principe de conservation de la masse d'air sec, Lassabatère (1994) utilise une formulation comparable à celle de la vapeur :

$$\frac{\partial m_{as}}{\partial t} = -\text{div}(\underline{M}_{as}) \quad (1.59)$$

ou encore pour Moyne (1987) et Pollock (1986) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{as} \phi_{gz}) = -\text{div}(\underline{J}_{as} + \rho_{as} \underline{v}^{gz}) \quad (1.60)$$

alors que Thomas et al. (1996) mettent en équation cette conservation de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{as} \phi_{gz}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{as} H \phi_l) = -\text{div}(\rho_{as} \underline{v}^{gz}) - \text{div}(\rho_{as} H \underline{v}^l) \quad (1.61)$$

Ils prennent donc en compte le phénomène de dissolution de l'air sec dans l'eau par l'intermédiaire de la loi de Henry et du coefficient H. Les autres auteurs négligent ce phénomène mais la grosse différence réside surtout dans l'écriture du mouvement de l'air sec. En effet, Moyne (1987), Pollock (1986) et Lassabatère (1994) considèrent deux moteurs pour l'air sec : une diffusion de type Darcy généralisée pour le mélange (comme Thomas et al., 1996) mais aussi un mouvement de type Fick (ce que négligent ces auteurs).

En développant le terme d'emmagasinement, on montre que les différentes approches conduisent à une expression de la forme :

$$C_{gzlq} \frac{\partial \rho_{lq}}{\partial t} + C_{gzzz} \frac{\partial \rho_{gz}}{\partial t} + C_{gzT} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{gzv} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (1.62)$$

avec les termes de couplages développés dans le tableau 9.

Tableau 9. Termes de couplages de capacité pour la conservation de l'air sec.

	Lassabatère	Thomas
C_{gzlq}	$\rho_{as} \phi \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} - \frac{\phi_{gz} M_{as} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o RT}$	$H^* \rho_{as} \phi \left(\frac{\partial S_{lq}}{\partial p_{cp}} \right)_T - H^{**} \frac{\rho_{vp} M_{as} \phi}{\rho_{lq}^o RT}$
C_{gzzz}	$-\rho_{as} \phi \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} + \frac{\phi_{gz} M_{as}}{RT} \left(1 + \frac{\rho_{vp}}{\rho_{lq}^o} \right)$	$-H^* \rho_{as} \phi \left(\frac{\partial S_{lq}}{\partial p_{cp}} \right)_T + H^{**} \frac{M_{as} \phi}{RT} \left(1 + \frac{\rho_{vp}}{\rho_{lq}^o} \right)$
C_{gzT}	$-3\rho_{as} \alpha_m^{as} - \frac{\rho_{vp} \rho_{as} \phi_{gz}}{\rho_{lq}^o p_{as} T} [p_{cp} + \rho_{lq}^o (L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o))]$	$-H^* \rho_{as} \phi \left(\frac{\partial S_{lq}}{\partial T} \right)_{p_{cp}} - H^{**} M_{as} \phi \left[\frac{p_{gz}}{RT^2} + \frac{1}{M_{vp}} \left(h\beta + \frac{\rho_{vp} p_{cp} M_{vp}}{\rho_{lq}^o RT^2} \right) \right]$

avec $H^* = 1 - H$ et $H^{**} = (1 - H^* S_{lq})$

Le flux massique d'air sec a été défini en même temps que le flux de vapeur et le terme de mouvement de la phase d'air sec s'écrit donc sous la forme générale suivante :

$$\text{div}(K_{gzlq} \underline{\text{grad}} p_{lq}) + \text{div}(K_{gzzz} \underline{\text{grad}} p_{gz}) + \text{div}(K_{gzT} \underline{\text{grad}} T) \quad (1.63)$$

avec les termes de couplages présentés dans le tableau 10.

Tableau 10. Termes de couplages de conductivité pour la conservation de l'air sec.

	Lassabatère	Thomas
K_{gzlq}	$-\frac{C_{vp} F \rho_{as} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o p_{gz}}$	$H \rho_{as} \frac{k K_{lq}^{rel}}{\mu_{lq}} - \frac{D_{atm} n_p \phi M_{vp} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o RT}$
K_{gzzz}	$\rho_{as} \frac{k K_{gz}^{rel}}{\mu_{gz}} + \frac{C_{vp} F \rho_{as}}{p_{gz}} \left(C_{vp} + \frac{\rho_{vp}}{\rho_{lq}^o} \right)$	$\rho_{as} \frac{k K_{gz}^{rel}}{\mu_{gz}} + \frac{D_{atm} n_p \phi M_{vp} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o RT}$
K_{gzT}	$-\frac{C_{vp} F \rho_{as} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o p_{gz} T} [p_{cp} + \rho_{lq}^o (L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o))]$	$-D_{atm} n_p \phi \left(h_r \frac{d\rho_{vp}^o}{dT} + \frac{\rho_{vp} p_{cp} M_{vp}}{\rho_{lq}^o RT^2} \right)$

Equation thermique

Sous l'hypothèse d'un changement de phase liquide-vapeur non dissipatif, l'équation thermique en milieu poreux partiellement saturé s'écrit (Coussy, 1995p393) :

$$T \left[\frac{dS}{dt} + \text{div}(\underline{s}_m^j \underline{M}_j) \right] = -\text{div} \underline{q} - \frac{\underline{M}_j}{\rho_j} \underline{\text{grad}}(p_j) \quad (1.64)$$

ou encore en développant le premier terme de divergence :

$$T \left[\frac{dS}{dt} + s_m^j \text{div}(\underline{M}_j) + \underline{M}_j \underline{\text{grad}}(s_m^j) \right] = -\text{div} \underline{q} - \frac{\underline{M}_j}{\rho_j} \underline{\text{grad}}(p_j) \quad (1.65)$$

puis :

$$T \left[\frac{dS}{dt} - s_m^j \frac{dm_j}{dt} \right] + m_{lq \rightarrow vp} T (s_m^{vp} - s_m^{lq}) = -\text{div} \underline{q} - \frac{\underline{M}_j}{\rho_j} \underline{\text{grad}}(p_j) - T \underline{M}_j \underline{\text{grad}}(s_m^j) \quad (1.66)$$

Enfin, en introduisant la loi de comportement :

$$\left[3\alpha_o K_o T d\varepsilon_v - 3\alpha_m^j T \frac{dp_j}{dt} + C \frac{dT}{dt} \right] - L \frac{dm_{lq}}{dt} = -\text{div} \underline{q} - \frac{\underline{M}_j}{\rho_j} \underline{\text{grad}}(p_j) - T \underline{M}_j \underline{\text{grad}}(s_m^j) + L \text{div}(\underline{M}_{lq}) \quad (1.67)$$

L'expression $-\frac{\underline{M}_j}{\rho_j} \underline{\text{grad}}(p_j)$ constitue un terme de dissipation de type Darcy alors que l'expression $-T \underline{M}_j \underline{\text{grad}}(s_m^j)$ est un terme de convection. Pour les résultats présentés dans ce mémoire, ces deux termes sont négligés. L'équation thermique se met alors sous la forme :

$$C_{Tlq} \frac{\partial p_{lq}}{\partial t} + C_{Tgz} \frac{\partial p_{gz}}{\partial t} + C_{TT} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{Tu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \text{div}(\underline{K}_{Tlq} \underline{\text{grad}} p_{lq}) + \text{div}(\underline{K}_{Tgz} \underline{\text{grad}} p_{gz}) + \text{div}(\underline{K}_{TT} \underline{\text{grad}} T) \quad (1.68)$$

avec

$$\begin{aligned} C_{Tlq} &= -3\alpha_m^{lq} T + \phi \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} \rho_{lq}^o \left[L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o) \right] \\ C_{Tgz} &= -3\alpha_m^{as} T - \phi \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} \rho_{lq}^o \left[L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o) \right] \\ C_{TT} &= C_\varepsilon + 3\alpha_m^{lq} \rho_{lq}^o \left[L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o) \right] \\ C_{Tu} &= 3\alpha_o K_o T - S_{lq} \rho_{lq}^o \left[L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o) \right] \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$K_{Tlq} = -\rho_{lq}^o \left[L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp}) (T - T_o) \right] \frac{k K_{lq}^{rel}}{\mu_{lq}}$$

$$K_{Tgz} = 0$$

$$K_{TT} = \lambda_T$$

Chez tous les auteurs (sauf Lassabatère, 1994, qui traite un problème isotherme), l'équation thermique est formulée différemment :

$$\frac{\partial}{\partial t} [C(T - T_o) + (\phi - \phi_l) \rho_{vp} L] = -\text{div} \underline{q} \tag{1.70}$$

L'emménagement de la chaleur est lié à la capacité calorifique volumique du milieu poreux C et à la chaleur latente de vaporisation de l'eau liquide en vapeur.

$$C = (1 - \phi) \rho_s c_m^s + \rho_{lq}^o \phi_{lq} c_m^{lq} + (\phi - \phi_{lq}) \rho_{vp} c_m^{vp} + (\phi - \phi_{lq}) \rho_{as} c_m^{as} \tag{1.71}$$

Le vecteur flux de chaleur est donné par l'équation suivante :

$$\underline{q} = -\lambda_T \underline{\text{grad}} T + \rho_{lq}^o L_o \underline{V}_{vp}^* + \rho_{vp} L_o \underline{V}_{gz}^* + (T - T_o) \left[c_m^{lq} \underline{M}_{lq} + c_m^{vp} (\underline{J}_{vp}^* + \rho_{vp} \underline{V}_{gz}^*) + \rho_{as} c_m^{as} \underline{V}_{gz}^* \right] \tag{1.72}$$

Il est constitué par un terme de conduction explicité par la loi de Fourier, deux termes de chaleur latente liés aux deux composantes du moteur de la phase vapeur et quatre termes de convection de chaleur (du liquide, des deux parties de la vapeur et de l'air sec).

Mais les différents auteurs ne prennent pas en compte tous les termes de conduction, vaporisation et convection. Les différentes formulations du transfert de chaleur sont récapitulées dans les tableaux 11 et 12 (en notant $\Delta T = (T - T_o)$) :

- emménagement de la chaleur : $[1] = \frac{\partial}{\partial t} (C \Delta T + X)$

Tableau 11. Les différentes formulations de l'emménagement de la chaleur.

	C	X
Thomas & Sansom (1995) Pollock (1986) Thomas & al. (1996, cas 2)	$(1 - \phi) \rho_s c_m^s + \rho_{lq}^o \phi_{lq} c_m^{lq} + \phi_{gz} \rho_{vp} c_m^{vp} + \phi_{gz} \rho_{as} c_m^{as}$	$\phi_{gz} \rho_{vp} L_o$
Ewen & Thomas (1989) Thomas & King (1992) Kanno & al. (1996)	$(1 - \phi) \rho_s c_m^s + \rho_{lq}^o \phi_{lq} c_m^{lq} + \phi_{gz} \rho_{vp} c_m^{vp}$	$\phi_{gz} \rho_{vp} L_o$
Thomas & al. (1996, cas 1)	$(1 - \phi) \rho_s c_m^s + \rho_{lq}^o \phi_{lq} c_m^{lq} + \phi_{gz} \rho_{vp} c_m^{vp}$	////////////////
Selvadurai (1996)	ρC	////////////////

- mouvement de la chaleur : $[2]= \text{div}(\underline{q})$ avec $\underline{q} = \underbrace{\lambda_T \text{grad}(T)}_{(q)_{\text{conduction}}} + (q)_{\text{vaporisation}} + (q)_{\text{convection}}$

Tableau 12. Les différentes formulations du mouvement de la chaleur.

	$(q)_{\text{vaporisation}}$	$(q)_{\text{convection}}$
Thomas&Sansom (1995) Thomas&al.(1996, cas2)	$\rho_{lq}^o L_o \underline{V}_{vp}^* + \rho_{vp} L_o \underline{V}_{gz}^*$	$c_m^{lq} \underline{M}_{lq} + c_m^{vp} (\underline{J}_{vp}^* + \rho_{vp} \underline{V}_{gz}^*) + \rho_{as} c_m^{as} \underline{V}_{gz}^*$
Pollock (1986)	$\rho_{lq}^o L_o \underline{V}_{vp}^* + \rho_{vp} L_o \underline{V}_{gz}^*$	$c_m^{lq} \underline{M}_{lq} + c_m^{vp} (\underline{J}_{vp}^* + \rho_{vp} \underline{V}_{gz}^*) + c_m^{as} (\underline{J}_{as}^* + \rho_{as} \underline{V}_{gz}^*)$
Ewen & Thomas (1989)	$\rho_{lq}^o L_o \underline{V}_{vp}^*$	$c_m^{lq} \underline{M}_{lq} + c_m^{vp} (\underline{J}_{vp}^* + \rho_{vp} \underline{V}_{gz}^*)$
Thomas & King (1992) Kanno & al. (1996)	$\rho_{lq}^o L_o \underline{V}_{vp}^*$	////////////////////////////////////
Selvadurai (1996)	$\rho L D \phi_v \text{grad}(\phi_l)$	////////////////////////////////////

Pollock (1986) prend en compte un terme de convection supplémentaire en considérant le mouvement de la vapeur suivant une loi de type de Vries (diffusion moléculaire de l'air sec au sein du mélange gazeux) :

$$\underline{J}_{as}^* = -D_{atm} a \phi_{gz} \rho_{gz} \text{grad} \left(\frac{\rho_{as}}{\rho_{gz}} \right) \tag{1.73}$$

Pollock (1986) exprime l'équation de conservation de la chaleur en fonction des enthalpies et des vecteurs de flux massique (Bird et al. 1960 p500) ; mais en développant cette expression, on retrouve une formulation similaire à celles des autres auteurs :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_{lq} \rho_{lq}^o h_{lq} + \phi_{gz} \rho_{gz} h_{gz} + (1-\phi) \rho_s h_s) + \text{div} (h_{lq} \underline{M}^l + \rho_{gz} h_{gz} \underline{V}_{gz}^* + h_{vp} \underline{J}_{vp}^* + h_{as} \underline{J}_{as}^*) = 0 \tag{1.74}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} h_s = c_m^s \Delta T \\ h_l = c_m^{lq} \Delta T \\ h_{vp} = c_m^{vp} \Delta T + L_o \\ h_{as} = c_m^{as} \Delta T \\ h_{gz} = \frac{\rho_{vp}}{\rho_{gz}} h_{vp} + \frac{\rho_{as}}{\rho_{gz}} h_{as} \end{cases} \tag{1.75}$$

L'équation thermique conduit selon l'approche de Thomas et al. (1996) à la même équation générale que pour l'approche THMNL avec les termes de couplages suivants (pour l'approche THMNL) :

$$\begin{aligned}
C_{Tlq} &= \phi \left(\frac{\partial S_{lq}}{\partial p_{cp}} \right)_T \left[\rho_{vp} L_o + (\rho_{vp} c_m^{vp} + \rho_{as} c_m^{as} - \rho_{lq}^o c_m^{lq}) \Delta T \right] \\
&\quad + \frac{\rho_{vp} \phi_{gz}}{\rho_{lq}^o RT} \left[L_o M_{vp} + (c_m^{vp} M_{vp} - c_m^{as} M_{as}) \Delta T \right] \\
C_{Tgz} &= -\phi \left(\frac{\partial S_{lq}}{\partial p_{cp}} \right)_T \left[\rho_{vp} L_o + (\rho_{vp} c_m^{vp} + \rho_{as} c_m^{as} - \rho_{lq}^o c_m^{lq}) \Delta T \right] \\
&\quad - \frac{\rho_{vp} \phi_{gz}}{\rho_{lq}^o RT} \left[L M_{vp} + \left(c_m^{vp} M_{vp} - c_m^{as} M_{as} \left(1 + \frac{\rho_{lq}^o}{\rho_{vp}} \right) \right) \Delta T \right] \\
C_{TT} &= C - \phi \left(\frac{\partial S_{lq}}{\partial T} \right)_{p_{cp}} \left[\rho_{vp} L + (\rho_{vp} c_m^{vp} + \rho_{as} c_m^{as} - \rho_{lq}^o c_m^{lq}) \Delta T \right] \\
&\quad + \left[L + \left(c_m^{vp} - \frac{M_{as} c_m^{as}}{M_{vp}} \right) \Delta T \right] \left[h \frac{d\rho_{vp}^o}{dT} + \frac{\rho_{vp} p_{cp} M_{vp}}{\rho_{lq}^o RT} \right] \phi_{gz} - \left(\rho_{as} + \rho_{vp} \frac{M_{as}}{M_{vp}} \right) \frac{\phi_{gz} c_m^{as} \Delta T}{T} \\
K_{Tlq} &= \frac{\rho_{lq}^o k K_{lq}^{rel} \Delta T}{\mu_{lq}} + \frac{\rho_{vp} \phi M_{vp} n_p D_{atm} (L + c_m^{vp} \Delta T)}{\rho_{lq}^o RT} \\
K_{Tgz} &= \frac{k K_{gz}^{rel} \left[\rho_{vp} L + (\rho_{vp} c_m^{vp} + \rho_{as} c_m^{as}) \Delta T \right]}{\mu_{gz}} - \frac{\rho_{vp} \phi M_{vp} n_p D_{atm} (L + c_m^{vp} \Delta T)}{\rho_{lq}^o RT} \\
K_{TT} &= \lambda_T + D_{atm} n_p \left(L + c_m^{vp} \Delta T \right) \left(h \frac{d\rho_{vp}^o}{dT} + \frac{M_{vp} p_{cp} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^o RT^2} \right) \phi
\end{aligned} \tag{1.76}$$

Equilibre mécanique

D'un point de vue mécanique, l'équation de champ à résoudre traduit l'équilibre mécanique :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{F}} = 0 \tag{1.77}$$

En introduisant la loi de comportement thermo-poro-élastique isotrope,

$$d\underline{\underline{\sigma}} = \lambda_o d\varepsilon_{v\underline{\underline{1}}} + 2\mu d\underline{\underline{\varepsilon}} - b_j dp_{j\underline{\underline{1}}} - 3\alpha_o K_o dT_{\underline{\underline{1}}} \tag{1.78}$$

et en utilisant la formulation variationnelle conduisant à la mise en œuvre de la méthode aux éléments finis, on fait apparaître les termes de couplages suivants :

$$\begin{aligned}
C_{uu} &= K_o + \frac{4\mu}{3} \\
C_{ulq} &= -S_{lq} \\
C_{ugz} &= -(1 - S_{lq}) \\
C_{uT} &= -3\alpha_o K_o
\end{aligned}
\tag{1.79}$$

Pour les milieux poreux partiellement saturés, l'ensemble des couplages peut être schématisé comme le montre la figure 4.

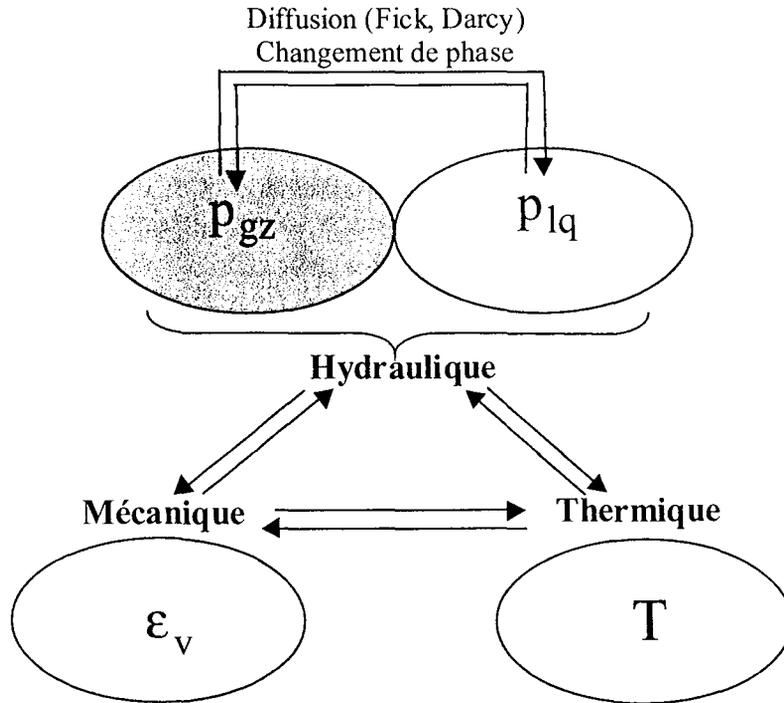


Figure 4. Schématisation des couplages en milieu poreux partiellement saturé.

On peut récapituler les équations du modèle THMNL :

- équation d'équilibre mécanique : $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{F}} = 0$ (1.80)

- conservation de la masse d'eau : $\frac{\partial}{\partial t} (m_{lq} + m_{vp}) = -\text{div} (\underline{\underline{M}}_{lq} + \underline{\underline{M}}_{vp})$ (1.81)

- conservation de la masse d'air sec : $\frac{\partial}{\partial t} (m_{as}) = -\text{div} (\underline{\underline{M}}_{as})$ (1.82)

- conservation de la chaleur : $T \left[\frac{dS}{dt} + \text{div} (s_m^j \underline{\underline{M}}_j) \right] = -\text{div} \underline{\underline{q}} - \frac{M_j}{\rho_j} \underline{\underline{\text{grad}}}(p_j)$ (1.83)

- conduction de l'eau liquide : $\underline{\underline{M}}_{lq} = -\rho_{lq}^o \lambda_{lq} \underline{\underline{\text{grad}}} p_{lq}$ (1.84)

- conduction du mélange gazeux : $\underline{\underline{M}}_{gz} = -\rho_{gz} \lambda_{gz} \underline{\underline{\text{grad}}} p_{gz}$ (1.85)

- diffusion de la vapeur au sein du mélange : $\frac{M_{vp}}{\rho_{vp}} - \frac{M_{as}}{\rho_{as}} = -F \underline{\underline{\text{grad}}} C_{vp}$ (1.86)

ainsi que les matrices non linéaires de capacité et de conductivité intervenant dans le système couplé des équations de champ :

$$\begin{bmatrix} C_{lqlq} & C_{lqgz} & C_{lqT} & C_{lqu} \\ C_{gzlq} & C_{gzgz} & C_{gzT} & C_{gzuz} \\ C_{Tlq} & C_{Tgz} & C_{TT} & C_{Tu} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p_{lq} \\ p_{gz} \\ T \\ \varepsilon_v \end{bmatrix} = \text{div} \left(\begin{bmatrix} K_{lqlq} & K_{lqgz} & K_{lqT} \\ K_{gzlq} & K_{gzgz} & K_{gzT} \\ K_{Tlq} & K_{Tgz} & K_{TT} \end{bmatrix} \text{grad} \begin{bmatrix} p_{lq} \\ p_{gz} \\ T \end{bmatrix} \right) \quad (1.87)$$

$$\begin{aligned} C_{lqlq} &= \frac{\phi_{gz} \rho_{vp}^2}{p_{vp} \rho_{lq}^0} + \phi \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} (\rho_{vp} - \rho_{lq}^0), \quad C_{lqgz} = -\frac{\phi_{gz} \rho_{vp}^2}{p_{vp} \rho_{lq}^0} - \phi \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} (\rho_{vp} - \rho_{lq}^0) \\ C_{lqT} &= -3(\rho_{vp} \alpha_m^{vp} + \rho_{lq}^0 \alpha_m^{lq}) + \frac{\rho_{vp}^2 \phi_{gz}}{\rho_{lq}^0 p_{vp} T} [p_{cp} + \rho_{lq}^0 (L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o))] \\ C_{lqu} &= \rho_{lq}^0 S_{lq} + \rho_{vp} (1 - S_{lq}), \quad C_{gzlq} = \rho_{as} \left[\phi \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} - \frac{\phi_{gz} \rho_{vp}}{p_{as} \rho_{lq}^0} \right], \quad C_{gzgz} = \rho_{as} \left[-\phi \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} + \frac{\phi_{gz}}{p_{as}} \left(1 + \frac{\rho_{vp}}{\rho_{lq}^0} \right) \right] \\ C_{gzT} &= -3\rho_{as} \alpha_m^{as} - \frac{\rho_{vp} \rho_{as} \phi_{gz}}{\rho_{lq}^0 p_{as} T} [p_{cp} + \rho_{lq}^0 (L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o))], \quad C_{gzuz} = \rho_{as} (1 - S_{lq}) \\ C_{Tlq} &= -3\alpha_m^{lq} T + \phi \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} \rho_{lq}^0 [L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o)] \\ C_{Tgz} &= -3\alpha_m^{as} T - \phi \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} \rho_{lq}^0 [L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o)] \quad (1.88) \\ C_{TT} &= C + 3\alpha_m^{lq} \rho_{lq}^0 [L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o)] \\ C_{Tu} &= 3\alpha_o K_o T - S_{lq} \rho_{lq}^0 [L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o)] \\ K_{lqlq} &= \rho_{lq}^0 \lambda_{lq} + \frac{F(1 - C_{vp}) p_{vp}^2}{\rho_{lq}^0 p_{gz}}, \quad K_{lqgz} = \rho_{vp} \lambda_{gz} - \frac{F(1 - C_{vp}) p_{vp}}{p_{gz}} \left(C_{vp} + \frac{\rho_{vp}}{\rho_{lq}^0} \right) \\ K_{lqT} &= \frac{F(1 - C_{vp}) p_{vp}^2}{\rho_{lq}^0 T p_{gz}} [p_{cp} + \rho_{lq}^0 (L_o + (c_m^{vp} - c_m^{lq})(T - T_o))], \quad K_{gzlq} = -\frac{FC_{vp} \rho_{as} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^0 p_{gz}} \\ K_{gzgz} &= \rho_{as} \lambda_{gz} + \frac{FC_{vp} \rho_{as}}{p_{gz}} \left(C_{vp} + \frac{\rho_{vp}}{\rho_{lq}^0} \right), \quad K_{gzT} = -\frac{FC_{vp} \rho_{as} \rho_{vp}}{\rho_{lq}^0 T p_{gz}} [p_{cp} + \rho_{lq}^0 (L_o + (c_m^{vp} - c_m^{lq})(T - T_o))] \\ K_{Tlq} &= -\rho_{lq}^0 \lambda_{lq} [L_o - (c_m^{lq} - c_m^{vp})(T - T_o)], \quad K_{Tgz} = 0, \quad K_{TT} = \lambda_T \end{aligned}$$

1.1.3.3 - Comparaison du modèle THMNL avec celui de Thomas (Pollock, 1986)

Pollock (1986) a modélisé un stockage de déchets radioactifs en profondeur dans un sol limoneux non saturé. Considérant un massif d'extension semi-infini, il a opté pour un modèle unidimensionnel avec la cote z comme variable d'espace (figure 5).

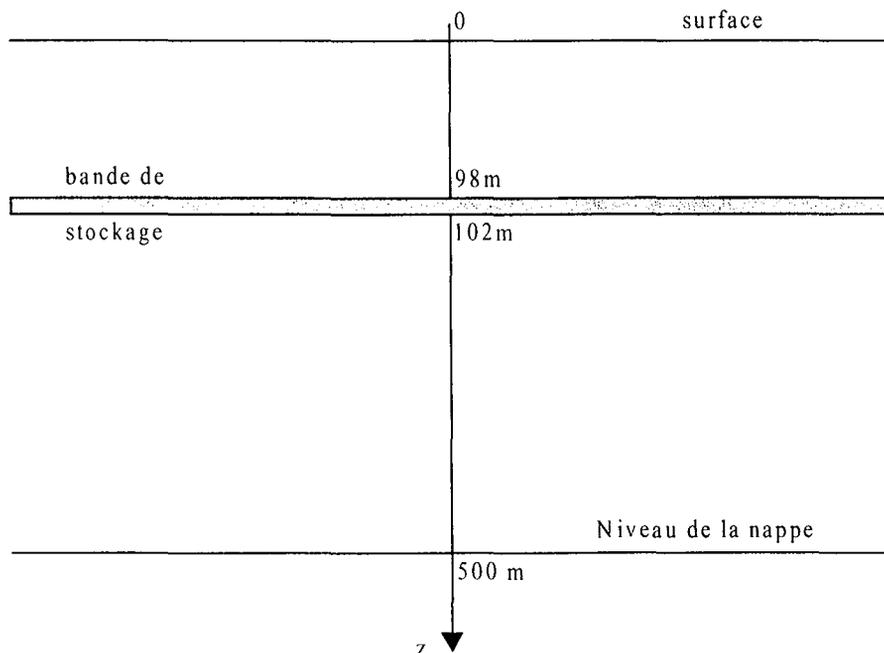


Figure 5. Géométrie de la zone de stockage.

Le stockage est situé à 100m de profondeur et sur une hauteur de 4 m au sein d'un massif de 500m d'épaisseur. Le flux de chaleur qui s'en dégage est initialement de 2.5 Wm^{-3} et il décroît avec le temps. D'après les valeurs ponctuelles données par Pollock, on a cherché à réaliser un ajustement reliant le flux à la variable temporelle (figure 6).

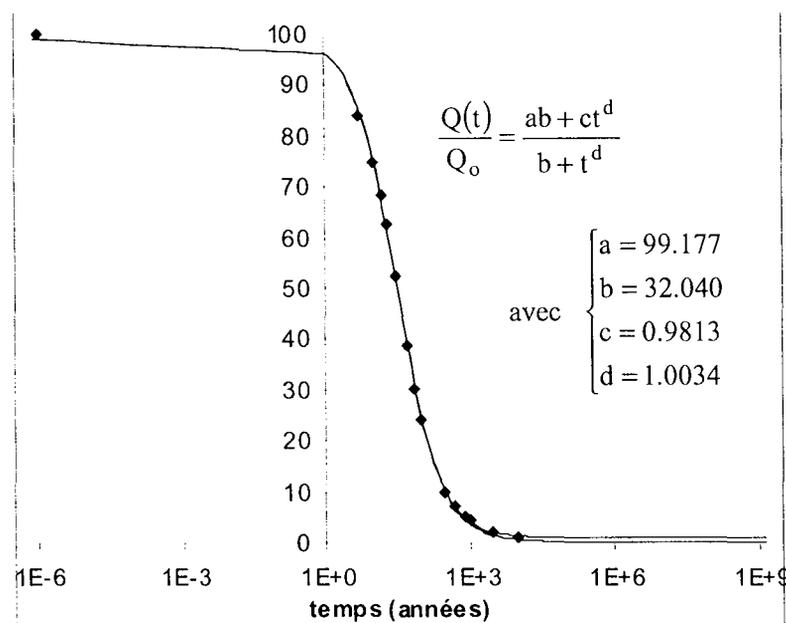


Figure 6. Ajustement du flux de chaleur dégagé avec les données de Pollock.

En ce qui concerne les conditions initiales et aux limites, on considère :

- $t = 0, 0 < z < 475\text{m}$:

$$\begin{cases} T = 293 + 0.03z \text{ K} \\ p_{gz} = 10^5 \text{ Pa} \\ p_{lq} = -4.805 \cdot 10^6 + 9.80665 \cdot 10^3 z \text{ Pa} \end{cases} \quad (1.89)$$

- $t > 0, z = 0$:

$$\begin{cases} T = 293\text{K} \\ p_{gz} = 10^5 \text{ Pa} \\ \frac{\partial p_{lq}}{\partial z} = \gamma_{lq} = 9.80665 \cdot 10^3 \text{ Pam}^{-1} \end{cases} \quad (1.90)$$

- $t > 0, z = 500\text{m}$:

$$\begin{cases} T = 307.25\text{K} \\ p_{gz} = 10^5 \text{ Pa} \\ \frac{\partial p_{lq}}{\partial z} = \gamma_{lq} = 9.80665 \cdot 10^3 \text{ Pam}^{-1} \end{cases} \quad (1.91)$$

Il faut aussi préciser les deux non-linéarités que sont la courbe de pression capillaire et la perméabilité relative au liquide. La courbe de pression capillaire est présentée sur la figure 7.

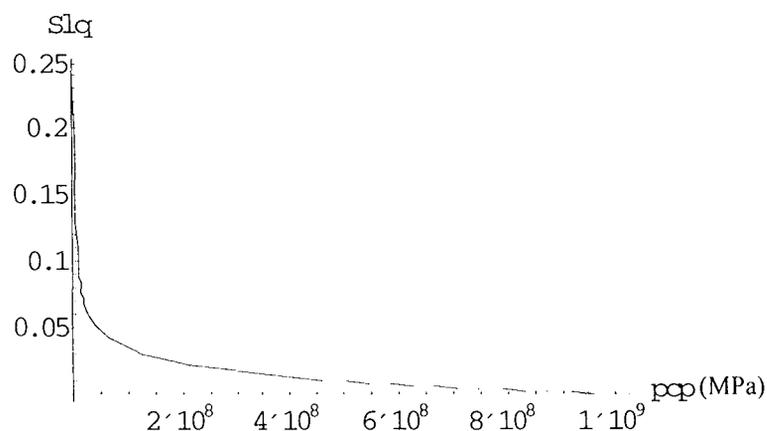


Figure 7. Courbe de pression capillaire du massif limoneux.

Il faut noter que Pollock (1986) ne tient pas compte dans son approche (contrairement à celle de Thomas et al., 1996) de l'influence de la température sur l'évolution de la saturation et il adopte une simple relation $S_{lq}(p_{cp})$ de manière identique au modèle THMNL, comme s'il traitait un problème isotherme.

Enfin, l'évolution de la perméabilité relative au liquide avec la saturation est aussi fortement non linéaire (figure 8).

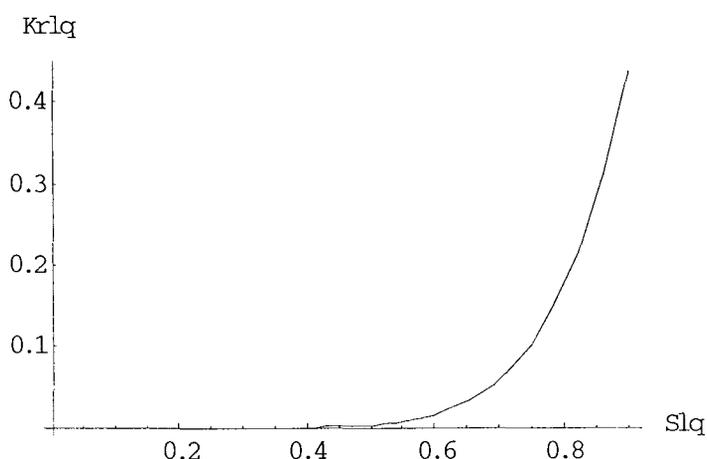


Figure 8. Perméabilité relative du massif limoneux.

Les calculs non linéaires ont été menés avec le code aux éléments finis PARSAT présenté en annexe 4. La discrétisation temporelle est réalisée selon un schéma implicite et on a utilisé un maillage de 583 nœuds (291 éléments de type Lagrange quadratique dont la taille a été diminuée au niveau de la bande de stockage).

On peut maintenant s'intéresser à quelques résultats, et notamment ceux qui ont été présentés dans l'article de Pollock (1986) pour pouvoir les comparer entre eux. On constate une assez bonne adéquation entre les deux approches, comme le montrent les figures 9, 10, 11 et 12.

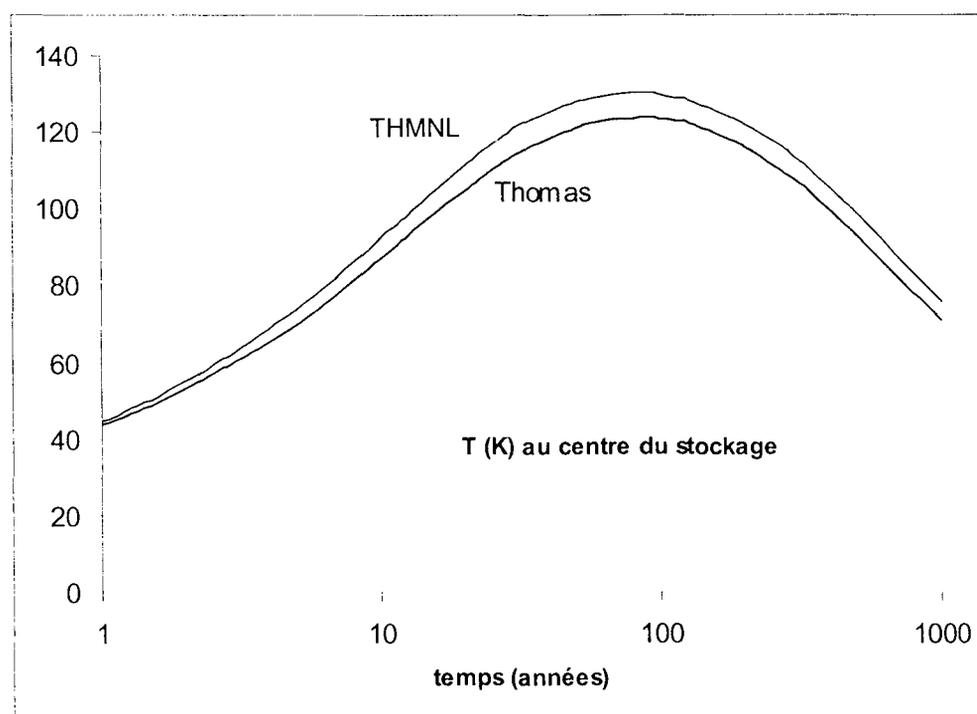


Figure 9. Evolution temporelle de la température au centre du stockage.

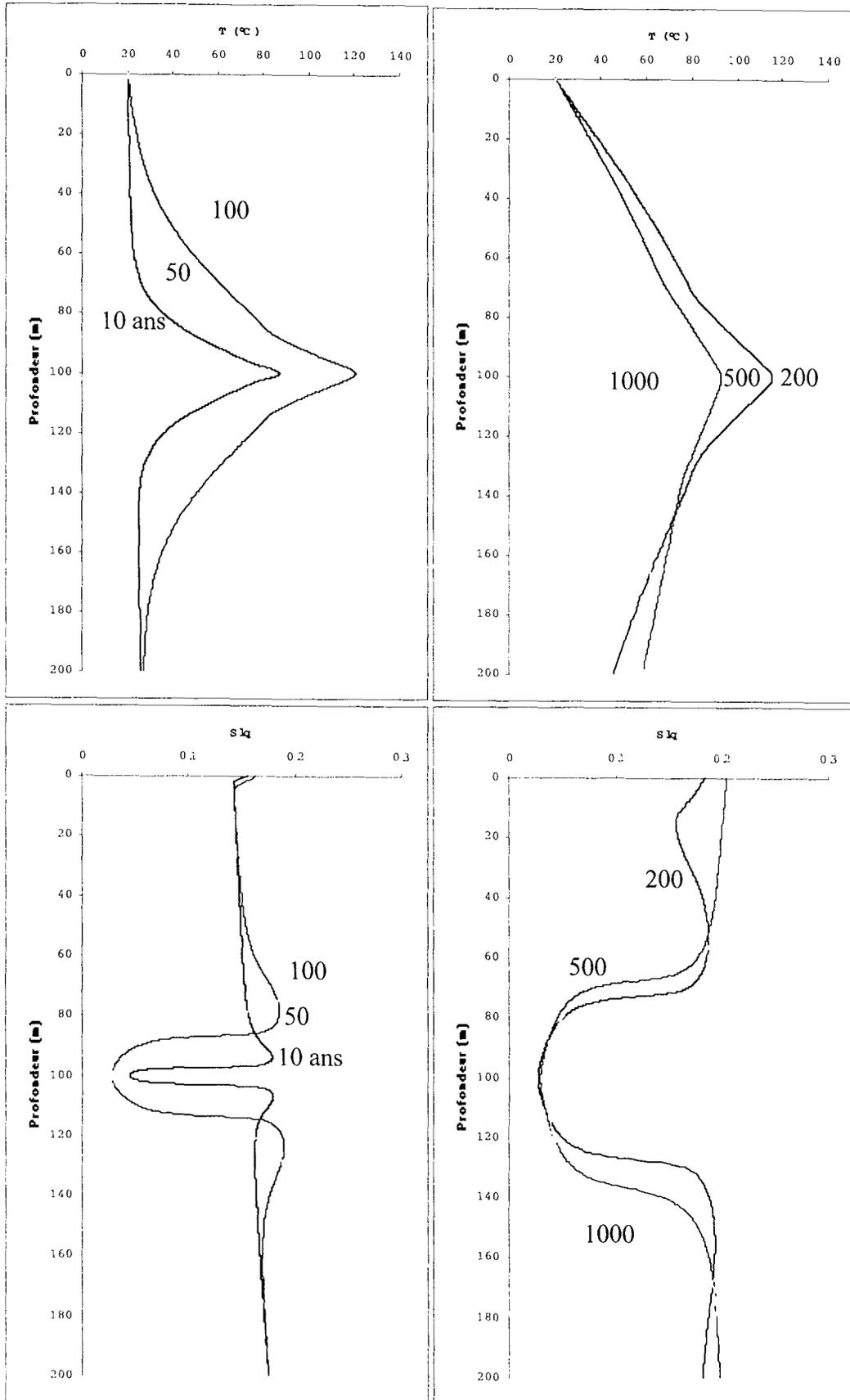


Figure 10. Evolution spatiale de la température et de la saturation (formulation de Thomas).

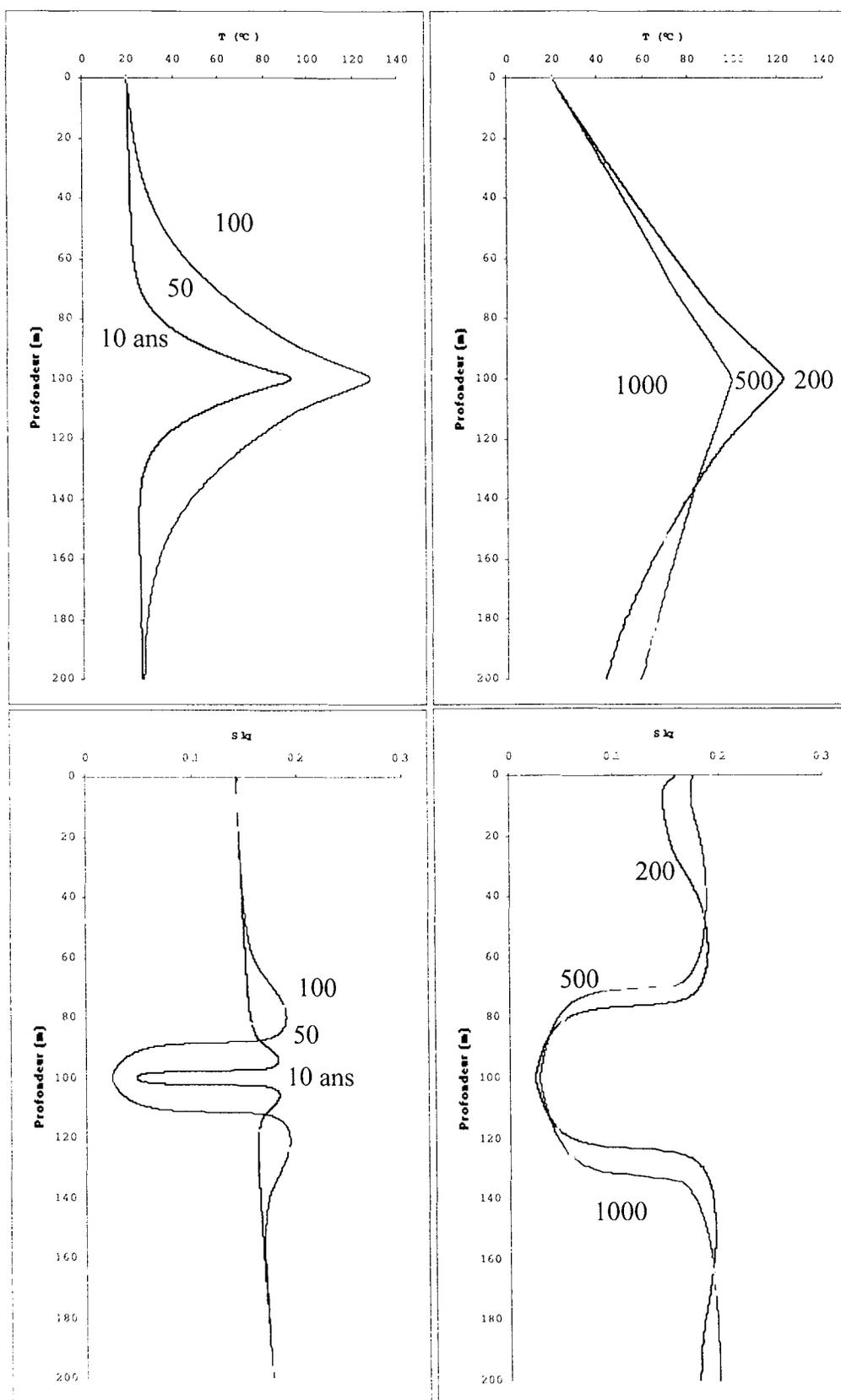


Figure 11. Evolution spatiale de la température et de la saturation (formulation THMNL).

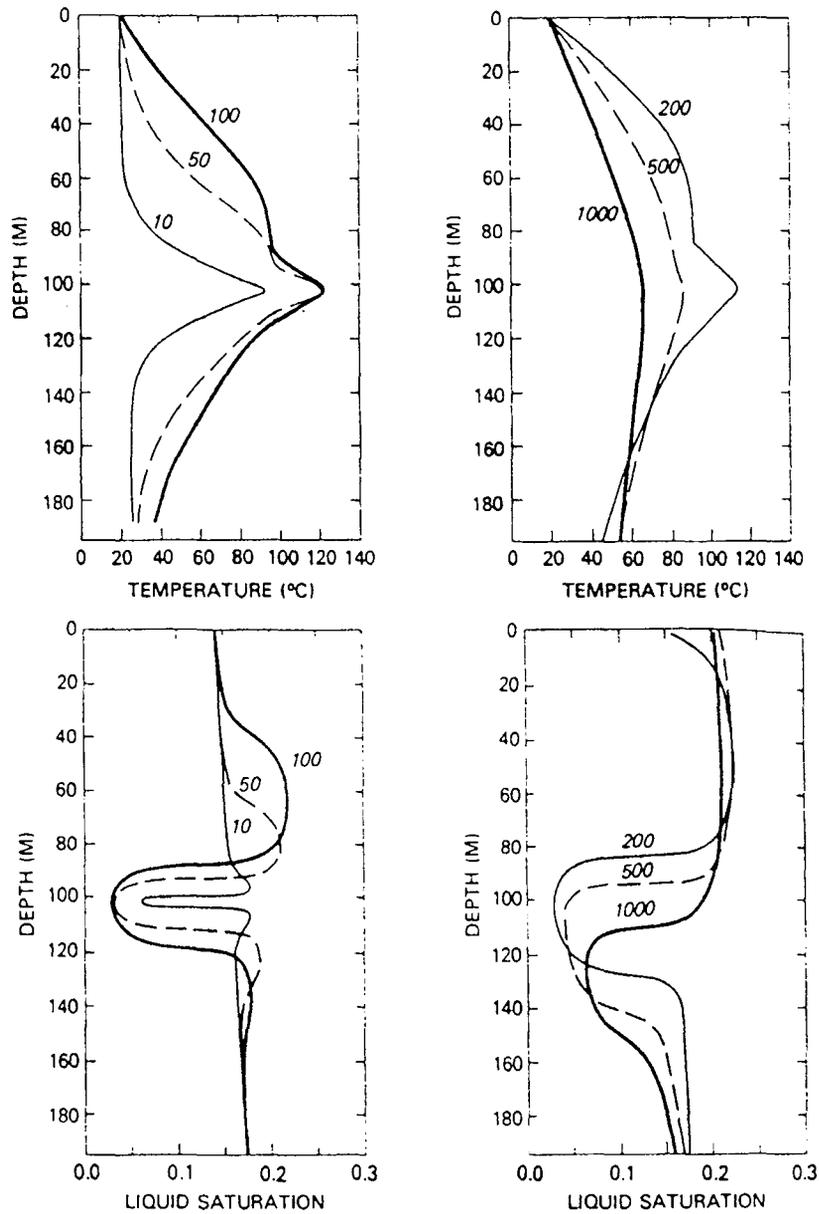


Figure 12. Résultats présentés par Pollock (1986).

Il existe des différences entre les modèles, qui concernent par exemple la diffusion de la vapeur, formulée différemment par les auteurs, ou encore une équation de transfert de chaleur qui néglige ou non certains termes de conduction et de convection. On ne cherche donc pas à superposer les résultats des trois approches mais cette comparaison de codes et de modèles permet d'évaluer la cohérence du modèle THMNL et de son implantation dans le code PARSAT.

1.2 - METHODOLOGIE DE RESOLUTION

1.2.1 - Analogie entre les approches en milieux saturés et partiellement saturés

On a donc établi les équations de champ qui gouvernent le comportement couplé thermo-hydro-mécanique du milieu poreux. Lorsque le milieu poreux est saturé, ces équations sont au nombre de trois, une équation d'équilibre mécanique et deux équations de diffusion, qui s'expriment en fonction d'une variable mécanique (la déformation volumique), une variable thermique (la température) et une variable hydraulique (la pression de fluide). En milieu partiellement saturé, il y a une équation de diffusion supplémentaire et deux variables hydrauliques au lieu d'une (les pressions de liquide et de mélange gazeux). En ce qui concerne l'équation d'équilibre mécanique, elle conduit à une équation dite de Navier qui peut se mettre sous la forme :

- milieu saturé :

$$C_{uu} \underline{\text{grad}} \underline{\varepsilon}_v - \text{Grot}[\underline{\text{rot}}(\underline{u})] + C_{uL} \underline{\text{grad}} P + C_{uT} \underline{\text{grad}} T = \underline{0} \quad (1.92)$$

- milieu partiellement saturé :

$$C_{uu} \underline{\text{grad}} \underline{\varepsilon}_v - \text{Grot}[\underline{\text{rot}}(\underline{u})] + C_{uLq} \underline{\text{grad}} p_{Lq} + C_{ugz} \underline{\text{grad}} p_{gz} + C_{uT} \underline{\text{grad}} T = \underline{0} \quad (1.93)$$

On obtient donc une expression tout à fait analogue entre les deux formulations avec un ou deux termes de couplages $H \rightarrow M$.

Il en est de même pour les équations de diffusion qui forment un système couplé de deux ou trois équations que l'on peut synthétiser sous la forme matricielle suivante :

- milieu saturé :

$$\begin{bmatrix} C_{LL} & C_{LT} & C_{Lu} \\ C_{TL} & C_{TT} & C_{Tu} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} P \\ T \\ \underline{\varepsilon}_v \end{bmatrix} = \text{div} \left(\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LT} \\ K_{TL} & K_{TT} \end{bmatrix} \underline{\text{grad}} \begin{bmatrix} P \\ T \end{bmatrix} \right) \quad (1.94)$$

- milieu partiellement saturé :

$$\begin{bmatrix} C_{LqLq} & C_{Lqgz} & C_{LqT} & C_{Lqu} \\ C_{gzLq} & C_{gzgz} & C_{gzT} & C_{gzu} \\ C_{TLq} & C_{Tgz} & C_{TT} & C_{Tu} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p_{Lq} \\ p_{gz} \\ T \\ \underline{\varepsilon}_v \end{bmatrix} = \text{div} \left(\begin{bmatrix} K_{LqLq} & K_{Lqgz} & K_{LqT} \\ K_{gzLq} & K_{gzgz} & K_{gzT} \\ K_{TLq} & K_{Tgz} & K_{TT} \end{bmatrix} \underline{\text{grad}} \begin{bmatrix} p_{Lq} \\ p_{gz} \\ T \end{bmatrix} \right) \quad (1.95)$$

Néanmoins les modèles saturés et non saturés sont fondamentalement différents car les non-linéarités sont essentielles dans le modèle non saturé et il est donc nécessaire de disposer de méthodes de résolution numériques adaptées pour les problèmes non linéaires. Une fois la linéarisation effectuée (et seulement), on verra que la technique de résolution exacte de problèmes linéaires couplés est identique que le milieu soit saturé ou non. La saturation partielle ne se traduit que par une inconnue supplémentaire et, de fait, une équation supplémentaire.

1.2.2 - Approche non linéaire : résolution par éléments finis avec PARSAT

La prise en compte de non-linéarités dans le modèle de comportement nécessite l'utilisation de méthodes numériques appropriées pour résoudre les équations de champ. Le logiciel PARSAT est un code de calcul aux éléments finis pour résoudre des problèmes couplés thermo-hydro-mécaniques en milieux poreux partiellement saturés dans le cas de géométrie unidimensionnelle (Giraud, 1996). Il a été construit de manière à être suffisamment général du point de vue de son architecture pour prendre en compte l'ensemble des phénomènes physiques couplés que l'on peut décrire dans le cadre de la mécanique des milieux poreux partiellement saturés et réactifs. Le principe de résolution est présenté dans l'annexe 4.

Un premier travail a consisté en l'implantation de la loi de comportement THMNL dans le logiciel PARSAT avec les matrices de couplages définies par les relations (1.88). Puis pour chaque problème étudié, il a été nécessaire d'introduire les lois spécifiques aux différents matériaux considérés.

1.2.3 - Approche linéaire : résolution semi-explicite

Les équations de champ qui gouvernent le comportement du milieu poreux sont des équations aux dérivées partielles, faisant intervenir des dérivées temporelles et des dérivées spatiales. Lorsque les termes de couplages sont des constantes (cas particulier des modèles linéaires), on peut parfois espérer résoudre analytiquement ces équations si l'état initial, les conditions aux limites, la géométrie sont très simples.

Pour illustrer cette difficulté, considérons l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{avec } k \text{ une constante} \quad (1.96)$$

On reconnaît une équation de diffusion de chaleur unidimensionnelle en géométrie cartésienne. Cette équation possède une infinité de solutions $v(x, t)$ et, dans la résolution d'un problème physique particulier, il est nécessaire de choisir parmi toutes celles-ci, la solution satisfaisant certaines conditions particulières : des conditions imposées à la frontière (conditions aux limites) et des conditions définissant l'état du milieu à l'instant $t=0$ (conditions initiales).

D'après Carslaw & Jaeger (1959), la fonction définie comme suit est une solution possible de l'équation aux dérivées partielles :

$$v(x, t) = A \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} \right) \quad (1.97)$$

Si on considère les conditions particulières suivantes :

$$\begin{cases} x, t \rightarrow 0 : v = A \\ x = 0, t : v = 0 \\ x \rightarrow \infty, t : v = A \end{cases} \quad (1.98)$$

la fonction $v(x, t)$ est bien une solution particulière, mais on se rend compte aisément qu'elle ne pourrait être utilisée de manière générale pour d'autres conditions.

En outre, si on revient dans le cadre de la mécanique des milieux poreux, Lassabatère (1994) a réussi à formuler une solution analytique au problème couplé hydro-mécanique concernant le retrait de dessiccation d'un mur de béton (géométrie cartésienne) sous la forme d'une fonction à variables séparées. Mais ceci a été rendu possible grâce aux conditions particulières de chargement appliquées et à la géométrie cartésienne, car les calculs se compliquent rapidement en géométrie cylindrique, avec l'apparition de fonctions de Bessel.

Pour palier aux complications induites par les dérivations spatiale et temporelle, on a recours à la transformation de Laplace que l'on applique à l'équation aux dérivées partielles. Grâce aux propriétés de cette transformation, la dérivation temporelle disparaît :

$$L(f(t)) = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{et} \quad L\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = sL(f) - f(t=0) \quad (1.99)$$

Dans le cas de l'équation (1.96) par exemple, l'équation aux dérivées partielles se transforme en une équation différentielle dans le domaine transformé :

$$\frac{d^2 \bar{v}(x, s)}{dx^2} = \frac{1}{k} [s\bar{v}(x, s) - v(x, t=0)] \quad (1.100)$$

Si l'état initial est une constante par rapport à x , la solution générale d'une telle équation est de la forme :

$$\bar{v}(x, s) = A(s) e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}} + B(s) e^{x\sqrt{\frac{s}{k}}} + \frac{1}{s} v(t=0) \quad (1.101)$$

avec les fonctions A et B qui sont déterminées à partir des conditions aux limites. On a ainsi obtenu une expression analytique de v dans le domaine des transformées de Laplace. Les géométries sphérique et cylindrique se traduisent par des équations différentielles différentes mais dont les solutions générales sont également bien connues.

Ensuite, comme les expressions des fonctions A et B sont souvent assez complexes, l'inversion de la transformée de Laplace ne peut généralement pas se faire de façon analytique. On doit alors recourir à une méthode numérique, ce qui explique la terminologie de méthodes semi-explicites.

1.3 - SOLUTIONS SEMI-EXPLICITES : METHODE DE RESOLUTION DE PROBLEMES COUPLES THERMO-HYDRO-MECANIQUES

1.3.1 - Importance de la méthode de linéarisation

En milieu poreux partiellement saturé, le comportement est très souvent fortement non linéaire : les non-linéarités se manifestent au niveau de la loi de comportement mais aussi par l'intermédiaire de variables dépendant les unes des autres. On peut citer à titre d'exemple les perméabilités

relatives au gaz et au liquide variant en fonction de la saturation en liquide ou encore la courbe de pression capillaire reliant la saturation en liquide et la pression capillaire.

Pour pouvoir rechercher des solutions simplifiées semi-explicites, il est nécessaire que le modèle initialement non linéaire soit linéarisé, mais la technique de linéarisation n'est pas unique. Il faut tout d'abord choisir un point de référence pour la linéarisation : toutes les valeurs non linéaires sont alors calculées en ce point et « figées » pour les calculs à venir. En outre, la courbe de pression capillaire intervient dans les coefficients de couplage par l'intermédiaire de sa pente dS_{lq}/dp_{cp} . Il faut donc lui affecter une valeur constante, ce qui revient à approcher une courbe non linéaire par une droite.

Pour illustrer cette double difficulté, considérons la courbe de pression capillaire représentée sur la figure 13 (ajustement de type Vachaud & Vauclin utilisé pour le problème de la BO, chapitre 3).

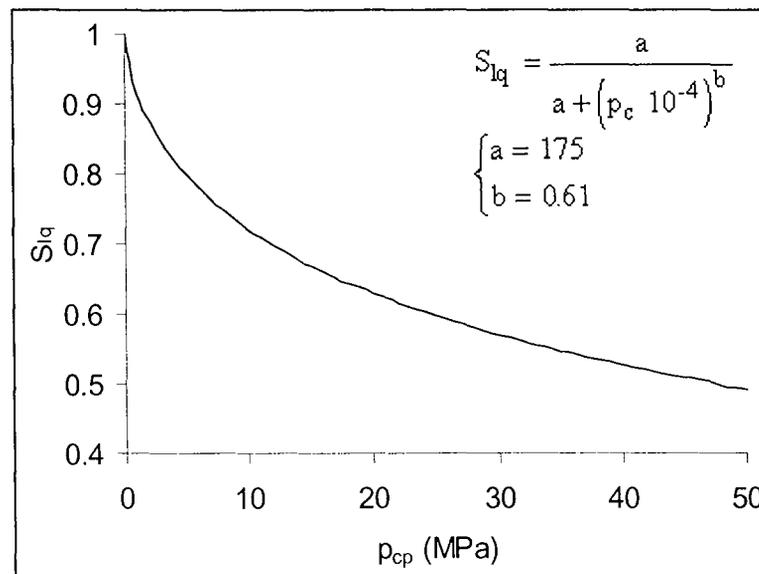


Figure 13. Courbe de pression capillaire non linéaire.

Sur cette courbe, on peut toujours placer, pour un problème particulier, au moins un point, celui qui correspond à l'état initial : $A(S_{lq}^0, p_{cp}^0)$. C'est souvent ce point qui est choisi comme point de référence. Une méthode de linéarisation consiste alors à prendre la tangente en ce point à la courbe non linéaire pour déterminer la pente de la courbe linéarisée (figure 14). C'est ce qui est fait par exemple par Lassabatère (1994) mais ceci n'est valide que pour de faibles variations autour du point de référence. Si la pression n'excède pas 10 MPa, l'ajustement linéaire est très proche de la courbe non linéaire, mais au-delà, l'écart croît rapidement et pour des pressions de l'ordre de 50 MPa, la saturation devient même négative.

Dans certains problèmes, l'état final correspond à une condition aux limites et il est donc connu, ce qui permet de placer un second point B sur la courbe de pression capillaire. En gardant toujours le point A comme référence, une autre linéarisation consiste à relier les deux points extrêmes : on approche la courbe non linéaire par la corde (AB) (figure 15).

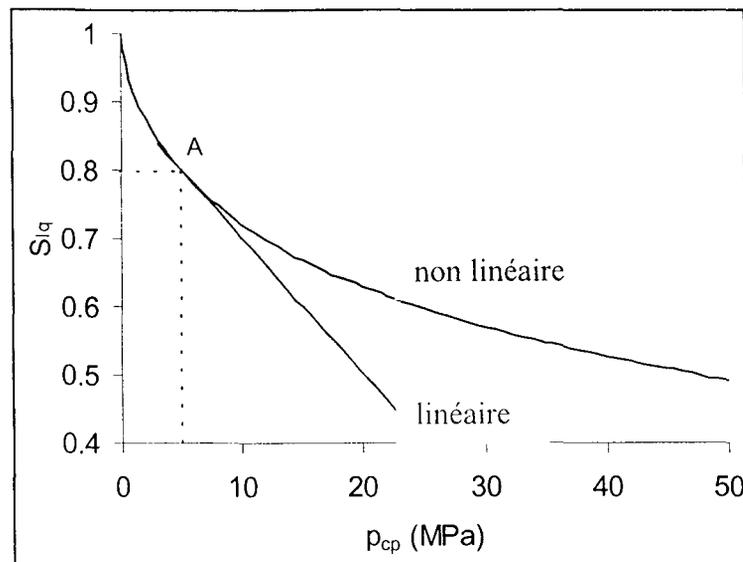


Figure 14. Linéarisation par la méthode de la tangente.

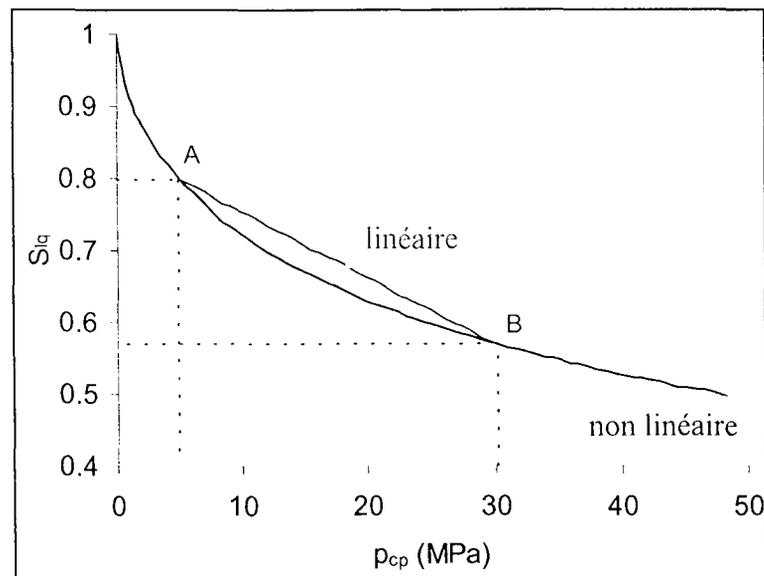


Figure 15. Linéarisation par la méthode de la corde.

Avec la méthode de la corde, pour une même variation de pression capillaire, la saturation chute moins rapidement avec le modèle linéaire quand on est proche de l'état initial et plus rapidement quand on se rapproche de l'état final. Cette méthode présente l'avantage de ne pas diverger quand la pression augmente, comme c'est le cas pour la méthode précédente mais en revanche, l'approximation est globalement plus grossière entre A et B.

On vient donc de voir deux façons différentes de procéder qui présentent toutes les deux un intérêt mais aussi des inconvénients. Suivant le problème considéré, l'une ou l'autre sera donc plus ou moins intéressante et adéquate. Pour les études qui sont présentées dans les chapitres suivants, d'autres méthodes, un peu plus complexes, ont également été testées et le choix a toujours été guidé par comparaison avec les résultats obtenus avec le modèle non linéaire.

1.3.2 - Détail de la méthode de résolution dans le cas particulier d'un modèle bicouche en géométrie cylindrique

La méthode de résolution est classique, elle a été présentée par Coussy (1995) dans le cas du milieu thermo-hydro-mécanique saturé et par Lassabatère (1994) pour le milieu non saturé en conditions isothermes. Par rapport à Coussy (1995), l'aspect non saturé fait intervenir une inconnue supplémentaire (une pression) alors que par rapport à Lassabatère (1994), l'inconnue supplémentaire introduite par les couplages thermiques est la température.

1.3.2.1 - Recherche de solutions générales dans le domaine transformé

En milieu poreux partiellement saturé, on a montré que les équations de champ à résoudre sont constituées de trois équations de diffusion couplées :

$$\begin{cases} C_{tu} \dot{\varepsilon} + C_{tl} \dot{p}_{lq} + C_{tg} \dot{p}_{gz} + C_{tt} \dot{T} = K_{tl} \nabla^2 p_{lq} + K_{tg} \nabla^2 p_{gz} + K_{tt} \nabla^2 T \\ C_{lu} \dot{\varepsilon} + C_{ll} \dot{p}_{lq} + C_{lg} \dot{p}_{gz} + C_{lt} \dot{T} = K_{ll} \nabla^2 p_{lq} + K_{lg} \nabla^2 p_{gz} + K_{lt} \nabla^2 T \\ C_{gu} \dot{\varepsilon} + C_{gl} \dot{p}_{lq} + C_{gg} \dot{p}_{gz} + C_{gt} \dot{T} = K_{gl} \nabla^2 p_{lq} + K_{gg} \nabla^2 p_{gz} + K_{gt} \nabla^2 T \end{cases} \quad (1.102)$$

et de plus, l'équation d'équilibre mécanique, combinée avec la loi de comportement, donne l'équation de Navier, reliant les quatre inconnues et qui, du fait de la géométrie unidimensionnelle des problèmes considérés, s'intègre facilement pour donner la relation suivante :

$$C_{uu} \varepsilon + C_{ul} (p_{lq} - p_{lq}^0) + C_{ug} (p_{gz} - p_{gz}^0) + C_{ut} (T - T_0) = f(t) \quad (1.103)$$

avec les coefficients de couplages de capacité C_{ij} et de conductivité K_{ij} qui sont des constantes dans une approche linéarisée.

La constante d'intégration dépendante du temps $f(t)$ intervient dans le cas général d'un milieu fini (conditions aux limites imposées à une distance finie) en géométrie cylindrique et sphérique. Dans le cas d'un milieu d'extension infinie, quelle que soit la géométrie, elle s'annule du fait des conditions imposées à l'infini. Elle peut être non nulle mais ne dépend pas du temps dans un milieu fini en géométrie cartésienne.

En combinant l'équation de Navier intégrée avec les trois équations de diffusion de manière à faire disparaître la déformation volumique, on obtient un système couplé de trois équations reliant les trois inconnues (température et pressions partielles de liquide et de mélange) que l'on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1^l & a_1^g & a_1^t \\ a_2^l & a_2^g & a_2^t \\ a_3^l & a_3^g & a_3^t \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p_{lq} \\ p_{gz} \\ T \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1^l & b_1^g & b_1^t \\ b_2^l & b_2^g & b_2^t \\ b_3^l & b_3^g & b_3^t \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \nabla^2 \begin{bmatrix} p_{lq} \\ p_{gz} \\ T \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_1^a \\ a_2^a \\ a_3^a \end{bmatrix}}_{\tilde{X}} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.104)$$

$$\text{ou encore} \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p_{lq} \\ p_{gz} \\ T \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1^1 & C_1^2 & C_1^3 \\ C_2^1 & C_2^2 & C_2^3 \\ C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \end{bmatrix}}_{\tilde{C} = \tilde{A}^{-1}\tilde{B}} \nabla^2 \begin{bmatrix} p_{lq} \\ p_{gz} \\ T \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} X_{lq} \\ X_{gz} \\ X_t \end{bmatrix}}_{\tilde{A}^{-1}\tilde{X}} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.105)$$

L'étape suivante correspond au passage dans le domaine des transformées de Laplace, avec l'application de la transformation au système couplé :

$$\begin{bmatrix} \overline{p_{lq}} \\ \overline{p_{gz}} \\ \overline{T} \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \tilde{C} \nabla^2 \begin{bmatrix} \overline{p_{lq}} \\ \overline{p_{gz}} \\ \overline{T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{lq} \\ X_{gz} \\ X_t \end{bmatrix} \overline{f} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} p_{lq}^{o+} - X_{lq} f^{o+} \\ p_{gz}^{o+} - X_{gz} f^{o+} \\ T^{o+} - X_t f^{o+} \end{bmatrix} \quad (1.106)$$

L'indice o+ fait référence à l'état instantané : en effet, si on applique un chargement mécanique instantané, le matériau réagit instantanément avec une réponse de type élastique non drainée. On remplace alors les valeurs des différentes variables à l'état initial par les valeurs correspondantes pour l'état instantané (la réponse instantanée est détaillée dans l'annexe 3).

On procède alors à un changement de variable qui fait disparaître la constante d'intégration (comme elle n'est fonction que du temps, $\nabla^2 f = 0$) :

$$\begin{cases} p_i' = p_i - \frac{p_i^{o+}}{s} - X_i \left(f - \frac{f^{o+}}{s} \right), \quad i = lq, gz \\ T' = T - T^{o+} - X_t \left(f - \frac{f^{o+}}{s} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{p_{lq}'} \\ \overline{p_{gz}'} \\ \overline{T'} \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \tilde{C} \nabla^2 \begin{bmatrix} \overline{p_{lq}'} \\ \overline{p_{gz}'} \\ \overline{T'} \end{bmatrix} \quad (1.107)$$

La matrice de diffusion est diagonalisable, à valeurs propres C_i réelles positives et vecteurs propres associés (V_i^1, V_i^2, V_i^3). On notera que les matrices de capacité et de conductivité ne sont pas supposées symétriques (elles ne le sont d'ailleurs pas pour les problèmes étudiés dans ce mémoire). Les seules restrictions mathématiques intervenant dans le choix des composantes de ces matrices sont d'origine thermodynamique : les formes quadratiques associées respectivement aux matrices de capacité, de conductivité et au produit $\tilde{C} = \tilde{A}^{-1}\tilde{B}$ doivent être définies positives (valeurs propres réelles positives). L'analyse de cohérence thermodynamique est effectuée au niveau de l'élaboration du jeu de données : les valeurs propres sont calculées et la condition de positivité vérifiée.

On montre alors que les solutions générales du problème s'expriment dans le domaine transformé sous la forme explicite de combinaisons linéaires de fonctions propres :

$$\begin{bmatrix} \overline{p_{lq}'} \\ \overline{p_{gz}'} \\ \overline{T'} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_1^1 & V_2^1 & V_3^1 \\ V_1^2 & V_2^2 & V_3^2 \\ V_1^3 & V_2^3 & V_3^3 \end{bmatrix}}_{\tilde{P}} \begin{bmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \overline{v_3} \end{bmatrix} \quad (1.108)$$

$$\text{avec } \bar{v}_i = \begin{cases} A_i \exp(-\omega_i x) + B_i \exp(\omega_i x) & \text{géométrie cartésienne} \\ A_i I_0(\omega_i r) + B_i K_0(\omega_i r) & \text{géométrie cylindrique} \\ \frac{A_i}{r} \exp(-\omega_i r) + \frac{B_i}{r} \exp(\omega_i r) & \text{géométrie sphérique} \end{cases}, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{s}{C_i}} \quad (1.109)$$

Les fonctions \bar{v}_i sont appelées les fonctions propres associées à chaque valeur propre C_i et \tilde{P} est la matrice de passage qui relie les variables aux fonctions propres, la i -ème colonne de la matrice \tilde{P} étant composée des trois composantes du vecteur propre associé à la i -ème valeur propre.

1.3.2.2 - Recherche de solutions particulières à partir des conditions aux limites et de continuité

Dans chaque problème étudié, il faudra donc déterminer six fonctions de s (A_i et B_i) et la constante d'intégration \bar{f} , soit sept constantes, et pour chaque couche si le matériau est multicouche. On se sert alors des conditions aux limites et éventuellement des conditions de continuité, en ayant recours au logiciel de calcul formel Mathematica[®] pour trouver des expressions analytiques. Pour montrer à quel point le calcul formel est un outil indispensable à ce moment précis de la méthode de résolution, le détail des calculs est présenté pour un problème hydro-mécanique (comme le problème est isotherme, la matrice de diffusion est de dimension 2 et il n'y a que deux valeurs propres) avec un matériau bicouche, creux et d'extension finie avec des conditions initiales discontinues, des conditions aux limites complexes (flux hydriques nuls sur la paroi interne, température et pressions imposées sur la limite externe), chargement mécanique instantané sur la paroi interne. La géométrie et les conditions aux limites sont présentées sur la figure 16.

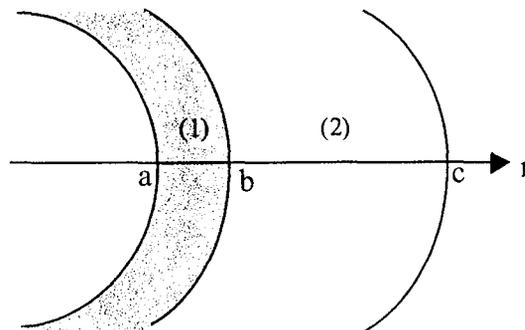


Figure 16. Géométrie.

- conditions initiales :

$$\begin{aligned} p_{lq}^{(1)} &= p_{lq}^{o(1)}, p_{gz}^{(1)} = p_{gz}^{o(1)}, u^{(1)} = 0 \\ p_{lq}^{(2)} &= p_{lq}^{o(2)}, p_{gz}^{(2)} = p_{gz}^{o(2)}, u^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (1.110)$$

- conditions aux limites :

$$r = a : \frac{\partial p_{lq}}{\partial r} = 0, \frac{\partial p_{gz}}{\partial r} = 0, \sigma_{rr} = -\bar{\omega} \quad r = c : p_{lq} = p_{lq}^e, p_{gz} = p_{gz}^e, u = 0 \quad (1.111)$$

- conditions de continuité :

$$r = b : \begin{cases} p_{lq}^{(1)} = p_{lq}^{(2)}, p_{gz}^{(1)} = p_{gz}^{(2)} \\ \underline{M}_{lq+vp}^{(1)} = \underline{M}_{lq+vp}^{(2)}, \underline{M}_{as}^{(1)} = \underline{M}_{as}^{(2)} \end{cases} \quad \begin{cases} u^{(1)} = u^{(2)} \\ \sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)} \end{cases} \quad (1.112)$$

Pour chaque matériau (i), les expressions explicites des deux pressions de liquide et de mélange gazeux sont de la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} p_{lq}^{-(i)} &= \frac{p_{lq}^{o+(i)}}{s} + X_{lq} \left(\bar{f}^{(i)} - \frac{f^{(i)o+}}{s} \right) \\ &\quad + V_1^{l(i)} A_1^{(i)} K_0(\omega_1^{(i)} r) + V_1^{l(i)} B_1^{(i)} I_0(\omega_1^{(i)} r) + V_2^{l(i)} A_2^{(i)} K_0(\omega_2^{(i)} r) + V_2^{l(i)} B_2^{(i)} I_0(\omega_2^{(i)} r) \\ p_{gz}^{-(i)} &= \frac{p_{gz}^{o+(i)}}{s} + X_{gz} \left(\bar{f}^{(i)} - \frac{f^{(i)o+}}{s} \right) \\ &\quad + V_1^{2(i)} A_1^{(i)} K_0(\omega_1^{(i)} r) + V_1^{2(i)} B_1^{(i)} I_0(\omega_1^{(i)} r) + V_2^{2(i)} A_2^{(i)} K_0(\omega_2^{(i)} r) + V_2^{2(i)} B_2^{(i)} I_0(\omega_2^{(i)} r) \end{aligned} \right. \quad (1.113)$$

Dans ce problème particulier, on doit déterminer cinq inconnues pour chacun des deux matériaux, soit dix inconnues. Il faut donc établir dix relations reliant ces inconnues.

- conditions aux limites hydrauliques en $r = a$ (deux équations) :

$$\left\{ \begin{aligned} -\omega_1^{(1)} V_1^{l(1)} A_1^{(1)} K_1(\omega_1^{(1)} a) + \omega_1^{(1)} V_1^{l(1)} B_1^{(1)} I_1(\omega_1^{(1)} a) - \omega_2^{(1)} V_2^{l(1)} A_2^{(1)} K_1(\omega_2^{(1)} a) + \omega_2^{(1)} V_2^{l(1)} B_2^{(1)} I_1(\omega_2^{(1)} a) &= 0 \quad (I) \\ -\omega_1^{(1)} V_1^{2(1)} A_1^{(1)} K_1(\omega_1^{(1)} a) + \omega_1^{(1)} V_1^{2(1)} B_1^{(1)} I_1(\omega_1^{(1)} a) - \omega_2^{(1)} V_2^{2(1)} A_2^{(1)} K_1(\omega_2^{(1)} a) + \omega_2^{(1)} V_2^{2(1)} B_2^{(1)} I_1(\omega_2^{(1)} a) &= 0 \quad (II) \end{aligned} \right.$$

- conditions aux limites hydrauliques en $r = c$ (deux équations) :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p_{lq}^e - p_{lq}^{o+(2)}}{s} &= X_{lq} \left(\bar{f}^{(2)} - \frac{f^{(2)o+}}{s} \right) \\ &\quad + V_1^{l(2)} A_1^{(2)} K_0(\omega_1^{(2)} c) + V_1^{l(2)} B_1^{(2)} I_0(\omega_1^{(2)} c) + V_2^{l(2)} A_2^{(2)} K_0(\omega_2^{(2)} c) + V_2^{l(2)} B_2^{(2)} I_0(\omega_2^{(2)} c) \quad (III) \\ \frac{p_{gz}^e - p_{gz}^{o+(2)}}{s} &= X_{gz} \left(\bar{f}^{(2)} - \frac{f^{(2)o+}}{s} \right) \\ &\quad + V_1^{2(2)} A_1^{(2)} K_0(\omega_1^{(2)} c) + V_1^{2(2)} B_1^{(2)} I_0(\omega_1^{(2)} c) + V_2^{2(2)} A_2^{(2)} K_0(\omega_2^{(2)} c) + V_2^{2(2)} B_2^{(2)} I_0(\omega_2^{(2)} c) \quad (IV) \end{aligned} \right.$$

- conditions de continuité hydrauliques en $r = b$ (deux équations) :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1^{1(1)} A_1^{(1)} K_0(\omega_1^{(1)} b) + V_1^{1(1)} B_1^{(1)} I_0(\omega_1^{(1)} b) + V_2^{1(1)} A_2^{(1)} K_0(\omega_2^{(1)} r) + V_2^{1(1)} B_2^{(1)} I_0(\omega_2^{(1)} b) \\ + \frac{p_{lq}^{o+(1)}}{s} + X_{lq} \left(\bar{f}^{(1)} - \frac{f^{(1)o+}}{s} \right) = \frac{p_{lq}^{o+(2)}}{s} + X_{lq} \left(\bar{f}^{(2)} - \frac{f^{(2)o+}}{s} \right) \\ + V_1^{1(2)} A_1^{(2)} K_0(\omega_1^{(2)} b) + V_1^{1(2)} B_1^{(2)} I_0(\omega_1^{(2)} b) + V_2^{1(2)} A_2^{(2)} K_0(\omega_2^{(2)} r) + V_2^{1(2)} B_2^{(2)} I_0(\omega_2^{(2)} b) \quad (V) \\ V_1^{2(1)} A_1^{(1)} K_0(\omega_1^{(1)} b) + V_1^{2(1)} B_1^{(1)} I_0(\omega_1^{(1)} b) + V_2^{2(1)} A_2^{(1)} K_0(\omega_2^{(1)} r) + V_2^{2(1)} B_2^{(1)} I_0(\omega_2^{(1)} b) \\ + \frac{p_{gz}^{o+(1)}}{s} + X_{gz} \left(\bar{f}^{(1)} - \frac{f^{(1)o+}}{s} \right) = \frac{p_{gz}^{o+(2)}}{s} + X_{gz} \left(\bar{f}^{(2)} - \frac{f^{(2)o+}}{s} \right) \\ + V_1^{2(2)} A_1^{(2)} K_0(\omega_1^{(2)} b) + V_1^{2(2)} B_1^{(2)} I_0(\omega_1^{(2)} b) + V_2^{2(2)} A_2^{(2)} K_0(\omega_2^{(2)} r) + V_2^{2(2)} B_2^{(2)} I_0(\omega_2^{(2)} b) \quad (VI) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{lg}^{(1)} \frac{\partial}{\partial r} p_{gz}^{-(1)} + K_{ll}^{(1)} \frac{\partial}{\partial r} p_{lq}^{-(1)} = K_{lg}^{(2)} \frac{\partial}{\partial r} p_{gz}^{-(2)} + K_{ll}^{(2)} \frac{\partial}{\partial r} p_{lq}^{-(2)} \quad (VII) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{gg}^{(1)} \frac{\partial}{\partial r} p_{gz}^{-(1)} + K_{gl}^{(1)} \frac{\partial}{\partial r} p_{lq}^{-(1)} = K_{gg}^{(2)} \frac{\partial}{\partial r} p_{gz}^{-(2)} + K_{gl}^{(2)} \frac{\partial}{\partial r} p_{lq}^{-(2)} \quad (VIII) \end{array} \right.$$

- conditions de continuité mécanique en $r = b$ (deux équations) :

En géométrie cylindrique, la loi de comportement donne une relation entre la contrainte radiale et le déplacement :

$$\sigma_{rr}^{(i)} = -2\mu^{(i)} \frac{u^{(i)}}{r} + \bar{f}^{(i)}, \quad (1.114)$$

d'où l'on tire :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(1)}(b) = u^{(2)}(b) = \frac{b(\bar{f}^{(1)} - \bar{f}^{(2)})}{2(\mu^{(1)} - \mu^{(2)})} \quad \text{si } \mu^{(1)} \neq \mu^{(2)} \\ f^{(1)} = f^{(2)} \quad \text{si } \mu^{(1)} = \mu^{(2)} \end{array} \right. \quad (1.115)$$

De plus, on peut relier le déplacement aux inconnues du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru^{(i)}) \\ (\lambda_o^{(i)} + 2\mu^{(i)}) \bar{\varepsilon}^{(i)} = b_{lq}^{(i)} (p_{lq}^{(i)} - p_{lq}^{o+(i)}) + b_{gz}^{(i)} (p_{gz}^{(i)} - p_{gz}^{o+(i)}) + \bar{f}^{(i)} \end{array} \right. \quad (1.116)$$

Pour le matériau (1), on intègre de a à b :

$$\begin{aligned} bu^{-(1)}(b) - au^{-(1)}(a) &= \frac{(b_{lq}^{(1)}X_{lq}^{(1)} + b_{gz}^{(1)}X_{gz}^{(1)} + 1)(b^2 - a^2)}{2(\lambda_o^{(1)} + 2\mu^{(1)})} \left(\bar{f}^{(1)} - \frac{f^{o+(1)}}{s} \right) + \\ &\frac{b_{lq}^{(1)}V_1^{(1)} + b_{gz}^{(1)}V_1^{(2)}}{\omega_1^{(1)}(\lambda_o^{(1)} + 2\mu^{(1)})} \left\{ [aK_1(\omega_1^{(1)}a) - bK_1(\omega_1^{(1)}b)]A_1^{(1)} + [bI_1(\omega_1^{(1)}b) - aI_1(\omega_1^{(1)}a)]B_1^{(1)} \right\} + \\ &\frac{b_{lq}^{(1)}V_2^{(1)} + b_{gz}^{(1)}V_2^{(2)}}{\omega_2^{(1)}(\lambda_o^{(1)} + 2\mu^{(1)})} \left\{ [aK_1(\omega_2^{(1)}a) - bK_1(\omega_2^{(1)}b)]A_2^{(1)} + [bI_1(\omega_2^{(1)}b) - aI_1(\omega_2^{(1)}a)]B_2^{(1)} \right\} \quad (IX) \end{aligned}$$

$$\text{avec } u^{-(1)}(a) = \frac{(\bar{f}^{(1)} + \varpi)a}{2\mu^{(1)}}$$

Pour le matériau (2), on intègre de b à c :

$$\begin{aligned} cu^{-(2)}(c) - bu^{-(2)}(b) &= \frac{(b_{lq}^{(2)}X_{lq}^{(2)} + b_{gz}^{(2)}X_{gz}^{(2)} + 1)(c^2 - b^2)}{2(\lambda_o^{(2)} + 2\mu^{(2)})} \left(\bar{f}^{(2)} - \frac{f^{o+(2)}}{s} \right) + \\ &\frac{b_{lq}^{(2)}V_1^{(2)} + b_{gz}^{(2)}V_1^{(2)}}{\omega_1^{(2)}(\lambda_o^{(2)} + 2\mu^{(2)})} \left\{ [bK_1(\omega_1^{(2)}b) - cK_1(\omega_1^{(2)}c)]A_1^{(2)} + [cI_1(\omega_1^{(2)}c) - bI_1(\omega_1^{(2)}b)]B_1^{(2)} \right\} + \\ &\frac{b_{lq}^{(2)}V_2^{(2)} + b_{gz}^{(2)}V_2^{(2)}}{\omega_2^{(2)}(\lambda_o^{(2)} + 2\mu^{(2)})} \left\{ [bK_1(\omega_2^{(2)}b) - cK_1(\omega_2^{(2)}c)]A_2^{(2)} + [cI_1(\omega_2^{(2)}c) - bI_1(\omega_2^{(2)}b)]B_2^{(2)} \right\} \quad (X) \end{aligned}$$

Pour trouver les expressions explicites des dix fonctions de s, il faut résoudre un système de dix équations à dix inconnues, ce qui est de toute évidence impossible à réaliser sans un logiciel de calcul formel. Une fois que les différentes fonctions sont déterminées, on dispose d'une expression explicite des inconnues du problème dans le domaine des transformées.

1.3.3 - Inversion numérique des solutions transformées

La dernière étape consiste alors à revenir dans le domaine du temps, et faire le passage inverse de la variable s vers la variable t. Pour cela, on dispose d'un théorème d'inversion (Carslaw & Jaeger, 1959) :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \bar{f}(s) ds \quad (1.117)$$

avec c suffisamment grand de manière à ce que toutes les singularités de $\bar{f}(s)$ se situent dans le demi-plan complexe délimité par $(c-i\infty, c+i\infty)$: ce domaine d'intégration est appelé contour de

Bromwich. Comme ces singularités sont un nombre fini de pôles et de points de branchement, ou éventuellement un nombre infini de pôles localisés sur l'axe réel, il est possible de considérer un nouveau contour d'intégration et on distingue deux cas :

- si $\bar{f}(s)$ est une fonction ayant une série de pôles le long de l'axe réel, on complète le contour AB par un demi-cercle Γ de rayon R qui englobe toutes les singularités, comme le montre la figure 17a.
- si $\bar{f}(s)$ possède un point de branchement en $s = 0$, on modifie le contour de manière à ce qu'il n'englobe pas ce point (figure 17b).

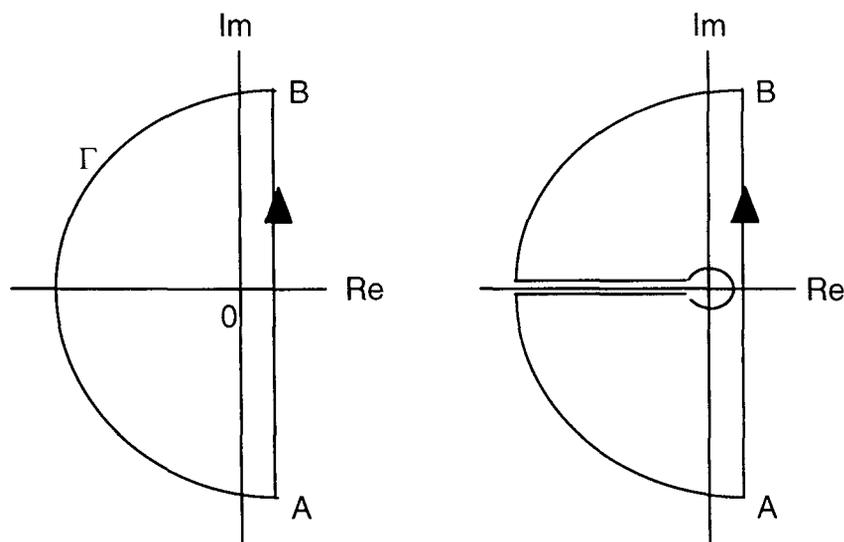


Figure 17 (a et b). Contours d'intégration dans le plan complexe.

L'intégration le long de ce contour est relativement difficile du fait des oscillations de e^{st} quand $\text{Im}(s) \rightarrow \infty$. Et en règle générale, on est incapable de réaliser l'inversion analytique des solutions transformées du fait de leur expression complexe. Par conséquent, on utilise des méthodes numériques approchées. De nombreux auteurs ont cherché à contourner ce problème, soit en modifiant le contour, soit en transformant l'intégrale dans le domaine complexe en une somme discrète de série dans le domaine réel. Une synthèse de quelques unes de ces méthodes est présentée en annexe 1.

1.3.4 - Intérêt de ces solutions

1.3.4.1 - Validation de codes de calculs

Les méthodes analytiques présentent un avantage essentiel par rapport à des approches numériques dans le sens où elles donnent des résultats exacts. Il n'y a donc pas à craindre une éventuelle erreur liée à des processus numériques que sont les discrétisations temporelle et spatiale pour des calculs avec un code utilisant la méthode des éléments finis. On comprend donc aisément que les calculs analytiques servent de validation aux calculs numériques, mais bien évidemment les premiers ne permettent pas d'appréhender des problèmes complexes et leur utilisation est limitée.

Dans le cas des calculs semi-explicites, la seule part d'incertitude provient de l'inversion numérique des transformées de Laplace puisque tous les calculs qui précèdent cette étape sont de nature explicite. Une fois que cette inversion est maîtrisée et validée, les méthodes semi-explicites peuvent alors prétendre valider des calculs numériques. Et ceci présente un réel intérêt car la gamme de problèmes accessibles par ces méthodes est nettement plus étendue que celles des solutions explicites (ce principe de validation est présenté dans ⁵²Giraud et al., 1999).

1.3.4.2 - Etudes de sensibilité

D'une manière générale, un problème couplé thermo-hydro-mécanique dépend d'un grand nombre de facteurs tels que la géométrie, les caractéristiques physiques du ou des matériaux, les conditions aux limites, ... La détermination expérimentale des paramètres du modèle n'est pas toujours facile à mettre en œuvre et il existe toujours une incertitude plus ou moins grande sur leur mesure. Il peut donc s'avérer très intéressant de réaliser une étude de sensibilité de ces nombreux paramètres sur le comportement du milieu poreux pour pouvoir déterminer ceux qui jouent un rôle prépondérant. Ainsi, en retour, un effort expérimental plus important pourra être fourni pour affiner la valeur de quelques paramètres particuliers, alors qu'une valeur moyenne suffira pour les autres variables. Les méthodes semi-explicites, du fait de leur rapidité de calcul, semblent tout à fait appropriées pour de telles études de sensibilité nécessitant de multiples itérations.

Nous avons choisi de réaliser ces études de sensibilité d'une manière originale en ayant recours à des méthodes probabilistes. Une approche similaire a été présentée par Hornet et al. (1998) pour l'étude du comportement d'une cuve sous pression lors d'un accident grave. En fait, un événement quelconque peut être décrit par une relation de la forme :

$$\ll G(X) > 0 \gg$$

avec X un vecteur des paramètres physiques X_i et $G(X)$ la fonction d'état limite (par exemple, « $S_{1q} > \text{seuil}$ » ou « $\sigma_{\theta\theta} < \text{résistance à la traction}$ »).

A partir de cette fonction et de la distribution statistique des paramètres X_i , la théorie probabiliste permet d'évaluer (grâce à différentes méthodes numériques) la probabilité d'occurrence de l'événement ainsi que les facteurs d'importance de chacun des paramètres. Ces facteurs d'importance traduisent l'importance relative de la variation de chacun des paramètres sur la probabilité de l'événement étudié. En d'autres termes, si le facteur d'importance associé au paramètre X_i est faible, l'utilisation de la valeur moyenne de X_i n'entraînera pas de variation significative de la probabilité de l'événement.

Il est tout d'abord nécessaire de définir l'événement que l'on veut étudier. Cela peut être par exemple une variable (pression, température, ...) supérieure à une valeur seuil. Ceci détermine la fonction d'état limite qui correspond au modèle déterministe. Puis on définit les domaines de variation de chacun des paramètres à partir des données expérimentales ou de connaissances bibliographiques. L'ensemble des résultats et conclusions sont bien évidemment fortement liés aux intervalles choisis.

On peut alors réaliser un premier calcul probabiliste en modélisant simultanément chaque paramètre par une distribution uniforme. Ceci permet de déterminer les facteurs d'importance associés à chaque paramètre. Partant du principe que la variation d'un paramètre à fort facteur

d'importance dans son intervalle de définition influence sensiblement la probabilité de l'événement, on peut donc aisément en déduire que l'étude de sensibilité doit être menée avec les paramètres dont les facteurs d'importance sont les plus élevés.

On considère alors les deux paramètres à plus fort facteur d'importance, notés paramètres 1 et 2. On réalise alors une série de calculs probabilistes en fixant un des deux paramètres les plus importants à une valeur déterministe et en faisant varier les autres selon une distribution uniforme. Si la probabilité de l'événement est nulle, lorsque le paramètre 1 a une valeur déterministe, l'événement ne se produira jamais quelle que soit la valeur des autres paramètres du modèle, et à l'inverse, il aura toujours lieu si la probabilité vaut 1.

A partir de ces considérations, on peut découper le domaine d'étude en différentes régions dans le plan des deux variables les plus importantes (figure 18).

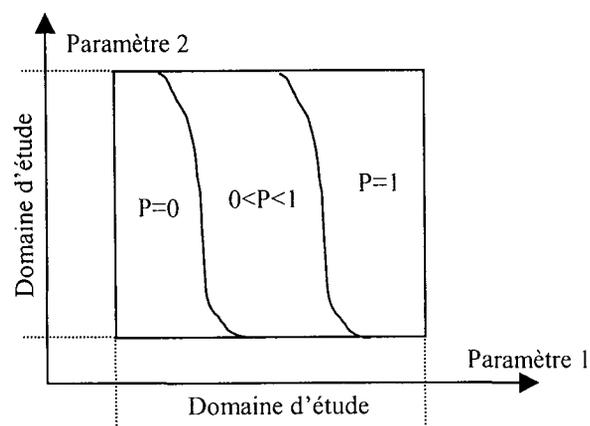


Figure 18. Décomposition du domaine d'étude grâce aux méthodes probabilistes.

Pour une valeur fixée des paramètres 1 et 2, si on se trouve dans la zone « $P=0$ », l'événement n'aura jamais lieu, et dans la zone « $P=1$ », il aura toujours lieu quelle que soit la valeur des autres paramètres dans l'intervalle d'étude. Dans la zone intermédiaire, l'occurrence de l'événement dépend de la valeur des autres paramètres.

Lorsque l'on réalise une étude de sensibilité par une approche déterministe, on fixe tous les paramètres sauf un que l'on fait varier. Une telle approche peut être problématique quand on doit étudier un grand nombre de paramètres, car il n'y a alors pas de notion de facteur d'importance et chaque paramètre a le même poids. De plus, une telle approche est discontinue et ne permet pas de prendre en compte une éventuelle dépendance d'un paramètre avec un autre.

Chapitre

2

Méthodes d'inversion numérique de la transformation de Laplace

« Nous ne savons rien. Le seul espoir de savoir, c'est de savoir tous ensemble, c'est de fondre toutes les classes dans le savoir et la science. »

Lev Nikolaïevitch Tolstoï (1828-1910)

2.1 – LES METHODES D'INVERSION RETENUES : DESCRIPTION ET MISE EN ŒUVRE

La bibliographie propose un éventail assez diversifié de méthodes d'inversion numériques des transformées de Laplace (annexe 1). Les plus simples de ces méthodes procèdent à un échantillonnage de la fonction qui conduit à des solutions très simples et très rapides à mettre en œuvre : parmi celles-ci, nous avons retenu la méthode de Stehfest (1970) qui est citée par de nombreux auteurs. Mais sa simplicité limite son utilisation et ne permet pas de contrôler la précision des calculs. Lorsque ces méthodes sont plus proches de l'inversion analytique, le degré de complexité augmente, ce qui est le cas de la méthode de Talbot modifiée par Piessens et al. (1983). Celle-ci nécessite de travailler dans le domaine complexe et de séparer parties réelle et imaginaire de la fonction à inverser. Les contraintes d'utilisation sont donc plus grandes mais, en contrepartie, les remarques sur la méthode de Stehfest (1970) concernant les restrictions d'utilisation et l'absence de contrôle de la précision ne s'appliquent pas à la méthode de Piessens et al. (1983).

2.1.1 - Méthode de Stehfest (1970)

Cette méthode, développée par Stehfest (1970), est très simple puisqu'elle permet de calculer directement la fonction f à partir de \bar{f} grâce aux premiers termes d'une série :

$$f(t) \approx \frac{\ln 2}{t} \sum_{n=1}^N C_n \bar{f}\left(\frac{n \ln 2}{t}\right) \quad (2.1)$$

$$\text{avec } \begin{cases} C_n = (-1)^{n+N/2} \sum_{k=E((n+1)/2)}^{\min(n, N/2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{(N/2 - k)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!} \\ N \text{ pair} \end{cases} \quad (2.2)$$

Le seul paramètre intervenant dans cette méthode est N . Par exemple, si on considère la fonction f définie ci-dessous :

$$f(t) = \frac{t^3}{6} \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{s^4} \quad (2.3)$$

l'erreur relative lors de l'inversion évolue en fonction de N suivant une loi pseudo-parabolique, qui est représentée sur la figure 19.

L'extremum pour cette fonction s'obtient pour $N \approx 18-20$. Mais a priori, il n'y a aucune raison que le nombre N optimal soit le même pour toutes les fonctions à inverser et il est donc nécessaire de tester différentes fonctions pour essayer d'en tirer une loi générale. Vingt fonctions, présentées en annexe 2, pour lesquelles l'inversion analytique est connue, ont ainsi été inversées. Les résultats sont montrés schématiquement sur la figure 20.

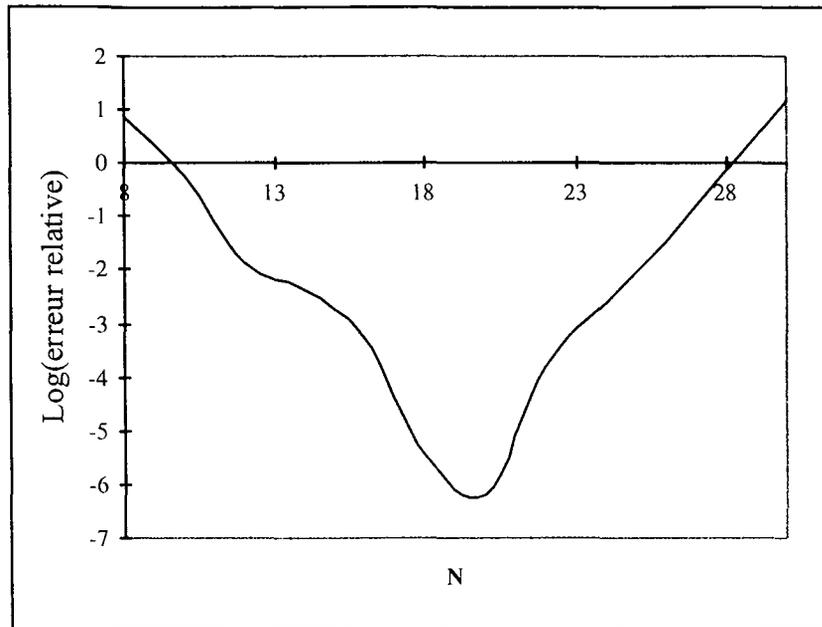


Figure 19. Erreur relative en fonction du paramètre N.

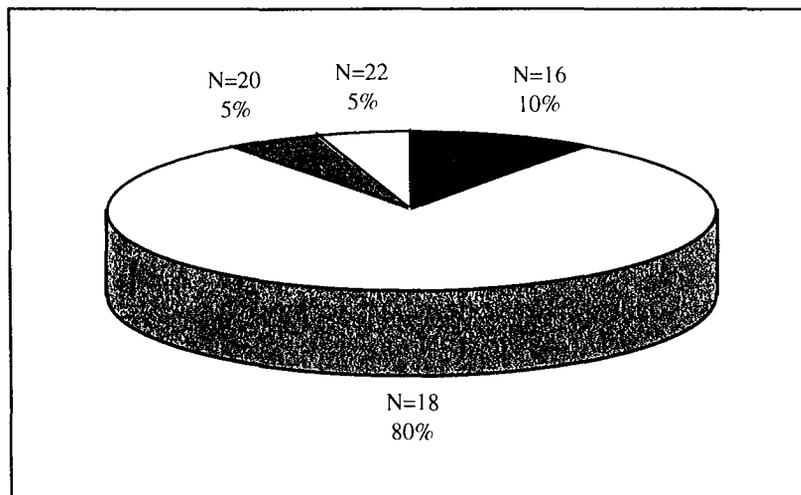


Figure 20. Valeurs de N optimales pour différentes fonctions.

Globalement, on peut donc en conclure que N peut être considéré comme constant sachant que dans les quelques cas défavorables, l'erreur commise en prenant N=18 au lieu de 16 ou 20 est relativement faible.

2.1.2 - Méthode de Talbot modifiée par Piessens et al. (1983)

La méthode développée par Talbot (1979) consiste en un changement du contour d'intégration dans le plan complexe : le contour de Bromwich est remplacé par un contour équivalent L (figure 21) qui est tel que :

- L englobe toutes les singularités de F
- $|F(s)| \rightarrow 0$ uniformément dans $\text{Re}(s) < \gamma_0$ quand $|s| \rightarrow \infty$.

La fonction f est alors déterminée par

$$f(t) = \frac{\lambda}{2\pi i} \int_L e^{(\lambda p + \sigma)t} \Phi(s) ds \quad (2.4)$$

avec $\Phi(s) = F(\lambda s + \sigma)$, λ et σ étant choisis de telle manière que le contour L , défini comme suit, englobe toutes les singularités de F .

$$L = \{s \in \mathbb{C} / s = \theta \cot \theta + i\theta, -\pi < \theta < \pi\} \quad (2.5)$$

On peut encore réécrire $f(t)$ sous la forme suivante :

$$f(t) = \frac{\lambda e^{\sigma t}}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda s t} \Phi(s) \frac{ds}{d\theta} d\theta \quad (2.6)$$

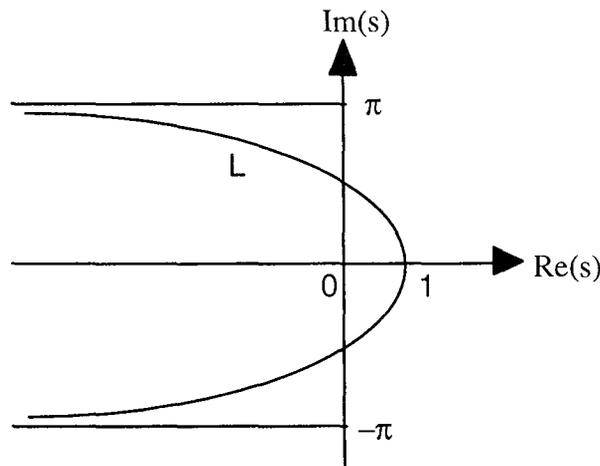


Figure 21. Contour d'intégration proposé par Talbot.

Une bonne convergence de cette intégrale est assurée par le fait que l'intégrande et toutes ses dérivées s'annulent aux bornes $\pm\pi$.

Une modification est apportée à cette méthode par Piessens et al. (1983) : ces auteurs choisissent en effet un autre contour noté R (figure 22). Ce contour est défini par :

$$R = \{s \in \mathbb{C} / s = \alpha + iy, -\beta < y < \beta\} \quad (2.7)$$

avec α et β choisis de telle sorte que R englobe toutes les singularités de F .

En posant $G(s) = \text{Re}(F(s))$ et $H(s) = \text{Im}(F(s))$, Piessens et al. (1983) montrent que l'intégrale le long du contour R devient :

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \left(e^{\alpha t} (I_1 - I_2) - \frac{I_3}{t} \right) \quad (2.8)$$

$$\text{avec } \begin{cases} I_1 = \int_0^{\beta} G(\alpha + iy) \cos(ty) dy \\ I_2 = \int_0^{\beta} H(\alpha + iy) \sin(ty) dy \\ I_3 = \int_{-\infty}^{\alpha t} e^u (G(u/t + i\beta) \sin(\beta t) + H(u/t + i\beta) \cos(\beta t)) du \end{cases} \quad (2.9)$$

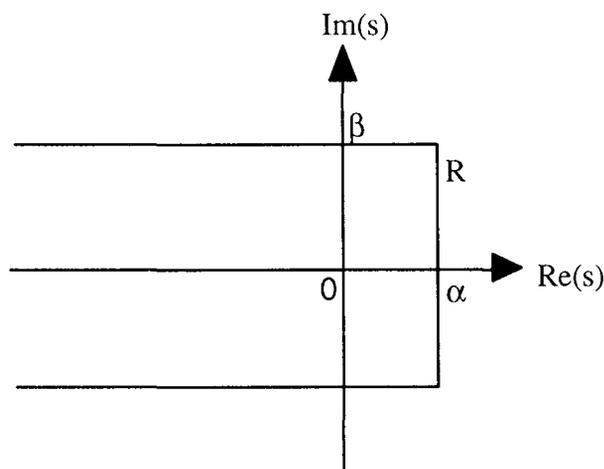


Figure 22. Contour d'intégration proposé par Piessens et al. (1983).

Dans cette variante de la méthode de Talbot proposée par Piessens et al. (1983), les seuls paramètres sont α et β . Comme α et βt sont deux bornes d'intégration, il est préférable de choisir les deux paramètres petits, surtout pour des t grands, mais d'un autre côté, le processus d'intégration risque d'être perturbé par l'influence des singularités qui se trouveraient près du contour R . Ainsi Piessens propose le compromis suivant :

$$\begin{cases} \alpha = a + \frac{c_1}{t} \\ \beta = b + \frac{c_2}{t} \end{cases} \quad (2.10)$$

avec a et b choisis de manière à englober les singularités de F , et c_1 et c_2 deux paramètres dépendants de la fonction.

Par conséquent, la mise en œuvre de cette méthode nécessite la séparation des parties réelle et imaginaire de la fonction à inverser, ainsi que l'étude des singularités de cette fonction pour déterminer les paramètres appropriés.

Les différentes fonctions testées par cette méthode, ainsi que les valeurs des paramètres correspondants, sont présentées en annexe 2.

Pour le calcul numérique des intégrales I_1 , I_2 et I_3 , on utilise la méthode de Gauss-Legendre (Press & al., 1992 p147) qui se définit comme suit :

$$I = \int_{\text{début}}^{\text{fin}} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\text{NGL}} \omega_n f(x_n) \quad (2.11)$$

où ω_n et x_n sont respectivement les poids et abscisses des points de Gauss-Legendre, et NGL le nombre de points de Gauss. Pour un NGL fixé correspondent des ω_n et x_n particuliers : plus NGL est grand, plus la précision du calcul est grande, mais plus le temps de calcul est important. Pour palier à ce problème, on a choisi un NGL petit (=10) associé au processus de raffinement présenté sur la figure 23.

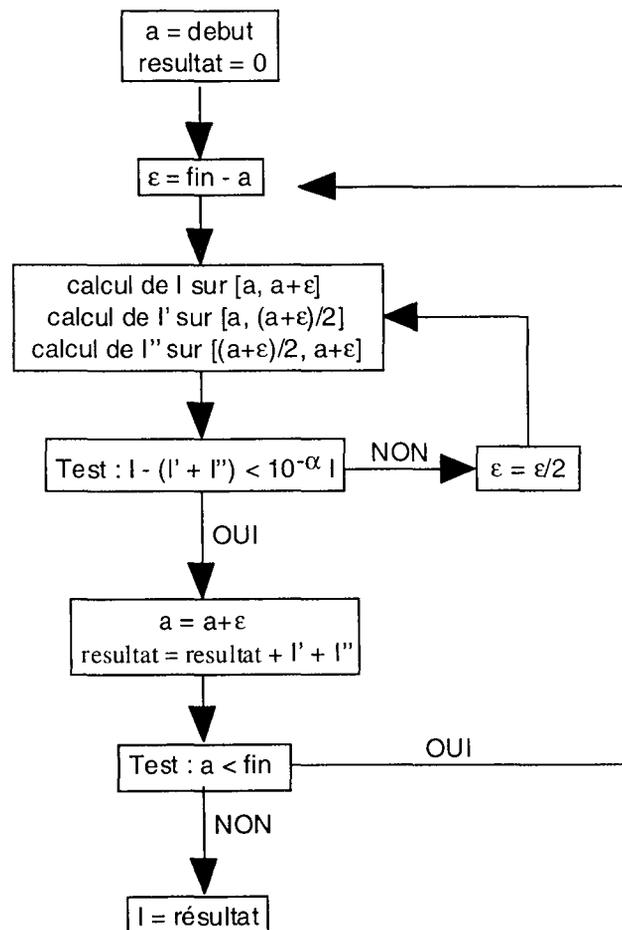


Figure 23. Algorithme utilisé pour calculer les intégrales.

Pour I_3 , la borne supérieure n'étant pas réelle, on procède à un changement de variable :

$$u = \alpha t - \frac{1-X}{X} \quad (2.12)$$

et I_3 peut alors s'écrire :

$$I_3 = \int_0^1 e^u \left[G\left(\frac{u}{t} + i\beta\right) \sin(\beta t) + H\left(\frac{u}{t} + i\beta\right) \cos(\beta t) \right] \frac{dX}{X^2} \quad (2.13)$$

2.2 - ANALYSE CRITIQUE DE CES DEUX METHODES

2.2.1 - Limite de la méthode de Stehfest (1970)

Cette méthode, très facile à mettre en œuvre, est relativement précise de manière générale pour les problèmes en géométries cartésienne et sphérique. Mais en géométrie cylindrique, on a constaté localement la présence d'instabilité dont la cause est difficile à expliquer.

2.2.1.1. Validation pour une sphère pleine en diffusion pure

On peut tout d'abord commencer par présenter un problème pour lequel la méthode de Stehfest s'est avérée très bien adaptée. Considérons une sphère pleine partiellement saturée et indéformable (figure 24).

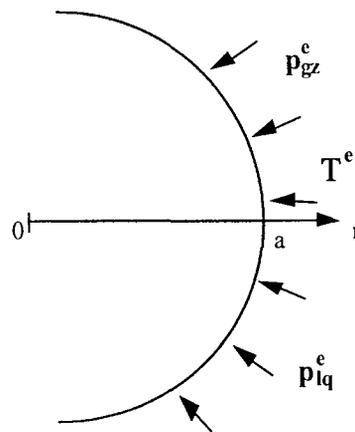


Figure 24. Géométrie

Les propriétés thermo-hydrauliques du milieu poreux correspondent globalement à un béton : en effet, les propriétés hydrauliques sont issues de données concernant la pâte de ciment PWT (Lassabatère, 1994) et les propriétés thermiques sont représentatives d'un béton standard (Remerant et al., 1998). Les données sont donc réalistes (tableau 13) à l'exception de la perméabilité au gaz qui, au même titre que l'état initial et les conditions aux limites, a été choisie de manière à accentuer l'effet des couplages.

Tableau 13. Caractéristiques TH de la sphère de béton

Conductivité au liquide (m ² /Pa/s)	10 ⁻¹⁵
Conductivité au gaz (m ² /Pa/s)	10 ⁻¹⁵
Coefficient de Fick (m ² /s)	2.4 10 ⁻⁷
Porosité	0.1
Pente de la courbe de pression capillaire (Pa)	-2 10 ⁶
Conductivité thermique (W/m/K)	1.4
Capacité calorifique volumique (Pa/K)	1.39 10 ⁶

Enfin, la loi de comportement thermo-poro-élastique non linéaire est linéarisée autour de l'état initial et la courbe de pression capillaire linéaire, représentée sur la figure 25, montre le chemin hydrique suivi par le milieu poreux : il relie les états initial et final, ce dernier étant déterminé par la condition aux limites en $r = a$.

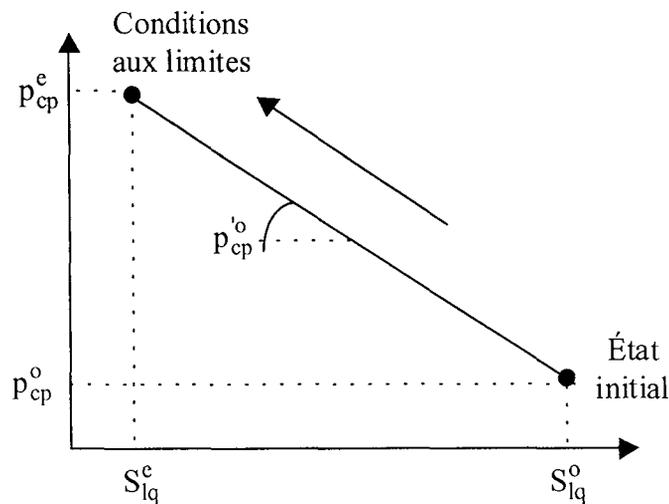


Figure 25. Courbe de pression capillaire linéarisée

Les données relatives à l'état initial et aux conditions aux limites sont les suivantes :

$$t = 0, r : S_{lq}^o = 0.75, p_{lq}^o = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}, p_{gz}^o = p_{atm} = 10^6 \text{ Pa}, T^o = 293 \text{ K}$$

$$t > 0, r = 0 : \frac{\partial p_{lq}}{\partial r} = 0, \frac{\partial p_{gz}}{\partial r} = 0, \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (2.14)$$

$$t > 0, r = a : S_{lq}^e = 0.70, p_{lq}^e = -3 \cdot 10^5 \text{ Pa}, p_{gz}^e = 10^5 \text{ Pa}, T^e = 593 \text{ K}$$

Comme détaillé au chapitre 1, le système couplé reliant les trois variables de diffusion est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \overline{p_{lq}} \\ \overline{p_{gz}} \\ \overline{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^1 & V_2^1 & V_3^1 \\ V_1^2 & V_2^2 & V_3^2 \\ V_1^3 & V_2^3 & V_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \overline{v_3} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \overline{v_i} = \frac{A_i}{r} \exp(-\omega_i r) + \frac{B_i}{r} \exp(\omega_i r) \quad (2.15)$$

On considère les conditions aux limites pour déterminer les A_i et B_i , ce qui conduit à l'expression des solutions dans le domaine transformé :

$$\begin{cases} \bar{p}_{lq} = \frac{p_{lq}^o}{s} + \frac{a}{rs} \sum_{i=1}^3 V_i^1 (\alpha_i^1 \delta T + \alpha_i^2 \delta p_{lq} + \alpha_i^3 \delta p_{gz}) f(\omega_i) \\ \bar{p}_{gz} = \frac{p_{gz}^o}{s} + \frac{a}{rs} \sum_{i=1}^3 V_i^2 (\alpha_i^1 \delta T + \alpha_i^2 \delta p_{lq} + \alpha_i^3 \delta p_{gz}) f(\omega_i) \\ \bar{T} = \frac{T^o}{s} + \frac{a}{rs} \sum_{i=1}^3 V_i^3 (\alpha_i^1 \delta T + \alpha_i^2 \delta p_{lq} + \alpha_i^3 \delta p_{gz}) f(\omega_i) \end{cases} \quad (2.16)$$

avec $f(\omega_i) = \exp[\omega_i(r - re)] \frac{1 - \exp(-2\omega_i r)}{1 - \exp(-2\omega_i re)}$

et $\delta p_{lq} = p_{lq}^e - p_{lq}^o$, $\delta p_{gz} = p_{gz}^e - p_{gz}^o$, $\delta T = T^e - T^o$ (2.17)

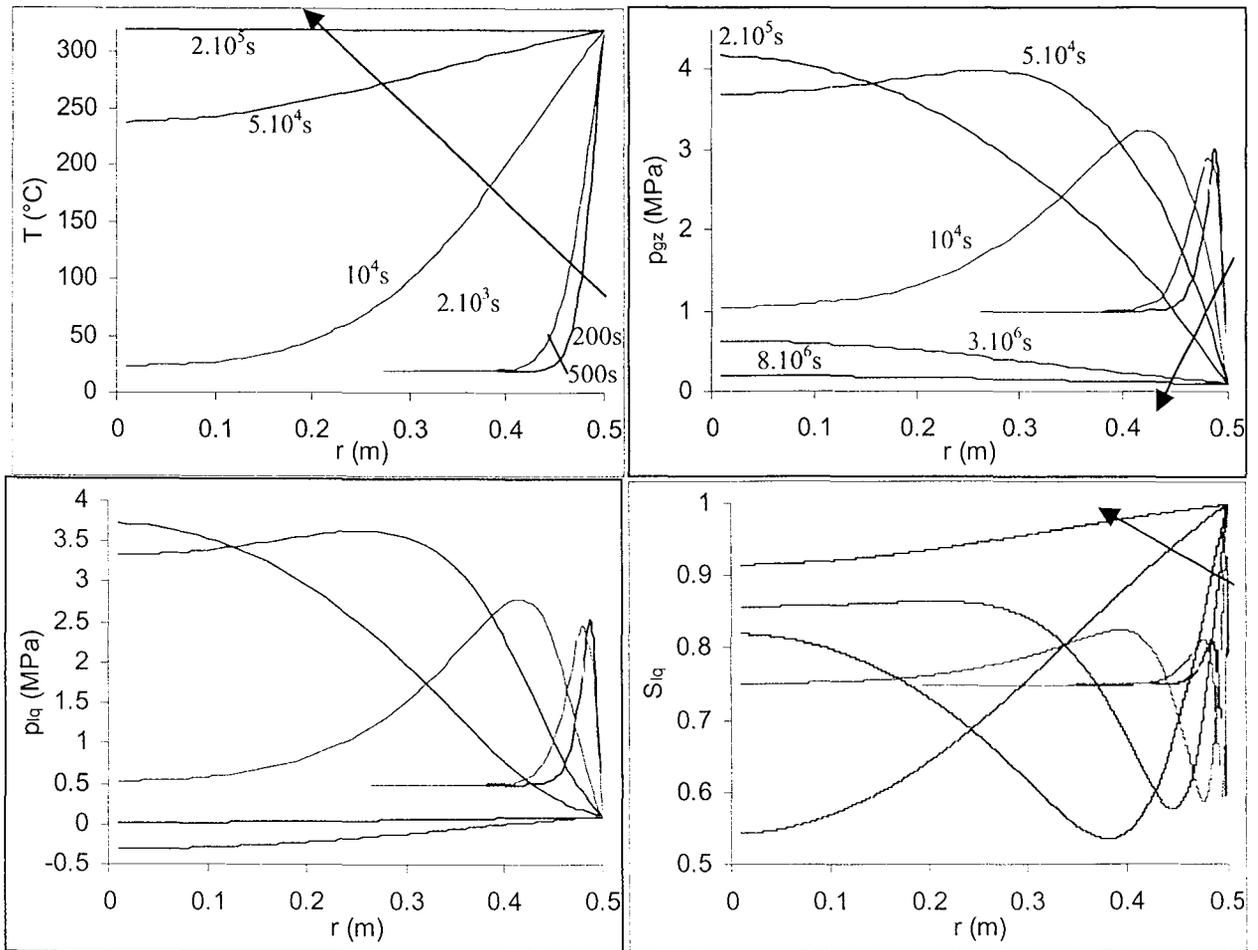
et les variables α_i^j sont des combinaisons linéaires des termes V_i^j .

Le passage du domaine des transformées de Laplace au domaine du temps peut se faire analytiquement car on connaît la fonction inverse de $f(\omega_i)/s$: elle est donnée par Carslaw & Jaeger (1959) :

$$\frac{1}{s} \exp[\omega_i(r - re)] \frac{1 - \exp(-2\omega_i r)}{1 - \exp(-2\omega_i re)} \xrightarrow{\text{inversion}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)re - r}{2\sqrt{C_i t}} \right] - \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)re + r}{2\sqrt{C_i t}} \right] \right]}_{S_i} \quad (2.18)$$

Les solutions exactes s'expriment donc sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions S_i , et elles ont été comparées avec les solutions provenant de l'inversion numérique par la méthode de Stehfest (1970). On a alors constaté (figures 26) une adéquation parfaite entre les deux approches.

Le fait d'avoir choisi des conditions initiales et aux limites particulières se traduit par des temps caractéristiques de diffusion hydraulique très proches : les variables hydrauliques présentent ainsi une évolution non monotone caractéristique de processus couplés (allures en « bosses » et sous-pressions de liquide, contrairement à la température qui se propage plus rapidement et de manière « découplée ») qui permet de montrer la précision de la méthode de Stehfest (1970).

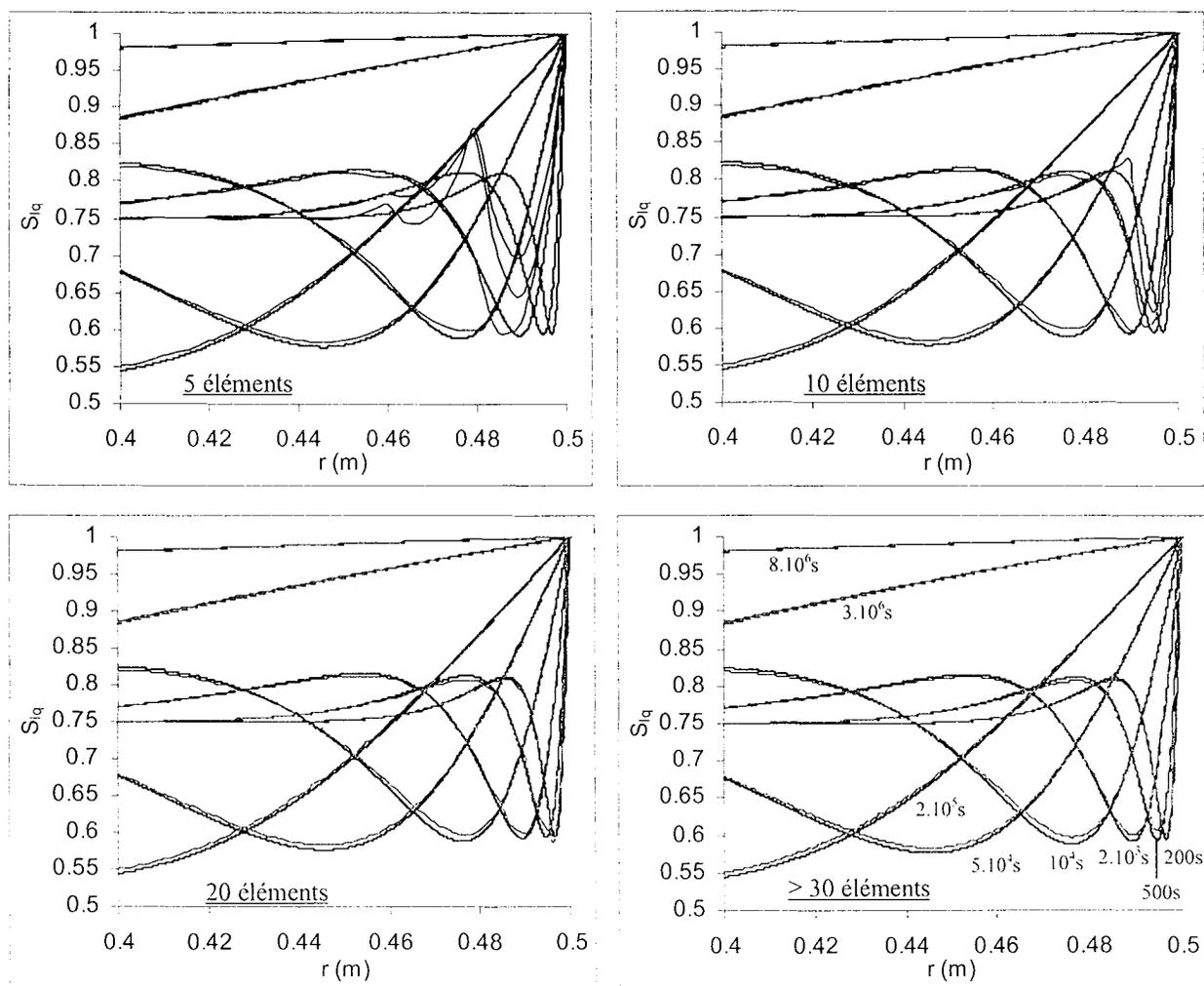


Figures 26. Evolutions de quelques variables (solutions exactes et semi-explicites).

Outre la validation des solutions semi-explicites par les solutions analytiques, on peut également illustrer la notion de validation de codes de calcul. En effet, les mêmes calculs ont été menés avec le logiciel PARSAT et on a joué sur la finesse du maillage pour voir son influence sur les résultats numériques. La discrétisation spatiale a donc été réalisée avec x éléments répartis uniformément pour r variant de entre 0 et 0.4 et également x éléments entre 0.4 et 0.5, de manière à modéliser plus finement la zone près de la frontière où les variations sont plus fortes. Les figures 27 montrent les évolutions de la saturation pour des valeurs de x égales à 5, 10, 20 et 30 (au-delà de 30, les résultats sont inchangés) et environ 500 pas de temps.

On observe nettement que pour des maillages trop grossiers avec peu d'éléments, les résultats numériques conduisent à des erreurs relatives fortes, comme le montre le tableau 14 en quelques points et instants particuliers.

Néanmoins, il apparaît qu'au-delà d'une vingtaine d'éléments, le raffinement de la discrétisation spatiale ne permet plus de diminuer l'erreur relative : celle-ci se stabilise et son origine doit alors être recherchée du côté de la discrétisation temporelle.



Figures 27. Evolutions de la saturation pour différents maillages

Tableau 14. Erreur relative entre les solutions numériques et explicites pour différents maillages

	$t = 500s$ $r = 0.4947m$	$t = 2 \cdot 10^3s$ $r = 0.4894m$	$t = 5 \cdot 10^4s$ $r = 0.4456m$
5 éléments	28.2%	2.9%	1.0%
10 éléments	3.2%	0.9%	1.1%
20 éléments	1.4%	1.3%	1.1%
30 éléments	1.8%	1.4%	1.1%
50 éléments	2.0%	1.3%	1.1%

Pour améliorer la discrétisation temporelle de façon appropriée aux processus de diffusion qui s'étalent sur des gammes de temps assez larges, on utilise une subroutine de gestion du pas de temps implantée dans PARSAT. Grâce à celle-ci, on divise de façon logarithmique chaque intervalle $10^n - 10^{n+1}$ avec y sous-intervalles égaux. On a alors repris le dernier calcul du tableau 14 avec un maillage de 100 éléments ($x = 50$) et on a découpé les intervalles de temps avec y égal à 100, 1000 et 10000. Le tableau 15 présente les résultats obtenus.

Tableau 15. Erreur relative entre les solutions numériques et explicites pour différents pas de temps.

	t = 500s r = 0.4947m	t = 2 10 ³ s r = 0.4894m	t = 5 10 ⁴ s r = 0.4456m
500 pas de temps	2.0%	1.3%	1.1%
y = 100 => 10 ⁴ pas	0.9%	1.1%	1.1%
y = 1000 => 10 ⁵ pas	0.7%	0.8%	0.9%
y = 10000 => 10 ⁶ pas	0.7%	0.8%	0.9%

Dès lors que le pas de temps choisi est suffisamment petit, l'erreur relative chute en deçà du pour-cent. Ces résultats sont classiques et soulignent la nécessité d'une discrétisation temporelle fine en schéma semi-explicite.

2.2.1.2. Instabilités en géométrie cylindrique

Ceci est bien mis en évidence dans le cas de la fonction suivante (voir problème du creusement d'une galerie, annexe 2) :

$$\bar{P}(r', s') = \frac{K_0(r'\sqrt{s'})}{s'K_0(\sqrt{s'})} \quad (2.19)$$

L'inversion analytique de cette fonction est donnée par Carslaw & Jaeger (1959, p335) sous la forme d'une intégrale :

$$P(r', t') = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-u^2 t') \frac{J_0(ur')Y_0(u) - Y_0(ur')J_0(u)}{J_0^2(u) + Y_0^2(u)} \frac{du}{u} \quad (2.20)$$

mais le problème, c'est que cette intégrale fait intervenir une fonction singulière à l'origine et oscillatoire avec une amplitude décroissant lentement. Son calcul nécessite donc un effort numérique important (Wong, 1994). L'inversion numérique n'a donc pas été validée par le calcul exact mais on a simplement cherché à comparer les résultats obtenus avec les deux méthodes d'inversion de Stehfest (1970) et Piessens et al. (1983).

En utilisant la méthode de Stehfest (1970), on a dressé un tableau de valeurs de P pour différentes valeurs de r et de t (tableau 16). On constate une forte instabilité pour des temps compris entre 1 et 100. En revanche, avec la méthode de Piessens et al. (1983), les courbes sont bien continues : la figure 28 montre une évolution en fonction du temps réduit avec les deux méthodes.

Tableau 16. Valeurs de la pression avec la méthode de Stehfest (1970) pour différents couples (r, t).

t	r = 1,5	r = 2	r = 3	r = 5
0,01	0,0003	0	0	0
0,01585	0,0041	0	0	0
0,02512	0,021	0	0	0
0,03981	0,0627	0,0003	0	0
0,0631	0,1308	0,0035	0	0
0,1	0,2169	0,0181	0	0
0,15849	0,3091	0,0542	0,0002	0
0,25119	0,3978	0,1138	0,0028	0
0,39811	0,4778	0,1897	0,0148	0
0,63096	0,5473	0,2716	0,0446	0,0002
1	0,628	0,3585	0,0953	0,0022
1,58489	-14,3513	-4,4515	-0,3946	0,0035
2,51189	52,0439	17,0623	2,0945	0,0625
3,98107	-50,9331	0,5261	0,2989	0,0759
6,30957	-14,1147	14,8464	0,3637	0,129
10	0,7837	-49,3899	0,4242	0,1883
15,84893	0,804	0,6655	-20,869	0,2481
25,11886	0,8213	0,6948	-5,5385	0,2969
39,81072	0,8361	0,72	0,5572	5,079
63,09573	0,8488	0,7417	0,5911	-15,1846
100	0,8599	0,7605	0,6208	0,4463
158,48932	0,8696	0,777	0,6468	0,4836
251,18864	0,8781	0,7916	0,6697	0,5167
398,10717	0,8856	0,8044	0,69	0,5462
630,95734	0,8923	0,8158	0,7081	0,5726

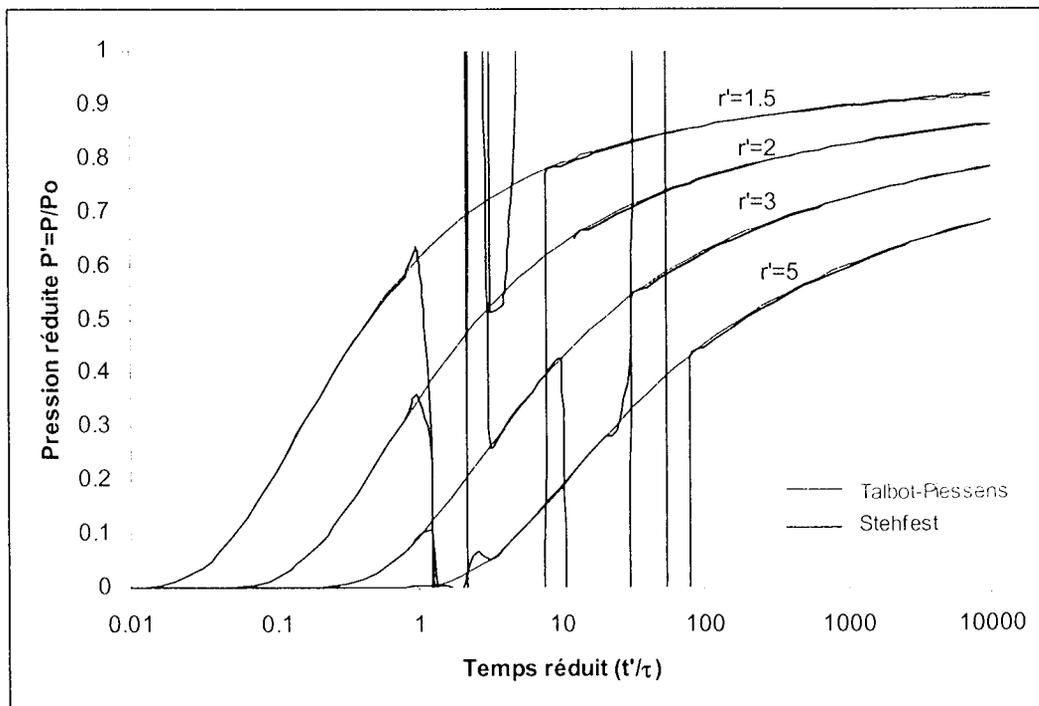


Figure 28. Instabilités localisées de la méthode de Stehfest (1970).

2.2.2 - Validité de la méthode de Talbot modifiée par Piessens et al. (1983)

La méthode d'inversion numérique des transformées de Laplace initialement proposée par Talbot (1979) et modifiée par Piessens et al. (1983) permet de traiter une gamme de problèmes relativement large. Lorsque l'on souhaite résoudre un problème analytiquement, on est rapidement bloqué par des conditions aux limites complexes (flux décroissant avec le temps par exemple) ou exercées à une limite finie, par les conditions particulières liées aux modèles multi-couches (discontinuités des caractéristiques physiques, état initial discontinu et conditions de continuité), par les problèmes de phasage (état instantané modifié par un chargement mécanique). L'approche semi-explicite permet de passer outre ces difficultés et les différents exemples qui vont suivre permettront de démontrer l'intérêt de ces méthodes, avec toujours le souci de traiter des problèmes liés étroitement au domaine industriel.

2.2.2.1 - Condition imposée à une limite finie

On reprend un problème présenté par Djeran (1991), concernant la diffusion thermique dans une sphère creuse de rayon intérieur r_a et de rayon extérieur r_b (figure 29) soumis au chargement suivant:

$$\begin{cases} T(r_a, t) = T_a = \text{cste} \\ T(r_b, t) = 0 \\ T(r, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

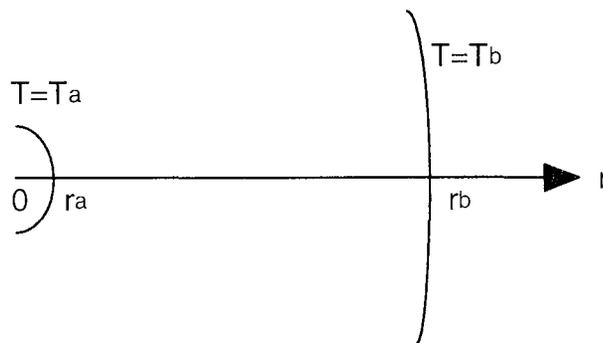


Figure 29. Géométrie et conditions aux limites.

En géométrie sphérique, ce problème de diffusion unidimensionnel est caractérisé par l'équation :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{D_T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.22)$$

Mise sous forme adimensionnelle :

$$r' = \frac{r}{r_a} \quad \rho = \frac{r_b}{r_a} \quad T' = \frac{T}{T_a} \quad \tau = \frac{r_a^2}{4D_T} \quad t' = \frac{t}{\tau} \quad s' = s\tau \quad (2.23)$$

L'application de la transformation de Laplace conduit à la nouvelle équation :

$$\frac{d^2 \bar{T}'}{dr'^2} + \frac{2}{r} \frac{d\bar{T}'}{dr} - q'^2 \bar{T}' = 0 \quad \text{avec} \quad q' = 2\sqrt{s'} \quad (2.24)$$

ou encore
$$\frac{d^2}{dr'^2} (r' \bar{T}') - q'^2 (r' \bar{T}') = 0 \quad (2.25)$$

La solution générale est donc de la forme :

$$r' \bar{T}' = Ae^{q' r'} + Be^{-q' r'} \quad (2.26)$$

Les constantes A et B sont déterminées d'après les conditions aux limites du problème :

$$\begin{cases} \text{en } r' = 1 : T' = \frac{1}{s'} \\ \text{en } r' = \rho : T' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ae^{q'} + Be^{-q'} = \frac{1}{s'} \\ Ae^{q'\rho} + Be^{-q'\rho} = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

La température au sein de la sphère creuse, exprimée dans le domaine des transformées de Laplace, pour $1 < r' < \rho$, est donc de la forme :

$$\bar{T}'(r', s') = \frac{1}{r' s'} \frac{\exp[q'(\rho - r')] - \exp[-q'(\rho - r')]}{\exp[q'(\rho - 1)] - \exp[-q'(\rho - 1)]} \quad (2.28)$$

puis l'inversion numérique par la méthode de Piessens et al. (1983) permet de calculer des valeurs de température en adéquation avec les valeurs données par la solution analytique proposée par Carslaw & Jaeger (1959, p352) sous la forme d'une somme de série :

$$T'(r', t') = \frac{1}{r'} \frac{\rho - r'}{\rho - 1} \frac{2}{\pi r'} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi(r'-1)}{\rho-1}\right) \exp\left(-\frac{4n^2\pi^2}{(\rho-1)^2} t'\right) \right] \quad (2.29)$$

Djeran (1991) avait recherché la solution de ce problème par la méthode des résidus ce qui l'avait conduite à des expressions très lourdes qui n'avaient pas permis d'obtenir des résultats numériques.

2.2.2.2. Adaptation aux temps réduits très petits

Si on s'intéresse à des évolutions pour des temps réduits supérieurs à $10^{-3}/10^{-4}$, l'inversion numérique ne pose pas de problèmes particuliers mais pour des temps plus petits, une difficulté d'ordre purement numérique apparaît. En effet, en prenant l'exemple du problème précédent, on est amené à calculer numériquement l'expression $\exp[q'(\rho - r')]$. t' et s' sont liés globalement par un rapport inverse : si t' est petit, s' est donc grand et q' l'est également ($q' = 2\sqrt{s'}$), et comme $\rho - r'$ est

positif, on doit calculer une exponentielle qui dépasse rapidement les limites numériques des réels pour un ordinateur. Mais ce problème peut être contourné de la manière suivante :

$$\bar{T}(r', s') = \frac{1}{r's'} \frac{\exp[q'(\rho - r')] 1 - \exp[-2q'(\rho - r')]}{\exp[q'(\rho - 1)] 1 - \exp[-2q'(\rho - 1)]} = \frac{\exp[q'(1 - r')] 1 - \exp[-2q'(\rho - r')]}{r's' 1 - \exp[-2q'(\rho - 1)]} \quad (2.30)$$

Désormais, les exponentielles que l'on doit calculer tendent toutes vers 0 quand q' tend à augmenter, et il n'y a donc plus de problème numérique. Le même problème se pose également en géométrie cylindrique mais il est un peu plus délicat à contourner.

Pour le mettre en évidence, on s'intéresse à un problème similaire, de diffusion hydraulique, en géométrie cylindrique. La géométrie est caractérisée par un cylindre creux fini et les conditions initiale et aux limites sont présentées sur la figure 30.

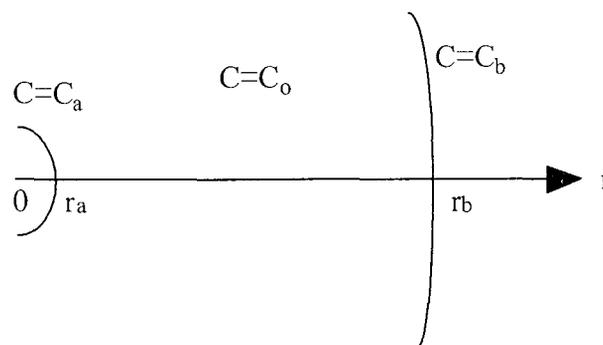


Figure 30. Géométrie et conditions aux limites.

L'équation de diffusion traduisant le mouvement de la phase fluide est de la forme :

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D_C \text{div}[\underline{\text{grad}}(C)] = 0 \quad (2.31)$$

avec C qui correspond à la concentration de l'eau, liquide et vapeur (l'indice supérieur g est destiné à éviter la confusion avec la concentration $C_{vp} = p_{vp}/p_{gz}$) :

$$C = C_{lq}^g + C_{vp}^g = \rho_{lq}^o \phi S_{lq} + \rho_{vp} \phi (1 - S_{lq}) \quad (2.32)$$

On peut relier la concentration aux apports de masse utilisés dans le modèle THMNL :

$$m_i = (1 + \varepsilon_v) C_i^g - C_i^{g0} \quad (2.33)$$

et on peut également exprimer le coefficient de diffusion D_C en fonction de paramètres de diffusion utilisés dans le modèle THMNL :

$$D_C = \left[\frac{\rho_{lq}^o 2 RT}{M_{vp} h_r} \lambda_{lq} + \rho_{vp} (1 - C_{vp}) \frac{p_{vp}^o(T)}{p_{atm}} F \right] \frac{dh_r(C)}{dC} \quad (2.34)$$

Mise sous forme adimensionnelle :

$$r' = \frac{r}{r_a} \quad \rho = \frac{r_b}{r_a} \quad C' = \frac{C}{C_o} \quad C'_{a(b)} = \frac{C_{a(b)}}{C_o} \quad \tau = \frac{r_a^2}{4D_C} \quad t' = \frac{t}{\tau} \quad s' = s\tau \quad (2.35)$$

Après passage dans le domaine des transformées de Laplace, les solutions générales du problème s'écrivent :

$$\bar{C}' = \frac{1}{s'} + AK_0(\omega'r') + BI_0(\omega'r') \quad (2.36)$$

et les conditions aux limites permettent de déterminer A et B de manière à exprimer la solution particulière de ce problème dans le domaine transformé :

$$\bar{C}' = \frac{1}{s'} + \frac{(C'_b - 1)[I_0(\omega')K_0(\omega'r') - I_0(\omega'r')K_0(\omega')] + (1 - C'_a)[I_0(\omega'\rho)K_0(\omega'r') - I_0(\omega'r')K_0(\omega'\rho)]}{[I_0(\omega')K_0(\omega'\rho) - K_0(\omega')I_0(\omega'\rho)]s'} \quad (2.37)$$

Pour des grandes valeurs de ω' , on est à nouveau face à un problème numérique puisque l'expression $K_0(\omega')$ tend vers l'infini et dépasse rapidement les limites numériques des réels. Les combinaisons qui existent entre les fonctions exponentielles ne sont plus applicables pour les fonctions de Bessel, et on alors recourt à des développements en série valides pour des arguments grands (Abramowitz & Stegun, 1970). Cette méthode a été utilisée par Wong (1994).

$$I_0(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-2k)}{k!(8z)^k} \right) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \frac{4z-1}{4z} e^{\frac{1}{8z}} \quad (2.38)$$

$$K_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-2k)}{k!(8z)^k} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \frac{4z-1}{4z} e^{\frac{1}{8z}} \quad (2.39)$$

En fait, on remarque que dans l'expression de \bar{C}' , on peut faire apparaître uniquement des rapports de fonctions de Bessel K_0 ou I_0 :

$$\bar{C}' = \frac{1}{s'} + \frac{(C'_b - 1) \left[\frac{I_0(\omega') K_0(\omega'r')}{I_0(\omega'\rho) K_0(\omega')} - \frac{I_0(\omega'r')}{I_0(\omega'\rho)} \right] + (1 - C'_a) \left[\frac{K_0(\omega'r')}{K_0(\omega')} - \frac{I_0(\omega'r') K_0(\omega'\rho)}{I_0(\omega'\rho) K_0(\omega')} \right]}{\left[\frac{I_0(\omega') K_0(\omega'\rho)}{I_0(\omega'\rho) K_0(\omega')} - 1 \right] s'} \quad (2.40)$$

ce qui conduit, en utilisant les développements limités, à des rapports de fonctions exponentielles et on retrouve ainsi des simplifications similaires à celles de la géométrie sphérique :

$$X(r') = \frac{I_0(\omega'r')}{I_0(\omega'\rho)} = \left(\frac{\rho}{r'} \right)^{3/2} \frac{1 - 4r'\omega'}{1 - 4\rho\omega'} e^{\frac{(r'-\rho)(8\omega'\rho r' - 1)}{8\omega'\rho r'}} \quad Y(r') = \frac{K_0(\omega'r')}{K_0(\omega')} = \frac{1}{r'^{3/2}} \frac{1 - 4r'\omega'}{1 - 4\omega'} e^{\frac{(1-r')(1+8\omega'r')}{8\omega'r'}}$$

$$\text{et } \bar{C}' = \frac{1}{s'} + \frac{(C'_b - 1)[X(l)Y(r') - X(r')] + (1 - C'_a)[Y(r') - X(r')Y(\rho)]}{[X(l)Y(\rho) - 1]s'} \quad (2.41)$$

Le fait de s'intéresser aux temps réduits petits, autrement dit aux temps nettement plus petits que le temps caractéristique, n'est pas simplement d'un intérêt purement calculatoire. En effet, si on reprend le problème de diffusion hydraulique dans une enceinte de centrale nucléaire formulé par Granger (1991), le modèle est bien un cylindre creux fini en géométrie unidimensionnelle axisymétrique. L'auteur modélise le phénomène de séchage du mur avec les données suivantes correspondant au béton haute performance de Flamanville :

$$C_0 = 105.7 \text{ l/m}^3, C_a = 51.6 \text{ l/m}^3, C_b = 69.1 \text{ l/m}^3, r_a = 22.5 \text{ m}, r_b = 23.4 \text{ m} \quad (2.42)$$

et un coefficient de diffusion variant de façon non linéaire avec la concentration et la température :

$$D_C(C, T) = A \exp(BC) \frac{T}{T_0} \exp\left[-\frac{Q_s}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right] \quad (2.43)$$

$$\text{avec } A = 3.810^{-13}, B = 0.05, \frac{Q_s}{R} = 4700\text{K}^{-1}, T_0 = 293\text{K}$$

Granger (1991, p190) s'est intéressé à un cas simplifié en considérant une diffusivité constante (il en donne une solution exacte en géométrie cartésienne) :

$$D_C(C_0, T_0) = A \exp(BC_0) = 7.4994 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 / \text{s} \quad (2.44)$$

Dans ce cas, le problème est linéaire et une approche semi-explicite est alors possible. On peut calculer le temps caractéristique τ :

$$\tau = \frac{r_a^2}{D_C} \approx 200\,000 \text{ ans} \quad (2.45)$$

Les temps qui intéressent le modélisateur varient entre 1 et 50 ans, c'est-à-dire des temps réduits de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-4} , et une approche utilisant les développements limités est incontournable. Pour valider cette approche, on peut comparer les résultats obtenus avec la solution analytique proposée par Carslaw & Jaeger (1959, p332) :

$$C = C_0 + A - \pi B \quad (2.46)$$

$$\text{avec } A = \frac{(C_0 - C_i) \ln(r/b) + (C_e - C_0) \ln(r/a)}{\ln(b/a)}$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-D_C \alpha_n^2 t} \frac{J_0(r \alpha_n) Y_0(r_a \alpha_n) - Y_0(r \alpha_n) J_0(r_a \alpha_n)}{J_0^2(r_a \alpha_n) - J_0^2(r_b \alpha_n)} \right. \\ \left. J_0(r_b \alpha_n) [(C_e - C_0) J_0(r_a \alpha_n) + (C_0 - C_i) J_0(r_b \alpha_n)] \right\}$$

$$\alpha_n \text{ racines de : } J_0(r_a \alpha) Y_0(r_b \alpha) - Y_0(r_a \alpha) J_0(r_b \alpha) = 0 \quad (2.47)$$

La figure 31 montre une évolution de la concentration dans le mur d'enceinte obtenue pour différents instants avec la solution semi-explicite et la solution analytique. On constate que les deux solutions se superposent parfaitement malgré les temps considérés qui sont très petits par rapport au temps caractéristique du problème.

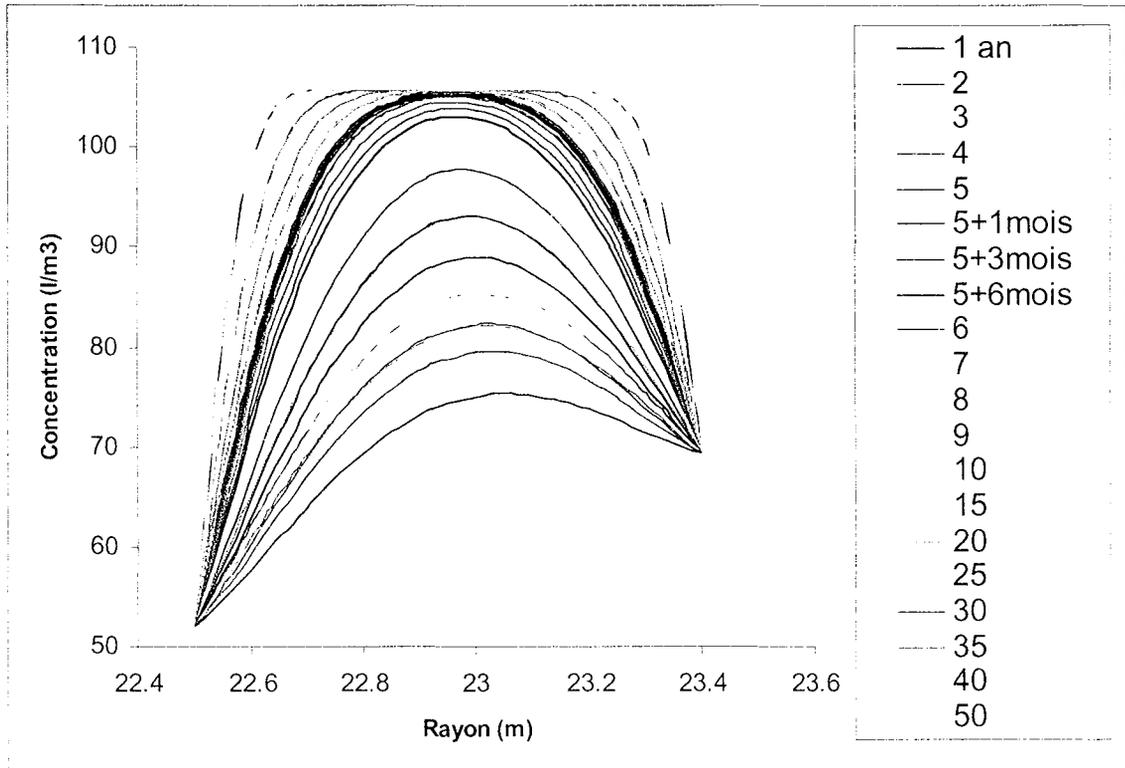


Figure 31. Evolution de la concentration dans le mur d'enceinte.

2.2.2.3. Modèle multi-couches et discontinuités

Comme le montrent les applications des chapitres 3 et 5, un modèle multi-couches peut s'avérer utile et nécessaire lorsque l'on veut étudier des structures où différents matériaux sont juxtaposés. En outre, ce type de modèle permet aussi de prendre en compte, en première approche, ce que l'on peut appeler un « effet de peau » sur un matériau dont la surface peut être altérée du fait de l'action de l'environnement extérieur. Un même matériau est alors modélisé par deux couches, dont l'une peu épaisse, est caractérisée par des propriétés légèrement différentes, comme par exemple une plus forte perméabilité hydraulique suite à l'apparition d'une fissuration.

Les solutions semi-explicites sont très bien adaptées pour étudier un tel problème multi-couches discontinu et nous allons l'illustrer en considérant une galerie creusée dans un massif argileux saturé. Ce problème a été présenté au congrès NUMGE'98 (¹³¹Thouvenin & Giraud, 1998). Suite au creusement, on prend en compte une modification des propriétés thermo-hydro-mécaniques dans une fine couche en contact avec la paroi de la cavité. La géométrie est donnée sur la figure 32.

Le problème satisfait les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 - t = 0, r : & \quad P = P_0, T = T_0, \sigma = \sigma_0 \\
 - t > 0, r = r_i : & \quad P(r = r_i, t) = 0, T(r = r_i, t) = T_i, \sigma_{rr}(r = r_i, t) = -\bar{\omega} \\
 - t > 0, r \rightarrow \infty : & \quad P(r \rightarrow \infty, t) = P_0, T(r \rightarrow \infty, t) = T_0, \sigma_{rr}(r \rightarrow \infty, t) = \sigma_0
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

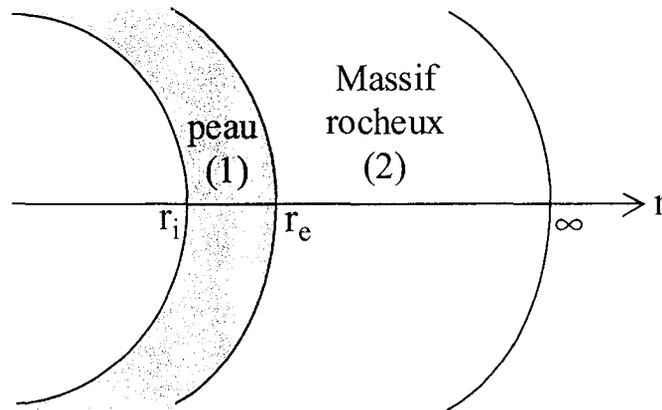


Figure 32. Géométrie.

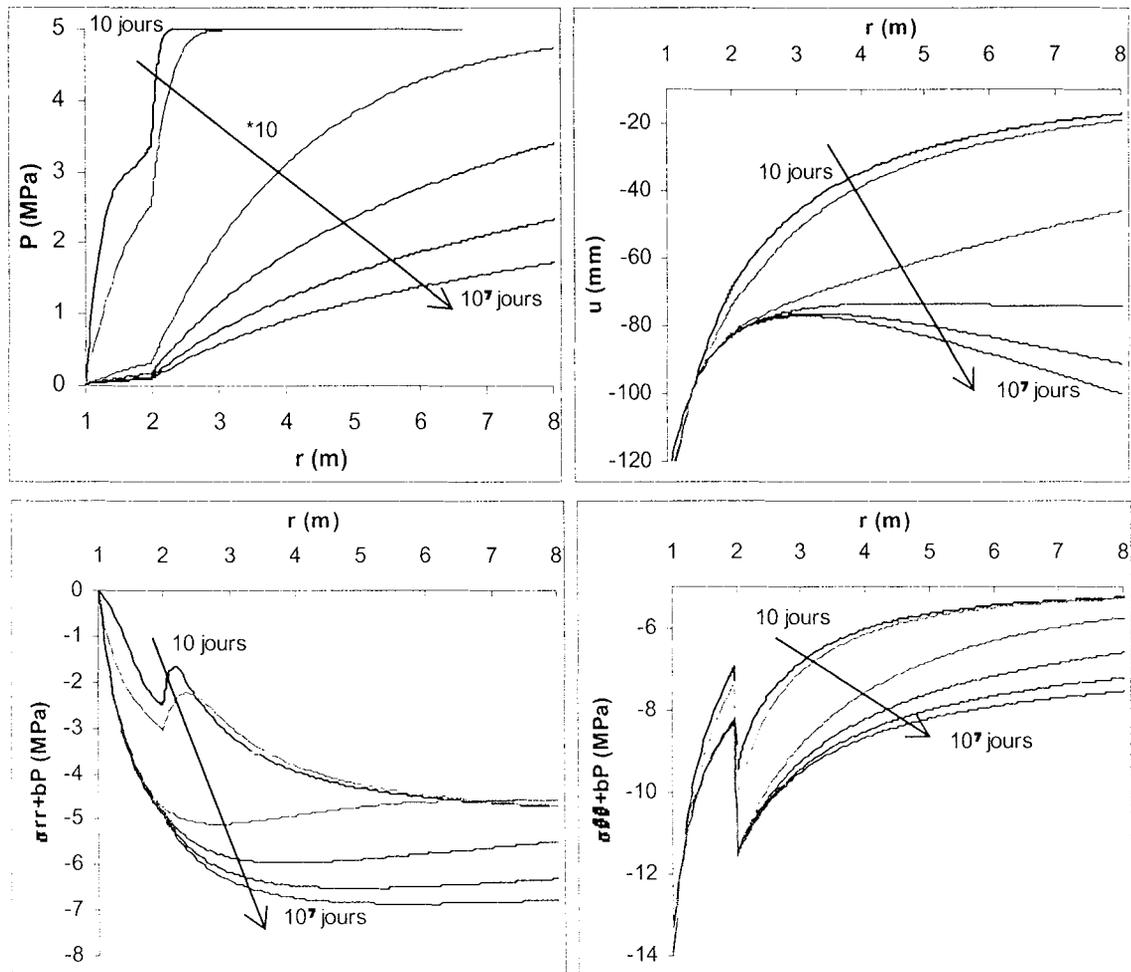
Quant aux conditions de continuité entre les deux couches, en $r = r_e$, elles doivent permettre d'assurer la continuité des deux variables de diffusion, la pression et la température, ainsi que des deux flux qui y sont associés. De plus, d'un point de vue mécanique, le déplacement et la contrainte radiale sont eux aussi continus.

Les paramètres du milieu poreux sont caractéristiques d'un tunnel profond dans un massif argileux (argile de Boom, Giraud 1993). Dans la « peau », on prend en compte une dégradation des propriétés avec une diminution de 50% des paramètres mécaniques μ et K_0 , et une perméabilité hydraulique 10 fois plus forte. Les propriétés de la peau et du massif rocheux sont regroupées dans le tableau 17.

Tableau 17. Propriétés thermo-hydro-mécaniques des deux matériaux.

	« peau »	Massif rocheux
Module d'incompressibilité drainé K_0 (MPa)	50	100
Module de cisaillement μ (MPa)	30	60
Coefficient de Biot b	1	1
Module de Biot M (MPa)	5500	5500
Porosité ϕ	0.4	0.4
Coeff. de dilatation therm. α_m (K^{-1})	$4.43 \cdot 10^{-5}$	$3.54 \cdot 10^{-5}$
Coeff. drainé de dilatation therm. α_o (K^{-1})	10^{-5}	10^{-5}
Perméabilité hydraulique k_w (ms^{-1})	$4 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-12}$
Capacité calorifique C ($Jm^{-3}K^{-1}$)	$2.85 \cdot 10^6$	$2.85 \cdot 10^6$
Conductivité thermique λ_r ($Wm^{-1}K^{-1}$)	1.7	1.7

En outre, les données géométriques sont : $r_i = 1\text{m}$ et $r_e = 2\text{m}$, et l'état initial est défini par : $P_0 = 5\text{MPa}$, $T_0 = 318\text{K}$, $\sigma_0 = -10\text{MPa}$. Les figures 33 représentent les évolutions de quelques variables pour différents temps (de 10 à 10^7 jours, tous les 10^n) en fonction du rayon.



Figures 33. Evolutions spatiales de quelques variables pour différents temps.

On constate que la pression est bien continue dans l'ensemble du modèle mais à l'interface entre les deux couches, il y a une nette rupture de pente du fait de la discontinuité de perméabilité hydraulique, et la pression chute beaucoup plus rapidement dans la peau. En outre, le déplacement (continu) négatif met en évidence un phénomène de traction, induit par couplage $H \rightarrow M$, qui se manifeste progressivement au cours du temps dans le massif alors que le régime permanent est atteint presque instantanément dans la peau. Du point de vue des contraintes, on vérifie la continuité de la contrainte radiale (et a fortiori la contrainte radiale effective car les coefficients de Biot des deux matériaux sont égaux) avec une manifestation du couplage $H \rightarrow M$ à l'interface peau-massif pour les temps petits alors que la forte discontinuité de la contrainte orthoradiale traduit la diminution de 50% du module de cisaillement.

2.2.2.4 - Phasage et état initial discontinu

Le stockage des déchets radioactifs en couches géologiques profondes repose sur un système multi-barrières. Le conteneur, qui forme une première barrière autour des déchets, est entouré d'une couche d'argile partiellement saturée (Barrière Ouvragée = BO), et cet ensemble est alors placé dans le massif hôte. Dans ce paragraphe, on ne prend pas en compte la phase de ressaturation de la BO : on considère un milieu poreux saturé et on va étudier les conséquences de la mise en place du conteneur avec le creusement du massif hôte et l'influence de l'augmentation de température sur les processus hydriques et mécaniques. On modélise cet ensemble multi-barrières par un modèle simplifié unidimensionnel constitué de trois couches (figure 34).

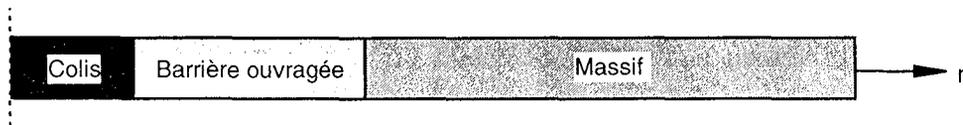


Figure 34. Modèle tricouche Colis – BO – Massif.

avec les données géométriques suivantes :

- limite inférieure : $r = 0$
- interface colis-BO : $r_a = 0.3 \text{ m}$
- interface BO-massif : $r_b = 1.3 \text{ m}$
- limite supérieure : $r \rightarrow \infty$ (pour les calculs semi-explicites)
 $r = 10^4 r_b$ (pour les calculs numériques)

Les caractéristiques physiques des trois matériaux sont issues de Lassabatère (1998) pour la BO, d'essais réalisés au LAEGO sur l'argilite de l'Est pour le massif et ont été choisies pour le conteneur de façon à simuler un milieu peu poreux, peu perméable et fortement rigide (sachant que le conteneur n'est pas un milieu poreux mais l'intérêt de le considérer comme tel est surtout de pouvoir tester ainsi un modèle tricouche avec des milieux très différents). Le tableau 18 récapitule toutes les données des trois matériaux.

Tableau 18. Caractéristiques physiques des trois matériaux

	Colis (1)	BO (2)	Massif (3)
Module de Young drainé non drainé E (Pa)		$1.6 \cdot 10^9$	$8.0 \cdot 10^9$
Coefficient de Poisson non drainé ν		0.2	0.25
Module d'incompressibilité drainé K_0 (Pa)	$8.89 \cdot 10^{11}$	$8.89 \cdot 10^8$	$5.33 \cdot 10^9$
Module de cisaillement μ (Pa)	$6.67 \cdot 10^{11}$	$6.67 \cdot 10^8$	$3.2 \cdot 10^9$
Coefficient de Biot b	10^{-5}	1	0.8
Module de Biot M (Pa)	$5.5 \cdot 10^{10}$	$4.8864 \cdot 10^9$	$9.2819 \cdot 10^9$
Coefficient de perméabilité λ_H ($\text{m}^2/\text{Pa}/\text{s}$)	10^{-18}	10^{-17}	10^{-17}
Porosité ϕ	0.01	0.3	0.13
Dilatation linéique différentielle fluide/liquide α_m (1/K)	$9.00 \cdot 10^{-7}$	$3.70 \cdot 10^{-5}$	$1.97 \cdot 10^{-5}$
Dilatation thermique drainée α_s (1/K)	10^{-5}		
Conductivité thermique λ_T (W/K/m)	1.7		
Capacité calorifique non drainée C ($\text{J}/\text{K}/\text{m}^3$)	$2.85 \cdot 10^6$		

On modélise le problème en trois phases de manière à prendre en compte le creusement du massif et la mise en place du conteneur et de la BO. Une première phase correspond à l'état initial du massif dans lequel le stockage va être réalisé : le modèle est alors constitué d'une seule couche correspondant au massif (figure 35). La seconde phase correspond à l'état précédent le creusement : une région ($0 \leq r \leq b$) représente le massif excavé et le reste du modèle ($r \geq b$) le massif dans lequel le creusement a provoqué une réponse instantanée non drainée (figure 36).

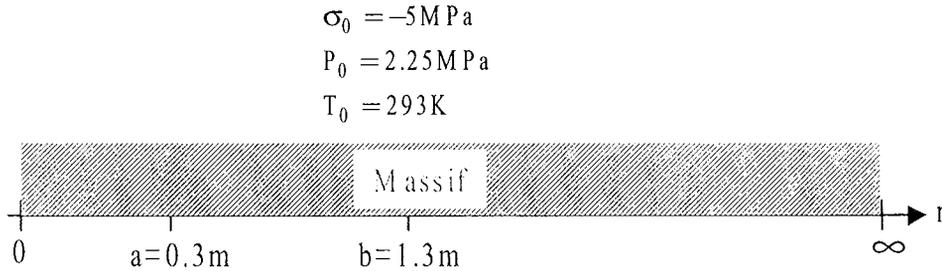


Figure 35. Phase 1 : état initial.

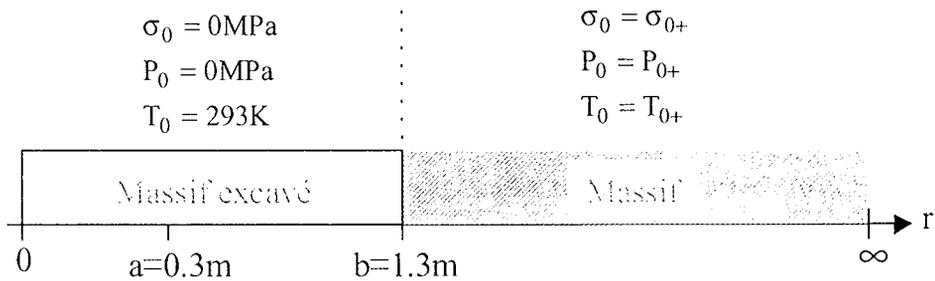


Figure 36. Phase 2 : creusement du massif.

La troisième phase correspond à la mise en place du conteneur et de la BO. Cette étape peut être modélisée de deux façons. On peut tout d'abord prendre en compte l'influence du conteneur par l'intermédiaire de conditions aux limites en $r = a$: on a alors un problème bicouche (figure 37) et la production de chaleur se traduit par un flux surfacique sur la paroi interne de la BO. Une deuxième façon consiste à considérer le conteneur comme une «couche» avec des propriétés thermo-hydro-mécaniques et on doit alors résoudre un problème tricouche (figure 38). En $r = 0$, on applique des conditions de symétrie, en l'infini, des variations nulles par rapport à l'état instantané, et aux deux interfaces (conteneur/BO et BO/massif), on assure les continuités de la pression, de la température, des flux de température et de liquide ainsi que de la contrainte radiale et de la variation de déplacement par rapport à l'état instantané. Le conteneur est caractérisé par une production volumique de chaleur Q_v exponentiellement décroissante avec le temps. Ce modèle tricouche est certainement critiquable car on peut difficilement considérer le conteneur comme un milieu poreux mais son intérêt est néanmoins grand pour apprécier les limites des méthodes semi-explicites.

Le lien entre les flux volumique et surfacique est établi en considérant le flux linéaire :

$$Q_L = Q_v \pi a^2 L = Q_s 2\pi a L \quad \Rightarrow \quad Q_s = \frac{a}{2} Q_v \quad (2.49)$$

Le dégagement de la chaleur dans le colis est de type exponentiellement décroissant avec un flux volumique initial choisi de manière à obtenir une augmentation maximale de température dans le milieu poreux de l'ordre de 100 à 200 degrés et une décroissance thermique fournie par Giraud (1993) : $Q_v(\text{W/m}^3) = 400 e^{(-0.024 t)}$ (t en années, $t \geq 0$)

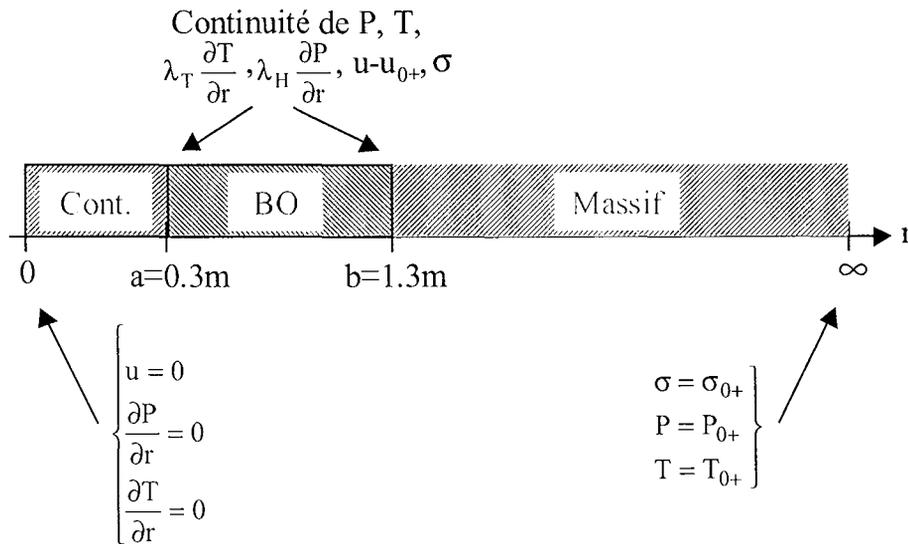


Figure 37. Phase 3 : mise en place du conteneur et de la BO en problème tricouche.

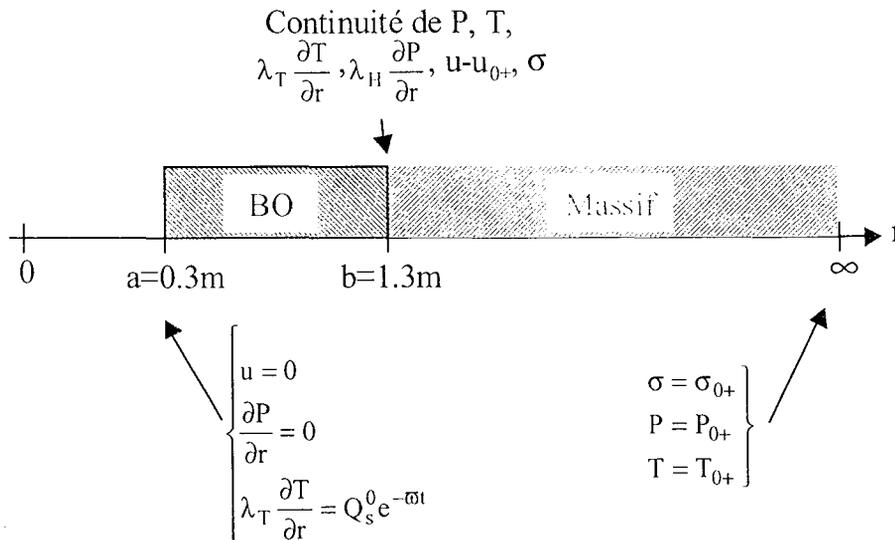


Figure 38. Phase 3 : mise en place du conteneur et de la BO en problème bicouche.

L'indice 0+ fait référence à l'état instantané : en effet, lors du creusement du massif, on annule la contrainte radiale en $r = b$ et la chute de contrainte dans le massif se traduit instantanément par un comportement élastique non drainé. La mise en place du conteneur et de la BO est donc réalisée à partir de l'instant 0+ et non pas de l'état initial. Ceci est un point important à souligner car cet état instantané est discontinu (que le modèle soit bicouche ou tricouche) : il est très délicat à prendre en compte par une approche analytique (développement en série de Fourier) alors que cela ne pose pas de problème particulier avec une résolution semi-explicite.

La réponse mécanique instantanée (figure 39) dans le massif s'écrit (solutions de Kirsch) :

$$\sigma_{0+}(r) = \sigma_0 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad u_{0+}(r) = \frac{b^2}{2\mu^{(3)}r} \quad \varepsilon_{0+} = 0 \quad (2.50)$$

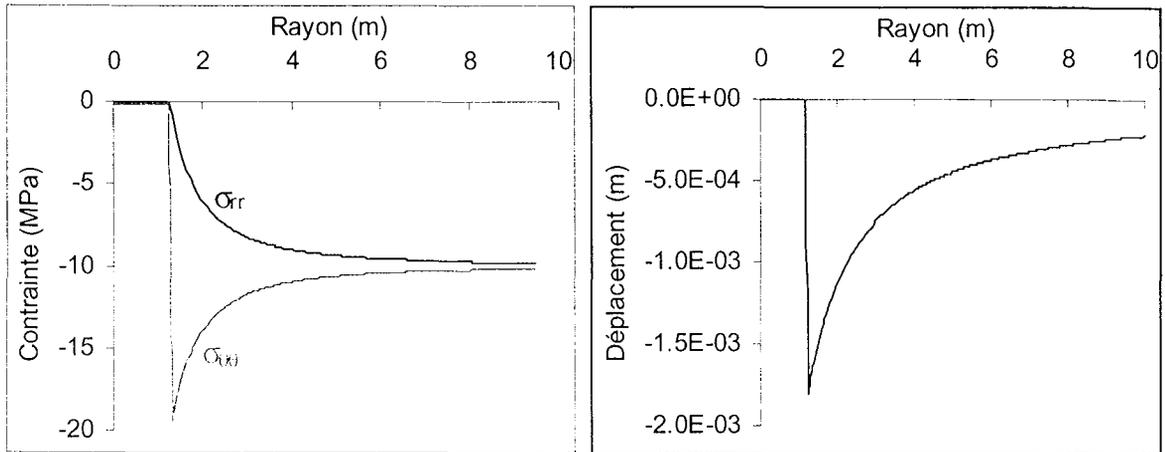


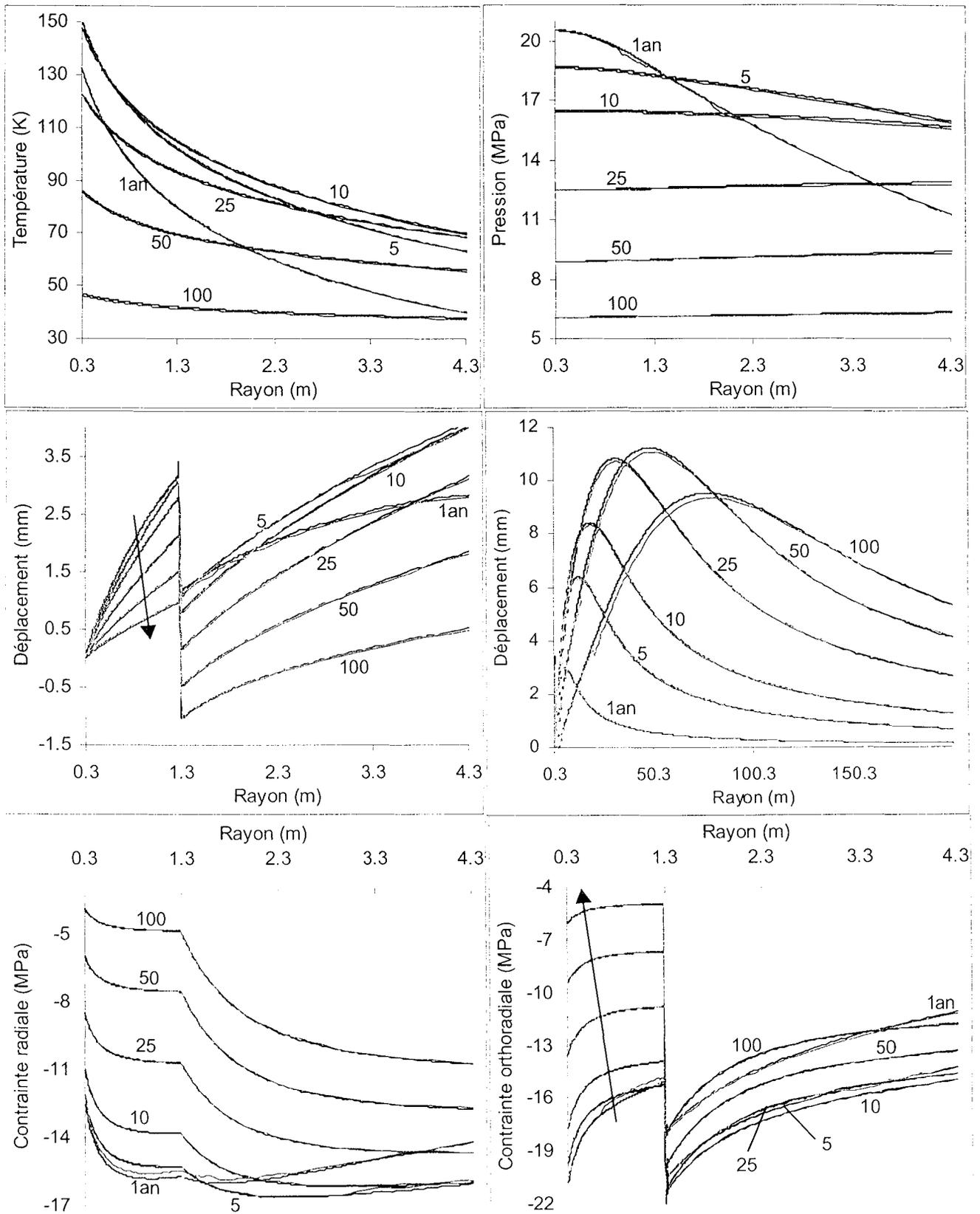
Figure 39. Réponse mécanique instantanée.

En ce qui concerne la réponse hydraulique, les variations instantanées par rapport à l'état initial sont liées linéairement à la déformation volumique instantanée (voir annexe 3), et on en déduit :

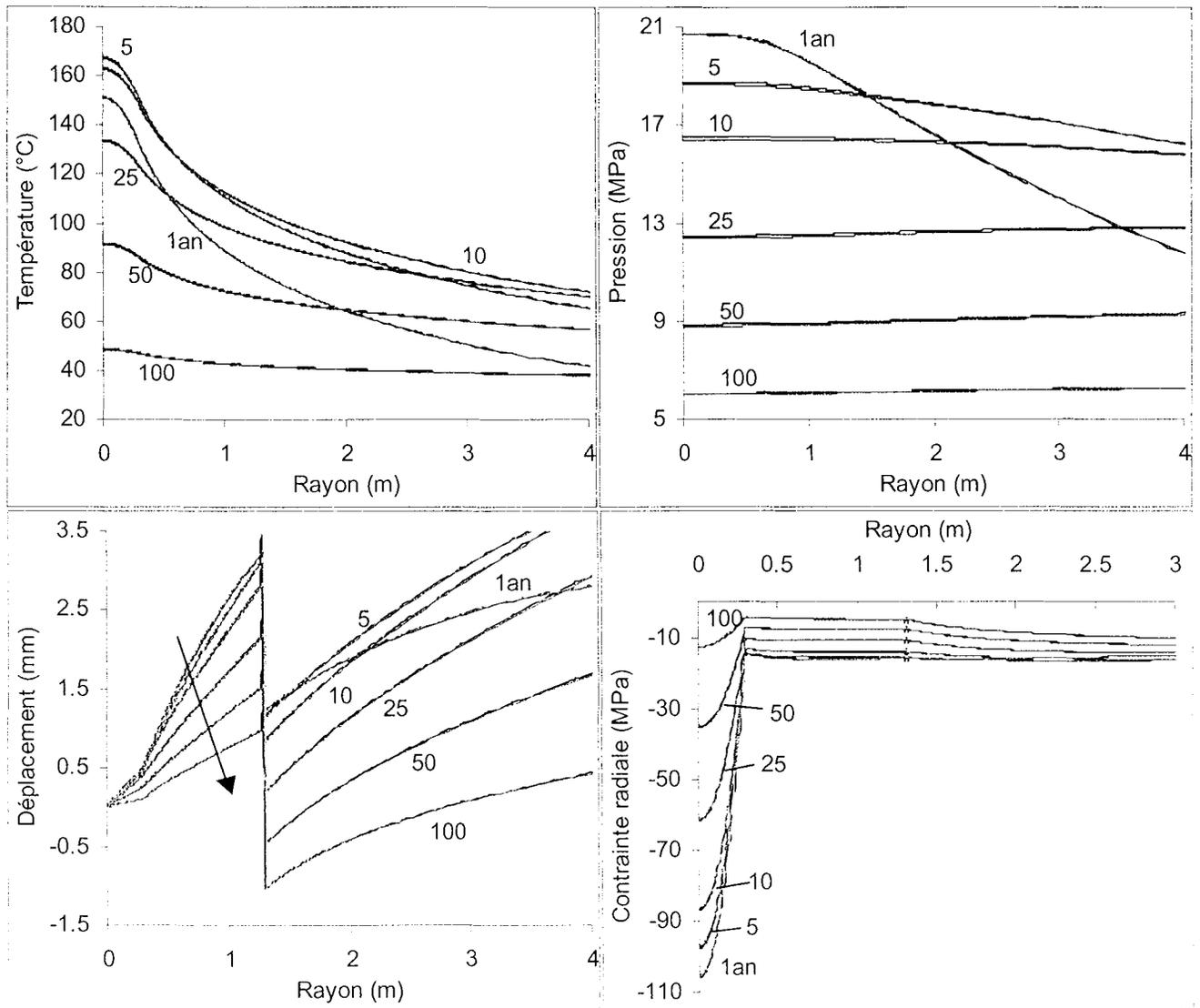
$$P_{0+} = P_0 \quad \text{et} \quad T_{0+} = T_0 \quad (2.51)$$

Le maillage utilisé avec PARSAT est composé de 190 éléments répartis comme suit : 9 éléments réguliers dans le colis, 40 éléments réguliers dans la BO, 40 éléments dans la partie du massif située en champ proche en progression géométrique de raison 1.11 puis 100 éléments dans le reste du massif en progression géométrique de raison 1.05. Pour la limite infinie, on a pris une valeur très grande, 125 km, soit $10^5 \cdot b$, ce que l'on justifiera par la suite.

Pour les deux modèles, les figures 40 et 41 représentent les évolutions de la température, de la pression de pore, du déplacement et des contraintes radiale et orthoradiale. On note une superposition quasiment parfaite entre les courbes données par PARSAT (en bleu) et semi-explicites (en rouge) : même dans les cas où il y existe une différence, l'erreur relative n'excède pas 1%. Quel que soit le modèle, l'évolution thermique se traduit par une augmentation de la température, avec un paroxysme de 150 à 170°C au bout de quelques années, et du fait d'un fort couplage $T \rightarrow H$, cela se répercute sur la pression de pore qui augmente également (alors qu'il n'y a pas de chargement hydraulique). On observe bien les limites « physiques » du modèle tricouche car les pressions n'ont pas de sens dans le conteneur (milieu non poreux en fait), mais cette comparaison valide bien les solutions semi-explicites avec un modèle tricouche où les couches sont caractérisées par des comportements nettement distincts. D'un point de vue mécanique, la contrainte radiale et la variation de déplacement par rapport à l'état instantané sont continues mais pas le déplacement qui montre une forte discontinuité à l'interface BO-massif du fait de la réponse instantanée du massif après excavation. En outre, on peut noter l'importance de la condition aux limites infinie qui doit être repoussée suffisamment loin car on observe que le déplacement varie dans une zone très étendue.



Figures 40 Evolutions spatiales de quelques variables en modèle bicouche.



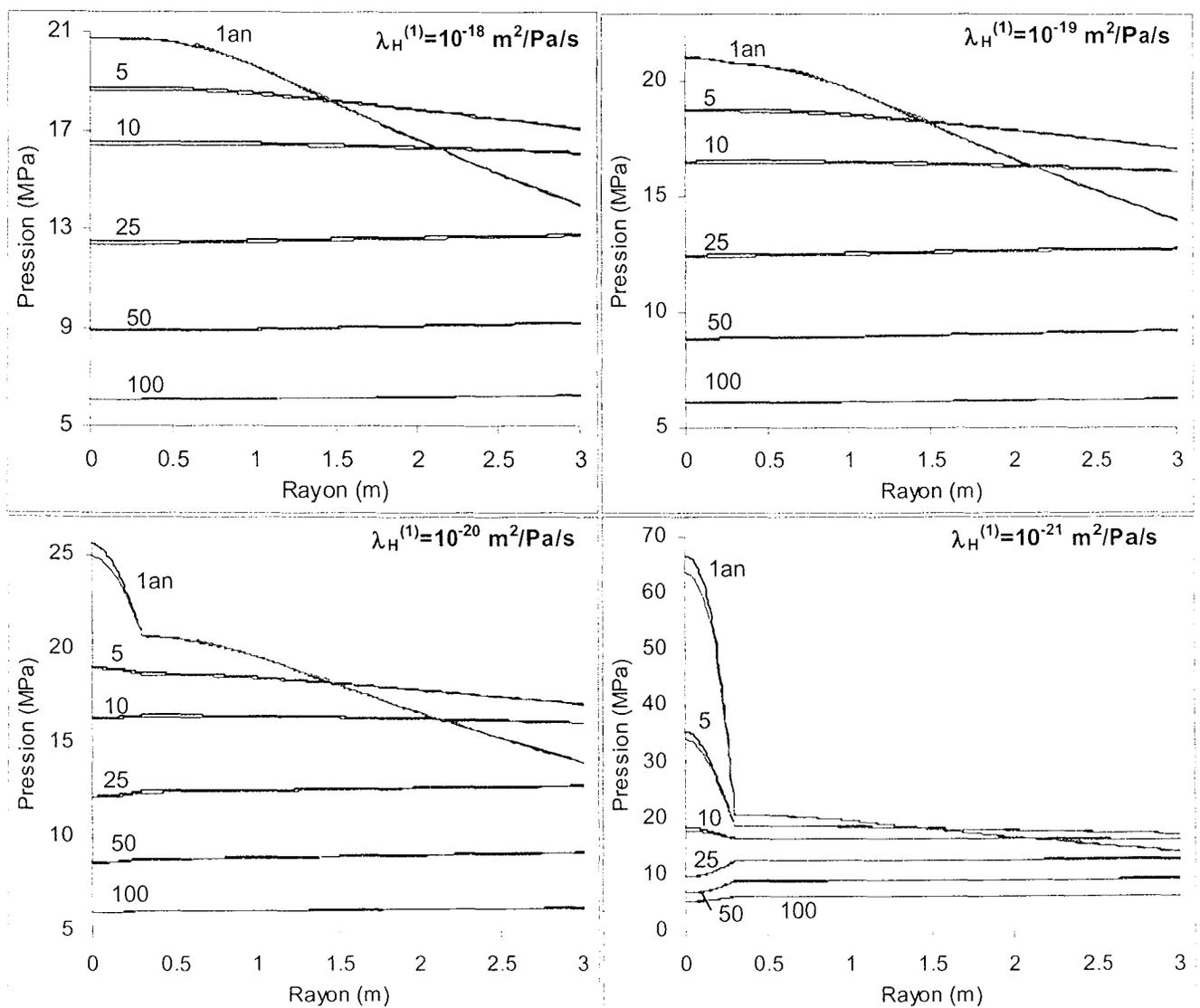
Figures 41. Evolutions spatiales de quelques variables en modèle tricouche.

Si on s'intéresse aux deux valeurs propres calculées pour les différents matériaux, on obtient pour le modèle tricouche les valeurs présentées dans le tableau 19.

Tableau 19. Valeurs propres et temps caractéristiques dans les différents matériaux.

		Valeurs propres (m^2/s)	Temps caractéristiques (s)	Temps réduit mini.	$C_{thermique}/C_{hydraulique}$	Rapport de C entre 2 couches
Conteneur	$C_{thermique}$	$5.73 \cdot 10^{-7}$	$1.57 \cdot 10^5$	200.9	2.9	1.0
	$C_{hydraulique}$	$2.00 \cdot 10^{-7}$	$4.50 \cdot 10^5$	70.1		
BO	$C_{thermique}$	$5.98 \cdot 10^{-7}$	$1.51 \cdot 10^5$	209.3	42.7	14.3
	$C_{hydraulique}$	$1.40 \cdot 10^{-8}$	$6.43 \cdot 10^6$	4.9		
Massif	$C_{thermique}$	$5.97 \cdot 10^{-7}$	$1.51 \cdot 10^5$	209.3	9.3	1.0
	$C_{hydraulique}$	$6.38 \cdot 10^{-8}$	$1.41 \cdot 10^6$	22.4		

On constate que les temps réduits ne sont pas trop petits : il n'y a donc pas besoin de réaliser de développements limités. En outre, le rapport entre les deux valeurs propres au sein d'une même couche d'une part, et le rapport entre une valeur propre d'une couche et son homologue dans la couche voisine d'autre part, donnent tous les deux des valeurs ne dépassant guère la centaine. Par conséquent, les discontinuités entre couches ne sont pas fortement marquées et pour tester la validité de la méthode de Talbot modifiée par Piessens et al. (1983) dans le cas de plus fortes discontinuités, nous avons décidé de faire décroître arbitrairement la perméabilité du conteneur (10^{-18} , 10^{-19} , 10^{-20} , 10^{-21} m²/Pa/s). Ainsi le rapport $C_{\text{thermique}}/C_{\text{hydraulique}}$ dans le conteneur est multiplié par un facteur 10, 100 puis 1000, ainsi que le rapport des valeurs propres hydrauliques entre le conteneur et la BO. Les évolutions de la pression pour différentes valeurs de perméabilités sont données sur les figures 42, en comparant les résultats semi-explicites et numériques.



Figures 42. Evolution spatiale de la pression pour différentes valeurs de λ_{H1} dans le conteneur.

L'erreur relative entre les deux approches reste faible même pour des rapports de perméabilités de l'ordre de 10^3 : elle avoisine au maximum 1% pour $t = 1$ an. Ce problème bicouche ou tricouche est donc un bon exemple de validation des solutions semi-explicites et notamment de la méthode d'inversion de Talbot modifiée par Piessens et al. (1983), même si le fait de considérer le conteneur comme un milieu poreux n'est pas physiquement très acceptable.

Chapitre

3

Application au stockage de déchets radioactifs en couches géologiques profondes : ressaturation de la Barrière Ouvragée

*« Lorsque vous avez éliminé l'impossible,
ce qui reste, si impossible soit-il, est
nécessairement la vérité. »*

Sir Arthur Conan Doyle (1859-1930)

3.1 - INTRODUCTION

Ce chapitre aborde le phénomène de ressaturation de la BO dans le cadre de la mécanique des milieux poreux partiellement saturés. Pour simplifier la formulation et focaliser l'étude sur les processus couplés de diffusion, on fait l'hypothèse d'évolutions isothermes au sein d'un milieu poreux indéformable : dans les équations de diffusion, les couplages avec la mécanique et la thermique sont donc négligés. Différentes modélisations ont été réalisées avec un degré de complexité croissant, tant au niveau de la géométrie que du comportement. En effet, une première partie concerne une étude monocouche : la couche est représentative de la BO et l'influence du massif est prise en compte par le biais de conditions aux limites, alors qu'une seconde partie s'intéresse à un modèle bicouche, où le massif est considéré comme une couche au même titre que la BO. Pour chacune d'elles, les modèles non linéaire et linéaire sont comparés dans le but de faire ressortir le rôle joué par les non-linéarités, et notamment les deux principales, à savoir la courbe de pression capillaire et la conductivité au liquide. En outre, l'intérêt de ces modélisations est de comprendre le phénomène de ressaturation mais également d'appréhender le rôle de chaque paramètre du modèle sur le temps de ressaturation. Une étude de sensibilité est donc ensuite proposée par association des solutions semi-explicites avec le logiciel PROBAN et ses méthodes probabilistes, et elle est complétée par une étude discrète avec le modèle non linéaire. Les résultats présentés dans ce chapitre ont été exposés au congrès UPC98 (⁵⁶Giraud et al., 1998) et aux « Journées Fiabilité » (¹³⁸Thouvenin et al., 1998), et seront exposés au congrès ICASP8-1999 (¹³⁹Thouvenin et al., 1999).

3.2 - CARACTERISATION DE LA BARRIERE OUVRAGEE ET DU MASSIF HOTE

3.2.1 - Modèle de comportement de la BO et du massif

Les données caractérisant la BO proviennent de rapports du service du CEA s'occupant de l'entreposage et du stockage des déchets nucléaires (Raynal, 1995 ; Raynal et al., 1994 ; Raynal et al., 1996), ainsi que de notes rédigées par EDF et divers autres rapports (Commission Européenne, Volckaert et al., 1996 ; rapport de DEA E.Olchitzky, 1995). En ce qui concerne le massif, on a choisi dans l'optique d'une application dans l'Est de la France, une argilite raide provenant de cette région, dont les valeurs sont issues de mesures expérimentales réalisées au LAEGO.

Les deux données principales concernent la courbe de pression capillaire et la conductivité au liquide qui varient toutes les deux de façon non linéaire. Pour la BO, les courbes de pression capillaire expérimentales ont été ajustées par une loi de type Vachaud et Vauclin de la forme (Olchitzky, 1995) :

$$S_{lq} = \frac{a}{a + (100p_c)^b} \quad \text{avec } a = 175 \text{ et } b = 0.61 \quad (3.1)$$

De manière à simplifier la modélisation, et du fait d'une très bonne corrélation, on a choisi de considérer un ajustement de même type pour le massif, avec les paramètres a et b suivants : a = 60.89 et b = 0.54 (figure 43a).

En ce qui concerne la deuxième non-linéarité de ces deux matériaux, en l'occurrence la loi reliant la conductivité au liquide à la pression capillaire, les données concernant l'argilite de l'Est font défaut alors que pour la BO, Olchitzky (1998) propose à nouveau une loi de type Vachaud et

Vauclin. On a donc choisi de considérer pour le massif une loi identique à celle de la BO avec un facteur $\frac{1}{2}$ pour mettre en évidence une diffusion plus lente dans le massif (figure 43b).

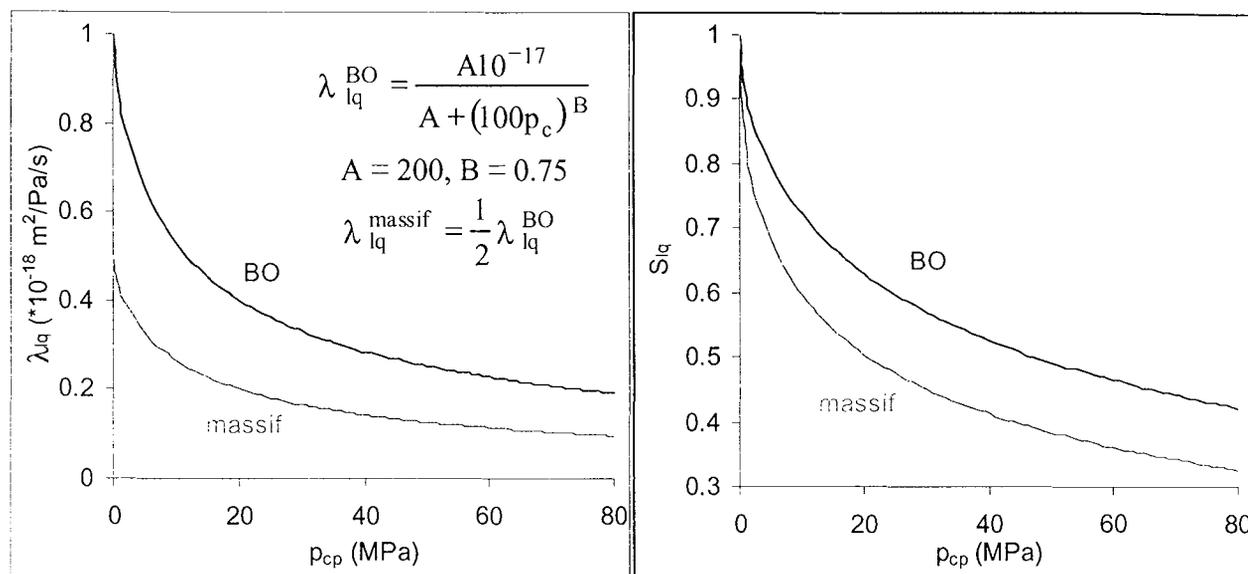


Figure 43. Les deux non-linéarités de la BO et du massif.

Pour les autres paramètres de diffusion, le coefficient de Fick F et la conductivité au gaz λ_{gz} sont les mêmes pour les deux matériaux ($F = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ et $\lambda_{gz} = 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Pa/s}$), et enfin la porosité du massif vaut 0.15, soit la moitié de la BO.

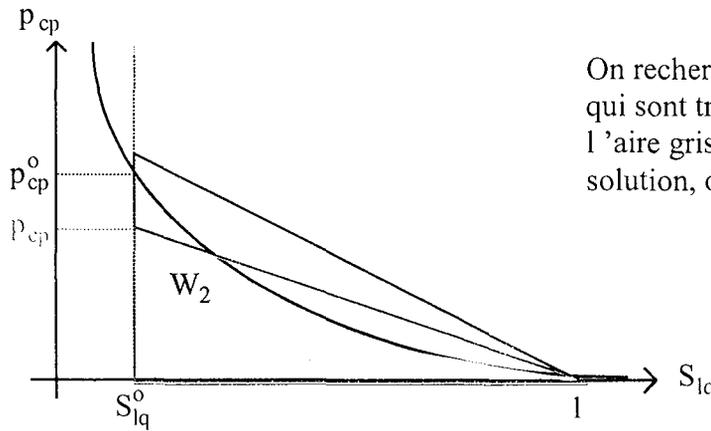
3.2.2 - Méthodes de linéarisation des courbes de pression capillaire

Dans le cadre de l'étude du problème de resaturation de la barrière ouvragée (BO) par le massif, l'état final correspond à la resaturation totale de la BO : par conséquent, on connaît un point de la courbe linéarisée : $S_{lq} = 1$, $p_{cp} = 0$ et il reste à définir un autre point pour que la linéarisation soit réalisée. Différentes méthodes ont été envisagées, puisqu'a priori, on a vu au paragraphe 1.3.1 qu'il est très difficile de privilégier l'une plutôt que l'autre, sur la base d'un critère que l'on pourrait appeler énergétique. En effet, lorsque l'on progresse sur la courbe de pression capillaire entre deux points extrêmes, l'aire sous cette portion de courbe est l'analogie d'un travail rapporté à un volume unité. On peut alors envisager deux écritures de ce travail :

$$W_1 = \int_0^{p_c^{ref}} \phi S_{lq} dp_c \quad \text{et} \quad W_2 = \int_{S_{lq}^{ref}}^1 \phi p_c dS_{lq} \quad (3.2)$$

et rechercher le point de référence de telle manière que l'aire sous la courbe linéaire soit égale à l'aire sous la courbe non linéaire. Pour chaque expression du travail, on peut ensuite distinguer trois façons de procéder (soit six méthodes distinctes) :

- méthode à saturation constante (figure 44) :



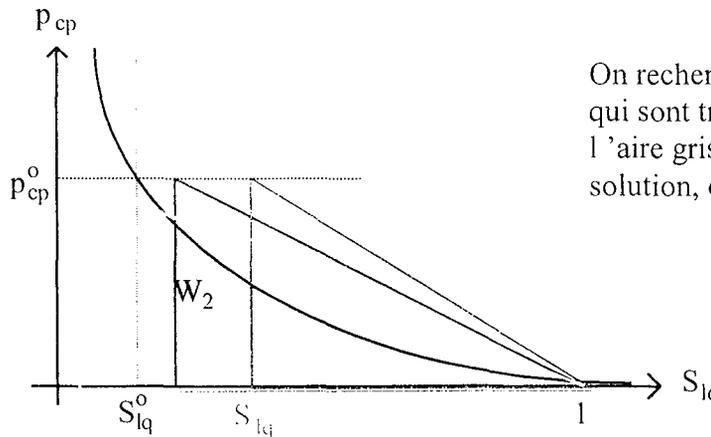
On recherche un triangle similaire à ceux qui sont tracés et dont l'aire est égale à l'aire grisée. Si le triangle rouge est la solution, on a alors :

$$p_{cp}^{ref} = p_{cp}$$

Figure 44. Méthode énergétique à saturation constante.

$$\left. \begin{aligned} \text{aire grisée} &= \int_{S_{lq}^o}^1 p_{cp} dS_{lq} = 10^{-2} \int_{S_{lq}^o}^1 \left[a \left(\frac{1}{S_{lq}} - 1 \right) \right]^{1/b} dS_{lq} \\ \text{aire rouge} &= \frac{p_{cp}^{ref} (1 - S_{lq}^o)}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_{cp}^{ref} \quad (3.3)$$

- méthode à pression capillaire constante (figure 45) :



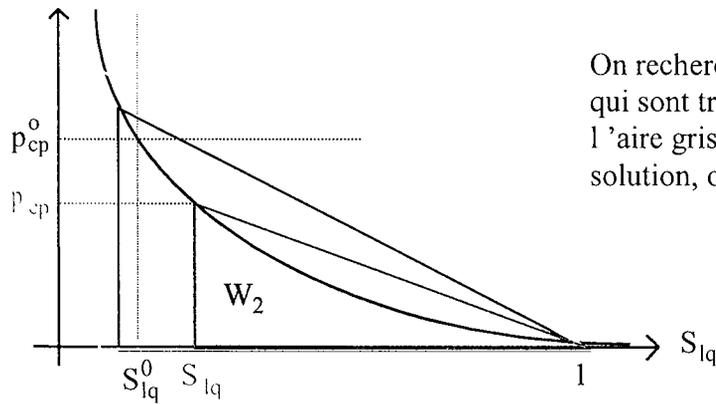
On recherche un triangle similaire à ceux qui sont tracés et dont l'aire est égale à l'aire grisée. Si le triangle rouge est la solution, on a alors :

$$S_{lq}^{ref} = S_{lq}$$

Figure 45. Méthode énergétique à pression capillaire constante.

$$\left. \begin{aligned} \text{aire grisée} &= \int_{S_{lq}^o}^1 p_{cp} dS_{lq} = 10^{-2} \int_{S_{lq}^o}^1 \left[a \left(\frac{1}{S_{lq}} - 1 \right) \right]^{1/b} dS_{lq} \\ \text{aire rouge} &= \frac{p_{cp}^o (1 - S_{lq}^{ref})}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{lq}^{ref} \quad (3.4)$$

- méthode avec point sur la courbe non linéaire (figure 46) :



On recherche un triangle similaire à ceux qui sont tracés et dont l'aire est égale à l'aire grisée. Si le triangle rouge est la solution, on a alors :

$$S_{lq}^{ref} = S_{lq}$$

$$p_{cp}^{ref} = p_{cp}$$

Figure 46. Méthode énergétique avec point sur la courbe non linéaire.

$$\left. \begin{aligned} \text{aire grisée} &= \int_{S_{lq}^0}^1 p_{cp} dS_{lq} = 10^{-2} \int_{S_{lq}^0}^1 \left[a \left(\frac{1}{S_{lq}} - 1 \right) \right]^{1/b} dS_{lq} \\ \text{aire rouge} &= \frac{p_{cp}^{ref} (1 - S_{lq}^{ref})}{2} \\ \text{et } S_{lq}^{ref} &= \frac{a}{a + (100 p_{cp}^{ref})^b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{lq}^{ref}, p_{cp}^{ref} \quad (3.5)$$

En superposant les sept méthodes exposées ci-dessus (figure 47), on constate que le résultat de la linéarisation est très différent. Il faut en choisir une pour la modélisation mais il est assez délicat de justifier son choix avec des arguments physiques. En fait, après avoir réalisé quelques simulations avec ces différentes méthodes, nous avons décidé de conserver la méthode qui semblait donner de meilleurs résultats, en l'occurrence la méthode énergétique en considérant le travail W_1 et le point de référence sur la courbe non linéaire.

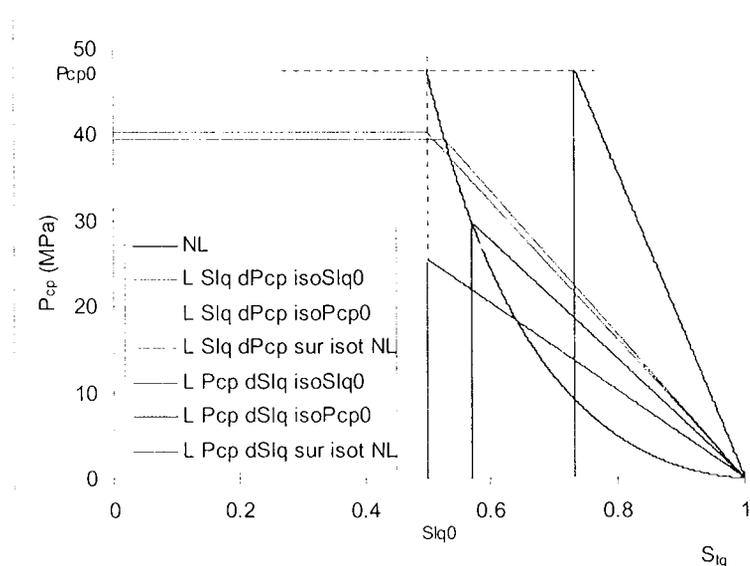


Figure 47. Les différentes méthodes de linéarisation de la courbe de pression capillaire.

3.2.3 - Application au cas particulier du bicouche BO-massif

Un problème se pose pour la linéarisation de la courbe de pression capillaire du massif dans le modèle bicouche car la saturation initiale est très proche de 1 ($1-\epsilon$), et par conséquent, si on prend un tel état comme point de référence, on obtient une pente quasi nulle et la saturation dans le massif reste toujours égale à 1. On peut représenter schématiquement sur les deux courbes linéarisées l'évolution de la saturation pour les deux matériaux à partir de l'état initial (points bleus), monotone (augmentation progressive jusqu'à saturation totale) pour la BO et non monotone (diminution puis retour vers la saturation totale) pour le massif.

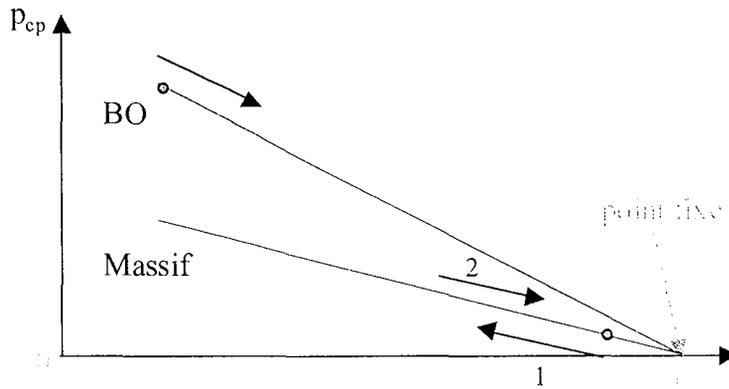


Figure 48. Schématisation du chemin de ressaturation dans les deux matériaux.

Du fait de la continuité de la pression capillaire entre les deux matériaux, et puisque la pression capillaire de la BO ne peut excéder celle du point de référence, on considère donc un nouveau point « initial » correspondant au point de pression capillaire maximale de la BO, puis on linéarise avec la même méthode que dans la BO (figure 49).

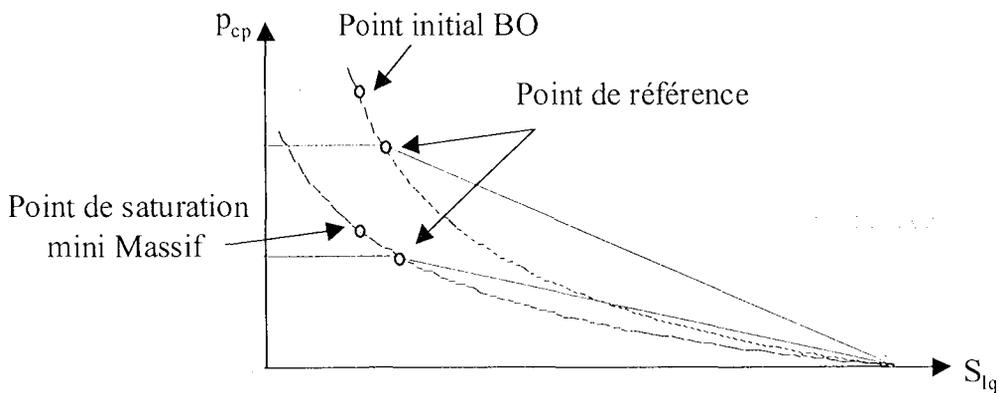


Figure 49. Linéarisation de la courbe de pression capillaire du massif.

3.3 - GEOMETRIES ET CONDITIONS AUX LIMITES

On considère deux modèles unidimensionnels en géométrie cylindrique, l'un monocouche et l'autre bicouche (figure 50).

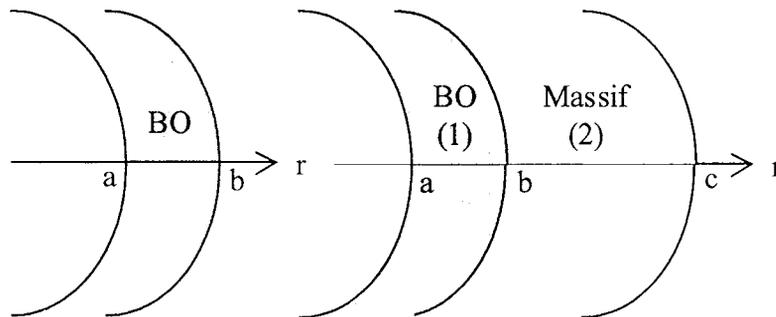


Figure 50. Géométries monocouche et bicouche.

Les données caractérisant la géométrie et les différentes conditions (aux limites, de continuité et initiales) sont les suivantes :

- dimensionnement :

$$a = 0.4\text{m}$$

$$b = 1.4\text{m}$$

$$c = 100 * b$$

(3.6)

- conditions aux limites (identiques pour les deux géométries) :

$$r = a : \frac{\partial p_{lq}}{\partial r} = 0, \frac{\partial p_{gz}}{\partial r} = 0 \quad (\text{débits nuls à la paroi du conteneur}) \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} r = b \text{ (monocouche)} \\ r = c \text{ (bicouche)} \end{array} \right\} : S_{lq} = 0.99, p_{gz} = p_{atm} \quad (3.8)$$

- conditions de continuité (pour le modèle bicouche) :

$$r = b : p_{lq}^{(1)} = p_{lq}^{(2)}, p_{gz}^{(1)} = p_{gz}^{(2)} \quad (3.9)$$

$$\underline{M}_{lq+vp}^{(1)} = \underline{M}_{lq+vp}^{(2)}, \underline{M}_{as}^{(1)} = \underline{M}_{as}^{(2)}$$

- conditions initiales :

$$p_{gz} = p_{atm}$$

La deuxième condition porte sur la saturation initiale de la BO et du massif (en bicouche). La BO est initialement partiellement saturée ($S_{lq} = 0.5$) quelle que soit la géométrie mais dans le modèle bicouche, on constate une discontinuité initiale de la saturation, comme le montre la figure 51. Ceci est une des justifications de l'utilisation de méthodes semi-explicites car, alors qu'une telle discontinuité initiale est relativement complexe à prendre en compte avec des méthodes de résolution analytiques (recours à des décompositions en série de Fourier), la résolution semi-explicite ne pose pas de problèmes.

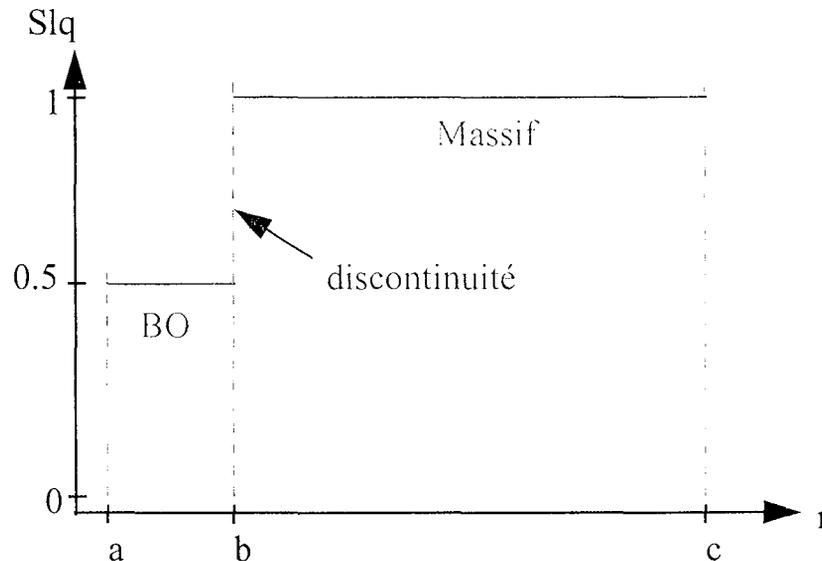


Figure 51. Discontinuité initiale de saturation du modèle bicouche.

3.4 - ETUDE MONOCOUCHE

3.4.1 - Modèle linéaire

3.4.1.1 - Principaux résultats

Dans l'approche linéaire, on est amené à diagonaliser une matrice de diffusion et les deux valeurs propres C_1 et C_2 ainsi trouvées permettent de calculer les deux temps caractéristiques τ_1 et τ_2 correspondant aux deux phénomènes de diffusion (Darcy et Fick). On peut alors montrer que les deux valeurs propres s'expriment en tant que combinaison linéaire des trois paramètres physiques caractéristiques de la diffusion du milieu, les deux conductivités au liquide et au mélange et le coefficient de Fick, puisque trace et déterminant de la matrice à diagonaliser se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} \text{tr} = A_1 \lambda_{lq} + A_2 \lambda_{gz} + A_3 F \\ \text{det} = B_1 \lambda_{lq} \lambda_{gz} + B_2 F \lambda_{lq} + B_3 F \lambda_{gz} \end{cases} \quad (3.10)$$

et chacune de ces valeurs propres correspond à un mode de diffusion : or, dans ce problème, ces deux valeurs ne sont pas du même ordre :

$$\begin{cases} C_1 = 5.75 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-1} \\ C_2 = 7.48 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2\text{s}^{-1} \end{cases} \quad (3.11)$$

Par conséquent, on peut en déduire que les phénomènes correspondant aux deux modes de diffusion interviennent sur des échelles de temps très différentes, et tout se passe presque comme si les deux modes étaient découplés : le premier se produit presque instantanément (le temps caractéristique est de l'ordre de l'heure pour un rayon b de 1.4 m) alors que le second est beaucoup plus lent (de l'ordre de la centaine d'années).

Pour comprendre alors quels sont les processus de diffusion qui interviennent majoritairement dans chaque mode, il suffit de considérer des valeurs très petites pour deux des caractéristiques (ce qui revient à annuler deux moteurs de la diffusion) et d'en conserver une à sa valeur puis de calculer la valeur propre correspondante (une des valeurs propres est bien sur nulle puisque l'on est ramené à un processus de diffusion simple) :

- diffusion simple de type Fick : $C = 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$
- diffusion simple de type Darcy pour le mélange : $C = 5.75 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$
- diffusion simple de type Darcy pour le liquide : $C = 7.2 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$

Il est alors évident que le mode 1 correspond à un processus de diffusion de type Darcy du mélange très rapide, ce qui va provoquer l'établissement presque instantanément de l'équilibre de la pression de mélange, et lorsque le mode 2 commencera, on pourra considérer que la pression de mélange est constante. Ce mode 2 est très proche d'un mode diffusif de type Darcy du liquide avec une petite influence de la diffusion de la vapeur dans le mélange selon la loi de Fick ($7.48 \cdot 10^{-10} \approx 7.2 \cdot 10^{-10} + \varepsilon \cdot 10^{-7}$). Le fait que la pression de mélange soit constante et égale à la pression atmosphérique est lié à la forte valeur de conductivité au mélange gazeux, mais cela ne serait plus valable pour des matériaux présentant une conductivité plus faible (Alonso et al., 1998).

3.4.1.2 - Etude de sensibilité

Le principe d'une étude de sensibilité menée grâce à des méthodes probabilistes a été présentée au chapitre 1. Elle nécessite de se fixer un événement qui constituera la fonction d'état limite. L'objet de cette étude étant de déterminer les facteurs jouant un rôle majeur dans le processus de ressaturation de la BO, nous avons choisi de considérer l'endroit dans la BO le plus éloigné du massif ($r = a$, interface colis/BO) puisqu'il correspond forcément au temps de ressaturation le plus long et de comparer la valeur de la saturation en ce point à une valeur seuil proche de la saturation totale au bout d'un temps donné (10 ans). L'événement est donc le suivant :

$$\ll S_{lq} > 0.95 \text{ en } r = a \text{ et } t = 10 \text{ ans} \gg \quad (3.12)$$

Il faut également choisir des intervalles de variation pour les variables d'entrée du modèle, sachant que le résultat de l'étude de sensibilité est fortement lié à l'étendue des différents domaines de variation. Une première façon de procéder est de considérer des intervalles d'extension équivalente pour toutes les variables, ce qui va permettre d'analyser, d'un point de vue théorique, l'influence des paramètres sur le modèle. On peut ensuite dans une deuxième approche déterminer les domaines de variation à partir des données expérimentales disponibles. Ceci va intéresser fortement l'industriel qui discriminer ainsi les paramètres prédominants dans l'état actuel de

connaissance, et pourra alors orienter éventuellement de nouvelles investigations pour déterminer plus précisément les paramètres les plus importants. On notera que pour les deux approches une loi uniforme caractérise la distribution de chaque paramètre dans son domaine de variation, ce qui revient à donner un même poids à toutes les valeurs de cet intervalle.

Le tableau 20 présente les domaines de variation choisis pour les différents paramètres du modèle monocouche en considérant les deux approches, théorique (domaines de variation de 20% de part et d'autre d'une valeur moyenne pour toutes les variables) et expérimentale (domaines de variation établis à partir des données expérimentales). Outre les paramètres de diffusion λ_{lq} , λ_{gz} et F , les variables que l'on prend en compte dans l'étude de sensibilité sont la saturation initiale et l'épaisseur de la BO.

Tableau 20. Domaines de variations des paramètres pour l'étude de sensibilité.

Variables	Valeur Moyenne	Approche théorique		Approche expérimentale	
		-20%	+20%	Mini.	Maxi.
<i>Comportement</i>					
F (m ² /s)	$5 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-7}$	10^{-8}	10^{-7}
λ_{gz} (m ² /Pa/s)	10^{-8}	$8 \cdot 10^{-9}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-10}$	$5.5 \cdot 10^{-6}$
λ_{lq} (m ² /Pa/s)	$5 \cdot 10^{-18}$	$4 \cdot 10^{-18}$	$6 \cdot 10^{-18}$	10^{-18}	$8.5 \cdot 10^{-18}$
S_{lq}^0	0.5	0.4	0.6	0.5	0.6
<i>Géométrie</i>					
b (m)	1.4	1.12	1.68	0.6	1.4

L'étendue des domaines de variation des différentes variables apparaît très différente selon le type d'approche, et il n'est donc pas très surprenant de trouver des résultats également très différents dans l'étude de sensibilité. Les calculs, menés avec le logiciel Proban (Olesen, 1992), ont permis de déterminer les facteurs d'importance des variables sur le critère. Les valeurs correspondant aux deux approches sont regroupées dans le tableau 21.

Tableau 21. Facteurs d'importance pour les approches théorique et expérimentale.

Variables	Facteurs d'importance (%)	
	Approche théorique	Approche expérimentale
F (m ² /s)	0.1	0.1
λ_{gz} (m ² /Pa/s)	0.0	0.0
λ_{lq} (m ² /Pa/s)	3.0	64.2
S_{lq}^0	77.9	0.1
b (m)	19.0	35.6

Dans l'approche théorique, on constate que les paramètres de diffusion (λ_{lq} , λ_{gz} et F) ont une influence négligeable sur le temps de ressaturation de la BO par rapport à la saturation initiale et l'épaisseur de la BO. Le rôle très important de la saturation initiale peut s'expliquer d'une part par le fait que le temps de ressaturation est d'autant plus court que la valeur initiale de la saturation est élevée, et d'autre part, S_{lq}^0 intervient à plusieurs reprises dans les matrices de couplage de capacité. La sensibilité du modèle à ce paramètre est donc grande et pour l'épaisseur de la BO, on peut mettre en avant que le front de ressaturation progresse plus rapidement dans la BO si la distance à parcourir est faible.

En revanche, l'approche expérimentale met en évidence l'importance de la conductivité au liquide, qui varie dans un domaine beaucoup plus large que $\pm 20\%$ autour d'une valeur moyenne. Bien que le domaine de variation des autres paramètres de diffusion soit également très étendu, on remarque que leur facteur d'importance est négligeable, ce qui traduit en fait que le phénomène majeur de diffusion est la diffusion du liquide par un processus de type Darcy généralisé.

On peut alors représenter une carte d'occurrence de l'événement dans le plan des deux paramètres les plus influençants λ_{lq} et b (figure 52).

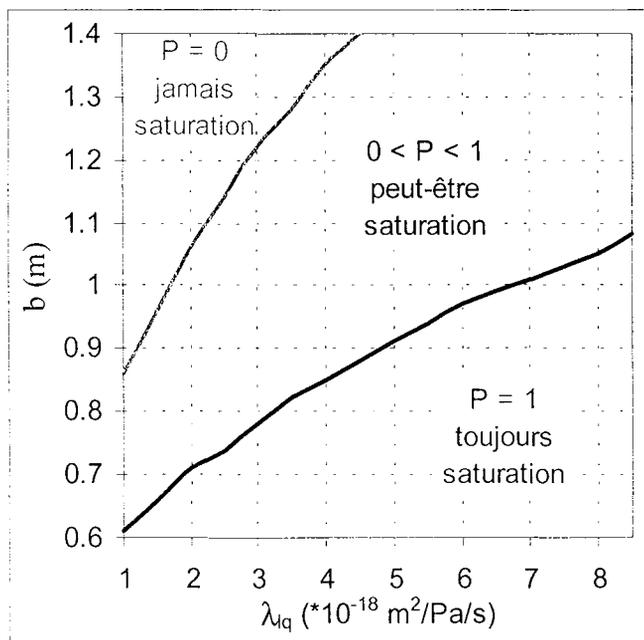


Figure 52. Carte d'occurrence de l'événement dans le plan des variables principales.

Cette carte permet de conclure que la saturation de la BO est toujours atteinte pour un dimensionnement suffisamment petit et une perméabilité au liquide suffisamment forte (domaine $P = 1$) quelles que soient les valeurs des autres paramètres.

Cette étude de sensibilité ayant été réalisée avec le modèle linéaire, toutes les variables sont indépendantes. La prise en compte des non-linéarités de comportement nécessiterait de considérer les dépendances entre paramètres mais l'étude de sensibilité est alors plus lourde et nécessite des méthodes numériques appropriées, telles que la méthode par surface de réponse (Lemaire, 1998).

3.4.2 - Comparaison du modèle linéaire et des modèles non linéaires

3.4.2.1 - Modèle avec courbe de pression capillaire non linéaire et conductivité au liquide constante

La notion de temps caractéristique n'a plus de sens dans le cas de problèmes non linéaires, mais on peut toujours comparer les deux valeurs propres qui sont alors fonction des inconnues du problème. De plus, comme la pression de mélange reste quasiment constante durant le phénomène de ressaturation, on peut en fait exprimer ces deux valeurs propres en fonction d'une seule inconnue, par exemple la saturation en liquide.

Comme la valeur propre importante dans ce problème, pour l'étude du temps de ressaturation, est la valeur C_2 , on a représenté, sur la figure 53, l'évolution du rapport de cette valeur propre obtenue pour les modèles non linéaire (C_{2NL}) et linéaire (C_{2L}).

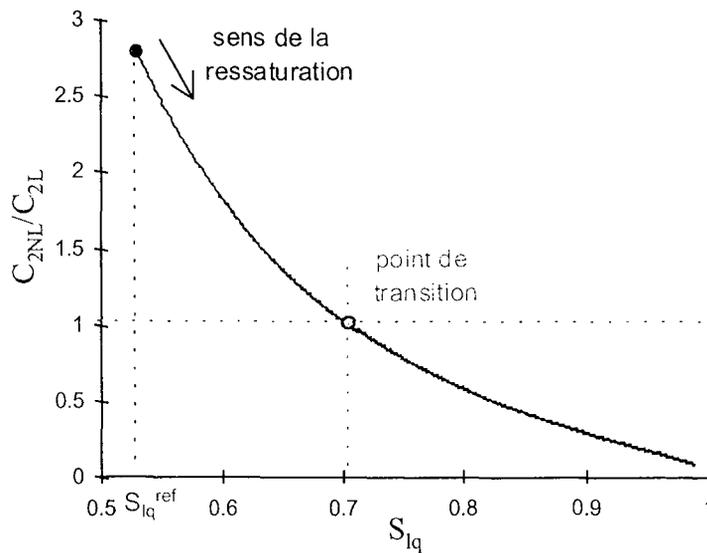


Figure 53. Evolution du rapport des valeurs propres linéaire et non linéaire.

Ceci est intéressant car on constate l'existence d'un point particulier (que l'on appellera point de transition) qui délimite deux domaines de saturation. Au début du phénomène de ressaturation, la saturation est égale à la saturation de référence et elle augmente progressivement. Avant le point de transition (soit $S_{lq} = 0.703$), le rapport est supérieur à 1 : la valeur propre non linéaire est donc supérieure à la valeur propre linéaire. Ce point de transition peut être rapproché d'un autre point que l'on appellera point de tangence et qui est mis en évidence sur la figure 54.

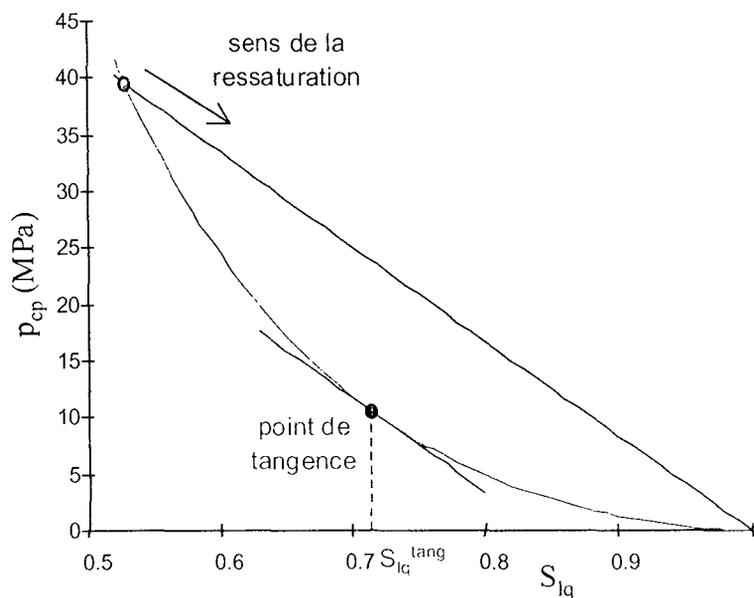


Figure 54. Courbe de pression capillaire et point de tangence.

Pour la partie du chemin de ressaturation en deçà du point de tangence ($S_{lq} \approx 0.717$), la pente de la courbe de pression capillaire non linéaire est plus forte que celle de la courbe linéaire, et par conséquent la ressaturation doit se faire plus rapidement en suivant le chemin non linéaire, puis la tendance s'inverse au-delà du point de tangence.

L'analyse de l'évolution spatiale de la saturation (figure 55) permet de confirmer les différentes observations précédentes (comparaison linéaire et non linéaire) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } S_{lq} \leq 0.7, \text{ ressaturation NL plus rapide que L} \\ \text{si } S_{lq} \geq 0.7, \text{ ressaturation L plus rapide que NL} \end{array} \right.$$

L'observation de ces évolutions comparées permet en outre de constater que finalement, à long terme, le modèle linéaire donne des temps de ressaturation plus petit que le modèle non linéaire.

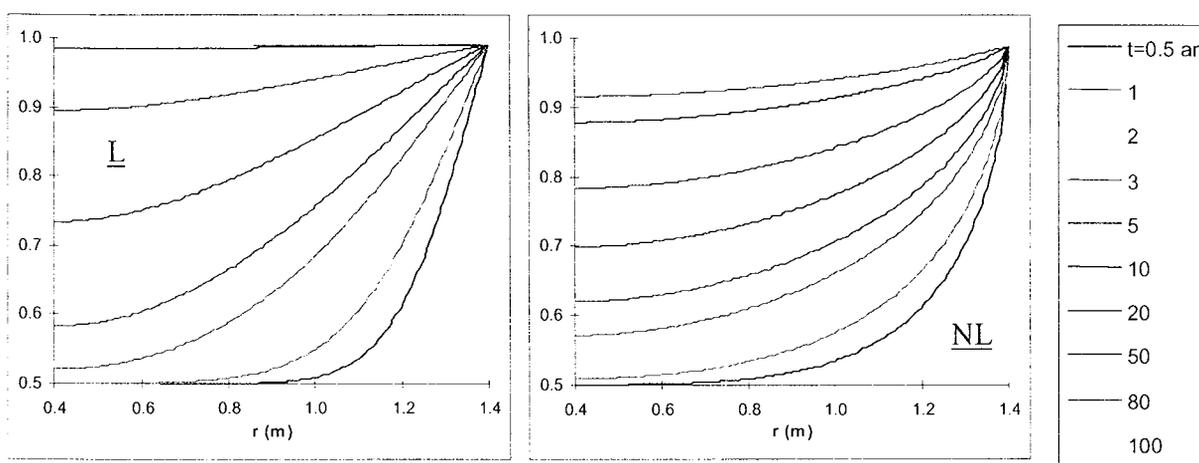


Figure 55. Distribution de la saturation : modèles L et NL avec λ_{lq} constant.

3.4.2.2 - Modèle avec courbe de pression capillaire linéaire et conductivité au liquide non linéaire

Dans le modèle linéaire, le choix de la valeur de conductivité au liquide est fait au point de référence. Or l'évolution non linéaire de cette conductivité avec la saturation est une fonction monotone croissante (puisque décroissante en fonction de la pression capillaire), ce qui permet d'en déduire que la conductivité au liquide sera plus élevée dans le modèle non linéaire que dans le modèle linéaire, et que de plus, cet écart va aller en augmentant au fur et à mesure de la ressaturation (figure 56).

Ce que l'on observe sur la conductivité au liquide se répercute de façon analogue sur la cinétique de ressaturation, comme le montre la figure 57, comparant le modèle linéaire et le modèle avec la conductivité au liquide non linéaire. Il est alors évident que dans le cas où la conductivité n'est pas prise au point de référence mais pour une saturation plus élevée, on observera le même type de phénomène que pour la courbe de pression capillaire, avec la présence d'un point de transition.

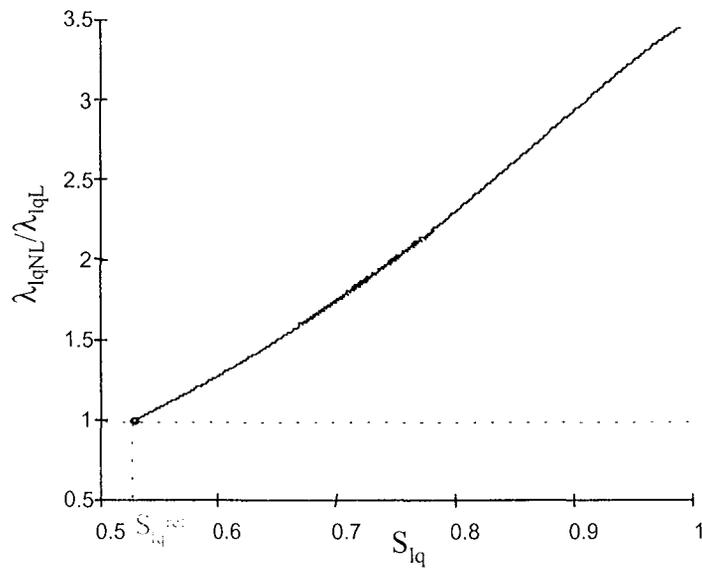


Figure 56. Evolution du rapport des conductivités au liquide L et NL.

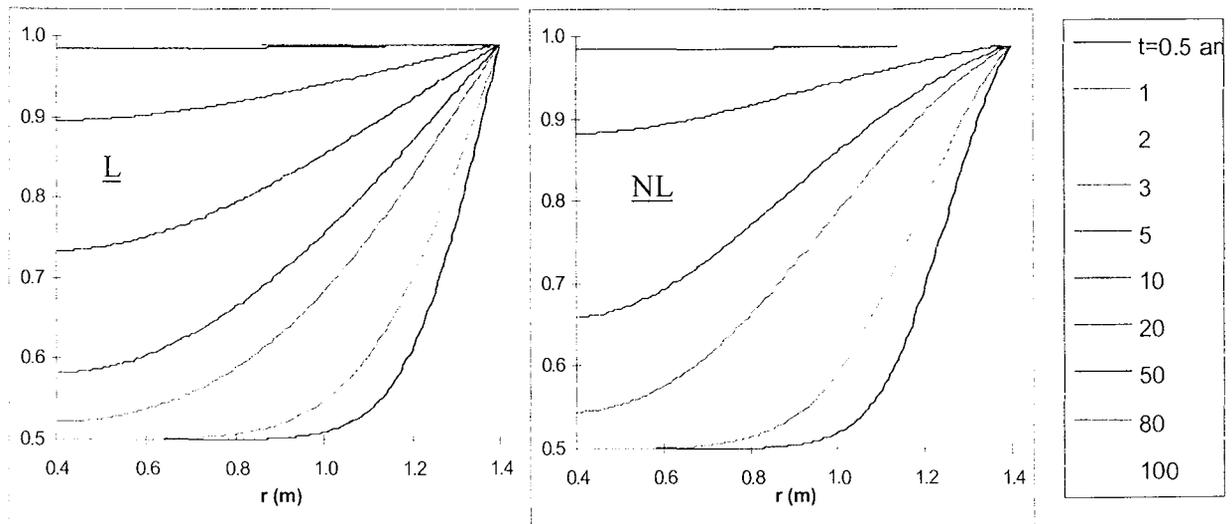


Figure 57. Distribution de la saturation : modèle L et modèle avec λ_{liq} NL.

3.4.2.3 - Modèle avec les deux non-linéarités

On a pu mettre en évidence que la prise en compte individuelle des deux non-linéarités se traduisait par des effets opposés sur le calcul des temps de ressaturation, et il est donc intéressant de savoir dans quelle mesure ces effets vont se compenser lorsque l'on considère les deux non-linéarités. On a donc représenté sur la figure 58 la comparaison entre les modèles linéaire et non linéaire.

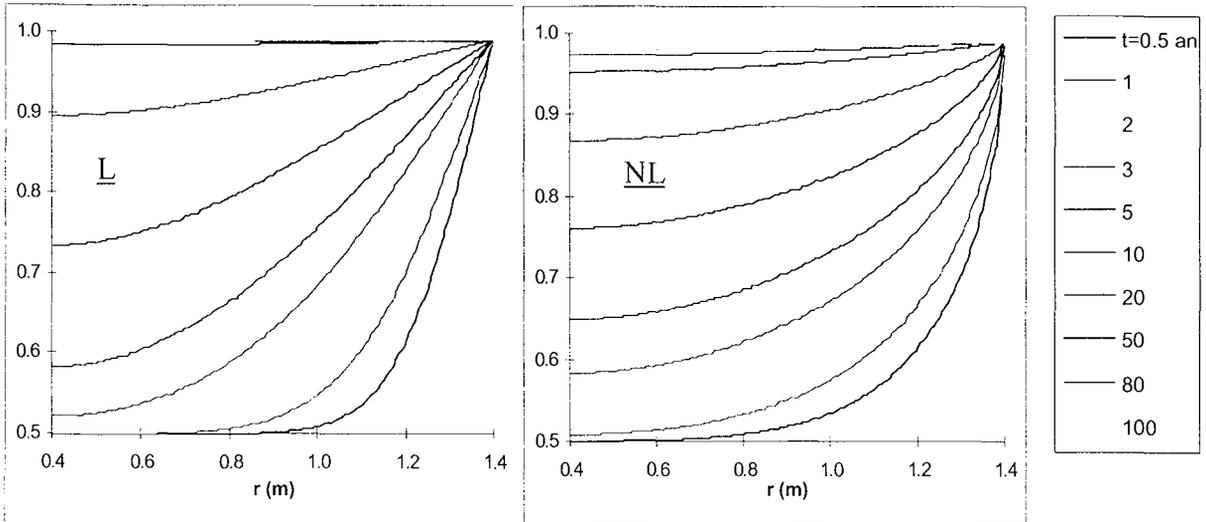


Figure 58. Distribution de la saturation : modèles L et NL.

On constate que le modèle linéaire n'est globalement pas très différent du modèle non linéaire et que l'estimation des temps de ressaturation à la paroi interne de la BO à partir d'un modèle simplifié linéaire conduit à donner des résultats du même ordre de grandeur. Le tableau 22 donne la valeur de la saturation au niveau de la paroi intérieure ($r = 0.4$) obtenue avec les différents modèles :

Tableau 22. Comparaison de la saturation obtenue avec les modèles L et NL.

Temps (années)	10	20	50	80
Modèle L	0.73	0.89	0.98	0.99
Modèle avec isot. et λ_{lq} NL	0.76	0.87	0.95	0.98

3.5 - ETUDE BICOUCHE

3.5.1 - Différences entre les modèles monocouche et bicouche

Il y a une différence fondamentale entre les modèles monocouche et bicouche en ce sens que le massif n'est pris en compte qu'au niveau des conditions aux limites dans le modèle monocouche : on impose la condition de saturation totale uniquement sur la paroi extérieure c du modèle. Dans la modélisation bicouche, on peut, d'une part, mettre en évidence des propriétés différentes pour les deux matériaux, mais d'autre part, sur la paroi extérieure de la BO, qui correspond alors à l'interface entre BO et massif, on impose des conditions de continuité sur les pressions et les flux de fluides (eau et air sec).

La figure 59 montre les évolutions spatiales comparées de la saturation uniquement dans la BO ($a < r < b$) pour les deux modèles linéaires.

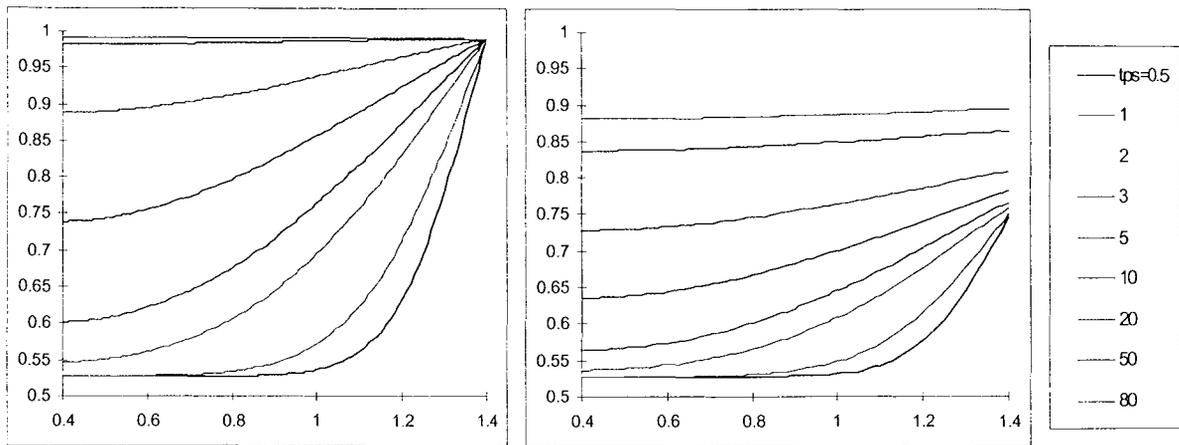


Figure 59. Distribution de la saturation dans la BO : modèles mono et bicouche.

On constate tout d'abord que le front de saturation ne se propage pas de la même façon dans les deux modèles, surtout pour des temps grands. En outre, on peut également souligner que le temps de ressaturation est nettement inférieur dans le cas d'un modèle bicouche, ce que l'on peut attribuer aux propriétés différentes du massif.

3.5.2 - Modèle linéaire

3.5.2.1 - Principaux résultats

La figure 60 représentant l'évolution temporelle de la saturation pour différents rayons (quatre premières courbes = BO, cinquième = interface, six dernières = massif) montre que l'on retrouve bien le phénomène mis en avant lors de la linéarisation de la BO et du massif, à savoir les évolutions monotone de la BO et non monotone du massif.

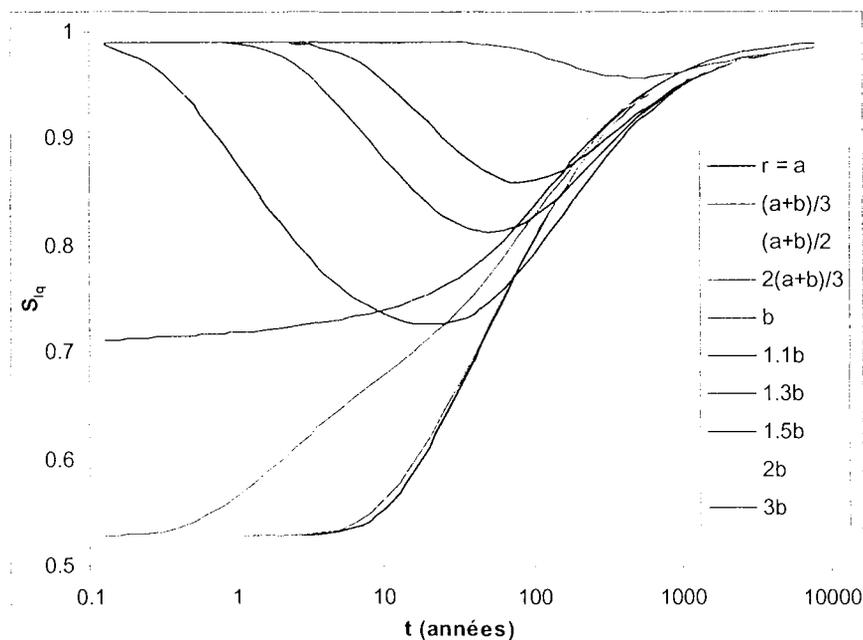


Figure 60. Evolution temporelle de la saturation.

De plus, cette figure permet d'appréhender la zone d'influence de la ressaturation dans le massif. En effet, on voit que pour un rayon $r = 5b$, la saturation reste quasiment totale (> 0.98) quel que soit le temps et on peut donc en conclure que le massif n'est pas affecté par ce phénomène de ressaturation de la BO au-delà de $10b$.

Si on représente les évolutions spatiales de la pression capillaire et de la saturation en liquide (figure 61), on remarque que l'on assure bien la continuité de la pression capillaire à l'interface entre les deux matériaux et la discontinuité observée pour la saturation traduit l'influence des deux pentes distinctes des deux courbes de pression capillaire linéarisées.

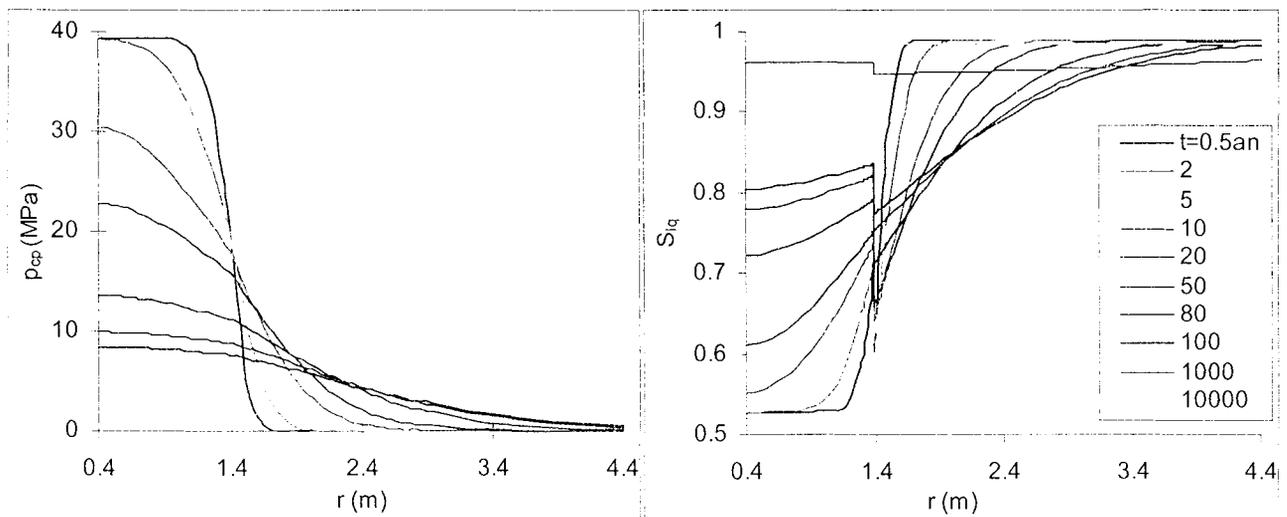


Figure 61. Distribution de la pression capillaire et de la saturation.

Il est intéressant de noter que l'état de saturation dans la BO s'homogénéise au bout d'une centaine d'années et, à partir d'un tel temps, on peut donc estimer que le temps de ressaturation est indépendant de l'abscisse du point considéré (la saturation est la même en bordure du colis et à l'interface avec le massif).

En outre, alors que la ressaturation semble relativement rapide dans sa phase de démarrage (on passe de 0.5 à 0.8 pour une durée de 100 ans environ), ensuite on vérifie que le temps de ressaturation est très sensible au critère que l'on se fixe : en effet, selon que l'on considère que la saturation est atteinte à partir de 0.90, 0.95 ou 0.99, le temps de ressaturation varie d'un facteur 1 à 10.

De plus, on constate que le massif, initialement saturé, présente une saturation qui chute et peut se rapprocher de la valeur initiale de la BO, notamment à proximité de l'interface aux temps petits.

3.5.2.2 - Analyse de sensibilité des paramètres du modèle

L'analyse de sensibilité sur le modèle monocouche a montré, par l'approche expérimentale, que les deux paramètres les plus importants sur la cinétique de ressaturation étaient la surface extérieure b et la conductivité au liquide λ_{liq} de la BO. On a donc considéré ces deux paramètres dans l'étude

de sensibilité du modèle bicouche en y ajoutant la saturation initiale de la BO (elle était peu importante dans la première étude mais on la prend tout de même en compte car la linéarisation des courbes de pression capillaire en modèle bicouche est plus complexe) et le rapport de conductivité massif/BO (noté $r\lambda_{lq}$) pour tenir compte de la conductivité du massif. Enfin, on prend également en compte le seuil de saturation : il n'intervient pas en tant que paramètre du modèle mais en tant que critère (son traitement par le logiciel Proban est le même que pour les autres variables). Les intervalles de variation des cinq variables sont donnés dans le tableau 23.

Tableau 23. Intervalles de variation pour l'analyse de sensibilité.

Variable	Intervalle de variation	Unité
<i>Comportement</i>		
Conductivité au liquide de la BO	$[10^{-18} \dots 8.5.10^{-18}]$	$m^2/Pa/s$
Rapport de conductivité massif/BO	$[10^{-2} \dots 10^2]$	1
Saturation initiale de la BO	$[0.50 \dots 0.60]$	1
<i>Géométrie</i>		
Interface BO/massif	$[0.6 \dots 1.4]$	m
<i>Critère</i>		
Seuil de saturation	$[0.90 \dots 0.98]$	1

De plus, on étudie également l'influence des courbes de pression capillaire de la BO et du massif en considérant une seule courbe pour la BO mais trois courbes différentes pour le massif (figure 62). Ceci permet de prendre en compte la position relative des courbes de pression capillaire de la BO et du massif (isoM1 : $a = 60.9$, $b = 0.538$; isoM2 : $a = 175$, $b = 0.61$; isoM3 : $a = 2840$, $b = 0.91$). Enfin, de manière à distinguer les cinétiques lentes et rapides, on a réalisé l'analyse de sensibilité à des temps différents (10, 50, 100 et 1000 ans). Ainsi, on a réalisé 3 (courbes de pression capillaire du massif) \times 4 (temps), soit douze études de sensibilité avec cinq variables.

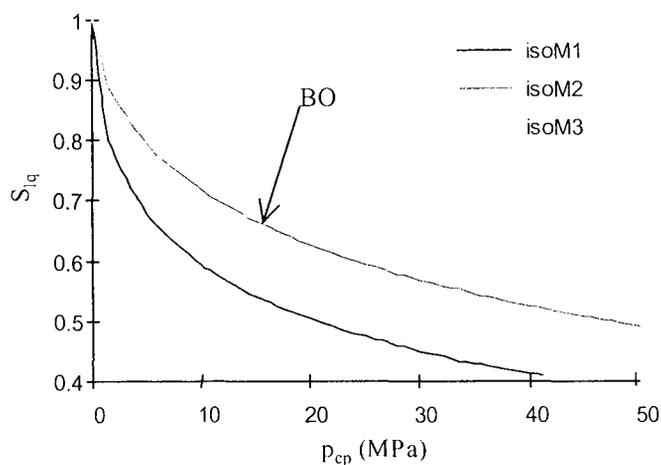


Figure 62. Les trois courbes de pression capillaire du massif pour l'étude de sensibilité.

Reste maintenant à préciser les événements sur lesquels on va étudier l'influence de ces variables, et d'après les résultats obtenus précédemment, on en a fixé deux : le tableau 24 précise ces événements et leur justification.

Tableau 24. Evénements de l'analyse de sensibilité.

Evénements	Justification
$S_{lq} > \text{seuil}$ en $r = a$	Temps de ressaturation de la BO au point le plus long à ressaturer (interface conteneur/BO)
$S_{lq} > 0.98$ en $r = 2b$ et $r = 5b$	Extension de la zone perturbée du massif

Critère 1 : $S_{lq} > \text{seuil}$ en $r = a$

Un premier résultat intéressant concerne les différentes cinétiques de ressaturation : la figure 63 présente les facteurs d'importance des cinq variables pour les quatre temps 10, 50 100 et 1000 ans avec la courbe de pression capillaire isoM1 du massif.

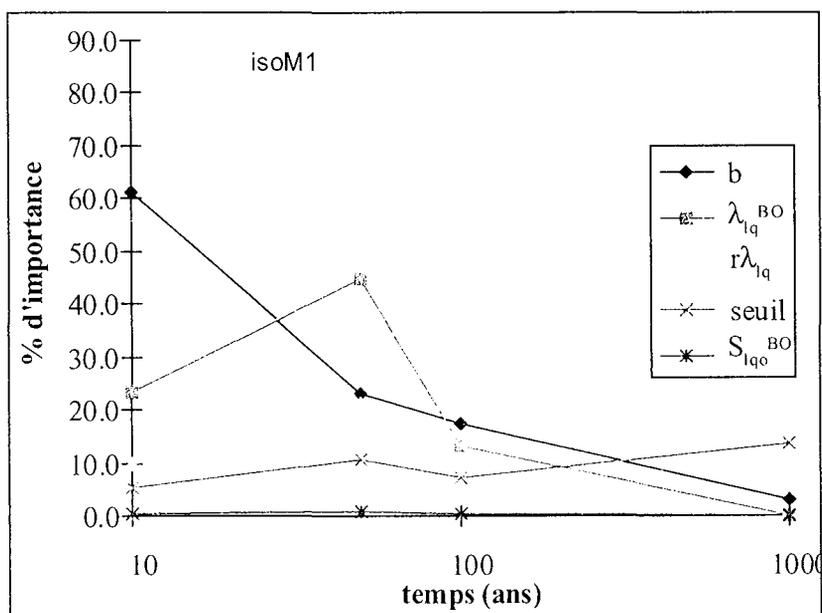


Figure 63. Facteurs d'importance en fonction du temps.

On constate que les couples de facteurs les plus importants sont différents à 10 ans (cinétique rapide), à 100 ans (cinétique moyenne) et à 1000 ans (cinétique lente). Les deux paramètres prépondérants à 10 ans sont ceux qui avaient été déjà mis en évidence pour la même valeur du temps avec le modèle monocouche, et on se rend compte que le poids de ces variables chute progressivement au cours du temps, au profit du rapport de conductivité massif/BO vers 100 ans puis du seuil de saturation à 1000 ans.

On peut alors tenter une explication physique en avançant que pour les cinétiques rapides, c'est la BO, par l'intermédiaire de son épaisseur et de sa conductivité au liquide, qui gouverne principalement le phénomène de ressaturation, alors que pour des cinétiques plus lentes, c'est la conductivité du massif qui devient progressivement le moteur de la ressaturation, puis enfin, à plus long terme, le seuil de saturation, pour lequel on a montré qu'il pouvait y avoir un facteur 10 entre les temps de ressaturation à 0.95 et 0.98. Le poids de la variable seuil de saturation est néanmoins à nuancer car on aurait certainement trouvé un facteur d'importance beaucoup plus élevé si on avait considéré un intervalle de variation [0.9 ... 0.99].

L'influence de la position relative des courbes de pression capillaire du massif et de la BO est montrée sur la figure 64.

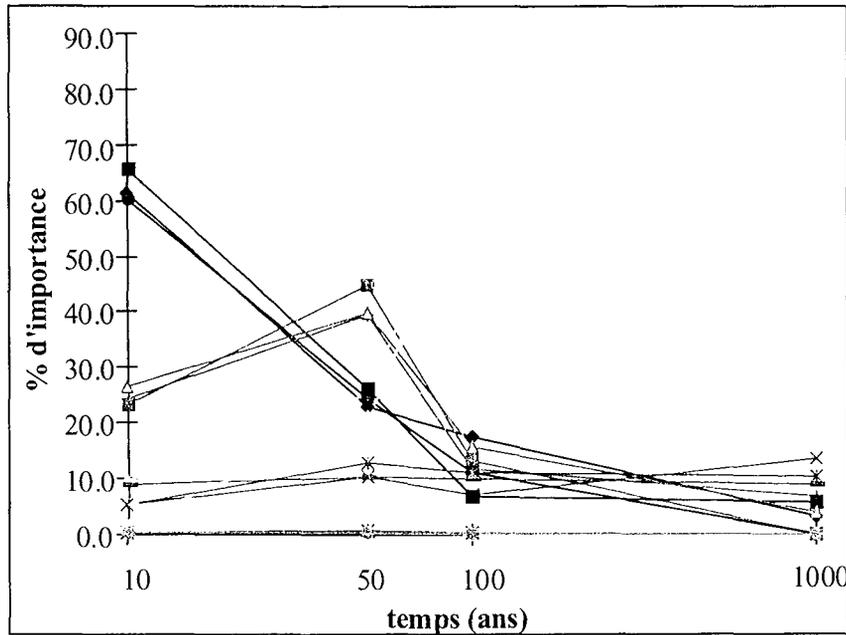


Figure 64. Influence des courbes de pression capillaire sur les facteurs d'importance.

Le fuseau des facteurs d'importance de chaque variable est très resserré, ce qui montre, de façon discrète, le faible poids du choix de la courbe de pression capillaire du massif, et on pourrait, sans faire une forte approximation, considérer une même courbe pour le massif et la BO.

Une fois les facteurs d'importance déterminés, on peut alors représenter les zones d'occurrence de l'événement dans le plan des deux variables principales, ce qui conduit à trois plans différents pour les trois cinétiques considérées (figures 65, 66 et 67). Par exemple, sur la figure 65, si on choisit un couple (b, λ_{lq}) dans la zone « événement jamais réalisé », alors quelles que soient les valeurs des autres variables du modèle, l'événement ne sera jamais réalisé.

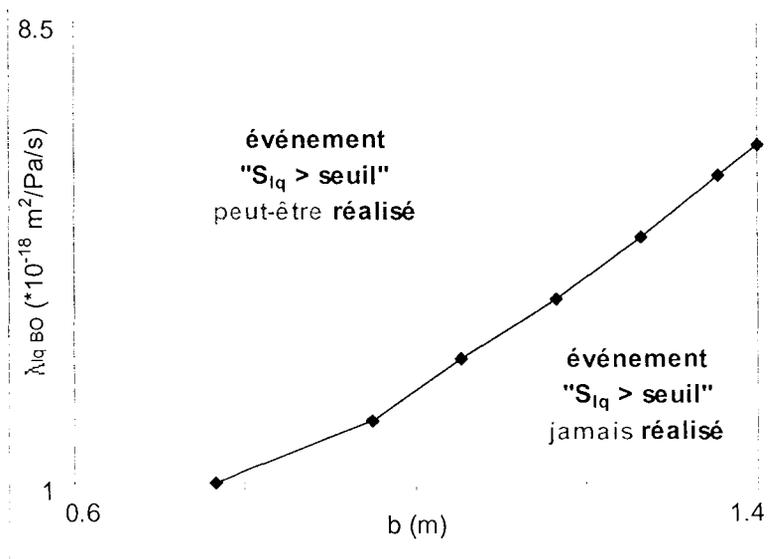


Figure 65. Plan des variables principales à 10 ans.

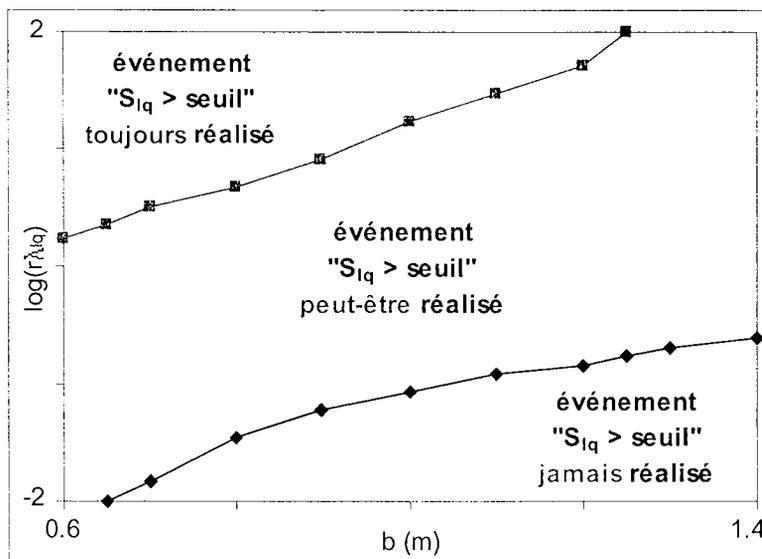


Figure 66. Plan des variables principales à 100 ans.

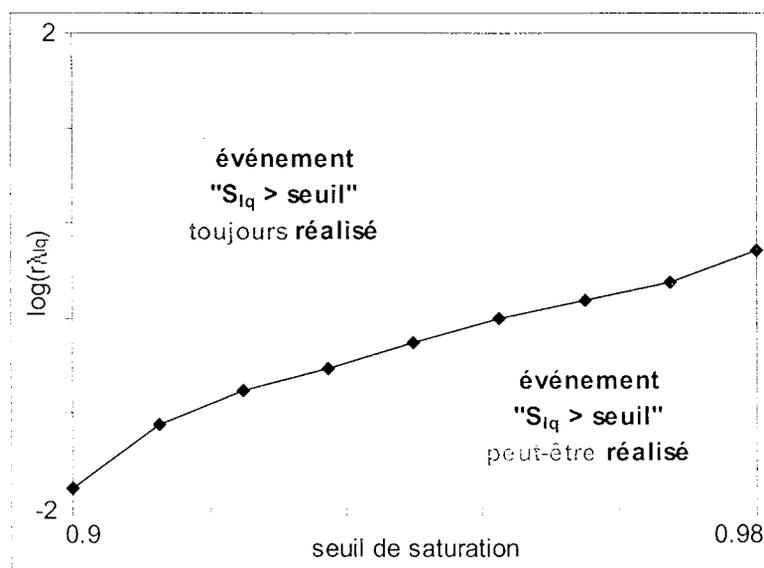


Figure 67. Plan des variables principales à 1000 ans.

Le fait de pouvoir déterminer des facteurs d'importance grâce aux méthodes probabilistes de Proban permet de trouver rapidement les variables principales, et on peut alors représenter, de façon discrète, une carte de saturation dans le plan de ces variables principales.

Les figures 68 et 69 en montrent un exemple à 10 ans et à 100 ans.

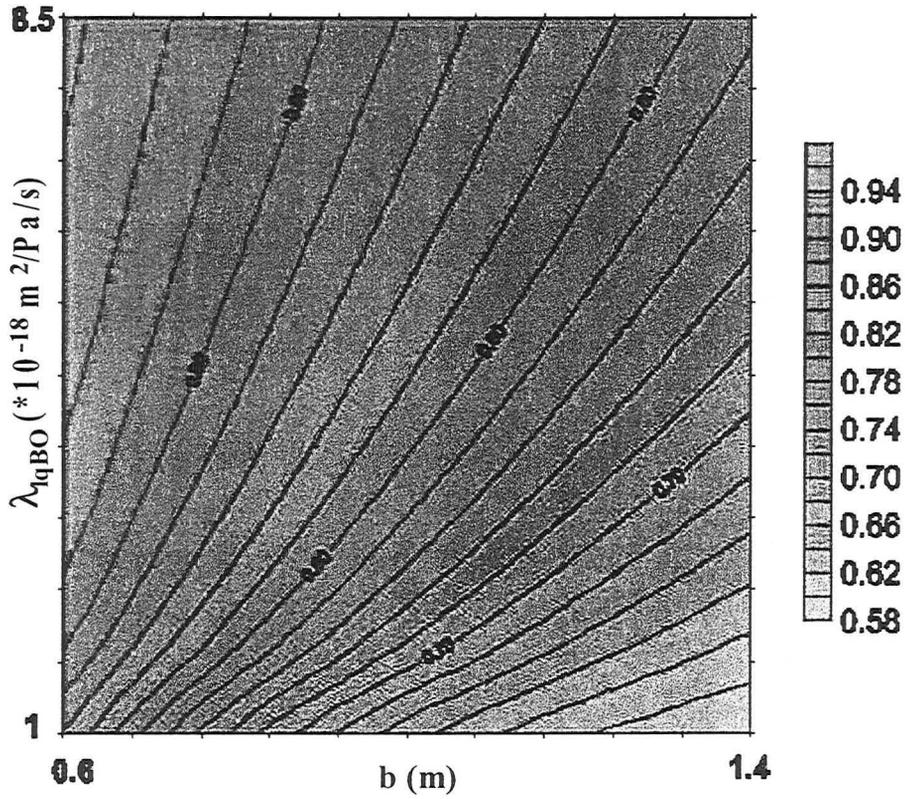


Figure 68. Saturation dans le plan (b, λ_{lq}) à 10 ans.

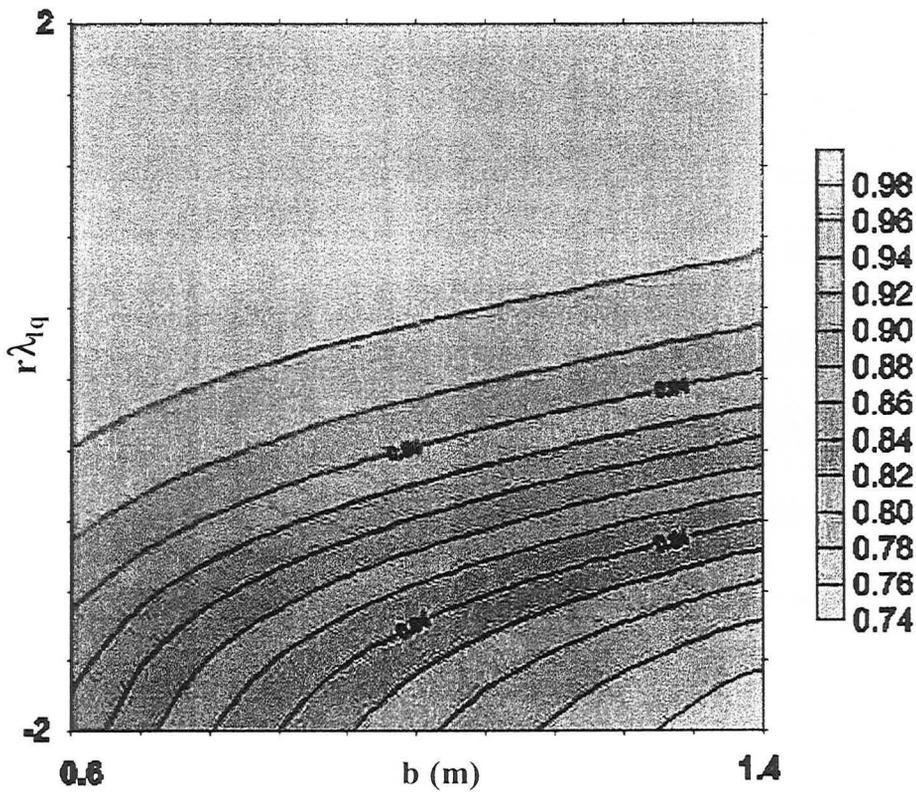


Figure 69. Saturation dans le plan $(b, r\lambda_{lq})$ à 100 ans.

Critère 2 : $S_{lq} > 0.98$ en $r = 2b$ et $r = 5b$

En $r = 5b$, les résultats démontrent que l'événement est toujours réalisé (à 99%) quelles que soient les valeurs des différentes variables : par conséquent, au delà d'un rayon $5b$, on peut considérer que le massif n'est jamais affecté par le phénomène de ressaturation de la BO (au sens du critère 2).

En $r = 2b$, ceci n'est plus vrai comme le montre la figure 70 représentant la probabilité d'occurrence de l'événement en fonction du temps et pour les différentes courbes de pression capillaire du massif, surtout à court terme.

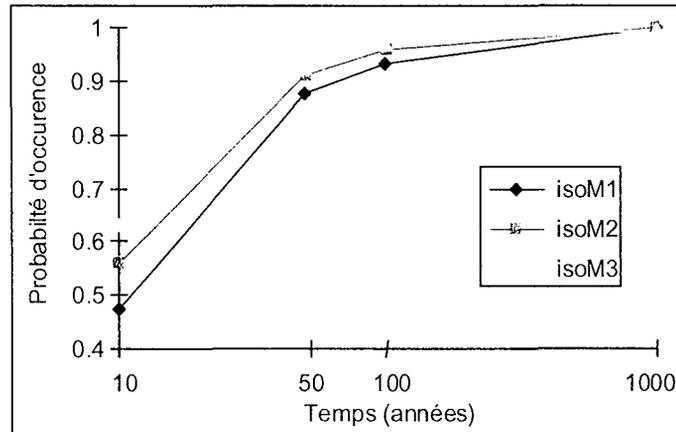


Figure 70. Probabilité d'occurrence de l'événement.

Il est donc intéressant d'analyser les facteurs d'importance qui montrent qu'une variable a un poids nettement supérieur aux autres et d'autant plus fort que le temps augmente : il s'agit du rapport de conductivité entre massif et BO (figure 71), ce qui s'explique physiquement assez facilement. En effet, il était prévisible que la cinétique de ressaturation soit gouvernée dans le massif essentiellement par la conductivité du massif.

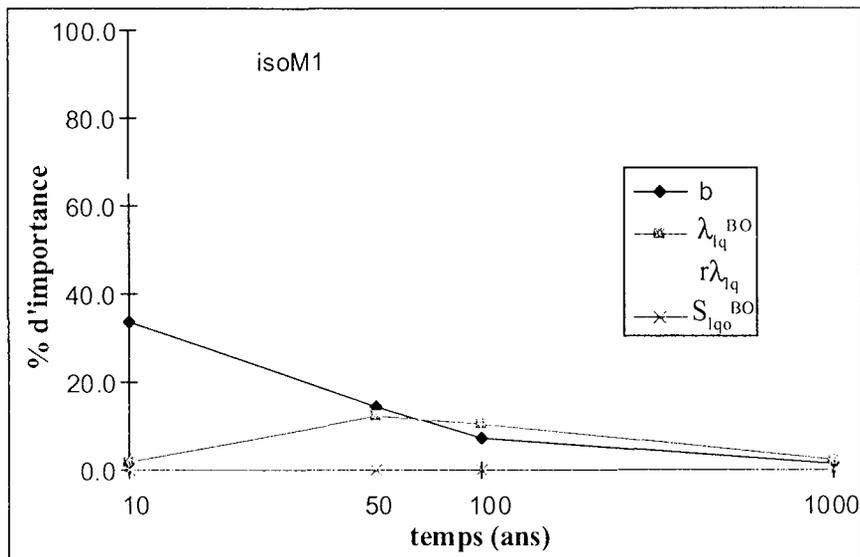


Figure 71. Facteurs d'importance en fonction du temps.

Ce résultat est particulièrement intéressant puisqu'il montre qu'une caractérisation expérimentale de la conductivité hydraulique du massif, en condition de saturation partielle, est indispensable pour le problème de ressaturation à long terme du modèle bicouche BO/massif.

On peut représenter le plan des variables principales, par exemple à 50 ans (figure 72) : on constate que la limite entre les deux zones est proche de l'horizontale ce qui traduit le fort poids d'une des deux variables de ce plan.

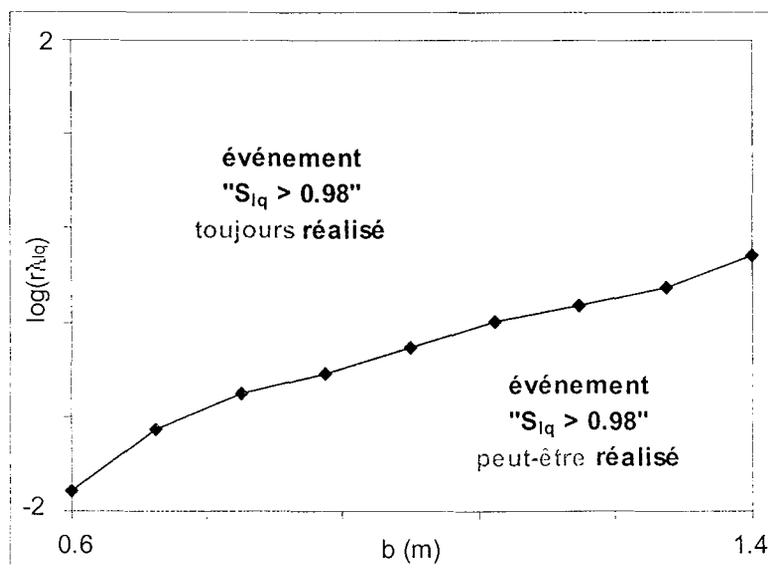


Figure 72. Plan des variables principales à 50 ans.

3.5.2.3 - Comparaison avec une étude de sensibilité discrète non linéaire

Une étude similaire avait été menée par Lassabatère (1998) au CEA en considérant un modèle bicouche non linéaire avec les mêmes discontinuités de paramètres entre la BO et le massif mais une même courbe de pression capillaire pour ces deux matériaux. De plus, les couplages H→M sont pris en compte. Le problème a été résolu avec le logiciel CESAR. La figure 73 montre un exemple de ces résultats : les temps de ressaturation y sont présentés en fonction de la conductivité de la BO et du rapport de conductivité entre BO et massif (avec une épaisseur de BO de 1 m, un seuil de saturation de 0.99 et une saturation de 1 à l'infini).

Par analogie, et de manière à comparer les ordres de grandeurs des temps de ressaturation, nous avons réalisé le même graphique (figure 74) mais avec deux courbes de pression capillaire différentes, une condition aux limites de 0.99 (des instabilités numériques liées à un mauvais conditionnement des matrices de couplage ne permettent pas de prendre en compte une saturation plus proche de 1) et un seuil de 0.985.

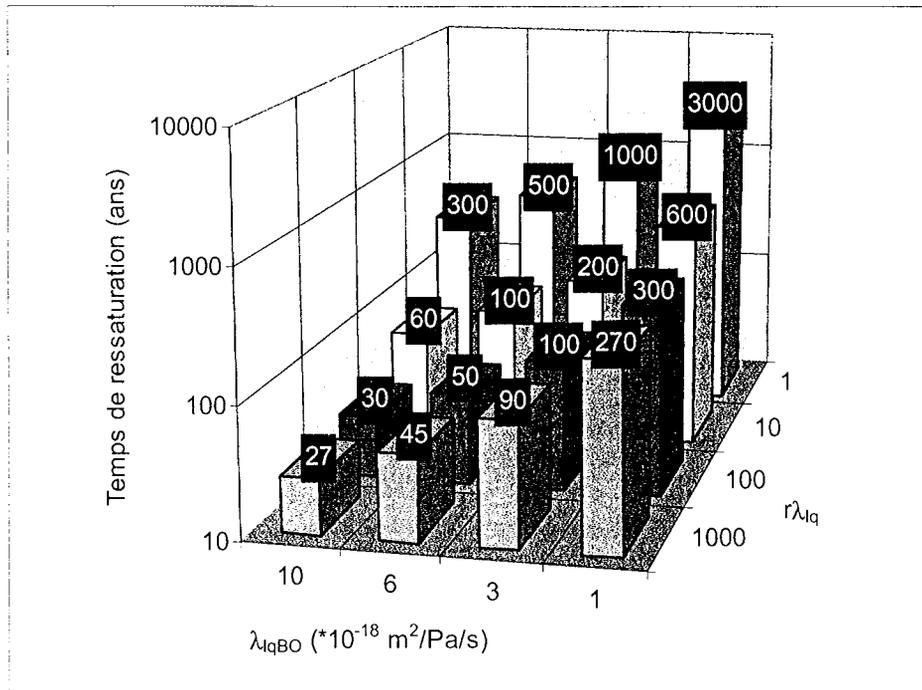


Figure 73. Temps de ressaturation (résultats CEA).

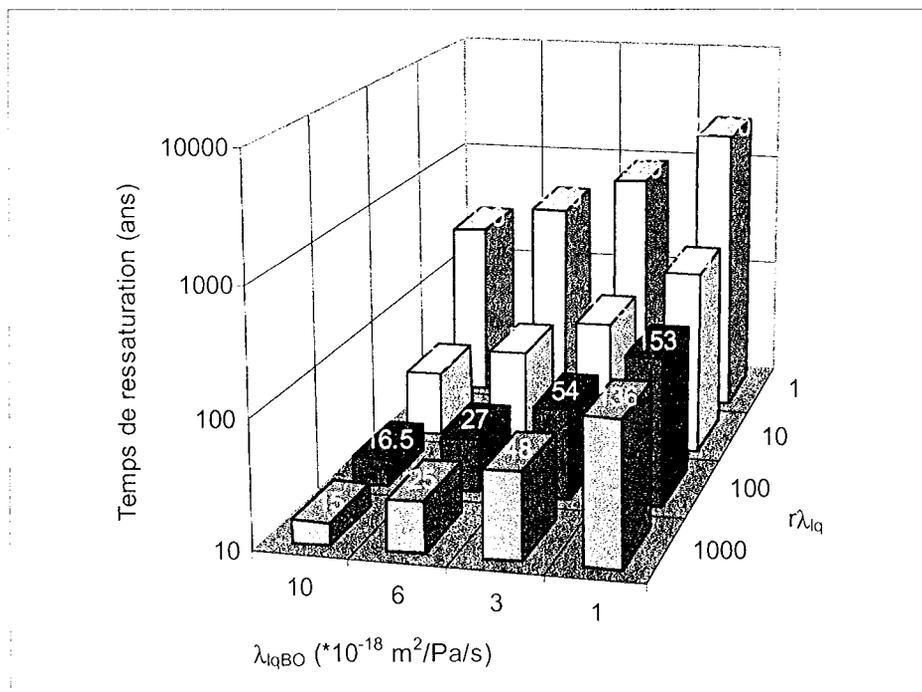


Figure 74. Temps de ressaturation (solutions semi-explicites).

En tenant compte des différences entre les deux modèles, et notamment de la condition aux limites sur la saturation et de la sensibilité du temps de ressaturation au seuil que l'on choisit, on peut estimer que les résultats sont du même ordre, ce qui permet de justifier a posteriori l'hypothèse de découplage mécanique.

On observe, pour un rapport de conductivité massif/BO donné, un facteur de proportionnalité (environ 10) entre le temps de ressaturation et la conductivité au liquide de la BO, et il en va de même pour une conductivité au liquide donnée entre le temps de ressaturation et le rapport de conductivité massif/BO (un peu plus de 10 pour l'étude non linéaire et un peu moins de 20 pour l'étude linéaire) : on met ainsi en évidence deux lois linéaires régissant l'évolution du temps de ressaturation.

3.5.3 - Modèle non linéaire

3.5.3.1 - Discrétisations spatiale et temporelle

Les calculs non linéaires ont été réalisés avec PARSAT en utilisant un maillage reliant les extrémités a et c du modèle par 197 éléments comme le montre la figure 75. En fait, un maillage plus fin, avec un nombre double de nœuds a été testé mais il s'est avéré que ce raffinement n'apportait pas de différences significatives. En outre, la taille de ces éléments a été déterminée selon une progression géométrique pour mettre en place des éléments plus petits dans la BO et plus grossiers quand on avance dans le massif.

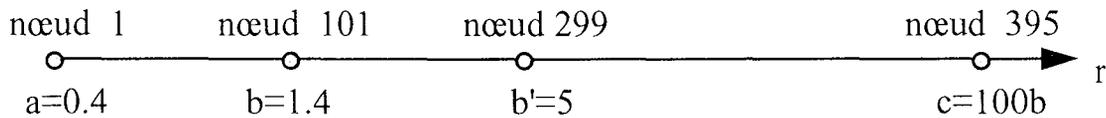


Figure 75. Maillage du modèle 1D bicouche .

En ce qui concerne la discrétisation temporelle du modèle, nous avons réalisé les calculs avec 500 instants de calcul selon un schéma de type implicite. Deux variantes ont été testées avec PARSAT. En effet, la discrétisation temporelle d'une fonction $f(t)$ quelconque consiste à interpoler linéairement la fonction entre t_{n-1} et $t_n = t_{n-1} + \Delta t$ par :

$$f(t_{n-1} + \beta_t \Delta t) = (1 - \beta_t) f_{n-1} + \beta_t f_n \quad \forall \beta_t \in [0,1] \quad \text{avec } f_n = f(t_n)$$

On a considéré $\beta_t = 1$ pour tous les calculs mais pour la première méthode, il n'y a pas de test de convergence (un seul calcul par pas de temps) alors que pour la seconde, un test de convergence (test sur p_{1q} , tolérance = 10^{-5}) est utilisé et on a donc une résolution de type point fixe.

Ces deux méthodes ont bien sur été testées et la figure 76 en donne une représentation comparée. La méthode la plus adaptée à ce genre de calculs non linéaires correspond au schéma implicite, puisque celui-ci procède par calculs itératifs autour d'un point fixe jusqu'à l'obtention d'une erreur relative inférieure à une certaine tolérance fixée par l'utilisateur : les temps de calculs sont donc un peu plus longs mais l'erreur relative par le schéma explicite peut atteindre 1%.

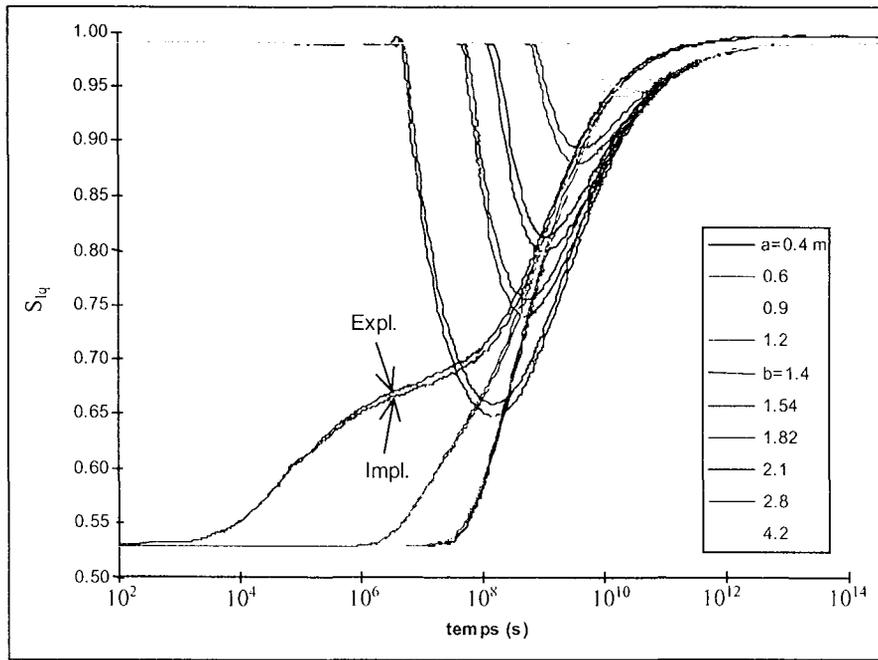


Figure 76. Comparaison des schémas implicite et explicite.

3.5.3.2 - Nécessité du lissage de la courbe de pression capillaire non linéaire

L'état initial discontinu qui caractérise le problème de ressaturation bicouche pose un problème numérique concernant le nœud de l'interface : en effet, les inconnues nodales (pressions partielles de liquide et de mélange) ne sont pas définies en ce point (en rouge sur la figure 77).

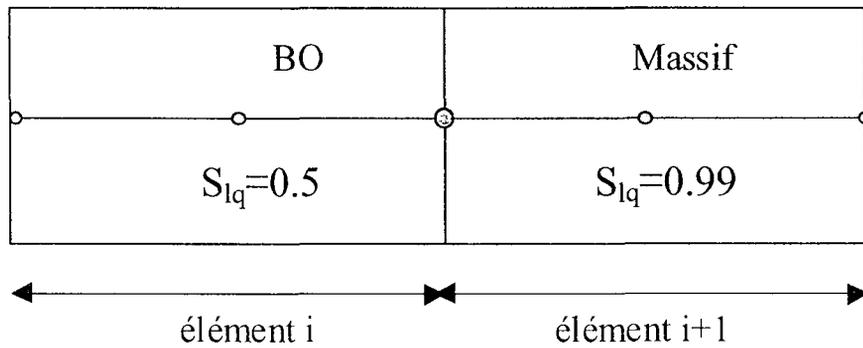


Figure 77. Problème du nœud de l'interface BO/massif.

On choisit de lui affecter les valeurs de la BO : la discontinuité de saturation se traduit par l'intermédiaire de la courbe de pression capillaire par une discontinuité de pression capillaire. Les pressions qui sont alors affectées aux 3 nœuds de l'élément i+1 sont celles de la figure 78.

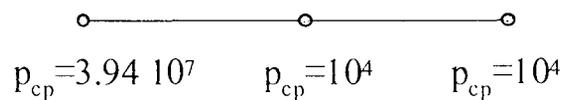


Figure 78. Valeurs calculées aux nœuds de la pression capillaire pour l'élément $i+1$.

Un point important, au niveau des calculs non linéaires, est que les différentes matrices sont fonction de la saturation, elle-même fonction de la pression capillaire. Cette pression capillaire est calculée par interpolation dans chaque élément fini et l'interpolation de la pression capillaire sur l'élément $i+1$ (intervalle réduit avec $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$) conduit à des pressions capillaires négatives entre $\frac{r_1 + r_2}{2}$ et r_2 (figure 79).

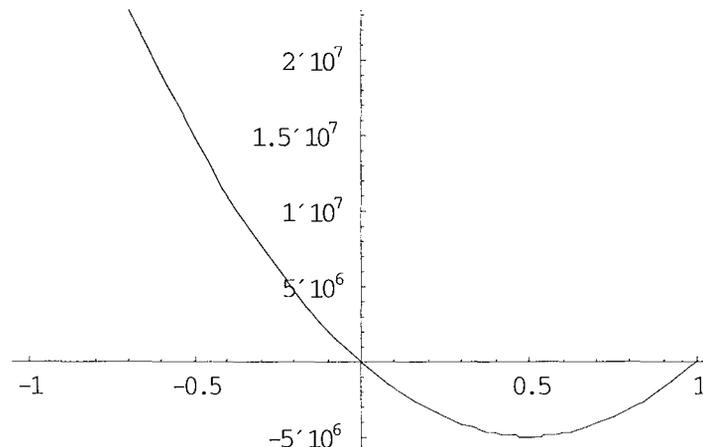


Figure 79. Interpolation de la pression capillaire sur l'élément de contact $i+1$.

Ces pressions capillaires négatives n'ont pas de sens physique mais elles sont autorisées numériquement puisqu'elles correspondent au cas saturé. En revanche, pour des raisons mathématiques liées à l'expression de la courbe de pression capillaire, la saturation n'est pas définie sur cette partie de l'élément.

Un lissage numérique s'impose de manière à prendre en compte ces pressions négatives. Le principe de ce lissage consiste à modifier l'allure de la courbe de pression capillaire au voisinage de la saturation (un lissage analogue est présenté par Giraud, 1996). Pour le calcul numérique, on considère que pour des pressions inférieures à une pression notée p_{cpo}^a , la courbe est remplacée par une autre courbe qui tend vers 1 mais pour des pressions tendant vers $-\infty$ (et non plus en 0) :

$$\begin{cases} S_{lq} = \frac{a}{a + (p_{cp}^a)^b} & \text{pour } p_{cp}^a \geq p_{cpo}^a \\ S_{lq} = 1 - \alpha(\gamma - p_{cp}^a)^\beta & \text{pour } p_{cp}^a < p_{cpo}^a \end{cases} \quad (3.13)$$

et il faut donc calculer les 3 paramètres α , β et γ de manière à assurer :

- la continuité de la saturation en p_{cpo}^a
- la continuité de la dérivée de la saturation en p_{cpo}^a
- $S_{lq}(0) = S_{lqo} = 1 - \epsilon$

Les figures 80 et 81 représentent les lissages obtenus respectivement pour le massif et la BO, ainsi que les paramètres correspondants.

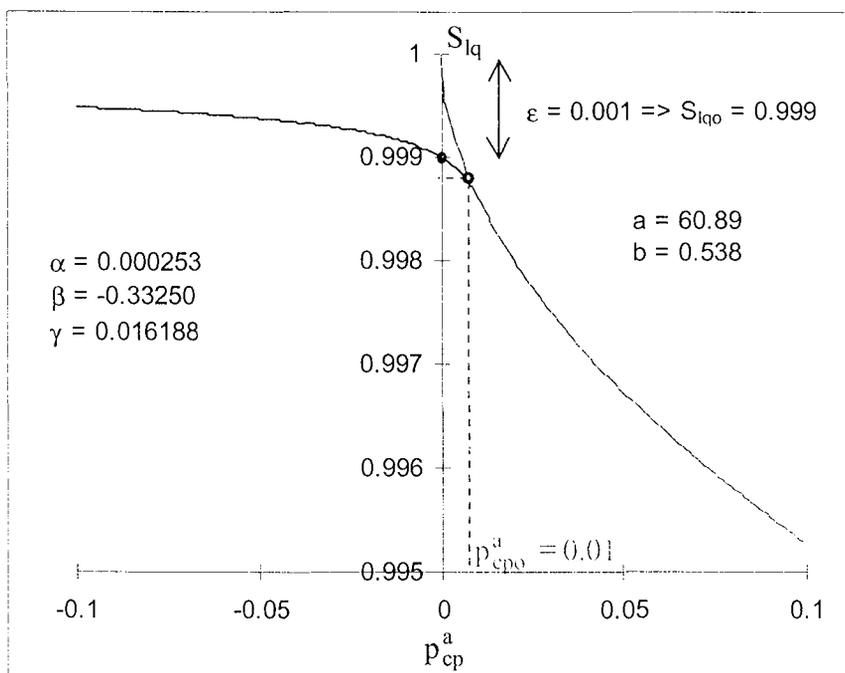


Figure 80. Lissage de la courbe de pression capillaire du massif : $\varepsilon = 0.001$ et $p_{cp0}^a = 0.01$

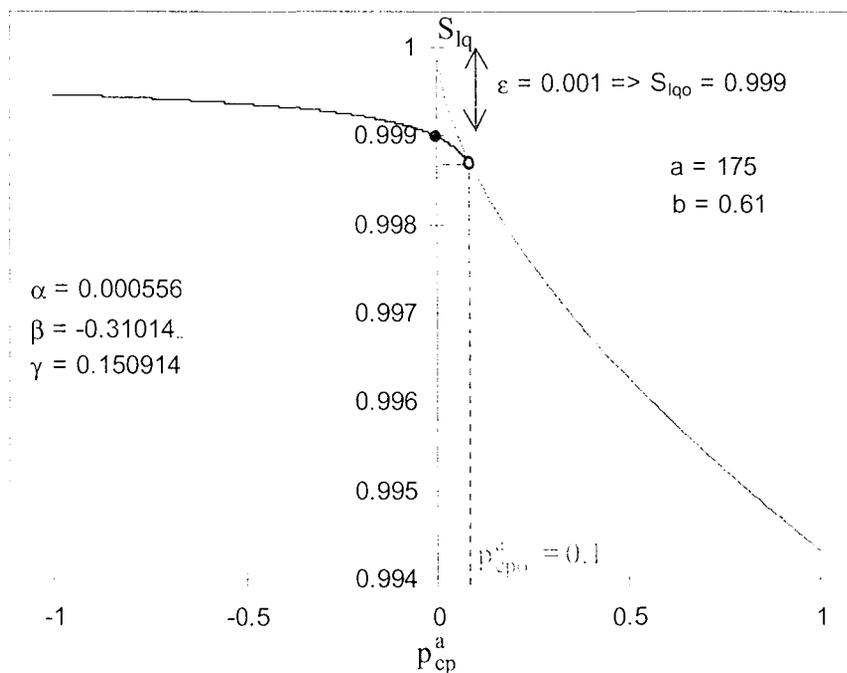


Figure 81. Lissage de la courbe de pression capillaire de la BO : $\varepsilon = 0.001$ et $p_{cp0}^a = 0.1$

3.5.3.3 - Comparaison linéaire/non linéaire

La figure 82 représente les évolutions spatiales et temporelles des modèles linéaires et non linéaires à la paroi interne de la BO. Au vu de ces coupes et courbes, on constate que les allures sont globalement les mêmes. La cinétique linéaire apparaît plus rapide que la cinétique non linéaire quel que soit le temps ou le rayon considéré, mais en fait, ce qui nous intéresse, c'est le temps de resaturation et la conductivité au liquide a été linéarisée de manière à ce que les temps de resaturation linéaire et non linéaire soient comparables, et non pas toute la cinétique.

Par conséquent, on peut comparer les temps de resaturation obtenus avec les deux modèles pour un seuil de 0.98 et constater que les ordres de grandeur sont tout à fait comparables.

- modèle linéaire : 2470 ans
- modèle non linéaire : 2800 ans

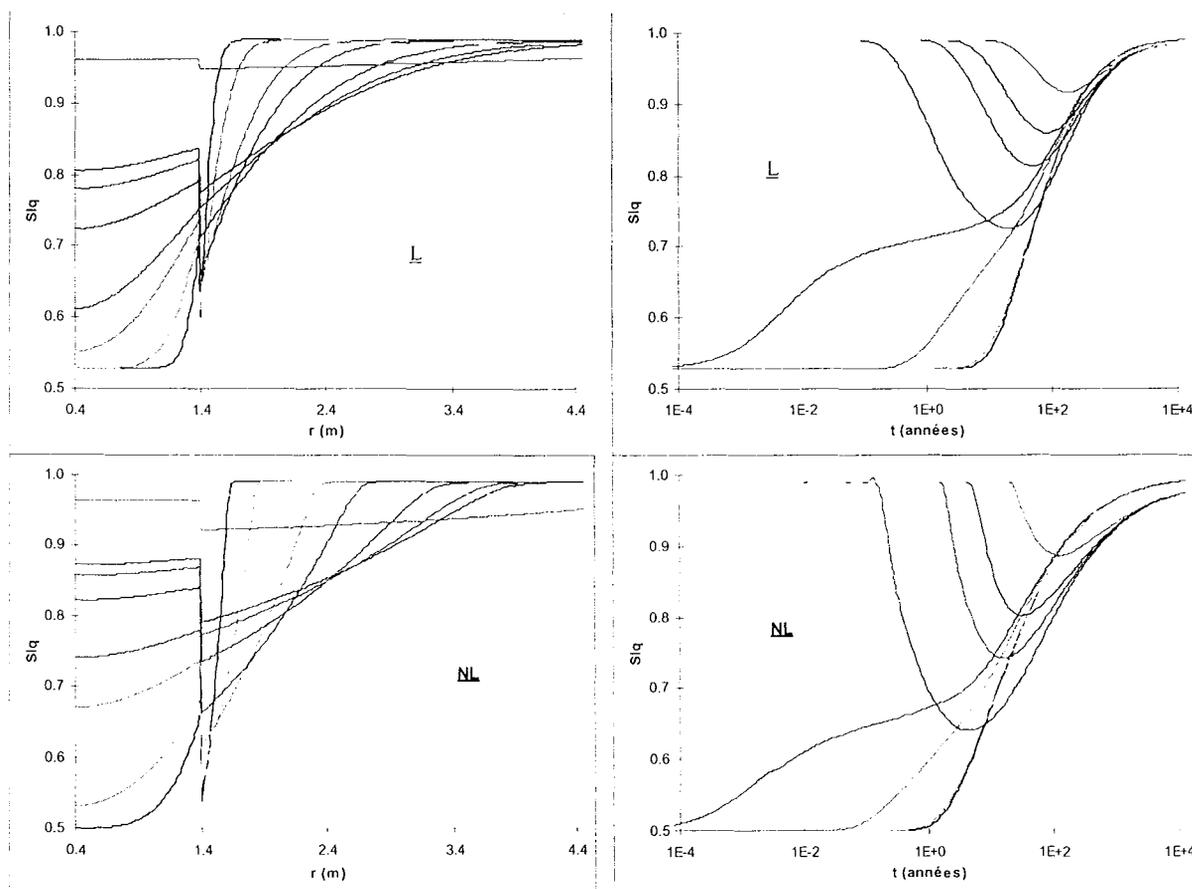


Figure 82. Evolutions temporelles et spatiales de saturation L et NL ($r = a$).

3.5.3.4 - Etude de sensibilité discrète de quelques paramètres du modèle

Un des avantages des solutions semi-explicites avec le modèle linéarisé est que l'on peut le coupler avec le logiciel Proban du fait de la rapidité du calcul. Pour le modèle non linéaire, ce couplage serait très lourd. La démarche suivie a consisté à réaliser à l'aide du modèle non linéaire une étude de sensibilité discrète sur les variables principales déterminées à l'aide du modèle linéaire.

Par exemple, l'influence de l'épaisseur de la BO est montrée sur la figure 83. On retrouve des résultats et des observations similaires au modèle linéaire mais il est intéressant d'observer l'évolution de la saturation au niveau de la paroi du conteneur ($r = a$) pour estimer l'importance de la variable b sur le temps de resaturation (figure 84)

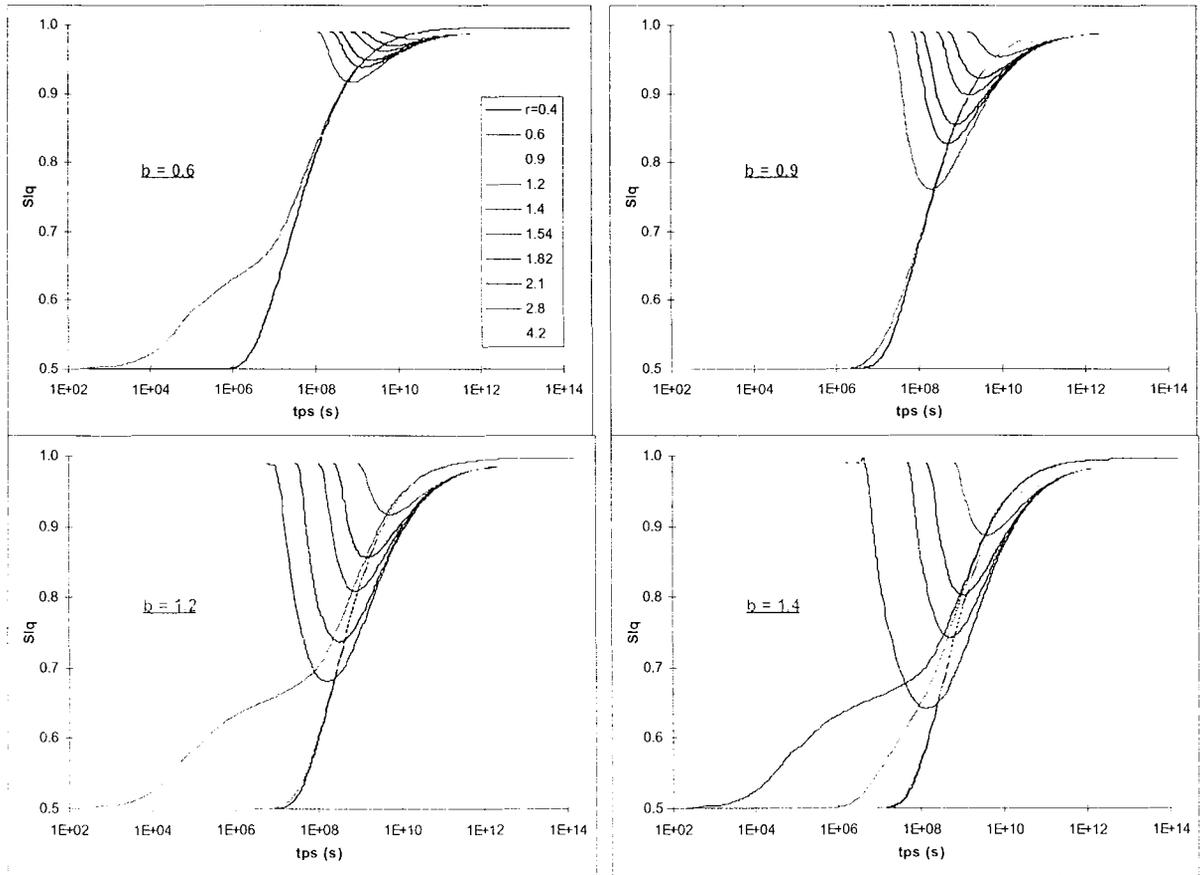


Figure 83. Etude de sensibilité discrète de la variable b .

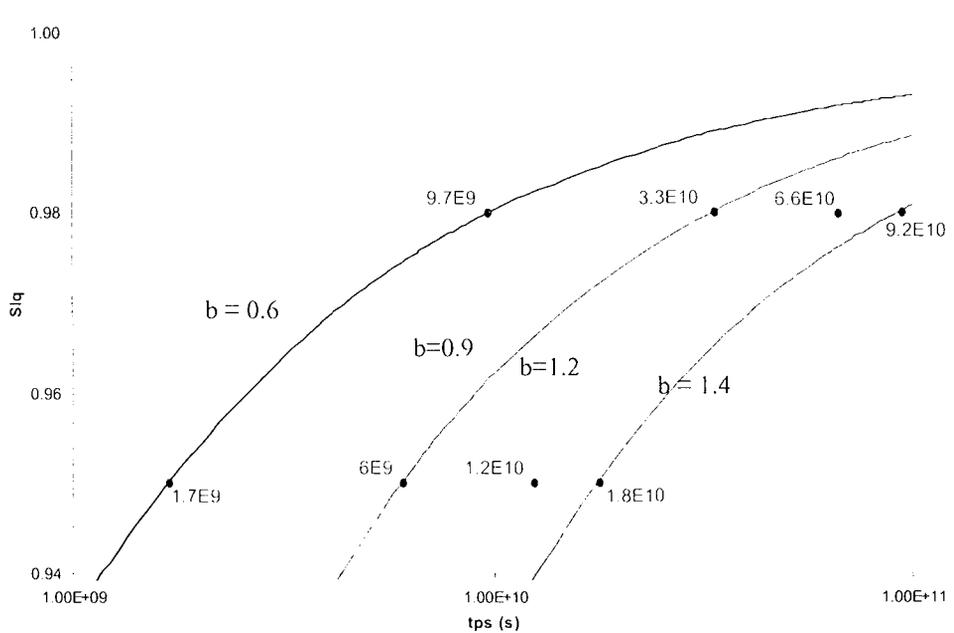


Figure 84. Influence de b sur le temps de ressaturation.

On constate que le temps de ressaturation varie d'un facteur 10 entre les deux valeurs extrêmes de l'épaisseur de BO pour chaque seuil considéré, mais aussi d'un facteur 10 pour une même valeur de b d'un seuil à l'autre.

De même, l'influence du rapport de conductivité entre le massif et la BO intervient dans des proportions voisines, comme le montre la figure 85.

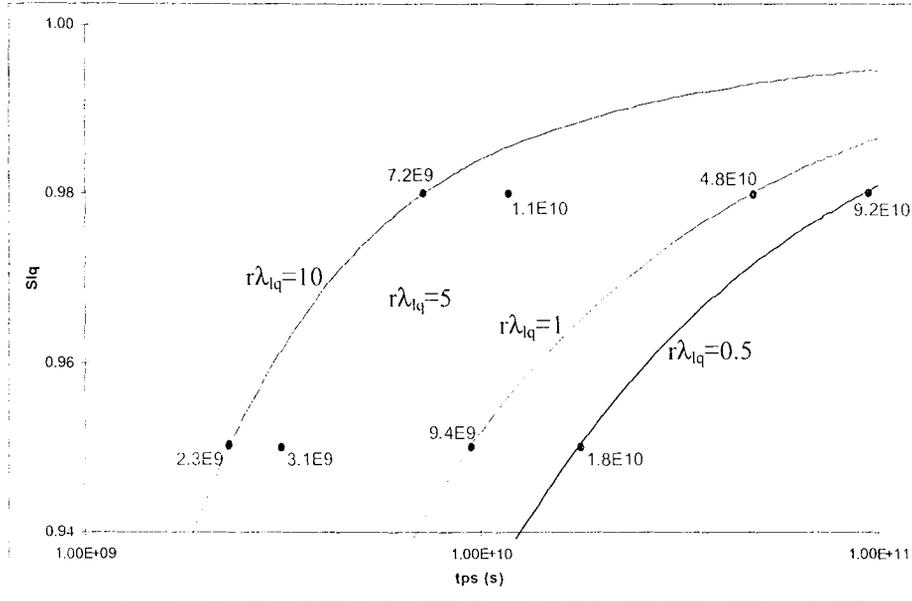


Figure 85. Influence de $r\lambda_{lq}$ sur le temps de ressaturation.

3.6 - CONCLUSION

En raison de la nature fortement non linéaire des processus de diffusion hydraulique dans des milieux poreux partiellement saturés tels que les matériaux argileux de la BO et le massif rocheux, et du fait de l'intervalle des états de saturation couverts (typiquement entre 50% et 100%), une linéarisation directe des équations de transfert est en général incorrecte : quels que soient les efforts du modélisateur, un problème non linéaire demeure... non linéaire. Cependant, une méthodologie spécifique de linéarisation a été proposée, notamment en modèle bicouche, et s'est avérée donner une évaluation correcte du temps nécessaire pour atteindre la saturation à l'interface entre la BO et le conteneur. Son intérêt principal est une compatibilité avec les techniques semi-explicites de résolution, dont on peut tirer profit pour faire une analyse de sensibilité, à l'aide de méthodes probabilistes.

Les résultats obtenus ont montré l'influence propre (et opposée) de chacune des deux non-linéarités (courbe de pression capillaire et conductivité au liquide) sur le comportement des deux matériaux pour finalement mettre en évidence la relativement bonne approximation du modèle linéaire face au modèle non linéaire. De plus, il est apparu que le modèle monocouche permettait une première approche dans la compréhension des processus de diffusion mais il sous-estime assez

fortement les temps de ressaturation et ne fait intervenir le massif qu'au niveau des conditions aux limites.

L'analyse de sensibilité réalisée sur le modèle bicouche a été très riche d'enseignements puisqu'elle a démontré l'importance des propriétés hydrauliques du massif. On a pu constater que la cinétique de ressaturation est gouvernée par des variables différentes selon qu'elle est plus ou moins rapide : les propriétés de la BO interviennent principalement dans le cas de cinétiques rapides alors que pour des cinétiques plus lentes, ce sont celles du massif, sans oublier le seuil de saturation qui devient alors très influant surtout lorsque l'on se rapproche de sa valeur maximale 0.98. Ce travail souligne donc l'importance d'une caractérisation expérimentale fine des caractéristiques hydrauliques du massif et pas uniquement de la BO.

Des phénomènes non linéaires et irréversibles significatifs tels que l'hystérésis des courbes de pression capillaire ou les effets de la succion sur la réponse mécanique de l'argile (Alonso et al., 1998) ont été négligés dans l'approche actuelle. Des perspectives de travail portent sur l'étude des effets couplés irréversibles hydro-mécaniques et également des effets de couplage thermique sur l'hydratation de la barrière d'argile (ressaturation sous chargement THM).

Chapitre

4

***Application au retrait
de dessiccation***

« Qui pense peu se trompe beaucoup. »

Léonard de Vinci (1452-1519)

4.1 - INTRODUCTION

Le phénomène du retrait de dessiccation a été présenté par Lassabatère (1994) à propos d'un mur de béton soumis sur sa paroi extérieure à une chute d'humidité. A partir des mêmes caractéristiques physiques, et en adoptant une loi de comportement hydro-mécanique linéaire, nous avons cherché à étudier l'influence de la géométrie (cartésienne, cylindrique ou sphérique) sur la cinétique des processus hydriques, ainsi que sur la manifestation des couplages, entre les processus de diffusion (Fick et Darcy) d'une part et de l'hydraulique sur la mécanique d'autre part. En outre, de tels couplages H→M permettent également de comprendre et d'interpréter des phénomènes observés au sein d'un matériau naturel tel qu'une argilite : en effet, des fissures ont été relevées en paroi de tunnel dans la galerie de Tournemire et nous présentons une étude couplée montrant le lien entre la dessaturation provoquée par la ventilation dans la galerie et l'apparition de fissures du fait des fortes contraintes de traction induites par cette dessaturation. Les résultats concernant les structures en béton ont été présentés au Congrès Biot (¹³⁵Thouvenin et al., 1998) et les résultats relatifs à la ventilation de la galerie seront exposés au Congrès ISRM99 (⁵⁵Giraud et al., 1999).

4.2 - STRUCTURES EN BETON

4.2.1 - Géométrie et conditions aux limites

On considère un modèle unidimensionnel plein fini selon les trois géométries. La figure 86 représente donc un mur, une sphère et un cylindre avec la variable d'espace (x en géométrie cartésienne ou r en géométries cylindrique et sphérique) compris entre 0 et a .

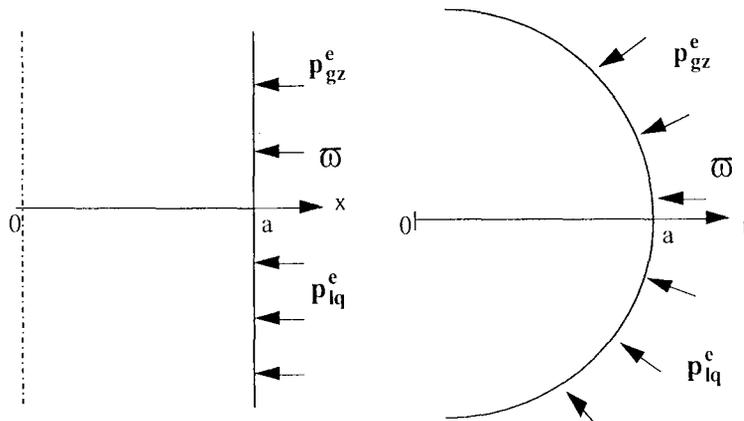


Figure 86. Géométries et conditions aux limites.

On prend en compte des conditions de symétrie en $r = 0$ (déplacement, flux d'eau et d'air sec nuls) et sur la paroi extérieure, on applique un chargement mécanique équivalent à la pression atmosphérique d'une part, et d'autre part, des pressions de liquide et de mélange telles qu'elles simulent une diminution d'humidité :

$$\left. \begin{array}{l} \varpi = -p_{\text{atm}} \\ p_{gz}^c = p_{gz}^o \\ p_{lq}^c < p_{lq}^o \end{array} \right\} \Rightarrow p_{cp}^c > p_{cp}^o \Rightarrow h_c < h_o \quad (4.1)$$

4.2.2 - Propriétés hydro-mécaniques du béton

On reprend les caractéristiques de la pâte de ciment PWT fournies par Lassabatère (1994). Les propriétés hydrauliques ont déjà été présentées au paragraphe 2.2.1. Quant aux données caractérisant le comportement mécanique, le module d'incompressibilité drainé est égal à $3.47 \cdot 10^{10}$ Pa et le module de cisaillement $2.08 \cdot 10^{10}$ Pa.

4.2.3 - Influence de la géométrie sur la cinétique

En utilisant la méthode de Talbot modifiée par Piessens et al. (1983), les solutions semi-explicites permettent d'obtenir les résultats en régime transitoire pour les trois géométries. L'évolution de la saturation (figure 87) montre une allure comparable, quelle que soit la géométrie, et traduit le couplage entre les processus de diffusion hydrauliques.

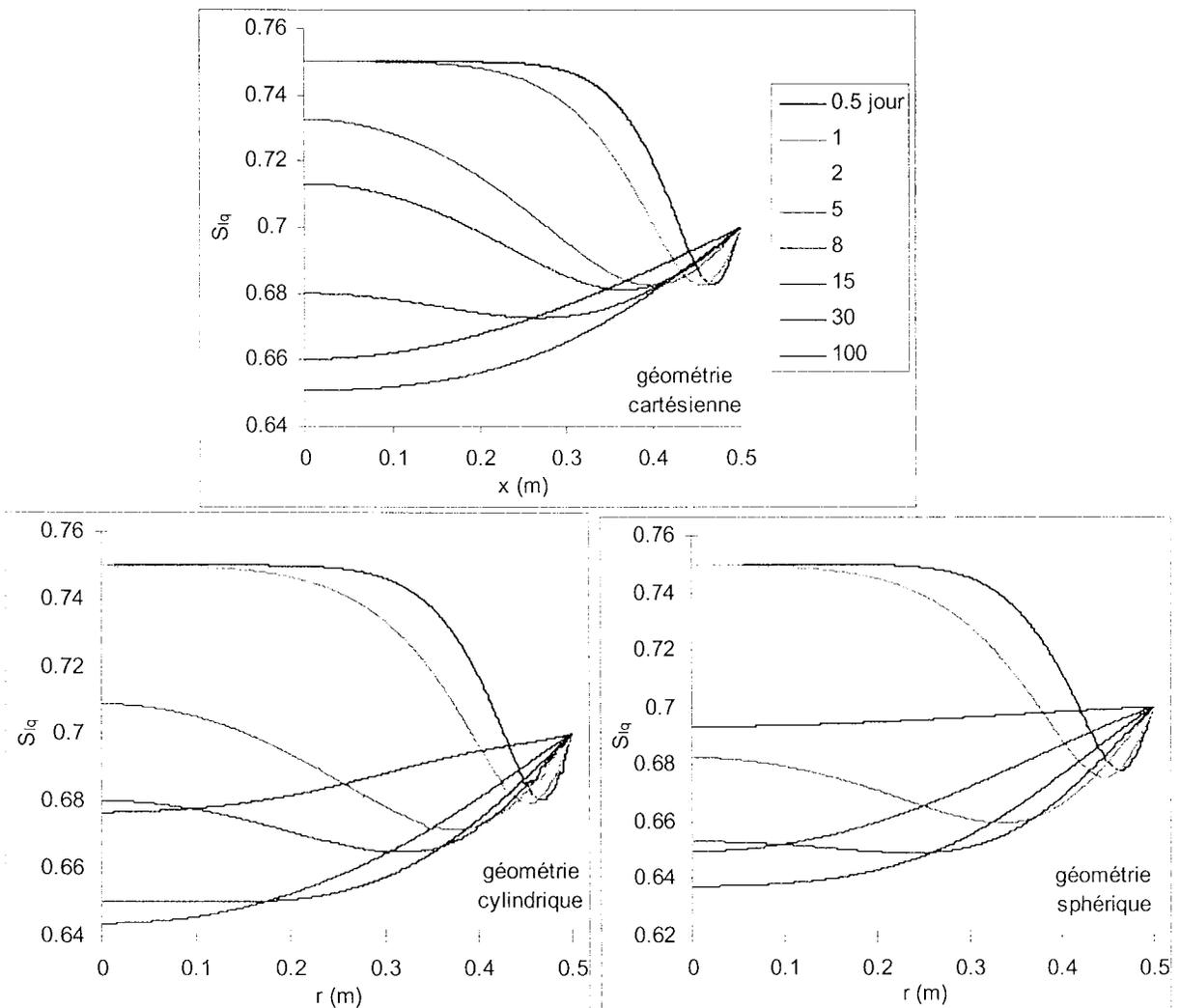


Figure 87. Evolution de la saturation pour les trois géométries.

En effet, ce couplage entre les processus de Fick et Darcy se manifeste par des profils non monotones : pour un instant donné, un pic de faible saturation est atteint près de la limite extérieure (la saturation descend ainsi en-dessous de la valeur à la paroi) et celui-ci se déplace vers l'intérieur de la structure au fur et à mesure que le temps augmente. Ces allures particulières s'expliquent par le fait que les deux temps caractéristiques de diffusion sont du même ordre de grandeur et les processus de diffusion se déroulent dans des gammes de temps qui se superposent. Néanmoins, si les évolutions sont comparables, l'effet de la géométrie est assez sensible sur la cinétique de dessaturation : on constate que le phénomène est plus rapide dans la sphère et plus lent dans le mur.

4.2.4 - Influence de la géométrie sur le couplage H→M

L'évolution de la déformation volumique met en évidence le couplage H→M avec l'apparition d'un retrait (déformation négative) induit par le phénomène de dessiccation, comme le montre la figure 88. L'intensité de ce retrait dépend fortement de la géométrie puisqu'un rapport de un à deux peut être relevé entre les géométries cartésienne et sphérique.

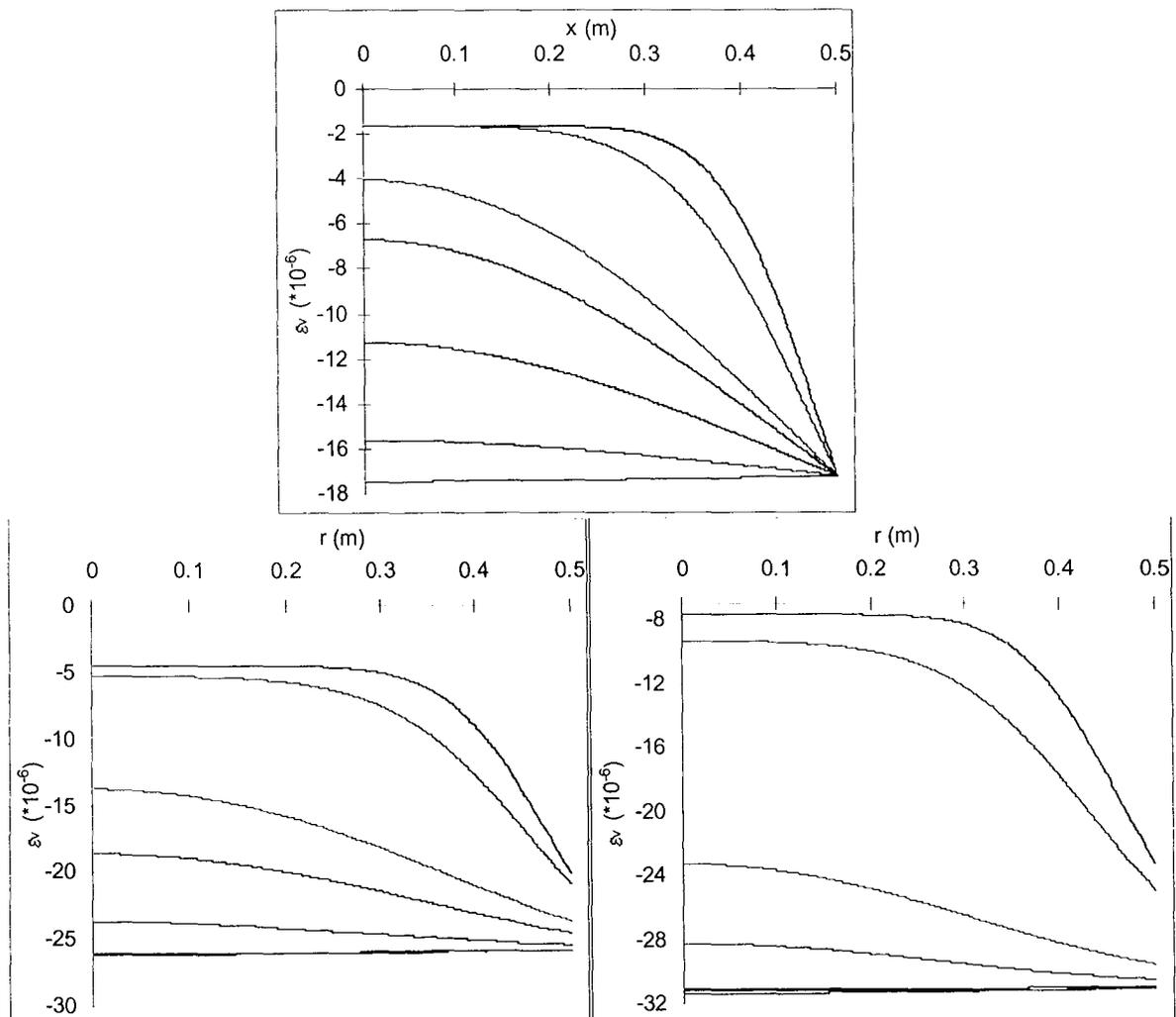


Figure 88. Evolution de la déformation volumique pour les trois géométries.

En outre, on remarque que, pour le cylindre et la sphère, la déformation n'est pas constante à la paroi contrairement au mur, ce qui est en fait la manifestation de la constante d'intégration $f(t)$ apparaissant dans l'équation de Navier :

$$\varepsilon_v(r=a) = \frac{S_{lq}^o (p_{lq}^e - p_{lq}^o) + (1 - S_{lq}^o) (p_{gz}^e - p_{gz}^o)}{\lambda_o + 2\mu} + \frac{f(t)}{\lambda_o + 2\mu} \quad (4.2)$$

Mais l'influence de la géométrie la plus nette est observable sur les contraintes, et notamment la contrainte moyenne (figure 89). L'évolution est monotone dans le mur et montre des contraintes de compression à l'exception des temps petits vers le centre. A l'opposé, l'évolution est non monotone pour les autres géométries avec notamment des contraintes de traction dominantes dans la sphère.

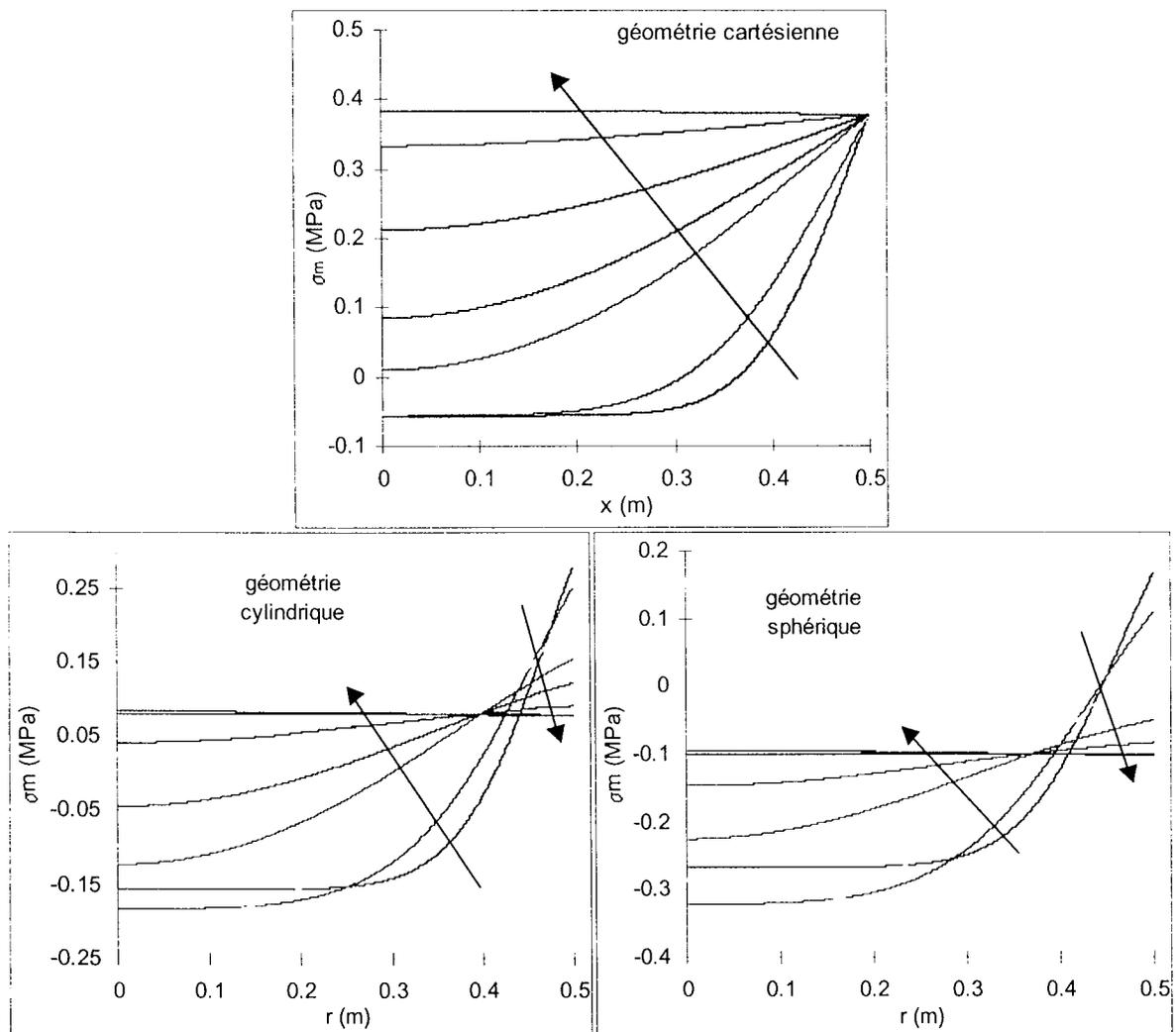


Figure 89. Evolution de la contrainte moyenne pour les trois géométries.

4.2.5 - Influence des conditions initiales et aux limites sur le couplage H→M

Quelle que soit la géométrie, la variation de déformation volumique entre l'état instantané et l'état asymptotique, et la valeur finale de déformation volumique peuvent se mettre sous la forme générale (voir annexe 3) :

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_v = A \left[S_{lq}^0 (p_{lq}^\infty - p_{lq}^{0+}) + (1 - S_{lq}^0) (p_{gz}^\infty - p_{gz}^{0+}) \right] \\ \varepsilon_v^\infty = \varepsilon_v^{0+} + \Delta\varepsilon_v \end{cases} \quad (4.3)$$

avec A une constante dépendant des paramètres mécaniques E_0 et ν_0 .

Le signe de $\Delta\varepsilon_v$ et la valeur de ε_v^∞ sont par conséquent liés aux variations de pressions partielles de liquide et de mélange entre les états instantané et asymptotique, et celles-ci sont conditionnées par l'état initial, le chargement mécanique instantané et les conditions aux limites portant sur les pressions partielles. Le tableau 25 présente les résultats obtenus pour différents scénarios.

Tableau 25. Influence des conditions initiales et aux limites sur $\Delta\varepsilon_v$ et ε_v^∞ .

	ressaturation ($p_{lq}^e > p_{lq}^0$)	dessaturation ($p_{lq}^e < p_{lq}^0$)	
$p_{gz}^0 = p_{gz}^e = 10^5$	$\Delta\varepsilon_v > 0$ $\varepsilon_v^\infty > 0$	$\Delta\varepsilon_v < 0$ $\varepsilon_v^\infty < 0$	$\varpi = 0$
$p_{lq}^0 = p_{lq}^e = 10^5$	$\Delta\varepsilon_v > 0$ $\varepsilon_v^\infty < 0$	$\Delta\varepsilon_v < 0$ $\varepsilon_v^\infty < 0$	$\varpi = 10^5$
$p_{lq}^0 = 10^6 \gg p_{lq}^e = 10^5$	$\Delta\varepsilon_v < 0$ $\varepsilon_v^\infty < 0$	$\Delta\varepsilon_v < 0$ $\varepsilon_v^\infty < 0$	$\varpi = 0$
$p_{gz}^0 = 10^6 \gg p_{gz}^e = 10^5$	$\Delta\varepsilon_v < 0$ $\varepsilon_v^\infty < 0$	$\Delta\varepsilon_v < 0$ $\varepsilon_v^\infty < 0$	$\varpi = 10^5$

L'interprétation du signe de $\Delta\varepsilon_v$ est très simple puisqu'elle dépend simplement du signe des variations des pressions : ainsi, une ressaturation ($p_{lq}^e > p_{lq}^0$) avec une pression de mélange réaliste provoque un « gonflement » (ou une dilatation) du milieu ($\Delta\varepsilon_v > 0$) alors que la prise en compte d'une pression de mélange initiale très forte ($p_{lq}^0 \gg p_{lq}^e$) se traduit toujours par un retrait, même si on n'applique pas de contrainte à la paroi.

Pour l'interprétation de ε_v^∞ , il faut s'intéresser aux valeurs de la contrainte instantanée ϖ puisqu'une valeur positive (compression) provoque un retrait instantané, auquel il faut ajouter la variation $\Delta\varepsilon_v$. Par exemple, dans le cas d'une ressaturation avec chargement instantané, le chargement entraîne un retrait instantané ($\varepsilon_v^{0+} < 0$) puis le phénomène de ressaturation provoque une dilatation ($\Delta\varepsilon_v > 0$) et finalement le déformation volumique asymptotique est positive ($\varepsilon_v^\infty > 0$).

4.2.6 - Conclusions

Cette étude a permis de souligner l'importance de la géométrie sur la cinétique des processus couplés de diffusion ainsi que sur les couplages H→M. En outre, elle a montré de quelle manière se répercutaient les conditions initiales et aux limites sur la réponse mécanique instantanée et le comportement asymptotique du milieu poreux.

4.3 - VENTILATION DANS UNE GALERIE PROFONDE

4.3.1 - Introduction

Des variations d'hygrométrie dans des ouvrages souterrains mettent en jeu des couplages H→M dans le massif rocheux. Une diminution d'humidité relative de l'air ambiant dans une cavité profonde se traduit par exemple par une dessaturation du massif proche qui peut s'accompagner dans des roches telles que des marnes et argilites d'une fissuration au voisinage de la paroi, comme cela a pu être observé dans la galerie de Tournemire (figure 90). Cette fissuration est due à des effets de couplages H→M : on montre en effet qu'une dessaturation se traduit par des variations de contraintes de traction. On s'intéresse principalement dans ce chapitre à modéliser les variations de contraintes dues à un chargement hydrique, en pratique une variation d'humidité relative (ventilation) en paroi d'une cavité profonde.

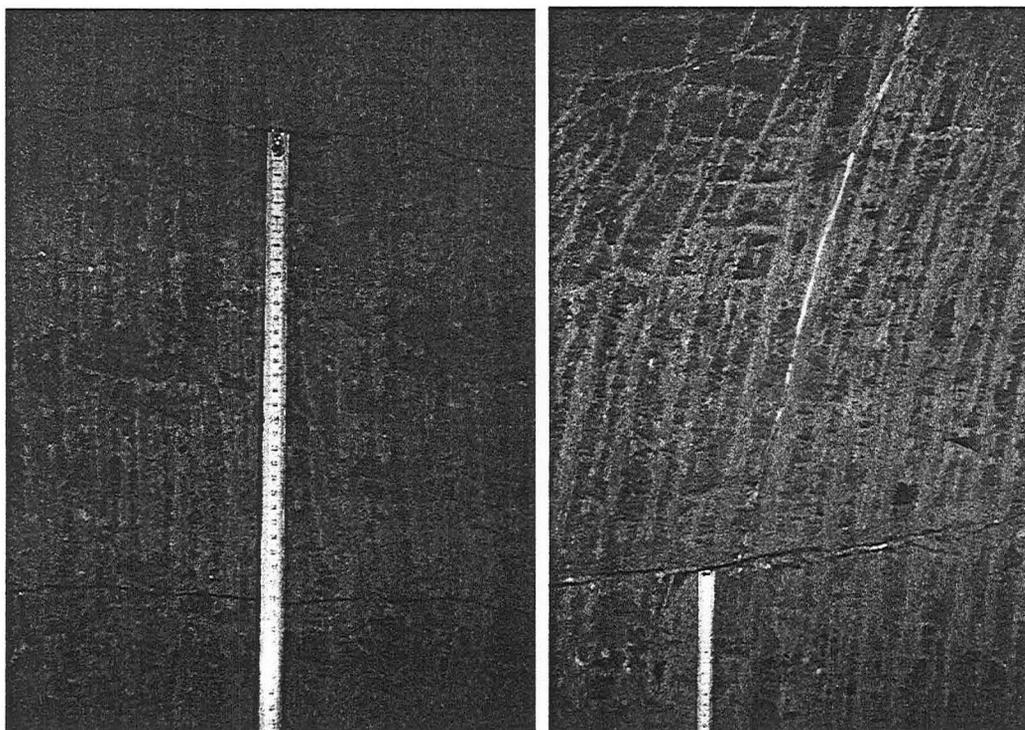


Figure 90. Fissuration observée dans la galerie de Tournemire.

Ce problème constitue donc une étude générique de tunnel ventilé, pour les besoins de laquelle, les données de l'argilite de Tournemire et d'une argilite de l'Est ont été utilisées. Les caractéristiques hydriques et mécaniques de ces deux matériaux conduisent en effet au développement de très fortes succions dans le domaine partiellement saturé.

4.3.2 - Géométrie et conditions aux limites

La géométrie du problème est cylindrique unidimensionnelle, caractérisée par une variable d'espace unique, le rayon r (figure 91). La structure étudiée est une cavité profonde de section circulaire et de longueur infinie (déformation plane). On ne prend pas en compte le creusement de la galerie : on considère que le massif est en équilibre et on calcule des variations par rapport à cet état d'équilibre. Les conditions aux limites sont telles que la pression capillaire appliquée à la paroi de la galerie ($r = a$) est inférieure à la pression capillaire initiale de manière à simuler une dessaturation. En fait, l'humidité relative est imposée ($h^e = 0.75$) et la relation de Kelvin permet de reporter cette condition sur la pression capillaire, et donc sur la pression de liquide. D'un point de vue mécanique, il n'y a pas de chargement (variation de contrainte normale ϖ nulle) : les contraintes qui peuvent apparaître dans le massif ne sont donc pas dues aux conditions aux limites mécaniques.

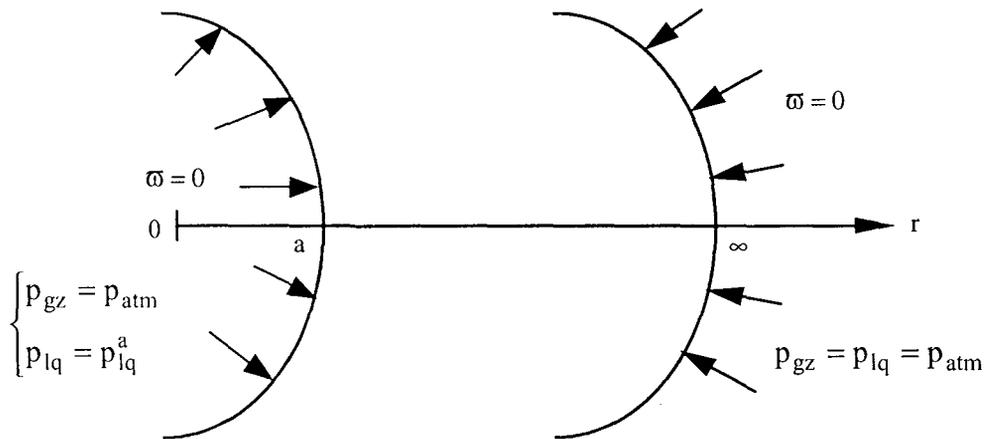


Figure 91. Géométrie de la galerie.

- conditions initiales : $p_{lq}^0 = p_{gz}^0 = p_{atm}$ ($p_{cp}^0 = 0, S_{lq}^0 = 1$)
- conditions aux limites :
 - $r = a$: $\varpi = 0, h^e = 0.75, p_{gz}^e = p_{atm}$
 - $r \rightarrow \infty$: $\varpi = 0, p_{lq}^\infty = p_{lq}^0, p_{gz}^\infty = p_{gz}^0$

4.3.3 - Caractéristiques physiques du massif rocheux

4.3.3.1 - Argilite de Tournemire.

On s'intéresse dans cette étude au matériau du site de Tournemire situé au niveau du tunnel : ce matériau est une argilite gris-noir micacée bien litée du Toarcien supérieur présentant une anisotropie (figure 92). Ce type de roche est souvent modélisé comme un matériau orthotrope ou

isotrope transverse. En se plaçant dans le cadre de déformations planes dans le plan de schistosité, Vouille (communication personnelle) propose une expression du module d'Young et du coefficient de Poisson équivalents qui permettent en première approximation de modéliser un matériau anisotrope par une loi de comportement isotrope :

$$E = \frac{v_{21}^2 E_1 + (2v_{23} + 1)E_2}{(1 + v_{23})^2} \quad v = \frac{v_{21}^2 E_1 + v_{23} E_2}{E_2 (1 + v_{23})} \quad (4.4)$$

avec E_1 et E_2 les modules d'Young dans les directions 1 et 2, v_{21} et v_{23} les coefficients de Poisson dans les plans (2,1) et (2,3), tels qu'ils sont définis sur la figure 92.

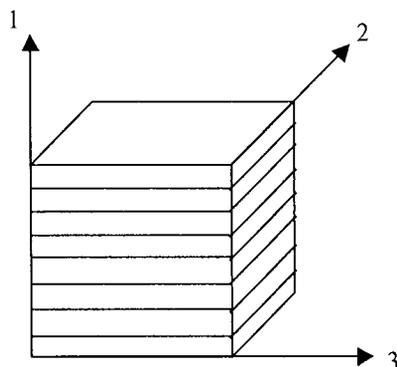


Figure 92. Orientation de l'anisotropie de l'argilite de Tournemire.

Les paramètres mécaniques du milieu anisotrope varient en fonction de la contrainte moyenne (Niandou et al., 1997). Pour cette étude, du fait de la faible épaisseur de recouvrement au dessus du tunnel (200 m environ, soit une contrainte de 5 MPa), on peut considérer les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = 7500 \text{ MPa} \\ E_2 = 27000 \text{ MPa} \\ v_{21} = 0.23 \\ v_{23} = 0.13 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E = 26953 \text{ MPa} \\ v = 0.128 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Les données de diffusion hydraulique font défaut : on a donc choisi de considérer des valeurs constantes de perméabilité (perméabilité relative au liquide et au gaz égales à 1, pas de non-linéarités) et une perméabilité intrinsèque représentant un matériau sain ($k = 10^{-21} \text{ m}^2$) ou un matériau altéré ($k = 10^{-19} \text{ m}^2$). Pour le coefficient de Fick, on reprend la fonction non linéaire (1.48) établie au chapitre 1 avec un facteur de résistance à la diffusion τ de 0.5.

La porosité de l'argilite est également fournie par Niandou et al. (1997) : $\phi_o = 0.03$. Des mesures ont été effectuées par Daupley (1997) sur différents échantillons pour déterminer les courbes de pression capillaire de ce matériau, en suivant des chemins d'imbibition ou de drainage (figure 93).

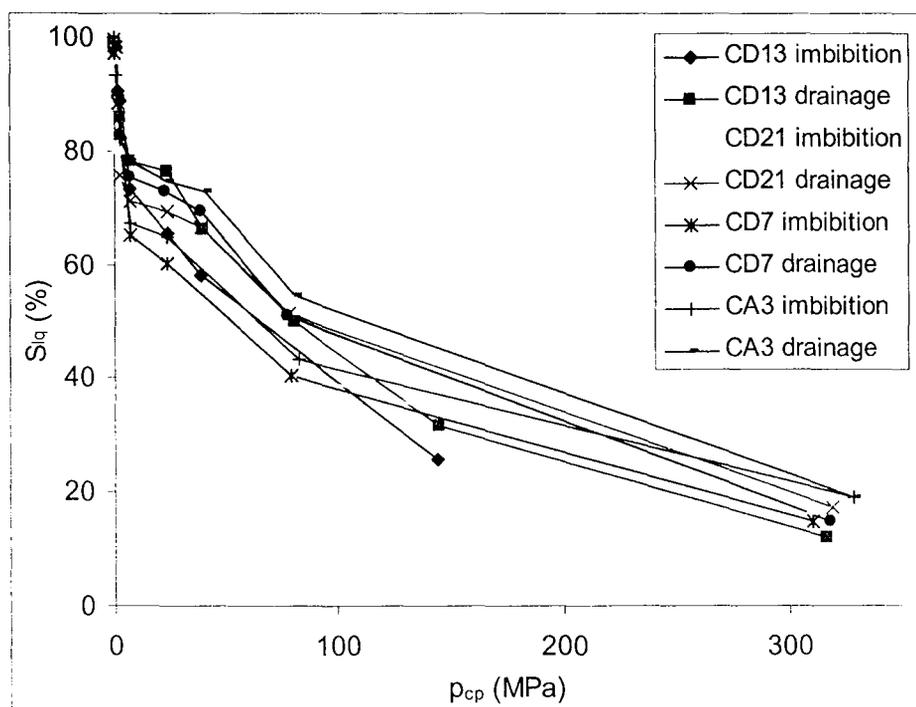


Figure 93. Courbes de pression capillaire expérimentales pour l'argilite de Tournemire (d'après Daupley, 1997).

Un ajustement de type Vachaud & Vauclin a été utilisé du fait de la bonne corrélation avec les données expérimentales (tableau 26).

$$S_{lq} = \frac{a}{a + (p_{cp} \cdot 10^{-4})^b} \quad (4.6)$$

Tableau 26. Valeurs de a et b pour l'ajustement de la courbe de pression capillaire de l'argilite de Tournemire.

	a	b	r
CD13 Imbibition	416.126	0.715	0.99
CD21 Imbibition	56.120	0.504	0.98
CD21 Drainage	128.787	0.555	0.94
CD7 Imbibition	183.619	0.642	0.99
CA3 Imbibition	156.023	0.602	0.99
CA3 Drainage	657.342	0.715	0.96

4.3.3.2 - Argilite de l'Est.

Le comportement anisotrope de l'argilite de l'Est semble beaucoup moins marqué et en première approche, en se basant sur des mesures réalisées au LAEGO, on considère ce matériau comme isotrope avec les caractéristiques mécaniques suivantes : $E = 8000$ MPa, $\nu = 0.25$. La porosité est

plus élevée que celle de l'argilite de Tournemire : $\phi_o = 0.13$. Les courbes de pression capillaire sont issues également de mesures au laboratoire : on a retenu des résultats se rapportant à des essais réalisés sur plusieurs échantillons compris entre les côtes 450 et 525m d'un même sondage. La figure 94 représente les mesures expérimentales de huit essais notés de A à H et le tableau 27 regroupe la porosité de chaque échantillon ainsi que les valeurs des coefficients a et b intervenant dans l'ajustement de type Vachaud & Vauclin.

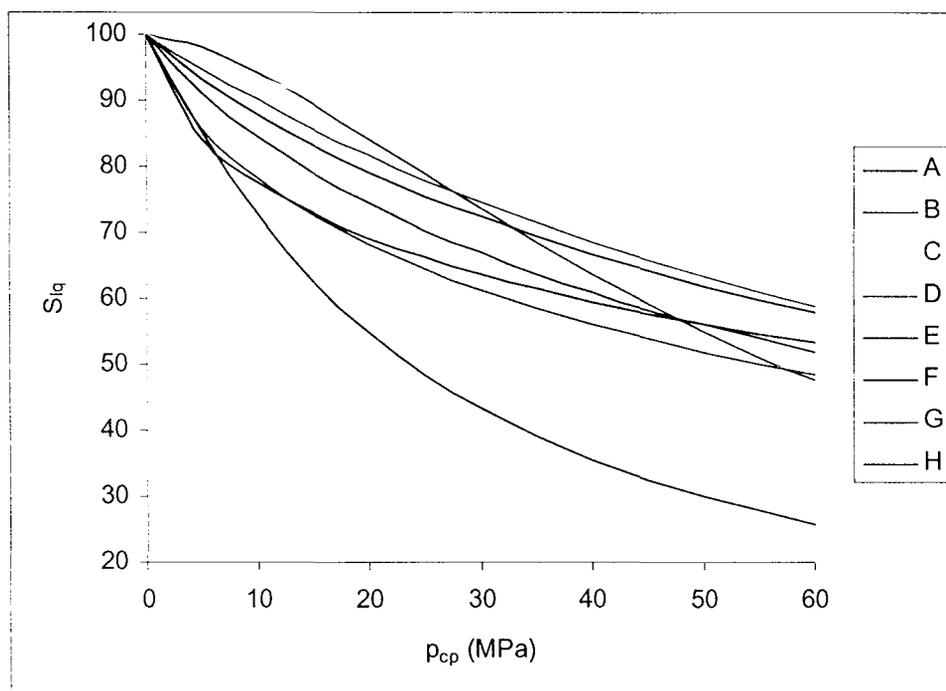


Figure 94. Courbes de pression capillaire expérimentales de l'argilite de l'Est.

Tableau 27. Valeurs de a et b pour l'ajustement de la courbe de pression capillaire de l'argilite de l'Est.

Echantillon	Porosité (%)	a	b	r
A	13	4478.43	0.930	0.97
B	13	1257674.5	1.626	0.99
C	13	17012.23	1.024	0.29
D	11	11947.12	1.038	0.99
E	11	2842.04	0.906	0.97
F	11	248.34	0.619	0.95
G	11	648.82	0.751	0.98
H	9	6755.13	1.135	0.94

Comme pour l'argilite de Tournemire, on ne dispose pas de données précises concernant la diffusion et on adopte les mêmes données.

4.3.4 - Etude non linéaire

4.3.4.1 - Discrétisations spatiale et temporelle

Le maillage 1D pris en compte pour les calculs avec PARSAT est constitué de 200 éléments de Lagrange quadratique à trois nœuds (figure 95), un maillage plus dense à proximité de la galerie et plus large au-delà de 10 m avec des éléments dont la taille croît avec le rayon. La limite infinie est repoussée à 10^5 m.

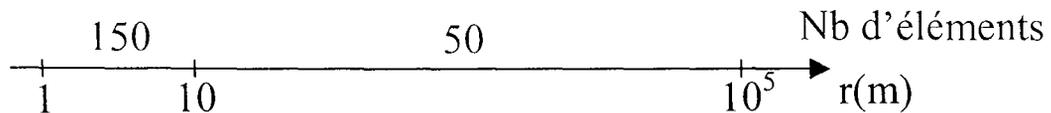


Figure 95. Maillage de la galerie pour PARSAT.

En ce qui concerne la résolution temporelle, on utilise une méthode implicite dite du point fixe avec 308 pas de temps.

4.3.4.2 - Nécessité du lissage de la courbe de pression capillaire au voisinage de la saturation

On retrouve un problème similaire à celui qui avait été rencontré pour la discontinuité initiale de saturation entre la Barrière Ouvragée et le massif. En effet, à la paroi de la galerie, on applique une pression capillaire non nulle alors que la pression capillaire initiale du massif est nulle (figure 96).

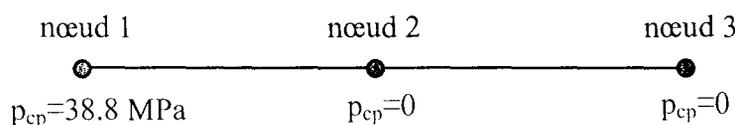


Figure 96. Valeurs instantanées de la pression capillaire dans l'élément 1.

L'interpolation de la pression capillaire sur cet élément (intervalle réduit $[-1,1]$: nœud 1 en $r=-1$, nœud 2 en $r=0$ et nœud 3 en $r=1$) conduit à des pressions capillaires négatives entre les nœuds 2 et 3. Ces valeurs négatives n'ont pas de sens physique mais elles sont autorisées numériquement puisqu'elles correspondent au cas saturé. La saturation est ensuite calculée à partir des valeurs de pressions capillaires en utilisant la courbe de pression capillaire. Mais la fonction $S_{lq}(p_{cp})$ n'est pas définie pour des valeurs de p_{cp} négatives, d'où la nécessité d'un lissage de la courbe de pression capillaire. On procède donc à un lissage avec la technique présentée au paragraphe 3.5.3.2.

4.3.4.3 - Etude du modèle pour l'échantillon A avec $k = 10^{-19} \text{ m}^2$.

Quelles que soient la courbe de pression capillaire et la valeur de la perméabilité intrinsèque, les évolutions des différentes variables hydro-mécaniques sont globalement comparables. On va donc

s'intéresser en détail à un cas particulier (échantillon A et $k = 10^{-19} \text{ m}^2$) puis on étudiera les différences observées en changeant la courbe de pression capillaire ou la perméabilité intrinsèque.

Le logiciel PARSAT est formulé d'un point de vue mécanique et les inconnues hydriques sont donc les pressions partielles. En revanche, dans ce problème, les conditions aux limites hydrauliques ne portent pas sur la pression capillaire mais sur l'humidité (la pression capillaire est déduite de l'humidité à partir de la loi de Kelvin).

$$h_e = 0.75 \Rightarrow p_{cp}^e = -\frac{\rho_{lq}^o RT}{M_{vp}} \ln(h_e) = 38.8 \text{ MPa} \quad (4.7)$$

L'évolution de l'humidité et de la pression capillaire traduisent le transport de l'eau au sein du massif (figure 97). La valeur initiale de l'humidité ($h_0 = 1$) décroît progressivement et tend à se rapprocher de la valeur imposée à la paroi de la galerie ($h_e = 0.75$), alors que la pression capillaire croît d'une valeur nulle vers la valeur limite de 38.8 MPa. On notera que du fait de la géométrie cylindrique et de l'extension infinie du massif, le régime permanent n'est pas défini.

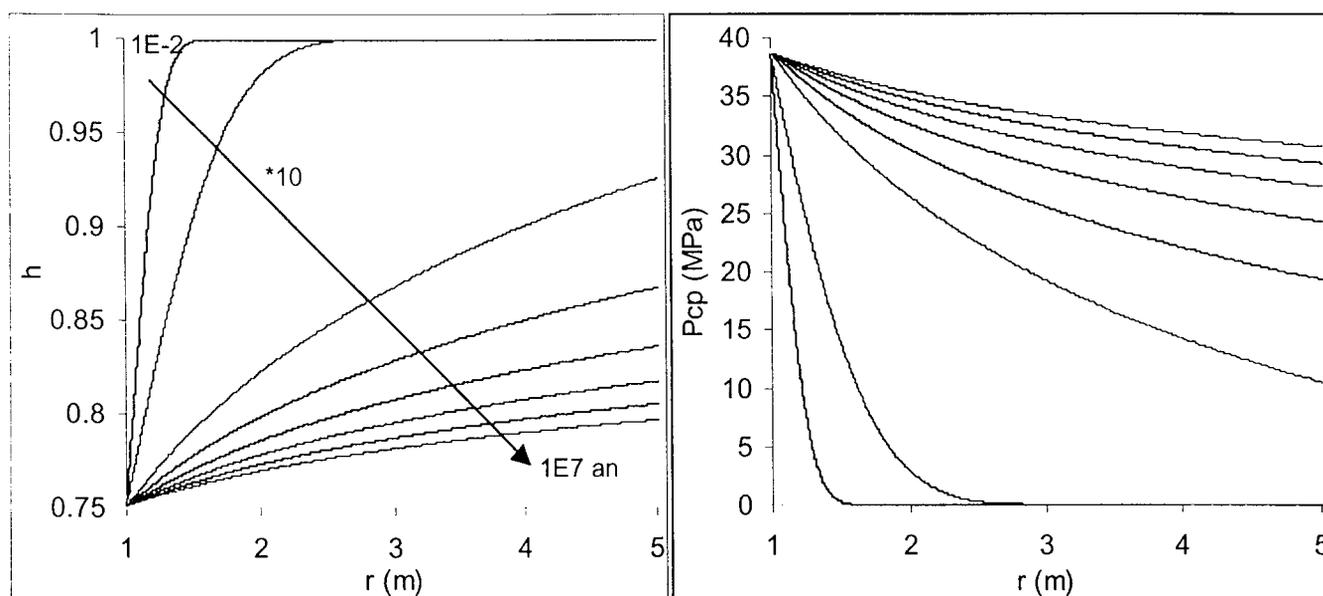


Figure 97. Evolution spatiale de l'humidité et de la pression capillaire.

La saturation (figure 98) est déduite de la pression capillaire par l'intermédiaire de la courbe de pression capillaire. La valeur limite de la saturation, vers laquelle le massif tend avec le temps, dépend donc de l'allure de cette courbe. Pour l'échantillon A, on obtient par exemple :

$$p_{cp}^e = 38.8 \text{ MPa} \Rightarrow S_{lq}^e = \frac{a}{a + (p_{cp}^e 10^4)^b} = 0.67 \quad (4.8)$$

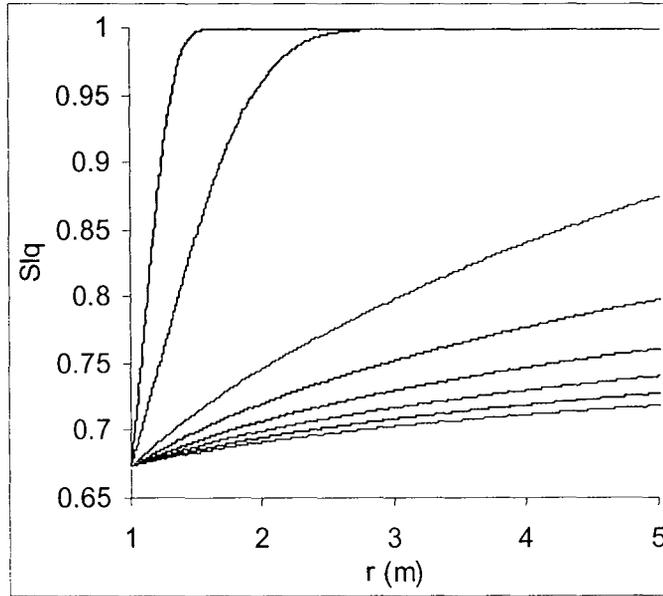


Figure 98. Evolution spatiale de la saturation en liquide.

L'évolution des variables mécaniques montre l'influence des couplages H→M puisque contraintes et déplacement sont uniquement induits par la dessaturation du massif. La contrainte radiale imposée nulle à la paroi présente une allure en cloche qui se propage vers l'intérieur du massif avec un maximum croissant avec le temps, puis la contrainte s'atténue progressivement. Cette contrainte est positive ce qui traduit un phénomène de traction, qui est aussi mis en évidence par un déplacement négatif.

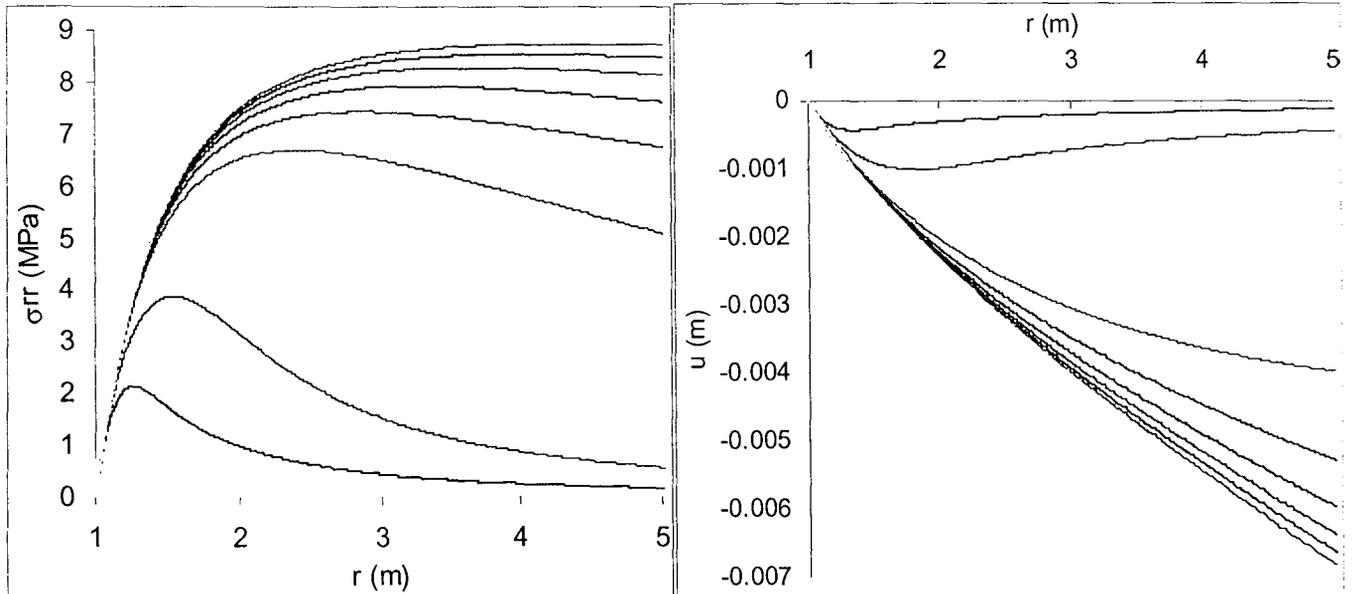


Figure 99 Evolution spatiale de la contrainte radiale et du déplacement.

En ce qui concerne les contraintes orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$ et axiale σ_{zz} (figure 100), on constate une valeur maximale de traction à la paroi qui est de l'ordre d'une vingtaine de MPa (20.9 MPa pour ce cas particulier) et une évolution qui tend à faire chuter ces contraintes progressivement vers l'intérieur du massif. La valeur maximale est très importante puisque le développement de relativement fortes variations de contraintes de traction au voisinage de la cavité pourrait être une source d'initiation de fissures de traction en paroi de galerie.

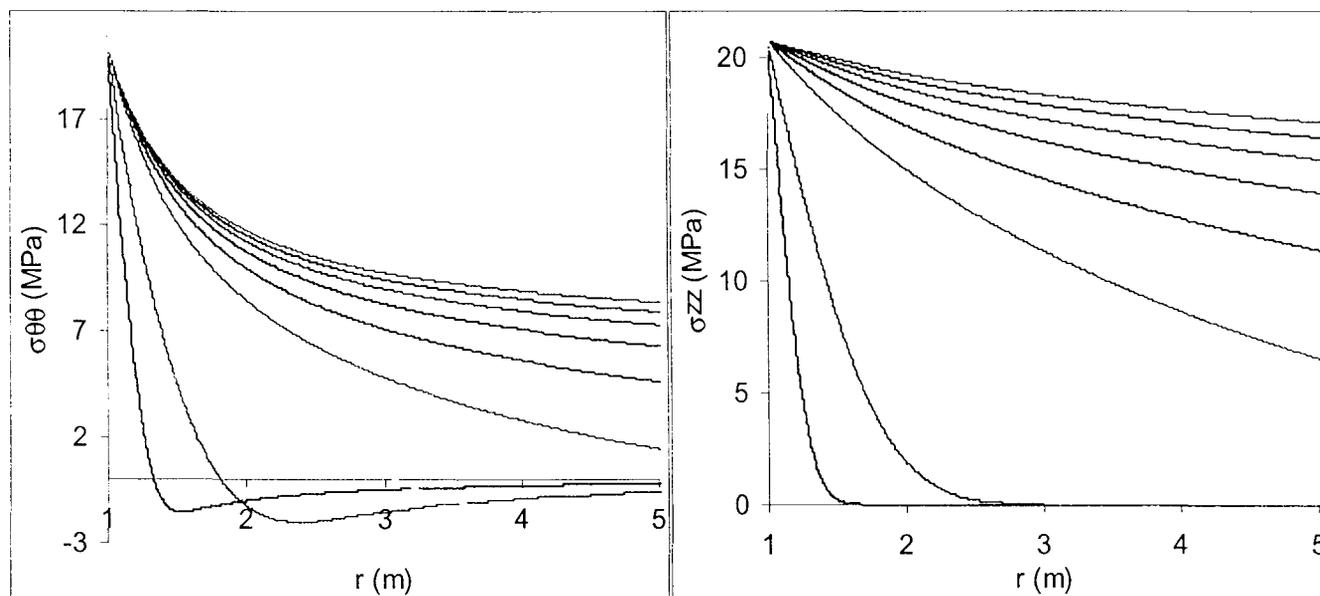


Figure 100. Evolution des contraintes orthoradiale et axiale.

4.3.4.4 - Influence des différentes courbes de pression capillaire

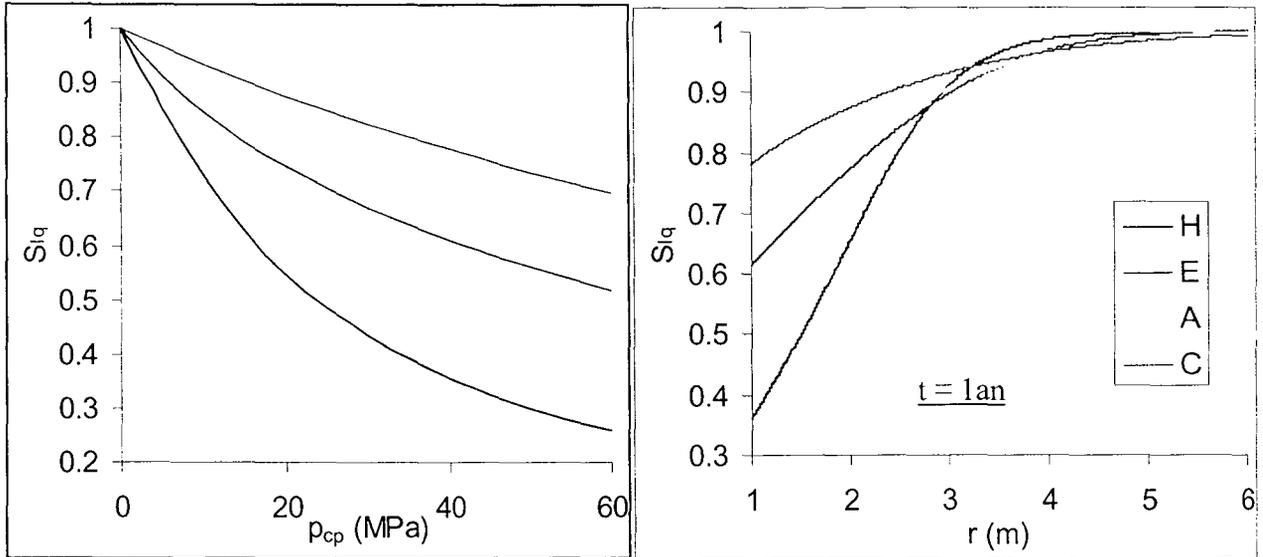
La courbe de pression capillaire est le moteur de la dessaturation : si la pente de la courbe $S_{lq}(p_{cp})$ est forte, une petite augmentation de pression capillaire fait chuter fortement la saturation, alors que la dessaturation est nettement plus lente pour une pente plus faible. La pente de cette courbe joue donc à la fois sur la cinétique et sur la valeur minimale atteinte par la dessaturation, ce qui est illustré par les figures 101. La figure 101a représente quatre échantillons distincts pour l'argilite de l'Est et la figure 101b montre l'évolution de la saturation dans le massif au bout d'une année en prenant en compte ces quatre échantillons. Il apparaît clairement que la saturation à la paroi de la galerie est différente selon les cas (alors que la pression capillaire à la paroi est fixée à 38.8 MPa dans tous les cas), et plus la pente de la courbe de pression capillaire est forte, plus sa valeur est petite. Le modèle avec l'échantillon H se dessature deux fois plus que le modèle avec l'échantillon C.

Pour comprendre l'influence de la courbe de pression capillaire, il faut revenir à l'expression des matrices de couplages de capacité :

$$C_{lqlq} = (1 - S_{lq}) \frac{\phi \rho_{vp}^2}{p_{vp} \rho_{lq}^o} + \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} \phi (\rho_{vp} - \rho_{lq}^o), \quad C_{lqgz} = -(1 - S_{lq}) \frac{\phi \rho_{vp}^2}{p_{vp} \rho_{lq}^o} - \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} \phi (\rho_{vp} - \rho_{lq}^o)$$

$$C_{gzlq} = \rho_{as} \phi \left[\frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} - (1 - S_{lq}) \frac{\rho_{vp}}{\rho_{as} \rho_{lq}^o} \right], \quad C_{gzgz} = \rho_{as} \phi \left[-\frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} + (1 - S_{lq}) \frac{1}{\rho_{as}} \left(1 + \frac{\rho_{vp}}{\rho_{lq}^o} \right) \right] \quad (4.9)$$

Les valeurs respectives de la saturation et de la pente de la courbe de pression capillaire interviennent directement (en rouge) dans les matrices de couplages, et se répercutent sur la diffusivité hydraulique, même si on ne peut pas vraiment définir de diffusivité comme dans un problème de diffusion simple (K_{lq}/C_{lq}).



Figures 101 a et b. Influence de la pente de la courbe de pression capillaire sur l'évolution de la saturation.

En outre, si la courbe de pression capillaire présente une allure monotone, ce n'est pas toujours le cas de la pente de cette courbe (figure 102). En effet, l'ajustement de type Vachaud & Vaucelin est défini par :

$$S_{lq}(p_{cp}) = \frac{a}{a + (100p_{cp})^b} \quad \text{et} \quad \frac{dS_{lq}}{dp_{cp}}(p_{cp}) = -\frac{100^b ab(p_{cp})^{b-1}}{[a + (100p_{cp})^b]^2} \quad (4.10)$$

La pente de la courbe de pression capillaire est donc strictement décroissante si $b < 1$ et non monotone (décroissante puis croissante) si $b > 1$, et les ajustements réalisés à partir des données expérimentales conduisent à des valeurs de b inférieurs ou supérieurs à 1.

Mais il est nécessaire de mentionner un point théorique délicat à propos de ce paramètre b . Lassabatère (1994) a montré que la courbe de pression capillaire doit vérifier :

$$\left(\frac{dS_{lq}}{dp_{cp}} \right)_{p_{cp} \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad (4.11)$$

et ceci n'est vérifié que pour $b > 1$.

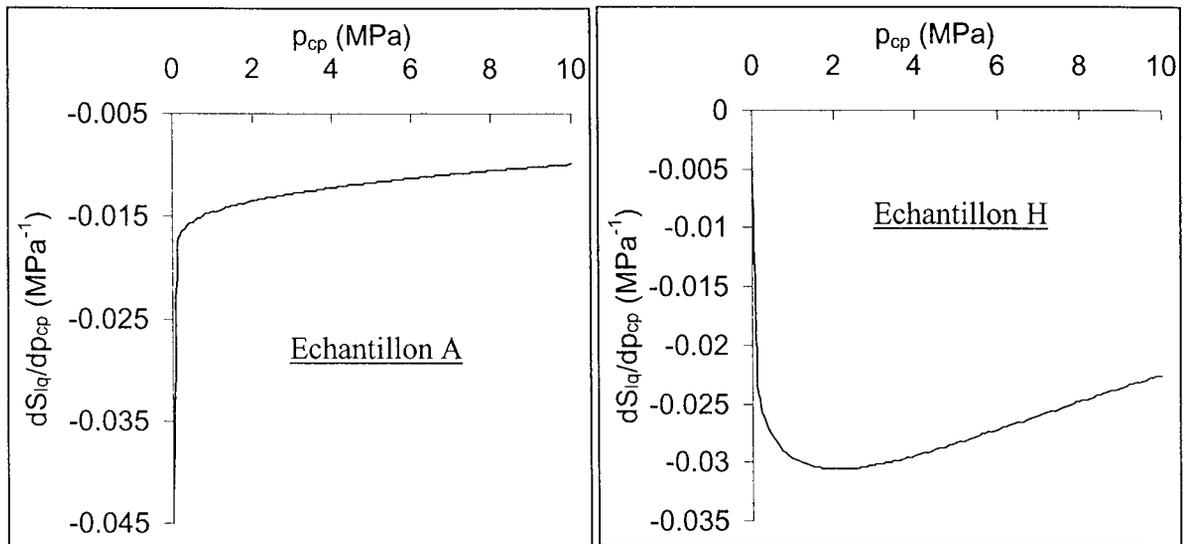


Figure 102. Evolution de la pente de la courbe de pression capillaire.

L'influence des courbes de pression capillaire sur le comportement hydrique se répercute également sur l'évolution des variables mécaniques puisque les contraintes sont directement liées à la valeur de la saturation via la loi de comportement :

$$d\underline{\underline{\sigma}} = \lambda_o d\varepsilon_v \underline{\underline{1}} + 2\mu d\varepsilon_{\underline{\underline{e}}} - S_{lq} dp_{lq} \underline{\underline{1}} - (1 - S_{lq}) dp_{gz} \underline{\underline{1}} - 3\alpha_o K_o dT \underline{\underline{1}} \quad (4.12)$$

Ainsi, les contraintes radiale, orthoradiale et axiale maximales qui se développent dans le massif sont d'autant plus fortes que la dessaturation est faible, comme le montre le tableau 28. Ceci s'explique par le fait que lorsque la pente est forte, il faut de faibles pressions capillaires pour dessaturer le massif : il y a alors peu de résistance du massif et les contraintes développées restent faibles. En revanche, une faible pente va induire une résistance supérieure de plusieurs MPa.

Tableau 28. Relation entre les contraintes maximales dans le massif et la saturation en paroi.

Echantillon	S_{lq} à la paroi	σ_{rr}^{\max} pour $t = 10^7$ ans	$\sigma_{\theta\theta}^{\max}$, σ_{zz}^{\max} à la paroi
H	0.36	6.7	15.6
E	0.61	8.5	19.9
A	0.67	8.9	20.9
C	0.78	9.7	22.8

4.3.4.5 - Influence de la perméabilité intrinsèque

Tous les calculs ont été réalisés dans cette étude avec une perméabilité intrinsèque constante ($k = 10^{-19} \text{ m}^2$) mais relativement forte pour une roche argileuse, pour tenir compte d'une certaine dégradation du massif suite au creusement de la galerie. A titre de comparaison, on a regardé sur un cas particulier l'influence d'une valeur 100 fois plus petite ($k = 10^{-21} \text{ m}^2$) représentant un massif que l'on pourrait qualifier de sain (figure 103, échantillon A).

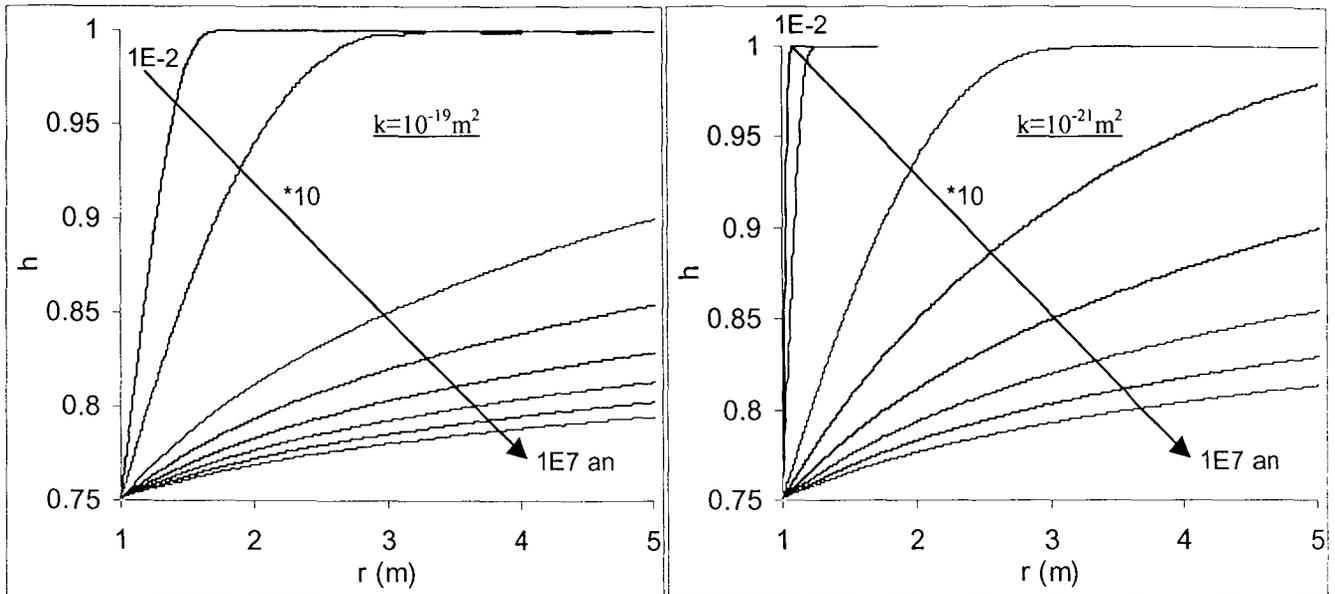


Figure 103. Influence de la perméabilité intrinsèque sur l'évolution de l'humidité.

L'évolution comparée de l'humidité montre que la diminution de perméabilité intrinsèque s'accompagne d'une diffusion hydraulique plus lente. Et on remarque que le facteur 100 sur la perméabilité se répercute de façon identique sur les temps de diffusion. De plus, l'évolution de l'étendue de la zone dessaturée est fortement conditionnée par la valeur de cette perméabilité, comme le montre le tableau 29. Par exemple, au bout d'une année, on obtient une étendue de zone dessaturée de 5m ou 50m suivant la valeur de k , d'où la nécessité d'une bonne détermination expérimentale de ce paramètre.

D'un point de vue mécanique, seule la cinétique est affectée : les contraintes apparaissent pour des temps plus grands mais les valeurs maximales de contraintes restent inchangées.

Tableau 29. Etendue de la zone dessaturée suivant la valeur de la perméabilité intrinsèque.

$k = 10^{-19} \text{ m}^2$		$k = 10^{-21} \text{ m}^2$	
Temps (années)	Zone dessaturée (m)	Temps (années)	Zone dessaturée (m)
0.01	≈ 5	0.1	≈ 1
0.1	≈ 15	1	≈ 5
1	≈ 50	10	≈ 15
		100	≈ 50

4.3.4.6 - Influence des perméabilités relatives au liquide et au gaz

Les perméabilités relatives sont en général des fonctions variant de façon non linéaire avec la saturation et sont en fait inconnues pour les roches faiblement perméables. Par conséquent, elles ont été estimées et les fonctions suivantes ont été introduites dans le modèle (figure 104) :

$$K_{gz}^{rel} = \frac{1}{1 + (5S_{lq})^{2.4}} \quad \text{et} \quad K_{lq}^{rel} = \frac{1}{1 + [60(1 - S_{lq})]^{1.2}} \quad (4.13)$$

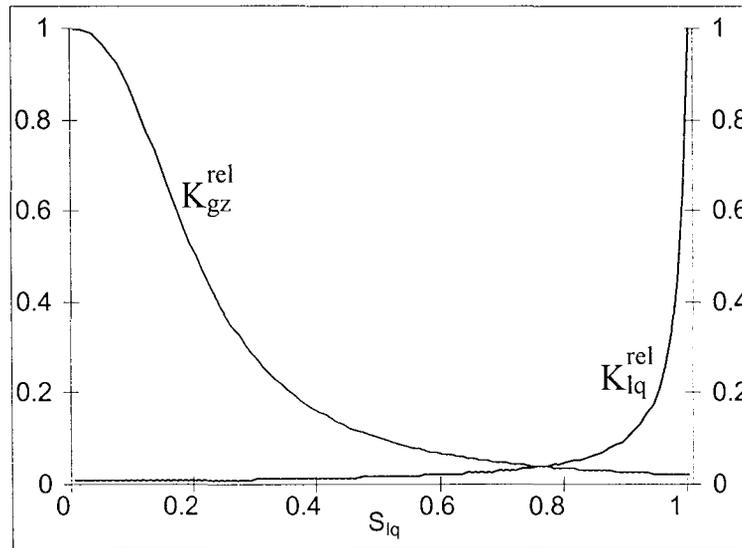


Figure 104. Exemples de perméabilités relatives au liquide et au gaz.

On constate alors que la dessaturation du massif est beaucoup moins rapide et affecte une zone moins étendue. Par effet induit, les contraintes de traction se développent également beaucoup plus lentement (figure 105).

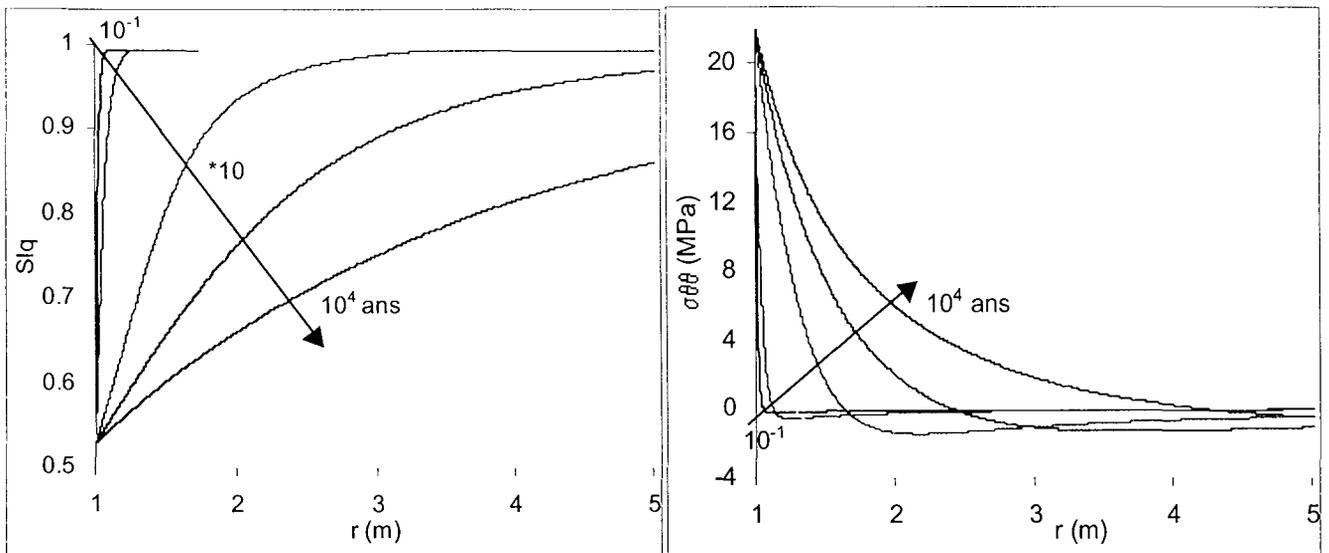


Figure 105. Evolutions de la saturation et de la contrainte orthoradiale avec des perméabilités relatives non linéaires.

4.3.4.7 - Influence du couplage H→M

Les contraintes maximales qui apparaissent à la paroi sont induites par la dessaturation, et donc par la valeur du saut d'humidité que l'on impose à la paroi. La figure 106 montre l'influence de deux valeurs distinctes d'humidité sur l'évolution de la contrainte orthoradiale (échantillon CA3Imbib.).

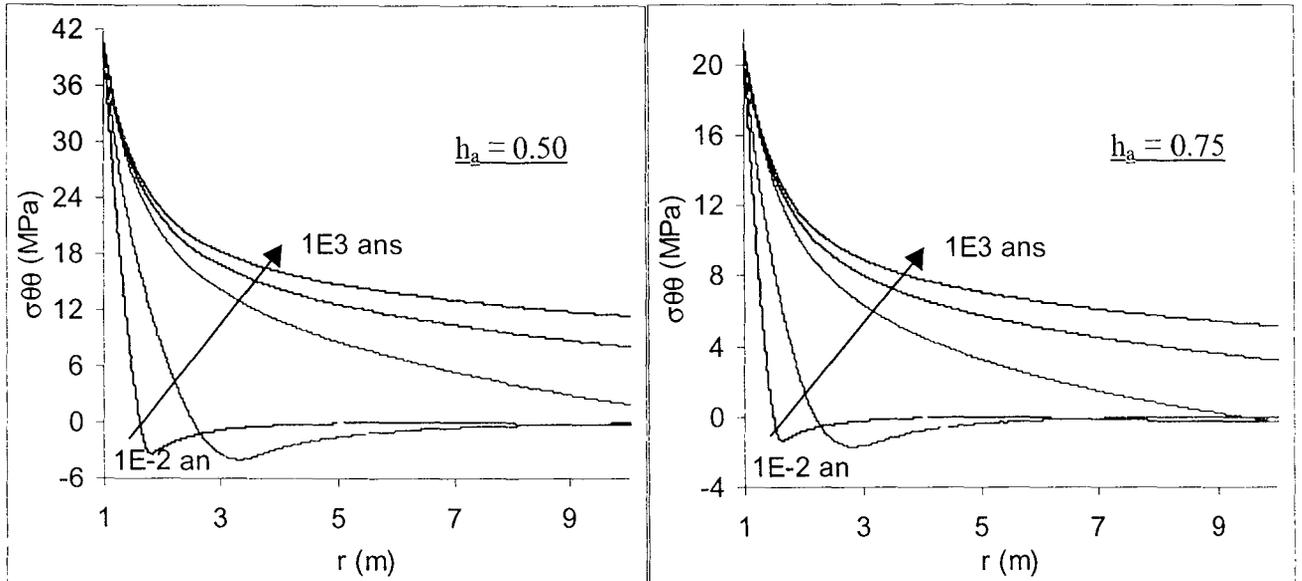


Figure 106. Influence de la dessaturation en paroi sur la contrainte orthoradiale.

Le calcul nous permet donc d'accéder à la valeur maximale de la contrainte de traction subie par le massif et en outre, on dispose pour l'argilite de Tournemire, de mesures expérimentales (réalisées au LAEGO) de la résistance à la traction en fonction de la pression capillaire (ces valeurs de résistance ont été obtenues sur des essais en flexion, et non en traction directe, ce qui explique les valeurs très élevées). Par comparaison des valeurs de la contrainte de traction maximale et de la résistance à la traction par flexion, on constate que l'on a bien une rupture qui doit se produire (figure 107).

$$\left. \begin{aligned}
 h_a = 0.75 &\Rightarrow \begin{cases} p_{cp}^a = 38.8 \text{ MPa} \\ \sigma_{\theta\theta}^a = 21.4 \text{ MPa} \end{cases} & \text{et} & R_t \approx 8 \text{ MPa} \\
 h_a = 0.50 &\Rightarrow \begin{cases} p_{cp}^a = 93.8 \text{ MPa} \\ \sigma_{\theta\theta}^a = 42.1 \text{ MPa} \end{cases} & \text{et} & R_t \approx 16 \text{ MPa}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_{\theta\theta}^a \gg R_t$$

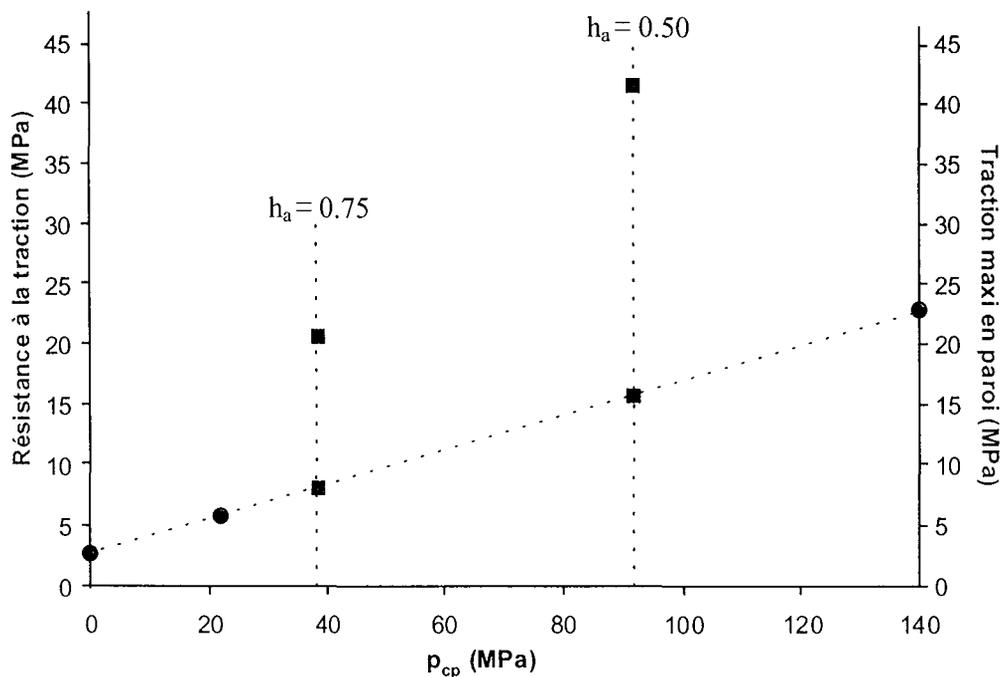


Figure 107. Traction maximale et résistance à la traction.

4.3.4.8 - Les principales différences entre argilite de Tournemire et argilite de l'Est

Pour récapituler les principales différences entre les deux matériaux, on a placé dans le tableau 30 les valeurs en paroi de la saturation, puisque c'est un bon indicateur de la pente de la courbe de pression capillaire, et donc du moteur de la dessaturation, ainsi que les contraintes radiales (à $t = 10^7$ ans) et orthoradiales (en paroi) maximales, ce qui traduit l'importance du couplage H→M.

Tableau 30. Influence des courbes de pression capillaire sur le comportement hydro-mécanique.

	S_{lq} (paroi)	σ_r ($t = 10^7$ ans) [MPa]	$\sigma_{\theta\theta}$ (paroi) [MPa]
CD13Imbib.	0.53	9.5	22.4
CD21Imbib.	0.36	8.7	19.6
CD21Drain.	0.57	9.6	22.5
CD7Imbib.	0.48	7.7	19.9
CA3Imbib.	0.52	9.2	21.3
CA3Drain.	0.64	10.9	25.3
Moyenne	0.52	9.3	21.8
A	0.67	8.9	20.9
B	0.65	9.5	21.9
C	0.78	9.7	22.8
D	0.69	9.2	21.5
E	0.61	8.5	19.9
F	0.60	7.9	18.5
G	0.57	7.8	18.3
H	0.36	6.7	15.6
Moyenne	0.62	8.5	19.9

Tout d'abord, on constate une certaine disparité pour chaque matériau (figure 108) : en effet, les pentes des différentes courbes de pression capillaire sont assez différentes puisque les valeurs de saturation à la paroi sont parfois 20 à 30% plus grandes ou petites que la valeur moyenne. La répercussion sur les variables mécaniques est un peu atténuée puisque l'écart-type n'excède pas 1 MPa.

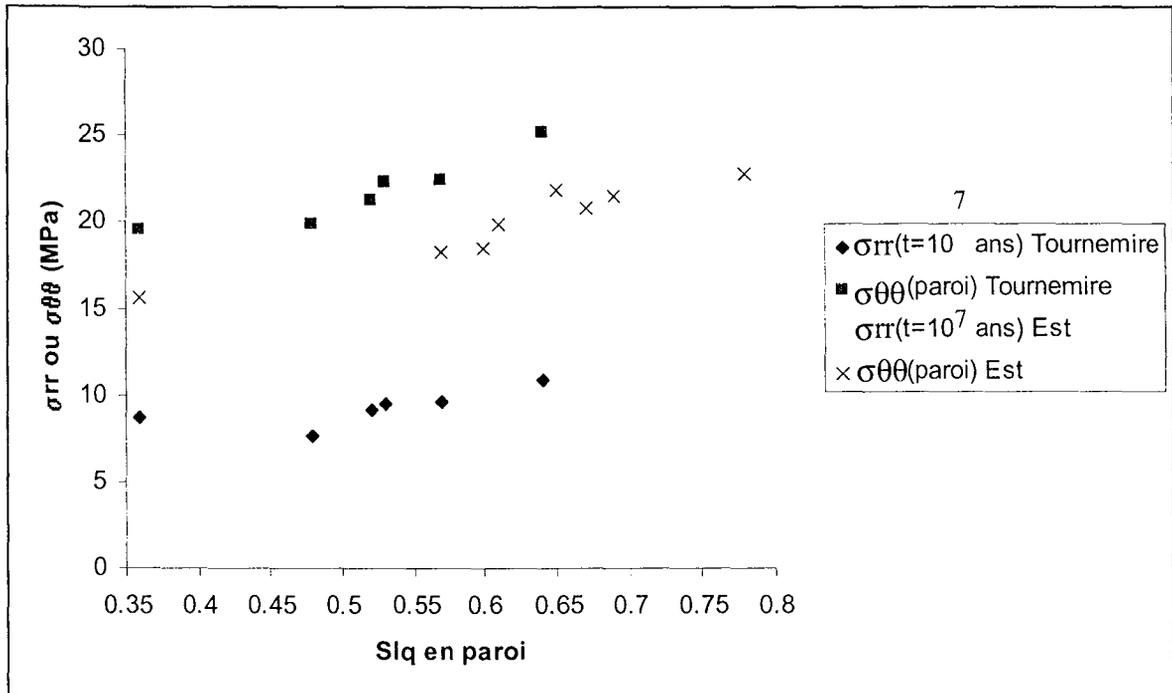


Figure 108. Relation entre les contraintes maximales et la saturation en paroi.

Si on compare les deux matériaux, on remarque que l'argilite de Tournemire se dessature plus fortement que l'argilite de l'Est ($\Delta S_{lq} = 0.1$ en moyenne) mais les contraintes maximales induites sont inférieures d'environ 1 MPa. En fait, les pentes des courbes de pression capillaire sont globalement plus fortes pour l'argilite de Tournemire ce qui explique une plus forte dessaturation mais du fait des caractéristiques mécaniques de l'argilite de l'Est, les contraintes sont plus faibles.

$$\begin{array}{lcl}
 K_o \text{ (Tournemire)} > K_o \text{ (Est)} & \mu \text{ (Tournemire)} > \mu \text{ (Est)} & \\
 1.2 \cdot 10^{10} \text{ MPa} & 8 \cdot 10^9 \text{ MPa} & 5.3 \cdot 10^9 \text{ MPa} > 3.2 \cdot 10^9 \text{ MPa} & (4.14)
 \end{array}$$

4.3.5 - Etude linéaire

4.3.5.1 - Méthodes de linéarisation de la courbe de pression capillaire

Comme pour le problème de ressaturation de la barrière ouvragée par le massif, la linéarisation est très importante car il n'y a pas unicité de la méthode et les résultats obtenus par les calculs linéaires peuvent être nettement distincts selon la méthode choisie. Cette linéarisation se fait toujours dans un but bien précis qui était dans le cas de la BO l'étude du temps de ressaturation : on a donc ajusté le modèle linéaire de manière à trouver des temps de ressaturation voisins par calculs linéaires et non linéaires. Dans ce nouveau problème, le critère choisi concerne les contraintes

(surtout orthoradiales) maximales qui sont générées dans le massif par couplages $H \rightarrow M$ et par conséquent on va chercher un modèle qui nous permette d'estimer au mieux l'ordre de grandeur de ces contraintes.

La première méthode de linéarisation choisie est la méthode énergétique qui est utilisée pour le problème de ressaturation de la BO (figure 109).

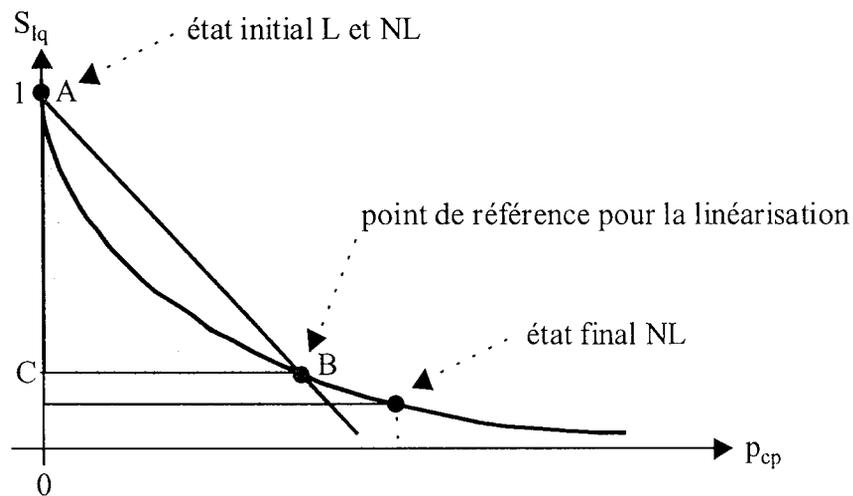


Figure 109. Linéarisation de la courbe de pression capillaire par une méthode énergétique.

L'état initial du massif rocheux saturé, que le modèle soit linéaire ou non linéaire, est défini par le point A de saturation 1 et de pression capillaire nulle. A partir de ce point fixe, on cherche un triangle ABC, avec le point B sur la courbe non linéaire et le point C sur l'axe de la saturation, tel que l'intégrale $S_{lq} \cdot dp_{cp}$ sous la courbe non linéaire (aire en grisé) soit égale à l'aire du triangle (représentant l'intégrale $S_{lq} \cdot dp_{cp}$ sous la courbe linéaire). En procédant de cette façon pour linéariser le problème, le point de référence B se trouve relativement près du point représentant l'état final. On a donc voulu tester d'autres linéarisations avec un point de référence qui se rapproche de l'état initial en remontant la courbe de pression capillaire non linéaire (figure 110).

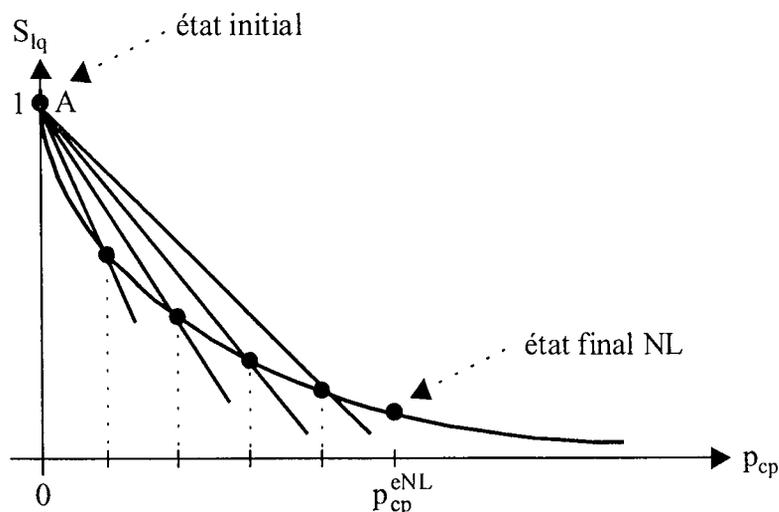


Figure 110. Autres linéarisations de la courbe de pression capillaire.

4.3.5.2 - Influence des différentes méthodes sur les réponses hydrique et mécanique

- Méthode énergétique :

Du fait de la similitude avec le problème de ressaturation de la BO par le massif, on a choisi de tester cette méthode de linéarisation sur le problème de dessaturation de la galerie : en effet, on a toujours un point fixe correspondant à l'état saturé et un autre point, représentant l'état initial dans le problème de la BO et l'état final dans celui de la galerie. Et les résultats obtenus grâce à cette linéarisation sont intéressants pour estimer la valeur maximale de dessaturation du massif (valeur à la paroi de la galerie).

Tableau 31. Estimation de la saturation en paroi avec le modèle linéaire énergétique.

		Modèle linéaire	Modèle non linéaire	Erreur relative (%)
1	A	0.71	0.67	6.0
2	B	0.69	0.65	6.1
3	C	0.81	0.78	3.8
4	D	0.73	0.69	6.0
5	E	0.65	0.61	6.6
6	F	0.62	0.60	3.3
7	G	0.60	0.57	5.3
8	H	0.39	0.36	8.3
9	CD13Imbib.	0.56	0.53	5.7
10	CD21Imbib.	0.38	0.36	5.6
11	CD21Drain.	0.58	0.57	1.8
12	CD7Drain.	0.48	0.48	0
13	CA3Imbib.	0.53	0.52	1.9
14	CA3Drain.	0.67	0.64	4.7

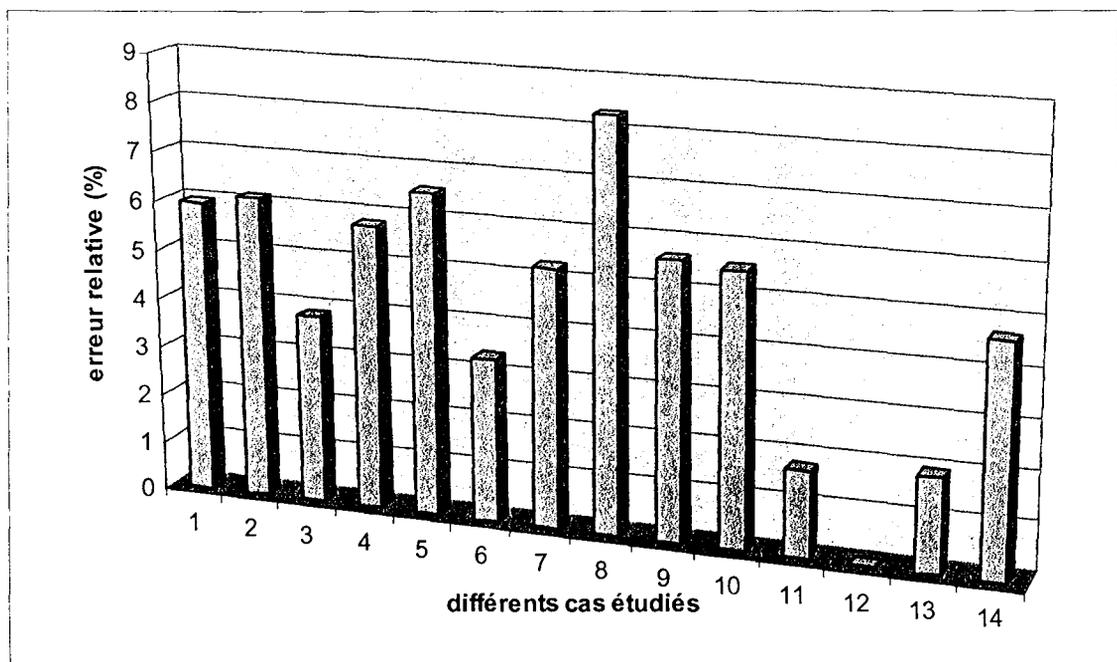


Figure 111. Erreur relative sur la saturation avec le modèle linéaire énergétique.

Le tableau 31 et la figure 111 montrent l'erreur commise par le modèle linéaire par rapport au modèle non linéaire pour les différentes courbes de pression capillaire. Le fait que cette méthode donne des résultats relativement bons sur cette valeur de saturation n'est pas surprenant puisque le critère qui nous a fait choisir cette méthode de linéarisation est un critère « hydraulique ».

En outre, contrairement au problème de la BO, on constate que le régime transitoire n'est pas très différent entre les deux modèles linéaire et non linéaire, la cinétique linéaire est légèrement plus rapide que la cinétique non linéaire, comme le montre la figure 112 (courbe B).

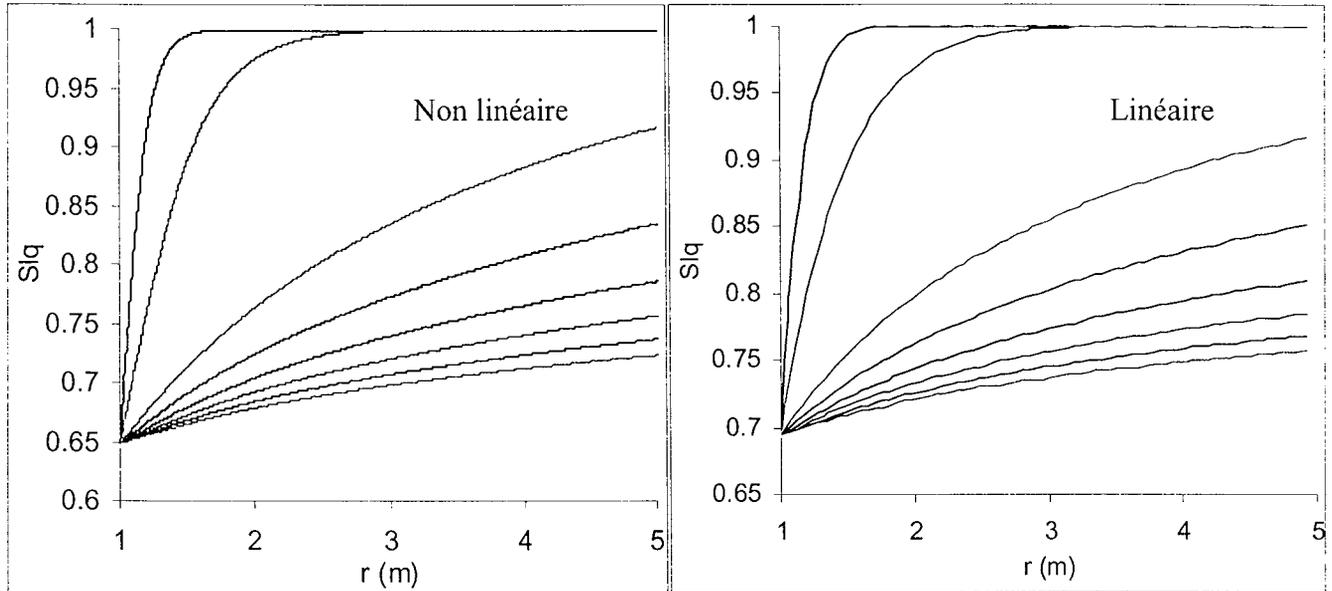


Figure 112 Evolution de la saturation avec les modèles non linéaire et linéaire énergétique.

Néanmoins, les résultats concernant les variables mécaniques sont très différents entre les deux modèles : l'erreur relative commise pour l'évaluation des contraintes radiales et orthoradiales maximales dépasse généralement les 25% (tableau 32 et figure 113).

Tableau 32. Estimation des contraintes maximales avec le modèle linéaire énergétique.

	$\sigma_{rr} (t = 10^7 \text{ ans})$			$\sigma_{\theta\theta} (\text{paroi})$		
	Linéaire	non linéaire	erreur (%)	Linéaire	non linéaire	Erreur (%)
A	6.4	8.9	28.1	15.3	20.9	26.8
B	6.0	9.5	36.8	14.3	21.9	34.7
C	7.4	9.7	23.7	17.6	22.8	22.8
D	6.5	9.2	29.3	15.6	21.5	27.4
E	5.9	8.5	30.6	14.1	19.9	29.1
F	5.8	7.9	26.6	13.9	18.5	24.9
G	5.5	7.8	29.5	13.2	18.3	27.9
H	3.8	6.7	43.3	9.1	15.6	41.7
CD13Imbib.	6.9	9.5	27.4	16.0	22.4	28.6
CD21Imbib.	6.0	8.7	31.0	14.3	19.6	27.0
CD21Drain.	7.1	9.6	26.0	16.9	22.5	24.9
CD7Imbib.	6.1	7.7	20.8	14.6	19.9	26.6
CA3Imbib.	6.6	9.2	28.3	15.7	21.3	26.3
CA3Drain.	8.0	10.9	26.6	18.8	25.3	25.7

La méthode de linéarisation énergétique est donc très bien appropriée pour estimer l'évolution de la saturation mais s'avère inadéquate pour évaluer les contraintes maximales, ce qui est le plus important dans ce problème.

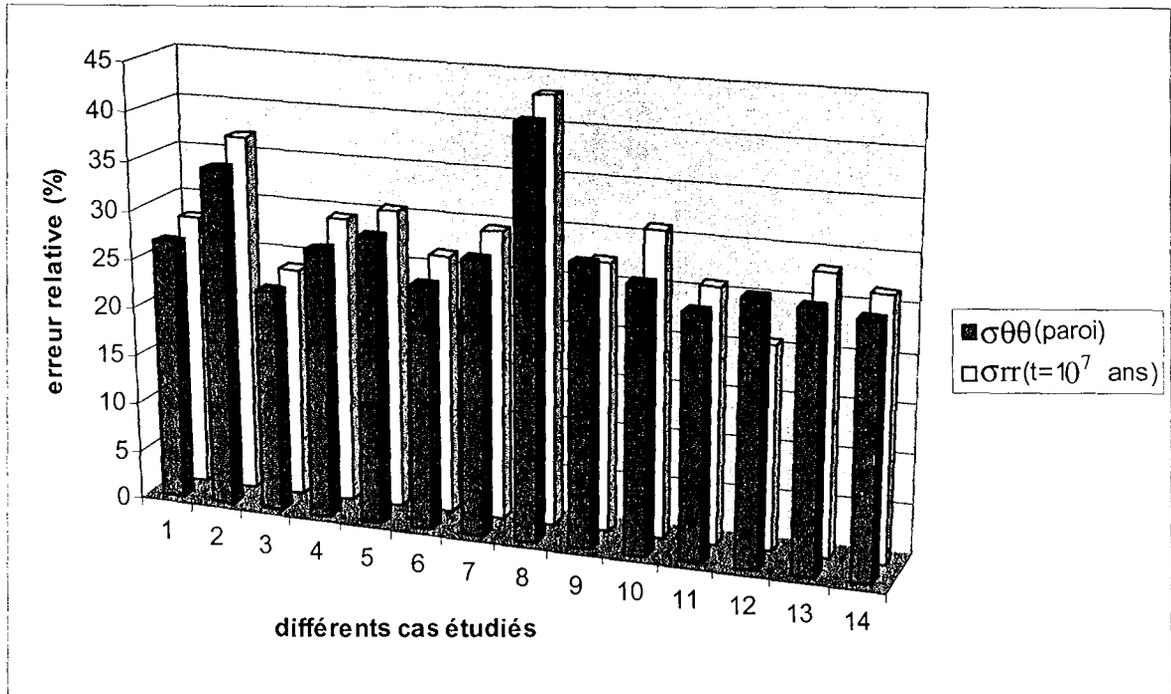


Figure 113. Erreur relative sur les contraintes maximales avec le modèle linéaire énergétique.

- Méthode mécanique :

On décide alors de faire évoluer le point de linéarisation entre les états initial et final sur la courbe non linéaire (figure 114), comme cela est précisé au paragraphe 4.3.5.1. On note α le rapport entre la pression capillaire de référence et la pression capillaire non linéaire appliquée à la paroi (38.8 MPa).

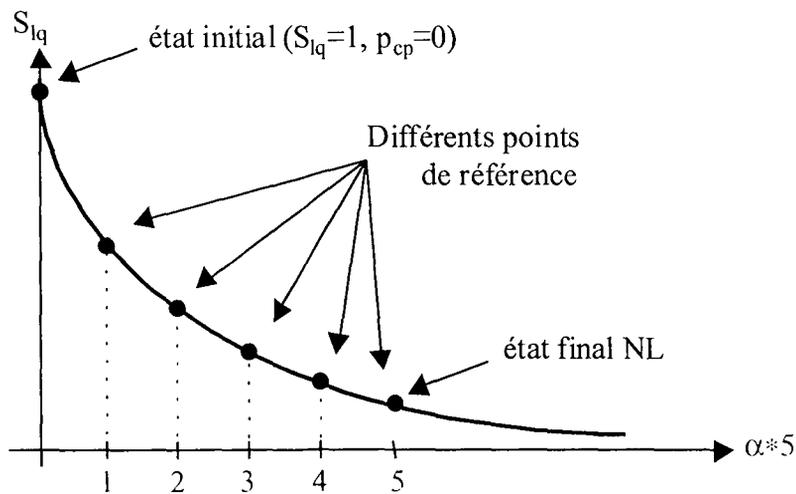


Figure 114. Choix des points de référence en fonction du paramètre α .

Les résultats obtenus avec l'échantillon CD13Imbib. (figure 115) sont tout à fait similaires quelle que soit la courbe de pression capillaire considérée. Cette figure montre l'évolution de la saturation et de la contrainte orthoradiale à la paroi de la galerie pour des modèles linéaires avec différents rapports α , et la valeur non linéaire pour comparaison (en pointillé).

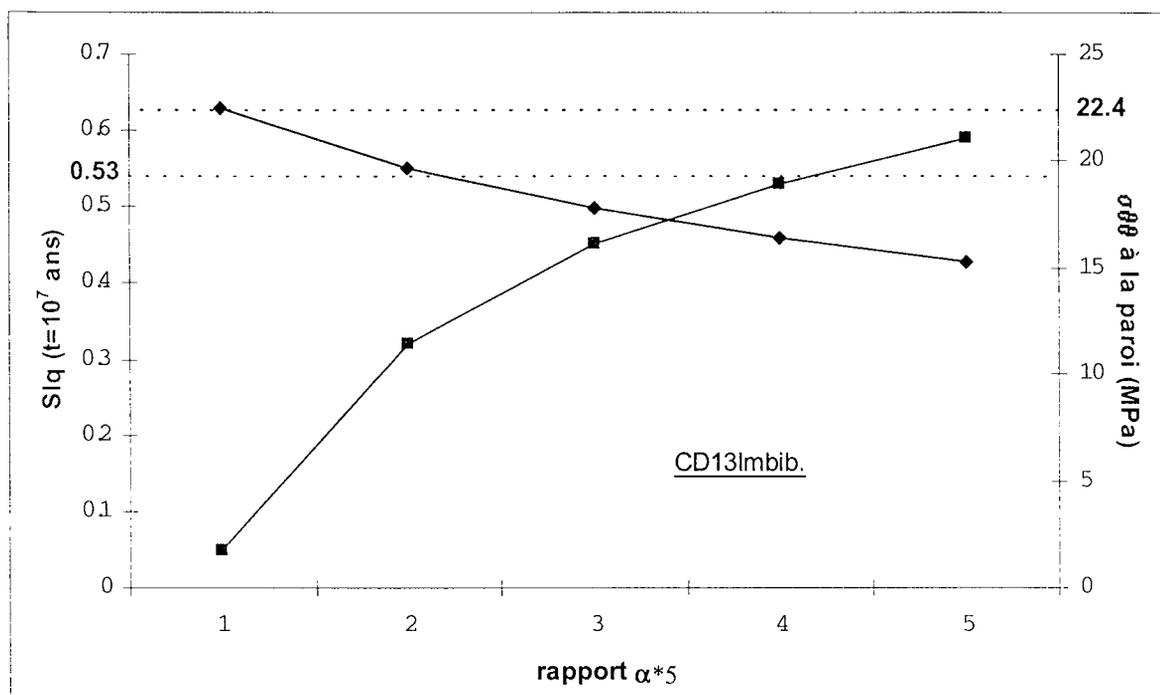


Figure 115. Evolution de la saturation en paroi et des contraintes maximales en fonction de α .

On constate qu'il est possible de trouver une valeur de α pour que la valeur linéaire approxime au mieux la valeur non linéaire, mais ce n'est pas la même valeur pour la saturation et la contrainte orthoradiale. Si on prend $\alpha = 4/5$, les saturations linéaire et non linéaire sont quasiment égales ($S_{lq} = 0.53$) mais les contraintes sont très différentes ($\sigma_{\theta\theta} = 22.4$ MPa pour le modèle non linéaire contre 16.4 MPa pour le modèle linéaire). En revanche, si on choisit une méthode de linéarisation avec $\alpha = 1/5$, l'ajustement en saturation est très mauvais ($S_{lq} = 0.05$) mais les contraintes sont correctement estimées ($\sigma_{\theta\theta} = 22.5$ MPa).

Ceci prouve bien l'importance de la linéarisation et notamment du choix du critère. Dans ce problème, on cherche à appréhender correctement les valeurs maximales de contraintes de traction et il est donc intéressant de considérer la méthode avec $\alpha = 1/5$, que l'on pourrait appeler méthode mécanique.

Le tableau 33 et la figure 116 récapitulent les résultats sur la saturation et les contraintes à la paroi obtenus avec les différents échantillons. Alors que les valeurs non linéaires de saturation sont très mal estimées par les valeurs linéaires, on dépasse rarement les 5% d'erreur sur l'estimation des contraintes, ce qui est tout à fait satisfaisant.

Tableau 33. Saturation et contraintes maximales avec le modèle linéaire mécanique.

	S_{lq} (paroi)			σ_{rr} ($t = 10^7$ ans)			$\sigma_{\theta\theta}$ (paroi)		
	L($\alpha=1/5$)	NL	err.(%)	L($\alpha=1/5$)	NL	err.(%)	L($\alpha=1/5$)	NL	err.(%)
A	0.57	0.67	14.9	8.4	8.9	5.6	20.3	20.9	2.9
B	0.83	0.65	27.7	9.1	9.5	4.2	21.6	21.9	1.4
C	0.78	0.78	0	8.9	9.7	8.2	21.4	22.8	6.1
D	0.66	0.69	4.3	8.7	9.2	5.4	20.8	21.5	3.3
E	0.45	0.61	26.2	8.2	8.5	3.5	19.6	19.9	1.5
F	0.14	0.60	76.7	7.5	7.9	5.1	18.0	18.5	2.7
G	0.19	0.57	66.7	7.6	7.8	2.6	18.3	18.3	0
H	0.05	0.36	86.1	7.2	6.7	7.5	17.1	15.6	9.6
CD13Imbib	0.05	0.53	90.6	9.4	9.5	1.0	22.5	22.4	0.4
CD21Imbib	-0.47	0.36	>100	8.0	8.7	8.0	19.1	19.6	2.6
CD21Drain.	-0.03	0.57	>100	9.2	9.6	4.2	22.0	22.5	2.2
CD7Imbib.	-0.22	0.48	>100	8.4	7.7	9.1	20.7	19.9	4.0
CA3Imbib.	-0.13	0.52	>100	8.9	9.2	3.3	21.3	21.3	0
CA3Drain.	0.35	0.64	45.3	10.3	10.9	5.5	24.5	25.3	3.2

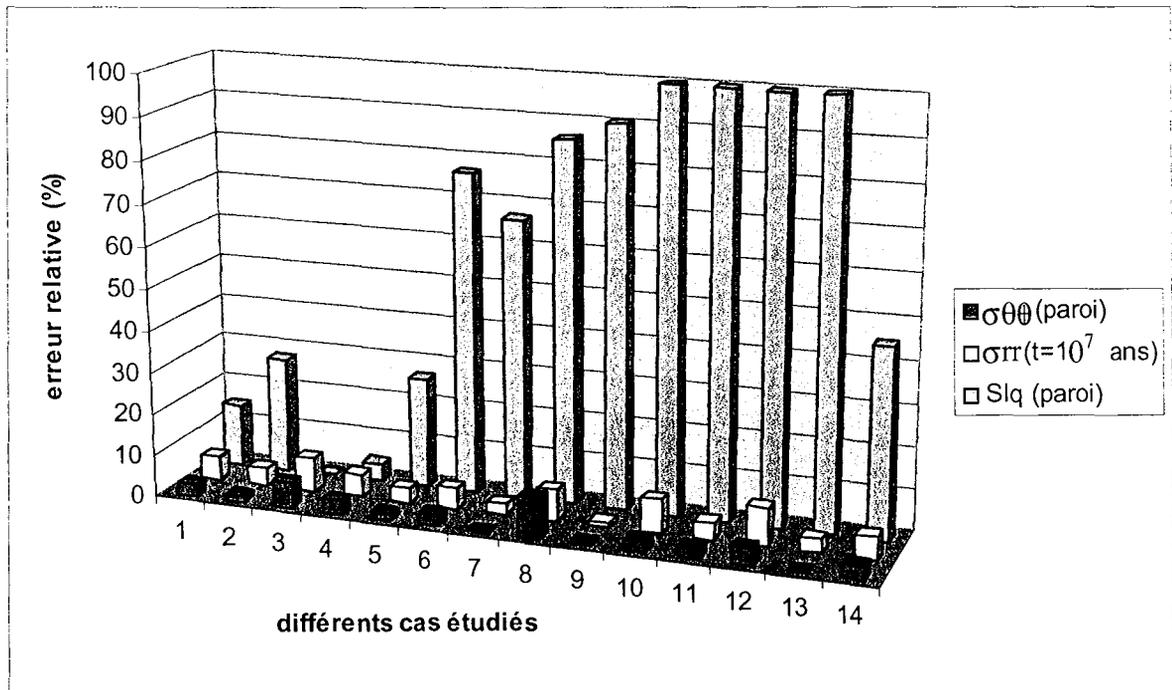


Figure 116. Erreur relative sur la saturation en paroi et les contraintes maximales avec le modèle linéaire mécanique.

4.3.6 - Prise en compte de l'influence du creusement de la galerie

4.3.6.1 - Phasage du problème

Dans l'étude qui a été présentée précédemment, le creusement de la galerie a été négligé et on a considéré des variations des différentes variables hydro-mécaniques par rapport à un état d'équilibre. On va désormais s'intéresser à l'influence du creusement en décomposant le problème en trois phases :

- état initial : massif non perturbé
- creusement du tunnel
- dessaturation du massif

Le creusement du tunnel va provoquer une réponse instantanée du massif, de type élastique non drainée puis on applique les conditions aux limites hydrauliques qui vont activer le processus de dessaturation du massif.

- phase 1 : état initial (figure 117)

On considère le massif argileux à une profondeur de 200m : du fait de la hauteur de recouvrement, on prend en compte un état de contraintes initial isotrope de -5MPa et des pressions partielles de liquide et de mélange égales à 2 MPa (la pression capillaire est donc nulle puisque le massif est saturé).

$$p_{gz}^o = p_{lq}^o = 2\text{MPa}$$

$$\sigma_{rr}^o = \sigma_{\theta\theta}^o = \sigma_{zz}^o = -5\text{MPa}$$

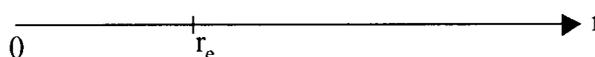


Figure 117. Phase 1 : état initial et massif non perturbé.

- phase 2 : creusement => réponse instantanée (figure 118)

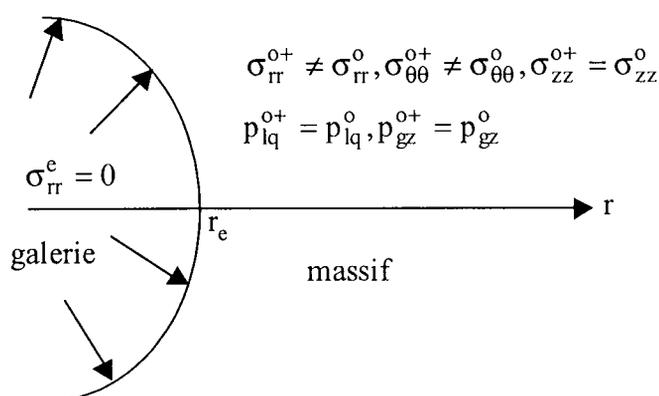


Figure 118. Phase 2 : creusement de la galerie et réponse instantanée.

- phase 3 : dessaturation du massif (figure 119)

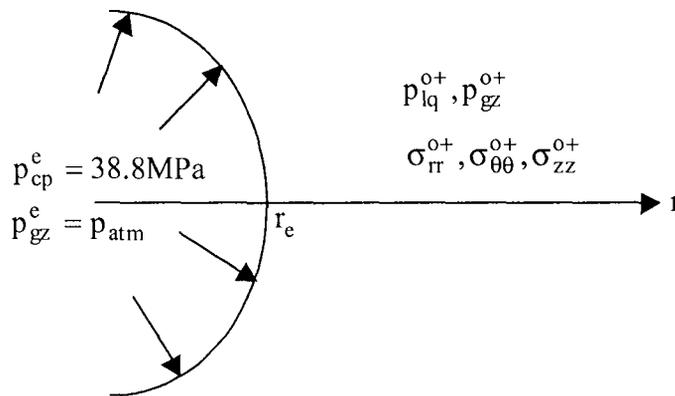


Figure 119. Phase 3 : dessaturation du massif.

4.3.6.2 - Application au modèle linéaire

La réponse élastique non drainée du massif suite au creusement de la galerie se calcule facilement sachant que la géométrie est cylindrique et le milieu d'extension semi-infinie (figure 120) :

$$\sigma_{rr}^{o+} = -5 \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta}^{o+} = -5 \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{zz}^{o+} = -5, \quad u^{o+} = \frac{r_e^2}{\mu r}, \quad \varepsilon_v^{o+} = 0 \quad (4.15)$$

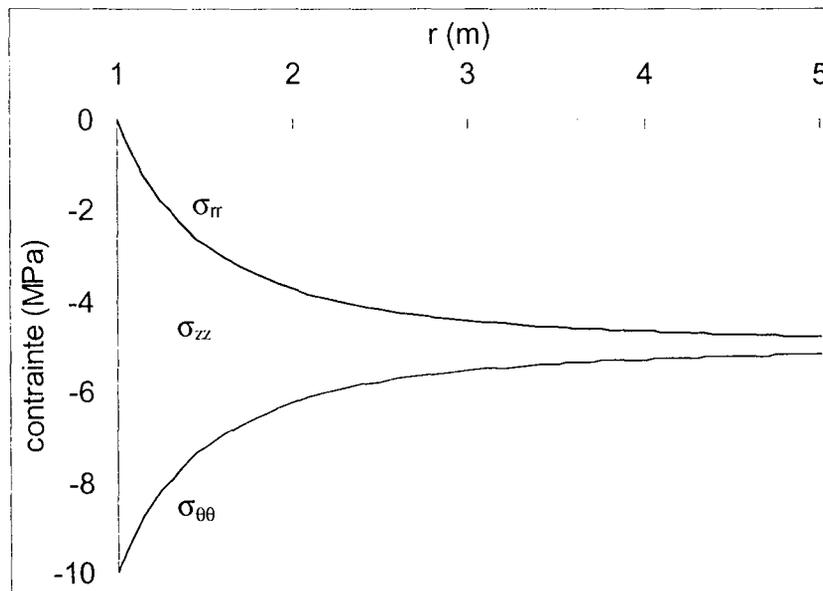


Figure 120. Evolutions instantanées des contraintes.

En outre, d'un point de vue hydraulique, puisque la déformation volumique est nulle, il n'y a pas de variations instantanées des pressions partielles de liquide et de mélange.

On applique alors le principe de superposition en combinant cette réponse instantanée avec le régime transitoire trouvé précédemment et on obtient l'évolution des différentes variables hydro-mécaniques. On combine donc un état instantané caractérisé par des contraintes de compression avec des variations de contraintes de traction dues à la dessaturation du massif, ce qui tend à diminuer légèrement les valeurs des contraintes dans le massif.

4.3.7 - Conclusions

Le modèle hydro-mécanique non linéaire a permis de mettre en évidence l'intérêt d'un modèle couplé pour traduire l'influence de la dessaturation sur le phénomène de fissuration du massif. Les contraintes de traction qui apparaissent en paroi de galerie sont de l'ordre de quelques dizaines de MPa, et sont d'autant plus élevées que la dessaturation est forte. Ces contraintes étant supérieures à la résistance à la traction du massif, elles provoquent une fissuration de la roche.

Les approches linéarisées ont souligné quant à elles l'importance du critère qui est à la base de la linéarisation. En effet, l'approche dite énergétique, qui avait été utilisée précédemment pour le problème de barrière ouvragée, s'est montrée à nouveau intéressante pour appréhender l'évolution de la saturation mais complètement inadaptée pour estimer les contraintes de traction maximales dans le massif. En revanche, une autre approche linéaire dite mécanique a permis de calculer très rapidement des valeurs de contraintes avec une erreur relative inférieure à 5%.

Ceci souligne l'aspect fortement non linéaire du problème étudié. La linéarisation est délicate et sa validité est restreinte au critère choisi pour linéariser. En conclusion, on doit exploiter avec beaucoup de précautions des résultats issus d'un modèle linéaire.

Cette étude va être poursuivie pour prendre en compte le comportement irréversible lié à la fissuration induite par les fortes contraintes de traction, et ses conséquences sur la perméabilité au voisinage du tunnel. Enfin, il est prévu de comparer les résultats de ce modèle avec ceux obtenus in situ à partir d'un ouvrage souterrain du tunnel de Tournemire.

Chapitre

5

***Application à l'isolation
thermique du bâtiment***

*« Une accumulation de faits n'est pas plus
une science qu'un tas de pierres n'est une
maison. »*

Henri Poincaré (1854-1912)

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry, no matter how small, should be recorded to ensure the integrity of the financial statements. This includes not only sales and purchases but also expenses, income, and transfers.

The second part of the document provides a detailed breakdown of the accounting cycle. It outlines the ten steps involved in the process, from identifying the accounting entity to preparing financial statements. Each step is explained in detail, with examples provided to illustrate the concepts.

The third part of the document discusses the various types of accounts used in accounting. It categorizes accounts into assets, liabilities, equity, revenue, and expense accounts. It also explains the normal balances for each type of account and how they are used to calculate the net income or loss for a period.

The fourth part of the document discusses the importance of adjusting entries. It explains how these entries are used to ensure that the financial statements reflect the true financial position of the company at the end of the period. Examples of adjusting entries are provided to illustrate the process.

The fifth part of the document discusses the preparation of financial statements. It outlines the steps involved in preparing the balance sheet, income statement, and statement of owner's equity. It also discusses the importance of comparing the financial statements to the previous period to identify trends and changes.

The sixth part of the document discusses the importance of internal controls. It explains how these controls are used to prevent and detect errors and fraud. Examples of internal controls are provided to illustrate the concepts.

The seventh part of the document discusses the importance of ethics in accounting. It explains how accountants should maintain objectivity and integrity in their work. It also discusses the consequences of unethical behavior and the importance of following the code of ethics.

The eighth part of the document discusses the importance of communication in accounting. It explains how accountants should communicate effectively with their clients and colleagues. It also discusses the importance of providing clear and concise financial information.

The ninth part of the document discusses the importance of technology in accounting. It explains how accounting software can be used to streamline the accounting process and reduce the risk of errors. It also discusses the importance of staying up-to-date on the latest technology.

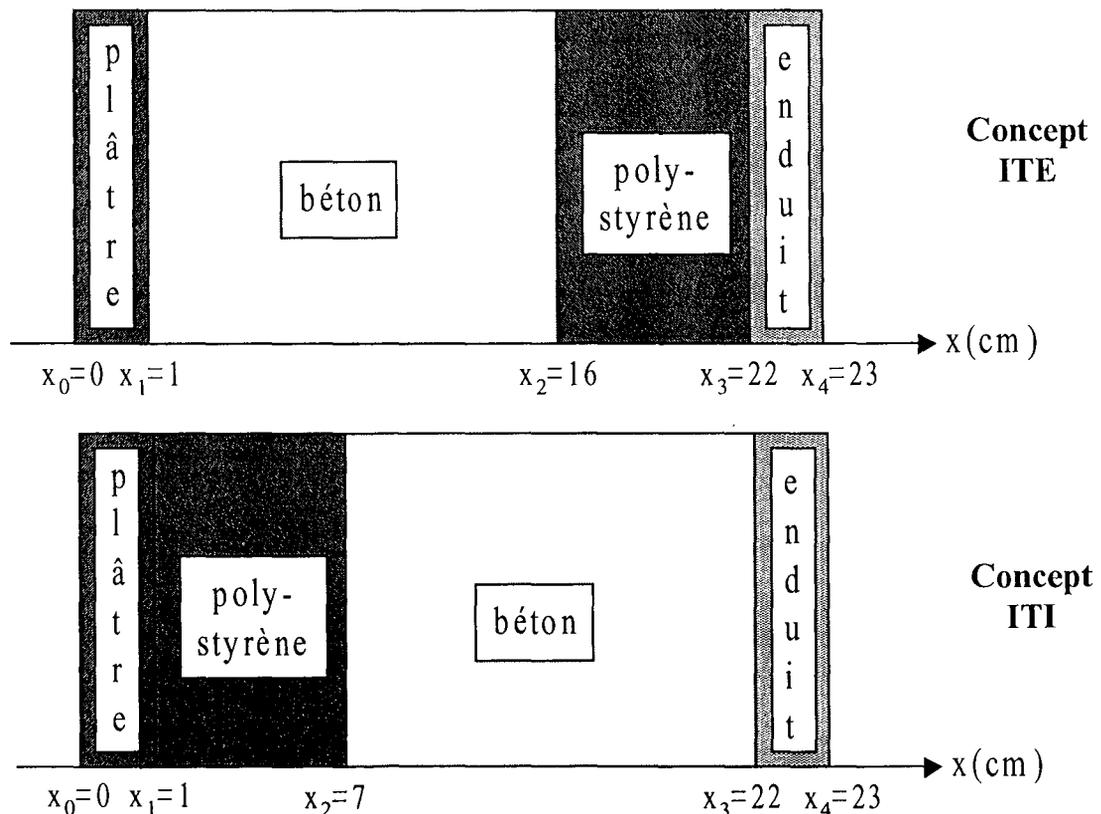
The tenth part of the document discusses the importance of continuous learning in accounting. It explains how accountants should stay up-to-date on the latest accounting standards and regulations. It also discusses the importance of seeking professional development opportunities.

5.1 - INTRODUCTION

Dans le but d'améliorer l'efficacité du chauffage électrique, et de trouver la meilleure solution technico-économique possible, Electricité De France souhaite promouvoir l'utilisation du concept d'Isolation Thermique par l'Extérieur (ITE) dans les murs de bâtiment. Une application de ce concept place le matériau isolant (polystyrène expansé) entre la couche de maçonnerie et l'enduit hydraulique, contrairement à la solution plus classique de l'Isolation Thermique par l'Intérieur (ITI), où l'isolant est situé entre les couches de plâtre et de béton. Sous l'effet des variations climatiques extérieures, les phénomènes de diffusion intervenant dans de tels murs mettent en jeu des processus couplés complexes liés à l'état non saturé des différents constituants et à leur comportement très différent. Une telle étude s'avère très intéressante pour mieux apprécier les efforts subis par les différentes couches d'un mur du bâtiment en œuvre et d'évaluer les conséquences mécaniques d'un choix d'isolation. Une analyse du transfert couplé thermo-hydro-mécanique dans un mur multicouche non saturé est donc présentée de manière à faire ressortir l'intérêt du concept ITE et l'importance des couplages. Les résultats présentés dans ce chapitre seront présentés au congrès AUGC 99 (¹³⁷Thouvenin et al., 1999) et à Bauklimatisches Symposium (¹³⁶Thouvenin et al., 1999).

5.2 - GEOMETRIES

Quel que soit l'ordre des couches constituant le mur de bâtiment avec les concepts ITE et ITI, on peut modéliser ce mur par un ensemble de quatre couches, en géométrie cartésienne. En outre, on considère que l'épaisseur du mur est négligeable par rapport à son extension verticale, ce qui justifie un modèle unidimensionnel (figures 121).



Figures 121. Modèles de mur de bâtiment avec les concepts ITE et ITI.

5.3 - CARACTERISTIQUES DES DIFFERENTS MATERIAUX DU MUR

Les paramètres thermo-mécaniques proviennent du rapport EDF (Remerant et al, 1998). En ce qui concerne les autres paramètres nécessaires pour traiter le problème hydraulique, en l'occurrence les conductivités hydrauliques (au mélange gazeux et au liquide), le coefficient de Fick et la porosité, ce sont des valeurs estimées du fait de la pauvreté bibliographique à leur sujet. Pour le coefficient de Fick, on prend en compte l'expression non linéaire trouvée par comparaison des formulations THMNL et Moyne-Pollock. Seul le facteur de tortuosité τ dépend du matériau considéré et il a été choisi constant pour tous les matériaux (sachant que les seules données disponibles concernant ce paramètre sont une valeur constante de 0.5 donnée par Moyne, 1987 pour un béton et une valeur sensiblement identique prise par Pollock, 1986 pour un sable).

La conductivité au mélange est très élevée de manière à négliger ce terme de diffusion très mal connu (la pression de mélange s'équilibre presque instantanément avec la pression atmosphérique). La conductivité au liquide est identique pour tous les matériaux (sauf pour le polystyrène qui est connu pour être quasiment imperméable à l'eau sous forme liquide) et elle est estimée pour un béton moyen ($k = 10^{-19} \text{ m}^2$). Toutes ces caractéristiques sont regroupées dans le tableau 34.

Tableau 34. Caractéristiques des matériaux du mur.

	Plâtre	Béton	Polystyrène	Enduit
ρ_o [kgm^{-3}]	1440	2400	15	1200
C_p [$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$]	840	580	1200	580
$C = \rho_o C_p$ [$\text{Jm}^{-3}\text{K}^{-1}$]	$1.21 \cdot 10^6$	$1.39 \cdot 10^6$	$1.8 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^5$
λ_T [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$]	0.48	1.4	0.039	0.3
α_o [K^{-1}]	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-5}	$7.2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
E_o [Pa]	$5000 \cdot 10^6$	$45000 \cdot 10^6$	$1500 \cdot 10^6$	$1400 \cdot 10^6$
ν_o [1]	0.2	0.2	0.0002	0.2
$K_o = \frac{E_o}{3(1-2\nu_o)}$ [Pa]	$2.778 \cdot 10^9$	$2.5 \cdot 10^{10}$	$5.002 \cdot 10^8$	$7.778 \cdot 10^8$
$\mu = \frac{E_o}{2(1+\nu_o)}$ [Pa]	$2.083 \cdot 10^9$	$1.875 \cdot 10^{10}$	$7.498 \cdot 10^8$	$5.833 \cdot 10^8$
λ_{liq} [$\text{m}^2\text{Pa}^{-1}\text{s}^{-1}$]	10^{-16}	10^{-16}	10^{-20}	10^{-16}
λ_{gz} [$\text{m}^2\text{Pa}^{-1}\text{s}^{-1}$]	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}
τ [1]	0.5	0.5	0.5	0.5
ϕ [1]	0.5	0.2	0.8	0.2

Il reste aussi à préciser les courbes de pression capillaire de chaque matériau. La figure 122 représente celle du béton, dont l'expression est issue de Lassabatère (1994).

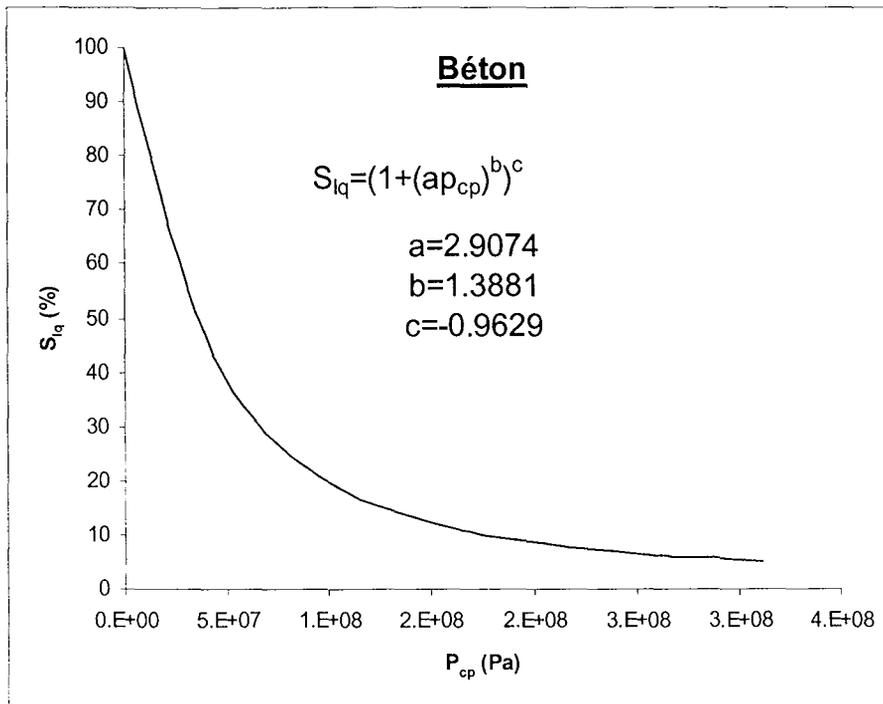


Figure 122. Courbe de pression capillaire du béton.

En ce qui concerne le plâtre (figure 123) et l'enduit hydraulique (figure 124), on a utilisé les données fournies par Kari et al. (1992). Un ajustement a été calculé pour représenter au mieux les courbes proposées par ces auteurs.

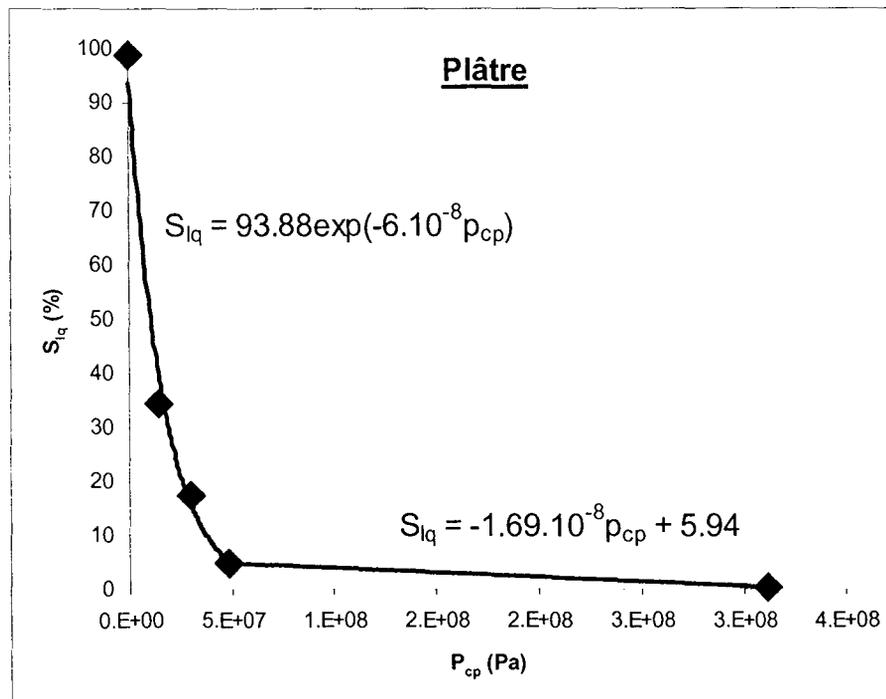


Figure 123. Courbe de pression capillaire du plâtre.

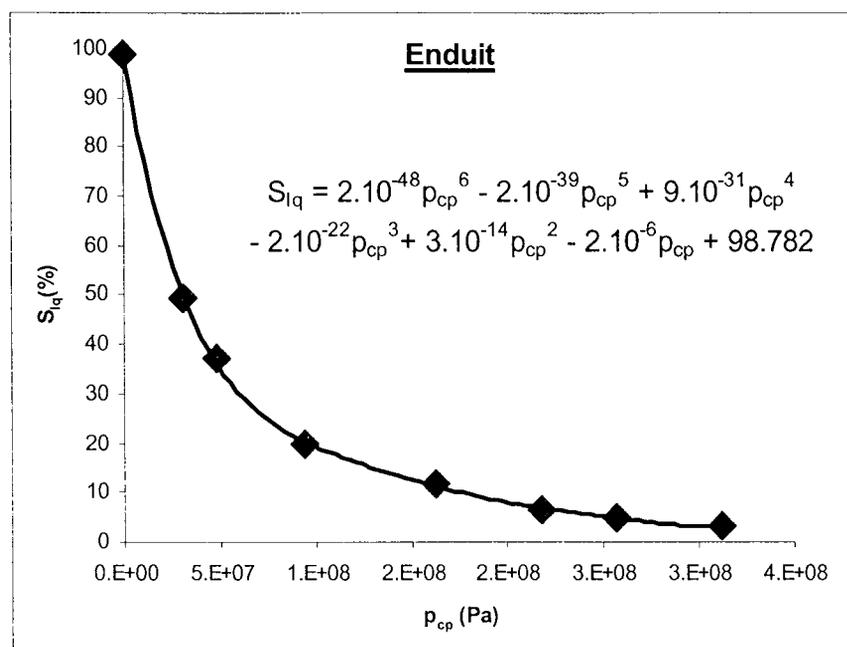


Figure 124. Courbe de pression capillaire de l'enduit.

Enfin, pour le polystyrène (figure 125), ces mêmes auteurs ont proposé également une courbe de pression capillaire mais celle-ci met en évidence un comportement hygroscopique relativement important qui semble peu réaliste. Nous avons donc choisi de considérer ce matériau comme un matériau non hygroscopique (sa capacité à absorber de l'eau liquide est quasiment nulle) et par conséquent sa courbe de pression capillaire est telle que la saturation reste nulle quelle que soit la pression capillaire (sauf pour $p_{cp}=0$, $S_{lq}=1$). Cette distinction est très importante car d'un point de vue du couplage H→M, un matériau non hygroscopique n'est pas susceptible de présenter un retrait ou un gonflement hydrique (des résultats illustrent ce point dans la suite du mémoire).

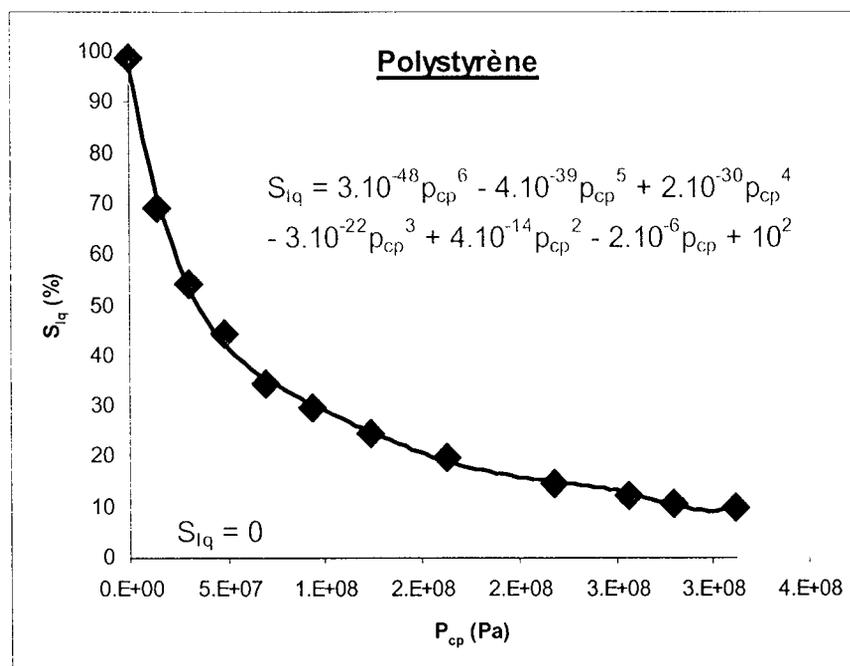


Figure 125. Courbes de pression capillaire du polystyrène.

L'état initial a été choisi de manière à considérer un mur construit en été et soumis à un chargement extérieur hivernal : ce cas a été présenté par Remerant et al. (1998) comme le cas le plus défavorable en ce qui concerne l'apparition de fortes contraintes de traction. D'un point de vue thermique, on considère une température initiale constante de 30°C pour tous les matériaux (température de construction du mur en été). D'un point de vue hydrique, on fixe l'humidité qui, par la loi non linéaire de Kelvin, revient à fixer la pression de liquide (la pression de mélange est égale à la pression atmosphérique). On a donc une humidité, une pression de liquide et une pression capillaire constantes dans les différents matériaux. Mais la saturation est discontinue car celle-ci est calculée à partir de la pression capillaire grâce aux courbes de pression capillaire qui sont différentes selon les matériaux. Le profil initial de saturation est donné sur la figure 126.

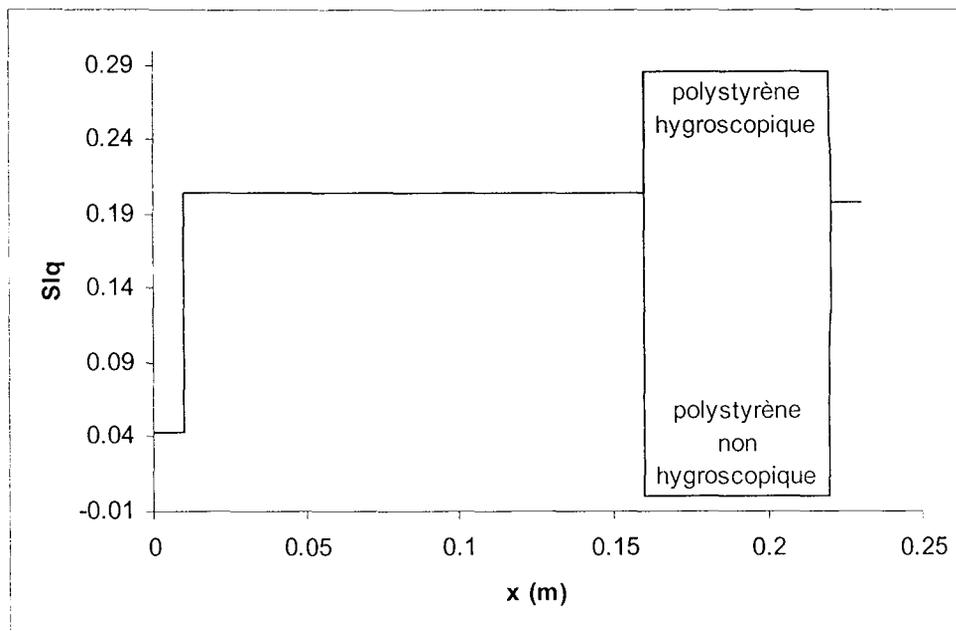


Figure 126. Profil initial de saturation dans le mur.

5.4 - ETUDE THERMO-MECANIQUE

5.4.1 - Régime permanent : solutions analytiques

Cette étude a été présentée par Remerant et al. (1998). Les auteurs considèrent les deux géométries ITE et ITI en appliquant des conditions aux limites d'échanges sur les deux parois du mur. En faisant l'hypothèse d'une température découplée, ils en déduisent l'expression analytique du champ de température dans les différents matériaux puis l'équilibre mécanique leur permet d'exprimer les variables mécaniques. Nous en présentons rapidement les principaux résultats que nous compléterons ensuite par une étude en régime transitoire avec des solutions semi-explicites.

- résolution du problème thermique :

L'équation découplée de diffusion de la chaleur en régime permanent s'écrit (avec l'indice i faisant référence à la $i^{\text{ème}}$ couche) :

$$\frac{d^2 T^{(i)}}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^{(i)}(x) = a_i x + b_i \quad (5.1)$$

Les huit coefficients a_i et b_i sont déterminés à partir des huit équations traduisant les conditions aux limites et de continuité :

$$\begin{aligned} \underline{x = x_0} : \quad & h_{\text{int}} [T_{\text{int}} - T^{(1)}(x = x_0)] = -\lambda_T^{(1)} \frac{dT^{(1)}(x = x_0)}{dx} \\ \underline{x = x_i (i=1, 2, 3)} : \quad & \begin{cases} T^{(i)}(x = x_i) = T^{(i+1)}(x = x_i) \\ \lambda_T^{(i)} \frac{dT^{(i)}(x = x_i)}{dx} = \lambda_T^{(i+1)} \frac{dT^{(i+1)}(x = x_i)}{dx} \end{cases} \quad (5.2) \\ \underline{x = x_4} : \quad & h_{\text{ext}} [T^{(4)}(x = x_4) - T_{\text{ext}}] = -\lambda_T^{(4)} \frac{dT^{(4)}(x = x_4)}{dx} \end{aligned}$$

On considère une température initiale T_0 de 30°C , des températures intérieure T_{int} et extérieure T_{ext} respectivement de 20°C et 4.8°C ainsi que des coefficients d'échanges intérieur h_{int} et extérieur h_{ext} respectivement de $9\text{W/m}^2/^\circ\text{C}$ et $16.9\text{W/m}^2/^\circ\text{C}$.

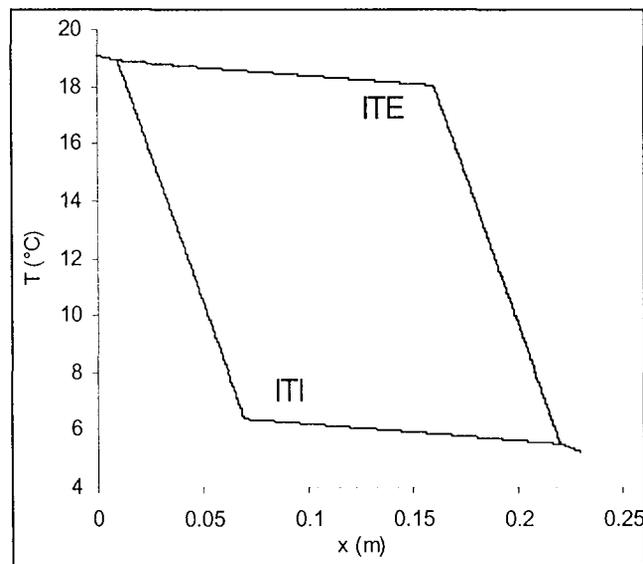


Figure 127. Evolution de la température en régime permanent.

On constate que le polystyrène joue bien le rôle d'isolant en absorbant le gradient de température (figure 127). De plus, l'isolation par l'extérieur présente l'avantage de maintenir dans le béton une température voisine de la température intérieure, sachant que celle-ci subit des variations de faible amplitude. En revanche, pour l'isolation classique par l'intérieur, la température du béton est conditionnée par la température extérieure, et le bâtiment subit donc les variations climatiques, ce qui induit alors un effet de fatigue.

- résolution du problème mécanique :

En considérant la relation d'équilibre mécanique, on en déduit que la contrainte radiale est nulle dans tout le mur :

$$\frac{d\sigma_{xx}^{(i)}(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \sigma_{xx}^{(i)}(x) = \sigma_{xx}^{(4)}(x = x_4) = 0 \tag{5.3}$$

A partir de la loi de comportement thermo-élastique 1D, on peut alors exprimer le déplacement et la contrainte orthoradiale sous la forme :

$$\sigma_{yy}^{(i)}(x) = -\frac{E^{(i)}\alpha_o^{(i)}}{1-\nu^{(i)}}(T^{(i)} - T_o) \tag{5.4}$$

$$u^{(i)}(x) = \frac{1+\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)}}\alpha_o^{(i)}\left[a_i \frac{x^2}{2} + (b_i - T_o)x + c_i \right] \tag{5.5}$$

et les 4 coefficients c_i sont déterminés par les relations de continuité et aux limites portant sur le déplacement :

$$x = x_0 : u^{(1)}(x = x_0) = 0$$

$$x = x_i (i = 1, 2, 3) : u^{(i)}(x = x_i) = u^{(i+1)}(x = x_i) \tag{5.6}$$

Les résultats sont présentés sur la figure 128. La contrainte orthoradiale et le déplacement mettent en évidence un phénomène de traction dans le mur. On constate que l'isolation par l'extérieur diminue le risque de fissuration puisque l'amplitude des contraintes est nettement inférieure (facteur 2 entre ITE et ITI), et de plus, les sauts de contraintes aux différentes interfaces entre matériaux sont plus faibles, ce qui tend à limiter le risque de décohésion entre les couches.

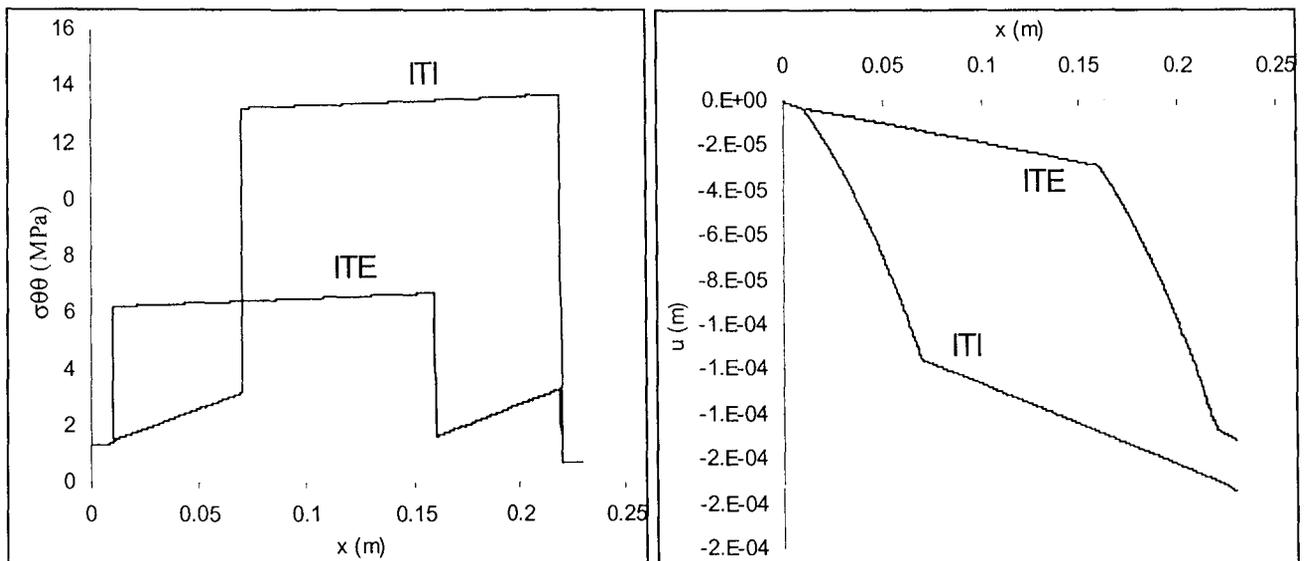


Figure 128. Evolutions de la contrainte orthoradiale et du déplacement en régime permanent.

5.4.2 - Régime transitoire : solutions semi-explicites

Pour appréhender le régime transitoire, on utilise dans un premier temps la transformation de Laplace sur l'équation thermique découplée :

$$C_{TT}^{(i)} \frac{\partial T}{\partial t} = K_{TT}^{(i)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \xrightarrow{\text{transf. Laplace}} \frac{d^2 \bar{T}^{(i)}}{dx^2} = \frac{C^{(i)}}{\lambda_T^{(i)}} s \bar{T}^{(i)} \quad (5.7)$$

d'où l'expression explicite de la température dans le domaine des transformées de Laplace :

$$\bar{T}^{(i)}(x, s) = a_i \exp(\omega_i x) + b_i \exp(-\omega_i x) + \frac{T_o}{s} \quad \text{avec} \quad \omega_i = \sqrt{\frac{s C^{(i)}}{\lambda_T^{(i)}}} \quad (5.8)$$

et la loi de comportement permet d'exprimer le déplacement dans ce même domaine :

$$\frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial x} = \frac{1 + \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \alpha_o^{(i)} \left(\bar{T}^{(i)} - \frac{T_o}{s} \right) \Rightarrow \bar{u}^{(i)} = \frac{1 + \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \alpha_o^{(i)} \left[\frac{a_i}{\omega_i} \exp(\omega_i x) + \frac{b_i}{\omega_i} \exp(-\omega_i x) \right] + c_i \quad (5.9)$$

Les trois constantes a_i , b_i et c_i pour chaque matériau sont déterminées à partir des conditions aux limites et de continuité thermiques et mécaniques comme pour le régime permanent. L'utilisation de la transformation de Laplace permet donc de trouver une expression analytique de la température et des variables mécaniques dans le domaine transformé puis le retour dans le domaine du temps est réalisé grâce à la méthode d'inversion numérique de Stehfest (1970) qui est très efficace pour des problèmes en géométrie cartésienne. Les résultats présentés concernent la température (figures 129 et 130) et la contrainte orthoradiale (figures 131 et 132) pour les deux modèles ITI et ITE.

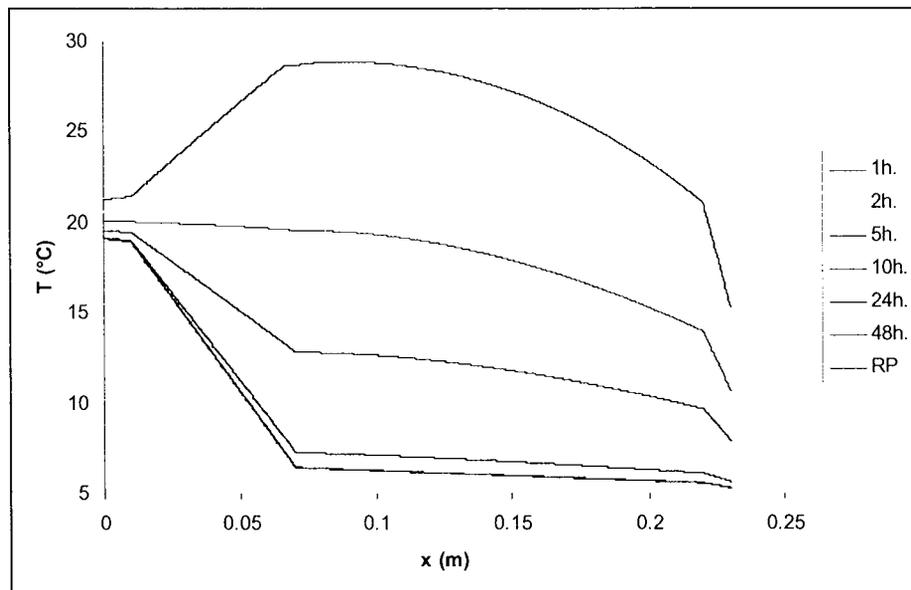


Figure 129. Evolution de la température en régime transitoire (modèle ITI).

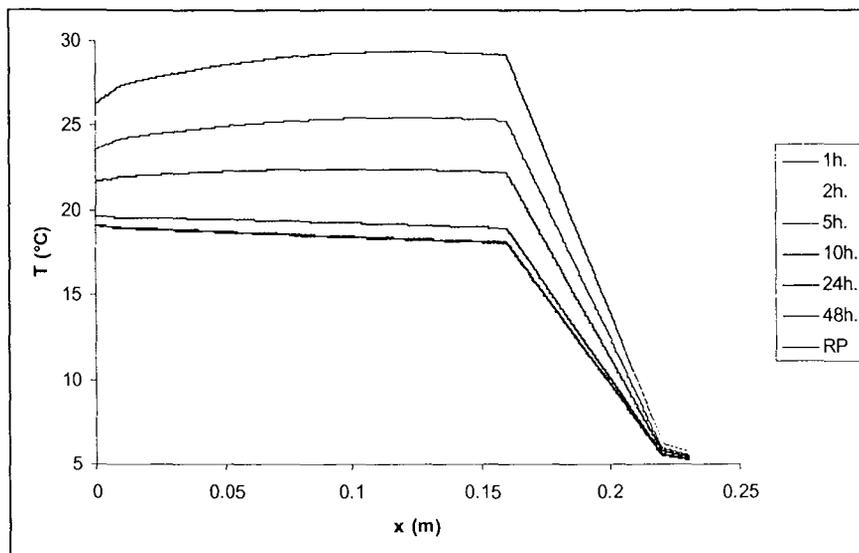


Figure 130. Evolution de la température en régime transitoire (modèle ITE).

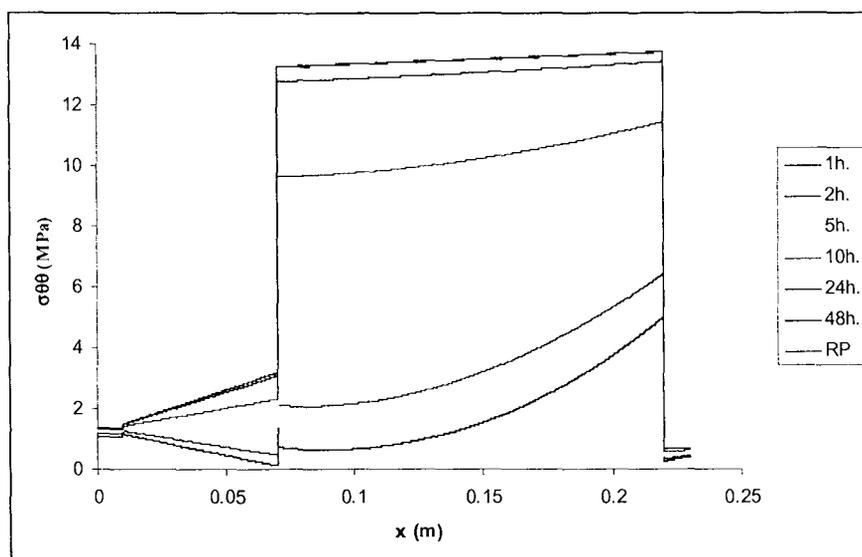


Figure 131 Evolution de la contrainte orthoradiale en régime transitoire (modèle ITI).

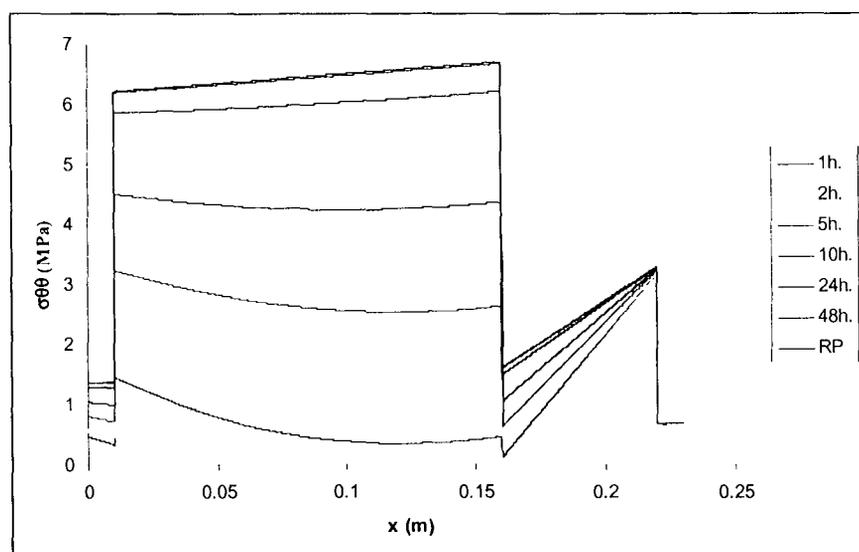


Figure 132. Evolution de la contrainte orthoradiale en régime transitoire (modèle ITE).

On retrouve bien le régime permanent présenté précédemment et celui-ci est atteint au bout d'environ une trentaine d'heures. Le calcul en régime transitoire est donc du plus grand intérêt si on veut appliquer sur la paroi extérieure du mur des conditions traduisant des variations journalières, car la période du cycle journalier est alors inférieure au temps nécessaire pour atteindre le régime permanent.

5.4.3 - Modèle tricouche/quadricouche : importance du plâtre

Dans un objectif de simplification, on peut être amené à se demander quelles seraient les conséquences d'une modélisation tricouche qui ne prendrait pas en compte la couche de plâtre sur la face inférieure du mur. La comparaison des résultats entre les modèles avec quatre et trois couches, autrement dit avec et sans la couche de plâtre, met en évidence des différences importantes dans le béton et le polystyrène (figure 133). La diffusion est plus rapide avec le modèle quadricouche, ce qui peut s'expliquer par le fait que la conductivité thermique du matériau intervient dans la condition aux limites d'échanges :

$$h_{\text{int}} [T(x=0) - T_{\text{int}}] = -\lambda_T \frac{dT}{dx}(x=0) \quad (5.10)$$

Comme la conductivité thermique du plâtre est inférieure à celle du béton, le flux de chaleur est plus important et la température du mur chute donc plus rapidement (on remarque surtout pour $t = 2\text{h}$ que la pente est plus forte pour $x \approx 0$ avec le modèle quadricouche). Le régime permanent ne semble pas affecté par la prise en compte de la couche de plâtre.

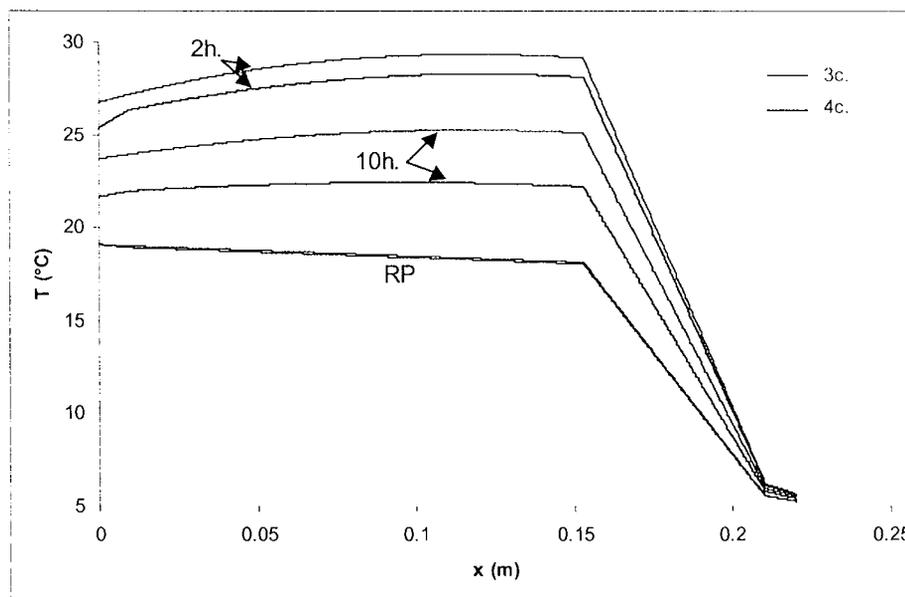


Figure 133. Evolution de la température avec (4c) et sans (3c) la couche de plâtre.

D'un point de vue mécanique, on remarque que l'évolution est également plus lente avec le modèle tricouche (ce qui est dû au couplage $T \rightarrow M$), mais la grosse différence concerne l'amplitude des contraintes en paroi (figure 134). En effet, le plâtre possède un module d'Young neuf fois plus petit que celui du béton et les contraintes orthoradiales qui se développent dans le plâtre restent faibles.

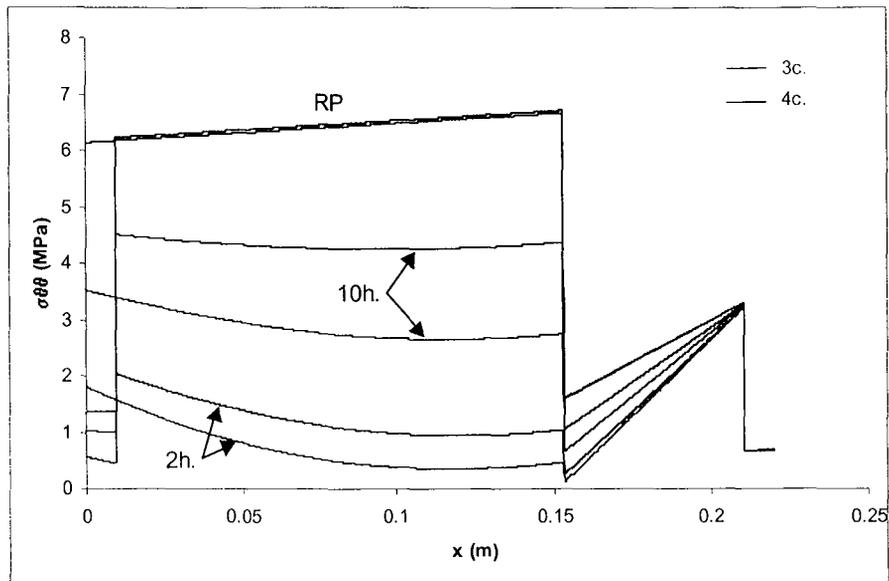


Figure 134. Evolution de la contrainte orthoradiale avec (4c) et sans (3c) la couche de plâtre.

5.4.4 - Influence des conditions aux limites : température constante imposée

On reprend le modèle quadricouche précédent mais on applique cette fois des températures constantes comme conditions aux limites. On constate que les régimes transitoire et permanent sont affectés par ce changement de conditions aux limites. La diffusion est plus lente avec la condition d'échanges puisque dans ce cas la température à la paroi chute progressivement de 30°C vers 20°C au lieu d'être imposée instantanément à 20°C. Mais le régime permanent conduit finalement à des températures inférieures puisque la température à la paroi descend en dessous de 20°C pour des temps grands (figure 135). Les couplages $T \rightarrow M$ induisent des observations du même ordre sur l'évolution des contraintes orthoradiales (figure 136).

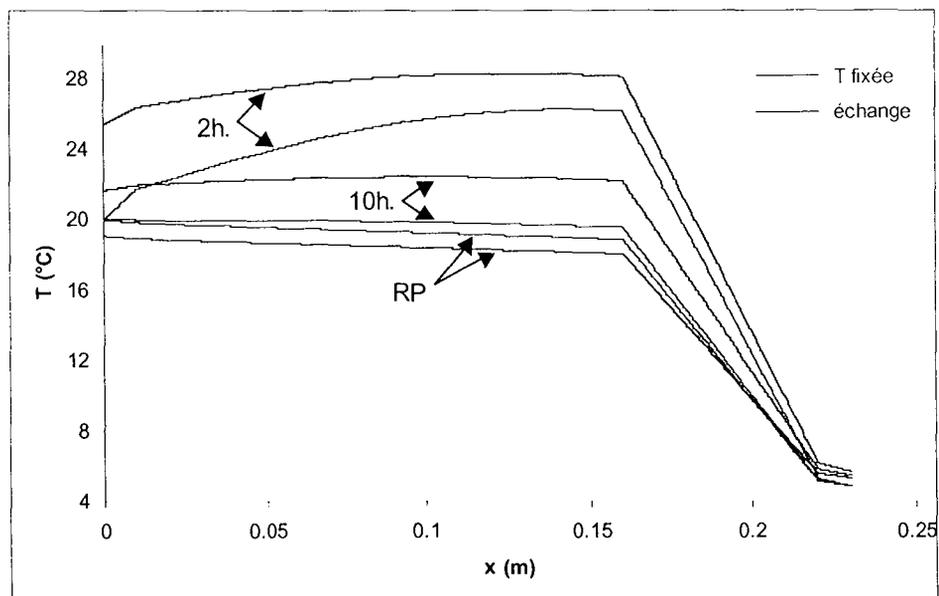


Figure 135. Influence des CL (échanges ou T fixée) sur la température.

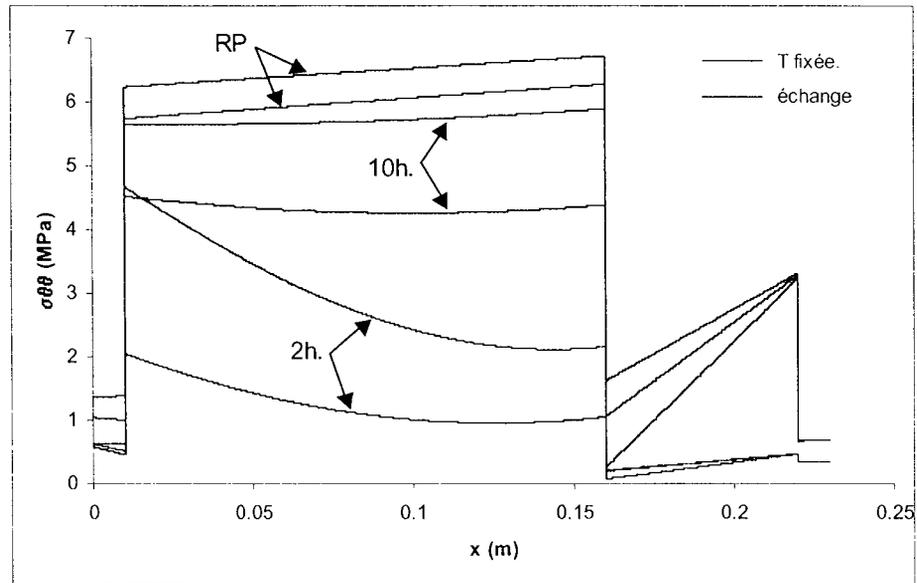


Figure 136. Influence des CL (échanges ou T fixée) sur la contrainte orthoradiale.

5.5 - ETUDE THERMO-HYDRO-MECANIQUE

5.5.1 - Discrétisations spatiale et temporelle pour les calculs avec PARSAT

Les maillages 1D pris en compte pour les calculs avec PARSAT sont constitués de 128 éléments de Lagrange quadratique dont la répartition est montrée sur la figure 137 (le premier correspond au modèle ITE et le second au modèle ITI).

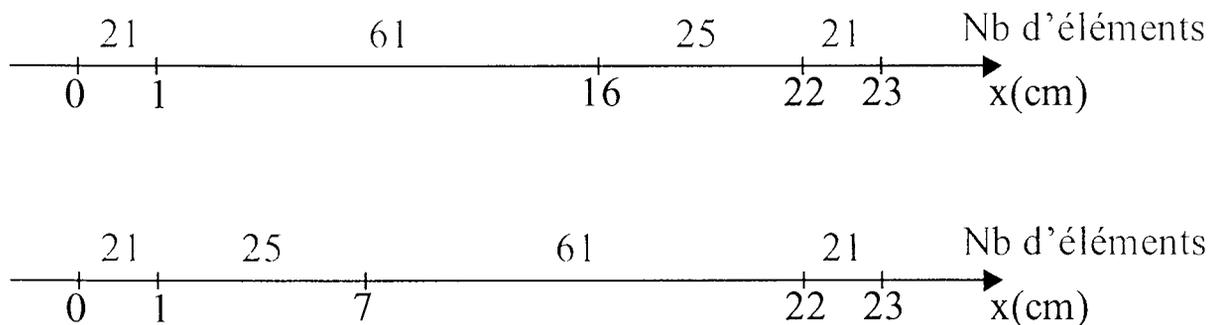


Figure 137. Discrétisation spatiale du mur (modèles ITE et ITI).

En ce qui concerne la résolution temporelle, on utilise une méthode implicite dite du point fixe avec 216 instants d'impression.

Avant de réaliser des calculs non linéaires avec PARSAT sur un modèle quadricouche, il nous est apparu intéressant de valider le code sur ce problème en considérant un modèle linéaire tricouche de manière à pouvoir comparer les résultats numériques et semi-explicites.

5.5.2 - Modèle linéaire

5.5.2.1 - Solutions semi-explicites

On reprend les quatre équations couplées : l'intégration de l'équation de Navier permet d'établir une relation explicite entre les quatre inconnues. Après passage dans le domaine des transformées de Laplace (la variable temporelle t est remplacée par la nouvelle variable s et la dérivation temporelle disparaît), et quelques transformations, on peut alors réécrire le système des trois équations de diffusion sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \overline{p_{lq}} \\ \overline{p_{gz}} \\ \overline{T'} \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \delta \nabla^2 \begin{bmatrix} \overline{p_{lq}} \\ \overline{p_{gz}} \\ \overline{T'} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \delta : \text{matrice de diffusion } 3 \times 3 \quad (5.11)$$

La matrice de diffusion étant diagonalisable à valeurs propres réelles distinctes positives δ_i , on détermine alors les solutions du problème de façon explicite dans le domaine transformé sous la forme de combinaisons linéaires de trois fonctions propres \overline{v}_i :

$$\begin{bmatrix} \overline{p_{lq}} \\ \overline{p_{gz}} \\ \overline{T'} \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{v}_3 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1^1 & \theta_1^2 & \theta_1^3 \\ \theta_2^1 & \theta_2^2 & \theta_2^3 \\ \theta_3^1 & \theta_3^2 & \theta_3^3 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

avec la colonne k de la matrice de combinaison θ contenant les trois composantes du vecteur propre associé à la $k^{\text{ième}}$ valeur propre de la matrice de diffusion, et les fonctions propres \overline{v}_i s'exprimant comme des combinaisons de fonctions exponentielles :

$$\overline{v}_i = A_i \exp(\omega_i x) + B_i \exp(-\omega_i x) \quad \text{avec} \quad \omega_i = \sqrt{\frac{s}{\delta_i}} \quad (5.13)$$

Puis les coefficients A_i et B_i sont déterminés à partir des conditions aux limites et des conditions de continuité entre les matériaux.

5.5.2.2 - Validation du régime permanent avec PARSAT

Les trois valeurs propres permettent de déterminer trois temps caractéristiques de diffusion pour chaque matériau et ces temps sont fonction des propriétés thermo-hydro-mécaniques des différents matériaux. Par conséquent, on peut calculer des temps caractéristiques très différents pour un même matériau (les différents processus de diffusion se passent alors à des instants nettement distincts), ainsi que des temps très différents entre deux matériaux (du fait de fortes discontinuités de certains paramètres).

Un problème numérique se pose alors dans ce cas. En effet, en régime transitoire, pour un temps donné t , on doit donc calculer $\exp(\omega_i x)$: si t est petit devant δ_i , $s \gg \delta_i$, et donc ω_i est très grand. Ainsi il devient impossible de calculer $\exp(\omega_i x)$. En revanche, en régime permanent, pour un temps

grand, ω_i est très petit et tend vers 0, ce qui ne pose pas de problème pour le calcul de l'exponentielle. C'est ce problème qui se pose avec les paramètres que l'on prend en compte pour le mur et il nous est uniquement possible de déterminer le régime permanent. Néanmoins le paragraphe suivant permettra de valider le régime transitoire sur un cas simplifié (les paramètres seront ajustés de manière à calculer des valeurs propres très proches au sein des matériaux et entre les matériaux).

Par rapport à l'étude thermo-mécanique précédente, on conserve les conditions initiales et aux limites thermiques sans échange et il faut préciser les conditions hydrauliques. On considère que la pression de mélange est égale à la pression atmosphérique dans l'état initial, ainsi qu'à l'intérieur et à l'extérieur du mur. Concernant la pression de liquide, on calcule sa valeur (grâce à la loi de Kelvin) de manière à prendre en compte une humidité initiale et intérieure de 50% ($p_{lq} = -97\text{MPa}$) et une humidité extérieure de 20% ($p_{lq} = -225\text{MPa}$). De plus, il est nécessaire de linéariser les courbes de pression capillaire des différents matériaux et la loi de Fick : ceci est réalisé simplement autour de l'état initial (les résultats sont présentés pour le polystyrène non hygroscopique).

On présente quelques résultats (figures 138) obtenus en régime permanent avec le modèle ITE, montrant une excellente adéquation entre les approches numérique (rose) et semi-explicite (bleu).

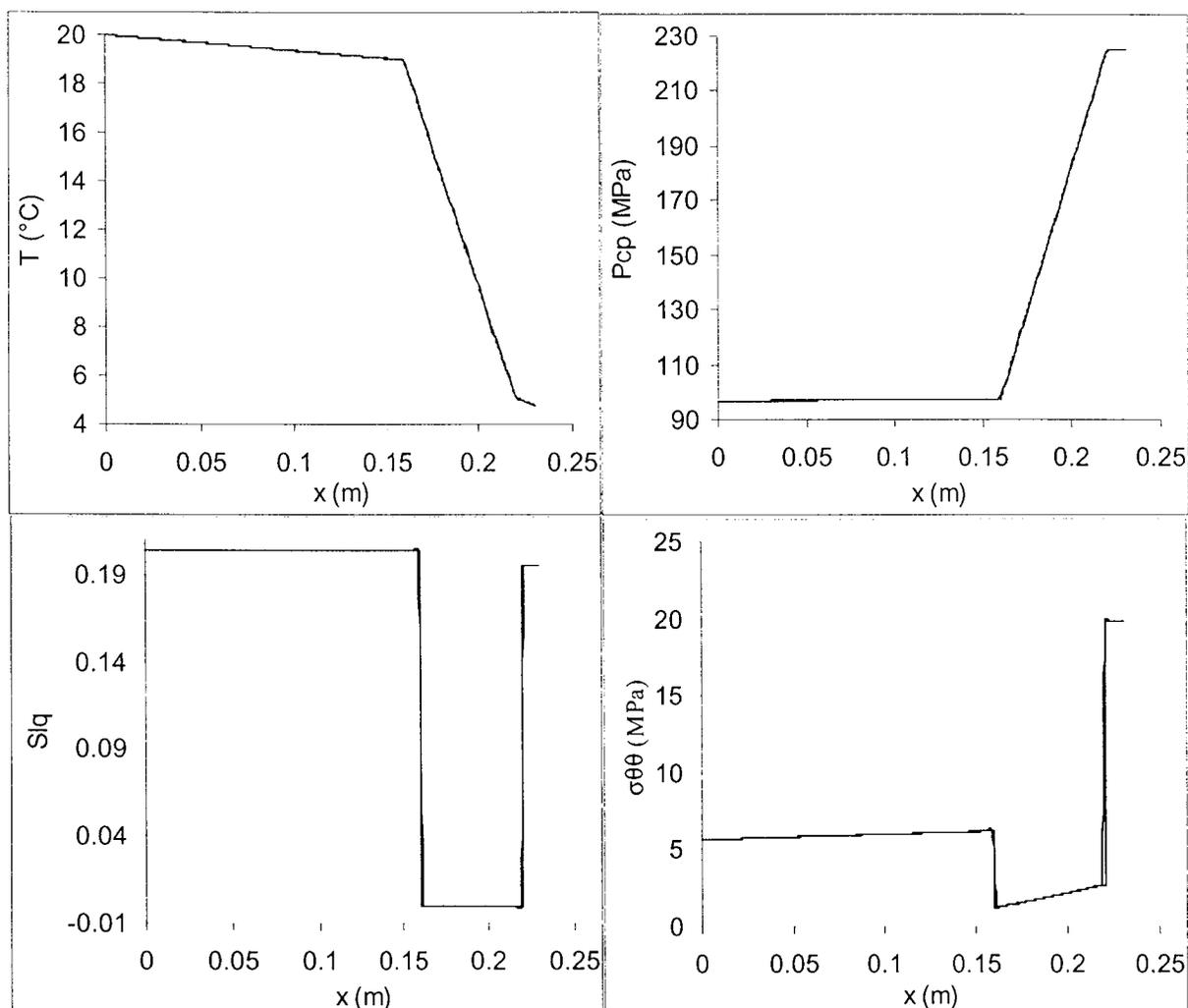


Figure 138. Comparaison des résultats en RP : PARSAT/solutions semi-explicites.

Le régime permanent thermique est tout à fait comparable à celui qui avait été observé avec le modèle thermo-mécanique, à savoir que le gradient de température est absorbé principalement par la couche de polystyrène. Et on constate un phénomène identique pour la pression capillaire. L'importance du caractère non hygroscopique du polystyrène (saturation nulle dans la couche) est mise en évidence par l'absence de couplage H→M : la contrainte est la même avec les modèles thermo-mécanique et thermo-hydro-mécanique, alors que dans la couche d'enduit, les fortes pressions induisent de fortes contraintes.

5.5.2.3 - Validation du régime transitoire pour un modèle simplifié

On considère toujours la solution semi-explicite du problème tricouche mais avec le même matériau pour les trois couches (le béton présenté précédemment). Un tel modèle simplifié permet de valider le code de calcul PARSAT en régime transitoire. Les évolutions de la température (figure 139) et de la contrainte orthoradiale (figure 140) sur quelques instants mettent à nouveau en évidence que les calculs numériques (N) se superposent avec les calculs semi-analytiques (SA).

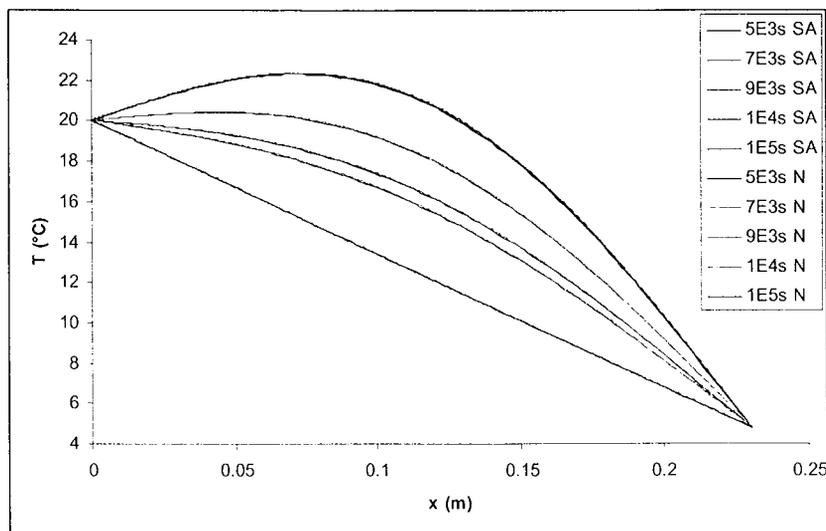


Figure 139. Evolution de la température pour le modèle simplifié (PARSAT et semi-expl.).

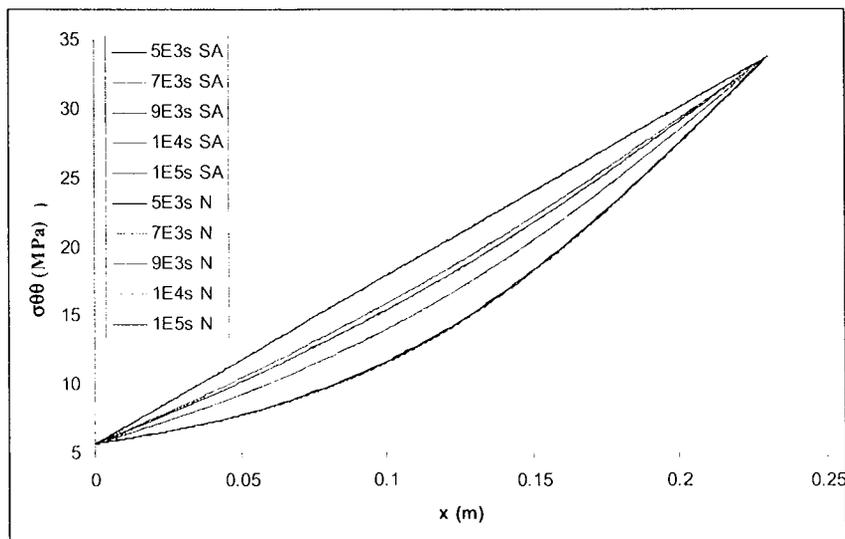


Figure 140. Evolution de la contrainte pour le modèle simplifié (PARSAT et semi-expl.).

5.5.3 - Modèle non linéaire quadricouche

On s'intéresse maintenant au problème du mur quadricouche en prenant en compte un modèle non linéaire. On considère le cas de référence ITE et à partir des résultats obtenus, on étudie l'influence de différents paramètres ou propriétés des matériaux :

- importance des couplages hydrauliques : même température initiale et aux limites
- importance des couplages thermiques : même pressions initiales et aux limites
- type d'isolation : modèle ITE/ITI
- sorption du polystyrène : matériau hygroscopique ou non
- importance de la diffusion de Fick de la vapeur
- conditions aux limites extérieures :
- été sec/hiver humide
- non-linéarité de la conductivité thermique

5.5.3.1 - Cas de référence

L'évolution thermique est identique à celle du modèle thermo-mécanique ce qui montre que les couplages H→T sont négligeables dans cette étude et que l'équation thermique peut être découplée. Le régime permanent est atteint au bout d'une dizaine d'heures. Le gradient de température est absorbé majoritairement par la couche de plâtre et par la couche de polystyrène : on n'observe pas de fortes variations thermiques dans la couche de béton (figure 141).

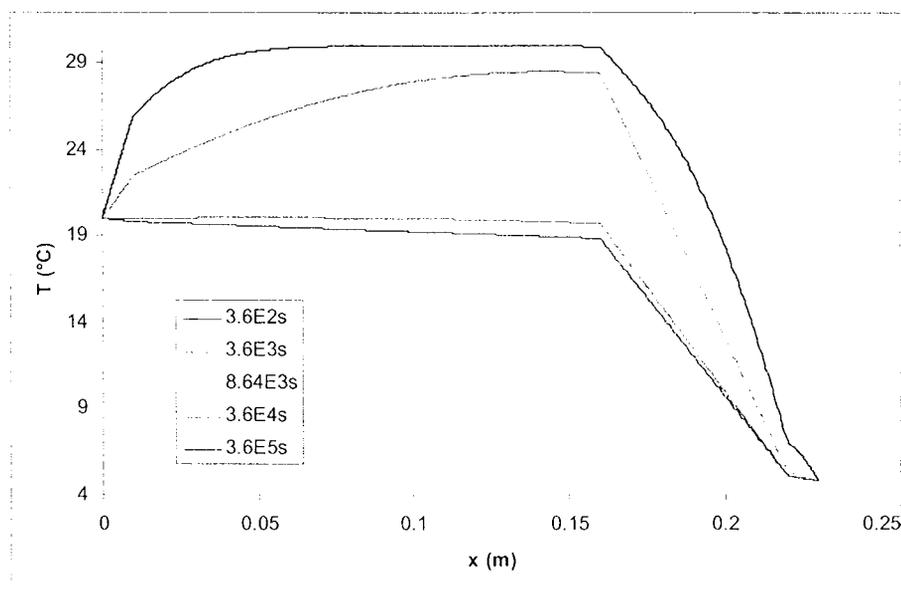


Figure 141. Evolution de la température dans le cas de référence.

D'un point de vue hydraulique, on peut déjà vérifier que la pression de mélange reste bien constante dans tout le mur, sa valeur étant égale à la pression atmosphérique (figure 142). En effet, du fait de la perméabilité au mélange qui a été délibérément choisie très forte dans les quatre matériaux, la pression doit s'équilibrer instantanément. On constate que la pression capillaire (figure 143) reste constante dans le plâtre et le béton : ceci s'explique par le fait que la condition aux limites intérieure n'impose pas de variation par rapport à l'état initial et que sur la face extérieure du béton, le polystyrène montre sa propriété d'imperméabilité à l'eau liquide. En

revanche dans le polystyrène, une diffusion hydraulique a bien lieu : elle est très forte puisque ce matériau absorbe tout le gradient de pression, et elle est relativement lente puisque le régime permanent est atteint au bout d'environ un mois.

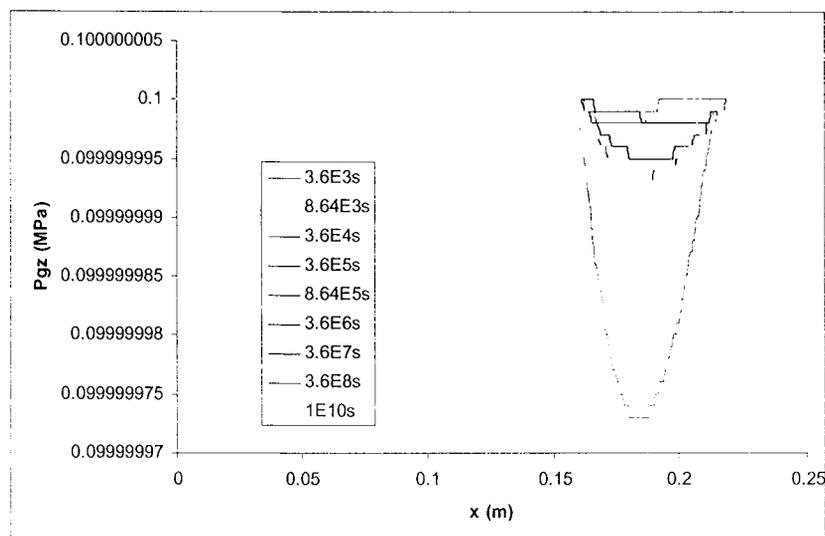


Figure 142. Équilibre instantané de la pression de mélange.

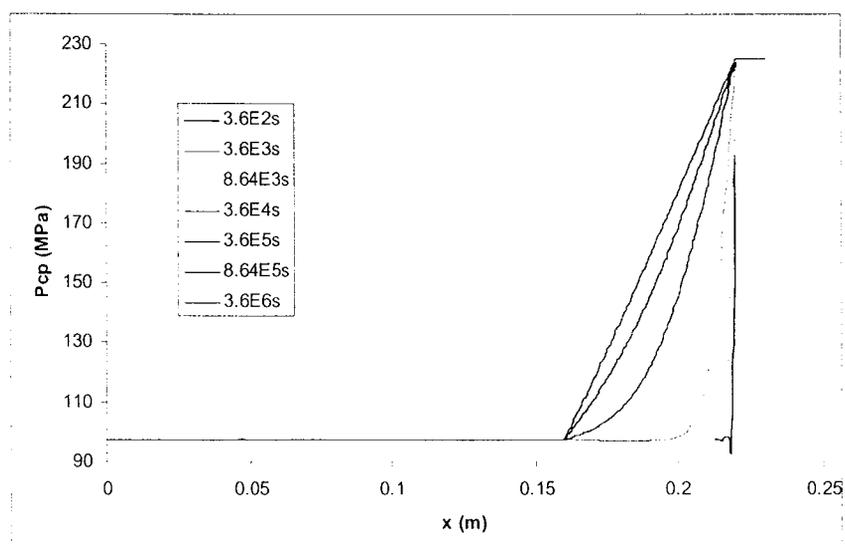


Figure 143. Évolution de la pression capillaire dans le cas de référence.

Par le biais des courbes de pression capillaire, on peut alors en déduire l'évolution de la saturation (figure 144) et on remarque que celle-ci n'a pas évolué par rapport à l'état initial. Dans le béton, ceci est dû à la pression capillaire qui est elle aussi constante, et dans le polystyrène, cela s'explique par le caractère non hygroscopique de ce matériau : quelle que soit la valeur de la pression capillaire, la saturation reste nulle (le polystyrène n'absorbe pas d'eau).

D'un point de vue mécanique, les contraintes qui apparaissent sont tout à fait comparables à celles du modèle thermo-mécanique, tant pour leur intensité que pour leur vitesse d'apparition, à l'exception de la couche d'enduit, où elles sont nettement plus fortes (figure 145). On peut donc attribuer l'apparition des contraintes dans le plâtre, le béton et le polystyrène au seul couplage $T \rightarrow M$ alors que dans l'enduit, on a l'effet conjugué des couplages $T \rightarrow M$ et surtout $H \rightarrow M$.

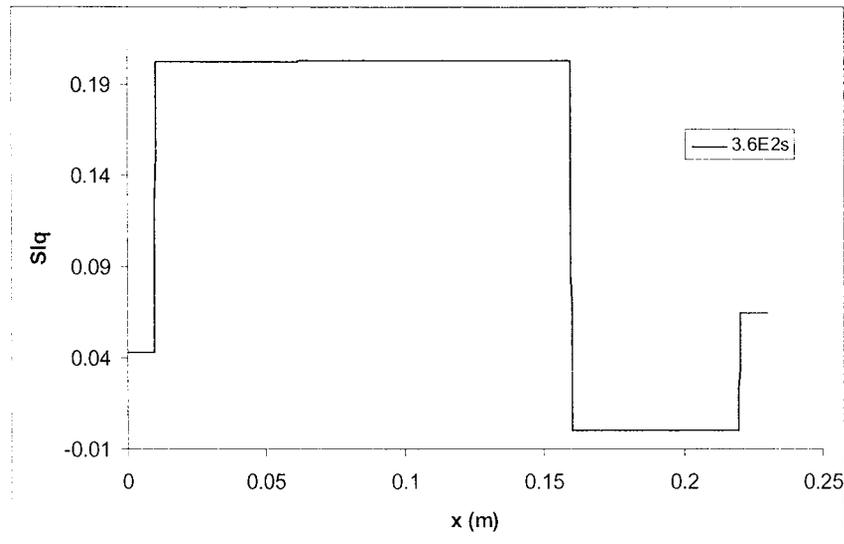


Figure 144. Evolution de la saturation dans le cas de référence.

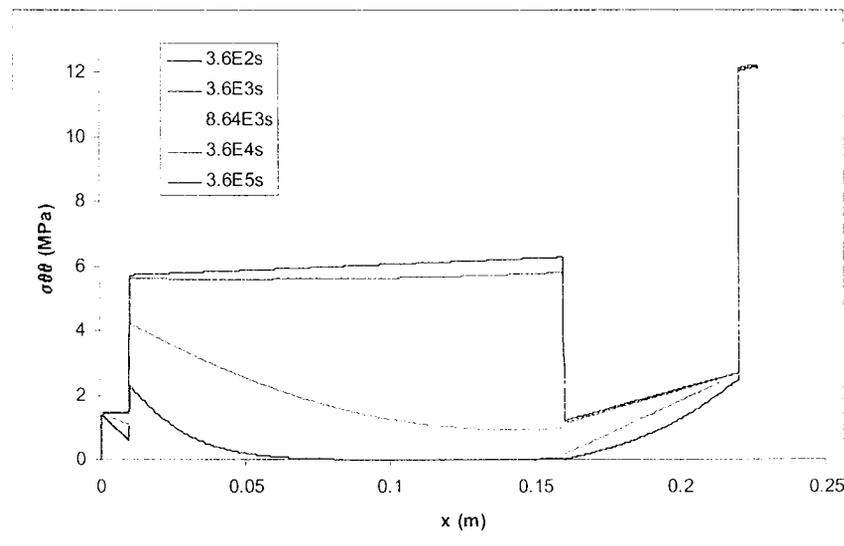


Figure 145. Evolution de la contrainte orthoradiale dans le cas de référence.

5.5.3.2 - Importance des couplages hydriques

Pour vérifier l'influence des différents couplages que l'on vient de mettre en évidence, on prend le cas de référence et on applique sur la paroi extérieure du mur une température identique à la température intérieure et à la température initiale. Il n'y a donc plus aucun chargement thermique. Néanmoins dans un tel problème couplé, la température ne reste pas figée à la valeur de 30°C (figure 146). On constate qu'elle s'écarte de la valeur initiale légèrement dans la couche de polystyrène (0.2°C maximum) ce que l'on peut attribuer au très faible couplage H→T (quasiment négligeable dans le cas considéré).

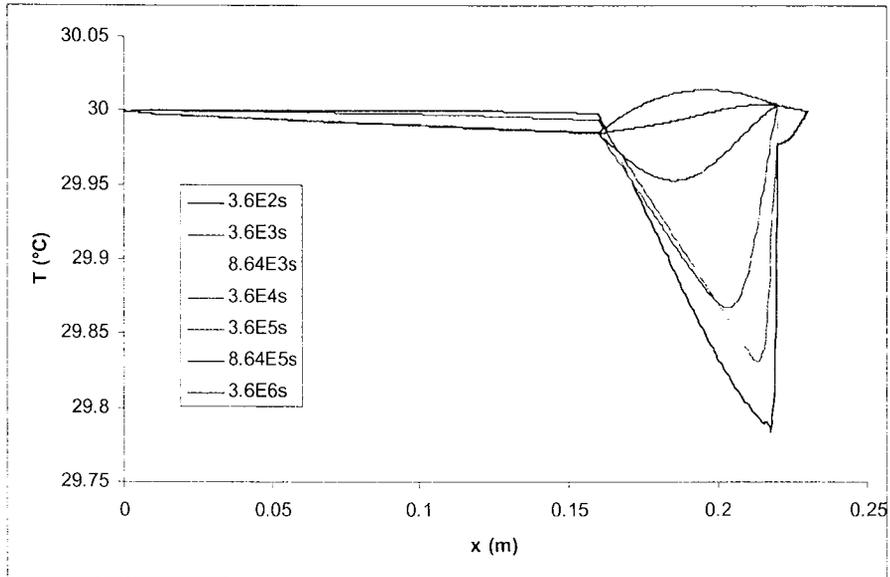


Figure 146. Importance du couplage H→T sur l'évolution thermique.

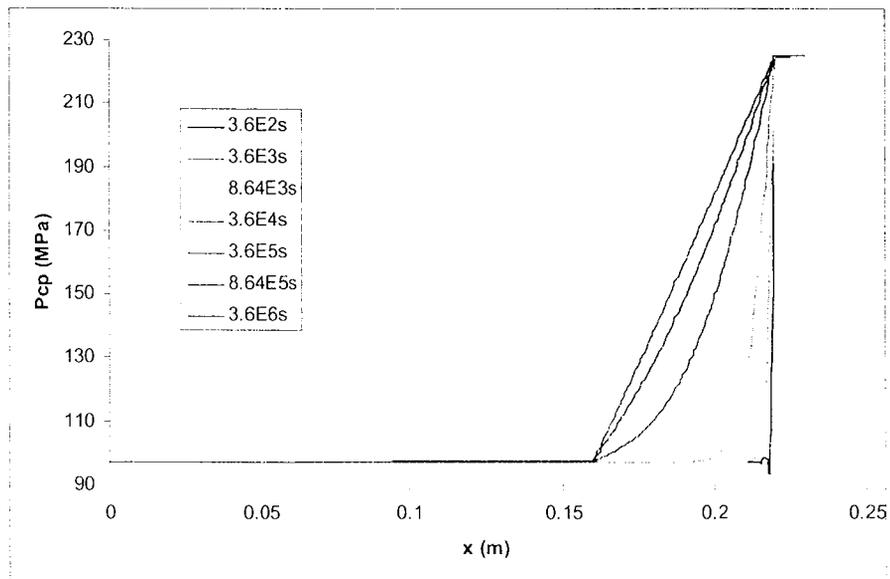


Figure 147. Influence du couplage H→T sur l'évolution hydrique.

En outre, l'évolution de la pression capillaire semble identique ce qui montre dans ce problème l'absence de couplage T→H (figure 147). Enfin, d'un point de vue mécanique, on retrouve bien ce que l'on présentait dans l'étude du cas de référence, à savoir que le couplage H→M n'est actif que dans la couche d'enduit (figure 148). On constate alors qu'un modèle thermo-mécanique ne peut suffire car les variations de contraintes orthoradiales sont très fortes (environ 11MPa) et montre bien que le revêtement du mur subit directement les effets des variations climatiques extérieures.

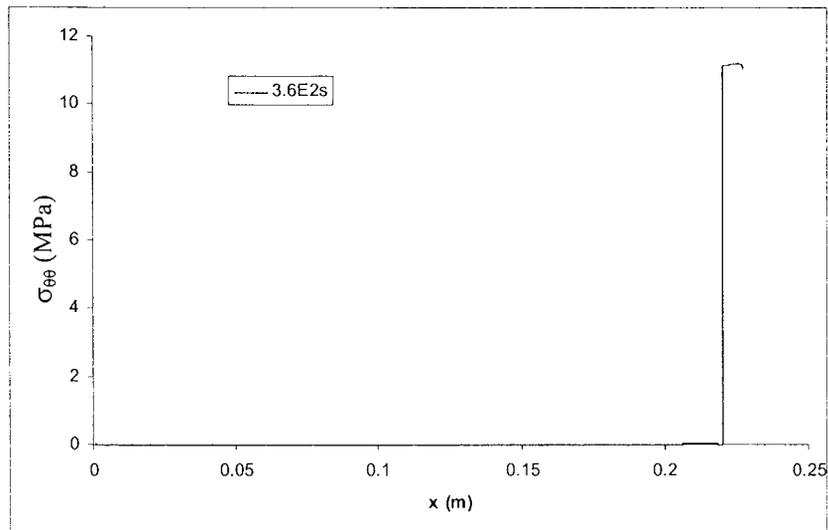


Figure 148. Influence du couplage H→M dans les différentes couches.

5.5.3.3 - Importance des couplages thermiques

L'importance des couplages thermiques est mise en évidence en supprimant tout chargement hydrique dans le cas de référence : on applique des valeurs d'humidité à l'intérieur et à l'extérieur du mur égales à la valeur initiale. On constate un faible couplage T→H qui n'excède pas 1 MPa (figure 149). Ce couplage est donc faible mais il faut néanmoins se rappeler que l'amplitude des variations thermiques extérieures qui a abouti à ce profil est relativement faible (30°C initialement et 4.8°C sur la paroi extérieure) par rapport à ce qui est physiquement envisageable. D'autre part, l'influence de la température sur la courbe de pression capillaire n'est pas prise en compte. La répercussion sur l'évolution des contraintes orthoradiales (figure 150) permet de retrouver les résultats donnés par Remerant et al. (1998) pour le problème thermo-mécanique.

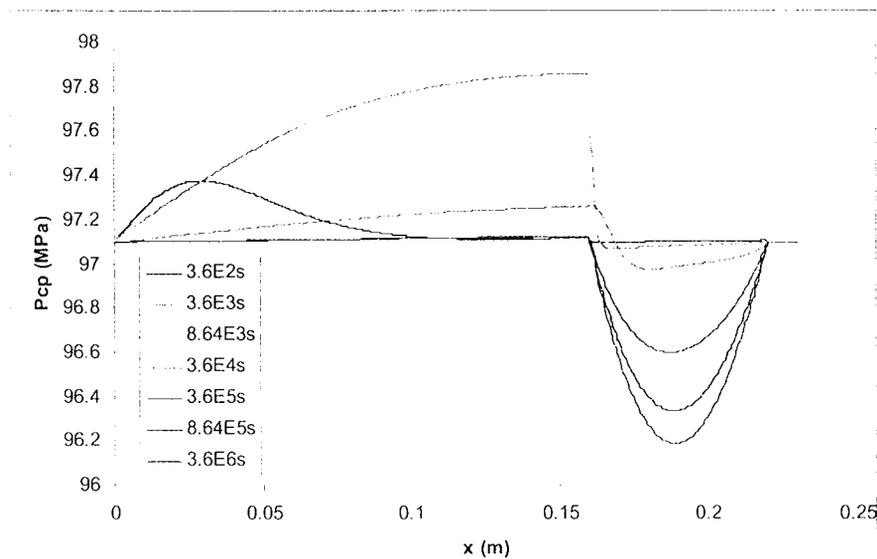


Figure 149. Importance du couplage T→H.

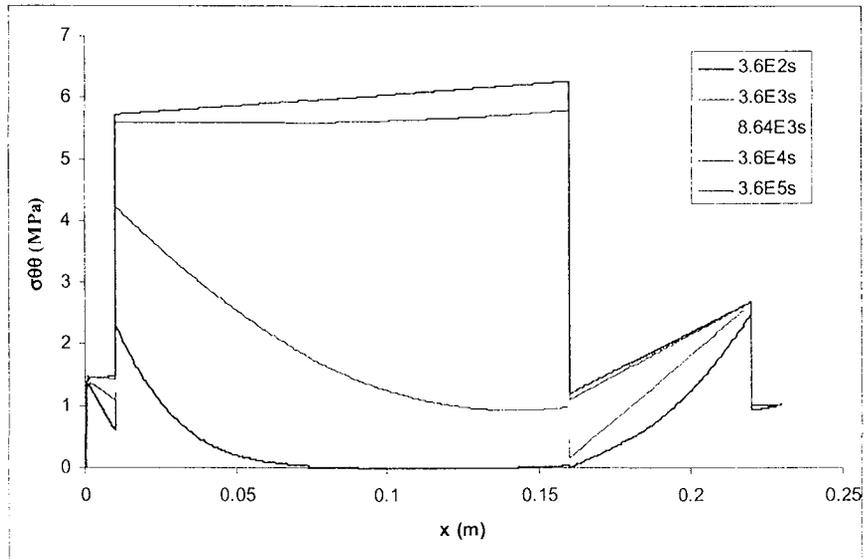


Figure 150. Importance du couplage T→M.

5.5.3.4 - Type d'isolation : isolation classique par l'intérieur (modèle ITI)

Pour le modèle ITI, l'évolution thermique est comparable dans la couche de béton à celle du modèle ITE puisque ce matériau est toujours entouré par deux matériaux qui absorbent principalement le gradient thermique, à savoir le polystyrène et le plâtre (figure 151). Le gradient hydraulique est toujours absorbé par la couche de polystyrène et la pression dans le béton et l'enduit s'équilibre rapidement avec la pression extérieure, après une dizaine d'heures (figure 152). La saturation chute donc relativement rapidement dans le béton jusqu'à une valeur d'environ 7% alors que dans le polystyrène la saturation est toujours nulle (figure 153).

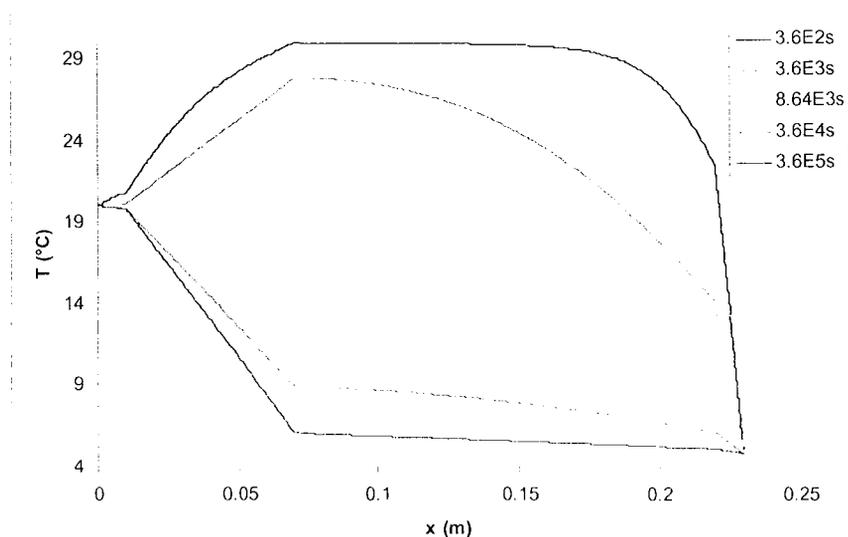


Figure 151. Evolution thermique avec le modèle ITI.

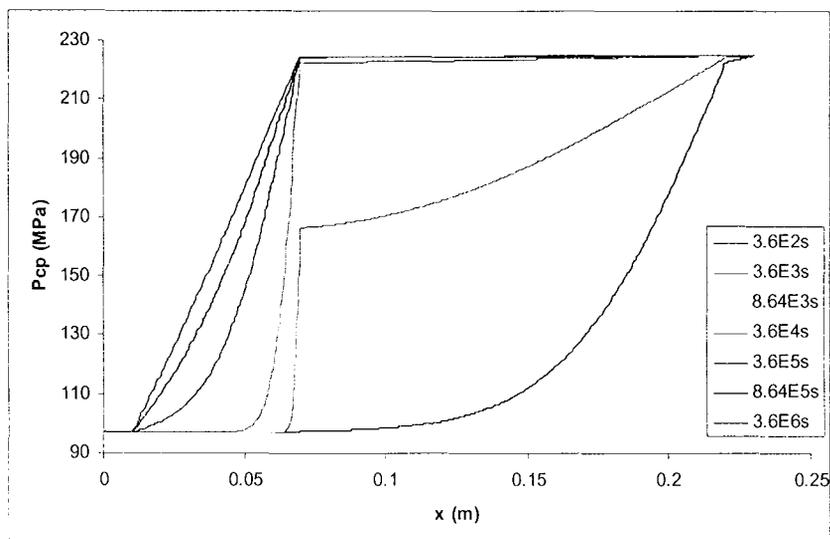


Figure 152. Evolution de la pression capillaire avec le modèle ITI.

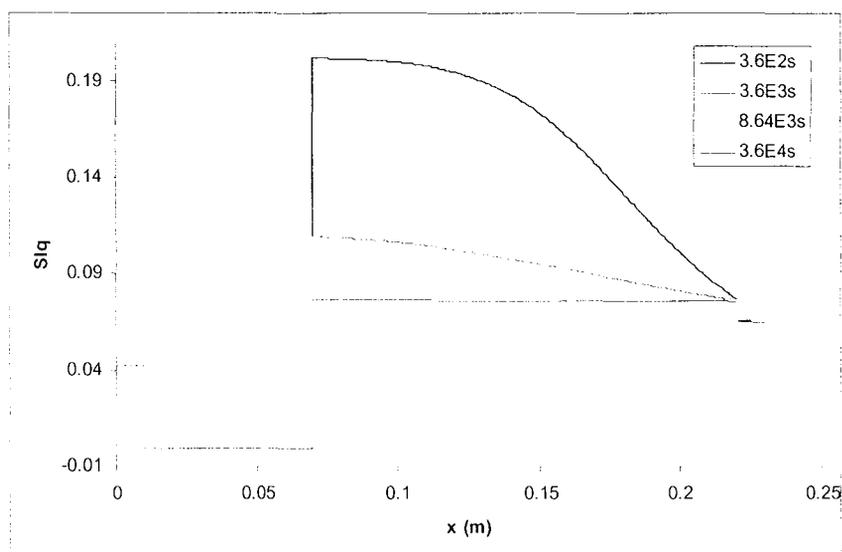


Figure 153. Evolution de la saturation avec le modèle ITI.

Les contraintes apparaissant dans la couche de polystyrène sont toujours du même ordre de grandeur quel que soit le modèle ITE ou ITI puisque la saturation reste nulle mais dans le béton, elles sont beaucoup plus fortes avec le modèle ITI : elles atteignent 25MPa (contre 6 pour le modèle ITE) d'où un fort risque de décohésion à l'interface polystyrène-béton mais aussi béton-enduit (figure 154). De plus, on constate que le couplage H→M est beaucoup plus marqué puisque le modèle thermo-mécanique montrait des contraintes maximales de 14MPa.

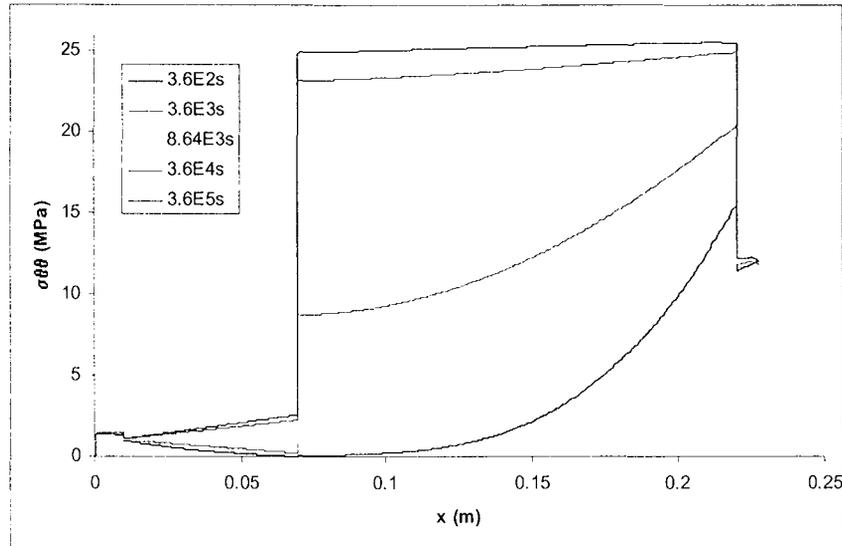


Figure 154. Evolution de la contrainte orthoradiale avec le modèle ITI.

5.5.3.5 - Influence des conditions aux limites extérieures

Les conditions aux limites que l'on applique sur la paroi extérieure du mur peuvent être très différentes selon la saison, aussi bien en ce qui concerne la température que l'humidité. Et pour estimer leur influence, on s'intéresse à deux cas distincts : d'une part, un été sec avec une température élevée (40°C) et une humidité faible (20%) et d'autre part, un hiver humide avec une température basse (4.8°C) et une humidité élevée (80%).

- été sec : l'évolution thermique montre toujours l'absorption principale du gradient thermique par le polystyrène et le plâtre, avec une température relativement constante dans le béton (figure 155).

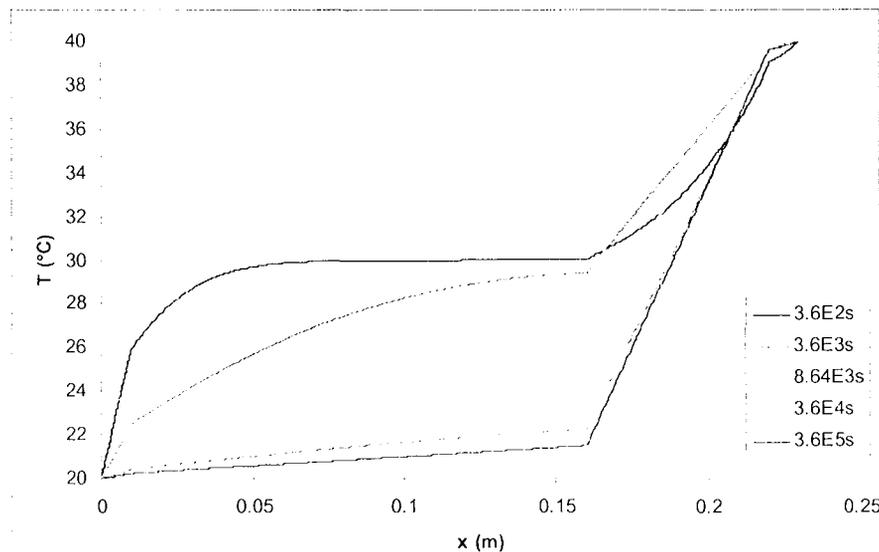


Figure 155. Evolution thermique pour un été sec.

Pression capillaire et saturation sont inchangées du fait du très faible couplage T→H. En revanche, on constate que les contraintes sont nettement différentes dans le béton et le polystyrène, mais pas dans l'enduit (figure 156). Ceci confirme ce qui avait été précédemment mis en évidence, à savoir l'importance du couplage T→M dans le béton et le polystyrène. L'augmentation de température tend à faire apparaître des contraintes de compression, alors que la décroissance de l'humidité semble être source de contraintes de traction : les deux phénomènes sont donc en compétition et l'influence de la température est surtout manifeste dans le polystyrène.

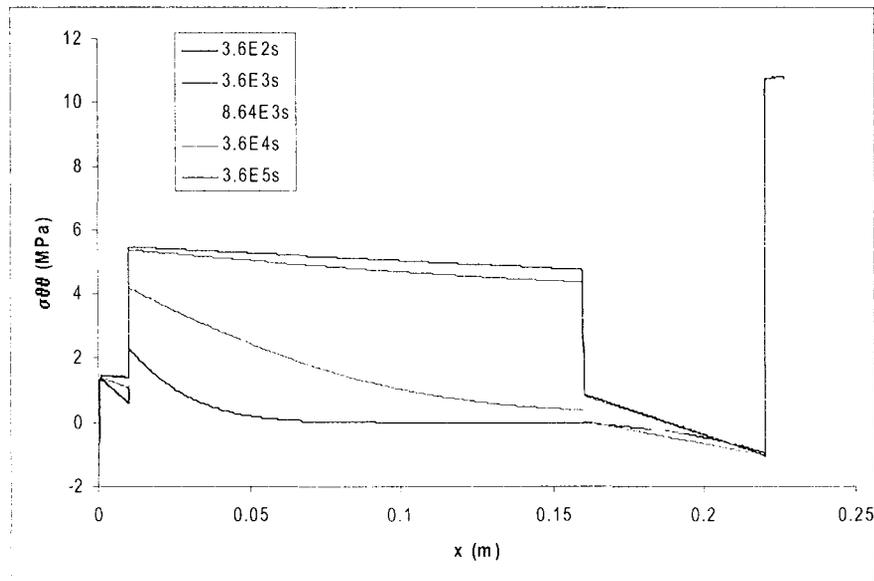


Figure 156. Répercussion d'un été sec sur la contrainte orthoradiale.

- hiver humide : la température est inchangée par rapport au cas de référence et la pression capillaire montre une évolution similaire : le gradient est absorbé par le polystyrène (avec des temps de diffusion identiques). La seule différence est que la pression chute au lieu de croître (figure 157).

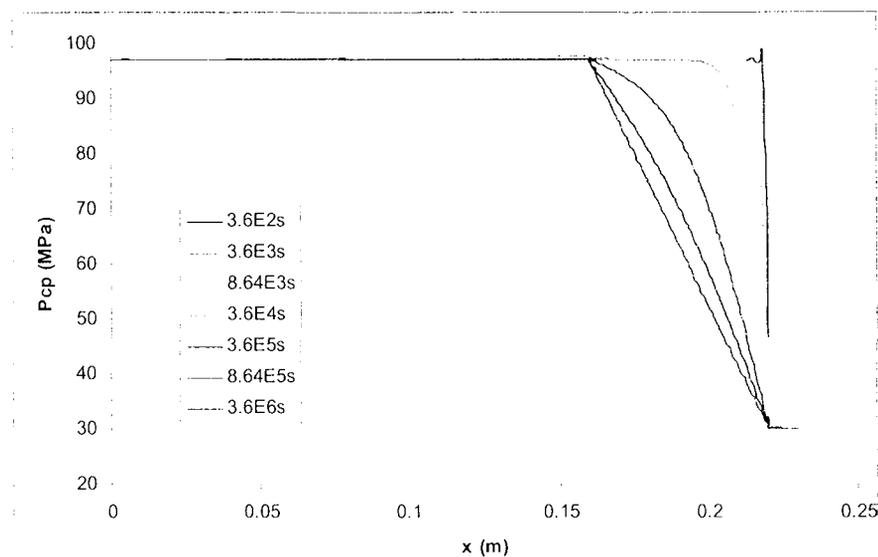


Figure 157. Evolution de la pression capillaire pour un hiver humide.

On peut mettre à nouveau en avant les mêmes explications pour commenter l'évolution des contraintes dans le polystyrène et le béton (figure 158), avec l'effet prédominant du couplage $T \rightarrow M$, alors que dans l'enduit, le couplage essentiel est de nature $H \rightarrow M$ et est très fort (contraintes de compression de près de 15MPa, d'où un fort risque de décohésion polystyrène/enduit).

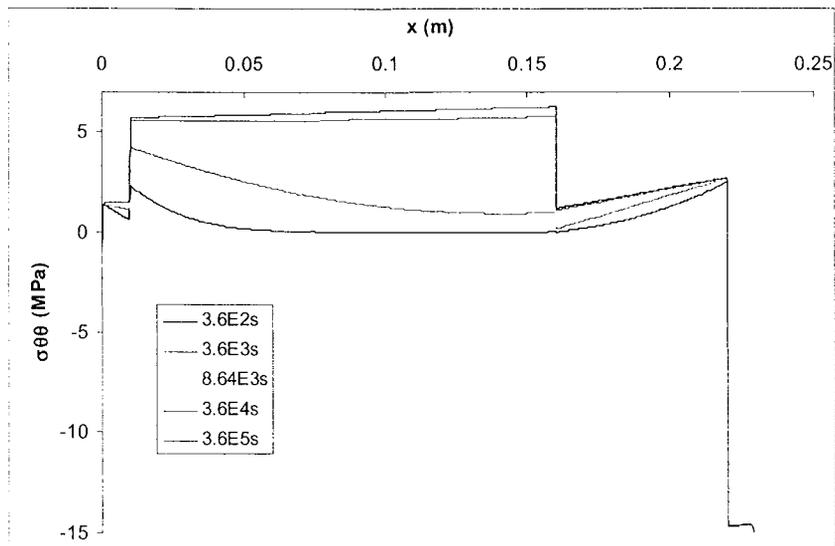


Figure 158. Répercussion d'un hiver humide sur la contrainte orthoradiale.

5.5.3.6 - Sorption du polystyrène : matériau hygroscopique ou non

Si on reprend la courbe de pression capillaire du polystyrène correspondant à un matériau hygroscopique (Kari et al., 1992), l'évolution de la pression capillaire est très peu affectée mais l'évolution de la saturation est radicalement différente dans cette couche (figure 159). Ce matériau se dessature lentement d'une valeur initiale de 28% vers une valeur finale de 15%. Du fait de ces fortes valeurs de saturation, le couplage $H \rightarrow M$ devient très important et conduit à l'apparition de contraintes atteignant près de 30MPa (figure 160). Ceci ne semble pas très acceptable physiquement et montre bien l'importance de la courbe de pression capillaire et de sa bonne caractérisation.

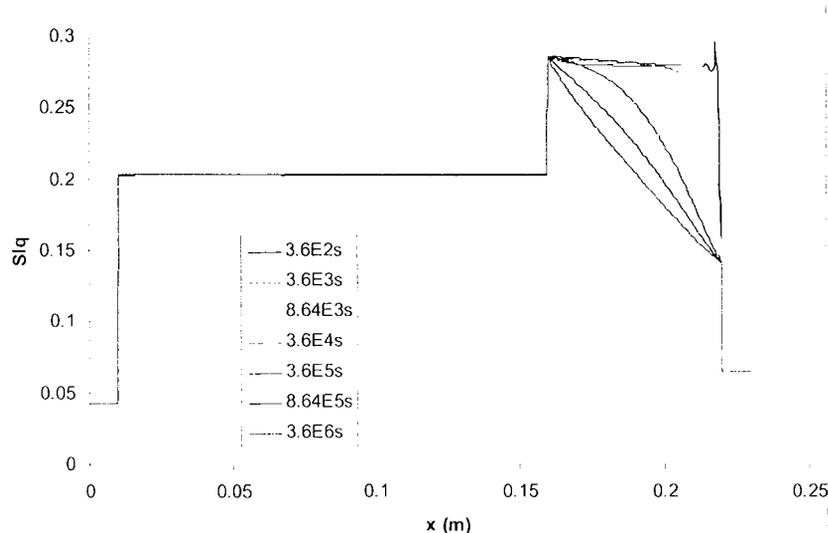


Figure 159. Polystyrène hygroscopique et évolution de la saturation.

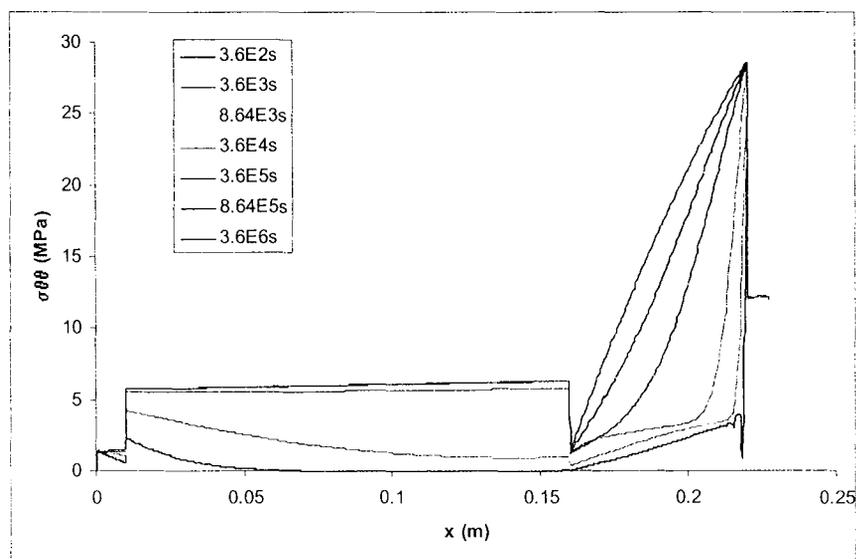


Figure 160. Polystyrène hygroscopique et évolution de la contrainte orthoradiale.

5.5.3.7 - Couplage H→M dans la couche d'enduit

L'importance d'une bonne détermination de la courbe de pression capillaire est également valable pour l'enduit du fait du fort couplage H→M qui est mis en jeu dans cette couche. Pour illustrer le rôle de cette courbe, nous avons choisi de considérer les nouvelles courbes $S_{lq}(p_{cp})$ présentées sur la figure 161 (courbes 1 et 2) qui caractérisent des matériaux plus hygroscopiques.

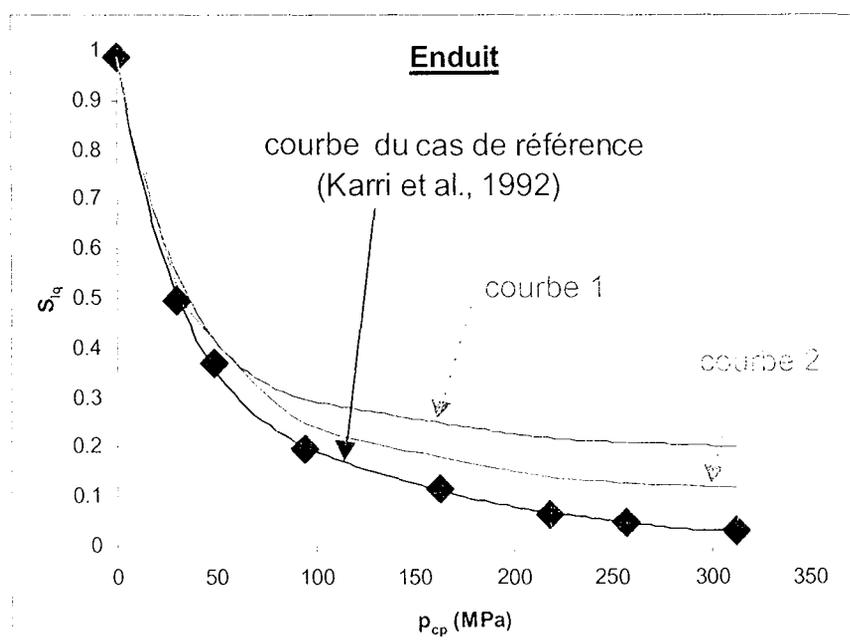


Figure 161. Courbes de pression capillaire pour des enduits plus hygroscopiques.

Les conséquences sur le couplage H→M sont loin d'être négligeables comme le montre la figure 162. En effet, alors que le cas de référence avait montré une amplitude maximale de 12 MPa dans la couche d'enduit pour les contraintes orthoradiales, cette valeur avoisine 18 MPa avec la courbe de pression capillaire 1 et 25 MPa avec la courbe 2.

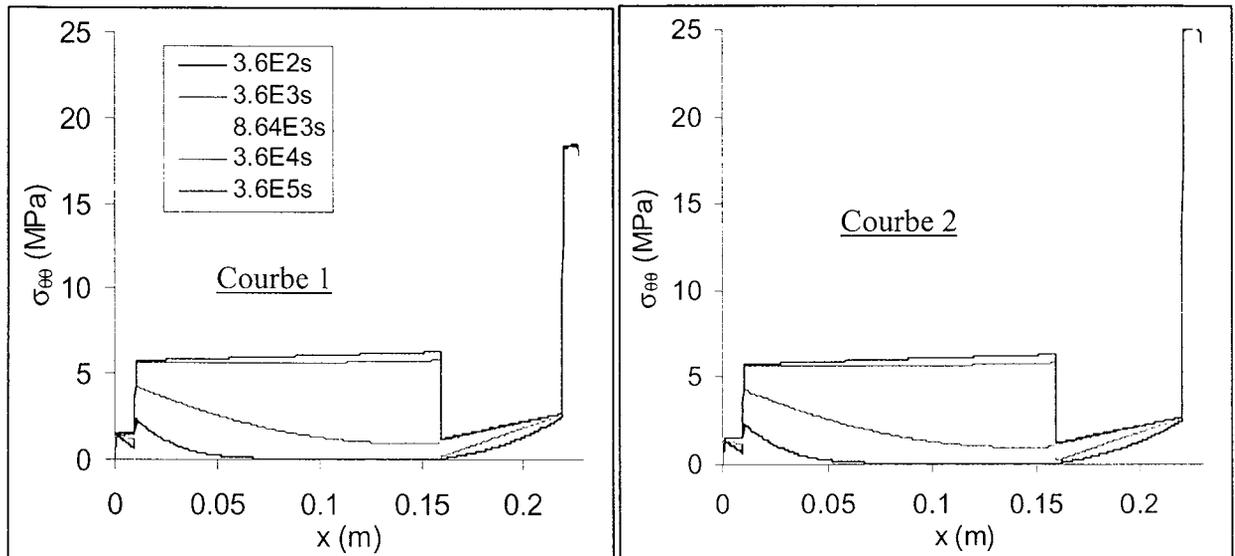


Figure 162. Evolution des contraintes orthoradiales avec les nouvelles courbes de pression capillaire de l'enduit.

En outre, l'effet des variations hygrométriques extérieures est plus sensible avec ces nouvelles courbes. Le tableau 35 montre que les contraintes peuvent atteindre 40 MPa avec la courbe 2 si l'humidité extérieure est très faible ($h^c = 10\%$) contre 25 MPa dans le cas de référence ($h^c = 20\%$) ; en revanche, avec la courbe de Kari et al. (1992), le passage de 20% à 10% d'humidité extérieure ne se traduisait pas par une variation très importante des contraintes maximales (15 MPa au lieu de 12 MPa).

Tableau 35. Influence des courbes de pression capillaire et des variations hygrométriques extérieures sur les contraintes orthoradiales maximales dans l'enduit.

	Contraintes orthoradiales maximales dans l'enduit (MPa)		
	Courbe Kari et al. (1992)	Courbe 1	Courbe 2
$h^c = 10\%$	15	27	40
$h^c = 20\%$	12	18	25
$h^c = 50\% = h^o$	1	1	1
$h^c = 80\%$	-15	-17	-18
$h^c = 90\%$	-22	-25	-26

5.5.3.8 - Importance de la diffusion de Fick de la vapeur

Du fait de la très faible perméabilité du polystyrène à l'eau liquide, la diffusion de l'eau dans ce matériau qui a été observée pour des temps relativement petits (quelques heures) ne peut être due à un phénomène de Darcy et doit être attribuée à un mouvement de type Fick traduisant la diffusion de l'eau sous forme vapeur au sein du mélange gazeux. Pour valider cela, on considère un coefficient de Fick très petit de manière à négliger ce terme de diffusion et à ne prendre en compte que la diffusion du liquide par une loi de Darcy (figure 163).

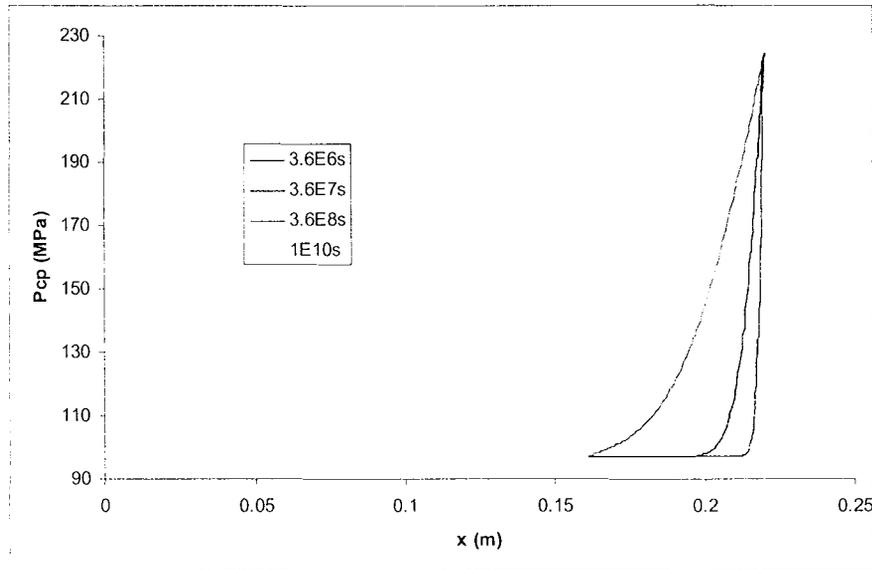


Figure 163. Effet de la diffusion de Fick seule sur l'évolution de la pression capillaire.

On remarque que la diffusion dans le polystyrène a toujours lieu mais elle se déroule pour des temps beaucoup plus grands : dans le cas de référence, le régime permanent est atteint au bout de 1000 heures alors que pour ce même temps la diffusion n'a quasiment pas commencé sans mouvement de type Fick, et le régime permanent est finalement atteint après plusieurs dizaines d'années.

Des études spécifiques sur la perméabilité à la vapeur d'eau dans les matériaux de construction sont assez nombreuses dans la bibliographie du fait de l'importance de ce phénomène de diffusion pour les applications du bâtiment. Ces mesures de perméabilité sont réalisées à pression atmosphérique constante et en reprenant la formulation de Coussy, on remarque que l'on peut ainsi estimer le coefficient de Fick :

$$\underline{M}_{vp} = -\rho_{vp} F(1 - C_{vp}) \underline{\text{grad}} C_{vp} - \rho_{vp} \lambda_{gz} \underline{\text{grad}} p_{gz} \tag{5.14}$$

$$\xrightarrow{p_{gz} = p_{atm}} \underline{M}_{vp} = - \underbrace{\frac{\rho_{vp} F(1 - C_{vp})}{p_{gz}}}_{\pi_{vp}} \underline{\text{grad}} p_{vp} \Rightarrow F = \frac{\pi_{vp} p_{gz}}{\rho_{vp} (1 - C_{vp})} \tag{5.15}$$

Pour une température et une humidité données, cette perméabilité est une constante. Concernant les quatre matériaux du mur multicouche, Duforestel (communication personnelle) propose les valeurs suivantes de π_{vp} (en se basant notamment sur les travaux de Miquel, 1997) :

- Béton, mortier, polystyrène : $300 \cdot 10^{-5} \text{ g/(m.h.mmHg)}$ ou $6.2 \cdot 10^{-12} \text{ s}$
- Plâtre : $1000 \cdot 10^{-5} \text{ g/(m.h.mmHg)}$ ou $2.1 \cdot 10^{-11} \text{ s}$

L'unité g/(m.h.mmHg) de π_{vp} est une unité couramment utilisée par les spécialistes de ce type de matériau du bâtiment et la valeur correspondante dans le système SI est également donnée (en s).

Si on considère une humidité de 50% et une température de 20°C , on peut calculer les valeurs de ρ_{vp} et C_{vp} intervenant dans la formule (5.15) et en déduire une estimation du coefficient de Fick correspondant :

- Béton, mortier, polystyrène : $7.3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
- Plâtre : $2.4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

On remarque donc que l'ordre de grandeur des valeurs de F , environ $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, est nettement plus élevé que celui des valeurs utilisées par Moyne (1987), Pollock (1986) ou Lassabatère (1994). Et on retrouve cet ordre de grandeur dans différents articles (Kari et al., 1991 ; Baroghel-Bouny, 1997 ; Kumaran, 1998) avec des variations sensibles selon le niveau d'humidité (l'influence de la température n'a pas été rencontrée).

Pour se rendre compte de l'effet de valeurs plus élevées du coefficient de Fick sur la diffusion de la vapeur dans le mur multicouche, ainsi que les conséquences sur son comportement thermo-hydro-mécanique, le cas de référence ITE est repris avec la même expression non linéaire de F (formule 1.48) mais on joue sur le coefficient de tortuosité τ en le multipliant par un facteur 100 (figure 164) et 10000 (figure 165) dans les différentes couches, ce qui revient à considérer des valeurs de F de l'ordre de 10^{-4} et $10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ (cette dernière valeur est peut-être un peu exagérée mais elle permet d'accentuer les couplages et de mieux estimer l'influence de la diffusion de la vapeur).

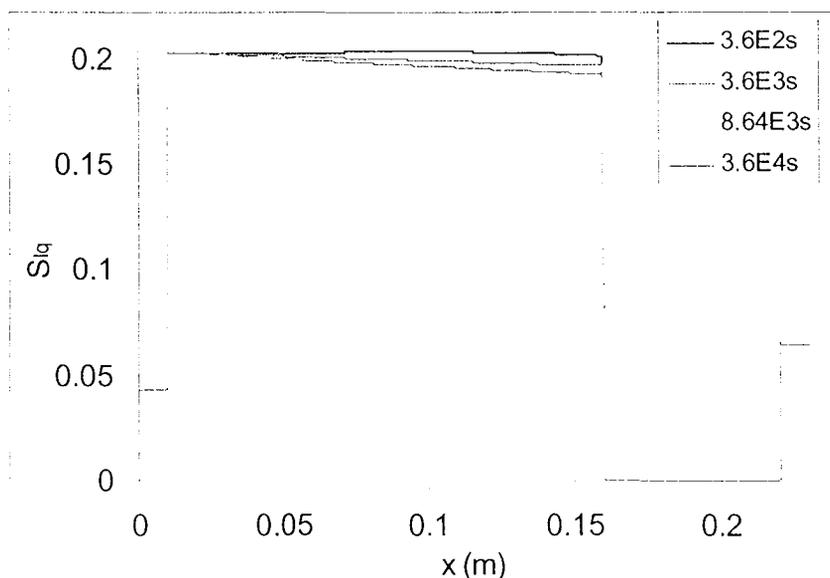


Figure 164. Influence de fortes valeurs de F sur l'évolution de la saturation ($F \approx 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$).

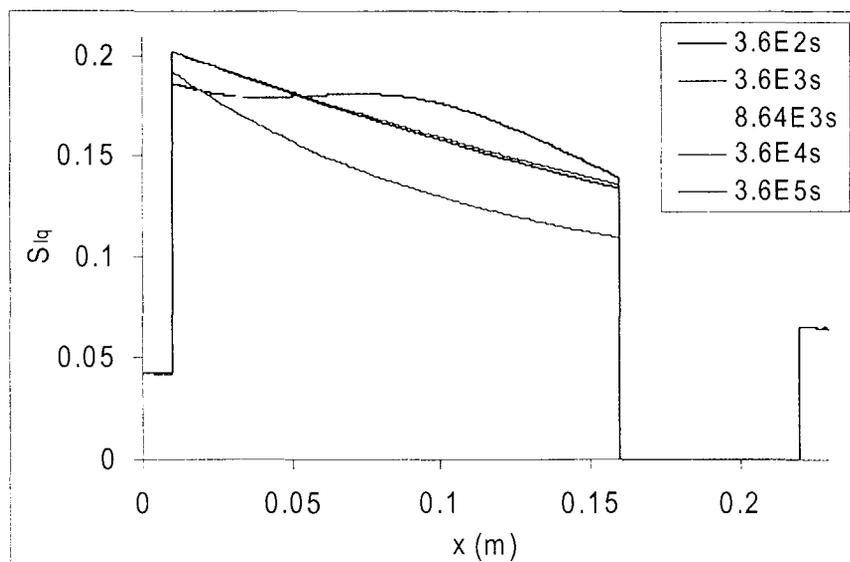


Figure 165. Influence de fortes valeurs de F sur l'évolution de la saturation ($F \approx 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$).

On constate que la saturation, qui restait constante dans le mur avec le coefficient de Fick considéré initialement, évolue lorsque ce coefficient croît. Et on retrouve ce qui est observé généralement in situ, à savoir que la couche de béton se dessature pour des temps assez petits. En outre, les conséquences de ces valeurs de F se répercutent aussi sur l'évolution thermique par l'activation d'un fort couplage $H \rightarrow T$ (figure 166). Ceci souligne bien l'importance d'une détermination précise du coefficient de Fick car malgré l'amplitude modérée du chargement thermique sur la paroi extérieure du mur, l'effet du changement de phase est sensible sur la diffusion de la chaleur. On ne peut plus alors considérer dans ce cas une équation thermique découplée.

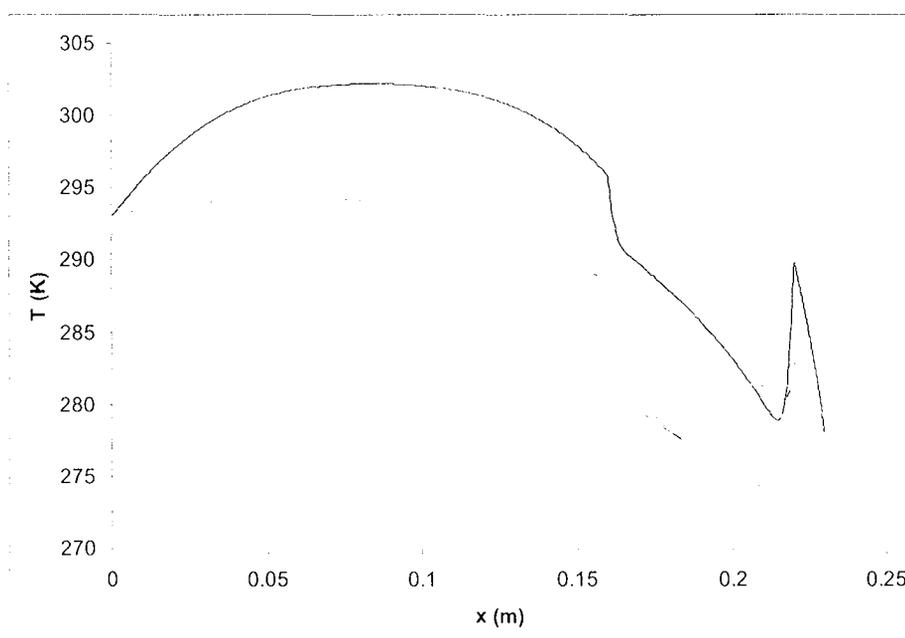


Figure 166. Effet d'une forte valeur de F sur l'évolution de la température ($F \approx 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$).

5.5.3.9 - Non-linéarité de la conductivité thermique

On sait que la conductivité thermique est un paramètre qui peut varier de façon plus ou moins non linéaire avec la saturation, et Moyne (1987) propose par exemple une formule d'homogénéisation tirée de Krischer (1962) qui tient compte de la conductivité thermique des différents constituants du milieu poreux en mettant en série les milieux parallèle et série :

$$\lambda_T = \left(\frac{1-a}{\lambda_s} + \frac{a}{\lambda_{\bullet}} \right)^{-1} \quad \text{avec} \quad \lambda_{\bullet} = (1-\phi)\lambda_s + \phi_{lq}\lambda_l + \phi_{gz}\lambda_a \quad (5.16)$$

$$\lambda_{\bullet} = \left(\frac{1-\phi}{\lambda_s} + \frac{\phi_{lq}}{\lambda_l} + \frac{\phi_{gz}}{\lambda_a} \right)^{-1}$$

et $a=0.223$, $\lambda_a=0.03$, $\lambda_l=0.6$, $\lambda_s=1.5$

Cette non-linéarité est une forme de couplage H→T puisque la saturation influence directement la valeur de la conductivité thermique, et par conséquent la diffusion thermique. On constate que la température chute moins rapidement dans le béton et le polystyrène par rapport au cas de référence mais en revanche le régime permanent met en évidence une température inférieure (figure 167).

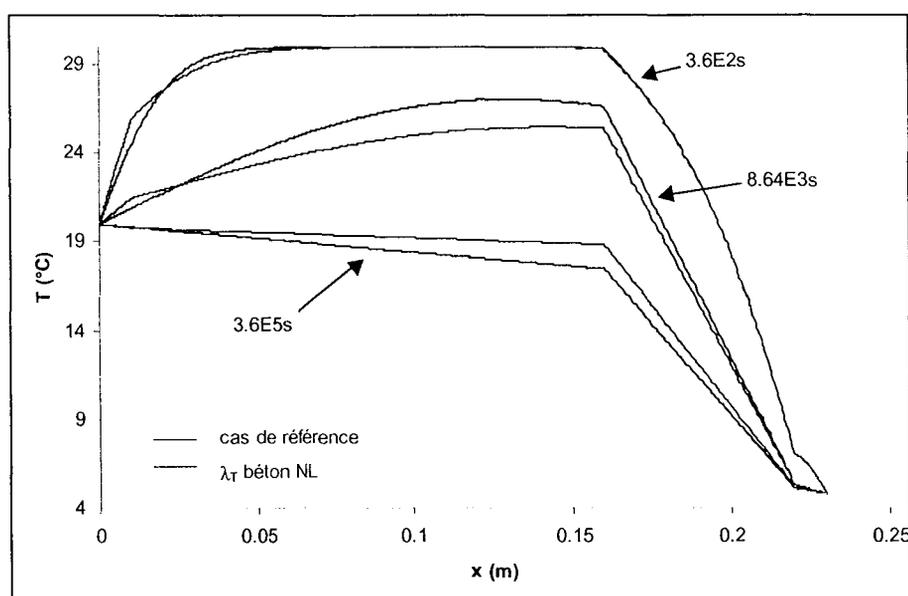


Figure 167. Conductivité thermique non linéaire et évolution de la température.

La répercussion sur la pression capillaire est négligeable mais elle est relativement sensible sur l'évolution des contraintes (figure 168). En fait, les observations faites sur la température sont tout à fait identiques, surtout dans le béton : l'apparition des contraintes est moins rapide mais elles sont plus importantes quand on atteint le régime permanent.

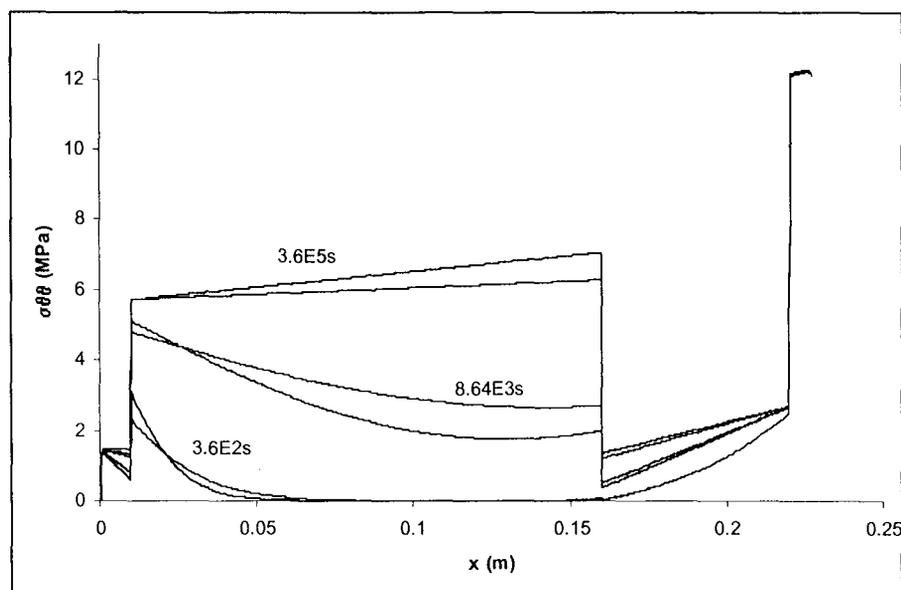


Figure 168. Répercussion de la non-linéarité de la conductivité thermique sur la contrainte.

5.6 - Conclusions

Cette étude a montré l'importance d'un modèle couplé pour appréhender les évolutions thermique, hydrique et mécanique au sein de ce mur quadricouche. Les couplages habituellement mis en jeu sont montrés sur la figure 169.

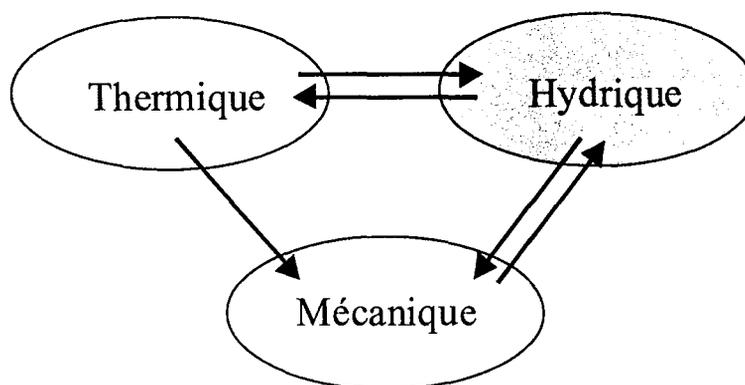


Figure 169. Les couplages THM dans le milieu poreux.

Les couplages $M \rightarrow H$ sont négligeables dans le problème traité puisqu'il n'y a pas de chargement mécanique sur le mur et avec le modèle de comportement THMNL, on ne prend pas en compte d'irréversibilité tel qu'un éventuel endommagement qui modifierait les paramètres de diffusion. En outre, dans le cas du mur, si on considère un chargement thermique extérieur d'amplitude modérée (30-40°C) de manière à ne pas trop activer le couplage $T \rightarrow H$, ainsi qu'une valeur de Fick dans les différents constituants qui n'excède pas $10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ pour ne pas trop activer le couplage $H \rightarrow T$, alors dans ce cas, on peut simplifier le schéma des couplages (figure 170).

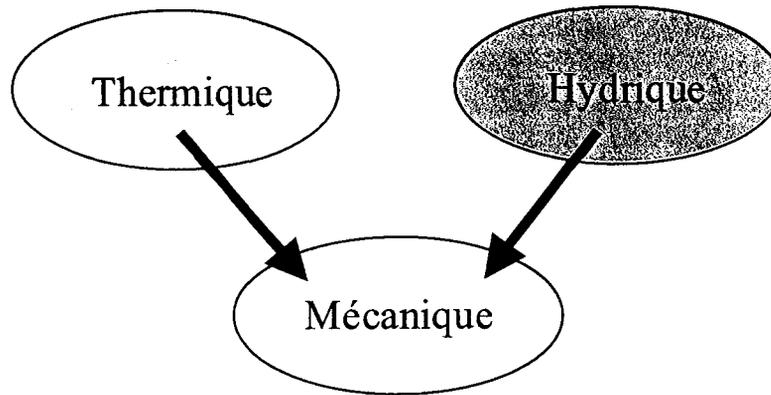


Figure 170. Couplages majeurs observés dans le mur.

Dans ce problème, les couplages majeurs sont les couplages $T \rightarrow M$ et $H \rightarrow M$ et on a montré qu'ils se manifestaient différemment selon les matériaux puisqu'il y a une action conjuguée des variations de température et d'humidité sur le développement des contraintes orthoradiales dans l'enduit, alors que seul le couplage $T \rightarrow M$ joue un rôle dans le béton et le polystyrène.

A titre d'exemple, suivant les courbes de pression capillaire prises en compte, l'intensité des contraintes orthoradiales de traction dans l'enduit varie de 12 à 40 MPa (pour une humidité extérieure de 10%).

Selon les évolutions des variables de diffusion, on observe logiquement :

$\begin{array}{l} \nearrow \text{ de température} \\ \nearrow \text{ d'humidité} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \nearrow \text{ de température} \\ \nearrow \text{ d'humidité} \end{array}} \right\} \Rightarrow \text{Variation de contraintes de compression}$

$\begin{array}{l} \searrow \text{ d'humidité} \\ \searrow \text{ de température} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \searrow \text{ d'humidité} \\ \searrow \text{ de température} \end{array}} \right\} \Rightarrow \text{Variation de contraintes de traction}$

Cette étude a aussi mis en évidence l'importance de la diffusion de la vapeur au sein du mélange gazeux par un processus de type Fick dans la couche de polystyrène. En effet, du fait de sa très faible perméabilité à l'eau liquide, la seule possibilité de prendre en compte la diffusion de l'eau dans cette couche à court terme, est impossible par un processus de type Darcy sur la phase liquide.

De plus, il est intéressant de comparer les deux approches d'isolation, un modèle classique qui place le polystyrène sur la face interne du béton, et un autre modèle qui envisage de placer l'isolant sur la face externe du béton. D'un point de vue thermique, les deux modèles montrent que ce sont les deux couches entourant le béton qui absorbent principalement le gradient de température (et dans l'ensemble de la couche de béton, la température varie peu) mais avec le modèle ITI, la température est plus élevée dans le béton, ce qui entraîne l'apparition de plus fortes contraintes et par conséquent un risque de décohésion entre le béton et le polystyrène. Et ce phénomène est encore accentué par le couplage $H \rightarrow M$: avec le modèle ITI, le béton est en contact avec les variations climatiques extérieures et dans le cas de référence, on a montré qu'il se dessaturait fortement, ce qui entraîne alors des contraintes plus importantes.

En fait le modèle ITE présente un très gros avantage par rapport au modèle ITI car les variations thermiques et hydriques les plus fortes sont bien évidemment observées sur la face externe du mur. Quel que soit le modèle, ITE ou ITI, on isole l'intérieur de l'habitation thermiquement et hydriquement mais avec le modèle ITE, on préserve la couche de béton des variations climatiques et les sollicitations mécaniques induites sont alors nettement plus faibles, d'où un meilleur vieillissement du mur et un risque de décohésion entre les matériaux fortement diminué.

Les perspectives de ce travail concernent avant tout un enrichissement des données hydrauliques relatives aux différents matériaux ainsi que du modèle de comportement couplé thermo-hydro-mécanique. On peut citer l'influence de la température sur la courbe de pression capillaire et les effets capillaires d'une manière plus générale (domaines hygroscopiques, non hygroscopiques), ou bien l'irréversibilité du comportement. Une question posée actuellement concerne l'intensité des couplages hydriques et thermiques : les premières améliorations proposées au modèle de comportement sont destinées à y répondre plus précisément.

Conclusion

Ce mémoire a présenté des travaux de recherche orientés vers l'étude de la modélisation couplée thermo-hydro-mécanique dans le cadre de la mécanique des milieux poreux défini par Coussy (1995). L'intérêt porté à de telles études est directement lié à des préoccupations d'ordre industriel intéressant notamment la Direction des Etudes et de la Recherche d'EDF. En effet, il apparaît clairement dans le domaine de la géotechnique qu'une grande diversité de matériaux, naturels ou artificiels, peut être assimilée à des milieux poreux saturés ou partiellement saturés au sein desquels se produisent des interactions entre les différentes phases. Ainsi il devient nécessaire de considérer un modèle de comportement couplé prenant en compte les interactions entre les processus thermique, hydraulique et mécanique pour espérer pouvoir modéliser au mieux des problèmes physiques concrets.

Une formulation du comportement basée sur des principes thermodynamiques clairement établis, telle que celle qui est proposée par Coussy (1995), nous semble essentielle pour les milieux poreux partiellement saturés. A titre d'exemple, l'équilibre thermodynamique liquide-vapeur en conditions anisothermes doit être examiné avec un soin particulier (Coussy, 1995 ; Bruhat, 1962). En outre, il faut souligner que notre étude s'est restreinte au comportement réversible, sous certaines hypothèses simplificatrices, qu'il est nécessaire de réexaminer suivant les problèmes considérés :

- hypothèse d'incompressibilité des grains en conditions isothermes ($K_s \rightarrow \infty$) à reconsidérer si la porosité connectée est faible ;
- prise en compte de l'influence de la température dans l'isotherme de sorption par l'intermédiaire de la tension capillaire (Olchitsky et al., 1998) en remplaçant la courbe $S_{lq}(p_{cp})$ par $S_{lq}(p_{cp}, T)$.

Deux méthodes de résolution des équations de champ couplées ont été développées : une approche non linéaire requiert nécessairement une méthode numérique et nous avons donc introduit la loi de comportement thermo-poro-élastique non linéaire dans le code aux éléments finis PARSAT développé au LAEGO. Mais dans un souci de validation de ce code, et pour le faire sur des problèmes plus complexes que ceux qui sont abordables par des résolutions analytiques, nous nous sommes également intéressés à des approches semi-explicites. Les techniques existantes ont été adaptées aux problèmes couplés et un travail conséquent a été notamment nécessaire pour trouver l'expression analytique des solutions particulières dans le domaine transformé. En effet, la détermination des constantes à partir des conditions de continuité et aux limites conduit rapidement à la résolution de systèmes matriciels de dimension supérieure à 10 et cela n'est possible que par une maîtrise du calcul formel. Ensuite, l'inversion numérique a montré que la méthode de Talbot modifiée par Piessens et al. (1983) est remarquablement précise et stable, que ce soit sur des problèmes simples servant de validation ou des problèmes couplés. Des erreurs relatives inférieures

à 1% ont été calculées dans les cas extrêmes de modèles multicouches avec de fortes discontinuités ou d'applications faisant intervenir un phasage, et les seuls problèmes rencontrés pour les temps réduits petits (problèmes classiques, Wong, 1994) ont été résolus grâce à l'utilisation de développements limités.

Outre l'utilisation des méthodes semi-explicites comme un outil de validation de codes de calcul, leur couplage avec le code Proban et ses méthodes probabilistes a permis de dévoiler un nouvel intérêt puisque l'on dispose ainsi d'un outil de décision permettant de discriminer les nombreuses variables du modèle, ce qui a été mis en évidence pour l'application du stockage des déchets radioactifs par le concept de la Barrière Ouvragée.

Cette étude est la première des trois applications présentant un intérêt industriel pour EDF. On s'est placé dans le cadre d'évolutions isothermes en milieu incompressible de manière à étudier spécifiquement les processus couplés de diffusion et leur effet sur le temps de ressaturation de la BO. Un premier point intéressant concerne la linéarisation dans sa diversité et sa validité pour ce genre de problèmes initialement fortement non linéaire. On comprend aisément qu'il existe une multitude de techniques pour ajuster une courbe quelconque par une droite et le choix de l'une d'entre elles est guidé par la bonne adéquation entre les résultats linéaires et non linéaires sur un critère particulier. Un modèle linéaire ne se justifie donc que par rapport au modèle de référence non linéaire et on ne peut pas prétendre substituer un modèle linéaire au modèle non linéaire. Une bonne illustration est donnée par la comparaison des évolutions de la saturation au cours du temps : les régimes transitoires sont assez différents mais finalement le temps de ressaturation obtenu avec les deux modèles est très proche, ce qui était l'objectif recherché lors de la linéarisation.

En outre, le modèle monocouche a permis de souligner l'importance des deux non-linéarités qui sont les moteurs de la diffusion, à savoir l'isotherme de sorption $S_{lq}(p_{cp})$ et la courbe de conductivité au liquide $\lambda_{lq}(p_{cp})$ par comparaison entre les modèles linéaire et non linéaire. Une variation de pression capillaire s'accompagne en effet d'une variation de saturation et de conductivité dont l'effet est inverse sur le phénomène de ressaturation. Il est apparu qu'un modèle monocouche, qui prend en compte l'influence du massif sur la BO par l'intermédiaire de conditions aux limites, permettait donc de comprendre les processus gouvernant la diffusion hydraulique mais en revanche, il sous-estime fortement le temps de ressaturation par rapport à un modèle bicouche où le massif est une couche au même titre que la BO.

Le modèle bicouche est caractérisé par un état initial continu en terme de pression mais discontinu en terme de saturation du fait des deux isothermes de sorption distinctes pour la BO et le massif. L'évolution de cette saturation en régime transitoire montre une évolution monotone dans la BO qui se resature progressivement alors qu'elle est non monotone dans le massif, avec une dessaturation à court terme puis une ressaturation. Les résultats linéaires et non linéaires donnent des valeurs assez proches quant au temps de ressaturation (2470 ans pour le premier contre 2800 pour le second). Le modèle linéaire a donc été utilisé pour réaliser une étude de sensibilité avec PROBAN des paramètres pouvant jouer un rôle important sur les processus de diffusion et donc sur le temps de ressaturation. A partir de domaines de variation réalistes pour chaque variable, les méthodes probabilistes de type FORM-SORM ont permis de calculer les facteurs d'importance de chaque variable, mettant ainsi à jour des comportements différents à court et long terme. En effet, il est apparu que la cinétique est tout d'abord contrôlée par la BO, par le biais de sa conductivité au liquide et de son épaisseur, puis progressivement le rôle du massif devient prédominant et c'est alors sa conductivité au liquide qui est le moteur de la ressaturation. En outre, à long terme, le seuil de saturation, représentant la valeur à partir de laquelle on considère que le milieu est saturé, est

également un facteur influent. Ceci s'explique par le fait que les évolutions à long terme sont très lentes et les temps de ressaturation peuvent varier d'un facteur de 1 à 10 pour des seuils variant de 0.95 à 0.98.

Une deuxième application concerne le problème du retrait de dessiccation, autrement dit l'influence de la diffusion hydraulique lors d'un phénomène de séchage sur le comportement mécanique. Les travaux de Lassabatère (1994) à propos d'un mur de béton ont été repris pour les trois géométries de manière à réaliser une étude générique comparative sur les couplages H→M. A partir de données réalistes mais en jouant sur les conditions initiales, on a montré que l'on pouvait accentuer les effets de couplages et obtenir des allures de saturation caractéristiques d'une évolution couplée, où les diffusions de type Fick et Darcy ont lieu dans des gammes de temps qui se superposent. En outre, l'influence de la géométrie s'est manifestée sur les profils de saturation par des cinétiques différentes, plus rapide dans la sphère et plus lente dans le mur. Mais l'effet le plus visible a pu être noté sur l'évolution de la contrainte moyenne, monotone dans le mur avec des contraintes de compression prédominantes, alors que les deux autres géométries ont conduit à des résultats opposés. Ces manifestations dues à la géométrie sont importantes à connaître car on pourrait être tenté de modéliser un problème complexe en géométrie cylindrique par un modèle plus simple à traiter en géométrie cartésienne, et on se rend compte alors de l'erreur qui peut ainsi être commise.

Dans cette même problématique de retrait de dessiccation, nous nous sommes ensuite intéressés à la fissuration pouvant apparaître en paroi d'une galerie profonde, comme cela a pu être observé dans le tunnel de Tournemire. Nous avons cherché à montrer le lien entre une telle fissuration et la ventilation de la galerie se traduisant par une dessaturation du massif, en utilisant un modèle couplé hydro-mécanique, à partir de données relatives à deux matériaux différents, l'argilite de Tournemire et l'argilite de l'Est. Quel que soit le matériau, les résultats en terme de contrainte orthoradiale ont permis de mettre en évidence des valeurs de traction maximales en paroi et nettement supérieures aux résistances en traction, ce qui explique de facto la rupture de la roche. Celle-ci est d'autant plus importante que la dessaturation est forte, et les facteurs les plus influents sur ce couplage H→M sont bien sur les moteurs de la diffusion hydraulique. C'est d'ailleurs là un point délicat car si les perméabilités intrinsèques sont en général bien connues pour le type de matériau considéré, la détermination expérimentale des perméabilités relatives fait défaut. Enfin, l'étude linéaire qui est ensuite proposée permet d'insister sur l'importance de la linéarisation et du critère choisi pour la réaliser : en effet, selon que l'on souhaite estimer la saturation ou la contrainte orthoradiale par un modèle linéaire, la méthode de linéarisation de l'isotherme de sorption ne peut être la même. Mais si on linéarise correctement le problème, les résultats ont montré que l'erreur relative n'excède pas quelque pour-cent.

Une dernière application porte sur le problème d'isolation thermique du bâtiment pour lequel EDF souhaite promouvoir le concept d'isolation par l'extérieur face au concept plus classique d'isolation par l'intérieur. Du fait de son imperméabilité à l'eau liquide et de ses propriétés isolantes, le polystyrène absorbe les gradients thermique et hydraulique et le béton est ainsi très peu affecté par les fluctuations environnantes. Et on comprend donc aisément que le fait de le placer sur la face extérieure du béton (modèle ITE) constitue un procédé intéressant puisque les variations climatiques extérieures sont d'une amplitude nettement supérieures à celles se produisant au sein d'un bâtiment. La répercussion sur le comportement mécanique du mur par couplages T→M et H→M se traduit par des intensités maximales de contraintes tangentielles beaucoup plus faibles dans le béton avec le modèle ITE (6 MPa contre 24 MPa). La couche de béton est donc moins sollicitée ce qui est un avantage pour une bonne tenue du mur, et en outre, les risques de ruine du

mur par décohesion entre le béton et les couches qui l'entourent sont également fortement réduits. Le polystyrène joue donc un rôle très important qui est facile à comprendre d'un point de vue thermique car son action est liée à sa forte diffusivité, mais d'un point de vue hydraulique, il faut tenir compte de plusieurs facteurs : l'isotherme de sorption tout à fait particulière qui traduit son caractère non hygroscopique et sa très faible perméabilité à l'eau liquide permettant une diffusion de l'eau essentiellement sous forme vapeur par la loi de Fick. On comprend donc que le coefficient de Fick est une variable incontournable qu'il sera nécessaire de mieux maîtriser pour modéliser plus finement le comportement du mur.

En terme de couplages, l'effet principal est celui du couplage $T \rightarrow M$ puisqu'une étude thermo-mécanique permet de retrouver des évolutions de contraintes comparables au modèle thermo-hydro-mécanique, excepté pour la couche d'enduit qui subit de manière très marquée les variations hygrométriques extérieures (fort couplage $H \rightarrow M$). Comme on ne prend pas en compte dans le modèle l'effet irréversible de la mécanique sur les propriétés hydrauliques, il apparaît qu'un chaînage des processus pourrait convenir pour ce problème uniquement si l'amplitude des variations climatiques extérieures est faible et si le coefficient de Fick n'est pas trop fort.

Les trois applications présentées ont bien montré l'intérêt d'une approche couplée dans le cadre de la mécanique des milieux poreux partiellement saturés. Cependant, un certain nombre de perspectives peut être envisagé :

- Les variables intervenant dans le modèle sont nombreuses et elles ne sont pas toutes maîtrisées finement d'un point de vue expérimental. Une meilleure détermination s'avère indispensable notamment pour les paramètres de diffusion tels que le coefficient de Fick et les perméabilités intrinsèques et relatives. En outre, les différents calculs qui ont été réalisés sont essentiellement prédictifs et une validation avec des mesures in situ s'impose ensuite, ce qui est prévu par exemple pour l'étude sur la galerie ventilée à partir d'un ouvrage souterrain du tunnel de Tournemire.
- Outre les hypothèses à la base de la formulation qui pourront être réexaminées (courbe $S_{lq}(p_{cp}, T)$, incompressibilité des grains), les phénomènes d'irréversibilité n'ont pas été introduits dans notre modèle. Nous pourrions en effet prendre en compte un modèle de comportement poroplastique (Gens, 1995 ; Alonso et al., 1998) ou endommageable (Carmeliet, 1998 ; Shao et al, 1998).
- Enfin, les applications ont montré la diversité des matériaux pouvant être considérés comme des milieux poreux ainsi que la pluralité des problèmes que l'on peut aborder dans le cadre défini par Coussy : la porte est donc grande ouverte à de nombreuses autres études.

Références bibliographiques

1. Abellan M.A., Jouanna P. & Saix C. (1995) - *Non saturated consolidation under thermo-hydro-mechanical actions*, Gens A., Jouanna P., Schrefler B. A. Eds, *Modern Issues in Non-Saturated Soils*, pp. 301-356, Springer-Verlag, ISBN 3-211-82783-8.
2. Abramowitz M. & Stegun I. (1970) - *Handbook of mathematical functions*, Dover publications, New-York.
3. Alonso E. E. & Battle F. (1995) - *Earthdam, Modern Issues in Non-Saturated Soils*, Gens A., Jouanna P., Schrefler B. A. Eds, pp. 357-395, Springer-Verlag, ISBN 3-211-82783-8.
4. Alonso E. E., Battle F., Gens A. & Lloret A. (1998) - Consolidation analysis of partially saturated soils - application to earthdam construction, *Num. Meth. in Geomech.*, Innsbruck, Austria, pp1303-1308.
5. Alonso E. E., Gens A. & Vaunat J. (1998) - Yield and irreversible behaviour in expansive soils, *Proceedings of UPC98*, Barcelona, Spain.
6. Baroghel Bouny V., Perrin B. & Chemloul L. (1997) - Détermination expérimentale des propriétés hydriques des pâtes de ciment durcies - mise en évidence des phénomènes d'hystérésis, *Materials and Structures*, **30**, pp340-348.
7. Bauer C. & Ghoreychi M. (1997) - Rhéologie et couplages thermohydromécaniques des argilites de l'Est : expériences macroscopiques et analyses microscopiques. *Journées Scientifiques CNRS-ANDRA*, 27-28 oct., EM4.
8. Bear J. & Bachmat Y. (1991) - *Introduction to modeling of transport phenomena in porous media*, Kluwer academic publishers.
9. Bellman R., Kalaba R.E. & Lockett J.A. (1966) - *Numerical inversion of the Laplace transform: Applications to biology, economics, engineering and physics*, American Elsevier, New-York.

10. Benet LV. & Stietel A. (1996) - Etude de la saturation de la barrière ouvragée dans le cadre du stockage direct, CEA/DRN/DMT.
11. Berest P. & Weber Ph. (1988) - *La Thermomécanique des roches – Manuels et méthodes*, n°16, Editions du BRGM.
12. Bird R. B., Stewart W. E. & Lightfoot E. N. (1960) - *Transport phenomena*, John Wiley, New York.
13. Booker J.R. & Leo C.J. (1994) - Contaminant leakage from deeply buried cylindrical repositories, *Int. J. Numer. Anal. Geomech.*, **18**, pp565-580.
14. Bovet D., Jouanna P., Recordon E. & Saix C. (1995) - *Experimental studies, Modern Issues in Non-Saturated Soils*, Gens A., Jouanna P., Schrefler B. A. Eds, pp. 159-211, Springer-Verlag, ISBN 3-211-82783-8.
15. Brigham E.O. (1974) - *The Fast Fourier Transform*, Prentice Hall.
16. Bruhat G. (1962) - *Cours de physique générale - Thermodynamique*, 5e Ed, Editions Masson&cie.
17. Cadiergues R. (1977) - Propriétés thermodynamiques de l'air humide : justification de nos choix, *PROMOCLIME, Etudes Thermiques et Aérauliques*, tome 8^E-2, pp70-88
18. Cadiergues R. (1978) - Propriétés de l'air humide et de l'eau : justification de nouveaux choix, *PROMOCLIME, Etudes Thermiques et Aérauliques*, tome 9^E-1, pp21-33.
19. Candel S.M. (1981) - Simultaneous calculation of Fourier-Bessel transforms up to order N, *Journal of Computational Physics*, **44**, pp243-261.
20. Carmeliet J. (1998) - On the poro-visco-elastic and damage coupling in nonsaturated porous media, *Biot Conference on Poromechanics*, Thimus et al. (eds), Balkema, ISBN 90 5809 003 5, pp41-46.
21. Carslaw H.S. & Jaeger J.C. (1959) - *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press-Oxford, 2nd Ed.
22. Castagna S., Olivella S., Lloret A. & Alonso E.E. (1998) - Experimental and numerical behaviour of soft aggregates due to temperature gradients, *Proceedings of UPC98, Barcelona, Spain*.
23. Charlez P. (1995) - *Mechanics of Porous Media*, Balkema ISBN 90 54 10 628 X.
24. Churchill R.V. (1944) - *Modern operational mathematics in engineering*, Mc Graw Hill, New-York.
25. Cooley J.W., Lewis P.A.W. & Welch P.D. (1970) - The Fast Fourier Transform algorithm: programming considerations in the calculation of sine, cosine and laplace transforms, *J. Sound Vib.*, **12(3)**, pp315-337.

26. Cooper H.H., Bredehoeft J.D. & Papadopoulos I.S. (1966) - Response of a finite-diameter well to an instantaneous charge of water, *Water Res. Research*, **3(1)**, pp263-269.
27. Coussy O. (1991) - *Mécanique des milieux poreux*, Editions Technip, Paris.
28. Coussy O. (1995) - Mechanics of porous continua, Ed. Wiley.
29. Coussy O. and Lassabatère T. (1995) - Mechanical behaviour of partially saturated media - Modelisation of desiccation shrinkage. *Mechanics of Porous Media*, Charlez (ed.), Chp. 14, pp245-264, Balkema, ISBN 90 5410 628 X.
30. Dangla P. (1994) - *Formulation variationnelle d'un problème thermoporomécanique*, Ecole de mécanique des milieux poreux, CFMR, Aussois, pp149-170
31. Dangla P. (1995) - Variational formulation of a thermoporomechanical problem. *Mechanics of Porous Media*, Charlez (ed.), Chp. 9, pp139-156, Balkema, ISBN 90 5410 628 X.
32. Daupley X. (1997) - *Etude du potentiel de l'eau interstitielle d'une roche argileuse et de relations entre ses propriétés hydriques et mécaniques*, thèse ENSMP.
33. Davies B. & Martin D. (1979) - Numerical inversion of the Laplace transform: a survey and comparison of methods, *J. Comput. Phys.*, **33**, pp1-32.
34. De Vries D. A. (1958) - Simultaneous transfert of heat and moisture in porous media, *Trans. Am. Geophys. Union*, **39**, pp909-916.
35. De Vries D.A. (1987) - The theory of heat and moisture transfer in porous media revisited, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **30(7)**, pp1343-1350.
36. Detournay E. & Cheng A.H-D. (1988) - Poroelastic response of a borehole in a non-hydrostatic stress field, *Int. J. Rock. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, **25(3)**, pp171-182.
37. Dhatt G. & Touzot G. (1984) - *Une présentation de la méthode des éléments finis*, deuxième édition, Maloine S.A., Éditeur Paris.
38. Djeran I. (1991) - *Etude des diffusions thermique et hydraulique dans une argile soumise à un champ de température*, thèse ENPC
39. Dubner H. & Abate J. (1968) - *J. ACM*, **23**, pp89-96.
40. Edllesfen N.E. & Anderson A.B.C. (1943) - *Thermodynamics of soil moisture*, Hilgardia, **15(2)**, pp31-298.
41. Ewen J. & Thomas H.R. (1989) - Heating unsaturated medium sand, *Geotechnique*, **39(3)**, pp455-470.
42. Fick A. (1855) - *Ann. Der Physik*, **94**, pp59-86.

43. Filon L.N.G. (1928) - On a quadrature formula for trigonometric integrals
44. Gens A. (1995) - *Constitutive Laws, Modern Issues in Non-Saturated Soils*, Gens A., Jouanna P., Schrefler B. A. Eds, pp. 129-158, Springer-Verlag, ISBN 3-211-82783-8.
45. Gens A., Guimaraes L.do N., Garcia-Molina A. & Alonso E.E. (1998) - Factors controlling rock-clay buffer interaction in a radioactive waste repository, Proceedings of UPC98, Barcelona, Spain.
46. Gereminegad M. & Saxena S.K. (1986) - A coupled thermoelastic model for saturated-unsaturated porous media, *Géotechnique*, **36-4**, pp539-550.
47. Giraud A. (1993) - *Couplages thermo-hydro-mécaniques dans les milieux poreux peu perméables : application aux argiles profondes*, thèse ENPC.
48. Giraud A. (1996) - *Dossier de spécification générale du logiciel NSAT*, rapport RS 30/96.
49. Giraud A. & Thouvenin G. (1997) - Numerical simulation of a multi-layered porous rock mass containing a waste disposal, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **34(3-4)**.
50. Giraud A. and Homand F. (1997) - Mesure des paramètres thermiques et des caractéristiques thermomécaniques des marnes du Callovo-Oxfordien de la Haute-Marne. B.RP.O.ENG.95.009.
51. Giraud A., Homand F. et Thouvenin G. (1997) - Conductivité thermique des argilites et champs de température. *Journées Scientifiques CNRS-ANDRA*, 27-28 oct., EM7.
52. Giraud A., Souley M., Thouvenin G. & Blaisonneau A. (1999) - *Validation de logiciels couplés THM en milieux poreux partiellement saturés : méthodologie et solutions semi-explicites*. Mini-Symposium AUGC-AFGC « Quel(s) système(s) qualité pour la modélisation par éléments finis ? », Poitiers, 6-7 Mai 1999.
53. Giraud A., Thouvenin G. & Homand F. (1999) - *Modélisations poroélastiques linéaire et non linéaire en milieu partiellement saturé : application au retrait de dessiccation*. 14^{ème} Congrès Français de Mécanique, AUM-AFM, Toulouse, 30 août-3 septembre 1999.
54. Giraud A., Thouvenin G. & Homand F. (1999) - *Une approche couplée du retrait de dessiccation des structures en béton*. 4^{ème} Journées d'Etudes sur les Milieux Poreux, Nancy, 1-2 juin 1999.
55. Giraud A., Thouvenin G., Homand F. & Didry O. (1999) - *Modélisation poroélastique de la dessaturation autour de cavités profondes*. 9th International Congress on Rock Mechanics, August 25-28, 1999.
56. Giraud A., Thouvenin G., Homand F., Didry O., Hornet P. & Lassabatère T. (1998) - Numerical investigation of the hydration of a clay barrier: linear and non linear approaches. 4th *International Workshop on Key Issues in Waste Isolation Research, Barcelona, December 2-4*.
57. Granger L. (1996) - *Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires - Analyse et modélisation*, Série ouvrages d'art, OA21, LCPC.

58. Groot S.R. (1951) - *Thermodynamics of Irreversible Processes*, North-Holland, Amsterdam.
59. Heitz J.F. (1997) - Variabilité spatiale des propriétés mécaniques de l'argilite. *Journées Scientifiques CNRS-ANDRA*, 27-28 oct., EM2.
60. Hladik J. (1969) - *La transformation de Laplace à plusieurs variables*, Masson, Paris.
61. Homand F. (1998) - Mesures thermiques sur le site Est, rapport ANDRA B RP 0.ENG 98.009/A.
62. Hornet P., Dupas P. & Schneider J.-R. (1998) - Sensitivity analyses on the behavior of a pressure vessel during a severe accident using probabilistic methods, *PVP 98*, San Diego.
63. Hyams D. (1997) - CurveExpert, a curve fitting system for windows, version 1.34.
64. Kanno T., Kato K. & Yamagata J. (1996) - Moisture movement under a temperature gradient in highly compacted bentonite, *Enginnering geology*, **41**, pp287-300.
65. Kari B., Perrin B. & Foures J.C. (1992) - Modélisation macroscopique des transferts de chaleur et d'humidité dans des matériaux du bâtiment. Les données nécessaires, *Materials and Structures*, **25**, pp482-489.
66. Kari B., Perrin B. & Foures J.C. (1992) - Perméabilité à la vapeur d'eau de matériaux de construction : calcul numérique, *Materials and Structures*, **24**, pp227-233.
67. Krischer D. & Rohnalter H. (1940) - Wärmeleitung und Dampfdiffusion in feuchten gutern, *Verein Deut. Ing-Forschungsheft*, 402.
68. Kumaran M.K. (1998) - Interlaboratory comparison of the ASTM standard test methods for water vapor transmission of materials (E96-95), *Journal of Testing and Evaluation*, **26**, pp83-88.
69. Künzle H.M. (1998) - Effect of interior and exterior insulation on the hygrothermal behaviour of exposed walls, *Materials and Structures*, **31**, pp99-103.
70. Lassabatère T. (1994) - *Couplages hydromécaniques en milieu poreux non saturé avec changement de phase : application au retrait de dessiccation*, thèse ENPC.
71. Lassabatère T. (1998) - Temps de ressaturation d'une barrière ouvragée, projet C3P : comportement à long terme des colis de déchets dans leur environnement en champ proche, rapport technique CEA/DESD n°174.
72. Lassabatère T., Imbert C. & Etilé M.A. (1998) - *Biot modelling of unsaturated porous media and resaturation of clay barriers*, Biot Conference on Poromechanics, Thimus et al. (eds), Balkema, ISBN 90 5809 003 5, pp593-598.

73. Leij F.J. & Dane J.H. (1990) - Analytical solutions of the one-dimensional advection equation and two- or three-dimensional dispersion equation, *Water Resources Research*, **26(7)**, pp1475-1482.
74. Leij F.J., Skaggs T.H. & Van Genuchten M.T. (1991) - Analytical solutions for solute transport in three-dimensional semi-infinite porous media, *Water Resources Research*, **27(10)**, pp2719-2733.
75. Lemaire M. (1998) - Eléments finis et fiabilité : un mariage à la mode, **2^{ème} Conférence nationale « Fiabilité des Matériaux et des Structures »**, Champs sur Marne, 23-24 Novembre.
76. Lide D.R. (1994) - *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 74th Ed.
77. Marsily G de (1981) - *Hydrogéologie quantitative*, Masson, Paris.
78. Masroui F. (1997) - *Etude phénoménologique du comportement des argilites siltocarbonatées de l'Est : évolution de la pression de gonflement en fonction de l'état hydrique initial*, B RP 0 ENG 97.004/A, rapport RS 4/97.
79. Mayhew Y. R. & Rogers G. F. C. (1976) - *Thermodynamic and transport properties of fluids*, 2nd edition, Oxford : Blackwell.
80. McNamee J. & Gibson R.E. (1959) - Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum, *Quart. J. Mech. Applied Math.*, **13**.
81. Miller M.K. & Guy W.T. (1966) - *SIAM J. Numer. Anal.*, **3**, pp624-635.
82. Miquel A. (1997) - *Détermination expérimentale des caractéristiques hydriques des matériaux du bâtiment : contribution à la mise au point et validation de techniques nouvelles*, thèse de l'Université Paris XII.
83. Moyne C. (1987) - Transferts couplés chaleur-masse lors du séchage : prise en compte du mouvement de la phase gazeuse, Thèse INPL-LEMTA
84. Niandou H., Shao J.F., Henry J.P. & Fourmaintraux D. (1997) - Laboratory investigation of the mechanical behaviour of Tournemire shale, *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, **34**, n°1, pp3-16.
85. Olchitsky E., Dangla P., Lassabatère T., Didry O. & Malinsky L. (1998) - Towards the evaluation of thermo-hydro-mechanical parameters in unsaturated clay barriers, **4th International Workshop on Key Issues in Waste Isolation Research, Barcelona, December 2-4**.
86. Olchitzky E. (1995) - Modélisation poromécanique de la ressaturation d'argiles compactées non saturées, Rapport de stage DEA S3M.
87. Olesen R. (1992) - *PROBAN User's Manual*, technical report Det Norske Veritas Sesam.
88. Olivella S., Gens A. & Carrera J. (1998) - Water phase change and vapour transport in low permeability unsaturated soils with capillary effects, Proceedings of UPC98, Barcelona, Spain.

89. Ozanam O. (1988) - *Modélisation numérique des sols élastoplastiques non saturés – Application aux barrages en remblais*, Thèse de l'Ecole Centrale de Paris
90. Papoulis A. (1956) - *Quart. Appl. Math.*, **14**, pp405-414.
91. Parker J.C., Lenhard R.J. & Kuppusamy T. (1987) - A parametric model for constitutive properties governing multiphase flow in porous media, *Water Resources Research*, **23-4**, pp618-624.
92. Philip J.R. & De Vries D.A. (1957) - Moisture movement in porous materials under temperature gradients, *Trans. Am. Geophys. Union*, **38**, pp222-232.
93. Piessens R. (1972) - *J. Inst. Math. Appl.*, **10**, pp185-192.
94. Piessens R. (1973) - *Comm. ACM*, **16**, pp486-487.
95. Piessens R. (1975) - Bibliography on numerical inversion of the Laplace transform and applications, *J. Comp. Appl. Math.*, **1**, pp115-126.
96. Piessens R., De Doncker-Kapenga E., Uberhuber C.W. & Kahaner D.K. (1983) - *Quadpack: a subroutine package for automatic integration*, Ed. Springer-Verlag.
97. Pollock D. W. (1986) - Simulation of fluid flow and energy transport processes associated with high-level radioactive waste disposal in unsaturated alluvium, *Water Resources research*, **22**, pp765-775.
98. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. & Flannery B.P. (1992) - *Numerical recipes in C*, Cambridge University Press, 2nd edition.
99. Rakotondratsima L.Y. (1995) - *Mécanismes de gonflement et d'altération des schistes cartons*, thèse INPL.
100. Ramambasoa N. (1997) - *Retrait et fissuration : application au tunnel de Tournemire*, rapport DEA IPSN/Ecole Polytechnique.
101. Raynal J. & Dardanne M. (1994) - Note technique : concept de barrière ouvragée pour le stockage direct des combustibles irradiés, CEA/DCC/DESD/SESD, rapport annuel.
102. Raynal J. (1995) - Note technique : caractérisation de la barrière ouvragée pour le stockage direct des combustibles irradiés, CEA/DCC/DESD/SESD, rapport annuel.
103. Raynal J. (1995) - Rapport technique : la barrière ouvragée argileuse de référence française utilisable dans le cadre d'un stockage direct, synthèse des connaissances, CEA/DCC/DESD/SESD.
104. Raynal J., Galle C. & Imbert C. (1996) - Note technique : propriétés des matériaux de la barrière ouvragée pour le stockage direct des combustibles irradiés, CEA/DCC/DESD/SESD, rapport annuel.

105. Remerant A., Didry O. & Ruck J.M. (1998) - Etude thermo-mécanique d'un mur multicouche isolé par l'extérieur, rapport EDF HT-2B/98/020/A, 38p.
106. Robinet J.C., Jullien A. et Pasquiou A. (1997) - Mesures de perméabilité sur échantillons d'argilites de l'est par analyse de profils hydriques et études d'isothermes d'adsorption-désorption. *Journées Scientifiques CNRS-ANDRA*, 27-28 oct., EH7.
107. Schapery R.A. (1962) - *Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, ASME, **2**, pp1075-1085.
108. Schmittroth L.A. (1960) - *Comm. ACM* **3**, pp171-173.
109. Schrefler B. and Zhan X. (1993) - A Fully Coupled Model for Water Flow and Airflow in Deformable porous Media. *Water Resources Research*, **29**, No. 1, pp155-167.
110. Selvadurai A.P.S. (1996) - Heat-induced moisture movement in a clay barrier - computational modelling and comparison with experimental results, *Engineering Geology*, **41**, pp219-238.
111. Senjuntichai T. & Rajapakse K.N.D. (1993) - Transient response of a circular cavity in a poroelastic medium, *Int. J. Numer. Anal. Geomech.*, **17**, pp357-383.
112. Shao J.F. (1995) - Numerical solutions of non-linear problems related to thermal convection and poroplasticity, *Mechanics of porous media*, Charlez (ed.), chp. 10, pp157-176, Balkema, ISBN 90 5410 628 X.
113. Shao J.F., Giraud A., Ata N. & Souckup D. (1998) - Modelling elastic damage in unsaturated porous rock, Proceedings of UPC98, Barcelona, Spain.
114. Silverberg M. (1970) - *Electron. Lett.*, **6**, pp105-106.
115. Sneddon I. N. (1957) - *Fourier transforms*, Mc Graw Hill.
116. Souley M., Giraud A. & Thouvenin G. (1999) - *Exercice de modélisation couplée thermohydromécanique d'une structure souterraine de stockage*, rapport ANDRA confidentiel, LAEGO-ENSG, B RP 0.ENG 98 015/A.
117. Stehfest H. (1970) - Numerical inversion of Laplace transforms, *Comm. ASM*, **13**, pp47-49.
118. Talbot A. (1979) - The accurate numerical inversion of Laplace transforms, *J. Inst. Maths. Applics*, **23**, pp97-120
119. Ter Haar D. (1951) - *J. Polymer. Sci.*, **6**, pp247.
120. Thomas H.R., He Y., Sansom M.R. & Li C.L.W. (1996) - On the development of a model of the thermo-mechanical-hydraulic behaviour of unsaturated soils, *Engineering Geology*, **41**, pp197-218.

121. Thomas H.R. & King S.D. (1992) - Coupled heat and mass transfert in unsaturated soil - a potential based solution, *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, **16**, pp757-773.
122. Thomas H.R. & He Y. (1995) - Analysis of coupled heat, moisture and air transfert in a deformable unsaturated soil, *Géotechnique*, **45(4)**, pp677-689.
123. Thomas H.R. & Sansom M.R. (1995) - Fully coupled analysis of heat, moisture and air transfert in unsaturated soil, *ASCE, J. Eng. Mech.*, **121(3)**, pp392-405.
124. Thomas H.R. & Li C.H.W. (1995) - Modelling transient heat and moisture transfert in unsaturated soil using a parallel computing approach, *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, **19**, pp345-366.
125. Thomas H.R., Rees S.W. & Sloper N.J. (1998) - Three-dimensional heat, moisture and air transfert in unsaturated soils, *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, **22**, pp75-95.
126. Thomas H.R. & King S.D. (1991) - Coupled heat and mass transfer in unsaturated soil - a potential-based solution, *Int. J. Num. Anal. Geomech.*, **16**, pp757-773
127. Thomas H.R., Yong R.N. & Cleall P.J. (1998) - Thermal/hydraulic/chemical/mechanical behaviour of unsaturated clay, Proceedings of UPC98, Barcelona, Spain.
128. Thouvenin G. (1995) - *Modélisation de l'expérience thermo-hydro-mécanique de Fanay-Augères pour un stockage profond de déchets radioactifs de haute activité*. Mémoire de DEA Génie Civil et Minier, INPL Nancy, 40 p. + annexes.
129. Thouvenin G. (1999) - *Modèles couplés en milieu poreux non saturé : application au retrait de dessiccation*, Concours Jeunes Chercheurs - AUGC « Des Matériaux à l'Ouvrage », Poitiers, 6-7 Mai 1999.
130. Thouvenin G. & Giraud A. (1997) - *Modélisation en mécanique des milieux poreux partiellement saturés : solutions semi-explicites*, Laboratoire de Géomécanique, rapport RS 33/97.
131. Thouvenin G. & Giraud A. (1998) - Thermoporoelastic analysis of a deep circular tunnel: effect of heterogeneity. *4th European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engeneering*, Udine, October 14-16.
132. Thouvenin G. & Giraud A. (1998) - *Modèle couplé THM en milieux poreux partiellement saturés : application à la dessaturation d'une galerie profonde et à un mur multicouche*. LAEGO-ENSG, EDF rapport RS 14/98.
133. Thouvenin G. & Giraud A. (1998) - *Modélisations linéaire et non linéaire de la ressaturation isotherme de la barrière ouvragée : prise en compte de l'influence du massif*. LAEGO-ENSG, EDF rapport RS 2/98.

134. Thouvenin G., Giraud A. & Homand F. (1999) - Couplage dessaturation-fissuration autour d'une galerie. 4^{ème} Journées d'Etudes sur les Milieux Poreux, Nancy, 1-2 juin 1999.
135. Thouvenin G., Giraud A., Homand F. & Lassabatère T. (1998) - Linear coupled analysis of desiccation shrinkage: explicit and semi-explicit solutions, *Biot Conference on Poromechanics*, Thimus et al. (eds), Balkema, ISBN 90 5809 003 5, pp159-164.
136. Thouvenin G., Giraud A., Homand F., Didry O., Ruck J-M. & Duforestel T. (1999) - Coupled heat, air and moisture transfer in a multi-layer porous wall. 10th International Symposium for building Physics and building Climatology, Dresden, September 27-29, 1999.
137. Thouvenin G., Giraud A., Homand F., Didry O., Ruck J-M. & Duforestel T. (1999) - Transfert couplé THM dans un mur multicouche. 2^{ème} Congrès Universitaire de Génie Civil « Des Matériaux à l'Ouvrage », Poitiers, 6-7 Mai 1999.
138. Thouvenin G., Hornet P., Didry O., Giraud A., Homand F. & Lassabatère T. (1998) - Etude de sensibilité de la ressaturation de la barrière ouvragée par des méthodes probabilistes. 2^{ème} Conférence nationale « Fiabilité des Matériaux et des Structures », Champs sur Marne, 23-24 Novembre.
139. Thouvenin G., Hornet P., Didry O., Giraud A., Homand F. & Lassabatère T. (1999) - Sensibility analysis of the clay barrier hydration using probabilistic methods. 8th International Conference on Applications of Statistics and Probability, December 13-15, 1999.
140. Vincké O., Longuemare P., Boutéca M. et Deflandre J.P. (1997) - Etude du comportement poromécanique d'argilites dans les domaines élastiques et dans les domaines post-élastiques. Journées Scientifiques CNRS-ANDRA, 27-28 oct., EM8.
141. Volckaert & al (1996) - Thermal-hydraulic-mechanical and geochemical behaviour of the clay barrier in radioactive waste repositories (model development & validation), *European Commission, Nuclear Science & Technology*.
142. Wang Y. (1996) - A note on the solution to the diffusion equation, *Int. J. Num. Anal. Geomech.*, **20**, pp443-452.
143. Welty R., Wicks E. & Wilson E. (1984) - *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, third edition, John Wiley and Sons.
144. Widder D.V. (1934) - *Amer. Math. Soc. Trans.*, **36**, pp107-200.
145. Wilke C. R. (1950) - A viscosity equation for gaz mixtures, *J. Chem. Phys.*, **18**, pp517-519.
146. Wong H. (1994) - *Comportement des galeries souterraines soumises à un chargement thermique*, thèse de Doctorat de l'ENPC.
147. Yong R.N., Xu D.M. & Mohamed A.M.O. (1992) - An analytical technique for evaluation of coupled heat and mass flow coefficients in unsaturated soil, *Int. J. Numer. Anal. Geomech.*, **16**, pp233-246.

Annexe

1

**Bibliographie des méthodes
d'inversion numérique des
transformées de Laplace**

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry, no matter how small, should be recorded to ensure the integrity of the financial statements. This includes not only sales and purchases but also expenses, income, and any other financial activity.

The second part of the document provides a detailed breakdown of the accounting cycle. It outlines the ten steps involved in the process, from identifying the accounting entity to preparing the financial statements. Each step is explained in detail, with examples provided to illustrate the concepts. The document also discusses the importance of double-entry bookkeeping and how it helps in maintaining the balance of the accounting equation.

The third part of the document focuses on the preparation of financial statements. It explains how to calculate net income, determine the ending balances for assets, liabilities, and equity, and how to present these figures in a clear and concise manner. The document also discusses the importance of comparing the current period's results with the previous period's results to identify trends and make informed decisions.

In conclusion, the document emphasizes that accounting is a vital part of any business. It provides a comprehensive overview of the accounting process, from recording transactions to preparing financial statements, and highlights the importance of accuracy and integrity in all aspects of the process.

L'inversion des transformées de Laplace nécessite l'utilisation du théorème d'inversion (Carslaw et Jaeger, 1959) :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \bar{f}(s) ds \quad (\text{A1.1})$$

L'intégration le long du contour défini dans le plan complexe est relativement difficile du fait des oscillations de e^{st} quand $\text{Im}(s) \rightarrow \infty$. Et différentes méthodes ont contourné ce problème, soit en modifiant le contour, soit en transformant l'intégrale dans le domaine complexe en une somme discrète de série dans le domaine réel. Davies & Martin (1979) en ont présenté un large éventail, auquel il faut ajouter une méthode souvent citée dans de nombreux articles, la méthode de Talbot (1979) qui semble celle qui est la plus proche de l'intégration analytique.

Les diverses méthodes peuvent être séparées en plusieurs classes : celles qui procèdent à un échantillonnage de f , celles qui développent f en combinaisons linéaires de fonctions exponentielles, celles qui sont basées sur la quadrature de Gauss, celles qui utilisent une transformation bilinéaire et celles qui calculent f sous forme d'une série de Fourier.

A1.1 - Echantillonnage de f

La fonction f est calculée à partir d'un échantillonnage de la forme :

$$f(t) \approx I_n(t) = \int_0^{\infty} \delta_n(t, u) f(u) \quad (\text{A1.2})$$

avec les fonctions δ_n qui sont telles que $I_n(t)$ tend vers $f(t)$ quand n tend vers l'infini.

Sur ce principe, on trouve quelques exemples :

$$f(t) \approx I_n(t) = \frac{(-1)^n n^{n+1}}{n! t^{n+1}} \bar{f}^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) \quad \text{Widder (1934)} \quad (\text{A1.3})$$

$$f(t) \approx \frac{1}{t} \bar{f}\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{Ter Haar (1951)} \quad (\text{A1.4})$$

$$f(t) \approx \frac{1}{2t} \bar{f}\left(\frac{1}{2t}\right) \quad \text{Schapery (1962)} \quad (\text{A1.5})$$

$$f(t) \approx \frac{\ln 2}{t} \sum_{n=1}^N C_n \bar{f}\left(\frac{n \ln 2}{t}\right) \quad \text{Stehfest (1970)} \quad (\text{A1.6})$$

$$\text{avec } \begin{cases} C_n = (-1)^{n+N/2} \sum_{k=E((n+1)/2)}^{\min(n, N/2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{(N/2 - k)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!} \\ N \text{ pair} \end{cases}$$

A1.2 - Calcul de f comme combinaison linéaire d'exponentielles

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_{2n}(e^{-rt}) \quad \text{Papoulis \& Lanczos (1957)} \quad (\text{A1.7})$$

$$\text{avec } \begin{cases} P_{2n} : \text{polynômes de Legendre} \\ a_n \text{ tel que } r f[(2k+1)r] = \sum_{m=0}^k \frac{(k-m+1)_m}{2(k+0,5)_{m+1}} a_m \\ (j)_0 = 1 \text{ et } (j)_n = j(j+1)\dots(j+n-1) \text{ si } n > 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(2e^{-rt} - 1) \quad \text{Miller \& Guy (1966)} \quad (\text{A1.8})$$

$$\text{avec } \begin{cases} P_n^{(a,b)} : \text{polynômes de Jacobi} \\ a_n \text{ tel que } r f[(b+k+1)r] = \sum_{m=0}^k \frac{(k-m+1)_m}{(b+k+1)_{m+1}} a_m \\ (j)_0 = 1 \text{ et } (j)_n = j(j+1)\dots(j+n-1) \text{ si } n > 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \omega_{ik} r \bar{f}(kr) \quad \text{Bellman \& al. (1966)} \quad (\text{A1.9})$$

$$\text{avec } \sum_{k=0}^{N-1} \omega_{ik} x^k = \frac{1}{x-x_i} P_N\left(\frac{1+x}{2}\right) \left[\int_0^1 \frac{1}{x-x_i} P_N\left(\frac{1+x}{2}\right) dx \right]^{-1}$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin[(2k+1)\theta] \quad \text{Papoulis (1956)} \quad (\text{A1.10})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \cos(\theta) = e^{-rt} \\ a_n \text{ tel que } r f[(2k+1)r] = \frac{\pi}{2^{2(n+1)}} \sum_{m=0}^k \left[\binom{2k}{k-m} - \binom{2k}{k-m-1} \right] a_m \end{cases}$$

A1.3 - Méthode utilisant la quadrature de Gauss

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^N \frac{K_n}{t} \exp\left(-\frac{a_n u}{t}\right) \quad \text{Piessens (1973)} \quad (\text{A1.11})$$

avec K_n et a_n des coefficients donnés dans des tables.

$$f(t) = \frac{2e^{ct}}{t} \sum_{n=0}^{\infty} I_n(t) \quad \text{Schmittroth (1960)} \quad (\text{A1.12})$$

$$\text{avec } \begin{cases} I_n(t) = (-1)^n \int_{-0,5}^{0,5} f\left[\frac{\pi(\omega + n + 0,5)}{t}\right] \cos(P\omega) d\omega \\ f(\omega) = -\text{Im}[f(c + i\omega)] \end{cases}$$

A1.4 - Méthode utilisant une transformation bilinéaire de s

$$f(t) \approx t^\alpha e^{-ct} \sum_{k=0}^N a_k \frac{k!}{(\alpha + k)!} \quad \text{Piessens (1975)} \quad (\text{A1.13})$$

$$\text{avec } \begin{cases} L_k^\alpha : \text{polynômes de Laguerre} \\ (s+c)^{\alpha+1} f(s) = \sum_{k=0}^N a_k z^k, z = \frac{s+c-1}{s+c} \end{cases}$$

$$f(t) \approx \frac{t^\alpha}{\alpha!} \sum_{n=0}^N a_n \phi_n\left(\frac{bt}{2}\right) \quad \text{Piessens (1972)} \quad (\text{A1.14})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \phi_n \text{ polynômes de Chebyshev} \\ a_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \Phi\left[\cos\left(\frac{2n+1}{N+1} \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ a_k = \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^N \Phi\left[\cos\left(\frac{2n+1}{N+1} \frac{\pi}{2}\right)\right] \cos\left(\frac{2n+1}{N+1} \frac{k\pi}{2}\right) \\ \Phi(u) = \left(\frac{b}{1-u}\right)^{\alpha+1} \phi\left(\frac{b}{1-u}\right) \end{cases}$$

A1.5. Expression de f en série de Fourier

$$f(t) \approx \frac{2e^{ct}}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\bar{f} \left(c + i \frac{\pi k}{T} \right) \right] \cos \left(\frac{\pi k}{T} \right) \quad \text{Dubner \& Abate (1968)} \quad (\text{A1.15})$$

$$f(t) \approx \frac{e^{ct}}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\bar{f} \left(c + i \frac{\pi k}{T} \right) \right] \cos \left(\frac{\pi k}{T} \right) - \frac{e^{ct}}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left[\bar{f} \left(c + i \frac{\pi k}{T} \right) \right] \sin \left(\frac{\pi k}{T} \right) \quad \text{Silverberg (1970)} \quad (\text{A1.16})$$

Annexe

2

**Validation des méthodes
d'inversion numérique des
transformées de Laplace**

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. This includes not only sales and purchases but also any other financial activities that may occur during the course of the business. It is essential to ensure that all records are kept up-to-date and are easily accessible for review.

In addition, the document emphasizes the need for transparency and accountability in all financial dealings. This means that all transactions should be clearly documented and explained to the relevant parties. It is also important to ensure that all records are kept confidential and are only shared with those who have a legitimate need to know.

Finally, the document highlights the importance of regular audits and reviews. This helps to ensure that all records are accurate and that any discrepancies are identified and corrected as soon as possible. It also provides an opportunity to assess the overall financial health of the business and to make any necessary adjustments.

The second part of the document provides a detailed overview of the various financial statements that are used to track and report on the performance of a business. These statements include the balance sheet, the income statement, and the cash flow statement. Each of these statements provides a different perspective on the financial health of the business and is essential for making informed decisions.

The balance sheet shows the assets and liabilities of the business at a specific point in time. It provides a snapshot of the company's financial position and is used to assess its solvency and liquidity. The income statement shows the revenues and expenses of the business over a period of time. It is used to determine the company's profitability and to identify areas where costs can be reduced. The cash flow statement shows the inflows and outflows of cash over a period of time. It is used to assess the company's ability to generate cash and to manage its working capital.

In addition to these three statements, the document also discusses the importance of other financial metrics, such as the debt-to-equity ratio and the return on investment. These metrics provide further insight into the financial health of the business and are used by investors and lenders to make decisions about whether to invest in or lend to the company.

Finally, the document provides a detailed overview of the various financial ratios that are used to analyze the performance of a business. These ratios include the current ratio, the debt-to-equity ratio, and the return on investment. Each of these ratios provides a different perspective on the financial health of the business and is essential for making informed decisions.

In conclusion, the document emphasizes the importance of maintaining accurate records of all transactions and of regularly auditing and reviewing these records. It also provides a detailed overview of the various financial statements and ratios that are used to track and report on the performance of a business. By following the guidelines outlined in this document, businesses can ensure that they are maintaining accurate records and that they are able to make informed decisions about their financial future.

A2.1 - Quelques fonctions mathématiques simples

A2.1.1 - Fonctions testées avec succès par la méthode de Stehfest (1970).

Les différentes fonctions testées par cette méthode sont tirées de Abramowitz & Stegun (1970), Carslaw & Jaeger (1959) et Hladik (1969), notés A&S, C&J et H dans le tableau A2.1.

Tableau A2.1. Fonctions testées par la méthode de Stehfest (1970).

F(t)	$\bar{f}(s)$	N	Réf.
$-\gamma - \ln t$	$\frac{\ln s}{s}$	18	A & S 29.3.98 p1027
$\frac{t^3}{6}$	$\frac{1}{s^4}$	18	A & S 29.3.3 p 1022
$\frac{t^4 \exp(-t)}{24}$	$\frac{1}{(s+1)^5}$	22	A & S 29.3.10 p 1022
$\frac{\sin(t)}{t\sqrt{2\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s + \sqrt{s^2 + 1}}}$	18	H p 183
Exp(-t)	$\frac{1}{1+s}$	18	A & S 29.3.8 p 1022
$\operatorname{erfc}\left(\frac{3}{2\sqrt{2t}}\right)$	$\frac{\exp(-3q)}{s} \quad q = \sqrt{\frac{s}{2}}$	18	A & S 29.3.83 p 1026
$2\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \exp\left(-\frac{9}{8t}\right) - 3\operatorname{erfc}\left(\frac{3}{2\sqrt{2t}}\right)$	$\frac{\exp(-3q)}{qs} \quad q = \sqrt{\frac{s}{2}}$	16	C & J 9 p 494
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sinh(2\sqrt{2t})$	$s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{2}{s}\right)$	18	A & S 29.3.79 p 1026
$\frac{3}{2\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{9}{8t}\right)$	$\exp(-3q) \quad q = \sqrt{\frac{s}{2}}$	18	A & S 29.3.82 p 1026
$\cos(t) \cosh(t)$	$\frac{s^3}{4+s^4}$	18	H p 180
$\frac{\sin(t) - t \cos(t)}{t\sqrt{\frac{\pi t}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+s^2} \left(s + \sqrt{s^2 + 1}\right)^{\frac{3}{2}}}$	18	H p 183
$\frac{1 - \exp(-t)}{t\sqrt{\pi t}}$	$\frac{2}{\sqrt{s + \sqrt{s+1}}}$	16	H p 183
$\frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{9}{0,4t}\right)$	$K_0(3q) \quad q = \sqrt{\frac{s}{0,1}}$	18	A & S 29.3.120 p 1028
$\frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{9}{8t}\right)$	$K_0(3q) \quad q = \sqrt{\frac{s}{2}}$	18	A & S 29.3.120 p 1028
$\frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{\exp\left(-\frac{1}{s}\right)}{\sqrt{s}}$	18	A & S 29.3.76 p 1026

$I_0(2\sqrt{3t})$	$\frac{\exp\left(\frac{3}{s}\right)}{s}$	18	C & J 24 p 495
$I_0(2\sqrt{0,1t})$	$\frac{\exp\left(\frac{0,1}{s}\right)}{s}$	18	C & J 24 p 495
$\sin(2t)$	$\frac{2}{4+s^2}$	20	A & S 29.3.15 p 1022
$ \sin(2t) $	$\frac{2}{4+s^2} \coth\left(\frac{\pi s}{4}\right)$	18	A & S 29.3.73 p 1026
$\frac{1}{2}\sqrt{t(t+4)}$	$\frac{1}{s} \exp(2s) K_1(2s)$	18	A & S 29.3.121 p 1028

A2.1.2 - Fonctions testées avec succès par la méthode de Piessens et al. (1983)

La méthode de Piessens et al. (1983) a été validée sur quelques exemples simples. Le tableau A2.2 présente ces fonctions ainsi que l'expression des parties réelle et imaginaire, et les quatre constantes intervenant dans le calcul.

Tableau A2.2. Fonctions testées par la méthode de Piessens et al. (1983).

$f(t)$	$\bar{f}(s)$	$\text{Re}(\bar{f}(s)), \text{Im}(\bar{f}(s))$	$c_{1,2}$	a et b
$\exp(-t)$	$\frac{1}{1+s}$	$\text{Re} = \frac{1+a}{(1+a)^2 + b^2} \quad \text{Im} = \frac{-b}{(1+a)^2 + b^2}$	2	a=0 b=0
$\sin(t)$	$\frac{1}{1+s^2}$	$\text{Re} = \frac{1+a^2 - b^2}{(1+a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}$ $\text{Im} = \frac{-2ab}{(1+a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}$	2	a=0 b=1
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\text{Re} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \alpha = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$ $\text{Im} = \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})}}$	2	a=0 b=0
$I_0(2\sqrt{kt})$ k=3	$\frac{1}{s} \exp\left(\frac{k}{s}\right)$	$\text{Re} = \frac{\exp\left(\frac{ka}{a^2 + b^2}\right)}{a^2 + b^2} \left[a \cos\left(\frac{kb}{a^2 + b^2}\right) - b \sin\left(\frac{kb}{a^2 + b^2}\right) \right]$	2	a=0 b=0
$I_0(2\sqrt{kt})$ k=0,1		$\text{Im} = \frac{\exp\left(\frac{ka}{a^2 + b^2}\right)}{a^2 + b^2} \left[-b \cos\left(\frac{kb}{a^2 + b^2}\right) - a \sin\left(\frac{kb}{a^2 + b^2}\right) \right]$		

$\cos(t)\cosh(t)$	$\frac{s^3}{4+s^4}$	$\text{Re} = \frac{(a^3 - 3ab^2)(4 + a^4 - 6a^2b^2 + b^4) + (3a^2b - b^3)(4a^3b - 4ab^3)}{[4 + a^4 - 6a^2b^2 + b^4]^2 + [4a^3b - 4ab^3]^2}$ $\text{Im} = \frac{(3a^2b - b^3)(4 + a^4 - 6a^2b^2 + b^4) - (a^3 - 3ab^2)(4a^3b - 4ab^3)}{[4 + a^4 - 6a^2b^2 + b^4]^2 + [4a^3b - 4ab^3]^2}$	2	a=1 b=1
$\frac{1}{2t} \exp\left(\frac{-9}{0,4t}\right)$	$K_0\left(3\sqrt{\frac{s}{0,1}}\right)$	$\text{Re} = A \quad \text{Im} = B$ $A + iB = K_0\left(3\sqrt{\frac{a+ib}{0,1}}\right)$	5	a=0 b=0
$\frac{\sin(kt) - kt\cos(kt)}{k=2}$	$\frac{1}{(s^2 + k^2)^2}$	$\text{Re} = \frac{(a^2 - b^2 + k^2)^2 - 4a^2b^2}{[(a^2 - b^2 + k^2)^2 - 4a^2b^2]^2 + [4ab(a^2 - b^2 + k^2)]^2}$ $\text{Im} = \frac{-4ab(a^2 - b^2 + k^2)}{[(a^2 - b^2 + k^2)^2 - 4a^2b^2]^2 + [4ab(a^2 - b^2 + k^2)]^2}$	2	a=0 b=2
$\text{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{s} \exp(-2\sqrt{s})$	$\text{Re} = \frac{\exp(-k\alpha)}{a^2 + b^2} [a \cos(k\beta) - b \sin(k\beta)]$ $\text{Im} = \frac{\exp(-k\alpha)}{a^2 + b^2} [-b \cos(k\beta) - a \sin(k\beta)]$ $\alpha = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})}}$	2	a=0 b=0
$J_0(2\sqrt{kt})$ k=2	$\frac{1}{s} \exp\left(\frac{-k}{s}\right)$	$\text{Re} = \frac{\exp\left(-\frac{ka}{a^2 + b^2}\right)}{a^2 + b^2} \left[a \cos\left(\frac{kb}{a^2 + b^2}\right) + b \sin\left(\frac{kb}{a^2 + b^2}\right) \right]$ $\text{Im} = \frac{\exp\left(-\frac{ka}{a^2 + b^2}\right)}{a^2 + b^2} \left[-b \cos\left(\frac{kb}{a^2 + b^2}\right) + a \sin\left(\frac{kb}{a^2 + b^2}\right) \right]$	10	a=0 b=0

A2.2 - Quelques exemples de problèmes 1D

A2.2.1 - Sphère d'argile chauffée (Djéran, 1991)

On considère une sphère creuse de rayon intérieur r_a et de rayon extérieur r_b (figure A2.1) soumise au chargement suivant :

$$\begin{cases} T(r_a, t) = T_a = \text{cste} \\ T(r_b, t) = 0 \\ T(r, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.1})$$

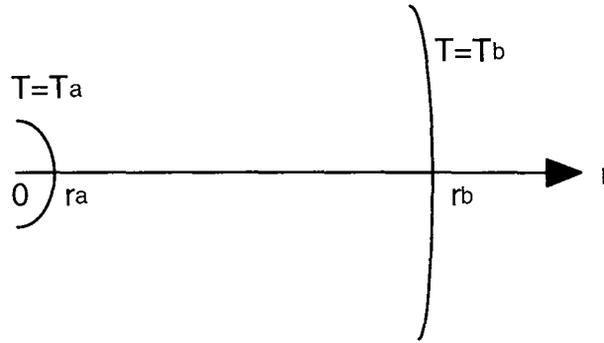


Figure A2.1. Géométrie.

En géométrie sphérique, ce problème de diffusion unidimensionnel est caractérisé par l'équation :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{D_T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{avec} \quad D_T = \frac{\lambda_T}{C} \quad (\text{A2.2})$$

Mise sous forme adimensionnelle :

$$r' = \frac{r}{r_a} \quad \rho = \frac{r_b}{r_a} \quad T' = \frac{T}{T_a} \quad \tau = \frac{r_a^2}{4D_T} \quad t' = \frac{t}{\tau} \quad s' = s\tau \quad (\text{A2.3})$$

et le passage dans le domaine des transformées de Laplace conduit à l'équation :

$$\frac{d^2 \bar{T}'}{dr'^2} + \frac{2}{r'} \frac{d\bar{T}'}{dr'} - q'^2 \bar{T}' = 0 \quad \text{avec} \quad q' = 2\sqrt{s'} \quad (\text{A2.4})$$

ou encore
$$\frac{d^2}{dr'^2} (r' \bar{T}') - q'^2 (r' \bar{T}') = 0 \quad (\text{A2.5})$$

La solution générale est donc de la forme :

$$r' \bar{T}' = A e^{q' r'} + B e^{-q' r'} \quad (\text{A2.6})$$

Les constantes A et B sont déterminées d'après les conditions aux limites du problème :

$$\begin{cases} \text{en } r' = 1 : T' = \frac{1}{s'} \\ \text{en } r' = \rho : T' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A e^{q'} + B e^{-q'} = \frac{1}{s'} \\ A e^{q'\rho} + B e^{-q'\rho} = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.7})$$

La température au sein de la sphère creuse, exprimée dans le domaine des transformées de Laplace, pour $1 < r' < \rho$, est donc de la forme :

$$\bar{T}'(r', s') = \frac{1}{r' s'} \frac{\exp[q'(\rho - r')] - \exp[-q'(\rho - r')]}{\exp[q'(\rho - 1)] - \exp[-q'(\rho - 1)]} \quad (\text{A2.8})$$

Carslaw & Jaeger (1959, p352) donnent la solution exacte de ce problème sous la forme d'une somme de série :

$$\bar{T}(r', t) = \frac{1}{r'} \frac{\rho - r'}{\rho - 1} \frac{2}{\pi r'} \sum_{n=1} \left[\frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi(r'-1)}{\rho-1}\right) \exp\left(-\frac{4n^2\pi^2}{(\rho-1)^2} t'\right) \right] \quad (\text{A2.9})$$

Il est donc intéressant de comparer les deux méthodes de Stehfest (1970) et Piessens et al. (1983) avec la solution exacte.

Pour la méthode de Piessens et al. (1983), il faut au préalable séparer partie réelle et imaginaire de la fonction à inverser :

$$\bar{T}(r', s) = \frac{1}{a + ib} \frac{1}{r' s} \frac{\exp[(\alpha + i\beta)(\rho - r')] - \exp[-(\alpha + i\beta)(\rho - r')]}{\exp[(\alpha + i\beta)(\rho - 1)] - \exp[-(\alpha + i\beta)(\rho - 1)]} \quad (\text{A2.10})$$

$$= \frac{a(X_1 X_2 + Y_1 Y_2) + b(-X_1 Y_2 + X_2 Y_1)}{r' (a^2 + b^2)(X_2^2 + Y_2^2)} + i \frac{a(X_1 X_2 + Y_1 Y_2) + b(-X_1 Y_2 + X_2 Y_1)}{r' (a^2 + b^2)(X_2^2 + Y_2^2)}$$

$$\text{avec} \begin{cases} X_1 = [\exp(2(\rho - r')\alpha) - \exp(-2(\rho - r')\alpha)] \cos(2(\rho - r')\beta) \\ X_2 = [\exp(2(\rho - 1)\alpha) - \exp(-2(\rho - 1)\alpha)] \cos(2(\rho - 1)\beta) \\ Y_1 = [\exp(2(\rho - r')\alpha) + \exp(-2(\rho - r')\alpha)] \sin(2(\rho - r')\beta) \\ Y_2 = [\exp(2(\rho - 1)\alpha) + \exp(-2(\rho - 1)\alpha)] \sin(2(\rho - 1)\beta) \end{cases} \quad (\text{A2.11})$$

Pour le calcul par cette méthode, les paramètres utilisés sont : $a = 0$, $b = 1$, $c_1 = c_2 = 2$.

L'évolution de T' en fonction de t' , en représentation semi-logarithmique, calculée avec la solution exacte de Carslaw & Jaeger (1959), est donnée par la figure A2.2, et les erreurs relatives commises par les deux méthodes d'inversion sont montrées sur la figure A2.3.

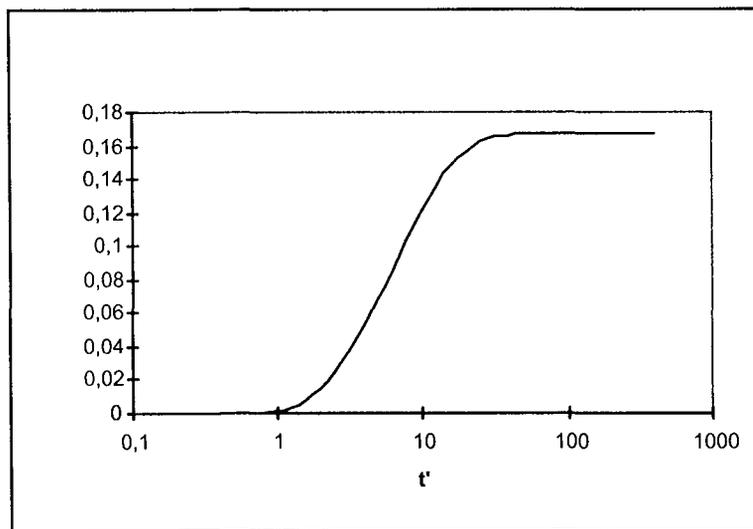


Figure A2.2. Evolution temporelle de la température.

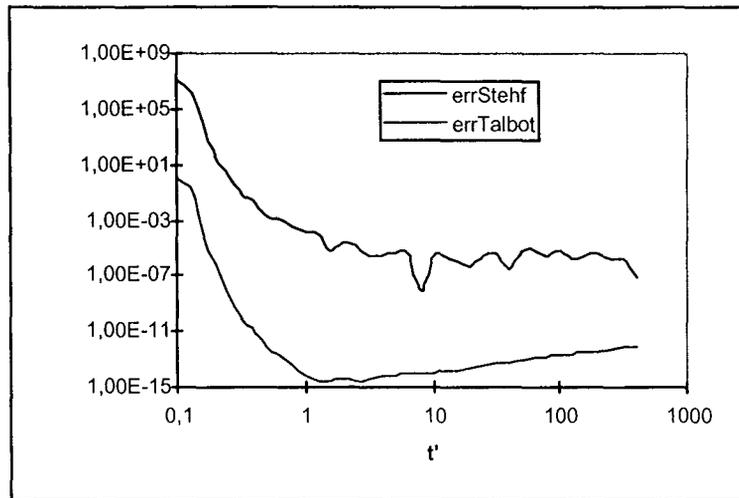


Figure A2.3. Erreurs relatives commises avec les deux méthodes d'inversion.

On constate une évolution similaire de l'erreur relative montrant que pour des temps petits, le calcul numérique est peu précis car les valeurs de \$T\$ sont proches de 0. Pour \$t' > 1\$, l'approximation numérique est bonne, avec une précision plus grande avec la méthode de Piessens et al. (1983).

A2.2.2 - Creusement d'une galerie (Detournay & Cheng, 1988)

On considère une galerie circulaire de rayon \$a\$ (figure A2.4). La pression à la paroi est \$P_0\$ et à l'infini, on considère qu'elle est nulle.

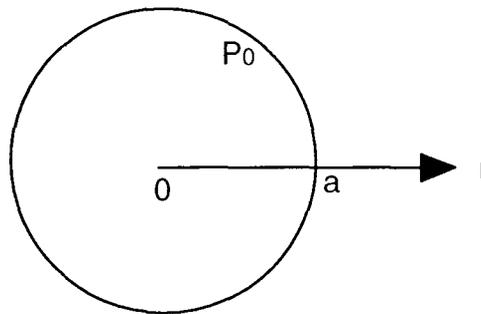


Figure A2.4. Géométrie.

Le problème de diffusion, en géométrie cylindrique, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{avec} \quad c = \frac{2\kappa\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \quad (\text{A2.12})$$

Mise sous forme adimensionnelle :

$$r' = \frac{r}{a} \quad P' = \frac{P}{P_0} \quad t' = \frac{t}{\tau} \quad \tau = \frac{a^2}{c} \quad (\text{A2.13})$$

Le passage dans le domaine des transformées de Laplace conduit alors à l'équation suivante :

$$\frac{d^2 \bar{P}'}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{d\bar{P}'}{dr'} - s' \bar{P}' = 0 \quad (\text{A2.14})$$

On reconnaît la forme de l'équation de Bessel et par conséquent, les solutions générales sont de la forme :

$$\bar{P}' = A I_0(q' r') + B K_0(q' r') \quad \text{avec} \quad q' = \sqrt{s'} \quad (\text{A2.15})$$

Les constantes A et B sont déterminées en considérant les conditions aux limites du problème :

$$\begin{aligned} \text{en } r' \rightarrow \infty, \quad P' = 0 & \Rightarrow A = 0 \\ \text{en } r' = 1, \quad P' = 1 & \Rightarrow \frac{1}{s'} = B K_0(q') \end{aligned} \quad (\text{A2.16})$$

et finalement la pression dans le domaine des transformées de Laplace, pour $r' > 1$, est donnée par la relation :

$$\bar{P}'(r', s') = \frac{K_0(q' r')}{s' K_0(q')} \quad \text{avec} \quad q' = \sqrt{s'} \quad (\text{A2.17})$$

L'inversion numérique de la pression est réalisée par les deux méthodes et les résultats sont comparés avec la solution exacte donnée par Carslaw & Jaeger (1959, p335).

$$P(r', t') = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-u^2 t') \frac{J_0(ur') Y_0(u) - Y_0(ur') J_0(u)}{J_0^2(u) + Y_0^2(u)} \frac{du}{u} \quad (\text{A2.18})$$

Pour utiliser la méthode de Piessens et al. (1983), il faut au préalable séparer parties réelle et imaginaire de la fonction à inverser :

$$\begin{aligned} \bar{P}'(r', a + ib) &= \frac{1}{a + ib} \frac{K_0(r' \sqrt{a + ib})}{K_0(\sqrt{a + ib})} \\ &= \frac{1}{a + ib} \frac{K_0(r'(\alpha + i\beta))}{K_0(\alpha + i\beta)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ \beta = \frac{b}{\sqrt{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})}} \end{cases} \\ &= \frac{1}{a + ib} \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \end{aligned} \quad (\text{A2.19})$$

$$= \underbrace{\frac{a(a_1 a_2 + b_1 b_2) + b(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{(a^2 + b^2)(a_2^2 + b_2^2)}}_{\text{Re}(P'(r', a + ib))} + i \underbrace{\frac{a(b_1 a_2 - a_1 b_2) - b(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{(a^2 + b^2)(a_2^2 + b_2^2)}}_{\text{Im}(P'(r', a + ib))} \quad (\text{A2.20})$$

L'allure de la courbe P' en fonction de t' , calculée par la méthode de Piessens et al. (1983) (avec $a = b = 0, c_1 = c_2 = 10$), est donnée dans le tableau A2.1 et sur la figure A2.5 pour différentes valeurs de r' , sachant que la méthode de Stehfest (1970) est localement instable pour quelques couples (t', r'). En effet, on constate que certaines valeurs (en gras) paraissent totalement absurdes mais a priori, il est difficile de prévoir pour quelles valeurs de r et t , on va observer ces valeurs erronées.

Tableau A2.1. Evolution temporelle de la pression pour différents rayons.

t'	$r' = 1,5$	$r' = 2$	$r' = 3$	$r' = 5$
0,01	0,0003	0	0	0
0,01585	0,0041	0	0	0
0,02512	0,021	0	0	0
0,03981	0,0627	0,0003	0	0
0,0631	0,1308	0,0035	0	0
0,1	0,2169	0,0181	0	0
0,15849	0,3091	0,0542	0,0002	0
0,25119	0,3978	0,1138	0,0028	0
0,39811	0,4778	0,1897	0,0148	0
0,63096	0,5473	0,2716	0,0446	0,0002
1	0,628	0,3585	0,0953	0,0022
1,58489	-14,3513	-4,4515	-0,3946	0,0035
2,51189	52,0439	17,0623	2,0945	0,0625
3,98107	-50,9331	0,5261	0,2989	0,0759
6,30957	-14,1147	14,8464	0,3637	0,129
10	0,7837	-49,3899	0,4242	0,1883
15,84893	0,804	0,6655	-20,869	0,2481
25,11886	0,8213	0,6948	-5,5385	0,2969
39,81072	0,8361	0,72	0,5572	5,079
63,09573	0,8488	0,7417	0,5911	-15,1846
100	0,8599	0,7605	0,6208	0,4463
158,48932	0,8696	0,777	0,6468	0,4836
251,18864	0,8781	0,7916	0,6697	0,5167
398,10717	0,8856	0,8044	0,69	0,5462
630,95734	0,8923	0,8158	0,7081	0,5726

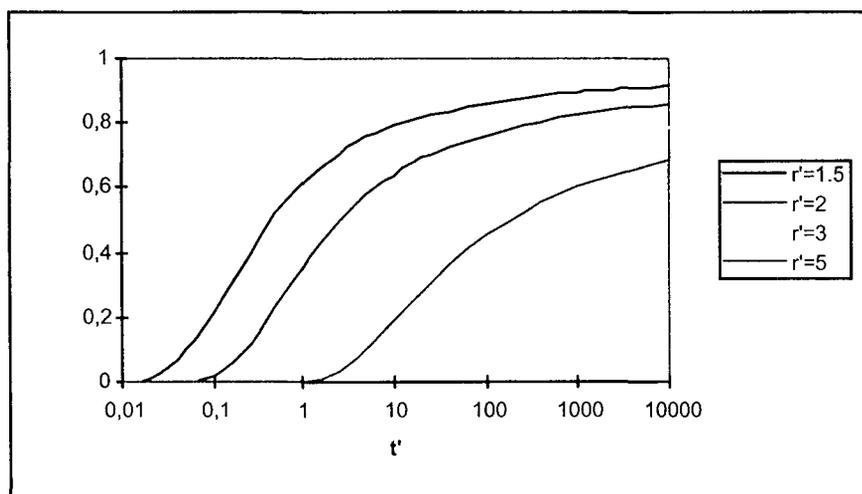


Figure A2.5. Evolution temporelle de la pression pour différents rayons.

A2.2.3 - Déformations autour d'une cavité circulaire (Senjuntichai & Rajapakse, 1993)

On considère une cavité cylindrique de section $2a$ au sein d'un milieu poroélastique (figure A2.6).

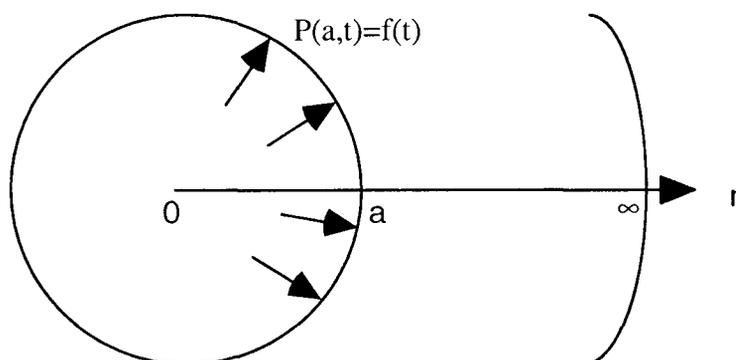


Figure A2.6. Géométrie.

On applique une traction radiale fonction du temps à la paroi et nulle en l'infini, et on cherche à évaluer le déplacement et la pression interstitielle dans le massif en déformations planes et en axisymétrie.

D'après la théorie de Biot, de propagation des ondes en milieu poroélastique, les deux équations couplées régissant l'évolution du déplacement u et de la pression interstitielle P sont les suivantes :

$$\begin{cases} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u + (\lambda_c + 1) \frac{\partial e}{\partial r} - bM^* \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u + \rho^* w) \\ bM^* \frac{\partial e}{\partial r} - M^* \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho^* u + mw) + b^* \frac{\partial w}{\partial r} \end{cases} \quad (\text{A2.21})$$

$$\begin{aligned} \text{avec } e &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}, \quad \zeta = -\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}, \quad P = M\zeta - bMe \\ \text{et } \lambda_c &= \frac{\lambda}{\mu} + b^2 M, \quad M^* = \frac{M}{\mu}, \quad \rho^* = \frac{\rho_f}{\rho}, \quad m = \frac{\rho^*}{\phi}, \quad b^* = \frac{\mu_f}{\lambda_H} \frac{a}{\sqrt{\rho\mu}} \end{aligned} \quad (\text{A2.22})$$

où e et ζ représentent respectivement les dilatations des phases solide et fluide.

Dans le formalisme de Coussy (1991), les différents paramètres caractérisant le comportement dynamique du milieu poreux sont : les deux constantes de Lamé λ et μ , le coefficient de Biot b , le module de Biot M , la densité du fluide ρ_f , la densité du milieu poreux ρ , la porosité ϕ , la viscosité du fluide μ_f , la perméabilité hydraulique λ_H .

Pour un milieu élastique idéal, on ne considère que la propagation des ondes de cisaillement et l'équation régissant le déplacement radial est de la forme:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) u = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{avec } c_p = \sqrt{\frac{1+2\mu}{\rho}} \quad (\text{A2.23})$$

Mise sous forme adimensionnelle :

$$r' = \frac{r}{a} \quad t' = \frac{t}{\tau} \quad \tau = \frac{a}{c_p} \quad s' = s\tau \quad u' = \frac{\mu u}{f_0 a} \quad (\text{A2.24})$$

et le passage dans le domaine des transformées de Laplace conduit à :

$$\frac{d^2}{dr'^2} \bar{u}' + \frac{1}{r'} \frac{d}{dr'} \bar{u}' - \left(s'^2 + \frac{1}{r'^2} \right) \bar{u}' = 0 \quad (\text{A2.25})$$

On reconnaît l'équation de Bessel modifiée dont les solutions générales sont de la forme :

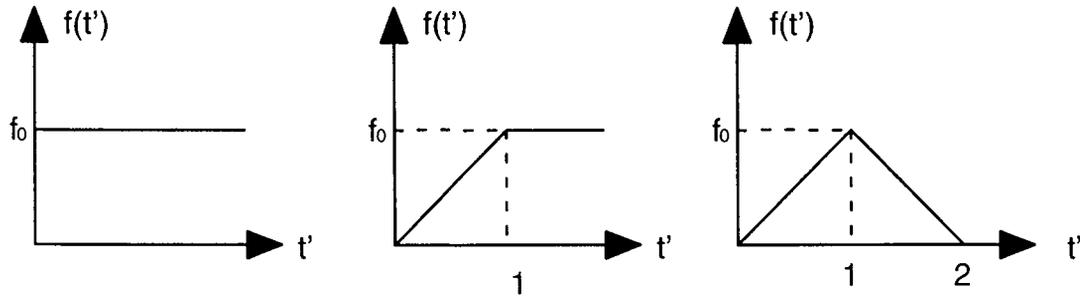
$$\bar{u}' = A I_1(r's') + B K_1(r's') \quad (\text{A2.26})$$

Le domaine étant considéré comme infini, $A = 0$, et la constante B est déterminée à partir de la condition aux limites en $r' = 1$:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(1, s') = -\bar{f}(s') \\ \sigma_{rr}(1, s') = -B \left[(\lambda^* + 2) s' K_0(s') + 2 K_1(s') \right] \end{cases} \quad (\text{A2.27})$$

$$\bar{u}'(r', s') = \frac{\bar{f}(s') K_1(r's')}{(\lambda^* + 2) s' K_0(s') + 2 K_1(s')} \quad (\text{A2.28})$$

Pour l'expression de $\bar{f}(s')$, on distingue 3 cas :



1er cas : $\bar{f}(s') = \frac{1}{s'}$ échelon de pression

2ème cas : $\bar{f}(s') = \frac{1 - e^{-s'}}{s'^2}$ rampe de pression suivie d'un palier

3ème cas : $\bar{f}(s') = \frac{(1 - e^{-s'})^2}{s'^2}$ chargement de type pulse

Pour la méthode d'inversion de Piessens et al. (1983), il est nécessaire de séparer parties réelle et imaginaire de la fonction à inverser :

1er cas :

$$F_1(a + ib) = \frac{\bar{f}(s')K_1[r'(a + ib)]}{(\lambda^* + 2)(a + ib)K_0(a + ib) + 2K_1(a + ib)} \quad (A2.29)$$

on pose
$$\begin{cases} A + iB = K_1[r'(a + ib)] \\ C + iD = K_0(a + ib) \\ E + iF = K_1(a + ib) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \overline{u'_r}(r', a + ib) &= \frac{(Aa + bB)[(\lambda^* + 2)(aC - bD) + 2E] + (Ba - bA)[(\lambda^* + 2)(bC + aD) + 2F]}{(a^2 + b^2) \left[[(\lambda^* + 2)(aC - bD) + 2E]^2 + [(\lambda^* + 2)(bC + aD) + 2F]^2 \right]} \\ &+ i \frac{(Ba - bA)[(\lambda^* + 2)(aC - bD) + 2E] - (Aa + bB)[(\lambda^* + 2)(bC + aD) + 2F]}{(a^2 + b^2) \left[[(\lambda^* + 2)(aC - bD) + 2E]^2 + [(\lambda^* + 2)(bC + aD) + 2F]^2 \right]} \end{aligned} \quad (A2.30)$$

2ème cas :

$$F_2(a + ib) = F_1(a + ib) \frac{1 - e^{-(a+ib)}}{a + ib} \quad (A2.31)$$

$$= F_1(a + ib) \left[\frac{a(1 - e^{-a} \cos(b)) + be^{-a} \sin(b)}{a^2 + b^2} + i \frac{-b(1 - e^{-a} \cos(b)) + ae^{-a} \sin(b)}{a^2 + b^2} \right] \quad (\text{A2.32})$$

3ème cas :

$$F_3(a + ib) = F_2(a + ib) \left[1 - e^{-(a+ib)} \right] \quad (\text{A2.33})$$

$$= F_2(a + ib) \left[1 - e^{-a} \cos(b) + ie^{-a} \sin(b) \right] \quad (\text{A2.34})$$

La figure A2.7 représente le déplacement obtenu en fonction du temps, à la paroi de la cavité, par les deux méthodes dans le cas d'un chargement par un échelon de pression et la figure A2.8 donne ce même déplacement calculé dans les trois cas par la méthode de Piessens et al. (1983).

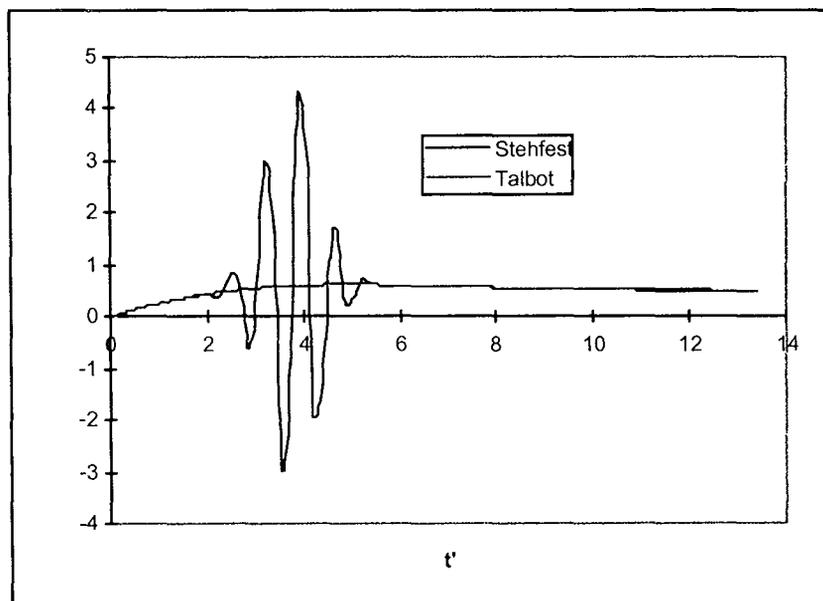


Figure A2.7. Evolution temporelle du déplacement avec les deux méthodes dans le cas 1.

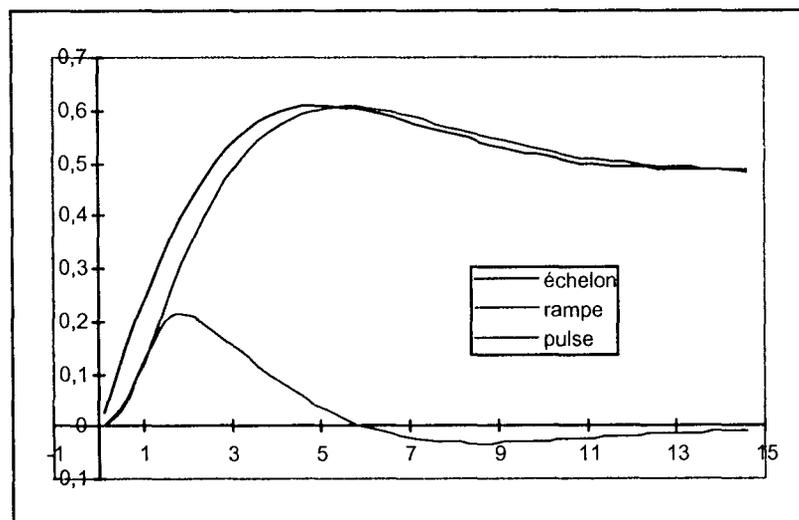


Figure A2.8. Evolution temporelle du déplacement avec la méthode de Piessens et al. (1983) pour les trois cas.

Comme on l'a déjà observé auparavant, la méthode de Stehfest (1970) présente à nouveau des instabilités pour quelques couples (r' , t'). Sinon, les résultats obtenus par les deux méthodes semblent très proches et la représentation des trois cas sur un même graphe donne des courbes tout à fait similaires à celles obtenues par Senjuntichai & Rajapakse (1993).

A2.2.4 - Pulse-test dans un aquifère (Cooper et al., 1966)

Le pulse-test permet de déterminer les caractéristiques hydrauliques d'un aquifère, en l'occurrence le coefficient d'emmagasinement S et la transmissivité T . Pour cela, on injecte à la surface d'un puits (figure A2.9) un fluide selon un chargement type pulse (la pression décroît à l'interface puits-aquifère selon une fonction du temps). En mesurant cette variation de pression au cours du temps par des capteurs, on peut ainsi comparer la courbe expérimentale obtenue avec des courbes-type fournies dans des abaques, et en déduire S et T .

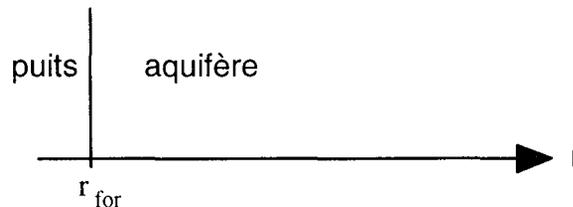


Figure A2.9. Géométrie.

En l'infini, on impose une pression nulle et en r_{for} , on exprime le fait que le flux d'eau circulant dans l'aquifère correspond au volume d'eau injecté dans le puits. Les conditions aux limites sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} h(r \rightarrow \infty, t) = 0 \\ h(r = r_{\text{for}}, 0) = H_0 \\ 2\pi r_{\text{for}} T \frac{\partial}{\partial r} h(r = r_{\text{for}}, t) = \pi r_c^2 \frac{\partial}{\partial t} h(r = r_{\text{for}}, t) \end{cases} \quad (\text{A2.35})$$

h représente la pression interstitielle dans l'aquifère : on va chercher son expression en fonction de r et t , et on en déduira l'évolution de cette pression à la paroi du puits en fonction du temps.

L'équation de ce problème en géométrie sphérique se met sous la forme :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{A2.36})$$

Mise sous forme adimensionnelle : le temps caractéristique est exprimé en fonction de la diffusivité, que l'on relie aux paramètres S et T du pulse :

$$\tau = \frac{r_s^2}{D_p} \quad \text{avec} \quad D_p = \frac{S}{T} \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{r_s^2 S}{T} \quad (\text{A2.37})$$

Le passage dans le domaine des transformées de Laplace conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \bar{h}'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{d\bar{h}'}{dr'} - s\bar{h}' = 0 \quad (\text{A2.38})$$

On reconnaît l'équation de Bessel modifiée, et les solutions générales du problème sont donc de la forme :

$$\bar{h}'(r', s) = AI_0(q'r') + BK_0(q'r') \quad \text{avec} \quad q' = \sqrt{s'} \quad (\text{A2.39})$$

Les constantes A et B sont déterminées d'après les conditions aux limites :

$$\text{en } \infty: \bar{h}' = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\text{en } r' = 1: 2 \frac{d\bar{h}'}{dr'} = s'\bar{h}' - 1 \Rightarrow -2q' BK_1(q') = sBK_0(q') - 1 \quad (\text{A2.40})$$

donc la pression, pour $r' > 1$, exprimée dans le domaine des transformées de Laplace est :

$$\bar{h}'(r', s) = \frac{K_0(q'r')}{2\alpha q' K_1(q') + s' K_0(q')} \quad \text{avec} \quad q' = \sqrt{s'} \quad (\text{A2.41})$$

Carlsaw & Jaeger (1959, p342) donnent une solution exacte à ce problème sous la forme d'une intégrale qui s'exprime ainsi :

$$h'(r', t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-u^2 t) \frac{J_0(ur') [uY_0(u) - 2\alpha Y_1(u)] - Y_0(ur') [uJ_0(u) - 2\alpha J_1(u)]^2}{[uJ_0(u) - 2\alpha J_1(u)]^2 + [uY_0(u) - 2\alpha Y_1(u)]^2} du \quad (\text{A2.42})$$

et de plus, il donne la solution exacte dans le cas particulier où $r' = 1$:

$$H'(t) = \frac{8\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \exp(-u^2 t) \frac{1}{[uJ_0(u) - 2\alpha J_1(u)]^2 + [uY_0(u) - 2\alpha Y_1(u)]^2} \frac{du}{u} \quad (\text{A2.43})$$

Pour la méthode d'inversion de Piessens et al. (1983), il faut séparer parties réelle et imaginaire de la fonction à inverser :

$$\bar{h}'(r', a + ib) = \frac{K_0(r'\sqrt{a + ib})}{2a\sqrt{a + ib}K_1(\sqrt{a + ib}) + (a + ib)K_0(\sqrt{a + ib})} \quad (\text{A2.44})$$

$$\text{on note : } \begin{cases} x + iy = \sqrt{a + ib} \\ A + iB = K_0 [r'(x + iy)] \\ C + iD = K_1 (x + iy) \\ E + iF = K_0 (x + iy) \end{cases} \quad (\text{A2.45})$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \bar{h}'(r', a + ib) &= \frac{A[2\alpha(xC - yD) + aE - bF] + B[2\alpha(yC + xD) + bE + aF]}{[2\alpha(xC - yD) + aE - bF]^2 + [2\alpha(yC + xD) + bE + aF]^2} \\ &+ i \frac{B[2\alpha(xC - yD) + aE - bF] - A[2\alpha(yC + xD) + bE + aF]}{[2\alpha(xC - yD) + aE - bF]^2 + [2\alpha(yC + xD) + bE + aF]^2} \end{aligned} \quad (\text{A2.46})$$

Cooper et al. (1966) fournissent des abaques donnant H' en fonction de α et β ($=t'$) que l'on a retracés sur la figure A2.10 en utilisant la méthode de Piessens et al. (1983) avec $a = b = 0$, $c_1 = c_2 = 2$, et la solution exacte de Carslaw & Jaeger (1959). On constate que les solutions semi-explicites donne des courbes qui collent parfaitement avec les solutions exactes.

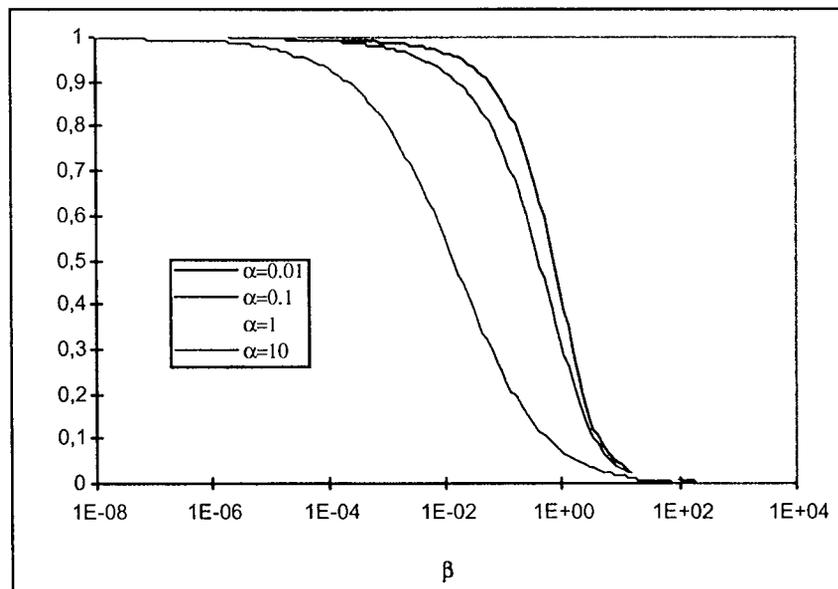


Figure A2.10. Evolution de la pression interstitielle H' en fonction de α et β .

De plus, on a également comparé de la même façon les différents résultats obtenus par Carslaw & Jaeger (1959), Piessens et al. (1983) et Stehfest (1970) concernant la pression dans l'aquifère : le constat est toujours le même pour la méthode de Stehfest (1970) et ses instabilités localisées alors que celle de Piessens et al. (1983) approxime parfaitement les résultats exacts : la figure A2.11 donne les valeurs de $h'(r', t')$ en fonction de r' pour différentes valeurs de t' .

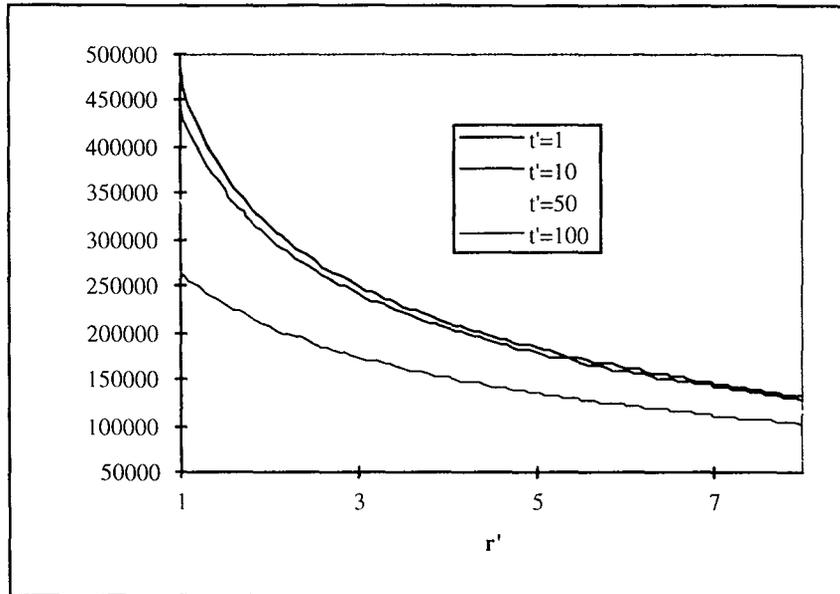


Figure A2.11. Evolution radiale de la pression interstitielle h' pour différents temps.

A2.2.5 - Stockage de déchets en milieu multicouche (Giraud & Thouvenin, 1997)

On considère un milieu composé d'une superposition de n couches horizontales d'extension infinie (figure 12) : la première couche est la couche superficielle, la dernière la couche profonde et une des intermédiaires une couche de stockage qui est subdivisée en trois (couche supérieure, couche contenant les déchets exothermiques, couche inférieure). La source de chaleur est simulée par une production volumique de chaleur décroissante au cours du temps : $Q(t) = Q_0 e^{-\omega t}$.

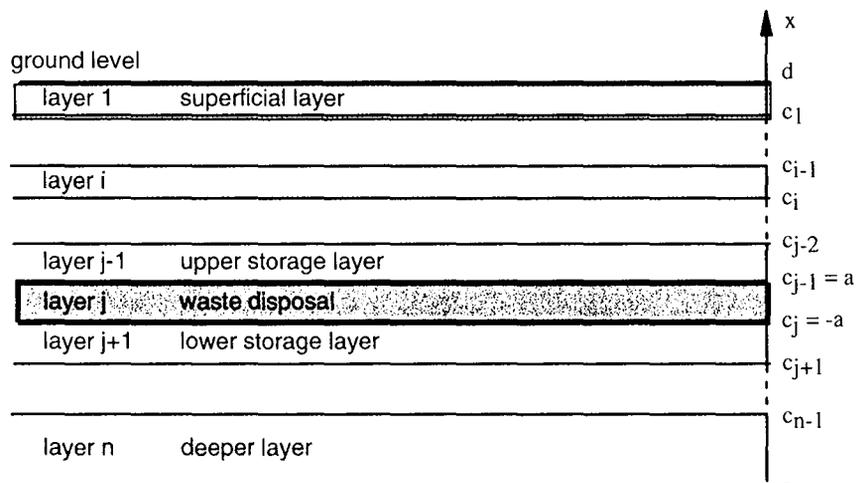


Figure A2.12. Géométrie.

Les conditions aux limites sont telles que T et P sont nulles pour $x = d$ et $x \rightarrow \infty$, et on doit assurer la continuité de T et P à l'interface entre chaque couche.

Les équations gouvernant la consolidation non isotherme au sein d'un milieu poreux isotrope thermo-élastique saturé sont les suivantes :

$$\begin{cases} \left(K_o + \frac{4}{3}\mu \right) \{ \nabla \varepsilon_v \} - \mu \{ \text{rot} \} \{ \text{rot} \} \{ u \} - b \{ \nabla P \} - 3\alpha_o K_o \{ \nabla \Theta \} = 0 \\ \lambda_H \nabla^2 P = b \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{1}{M} \frac{\partial P}{\partial t} - 3\alpha_m \frac{\partial \Theta}{\partial t} \\ \lambda_T \nabla^2 \Theta = 3\alpha_o K_o T_o \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - 3\alpha_m T_o \frac{\partial P}{\partial t} + C \frac{\partial \Theta}{\partial t} - Q \end{cases} \quad (\text{A2.47})$$

On suppose que le transfert de chaleur peut être découplé (Giraud, 1993), et on introduit des variables adimensionnelles :

$$x' = \frac{x}{a} \quad t' = \frac{t}{\tau} \quad \tau = \frac{a^2}{4D_T} \quad \omega' = \tau\omega \quad T' = \frac{T}{T_a} \quad T_a = \frac{a^2 Q_o}{2\lambda_T} \quad (\text{A2.48})$$

Le passage dans le domaine des transformées de Laplace conduit alors à des expressions de la température de la forme :

$$\bar{T}'(x', s') = C_{2i-1}^T(s') e^{-\alpha_i x'} + C_{2i}^T(s') e^{\alpha_i x'} + \frac{1}{2s'(s'+\omega')} \quad \text{couche de stockage} \quad (\text{A2.49})$$

$$\bar{T}'(x', s') = C_{2i-1}^T(s') e^{-\alpha_i x'} + C_{2i}^T(s') e^{\alpha_i x'} \quad \text{autres couches} \quad (\text{A2.50})$$

$$\text{avec} \quad \alpha_i^2 = 4s' \beta_i \quad \beta_i = \frac{D_T}{D_T^i} \quad D_T^i = \frac{\lambda_T^i}{C^i} \quad (\text{A2.51})$$

Les conditions de continuité à l'interface $x' = c'_i$ entre les couches i ($c'_i + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$) et $i + 1$ ($c'_i - \varepsilon$) se traduisent par :

$$\begin{cases} \bar{T}'(x' = c'_i + \varepsilon, s') = \bar{T}'(x' = c'_i - \varepsilon, s') \\ \delta_i \frac{d}{dx'} \bar{T}'(x' = c'_i + \varepsilon, s') = \frac{d}{dx'} \bar{T}'(x' = c'_i - \varepsilon, s') \end{cases} \quad \text{avec} \quad \delta_i = \frac{\lambda_T^i}{\lambda_T^{i+1}} \quad (\text{A2.52})$$

Les $2n-2$ équations de continuité et les deux conditions aux limites permettent de calculer les $2n$ coefficients C_{2i-1}^T et C_{2i}^T ($i = 1, n$). Le problème thermique se résume donc dans le domaine des transformées de Laplace en la résolution d'un système matriciel de la forme $A^T C^T = B^T$, avec les composantes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}^T = e^{-\alpha_1 d^1}; a_{1,2}^T = e^{\alpha_1 d^1}; a_{2n,2n-1}^T = 1 \\ a_{2i,2i-1}^T = e^{-\alpha_i c^i}; a_{2i,2i}^T = e^{\alpha_i c^i}; a_{2i,2i+1}^T = -e^{-\alpha_{i+1} c^i}; a_{2i,2i+2}^T = -e^{\alpha_{i+1} c^i} \\ a_{2i+1,2i-1}^T = -\alpha_i a_{2i,2i-1}^T; a_{2i+1,2i}^T = \alpha_i a_{2i,2i}^T; a_{2i+1,2i+1}^T = -\delta_{i+1} \alpha_{i+1} a_{2i,2i+1}^T \\ a_{2i+1,2i+2}^T = \delta_{i+1} \alpha_{i+1} a_{2i,2i+2}^T \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ b_{2j-2}^T = \frac{2}{4s'(s'+\omega)}; b_{2j}^T = -b_{2j-2}^T \end{array} \right. \quad (A2.53)$$

tous les autres coefficients a_i^T et b_j^T sont nuls.

Pour déterminer la pression, on introduit une nouvelle variable v défini par :

$$v = P + \varphi T \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{3\alpha_o K_o}{b} \frac{\chi - 1}{\xi - 1}, \quad \chi = \frac{\alpha K}{\alpha_o K_o} \frac{3K_o + 4\mu}{3K + 4\mu}, \quad \xi = \frac{D_H}{D_T} \quad (A2.54)$$

et les solutions de l'équation de diffusion dans le domaine des transformées de Laplace sont de la forme :

$$\bar{v}'(x', s') = C_{2i-1}^v(s') e^{-\gamma_i x'} + C_{2i}^v(s') e^{\gamma_i x'} + R_i \bar{T}'(x', s') \quad (A2.55)$$

$$\text{avec} \quad R_i = \frac{\xi_i - \xi}{\beta_i \xi v_i - 1}, \quad v_i = \frac{\lambda_H^i}{\lambda_H}, \quad \gamma_i = \frac{4s'}{\xi v_i}, \quad \xi_i = \frac{D_H^i}{D_T^i} \quad (A2.56)$$

Les conditions de continuités de P et T à l'interface $x' = c'_i$ se traduisent sur v par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}'(x' = c'_i + \varepsilon, s') = \bar{v}'(x' = c'_i - \varepsilon, s') \\ \frac{d}{dx'} \bar{v}'(x' = c'_i + \varepsilon, s') - \left(1 - \frac{\delta_i}{\rho_i}\right) \frac{d}{dx'} \bar{T}'(x' = c'_i - \varepsilon, s') = \frac{1}{\rho_i} \frac{d}{dx'} \bar{v}'(x' = c'_i - \varepsilon, s') \end{array} \right. \quad (A2.57)$$

avec $\rho_i = \frac{\lambda_H^i}{\lambda_H^{i+1}}$

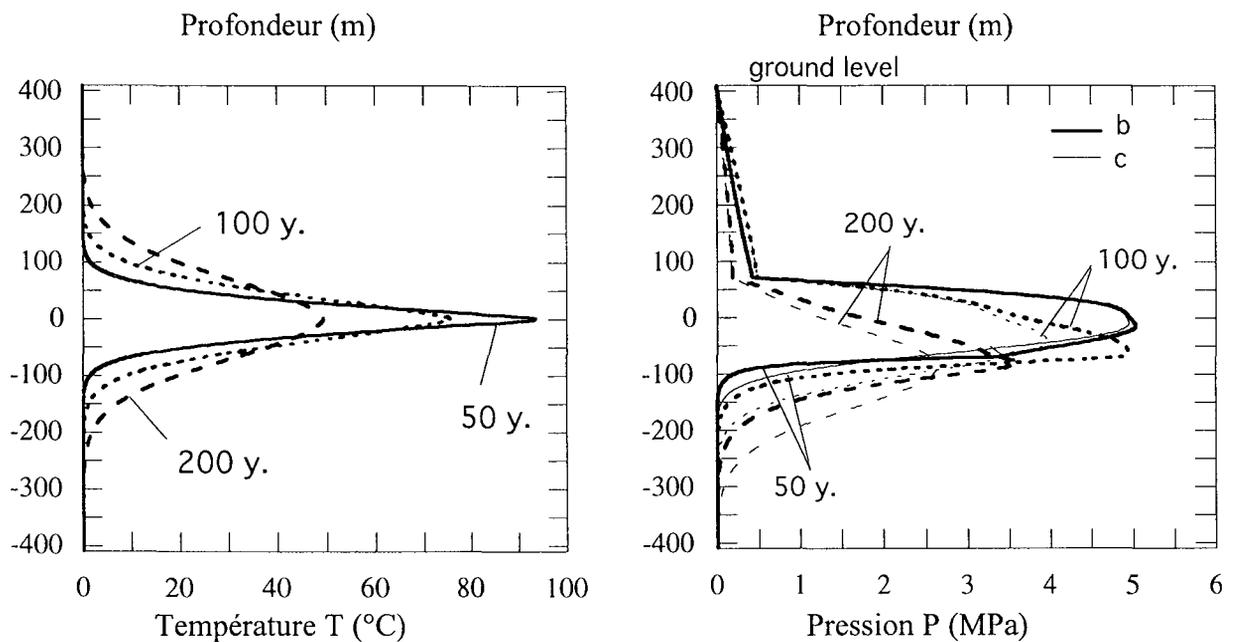
Le problème hydraulique peut donc se mettre sous une forme similaire au problème thermique $A^v C^v = B^v$: on obtient les $a_{i,k}^v$ à partir des $a_{i,k}^T$ en substituant γ_i à α_i et ρ_i à δ_i , et les autres coefficients b_j^v sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{2i}^v = (R_{i+1} - R_i) \bar{T}'(x' = c'_i, s'); b_{2i+1}^v = \left(\frac{1}{\rho_i} R_{i+1} - R_i + 1 - \frac{\delta_i}{\rho_i} \right) \frac{\partial}{\partial} \bar{T}'(x' = c'_i, s') \\ b_{2j-2}^v = \frac{\xi}{2s'(s'+\omega)}; b_{2j}^v = -b_{2j-2}^v \end{array} \right. \quad (A2.58)$$

et finalement, à partir de v et T , on retrouve P par la relation suivante :

$$\bar{P}(x', s') = \phi T_a [\bar{v}(x', s') - \bar{T}(x', s')] \quad (\text{A2.59})$$

Pour les deux problèmes thermique et hydraulique, la résolution du système matriciel a été réalisée par la méthode de la décomposition LU et l'inversion des transformées par la méthode de Stehfest (1970), qui n'a présentée aucune instabilité quelque soit la valeur de x' ou de t' . Les figures A2.13 montrent l'allure des courbes de T et P observées lors de la modélisation d'un site du bassin parisien (voir détail dans Giraud & Thouvenin, 1997).



Figures A2.13. Evolutions radiales de la température et de la pression pour différents temps .

A2.2.6 - Transport d'un polluant par dispersion, convection, adsorption et décroissance radioactive

On se place dans un cas unidimensionnel en étudiant le déplacement d'un polluant dans un milieu semi-infini en tenant compte des phénomènes de convection (1), de dispersion (2), d'échanges entre la phase stationnaire et la phase mobile (3), et de décroissance radioactive des deux phases (4). L'équation régissant le déplacement d'un polluant, en considérant ces différents mécanismes, est de la forme :

$$\phi \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \underbrace{\lambda C}_{4} \right] + (1 - \phi) p_s \left[\underbrace{\frac{\partial C_{\text{fixé}}}{\partial t}}_{3} + \underbrace{\lambda C_{\text{fixé}}}_{4} \right] = \text{div} \left[\underbrace{\overline{D} \cdot \text{grad}(C)}_{2} - \underbrace{CU}_{1} \right] \quad (\text{A2.60})$$

On fait les hypothèses suivantes :

- le polluant est de type traceur avec la vitesse \underline{U} constante et on considère seulement la dispersion longitudinale :

$$D = \alpha|\underline{U}| = \text{cste} \quad (\text{A2.61})$$

et le membre de droite de l'égalité devient donc :

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - U \frac{\partial C}{\partial x} \quad (\text{A2.62})$$

- le partage entre les phases stationnaire et mobile est de type linéaire :

$$C_{\text{fixé}} = K_d C \quad (\text{A2.63})$$

et le membre de gauche de l'égalité devient donc :

$$\phi R \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \lambda C \right] \text{ avec } R = 1 + \frac{1-\phi}{\phi} K_d \quad (\text{appelé facteur de retard}) \quad (\text{A2.64})$$

- conditions aux limites :

$$\begin{cases} C(x=0) = C_0 \\ \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x \rightarrow \infty} = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.65})$$

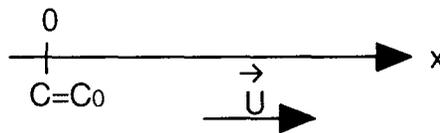


Figure A2.14. Géométrie

On introduit les variables adimensionnelles suivantes :

$$C' = \frac{C}{C_0} \quad x' = \frac{U}{D} x \quad t' = \frac{t}{\tau} \quad \tau = \frac{\phi R D}{U^2} \quad \lambda' = \lambda \tau \quad (\text{A2.66})$$

et le passage dans le domaine des transformées de Laplace conduit à l'équation :

$$\frac{d^2 \bar{C}'}{dt'^2} - \frac{d \bar{C}'}{dt'} - (\lambda' + s') \bar{C}' = 0 \quad (\text{A2.67})$$

dont les solutions générales sont de la forme :

$$\bar{C}'(x', s') = Ae^{\mu^- x'} + Be^{\mu^+ x'} \quad (\text{A2.68})$$

avec μ^\pm solutions de l'équation : $\mu^2 - \mu - (\lambda' + s') = 0$

$$\mu^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4(\lambda' + s')} \quad (\text{A2.69})$$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions aux limites :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x \rightarrow \infty} = 0 \Rightarrow B = 0 \\ C'(x'=0) = 1 \Rightarrow \bar{C}'(x'=0) = \frac{1}{s'} \Rightarrow A = \frac{1}{s'} \end{cases} \quad (\text{A2.70})$$

et on peut alors en déduire les solutions particulières du problème exprimées dans le domaine des transformées de Laplace :

$$\bar{C}'(x', s') = \frac{1}{s'} \exp \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4(\lambda' + s')} \right] \quad (\text{A2.71})$$

Pour l'inversion par la méthode de Piessens et al. (1983), on doit séparer parties imaginaire et réelle :

$$\bar{C}'(x', a + ib) = \frac{1}{a + ib} \exp \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4(\lambda' + a + ib)} \right] \quad (\text{A2.72})$$

$$= \frac{\exp[(0,5 - \alpha)x]}{a^2 + b^2} [a \cos(x'\beta) - b \sin(x'\beta) + i(-a \sin(x'\beta) - b \cos(x'\beta))] \quad (\text{A2.73})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{\lambda' + 0,25 + a + \sqrt{(\lambda' + 0,25 + a)^2 + b^2}}}{2} \\ \beta = \frac{b}{\sqrt{2(\lambda' + 0,25 + a + \sqrt{(\lambda' + 0,25 + a)^2 + b^2})}} \end{cases}$$

Pour apprécier la précision de la méthode d'inversion, il est intéressant de comparer les résultats numériques avec ceux qui sont donnés par la solution exacte (de Marsily, 1981) :

$$\begin{aligned} C'(x', t') &= \frac{1}{2} \exp \left(\frac{x'}{2} \right) \left[\exp(-x' \sqrt{\lambda' + 0,25}) \operatorname{erfc} \left(\frac{x' - t' \sqrt{1 + 4\lambda'}}{2\sqrt{t'}} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \exp \left(\frac{x'}{2} \right) \left[\exp(x' \sqrt{\lambda' + 0,25}) \operatorname{erfc} \left(\frac{x' + t' \sqrt{1 + 4\lambda'}}{2\sqrt{t'}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.74})$$

Les paramètres utilisés pour la méthode d'inversion sont : $a = b = 0$ et $c_1 = c_2 = 2$. Sur la figure A2.15, on a représenté les résultats numériques (confondus avec la solution exacte) de C' en fonction de x' pour différents t' ($\lambda' = 1$) et sur la figure A2.16, t' est fixé à 1 et on fait varier λ' .

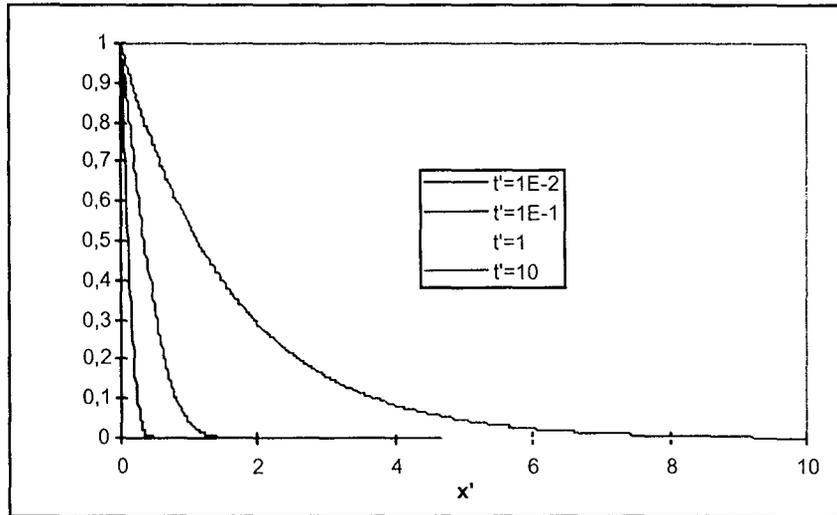


Figure A2.15. Evolution radiale de la concentration pour différents temps.

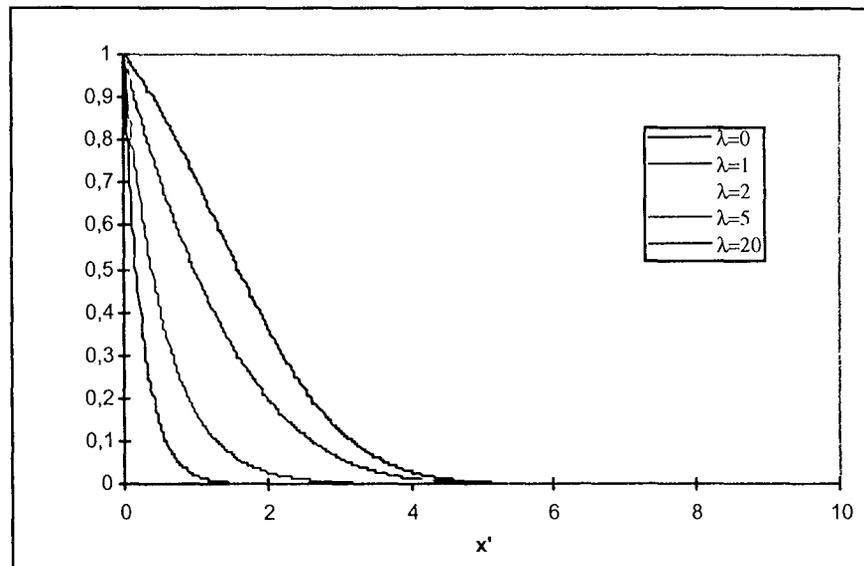


Figure A2.16. Influence de λ sur l'évolution radiale de la concentration.

A2.3 - Diffusion de chaleur 2D en régime permanent

On considère un milieu dont la géométrie et les conditions aux limites sont définies sur la figure A2.20.

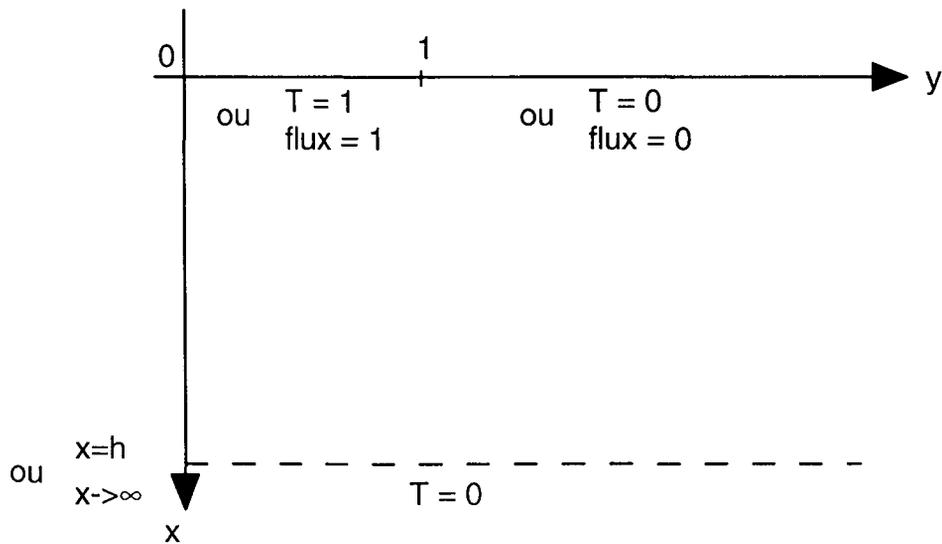


Figure A2.20. Géométrie.

L'équation générale régissant un problème de diffusion de chaleur en géométrie cartésienne bidimensionnelle est de la forme :

$$\underbrace{\frac{1}{D_T} \frac{\partial}{\partial t} T(x, y, t)}_{=0 \text{ (RP)}} = \underbrace{\nabla T(x, y, t)}_{\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T(x, y)} \quad (\text{A2.75})$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T(x, y) = 0 \quad (\text{A2.76})$$

On utilise la transformée de Fourier (cosinus) pour faire disparaître la variable y de l'harmonique:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, y) \cos(\omega y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} T(x, y) \cos(\omega y) dy = 0 \quad (\text{A2.77})$$

$$\text{d'où } \frac{d^2}{dx^2} \theta(x, \omega) - \omega^2 \theta(x, \omega) = 0 \quad (\text{A2.78})$$

Les solutions générales de cette équation sont de la forme :

$$\theta(x, \omega) = A \exp(-\omega x) + B \exp(\omega x) \quad (\text{A2.79})$$

Les constantes A et B sont déterminées d'après les conditions aux limites particulières du problème, et on va distinguer quatre cas différents :

1er cas : CL portant sur la température en 0 et h

$$T(x = h, y) = 0 \Rightarrow A \exp(-\omega h) + B \exp(\omega h) = 0$$

$$\begin{cases} T(x = 0, y < 1) = 1 \\ T(x = 0, y > 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta(x, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos(\omega y) dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

$$\text{d'où } A + B = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

$$\text{donc } \begin{cases} A \exp(-\omega h) + B \exp(\omega h) = 0 \\ A + B = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(\omega h) \sin(\omega)}{\omega [\exp(\omega h) - \exp(-\omega h)]} \\ B = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(-\omega h) \sin(\omega)}{\omega [\exp(\omega h) - \exp(-\omega h)]} \end{cases}$$

$$\text{donc } \theta(x, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega} \frac{\exp[\omega(h-x)] - \exp[-\omega(h-x)]}{\exp(\omega h) - \exp(-\omega h)} \quad (\text{A2.80})$$

La figure A2.21 montre la répartition des températures en fonction de x' et y' .

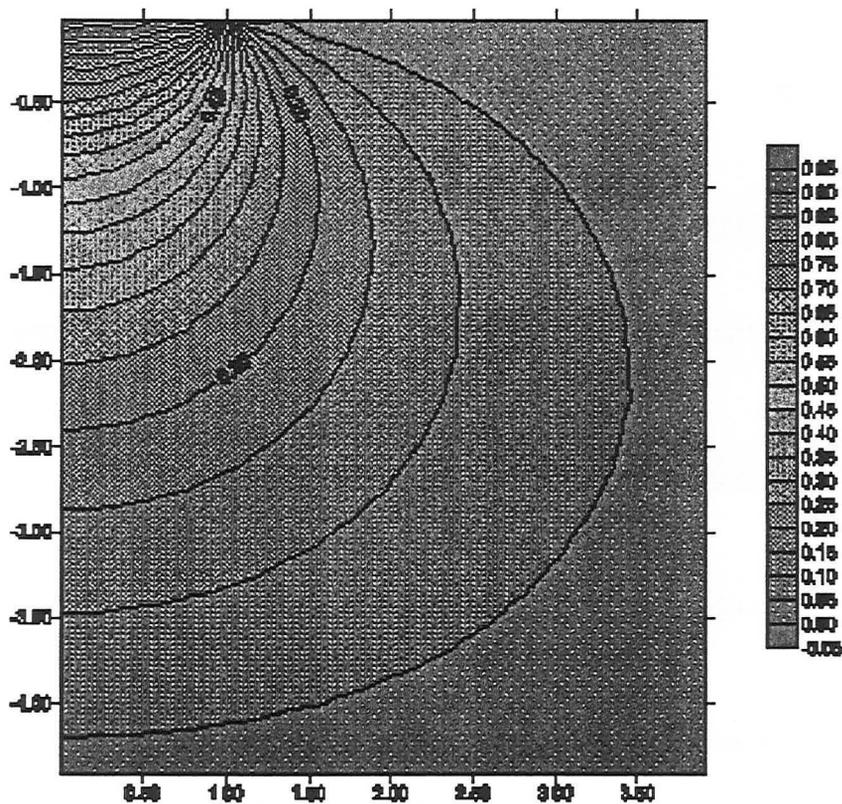


Figure A2.21. Evolution spatiale de la température pour le cas 1.

2ème cas : CL portant sur la température en 0 et ∞

$$T(x \rightarrow \infty, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\begin{cases} T(x = 0, y < 1) = 1 \\ T(x = 0, y > 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

$$\text{donc } \theta(x, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega} \exp(-\omega x) \quad (\text{A2.81})$$

Dans ce cas, il est possible de déterminer la solution analytique de $T(x, y)$, ce qui va permettre de comparer les résultats ainsi obtenus avec la solution par calcul numérique de l'intégrale.

$$T(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \exp(-\omega x) d\omega$$

$$\text{or } \sin \omega \cos(\omega y) = \frac{1}{2} [\sin((1+y)\omega) + \sin((1-y)\omega)]$$

$$\text{donc } T(x, y) = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin((1+y)\omega)}{\omega} \exp(-\omega x) d\omega}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin((1-y)\omega)}{\omega} \exp(-\omega x) d\omega}_{I_2} \quad (\text{A2.82})$$

$$\text{On fait le changement de variable suivant : } v = (1+y)\omega \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{x}{1+y} \quad (\text{A2.83})$$

$$\text{et l'intégrale } I_1 \text{ s'écrit alors : } I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v} \exp(-\alpha v) dv \quad (\text{A2.84})$$

On reconnaît la transformée de Laplace au point α de la fonction $\frac{\sin(t)}{t}$, qui est égale à

$$\text{Arc tan}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Par conséquent, en procédant de façon analogue pour I_2 , on montre que :

$$T(x, y) = \frac{1}{\pi} \left[\text{Arc tan}\left(\frac{1+y}{x}\right) + \text{Arc tan}\left(\frac{1-y}{x}\right) \right] \quad (\text{A2.85})$$

La figure A2.22 montre l'évolution de la température en fonction de x et y .

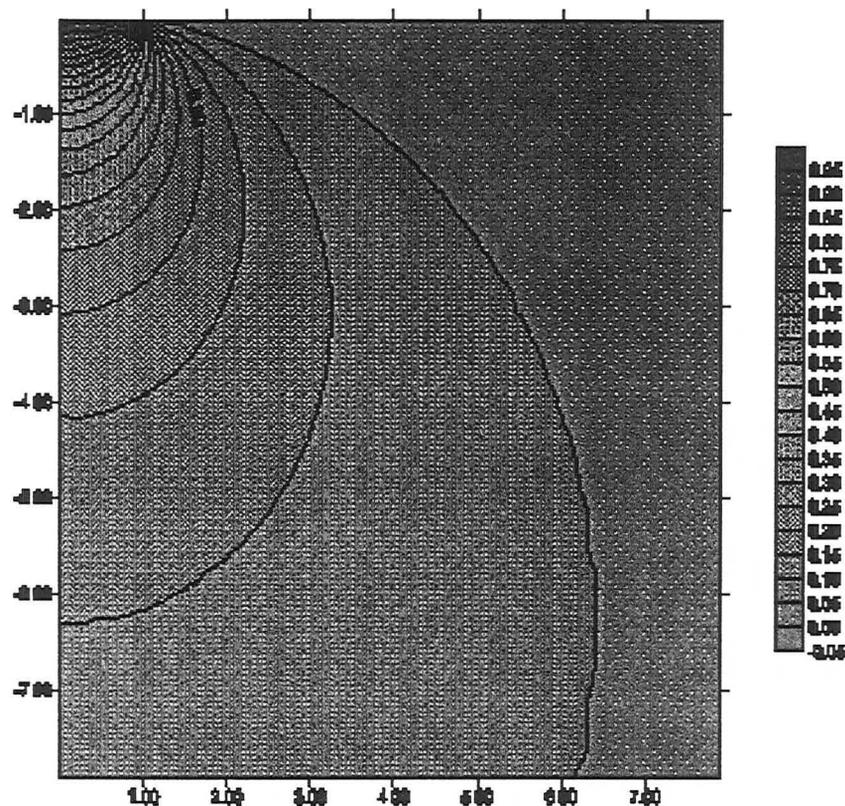


Figure A2.22. Evolution spatiale de la température pour le cas 2.

A2.4 - Diffusion de chaleur 2D en régime transitoire

A2.4.1. - Diffusion de chaleur en géométrie cartésienne

On reprend le problème de diffusion étudié au paragraphe précédent mais cette fois-ci, on le traite en régime transitoire. Il faudra alors vérifier que la répartition des températures que l'on va calculer va bien tendre pour des temps grands vers celle obtenue en régime permanent.

L'équation générale régissant un problème de diffusion de chaleur en régime transitoire et en géométrie cartésienne bidimensionnelle est de la forme :

$$\frac{1}{D_T} \frac{\partial}{\partial t} T(x, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T(x, y) \quad (\text{A2.86})$$

Mise sous forme adimensionnelle :

$$y' = \frac{y}{a} \quad x' = \frac{x}{a} \quad \tau = \frac{a^2}{D_T} \quad t' = \frac{t}{\tau} \quad p' = p\tau \quad T' = \frac{T}{T_0} \quad (\text{A2.87})$$

et le passage dans le domaine des transformées de Laplace conduit à l'équation suivante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{T}(x', y', p') + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{T}(x', y', p') - p' \bar{T}(x', y', p') = 0 \quad (\text{A2.88})$$

On utilise la transformée de Fourier (cosinus) pour faire disparaître la variable y de l'harmonique:

$$\frac{d^2}{dx^2} \bar{\theta}(x', \omega', p') - (\omega'^2 + p') \bar{\theta}(x', \omega', p') = 0 \quad (\text{A2.89})$$

Les solutions générales de cette équation sont de la forme :

$$\bar{\theta}(x', \omega', p') = A \exp(-q' x') + B \exp(q' x') \quad \text{avec} \quad q' = \sqrt{p' + \omega'^2} \quad (\text{A2.90})$$

Les constantes A et B sont déterminées d'après les conditions aux limites particulières du problème :

$$T(x \rightarrow \infty, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\begin{cases} T(x = 0, y < 1) = 1 \\ T(x = 0, y > 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{T}(x' = 0, y' < 1) = \frac{1}{p'} \\ \bar{T}(x' = 0, y' > 1) = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega')}{p' \omega'} \quad (\text{A2.91})$$

$$\text{donc} \quad \bar{\theta}(x', \omega', p') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega')}{p' \omega'} \exp(-q' x') \quad (\text{A2.92})$$

L'inversion de la transformée de Fourier cosinus donne :

$$\bar{T}(x', y', p') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega')}{p' \omega'} \exp(-q' x') \cos(\omega' y') d\omega' \quad (\text{A2.93})$$

Pour l'inversion de la transformée de Laplace par la méthode de Piessens et al. (1983), il faut séparer parties réelle et imaginaire de la fonction trouvée ci-dessus :

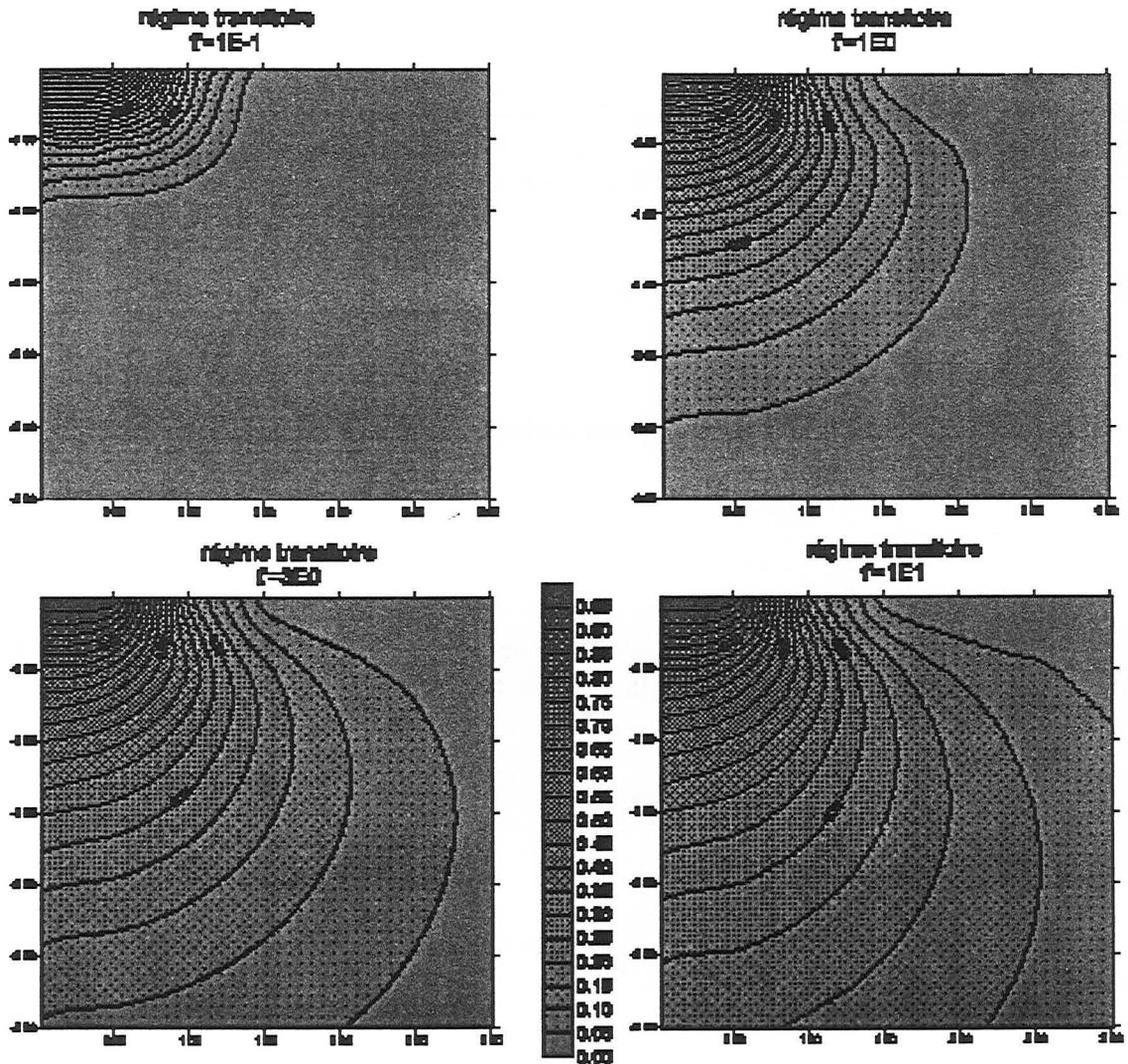
$$\begin{aligned} \bar{T}(x', y', a + ib) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega')}{(a + ib)\omega'} \exp\left(-x' \sqrt{\omega'^2 + a + ib}\right) \cos(\omega' y') d\omega' \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(a - ib)\sin(\omega')}{(a^2 + b^2)\omega'} \exp[-x'(\alpha + i\beta)] \cos(\omega' y') d\omega' \end{aligned} \quad (\text{A2.94})$$

avec
$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega'^2 + a + \sqrt{(\omega'^2 + a)^2 + b^2}}{2}}, \beta = \frac{b}{\sqrt{2(\omega'^2 + a + \sqrt{(\omega'^2 + a)^2 + b^2})}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega') \cos(\omega' y') \exp(-x' \alpha)}{(a^2 + b^2) \omega'} [a \cos(x\beta) - b \sin(x\beta)] d\omega'$$

$$+ i \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega') \cos(\omega' y') \exp(-x' \alpha)}{(a^2 + b^2) \omega'} [-b \cos(x\beta) - a \sin(x\beta)] d\omega' \quad (A2.95)$$

Les paramètres utilisés pour la méthode d'inversion sont : $a = b = 0, c_1 = c_2 = 2$. Pour visualiser les résultats de cette double inversion (Laplace et Fourier), les figures 23 représentent des cartes de température $T'(x', y')$ pour différents temps t' (1E-1, 1E0, 3E0, 1E1). On constate que la répartition des températures tend progressivement avec le temps vers celle qui avait été obtenue dans le cas du régime permanent.



Figures A2.23. Evolutions spatiales de la température pour différents temps.

A2.4.2 - Transport d'un polluant par dispersion-convection (Leij & Dane, 1990)

On considère le transport d'un polluant dans un milieu homogène et isotrope lors d'un écoulement régi par un phénomène de convection unidimensionnel associé à un phénomène de dispersion bidimensionnel (dispersions longitudinale D_L et transversale D_T), dont la géométrie et les conditions aux limites sont représentées sur la figure A2.24.

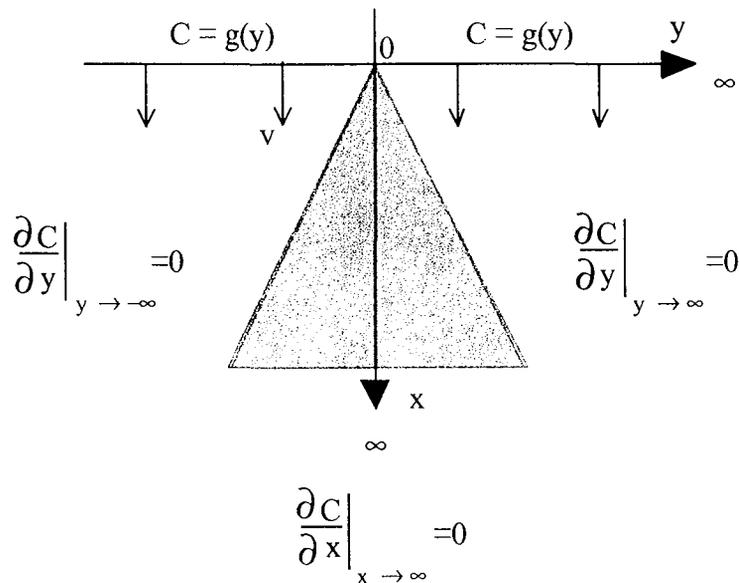


Figure A2.24. Géométrie.

L'équation correspondante est donnée par :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} + D_T \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (\text{A2.96})$$

On applique une double transformation Laplace-Fourier :

$$C(x, y, t) \leftrightarrow \bar{C}(x, y, s) \leftrightarrow \bar{C}_f(x, \xi, s) \quad (\text{A2.97})$$

ce qui conduit à la nouvelle équation

$$D_L \frac{d^2 \bar{C}_f}{dx^2} - v \frac{d \bar{C}_f}{dx} - (s + \xi^2) \bar{C}_f = 0 \quad (\text{A2.98})$$

Les solutions générales sont de la forme :

$$\bar{C}_f(x, \xi, s) = A \exp(\mu^- x) + B \exp(\mu^+ x) \quad (\text{A2.99})$$

avec μ^\pm solutions de l'équation : $D_L \mu^2 - v \mu - (s + \xi^2) = 0$

$$\mu^{\pm} = \frac{v}{2D_L} \pm \sqrt{\left(\frac{v}{2D_L}\right)^2 + \frac{D_T \xi^2}{D_L} + \frac{s}{D_L}} \quad (\text{A2.100})$$

La condition aux limites quand $x \rightarrow \infty$ impose $B = 0$ et en considérant la condition aux limites en $x = 0$, on trouve :

$$A = \frac{g_h}{s}$$

donc les solutions du problème dans le domaine Laplace-Fourier sont :

$$\bar{C}_f(x, \xi, s) = g_h \exp\left(\frac{vx}{2D_L}\right) \frac{1}{h(s)} \underbrace{\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{D_L}} \sqrt{\frac{v^2}{4D_L} + D_T \xi^2 + s}\right)}_{\bar{k}(s)} \quad (\text{A2.101})$$

$$\text{On sait que : } \begin{cases} h(t) = 1 \\ k(t) = \frac{\xi}{\tau \sqrt{4\pi D_L t}} \exp\left[-\left(\frac{v^2}{4D_L} + D_T \xi^2\right)t - \frac{\xi^2}{4D_L t}\right] \end{cases} \quad (\text{A2.102})$$

or, d'après le théorème de convolution,

$$L^{-1}(\bar{h}(s)\bar{k}(s)) = h * k = \int_0^t h(\tau)k(t-\tau)d\tau = \int_0^t k(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (\text{A2.103})$$

$$\text{donc } C_f(x, \xi, t) = \frac{g_h x}{\sqrt{4\pi D_L}} \int_0^t \tau^{-3/2} \exp(-D_T \xi^2 \tau) \exp\left[-\frac{(x-v\tau)^2}{4D_L t}\right] d\tau \quad (\text{A2.104})$$

ce qui conduit à l'expression de la solution du problème :

$$C(x, y, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi D_L}} \int_0^t \tau^{-3/2} \exp\left[-\frac{(x-v\tau)^2}{4D_L t}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g_h(\xi)}_{h_f(\xi)} \underbrace{\exp(-D_T \xi^2 \tau)}_{k_f(\xi)} \exp(-i\xi y) d\xi d\tau \quad (\text{A2.105})$$

On applique à nouveau le théorème de convolution défini dans le domaine des transformées de Fourier par :

$$F^{-1}(h_f(\xi)k_f(\xi)) = h * k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(y-\eta)k(\eta)d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(y-\eta)h(\eta)d\eta \quad (\text{A2.106})$$

sachant que

$$\begin{cases} h(y) = g(y) \\ k(y) = \frac{1}{\sqrt{2D_T\tau}} \exp\left(-\frac{y^2}{4D_T\tau}\right) \end{cases} \quad (\text{A2.107})$$

Ainsi, on montre que la solution du problème peut se mettre sous la forme :

$$C(x, y, t) = \frac{x}{4\pi\sqrt{D_T D_L}} \int_0^t \tau^{-2} \exp\left[-\frac{(x - v\tau)^2}{4D_L\tau}\right] \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \exp\left[-\frac{(y - \eta)^2}{4D_T\tau}\right] d\eta d\tau \quad (\text{A2.108})$$

Grâce aux produits de convolution utilisés dans le domaine des transformées de Laplace et dans celui des transformées de Fourier, on dispose d'une solution exacte et d'une solution semi-explicite.

On a étudié deux cas particuliers se distinguant par l'expression de la fonction g :

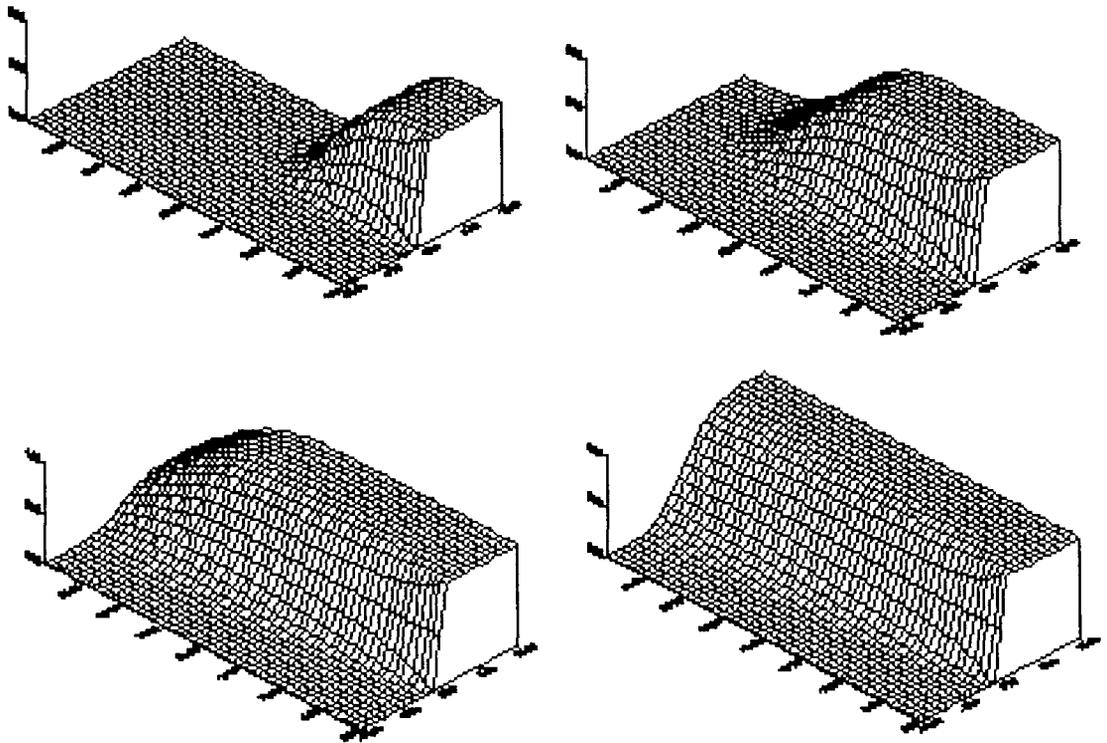
$$\text{- cas 1 : } \begin{cases} g(y < 0) = C_0 \\ g(y > 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.109})$$

$$\text{- cas 2 : } \begin{cases} g(|y| < 1) = C_0 \\ g(|y| > 1) = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.110})$$

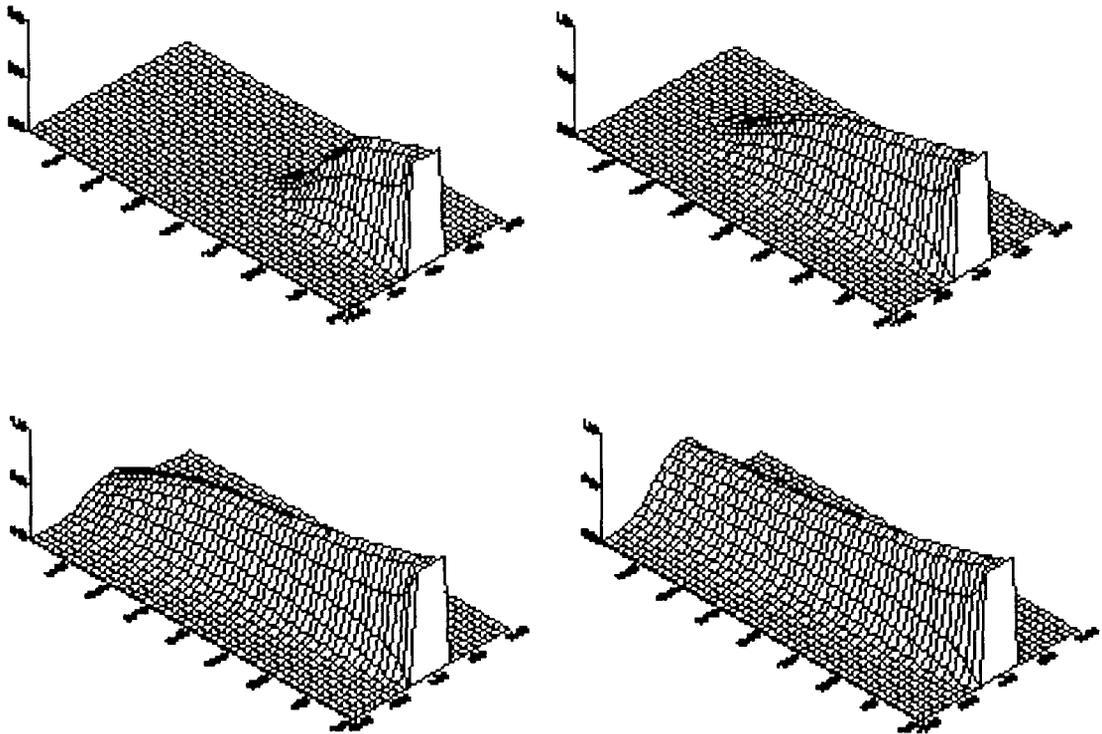
et on a représenté l'évolution de $C' = C/C_0$ en fonction de x et y pour différents temps t (figures A2.25 et A2.26) avec les deux solutions exacte et semi-explicite.

Les paramètres arbitraires utilisés sont : $D_L = 25 \text{ cm}^2/\text{s}$, $D_T = 5 \text{ cm}^2/\text{s}$ et $v = 50 \text{ cm/s}$. La précision du calcul numérique a pu être testée en comparant les résultats obtenus par Gauss-Legendre avec la solution exacte donnée par Leij et Dane (1990) dans le cas 1 lorsque l'on atteint le régime permanent :

$$C(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(y \sqrt{\frac{v}{4xD_T}}\right) \quad (\text{A2.111})$$



Figures A2.25. Evolutions spatiales de la concentration pour différents temps (cas 1).



Figures A2.26. Evolutions spatiales de la concentration pour différents temps (cas 2).

Annexe

3

Réponse instantanée et régime asymptotique

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry, no matter how small, should be recorded to ensure the integrity of the financial statements. This includes not only sales and purchases but also expenses, income, and any other financial activity.

The second part of the document provides a detailed breakdown of the accounting process. It starts with the identification of the accounting cycle, which consists of eight steps: identifying the accounting cycle, analyzing and journalizing the transactions, posting to the ledger, preparing a trial balance, adjusting the accounts, preparing financial statements, and closing the books. Each step is explained in detail, with examples and practical advice.

The third part of the document focuses on the preparation of financial statements. It covers the balance sheet, the income statement, and the statement of cash flows. It explains how these statements are derived from the accounting records and how they provide a comprehensive view of the company's financial health.

The fourth part of the document discusses the importance of internal controls. It outlines various control procedures, such as segregation of duties, authorization, and regular audits, to prevent errors and fraud. It also emphasizes the need for a strong internal control system to ensure the reliability of the financial information.

The fifth part of the document covers the final steps of the accounting process, including the closing of the books and the preparation of the final financial statements. It provides a checklist of tasks to ensure that all necessary steps are completed and that the financial records are up-to-date and accurate.

A3.1 – Réponse hydrique instantanée

A3.1.1 - Milieu poreux saturé

Au moment de l'application de la contrainte ϖ , le milieu subit une modification instantanée de son état qui est attribuable à un comportement de type élastique non drainé. En milieu poreux saturé, l'état instantané est caractérisé par une variation de masse fluide nulle ($m^{0+} = 0$) et un comportement adiabatique ($S^{0+} - S^0 = 0$). Par conséquent, la loi de comportement permet d'exprimer les variations de température et de pression interstitielle entre les états instantané et initial :

$$P_{o+} = P_o - \frac{M(bC + 9\alpha_o K_o T_o \alpha_m)}{C - 9\alpha_m^2 M T_o} \varepsilon^{o+} \quad (\text{A3.1})$$

$$T_{o+} = T_o - \frac{3T_o(bM\alpha_m + \alpha_o K_o)}{C - 9\alpha_m^2 M T_o} \varepsilon^{o+} \quad (\text{A3.2})$$

En général, les variations instantanées de température sont très faibles, voire négligeables pour les problèmes que l'on a étudiés.

A3.1.2 – Milieu poreux partiellement saturé

La réponse instantanée est comparable à celle du milieu saturé mais la condition de variation de masse nulle s'applique désormais à l'eau (sous forme liquide et vapeur) et à l'air sec :

$$\begin{cases} m_{lq}^{o+} + m_{vp}^{o+} = 0 \\ m_{as}^{o+} = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} m_{vp}^{o+} = -m_{lq}^{o+} \\ m_{as}^{o+} = 0 \end{cases} \quad (\text{A3.3})$$

En considérant des évolutions isothermes (puisque les variations instantanées de température sont très faibles), la loi de comportement permet d'écrire les trois relations suivantes à l'instant 0+ :

$$\begin{aligned} p_{lq}^{o+} &= p_{lq}^o + M_{lqlq} \left(-b_{lq} \varepsilon^{o+} + \frac{m_{lq}^{o+}}{\rho_{lq}^o} \right) + M_{lqvp} \left(-b_{vp} \varepsilon^{o+} + \frac{m_{vp}^{o+}}{\rho_{vp}^o} \right) + M_{lqas} \left(-b_{as} \varepsilon^{o+} + \frac{m_{as}^{o+}}{\rho_{as}^o} \right) \\ p_{vp}^{o+} &= p_{vp}^o + M_{vplq} \left(-b_{lq} \varepsilon^{o+} + \frac{m_{lq}^{o+}}{\rho_{lq}^o} \right) + M_{vppv} \left(-b_{vp} \varepsilon^{o+} + \frac{m_{vp}^{o+}}{\rho_{vp}^o} \right) + M_{vpas} \left(-b_{as} \varepsilon^{o+} + \frac{m_{as}^{o+}}{\rho_{as}^o} \right) \\ p_{as}^{o+} &= p_{as}^o + M_{aslq} \left(-b_{lq} \varepsilon^{o+} + \frac{m_{lq}^{o+}}{\rho_{lq}^o} \right) + M_{asvp} \left(-b_{vp} \varepsilon^{o+} + \frac{m_{vp}^{o+}}{\rho_{vp}^o} \right) + M_{asas} \left(-b_{as} \varepsilon^{o+} + \frac{m_{as}^{o+}}{\rho_{as}^o} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.4})$$

Par conséquent, en combinant ces équations avec les relations précédentes et en remplaçant les coefficients M_{ij} par leurs expressions en fonction des données initiales, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{lq}^{o+} = p_{lq}^o + \frac{\rho_{vp}^o p_{gz}^o - \rho_{lq}^o p_{vp}^o - \rho_{vp}^o p_{cp}^o (1 - S_{lq}^o)}{(1 - S_{lq}^o) \rho_{lq}^o \rho_{vp}^o \phi_o} m_{lq}^{o+} + \frac{p_{cp}^o (1 - S_{lq}^o) S_{lq}^o - p_{gz}^o}{(1 - S_{lq}^o) \phi_o} \varepsilon^{o+} \\ p_{vp}^{o+} = p_{vp}^o + \frac{(\rho_{vp}^o - \rho_{lq}^o) p_{vp}^o}{(1 - S_{lq}^o) \rho_{lq}^o \rho_{vp}^o \phi_o} m_{lq}^{o+} - \frac{p_{vp}^o}{(1 - S_{lq}^o) \phi_o} \varepsilon^{o+} \\ p_{as}^{o+} = p_{as}^o + \frac{p_{as}^o}{(1 - S_{lq}^o) \rho_{lq}^o \phi_o} m_{lq}^{o+} - \frac{p_{as}^o}{(1 - S_{lq}^o) \phi_o} \varepsilon^{o+} \end{array} \right. \quad (A3.5)$$

La loi de Kelvin permet d'établir une relation entre les pressions partielles de liquide et de vapeur, ce qui permet alors de déduire l'expression de l'apport de masse liquide et des différentes pressions partielles en fonction d'une seule inconnue, la déformation instantanée :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{lq}^{o+} = \frac{\rho_{vp}^o \rho_{lq}^o [M_{vp} p_{cp}^o S_{lq}^o (1 - S_{lq}^o) - M_{vp} p_{gz}^o + \rho_{lq}^o RT]}{\rho_{lq}^o M_{vp} p_{vp}^o + RT \rho_{lq}^o (\rho_{vp}^o - \rho_{lq}^o) + \rho_{vp}^o M_{vp} [p_{cp}^o (1 - S_{lq}^o) - p_{gz}^o]} \varepsilon^{o+} \\ p_{lq}^{o+} = p_{lq}^o + \frac{\rho_{lq}^o RT [\rho_{vp}^o + S_{lq}^o (\rho_{lq}^o - \rho_{vp}^o)] p_{as}^o (1 - S_{lq}^o) (\rho_{lq}^o - \rho_{vp}^o) + p_{as}^o - p_{cp}^o (1 - S_{lq}^o)}{\phi_o (1 - S_{lq}^o) \rho_{lq}^o M_{vp} p_{vp}^o + RT \rho_{lq}^o (\rho_{vp}^o - \rho_{lq}^o) + \rho_{vp}^o M_{vp} [p_{cp}^o (1 - S_{lq}^o) - p_{gz}^o]} \varepsilon^{o+} \\ p_{vp}^{o+} = p_{vp}^o + \frac{M_{vp} p_{vp}^o [\rho_{vp}^o + S_{lq}^o (\rho_{lq}^o - \rho_{vp}^o)] p_{as}^o (1 - S_{lq}^o) (\rho_{lq}^o - \rho_{vp}^o) + p_{as}^o - p_{cp}^o (1 - S_{lq}^o)}{\phi_o (1 - S_{lq}^o) \rho_{lq}^o M_{vp} p_{vp}^o + RT \rho_{lq}^o (\rho_{vp}^o - \rho_{lq}^o) + \rho_{vp}^o M_{vp} [p_{cp}^o (1 - S_{lq}^o) - p_{gz}^o]} \varepsilon^{o+} \\ p_{as}^{o+} = p_{as}^o + \frac{p_{as}^o [-\rho_{lq}^o M_{vp} p_{vp}^o + RT \rho_{lq}^o{}^2 - \rho_{vp}^o M_{vp} p_{cp}^o (1 - S_{lq}^o)]}{\phi_o (1 - S_{lq}^o) \rho_{lq}^o M_{vp} p_{vp}^o + RT \rho_{lq}^o (\rho_{vp}^o - \rho_{lq}^o) + \rho_{vp}^o M_{vp} [p_{cp}^o (1 - S_{lq}^o) - p_{gz}^o]} \varepsilon^{o+} \end{array} \right. \quad (A3.6)$$

A3.2 – Réponse mécanique instantanée

A3.2.1 – Les paramètres élastiques non drainés

En milieu saturé, les paramètres intervenant dans cette loi de comportement instantanée non drainé sont les paramètres λ (ou K) et μ alors que ce n'est pas le cas en milieu partiellement saturé. En effet, la loi de comportement donne :

$$\sigma - \sigma_o = \left(K - \frac{2\mu}{3} \right) \varepsilon I + 2G\varepsilon - \underbrace{b_i M_{ij}}_X \frac{m_j}{\rho_j^o} \quad (A3.7)$$

En milieu saturé, il n'y a qu'un seul apport de masse fluide qui est nul à l'état instantané. Mais en milieu partiellement saturé, chaque apport de masse fluide (liquide, vapeur et air sec) n'est pas nul instantanément, puisque l'on a vu précédemment que l'apport de masse d'air sec est effectivement nul mais c'est l'apport de masse d'eau totale qui est nulle, et non pas de l'eau sous sa forme liquide d'une part et de l'eau sous sa forme vapeur d'autre part. Par conséquent, le terme noté X ne s'annule pas en 0^+ :

$$X^{0^+} = \frac{\rho_{lq}^o p_{vp}^o - \rho_{vp}^o [p_{gz}^o - S_{lq}^o p_{cp}^o (1 - S_{lq}^o)]}{\rho_{lq}^o \rho_{vp}^o \phi_{gz}^o} m_{lq}^{o+} \quad (A3.8)$$

et en substituant l'expression de l'apport de masse liquide en fonction de la déformation en 0^+ , on obtient :

$$X^{0^+} = \frac{[M_{vp} (p_{gz}^o - p_{cp}^o S_{lq}^o (1 - S_{lq}^o)) - RT \rho_{lq}^o [- \rho_{lq}^o p_{vp}^o + \rho_{vp}^o (p_{gz}^o - p_{cp}^o S_{lq}^o (1 - S_{lq}^o))]]}{[M_{vp} \rho_{vp}^o \rho_{lq}^o - RT \rho_{lq}^o (\rho_{lq}^o - \rho_{vp}^o) - \rho_{vp}^o M_{vp} (p_{gz}^o - p_{cp}^o (1 - S_{lq}^o))]} \phi_{gz}^o \quad (A3.9)$$

On peut donc réécrire la loi de comportement mécanique instantanée reliant uniquement contrainte et déformation :

$$\sigma - \sigma_o = \left(K' - \frac{2\mu}{3} \right) \epsilon I + 2\mu \epsilon \quad (A3.10)$$

$$\text{avec } K' = K + \frac{[M_{vp} (p_{gz}^o - p_{cp}^o S_{lq}^o (1 - S_{lq}^o)) - RT \rho_{lq}^o [- \rho_{lq}^o p_{vp}^o + \rho_{vp}^o (p_{gz}^o - p_{cp}^o S_{lq}^o (1 - S_{lq}^o))]]}{[M_{vp} \rho_{vp}^o \rho_{lq}^o - RT \rho_{lq}^o (\rho_{lq}^o - \rho_{vp}^o) - \rho_{vp}^o M_{vp} (p_{gz}^o - p_{cp}^o (1 - S_{lq}^o))]} \phi_{gz}^o$$

On peut relier le module K au module non drainé K_0 par la relation suivante :

$$K = K_o + b_i b_j M_{ij} \quad \text{ou} \quad K = K_o + \frac{p_{gz}^o}{\phi_{gz}^o} - \frac{p_{cp}^o S_{lq}^o{}^2}{\phi_o} \quad (A3.11)$$

A3.2.2 - Evolution instantanée des variables mécaniques

On connaît la forme générale des variables mécaniques pour un matériau (i) dans les trois géométries lorsque le milieu se comporte de façon élastique non drainé (tableau A3.1). Pour obtenir ce tableau, on part du principe que comme le déplacement est irrotationnel, le champ déplacement dérive d'un potentiel de déformation de Lamé défini de la façon suivante :

$$\Delta \chi = C = \text{cste} \quad (A3.12)$$

Du fait de l'expression du Laplacien dans les différentes géométries, et puisque l'on s'intéresse à des problèmes 1D, on en déduit la forme générale du potentiel :

$$\chi = \begin{cases} Cx^2 + Dx \\ Cr^2 + D \log(r) \\ \frac{C}{r} + Dr^2 \end{cases} \quad (\text{A3.13})$$

et les variables mécaniques s'expriment directement en fonction de ce potentiel.

Tableau A3.1. Comportement mécanique instantané.

Géométrie	Cartésienne	Cylindrique	Sphérique
Déplacement radial $u_x^{(i)}$ ou $u_r^{(i)}$	$\alpha_{ca}^{(i)}x + \beta_{ca}^{(i)}$	$\alpha_{cy}^{(i)}r + \frac{\beta_{cy}^{(i)}}{r}$	$\alpha_{sp}^{(i)}r + \frac{\beta_{sp}^{(i)}}{r^2}$
contrainte radiale $\sigma_{xx}^{(i)}$ ou $\sigma_{rr}^{(i)}$	$(\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)})\alpha_{ca}^{(i)}$	$2(\lambda^{(i)} + \mu^{(i)})\alpha_{cy}^{(i)} - 2\mu^{(i)}\frac{\beta_{cy}^{(i)}}{r^2}$	$(3\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)})\alpha_{sp}^{(i)} - 4\mu^{(i)}\frac{\beta_{sp}^{(i)}}{r^3}$
contrainte tangentielle $\sigma_{yy}^{(i)}$ ou $\sigma_{\theta\theta}^{(i)}$	$\lambda^{(i)}\alpha_{ca}^{(i)}$	$2(\lambda^{(i)} + \mu^{(i)})\alpha_{cy}^{(i)} + 2\mu^{(i)}\frac{\beta_{cy}^{(i)}}{r^2}$	$(3\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)})\alpha_{sp}^{(i)} + 2\mu^{(i)}\frac{\beta_{sp}^{(i)}}{r^3}$
contrainte axiale $\sigma_{zz}^{(i)}$ ou $\sigma_{\phi\phi}^{(i)}$	$\lambda^{(i)}\alpha_{ca}^{(i)}$	$2\lambda^{(i)}\alpha_{cy}^{(i)}$	$(3\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)})\alpha_{sp}^{(i)} + 2\mu^{(i)}\frac{\beta_{sp}^{(i)}}{r^3}$
Déformation Volumique $\varepsilon^{(i)}$	$\alpha_{ca}^{(i)}$	$2\alpha_{cy}^{(i)}$	$3\alpha_{sp}^{(i)}$

Les valeurs des coefficients α et β sont déterminées à partir des conditions aux limites et éventuellement des conditions de continuité pour chaque problème considéré, comme le montre les deux applications traitées ci-dessous.

A3.2.3 - Application : milieu bicouche plein fini

On considère un milieu bicouche plein fini soumis sur sa surface extérieure à un chargement mécanique (figure A3.1).

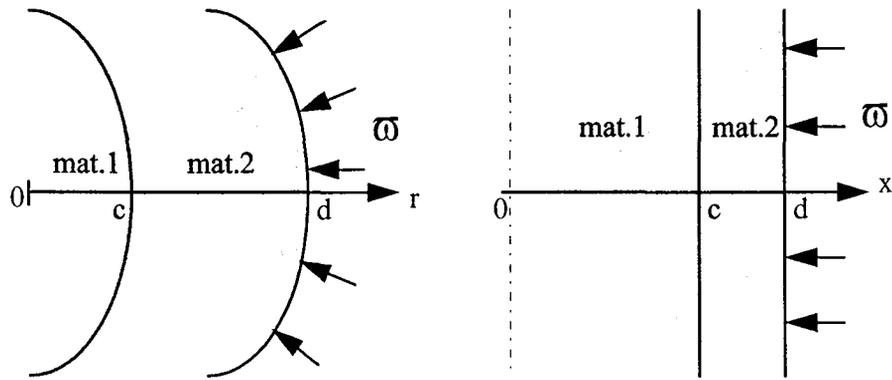


Figure A3.1. Géométries.

Conditions aux limites :

- $r = 0$: déplacement radial nul
- $r = d$: contrainte radiale imposée, égale à $-p$

Conditions de continuité : continuité du déplacement radial et de la contrainte radiale en $r = c$.

- géométrie cartésienne :

$\alpha^{(1)}$	$\frac{-p}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}}$
$\alpha^{(2)}$	$\frac{-p}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}}$
$\beta^{(1)}$	0
$\beta^{(2)}$	$\frac{(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} + 2\mu^{(1)} - 2\mu^{(2)})c p}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}$

- géométrie cylindrique :

$\alpha^{(1)}$	$\frac{-(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})d^2 p}{2(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} + \mu^{(2)})d^2 + 2(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} + \mu^{(1)} - \mu^{(2)})\mu^{(2)}c^2}$
$\beta^{(1)}$	0
$\alpha^{(2)}$	$\frac{-(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} + \mu^{(2)})d^2 p}{2(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} + \mu^{(2)})d^2 + 2(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} + \mu^{(1)} - \mu^{(2)})\mu^{(2)}c^2}$
$\beta^{(2)}$	$\frac{(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} + \mu^{(1)} - \mu^{(2)})d^2 c^2 p}{2(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} + \mu^{(2)})d^2 + 2(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} + \mu^{(1)} - \mu^{(2)})\mu^{(2)}c^2}$

- géométrie sphérique :

$\alpha^{(1)}$	$\frac{-3(\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)})d^3\varpi}{(3\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)})(3\lambda^{(1)}+2\mu^{(1)}+4\mu^{(2)})d^3+4(3\lambda^{(1)}-3\lambda^{(2)}+2\mu^{(1)}-2\mu^{(2)})\mu^{(2)}c^3}$
$\beta^{(1)}$	0
$\alpha^{(2)}$	$\frac{-(3\lambda^{(1)}+2\mu^{(1)}+4\mu^{(2)})d^3\varpi}{(3\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)})(3\lambda^{(1)}+2\mu^{(1)}+4\mu^{(2)})d^3+4(3\lambda^{(1)}-3\lambda^{(2)}+2\mu^{(1)}-2\mu^{(2)})\mu^{(2)}c^3}$
$\beta^{(2)}$	$\frac{(3\lambda^{(1)}-3\lambda^{(2)}+2\mu^{(1)}-2\mu^{(2)})d^3c^3\varpi}{(3\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)})(3\lambda^{(1)}+2\mu^{(1)}+4\mu^{(2)})d^3+4(3\lambda^{(1)}-3\lambda^{(2)}+2\mu^{(1)}-2\mu^{(2)})\mu^{(2)}c^3}$

A3.3 - Régime asymptotique

D'un point de vue hydraulique, l'état asymptotique est relativement aisé à établir puisqu'il découle directement du système des deux équations de diffusion couplées. En effet, cet état impliquant des dérivées temporelles nulles, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} K_{lqlq} & K_{lqgz} \\ K_{gzlq} & K_{gzgz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^2 p_{lq}^\infty \\ \nabla^2 p_{gz}^\infty \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A3.14})$$

et comme la matrice de conductivité est régulière, les deux laplaciens sont nuls.

Suivant la géométrie, on peut donc en déduire la forme générale des solutions asymptotiques des pressions partielles de liquide et de mélange :

$$\begin{aligned} p_i^\infty(x) &= A + Bx && \text{géométrie cartésienne} \\ p_i^\infty(r) &= A + B \ln r && \text{géométrie cylindrique} \\ p_i^\infty(r) &= A + \frac{B}{r} && \text{géométrie sphérique} \end{aligned} \quad (\text{A3.15})$$

et les coefficients A et B sont déterminés à partir des conditions aux limites.

Par exemple, considérons les structures du paragraphe 4.1 (retrait de dessiccation d'un mur, d'un cylindre et d'une sphère en béton) :

$$\begin{cases} \frac{\partial p_i^\infty}{\partial \zeta}(\zeta = 0) = 0 \\ p_i^\infty(\zeta = a) = p_i^e \end{cases} \quad \text{avec } i = lq, gz \quad (\text{A3.16})$$

Quelque soit la géométrie, on montre que $B = 0$ et $A = p_i^e$. Par conséquent, on trouve :

$$p_i^\infty(\zeta) = p_i^e \quad \forall \zeta \quad (\text{A3.17})$$

En ce qui concerne le comportement mécanique asymptotique, le raisonnement est analogue à celui d'un problème thermomécanique saturé (Berest & Weber, 1988 p.81). Mais il est important de noter que la résolution nécessite de considérer le régime permanent au travers de sa variation par rapport à l'état instantané :

$$" \infty = (\infty - 0^+) + 0^+ " \quad (\text{A3.18})$$

La loi de comportement en régime permanent s'écrit en termes de variations :

$$E_o \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = (1 + \nu_o) \Delta \underline{\underline{\sigma}} - \nu_o \text{tr}(\Delta \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} + (1 + \nu_o) [b_{lq} \Delta p_{lq} + b_{gz} \Delta p_{gz}] - \nu_o 3 [b_{lq} \Delta p_{lq} + b_{gz} \Delta p_{gz}] \quad (\text{A3.19})$$

$$\text{soit} \quad E_o \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = (1 + \nu_o) \Delta \underline{\underline{\sigma}} - \nu_o \text{tr}(\Delta \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} + \underbrace{(1 - 2\nu_o)}_{\frac{E_o}{3K_o}} [b_{lq} \Delta p_{lq} + b_{gz} \Delta p_{gz}] \quad (\text{A3.20})$$

$$\text{ou encore} \quad E_o \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = (1 + \nu_o) \Delta \underline{\underline{\sigma}} - \nu_o \text{tr}(\Delta \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} + E_o \Delta \theta \quad \text{avec} \quad \Delta \theta = \frac{b_{lq} \Delta p_{lq} + b_{gz} \Delta p_{gz}}{3K_o} \quad (\text{A3.21})$$

La résolution dépend maintenant de la géométrie considérée et de la forme des tenseurs de contraintes et de déformations correspondants.

- géométrie cartésienne :

La loi de comportement s'écrit :

$$E_o \frac{\partial(\Delta u)}{\partial x} = \Delta \sigma_{xx} - \nu_o (\Delta \sigma_{yy} + \Delta \sigma_{zz}) + E_o \Delta \theta \quad (\text{A3.22})$$

$$0 = \Delta \sigma_{yy} - \nu_o (\Delta \sigma_{xx} + \Delta \sigma_{zz}) + E_o \Delta \theta \quad (\text{A3.23})$$

$$0 = \Delta \sigma_{zz} - \nu_o (\Delta \sigma_{xx} + \Delta \sigma_{yy}) + E_o \Delta \theta \quad (\text{A3.24})$$

$$\text{et l'équilibre mécanique donne :} \quad \frac{\partial(\Delta \sigma_{xx})}{\partial x} = 0 \quad (\text{A3.25})$$

$$\text{Après intégration de cette relation d'équilibre, on trouve :} \quad \Delta \sigma_{xx} = K = \text{cste} \quad (\text{A3.26})$$

$$\text{or} \quad \Delta \sigma_{xx}(x = a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \sigma_{xx} = 0 \quad \forall x \quad (\text{A3.27})$$

$$\text{De plus, (A3.23)-(A3.24)} \Rightarrow \Delta\sigma_{yy} = \Delta\sigma_{zz} = \frac{-E_o}{1-\nu_o} \Delta\theta \quad (\text{A3.28})$$

$$\text{Puis (A3.22)} \Rightarrow \frac{\partial(\Delta u)}{\partial x} = \frac{1+\nu_o}{1-\nu_o} \Delta\theta \quad (\text{A3.29})$$

Par intégration et en tenant compte que : $\Delta u(x=0) = 0$, on trouve :

$$\Delta u = \frac{1+\nu_o}{1-\nu_o} \Delta\theta x \quad \text{et} \quad \Delta\varepsilon_v = \frac{\Delta u}{x} \quad (\text{A3.30})$$

récapitulation du régime permanent en géométrie cartésienne :

σ_{xx}^∞	$-\bar{\omega}$
σ_{yy}^∞	$\sigma_{yy}^{o+} - \frac{1-2\nu_o}{1-\nu_o} \left[S_{lq}^o (p_{lq}^\infty - p_{lq}^{o+}) + (1-S_{lq}^o) (p_{gz}^\infty - p_{gz}^{o+}) \right]$
σ_{zz}^∞	$\sigma_{zz}^{o+} - \frac{1-2\nu_o}{1-\nu_o} \left[S_{lq}^o (p_{lq}^\infty - p_{lq}^{o+}) + (1-S_{lq}^o) (p_{gz}^\infty - p_{gz}^{o+}) \right]$
u_x^∞	$u_x^{o+} + \frac{(1+\nu_o)(1-2\nu_o)}{(1-\nu_o)E_o} \left[S_{lq}^o (p_{lq}^\infty - p_{lq}^{o+}) + (1-S_{lq}^o) (p_{gz}^\infty - p_{gz}^{o+}) \right] x$
$\Delta\varepsilon_v$	$\frac{(1+\nu_o)(1-2\nu_o)}{(1-\nu_o)E_o} \left[S_{lq}^o (p_{lq}^\infty - p_{lq}^{o+}) + (1-S_{lq}^o) (p_{gz}^\infty - p_{gz}^{o+}) \right]$
ε_v^∞	$\varepsilon_v^{o+} + \Delta\varepsilon_v$

- géométrie cylindrique :

La loi de comportement s'écrit :

$$E_o \frac{\partial(\Delta u)}{\partial r} = \Delta\sigma_{rr} - \nu_o (\Delta\sigma_{\theta\theta} + \Delta\sigma_{zz}) + E_o \Delta\theta \quad (\text{A3.31})$$

$$E_o \frac{\Delta u}{r} = \Delta\sigma_{\theta\theta} - \nu_o (\Delta\sigma_{rr} + \Delta\sigma_{zz}) + E_o \Delta\theta \quad (\text{A3.32})$$

$$0 = \Delta\sigma_{zz} - \nu_o (\Delta\sigma_{rr} + \Delta\sigma_{\theta\theta}) + E_o \Delta\theta \quad (\text{A3.33})$$

$$\text{et l'équilibre mécanique donne :} \quad \frac{\partial(\Delta\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\Delta\sigma_{rr} - \Delta\sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (\text{A3.34})$$

$$(A3.31)-(A3.32) \Rightarrow E_o \left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial r} - \frac{\Delta u}{r} \right] = (1 + \nu_o) (\Delta \sigma_{rr} - \Delta \sigma_{\theta\theta}) \quad (A3.35)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Delta u}{r} \right)$$

et en injectant la relation d'équilibre,

$$r E_o \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Delta u}{r} \right) = -(1 + \nu_o) r \frac{\partial \Delta \sigma_{rr}}{\partial r} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\Delta u}{r} + \frac{1 + \nu_o}{E_o} \Delta \sigma_{rr} \right] = 0 \quad (A3.36)$$

$$\text{or } \Delta \sigma_{rr}(r = a) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta u}{r} + \frac{1 + \nu_o}{E_o} \Delta \sigma_{rr} = \frac{\Delta u(a)}{a} \quad (A3.37)$$

$$(A3.31)+(A3.32) \Rightarrow E_o \left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial r} + \frac{\Delta u}{r} \right] = (1 - \nu_o) (\Delta \sigma_{rr} + \Delta \sigma_{\theta\theta}) - 2\nu_o \Delta \sigma_{zz} + 2E_o \Delta \theta \quad (A3.38)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru)$$

et en substituant $\Delta \sigma_{zz}$ grâce à (A3.33), on obtient :

$$\frac{E_o}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = (1 + \nu_o) (1 - 2\nu_o) (\Delta \sigma_{rr} + \Delta \sigma_{\theta\theta}) + 2E_o (1 + \nu_o) \Delta \theta \quad (A3.39)$$

$$= \frac{(1 + \nu_o) (1 - 2\nu_o)}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Delta \sigma_{rr}) + 2E_o (1 + \nu_o) \Delta \theta$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[E_o r \Delta u - (1 + \nu_o) (1 - 2\nu_o) r^2 \Delta \sigma_{rr} - r^2 E_o (1 + \nu_o) \Delta \theta \right] = 0 \quad (A3.40)$$

$$\text{or } \Delta u(r = 0) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta u}{r} = \frac{(1 + \nu_o) (1 - 2\nu_o)}{E_o} \Delta \sigma_{rr} + (1 + \nu_o) \Delta \theta \quad (A3.41)$$

$$\text{Par identification des deux équations (A3.37) et (A3.41), on trouve : } \Delta \sigma_{rr} = 0 \quad \forall r \quad (A3.42)$$

$$\text{puis, relation d'équilibre } \Rightarrow \Delta \sigma_{\theta\theta} = \Delta \sigma_{rr} - r \frac{\partial(\Delta \sigma_{rr})}{\partial r} = 0 \quad (A3.43)$$

$$\text{et (A3.33) } \Rightarrow \Delta \sigma_{zz} = \nu_o (\Delta \sigma_{rr} + \Delta \sigma_{\theta\theta}) - E_o \Delta \theta = -E_o \Delta \theta \quad (A3.44)$$

$$\text{et (A3.42) } \Rightarrow \Delta u = (1 + \nu_o) \Delta \theta r \quad (A3.45)$$

$$\text{et } \Delta \varepsilon_v = 2 \frac{\Delta u}{r} = 2(1 + \nu_o) \Delta \theta \quad (A3.46)$$

récapitulation du régime permanent en géométrie cylindrique :

σ_{rr}^{∞}	$-\bar{\omega}$
$\sigma_{\theta\theta}^{\infty}$	$-\bar{\omega}$
σ_{zz}^{∞}	$\sigma_{zz}^{o+} - (1-2\nu_o) [S_{lq}^o (p_{lq}^{\infty} - p_{lq}^{o+}) + (1-S_{lq}^o) (p_{gz}^{\infty} - p_{gz}^{o+})]$
u_r^{∞}	$u_r^{o+} + \frac{(1+\nu_o)(1-2\nu_o)}{E_o} [S_{lq}^o (p_{lq}^{\infty} - p_{lq}^{o+}) + (1-S_{lq}^o) (p_{gz}^{\infty} - p_{gz}^{o+})] r$
$\Delta\varepsilon_v$	$2 \frac{(1+\nu_o)(1-2\nu_o)}{E_o} [S_{lq}^o (p_{lq}^{\infty} - p_{lq}^{o+}) + (1-S_{lq}^o) (p_{gz}^{\infty} - p_{gz}^{o+})]$
ε_v^{∞}	$\varepsilon_v^{o+} + \Delta\varepsilon_v$

- géométrie sphérique :

La loi de comportement s'écrit :

$$E_o \frac{\partial(\Delta u)}{\partial r} = \Delta\sigma_{rr} - 2\nu_o \Delta\sigma_{\theta\theta} + E_o \Delta\theta \quad (A3.47)$$

$$E_o \frac{\Delta u}{r} = -\nu_o \Delta\sigma_{rr} + (1-\nu_o) \Delta\sigma_{\theta\theta} + E_o \Delta\theta \quad (A3.48)$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \Delta\sigma_{\theta\theta} \quad (A3.49)$$

et l'équilibre mécanique donne : $\Delta\sigma_{\theta\theta} = \Delta\sigma_{rr} + \frac{r}{2} \frac{\partial\Delta\sigma_{rr}}{\partial r}$ (A3.50)

$$(A3.47)-(A3.48) \Rightarrow E_o \underbrace{\left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial r} - \frac{\Delta u}{r} \right]}_{r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Delta u}{r} \right)} = (1-\nu_o) \Delta\sigma_{rr} - (1+\nu_o) \Delta\sigma_{\theta\theta} \quad (A3.51)$$

et en injectant la relation d'équilibre,

$$E_o r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Delta u}{r} \right) = -(1+\nu_o) \frac{r}{2} \frac{\partial\Delta\sigma_{rr}}{\partial r} \quad (A3.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\Delta u}{r} + \frac{1+\nu_o}{2E_o} \Delta\sigma_{rr} \right] = 0 \quad (A3.53)$$

or $\Delta\sigma_{rr}(r=a) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta u}{r} + \frac{1+\nu_o}{2E_o} \Delta\sigma_{rr} = \frac{\Delta u(a)}{a}$ (A3.55)

$$(A3.47)+2\times(A3.48) \Rightarrow E_o \left[\underbrace{\frac{\partial(\Delta u)}{\partial r} + 2\frac{\Delta u}{r}}_{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Delta u)} \right] = (1 - 2\nu_o) (\Delta\sigma_{rr} + 2\Delta\sigma_{\theta\theta}) + 3E_o \Delta\theta \quad (A3.55)$$

et en injectant la relation d'équilibre,

$$\frac{E_o}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Delta u) = \frac{(1 - 2\nu_o)}{r^2} \left(\underbrace{3r^2 \Delta\sigma_{rr} + r^3 \frac{\partial \Delta\sigma_{rr}}{\partial r}}_{\frac{\partial}{\partial r} (r^3 \Delta\sigma_{rr})} \right) + 3E_o \Delta\theta \quad (A3.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \Delta u - \frac{(1 - 2\nu_o)}{E_o} r^3 \Delta\sigma_{rr} - r^3 \Delta\theta \right] = 0 \quad (A3.57)$$

$$\text{or } \Delta u(r=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta u}{r} = \frac{(1 - 2\nu_o)}{E_o} \Delta\sigma_{rr} + \Delta\theta \quad (A3.58)$$

$$\text{Par identification des deux équations (A3.54) et (A3.58), on trouve : } \Delta\sigma_{rr} = 0 \quad \forall r \quad (A3.59)$$

$$\text{Puis, équilibre mécanique } \Rightarrow \quad \Delta\sigma_{\theta\theta} = \Delta\sigma_{\varphi\varphi} = \Delta\sigma_{rr} + \frac{r}{2} \frac{\partial \Delta\sigma_{rr}}{\partial r} = 0 \quad (A3.60)$$

$$\text{et (A3.58) } \Rightarrow \quad \Delta u = \Delta\theta r \quad (A3.61)$$

$$\text{et } \Delta\varepsilon_v = 3 \frac{\Delta u}{r} = 3\Delta\theta \quad (A3.62)$$

récapitulation du régime permanent en géométrie sphérique :

σ_{rr}^∞	$-\bar{\omega}$
$\sigma_{\theta\theta}^\infty$	$-\bar{\omega}$
$\sigma_{\varphi\varphi}^\infty$	$-\bar{\omega}$
u_r^∞	$u_r^{o+} + \frac{(1 - 2\nu_o)}{E_o} \left[S_{lq}^o (p_{lq}^\infty - p_{lq}^{o+}) + (1 - S_{lq}^o) (p_{gz}^\infty - p_{gz}^{o+}) \right] r$
$\Delta\varepsilon_v$	$3 \frac{(1 - 2\nu_o)}{E_o} \left[S_{lq}^o (p_{lq}^\infty - p_{lq}^{o+}) + (1 - S_{lq}^o) (p_{gz}^\infty - p_{gz}^{o+}) \right]$
ε_v^∞	$\varepsilon_v^{o+} + \Delta\varepsilon_v$

Annexe

4

**Résolution par éléments finis
avec le logiciel *PARSAT***

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This not only helps in tracking expenses but also ensures compliance with tax regulations.

In the second section, the author provides a detailed breakdown of the company's revenue streams. This includes sales from various product lines and services. The data shows a steady increase in revenue over the past year, which is attributed to strategic marketing efforts and product diversification.

The third section focuses on the company's operational costs. It details the expenses related to manufacturing, distribution, and administrative functions. The analysis reveals that while production costs have remained relatively stable, distribution and administrative expenses have seen a slight upward trend.

Finally, the document concludes with a summary of the overall financial performance. It highlights the company's strong profitability and its ability to manage costs effectively. The author expresses confidence in the company's future growth and success.

Le principe de la résolution numérique s'articule en trois phases :

- discrétisation temporelle : on substitue aux dérivées temporelles à l'instant t des accroissements entre t et $t + \Delta t$ et les inconnues du problème sont alors des champs d'accroissements entre t et $t + \Delta t$
- développement de la formulation variationnelle du problème : on caractérise la solution du problème par la stationnarité d'une fonctionnelle scalaire
- discrétisation spatiale : mise en œuvre de la méthode des éléments finis (Dangla, 1995 ; Shao, 1995 ; Shao et al., 1998).

La discrétisation temporelle est effectuée en terme d'accroissements : aux dérivées temporelles à l'instant t sont substitués des accroissements entre t et $t + \Delta t$. La solution du problème étant supposée connue à l'instant t , les inconnues sont des champs d'accroissement entre t et $t + \Delta t$. Cette méthode se place dans le cadre général défini dans Dangla (1995) et Coussy (1995).

La discrétisation temporelle est réalisée à l'aide d'un schéma semi-explicite ($0 \leq \theta \leq 1$, en pratique, on utilise souvent $\theta \sim 1$). Entre les instants t_n et $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ une fonction X est approximée de la manière suivante :

$$X = (1 - \Theta) X_n + \Theta X_{n+1} \quad (\text{A4.1})$$

$$\text{ou encore } X = X_n + \Theta \Delta_n X \quad \text{avec } \Delta_n X = X_{n+1} - X_n \quad (\text{A4.2})$$

A chaque incrément de temps, le champ inconnu du problème discrétisé est le champ d'accroissement $\Delta_n X$.

En appliquant une formulation variationnelle au système matriciel THM couplé à résoudre, celui-ci s'exprime en milieux partiellement saturés sous la forme incrémentale suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_{uu} & \tilde{C}_{ulq} & \tilde{C}_{ugz} & \tilde{C}_{uT} \\ \tilde{C}_{lqu} & \tilde{C}_{lqlq} & \tilde{C}_{lqgz} & \tilde{C}_{lqT} \\ \tilde{C}_{gzu} & \tilde{C}_{gzlq} & \tilde{C}_{gzgz} & \tilde{C}_{gzT} \\ \tilde{C}_{Tu} & \tilde{C}_{Tlq} & \tilde{C}_{Tgz} & \tilde{C}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_n u \\ \Delta_n p_{lq} \\ \Delta_n p_{gz} \\ \Delta_n T \end{bmatrix} + \Delta_n t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{lqlq} & \tilde{K}_{lqgz} & \tilde{K}_{lqT} \\ 0 & \tilde{K}_{gzlq} & \tilde{K}_{gzgz} & \tilde{K}_{gzT} \\ 0 & \tilde{K}_{Tlq} & \tilde{K}_{Tgz} & \tilde{K}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n + \Theta \Delta_n u \\ p_{lq,n} + \Theta \Delta_n p_{lq} \\ p_{gz,n} + \Theta \Delta_n p_{gz} \\ T_n + \Theta \Delta_n T \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A4.3})$$

Classification et explicitation des différentes sous-matrices de couplage :

- type 1 : matrice de rigidité mécanique \tilde{C}_{uu}

$$\tilde{C}_{uu} = \int_{\Omega_{el}} {}^t(\tilde{L} \cdot \tilde{N}) \tilde{C}_o \cdot (\tilde{L} \cdot \tilde{N}) d\Omega \quad (\text{A4.4})$$

\tilde{C}_o : matrice d'élasticité drainée isotherme

\tilde{N} : matrice des fonctions d'interpolation (on a considéré en fait que ces fonctions étaient identiques pour les pressions de liquide et de mélange, la température et le déplacement).

\tilde{L} : opérateur de dérivation

- type 2 : matrice de couplage mécanique-diffusion : $\tilde{C}_{ulq}, \tilde{C}_{lqu}, \tilde{C}_{ugz}, \tilde{C}_{gzu}, \tilde{C}_{uT}, \tilde{C}_{Tu}$

$$\text{de la forme } \tilde{C}_{ux} = \int_{\Omega_{el}} C_{ux} \cdot (\tilde{L} \cdot \tilde{N}) \tilde{N} d\Omega \quad \text{et} \quad \tilde{C}_{xu} = \int_{\Omega_{el}} C_{xu} \cdot {}^t \tilde{N} \cdot (\tilde{L} \cdot \tilde{N}) d\Omega \quad (\text{A4.5})$$

- type 3 : matrices de capacité : $\tilde{C}_{lqlq}, \tilde{C}_{lqgz}, \tilde{C}_{lqT}, \tilde{C}_{gzlq}, \tilde{C}_{gzzg}, \tilde{C}_{gzT}, \tilde{C}_{Tlq}, \tilde{C}_{Tgz}, \tilde{C}_{TT}$

$$\text{de la forme } \tilde{C}_{xy} = \int_{\Omega_{el}} C_{xy} \cdot {}^t \tilde{N} \cdot \tilde{N} d\Omega \quad (\text{A4.6})$$

- type 4 : matrice de conductivité : $\tilde{K}_{lqlq}, \tilde{K}_{lqgz}, \tilde{K}_{lqT}, \tilde{K}_{gzlq}, \tilde{K}_{gzzg}, \tilde{K}_{gzT}, \tilde{K}_{Tlq}, \tilde{K}_{Tgz}, \tilde{K}_{TT}$

$$\text{de la forme } \tilde{K}_{xy} = \int_{\Omega_{el}} K_{xy} \cdot {}^t \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} d\Omega \quad (\text{A4.7})$$

$\tilde{\nabla}$: matrice « gradient » des variables de diffusion.

Enfin, pour la discrétisation spatiale, tous les calculs présentés dans ce mémoire ont été effectués à l'aide d'éléments finis de Lagrange quadratique linéaire à trois nœuds.

Annexe

5

**Caractéristiques physiques
générales**

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. This includes not only sales and purchases but also any other financial activities that may occur during the course of the business. It is essential to ensure that all records are kept in a clear and organized manner, so that they can be easily accessed and reviewed at any time.

In addition to maintaining accurate records, it is also important to regularly review and reconcile the accounts. This helps to identify any discrepancies or errors that may have occurred, and allows them to be corrected before they become a problem. Regular reconciliation also helps to ensure that the financial statements are accurate and up-to-date.

Finally, it is important to keep up-to-date with the latest accounting practices and regulations. This can be done by attending seminars, workshops, and conferences, as well as by reading industry publications and news articles. Staying current in this field is essential for ensuring that the business is operating in a compliant and efficient manner.

By following these guidelines, businesses can ensure that their financial records are accurate and reliable, and that they are able to make informed decisions based on the most up-to-date information. This is essential for the long-term success and growth of any business.

In conclusion, maintaining accurate financial records is a critical component of any business's success. By following the guidelines outlined in this document, businesses can ensure that they are able to maintain accurate records, regularly review and reconcile their accounts, and stay up-to-date with the latest accounting practices and regulations. This will help to ensure that the business is operating in a compliant and efficient manner, and that it is able to make informed decisions based on the most up-to-date information.

D'après Coussy (1995, 10.156 p412), le coefficient de dilatation thermique α_0 est donné par la relation (avec α_s le coefficient de dilatation des grains qui est fonction du matériau) :

$$\alpha_0 = \alpha_s \quad (\text{A4.1})$$

Le coefficient de dilatation thermique (K^{-1}) du liquide est extrait du Handbook of Physic (Lide, 1994) :

$$\alpha_{lq}(T) = 9.52 \cdot 10^{-5} \text{Ln}(T - 273) - 2.19 \cdot 10^{-4} \quad (\text{A4.2})$$

Pour l'air sec et la vapeur, considérés comme des gaz parfaits, on a (Coussy, 1995) :

$$\alpha_{as}(T) = \alpha_{vp}(T) = \frac{1}{3T} \quad (\text{A4.3})$$

et les coefficients de dilatation thermique sont donnés par les formules d'homogénéisation suivantes (Coussy, 1995 p412) :

$$\begin{aligned} \alpha_m^{lq} &= (b_{lq} - \phi_{lq})\alpha_s + \alpha_{lq}\phi_{lq} \\ \alpha_m^{vp} &= (b_{gz} - \phi_{gz})\alpha_s + \alpha_{vp}\phi_{gz} \\ \alpha_m^{da} &= (b_{gz} - \phi_{gz})\alpha_s + \alpha_{da}\phi_{gz} \end{aligned} \quad (\text{A4.4})$$

Les entropies massiques ($\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$) sont données pour chaque phase (Lide 1994) :

$$s_m^{lq}(T) = 12.2(T - 273) + 81.7 \quad s_m^{as} = 6900 \quad s_m^{vp}(T) = \frac{L}{T} + s_m^{lq}(T) \quad (\text{A4.5})$$

La densité de vapeur d'eau en milieu saturé ρ_{vp}^o est une fonction de la température que l'on retrouve chez la plupart des auteurs qui citent Mayhew & Rogers (1976) :

$$\rho_{vp}^o(T) = \frac{1}{194,4 \exp(-0,06374(T - 273) + 0,1634 \cdot 10^{-3}(T - 273)^2)} \quad (\text{A4.6})$$

On peut également en déduire l'expression de la vapeur saturante, à partir de la loi des gaz parfaits :

$$p_{vp}^o(T) = \frac{RT}{M_{vp}} \rho_{vp}^o(T) \quad (\text{A4.7})$$

$$\Rightarrow p_{vp}^{\circ}(T) = \frac{2.37769 T}{194,4 \exp(-0,06374(T - 273) + 0,1634 \cdot 10^{-3}(T - 273)^2)} \quad (A4.8)$$

On trouve dans Abellan et al. (1995, p136, citant la référence Houberechts 1962 p368) une autre expression :

$$p_{vp}^{\circ}(T) = 9.81 \cdot 10^4 \cdot 10^{5.978 - 2225/T} \quad (A4.9)$$

ainsi que celle-ci tirée de Moyne (1987) :

$$p_{vp}^{\circ}(T) = \exp\left(25.27 - \frac{512.25}{T}\right) \quad (A4.10)$$

encore une autre par Cadiergues (1978) :

$$\log_{10} p_{vp}^{\circ}(T) = 2.7858 + \frac{T - 273.15}{31.559 + 0.1354(T - 273.15)} \quad (A4.11)$$

et enfin une dernière par Olivella et al. (1998) :

$$p_{vp}^{\circ}(T) = 136075 \exp\left(-\frac{5239.7}{T}\right)$$

mais on vérifie sur la figure suivante que les différentes expressions sont tout à fait semblables dans la gamme de température habituellement considérée (figure A4.1).

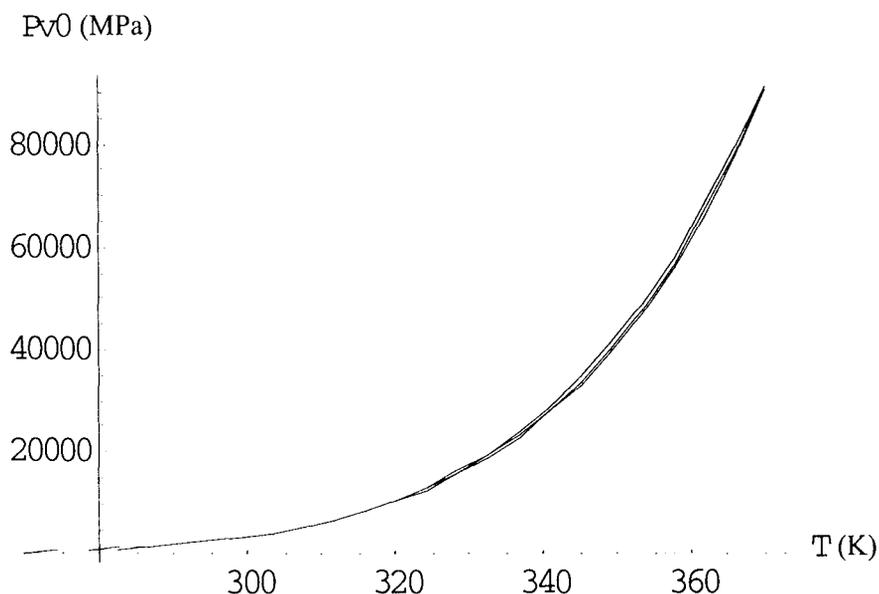


Figure A4.1. Evolution de la pression de vapeur saturante en fonction de la température.

La viscosité de l'air μ_{gz} est considérée constante ($1.846 \cdot 10^{-5}$ Pa.s) d'après Thomas & Sansom (1995) et Thomas & He (1995) en se référant à Kaye & Laby (1973), alors que Pollock, en se référant aux données de Wilke (1950), et Moyne (1987), la considèrent comme fonction de la température et de la composition du mélange. Moyne propose la forme suivante :

$$\mu_{gz}(T, p_{vp}, p_{gz}) = \frac{(1 - x_{vp})\mu_{as}}{1 - x_{vp} + 0.2188x_v(1 + 0.8876\sqrt{\mu_{as}/\mu_{vp}})^2} + \frac{x_{vp}\mu_{vp}}{x_{vp} + 0.2777(1 - x_{vp})(1 + 1.1266\sqrt{\mu_{vp}/\mu_{as}})^2} \quad (A4.12)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mu_{as}(T) = 0.59 \cdot 10^{-5} + 4.2 \cdot 10^{-8}T \\ \mu_{vp}(T) = -0.326 \cdot 10^{-5} + 4.1245 \cdot 10^{-8}T \\ x_{vp} = \frac{p_{vp}}{p_{gz}} \end{cases} \quad (A4.13)$$

En ce qui concerne la viscosité de l'eau, presque tous les auteurs adoptent une même expression, citant Kaye & Laby (1973) :

$$\mu_{lq}(T) = 661.2 \cdot 10^{-3} (T - 229)^{-1.562} \quad (A4.14)$$

mais on trouve également une autre formulation (Abellan et al., 1995 p316) :

$$\mu_{lq}(T) = \frac{0.001779}{1 + 3.368 \cdot 10^{-2}(T - 273) + 2.2099 \cdot 10^{-4}(T - 273)^2} \quad (A4.15)$$

Les 2 fonctions précédentes se superposent dans la gamme de température considérée et conduisent à une forme fortement non linéaire (figure A4.2).

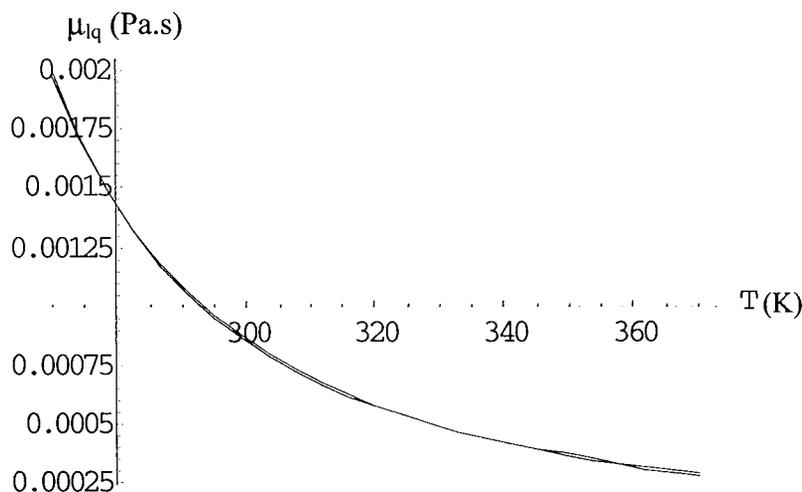


Figure A4.2. Evolution de la viscosité de l'eau en fonction de la température

Une expression du coefficient de diffusion moléculaire D_{atm} souvent utilisée par les auteurs (et notamment Pollock et Thomas) provient de Krischner & Rohnalter (1940) et est de la forme :

$$D_{\text{atm}}(T, p_{\text{gz}}) = 5.893 \cdot 10^{-6} \frac{T^{2.3}}{p_{\text{gz}}} \quad (\text{A4.16})$$

Une autre formulation, très voisine, est donnée par Moyne (1987) :

$$D_{\text{atm}}(T, p_{\text{gz}}) = 2.23 \cdot 10^{-5} \left(\frac{T}{273} \right)^{1.81} \frac{101325}{p_{\text{gz}}} \quad (\text{A4.17})$$

La représentation graphique de ces 2 expressions donne une même surface dans les gammes considérées de T et p_{gz} (figure A4.3).

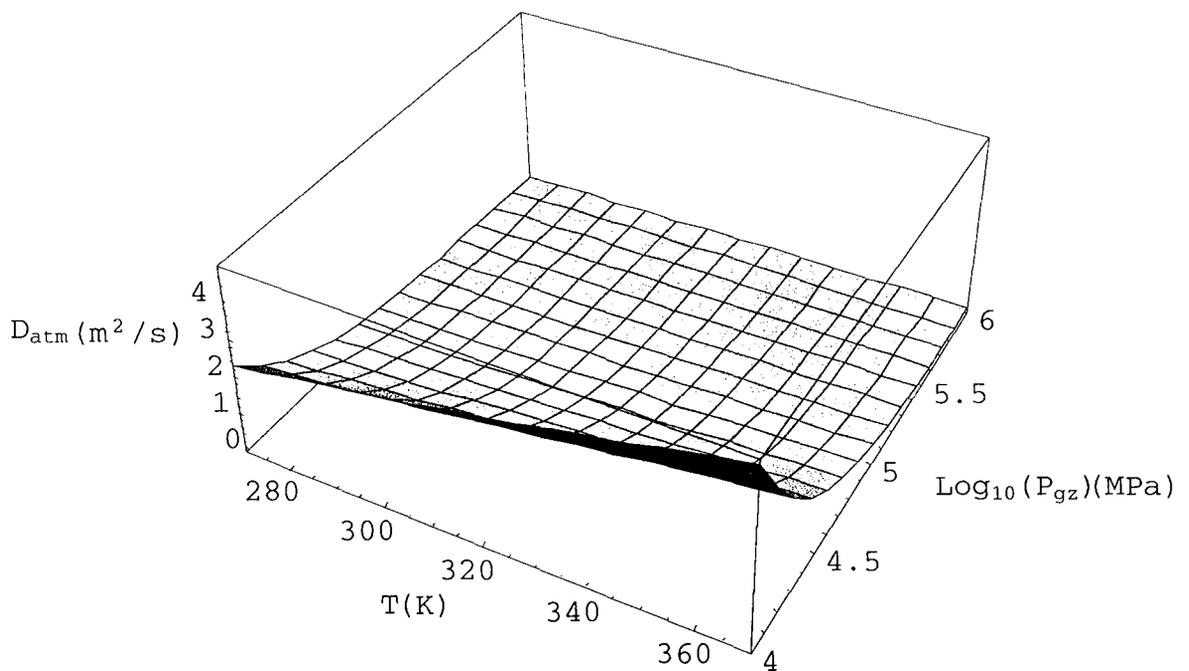


Figure A4.3. Evolution du coefficient de diffusion.

En ce qui concerne les chaleurs spécifiques (massiques) des différents constituants liquide, vapeur, air sec et solide, les auteurs considèrent tous des valeurs constantes :

$$\begin{cases} c_m^s = 800 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1} \\ c_m^{lq} = 4180 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1} \\ c_m^{vp} = 1870 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1} \\ c_m^{as} = 1000 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1} \end{cases} \quad (\text{A4.18})$$

et il en est de même pour la chaleur latente de vaporisation ($L = 2.4 / 2.5 \cdot 10^6 \text{ Jkg}^{-1}$), sauf pour Moyne qui prend en compte une évolution avec la température (figure A4.4) :

$$L(T) = 2500800 - 2443(T - 273.15) \tag{A4.19}$$

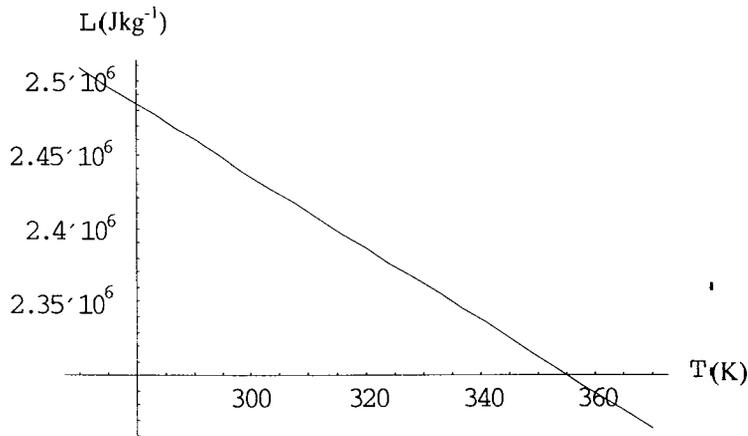


Figure A4.4. Evolution de la chaleur latente en fonction de la température.

La conductivité thermique du sol partiellement saturé varie en fonction de la saturation en liquide et les différentes modélisations trouvées dans les articles étudiés proposent les relations suivantes (tableau A4.1) :

Tableau A4.1. Evolution de la conductivité thermique en fonction de la saturation en liquide.

	Relation $\lambda_T - S_{lq}$ (W/mK)
Pollock (1986)	$0.5(1 - S_{lq}) + 2 S_{lq}$
Thomas & al. (1996, cas 2)	
Thomas & al. (1996, cas 1)	$0.337 + 2.079(1 - \exp(-21.71\phi S_{lq}))$
Kanno & al. (1996)	$\frac{0.93}{1 + 1.32 \exp(-2.68S_{lq})}$
Thomas & King (1992)	$0.256 + 2.548(1 - \exp(-22.94\phi S_{lq}))$
Ewen & Thomas (1989)	
Olivella et al. (1998)	$(\lambda_{sec})^{1-S_{lq}} (\lambda_{sat})^{S_{lq}}, \lambda_{sec} = 0.5, \lambda_{sat} = 1.28$
Castagna et al. (1998)	$(\lambda_T^s)^{1-\phi} (\lambda_T^{lq})^{\phi S_{lq}} (\lambda_T^{as})^{\phi(1-S_{lq})}$ $\phi = 0.33, \lambda_T^{as} = 0.01, \lambda_T^{lq} = 1.0$ $\lambda_T^s = 5.734 - 1.838 \cdot 10^{-2} T + 2.86 \cdot 10^{-5} T^2 - 1.51 \cdot 10^{-8} T^3$
Moyne (1987)	$\left(\frac{1-a}{\lambda_{\bullet}} + \frac{a}{\lambda_{\bullet}}\right)^{-1}, a = 0.223, \lambda_T^{as} = 0.03, \lambda_T^{lq} = 0.6, \lambda_T^s = 1.5$ $\lambda_{\bullet} = (1-\phi)\lambda_T^s + \phi_{lq}\lambda_T^{lq} + \phi_{gz}\lambda_T^{as}, \lambda_{\bullet} = \left(\frac{1-\phi}{\lambda_T^s} + \frac{\phi_{lq}}{\lambda_T^{lq}} + \frac{\phi_{gz}}{\lambda_T^{as}}\right)^{-1}$

Ces différentes évolutions de la conductivité thermique mettent en évidence un comportement qui peut être fortement non linéaire suivant le matériau considéré (figure A4.5) :

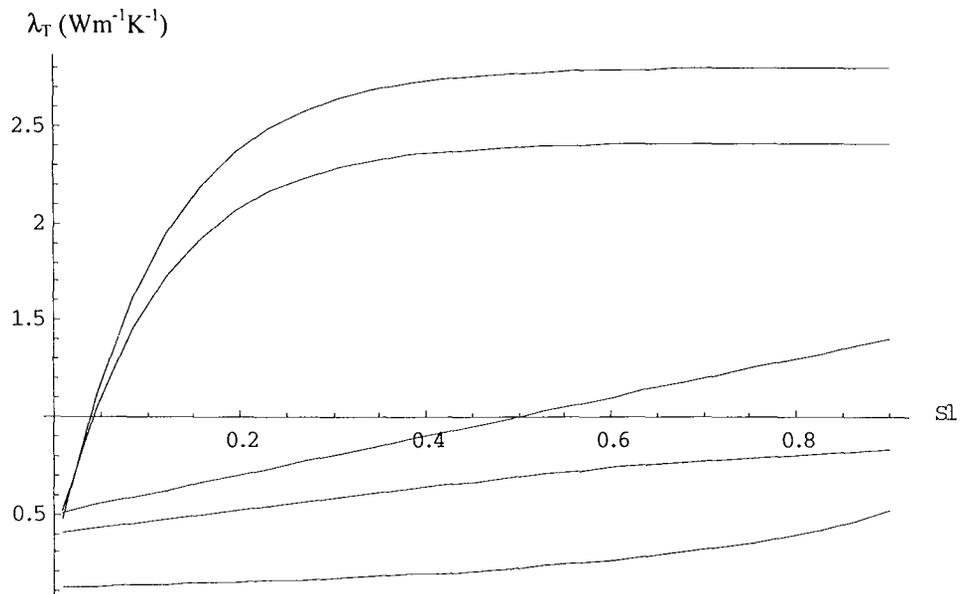


Figure A4.5. Evolution de la conductivité thermique en fonction de la saturation en liquide.

Enfin, concernant les masses molaires de la vapeur et de l'air sec, Abellan et al. (1995) donnent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} M_{vp} &= 0.018 \text{ kgmole}^{-1} \\ M_{as} &= 0.029 \text{ kgmole}^{-1} \end{aligned} \tag{A4.20}$$

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur COUSSY Olivier, Directeur de Recherche, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris
Monsieur GENS Antonio, Professeur, Universita Politecnica de Catalunya, Barcelona - Espagne

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur THOUVENIN Gilles

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

"Modélisation couplées thermo-hydro-mécaniques en milieux poreux partiellement saturés : solutions linéaires et non linéaires".

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : **"GENIE CIVIL-HYDROSYSTEMES-GEOTECHNIQUE"**

Fait à Vandoeuvre le, **10 juin 1999**

Le Président de l'I.N.P.L.,

J. HARDY



NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 17
F - 54500
VANDŒUVRE CEDEX

Résumé

Partant du principe qu'un matériau artificiel comme un béton, ou bien un matériau naturel tel qu'une roche argileuse, peuvent être considérés comme des matériaux poreux polyphasiques, au sein desquels se produisent des interactions entre les phases solide, liquide et éventuellement gazeuse, les équations différentielles régissant le comportement couplé thermo-hydro-mécanique ont été établies dans le formalisme défini par Coussy (1995), par une démarche rigoureuse s'appuyant sur des arguments thermodynamiques.

Pour certains problèmes, dans le cas de géométrie unidimensionnelle, une approche linéarisée peut être envisagée. Le schéma de résolution pour une étude linéaire est de type semi-explicite : les techniques existantes ont été étendues pour pouvoir résoudre des problèmes couplés thermo-hydro-mécaniques et deux méthodes d'inversion numérique des transformées de Laplace ont plus particulièrement été étudiées et validées (Stehfest, 1970 ; Piessens et al., 1983). L'intérêt des approches semi-explicites est double puisqu'elles permettent de valider les codes de calcul et qu'elles sont également très utiles du fait de leur rapidité pour réaliser des études de sensibilité. D'autre part, un code aux éléments finis a été développé au LAEGO pour résoudre le système d'équations généralement non linéaires.

Ce cadre théorique et ces outils ont ensuite été mis à profit pour modéliser trois applications présentant un fort intérêt industriel, en relation avec Electricité de France. Une première étude concerne le stockage des déchets radioactifs de haute activité par le concept de Barrière Ouvragée (BO), et s'intéresse à la cinétique de ressaturation. Cette couche argileuse est initialement non saturée et s'hydrate progressivement en contact avec le massif environnant pour former une barrière autour des conteneurs de déchets. La deuxième étude traite du phénomène de retrait de dessiccation : après une étude générale sur des structures en béton idéales, une analyse de la ventilation dans une galerie argileuse est proposée pour expliquer le lien entre la dessaturation du massif et l'apparition d'une fissuration en paroi de la galerie, comme cela a pu être observé sur le site de Tournemire. Enfin, une troisième étude est relative au problème d'isolation thermique des murs de bâtiment. Un mur de bâtiment est modélisé comme un ensemble constitué de plusieurs couches (plâtre, béton, isolant, enduit) et deux agencements différents sont étudiés (isolation par l'intérieur ou l'extérieur). Les fortes variations climatiques extérieures induisent l'apparition de contraintes de traction dans le modèle qui peuvent être à l'origine de décohésion entre les matériaux.

Summary

On the basis of the principle that an artificial material like a concrete, or well a natural material such as a clay, can be regarded as polyphase porous materials, in which occur interactions between the phases solid, liquid and possibly gas, the differential equations governing the thermo-hydro-mechanical coupled behaviour were established in the formalism defined by Coussy (1995), by a rigorous step being based on thermodynamic arguments.

For certain problems, in the case of one-dimensional geometry, a linearized approach can be considered. The diagram of resolution for a linear study is of semi-explicit type: the existing techniques were wide to be able to solve coupled problems and two numerical methods of inversion of the Laplace transforms were more particularly studied and validated (Stehfest, 1970; Piessens et al., 1983). The interest of the semi-explicit approaches is double since they make it possible to validate computer codes and they are also very useful to make sensitivity analyses thanks to their calculation speed. In the other hand, a finite elements computer code, PARSAT, was developed in LAEGO to solve the system of equations which is generally non-linear.

This theoretical framework and these tools were then made profitable to model three applications being of strong industrial interest, in relation to EDF, the French electricity company. A first study relates to the storage of the high activity radioactive waste with the concept of Clay Barrier (CB), and is interested in the kinetics of ressaturation of the CB. This clay layer is initially not saturated and is hydrated gradually in contact with the surrounding rock mass to form a barrier around the waste containers. The second application is based on the phenomenon of desiccation shrinkage. After a general study on ideal concrete structures, an analysis of distribution in a clay gallery is proposed to explain the link between the dessaturation of the rock mass and the appearance of a cracking in the wall of the gallery, as it could be observed on the site of Tournemire. Lastly, a third study relates to the problem of insulating building wall. A wall is modelled like a unit made up of several layers (plaster, brick-masonry, polystyrene, rendering) and two different layouts are studied (internal or external insulation). The strong external climatic variations induce the appearance of tensile stresses in the model which can be at the origin of decohesion between materials.