



**HAL**  
open science

# Simulation du soudage par friction et malaxage à l'aide de méthodes sans maillage

Abdelaziz Timesli

► **To cite this version:**

Abdelaziz Timesli. Simulation du soudage par friction et malaxage à l'aide de méthodes sans maillage. Autre. Université de Lorraine, 2013. Français. NNT : 2013LORR0111 . tel-01750099

**HAL Id: tel-01750099**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750099>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THÈSE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Spécialité : Mécanique et Énergétique

présentée par :

**ABDELAZIZ TIMESLI**

---

## Simulation du soudage par friction et malaxage à l'aide de méthodes sans maillage

---

Thèse soutenue publiquement le 27/04/2013, à Casablanca devant le jury composé de :

Noureddine DAMIL	Professeur, Faculté des Sciences Ben M'Sik.	Rapporteur et Président
Abdellatif IMAD	Professeur, Ecole polytechnique de Lille.	Rapporteur et Examineur
Lahcen AZRAR	Professeur, FST de Tanger.	Rapporteur
Mohamed BELHAQ	Professeur, Faculté des Sciences Ain Chock.	Examineur
Hamid ZAHROUNI	Professeur, Université de Lorraine.	Examineur
Bouazza BRAIKAT	Professeur, Faculté des Sciences Ben M'Sik.	Examineur
Hassane LAHMAM	Professeur, Faculté des Sciences Ben M'Sik.	Examineur
Abdelhadi MOUFKI	Professeur, Université de Lorraine.	Examineur

*Laboratoire LEM3, CNRS UMR 7239, Metz, France.*

*Université de Lorraine - Pôle M4 : matière, matériaux, métallurgie, mécanique*

# DEDICACES

Je remercie infiniment toutes les personnes qui m'ont soutenu jusqu'à cette étape de mon parcours universitaire.

Je veux dédier ce titre de doctorat à :

- mes chers parents pour leur soutien continu, leurs conseils, leurs efforts qu'ils ont fourni pour mon éducation depuis mon enfance pour que je devienne ce que je suis aujourd'hui ; une personne utile pour soi même et pour la société à la quelle j'appartient.

- mes frères et mes sœurs qui par leur amour ont contribué à mon épanouissement dans le domaine de la recherche scientifique.

- chaque personne de ma grande famille.

- tous mes amis.

Que seul Dieu rende à chacun tout le bien qu'il m'a fait.

# REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier profondément toutes les personnes qui ont contribué de loin ou de près à la réalisation de ce travail scientifique dans le domaine de la mécanique.

Spécialement, mes vives remerciements sont adressés à mes encadrants, les professeurs B. BRAIKAT, H. ZAHROUNI, H. LAHMAM et A. MOUFGI, pour leur engagement scientifique et leur soutien durant la réalisation des travaux de thèse.

Je présente mes remerciements aux membres de jury, les professeurs N. DAMIL, A. IMAD, L. AZRAR et M. BELHAQ, pour avoir accepté de rapporter et de juger ce travail de thèse.

Merci à tous les professeurs qui ont contribué à ma formation en Maîtrise ès Sciences et Techniques (MST) spécialité Energétique et en Master Sciences Mécaniques.

Merci à mes amis les doctorants du Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux (LIMAT) et du Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3) qui m'ont soutenu durant ces années de thèse. Merci aux fonctionnaires du secrétariat de l'Université Hassan II Mohammedia-Casablanca, l'Université de Lorraine, la Faculté des Sciences Ben M'sik, Laboratoire LEM3 et Laboratoire LIMAT.

En fin, mes remerciements vont à ma famille en particulier mes chers parents.

# Résumé

Le procédé de soudage par friction et malaxage est un procédé récent qui a été développé au sein de l'institut de soudure britannique " The Welding Institute " au début des années 90. Ce procédé, utilisé généralement en aéronautique, est sans apport de matière et permet de souder principalement des alliages d'aluminium difficilement soudables par les procédés classiques de soudage. Il consiste à malaxer le matériau de base à l'aide d'un outil constitué d'un pion et d'un épaulement frottant sur les faces supérieures des tôles à souder. La modélisation de ce procédé est très complexe puisque ce dernier implique des couplages entre des phénomènes mécaniques, thermiques et métallurgiques. Le malaxage dans le procédé de soudage FSW est difficile à simuler à l'aide de la méthode des éléments finis (en lagrangien) puisque la zone proche de l'outil de soudage est le siège de grandes déformations. Donc le remaillage est nécessaire. Cependant, le remaillage est cher et très difficile pour les problèmes tridimensionnels. Par ailleurs, après un remaillage, il est nécessaire d'interpoler les champs (vitesses, contraintes,...) correspondant à la solution courante, ce qui peut introduire des erreurs supplémentaires dans le calcul (on parle de diffusion numérique). Nous proposons dans ce travail des modèles basés sur la méthode sans maillage dite " Smoothed Particle Hydrodynamics SPH " et la méthode des moindres carrés mobiles (Moving Least Square MLS) pour la simulation de ce procédé. Ces modèles sont formulés dans le cadre lagrangien et utilisent la forme forte des équations aux dérivées partielles. Le premier modèle basé sur SPH considère la zone de soudure comme un fluide non newtonien faiblement compressible et dont la viscosité dépend de la température. Ce modèle est proposé pour la simulation numérique du comportement thermomécanique d'un matériau soudé par le procédé FSW. Dans le deuxième modèle, un algorithme itératif implicite de premier ordre a été proposé, pour simuler le malaxage de la matière dans le cas d'un matériau viscoplastique, en utilisant la méthode MLS et la technique de collocation. Le troisième modèle est un algorithme implicite d'ordre élevé basée sur le couplage de la méthode MLS et la Méthode Asymptotique Numérique MAN. Cet algorithme permet de réduire le temps de calcul par rapport à l'algorithme itératif implicite de premier ordre. La validation de ces trois modèles proposés a été faite par le code industriel Fluent.

**Mots clés :** Soudage par friction et malaxage, Méthodes sans maillage, Algorithme implicite, Méthode asymptotique numérique.

# Abstract

Friction stir welding is a recent process that has been developed by the British Welding Institute TWI " The Welding Institute " since 1990s. This process, generally used in aerospace, does not need additional material and allows mainly joining plates of aluminum alloys which are difficult to weld by the classical welding processes. It consists in mixing the base material using a tool comprising a pin and a shoulder which heats the plates to be welded by friction. The modeling of this process is very complex since it involves the coupling between mechanical, thermal and metallurgical phenomena. The mixing in welding process FSW is difficult to simulate using finite element method in lagrangian framework since the area near the welding tool is submitted to large deformations. So remeshing procedure is often required. However, remeshing can be very expensive and difficult to perform for three-dimensional problems. Moreover, after remeshing step, it is necessary to interpolate the fields (velocities, constraints ...) corresponding to the current solution, which may lead to additional errors in the calculation (called numerical diffusion). We propose in this work models based on meshless methods called " Smoothed Particle Hydrodynamics SPH" and Moving Least Square method for the simulation of this welding process. These models are formulated in lagrangian framework and use the strong form of partial differential equations. The first model based on SPH considers the welding zone as a weakly compressible non-newtonian fluid and whose viscosity depends on the temperature. This model is proposed for the numerical simulation of thermo-mechanical behavior of a welded material by FSW process. The second model is a first order implicit iterative algorithm proposed to simulate material mixing in the case a visco-plastic behavior using the MLS method and the collocation technique. The third model is a high order implicit algorithm based on the coupling of MLS method and Asymptotic Numerical Method (ANM). This algorithm allows reducing the computation time by comparison with the first order implicit iterative algorithm. The validation of these three proposed models was done by the industrial code Fluent.

**Keyword :** Friction stir welding, Meshless methods, Implicit algorithm, Asymptotic numerical method.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
------------------------------	----------

<b>Chapitre 1</b>	
<b>Etude bibliographique sur le procédé de soudage par friction et malaxage</b>	<b>5</b>

1.1	Introduction . . . . .	6
1.2	Procédé de soudage par friction et malaxage (Friction Stir Welding FSW) .	6
1.2.1	Présentation générale . . . . .	6
1.2.2	Phénomènes physiques observés dans le procédé . . . . .	12
1.2.3	Paramètres du procédé . . . . .	13
1.2.4	Avantages et limitations du procédé FSW . . . . .	15
1.2.5	Mise en œuvre du procédé . . . . .	17
1.3	Modélisation du procédé FSW . . . . .	18
1.3.1	Modélisation thermique . . . . .	19
1.3.2	Modélisation mécanique . . . . .	21
1.3.3	Modélisation thermomécanique . . . . .	21
1.4	Conclusion . . . . .	23

<b>Chapitre 2</b>	
<b>Discussion générale sur les méthodes sans maillage</b>	<b>25</b>

2.1	Introduction . . . . .	26
2.2	Quelques inconvénients des méthodes avec maillage . . . . .	26
2.3	Etude bibliographique sur les méthodes sans maillage . . . . .	28
2.3.1	Historique et généralités sur les méthodes sans maillage . . . . .	28
2.3.2	Avantages des méthodes sans maillage . . . . .	29

2.3.3	Difficultés liées aux méthodes sans maillages et leurs solutions proposées . . . . .	30
2.4	Méthode Smoothed Particle Hydrodynamics SPH . . . . .	31
2.5	Méthode des moindres carrés mobiles (Moving Least Square MLS) . . . . .	36
2.6	Algorithme de recherche des voisins . . . . .	38
2.7	Conclusion . . . . .	40

**Chapitre 3**

**Modélisation et simulation 2D du procédé FSW par la méthode sans maillage SPH** **43**

3.1	Introduction . . . . .	44
3.2	Modèle proposé . . . . .	45
3.3	Approche de résolution numérique . . . . .	46
3.3.1	Approximation par l’approche SPH . . . . .	46
3.3.2	Schéma en temps . . . . .	48
3.4	Discussion numérique . . . . .	49
3.5	Conclusion . . . . .	54

**Chapitre 4**

**Simulation du malaxage observé dans le procédé FSW par le couplage de la méthode itérative et de la méthode sans maillage MLS** **57**

4.1	Introduction . . . . .	58
4.2	Equations du problème . . . . .	59
4.3	Modèle numérique . . . . .	61
4.3.1	Discrétisation spatiale . . . . .	61
4.3.2	Discrétisation temporelle . . . . .	62
4.4	Stratégie de résolution . . . . .	62
4.5	Application numérique . . . . .	63
4.5.1	Influence de la distribution des points . . . . .	65
4.5.2	Influence de la taille du domaine d’influence . . . . .	69
4.5.3	Influence de la fonction poids . . . . .	70
4.5.4	Validation de l’algorithme itératif avec le code industriel Fluent . . . . .	70
4.6	Conclusion . . . . .	75

---

**Chapitre 5****Simulation du malaxage par le couplage de la méthode asymptotique numérique et de la méthode MLS 77**

5.1	Introduction . . . . .	78
5.2	Présentation de l'algorithme . . . . .	78
5.2.1	Problème à résoudre . . . . .	78
5.2.2	Discrétisation temporelle . . . . .	79
5.2.3	Changement de variables . . . . .	79
5.2.4	Approximation des inconnues par l'approche sans maillage MLS . .	80
5.2.5	Transformation homotopique . . . . .	81
5.2.6	Technique de perturbation . . . . .	81
5.3	Application numérique et discussion . . . . .	83
5.4	Conclusion . . . . .	88
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>93</b>



# Introduction générale

La simulation numérique des phénomènes physiques évoluant dans le temps et dans l'espace se confronte, souvent, à des difficultés au niveau de la modélisation et de la résolution. Dans le cas de la mécanique, ces difficultés résident dans les grandes déformations, contact et frottement, la modélisation des fissurations et de leur propagation, les phénomènes d'impact, le déferlement et la surface libre ...etc. La formulation des problèmes, en mécanique, s'appuie, en général, sur des équations aux dérivées partielles non linéaires de type spatio-temporelles et dont la résolution nécessite des méthodes numériques adéquates.

La méthode des éléments finis reste la technique numérique la plus utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles grâce à sa simplicité. Néanmoins, pour les problèmes non linéaires impliquant de grandes déformations, cette méthode trouve ses limites à cause de la distorsion excessive du maillage. Les techniques de remaillage ont été bien développées pour résoudre cette difficulté, mais, elles induisent un temps de calcul très important et un lissage de la solution à cause de la projection des champs sur le nouveau maillage. De plus, le remaillage reste, techniquement, difficile à mettre en œuvre pour les problèmes tridimensionnels. Parallèlement à la méthode des éléments finis, notons l'existence des méthodes sans maillage qui ont été développées de façon importante depuis les années 90. Parmi ces méthodes, citons la plus ancienne qui a été développée en astrophysique : Smoothed Particle Hydrodynamics SPH [62; 46; 75; 76; 77; 138]. Cette méthode permet de remplacer le milieu continu par un ensemble de particules qui ont chacune sa propre masse et son propre volume. Les champs de vitesse, de température... sont liés à la particule considérée qui est influencée directement par ses voisins immédiats. Cette méthode est formulée, généralement, dans un cadre lagrangien actualisé et utilise une technique de collocation; voir les travaux de Lucie [62] et Gingold et Monaghan [46]. Plusieurs méthodes sans maillage ont été proposées pour résoudre les problèmes de mécanique. Le but est de palier les difficultés liées au remaillage. Notons au passage de la méthode des éléments diffus ou méthode des moindres carrés mobiles MLS [84; 11; 69] et la méthode Element Free Galerkin EFG [13] qui ont été proposées par des chercheurs en mécanique numérique. Ces méthodes utilisent une discrétisation de type

Galerkin et sont réputées pour leur stabilité. Notons également la méthode des éléments naturels NEM [103; 30] qui est beaucoup plus proche de la méthode des éléments finis. Elle utilise le diagramme de Voronoi pour la construction de fonctions de forme linéaires.

Parmi les principales difficultés de ces méthodes sans maillage, on peut noter la recherche des voisins et le traitement des conditions aux limites. Plusieurs travaux de recherche ont été réalisés pour surmonter cette difficulté [28; 45; 61; 83; 26; 3].

Dans ce travail de thèse, on s'intéresse particulièrement à la modélisation et à la simulation numérique d'un nouveau procédé de soudage qui a été inventé en 1991 par l'institut de soudage britannique (the Welding Institute) [109]. Ce procédé, connu sous le nom de soudage par friction et malaxage ou Friction Stir Welding FSW, est utilisé en industrie pour l'assemblage des tôles métalliques. Cet assemblage se réalise par frottement et malaxage du matériau des tôles à souder sans apport de matière et sans recours à l'utilisation d'une source de chaleur extérieure [21] contrairement aux techniques de soudage traditionnelles comme le soudage à l'arc et le soudage au laser. Le procédé FSW est adapté, spécialement, aux alliages d'aluminium et d'autres alliages métalliques réputés difficilement soudables avec les procédés classiques. La soudure avec FSW est réalisée sans atteindre la température de fusion du métal de base chose qui n'est pas réalisable avec les procédés de soudage habituels.

La simulation numérique du procédé FSW est très complexe. En effet, le voisinage de l'outil de soudage est le siège de grandes déformations avec un couplage thermomécanique dû aux frottements de l'outil et des plaques à souder d'une part et à la dissipation plastique d'autre part. Dans cette zone, le métal est dans un état pâteux et malaxé par l'outil pour obtenir une bonne soudure sans défauts.

Les premières méthodes numériques proposées, pour la modélisation de ce procédé industriel, s'appuient sur des formulations de type eulérienne, lagrangienne ou lagrangienne eulérienne arbitraire ALE [43; 97; 70; 14; 38]. La formulation eulérienne est bien adaptée à l'étude de l'écoulement de la matière, mais, elle ne permet pas de modéliser des géométries complexes de l'outil et la prédiction des défauts. La méthode lagrangienne permet de suivre l'histoire de la déformation du matériau et permet, en théorie, de modéliser des géométries complexes de l'outil. Cependant, elle souffre de problèmes de convergence et de distorsion du maillage qui, malgré l'utilisation des techniques de remaillage, reste difficile à utiliser. Les techniques ALE ont été proposées pour profiter des avantages des méthodes lagrangiennes et des méthodes eulériennes tout en évitant leurs inconvénients. Jusqu'à présent, on n'a pas encore trouvé de contribution convaincante dans le cadre du soudage FSW [43; 97].

Généralement, la plupart des problèmes non linéaires sont résolus par des méthodes numériques standards telles que les méthodes incrémentales itératives [136; 105; 106]. Ces

---

méthodes demandent un grand nombre d'inversions de matrices ce qui se traduit par un coût de calcul considérable. Récemment, des algorithmes d'ordre élevé, basés sur le couplage de la transformation homotopique et la technique de perturbation telle que la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [24; 79; 114; 55], ont été développés afin de réduire le coût de calcul en terme de nombre d'inversions de la matrice tangente.

Dans ce travail, on propose une contribution à la modélisation et à la simulation numérique du procédé de soudage par friction et malaxage en utilisant, d'une part, des méthodes sans maillage, et d'autre part, des algorithmes implicites de premier ordre et d'ordre élevé. Les méthodes sans maillage s'appuient sur une technique de collocation pour éviter les difficultés liées à l'intégration numérique et les algorithmes implicites s'appuient sur les techniques d'homotopie et la méthode asymptotique numérique pour la résolution du problème non linéaire. L'efficacité des algorithmes proposés est testée sur des problèmes bidimensionnels. Les résultats numériques sont comparés avec ceux obtenus en utilisant le code industriel Fluent. Ce code est basé sur une formulation eulérienne et une discrétisation en volumes finis.

La suite de ce mémoire de thèse est composée de cinq chapitres et une conclusion générale. Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique sur le procédé de soudage par friction et malaxage FSW. Dans ce chapitre, on donne une description détaillée sur ce procédé ainsi qu'un historique sur les méthodes numériques et semi-analytiques développées pour la modélisation du comportement thermomécanique du matériau des plaques à souder.

Le deuxième chapitre est une discussion générale sur les méthodes sans maillage. On présente également dans ce chapitre une étude approfondie sur la méthode SPH et la méthode MLS que nous intégrons dans les différentes modélisations et simulations proposées dans ce travail.

Dans le troisième chapitre, on présente la modélisation et la simulation numérique du comportement thermomécanique du matériau soudé par le procédé FSW en utilisant la méthode SPH. Ce modèle considère la zone de soudure comme un fluide non newtonien, faiblement compressible et dont la viscosité dépend de la température. L'outil de malaxage est supposé de forme circulaire, animé d'un mouvement de translation et de rotation uniformes. L'algorithme, proposé dans cette modélisation, est utilisé ici pour simuler le procédé FSW appliqué à deux plaques rectangulaires en alliage d'aluminium.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation d'un algorithme itératif implicite que nous avons développé pour simuler le malaxage de la matière d'un matériau viscoplastique à l'aide de la méthode MLS et la technique de collocation. Dans la modélisation proposée, l'outil de malaxage est animé d'un mouvement de rotation uniforme.

Le cinquième chapitre est consacré à la présentation d'un nouvel algorithme implicite

d'ordre élevé basé sur le couplage de la méthode MLS et la Méthode Asymptotique Numérique MAN pour la simulation du malaxage de la matière d'un matériau à comportement viscoplastique. L'avantage de cet algorithme est la réduction du coût de calcul exigé par l'algorithme itératif implicite en terme de nombre d'inversions de la matrice tangente. Une comparaison entre ces deux algorithmes implicites est présentée dans ce chapitre pour montrer la performance de la modélisation et la simulation numérique basée sur le couplage de la méthode MLS et la méthode MAN.

En fin, une conclusion générale et quelques projets de recherche envisagés en perspectives de ce travail sont proposés.

# Chapitre 1

## Etude bibliographique sur le procédé de soudage par friction et malaxage

---

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Procédé de soudage par friction et malaxage (Friction Stir Welding FSW)</b>	<b>6</b>
1.2.1	Présentation générale	6
1.2.2	Phénomènes physiques observés dans le procédé	12
1.2.3	Paramètres du procédé	13
1.2.4	Avantages et limitations du procédé FSW	15
1.2.5	Mise en œuvre du procédé	17
<b>1.3</b>	<b>Modélisation du procédé FSW</b>	<b>18</b>
1.3.1	Modélisation thermique	19
1.3.2	Modélisation mécanique	21
1.3.3	Modélisation thermomécanique	21
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>23</b>

---

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons une description plus ou moins détaillée sur le procédé récent de soudage par friction et malaxage (FSW), considéré en tant que nouvelle technique du 21<sup>ème</sup> siècle, qui permet de souder des alliages difficilement soudable par des procédés de soudages classiques. Les différents paramètres, mis en jeu dans le procédé FSW, sont rappelés dans ce chapitre. Nous présentons également quelques travaux de recherche réalisés pour modéliser l'évolution thermique et mécanique de la matière lors du soudage et nous mettons en lumière les difficultés rencontrées par les auteurs de ces travaux.

## 1.2 Procédé de soudage par friction et malaxage (Friction Stir Welding FSW)

### 1.2.1 Présentation générale

Le soudage par friction et malaxage est un procédé inventé en 1991 par l'institut britannique de soudage (The Welding Institute). Les équipements du procédé FSW permettent de souder en deux ou trois dimensions et peuvent appliquer des efforts axiaux allant jusqu'à  $90KN$ . La rigidité globale de ces machines assure une bonne précision du suivi de joint. De plus, les actionneurs et systèmes de guidage sont conçus pour accuser des efforts importants. Ceci permet de souder une large gamme de matériaux et d'épaisseurs. La figure 1.1-a présente la machine ESAB permettant de réaliser des soudures en deux dimensions et dont les caractéristiques sont :  $89KN$  pour l'effort de plongée maximal,  $2000tr/min$  pour la vitesse de rotation maximale,  $2000mm/min$  pour la vitesse d'avance maximale,  $2m$  pour la longueur de soudure maximale. La figure 1.1-b présente la machine MTS de type portique à cinq axes permettant de réaliser des soudures en trois dimensions et dont les caractéristiques sont :  $89KN$  pour l'effort de plongée maximal,  $2000tr/min$  pour la vitesse de rotation maximale,  $2000mm/min$  pour la vitesse d'avance maximale,  $2m$  pour la longueur de soudure maximale, mesure des efforts possibles.



FIGURE 1.1 – Machines de soudage FSW de l’Institut de Soudure (Metz) (a)- Machine ESAB. (b)- Machine MTS

Dans ce procédé, la chaleur est générée, d’une part, par le frottement entre un outil métallique entraîné par une vitesse de rotation et une vitesse de translation et les deux plaques à souder, et d’autre part, par la dissipation plastique (voir figure 1.2).

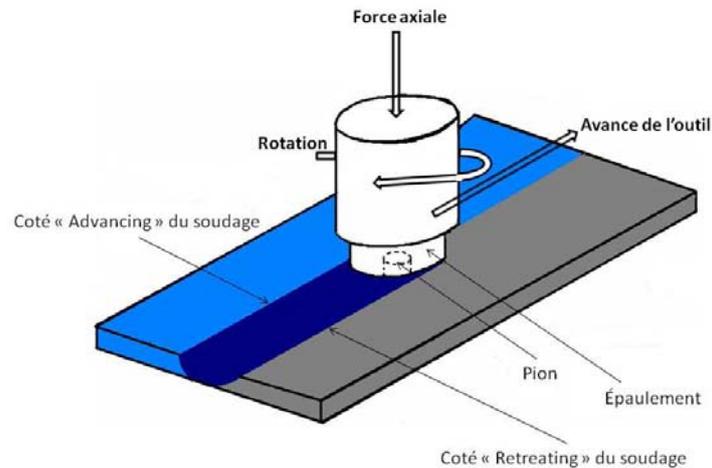


FIGURE 1.2 – Illustration du procédé de soudage par friction et malaxage

Le procédé de soudage par friction et malaxage utilise un outil à haute résistance mécanique et thermique qui est constitué d’un épaulement (shoulder) prolongé par un pion (pin) coaxial qui réalise le malaxage (voir figure 1.3). Les tôles à souder sont fixées soigneusement sur un montage d’appui. La chaleur, générée par le frottement de l’épaulement et celle du pion, transforme la matière à l’état pâteux au voisinage de l’outil (figure 1.4) et facilite la pénétration et le déplacement de l’outil le long du joint à souder pour former la

soudure après refroidissement. Les matériaux, utilisés pour les outils de soudage des tôles à base d'aluminium, sont, principalement, des aciers résistants aux hautes températures.

La géométrie de l'outil est très importante dans le développement du procédé. Elle joue un rôle essentiel dans le malaxage de la matière et la génération de la chaleur. Le choix des dimensions et du profil du pion dépend de la nature des matériaux constituant les tôles à souder et de leur épaisseur.

La forme du pion est généralement tronconique et/ou prismatique ou hélicoïdale et peut contenir des reliefs variés dans le but d'augmenter l'effet du malaxage du métal (figure 1.3) et, par suite, de rendre plus facile la formation de la soudure (figure 1.4). Dans certaines applications, le pion est excentré par rapport à son axe de rotation dans le but d'amplifier le malaxage. Plusieurs recherches sont orientées vers l'optimisation de la géométrie du pion.

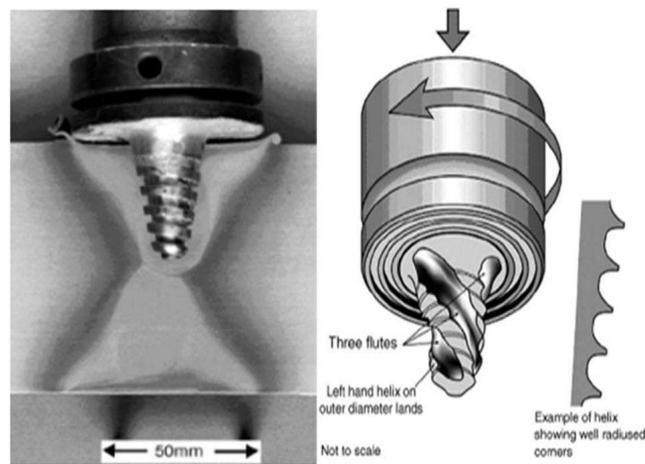


FIGURE 1.3 – Exemple de géométrie d'outil : Thomas W.M. et al. 2001  
(Référence : [110])

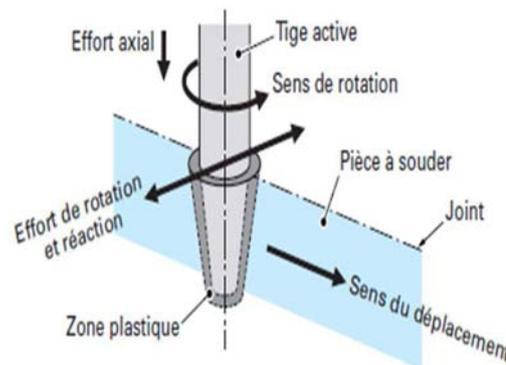


FIGURE 1.4 – Formation de la soudure

L'épaulement est globalement plan, ses dimensions transversales restent suffisamment grandes soit environ cinq fois le diamètre du pion afin de couvrir totalement la zone

affectée par le soudage. Il joue ainsi deux rôles principaux ; d'une part, il empêche le métal malaxé de fluer vers le haut et, d'autre part, il chauffe la matière par frottement. Le soudage s'effectue selon les étapes suivantes :

- **Phase de pénétration de l'outil (figure 1.5-a) :** Dans cette étape, on réalise la pénétration du pion sous l'effet d'un effort vertical variant de quelques  $KN$  jusqu'à une trentaine de  $KN$ . En effet, le pion pénètre progressivement à l'intérieur du joint, à l'aide de la vitesse de rotation, jusqu'à ce que l'épaulement soit en contact avec les plaques à souder.
- **Phase transitoire d'échauffement par frottement (figure 1.5-b) :** Cette étape transitoire consiste à entraîner localement l'épaulement dans un mouvement de rotation pour transformer la matière à l'état pâteux. Cette étape de pré-soudage dure une à trois secondes avant le passage à l'étape de soudage.

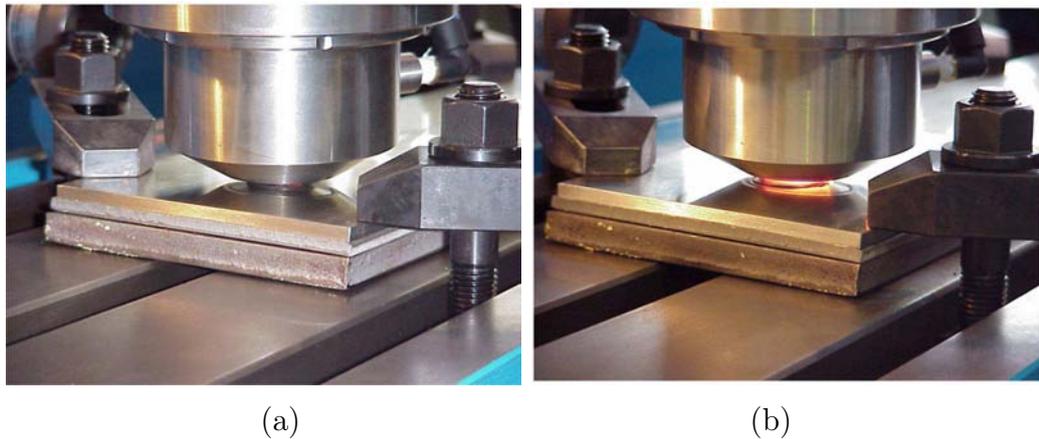


FIGURE 1.5 – (a)- Fin de phase de pénétration / (b)- Phase de chauffage  
(Référence : Hitachi America, Ltd.)

- **Phase de soudage (figure 1.6-a) :** Dans cette étape, l'outil est animé d'un mouvement de translation dans la direction du joint représentant l'interface des deux plaques à souder.
- **Phase de retrait de l'outil (figure 1.6-b) :** A la fin du soudage, l'outil est retiré des deux plaques à souder. Ce retrait laisse un trou difficile à remplir de façon simple. Ce problème peut être résolu dans le cas des soudures linéaires ouvertes par l'élimination des défauts au début et à la fin du joint soudé. Dans le cas des soudures circulaires fermées, la fin du joint soudé au niveau du recouvrement peut être résolue de façon particulière, par exemple par fusion. De plus, le trou peut être contourné par l'utilisation d'un outil à pion rétractable.

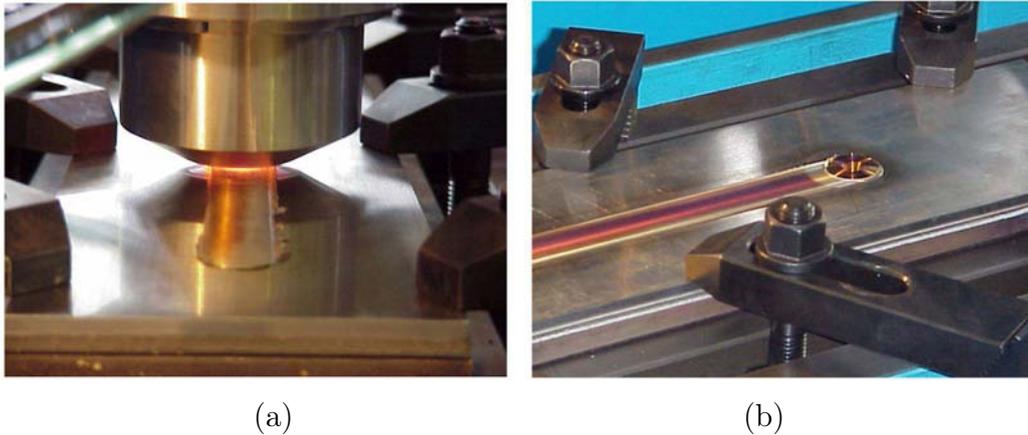


FIGURE 1.6 – (a)- Phase de translation / (b)- Trou à la fin de soudure  
(Référence : Hitachi America, Ltd.)

La figure 1.7 illustre la topographie de la coupe transversale au niveau du joint de soudage. Dans cette coupe, on distingue quatre zones : zone *A*, zone *B*, zone *C* et zone *D*. Dans la zone *A*, le métal de base n'est pas affecté par le soudage. Les propriétés mécaniques et la microstructure restent inchangées au cours du procédé. Dans la zone *B*, la matière est affectée thermiquement. Les propriétés mécaniques et la microstructure sont modifiées thermiquement par la source de chaleur effective. La zone *C* est affectée thermo-mécaniquement. Les propriétés mécaniques et la microstructure sont modifiées par la chaleur et par les grandes déformations dues à la rotation de l'outil. La zone *D* est le noyau de la soudure qui représente le lieu des déformations plus importantes par rapport à la zone *C* et où la température maximale est comprise entre  $400^{\circ}\text{C}$  et  $500^{\circ}\text{C}$  pour les alliages d'aluminium pendant le soudage [107]. La forme du noyau dépend étroitement de l'alliage et des paramètres du procédé [82]. Elle peut être soit en forme de cuvette soit en forme d'ellipsoïde (voir figure 1.8).

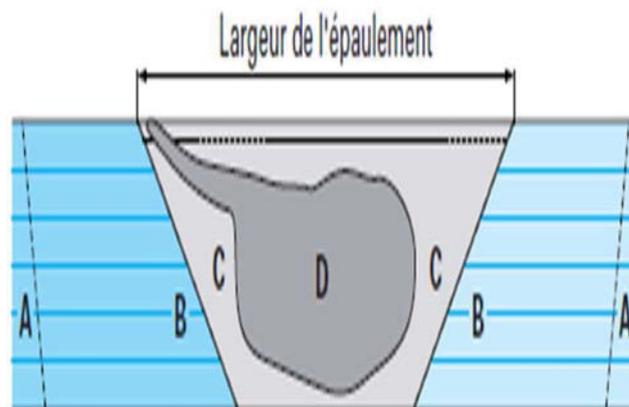


FIGURE 1.7 – Coupe transversale schématisée d'une soudure

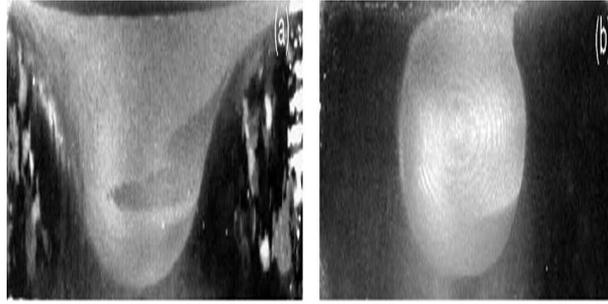


FIGURE 1.8 – Noyaux : (a)- forme de cuvette; (b)- forme d'ellipsoïde  
(Référence : [82])

La figure 1.9 représente une coupe transversale macrographique de la soudure sur un alliage d'aluminium 7075Al – T651 représentant les quatre zones citées ci-dessus.

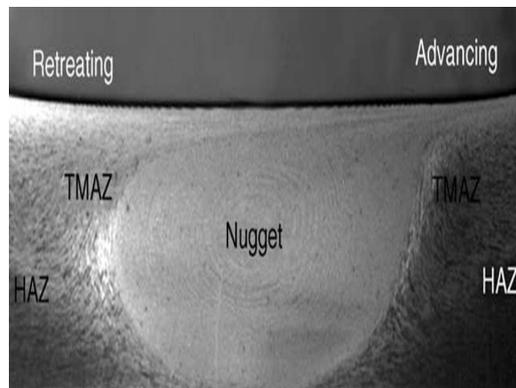


FIGURE 1.9 – Coupe d'une soudure sur un alliage d'aluminium 7075Al-T651  
(Référence : [82])

La figure 1.10 illustre une comparaison entre la soudure FSW et la soudure à l'arc. La figure 1.11 montre une comparaison de la distorsion entre le soudage FSW et le soudage à l'arc sur de l'aluminium de 5mm d'épaisseur, ce qui permet d'observer que le joint soudé est soumis à de faibles distorsions dans le cas de FSW.

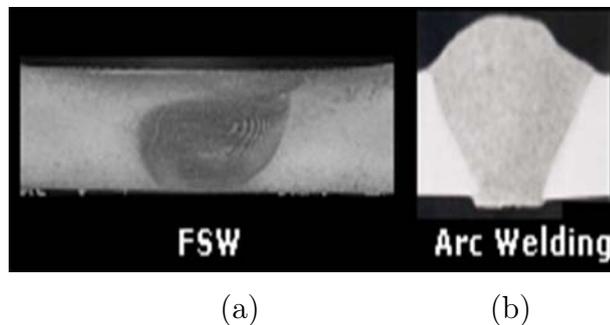


FIGURE 1.10 – (a)- Coupe transversale d'une soudure par FSW. (b)- Coupe transversale d'une soudure à l'arc.

(Référence : Hitachi America, Ltd.)

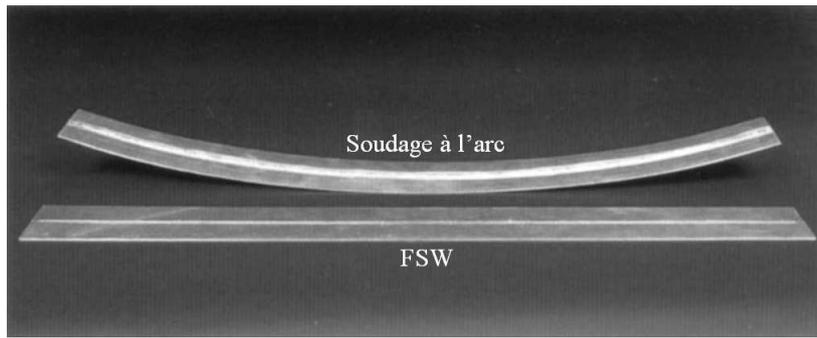


FIGURE 1.11 – Comparaison de la distorsion entre le soudage FSW et le soudage à l'arc (Référence : Hitachi America, Ltd.)

### 1.2.2 Phénomènes physiques observés dans le procédé

Les divers phénomènes physiques, mis en jeu pendant le soudage par FSW, sont de trois types :

- **Mécanique** : En général, les phénomènes mécaniques sont dus au frottement à l'interface entre l'outil et les pièces soudées et à la déformation plastique du matériau. La source de frottement est le contact de l'outil en rotation avec le matériau. Le frottement est caractérisé par une contrainte de cisaillement à l'interface. La déformation plastique trouve sa source dans le mouvement du matériau en rotation sous l'effet du frottement à l'interface outil plaques et dans le malaxage dû au pion. La déformation plastique est importante dans la région située sous l'outil.
- **Thermique** : Les deux phénomènes thermiques principaux au cours du procédé FSW sont la génération et la conduction de la chaleur. La génération de la chaleur vient d'une source de chaleur surfacique due au frottement à l'interface et une source volumique due à la déformation plastique du matériau. La répartition de la génération de la chaleur entre ces deux sources dépend de la condition de contact entre l'outil et le matériau. En effet, pour un contact presque collant, la chaleur est principalement générée par la déformation plastique du matériau. Par contre, pour un contact glissant, la plus grande partie de la chaleur est créée par le frottement. La chaleur générée est transférée principalement par conduction. Le transfert par conduction dans les pièces soudées dépend de deux choses. Premièrement, il dépend de la conductivité thermique du matériau soudé, par exemple, l'aluminium est caractérisé par une grande conductivité thermique, ce qui contribue à évacuer rapidement la chaleur créée. En second, il dépend de la chaleur évacuée dans la plaque support et dans l'outil c'est-à-dire la résistance des interfaces de contact aux transferts thermiques (voir figure 1.12). Finalement, la chaleur est évacuée aussi par convection entre l'outil, les deux plaques à souder, la plaque support avec le milieu

extérieur (ambient).

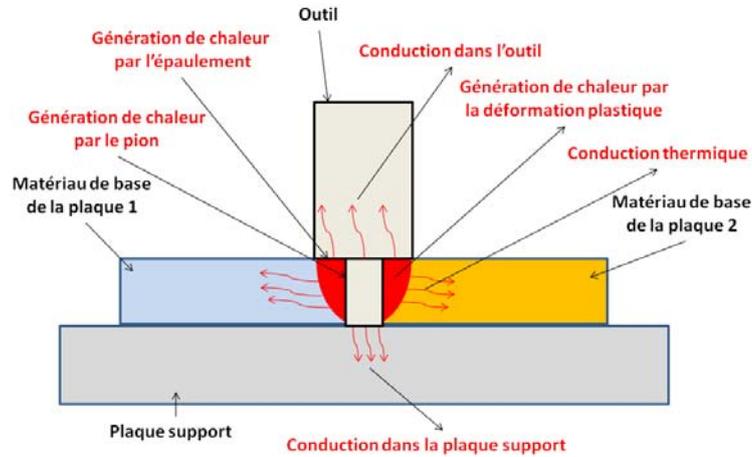


FIGURE 1.12 – Transferts thermiques induits par le procédé FSW

- **Métallurgie** : Les phénomènes mécaniques et thermiques, dans l'ensemble des procédés de soudage par fusion, entraînent une modification de la microstructure du matériau de base et ses propriétés mécaniques. Cet inconvénient provient des phénomènes métallurgiques qui apparaissent lors du soudage et qui représentent le lieu de concentration des contraintes dans le cas des sollicitations externes. Le premier phénomène métallurgique est la modification de l'état de précipitation du matériau. Le second est la recristallisation du matériau.

Le procédé de soudage FSW permet au contraire d'obtenir des modifications métallurgiques moins importantes, par rapport aux autres procédés, causées par les différents changements de phase au cours de soudage. Une coupe transversale du joint soudé permet d'obtenir les différentes zones dans lesquelles la matière est affectée thermiquement (Heat Affected Zone HAZ) ou thermo-mécaniquement (Thermo-Mechanical Affected Zone TMAZ) (voir figure 1.9). Chaque zone dépend de la température atteinte, des modifications métallurgiques et des déformations subies au cours du procédé de soudage.

### 1.2.3 Paramètres du procédé

Dans ce paragraphe, on cite quelques facteurs majeurs dans le procédé FSW à savoir : la vitesse de rotation de l'outil ( $tr/min$ ), la vitesse d'avance de l'outil ( $mm/min$ ) le long de la ligne de joint, l'angle d'inclinaison de l'outil et l'effort de plongée de l'outil dans la matière à souder.

### a- Vitesse de rotation et vitesse d'avance

La vitesse de rotation et la vitesse d'avance de l'outil dépendent de la nature de l'alliage à assembler et des dimensions des plaques. Le couple maximal résistant permet d'optimiser le coût énergétique du procédé. Dans les applications connues, la vitesse de rotation est de l'ordre de 200 à 500tr/min et la vitesse de soudage reste limitée et généralement inférieure à 1m/mn. En effet, la progression de l'outil doit permettre à la matière de s'écouler correctement de l'avant vers l'arrière de l'outil.

Les deux vitesses sont liées par le rapport  $\frac{\text{vitesse d'avance}}{\text{rayon du pion} \times \text{vitesse de rotation}}$  pour qualifier le soudage. Si ce rapport est faible, on dit que le soudage est chaud car le malaxage et la chaleur dissipée par frottement seront élevés et engendreront de fortes températures. Par contre, si ce rapport est grand, on dit que le soudage est froid car la chaleur dissipée par frottement entre l'outil et les plaques ainsi que le malaxage de la matière n'induisant pas des températures très élevées dans les pièces.

### b- Angle d'inclinaison de l'outil

L'angle d'inclinaison de l'outil par rapport à la surface des plaques à souder est un paramètre important à prendre en considération dans l'optimisation du procédé car son choix approprié permet à la matière de passer efficacement de l'avant vers l'arrière du pion.

### c- Efforts appliqués

Les efforts appliqués sont de trois types :

**Effort appliqué en phase de pénétration :** Pour permettre à l'outil de progresser dans le joint à souder, un effort axial est imposé. Grâce à l'action de l'effort axial et au changement de comportement du matériau à l'état pâteux (les déformations plastiques et les frottements mis en jeu entre le pion et les deux plaques provoquent une montée progressive de la température), le pion s'enfonce progressivement entre les deux plaques à souder en extrudant la matière malaxée. Il pénètre dans la matière jusqu'à ce que l'épaulement soit en contact avec la surface des deux plaques à souder. Cette phase initie les conditions thermomécaniques dans lesquelles l'opération de soudage va débiter, en effet, elle est peu étudiée dans la littérature comme le montre Gerlich et al. [48].

**Effort appliqué en phase transitoire d'échauffement :** L'effort apparaît dans la phase transitoire d'échauffement lorsque l'épaulement entre en contact avec la surface des plaques à souder. Zaeh et al [126] montrent que l'usinage d'un pré-trou permet de réduire les efforts appliqués en fin de pénétration.

**Effort appliqué en phase de soudage :** La formation du joint soudé exige que l'épaulement de l'outil soit dans une position par rapport à la surface des tôles qui permet d'assurer l'apport d'énergie par frottement et de contenir le matériau malaxé [54]. Une mauvaise position de l'outil peut entraîner la formation de défauts [59]. Elle peut se contrôler de deux manières, soit par le pilotage de la position verticale de l'outil, soit par le contrôle de l'effort vertical appliqué sur l'outil au cours de la phase de soudage. La minimisation de l'effort appliqué améliore l'efficacité énergétique du procédé. Cet effort doit être optimal pour obtenir une bonne qualité du joint. Zhang et al. [116] ont montré, à travers la simulation numérique, qu'un effort trop faible entraînait la formation d'un défaut tunnel à l'arrière du pion à cause d'une déformation plastique du matériau insuffisante. Cependant, un effort trop grand implique un enfoncement de l'outil dans la matière à cause d'une déformation plastique et d'une température du matériau trop importantes. Parmi les solutions retenues qui permettent d'améliorer le malaxage, on trouve l'utilisation d'outils filetés et/ou vrillés car ces derniers engendrent un mouvement vertical du métal déplacé, ce qui mène à une meilleure intégrité du joint. A l'inverse, un outil lisse peut mener à un joint montrant des cavités internes. Cela conduit à une réduction importante de la résistance du joint en traction.

#### 1.2.4 Avantages et limitations du procédé FSW

Par rapport aux procédés de soudage classiques, le procédé FSW possède des avantages qui peuvent être classés comme suit :

**\*Avantages liés au procédé :**

- Large gamme d'épaisseurs soudables.
- Préparation des surfaces des pièces à assembler par usinage mécanique.
- Pas de décapage chimique avant soudure pour alliages légers.
- Possibilité de souder des matériaux différents.
- Soudure en une seule passe sur toute l'épaisseur, ou en deux passes opposées sur épaisseurs fortes.
- Pas de finition après soudage.
- Procédé sans apport de matière pour la réalisation de la soudure.
- Ce procédé est lui même la source d'énergie.
- Possibilité de soudure dans toutes les orientations.

**\*Avantages liés à la soudure par FSW :**

- Gamme de matériaux très étendue.
- Possibilité de soudure des alliages qui sont difficiles à souder par les procédés classiques.

- Soudage à l'état solide : pas de solidification du bain de fusion (pas de défaut de porosité, pas de fissuration à chaud).
- Propriétés mécaniques bonnes.
- Effets limités des contraintes résiduelles.
- Faible distorsion (figure 1.11).

**\*Avantages économiques et environnementaux :**

- Procédé non polluant ; pas de projections de gaz nuisibles ni d'émanations de fumées.
- Procédé économique en énergie.
- Pas de circulation d'eau de refroidissement.
- Pas de finition après soudage (sauf pour les soudures circulaires).
- Bon rendement énergétique.

**\*Avantages liés à l'équipement :**

- Automaticité aisée du procédé ; contrôle par commande numérique.
- Equipement électromécanique de conception simple de type machine-outil.
- Pas de protection thermique.
- Consommables limités à l'outil et à l'énergie électrique.
- Possibilité d'un contrôle en ligne des paramètres.

Ces avantages justifient l'adaptation de ce procédé aux alliages d'aluminium. Le soudage se réalise essentiellement sur des pièces minces bout à bout, mais accepte d'autres configurations de joints tels que le soudage d'angle ou en "T" ou le soudage par superposition. Les différentes configurations possibles pour le soudage FSW sont présentées sur la figure 1.13.

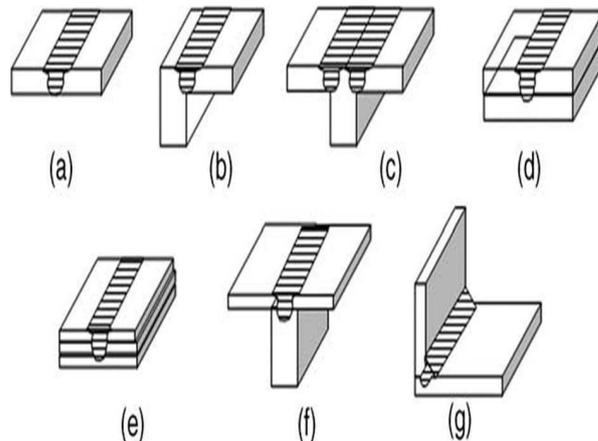


FIGURE 1.13 – Les différentes configurations de soudage effectuées par FSW : (a) bout à bout, (b) en coin, (c) en T, (d) transparence, (e) transparence multiple, (f) T par transparence, et (g) angle.

(Référence : [82])

Les limitations du procédé de soudage FSW peuvent être résumées comme suit :

- Bridage très important dû aux grands efforts mis en jeu.
- La présence d'un trou après retrait du pion à la fin de la soudure qui peut être contournée par l'utilisation d'un outil à pion rétractable.

## 1.2.5 Mise en œuvre du procédé

### a- Préparation des pièces à souder

Dans ce procédé, il n'y a ni perturbation ni incidence éventuelle sur la qualité géométrique et mécanique de l'assemblage. En particulier, pour des alliages d'aluminium, il n'est pas nécessaire de décaper les pièces avant de les souder et, de plus, les oxydes sont broyés mécaniquement et se diluent dans le joint soudé. En principe, l'outil entre en contact avec la matière des deux pièces à souder et sa vitesse de rotation et l'effort appliqué conduisent naturellement à sa plongée. Cependant, dans le cas des matériaux durs ou de tôles de forte épaisseur, on peut faciliter sa plongée en pratiquant un perçage préalable qui se comble ensuite par la soudure.

### b- Matériaux

Le procédé de soudage FSW est bien adapté, particulièrement, aux alliages d'aluminium d'épaisseurs moyennes (6 à 10mm). Pour développer les conditions d'application du procédé à ces matériaux industriels, de nombreuses recherches sont menées. Les autres procédés de soudage par fusion rencontrent des limites technologiques et impliquent des mesures de mise en œuvre plus contraignantes, ce qui permet de distinguer le procédé FSW par sa simplicité. L'application du procédé de soudage FSW aux autres matériaux réputés soudables comme le cuivre et ses alliages, le plomb, le titane et ses alliages, les alliages de magnésium, le zinc, les aciers doux et les matières plastiques, fait actuellement l'objet des études de recherche. Pour les aciers, la difficulté principale réside dans le choix du matériau de l'outil et sa géométrie.

### c- Epaisseurs

Le procédé FSW a été développé dans le cadre d'épaisseurs moyennes. Aujourd'hui, il est envisagé dans le cadre de tôles minces, soit bout à bout, soit par superposition, telles sont les configurations les plus utilisées dans la construction automobile.

#### **d- Positions de soudage**

Notons aussi qu'au cours du procédé de soudage par friction et malaxage, il y a la possibilité de déplacer soit la pièce soit l'outil. De plus, la gravité n'a pas d'influence sur le métal en phase viscoplastique, donc le soudage peut être réalisé sous différentes positions (horizontale, verticale, au plafond et orbitale) des plaques à souder.

### **1.3 Modélisation du procédé FSW**

Pour déterminer les paramètres optimaux de ce procédé (vitesse d'avance, vitesse de rotation, effort de plongée, etc.), il est nécessaire de réaliser une multitude de soudures et d'essais mécaniques coûteux. C'est ce qui justifie l'utilisation massive de l'outil de modélisation et de simulation numérique. Dans ce cas, l'implantation d'un modèle numérique dans un logiciel qui permet de simuler l'évolution du procédé FSW pour prédire numériquement les champs de température et les champs des contraintes et des déformations, s'avère comme une alternative à moindre coût des essais mécaniques. Un tel modèle permet ainsi de mieux contrôler au préalable les différentes étapes du soudage par FSW.

La modélisation analytique ou numérique ne vise pas à remplacer les essais expérimentaux mais à aider à mieux comprendre les phénomènes physiques et mécaniques mis en jeu lors du soudage. Cela permet de réduire et d'optimiser le nombre d'essais.

Les difficultés numériques qui se posent dans la modélisation de ce procédé sont liées au couplage entre des phénomènes mécaniques, thermiques et métallurgiques. D'autres paramètres comme les échanges de chaleur entre la tôle et le système de bridage avec ou sans plaque support ont aussi une influence au cours du soudage. Ces échanges de chaleur dépendent directement du type de contact choisi dans la modélisation. C'est pourquoi il est important de bien comprendre et décrire les différents choix proposés concernant le contact ainsi que les autres aspects comme la thermique, les grandes déformations, les lois de comportement et de frottement. Ainsi, il est intéressant de dissocier chaque aspect afin d'analyser son influence sur le procédé de soudage. Une des préoccupations importantes des utilisateurs de ce procédé est de chercher comment qualifier la qualité d'une soudure. Parmi les complexités de ce procédé, qui font l'objet de la recherche scientifique actuelle, la forme des outils, le mouvement complexe de la matière autour de l'outil, les déformations sévères, la répartition de la température, la microstructure au voisinage du joint de soudure. Plusieurs travaux de recherche ont été orientés vers l'étude des différents aspects liés à ce procédé et d'optimiser les paramètres de soudage.

Les approches, rencontrées dans la littérature, peuvent être classées en trois types de modèles : thermique, mécanique et thermomécanique. Ces modèles sont aussi classés en deux approches selon la formulation adoptée en mécanique des solides ou mécanique des

fluides. Une première approche, basée sur la mécanique des solides, consiste à étudier les grandes déformations du matériau ainsi que l'effet de l'histoire du chargement. Une seconde approche, basée sur la mécanique des fluides (CFD), s'intéresse à l'écoulement de la matière autour de l'outil de soudage à l'aide d'une formulation eulérienne. Malgré la possibilité d'obtenir des résultats satisfaisants en utilisant les modèles CFD, l'application de ce genre de modèles reste limitée aux cas de la modélisation du procédé FSW avec des outils à géométrie simple. Un outil à forme compliquée ne peut pas être considéré dans la simulation. Plusieurs auteurs ont utilisé la formulation ALE pour traiter ce genre de problème [38; 70], mais l'utilisation de cette procédure est encore limitée [132]. Dans ce travail, on propose d'utiliser les méthodes sans maillages SPH et MLS dans le cadre d'une formulation lagrangienne actualisée.

### 1.3.1 Modélisation thermique

Afin de modéliser le procédé de soudage FSW, plusieurs approches ont été proposées pour différents problèmes (échauffement, flux de matière, microstructure, contraintes résiduelles...). L'optimisation du procédé de soudage par frottement et malaxage nécessite des connaissances précises sur l'évolution de la distribution de température dans les plaques à souder. Ces cycles thermiques nous permettent de prédire les caractéristiques métallurgiques comme l'état de précipitation du matériau soudé. La mesure expérimentale de ces cycles de température présente plusieurs difficultés. En premier, il est impossible d'effectuer des mesures dans le volume déformé. En second, la précision de ces mesures est limitée. Enfin, la mesure des cycles de température pour une multitude de combinaisons de paramètres est un travail coûteux. Pour cette raison, la simulation numérique de ces cycles de température est intéressante.

#### Flux de chaleur

La génération de la chaleur dans le procédé FSW est la conséquence de plusieurs phénomènes physiques. Les sources de chaleur, induites par ces phénomènes, peuvent être classées comme suit :

- **Interaction outil-pièce** : Cette interaction est la source d'un flux de chaleur surfacique à l'interface outil-matière. La surface sur laquelle est appliqué le flux peut varier d'un disque de rayon égal à celui de l'épaulement situé sur la face supérieure des tôles à une surface plus complexe tenant compte de l'angle d'inclinaison de l'épaulement et la surface du pion [96]. Le flux de chaleur peut être calculé à partir de la chaleur dissipée par frottement [100] ou à partir de la puissance totale fournie à l'outil [60]. Pour ces deux cas, il faut déterminer expérimentalement le coefficient de

frottement pour le premier et la puissance totale fournie à l'outil pour le deuxième.

- **Déformation plastique du matériau :** Fourment et al. [120] montrent que la chaleur générée par la déformation plastique n'est pas négligeable.

La première approche pour approximer le flux de chaleur dans la modélisation thermique du soudage par FSW est basée sur des mesures expérimentales de la température au cours du soudage afin de déduire un flux de chaleur comme le montrent Dickerson et al. (2003) [119] et Simar et al. (2004) [124]. Dans ce cas, les auteurs ne s'intéressent pas à la prédiction de la chaleur mais uniquement à son effet. Ainsi, Chao et al. (1999) [118] considèrent une source de chaleur mobile représentant l'action de l'outil sur les tôles à souder.

La deuxième approche s'appuie sur une formulation analytique qui permet de déterminer le flux de chaleur comme le montrent Chen et Kovacevic (2003) [117]. Dans ce cas, on s'intéresse seulement à l'effet thermique de l'outil qu'on n'a pas besoin de modéliser. De leur côté, Feng et al. (1998) [39] utilisent l'équation de Rosenthal pour décrire le champ de température en régime stationnaire dû à une source de chaleur ponctuelle se déplaçant à une vitesse constante. Song et Kovacevic (2002) [100] proposent un modèle basé sur un système de coordonnées mobile afin de simplifier la modélisation de mouvement de l'outil.

## Echanges thermiques

La modélisation des échanges thermiques entre la pièce et le milieu extérieur se résume classiquement par les trois termes suivants :

- **Echanges thermiques de la pièce avec l'air ambiant :** La majorité des auteurs utilise une modélisation de type convection naturelle avec un coefficient de transfert thermique  $h$  à déterminer par analyse inverse et qui varie de  $10Wm^{-2}K^{-1}$  à  $30Wm^{-2}K^{-1}$  [99].
- **Echanges thermiques de la pièce avec le montage :** Ces échanges s'appuient sur la même modélisation précédente avec un coefficient de transfert thermique  $h$  qui varie de  $100Wm^{-2}K^{-1}$  à  $1000Wm^{-2}K^{-1}$  [99].
- **Echanges thermiques de la pièce avec l'outil :** Fourment et al. (2004) [120] introduisent également un coefficient de partage de chaleur avec l'outil basé sur l'effusivité des deux matériaux en contact. Cette méthode est définie dans le cadre d'un problème thermique à une dimension pour deux corps semi-infinis en contact et dont les propriétés thermiques sont constantes. La partie de la chaleur générée par le frottement qui est perdue dans l'outil n'est pas toujours calculée à l'aide du rapport des effusivités. Par exemple, Khandkar et al [60] ont pris en compte ces pertes en considérant un terme de rendement et citent d'autres travaux qui estiment qu'environ 13% de la puissance totale est transmise à l'outil. D'autre part, Simar et

al [102] ont mesuré la température dans l'outil où la perte obtenue dans l'outil est de 5%.

### 1.3.2 Modélisation mécanique

La modélisation de l'écoulement de la matière au voisinage de l'outil lors du procédé FSW est parmi les problématiques les plus complexes de nos jours. Pour trouver certains éléments de réponses, des numériciens et expérimentateurs se sont intéressés à ce problème mais de nombreuses questions restent encore posées.

Afin de comprendre la cinématique de l'écoulement de la matière au voisinage de l'outil, plusieurs modélisations ont été implantées dans différents codes. Par exemple, Colegrove et al. (2005) [29] ont mis en place une modélisation par éléments finis en trois dimensions. Dans cette étude, la loi utilisée est de type viscoplastique. Cette loi est d'ailleurs utilisée par de nombreux auteurs [111; 104] pour modéliser un métal à l'état "pâteux" dans une zone proche de l'outil et un métal sous la forme "solide" dans une zone plus éloignée. Les conclusions établies par Colegrove et al. concernent le déplacement important de la matière proche de l'épaulement lors du soudage du côté de la "retreating side". A noter que les déformations calculées par ces auteurs sont plus importantes que celles mesurées. De même, ces auteurs ont constaté aussi qu'un comportement ne prenant pas en compte la réduction importante de la viscosité lorsque la température est proche de celle de la fusion de la matière (liquidus), conduit à une surévaluation des températures et donc à une sous évaluation des efforts de soudage.

Heurtier et al (2005) [52] ont développé un modèle semi-analytique utilisant les équations gouvernant l'écoulement d'un fluide parfait. Ils donnent des indications sur le suivi des particules qui couvrent initialement l'ensemble du cordon. Ils parviennent également à définir un profil de micro-dureté post-soudage dans les différentes zones du cordon, à prédire la formation d'oxyde dans la soudure et finalement à prévoir les zones jugées mécaniquement faibles.

### 1.3.3 Modélisation thermomécanique

Différentes formulations ont été proposées dans ces contributions concernant des formulations eulériennes ou lagrangiennes. Le choix d'une formulation spécifique dépend principalement du phénomène étudié. Les modèles basés sur des formulations eulériennes sont proposés pour étudier l'écoulement de la matière autour de l'outil et l'effet thermique [130], mais ils ne peuvent pas modéliser des géométries complexes de l'outil de soudage. Les formulations lagrangiennes sont basées sur l'interaction outil-matière où l'échauffement est directement lié, dans le calcul par éléments finis, au frottement entre l'outil et

les deux plaques à souder. Ce type de formulations associées à la méthode des éléments finis est bien adapté pour décrire les contraintes résiduelles avec des géométries complexes de l'outil de soudage. Ainsi, la modélisation peut être complète puisqu'elle est basée sur des données géométriques comme celles de l'outil par exemple. Schmidt and Hattel (2004) [95] utilisent, pour modéliser l'outil, un corps rigide isotherme. La chaleur est générée par le frottement entre l'outil et la tôle où les conditions de contact sont très importantes. La loi de comportement retenue pour la tôle par ces auteurs est celle de Johnson-Cook. Le frottement est modélisé par une loi de Coulomb modifiée. La dissipation plastique n'est pas prise en compte. Les propriétés thermiques du matériau sont également utilisées. Le champ de température est bien prédit et en adéquation avec les mesures expérimentales. Enfin, une corrélation entre la forme du noyau et la répartition des déformations plastiques est observable. Fourment et al.(2004)[120] prédisent les champs de températures dans la tôle et dans l'outil pendant le procédé ainsi que l'écoulement de la matière. Ces auteurs ont choisi la loi de comportement de Norton-Hoff et le contact entre l'outil et la tôle est modélisée par une loi de Norton. Feulvarch (2005) [128] se propose également de simuler, à l'aide d'un modèle éléments finis, les interactions thermomécaniques pendant la phase stationnaire du procédé. Il modélise ainsi les écoulements visqueux couplés aux aspects thermiques et microstructuraux et simule la source de chaleur induite dans le soudage. De son côté, Bastier (2006) [127] modélise la phase stationnaire afin d'obtenir l'état mécanique résiduel de l'assemblage soudé à travers l'écoulement de matière et les évolutions thermiques et métallurgiques. Pour cela, l'auteur utilise un calcul thermo-hydrodynamique couplé suivi d'un calcul métallo-mécanique.

Dans le cadre lagrangien, les grandes distorsions du maillage conduisent à la divergence du calcul malgré l'utilisation de la procédure de remaillage. Les formulations ALE ont été proposées pour combiner les avantages des deux formulations eulériennes et lagrangiennes. Le but est de réduire de manière significative la distorsion du maillage avec un temps de calcul raisonnable.

Malgré les nombreux modèles numériques existants dans la littérature pour la simulation numérique du procédé FSW, la compréhension du trajet de la matière et le traitement du malaxage ne sont pas encore bien maîtrisés et restent une difficulté majeure pour les numériciens. Le malaxage est difficile à réaliser à l'aide de la méthode des éléments finis (en lagrangien) puisque la zone proche de l'outil de soudage est le siège de grandes déformations.

Nous proposons, dans ce travail, d'utiliser les méthodes sans maillage pour la simulation de ce procédé et nous nous intéressons plus particulièrement au malaxage de la matière. Ces techniques sont basées sur des formulations lagrangiennes actualisées qui permettent de prendre en compte les grandes déformations ainsi que l'effet de l'histoire

du chargement.

## 1.4 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, une étude bibliographique résumant les étapes du procédé de soudage FSW et les différentes modélisations. Nous avons mis les points sur les difficultés rencontrées par l'application de ces modèles pour simuler le procédé de soudage FSW. Dans ce cadre, la prise en compte des grandes déformations constitue un problème majeur pour simuler convenablement le malaxage de la matière au cours du soudage, en particulier au voisinage de l'outil.



# Chapitre 2

## Discussion générale sur les méthodes sans maillage

---

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>2.2</b>	<b>Quelques inconvénients des méthodes avec maillage . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>2.3</b>	<b>Etude bibliographique sur les méthodes sans maillage . . . . .</b>	<b>28</b>
2.3.1	Historique et généralités sur les méthodes sans maillage . . . . .	28
2.3.2	Avantages des méthodes sans maillage . . . . .	29
2.3.3	Difficultés liées aux méthodes sans maillages et leurs solutions proposées . . . . .	30
<b>2.4</b>	<b>Méthode Smoothed Particle Hydrodynamics SPH . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.5</b>	<b>Méthode des moindres carrés mobiles (Moving Least Square MLS) . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>2.6</b>	<b>Algorithme de recherche des voisins . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>40</b>

---

## 2.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles, gouvernant de nombreux phénomènes physiques, sont résolues classiquement par des méthodes de discrétisation telles que la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis, etc.... Ces méthodes nécessitent la construction d'un maillage du domaine étudié par ce qu'on appelle éléments. La notion d'élément est très importante dans ces méthodes ; elle définit une connectivité fixe entre les nœuds. Le maillage est donc un élément fondamental qui influe sur la qualité des résultats numériques obtenus.

De nos jours, la méthode des éléments finis est la plus utilisée pour résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) issues de la modélisation des problèmes de la mécanique, en particulier, la mécanique des solides. Cette méthode a une base théorique très solide et a connue plusieurs améliorations. Cependant, dans certaines applications, sa mise en œuvre reste coûteuse et parfois difficile, notamment, dans la modélisation des grandes déformations en formulation lagrangienne. Ces difficultés ont poussé les chercheurs à réfléchir à d'autres méthodes qui n'ont pas besoin d'éléments. Ces méthodes sont appelées des méthodes sans maillage et elles sont des outils numériques puissants utilisés depuis quelques dizaines d'années pour résoudre des problèmes de la physique.

Le domaine continu est remplacé par un ensemble de points et la solution approchée est construite complètement en utilisant ces points. Cette caractéristique en fait une méthode particulièrement utile pour résoudre les problèmes où la méthode des éléments finis n'est plus facilement applicable.

Dans ce chapitre, on présente les principales difficultés liées à l'utilisation de la méthode des éléments finis suivies d'une étude bibliographique plus détaillée sur les méthodes sans maillage, en particulier, la méthode particulaire (Smooth Particle Hydrodynamics, SPH) et la méthode des moindres carrés mobiles (Moving Least Squares, MLS).

## 2.2 Quelques inconvénients des méthodes avec maillage

Les méthodes numériques avec maillage sont devenues des outils essentiels dans la résolution de problèmes en mécanique des fluides et des solides. Leur efficacité est bien connue. Cependant, dans certains problèmes physiques, ces méthodes sont confrontées à des difficultés de nature aussi bien mathématiques que numériques. Comme par exemple les problèmes qui présentent des discontinuités dans leurs domaines de définition, les phénomènes de fragmentation, de fissuration etc... Ces problèmes sont difficiles à traiter avec les méthodes utilisant un maillage telle que la méthode des éléments finis.

D'autre part, sur le plan numérique, ces méthodes sont soumises aux contraintes sui-

vantes :

- a- Les éléments du maillage ne doivent pas être trop écrasés afin d'éviter la singularité de la matrice jacobienne.
- b- La nécessité de refaire le maillage pour traiter le cas des grandes déformations engendre un coût de calcul considérable surtout en 3D. Ainsi, pour les problèmes de propagation de fissures ou pour les problèmes de mise en forme comme l'usinage par exemple, le calcul peut nécessiter des remaillages fréquents.
- c- La procédure de remaillage nécessite l'interpolation des champs (vitesses, contraintes, etc) correspondant à la solution courante, ce qui peut introduire des erreurs numériques supplémentaires dans le calcul. On parle, dans ce cas, de la diffusion numérique. Cependant, pour traiter des problèmes en grandes déformations, des techniques performantes de maillage adaptatif et automatique ont été développées, mais elles restent inefficaces pour des géométries tridimensionnelles complexes. La figure 2.1 représente le profil bidimensionnel du champ des vitesses lors du procédé FSW obtenu par le code ABAQUS/Explicit utilisant la méthode des éléments finis. La distorsion du maillage engendre une répartition numérique chaotique du champ des vitesses. En effet, l'estimation réelle de la vitesse au voisinage du pion est de l'ordre de  $100mm.s^{-1}$  alors que selon ABAQUS/Explicit, les vitesses sont de l'ordre de quelques  $mm.s^{-1}$  ce qui montre la grande influence de la distorsion du maillage, à cause des grandes déformations, sur les résultats numériques.

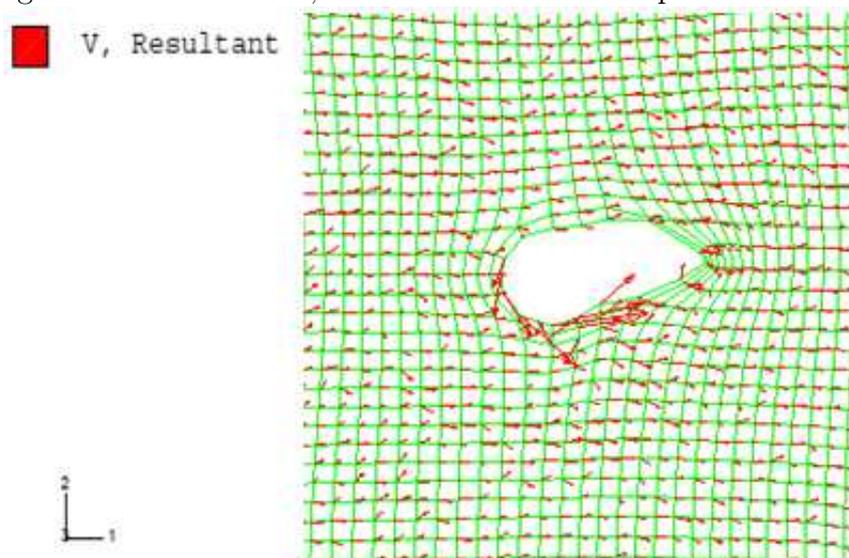


FIGURE 2.1 – Simulation bidimensionnelle du profil des vitesses lors du procédé FSW à l'aide du code ABAQUS/Explicit

(Référence : [132])

## 2.3 Etude bibliographique sur les méthodes sans maillage

Depuis quelques décennies, beaucoup de travaux de recherche sont consacrés aux méthodes sans maillage. Dans ces méthodes, la notion d'élément est remplacée par un ensemble de points. En effet, le domaine d'étude est remplacé par un ensemble de points et la solution approchée en un point est construite complètement en utilisant les points voisins.

### 2.3.1 Historique et généralités sur les méthodes sans maillage

Depuis plusieurs dizaines d'années, ce sont les méthodes avec maillage qui sont les plus utilisées dans les codes de calcul pour résoudre divers problèmes de la physique. Les différentes limitations de ces méthodes ont aidé au développement des méthodes sans maillage qui visent à surmonter les difficultés liées au maillage.

L'origine des méthodes sans maillage remonte à la fin des années soixante dix, mais leurs développements sont restés très limités jusqu'au début des années quatre-vingt dix. La première méthode sans maillage est la méthode particulière Smooth Particle Hydrodynamics SPH, qui a été présentée en 1977 par l'astrophysicien britannique Lucie [62] et par les mathématiciens australiens Gingold et Monaghan [46]. Cette méthode a été conçue pour résoudre des problèmes d'astrophysique et des problèmes en dynamique du fluide [18; 74; 75] plus tard. Libersky et al. [71] ont été les premiers utilisateurs de la méthode SPH en mécanique des solides. Les premières versions de cette méthode ont rencontré des difficultés lors de la résolution des problèmes d'instabilité de la méthode. Par la suite, plusieurs développements et améliorations ont été proposés [12; 18]. Cette méthode est basée sur une formulation forte tandis que les versions développées à partir des années 1990 s'appuient sur une formulation faible. Ces dernières ont été utilisées dans la plupart des cas en mécanique des solides. Ensuite, la méthode des éléments diffus a été proposée par Nayroles, Thouzot et Villon [85] qui consiste à utiliser une approximation de type moindre carré mobile avec une discrétisation de type Galerkin. Une autre version modifiée, dite méthode Element Free Galerkin (EFG), a été développée en 1994 par Belytschko et al. [13]. Cette méthode est l'une des premières méthodes sans maillage basée sur une formulation faible. Une année plus tard, la méthode Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) a été développée [67].

La méthode sans maillage la plus récente est dite méthode des éléments naturels [30; 103] (Natural Element Method). Cette méthode est basée sur des principes totalement différents. Elle utilise des fonctions de forme basées sur des constructions géométriques tels que le diagramme de Voronoi et la triangulation de Delaunay.

Actuellement, le travail sur les méthodes sans maillage est consacré à l'amélioration

des versions existantes. Le but des recherches récentes, dans ce domaine, est d'adapter ces méthodes à des problèmes spécifiques ou au traitement des conditions aux limites, comme par exemple, la méthode sans maillage dite méthode des moindres carrés mobiles continue (Continuous Moving Least Squares CMLS) [92]. Cette méthode, proposée récemment en 2012, est une version modifiée de la méthode sans maillage des moindres carrés mobiles (Moving Least Squares MLS) [84; 11; 69].

### 2.3.2 Avantages des méthodes sans maillage

Les méthodes sans maillage sont devenues des outils intéressants qui permettent de traiter des problèmes dans lesquels on observe des distorsions de maillage, de grandes déformations ou encore des discontinuités ou fragmentations du domaine d'étude.

Ces méthodes ne demandent qu'un ensemble de points pour construire une solution approchée où la qualité des résultats est faiblement liée à la position relative de ces points. C'est l'origine de la notion dite sans maillage. Le but est de chercher des solutions numériques précises et stables des équations aux dérivées partielles ou des équations intégrales en certains points arbitrairement distribués et ce pour toute forme de frontière du domaine étudié. Le principe des méthodes sans maillage est de construire une fonction définie sur un espace continu à partir de l'ensemble des valeurs discrètes prises par cette fonction sur un nuage de points. Globalement, les caractéristiques de ces méthodes peuvent être résumées comme suit :

- En particulier, dans la méthode SPH, chaque point est directement associé à un objet physique discret qui représente une partie du domaine continu du problème étudié. De plus, le volume modélisé de la particule peut être évolutif dans le temps.
- Selon le problème étudié, les particules possèdent un ensemble de variables des champs telles que la masse, la vitesse, l'énergie, la position, etc.
- La plupart des méthodes sans maillage sont des méthodes lagrangiennes dans lesquelles les particules représentent le système physique mobile.

Les avantages de ces méthodes de point de vue numérique sont :

- la simulation facile des phénomènes physiques complexes comme les grandes déformations.
- le raffinement automatique de la discrétisation qui permet de retirer ou d'ajouter facilement des points en fonction de l'évolution de la simulation.

### 2.3.3 Difficultés liées aux méthodes sans maillages et leurs solutions proposées

Parmi les inconvénients des méthodes sans maillage on note l'intégration numérique qui est nécessaire lorsqu'une formulation faible est utilisée. En effet, dans la plupart des méthodes sans maillage, les fonctions de forme ne sont plus des polynômes. Ceci rend les schémas d'intégration de type Gauss non optimaux. Pour minimiser l'erreur due à la non-coïncidence entre les cellules d'intégration et le support des fonctions de forme, Dolbow et Belytschko [36] ont montré que des schémas d'intégration très fins sont nécessaires mais ils entraînent des coûts de calcul excessifs à cause d'un nombre très important de points d'intégration de Gauss.

D'autres méthodes sont présentées dans la littérature pour surmonter ce problème d'intégration numérique comme par exemple la technique de l'intégration nodale directe. Dans ces méthodes, les intégrales sont évaluées aux points qui se trouvent à l'intérieur du support de la fonction de forme. Cette technique est plus simple que celle de Gauss puisqu'il n'y a aucun recours à des points artificiels pour l'intégration. Seuls les points nodaux déjà existant sont pris en compte comme points d'intégration. A cause de l'erreur d'intégration, Chen et al. [32] ont introduit une nouvelle technique d'intégration stabilisée.

Dans toutes les méthodes sans maillage, la recherche des points qui se trouvent à l'intérieur du domaine d'influence est le processus le plus coûteux en termes de temps de calcul, puisqu'il faut l'effectuer sur chaque point. La méthode naïve consiste à effectuer une double boucle sur l'ensemble des points. Les approximations sans maillage ont besoin d'une fonction poids. Les caractéristiques importantes des fonctions poids sont la forme des fonctions de forme et la taille du domaine d'influence. Le support d'une fonction poids diffère selon la taille et la forme. En effet, n'importe quel choix de la forme du support peut être possible. Souvent, le support d'un point est défini par une sphère ou un parallélépipède centré sur ce point. Atluri [5] préfère, dans le cas d'un espacement nodal différent, d'utiliser des supports elliptiques. Ce support doit être assez large pour couvrir un nombre suffisant de points et par la suite rendre la méthode stable comme le montrent Liu et al. [66; 67; 64]. Cependant, un support trop large entraîne une qualité dégradée de la solution et un coût de calcul élevé. L'utilisation d'un support fixe où le nuage de points subit de fortes distorsions peut entraîner des instabilités numériques.

L'actualisation de la taille du support au cours de la simulation peut permettre d'éviter ces instabilités, mais réduit la robustesse de la méthode utilisée. Le choix de la taille du support par rapport à la densité locale reste un problème supplémentaire. Ce dernier, limite l'application de ces méthodes sans maillage utilisant un raffinement adaptatif [72; 73] dans le cas où la densité nodale est fortement hétérogène en différentes régions du

domaine ou encore pour les problèmes où la matière se sépare comme dans le cas de la simulation de l'usinage par exemple. La deuxième caractéristique importante est la forme de la fonction poids. Généralement, cette fonction est choisie de façon à approximer la fonction de Dirac  $\delta$  [47]. Il existe plusieurs travaux de recherche sur la construction de la fonction poids [41; 53]. Dans la littérature, la fonction Gaussienne et la fonction Spline sont les plus utilisées.

Le principal inconvénient de la plupart des méthodes sans maillage (SPH, RKPM, DEM, EFG) est la difficulté de gérer numériquement les conditions aux limites. En effet, dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet, l'influence de l'approximation obtenue par la méthode des éléments finis s'achève sur le bord de domaine tandis que la fonction d'approximation construite par ces méthodes sans maillage ne vérifie pas cette propriété à cause de la forme des fonctions de forme utilisées. Les travaux de recherche, réalisés pour remédier à ce problème, ont donné lieu à un grand nombre de publications proposant différentes techniques pour traiter numériquement les conditions aux limites dans le cadre des méthodes sans maillage. Parmi ces propositions, on trouve la méthode des multiplicateurs de Lagrange [13], la méthode de transformation [28], l'approche basée sur le principe de d'Alembert [45], l'introduction de fonctions poids singulières [61] et la méthode de pénalité [83]. En 2003, Chen et al. ont proposé une technique permettant de rendre les fonctions de forme RKPM interpolantes [26]. Malgré l'efficacité de ces techniques, elles entraînent des coûts de calcul supplémentaires. Une autre technique fut le couplage des méthodes sans maillage avec une bande d'éléments finis sur le bord du domaine et l'intérieur du domaine est discrétisé par l'approche sans maillage [3].

Dans la plupart des méthodes sans maillage, des difficultés apparaissent pour des géométries non convexes, comme par exemple, la présence d'un bord concave d'une cavité ou d'une fissure, comme cela a été montré par Hegen [50] et Belytschko et al. [11]. Le problème essentiel lors de la présence de bords non-convexes est lié à la définition du support des fonctions de forme.

Dans la suite, les deux méthodes sans maillage SPH et MLS sont présentées plus en détails. Ces deux méthodes sont basées sur des approximations différentes. SPH est basée sur une représentation intégrale de l'approximation tandis que MLS est basée sur l'approximation d'une représentation en séries.

## 2.4 Méthode Smouthed Particle Hydrodynamics SPH

La méthode SPH est une méthode sans maillage de nature lagrangienne et elle est basée sur une représentation intégrale. Cela signifie que toute fonction décrivant une quantité physique en mécanique des milieux continus peut être exprimée par ses valeurs

sur un ensemble de points désordonnés appelés particules. La méthode SPH consiste à remplacer le domaine du problème par un ensemble de points (particules) arbitrairement distribués et aucune connectivité entre eux n'est ni nécessaire. Les grandeurs physiques attachées à chaque point (particule) sont approchées par des représentations intégrales. Ces approximations dépendent fortement de la distribution des points qui se trouvent à l'intérieur d'un domaine appelé domaine d'influence. Ces points sont caractérisés par une masse et un volume et devenir des particules physiques matérielles. Le domaine d'influence doit être choisi d'une façon optimale pour diminuer le coût de calcul.

### A- Représentation intégrale d'un champ de fonction

L'idée de base, de la représentation intégrale, consiste à exprimer une fonction  $f(x)$  en fonction des valeurs de  $f$  sur un voisinage de  $x$ ,  $x \in \mathfrak{R}^3$ , en approximant  $f$  par convolution sous la forme suivante :

$$f(x) = \int_{\Omega} f(y) \delta(x-y) dy \quad (2.1)$$

où  $\Omega$  est le volume du domaine qui contient  $x$  et  $\delta$  est la fonction de Dirac donnée par :

$$\delta(x-y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}, \quad (2.2)$$

La représentation intégrale (2.1) est exacte si  $f(x)$  est définie et continue sur  $\Omega$ . Si la fonction  $\delta$  est remplacée par une fonction poids  $W(x-y, h)$ , la représentation intégrale de  $f(x)$  est donnée par :

$$f^h(x) = \int_{\Omega} f(y) W(x-y, h) dy \quad (2.3)$$

en choisissant une fonction poids  $W$  qui approche la fonction de Dirac  $\delta$  lorsque  $h$  tend vers 0, avec  $h$  est la longueur de lissage définissant le domaine d'influence de la fonction poids  $W$ . Cette dernière fonction est habituellement choisie pour être une fonction qui satisfait les trois conditions suivantes :

1- Condition de normalisation (ou unité) :

$$\int_{\Omega} W(x-y, h) dy = 1 \quad (2.4)$$

2- Propriété de la fonction  $\delta$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x-y, h) = \delta(x-y) \quad (2.5)$$

3- Condition du domaine compact :

$$W(x-y, h) = 0 \quad \text{si } |x-y| > h \quad (2.6)$$

Par exemple, on cite la fonction poids de type "cubic spline" (voir figure 2.2) donnée par :

$$W(r, h) = \alpha_d \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}r^2 + \frac{3}{4}r^3, & r \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2 - r)^3, & 1 < r \leq 2 \\ 0, & r > 2 \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $r$  et  $\alpha_d$  sont donnés, par exemple dans le cas  $2D$ , par :  $r = \frac{\|x-y\|}{h}$  et  $\alpha_d = \frac{10}{7\pi h^2}$ .

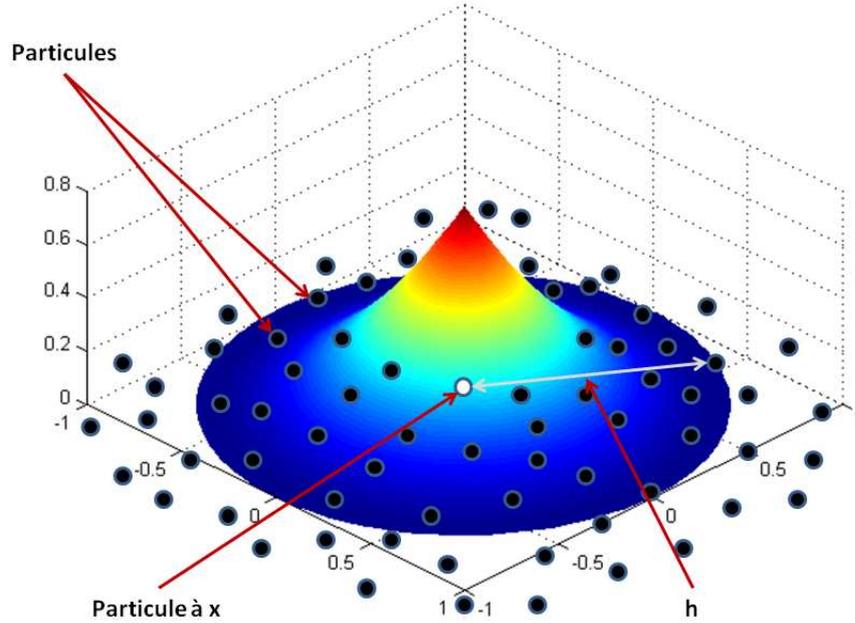


FIGURE 2.2 – Présentation d'une fonction poids de type cubic spline

En utilisant l'équation (2.3), la représentation intégrale de la dérivée spatiale  $\nabla f(x)$  est obtenue par :

$$\nabla f^h(x) = \int_{\Omega} \nabla f(y) W(x - y, h) dy \quad (2.8)$$

En faisant une intégration par partie, l'équation (2.9) devient :

$$\nabla f^h(x) = \int_{\Omega} \nabla [f(y) W(x - y, h)] dy - \int_{\Omega} f(y) \nabla W(x - y, h) dy \quad (2.9)$$

La première intégrale peut être convertie en utilisant le théorème de la divergence d'une intégrale sur la frontière  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$  :

$$\nabla f^h(x) = \int_{\partial\Omega} f(y) W(x - y, h) dS - \int_{\Omega} f(y) \nabla W(x - y, h) dy \quad (2.10)$$

Puisque la fonction poids  $W$  est compacte, l'intégral sur la frontière  $\partial\Omega$  est simplement égale à zéro et disparaît. Notez ceci suppose que le domaine d'influence ne recouvre pas

la frontière du domaine d'étude à cause du terme négligé sur cette frontière [63] comme le montre la figure 2.3.

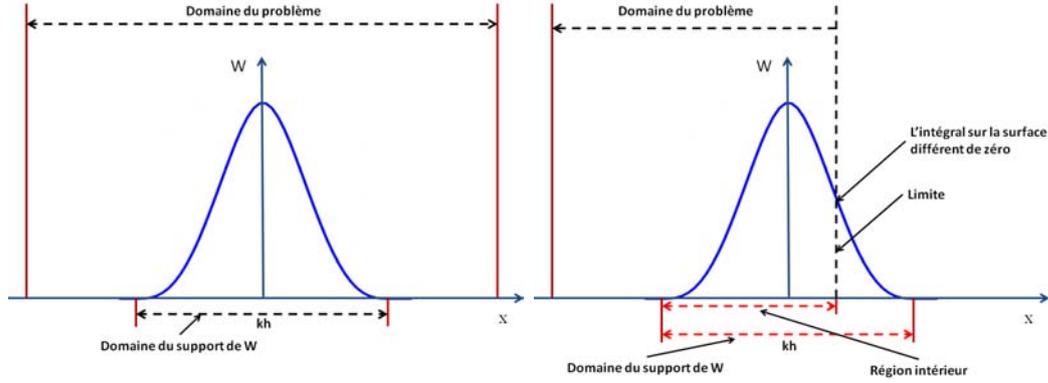


FIGURE 2.3 – Problématique de la fonction poids au bord

Donc pour le point où le domaine d'influence est à l'intérieur du domaine de problème nous prenons :

$$\nabla f^h(x) = - \int_{\Omega} f(y) \nabla W(x - y, h) dy \quad (2.11)$$

### B- Approximation par la méthode SPH

La méthode SPH est une méthode particulière. On associe alors à chaque particule  $y$  une masse  $m_j$ , une densité  $\rho_j$  et un volume  $V_j$  tel que :

$$V_j = \frac{m_j}{\rho_j} \quad (2.12)$$

Si on a, dans le domaine d'influence,  $N$  particules, alors on approxime l'intégrale de l'équation (2.3) par une formule de quadrature simple donnée par :

$$f^h(x) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(y_j) W(x - y_j, h) \quad (2.13)$$

De même, l'approximation de la dérivée spatiale par SPH s'écrit sous la forme suivante :

$$\nabla f^h(x) = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(y_j) \nabla W(x - y_j, h) \quad (2.14)$$

D'autres approximations de la dérivée spatiale, tenant compte de l'interaction entre la particule et son voisinage, sont aussi utilisées. En effet, si on considère les relations suivantes :

$$\nabla \cdot f(x) = \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot (\rho f(x)) - f(x) \cdot \nabla \cdot \rho] \quad (2.15)$$

$$\nabla f(x) = \rho \left[ \nabla \cdot \left( \frac{f(x)}{\rho} \right) + \frac{f(x)}{\rho^2} \cdot \nabla \cdot \rho \right] \quad (2.16)$$

et en appliquant l'approximation SPH sur les différentes dérivées spatiales des seconds membres, on obtient les formules suivantes [77] :

$$\nabla f^h(x) = \frac{1}{\rho} \left[ \sum_{j=1}^N m_j [f(y_j) - f(x)] \nabla W(x - y_j, h) \right] \quad (2.17)$$

$$\nabla f^h(x) = \rho \left[ \sum_{j=1}^N m_j \left[ \left( \frac{f(y_j)}{\rho_j^2} \right) + \left( \frac{f(x)}{\rho^2} \right) \right] \nabla W(x - y_j, h) \right] \quad (2.18)$$

Dans notre modèle, on utilisera aussi l'approximation de la fonction  $\nabla \cdot (A \nabla f(x))$  issue de l'approximation continue donnée par :

$$\int [A(x) + A(y)] [f(x) - f(y)] \frac{\nabla W(x - y, h)(x - y)}{(x - y)^2} dy \quad (2.19)$$

où  $A$  représente une grandeur scalaire caractéristique de la matière au point considéré. Ceci permet d'avoir :

$$\nabla \cdot (A \nabla f^h(x)) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} [A + A_j] [f(x) - f(y_j)] \frac{\nabla W(x - y, h)(x - y_j)}{(x - y_j)^2} dy \quad (2.20)$$

Afin d'approximer la dérivée  $\nabla \cdot (A \nabla f(x))$  à l'interface des matériaux à souder, la procédure habituelle consiste à approximer ce terme séparément dans chaque région et exiger que le terme  $A \nabla f(x)$  soit continu à l'interface. Pour prendre en compte la discontinuité du paramètre  $A$  à l'interface des matériaux à souder, nous utilisons la méthode des différences finies. Dans le cas unidimensionnel par exemple, la grandeur  $A$  doit satisfaire à la relation de continuité suivante :

$$A_g \frac{f^* - f_j}{\Delta x/2} = A_d \frac{f_{j+1} - f^*}{\Delta x/2} \quad (2.21)$$

avec  $A = A_d$  si  $x < 0$  et  $A = A_g$  si  $x > 0$ ,  $f^*$  est la valeur de  $f$  à l'interface,  $j$  et  $j + 1$  sont les indices respectivement des particules à gauche et à droite de l'interface. L'égalité précédente permet d'avoir la température à l'interface donnée par :

$$f^* = \frac{A_d f_{j+1} + A_g f_j}{A_d + A_g} \quad (2.22)$$

L'approximation de la dérivée  $\nabla \cdot (A \nabla f(x))$  à gauche de l'interface au point  $j$  est donnée par :

$$\nabla \cdot (A \nabla f(x)) = A_g \left( \frac{f^* - f_j}{\Delta x/2} - \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x/2} \right) \frac{1}{\Delta x} \quad (2.23)$$

Soit encore, en remplaçant la température à l'interface  $f^*$  par son expression :

$$\nabla \cdot (A \nabla f(x)) = \left( \frac{2(f_{j+1} - f_j) A_g A_d}{(A_g + A_d) \Delta x} - \frac{A_g (f_j - f_{j-1})}{\Delta x} \right) \frac{1}{\Delta x} \quad (2.24)$$

Ce résultat nous montre que la dérivée est continue en présence de la variable effective  $\frac{2A_d A_g}{(A_d + A_g)}$ .

Un argument similaire peut être utilisé pour approximer la dérivée  $\nabla \cdot (A \nabla f(x))$ , cette dérivée est continue quand  $A$  est discontinue. Pour tenir compte cet effet, Cleary et Monaghan [27] ont choisi à partir de cette démonstration basée sur la discrétisation par différences finies de remplacer le terme  $(A + A_j)$  par :  $\frac{4AA_j}{(A+A_j)}$

Finalement, l'approximation par la méthode SPH devient :

$$\nabla \cdot (A \nabla f^h(x)) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{4AA_j}{(A + A_j)} [f(x) - f(y_j)] \frac{\nabla W(x - y, h)(x - y_j)}{(x - y_j)^2} dy \quad (2.25)$$

Plusieurs types de fonctions noyaux ont été utilisés dans la méthode SPH [138]. La fonction noyau doit être continue et positive dans son support  $\Omega_j$ .

## 2.5 Méthode des moindres carrés mobiles (Moving Least Square MLS)

Dans cette méthode, les fonctions de forme sont construites en utilisant la méthode des moindres carrés mobiles "Moving Least Square". La méthode MLS peut être utilisée sous forme faible[13], donc l'intégration numérique est nécessaire, toutefois l'intégration numérique engendre des coûts de calcul très considérables et à ce jour ces méthodes n'ont pas totalement convaincu les utilisateurs. Pour éviter l'intégration numérique, on essaie, dans ces travaux de thèse, d'adapter cette méthode en forme forte. L'avantage de cette famille de méthodes réside dans le fait qu'elle n'utilise pas de maillage et évite l'intégration numérique.

### Approximation par la méthode MLS

Considérons une fonction scalaire inconnue d'un champ variable  $f(x)$  défini dans un domaine  $\Omega$ . L'approximation, par la méthode des moindres carrés mobiles MLS, de  $f(x)$  est définie en un point  $x$  par :

$$f^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) = \langle p(x) \rangle \{a(x)\} \quad (2.26)$$

où  $\langle p(x) \rangle$  est la base de fonctions dépendants des coordonnées spatiales et  $m$  est le nombre de fonctions de la base. La base de fonctions  $\langle p(x) \rangle$  est souvent construite en utilisant les monômes du triangle de Pascal. Dans le cas bidimensionnel, cette base peut être choisie à l'ordre  $i$  de la forme :

$$\langle p(x, y) \rangle = \langle 1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^i, x^{i-1}y, \dots, xy^{i-1}, y^i \rangle \quad (2.27)$$

Dans l'équation (2.19),  $\{a(x)\}$  est un vecteur de  $m$  composantes données par :

$${}^T\{a(x)\} = \langle a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x) \rangle \quad (2.28)$$

Notons que les coefficients du vecteur  $\{a(x)\}$  dans l'équation (2.29) sont des fonctions de la variable spatiale  $x$ . Ces coefficients peuvent être obtenus en minimisant la norme discrète pondérée suivante :

$$J(x) = \sum_{i=1}^N W(x - x_i, h) (\langle p(x_i) \rangle \{a(x)\} - f_i)^2 \quad (2.29)$$

où  $N$  est le nombre de points qui se trouvent à l'intérieur du domaine d'influence du point de coordonnée  $x$  pour chaque fonction poids  $W(x - x_i, h) \neq 0$ ,  $f_i$  est la valeur de  $f$  au point  $x = x_i$  et  $h$  est la taille du domaine d'influence du point de coordonnée  $x$ . L'équation (2.22) est une fonctionnelle qui est construite en utilisant les fonctions approchées et les valeurs de la fonction  $f_i$  du champ inconnu  $f(x)$ . Puisque le nombre de points  $N$ , utilisé dans l'approximation MLS, est généralement beaucoup plus grand que le nombre de coefficients inconnus  $m$ , la fonction approchée ne passe pas par les valeurs  $f_i$ . La stationnarité de  $J(x)$  par rapport à  $\{a(x)\}$  donne :

$$\frac{\partial J}{\partial \{a(x)\}} = 0 \quad (2.30)$$

ce qui conduit au système linéaire suivant :

$$[A(x)]\{a(x)\} = [B(x)]\{F\} \quad (2.31)$$

où  $\{F\}$  est le vecteur qui collecte les valeurs  $f_i$  du champ de fonctions  $f(x)$  pour tous les points du domaine d'influence donné par :

$${}^t\{F\} = \langle f_1, f_2, \dots, f_N \rangle \quad (2.32)$$

$[A(x)]$  est la matrice définie par :

$$[A(x)] = \sum_{i=1}^N W(x - x_i, h) \{p(x_i)\} \langle p(x_i) \rangle \quad (2.33)$$

et  $[B(x)]$  est la matrice définie par :

$$[B(x)] = [W(x - x_1, h)\{p(x_1)\} \quad W(x - x_2, h)\{p(x_2)\} \quad \dots \quad W(x - x_n, h)\{p(x_n)\}] \quad (2.34)$$

En résolvant l'équation (2.24), on obtient le vecteur  $\{a(x)\}$  sous la forme :

$$\{a(x)\} = [A(x)]^{-1}[B(x)]\{F\} \quad (2.35)$$

En substituant l'équation (2.28) dans l'équation (2.19), on obtient :

$$f^h(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) f_i = \langle \Phi(x) \rangle \{F\} \quad (2.36)$$

où  $\langle \Phi(x) \rangle$  est le vecteur des fonctions de forme de type MLS correspondant à  $N$  points du domaine d'influence du point  $x$  et qui peut être écrit comme suit :

$$\langle \Phi(x) \rangle = \langle \Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_N(x) \rangle = \langle p(x) \rangle [A(x)]^{-1} [B(x)] \quad (2.37)$$

La fonction de forme  $\Phi_i(x)$  pour le  $i^{\text{me}}$  point est définie par :

$$\Phi_i(x) = \langle p(x) \rangle ([A(x)]^{-1} [B(x)])_i \quad (2.38)$$

Les fonctions de forme  $\langle \phi(x) \rangle$  sont continues dans le domaine global à condition que les fonctions poids  $W(x - x_i, h)$  soient choisies correctement. Le champ des points inclus dans le domaine d'influence est utilisé pour calculer l'approximation MLS de la fonction inconnue. La taille du support est définie par  $h$ . Ce paramètre est critique et joue un rôle très important dans la précision des solutions et dans la stabilité. Il joue un rôle similaire à la taille de l'élément dans la méthode des éléments finis. Une originalité par rapport à la méthode des éléments finis est le fait que ce paramètre peut rester constant pour chaque point, mais aussi il peut varier à chaque pas de temps. Cependant, le choix de sa valeur optimale [67] reste à nos jours inconnue. Le même problème se pose pour le nombre de points optimal  $n$  présenté dans le domaine d'influence [51]. Mais, le nombre des points  $N$ , choisi dans le domaine d'influence, doit être suffisant pour assurer que la matrice  $[A(x)]$ , dans l'équation (2.24), soit inversible pour assurer la stabilité de l'interpolation. Le choix de  $N$  dépend de la distribution des points et du nombre des fonctions de base. Pour que la matrice  $[A(x)]$  soit bien conditionnée, on choisit habituellement  $N \gg m$ . Malheureusement, il n'y a pas de meilleure valeur théorique de  $N$  mais elle est déterminée par des expériences numériques. Par conséquent, la fonction poids  $W(x - x_i, h)$  joue un rôle important dans la performance de l'approximation MLS. Dans la pratique, la fonction exponentielle et les fonctions de type splines sont souvent utilisées.

## 2.6 Algorithme de recherche des voisins

Dans les méthodes sans maillage, la recherche des points voisins, dans le domaine d'influence d'un point, est la procédure la plus coûteuse en temps de calcul. La recherche des points voisins doit être effectuée pour chaque point (ou particule) dans le domaine étudié et de nombreuses fois, au cours du calcul. La technique naïve consiste à effectuer une double boucle sur tous les points de collocation (ou particules) conduisant à un algorithme très coûteux. Plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature pour améliorer les performances de ces algorithmes [6; 10]. Dans le présent travail, nous avons mis en œuvre un algorithme simple et bien adapté à la problématique proposée dans cette étude. En effet, nous avons proposé de construire une grille fixe contenant le domaine divisé en

$n_r$  sous-domaines dans la direction radiale et  $n_\theta$  sous-domaines le long de la direction circonférentielle. La taille de chaque sous-domaine est notée  $(dr, d\theta)$  où  $dr$  est la longueur de sous-domaine dans le sens radial et  $d\theta$  est la longueur de sous domaine dans la direction circonférentielle (voir figure 2.4).

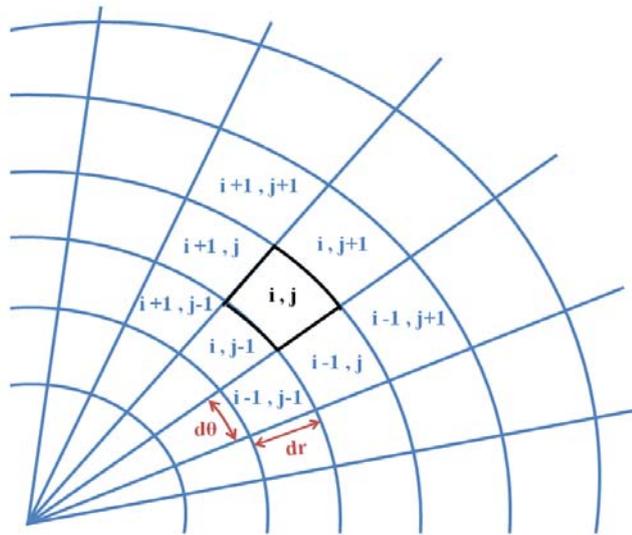


FIGURE 2.4 – Sous-domaine  $(i, j)$  et ses voisins

Le choix du  $dr$  et  $d\theta$  doit dépendre de la densité du maillage des points de collocation dans le domaine et il peut être considéré comme un paramètre d'utilisateur. Notez que la grille est fixe et chaque sous-domaine connaît ses sous-domaines voisins. La procédure définissant les voisins d'un sous-domaine donné est exécutée seulement une fois dans l'algorithme. Pour chaque sous-domaine, nous avons alors le nombre de sous-domaines et la liste de ses voisins. Les cas particuliers des sous-domaines situés au bord du domaine sont traités d'une manière spécifique.

Chaque point de collocation  $P$  est défini par les données suivantes : numéro du point, ses coordonnées  $(x, y)$  et le numéro du sous-domaine auquel appartient le point considéré (voir figure 2.5).

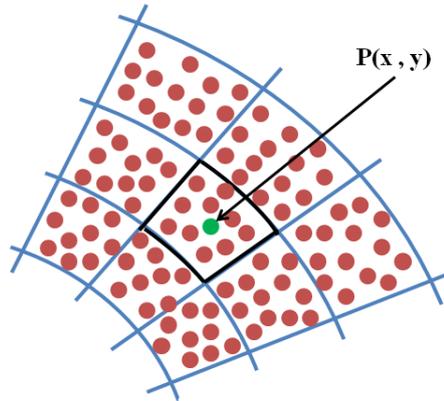


FIGURE 2.5 – Illustration des points voisins du point  $P(x, y)$

En utilisant une simple opération mathématique, on peut identifier le numéro du sous-domaine auquel appartient le point considéré. Cette opération consiste à diviser la position actuelle du point par la taille de sous-domaine dans le sens radial ou circonférentielle. En ne conservant que la partie entière de la division, on obtient la position dans les directions radiale et circonférentielle du sous-domaine auquel appartient le point. Tous les points de ce sous-domaine et des sous-domaines voisins sont considérés comme des voisins du point considéré. L'algorithme proposé ne nécessite pas de temps de calcul important. A chaque fin pas de temps, les coordonnées des points de collocation et des sous-domaines correspondants sont actualisés. Cette procédure est présentée pour un domaine circulaire mais peut être utilisée pour un domaine rectangulaire.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue quelques méthodes sans maillage. Ces méthodes sont vues comme une alternative prometteuse pour surmonter les difficultés que rencontrent la méthode des éléments finis. Les méthodes sans maillage les plus détaillées dans ce chapitre sont la méthode SPH et la méthode MLS. Ces méthodes sont celles qu'on va utiliser dans les chapitres suivants. La méthode SPH est une méthode basée sur une représentation intégrale. Elle consiste à remplacer le domaine du problème par un ensemble de particules arbitrairement distribués et aucune connectivité entre eux n'est ni nécessaire. Tandis que la méthode MLS est basée sur une représentation en séries. Elle est appliquée sous une formulation faible, donc l'intégration numérique est nécessaire ce qui demande un coût de calcul très considérable. Pour éviter l'intégration numérique, on essaie, dans

les chapitres suivants, d'adapter la méthode sans maillage basée sur les fonctions de forme de type MLS à la famille des méthodes sans maillage de type collocation.



# Chapitre 3

## Modélisation et simulation 2D du procédé FSW par la méthode sans maillage SPH

---

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>3.2</b>	<b>Modèle proposé . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>3.3</b>	<b>Approche de résolution numérique . . . . .</b>	<b>46</b>
3.3.1	Approximation par l'approche SPH . . . . .	46
3.3.2	Schéma en temps . . . . .	48
<b>3.4</b>	<b>Discussion numérique . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>3.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>54</b>

---

## 3.1 Introduction

Comme nous avons déjà rappelé, dans le chapitre 1, que le procédé de soudage par friction et malaxage (Friction Stir Welding FSW) a été inventé par l'institut de Soudure Britannique "The Welding Institute TWI" depuis les années 1990 pour souder les alliages d'aluminium. Thomas et al. [109] ont montré que l'avantage principal de cette technique est sa capacité à souder, à l'état solide, les alliages des métaux qui sont, généralement, difficiles à souder par des procédés de soudage conventionnels. L'assemblage de deux pièces par le procédé FSW consiste en la production de chaleur due, principalement, à l'épaulement et le malaxage de matière grâce au pion. L'épaulement et le pion constituent les principaux éléments de l'outil de soudage. Malgré de nombreuses applications industrielles du procédé FSW, son développement reste largement empirique et basé sur une grande connaissance expérimentale. Les travaux expérimentaux sont très nombreux et les simulations numériques aussi, mais, le traitement du malaxage reste difficile à réaliser pour les numériciens.

La modélisation numérique du procédé de soudage par friction et malaxage FSW a été étudiée par plusieurs auteurs considérant l'aspect thermique ou thermomécanique [43; 42; 70; 56; 15; 95; 38]. Le malaxage est difficile à réaliser à l'aide de la méthode des éléments finis en formulation lagrangienne puisque la zone proche de l'outil de soudage est le siège de grandes déformations. Différentes formulations ont été proposées dans ces contributions concernant des formulations eulériennes, lagrangiennes ou Lagrangiennes et Eulériennes arbitraires ALE. La formulation lagrangienne est bien adaptée pour étudier le malaxage de la matière observé dans le procédé de soudage FSW, mais, la distorsion du maillage nécessite une procédure de remaillage. La formulation ALE a été proposée afin de bénéficier à la fois les avantages des formulations eulériennes et lagrangiennes [70]. Dans cette technique, il faut décrire le mouvement du maillage et de la matière séparément en respectant le domaine de référence. La formulation ALE a été appliquée avec succès dans de nombreux domaines et en particulier dans les procédés de mise en forme des métaux. Malgré, le développement intensif de ces techniques, le malaxage de la matière, dans le procédé de soudage FSW, reste très difficile à réaliser numériquement et surtout par la méthode des éléments finis [70; 43]. Une solution alternative pour la simulation de ce procédé est l'utilisation des méthodes sans maillage. A notre connaissance, peu de contributions numériques utilisant les méthodes sans maillage sont disponibles sur le sujet. Alfaro et al. [4] ont proposé un algorithme basé sur la méthode des éléments naturels (NEM) pour simuler la zone de malaxage en bidimensionnel.

Dans ce chapitre, nous proposons une modélisation et une simulation basées sur la méthode sans maillage dite Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) [108; 138; 76; 77;

80] pour simuler le procédé FSW. Le modèle utilisé, dans ce travail, considère la zone de malaxage comme un fluide non newtonien dont la viscosité dépend de la température. Cette zone est aussi traitée en tant qu'un fluide faiblement compressible. Cette simplification nous permet d'utiliser une équation d'état vérifiée par la pression du fluide. La valeur de la vitesse équivalente du son dans le matériau considéré a une influence directe sur le critère de stabilité du schéma en temps utilisé [138]. Dans ce travail, le contact entre l'outil et les particules du matériau est contrôlé par des forces dues à des termes de pression ; ce qui permet d'éviter la pénétration des particules à l'intérieur de l'outil [25]. On se limite, dans cette étude, à une modélisation bidimensionnelle. Les équations obtenues par cette modélisation sont résolues par l'approche sans maillage SPH.

## 3.2 Modèle proposé

Le soudage par friction et malaxage est un procédé thermomécanique complexe qui nécessite une bonne connaissance sur les relations existantes entre les paramètres principaux du procédé tels que la profondeur de la pénétration de l'outil, la vitesse de soudage, la vitesse de rotation de l'outil, les propriétés thermomécaniques du matériau à souder, la géométrie de l'outil...etc. Dans de nombreuses contributions, la zone de malaxage est considérée comme un fluide incompressible à haute viscosité et l'écoulement est obtenu en utilisant des calculs de dynamique des fluides (CFD). Dans d'autres cas, la déformation est modélisée en utilisant la mécanique des solides déformables et des méthodes numériques pour résoudre le problème non linéaire résultant pour calculer les différentes variables comme la vitesse, la pression, la température..etc.

Dans le présent travail, nous utilisons un couplage thermomécanique avec une loi de comportement qui dépend de la température. Les lois de la thermomécanique, utilisées dans notre modélisation, sont présentées comme suit :

Equation de conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot V \quad (3.1)$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{dV}{dt} = \nabla \sigma \quad (3.2)$$

Equation de conservation de l'énergie :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q_v \quad (3.3)$$

où  $V$  est le vecteur vitesse,  $\rho$  est la masse volumique,  $\sigma$  est le tenseur des contraintes de Cauchy,  $C_p$  est la chaleur spécifique,  $T$  est le champ de température,  $k$  est la conductivité

thermique du matériau. La production volumique de la chaleur  $q_v$  est donnée par :

$$q_v = -\beta\tau : \nabla V \quad (3.4)$$

où  $\beta$  est la fraction de l'énergie mécanique transformée en chaleur supposée égale à 0,9 dans ce travail [115] et  $\tau$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy donnée par :

$$\tau = \mu \left[ {}^t\nabla V + \nabla V - \frac{2}{3} (\nabla \cdot V) I \right] \quad (3.5)$$

avec  $\mu$  est la viscosité du fluide qui dépend de la température selon la loi puissance suivante :

$$\mu = A \left( 1 - \left( \frac{T - T_{ref}}{T_{fusion} - T_{ref}} \right)^m \right) \quad (3.6)$$

avec  $A$  et  $m$  des paramètres caractérisant le matériau,  $T_{ref}$  est la température de référence et  $T_{fusion}$  est la température de fusion du matériau des plaques à souder. La pression  $p$  est obtenue en utilisant l'équation d'état suivante [138] :

$$p = c^2\rho \quad (3.7)$$

avec  $c$  est la vitesse du son à travers le matériau.

Ces équations sont complétées par les conditions aux limites et les conditions initiales.

### 3.3 Approche de résolution numérique

L'approche numérique proposée est basée sur un schéma en temps semi-implicite et une discrétisation spatiale utilisant la méthode sans maillage SPH. Cette méthode est basée sur une interpolation intégrale et s'adapte aux problèmes avec grandes déformations. Ses caractéristiques principales sont décrites en détail dans les ouvrages (Monaghan, 1989) [76], (Monaghan, 1992) [77], (Monaghan, 2005) [80], (Liu, 2003) [138], [Benz, 1990] [8] et dans le chapitre 2. Ici, on rappelle uniquement les équations du problème à résoudre ainsi que la notation SPH.

#### 3.3.1 Approximation par l'approche SPH

Le domaine d'étude est représenté par un ensemble de particules sans connectivité. Ainsi, la méthode de représentation intégrale est utilisée pour approximer les variables du problème. L'approximation du noyau est estimée en remplaçant l'intégrale par une sommation sur toutes les valeurs correspondantes à des particules situées dans le domaine d'influence. Les approches SPH, décrite dans le chapitre 2 (équations 2.17, 2.18 et 2.25), sont utilisées pour approximer les équations du problème étudié.

En utilisant l'approximation (2.17), l'équation de conservation de la masse pour une particule "i" est donnée comme suit :

$$\frac{d\rho_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N m_j (V_i - V_j) \nabla W_{ij} \quad (3.8)$$

où  $N$  est le nombre des particules voisines,  $j$  indique l'indice des particules voisines,  $m_j$  est la masse de la particule  $j$  et  $W_{ij}$  est la fonction poids centrée sur la particule  $i$ .

En utilisant les approximations (2.18) et (2.25) respectivement pour les parties sphérique et déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy, l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour une particule "i" est donnée comme suit :

$$\frac{dV_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla W_{ij} + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \frac{4\mu_i \mu_j}{(\mu_i + \mu_j)} \frac{(V_i - V_j) \cdot (r_i - r_j)}{(r_i - r_j)^2} \nabla W_{ij} \quad (3.9)$$

où  $r_i$  est le vecteur position de la particule  $i$ .

En utilisant l'approximation (2.25), l'équation de conservation de l'énergie pour une particule "i" est donnée comme suit :

$$\rho C_{p,i} \frac{dT_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{4k_i k_j}{(k_i + k_j)} \frac{(T_i - T_j) \cdot (r_i - r_j)}{(r_i - r_j)^2} \nabla W_{ij} + q_{v,i} - h(T_i - T_{ref}) \delta_i \quad (3.10)$$

où  $\delta_i$  est une constante égale à l'unité pour toutes les particules à la frontière avec l'air et à zéro ailleurs.

La production volumique de la chaleur  $q_{v,i}$ , la viscosité  $\mu_i$ , la pression  $p_i$  pour une particule  $i$  sont données par :

$$\begin{cases} q_{v,i} &= -\beta \sum_{j=1}^N \left( \frac{2m_j \mu_i \mu_j}{\rho_j (\mu_i + \mu_j)} \right) \left( \frac{[(V_i - V_j)(r_i - r_j)]^2 (r_i - r_j)}{(r_i - r_j)^2} \right) \nabla W_{ij} \\ \mu_i &= A \left( 1 - \left( \frac{T_i - T_{ref}}{T_{fusion} - T_{ref}} \right)^m \right) \\ p_i &= c^2 \rho_i \end{cases} \quad (3.11)$$

Les conditions aux limites prises sur l'outil imposent que les particules suivent les mêmes lois comme les particules de fluide et elles se déplacent ensemble selon la loi suivante :

$$V_i = \omega r_{i,c} + V_a \quad (3.12)$$

où  $r_{i,c} = (x_i - x_c, z_i - z_c, 0)$ , avec  $\omega$  est la vitesse de rotation de l'outil et  $V_a$  est la vitesse de translation du centre de l'outil,  $x_c$  et  $z_c$  sont les coordonnées du centre de l'outil. Les particules du matériau se déplacent en utilisant la variante XSPH (Monaghan, 1989) [76][77][138] :

$$\frac{dr_i}{dt} = V_i + \epsilon \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_{ij}} (V_i - V_j) W_{ij} \quad (3.13)$$

où  $\rho_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$  et  $\epsilon$  est un paramètre donné dépendant du problème à résoudre. Cette méthode assure que la particule "i" se déplace avec la vitesse moyenne de ses voisines.

### 3.3.2 Schéma en temps

Pour résoudre numériquement le problème (3.8-3.13), on utilise le schéma de temps proposé par Allen et Tildesley [7] basé sur l'algorithme explicite "velocity Verlet". L'intégration de Verlet est un schéma d'intégration qui permet de calculer la trajectoire de particules en simulation dynamique moléculaire. Cette méthode offre une meilleure stabilité, de même que d'importantes propriétés dans les systèmes physiques, telles que réversibilité dans le temps et la conservation de propriété. À première vue, il peut sembler naturel de calculer les trajectoires en utilisant la méthode d'Euler. Cependant, ce type d'intégration souffre de nombreux problèmes. La stabilité de cette technique dépend assez lourdement d'une fréquence de mise à jour uniforme, ou de la capacité d'identifier précisément les positions passées à un très petit pas de temps précédent. La méthode a été développée par le physicien français Loup Verlet en 1967.

En utilisant cet algorithme explicite, les nouvelles valeurs de la masse volumique, de la vitesse, de la température et de la position de chaque particule sont actualisées par l'intégration temporelle des équations (3.8-3.10) de la manière suivante :

$$\begin{cases} r_i^{n+1} &= r_i^n + \Delta t V_i^n + 0.5 \Delta t^2 \dot{V}_i^n \\ V_i^{n+1} &= V_i^n + 0.5 \Delta t (\dot{V}_i^n + \dot{V}_i^{n+1}) \\ \rho_i^{n+1} &= \rho_i^n + 0.5 \Delta t (\dot{\rho}_i^n + \dot{\rho}_i^{n+1}) \\ T_i^{n+1} &= T_i^n + 0.5 \Delta t (\dot{T}_i^n + \dot{T}_i^{n+1}) \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $r_i^{n+1}$  est la position de la particule  $i$  à l'instant  $(n+1)\Delta t$ ,  $V_i^{n+1}$  est la vitesse de la particule  $i$  à l'instant  $(n+1)\Delta t$ ,  $\rho_i^{n+1}$  est la masse volumique de la particule  $i$  à l'instant  $(n+1)\Delta t$  et  $T_i^{n+1}$  est la température de la particule  $i$  à l'instant  $(n+1)\Delta t$ . Leurs dérivées par rapport au temps sont notées respectivement par  $V_i^{n+1}$ ,  $\dot{V}_i^{n+1}$ ,  $\dot{\rho}_i^{n+1}$  et  $\dot{T}_i^{n+1}$ , avec  $\Delta t$  est le pas du temps.

Pour la résolution, on suit la stratégie suivante :

1- On calcule :

$$r_i^{n+1} = r_i^n + \Delta t V_i^n + 0.5(\Delta t)^2 \dot{V}_i^n \quad (3.15)$$

2- On calcule :

$$\begin{cases} \rho_i^{n+\frac{1}{2}} &= \rho_i^n + 0.5 \Delta t \dot{\rho}_i^n \\ V_i^{n+\frac{1}{2}} &= V_i^n + 0.5 \Delta t \dot{V}_i^n \\ T_i^{n+\frac{1}{2}} &= T_i^n + 0.5 \Delta t \dot{T}_i^n \end{cases} \quad (3.16)$$

3- A partir des lois de conservation de masse, de mouvement et d'énergie, on calcule :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho}_i^{n+1} = - \sum_{j=1}^N m_j (V_i^n - V_j^n) \nabla W_{ij} \\ \dot{V}_i^{n+1} = - \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{p_i^n}{(\rho_i^n)^2} + \frac{p_j^n}{(\rho_j^n)^2} \right) \nabla W_{ij} + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i^n \rho_j^n} \frac{4\mu_i^n \mu_j^n}{(\mu_i^n + \mu_j^n)} \frac{(V_i^n - V_j^n) \cdot (r_i^{n+1} - r_j^{n+1})}{(r_i^{n+1} - r_j^{n+1})^2} \nabla W_{ij} \\ \dot{T}_i^{n+1} = \frac{1}{\rho_i^n C_{p,i}} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j^n} \frac{4k_i k_j}{(k_i + k_j)} \frac{(T_i^n - T_j^n) \cdot (r_i^{n+1} - r_j^{n+1})}{(r_i^{n+1} - r_j^{n+1})^2} \nabla W_{ij} + \frac{1}{\rho_i^n C_{p,i}} q_{v,i}^{n+1} - \frac{1}{\rho_i^n C_{p,i}} h (T_i^n - T_{ref}) \delta_i \\ q_{v,i}^{n+1} = -\beta \sum_{j=1}^N \left( \frac{2m_j \mu_i^n \mu_j^n}{\rho_j^n (\mu_i^n + \mu_j^n)} \right) \left( \frac{[(V_i^n - V_j^n) \cdot (r_i^{n+1} - r_j^{n+1})]^2 (r_i^{n+1} - r_j^{n+1})}{(r_i^{n+1} - r_j^{n+1})^2} \right) \nabla W_{ij} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

4- et finalement on calcule :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+\frac{1}{2}} + 0.5\Delta t \dot{\rho}_i^{n+1} \\ V_i^{n+1} = V_i^{n+\frac{1}{2}} + 0.5\Delta t \dot{V}_i^{n+1} \\ T_i^{n+1} = T_i^{n+\frac{1}{2}} + 0.5\Delta t \dot{T}_i^{n+1} \\ \mu_i^{n+1} = A \left( 1 - \left( \frac{T_i^{n+1} - T_{ref}}{T_{fusion} - T_{ref}} \right)^m \right) \\ p_i^{n+1} = c^2 \rho_i^{n+1} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Remarque : Cet algorithme suppose que les valeurs  $\dot{\rho}^{n+1}$ ,  $\dot{V}^{n+1}$  et  $\dot{T}^{n+1}$  ne dépendent que de  $r^{n+1}$ , et pas de  $\rho^{n+1}$ ,  $V^{n+1}$  et  $T^{n+1}$ .

Les schémas en temps explicites sont soumis à une condition de stabilité "Courant-Friedrichs-Levy (CFL)". La condition CFL montre que le domaine de calcul dans la simulation numérique doit inclure le domaine physique, où la vitesse maximale de propagation numérique doit être supérieure à la vitesse maximale de propagation physique [2; 49]. Cette condition CFL nécessite un pas de temps proportionnel à la distance interparticule la plus petite  $\Delta r_{min}$ .

$$\Delta t = \min\left(\frac{\Delta r_{min}}{c}\right) \quad (3.19)$$

avec  $c$  est la vitesse du son à travers le matériau.

Dans la pratique, le pas de temps dans les applications SPH est dépend de la nature physique du problème et peut être plus grand que celle estimée en utilisant la condition CFL.

### 3.4 Discussion numérique

Dans la présente étude, les deux pièces à souder, considérées dans cet exemple d'application, sont deux plaques en alliage d'aluminium de même longueur  $L = 50mm$  et de même largeur  $D = 10mm$ . Le matériau des deux pièces est supposé incompressible

dont la viscosité  $\mu$  est donnée selon l'équation (3.11-b) avec les paramètres suivants :  $A = 200MPa.s^{-1}$ ,  $m = 1$ ,  $T_{ref} = T_0 = 25^\circ C$ ,  $T_{fusion} = 502^\circ C$ .

La figure 3.1 illustre le domaine bidimensionnel occupé par le matériau étudié et le domaine circulaire occupé par l'outil ainsi que les conditions aux limites imposées sur les frontières interne et externe.

L'outil est supposé rigide. Le rayon du pion de l'outil est égal à  $r_p = 2.5mm$  et les propriétés thermomécaniques du matériau des deux plaques sont illustrées sur le tableau 3.1.

$\rho(kg/m^3)$	$C_p(J/K.kg)$	$k(W/m.K)$
2780	875	140

TABLE 3.1 – Caractéristiques mécaniques du matériau

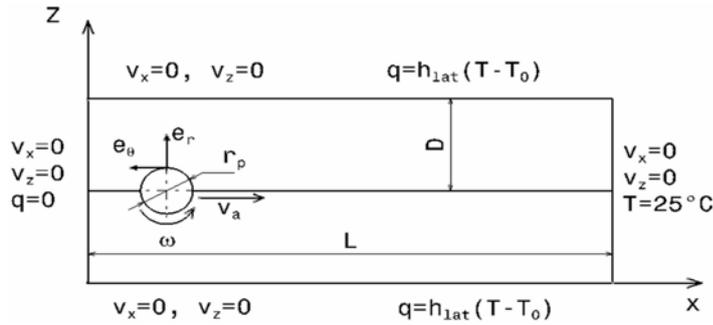


FIGURE 3.1 – Dimensions du domaine d'étude et conditions aux limites

Dans cette application, on a choisi un pas de temps  $\Delta t = 10^{-8}s$ , un coefficient de transfert thermique  $h_{lat} = 30W/m^2K$  et une température ambiante  $T_0 = 25^\circ C$ . Comme le montre la figure 3.1, on considère les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(x, z, t) = -r_p \omega \cos(\omega t) + V_a & \text{si } (x - x_c)^2 + (z - z_c)^2 = r_p^2 \quad \forall t \geq 0 \\ v(x, z, t) = -r_p \omega \sin(\omega t) & \text{si } (x - x_c)^2 + (z - z_c)^2 = r_p^2 \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, z, t) = 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = L \text{ ou } z = 0 \text{ ou } z = 2D \quad \forall t \geq 0 \\ v(x, z, t) = 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = L \text{ ou } z = 0 \text{ ou } z = 2D \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, z, t) = 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = L \text{ ou } z = 0 \text{ ou } z = 2D \text{ et } t = 0 \\ v(x, z, t) = 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = L \text{ ou } z = 0 \text{ ou } z = 2D \text{ et } t = 0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

où  $\{V\} = \langle u, v \rangle$ . Les valeurs de la vitesse de soudage  $V_a$  et la vitesse angulaire  $\omega$  de l'outil utilisées ici sont :  $V_a = 2mm/s$  et  $\omega = 20rad/s$ .

La figure 3.2 présente la configuration initiale des particules représentant le domaine étudié. Le nombre de particules, choisi dans cette étude pour appliquer l'approche sans maillage SPH, est de l'ordre de 4427.

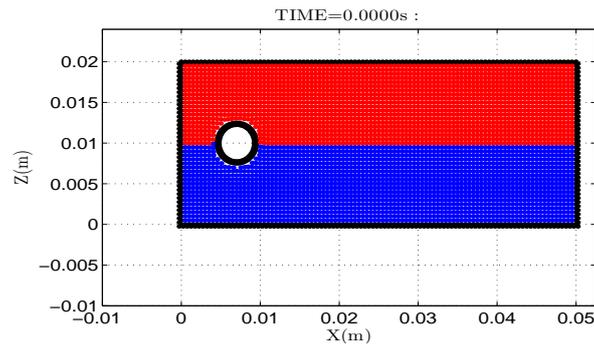
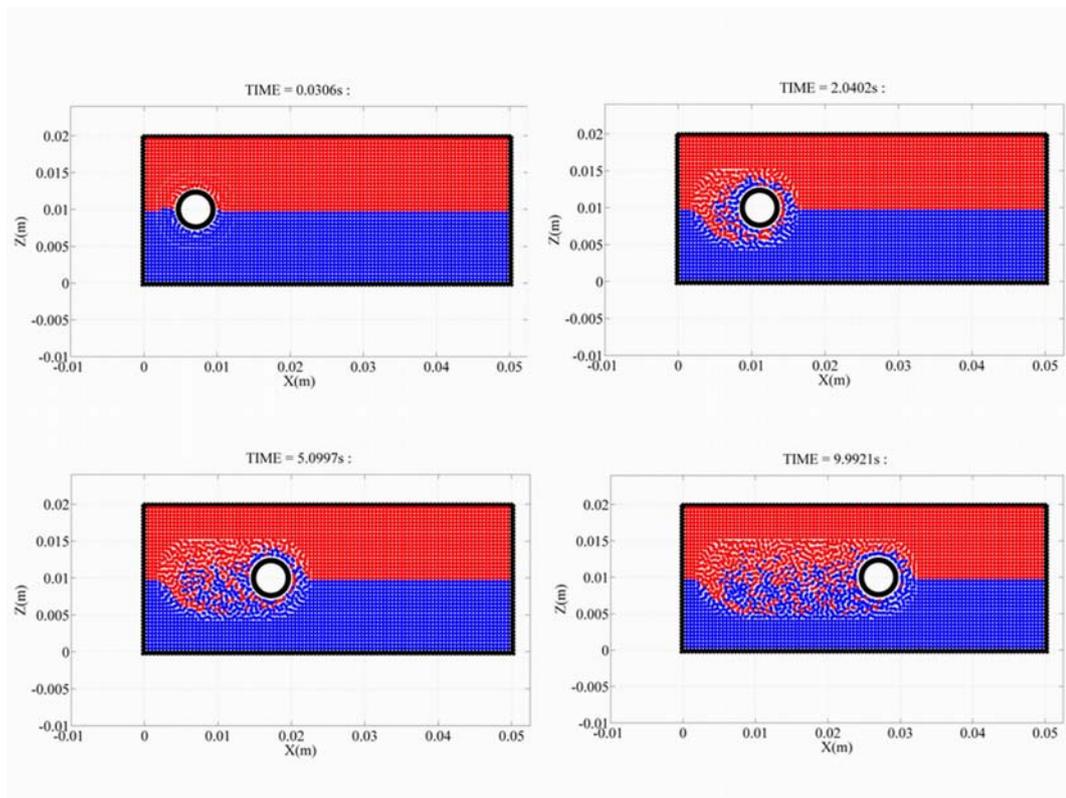


FIGURE 3.2 – Distribution initiale des particules

Les résultats obtenus concernant la distribution des particules, par ce modèle aux instants  $t_1 = 0.0306s$ ,  $t_2 = 2.0402s$ ,  $t_3 = 5.0997s$  et  $t_4 = 9.9921s$ , sont présentés sur la figure 3.3. Ces résultats montrent que le modèle numérique basé sur l'approche sans maillage SPH est capable de simuler les conditions de l'écoulement thermomécanique du matériau autour de l'outil. D'après cette figure, on remarque qu'il y a des grandes déformations autour de l'outil qui sont bien gérées par ce modèle. Dans cette étude, on a remarqué qu'il y a une difficulté de la maîtrise des conditions aux limites et ceci est déjà mentionné dans le chapitre 2.

FIGURE 3.3 – Les états de la distribution des particules aux instants  $t_1 = 0.0306s$ ,  $t_2 = 2.0402s$ ,  $t_3 = 5.0997s$  et  $t_4 = 9.9921s$  au cours du soudage

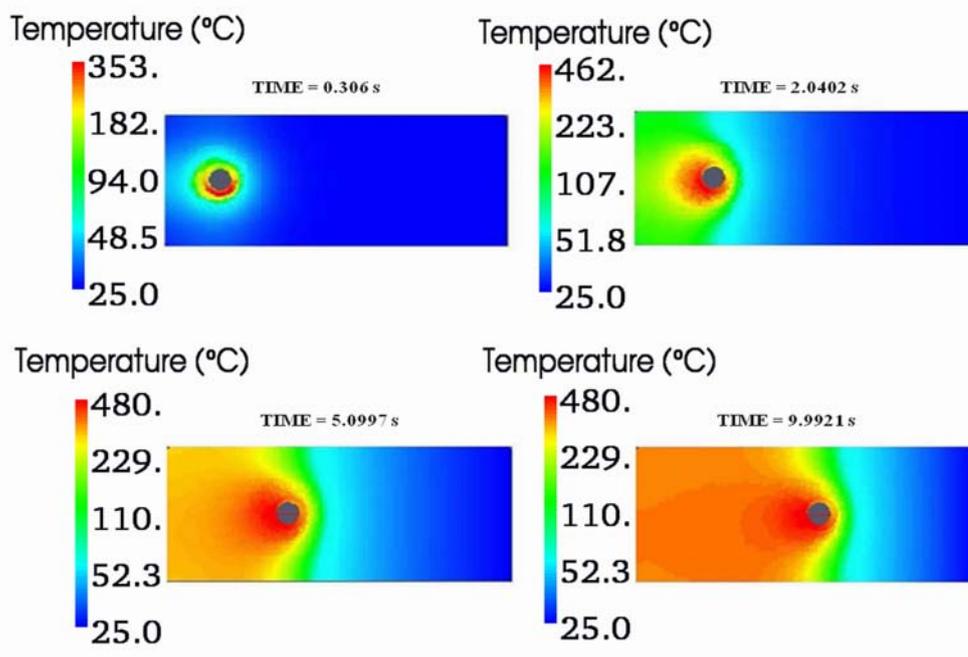


FIGURE 3.4 – Distribution de la température aux instants  $t_1 = 0.0306s$ ,  $t_2 = 2.0402s$ ,  $t_3 = 5.0997s$  et  $t_4 = 9.9921s$

Aux mêmes instants que précédemment, on représente le champ de température sur la figure 3.4. Au premier instant  $t_1 = 0.0306s$ , on remarque que la température maximale est au voisinage de l'outil et ceci est due à l'effet visqueux causé par le malaxage de la matière par le pion. Aux instants suivants, le champ de température se diffuse dans les deux plaques balayées par l'outil.

Afin de valider les résultats numériques de l'approche SPH, on simule le problème sous le code industriel Fluent. Ce code est basé sur une formulation eulérienne et une discrétisation en volumes finis. Ainsi, deux configurations équivalentes entre les formulations lagrangienne et eulérienne ont été considérées (voir les figures 3.1 et 3.5). Le calcul par l'approche SPH est effectué jusqu'à ce que l'outil atteigne le centre de la plaque. Cette position de l'outil correspond à l'instant  $t = 9s$ . Dans la formulation eulérienne, un calcul instationnaire avec le même temps  $t$  est également effectué. Les deux calculs utilisent la même loi de comportement (équation 3.11-b). Sur la figure 3.6, on présente la distribution de la température à l'instant  $t = 9s$ .

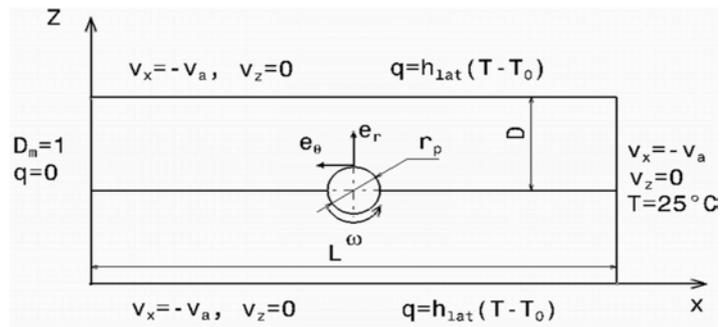


FIGURE 3.5 – Géométrie et conditions aux limites de la configuration FSW traitée par Fluent

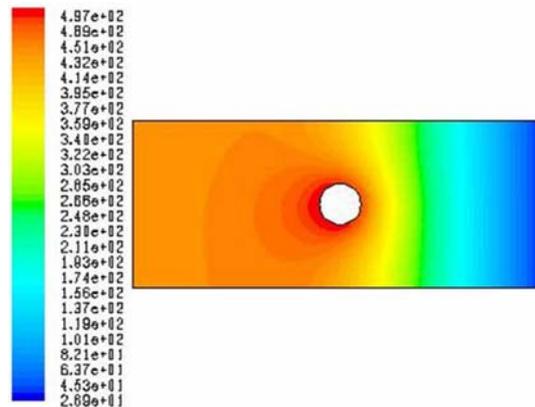


FIGURE 3.6 – Distribution de la température obtenue par Fluent

Les figures 3.8 et 3.9, qui sont prises respectivement sur les coupes (A – A) et (B – B) (voir figure 3.7), montrent la concordance entre les résultats obtenus par l'approche SPH et ceux obtenus par le code Fluent pour les évolutions de température. L'erreur relative entre les deux résultats est de l'ordre de 5% et ceci confirme la performance de l'algorithme proposé.

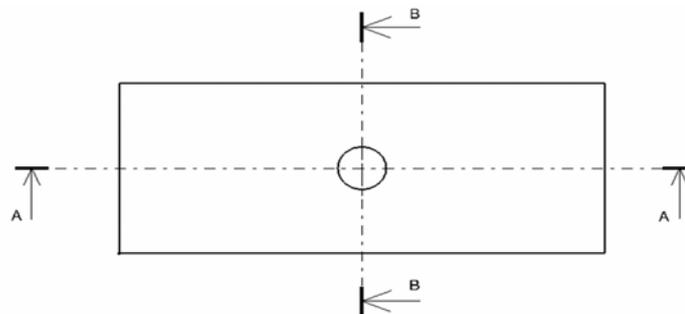


FIGURE 3.7 – Coupe longitudinale (A-A) et coupe transversale (B-B)

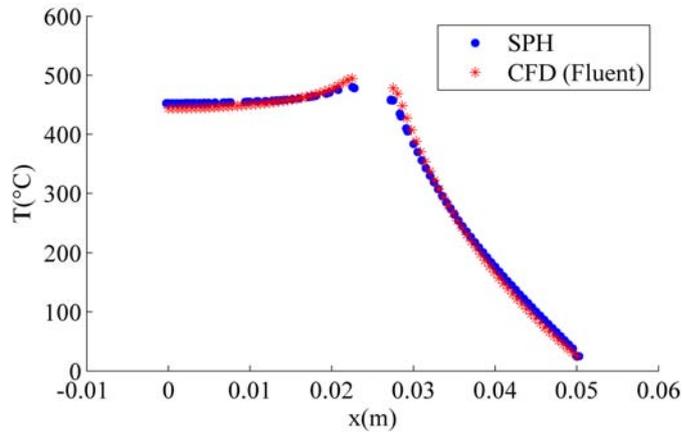


FIGURE 3.8 – Evolution de la température le long de la coupe (A-A)

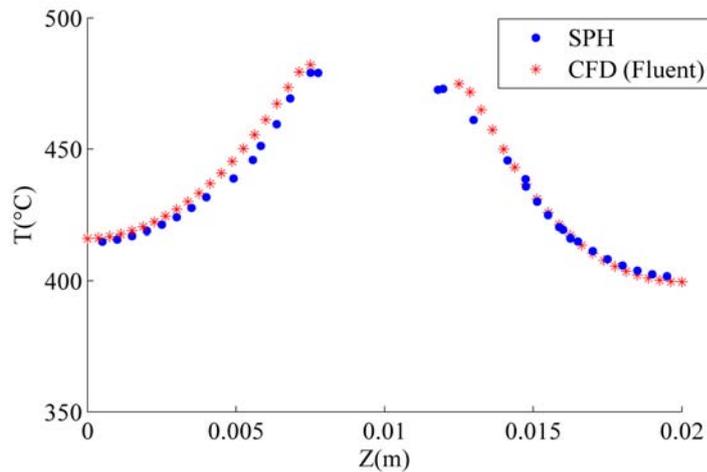


FIGURE 3.9 – Evolution de la température le long de la coupe (B-B)

### 3.5 Conclusion

Dans cette contribution, nous avons proposé le premier modèle basé sur la méthode sans maillage Smoothed Particles Hydrodynamics pour modéliser le procédé de soudage par friction et malaxage. L'avantage principal de cette technique est la simulation de l'écoulement thermomécanique de la matière autour de l'outil qui est très difficile à obtenir avec les autres méthodes numériques comme la méthode des éléments finis. La validation des résultats numériques obtenus par l'approche SPH a été faite en utilisant le code industriel Fluent. D'après cette application numérique, on remarque qu'il faut fixer plusieurs couches au bord des deux plaques pour bien gérer les conditions aux limites et ceci est due à l'inconvénient de la méthode sans maillage SPH comme il a été montré dans le chapitre 2. Cette difficulté nous a poussé à réfléchir à d'autres méthodes sans maillage

qui gèrent mieux les conditions aux limites que l'approche SPH.



# Chapitre 4

## Simulation du malaxage observé dans le procédé FSW par le couplage de la méthode itérative et de la méthode sans maillage MLS

---

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>58</b>
<b>4.2</b>	<b>Equations du problème</b>	<b>59</b>
<b>4.3</b>	<b>Modèle numérique</b>	<b>61</b>
4.3.1	Discrétisation spatiale	61
4.3.2	Discrétisation temporelle	62
<b>4.4</b>	<b>Stratégie de résolution</b>	<b>62</b>
<b>4.5</b>	<b>Application numérique</b>	<b>63</b>
4.5.1	Influence de la distribution des points	65
4.5.2	Influence de la taille du domaine d'influence	69
4.5.3	Influence de la fonction poids	70
4.5.4	Validation de l'algorithme itératif avec le code industriel Fluent	70
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>75</b>

---

## 4.1 Introduction

La méthode des éléments finis est la plus utilisée comme méthode de discrétisation pour résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles décrivant les phénomènes physiques. Cependant, pour certaines applications, sa mise en œuvre est difficile dans le cas des géométries tridimensionnelles complexes de même elle demande un temps de calcul important comme dans le cas de grandes déformations.

Dans ce chapitre, on s'intéresse particulièrement au malaxage de la matière observé dans le procédé de soudage par friction et malaxage (FSW) [109]. La simulation numérique de ce type de procédé est très difficile à réaliser en utilisant la méthode des éléments finis sous une formulation lagrangienne. La matière au voisinage de l'outil de soudage est soumise à de grandes déformations avec un écoulement complexe. Les chercheurs se sont intéressés aux différents aspects du procédé soit thermique ou thermomécanique. Les contraintes résiduelles et l'écoulement de la matière autour de l'outil ont également un grand intérêt dans le domaine scientifique. Différentes formulations ont été proposées dans la littérature. Des solutions semi-analytiques, formulations eulériennes, lagrangiennes ou ALE ont été proposées dans de nombreuses contributions pour modéliser l'écoulement de la matière [43; 42; 70; 56; 15; 95; 38].

Les modèles semi-analytiques ont été utilisés, généralement, pour simuler l'écoulement de la matière, mais ils sont incapables de gérer cet écoulement. Les modèles, basés sur des formulations eulériennes, sont utilisés également pour étudier l'écoulement de la matière et l'effet thermique comme le montrent Cho et al. [22]. Mais, ils ne peuvent pas modéliser des géométries complexes de l'outil de soudage. Les formulations lagrangiennes associées à la méthode des éléments finis sont bien adaptées pour décrire les contraintes résiduelles avec une géométrie complexe de l'outil, mais la forte distorsion du maillage conduit à la divergence du calcul malgré l'utilisation de la procédure du remaillage. Les formulations ALE ont été proposées pour combiner les avantages des deux formulations eulériennes et lagrangiennes. Ce genre de formulations permet de réduire l'effet de la distorsion du maillage avec un temps de calcul raisonnable. Certains auteurs ont proposé cette technique pour simuler le procédé de soudage par friction et malaxage, mais l'utilisation de cette procédure est encore limitée [70].

Les méthodes sans maillage peuvent être considérées comme une alternative aux méthodes avec maillage basées sur la méthode des éléments finis. En effet, ces techniques ont été fortement développées, depuis les années 90, pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Ils visent à éviter les difficultés liées au maillage. A notre connaissance, la méthode Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) a été la première méthode sans maillage présentée en 1977 par Lucie et par Gingold et Monaghan pour traiter des problèmes as-

trophysiques [62; 46]. Une autre classe de méthodes sans maillage appelée la méthode des éléments diffus a été proposée par Nayroles et al. [85; 86]. Cette méthode est basée sur l'approximation des moindres carrés mobiles et un schéma de discrétisation de type Galerkin. Belytschko et al. ont développé en 1994 la méthode dite Element Free Galerkin (EFG) [13]. Une tentative, pour simuler le malaxage de la matière dans le procédé FSW en utilisant la méthode des éléments naturels (Naturel Element Method NEM), a été proposée par Alfaro et al. [4]. Cette technique utilise le diagramme de Voronoï pour construire les fonctions de forme linéaires à partir d'un ensemble des points voisins. D'autre part, elle est basée sur une forme faible, ce qui conduit généralement à des difficultés liées à l'intégration numérique ce qui n'est pas le cas en utilisant la méthode des éléments finis. En effet, l'avantage principal de cette technique est la facilité de traitement des conditions aux limites grâce aux fonctions de forme interpolantes.

Dans le travail, présenté dans ce chapitre, l'idée est de montrer qu'un modèle, couplant la méthode MLS [11; 64; 66; 67; 72; 73] et un algorithme itératif implicite [106], basé sur une formulation en forme forte, nous permet d'obtenir un algorithme efficace pour résoudre le problème du malaxage de la matière dans le procédé de soudage FSW. Ce genre de formulations permet d'éviter l'inconvénient lié à l'intégration numérique. Dans cette formulation, la méthode MLS n'est pas équivalente à la méthode SPH parce que la méthode MLS appartient aux méthodes de représentation en séries tandis que la méthode SPH appartient aux méthodes de représentation intégrale. Les champs thermiques et mécaniques sont directement attachés aux points voisins existants dans le domaine d'influence par les fonctions de forme MLS [84]. Remarquons que les fonctions de forme MLS ne satisfont pas la propriété de Kronecker. En raison de l'absence de cette propriété dans les fonctions de forme MLS, les conditions aux limites essentielles ne peuvent pas être imposées aussi facilement que dans la méthode des éléments finis. Dans ce travail, les conditions aux limites sont imposées par la méthode de collocation [27] où les points de collocation coïncident avec ceux le long de la frontière où les solutions sont imposées.

## 4.2 Equations du problème

Le procédé de soudage par friction et malaxage FSW engendre des déformations importantes et des vitesses de rotation élevées au voisinage de l'outil de soudage. Ainsi, les variables principales du problème sont la vitesse et la pression. Le problème mécanique est basé sur un ensemble d'équations physiques. La loi de conservation de la masse et l'incompressibilité du matériau considéré conduisent à :

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (4.1)$$

La forme générale de l'équation du mouvement est donnée comme suit en l'absence des forces de volume :

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma \quad (4.2)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $V$  est le vecteur vitesse,  $\sigma$  est le tenseur des contraintes de Cauchy. Le tenseur des contraintes est décomposé sous la forme suivante :

$$\sigma = -pI + S \quad (4.3)$$

où  $p$  est la pression,  $S$  est le tenseur déviatorique et  $I$  est le tenseur unité de seconde ordre.

L'approche que nous avons utilisée dans notre formulation viscoplastique, pour faire disparaître le terme de pression du problème mécanique et satisfaire numériquement la condition d'incompressibilité (4.1), rend la résolution plus économique en temps de calcul. Il s'agit d'une formulation en vitesses dans laquelle le gain en temps de calcul est obtenu avec quelques difficultés liées à l'incompressibilité. On introduit, en général, dans l'expression de la pression un coefficient de pénalisation numérique très grand noté  $\rho_p$ . Par contre, pour limiter les erreurs commises dans le cadre de cette formulation en vitesse, il est nécessaire de supposer que le matériau admet une certaine compressibilité visqueuse. La condition d'incompressibilité (4.1) est donc remplacée par la loi du comportement visqueux suivante [133] :

$$p = -\rho_p Tr(\dot{\epsilon}) \quad (4.4)$$

où  $\dot{\epsilon}$  est le tenseur des vitesses de déformation linéarisé défini par :

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} ({}^t\nabla V + \nabla V) \quad (4.5)$$

FSW est un procédé qui génère de grandes déformations et dans lesquelles les parties élastiques sont négligeables. L'avantage de cette hypothèse est que le matériau peut être modélisé comme un matériau viscoplastique :

$$S = 2\mu\dot{\epsilon} \quad (4.6)$$

où  $\mu$  est la viscosité du matériau. Tenant compte des équations (4.3), (4.4) et (4.6), le tenseur des contraintes de Cauchy est donné par :

$$\sigma = \rho_p Tr(\dot{\epsilon})\delta + 2\mu\dot{\epsilon} \quad (4.7)$$

Pour la viscosité, on choisit une loi en puissance donnée par [9] :

$$\mu = \frac{1}{3} K T^{A\bar{\epsilon}} \quad (4.8)$$

où  $T$  est la température absolue,  $K$ ,  $A$  et  $n$  sont des constantes caractéristiques du matériau,  $\bar{\epsilon}$  est la vitesse de déformation équivalente donnée par :

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}} \quad (4.9)$$

Dans ce travail, nous concentrons nos efforts sur l'aspect de malaxage qui est difficile à simuler par les méthodes classiques comme la méthode des éléments finis. Donc, nous supposons que la température est constante et la viscosité ne dépend que de la vitesse de déformation équivalente ( $\mu(T, \dot{\epsilon}) = \mu(\dot{\epsilon})$ ). Finalement, les équations du problème à résoudre se résument comme suit :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial V}{\partial t} &= \nabla \cdot \sigma \\ \sigma &= \rho_p T r(\dot{\epsilon}) \delta + 2\mu \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2} (T \nabla V + \nabla V) \\ \bar{\epsilon} &= \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}} \\ \mu &= \frac{1}{3} K T^A \bar{\epsilon}^{n-1} \end{cases} \quad (4.10)$$

Le problème (4.10) sera complété par les conditions initiales et les conditions aux limites.

## 4.3 Modèle numérique

### 4.3.1 Discrétisation spatiale

L'utilisation des méthodes sans maillage pour approximer la solution de la formulation en forme forte du problème mécanique conduit aux avantages suivants : (i) les équations discrétisées peuvent être obtenues directement à partir de la forme forte des équations du problème ; (ii) aucune intégration numérique n'est nécessaire ; (iii) aucun maillage de type des éléments finis n'est utilisé.

Pour appliquer la méthode des moindres carrés mobiles au problème (4.10), les fonctions de forme MLS, présentées dans le chapitre 2, sont utilisées pour approximer le vecteur vitesse  $\{V\} = {}^t \langle u, v \rangle$  à chaque point en utilisant un ensemble de points existant dans son domaine d'influence :

$$\{V\} = \sum_{i=1}^N [\Phi_i] \{V_i\} \quad (4.11)$$

où  $N$  est le nombre de points voisins,  $[\Phi_i]$  est la matrice des fonctions de forme associées au point  $i$  et  $\{V_i\}$  est le vecteur vitesse du point  $i$  du domaine d'influence.

En utilisant l'approximation (4.11), le tenseur des vitesses de déformations, sous la forme matricielle, peut être obtenu comme suit :

$$\{\dot{\epsilon}\} = \sum_{i=1}^N [B_i] \{V_i\} \quad (4.12)$$

où  $[B_i]$  est la matrice des dérivées des fonctions de forme au point  $i$ .

En substituant les approximations (4.11), (4.12) dans l'équation du problème (4.10), et après assemblage, on aboutit au système non linéaire donné par :

$$[M]\{\dot{V}\} - [K(\{V\})]\{V\} = \{0\} \quad (4.13)$$

où  $[M]$  est la matrice masse,  $[K(\{V\})]$  est une matrice dépendant du vecteur des vitesses  $\{V\}$ .

### 4.3.2 Discrétisation temporelle

Le temps de calcul est divisé en un nombre fini d'intervalles de longueur  $\Delta t$ . En utilisant le schéma d'Euler implicite, la forme discrétisée du problème (4.13) en fonction de la nouvelle inconnue  $\{V^{n+1}\}$  à l'instant  $t = (n + 1)\Delta t$  est :

$$([M] - \Delta t[K(\{V^{n+1}\})])\{V^{n+1}\} = [M]\{V^n\} \quad (4.14)$$

où  $\{V^n\}$  représente la valeur de l'inconnue à l'instant  $t = n\Delta t$ . La stratégie de résolution du problème (4.14) fera l'objet du paragraphe suivant.

## 4.4 Stratégie de résolution

Pour résoudre numériquement le problème non linéaire (4.14), on utilise la même méthode itérative que dans [106]. Dans la première itération, on remplace, dans le terme  $[K(\{V^{n+1}\})]$ , la valeur de  $\{V^{n+1}\}$  par la valeur de  $\{V^n\}$  pour démarrer le calcul. On continue la procédure d'itérations jusqu'à ce que le critère de convergence (4.15) soit satisfait. L'organigramme de la figure 4.1 représente les différentes étapes de cet algorithme implicite et itératif.

$$\frac{\|\{V_k^{n+1}\} - \{V_{k-1}^{n+1}\}\|}{\|\{V_k^{n+1}\}\|} \leq \delta \quad (4.15)$$

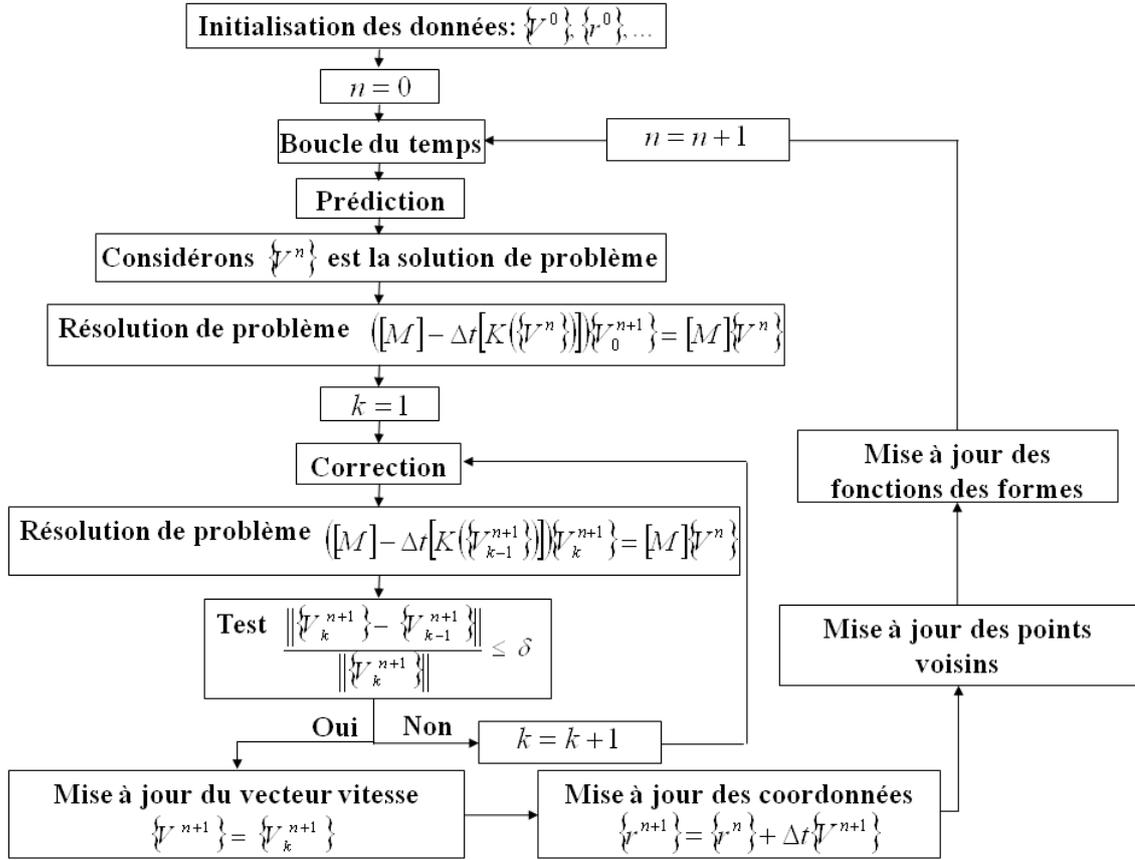


FIGURE 4.1 – Organigramme de l’algorithme itératif

La solution du problème (4.14) est la limite de la suite  $(\{V_1^{n+1}\}, \{V_2^{n+1}\}, \dots, \{V_k^{n+1}\}, \dots)$  qui est la solution du système algébrique récurrent suivant :

$$([M] - \Delta t[K(\{V_{k-1}^{n+1}\})])\{V_k^{n+1}\} = [M]\{V^n\}, \quad k \geq 1 \quad (4.16)$$

## 4.5 Application numérique

Dans cette section, on présente une application numérique pour montrer l’efficacité de l’algorithme proposé. La zone de malaxage est soumise à de grandes déformations et dans laquelle la vitesse des déformations est localisée autour de l’outil de soudage. C’est pourquoi seulement une petite zone circulaire est considérée pour modéliser le malaxage de la matière observé dans le procédé FSW conduisant ainsi à un temps de calcul raisonnable. L’algorithme proposé est une étape préliminaire en vue de modéliser ce malaxage. En effet, nous envisageons, par la suite, de l’améliorer avec l’approche thermomécanique en introduisant l’équation de l’énergie.

Dans cette application, on considère deux plaques sous la forme d’un demi disque de même rayon  $r_{pl} = 6mm$  fabriquées du même alliage d’aluminium AA7075 ayant les

propriétés matérielles viscoplastiques suivantes :  $K = 2.6910^{10} N/mm^2$ ,  $A = -3.3155$ ,  $n = 0.1324$  (voir l'équation 4.8). Le schéma de temps utilisé est un schéma implicite de type Euler et nous choisissons  $\Delta t = 0.0001s$ ,  $T = 300K$  et  $\delta = 10^{-6}$ . Le choix de la taille de domaine d'influence  $h$  est basé sur des tests numériques de telle sorte d'assurer la stabilité de l'algorithme proposé, mais, sa valeur doit vérifier la condition de stabilité  $N \gg m$  [57; 137]. Dans ce travail, l'outil de soudage est considéré rigide de forme circulaire de rayon  $r_p = 1.5mm$ . Comme le montre la figure 4.2, on considère les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} u(x, y, t) = -r_p \omega \cos(\omega t) & \text{si} & x^2 + y^2 = r_p^2 \quad \forall t \geq 0 \\ v(x, y, t) = -r_p \omega \sin(\omega t) & \text{si} & x^2 + y^2 = r_p^2 \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, y, t) = 0 & \text{si} & x^2 + y^2 = r_{pl}^2 \quad \forall t \geq 0 \\ v(x, y, t) = 0 & \text{si} & x^2 + y^2 = r_{pl}^2 \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, y, t) = 0 & \text{si} & r_p^2 < x^2 + y^2 < r_{pl}^2 \quad \text{et} \quad t = 0 \\ v(x, y, t) = 0 & \text{si} & r_p^2 < x^2 + y^2 < r_{pl}^2 \quad \text{et} \quad t = 0 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

où  $\omega = 100rad/s$  est la vitesse de rotation de l'outil.

Ces conditions aux limites sont appliquées directement aux points  $j$  du bord par collocation [65] comme suit :

$$\sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 \\ 0 & \Phi_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Dans cet exemple, le contact entre l'outil et les plaques à souder est considéré collant, c'est un cas limite dans les conditions de contact. Les forces de frottement peuvent être prise en compte en considérant les conditions de contact unilatéral entre l'outil et les plaques à souder.

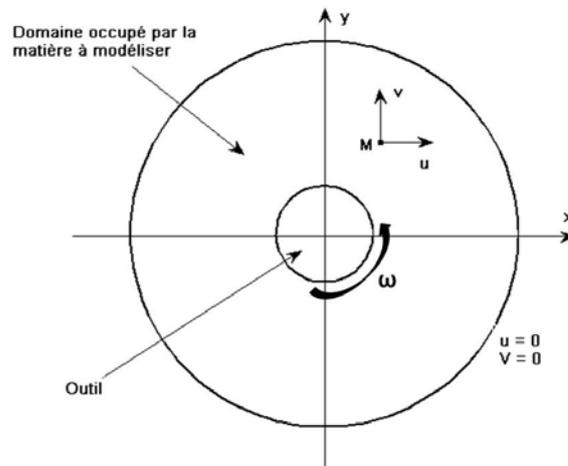


FIGURE 4.2 – Domaine d'étude et conditions aux limites

### 4.5.1 Influence de la distribution des points

Dans ce paragraphe, pour vérifier la robustesse de l'algorithme numérique proposé, on propose d'étudier dans un premier temps quelques cas de simulation pour tester cet algorithme avec différentes distributions des points. Ces tests nous permettent d'effectuer une étude sur la sensibilité par rapport à la densité des points dans le domaine d'étude. Nous avons représenté, dans la figure 4.3, la configuration du domaine pour quatre distributions différentes de points dans le cas où  $h = 4dr$  ; avec  $dr$  est la distance interpoint.

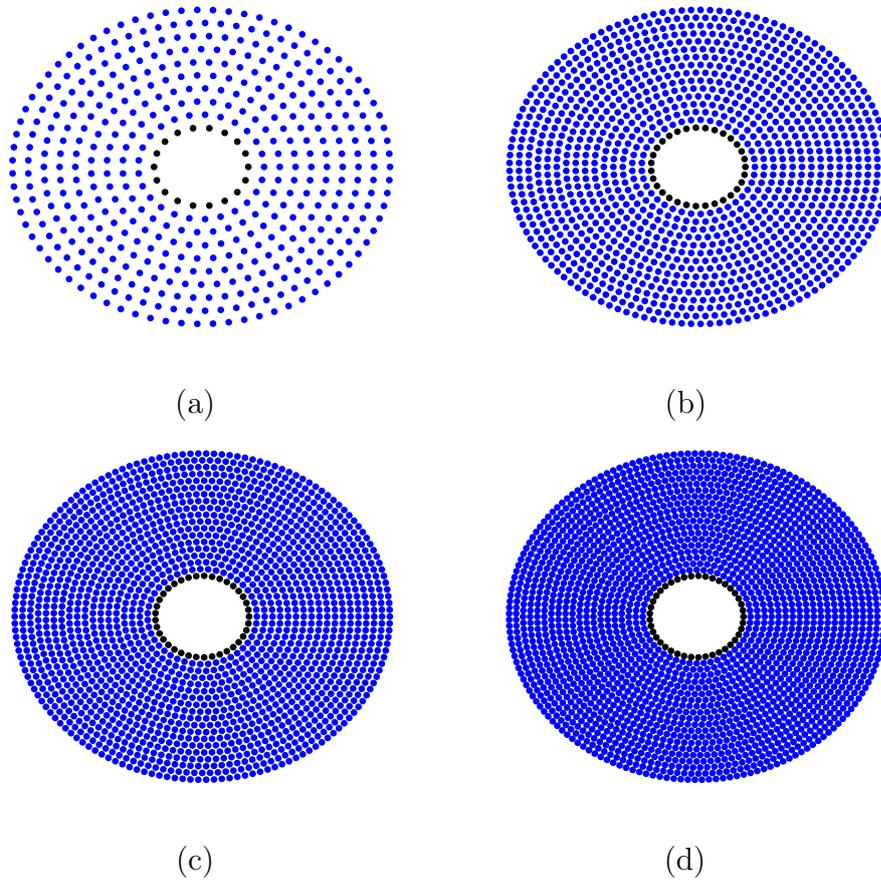


FIGURE 4.3 – Différentes distributions de points pour différentes distances interpoints (a)  $dr = 5. 10^{-4}m$ , (b)  $dr = 3. 10^{-4}m$  , (c)  $dr = 2.5 10^{-4}m$  et (d)  $dr = 2.25 10^{-4}m$

Les résultats, représentés dans ces tests numériques, sont enregistrés au temps  $t_c = 0.1s$ . Comme nous pouvons le voir sur les figures 4.4 et 4.5, les résultats obtenus sont tout à fait identiques à partir de  $dr = 2.5 10^{-4}m$  où l'erreur relative de l'ordre de 0.02%. Mais ces résultats peuvent être acceptables pour les différentes distances interpoints.

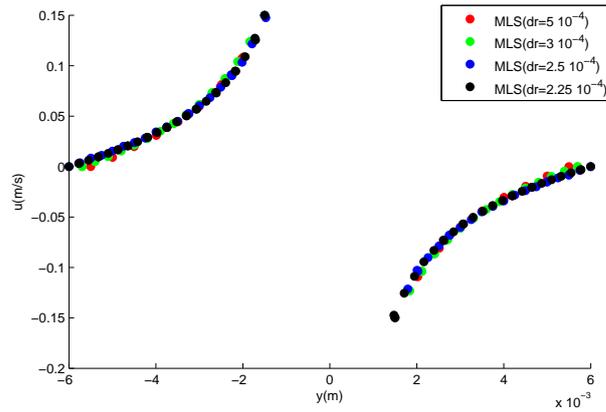


FIGURE 4.4 – Evolution de la composante  $u$  du vecteur vitesse le long de l'axe  $y$  pour différentes densités de points

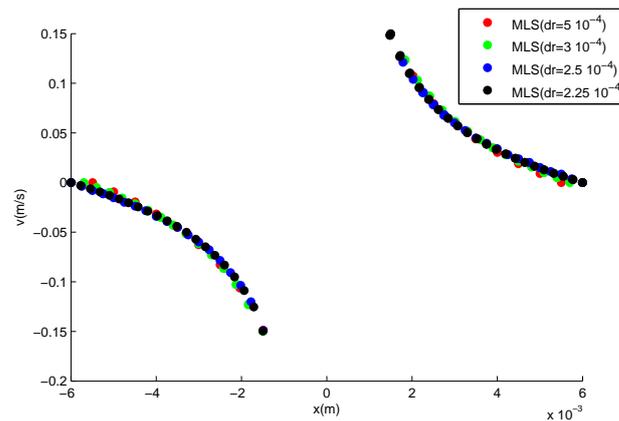


FIGURE 4.5 – Evolution de la composante  $v$  du vecteur vitesse le long de l'axe  $x$  pour différentes densités de points

Les figures 4.6, 4.7 et 4.8 représentent les distributions des composantes  $\dot{\epsilon}_{xx}$ ,  $\dot{\epsilon}_{yy}$  et  $\dot{\epsilon}_{xy}$  du tenseur vitesse de déformations, obtenues par l'algorithme itératif basé sur la méthode MLS aux différentes distances interpoints  $dr = 5 \cdot 10^{-4}m$ ,  $dr = 3 \cdot 10^{-4}m$ ,  $dr = 2.5 \cdot 10^{-4}m$  et  $dr = 2.25 \cdot 10^{-4}m$  respectivement. On peut conclure que la distribution des points a une influence sur la distribution des composantes du tenseur vitesse des déformations comme montre les résultats obtenus. L'analyse des résultats montre que l'algorithme converge et les valeurs restent constantes à partir de la distance interpoint  $dr = 2.5 \cdot 10^{-4}m$ , ce qui est équivalent à 1780 points. Dans la suite des études, la troisième configuration, qui est équivalente à la distance interpoint  $dr = 2.5 \cdot 10^{-4}m$ , est utilisée dans les différentes simulations car c'est le choix optimum.

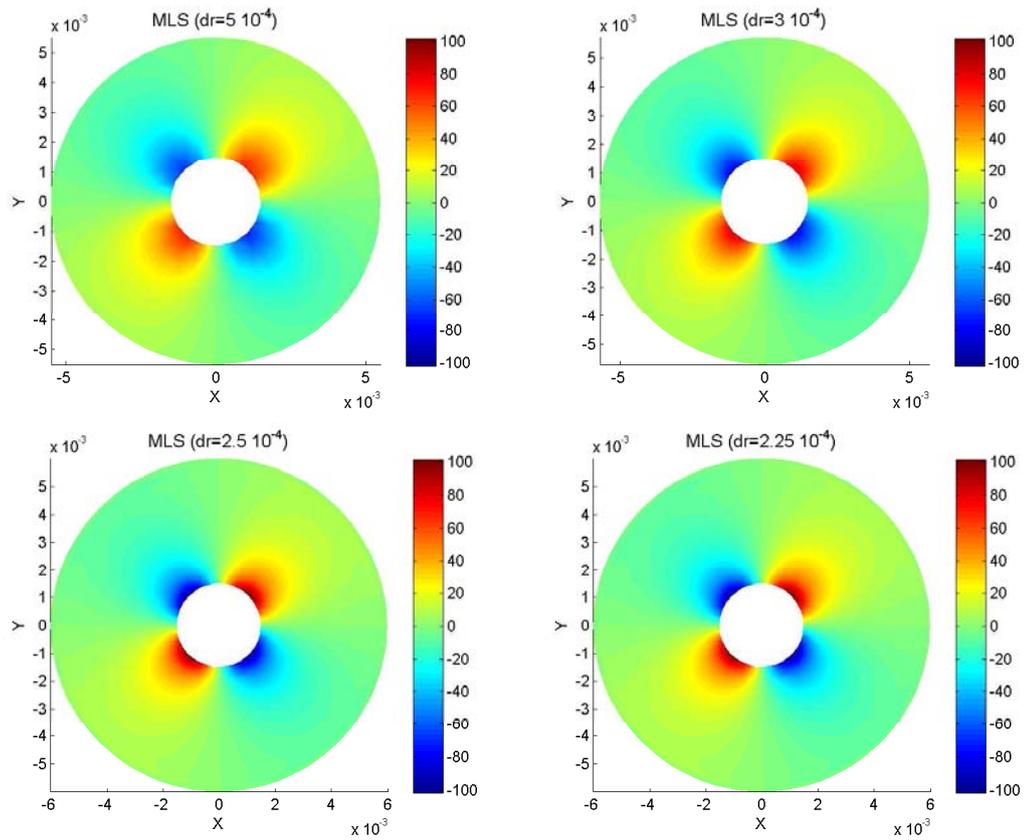


FIGURE 4.6 – Distribution de la composante  $\dot{\epsilon}_{xx}$  du tenseur vitesse des déformations aux différentes distances interpoints  $dr = 5 \cdot 10^{-4}m$ ,  $dr = 3 \cdot 10^{-4}m$ ,  $dr = 2.5 \cdot 10^{-4}m$  et  $dr = 2.25 \cdot 10^{-4}m$

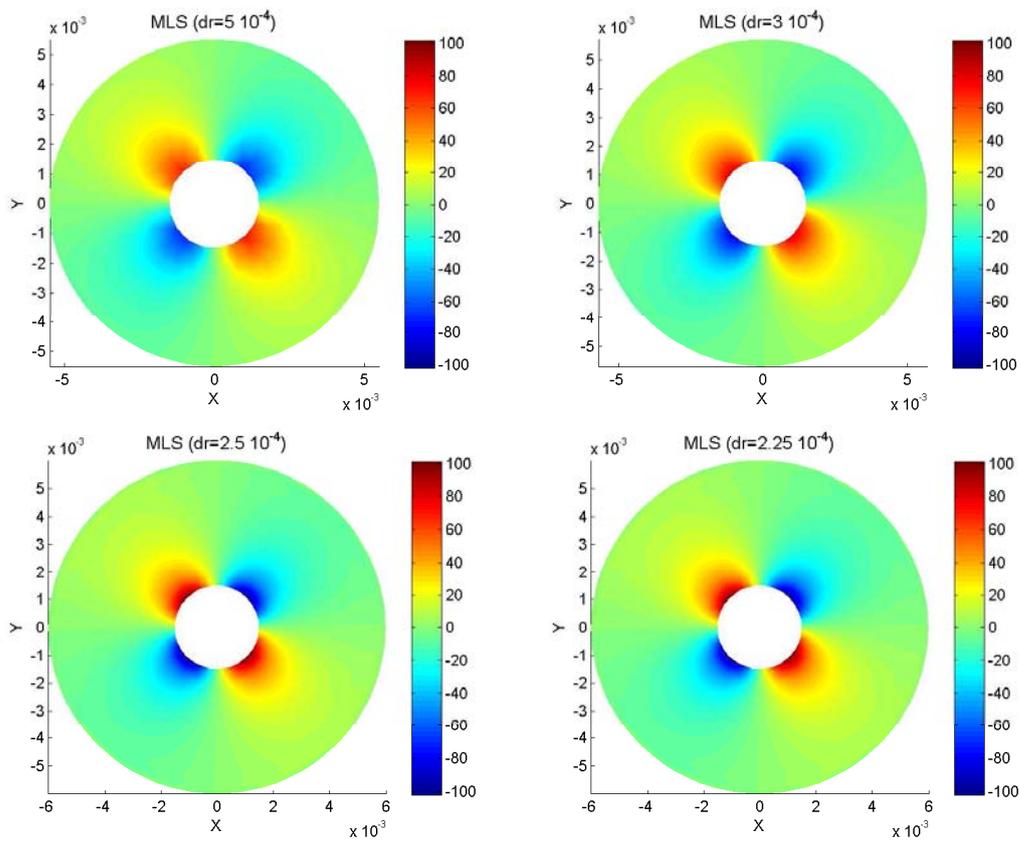


FIGURE 4.7 – Distribution de la composante  $\dot{\epsilon}_{yy}$  du tenseur vitesse des déformations aux différentes distances interpoints  $dr = 5 \cdot 10^{-4}m$ ,  $dr = 3 \cdot 10^{-4}m$ ,  $dr = 2.5 \cdot 10^{-4}m$  et  $dr = 2.25 \cdot 10^{-4}m$

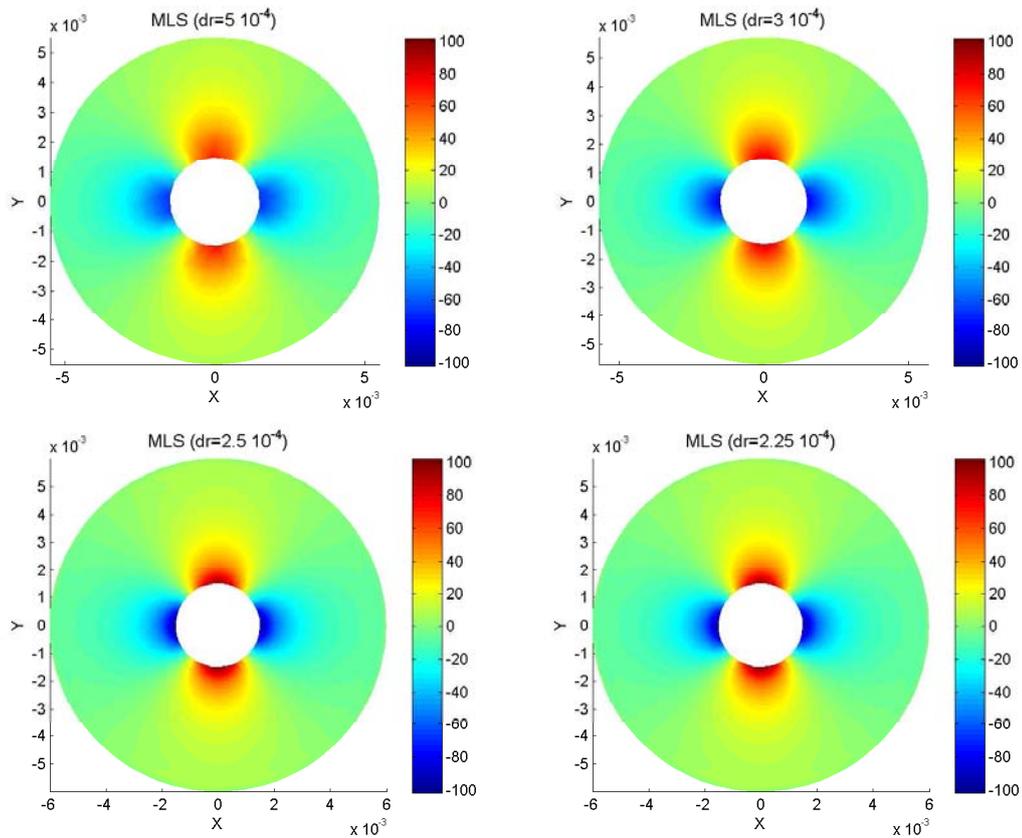


FIGURE 4.8 – Distribution de la composante  $\dot{\epsilon}_{xy}$  du tenseur vitesse des déformations aux différentes distances interpoints  $dr = 5 \cdot 10^{-4}m$ ,  $dr = 3 \cdot 10^{-4}m$ ,  $dr = 2.5 \cdot 10^{-4}m$  et  $dr = 2.25 \cdot 10^{-4}m$

#### 4.5.2 Influence de la taille du domaine d'influence

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à déterminer la taille optimale du domaine d'influence. Pour cela, on a choisi une gamme de valeurs de cette taille  $h$  comme le montre le tableau 4.1. Les résultats obtenus montrent clairement l'existence d'un optimum correspondant à  $h = 2.5dr$  pour lequel l'erreur relative en pourcentage, évaluée par rapport au logiciel Fluent, est inférieure à 5%.

Taille du domaine d'influence	$h = 1.5dr$	$h = 2dr$	$h = 2.5dr$	$h = 3dr$	$h = 4dr$
Erreur relative maximale	40%	10%	5%	5%	5%

TABLE 4.1 – Influence du paramètre  $h$  sur les résultats de l'algorithme proposé

### 4.5.3 Influence de la fonction poids

La méthode MLS basée sur une formulation forte nous oblige à traiter des dérivées d'ordre élevé, donc il faut utiliser des fonctions poids d'ordre supérieur pour assurer le calcul numérique de ces dérivées. Nous proposons ici d'étudier l'effet de ces fonctions poids sur l'efficacité de l'algorithme proposé. Le tableau 4.2 montre que la qualité de la solution obtenue par notre algorithme est meilleure en utilisant des fonctions poids à partir de l'ordre trois pour lequel l'erreur relative est inférieure à 5%.

Fonction poids	Quadratic spline	Cubic spline	Quartic spline
Erreur relative maximale	10%	5%	5%

TABLE 4.2 – Influence de la fonction poids sur les résultats obtenus par l'algorithme proposé

Dans le paragraphe suivant, nous procédons à la validation de notre algorithme par le code industriel Fluent qui est basé sur une formulation eulérienne utilisant la méthode des volumes finis.

### 4.5.4 Validation de l'algorithme itératif avec le code industriel Fluent

Dans cette section, on propose une étude comparative et qualitative de notre algorithme avec le code industriel Fluent. Dans ce cadre, deux configurations équivalentes entre la formulations Lagrangienne utilisée dans l'algorithme proposé et la formulation Eulérienne utilisée dans le code industriel Fluent, ont été choisies. Le calcul par l'approche itérative est effectuée jusqu'à l'instant  $t_c = 0.1s$ . Dans la formulation Eulérienne, un calcul instationnaire avec le même temps  $t_c$  est également effectué. Les deux calculs utilisent la même loi de comportement (équation 4.8).

Pour visualiser numériquement le malaxage de la matière, nous représentons les deux domaines occupés par les deux plaques par deux couleurs différentes ; rouge et bleue (voir figures 4.9).

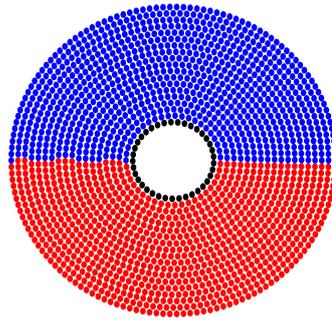
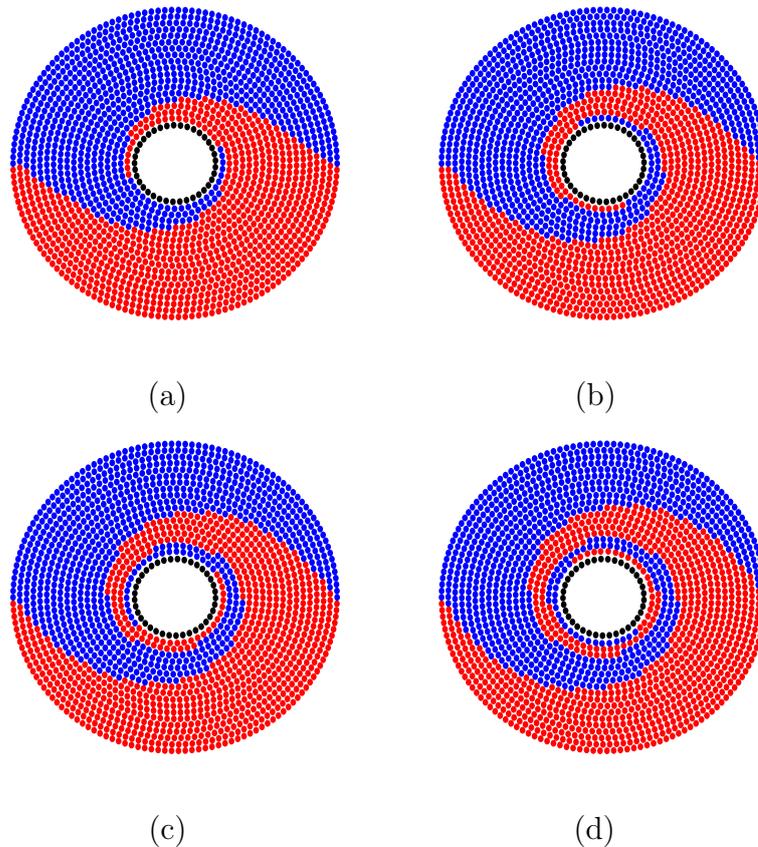


FIGURE 4.9 – Configuration initiale des deux domaines

La figure 4.10 montre le malaxage de la matière autour de l'outil de soudage et ce aux instants choisis arbitrairement  $t_1 = 0.05s$ ,  $t_2 = 0.075s$ ,  $t_3 = 0.1s$  et  $t_4 = 0.125s$ . D'après cette figure, on observe de grandes déformations autour de l'outil de soudage. Ces résultats, qui sont difficiles à réaliser en utilisant la méthode des éléments finis, montrent la performance des techniques sans maillage pour la modélisation du malaxage observé dans le procédé FSW.

FIGURE 4.10 – Malaxage de la matière autour de l'outil de soudage aux instants (a)  $t_1 = 0.05s$ , (b)  $t_2 = 0.075s$ , (c)  $t_3 = 0.1s$  et (d)  $t_4 = 0.125s$

Les figures 4.11 et 4.12, représentant la distribution des composantes  $u$  et  $v$  du vecteur vitesse à l'instant  $t = 0.1s$ , montrent l'efficacité de l'algorithme itératif proposé en comparaison au code industriel Fluent.

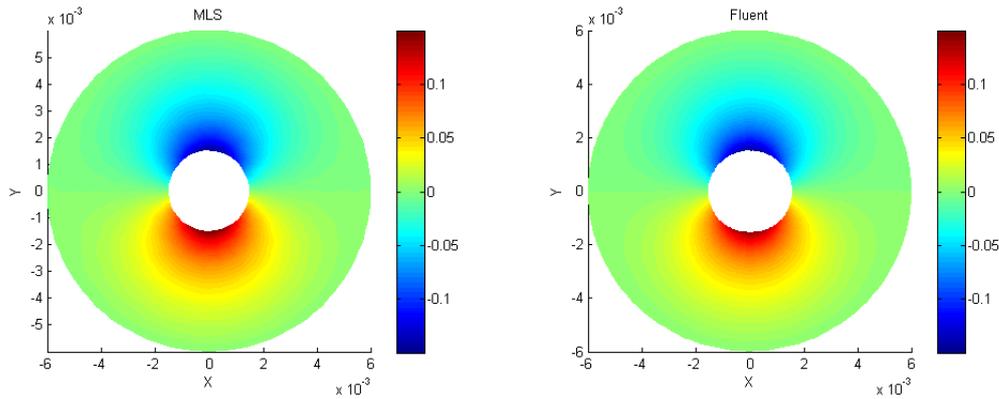


FIGURE 4.11 – Distribution de la composante  $u$  du vecteur vitesse, à l'instant  $t = 0.1s$ , obtenues par l'algorithme proposé et Fluent

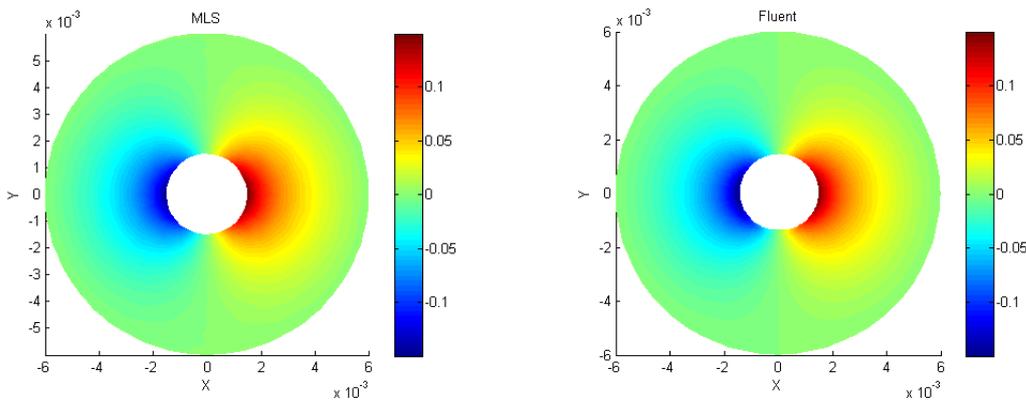
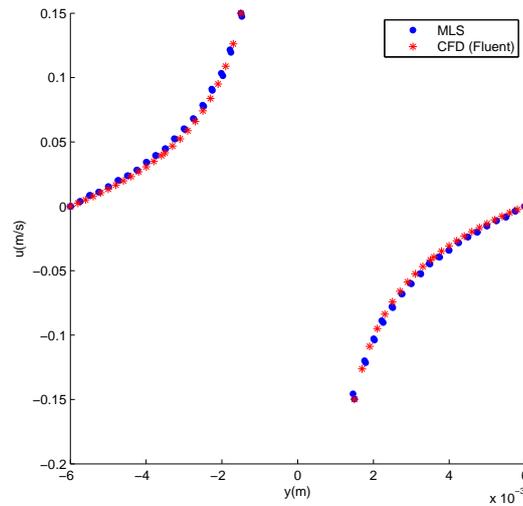
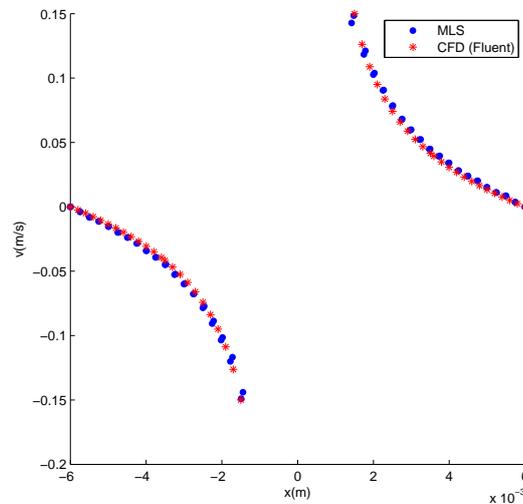


FIGURE 4.12 – Distribution de la composante  $v$  du vecteur vitesse, à l'instant  $t = 0.1s$ , obtenues par l'algorithme proposé et Fluent

Les figures 4.13 et 4.14 représentent l'évolution de la composante  $u$  du vecteur vitesse le long de l'axe  $y$  passant par le centre de l'outil ainsi que celle de la composante  $v$  du vecteur vitesse le long de l'axe  $x$  et ce à l'instant  $t = 0.1s$ . L'efficacité de notre algorithme est justifiée par l'estimation de l'erreur relative par rapport à la vitesse calculée à l'aide du code industriel Fluent et qui reste inférieure à 1%.

FIGURE 4.13 – Evolution de la composante  $u$  du vecteur vitesse le long de l'axe  $y$ FIGURE 4.14 – Evolution de la composante  $v$  du vecteur vitesse le long de l'axe  $x$ 

Les figures 4.15, 4.16 et 4.17 présentent la distribution des composantes  $\dot{\epsilon}_{xx}$ ,  $\dot{\epsilon}_{yy}$  et  $\dot{\epsilon}_{xy}$  du tenseur vitesse de déformations obtenues à l'instant  $t = 0.1s$  par l'algorithme itératif basé sur la méthode MLS et le code industriel Fluent. L'analyse quantitative de ces résultats montre que l'erreur relative est inférieure à 5%.

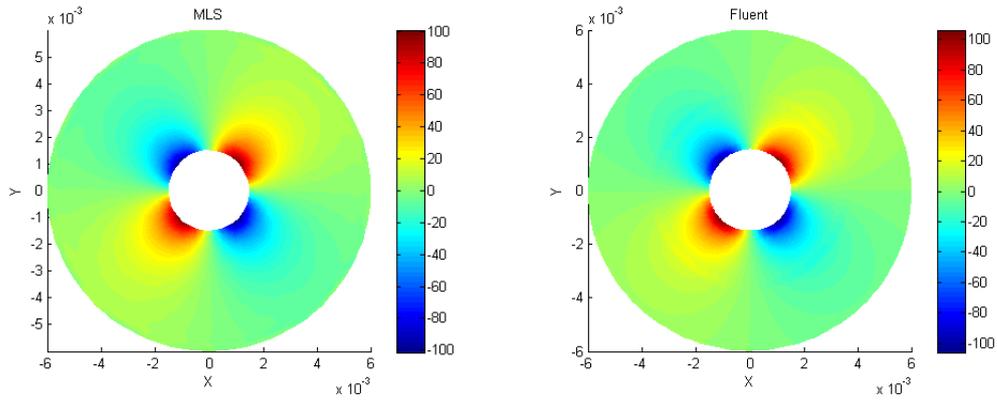


FIGURE 4.15 – Distribution de la composante  $\dot{\epsilon}_{xx}$  du tenseur vitesse des déformations, à l’instant  $t = 0.1s$ , obtenues par l’algorithme proposé et le code industriel Fluent

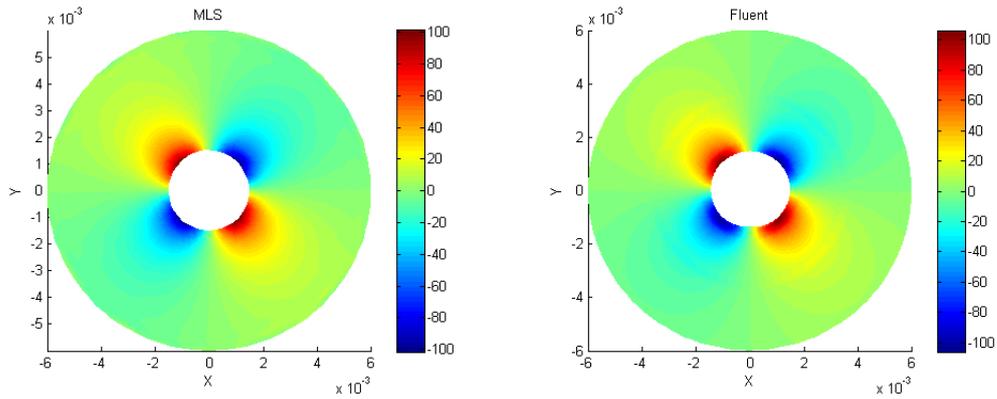


FIGURE 4.16 – Distribution de la composante  $\dot{\epsilon}_{yy}$  du tenseur vitesse des déformations, à l’instant  $t = 0.1s$ , obtenues par l’algorithme proposé et le code industriel Fluent

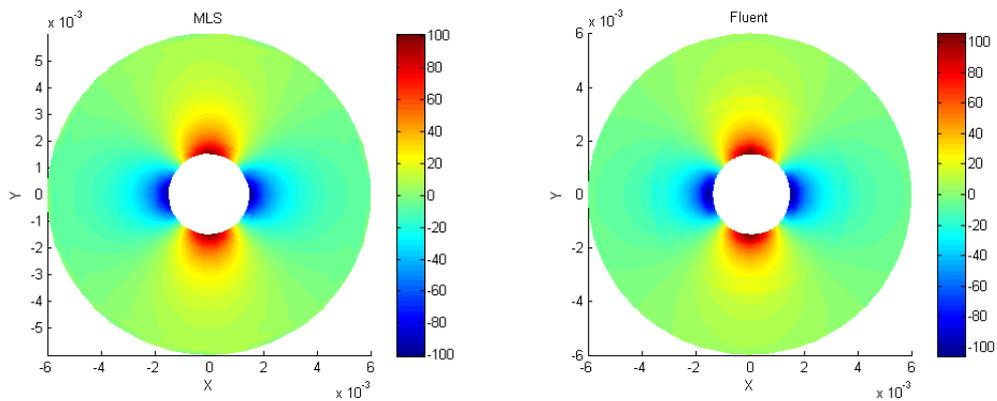


FIGURE 4.17 – Distribution de la composante  $\dot{\epsilon}_{xy}$  du tenseur vitesse des déformations, à l’instant  $t = 0.1s$ , obtenues par l’algorithme proposé et le code industriel Fluent

## 4.6 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, un algorithme itératif utilisant la technique sans maillage MLS et un schéma en temps implicite de type Euler pour simuler le malaxage observé dans le procédé FSW. Dans notre modélisation, nous avons considéré une loi de comportement de type viscoplastique. Pour valider notre algorithme, nous avons choisi la modélisation du malaxage dans le cas bidimensionnel et nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus par le code industriel Fluent. Nous avons discuté aussi via cet exemple l'influence de la distribution des points, de la taille du domaine d'influence et du degré de la fonction poids sur la qualité des résultats obtenus.

Dans le premier cas, nous avons montré que pour une taille fixée du domaine d'influence, l'optimum de l'erreur relative concernant le calcul des composantes de la vitesse et des vitesses des déformations est obtenu pour une distance interpoint  $dr = 2.5 \cdot 10^{-4}m$ . Dans le deuxième cas, nous avons montré que, pour une distance interpoint fixée ( $dr = 2.5 \cdot 10^{-4}m$ ), l'optimum de l'erreur relative concernant le calcul des composantes de la vitesse et des vitesses des déformations est obtenu pour une taille du domaine d'influence  $h = 2.5dr$ .

En fin, nous avons montré que, pour une distance interpoint  $dr = 2.5 \cdot 10^{-4}m$  et une taille du domaine d'influence  $h = 2.5dr$ , l'optimum de l'erreur relative concernant le calcul des composantes de la vitesse et des vitesses des déformations est obtenu pour un degré de la fonction poids égal à trois.

Les tests numériques, réalisés dans ce chapitre, ont montré une performance de l'algorithme proposé pour qu'elle s'applique à des problèmes non linéaires plus complexes tel que le problème de la simulation du soudage par friction et malaxage. La comparaison des résultats obtenus avec ceux du code industriel Fluent nous a poussé d'améliorer encore la performance de cet algorithme et ceci fera l'objet du chapitre 5.



# Chapitre 5

## Simulation du malaxage par le couplage de la méthode asymptotique numérique et de la méthode MLS

---

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>5.2</b>	<b>Présentation de l'algorithme . . . . .</b>	<b>78</b>
5.2.1	Problème à résoudre . . . . .	78
5.2.2	Discretisation temporelle . . . . .	79
5.2.3	Changement de variables . . . . .	79
5.2.4	Approximation des inconnues par l'approche sans maillage MLS	80
5.2.5	Transformation homotopique . . . . .	81
5.2.6	Technique de perturbation . . . . .	81
<b>5.3</b>	<b>Application numérique et discussion . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>5.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>88</b>

---

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente un algorithme basé sur le couplage de la méthode des moindres carrés mobiles MLS avec une technique implicite d'ordre élevé pour la modélisation du malaxage d'un matériau viscoplastique. Il s'agit d'un algorithme qui combine la méthode sans maillage MLS et la méthode asymptotique numérique MAN [24; 79; 114; 55]. L'objectif de cette approche est la réduction du coût de calcul en terme de nombre d'inversions de la matrice tangente observé dans l'algorithme du chapitre 4. Afin de montrer l'efficacité de l'algorithme ainsi proposé, nous illustrons notre modélisation dans le cas bidimensionnel et les résultats seront comparés avec ceux obtenus par l'algorithme implicite itératif présenté dans le chapitre 4.

## 5.2 Présentation de l'algorithme

Le principe suivi dans la présentation de cet algorithme est la discrétisation en temps à l'aide d'un schéma implicite de type Euler, puis l'introduction d'une technique d'homotopie avec un préconditionneur arbitraire et enfin la technique d'ordre élevé. De ce fait, on obtient à chaque incrément de temps une succession de problèmes linéaires caractérisés par ce même préconditionneur.

### 5.2.1 Problème à résoudre

Pour illustrer les étapes de l'algorithme proposé, on reprend les équations du problème détaillées dans le chapitre 4 :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial V}{\partial t} &= div \sigma \\ \sigma &= \rho_p Tr(\dot{\epsilon}) \delta + 2\mu \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2}({}^t \nabla V + \nabla V) \\ \bar{\epsilon} &= \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}} \\ \mu &= \frac{1}{3} K T^A \bar{\epsilon}^{m-1} \end{cases} \quad (5.1)$$

L'implantation de la Méthode Asymptotique Numérique dans notre algorithme pour la résolution du problème (5.1) nécessite une formulation quadratique et que le problème soit régulier. Dans ce cadre, on remplace la loi de viscosité  $\mu$  par une loi différentielle et la loi de la vitesse de déformation équivalente  $\bar{\epsilon}$  par une loi régularisée de la manière suivante :

$$\begin{cases} \bar{\epsilon} d\mu &= (m-1) \mu d\bar{\epsilon} \\ \bar{\epsilon} &= \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon} + \eta^2 \dot{\epsilon}_0^2} \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $\eta$  est un petit paramètre sans dimension et  $\dot{\epsilon}_0$  est le paramètre de régularisation homogène à une vitesse de déformation. Le problème à résoudre par l'algorithme proposé devient alors :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial V}{\partial t} &= \text{div}(\sigma) \\ \sigma &= \rho_p \text{Tr}(\dot{\epsilon}) I + 2\mu \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2} ({}^T \nabla V + \nabla V) \\ \bar{\dot{\epsilon}} &= \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon} + \eta^2 \dot{\epsilon}_0^2} \\ \bar{\dot{\epsilon}} d\mu &= (m-1) \mu d\bar{\dot{\epsilon}} \end{cases} \quad (5.3)$$

Dans le paragraphe suivant, nous présentons les différentes étapes de l'algorithme proposé sur le problème (5.3). les différentes étapes de cet algorithme feront l'objet des paragraphes suivants.

## 5.2.2 Discrétisation temporelle

La discrétisation en temps des équations du problème (5.3) se fait à l'aide d'un schéma implicite de type Euler comme suit :

$$\begin{cases} \rho(V^{n+1} - V^n) &= \Delta t \text{div} \sigma^{n+1} \\ \sigma^{n+1} &= \rho_p \text{Tr}(\dot{\epsilon}^{n+1}) \delta + 2\mu^{n+1} \dot{\epsilon}^{n+1} \\ \dot{\epsilon}^{n+1} &= \frac{1}{2} ({}^t \nabla V^{n+1} + \nabla V^{n+1}) \\ (\bar{\dot{\epsilon}}^{n+1})^2 &= \frac{2}{3} \dot{\epsilon}^{n+1} : \dot{\epsilon}^{n+1} + \eta^2 \dot{\epsilon}_0^2 \\ \bar{\dot{\epsilon}}^{n+1} d\mu^{n+1} &= (m-1) \mu^{n+1} d\bar{\dot{\epsilon}}^{n+1} \end{cases} \quad (5.4)$$

où  $V^{n+1}$ ,  $\sigma^{n+1}$ ,  $\dot{\epsilon}^{n+1}$ ,  $\bar{\dot{\epsilon}}^{n+1}$  et  $\mu^{n+1}$  représentent les valeurs des inconnues à l'instant  $t = (n+1)\Delta t$ ; avec  $\Delta t$  est le pas du temps.

## 5.2.3 Changement de variables

Pour avoir des conditions initiales nulles, on est amené à faire le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} V^{n+1} &= V^n + \Delta V \\ \sigma^{n+1} &= \sigma^n + \Delta \sigma \\ \dot{\epsilon}^{n+1} &= \dot{\epsilon}^n + \Delta \dot{\epsilon} \\ \bar{\dot{\epsilon}}^{n+1} &= \bar{\dot{\epsilon}}^n + \Delta \bar{\dot{\epsilon}} \\ \mu^{n+1} &= \mu^n + \Delta \mu \end{cases} \quad (5.5)$$

Donc le problème incrémental non linéaire vérifié par les nouvelles inconnues  $\Delta V$ ,  $\Delta\sigma$ ,  $\Delta\dot{\epsilon}$ ,  $\Delta\bar{\epsilon}$  et  $\Delta\mu$  s'écrit :

$$\begin{cases} \rho\Delta V & = \Delta t \operatorname{div}\sigma^n + \Delta t \operatorname{div}\Delta\sigma \\ \Delta\sigma & = \rho_p \operatorname{Tr}(\Delta\dot{\epsilon})\delta + 2\mu^n \Delta\dot{\epsilon} + 2\Delta\mu\dot{\epsilon}^n + 2\Delta\mu\Delta\dot{\epsilon} \\ \Delta\dot{\epsilon} & = \frac{1}{2}({}^t\nabla\Delta V + \nabla\Delta V) \\ 2\bar{\epsilon}^n \Delta\bar{\epsilon}^2 & = \frac{2}{3}(2\dot{\epsilon}^n : \Delta\dot{\epsilon} + \Delta\dot{\epsilon} : \Delta\dot{\epsilon}) + \eta^2 \dot{\epsilon}_0^2 - \Delta\bar{\epsilon}^2 \\ (\bar{\epsilon}^n + \Delta\bar{\epsilon})d\Delta\mu & = (m-1)(\mu^n + \Delta\mu)d\Delta\bar{\epsilon} \end{cases} \quad (5.6)$$

où  $\sigma^n$ ,  $\dot{\epsilon}^n$ ,  $\bar{\epsilon}^n$  et  $\mu^n$  représentent les valeurs des inconnues à l'instant  $t = n\Delta t$ .

### 5.2.4 Approximation des inconnues par l'approche sans maillage MLS

Pour résoudre le problème (5.6), on applique les approximations de la méthode sans maillage MLS présentés dans le chapitre 2. La solution incrémentale du vecteur vitesse  $\{\Delta V\} = {}^t\langle \Delta u, \Delta v \rangle$ , dans le cas bidimensionnel, est donc cherchée sous forme d'une interpolation locale, dans un domaine d'influence du rayon  $h$ , faisant intervenir des fonctions de forme MLS de la manière suivante :

$$\{\Delta V\} = \sum_{i=1}^N [\Phi_i] \{\Delta V_i\} \quad (5.7)$$

où  $[\Phi_i]$  est la matrice des fonctions de forme MLS associées au point  $i$  et  $\{\Delta V_i\}$  est le vecteur vitesse évalué en ce point. En utilisant l'approximation (5.7), le vecteur vitesse des déformations peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\{\Delta\dot{\epsilon}\} = \sum_{i=1}^N [B_i] \{\Delta V_i\} \quad (5.8)$$

où  $[B_i]$  est la matrice des dérivées des fonctions de forme MLS au point  $i$ . En injectant les approximations (5.7), (5.8) dans les différentes équations du problème (5.6) et après assemblage on obtient le système discret non linéaire globale donné par :

$$\begin{cases} [K_T^n] \{\Delta V\} - \Delta t \{FQ\} & = \Delta t \{F\} \\ \{\Delta\sigma_i\} & = [D] \{\Delta\dot{\epsilon}_i\} + 2\Delta\mu_i \{\dot{\epsilon}_i^n\} + 2\Delta\mu_i \{\Delta\dot{\epsilon}_i\} \\ \{\Delta\dot{\epsilon}_i\} & = [B] \{\Delta V_i\} \\ 2\bar{\epsilon}_i^n \Delta\bar{\epsilon}_i^2 & = \frac{2}{3}((2\dot{\epsilon}_i^n [T] \{\Delta\dot{\epsilon}_i\} + {}^t \{\Delta\dot{\epsilon}_i\} [T] \{\Delta\dot{\epsilon}_i\}) + \eta^2 \dot{\epsilon}_0^2 - \Delta\bar{\epsilon}_i^2) \\ (\bar{\epsilon}_i^n + \Delta\bar{\epsilon}_i)d\Delta\mu_i & = (m-1)(\mu_i^n + \Delta\mu_i)d\Delta\bar{\epsilon}_i \end{cases} \quad (5.9)$$

où  $[D]$  est la matrice des modules tangents de comportement,  $[K_T^n] = [M] - \Delta t[K]$  est la matrice tangente évaluée au temps  $t = n\Delta t$  et  $\{FQ\}$  est une forme quadratique des variables inconnues  $\{\Delta V\}$ ,  $\{\Delta\sigma\}$ ,  $\{\Delta\dot{\epsilon}_i\}$ ,  $\Delta\bar{\epsilon}_i$  et  $\Delta\mu_i$ ; avec  $[M]$  est la matrice de masse

globale,  $[K]$  est la matrice globale dependante des solutions au temps  $t = n\Delta t$ , la matrice  $[T]$ , les vecteurs  $\{\Delta\sigma_i\}$  et  $\{\Delta\dot{\epsilon}_i\}$  sont donnés par :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \{\Delta\sigma_i\} = \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{12} \end{Bmatrix}; \{\Delta\dot{\epsilon}_i\} = \begin{Bmatrix} \Delta\dot{\epsilon}_{11} \\ \Delta\dot{\epsilon}_{22} \\ 2\Delta\dot{\epsilon}_{12} \end{Bmatrix}.$$

La résolution numérique du problème (5.9) par la méthode incrémentale itérative est très coûteuse en temps de calcul car la matrice tangente doit être inversée à chaque pas de temps et à chaque itération.

### 5.2.5 Transformation homotopique

Pour surmonter la difficulté citée au paragraphe précédent, nous introduisons une matrice inversible arbitraire  $[K^*]$  en utilisant une transformation homotopique. Nous modifions le problème non linéaire (5.9) en introduisant un paramètre arbitraire  $a$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} [K^*]\{\Delta W(a)\} + a([K_T^n] - [K^*])\{\Delta W(a)\} - a\Delta t\{FQ\} = a\Delta t\{F\} \\ \{\Delta\Sigma_i(a)\} = [D]\{\Delta\dot{E}_i(a)\} + 2\Delta\theta_i(a)\{\dot{\epsilon}_i^n\} + 2\Delta\theta_i(a)\{\Delta\dot{E}_i(a)\} \\ \{\Delta\dot{E}_i(a)\} = [B]\{\Delta W_i(a)\} \\ 2\bar{\epsilon}_i^n \Delta\bar{E}_i(a) = \frac{2}{3}((2^t\{\dot{\epsilon}_i^n\}[T]\{\Delta\dot{E}_i(a)\} + {}^t\{\Delta\dot{E}_i(a)\}[T]\{\Delta\dot{E}_i(a)\}) + \eta^2\dot{\epsilon}_0^2 - \Delta\bar{E}_i^2(a) \\ (\bar{\epsilon}_i^n + \Delta\bar{E}_i(a))d\Delta M_i(a) = (m-1)(\mu_i^n + \Delta M_i(a))d\Delta\bar{E}_i(a) \end{cases} \quad (5.10)$$

Les solutions  $\{\Delta W(a)\}$ ,  $\{\Delta\Sigma_i(a)\}$ ,  $\{\Delta\dot{E}_i(a)\}$ ,  $\Delta\bar{E}_i(a)$  et  $\Delta M_i(a)$  du problème non linéaire (5.10) passe d'une manière continue de 0 pour  $a = 0$  à des solutions du problème non linéaire (5.9) pour  $a = 1$ . L'approximation de la solution du problème exact au temps  $t = (n+1)\Delta t$  est donnée par :

$$\begin{cases} \{V^{n+1}\} = \{V^n\} + \{\Delta W(a=1)\} \\ \{\sigma_i^{n+1}\} = \{\sigma_i^n\} + \{\Delta\Sigma_i(a=1)\} \\ \{\dot{\epsilon}_i^{n+1}\} = \{\dot{\epsilon}_i^n\} + \{\Delta\dot{E}_i(a=1)\} \\ \bar{\epsilon}_i^{n+1} = \bar{\epsilon}_i^n + \Delta\bar{E}_i(a=1) \\ \mu_i^{n+1} = \mu_i^n + \Delta M_i(a=1) \end{cases} \quad (5.11)$$

### 5.2.6 Technique de perturbation

Cette technique de perturbation consiste à chercher les solutions  $\{\Delta W(a)\}$ ,  $\{\Delta\Sigma_i(a)\}$ ,  $\{\Delta\dot{E}_i(a)\}$ ,  $\Delta\bar{E}_i(a)$  et  $\Delta M_i(a)$  du problème artificiel (5.10) en série entière par rapport à

un paramètre  $a$  :

$$\begin{cases} \{\Delta W(a)\} &= a\{\Delta W_1\} + a^2\{\Delta W_2\} + \dots + a^p\{\Delta W_p\} \\ \{\Delta \dot{E}_i(a)\} &= a\{\Delta \dot{E}_1\} + a^2\{\Delta \dot{E}_2\} + \dots + a^p\{\Delta \dot{E}_p\} \\ \Delta \bar{E}_i(a) &= a\Delta \bar{E}_1 + a^2\Delta \bar{E}_2 + \dots + a^p\Delta \bar{E}_p \\ \Delta M_i(a) &= a\Delta M_1 + a^2\Delta M_2 + \dots + a^p\Delta M_p \end{cases} \quad (5.12)$$

où  $p$  est l'ordre de troncature des séries. En injectant ces séries dans le problème (5.10) et on identifiant les deux membres de chaque équation par rapport aux différentes puissances de  $a$ , on obtient une succession de problèmes linéaires aux différents ordres donnés par :

**Pour l'ordre  $k = 1$  :**

$$\begin{cases} [K^*]\{\Delta W_1\} &= \Delta t\{F\} \\ \{\Delta \Sigma_1\} &= [D]\{\Delta \dot{E}_1\} + 2\Delta M_1\{\dot{\epsilon}_i^n\} \\ \{\Delta \dot{E}_1\} &= [B]\{\Delta W_1\} \\ 2\bar{\epsilon}_i^n \Delta \bar{E}_1 &= \frac{2}{3}(2^t\{\dot{\epsilon}_i^n\}[T]\{\Delta \dot{E}_1\}) \\ \bar{\epsilon}_i^n \Delta M_1 &= (m-1)\mu_i^n \Delta \bar{E}_1 \end{cases} \quad (5.13)$$

**Pour l'ordre  $1 < k \leq p$  :**

$$\begin{cases} [K^*]\{\Delta W_k\} &= ([K^*] - [K_T^n])\{\Delta W_{k-1}\} + \Delta t\{FQ_{k-1}\} \\ \{\Delta \Sigma_k\} &= [D]\{\Delta \dot{E}_k\} + 2\Delta \theta_k\{\dot{\epsilon}_i^n\} + 2\sum_{j=1}^{k-1} \Delta M_j\{\Delta \dot{E}_{k-j}\} \\ \{\Delta \dot{E}_k\} &= [B]\{\Delta W_k\} \\ 2\bar{\epsilon}_i^n \Delta \bar{E}_k &= \frac{2}{3}(2^t\{\dot{\epsilon}_i^n\}[T]\{\Delta \dot{E}_k\} + \sum_{j=1}^{k-1} (t\{\Delta \dot{E}_j\}[T]\{\Delta \dot{E}_{k-j}\})) - \sum_{j=1}^{k-1} \Delta \bar{E}_j \Delta \bar{E}_{k-j} \\ k\bar{\epsilon}_i^n \Delta M_k &= k(m-1)\mu_i^n \Delta \bar{E}_k + (m-1)\sum_{j=1}^{k-1} (k-j)\Delta M_j \Delta \bar{E}_{k-j} \end{cases} \quad (5.14)$$

où  $\{FQ_{k-1}\}$  est une forme quadratique dépendant des solutions des ordres précédents. Afin d'éviter l'inversion de la matrice tangente habituelle à chaque pas de temps, la matrice arbitraire  $[K^*]$  sera identifié à la matrice tangente évaluée au début de chaque branche en appliquant la méthode de continuation [24]. La résolution de ces problèmes linéaires demande ainsi une seule inversion de la matrice arbitraire  $[K^*]$  et l'actualisation des seconds membres. La méthode de continuation, dans la MAN, est gouvernée par le critère [24], qui définit le domaine de validité, donné par la relation :

$$a(t_{max}) = \left( \xi \frac{\|\{\Delta W_1\}\|}{\|\{\Delta W_p\}\|} \right)^{\left(\frac{1}{p-1}\right)} \quad (5.15)$$

où  $\xi$  est une tolérance donnée et  $t_{max} = n_{max}\Delta t$  définit une branche de solution.

### 5.3 Application numérique et discussion

Dans cette application, on s'intéresse à résoudre le même exemple traité dans le chapitre 4. Les données physiques et géométriques utilisées sont les mêmes. L'algorithme implicite itératif basé sur la méthode sans maillage MLS et l'algorithme implicite d'ordre élevé basé sur le couplage de la méthode sans maillage MLS et la méthode asymptotique numérique seront notés par *Algo1* et *Algo2* respectivement. Les paramètres optimaux  $dr$  et  $h$  de l'algorithme *Algo1* sont adoptés aussi pour l'algorithme *Algo2*.

Les figures 5.1 et 5.2 montrent la simulation du malaxage avec *Algo1* et *Algo2* à  $t = 0.1s$  et  $t = 0.125s$ . L'analyse qualitative de ces figures confirme la validité de l'*Algo2* puisque la symétrie des déformées des deux sous domaines est la même observé par l'*Algo1*.

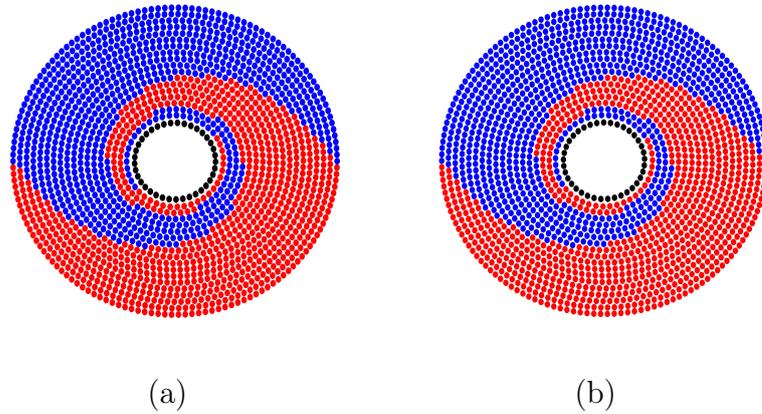


FIGURE 5.1 – Configuration de la matière malaxée à l'instant  $t = 0.1s$  par l'*Algo1* (a) et l'*Algo2* (b)

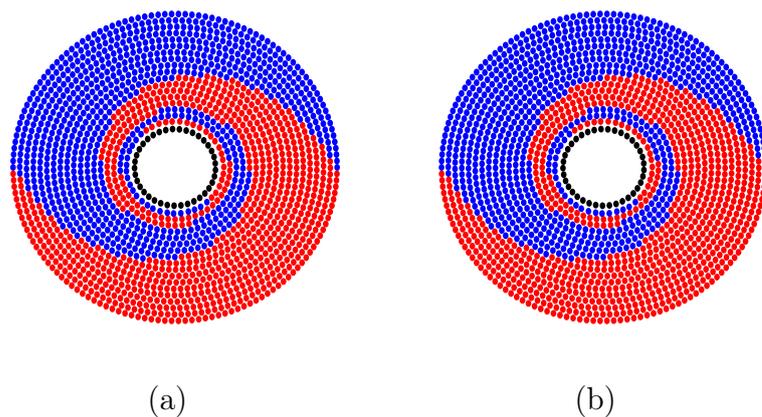


FIGURE 5.2 – Configuration de la matière malaxée à l'instant  $t = 0.125s$  par l'*Algo1* (a) et l'*Algo2* (b)

Les figures 5.3 et 5.4 montrent l'efficacité de l'*Algo2* proposé en comparant la distribution des composantes du vecteur vitesse.

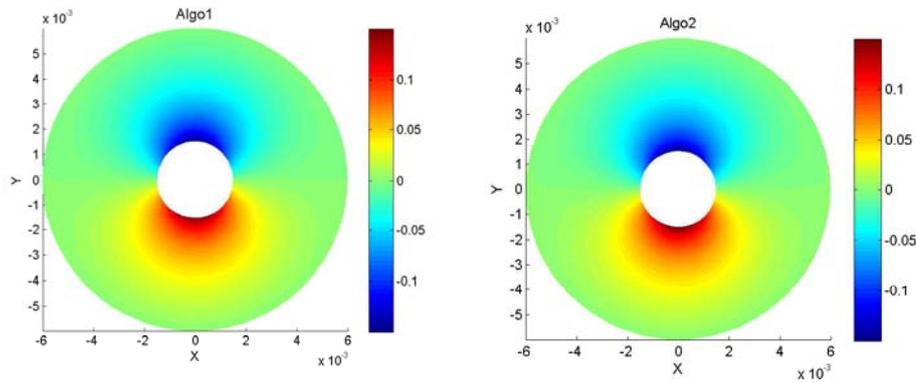


FIGURE 5.3 – Distribution de la composante  $u$  du vecteur vitesse, à l’instant  $t = 0.1s$ , obtenues par *Algo1* et *Algo2*

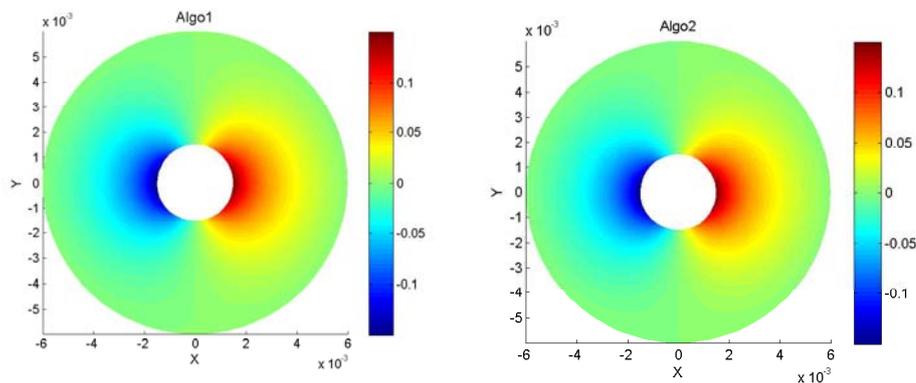


FIGURE 5.4 – Distribution de la composante  $v$  du vecteur vitesse, à l’instant  $t = 0.1s$ , obtenues par *Algo1* et *Algo2*

Pour une comparaison quantitative des résultats numériques, on s’intéresse à l’évolution de la composante  $u$  de vecteur vitesse le long de l’axe  $y$  passant par le centre de l’outil ainsi que celle de la composante  $v$  de vecteur vitesse le long de l’axe  $x$  et ce à l’instant  $t = 0.1s$  et l’évolution de ces deux composantes d’un point au voisinage de l’outil en fonction de temps. Les figures 5.5, 5.6, 5.7 et 5.8 montrent l’efficacité de l’*Algo2* puisque l’erreur relative en pourcentage par rapport à la vitesse calculée à l’aide de l’*Algo1* est inférieure à 2%.

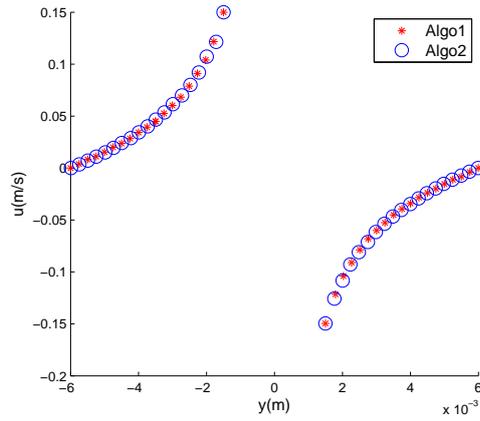


FIGURE 5.5 – Evolution de la composante  $u$  du vecteur vitesse le long de l'axe  $y$

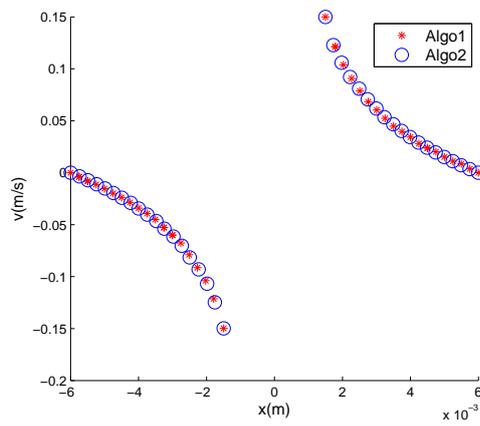


FIGURE 5.6 – Evolution de la composante  $v$  du vecteur vitesse le long de l'axe  $x$

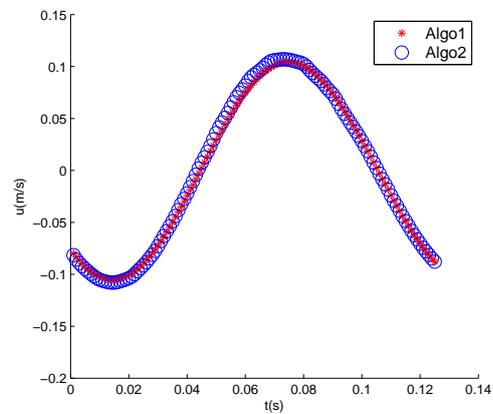


FIGURE 5.7 – Evolution de la composante  $u$  du vecteur vitesse en fonction de temps

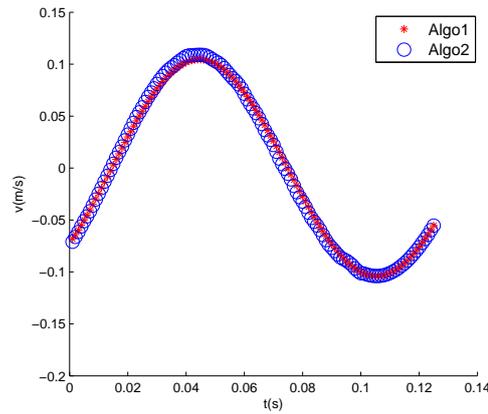


FIGURE 5.8 – Evolution de la composante  $v$  du vecteur vitesse en fonction de temps

Les figures 5.9, 5.10 et 5.11 présentent la distribution des composantes  $\dot{\epsilon}_{xx}$ ,  $\dot{\epsilon}_{yy}$  et  $\dot{\epsilon}_{xy}$  du tenseur vitesse des déformations, obtenue par l'*Algo1* et l'*Algo2*, à l'instant  $t = 0.1s$ . L'analyse quantitative de ces résultats montre que l'erreur relative en pourcentage est inférieure à 2%.

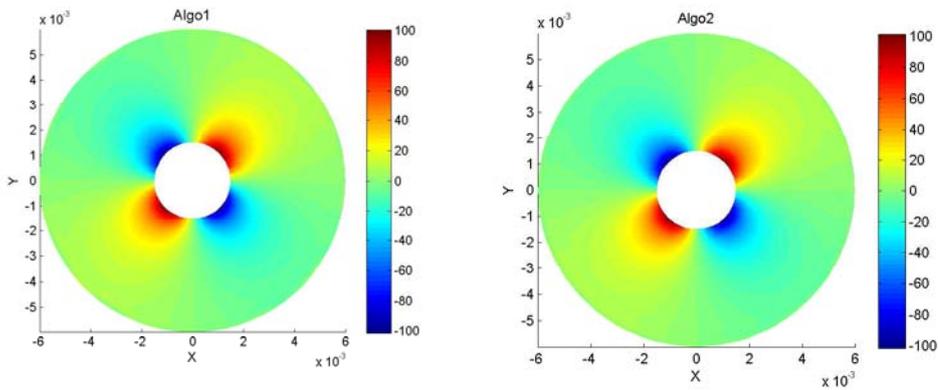


FIGURE 5.9 – Distribution de la composante  $\dot{\epsilon}_{xx}$  du tenseur vitesse des déformations, à l'instant  $t = 0.1s$ , obtenues par l'*Algo1* et l'*Algo2*

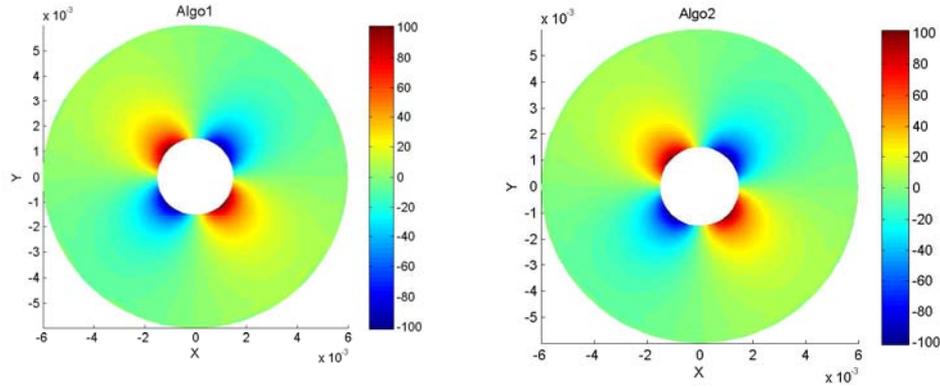


FIGURE 5.10 – Distribution de la composante  $\dot{\epsilon}_{yy}$  du tenseur vitesse des déformations, à l’instant  $t = 0.1s$ , obtenues par l’*Algo1* et l’*Algo2*

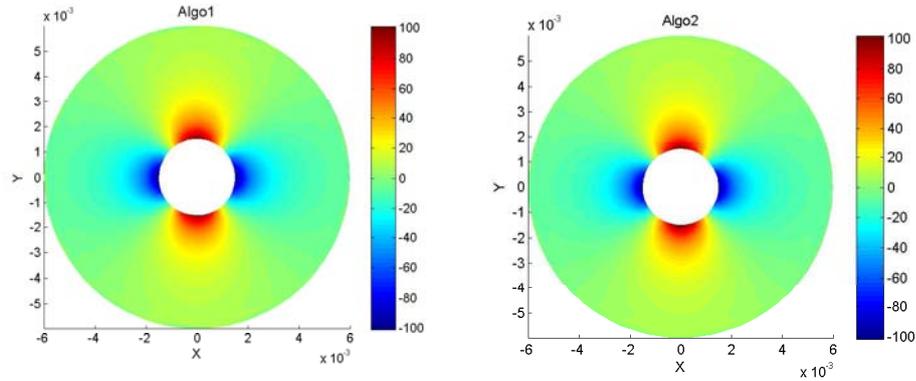


FIGURE 5.11 – Distribution de la composante  $\dot{\epsilon}_{xy}$  du tenseur vitesse des déformations, à l’instant  $t = 0.1s$ , obtenues par l’*Algo1* et l’*Algo2*

Dans ce chapitre, un nouvel algorithme implicite d’ordre élevé (*Algo2*) couplant la méthode MLS et la méthode MAN est présenté pour modéliser le malaxage de la matière d’un matériau viscoplastique en grandes déformations. En effet, cet algorithme est conçu en vue d’améliorer le deuxième algorithme présenté dans le chapitre 4 en réduisant le nombre d’inversions de matrices tangentes. Afin de montrer la performance de l’algorithme proposé, nous avons choisi le même exemple du chapitre 4. Dans cette application numérique, nous avons comparé les valeurs des composantes du champ de vitesse et des vitesses des déformations obtenus par l’algorithme implicite itératif (*Algo1*) et l’algorithme amélioré (*Algo2*) à l’instant  $t = 0.1s$ . Le calcul de ces valeurs en utilisant de l’*Algo1* nécessite 2252 inversions de la matrice tangente alors que ces valeurs sont obtenues en utilisant l’*Algo2* avec une tolérance  $\eta = 10^{-6}$  en obtenant 208, 156, 88, 83 inversions de la matrice tangente aux ordres 10, 15, 20, 25 respectivement. Le même calcul se fait par l’*Algo2* avec une tolérance  $\eta = 10^{-8}$  en obtenant 254, 176, 94, 91 inversions de la matrice tangente aux ordres 10, 15, 20, 25 respectivement. D’après ces résultats le choix optimum est l’ordre

20. On peut conclure que l'algorithme implicite d'ordre élevé nécessite un coût de calcul très inférieur à celui obtenu à l'aide de l'algorithme implicite itératif. Donc l'*Algo2* est un bon compromis, un coût de calcul moins coûteux avec la même qualité.

Ordre (M)	$\eta = 10^{-6}$	$\eta = 10^{-8}$
10	208	254
15	156	176
20	88	94
25	83	91

TABLE 5.1 – Influence de la tolérance  $\eta$  et de l'ordre de troncature  $p$  sur le nombre de branches

## 5.4 Conclusion

L'utilisation des méthodes classiques, comme la méthode des éléments finis, pour la modélisation du malaxage de la matière d'un matériau viscoplastique se confronte à des difficultés numériques majeures. Ces difficultés résident principalement dans la distorsion du maillage dans la zone malaxée. Le but de ce travail, est de proposer un algorithme basé sur le couplage de la méthode MLS et la méthode MAN pour modéliser le malaxage de la matière d'un matériau viscoplastique en grandes déformations et ce avec un coût réduit du temps de calcul par rapport à l'algorithme itératif basé sur la méthode des moindres carrés mobiles proposé dans le chapitre 4. Le malaxage à modéliser est supposé réalisé avec un outil de forme circulaire animé d'un mouvement de rotation uniforme. Les résultats numériques sont comparés avec ceux obtenus par l'algorithme itératif *Algo1*. Cette comparaison montre la performance de la modélisation basée sur le couplage de MLS et la méthode MAN.

# Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse est une contribution à la modélisation et à la simulation numérique d'un procédé de soudage utilisé récemment en industrie pour l'assemblage des tôles métalliques. Cette nouvelle technique de soudage par friction et malaxage, connue en anglais sous le nom de Friction Stir Welding FSW, a été inventée en 1991 par l'institut de soudage britannique (the Welding Institut). Ce procédé a été conçu pour l'assemblage des tôles métalliques sans avoir recours à l'utilisation d'une source de chaleur extérieure contrairement aux techniques de soudage traditionnelles comme le soudage à l'arc et le soudage au laser. Cette technique de soudage s'adapte aux alliages d'aluminium et à d'autres alliages métalliques sans atteindre leur température de fusion ce qui est difficilement réalisable avec les procédés de soudage habituels.

Les premières modélisations de ce procédé s'appuyaient sur les méthodes avec maillage telles que la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis...etc. Ces méthodes ont été confrontées à des difficultés numériques majeures qui résident dans la distorsion des éléments du domaine discrétisé à cause des grandes déformations qui apparaissent au voisinage de l'outil de malaxage. Dans ce cas, le recours à un remaillage répétitif qui génère un coût de calcul considérable est inévitable. Afin d'éviter ces difficultés numériques, plusieurs travaux de recherche ont été orientés par la suite vers le développement de nouvelles méthodes numériques dites méthodes sans maillage telles que Smoothed Particle Hydrodynamics SPH, la méthode des moindres carrés mobiles MLS et la méthode des éléments naturels NEM ...etc.

Dans ce travail de thèse, nous avons présenté trois algorithmes basés sur une modélisation combinant deux approches sans maillage et un schéma en temps pour simuler le comportement de la matière lors du procédé FSW. La formulation théorique est basée sur les équations différentielles non linéaire issues de la thermo-mécanique et ce en grandes déformations. Pour valider l'efficacité de ces algorithmes par comparaison avec le code industriel Fluent, nous avons choisi la modélisation du malaxage de la matière d'un matériau en grandes déformations en vue de modéliser le procédé de soudage FSW et ce dans le cas bidimensionnel.

Le premier algorithme présenté dans ce travail est basé sur la méthode sans maillage

dite Smoothed Particle Hydrodynamics SPH. Cet algorithme est testé sur un exemple bidimensionnel pour simuler le soudage par friction et malaxage de deux plaques rectangulaires identiques en alliage d'aluminium à l'aide d'un outil circulaire animé d'un mouvement de rotation et translation uniformes. Le matériau est considéré comme un fluide non newtonien dont la viscosité est une fonction en puissance de la température. L'outil est supposé rigide dont le contact avec les particules du matériau est géré par des forces exprimées en terme de pression, ce qui nous permet d'éviter la pénétration des particules dans le domaine occupé par l'outil. Nous avons présenté, à l'aide de cet algorithme, le profile du champ de la température dans la matière malaxée à différents instants choisis. Nous avons constaté que les profiles ainsi obtenus sont en bonne concordance avec ceux obtenus par le logiciel Fluent. Les résultats numériques obtenus par notre algorithme sont très satisfaisants puisque l'erreur relative par rapport à la référence reste inférieure à 5%.

Le deuxième algorithme proposé est de type implicite itératif basé sur la technique des moindres carrés mobiles MLS et une discrétisation temporelle de type Euler. Nous avons développé cet algorithme pour simuler le malaxage par friction d'un matériau viscoplastique en grandes déformations. L'algorithme réalisé est testé sur un exemple bidimensionnel, il s'agit de simuler l'évolution du malaxage de la matière de deux plaques identiques sous la forme d'un demi disque faites d'un alliage d'aluminium à l'aide d'un outil de forme circulaire animé d'un mouvement de rotation uniforme. L'analyse des résultats obtenus confirment l'efficacité et la fiabilité de l'algorithme proposé. En effet, l'erreur relative des résultats obtenus (composantes du champ de la vitesse et les vitesses de déformation) à l'aide de cet algorithme ne dépasse pas 5% par comparaison avec ceux de référence (logiciel Fluent).

Enfin, un nouvel algorithme implicite d'ordre élevé basé sur le couplage de la méthode sans maillage MLS et la Méthode Asymptotique Numérique MAN est présenté dans ce travail pour modéliser et simuler le malaxage de la matière d'un matériau viscoplastique en grandes déformations. En effet, cet algorithme est conçu en vue d'améliorer le deuxième algorithme en réduisant le nombre d'inversions de matrices tangentes. Afin de montrer l'efficacité de l'algorithme amélioré, nous avons choisi le même exemple que celui du chapitre 4. Dans cette application numérique, nous avons comparé les valeurs des vitesses de déformation et les composantes du champ de vitesse obtenues par l'algorithme implicite itératif et l'algorithme implicite d'ordre élevé à l'instant  $t = 0.1s$ . Le calcul de ces valeurs (avec écart relatif très petit) à l'aide de l'algorithme implicite itératif nécessite 2252 inversions de la matrice tangente alors que ces valeurs sont obtenues à l'aide de l'algorithme implicite d'ordre élevé avec 208, 156, 88, 83 inversions de la matrice tangente aux ordres 10, 15, 20, 25 respectivement. L'ordre optimum, dans ce cas, est égal à 20.

En perspectives, nous envisageons de généraliser les algorithmes numériques, proposés

---

dans ce travail, pour modéliser le procédé FSW dans le cas tridimensionnel et ce avec différentes géométries de l'outil de malaxage et une loi de comportement plus réaliste dépendante à la fois de la température, de la vitesse de déformation et de l'écaillage du matériau. Nous utiliserons également, dans cette modélisation, une autre approche numérique optimisée couplant une méthode sans maillage et la méthode des éléments finis. En effet, on appliquera la première méthode au voisinage de l'outil et la seconde loin de la zone de malaxage. L'une des difficultés prévues dans cette perspective est la gestion de contact à l'interface entre les plaques à souder et l'outil.



# Bibliographie

- [1] **Allgower E.L., Georg K.**, " Numerical Continuation Methods. An Introduction", *Springer Series in Computational Mathematics, volume 13, 1990*
- [2] **Anderson, J.D.**, " Computational fluid dynamics : the basics with applications", *Mc Graw-Hill, 1995*
- [3] **Attaway S.W., Heinstein M.W., Swegle J.W.**, " Coupling of smooth particle hydrodynamics with the finite element method", *Nuclear Engineering and Design, volume 150, issues 2-3, pages 199-205, Septembre 1994*
- [4] **Alfaro I., Racineux G., Poitou A., Cueto E., Chinesta F.**, " Numerical Simulation of Friction Stir Welding by Natural Element Methods", *International Journal of Material Forming, volume 1, pages 1079-1082, 2008*
- [5] **Atluri S.N., Kim H.G., Cho J.Y.**, " A critical assessment of the truly meshless local petrov-galerkin (mlpg) and local boundary integral equation (lbie) methods", *computational mechanics, volume 24, pages 348-372, 1999*
- [6] **Arya S., Mount D., Netanyahu N., Silverman R., Wu A.**, " An optimal algorithm for approximate nearest neighbor searching", *Association for Computing Machinery, volume 45, pages 891-923, 1998*
- [7] **Allen M.P., Tildesley D.J.**, " Computer Simulation of Liquids", *Oxford University Press, pages 81, 2001*
- [8] **Benz W.**, " Smoothed particle hydrodynamics : a review, In Numerical Modeling of Non-linear Stellar Pulsation : Problems and Prospects", *Kluwer Academic, Boston, 1990*
- [9] **Buffa G., Hu J., Shivpuri R., Fratini L.**, " A continuum based fem model for friction stir welding model development", *Materials Science and Engineering A, volume 419, pages 389-396, 2006*
- [10] **Belytschko T., Krongauz Y., Fleming M., Organ D., Liu W.**, " Smoothing and accelerated computations in the element free galerkin method", *Journal of Computational and Applied Mathematics, volume 74, pages 111-126, 1996*

- [11] **Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., Krysl P.**, " Meshless methods : An overview and recent developments", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, volume 139, issues 1-4, pages 3-47, 15 December 1996
- [12] **Bonet J., Lok T.**, " Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamic formulations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, volume 180, issues 1-2, pages 97-115, 1999
- [13] **Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L.**, " Element Free Galerkin methods", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, volume 37, pages 229-256, 2004
- [14] **Bastier A., Maitournam M.H., Roger F., Dang Van K.**, " Modelling of the residual state of friction stir welded plates", *Journal of Materials Processing Technology*, volume 200, issues 1-3, pages 25-37, 8 May 2008
- [15] **Bastier A., Maitournam M. H., Van K. Dang, et al**, " Steady state thermo-mechanical modelling of friction stir welding", *Science and Technology of Welding and Joining*, volume 11, pages 278-288, 2006
- [16] **Bouchard P. O., Bay F., Chastel Y., Tovenia I.**, " Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique", *Computer Methods in Applied*, volume 189, pages 723-742, 2000
- [17] **Belytschko T., Guo Y., Lio W.K., Xiao S.P.**, " A unified stability analysis of meshfree particle methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 48, pages 1359-1400, 2000
- [18] **Bonet J., Kulasegaram S.**, " Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamic methods with application in metal forming simulations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 47, issue 6, pages 1189-1214, 2000
- [19] **Belytschko T., Tabbara M.**, " Dynamic fracture using element-free Galerkin methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 39, issue 6, pages 923-938, 30 Mars 1996
- [20] **Cazes R.**, " Soudage par friction-malaxage", *Techniques de l'Ingénieur, Référence BM7746*, 2003
- [21] **Colligan K.**, " Material Flow Behavior during Friction Stir Welding of Aluminium", *Welding Journal*, volume 78, issue 71, pages 229-237, 1999
- [22] **Cho J-H., Boyce D.E., Dawson P.R.**, " Modelling of strain hardening during friction stir welding of stainless steel", *Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering*, volume 15, pages 469-486, 2007

- 
- [23] **Cueto E., Doblare M.**, " The alpha-shapes-based natural element method", *Computational Mechanics : Techniques and Developments*, pages 23-30, 2000
- [24] **Cochelin B., Damil N., Potier Ferry M.**, " Asymptotic Numerical Method and Pade approximants for nonlinear elastic structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 37, pages 1187-1213, 1994
- [25] **Crespo A.J., Gomez-Gesteira M., Dalrymple R.A.**, " Boundary Conditions Generated by Dynamic Particles in SPH Methods", *Computers, Materials, & Continua*, volume 5, issue 3, pages 173-184, 2007
- [26] **Chen J.S., Han W., You Y., Meng X.**, " A reproducing kernel method with nodal interpolation property", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 56, pages 935-960, 2003
- [27] **Cleary P.W., Monaghany J.J.**, " Conduction Modelling Using Smoothed Particle Hydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, volume 148, pages 227-264, 1999
- [28] **Chen J.S., Pan C., Wu C.I.**, " Large Deformation Analysis of Rubber based on a Reproducing Kernel Particle Method", *Computer Mechanics*, volume 19, pages 211-227, 1997
- [29] **Colegrove P.A., Shercliff H.R.**, " 3-dimensional cfd modelling of flow round a threaded friction stir welding tool profile", *Materials Processing Technology*, 2005
- [30] **Cueto E., Sukumar N., Calvo B., Martinez M. A., Cegonino J., Doblare M.**, " Overview and recent advances in Natural Neighbour Galerkin methods", *Archives of Computational Methods in Engineering*, volume 10, issue 4, pages 307-384, 2003
- [31] **Chamoret D., Saillard P., Rassineux A., Bergheua J. M.**, " New smoothing procedures in contact mechanics", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, volume 168, pages 107-116, 2004
- [32] **Chen J.S., Wu C.T., You Y.**, " A Stabilized Conforming Nodal Integration for Galerkin Mesh-free Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 50, pages 435-466, 2001
- [33] **Dale-Martin E.**, " A technique for accelerating iterative convergence in numerical integration with application in transonic aerodynamics", *Lectures Notes in Physics*, volume 47, pages 123-139, 1976
- [34] **Dhondt G.**, " Automatic 3-D mode I crack propagation calculations with finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 41, pages 739-757, 1998

- [35] **Dilts G.**, " Moving-least-square-particle hydrodynamics-I, consistency and stability", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 44, pages 1115-1155, 1999
- [36] **Dolbow J., Belytschko T.**, " Numerical Integration of the Galerkin Weak Form in Meshfree Methods", *Computational Mechanics*, volume 23, pages 219-230, 1999
- [37] **Dalrymple, R.A., Knio O.**, " SPH modelling of water waves", *Proceedings of the Fourth Conference on Coastal Dynamics, Lund, 2000*
- [38] **Feulvarch E., Goorochur Y., Boitout F., Bergheau J.M.**, " 3D Modelling of Thermofluid Flow in Friction Stir Welding", *Trends in Welding Research, Proceedings*, pages 261-266, 2006
- [39] **Feng Z., Gould J.E., Linert J.L.**, " A heat flow model for Friction Stir Welding of aluminium alloys", *The Minerals, Metals & Materials Society*, pages 149-158, 1998
- [40] **Fulk D.A., Monaghan J.J.**, " An analysis of 1-D smoothed particle hydrodynamics kernels", *Journal of Computational Physics*, volume 126, pages 165-180, 1996
- [41] **Monaghan J.J.**, " An introduction to sph", *Computer Physics Communications*, volume 48, pages 89-96, 1988
- [42] **Guedoiri A., Moufki A., Favier V., Zahrouni H.**, " An analysis of boundary condition effects on the thermomechanical modeling of the FSW process", *AIP Conference Proceedings*, doi : 10.1063/1.3552568, volume 1315, pages 911-916, 2011
- [43] **Guerdoux S., Fourment L.** , " A 3D numerical simulation of different phases of friction stir welding", *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, volume 17, issue 7, 2009
- [44] **Givoli D., Zusman R.**, " An adaptive finite element framework for fatigue crack propagation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 54, pages 111-135, 2002
- [45] **Gunther F.C., Liu W.K.**, " Implementation of Boundary Conditions for Meshless Methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, volume 163, pages 205-230, 1998
- [46] **Gingold R.A., Monaghan J.J.**, " Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, volume 181, pages 375-389, 1977
- [47] **Gingold R.A., Monaghan J.J.**, " Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, volume 46, pages 429-453, 1982

- 
- [48] **Gerlich A., Su P., North T.H.**, " Tool penetration during friction stir spot welding of Al and Mg alloys", *Journal of Materials Science*, volume 40, pages 6473-6481, 2005
- [49] **Hirsch C.**, " Numerical Computation of Internal and External Flows", *Wiley-Interscience publication*, volume 1, 1988
- [50] **Hegen D.**, " Numerical techniques for the simulation of crack growth", *Technical Report. Final report of the postgraduate programme Mathematics for industry. Eindhoven University of Technology*, 1994
- [51] **Huerta A.; Fernandez-Mendez S.**, " Coupling element free galerkin and finite element method", *Technical Report. ECCOMAS*, 2000
- [52] **Heurtier P., Jones M.J., Desrayaud C., Driver J.H., Montheillet F., Allehaux D.**, " Mechanical and thermal modelling of friction stir welding", *Materials Processing Technology*, volume 171, pages 348-357, 2005
- [53] **Han W.; Meng X.**, " Some studies of the reproducing kernel particle method", *technical report. University of Iowa*, 2001
- [54] **Johnson R.**, " Forces in friction stir welding of aluminium alloy", *International FSW Symposium, Japan*, 2001
- [55] **Jamal M., Braikat B., Boutmir S., Damil N., Potier-Ferry M.**, " A high order implicit algorithm for solving instationary non-linear problems", *Computational Mechanics*, volume 28, pages 375-380, 2002
- [56] **Jacquin D., de Meester B., Simar A., Deloison D., Montheillet F., Desrayaud C.**, " A simple Eulerian thermomechanical modeling of friction stir welding", *Journal of Materials Processing Technology*, volume 211, pages 57-65, 2011
- [57] **Krongauz Y., Belytschko T.**, " Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite element", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, volume 131, pages 133-145, 1996
- [58] **Krysl P., Belytschko T.**, " Element-free Galerkin method : Convergence of the continuous and discontinuous shape functions", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, volume 148, pages 257-277, 1997
- [59] **Kumar K., Kailas S.V.**, " The role of friction stir welding tool on material flow and weld formation", *Materials Science and Engineering A*, volume 485, pages 367-374, 2008
- [60] **Khandkar M.Z.H., Khan J.A., Reynolds A.P.**, " Prediction of temperature distribution and thermal during friction stir welding : input torque based model", *Science and technology of welding and joining*, volume 8, pages 165-174, 2003

- [61] **Kaljevic I., Saigal S.**, " An improved element free Galerkin formulation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 40, pages 2953-2974, 1997
- [62] **Lucy L.B.**, " A numerical approach to the testing of the fission hypothesis", *Astronomical Journal*, volume 82, pages 1013-1024, 1977
- [63] **Liu GR.**, " Mesh free methods : moving beyond finite element methods", *Boca Raton, FL :Chemical Rubber*, 2003
- [64] **Liu W.K., Chen Y., Chang C.T., Belytschko T.**, " Advances in multiple scale Kernel Particle Methods", *Computational Mechanics*, volume 18, issue 2, pages 73-111, 1996
- [65] **Liu GR., Gu YT.**, " An introduction to Meshfree methods and their programming", *Springer*, pages 313-323, 2005
- [66] **Liu W.K., Jun S., Li S., Adee J., Belytschko T.**, " Reproducing Kernel Particle Methods for structural dynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 38, pages 1655-1679, 1995
- [67] **Liu W.K., Jun S., Zhang Y.F.**, " Reproducing kernel particle methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 20, pages 1081-1106, 1995
- [68] **Li Y., Murr L.E., McClure J.C.**, " Flow visualization and residual microstructures associated to friction-stir welding of 2024 aluminum to 6061 aluminum", *Materials Science and Engineering A*, volume 271, pages 213-223, 1999
- [69] **Lancaster P., Salkauskas K.**, " Surfaces generated by moving least-squares methods", *Mathematics of Computation*, volume 37, pages 141-158, 1981
- [70] **Lorrain O., Serri J., Favier V., Zahrouni H., El Hadrouz M.**, " A contribution to a critical review of FSW numerical simulation", *Journal of mechanics of materials and structures*, volume 4, issue 2, pages 351-369, 2009
- [71] **Libersky L.D., Petscheck A.G., Carney T.C., Hipp J.R., Allahdadi F.A.**, " High strain Lagrangian hydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, volume 109, pages 67-75, 1993
- [72] **Lee C.K., Zhou C.E.**, " On error estimation and adaptive refinement for element free Galerkin method : Part I : stress recovery and a posteriori error estimation", *Computers & Structures*, volume 82, issues 4-5, pages 413-428, February 2004
- [73] **Lee C.K., Zhou C.E.**, " On error estimation and adaptive refinement for element free Galerkin method : Part II : adaptive refinement", *Computers & Structures*, volume 82, issues 4-5, pages 429-443, February 2004

- 
- [74] **Monaghan J.J.**, " Why particle methods work", *SIAM J.Sci. Stat. Comput.*, volume 3, issue 3, pages 422-433, 1982
- [75] **Monaghan J.J.**, " An introduction to SPH", *Computer Physics Communications*, volume 48, issue 1, pages 89-96, 1988
- [76] **Monaghan J.J.**, " On the problem of penetration in particle methods", *Journal of Computational Physics*, volume 82, issue 1, pages 1-15, 1989
- [77] **Monaghan J.J.**, " Smoothed Particle Hydrodynamics", *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, volume 30, pages 543-574, 1992
- [78] **Monaghan J.J.**, " Simulating Free-Surface Flows With SPH", *Journal of Computational Physics*, volume 110, issue 2, pages 399-406, 1994
- [79] **Mottaqui H., Braikat B., Damil N.**, " Discussion about parameterization in the asymptotic numerical method : Application to nonlinear elastic shells", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, volume 199, pages 1701-1709, 2010
- [80] **Monaghan J.J., Huppert H.E, Grae Worster M.**, " Solidification using smoothed particle hydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, volume 206, pages 684-705, 2005
- [81] **Monaghan J.J., Kos A.**, " Solitary waves on a Cretan beach", *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering-Asce*, volume 125, issue 3, pages 145-154, 1999
- [82] **Mishra R.S., Ma Z.Y.**, " Friction stir welding and processing", *Materials Science and Engineering R*, volume 50, pages 1-78, 2005
- [83] **Noguchi H., Kawashima T., Miyamura T.**, " Element free analyses of shell and spatial structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 47, pages 1215-1240, 2000
- [84] **Nguyen V., Rabczuk T., Bordas S., Duot M.**, " Meshless methods : A review and computer implementation aspects", *Mathematics and Computers in Simulation*, volume 79, pages 763-813, 2008
- [85] **Nayroles B., Touzot G., Villon P.**, " The diffuse approximation", *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Serie II*, volume 313, issue 3, pages 293-296, 1991
- [86] **Nayroles B., Touzot G., Villon P.**, " Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements", *Computational Mechanics*, volume 10, pages 307-318, 1992
- [87] **Oudjene M., Ben-Ayedb L., Delamézière A., Batoz J. L.**, " Shape optimization of clinching tools using the response surface methodology with Moving Least-Square approximation", *journal of materials processing technology*, volume 209, pages 289-296, 2009

- [88] **Peskin C.S.**, " Numerical analysis of blood flow in the heart ", *Journal of Computational Physics*, volume 25, issue 3, pages 220-252, November 1977
- [89] **Piper B.**, " Properties of local coordinates based on Dirichlet tessellations", *Computing Suppl.*, volume 8, pages 227-239, 1993
- [90] **Rogers B.D., Dalrymple R.A.**, " SPH Modeling of tsunami waves, *Advances in Coastal and Ocean Engineering*", *Advanced Numerical Models for tsunami waves and runup*, World Scientific, volume 10, 2008
- [91] **Sibson R.**, " A vector identity for the Dirichlet tessellation", *Math Proc Cambridge Philos Soc*, volume 87, pages 151-155, 1980
- [92] **Shobeyri G., Afshar M.H.**, " Corrected discrete least-squares meshless method for simulating free surface flows", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, volume 36, pages 1581-1594, 2012
- [93] **Schneider J., Beshears R., Jr. A.C. Nunes**, " Interfacial sticking and slipping in the friction stir welding process", *Materials Science and Engineering A*, volume 435-436, pages 297-304, 2006
- [94] **Schollmann M., Fulland M., Richard H. A.**, " Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3d structures", *Engineering Fracture Mechanics*, volume 70, pages 249-268, 2003
- [95] **Schmidt H., Hattel J.**, " A local model for the thermomechanical conditions in friction stir welding", *Modelling And Simulation In Material Science And Engineering*, volume 13, pages 77-93, 2004
- [96] **Schmidt H., Hattel J.**, " Heat source models in simulation of heat flow in friction stir welding", *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, volume 14, pages 296-304, 2004
- [97] **Schmidt H., Hattel J.**, " Thermal modelling of friction stir welding", *Scripta Materialia*, volume 58, pages 332-337, 2008
- [98] **Swegle L.W., Hicks D.L., Attaway S.W.**, " Smooth particle hydrodynamics stability analysis", *Journal of Computational Physics*, volume 116, pages 123-134, 1995
- [99] **Schmidt H., Hattel J., Wert J.**, " An analytical model for heat generation in friction stir welding", *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, volume 12 ,pages 143-157, 2003
- [100] **Song M., Kovacevic R.**, " Thermal modelling of Friction Stir Welding in a moving coordinate system and its validation", *Internationnal Journal of Machine Tolls & Manufacture*, volume 43, pages 605-615, 2002

- 
- [101] **Shao S.D., Lo E.Y.M.**, " *Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface*", *Advances in Water Resources*, volume 26, pages 787-800, 2003
- [102] **Simar A., Lecomte-Beckers J., Pardoen T., de Meester B.**, " *Effect of boundary conditions and heat source distribution on temperature distribution in friction stir welding*", *Science and Technology of Welding and Joining*, volume 11, issue 2, pages 170-177, 2006
- [103] **Sukumar N., Moran B., Belytschko T.**, " *The Natural Element Method in Solid Mechanics*", *Internationnal Journal of Numerical Methods in Engineering*, volume 43, issue 5, pages 839-887, 1998
- [104] **Seidel T.U., Reynolds A.P.**, " *Two-dimentional friction stir welding process model based on fluid mechanics*", *Science and technology of welding and joining*, volume 8, pages 175-183, 2003
- [105] **Smith A., Silvester D.**, " *Implicit algorithms and their linearization for the transient incompressible Navier-Stokes equations*", *IMA Journal of Numerical Analysis*, volume 17, pages 527-545
- [106] **Taha R.T., Ablowitz M.J.**, " *Analytical and numerical aspects of certain non-linear evolution equations II Numerical, nonlinear Schrodinger equation*", *Journal of Computational Physics*, volume 55, pages 203-230, 1984
- [107] **Threadgill P.L., Leonard A.J., Shercliff H.R., Withers P.J.**, " *Friction stir welding of aluminium alloys*", *International Materials Reviews*, volume 54, pages 93, 2009
- [108] **Tartakovsky A.M., Meakin P.**, " *A smoothed particle hydrodynamics model for miscible flow in three-dimensional fractures and the two-dimensional Rayleigh-Taylor instability*", *Journal of Computational Physics*, volume 207, pages 610-624, 2005
- [109] **Thomas W. M., Nicholas E. D., Needham J. C., Church M. G., Templesmith P., Dawes C.**, " *Intl. Patent Application no. PCT/GB92/02203 and GB Patent Application no. 9125978.9, 1991.*",
- [110] **Thomas W. M., Nicholas E. D., Smith S.D., Das S.K., Kaufman J.G., Lienert T.J.**, " *Aluminum 2001-Proceedings of the TMS 2001 Aluminum Automotive and Joining Sessions, TMS, page 213, 2001*",
- [111] **Ulyssen P.**, " *Three-dimensional modeling of the friction stir-welding process*", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, volume 42, pages 1549-1557, 2002
- [112] **Xiao S.P., Belytschko T.**, " *Material stability analysis of particle methods*", *Advances in Computational Mathematics*, volume 23, pages 171-190, 2005

- [113] **Yvonnet J., Ryckelynck D., Lorong P., Chinesta F.**, " A new extension of the natural element method for non-convex and discontinuous domains : the constrained natural element method (C-NEM)", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 60, issue 8, pages 1451-1474, 28 june 2004
- [114] **Zahrouni H., Cochelin B., Potier-Ferry M.**, " Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, volume 175, pages 71-85, 1999
- [115] **Zhou J., Li L., Duszczak J.**, " 3D FEM simulation of the whole cycle of aluminium extrusion throughout the transient state and the steady state using the updated Lagrangian approach", *Journal of Materials Processing Technology*, volume 134, pages 383-397, 2003
- [116] **Zhang Z., Zhang H.W.**, " 3D Numerical studies on effect of axial pressure in Friction Stir Welding", *Science and Technology of Welding and Joining*, volume 12, pages 226-248, 2007
- [117] **Chen C., Kovacevic R.**, " Finite element modelling of thermomechanical performance of Friction Stir Welding", *4th International Symposium on Friction Stir Welding*, 2003
- [118] **Chao Y.J., Qi X.**, " Heat transfert and thermomechanical analysis of friction stir joining of AA6061-T6 plates", *1st International Symposium of friction stir welding*, 1999
- [119] **Dickerson T., Shi Q., Shercliff H.R.**, " Heat flow into Friction Stir Welding tools", *4th International Symposium on Friction Stir Welding*, 2003
- [120] **Fourment L., Guerdoux S., Miles M., Nelson T.**, " Numerical simulation of the Friction Stir Welding process using both Lagrangian and Arbitrary Lagrangian Eulerian formulations", *5th International Symposium on Friction Stir Welding*, 2004
- [121] **Nguyen V.**, " Meshless methods and their computer implementation aspects", *Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systmes (LTDS), ENISE*.
- [122] **Reynolds A.P., Seidel T.U., Simonsen M.**, " Visualization of Material Flow in an Autogenous Friction Stir Weld", *In 1st International Symposium on Friction Stir Welding*, 1999
- [123] **Schmidt H., Hattel J.**, " Modelling thermomechanical conditions at the tool/matrix interface in friction stir welding", *5th symposium on Friction stir welding, Metz, France, 2004*
- [124] **Simar A., Pardoën T., Meester B.**, " Influence of Friction Stir Welding parameters on the power input and temperature distribution in aluminium alloys", *5th International Symposium on Friction Stir Welding*, 2004

- 
- [125] **Xu S., Deng X.**, " Two and three dimensionnal finite element models for the Friction Stir Welding process", *4th International Symposium on Friction Stir Welding, 2003*
- [126] **Zaeh M.F., Eireiner D., Papadakis L.**, " Friction Stir Welding with modern milling machines. Requirements, Approach and Application", *5th International FSW Symposium, Metz, France, 2004*
- [127] **Bastier A.**, " Modélisation du soudage d'alliages d'Aluminium par friction et malaxage", *Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique, Mécanique, Matériaux, 2006*
- [128] **Feulvarch E.**, " Modélisation numérique du soudage par friction-malaxage (Friction Stir Welding)", *Thèse de doctorat de l'Université de Saint Etienne, Génies Mécanique et Civil, 2005*
- [129] **Gratecap F.**, " Contributions au procédé de soudage par frottement et malaxage (FSW)", *Thèse de doctorat de L'Ecole Centrale de Nantes et l'Université de Nantes, 2007*
- [130] **Guedoiri A.**, " Contribution à la modélisation et à la simulation numérique du soudage par friction et malaxage)", *Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Arts et Métiers ParisTech, 2012*
- [131] **Limido J.**, " Etude de l'effet de l'usinage grande vitesse sur la tenue en fatigue de pieces aeronautiques", *Thèse de l'Ecole doctorale MEGEP, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2008*
- [132] **Lorrain O.**, " Analyses expérimentale et numérique du procédé de soudage par friction malaxage FSW", *Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Arts et Métiers ParisTech, 2010*
- [133] **Tillier Y.**, " Identification par analyse inverse du comportement mécanique des polymères solides; application aux sollicitations multiaxiales et rapides", *Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1998*
- [134] **Yvonnet J.**, " Nouvelles approches sans maillage basées sur la méthode des éléments naturels pour la simulation numérique des procédés de mise en forme (Friction Stir Welding)", *Thèse de doctorat de l'école Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (Centre de Paris), 2004*
- [135] **Atluri SN., Shen S.**, " The Meshless Local Petrov Galerkin (MLPG) method", *TechScience, first edition, 2002*
- [136] **Fletche CAI.**, " Computational techniques for fluid dynamics", *volume 1, Springer-Verlag, Berlin, 1991*

- [137] **Liu G.R.**, " *Mesh Free Methods : Moving Beyond the Finite Element Method*", *CRC press, Boca Raton, USA 2002*
- [138] **Liu G.R., Liu M.B.**, " *Smoothened Particle Hydrodynamics : a meshfree particle method*", *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 5 Toh Tuck Link, Singapore 596224, 2003*

# Table des figures

1.1	Machines de soudage FSW de l'Institut de Soudure (Metz) (a)- Machine ESAB. (b)- Machine MTS . . . . .	7
1.2	Illustration du procédé de soudage par friction et malaxage . . . . .	7
1.3	Exemple de géométrie d'outil : Thomas W.M. et al. 2001 . . . . .	8
1.4	Formation de la soudure . . . . .	8
1.5	(a)- Fin de phase de pénétration / (b)- Phase de chauffage . . . . .	9
1.6	(a)- Phase de translation / (b)- Trou à la fin de soudure . . . . .	10
1.7	Coupe transversale schématique d'une soudure . . . . .	10
1.8	Noyaux : (a)- forme de cuvette ; (b)- forme d'ellipsoïde . . . . .	11
1.9	Coupe d'une soudure sur un alliage d'aluminium 7075Al-T651 . . . . .	11
1.10	(a)- Coupe transversale d'une soudure par FSW. (b)- Coupe transversale d'une soudure à l'arc. . . . .	11
1.11	Comparaison de la distorsion entre le soudage FSW et le soudage à l'arc .	12
1.12	Transferts thermiques induits par le procédé FSW . . . . .	13
1.13	Les différentes configurations de soudage effectuées par FSW : (a) bout à bout, (b) en coin, (c) en T, (d) transparence, (e) transparence multiple, (f) T par transparence, et (g) angle. . . . .	16
2.1	Simulation bidimensionnelle du profil des vitesses lors du procédé FSW à l'aide du code ABAQUS/Explicit . . . . .	27
2.2	Présentation d'une fonction poids de type cubic spline . . . . .	33
2.3	Problématique de la fonction poids au bord . . . . .	34
2.4	Sous-domaine $(i, j)$ et ses voisins . . . . .	39
2.5	Illustration des points voisins du point $P(x, y)$ . . . . .	40
3.1	Dimensions du domaine d'étude et conditions aux limites . . . . .	50
3.2	Distribution initiale des particules . . . . .	51
3.3	Les états de la distribution des particules aux instants $t_1 = 0.0306s$ , $t_2 = 2.0402s$ , $t_3 = 5.0997s$ et $t_4 = 9.9921s$ au cours du soudage . . . . .	51

3.4	Distribution de la température aux instants $t_1 = 0.0306s$ , $t_2 = 2.0402s$ , $t_3 = 5.0997s$ et $t_4 = 9.9921s$ . . . . .	52
3.5	Géométrie et conditions aux limites de la configuration FSW traitée par Fluent . . . . .	53
3.6	Distribution de la température obtenue par Fluent . . . . .	53
3.7	Coupe longitudinale (A-A) et coupe transversale (B-B) . . . . .	53
3.8	Evolution de la température le long de la coupe (A-A) . . . . .	54
3.9	Evolution de la température le long de la coupe (B-B) . . . . .	54
4.1	Organigramme de l'algorithme itératif . . . . .	63
4.2	Domaine d'étude et conditions aux limites . . . . .	64
4.3	Différentes distributions de points pour différentes distances interpoints (a) $dr = 5. 10^{-4}m$ , (b) $dr = 3. 10^{-4}m$ , (c) $dr = 2.5 10^{-4}m$ et (d) $dr =$ $2.25 10^{-4}m$ . . . . .	65
4.4	Evolution de la composante $u$ du vecteur vitesse le long de l'axe $y$ pour différentes densités de points . . . . .	66
4.5	Evolution de la composante $v$ du vecteur vitesse le long de l'axe $x$ pour différentes densités de points . . . . .	66
4.6	Distribution de la composante $\dot{\epsilon}_{xx}$ du tenseur vitesse des déformations aux différentes distances interpoints $dr = 5. 10^{-4}m$ , $dr = 3. 10^{-4}m$ , $dr =$ $2.5 10^{-4}m$ et $dr = 2.25 10^{-4}m$ . . . . .	67
4.7	Distribution de la composante $\dot{\epsilon}_{yy}$ du tenseur vitesse des déformations aux différentes distances interpoints $dr = 5. 10^{-4}m$ , $dr = 3. 10^{-4}m$ , $dr =$ $2.5 10^{-4}m$ et $dr = 2.25 10^{-4}m$ . . . . .	68
4.8	Distribution de la composante $\dot{\epsilon}_{xy}$ du tenseur vitesse des déformations aux différentes distances interpoints $dr = 5. 10^{-4}m$ , $dr = 3. 10^{-4}m$ , $dr =$ $2.5 10^{-4}m$ et $dr = 2.25 10^{-4}m$ . . . . .	69
4.9	Configuartion intiale des deux domaines . . . . .	71
4.10	Malaxage de la matière autour de l'outil de soudage aux instants (a) $t_1 =$ $0.05s$ , (b) $t_2 = 0.075s$ , (c) $t_3 = 0.1s$ et (d) $t_4 = 0.125s$ . . . . .	71
4.11	Distribution de la composante $u$ du vecteur vitesse, à l'instant $t = 0.1s$ , obtenues par l'algorithme proposé et Fluent . . . . .	72
4.12	Distribution de la composante $v$ du vecteur vitesse, à l'instant $t = 0.1s$ , obtenues par l'algorithme proposé et Fluent . . . . .	72
4.13	Evolution de la composante $u$ du vecteur vitesse le long de l'axe $y$ . . . . .	73
4.14	Evolution de la composante $v$ du vecteur vitesse le long de l'axe $x$ . . . . .	73

---

4.15	Distribution de la composante $\dot{\epsilon}_{xx}$ du tenseur vitesse des déformations, à l'instant $t = 0.1s$ , obtenues par l'algorithme proposé et le code industriel Fluent . . . . .	74
4.16	Distribution de la composante $\dot{\epsilon}_{yy}$ du tenseur vitesse des déformations, à l'instant $t = 0.1s$ , obtenues par l'algorithme proposé et le code industriel Fluent . . . . .	74
4.17	Distribution de la composante $\dot{\epsilon}_{xy}$ du tenseur vitesse des déformations, à l'instant $t = 0.1s$ , obtenues par l'algorithme proposé et le code industriel Fluent . . . . .	74
5.1	Configuration de la matière malaxée à l'instant $t = 0.1s$ par l' <i>Algo1</i> (a) et l' <i>Algo2</i> (b) . . . . .	83
5.2	Configuration de la matière malaxée à l'instant $t = 0.125s$ par l' <i>Algo1</i> (a) et l' <i>Algo2</i> (b) . . . . .	83
5.3	Distribution de la composante $u$ du vecteur vitesse, à l'instant $t = 0.1s$ , obtenues par <i>Algo1</i> et <i>Algo2</i> . . . . .	84
5.4	Distribution de la composante $v$ du vecteur vitesse, à l'instant $t = 0.1s$ , obtenues par <i>Algo1</i> et <i>Algo2</i> . . . . .	84
5.5	Evolution de la composante $u$ du vecteur vitesse le long de l'axe $y$ . . . . .	85
5.6	Evolution de la composante $v$ du vecteur vitesse le long de l'axe $x$ . . . . .	85
5.7	Evolution de la composante $u$ du vecteur vitesse en fonction de temps . . . . .	85
5.8	Evolution de la composante $v$ du vecteur vitesse en fonction de temps . . . . .	86
5.9	Distribution de la composante $\dot{\epsilon}_{xx}$ du tenseur vitesse des déformations, à l'instant $t = 0.1s$ , obtenues par l' <i>Algo1</i> et l' <i>Algo2</i> . . . . .	86
5.10	Distribution de la composante $\dot{\epsilon}_{yy}$ du tenseur vitesse des déformations, à l'instant $t = 0.1s$ , obtenues par l' <i>Algo1</i> et l' <i>Algo2</i> . . . . .	87
5.11	Distribution de la composante $\dot{\epsilon}_{xy}$ du tenseur vitesse des déformations, à l'instant $t = 0.1s$ , obtenues par l' <i>Algo1</i> et l' <i>Algo2</i> . . . . .	87