



**HAL**  
open science

# Modèles cinétiques et caractérisation expérimentale des fluctuations électrostatiques dans un propulseur à effet Hall

Jordan Cavalier

► **To cite this version:**

Jordan Cavalier. Modèles cinétiques et caractérisation expérimentale des fluctuations électrostatiques dans un propulseur à effet Hall. Autre [cond-mat.other]. Université de Lorraine, 2013. Français. NNT: 2013LORR0130 . tel-01750123

**HAL Id: tel-01750123**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750123>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Modèles cinétiques et caractérisation expérimentale des fluctuations électrostatiques dans un propulseur à effet Hall

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 28 octobre 2013

pour l'obtention du titre de

**Docteur de l'Université de Lorraine  
en Physique**

par

Jordan CAVALIER

### Composition du jury

- Président :* Michel DUDECK, Professeur des Universités  
Université Pierre et Marie Curie, Paris
- Rapporteurs :* Stéphane MAZOUFFRE, Chargé de Recherches au CNRS (HDR),  
ICARE, Orléans
- Ulrich STROTH, Professeur des Universités,  
Max Planck Institute, Garching (Allemagne)
- Examineurs :* Fabrice DOVEIL, Directeur de recherches au CNRS,  
Université Aix-Marseille
- Directeur de thèse :* Gérard BONHOMME, Professeur des Universités, Université de Lorraine
- Co-directeur de thèse :* Nicolas LEMOINE, Maître de Conférences, Université de Lorraine
- Invités :* Stephan ZURBACH, Ingénieur SNECMA, groupe Safran, Vernon
- Sedina TSIKATA, Chargée de Recherches au CNRS, ICARE, Orléans

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements : la thèse un travail seul à plusieurs

Rencontrer une personne nouvelle lorsque l'on est en thèse peut être plus éprouvant qu'il n'y paraît. A la question innocente mais pourtant fatidique « Que fais-tu dans la vie ? », le thésard se voit totalement désarmé pour expliquer un monde que l'interlocuteur ignore, le plus souvent, et qui ne se comprend qu'en s'expérimentant. Dans la plupart des cas, l'aspirant docteur n'aura pas le courage de rentrer dans les fastidieux détails de description de ce qu'est la thèse et se contentera de l'évoquer brièvement, laissant à son interlocuteur le choix entre simuler un semblant de compréhension à l'évocation du mot thèse ou pousser le vice à demander plus de précision. Pourtant, la réponse succincte du doctorant n'est pas vide de sens et évolue au cours des différentes périodes de son apprentissage de thèse. Je vous propose ici un décodage des cinq phrases valises qu'émet un futur docteur à la question « Que fais-tu dans la vie ? » et qui correspondent aux cinq temps forts de la vie du thésard.

*Je vais faire une thèse* : rêve fou et inconsidéré de l'étudiant en fin de Master. Le jugement est alors complètement altéré par des rêves de gloire et de fortune auxquels se rajoute l'espoir de sauver le monde.

*Je commence ma thèse* : début de cette grande aventure de trois années qui vous plonge dans le fleuve tumultueux de la vie adulte, vous qui n'êtes pas vraiment prêt, mais volontaire, à bien y réfléchir. Quelle joie que de commencer, quel bonheur et quelle fierté que d'être un jour docteur ! Ces sentiments, bien vite s'estomperont, pour laisser place au travail long et difficile que tout travail de thèse impose.

*Je suis en thèse* : période floue qui commence vers le sixième mois et finit aux alentours des six derniers, pendant laquelle les hauts et les bas se succèdent, sans que la finalité ne soit vraiment l'objectif du travail mené. Décrire les ressentis de cette période dans le détail serait comme décrire un tableau pointilliste petite tache par petite tache. Certaines sont colorées et attrayantes alors que d'autres sont plus obscures et sombres. Il en va de même pour le quotidien de la thèse : certains jours sont heureux et tout sourit à l'acharné alors que d'autres sont plus maussades où rien ne va. La description de chacun de ces instants semble fort inutile puisqu'ils ne représentent qu'un infime morceau de la toile finale. Pourtant, l'artiste peintre passera des jours à choisir son bleu, tout comme le thésard passera des mois à régler un problème qui paraît mineur. La somme de tous ces instants, futiles aux regards extérieurs, donne pourtant un jour ses fruits lorsque le résultat final apparaît, dès lors que la thèse est finie, que le recul se fait, et que le tableau, constitué de mille et un points ou moments de vie, révèle sa forme finale, le travail accompli.

*Je passe ma thèse* : Avant que la forme finale du tableau ne puisse être révélée au grand jour, le peintre doctorant se doit de porter le coup de pinceau ultime à sa toile : rédiger le texte faisant l'état des lieux de son travail au cours des trois années passées. Cette dernière étape est primordiale pour l'artiste peintre doctorant et va déterminer si oui ou non la somme de chaque moment forme un ensemble intelligible ou si le tableau est gâché. Tout

comme le geste du peintre, le futur docteur se doit d'être précis mais vif. C'est que la rédaction se fait bien généralement dans la précipitation, l'angoisse et le doute. Précipitation car la toile peut toujours être améliorée, embellie, alors que le mécène commanditaire de l'oeuvre s'impatiente de la voir dans son salon et qu'il menace de ne plus payer si le retard se fait trop grand. Angoisse de la réaction dudit mécène à la vue du résultat final. Enfin, doute que le travail soit utile, qu'il intéresse, qu'il contribue au développement personnel, au bonheur du jeune thésard ou encore doute de sa propre compétence, tant le moment est intense. Rien n'est plus laborieux et studieux que cette période. Ce n'est pas un simple rapport que l'on écrit, c'est bien un livre de pointe sur un sujet précis et délicat, qui doit se tenir dans la forme comme dans le fond et qui sera jugé par des spécialistes du domaine.

*Je soutiens ma thèse* : C'est l'exposition ! La toile est envoyée aux mécènes, ceux-ci sont satisfaits (du moins quand tout se passe bien), évoquent quelques retouches, améliorations et soulignent la pertinence du travail avant de définir une date à laquelle la toile sera présentée au grand public. Il est alors demandé au jeune presque maître d'art de composer un discours, illustrant au mieux les tenants et les aboutissants qui ont conduits au chef d'oeuvre. Exercice difficile et empli d'appréhension, surtout que la date est éloignée dans le temps, faisant de chaque moment une lente agonie où le doctorant se meurt en attente d'en finir. Le discours, pour sa part, se doit d'être bien préparé puisque le public sera composé de critiques de grande renommée sur le sujet. Ainsi, chaque mot doit être choisi, chaque illustration mûrement réfléchie et le rideau doit tomber au moment propice pour dévoiler l'oeuvre finale. L'auteur se livre également à un exercice périlleux puisqu'il se voit assailli de questions sur son oeuvre, jugement final s'il en est, qui laissera une trace indélébile sur son parcours. Et pourtant, le moment tant attendu arrive, c'est la consécration, qui fera du jeune étudiant en Master, un jeune docteur dont les épreuves futures s'annoncent tout aussi difficiles que celles de la thèse, mais dont le défi est à sa mesure.

Cette description du temps fort qu'est la thèse semble plonger le futur docteur dans un abîme de solitude, où tout lui est ennemi et où seul il devra se battre. Pourtant, il n'en est rien ! Tout comme le peintre est aidé par ses disciples, s'inspire des autres, est porté par des mécènes, corrigé par des pairs ou encore soutenu par sa famille et ses amis, le futur docteur n'est pas seul dans cette épreuve de trois longues années. Le succès d'un travail de thèse n'est pas la contribution d'un seul mais bien de plusieurs et j'aimerais remercier toutes ces personnes qui ont fait de ces trois ans, non pas un long fleuve tranquille, mais bien une étape importante de vie.

En tout premier lieu, je souhaite remercier Nicolas Lemoine qui a fait un travail de directeur de thèse exemplaire. Il a su me guider tout au long de ces trois ans, en m'apprenant énormément et en me soutenant toujours. Ses talents pédagogiques, que j'avais fortement apprécié durant mon Master, ne sont plus à démontrer. Adeptes de la rigueur mathématique et physique, sa capacité à faire le lien entre différents éléments a priori incorréllés m'a toujours étonné et en fait l'un des meilleurs scientifiques que j'ai pu rencontrer durant ma (jeune) carrière. Son point de vue critique ne s'étend pas seulement au monde des sciences et, lors de nos nombreuses pérégrinations, il est toujours agréable de converser avec lui. Enfin, je lui souhaite bonne chance pour son HdR et ses futurs travaux. J'espère être

amené à encore travailler avec lui.

La deuxième personne qui a été un élément essentiel à ma thèse n'est autre que mon deuxième directeur de thèse Gérard Bonhomme. Je le remercie pour tout ce qu'il a fait pour moi, à commencer par mon enrôlement dans le Master erasmus mundus sciences de la fusion. Cette expérience incroyable (3 pays en deux ans) m'a permis d'améliorer (le mot est faible) mon anglais, de rencontrer des gens que je côtoie encore et de me faire une place dans le petit monde de la physique des plasmas. Durant mon travail de thèse, il a su m'aiguiller très justement, en ayant toujours un recul nécessaire sur mon travail. Ses conseils m'ont permis à maintes reprises de débloquer des problèmes qui me semblaient impossible à résoudre et je n'oublierai pas ses questions pertinentes grâce auxquelles j'ai pu prévoir des questions qui m'ont été posées le jour de ma soutenance. Sa connaissance incommensurable sur un nombre impressionnant de sujets en font une bible qu'il est bon de consulter à la moindre question. Je le remercie également pour m'avoir aidé à trouver un post-doc et de m'avoir soutenu dans tous mes déboires administratifs et j'admire sa sérénité et son calme.

Ce travail de thèse est aussi le fruit d'une collaboration fructueuse avec, notamment, trois autres personnes : Sedina Tsikata, Cyrille Honoré et Dominique Grésillon. Sedina, qui a monté le banc de la diffusion collective utilisé à Orléans, a grandement facilité ma prise en main du diagnostic et j'ai alors pu apprendre énormément à ce sujet lors des campagnes à Orléans. Je n'oublie pas non plus son aide précieuse lors de la rédaction de mon dernier chapitre de thèse et toutes les discussions que nous avons eues. Cyrille m'a également appris de nombreuses choses sur le diagnostic et ses idées ont largement contribué à mon travail de thèse (je pense par exemple à tout mon travail sur la déconvolution du signal, qui s'appuie sur une de ses idées). Il toujours pris le temps de me répondre et de m'aider, faisant des campagnes à Orléans un moment agréable d'échanges sur bien des sujets. Dominique a lui aussi contribué à mon apprentissage du diagnostic. Ses conseils toujours avisés, son grand savoir et ses encouragements, qui venant d'une telle sommité font toujours plaisir, ont contribué à nombres de mes résultats. Je tiens donc à remercier chaleureusement ces trois personnes pour toute l'aide et le temps qu'elles ont pu me consacrer.

Pendant mes trois années de thèse, j'ai été précédé (de 6 jours mais cela compte quand même) par le Docteur Bouselin. Partenaire de galère, nous avons effectué notre Master et notre thèse ensemble et partagé le même bureau, *so-called* bureau des Ewoks. S'il est bon de travailler avec des gens compétents, il est par ailleurs nécessaire d'avoir des gens sur qui on peut compter et Guillaume est l'une de ces personnes. Nous nous sommes soutenus mutuellement et je suis certain que, sans lui, j'aurais eu toutes les peines du monde à continuer ma thèse, dans bien des situations. Moment intense s'il en est, la rédaction en juillet/août sous 30°C et pendant le Tour de France fut une épreuve qu'il est bon d'avoir partagée avec quelqu'un. On ne compte plus les bons moments que nous avons passés ensemble mais je citerais le Ricon à Madrid, la vallée Blanche des Houches ou encore le mariage de Michal à Prague. Je le remercie également de m'avoir laissé travailler avec lui sur la sonde de ball-pen. Après un travail acharné pour obtenir des expériences reproductibles, nous avons réussi à valoriser nos résultats par un article qui s'arrache encore dans toutes les bonnes librairies. Seul bémol de ces trois années, il est bien trop fort en babyfoot pour moi, même si je le soupçonne de faire des commerces discrètement !

Autre forçat de la thèse, le Sensei D. Coulette est un camarade que nous apprîmes à connaître avec Guillaume durant ces trois années. D'enseignant au collège/lycée à étudiant en sciences de la fusion, il en faut du courage pour reprendre des études lorsque l'on est rentré dans la vie active. C'est que David a deux enfants en bas âge qui plus est ! Grand génie des mathématiques (au moins pour le petit physicien que je suis), je le remercie pour toutes les discussions que nous avons eues sur le temps de midi, autour d'un succulent R.U. ou d'une déculotté au babs. David a également contribué à ma thèse puisque les résultats principaux de mon dernier chapitre (sur la relation de dispersion avec adjonction d'un terme supplémentaire) n'aurait jamais pu se faire sans le programme de résolution qu'il a développé. Je lui souhaite bonne chance pour sa soutenance prochaine, même si je ne me fais aucun souci pour lui.

S'il y a un membre de l'équipe qui m'a énormément soutenu, c'est Stéphane Heuraux, homme au grand coeur sur la main. Toujours prêt à aider, les longs débats (se finissant parfois à des heures indues selon le code du travail) sur la sonde ball-pen et sur mon sujet de thèse se sont toujours faits dans la bonne humeur. Adeptes des phénomènes physiques tordus et complexes, Stéphane a cette qualité qui le pousse à regarder plus loin que les idées reçues, ce qui lui permet d'acculer les diagnostics, les théories ou bien d'autres choses, dans leurs derniers retranchements. Je n'oublie pas que c'est grâce à lui que j'ai eu un financement le dernier mois d'octobre (Nicolas est aussi à remercier). Merci Stéphane pour tout le temps que tu nous as consacré, à Guillaume et à moi, et pour ta bonne humeur et même tes blagues !

La dernière année de ma thèse, j'ai été amené à donner des TDs d'électromagnétisme et d'optique à l'ESSTIN, exercice formidable et indispensable (je le crois) à toute personne aspirant être docteur. Ceci n'aurait pas pu être possible sans l'intervention de Eric Faudot, que je remercie de m'avoir donné l'opportunité d'enseigner quelques uns. Je tiens à remercier également Gilles Parent qui s'occupait de donner les cours et de concevoir les TDs. Son aide et ses conseils m'ont facilité la tâche pour cette première expérience d'enseignement et j'ai apprécié travailler avec lui.

Je remercie à présent un nombre de personnes sans qui le travail à la faculté des sciences ne pourrait pas se faire :

- Anne-Sophie Latreille pour sa bonne humeur, son professionnalisme exacerbé et surtout d'avoir pris soin des occupants du bureau des doctorants ! Merci pour les longues pauses dans ton bureau, agrémentées d'un thé ou d'un Saint Agaïne, et d'avoir supporté mes vérifications méticuleuses des fiches de remboursement.
- Joëlle Poisson, dont la joie de vivre légendaire fera longtemps résonner les murs de la faculté. Merci pour ces discussions pleines d'entrain qui me sortaient de mon travail.
- Jean-Georges Mussot, le roi de l'atelier (encore plus depuis que Dom' est parti). Ses blagues, un tantinet salace, me feront toujours rire et il est un vecteur essentiel de communications entre le personnel de toute la faculté, qualité qui lui vaut d'être apprécié de tout le monde. Merci aussi pour toutes les pièces qu'il a conçu pour Mirabelle. Par contre, je ne le remercie pas de se moquer de ma coupe de cheveux, même si je l'avoue, je suis parfois un peu ébouriffé.
- Jean-François Pautex, pour toute l'aide qu'il nous (Guillaume et moi) a apporté dans la conception de l'électronique pour les sondes et le temps consacré à nous l'expliquer. Sa compétence est incroyable et elle ne s'arrête pas seulement au do-



maine de l'électronique puisqu'il peut aisément expliquer de la programmation, des problèmes physiques ou même décrire toute la gamme des produits de Apple.

- Philippe Pigeat, pour son aide dans la conception de la sonde de ball-pen et son franc parlé et sa jovialité.
- Luc Moreau, toujours près à dépanner, que ce soit pour trouver une fuite sur Mirabelle ou pour de la colle à vide.
- Martine Gaulier, Frédéric Breton, Damien Geneve et Cyril Noirel, sans qui la faculté ne pourrait pas tourner, qui participent à la cohésion des chercheurs et à la bonne humeur au travail.

A Orléans, Sisouk Sayamath, Guillaume Daniel, Guillaume Largeau et Pascal Lasgorceix m'ont assisté lors des expériences de diffusion collective sur le moyen d'essai PIVOINE et je les remercie pour leur aide.

Un travail de thèse se doit d'être jugé et je souhaite remercier ces personnes qui ont pris de leur temps précieux pour regarder mon travail. Merci à mes deux rapporteurs, Ulrich Stroth, qui m'a accueilli dans son laboratoire quand j'étais en Master à Stuttgart, et Stéphane Mazouffre, qui m'a accueilli dans son laboratoire à Orléans. Merci aussi à mes examinateurs Fabrice Doveil et Michel Dudeck d'avoir accepté de regarder ma thèse.

Je remercie également mes deux financeurs, le CNES, en la personne de Nicolas Arcis, et la SNECMA, en la personne de Stéphane Zurbach, pour avoir soutenu mon travail de thèse et j'espère leur avoir apporté satisfaction. Je remercie également le CNRS de m'avoir financé le dernier mois d'octobre 2013.

Lorsque l'on arrive plus à rien, il est bon d'avoir des amis qui vous sortent de la torpeur du travail. C'est pourquoi je les remercie de m'avoir dissipé, soit en faisant du sport, soit en sortant dans les bars.

Enfin, je souhaite dire un grand merci à ma mère et ma grand-mère, sans qui je n'écrirais pas ces mots. Merci à ma mère de m'avoir soutenu pendant ces trois ans, de s'être occupé de moi, d'avoir supporté mon (fort) caractère et d'avoir relu mes épreuves de manuscrit. Ma réussite lui est en grande partie dédiée, elle qui ne m'a jamais poussé mais toujours encouragé, et qui reste un modèle de réussite dans la famille. Merci à ma grand-mère pour nos rendez-vous des jeudis et pour sa bonne humeur communicative. Ces moments me permettaient d'oublier les difficultés du travail et de ne pas oublier l'essentiel.



# Table des matières

Liste des symboles	xi
Introduction	1
Chapitre 1 Etat de l'art	9
1.1 Résultats des simulations particulières	10
1.2 Résultats expérimentaux	12
1.2.1 Mode azimuthal	14
1.2.2 Mode axial	18
1.3 Mode azimuthal identifié comme étant l'instabilité de dérive électronique $E \times B$	20
1.3.1 Modèle simplifié de propulseur	20
1.3.2 Relation de dispersion du propulseur à effet Hall	22
1.3.3 Instabilité de dérive électronique $E \times B$	23
1.4 Conclusions	26
Chapitre 2 Modélisation de l'instabilité de dérive électronique $E \times B$	29
2.1 Equation ions froids, normalisation et méthode de résolution numérique	30
2.1.1 Limite ions froids	30
2.1.2 Normalisation	31
2.1.3 Paramètres typiques du propulseur X000	32
2.1.4 Résolution numérique	34
2.2 Influence des différents paramètres pour une propagation azimuthale	35
2.2.1 Influence de $\hat{k}_z$ sur le mode de dérive $E \times B$	35
2.2.2 Influence de $\hat{\omega}_{ce}$ sur le mode de dérive $E \times B$	37
2.2.3 Influence de $\hat{V}_d$ sur le mode de dérive $E \times B$	37
2.2.4 Conclusions de l'étude paramétrique	39
2.3 Modèle analytique	39

2.3.1	Limite en champ magnétique nul . . . . .	41
2.3.2	Définition du modèle analytique . . . . .	43
2.3.3	Comparaison du modèle avec la résolution numérique des ions froids . . . . .	43
2.4	Variation de la pulsation et du taux de croissance dans le plan $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$ . . . . .	47
2.4.1	Effet de la vitesse d'éjection $\hat{v}_p$ sur la relation de dispersion . . . . .	47
2.4.2	Evolution de la relation de dispersion dans le plan $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$ . . . . .	49
2.5	Conclusions . . . . .	52

**Chapitre 3 Observations expérimentales à l'aide de la diffusion collective de la lumière** **53**

3.1	Le diagnostic de diffusion collective . . . . .	54
3.1.1	Principe de la diffusion Thomson de la lumière . . . . .	54
3.1.2	Les différentes échelles de diffusion de la lumière . . . . .	54
3.1.3	Phénomène de diffusion collective en champ lointain . . . . .	55
3.1.4	Détection du champ électrique total diffusé . . . . .	56
3.1.5	Conditions d'obtention d'un rapport signal sur bruit supérieur à un . . . . .	59
3.1.6	Caractéristiques du banc optique PRAXIS utilisé sur le moyen d'essai PIVOINE . . . . .	59
3.2	Effet d'appareil dans le cas du mode azimutal . . . . .	61
3.2.1	Convolution pour une petite ouverture angulaire du faisceau laser . . . . .	61
3.2.2	Facteur de forme statique . . . . .	63
3.2.3	Facteur de forme dynamique . . . . .	63
3.3	Déconvolution du signal de diffusion collective pour le mode azimutal . . . . .	66
3.3.1	Paramètres du propulseur . . . . .	66
3.3.2	Données brutes . . . . .	66
3.3.3	Facteur de forme statique déconvolué . . . . .	68
3.3.4	Relations de dispersion déconvoluées . . . . .	71
3.3.5	Vérification des hypothèses . . . . .	73
3.4	Discussions et conclusions . . . . .	73
3.5	Ajustement du modèle analytique sur la relation de dispersion expérimentale . . . . .	75
3.5.1	Estimation de $T_e$ et $n_e$ . . . . .	75
3.5.2	Discussion . . . . .	79

---

## Chapitre 4 Effet d'une température ionique non nulle sur le mode de dérive électronique 81

4.1	Equation de dispersion pour une température ionique isotrope . . . . .	82
4.2	Réciproque de la dérivée de la fonction de dispersion plasma . . . . .	83
4.2.1	Développement en série en un point $y_0$ quelconque . . . . .	83
4.2.2	Calcul du premier coefficient $a_0$ du développement en série . . . . .	85
4.2.3	Précision de l'estimation de la fonction $\text{Inv}Z'$ . . . . .	86
4.3	Influence de la température ionique sur le mode de dérive électronique $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . . . . .	89
4.3.1	Cas d'une température isotrope . . . . .	89
4.3.2	Erreur résultant de l'approximation ions froids . . . . .	91
4.3.3	Température anisotrope . . . . .	92
4.4	Conclusions . . . . .	96

## Chapitre 5 Effet d'une deuxième population d'ions sur la relation de dispersion 99

5.1	Résultats expérimentaux . . . . .	100
5.1.1	Relations de dispersion . . . . .	100
5.1.2	Exploration angulaire . . . . .	103
5.1.3	Comparaison avec les données de FIL . . . . .	104
5.1.4	Conclusion de l'étude en tension de décharge . . . . .	105
5.2	Relations de dispersion : ions doublement chargés . . . . .	106
5.2.1	Expression générale: électrons magnétisés . . . . .	106
5.2.2	Normalisation de l'équation pour des électrons magnétisés . . . . .	107
5.2.3	Equation pour des électrons non magnétisés . . . . .	108
5.2.4	Résolution numérique . . . . .	109
5.3	Mode double faisceau dans la direction axiale . . . . .	111
5.3.1	Estimations des moments de la fonction de distribution des ions doublement chargés . . . . .	111
5.3.2	Variation avec $\hat{v}_{p, Xe^{2+}}$ dans la direction axiale . . . . .	112
5.3.3	Expressions analytiques des pulsations dans des cas limites . . . . .	116
5.3.4	Variation avec $\eta$ dans la direction axiale . . . . .	118
5.3.5	Variation de $\hat{T}_{Xe^{2+}, \text{axial}}$ . . . . .	120
5.3.6	Conclusions . . . . .	120
5.4	Exploration dans le plan $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$ . . . . .	123
5.4.1	Comparaison avec le cas $\eta = 0$ . . . . .	123

5.4.2	Comparaison à l'expérience . . . . .	126
5.4.3	Conclusions . . . . .	127
5.5	Expériences avec de l'hydrogène . . . . .	129
5.6	Conclusions . . . . .	131
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>133</b>
<b>Annexe A Calcul de la densité électronique et ionique perturbées</b>		<b>135</b>
A.1	Evolution de la distribution électronique . . . . .	136
A.1.1	Linéarisation de l'équation de Vlasov . . . . .	136
A.1.2	Trajectoires des électrons en champ magnétique et électrique uni- formes et stationnaires . . . . .	137
A.1.3	Equation de Vlasov d'ordre 0: distribution maxwellienne . . . . .	139
A.1.4	Equation de Vlasov d'ordre 1: intégration sur les orbites non per- turbées . . . . .	139
A.1.5	Fonction électronique d'ordre un . . . . .	141
A.1.6	Densité électronique perturbée . . . . .	142
A.2	Evolution de la distribution ionique . . . . .	144
A.2.1	Fonction ionique d'ordre un . . . . .	144
A.2.2	Densité ionique perturbée . . . . .	145
<b>Annexe B Equivalence entre le développement en série et la forme intégrale de la fonction de Gordeev</b>		<b>149</b>
<b>Annexe C Propriétés de la fonction de dispersion plasma</b>		<b>153</b>
C.1	Dérivée première, dérivée $n$ -ième et fonction erreur . . . . .	153
C.2	Développement asymptotique de la fonction erfc . . . . .	155
C.3	Expression intégrale de $Z^{(n)}(z)$ . . . . .	156
<b>Bibliographie</b>		<b>159</b>

# Liste des symboles

Dans tout le mémoire, nous adopterons les conventions suivantes :

- Les vecteurs seront notés en gras, comme  $\mathbf{B}$  par exemple.
- L'indice  $e$  désignera la population des électrons et l'indice  $i$  la population d'ions.
- Lorsque deux populations d'ions seront considérées, l'indice  $Xe^+$  sera utilisé pour désigner la population d'ions xénon ionisés une fois et l'indice  $Xe^{2+}$  désignera la population d'ions xénon ionisés deux fois.
- Les paramètres normalisés seront notés avec un chapeau, comme  $\hat{\omega}$  par exemple. Les longueurs caractéristiques seront normalisées à la longueur  $\lambda_{De}$  et les pulsations à la pulsation  $\omega_{pi}$ .
- Les paramètres d'ordre 0 seront notés avec l'indice 0, comme  $n_{e0}$ , et ceux d'ordre 1 seront notés avec l'indice 1, comme  $n_{e1}$ .
- Les transformées de Fourier dans l'espace et dans le temps seront notées avec un tilde, comme  $\tilde{n}_e$ .
- La direction parallèle au champ magnétique sera désignée par l'indice  $\parallel$  et le plan perpendiculaire à cette direction par l'indice  $\perp$ .
- Quand cela sera nécessaire, la direction du champ électrique sera représentée par le terme axial et le plan perpendiculaire à cette direction par le terme plan.
- L'acronyme FIL désigne le diagnostic de Fluorescence Induite par Laser.
- L'acronyme OL désigne l'Oscillateur Local.
- Les transformées de Fourier spatiale et temporelle se feront sur la base  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ . Le mode se propagera alors suivant la direction du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  lorsque la partie réelle de  $\omega$  (la pulsation  $\omega_r$ ) sera positive. On qualifiera le mode d'instable lorsque la partie imaginaire  $\gamma$  de  $\omega$  sera positive et on parlera alors de taux de croissance de l'onde pour nommer  $\gamma$ . Le mode sera stabilisé ou amorti lorsque  $\gamma$  est négatif.
- Le champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  radial sera orienté de l'intérieur vers l'extérieur du propulseur selon la direction  $z$ . Le champ électrique  $\mathbf{E}_0$  axial sera, quant à lui, orienté du fond du canal du propulseur vers le plan de sortie dans la direction  $x$ . Par conséquent, la vitesse de dérive  $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$  azimutale sera orientée suivant la direction  $y$ .
- Le canal 03h désignera le demi canal se situant à droite du propulseur lorsque l'on fait face au jet, le canal 09h faisant référence à l'autre demi canal à gauche.

## Grandeurs fondamentales

Symboles	Grandeurs	Unités
$e$	Charge élémentaire du proton.	C
$k_B$	Constante de Boltzmann.	J/K
$h$	Constante de Planck.	J.s
$\epsilon_0$	Permittivité du vide.	F/m
$m_e$	Masse de l'électron.	kg
$m_p$	Masse du proton.	kg
$A_i$	Nombre de masse.	/
$c$	Vitesse de la lumière.	m/s
$g$	Accélération de pesanteur à la surface de la terre.	m/s <sup>2</sup>

## Paramètres typiques du plasma

Symboles	Grandeurs	Unités
$\mathbf{E}_0$	Vecteur champ électrique statique	V/m
$E_0$	et sa valeur algébrique.	V/m
$\mathbf{E}$	Vecteur champ électrique fluctuant	V/m
$E$	et sa valeur algébrique.	V/m
$\mathbf{B}_0$	Vecteur champ magnétique statique	T
$B_0$	et son amplitude.	T
$T_e$	Température électronique.	eV
$T_i$	Température ionique.	eV
$n_e = n_0$	Densité électronique.	m <sup>-3</sup>
$n_i$	Densité ionique.	m <sup>-3</sup>
$Z_i$	Degré d'ionisation des ions xénon.	/
$M_{Xe} = A_i m_p$	Masse xénon.	kg
$q_i = Z_i e$	Charge électrique.	C
$\chi = -q\tilde{n}_1/(\epsilon_0 k^2 \tilde{\phi}_1)$	Susceptibilité.	/

## Paramètres propulseur

Symboles	Grandeurs	Unités
$I_{sp}$	Impulsion spécifique.	s
$v_p$	Vitesse d'éjection du gaz.	m/s
$\Delta v$	Incrément de vitesse du satellite.	m/s
$m_0$	Masse initiale du satellite.	kg
$\Delta m$	Consommation de masse pour un $\Delta v$ donné.	kg
$\dot{m} = dm/dt$	Débit massique.	kg/s
$T$	Force de poussée.	N



## Vitesses caractéristiques

Symboles	Grandeurs	Unités
$\mathbf{V}_d = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 / B_0^2$	Vecteur vitesse de dérive $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$	m/s
$V_d = -E_0 / B_0$	et sa valeur algébrique.	m/s
$v_{the} = (eT_e / m_e)^{0,5}$	Vitesse thermique des électrons.	m/s
$v_{thi} = (eT_i / M_{Xe})^{0,5}$	Vitesse thermique des ions.	m/s
$c_s = \lambda_{De} \omega_{pi}$	Vitesse du son.	m/s
$v_p$	Vitesse d'éjection des ions.	m/s
$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z), \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$	Vecteur vitesses et leurs composantes.	m/s
$v_{\nabla T} = v_{the}^2 \delta_x / \omega_{ce}$	Vitesse associée au gradient de température.	m/s
$V_{d,eff} = V_d + 3/2 \times v_{\nabla T}$	Vitesse de dérive effective en raison du gradient de température.	m/s

## Pulsations caractéristiques

Symboles	Grandeurs	Unités
$\omega_{pe} = (e^2 n_e / (\epsilon_0 m_e))^{0,5}$	Pulsation plasma électronique.	rad/s
$\omega_{pi} = (e^2 Z_i^2 n_i / (\epsilon_0 M_{Xe}))^{0,5}$	Pulsation plasma ionique.	rad/s
$\omega_{ce} = eB_0 / m_e$	Pulsation cyclotron électronique.	rad/s
$\omega_{ci} = eZ_i B_0 / M_{Xe}$	Pulsation cyclotron ionique.	rad/s
$\omega_R$	Pulsation du mode.	rad/s
$\gamma$	Taux d'instabilité du mode.	rad/s
$\omega_{ac}$	Pulsation de l'onde acoustique ionique.	rad/s
$\omega_{m,Berstein}$	Pulsation de l'onde de Bernstein d'ordre $m$ .	rad/s

## Longueurs caractéristiques

Symboles	Grandeurs	Unités
$\rho_{ce} = v_{the} / \omega_{ce}$	Rayon de Larmor électronique.	m
$\lambda_{De} = v_{the} / \omega_{pe}$	Longueur de Debye électronique.	m
$\lambda_{Di} = v_{thi} / \omega_{pi}$	Longueur de Debye ionique.	m
$\mathbf{e}_x$	Direction du champ électrique, appelée direction $x$ .	/
$\mathbf{e}_y$	Direction azimutale du propulseur, appelée direction $y$ .	/
$\mathbf{e}_z$	Direction du champ magnétique, appelée direction $z$ .	/
$\mathbf{r}, r_x, r_y, r_z$	Vecteur position et ses composantes.	m
$\delta_x$	Longueur caractéristiques du gradient de température.	m

## Grandeurs de la diffusion collective

Symboles	Grandeurs	Unités
$V$	Volume de mesure de la diffusion collective.	$m^3$
$L$	Longueur du volume de mesure dans la direction $z$ .	$m$
$P_i$	Puissance du faisceau primaire.	$W$
$w_0$	Pincement du faisceau primaire.	$m$
$f_{\text{lentille}}$	Focale de la lentille.	$m$
$f_{\text{dec}}$	Décalage en fréquence de l'OL par rapport au primaire.	$Hz$
$\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_{i,0}$	Champ électrique incident et son amplitude.	$V/m$
$\mathbf{E}_{OL}$	Champ électrique de l'OL.	$V/m$
$\mathbf{E}_d$	Champ électrique diffusé par un électron.	$V/m$
$\mathbf{E}_{\text{total}}$	Champ électrique lointain, diffusé par tous les électrons éclairés.	$V/m$
$S(\mathbf{k}, f)$	Facteur de forme dynamique.	$s$
$S(\mathbf{k})$	Facteur de forme statique.	$/$
$U(\mathbf{r}), W(\mathbf{k})$	Fonction profil et sa transformée de Fourier.	$/$
$I(\mathbf{k}, f)$	Densité de puissance spectrale du signal diffusé.	$W.m^{-3}$
$I_{ph}(f)$	Densité de puissance spectrale du bruit photonique.	$W.m^{-3}$
$r'$	Position d'observation du champ diffusé.	$m$
$r$	Position de l'électron à la source.	$m$
$r_0 = e^2 / (4\pi\epsilon_0 m_e c^2)$	Rayon classique de l'électron.	$m$
$r_s$	Rayon du primaire au niveau du diaphragme [71].	$m$
$\mathbf{k}_i$	Vecteur d'onde du champ incident.	$rad/m$
$\mathbf{k}_d$	Vecteur d'onde du champ diffusé.	$rad/m$
$\mathbf{k} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i$	Vecteur d'onde de mesure et ses composantes.	$rad/m$
$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$		$rad/m$
$\Delta k = \sqrt{2}/w_0$	Ecart type du faisceau gaussien dans l'espace de Fourier.	$rad/m$
$\lambda_i$	Longueur d'onde de l'onde incidente.	$m$
$\omega_i$	Pulsation de l'onde incidente.	$rad/s$
$f$	Fréquence temporelle.	$Hz$
$\Delta f$	Ecart-type en fréquence du facteur de forme dynamique.	$Hz$
$T$	Durée d'enregistrement du signal.	$s$
$\eta$	Efficacité quantique du détecteur.	$/$
$\theta$	Angle de diffusion.	$rad$
$\alpha$	Angle entre la direction $x$ et $\mathbf{k}$ .	$rad$
$\Delta\alpha$	Ecart-type du facteur de forme en $\alpha$ .	$rad$
$\alpha_{max}$	Angle du signal maximum en $\alpha$ .	$rad$

---

## Fonctions usuelles

Symboles	Grandeurs	Unités
$J_m$	Fonction de Bessel d'ordre $m$ de première espèce	/
$I_m$	et les fonctions modifiées associées.	/
$f_e$	Fonction de distribution des électrons.	$s^3 m^{-6}$
$f_i$	Fonction de distribution des ions.	$s^3 m^{-6}$
$Z$	Fonction de dispersion plasma,	/
$Z'$	sa dérivé	/
$Z^{(n)}$	et ses dérivées $n$ -ième.	/
Inv $Z'$	Bijection réciproque de $Z'$ .	/
$g$	Fonction de Gordeev.	/
$\delta$	Distribution de Dirac.	Non indiquée



# Introduction

Les systèmes de propulsion d'un satellite doivent lui permettre d'effectuer un certain nombre de manœuvres une fois arrivé dans l'espace. Leur premier objectif est de transférer le véhicule spatial d'une orbite intermédiaire, où le lanceur le dépose, à l'orbite géostationnaire, par exemple. Les manœuvres que le satellite devra ensuite effectuer seront déterminées par le but de sa mission. S'il doit rester sur une orbite géostationnaire, les propulseurs devront corriger sa trajectoire, en s'allumant trois ou quatre fois par jour, et modifier l'orientation des panneaux solaires qui l'alimentent, de façon à les garder le plus parfaitement possible orientés face au soleil. Si sa mission est à des fins d'exploration spatiale, le satellite sera peut être amené à s'éloigner de la terre et les propulseurs devront pousser de manière continue avec plus ou moins de puissance, pour arriver dans le temps imparti défini par les objectifs scientifiques. Avec l'accroissement des télécommunications et des missions d'exploration spatiale, l'amélioration de ces systèmes est donc devenue un enjeu majeur pour les grandes agences spatiales et les industriels.

Le perfectionnement des propulseurs de satellites passe essentiellement par l'allongement de leur durée d'utilisation, généralement limitée par le carburant qui les alimente. Si la propulsion chimique a prouvé son efficacité pour extraire un objet de l'attraction terrestre, grâce à la poussée gigantesque qu'elle produit, son utilisation dans l'espace est moins appropriée. Trop énergivore et trop puissante pour cette tâche, on lui préfère de plus en plus la propulsion électrique plus efficace et économe en carburant, dont la poussée, inférieure au newton, est adaptée à ces tâches. Pour rendre compte de la différence entre ces deux systèmes, on a recours à l'équation de la fusée ou équation de Tsiolkovsky, qui relie la masse  $\Delta m$  nécessaire pour modifier la vitesse d'un engin spatial, à l'incrément de vitesse  $\Delta v$ . Lorsque le satellite n'est soumis qu'à la force de poussée, la conservation de la quantité de mouvement conduit à

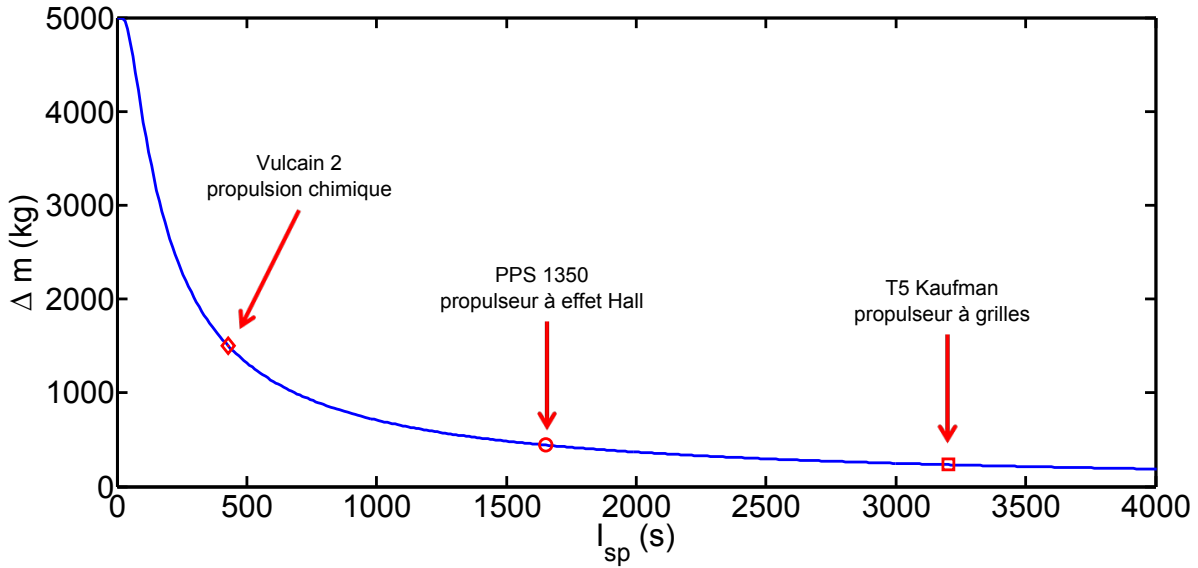
$$\Delta m = m_0 \left( 1 - e^{-\frac{\Delta v}{v_p}} \right), \quad (1)$$

où  $m_0$  est la masse initiale du satellite, ergol<sup>1</sup> compris, et  $v_p$  la vitesse d'éjection du gaz par le propulseur, supposée constante.

On observe alors que, plus la vitesse d'expulsion est grande, pour une masse initiale et un incrément de vitesse donnés, moins le propulseur consommera de combustible. Cette constatation se traduit plus habituellement en terme d'impulsion spécifique  $I_{sp}$ , donnée par le rapport entre la poussée  $T$  et le débit massique  $\dot{m}$  multiplié par l'accélération de

---

1. Nom des substances chimiques utilisées pour produire de l'énergie dans un propulseur chimique



**Figure 1:** Consommation de carburant d'un satellite de masse initiale de 5 tonnes pour passer d'une orbite basse à l'orbite géostationnaire ( $\Delta v \simeq 1,5$  km/s) en fonction de l'impulsion spécifique de son système de propulsion. Trois propulseurs différents sont aussi représentés : le propulseur chimique Vulcain 2 de l'Ariane 5 développé par la Snecma [67], le propulseur à effet Hall PPS 1350 de la Snecma [52] et le propulseur à grilles T5 Kaufman de Qinetiq.

pesanteur  $g$  à la surface de la terre, soit

$$I_{sp} = \frac{T}{\dot{m}g} = \frac{v_p}{g}. \quad (2)$$

L'impulsion spécifique fournit ainsi une mesure de l'efficacité de la poussée, égale au temps caractéristique pendant lequel cette force peut être maintenue, pour un débit donné. A titre d'exemple, la masse nécessaire pour transférer une plateforme de masse initiale de 5 tonnes de l'orbite basse à l'orbite géostationnaire, avec un  $\Delta v$  de 1,5 km/s, est présentée sur la Fig. 1 en fonction de l'impulsion spécifique  $I_{sp}$ . Cette équation donne le point de départ de la comparaison entre propulseurs chimiques et électriques.

La propulsion dite chimique exploite l'énergie de liaison des molécules de l'ergol embarqué pour produire des gaz chauds expulsés via une tuyère. L'énergie chimique par unité de masse étant finie, les vitesses d'éjection accessibles par ces systèmes restent modestes et dépassent rarement 4 km/s [51], c'est-à-dire une  $I_{sp}$  de 400 s. Néanmoins, les débits massiques  $\dot{m}$  mis en jeu pouvant être très importants, la poussée donnée par

$$T = v_p \dot{m} = v_p \frac{dm}{dt} \quad (3)$$

peut être considérable, allant jusqu'à  $10^6$  N pour un débit de l'ordre de la centaine de kilogrammes par seconde, pour un lanceur au décollage [67]. Ces caractéristiques font des propulseurs chimiques un outil indispensable lorsque de fortes accélérations sont requises, comme lors de la libération de l'attraction terrestre, bien que très coûteux en terme de consommation d'ergol.

---

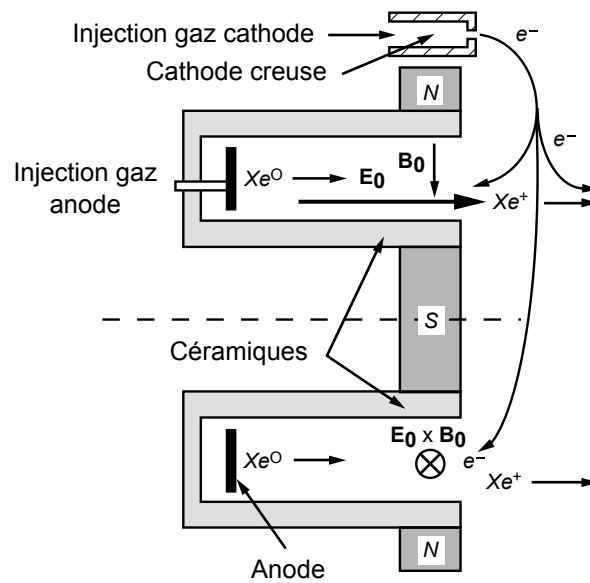
De leur côté, les propulseurs dits électriques reçoivent l'énergie par apport extérieur, grâce aux panneaux solaires de la plateforme du satellite par exemple, et la transmettent aux molécules d'un gaz par le biais des forces électromagnétiques. Le gaz est d'abord ionisé pour créer un plasma, puis les particules les plus lourdes, les ions, sont extraites et accélérées vers l'extérieur à l'aide d'un champ électrique intense. Les vitesses d'éjection des ions dépendent de la tension d'accélération et peuvent atteindre des valeurs d'un ordre de grandeur supérieur aux valeurs atteignables (constatées) par les propulseurs chimiques [29]. Les propulseurs électriques possèdent donc des  $I_{sp}$  généralement comprises entre 1000 et 4000 s. Malgré cette grande efficacité, la poussée donnée par l'Eq. 3 reste infime comparée à celle de la propulsion chimique, en raison de la faible densité des plasmas, et borne, pour l'instant, l'utilisation de ces propulseurs à la correction de l'orbite des satellites géostationnaires ou à des missions longues ne nécessitant pas de fortes accélérations. Néanmoins, la consommation de carburant étant réduite drastiquement, ces systèmes permettent d'augmenter considérablement le temps de vie des satellites pour un coût donné ou de diminuer le prix à payer lorsque la durée de mission est fixe, le coût du kilogramme envoyé dans l'espace étant estimé à 20 kilo-euros.

Parmi les différents types de propulseurs électriques, deux technologies sont à maturité : les propulseurs ioniques à grilles [29] et les propulseurs à effet Hall [57]. Les premiers permettent une très grande  $I_{sp}$ , comprise entre 2500 et 3600 s, mais sont de conception peu pratique pour l'envoi dans l'espace, notamment parce que les deux grilles chargées qui les constituent doivent être très proches et parallèles, contraintes très fortes dans le domaine spatial. De plus, la différence de potentiel maximum applicable entre les deux grilles (inférieure à la tension de claquage) limite technologiquement la vitesse d'éjection  $v_p$  maximale. Le propulseur à effet Hall s'affranchit de cette contrainte en remplaçant les grilles par un champ magnétique, supprimant la limite en vitesse. Même si son efficacité de poussée est moindre que les propulseurs à grilles, avec une  $I_{sp}$  comprise entre 1500 et 2500 s, sa poussée pour une puissance donnée est plus importante, son élaboration moins contraignante pour les critères spatiaux et ses dimensions plus compactes, rendant cette technologie attractive pour les industriels tels que la Snecma ou pour le Centre National des Etudes Spatiales (CNES).

## Principe du propulseur à effet Hall

L'idée dominante dans la conception d'un propulseur électrique est de créer un champ accélérateur très intense, pour atteindre la vitesse d'éjection des ions la plus grande possible. La configuration du propulseur à effet Hall se base sur la loi d'Ohm locale pour engendrer ce champ : pour un courant donné, le champ électrique est inversement proportionnel à la conductivité. Une baisse de cette dernière à l'aide d'un champ magnétique permet ainsi de générer un fort champ électrique local. Avant de présenter l'explication de principe de la création de la poussée par ce propulseur, il convient d'en définir la géométrie.

Le propulseur à effet Hall se compose d'une décharge annulaire formée par l'espace entre deux cylindres en céramique, que l'on nomme canal ou chambre (Fig. 2). Un champ magnétique radial de l'ordre de la dizaine de milliteslas est engendré dans le canal entre



**Figure 2:** Schéma en coupe d'un propulseur à effet Hall typique. La direction axiale est la direction du champ électrique  $E_0$ , la direction radiale, celle du champ magnétique  $B_0$  et la direction azimutale celle du vecteur  $E_0 \times B_0$ . Le gaz est principalement injecté à l'anode, au fond du canal.

**Table 1:** Paramètres typiques du propulseur PPSX000-ML développé par la Snecma.

Paramètres	Valeurs
Diamètre externe	15 cm
Diamètre interne	10 cm
Longueur du canal de décharge	3,17 cm
Tension de décharge	500 V
Courant de décharge	5 A
Débit de masse	5 mg/s

une bobine centrale située à l'intérieur du plus petit cylindre et quatre bobines placées à l'extérieur du propulseur. Le champ électrique axial, fournissant l'énergie pour accélérer les ions du plasma à grande vitesse, est établi entre une cathode creuse chauffée en sortie de canal et une anode logée au fond de la chambre, la différence de potentiel typique étant de 500 V. Le gaz neutre, souvent du xénon inerte et lourd, est principalement injecté à l'anode. Le tableau 1 résume les différentes caractéristiques du propulseur X000 développé par la Snecma, sachant qu'il en existe des plus ou moins volumineux.

L'allumage du moteur se décompose alors en plusieurs étapes [8]. A la cathode creuse, de nombreux électrons sont émis, puis sont rapidement extraits par le potentiel positif de l'anode, pour être entraînés vers l'intérieur du canal. Lorsque le champ magnétique commence à être suffisamment fort pour que le rayon de Larmor électronique soit bien inférieur à la largeur du canal, la mobilité de ces électrons est fortement diminuée dans la direction de l'anode. Un champ électrique axial très intense est alors engendré sur la petite zone de confinement des électrons. En raison de la configuration croisée de champ



---

électrique et magnétique, ces derniers subissent la force de Lorentz qui les fait dériver dans la direction azimutale à grande vitesse<sup>2</sup>, le déplacement électronique dans cette direction produisant le courant de Hall. Cet important anneau électronique dans la direction azimutale ne sert pas uniquement à diminuer la progression des électrons mais également à ioniser le gaz neutre de manière très efficace<sup>3</sup>, puisque l'énergie cinétique des électrons est suffisamment intense pour ioniser les atomes de xénon par collision. Les ions ainsi créés sont accélérés par le champ électrique et produisent une poussée à haute impulsion spécifique, le champ magnétique n'ayant que peu d'effet sur ces lourds ions. Une partie des électrons de la cathode neutralisent ensuite le faisceau d'ions, dans le sillage du propulseur, comme schématisé sur la Fig. 2. Bien que l'énergie transférée aux particules chargées se fasse par l'intermédiaire de la force électromagnétique de Lorentz, le champ électrique, générateur de la force de poussée, étant électrostatique, les propulseurs à effet Hall sont généralement qualifiés d'électrostatique.

## Contexte et objectifs de la thèse

Le concept de base de ce système est donc relativement simple et permet d'utiliser au mieux le carburant qui l'alimente et de réduire les coûts des missions. Néanmoins, la poussée que peut atteindre le propulseur ne dépasse pas 1 N (pour les plus grands modèles [78]), restreignant son domaine d'utilisation et diminuant son attrait aux yeux des industriels. En particulier, si ces propulseurs sont très bien adaptés pour le maintien à poste, leur faible poussée rend trop long le transfert d'orbite entre l'orbite intermédiaire et l'orbite géostationnaire. La nécessité de concevoir des propulseurs à effet Hall plus puissants est donc un défi technique important pour promouvoir la propulsion électrique. Malheureusement, la complexité des lois physiques mises en jeu rend les améliorations itératives lentes et coûteuses puisqu'il faut valider les nouveaux propulseurs à chaque étape. Pour cette raison, les industriels s'intéressent à la conception de modèles prédictifs, capables de reproduire le comportement des propulseurs sans avoir recours à leur construction.

De tels outils ont été développés et permettent de décrire nombre de phénomènes spécifiques au plasma du propulseur à effet Hall, en traitant les électrons comme un fluide et les ions et les neutres comme des particules, et sont alors appelés codes Hybrid-PIC [19, 36]. Pourtant, ces modèles ne sont pas entièrement prédictifs puisqu'ils font appel à des coefficients de mobilité électronique ad hoc pour rendre compte des données expérimentales. Cette incapacité de représenter le transport des électrons à travers les lignes de champ magnétique de manière théorique s'explique par la double nature de ce transport.

La première, dite classique, résulte des collisions entre électrons et atomes et se modélise classiquement par une loi de diffusion type équation de Fick. Cependant, le courant électronique calculé à l'aide de cette théorie est au moins d'un ordre de grandeur inférieur à celui nécessaire pour reproduire les données expérimentales en sortie de canal à l'aide des codes Hybrid-PIC [1].

---

2. La vitesse de dérive est de l'ordre de centaines ou de milliers de kilomètres par seconde.

3. Le taux de conversion des neutres en ions peut dépasser 80 % [14].

Un autre phénomène provoque donc le transport des électrons à travers le champ magnétique du propulseur et on parle de transport anormal, puisque non diffusif. La raison exacte en est encore inconnue mais deux types d'explications physiques sont souvent évoquées. Ce transport serait ou bien lié aux fluctuations du plasma, on parle dans ce cas de transport turbulent, ou bien serait lié aux collisions entre les électrons et les parois [56, 55], lorsque l'énergie de la gaine est trop faible pour empêcher les électrons d'atteindre les parois et d'être diffusés dans des directions aléatoires de l'espace. Même si le comportement du moteur est fortement affecté par la nature des céramiques qui le constitue, il a été montré [2] que ces collisions pariétales ne sont pas nécessaires pour générer du transport dans les codes numériques. Les efforts se tournent désormais vers le transport turbulent pour essayer d'expliquer la mobilité anormale des électrons [59].

Les recherches dans le domaine de la propulsion électrique ont été menées en France pendant une vingtaine d'année dans le cadre du Groupement de Recherche (GdR) 2759 "Propulsion Spatiale à plasma" regroupant le CNRS, le CNES, la Snecma et plusieurs universités françaises et la question du transport anormal a constitué un des axes d'étude majeur de ce dernier. Ce mémoire s'attache donc à prolonger les recherches sur le sujet de la turbulence de manière expérimentale avec le diagnostic de la diffusion collective [69] et théorique avec le calcul de relations de dispersion.

Dans la continuité du travail antérieur du GdR, le chapitre premier fera un résumé non exhaustif des notions déjà acquises sur le transport turbulent des électrons vers l'anode. La turbulence à des échelles millimétriques découverte par des simulations PIC sera d'abord présentée. La présence de fluctuations de densité à ces échelles et dans le plan de sortie du propulseur, ayant été confirmée expérimentalement grâce au diagnostic de diffusion collective, nous rendrons compte des principales observations. Nous présenterons ensuite la relation de dispersion associée à ces instabilités, dérivée par les chercheurs du Centre de PHysique Théorique (CPHT) de Polytechnique. Nous rapporterons ensuite l'étude bibliographique sur cette équation qui a été faite dans le cadre de cette thèse.

La relation de dispersion obtenue à partir de la théorie cinétique appliquée au propulseur à effet Hall sera présentée dans le deuxième chapitre et nous en ferons une étude paramétrique complète. En s'appuyant sur ces résultats et ceux de la diffusion collective, nous développerons un modèle analytique de relation de dispersion et en déterminerons le domaine de validité dans le cas du propulseur. Le modèle pourra être appliqué plus tard sur les données expérimentales de la diffusion collective dans le but d'estimer des paramètres du plasma. Enfin, nous étudierons l'extension spatiale des solutions de la relation de dispersion dans le plan orthogonal aux lignes de champ magnétique.

Le diagnostic de diffusion collective permet d'obtenir des relations de dispersion expérimentales, que nous nous proposons d'ajuster avec le modèle afin de déterminer des grandeurs caractéristiques du plasma. Cependant, la largeur des fluctuations d'une des instabilités observées avec le diagnostic est de l'ordre de la largeur de la fonction d'appareil. Le signal mesuré par diffusion collective est alors le résultat d'une convolution entre la fonction de transfert du diagnostic, ignorée habituellement, et la fonction associée au spectre des fluctuations de densité. A la lumière de la relation de dispersion obtenue à

---

l'aide de la théorie cinétique, nous déconvoluerons le signal de cette instabilité dans le troisième chapitre. Une fois ce signal déconvolué, nous ajusterons le modèle sur une relation de dispersion expérimentale corrigée, ce qui nous permettra d'estimer deux quantités difficiles à mesurer dans le jet du propulseur : la température et la densité électronique.

La dérivation du modèle, et donc l'estimation des deux paramètres précédents, s'est faite dans l'approximation d'une température ionique négligeable dans la direction azimutale du propulseur, par rapport à la température des électrons. Dans le quatrième chapitre nous analyserons l'influence d'une température ionique non nulle sur la relation de dispersion théorique, pour vérifier certaines des hypothèses faites pour l'obtention du modèle ou même de la déconvolution. Nous présenterons également la méthode originale que nous avons développée pour résoudre l'équation de dispersion en ions chauds. Enfin, la température ionique étant clairement anisotrope dans le plan orthogonal au champ magnétique, nous étudierons l'effet de l'anisotropie dans ce plan.

L'anisotropie de la température ionique montre que la relation de dispersion étudiée dans le quatrième chapitre est incapable de rendre compte d'une instabilité observée par diffusion collective dans la direction axiale du propulseur. Après la présentation de la variation des fréquences expérimentales avec la tension de décharge, nous étudions dans le cinquième chapitre l'ajout d'une population d'ions xénon doublement ionisés pour l'étude cinétique. L'influence des trois moments de la fonction de distribution de cette nouvelle espèce sur les solutions de la relation de dispersion est alors présentée. Nous comparerons également les résultats théoriques aux résultats expérimentaux en effectuant une exploration angulaire de la relation de dispersion, dans le plan orthogonal aux lignes de champ magnétique. Pour finir, nous présenterons l'influence de l'ajout d'une portion d'hydrogène dans le plasma de xénon du propulseur sur les fluctuations de densité observées dans la direction axiale et azimutale.



# Chapitre 1

## Etat de l'art

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Résultats des simulations particulières . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>1.2</b>	<b>Résultats expérimentaux . . . . .</b>	<b>12</b>
1.2.1	Mode azimuthal . . . . .	14
1.2.2	Mode axial . . . . .	18
<b>1.3</b>	<b>Mode azimuthal identifié comme étant l'instabilité de dérive électronique <math>E \times B</math> . . . . .</b>	<b>20</b>
1.3.1	Modèle simplifié de propulseur . . . . .	20
1.3.2	Relation de dispersion du propulseur à effet Hall . . . . .	22
1.3.3	Instabilité de dérive électronique $E \times B$ . . . . .	23
<b>1.4</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>26</b>

---

Les manifestations de la turbulence sont légion dans la vie quotidienne, les tourbillons d'une rivière déchaînée étant peut être la plus visible d'entre elles. Pourtant, il n'existe pas de définition universelle pour caractériser un écoulement turbulent et on le décrit généralement comme ayant un aspect complexe, dont les détails sont difficiles à appréhender, puisque son spectre possède de très nombreuses échelles spatiales et temporelles. La modélisation de la turbulence est alors ardue et fait le sujet d'intenses recherches, notamment dans les domaines de l'aéronautique ou de la météorologie, mais également dans le domaine des plasmas magnétisés. Dans ce dernier cas, les fluctuations turbulentes seraient responsable du transport anormal des particules à travers les lignes de champ magnétique, dégradant le temps de confinement dans les machines de fusion ou les performances des propulseurs à effet Hall. L'apparition de phénomènes turbulents étant généralement associée au développement de micro-instabilités, l'étude des mécanismes de croissance de ces dernières est donc essentielle à la compréhension du transport anormal dans le propulseur.

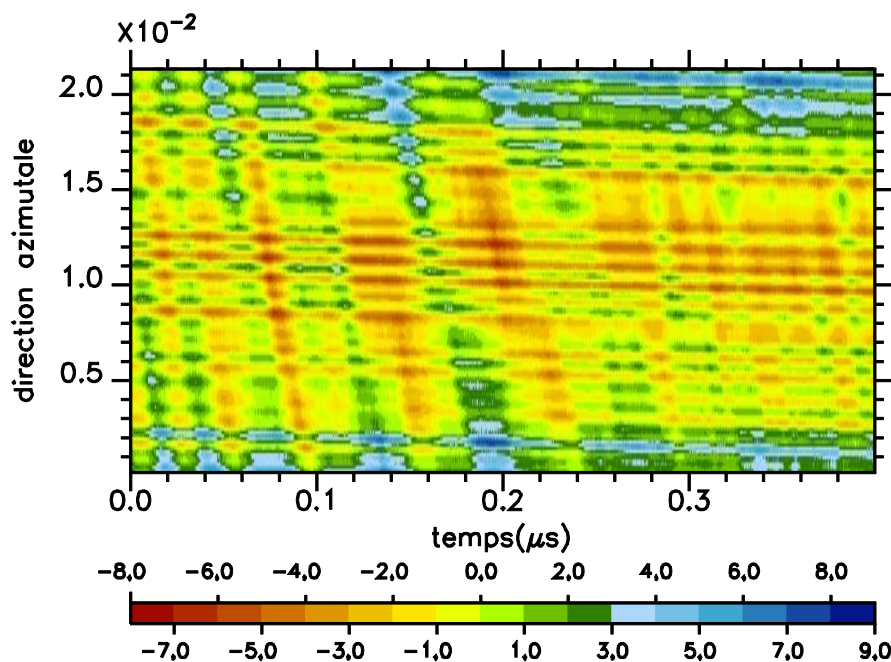
Les résultats de codes numériques ont montré que des fluctuations du plasma dans la direction azimutale, à des échelles de l'ordre du rayon de Larmor électronique et pour des fréquences proches de la fréquence plasma ionique, pourraient suffire à expliquer la conductivité anormale des électrons vers l'anode. Par conséquent, ce chapitre présente un résumé des travaux antérieurs sur ces instabilités ayant conduit au travail de thèse présenté dans ce mémoire.

Les résultats des codes PIC y sont brièvement rappelés dans la première section. Des données expérimentales, obtenues grâce au diagnostic de diffusion collective, ont confirmé la présence de fluctuations de densité à ces échelles. Elles sont présentées dans la deuxième section. La théorie cinétique linéaire associée à ces modes a été en partie étudiée dans le cas d'ondes de choc résultant de l'entrée du vent solaire dans la magnétosphère terrestre. Le travail bibliographique réalisé à ce sujet dans le cadre de cette thèse est présenté dans la dernière section de ce chapitre.

## 1.1 Résultats des simulations particulières

Nous l'avons vu dans le chapitre d'introduction, il est nécessaire de comprendre le transport anormal des électrons à travers les lignes de champ magnétique pour pouvoir créer des modèles prédictifs capables de reproduire le comportement d'un propulseur à effet Hall. A ces fins, des codes PIC ont été écrits dans l'espoir de déterminer les lois physiques qui régissent ce transport. Dans l'idéal, la simulation devrait être en trois dimensions de l'espace. Cependant, le temps de calcul avec ces codes étant considérable (même pour des ordinateurs actuels) des modèles simplifiés en deux dimensions ont alors été étudiés.

Morozov ayant suggéré que les collisions entre les électrons et les parois étaient le principal mécanisme transportant les électrons de manière anormale vers l'anode [56, 55, 2], les premiers modèles se sont reposés sur des codes PIC 2D ( $R, Z$ ) où  $R$  représente la direction radiale et  $Z$  la direction axiale du propulseur. Pourtant, ces modèles sont incapables de reproduire le transport anormal observé expérimentalement et l'ajout d'une conductivité de Bohm anormale est nécessaire [6, 5, 32]. Un autre phénomène prend donc part à ce transport : la turbulence. Comme il est attendu que la dérive électronique dans



**Figure 1.1:** Evolution du potentiel moyen en fonction du temps  $t$  (abscisse en  $\mu\text{s}$ ) et de la direction azimutale  $y$  (ordonnée en mm). La moyenne est prise selon la direction axiale  $x$  pour  $2,5 \leq x \leq 3,5$ , où  $x = 2,5$  mm correspond au plan de sortie du propulseur. La simulation a été réalisée pour une tension de décharge de 300 V et un débit de xénon de 5 mg/s. Solution obtenue avec une simulation PIC implicite  $(Z, \theta)$  par Anne Héron, CPHT, école Polytechnique.

la direction azimutale  $\theta$  excite des modes du plasma, la géométrie adéquate pour les simulations est donc la géométrie 2D  $(Z, \theta)$ .

Un tel code a été développé par Adam *et al.* [2, 3] en géométrie cartésienne, un rectangle servant de boîte de simulation. La boîte est ouverte sur deux côtés dans la direction  $x$ , qui représentera la direction axiale, aux bornes de laquelle une différence de potentiel est appliquée. Des conditions aux limites périodiques sont considérées pour les deux autres côtés (direction  $y$ ), pour simuler la direction azimutale du propulseur. Le champ magnétique est quant à lui dans la direction  $z$ , perpendiculaire au plan de la boîte, son intensité variant avec la position par rapport à l'anode. Il est important de noter que seuls les ions ionisés une seule fois sont pris en compte dans cette simulation et que les collisions entre les électrons et les parois ne peuvent être décrites que par temps de vol<sup>4</sup>, puisque la simulation est en 2D. Ces collisions sont de toute façon très rares dans le code, la valeur de la gaine de répulsion coulombienne étant fixée à 20 eV dans cette direction.

Les simulations ont alors prédit que des oscillations du plasma à des fréquences de l'ordre du MHz et à des échelles millimétriques dans la direction azimutale pouvaient être responsables du transport anormal des électrons. La figure 1.1 illustre ce point.

L'évolution du potentiel plasma en fonction du temps et de la direction azimutale laisse apparaître clairement deux types d'oscillations se propageant à des vitesses différentes

4. Les vitesses dans la direction radiale  $v_z$  des particules sont calculées, puis on en déduit leurs positions  $z$  le long du champ magnétique.

et qui forment comme un quadrillage sur la Fig. 1.1. La première a une forte vitesse de propagation de l'ordre de la vitesse de dérive  $V_d$  et forme une ligne presque verticale. Cette perturbation correspond aux modes globaux du plasma, tournant à la vitesse de dérive des électrons. La deuxième a une vitesse de propagation beaucoup plus lente, proche de la vitesse du son  $c_s$ , et correspond à la ligne presque horizontale sur la figure. Le transport électronique anormal calculé par la simulation semble résulter de l'interaction des électrons avec ce dernier mode.

Ces observations PIC sont la première évidence de l'existence de fluctuations, en sortie du propulseur, se développant à des échelles proche du rayon de Larmor électronique et se propageant dans la direction azimutale. En conséquence, il était nécessaire de vérifier ces constatations théoriques du point de vue expérimental.

## 1.2 Résultats expérimentaux

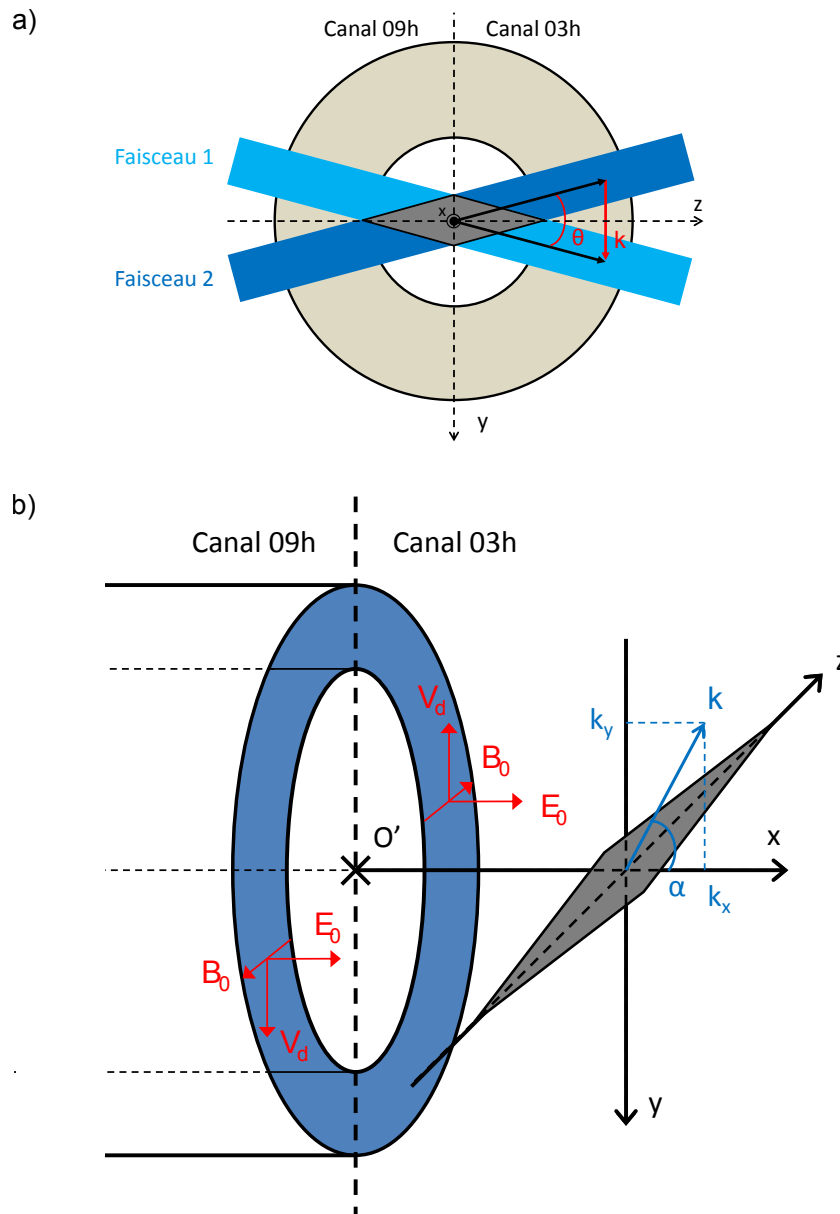
Les échelles des modes observés dans les simulations PIC sont de l'ordre du millimètre pour des fréquences de l'ordre du MHz. Mesurer des fluctuations à de telles échelles spatiales avec des sondes, de Langmuir ou émissive, est pratiquement irréalisable, car deux sondes ne peuvent pas être rapprochées aussi près que l'on veut. Par ailleurs, les mesures par sonde dans le jet du plasma en sortie du canal sont difficiles à réaliser et peu fiables, en raison de la grande énergie cinétique des ions ( $\sim 300$  eV) dans le référentiel du laboratoire. Une sonde placée dans le jet subit alors une forte érosion, conduisant à sa destruction ou, à tous le moins, à une forte perturbation du plasma environnant. Par ailleurs, les ions, arrivant sur le collecteur de la sonde à une vitesse bien supérieure à la vitesse de Bohm, rendent la gaine autour de celle-ci instable et l'interprétation des signaux mesurés est alors complexe. De plus, comme l'amplitude des fluctuations de température n'est pas négligeable devant celle des autres fluctuations, les fluctuations de densité ne peuvent pas être estimées à partir des mesures du courant de saturation ionique, ni les fluctuations de potentiel plasma à partir de la mesure du potentiel d'une sonde flottante. Les diagnostics optiques non invasifs sont alors plus adaptés à l'observation du plasma du propulseur en sortie de canal.

C'est dans ce contexte que le diagnostic de la diffusion collective de la lumière [69, 70] a été mis en œuvre pour mesurer les fluctuations de densité en sortie du propulseur à effet Hall X000 développé par la Snecma. Une description plus détaillée de ce diagnostic sera donnée au chapitre 3 mais nous en rappelons ici les principaux éléments. Le croisement de deux faisceaux lasers définit le volume de mesure (noté  $V$  et symbolisé par le losange grisé sur la Fig. 1.2a). L'angle  $\theta$ , que forment leurs deux directions, définit l'échelle sondée, exprimée plus généralement en termes de nombre d'onde  $k$  [33]. L'observable mesurée par le diagnostic est le facteur de forme dynamique, défini par

$$S(\mathbf{k}, f) = \frac{\langle |\tilde{n}(\mathbf{k}, f)|^2 \rangle}{n_0 V T}, \quad (1.1)$$

où  $n_0 V$  est le nombre de particules observées,  $T$  le temps sur lequel est mesuré le signal et  $\langle \rangle$  est la moyenne d'ensemble.





**Figure 1.2:** a) Croisement des deux faisceaux définissant le volume de mesure (losange grisé) de la diffusion collective devant le propulseur à effet Hall. L'angle  $\theta$  entre les directions des deux faisceaux définit l'échelle sondée  $k$ . Il est varié sur le banc optique entre 7 et 20 mrad et il est donc exagéré sur la figure pour plus de lisibilité. Lorsque l'on fait face au jet du propulseur, le canal gauche est appelé canal 09h et le canal droit canal 03h.

b) Représentation 3D du volume de mesure en gris de la diffusion collective devant le propulseur à effet Hall. La longueur du volume dans la direction  $z$  est de l'ordre du diamètre du propulseur. L'angle  $\alpha$ , entre la direction axiale et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , est modifiable sur le banc optique. Dans tout cet ouvrage, le champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  sera orienté de l'intérieur vers l'extérieur du propulseur.

Le spectre du signal de diffusion collective est alors proportionnel au module au carré de la transformée de Fourier spatiale et temporelle des fluctuations de densité, notée  $\tilde{n}(\mathbf{k}, f)$ , même si cela n'est vrai qu'à une phase près à cause de l'électronique. Il permet ainsi d'étudier la dynamique temporelle de la turbulence aux différentes échelles spatiales. Dans la plupart des cas, les facteurs de forme dynamiques mesurés sur un propulseur à effet Hall sont des spectres gaussiens. On peut alors définir la fréquence caractéristique des fluctuations, observées au nombre d'onde  $k$ , comme la fréquence correspondant au maximum du signal à cette échelle, c'est-à-dire au maximum de  $S(\mathbf{k}, f)$ . Le diagnostic de diffusion collective permet ainsi d'accéder à la variation de la fréquence du mode en fonction du nombre d'onde  $k$  ou de son orientation. On parle alors de dispersion et la courbe de la fréquence en fonction de  $k$  traduit cette relation de dispersion. Enfin, le facteur de forme statique  $S(\mathbf{k})$  ne rend compte que du spectre spatial et est lié à  $S(\mathbf{k}, f)$  par la formule suivante

$$S(\mathbf{k}) = \int S(\mathbf{k}, f) df. \quad (1.2)$$

Le banc optique PRAXIS [74] conçu pour mesurer des fréquences de l'ordre du MHz permet de sonder des nombres d'onde allant de 4000 à 12 000 rad/m et de réaliser des explorations dans l'espace en tournant l'angle  $\alpha$  (voir Fig. 1.2b), défini comme l'angle entre la direction axiale  $x$  du champ électrique et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Lorsque l'angle  $\alpha$  vaut  $90^\circ$ , le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est alors dans le sens  $-y$ . Le volume de mesure est de taille comparable au diamètre du propulseur ( $\simeq 15$  cm) dans la direction  $z$ . Lorsque les deux faisceaux lasers se croisent devant le centre  $O'$  du propulseur (comme représenté en Fig. 1.2b), le volume de mesure croise alors le canal gauche, appelé canal 09h, et le canal droit, appelé canal 03h, pour une observation faisant face au jet du propulseur.

Le diagnostic intègre donc les fluctuations provenant des deux canaux, tandis qu'aucun signal ne peut provenir du centre du propulseur, puisque la densité de plasma est très faible à cette distance ( $\simeq 10$  cm) du plan de sortie. Par conséquent, lorsque la direction principale du volume de mesure est suivant le diamètre du propulseur, la direction  $\alpha = 90^\circ$  du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est considérée être le long de la direction azimutale de la vitesse de dérive  $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$ . Dans ce même cas, la direction  $z$  de propagation des faisceaux lumineux est supposée être selon la direction du champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ , qui sera orienté de l'intérieur vers l'extérieur du propulseur dans tout le mémoire. Déplacer le volume de mesure vers le haut (ou vers le bas) permet alors de modifier la contribution du vecteur d'onde le long du champ magnétique et déplacer le volume de mesure suivant l'axe  $x$  permet de mesurer les fluctuations à différentes distances du plan de sortie du propulseur.

Principalement, deux modes ont été découverts [71, 75, 73, 72] lors de ces explorations en trois dimensions dans l'espace de Fourier et leurs propriétés sont résumées ci-dessous.

### 1.2.1 Mode azimutal

En accord avec les prédictions PIC présentées dans la section précédente, un mode a d'abord été observé autour de la direction  $\alpha = 90^\circ$  dans le plan de sortie du propulseur. Deux pics du facteur de forme dynamique, de fréquences temporelles symétriques par rapport à 0, sont observés pour cette direction. Ils correspondent à deux modes se

propageant dans des directions opposées de l'espace. Comme le signal peut provenir des deux canaux 09h et 03h, en raison de la longueur du volume de mesure, la question de la localisation du signal se pose alors.

Pour répondre à cette question, le volume de mesure a été déplacé le long du diamètre du propulseur [73] (direction  $z$ ). Bien que la résolution spatiale soit mauvaise dans cette direction, le résultat de l'expérience conduit à penser que le signal proviendrait plutôt du bord extérieur du canal. De plus, cette exploration a permis d'établir que les deux pics du facteur de forme dynamique proviennent principalement des canaux opposés. Le mode est alors observé comme étant instable lorsque le vecteur d'onde est de même sens que la vitesse de dérive, donnant lieu à une fréquence positive d'un côté du propulseur et à une fréquence négative de l'autre pour une direction de  $\mathbf{k}$  donnée. Pour cette raison, le mode a alors été appelé instabilité de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Sa fréquence et son facteur de forme statique sont présentés, respectivement, en Figs. 1.3a et 1.3b en fonction du nombre d'onde  $k$ .

La relation de dispersion de ce mode est continue et affine avec une pente de l'ordre de la vitesse du son  $c_s$  (3000 m/s) et les fréquences sont proches de la valeur estimée de la fréquence plasma ionique. Le mode possède donc des caractéristiques similaires à celles de l'onde acoustique ionique bien que la direction considérée soit orthogonale aux lignes de champ magnétique. Son facteur de forme (Fig. 1.3b) décroît exponentiellement avec  $k$  et a pour longueur caractéristique de décroissance une longueur proche du rayon de Larmor électronique, laissant penser qu'il n'y a plus de source d'instabilité en-dessous de l'échelle cyclotronique électronique.

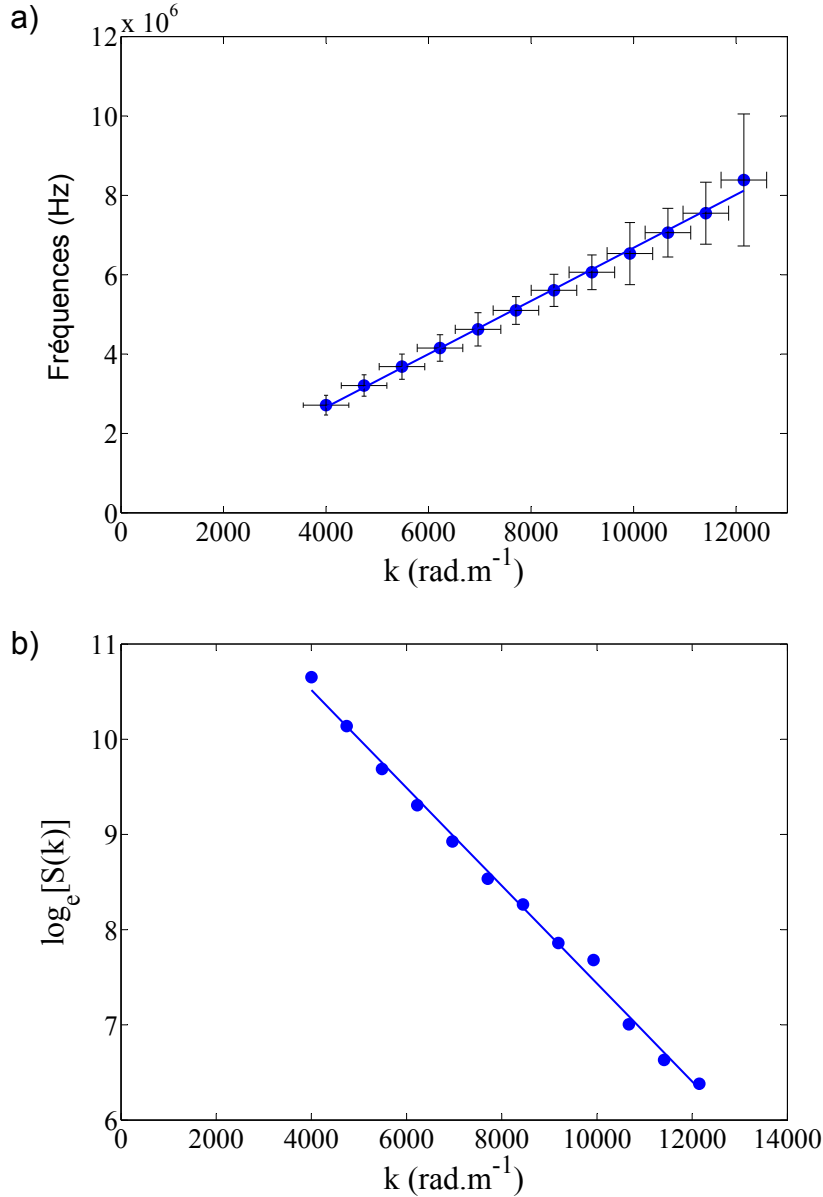
Le facteur de forme statique de ce mode a aussi été mesuré en fonction de la distance au plan de sortie du propulseur (Fig. 1.4). Les fluctuations de densité ne sont observables que sur une petite distance (environ 10 cm), probablement parce que la vitesse de dérive des électrons décroît fortement sur cette distance. Leur amplitude augmente jusqu'à une distance de 13,5 mm du plan de sortie, prouvant que le mode est excité jusqu'à cette région, pour être ensuite atténué rapidement avec une distance d'atténuation caractéristique égale à 12,85 mm.

Pour compléter la caractérisation du mode dans l'espace de Fourier, son extension angulaire en fonction de la direction  $\alpha$  a également été étudiée (Fig. 1.5). Le facteur de forme semble suivre une loi gaussienne en  $\alpha$  centrée sur  $\alpha \simeq 110^\circ$  (pour les fréquences positives en rouge) avec un écart type de l'ordre de  $6^\circ$ . Le mode est donc très piqué autour de  $110^\circ$ , avec une composante du vecteur d'onde dirigée vers l'intérieur du propulseur.

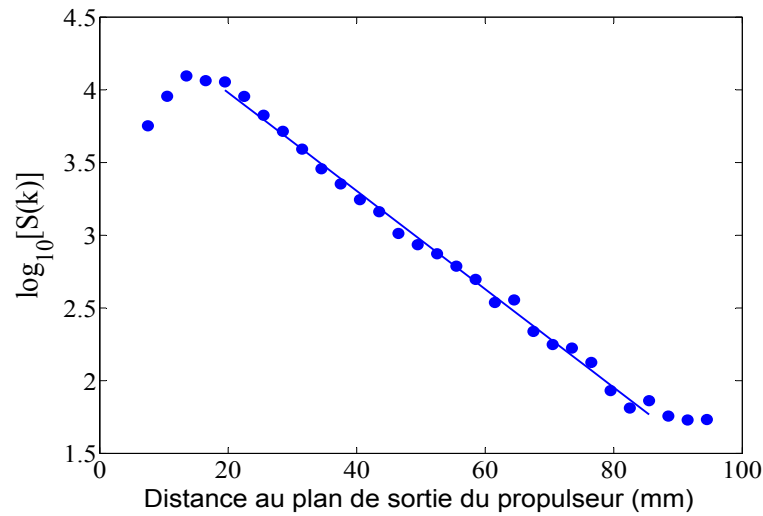
Enfin, une étude dans le plan orthogonal au champ électrique, en déplaçant le volume de mesure vers le haut ou vers le bas (Fig. 1.2), montre que le mode a aussi une petite composante  $k_z$  non nulle du vecteur d'onde le long du champ magnétique. Sa valeur est environ de 500 rad/m (page 116 de la Réf. [71]), proche de la largeur de la fonction de transfert du diagnostic définie par

$$\Delta k = \frac{\sqrt{2}}{w_0}, \quad (1.3)$$

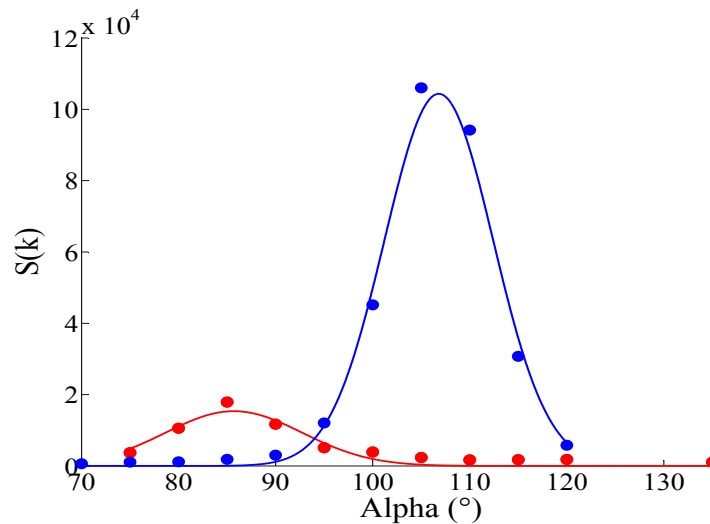
où  $w_0$  est la taille du pincement des faisceaux laser au niveau du volume de mesure. Pour cette expérience, elle valait  $w_0 = 2,9$  mm conduisant à  $\Delta k = 487$  rad/m [71].



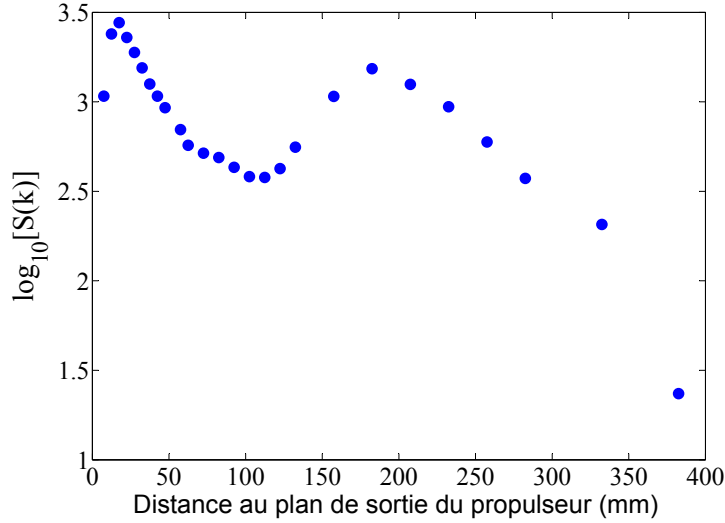
**Figure 1.3:** a) Relation de dispersion et b) logarithme népérien du facteur de forme de l'instabilité de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  observée dans le propulseur, en fonction du nombre d'onde  $k$ . Les cercles bleus représentent les données expérimentales obtenues avec le diagnostic et les traits bleus des ajustements affines sur ces points. L'angle d'observation  $\alpha$  est  $90^\circ$ , le débit massique vaut  $18 \text{ mg/s}$  et les faisceaux se situent à une distance de  $12 \text{ mm}$  du plan de sortie du propulseur. Figures reproduites à partir de [71].



**Figure 1.4:** Variation du logarithme en base 10 du facteur de forme statique en fonction de la distance au plan de sortie du propulseur pour l'instabilité de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Les cercles bleus correspondent aux données expérimentales obtenues avec le diagnostic et le trait bleu est un ajustement affine sur une partie de ces points. Le nombre d'onde est fixe et vaut 6200 rad/m, la direction d'observation est  $\alpha=90^\circ$ . Figure reproduite à partir de [71].



**Figure 1.5:** Facteur de forme statique du mode azimutal en fonction de l'angle  $\alpha$ . Les cercles bleus correspondent au pic du facteur de forme du côté des fréquences positives (signal provenant du canal 03h avec nos conventions) alors que les cercles rouges correspondent au pic du côté des fréquences négatives (signal provenant du canal 09h). Les traits pleins bleu et rouge sont des ajustements gaussiens aux données expérimentales. Le nombre d'onde  $k$  est fixe et vaut 5928 rad/m. Figure reproduite à partir de [71].



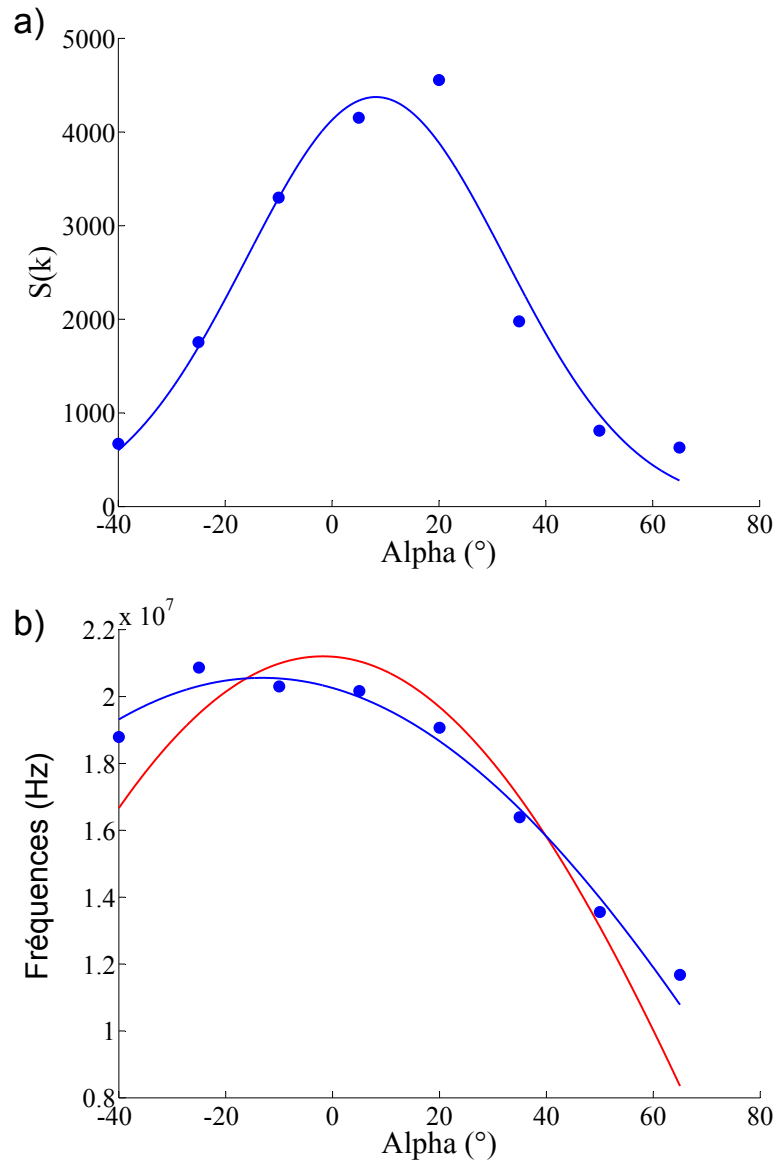
**Figure 1.6:** Variation du logarithme en base 10 du facteur de forme dans la direction  $\alpha = 0^\circ$  avec la distance axiale par rapport au plan de sortie du propulseur. Le nombre d'onde  $k$  est fixe et vaut 6200 rad/m. Figure reproduite à partir de [71].

Le mode a donc une propagation en trois dimensions et la direction radiale, celle du champ magnétique  $B_0$ , ne doit pas être négligée. L'exploration angulaire en  $\alpha$  a également permis de découvrir un mode autour de la direction axiale  $\alpha = 0^\circ$ . Ses caractéristiques sont décrites dans la partie suivante.

## 1.2.2 Mode axial

L'autre mode ayant été observé à l'aide du diagnostic est appelé mode axial car son facteur de forme est maximum dans la direction de l'axe,  $\alpha \sim 0^\circ$ . Comme pour le mode azimuthal, sa relation de dispersion est affine, mais avec des fréquences d'un ordre de grandeur supérieur à celles trouvées précédemment. La vitesse de groupe de ce mode est proche de la vitesse d'éjection des ions  $v_p$ , laissant supposer que l'effet Doppler est la composante majoritaire de la pulsation de l'instabilité. Les fluctuations de densité sont observées sur une longue distance par rapport au plan de sortie du propulseur comme le résume la Fig. 1.6. Deux maxima locaux (à  $\sim 3$  et à 18 cm) sont visibles, prouvant que le mode redevient instable plus loin dans le faisceau.

La variation de la fréquence et du facteur de forme statique du mode en fonction de l'angle  $\alpha$  sont présentées sur la Fig. 1.7. Ce mode a une extension angulaire bien plus importante que le mode azimuthal comme le montre la Fig. 1.7a. Son facteur de forme semble suivre une loi gaussienne avec  $\alpha$  et est visible sur plus de  $100^\circ$ , avec un écart type de l'ordre de  $25^\circ$ . Sa fréquence évolue comme une arche de cosinus dont l'origine principale pourrait être l'effet Doppler  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_p$ , où  $\mathbf{v}_p$  est le vecteur vitesse du faisceau d'ions. Pour s'en convaincre, deux lois, l'une en  $A \cos(\alpha + \phi)$  (courbe rouge) et l'autre en  $\cos(n\alpha + \phi)$  (courbe bleue), sont ajustées sur ces fréquences (Fig. 1.7b). La loi en  $\cos(n\alpha + \phi)$  avec  $n = 0,75$  est en meilleur accord, ce qui laisse penser que l'effet Doppler n'est pas le seul



**Figure 1.7:** Etude dans le plan  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$  du a) facteur de forme statique et b) de la fréquence en fonction de  $\alpha$  pour le mode axial. Le nombre d'onde  $k$  est fixe et vaut 5928 rad/m. a) Un ajustement gaussien (courbe bleue) sur le facteur de forme (cercles bleus) est aussi présenté. b) Une loi en cosinus  $\cos(\alpha + \phi)$  (courbe rouge) et une loi en cosinus  $\cos(n\alpha + \phi)$  (courbe bleue) sont appliquées sur la fréquence (cercles bleus). Figure reproduite à partir de [71].

mécanisme en jeu et que la fréquence du mode n'est pas complètement isotrope dans le référentiel des ions.

Afin de comprendre de façon plus approfondie la nature physique des deux modes décrits précédemment, il est nécessaire de développer une approche cinétique appliquée au propulseur à effet Hall et d'étudier la relation de dispersion qui en découle. Les recherches antérieures sur ce sujet sont présentées dans la section suivante.

## 1.3 Mode azimuthal identifié comme étant l'instabilité de dérive électronique $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

Comme expliqué précédemment, la micro-turbulence est l'un des mécanismes possibles responsable du transport anormal des électrons à travers les lignes de champ magnétique. Les résultats de simulations particulières implicites de géométrie  $(Z, \theta)$  et les expériences de diffusion collective ont montré l'existence d'un mode azimuthal de longueur d'onde proche du rayon de Larmor électronique et de fréquences proches de la fréquence plasma ionique. Une approche cinétique permet de comprendre certains des phénomènes physiques caractérisant cette instabilité. Nous nous proposons dans cette section de faire une revue de l'étude de la relation de dispersion de ces modes.

Nous présenterons d'abord le cadre théorique pour lequel la relation de dispersion est établie. Nous écrirons ensuite cette équation, sa dérivation étant reportée dans l'annexe A, et nous exposerons enfin les principaux résultats obtenus lors de l'étude de cette relation de dispersion dans le cadre d'ondes de choc se propageant perpendiculairement au champ magnétique de la magnétosphère.

### 1.3.1 Modèle simplifié de propulseur

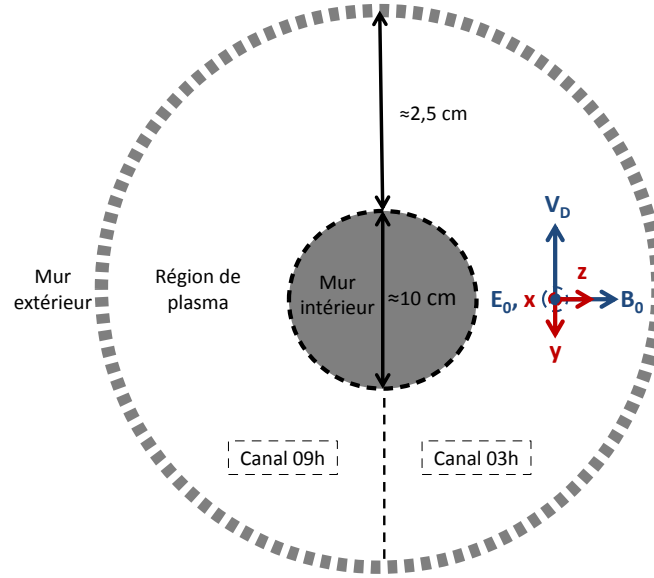
Avant de procéder aux calculs permettant l'obtention de la relation de dispersion, il est nécessaire de modéliser le propulseur à effet Hall afin de se donner le contexte théorique de l'étude des instabilités. La dérivation de l'équation par Tsikata [71] s'est faite avec les hypothèses suivantes :

- Les calculs s'effectueront dans le référentiel du laboratoire.
- Comme la longueur d'onde typique du mode est petite comparée au rayon du propulseur (quelques millimètres pour un rayon de l'ordre de dix centimètres), l'instabilité est étudiée dans le repère cartésien local défini en Fig. 1.8 : l'axe  $\hat{x}$  est orienté suivant le champ électrique  $\mathbf{E}_0$ , supposé parallèle à l'axe du propulseur, l'axe  $\hat{z}$  est localement orienté selon les lignes de champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  dans la direction radiale et l'axe  $\hat{y}$  est localement orienté suivant l'opposé de la vitesse de dérive  $\mathbf{V}_d$  (c'est-à-dire selon la direction azimuthale  $-\hat{\theta}$ ). L'étude se fait dans le canal 03h. La direction  $\alpha=90^\circ$  (voir Fig. 1.2) correspond alors à un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  le long de la vitesse de dérive  $\mathbf{V}_d$ .
- En raison de l'efficacité des processus d'ionisation<sup>5</sup>, la densité de neutres est suffisamment faible pour considérer le plasma comme non collisionnel. De plus, nous

---

5. Nous rappelons que 80% des atomes de xénon sont convertis en ions en sortie du propulseur [14].





**Figure 1.8:** Vue de face du propulseur à effet Hall (dessin non à l'échelle). Le plasma est supposé confiné entre la paroi intérieure et la paroi extérieure. On place notre étude dans le canal à 03h. Les flèches rouges représentent le repère cartésien local. Le champ électrique  $\mathbf{E}_0$  est parallèle à l'axe  $x$ , dirigé vers l'extérieur de la feuille, le champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  est parallèle à l'axe  $z$ , dirigé du mur intérieur vers le mur extérieur, et la vitesse de dérive  $\mathbf{V}_d$  est parallèle et de sens opposé à l'axe  $y$ , c'est-à-dire tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

supposerons que le plasma est uniforme dans les trois directions de l'espace et nous négligerons donc les gradients de densité, de température et de champ magnétique, et notamment ceux dans la direction axiale. Nous reviendrons par la suite sur cette hypothèse.

- Le champ magnétique statique  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$  ainsi que le champ électrique statique  $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{x}$  sont supposés uniformes. Par conséquent, les électrons magnétisés dérivent dans la direction azimuthale à la vitesse de dérive  $\mathbf{V}_d = V_d \hat{y} = -E_0/B_0 \hat{y}$ .
- Les ions seront considérés comme non magnétisés puisque leur rayon de Larmor typique serait de l'ordre de 64 m s'ils étaient magnétisés et atteignaient la vitesse de dérive  $V_d \approx 7.10^5$  m/s, bien supérieur à la longueur du canal qui est de l'ordre de 3 cm pour le propulseur X000. Nous supposerons également que la population ionique a une vitesse moyenne constante le long du champ électrique, que l'on notera  $\mathbf{v}_p = v_p \hat{x}$  et que l'on identifiera à la vitesse du faisceau d'ions. Une condition nécessaire (mais non suffisante) pour remplir cette hypothèse est de placer l'étude immédiatement après la zone d'accélération. Nous utiliserons la description cinétique pour décrire la population ionique, afin de tenir compte de l'effet Landau apporté par la température non nulle des ions et leur distribution en vitesse sera supposée maxwellienne et isotrope dans un premier temps.
- Les électrons sont quant à eux magnétisés puisque leur rayon de Larmor est de l'ordre du millimètre pour une température typique de 25 eV [2, 32]. Ces électrons

dériveront donc à la vitesse moyenne et uniforme  $\mathbf{V}_d$  dans la direction azimutale. De même que pour les ions, leur dynamique sera décrite à l'aide de la théorie cinétique et nous considèrerons leur distribution en vitesse comme étant maxwellienne et isotrope, elle aussi.

- L'onde sera supposée électrostatique puisque la vitesse de phase du mode est faible ( $\sim 3000$  m/s) comparé à la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ .
- Enfin, pour l'obtention de la relation de dispersion, les transformées de Fourier spatiale et temporelle se feront sur la base  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ . Le mode se propagera suivant la direction du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  lorsque la partie réelle de  $\omega$  (la pulsation  $\omega_r$ ) sera positive. On qualifiera le mode d'instable lorsque la partie imaginaire de  $\omega$  (le taux d'instabilité  $\gamma$ ) sera positive et le mode sera stabilisé ou amorti lorsque  $\gamma$  est négatif.

Les hypothèses étant posées, nous pouvons écrire la relation de dispersion de ces modes, dérivée par les chercheurs du Laboratoire de Physique des Plasmas (LPP) de l'Ecole Polytechnique.

### 1.3.2 Relation de dispersion du propulseur à effet Hall

Sous les hypothèses énoncées précédemment, la densité perturbée des électrons  $\tilde{n}_{e1}$  est donnée par l'Eq. A.39 et la densité perturbée des ions  $\tilde{n}_{i1}$  non magnétisés est donnée par l'Eq. A.58 (avec  $v_{thi,plan} = v_{thi,axial}$ ), obtenues dans l'annexe A. Ces deux densités satisfont l'équation de Poisson, que l'on peut écrire en terme de susceptibilité, c'est-à-dire

$$1 + \chi_e + \chi_i = 0, \quad (1.4)$$

où la susceptibilité  $\chi$ , pour l'espèce considérée, est définie par

$$\chi = -\frac{q\tilde{n}_1}{\epsilon_0 k^2 \tilde{\phi}_1}, \quad (1.5)$$

où  $q$ ,  $\tilde{n}_1$  et  $\tilde{\phi}_1$  sont respectivement la charge, la densité d'ordre 1 et le potentiel perturbé de l'espèce considérée.

Dans ce cas, la relation de dispersion s'écrit

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left[ 1 + g \left( \frac{\omega - k_y V_d}{\omega_{ce}}, k_{\perp}^2 \rho_{ce}^2, k_z^2 \rho_{ce}^2 \right) \right] - \frac{1}{2k^2 \lambda_{Di}^2} Z' \left( \frac{\omega - k_x v_p}{\sqrt{2} k v_{thi}} \right) = 0. \quad (1.6)$$

Les différents paramètres de cette équation sont définis dans la liste des grandeurs en début de mémoire dans le glossaire. Il est cependant important de rappeler que la vitesse thermique (en m/s) est définie par

$$v_{th} = \sqrt{\frac{eT}{m}}, \quad (1.7)$$

où  $e$  est la charge élémentaire (en coulomb),  $T$  la température (en électron-volt) et  $m$  la masse (en kg) de l'espèce considérée. Avec cette définition, le facteur  $\sqrt{2}$  apparaît dans la dérivée de la fonction de dispersion plasma  $Z'$  pour le terme ionique.

La fonction  $g(\Omega, X, Y)$  est la fonction de Gordeev [30] définie par

$$g(\Omega, X, Y) = \frac{\Omega}{\sqrt{2Y}} e^{-X} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Z\left(\frac{\Omega - m}{\sqrt{2Y}}\right) I_m(X), \quad (1.8)$$

où les  $I_m$  sont les fonctions de Bessel modifiées de première espèce.

L'Eq. 1.6 est en fait identique à celle obtenue dans les années 1970 dans le cadre d'ondes de choc pénétrant le champ magnétique de la magnétosphère [26]. Les principaux résultats de cette époque, ainsi que les études plus récentes de Ducrocq [17] et de Tsikata [71], sont présentés dans la partie suivante.

### 1.3.3 Instabilité de dérive électronique $E \times B$

L'Eq. 1.6 a donc été étudiée dans les années 1970, dans le cadre d'ondes de choc non collisionnelles se propageant orthogonalement (ou presque) par rapport au champ magnétique de la magnétosphère. En l'absence de champ électrique permanent dans l'espace, la vitesse des ions  $v_p$  n'était pas considérée dans ces études ( $k_x$  était alors considéré comme nul) et le champ électrique intervenant dans la vitesse de dérive  $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$  était celui créé par la séparation de charge due à l'entrée du plasma dans la magnétosphère.

#### Propagation orthogonale aux lignes de champ magnétique

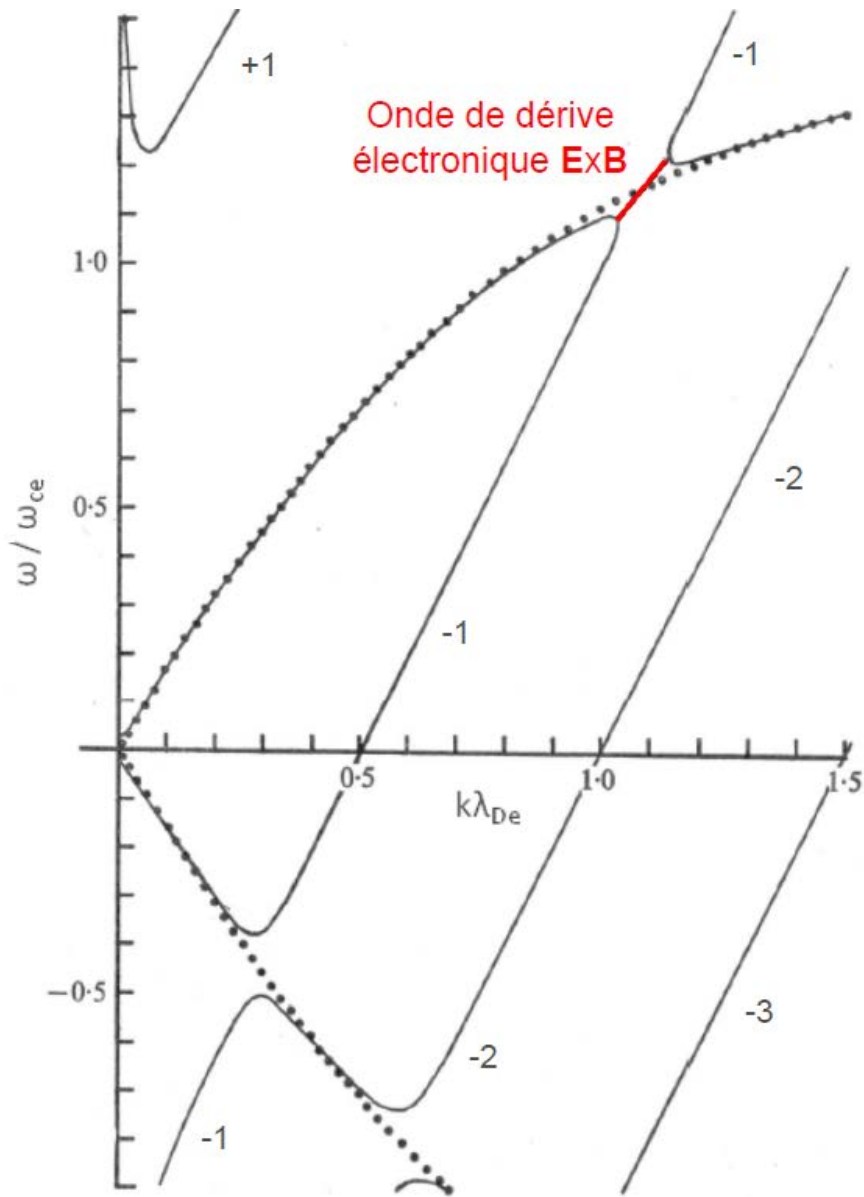
A cette époque, de nombreux auteurs ont d'abord considéré la limite pour une propagation strictement orthogonale au champ magnétique  $B_0$  ( $k_z = 0$ ) [20, 77, 49], cette équation 2D ayant également été étudiée par Ducrocq dans le cas du propulseur [18, 17]. Krall et Book [41, 40] et Krall et Liewer [42] simplifient alors l'équation en considérant que dans la fonction de Gordeev, seul le terme  $m=0$  de la série est non négligeable devant un. Cette hypothèse est remise en cause par l'étude menée par Gary dans sa série de 4 articles [26, 23, 24, 25], qui montrera que cette approximation n'est jamais vraie, même si elle ne porte pas à conséquence lorsque la fonction de Gordeev est négligeable devant un.

Dans ses articles, Gary explique que le mécanisme de l'instabilité est la dérive des électrons à la vitesse  $V_d$  par rapport aux ions. Les ondes de Bernstein électroniques<sup>6</sup> sont alors ramenées vers les basses fréquences par effet Doppler  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_d$  et interagissent avec un mode de type acoustique ionique, caractérisé par une pulsation  $\omega_{ac,m}$ . Lors de l'interaction du mode de Bernstein avec le mode acoustique, c'est-à-dire lorsque  $\omega_{m,Berstein} = \omega_{ac,m}$ , ces deux modes stables fusionnent et donnent naissance à un troisième mode, cette fois-ci instable. Gary lui donnera le nom d'onde de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , en raison de la nature de l'instabilité. La figure 1.9 illustre ce phénomène dans le cas d'ions froids.

Pour une observation strictement orthogonale (c'est-à-dire  $k_z = 0$  dans l'Eq. 1.6), cette interaction ne donne lieu à des instabilités que lorsque la condition

$$\omega_{m,Berstein} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_d = \omega_{ac,m} \quad (1.9)$$

6. Nous rappelons que les ondes de Bernstein électroniques sont caractérisées par leurs pulsations  $\omega_{m,Berstein} \simeq m\omega_{ce}$  (avec  $m \in \mathbb{Z}$ ), lors d'une propagation strictement orthogonale au champ magnétique. Ces ondes sont par ailleurs amorties à toutes les échelles spatiales.



**Figure 1.9:** Fréquences normalisées à la fréquence cyclotronique électronique  $\omega_{ce}$  en fonction du nombre d'onde normalisé à la longueur de Debye  $\lambda_{De}$  obtenue à partir de l'Eq. 1.6 pour  $k_z = 0$ ,  $T_i = 0$  et  $V_d \ll v_{the}$ . Les ondes de Bernstein électroniques (étiquetées +1, -1, -2 et -3 en référence au nombre  $m$  de l'harmonique) subissent un effet Doppler ramenant les fréquences négatives vers les fréquences positives. Proches de la fréquence acoustique ionique classique (cercles pleins noirs, Eq. 1.11 avec  $T_i=0$ ), ces modes de Bernstein interagissent avec un mode de type acoustique ionique (trait plein, presque superposé à l'onde acoustique ionique). Ces deux modes se couplent alors, donnant naissance à l'onde électronique de dérive  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  (courbe rouge proche de  $k/k_e=1$ ). C'est à l'interaction des deux modes que l'instabilité a lieu. Image reproduite à partir de [26].

est satisfaite. Lorsque la fréquence  $\omega_{ac,m}$  est faible devant la fréquence cyclotron électronique  $\omega_{ce}$ , la condition devient en première approximation

$$k_{y,m} = m \frac{\omega_{ce}}{V_d}. \quad (1.10)$$

On retrouve le résultat de Gary [26], de Lampe [44] ou de Ducrocq [17] pour lequel une instabilité existe lorsque l'effet Doppler  $k_{y,m} V_d$ , due à la vitesse de dérive, est proche d'un harmonique de la pulsation cyclotronique. Cette condition donne lieu à une relation de dispersion discontinue puisqu'il y a uniquement instabilité lorsque  $k_{y,m}$  vérifie l'Eq. 1.10. Ceci ne correspond pas aux résultats expérimentaux obtenus par diffusion collective, pour lesquels une relation de dispersion continue a été observée. De plus, nulle trace de résonances aux  $k_{y,m}$  n'a été observée expérimentalement, alors que deux ou trois de ses résonances devraient être visibles sur la Fig. 1.3a, par exemple. Le cas d'une propagation strictement orthogonale aux lignes de champ magnétique est alors incapable de reproduire les constatations expérimentales.

### Propagation oblique

Cette discontinuité de la relation de dispersion peut être comprise par le fait que les électrons ne sont pas libres de bouger le long du champ magnétique dans ce cas. Le seul mouvement cyclotronique des électrons ramené à basse fréquence interagit avec le mode de type acoustique ionique. Rajouter une petite composante  $k_z$  au nombre d'onde  $k$  permet aux électrons de se mouvoir selon le champ magnétique  $B_0$ , favorisant le couplage entre les deux modes pour des valeurs de  $k_y$  différentes de celles données par l'Eq. 1.10. En résolvant numériquement l'Eq. 1.6 sous la condition  $V_d \ll v_{the}$ <sup>7</sup>, Gary montre que, pour un nombre d'onde  $k_z$  suffisamment grand, la dispersion du mode électronique de dérive  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  est continue. Sous ces conditions, la pulsation du mode est très similaire à la celle du mode acoustique ionique fluide d'un plasma non magnétisé donnée par l'équation

$$\omega_{ac} = kc_s \sqrt{\frac{3T_i}{T_e} + \frac{1}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}}, \quad (1.11)$$

où  $c_s = \omega_{pi} \lambda_{De}$  est la vitesse du son.

De plus, en utilisant la méthode de la phase stationnaire dans la limite d'un champ magnétique nul lors de la dérivation de la relation de dispersion générale, il démontre que lorsque les deux conditions

$$\frac{k_y^2}{\omega_{ce}^2} v_{the}^2 \geq 10 \quad (1.12)$$

et

$$\frac{k_z^2}{\omega_{ce}^2} v_{the}^2 \geq \frac{1}{2} \quad (1.13)$$

---

7. Il n'étudiera pas le cas  $V_d \geq v_{the}$  qui pourrait correspondre au cas du propulseur à effet Hall

sont satisfaites, la fonction de Gordeev dans l'Eq. 1.6 peut être remplacée par  $\xi Z(\xi)$  avec

$$\xi = \frac{\omega - k_y V_d}{k v_{the} \sqrt{2}}. \quad (1.14)$$

Cette limite serait la courbe vers laquelle le mode de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  tend lorsque l'on passe d'une observation strictement orthogonale au champ magnétique à une observation oblique, c'est-à-dire lorsque l'on augmente progressivement le nombre d'onde  $k_z$ . Nous nommerons par la suite cette courbe limite, instabilité acoustique ionique modifiée.

### Effet de la température ionique et des gradients

Pour parfaire son examen de la relation de dispersion, il étudia également l'influence de la température ionique sur la relation de dispersion. Il constate principalement une diminution du taux d'instabilité quand le rapport  $T_i/T_e$  croît, car l'effet Landau dû aux ions devient alors plus fort. Pour une valeur suffisamment grande de ce rapport, le mode peut même être amorti.

Enfin, Gary s'intéressera à l'effet des gradients et montre que l'action du gradient de champ magnétique est négligeable sur l'instabilité. Dans son étude, il ne considérera pas les gradients de densité et de température. Priest et Sanderson considèrent ces trois gradients réunis dans leur article [61] et montrent que le gradient de densité a une influence négligeable sur le taux de croissance de l'instabilité, comme retrouvé par Ducrocq [18]. Le gradient de champ magnétique réduit, lui, le taux d'instabilité de quelques pourcents lorsqu'il est associé aux autres gradients. L'effet du gradient de température est le plus important et conduit à une vitesse de dérive effective des électrons dans la relation de dispersion, donnée par

$$V_{d,\text{eff}} = V_d + \frac{3}{2} v_{\nabla T}, \quad (1.15)$$

où  $V_d$  est la vitesse de dérive  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  et  $v_{\nabla T}$  est la vitesse due au gradient de température.

Ainsi, ils concluent que l'étude de la relation de dispersion peut se faire en négligeant les gradients tout en gardant à l'esprit que le paramètre  $V_d$  ne correspond pas tout à fait à la vitesse de dérive mais doit être remplacé par  $V_{d,\text{eff}}$  dont l'expression est donnée par l'Eq. 1.15.

## 1.4 Conclusions

Le diagnostic de diffusion collective appliqué au propulseur à effet Hall a confirmé la présence des modes azimutaux observés dans les codes PIC. Pour comprendre les mécanismes physiques caractérisant ces instabilités, la relation de dispersion (Eq. 2.7) décrivant le plasma du propulseur a été dérivée. Celle-ci a fait l'objet d'étude dans les années 1970 dans le cadre d'ondes de choc rentrant dans la magnétosphère de la terre. Ce chapitre présente la revue réalisée durant cette thèse des principaux résultats sur le sujet.

Dans les années 1970, la solution de la relation de dispersion 2.7 a porté plusieurs noms, comme résumé par Gary dans la Ref. [24], telle que l'instabilité de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , l'instabilité de dérive électronique cyclotron ou l'instabilité cyclotron de faisceau. Ces noms correspondent aux différentes directions de propagation de l'onde.

Dans le cas d'une onde se propageant strictement orthogonalement aux lignes de champ magnétique, c'est bien le mouvement cyclotronique des électrons qui, ramené à basses fréquences par l'effet Doppler, excite une onde de type acoustique. Les noms d'instabilité de dérive électronique cyclotron ou d'instabilité cyclotron de faisceau décrivent alors parfaitement le mécanisme de l'instabilité. C'est d'ailleurs cette terminologie (instabilité de dérive électronique cyclotron plus particulièrement) que Ducrocq [17] a adopté dans sa thèse lors de l'étude de la relation de dispersion en 2D ( $k_z = 0$ ) appliquée au propulseur.

Suite au travail de thèse de Ducrocq, des expériences de diffusion collective réalisées par Tsikata [71] ont montré que le mode azimutal se propage avec une composante non nulle du vecteur d'onde le long des lignes de champ magnétique ( $k_z \neq 0$ ). Dans ce cas, la dérive des électrons suffit, à elle seule, à exciter le mode acoustique ionique et l'instabilité est appelée instabilité de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Dans ce cas, la relation de dispersion 3D doit être considérée pour expliquer la continuité de la dispersion expérimentale et l'absence de résonances aux  $k_{y,m}$  donnés par l'Eq. 1.10. Par conséquent, nous adopterons la nomenclature de Gary, instabilité de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , pour décrire les solutions instables de la relation de dispersion 2.7.

De plus, Gary montre que si les conditions 1.12 et 1.13 sont vérifiées et que  $V_d \ll v_{the}$ , ce mode est très proche de l'onde acoustique ionique, expliquant la linéarité de la relation de dispersion expérimentale. Dans ce cas, la relation de dispersion peut être décrite en remplaçant la fonction de Gordeev par  $\xi Z(\xi)$  et le mode tend vers une courbe limite, appelée instabilité acoustique ionique modifiée.

Pourtant, plusieurs questions restent non résolues :

- Que donne l'étude paramétrique de cette instabilité dans le cas particulier du propulseur et que se passe-t-il lorsque  $V_d$  est de l'ordre de  $v_{the}$  ?
- Les conditions 1.12 et 1.13 sont elles vérifiées pour le plasma du propulseur et quel est l'effet sur la fréquence lorsque l'on remplace la fonction de Gordeev par  $\xi Z(\xi)$  ?
- Peut-on utiliser cette limite asymptotique pour exploiter des relations de dispersion expérimentales et en déduire des paramètres du plasma dans le jet en sortie de moteur ?
- Que se passe-t-il lorsque l'on fait varier l'angle  $\alpha$  dans la relation de dispersion et qu'une vitesse moyenne  $v_p$  pour les ions est considérée dans la direction axiale ?
- Ce mode décrivant les fluctuations de densité observées dans la direction azimutale peut il être connecté aux fluctuations observées dans la direction axiale ?
- Le mode axial est-il lié à la même instabilité ?

La suite du mémoire montre que la réponse à ces questions apporte de nouvelles informations à la compréhension des phénomènes turbulents en sortie du propulseur.





# Chapitre 2

## Modélisation de l'instabilité de dérive électronique $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ à la limite des faibles champs magnétiques

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Equation ions froids, normalisation et méthode de résolution numérique</b>	<b>30</b>
2.1.1	Limite ions froids	30
2.1.2	Normalisation	31
2.1.3	Paramètres typiques du propulseur X000	32
2.1.4	Résolution numérique	34
<b>2.2</b>	<b>Influence des différents paramètres pour une propagation azimutale</b>	<b>35</b>
2.2.1	Influence de $\hat{k}_z$ sur le mode de dérive $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$	35
2.2.2	Influence de $\hat{\omega}_{ce}$ sur le mode de dérive $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$	37
2.2.3	Influence de $\hat{V}_d$ sur le mode de dérive $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$	37
2.2.4	Conclusions de l'étude paramétrique	39
<b>2.3</b>	<b>Modèle analytique</b>	<b>39</b>
2.3.1	Limite en champ magnétique nul	41
2.3.2	Définition du modèle analytique	43
2.3.3	Comparaison du modèle avec la résolution numérique des ions froids	43
<b>2.4</b>	<b>Variation de la pulsation et du taux de croissance dans le plan <math>(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)</math></b>	<b>47</b>
2.4.1	Effet de la vitesse d'éjection $\hat{v}_p$ sur la relation de dispersion	47
2.4.2	Evolution de la relation de dispersion dans le plan $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$	49
<b>2.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>52</b>

---

Le mode azimuthal découvert expérimentalement avec le diagnostic de diffusion collective a été identifié comme étant l'instabilité de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  dans le chapitre précédent. La relation de dispersion expérimentale étant continue, ce mode est décrit par la relation de dispersion 3D donnée en Eq. 1.6. Dans ce chapitre, nous étudions cette équation appliquée au plasma du propulseur.

Dans un premier temps, l'approximation ions froids est considérée puisque la température ionique observée dans la direction azimuthale est très petite par rapport à la température électronique. Le cas d'une température ionique non nulle sera détaillé dans le chapitre 4. La limite d'un champ magnétique nul proposée par Gary est ensuite étudiée et on démontre qu'elle est applicable dans le cas du propulseur. Un modèle analytique de relation de dispersion expérimentale en est alors déduit. Il servira dans le chapitre 3 à ajuster des courbes expérimentales, dans le but d'estimer des paramètres du plasma peu accessible par d'autres diagnostics plus conventionnels. Enfin, l'effet sur la relation de dispersion de la vitesse  $v_p$  d'éjection des ions est analysé en explorant le plan  $(\mathbf{E}, \mathbf{E} \times \mathbf{B})$ .

## 2.1 Equation ions froids, normalisation et méthode de résolution numérique

### 2.1.1 Limite ions froids

L'expérience montre que la température des ions dans la direction azimuthale est de l'ordre de 0,3 eV [10], valeur bien plus faible que celle de la température électronique, qui est de l'ordre de 30 eV [2]. Il est alors commode de prendre la limite ions froids  $T_i \rightarrow 0$  pour simplifier la relation de dispersion (Eq. 1.6) et également pour s'affranchir d'un paramètre. Dans le cas  $T_i \rightarrow 0$ , l'argument  $z$  de la fonction  $Z'(z)$  de la susceptibilité ionique de l'Eq. 1.6 tend vers  $+\infty$ . Comme la dérivée de la fonction de dispersion plasma s'écrit

$$Z'(z) = -2[1 + zZ(z)], \quad (2.1)$$

on peut utiliser un développement asymptotique de la fonction erreur complémentaire erfc puisque

$$Z(z) = i\sqrt{\pi}e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-iz). \quad (2.2)$$

Le détail du développement asymptotique en  $+\infty$  de la fonction  $\operatorname{erfc}(z)$  est donné en annexe C et conduit à

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad (2.3)$$

avec

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall m \in \mathbb{N}, a_{2m} = 0 \\ \forall m \in \mathbb{N}^*, a_{2m+1} = (-1)^m \frac{1}{2^m} \prod_{p=0}^{m-1} (2p+1) \end{cases}. \quad (2.4)$$

Ainsi, à l'ordre 2, le développement asymptotique en  $+\infty$  de  $Z'(z)$  donne

$$Z'(z) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{z^2} + o\left(\frac{1}{z^4}\right). \quad (2.5)$$

La relation de dispersion ions froids s'écrit alors

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left[ 1 + g\left(\frac{\omega - k_y V_d}{\omega_{ce}}, k_{\perp}^2 \rho^2, k_z^2 \rho^2\right) \right] - \frac{1}{(\omega - k_x v_p)^2} = 0. \quad (2.6)$$

Notons que dans la limite d'une température ionique nulle, on retrouve (au deuxième ordre) le résultat fluide pour la susceptibilité ionique et la relation de dispersion se ramène à celle précédemment étudiée par Ducrocq [17] et Tsikata [71]

### 2.1.2 Normalisation

Afin de simplifier la représentation paramétrique, la relation de dispersion sera normalisée. Expérimentalement, le diagnostic de diffusion collective a montré que la vitesse de phase du mode observé dans la direction azimutale du propulseur est proche de la vitesse du son, pour des pulsations  $\omega$  proches de la pulsation plasma ionique. De plus, l'étude de l'instabilité dans les années 1970 a montré que la dispersion est proche de celle de l'onde acoustique ionique. Pour ces raisons, nous normaliserons les longueurs par  $\lambda_{De}$ , les pulsations par  $\omega_{pi}$  et, par conséquent, les vitesses seront normalisées à  $c_s$ . Les grandeurs normalisées seront notées avec un chapeau telle que  $\hat{\omega}$  par exemple.

L'Eq. 2.6 avec des ions froids devient alors

$$\left(\hat{\omega} - \hat{k}_x \hat{v}_p\right)^2 = \frac{\hat{k}^2}{1 + \hat{k}^2 + g\left(\frac{\hat{\omega} - \hat{k}_y \hat{V}_d}{\hat{\omega}_{ce}}, \left(\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2\right) \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2}, \hat{k}_z^2 \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2}\right)}, \quad (2.7)$$

où  $\hat{M}$  est le rapport des masses entre la masse des ions xénon et la masse des électrons.

On remarque déjà que cette relation de dispersion ressemble à celle des ondes acoustiques ioniques dans la théorie fluide, avec un terme supplémentaire au dénominateur (la fonction de Gordeev) et un effet Doppler introduit par le terme  $\hat{k}_x \hat{v}_p$ , du fait de la vitesse moyenne des ions  $\mathbf{v}_p$  dans la direction axiale.

Nous rappelons ici que la fonction  $g$  est la fonction de Gordeev [30], qui peut se mettre sous les deux formes suivantes

$$g(\Omega, X, Y) = \frac{\Omega}{\sqrt{2Y}} e^{-X} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Z\left(\frac{\Omega - m}{\sqrt{2Y}}\right) I_m(X) \quad (2.8)$$

$$= i\Omega \int_0^{+\infty} e^{-X[1-\cos(\varphi)] - \frac{1}{2}Y\varphi^2 + i\Omega\varphi} d\varphi. \quad (2.9)$$

L'équivalence entre le développement en série de fonctions de Bessel  $I_m$  et la forme intégrale est donnée en annexe B. Pour le calcul numérique, le développement en série de Bessel est le plus adéquat puisqu'il permet d'éliminer le problème associé à la partie oscillante de l'intégrand  $i\Omega\varphi$  dans la forme intégrale [58, 35, 53]. Pourtant, la forme intégrale reste utile, notamment pour l'étude analytique de cette fonction et nous l'utiliserons pour développer un modèle analytique de relation de dispersion à la fin de ce chapitre.

### 2.1.3 Paramètres typiques du propulseur X000

La relation de dispersion (Eq. 2.7) présentée dans la partie précédente est transcendante en  $\hat{\omega}$  et ne peut donc pas être résolue analytiquement. Pour l'étudier, il faudra alors la résoudre numériquement. Le schéma numérique que nous avons adopté sera décrit dans la partie suivante. Son originalité tient au fait qu'il ne se base pas sur une méthode de résolution du type méthode de l'argument [4] mais sur une méthode itérative s'appuyant sur les ordres de grandeur des termes de l'équation, rendant la convergence plus certaine et plus rapide pour la branche de la relation de dispersion étudiée. Avant de présenter cette méthode, il est donc nécessaire d'estimer les différentes grandeurs intervenant dans la relation de dispersion.

Les paramètres typiques du propulseur 5kW PPS-X000<sup>®</sup> développé par la Snecma seront considérés comme point de départ de l'étude paramétrique de la relation de dispersion. Ces paramètres sont présentés dans le Tab. 2.1. Notons que les valeurs pour la température et la densité électronique sont estimées à partir des résultats de codes numériques [2, 32]. La vitesse  $v_p = 16000$  m/s est la valeur typique mesurée à 10 mm du plan de sortie du propulseur pour une tension, un courant de décharge et un débit massique de 300 V, 4,5 A et 5 mg/s, respectivement (voir la page 85 de la Ref. [27]).

A l'aide de ces paramètres, nous pouvons estimer les différentes grandeurs normalisées mises en jeu dans l'Eq. 2.7. Elles sont collectées dans le Tab. 2.3 et le Tab. 2.2 résume les valeurs des trois paramètres de normalisation. Les valeurs sont arrondies aux valeurs supérieures ou inférieures puisqu'elles seront variées sur une large gamme lors de l'étude paramétrique. Les valeurs typiques non normalisées de  $V_d$  et  $\omega_{ce}$  sont respectivement  $6,4 \times 10^5$  m/s et  $2,6 \times 10^9$  rad/s.

Le paramètre  $\hat{V}_d$  est négatif avec nos conventions puisque que la direction du vecteur vitesse  $\hat{\mathbf{V}}_d$  est antiparallèle à  $y$  (Fig. 1.8). En accord avec les observations expérimentales présentées dans le chapitre précédent, la résolution numérique donne alors un mode instable lorsque le vecteur d'onde  $\hat{\mathbf{k}}$  est de même sens que la vitesse  $\hat{\mathbf{V}}_d$ , c'est-à-dire lorsque le nombre d'onde  $\hat{k}_y$  est négatif pour une pulsation  $\hat{\omega}$  positive. Le produit  $\hat{k}_y \hat{V}_d$  étant positif dans ce cas, nous considérons  $\hat{k}_y$  et  $\hat{V}_d$  tous les deux positifs pour plus de commodité.

**Table 2.1:** Paramètres typiques dans le plan de sortie du propulseur à effet Hall X000 [71], pour une tension de décharge de 300 V, un courant de décharge de l'ordre de 4,5 A, un débit de xénon égal à 5 mg/s et un courant dans les bobines valant 17 A. Les grandeurs sont estimées à une distance de 10 mm du plan de sortie du propulseur.

Paramètres	Valeurs	Unités
$M_i$	$2,2 \cdot 10^{-25}$	kg
$E_0$	$1 \cdot 10^4$	V/m
$B_0$	$15 \cdot 10^{-3}$	T
$n_e$	$2 \cdot 10^{17}$	$m^{-3}$
$T_e$	25	eV
$v_p$	16000	m/s

**Table 2.2:** Valeurs des trois paramètres de normalisation, calculées à partir du Tab. 2.1.

Grandeurs	Valeurs	Unités
$\lambda_{De}$	$8,3 \cdot 10^{-5}$	m
$\omega_{pi}$	$5,1 \cdot 10^7$	rad/s
$c_s$	4270	m/s

Pour tracer la relation de dispersion, il reste à évaluer les différentes composantes du vecteur d'onde. Comme nous l'avons dit dans le chapitre précédent, le diagnostic de diffusion collective a montré que le mode a une certaine extension dans le plan orthogonal au champ magnétique. Nous appellerons  $\mathbf{k}_\perp$  la projection du vecteur d'onde sur ce plan, de norme  $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  et de direction donnée par l'angle  $\alpha$  entre la direction axiale et  $\mathbf{k}_\perp$ . Afin de tracer la dispersion du mode, on pourra faire varier l'angle  $\alpha$  entre 0 et 360° et  $k_\perp$  entre 0 et 24.000 rad/m, qui sont des intervalles étendus par rapport à ceux explorés par le diagnostic de diffusion collective. La valeur de référence pour le paramètre  $k_z$  dans la direction du champ magnétique  $B_0$  correspond à la valeur de  $k_z$  pour laquelle le signal de diffusion est maximum, comme présenté dans la section VI de la Ref. [73], et vaut environ 500 rad/m.

Les effets de chacun de ces paramètres sur la pulsation et le taux de croissance autour des valeurs données dans le Tab. 2.3 seront présentés dans les sections suivantes.

**Table 2.3:** Paramètres normalisés typiques, utilisés pour résoudre les relations de dispersion.

Grandeurs normalisées	Valeurs
$\alpha$	0°-360°
$\hat{k}_\perp$	0-2
$\hat{k}_z$	0,045
$\hat{v}_p$	3
$\hat{V}_d$	150
$\hat{v}_{the}$	491
$\hat{\omega}_{ce}$	50
$\hat{M}$	$2,4 \cdot 10^5$

### 2.1.4 Résolution numérique

La méthode numérique originale que nous avons adoptée pour résoudre cette relation de dispersion est explicitée dans cette partie. Nous n'utiliserons pas ici de méthodes d'intégration dans le plan complexe (type méthode de l'argument) mais une méthode itérative basée sur l'observation des ordres de grandeur des différents termes et, particulièrement, nous prouvons que la première variable de la fonction de Gordeev  $\Omega$  peut se simplifier.

Les mesures de diffusion collective ont montré que la pulsation du mode observé dans la direction azimutale vaut  $\omega_{max} = 6.10^7$  rad/s au maximum, pour un nombre d'onde dans la direction azimutale correspondant  $k_y = 12.10^3$  rad/m. La vitesse de dérive  $V_d$  est quant à elle estimée à  $6.10^5$  m/s, pour le propulseur X000, ce qui conduit à  $k_y V_d \gg \omega_{max}$ . Ainsi, la première variable de la fonction de Gordeev devient simplement égale à  $\Omega = -\hat{k}_y \hat{V}_d / \hat{\omega}_{ce}$  et il est alors possible de déterminer la pulsation  $\omega$  par itération. Le schéma itératif à l'étape  $n + 1$  pour la relation de dispersion avec ions froids est donné par la formule suivante

$$\left( \hat{\omega}_{n+1} - \hat{k}_x \hat{v}_p \right)^2 = \frac{\hat{k}^2}{1 + \hat{k}^2 + g \left( \frac{\hat{\omega}_n - \hat{k}_y \hat{V}_d}{\hat{\omega}_{ce}}, \left( \hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 \right) \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2}, \hat{k}_z^2 \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2} \right)}. \quad (2.10)$$

En première étape ( $n = 0$ ),  $\hat{\omega}_0$  est supposée nulle dans la fonction de Gordeev, ce qui permet de calculer  $\hat{\omega}_1$ . Une fois calculée numériquement,  $\hat{\omega}_1$  est réinjectée dans la fonction de Gordeev afin de calculer  $\hat{\omega}_2$ . Résoudre cette équation complexe du type  $\hat{\omega}^2 = cste$  à chaque étape conduit à deux solutions pour la pulsation complexe. A l'étape ( $n + 1$ ), elles sont données par

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{+,n+1} = \hat{k}_x \hat{v}_p + \hat{\omega}_{r,n+1} + i\epsilon \hat{\gamma}_{n+1} \\ \hat{\omega}_{-,n+1} = \hat{k}_x \hat{v}_p - \hat{\omega}_{r,n+1} - i\epsilon \hat{\gamma}_{n+1} \end{cases}, \quad (2.11)$$

avec  $\hat{\omega}_{r,n+1}$  et  $\hat{\gamma}_{n+1}$  définies par

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{r,n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hat{k}}{\sqrt{h_n^2 + g_{i,n}^2}} \left( h_n + \sqrt{h_n^2 + g_{i,n}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \hat{\gamma}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hat{k}}{\sqrt{h_n^2 + g_{i,n}^2}} \left( -h_n + \sqrt{h_n^2 + g_{i,n}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}, \quad (2.12)$$

où  $h_n = 1 + \hat{k}^2 + g_{r,n}$ . On note  $g_{r,n}^2$  la partie réelle et  $g_{i,n}^2$  la partie imaginaire de la fonction de Gordeev  $g \left( \hat{\omega}_n - \hat{k}_y \hat{V}_d / \hat{\omega}_{ce}^2, \left( \hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 \right) \hat{M} / \hat{\omega}_{ce}^2, \hat{k}_z^2 \hat{M} / \hat{\omega}_{ce}^2 \right)$  et  $\epsilon$  est le signe de  $-g_{i,n}$ .

Le processus est répété jusqu'à ce que l'erreur soit faible, de l'ordre de grandeur de la précision machine. Celle-ci est déterminée en réinjectant  $\hat{\omega}_{+,n+1}$  ou  $\hat{\omega}_{-,n+1}$  dans l'Eq. 2.7, puis normalisée au plus grand terme de l'équation (le plus souvent la partie droite dans l'Eq. 2.7) et comparée à 1. Précisons également que la fonction de Gordeev est calculée en utilisant la somme définie en Eq. 1.8. Le nombre de termes  $N$  de cette somme est augmenté jusqu'à ce que le reste de la quantité  $|\Delta g_{r,n} + i\Delta g_{i,n}|$  (calculé avec les 20 termes

en dessous de  $-N$  additionnés au 20 termes au dessus de  $N$ ) soit plus petit que les deux quantités suivantes

$$\begin{cases} \Delta g_{r,n} = |2h_n \Delta \hat{\omega}| \\ \Delta g_{i,n} = |g_{i,n} \Delta \hat{\omega}| \end{cases}, \quad (2.13)$$

où  $\Delta \hat{\omega}$  est la précision requise sur  $\hat{\omega}$  généralement fixée à  $1.10^{-5}$  pour la partie réelle et imaginaire. Les deux Eqs. 2.13 ont été obtenues en différenciant les Eqs. 2.12 par rapport à  $g_{r,n}$  et à  $g_{i,n}$  et en résolvant le système ainsi obtenu. Enfin, notons que lorsque la deuxième variable de la fonction de Gordeev est grande devant 1<sup>8</sup>, un grand nombre de termes  $N$  doit être considéré pour l'évaluation de cette fonction [58].

La relation de dispersion pouvant être résolue numériquement, l'influence des différents paramètres qui la composent est étudiée dans la section suivante.

## 2.2 Influence des différents paramètres pour une propagation azimutale

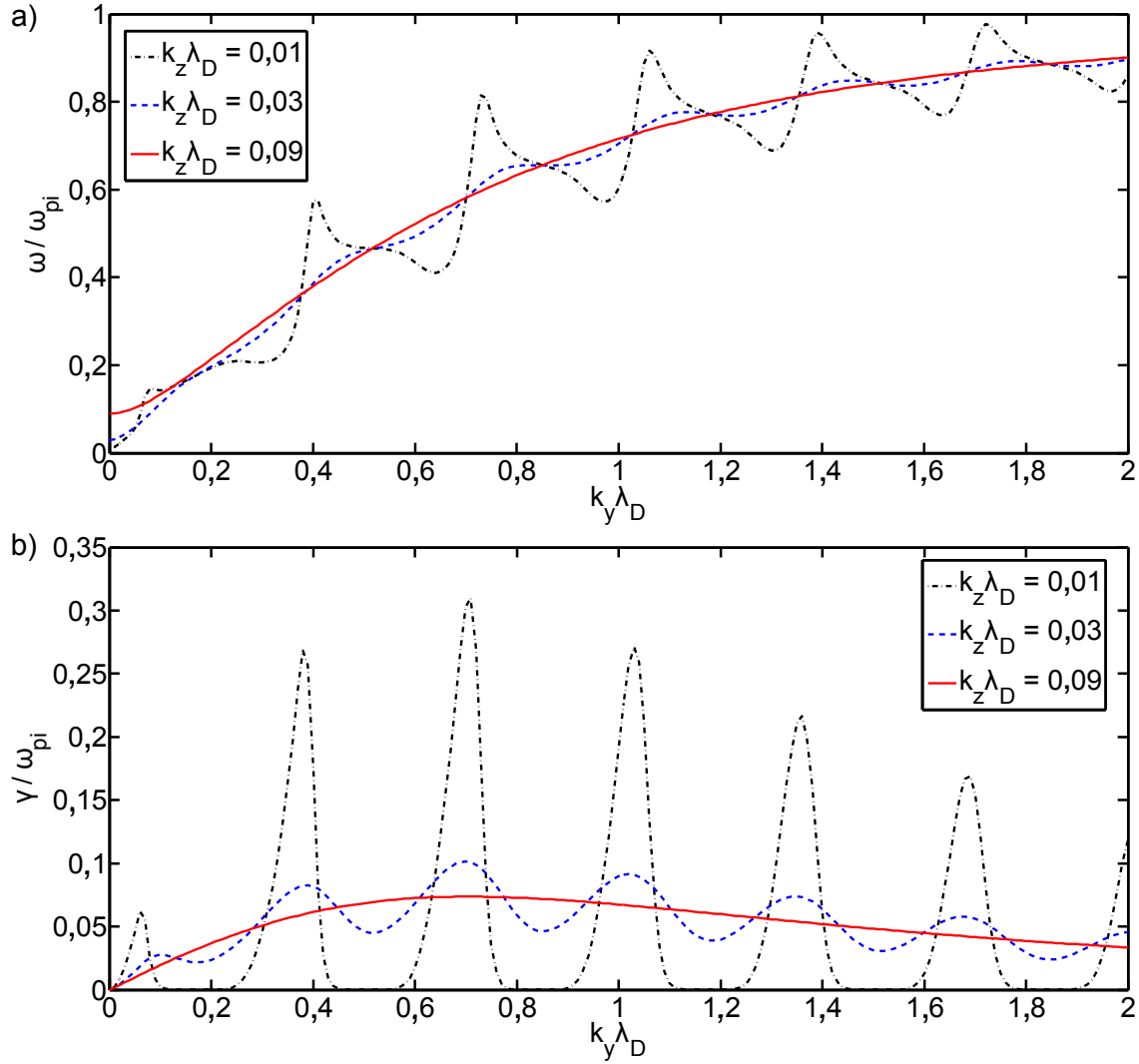
Dans cette section, on fera varier les différents paramètres constituant la relation de dispersion pour une direction de propagation azimutale ( $\alpha = 90^\circ$ ). Dans ce cas, le nombre d'onde  $\hat{k}_\perp$  est égal à  $\hat{k}_y$  et seule la solution  $\hat{\omega}_+$  de l'Eq. 2.11 sera proposée car elle correspond au seul mode susceptible d'être instable. On retrouve alors le résultat expérimental énoncé dans le chapitre 1 : le mode de pulsation positive est instable lorsque le vecteur d'onde de l'instabilité est selon la vitesse de dérive  $\mathbf{V}_d$ .

### 2.2.1 Influence de $\hat{k}_z$ sur le mode de dérive $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

L'influence du paramètre  $\hat{k}_z$  sur la relation de dispersion (Eq. 2.7) est présentée en Fig. 2.1a pour la pulsation et en Fig. 2.1b pour le taux de croissance en fonction du nombre d'onde  $\hat{k}_y$  pour une propagation selon la direction azimutale. Pour la plus petite valeur de  $\hat{k}_z$  (courbe noire), de fortes résonances sont visibles. Le taux de croissance est nul presque partout, excepté lorsque  $\hat{k}_y \hat{V}_d$  est proche d'un harmonique de la pulsation cyclotronique. De plus, six pics sont visibles sur la courbe de dispersion de la pulsation. La position en  $\hat{k}_y$  de ces résonances est cohérente avec les observations de Gary, comme expliqué dans le chapitre précédent (Eq. 1.10) : un lobe instable existe à l'intérieur d'un intervalle défini par  $[\hat{k}_{y,m}, \hat{k}_{y,m+1}]$ . Pour les faibles nombre d'onde  $\hat{k}_z$ , on retrouve donc les caractéristiques de la relation de dispersion 2D étudiée par Ducrocq [18, 17] ou par Lampe [44]. L'amplitude des pics augmente avec  $\hat{k}_y$  jusqu'à ce que  $\hat{k}_y$  atteigne une valeur proche de 1, pour ensuite décroître.

Lorsque la valeur du nombre d'onde  $\hat{k}_z$  est augmentée, les courbes deviennent plus lisses et les résonances sont moins visibles. Pour la plus grande valeur de  $\hat{k}_z$  (courbe rouge), les résonances ne sont plus détectables à l'échelle du graphe et les deux courbes de la pulsation

8. C'est souvent le cas pour les paramètres du propulseur puisque pour  $\hat{k}_\perp = 0,5$  et  $\hat{\omega}_{ce} = 50$ , elle vaut  $X = \hat{k}_\perp^2 \hat{M} / \hat{\omega}_{ce}^2 = 24$ .



**Figure 2.1:** Influence de  $\hat{k}_z$  sur a) la pulsation et sur b) le taux de croissance calculés numériquement à partir des Eqs. 2.11, les paramètres étant ceux définis dans le Tab. 2.3 pour  $\alpha=90^\circ$ . Les valeurs de  $\hat{k}_z$  normalisées sont respectivement 0,01 (courbe noire), 0,03 (courbe bleue) et 0,09 (courbe rouge) et correspondent à 120, 360 et 1080 rad/m. Les courbes correspondant au cas typique  $\hat{k}_z=0,045$  ne sont pas reproduites car la pulsation apparaîtrait confondue avec la courbe rouge à l'échelle du graphe et le taux de croissance présenterait de très faibles oscillations autour de la courbe rouge.



et du taux de croissance semblent être des courbes moyennes de celles obtenues pour des plus petites valeurs de  $\hat{k}_z$ . Si nous augmentions encore sa valeur, les courbes ne seraient plus modifiées et apparaîtraient toutes confondues avec la courbe rouge des Figs. 2.1, à l'échelle des graphes. Enfin, pour toutes les valeurs de  $\hat{k}_z$ , la relation de dispersion ne tend pas vers 0 lorsque  $\hat{k}_y$  tend vers 0, mais vers  $\hat{k}_z$  puisque ce paramètre reste constant. Pour les grandes valeurs de  $\hat{k}_y$ , la pulsation normalisée se rapproche de 1, c'est-à-dire de  $\omega_{pi}$  en grandeurs physiques.

### 2.2.2 Influence de $\hat{\omega}_{ce}$ sur le mode de dérive $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

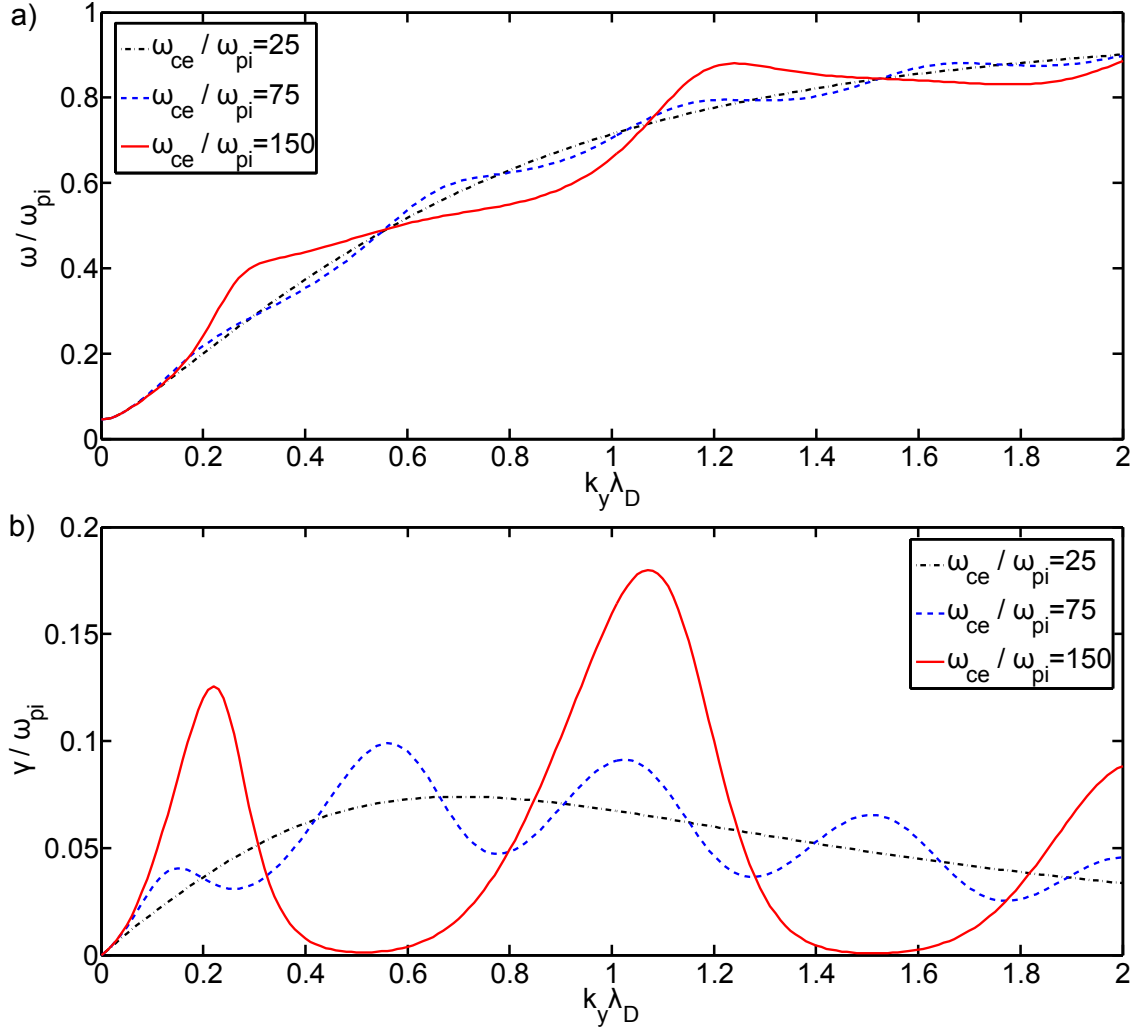
Similairement à la partie précédente, nous étudions ici l'action du paramètre  $\hat{\omega}_{ce}$ . Son effet sur la pulsation et le taux de croissance est présenté sur les Figs. 2.2a et 2.2b, respectivement. Les résonances sont visibles pour les grandes valeurs de  $\hat{\omega}_{ce}$  et sont également liées au critère mentionné précédemment. Les valeurs  $\hat{k}_{y,m}$  variant avec la valeur de  $\hat{\omega}_{ce}$ , l'intervalle  $[\hat{k}_{y,m}, \hat{k}_{y,m+1}]$  entre chaque résonance grandit comme  $\hat{\omega}_{ce}$  augmente, comme l'indique la courbe bleue ( $\hat{\omega}_{ce}=75$ ) présentant plus de résonances que la courbe rouge ( $\hat{\omega}_{ce}=150$ ) pour un intervalle en  $\hat{k}_y$  fixe.

Diminuer la valeur de la pulsation  $\hat{\omega}_{ce}$  a le même effet qu'augmenter celle du nombre d'onde  $\hat{k}_z$  : les courbes deviennent plus lisses car les amplitudes des résonances diminuent. Pour des valeurs de  $\hat{\omega}_{ce}$  inférieures à 25, les relations de dispersion seraient toutes superposées sur les courbes noires des Figs. 2.2a et 2.2b à l'échelle des graphes. Plus aucune trace des résonances ne serait alors détectable. De la même façon que pour l'étude du paramètre  $\hat{k}_z$ , les courbes noires de la pulsation et du taux de croissance semblent être des courbes moyennes de celles obtenues pour des valeurs plus importantes du paramètre  $\hat{\omega}_{ce}$ .

### 2.2.3 Influence de $\hat{V}_d$ sur le mode de dérive $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

Nous étudions dans cette partie l'effet du paramètre  $\hat{V}_d$  sur la relation de dispersion. Nous considérons un intervalle de valeurs plus étendu que dans les études antérieures [23], car le cas  $\hat{V}_d \geq \hat{v}_{the}$  peut correspondre aux valeurs de la vitesse de dérive et de la vitesse thermique dans le plasma du propulseur. Les Figs. 2.3a et 2.3b présentent les variations de la pulsation et du taux de croissance pour différents  $\hat{V}_d$ .

Pour les petites valeurs de ce paramètre, le taux de croissance est faible et les résonances ne sont pas visibles. Augmenter la valeur de  $\hat{V}_d$  ne modifie pas la pulsation du mode à l'échelle du graphe tant que la vitesse de dérive  $\hat{V}_d$  reste bien inférieure à la vitesse thermique  $\hat{v}_{the}$ , même si le taux de croissance augmente. Lorsque  $\hat{V}_d$  atteint la valeur de  $\hat{v}_{the}$  (environ 500 pour le gaz xénon), le taux de croissance devient très important et des résonances commencent à apparaître sur la courbe de la pulsation. Pour que celles-ci disparaissent, il suffirait de diminuer le rapport  $\hat{\omega}_{ce}/\hat{k}_z$  et on obtiendrait une courbe moyenne passant par le milieu des oscillations. Pour des valeurs bien plus grandes que  $\hat{v}_{the}$ , la pulsation peut dépasser la pulsation plasma ionique et le taux de croissance présente un maximum pour une valeur de  $\hat{k}_y$  plus petite que 1, comme le montrent les courbes vertes. Dans ce cas, la limite asymptotique aux faibles champs magnétiques du



**Figure 2.2:** Influence de  $\hat{\omega}_{ce}$  sur a) la pulsation et sur b) le taux de croissance calculés numériquement à partir des Eqs. 2.11, les paramètres étant ceux définis dans le Tab. 2.3 pour  $\alpha=90^\circ$ . Les valeurs de  $\hat{\omega}_{ce}$  normalisées sont 25 (courbe noire), 75 (courbe bleue) et 150 (courbe rouge) et correspondent respectivement à 1,3, 3,8 et 7,7.10<sup>9</sup> rad/s. Les courbes correspondant au cas typique  $\hat{\omega}_{ce}=50$  ne sont pas reproduites car la pulsation apparaîtrait confondue avec la courbe noire à l'échelle du graphe et le taux de croissance présenterait de très faibles oscillations autour de la courbe noire.

mode dévie de l'onde acoustique ionique conventionnelle qui serait superposée à la courbe noire en Fig. 2.3a. Pour les grandes valeurs du nombre d'onde  $\hat{k}_y$ , toutes les relations de dispersion tendent vers 1, comme observé dans les parties précédentes.

### 2.2.4 Conclusions de l'étude paramétrique

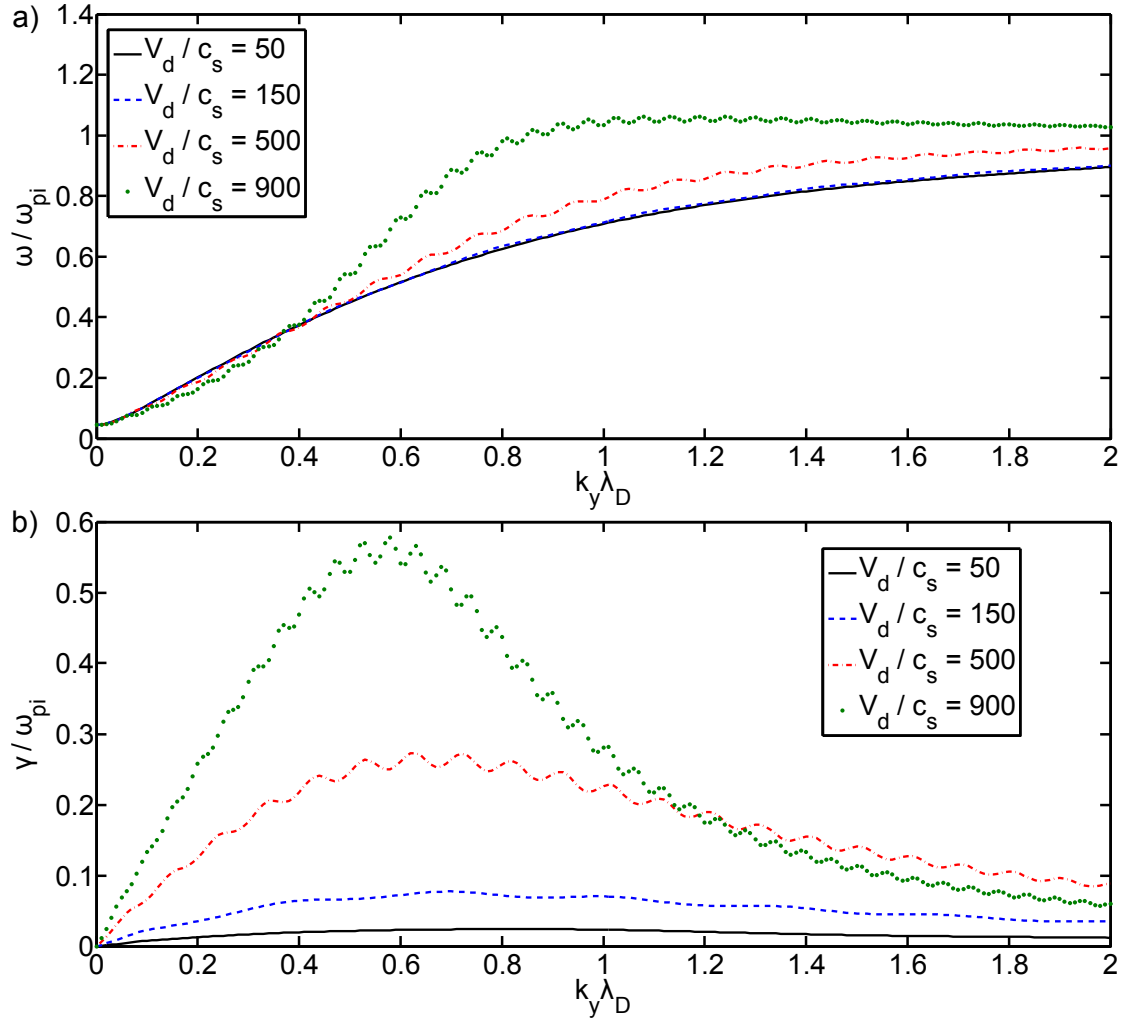
L'étude paramétrique du mode de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  effectuée pour les valeurs pertinentes des paramètres du propulseur conduit aux mêmes types de conclusions que dans les travaux antérieurs. Les résonances, mémoires de la relation de dispersion 2D, disparaissent lorsque le paramètre  $\hat{\omega}_{ce}/\hat{k}_z$  est suffisamment petit pour un nombre d'onde  $\hat{k}_y$  fixé. Dans ce cas, la relation de dispersion atteint une courbe asymptotique, que Gary appelle instabilité acoustique ionique [23] et que nous appellerons instabilité acoustique ionique modifiée pour plus de clarté. Elle correspondrait à la limite d'un champ magnétique nul (voir le chapitre précédent), dont l'expression analytique sera redéveloppée dans la section suivante. Une représentation de cette limite est par exemple donnée par la courbe rouge sur la Fig. 2.1 ou la courbe noire tiretée sur la Fig. 2.2. Le taux de croissance de ce mode est plus faible que pour une propagation perpendiculaire ( $\hat{k}_z=0$ ) mais est quand même important. D'ailleurs, Lampe *et al.* [44] démontrent que le taux de croissance intégré sur  $\hat{k}_y$  reste le même quelle que soit la valeur du rapport  $\hat{\omega}_{ce}/\hat{k}_z$ . L'énergie est alors mieux répartie sur les différentes échelles quand le nombre d'onde  $\hat{k}_z$  est grand.

Malheureusement, ils ne donnent pas de conclusion sur le comportement de la pulsation avec ce rapport. On observe pourtant que même lorsque des résonances sont visibles, la pulsation (et le taux de croissance) de l'instabilité électronique de dérive  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  oscille autour de celle de l'onde acoustique ionique modifiée. Cette dernière semble alors être une courbe moyenne de la première, comme le montre les oscillations de la courbe noire sur la Fig. 2.1 autour de la courbe rouge par exemple.

La limite de cette instabilité acoustique ionique modifiée pour  $\hat{k}_y \gg 1$  est  $\hat{\omega} = 1$  (ou  $\omega_{pi}$  en grandeurs physiques) et sa relation de dispersion est très proche du mode acoustique ionique classique lorsque  $\hat{V}_d$  est inférieure à  $\hat{v}_{the}$ . Pour des valeurs très faibles du rapport  $\hat{V}_d/\hat{v}_{the}$ , l'instabilité acoustique ionique modifiée est stabilisée et devient identique à l'onde acoustique ionique. Au contraire, lorsque ce rapport est grand, le taux de croissance et la pulsation de l'instabilité diffèrent du mode acoustique, justifiant le terme "modifiée". Par exemple, les courbes correspondant à l'onde acoustique ionique classique se superposeraient à celle correspondant à la plus grande valeur de  $\hat{k}_z$  sur la Fig. 2.1a, la plus petite valeur de  $\hat{\omega}_{ce}$  sur la Fig. 2.2a et la plus petite valeur de  $\hat{V}_d$  sur la Fig. 2.3a.

## 2.3 Modèle analytique

La limite asymptotique de la relation de dispersion que nous avons appelé instabilité acoustique ionique modifiée correspond à la limite asymptotique de la fonction de Gordeev lorsque le champ magnétique tend vers 0. En utilisant cette limite asymptotique et une approximation basée sur les ordres de grandeur, nous obtenons un modèle analytique pour la relation de dispersion. Celui-ci permettra par la suite d'obtenir des informations quantitatives sur le plasma du propulseur en ajustant le modèle sur les relations de dispersion



**Figure 2.3:** Influence de  $\hat{V}_d$  sur a) la pulsation et sur b) le taux de croissance calculés numériquement à partir des Eqs. 2.11, les paramètres étant ceux définis dans le Tab. 2.3 pour  $\alpha=90^\circ$ . Les valeurs de  $\hat{V}_d$  normalisées sont respectivement 50 (courbe noire), 150 (courbe bleue), 500 (courbe rouge) et 900 (courbe verte) et correspondent à 2,1, 6,4, 21,4 et 38,4  $\cdot 10^5$  m/s. La valeur  $\hat{V}_d=500$  est proche de la valeur de la vitesse thermique  $\hat{v}_{the}$  (491) pour le xénon.

expérimentales obtenues avec le diagnostic de diffusion collective. Nous présentons ici ce modèle et son domaine de validité.

### 2.3.1 Limite en champ magnétique nul

Le développement asymptotique de l'intégrale de Gordeev peut être obtenu par différentes méthodes : la méthode du point col utilisée par Paris [58] ou la méthode de la phase stationnaire utilisée par Gary [23]. Pour parvenir à ce résultat, nous utiliserons plutôt une méthode basée sur le développement de Hadamard de la fonction de Gordeev, similairement à ce que fait Schmitt dans son article [65] et dans sa thèse [64]. Dans ce cas, la limite  $\hat{\omega}_{ce} \rightarrow 0$  est considérée tandis que  $\hat{V}_d$  est gardée constante puisque  $B_0$  et  $V_d$  forment un jeu de paramètres indépendants. Mathématiquement, cette limite implique que les variables  $\Omega$ ,  $X$  et  $Y$  de l'intégrale de Gordeev (Eq. 2.9) tendent toutes vers l'infini tandis que le rapport

$$\xi = \frac{\Omega}{\sqrt{2(X+Y)}} = \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_y \hat{V}_d}{\hat{k} \sqrt{2\hat{M}}} \quad (2.14)$$

reste constant.

Pour procéder au développement de Hadamard, il faut développer l'intégrand de l'intégrale de Gordeev. Un développement de Taylor en  $\varphi=0$  de cet intégrand conduit à

$$\exp[-X(1 - \cos(\varphi))] = \exp\left[-X \frac{\varphi^2}{2}\right] \sum_{n=0}^{+\infty} S_n^1(X) \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}, \quad (2.15)$$

où les  $S_n^1(X)$  sont des polynômes de degré donné par la partie entière de  $n/2$  et définis par

$$S_n^1(X) = \left[ \frac{\partial^{2n}}{\partial \varphi^{2n}} \exp\left[-X \left(1 - \cos(\varphi) - \frac{1}{2}\varphi^2\right)\right] \right]_{\varphi=0}, \quad (2.16)$$

et ayant les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0^1(X) = 1 \\ S_1^1(X) = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, S_{2p}^1(X) = X + \dots + \frac{(4p)!X^p}{(4!)^p p!} \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, S_{2p+1}^1(X) = -X + \dots - \frac{(4p+2)!X^p}{6!(4!)^{p-1}(p-1)!} \\ \forall p \geq 2, S_p^1(X) = X \sum_{q=0}^{p-2} (-1)^{p-q} C_{2p-1}^{2q} S_q^1(X) \end{array} \right., \quad (2.17)$$

où les  $C_n^k$  sont les coefficients binomiaux.

L'équation 2.15 est obtenue en remarquant que les dérivées impaires de  $\exp[-X(1 - \cos(\varphi) - \frac{1}{2}\varphi^2)]$  sont nulles en  $\varphi=0$ . En remplaçant l'Eq. 2.15 dans l'intégrale de Gordeev, on obtient

$$g(\Omega, X, Y) = i\Omega \int_0^{+\infty} e^{-X[1-\cos(\varphi)] - \frac{1}{2}Y\varphi^2 + i\Omega\varphi} d\varphi \quad (2.18)$$

$$= i\Omega \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n^1(X)}{(2n)!} \int_0^{+\infty} \varphi^{2n} e^{-\frac{1}{2}(X+Y)\varphi^2 + i\Omega\varphi} d\varphi, \quad (2.19)$$

en supposant la commutation somme discrète/intégrale possible. Cette commutation n'est pas évidente dans le cas général car rien n'assure la convergence de l'intégrale dans l'Eq. 2.19. Elle se justifie pourtant lorsque  $X$  et  $Y$  sont infinis, c'est à dire lorsque le champ magnétique tend vers 0. Dans ce cas, le terme  $\exp[-(X+Y)\varphi^2/2]$  décroît plus vite que le terme  $\varphi^{2n}$  ne tend vers l'infini, lorsque  $\varphi \rightarrow +\infty$ . L'intégrale peut alors se mettre sous la forme

$$g(\Omega, X, Y) = i\Omega \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n^1(X)}{(2n)!} \int_0^{+\infty} \varphi^{2n} e^{-\left(\frac{\Omega}{2\xi}\varphi - i\xi\right)^2} e^{-\xi^2} d\varphi, \quad (2.20)$$

où  $\xi$  est définie par l'Eq. 2.14.

Nous allons maintenant faire apparaître les dérivées  $n$ -ième de la fonction de dispersion plasma en utilisant la formule C.12, démontrée dans l'annexe C

$$\forall n \geq 0, Z^{(n)}(z) = 2^{n+1} i^{n+1} e^{-z^2} \int_C (t + iz)^n e^{-t^2} dt, \quad (2.21)$$

où  $C$  est le contour d'intégration défini dans l'annexe.

En faisant le changement de variable suivant

$$t = \frac{\Omega}{2\xi}\varphi - i\xi \quad (2.22)$$

dans l'Eq. 2.20, on montre facilement que le développement de Hadamard de la fonction de Gordeev est

$$g(\Omega, X, Y) = \xi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{S_n^1(X)}{[2(X+Y)]^n} \frac{Z^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}. \quad (2.23)$$

Cette expression est asymptotique et est seulement vraie dans la limite du champ  $B_0$  tendant vers 0, comme expliqué lors du passage de l'Eq. 2.18 à l'Eq. 2.19. Dans le cas d'un champ magnétique strictement nul, la partie droite de l'Eq. 2.23 se réduit à  $\xi Z(\xi)$ . Comme chaque terme devant  $Z^{(2n)}(\xi)$  décroît avec le champ magnétique de la façon suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n = 2p, \quad \left[ \frac{X}{(X+Y)^2} \right]^p \frac{1}{p! 2^{5p} \times 3^{3p}} \\ \forall n = 2p + 1, \quad \left[ \frac{X}{(X+Y)^2} \right]^p \frac{1}{X+Y} \frac{1}{(p-1)! 2^{5p+2} \times 3^{p+1} \times 5} \end{array} \right., \quad (2.24)$$

ne garder que le premier terme quand le champ magnétique est faible est une bonne approximation. Même lorsque  $X \sim 1$  et  $Y \sim 1$ , le terme  $n = 2$  est deux ordres de grandeur inférieur au terme  $n = 0$  (le terme  $n = 1$  s'annule). Ainsi, la fonction de Gordeev peut

être remplacée par  $\xi Z(\xi)$  et nous retrouvons le résultat de Paris [58] et de Gary [23]. Nous allons à présent utiliser les résultats de diffusion collective pour obtenir un modèle analytique que nous pourrons ajuster sur les données expérimentales.

### 2.3.2 Définition du modèle analytique

Dans la partie 2.1.4, nous avons expliqué que le diagnostic de diffusion collective a prouvé que la pulsation  $\hat{\omega}$  des modes observés est bien inférieure à la quantité  $\hat{k}_y \hat{V}_d$ . Il est alors possible de négliger  $\hat{\omega}$  dans l'Eq. 2.14. Nous obtenons ainsi un modèle analytique pour la solution de la relation de dispersion dans la limite du champ magnétique nul. Son expression est donnée par

$$\left(\hat{\omega}_{\text{modèle}} - \hat{k}_x \hat{v}_p\right)^2 = \frac{\hat{k}^2}{1 + \hat{k}^2 + \xi Z(\xi)}, \quad (2.25)$$

où  $\xi$  est à présent défini par

$$\xi \simeq -\frac{\hat{k}_y \hat{V}_d}{\hat{k} \sqrt{2\hat{M}}}. \quad (2.26)$$

L'équation 2.25 fournit une expression analytique de la relation de dispersion de l'instabilité acoustique ionique modifiée que nous avons décrite dans la section précédente (du moins, tant que l'approximation  $\hat{k}_y \hat{V}_d \gg \hat{\omega}$  est valable). Cette équation est bien évidemment incapable de reproduire les résonances propres à l'instabilité électronique de dérive  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  puisqu'elle ne dépend pas de la pulsation  $\hat{\omega}_{ce}$ . Dans la section suivante, nous comparons la pulsation donnée par le modèle (Eq. 2.25) et la pulsation obtenue à partir de la relation de dispersion générale (Eq. 2.7). Nous obtenons alors des critères sur les paramètres du plasma pour lesquels les deux pulsations restent très proches en erreur relative.

### 2.3.3 Comparaison du modèle avec la résolution numérique des ions froids

Tant que l'approximation utilisée pour simplifier  $\xi$  dans l'Eq. 2.26 est valable<sup>9</sup>, l'écart entre le modèle et la solution exacte de la relation de dispersion est principalement dû à la différence entre la fonction de Gordeev et sa limite asymptotique. Gary donne dans son article [23] deux critères à satisfaire pour assurer la validité du modèle asymptotique, énoncés dans le chapitre précédent, en Eqs. 1.12 et 1.13.

Cependant, il ne précise pas l'erreur relative maximale commise en remplaçant la fonction de Gordeev par sa limite asymptotique lorsque ces deux conditions sont valides. De plus, la fonction de Gordeev est seulement l'un des termes de la relation de dispersion, dont les parties réelle et imaginaire peuvent être petites comparées à 1, surtout lorsque

9. Nous avons vu que dans le cas du propulseur cette approximation est valable pour une large gamme de paramètres

$\hat{V}_d$  est bien inférieure à  $\hat{v}_{the}$ . Lorsque  $\hat{V}_d \ll \hat{v}_{the}$ , un développement limité en zéro sur les parties réelles et imaginaire de la fonction de Gordeev dans les Eqs. 2.12 pour  $n=0$  montre que cette fonction affecte peu la pulsation du mode, qui est par conséquent proche de la pulsation du mode acoustique ionique. En revanche, elle modifie le taux de croissance, puisque le terme d'ordre zéro dans le développement limité s'annule. Ainsi, si le module de la fonction de Gordeev est petit par rapport à 1, une erreur significative sur sa valeur résultera en une erreur significative sur le taux de croissance du mode mais pas sur sa pulsation. En effet, nous pouvons voir sur les Figs 2.1 et 2.2 que la différence entre la limite asymptotique (grande valeur de  $\hat{k}_z$  ou petite valeur de  $\hat{\omega}_{ce}$ ) et les autres courbes est plus importante pour la partie imaginaire que pour la partie réelle de la pulsation du mode.

Notre but étant d'ajuster un modèle analytique sur les relations de dispersion expérimentales, nous cherchons uniquement un modèle qui décrit la partie réelle de la pulsation complexe du mode. Par conséquent, les conditions données par Gary sont trop strictes. Par exemple, pour les valeurs typiques données dans le Tab. 2.3, le critère donné par l'Eq. 1.13 de Gary n'est pas satisfait : le rapport dans la partie de gauche est égal à 0,2 alors qu'il devrait être supérieur à 0,5. Cependant, la courbe en pulsation correspondante est superposable à la limite asymptotique ( $\hat{\omega}_{ce} = 25$ ) à l'échelle du graphe sur la Fig. 2.2. Nous allons donc, dans cette partie, établir un critère qui assure la validité du modèle analytique, au moins pour la pulsation du mode.

### Comparaison numérique

Pour ce faire, la pulsation du modèle et la partie réelle de la solution numérique seront comparées à l'aide de deux quantités définies par

$$N_\infty = \text{Max}_{\hat{k}_y} \left( \left| \frac{\hat{\omega}_{r,\text{num}}(\hat{k}_y) - \hat{\omega}_{r,\text{modèle}}(\hat{k}_y)}{\hat{\omega}_{r,\text{num}}(\hat{k}_y)} \right| \right) \quad (2.27)$$

et

$$N_{\text{relative}} = \frac{1}{N} \sum_{\hat{k}_y}^N \left( \frac{\hat{\omega}_{r,\text{num}}(\hat{k}_y) - \hat{\omega}_{r,\text{modèle}}(\hat{k}_y)}{\hat{\omega}_{r,\text{num}}(\hat{k}_y)} \right), \quad (2.28)$$

où  $\hat{\omega}_{r,\text{num}}$  et  $\hat{\omega}_{r,\text{modèle}}$  sont respectivement les parties réelles des solutions des Eqs. 2.7 et 2.25, résolues pour un nombre discret de valeurs de  $\hat{k}_y$ .

La première quantité ( $N_\infty$ ) représente le maximum de la valeur absolue de l'erreur relative. Elle donne une information sur l'amplitude maximum de l'erreur entre le modèle et l'expression théorique, pour un intervalle de nombre d'onde  $\hat{k}_y$  donné. Obtenir des faibles valeurs de  $N_\infty$  est alors un critère fort, montrant que le modèle correspond à la relation de dispersion en chaque point.

Comme le modèle ne dépend pas de la pulsation  $\hat{\omega}_{ce}$ , on peut prédire que quand ce paramètre sera grand (c'est-à-dire lorsque les résonances deviennent importantes) des



différences importantes seront constatées entre le modèle et la résolution numérique. Ceci correspondra alors à de grandes valeurs de  $N_\infty$ . Cependant, même pour de grandes valeurs de  $\hat{\omega}_{ce}$ , il semble que la relation de dispersion oscille autour de la courbe correspondant à une plus petite valeur de  $\hat{\omega}_{ce}$  (Fig. 2.2a). Pour vérifier ce point, la deuxième quantité ( $N_{\text{relative}}$ ) est introduite, donnant l'écart relatif moyen sur l'intervalle en  $\hat{k}_y$  considéré. Une faible valeur de  $N_{\text{relative}}$  indique que le modèle correspond à la courbe moyenne de la solution numérique, même lorsque la quantité  $N_\infty$  est grande.

Ces deux quantités sont présentés en Fig. 2.4 pour différentes valeurs de la vitesse  $\hat{V}_d$  et de la pulsation  $\hat{\omega}_{ce}$ . La solution du modèle et celle de la résolution numérique ont été calculées pour une propagation orthogonale au champ électrique, c'est-à-dire pour  $\hat{k}_x=0$ . La somme pour la quantité  $N_{\text{relative}}$  et le maximum pour la quantité  $N_\infty$  sur le nombre d'onde  $\hat{k}_y$  ont été évalués pour  $\hat{k}_y$  variant entre 0,2 et 1,5 par pas de 0,01, correspondant à 2400 et 18000 rad/m, intervalle proche de celui exploré par le diagnostic de diffusion collective. Le paramètre  $\hat{k}_z$  est fixé à 0,045 correspondant à 540 rad/m, environ la valeur du nombre d'onde  $k_z$  observée expérimentalement.

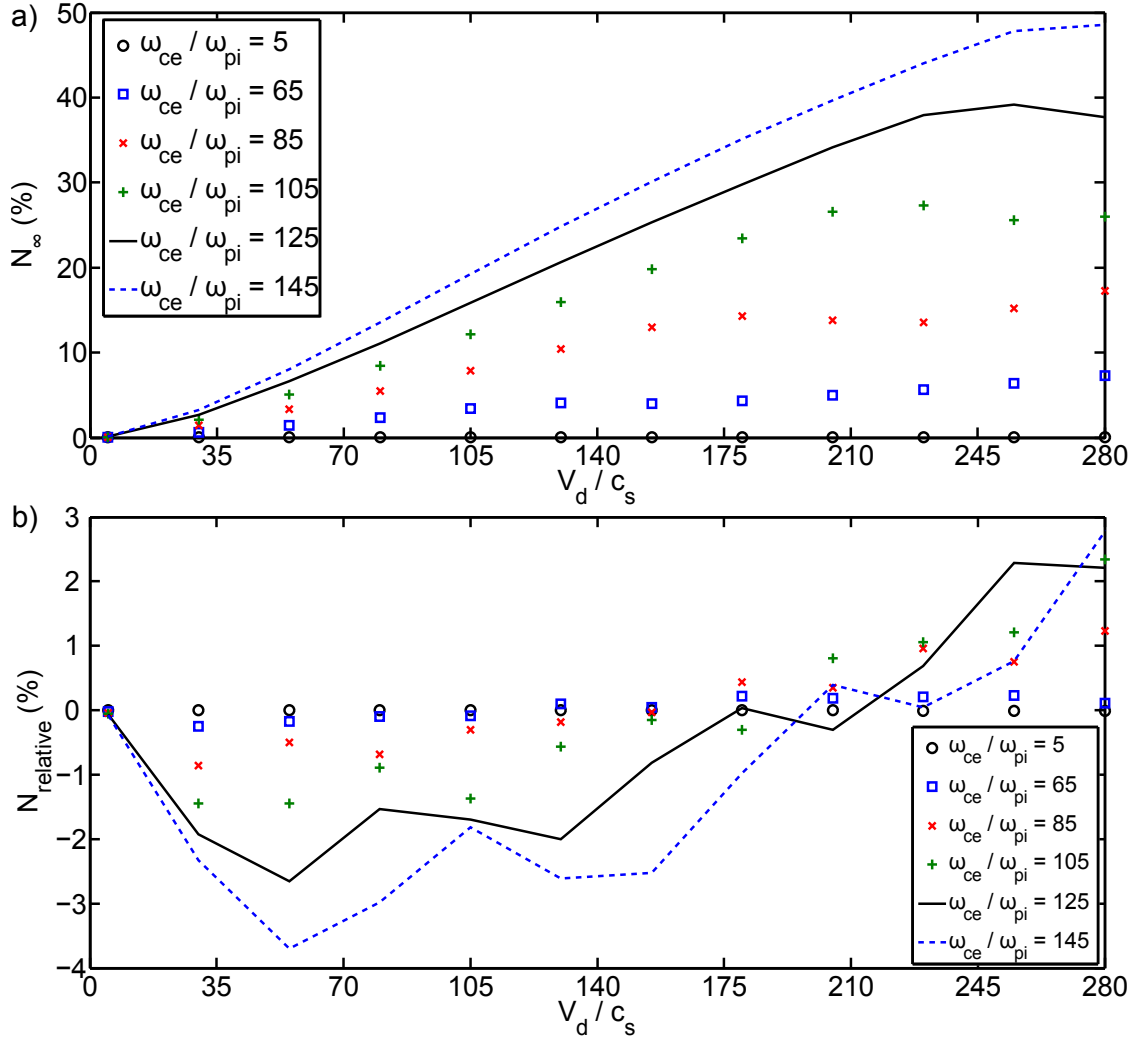
Comme attendu, le modèle est en bonne adéquation avec la résolution numérique lorsque la vitesse  $\hat{V}_d$  et la pulsation  $\hat{\omega}_{ce}$  sont faibles (Fig. 2.4a). On peut par ailleurs remarquer que la pulsation du modèle correspond bien à celle de la résolution numérique pour de plus grandes valeurs de  $\hat{V}_d$  lorsque la pulsation  $\hat{\omega}_{ce}$  est plus faible. Pour la gamme de  $\hat{\omega}_{ce}$  pertinente au cas du propulseur à effet Hall (inférieur à 85), la quantité  $N_\infty$  reste inférieure à 18%. Cependant, la valeur de  $N_{\text{relative}}$ , représentée sur la Fig. 2.4b, est comprise entre  $\pm 3\%$  pour toute la gamme de paramètre, prouvant que le modèle suit, en moyenne, la résolution numérique de la relation de dispersion ions froids. Par conséquent, la relation de dispersion de l'instabilité acoustique ionique modifiée représentée par l'Eq. 2.25 ne dévie pas, en moyenne, de la relation théorique, son effet étant simplement de lisser les résonances quand celles-ci sont présentes.

## Nouveaux critères

Pour compléter cette étude, il reste à déterminer des critères pour que l'erreur entre la pulsation du modèle et de la solution numérique soit inférieure à l'erreur sur la détermination de la pulsation expérimentale. Une étude paramétrique a alors été réalisée sur les paramètres  $\hat{V}_d$  et  $\hat{k}_z$ ,  $\hat{V}_d$  variant de 55 à  $\hat{v}_{the}$  par pas de 5 et  $\hat{k}_z$  valant 0,02, 0,045 et 0,09. Pour chaque couple de ces paramètres, on cherche la valeur de  $\hat{\omega}_{ce}$ , notée  $\hat{\omega}_{ce,max}$  telle que  $N_\infty=5\%$  pour des valeurs de  $\hat{k}_y$  allant de 0,2 à 1,5 par pas de 0,01. Les autres paramètres nécessaires à la résolution sont fixés comme énoncé précédemment. On trouve alors une loi de puissance pour  $\hat{\omega}_{ce,max}$  en fonction de  $\hat{V}_d$  de la forme

$$\hat{\omega}_{ce,max} \simeq 4,9 \cdot 10^{-12} \hat{V}_d^{-\frac{1}{5}}. \quad (2.29)$$

Lorsque la pulsation  $\hat{\omega}_{ce}$  est inférieure à la valeur donnée par cette relation pour une vitesse  $\hat{V}_d$  fixée, cela veut dire que la quantité  $N_\infty$  est inférieure à 5%. Cette loi de puissance donne ainsi de nouvelles conditions, qui remplacent celles de Gary,



**Figure 2.4:** Comparaison du modèle et de la résolution numérique à l'aide des quantités a)  $N_\infty$  et b)  $N_{relative}$  définies en Eqs. 2.27 et 2.28. Ces quantités sont calculées pour un nombre d'onde  $\hat{k}_x$  fixé à 0 (propagation azimuthale) et la somme et le maximum sur le nombre d'onde  $\hat{k}_y$  sont calculés pour  $\hat{k}_y$  variant entre 0,2 et 1,5 par pas de 0,01. Cet intervalle est proche de celui exploré par le diagnostic de diffusion collective.

$$\frac{\hat{k}_y^2}{\hat{\omega}_{ce}^2} \hat{M} \geq 0,3 \times \hat{V}_d^{\frac{2}{5}} \quad (2.30)$$

et

$$\frac{\hat{k}_z^2}{\hat{\omega}_{ce}^2} \hat{M} \geq 0,02 \times \hat{V}_d^{\frac{2}{5}}. \quad (2.31)$$

On peut désormais vérifier si le cas standard vérifie ces deux inégalités. Pour les valeurs du Tab. 2.3, la partie droite de l'Eq. 1.13 doit être remplacée par 0,15 (avec  $\hat{V}_d = 150$ ) en utilisant notre critère. Le critère sur le nombre d'onde  $\hat{k}_z$  donné par l'Eq. 2.31 est dans ce cas vérifié, alors que ce n'était pas le cas avec la condition précédente.

A cette étude, nous pouvons rajouter que dans son article [44] Lampe propose que, dans un milieu turbulent, l'agitation aléatoire des électrons à travers le champ magnétique, caractérisée par un coefficient de diffusion turbulente, conduit à l'apparition d'un terme supplémentaire dans le dénominateur résonnant de la fonction de Gordeev. Dans ce cas, il démontre que ce terme réduit l'amplitude des résonances ce qui pourrait assouplir la condition 2.31 ou même la condition 1.13 donnée par Gary.

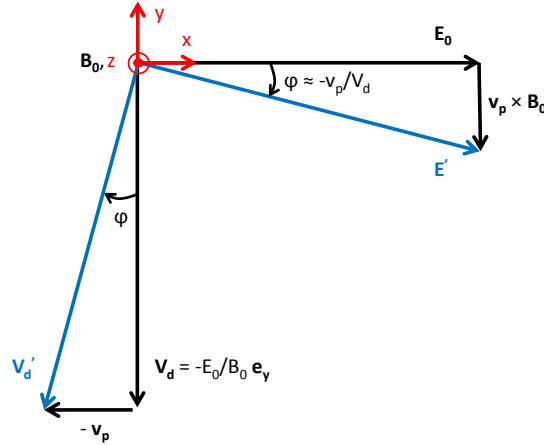
En conclusion, comme aucune résonance n'est visible sur les relations de dispersion expérimentales, le modèle peut certainement s'appliquer dans ce cas et être utilisé pour ajuster des paramètres du plasma sur des données expérimentales obtenues dans la direction  $\alpha=90^\circ$ . Il est d'ailleurs possible a posteriori de vérifier que les paramètres respectent les deux conditions 2.30 et 2.31, le champ magnétique étant connu à l'aide d'autres diagnostics. Avant d'exploiter les résultats expérimentaux, nous étudierons la dispersion dans le plan  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$  pour compléter notre étude.

## 2.4 Variation de la pulsation et du taux de croissance dans le plan $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$

Dans les sections précédentes, les propriétés dispersives de l'instabilité de dérive ont été caractérisées dans la direction de propagation purement azimutale ( $\alpha=90^\circ$ ). Cependant, avec le diagnostic de diffusion collective, il est possible d'explorer une partie du plan  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$ . Les directions axiale  $x$  et azimutale  $y$  n'étant pas équivalentes, en raison de l'effet Doppler dû à la vitesse des ions pour la première et de celui dû à la vitesse de dérive des électrons pour la deuxième, il est intéressant d'étudier le comportement de la solution de la relation de dispersion avec des ions froids dans ce plan. Pour étudier cette anisotropie, l'angle  $\alpha$  sera alors varié de telle manière que  $\hat{k}_x = \hat{k}_\perp \cos(\alpha)$  et  $\hat{k}_y = \hat{k}_\perp \sin(\alpha)$  soient non nuls.

### 2.4.1 Effet de la vitesse d'éjection $\hat{v}_p$ sur la relation de dispersion

Dans cette partie, nous étudions l'effet d'une vitesse d'éjection  $\hat{v}_p$  non nulle sur la relation de dispersion dans le plan  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$ . En fait, il est possible de se ramener



**Figure 2.5:** Champ électrique et vitesse de dérive ressentis par les particules dans le référentiel du laboratoire (en noir) et dans le référentiel du faisceau (en bleu).

à une situation pour laquelle le paramètre  $\hat{v}_p$  est nul, en se plaçant dans le référentiel des ions, c'est-à-dire dans le référentiel du jet du plasma. Dans ce référentiel, le champ électrique  $\mathbf{E}_0$  et la vitesse de dérive  $\mathbf{V}_d$  sont modifiés par la transformée galiléenne suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_0 = E' \cos(\varphi) \hat{\mathbf{e}}_x + E' \sin(\varphi) \hat{\mathbf{e}}_y \\ \mathbf{V}'_d &= -V_d \hat{\mathbf{e}}_y - v_p \hat{\mathbf{e}}_x = -V'_d \sin(\varphi) \hat{\mathbf{e}}_x - V'_d \cos(\varphi) \hat{\mathbf{e}}_y \end{aligned} \quad (2.32)$$

avec l'angle  $\varphi$  défini par  $\tan(\varphi) = -v_p/V_d$  (voir Fig. 2.5). Comme  $v_p \ll V_d$ , on peut écrire que  $\tan(\varphi) \sim \varphi$ ,  $E' \simeq E_0$  et  $V'_d \simeq V_d$  de telle sorte que les amplitudes du champ électrique et de la vitesse de dérive ne sont pas significativement modifiées. En retournant dans le référentiel du laboratoire, un effet Doppler  $k_\perp v_p \cos(\alpha)$  s'ajoute à la pulsation du mode tandis que le taux d'instabilité reste inchangé si l'on considère l'onde comme étant monochromatique. Par conséquent, le cas  $\hat{v}_p \neq 0$  peut être déduit facilement du cas  $\hat{v}_p = 0$  :

- On résout l'équation de dispersion pour  $\hat{v}_p = 0$ , ce qui revient à la résoudre dans le référentiel des ions.
- On retourne dans le référentiel du laboratoire en faisant tourner les axes  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  de l'angle  $\varphi = -v_p/V_d$ . L'angle  $\alpha$  doit être remplacé par l'angle  $\alpha' = \alpha - \varphi$  et on trace la pulsation et le taux d'instabilité trouvés pour  $\hat{v}_p = 0$  en fonction de ce nouvel angle  $\alpha'$ .
- Enfin, on doit ajouter l'effet Doppler  $k_\perp v_p \cos(\alpha')$  à la pulsation du mode.

Dans les faits, le programme de résolution de la relation de dispersion par méthode itérative est tout à fait capable de résoudre le cas  $\hat{v}_p = 0$  comme le cas  $\hat{v}_p \neq 0$ . Les solutions complexes obtenues dans ces deux cas sont alors en parfait accord lorsque l'on applique la méthode précédente pour le cas  $\hat{v}_p = 0$ .

## 2.4.2 Evolution de la relation de dispersion dans le plan $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$

### Référentiel du laboratoire

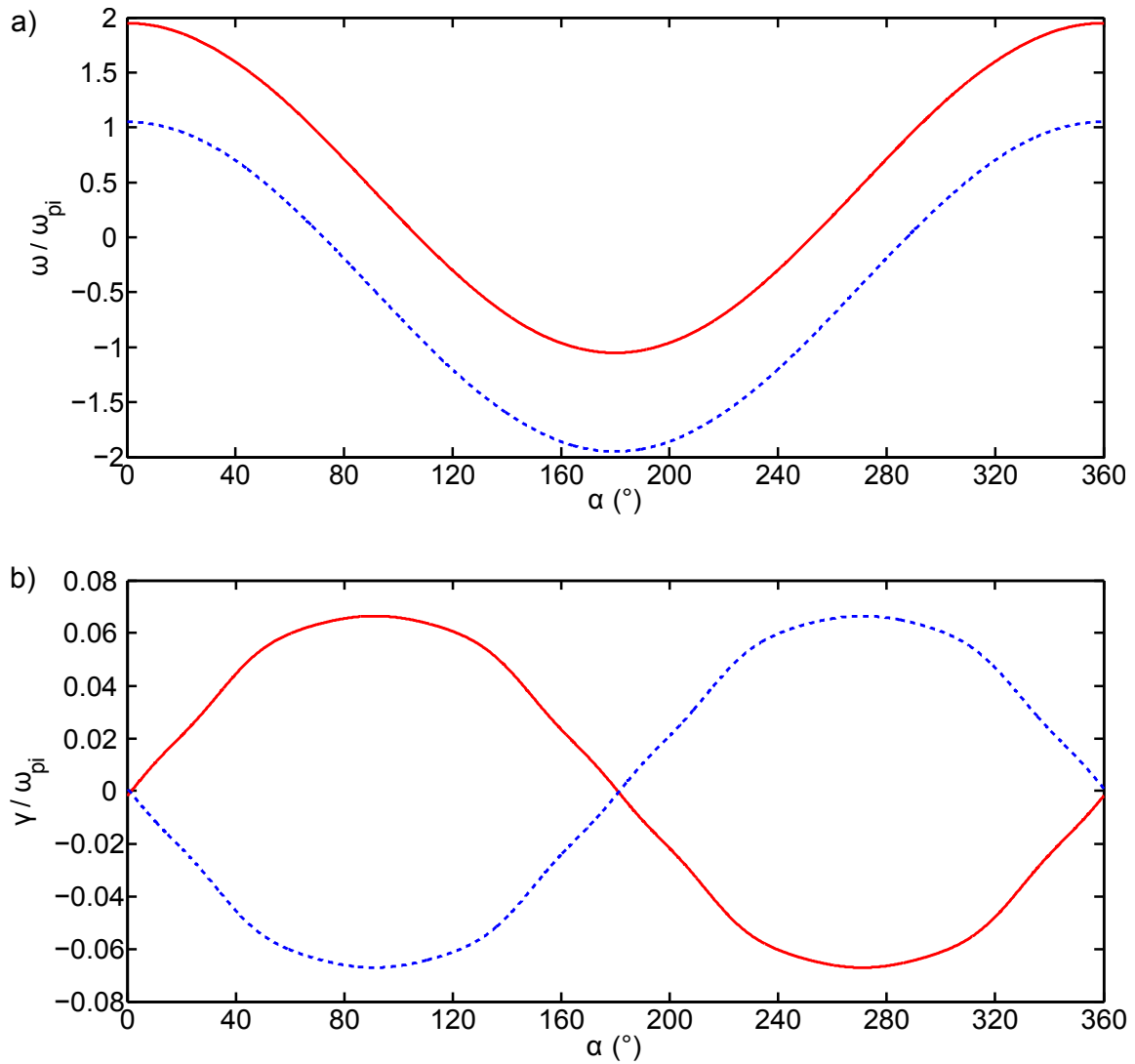
La représentation de la relation de dispersion dans le plan  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$  se fait en fonction de l'angle  $\alpha$ . Sur la Fig. 2.6, les deux solutions de la relation de dispersion avec ions froids ( $\hat{\omega}_+$  et  $\hat{\omega}_-$ ) sont tracées en fonction de cet angle. La Fig. 2.6a représente la partie réelle (la pulsation) de ces solutions et Fig. 2.6b leur partie imaginaire (le taux d'instabilité). Les valeurs utilisées pour résoudre l'Eq. 2.7 sont celles définies dans le Tab. 2.3 et  $\hat{k}_\perp$  est fixé à 0,5 qui correspond à 6000 rad/m. Le paramètre  $\hat{v}_p$  est quand à lui fixé à 3 de façon à voir sa contribution sur la pulsation du mode.

Il est clair à partir de la Fig. 2.6a que l'effet Doppler  $\hat{k}_\perp \hat{v}_p \cos(\alpha)$  est l'effet dominant sur les pulsations. Si l'on retire sa contribution, les deux pulsations sont opposées et presque constantes avec  $\alpha$ , leur valeur absolue moyenne valant  $0,45 \omega_{pi}$  pour un écart-type valant  $1,7 \cdot 10^{-3} \omega_{pi}$ . Ce comportement est typique d'un mode ionique isotrope dans le référentiel des ions. En retournant dans le référentiel du laboratoire, les axes tournent d'environ  $1^\circ$ , sans conséquence sur la pulsation puisqu'elle est presque constante avec  $\alpha$  et l'effet Doppler s'ajoute sur les deux pulsations donnant lieu à un mode rapide ou haut et un mode lent ou bas, comme nous pouvons le voir sur la Fig. 2.6a. Pour une valeur de la vitesse  $v_p$  compatible avec les valeurs observées expérimentalement (ici  $v_p = 3$ ), le taux d'instabilité n'est, lui, presque pas modifié lors du changement de référentiel, car l'angle  $\varphi$  est faible. Le mode instable alterne entre le mode haut et le bas comme le montre la Fig. 2.6b. Autour de  $0$  ou de  $180^\circ$ , les deux modes sont marginalement stables.

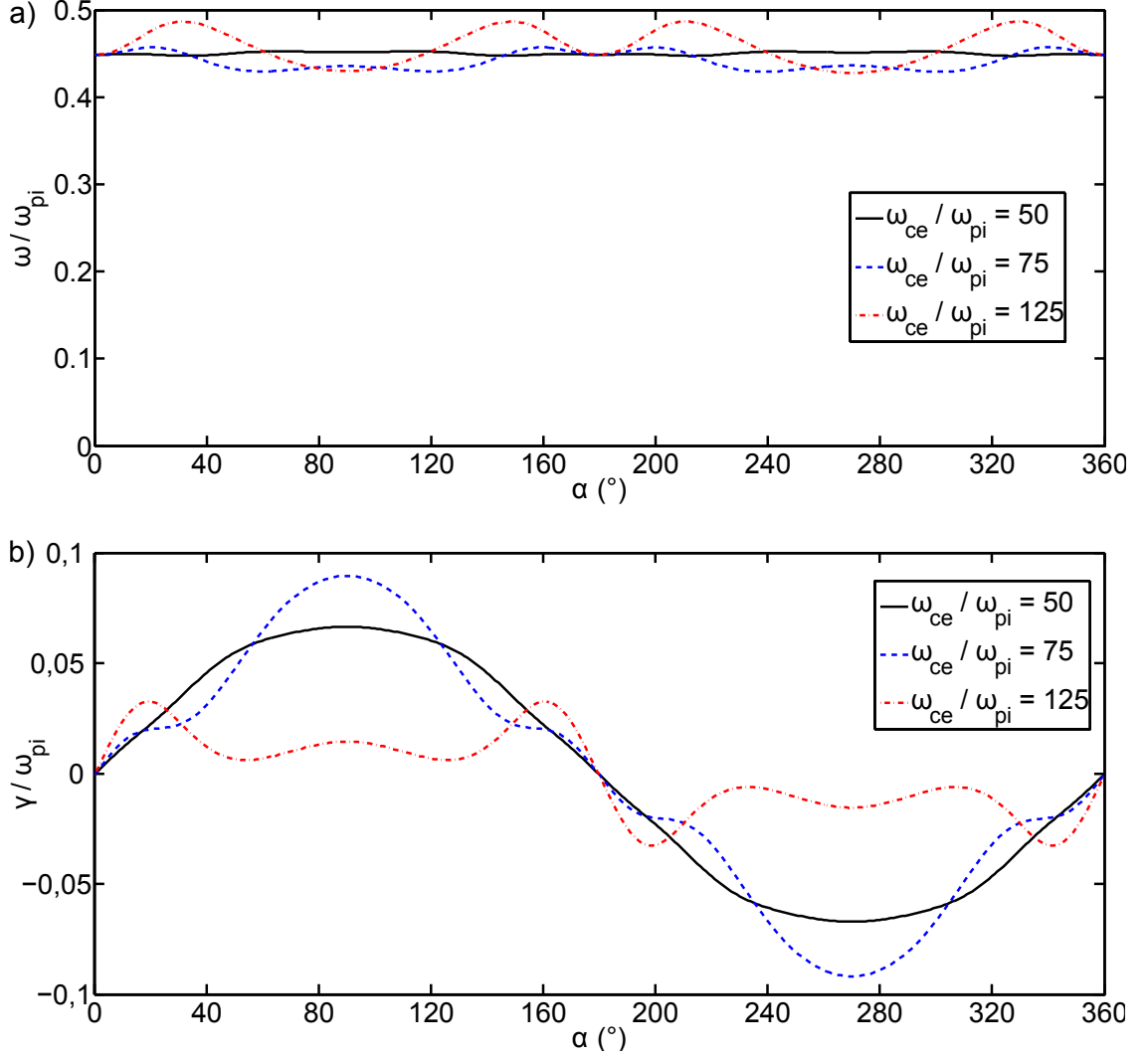
### Référentiel du jet d'ions

Il convient à présent d'étudier le comportement de la pulsation et du taux d'instabilité dans le référentiel du jet d'ions. Dans ce référentiel, leur variation peut être comprise en s'appuyant sur les résultats de l'étude paramétrique réalisée dans la section 2.2. Pour une vitesse  $\hat{v}_p$  nulle dans l'Eq. 2.7, la rotation du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dans le plan  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$  correspond seulement à une variation de la première variable de la fonction de Gordeev  $\Omega = \left( \hat{\omega} - \hat{k}_\perp \hat{V}_d \sin(\alpha) \right) / \hat{\omega}_{ce}$ . Les deux autres variables de la fonction,  $X = \hat{k}_\perp \hat{M} / \hat{\omega}_{ce}$  et  $Y = \hat{k}_z \hat{M} / \hat{\omega}_{ce}$ , restent, elles, constantes. Par conséquent, la rotation d'angle  $\alpha$  peut être interprétée comme la variation du paramètre  $\hat{V}_{d,\text{modif}} = \hat{V}_d \sin(\alpha)$  à  $\hat{k}_\perp$  constant. Ainsi, se déplacer de  $\alpha=90^\circ$  revient à réduire le paramètre  $\hat{V}_{d,\text{modif}}$  et deux cas de figure sont à envisager :

- Si la relation de dispersion ne présente pas de résonances en  $\alpha=90^\circ$  et pour une vitesse  $\hat{V}_d$  donnée bien inférieure à la vitesse  $\hat{v}_{the}$ , alors la pulsation ne varie pas dans le référentiel des ions lorsque  $\hat{V}_{d,\text{modif}}$  décroît à partir de  $\hat{V}_d$ , sa valeur maximum lorsque  $\alpha=90^\circ$  (voir Fig. 2.3a). La pulsation est donc constante avec  $\alpha$ . Le taux d'instabilité, lui, diminue lorsque la vitesse  $\hat{V}_d$  diminue, comme expliqué sur la Fig. 2.3b. Par conséquent, en s'écartant de  $90^\circ$ ,  $\hat{V}_{d,\text{modif}}$  diminuant, le taux d'instabilité diminue également, comme nous pouvons le voir sur la Fig. 2.6b.
- A présent, si la relation de dispersion à  $\alpha=90^\circ$  possède des résonances ou si  $\hat{V}_d \gtrsim \hat{v}_{the}$ ,



**Figure 2.6:** Variation a) des pulsations et b) des taux d'instabilité de la relation de dispersion avec ions froids (Eq. 2.7) en fonction de l'angle  $\alpha$ . Les paramètres de résolution sont ceux définis dans le Tab. 2.3 et  $\hat{k}_\perp$  est fixé à 0,5. La courbe rouge en trait plein correspond à la pulsation  $\hat{\omega}_+$  et la courbe bleue tiretée à la pulsation  $\hat{\omega}_-$ .



**Figure 2.7:** Variation de a) la partie réelle et b) la partie imaginaire de la solution  $\hat{\omega}_+$  de la relation de dispersion avec ions froids (Eq. 2.7) en fonction de  $\alpha$ , pour différentes valeurs de  $\hat{\omega}_{ce}$ . L'équation est résolue pour les paramètres donnés dans le Tab. 2.3,  $\hat{k}_\perp$  étant fixé à 0,5 et  $\hat{v}_p$  à 0.

varier  $\hat{V}_{d,\text{modif}}$  affecte la pulsation et le taux d'instabilité. Dans ce cas, la pulsation n'est plus isotrope dans le référentiel des ions et le taux d'instabilité présente des maxima pour des positions différentes de  $\alpha=90^\circ$ . Les positions de ces maxima dépendent de la valeur de  $\hat{k}_\perp$  puisque les résonances sont liées à la condition définie en Eq. 1.10. Un exemple de ce phénomène est donné en Fig. 2.7 pour différentes valeurs de  $\hat{\omega}_{ce}$ ,  $\hat{k}_\perp$  étant fixé à 0,5 et les valeurs des autres paramètres étant celles définies en Tab. 2.3, hormis la vitesse  $\hat{v}_p$  qui est nulle.

## 2.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons vu que dans la limite d'un champ magnétique nul, le mode de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  obtenu en résolvant la relation de dispersion tend vers une courbe asymptotique. A partir de cette observation, le modèle 2.25 a été défini et nous avons montré que pour une large gamme de paramètres correspondant au cas du propulseur, la pulsation donnée par ce modèle est en bon accord avec celle donnée par la solution numérique de la relation de dispersion 4.1. Nous avons en particulier montré que la solution exacte oscillait avec  $\hat{k}_y$  autour du modèle mais que ce dernier ne dévie pas en moyenne de cette solution. Pour les paramètres typiques des régimes moteurs étudiés, l'amplitude des fluctuations de la partie réelle de la pulsation est inférieure aux incertitudes expérimentales sur la mesure de la pulsation ( $N_\infty < 5\%$ ). Le modèle peut donc être ajusté sur des relations de dispersion expérimentales, afin d'en déduire des paramètres du plasma. C'est ce que nous ferons dans le chapitre suivant, après avoir corrigé un effet d'appareil inhérent au diagnostic de la diffusion collective.

Enfin, nous avons montré que la pulsation du mode azimutal observée par diffusion collective de la lumière est probablement isotrope dans le référentiel des ions puisqu'aucune résonance n'est visible sur la relation de dispersion expérimentale.



# Chapitre 3

## Observations expérimentales à l'aide de la diffusion collective de la lumière

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Le diagnostic de diffusion collective</b>	<b>54</b>
3.1.1	Principe de la diffusion Thomson de la lumière	54
3.1.2	Les différentes échelles de diffusion de la lumière	54
3.1.3	Phénomène de diffusion collective en champ lointain	55
3.1.4	Détection du champ électrique total diffusé	56
3.1.5	Conditions d'obtention d'un rapport signal sur bruit supérieur à un	59
3.1.6	Caractéristiques du banc optique PRAXIS utilisé sur le moyen d'essai PIVOINE	59
<b>3.2</b>	<b>Effet d'appareil dans le cas du mode azimutal</b>	<b>61</b>
3.2.1	Convolution pour une petite ouverture angulaire du faisceau laser	61
3.2.2	Facteur de forme statique	63
3.2.3	Facteur de forme dynamique	63
<b>3.3</b>	<b>Déconvolution du signal de diffusion collective pour le mode azimutal</b>	<b>66</b>
3.3.1	Paramètres du propulseur	66
3.3.2	Données brutes	66
3.3.3	Facteur de forme statique déconvolué	68
3.3.4	Relations de dispersion déconvoluées	71
3.3.5	Vérification des hypothèses	73
<b>3.4</b>	<b>Discussions et conclusions</b>	<b>73</b>
<b>3.5</b>	<b>Ajustement du modèle analytique sur la relation de dispersion expérimentale</b>	<b>75</b>
3.5.1	Estimation de $T_e$ et $n_e$	75
3.5.2	Discussion	79

---

La diffusion collective de la lumière est un diagnostic non intrusif utilisé pour observer les fluctuations de densité du plasma à des échelles plus grandes que la longueur de Debye. La densité spectrale du signal mesuré grâce à ce diagnostic est le produit de convolution entre la fonction de transfert du diagnostic et le facteur de forme dynamique  $S(\mathbf{k}, f)$ . L'effet de cette convolution sur le facteur de forme est généralement négligeable puisque la largeur spectrale (dans le domaine spatial) des fluctuations de densité est souvent bien supérieure à celle de la fonction de transfert. Dans le cas du propulseur à effet Hall, le mode azimutal n'existe que dans un angle solide très étroit, ce qui ne permet pas de négliger l'effet d'appareil. Nous étudions dans ce chapitre l'effet de la convolution et proposons une méthode pour corriger cet effet, en s'appuyant sur les résultats de l'étude de la relation de dispersion présentés au chapitre précédent. Une fois obtenue, la relation de dispersion expérimentale déconvoluée sera utilisée pour estimer la température et la densité électronique à partir du modèle analytique que nous avons développé dans le chapitre précédent.

## 3.1 Le diagnostic de diffusion collective

### 3.1.1 Principe de la diffusion Thomson de la lumière

Soumises à une onde électromagnétique, les particules chargées d'un plasma oscillent sous l'influence du champ électrique de cette onde. Ces particules accélérées (ou décélérées) émettent un rayonnement électromagnétique et on parle alors de diffusion de la lumière incidente [22, 76]. L'amplitude du champ diffusé étant inversement proportionnel à la masse de la particule, c'est principalement les électrons qui participent à cette diffusion. Lorsque les électrons sont libres (comme dans un plasma), on parle de diffusion Thomson et le processus est alors élastique, puisque la quantité de mouvement et l'énergie cinétique des particules sont conservées sur une période de l'onde. L'onde peut également être diffusée de façon élastique par le nuage électronique entourant les atomes ou les molécules et on parle de diffusion Rayleigh. Enfin, l'onde incidente peut induire des rotations ou des vibrations des molécules et on nomme cette diffusion inélastique, la diffusion Raman. La gamme de fréquence étudiée ici correspond à la gamme pour laquelle seule la diffusion Thomson contribue significativement au spectre.

### 3.1.2 Les différentes échelles de diffusion de la lumière

Si l'on considère à présent une collection ou un ensemble d'électrons libres, la question se pose de savoir si les ondes diffusées par ces particules sont cohérentes ou non, c'est-à-dire s'il existe une relation de phase constante dans le temps entre les ondes diffusées. On distingue alors trois régimes en fonction de la fréquence spatiale  $\lambda$  de l'onde incidente.

- $\lambda \ll \lambda_{De}$  : Pour des fluctuations aléatoires de la densité électronique, les ondes diffusées par les différents électrons du milieu ne sont pas cohérentes<sup>10</sup> et la puissance totale diffusée est la somme des puissances diffusées par chaque particule. C'est le

---

10. On parle de diffusion incohérente selon la nomenclature de Hutchinson [34].

cas notamment lorsque l'on regarde à des échelles bien plus petites que la longueur de Debye  $\lambda_{De}$ . Le spectre de la lumière est alors une image du mouvement thermique des électrons.

- $\lambda \sim \lambda_{De}$  : Lorsque les échelles sondées se rapprochent de  $\lambda_{De}$ , des effets collectifs entre électrons et ions apparaissent et la diffusion est appelée diffusion cohérente.
- $\lambda \gg \lambda_{De}$  : Pour des échelles sondées bien supérieures à  $\lambda_{De}$ , les trajectoires des électrons sont corrélées et les mouvements collectifs sont dominants. La diffusion est appelée diffusion Thomson collective ou plus simplement diffusion collective. Dans ce régime, on doit faire la somme des champs électriques des ondes rayonnées par chaque particule, avant de calculer la puissance totale diffusée. En conséquence des effets collectifs, le spectre de cette diffusion contient des informations sur la distribution en énergie des ions et des électrons.

### 3.1.3 Phénomène de diffusion collective en champ lointain

Par la suite, nous placerons notre étude à des échelles supérieures à  $\lambda_{De}$  et, puisque la distance est grande devant la distance interparticulaire, nous considérerons la limite des milieux continus de telle manière que la somme des champs électriques diffusés par un grand nombre de particules individuelles puisse être remplacée par une intégrale.

Dans ce cas, pour une onde incidente plane, monochromatique et linéairement polarisée, le champ électrique lointain ( $\mathbf{r}' \gg \mathbf{r}$ , voir Fig. 3.1), diffusé par les électrons libres d'un plasma et mesuré dans la direction  $\mathbf{r}'$ , est donné par [34]

$$\mathbf{E}_{\text{total}}(\mathbf{r}', t) = \int_V d^3\mathbf{r} n(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{E}_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t). \quad (3.1)$$

Notons que pour obtenir cette expression, les collisions entre les photons et les particules (l'effet Compton) sont négligées, ceci étant justifié tant que l'énergie du photon  $h\nu$  est négligeable devant l'énergie au repos d'un électron  $m_e c^2$ , et que les effets relativistes ne seront pas considérés puisque la vitesse des électrons est bien inférieure à celle de la lumière  $c$ .

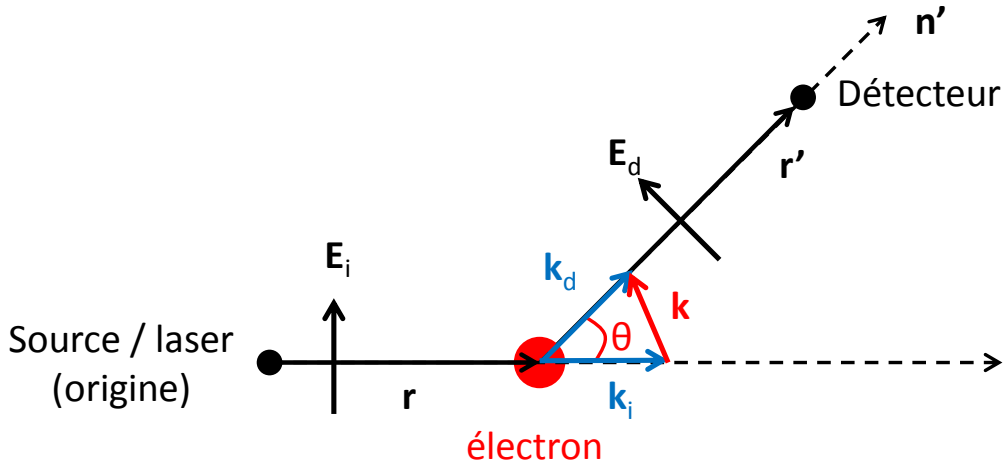
Le champ lointain donné par l'Eq. 3.1 est alors proportionnel au champ électrique  $\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ , diffusé dans la direction  $\mathbf{r}'$  par un seul électron situé à la distance  $\mathbf{r}$  de la source émettrice modulé par la transformée de Fourier spatiale de la densité  $n(\mathbf{r}, t)$ . Si l'on note  $\mathbf{E}_{i,0}(\mathbf{r})$  l'amplitude de l'onde incidente,  $\omega_i$  sa pulsation et  $\mathbf{k}_i$  son vecteur d'onde, alors le champ électrique  $\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  s'écrit

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{r_0}{r'} \left[ \hat{\mathbf{k}}_d \times \left( \hat{\mathbf{k}}_d \times \mathbf{E}_{i,0}(\mathbf{r}) \right) \right] e^{i(\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}' - \omega_i t)}, \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{k}_d$  est le vecteur d'onde de l'onde diffusée (Fig. 3.1),  $\hat{\mathbf{k}}_d$  le vecteur unitaire associé,  $\mathbf{r}'$  est la position d'observation et  $r_0$  le rayon classique de l'électron défini par

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}. \quad (3.3)$$

Le vecteur d'onde sondé ou observé  $\mathbf{k}$  est lui défini par  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i$ .



**Figure 3.1:** Schéma de principe de la diffusion d'une onde plane monochromatique, linéairement polarisée, par un électron. L'onde incidente de champ électrique  $\mathbf{E}_i$  est diffusée par l'électron se trouvant à la position  $\mathbf{r}$  par rapport à la source émettrice. Le champ électrique  $\mathbf{E}_d$  de l'onde diffusée dans la direction  $\mathbf{n}'$  est mesuré par le détecteur à la position  $\mathbf{r}'$  par rapport à la position de l'électron. L'angle  $\theta$  formé entre la direction de l'onde incidente et la direction de mesure est appelé angle de diffusion et le vecteur d'onde d'observation  $\mathbf{k}$  est défini comme la différence entre le vecteur d'onde de l'onde diffusée  $\mathbf{k}_d$  et de l'onde incidente  $\mathbf{k}_i$ .

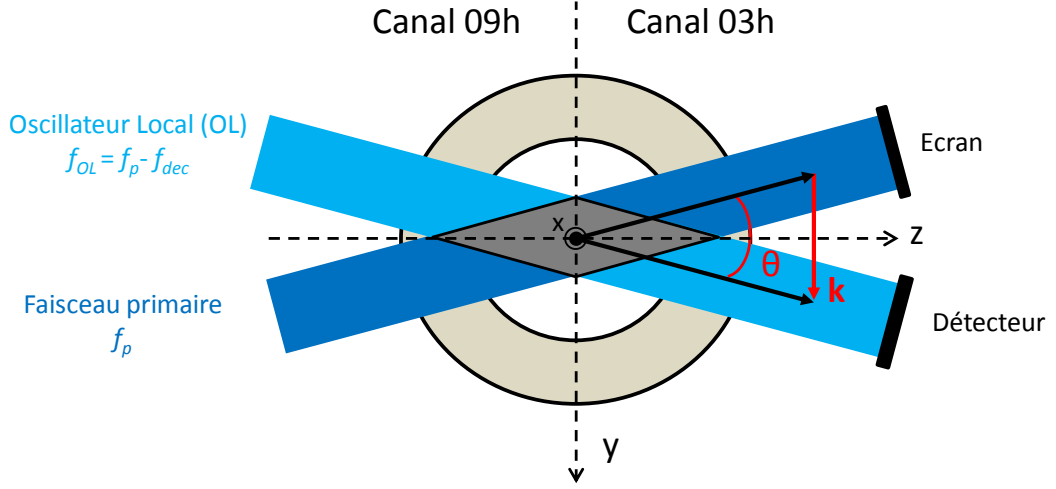
C'est le champ électrique de l'Eq. 3.1 que le diagnostic de diffusion collective se propose de mesurer pour pouvoir observer les fluctuations de densité.

### 3.1.4 Détection du champ électrique total diffusé

Une mesure directe du champ total présenté dans la partie précédente ne permettrait pas d'accéder à toutes les informations sur la transformée de Fourier de la densité. En effet, la phase du signal serait perdue puisque la puissance sur le détecteur serait proportionnelle au carré du module du champ électrique diffusé. De plus, l'amplitude de ce champ étant faible, le signal mesuré serait proche du bruit et presque indétectable. Pour augmenter le rapport signal sur bruit, il est alors courant d'utiliser la méthode de détection super hétérodyne [66].

L'idée est de faire battre, devant le propulseur, deux faisceaux laser (voir Fig. 3.2), légèrement décalés d'une fréquence  $f_{dec}$ , bien inférieure à la fréquence des lasers mais bien supérieure aux fréquences caractéristiques des fluctuations de densité. L'un des faisceaux, le faisceau dit primaire, le plus puissant des deux, sera principalement diffusé par les particules, tandis que l'autre, appelé Oscillateur Local (OL), servira de porteuse et sera focalisé sur le détecteur. La puissance sur le détecteur est alors proportionnelle au carré du module de la somme du champ diffusé total dans la direction du faisceau, noté  $\mathbf{E}_{total}$ , et du champ de la porteuse  $\mathbf{E}_{OL}$ , c'est-à-dire

$$P_{\text{détecteur}} \propto \left\langle \left| \mathbf{E}_{\text{total}}(\mathbf{r}', t) + \mathbf{E}_{OL}(\mathbf{r}', t) \right|^2 \right\rangle_{T_{\text{détecteur}}}, \quad (3.4)$$



**Figure 3.2:** Principe de la détection hétérodyne appliquée au propulseur à effet Hall. On fait battre deux faisceaux devant le plan de sortie du propulseur, leur croisement (zone grisée) définit alors le volume de mesure du diagnostic. Le faisceau primaire (bleu foncé, de fréquence  $f_p$ ) est diffusé par les électrons du plasma et le faisceau oscillateur local (bleu clair, de fréquence  $f_{OL} = f_p - f_{dec}$ ) sert de porteuse au signal diffusé. Grâce au décalage en fréquence de l'OL, la puissance spectrale sur le détecteur est translatée de la fréquence  $f_{dec}$  par rapport à la fréquence du laser  $f_p$  et permet de conserver l'information de phase du signal.

où  $\langle \rangle_{T_{\text{détecteur}}}$  représente la moyenne temporelle sur le temps caractéristique d'intégration du détecteur  $T_{\text{détecteur}}$ .

Avec une électronique adaptée, on peut ne garder que le terme croisé de cette expression et on démontre [50] qu'on obtient un signal, centré sur la fréquence  $f_{dec}$ . Celui-ci est alors proportionnel à la partie réelle de la transformée de Fourier de la densité, modulée par le produit de l'amplitude  $E_{OL}(\mathbf{r})$  de l'oscillateur local et du champ diffusé par une particule seule  $E_d(\mathbf{r})$ . En séparant le signal hétérodyne en deux voies et en multipliant chacune d'elles par un signal de pulsation  $f_{dec}$ , l'un en cosinus, l'autre en sinus, on obtient le signal complexe proportionnel à la transformée de Fourier des fluctuations de densité, pondérée par la fonction profil  $U(\mathbf{r})$ . Cette dernière est définie par le croisement des deux faisceaux et est donnée par l'expression

$$U(\mathbf{r}) = \frac{E_{i,0}(\mathbf{r}) E_{OL}(\mathbf{r})}{E_{i,0} E_{OL}}, \quad (3.5)$$

où  $E_{i,0}$  et  $E_{OL}$  sont, respectivement, les amplitudes maximales du champ électrique des deux faisceaux lasers, primaire et OL.

La transformée de Fourier d'un produit de deux fonctions étant le produit de convolution des transformées de Fourier de chaque fonction, le densité de puissance spectrale normalisée peut donc se mettre sous la forme

$$\bar{I}(\mathbf{k}, f) = \frac{I(\mathbf{k}, f)}{I_{ph}(f)} = R_0 \iiint d^3\mathbf{k}' |W(\mathbf{k} - \mathbf{k}')|^2 S(\mathbf{k}', f). \quad (3.6)$$

Pour obtenir cette expression, il est nécessaire de considérer que les modes spatiaux ne sont pas corrélés dans le milieu turbulent comme le fait Holzhauser et al. [33]. Rappelons que  $S(\mathbf{k}, f)$  est le facteur de forme dynamique défini par

$$S(\mathbf{k}, f) = \frac{\langle |\tilde{n}(\mathbf{k}, f)|^2 \rangle}{n_0 V T}. \quad (3.7)$$

La grandeur  $I(\mathbf{k}, f)$  est la densité de puissance spectrale du signal électrique détecté et la grandeur  $I_{ph}(f)$  la densité de puissance spectrale du bruit photonique dû à l'oscillateur local. L'amplitude  $R_0$  est définie par

$$R_0 = 2 \frac{\eta P_i \lambda_i^2 r_0^2}{h \omega_i w_0^2} n_0 L, \quad (3.8)$$

où  $\lambda_i$ ,  $w_0$  et  $P_i$  désignent respectivement, la longueur d'onde du laser, le pincement et la puissance du faisceau,  $n_0$  et  $L$  sont respectivement la densité moyenne et la longueur du volume de mesure dans la direction  $z$ ,  $\eta$  l'efficacité quantique du détecteur et  $h$  est la constante de Planck. La fonction  $|W(\mathbf{k})|^2$  représente, quant à elle, le carré de la transformée de Fourier de la fonction profil  $U(\mathbf{r})$ . Dans le cas de faisceaux gaussiens et dans le cas de la diffusion collective vers l'avant<sup>11</sup>, cette fonction peut s'écrire sous la forme

$$|W(\mathbf{k})|^2 = \frac{e^{-\frac{\|\mathbf{k}_\perp\|^2}{2\Delta k^2}}}{\left(\sqrt{2\pi\Delta k^2}\right)^2} \delta(k_z), \quad (3.9)$$

où  $\Delta k = \sqrt{2}/w_0$  est l'écart-type du faisceau gaussien dans l'espace  $\mathbf{k}$  de Fourier [33]. Le vecteur  $\mathbf{k}_\perp$  est le vecteur d'onde dans le plan orthogonal à la direction  $k_z$  du faisceau laser principal et  $\delta$  est la distribution de Dirac.

Notons enfin que la puissance spectrale  $I(\mathbf{k}, f)$  est proportionnelle à l'intensité de l'OL par construction du montage de détection hétérodyne. Il est alors possible d'augmenter la puissance du signal en gardant tous les bruits constants, hormis le bruit photonique de l'OL,  $I_{ph}(f)$ , qui augmente dans les mêmes proportions. Cette technique permet d'améliorer le rapport signal sur bruit jusqu'à ce que le bruit photonique soit le seul bruit non négligeable. Le rapport signal sur bruit est alors optimal. En particulier, il est inutile de refroidir toute la chaîne de mesure pour diminuer le rayonnement du corps noir bien que celui-ci présente son maximum dans la gamme de fréquence du laser CO<sub>2</sub> utilisé, à température ambiante. Le bruit photonique de l'OL étant alors le bruit dominant, le rapport  $\bar{I}(\mathbf{k}, f)$  est bien le rapport signal sur bruit.

Ainsi, le signal (Eq. 3.6) est proportionnel à la convolution entre  $|W(\mathbf{k})|^2$  et le facteur de forme dynamique  $S(\mathbf{k}, f)$ . Si la largeur du spectre des fluctuations de densité est grande comparée à celle de  $|W(\mathbf{k})|^2$ , le facteur de forme dynamique peut être considéré constant sur l'intervalle en  $\mathbf{k}$  pour lequel  $|W(\mathbf{k})|^2$  est non nul et la densité de puissance spectrale peut se réécrire plus simplement

$$\bar{I}(\mathbf{k}, f) = R_0 S(\mathbf{k}, f). \quad (3.10)$$

---

11. C'est à dire que l'angle de diffusion  $\theta$  défini en Fig. 3.1 est faible

Sous cette condition, le signal mesuré par la diffusion collective est proportionnel au facteur de forme dynamique pour un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  donné. Pour la plupart des expériences de diffusion collective, l'hypothèse émise pour écrire l'Eq. 3.10 est considérée valide. Tout au plus, un élargissement du spectre en  $k$  est pris en compte [66], mais aucun effet sur le facteur de forme dynamique n'est considéré. Nous montrerons par la suite que cet effet est sensible dans le cas de la diffusion collective appliquée au propulseur à effet Hall et que la fréquence moyenne du facteur de forme dynamique est modifiée par la fonction de transfert du diagnostic.

Dans la partie suivante, nous allons rechercher la condition sur l'amplitude du spectre des fluctuations de densité pour détecter un signal avec ce diagnostic.

### 3.1.5 Conditions d'obtention d'un rapport signal sur bruit supérieur à un

L'expression 3.10 est également utile pour déterminer un critère sur la valeur moyenne des fluctuations de densité  $\langle |\tilde{n}(\mathbf{k}, f)|^2 \rangle$  et sur les paramètres laser tels qu'un signal puisse être détecté à l'aide de la diffusion collective. Le signal peut être mesuré quand le rapport signal sur bruit  $\bar{I}(\mathbf{k}, f)$  est de l'ordre de 1. En utilisant les Eqs. 3.8, 3.7 et 3.10, le critère sur le spectre des fluctuations de densité est donné par

$$\frac{\langle |\tilde{n}(\mathbf{k}, f)|^2 \rangle}{T} \gtrsim \frac{V h \omega_i w_0^2}{2 \eta P_i \lambda_i^2 r_0^2 L}, \quad (3.11)$$

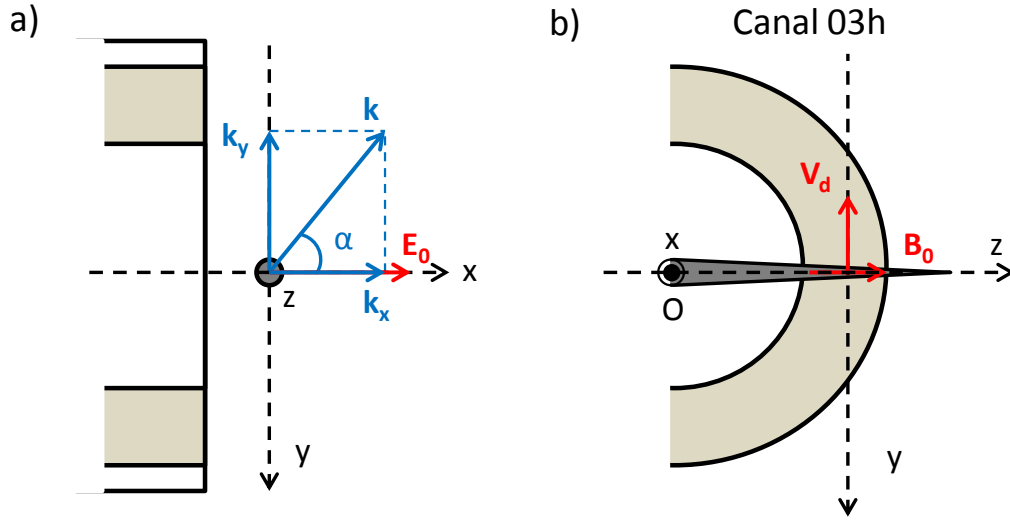
qui est indépendant de la densité moyenne  $n_0$ , a priori inconnue. Un autre critère, faisant intervenir la densité  $n_0$ , peut être obtenu en utilisant le facteur de forme dynamique, c'est-à-dire

$$S(\mathbf{k}, f) \gtrsim \frac{1}{n_0} \frac{h \omega_i w_0^2}{2 \eta P_i \lambda_i^2 r_0^2 L}. \quad (3.12)$$

L'amplitude du spectre des fluctuations de densité doit donc vérifier l'inégalité 3.11 si l'on veut pouvoir détecter un signal suffisant avec le diagnostic.

### 3.1.6 Caractéristiques du banc optique PRAXIS utilisé sur le moyen d'essai PIVOINE

De façon à mesurer la densité de puissance spectrale définie en Eq. 3.6, le banc optique PRAXIS a été conçu [72, 75, 71] et utilisé sur le moyen d'essai PIVOINE [48]. Un laser CO<sub>2</sub> monomode émettant dans l'infrarouge ( $\lambda_i=10,6 \mu\text{m}$ ), de puissance moyenne 40 W, est utilisé pour générer le faisceau primaire et l'OL. La lumière diffusée est mesurée par un détecteur à haute efficacité quantique ( $\eta=0,6$ ), utilisé par le montage de la détection super hétérodyne décrit précédemment. La fréquence de l'oscillateur local est réduite de  $f_{dec}=40$  MHz par rapport à celle du faisceau principal. Les deux faisceaux se croisent au foyer d'une lentille de focale  $f_{lentille}=2$  m. La taille des pincements lasers a été augmentée à  $w_0=3,4$  mm par rapport aux campagnes décrites dans la thèse de Tsikata [71], de façon à observer des fluctuations à des longueurs d'onde plus grandes. En général, les observations sont



**Figure 3.3:** a) Vue de profil du propulseur et du volume de mesure (cercle gris). L'angle  $\alpha$  est l'angle entre la direction axiale  $x$  du champ électrique  $\mathbf{E}_0$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . b) Vue de face du côté 03h du propulseur. Le volume de mesure forme un triangle gris sur la figure. De ce côté du propulseur, le champ magnétique radial est dans la direction  $z$  et la direction  $y$  est anti-parallèle à la vitesse de dérive  $\mathbf{V}_d$ . La fréquence de l'instabilité de dérive  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  est positive lorsque le vecteur d'onde est dans le sens de la vitesse  $\mathbf{V}_d$  [71], c'est-à-dire lorsque  $\alpha$  vaut  $90^\circ$ , de ce côté du propulseur et avec nos conventions. Pour ce même angle d'observation, la fréquence est négative du côté 09h du propulseur (non représenté) puisque la vitesse de dérive serait orientées suivant  $y$ .

réalisées à une distance de 11 mm par rapport au plan de sortie du propulseur. On peut faire varier l'angle de diffusion  $\theta$  (voir la Fig. 3.1) entre 7 et 20 mrad, ce qui correspond à un vecteur d'onde d'observation  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i$  variant de 4000 à 12 000 rad/m.

Nous rappelons ici certaines caractéristiques importantes du diagnostic qui ont déjà été présentées dans le chapitre 1. Un translateur-rotateur sur le banc optique permet de faire varier la norme et la direction  $\alpha$  du vecteur  $\mathbf{k}$ . L'angle  $\alpha$  est l'angle entre la direction axiale  $x$  et  $\mathbf{k}$ , comme défini sur la Fig. 3.3. Le volume de mesure est typiquement aussi large que le diamètre du propulseur (sa longueur varie avec l'angle de diffusion  $\theta$ ). Le signal correspond donc à l'intégration des fluctuations provenant des deux canaux, alors qu'aucun signal ne provient du milieu du propulseur puisque la densité du plasma dans cette région est très faible à la distance 11 mm par rapport au plan de sortie. Par conséquent, lorsque  $\alpha=90^\circ$ , le vecteur d'onde peut être considéré le long de la direction azimutale. Nous considérerons également que l'axe  $(O,z)$ , c'est-à-dire l'axe du faisceau laser, est parallèle au champ magnétique local. Comme expliqué dans le chapitre 1, les signaux provenant de canaux opposés ont des fréquences opposées.

A l'aide de tous ces paramètres, il est alors possible de calculer le minimum de la densité de puissance spectrale des fluctuations de densité pour que le signal de diffusion



soit détectable, en utilisant l'Eq. 3.11. L'application numérique donne

$$\frac{\langle |\tilde{n}(\mathbf{k}, f)|^2 \rangle}{T} \gtrsim 1,2 \times 10^8 s. \quad (3.13)$$

Si nous supposons à présent que la densité moyenne en sortie du propulseur est de l'ordre de  $5 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$  (estimation donnée par les codes PIC [1]), la condition sur le facteur de forme dynamique pour un angle de diffusion  $\theta=13,5 \text{ mrad}$  est

$$S(\mathbf{k}, f) \gtrsim 1,7 \times 10^{-4} s.$$

## 3.2 Effet d'appareil dans le cas du mode azimuthal

Lorsque la largeur caractéristique du spectre spatial des fluctuations de densité est du même ordre de grandeur que la résolution du diagnostic  $\Delta k$ , le signal mesuré par la diffusion collective doit être déconvolué pour pouvoir estimer le facteur de forme dynamique correctement. Il est alors nécessaire de vérifier si la convolution est négligeable ou non pour les modes décrits dans le chapitre 1 : le mode axial et le mode azimuthal. Pour le mode axial, nous avons vu que sa largeur angulaire (avec l'angle  $\alpha$ ) était très grande et que l'écart-type de la gaussienne ajustée à son facteur de forme statique est de l'ordre de  $25^\circ$ , bien supérieure à l'ouverture de l'angle solide correspondant à la résolution du diagnostic  $\Delta k/k \sim 5^\circ$  (au maximum). Par contre, la largeur des fluctuations en  $\alpha$  pour le mode azimuthal est de l'ordre de  $6^\circ$  et l'effet de la convolution ne peut pas être négligé. Dans cette section, cet effet sera tout d'abord calculé, puis nous présenterons la méthode utilisée pour le corriger.

### 3.2.1 Convolution pour une petite ouverture angulaire du faisceau laser

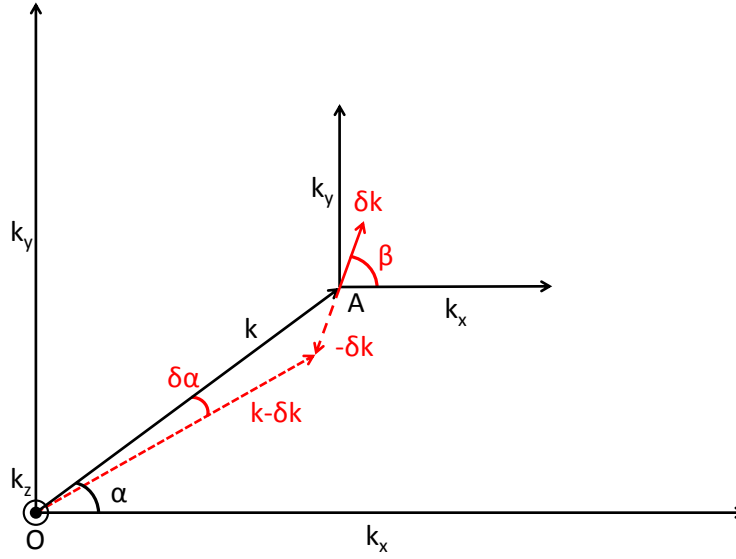
La réécriture de l'Eq. 3.6 dans le système de coordonnées cylindriques  $(A, \delta k, \beta, k_z)$ , défini sur la Fig. 3.4, donne

$$\begin{aligned} \bar{I}(k, \alpha, k_z, f) &= R_0 \int_{\mathbb{R}^+} \delta k d(\delta k) \frac{e^{-\frac{\delta k^2}{2\Delta k^2}}}{\left(\sqrt{2\pi}\Delta k^2\right)^2} \\ &\times \int_{[-\pi, \pi]} d\beta S(\|\mathbf{k} - \delta\mathbf{k}\|, \alpha - \delta\alpha, k_z, f), \end{aligned} \quad (3.14)$$

où l'on a considéré un profil de laser gaussien tel que  $|W(\mathbf{k})|^2$  soit comme défini en Eq. 3.9.

La quantité  $\|\mathbf{k} - \delta\mathbf{k}\|$  est donnée par

$$\|\mathbf{k} - \delta\mathbf{k}\| = k \sqrt{1 + \frac{\delta k^2 - 2k\delta k \cos(\beta - \alpha)}{k^2}} \quad (3.15)$$



**Figure 3.4:** Systèmes de coordonnées cartésiennes  $(A, k_x, k_y, k_z)$  et polaires  $(A, \delta k, \beta, k_z)$  dans l'espace de Fourier  $\mathbf{k}$ . Les axes  $(O, k_z)$  et  $(O, k_x)$  sont, respectivement, la direction du faisceau laser et l'axe du propulseur.

et  $\delta\alpha$  par

$$\delta\alpha = \frac{\delta k}{k} \sin(\beta - \alpha). \quad (3.16)$$

Afin de simplifier l'Eq. 3.14, nous allons changer les variables  $\delta k$  et  $\beta$  en  $\delta k_l = k - \|\mathbf{k} - \delta\mathbf{k}\|$  et  $\delta\alpha$ . Puisque la gaussienne décroît très vite avec  $\delta k$ , seules les valeurs de  $\delta k$  comprises entre  $[0, 3\Delta k]$  contribuent à l'intégrale. Par conséquent, nous pouvons considérer que le paramètre  $\delta k/k$  est très petit dans les Eqs. 3.15 et 3.16 puisque  $k \gg \Delta k$ . Avec cette approximation, le Jacobien de la transformation  $(\delta k, \beta)$  en  $(\delta k_l, \delta\alpha)$  vaut simplement  $J = k/\delta k$  au premier ordre. Ainsi, la puissance spectrale devient

$$\begin{aligned} \bar{I}(k, \alpha, f) &= R_0 \int_{\mathbb{R}} d(\delta k_l) \frac{e^{-\frac{\delta k_l^2}{2\Delta k^2}}}{(\sqrt{2\pi\Delta k^2})^2} \\ &\times \int_{\mathbb{R}} d(\delta\alpha) S(k - \delta k_l, \alpha - \delta\alpha, f) \frac{e^{-\frac{k^2 \delta\alpha^2}{2\Delta k^2}}}{\sqrt{2\pi \frac{\Delta k^2}{k^2}}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les variables  $\delta k_l$  et  $\delta\alpha$  devraient être comprises, respectivement, entre  $[-\infty, k]$  et  $[-\pi, \pi]$ , mais les intervalles sont étendus à  $\mathbb{R}^2$  puisque les deux fonctions gaussiennes tendent rapidement vers zéro après avoir dépassé trois fois leurs écarts-types.

Cette expression de la puissance spectrale sera utilisée pour calculer l'effet de la fonction de transfert du diagnostic. Pour ce faire, il faudra se donner a priori pour le facteur de forme dynamique.

### 3.2.2 Facteur de forme statique

Avant de calculer la convolution de la fonction d'appareil avec le facteur de forme dynamique, nous allons d'abord regarder comment le facteur de forme statique est modifié. Il faut alors se donner une forme analytique pour pouvoir calculer la puissance spectrale. Nous rappelons ici que le facteur de forme statique convolué ou expérimental décroît exponentiellement avec le nombre d'onde  $k$  et est une fonction gaussienne de l'angle  $\alpha$  avec un maximum en  $\alpha \neq 90^\circ$ . Comme le produit de convolution de deux gaussiennes redonne une gaussienne et comme la convolution d'une exponentielle avec une gaussienne redonne une exponentielle, nous prendrons une expression similaire pour le facteur de forme avant convolution et celui observé expérimentalement, c'est-à-dire

$$S(k, \alpha) = Ae^{-\rho k} e^{-\frac{(\alpha - \alpha_{max})^2}{2\Delta\alpha^2}}, \quad (3.18)$$

où  $A$  est l'amplitude,  $\rho$  la longueur caractéristique de décroissance de l'exponentielle,  $\alpha_{max}$  l'angle central de la gaussienne et  $\Delta\alpha$  son écart-type. Ce sont ces quantités que nous allons chercher en fonction de celles mesurées expérimentalement.

Le calcul de la convolution avec l'expression 3.18 pour le facteur de forme statique donne un signal de même forme mais avec une amplitude  $A_0$  modifiée, un écart-type  $\Delta\alpha_0$  modifié et un nombre d'onde  $k_0$  également modifié. Ces trois quantités observables sont données par les formules ci-dessous

$$\begin{aligned} A_0 &= A \sqrt{\frac{\Delta\alpha^2}{\Delta\alpha^2 + \frac{\Delta k^2}{k^2}}} \\ \Delta\alpha_0 &= \sqrt{\Delta\alpha^2 + \frac{\Delta k^2}{k^2}}. \\ k_0 &= k - \frac{\Delta k^2}{2} \rho \end{aligned} \quad (3.19)$$

La longueur  $\rho$  reste pour sa part inchangée. On remarque que lorsque  $\Delta k$  tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque le profil gaussien du faisceau laser tend vers une distribution de Dirac dans l'espace de Fourier, l'amplitude, l'écart-type et le nombre d'onde convolués tendent vers les valeurs physiques. Comme la valeur de  $\rho$  n'est pas modifiée par la convolution, il est possible d'estimer la quantité  $\Delta k^2 \rho / 2$  à partir des observations par diffusion collective. Dans le chapitre 1, nous avons rappelé que  $\rho$  vaut environ 0,36 mm. Dans ce cas, le nombre d'onde  $k_0$  diffère de  $k$  par seulement 31 rad/m, ce qui modifie l'amplitude du facteur de forme statique par un facteur 1,01. Par conséquent, nous considérerons que le nombre d'onde n'est pas affecté par la convolution et que seuls l'amplitude et l'écart-type doivent être corrigés.

### 3.2.3 Facteur de forme dynamique

Similairement à ce que nous avons fait pour le facteur de forme statique, nous devons nous donner une expression analytique pour le facteur de forme dynamique. Les données

brutes montrent que le signal est une fonction gaussienne de la fréquence  $f$ . Nous supposons donc que c'est aussi le cas pour le facteur de forme dynamique avant convolution et  $S(k, \alpha, f)$  est alors le produit du facteur de forme statique et de cette gaussienne en  $f$ , c'est-à-dire

$$S(k, \alpha, f) = S(k, \alpha) \frac{e^{-\frac{(f-f_D(\alpha, k))^2}{2\Delta f^2}}}{\left(\sqrt{2\pi\Delta f^2}\right)^2}, \quad (3.20)$$

où  $\Delta f$  est l'écart-type de la gaussienne et  $f_D(\alpha, k)$  la relation de dispersion du mode azimutal. Lorsqu'il n'y a pas de résonance visible sur la relation de dispersion (et lorsque  $V_d \ll v_{the}$ ), nous avons vu dans le chapitre 2 que la fréquence ne dépend pas de  $\alpha$  dans le référentiel des ions. Il faut simplement ajouter un effet Doppler lorsque l'on retourne dans le référentiel du laboratoire et on peut donc écrire la relation de dispersion sous la forme

$$f_D(\alpha, k) = \frac{kv_p}{2\pi} \cos(\alpha) + f_0(k),$$

où  $kv_p \cos(\alpha)$  est l'effet Doppler et  $f_0(k)$  la fréquence isotrope dans le référentiel des ions. Cette fréquence est supposée varier de manière affine avec le nombre d'onde puisque le mode est proche de l'onde acoustique ionique et que la courbure n'est pas très importante sur l'intervalle de nombre d'onde étudié. Ainsi, la fréquence dans le référentiel des ions s'écrit

$$f_0(k) = \frac{kv_g}{2\pi} + f_{cst}, \quad (3.21)$$

où  $v_g$  est la vitesse de groupe et la fréquence  $f_{cst}$  est l'ordonnée à l'origine.

Avec ces expressions, le calcul de la puissance spectrale donnée par l'Eq. 3.17 se fait en deux étapes. La convolution en  $\delta k_l$  donne

$$C_{\delta k_l}(k, \alpha, f) = S(k_0, \alpha) \frac{e^{-\frac{(f-f_D(\alpha, 2k_0-k))^2}{2\Delta f'^2}}}{\left(\sqrt{2\pi\Delta f'^2}\right)^2}, \quad (3.22)$$

avec  $\Delta f'$  définie par

$$\Delta f' = \sqrt{\Delta f^2 + \Delta f_{kl}^2} \quad (3.23)$$

et  $\Delta f_{kl}$  par

$$\Delta f_{kl}(\alpha) = \frac{\Delta k}{2\pi} (v_g + v_p \cos(\alpha)). \quad (3.24)$$

La convolution en  $\delta k_l$  modifie le nombre d'onde  $k$  du facteur de forme statique et de la relation de dispersion. Comme nous l'avons expliqué précédemment, cette modification est négligeable puisque  $\rho k_0 \sim \rho k$  et le facteur de forme dynamique est très peu modifié, sa fréquence moyenne restant identique. Seule la largeur de la gaussienne est légèrement

modifiée, comme considéré dans la section VII de la Ref. [75]. Cependant, nous supposons que, pour les valeurs de  $\alpha$  qui contribuent à la convolution en  $\delta\alpha$ , cet élargissement en fréquence est négligeable

$$\Delta f^2 \gg \Delta f_{kl}^2(\alpha), \quad (3.25)$$

de sorte que  $\Delta f' \simeq \Delta f$ . Cette hypothèse sera vérifiée dans la section suivante, lorsque les paramètres  $v_g$  et  $v_p$  seront estimés à partir des données expérimentales.

Malgré la simplification introduite par cette approximation, le calcul de la convolution en  $\delta\alpha$  n'est pas évident en raison de la dépendance en cosinus dans la gaussienne. Néanmoins, ce cosinus peut être linéarisé en notant que les valeurs de  $\delta\alpha$  qui contribuent à l'intégrale sont comprises entre  $[\alpha_{max} - 3\Delta\alpha, \alpha_{max} + 3\Delta\alpha]$ , avec  $\Delta\alpha$  de l'ordre de quelques degrés. Un développement limité du cosinus en  $\alpha_{max}$  donne alors

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha_{max}) - \sin(\alpha_{max})(\alpha - \alpha_{max}). \quad (3.26)$$

Avec cette dernière hypothèse, le spectre en puissance est calculé et on trouve

$$\bar{I}(k, \alpha, f) = R_0 \frac{A_0}{\sqrt{2\pi\Delta f_0^2}} e^{-\rho k} e^{-\frac{(\alpha - \alpha_{max})^2}{2\Delta\alpha^2}} e^{-\frac{(f - f_D(\alpha_0, k))^2}{2\Delta f_0^2}}, \quad (3.27)$$

où  $A_0$  et  $\Delta\alpha_0$  sont données par les Eqs. 3.19 et  $\Delta f_0$  et  $\alpha_0$  par

$$\Delta f_0 = \sqrt{\Delta f^2 + \Delta f_\alpha^2}, \quad (3.28)$$

avec

$$\Delta f_\alpha = \frac{\Delta k \Delta \alpha}{\sqrt{k^2 \Delta \alpha^2 + \Delta k^2}} \frac{k v_p}{2\pi} \sin(\alpha_{max}) \quad (3.29)$$

et

$$\alpha_0 = \frac{\alpha \Delta \alpha^2 + \alpha_{max} \frac{\Delta k^2}{k^2}}{\Delta \alpha^2 + \frac{\Delta k^2}{k^2}}. \quad (3.30)$$

A partir de l'Eq. 3.28, il est alors possible d'estimer l'écart-type physique  $\Delta f$  du mode. Comme il est nécessaire de connaître  $v_p$ ,  $\Delta\alpha$  et  $\alpha_{max}$ , cette quantité sera évaluée dans la section suivante afin de vérifier que l'approximation 3.25 est valide. L'équation 3.30 donne l'angle réel pour lequel le diagnostic de diffusion collective mesure la relation de dispersion. L'angle expérimental  $\alpha$  étant fixé sur le banc optique, on mesure en fait la relation de dispersion dans la direction  $\alpha_0$  qui est ramenée vers  $\alpha_{max}$ , correspondant au maximum du signal de diffusion. La mesure correspondant à l'angle  $\alpha_{max}$  est donc la seule mesure qui n'est pas affectée par la convolution. Notons également que l'on trouve la même formule pour l'angle  $\alpha_0$  si l'on suppose que le facteur de forme dynamique est une fonction de Dirac avec la fréquence  $f$ . Cette correction n'est alors probablement pas trop sensible à la forme de la dépendance du facteur de forme dynamique en  $f$ .

L'effet de la convolution sur le facteur de forme statique et dynamique ayant été calculé, nous pouvons appliquer ces résultats aux données expérimentales pour le mode azimutal.

## 3.3 Déconvolution du signal de diffusion collective pour le mode azimutal

### 3.3.1 Paramètres du propulseur

Dans toute cette section, nous présenterons les données expérimentales obtenues pour le propulseur 5kW PPS-X000<sup>®</sup> développé par la Snecma. Les principaux paramètres d'opération de ce propulseur sont les suivants : du xénon est injecté à l'anode à l'intérieur du canal du propulseur de largeur 5 mm à un débit massique de 16 mg/s. La tension d'accélération vaut 300 V et le courant de décharge environ 17 A. Le volume de mesure croise le jet de plasma 11 mm en avant du plan de sortie du propulseur. Le champ magnétique au niveau du volume de mesure est environ égal à 15 mT.

### 3.3.2 Données brutes

Nous présentons dans cette partie les données brutes (avant déconvolution) obtenues à l'aide du diagnostic de diffusion collective pour les paramètres du propulseur présentés ci-avant. La figure 3.5a présente le facteur de forme statique en fonction de l'angle  $\alpha$  pour différentes valeurs du nombre d'onde  $k$ . Comme expliqué dans le chapitre 1, sa forme semble gaussienne et on observe que son amplitude décroît à mesure que l'on augmente  $k$ . L'erreur normalisée (Normalised Root Mean Square Error en anglais) définie par

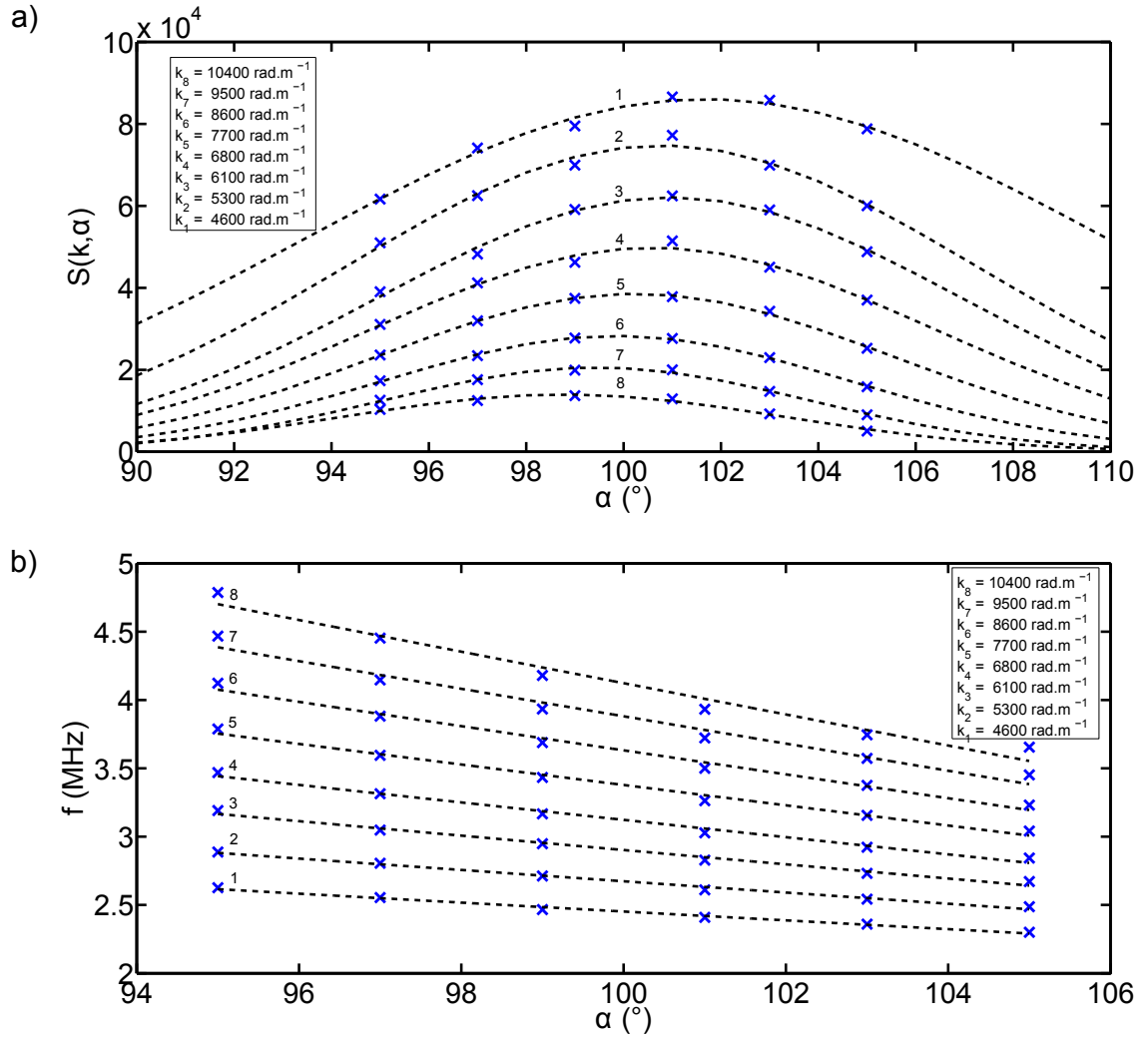
$$\text{NRMSE} = \frac{1}{S_{exp,max} - S_{exp,min}} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N (S_{n,fit} - S_{n,exp})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

comme l'erreur entre l'ajustement gaussien  $S_{fit}$  (courbes en pointillés noirs) et les données expérimentales  $S_{exp}$  (croix bleues) est inférieure à 4%, prouvant qu'une gaussienne correspond bien aux points expérimentaux. Malheureusement, l'intervalle exploré en  $\alpha$  n'est pas assez grand pour décrire complètement la gaussienne, résultant en une incertitude sur la détermination de l'écart-type  $\Delta\alpha_0$ . Pourtant, nous utiliserons cette valeur de  $\Delta\alpha_0$  pour déconvoluer le facteur de forme statique et la relation de dispersion dans la section suivante.

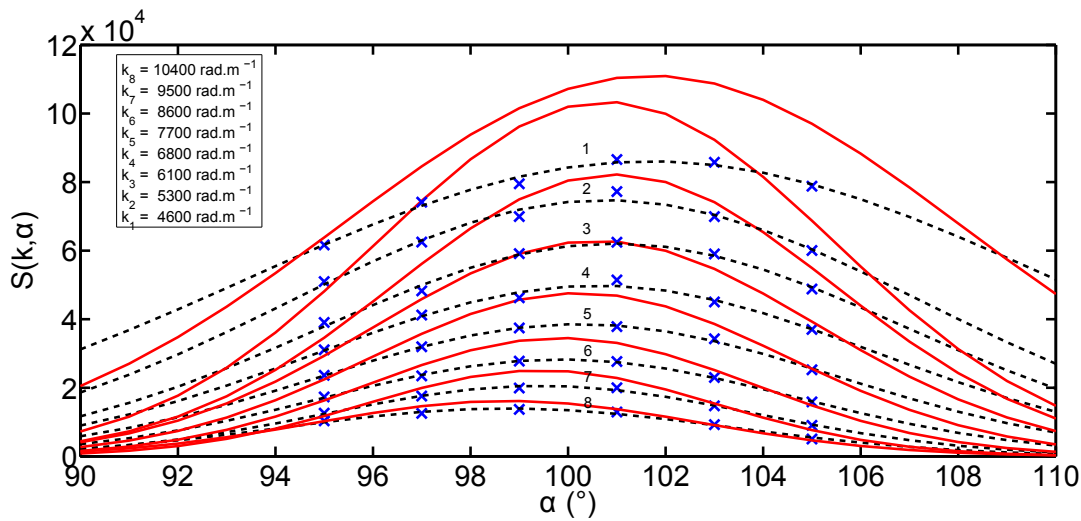
La figure 3.5b montre les relations de dispersion obtenues pour les mêmes séries que celle de la Fig. 3.5a en fonction de  $\alpha$  et pour différents  $k$ . La fréquence décroît avec  $\alpha$  mais augmente avec  $k$ , comme observé antérieurement [71]. Comme nous l'avons déjà dit, la fréquence est supposée être isotrope une fois l'effet Doppler dû au paramètre  $v_p$  soustrait. Nous pouvons alors ajuster l'expression

$$f_{fit} = f_0(k) + \frac{kv_p}{2\pi} \cos(\alpha) \quad (3.32)$$

sur la variation en  $\alpha$  de la fréquence (courbes en pointillés noirs). Le résultat de ces ajustements donne les paramètres  $v_p$  et  $f_0$  qui évoluent avec le nombre d'onde  $k$ . L'effet de la convolution sur ces deux paramètres sera étudié dans les parties suivantes.



**Figure 3.5:** a) Facteur de forme statique (croix bleues) en fonction de  $\alpha$  et son ajustement gaussien (pointillés noirs). b) Fréquence moyenne (croix bleues) du facteur de forme dynamique en fonction de  $\alpha$  et son ajustement (pointillés noirs) avec la fonction donnée à l'Eq. 3.32, les paramètres ajustables étant  $f_0$  et  $v_p$ .



**Figure 3.6:** Facteurs de forme statiques convolués et déconvolués en fonction de l'angle  $\alpha$ . Les croix bleues représentent les points expérimentaux déjà présentés en Fig. 3.5a, les lignes en pointillé sont les ajustements gaussiens correspondant et les courbes rouges sont les facteurs de forme déconvolués à l'aide des Eq. 3.19.

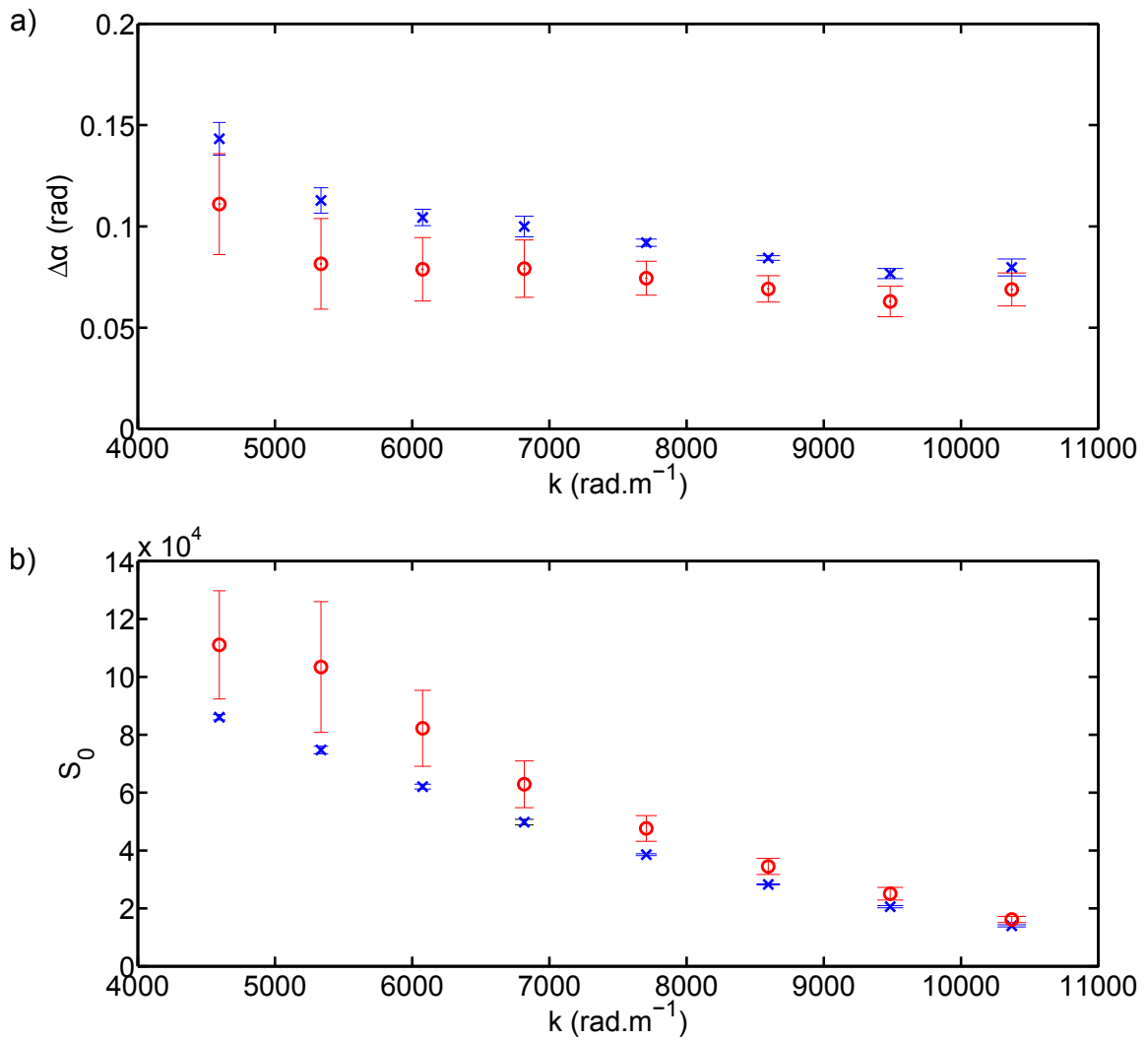
### 3.3.3 Facteur de forme statique déconvolué

En utilisant les résultats présentés précédemment, nous allons corriger le signal de la diffusion collective de la convolution. Comme il est nécessaire de connaître  $\Delta\alpha$  pour obtenir la relation de dispersion avec l'Eq. 3.30, nous déconvoluerons d'abord le facteur de forme statique. Sur la Fig. 3.6, les facteurs de forme bruts (croix bleues déjà présentées en Fig. 3.5a) et leur déconvolution (courbes rouges) sont présentés en fonction de l'angle  $\alpha$ . Le résultat de la déconvolution se traduit par une sous-estimation de l'amplitude des fluctuations par le diagnostic de diffusion collective alors que l'écart-type est lui surestimé. Par conséquent, les fluctuations sont concentrées dans des régions plus resserrées dans l'espace de Fourier qu'observées antérieurement [73]. Le centre  $\alpha_{max}$  de la gaussienne n'est pas modifié par la convolution et est presque constant avec le nombre d'onde  $k$ . Sa valeur est d'environ  $100^\circ$ , ce qui est cohérent avec la direction de propagation principale déjà observée en Réf. [73].

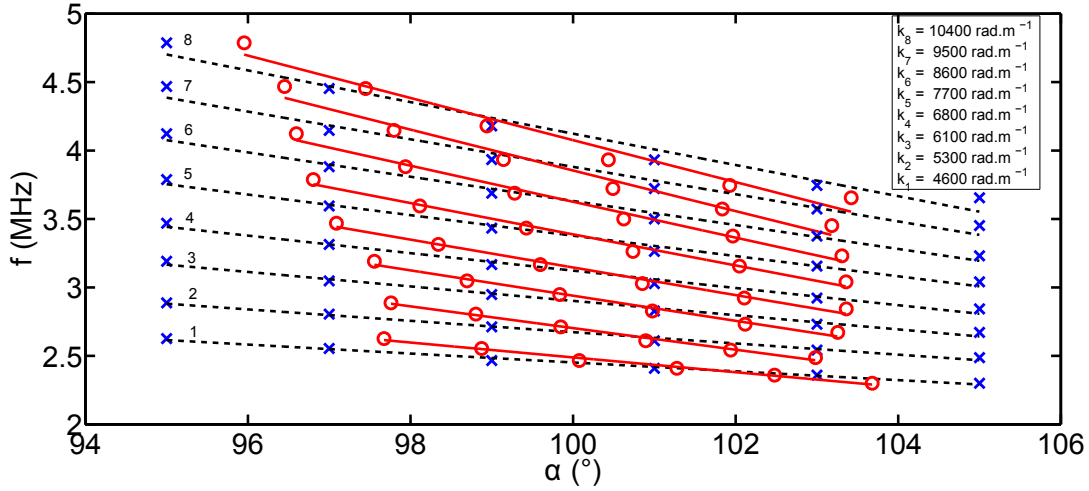
Les écarts-types obtenus par ajustement de gaussiennes et avec la formule 3.19 sont présentés sur la Fig. 3.7a en fonction de  $k$ . Comme mentionné dans la partie précédente, l'intervalle exploré en  $\alpha$  n'est pas assez large pour décrire totalement la gaussienne. L'écart-type est parfois aussi large que cet intervalle, ce qui conduit à des incertitudes d'autant plus grandes que  $\Delta\alpha_0$  est grand. Comme l'écart-type décroît avec  $k$ , l'erreur sur le premier écart-type corrigé  $\Delta\alpha$  (pour  $k = 4600$  rad/m) est plus importante que pour le dernier (pour  $k = 10400$  rad/m). Ainsi, si nous considérons que l'ajustement gaussien est moins précis pour  $k = 4600$  rad/m, le premier point  $\Delta\alpha = 111$  mrad est moins pertinent. Si nous omettons ce point,  $\Delta\alpha$  semble être constant, compris entre 63 et 82 mrad avec une valeur moyenne et un écart-type valant respectivement 74 et 6,3 mrad.

Sur la Fig. 3.7b, les amplitudes convoluées et corrigées sont présentées. Les deux dé-





**Figure 3.7:** Variations a) des écarts-types et b) des amplitudes des facteurs de forme bruts et déconvolués. Les croix bleues représentent les paramètres obtenus par ajustement de gaussiennes sur les données expérimentales tandis que les paramètres représentés par les cercles rouges ont été calculés à l'aide des Eqs. 3.19.



**Figure 3.8:** Variation de la fréquence avec l'angle pour différents nombres d'onde  $k$ . Les croix bleues représentent les données expérimentales en fonction de l'angle  $\alpha$  défini sur le banc optique et les cercles rouges représentent ces mêmes données en fonction de l'angle  $\alpha_0$ . Les courbes en pointillés noirs et en traits plein rouges sont les ajustements de la loi en cosinus définie en Eq. 3.32 sur les fréquences.

croissent avec  $k$  mais l'amplitude corrigée (cercles rouges) décroît plus rapidement jusqu'à tendre vers les valeurs de l'amplitude convoluée (les croix bleues) puisque  $\Delta k/k$  diminue. En résumé, après déconvolution l'écart-type de la gaussienne voit sa valeur réduite et devient indépendant du nombre d'onde  $k$ , sur l'intervalle exploré, alors que l'amplitude est sous évaluée par mesure directe, spécialement pour les petits nombres d'onde.

Notons que les erreurs sur  $\Delta\alpha_0$  et  $A_0$  sont données par les erreurs statistiques de l'ajustement gaussien, avec un intervalle de confiance de 95%, alors que les barres d'erreur sur  $\Delta\alpha$  et  $A$  sont calculées par propagation d'erreur à l'aide des deux formules suivantes

$$\begin{cases} d(\Delta\alpha) &= \frac{\Delta\alpha_0}{\Delta\alpha} d(\Delta\alpha_0) + \frac{2}{w_0^2 k^3 \Delta\alpha} dk + \frac{2}{w_0^3 k^2 \Delta\alpha} dw_0 \\ dA &= \frac{A_0}{A} \left( 1 + \frac{2}{w_0^2 k^2 \Delta\alpha^2} \right) dA_0 + \frac{A_0^2}{A} \frac{2}{k^2 w_0^2 \Delta\alpha^2} \left[ \frac{dk}{k} + \frac{dw_0}{w_0} + \frac{d\Delta\alpha}{\Delta\alpha} \right] \end{cases}, \quad (3.33)$$

où  $d(\Delta\alpha_0)$  et  $dA_0$  sont les erreurs statistiques sur l'écart-type et l'amplitude expérimentaux. L'erreur  $dk$  sur le nombre d'onde  $k$  est donnée par

$$dk = \frac{2\pi r_s}{\lambda_i f_{\text{lentille}}}, \quad (3.34)$$

avec  $r_s$  la taille de la tache que fait le primaire lors de la détermination de  $k$  (voir Réf. [71]) et estimée à 1,5 mm,. Enfin, l'erreur sur le pincement  $dw_0$  vaut environ 10% de  $w_0$  soit 0,34 mm.

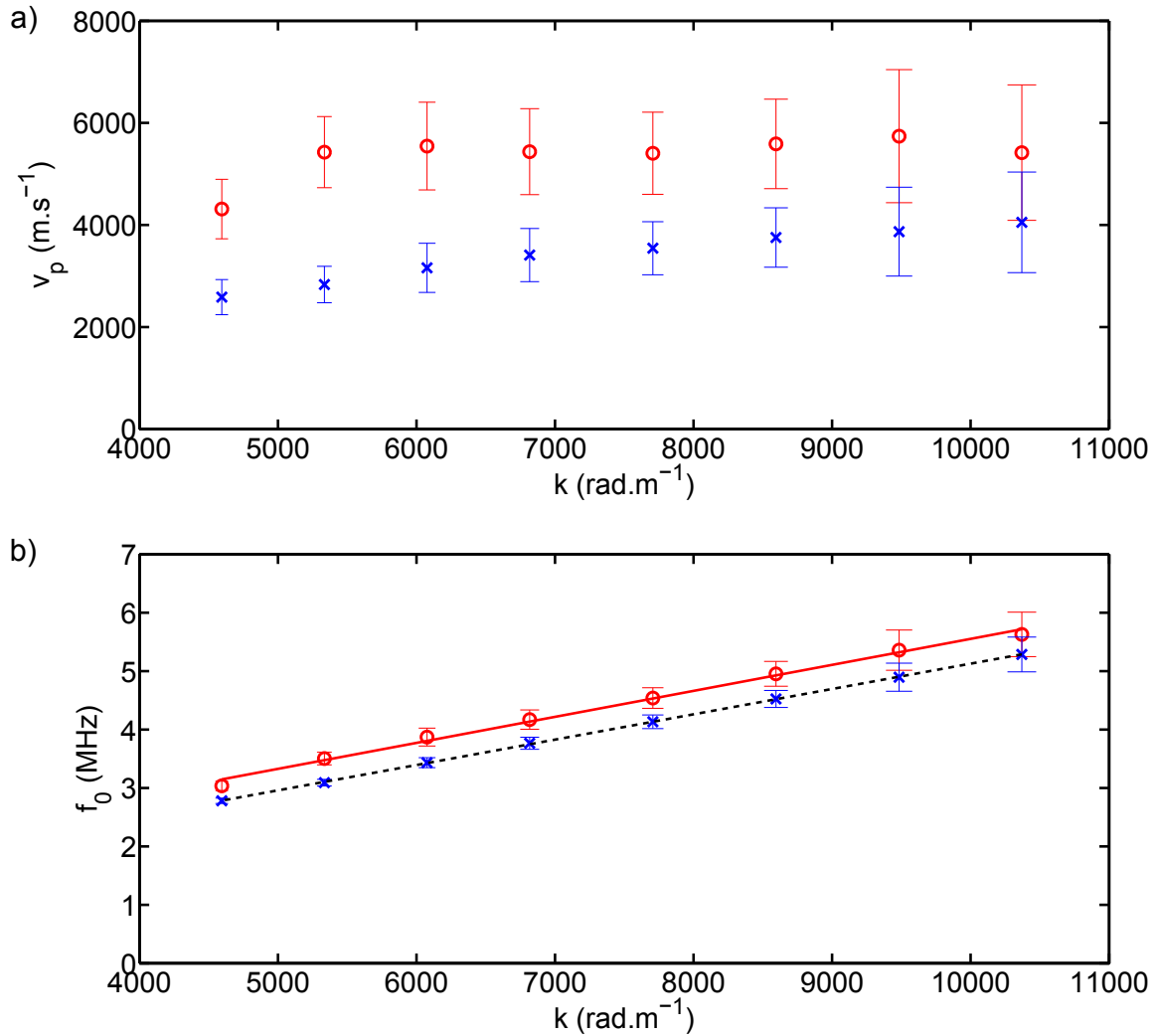
### 3.3.4 Relations de dispersion déconvoluées

En utilisant les résultats de la partie précédente ainsi que l'Eq. 3.30, il est possible de corriger les relations de dispersion expérimentales. La figure 3.8 montre les fréquences expérimentales (déjà présentées en Fig. 3.5b) en fonction de l'angle  $\alpha$  (l'angle expérimental, fixé par réglage du banc optique) et en fonction de  $\alpha_0$  (l'angle corrigé après la déconvolution, Eq. 3.30). Comme nous pouvons le voir, l'intervalle exploré en  $\alpha$  est réduit après correction (cercles rouges). Les fréquences sont alors plus resserrées autour de  $\alpha_{max}$ , augmentant la pente des relations de dispersion pour chaque courbe en  $k$ . Similairement à ce qui a été observé pour le facteur de forme, la correction est plus importante pour les petits nombres d'onde.

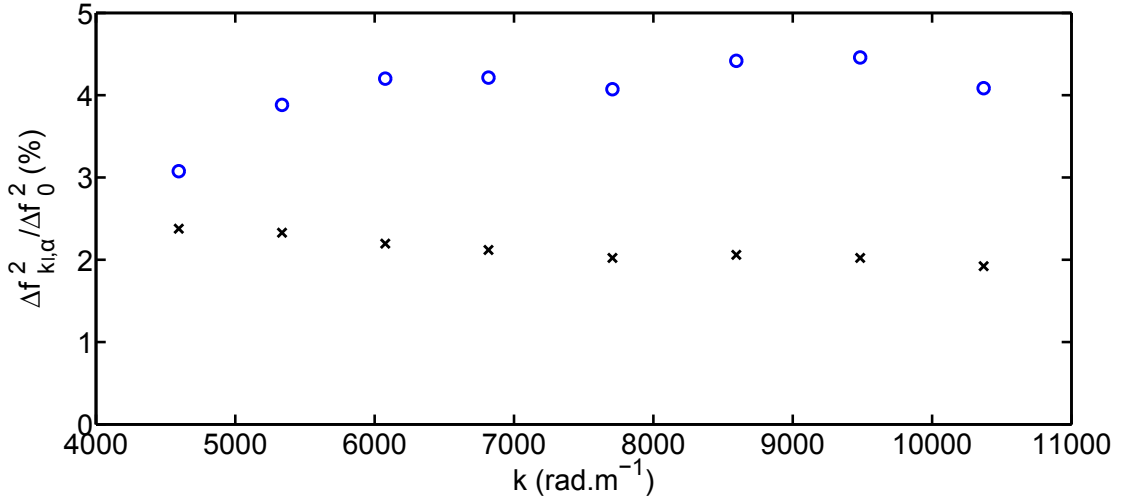
On ajuste sur les courbes une loi en cosinus définie en Eq. 3.32 et on obtient les deux paramètres  $v_p$  et  $f_0$ . La variation du paramètre  $v_p$  avec  $k$  est présentée en Fig. 3.9a. Dans le cas des relations de dispersion expérimentales, le paramètre  $v_p$  non corrigé (croix bleues) augmente de 2600 à 4050 m/s avec une valeur moyenne valant 3400 m/s et un écart-type égal à 480 m/s. Cette évolution n'est pas en accord avec la forme de la relation de dispersion déduite de l'étude cinétique, pour laquelle le paramètre  $v_p$  doit être indépendant du nombre d'onde  $k$ . Le paramètre  $v_p$  corrigé (cercles rouges) lui est bien constant avec le nombre d'onde, si on met de côté le premier point ( $k= 4600$  rad/m). En se rappelant que l'erreur sur l'écart-type corrigé  $\Delta\alpha$  est plus importante pour les petits  $k$ , on peut considérer que ce point est moins fiable que les autres. Si on l'omet,  $v_p$  corrigé est compris entre 5400 et 5740 m/s avec une valeur moyenne de 5510 m/s et un écart-type de 115 m/s. Ce résultat est en accord avec la forme de la relation de dispersion théorique, c'est-à-dire le fait que la fréquence du mode est isotrope dans le référentiel des ions.

Le paramètre  $f_0$  est présenté sur la Fig. 3.9b pour les relations de dispersion expérimentales et corrigées. Il correspond à la relation de dispersion dans la direction purement azimutale ( $\alpha = 90^\circ$ ). La fréquence après correction est décalée d'environ 0,4 MHz vers le haut comparée à celle obtenue avant déconvolution. Les deux courbes (croix bleues et cercles rouges) peuvent être considérées comme des droites sur l'intervalle en  $k$  exploré puisque l'erreur normalisée d'un ajustement affine sur ces points est respectivement de 0,4% et de 2,6% pour la courbe expérimentale et corrigée. La pente et l'ordonnée à l'origine de la courbe noire sont respectivement de 2700 m/s et de 0,8 MHz tandis qu'elles valent 2800 m/s et 1,1 MHz pour la courbe en pointillés bleus.

Il est important de préciser que les erreurs statistiques (les barres d'erreur) sont plus grandes pour les paramètres obtenus à partir des relations de dispersion corrigées. Cet effet est principalement dû à l'erreur supplémentaire lors de l'ajustement de la gaussienne sur le facteur de forme statique. La détermination de l'angle  $\alpha_0$  est alors moins précise et conduit à des incertitudes plus grandes sur les paramètres  $v_p$  et  $f_0$ . Enfin, comme l'amplitude du facteur de forme dynamique diminue avec le nombre d'onde  $k$ , la détermination des fréquences, lors de l'analyse des données de la diffusion collective, est plus ardue pour les grands nombres d'onde. Par conséquent, l'erreur statistique augmente, elle aussi, avec  $k$ .



**Figure 3.9:** Variations des deux paramètres a)  $v_p$  et b)  $f_0$  en fonction de  $k$  obtenues à partir de l'ajustement d'une loi en cosinus définies par l'Eq. 3.32 sur les relations de dispersion présentées sur la Fig. 3.8. Les croix bleues représentent les paramètres obtenus à partir des relations de dispersion non corrigées et les cercles rouges à partir de celles corrigées. Les barres d'erreur correspondent aux erreurs statistiques sur l'ajustement, données dans un intervalle de confiance égal à 95%. Un ajustement affine est appliqué au paramètre  $f_0$  non corrigé (trait tireté noir) et à celui corrigé (trait plein rouge).



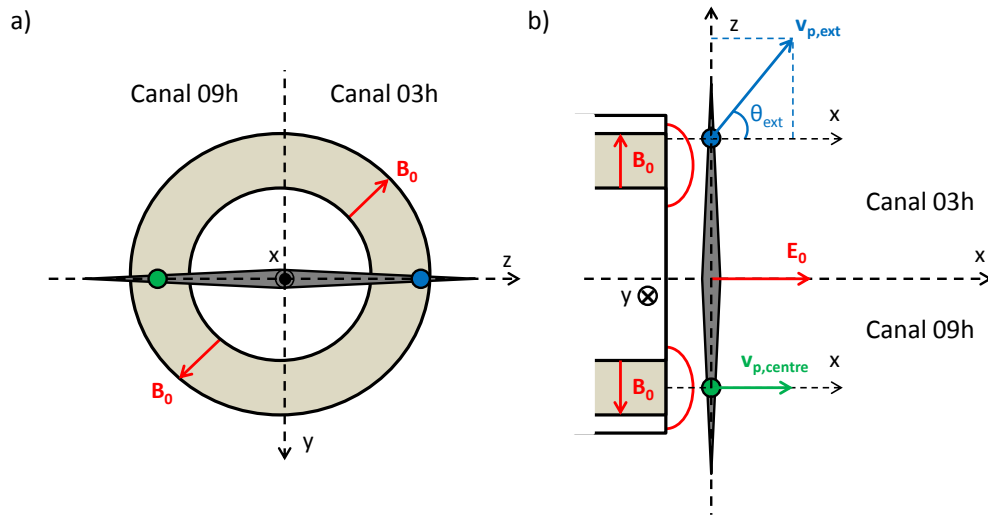
**Figure 3.10:** Comparaisons des écart-types  $\Delta f_{kl}$  et  $\Delta f_\alpha$  à l'écart-type expérimental  $\Delta f_0$ . Les cercles bleus sont le rapport entre  $\Delta f_\alpha^2$  et  $\Delta f_0^2$  et les croix noires le rapport entre  $\Delta f_{kl}^2$  et  $\Delta f_0^2$ . L'écart-type  $\Delta f_{kl}$  est calculé pour un angle  $\alpha$  valant  $\alpha_{max} - 3\Delta\alpha$  de façon à maximiser sa valeur.

### 3.3.5 Vérification des hypothèses

Nous avons réalisé la déconvolution en supposant que l'Eq. 3.25 est valide, de façon à négliger l'effet de la convolution en  $\delta k_l$ . Pour vérifier cette hypothèse, il est nécessaire de connaître un certain nombre de grandeurs. Celles-ci ont pu être estimées à partir des données expérimentales après déconvolution du facteur de forme statique et de la relation de dispersion. Avec les valeurs de  $v_p$ ,  $v_g$ ,  $\Delta\alpha$  et  $\alpha_{max}$  obtenues dans la section précédente, il est possible de comparer l'écart-type expérimental  $\Delta f_0$  à l'écart-type  $\Delta f_{kl}$  dû à la convolution en  $k_l$  et l'écart-type  $\Delta f_\alpha$  dû à la convolution en  $\alpha$ . Cette comparaison est présentée en Fig. 3.10. La grandeur  $\Delta f_{kl}$  est calculée pour l'angle  $\alpha$  égal à  $\alpha_{max} - 3\Delta\alpha$ , qui est le dernier angle contribuant significativement à la convolution, de façon à maximiser le cosinus et donc  $\Delta f_{kl}$ . On peut déjà remarquer que l'écart-type en fréquence  $\Delta f$  est surestimé de moins de 5% en le considérant égal à l'écart-type expérimental  $\Delta f_0$ , comme le montrent les cercles bleus. De plus, la condition 3.25 est satisfaite puisque dans le pire des cas ( $\alpha = \alpha_{max} - 3\Delta\alpha$  et  $\Delta f = \Delta f_0$ ), l'erreur est inférieure à 2,5%. L'effet de la convolution en  $\delta k_l$  est donc bien négligeable.

## 3.4 Discussions et conclusions

La convolution (Eq. 3.6) entre la transformée de Fourier de la fonction profil du volume de mesure et le facteur de forme dynamique affecte le mode azimutal car sa largeur angulaire en  $\alpha$  est de l'ordre de la résolution du diagnostic. Le mode axial n'est lui pas modifié, étant beaucoup plus large en  $\alpha$ . Les effets principaux de la convolution sur le mode azimutal sont d'aplatir le facteur de forme en  $k$ , réduisant le rapport signal sur bruit, et de donner une mesure correspondant à un angle  $\alpha_0$  sensiblement différent de l'angle  $\alpha$



**Figure 3.11:** a) Vue de face du propulseur. Le volume de mesure du diagnostic forme un losange gris qui traverse toute la longueur du propulseur dans la direction  $z$ . Le cercle bleu représente la localisation possible du signal de diffusion collective dans le canal 03h (celle du canal 09h n'est pas représentée) [75]. Le cercle vert désigne le centre du canal 09h. b) Vue de haut du propulseur. La divergence non nulle du faisceau d'ions (appelée plume) est schématisée. A la position du cercle vert, la vitesse  $v_{p,centre}$  des ions est pratiquement alignée avec la direction axiale alors qu'en bord de canal, à la position du cercle bleu, la vitesse  $v_{p,ext}$  forme un angle  $\theta_{ext}$  avec la direction  $x$ . Cette ouverture angulaire s'explique par la courbure des lignes de champ magnétique (courbe rouge) en sortie du propulseur [68].

réglé sur le banc optique. Ce dernier effet est d'autant plus grand que l'angle  $\alpha$  est éloigné de  $\alpha_{max}$  (l'angle pour lequel le signal est maximum). D'importantes observations peuvent ainsi être déduites de l'ajustement d'une loi en cosinus (Eq. 3.32) sur les relations de dispersion déconvoluées.

Premièrement, le paramètre  $v_p$  est trouvé rester constant avec  $k$  comme nous l'avions supposé initialement. Par conséquent, les résultats expérimentaux sont compatibles avec l'idée que le mode est isotrope dans le référentiel des ions, au moins dans l'angle solide de l'espace de Fourier où le mode existe. Cependant, la valeur moyenne de  $v_p$  est de 5510 m/s, environ deux ou trois fois inférieure à la vitesse du faisceau d'ions pour ces conditions de plasma. La raison n'est pas encore claire mais la localisation du signal diffusé devant le propulseur pourrait être l'explication. Comme déjà expliqué, le volume de mesure traverse toute la largeur du plasma et le signal détecté est une intégration le long de ce volume. Dans la Réf. [73], il est expliqué que le signal provient certainement des bords extérieurs du propulseur. Comme le faisceau d'ions a une certaine divergence, la vitesse d'éjection n'est pas parfaitement alignée selon l'axe du propulseur et pourrait avoir une composante non nulle le long de la direction radiale (Fig. 3.11).

Selon des mesures de vitesses des ions en 3 dimensions réalisées par FIL et présentées

dans la référence [68], l'angle de la vitesse des ions avec la direction axiale du propulseur peut être supérieur à  $50^\circ$ , en bord de plasma à la sortie du propulseur. Dans ce cas, la vitesse des ions le long de l'axe du propulseur serait diminuée par un facteur valant 0,6. Pour une valeur égale à 10400 m/s, l'ouverture angulaire devrait être de  $60^\circ$  pour expliquer la valeur de 5510 m/s obtenue précédemment. Il est nécessaire de recueillir plus d'informations sur ce sujet, qui pourraient être obtenues en mesurant la divergence et la vitesse du faisceau, à l'aide de sondes et de la FIL pour les mêmes conditions de plasma.

Par ailleurs, on observe que le paramètre  $f_0$ , qui représente la relation de dispersion dans la direction azimutale, varie de façon affine avec le nombre d'onde  $k$  sur l'intervalle considéré. Sa pente est proche de la vitesse estimée du son  $c_s$  et l'ordonnée à l'origine ne passe pas par zéro, laissant la possibilité d'une légère courbure sur un intervalle en  $k$  allant de 0 à 12000 rad/m. Encore une fois, ces observations sont en bon accord avec les résultats de l'étude cinétique présentée au chapitre 2.

L'obtention de la relation de dispersion à  $90^\circ$  est également utile pour l'ajustement du modèle présenté au chapitre 2 par l'Eq. 2.25. Elle permet de s'affranchir du paramètre  $v_p$  puisque la contribution  $k_x v_p$  est nulle et le modèle ne dépend plus que de 3 paramètres  $T_e$ ,  $n_e$  et  $V_d$ . Dans la section suivante, nous appliquons ce modèle à  $f_0(k)$ , ce qui nous permettra d'obtenir une estimation de  $T_e$  et  $n_e$  dans le jet du plasma du propulseur.

## 3.5 Ajustement du modèle analytique sur la relation de dispersion expérimentale

### 3.5.1 Estimation de $T_e$ et $n_e$

Le but de cette section est d'ajuster le modèle analytique (Eq. 2.25) sur une relation de dispersion expérimentale. Le modèle doit donc être écrit en grandeurs physiques. Dans ce cas, son expression est donnée par

$$(\omega_{\text{modèle}} - k_x v_p)^2 = \frac{k^2 \lambda_D^2 (n_e, T_e)}{1 + k^2 \lambda_D^2 (n_e, T_e) + \xi Z(\xi)}, \quad (3.35)$$

avec

$$\xi = \frac{k_y}{k} \frac{V_d}{v_{the}(T_e)}. \quad (3.36)$$

Hormis la vitesse du faisceau  $v_p$ , ce modèle analytique dépend seulement de la température et de la densité électronique et de la vitesse de dérive  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Nous pouvons ainsi nous en servir pour estimer ces paramètres du plasma. Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, nous utiliserons les mesures à  $90^\circ$  pour que la contribution  $k_x v_p$  soit nulle.

Comme nous l'avons vu précédemment, à cause de l'effet d'appareil, une mesure directe à  $\alpha=90^\circ$  donnerait une relation de dispersion correspondant à un angle  $\alpha_0$  compris entre  $90^\circ$  et  $\alpha_{max}=100^\circ$ . Une petite contribution de l'effet Doppler viendrait alors fausser la mesure. Cependant, nous avons montré qu'il est possible de corriger cet effet d'appareil et

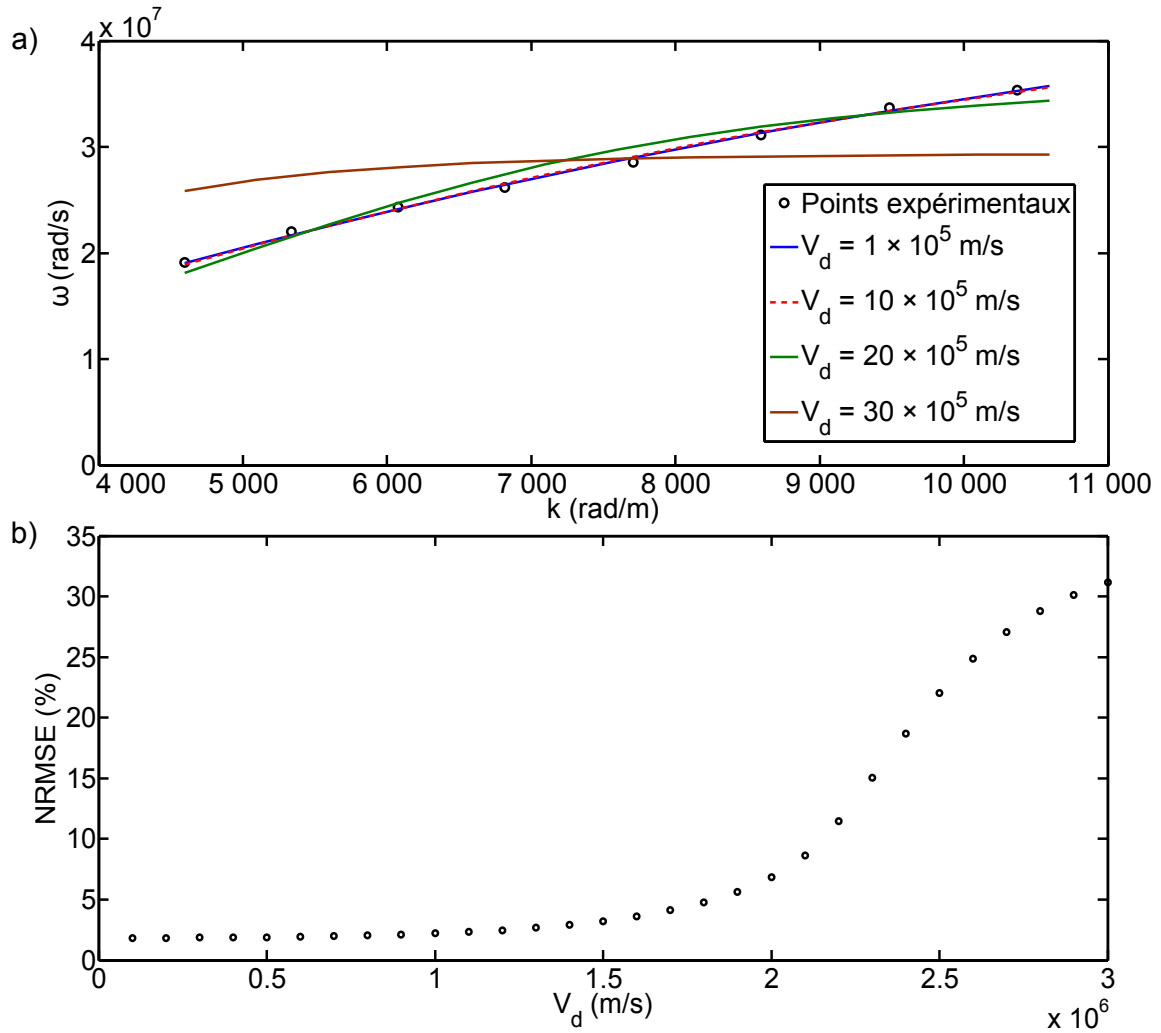
d'utiliser le paramètre  $f_0$  qui représente la fréquence isotrope dans le référentiel des ions et donc la fréquence à  $90^\circ$ . Dans ce cas, le modèle peut être utilisé pour déterminer les trois paramètres  $T_e$ ,  $n_e$  et  $V_d$  en minimisant le  $\chi^2$  entre les données expérimentales et le modèle, par la méthode des moindres carrés .

Le paramètre  $T_e$  détermine la pente de la relation de dispersion pour les petits  $k_y$ , similairement au cas de l'onde acoustique ionique, et sera déterminé assez précisément puisque la dispersion est globalement affine. Les paramètres  $n_e$  et  $V_d$  sont impliqués dans la courbure de la relation de dispersion pour les  $k_y$  plus grands, puisqu'ils apparaissent principalement au dénominateur. Lorsque  $k_y \lambda_D$  est bien plus grand que 1,  $n_e$  détermine la fréquence limite  $\omega_{pi}$ . Malheureusement, cette limite n'est pas atteinte avec le diagnostic de diffusion collective et la courbure n'est pas très marquée. Par conséquent, l'ajustement du modèle ne permet pas de distinguer la contribution de  $n_e$  et de  $V_d$  et le résultat de l'ajustement ne donne pas satisfaction. Afin de réduire le nombre de paramètre, on décide alors de fixer la valeur de  $V_d$ , qui peut être déduite par mesure expérimentale avec d'autres diagnostics. On ajuste ensuite les points expérimentaux avec l'Eq. 3.35 pour différentes valeurs de  $V_d$  (fixe) allant de  $1.10^5$  m/s à  $30.10^5$  m/s, les paramètres  $T_e$  et  $n_e$  restant libres. Quatre de ces ajustements sont présentés sur la Fig. 3.12a. L'erreur normalisée (NRMSE, Eq. 3.31) obtenue pour les différents ajustements est présentée sur la Fig. 3.12b.

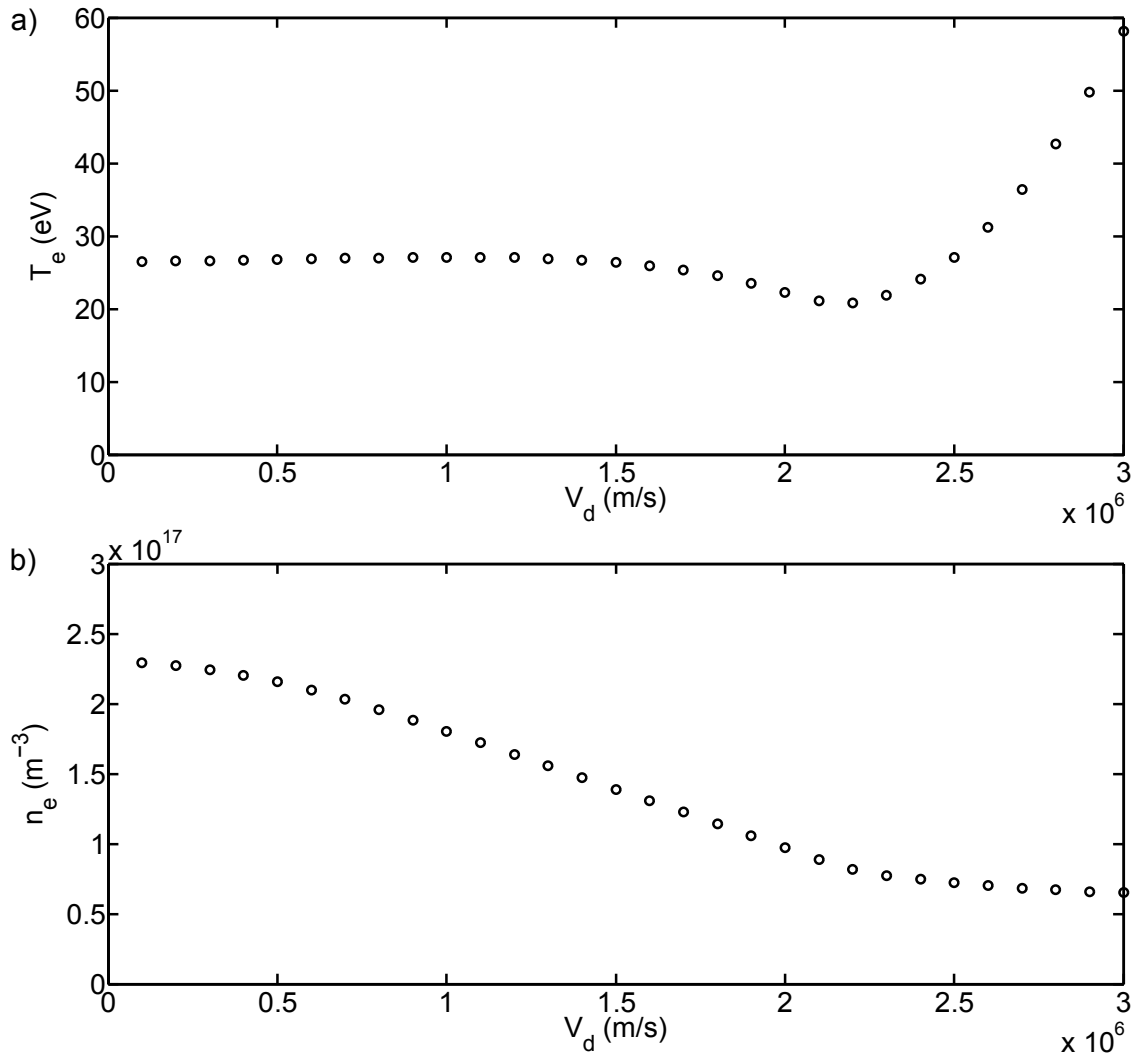
Le modèle est en bonne adéquation avec la relation de dispersion expérimentale lorsque les valeurs de  $V_d$  sont inférieures à  $15.10^5$  m/s. Les NRMSE correspondantes sont inférieures à 5% et les courbes du modèle se superposent. Pour ces valeurs, la température  $T_e$  est constante avec  $V_d$  comme le montre la Fig. 3.13a, avec une valeur moyenne de 26,8 eV pour un écart-type égal à 0,23 eV. De son côté, la densité  $n_e$  décroît légèrement avec  $V_d$  sur la Fig. 3.13b, sa valeur moyenne étant de  $1,91.10^{17}$  m<sup>-3</sup> et son écart-type de  $2,94.10^{16}$  m<sup>-3</sup>. Pour des valeurs de  $V_d$  plus importantes, l'erreur normalisée augmente rapidement et le modèle n'ajuste plus correctement la relation de dispersion (courbe brune sur la Fig. 3.13a). Néanmoins, toutes les valeurs de  $V_d$  présentées ici ne correspondent pas à la réalité physique du propulseur.

Dans le cas du propulseur PPS-X000 et pour une tension de décharge de 300 V, la vitesse de dérive est estimée être de l'ordre de  $5.10^5$  m/s. Cependant, il est important de rappeler que l'effet du gradient de température affecte la relation de dispersion en augmentant effectivement le paramètre  $V_d$  d'une quantité  $(3/2) v_{\nabla T}$  comme rappelé dans le chapitre 1 et démontré dans la Réf. [61]. Une rapide estimation, en utilisant  $T_e \sim 30$  eV et une longueur de gradient  $\delta_x$  de l'ordre de 2 cm, conduit à une vitesse  $v_{\nabla T} = v_{the}^2 \delta_x / \omega_{ce}$ , produite par le gradient de température, de l'ordre de  $1,5.10^5$  m/s. Par conséquent, la valeur effective de  $V_d$  pourrait valoir jusqu'à  $7.10^5$  m/s. Si l'on étend cet intervalle des valeurs possibles de  $V_d$  jusqu'à  $10.10^5$  m/s, la température et la densité électronique sont estimées être  $26,8 \pm 0,2$  eV et  $(2,1 \pm 0,2) .10^{17}$  m<sup>-3</sup> dans le volume de mesure. Comme la longueur de ce volume de mesure est de l'ordre du diamètre du propulseur,  $T_e$  et  $n_e$  sont des valeurs moyennes le long de cette ligne, même si le signal du mode  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  provient principalement des bords extérieurs du propulseur. Enfin, ces valeurs de  $T_e$  et  $n_e$  sont en accord avec les résultats numériques [2, 32] et avec les rares mesures expérimentales de  $T_e$





**Figure 3.12:** a) Les cercles noirs représentent le paramètre  $f_0$  (soit la fréquence à  $90^\circ$  après correction de l'effet d'appareil) en fonction du nombre d'onde. Les courbes de différentes couleurs correspondent aux meilleurs ajustements sur le modèle, le paramètre  $V_d$  étant fixé aux différentes valeurs indiquées dans la légende de la figure. b) Evolution de l'erreur normalisée (donnée par l'Eq. 3.31) entre le meilleur ajustement et les points expérimentaux pour différentes valeurs de  $V_d$ . A partir de  $V_d = 1,5 \cdot 10^6$  m/s, l'erreur croît fortement.



**Figure 3.13:** Variation des paramètres a)  $T_e$  et b)  $n_e$  en fonction de  $V_d$ , obtenus à partir de l'ajustement de l'Eq. 3.35 sur la relation de dispersion expérimentale à  $\alpha = 90^\circ$ .

réalisées avec des sondes de Langmuir sur un propulseur similaire [62].

### 3.5.2 Discussion

Ces valeurs de  $T_e$  et  $n_e$  ont été estimées en considérant que le modèle 3.35 représentait bien la fréquence du mode  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  observée expérimentalement. Nous avons vu dans le chapitre 2 sur l'étude théorique de l'instabilité électronique de dérive que cela est vrai si les conditions 2.30 et 2.31 sont vérifiées. Dans ce cas, la fréquence donnée par le modèle correspond à la fréquence donnée par la relation de dispersion complète (Eq. 2.7) avec une erreur  $N_\infty$  inférieure à 5% et une erreur  $N_{\text{relative}}$  très faible comparée à 1. Rappelons qu'une erreur de 5% sur la fréquence est plus faible que l'incertitude sur l'obtention de ces fréquences avec le diagnostic. On doit alors s'assurer que les conditions sont satisfaites, ce qu'il est possible de faire puisque tous les paramètres sont désormais connus.

Avec le diagnostic de la diffusion collective, on peut faire varier le nombre d'onde  $k_y$  entre 4 000 et 12 000 rad/m. De plus, le nombre d'onde  $k_z$  est supposé être de l'ordre de 500 rad/m. Si l'on prend une valeur de la pulsation  $\omega_{ce} = 2,6 \cdot 10^9$  rad/s et une valeur de la vitesse  $V_d$  comprise entre 1 et  $10 \cdot 10^5$  m/s, on observe que les deux conditions 2.30 et 2.31 sont vérifiées. La fréquence du modèle est donc très proche de celle donnée par la résolution numérique de l'équation théorique, ce qui permet d'estimer  $T_e$  et  $n_e$  dans le jet du plasma du propulseur, à l'aide d'un diagnostic non intrusif.

Il est utile à présent de discuter des barres d'erreur sur ces deux quantités. Les erreurs, 0,2 eV pour la température et  $0,2 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$  pour la densité, données jusqu'à présent, sont les erreurs statistiques obtenues après ajustement du modèle. Il reste à considérer les erreurs systématiques. Notamment, l'angle  $\alpha$  est connu avec une précision de  $\pm 1,5^\circ$  et l'incertitude sur la calibration du banc optique résulte en un décalage (constant pour une configuration de banc donnée) de  $k$  par  $\delta k \sim 450$  rad/m au maximum. Cette dernière erreur est la plus importante et pourrait conduire à une erreur systématique sur la température  $T_e$  aussi grande que 4,8 eV et sur la densité  $n_e$  aussi grande que  $0,3 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$ . Ces erreurs sont constantes tant que la configuration du banc n'est pas changée et il est alors possible de mesurer des variations de  $T_e$  aussi petites que 0,2 eV et de variation de  $n_e$  aussi petite que  $0,2 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$ .

Une autre source d'erreur est l'approximation ions froids faite pour la dérivation de la relation de dispersion et du modèle. Dans le cas de faible  $\hat{V}_d$  par rapport à  $\hat{v}_{the}$ , le mode de dérive est très similaire à l'onde acoustique ionique. Sa fréquence ne sature alors probablement plus pour les grands nombres d'onde, lorsqu'une température ionique non nulle est considérée. Cet effet est d'autant plus marqué que la température est grande et peut conduire à une erreur significative sur l'estimation de  $T_e$  et  $n_e$ .

Le taux de croissance du mode est, lui, attendu décroître à mesure que la température ionique augmente, en raison de l'effet Landau qu'introduit la distribution ionique. Dans le propulseur, la température étant anisotrope entre la direction axiale et la direction azimutale, l'amortissement sera sans doute disparate selon la direction observée.

Le chapitre suivant répond à ces deux interrogations, en décrivant la population ionique de manière cinétique.



# Chapitre 4

## Effet d'une température ionique non nulle sur le mode de dérive électronique

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Equation de dispersion pour une température ionique isotrope</b>	<b>82</b>
<b>4.2</b>	<b>Réciproque de la dérivée de la fonction de dispersion plasma</b>	<b>83</b>
4.2.1	Développement en série en un point $y_0$ quelconque . . . . .	83
4.2.2	Calcul du premier coefficient $a_0$ du développement en série . . .	85
4.2.3	Précision de l'estimation de la fonction $\text{Inv}Z'$ . . . . .	86
<b>4.3</b>	<b>Influence de la température ionique sur le mode de dérive électronique <math>E \times B</math></b> . . . . .	<b>89</b>
4.3.1	Cas d'une température isotrope . . . . .	89
4.3.2	Erreur résultant de l'approximation ions froids . . . . .	91
4.3.3	Température anisotrope . . . . .	92
<b>4.4</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>96</b>

---

Dans les précédents chapitres, la susceptibilité ionique a été dérivée dans l'approximation d'ions supposés froids. Cette hypothèse a été justifiée par les mesures par Fluorescence Induite par Laser (FIL) dans la direction azimutale [10], qui ont montré que la température ionique dans cette direction est de l'ordre de 0,3 eV, valeur bien inférieure à celle de la température électronique, estimée à 27 eV dans le chapitre 3. Cependant, même une basse température ionique peut avoir des effets sur la dispersion et le taux de croissance, ce qui pourrait conduire à une erreur sensible sur l'estimation de  $T_e$  et  $n_e$  présentée précédemment. Il est alors important de vérifier que cet effet est négligeable.

De plus, dans le propulseur, la distribution en énergie des ions est loin d'être isotrope. Dans la direction axiale, près du plan de sortie ( $\sim 10$  mm) et pour une tension de décharge de 300 V, les mesures par FIL ont montré que la température  $T_{\text{axial}}$  est de l'ordre de 5 eV [28]. Cette température n'est plus du tout négligeable comparée à la température  $T_e$  et peut induire de fortes modifications sur la relation de dispersion du mode et notamment au niveau de son taux d'instabilité, lors de l'exploration dans le plan  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$ .

Avant de présenter l'influence de la température ionique, nous expliquerons la méthode originale que nous avons adoptée pour résoudre la relation de dispersion avec ions chauds.

## 4.1 Equation de dispersion pour une température ionique isotrope

Lorsque la température ionique  $T_i$  est non nulle et isotrope, la relation de dispersion pour des ions chauds est la même que celle présentée dans le chapitre 1, c'est-à-dire l'Eq. 1.6. Sa dérivation est présentée dans l'annexe A où il faut considérer que  $T_{i,\text{axial}} = T_{i,\text{plan}} = T_i$  et donc que  $v_{thi,\text{axial}} = v_{thi,\text{plan}}$ . Une fois encore, les longueurs seront normalisées à  $\lambda_{De}$ , les pulsations à  $\omega_{pi}$  et les vitesses à  $c_s$ . Avec ces conventions, la relation de dispersion s'écrit

$$Z' \left( \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_x \hat{v}_p}{\sqrt{2\hat{T}\hat{k}}} \right) = 2\hat{T} \left[ 1 + \hat{k}^2 + g \left( \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_y \hat{V}_d}{\hat{\omega}_{ce}}, \left( \hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 \right) \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2}, \hat{k}_z^2 \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2} \right) \right], \quad (4.1)$$

où  $\hat{T} = T_i/T_e$  et  $\hat{M} = M_i/M_e$  sont les rapports de la température ionique (isotrope) et électronique d'une part et de la masse ionique (du xénon) et électronique d'autre part.

La résolution numérique de l'Eq. 4.1 se fait de la même manière que dans le cas des ions froids (voir chapitre 2), c'est-à-dire en négligeant tout d'abord le terme en  $\hat{\omega}$  dans la fonction de Gordeev, puisqu'il est bien inférieur à  $\hat{k}_y \hat{V}_d$  et en procédant ensuite par itération pour trouver plus précisément la pulsation du mode. Dans ce cas, il reste à inverser  $Z'(z)$  et on peut écrire le schéma itératif sous la forme suivante

$$\hat{\omega}_{n+1} = \hat{k}_x \hat{v}_p + \sqrt{2\hat{T}\hat{k}} \text{Inv}Z' \{ \text{var}(\hat{\omega}_n) \}, \quad (4.2)$$

avec

$$\text{var}(\hat{\omega}_n) = 2\hat{T} \left[ 1 + \hat{k}^2 + g \left( \frac{\hat{\omega}_n - \hat{k}_y \hat{V}_d}{\hat{\omega}_{ce}}, \left( \hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 \right) \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2}, \hat{k}_z^2 \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2} \right) \right]. \quad (4.3)$$

La fonction  $\text{Inv}Z'(y)$  est la fonction réciproque de la dérivée de la fonction de dispersion plasma dont le développement en série en un point quelconque  $y_0$  est donné dans la section suivante. Afin de trouver les deux branches de la relation de dispersion (la pulsation positive et la pulsation négative), on choisit  $\hat{\omega}_0$  positive ou négative comme valeur de départ et pour accroître la rapidité des calculs, on peut même choisir les solutions ions froids (Eqs. 2.11). Ainsi, seul un petit nombre d'itérations est nécessaire et l'erreur normalisée pour les ions chauds est de l'ordre de grandeur de la précision machine.

## 4.2 Réciproque de la dérivée de la fonction de dispersion plasma

Nous venons de le voir, la résolution de la relation de dispersion nécessite d'inverser la dérivée de la fonction de dispersion plasma. Cette opération n'est pas triviale et nous présentons dans cette section une méthode permettant d'obtenir un développement en série de la bijection de  $Z'$  (ainsi que pour tous les  $Z^{(n)}$  successifs) en un point  $y_0$ , complexe.

La fonction de dispersion plasma (transformée de Hilbert de la fonction gaussienne)

$$Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-z} dt \quad (4.4)$$

est une fonction que l'on rencontre fréquemment lors de l'étude des relations de dispersion décrivant un plasma chaud en théorie cinétique. La recherche des zéros avec des méthodes de plan complexe (méthode de Müller, méthodes utilisant le théorème de l'argument...) nécessite de la calculer numériquement sur un large domaine du plan complexe. La résolution de l'équation de dispersion par une de ces méthodes peut s'avérer longue (selon la taille du domaine complexe sur lequel on cherche les solutions) et la convergence n'est pas toujours assurée. Dans le cadre de la relation de dispersion avec ions chauds présentée précédemment, nous proposons une résolution par itération faisant appel au calcul de la bijection de la fonction  $Z'$ . Cette méthode nous permet de ne calculer les fonctions que sur un petit nombre de points (environ 4 ou 5 itérations), raccourcissant fortement le temps de calcul, et permettant d'augmenter les chances de convergence. Nous ne présenterons ici que la démonstration pour obtenir le développement de la bijection de la dérivée première de la fonction  $Z$ , puisque nous utilisons celle-ci pour la méthode itérative, mais le raisonnement est identique pour toutes les autres dérivées d'ordres supérieurs

### 4.2.1 Développement en série en un point $y_0$ quelconque

Avant de commencer les calculs, nous supposons que  $Z'(z)$  est bijective sur le domaine considéré. D'après Fried et Conte [21], ceci est vrai dans tout le demi-plan complexe supérieur à l'axe réel. Lorsque la partie imaginaire est négative, la fonction peut être bijective à condition que  $|\text{Im}(z)| \ll |\text{Re}(z)|$ . Pour  $|\text{Im}(z)| \gtrsim |\text{Re}(z)|$ , de fortes oscillations apparaissent et les fonctions  $Z$  et  $Z'$  ne sont alors plus bijectives. Nous restreindrons donc notre étude au plan supérieur compris entre l'angle  $\varphi = \arctan(\text{Im}(z)/\text{Re}(z)) = -45^\circ$  et l'angle  $\varphi = 225^\circ$ .

Nous allons à présent utiliser une propriété générale sur la dérivée de la bijection d'une fonction pour déterminer une équation différentielle vérifiée par  $\text{Inv}Z'$ . Soit une fonction  $f$ , dérivable et bijective sur un domaine  $I$ , et soit  $J$  le domaine image de  $I$  par  $f$ . Si la dérivée de  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors la bijection réciproque de  $f$ , notée  $f^{-1}$ , est dérivable sur le domaine  $J$  et vérifie l'équation suivante

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}, \quad (4.5)$$

où  $\circ$  représente la composée de fonctions.

Pour plus de concision, on posera  $g(y) = \text{Inv}Z'(y)$ . Ainsi, la bijection réciproque de la fonction  $Z'$  et sa dérivée, soit  $g(y)$  et  $g'(y)$ , vérifient l'Eq. 4.5.

$$g'(y) = \frac{1}{Z^{(2)}[g(y)]}. \quad (4.6)$$

La dérivée seconde  $Z^{(2)}$  apparaît alors au dénominateur et on peut la substituer en l'exprimant en fonction de  $Z'$  grâce à l'Eq. C.2 et à l'Eq. C.3 (pour  $n=2$ ) de l'annexe C telle que

$$Z^{(2)}(z) = \frac{Z'(z) + 2}{z} - 2zZ'(z). \quad (4.7)$$

On en déduit que la fonction  $\text{Inv}Z'$  vérifie l'équation différentielle suivante

$$[y + 2 - 2yg^2(y)] \frac{dg}{dy}(y) = g(y). \quad (4.8)$$

Cette équation ne correspond à aucune équation différentielle couramment rencontrée [43] et la solution générale n'est pas évidente. Cependant, on peut faire un développement en série au point  $y_0$  de la fonction  $g$  en espérant que le rayon de convergence soit non nul. Pour cela, on suppose que la fonction s'écrit

$$g(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (y - y_0)^n. \quad (4.9)$$

Comme il est plus aisé de faire un développement en série en 0, nous poserons  $x = y - y_0$ . La fonction devient alors

$$\tilde{g}(x) = g(x + y_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad (4.10)$$

et vérifie la nouvelle équation différentielle suivante

$$[x - y_0 + 2 - 2(x - y_0)\tilde{g}^2(x)] \frac{d\tilde{g}}{dx}(x) = \tilde{g}(x). \quad (4.11)$$

En utilisant la propriété sur le carré d'une somme

$$\left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 x^{2k} + 2 \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \sum_{j=k+1}^{+\infty} a_j x^j \right), \quad (4.12)$$



on trouve que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [a_n (1 - n) - (2 - y_0) (n+1) a_{n+1}] x^n = - \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 x^{2k} + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sum_{j=k+1}^{+\infty} a_j x^{k+j} \right] \times 2 (x - y_0) \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \quad (4.13)$$

Une identification terme à terme en puissance de  $x^n$  permet de montrer que pour tout  $n \geq 2$ , on a la relation de récurrence suivante sur les coefficients  $a_n$

$$\begin{aligned} 0 = & -a_n (1 - n) + (2 - y_0) (n+1) a_{n+1} \\ & + 2y_0 \left( \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} a_p^2 (n + 1 - 2p) a_{n+1-2p} + 2 \sum_{p=1}^n p a_p \sum_{k=0}^{E(\frac{n-p}{2})} a_k a_{n+1-p-k} \right) \\ & - 2 \left( \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} a_p^2 (n - 2p) a_{n-2p} + 2 \sum_{p=1}^{n-1} p a_p \sum_{k=0}^{E(\frac{n-p-1}{2})} a_k a_{n-p-k} \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

où  $E(n)$  représente la partie entière de  $n$ .

Pour  $x^0$  et  $x^1$ , on trouve les deux égalités suivantes

$$\begin{cases} a_1 = \frac{a_0}{2 - y_0 + 2y_0 a_0^2} \\ a_2 = \frac{a_0^2 a_1 - y_0 a_1^2 a_0}{2 - y_0 + 2y_0 a_0^2} \end{cases}. \quad (4.15)$$

Avec les Eqs. 4.14 et 4.15, on obtient ainsi un développement en série au point  $y_0$  de  $\text{Inv}Z'$  donné par l'Eq. 4.9, à condition de connaître  $a_0$ . La partie suivante explique comment calculer ces coefficients au point  $y_0$  le plus adapté.

### 4.2.2 Calcul du premier coefficient $a_0$ du développement en série

Nous avons trouvé un développement en série permettant de calculer  $\text{Inv}Z'$  au voisinage de  $y_0$ . Chaque coefficient du développement en série est complètement déterminé dès lors que le coefficient  $a_0$  est connu. Or, ce coefficient peut être trouvé grâce à l'Eq. 4.9 qui donne en  $y_0$

$$a_0 = g(y_0) = \text{Inv}Z'(y_0). \quad (4.16)$$

Autrement dit, écrire le développement limité de la fonction  $\text{Inv}Z'$  au voisinage du point  $y_0$  nécessite de connaître la valeur de  $\text{Inv}Z'(y_0)$ . Malheureusement, on ne peut pas se permettre de choisir arbitrairement  $a_0$  (c'est à dire d'écrire un développement en série en n'importe quel point  $y_0$ ) car le rayon de convergence d'un tel développement n'est pas infini. Pour assurer un calcul précis, il importe de trouver une valeur de  $a_0$  telle que

$y_0$  soit assez proche de la valeur de  $y$  où l'on veut estimer  $\text{Inv}Z'$ . Dans le cas qui nous intéresse, la résolution de la relation de dispersion avec ions chauds, on peut choisir  $a_0$  qui correspond à la solution de la relation de dispersion ions froids. On prendra alors cette solution comme valeur initiale  $\hat{\omega}_0$ , de façon à initier l'itération définie à l'Eq. 4.2. De cette façon, l'argument de  $Z'$  dans l'Eq. 4.1 avant la première itération peut être identifié à  $a_0$ , c'est-à-dire

$$a_0(\hat{\omega}_0) = \frac{\hat{\omega}_0 - \hat{k}_x \hat{v}_p}{\hat{k} \sqrt{2\hat{T}}}. \quad (4.17)$$

Tous les coefficients du développement en série de  $\text{Inv}Z'$  au point  $y_0 = Z'(a_0)$  peuvent désormais être calculés. Ce développement est alors utilisé pour estimer  $\text{Inv}Z'$  dans l'Eq. 4.2, pour  $n=0$ . Généralement, seul un très petit nombre  $N$  de termes dans le développement en série est considéré (entre 5 et 10) car les coefficients successifs croissent rapidement. Notons enfin que l'on aurait pu partir de  $\hat{\omega}_0 = 0$ , de façon à ne pas avoir besoin de la solution de l'équation avec ions froids, mais la convergence est, dans ce cas, moins certaine.

Pour les itérations suivantes, en l'absence d'informations sur le rayon de convergence de la série, les coefficients du développement en série sont recalculés en choisissant comme nouveau point  $a_0$ , le point

$$a_0(\hat{\omega}_n) = \frac{\hat{\omega}_n - \hat{k}_x \hat{v}_p}{\hat{k} \sqrt{2\hat{T}}}, \quad (4.18)$$

pour calculer  $\hat{\omega}_{n+1}$ .

Il reste à prouver que le développement en série donne une approximation suffisante de la fonction réciproque pour que la méthode itérative converge.

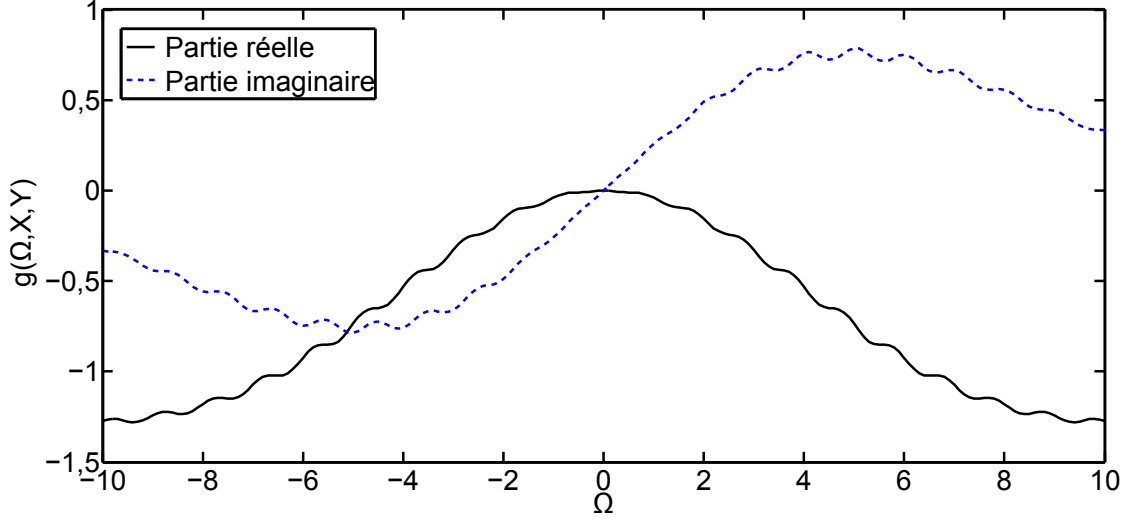
### 4.2.3 Précision de l'estimation de la fonction $\text{Inv}Z'$

Nous montrons à présent que le développement en série, tronqué à l'ordre  $N$ , donne une approximation suffisamment précise de  $\text{Inv}Z'$  pour calculer  $\hat{\omega}_{n+1}$  en fonction de  $\hat{\omega}_n$ . Nous commençons d'abord par évaluer la largeur de l'intervalle dans lequel varie  $\text{var}(\hat{\omega})$ , argument de la bijection de  $Z'$  dans l'Eq. 4.2, puis nous évaluons le rayon de convergence de la série tronquée, pour les paramètres typiques du propulseur.

#### Evolution de la variable $\text{var}(\hat{\omega}_n)$

En premier lieu, il faut étudier le comportement de la variable  $\text{var}(\hat{\omega}_n)$  de la bijection de  $Z'$ . Une variation trop importante de cette quantité pourrait se traduire en une perte rapide de la convergence de la méthode itérative, puisque la valeur du point  $y_0$  deviendrait éloignée de la valeur de  $\text{var}(\hat{\omega}_n)$ . Par contre, si cette variable ne varie pas, ou pas trop, la méthode convergera à coup sûr si, à l'étape  $n=0$ , le rayon de convergence de la série est suffisamment large pour contenir la valeur de  $\text{var}(\hat{\omega}_0)$ .

On remarque tout d'abord que la fonction  $\text{var}(\hat{\omega}_n)$  dépend uniquement de la pulsation  $\hat{\omega}_n$  à travers la fonction de Gordeev  $g(\Omega, X, Y)$ , et plus particulièrement à travers sa première variable  $\Omega$ . Sur la Fig. 4.1, la variation de la fonction de Gordeev avec  $\Omega$  réelle



**Figure 4.1:** Variation de la fonction de Gordeev (Eq. 1.8) en fonction de sa première variable  $\Omega$ , pour des valeurs réelles. Les autres variables,  $X$  et  $Y$ , sont fixées respectivement à 24 et 0,2, valeurs correspondant aux paramètres fixés dans le Tab. 2.3 pour une propagation dans la direction azimutale,  $\hat{k}_y$  étant fixé à 0,5. La courbe noire en trait plein représente la partie réelle de cette fonction et la courbe bleue en pointillés la partie imaginaire.

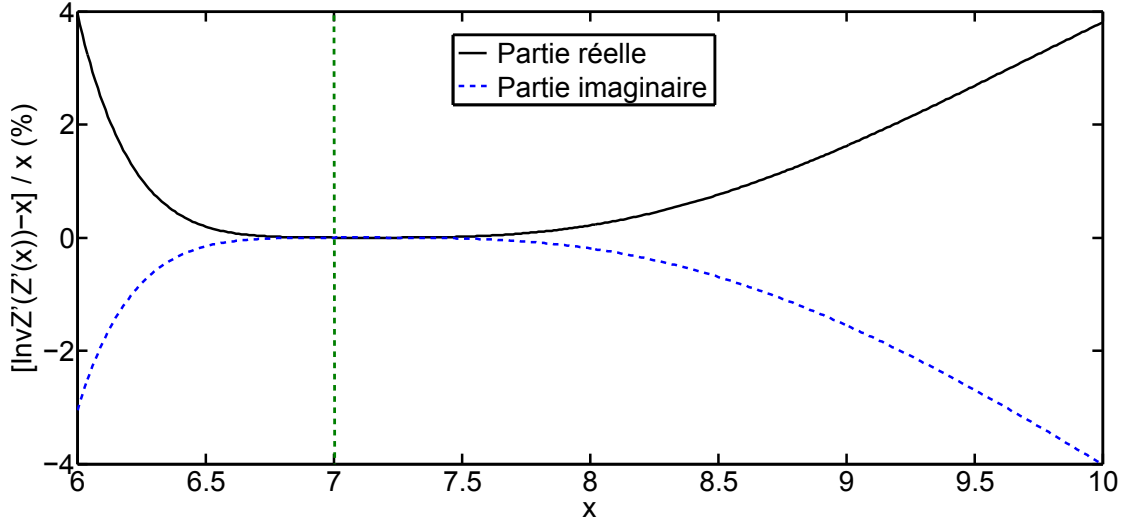
est présentée sur un très large intervalle. Sur les courbes, des oscillations caractéristiques sont reconnaissables, mémoires des résonances de la limite en 2 dimensions et la fonction varie fortement sur l'intervalle en  $\Omega$  considéré. Pour la méthode itérative, il est intéressant de regarder comment varie la fonction au cours des différentes étapes nécessaires pour résoudre l'équation de dispersion.

Dans le pire des cas, on peut choisir de fixer la pulsation  $\hat{\omega}_0$  à 0 (le minimum) dans l'espoir de trouver une solution  $\hat{\omega}_f$  finale ayant une valeur maximum de l'ordre de 1,5<sup>12</sup>. Avec ces valeurs, la variable  $\Omega$  varie entre -1,5 et -1,47, intervalle si restreint que les parties réelle et imaginaire de la fonction de Gordeev sont quasiment constantes sur ce domaine. Précisons que si l'on considère une petite partie imaginaire de la variable  $\Omega$  (c'est le cas, notamment, lorsque le taux de croissance est non nul), le résultat reste identique. La variable  $var(\hat{\omega}_n)$  de la fonction  $InvZ'$  ne dépend donc presque pas de  $\hat{\omega}_n$  au cours des itérations et sera notée plus simplement  $var$  par la suite. La méthode itérative a alors toutes les chances de converger, si le rayon de convergence à l'itération initiale ( $n=0$ ) est suffisamment large. Cette condition est vérifiée dans le point suivant.

### Convergence du développement en série tronqué

Il reste ensuite à vérifier que le développement en série fait en  $y_0$  est valide jusqu'au point  $var$ , puisque c'est en ce point qu'on applique la fonction  $InvZ'$  (Eq. 4.2). Il suffit pour se faire de comparer  $InvZ'(Z'(a_0(\hat{\omega}_0) + \Delta a_0))$  à  $a_0(\hat{\omega}_0) + \Delta a_0$  pour différentes valeurs de  $\Delta a_0$ . Si l'erreur entre ces deux quantités reste petite pour une valeur de  $\Delta a_0$  telle que

12. La pulsation du mode ne sature pas à  $\omega_{pi}$  pour les ions chauds



**Figure 4.2:** Erreur relative entre  $\text{Inv}Z'(Z(x))$  et  $x$  pour un développement en série de  $\text{Inv}Z'$  réalisé en  $y_0 = Z'(a_0(\hat{\omega}_0))$ . La valeur typique du paramètre  $a_0(\hat{\omega}_0)$  est 7, calculée avec les données du Tab. 2.3 pour une propagation dans la direction azimutale. Les paramètres  $\hat{k}_y$  et  $\hat{T}$  sont respectivement fixés à 0,5 et 0,02. On considère pour la partie réelle de la pulsation  $\hat{\omega}_0$  une valeur valant 0,7 et on néglige sa partie imaginaire. Seuls 5 termes dans la somme 4.9 sont considérés. On remarque que la convergence du développement en série tronqué est meilleure à droite de 7 qu'à gauche.

$$a_0(\hat{\omega}_f) = a_0(\hat{\omega}_0) + \Delta a_0,$$

où  $\hat{\omega}_f$  est solution de la relation de dispersion, alors la série tronquée est proche de la valeur de la bijection de la fonction  $Z'$  en  $\text{var} = Z'(a_0(\hat{\omega}_f))$ .

La comparaison de  $\text{Inv}Z'(Z'(a_0(\hat{\omega}_0) + \Delta a_0))$  et de son argument est réalisée sur la Fig. 4.2 pour des valeurs typiques des paramètres intervenants dans la relation de dispersion. L'erreur relative entre ces deux grandeurs reste inférieure à 5% sur toute la plage explorée et le développement de la bijection de la fonction  $Z'$  est donc bon sur l'intervalle de valeurs considéré. On constate alors que celui-ci est plus large du côté droit de la valeur  $a_0(\hat{\omega}_0) = 7$  que du côté gauche. Afin de maximiser les chances de convergence, nous utilisons la solution ions froids comme valeur initiale pour la fréquence complexe. La solution ions chauds étant toujours supérieure à cette solution, l'écart maximal à  $a_0(\hat{\omega}_0)$  pour que le développement en série soit correct à 5% près est  $\Delta a_{0+} = 3$ , sur notre exemple. On peut alors calculer l'écart  $\Delta \hat{\omega}$  entre la solution initiale  $\hat{\omega}_0$  et la solution finale  $\hat{\omega}_f$  en différenciant l'Eq. 4.18 et on obtient

$$\Delta \hat{\omega} = \hat{k} \sqrt{2\hat{T}} \Delta a_{0+}, \quad (4.19)$$

qui vaut 30 % pour nos valeurs.

## Conclusions

Dans la pratique, la différence  $\Delta\hat{\omega}$  est inférieure à cette valeur. Le domaine sur lequel le développement en série tronqué donne une erreur inférieure à 5% est donc suffisamment grand pour que la méthode converge. Comme nous l'avons déjà précisé, à chaque itération, les coefficients du développement en série sont recalculés en estimant  $a_0$  à partir de la formule 4.18, de façon à ce que la méthode itérative converge précisément. Similairement à ce qui est fait pour les ions froids, à chaque étape  $n$  la solution  $\hat{\omega}_n$  est réinjectée dans l'Eq. 4.1 générale. On normalise ensuite au plus grand terme et on compare le résultat à un. Après quelques itérations, 4 ou 5 au maximum, l'erreur est de l'ordre de la précision machine.

Comme nous l'avons précisé, cette méthode itérative est bien plus rapide qu'une recherche des zéros de la relation de dispersion dans le plan complexe. De plus, la convergence est toujours assurée pourvu que la fonction de dispersion soit bijective. Cela suppose que le taux d'instabilité ne soit pas trop négatif et donc que la température ionique ne soit pas trop grande. Dans les faits, tant qu'elle n'approche pas la température électronique, la méthode converge correctement.

La relation de dispersion avec ions chauds étant résolue numériquement à l'aide de cette méthode itérative, le comportement de la pulsation et du taux de croissance avec le rapport des températures ioniques et électronique  $\hat{T}$  peut être étudié.

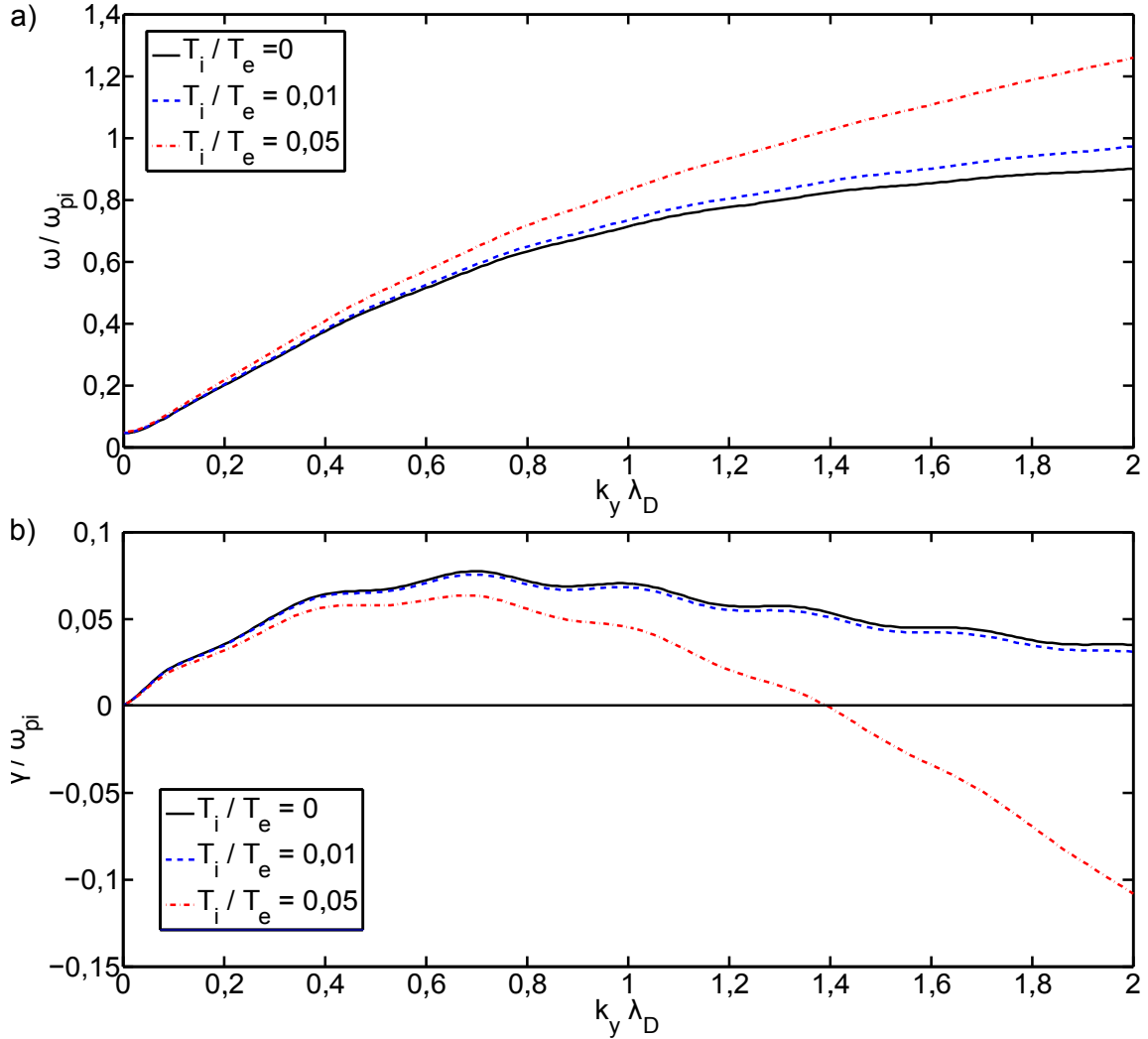
## 4.3 Influence de la température ionique sur le mode de dérive électronique $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

### 4.3.1 Cas d'une température isotrope

Nous considérons dans cette section une température ionique isotrope  $T_{i,\text{axial}} = T_{i,\text{plan}} = T_i$ . La relation de dispersion associée est alors donnée par l'Eq. 4.1, présentée en début de chapitre. Elle diffère de la relation de dispersion avec ions froids (Eq. 2.7) de par le terme ionique en  $Z'$ , qui découle de la théorie cinétique. L'effet Landau dû au ions est alors pris en compte et on s'attend à ce que le taux de croissance du mode de dérive électronique soit plus faible que dans l'hypothèse d'ions froids.

#### Effet du rapport $\hat{T}$ sur la dispersion

Pour s'en convaincre, la solution de pulsation positive de la relation de dispersion ions chauds est représentée sur la Fig. 4.3, pour différents rapports des températures ionique et électronique  $\hat{T}$ . Comme suggéré, le taux d'instabilité (Fig. 4.3b) chute avec le rapport des températures  $\hat{T}$  et ceci, même pour des valeurs très faibles de la température ionique. La différence avec le cas ions froids ( $\hat{T} = 0$ , courbe noire en trait plein) est d'autant plus marquée que le nombre d'onde  $\hat{k}_y$  est grand. Ceci s'explique par le fait que la vitesse de phase de l'onde décroît à mesure que le nombre d'onde  $\hat{k}_y$  augmente, comme le montre la Fig. 4.3a, accentuant l'effet Landau sur la distribution des ions. Pour les plus grands



**Figure 4.3:** Influence de  $\hat{T}$  sur a) la pulsation et sur b) le taux d'instabilité, calculés numériquement à partir de l'Eq. 4.1. Les paramètres sont ceux définis dans le Tab. 2.3 pour une direction de propagation azimutale. Les valeurs de  $\hat{T}$  normalisées sont 0 (courbe noire), 0,01 (courbe bleue) et 0,05 (courbe rouge) et correspondent à  $T_i$  égal à 0, 0,25 et 1,25 eV lorsque  $T_e$  vaut 25 eV.

nombres d'onde, la valeur du taux d'instabilité peut même devenir négative et l'onde est alors amortie (courbe rouge tiretée).

De son côté, la pulsation du mode ne sature plus à 1 (ou à  $\omega_{pi}$  en unités naturelles) pour les grands nombres d'onde  $\hat{k}_y$ , lorsque le rapport des températures  $\hat{T}$  est non nul. La pente de la relation de dispersion (la vitesse de groupe) est alors supérieure à celle du cas ions froids. Ce comportement est similaire à celui de l'onde acoustique ionique, de pulsation définie par

$$\hat{\omega}_{ac} = \hat{k} \sqrt{3\hat{T} + \frac{1}{1 + \hat{k}^2}}, \quad (4.20)$$

qui possède une vitesse de groupe proportionnelle à la racine de la température, lorsque le nombre d'onde  $\hat{k}$  devient grand. Par analogie avec les ondes acoustiques ioniques, on compare alors la solution  $\hat{\omega}_{froid}$  de la relation de dispersion ions froids à l'expression

$$\sqrt{\hat{\omega}_{chaud}^2 - 3\hat{T}\hat{k}^2}, \quad (4.21)$$

où  $\hat{\omega}_{chaud}$  est la solution ions chauds. Pour les valeurs données dans le Tab. 2.3 et un rapport de température  $\hat{T}$  valant 0,02, on montre que l'erreur relative entre les deux formules est inférieure à 1%. Nous rappelons que nous avons démontré dans l'approximation ions froids que lorsque  $\hat{V}_d \ll \hat{v}_{the}$  et que les conditions 2.30 et 2.31 sont remplies, la pulsation du mode de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  est très similaire à celle de l'onde acoustique ionique (Eq. 4.20 avec  $\hat{T} = 0$ ). Sous les mêmes conditions, le mode en ions chauds est alors semblable à l'onde acoustique ionique, dont la pulsation est donnée par l'Eq. 4.20 pour un rapport des températures  $\hat{T}$  non nul.

### Etude dans le plan ( $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$ )

Lorsque les conditions précédentes sont valides, le mode de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  en considérant les ions chauds est isotrope avec l'angle  $\alpha$  dans le référentiel des ions, tout comme l'était le mode dans le cas des ions froids. Revenir dans le référentiel du laboratoire a alors les mêmes conséquences (voir la section 2.4 du chapitre 2) : les axes tournent d'un angle  $\varphi \simeq -v_p/V_d$  et l'effet Doppler s'ajoute à la pulsation. Le cas des ions chauds ne présente que deux différences par rapport au cas d'ions froids : lors de l'exploration angulaire, toute la courbe du taux d'instabilité doit être décalée vers le bas, en raison de l'effet Landau, et la pulsation avec des ions chauds est légèrement plus grande que la pulsation avec des ions froids. Notons que le taux d'instabilité du mode est positif sur un domaine beaucoup plus restreint autour de la direction azimutale que dans le cas des ions froids et que le mode est fortement amorti autour de  $\alpha = 0^\circ$ . Ces différences ne sont pas sans implications et la partie suivante étudie les conséquences de l'approximation ions froids.

### 4.3.2 Erreur résultant de l'approximation ions froids

Dans le chapitre 2, nous avons développé un modèle analytique de relation de dispersion décrivant le plasma du propulseur. L'ajustement de sa fréquence sur les données

expérimentales du diagnostic de diffusion collective permet alors d'estimer la température et la densité électronique, comme nous l'avons montré dans le chapitre 3. Les sources d'erreur inhérentes à la résolution du diagnostic ont été considérées et conduisent à des incertitudes sur la mesure de la température  $T_e$  et de la densité  $n_e$ . Pour compléter cette étude, on se propose ici d'estimer l'erreur induite par l'approximation des ions froids, lors de la dérivation du modèle.

Comme nous venons de le dire, le modèle se base sur la relation de dispersion écrite dans l'hypothèse d'ions froids et ne dépend donc pas de la température ionique. Cette hypothèse s'appuie sur des mesures de FIL donnant  $T_i$  de l'ordre de 0,3 eV dans la direction azimutale. Cependant, l'ajout d'une température ionique, même faible, dans les paramètres de la relation de dispersion conduit à une modification de la pente de la pulsation, comme le montre la partie précédente. Pour les faibles valeurs de  $k_y$ , la pente est augmentée par rapport aux ions froids et, pour des  $k_y$  plus grands, la pulsation ne sature plus à  $\omega_{pi}$ . Les valeurs de la température et de la densité électronique pourraient alors être mal estimées lors de l'ajustement du modèle sur les relations de dispersion expérimentales.

Pour vérifier ce point, la relation de dispersion théorique avec ions chauds donnée par l'Eq. 4.1 est réexprimée en grandeurs physiques. On la résout ensuite pour une direction de propagation azimutale ( $\alpha = 90^\circ$ ), en utilisant la température et la densité électronique du propulseur trouvées dans le chapitre précédent, soit  $T_e = 26,8$  eV et  $n_e = 2,1 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$ . On fixe la température ionique à 0,3 eV, valeur estimée lors des mesures de FIL [28]. La valeur de  $k_z$  est fixé à 500 rad/m, comme observé par le diagnostic de diffusion collective [75] et on fait varier  $k_y$  de 4000 à 12 000 rad/m, intervalle similaire à celui présenté en Fig. 3.12a. Tous les paramètres de l'équation sont alors estimés à partir de mesures expérimentales.

On ajuste ensuite la fréquence du modèle (Eq. 3.35) sur la solution de la relation de dispersion ions chauds, pour différentes valeurs de la vitesse  $V_d$  comprises entre 1 et  $10 \cdot 10^5$  m/s. Les paramètres  $T_e$  et  $n_e$  du modèle sont les paramètres libres d'ajustement. Le résultat de cette simulation donne une température électronique qui s'écarte de 1 eV au maximum de la valeur utilisée (26,8 eV), pour calculer la relation de dispersion ions chauds. Pour sa part, l'effet est négligeable sur la valeur de la densité.

Ainsi, l'approximation des ions froids conduit à une légère surestimation de la température électronique avec le modèle, mais l'effet de la température  $T_i$  reste malgré tout modeste dans la direction azimutale. Cependant, la température ionique n'est pas isotrope dans le propulseur et, dans la direction axiale, elle peut même être 10 fois supérieure à celle de la direction azimutale [28]. Cette anisotropie a des conséquences qui sont étudiées dans la partie suivante.

### 4.3.3 Température anisotrope

Dans le propulseur, la température ionique dans la direction axiale du champ électrique, notée  $T_{i,\text{axial}}$ , est bien supérieure à la température azimutale, notée  $T_{i,\text{azi}}$ , et à la température radiale du champ magnétique, notée  $T_{i,\text{radial}}$  [28, 27, 10, 9]. La raison principale de cette anisotropie est que la fonction de distribution en vitesses des ions dans la direction axiale est élargie par le recouvrement de la zone d'ionisation et de la zone d'accélération. Ainsi, les ions créés en amont de la zone d'accélération voient une chute de potentiel plus grande, et acquièrent donc des vitesses plus larges, que ceux créés en fin de



zone d'ionisation. La température ionique peut alors être grande dans cette direction, de l'ordre de 5 eV [27]. La largeur de la distribution en vitesse des ions dans le plan orthogonal au champ électrique serait, quant à elle, liée aux collisions des neutres avec les parois. Celles-ci ayant une température de l'ordre de 1000°C à l'extrémité extérieure du canal de décharge [54], on mesure une température ionique dans la direction azimutale [10] et radiale [27] un peu supérieure, valant environ 0,5 eV. Pour cette raison, nous considérons que la température des ions est isotrope dans le plan orthogonal à la direction axiale et l'on note  $T_{i,azi} = T_{i,radial} = T_{i,plan}$ .

Pour étudier l'effet de l'anisotropie de la température ionique sur le mode de dérive  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , la susceptibilité ionique dans la relation de dispersion présentée en début de chapitre doit être modifiée. Sa dérivation est réalisée dans l'annexe A et la relation de dispersion normalisée correspondante se met alors sous la forme

$$Z' \left( \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_x \hat{v}_p}{\hat{K}} \right) = \hat{K}^2 \left[ 1 + \frac{1}{\hat{k}^2} + \frac{1}{\hat{k}^2} g \left( \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_y \hat{V}_d}{\hat{\omega}_{ce}}, \left( \hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 \right) \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2}, \hat{k}_z^2 \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2} \right) \right], \quad (4.22)$$

avec

$$\hat{K} = \sqrt{2 \left[ \hat{T}_{plan} \left( \hat{k}_y^2 + \hat{k}_z^2 \right) + \hat{T}_{axial} \hat{k}_x^2 \right]}, \quad (4.23)$$

où l'on a posé  $\hat{T}_{plan} = T_{i,plan}/T_e$  et  $\hat{T}_{axial} = T_{i,axial}/T_e$ .

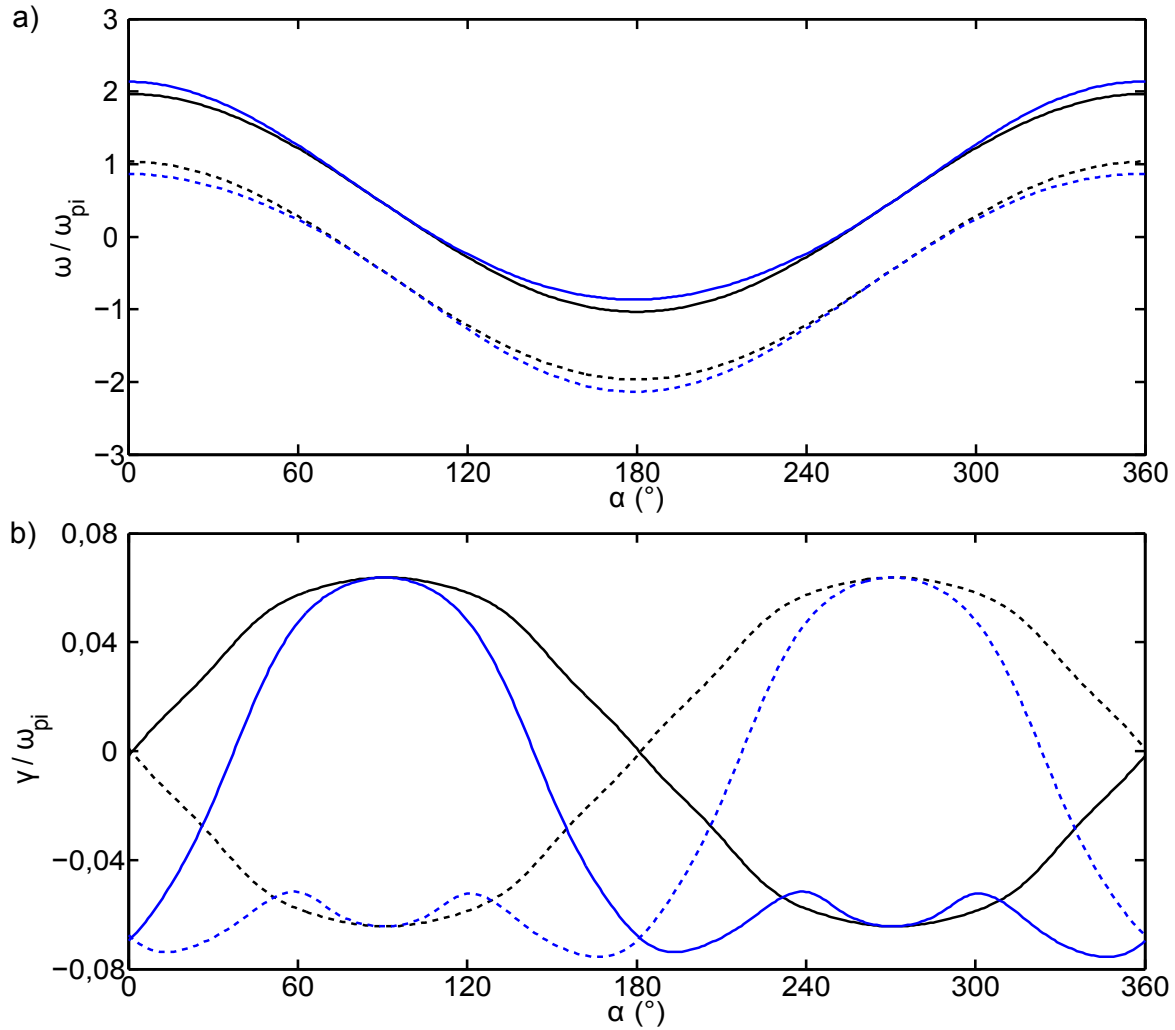
Cette équation est très similaire à la relation de dispersion dans le cas d'une température isotrope et est donc résolue de la même manière. La modification entre ces deux équations se fait à travers le terme  $\hat{K}$  qui remplace le nombre d'onde  $\hat{k}$  dans la susceptibilité ionique du cas isotrope. On comprend alors qu'une rotation des axes changera graduellement l'importance des paramètres  $\hat{T}_{plan}$  et  $\hat{T}_{axial}$ , l'effet Landau se faisant plus important à mesure que  $\hat{k}_x$  augmente puisque  $\hat{T}_{axial} > \hat{T}_{plan}$ .

### Exploration angulaire dans le référentiel du laboratoire

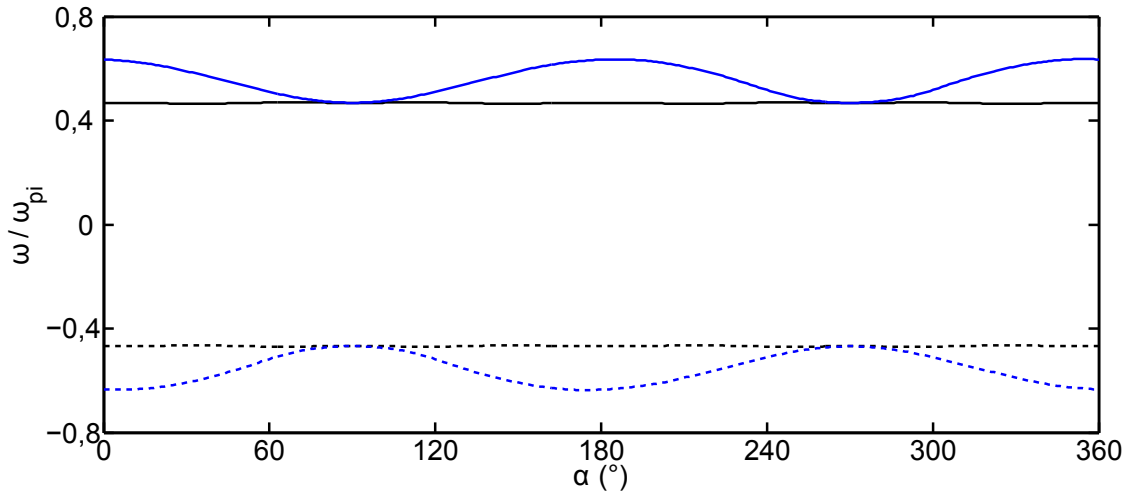
La figure 4.4 présente la variation angulaire en  $\alpha$  de la dispersion et de son taux d'instabilité associé, pour deux valeurs du rapport des températures  $\hat{T}_{axial}$ . En traits noirs, la relation de dispersion est résolue pour une température ionique isotrope, où l'on a choisi de fixer  $\hat{T}_{axial} = \hat{T}_{plan}$  à 0,02, correspondant à la température ionique mesurée dans la direction azimutale. En traits bleus, la température ionique est anisotrope et le rapport  $\hat{T}_{axial} = 10 \times \hat{T}_{plan}$  vaut 0,2.

Lorsque la température ionique est anisotrope, le mode de dérive électronique est alors instable sur un domaine angulaire en  $\alpha$  beaucoup plus restreint que pour le cas isotrope (Fig. 4.4b). En s'écartant de  $\alpha = 90^\circ$ , le taux d'instabilité décroît très rapidement à mesure que  $\hat{k}_x = \hat{k}_\perp \cos(\alpha)$  augmente et que  $\hat{k}_y = \hat{k}_\perp \sin(\alpha)$  diminue. Par conséquent, les deux modes représentés par les courbes bleues sont fortement amortis sur un large domaine angulaire autour de  $\alpha = 0^\circ$ . Ceci rend probablement indétectable le mode de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  par la diffusion collective dans la direction axiale.

La variation des pulsations est présentée sur la Fig. 4.4a pour les deux rapports de température considérés précédemment. Autour de  $\alpha = 90^\circ$ , les courbes noires, du cas isotrope, et bleues, du cas anisotrope, se superposent puisque leurs rapports de température



**Figure 4.4:** Variation des solutions de l'Eq. 4.22 en fonction de l'angle  $\alpha$ . Les paramètres de résolution sont ceux définis dans le Tab. 2.3 pour un nombre d'onde  $\hat{k}_\perp$  valant 0,5. Le rapport de température  $\hat{T}_{plan}$  est fixée à 0,02. Les courbes noires correspondent à une température isotrope, c'est-à-dire  $\hat{T}_{axial} = \hat{T}_{plan}$  alors que les courbes bleues correspondent au cas anisotrope plus réaliste, avec  $\hat{T}_{axial} = 10 \times \hat{T}_{plan}$ .



**Figure 4.5:** Pulsations présentées en Fig. 4.4a soustraites de l'effet Doppler  $\hat{k}_x \hat{v}_p$  et tournées de l'angle  $-\varphi = v_p/V_d$ . Les courbes noires représentent les solutions de la relation de dispersion obtenues pour  $\hat{T}_{axial} = \hat{T}_{plan} = 0,02$  et les courbes bleues pour  $\hat{T}_{axial} = 10 \times \hat{T}_{plan} = 0,2$ .

sont proches dans cette direction. A l'échelle du graphe, les deux courbes concordent sur un intervalle large de  $30^\circ$  de part et d'autre de  $90^\circ$ . Pour mieux distinguer la concordance entre les pulsations, on se place alors dans le référentiel des ions.

### Exploration angulaire dans le référentiel du jet d'ions

On se place dans le référentiel du jet d'ions en soustrayant l'effet Doppler aux pulsations présentées précédemment. Les axes doivent être légèrement tournés de l'angle  $-\varphi = v_p/V_d$  et on obtient alors les pulsations présentées sur la Fig. 4.5. Lorsqu'une température ionique isotrope est considérée pour résoudre la relation de dispersion (courbes noires), les pulsations sont alors isotropes. Ce n'est plus le cas lorsque un rapport  $\hat{T}_{axial}$  différant du rapport  $\hat{T}_{plan}$  est considéré, comme le montrent les courbes bleues. En  $\alpha = 0^\circ$  et  $180^\circ$ , la pulsation est maximale, puisque la température ionique est maximale dans cette direction, et elle diffère du cas isotrope. Autour de  $\alpha = 90^\circ$ , la pulsation des courbes bleues se superpose à celles des courbes noires et le mode semble être isotrope au voisinage de ce point. La question se pose à présent de savoir si cette variation de la pulsation avec l'angle a des implications sur les résultats présentés précédemment.

Dans le chapitre 3, nous avons corrigé le signal expérimental du mode azimutal de la fonction d'appareil. Pour ce faire, nous avons supposé que le mode était isotrope dans le référentiel des ions, du moins pour l'intervalle en  $\alpha$  sur lequel le rapport signal sur bruit est suffisant (c'est-à-dire entre  $80^\circ$  et  $110^\circ$  au plus large). Lorsque la température ionique est anisotrope, comme c'est le cas dans le propulseur, cette hypothèse n'est valide que sur un domaine restreint autour de  $90^\circ$ . On se propose ici de démontrer que la pulsation du mode varie faiblement sur le domaine angulaire exploré expérimentalement et que l'hypothèse reste alors correcte.

### Validité de l'hypothèse d'un mode isotrope dans le référentiel des ions autour de $\alpha=90^\circ$

Pour vérifier que le mode est bien isotrope dans le référentiel des ions autour de la direction azimutale, nous allons comparer sa pulsation en  $\alpha=90^\circ$  à la pulsation en  $\alpha=110^\circ$  pour laquelle le signal expérimental est tout juste détectable. Cependant, la dépendance de la pulsation à l'angle  $\alpha$  n'est pas évidente lorsque l'on considère la relation de dispersion générale (Eq. 4.22). On peut pourtant se donner une forme analytique approchée pour la variation de la pulsation avec l'angle d'observation en rappelant des résultats précédents. Lorsque les conditions 2.30 et 2.31 sont vérifiées et que  $\hat{V}_d \ll v_{the}$ , nous avons démontré que le mode de dérive  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  est très proche de l'onde acoustique ionique. On peut alors simplifier la représentation du mode en écrivant sa pulsation sous la forme de l'onde acoustique ionique dans le cas d'une température anisotrope, c'est-à-dire

$$\hat{\omega}_{ac,anisotrope}^2 = \hat{k}_\perp^2 \left( \hat{T}_{axial} \cos^2(\alpha) + \hat{T}_{plan} \sin^2(\alpha) \right) + \frac{\hat{k}^2}{1 + \hat{k}^2}. \quad (4.24)$$

Bien que ne donnant qu'une forme approchée de la pulsation du mode de dérive  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , cette équation montre la dépendance principale de sa pulsation avec l'angle  $\alpha$ , notamment à travers les fonctions cosinus et sinus. Il est alors possible de faire un développement limité autour de  $\alpha = 90^\circ$  de ces deux fonctions et celui-ci donne en  $\delta\alpha$

$$\begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \delta\alpha\right) &= \delta\alpha^2 + o(\delta\alpha^4) \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \delta\alpha\right) &= 1 + o(\delta\alpha^2) \end{cases}. \quad (4.25)$$

Le mode reste donc isotrope tant que le terme  $\hat{T}_{axial}\delta\alpha^2$  est de l'ordre de grandeur du rapport  $\hat{T}_{plan}$  ou si le terme le plus à gauche dans l'expression 4.24 est le terme dominant de l'équation. Si l'on pose  $\hat{k} = \hat{k}_\perp = 0,5$  et  $\hat{T}_{axial} = 10 \times \hat{T}_{plan} = 0,02$  alors l'erreur relative entre la pulsation en  $\alpha = 90^\circ$  et celle donnée en  $\alpha = 110^\circ$  est seulement de 1%. Le même résultat est trouvé si l'on calcule les pulsations à partir de la relation de dispersion générale et des paramètres définis dans le Tab. 2.3.

La variation de la pulsation sur le domaine considéré est donc inférieure à l'incertitude sur les fréquences obtenues expérimentalement avec le diagnostic de diffusion collective et sur l'indétermination du rapport des températures ionique et électronique. Sur l'intervalle en  $\alpha$  pour lequel le mode de dérive électronique est visible, le mode peut donc être considéré comme isotrope dans le référentiel des ions. L'hypothèse faite dans le chapitre 3 pour corriger le signal du mode azimutal est alors justifiée.

## 4.4 Conclusions

L'étude de la température ionique sur la relation de dispersion décrivant le mode de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  conduit à plusieurs conclusions importantes :

- Lorsque les conditions 2.30 et 2.31 sont vérifiées et que  $V_d \ll v_{the}$ , on montre que la pulsation du mode est proche de celle de l'onde acoustique ionique donnée par l'Eq. 4.24. Pour les grands nombres d'onde, la relation de dispersion est sensiblement modifiée par rapport au cas ion froids, ce qui ajoute aux incertitudes de mesure une

erreur liée au modèle utilisé (Eq. 3.35), pour lequel la température ionique a été négligée. L'indétermination sur la température  $T_e$  est estimée être de l'ordre de 1 eV alors que la densité électronique  $n_e$  n'est pas affectée.

- Le taux d'instabilité du mode est plus faible que lorsque les ions sont froids en raison de l'effet Landau sur la distribution ionique. L'amortissement est d'autant plus fort que le nombre d'onde est grand.
- La température ionique étant anisotrope dans le cas du propulseur à effet Hall, l'amortissement Landau est différent selon la direction de propagation du mode. Comme la température ionique axiale est nettement supérieure à celle de la direction azimutale, le mode est fortement amorti autour de la direction du champ électrique. Il est alors instable sur un domaine angulaire très resserré autour de la direction de la vitesse de dérive  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , conformément aux observations expérimentales. Le mode de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  n'est donc probablement pas celui observé avec le diagnostic de diffusion collective de la lumière dans la direction axiale. Enfin, la fréquence n'est plus isotrope dans le référentiel du jet d'ions, même si sa variation est faible autour de  $90^\circ$ . Le signal expérimental du mode azimutal s'éteignant lorsque l'on s'écarte de plus de  $20^\circ$  de  $90^\circ$ , on montre que le mode peut être considéré comme isotrope sur ce domaine.

La relation de dispersion (Eq. 4.22) est donc incapable de reproduire le comportement du mode axial observé expérimentalement. La vitesse de dérive n'est probablement pas le mécanisme de l'instabilité et un autre phénomène physique doit alors exciter ce mode. Ce point est développé dans le chapitre suivant.



# Chapitre 5

## Effet d'une deuxième population d'ions sur la relation de dispersion : mode axial et expériences avec de l'hydrogène

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>100</b>
5.1.1	Relations de dispersion	100
5.1.2	Exploration angulaire	103
5.1.3	Comparaison avec les données de FIL	104
5.1.4	Conclusion de l'étude en tension de décharge	105
<b>5.2</b>	<b>Relations de dispersion : ions doublement chargés</b>	<b>106</b>
5.2.1	Expression générale: électrons magnétisés	106
5.2.2	Normalisation de l'équation pour des électrons magnétisés	107
5.2.3	Equation pour des électrons non magnétisés	108
5.2.4	Résolution numérique	109
<b>5.3</b>	<b>Mode double faisceau dans la direction axiale</b>	<b>111</b>
5.3.1	Estimations des moments de la fonction de distribution des ions doublement chargés	111
5.3.2	Variation avec $\hat{v}_{p,Xe^{2+}}$ dans la direction axiale	112
5.3.3	Expressions analytiques des pulsations dans des cas limites	116
5.3.4	Variation avec $\eta$ dans la direction axiale	118
5.3.5	Variation de $\hat{T}_{Xe^{2+},axial}$	120
5.3.6	Conclusions	120
<b>5.4</b>	<b>Exploration dans le plan (<math>E_0, E_0 \times B_0</math>)</b>	<b>123</b>
5.4.1	Comparaison avec le cas $\eta = 0$	123
5.4.2	Comparaison à l'expérience	126
5.4.3	Conclusions	127
<b>5.5</b>	<b>Expériences avec de l'hydrogène</b>	<b>129</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>131</b>

---

Le mode azimutal, découvert numériquement par les codes PIC et expérimentalement avec le diagnostic de la diffusion collective, a été caractérisé comme étant l'instabilité de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , lors de l'étude de l'équation de dispersion 2.7 dans le chapitre 2. Pourtant, cette instabilité ne permet pas d'expliquer l'observation d'un mode se propageant dans la direction axiale, puisque le mode de dérive est fortement amorti dans cette direction en raison de la grande température des ions. De plus, le mode axial reste instable sur une distance assez longue par rapport au plan de sortie du propulseur à effet Hall (voir Fig. 1.6 du chapitre 1), distance sur laquelle la vitesse de dérive décroît fortement. Un autre mécanisme doit alors prendre part au développement de cette instabilité et on se propose dans ce chapitre de l'identifier.

Nous présenterons tout d'abord l'influence de la variation de la tension d'accélération expérimentale sur le mode axial. Les conclusions de cette étude laissent à penser qu'une population d'ions plus rapides que les ions xénon simplement chargés porte le mode. Des mesures expérimentales avec des sondes  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ayant montré que des ions doublement chargés sont présents dans le plasma du propulseur, nous ajouterons une susceptibilité due à ces ions dans notre étude cinétique. Le mode axial est alors caractérisé comme l'instabilité double faisceau et nous montrerons l'influence des moments de la fonction de distribution des ions ionisés deux fois sur cette instabilité. Nous vérifierons ensuite que la croissance linéaire du mode se produit dans un large angle solide autour de la direction du champ électrique, similairement à ce qui est observé pour le facteur de forme du mode axial. Enfin, nous présenterons l'expérience originale consistant à ajouter de l'hydrogène moléculaire dans le plasma de xénon du propulseur. Nous montrerons alors l'effet de l'injection de ce gaz sur le facteur de forme du mode axial et azimutal et sur les performances du moteur.

## 5.1 Résultats expérimentaux

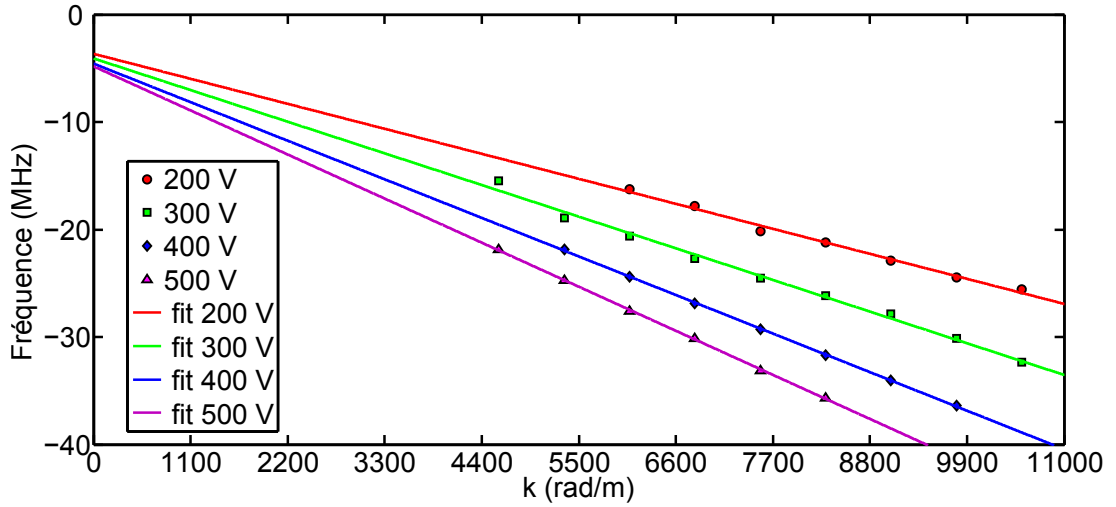
Les résultats antérieurs de la diffusion collective ont montré que la vitesse de groupe du mode axial est de l'ordre de la vitesse d'éjection des ions  $v_p$  [71]. Pour cette raison, le mode est supposé être porté par les ions et l'effet Doppler serait la contribution dominante de la dispersion du mode axial. Le moyen expérimental le plus aisé pour rendre compte de l'influence du paramètre  $v_p$  sur la fréquence de l'instabilité est de varier la tension d'accélération appliquée aux bornes du propulseur. On peut alors étudier la relation de dispersion et la variation angulaire du mode avec le diagnostic, en fonction de cette tension.

### 5.1.1 Relations de dispersion

La détermination de la relation de dispersion expérimentale du mode axial en fonction de la tension de décharge  $U_{ac}$  est présentée sur la Fig. 5.1. Différents enregistrements ont été réalisés pour des tensions allant de 200 à 700 V par pas de 100 V. Les fréquences correspondant aux deux plus hautes tensions (600 et 700 V) ne sont pas représentées car la plupart d'entre elles dépassaient la limite détectable par le diagnostic (environ -35 MHz).

Pour toutes les tensions, la fréquence semble varier affinement avec le nombre d'onde





**Figure 5.1:** Relations de dispersion expérimentales du mode axial ( $\alpha = 180^\circ$ ) en fonction de la tension de décharge. Le débit massique pour cette expérience est de 6 mg/s et le courant dans les bobines est de 17 A. Le volume de mesure est situé à 11 mm devant le plan de sortie du propulseur. Les traits pleins représentent les meilleurs ajustements de l'Eq. 5.1 sur les données expérimentales.

$k$ , selon la loi

$$f(k, \alpha = 180^\circ) = f_0 - \frac{v_g}{2\pi}k, \quad (5.1)$$

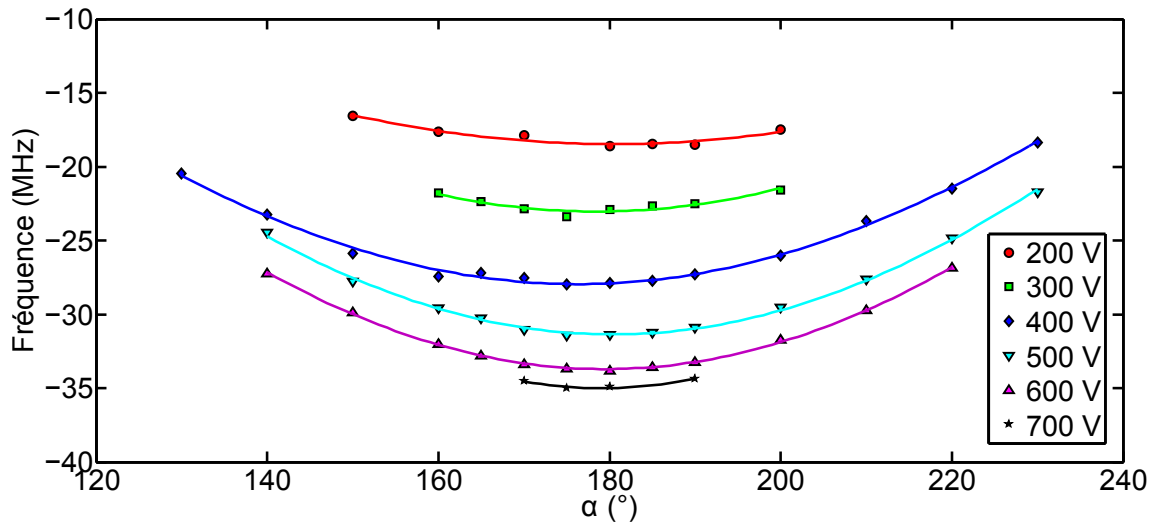
où  $f_0$  représente l'ordonnée à l'origine et  $v_g$  la vitesse de groupe du mode.

Pour chaque série en tension, on ajuste l'Eq. 5.1 (traits pleins) aux points expérimentaux et on obtient des NRMSE (Eq. 3.31) inférieures à 5% dans tous les cas. Les vitesses de groupe  $v_g$  déduites de ces ajustements sont de l'ordre de la vitesse du faisceau d'ions pour ces paramètres de décharge, c'est-à-dire la dizaine de km/s, et l'ordonnée à l'origine  $f_0$  vaut quelques MHz. Le tableau 5.1 résume la valeur de ces deux paramètres en fonction de la tension d'accélération  $U_{ac}$ . Le paramètre  $v_g$  augmente avec la tension, ce qui confirme l'importance de la vitesse d'éjection des ions sur la dispersion du mode. Notons également que l'ordonnée à l'origine  $f_0$  augmente (en valeur absolue) avec la tension appliquée.

Malheureusement, il n'est pas possible d'obtenir d'autres informations à partir de ces relations de dispersion car l'absence de courbure ne permet pas d'ajuster un modèle à plus de deux paramètres. Il est, par exemple, impossible de distinguer la contribution de l'effet Doppler, de la contribution de la vitesse de phase du mode dans le référentiel des ions, sur le paramètre  $v_g$ . Le comportement de l'instabilité autour de la direction axiale permet d'obtenir plus de détails sur la nature de ce mode. C'est ce que nous étudions dans la partie suivante

**Table 5.1:** Valeurs de l'ordonnée à l'origine  $f_0$  et de la vitesse de groupe  $v_g$ , obtenues par ajustement de l'Eq. 5.1 sur les données expérimentales de la Fig. 5.1, en fonction de la tension d'accélération. Pour les tensions 600 et 700 V, la plupart des fréquences dépassaient la limite détectable par le diagnostic et les paramètres  $f_0$  et  $v_g$  n'ont pas pu être estimés.

$U_{ac}$	$f_0$	$v_g$
200 V	-3,6 MHz	13,3 km/s
300 V	-4,1 MHz	16,8 km/s
400 V	-4,6 MHz	20,5 km/s
500 V	-4,8 MHz	23,4 km/s
600 V	Pas de données	Pas de données
700 V	Pas de données	Pas de données



**Figure 5.2:** Explorations angulaires de la fréquence du mode axial pour différentes valeurs de la tension d'accélération. Le débit massique pour cette expérience est de 6 mg/s, le courant dans les bobines est de 17 A et le nombre d'onde  $k$  est fixé à 7113 rad/m. Le volume de mesure est situé à 11 mm devant le plan de sortie du propulseur. Les traits pleins représentent les meilleurs ajustements de l'Eq. 5.2 sur les données expérimentales.

### 5.1.2 Exploration angulaire

La variation angulaire de la fréquence du mode axial en fonction de la tension de décharge est présentée sur la Fig. 5.2. Nous l'avons déjà vu dans le chapitre 1, la fréquence présente une large arche de cosinus en  $\alpha$ . Celle-ci est majoritairement attribuée à l'effet Doppler, même si la dépendance de la fréquence avec l'angle  $\alpha$  ne s'ajuste pas parfaitement avec une fonction cosinus (voir Fig. 1.7). Nous considérerons pourtant dans un premier temps que c'est le cas, la variation de la fréquence du mode en fonction de  $\alpha$  étant inconnue dans le référentiel des ions. Il est alors possible de construire un modèle analytique de fréquence en fonction des différents paramètres. Son expression est de la forme

$$f(k, \alpha) = f_0 + \frac{1}{2\pi} [v_i \cos(\alpha - \alpha_0) - v_s] k, \quad (5.2)$$

où  $v_i$  est un paramètre dont la valeur est attendue être proche de celle de la vitesse  $v_p$ ,  $kv_s$  représente la pulsation isotrope dans le référentiel des ions se déplaçant dans la direction de la vitesse  $v_i$ ,  $f_0$  est l'ordonnée à l'origine et  $\alpha_0$  est un paramètre tenant compte de l'écart à l'axe des arches de cosinus. Notons également que cette expression est un cas général de l'Eq. 5.1, pour laquelle il faudrait remplacer  $v_g$  par  $v_i \cos(\alpha - \alpha_0) - v_s$ .

Dans l'Eq. 5.2, il est impossible de discerner les contributions de  $f_0$  et de  $v_s$ , l'équation étant de la forme  $A \cos(\alpha - \alpha_0) + B$ . On peut pourtant s'affranchir de l'ordonnée à l'origine  $f_0$ , celle-ci ayant été estimée à partir des relations de dispersion dans la partie précédente. Pour les deux plus hautes tensions (600 et 700 V), il n'existe pas de relation de dispersion expérimentale et donc pas de fréquence  $f_0$ . On peut pourtant estimer ces valeurs en extrapolant les valeurs obtenues pour des tensions plus basses à partir d'une loi de puissance du type

$$f_0 = A \times U_{ac}^n. \quad (5.3)$$

En utilisant les valeurs du Tab.5.1, on trouve que les paramètres  $A$  et  $n$  valent respectivement 0,6582 et 0,32145. On en déduit alors que pour la tension  $U_{ac}=600$  V, le paramètre  $f_0$  vaut approximativement -5,14 MHz et qu'il vaut environ -5,4 MHz pour la tension  $U_{ac}=700$  V. Une fois la fréquence  $f_0$  fixée, l'Eq. 5.2 est ajustée sur les données expérimentales,  $\alpha_0$ ,  $v_s$  et  $v_i$  étant les paramètres ajustables. Les meilleurs ajustements (traits pleins) sont en bon accord avec les fréquences données par le diagnostic, comme le montre la Fig. 5.2, et l'erreur normalisée NRMSE est faible, inférieure à 3% dans tous les cas. Les valeurs des deux paramètres  $v_s$  et  $v_i$  sont présentées dans le Tab. 5.2 en fonction de la tension d'accélération.

La vitesse  $v_i$  augmente significativement avec la tension d'accélération. Ce comportement est cohérent avec l'idée que cette vitesse est liée à la vitesse d'éjection des ions  $v_p$ . Les barres d'erreur statistiques peuvent être importantes, notamment pour la série en tension 700 V pour laquelle le nombre de points est très réduit. Elles sont représentées dans la partie suivante sur la Fig. 5.3. Le résultat sur le deuxième paramètre  $v_s$  est quant à lui décevant. Les barres d'erreur sont souvent plus grandes que la valeur elle-même et la variation de cette valeur avec la tension n'apporte pas d'information sur la vitesse de propagation du mode dans le référentiel se déplaçant à la vitesse  $v_i$ . L'expression analytique que nous avons considérée est alors probablement trop simple pour décrire la fréquence

**Table 5.2:** Valeurs des paramètres  $v_s$  et  $v_i$ , obtenues en ajustant l'Eq. 5.2 sur les données expérimentales de la Fig. 5.2, en fonction de la tension de décharge. Les valeurs de la vitesse de phase  $v_\varphi$  dans la direction  $\alpha = 180^\circ$  ( $k=7113$  rad/m) sont aussi données.

$U_{ac}$	$v_s$	$v_i$	$v_\varphi$
200 V	0,26 km/s	12,84 km/s	16,42 km/s
300 V	-3,39 km/s	20,14 km/s	20,25 km/s
400 V	-0,35 km/s	21,01 km/s	24,61 km/s
500 V	-1,20 km/s	24,66 km/s	27,75 km/s
600 V	-0,25 km/s	25,49 km/s	29,87 km/s
700 V	-3,08 km/s	29,18 km/s	30,84 km/s

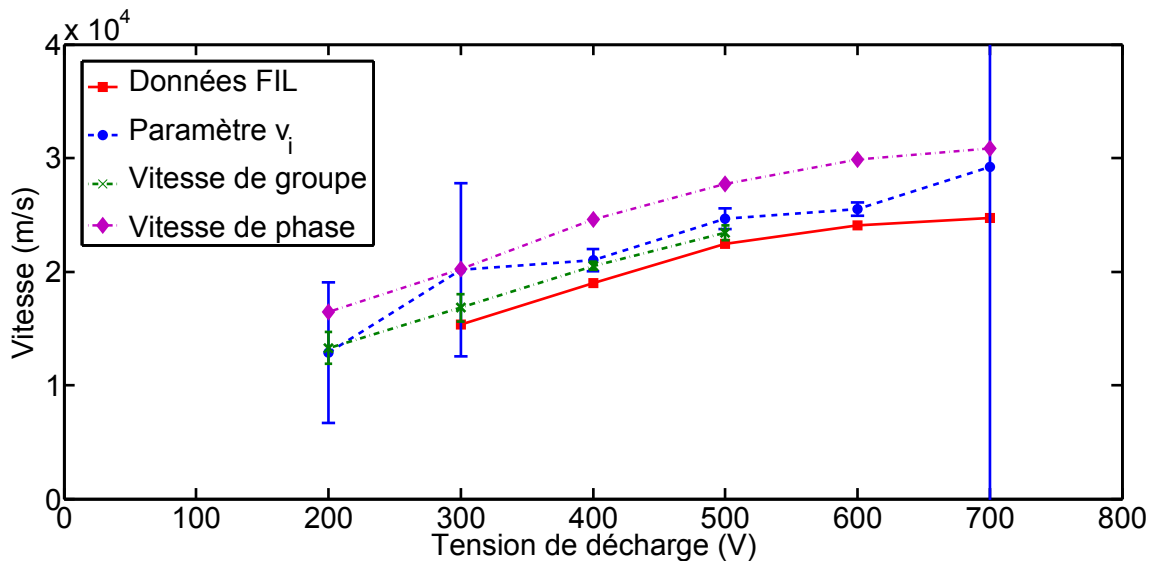
dans ce référentiel. Pourtant, la vitesse  $v_i$  et la vitesse de groupe  $v_g$  (obtenue dans la partie précédente) semblent connectées à la tension d'accélération et donc à un mode porté par les ions. Dans la partie suivante, on compare ces vitesses à la vitesse  $v_p$  expérimentale, mesurée par Fluorescence Induite par Laser (FIL) dans les mêmes conditions de décharge.

### 5.1.3 Comparaison avec les données de FIL

Pour les conditions de décharge énoncées précédemment, des mesures par FIL ont été réalisées et permettent d'accéder à la variation de la vitesse d'éjection  $v_p$  des ions en fonction de la tension de décharge [27]. Sur la Fig. 5.3, les vitesses  $v_i$  et  $v_g$  ainsi que la vitesse de phase  $v_\varphi = \omega/k$  (obtenues pour  $\alpha = 180^\circ$  et  $k=7113$  rad/m) sont comparées à ces mesures. Pour toutes les tensions, ces trois vitesses sont supérieures à celles estimées par FIL. La vitesse de groupe  $v_g$  est légèrement inférieure aux vitesses  $v_i$  et  $v_\varphi$  mais reste plus de 10% supérieure à la vitesse  $v_p$ , la différence de vitesse étant de plusieurs kilomètres par seconde. Les barres d'erreur ne sont pas suffisantes pour justifier cette différence systématique : pour les tensions 400, 500 et 600 V, les barres d'erreur sur les paramètres  $v_i$  et  $v_g$  sont faibles et l'indétermination sur la vitesse mesurée par FIL ne permet pas, elle non plus, de justifier un tel écart entre les vitesses. Le mode se propage alors certainement à une vitesse supérieure à la vitesse du jet d'ions dans le référentiel du laboratoire.

En bougeant le volume de mesure du diagnostic de diffusion collective le long de l'axe du propulseur, on peut également comparer ces vitesses pour différentes positions devant le moteur. Aucune relation de dispersion n'ayant été enregistrée, seuls la vitesse de phase  $v_\varphi$  et le paramètre  $v_i$  sont estimés à partir d'explorations angulaires réalisées pour les différentes positions.

Le comportement de ces vitesses avec la distance au plan de sortie du propulseur est présenté sur la Fig. 5.4. La vitesse de phase  $v_\varphi$  reste globalement constante avec la distance au propulseur et sa valeur est bien supérieure à la vitesse  $v_p$  mesurée par FIL. La vitesse  $v_i$  est, elle, proche de la vitesse  $v_p$  pour les deux premières positions (11 et 15 mm), puis augmente progressivement. Pour les trois dernières positions (20, 25 et 30 mm) pour lesquelles un signal a été mesuré, elle excède la vitesse du faisceau de plusieurs km/s.



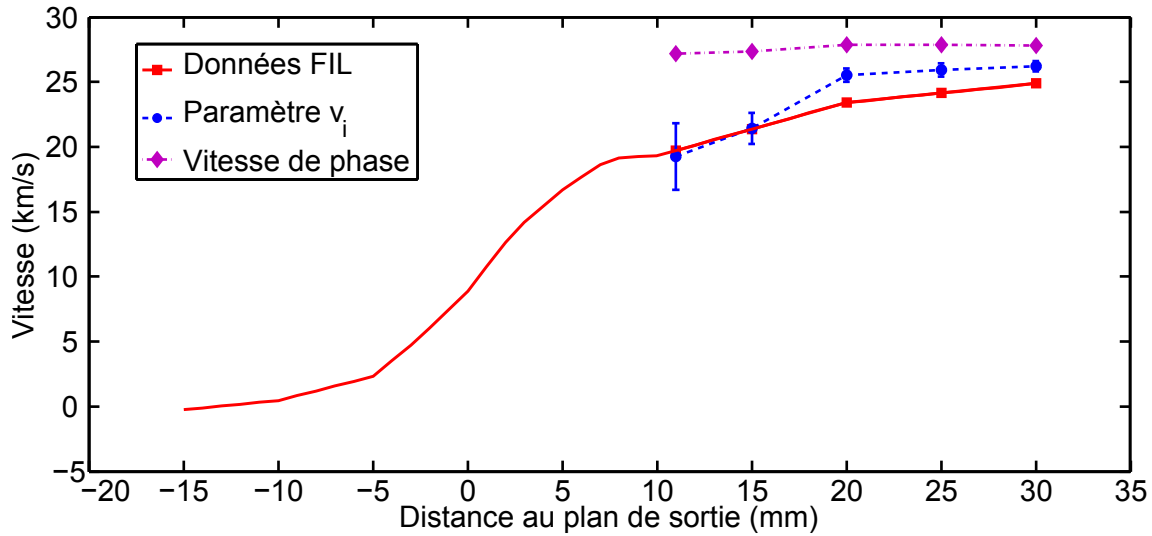
**Figure 5.3:** Comparaisons pour différentes tensions de décharge des paramètres  $v_i$  (courbe bleue tiretée) et  $v_g$  (courbe verte point-tirée) obtenus à partir des données de la diffusion collective présentées sur les Fig. 5.1 et 5.2, avec la vitesse des ions  $v_p$  (courbe rouge en trait plein) obtenue à partir des mesures de FIL dans les mêmes conditions de plasma. La vitesse de phase de l'onde (obtenues pour  $\alpha = 180^\circ$  et  $k=7113$  rad/m) est aussi représentée (courbe violette point-tirée).

Si l'on émet l'hypothèse que la vitesse  $v_i$  est la vitesse des ions portant le mode, on constate que ceux-ci sont progressivement accélérés. Ils passent alors dans ce cas d'une vitesse proche de la vitesse mesurée par FIL à une vitesse supérieure à celle-ci, à mesure que l'on s'éloigne du plan de sortie du propulseur.

#### 5.1.4 Conclusion de l'étude en tension de décharge

La vitesse de groupe  $v_g$  du mode axial, obtenue à partir des relations de dispersion expérimentales, croît avec la tension d'accélération. De plus, sa valeur est du même ordre de grandeur que celle de la vitesse d'éjection  $v_p$  des ions. Ce comportement est caractéristique d'un mode porté par les ions du plasma. Pourtant, la vitesse  $v_g$  est généralement supérieure à cette vitesse  $v_p$ , comme le montrent les comparaisons avec la vitesse des ions mesurée par FIL. Un ajustement de l'Eq. 5.2 sur les données expérimentales de diffusion collective permet d'estimer une vitesse, notée  $v_i$ , supposée être la vitesse des ions portant le mode. Sa valeur augmente lorsque l'on s'éloigne du propulseur. Elle est proche de celle mesurée par FIL jusqu'à 15 cm du plan de sortie et devient supérieure à cette dernière au-delà.

Ces caractéristiques ne sont pas sans rappeler celles de l'instabilité de faisceau [31, 11, 15, 16], qui se développe lorsqu'une population dérive par rapport à une autre. Cependant, le mode instable pour ce genre d'instabilités possède une vitesse de phase inférieure à la vitesse du faisceau d'ions principal. Or, dans le cas du propulseur, la vitesse de phase du



**Figure 5.4:** Variations du paramètre  $v_i$  (courbe bleue tiretée) et de la vitesse de phase  $v_\varphi$  (courbe violette point-tirée), obtenues à partir des données de la diffusion collective pour un nombre d'onde  $k$  fixé à 7113 rad/m, et de la vitesse  $v_p$  du faisceau d'ions (courbe rouge en trait plein), obtenue à partir des mesures de FIL dans les mêmes conditions de plasma. Pour cette expérience, le débit massique est de 9 mg/s, le courant dans les bobines vaut 17 A et la tension d'accélération est de 500 V.

mode axial dépasse la vitesse  $v_p$ . De plus, il est peu probable qu'un plasma immobile de densité suffisante existe dans le plan de sortie du propulseur, même si la présence d'un plasma résiduel dans le caisson PIVOINE [48, 27] peut être invoquée.

Toutes ces raisons portent à croire qu'une autre population d'ions, plus rapide que les ions simplement chargés  $Xe^+$ , doit être considérée. Des mesures par sondes  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  [38] sur un propulseur similaire au X000 et des simulations [37] ayant montré que la densité d'ions xénon  $Xe^{2+}$  ionisés deux fois pouvait atteindre jusqu'à 11% de la densité totale d'ions, nous considérons dans la section suivante cette population additionnelle dans notre étude cinétique.

## 5.2 Relations de dispersion : ions doublement chargés

### 5.2.1 Expression générale : électrons magnétisés

Si on considère une population d'ions xénon  $Xe^+$  ionisés une fois et une population d'ions xénon  $Xe^{2+}$  ionisés deux fois, l'Eq. 4.1 doit être modifiée pour prendre en compte la nouvelle susceptibilité des ions doublement chargés. Dans le cas général, la susceptibilité d'une population d'ions A (voir l'annexe A), de densité  $n_A$ , de degré d'ionisation  $Z_A$ , de

masse  $M_A$  et de vitesse de faisceau  $v_{pA}$ , peut se mettre sous la forme

$$\chi_A = -\frac{\omega_{pA}^2}{K_A^2} Z' \left( \frac{\omega - k_x v_{pA}}{K_A} \right), \quad (5.4)$$

où

$$K_A = \sqrt{2} \sqrt{k_x^2 v_{thA,axial}^2 + (k_y^2 + k_z^2) v_{thA,plan}^2}, \quad (5.5)$$

et où  $v_{thA,axial}$  et  $v_{thA,plan}$  sont respectivement les vitesses thermiques dans la direction axiale et dans le plan perpendiculaire au champ électrique. Celles-ci sont a priori différentes puisque la fonction de distribution est anisotrope dans le propulseur. Rappelons que l'expression de la pulsation  $\omega_{pA}$  est donnée par

$$\omega_{pA} = \sqrt{\frac{e^2 Z_A^2 n_A}{\epsilon_0 M_A}}. \quad (5.6)$$

Si l'on note par un indice  $Xe^+$  les quantités relatives à la population d'ions ionisés une seule fois et par un indice  $Xe^{2+}$  celles relatives aux ions ionisés deux fois, la relation de dispersion prenant en compte la nouvelle susceptibilité s'écrit donc

$$\begin{aligned} 0 = & 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left[ 1 + g \left( \frac{\omega - k_y V_d}{\omega_{ce}}, k_{\perp}^2 \rho_{ce}^2, k_z^2 \rho_{ce}^2 \right) \right] \\ & - \frac{\omega_{Xe^+}^2}{K_{Xe^+}^2} Z' \left( \frac{\omega - k_x v_{p,Xe^+}}{K_{Xe^+}} \right) \\ & - \frac{\omega_{Xe^{2+}}^2}{K_{Xe^{2+}}^2} Z' \left( \frac{\omega - k_x v_{p,Xe^{2+}}}{K_{Xe^{2+}}} \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

avec

$$\begin{cases} K_{Xe^+} &= \sqrt{2} \sqrt{k_x^2 v_{th,Xe^+,axial}^2 + (k_y^2 + k_z^2) v_{th,Xe^+,plan}^2} \\ K_{Xe^{2+}} &= \sqrt{2} \sqrt{k_x^2 v_{th,Xe^{2+},axial}^2 + (k_y^2 + k_z^2) v_{th,Xe^{2+},plan}^2} \end{cases} \quad (5.8)$$

et

$$\begin{cases} \omega_{Xe^+} &= \sqrt{\frac{e^2 n_{Xe^+}}{\epsilon_0 M_{Xe^+}}} \\ \omega_{Xe^{2+}} &= \sqrt{\frac{4e^2 n_{Xe^{2+}}}{\epsilon_0 M_{Xe^+}}} \end{cases}. \quad (5.9)$$

Pour faciliter l'étude paramétrique de cette équation, il convient alors de la normaliser.

### 5.2.2 Normalisation de l'équation pour des électrons magnétisés

Les modes de cette équation étant de nature acoustique ionique, nous normalisons les longueurs à la longueur de Debye électronique  $\lambda_{De}$  et les pulsations à la pulsation totale

$$\omega_{p,tot} = \sqrt{\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 M_{Xe}}}, \quad (5.10)$$

où  $n_0$  représente la densité totale des électrons du plasma. Par conséquent, les vitesses sont normalisées à la vitesse du son définie par

$$c_{s,tot} = \sqrt{\frac{eT_e}{M_{Xe}}}. \quad (5.11)$$

De plus, il nous faut introduire un nouveau paramètre pour tenir compte du fait que l'équation de quasineutralité s'écrit maintenant

$$n_0 = n_{Xe^+} + 2n_{Xe^{2+}}. \quad (5.12)$$

Nous poserons alors le paramètre  $\eta$  comme le rapport de  $2n_{Xe^{2+}}$ , la densité d'électrons neutralisant les ions  $Xe^{2+}$ , à la densité  $n_0$ , c'est-à-dire

$$\eta = \frac{2n_{Xe^{2+}}}{n_0}. \quad (5.13)$$

Avec ces conventions, l'Eq. 5.7 normalisée se met sous la forme

$$\begin{aligned} 0 = & 1 + \frac{1}{\hat{k}^2} \left[ 1 + g \left( \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_y \hat{V}_d}{\hat{\omega}_{ce}}, \left( \hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 \right) \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2}, \hat{k}_z^2 \frac{\hat{M}}{\hat{\omega}_{ce}^2} \right) \right] \\ & - \frac{1 - \eta}{\hat{K}_{Xe^+}^2} Z' \left( \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_x \hat{v}_{p,Xe^+}}{\hat{K}_{Xe^+}} \right) \\ & - \frac{2\eta}{\hat{K}_{Xe^{2+}}^2} Z' \left( \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_x \hat{v}_{p,Xe^{2+}}}{\hat{K}_{Xe^{2+}}} \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

où  $\hat{K}_{Xe^+}$  et  $\hat{K}_{Xe^{2+}}$  s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} \hat{K}_{Xe^+} &= \sqrt{2} \sqrt{\hat{k}_x^2 \hat{T}_{Xe^+,axial} + (k_y^2 + k_z^2) \hat{T}_{Xe^+,plan}} \\ \hat{K}_{Xe^{2+}} &= \sqrt{2} \sqrt{\hat{k}_x^2 \hat{T}_{Xe^{2+},axial} + (k_y^2 + k_z^2) \hat{T}_{Xe^{2+},plan}} \end{cases}. \quad (5.15)$$

De la même manière que dans le chapitre précédent, les paramètres  $\hat{T}_{axial}$  et  $\hat{T}_{plan}$  représentent respectivement les rapports des températures entre la température ionique dans la direction axiale ou dans le plan perpendiculaire au champ électrique et la température électronique.

Le champ magnétique ayant probablement peu d'influence sur les solutions de la relation de dispersion 5.14, nous écrivons la relation de dispersion pour des électrons non magnétisés dans la partie suivante.

### 5.2.3 Equation pour des électrons non magnétisés

Les mesures de la diffusion collective ont montré que le signal associé au mode axial était supérieur au bruit jusqu'à 40 cm après le plan de sortie du propulseur (Fig. 1.6). A cette distance, l'amplitude du champ magnétique a chuté fortement et les électrons ne



sont probablement plus magnétisés. Le rôle du champ magnétique dans le développement de cette instabilité n'est alors probablement pas trop important. Nous pouvons alors considérer les électrons comme non magnétisés lors de la dérivation de la susceptibilité électronique. Dans ce cas, il n'y a pas de vitesse de dérive moyenne dans la direction azimutale et le calcul est très similaire à la dérivation de la susceptibilité ionique (voir annexe A).

Ainsi, l'équation de dispersion pour des électrons non magnétisés s'écrit

$$0 = 1 - \frac{1}{2\hat{k}^2} Z' \left( \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{2}\hat{k}\sqrt{\hat{M}}} \right) - \frac{1-\eta}{\hat{K}_{Xe^+}^2} Z' \left( \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_x \hat{v}_{p,Xe^+}}{\hat{K}_{Xe^+}} \right) - \frac{2\eta}{\hat{K}_{Xe^{2+}}^2} Z' \left( \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_x \hat{v}_{p,Xe^{2+}}}{\hat{K}_{Xe^{2+}}} \right), \quad (5.16)$$

où les grandeurs  $\hat{K}_{Xe^+}$  et  $\hat{K}_{Xe^{2+}}$  sont définies par les Eqs. 5.15.

Par la suite, nous comparerons les solutions de cette équation à celles de la relation de dispersion avec électrons magnétisés, pour voir l'influence du champ magnétique sur le mode axial.

Il reste à présent à résoudre numériquement ces deux relations de dispersion.

### 5.2.4 Résolution numérique

Pour résoudre les Eqs. 5.14 et 5.16, il n'est pas possible d'utiliser la méthode itérative que nous avons présenté dans les chapitres précédents, puisque la dérivée de la fonction de dispersion plasma apparaît dans deux termes séparés. Il est alors nécessaire de les résoudre par une méthode de recherche des zéros dans le plan complexe, s'appuyant sur le théorème de l'argument [4]. Pour ce faire, un programme de résolution en FORTRAN 90 a été développé par Coulette [13, 12]. Les principales caractéristiques de la méthode de résolution utilisée dans ce programme sont détaillées ici.

#### Théorème de l'argument

La méthode se base donc sur le théorème de l'argument qui peut se formuler sous la forme suivante : si  $f(z)$  est une fonction analytique sur un domaine du plan complexe et si  $(C)$  est une courbe fermée de ce domaine ne passant pas par un zéro de la fonction  $f(z)$ , alors on peut écrire

$$I_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{\nu} z_j^k, \quad (5.17)$$

où les  $(z_j)_{1 \leq j \leq \nu}$  sont tous les zéros de la fonction  $f(z)$  contenus dans le domaine limité par la courbe  $(C)$ .

En faisant varier  $k$  de 0 à  $\nu$ , il est donc possible d'écrire les  $\nu + 1$  relations suivantes

$$\begin{cases} I_0 = & \nu \\ I_1 = & z_1 + z_2 + \dots + z_\nu \\ I_2 = & z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_\nu^2 \\ \dots & \dots \\ I_\nu = & z_1^\nu + z_2^\nu + \dots + z_\nu^\nu \end{cases} . \quad (5.18)$$

On en déduit immédiatement que les solutions  $z_j$  sont les zéros du polynôme

$$P_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\nu} a_j z^j, \quad (5.19)$$

où les coefficients  $(a_j)_{0 \leq j \leq \nu}$  sont reliés aux intégrales  $I_k$  par les formules de Newton suivante

$$\forall k \in [1, \nu], \quad \sum_{j=0}^{k-1} a_{\nu-j} I_{k-j} + k a_k = 0. \quad (5.20)$$

Le calcul des zéros de la fonction  $f(z)$  est donc remplacé par le calcul des  $\nu+1$  intégrales  $(I_k)_{0 \leq k \leq \nu}$  et par le calcul des zéros identiques du polynôme 5.19. Cette méthode est très utile pour estimer les solutions de la relation de dispersion, le raffinement des solutions finales se faisant par une méthode de Newton ou de la sécante.

### Structure du programme

Pour la résolution numérique qui nous intéresse, il n'est pas nécessaire de calculer les  $\nu + 1$  intégrales. Même sur un large domaine complexe, le nombre de solutions est faible et la méthode serait assez coûteuse en temps de calcul. Le programme se contente alors de calculer l'intégrale d'ordre 0,  $I_0$ , pour obtenir le nombre de solutions. La recherche des solutions se fait ensuite par la méthode de Newton ou de la sécante. La structure du programme est la suivante :

- On définit un domaine complexe (appelé fenêtre de résolution) assez large pour englober les solutions intéressantes pour le problème étudié. Le programme estime le nombre de solutions  $\nu$  dans ce domaine en calculant l'intégrale  $I_0$  de manière discrète.
- Les méthodes de Newton ou de la sécante sont alors utilisées pour estimer les solutions contenues dans le domaine. Si celles-ci obtiennent un nombre de solutions égal à  $\nu$ , le programme s'arrête. Si le nombre de solutions est inférieur à  $\nu$ , le domaine de l'espace est subdivisé en deux parties égales et on réitère la procédure pour chaque nouveau domaine.

La fonction étant analytique, sa connaissance sur un contour (C) fermé du domaine étudié est suffisante pour connaître ses propriétés, et notamment le nombre de ses zéros, dans le domaine défini par ce contour (C). Dans la pratique, l'intégrale donnant  $I_0$  est discrétisée et le nombre de solutions peut être sous-évalué. Il convient alors d'estimer

l'intégrale sur un grand nombre de points, pour augmenter la probabilité de convergence. C'est cette densité de points qui rend le programme coûteux en calculs et qui explique la différence de temps pour estimer les solutions de la relation de dispersion entre cette méthode et la méthode itérative présentée précédemment. Notons enfin que, dans les cas où la méthode itérative s'applique (lors de l'étude de la relation de dispersion 5.14 pour  $\eta=0$  par exemple), les deux méthodes convergent vers les mêmes solutions.

## 5.3 Mode double faisceau dans la direction axiale

Lorsque deux populations de particules dérivent l'une par rapport à l'autre, un type d'instabilité nommé instabilité de faisceau peut se développer [31, 11, 15, 16]. L'explication de principe des mécanismes de cette instabilité est la suivante.

Supposons tout d'abord qu'un faisceau d'ions, se déplaçant à la vitesse  $v_p$ , traverse un plasma immobile (si l'on se place dans le référentiel de ce dernier). En raison de l'effet Doppler, le faisceau porte deux modes acoustiques ioniques de vitesses de phase différentes dans la direction du faisceau. Le premier est appelé mode rapide car il se propage dans le sens du jet à la vitesse de phase  $v_p + c_s$  alors que le deuxième est appelé mode lent car il possède une vitesse plus faible qui vaut  $v_p - c_s$ . C'est l'interaction du mode lent avec le mode acoustique ionique du plasma immobile se propageant dans le sens du jet d'ions qui donne lieu à l'instabilité de faisceau. Le taux de croissance du mode est maximal lorsque la vitesse de phase du mode lent est de l'ordre de grandeur de la vitesse du son  $c_s$  du plasma au repos. C'est donc un mode de vitesse de phase inférieure à la vitesse du faisceau d'ions qui se développe. Précisons par ailleurs que ce comportement dépend de la densité relative d'ions dans le faisceau par rapport aux ions du plasma et de la température de chaque espèce. Dans notre cas, les deux populations d'ions  $Xe^+$  et  $Xe^{2+}$  sont en mouvement et on parle plutôt d'instabilité de double faisceau [11]. Dans la direction axiale, le principe est pourtant le même puisque la population d'électrons ne contribue pas significativement à l'instabilité.

Le mode faisceau résultant de l'interaction de deux populations de vitesse moyenne bien distinctes, les caractéristiques des fonctions de distribution de chaque espèce jouent donc un rôle prédominant dans le développement de l'instabilité. Dans le cas d'une fonction de distribution Maxwellienne, les trois paramètres qui peuvent alors influencer le mode sont la vitesse moyenne, la vitesse thermique et la densité. Après avoir donné une estimation de ces paramètres pour la population des ions doublement chargés, nous présentons dans cette section leur influence sur le mode faisceau dans la direction axiale.

### 5.3.1 Estimations des moments de la fonction de distribution des ions doublement chargés

#### Bornes de la vitesse moyenne des ions doublement chargés

Avant d'étudier l'influence de la vitesse  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}}$  sur l'instabilité de faisceau, il convient de borner sa valeur et donc de rappeler comment sont formés les ions  $Xe^{2+}$ . Les deux processus les plus probables pour la création d'ions xénon doublement chargés sont l'ioni-

sation d'un ions  $Xe^+$  par un électron ou l'échange de charge entre deux ions  $Xe^{2+}$  définis par les équations suivantes

$$\begin{cases} e^- + Xe^+ & \rightarrow 2e^- + Xe^{2+} \\ Xe^+ + Xe^+ & \rightarrow Xe + Xe^{2+} \end{cases} \quad (5.21)$$

Dans les deux cas, l'ion  $Xe^+$  initial possède la vitesse moyenne  $\hat{v}_{p,Xe^+}$  dans la direction axiale. Si l'on néglige les changements de direction lors des collisions, les ions  $Xe^{2+}$  possèdent alors une vitesse moyenne au moins aussi grande que celle des ions  $Xe^+$ . A présent, si l'on suppose que les zones de première et de deuxième ionisation se recouvre, les ions doublement chargés seront alors soumis à la même chute de potentiel que les ions simplement chargés. L'énergie cinétique d'un ion  $Xe^{2+}$  sera donc deux fois supérieure à celle d'un ion  $Xe^+$  créé au même endroit et il acquerra une vitesse  $\sqrt{2}$  fois supérieure à  $\hat{v}_{p,Xe^+}$ . Nous obtenons ainsi une borne supérieure et inférieure pour la vitesse des ions  $Xe^{2+}$  et nous pouvons écrire

$$\hat{v}_{p,Xe^{2+}} \in \left[ \hat{v}_{p,Xe^+}, \sqrt{2}\hat{v}_{p,Xe^+} \right]. \quad (5.22)$$

C'est donc bien le jet d'ions  $Xe^{2+}$ , plus rapide, qui vient exciter l'un des modes acoustiques du faisceau d'ions  $Xe^+$ , plus lent. L'étude de l'influence de la vitesse  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}}$  est reportée dans la prochaine partie de cette section.

### Températures de la fonction de distribution des ions doublement chargés

La zone de création des ions doublement chargés n'est pas connue, mais est a priori découplée de celle des ions  $Xe^+$ , comme le suggèrent les processus d'ionisation 5.21. Par conséquent, les températures ioniques des deux espèces dans la direction axiale sont probablement différentes. Nous étudierons alors plus tard dans cette section l'influence de la température ionique  $T_{Xe^{2+},axial}$ .

La température des ions  $Xe^{2+}$  dans le plan perpendiculaire au champ électrique est par contre certainement très similaire à celle des ions  $Xe^+$ . Pour plus de simplicité par la suite, nous supposons ces deux températures ioniques égales, soit  $T_{Xe^{2+},plan} = T_{Xe^+,plan} = \hat{T}_{plan}$ .

### Densité des ions doublement chargés

Nous l'avons dit, des mesures par sondes  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  [38] sur un propulseur similaire au X000 et des simulations [37] ont montré que la densité d'ions xénon  $Xe^{2+}$  ionisés deux fois pouvait valoir entre 6 et 11% de la densité totale d'ions. Ceci donne une idée de la valeur du paramètre  $\eta$  qui est par conséquent compris entre 11 et 20%. Lorsque le paramètre  $\eta$  est fixe, nous choisissons la valeur intermédiaire de 14% pour notre démonstration. Nous présentons également en fin de section l'étude paramétrique de ce paramètre, de façon à voir son influence sur la pulsation et le taux de croissance de l'instabilité de faisceau.

#### 5.3.2 Variation avec $\hat{v}_{p,Xe^{2+}}$ dans la direction axiale

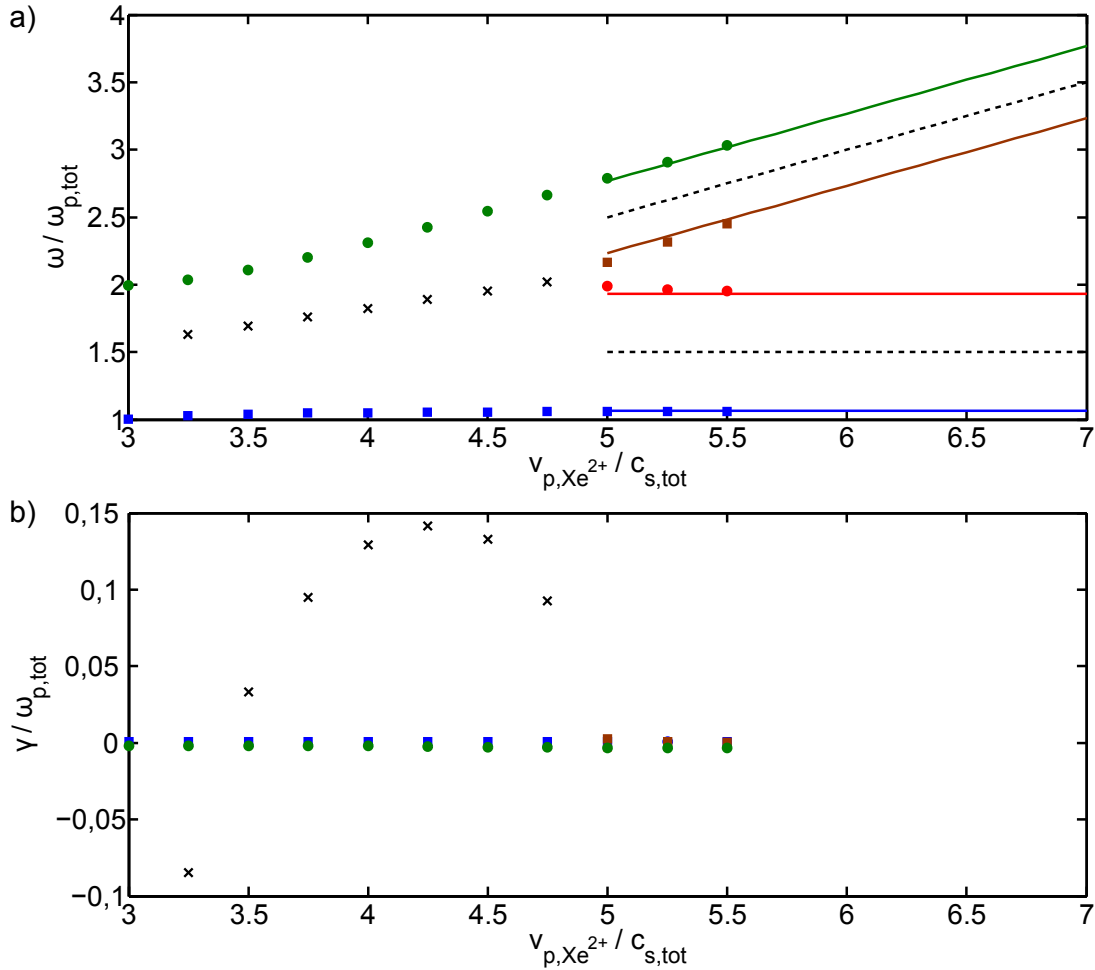
Nous présentons sur la Fig. 5.5 la variation des pulsations et des taux de croissance, obtenus à partir de l'Eq. 5.14, en fonction de la vitesse  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}}$ . La vitesse  $\hat{v}_{p,Xe^+}$  du

faisceau d'ions  $Xe^+$  est fixée à 3. On fait alors varier la vitesse des ions  $Xe^{2+}$  sur un intervalle plus grand que l'intervalle de l'Eq. 5.22, pour voir le comportement asymptotique des pulsations avec ce paramètre. Le rapport des températures (identique pour les deux populations d'ions) est fixé à 0,02 dans les trois directions. Ce rapport est bien plus faible que celui observé dans la direction axiale pour les ions  $Xe^+$  mais permet d'obtenir un taux d'instabilité positif pour le mode faisceau, comme le montre la partie sur la température  $T_{Xe^{2+},axial}$ .

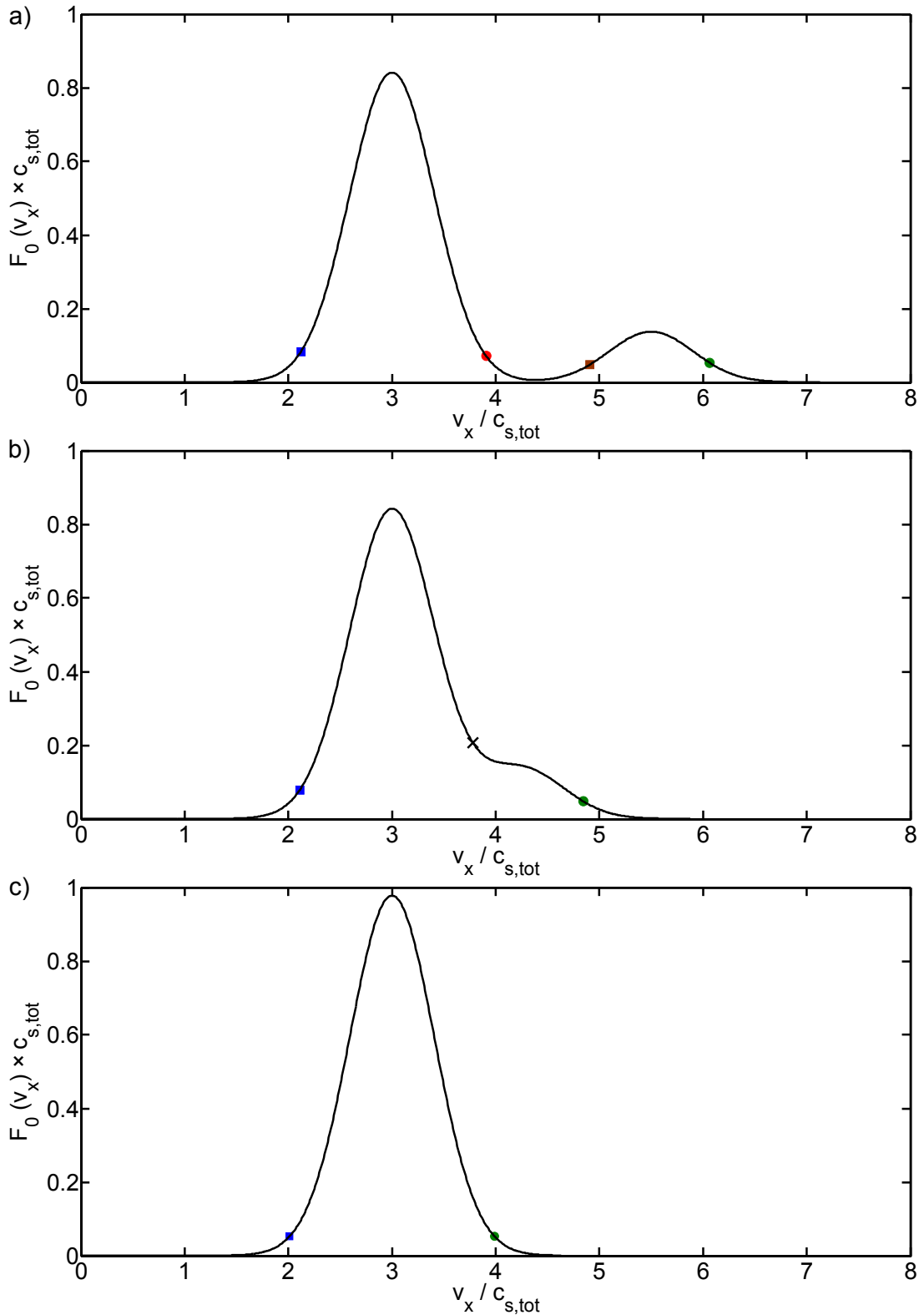
Le comportement des pulsations et des taux de croissance est identique à ce qui a déjà été observé dans les études antérieures sur l'instabilité de faisceau (voir Ref. [31] ou la page 243 de la Ref. [11]) :

- $\hat{v}_{p,Xe^{2+}} \gg \hat{v}_{p,Xe^+}$  (Fig. 5.6a) : Pour les grandes valeurs de la vitesse  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}}$ , quatre modes stables sont visibles. Deux (les cercles pleins bleus et les carrés pleins rouges) sont les modes acoustiques du faisceau d'ions  $Xe^+$  et deux (les cercles pleins verts et les carrés pleins bruns) ceux du faisceau d'ions  $Xe^{2+}$ . Chaque faisceau porte alors un mode lent (représenté par des carrés) et un mode rapide (représenté par des cercles) symétriques par rapport à la contribution Doppler  $\hat{k}_x \hat{v}_p$ , où  $\hat{v}_p$  représente la vitesse moyenne du faisceau considéré. L'écart vertical entre la pulsation du mode rapide et la pulsation du mode lent dépend du rapport  $\eta$  comme nous le verrons par la suite.
- $\hat{v}_{p,Xe^{2+}} \geq \hat{v}_{p,Xe^+}$  (Fig. 5.6b) : Lorsque la vitesse  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}}$  décroît à environ 4,75, les modes lent du faisceau d'ions doublement chargés (carrés bruns) et rapide du faisceau d'ions simplement chargés (cercles rouges) se couplent. Le mode (croix noires), né de la fusion des deux précédents, est instable et son taux de croissance augmente jusqu'à un maximum à mesure que la vitesse des ions  $Xe^{2+}$  diminue. Pour des vitesses trop basses, le taux d'instabilité chute et le mode redevient stable lorsque l'on approche la vitesse des ions  $Xe^+$ .
- $\hat{v}_{p,Xe^{2+}} = \hat{v}_{p,Xe^+}$  (Fig. 5.6c) : Au point  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}} = \hat{v}_{p,Xe^+} = 3$ , seuls deux modes acoustiques stables sont visibles puisque les deux faisceaux dérivent à la même vitesse. Ainsi, les deux modes lents et les deux modes rapides se couplent pour donner un seul de chaque côté de la fonction de distribution. Dans ce cas, la fréquence du mode rapide est légèrement plus haute que la fréquence du mode rapide pour un faisceau d'ions  $Xe^+$  seuls (courbe rouge légèrement plus basse). L'inverse est valable pour les modes lents puisqu'ils sont symétriques par rapport à la contribution Doppler. Cet effet est lié au rapport  $\eta$  et donc indirectement à la charge des ions doublement chargés comme le montre les parties suivantes.

Ce phénomène se comprend aussi en terme d'effet Landau. Lorsque les fonctions de distribution  $F_0(v_x)$  (intégrées suivant  $dv_y$  et  $dv_z$ ) des deux faisceaux sont séparées en vitesses (Fig. 5.6a), les modes acoustiques relatifs à chaque distribution se trouvent sur des pentes négatives (par rapport à leurs directions de propagation) et subissent alors un effet



**Figure 5.5:** Influence du paramètre  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}}$  sur a) les pulsations et b) les taux d'instabilité obtenus à partir de la relation de dispersion 5.14. Celle-ci est résolue pour les paramètres définis dans le Tab. 2.3. Le rapport des températures est fixé à 0,02 pour les deux populations d'ions et dans les trois directions de l'espace, le nombre d'onde dans la direction axiale est fixé à 0,5 et la vitesse des ions simplement chargés à 3. Les traits pleins brun et vert représentent les modes lent et rapide du faisceau d'ions  $Xe^{2+}$  et les traits pleins bleu et rouge ceux du faisceau d'ions  $Xe^+$  (Eqs. 5.27). Les traits noirs tiretés représentent la contribution Doppler des ions  $Xe^{2+}$  (la courbe la plus en haut) et la contribution des ions  $Xe^+$  (la courbe plus basse).



**Figure 5.6:** Effet Landau inverse sur l'instabilité double faisceau. Le paramètre  $\eta$  vaut 14%. Les points correspondent à ceux de la Fig. 5.5. pour les vitesses : a)  $v_{p,Xe^{2+}} = 5,5$ , b)  $v_{p,Xe^{2+}} = 4,25$  et c)  $v_{p,Xe^{2+}} = 3$ .

Landau qui les amortit. Quand les fonctions de distribution se rapprochent (Fig. 5.6b), le mode lent du faisceau d'ions  $Xe^{2+}$  vient se coupler avec le mode rapide du faisceau  $Xe^+$ , donnant lieu à l'instabilité de faisceau. Ce mode est donc instable puisqu'il se situe sur une partie de pente positive par rapport à son sens de propagation. Enfin, pour des vitesses similaires des deux faisceaux (Fig. 5.6c), les deux fonctions de distribution deviennent indiscernables et les modes lents et rapides de chaque population se confondent. Notons enfin que ce type d'instabilité de faisceau porte le nom de CBI (pour Cold Beam Instability) dans la limite fluide selon la nomenclature de Lapuerta *et al.* [47].

Dans la partie suivante, nous montrons comment obtenir les pulsations des modes dans les cas particuliers  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}} \gg \hat{v}_{p,Xe^+}$  et  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}} = \hat{v}_{p,Xe^+}$ .

### 5.3.3 Expressions analytiques des pulsations dans des cas limites

L'introduction de la nouvelle susceptibilité des ions doublement chargés dans la relation de dispersion 5.14 fait apparaître un facteur  $1 - \eta$  dans le terme des ions  $Xe^+$  et un facteur  $2\eta$  dans le terme des ions  $Xe^{2+}$ . Le paramètre  $\eta$  modifie alors la forme des solutions de l'équation par rapport à la pulsation de l'onde de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  que nous avons décrite dans les chapitres précédents. Pourtant, sous certaines conditions, il est possible de retrouver une situation pour laquelle les solutions se comportent comme la pulsation de l'onde de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . C'est le cas notamment lorsque les vitesses moyennes des deux faisceaux sont très éloignées ou lorsqu'elles sont strictement égales. Pour plus de simplicité dans les notations, nous réaliserons l'étude suivante dans le cas d'une température ionique isotrope mais le raisonnement est identique lorsque l'anisotropie est prise en compte.

Dans le cas général, on peut écrire les deux susceptibilités ioniques sous la forme

$$\chi_A = -\frac{A}{2\hat{k}^2\hat{T}_A} Z' \left( \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_x \hat{v}_A}{\hat{k} \sqrt{2\hat{T}_A}} \right), \quad (5.23)$$

où  $A$  est le facteur lié à la densité de l'espèce A ( $1 - \eta$  ou  $2\eta$ ) et où la normalisation fait intervenir la masse  $M_A$ .

Pour faire apparaître une forme plus courante, il est alors possible de poser un rapport de températures effectif  $\hat{T}_{A,eff} = \hat{T}_A/A$  tel que l'expression 5.23 s'écrive

$$\chi_A = -\frac{1}{2\hat{k}^2\hat{T}_{A,eff}} Z' \left( \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_x \hat{v}_A}{\hat{k} \sqrt{2\hat{T}_{A,eff}} \sqrt{A}} \right). \quad (5.24)$$

Cette susceptibilité est la susceptibilité d'une espèce ionique A, de masse  $M_{A,eff} = M_A/A$ , possédant un rapport des températures  $\hat{T}_{A,eff} = \hat{T}_A/A$  et de vitesse moyenne  $\hat{v}_A$  non modifiée.

#### Cas asymptotique : $\hat{v}_{p,Xe^{2+}} \gg \hat{v}_{p,Xe^+}$

Dans le cas d'un faisceau d'ions se propageant bien plus rapidement que le second, les fonctions de distribution sont complètement disjointes, comme le montre la Fig. 5.6a.



Pour une vitesse de phase proche de la vitesse moyenne du faisceau le plus rapide, la contribution de la fonction de distribution de l'autre population est alors négligeable. En d'autres termes, la susceptibilité des ions lents est négligeable dans l'expression de la relation de dispersion 5.14. On se retrouve par conséquent dans un cas où l'expression de la relation de dispersion est identique à celle que nous avons étudiée auparavant (Eq. 4.1), mais pour une population de masse  $M_{A,eff}$  à la température  $\hat{T}_{A,eff}$ . On obtient donc deux solutions de vitesses de phase proches de celles d'ondes acoustiques ioniques, symétriques par rapport à la vitesse moyenne du faisceau rapide. Lorsque la vitesse de phase est voisine de la vitesse moyenne du faisceau d'ions le moins rapide, c'est la susceptibilité des ions rapides qui devient négligeable dans l'équation et la relation de dispersion donne deux autres modes.

Pour le cas qui nous intéresse, la quantité  $A$  doit être remplacée par  $1 - \eta$  pour les ions  $Xe^+$  ou par  $2\eta$  pour les ions  $Xe^{2+}$  et on obtient alors deux populations de masses

$$\begin{cases} M_{Xe^+,eff} &= \frac{M_{Xe}}{1-\eta} \\ M_{Xe^{2+},eff} &= \frac{M_{Xe}}{2\eta} \end{cases}, \quad (5.25)$$

possédant des rapports de températures

$$\begin{cases} \hat{T}_{Xe^+,eff} &= \frac{\hat{T}}{1-\eta} \\ \hat{T}_{Xe^{2+},eff} &= \frac{\hat{T}}{2\eta} \end{cases}. \quad (5.26)$$

Si l'on considère les conditions 2.30 et 2.31 valides et si  $\hat{V}_d \ll \hat{v}_{the}$ , les pulsations des modes de dérive électronique associées à chaque population sont très similaires à celles de l'onde acoustique ionique. Dans le référentiel du laboratoire et pour  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}} \gg \hat{v}_{p,Xe^+}$ , les pulsations des modes lent et rapide des deux populations sont donc données par

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{Xe^+,\pm} &= \hat{k}_x \hat{v}_{p,Xe^+} \pm \hat{k} \sqrt{3\hat{T} + \frac{1-\eta}{1+\hat{k}^2}} \\ \hat{\omega}_{Xe^{2+},\pm} &= \hat{k}_x \hat{v}_{p,Xe^{2+}} \pm \hat{k} \sqrt{3\hat{T} + \frac{2\eta}{1+\hat{k}^2}} \end{cases}. \quad (5.27)$$

Ces expressions sont représentées par les traits pleins sur la Fig. 5.5b et sont les pulsations limites vers lesquelles les modes des deux faisceaux tendent lorsqu'on augmente la vitesse  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}}$  par rapport à la vitesse  $\hat{v}_{p,Xe^+}$ . Notons que pour chacune des populations, la largeur des fonctions de distribution n'est pas affectée par le paramètre  $\eta$ , puisque la masse et la température ionique sont modifiées par un même facteur (Eqs. 5.25 et 5.26). L'effet Landau sur les différents modes est alors le même que lorsque l'on considère une unique population d'ions.

Pour des vitesses de faisceaux proches (Fig. 5.6b), l'expression analytique des pulsations n'est pas évidente. Les deux fonctions de distribution ne sont plus disjointes et, pour une vitesse de phase proche de la vitesse moyenne des faisceaux, les susceptibilités des deux populations ioniques sont du même ordre de grandeur. Il est pourtant possible d'obtenir la pulsation pour des vitesses de faisceaux strictement égales, comme nous allons le démontrer.

**Cas particulier**  $v_{p,Xe^{2+}} = v_{p,Xe^+}$  **ou**  $\alpha = 90^\circ$

Lorsque les vitesses des deux faisceaux sont identiques ou que la direction de propagation est orthogonale aux jets, l'argument de la dérivée de la fonction de dispersion plasma  $Z'$  est le même dans les deux termes ioniques. Dans ce cas, il est possible de mettre la fonction  $Z'$  en facteur et les deux susceptibilités des ions  $Xe^+$  et  $Xe^{2+}$  sont remplacées par une unique susceptibilité donnée par

$$\chi = -\frac{1 + \eta}{2\hat{k}^2\hat{T}} Z' \left( \frac{\hat{\omega} - \hat{k}_x \hat{v}_p}{\hat{k} \sqrt{2\hat{T}}} \right). \quad (5.28)$$

En appliquant la même méthode que pour le cas précédent, on obtient une susceptibilité représentative d'une population de masse  $M_{Xe}/(1 + \eta)$ , possédant un rapport de températures  $T/(1 + \eta)$  et dont les fréquences acoustiques caractéristiques dans le référentiel du laboratoire sont données par

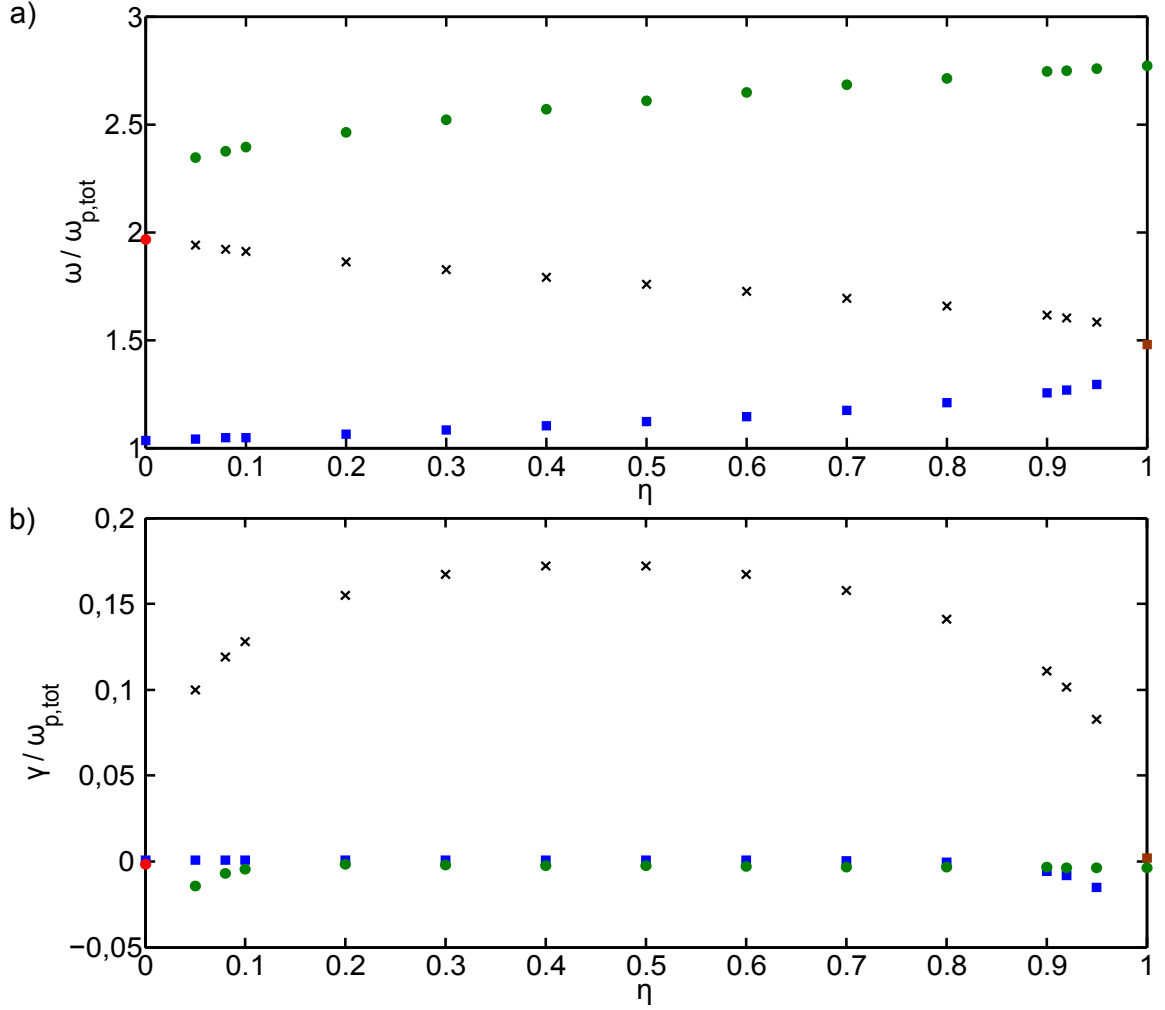
$$\hat{\omega}_{90,\pm} = \hat{k}_x \hat{v}_{p,Xe^+} \pm \hat{k} \sqrt{3\hat{T} + \frac{1 + \eta}{1 + \hat{k}^2}}. \quad (5.29)$$

### 5.3.4 Variation avec $\eta$ dans la direction axiale

Pour le propulseur X000 sur lequel les expériences de diffusion collective ont été réalisées, la valeur du paramètre  $\eta$  n'a pas été mesurée. En s'appuyant sur les résultats expérimentaux [39] et les simulations [37] réalisées pour un propulseur similaire, nous avons fixé ce paramètre à 14%. Cette valeur est arbitraire et peut être légèrement différente pour le propulseur X000. Par conséquent, nous présentons dans cette section la variation des solutions de la relation de dispersion 5.14 en fonction du paramètre  $\eta$ .

On fait varier celui-ci sur tout l'intervalle de valeurs possibles qu'il peut prendre (soit de 0 à 1), même si la proportion d'ions doublement chargés est probablement de l'ordre de la dizaine ou de la vingtaine de pourcent. Les autres paramètres de résolution sont ceux fixés dans le Tab. 1. Le nombre d'onde  $k_x$  est fixé à 0,5. La figure 5.7 montre l'évolution des pulsations des différents modes avec le paramètre  $\eta$ , ainsi que leurs taux de croissance associés, pour une propagation des instabilités dans la direction axiale  $\alpha = 0^\circ$ .

- $\eta = 0$  : Lorsque la proportion d'ions  $Xe^{2+}$  est nulle, deux modes marginalement stables sont trouvés. Ils correspondent aux modes lent (carré bleu) et rapide (cercle rouge) de l'instabilité de dérive électronique que nous avons présentés dans le chapitre 4.
- $0 < \eta < 1$  : Pour des valeurs intermédiaires du paramètre  $\eta$ , on observe deux modes stables (Eqs. 5.27) et un mode instable, pour le jeu de paramètre que nous avons choisi. Les cercles verts correspondent au mode rapide du faisceau d'ions  $Xe^{2+}$ . Sa pulsation augmente avec le paramètre  $\eta$  puisque la pulsation plasma pour cette population augmente elle aussi avec ce paramètre. Son taux de croissance est toujours proche de zéro sauf lorsque le paramètre  $\eta$  tend vers 0 où il tend vers  $-\infty$ , puisqu'en  $\eta=0$  ce mode n'existe plus. Les carrés bleus correspondent au mode lent du faisceau d'ions  $Xe^+$ . La pulsation du mode augmente également avec  $\eta$



**Figure 5.7:** Influence du paramètre  $\eta$  sur les solutions de la relation de dispersion 5.14. Les paramètres de résolution sont ceux du Tab. 1 pour une propagation dans la direction axiale. Le nombre d'onde  $k_x$  est fixé à 0,5. Le rapport des températures  $\hat{T}$  est fixé à 0,02 pour les deux espèces et dans les trois directions. La vitesse des ions simplement chargés  $v_{p,Xe^+}$  vaut 3 et celle des ions doublement chargés  $v_{p,Xe^{2+}}$  vaut 4,25.

alors que la pulsation de la population d'ions  $Xe^+$  diminue avec ce paramètre. Ceci s'explique par le fait que la vitesse de phase du mode est négative dans le référentiel du faisceau. On se rapproche donc de la contribution Doppler à mesure que le paramètre  $\eta$  augmente. Son taux de croissance est lui aussi proche de zéro, sauf lorsque  $\eta$  tend vers 1 où il tend vers  $-\infty$ , puisqu'en  $\eta=1$  ce mode n'existe plus. Le mode instable (croix noires) est le mode faisceau, produit du couplage entre le mode lent du faisceau d'ions  $Xe^{2+}$  et du mode rapide du faisceau d'ions  $Xe^+$ . Son taux de croissance augmente avec  $\eta$  et atteint un maximum autour de  $\eta = 0,45$ , pour ensuite diminuer. Ce maximum dépend du rapport des températures des deux populations, ainsi que de leurs vitesses moyennes. La pulsation de ce mode relie la pulsation du mode rapide des ions  $Xe^+$  lorsque  $\eta = 0$  (cercle rouge) et à celle du mode lent des ions  $Xe^{2+}$  lorsque  $\eta = 1$  (carré brun).

- $\eta = 1$  : On observe deux modes marginalement stables. Ceux-ci correspondent aux modes lent (carré brun) et rapide (cercle vert) de l'instabilité de dérive dans le cas d'une population d'ions xénon doublement chargés.

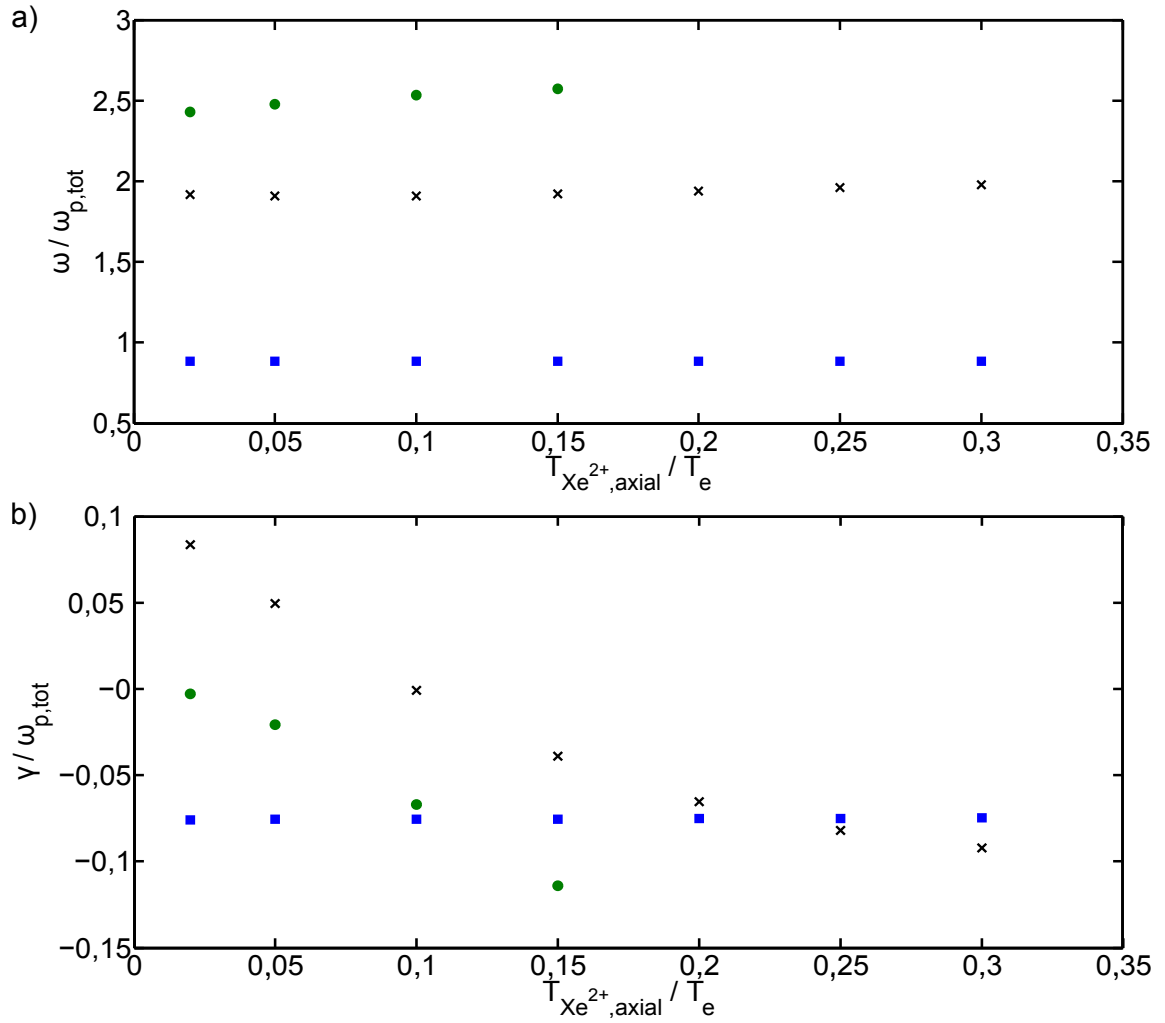
### 5.3.5 Variation de $\hat{T}_{Xe^{2+},axial}$

La température ionique des ions doublement chargés n'a jamais été mesurée, que ce soit dans la direction du champ électrique ou dans le plan perpendiculaire à ce dernier. Nous supposons pourtant que la température ionique perpendiculaire est identique à celle des ions simplement chargés, les ions  $Xe^{2+}$  étant créés à partir des ions  $Xe^+$ . Dans la direction axiale, ce n'est pas aussi simple car l'élargissement de la fonction de distribution dépend du recouvrement entre la zone de création des ions et la zone d'accélération. En l'absence d'informations à ce sujet, le paramètre  $\hat{T}_{Xe^{2+},axial}$  est un paramètre inconnu. Son influence sur le mode faisceau est résumée sur la Fig. 5.8.

Pour les plus petites valeurs du rapport  $\hat{T}_{Xe^{2+},axial}$ , trois modes sont trouvés par le programme de résolution : deux modes amortis, le mode lent du faisceau d'ions  $Xe^+$  (carrés bleus) et le mode rapide du faisceau d'ions  $Xe^{2+}$  (cercles verts), et un mode instable, le mode faisceau (croix noires). Lorsque l'on augmente le rapport des températures dans la direction axiale, les taux de croissance du mode faisceau et du mode rapide  $Xe^{2+}$  décroissent rapidement. A partir de  $\hat{T}_{Xe^{2+},axial}=0,1$ , le mode faisceau devient même amorti. Le mode rapide des ions doublement chargés sort de la fenêtre de résolution pour des trop grandes valeurs du rapport des températures. Le taux de croissance du mode lent des ions  $Xe^+$  n'est lui presque pas modifié, l'effet Landau dû à la population d'ions doublement chargés étant négligeable sur ce mode. L'influence du rapport  $\hat{T}_{Xe^{2+},axial}$  est très faible sur les pulsations du mode faisceau et du mode lent des ions  $Xe^+$  : la première augmente très légèrement alors que la deuxième n'est pas du tout modifiée. La pulsation du mode rapide des ions  $Xe^{2+}$  quand à elle augmente avec le rapport des températures, comme peut l'indiquer l'Eq. 5.27.

### 5.3.6 Conclusions

Le mode faisceau est le résultat de la superposition de deux fonctions de distribution en vitesses distinctes. Par conséquent, les moments de chaque fonction jouent un rôle essentiel



**Figure 5.8:** Influence du rapport des températures  $\hat{T}_{Xe^{2+},axial}$  sur le mode faisceau. a) Pulsations et b) taux de croissance des modes de l'Eq. 5.14. Les paramètres de résolution sont ceux définis dans le Tab. 2.3, le nombre d'onde  $\hat{k}_x$  étant fixé à 0,5. Les rapports des températures  $\hat{T}_{plan}$  et  $\hat{T}_{Xe^+,axial}$  valent respectivement 0,02 et 0,2. Les vitesses  $v_{p,Xe^+}$  et  $v_{p,Xe^{2+}}$  sont elles fixées à 3 et 4,25. Le paramètre  $\eta$  est fixé à 14%.

dans le développement de cette instabilité. Les moments de la fonction de distribution des ions simplement chargés ont été mesurés expérimentalement et sont connus dans une certaine mesure. Ceux de la fonction de distribution des ions doublement chargés ne sont, par contre, pas caractérisés pour le moteur X000. Il est alors nécessaire de comprendre l'influence de chacun de ces paramètres sur le mode faisceau.

- L'instabilité ne se développe qu'à condition que les vitesses relatives des ions  $Xe^+$  et  $Xe^{2+}$  soient différentes, mais pas trop éloignées l'une de l'autre, par rapport à leur vitesse thermique respective. Si la différence est trop grande, les deux fonctions de distribution sont disjointes et aucun effet Landau inverse ne vient exciter les modes propres de chaque faisceau. Si les vitesses sont trop proches, les fonctions de distribution sont confondues et le mode instable n'existe plus. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'instabilité de faisceau se développe peut certainement être obtenue en étudiant le critère de Penrose (voir le chapitre 11 de la Ref. [16]).
- Le maximum du taux de croissance avec le paramètre  $\eta$  (rapport de la densité d'électrons libres produits par les ions  $Xe^{2+}$  et de la densité d'électrons totale du plasma) dépend fortement des autres moments des fonctions de distribution de chaque faisceau. Pour les valeurs considérées dans cette section, ce maximum n'est pas atteint alors que nous avons choisi de fixer la vitesse moyenne des ions doublement chargés à la vitesse maximale qu'ils peuvent atteindre. Le mode faisceau du propulseur ne croît donc certainement pas avec un taux de croissance maximum, le paramètre  $\eta$  étant estimé à 14% dans celui-ci. Notons également que la pulsation diminue à mesure que l'on augmente le paramètre  $\eta$ .
- Le dernier paramètre influençant l'instabilité de faisceau que nous avons étudié est le rapport des températures dans la direction axiale pour la population d'ions  $Xe^{2+}$ . Le mode est observé être instable seulement pour des faibles valeurs de ce rapport, avoisinant toutefois la valeur de celui des ions simplement chargés. On comprend par ailleurs que diminuer la valeur de la vitesse moyenne des ions  $Xe^{2+}$  doit s'accompagner d'une diminution du rapport des températures pour que le mode faisceau reste instable. Dans le cas contraire, les fonctions de distribution de chaque espèce deviendraient de moins en moins discernables, à mesure que l'on réduit cette vitesse, et le mode disparaîtrait. Ceci n'est pas incompatible avec la production d'ions doublement chargés dans le propulseur. S'ils sont créés vers le plan de sortie du moteur, leur vitesse moyenne sera maximale puisqu'ils verront une grande chute de potentiel. Par ailleurs, les zones d'accélération et de création de ces particules se recouvrant certainement dans ce cas, la température ionique axiale sera grande, elle aussi, les deux effets se compensant. Si par contre, les ions doublement chargés sont créés plus loin après le plan de sortie, leur vitesse moyenne sera proche de celle des ions  $Xe^+$  et leur température axiale sera faible, la zone de création de ces ions étant découplée de la zone d'accélération. Précisons enfin que la pulsation du mode est très peu affectée par le rapport des températures dans la direction axiale.

## 5.4 Exploration dans le plan $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$

Nous l'avons présenté dans le chapitre 1, le mode axial possède une large extension spatiale dans le plan  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$  orthogonal aux lignes de champ magnétique. Le but de cette section est de montrer que la faible proportion d'ions xénon doublement ionisés suffit à expliquer les observations par diffusion collective de la lumière.

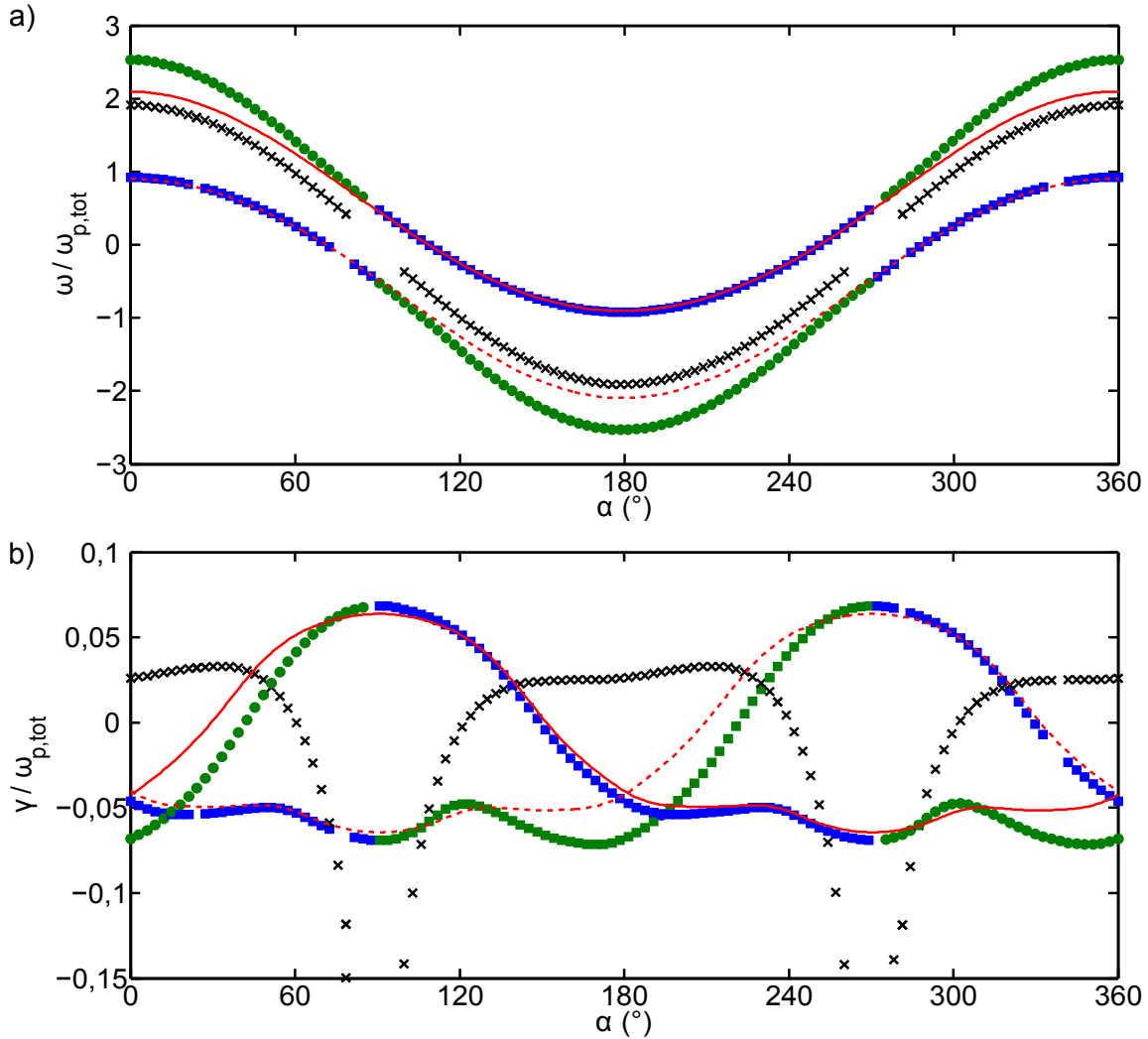
### 5.4.1 Comparaison avec le cas $\eta = 0$

Pour ce faire, nous résolvons la relation de dispersion 5.14 pour différents angles  $\alpha$ . La portion d'ions doublement chargés est fixée à  $\eta=14\%$ , en accord avec les mesures réalisées sur un propulseur similaire au X000. La vitesse des ions chargés une seule fois est fixée à  $\hat{v}_{p,Xe^+} = 3$  et nous choisirons arbitrairement de fixer la vitesse des ions chargés deux fois à  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}} = 4,25$ . Pour prendre en compte l'anisotropie des fonctions de distribution de chaque espèce, nous considérerons des températures anisotropes entre la direction axiale du propulseur et le plan perpendiculaire à cette direction. Nous choisissons de fixer la température dans le plan orthogonal à  $\hat{T}_{\text{plan}} = 0,02$  pour les deux espèces ioniques. Les températures axiales seront considérées être différentes et nous poserons  $\hat{T}_{Xe^+, \text{axial}} = 0,15$  pour la population d'ions  $Xe^+$  et  $\hat{T}_{Xe^{2+}, \text{axial}} = 0,1$  pour la population d'ions  $Xe^{2+}$ . Les autres paramètres de résolution sont ceux définis dans le Tab. 2.3, le nombre d'onde  $\hat{k}_\perp$  étant fixé à 0,5. Les solutions de la relation de dispersion obtenues pour ces valeurs sont présentées sur la Fig. 5.9. A titre de comparaison, les solutions de la relation de dispersion 4.22 ( $\eta = 0$ ) sont aussi représentées (traits rouges plein et tireté). Pour chaque angle  $\alpha$ , on trouve trois modes qui changent de nature selon les directions considérées :

#### Mode faisceau : croix noires

Autour de la direction axiale ( $\alpha = 0^\circ$  ou  $180^\circ$ ), on trouve le mode faisceau, produit de l'interaction du mode lent des ions  $Xe^{2+}$  et du mode rapide des ions  $Xe^+$ .

- Celui-ci possède un taux d'instabilité positif sur un large domaine angulaire s'étendant sur plus de  $120^\circ$  autour de  $\alpha = 0^\circ$  (ou  $180^\circ$ ). Autour de  $90^\circ$  (ou de  $270^\circ$ ), le taux d'instabilité chute rapidement et le mode devient très vite amorti. Pour des angles proches de  $90^\circ$  (ou de  $270^\circ$ ), le taux d'instabilité est si négatif qu'il sort de la fenêtre de résolution et la solution n'est plus obtenue par le programme de résolution. En  $\alpha = 0^\circ$ , la valeur de la pulsation du mode est légèrement inférieure à celle du mode rapide pour  $\eta=0$  (trait plein rouge) et elle décroît bien plus rapidement lorsque l'angle  $\alpha$  s'écarte de  $0^\circ$ .
- On peut comprendre la variation de la pulsation et du taux d'instabilité du mode faisceau grâce aux Figs. 5.5 et 5.8. A mesure que l'angle  $\alpha$  s'éloigne de  $0^\circ$ , les contributions Doppler  $\hat{k}_x \hat{v}_{p,Xe^+}$  et  $\hat{k}_x \hat{v}_{p,Xe^{2+}}$  diminuent et se rapprochent l'une de l'autre pour finalement être égales en  $\alpha=90^\circ$ . Dans le même temps, la contribution  $\hat{k}_x \hat{T}_{Xe^{2+}, \text{axial}}$  diminue également, au profit de  $\hat{k}_y \hat{T}_{\text{plan}}$ . Ces deux effets sur la vitesse et la température sont antagonistes pour le taux d'instabilité : lorsque  $\hat{k}_x \hat{v}_{p,Xe^{2+}}$  se rapproche de  $\hat{k}_x \hat{v}_{p,Xe^+}$ , le taux diminue (Fig. 5.5b) alors que lorsque la température ionique



**Figure 5.9:** Variation a) des pulsations et b) des taux d'instabilité en fonction de l'angle  $\alpha$ , obtenus en résolvant l'Eq. 5.14 pour une proportion d'ions xénon doublement chargés égale à  $\eta=14\%$ . Les paramètres de résolution sont ceux établis dans le Tab. 2.3, le nombre d'onde  $\hat{k}_\perp$  étant fixé à 0,5. On choisit également  $\hat{T}_{Xe^+,axial} = 0,15$  et  $\hat{v}_{p,Xe^+} = 3$  pour la population d'ions simplement chargés et  $\hat{T}_{Xe^{2+},axial} = 0,1$  et  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}} = 4,25$  pour celle des ions doublement chargés. La température dans le plan orthogonal à l'axe du propulseur vaut  $\hat{T}_{plan} = 0,02$  pour les deux espèces. Les solutions de l'équation pour  $\eta=0$  sont aussi représentées (traits rouges plein  $\hat{\omega}_+$  et tireté  $\hat{\omega}_-$ ).



décroit, l'effet Landau est moins fort puisque  $\hat{T}_{\text{plan}} < \hat{T}_{Xe^{2+}, \text{axial}}$  et le taux d'instabilité augmente (Fig. 5.8b). Pour cette raison, le taux d'instabilité est relativement constant avec l'angle  $\alpha$  tant que les deux effets se compensent. La pulsation, quant à elle, diminue avec l'angle  $\alpha$  car les contributions Doppler diminuent (Fig. 5.8). On remarque également une légère dissymétrie entre le taux d'instabilité à droite de  $180^\circ$  et à gauche. Celle-ci est à attribuer à la magnétisation des électrons et plus particulièrement à leur dérive à la vitesse  $V_d$ , comme nous l'expliquerons dans la partie suivante.

### Mode haut

On désigne par mode haut le mode dont les pulsations se situent au dessus des pulsations des autres modes sur la Fig. 5.9.

- Entre  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ , ce mode s'identifie au mode rapide des ions doublement chargés (cercles verts). Sa pulsation varie avec l'effet Doppler  $\hat{k}_x \hat{v}_{p, Xe^{2+}}$  et le taux d'instabilité associé augmente progressivement avec l'angle  $\alpha$ . Cette dernière variation est la conséquence de l'effet Landau inverse de la distribution des électrons sur le mode rapide des ions  $Xe^{2+}$ . Lorsque l'angle  $\alpha$  est proche de  $90^\circ$ , la pulsation est très proche de celle trouvée pour  $\eta = 0$  (trait plein rouge), puisque  $\hat{v}_{p, Xe^{2+}} \approx \hat{v}_{p, Xe^+}$  pour ces angles.
- Lorsque l'angle  $\alpha$  dépasse  $90^\circ$ , ce mode change de nature. Il se comporte alors comme le mode lent des ions simplement chargés (carrés bleus) jusqu'à la direction de propagation  $\alpha=270^\circ$ . Sa pulsation varie alors avec l'effet Doppler  $\hat{k}_x \hat{v}_{p, Xe^+}$  et est presque parfaitement superposée à la pulsation du mode de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  obtenue pour  $\eta=0$  (trait plein rouge). Expérimentalement, le mode azimutal est observé pour des angles compris entre  $90^\circ$  et  $120^\circ$  et l'ajout d'une population d'ions doublement chargés ne modifie donc pas la pulsation du mode sur cet intervalle. Le modèle 2.25 décrit alors toujours correctement la pulsation expérimentale. Cependant, le taux d'instabilité est plus resserré autour de  $90^\circ$ , rendant le mode de dérive instable sur un domaine angulaire plus étroit que pour un plasma pur d'ions ionisés une seule fois.
- A partir de l'angle  $\alpha=270^\circ$ , il y a réinversion de mode et le mode haut se conduit comme le mode rapide des ions doublement chargés. Les propriétés de la pulsation et du taux d'instabilité de l'onde sont alors similaire à la description que nous avons faite dans le premier point.

### Mode bas

On appelle mode bas le mode dont les pulsations se trouvent en dessous des pulsations des autres modes sur la Fig. 5.9.

- Son comportement est intimement lié à celui du mode haut. Lorsque le mode haut s'identifie au mode rapide des ions doublement ionisés (cercles verts), le mode bas se comporte comme le mode lent des ions simplement ionisés (carrés bleus). A l'inverse, lorsque le mode haut possède les caractéristiques du mode lent des ions chargés une seule fois, le mode bas devient le mode rapide des ions chargés deux fois. La courbe

du taux d'instabilité du mode bas peut se retrouver à partir de celle du mode haut en la translatant de  $180^\circ$ .

- Pour retrouver la pulsation du mode bas à partir de celle du mode haut, il suffit de translater la courbe de  $180^\circ$  et de prendre l'opposé de la valeur de la pulsation. Par conséquent, la variation des modes sur un intervalle de  $180^\circ$  est suffisante pour décrire le comportement des pulsations et des taux d'instabilité des modes.

### 5.4.2 Comparaison à l'expérience

Dans la partie précédente, nous avons montré que l'instabilité de faisceau reste instable dans un large domaine angulaire autour de l'axe du propulseur. Autour de  $90^\circ$ , la pulsation de l'instabilité de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  est peu modifiée par l'ajout d'une nouvelle susceptibilité ionique dans la relation de dispersion. Ces résultats correspondent bien à ce qui est observé avec le diagnostic de la diffusion collective. La figure 5.10 présente la variation des pulsations expérimentales du mode axial et du mode azimutal en fonction de l'angle  $\alpha$  sur un intervalle de  $180^\circ$ . Les deux pulsations autour de l'angle  $90^\circ$  correspondent aux modes azimutaux de chaque canal : les cercles rouges correspondent aux pulsations des fluctuations du canal 03h et les carrés bleus à celles du canal 09h, le champ magnétique étant orienté de l'intérieur vers l'extérieur du propulseur. Notons également que le signal de ces modes n'est pas corrigé de la convolution, l'ajustement d'une gaussienne sur le facteur de forme statique ne donnant pas entière satisfaction.

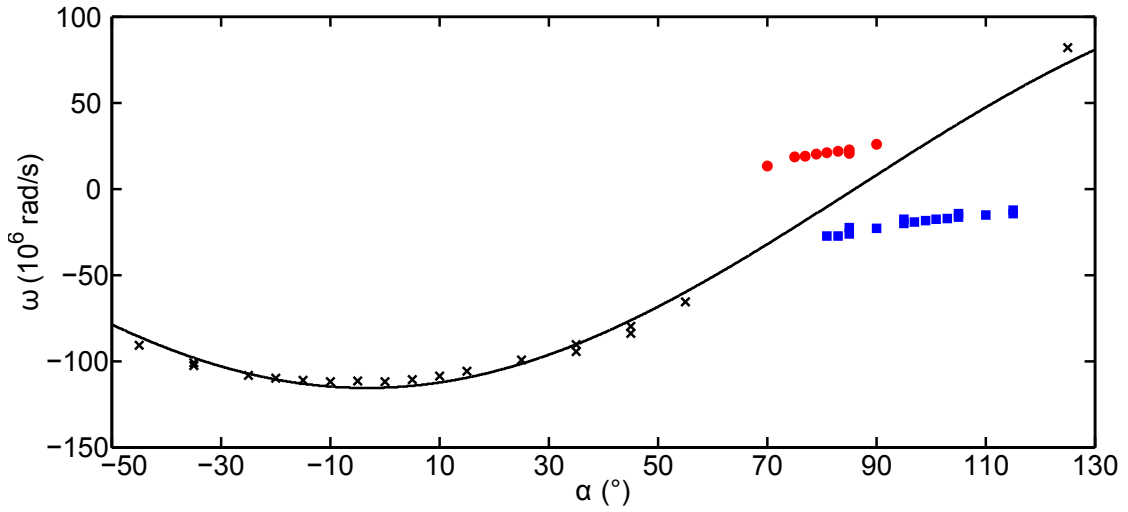
On remarque sur cette figure l'absence de continuité entre le mode axial (croix noires) et le mode azimutal (cercles rouges et carrés bleus), grâce à l'ajustement d'une loi en cosinus de la forme

$$f = A \cos(n\alpha + \varphi) \quad (5.30)$$

sur les pulsations du mode axial. La correction de l'effet d'appareil modifiant principalement la pente de la relation de dispersion autour de la direction azimutale, la convolution ne permet pas d'expliquer le décalage entre ces pulsations et la courbe noire en trait plein. Il faut se tourner vers les résultats théoriques pour comprendre cette discontinuité.

Si l'on suppose de manière simpliste que le diagnostic mesure le facteur de forme dynamique correspondant au mode ayant le taux de croissance linéaire le plus instable, on peut tracer la pulsation théorique associée pour chaque angle. La variation du taux de croissance maximal et de la pulsation correspondante est présentée en fonction de l'angle  $\alpha$  sur la Fig. 5.11. Tout comme sur la Fig. 5.10, la pulsation (croix noires) présente une discontinuité entre l'instabilité de faisceau, observée autour de la direction axiale, et l'instabilité de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . La dissociation des deux modes dans le propulseur ne fait donc aucun doute. Le taux de croissance (croix noires) dans la direction azimutale est plus important que dans la direction axiale, similairement à ce qui est observé expérimentalement pour les facteurs de forme du mode azimutal et axial (voir les Figs. 1.3b et 1.7a du chapitre 1).

De plus, sur la Fig. 5.11, nous comparons la solution la plus instable de l'Eq. 5.16, correspondant à des électrons non magnétisés (cercles rouges), à la solution de l'Eq. 5.14, correspondant à des électrons magnétisés (croix noires). Le but de cette comparaison est



**Figure 5.10:** Pulsations expérimentales du mode axial (croix noires) et du mode azimuthal (cercles rouges et carrés bleus). Le trait plein noir représente l'ajustement de l'Eq. 5.30 sur les pulsations du mode axial. Pour cette expérience, le volume de mesure est situé à une distance de 11 mm par rapport au plan de sortie du propulseur et le nombre d'onde est fixé à 5331 rad/m. La tension de décharge vaut 300 V, le débit massique est de 12 mg/s et on fait passer un courant de 20 A dans les bobines.

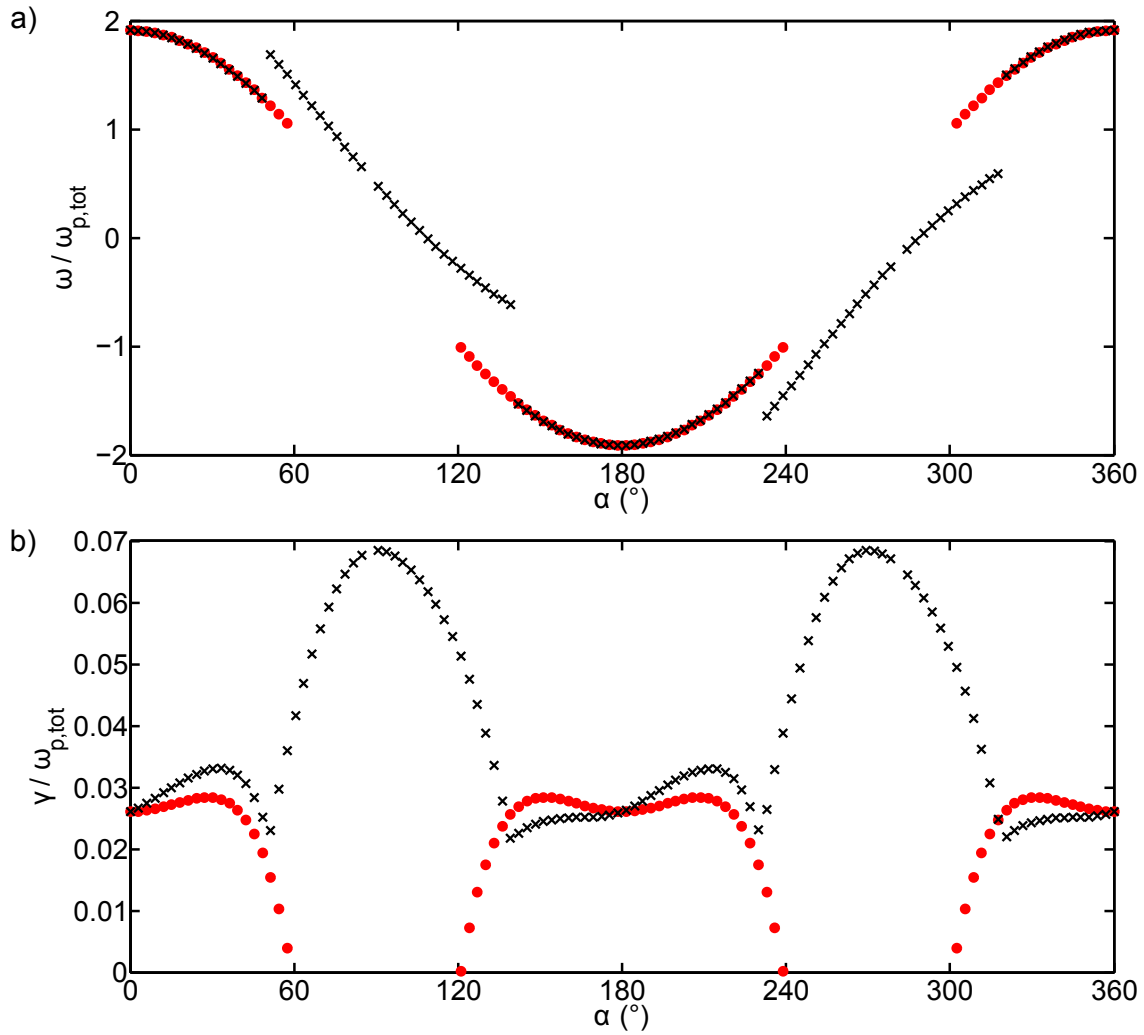
de montrer que l'instabilité de faisceau est très peu influencée par le champ magnétique et qu'elle peut se développer même lorsque celui-ci est nul.

Lorsque l'on considère des électrons non magnétisés, les modes acoustiques des faisceaux ne peuvent pas être excités par la dérive des électrons et aucune instabilité ne se propage dans la direction azimuthale, comme le montre la Fig. 5.11. Dans la direction axiale, les pulsations du mode faisceau sont identiques, que les électrons soient magnétisés ou non (cercles rouges superposés aux croix noires). Comme nous l'avons déjà fait remarquer, le taux de croissance dans le cas magnétisé présente une légère asymétrie entre la partie gauche et la partie droite de la courbe autour de l'angle  $\alpha = 180^\circ$  (mais aussi autour de l'angle  $\alpha = 0^\circ$ ). Celle-ci n'est plus observée lorsque les électrons ne sont plus soumis au champ magnétique. Cette dissymétrie est liée à la contribution  $\hat{\omega} - \hat{k}_y \hat{V}_d$  dans la fonction de Gordeev qui, pour une valeur de  $\hat{\omega}$  donnée, n'est pas symétrique autour de zéro suivant que l'effet Doppler  $\hat{k}_y \hat{V}_d$  est positif ( $\alpha < 180^\circ$ ) ou négatif ( $\alpha > 180^\circ$ ). Enfin, le taux de croissance étant toujours important dans le cas non magnétisé, on comprend mieux que le mode soit observable sur une longue distance après le plan de sortie du propulseur (Fig. 1.6), bien que la vitesse de dérive soit probablement nulle à cet endroit.

### 5.4.3 Conclusions

La résolution de la relation de dispersion 5.14 dans le plan orthogonal aux lignes de champ livre de plus amples informations sur le mode axial observé par diffusion collective de la lumière.

De manières similaires aux observations expérimentales, le mode faisceau reste instable



**Figure 5.11:** Les croix noires représentent la variation de a) la pulsation et b) du taux de croissance correspondant au mode le plus instable de l'Eq. 5.14 en fonction de l'angle  $\alpha$ . Les cercles rouges correspondent à la solution la plus instable de l'Eq. 5.16 pour des électrons non magnétisés. Les paramètres de résolution sont les mêmes que ceux de la Fig. 5.9.

sur un large domaine angulaire autour de la direction axiale. La dépendance de sa pulsation avec les vitesses  $\hat{v}_{p,Xe^+}$  et  $\hat{v}_{p,Xe^{2+}}$  n'est pas linéaire, rendant l'ajustement d'une simple loi en cosinus sur les fréquences expérimentales inadapté pour estimer ces vitesses. De son côté, la pulsation du mode de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  est très peu modifiée par l'ajout de la nouvelle population ionique sur la plage angulaire pour laquelle un signal de diffusion collective est mesuré pour le mode azimutal. Son taux de croissance est légèrement plus fort et resserré autour de la direction azimutale. Ainsi, la discontinuité expérimentale entre le mode axial et le mode azimutal s'explique par la nature différente des deux instabilités.

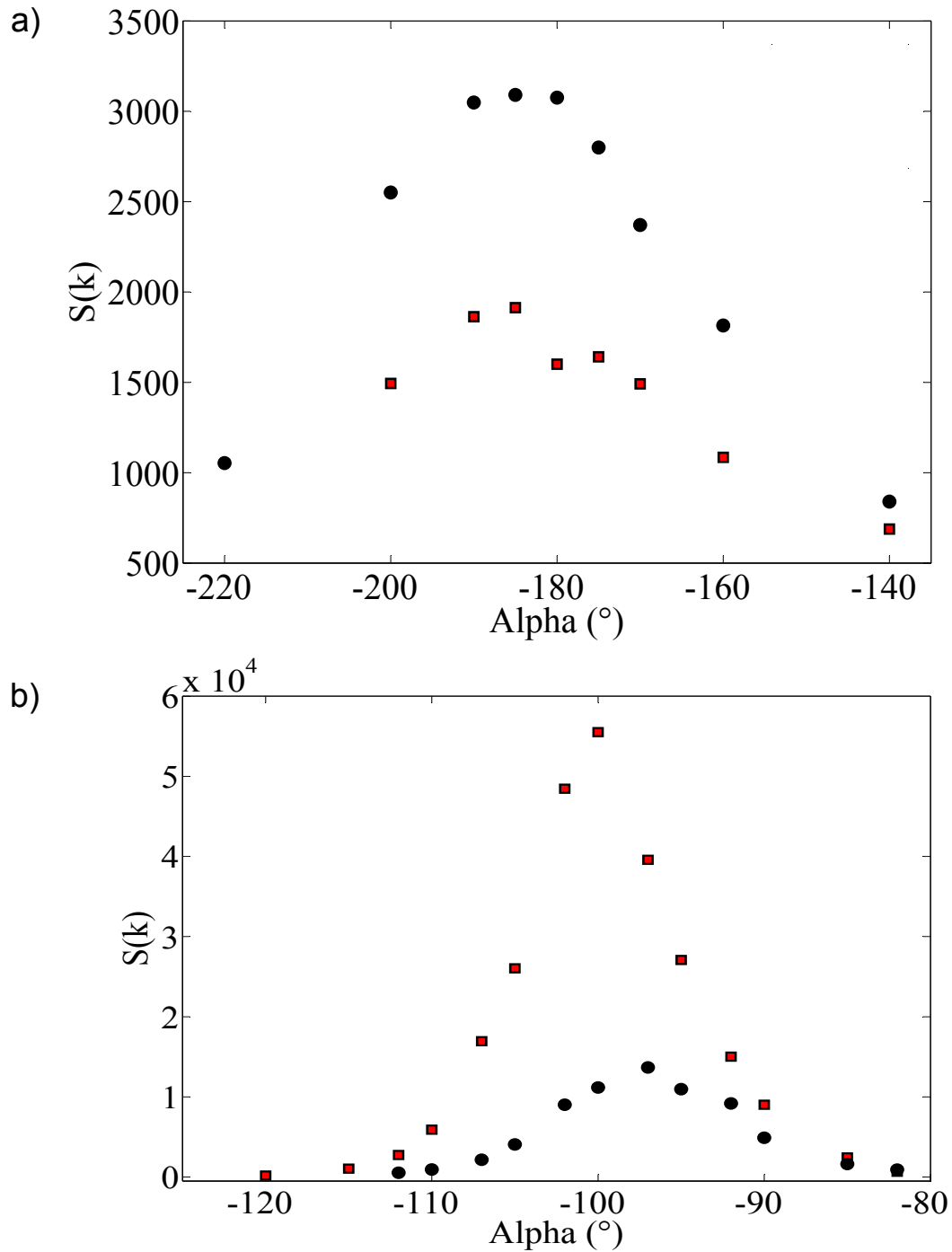
De plus, l'instabilité de faisceau est très peu influencée par le champ magnétique permanent dans le propulseur. Par conséquent, le mode se propage autour de la direction axiale même si les électrons ne dérivent plus à la vitesse de dérive  $\hat{V}_d$ . Ces résultats concordent avec les observations expérimentales du signal du mode axial à des distances éloignées du plan de sortie du propulseur, alors que la vitesse de dérive est probablement nulle à cet endroit.

## 5.5 Expériences avec de l'hydrogène

Dans le but de comprendre l'influence d'une nouvelle population d'ions sur le comportement du mode axial et du mode azimutal, nous avons étudié l'effet de l'ajout d'une fraction d'hydrogène dans le plasma de xénon du propulseur. Deux enregistrements ont été effectués pour les mêmes conditions moteurs : le premier sans ajout d'hydrogène moléculaire et le deuxième avec l'injection d'une faible quantité, environ 0,024 mg/s, à l'anode. Les facteurs de forme des deux modes pour chaque enregistrement sont présentés sur la Fig. 5.12.

Le maximum du facteur de forme du mode axial est bien supérieur après l'ajout d'hydrogène (cercles noirs) qu'avant (carrés rouges), comme le montre la Fig. 5.12a. Les ions hydrogènes étant plus légers que les ions xénon, ceux-ci acquièrent une vitesse bien plus élevée, favorisant probablement l'excitation du mode faisceau. D'un autre côté, le mode azimutal voit le maximum de son facteur de forme diminuer avec l'ajout d'hydrogène (Fig. 5.12b). Encore une fois, cet effet est à attribuer à la masse plus faible de l'hydrogène comparée à celle du xénon. La population de protons contribue alors à stabiliser le mode de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , en raison de l'amortissement Landau sur leur fonction de distribution.

Avec l'ajout d'une portion d'hydrogène moléculaire, la puissance de fonctionnement du propulseur augmente significativement. Cet accroissement est par ailleurs non-linéaire avec l'injection d'hydrogène et ne peut, par conséquent, pas être entièrement attribué au courant additionnel porté par les protons. Il faut alors se tourner vers des mécanismes plus raffinés pour expliquer ce phénomène. Un transport accru des électrons de la cathode vers l'anode pourrait expliquer cette non-linéarité. Si l'on suppose que le transport est porté par les deux modes découverts par diffusion de la lumière, le transport associé aux fluctuations axiales serait dominant par rapport au transport dû aux fluctuations azimutales, comme le résume la Fig. 5.12. Cette supposition n'est pourtant pas vérifiée puisque l'accroissement de l'émission secondaire sur les parois du propulseur pourrait participer à l'augmentation de puissance et que d'autres modes du plasma peuvent contribuer au



**Figure 5.12:** Amortissement du facteur de forme a) du mode axial et b) du mode azimuthal avec l'ajout d'hydrogène moléculaire. Les carrés rouges correspondent à l'expérience réalisée sans hydrogène et les cercles noirs à l'expérience réalisée avec un débit massique d'hydrogène de 0,024 mg/s. Le débit massique de xénon est de 12 mg/s dans les deux expériences. Le volume de mesure se trouve à une position de 11 mm devant le plan de sortie du propulseur, le courant dans les bobines est de 17 A et la tension de décharge vaut 250 V. Le nombre d'onde  $k$  est fixé à 9200 rad/m.

---

transport électronique anormal.

## 5.6 Conclusions

Les données expérimentales obtenues par diffusion collective de la lumière montrent que le mode axial est porté par les ions du plasma à une vitesse supérieure de celle mesurée par FIL. Par conséquent, nous avons étudié l'ajout d'une population d'ions xénon ionisés deux fois dans la relation de dispersion décrivant le plasma du propulseur. Le mode axial a ainsi été caractérisé comme étant l'instabilité double faisceau entre les ions xénon ionisés une seule fois et ceux ionisés deux fois.

Une étude paramétrique des trois moments de la fonction de distribution des ions  $Xe^{2+}$  montre que l'instabilité ne se développe qu'à condition que leur température ionique dans la direction axiale ne soit pas trop importante et que les vitesses de chacun des faisceaux ne soient pas être trop éloignées l'une de l'autre. La zone de création des ions  $Xe^{2+}$  est donc probablement plus découplée de la zone d'accélération que ne l'est la zone de création des ions  $Xe^+$ . De plus, la proportion d'ions xénon  $Xe^{2+}$  dans le plasma du propulseur est certainement inférieure à celle favorisant la croissance maximale de l'instabilité de faisceau.

Nous prouvons également que le mode faisceau reste instable sur un large domaine angulaire autour de la direction du champ électrique. Ces résultats correspondent aux observations expérimentales et confirment la nature du mode axial. Les mécanismes physiques excitant les modes axial et azimutal étant différents, nous concluons qu'aucune continuité n'existe entre ces deux modes.





# Conclusions et perspectives

La modélisation numérique des propulseurs à effet Hall passe par la compréhension du transport anormal des électrons à travers les lignes de champ magnétique. Des instabilités découvertes à des échelles spatiales proches du rayon de Larmor électronique et des fréquences de l'ordre de la pulsation plasma ionique pourraient être responsables de ce transport. Cet ouvrage se consacre à la caractérisation de ces instabilités de façon théorique, par une étude cinétique appliquée au propulseur, et de façon expérimentale, à l'aide du diagnostic de diffusion collective.

Des travaux numériques, théoriques et expérimentaux antérieurs ont d'abord mis en évidence l'existence d'un mode se propageant dans la direction azimutale. Les travaux numériques et théoriques n'avaient traité que le cas où le vecteur d'onde est strictement orthogonal au champ magnétique et ils montrèrent que, dans ce cas, l'instabilité n'existerait que pour des intervalles étroits autour des valeurs du nombre d'onde égales à un multiple de l'inverse du rayon de Larmor qu'aurait un électron se mouvant à la vitesse de dérive. Les études expérimentales par diffusion collective confirmèrent alors l'existence de ce mode aux échelles du rayon de Larmor électronique et de la fréquence plasma ionique, mais mirent en évidence une relation de dispersion continue ainsi qu'une amplitude des fluctuations maximales lorsque le vecteur d'onde a une composante non-nulle le long du champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

Dans ce mémoire, nous avons repris l'étude de la relation de dispersion 3D théorique et montré que l'instabilité s'identifie à l'instabilité de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Nous avons ensuite modélisée cette dernière dans la limite asymptotique d'un champ magnétique nul. Une étude paramétrique complète, nous permet de montrer que l'utilisation du modèle asymptotique pour décrire les fréquences expérimentales est justifiée, bien que la zone d'observation se trouve dans une zone de forts gradients.

Lors de l'ajustement de ce modèle sur les relations de dispersion obtenues par diffusion collective, nous avons découvert qu'un effet d'appareil modifie le signal des fluctuations azimutales. Celles-ci ne sont visibles que sur un domaine très étroit dans l'espace de Fourier et la puissance spectrale mesurée est alors un produit de convolution entre les fluctuations de densité et la fonction de transfert du diagnostic. Nous avons calculé et corrigé cet effet d'appareil, à la lumière des résultats de la théorie cinétique.

Le modèle est ensuite appliqué à une relation de dispersion expérimentale corrigée. Nous estimons ainsi de manière originale la température et la densité électronique dans le jet du faisceau, ces grandeurs étant difficiles à mesurer à cet endroit avec les diagnostics

conventionnels (tels que les sondes par exemple).

Des études expérimentales antérieures à ce travail de thèse avaient également mis en évidence un autre mode se propageant dans un large angle solide autour de la direction axiale et à des fréquences plus élevées que celles du mode azimutale. Nous avons complété cette étude expérimentale, notamment grâce à une nouvelle électronique de détection qui permet de mesurer des fréquences plus grandes. D'un point de vue théorique, nous montrons, par l'étude de la relation de dispersion théorique dans le plan orthogonal aux lignes de champ magnétique, que l'instabilité électronique de dérive  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  est incapable de se propager dans cette direction. En effet, la source de l'instabilité, la vitesse de dérive électronique, possède une projection nulle selon l'axe du propulseur et l'effet Landau est important dans cette direction.

En accord avec les résultats expérimentaux, nous prouvons que la présence d'ions xénon doublement ionisés dans le plasma du propulseur permet d'expliquer la croissance d'un mode selon cet axe. Cette instabilité est alors identifiée comme étant une instabilité double faisceau. De manière comparable à ce qui est observé par diffusion collective, nous démontrons que ce mode est instable sur un large domaine angulaire autour de la direction du champ électrique.

Pourtant, la question du transport électronique associé aux deux modes évoqués précédemment reste ouverte. Les fréquences des ondes étant de l'ordre de grandeur des fréquences caractéristiques du plasma, et plus particulièrement de la fréquence plasma ionique, la théorie des dérives adiabatiques est inadaptée. Comme le plasma du jet en sortie de canal est très peu collisionnel, le formalisme adapté est le formalisme hamiltonien [63]. Ce dernier est particulièrement approprié pour la description de la dynamique des électrons dans la configuration de champs électrique et magnétique croisés du propulseur et du champ électrique associé aux instabilités décrites précédemment, car le temps de parcours estimé pour un électron allant de la cathode à l'anode est au moins d'un ordre de grandeur supérieur à ceux associés aux autres phénomènes oscillants.

Le formalisme hamiltonien, complété par l'hypothèse des phases aléatoires, permettrait alors d'estimer le flux électronique axial à l'aide d'un intégrateur numérique de trajectoires ou de la théorie quasi-linéaire et en s'appuyant sur les mesures expérimentales (relation de dispersion et spectre en nombre d'onde). Pour estimer le transport lié au mode axial, une modélisation de sa relation de dispersion serait utile. Cette modélisation permettrait en outre d'accéder à des paramètres du plasma, de façon complémentaire au mode azimutal.

D'un point de vue expérimental, la méthode que nous avons établi pour estimer la température et la densité électronique mériterait d'être appliquée pour obtenir ces deux paramètres en fonction de la position au plan de sortie du propulseur et de la tension d'accélération. Enfin, la direction pour laquelle le mode azimutal est observé être le plus instable (un peu décalé par rapport à la direction purement azimutale) pourrait être déterminée par la position de la cathode. Nous nous attendons à ce que cette direction, qui dépendrait de la direction propre de la vitesse de dérive, change avec le sens du champ magnétique et il conviendrait donc de le vérifier.

# Annexe A

## Calcul de la densité électronique et ionique perturbées

### Sommaire

---

<b>A.1 Evolution de la distribution électronique</b> . . . . .	<b>136</b>
A.1.1 Linéarisation de l'équation de Vlasov . . . . .	136
A.1.2 Trajectoires des électrons en champ magnétique et électrique uniformes et stationnaires . . . . .	137
A.1.3 Equation de Vlasov d'ordre 0: distribution maxwellienne . . . . .	139
A.1.4 Equation de Vlasov d'ordre 1: intégration sur les orbites non perturbées . . . . .	139
A.1.5 Fonction électronique d'ordre un . . . . .	141
A.1.6 Densité électronique perturbée . . . . .	142
<b>A.2 Evolution de la distribution ionique</b> . . . . .	<b>144</b>
A.2.1 Fonction ionique d'ordre un . . . . .	144
A.2.2 Densité ionique perturbée . . . . .	145

---

Cette annexe est consacrée à l'obtention de l'expression analytique des densités électronique et ionique perturbées par une petite perturbation électrostatique, dans le but de dériver la relation de dispersion propre au plasma du propulseur à effet Hall. Dans bien des cas, les équations fluides sont suffisantes pour décrire de manière adéquate le comportement de ce plasma. Cependant, le modèle fluide ne permet pas de garder l'information sur la distribution des vitesses à l'intérieur de l'élément de volume fluide. Lorsque cette information est nécessaire, on utilise le modèle cinétique pour lequel on définit une fonction de distribution  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  qui représente la densité de particules dans l'espace des positions et des vitesses  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  au temps  $t$  [7]. C'est ce modèle que nous considérerons pour décrire la population électronique et aussi ionique afin de prendre en compte les interactions entre particules du même type et les interactions ondes/particules.

Lorsque le plasma est non collisionnel, la fonction de distribution satisfait à l'équation de Vlasov qui s'écrit (dans le cas d'un repère cartésien)

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  est la résultante des forces extérieures s'appliquant à la particule de masse  $m$  situé au point  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  dans l'espace des phases et au temps  $t$ .

Pour la dérivation des densités perturbées à partir de cette équation, les hypothèses modélisant le plasma seront celles définies dans le chapitre 1 en section 1.3. Nous rappelons simplement que nous étudions le problème dans un repère cartésien. Par conséquent, nous supposons le champ électrique statique  $\mathbf{E}_0$  dans la direction de  $x$ , le champ magnétique statique  $\mathbf{B}_0$  dans la direction de  $z$  et la vitesse de dérive  $\mathbf{V}_d$  dans la direction de  $-y$ . De plus, le référentiel d'étude est le référentiel du laboratoire.

## A.1 Evolution de la distribution électronique

### A.1.1 Linéarisation de l'équation de Vlasov

Pour un électron de masse  $m_e$  et de charge  $-e$  soumis au champ électrique  $\mathbf{E}$  et au champ magnétique  $\mathbf{B}$ , l'Eq. A.1 devient

$$\frac{\partial f_e}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Cette équation est fortement non linéaire, il n'est donc pas aisé de la résoudre dans le cas général. Pour trouver la relation de dispersion, on utilise alors la méthode des perturbations qui consiste à introduire une petite perturbation  $f_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  à la fonction de distribution d'un plasma uniforme et stationnaire  $f_{e0}(\mathbf{v})$  et une petite perturbation  $\mathbf{E}_{e1}(\mathbf{r}, t)$  au champ électrique constant et uniforme  $\mathbf{E}_0$  imposé par l'extérieur. La perturbation sur le champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  sera négligée, l'onde étant considérée comme électrostatique. On écrit alors, à l'ordre 1,

$$f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{e0}(\mathbf{v}) + f_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + o(f_{e2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)) \quad (\text{A.3})$$

et

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{e1}(\mathbf{r}, t) + o(\mathbf{E}_{e2}(\mathbf{r}, t)), \quad (\text{A.4})$$

avec  $|f_{e0}(\mathbf{v})| \gg |f_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)|$  et  $\|\mathbf{E}_0\| \gg \|\mathbf{E}_{e1}(\mathbf{r}, t)\|$ .

En injectant ces deux relations dans l'équation de Vlasov, qui doit être satisfaite à chaque ordre, on trouve les deux équations

$$(\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}) = 0 \quad (\text{A.5})$$

et

$$\begin{aligned} \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_{e1}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}) &= \frac{\partial f_{e1}}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{e1}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \\ &\quad - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial f_{e1}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Avant de résoudre ces deux équations, il est nécessaire de rappeler quelques propriétés générales sur l'équation de Vlasov et la fonction de distribution. On montre [11] de manière formelle l'équivalence entre l'Eq. A.1 et le principe fondamental de la dynamique appliqué à chaque particule,

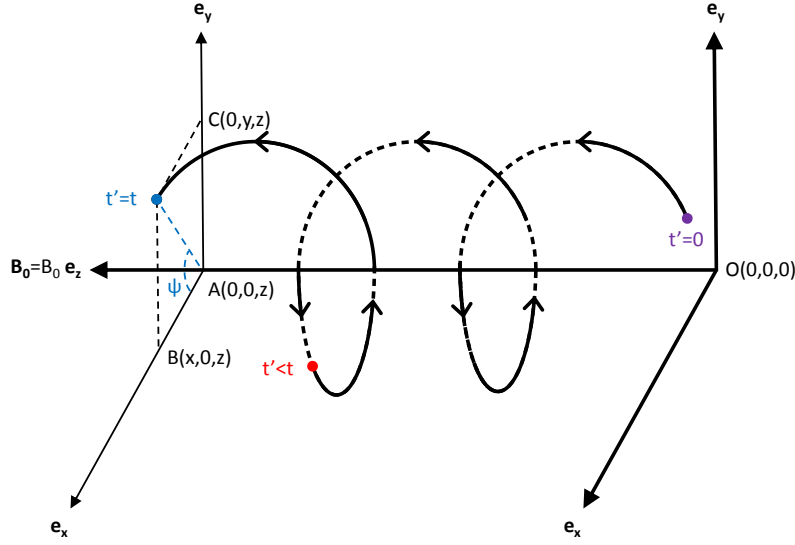
$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (\text{A.7})$$

les champs étant donnés par les équations de Maxwell, et on montre également que la solution générale de l'équation de Vlasov est une fonction arbitraire des intégrales du mouvement obtenues à partir de l'Eq. A.7 (théorème de Jeans). On comprend alors que la fonction de distribution est constante sur la courbe (appelée ligne caractéristique en mathématique) décrite par les trajectoires des particules. C'est cette dernière propriété qui donne une méthode pour résoudre l'équation cinétique, méthode dite des caractéristiques. Ainsi, décrivons d'abord le mouvement des particules dans un champ magnétique et électrique uniforme et constant avec le temps.

### A.1.2 Trajectoires des électrons en champ magnétique et électrique uniformes et stationnaires

Les électrons d'un plasma soumis seulement à un champ magnétique uniforme et stationnaire ont pour trajectoires des spirales, composées d'un déplacement parallèle aux lignes de champ à la vitesse constante  $u_{\parallel} = u_z$  et d'un mouvement circulaire de pulsation  $\omega_{ce}$  autour de ces mêmes lignes à la vitesse constante  $u_{\perp} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ . Alors, pour un électron dont la vitesse perpendiculaire forme un angle quelconque  $\psi$  avec l'axe  $Ox$  au temps  $t$  (voir Fig. A.1), on peut écrire au temps  $t' \leq t$

$$\mathbf{u}(t') = \begin{cases} u_{\perp} \cos[\omega_{ce}(t' - t) + \psi] \\ u_{\perp} \sin[\omega_{ce}(t' - t) + \psi] \\ u_z \end{cases}, \quad (\text{A.8})$$



**Figure A.1:** Trajectoire d'un électron soumis à un champ magnétique uniforme et stationnaire selon l'axe  $Oz$  entre le temps  $t'=0$  et  $t'=t$ . Au temps  $t$ , la projection du vecteur position de la particule dans le plan orthogonal à  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$  forme un angle  $\psi$  avec l'axe  $Ox$ .

pour la vitesse de l'électron, et pour sa trajectoire

$$\mathbf{r}(t') = \begin{cases} \frac{u_{\perp}}{\omega_{ce}} \{ \sin [\omega_{ce} (t' - t) + \psi] - \sin (\psi) \} + x \\ \frac{u_{\perp}}{\omega_{ce}} \{ \cos (\psi) - \cos [\omega_{ce} (t' - t) + \psi] \} + y , \\ u_z (t' - t) + z \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

où  $(x, y, z)$  sont les coordonnées de l'électron au temps  $t' = t$ .

Lorsque l'on ajoute un champ électrique extérieur  $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_x$ , lui aussi uniforme et stationnaire, se rajoute au mouvement précédent, un mouvement de dérive à la vitesse constante  $V_d = -E_0/B_0$ , perpendiculaire aux deux champs, magnétique et électrique. La vitesse perpendiculaire devient alors  $v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + (v_y - V_d)^2}$  car l'Eq. A.8 se récrit

$$\mathbf{v}(t') = \begin{cases} v_{\perp} \cos [\omega_{ce} (t' - t) + \psi] \\ v_{\perp} \sin [\omega_{ce} (t' - t) + \psi] + V_d . \\ v_z \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

L'intégration de cette équation nous donne la trajectoire des électrons dans la configuration de champ  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{B}_0$  croisés, c'est-à-dire

$$\mathbf{r}(t') = \begin{cases} \frac{v_{\perp}}{\omega_{ce}} \{ \sin [\omega_{ce} (t' - t) + \psi] - \sin (\psi) \} + x \\ \frac{v_{\perp}}{\omega_{ce}} \{ \cos (\psi) - \cos [\omega_{ce} (t' - t) + \psi] \} + V_d (t' - t) + y . \\ v_z (t' - t) + z \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Ce sont ces trajectoires non perturbées par les variations de champ électrique  $\mathbf{E}_1$

qui vont nous permettre d'intégrer l'Eq. A.6 et d'en déduire la fonction de distribution perturbée  $f_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Avant cela, il convient de résoudre l'Eq. A.5 puis de se donner une forme a priori pour la fonction de distribution  $f_{e0}(\mathbf{v})$  à l'ordre 0 puisque l'équation de Vlasov d'ordre 1 en dépend.

### A.1.3 Equation de Vlasov d'ordre 0 : distribution maxwellienne

Dans le cas d'un plasma uniforme et stationnaire, la fonction de distribution ne dépend ni de la position ni du temps [7]. On peut alors écrire  $f_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{e0}(\mathbf{v})$ . C'est d'ailleurs dans ce contexte que les Eqs. A.5 et A.6 ont été développées. La trajectoire des électrons étant donnée par les Eqs. A.11, les invariants du mouvement sont donc la vitesse parallèle à  $\mathbf{B}_0$ ,  $v_{\parallel} = v_z$ , et la vitesse perpendiculaire,  $v_{\perp}$ . Or, nous avons énoncé que toute fonction ne dépendant que des invariants du mouvement est solution de l'équation de Vlasov (théorème de Jeans), c'est-à-dire que toute fonction de la forme  $f_{e0}(v_{\parallel}, v_{\perp})$  est solution de l'équation de Vlasov d'ordre 0. Pour pouvoir continuer les calculs analytiquement, il est alors nécessaire de se donner une forme a priori de la fonction de distribution. Nous choisissons ici la distribution maxwellienne, correspondant à un plasma à l'équilibre ayant des électrons uniformément répartis, se déplaçant à la vitesse globale  $|V_d|$  dans la direction  $-\mathbf{e}_y$ . On pose alors

$$f_{e0}(v_{\parallel}, v_{\perp}) = n_0 \left( \frac{1}{2\pi v_{the}^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{v_x^2 + (v_y - V_d)^2 + v_z^2}{2v_{the}^2} \right), \quad (\text{A.12})$$

où  $v_{the} = \sqrt{eT_e/m_e}$  représente la vitesse thermique des électrons ( $T_e$  est en eV,  $e$  en C et  $m_e$  en kg) et  $n_0$  la densité électronique. Notons que la fonction de distribution est normalisée telle que

$$n_0 = \int_{\mathbf{v}} f_{e0}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (\text{A.13})$$

On vérifie aisément que  $f_{e0}(\mathbf{v})$  est solution de l'Eq. A.5 sur les orbites non perturbées en utilisant la propriété suivante

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}) = -\frac{\mathbf{v} - \mathbf{V}_d}{v_{the}^2} f_{e0}(\mathbf{v}). \quad (\text{A.14})$$

### A.1.4 Equation de Vlasov d'ordre 1 : intégration sur les orbites non perturbées

Comme expliqué précédemment, nous allons utiliser la méthode des caractéristiques pour résoudre l'équation de Vlasov d'ordre 1. Le long d'une trajectoire non perturbée décrite par les Eqs. A.10 et A.11, on paramètre l'espace  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  par la variable  $t'$  et la fonction de distribution s'écrit alors  $f_{e1}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t(t')) = f_1(t')$ . La partie gauche (équation homogène) de l'Eq. A.6 peut alors se mettre sous la forme d'une différentielle

exacte et on obtient

$$\frac{df_{e1}}{dt'}(t') = \frac{df_{e1}}{dt'}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t(t')) = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_{e1}(\mathbf{r}(t'), t') \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}(t')}(\mathbf{v}(t')). \quad (\text{A.15})$$

Il reste à intégrer cette équation entre  $-\infty$  et  $t$ , en considérant que la fonction de distribution perturbée est nulle à l'origine des temps, et on trouve

$$f_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int_{-\infty}^t \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_{e1}(\mathbf{r}(t'), t') \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}(t')}(\mathbf{v}(t')) dt', \quad (\text{A.16})$$

où  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$  représentent la trajectoire et la vitesse de l'électron au temps  $t$ .

Le but de notre calcul est d'exprimer la densité électronique pour l'injecter dans l'équation de Poisson. Nous exprimons donc le champ électrique  $\mathbf{E}_1$  en fonction du potentiel scalaire  $\phi_1$  de la manière suivante

$$\mathbf{E}_{e1}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \phi_{e1}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.17})$$

l'onde étant supposée électrostatique.

Alors, en utilisant la propriété A.14 donnant la dérivée de  $f_{e0}(\mathbf{v})$  par rapport à la vitesse et

$$\frac{d\phi_{e1}}{dt}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \phi_{e1}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi_{e1}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.18})$$

l'intégrale A.16 s'exprime

$$f_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{e}{m_e v_{the}^2} \int_{-\infty}^t f_{e0}(\mathbf{v}(t')) dt' \times \left( \frac{d\phi_{e1}}{dt}(\mathbf{r}(t'), t') - \frac{\partial \phi_{e1}}{\partial t}(\mathbf{r}(t'), t') - \mathbf{V}_d \cdot \nabla \phi_{e1}(\mathbf{r}(t'), t') \right). \quad (\text{A.19})$$

Enfin, pour aller plus loin dans les calculs, il est indispensable de se donner une base sur laquelle exprimer nos différentes grandeurs. La transformée la plus adaptée est bien évidemment celle de Laplace, comme l'a expliqué Landau en 1946 [45, 46], mais elle apporte de la lourdeur aux calculs. Cependant, il peut être démontré [11] que la transformée de Fourier dans le temps et l'espace de la forme  $\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$  conduit au même résultat si l'on suppose que la partie imaginaire de  $\omega$  est positive. C'est donc dans ce contexte que nous placerons notre étude<sup>13</sup>. Alors en développant  $\phi_{e1}(\mathbf{r}, t)$  et  $f_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  sur la base de Fourier définie par

$$\begin{cases} \phi_{e1}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\phi}_{e1}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ f_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \tilde{f}_{e1}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

---

13. En fait, c'est déjà ce que nous avons fait en intégrant entre  $-\infty$  et  $t$  et en supposant la fonction de distribution d'ordre 1 nulle à l'origine des temps. Pour obtenir les solutions  $\omega$  de partie imaginaire négative, il suffirait de procéder aux mêmes calculs en intégrant entre  $t$  et  $+\infty$  et en supposant la fonction de distribution d'ordre 1 nulle à la fin des temps. Dans les deux cas, la formule de la densité perturbée est la même.



et où on écrira  $\tilde{\phi}_{e1}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{\phi}_{e1}$  et  $\tilde{f}_{e1}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \tilde{f}_{e1}$  pour plus de lisibilité, l'Eq. A.19 devient

$$\tilde{f}_{e1} = \frac{1}{T_e} f_{e0}(v_{\parallel}, v_{\perp}) \tilde{\phi}_1 \left\{ 1 + i(\omega - k_y V_d) \int_{-\infty}^t e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t)) - \omega(t' - t)]} dt' \right\}, \quad (\text{A.21})$$

où on a utilisé le fait que  $f_{e0}(v_{\parallel}, v_{\perp})$  ne dépend que des constantes du mouvement, que la vitesse de dérive  $\mathbf{V}_d$  est suivant  $-\mathbf{e}_y$  et que  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$ . On a également supposé que la perturbation du potentiel  $\phi_{e1}(\mathbf{r}, t)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$  puisque le plasma est non perturbé à l'origine des temps.

Finalement, il reste à calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^t e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t)) - \omega(t' - t)]} dt' \quad (\text{A.22})$$

dans l'Eq. A.21 pour trouver la fonction électronique d'ordre un.

### A.1.5 Fonction électronique d'ordre un

Remplaçons  $\mathbf{r}(t')$  par son expression (donnée en Eqs. A.11) pour poursuivre le calcul. Pour plus de commodité, nous exprimerons le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  en coordonnées polaires de telle sorte que

$$\begin{cases} k_x &= k_{\perp} \cos(\theta) \\ k_y &= k_{\perp} \sin(\theta) \\ k_z &= k_z \end{cases} . \quad (\text{A.23})$$

L'intégrale A.22 s'écrit alors

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^t dt' \exp i [(t' - t) \times (k_y V_d + k_z v_z - \omega)] \\ &\quad \times \exp i \left\{ \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} [(\sin(\omega_{ce}(t' - t) + \psi) + \sin(\psi)) \cos(\theta)] \right\} \\ &\quad \times \exp -i \left\{ \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} [(\cos(\omega_{ce}(t' - t) + \psi) + \cos(\psi)) \sin(\theta)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

En utilisant la propriété trigonométrique  $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$  et en faisant le changement de variable  $\tau = t' - t$ , l'intégrale se met sous la forme plus concise suivante

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^0 \exp i \left\{ \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} [(\sin(\omega_{ce}\tau + \psi - \theta) + \sin(\psi - \theta))] \right\} \\ &\quad \times \exp i \left\{ \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} \times \tau \times (k_y V_d + k_z v_z - \omega) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Cette intégrale est difficilement calculable du fait du terme oscillant en sinus dans l'exponentielle. Pour faire face à cette difficulté, il est courant d'utiliser un développement en série de fonctions de Bessel de la forme

$$e^{iz \sin(\Phi)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\Phi} J_m(z), \quad (\text{A.26})$$

où les  $J_m$  représentent les fonctions de Bessel d'ordre  $m$  de première espèce. Il est alors facile de poursuivre le calcul et l'intégration donne

$$I = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(m-l)(\psi-\theta)} J_l\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}}\right) J_m\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}}\right)}{m\omega_{ce} + k_y V_d + k_z v_z - \omega}. \quad (\text{A.27})$$

Notons que nous avons pu prendre la limite en  $-\infty$  car nous avons supposé que la partie imaginaire de  $\omega$  est positive.

Finalement, on trouve la fonction de distribution électronique d'ordre un

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{e1} &= \frac{1}{T_e} f_{e0}(v_{\parallel}, v_{\perp}) \tilde{\phi}_{e1} \\ &\times \left\{ 1 + (\omega - k_y V_d) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(m-l)(\psi-\theta)} J_l\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}}\right) J_m\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}}\right)}{m\omega_{ce} + k_y V_d + k_z v_z - \omega} \right\}. \quad (\text{A.28}) \end{aligned}$$

Négligeant les gradients, nous retrouvons le résultat de Krall et Book [41] et celui de Gary et Sanderson [26] obtenu pour une onde de choc se propageant dans un plasma magnétisé non collisionnel.

### A.1.6 Densité électronique perturbée

La densité électronique d'ordre un est obtenue par intégration sur les vitesses de la fonction de distribution obtenue précédemment

$$\tilde{n}_{e1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \int_0^{+\infty} v_{\perp} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} d\psi \tilde{f}_{e1}. \quad (\text{A.29})$$

L'intégration du premier terme dans le membre de droite de l'Eq. A.28 (le terme en facteur du 1) correspond au premier ordre du développement limité du facteur de Boltzmann pour un plasma soumis à un champ électrostatique, c'est-à-dire

$$n_e = n_0 \exp\left[\frac{\phi}{T_e}\right] \sim n_0 \left(1 + \frac{\phi}{T_e}\right) = n_0 + n_{\text{Boltzmann}}. \quad (\text{A.30})$$

Le deuxième terme (la double somme) est la déviation à la forme classique de Boltzmann. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\tilde{n}_{e1} = \tilde{n}_{\text{Boltzmann}} [1 + g(\Omega, X, Y)], \quad (\text{A.31})$$

où  $g(\Omega, X, Y)$  est la fonction de Gordeev [30], que nous allons expliciter, et qui dépend des trois paramètres

$$\begin{cases} \Omega &= \frac{\omega - k_y V_d}{\omega_{ce}} \\ X &= (k_x^2 + k_y^2) \rho_{ce}^2 = k_{\perp}^2 \rho_{ce}^2 \\ Y &= k_z^2 \rho^2 \end{cases}, \quad (\text{A.32})$$

avec  $\rho_{ce} = v_{th,e}/\omega_{ce}$  le rayon de Larmor moyen des électrons à la vitesse  $v_{th,e}$ .

Procédons à l'intégration de la double somme. L'intégration sur l'angle  $\psi$  est nulle tout le temps sauf pour les termes diagonaux ( $l = m$ ), d'où

$$\begin{aligned} g(\Omega, X, Y) &= 2\pi \left( \frac{1}{2\pi v_{th,e}^2} \right)^{\frac{3}{2}} (\omega - k_y V_d) \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \\ &\times \int_0^{+\infty} v_{\perp} dv_{\perp} \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{J_m^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} \right) \exp \left( -\frac{v_z^2 + v_{\perp}^2}{2v_{th,e}^2} \right)}{m\omega_{ce} + k_y V_d + k_z v_z - \omega} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

où l'on a remplacé  $f_{e0}(v_{\parallel}, v_{\perp})$  par son expression (Eq. A.12).

Pour poursuivre l'intégration sur la vitesse perpendiculaire, on utilisera la propriété reliant les fonctions de Bessel de première espèce  $J_m$  et les fonctions de Bessel modifiées  $I_n$  suivante [60]

$$\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} J_m^2(bx) dx = \frac{1}{2a} e^{-\frac{b^2}{2a}} I_n \left( \frac{b^2}{2a} \right), \quad (\text{A.34})$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} g(\Omega, X, Y) &= \frac{(\omega - k_y V_d)}{\sqrt{2\pi} v_{th,e}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_m(k_{\perp}^2 \rho_{ce}^2) e^{-k_{\perp}^2 \rho^2} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \frac{\exp \left( -\frac{v_z^2}{2v_{th,e}^2} \right)}{m\omega_{ce} + k_y V_d + k_z v_z - \omega}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

On poursuit le calcul en reconnaissant que la dernière intégrale est de la forme de la fonction de dispersion plasma

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x - z} dx \quad (\text{A.36})$$

et nous pouvons alors écrire

$$g(\Omega, X, Y) = \frac{\Omega}{\sqrt{2Y}} e^{-X} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Z \left( \frac{\Omega - m}{\sqrt{2Y}} \right) I_m(X) \quad (\text{A.37})$$

$$= -i\Omega \int_0^{+\infty} e^{-X(1 - \cos(\varphi) - \frac{1}{2}Y\varphi^2 + i\Omega\varphi)} d\varphi, \quad (\text{A.38})$$

avec  $\Omega$ ,  $X$  et  $Y$  définis en Eqs. A.32. L'équivalence entre le développement en série de fonctions de Bessel et la forme intégrale est donnée en annexe B.

La densité électronique d'ordre un en fonction du potentiel perturbé est alors

$$\tilde{n}_{e1} = n_0 \frac{\tilde{\phi}_{e1}}{T_e} \left( 1 + \frac{\omega - k_y V_d}{\sqrt{2k_z^2 \rho_{ce}^2}} e^{-k_z^2 \rho_{ce}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Z \left( \frac{\omega - k_y V_d - \omega_{ce} m}{\sqrt{2k_z^2 \rho_{ce}^2}} \right) I_m(k_z^2 \rho_{ce}^2) \right). \quad (\text{A.39})$$

Cette expression pourra être injectée par la suite dans l'équation de Poisson. Nous allons à présent calculer la densité ionique d'ordre un.

## A.2 Evolution de la distribution ionique

### A.2.1 Fonction ionique d'ordre un

De la même manière que pour le calcul de la fonction de distribution électronique d'ordre un, nous partirons de l'équation de Vlasov pour une population d'ions xénon de charge  $q_i = Z_i e$ . Comme expliqué dans le chapitre 1 en section 1.3, leur rayon de Larmor typique est bien supérieur aux longueurs caractéristiques du propulseur à effet Hall et nous les considérerons comme non magnétisés. A l'ordre premier, la fonction de distribution ionique d'ordre un,  $f_{i1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , vérifie l'équation de Vlasov suivante

$$\frac{\partial f_{i1}}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{i1}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{q_i}{M_{Xe}} \mathbf{E}_0 \cdot \frac{\partial f_{i1}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{q_i}{M_{Xe}} \mathbf{E}_{i1}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial f_{i0}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}). \quad (\text{A.40})$$

Pour résoudre cette équation, il convient de l'intégrer sur les orbites non perturbées calculées à l'aide de l'Eq. A.7. Cependant, le calcul est compliqué par le fait que le champ électrique dans le propulseur est une fonction de la position  $x$ . Heureusement, la zone d'accélération est très courte dans le propulseur ( $\sim 1$  cm pour le propulseur X000) permettant de supposer une vitesse  $\mathbf{v}_p = v_p \mathbf{e}_x$  constante pour les ions, si l'on place notre étude immédiatement après cette zone. Ainsi, les vitesses décrivant les orbites non perturbées des ions s'écrivent

$$\mathbf{v}_i(t') = \mathbf{v}_i = \begin{cases} \int_0^{t'} \frac{q_i E(x(t))}{M_{Xe}} dt \simeq v_x = v_{x0} + v_p \\ v_y = v_{y0} \\ v_z = v_{z0} \end{cases}, \quad (\text{A.41})$$

où  $v_{x0}$ ,  $v_{y0}$  et  $v_{z0}$  sont les vitesses initiales et  $v_p$  la vitesse due à l'accélération produite par le champ électrique. Par intégration, on trouve que le vecteur position est

$$\mathbf{r}_i(t') = \begin{cases} v_x(t' - t) + x \\ v_y(t' - t) + y \\ v_z(t' - t) + z \end{cases}, \quad (\text{A.42})$$

avec  $x$ ,  $y$  et  $z$  les coordonnées de l'ion au temps  $t' = t$ .

Pour poursuivre le calcul, il faut se donner une forme pour la fonction de distribution ionique d'ordre 0, similairement à ce que nous avons effectué pour la population électronique. Comme le champ électrique du propulseur induit une anisotropie entre la direction axiale et le plan perpendiculaire à cette direction, nous supposons une fonction de distribution de la forme

$$f_{i0}(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) = n_{i0} \left( \frac{1}{2\pi v_{thi,plan}^2} \right) \exp \left( -\frac{v_y^2 + v_z^2}{2v_{thi,plan}^2} \right) \times \sqrt{\frac{1}{2\pi v_{thi,axial}^2}} \exp \left( -\frac{(v_x - v_p)^2}{2v_{thi,axial}^2} \right), \quad (\text{A.43})$$

où  $v_{thi,axial} = \sqrt{eT_{i,axial}/M_{Xe}}$  et  $v_{thi,plan} = \sqrt{eT_{i,plan}/M_{Xe}}$  représentent respectivement les vitesses thermiques des ions dans la direction axiale et dans le plan perpendiculaire. Notons que  $v_{x0} = v_x - v_p$  est bien la constante du mouvement dans la direction  $x$ . La dérivée de cette fonction par rapport aux vitesses s'écrit alors

$$\frac{\partial f_{i0}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}) = -\frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_{eff}}{v_{thi,plan}^2} f_{i0}(\mathbf{v}), \quad (\text{A.44})$$

pour retrouver une formule comparable à la propriété A.14, avec la vitesse  $\mathbf{v}_{eff}$  définie par

$$\mathbf{v}_{eff} = [v_x(1-a) + av_p] \mathbf{e}_x, \quad (\text{A.45})$$

où  $a$  est le carré du rapport des vitesses plan et axiale

$$a = \frac{v_{thi,plan}^2}{v_{thi,axial}^2}. \quad (\text{A.46})$$

Par analogie avec le calcul sur la fonction de distribution électronique (Eq. A.21 avec la vitesse  $\mathbf{v}_{eff}$  remplaçant la vitesse  $\mathbf{V}_d$ ), on montre que, pour une perturbation électrostatique et avec les conventions de l'Eq. A.20, l'intégration sur les orbites non perturbées donne

$$\tilde{f}_{i1} = -\frac{q_i}{M_{Xe} v_{thi,plan}^2} f_{i0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p) \tilde{\phi}_{i1} \left[ 1 - \frac{\omega - k_x v_{eff}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \right]. \quad (\text{A.47})$$

### A.2.2 Densité ionique perturbée

Intégrons l'équation précédente sur les vitesses afin de déterminer la densité ionique d'ordre un. On a alors

$$\tilde{n}_{i1} = -\frac{q_i \tilde{\phi}_{i1} n_{i0}}{M_{Xe} v_{thi,plan}^2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{1}{2\pi v_{thi,axial}^2}} \left( \frac{1}{2\pi v_{thi,plan}^2} \right) \times \int d\mathbf{v} \frac{\omega - k_x [v_x(1-a) + av_p]}{\omega - k_x v_x - k_y v_y - k_z v_z} e^{-\frac{(v_x - v_p)^2}{2v_{thi,axial}^2}} e^{-\frac{v_y^2 + v_z^2}{2v_{thi,plan}^2}} \right]. \quad (\text{A.48})$$

En faisant le changement de variable suivant

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{v_x - v_p}{\sqrt{2}v_{thi,axial}}\mathbf{e}_x + \frac{v_y}{\sqrt{2}v_{thi,plan}}\mathbf{e}_y + \frac{v_z}{\sqrt{2}v_{thi,plan}}\mathbf{e}_z \quad (\text{A.49})$$

et en notant  $\Omega_i = \omega - k_x v_p$  la pulsation soustraite de l'effet Doppler  $k_x v_p$ , l'intégrale devient

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{i1} = & -\frac{q_i \tilde{\phi}_1 n_{i0}}{M_X e v_{thi,plan}^2} \left[ 1 - \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int dV_x \int dV_y \int dV_z \right. \\ & \times \frac{\Omega_i - \sqrt{2}k_x V_x v_{thi,axial} (1-a)}{\Omega_i - \sqrt{2}k_x V_x v_{thi,axial} - \sqrt{2}k_y V_y v_{thi,plan} - \sqrt{2}k_z V_z v_{thi,plan}} \\ & \left. \times e^{-(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

On peut alors définir un vecteur  $\mathbf{K}$  tel que

$$\mathbf{K} = \sqrt{2}k_x v_{thi,axial}\mathbf{e}_x + \sqrt{2}k_y v_{thi,plan}\mathbf{e}_y + \sqrt{2}k_z v_{thi,plan}\mathbf{e}_z, \quad (\text{A.51})$$

conduisant à

$$\tilde{n}_{i1} = -\frac{q_i \tilde{\phi}_1 n_{i0}}{M_X e v_{thi,plan}^2} \left[ 1 - \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int dV_x \int dV_y \int dV_z \frac{\Omega_i - (1-a)\mathbf{K}_x \cdot \mathbf{V}}{\Omega_i - \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}} e^{-\|\mathbf{V}\|^2} \right], \quad (\text{A.52})$$

où  $\mathbf{V} = V_x \mathbf{e}_x + V_y \mathbf{e}_y + V_z \mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{K}_x = \sqrt{2}k_x v_{thi,axial}\mathbf{e}_x$ .

Pour faire apparaître la dérivé de la fonction de dispersion plasma, qui peut se mettre sous les deux formes utiles suivantes (voir annexe C)

$$Z'(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-z)^2} e^{-x^2} dx \quad (\text{A.53})$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x-z} e^{-x^2} dx, \quad (\text{A.54})$$

on ajoute  $-\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}$  au numérateur de l'Eq. A.52 et il vient

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{i1} = & \frac{q_i \tilde{\phi}_1 n_{i0}}{M_X e v_{thi,plan}^2} \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} [\mathbf{K} - (1-a)\mathbf{K}_x] \\ & \cdot \left( \int dV_x \int dV_y \int dV_z \frac{\mathbf{V}}{\Omega_i - \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}} e^{-\|\mathbf{V}\|^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

En faisant le changement d'axes  $\mathbf{V} = U_X \mathbf{e}_X + U_Y \mathbf{e}_Y + U_Z \mathbf{e}_Z$  où  $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)$  est le repère orthonormé dont la direction  $\mathbf{e}_X$  est parallèle et de même sens à  $\mathbf{K}$ , l'intégrale

devant  $\mathbf{K}$  donne facilement  $+\pi^{\frac{3}{2}}/(2K) \times Z'(\Omega_i/K)$  grâce à l'Eq. A.54 . Dans l'intégrale devant  $(1-a)\mathbf{K}_x$ , on procède à une intégration par partie en  $V_x$  de sorte que

$$\int dV_y \int dV_z \int dV_x \frac{V_x}{\Omega_i - \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}} e^{-\|\mathbf{V}\|^2} = 0 + \frac{1}{2} \int dV_z \int dV_y \int dV_x \frac{K_x}{(\Omega_i - \mathbf{K} \cdot \mathbf{V})^2} e^{-\|\mathbf{V}\|^2} \quad (\text{A.56})$$

$$= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{K_x}{K^2} Z' \left( \frac{\Omega_i}{K} \right), \quad (\text{A.57})$$

où l'on a utilisé le même changement de variable que pour la première intégrale pour passer de l'Eq. A.56 à l'Eq. A.57 et où l'on a utilisé l'Eq. A.54.

La densité ionique d'ordre 1 s'écrit alors simplement

$$\tilde{n}_{i1} = n_{i0} \frac{q_i \tilde{\phi}_{i1}}{M_{Xe}} \frac{k^2}{K^2} Z' \left( \frac{\omega - k_x v_p}{K} \right), \quad (\text{A.58})$$

avec  $K = \sqrt{2} \sqrt{k_x^2 v_{thi,axial}^2 + k_y^2 v_{thi,plan}^2 + k_z^2 v_{thi,plan}^2}$ .

Cette densité et la densité électronique perturbée peuvent être injectées dans l'équation de Poisson pour obtenir la relation de dispersion du plasma du propulseur à effet Hall.





## Annexe B

# Equivalence entre le développement en série et la forme intégrale de la fonction de Gordeev

La fonction de Gordeev est une fonction rencontrée lorsque l'on étudie la propagation d'ondes électrostatiques dans un plasma chaud magnétisé. Elle apparaît notamment lorsque l'on commence l'intégration de l'équation de Vlasov sur les vitesses avant de l'intégrer sur les orbites non perturbées. Гопдеев (en caractères latin Gordeev) a été le premier à en proposer une étude en 1952 [30] et par la suite plusieurs auteurs [35, 53, 58] en ont étudié les propriétés et les limites asymptotiques. Cette fonction est généralement définie par l'intégrale suivante

$$g(\Omega, X, Y) = i\Omega \int_0^{+\infty} e^{-X[1-\cos(\varphi)] - \frac{1}{2}Y\varphi^2 + i\Omega\varphi} d\varphi. \quad (\text{B.1})$$

Dans le cas de l'instabilité de dérive électronique présentée aux chapitres 1, 2 et 4, la partie réelle  $\omega$  et la partie imaginaire  $\gamma$  de  $\Omega$  représentent respectivement la pulsation et le taux de croissance du mode normalisés à fréquence cyclotron de l'espèce considérée (les électrons dans notre cas). Les paramètres  $X$  et  $Y$  sont respectivement égaux à la racine carré de la composante perpendiculaire et parallèle du nombre d'onde, normalisés au rayon de Larmor de l'espèce considérée. Nous supposons ces deux dernières quantités, réelles. La variable  $\varphi$  est alors le temps normalisé à la pulsation cyclotron de l'espèce considérée.

Avec ces conventions, la partie imaginaire de  $\Omega$  ( $\gamma$ ) doit être positive si l'on veut que l'intégrale soit définie. Dans le cas où le paramètre  $\gamma$  est négatif, l'intégration sur le temps doit alors se faire sur l'intervalle  $]-\infty, 0]$ , ce qui revient à changer le signe devant les deux  $i\Omega$ . Un raisonnement similaire à ce qui est présenté ci-dessous peut alors être appliqué. Nous considérons dans notre exemple le paramètre  $\gamma$  comme positif.

La forme intégrale est un outil indispensable pour l'étude analytique mais n'est pas toujours adéquate lorsque l'on veut calculer la fonction numériquement et ceci particulièrement lorsque l'intégrand  $i\Omega\varphi$  oscille rapidement. Pour éviter ce problème, une représentation sous forme de série peut être obtenue en développant l'intégrand  $\exp(X \cos(\varphi))$  en fonction de fonctions de Bessel. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cette annexe.

Pour ce faire, nous allons utiliser la propriété suivante

$$e^{X \cos(\varphi)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\varphi} J_m(iX), \quad (\text{B.2})$$

où les  $J_m$  sont les fonctions de Bessel de première espèce. Utilisant la relation entre les fonctions de Bessel de première espèce et les fonctions de Bessel de première espèce modifiées

$$I_m(X) = (-i)^m J_m(iX), \quad (\text{B.3})$$

la fonction de Gordeev s'écrit alors

$$g(\Omega, X, Y) = i\Omega e^{-X} \int_0^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_m(X) e^{i(m+\Omega)\varphi} e^{-\frac{1}{2}Y\varphi^2} d\varphi. \quad (\text{B.4})$$

En supposant l'inversion intégrale série possible<sup>14</sup>, la fonction se met sous la forme

$$g(\Omega, X, Y) = i\Omega e^{-X} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\left(\frac{\Omega+m}{\sqrt{2Y}}\right)^2} I_m(X) \int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{Y}{2}}\varphi - i\frac{\Omega+m}{\sqrt{2Y}}\right)^2} d\varphi. \quad (\text{B.5})$$

Ainsi, nous pouvons faire le changement de variable suivant

$$\psi = \sqrt{\frac{Y}{2}}\varphi - i\frac{\Omega+m}{\sqrt{2Y}}. \quad (\text{B.6})$$

L'intégration se fait à présent dans le plan complexe sur la droite  $C_1$  définie en Fig. B.1 pour  $\omega + m \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$  et la fonction devient

$$g(\Omega, X, Y) = i\Omega \sqrt{\frac{2}{Y}} e^{-X} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\left(\frac{\Omega+m}{\sqrt{2Y}}\right)^2} I_m(X) \int_{C_1} e^{-\psi^2} d\psi. \quad (\text{B.7})$$

On reconnaît alors la fonction erreur complémentaire

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (\text{B.8})$$

et en se rappelant que la fonction de dispersion plasma  $Z(z)$  s'exprime en fonction de  $\operatorname{erfc}(z)$  de la façon suivante

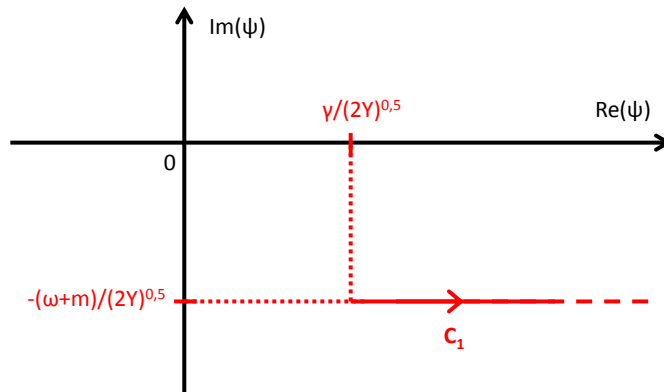
$$Z(z) = i\sqrt{\pi} e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-iz), \quad (\text{B.9})$$

alors l'Eq. B.1 s'écrit finalement

$$g(\Omega, X, Y) = \frac{\Omega}{\sqrt{2Y}} e^{-X} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Z\left(\frac{\Omega-m}{\sqrt{2Y}}\right) I_m(X), \quad (\text{B.10})$$

---

14. Avec nos conventions, cette inversion est possible puisque le taux de croissance  $\gamma$  est positif, de tel façon à ce que  $\exp(-\gamma\varphi)$  tend vers 0 quand  $\varphi$  tend vers  $+\infty$ .



**Figure B.1:** Contour d'intégration dans le plan complexe lorsque  $\omega+m \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$ . Le contour  $C_1$  est la droite allant de  $(\gamma/\sqrt{2Y}, -(\omega+m)/\sqrt{2Y})$  à  $(+\infty, -(\omega+m)/\sqrt{2Y})$ .

où l'on a utilisé le fait que  $I_m(X) = I_{-m}(X)$  pour obtenir la même forme que dans les chapitres 1, 2 et 4.

Cette forme permet de calculer la fonction numériquement même si un grand nombre de termes dans la série est parfois nécessaire, surtout lorsque le paramètre  $X$  est grand.



# Annexe C

## Propriétés de la fonction de dispersion plasma

L'étude de la théorie cinétique d'un plasma fait généralement apparaître la fonction  $Z$  définie par

$$Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-z} dt \quad (\text{C.1})$$

dans les relations de dispersion qui en découlent. Pour cette raison, elle est communément appelée fonction de dispersion plasma. Dans cette annexe, nous démontrons quelques propriétés générales sur cette fonction, qui seront utiles tout au long de l'ouvrage.

### C.1 Dérivée première, dérivée $n$ -ième et fonction erreur

Une simple intégration par partie sur la dérivée selon  $z$  de l'Eq. C.1 permet de démontrer que la dérivée première de la fonction de dispersion plasma est égale à

$$Z'(z) = -2[1 + zZ(z)]. \quad (\text{C.2})$$

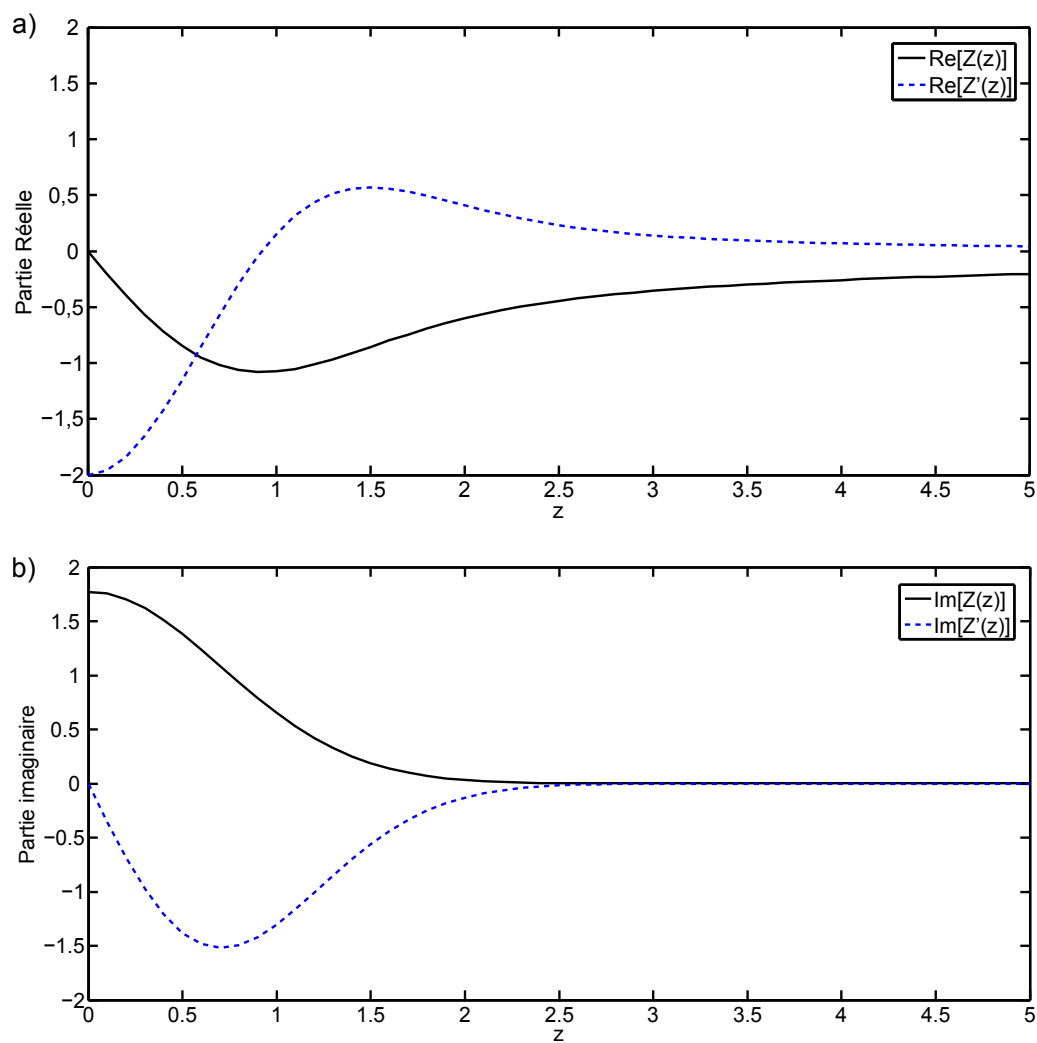
C'est cette fonction qui apparaît lors du calcul de la susceptibilité ionique dans l'annexe A. Sa partie réelle et sa partie imaginaire sont représentées sur la Fig. C.1 ainsi que celles de la fonction  $Z(z)$ , pour  $z$  réel.

Il est ensuite facile de démontrer par récurrence que la dérivée  $n$ -ième de la fonction de dispersion plasma est reliée aux dérivées  $(n-2)$ ième et  $(n-1)$ ième par la relation suivante

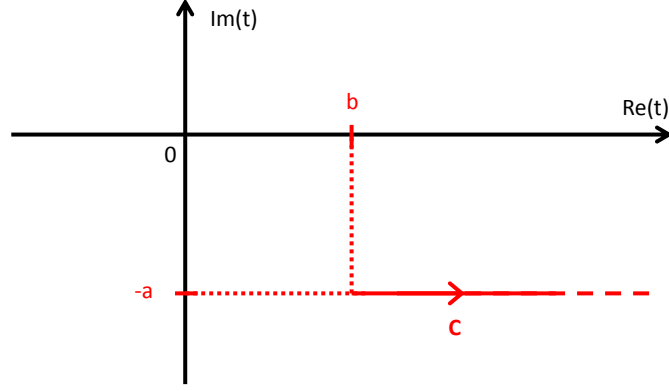
$$\forall n \geq 2, \quad Z^{(n)}(z) = -2(n-1)Z^{(n-2)}(z) - 2zZ^{(n-1)}(z). \quad (\text{C.3})$$

On peut également prouver par un calcul sur le plan complexe que  $Z(z)$  s'écrit en fonction du prolongement analytique de la fonction erreur complémentaire de la façon suivante

$$Z(z) = i\sqrt{\pi}e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-iz), \quad (\text{C.4})$$



**Figure C.1:** a) Parties réelles et b) parties imaginaires de  $Z(z)$  (ligne solide noire) et  $Z'(z)$  (tirets bleus) en fonction de  $z \in \mathbb{R}$ .



**Figure C.2:** Contour d'intégration dans le plan complexe de la fonction  $\operatorname{erfc}(-iz)$  définie par l'Eq. C.5 pour  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

avec la fonction  $\operatorname{erfc}(-iz)$  définie par

$$\operatorname{erfc}(-iz) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_C e^{-t^2} dt, \quad (\text{C.5})$$

où  $C$  est le contour d'intégration défini en Fig. C.2 pour  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

## C.2 Développement asymptotique de la fonction erfc

Le terme ionique obtenu à partir de la théorie cinétique en ions chauds dans l'annexe A fait intervenir la dérivée de la fonction de dispersion plasma. Dans la limite ions froids, nous cherchons un développement asymptotique de cette dernière en  $+\infty$ . Ceci revient à chercher un développement asymptotique de la fonction  $Z$  puisque la dérivée en dépend (Eq. C.2) et donc un développement asymptotique de la fonction erreur complémentaire (Eq. C.4). Nous allons donc procéder au développement en série en puissance de  $1/x$  de la fonction  $\operatorname{erfc}(x)$ , avec  $x$  un réel. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on définit la fonction erreur complémentaire par

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt. \quad (\text{C.6})$$

En utilisant la formule de Leibniz

$$\frac{d}{dx} \int_{y(x)}^{z(x)} f(t, x) dt = \int_{y(x)}^{z(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt + f(z(x), x) \frac{dz}{dx}(x) - f(y(x), x) \frac{dy}{dx}(x), \quad (\text{C.7})$$

où  $y$  et  $z$  sont des fonctions complexes de  $x$  et  $f$  une fonction intégrable sur le domaine  $[y(x), z(x)]$ , on montre que la fonction erreur complémentaire vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (\text{C.8})$$

En supposant que  $f(x)$  est de la forme

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_m}{x^m}, \quad (\text{C.9})$$

on démontre, en identifiant terme à terme par puissance de  $1/x$ , que les coefficients  $a_m$  vérifient

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall m \in \mathbb{N}, a_{2m} = 0 \\ \forall m \in \mathbb{N}^*, a_{2m+1} = -\frac{2m-1}{2} a_{2m-1} \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

et donc que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, a_{2m+1} = (-1)^m \frac{1}{2^m} \prod_{p=0}^{m-1} (2p+1). \quad (\text{C.11})$$

### C.3 Expression intégrale de $Z^{(n)}(z)$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer une propriété sur la dérivée  $n$ -ième de la fonction  $Z$ , utile pour le développement d'Hadarnard de la fonction de Gordeev réalisé dans le chapitre 2. On montre par récurrence que

$$\forall n \geq 0, Z^{(n)}(z) = 2^{n+1} i^{n+1} e^{-z^2} \int_C (t + iz)^n e^{-t^2} dt, \quad (\text{C.12})$$

où  $C$  est la droite définie en Fig. C.2.

- Initialisation :  $n=0$  et  $n=1$

On montre trivialement que la formule C.12 est vraie pour  $n=0$ , c'est à dire pour  $Z$ , d'après les Eqs. C.4 et C.5. Alors, pour  $n=1$ , on a

$$Z'(z) = \frac{dZ}{dz}(z) = -4 \left[ \int_C iz e^{-t^2} dt + \frac{e^{z^2}}{2} \right]. \quad (\text{C.13})$$

Nous avons fait apparaître le terme en  $iz \exp(-t^2)$ , il nous reste à faire apparaître celui en  $t \exp(-t^2)$ . Pour ce faire, on peut calculer son intégrale sur le contour  $C$ . Celle-ci donne

$$\int_C t e^{-t^2} dt = \int_C -\frac{1}{2} (e^{-t^2})' dt = \frac{e^{z^2}}{2}, \quad (\text{C.14})$$

qui nous permet de retrouver l'Eq. C.12 pour  $n=1$ .

- Généralisation : Dans cette partie, on suppose que  $Z^{(n)}(z)$  vérifie l'Eq. C.12 et on montre que  $Z^{(n+1)}(z)$  la vérifie aussi.



En utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut écrire pour la dérivée  $(n + 1)$ ième que

$$\begin{aligned} Z^{(n+1)}(z) &= \frac{dZ^{(n)}}{dz}(z) \\ &= 2^{n+2}i^{n+2}e^{-z^2} \left[ iz \int_C (t + iz)^n e^{-t^2} dt + \frac{n}{2} \int_C (t + iz)^{n-1} e^{-t^2} dt \right], \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

où l'on doit considérer  $n \geq 1$ .

En faisant une intégration par partie dans la deuxième intégrale avec  $u = \exp(-t^2)$  et  $v' = (t + iz)^{n-1}$ , on démontre facilement que

$$Z^{(n+1)}(z) = 2^{n+2}i^{n+2}e^{-z^2} \int_C (t + iz)^{n+1} e^{-t^2} dt, \quad (\text{C.16})$$

qui est l'expression que l'on voulait trouver.

- Conclusion : La formule est vraie au rang 0 et au rang 1 et si  $\forall n \geq 1$ ,  $Z^{(n)}(z)$  la vérifie alors  $Z^{(n+1)}(z)$  aussi, donc la formule est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .



# Bibliographie

- [1] J.C. Adam, J.P. Boeuf, N. Dubuit, M. Dudeck, L. Garrigues, D. Grésillon, A. Héron, G.J.M. Hagelaar, V. Kulaev, N. Lemoine, S. Mazouffre, J. Perez Luna, V. Pisarev, and S. Tsikata. Physics, simulation and diagnostics of Hall effect thrusters. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 50 :124041, 2008.
- [2] J.C. Adam, A. Héron, and G. Laval. Study of stationary plasma thrusters using two-dimensional fully kinetic simulations. *Phys. Plasmas*, 11(1) :295, 2004.
- [3] J.C. Adam, Boeuf J.P., N. Dubuit, M. Dudeck, L. Garrigues, D. Grésillon, A. Héron, G. Hagelaar, V. Kulaev, N. Lemoine, S. Mazouffre, J. Perez Luna, V. Pisarev, and S. Tsikata. Physics, simulation and diagnostics of Hall effect thrusters. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 50 :124041, 2008.
- [4] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. Mc Graw Hill, 1979.
- [5] J. Bareilles. *Modélisation 2D hybride d'un propulseur à effet Hall pour satellites*. PhD thesis, Paul Sabatier, 2002.
- [6] J. Bareilles, G.J.M. Hagelaar, L. Garrigues, C. Boniface, J.P. Boeuf, and N. Gascon. Critical assessment of a two-dimensional hybrid Hall thruster model : Comparisons with experiments. *Phys. Plasmas*, 11 :3035.
- [7] J. A. Bittencourt. *Fundamentals of plasma physics*. Springer, third edition edition, 2004.
- [8] J.P. Boeuf and A. Bouchoule. Les propulseurs à plasma pour satellite. Images de la physique 2003-2004, 2003-2004.
- [9] G. Bourgeois. *Influence de la topologie magnétique, de la cathode et de la section du canal sur l'accélération des ions dans un propulseur à effet Hall*. PhD thesis, Université d'Orléans, 2012.
- [10] G. Bourgeois, S. Mazouffre, and N. Sadeghi. Unexpected transverse velocity component of Xe+ ions near the exit plane of a Hall thruster. *Phys. Plasmas*, 17(11) :113502, 2010.
- [11] T.J.M Boyd and J.J. Sanderson. *The physics of plasmas*. Cambridge University Press, 2003.
- [12] D. Coulette and N. Besse. Multi-water-bag models of ion temperature gradient instability in cylindrical geometry. *Physics of Plasmas*, 20 :052107, 2013.
- [13] D. Coulette and N. Besse. Numerical comparisons of gyrokinetic multi-water-bag models. *Journal of Computational Physics*, 248 :1–32, 2013.

- [14] K. Dannenmayer and S. Mazouffre. Sizing of Hall effect thrusters with input power and thrust level : An empirical approach. *Journal of Technical Physics*, 49 :231–254, 2008.
- [15] J. L. Delcroix and A. Bers. *Physique des plasmas*, volume 1. EDP sciences, 1994.
- [16] J. L. Delcroix and A. Bers. *Physique des plasmas*, volume 2. EDP sciences, 1994.
- [17] A. Ducrocq. *Rôle des instabilités électroniques de dérive dans le transport électronique du propulseur à effet Hall*. PhD thesis, Ecole polytechnique, 2006.
- [18] A. Ducrocq, J.C. Adam, A. Héron, and G. Laval. High-frequency electron drift instability in the cross-field configuration of Hall thrusters. *Phys. Plasmas*, 13(10) :102111, 2006.
- [19] J. M. Fife. *Hybrid-PIC modeling and electrostatic probe survey of Hall thrusters*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1998.
- [20] D. W. Forslund, R. L. Morse, and C. W. Nielson. Electron cyclotron drift instability. *Physical Review Letters*, 25(18) :1266, 1970.
- [21] B.D. Fried and S.D. Conte. *The plasma dispersion function / the Hilbert transform of the Gaussian*. N.Y. : Academic Press, 1961.
- [22] D. H. Froula, S. H. Glenzer, N. C. Luhmann, and J. Sheffield. *Plasma scattering of electromagnetic radiation : Theory and measurement techniques*. Elsevier, 2011.
- [23] P. S. Gary. Longitudinal waves in a perpendicular collisionless plasma shock II. Vlasov ions. *J. Plasma Phys.*, 4(4) :753, 1970.
- [24] P. S. Gary. Longitudinal waves in a perpendicular collisionless plasma shock III.  $T_e \sim T_i$ . *J. Plasma Physics*, 6 :561–566, 1971.
- [25] P. S. Gary. Longitudinal waves in a perpendicular collisionless plasma shock IV. Gradient B. *J. Plasma Phys.*, 7 :417, 1971.
- [26] P. S. Gary and J. J. Sanderson. Longitudinal waves in a perpendicular collisionless plasma shock I. Cold ions. *J. Plasma Phys.*, 4(4) :739, 1970.
- [27] D. Gawron. *Phénomènes de transport ionique dans le plasma d'un propulseur à effet Hall à forte puissance : étude par spectroscopie laser*. PhD thesis, Université d'Orléans, 2007.
- [28] D. Gawron, S. Mazouffre, and C. Boniface. A fabry-perot spectroscopy study on ion flow features in a hall effect thruster. *Plasma Sources Sci. Technol.*, 15(16) :161503, 2006.
- [29] D. M. Goebel and I Katz. *Fundamentals of electric propulsion : ion and Hall thrusters*. California institute of technology, 2008.
- [30] G. V. Gordeev. *JEPT (USSR)*, 6 :660, 1952.
- [31] D. Grésillon and F. Doveil. Normal modes in the ion-beam-plasma system. *Physical Review Letters*, 34(2) :77–80, 1975.
- [32] G.J.M. Hagelaar, J. Bareilles, L. Garrigues, and J.P. Boeuf. Two-dimensional model of a stationary plasma thruster. *J. Appl. Phys.*, 91 :5592, 2002.

- 
- [33] E. Holzhauser and J.H. Massing. An analysis of optical mixing in plasma scattering experiments. *Plasma Phys.*, 20(9) :867, 1978.
- [34] I.H. Hutchinson. *Principles of Plasma Diagnostics*, chapter 7, page 258. Cambridge University Press, 1987.
- [35] G. L. Johnston. Representation of dielectric function of magnetized plasma. *Physics of Fluids*, 16 :1540, 1973.
- [36] Boeuf J.P. and L. Garrigues. Low frequency oscillations in a stationary plasma thruster. *J. Appl. Phys.*, 84(7) :3541–3554, 1998.
- [37] I Katz, R. R. Hofer, and D. M. Goebel. *IEEE Transactions on plasma science*, 36(5) :2015–2024, 2008.
- [38] S. W. Kim and A. D. Gallimore. Plume study of a 1.35 KW SPT-100 using an ExB probe. In *AIAA-99-2423*, 1999.
- [39] Y.C. Kim, J.M. Beall, and E.J. Powers. Bispectrum and nonlinear wave coupling. *Phys. Fluids*, 23(2), 1980.
- [40] N. A. Krall and D. L. Book. Anomalous resistivity in collisionless plasma shock waves. *Phys. Rev. Lett.*, 23 :574, 1969.
- [41] N. A. Krall and D. L. Book. Ion sound instability in a collisionless shock wave. *Physics of fluids*, 12(2) :347–355, 1969.
- [42] N. A. Krall and P. C. Liewer. Low-frequency instabilities in magnetic pulses. *Physical Review A*, 4(5) :2094, 1971.
- [43] M. Krasnov, A. Kissélev, and G. Makarenko. *Recueil des problèmes sur les équations différentielles ordinaires*. 1981.
- [44] M. Lampe, W. M Manheimer, J. B. McBride, J. H. Orens, K. Papadopoulous, R. Shanny, and R.N. Sudan. Theory and simulation of the beam cyclotron instability. *Physics of Fluids*, 15(4) :662, 1972.
- [45] L.D Landau. On the vibration of the electronic plasma. *J. Phys. (U.S.S.R.)*, 10 :25, 1946.
- [46] L.D Landau. On the vibration of the electronic plasma. *JETP*, 16 :574, 1974.
- [47] V. Lapuerta and E. Ahedo. General parametric analysis of the linear two-stream instability. *Physics of Plasmas*, 9 :1513, 2002.
- [48] P. Lasgorceix, C. Perot, and M. Dudeck. PIVOINE ground test facility for ion thruster testing. In *Second European Spacecraft Propulsion Conference*, 27-29 May, 1997.
- [49] C. N. Lashmore-Davies. A possible mechanism for instability in a perpendicular collisionless shock wave. *J. Phys. A : Gen. Phys.*, 3 :L40, 1970.
- [50] N. Lemoine. *Transport turbulent d'un plasma à travers un champ magnétique : observation par diffusion collective de la lumière*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2005.
- [51] J. E. Lerner. Plasma propulsion in space. *The Industrial Physicist*, pages 16–19, October 2000.

- [52] F. Marchandise, N. Cornu, F. Darnon, and D. Estubier. PPS 1350-G qualification status 10500h. In *International Electric Propulsion Conference*, number 164, 2007.
- [53] C. Marolli, V. Petrillo, and E. Ganoutas. An asymptotic form of the Gordeev function for initial-value problems. *Europhys. Lett.*, 5(3) :229–233, 1988.
- [54] S. Mazouffre, P. Echegut, and M. Dudeck. A calibrated infrared imaging study on the steady state thermal behaviour of Hall effect thrusters. *Plasma Sources Sci. Technol.*, 16 :13–22, 2007.
- [55] A. I. Morozov. Conditions for efficient current transport by near-wall conduction. *Sov. Phys. Tech. Phys.*, 32(8) :901–904, 1987.
- [56] A. I. Morozov and V. V. Savelyev. Theory of the near-wall conductivity. *Plasma Phys. Rep.*, 27(7) :570–575, 2001.
- [57] A.I. Morozov and V.V. Savelyev. Fundamental of stationary plasma thruster theory. *Rev. Plasma Phys.*, 21 :203, 2000.
- [58] R.B. Paris. The asymptotic expansion of Gordeev’s integral. *Z. angew. Math. Phys.*, 49(2) :322, 1998.
- [59] J. Perez-Luna, N. Dubuit, L. Garrigues, GJM Hagelaar, and Boeuf J.P. Electron trajectories in a Hall effect thruster anomalous transport induced by an azimuthal wave. *IEEE transactions on plasma science*, 35(4) :1212, 2008.
- [60] G. Petiau. *La théorie des fonctions de Bessel*. CNRS, 1955.
- [61] E. R. Priest and J. J. Sanderson. Ion acoustic instability in collisionless shocks. *Plasma Physics*, 14 :951, 1972.
- [62] Y. Raitses, D. Staack, M. Keidar, and N.J. Fisch. Electron-wall interaction in Hall thrusters. *Phys. Plasmas*, 12(5) :057104, 2005.
- [63] J. M. Rax. *Physique des Plasmas*. Dunod, 2005.
- [64] J. Schmitt. *Ondes de Bernstein ioniques*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1973.
- [65] J.P.M. Schmitt. The magnetoplasma dispersion function : some mathematical properties. *J. Plasma Physics*, 12 :51, 1974.
- [66] R.E. Slusher and C.M. Surko. Study of density fluctuations in plasmas by small-angle CO<sub>2</sub> laser scattering. *Phys. Fluids*, 23(3) :472–490, 1980.
- [67] Snecma. Caractéristiques techniques du propulseur Vulcain 2 de la Snecma. [www.snecma.com/IMG/pdf/VULCAIN2\\_Francais.pdf](http://www.snecma.com/IMG/pdf/VULCAIN2_Francais.pdf), Juin 2006.
- [68] R. Spektor, K.D. Diamant, E.J. Beiting, Y. Raitses, and N.J. Fisch. Laser induced fluorescence measurements of the cylindrical Hall thruster plume. *Phys. Plasmas*, 17(9) :093502, 2010.
- [69] A. Truc, A. Quéméneur, P. Hennequin, D. Grésillon, and F. Gervais. ALTAIR : an infrared laser scattering diagnostic on the Tore Supra tokamak. *Rev. Sci. Instrum.*, 63(7) :3716–3724, 1992.
- [70] A. Truc, A. Quéméneur, P. Hennequin, D. Grésillon, F. Gervais, C. Laviron, and J. Olivain. Altair : Banc optique de diffusion cohérente pour l’étude des fluctuations de densité dans le tokamak Tore Supra. Technical report, LPTP, Déc. 1990.

- 
- [71] S. Tsikata. *Small-scale electron density fluctuations in the Hall thruster, investigated by collective light scattering*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2009.
- [72] S. Tsikata, C. Honoré, D. Grésillon, and N. Lemoine. Collective light scattering for the study of fluctuations in magnetized plasmas : The Hall thruster case study. *Contrib. Plasma Phys.*, 51(2-3) :119, 2011.
- [73] S. Tsikata, C. Honoré, N. Lemoine, and D. Grésillon. Three-dimensional structure of electron density fluctuations in the Hall thruster plasma : E x B mode. *Phys. Plasmas*, 17(11) :112110, 2010.
- [74] S. Tsikata, N. Lemoine, V. Pisarev, and D. Grésillon. Electron density fluctuations in a Hall plasma thruster : observations by collective light scattering. *J. Plasma Fusion Res. Series*, 8 :1556, 2009.
- [75] S. Tsikata, N. Lemoine, V. Pisarev, and D.M. Grésillon. Dispersion relation of electron density fluctuations in a Hall thruster plasma, observed by collective light scattering. *Phys. Plasmas*, 16(3) :033506, 2009.
- [76] M. van de Sande. *Laser scattering on low temperature plasmas : High resolution and stray light rejection*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2002.
- [77] H. V. Wong. Electrostatic electron-ion streaming instability. *Phys. Fluids*, 13(3) :757, 1970.
- [78] S. Zurbach, N. Cornu, and P. Lasgorceix. Performance evaluation of a 20 kW Hall effect thruster. In *The 32nd International Electric Propulsion Conference*, 2011.

## Publications

J. Cavalier, N. Lemoine, G. Bonhomme, S. Tsikata, C. Honoré, and D. Grésillon, *Device convolution effects on the collective scattering signal of the  $E \times B$  mode from Hall thruster experiments : 2D dispersion relation*, Physics of Plasmas **19**, 082117 (2012).

J. Cavalier, N. Lemoine, G. Bonhomme, S. Tsikata, C. Honoré, and D. Grésillon, *Hall thruster plasma fluctuations identified as the  $E \times B$  electron drift instability : Modeling and fitting on experimental data*, Physics of Plasmas **20**, 082107 (2013).

Jiri Adamek, Matej Peterka, Tomaz Gyergyek, Pavel Kudrna, Mirko Ramisch, Ulrich Stroth, Jordan Cavalier, and Milan Tichy, *Application of the ball-pen probe in two low-temperature magnetised plasma devices and in torsatron TJ-K*, Contributions to Plasma Physics **53**, No. 1, 39-44 (2013).

G. Bousselin, J. Cavalier, J.F. Pautex, S. Heuraux, N. Lemoine, and G. Bonhomme, *Design and validation of the ball-pen probe for plasma potential measurements in a low-temperature magnetized plasma*, Rev. Sci. Instrum. **84**, 013505 (2013).





## Résumé

L'étude des phénomènes turbulents se développant en sortie du propulseur de Hall est nécessaire pour pouvoir modéliser le transport anormal (par opposition au transport diffusif) des électrons à travers les lignes de champ magnétique. Les relations de dispersion de deux instabilités pouvant être responsables de ce transport ont été mesurées à des échelles millimétriques à l'aide du diagnostic de diffusion collective de la lumière. Ce travail de thèse s'attache à en donner une description aussi bien théorique qu'expérimentale, pierre à l'édifice de la compréhension du transport dans le propulseur.

Une instabilité se propageant majoritairement dans la direction azimutale du propulseur y est caractérisée comme étant l'instabilité de dérive électronique  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  et un modèle analytique décrivant la fréquence expérimentale y est dérivé et validé. De plus, le manuscrit présente une méthode de déconvolution du signal de la diffusion collective de la fonction d'appareil pour ce mode. Une fois déconvoluées, les relations de dispersion expérimentales peuvent être ajustées par la fréquence du modèle analytique, ce qui permet de mesurer expérimentalement et de manière originale la température et la densité électronique dans le jet d'ions énergétiques du plasma du propulseur.

Enfin, la seconde instabilité, se développant autour de la direction axiale du propulseur, est caractérisée comme l'instabilité double faisceau entre les ions simplement et doublement chargés du plasma.

**Mots-clés :** Plasma magnétisé, propulseur de Hall, turbulence, transport électronique anormal, diffusion collective, modélisation cinétique, instabilité de dérive électronique, instabilité de faisceau.

## Abstract

The study of turbulent phenomena that grow at the exit plane of the Hall thruster is required to modelize the anomalous transport (in contrast to the diffusion transport) of electrons across the magnetic field lines. The dispersion relations of two instabilities that can be responsible for this transport have been measured at millimetric scales by mean of the collective light scattering diagnostic. The aim of the thesis is to describe them theoretically as well as experimentally, improving the understanding of the Hall thruster transport.

In the thesis, an instability that propagates principally azimuthally is characterized as the  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  electron drift instability and an analytical model that describes the experimental frequency is derived and validated. In addition, the manuscript presents an original method to unfold the signal of the collective scattering diagnostic from the instrumental function of this mode. Once corrected, the experimental dispersion relations can be adjusted by the frequency given by the analytical model, allowing to measure experimentally and in an original way the electron temperature and density in the energetic ion jet of the Hall thruster plasma.

The second instability that is mainly propagating in the axial direction is characterized as the two-stream instability between the simply and doubly charged ions of the plasma.

**Keywords :** Magnetised plasma, Hall thruster, turbulence, anomalous electron transport, collective scattering, Kinetic model, electron drift instability, beam instability.