



**HAL**  
open science

# Conception et modélisation d'une électrobroche grande vitesse : résolution de problèmes couplés

Jean-François Antoine

► **To cite this version:**

Jean-François Antoine. Conception et modélisation d'une électrobroche grande vitesse : résolution de problèmes couplés. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2004. Français. NNT : 2004METZ020S . tel-01750177

**HAL Id: tel-01750177**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750177>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UNIVERSITE DE METZ



ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE METZ



ECOLE DOCTORALE EMMA

Énergie, Mécanique, Matériaux

THÈSE DE DOCTORAT  
 PRÉSENTÉE A  
 L'UNIVERSITÉ DE METZ  
 POUR L'OBTENTION DU TITRE DE  
 DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ  
 SPÉCIALITÉ: GENIE MÉCANIQUE

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	2004 058S
Cote	S/M3 04/20
Loc	

PAR

Jean-François ANTOINE

CONCEPTION ET MODÉLISATION  
 D'UNE ÉLECTROBROCHE GRANDE VITESSE:  
 RÉOLUTION DE PROBLÈMES COUPLÉS

SOUTENUE LE 06 juillet 2004 DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

G. FERRARIS ..... Rapporteur  
 M. GABSI ..... Rapporteur  
 L. HOUPERT ..... Examineur  
 P. PADILLA ..... Examineur  
 G. ABBA ..... Directeur de Thèse  
 A. MOLINARI ..... Directeur de Thèse

Laboratoire de Génie Industriel et  
 de Production Mécanique (LGIPM),  
 ENIM - Université de METZ,  
 Île du Saulcy, F-57045 METZ Cedex 1

Laboratoire de Physique et de Mécanique  
 des Matériaux (LPMM),  
 ISGMP - Université de METZ,  
 Île du Saulcy, F-57045 METZ Cedex 1

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



031 536046 8



UNIVERSITE DE METZ



ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE METZ



ECOLE DOCTORALE EMMA

Énergie, Mécanique, Matériaux

**THÈSE DE DOCTORAT**

**PRÉSENTÉE A**

**L'UNIVERSITÉ DE METZ**

**POUR L'OBTENTION DU TITRE DE**

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ**

**SPÉCIALITÉ: GENIE MÉCANIQUE**

**PAR**

**Jean-François ANTOINE**

---

**CONCEPTION ET MODÉLISATION  
D'UNE ÉLECTROBROCHE GRANDE VITESSE :  
RÉSOLUTION DE PROBLÈMES COUPLÉS**

---

**SOUTENUE LE 06 juillet 2004 DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :**

G. FERRARIS .....	Rapporteur
M. GABSI .....	Rapporteur
L. HOUPERT .....	Examinateur
P. PADILLA .....	Examinateur
G. ABBA .....	Directeur de Thèse
A. MOLINARI .....	Directeur de Thèse

Laboratoire de Génie Industriel et  
de Production Mécanique (LGIPM),  
ENIM - Université de METZ,  
Île du Saulcy, F-57045 METZ Cedex 1

Laboratoire de Physique et de Mécanique  
des Matériaux (LPMM),  
ISGMP - Université de METZ,  
Île du Saulcy, F-57045 METZ Cedex 1



## Remerciements

Je désire remercier chaleureusement Monsieur Guy Ferraris, professeur des universités à l'INSA de Lyon, et Monsieur Mohammed Gabsi, maître de conférence à l'ENS de Cachan, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être les rapporteurs de ce travail.

Je voudrais également témoigner de ma reconnaissance à Monsieur Luc Houpert, directeur de recherche chez TIMKEN France, pour son aide précieuse pour l'amélioration des modèles et pour avoir accepté de participer au jury.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur le professeur P. Padilla, directeur de l'ENIM, pour l'intérêt qu'il a su porter à ce travail et à la thématique de l'usinage grande vitesse, pour l'aide qu'il m'a apportée par les décisions qu'il a su prendre et enfin pour m'avoir fait l'honneur d'être président du jury.

Ce travail de recherche a été réalisé au laboratoire de Génie Industriel et de Production Mécanique (LGIPM) sous la direction de Monsieur Gabriel Abba, directeur du laboratoire et professeur à l'université de Metz et que je remercie pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, pour l'aide précieuse et le soutien qu'il a su m'apporter.

Je remercie Monsieur Alain Molinari, professeur au laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux (LPMM) à l'université de Metz et co-directeur de thèse, pour le concours scientifique et linguistique qu'il a apporté à ces travaux.

Je remercie Monsieur Raphaël Vives-Fos, professeur à l'Université Polytechnique de Valencia, dont les travaux de recherche sont à l'origine de la thématique UGV au laboratoire et ont permis la réalisation de cette thèse.

Je remercie également toutes les personnes du LGIPM et de l'équipe CEMA, pour l'aide scientifique technique et le temps qui m'ont accordés, et tout particulièrement Monsieur Christophe Sauvey et Monsieur Codrut Visa.

Je remercie vivement Monsieur Vincent Droisneau-Ehl pour son aide précieuse en ce qui concerne la langue de Shakespeare.

Je tiens aussi à remercier toutes les personnes qui m'ont apporté une aide technique, administrative ou scientifique pendant ces années de thèse. Je remercie en particulier Mesdames Monique Ficht et Cathy Jung pour l'aide matérielle et Monsieur Pierre Petit pour son concours technique et scientifique à ce projet.

Je tiens à remercier mes parents et mes frères et soeurs, à qui je dédie ce mémoire, pour leur soutien et la patience dont ils ont fait preuve dans l'attente.

J'adresse enfin mes tendres remerciements à ma femme pour son soutien moral et matériel de chaque instant pour mener à bien ce travail.

# Table des matières

<b>Nomenclature</b>	<b>XI</b>
<b>I Introduction</b>	<b>1</b>
I.1 L'Usinage Grande Vitesse (UGV) . . . . .	1
I.1.1 Définition de l'usinage . . . . .	1
I.1.2 Paramètres d'usinage . . . . .	2
I.1.3 Présentation du procédé de l'UGV . . . . .	3
I.2 La Machine à Réductance Variable (MRV) . . . . .	7
I.2.1 Présentation de la MRV . . . . .	7
I.2.2 Avantages et inconvénients de l'utilisation d'une MRV . . . . .	8
I.2.3 Conception du noyau magnétique du rotor . . . . .	9
I.3 Problématique . . . . .	10
<b>II Étude des vibrations du rotor d'une MRV</b>	<b>15</b>
II.1 Modélisation géométrique d'un élément de rotor . . . . .	17
II.2 Modélisation des matériaux . . . . .	19
II.2.1 Caractéristiques des matériaux . . . . .	19
II.2.2 Matériaux de l'axe et de l'enrobage . . . . .	20
II.2.3 Matériau du noyau magnétique . . . . .	20
II.3 Propriétés mécaniques des sections . . . . .	23
II.3.1 Définition des propriétés d'une section . . . . .	24
II.3.2 Section contenant l'axe seul . . . . .	26
II.3.3 Section contenant à la fois l'axe et l'enrobage . . . . .	26
II.3.4 Section du noyau . . . . .	27
II.3.5 Modélisation mécanique des roulements . . . . .	28
II.4 Méthodes de calcul du comportement vibratoire d'une structure . . . . .	28
II.5 Méthode de Rayleigh-Ritz appliquée au rotor de la MRV . . . . .	30
II.5.1 Déformée modale . . . . .	31
II.5.2 Calcul des énergies potentielle et cinétique . . . . .	32
II.5.3 Formalisme de Lagrange . . . . .	37
II.6 Amélioration du modèle numérique . . . . .	39
II.6.1 Calcul analytique préalable . . . . .	39
II.6.2 Variables complexes . . . . .	39
II.6.3 Normalisation des polynômes . . . . .	40

II.6.4	Temps de calcul . . . . .	40
II.7	Validation du modèle numérique . . . . .	42
II.8	Dynamique d'un rotor axisymétrique . . . . .	45
II.8.1	Géométrie étudiée et matériaux utilisés . . . . .	45
II.8.2	Modélisation par élément finis . . . . .	46
II.8.3	Résultats . . . . .	46
II.8.4	Conclusion concernant le modèle numérique . . . . .	51
II.9	Méthode explicite pour l'estimation des premières fréquences critiques . . . . .	56
II.9.1	Modes cylindrique, conique et axial (mouvements de corps rigides) . . . . .	56
II.9.2	Modes flexibles du rotor . . . . .	59
II.9.3	Fréquences et modes propres . . . . .	63
II.9.4	Résultats du modèle analytique . . . . .	65
II.9.5	Conclusion concernant le modèle analytique à 4 DDL . . . . .	68
II.9.6	Représentation du modèle dynamique d'un élément du rotor . . . . .	68
II.10	Comportement d'un rotor multi-éléments . . . . .	69
II.11	Conclusion sur les problèmes vibratoires dans une MRV . . . . .	71
<b>III</b>	<b>Contraintes maximales dans les matériaux du noyau magnétique</b>	<b>73</b>
III.1	Introduction . . . . .	73
III.2	Modélisation physique et mécanique du noyau magnétique . . . . .	75
III.2.1	Description de la géométrie . . . . .	75
III.2.2	Description de la forme RDM équivalente . . . . .	78
III.2.3	Matériau du noyau . . . . .	80
III.2.4	Étude de la résistance mécanique de tôles magnétiques . . . . .	80
III.3	Modélisation des forces . . . . .	81
III.3.1	Centrifugation de l'anneau seul . . . . .	81
III.3.2	Force appliquée par la dent sur l'anneau . . . . .	82
III.4	Répartition des efforts internes dans l'anneau . . . . .	83
III.4.1	Efforts aux appuis . . . . .	83
III.4.2	Localisation des contraintes maximales . . . . .	84
III.4.3	Efforts intérieurs . . . . .	84
III.4.4	Calcul du moment de flexion $M_0$ . . . . .	86
III.4.5	Efforts intérieurs dans les sections des points A et B . . . . .	91
III.5	Calcul des contraintes globales . . . . .	91
III.5.1	Contraintes de centrifugation de l'anneau seul . . . . .	91
III.5.2	Contraintes dues à l'action de la dent sur l'anneau . . . . .	92
III.6	Concentration de contraintes aux points A et B . . . . .	92
III.6.1	Facteur de concentration de contraintes au point B . . . . .	93
III.6.2	Facteur de concentration de contraintes au point A . . . . .	94
III.6.3	Contraintes équivalentes de Von Mises en A et B . . . . .	96
III.7	Validation du modèle analytique de calcul des contraintes maximales . . . . .	97
III.7.1	Géométries testées . . . . .	97
III.7.2	Matériau potentiellement utilisable . . . . .	97

III.7.3	Obtention des résultats de référence . . . . .	97
III.7.4	Ajustement des formules de concentration de contraintes . . . . .	100
III.7.5	Conclusion concernant le modèle analytique . . . . .	105
III.8	Application à la conception du noyau . . . . .	105
III.8.1	Influence de la largeur de la dent . . . . .	105
III.8.2	Influence de la hauteur de la dent . . . . .	108
III.8.3	Influence du rayon de raccordement . . . . .	110
III.8.4	Remarque sur la géométrie de la dent . . . . .	110
III.8.5	Influence de la forme de la dent sur le couple moteur . . . . .	112
III.8.6	Représentation en schéma-bloc du modèle des contraintes . . . . .	113
III.9	Conclusion . . . . .	114
<b>IV</b>	<b>Etude des paliers et modélisation thermique :</b>	
	<b>Problème couplé mécanique-thermique</b>	<b>115</b>
IV.1	Paliers pour la grande vitesse . . . . .	116
IV.2	Modélisation et calcul des angles de contact dans un roulement à billes . . . . .	118
IV.2.1	Macrogéométrie d'un roulement à bille . . . . .	118
IV.2.2	Notations pour les calculs relatifs aux roulements . . . . .	118
IV.2.3	Variation de l'angle de contact statique en fonction de la précharge appliquée	119
IV.2.4	Variation des angles de contact avec la vitesse dans un roulement à billes précontraint . . . . .	126
IV.2.5	Applications numériques du modèle explicite - comparaison avec la résolution numérique . . . . .	133
IV.2.6	Représentation en schéma-bloc du modèle des angles de contact dans le rou- lement . . . . .	139
IV.2.7	Conclusion . . . . .	141
IV.3	Modélisation du contact entre deux solides élastiques . . . . .	142
IV.3.1	Introduction . . . . .	142
IV.3.2	Théorie du Contact de Hertz . . . . .	142
IV.3.3	Modèle approché de contact Hertzien . . . . .	144
IV.3.4	Application du modèle au calcul des caractéristiques du contact Hertzien . .	148
IV.3.5	Représentation en schéma-bloc du modèle de Hertz . . . . .	151
IV.3.6	Conclusion . . . . .	152
IV.4	Etude de la rigidité de roulement à billes . . . . .	153
IV.4.1	Modèle de déplacement à 5 degrés de liberté . . . . .	154
IV.4.2	Calcul des forces appliquées par une bille . . . . .	156
IV.4.3	Résolution du système pour une bille . . . . .	156
IV.4.4	Calcul des forces appliquées au roulement . . . . .	157
IV.4.5	Etude de la rigidité du roulement . . . . .	158
IV.4.6	Influence de l'angle et de la précharge . . . . .	159
IV.4.7	Influence de la vitesse et la précharge . . . . .	161
IV.4.8	Représentation en schéma-bloc du modèle de rigidité . . . . .	162
IV.4.9	Conclusions sur la rigidité d'un roulement à billes . . . . .	163

IV.5	Couple de frottement dans un roulement à billes . . . . .	165
IV.5.1	Cinématique de la bille . . . . .	166
IV.5.2	Modélisation des efforts appliqués à une bille . . . . .	168
IV.5.3	Calcul des efforts appliqués à la cage . . . . .	171
IV.5.4	Établissement des équations de la dynamique d'une bille . . . . .	174
IV.5.5	Résolution des équations de la dynamique . . . . .	175
IV.5.6	Expression du couple de frottement du roulement . . . . .	176
IV.5.7	Application aux roulements utilisés dans la MRV . . . . .	176
IV.5.8	Représentation en schéma-bloc du modèle du couple de frottement . . . . .	181
IV.5.9	Conclusions sur le couple de frottement dans un roulement à billes . . . . .	181
IV.5.10	Conclusion sur l'étude des paliers . . . . .	183
IV.6	Modélisation des échanges thermiques dans la MRV . . . . .	184
IV.6.1	Recensement des pièces constitutives . . . . .	184
IV.6.2	Gaz interne au moteur . . . . .	184
IV.6.3	Pertes dans la MRV . . . . .	184
IV.6.4	Schéma des échanges thermiques . . . . .	185
IV.6.5	Mise en équation du modèle thermique de la MRV . . . . .	185
IV.6.6	Echanges dans la MRV équipée du rotor de Fayard [1] . . . . .	188
IV.6.7	Conclusion concernant les échanges thermiques dans la MRV . . . . .	189
IV.7	Application des modèles à une électrobroche . . . . .	191
IV.7.1	Paramètres de réglage du fonctionnement . . . . .	191
IV.7.2	Détermination du domaine de fonctionnement . . . . .	191
IV.7.3	Domaine de fonctionnement du rotor actuel . . . . .	193
IV.7.4	Etude d'autres combinaisons de matériaux . . . . .	194
IV.7.5	Conclusion concernant l'application des modèles à une électrobroche . . . . .	196
V	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>198</b>
VI	<b>Bibliographie</b>	<b>204</b>
VII	<b>Annexes</b>	<b>210</b>
A	<b>Etude des coefficients de section réduite</b>	<b>211</b>
B	<b>Pré-calcul de l'énergie potentielle</b>	<b>221</b>
C	<b>Théorie du contact de Hertz</b>	<b>225</b>
D	<b>Calcul des moments de frottement</b>	<b>231</b>
E	<b>Sous-matrices du modèle thermique du moteur</b>	<b>235</b>
F	<b>Evaluation des résistances thermiques dans la MRV</b>	<b>239</b>

# Table des figures

<b>CHAPITRE I</b>	<b>1</b>
I-1 Principes du tournage et du fraisage . . . . .	2
I-2 Comparaison des vitesses de coupe (en m/min) dans différents matériaux . . . . .	4
I-3 Offre des fabricants d'électrobroches . . . . .	6
I-4 Positions de conjonction et d'opposition dans une MRV 6/2 . . . . .	8
I-5 Technologies de noyaux de la MRV . . . . .	9
<b>CHAPITRE II</b>	<b>15</b>
II-1 Représentation d'une section de surface $S(y)$ du rotor. . . . .	18
II-2 Représentation du $j^{ieme}$ tronçon conique du rotor . . . . .	19
II-3 Matériaux du noyau magnétique et caractéristiques . . . . .	21
II-4 Déformations d'un noyau magnétique soumis à une force de traction $N$ ou un effort tranchant $T$ . . . . .	22
II-5 Exemple de section d'un noyau à 2 pôles d'une MRV. . . . .	27
II-6 Structure du rotor étudié . . . . .	46
II-7 Maillage en éléments tétraédriques du rotor. . . . .	47
II-8 Mode propre associé à la première fréquence du rotor . . . . .	49
II-9 Mode propre associé à la deuxième fréquence du rotor . . . . .	49
II-10 Mode propre associé à la troisième fréquence du rotor . . . . .	49
II-11 Visualisation en 3D des déformations du rotor . . . . .	50
II-12 Points du rotor où les déformations sont étudiées. . . . .	50
II-13 Diagramme de Bode des vibrations du rotor au niveau des roulements:	
Pour un balourd situé au noyau . . . . .	53
II-14 Pour un balourd situé sur l'axe sortant . . . . .	53
II-15 Diagramme de Bode des vibrations au bord gauche du noyau:	
Pour un balourd situé au centre du noyau . . . . .	54
II-16 Pour un balourd situé sur l'axe sortant . . . . .	54
II-17 Diagramme de Bode des vibrations au centre du noyau:	
Pour un balourd situé au centre du noyau . . . . .	55
II-18 Pour un balourd situé sur l'axe sortant . . . . .	55
II-19 Schéma du rotor et des roulements précontraints par ressort . . . . .	57
II-20 Mouvement de corps rigide - Mode cylindrique. . . . .	58
II-21 Mouvement de corps rigide - Mode conique. . . . .	58

II-22	Mouvement de corps rigide - Mode axial. . . . .	58
II-23	Modèle pour l'étude dynamique du rotor . . . . .	61
II-24	Diagramme de l'effort tranchant $T(y)$ . . . . .	62
II-25	Diagramme du moment fléchissant $M(y)$ . . . . .	62
II-26	Variation des 4 premières fréquences en fonction de la longueur active . . . . .	67
II-27	Variation des 4 premières fréquences en fonction de la longueur de l'axe sortant . . . . .	67
II-28	Schéma-bloc du modèle dynamique . . . . .	69
II-29	Réalisation d'un rotor multi-éléments par assemblage de modules élémentaires . . . . .	69
<b>CHAPITRE III</b>		<b>73</b>
III-1	Quart du noyau magnétique d'une MRV 6/2 à axe traversant - paramètres. . . . .	75
III-2	Différents profils de dent d'une MRV 6/2 . . . . .	76
III-3	Définition du rayon de raccordement à la base de la dent. . . . .	77
III-4	Modèle mécanique du noyau magnétique de la MRV et paramètres. . . . .	79
III-5	Modèle de l'épaulement long équivalent à deux épaulements rapprochés. . . . .	79
III-6	Définition du élément de volume pour le calcul des forces . . . . .	82
III-7	Efforts aux appuis et efforts intérieurs dans une section . . . . .	84
III-8	Déformations dues à un moment $M$ dans une section . . . . .	86
III-9	Modèle de l'anneau de Timoshenko . . . . .	93
III-10	Tôle bi-épaulée soumis à de la flexion ou de la traction . . . . .	94
III-11	Géométrie étudiée par Brennan . . . . .	95
III-12	Exemple de maillage réalisé sur une tôle de MRV 6/2 . . . . .	98
III-13	Exemple de résultats EF (contraintes) . . . . .	99
III-14	Exemple de résultats EF (déformations) . . . . .	100
III-15	Contraintes de Von Mises au point $A$ avant et après optimisation . . . . .	103
III-16	Contraintes de Von Mises au point $B$ avant et après optimisation . . . . .	104
III-17	Contraintes de Von Mises maximale avant et après optimisation . . . . .	106
III-18	Contrainte maximale pour différents profils en fonction de la largeur de la dent (rayon de l'axe 3 mm) . . . . .	107
III-19	Contrainte maximale pour différents profils en fonction de la largeur de la dent (rayon de l'axe 4 mm) . . . . .	107
III-20	Contrainte maximale pour différents profils en fonction de la hauteur de la dent (rayon de l'axe 3 mm) . . . . .	109
III-21	Contrainte maximale pour différents profils en fonction de la hauteur de la dent (rayon de l'axe 3 mm) . . . . .	109
III-22	Influence du rayon de raccordement sur les contraintes en fonction de la largeur de la dent . . . . .	111
III-23	Géométrie des tôles pour différentes valeurs de $n$ . . . . .	112
III-24	Couple produit en fonction de la position angulaire du rotor pour différentes valeurs de $n$ . . . . .	113
III-25	Modèle des contraintes sous forme de schéma-bloc. . . . .	113

<b>CHAPITRE IV</b>	<b>115</b>
IV-1 État libre et état précontraint de la bille . . . . .	119
IV-2 Nombre requis d'itérations pour atteindre le résultat de référence pour la méthode de Harris et le modèle proposé pour différents angles de contact . . . . .	122
IV-3 État précontraint de la bille – paramètres. . . . .	123
IV-4 Convergence de la suite $u_n$ . . . . .	124
IV-5 Erreur en % de différents termes de la suite $u_n$ . . . . .	125
IV-6 Paramètres et vitesses pour l'étude dynamique. . . . .	126
IV-7 État dynamique de la bille . . . . .	128
IV-8 Convergence de l'algorithme pour un roulement 218 . . . . .	134
IV-9 Angles donnés par l'algorithme comparés aux résultats numériques en fonction de la précharge (roulement 218) . . . . .	135
IV-10 Convergence de l'algorithme pour un roulement VEX6/NS . . . . .	136
IV-11 Angles donnés par l'algorithme comparés aux résultats numériques en fonction de la précharge (roulement VEX6/NS) . . . . .	137
IV-12 Angles donnés par l'algorithme comparés aux résultats numériques en fonction de $C = a_o/a_i$ . . . . .	140
IV-13 Modèle des angles de contact sous forme de schéma-bloc . . . . .	140
IV-14 Valeurs du paramètre $\kappa$ donné par le modèle approché et la résolution exacte . . . . .	145
IV-15 Erreur en % du modèle approché sur la valeur du paramètre d'ellipticité . . . . .	146
IV-16 Valeurs exactes et approchées (modèle) des intégrales elliptiques complètes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ . . . . .	147
IV-17 Comparaison des erreurs de différents modèles sur l'intégrale elliptique complète . . . . .	148
IV-18 Valeurs des demi-axes et de la surface de l'ellipse et erreurs relatives . . . . .	149
IV-19 Comparaison des erreurs faites par différents modèles sur les déformations . . . . .	150
IV-20 Valeurs de la déformation et de la pression de Hertz et erreurs relatives . . . . .	151
IV-21 Schéma-bloc du modèle de Hertz. . . . .	152
IV-22 Position du centre de courbure $C_{ij}$ au niveau de la $j^{ième}$ bille du roulement . . . . .	154
IV-23 Variation avec la précharge et la vitesse de la raideur radiale $K_{XX}$ . . . . .	160
IV-24 Variation avec la précharge et la vitesse de la raideur axiale $K_{YY}$ . . . . .	161
IV-25 Variation avec la précharge et la vitesse de la raideur angulaire $K_{\theta x \theta x}$ . . . . .	162
IV-26 Variation de différents termes de la matrice de rigidité en fonction de la vitesse de rotation $\Omega$ et pour différentes précharges appliquées $F_P$ . . . . .	163
IV-27 Schéma-bloc du modèle de la rigidité du roulement . . . . .	164
IV-28 Repères utilisés pour l'étude cinématique. . . . .	166
IV-29 Forces et moments appliqués à la bille aux contacts avec les bagues . . . . .	169
IV-30 Forces et moments appliqués par la $j^{ième}$ bille sur la cage au point $C_j$ . . . . .	170
IV-31 Couple de frottement dans un roulement VEX 6 /NS en fonction de la précharge . . . . .	178
IV-32 Couple de frottement dans un roulement VEX 6/NS en fonction de la vitesse . . . . .	179
IV-33 Puissance dissipée dans un roulement VEX 6/NS . . . . .	179
IV-34 Couple statique d'un roulement VEX 6/NS en fonction de la précharge et de l'angle de contact . . . . .	180
IV-35 Couple dynamique d'un roulement VEX 6/NS pour différents angles de contact . . . . .	182



IV-36	Modèle du couple de frottement sous forme de schéma-bloc. . . . .	182
IV-37	Réseau des échanges dans la MRV. . . . .	186
IV-38	Représentation de la MRV et répartition des températures à différentes vitesses . . .	189
IV-39	Température maximale dans le moteur en fonction de la vitesse de rotation . . . . .	190
IV-40	Courbes limites de vitesse pour les critères vibratoire, thermique et d'endurance pour l'électrobroche actuelle . . . . .	194
IV-41	Courbes limites de vitesse pour les critères vibratoire, thermique et d'endurance pour les différentes combinaisons de matériaux . . . . .	195
<b>Annexes</b>		<b>210</b>
A-1	Représentation de sections mono- et bi-composant. Le repère et les notations sont définis pour le calcul. bi-composant . . . . .	212
A-2	Variation du coefficient de section réduite pour une section circulaire bi-composant .	215
A-3	Variation du coefficient de section réduite pour une section circulaire bi-composant .	216
A-4	Variation du coefficient de section réduite pour une section circulaire bi-composant .	216
A-5	Variation du coefficient de section réduite dans un tronçon conique et bi-composant du rotor . . . . .	219
C-1	Representation de deux solide en contact . . . . .	226
D-1	Position des bandes de non-glissement et répartition des vitesses de glissement . . .	232
F-1	Paramètres dimensionnels du stator et de la bobine . . . . .	240
F-2	Paramètres dimensionnels du flasque, des roulements et du rotor. . . . .	240

# Liste des tableaux

<b>CHAPITRE II</b>	<b>15</b>
II-1 Temps nécessaire en seconde pour calculer les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité . . . . .	41
II-2 Temps nécessaire en seconde pour calculer les fréquences et vecteurs propres . . . .	42
II-3 Première et deuxième fréquences propres données par le modèle, le logiciel <i>RDM5</i> et le code EF <i>COSMOS/M</i> pour une barre cylindrique. . . . .	43
II-4 Première, deuxième et troisième fréquences propres données par le modèle, le logiciel <i>RDM5</i> et le code EF <i>COSMOS/M</i> pour une barre cylindrique sur appuis simple. . .	44
II-5 Valeurs des cotes du rotor . . . . .	45
II-6 Première, deuxième et troisième fréquences propres données par le modèle et le code EF <i>COSMOS/M</i> pour le rotor . . . . .	47
II-7 Fréquences propres de modes rigides. . . . .	59
II-8 Résultats fréquentiels donnés par <i>COSMOS</i> et les modèles analytique et numérique .	65
II-9 Fréquences données par les modèles analytique et numérique (rotor) . . . . .	66
 <b>CHAPITRE III</b>	 <b>73</b>
III-1 Résistance mécanique d'un alliage Fe-Si à 3% . . . . .	81
III-2 Coefficients optimisées pour les formules de concentration de contraintes . . . . .	101
 <b>CHAPITRE IV</b>	 <b>115</b>
IV-1 Comparaison entre les propriétés du Nitrure de Silicium ( $Si_3N_4$ ) et de l'acier pour roulement 100Cr6 . . . . .	117
IV-2 Erreur en % de différents termes de la suite $u_n$ . . . . .	124
IV-3 Coefficients optimaux pour le modèle . . . . .	125
IV-4 Erreur maximale en % du deuxième terme $u_2$ et du modèle proposé . . . . .	126
IV-5 Résultats des 6 premières itérations du calcul des angles de contact dans un roulement type 218 . . . . .	134
IV-6 Angles donnés par la troisième itération pour un roulement à contact oblique de type 218 . . . . .	135
IV-7 Résultats des 4 premières itérations du calcul des angles de contact pour un roulement type VEX 6/NS . . . . .	137
IV-8 Comparaison entre les angles de contact statique donné par le modèle et la solution exacte . . . . .	138

IV-9	Angles de contact dynamiques concernant le roulement VEX6/NS à 100 000 tr/min	138
IV-10	Angles de contact dynamiques concernant le roulement à billes VEX6/NS à 200 000 tr/min . . . . .	138
IV-11	Valeurs des rayons de courbure pour différentes valeurs du rapport des facteurs d'osculation . . . . .	139
IV-12	Angles donnés par le modèle explicite comparé aux résultats numériques en fonction de $C = a_o/a_i$ . . . . .	139
IV-13	coefficients pour la loi de comportement de Houpert [2]. . . . .	144
IV-14	Coefficients de la relation IV-87. . . . .	145
IV-15	Caractéristiques du lubrifiant. . . . .	177
IV-16	Valeurs maximales de vitesse et plages de précharges autorisées pour atteindre au moins 200 000 tr/min pour les différentes combinaisons proposées. . . . .	196
<b>Annexes</b>		<b>210</b>
A-1	Positions et valeurs des minima du coefficient de section réduite pour différentes valeurs du rapport $(1 + \nu_a)/(1 + \nu_e)$ . . . . .	217
A-2	Propriétés mécaniques de différents matériaux . . . . .	218
C-1	Paramètres de contact adimensionnels de la théorie de Hertz . . . . .	228
F-1	Propriétés thermophysiques de l'air à différentes températures. . . . .	246

# Nomenclature

## Notation globales

$m$	=	masse
$x, y, z$	=	positions cartésiennes
$r$	=	rayon (variable)
$\theta$	=	position angulaire
$\Omega$	=	vitesse de rotation

## Propriétés électrotechniques

$C$	=	couple produit par une phase du moteur
$I$	=	courant d'alimentation de la phase
$\mathcal{L}, \mathcal{N}, \mathcal{R}$	=	inductance, nombre de spires et réluctance
$\mathcal{U}$	=	énergie contenue dans le circuit magnétique

## Mécanique vibratoire

$U, E_c$	=	énergie de déformation, énergie cinétique
$C, K, M$ et $S$	=	matrice d'amortissement, de rigidité, de masse et de souplesse
$I, J$	=	moment quadratique, moment d'inertie d'une section
$\underline{\Phi}, \underline{\Theta}$	=	fonctions de déformation de cisaillement et de flexion
$\mathbf{q}, \mathbf{Q}$	=	vecteur des coordonnées généralisées, forces généralisées

## Forces, Contraintes et déformations

$N, T$ et $M$	=	effort normal, tangentiel et Moment
$\sigma, \tau$	=	contrainte normale, tangentielle
$\epsilon, \gamma$	=	déformation normale, tangentielle (distorsion)

## Propriétés des matériaux et fluides

$E, G$	=	module d'élasticité, de cisaillement
$K_t, K_c$	=	facteur de concentration de contrainte en traction, en cisaillement
$\tau_0$	=	contrainte de cisaillement de référence du lubrifiant
$\mu_0$	=	viscosité cinématique, dynamique d'un fluide
$\nu, \rho$	=	coefficient de Poisson et masse volumique d'un matériau
$\sigma_m$	=	résistance mécanique des matériaux
$\sigma_{VM}$	=	contrainte équivalente de Von Mises

**Contact entre solides**

- $a, b$  = demi-axes d'une ellipse de contact  
 $E^*$  = module d'Young équivalent de deux matériaux en contact  
 $\mathcal{F}, \mathcal{E}$  = intégrales elliptiques complètes de premier et second type  
 $M$  = moment de contact  
 $Q, T$  = effort normal, tangentiel de contact  
 $\delta$  = déformation du contact  
 $\kappa$  = ellipticité du contact ( $a/b$ )  
 $\rho$  = courbure d'une surface dans une direction

**Caractéristiques des roulements**

- $\alpha, \beta$  = angle de contact, angle d'inclinaison de l'axe de rotation des billes  
 $\gamma$  = direction de la force de contact entre la cage et une bille  
 $\chi$  = facteur de charge  
 $\epsilon$  = taux de pivotement au contact  
 $d_b, d_m$  = diamètre de la bille, diamètre moyen du roulement  
 $F_c, M_g$  = force centrifuge, moment gyroscopique  
 $\mathbf{KR}$  = matrice de rigidité du roulement  
 $\lambda$  = coefficient du contrôle «race control»  
 $R$  = rayon de courbure des chemins de roulements  
 $u_j$  =  $j^{\text{ième}}$  terme de la suite  $u$   
 $Z$  = nombre de billes

# Chapitre I

## Introduction

Nous allons introduire ces travaux de thèse en présentant le contexte industriel de l'usinage grande vitesse. Nous poursuivrons par la description sommaire du prototype d'électrobroche utilisée au laboratoire pour finalement présenter la problématique et l'articulation des travaux décrits dans ce mémoire.

### I.1 L'Usinage Grande Vitesse (UGV)

Depuis plus de quinze ans, l'UGV a ouvert de nouvelles perspectives de productivité aux industriels tout en garantissant une bonne qualité de fabrication [3].

Il a fallu cependant développer tous les procédés de fabrication (machines, outils) permettant d'atteindre les exigences de vitesse de broches et de vitesse d'avance de ces nouveaux procédés de fabrication. Les vitesses rapides de rotation ont induit de nouveaux besoins en termes d'actionneurs (moteurs linéaires [4], électrobroches). Ces exigences ont conduit à des recherches poussées au niveau des matériaux en présence afin de conserver durablement les conditions idéales de fonctionnement et pour accroître les performances de machines-outils [5].

Bien qu'il existe, sur le marché, des machines outils permettant l'usinage grande vitesse avec des outils de grand diamètre [1], l'enlèvement de matière par perçage ou fraisage avec des outils de petits diamètres (autour de 2 mm) et des vitesses de coupe suffisantes (de l'ordre de 1500 m/min) n'est pas encore possible faute de disposer d'électrobroches assez rapides (voir figure I-3).

Dans cette partie, nous allons définir succinctement le terme d'usinage. Puis chacun des paramètres définissant des conditions d'usinage seront développés. Nous pourrons ensuite nous intéresser aux conditions spécifiques de l'UGV.

#### I.1.1 Définition de l'usinage

Le terme d'usinage désigne l'enlèvement progressif de morceaux de matière, appelées copeaux, dans une forme brute afin d'atteindre (usinage de finition) ou d'approcher (usinage d'ébauche) la forme finale de la pièce.

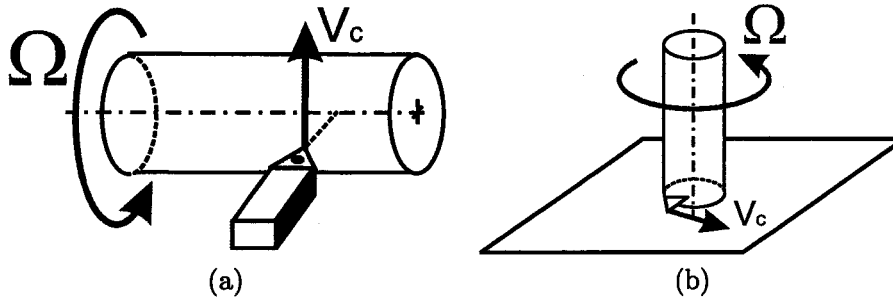


FIG. I-1 – Principes du tournage (pièce en rotation (a)) et du fraisage (outil en rotation (b))

L'enlèvement de matière est obtenu par le passage répété d'une arête de coupe sur la pièce, avec une vitesse relative appelée vitesse de coupe. Si ce mouvement relatif de l'arête de l'outil par rapport à la pièce est obtenu par rotation de cette pièce sur un axe, le procédé d'usinage est appelé tournage. Lorsque le mouvement de l'arête de l'outil est créé par rotation du porte-outil sur un axe, on parle alors de procédé de fraisage (voir figure I-1).

### I.1.2 Paramètres d'usinage

Nous allons à présent détailler les différents paramètres qui définissent des conditions d'usinage. Ces paramètres sont la vitesse de coupe, la profondeur de passe et la vitesse d'avance.

#### I.1.2.A Vitesse de coupe

La vitesse de coupe est le premier paramètre, qui définit des conditions de coupe propres à chaque matériau usiné. Nous verrons plus loin que la différence essentielle entre l'UGV et l'usinage dit conventionnel réside dans la valeur de cette vitesse de coupe. Le principe du fraisage (voir figure I-1) consiste à obtenir la vitesse de coupe  $V_c$  en faisant tourner l'outil de rayon  $R$  à une vitesse  $\Omega$  contre la pièce fixe.  $V_c$  est donnée par

$$V_c = R\Omega \quad (\text{I-1})$$

Le principe du tournage (voir figure I-1) consiste à obtenir la vitesse de coupe  $V_c$  en faisant tourner une pièce de rayon  $R$  à une vitesse  $\Omega$  contre un outil fixe, la formule I-1 peut alors être utilisée.

#### I.1.2.B Profondeur de passe

On désigne communément par «passe» la quantité de matière enlevée à chaque passage de l'outil. La profondeur de passe correspond à l'épaisseur enlevée (en fraisage) ou à la diminution du rayon (en tournage) pour un passage de l'outil sur la surface à usiner. La profondeur de passe doit se trouver entre deux limites.

La limite basse est due à l'écaillage éventuel du matériau. Le copeau ne doit pas être trop fin, faute de quoi, il y a écrasement de la matière et refus de la coupe. La valeur minimale de la profondeur de passe liée à ce phénomène porte le nom de copeau minimum. Elle dépend de la nature du matériau

usiné [6]. Une profondeur trop grande demande plus de puissance installée sur la broche car les efforts de coupe sont plus importants. Cela constituera donc une limite supérieure, due aux performances de la machine-outil ainsi qu'aux caractéristiques des matériaux.

### I.1.2.C Vitesse d'avance

La vitesse d'avance, notée  $V_a$ , est le dernier paramètre qui définit les conditions de coupe.

Le terme avance désigne le déplacement en translation de l'axe de rotation à chaque tour de l'outil. L'objectif est de conserver en permanence de la matière en prise avec les arêtes de coupe.

La vitesse d'avance, qui est définie en mm/min pour l'usinage conventionnel, sera exprimée en m/min pour l'UGV.

On note  $f_z$  l'avance par dent (en mm/dent) et  $Z$  le nombre de dent de la fraise. La vitesse d'avance en (mm/min) est donnée par la relation :

$$V_a = Z f_z N \quad (\text{I-2})$$

où  $N$  est la vitesse de rotation de la broche en tr/min.

Il est à noter ici que la vitesse de rotation de la broche intervient dans la vitesse d'avance, par conséquent à profondeur de passe et avance par dent équivalentes, l'usinage sera d'autant plus rapide que la broche tournera vite. Ce n'est donc pas seulement l'électrobroche qui doit être rapide mais tous les axes de la machine.

Nous allons à présent définir le procédé d'usinage grande vitesse et les phénomènes mis en jeu.

### I.1.3 Présentation du procédé de l'UGV

La notion d'usinage grande vitesse (ou même très grande vitesse) est relative. Elle se définit habituellement par rapport aux vitesses aujourd'hui couramment employées dans l'industrie [6].

Sous le vocable « Grande Vitesse », nous désignons ici la vitesse de coupe, générée par le produit du rayon de l'outil par la vitesse à laquelle il tourne. Ce produit permet d'obtenir une grande vitesse de coupe, par l'emploi d'un outil de fort diamètre tournant à vitesse modérée, ou par l'utilisation d'un petit outil qui imposera une vitesse de rotation très importante. Il existe évidemment un grand nombre de combinaisons possibles, que seules les limites technologiques modèrent.

#### I.1.3.A Définition

La notion de grande vitesse est également floue, non seulement parce qu'elle est liée intimement au matériau usiné, mais également parce que la frontière entre l'usinage dit conventionnel et l'usinage à grande vitesse n'est pas clairement définie. En effet il existe une zone de transition, donc une plage de vitesses de coupe, où les phénomènes de coupe s'installent progressivement. L'usinage grande vitesse



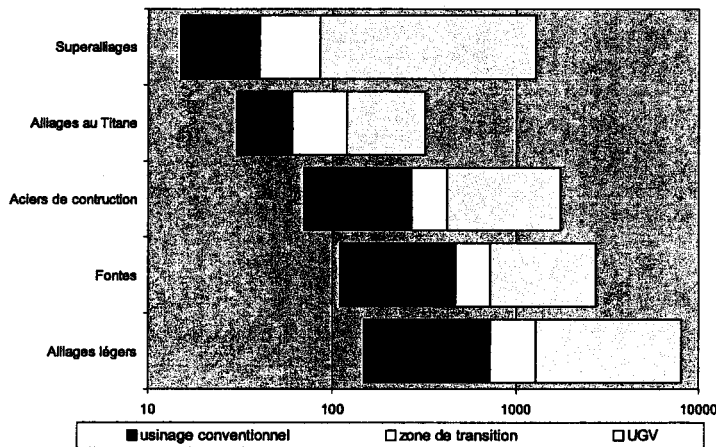


FIG. I-2 – Comparaison des vitesses de coupe (en m/min) dans différents matériaux d'après [8, 1]

ne saurait être défini autrement que par les effets qu'il suscite lors des processus de coupe, comme le suggère cette définition donnée par la société SNECMA [7]:

“En l'absence d'une définition satisfaisante et reconnue par tous, nous considérerons comme grandes vitesses de coupe celles qui entraînent des températures suffisamment élevées pour que les propriétés mécaniques du matériau usiné soient très diminuées, ce qui rend sa coupe plus aisée. Il en résulte :

- qu'il n'y a pas une valeur seuil unique, au delà de laquelle commencerait la grande vitesse, mais que cette valeur dépend largement des matériaux utilisés,
- que la coupe à grande vitesse peut concerner des procédés d'usinage variés, dont le fraisage et le perçage,
- que les outils de coupe ont une importance déterminante du fait qu'ils doivent résister à des hautes températures.”

Pour chaque matériau, ou type d'alliage, il est cependant possible de déterminer par l'expérience les différentes plages de vitesse de coupe, où sont définis les usinages conventionnel et à grande vitesse ainsi que la zone de transition entre ces deux états, où s'installent les phénomènes de coupe.

La figure I-2 présente les différentes plages de vitesses de coupe relatives à l'usinage conventionnel, à l'UGV, ou à la zone de transition. Les limites de chaque zone sont propres à chaque type de matériau. On pourra remarquer que l'aluminium (alliage léger) requiert des vitesses de coupe ( $> 1000$  m/min) très élevées pour accéder à des conditions de coupe grande vitesse.

### I.1.3.B Avantages et inconvénients

Du point de vue de l'industriel, principal intéressé ici, l'UGV permet une meilleure productivité lors de l'usinage [3]. L'utilisation d'une vitesse de coupe élevée présentent un certain nombre d'avantages

parmi lesquels on peut dénombrer [6, 9]:

- Les très hautes vitesses de déformation (en cisaillement) obtenues lors de la formation du copeau en amont de l'arête de coupe créent localement de très forts échauffements : le comportement du matériau change et le copeau se détache plus facilement.
- Les efforts de coupe sont diminués lorsque la vitesse de coupe est suffisante : les déformations en dehors de la zone usinée sont moindres, les résultats obtenus en terme de tolérances (écart entre la valeur nominale d'une cote et la valeur réellement fabriquée) sont meilleurs. Les plus faibles efforts de coupe permettent d'usiner des pièces fines ou élancées sans que les déformations occasionnées ne compromettent la justesse de la forme finale.
- La découpe plus efficace du matériau permet d'obtenir un état de surface amélioré (rugosité et aspect), qui rend les étapes de finitions inutiles (rectification par exemple), quand elles n'étaient pas impératives en usinage conventionnel.
- Pour une vitesse de coupe suffisante, la chaleur dégagée lors de l'enlèvement du copeau a moins de temps pour transiter dans la pièce usinée. Il en résulte que les déformations thermiques sont moindres et qu'il n'est plus indispensable de lubrifier la coupe (usinage à sec), ce qui évite entre autres le délicat problème du recyclage des huiles usagées [9].
- La plus grande vitesse de coupe crée également une augmentation de la vitesse d'avance. Le débit-copeau (volume de copeaux par seconde) est fortement augmenté. L'usinage s'effectue plus rapidement ce qui conduit à une diminution des temps et des coûts d'usinage [9].

Cependant il est important de noter que le procédé n'est pas en tout point positif, et présente également des inconvénients :

- Bien que les efforts de coupe soient diminués, la vitesse de rotation est beaucoup plus élevée, ainsi la puissance installée sur la broche doit être accrue afin de permettre l'opération d'usinage. Citons en exemple les broches : NUM (25 kW, 25 000 tr/min) [10] ou Urane SX de Comau (100 kW, 80 000 tr/min)[11].
- Les centres d'usinage doivent eux aussi être capables de déplacer axes et pièces à des vitesses toujours plus hautes. Conséquence immédiate, les centrales hydrauliques et les alimentations de puissance prennent de plus en plus de volume, et les centres d'usinage deviennent de plus en plus encombrants.
- La commande utilisée pour contrôler l'avance des axes doit être extrêmement précise : La commande performante d'un axe prend en compte la première dérivée de son accélération (JERK), afin de limiter les phases transitoires lors des variations de vitesses [12].
- Les hautes vitesses de rotation créent des problèmes mécaniques : vibrations importantes, sollicitation extrême des rotors. La précision de l'usinage et le niveau sonore des machines outils peuvent s'en trouver pénalisés.

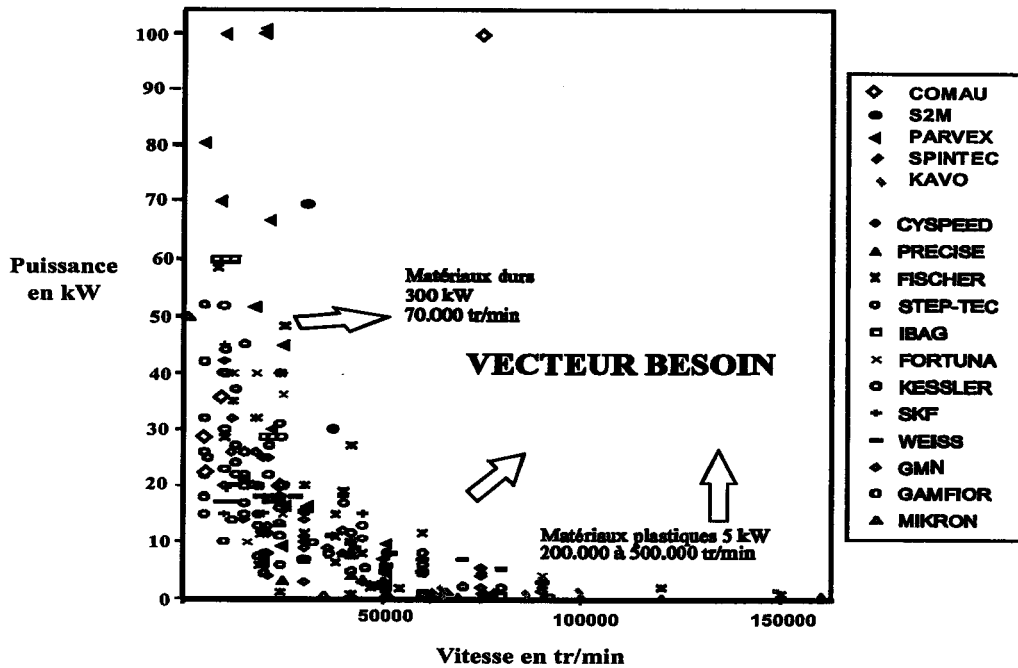


FIG. I-3 – Offre des fabricants d'électrobroches (données de Fayard [1] et actualisées).

- Si l'usinage à sec est possible, l'évacuation des copeaux brûlants par jet fluide est impérative si l'on veut conserver un fini de surface acceptable (les copeaux rayent les surfaces). La quantité de copeaux produit demande des pressions d'air 2 fois supérieures à celles du réseau d'air comprimé (6 à 8 bars) [9].

### I.1.3.C Nouveaux besoins en terme d'électrobroches

L'usinage grande vitesse a d'abord été utilisé dans la réalisation de pièces nécessitant peu de nouvelles technologies (fraisage de surfaces planes). Les diamètres d'outils importants permettent à la broche de ne tourner qu'à une vitesse modérée. Par contre, les formes plus complexes ou les pièces plus petites n'étaient pas réalisables. La demande industrielle s'est portée sur la diminution progressive du diamètre de l'outil, qui a donc entraîné le développement d'électrobroches tournant de plus en plus vite afin de conserver les hautes vitesses de coupe.

Fayard [1] a regroupé les électrobroches présentes sur le marché de l'UGV en 1999, en fonction de la vitesse de rotation et de la puissance installée. (voir fig I-3). Nous avons actualisé ces données en 2004 d'après les offres constructeurs. Dans le domaine des très faibles puissances, la limite des 150 000 tr/min a été portée à 160 000 par la marque *Precise*. A l'opposé dans les puissances élevées, de nombreuses broches dépassent la centaine de kW. Un étonnant prototype de moteur sur paliers magnétiques présenté par *Comau* [11] et donné pour 100 kW - 80 000 tr/min semble se démarquer.

Nous allons maintenant présenter le type et le fonctionnement de la machine développée par le laboratoire.

## I.2 La Machine à Réductance Variable (MRV)

Le laboratoire a choisi la technologie de la réductance variable à double saillance pour équiper l'électrobroche. Cette technologie fait partie, en compagnie du moteur synchrone à aimants permanents et du moteur asynchrone à cage, des moteurs pouvant être utilisés en vitesse variable [13] et en grande vitesse. Cette possibilité de fonctionnement leur donne un grand intérêt dans le domaine des électrobroches pour l'UGV [10].

### I.2.1 Présentation de la MRV

**Principe de fonctionnement :** Le principe de fonctionnement de ce type de moteur est simple : c'est celui de l'électro-aimant : Le rotor tourne pour se mettre dans la position où le flux créé par le stator est maximum [13].

Plusieurs bobines sont disposées autour du rotor afin de pouvoir contrôler la position et le sens de rotation du rotor. Si on alimente les bobines dans un ordre précis et à une fréquence donnée, le rotor va tourner à la vitesse de synchronisme. On montre que le stator doit présenter au moins trois phases (3 ensembles de 2 dents diamétralement opposées) pour que le sens de démarrage du moteur puisse être maîtrisé [1, 14].

Le fonctionnement du moteur est un fonctionnement synchrone (le rotor doit tourner au même rythme que le champ tournant créé par le stator) et auto-piloté (la position du rotor commande la commutation de l'électronique de commande).

**Génération du couple-moteur :** Le couple-moteur  $\mathcal{C}$  est créé par une variation de l'énergie électrique contenue dans le circuit magnétique dans le moteur lorsque l'angle  $\theta$  change. Dans l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire, l'énergie  $\mathcal{U}$  contenue dans le circuit magnétique non saturé est donnée par :

$$\mathcal{U}(\theta) = \frac{1}{2} \mathcal{I}^2 \frac{\mathcal{N}^2}{\mathcal{R}(\theta)} \quad (\text{I-3})$$

où  $\mathcal{R}(\theta)$  est la réductance du circuit magnétique lorsque le noyau forme un angle  $\theta$  avec l'axe de la phase alimentée, dont les  $\mathcal{N}$  spires sont parcourues par un courant  $\mathcal{I}$ . Dans le domaine de l'électrotechnique, la quantité  $\frac{\mathcal{N}^2}{\mathcal{R}(\theta)}$  est appelée inductance et notée  $\mathcal{L}(\theta)$ .

Conformément au principe du moteur, la réductance varie avec la position, donc le couple-moteur est défini par la dérivée de l'énergie magnétique par rapport à la position :

$$\mathcal{C}(\theta) = \frac{\partial \mathcal{U}_m}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \mathcal{I}^2 \frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta} \quad (\text{I-4})$$

La variation de l'inductance est obtenue par la variation de l'espace appelé entrefer entre la dent du rotor et la phase alimentée au stator.

La position où l'entrefer est minimum (inductance maximale) est appelée position de conjonction. La position où l'entrefer est maximum (inductance minimale) est appelée position d'opposition. Ces

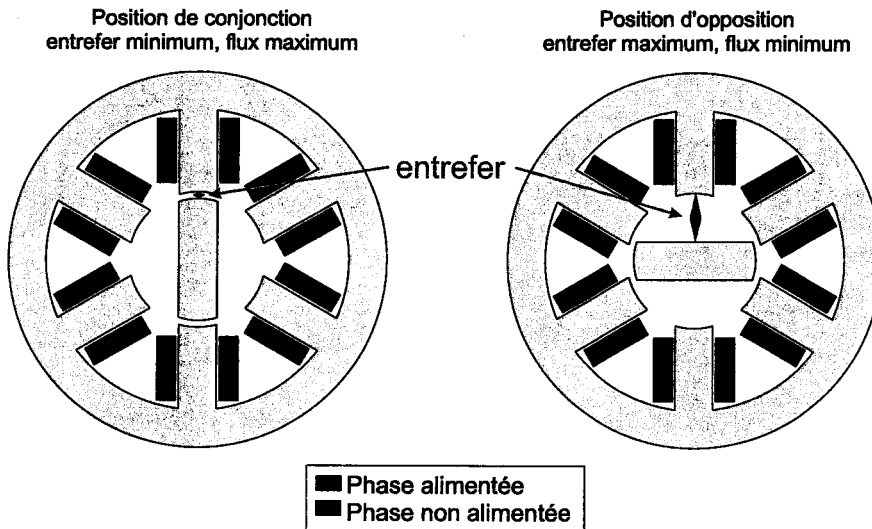


FIG. I-4 – Position de conjonction (à gauche) et d'opposition (à droite) dans une MRV 6/2 (6 pôles statoriques et 2 pôles rotoriques)

deux positions, où le couple-moteur  $C_m$  est nul, sont représentées sur la figure I-4 dans le cas d'un MRV 6/2 (6 pôles au stator et 2 pôles au rotor).

De l'équation (I-4), on déduit que pour obtenir un couple positif il ne faut alimenter la phase que lorsque la fonction d'inductance est croissante. Lorsque le rotor est parvenu en position de conjonction, il faut couper le courant dans la phase et alimenter la phase suivante pour entretenir le mouvement.

Un rotor à deux dents (bi-polaire) a pour caractéristique d'avoir au minimum 2 axes de symétries. La fonction d'inductance est donc inchangée par une rotation de  $\pi$  rd (de période  $\pi$ ). La conséquence de cette géométrie est la présence de deux optimums d'inductance : un minimum en position d'opposition et un maximum en position de conjonction. Entre ces deux valeurs où le couple moteur sera nul, l'évolution de l'inductance est fonction du profil de la dent rotorique et de la saturation du matériau magnétique.

## I.2.2 Avantages et inconvénients de l'utilisation d'une MRV

**Avantages :** La MRV est une machine qui présente l'avantage d'une puissance massique importante [14, 13]. Dans le cadre de la réduction des masses mobiles que recherchent les constructeurs de fraiseuses [5], cette propriété est essentielle.

La MRV est une machine qui ne comporte ni enroulements (bobines), ni cage au rotor. Le noyau magnétique n'est constitué que par un empilement de tôles fines (voir figure I-5) destinées à réduire les pertes fers, qui sont les seules pertes dénombrées dans cette partie du moteur. Pour peu que ces pertes soient correctement évacuées, le rotor mérite son qualificatif de rotor « froid ». Le rotor peut avoir une structure simple et fiable.

**Inconvénients :** La MRV est cependant une machine qui fournit un couple très pulsé (ondulé). Pour diminuer cette ondulation de couple, il faut augmenter le nombre de pôles au rotor et au stator, ou améliorer le profil de l'onde d'inductance par un travail sur la géométrie. Cette dernière possibilité permet de garder une fréquence d'alimentation des phases raisonnable.

Ce couple fortement ondulé crée des pulsations harmoniques, des forces qui génèrent et auto-entretiennent des vibrations importantes dans le moteur, tant au stator qu'au rotor [15] : la MRV est alors une machine très bruyante. Ces vibrations peuvent être réduites par une amélioration de la loi de commande [16].

Si une MRV 6/2 tourne à 200 000 tr/min, le rotor met 150  $\mu$ s pour parcourir un demi-tour. Cette période est donc celle de l'alimentation d'une phase, soit une fréquence de 6,67 kHz. La commande en courant du convertisseur de puissance est réalisée par modulation de largeur d'impulsion (MLI) et la fréquence de hachage doit être très supérieure (de 100 à 150 kHz) à celle d'alimentation des phases pour obtenir une bonne maîtrise de la forme du courant  $\mathcal{I}$ . Cela crée des difficultés de conception de l'électronique de puissance qui doit être rapide, fiable (commutation à haute puissance) et insensible à ses propres parasites (dus au hachage).

### I.2.3 Conception du noyau magnétique du rotor

La technologie classique du noyau magnétique est dite «à axe traversant». L'axe du rotor est central et passe à travers le noyau magnétique. Une autre technologie à noyau inséré et à axe périphérique a été développée au laboratoire et brevetée par Fayard [1].

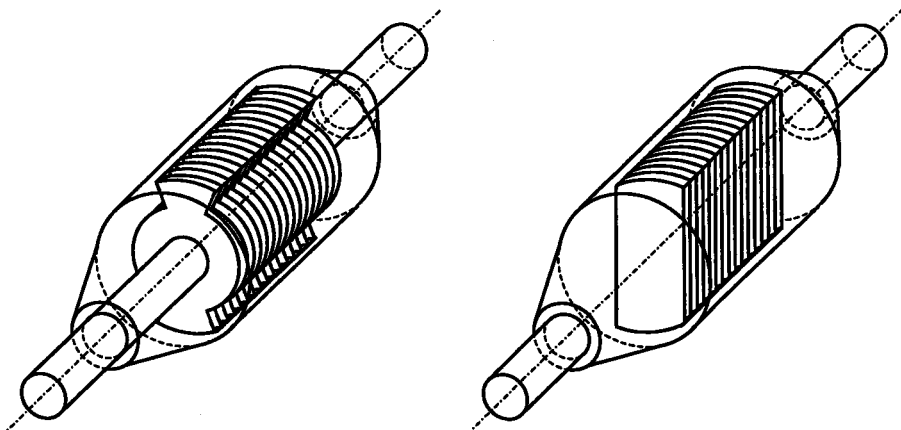


FIG. I-5 – Noyau à axe traversant (à gauche) ou noyau inséré dans l'axe (à droite) pour un rotor à deux dents. Le noyau est réalisé par la découpe d'un profil dans un empilement de tôles fines.

La technologie classique de l'axe traversant présente l'avantage d'un positionnement facilité et sûr du noyau par rapport à l'axe, ce que le collage du noyau inséré ne permet pas. En revanche, le noyau inséré permet un trajet plus direct des lignes de flux, qui ne contourne pas l'axe et présente une inductance plus faible en position d'opposition [1].

### I.3 Problématique

L'objectif du laboratoire est la conception d'une électrobroche à très grande vitesse (200000 tr/min) présentant une puissance disponible de l'ordre de 2 kW.

Dans le cadre de cette démarche de développement du moteur, ce travail de thèse porte sur la conception et la modélisation d'une électrobroche Grande Vitesse et sur la résolution de problèmes couplés.

La haute vitesse de rotation du moteur suppose que sa conception puisse surmonter des problèmes mécaniques considérables :

- Les différents modes de vibrations sont excités par les balourds statiques et dynamiques, même avec un équilibrage soigné. Les forces électromagnétiques, en particulier dans les cas des machines à réluctance variable, créent également des déséquilibres et entretiennent les vibrations du rotor et du stator [17, 16, 18]. Les vibrations peuvent déformer de façon substantielle la géométrie du rotor [19], et la qualité de la surface usinée (état de surface et tolérances de forme) est dégradée. Comme les vibrations sont intrinsèques à ce type de moteur, elles devront au minimum être amorties ou contrôlées activement.
- La production d'un couple moteur suffisant (de l'ordre de 0,1 N.m) nécessite une conception soignée du rotor et du stator de la machine. Cette conception repose en partie sur le choix optimum d'un profil extérieur permettant la génération d'un couple maximum en agissant sur l'effet de réluctance. La complexité du problème électrotechnique demande d'avoir recours à des logiciels de calculs par éléments finis pour connaître avec précision l'intensité des champs magnétiques en tout point de la MRV ainsi que le couple généré par les actions magnétiques.
- La géométrie optimisée pour produire le maximum de couple n'est cependant pas nécessairement compatible avec la tenue mécanique du noyau, car elle peut modifier profondément la répartition des contraintes mécaniques, qui peuvent localement dépasser la contrainte admissible par le matériau du noyau. Les fortes sollicitations mécaniques que subissent certaines pièces peuvent donc les amener à se rompre. Le choix du profil et du matériau constitue donc un couplage entre le problème électrotechnique (génération du couple) et le problème mécanique (fiabilité).

Par ailleurs, les conditions d'utilisation de la machine génèrent des pertes internes au moteur d'ordre mécanique (frottement dans les paliers), d'ordre électrique (pertes Joules), d'ordre électromagnétique (pertes par courant de Foucault et par hystérésis dans le stator et le rotor) et des pertes par frottements aérodynamiques dues à la présence d'un fluide dans l'enceinte du moteur. Si ces pertes peuvent être diminuées par une conception soignée et des choix de matériaux ou de technologies toujours plus avancés, elles restent significatives lors du fonctionnement à de telles vitesses de rotation. Ces pertes sont dissipées sous forme de chaleur, et augmentent les niveaux de températures du moteur. Si les échanges thermiques ne sont pas suffisants, la température peut localement atteindre voire dépasser

la température maximale admissible par les matériaux.

La démarche d'optimisation de la géométrie et des matériaux utilisés dans le moteur nécessite des calculs répétitifs. L'optimisation du moteur demande un grand nombre de calculs en un temps minimum. Lors de la conception d'une machine, la méthode de calcul par éléments finis (EF) est couramment utilisée. Elle consiste à discrétiser (mailler) une pièce ou une structure pour en simuler le comportement électromagnétique, mécanique ou thermique (ou un combinaison de ces phénomènes) à l'aide de lois physiques et de lois de comportement. Les résultats obtenus sont d'autant plus précis que le maillage est fin. Le calcul permet d'établir une matrice dont la dimension est liée au nombre d'éléments utilisés. La méthode de calcul par EF, certes précise, est coûteuse en temps de calcul et incompatible avec une démarche de conception et d'optimisation. Nous avons donc besoin de modèles, si possible explicites, permettant d'obtenir très rapidement le résultat d'un calcul suite à une modification de la structure ou des matériaux du moteur. Ces modèles permettront de réaliser la conception d'un nouveau moteur pour répondre à de nouveaux besoins avec une réactivité accrue.

Dans ce travail de thèse, nous allons tenter de répondre à ces exigences en ce qui concerne les problèmes mécaniques et thermiques. Le calcul précis des phénomènes électromagnétiques, de part sa complexité, nécessite encore le calcul par EF, et dépasse le cadre de ces travaux.

Nous chercherons à modéliser les phénomènes mécaniques et thermiques en établissant des modèles numériques et si possible analytiques, permettant de lier explicitement les paramètres dimensionnels du moteur et les matériaux utilisés aux performances de l'électrobroche définies par :

- son comportement vibratoire, à savoir la réponse aux forces excitations survenant lors de l'utilisation d'une MRV et pendant l'usinage,
- son comportement mécanique qui concerne la résistance aux contraintes de centrifugation du noyau rotorique,
- les frottements fluides et mécaniques qui, induisant un couple de frottement dans les paliers, dégradent la puissance utile de l'électrobroche, et doivent être intégrés dans les lois de commande de l'axe de l'électrobroche. Il y a par conséquent par l'intermédiaire des paliers un couplage entre la mécanique du rotor, la loi de commande et le fonctionnement électrique du moteur,
- son comportement thermique, à savoir la réponse thermique aux puissances dissipées en divers endroits du moteur (bobines, rotor, stator ou encore roulements).

Dans le chapitre II, après avoir mis en place les paramètres liés à la géométrie et les paramètres liés aux matériaux, l'étude des vibrations du rotor de la MRV est menée afin d'estimer son comportement dynamique.

Nous établissons, dans un premier temps, un modèle numérique à l'aide de méthodes approchées de la résistance des matériaux (modèle de poutre de Timoshenko) et de la mécanique des vibrations linéaires (Rayleigh-Ritz). De part leur influence sur le comportement du rotor à grande vitesse, la matrice de couplage gyroscopique et la matrice de rigidité des paliers sont à prendre en compte dans



le modèle.

Un modèle analytique est recherché afin de calculer directement les matrices de rigidité et de masse en fonction des paramètres de conception (dimensions, propriétés des matériaux).

L'étude dynamique porte d'abord sur un seul élément de rotor puis est étendue au cas d'un rotor à plusieurs éléments.

Dans ce chapitre, l'influence du matériau choisi pour réaliser le noyau magnétique ainsi que l'importance de la matrice de rigidité des paliers utilisés pour le guidage est étudiée. Connaître le comportement vibratoire nécessite, d'une part, de choisir le matériau du noyau, et d'autre part de calculer la matrice de rigidité des paliers.

Dans le chapitre III et pour répondre à ces besoins, le problème des contraintes maximales dans le noyau de la MRV est abordé afin de pouvoir réaliser un choix éclairé du matériau en terme de propriétés non seulement magnétiques mais également mécaniques, car nous avons besoin de prédire la tenue mécanique d'un profil de couple optimisé.

Pour ce faire, le profil de la dent du noyau rotorique est modélisé par une fonction continue. Après une modélisation de la géométrie du noyau et des efforts appliqués, la méthodologie de la RDM est utilisée pour obtenir les contraintes nominales en deux points présumés critiques du noyau, sans recours aux EF. Des formules analytiques de concentration de contraintes extraites de la littérature sont appliquées aux contraintes nominales pour obtenir l'expression analytique de la contrainte équivalente de Von Mises.

Dans le chapitre IV, pour parfaire l'étude dynamique du rotor, la matrice de rigidité des paliers est calculée. Les paliers étudiés sont des roulements à billes à contact oblique. Les termes de la matrice de rigidité globale dépendent non seulement des rigidités locales des deux contacts entre les bagues et chacune des billes, mais également de la direction des efforts et donc des angles de contact internes du roulement.

Préalablement à l'étude de la matrice de rigidité, le calcul des angles de contact est réalisé dans le cas de roulements à billes soumis à une force de précontrainte purement axiale, appliquée par un dispositif élastique.

Dans un premier temps, le problème de l'angle de contact dans le roulement après application de la précharge est détaillé, afin d'extraire un modèle explicite donnant directement et indépendamment du roulement étudié l'angle de contact sous charge.

Par ailleurs, une étude de la cinématique du roulement et des forces est réalisée afin d'obtenir un modèle explicite reliant les angles de contact aux caractéristiques des roulements à billes (dimensions, matériaux), d'une part, et à leurs conditions d'utilisation (précharge, vitesse), d'autre part.

Le modèle de contact de Hertz entre deux solides élastiques est ensuite exploité afin d'obtenir

les lois de comportement locales des contacts. Un modèle analytique est recherché afin d'accéder aux résultats sans recours à des méthodes numériques.

A partir des études préalables, la matrice de rigidité d'un palier est calculée en fonction des cinq déplacements (degrés de liberté) imposés à la bague intérieure par rapport à la bague extérieure.

L'étude des paliers est complétée par la description des frottements dans les roulements à billes, afin de pouvoir calculer le couple de frottement et les pertes mécaniques que leur utilisation implique.

Enfin, les échanges thermiques entre les différents éléments du moteur sont décrits afin de modéliser la relation entre les pertes internes (Joule, fer, mécaniques ou aérodynamiques) et la répartition des températures dans le moteur.

Les modèles présentés dans ce mémoire sont finalement appliqués à l'étude des performances de l'électrobroche actuelle et des améliorations pouvant être obtenues par l'emploi de nouveaux matériaux.

## Chapitre II

# Étude des vibrations du rotor d'une MRV

Le principe de la machine à réluctance variable et les vitesses de rotation, qui sont visées lors de l'utilisation du moteur, rendent absolument indispensable l'étude vibratoire de la partie tournante. En effet, le principe de la réluctance variable utilisé pour générer un couple mécanique est une source importante de forces d'excitation perturbatrices. La création d'une force tangentielle entre la dent rotor et la dent stator induit inévitablement une force radiale dont l'amplitude est, dans certaines positions, environ 10 fois supérieure. Ce rapport dépend de la géométrie de la machine et des matériaux utilisés. Ces forces sont normalement créées symétriquement mais la moindre variation de la position du rotor crée une dissymétrie, les forces ne se compensent plus et il apparaît alors une résultante d'excitation due au déséquilibre des actions magnétiques [17].

Les MRV sont donc des machines fortement sujettes aux vibrations et de nombreux travaux ont porté sur la modélisation de ces forces radiales [20, 21], sur l'étude de l'influence de la géométrie du stator [18] et sur la diminution des effets vibratoires en agissant sur la commande [14, 22]. Par conséquent, il est nécessaire lors de la conception du moteur de connaître l'influence de la géométrie du rotor sur les performances dynamiques de l'ensemble tournant.

De plus, pour concevoir une MRV de puissance supérieure, il est nécessaire d'augmenter le volume cylindrique de l'entrefer. Une action sur le diamètre est possible mais limitée, pour le matériau utilisé, par la vitesse périphérique du rotor. L'autre paramètre est la longueur de l'entrefer (longueur active). L'augmentation conjointe de la longueur entre les paliers fait chuter dangereusement les fréquences propres du rotor, qui doivent rester supérieures à la fréquence de rotation pour un fonctionnement sûr. Le volume d'entrefer ne peut être indéfiniment augmenté et une limite de puissance  $P_{max}$  existe pour avoir une MRV fiable. La solution consiste à assembler  $N$  éléments de MRV constitués d'un stator et d'un rotor pour obtenir une puissance motrice  $P = N P_{max}$ . On parlera par la suite d'une MRV multi-éléments.

Si le nombre et la géométrie des éléments sont fixés, il est assez aisé de réaliser des études vibratoires

à partir de la méthode d'analyse par éléments finis. Cette méthode numérique a été utilisée par Ede *et al.*[19] pour calculer les fréquences propres d'un moteur synchrone à aimants permanents mono-élément. Dans cette étude, les auteurs ont étudié l'influence de certains paramètres dimensionnels (longueur de l'axe sortant ou longueur active) sur la dynamique vibratoire de leur rotor.

Mais dans le cadre d'une démarche de conception, où ni les matériaux ni les dimensions des éléments de rotor pas plus que leur nombre ne sont encore figés, l'étude point par point des différentes géométries possibles serait coûteuse en temps, en potentiel humain et matériel [23].

L'objectif essentiel de ce chapitre est de développer une méthode de conception, qui puisse décrire rapidement, et avec une précision acceptable, les phénomènes vibratoires (fréquences propres et formes associées) ainsi que donner la réponse en fréquence d'un élément de rotor de la MRV, pour ensuite composer une MRV de puissance supérieure par assemblage de plusieurs éléments.

Les paramètres d'entrée du système doivent être limités aux seuls paramètres géométriques et aux paramètres définissant les matériaux.

Dans la partie II.1, la modélisation géométrique du rotor est réalisée. Il s'agit ici de trouver une formulation simple de la forme des pièces constituant le rotor, tout en conservant au concepteur le maximum de degrés de liberté dans le choix de la géométrie. Les propriétés mécaniques des matériaux sont ensuite modélisées, dans la section II.3, en fonction des caractéristiques couramment utilisées (modules de Young ou d'élasticité et de Coulomb ou de cisaillement et masse volumique). Une étude plus précise des propriétés mécaniques du noyau magnétique composite est réalisée. En effet le noyau est fabriqué par empilement et collage de tôles ferromagnétiques (feuilletage). Un calcul des propriétés globales du noyau en traction et cisaillement est effectué à partir des modèles simples de couplage série utilisés pour les matériaux composites.

Une fois ces modélisations effectuées, la section II.5 présente l'étude dynamique du rotor, basée sur la méthode de Rayleigh-Ritz [24] et l'établissement d'un modèle numérique. La déformée tridimensionnelle est modélisée par une forme polynômiale. Les énergies de déformations en flexion et en cisaillement sont calculées en utilisant le modèle de la poutre de Timoshenko [25], qui prend en compte les efforts de cisaillement dont les effets ne sont plus négligeables sur le résultat [26]. Une discussion sur les coefficients de section réduite, qui interviennent dans l'énergie de déformation, est exposée à partir d'une méthode décrite par Gay [27]. Par la suite et pour simplifier les écritures, ces coefficients sont pris égaux à  $7/6$ . L'application au modèle des équations de Lagrange permet d'obtenir les matrices de rigidité, de couplage gyroscopique et de masse. Les fréquences propres et les vecteurs propres du rotor sont ensuite déduits des calculs précédents. Chaque terme des matrices est enfin calculé de façon analytique, afin de ne plus avoir recours à des variables symboliques dans l'exploitation des résultats.

Dans la section II.7, les fréquences données par le modèle numérique sont comparées à celles fournies par la méthode de calcul par éléments finis. Dans un premier temps, une validation du calcul est réalisée pour une poutre dont le rapport longueur sur diamètre est variable, afin de vérifier l'exactitude des

résultats fournis par le calcul numérique. Des problèmes de conditions aux limites sont alors discutés, en particulier d'un point de vue de la modélisation par éléments finis.

Dans la section II.8, les résultats (formes et fréquences) fournis par le modèle numérique sont ensuite confrontés aux résultats donnés par l'analyse numérique dans le cas d'un rotor axisymétrique dont les dimensions s'apparentent à celles de l'actionneur développé par Fayard [1, 28]. Une bonne corrélation des résultats, tant en terme de fréquences qu'en terme de forme propre, est constatée. Modéliser une géométrie de rotor et réaliser les calculs vibratoires avec le modèle nécessitent 40 fois moins de temps que le même travail réalisé avec le logiciel de calcul par éléments finis.

Dans la section II.9, un modèle analytique et explicite pour l'étude des vibrations du rotor en 2D est développé. Ce modèle discret décrit le déplacement transversal de 4 points particuliers du rotor (4 degrés de liberté en modélisation ou DDL). Le deuxième théorème de Castigliano en analyse de structure [29] donne le déplacement au point d'application et dans la direction d'une force par dérivation, par rapport à cette force, de l'énergie de déformation. L'énergie est calculée à partir de la répartition sur le rotor des efforts tranchants et des moments fléchissants. La matrice de compliançe est calculée par dérivation des déplacements par rapport aux forces, puis inversée pour obtenir la matrice de rigidité. Une expression analytique des fréquences propres est alors possible sans qu'il ne soit besoin de poser d'hypothèses sur les formes propres. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux fournis par le modèle numérique précédent, pour différentes géométries du rotor.

Enfin nous montrerons que le comportement d'un rotor multi-élément peut être défini par le comportement de chacun des éléments-rotor étudiés séparément. Dans l'exemple simple présenté, les matrices de masse, de rigidité sont obtenues à partir de celles de chaque élément et à partir des matrices de passage dans la base modale  $\Phi$ . La matrice de passage s'obtient par l'étude du mouvement libre et découplé de chaque élément de rotor pris séparément. Dans la démonstration simplifiée présentée dans le paragraphe II.10, nous n'avons pas détaillé le calcul de la matrice d'amortissement du rotor multi-éléments.

Nous allons donc présenter la méthode utilisée pour obtenir les matrices de masse et de rigidité d'un élément de rotor.

## II.1 Modélisation géométrique d'un élément de rotor

Cette section nous permet de définir une géométrie générique du rotor qui fera intervenir tous les paramètres dimensionnels de forme de la partie tournante. Cette modélisation autorise le maximum de combinaisons de paramètres, tout en respectant des critères réalistes de conception.

La figure II-1 présente les différentes parties constitutives d'une section du rotor située à une abscisse  $y$  sur l'axe du rotor et de surface notée  $S(y)$ . Le repère  $OXYZ$  est le repère fixe lié au stator de la machine à réluctance variable. Le repère  $Oxyz$  est le repère tournant lié au rotor de la machine à réluctance variable.

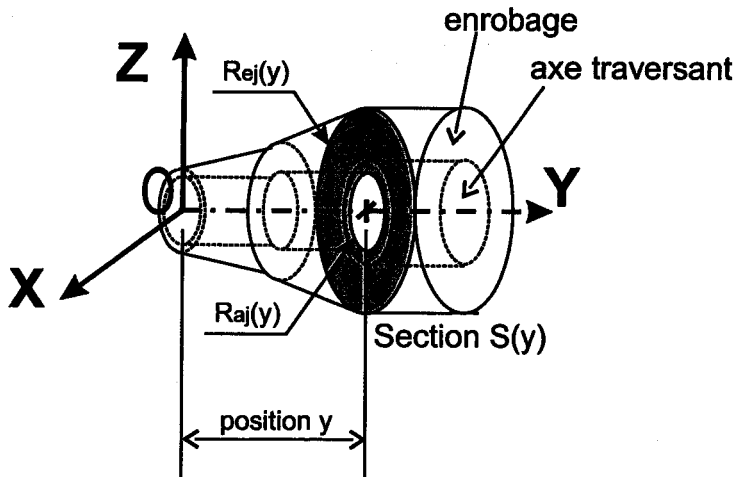


FIG. II-1 – Représentation d'une section de surface  $S(y)$  du rotor.

Si une section se situe dans un tronçon où seul l'axe traversant est présent, sa surface sera définie par l'unique rayon de l'axe.

Si une section se situe dans un tronçon  $j$  où l'axe traversant est entouré d'un enrobage, la première surface sera donc définie entre 0 et le rayon de l'axe  $R_{aj}$ , et la deuxième surface sera définie entre son rayon intérieur  $R_{aj}$  et son rayon extérieur  $R_{ej}$ . Il en sera de même pour une section contenue dans le tronçon du noyau magnétique.

La géométrie du rotor est donc définie par le rayon extérieur et par le rayon de l'axe traversant dans chaque tronçon.

La surface extérieure du rotor est modélisée comme une succession de  $N$  tronçons coniques. La fonction décrivant la valeur du rayon extérieur du rotor  $R_{ej}(y)$  d'un point d'abscisse  $y$  appartenant au tronçon  $j$  est donc une succession de fonctions affines de la forme :

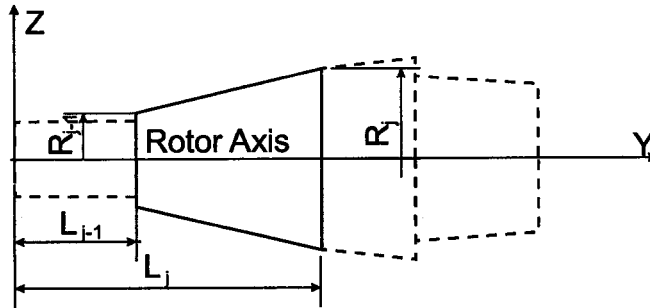
$$R_{ej}(y) = a_j y + b_j. \quad (\text{II-1})$$

La figure II-2 présente le  $j^{\text{ième}}$  tronçon du rotor qui est placé sur l'axe  $Y$  entre les positions  $y = L_{j-1}$  et  $y = L_j$ . La fonction de rayon  $R_{ej}(y)$  vaut  $R_{j-1}$  et  $R_j$  respectivement au point  $y = L_{j-1}$  et  $y = L_j$ . En fixant les rayons initial et final à une même valeur, un tronçon cylindrique pourra également être modélisé, comme ce sera le cas pour le tronçon contenant la partie active du rotor.

Par conséquent, la fonction de rayon  $R_{ej}(y)$  peut s'écrire sous la forme :

$$R_{ej}(y) = (R_j - R_{j-1}) \frac{y - L_{j-1}}{L_j - L_{j-1}} + R_{j-1}. \quad (\text{II-2})$$

L'axe traversant est constitué d'une succession de tronçons cylindriques. La valeur du rayon de l'axe au niveau du tronçon  $j$  est alors notée  $R_{aj}$ .

FIG. II-2 – Représentation du  $j^{\text{ième}}$  tronçon conique du rotor

## II.2 Modélisation des matériaux

Dans cette partie, nous allons présenter les propriétés des matériaux, utilisées dans les calculs vibratoires. Nous associerons ensuite à chaque pièce constituant le rotor (axe, enrobage ou noyau) un matériau qui sera identifiable grâce aux notations.

### II.2.1 Caractéristiques des matériaux

Dans cette partie et dans la suite, les matériaux seront considérés comme homogène (même propriétés en tout point du matériau) et isotrope (même propriété suivant toutes les directions). Cette hypothèse nécessite un travail d'homogénéisation lorsque l'on utilise des composites, afin d'extraire des propriétés de chaque composant (à l'échelle dite microscopique), des propriétés globales (à l'échelle macroscopique). Dans notre cas, des modèles simples de couplage série suffiront pour connaître les propriétés du noyau ferromagnétique composite (fabriqué par empilement de tôles collées).

#### II.2.1.A Module d'élasticité (Module de Young)

Le module d'élasticité (ou module de Young) d'un matériau est noté  $E$ . Son unité est le  $N/m^2$ , mais dans le domaine de l'élasticité linéaire, le  $N/mm^2$  ou le MPa est couramment usité. Dans le domaine purement élastique, le module de Young correspond au coefficient de proportionnalité entre une contrainte  $\sigma_x$  suivant un axe et la déformation  $\epsilon_x$  qu'elle engendre suivant cet axe :

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (\text{II-3})$$

Cette équation est appelée loi de Hooke en traction uniaxiale. La valeur du module de Young  $E$  peut être obtenue par un essai de traction. Une tige de section ronde  $S = \pi R^2$  et de longueur  $L$  est soumise à une force de traction  $F$ , dirigée dans sa longueur. La contrainte de traction est donc donnée par  $\sigma_x = F/S$ . Sous l'action de la force  $F$ , un allongement  $\Delta L$  est constaté. Le module d'Young est alors obtenu comme suit :

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} \frac{FL}{S \Delta L} \quad (\text{II-4})$$

Pour les aciers ou les alliages d'aluminium, ce module est respectivement d'environ 210 000 MPa et 75 000 MPa.

### II.2.1.B Coefficient de Poisson

Ce coefficient sans dimension est noté  $\nu$ . Lors de l'essai de traction présenté précédemment, l'éprouvette cylindrique a subi une déformation  $\epsilon_x$  dans la direction de la force. Dans la direction perpendiculaire, on observe une diminution, notée  $\Delta r$  des dimensions de la section de rayon  $r$ , qui est due à l'allongement de la tige. Ce phénomène est appelé striction. La déformation suivant l'axe  $y$  perpendiculaire à l'axe du cylindre est donc  $\epsilon_y = -\Delta R/R$ . Le coefficient de poisson du matériau est défini alors par :

$$\nu = \frac{-\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{\Delta R}{R} \frac{L}{\Delta L} \quad (\text{II-5})$$

Ce coefficient est de l'ordre de 0,3 pour les aciers et les alliages d'aluminium. Il n'excède jamais la valeur de 0,5 qui correspond à une déformation sans variation de volume [30].

Le module d'Young et le coefficient de Poisson sont très souvent fournis par les producteurs.

### II.2.1.C Module de cisaillement (Module de Coulomb)

Ce module de cisaillement, noté  $G$ , ou module de Coulomb, se calcule directement à partir du module d'élasticité  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ , par la formule :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{II-6})$$

Pour l'acier, il est aux alentours de 80 000 MPa.

## II.2.2 Matériaux de l'axe et de l'enrobage

Le matériau de l'axe est supposé homogène et isotrope. Il est défini par son module de Young  $E_a$ , et son module de cisaillement  $G_a$ . Sa masse volumique est notée  $\rho_a$ .

Le matériau de l'enrobage est supposé homogène et isotrope. Il est défini par son module de Young  $E_e$ , et son module de cisaillement  $G_e$ . Sa masse volumique est notée  $\rho_e$ .

## II.2.3 Matériau du noyau magnétique

Le noyau magnétique du rotor de la MRV mérite une attention particulière. En effet, le noyau est constitué d'un empilement de tôles ferromagnétiques collées. Les deux matériaux, métal et colle, et leurs caractéristiques interviennent alors dans les propriétés globales du noyau. Les caractéristiques mécaniques du matériau homogénéisé doivent donc être calculées en fonction des composants en présence et de leur proportion ou fraction volumique, définie comme le rapport du volume du matériau sur le volume total. Dans l'empilement magnétique, la fraction volumique sera le rapport de l'épaisseur



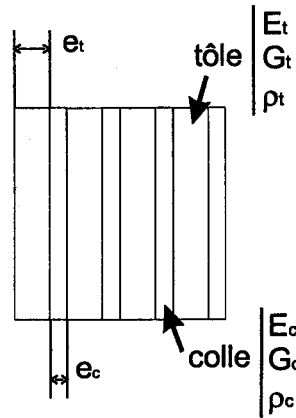


FIG. II-3 – Matériaux du noyau magnétique et caractéristiques

du matériau sur l'épaisseur totale du noyau. Cette valeur appelée facteur d'empilement (stacking factor) est de l'ordre de 0,9.

Les lois classiques dite d'homogénéisation (couplage série ou parallèle), couramment utilisées dans le domaine des composites, peuvent être appliquées dans le cas de noyaux magnétiques feuilletés et collés [27].

Les épaisseurs des tôles et du film de colle sont respectivement notée  $e_t$  et  $e_c$  (voir figure II-3).

Le module de Young, le module de cisaillement et la masse volumique de la tôle sont désignés respectivement par  $E_t$ ,  $G_t$  et  $\rho_t$ . De même,  $E_c$ ,  $G_c$  et  $\rho_c$  seront respectivement les modules de Young et de Coulomb, ainsi que la masse volumique de la colle.

On suppose que les sections de colle et de tôles sont identiques et notées  $S$ . Les tôles sont implantées perpendiculairement à l'axe du rotor.

Dans la suite, le module de Young, le module de cisaillement et la masse volumique équivalents du noyau sont désignés respectivement par  $E_n$ ,  $G_n$  et  $\rho_n$ .

### II.2.3.A Module de Young

Lors de la flexion cisailée du bloc de tôles, les efforts appliqués en un point de la section  $S$  sur l'ensemble formé par une tôle et un film de colle, sont une force de traction  $N$  normale à  $S$  et une force de cisaillement  $T$  dans le plan de  $S$ .

D'après la figure II-4(a), on peut écrire que la variation d'épaisseur du complexe tôle-colle noté  $\Delta e$  est égale à la somme des variations d'épaisseur de la tôle et de la colle soit :

$$\Delta e_n = \Delta e_c + \Delta e_t \quad (\text{II-7})$$

La loi d'élasticité linéaire de Hooke  $\sigma_i = E_i \epsilon_i$  est appliquée aux composants du noyau.  $\sigma$  et  $\epsilon$  désignent respectivement les contraintes et déformations dans la direction de traction. L'indice  $i$  représente le matériau considéré. Compte-tenu de la définition de la déformation  $\epsilon_i = \Delta e_i / e_i$ , l'équation (II-7)

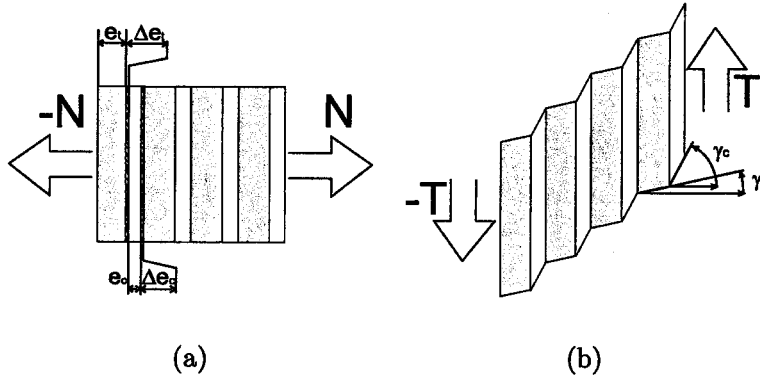


FIG. II-4 – Déformations d'un noyau magnétique soumis à une force de traction  $N$  (a) ou un effort tranchant  $T$  (b)

s'écrit :

$$\frac{e_n \Sigma}{E_n} = \frac{e_c \sigma_c}{E_c} + \frac{e_t \sigma_t}{E_t} \quad (\text{II-8})$$

$E_n$  est le module d'Young global du noyau dans la direction axiale.  $\Sigma$  désigne la contrainte globale de traction appliquée à l'empilement.  $\sigma_c$  et  $\sigma_t$  sont les contraintes localisées dans la colle et la tôle.  $e_n$  désigne l'épaisseur du complexe tôle-colle, soit  $e_n = e_t + e_c$ . Puisque la force de traction  $N$  s'applique sur la surface de la colle et la surface de la tôle et que ces dernières sont supposées égales à  $S$ , alors les contraintes de traction  $\sigma_c$  et  $\sigma_t$  sont égales à la contrainte globale  $\Sigma$ .

En simplifiant l'expression (II-8) par  $\Sigma$ , on obtient l'expression du module de Young homogénéisé du noyau dans la direction axiale :

$$E_n = (e_c + e_t) \left( \frac{e_c}{E_c} + \frac{e_t}{E_t} \right)^{-1} \quad (\text{II-9})$$

### II.2.3.B Module de cisaillement

Une étude similaire peut être effectuée pour trouver le module de cisaillement du noyau. De la figure II-4(b), on peut écrire que le glissement du plan de gauche du complexe tôle-colle par rapport au plan de droite est le produit de la distorsion  $\gamma_n$  par l'épaisseur  $e_n$ . Le glissement global est la somme des glissements locaux dans la tôle et la colle, d'où :

$$e_n \gamma_n = e_c \gamma_c + e_t \gamma_t \quad (\text{II-10})$$

La loi de comportement en cisaillement  $\tau_i = 2G_i \gamma_i$  est appliquée aux composants du noyau.  $\tau$  et  $\gamma$  désignent respectivement la contrainte et la distorsion dans la direction de cisaillement. L'indice  $i$  représente le matériau considéré. L'équation (II-10) s'écrit :

$$\frac{e_n \tau}{2G_n} = \frac{e_c \tau_c}{2G_c} + \frac{e_t \tau_t}{2G_t} \quad (\text{II-11})$$

Puisque l'effort tranchant  $T$  s'applique sur la surface de la colle et sur la surface de la tôle et que ces dernières sont supposées égales à  $S$ , alors les contraintes de cisaillement  $\tau_t$  et  $\tau_c$  sont égales à la contrainte globale  $\tau$ .

En simplifiant l'expression II-11 par  $\tau$ , on obtient l'expression du module de cisaillement homogénéisé du noyau, noté  $G_n$  :

$$G_n = (e_c + e_t) \left( \frac{e_c}{G_c} + \frac{e_t}{G_t} \right)^{-1} \quad (\text{II-12})$$

Il s'agit ici du modèle de deux ressorts de cisaillement en série. La similitude des équations (II-9) et (II-12) peut être notée.

### II.2.3.C Masse volumique

La masse totale  $m_n$  de l'ensemble tôle-colle est donnée par :

$$m_n = \rho_t \cdot S_t \cdot e_t + \rho_c \cdot S_c \cdot e_c \quad (\text{II-13})$$

Puisque les surfaces sont identiques, la masse volumique du noyau s'écrit :

$$\rho_n = \frac{\rho_t \cdot e_t + \rho_c \cdot e_c}{(e_c + e_t)} \quad (\text{II-14})$$

Maintenant que les dimensions des sections et les matériaux qui les composent sont définis, les propriétés mécaniques des sections (combinaisons de propriété des surfaces et des matériaux) vont faire l'objet du paragraphe suivant.

## II.3 Propriétés mécaniques des sections

Les propriétés mécaniques d'une section doivent être définies à partir des caractéristiques des matériaux qui composent le tronçon auquel elle appartient.

Ces propriétés sont de deux types :

- des propriétés liées à la résistance mécanique de la section, appelées rigidités en flexion et en cisaillement,
- des propriétés liées à la dynamique de la section, que sont la masse linéique (par unité de longueur) et les moments d'inertie linéiques.

Ces notions seront définies dans le paragraphe II.3.1.

Lors de la modélisation du rotor, trois configurations de section pourront être rencontrées :

- des sections, où seul l'axe traversant est présent. Cette configuration sera étudiée dans le paragraphe II.3.2;
- des sections où l'axe traversant cohabite avec un enrobage extérieur. Cette configuration sera étudiée dans le paragraphe II.3.3;

- une section où l'axe traversant cohabite avec le noyau. Cette configuration sera étudiée dans le paragraphe II.3.4;

Avant d'aborder chacun de ces cas particuliers, nous allons définir chacune des propriétés d'une section.

### II.3.1 Définition des propriétés d'une section

Dans ce paragraphe, les propriétés d'une section composée de plusieurs matériaux vont être décrites. Les propriétés des sections sont calculées dans le repère  $(O,x,y,z)$  lié au rotor. Par la suite, la notation  $\langle A \rangle$  désignera la valeur moyenne de la grandeur  $A$  dans une section composée de plusieurs matériaux (notation de Gay [27]).

#### II.3.1.A Rigidité en cisaillement

La rigidité en cisaillement d'une section de surface  $S$  est définie par la formule :

$$\langle GS \rangle = \int_S G(x,z).dx.dz \quad (\text{II-15})$$

où  $G(x,z)$  représente la fonction donnant le module de cisaillement (ou de Coulomb) du matériau au point  $(x,z)$  de la section. Dans le cas de matériaux homogènes, et pour une section composée de  $n$  surfaces  $S_{i=1,\dots,n}$ ,  $G(x,z)$  est une fonction définie par morceau, constante et égale à  $G_i$  sur chaque surface  $S_i$ , d'où la forme simplifiée :

$$\langle GS \rangle = \sum_{i=1}^n G_i.S_i \quad (\text{II-16})$$

#### II.3.1.B Rigidité en flexion

La rigidité en flexion autour de l'axe  $x$  d'une section de surface  $S$  est définie par :

$$\langle EI_x \rangle = \int_S E(x,z).z^2.dx.dz \quad (\text{II-17})$$

où  $z$  représente la distance à l'axe  $x$  de l'élément de surface  $dx.dz$ .  $E(x,z)$  est une fonction donnant le module de Young (ou d'élasticité) du matériau au point  $(x,z)$  de la section. Dans le cas de matériaux homogènes, et pour une section composée de  $n$  surfaces,  $E(x,z)$  est une fonction définie par morceau, constante et égale à  $E_i$  sur chaque surface  $S_i$ , d'où la forme simplifiée :

$$\langle EI_x \rangle = \sum_{i=1}^n \left( E_i. \int_{S_i} z^2.dx.dz \right) \quad (\text{II-18})$$

Une relation semblable peut être trouvée pour la rigidité en flexion autour de l'axe  $z$ , en posant l'intégrale sur les surfaces  $S_i$  des  $x^2.dx.dz$ . Dans le cas de sections axisymétriques et à deux matériaux,

comme c'est le cas pour le rotor, les formules prennent des formes plus simples, que nous détaillerons plus loin.

Dans le cadre de la résistance des matériaux, la quantité  $\int_{S_i} z^2 \cdot dx \cdot dz$ , noté  $I_x$  est appelée moment quadratique de la surface  $S_i$  par rapport à l'axe  $x$  [29]. En raison de la similitude entre cette grandeur et le moment d'inertie en dynamique,  $I_x$  est souvent qualifié, de façon abusive, de moment d'inertie.

### II.3.1.C Masse linéique

La masse linéique (par unité de longueur) d'une section de surface  $S$  est définie par la formule :

$$\langle \rho S \rangle = \int_S \rho(x,z) \cdot dx \cdot dz \quad (\text{II-19})$$

où  $\rho(x,z)$  est la fonction donnant la masse volumique du matériau au point  $(x,z)$  de la section. Dans le cas de matériaux homogènes, et pour une section composée de  $n$  surfaces  $S_{i=1,\dots,n}$ ,  $\rho(x,z)$  est une fonction définie par morceau, constante et égale à  $\rho_i$  sur chaque surface  $S_i$ , d'où la forme simplifiée :

$$\langle \rho S \rangle = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot S_i \quad (\text{II-20})$$

La similitude entre les formules de masse linéique  $\langle \rho S \rangle$  (équation (II-20)), et de rigidité en cisaillement  $\langle GS \rangle$  (équation (II-16)) peut être notée.

### II.3.1.D Moment d'inertie linéique (axes $x$ ou $z$ )

On rappelle que les axes  $x$  et  $z$  sont contenus dans la section, et  $y$  est l'axe de rotation du rotor perpendiculaire à la section.

Le moment d'inertie linéique autour de l'axe  $x$  d'une section de surface  $S$  est défini par :

$$\langle \rho J_x \rangle = \int_S \rho(x,z) \cdot z^2 \cdot dx \cdot dz \quad (\text{II-21})$$

$\rho(x,z)$  est la fonction donnant la masse volumique du matériau au point  $(x,z)$  de la section. Dans le cas de matériaux homogènes, et pour une section composée de  $n$  surfaces  $S_{i=1,\dots,n}$ , la fonction  $\rho(x,z)$  est définie par morceau, constante et égale à  $\rho_i$  sur chaque surface  $S_i$ :

$$\langle \rho J_x \rangle = \sum_{i=1}^n \left( \rho_i \cdot \int_{S_i} z^2 \cdot dx \cdot dz \right) \quad (\text{II-22})$$

Une relation semblable peut être trouvée pour le moment d'inertie linéique autour de l'axe  $z$ , en posant l'intégrale sur les surfaces  $S_i$  des  $x^2 \cdot dx \cdot dz$ .

Dans le cas de sections axisymétriques et à deux matériaux, comme c'est le cas pour le rotor, les formules prennent des formes plus simples, que nous détaillerons plus loin.

### II.3.1.E Moment d'inertie linéique (axe de rotation $y$ )

Le moment d'inertie linéique autour de l'axe de rotation  $y$  d'une section de surface  $S$  est définie par :

$$\langle \rho J_y \rangle = \int_S \rho(x,z) \cdot (x^2 + z^2) \cdot dx \cdot dz \quad (\text{II-23})$$

où  $(x^2 + z^2)$  représente le carré de la distance à l'axe  $y$  de l'élément de surface  $dx \cdot dz$ .  $\rho(x,z)$  est la fonction donnant la masse volumique du matériau au point  $(x,z)$  de la section. Dans le cas de matériaux homogènes, et pour une section composée de  $n$  surfaces  $S_{i=1,\dots,n}$ , la fonction  $\rho(x,z)$  est définie par morceau, constante et égale à  $\rho_i$  sur chaque surface  $S_i$

$$\langle \rho J_y \rangle = \sum_{i=1}^n \left( \rho_i \cdot \int_{S_i} (x^2 + z^2) \cdot dx \cdot dz \right) \quad (\text{II-24})$$

Dans le cas de sections axisymétriques et à deux matériaux, comme c'est le cas pour le rotor, la formule prend une forme plus simple, que nous détaillerons plus loin.

### II.3.2 Section contenant l'axe seul

Dans le cas d'un tronçon  $j$  ne contenant que l'axe traversant du rotor, dont les caractéristiques sont notées avec l'indice  $a$ , les propriétés de la section axisymétrique sont les mêmes suivants  $x$  et  $z$ . Les propriétés mécaniques prennent les formes suivantes :

$$\langle EI_x \rangle(j,y) = \langle EI_z \rangle(j,y) = E_a \frac{\pi}{4} R_{aj}^4 \quad (\text{II-25})$$

$$\langle GS \rangle(j,y) = G_a \pi R_{aj}^2 \quad (\text{II-26})$$

En ce qui concernent les propriétés dynamiques de la section  $S(y)$  appartenant au tronçon  $j$ , elles prennent les formes :

$$\langle \rho S \rangle(j,y) = \rho_a \pi R_{aj}^2 \quad (\text{II-27})$$

$$\langle \rho J_x \rangle(j,y) = \langle \rho J_z \rangle(j,y) = \rho_a \frac{\pi}{4} R_{aj}^4 \quad (\text{II-28})$$

$$\langle \rho J_y \rangle(j,y) = \rho_a \frac{\pi}{2} R_{aj}^4 \quad (\text{II-29})$$

### II.3.3 Section contenant à la fois l'axe et l'enrobage

La section située à une position  $y$  est composée d'une surface circulaire correspondant à l'axe traversant (pour un rayon compris entre 0 et  $R_{aj}(y)$ ), et d'une surface annulaire correspondant à l'enrobage extérieur (pour une rayon compris entre  $R_{aj}(y)$  et  $R_{ej}(y)$ ). Les propriétés du matériau de l'enrobage sont notés avec l'indice  $e$ . Les calculs permettent d'obtenir les résultats suivants pour les propriétés mécaniques :

$$\langle EI_x \rangle(j,y) = \langle EI_z \rangle(j,y) = E_e \frac{\pi}{4} (R_{ej}^4(y) - R_{aj}^4) + E_a \frac{\pi}{4} R_{aj}^4 \quad (\text{II-30})$$

$$\langle GS \rangle(j,y) = G_e \pi (R_{ej}^2(y) - R_{aj}^2) + G_a \pi R_{aj}^2 \quad (\text{II-31})$$

En ce qui concernent les propriétés dynamiques de la section  $S(y)$  appartenant au tronçon  $j$ , elles prennent les formes :

$$\langle \rho S \rangle(j,y) = \rho_e \pi (R_{ej}(y)^2 - R_{aj}^2) + \rho_a \pi R_{aj}^2 \quad (\text{II-32})$$

$$\langle \rho J_x \rangle(j,y) = \langle \rho J_z \rangle(j,y) = \rho_e \frac{\pi}{4} (R_{ej}(y)^2 - R_{aj}^2) + \rho_a \frac{\pi}{4} R_{aj}^4 \quad (\text{II-33})$$

$$\langle \rho J_y \rangle(j,y) = \rho_e \frac{\pi}{2} (R_{ej}(y)^4 - R_{aj}^4) + \rho_a \frac{\pi}{2} R_{aj}^4 \quad (\text{II-34})$$

### II.3.4 Section du noyau

Contrairement aux autres sections, la section du noyau n'est pas axisymétrique. Sur la figure II-5, un exemple de section d'un noyau bipolaire de MRV est représenté. Les repères  $(O,x,y,z)$  lié au rotor et  $(O,X,Y,Z)$  lié au stator y sont explicités.

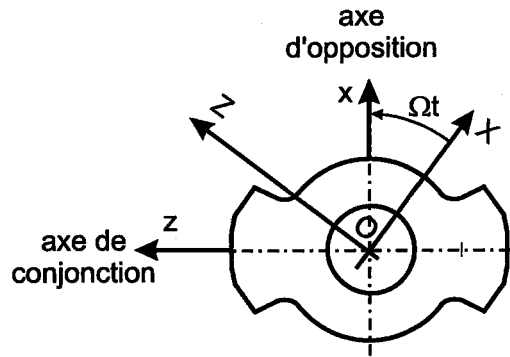


FIG. II-5 – Exemple de section d'un noyau à 2 pôles d'une MRV.

Le principe de fonctionnement de la machine à réluctance variable 6/2 impose au rotor d'avoir deux plans de symétrie magnétique. S'il était possible de modifier de façon significative les propriétés magnétiques d'un matériau, on pourrait conserver l'axisymétrie mécanique. En pratique, il est difficile d'obtenir une variation de réluctance significative autrement qu'en faisant varier le rayon. Les propriétés mécaniques (en particulier les moments quadratiques et d'inertie) varient conjointement.

Le rotor présente alors des moments d'inertie différents dans l'axe des dents (axe de conjonction) et dans l'axe perpendiculaire aux dents (axe d'opposition). Le théorème de Huygens permet d'affirmer sans calcul que le moment quadratique suivant l'axe d'opposition (axe  $x$ ) est plus grand que celui suivant l'axe de conjonction (axe  $z$ ).

$\langle EI_x \rangle$  et  $\langle EI_z \rangle$  sont les rigidités de flexion de la section suivant les axes  $x$  et  $z$  dans le repère lié au rotor.  $\langle EI_x \rangle$  est donnée en appliquant l'équation (II-18) à la surface  $S$  de la section du noyau.

Les axes  $x$  et  $z$  sont des axes principaux d'inertie de la section du noyau. La quantité  $EI_{xz}$  définie comme l'intégrale sur la section des produits  $E \cdot x \cdot z$  est donc nulle sur la section.

La position de l'axe  $x$  du rotor dans le repère fixe (lié au stator) est représentée par l'angle  $(O, \vec{X}, \vec{x}) = \Omega t$ . Les formules classiques de la résistance des matériaux permettent d'écrire des rigidités

de flexion dans les directions  $X$  et  $Z$  liées au stator en fonction des rigidités de flexion données dans le repère lié au rotor :

$$\langle EI_X \rangle = \iint_S EZ^2 dS = \langle EI_x \rangle \cos^2 \Omega t + \langle EI_z \rangle \sin^2 \Omega t \quad (\text{II-35})$$

$$\langle EI_Z \rangle = \iint_S EX^2 dS = \langle EI_x \rangle \sin^2 \Omega t + \langle EI_z \rangle \cos^2 \Omega t \quad (\text{II-36})$$

Les axes  $X$  et  $Z$  ne sont plus les axes principaux d'inerties du rotor par conséquent le moment produit  $I_{XY}$  n'est plus nul. On définit alors la rigidité de flexion  $EI_{XY}$  sur la section :

$$\langle EI_{XY} \rangle = \frac{1}{2} \int_S EXZ dS = (\langle EI_x \rangle - \langle EI_z \rangle) \sin 2\Omega t \quad (\text{II-37})$$

Ces termes seront identifiables dans les intégrales conduisant à l'expression de l'énergie interne de déformation.

### II.3.5 Modélisation mécanique des roulements

Un roulement à billes supportant le rotor est modélisé par sa matrice de rigidité, dont les termes principaux sont les raideurs radiales suivant  $X$  et  $Z$  respectivement notées  $K_{XX}$  et  $K_{ZZ}$ , et les raideurs angulaires respectivement notées  $K_{\theta X}$  et  $K_{\theta Z}$ . Des termes de couplage sont également remarquables.

Le calcul de la matrice de rigidité d'un roulement à billes, dont le comportement est linéarisé autour du point de fonctionnement, est effectué dans le chapitre IV.

Les déplacements imposés à la bague intérieure d'un roulement situé au point  $j$  sont supposés égaux aux déplacements radiaux et angulaires du rotor au point  $j$ .

La présence ou non d'un roulement à la jonction  $j$  est gérée par un vecteur, noté  $PK$ , dont la valeur  $PK_j$  vaut 0, s'il n'y a pas de roulement, ou 1 dans le cas contraire. Le produit du  $j^{\text{ième}}$  terme de  $PK$  avec les caractéristiques du roulement permet de ne prendre en compte que les roulements qui sont réellement montés.

Cette modélisation permet de ne pas faire de différence entre jonctions, de pouvoir placer les roulements à différents endroits de l'axe et de rendre le calcul plus systématique. Elle permet également d'étudier des montages de roulements plus complexes tels que ceux pouvant être utilisés sur les broches d'usinages (montage à 3 ou 4 roulements et plus)[31].

## II.4 Méthodes de calcul du comportement vibratoire d'une structure

Dans ce paragraphe, nous allons énumérer et décrire succinctement les différentes méthodes couramment utilisées pour prédire le comportement vibratoire d'une structure. Ces méthodes sont les



suivantes :

1. **La méthode de Rayleigh** : elle nécessite de faire une hypothèse sur la déformée du rotor qui réponde aux conditions aux limites cinématiques, afin de réduire le problème à une dimension 1 (l'amplitude). Cette déformation est généralement la déformée statique. L'équation du mouvement est obtenue par le théorème de l'énergie cinétique. Le calcul de la fréquence du  $i^{\text{ème}}$  mode se réduit alors à une équation différentielle unidimensionnelle de la forme  $m_i \ddot{x} + k_i x = 0$ .  $m_i$  et  $k_i$  sont les masse et rigidité modale associées au mode  $i$ , qui peuvent être déduites directement de la forme propre. Par cette méthode, une fréquence ne peut être connue que si la forme propre associée est convenablement modélisée. Pour obtenir les  $N$  premières fréquences, il faut connaître et modéliser autant de formes propres. Cette méthode peut être retrouvée dans [24] ou [32]
  
2. **La méthode de Rayleigh-Ritz** : elle est la généralisation par Ritz de la méthode de Rayleigh aux problèmes à  $N$  degrés de liberté. La déformée du rotor est une forme polynômiale (d'ordre  $N - 1$ ), dont chacun des  $N$  coefficients (dit généralisés) est une inconnue, et forme le vecteur  $\mathbf{X}$ . Les conditions aux limites sont alors appliquées. A partir de l'énergie de déformation et de l'énergie cinétique, les équations de Lagrange sont écrites pour chaque coefficient généralisé et remplacent alors le théorème de l'énergie cinétique. La mécanique lagrangienne est notamment décrite par Wells [33] ou encore par Den Hartog [34] pour les applications vibratoires. Une équation matricielle à  $N$  dimensions,  $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = 0$  est alors obtenue, où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse et de rigidité de la structure (de dimension  $N \times N$ ). Elle permet d'obtenir  $N$  fréquences de vibration en calculant les valeurs propres de  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ . Mais en pratique, il faut un nombre de degrés de liberté supérieur au nombre de fréquences recherchées, pour obtenir de la précision sur les résultats. Cette méthode apparaît très utile pour prédire les effets de petites modifications de structures [24]. Cette méthode est couramment utilisée dans le cadre des vibrations des machines tournantes ou des alternateurs [35].
  
3. **La méthode des matrices de transfert** : une matrice de transfert permet de déduire les énergies cinétique et de déformation d'un rotor décomposé en  $N$  tronçons. Les degrés de liberté sont les déplacements à chaque extrémité d'un tronçon. Les matrices de transfert de nombreuses formes de tronçons peuvent être obtenues dans les formulaires [36]. Cette méthode est notamment décrite par Bigret [37] pour le cas des vibrations de machines tournantes.
  
4. **La méthode dite directe** : elle consiste à modéliser le rotor en système continu [32] puis à trouver la solution de l'équation aux dérivées partielles obtenue en appliquant le principe fondamental de la dynamique à une tranche d'épaisseur  $dy$  du rotor. Dans le cas d'une poutre d'Euler-Bernouilli à section constante, l'équation aux dérivées partielles devient une équation

différentielle en  $y$  et  $t$  à coefficients constants, résolue par séparation des variables. Cette méthode est difficilement adaptable à un rotor de section variable où les effets de cisaillement sont pris en compte (poutre de Timoshenko [25]).

5. **La méthode de calcul par éléments finis (3D)** : contrairement aux autres méthodes, elle n'utilise pas les hypothèses de la résistance des matériaux, mais s'appuie directement sur les lois de comportement et les équations d'équilibre. Elle consiste à discrétiser le rotor en petits éléments (polyèdres). Chaque sommet (noeud) des éléments possède alors trois degrés de liberté (en translation). Les déformations en un point de la matière sont déduites des déplacements des noeuds autour de ce point. La loi de comportement du matériau donne alors les efforts associés. On obtient alors la matrice de rigidité  $K$ . Chaque noeud se voit attribuer une masse déduite des propriétés du matériau. On en déduit la matrice de masse  $M$ . Les valeurs propres et vecteurs propres de  $M^{-1}K$  sont ensuite exploités à l'aide d'une interface graphique. Les dimensions des matrices sont d'autant plus importantes qu'il y a de degrés de liberté au total. Un calcul précis impose de découper finement les zones présentant de forts gradients de contraintes. Le nombre de noeuds peut rapidement atteindre plusieurs centaines de milliers, et le temps de calcul devient alors important. Cette méthode est précise (si elle est bien utilisée) mais doit être utilisée ponctuellement, pour valider une géométrie déjà définie.

Une méthode itérative est également décrite par Lalanne [24]. Elle permet d'obtenir les vecteurs de coordonnées généralisées par étape successive, à partir d'un vecteur d'essai (hypothèse de départ) et des matrices  $M$ ,  $K$ . Le résultat converge vers la solution mais il doit être répété pour chaque fréquence et chaque forme propre.

Parmi ces méthodes, nous avons choisi la méthode de Rayleigh-Ritz. Le calcul par éléments finis sera pour sa part destiné à fournir les résultats de référence lors de la validation du modèle. Il servira ensuite lorsque la conception sera terminée, pour la validation de la géométrie de rotor.

## II.5 Méthode de Rayleigh-Ritz appliquée au rotor de la MRV

Ce paragraphe présente la méthode de Rayleigh-Ritz appliquée au rotor de la machine à réluctance variable utilisée à grande vitesse. La méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour réduire le nombre de degrés de liberté du système (par rapport à une méthode par élément finis) et pour estimer les plus basses fréquences de résonance. Des hypothèses raisonnables sont faites sur les déplacements du système (à travers le choix judicieux de fonctions de déplacements qui décrivent les déformations). Les conditions aux limites statiques et cinématiques sont alors exploitées pour réduire la dimension du problème. Suite au calcul des énergies potentielles et cinétiques, l'application des équations de Lagrange permet d'obtenir les équations matricielles qui décrivent le mouvement [24].

Nous allons donc décrire dans un premier temps la modélisation choisie pour décrire la déformée modale du rotor. Puis nous calculerons les énergies cinétiques et potentielles (de déformation). Avant d'appliquer le formalisme de Lagrange aux expressions énergétiques obtenues, nous discuterons, calculs à l'appui, de la répartition des contraintes dues au cisaillement dans une section composite.

### II.5.1 Déformée modale

Il s'agit ici de réaliser le choix de la fonction qui définira la forme du rotor lors des vibrations. Les différentes formes utilisées habituellement sont des formes polynômiales ou encore des suites de fonctions trigonométriques ou hyperboliques, dérivées de la solution analytique d'une poutre à section homogène [37].

Nous avons choisi d'utiliser une forme polynômiale pour la définition de la déformée modale. La base modale est donc  $1, y, y^2, y^3, \dots, y^n$ . Ce choix est motivé par les calculs d'intégration futurs, qui seront rendus plus simples.

Une fois la base modale définie, deux possibilités s'offrent alors pour le choix d'une fonction de déformation :

- une fonction polynômiale d'ordre limité pour chaque tronçon du rotor avec exploitation des conditions aux limites statiques et cinématiques à chaque extrémité,
- une seule fonction polynômiale d'ordre élevé pour tout le rotor.

La première solution consiste donc à associer une fonction de déformation à chaque tronçon  $j$  de la poutre. Les déformées de deux tronçons successifs doivent satisfaire aux conditions aux limites statiques (continuité du moment fléchissant et de l'effort tranchant) et cinématiques (continuité des déplacements radiaux et angulaires). L'ordre minimum des 4 polynômes de chaque tronçon est de 2 (3 coefficients), pour pouvoir satisfaire aux conditions aux limites en déplacements. Si le rotor présente 7 tronçons, le nombre d'inconnues est, au total, de 84.

La seconde solution consiste à utiliser une unique fonction, dont l'ordre élevé permettra de définir convenablement la déformation du rotor. Les conditions aux limites en déplacements sont automatiquement prises en compte mais les conditions aux limites en efforts ne sont pas satisfaites. Plus l'ordre du polynôme est élevé, meilleure sera la précision de la déformée, mais la résolution sera d'autant plus longue et complexe.

La première solution rend la programmation et l'exploitation des conditions aux limites complexe mais possible. La différenciation des coordonnées, qui seront supprimées, de celles qui subsisteront suite à l'exploitation des conditions aux limites, est subtile. La programmation est par ailleurs figée car tout changement dans les fonctions de déformations impose de refondre tout le programme. De plus, l'allure de la déformée obtenue n'est pas convaincante malgré un nombre d'inconnues important. Ces constatations ont été faites suite à l'utilisation première de ce modèle présenté dans [23].

Nous avons donc choisi d'utiliser la deuxième solution utilisant une seule fonction pour résoudre

le problème des vibrations du rotor. Elle présente l'intérêt d'une formulation et d'une programmation plus simple et systématique, et évite la délicate exploitation des conditions aux limites. Les matrices de rigidité et de masse sont obtenues par une double boucle itérative de calcul.

Pour le calcul du comportement dynamique, en un point de la ligne neutre (ligne qui ne subit aucune déformation de flexion) situé à l'abscisse  $y$ , le déplacement du centre de la section dû aux efforts de flexion et de cisaillement est défini par le vecteur translation suivant :

$$\Phi(y,t) = \left\{ \begin{array}{l} \phi_X(y,t) \\ \phi_Z(y,t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{k=n} q_k(t) y^{k-1} \\ \sum_{k=1}^{k=n} q_{k+n}(t) y^{k-1} \end{array} \right\} \quad (\text{II-38})$$

et par le vecteur rotation :

$$\Theta(y,t) = \left\{ \begin{array}{l} \theta_X(y,t) \\ \theta_Z(y,t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{k=n} q_{k+2n}(t) y^{k-1} \\ \sum_{k=1}^{k=n} q_{k+3n}(t) y^{k-1} \end{array} \right\} \quad (\text{II-39})$$

où  $t$  désigne le temps.

Les déplacements  $\Phi$  et  $\Theta$  sont définis dans le plan (OXZ) fixe (lié au stator), d'où les indices majuscules. L'axe fixe  $Y$  est confondu avec l'axe  $y$  lié au rotor, on peut donc indifféremment utiliser la notation  $y$  ou  $Y$  pour désigner l'abscisse de l'axe.

Les polynômes de déformations sont représentés par leurs  $n$  coefficients qui sont autant de coordonnées dites généralisées. Pour les 4 fonctions de déplacements, il y a donc  $4 \times n$  coefficients à déterminer. Nous utiliserons plus tard des coefficients généralisés complexes afin de diviser par deux le nombre d'inconnues.

À partir de ces fonctions de déformations, il est à présent possible de calculer l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du rotor.

## II.5.2 Calcul des énergies potentielle et cinétique

Il s'agit d'exprimer l'énergie de déformation et l'énergie cinétique du rotor en fonction de paramètres géométriques et des propriétés des matériaux, afin de pouvoir appliquer la méthode de Rayleigh-Ritz et ainsi obtenir les équations du mouvement.

### II.5.2.A Énergie potentielle (ou de déformation) du rotor

Il faut noter que, dans les calculs vibratoires, les déplacements sont paramétrés par rapport à la position d'équilibre statique, donc les forces de gravité n'interviennent pas dans le bilan des forces.

L'énergie potentielle  $U(t)$  contenue dans le volume du rotor est donnée par l'expression suivante :

$$U(t) = \frac{1}{2} \iiint_V [\sigma] \cdot [\epsilon] dV \quad (\text{II-40})$$

où  $[\sigma]$  et  $[\epsilon]$  sont respectivement les tenseurs (matrices) de contrainte et déformation. Compte tenu des  $N$  segments du rotor, on peut écrire  $U(t)$  sous la forme d'une somme de  $N$  termes d'intégration :

$$U(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=N} \iiint_{V_j} [\sigma] \cdot [\epsilon] dV_j \quad (\text{II-41})$$

Les deux tenseurs symétriques  $[\sigma]$  et  $[\epsilon]$  décrivent respectivement l'état de contrainte et de déformation d'un point du volume  $V_j$ . Exprimés dans le repère fixé au stator, ils ont les formes suivantes :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{XY} & \sigma_{YY} & \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (\text{II-42})$$

$$(\text{II-43})$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{XX} & \gamma_{XY} & \gamma_{XZ} \\ \gamma_{XY} & \epsilon_{YY} & \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} & \gamma_{YZ} & \epsilon_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (\text{II-44})$$

Dans le tenseur de contrainte  $[\sigma]$ , les termes de la diagonale sont appelés contraintes normales et sont notées  $\sigma$  et les autres termes sont les contraintes tangentielles et sont notées  $\tau$ . En ce qui concerne le tenseur de déformation  $[\epsilon]$ , les termes de la diagonale sont appelés allongements relatifs et sont notés  $\epsilon$ . Les autres termes sont appelés glissements et sont notés  $\gamma$  [29].

Ces deux tenseurs sont reliés entre eux par la loi de Hooke généralisée dont l'expression matricielle est [30] :

$$[\sigma] = \frac{E}{1+\nu} [\epsilon] + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{trace}[\epsilon] [I] \quad (\text{II-45})$$

avec  $\text{trace}[\epsilon] = (\epsilon_{XX} + \epsilon_{YY} + \epsilon_{ZZ})$ .  $[I]$  désigne la matrice identité.

Pour un chargement en flexion, le seul terme du tenseur  $\epsilon$  qui soit partie prenante dans l'énergie est le terme d'allongement relatif suivant  $y$  tel que :

$$\epsilon_{YY} = X \frac{\partial \theta_Z}{\partial y} - Z \frac{\partial \theta_X}{\partial y} \quad (\text{II-46})$$

La loi de comportement devient alors la loi de Hooke en traction :

$$\sigma_{YY} = E \epsilon_{YY} \quad (\text{II-47})$$

L'énergie de déformation en flexion contenue au temps  $t$  dans le segment  $j$ , notée  $U_f(j,t)$ , prend alors la forme :

$$U_f(j,t) = \frac{1}{2} \iiint_{V_j} E \epsilon_{YY}^2 dV_j \quad (\text{II-48})$$

En substituant  $\epsilon_{YY}$  par sa valeur issue de l'équation (II-46)

$$U_f(j,t) = \frac{1}{2} \iiint_{V_j} E \left( X \frac{\partial \theta_Z}{\partial y} - Z \frac{\partial \theta_X}{\partial y} \right)^2 dV_j \quad (\text{II-49})$$

On obtient alors :

$$U_f(j,t) = \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \left( \iint_S EX^2 dS \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right)^2 - 2 \iint_S EXZ dS \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \frac{\partial \theta_z}{\partial y} + \iint_S EZ^2 dS \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 \right) dy \quad (\text{II-50})$$

Ce qui conduit finalement à l'expression :

$$U_f(j,t) = \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \left( \langle EI_Z \rangle(j,y) \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right)^2 - 2 \langle EI_{XZ} \rangle(j,y) \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \frac{\partial \theta_z}{\partial y} + \langle EI_X \rangle(j,y) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 \right) dy \quad (\text{II-51})$$

En remplaçant les moments quadratiques  $I_X$  et  $I_Z$  et le moment produit  $I_{XZ}$  exprimés dans le repère fixe, par leurs valeurs en fonction des moments  $I_x$  et  $I_z$  donnés dans le repère lié au rotor (équations (II-35) à (II-37)), on obtient :

$$U_f(j,t) = \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \left( (\langle EI_x \rangle \cos^2 \Omega t + \langle EI_z \rangle \sin^2 \Omega t) \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right)^2 - (\langle EI_x \rangle - \langle EI_z \rangle) \sin 2\Omega t \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \frac{\partial \theta_z}{\partial y} + (\langle EI_x \rangle \sin^2 \Omega t + \langle EI_z \rangle \cos^2 \Omega t) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 \right) dy \quad (\text{II-52})$$

Nous avons donc procédé au changement de repère des moments quadratiques pour exprimer les déformations dans la base fixe. L'opération inverse était également possible, c'est-à-dire exprimer les déformations dans la base mobile liée au rotor comme dans Lalanne *et al.*[24]. Le résultat obtenu est rigoureusement identique.

Dans le cas d'un chargement en cisaillement dans le plan de la section, les termes de la matrice de contraintes se limitent à  $\tau_{XY}$  et  $\tau_{ZX}$ . L'énergie de déformation en cisaillement contenue au temps  $t$  dans le segment  $j$  du rotor, notée  $U_c$ , calculée dans le repère lié au rotor s'écrit sous la forme :

$$U_c(j,t) = \frac{1}{2} \int_{y=L_j}^{L_{j+1}} \langle G.S \rangle(j,y) \left( \frac{\gamma_{xy}^2}{a_x} + \frac{\gamma_{zy}^2}{a_z} \right) dy \quad (\text{II-53})$$

où  $a_x$  et  $a_z$  sont appelées coefficients de sections réduites et sont fonction de la répartition sur la section  $S(y)$  des contraintes de cisaillement.

On peut exprimer les déformations  $\gamma_{xy}$  et  $\gamma_{zy}$  calculées dans le repère lié au rotor, à l'aide des déformations calculées dans le repère fixe. On a en effet :

$$\gamma_{xy} = \gamma_{XY} \cos \Omega t - \gamma_{ZY} \sin \Omega t \quad (\text{II-54})$$

$$\gamma_{zy} = \gamma_{XY} \sin \Omega t + \gamma_{ZY} \cos \Omega t \quad (\text{II-55})$$

Les déformations  $\gamma_X$  et  $\gamma_Z$  sont données par le modèle de la poutre de Timoshenko sous la forme suivante :

$$\gamma_{XY} = \frac{\partial}{\partial y} \phi_X(y,t) + \theta_Z(y,t) \quad (\text{II-56})$$

$$\gamma_{ZY} = \frac{\partial}{\partial y} \phi_Z(y,t) - \theta_X(y,t) \quad (\text{II-57})$$

d'où l'expression de  $U_c$  suivante :

$$U_c(j,t) = \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \langle GS \rangle(j,y) \begin{pmatrix} \gamma_{XY}^2 \left( \frac{\cos^2 \Omega t}{a_x} + \frac{\sin^2 \Omega t}{a_z} \right) \\ + \gamma_{ZY}^2 \left( \frac{\sin^2 \Omega t}{a_x} + \frac{\cos^2 \Omega t}{a_z} \right) \\ - \gamma_{XY} \gamma_{ZY} \left( \frac{1}{a_x} - \frac{1}{a_z} \right) \sin 2\Omega t \end{pmatrix} \quad (\text{II-58})$$

L'énergie potentielle du rotor est donc donnée par la sommation des énergies de chaque tronçon, d'où :

$$U(t) = \sum_{j=1}^N (U_f(j,t) + U_c(j,t)) \quad (\text{II-59})$$

Le calcul de cette énergie conduit à une fonction polynômiale de toutes les coordonnées généralisées  $q_k(t)$ . Nous allons maintenant décrire l'énergie cinétique du rotor.

### II.5.2.B Énergie Cinétique du rotor

Le déplacement d'un point d'abscisse  $y$  du rotor est défini par un vecteur vitesse de translation :

$$\vec{V} = \frac{\partial}{\partial t} \phi_X(y,t) \cdot \vec{X} + \frac{\partial}{\partial t} \phi_Z(y,t) \cdot \vec{Z} \quad (\text{II-60})$$

et par un vecteur vitesse de rotation exprimé (dans le repère lié au rotor) :

$$\vec{\Omega} = \omega_x \cdot \vec{x} + \omega_y \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \quad (\text{II-61})$$

où  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  sont les vitesses de rotation de la section  $S(y)$  considérée respectivement autour des axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  du repère fixé au rotor. Les trois composantes  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  sont exprimées dans le repère fixé au rotor. Elles peuvent s'écrire en fonction des déplacements angulaires  $\theta_X$  et  $\theta_Z$ , en fonction des vitesses angulaires  $\dot{\theta}_X$  et  $\dot{\theta}_Z$  et de la vitesse de rotation du rotor notée  $\Omega$  :

$$\omega_x(y,t) = -\dot{\theta}_Z(y,t) \cos \theta_Z(y,t) \sin \Omega t + \dot{\theta}_X(j,y,t) \cos \Omega t$$

$$\omega_y(y,t) = \Omega + \dot{\theta}_Z(y,t) \sin \theta_X(y,t)$$

$$\omega_z(y,t) = \dot{\theta}_Z(y,t) \cos \theta_X(y,t) \cos \Omega t + \dot{\theta}_X(y,t) \sin \Omega t$$

L'angle  $\Omega t$  donne la position du rotor au temps  $t$ . Les angles  $\theta_x$ ,  $\theta_z$  sont supposés petits, ce qui nous amène aux expressions linéarisées suivantes :

$$\omega_x(y,t) = -\dot{\theta}_Z(y,t) \sin \Omega t + \dot{\theta}_X(y,t) \cos \Omega t \quad (\text{II-62})$$

$$\omega_y(y,t) = \Omega + \dot{\theta}_z(y,t) \theta_X(y,t) \quad (\text{II-63})$$

$$\omega_z(y,t) = \dot{\theta}_Z(y,t) \cos \Omega t + \dot{\theta}_X(y,t) \sin \Omega t \quad (\text{II-64})$$

L'énergie cinétique prend alors la forme suivante :

$$E_c(j,t) = \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \langle \rho S \rangle(j,y) \left( \dot{\phi}_X^2(y,t) + \dot{\phi}_Z^2(y,t) \right) dy \\ + \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \left( \langle \rho J_x(j,y) \rangle \omega_x^2(y,t) + \langle \rho J_y(j,y) \rangle \omega_y^2(y,t) \right. \\ \left. + \langle \rho J_z(j,y) \rangle \omega_z^2(y,t) \right) dy \quad (\text{II-65})$$

$\langle \rho J_x \rangle$ ,  $\langle \rho J_y \rangle$  et  $\langle \rho J_z \rangle$  sont les moments d'inertie par unité de longueur par rapport aux axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . En substituant dans l'équation (II-65),  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  par leur valeur issue des équations (II-62) à (II-64), on obtient l'expression suivante :

$$E_c(j,t) = \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \langle \rho S \rangle(j,y) \left( \dot{\phi}_X^2(y,t) + \dot{\phi}_Z^2(y,t) \right) dy \\ + \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \langle \rho J_x(j,y) \rangle \left( -\dot{\theta}_Z(y,t) \sin \Omega t + \dot{\theta}_X(y,t) \cos \Omega t \right)^2 dy \\ + \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \langle \rho J_y(j,y) \rangle \left( \Omega + \dot{\theta}_Z(y,t) \theta_X(y,t) \right)^2 dy \\ + \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \langle \rho J_z(j,y) \rangle \left( \dot{\theta}_Z(y,t) \cos \Omega t + \dot{\theta}_X(y,t) \sin \Omega t \right)^2 dy \quad (\text{II-66})$$

En développant les expressions, on obtient alors :

$$E_c(j,t) = \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \langle \rho S \rangle(j,y) \left( \dot{\phi}_X^2(y,t) + \dot{\phi}_Z^2(y,t) \right) dy \\ + \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \left( \langle \rho J_x(j,y) \rangle \cos^2 \Omega t + \langle \rho J_z(j,y) \rangle \sin^2 \Omega t \right) \dot{\theta}_X^2(y,t) dy \\ + \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \left( \langle \rho J_x(j,y) \rangle - \langle \rho J_z(j,y) \rangle \right) \sin 2\Omega t \dot{\theta}_X(y,t) \dot{\theta}_Z(y,t) dy \\ + \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \left( \langle \rho J_x(j,y) \rangle \sin^2 \Omega t + \langle \rho J_z(j,y) \rangle \cos^2 \Omega t \right) \dot{\theta}_Z^2(y,t) dy \\ + \frac{1}{2} \int_{y=L_{j-1}}^{L_j} \langle \rho J_y(j,y) \rangle \left( \Omega^2 + 2\Omega \dot{\theta}_Z(y,t) \theta_X(y,t) \right) dy \quad (\text{II-67})$$

On a ainsi obtenu l'expression de l'énergie cinétique du  $j^{\text{ième}}$  tronçon du rotor. L'énergie cinétique totale du rotor est donc donnée par la sommation des énergies cinétiques de chacun des tronçons,



d'où :

$$E_c(t) = \sum_{j=1}^N (E_c(j,t)) \quad (\text{II-68})$$

Avant d'appliquer les équations de Lagrange au résultat obtenu, nous allons nous intéresser aux coefficients de section réduite qui interviennent dans le calcul de l'énergie potentielle de cisaillement.

### II.5.2.C Note sur les coefficients de section réduite

La démarche et le détail de l'étude sur le coefficient de section réduite est présentée en annexe A. Elle montre qu'il est difficile de se contenter de la valeur de 7/6 obtenue pour une section homogène. Les exemples présentés montrent que le coefficient de section réduite peut varier de 1,08 à plus de 2, dans le cas de notre rotor.

La complexité de la mise en oeuvre des expressions obtenues nous incite par la suite à utiliser la valeur de 7/6 comme valeur moyenne du coefficient de section réduite, pour les raisons suivantes :

- ce coefficient n'influence qu'une partie assez faible de l'énergie totale,
- dans le cas d'un rotor équipé d'un enrobage en aluminium sur un axe acier, solution la plus simple et la moins coûteuse à réaliser, les valeurs du coefficient sont très proches de 7/6,
- la complexité du résultat obtenu pour une simple section circulaire rend déjà délicat le calcul intégrale de l'énergie de cisaillement. Le tronçon contenant le noyau présente une section, dont la forme nécessite un calcul plus compliqué encore, dont le résultat sera lui aussi inexploitable.

Nous allons à présent continuer le descriptif de la méthode de Rayleigh-Ritz, par la description du formalisme de Lagrange.

### II.5.3 Formalisme de Lagrange

La description du formalisme de Lagrange ou du principe de puissances virtuelles est notamment décrite par Den Hartog [34], ou par Wells [33]. L'étude a été utilisée par Barthod [38] pour la modélisation du comportement dynamique d'un rotor rigide supporté par des paliers magnétiques. Les équations de Lagrange sont également décrites dans les travaux de Lalanne *et al.*[35] sur les vibrations des rotors flexibles en particulier les arbres d'alternateurs. Une méthode équivalente est présentée par Abduljabbar *et al.*[39] pour le contrôle actif des vibrations d'une poutre de Timoshenko.

Le rotor est un système paramétré par le vecteur de coordonnées généralisées noté  $\mathbf{q}(t)$ , dont les termes sont les coefficients  $q_j$  de chacune des fonctions de déformations, d'où :

$$\mathbf{q}(t) = \{q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{2n}, q_{2n+1}, \dots, q_{3n}, q_{3n+1}, \dots, q_{4n}\}^T \quad (\text{II-69})$$

où  $T$  désigne la transposée.

Le rotor est soumis à :

#### 1. des actions de liaisons :

- $r$  actions implicites parfaites dont la puissance virtuelle  $\check{H}_i$  est nulle.

- $p$  liaisons explicites parfaites définies par les relations de liaisons suivantes pour ( $l = 1, \dots, p$ ) :

$$\sum_{k=1}^{4n} a_{lk}(q,t) \dot{q}_k + b_l(q,t) = 0$$

Pour ces liaisons, il existe  $p$  multiplicateurs de Lagrange notés  $\lambda_l$  tels que la puissance virtuelle  $\bar{H}_k$  s'écrit :

$$\bar{H}_k = \sum_{l=1}^p \lambda_{lk} a_{lk}(q,t)$$

- des actions explicites imparfaites définies par des lois de comportement de la forme  $A_l \dot{q} + b_l = 0$  et dont la puissance virtuelle est  $\hat{H}_k$ .

La puissance virtuelle totale des actions de liaisons est la somme des trois puissances virtuelles, donc définie par  $H_k = \bar{H}_k + \hat{H}_k$ .

- des actions données dont la puissance virtuelle est notée  $Q_k$ .

Parmi ces actions données se trouveront les forces électromagnétiques.

Selon Barthod [38], le principe des puissances virtuelles postule que :

“Il existe au moins un repère galiléen  $R$  tel qu'à tout instant  $t$  :

- dans tout mouvement virtuel rigidifiant le système  $\Sigma$ , la puissance virtuelle des actions intérieures est nulle;
- dans tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle du champ des accélérations est égale à la puissance virtuelle des actions intérieures et extérieures s'exerçant sur  $\Sigma$ . ”

Le système  $\Sigma$  est ici le rotor. Par conséquent on a pour  $\forall k \in [1, 4n]$ ,  $P_k(\text{accélération}) = Q_k + H_k$ .

D'autre part, la puissance virtuelle du champ des accélérations s'exprime en fonction du Lagrangien  $L = E_c - U$  du système par rapport au repère  $R$  sous la forme suivante :

$$P_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (\text{II-70})$$

À chaque paramètre d'un paramétrage  $q = \{q_k\}_{k=1, \dots, 4n}$  du système rotor, on peut donc associer une équation, dite équation de Lagrange, donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{k=1}^{4n} \lambda_{lk} a_{lk}(q,t) + \hat{H}_k \quad (\text{II-71})$$

L'application des équations de Lagrange dans le cas du rotor conduit donc à un système de  $4n$  équations couplées. Ce système conduit l'équation matricielle du mouvement du système :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad (\text{II-72})$$

$\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement appelées les matrices de masse et de rigidité du rotor.  $\mathbf{C}$  est la matrice contenant les termes d'amortissement visqueux et de couplage gyroscopique. Les fréquences propres et

modes propres du rotor sont finalement obtenus par la résolution de l'équation du mouvement (II-72) précédente.

## II.6 Amélioration du modèle numérique

Dans la mesure où l'on recherche une précision acceptable sur les fréquences et les formes propres, des polynômes d'ordres élevés sont requis. Cela génère des matrices de grande taille et rend le calcul analytique particulièrement long. Les formules précédentes ont été programmées directement dans le logiciel de calcul formel MATLAB, en utilisant les performances en calcul symbolique. Mais le calcul différentiel et intégral prend du temps.

En outre, la précision des calculs est mise à mal par le mauvais conditionnement des matrices. Il faut donc réaliser quelques modifications et calculs préalables pour d'une part accélérer le calcul et d'autre part améliorer sensiblement le conditionnement afin d'obtenir des résultats plus précis.

### II.6.1 Calcul analytique préalable

Les termes des matrices de masse, d'amortissement et de rigidité sont obtenus par deux dérivations successives des énergies cinétique ou potentielle. Ces opérations peuvent être faites par les modules de calcul symbolique mais sont extrêmement coûteuses en temps. L'idéal serait de ne pas avoir recours au calcul symbolique lorsque des calculs répétés et fréquents sont réalisés. Il est nécessaire par conséquent de développer les calculs symboliques le plus loin possible, pour obtenir des formules explicites. Ces expressions explicites sont utilisées en numérique.

Le premier point important est d'éviter, dans la programmation, le calcul différentiel impliqué par les équations de Lagrange, cela suppose de le faire au préalable. Chaque terme d'énergie est calculé sous la forme de produits des fonctions de déformations, qui sont elles-aussi des sommes finies de termes en  $y$ . Il est possible après développement des termes en  $q_k$ , d'écrire les intégrales des sommes sous la forme de sommes d'intégrales, où les coordonnées généralisées sont sorties du signe d'intégration.

Par conséquent, la dérivée première des énergies selon chacune des coordonnées généralisées prend la forme d'un polynôme en  $q_k$  et  $\dot{q}_k$ , dont les coefficients ne sont fonctions que de la géométrie et des propriétés des matériaux. Le calcul analytique des intégrales permet alors de s'affranchir totalement des variables symboliques. Un exemple de ce calcul est détaillé en annexe B.

### II.6.2 Variables complexes

L'utilisation de variables complexes pour la modélisation des déformations permet de diviser par deux la taille des matrices. La partie réelle de la déformée est identifiée à la déformation suivant l'axe

$X$ , et la partie imaginaire, à celle suivant  $Z$  (exprimée dans le repère fixe). On pose alors :

$$\underline{\Phi} = \phi_x + i \phi_z \quad (\text{II-73})$$

$$\underline{\Theta} = \theta_z + i \theta_x \quad (\text{II-74})$$

Ces expressions peuvent également s'écrire comme suit :

$$\underline{\Phi} = \sum_{j=1}^n \underline{q}_j y^{j-1} \quad (\text{II-75})$$

$$\underline{\Theta} = \sum_{j=1}^n \underline{q}_{n+j} y^{j-1} \quad (\text{II-76})$$

où  $\underline{q}_j$  est la  $j^{\text{ième}}$  composante complexe du vecteur des coordonnées généralisées, noté alors  $\underline{q}$ . Ce vecteur est réduit à une dimension  $2n$ . La taille du vecteur des coefficients généralisés est donc divisée par 2 par rapport aux expressions vues au paragraphe II.5.3. Les vecteurs propres associés aux pulsations propres seront complexes, et permettront de tracer les déformations tridimensionnelles. Le temps de calcul est environ divisé par deux.

### II.6.3 Normalisation des polynômes

Il reste à traiter le problème des matrices mal conditionnées. Si les polynômes choisis sont d'ordre  $n$  et le rotor de longueur  $L$ , alors entre le premier terme et le dernier terme du polynôme, il existe un rapport qui est de l'ordre de  $L^n$ . Dans le cas de notre rotor, avec une longueur actuelle de 62 mm, le rapport entre les coefficients du polynôme (et donc les termes des matrices) est de l'ordre de  $8.10^{-13}$ . Ce rapport proche de la précision de la mantisse utilisée lors des calculs sous MATLAB rend de ce fait les résultats imprécis voire faux. La solution classiquement utilisée est de normaliser le vecteur des coordonnées généralisées en conditionnant les matrices. Ce résultat s'obtient en remplaçant les expressions II-8 et II-9 par l'utilisation de polynômes de la forme :

$$\underline{\Phi} = \sum_{j=1}^n \underline{q}_j (y/L)^{n-1} \quad (\text{II-77})$$

$$\underline{\Theta} = \sum_{j=1}^j \underline{q}_{n+j} (y/L)^{j-1} \quad (\text{II-78})$$

Les matrices obtenues à la fin des calculs présentent des termes dont les ordres de grandeur sont plus homogènes que précédemment. Le calcul des fréquences est alors beaucoup plus rapide. Les informations sur le temps de calcul sont détaillées dans le paragraphe suivant.

### II.6.4 Temps de calcul

Nous allons illustrer le gain de temps de calcul. Le tableau II-1 présente le temps nécessaire pour établir les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$ . Parallèlement le tableau II-2 donne le temps nécessaire à l'algorithme

ordre polynômes	temps nécessaire (en s) au calcul des matrices			
	CS	PCA+CN	VC	COND
2	10,07	0,09	0,05	0,05
4	41,02	0,29	0,16	0,17
6	96,37	0,67	0,34	0,37
8	191,9 *	1,19	0,60	0,53
10	-	1,87 *	0,95	1,07
12	-	-	1,37 *	1,57
14	-	-	1,88 *	2,09
20	-	-	-	4,29
30	-	-	-	9,77
40	-	-	-	17,49
50	-	-	-	27,45
100	-	-	-	111,13

TAB. II-1 – Temps en seconde nécessaires pour calculer les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité (sur PIII - 1 GHz CPU). *CS*: calcul symbolique, *PCA*: pré-calcul analytique, *CN*: calcul numérique, *VC*: calcul avec variables complexes, *COND*: calcul avec matrices conditionnées.

\*: résultats du calcul imprécis ou faux (problème de conditionnement)

polyeig de MATLAB 5 pour fournir les valeurs propres et les vecteurs propres associés. La géométrie étudiée est le rotor présenté sur la figure II-6.

Dans les deux tableaux, la première colonne donne l'ordre  $n$  des polynômes utilisés pour définir les déformées radiales  $\underline{\Phi}$ . L'ordre du polynôme définissant la déformée angulaire  $\underline{\Theta}$  est pris d'un degré  $n - 1$ . Dans chacun des deux tableaux II-1 et II-2, les colonnes 2, 3, 4 et 5 présentent les temps de calculs avec les améliorations successives. Les abréviations suivantes sont utilisées dans les tableaux :

- **CS**: le temps mis pour le calcul symbolique des termes des matrices
- **PCA+CN**: le temps avec un pré-calcul analytique (PCA) et une programmation numérique
- **VC**: le temps avec le calcul précédent mais utilisant des variables complexes
- **COND**: enfin le temps du calcul précédent après conditionnement des matrices

Le tableau indique par une astérisque (\*) les calculs qui ont présenté des problèmes de conditionnement de matrices et qui n'ont pas donné de résultats satisfaisants.

La première information d'importance est la grande rapidité du calcul numérique par rapport au calcul symbolique. Les temps de calcul des matrices sont divisés par plus de 100.

L'utilisation de variables complexes qui divise par deux le nombre d'inconnues du problème et permet de diminuer d'autant les temps de calcul des matrices et des fréquences. Par contre, les problèmes de précision du calcul apparaissent pratiquement au même ordre de polynôme.

Le tableau confirme l'intérêt de la normalisation des déformations puisque des matrices de dimension  $200 \times 200$  sont alors bien gérées là où précédemment le calcul de matrices  $25 \times 25$  n'était pas possible dans de bonnes conditions. La taille des polynômes n'est limitée que par le temps nécessaire aux calculs, et non plus par la précision des calculs. Notons que si le calcul est possible, un ordre de

ordre polynômes	temps (en s) nécessaire au calcul des fréquences			
	CS	PCA+CN	VC	COND
2	0,01	0,01	0,01	0,02
4	0,02	0,03	0,02	0,02
6	0,04	0,06	0,02	0,02
8	0,12 *	0,11	0,02	0,03
10	-	0,21 *	0,05	0,04
12	-	-	0,07 *	0,06
14	-	-	0,11 *	0,08
20	-	-	-	0,18
30	-	-	-	0,65
40	-	-	-	1,64
50	-	-	-	3,34
100	-	-	-	28,62

TAB. II-2 – Temps en seconde nécessaires pour calculer les fréquences et vecteurs propres (fonction polyeig de MATLAB, sur PIII - 1 GHz CPU). CS : calcul symbolique, PCA : pré-calcul analytique, CN : calcul numérique, VC : calcul avec variables complexes, COND : calcul avec matrices conditionnées. \* : résultats du calcul imprécis ou faux (problème de conditionnement)

polynôme trop grand ne donne pas de déformées satisfaisantes pour autant.

Le temps de calcul est alors de l'ordre de celui dont le calcul symbolique avait besoin pour traiter des matrices  $24 \times 24$  et donner seulement les 6 premières fréquences.

Il faut noter que lorsque la précision du calcul excède celle autorisée en virgule flottante dans MATLAB, le logiciel remplace par 0,  $\pm\infty$  ou par NaN («Not a Number»), pour un résultat non défini (0/0). Le nombre de fréquences réellement calculées chute et les autres valeurs sont imprécises.

Ces résultats montrent que le dernier type de calcul (avec des variables complexes et numériques et des fonctions de déformations normalisées) permet d'utiliser des polynômes d'ordre 10 pour tester de grands nombres de géométrie de rotor, tout en gardant un temps de calcul raisonnable.

## II.7 Validation du modèle numérique

Dans ce paragraphe, nous allons réaliser l'étude d'une poutre de section circulaire constante et supportée à ses deux extrémités par des appuis simples (modélisés ici par une grande raideur de roulements à billes devant les autres grandeurs élastiques du système). Il s'agit de vérifier que le modèle donne des résultats acceptables en terme de précision par rapport aux résultats donnés par la simulation par éléments finis.

La géométrie étudiée est celle d'une barre cylindrique en acier ( $E = 210\,000$  MPa,  $G = 82\,000$  MPa,  $\nu = 0,374$  et  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>) de diamètre  $D = 8$  mm. Pour les longueurs  $L$  entre appuis choisis de 16, 24, 40, 56, 80, 100 et 120 mm, le rapport  $L/D$  est respectivement 2, 3, 5, 7, 10, 12,5 et 15.

Le tableau II-3 présente les résultats, concernant les deux premiers modes propres, obtenus par la méthode présentée précédemment, le logiciel de calcul RDM 5 (éléments finis à une dimension) et

L/D	première fréquence (Hz)				deuxième fréquence (Hz)			
	MDL	RDM5	CMS	erreur (%)	MDL	RDM5	CMS	erreur (%)
2	49336	48820	26115	+88,91	136282	116560	45346	+200,5
3	24857	24859	18154	+36,92	78189	73808	37627	+107,8
5	9672	9682	8974	-7,77	34400	34045	25272	+36,11
7	5052	5055	5054	-0,04	18877	18854	16922	-11,55
10	2507	2508	2562	-2,14	9687	9682	9486	-2,18
12.5	1612	1612	1689	-4,55	6299	6302	6454	-2,40
15	1122	1122	1173	-4,35	4415	4417	4565	-3,28

TAB. II-3 – Première et deuxième fréquences propres données par le modèle (MDL) avec appuis simples rigides, le logiciel RDM 5 et le code de calcul par éléments finis COSMOS/M (CMS) pour une barre cylindrique en acier de longueur  $L$  et de diamètre  $D = 8$  mm en fonction du rapport  $L/D$  – Erreur du modèle par rapport au résultat de référence donné par COSMOS/M.

ceux obtenus par la méthode des éléments finis du logiciel *COSMOS/Geostar* en 3D. L'erreur relative sur les fréquences de chaque mode permet de rendre compte de la précision du modèle présenté.

Les résultats du modèle sont pratiquement identiques à ceux du logiciel *RDM 5*, qui utilise les mêmes hypothèses de la résistance des matériaux, avec une discrétisation de la poutre en éléments finis à une dimension. Pour des résultats de qualité presque équivalentes, le modèle permet une modélisation beaucoup plus rapide.

Pour la première fréquence propre, une bonne corrélation est observée entre les résultats obtenues par le modèle de la poutre de Timoshenko et les résultats donnés par le logiciel de calcul par éléments finis. Une barre de rapport  $L/D = 5$  est encore assez bien modélisée (7% d'erreur). Par la suite pour une barre courte, l'erreur devient prohibitive (plus de 88% lorsque  $L/D = 2$ ). Le logiciel *RDM 5* commet d'ailleurs des erreurs du même ordre. Les limites des hypothèses de la RDM sont donc clairement mises en évidence par ces résultats peu engageants. La deuxième fréquence observe même une dérive encore plus accentuée et le modèle n'est juste que lorsque le rapport  $L/D$  reste au delà de 7.

La grande différence entre les résultats et la simulation impose de vérifier l'origine de cette divergence dans les calculs. Cette erreur est due à l'application de la résistance des matériaux et du principe de Barré de Saint-Venant dans le domaine d'application de la théorie de l'élasticité. Il est en effet constaté, dans les simulations par éléments finis, que l'influence de la répartition des forces extérieures sur la section a une importance dans la répartition des contraintes internes et sur la déformation, donc les fréquences propres sont elles aussi modifiées.

Pour appliquer les conditions aux limites correspondant à un appui simple, on est contraint de bloquer les 3 degrés de liberté en translation d'un noeud à une extrémité de la barre. À l'autre extrémité, la liberté axiale en translation est préservée et la rotation autour de l'axe est bloquée à l'un ou l'autre bout indifféremment. En chaque noeud bloqué, tout se passe alors comme si une force

L/D	1 <sup>ère</sup> fréquence (Hz)			2 <sup>ème</sup> fréquence (Hz)			3 <sup>ème</sup> fréquence (Hz)		
	MDL	CMS	erreur (%)	MDL	CMS	erreur (%)	MDL	CMS	erreur (%)
2	27579	26115	+5,60	48675	45346	+7,34	110564	110980	-0,37
3	18573	18154	+2,30	39697	37627	+5,50	69185	68251	-1,368
5	8872	8974	-1,13	26001	25272	+2,88	42601	41013	+3,87
7	4881	5054	-3,42	16713	16922	-1,23	30364	29952	+1,37
10	2476	2562	-3,35	9246	9486	-2,53	18732	18922	-1,00
12.5	1601	1689	-5,21	6149	6454	-5,16	12978	13489	-3,78
15	1118	1173	-4,68	4353	4565	-4,64	9388	9785	-4,05

TAB. II-4 – Première, deuxième et troisième fréquences propres données par le modèle (MDL) avec appuis simples élastiques et le code de calcul par éléments finis COSMOS (CMS) pour une barre cylindrique en acier de longueur  $L$  et de diamètre  $D = 8$  mm en fonction du rapport  $L/D$  – Erreur du modèle par rapport au résultat donné par COSMOS/M.

ponctuelle était appliquée, ce qui entraîne alors une discontinuité d'effort qui ne peut exister en réalité. De plus un déplacement entre les contours de la section droite et son centre est observé, ce qui n'est d'une part pas modélisé dans la RDM et d'autre part peu réaliste compte tenu du fait que des efforts de contact sont nécessairement appliqués à l'extérieur du solide. Ce déplacement tend à diminuer la rigidité globale de l'ensemble. L'influence est négligeable dans le cadre du principe de Saint-Venant mais lorsque la longueur est faible, les résultats sont fortement modifiés.

Afin de vérifier que c'est bien la modélisation des appuis simples qui génère la majeure partie de l'erreur du modèle, on cherche la valeur de la raideur des points d'appuis pour l'injecter dans le modèle sous forme de ressorts.

Pour connaître la valeur réelle de la raideur des points d'appuis, on étudie une poutre de longueur et de diamètre 8 mm en acier. Celle-ci est bien plus rigide que la raideur des appuis simples (modélisés par blocage en translation des noeuds comme expliqué ci dessus). On a une analogie avec un modèle à 1 DDL axial ou radial (masse  $m$  supportée par deux ressorts de raideur  $k$ ). La visualisation des déformées dans le logiciel de calcul par éléments finis confirme la remarque précédente. La masse étant connue, on retrouve la valeur de la raideur radiale directement à partir de la fréquence  $f$  donnée par la formule :

$$k = \frac{m}{2}(2\pi f)^2 \quad (\text{II-79})$$

La masse de la poutre donnée en exemple est de  $3,16 \times 10^{-3}$  kg et la fréquence de vibration du mode cylindrique obtenue est de 44828 Hz. La raideur radiale équivalente de l'appui simple est alors de  $125,2 \times 10^6$  N/m. On injecte cette valeur dans le modèle présenté, en supposant que cette raideur est égale à la raideur radiale d'un roulement. On obtient alors les résultats reportés dans le tableau II-4.

Les résultats sont par conséquent grandement améliorés. L'erreur reste en deçà de 7,5 % même en ce qui concerne la troisième fréquence propre.

Ces résultats permettent de valider en partie le modèle. En effet nous montrons par cette étude



$d_{axe1}$	$d_{axe2}$	$d_a$	$d_s$	$L_a$	$L_b$	$L_s$
6	8	20,4	5,5	17	40	20

TAB. II-5 – Valeurs des cotes du rotor en millimètres (voir figure II-6).

que la déformée utilisée (ici un polynôme d'ordre 10) donne une bonne approche de la déformée réelle. Les valeurs des fréquences sont estimées assez précisément dès lors que l'on connaît la répartition des efforts extérieurs. On a aussi mis en évidence que la modélisation d'un appui simple en bloquant les noeuds ne reflète pas correctement la réalité et peut fortement influencer le résultat. On a montré qu'une étude approfondie des efforts de contact doit être faite afin de bien cerner la physique mise en jeu, et obtenir ainsi des résultats satisfaisants pour la suite.

Il est possible d'exploiter au mieux les possibilités du logiciel d'éléments finis, en lui faisant réaliser l'analyse des modes rigides. La pièce n'étant soumise à aucune condition aux limites peut se mouvoir librement suivant les 6 degrés de liberté de l'espace. L'utilisateur exploitera donc les fréquences obtenues par le calcul à partir de la septième. Les six premières sont en effet toutes nulles et associées aux modes rigides (non représentatifs). L'inconvénient de cette méthode est de devoir ensuite orienter soi-même les tracés de *COSMOS* afin que ces derniers soient vus dans le plan où les déformations sont d'amplitude maximale.

Dans la section suivante, nous allons appliquer le modèle au cas d'un rotor axisymétrique.

## II.8 Dynamique d'un rotor axisymétrique

Dans cette section, nous allons étudier le comportement dynamique d'un rotor, dont les dimensions sont celles de l'actionneur développé par Fayard [1, 28].

Dans un premier temps, la géométrie du rotor et les matériaux utilisés pour sa fabrication sont présentés. Puis la méthodologie utilisée pour le calcul par éléments finis, dont les résultats sont pris comme référence, est décrite. Les résultats obtenus par le modèle numérique présenté précédemment sont comparés aux résultats donnés par la méthode des éléments finis.

### II.8.1 Géométrie étudiée et matériaux utilisés

La géométrie étudiée est celle d'un rotor dont la description est présentée sur la figure II-6. Il présente un axe traversant, supporté par deux roulements SNFA VEX 6/NS7, sur lequel sont frettées les tôles magnétiques. Deux pièces coniques viennent immobiliser axialement le noyau feuilleté.

La valeur des cotes en mm représentées sur la figure II-6 sont données dans le tableau II-5. Il est à noter que dans les problèmes de calculs non linéaires, comme le sont les études fréquentielles, les unités employées doivent être celles du système MKS et l'utilisation des sous-multiples ne peut en aucun cas être réalisée.

Les matériaux utilisés dans la simulation sont pour l'axe, de l'acier inoxydable ( $E=210\ 000$  MPa,

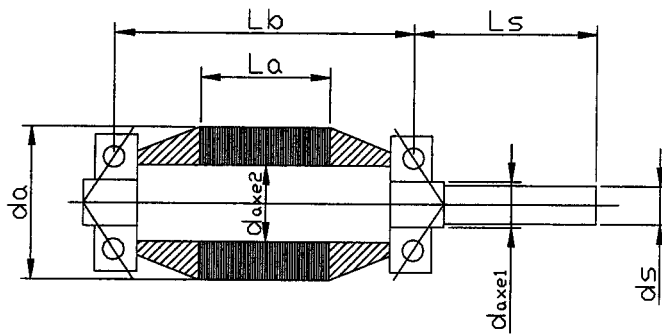


FIG. II-6 – Structure du rotor étudié

$\nu = 0,27$ ,  $\rho = 7\,850\text{ kg/m}^3$ ) et pour les pièces coniques de centrage, de l'alliage d'aluminium AU4G ( $E=75\,000\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,35$ ,  $\rho = 2\,800\text{ kg/m}^3$ ). Les propriétés du noyau feuilleté sont calculées à partir de tôles en fer doux ( $E=110\,000\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,31$ ,  $\rho = 7\,850\text{ kg/m}^3$ ) collées par une colle époxyde ( $E=5\,000\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,4$ ,  $\rho = 1\,200\text{ kg/m}^3$ ). Les caractéristiques ainsi obtenues sont  $E=35\,700\text{ MPa}$ ,  $G = 12\,992\text{ MPa}$  et  $\rho = 7\,190\text{ kg/m}^3$  pour un coefficient de foisonnement de 0,89 (rapport de l'épaisseur de tôles sur l'épaisseur totale du noyau).

Les résultats de référence pour le calcul de l'erreur sont ceux fournis par la méthode des éléments finis. Parallèlement, les raideurs des roulements sont mises à une valeur négligeable ( $1\text{ N/m}$ ) devant les autres grandeurs du rotor.

### II.8.2 Modélisation par élément finis

Le modèle éléments finis est réalisé avec le logiciel *COSMOS/Designstar* développé par *Structural Research and Application Corporation* grâce à une interface avec le programme de conception assistée par ordinateur *Autodesk Inventor 5.3*.

Le maillage est réalisé par des éléments tétraédriques et comporte au total 35000 éléments environ. La taille d'un élément est définie dans *COSMOS/designstar* comme la longueur des arêtes des éléments. La taille globale des éléments est de 2,1 mm. Au niveau de l'axe et des cones, la taille des éléments est imposée à 0,7 mm au moyen de l'option de contrôle du maillage, afin d'améliorer la précision du calcul. Une visualisation du maillage est montrée sur la figure II-7. Le logiciel étant capable d'analyser et de soustraire les mouvements de corps solides, nous avons modélisé le rotor libre dans l'espace.

### II.8.3 Résultats

Le tableau II-6 montre les résultats fréquentiels obtenus, d'une part, en appliquant le modèle présenté à la géométrie décrite précédemment, et d'autre part en réalisant la simulation par éléments finis. L'erreur relative est calculée en prenant comme référence le calcul par éléments finis.

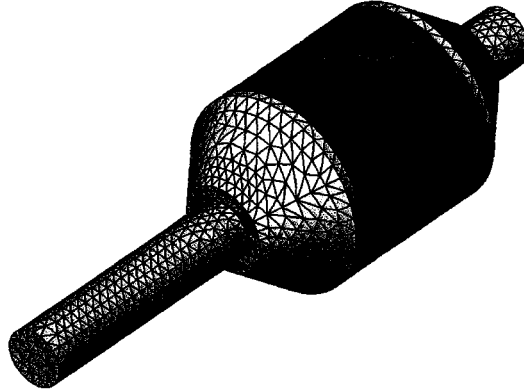


FIG. II-7 – Maillage en éléments tétraédriques du rotor.

ordre n polynôme déformée	1 <sup>ère</sup> fréquence (Hz)			2 <sup>ème</sup> fréquence (Hz)			3 <sup>ème</sup> fréquence (Hz)		
	MDL	C/M	erreur (%)	MDL	C/M	erreur (%)	MDL	C/M	erreur (%)
5	12039	7870	+52,9	33550	27805	+20,66			
10	8745	7870	+11,1	29141	27805	+4,80	43089	39260	+9,75
15	8348	7870	+6,07	28298	27805	+1,77	41390	39260	+5,42
20	8170	7870	+3,81	28194	27805	+1,39	41127	39260	+4,75

TAB. II-6 – Première, deuxième et troisième fréquences propres données par le modèle (MDL) et le code de calcul par éléments finis COSMOS/M (CMS) pour le rotor de la figure II-6 avec les dimensions du tableau II-5 en fonction de l'ordre  $n$  du polynôme choisi pour décrire la déformée.

Les résultats montrent que le modèle donne des résultats satisfaisants (erreur inférieure à 5%) du moins si l'ordre du polynôme est suffisamment élevé ( $n \geq 15$ ). En effet, les formes propres obtenues sont assez complexes du fait des changements de section brusques ou continus. La forme propre étant de mieux en mieux décrite, la valeur propre s'approche du résultat numérique. On note que dans le même temps, le polynôme d'ordre 5 ne décrit pas convenablement la troisième fréquence (la troisième valeur donnée est de l'ordre de 60 000 Hz et la forme propre n'est pas comparable à celle de référence).

On remarque par ailleurs que le modèle surestime légèrement la première fréquence propre (+3,81%). Cette difficulté provient de la description simplifiée des changements brusques de section. L'hypothèse de l'entière contribution de la section à la résistance au moment fléchissant n'est pas vérifiée quand la section droite varie fortement. Le modèle surestime donc la rigidité du rotor, et la fréquence également lorsque la déformée présente de fortes courbures en ces points particuliers. Cela peut être modélisé par un angle différent avant et après le changement de section, avec une rigidité angulaire, comme cela est fait par exemple, lors de l'étude de fissures dans des rotors [40]. À ce moment là, il n'est malheureusement plus possible d'utiliser une seule fonction de déformation pour le rotor complet.

Les figures II-8 à II-10 présentent les résultats obtenus en terme de formes propres. Pour chacune des trois figures, les formes données par la méthode des éléments finis sont présentées à gauche (a), les résultats de notre méthode sont montrés à droite (b). Concernant les tracés, ils sont réalisés dans les

deux cas en trois dimensions. Une rotation adéquate du dessin permet une visualisation dans le plan de la plus grande déformation. L'orientation identique permet une bonne comparaison des résultats.

Les figures II-8 à II-10 montrent que le calcul approché fournit une bonne estimation de la forme de chacun des trois modes, en dépit d'une géométrie déjà assez complexe.

### II.8.3.A Résultats en trois dimensions

Les déformations calculées étant tridimensionnelles, il est possible de tracer les résultats dans un espace à trois dimensions. Chaque section est alors vue sous la forme d'une ellipse, dont chaque point est tracé en coordonnées  $(x,y,z)$ . La figure II-11 présente une illustration tridimensionnelle de ce type de résultats. Les ellipses sont tracées partiellement (partie cachée non visible) afin d'appréhender le volume et l'orientation du rotor.

### II.8.3.B Diagrammes de Bode et diagramme de phase

Une fois les matrices de masse, de couplage et de raideur obtenues, on peut aisément calculer la réponse en fréquence du rotor à une excitation, par exemple un balourd. La valeur du balourd est prise de 0,01 g.mm, ce qui correspond au balourd résiduel après équilibrage du rotor. La position du balourd sur le rotor peut être choisie. On étudie l'influence d'un déséquilibre placé en bout de l'axe sortant du rotor, et d'un balourd situé au centre de la partie active. Après avoir calculé la force notée  $Q$ , en coordonnées généralisées, on calcule le vecteur des coordonnées généralisées  $q$  par la formule :

$$q = (K - M\omega^2 + i\omega C\Omega)^{-1} Q \quad (\text{II-80})$$

où  $\Omega$  est la vitesse du rotor en rad/s. Le terme  $(K - M\omega^2 + i\omega C\Omega)^{-1}$  correspond à la matrice de réceptance du système [32]. Dans le cas d'une excitation synchrone, la pulsation de la force  $\omega$  est égale à la vitesse de rotation  $\Omega$ .

Pour chaque valeur de  $\Omega$ , on trace alors l'amplitude des vibrations de certains points particuliers de l'axe.

La figure II-12 montre les points du rotor où les déformations sont évaluées à chaque fréquence. Les points choisis sont ceux qui permettent d'identifier les modes de vibration (forme propre). Pour chaque point choisi, les diagrammes de l'amplitude et de la phase peuvent être tracés. Les vitesses critiques apparaissent alors clairement sous la forme de pics d'amplitude. Dans la suite, nous étudierons les déplacements des points relatifs à l'axe sortant, notés Centre Axe et Bout Axe sur la figure, puis les déplacements relatifs au noyau (Bord Gauche noyau et Centre noyau) et enfin les déplacements concernant les roulements gauche et droit.

Les figures II-13 et II-14 présentent l'amplitude et la phase des vibrations des deux roulements supportant le rotor, pour un balourd de 0,01 g.mm respectivement situé au centre de la partie active ou à l'extrémité de l'axe sortant.

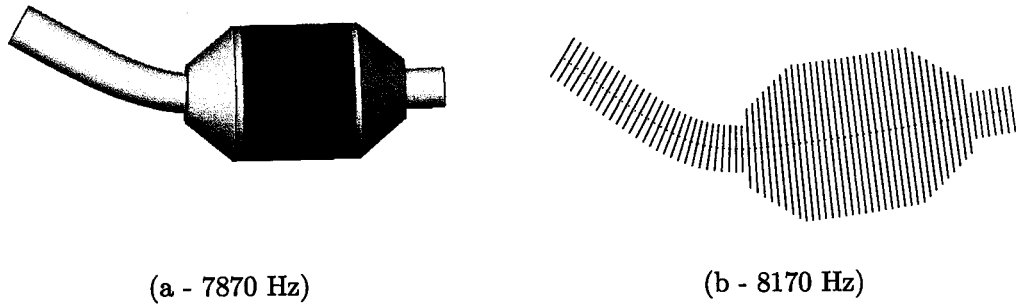


FIG. II-8 – Mode propre associé à la première fréquence.  
 (a) : résultats (forme et fréquence) donnés par la méthode des éléments finis (COSMOS/M).  
 (b) : résultats donnés par notre méthode.

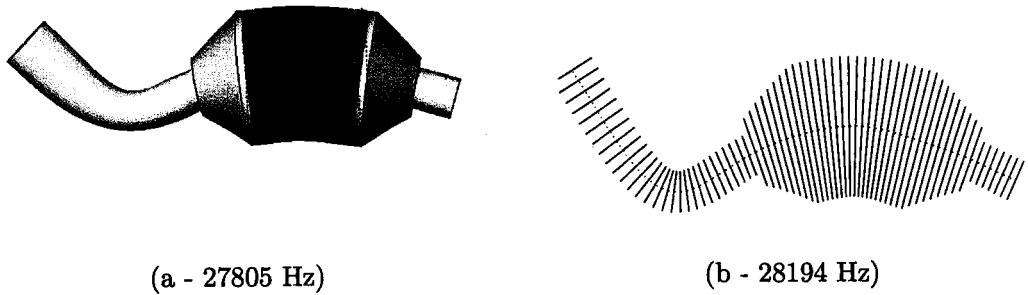


FIG. II-9 – Mode propre associé à la deuxième fréquence.  
 (a) : résultats (forme et fréquence) donnés par la méthode des éléments finis (COSMOS/M).  
 (b) : résultats donnés par notre méthode.

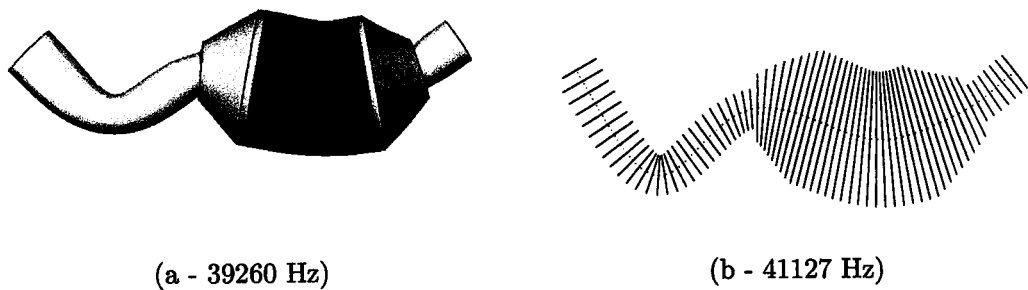


FIG. II-10 – Mode propre associé à la troisième fréquence.  
 (a) : résultats (forme et fréquence) donnés par la méthode des éléments finis (COSMOS/M).  
 (b) : résultats donnés par notre méthode.

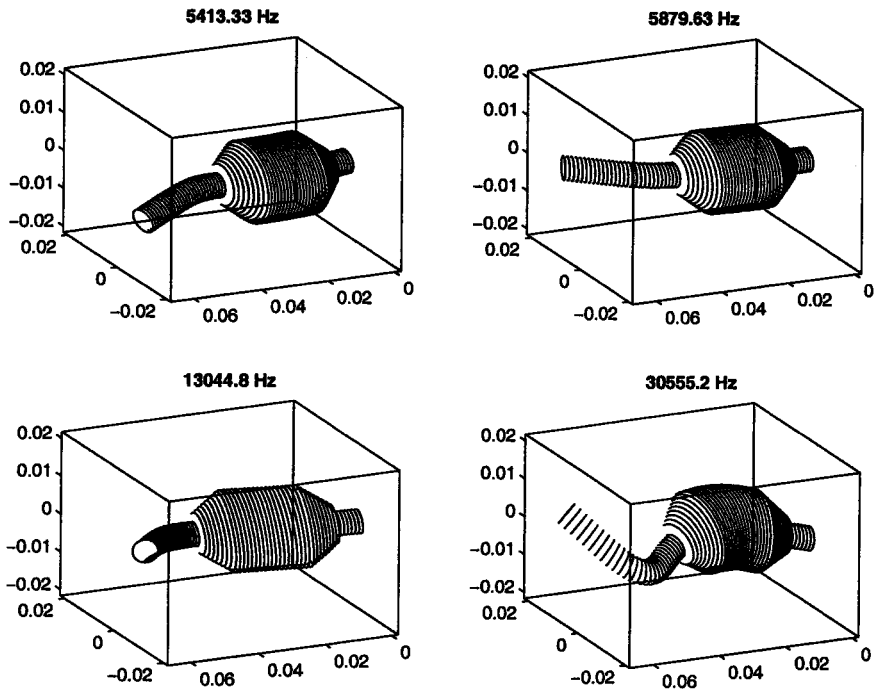


FIG. II-11 – Visualisation en 3D des déformations, fréquences associées dans le cas du rotor (présenté sur la figure II-6) supporté par des roulements VEX 6/NS 7

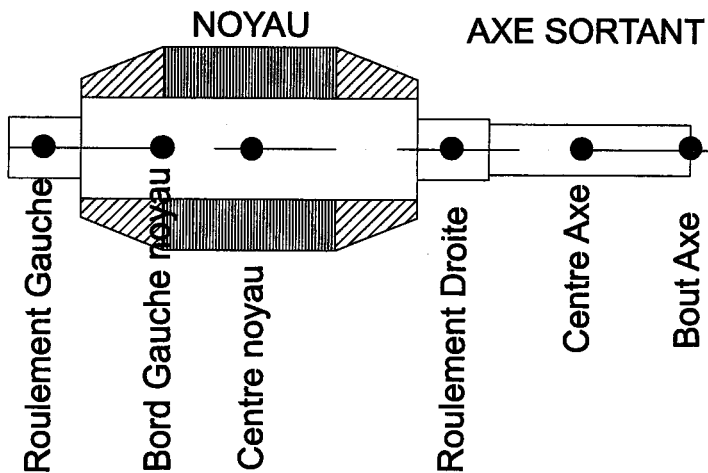


FIG. II-12 – Points du rotor où les déformations sont étudiées (figures II-13 à II-16)

Les figures II-15 et II-16 présentent l'amplitude et la phase des vibrations des deux points situés au bord gauche et au centre du noyau, pour un balourd de 0,01 g.mm respectivement situé au centre de la partie active ou à l'extrémité de l'axe sortant.

Les figures II-17 et II-18 présentent l'amplitude et la phase des vibrations des deux points situés au centre et à l'extrémité de l'axe sortant, pour un balourd de 0,01 g.mm respectivement situé au centre de la partie active ou à l'extrémité de l'axe sortant.

Les figures II-13 et II-14 montrent clairement les valeurs des vitesses critiques. On relève par exemple les premiers pics de résonance aux vitesses d'environ 33 000, 44 000, 310 000 et 420 000 rad/s. Les deux premiers modes séparés par une anti-résonance correspondent à un même mode dédoublé par l'effet gyroscopique. Les pics de résonance entraînent des déformations importantes ( $> 10 \mu m$ ) des roulements. À court terme, ces déformations provoquent des contraintes destructrices dans les roulements à billes.

Les figures II-15 et II-16 montrent les mêmes vitesses critiques que précédemment. Le déplacement du centre du noyau est maximal lorsque l'excitation est située en ce même point. Un pic très important est visible sur la figure II-15 pour la vitesse de 32 000 rad/s environ. Son amplitude est de l'ordre de 0,05 mm, d'où un risque important de contact entre le rotor et le stator.

En étudiant conjointement la valeur des déformations au bord gauche et au centre du noyau, on détecte les modes où le déplacement du noyau est de mode plutôt cylindrique (déplacements de même amplitude) ou plutôt conique (déplacements plus importants au bord qu'au centre du noyau). L'excitation du centre du noyau excite essentiellement les modes de type cylindriques. L'excitation en bout d'axe excite tous les modes.

Les figures II-17 et II-18 montrent les vitesses critiques où les déplacements de l'axe sont maximaux. Ces déplacements sont d'amplitude très importantes lorsque le balourd est placé au bout de l'axe. Le premier mode à 32 000 rad/s en est un exemple. Pour résoudre le problème de ces vibrations, il faudra soit modifier la géométrie de la tige (longueur plus faible ou diamètre supérieur), ou utiliser un matériau pour l'axe avec un meilleur rapport module de Young / masse volumique que celui de l'acier.

#### II.8.4 Conclusion concernant le modèle numérique

Les résultats donnés par le modèle pour la géométrie du rotor développée par Fayard [1] sont encourageants. Le modèle fournit les bons ordres de grandeur pour les fréquences de résonance, ainsi que des formes propres réalistes. Le modèle peut donc être utilisé pour estimer la dynamique du rotor.

De plus, en terme de temps de calcul, le modèle fournit le résultat beaucoup plus rapidement. Le calcul (matrices  $40 \times 40$ , fréquences et déformées) puis l'exploitation des résultats (recherche de l'amplitude maximale de déformation, calcul de l'échelle et tracé en 3D de chaque section du rotor) nécessitent un temps processeur de 8 s environ (sur PIII-1GHz). Les mesures du temps de calcul sont

réalisées grâce à l'instruction *cputime* de *MATLAB* qui retourne la valeur absolue de l'horloge du processeur. En comparaison, le temps de calcul nécessaire pour obtenir les mêmes résultats par la méthode des éléments finis (module *Fast Finite Elements (FFE)* de *COSMOS/Designstar* avec 23400 DDL - processeur PIII 800 MHz) est d'environ 3 minutes.

À ce temps de calcul, il faut ajouter les temps nécessaires à la modélisation CAO, à l'importation de la géométrie dans le logiciel *COSMOS/designstar*, à la définition de l'étude fréquentielle, au processus de maillage et enfin à l'analyse des résultats (extraction des fréquences de vibrations radiales et choix des tracés). L'ensemble de ces opérations et la simulation prend environ 5 minutes dans le cadre d'un calcul répétitif (avec une simple modification de la géométrie déjà conçue).

Un calcul itératif (boucles de programmes) est réalisable aisément à partir du modèle. En revanche, sa mise en oeuvre n'est pas possible avec la version du logiciel dont nous disposons. L'automatisation des procédures de maillage nécessite par ailleurs une connaissance peu commune des fonctionnalités du code de calcul.

Compte tenu des résultats acceptables et du temps de calcul près de 40 fois inférieur, le modèle proposé est une bonne alternative à l'analyse par éléments finis, lors de la recherche d'une géométrie optimisée d'un point de vue vibratoire.

Cette méthode reste cependant numérique, elle ne permet pas de réaliser une optimisation par des méthodes analytiques. Un autre modèle va être présenté dans la section suivante, afin d'obtenir une expression analytique des fréquences propres du rotor en fonction de tous les paramètres dimensionnels et les propriétés des matériaux.



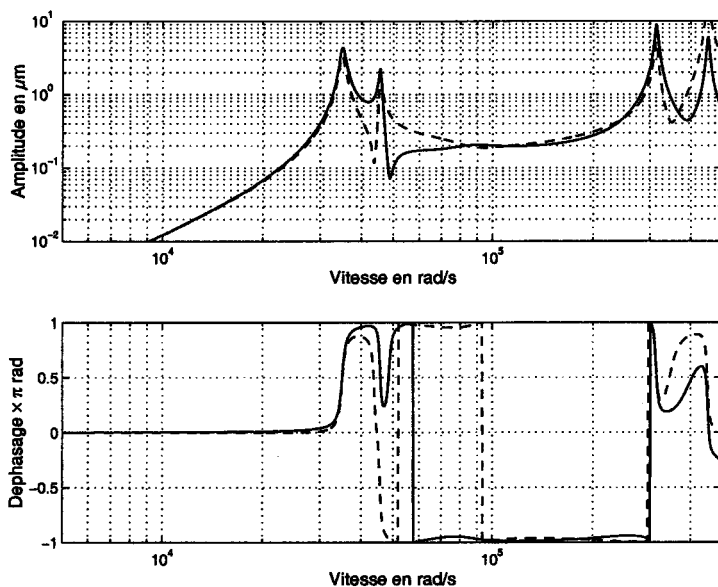


FIG. II-13 – Amplitudes en  $\mu\text{m}$  et phase des vibrations au niveau des roulements de gauche (tirets) et de droite (trait plein) pour un balourd de 0,01 g.mm situé au centre de la partie active.

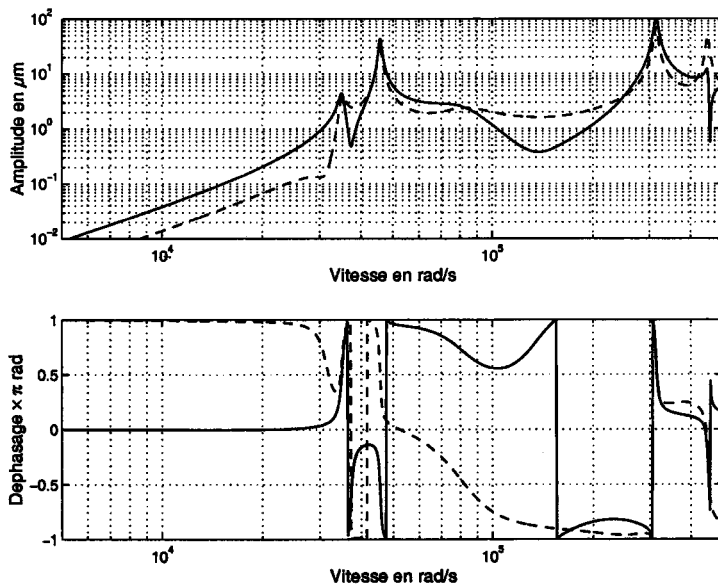


FIG. II-14 – Amplitudes en  $\mu\text{m}$  et phase des vibrations au niveau des roulements de gauche (tirets) et de droite (trait plein) pour un balourd de 0,01 g.mm situé à l'extrémité de l'axe sortant.

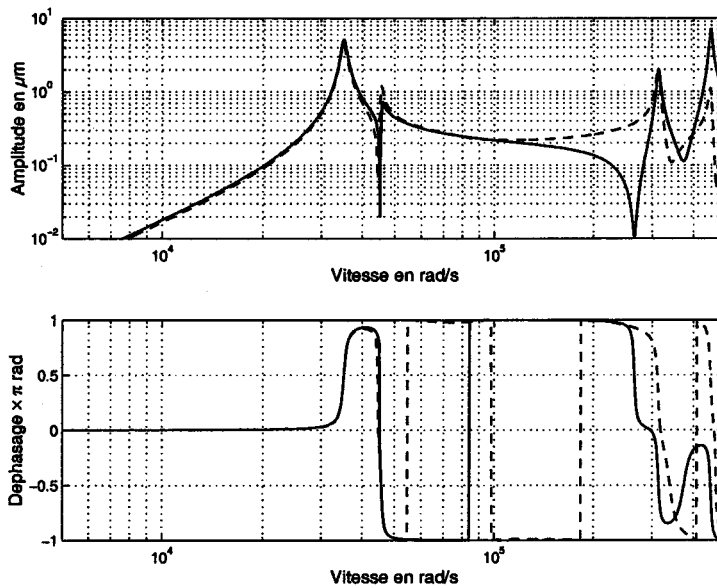


FIG. II-15 – Amplitudes en  $\mu\text{m}$  et phase des vibrations au niveau du bord gauche (tirets) et du centre du noyau (trait plein) pour un balourd de 0,01 g.mm situé au centre de la partie active.

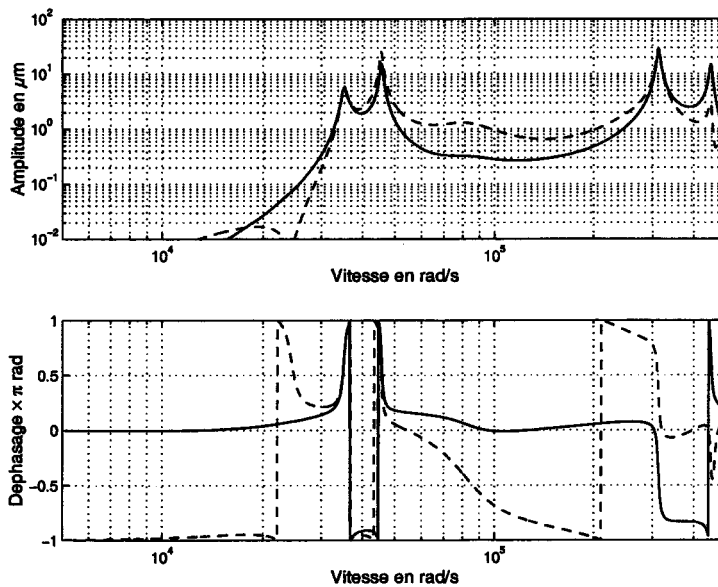


FIG. II-16 – Amplitudes en  $\mu\text{m}$  et phase des vibrations au niveau du bord gauche (tirets) et du centre du noyau (trait plein) pour un balourd de 0,01 g.mm situé à l'extrémité de l'axe sortant.

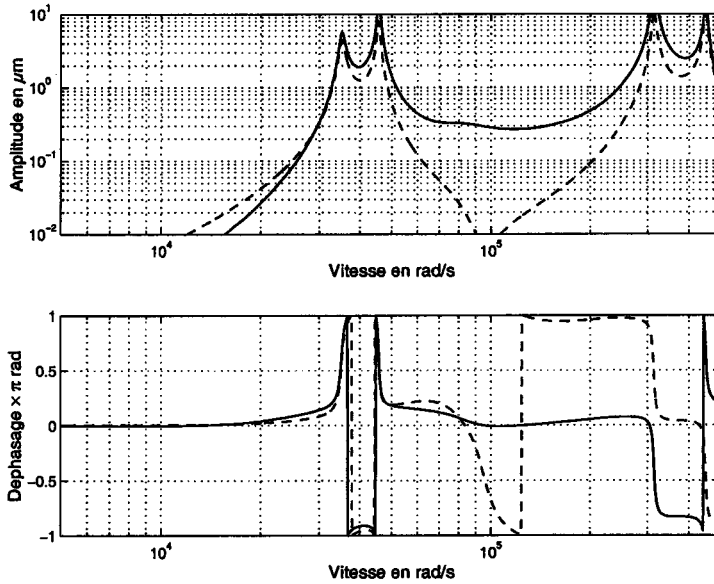


FIG. II-17 – Amplitudes en  $\mu\text{m}$  et phase des vibrations au niveau au centre (tirets) et à l'extrémité de l'axe sortant (trait plein) pour un balourd de 0,01 g.mm situé au centre de la partie active.

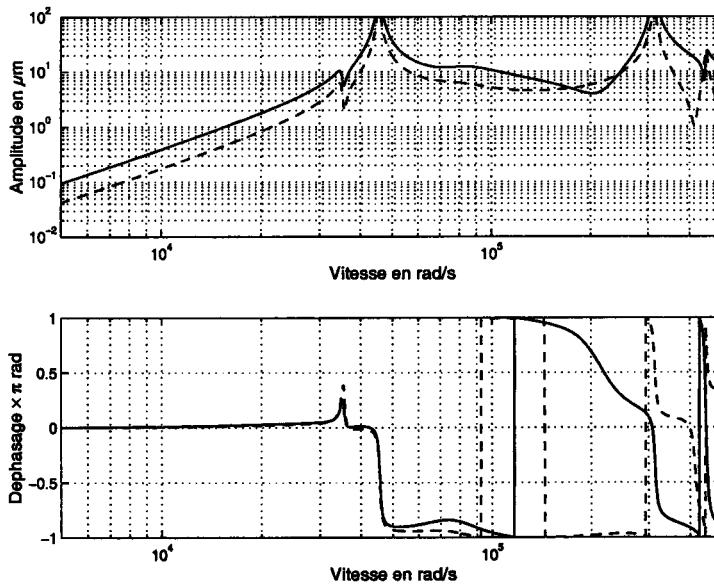


FIG. II-18 – Amplitudes en  $\mu\text{m}$  et phase des vibrations au niveau au centre (tirets) et à l'extrémité de l'axe sortant (trait plein) pour un balourd de 0,01 g.mm situé à l'extrémité de l'axe sortant.

## II.9 Méthode explicite pour l'estimation des premières fréquences critiques

L'objectif est d'avoir un outil d'estimation des premières fréquences propres du rotor et une expression analytique de ces fréquences, afin de connaître l'influence d'une modification de la géométrie ou des matériaux sur le comportement dynamique global du rotor.

### II.9.1 Modes cylindrique, conique et axial (mouvements de corps rigides)

Les mouvements dits de corps rigide sont ceux qui ne font intervenir aucune déformation à l'intérieur du corps en mouvement. Le corps se déplace donc d'un bloc suivant trois mouvements possibles :

- Suivant un mouvement de translation perpendiculaire à l'axe du rotor. La trajectoire des points de l'axe du rotor génère alors un cylindre d'où le nom de mode cylindrique associé à ce mouvement (figure II-20);
- Suivant un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe du rotor. La trajectoire des points de l'axe du rotor sur un tour de rotor génère alors un cône, d'où le nom de mode conique associé à ce mouvement (figure II-21);
- Suivant un mouvement de translation parallèle à l'axe du rotor, d'où le nom de mode axial associé à ce mouvement (figure II-22).

Les fréquences associées à ces modes de vibrations sont fonctions de la rigidité des roulements, qui sont utilisés pour guider le rotor, de la masse et de l'inertie de ce dernier. L'effet gyroscopique n'est pas pris en compte dans les formules suivantes.

Dans ce calcul des mouvements de corps rigides, les notations suivantes sont utilisées.  $K_r$ ,  $K_a$  et  $K_\theta$  sont respectivement les raideurs radiale, axiale et angulaire du roulement. Les valeurs de  $K_a$  et  $K_r$  sont calculées en fonction de la précharge et de la géométrie du roulement [41, 31]. Les rigidités du roulement sont calculées par sommation des efforts des billes sur la cage. Le comportement des billes est approché par un développement limité autour du point de fonctionnement.

La figure II-19 représente le montage des roulements (à gauche) et le modèle équivalent utilisé pour réaliser les calculs (à droite). Les tailles de traits utilisés pour dessiner les ressorts permettent de comparer visuellement les raideurs des différents ressorts.

La précharge élastique et purement axiale est appliquée au roulement de gauche par appui d'un ressort de compression sur sa bague extérieure, de sorte que la rigidité axiale du roulement se trouve en série avec celle du ressort de précontrainte. La raideur de ce ressort est notée  $K_{spr}$ .

$\lambda L_b$  représente la longueur entre le centre du roulement de gauche et le centre de gravité du rotor. Par conséquent,  $(1 - \lambda) L_b$  est la longueur entre le centre de gravité et le roulement de droite.  $\lambda$  serait égale à 0,5 si le rotor était symétrique, l'axe sortant vient légèrement modifier cette valeur (l'axe étant

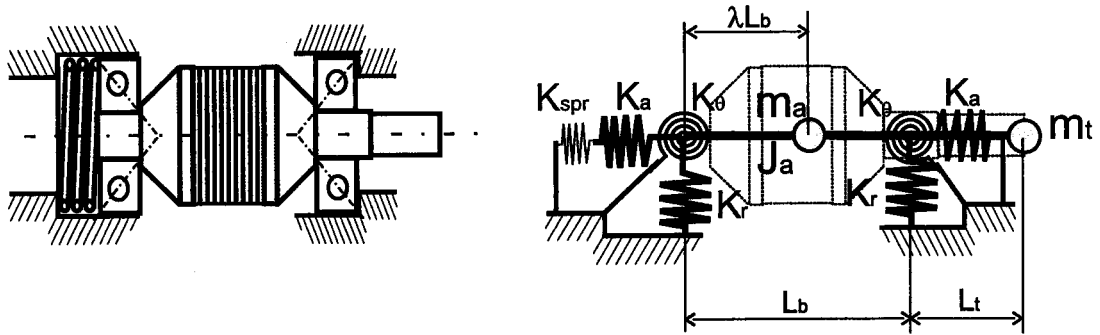


FIG. II-19 – Schéma du rotor et des roulements précontraints par ressort (à gauche), modélisation mécanique des roulements et paramètres utilisés pour les calculs des modes rigides (à droite). Chaque élément et sa modélisation sont représentés avec la même couleur.

à droite,  $\lambda$  et supérieur à 0,5). La valeur de  $\lambda$  est très facilement obtenue par un calcul barycentrique, qui donne l'expression suivante :

$$\lambda = \frac{m_r L_b + m_t (L_b + L_t)}{(m_r + m_t) L_b} \tag{II-81}$$

avec  $m_r$  la masse de la partie du rotor située entre les deux roulements et  $m_t$  la masse de l'axe sortant.

La pulsation  $\omega_1$  du mode cylindrique (voir figure II-20) est donnée par la formule suivante [35] :

$$\omega_1^2 = \frac{2 K_r}{m_r + m_t} \tag{II-82}$$

La pulsation  $\omega_2$  du mode conique (voir figure II-21) peut être calculée par la formule :

$$\omega_2^2 = \frac{K_r ((\lambda L_b)^2 + (1 - \lambda)^2 L_b^2) + 2 K_\theta}{J_r} \tag{II-83}$$

où  $J_r$  est le moment d'inertie du rotor autour de l'axe passant par le centre de gravité. En pratique, les valeurs de  $K_\theta$  sont très inférieures à celles de  $K_r L_b^2$ . Pour un roulement SNFA VEX6/NS7,  $K_\theta$  est de l'ordre de 100 N.m/rad, alors que  $K_r L_b$  est de l'ordre de 20 000 N.m/rad (si  $L_b = 0,04$ ). Cela justifie l'habituelle modélisation cinématique des roulements à billes par des liaisons rotules (les 3 rotations sont possibles) étant donnée la faible rigidité angulaire.

Le mode axial (voir figure II-22) donne quant à lui une pulsation propre  $\omega_3$  donnée par :

$$\omega_3^2 = \frac{K_a + K_{a1}}{m_r + m_t} \tag{II-84}$$

où  $K_{a1}$  est la raideur équivalente des raideurs  $K_a$  et  $K_{spr}$  en série.  $K_{a1}$  est donnée par :

$$K_{a1} = \frac{K_a K_{spr}}{K_a + K_{spr}} \tag{II-85}$$

$K_{spr}$  étant très faible devant  $K_a$ , on a  $K_{a1} \approx K_{spr}$ .

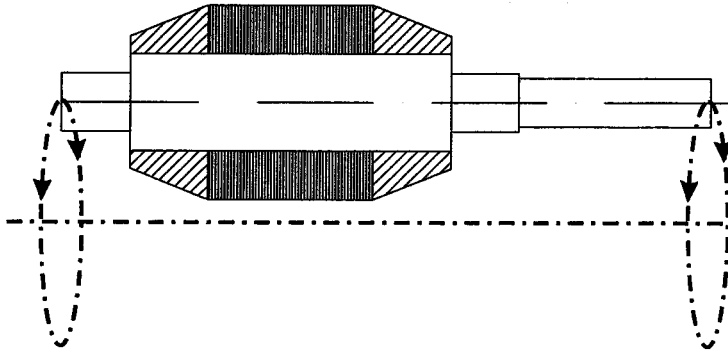


FIG. II-20 – *Mouvement de corps rigide - Mode cylindrique.*

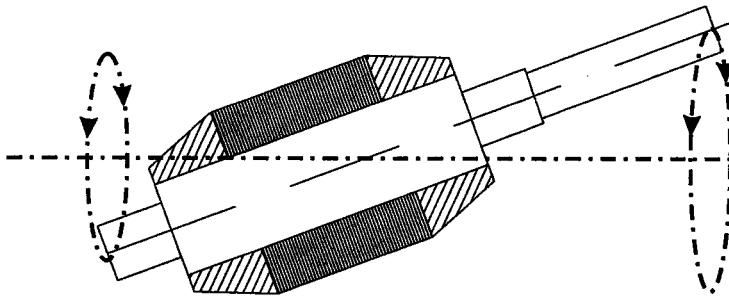


FIG. II-21 – *Mouvement de corps rigide - Mode conique.*

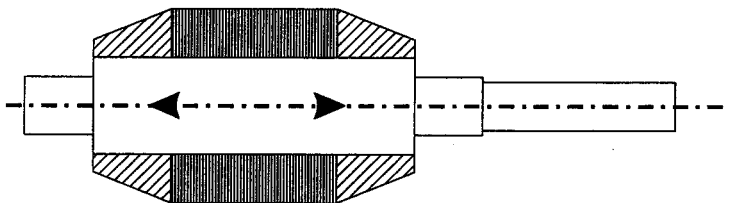


FIG. II-22 – *Mouvement de corps rigide - Mode axial.*

Fréquences en Hz		
Mode axial	Mode cylindrique	Mode conique
2064	6189	9374

TAB. II-7 – *Fréquences propres de modes rigides.*

Ces formules simples constituent souvent une première approche unidimensionnelle des vibrations des machines. Elle a été utilisée dans le cadre de l'étude du rotor, mais les résultats obtenus sont très supérieurs à la réalité. En effet, lorsque la rigidité des roulements est du même ordre de grandeur que celles associées aux modes de flexion, la contribution des modes flexibles du rotor devient importante. Les fréquences des modes flexibles passent en deçà de celles associées aux mouvements rigides. Dans le cas du rotor, nous avons montré que les résultats en mode rigide calculés en première approche par Fayard [1] étaient bien supérieurs à ceux que les éléments finis ou la méthode de Rayleigh-Ritz pouvaient donner [42].

Le résultat du calcul des fréquences de vibration associées aux trois modes rigides du rotor est présenté dans le tableau II-7.

On remarquera la faible valeur de la fréquence du mode axial. Le ressort de précontrainte utilisé pour le montage de roulements dans le moteur a une raideur de seulement 12 500 N/m. Cette valeur faible présente l'avantage de permettre un réglage précis de la précharge.

La seule fréquence utile dans cette étude est celle du mode axial. Les autres fréquences sont substituées par celles que les modes de flexion fourniront par la suite.

## II.9.2 Modes flexibles du rotor

Dans ce paragraphe, les fréquences de vibration d'un rotor flexible vont être étudiées, afin d'en extraire des expressions analytiques qui donnent explicitement les vitesses critiques en fonction des dimensions et des matériaux du rotor. Dans un premier temps, les matrices de rigidité et de masse de dimension  $4 \times 4$  sont calculées par le théorème de Castigliano. La matrice de masse est donnée directement par leur répartition (masses ponctuelles). Les fréquences et modes propres sont ensuite déduits du modèle, avant de donner quelques résultats et de les comparer au modèle numérique présenté précédemment.

Les méthodes classiques utilisées pour déterminer les fréquences propres (comme les méthodes de Rayleigh ou de Rayleigh-Ritz) s'appuient sur le calcul des énergies potentielles, cinétiques et dissipatives calculées en terme de déformation.

Les résultats de ces méthodes ont montré qu'il était nécessaire d'utiliser un polynôme de grande taille, afin de décrire convenablement ces formes propres. En effet, le choix d'une forme a priori (dans le cadre d'une méthode de Rayleigh) est très délicate voire impossible, lorsque le rotor présente des sections évolutives et des matériaux variés (ce qui est notre cas). La forme propre choisie devrait pratiquement être adaptée à chaque changement de géométrie ou de matériaux, sous peine de commettre

d'importantes erreurs de calcul. C'est ce qui impose la méthode de Rayleigh-Ritz, avec un vecteur de coordonnées généralisées de grande taille, pour palier la quasi-impossibilité de prédire convenablement les déformées. Concernant le choix d'une déformée, Lalanne [24] indique qu'"un choix raisonnable est d'utiliser la solution statique du système soumis à des forces proportionnelles aux masses".

À la lueur de cette affirmation, nous avons décidé d'utiliser le second théorème de Castigliano en analyse de structures (Turin 1875 – 1879) pour calculer la matrice de rigidité du rotor.

### II.9.2.A Calcul de la matrice de rigidité et de masse

Le théorème de Castigliano postule que, l'énergie de déformation étant exprimée en fonction des forces appliquées, la dérivée partielle de l'énergie par rapport à l'une de ces forces a pour valeur le déplacement du point d'application de celle-ci projeté sur sa ligne d'action [43, 29, 44]. Cette méthode est présentée dans les Techniques de l'Ingénieur [45] pour des applications aux organes de machines.

Cette méthode exempte l'utilisateur de faire des hypothèses sur les formes propres. De plus les conditions aux limites sont implicitement respectées. Il faut cependant faire une hypothèse sur la répartition des forces sur l'axe du rotor. De plus, les déplacements en translation ne sont connus qu'au point et dans la direction où les forces sont appliquées. De même, les déplacements angulaires ne seront calculables en un point que si un moment  $y$  est appliqué.

Pour simplifier le problème, les forces sont considérées comme concentrées au centre de gravité de la partie active, au milieu et à l'extrémité de l'axe sortant. Un moment concentré est appliqué au centre de gravité de la partie active.

Dans le cadre d'une méthode analytique, le modèle est limité à 4 degrés de liberté afin d'obtenir une équation aux pulsations réductible à un ordre 4.

La partie active est séparée en deux parties, située à gauche et à droite du centre du noyau. Ces deux parties ont donc leur centre de gravité propre. Les deux premiers degrés de liberté sont une translation radiale placée en chacun des deux centres de gravité. Deux autres translations sont placées au milieu et en bout de l'axe sortant.

**II.9.2.A.i Modélisation du rotor et efforts appliqués** La masse de la partie active du rotor notée  $m_r$  est divisée en deux et est disposée en chaque centre de gravité (point  $A_1$  et  $A_2$ ). La masse de l'axe sortant notée  $m_s$  est, elle aussi, fractionnée en deux parties égales, respectivement placées au centre (point  $A_3$ ) et à l'extrémité de cet axe (point  $A_4$ ). La figure II-23 présente ce modèle. Les déplacements transversaux des points  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  sont respectivement notés  $X_{A1}$ ,  $X_{A2}$ ,  $X_{A3}$  et  $X_{A4}$ .

Le vecteur déplacement de dimension 4 est alors noté  $\mathbf{X} = \{X_{A1}, X_{A2}, X_{A3}, X_{A4}\}^T$ .

**II.9.2.A.ii Efforts appliqués aux appuis** Toutes les forces  $F_i$  sont orientées positivement. Le principe fondamental de la statique est appliqué au modèle. La somme des forces appliquées au rotor



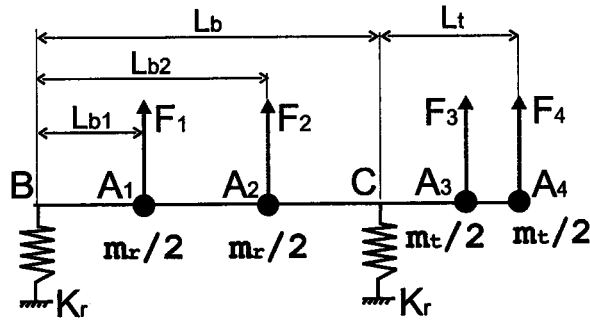


FIG. II-23 - Modèle pour l'étude dynamique du rotor

est donc égale à 0 et la somme des moments appliqués est elle aussi nulle.

Cela permet de calculer les forces  $F_B$  et  $F_C$  agissant sur les roulements aux points  $B$  et  $C$ . Ces actions sont données par les formules suivantes (voir figure II-23 pour les notations utilisées):

$$F_C = \frac{1}{L_b} \left( -F_1 L_{b1} - F_2 L_{b2} - F_3 \left( L_b + \frac{L_t}{2} \right) - F_4 (L_b + L_t) \right) \quad (\text{II-86})$$

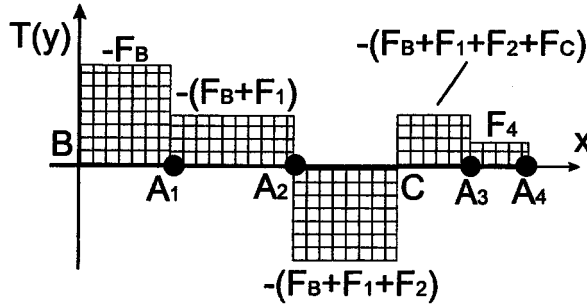
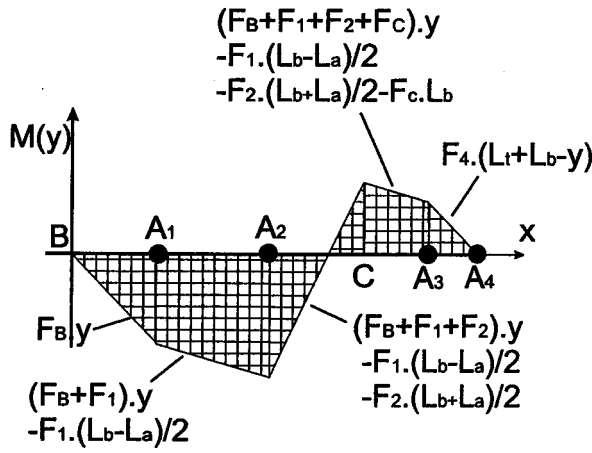
$$F_B = -F_C - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 \quad (\text{II-87})$$

Dans le paragraphe suivant, à partir des efforts appliqués au rotor en chacun des points  $A_1$  à  $A_4$  et par les roulements en  $B$  et  $C$ , l'étude des efforts intérieurs va pouvoir être réalisée et les diagrammes des efforts tranchants et des moments de flexion pourront être tracés.

**II.9.2.A.iii Efforts intérieurs et diagrammes** L'effort tranchant  $T(y)$  et le moment fléchissant  $M(y)$  dans une section d'ordonnée  $y$  sont calculés en isolant la partie à gauche de la section considérée (l'axe  $y$  est orienté vers la droite) puis en appliquant le théorème de la statique au morceau isolé. L'effort tranchant et le moment fléchissant apparaissent au niveau de la section isolée, et s'ajoutent au bilan des forces et moments appliqués à la partie isolée du rotor.

Les résultats des calculs sont présentés sous la forme des diagrammes d'effort tranchant  $T(y)$  et de moment fléchissant  $M(y)$  décrits respectivement par les figures II-24 et II-25. Les formules de chaque portion des fonctions  $T(y)$  ou  $M(y)$  définies par morceau sont inscrites sur le diagramme. Les diagrammes sont tracés en supposant toutes les forces  $F_i$  positives. Par conséquent les forces  $F_B$  et  $F_C$  sont supposées négatives.

**II.9.2.A.iv Énergie de déformation** Ces résultats sont alors utilisés pour écrire l'expression de l'énergie de déformation  $U$  en fonction de la répartition de l'effort tranchant  $T(y)$  et du moment fléchissant  $M(y)$ , ainsi qu'en tenant compte de la déformation dans les roulements. Cette expression s'écrit:

FIG. II-24 – Diagramme de l'effort tranchant  $T(y)$ FIG. II-25 – Diagramme du moment fléchissant  $M(y)$ 

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{rotor}} \left( \frac{M^2(y)}{\langle EI \rangle(y)} + \frac{T^2(y)}{a \langle GS \rangle(y)} \right) dy + \frac{1}{2} \frac{F_B^2}{2 K_r} + \frac{F_C^2}{2 K_r} \quad (\text{II-88})$$

où  $\langle EI \rangle(y)$  et  $\langle GS \rangle(x)$  représentent respectivement la rigidité moyenne en flexion et en cisaillement de la section  $S(y)$ .  $a$  est le coefficient de section réduite, qui permet de prendre en compte la répartition des contraintes de cisaillement dans la section  $S(y)$ .  $a$  est pris égal à  $7/6$ .

**II.9.2.A.v Calcul de la matrice de rigidité** Comme énoncé par le théorème de Castigliano, la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à la force  $F_i$  donne la valeur du déplacement  $X_{Ai}$  du point d'application  $A_i$  en projection sur la direction de la force, d'où l'expression suivante :

$$X_{Ai} = \frac{\partial U}{\partial F_i} \quad (\text{II-89})$$

Par une seconde dérivation en terme de la force  $F_j$ , on obtient l'accroissement du déplacement  $X_{Ai}$  par rapport à un accroissement de la force  $F_j$ , ce qui correspond à la définition de la souplesse du rotor (ou compliance)  $S_{ij}$  :

$$S_{ij} = \frac{\partial X_{Ai}}{\partial F_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial F_i \partial F_j} \quad (\text{II-90})$$

La matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  du rotor est alors obtenue par simple inversion de la matrice de compliance  $\mathbf{S}$ . La matrice  $[\mathbf{K}]$  obtenue a alors la forme symétrique suivante :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{II-91})$$

### II.9.2.B Matrice de masse

Compte tenu du modèle utilisé (masses concentrées en chacun des points) et de la définition du vecteur déplacement, la matrice de masse  $\mathbf{M}$  du rotor prend la forme diagonale suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{m_r}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_t}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-92})$$

Ces matrices de masse et de raideur permettent de calculer les fréquences et les modes propres de vibration du modèle de rotor.

### II.9.3 Fréquences et modes propres

En utilisant les résultats concernant les matrices de rigidité  $\mathbf{K}$  et de masse  $\mathbf{M}$ , l'équation du mouvement libre est donnée par :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = 0 \quad (\text{II-93})$$

On cherche des solutions harmoniques de la forme :

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 e^{j\omega t} \quad (\text{II-94})$$

où  $\mathbf{X}_0$  est un vecteur propre associé à la fréquence  $\omega$ . Les pulsations propres  $\omega$  du rotor sont données par la résolution de l'équation suivante :

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0 \quad (\text{II-95})$$

ce qui conduit à l'équation aux pulsations, sous la forme polynômiale d'ordre 8 suivante :

$$a\omega^8 + b\omega^6 + c\omega^4 + d\omega^2 + e = 0 \quad (\text{II-96})$$

dont les coefficients  $a, b, c, d, e$  sont des fonctions des coefficients des matrices de masse et de raideur.

Le calcul du déterminant donne l'expression littérale de chaque coefficient du polynôme :

$$a = 1/16 m_r^2 m_t^2 \quad (\text{II-97})$$

$$b = -1/8 m_r k_{22} m_t^2 - 1/8 k_{11} m_r m_t^2 - 1/8 m_r^2 k_{33} m_t - 1/8 m_r^2 m_t k_{44} \quad (\text{II-98})$$

$$c = 1/4 k_{11} m_r m_t k_{44} + 1/4 m_r k_{22} m_t k_{44} - 1/4 m_r k_{14}^2 m_t - 1/4 m_r k_{13}^2 m_t + 1/4 m_r k_{22} k_{33} m_t - 1/4 k_{12}^2 m_t^2 + 1/4 k_{11} m_r k_{33} m_t + 1/4 k_{11} k_{22} m_t^2 - 1/4 m_r k_{24}^2 m_t + 1/4 m_r^2 k_{33} k_{44} - 1/4 m_r k_{23}^2 m_t - 1/4 m_r^2 k_{34}^2 \quad (\text{II-99})$$

$$d = 1/2 k_{11} k_{24}^2 m_t + 1/2 k_{12}^2 k_{33} m_t + 1/2 m_r k_{13}^2 k_{44} + 1/2 m_r k_{14}^2 k_{33} + 1/2 m_r k_{24}^2 k_{33} - 1/2 k_{11} k_{22} m_t k_{44} + 1/2 m_r k_{22} k_{34}^2 + 1/2 k_{22} k_{14}^2 m_t - 1/2 k_{11} m_r k_{33} k_{44} + 1/2 k_{12}^2 m_t k_{44} + 1/2 k_{22} k_{13}^2 m_t - 1/2 m_r k_{22} k_{33} k_{44} - k_{12} k_{23} k_{13} m_t + 1/2 k_{11} m_r k_{34}^2 + 1/2 k_{11} k_{23}^2 m_t - 1/2 k_{11} k_{22} k_{33} m_t + 1/2 m_r k_{23}^2 k_{44} - k_{13} m_r k_{14} k_{34} - k_{12} k_{24} k_{14} m_t - m_r k_{23} k_{24} k_{34} \quad (\text{II-100})$$

$$e = -k_{22} k_{14}^2 k_{33} - k_{11} k_{24}^2 k_{33} - k_{11} k_{22} k_{34}^2 - k_{22} k_{13}^2 k_{44} - k_{11} k_{23}^2 k_{44} - 2 k_{13} k_{24} k_{14} k_{23} + 2 k_{11} k_{23} k_{24} k_{34} - 2 k_{12} k_{23} k_{14} k_{34} - 2 k_{12} k_{24} k_{13} k_{34} + k_{13}^2 k_{24}^2 + k_{14}^2 k_{23}^2 + 2 k_{12} k_{23} k_{13} k_{44} - k_{12}^2 k_{33} k_{44} + 2 k_{12} k_{24} k_{14} k_{33} + k_{11} k_{22} k_{33} k_{44} + 2 k_{13} k_{22} k_{14} k_{34} + k_{12}^2 k_{34}^2 \quad (\text{II-101})$$

La résolution de cette équation polynômiale peut se faire par un changement de variables  $\lambda = \omega^2$ , ce qui réduit l'ordre du polynôme à 4. La résolution du polynôme d'ordre 4 en  $\lambda$  n'est certes pas simple mais néanmoins réalisable en suivant les méthodes de Ferrari ou d'Euler. L'ordre 4 est d'ailleurs le dernier à avoir une solution analytique.

La méthode de résolution serait trop longue à expliciter ici. Nous nous cantonnerons à cette courte description de la méthode de Ferrari :

- tous les coefficients sont rapportés à  $a$  pour obtenir un polynôme dont le coefficient en  $\lambda^4$  vaut 1,
- un changement de variables du type  $z = \lambda - t$  est réalisé afin d'annuler le coefficient en  $z^3$ ,
- en réécrivant le polynôme d'ordre 4 en  $z$  sous la forme d'un produit de deux polynômes en  $z^2$ , on peut se ramener à un polynôme d'ordre 3 dont la solution est bien connue et se trouve assez souvent dans les formulaires [46].

Les pulsations propres  $\omega$  sont alors données par plus ou moins la racine carrée des racines du polynôme en  $\lambda$ .

#### II.9.4 Résultats du modèle analytique

Il s'agit ici de confronter les résultats donnés par le modèle analytique présenté dans ce paragraphe à ceux du modèle numérique vu au paragraphe II.5.

##### II.9.4.A Résultats obtenus pour le rotor actuel [28]

Les résultats sont obtenus par l'utilisation de la fonction  $eig(M^{-1}K)$  sous le logiciel *MATLAB*. Le tableau II-8 compare les résultats donnés par le modèle analytique à 4 degrés de liberté (DDL), le modèle numérique présenté au paragraphe II.5. L'exemple étudié est celui du rotor de la figure II-6 en mouvement libre dans l'espace. Le mouvement libre est modélisé avec une faible raideur de roulement ( $10^{-7}$  N/m) dans les deux modèles, et par l'absence de conditions aux limites dans *COSMOS*.

mode $n^{\circ}$	COSMOS (Hz)	modèle analytique (Hz)	modèle numérique (Hz)
1	7870	8517	8127
2	27805	22294	28194
3	39260	-	41127

TAB. II-8 – Résultats fréquentiels donnés par *COSMOS/designstar*, le modèle analytique (*Castigliano*) et le modèle numérique (*Timoshenko + Rayleigh-Ritz*) pour le rotor de la figure II-6 libre dans l'espace.

Dans le cas du rotor étudié, le modèle à 4 DDL donne des fréquences assez proches des résultats mulés par élément finis. Les résultats ne sont cependant pas aussi précis que ceux du modèle numérique. Le modèle approché ne donne pas la troisième fréquence propre en mode flexible, si le rotor est libre dans l'espace. En effet, 4 fréquences seulement peuvent être obtenues et, parmi elles, deux fréquences correspondent aux déplacements d'ensemble et sont proches de zéro puisque la raideur est faible.

Prenons maintenant ce même rotor supporté par deux roulements SNFA *VEX6/NS7* de raideur radiale unitaire de  $4,5 \cdot 10^7$  N/m (sous une précharge de 50 N) [31]. Le tableau II-9 compare les résultats

que fournissent chacun des deux modèles approchés. La complexité de la modélisation correcte des roulements dans *COSMOS* ne permet pas ici de donner les résultats de la méthode de calcul par éléments finis.

La dernière colonne donne l'écart relatif entre le modèle analytique et le modèle numérique (valeur référence).

mode n°	modèle analytique (Hz)	modèle numérique (Hz)	écart relatif (%)
1	4192	5440	-23
2	6130	5931	+3,3
3	17347	13059	+9,2
4	27655	30534	-11

TAB. II-9 – Résultats fréquentiels donnés le modèle analytique (*Castigliano*) et le modèle numérique (*Timoshenko + Rayleigh-Ritz*) pour le rotor supporté par deux roulements à billes *SNFA VEX6 /NS7*.

Les deux modèles donnent des résultats assez comparables. Cependant on peut remarquer une divergence entre les résultats (-23%) des premier et quatrième modes (-11%). L'imprécision des calculs provient de la différence entre les modélisations. Le modèle analytique à 4 DDL ne peut modéliser avec précision les énergies de déformation.

On pourra comparer au passage les valeurs de fréquences du tableau II-6 (8170, 28194 et 41127) avec celle du tableau II-9, pour s'apercevoir de l'influence de la raideur des roulements dans le comportement vibratoire.

#### II.9.4.B Influence d'une modification géométrique

Nous allons maintenant étudier l'influence sur les fréquences de vibration d'une modification de différentes parties du rotor. Ces modifications de la géométrie peuvent être dictées par des impératifs d'encombrement du moteur ou des modifications des performances désirées.

**II.9.4.B.i Modification de la partie active** L'allongement de la partie active du rotor permet aux concepteurs d'une machine à réductance variable d'augmenter le volume de l'entrefer et donc la puissance disponible sur l'arbre moteur.

Différentes longueurs de noyau sont donc testées. La longueur active de référence est celle de 17 mm, qui est actuellement utilisée sur la machine du LGIPM. La longueur de l'axe sortant est fixée à 20 mm.

La figure II-26 présente l'influence d'une variation de la longueur active sur les 4 premières fréquences de vibrations du rotor. Les résultats de chacune des 4 fréquences données par les modèles analytiques et numériques sont tracés.

Le graphique montre que les résultats donnés par les deux modèles sont assez dissemblables. Si la

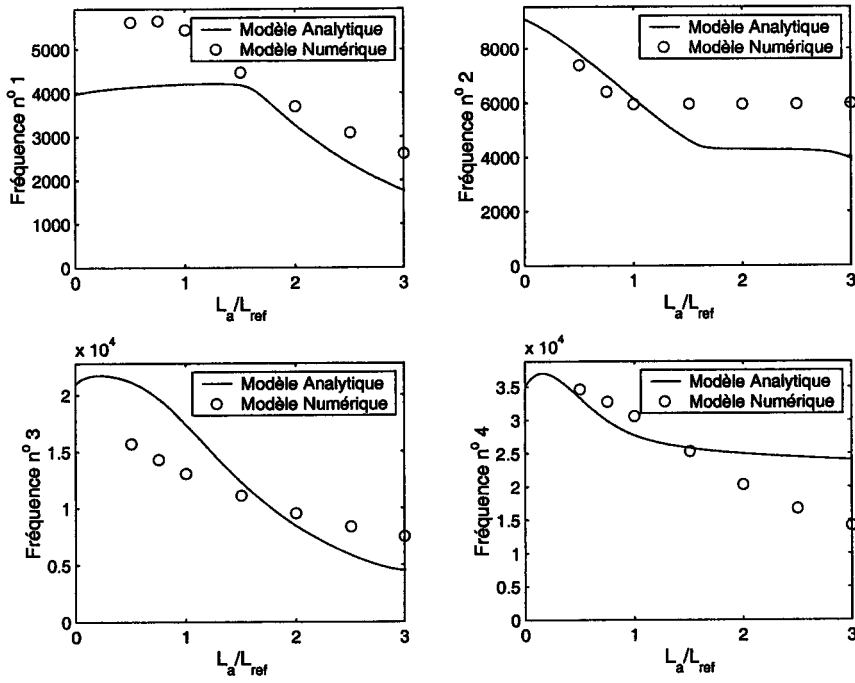


FIG. II-26 – Valeurs des 4 premières fréquences (en Hz) propres données par le modèle analytique (traits pleins) et par le modèle numérique (symboles) lorsque la longueur active  $L_a$  varie ( $L_{ref} = 17$  mm).

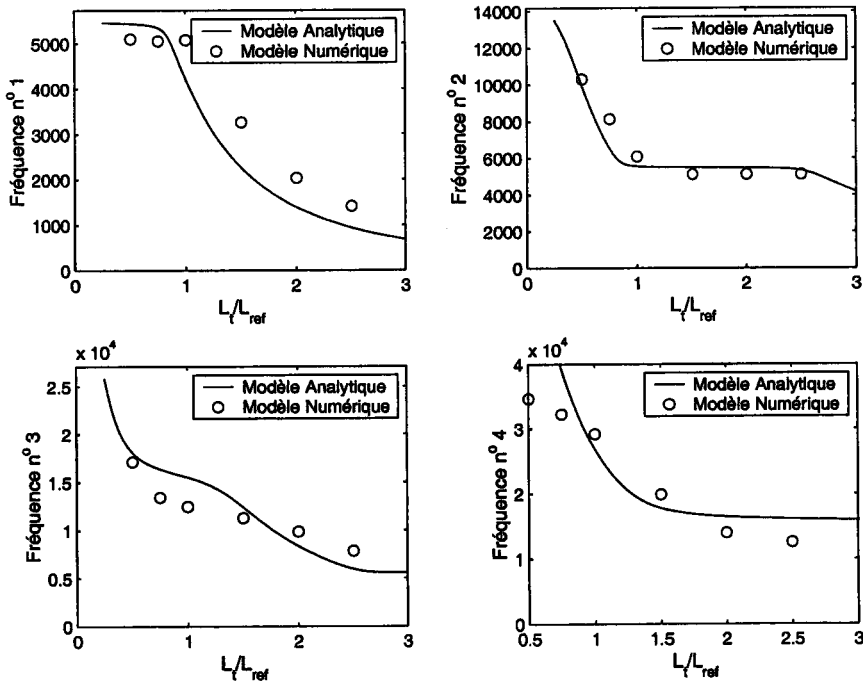


FIG. II-27 – Valeurs des 4 premières fréquences (en Hz) propres données par le modèle analytique (traits pleins) et par le modèle numérique (symboles) lorsque la longueur  $L_t$  de l'axe sortant varie ( $L_{ref} = 20$  mm).

tendance de variation est assez bien reproduite, les résultats donnés par les deux modèles sont par endroits très différents.

Pour les première et troisième fréquences, l'erreur est maximale pour les noyaux courts : sous-estimation de la première fréquence (-30% environ) et surestimation de la troisième fréquence (+30% environ).

Pour les deuxième et quatrième fréquences, les résultats sont plutôt bons pour les rotors à courte partie active, et perdent en précision lorsque  $L_a$  augmente. Les erreurs pour la deuxième et quatrième fréquences atteignent alors respectivement +50% et -36%. Ces résultats montrent que la modélisation à deux DDL de la partie active est trop restrictive.

**II.9.4.B.ii Allongement de l'axe sortant** Différentes longueurs d'axe sortant sont testées. La longueur de référence est celle de 20 mm, qui a été utilisée sur la génération composite du rotor du laboratoire. La longueur active est fixée à 20 mm.

La figure II-27 présente l'influence d'une variation de la longueur de l'axe de sortie sur les 4 premières fréquences de vibrations du rotor. Les résultats des deux modèles *4DDL* et *RDM* sont comparés.

On peut constater que pour la longueur active choisie (20 mm), une meilleure corrélation entre les deux modèles est observée. Les tendances de variation sont assez bien respectées pour les 3 premières fréquences. Seule la 4<sup>ème</sup> fréquence présente des résultats fortement différents selon la méthode utilisée lorsque l'axe sortant est court.

Ces résultats tendent à montrer que le modèle d'axe sortant à 2 DDL est une bonne approche de la réalité.

## II.9.5 Conclusion concernant le modèle analytique à 4 DDL

La comparaison entre les résultats fournis par le modèle numérique du paragraphe II.5 et ceux du modèle analytique à 4 degrés de liberté présenté dans ce paragraphe, a montré que les résultats concernant la modification de la partie active souffraient d'imprécisions. Les limites de la modélisation du noyau avec seulement deux DDL sont ici atteintes. La tendance de variation est cependant respectée. Une optimisation qualitative pourra donc être réalisée. Le modèle de l'axe sortant utilisant 2 degrés de liberté est par contre une bonne approche de la réalité.

## II.9.6 Représentation du modèle dynamique d'un élément du rotor

Nous pouvons à présent définir le schéma bloc du modèle obtenu. Le modèle est présenté sur la figure II-28.

Le modèle fournit en sortie le comportement dynamique du rotor. Le système a pour entrée la géométrie et les propriétés des matériaux du rotor, qui sont connues et interviennent dans les expres-



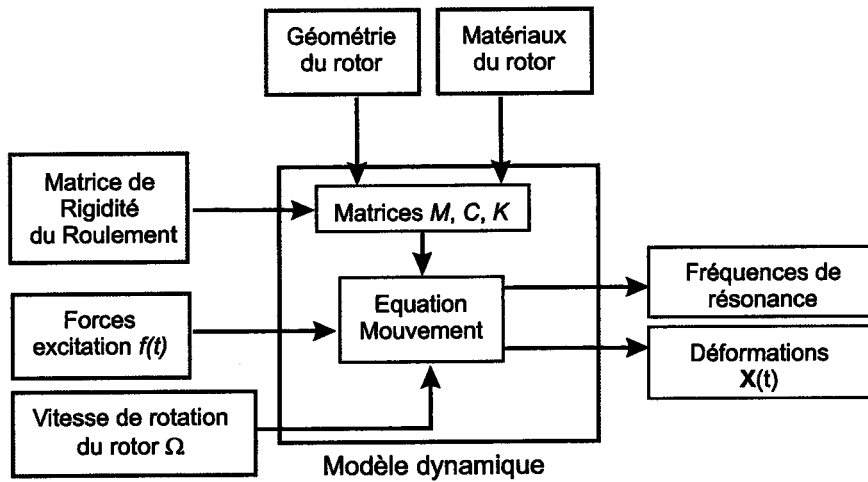


FIG. II-28 – Modèle de la dynamique vibratoire du rotor sous forme de schéma-bloc.

sions des matrices de masse, d'amortissement et de rigidité. La vitesse de rotation du rotor  $\Omega$  intervient également en entrée de système. Les forces d'excitation comme par exemple les balourds ou les efforts magnétiques influencent également le comportement dynamique du rotor. La dernière entrée est la rigidité des roulements qui n'est pas encore définie.

De par son rôle essentiel dans le comportement de l'électrobroche, elle fait l'objet d'un étude détaillée dans le chapitre IV.

## II.10 Comportement d'un rotor multi-éléments

La figure II-29 représente un rotor complexe réalisé à partir de deux modules de rotor élémentaires (sous-structures), dans le but d'augmenter la puissance disponible.

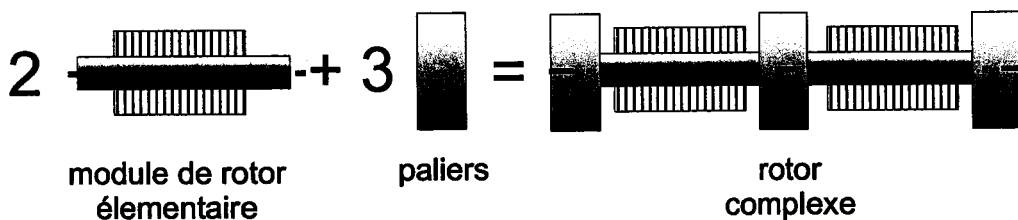


FIG. II-29 – Réalisation d'un rotor multi-éléments par assemblage de modules élémentaires (sous-structures).

Il est possible de prédire le comportement de machines complexes à partir des caractéristiques dynamiques des sous-structures qui la composent [24].

Soit un élément de rotor caractérisé par sa matrice de masse  $M_1$  et sa matrice de rigidité  $K_1$  et supporté par des paliers définis par leur matrice de rigidité  $K_R$ . Les matrices  $M_1$ ,  $K_1$ , et  $K_R$  sont

donnés par :

$$\mathbf{M1} = \begin{bmatrix} M1_{ii} & M1_{ic} \\ M1_{ci} & M1_{cc} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K1} = \begin{bmatrix} K1_{ii} & K1_{ic} \\ K1_{ci} & K1_{cc} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K_R} = \begin{bmatrix} KR_{ii} & KR_{ic} \\ KR_{ci} & KR_{cc} \end{bmatrix}$$

On pose  $\delta^{(1)} = \{\delta_i^{(1)}, \delta_c\}^T$  et  $\delta^{(2)} = \{\delta_i^{(2)}, \delta_c\}^T$ , les vecteurs regroupant les degrés de liberté (DDL) des sous-structures (1) et (2).  $\delta_i^{(1)}$  et  $\delta_i^{(2)}$  sont des sous-vecteurs regroupant les DDL internes à chacune des sous-structures (1) et (2) et  $\delta_c$  est le sous-vecteur regroupant les DDL communs aux deux sous-structures. L'équation du mouvement libre de la sous-structure (1) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{M1} \ddot{\delta}^{(1)} + \mathbf{K1} \delta^{(1)} = 0 \quad (\text{II-102})$$

Le vecteur  $\delta^{(1)} = \{\delta_i^{(1)}, \delta_c\}^T$  peut s'écrire dans la base modale  $q^{(1)}$  sous la forme  $\delta^{(1)} = \Phi^{(1)} q^{(1)} = \{\Phi^{(1)}, \Phi_c^T\} q^{(1)}$ , où  $\Phi^{(1)}$  est la matrice des vecteurs propres de la sous-structure (1).

Si un deuxième élément de rotor (matrices  $\mathbf{M2}$  et  $\mathbf{K2}$ ) est couplé au premier, l'équation du mouvement propre découplé du deuxième élément s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{M2} \ddot{\delta}^{(2)} + \mathbf{K2} \delta^{(2)} = 0 \quad (\text{II-103})$$

Par la même étude que précédemment, le vecteur  $\delta^{(2)} = \{\delta_i^{(2)}, \delta_c\}^T$  peut s'écrire dans la base modale  $q^{(2)}$  sous la forme  $\delta^{(2)} = \Phi^{(2)} q^{(2)} = \{\Phi_i^{(2)}, \Phi_c\}^T q^{(2)}$ .

Les déformations  $\delta_0^{(1)}$ , et  $\delta_L^{(1)}$  en début et en fin de l'élément 1 s'écrivent dans la base modale  $q^{(1)}$  respectivement  $\delta_0^{(1)} = \lambda_0 q^{(1)}$  et  $\delta_L = \lambda_L q^{(1)}$ . Les énergies de déformation des paliers 1 et 2 situés en début et en fin de l'élément (1) s'écrivent alors :

$$U_{R1} = \frac{1}{2} \delta_0^{(1)T} \mathbf{K_R} \delta_0^{(1)} = \frac{1}{2} q^{(1)T} \lambda_0^{(1)T} \mathbf{K_R} \lambda_0^{(1)} q^{(1)T} \quad (\text{II-104})$$

$$U_{R2} = \frac{1}{2} \delta_L^{(1)T} \mathbf{K_R} \delta_L^{(1)} = \frac{1}{2} q^{(1)T} \lambda_L^{(1)T} \mathbf{K_R} \lambda_L^{(1)} q^{(1)T} \quad (\text{II-105})$$

L'énergie de déformation du 3<sup>ième</sup> palier situé en fin du deuxième élément :

$$U_{R3} = \frac{1}{2} \delta_L^{(2)T} \mathbf{K_R} \delta_L^{(2)} = \frac{1}{2} q^{(2)T} \lambda_L^{(1)T} \mathbf{K_R} \lambda_L^{(1)} q^{(2)T} \quad (\text{II-106})$$

L'énergie cinétique  $T$  du système (1+2) s'écrit [24]:

$$T = T1 + T2 = \frac{1}{2} \dot{q}^{(1)T} \Phi^{(1)T} \mathbf{M1} \Phi^{(1)} \dot{q}^{(1)T} + \frac{1}{2} \dot{q}^{(2)T} \Phi^{(2)T} \mathbf{M2} \Phi^{(2)} \dot{q}^{(2)T} \quad (\text{II-107})$$

L'énergie de déformation  $U$  du système (1+2) et des 3 paliers s'écrit :

$$\begin{aligned} U &= U1 + U2 + \sum_{i=1}^3 U_{Ri} \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^{(1)T} \Phi^{(1)T} \mathbf{K1} \Phi^{(1)} \dot{q}^{(1)T} + \frac{1}{2} \dot{q}^{(2)T} \Phi^{(2)T} \mathbf{K2} \Phi^{(2)} \dot{q}^{(2)T} + \frac{1}{2} q^{(1)T} \lambda_0^{(1)T} \mathbf{K_R} \lambda_0^{(1)} q^{(1)T} \\ &\quad + \frac{1}{2} q^{(1)T} \lambda_L^{(1)T} \mathbf{K_R} \lambda_L^{(1)} q^{(1)T} + \frac{1}{2} q^{(2)T} \lambda_L^{(1)T} \mathbf{K_R} \lambda_L^{(1)} q^{(2)T} \end{aligned} \quad (\text{II-108})$$

En appliquant les équations de Lagrange, on obtient l'équation du mouvement du système complet :

$$\begin{bmatrix} \Phi^{(1)T} M1_{ii} \Phi^{(1)} & 0 & \Phi^{(1)T} M1_{ic} \Phi_c \\ 0 & \Phi^{(2)T} M2_{ii} \Phi^{(2)} & \Phi^{(2)T} M2_{ic} \Phi_c \\ \Phi_c M1_{ci} \Phi^{(1)} & \Phi_c^T M2_{ci} \Phi^{(2)} & \Phi_c^T (M1_{cc} + M2_{cc}) \Phi_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}^{(1)} \\ \ddot{q}^{(2)} \\ \ddot{q}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi^{(1)T} K1_{ii} \Phi^{(1)} & 0 & \Phi^{(1)T} K1_{ic} \Phi_c \\ +\lambda_0^T K R_{ii} \lambda_0 & & +\lambda_0^T K R_{ic} \lambda_0 \\ +\lambda_L^T K R_{ii} \lambda_L & & +\lambda_L^T K R_{ic} \lambda_L \\ 0 & \Phi^{(2)T} K2_{ii} \Phi^{(2)} & \Phi^{(2)T} K2_{ic} \Phi_c \\ & +\lambda_L^T K R_{ii} \lambda_L & +\lambda_L^T K R_{ic} \lambda_L \\ \Phi_c K1_{ci} \Phi^{(1)} & \Phi_c^T K2_{ci} \Phi^{(2)} + \lambda_L^T K R_{ci} \lambda_L & \Phi_c^T (K1_{cc} + K2_{cc}) \Phi_c \\ +\lambda_0^T K R_{ci} \lambda_0 & & +2\lambda_0^T K R_{cc} \lambda_0 \\ +\lambda_L^T K R_{ci} \lambda_L & & +\lambda_0^T K R_{cc} \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ q_c \end{Bmatrix} = \vec{0} \quad (\text{II-109})$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$M12 \begin{Bmatrix} \ddot{q}^{(1)} \\ \ddot{q}^{(2)} \\ \ddot{q}_c \end{Bmatrix} + K12 \begin{Bmatrix} q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ q_c \end{Bmatrix} = \vec{0} \quad (\text{II-110})$$

Les matrices de masse et de rigidité **M12**, **K12** sont donc entièrement déterminées à partir des matrices **M1**, **K1** et **M2**, **K2** des sous-structures 1 et 2 et de leurs matrices des vecteurs propres  $\Phi^{(1)}$ ,  $\Phi^{(2)}$ . À partir des matrices **M12**, **K12**, nous pourrons prédire le comportement d'un rotor multi-éléments.

## II.11 Conclusion sur les problèmes vibratoires dans une MRV

Dans ce chapitre, l'étude des vibrations du rotor d'un moteur à réductance a été abordée. L'objectif était de pouvoir estimer le comportement vibratoire du rotor le plus précisément possible et avec une rapidité d'exécution que la méthode des éléments finis ne peut offrir. Dans une démarche d'optimisation, le modèle permet de calculer avec une précision acceptable un grand nombre de géométries dans un temps minimum.

Le modèle numérique présenté au paragraphe II.5 est parvenu à ces objectifs de calcul rapide. S'appuyant sur le modèle RDM d'une poutre de Timoshenko associée aux équations de Lagrange, ce modèle numérique permet le calcul des fréquences et mode propres avec prise en compte de l'effet gyroscopique ainsi que le tracé des déformées en 3D. L'étude du comportement vibratoire est possible grâce au tracé des diagrammes de Bode. Les résultats donnés en exemple ont montrés que l'erreur restait en deçà de 12% par rapport aux calculs faits par la méthode des éléments finis (MEF). Du point de vue de la rapidité du calcul, ce modèle réalise 30 calculs approchés des fréquences et formes propres pendant le temps nécessaire à un logiciel d'éléments finis pour générer un seul résultat. Cependant, ce modèle ne permet d'optimiser le rotor que numériquement.

Dans le paragraphe II.9, un modèle analytique et explicite destiné à l'optimisation de la géométrie et du choix des matériaux du rotor a été alors développé. De part sa plus grande simplicité et la limite à 4 DDL pour obtenir l'expression des racines de l'équation aux pulsations, il présente des résultats

plus mitigés. Il ne permet de connaître que les 4 premières fréquences de vibration. L'estimation des fréquences donnent des erreurs allant jusqu'à 30%. Cependant les tendances de variation sont bien respectées et une optimisation qualitative sera possible en utilisant ce modèle analytique. Du point de vue de la rapidité du calcul, ce modèle réalise 1500 calculs approchés des fréquences et formes propres pendant le temps nécessaire à un logiciel d'éléments finis pour générer un seul résultat.

Dans le paragraphe II.10, par l'exemple simple d'un rotor bi-éléments sans amortissement, nous avons montré qu'il est possible d'étudier un rotor multi-éléments à partir des matrices de rigidité et de masse d'un seul élément du rotor, obtenues par les modèles proposés dans ce chapitre.

# Chapitre III

## Contraintes maximales dans les matériaux du noyau magnétique

### III.1 Introduction

La conception d'un moteur à réluctance variable (MRV) est essentiellement orientée vers la production d'un couple moteur adapté à l'utilisation finale de la machine et à la commande qui lui est associée.

La production du couple est obtenue par la variation de l'entrefer sous la dent statorique lorsque le rotor tourne. L'entrefer est défini par l'espace entre la surface intérieure du stator et la surface extérieure du rotor dans l'axe de la phase alimentée au stator. Pour produire le couple moteur, le principe des MRV demande des variations brusques de rayons donnant au contour du noyau un aspect dentelé, d'où le nom communément donné de dents rotoriques .

Si le rotor et le stator sont tous les deux à pôles saillants (par opposition à pôles lisses), le moteur est dit à double-saillance [1]. On désigne par MRV 6/2, une machine présentant 6 pôles au stator et 2 pôles au rotor.

Le profil de la dent permet de choisir l'évolution du rayon du rotor avec l'angle formé entre le pôle rotor et le pôle alimenté au stator. Dans les conceptions classiques, le profil de la dent présente une variation brusque entre un rayon minimum et maximum. Si la commande n'est pas adaptée, le couple produit par un tel moteur est fortement pulsatoire, et en dehors de la zone où la dent rotorique passe sous la dent statorique, le couple diminue très rapidement. Un profil plus progressif du front de la dent permet de mieux répartir le couple produit sur une plage angulaire plus large. Une étude sur l'optimisation du couple en fonction de la forme d'un rotor de MRV 6/2 à axe traversant a été effectuée dans [47].

Le seul point de vue électrotechnique visant à optimiser le couple produit ne saurait être satisfaisant dans le cadre d'une application grande vitesse et conduirait à des géométries (dents fortement saillantes, tolérances de fabrication, etc.), qui pour d'autres critères (fiabilité mécanique ou production de la pièce par exemple), seraient alors aberrantes.

Du point de vue des contraintes mécaniques, qui nous intéressent dans ce chapitre, la forme du noyau fournissant la meilleure fonction de couple, ne sera probablement pas acceptable. La largeur de la dent, la variation du rayon ou d'autres paramètres dimensionnels, ont de fortes influences sur la valeur de la contrainte mécanique maximale observée dans le noyau magnétique.

La prédiction de l'influence de chaque paramètre passe par une modélisation point par point par la méthode des éléments finis et nécessite un long temps de calcul. Si la géométrie du noyau est clairement définie, un calcul ponctuel des contraintes par éléments finis n'est pas problématique, mais dans le cadre d'une optimisation de la forme du rotor, la recherche de la combinaison optimale des paramètres dimensionnels par cette méthode numérique serait trop longue. Un modèle analytique permet alors d'envisager de calculer plus rapidement les contraintes et de prévoir les avantages d'une modification dimensionnelle, et cela, avec le minimum de concession sur la précision du résultat.

On cherche donc à éviter l'utilisation des éléments finis et de la théorie de l'élasticité, dont l'application à la géométrie du noyau magnétique est trop complexe. Nous avons décidé d'utiliser les méthodes approchées de résistance des matériaux, bien que les hypothèses d'application de ces dernières soient fortement contrariées.

Dans le paragraphe III.2, la géométrie du noyau magnétique à axe traversant est décrite puis modélisée. Les conditions d'application de la méthode approchée de la résistance des matériaux sont détaillées. Un modèle mécanique visant à prendre en compte la répartition des contraintes dans la dent est développé.

Le paragraphe III.3 présente la modélisation et le calcul des forces appliquées au noyau magnétique en rotation.

Dans le paragraphe III.4, le calcul des efforts intérieurs dans le noyau magnétique est réalisé, avant de présenter, dans le paragraphe III.5, le calcul des contraintes globales, en absence de concentration de contraintes.

Ensuite, le paragraphe III.6 aborde la modélisation des facteurs de concentration de contraintes en deux points critiques, pour permettre enfin le calcul des contraintes maximales dans le noyau en utilisant le critère de Von Mises.

Dans le paragraphe III.7, le modèle analytique est amélioré par l'optimisation des lois de concentration de contraintes données dans la littérature [48, 49]. L'optimisation est réalisée par une méthode des moindres carrés. Les résultats numériques de référence sur lesquels est ajusté le modèle sont obtenus par le logiciel de calcul par éléments finis *COSMOS/M*.

Enfin, le paragraphe III.8 permet de montrer l'application du modèle analytique au calcul des contraintes dans une géométrie de rotor destiné à la grande vitesse.

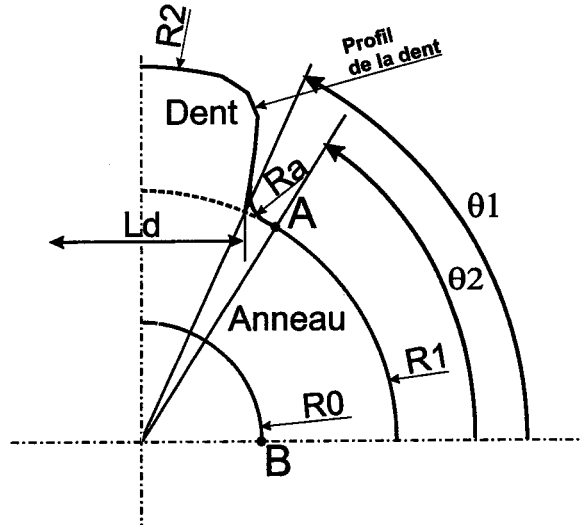


FIG. III-1 – Quart du noyau magnétique d'une MRV 6/2 à axe traversant – paramètres.

## III.2 Modélisation physique et mécanique du noyau magnétique

Nous cherchons à décrire d'une part la géométrie du noyau magnétique qui est utilisée pour le calcul des efforts appliqués, et, d'autre part, de présenter la géométrie équivalente du point de vue de la résistance mécanique (forme RDM équivalente) qui permet le calcul des efforts intérieurs dans le noyau.

### III.2.1 Description de la géométrie

La géométrie usuelle d'un noyau de MRV 6/2 à pôles saillants et axe traversant est représentée sur la figure III-1. La figure ne représente qu'un quart de la section du noyau à 2 pôles, puisque ce dernier présente deux plans de symétrie.

Ce noyau, de longueur active notée  $L_a$ , est composé d'une partie résistante appelée ici anneau, dont le rôle électromagnétique est de conduire le flux magnétique d'une dent à l'autre, et le rôle mécanique est de positionner les dents par rapport à l'axe moteur qui traverse le noyau, de transmettre le couple et de maintenir la cohésion du noyau magnétique sous l'action des forces centrifuges. Le rayon intérieur de l'anneau est noté  $R_0$ . Son rayon extérieur en dehors de la zone de saillance (dent) est noté  $R_1$ .

L'autre partie du noyau est composée des dents rotoriques dont le rôle est de créer la variation de réluctance afin de produire le couple moteur. Ce couple est essentiellement produit par la variation de l'épaisseur de l'entrefer (différence entre le rayon maximum et le rayon minimum), mais la forme de l'onde de couple est intimement liée à la forme de la dent. On note  $L_d$  la largeur de la dent à l'intersection avec le rayon  $R_1$  en l'absence de rayon de raccordement  $R_a$  et  $R_2$  le rayon extérieur maximum de la dent.

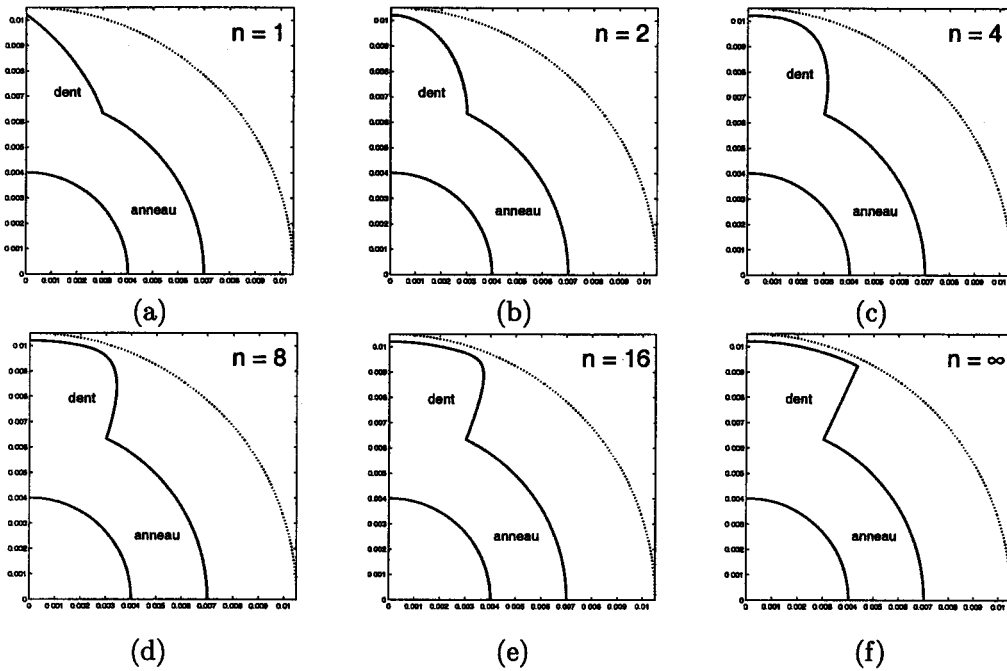


FIG. III-2 – Profil d'une dent ( $L_d = 6$  mm,  $R_1 = 7$  mm et  $R_2 = 10$  mm) pour différentes valeurs de l'exposant  $n$  dans la loi de variation du rayon  $R(\theta)$  donnée par l'équation (III-1).

### III.2.1.A Profil de la dent

Le profil de la dent revêt une importance capitale dans la création de l'onde de couple (variation du couple avec l'angle) produit par le moteur. Il est donc nécessaire de pouvoir modéliser un profil de rotor optimisé du point de vue du couple moteur généré. Cela permet d'obtenir une formulation générique laissant un maximum de possibilités au concepteur. Nous avons choisi de définir le profil de la dent par une fonction de l'angle  $\theta$  définie entre  $\theta_1$  et  $\pi/2$ , où  $\theta_1$  prend la valeur  $\theta_1 = \arccos [L_d/(2R_1)]$ . On choisit pour décrire le profil extérieur une fonction de la forme :

$$R(\theta) = R_2 - (R_2 - R_1) \left( \frac{\cos \theta}{\cos \theta_1} \right)^n \quad (\text{III-1})$$

Le rayon varie entre sa valeur minimale  $R_1$  en  $\theta_1$  et maximale  $R_2$  en  $\pi/2$ . L'évolution du rayon est quasi-linéaire lorsque  $n$  vaut 1 et devient de plus en plus brutale lorsque  $n$  augmente. Pour  $n = +\infty$ , on obtient le profil classique de la dent droite.

Les figures III-2(a) à III-2(f) présentent les allures d'une dent de largeur 6 mm à sa base, de rayon  $R_1 = 7$  mm et  $R_2 = 10$  mm, lorsque  $n$  vaut 1, 2, 4, 8, 16 ou  $+\infty$ .

### III.2.1.B Rayon de raccordement

Le rayon de raccordement  $R_a$  a pour objectif de limiter la concentration de contraintes dans la zone à la base de la dent. Outre la valeur du rayon, il est défini par l'angle  $\theta_2$ , où il débute, et son angle d'ouverture ( $\vec{OC}$ ,  $\vec{OA}$ ), noté  $\alpha$ . La figure III-3 présente les paramètres définissant ce rayon de



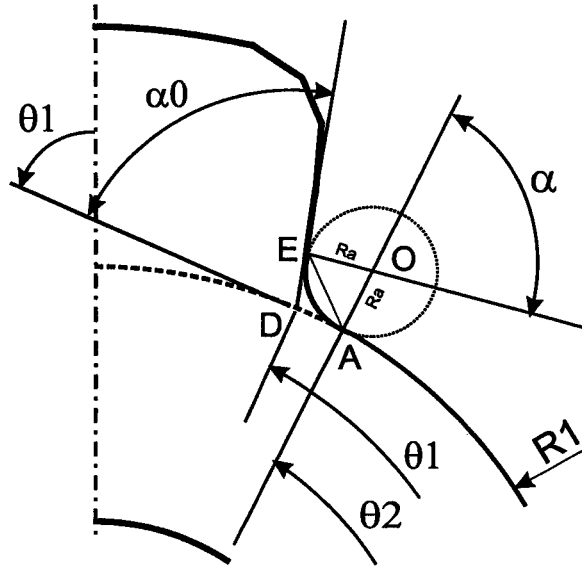


FIG. III-3 – Définition du rayon de raccordement à la base de la dent.

raccordement.

La géométrie sous une apparence simple, engendre en réalité des calculs assez complexes pour obtenir la valeur de l'angle  $\theta_2$  et de l'angle  $\alpha$ , en fonction des rayons  $R_a$ ,  $R_1$  et du profil de la dent.

L'angle  $\alpha_0$  formé par la tangente au profil, représentée par la droite (DE), et la tangente au cercle de rayon  $R_1$  au point  $\theta = \theta_1$  est donné par la relation :

$$\tan(\alpha_0) = \frac{1}{R_1} \frac{d}{d\theta} R(\theta_1) \quad (\text{III-2})$$

Cette relation conduit à l'expression de l'angle  $\alpha_0$ , comme suit :

$$\alpha_0 = \arctan \left( n \tan(\theta_1) \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) \quad (\text{III-3})$$

Pour simplifier le calcul de  $\alpha$ , nous choisissons d'utiliser la tangente au profil  $R(\theta)$  et la tangente au cercle au point  $\theta_1$  à la place des courbes exactes (le rayon de raccordement est supposé faible).

En conséquent les longueurs des segments  $DE$  et  $DA$  sont égales. Dans cette hypothèse,  $OD$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{COE}$ . On a  $\widehat{COE} = \widehat{DOA} = \alpha/2$ . Par conséquent, on peut écrire les relations suivantes :

$$DA = DE = R_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{III-4})$$

$$DA = DE = R_a \tan \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III-5})$$

D'où la relation suivante :

$$\theta_1 - \theta_2 = \arcsin \left( \frac{R_a}{R_1} \tan \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{III-6})$$

Par construction, la tangente en A au cercle de raccordement est confondue avec la tangente au cercle de rayon  $R_1$ . De même, pour le point E, où les tangentes au profil et au cercle sont égales. Le triangle

$AOE$  est donc isocèle et on a :

$$\alpha = \alpha_0 - (\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{III-7})$$

À partir des équations (III-6) et (III-7), on obtient la valeur de l'angle  $\alpha$  donnée par la résolution de l'équation implicite suivante :

$$\alpha + \arcsin\left(\frac{R_a}{R_1} \tan \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha_0 \quad (\text{III-8})$$

dont une solution approchée est donnée par l'équation suivante, obtenue par un développement limité en  $\alpha$  du terme de droite de l'équation (III-6) :

$$\alpha^3 + p\alpha + q = 0 \quad (\text{III-9})$$

avec :

$$p = \frac{1 + \frac{R_a}{2R_1}}{\frac{1}{24} \left( \frac{R_a^3}{2R_1^3} + \frac{R_a}{R_1} \right)} \quad q = -\frac{\alpha_0}{\frac{1}{24} \left( \frac{R_a^3}{2R_1^3} + \frac{R_a}{R_1} \right)} \quad (\text{III-10})$$

Le coefficient  $p$  est strictement positif et  $q$  négatif. Le déterminant  $\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3$  est donc strictement positif. Il y a une seule racine réelle, solution de l'équation (III-9). Elle est donnée par :

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (\text{III-11})$$

Connaissant la valeur de l'angle d'ouverture du raccordement  $\alpha$ , on en déduit la valeur de l'angle  $\theta_2$  par l'équation (III-7) :

$$\theta_2 = \alpha + \theta_1 - \alpha_0 \quad (\text{III-12})$$

À partir de ces paramètres géométriques, les forces appliquées à la tôle et les concentrations de contraintes pourront être calculées. En revanche, pour le calcul des efforts intérieurs et des contraintes, il est nécessaire de modéliser différemment le contour, afin de prendre en compte l'influence de la concentration de contraintes sur la répartition des contraintes. Cette modélisation est appelée ici «RDM équivalente» du noyau magnétique, c'est-à-dire le contour de la matière qui contribue à la résistance de l'ensemble.

### III.2.2 Description de la forme RDM équivalente

Il s'agit ici de définir une forme du contour extérieur du noyau, équivalente du point de vue de sa résistance mécanique. Cette forme peut différer fortement de la géométrie réelle du contour du noyau car l'élargissement de la section au niveau de la dent crée une concentration de contraintes à la base de celle-ci (zone du point  $A$ , fig. (III-4) et un soulagement dans la zone du point  $C$ . La matière qui participe effectivement à la résistance du noyau magnétique doit être décrite par un rayon inférieur au rayon réel du profil, pour les angles de la zone du point  $C$  (fig. III-4).

Une poutre sollicitée en traction ou en flexion et présentant deux épaulements symétriques est représentée sur la figure III-5. D'après Peterson [48], des essais réalisés en coordonnées cartésiennes

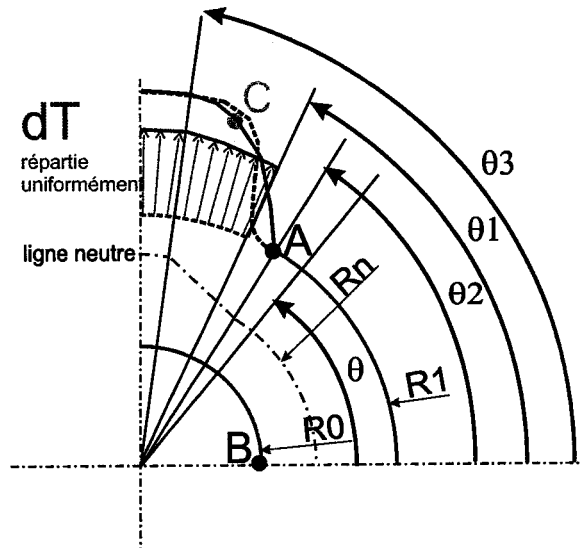


FIG. III-4 – Modèle mécanique du noyau magnétique de la MRV et paramètres.

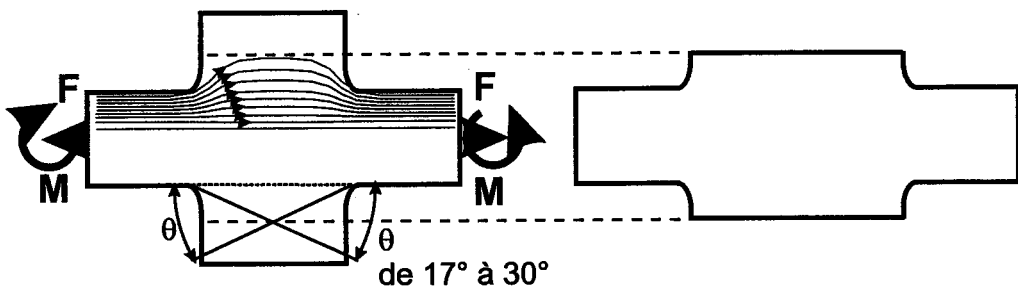


FIG. III-5 – Modèle de l'épaulement long équivalent à deux épaulements rapprochés.

sur de tels modèles de poutres droites épaulées ont montré que si les deux épaulements sont proches, les champs des contraintes aux abords de chacun des épaulements s'influencent mutuellement. Dans la zone de grande largeur, les contraintes dans le matériau sont plus faibles à l'extérieur qu'au centre de la poutre. L'étude par photo-élasticité de cette poutre a conduit Baud [50] à associer à ce double épaulement dont la hauteur n'est pas sollicitée entièrement, un épaulement de largeur équivalente. La matière sollicitée a été délimitée par une droite formant un angle de  $17^\circ$  jusqu'à  $30^\circ$  avec la direction des contraintes en amont de l'épaulement. Ce modèle simple donne des résultats satisfaisants pour le calcul des concentrations de contraintes. Ces travaux ont conduit à des définitions de diamètres équivalents classiquement utilisées dans le calcul des concentrations de contraintes dans les épaulements [48, 51]. Cependant, ces modèles ne sont pas forcément adaptables aux coordonnées cylindriques utilisées ici, ni aux poutres à forte courbure, mais ils nous permettent néanmoins de donner un choix plus éclairé de la fonction décrivant le rayon équivalent.

La figure III-4 présente le contour utilisé pour le calcul des efforts internes. Nous avons choisi de

prendre une fonction linéaire en  $\theta$  de la forme suivante :

$$R_m(\theta) = R_1 + B_1 R_1 (\theta - \theta_2) \quad (\text{III-13})$$

où  $B_1$  est une valeur comprise entre  $\tan 17^\circ$  et  $\tan 30^\circ$ . Cette fonction (spirale dans le plan cartésien) est définie entre  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , angle pour lequel elle coïncide avec le rayon extérieur  $R_2$ . La valeur de  $\theta_3$  est donnée par :

$$\theta_3 = \theta_2 - \frac{R_2 - R_1}{R_1 B_1} \quad (\text{III-14})$$

La figure III-4 présente le cas où l'angle  $\theta_3$  est inférieur à  $\pi/2$ . La fonction  $R_m(\theta)$  est donc définie sur 3 intervalles ( $[0, \theta_2]$ ,  $[\theta_2, \theta_3]$  et  $[\theta_3, \pi/2]$ ). Si  $\theta_3$  est supérieur à  $\pi/2$ , la fonction  $R_m(\theta)$  n'est définie que sur les deux premiers intervalles.

### III.2.3 Matériau du noyau

Les caractéristiques couramment étudiées lors du choix d'un matériau ferromagnétique, dans le domaine de l'électrotechnique, sont la perméabilité (notée  $\mu$ ) et l'induction de saturation (notée  $B_{max}$ ). Ces caractéristiques déterminent en effet les performances d'une MRV, et sont souvent les seules disponibles dans le catalogue de matériaux ferromagnétiques.

Lorsque des caractéristiques mécaniques sont données, elles sont souvent limitées à la densité et la dureté du matériau [52]. Ces données sont en effet largement suffisantes pour des applications fixes ou peu sollicitées.

Mais lorsque les exigences mécaniques de l'application deviennent à leur tour un facteur limitant dans la conception, les données fournies par les producteurs de tôles ne peuvent suffire. Des essais doivent être réalisés, et les matériaux classiques se montrent peu performants mécaniquement.

Pour le modèle analytique, le matériau du noyau magnétique est supposé homogène. Sa masse volumique, son module de Young et son coefficient de Poisson sont respectivement notés  $\rho$ ,  $E$  et  $\nu$ .

### III.2.4 Étude de la résistance mécanique de tôles magnétiques

Nous avons réalisé des essais de traction sur une nuance d'alliage Fer-Silicium (3% de Silicium) utilisés pour la fabrication de transformateurs de grande puissance, pour connaître la résistance mécanique  $\sigma_m$  du matériau.

Des tôles d'épaisseur 0,25 mm et de largeur 14 mm sont soumises à une force de traction jusqu'à la rupture. Les résultats des 8 essais sont regroupés dans le tableau III-1. Les mâchoires de la machine de traction présentent des micro-griffes destinées à améliorer la prise. Pour vérifier si ces griffes créent une rupture prématurée de la tôle (par concentration de contraintes), le 8<sup>ème</sup> essai a été réalisé sur 2 tôles empilées à la fois. L'essai a bien donné deux fois la valeur  $\sigma_m$  fournie par les 7 autres essais.

Essai n°	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma_m$	358	371	364	368	370	366	369	735*

TAB. III-1 – Résistance mécanique obtenue pour un alliage Fer-silicium à 3% lors d'essais de traction sur des tôles ferromagnétiques. \* traction de 2 tôles simultanément

Si on se réfère aux données sur les alliages Fe-Si données par [52], nous trouvons une dureté Rockwell de 84 HRB (essai bille), ce qui correspond d'après [46] à une résistance à la rupture de 360 MPa environ. Les résultats des essais sont donc concordants.

L'objectif de ces essais était de connaître la valeur exacte de la résistance mécanique d'une tôle en Fer-silicium (des essais précédents avaient chiffré cette résistance à plus de 500 MPa pour un alliage semblable [28]). L'utilisation d'un tel matériau impose que la résistance mécanique soit assurée par une troisième matière. Un prototype réalisé au laboratoire présentait à cet effet un enrobage de fibres Kevlar (aramide) imprégnées d'une résine époxyde. Le noyau magnétique d'un rotor de machine à réluctance variable utilisée à grande vitesse doit être réalisé dans un matériau alliant performances électromagnétiques (bonne perméabilité et haute induction de saturation) mais également une résistance mécanique compatible avec les niveaux de contraintes atteints.

La section suivante présente la modélisation des forces de centrifugation dans la tôle, décomposées en deux parties : les forces volumiques appliquées à la matière de l'anneau et celles appliquées au volume de la dent rotorique.

### III.3 Modélisation des forces

Dans ce paragraphe, nous allons détailler la manière dont les forces appliquées à la tôle en rotation sont modélisées. L'anneau est d'abord considéré seul, afin de calculer les contraintes par les méthodes de mécanique des milieux continus. Ensuite les forces appliquées par la dent sur ce même anneau sont calculées en fonction de la géométrie de la dent. Enfin l'état de contrainte en un point du rotor pourra être obtenu en superposant les effets de la centrifugation de l'anneau seul, avec les effets des forces appliquées par la dent sur l'anneau.

#### III.3.1 Centrifugation de l'anneau seul

Le comportement du matériau est supposé élastique linéaire. Nous supposons que le principe de superposition des contraintes s'applique.

Les contraintes observées aux abords des points *A* et *B* sont supposées équivalentes à la somme des contraintes de centrifugation de l'anneau en absence de la dent et des contraintes créées par les forces appliquées par la dent sur l'anneau. Les contraintes de centrifugation seront par la suite pondérées par le coefficient de concentration de contraintes pour prendre en compte la présence de la dent.

L'anneau est défini par ses deux rayons intérieur et extérieur, respectivement notés  $R_0$  et  $R_1$ .

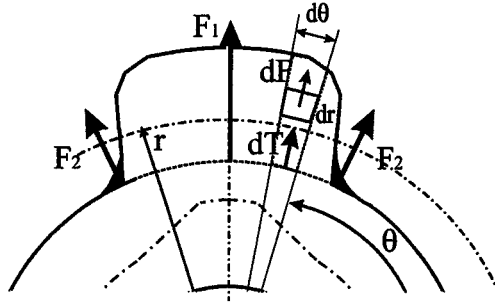


FIG. III-6 – Force appliquée à un élément de volume de la dent, et force appliquée par l'élément angulaire  $d\theta$  sur l'anneau.

L'anneau est soumis à une distribution volumique des forces centrifuges calculées par rapport à l'axe de rotation du rotor.

Les contraintes de centrifugation sont obtenues par les méthodes de la mécanique des milieux continus facilement applicables aux corps axisymétriques comme l'anneau étudié [53]. Les champs de contraintes seront directement calculés par les formules classiques de mécanique des milieux continus [54].

### III.3.2 Force appliquée par la dent sur l'anneau

Nous allons maintenant voir les actions qui se superposent dues à la centrifugation de la dent. Un élément de volume  $L_a \cdot dr \cdot r \cdot d\theta$  de la dent du noyau en rotation est soumis à une force de centrifugation  $dF$  (voir fig. III-6) donnée par  $dF = \rho \cdot r \cdot \Omega^2 \cdot L_a \cdot dr \cdot r \cdot d\theta$ . L'intégration de ces forces entre le rayon entre  $R_1$  et  $R(\theta)$  donne la force radiale  $dT(\theta)$  appliquée par le secteur angulaire  $d\theta$  sur l'anneau :

$$dT(\theta) = \frac{1}{3} \rho \Omega^2 L_a (R^3(\theta) - R_1^3) d\theta \quad (\text{III-15})$$

$T$  désigne l'effort tranchant au sens de la résistance des matériaux. Par une nouvelle intégration la résultante globale  $F_1$  suivant l'axe des dents est l'intégrale des projections  $dT \sin \theta$  de chaque force élémentaire entre  $\theta_1$  et  $\pi - \theta_1$ , alors donnée par l'expression :

$$F_1 = \frac{1}{3} \rho \Omega^2 L_a \int_{\theta_1}^{\pi - \theta_1} (R^3(\theta) - R_1^3) \sin \theta d\theta \quad (\text{III-16})$$

Le calcul analytique de la force  $F_1$  est réalisé en opérant le changement de variable  $X = \cos(\theta) / \cos \theta_1$ .

Le résultat est donné par :

$$F_1 = \frac{2}{3} \rho \Omega^2 b \cos \theta_1 \left( R_2^3 - R_1^3 - \frac{(R_2 - R_1)^3}{3n + 1} + 3 \frac{R_2 (R_2 - R_1)^2}{2n + 1} - 3 \frac{R_2^2 (R_2 - R_1)}{n + 1} \right) \quad (\text{III-17})$$

À cette force, on peut ajouter la valeur approchée de la force de centrifugation de la matière des rayons de raccordement. L'angle d'ouverture des rayons étant  $\alpha$ , on suppose le centre de gravité proche du

rayon  $R_1$ , et situé à l'angle  $\theta_1$ . Pour les deux rayons de raccordement, la force  $F_2$  est donnée par :

$$F_2 = R_1 \rho \Omega^2 b R_a^2 \left( \tan \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{III-18})$$

La force totale due à la dent et aux raccordements notée  $F$  est donc la somme de ces deux actions en projection sur l'axe des dents  $F = F_1 + 2 F_2 \sin \theta_1$ .

Pour le calcul des efforts internes, cette force sera répartie uniformément sur l'arc de rayon  $R_1$  compris entre  $\theta_1$  et  $\pi - \theta_1$  comme représenté sur la figure III-4. La valeur de la charge répartie équivalente  $q_{moy}$  (en N/rad) est donnée par la relation :

$$\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} q_{moy} \sin \theta d\theta = F \quad (\text{III-19})$$

La valeur de  $q_{moy}$  est donc donnée par :

$$q_{moy} = \frac{F}{2 \cos \theta_1} \quad (\text{III-20})$$

Une fois les efforts extérieurs calculés, il faut d'appliquer le principe fondamental de la statique à la tôle afin de connaître la répartition des efforts internes dans l'anneau. Ce point est détaillé dans le paragraphe suivant.

### III.4 Répartition des efforts internes dans l'anneau

Nous recherchons maintenant la distribution des efforts de traction  $N(\theta)$  et de cisaillement  $T(\theta)$  ainsi que du moment de flexion  $M(\theta)$  dans l'anneau, en utilisant la forme équivalente définie précédemment. Le modèle de résistance des matériaux utilisé pour le calcul des efforts internes est représenté sur la figure III-7. Les efforts intérieurs dans une section repérée par l'angle  $\theta$  sont décrits. La demi-tôle est représentée afin de montrer les efforts aux appuis en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ .

#### III.4.1 Efforts aux appuis

Les efforts en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  sont calculés en isolant la demi-tôle supérieure. En utilisant à la fois la symétrie et le théorème de réciprocité des actions, on montre que la résultante des efforts de la demi-tôle inférieure sur la demi-tôle supérieure est nécessairement verticale (perpendiculaire à la section  $\theta = 0$ ). Les efforts aux appuis sont eux aussi symétriques par rapport au plan de symétrie du chargement du système. Les deux efforts aux appuis sont donc égaux à  $-F/2$ . Le moment en  $\theta = 0$  appliqué par la demi-tôle inférieure sur la demi-tôle étudiée est noté  $M_0$ . L'équation des moments donne le moment  $-M_0$  en  $\pi$  appliqué par la demi-tôle inférieure sur la demi-tôle étudiée. Cette inconnue qui subsiste après exploitation des équations de la statique est appelée inconnue hyperstatique.

Nous allons maintenant déterminer les contraintes maximales aux points critiques.

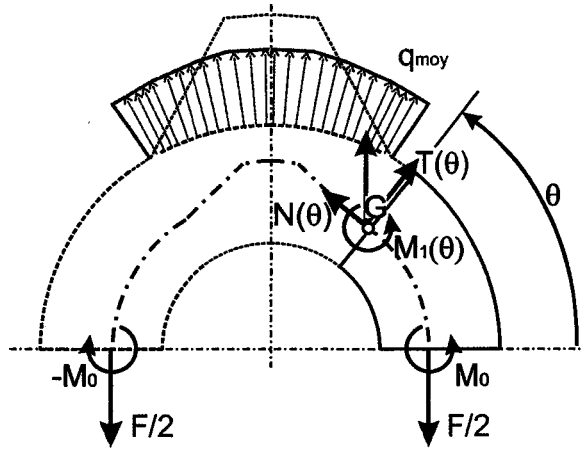


FIG. III-7 – Efforts aux appuis en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  – efforts intérieurs dans la section à l'angle  $\theta$ .

### III.4.2 Localisation des contraintes maximales

Dans la mesure où seule la contrainte maximale nous intéresse ici, seules deux zones critiques sont considérées. Ces zones sont représentées par les points  $A$  et  $B$  sur la figure III-4. Ces zones ont été clairement mises en évidence par différentes simulations par la méthode des éléments finis [47]. La figure III-13 (section III.7.3.D) permet de constater de visu l'emplacement des zones  $A$  et  $B$ , où les contraintes de Von Mises sont maximales. Les couleurs associées aux fortes contraintes sont dans des nuances de rouge-orange, par opposition aux zones moins chargées qui sont dans des tons de bleu clair à indigo. Le point  $A$  est en effet soumis à des contraintes centrifuges et aux effets des forces élémentaires  $dF$  (flexion, traction et cisaillement). Ces contraintes sont concentrées par la présence de la dent. Ce coefficient de concentration de contraintes est une fonction des rayons  $R_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ , du rayon de raccordement  $R_a$  et de l'angle d'ouverture  $\alpha$  du rayon de raccordement.

Le point  $A$  est repéré par un angle  $\theta_A$ , qui correspond à la zone du raccordement et dont la valeur est proche de  $\theta_2$ .

Nous avons constaté lors des simulations par éléments finis réalisées sur un grand nombre de combinaisons de paramètres, que le point  $A$ , où la concentration de contraintes est maximale, est situé peu après le début du rayon de raccordement et surtout que sa position était peu influencée par les dimensions de l'épaule et du raccordement (voir figure III-13).

Quant au point  $B$ , il est soumis à des fortes contraintes de centrifugation auxquels s'ajoutent les effets des forces élémentaires  $dF$  (contraintes de flexion et de traction). Le point  $B$  est situé sur le bord intérieur de l'anneau, au rayon  $R_0$ , quelque soit les dimensions de la dent (voir figure III-13).

### III.4.3 Efforts intérieurs

Pour toutes les valeurs de  $\theta$  comprises entre 0 et  $\theta_2$ , l'étude des efforts intérieurs et l'application du principe fondamental de la statique à la partie isolée entre les angles 0 et  $\theta$  (voir figure III-7) conduit



aux résultats suivants :

$$N(\theta) = \frac{F}{2} \cos \theta \quad (\text{III-21})$$

$$T(\theta) = \frac{F}{2} \sin \theta \quad (\text{III-22})$$

$$M_1(\theta) = -M_0 + \frac{F R_{n1}}{2} (1 - \cos \theta) \quad (\text{III-23})$$

où  $R_{n1}$  est la position de la ligne neutre de la partie de l'anneau comprise entre 0 et  $\theta_1$ . La valeur du moment  $M_0$  est une inconnue hyperstatique. Elle sera déterminée par l'intégration des déformations angulaires sur le quart de l'anneau, puis en posant le résultat comme étant nul, pour des raisons de symétrie.

Pour la zone comprise entre  $\theta_1$  et  $\theta_3$ , l'application du principe fondamentale de la statique donne les relations suivantes :

$$-\frac{F}{2} \cos \theta + N(\theta) + \int_{\theta_1}^{\theta} q_{moy} \sin(u - \theta_1) du = 0 \quad (\text{III-24})$$

$$-\frac{F}{2} \sin \theta + T(\theta) + \int_{\theta_1}^{\theta} q_{moy} \cos(u - \theta_1) du = 0 \quad (\text{III-25})$$

$$M_2(\theta) + M_0 - \frac{F}{2} (R_{n1} - R_{n2}(\theta) \cos \theta) + \int_{\theta_1}^{\theta} q_{moy} R_{n2}(\theta) \sin(\theta - u) du = 0 \quad (\text{III-26})$$

Ce qui conduit aux expressions des effort intérieurs pour la zone  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_3$  :

$$N(\theta) = \frac{F}{2} \cos \theta - q_{moy} (1 - \cos(\theta - \theta_1)) \quad (\text{III-27})$$

$$T(\theta) = \frac{F}{2} \sin \theta - q_{moy} \sin(\theta - \theta_1) \quad (\text{III-28})$$

$$M_2(\theta) = -M_0 + \frac{F}{2} (R_{n1} - R_{n2}(\theta) \cos \theta) - q_{moy} R_{n2}(\theta) (1 - \cos(\theta - \theta_1)) \quad (\text{III-29})$$

La valeur de  $q_{moy}$  est donnée par l'équation (III-20).

Pour la zone comprise entre  $\theta_3$  et  $\pi/2$ , des calculs similaires conduisent aux relations suivantes :

$$-\frac{F}{2} \cos \theta + N(\theta) + \int_{\theta_1}^{\theta} q_{moy} \sin(u - \theta_1) du = 0 \quad (\text{III-30})$$

$$-\frac{F}{2} \sin \theta + T(\theta) + \int_{\theta_1}^{\theta} q_{moy} \cos(u - \theta_1) du = 0 \quad (\text{III-31})$$

$$M_3(\theta) + M_0 - \frac{F}{2} (R_{n1} - R_{n3} \cos \theta) + \int_{\theta_1}^{\theta} q_{moy} R_{n3} \sin(\theta - u) du = 0 \quad (\text{III-32})$$

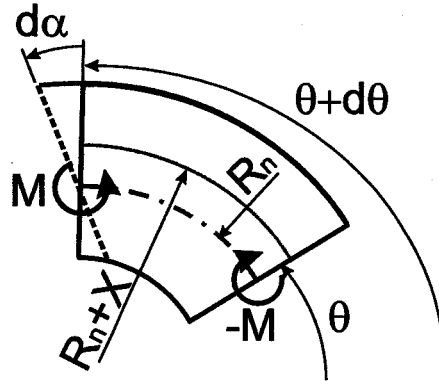


FIG. III-8 – Déformations dues à un moment  $M$  dans la section d'angle  $\theta$ .

Ce qui conduit aux expressions des effort intérieurs pour la zone  $\theta_3 \leq \theta \leq \pi/2$ :

$$N(\theta) = \frac{F}{2} \cos \theta - q_{moy} (1 - \cos(\theta - \theta_1)) \quad (\text{III-33})$$

$$T(\theta) = \frac{F}{2} \sin \theta - q_{moy} \sin(\theta - \theta_1) \quad (\text{III-34})$$

$$M_3(\theta) = -M_0 + \frac{F}{2} (R_{n1} - R_{n3} \cos \theta) - q_{moy} R_{n3} (1 - \cos(\theta - \theta_1)) \quad (\text{III-35})$$

À partir des expressions des efforts intérieurs appliqués à une section, on peut calculer les contraintes dans la section en utilisant les formules de résistance des matériaux. Mais auparavant il faut calculer l'inconnue hyperstatique  $M_0$ .

#### III.4.4 Calcul du moment de flexion $M_0$

Pour le calcul de l'inconnue hyperstatique, il est nécessaire de connaître la relation entre le moment de flexion appliqué à une section et la déformation résultante.

##### III.4.4.A Calcul des déformations angulaires due à un moment de flexion

Dans le cas d'une poutre à faible courbure de section rectangulaire (hauteur  $h$ , largeur  $b$ ), la variation  $d\alpha$  de la déformation angulaire d'un élément de longueur  $dx$  sous l'action d'un moment fléchissant  $M$  est donnée par :

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \quad (\text{III-36})$$

avec  $I = bh^2/12$  et  $E$  le module d'Young du matériau.

Dans le cas des poutres à forte courbure, cette relation ne s'applique plus. Le calcul des contraintes dues au moment de flexion nécessite une analyse du problème de la poutre à forte courbure. Une poutre à forte courbure est une poutre dont le rayon d'enroulement (ici  $R_n$ ) est inférieur à 4 fois la dimension radiale de la section (ici  $R_1 - R_0$ )

Dans le raisonnement classique, la section est supposée rester plane après déformation. Soit un tronçon de la poutre d'angle  $d\theta$ . Après application d'un moment de flexion, la section  $S(\theta + d\theta)$  subit une déformation angulaire  $d\alpha$  par rapport à la section  $S(\theta)$ .

On considère un point de la section située à un rayon  $R_n + X$ , où  $X$  est la position du point sur le rayon par rapport à la ligne neutre. La ligne neutre (ne subissant aucune allongement en flexion) est située en  $R_n$ .

L'allongement de l'arc infinitésimal  $(R_n + X) d\theta$  est supposé proportionnel à la distance à la ligne neutre. La déformation circonférentielle est alors donnée par :

$$\epsilon = \frac{X}{R_n + X} \frac{d\alpha}{d\theta} \quad (\text{III-37})$$

En utilisant la loi de Hooke uniaxiale, on obtient la contrainte normale de flexion (indice f) à la section :

$$\sigma_f = E \frac{X}{R_n + X} \frac{d\alpha}{d\theta} \quad (\text{III-38})$$

La répartition des contraintes suivant le rayon est donc hyperbolique, et non plus droite comme pour les poutres à faibles courbures.

La position de la ligne neutre est donné par la somme des forces élémentaires  $\sigma_f dS$ , qui doit être nulle pour une charge en flexion. Pour une section rectangulaire, de rayon intérieur  $R_0$  et extérieur  $R(\theta)$ , le calcul d'intégration donne :

$$R_n(\theta) = \frac{R(\theta) - R_0}{\ln R(\theta) - \ln R_0} \quad (\text{III-39})$$

La relation entre le moment appliqué  $M$  et la déformation angulaire  $d\alpha$  est donnée par l'égalité entre la somme des moments élémentaires  $\sigma_f X dS$  sur la section  $S$  et le moment appliqué. Si la distance entre la ligne neutre et le centre géométrique de la section est notée  $e$  :

$$e = \frac{R_1 + R_0}{2} - \frac{R_1 - R_0}{\ln R_1 - \ln R_0} \quad (\text{III-40})$$

Dans le cas d'une poutre à forte courbure, la relation entre la déformation angulaire  $d\alpha/d\theta$  et le moment de flexion  $M(\theta)$  est alors [43, 29] :

$$\frac{1}{R_n(\theta)} \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{M(\theta)}{E e S(\theta)} \quad (\text{III-41})$$

Dans le cas du noyau magnétique, si le rayon intérieur est  $R_0$ , le rayon extérieur  $R_m(\theta)$  et la largeur du noyau magnétique  $L_a$ , les résultats suivants sont obtenus:

$$R_n(\theta) = \frac{R_m(\theta) - R_0}{\ln(R_m(\theta)/R_0)} \quad (\text{III-42})$$

$$e(\theta) = \frac{R_m(\theta) + R_0}{2} - \frac{R_m(\theta) - R_0}{\ln(R_m/R_0)} \quad (\text{III-43})$$

$$S(\theta) = L_a (R_m(\theta) - R_0) \quad (\text{III-44})$$

#### III.4.4.B Calcul du moment hyperstatique $M_0$

L'équation permettant le calcul de  $M_0$  est l'exploitation de la condition au limite de symétrie pour  $\theta = \pi/2$ . En ce point, la section doit rester dans le plan de symétrie donc  $\alpha(\pi/2) = 0$ . En intégrant

les déformations angulaires entre  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$ , nous obtenons l'expression de  $\alpha(\pi/2)$ . La valeur recherchée du moment  $M_0$  annulera le résultat.

L'équation (III-41) s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{R_n(\theta)} \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{M(\theta)}{E \left( \frac{R_m(\theta)+R_0}{2} - \frac{R_m(\theta)-R_0}{\ln(R_m(\theta)/R_0)} \right) b (R_m(\theta) - R_0)} \quad (\text{III-45})$$

Le calcul de la déformation angulaire de la section en  $\theta = \pi/2$  est donné par :

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) - \alpha(0) = \frac{1}{E b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{M(\theta) \frac{R_m(\theta)-R_0}{\ln(R_m(\theta)/R_0)}}{\left( \frac{R_m(\theta)+R_0}{2} - \frac{R_m(\theta)-R_0}{\ln(R_m(\theta)/R_0)} \right) (R_m(\theta) - R_0)} \right) d\theta \quad (\text{III-46})$$

En exploitant les conditions de symétrie aux limites (déformations angulaires nulles en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$  et en simplifiant par  $1/(E.b)$ , on obtient la relation :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{M(\theta) \frac{R_m(\theta)-R_0}{\ln(R_m(\theta)/R_0)}}{\left( \frac{R_m(\theta)+R_0}{2} - \frac{R_m(\theta)-R_0}{\ln(R_m(\theta)/R_0)} \right) (R_m(\theta) - R_0)} \right) d\theta = 0 \quad (\text{III-47})$$

Cette intégrale doit être décomposée en trois termes selon que l'angle  $\theta$  est compris entre 0 et  $\theta_2$ , entre  $\theta_2$  et  $\theta_3$  ou encore entre  $\theta_3$  et  $\pi/2$ .

Pour  $\theta$  compris entre 0 et  $\theta_2$ , on a l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\theta_2} \frac{M_1(\theta)}{e_1 S_1} R_{n1} d\theta \quad (\text{III-48})$$

$e_1$  et  $S_1$  sont respectivement la différence entre la position du centre géométrique de la section (rayon moyen) et la position de la ligne neutre  $R_{n1}$ .  $S_1$  est la surface de la section de l'anneau entre 0 et  $\theta_2$ .

Compte tenu de l'expression de  $M_1(\theta)$  (équation (III-23)), cette intégrale s'écrit sous la forme :

$$-M_0 \int_0^{\theta_2} \frac{R_{n1}}{e_1 S_1} d\theta + \frac{F}{2} \int_0^{\theta_2} \frac{R_{n1}^2 (1 - \cos\theta)}{e_1 S_1} d\theta \quad (\text{III-49})$$

Ce qui donne tous calculs fait :

$$-M_0 \frac{R_{n1} \theta_2}{e_1 S_1} + \frac{F R_{n1}^2 (\theta_2 - \sin\theta_2)}{2 e_1 S_1} \quad (\text{III-50})$$

Pour simplifier l'expression finale de  $M_0$ , on pose alors l'équation précédente sous la forme  $-M_0 I_{M1} + \frac{F}{2} J_{M1}$ , où  $I_{M1}$  et  $J_{M1}$  sont données par :

$$I_{M1} = \frac{R_{n1} \theta_2}{e_1 S_1} \quad (\text{III-51})$$

$$J_{M1} = \frac{R_{n1}^2 (\theta_2 - \sin\theta_2)}{e_1 S_1} \quad (\text{III-52})$$

Pour  $\theta$  compris entre  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , le rayon mécanique n'est plus constant mais dépendant de l'angle suivant le modèle (équation (III-13)):

$$R_m(\theta) = R_1 + B_1 R_1 (\theta - \theta_2)$$

d'où l'expression de l'intégrale des déformations sur la zone  $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$ :

$$\int_{\theta_2}^{\theta_3} \left( \frac{M_2(\theta) \frac{(R_1+B_1 R_1 (\theta-\theta_2))-R_0}{\ln((R_1+B_1 R_1 (\theta-\theta_2))/R_0)}}{\left[ \frac{(R_1+B_1 R_1 (\theta-\theta_2))+R_0}{2} - \frac{(R_1+B_1 R_1 (\theta-\theta_2))-R_0}{\ln((R_1+B_1 R_1 (\theta-\theta_2))/R_0)} \right] [R_1 + B_1 R_1 (\theta - \theta_2) - R_0]} \right) d\theta \quad (\text{III-53})$$

Cette intégrale n'est malheureusement pas calculable sous forme analytique. L'utilisation d'un développement de Taylor à l'ordre 1 ne vérifie pas la continuité de la fonction  $R_n$  en  $\theta_3$  (surestimation de  $R_n$  en  $\theta_3$ ). Les ordres supérieurs créent des variations de  $R_n$  qui sous-estiment la valeur exacte.

Pour obtenir un résultat explicite, on choisit de remplacer l'expression du rayon de la ligne neutre  $R_{n2}$  par une loi linéaire donnant les mêmes résultats aux deux extrémités, respectivement  $R_{n1}$  et  $R_{n3}$  en  $\theta_2$  et  $\theta_3$ . L'expression de  $R_{n2}(\theta)$  s'écrit alors :

$$R_{n2}(\theta) = R_{n1} + \frac{R_{n3} - R_{n1}}{\theta_3 - \theta_2} (\theta - \theta_2) \quad (\text{III-54})$$

où  $R_{n1}$  et  $R_{n3}$  sont respectivement données par  $\frac{R_1 - R_0}{\ln R_1 - \ln R_0}$  et  $\frac{R_2 - R_0}{\ln R_2 - \ln R_0}$ . En posant :

$$B_2 = \frac{R_{n3} - R_{n1}}{\theta_3 - \theta_2} \quad (\text{III-55})$$

Les expressions de la distance  $e_2$  et de la section  $S_2$  s'écrivent comme suit:

$$e_2 = \left( \frac{R_1 + R_0}{2} - R_{n1} \right) + \left( \frac{B_1 R_1}{2} - B_2 \right) (\theta - \theta_2) \quad (\text{III-56})$$

$$S_2 = L_a (R_1 - R_0) + L_a B_1 R_1 (\theta - \theta_2) \quad (\text{III-57})$$

Compte tenu de l'expression de  $M_2(\theta)$  (équation (III-29)), l'intégrale (III-53) s'écrit sous la forme :

$$-M_0 \int_{\theta_2}^{\theta_3} \frac{R_{n2}}{e_2 S_2} d\theta + \frac{F}{2} \int_{\theta_2}^{\theta_3} R_{n2} \frac{R_{n1} - R_{n2} \cos \theta}{e_2 S_2} d\theta - q_{moy} \int_{\theta_2}^{\theta_3} R_{n2}^2 \frac{1 - \cos(\theta - \theta_2)}{e_2 S_2} d\theta \quad (\text{III-58})$$

Afin d'obtenir réellement une expression analytique, nous avons remplacé les termes en  $\cos(\theta)$  par des développements limités à l'ordre 6, afin d'obtenir des expressions du résultats complètement analytiques. On pose cette équation sous la forme :

$$-M_0 I_{M2} + \frac{F}{2} J_{M2} - q_{moy} K_{M2} \quad (\text{III-59})$$

où les expressions de  $I_{M2}$ ,  $J_{M2}$  et  $K_{M2}$  sont données par :

$$I_{M2} = \int_{\theta_2}^{\theta_3} \frac{R_{n2}}{e_2 S_2} d\theta \quad (\text{III-60})$$

$$J_{M2} = \frac{F}{2} \int_{\theta_2}^{\theta_3} R_{n2} \frac{R_{n1} - R_{n2} \cos \theta}{e_2 S_2} d\theta \quad (\text{III-61})$$

$$K_{M2} = \int_{\theta_2}^{\theta_3} R_{n2}^2 \frac{1 - \cos(\theta - \theta_2)}{e_2 S_2} d\theta \quad (\text{III-62})$$

Pour le dernier segment de l'anneau entre  $\theta_3$  et  $\pi/2$ , on a l'expression de l'intégrale suivante :

$$-M_0 \int_{\theta_3}^{\pi/2} \frac{R_{n3}}{e_3 S_3} d\theta + \frac{F}{2} \int_{\theta_3}^{\pi/2} R_{n3} \frac{R_{n1} - R_{n3} \cos \theta}{e_3 S_3} d\theta - q_{moy} \int_{\theta_3}^{\pi/2} R_{n3}^2 \frac{1 - \cos(\theta - \theta_2)}{e_3 S_3} d\theta \quad (\text{III-63})$$

qui conduit à :

$$-M_0 \frac{R_{n3}}{e_3 S_3} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_3 \right) + \frac{F}{2} R_{n3} \frac{R_{n1} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_3 \right) - R_{n3} (1 - \sin \theta_3)}{e_3 S_3} - q_{moy} R_{n3}^2 \frac{\left( \frac{\pi}{2} - \theta_3 \right) + \sin(\theta_3 - \theta_2) - \cos \theta_2}{e_3 S_3} \quad (\text{III-64})$$

On pose alors l'équation précédente sous la forme :

$$-M_0 I_{M3} + \frac{F}{2} J_{M3} - q_{moy} K_{M3} \quad (\text{III-65})$$

$$I_{M3} = \frac{R_{n3}}{e_3 S_3} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_3 \right) \quad (\text{III-66})$$

$$J_{M3} = \frac{F}{2} R_{n3} \frac{R_{n1} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_3 \right) - R_{n3} (1 - \sin \theta_3)}{e_3 S_3} \quad (\text{III-67})$$

$$K_{M3} = R_{n3}^2 \frac{\left( \frac{\pi}{2} - \theta_3 \right) + \sin(\theta_3 - \theta_2) - \cos \theta_2}{e_3 S_3} \quad (\text{III-68})$$

La somme des termes des équations (III-50), (III-58) et (III-64) doit donc être nulle pour respecter les conditions de symétrie aux limites (déformations angulaires nulles en 0 et  $\pi/2$  soit  $\alpha(0) = \alpha(\pi/2) = 0$ ).

Par une simple factorisation de  $M_0$  et  $F/2$ , en remplaçant  $q_{moy}$  par sa valeur donnée par l'équation (III-20), la somme des termes des équations (III-50), (III-58) et (III-64) s'écrit sous la forme :

$$-M_0 (I_{M1} + I_{M2} + I_{M3}) + \frac{F}{2} \left( J_{M1} + J_{M2} + J_{M3} - \frac{1}{\cos \theta_2} (K_{M2} + K_{M3}) \right) = 0 \quad (\text{III-69})$$

L'expression du moment hyperstatique pour l'anneau étudié est finalement la suivante :

$$M_0 = \frac{F}{2} \frac{J_{M1} + J_{M2} + J_{M3} - \frac{1}{\cos \theta_2} (K_{M2} + K_{M3})}{I_{M1} + I_{M2} + I_{M3}} \quad (\text{III-70})$$

Il est à présent possible de calculer les efforts intérieurs dans les sections contenant les points critiques A et B, d'en déduire la valeur des contraintes en ces points, puis d'y appliquer des facteurs de concentration de contraintes pour obtenir enfin une estimation de la contrainte maximale dans la tôle en rotation.

### III.4.5 Efforts intérieurs dans les sections des points A et B

Dans les sections contenant les points critiques A et B, les efforts internes sont donnés par les équations suivantes:

- Section du point A :

$$N_A = \frac{F}{2} \cos \theta_A - \frac{F}{2 \cos \theta_2} (1 - \cos(\theta_A - \theta_2)) \quad (\text{III-71})$$

$$T_A = \frac{F}{2} \sin \theta_A - \frac{F}{2 \cos \theta_2} \sin(\theta_A - \theta_2) \quad (\text{III-72})$$

$$M_A = -M_0 + \frac{F}{2} (R_{n1} - R_{nA} \cos \theta_A) - \frac{F R_{nA}}{2 \cos \theta_2} (1 - \cos(\theta_A - \theta_2)) \quad (\text{III-73})$$

Où  $\theta_A$  est compris entre  $\theta_2$  et  $\theta_3$ .  $R_{nA}$  désigne la valeur du rayon de la ligne neutre en A.

- Section du point B :

$$N_B = \frac{F}{2} \quad (\text{III-74})$$

$$T_B = 0 \quad (\text{III-75})$$

$$M_B = -M_0 \quad (\text{III-76})$$

À partir de ces expressions, les contraintes internes en chacun des points A et B seront calculées dans le paragraphe suivant.

## III.5 Calcul des contraintes globales

Il s'agit ici de calculer les contraintes au point A et B suivant les méthodes classiques de résistance des matériaux. Ces valeurs seront pondérées par la suite par des coefficients de concentration de contraintes qui sont spécifiques de la géométrie utilisée.

### III.5.1 Contraintes de centrifugation de l'anneau seul

Les contraintes de centrifugation dans un anneau de rayons intérieur et extérieur respectivement  $R_0$  et  $R_1$  et tournant à une vitesse  $\Omega$  sont données pour les points A et B par les formules suivantes [53]:

$$\sigma_{cA} = \rho \Omega^2 R_1^2 \frac{1-\nu}{4} \left( 1 + \frac{3+\nu}{1-\nu} \frac{R_0^2}{R_1^2} \right) \quad (\text{III-77})$$

$$\sigma_{cB} = \rho \Omega^2 R_1^2 \frac{1-\nu}{4} \left( \frac{3+\nu}{1-\nu} + \frac{R_0^2}{R_1^2} \right) \quad (\text{III-78})$$

Où l'indice  $c$  est mis pour centrifugation.  $\nu$  et  $\rho$  sont respectivement le coefficient de Poisson et la masse volumique du matériau. Le terme  $\Omega R_1$  représente la vitesse linéaire à la périphérie de l'anneau.

### III.5.2 Contraintes dues à l'action de la dent sur l'anneau

À ces contraintes, les effets de la présence de la dent se superposent. Les contraintes dues à la force de traction  $N$  appliquée sur la section s'écrivent :

$$\sigma_{tA} = \frac{N_A}{S_A} = \frac{F \cos \theta_A}{2b(R_1 - R_0)} \quad (\text{III-79})$$

$$\sigma_{tB} = \frac{N_B}{S_B} = \frac{F}{2b(R_1 - R_0)} \quad (\text{III-80})$$

D'une manière similaire, les contraintes dues aux efforts tranchants  $T$ , notées  $\tau$ , s'écrivent :

$$\tau_A = \frac{F \sin \theta_A}{2b(R_1 - R_0)} \quad (\text{III-81})$$

$$\tau_B = 0 \quad (\text{III-82})$$

La contrainte due au moment de flexion  $M(\theta)$  dans la section d'angle  $\theta$  à un point situé à un rayon  $r$  par rapport à l'axe de rotation est donnée par [29] :

$$\sigma_f(\theta, r) = \frac{-M(\theta)}{eb(R_1 - R_0)} \frac{r - R_n}{r} \quad (\text{III-83})$$

Pour un moment  $M(\theta)$  positif, les contraintes dues à la flexion sont des contraintes de traction ( $\sigma_f > 0$ ) à l'intérieur de l'anneau ( $r < R_n$ ). Inversement, à l'extérieur de l'anneau ( $r > R_n$ ) on a des contraintes de compression ( $\sigma_f < 0$ ).

Les contraintes dues à la flexion au point A (situé au rayon  $R_1$ ) sont donc données par l'expression :

$$\sigma_{fA} = -\frac{M_A}{eb(R_1 - R_0)} \frac{R_1 - R_n}{R_1} \quad (\text{III-84})$$

Pour ces mêmes contraintes de flexion au point B, on a :

$$\sigma_{fB} = -\frac{M_B}{eb(R_1 - R_0)} \frac{R_0 - R_n}{R_0} \quad (\text{III-85})$$

Notons que  $R_0$  est inférieur à  $R_n$ , le moment  $M_B$  étant positif, les contraintes de flexion en B sont positives (traction) et du signe opposé au moment  $M_A$ .

À partir de ces valeurs théoriques, les contraintes équivalentes peuvent être calculées après application des divers coefficients de concentration de contraintes qui sont explicités dans le paragraphe suivant.

### III.6 Concentration de contraintes aux points A et B

L'objectif de cette section est de trouver une expression analytique des coefficients de concentration de contraintes à partir de données expérimentales fournies le plus souvent sous forme d'abaques [48]. Il faut trouver ici quels résultats, classiquement présentés dans la littérature, s'appliquent le mieux à la configuration du noyau magnétique.

Le point A est le plus délicat des deux points critiques. En effet, la modélisation sous la forme d'une poutre à forte courbure (coordonnées cylindriques) et la forme de la dent rendent complexe l'adaptation des paramètres utilisés pour créer les abaques.



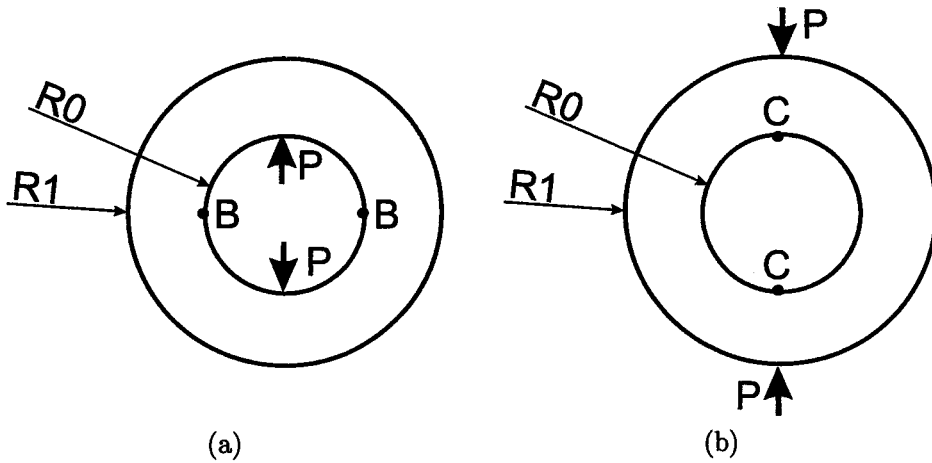


FIG. III-9 – Modèle de l'anneau de Timoshenko [56] utilisé pour le calcul de la concentration de contraintes au point B

### III.6.1 Facteur de concentration de contraintes au point B

La configuration du noyau magnétique au point B est supposée analogue à celle d'un anneau de rayon intérieur  $R_0$  et de rayon extérieur  $R_1$ , chargé par deux forces opposées. La figure III-9 présente les modèles étudiés par Timoshenko [55, 56] pour le calcul du coefficient de concentration de contraintes, dont les résultats expérimentaux sont présentés sous forme d'abaques par Peterson [48].

Le paramètre influençant la contrainte maximale est le rapport  $R_0/R_1$ . Conformément aux résultats de Timoshenko, les figures montrent que si la force est orientée vers l'extérieur (figure III-9(a)) ou sur vers l'intérieur (figure III-9(b)), le point de contrainte maximale n'est pas situé au même endroit.

Le modèle utilisé est celui de la figure III-9(a). Leckie dans [51] a proposé une loi approchée exponentielle à partir des résultats de Timoshenko :

$$K_{tB} = 0.98375 + 1.9985 \exp^{-3,4102 \frac{R_0}{R_1}} \quad (\text{III-86})$$

Cette fonction donne des résultats proches de la courbe expérimentale [48] (erreur maximale d'environ 0,6%). Elle donne également un résultat proche de la valeur théorique de 3 pour une entaille circulaire (Neuber [57]), quand le rayon intérieur  $R_0$  est très petit devant  $R_1$ .

Nous préférons cependant approcher les résultats de l'abaque par une fonction cubique, qui s'ajuste mieux aux résultats obtenus par le calcul numérique. Le facteur de concentration de contraintes est obtenu par l'optimisation au sens des moindres carrés des coefficients d'un polynôme d'ordre 3, tel que :

$$K_{tB} = C_a + C_b \frac{R_0}{R_1} + C_c \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 + C_d \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^3 \quad (\text{III-87})$$

Les valeurs des coefficients  $C_a$  à  $C_d$  avant le processus d'optimisation sont données par l'ajustement de la fonction polynômiale sur les résultats expérimentaux présentés dans [48]. Les coefficients de départ

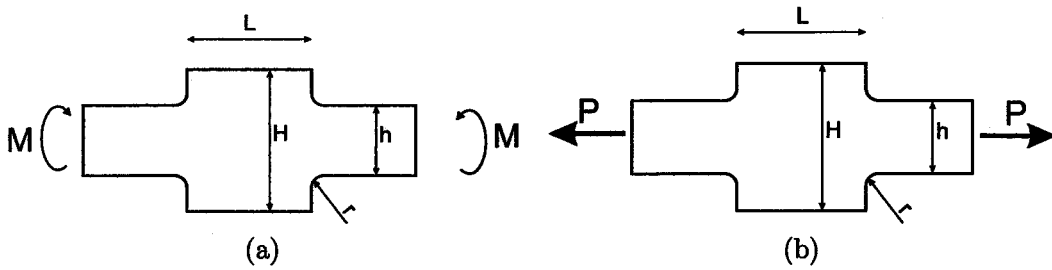


FIG. III-10 - Tôle bi-épaulée soumise à de la flexion (a) ou de la traction (b)

donnent la fonction suivante :

$$K_{tB} = 2,97 - 6,32 \frac{R_0}{R_1} + 8,18 \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 - 4,03 \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^3 \quad (\text{III-88})$$

Dans la section III.7.4, les coefficients  $C_a$  à  $C_c$  seront optimisés pour ajuster au mieux les valeurs du modèle à celles fournies par le calcul numérique. Conformément au modèle de Timoshenko, ce facteur de concentration de contraintes est appliqué aux contraintes de traction ( $\sigma_{tB}$ ) et de flexion ( $\sigma_{fB}$ ) engendrées par la centrifugation de la dent seule.

Si la modélisation de la concentration de contraintes au point  $B$  est aisée, car déjà réalisée en partie dans la littérature, nous allons voir dans la partie suivante que la modélisation de l'état de contraintes au point  $A$  est plus difficile.

### III.6.2 Facteur de concentration de contraintes au point A

Au point  $A$ , la configuration géométrique du noyau magnétique est plus complexe. Elle se rapproche de celle d'un épaulement de hauteur  $R_2 - R_1$  dans une plaque plane de largeur initiale  $R_1 - R_0$  et présentant un rayon de raccordement  $R_a$ . Dans la littérature, les résultats proposés concernent un mode de chargement quelconque, traction et flexion combinées. Dans les exemples présentés dans [54] ou [49], la charge est appliquée en coordonnées cartésiennes sur une poutre droite. Dans notre cas, avec une forte courbure et des coordonnées cylindriques, de grandes précautions doivent être prises si ces formules sont appliquées.

De plus, les structures habituellement étudiées sont symétriques (deux épaulements de part et d'autre). Cette symétrie de la pièce est récurrente dans les abaques de Peterson [48] ou dans les livres de mécanique [36]. Ces formes couramment étudiées sont représentées sur les figures III-10 (a) et (b). Comme on peut le constater, la dent est loin d'être assimilable aux exemples donnés habituellement dans la littérature. Dans le cadre de l'étude numérique afin d'obtenir une géométrie optimale d'épaulement pour des éprouvettes plates de traction, Garrell *et al.* [58] présente des géométries d'épaulement, qui ressemblent à la géométrie éventuelle d'un front de dent, mais la pièce est encore symétrique et les combinaisons de paramètres utilisées dans leurs essais sont trop peu nombreuses pour pouvoir en extraire une loi générale.

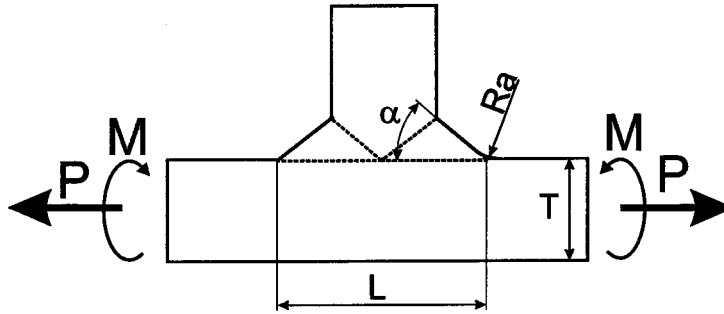


FIG. III-11 – Géométrie étudiée par Brennan [49] et paramètres

Les travaux de Waldman *et al.*[59] sur les formes optimales d'épaulements dans les plaques planes nous conduisent au même constat d'échec en terme d'application à notre problème.

De nombreux auteurs, comme Noda et Takase [60] ont établis des formules analytiques pour des épaulements dans des plaques planes semi-infinies ou des barres de section circulaire.

L'étude numérique du rayon optimal de raccordement dans une bride faite par Tranxuan [61] présente bien une géométrie dissymétrique, mais la distribution des efforts est trop différente pour espérer appliquer ou adapter le modèle analytique proposé dans ce travail.

Finalement, le modèle le plus proche du point de vue de la géométrie de la dent existe dans une étude réalisée par Brennan *et al.*[49]. Ce travail porte sur les concentrations de contraintes dans un raccord soudé entre deux plaque planes en T. La structure de Brennan présente, d'une part, l'avantage de ne pas être symétrique, et d'autre part la géométrie présente le cordon de soudure comme une surface orientée d'un angle  $\alpha$  et raccordé par un rayon  $R_a$ . La géométrie de Brennan est présentée sur la figure III-11. L'épaisseur  $T$  dans le cas du noyau magnétique du rotor est donnée par  $R_1 - R_0$ . On suppose que la géométrie en abscisses curvilignes (forte courbure) du noyau magnétique présente les mêmes facteurs de concentration de contraintes que ceux d'une dent de même longueur déployée. Ainsi on pose :

$$L = 2 R_1 (\pi/2 - \theta_1) \tag{III-89}$$

L'angle  $\alpha$  correspond à celui calculé par la formule III-7. Brennan *et al.*[49] donne la valeur des coefficients de concentration de contraintes :

$$K_{fA} = 1,027 + 0,271 \alpha^{0,216} \left(\frac{R_a}{T}\right)^{-0,47} \left(\frac{L}{T}\right)^{0,183} \tag{III-90}$$

$$K_{tA} = 1,010 + 0,344 \alpha^{0,336} \left(\frac{R_a}{T}\right)^{-0,468} \left(\frac{L}{T}\right)^{0,233} \tag{III-91}$$

Ces formules sont données par Brennan pour approcher la solution exacte. Selon les histogrammes des erreurs, elles donnent pour les géométries traitées des erreurs entre -10% et 15% ou entre -15% et +20% respectivement pour l'étude de la traction ou de la flexion. Un modèle affiné est aussi proposé par l'auteur afin d'améliorer la précision, mais les formules sont délicates à utiliser et la réutilisation des valeurs lues dans la publication ne donne pas de résultats cohérents en ce qui concerne la flexion.

On remarque, dans les expressions de Brennan, que la hauteur de l'épaulement (et donc le rayon  $R_2$ ) n'est pas prise en compte dans le modèle. En effet, la tôle soudée est supposée infiniment haute. Les résultats de nombreux auteurs montrent que la hauteur de l'épaulement a cependant une importance dans le calcul du facteur de concentration de contraintes, et tous les abaques de Peterson [48], concernant les épaulements, font intervenir ce paramètre. On choisit alors une dépendance des coefficients avec le paramètre adimensionnel  $(R_2 - R_1)/R_a$ , qui est utilisé par ailleurs dans les abaques avec d'autres notations [59, 60]. Les lois de Brennan *et al.* [49] prennent alors les expressions modifiées suivantes :

$$K_{fA} = C_e + C_f \alpha^{C_g} \left( \frac{R_a}{R_1 - R_0} \right)^{C_h} \left( \frac{L}{R_1 - R_0} \right)^{C_i} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_a} \right)^{C_j} \quad (\text{III-92})$$

$$K_{tA} = C_k + C_l \alpha^{C_m} \left( \frac{R_a}{R_1 - R_0} \right)^{C_n} \left( \frac{L}{R_1 - R_0} \right)^{C_o} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_a} \right)^{C_p} \quad (\text{III-93})$$

Les coefficients  $C_e$  à  $C_p$  seront optimisés dans le paragraphe III.7.4 afin d'épouser au mieux les résultats numériques donnés par la méthode des éléments finis.

Le facteur de concentration  $K_{fA}$  est ensuite appliqué à la contrainte globale  $\sigma_{fA}$ .  $K_{tA}$  vient pondérer  $\sigma_{tA}$  mais également  $\sigma_{cA}$ , puisque la géométrie au point A est modifiée par la présence de la dent.

La section suivante concerne le calcul des contraintes équivalentes aux points A et B à partir du critère de limite élastique de Von Mises.

### III.6.3 Contraintes équivalentes de Von Mises en A et B

On choisit d'appliquer le critère de Von Mises. En effet, ce critère s'applique dans le cadre d'utilisations devant rester dans un domaine élastique de fonctionnement. C'est notre cas puisque l'on cherche une géométrie fiabilisée pour des pièces fabriquées.

L'expression simplifiée du critère, dans le cas de contraintes planes, est donnée par [29, 45]:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm} \quad (\text{III-94})$$

où  $\sigma$  est la contrainte de traction-compression créée par la force normale  $N(\theta)$  et le moment fléchissant  $M(\theta)$  et  $\tau$  est la contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant  $T(\theta)$ .  $\sigma_{adm}$  est la contrainte admissible en traction. Au point A, on peut écrire :

$$\sigma_{VMA} = \sqrt{(K_{tA} (\sigma_{cA} + \sigma_{tA}) + K_{fA} \sigma_{fA})^2 + 3\tau_A^2} \quad (\text{III-95})$$

Au point B, puisque  $\tau_B$  est nulle, on peut écrire :

$$\sigma_{VMB} = \sigma_{cB} + K_{tB} \sigma_{tB} + \sigma_{fB} \quad (\text{III-96})$$

Ces expressions des contraintes maximales permettent de connaître l'influence sur la tenue mécanique des variations des paramètres géométriques ( $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $e_p$  et  $R_a$ ) et des paramètres matériaux ( $E$ ,  $\nu$ ).

Dans la section suivante, nous allons appliquer le modèle à une tôle de profil  $n = \infty$  et comparer les résultats obtenus avec ceux fournis par la méthode des éléments finis.

### III.7 Validation du modèle analytique de calcul des contraintes maximales

Ce paragraphe est consacré à la vérification des résultats donnés par le modèle analytique présenté précédemment en comparant ceux-ci avec les valeurs numériques fournies par le logiciel de calcul par éléments finis *COSMOS/M*.

#### III.7.1 Géométries testées

On se propose de vérifier la qualité des résultats en utilisant l'exemple d'une tôle magnétique présentant le profil  $n = \infty$  (voir figure III-2).

On réalise alors une série de 100 calculs par la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel *COSMOS/designstar* pour des géométries variées de tôles, de profil  $n = \infty$ . Les largeurs de la dent  $L_d$  sont de 5, 8, 10 ou 12 mm. Les rayons  $R_0$  et  $R_2$  sont fixés respectivement à 4,25 mm et 10,2 mm, le rayon intermédiaire  $R_1$  prend successivement les valeurs 6, 7, 8 ou 9 mm. Quant au rayon de raccordement, il est successivement de 0,5; 0,75; 1; 1,5; 2 ou 3 mm.

Pour la largeur de dent  $L_d = 12$  mm, le rayon  $R_1$  minimum est pris de 6,5 mm au lieu de la valeur de 6 mm qui donnerait  $\theta_1 = 180^\circ$ , ce qui fonctionnellement n'a plus de signification et donne, de plus, des résultats erronés.

#### III.7.2 Matériau potentiellement utilisable

Le noyau magnétique est fabriqué par un empilement de tôles magnétiques fines isolées entre elles, fabrication couramment appelée feuilletage. Nous avons choisi de tester un alliage de fer amorphe (appelé également verre métallique) de type *B*, de masse volumique  $7180 \text{ kg/m}^3$  et de module d'Young  $100\,000 - 110\,000 \text{ MPa}$  environ. Le coefficient de Poisson est de 0,31. C'est un matériau dur (dureté Vickers de 940 HV) et fragile lorsqu'il est utilisé tel que solidifié («as cast») [62].

Sa limite élastique est supérieure à 700 MPa. Selon le traitement magnétique réalisé après fonderie, brut («as cast») ou recuit («annealed»), cette propriété peut varier entre 1000 et 2000 MPa selon les données du fournisseur [63]. Ce traitement thermique après fabrication vise essentiellement à améliorer les caractéristiques magnétiques (perméabilité) du matériau, en favorisant, ou non, un axe du plan de la tôle. Par sécurité, la limite admissible en absence d'essai de traction ne pourra excéder 700 MPa.

#### III.7.3 Obtention des résultats de référence

Les résultats de références sont obtenus avec le logiciel de calcul par éléments finis *COSMOS/designstar* en utilisant l'interface de CAO *Autodesk Inventor 5.3*. Pour des raisons de symétrie, seul

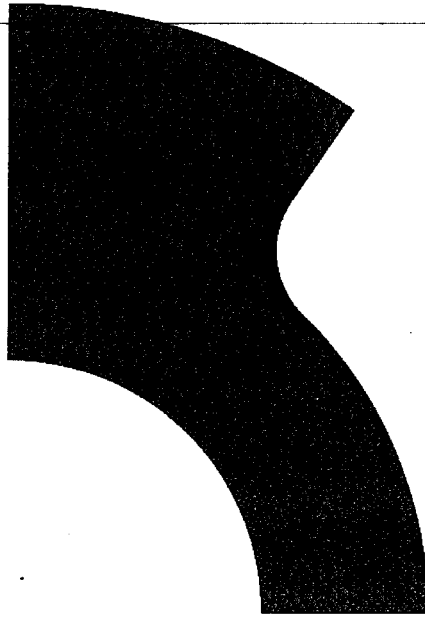


FIG. III-12 – Exemple de maillage réalisé sur une tôle de MRV 6/2 de profil  $n = \infty$  ( $R_0 = 4,25$  mm,  $R_1 = 7$  mm,  $R_2 = 10,2$  mm,  $L_d = 8$  mm et  $R_a = 1,5$  mm)

un quart du noyau magnétique est modélisé. L'épaisseur de la tôle modélisée est de 0,2 mm.

### III.7.3.A Maillage de la pièce

Le maillage réalisé est fait d'éléments tétraédriques et la taille globale du maillage est de 0,2 mm. Un contrôle du maillage est imposé sur le rayon intérieur  $R_0$  et intermédiaire  $R_1$ , la taille des mailles est fixée pour ces zones à 0,1 mm. Sur le rayon de raccordement, la taille des mailles choisie permet d'avoir au minimum 10 noeuds sur l'arc de cercle afin d'obtenir une bonne précision.

La transition entre la taille globale et la taille imposée sur les contours s'effectue progressivement sur 10 couches d'éléments dans le rayon de raccordement afin d'obtenir une bonne précision. La figure III-12 présente l'allure du maillage réalisé sur une des géométries testées. On remarque nettement sur la figure, le maillage plus fin choisi au niveau du raccordement afin d'améliorer la précision du calcul. Le maillage est également affiné sur le pourtour intérieur et extérieur de l'anneau.

### III.7.3.B Conditions aux limites

Sur les deux faces correspondant aux plans de symétrie, la condition aux limites est une condition de symétrie. La translation suivant l'épaisseur est bloquée sur un noeud loin des zones des points  $A$  et  $B$ . Cette solution a été préférée à une condition de symétrie supplémentaire dans le plan du noyau magnétique, qui crée des problèmes au niveau des noeuds du point  $B$  (contraintes surévaluées, déformations ponctuelles).

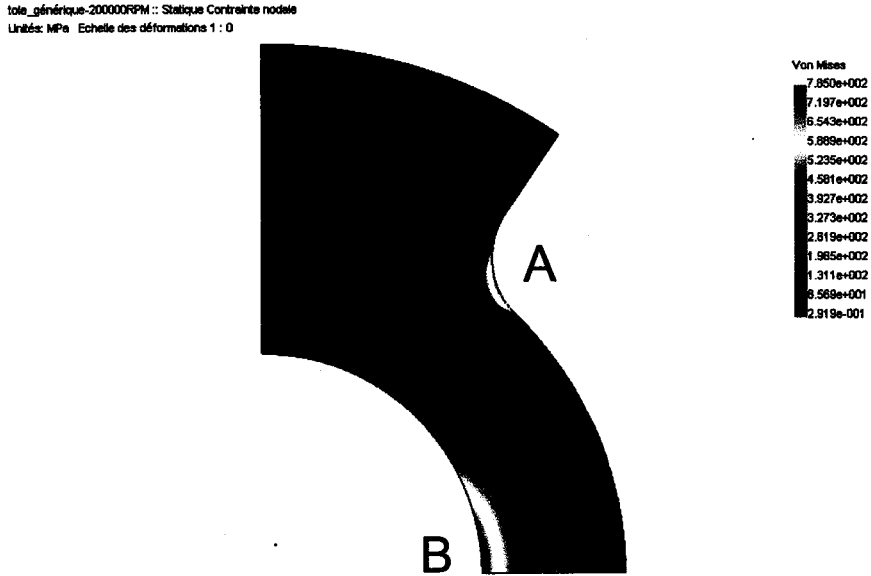


FIG. III-13 – Exemple de résultats (contraintes) obtenus sur une tôle de MRV 6/2 de profil  $n = \infty$  avec  $R_0 = 4,25$  mm,  $R_1 = 7$  mm,  $R_2 = 10,2$  mm,  $L_d = 8$  mm et  $R_a = 1,5$  mm.

### III.7.3.C Charges appliquées

On applique un champ de forces de centrifugation à partir de l'axe de rotation du noyau magnétique. La valeur prise pour la vitesse de rotation est de 200 000 tr/mn soit 20 944 rad/s.

### III.7.3.D Exploitation des résultats d'Analyse par Elements Finis

La figure III-13 présente les résultats en contraintes de Von Mises, obtenus pour une tôle de MRV 6/2 de profil  $n = \infty$ . Les déplacements ne sont pas affichés (échelle 0). Les contraintes sont exprimées en MPa. Les rayons sont  $R_0 = 4,25$  mm,  $R_1 = 7$  mm et  $R_2 = 10,2$  mm. La largeur de la dent est  $L_d = 8$  mm. Le rayon de raccordement est de 1,5 mm.

La contrainte maximale de Von Mises est de 785 MPa au point B. Cette dernière est directement obtenue par lecture de la valeur maximale sur l'échelle.

La contrainte au point A est obtenue en utilisant la fonction «sonde» de COSMOS/ designstar. Cette fonction permet de lire la valeur de la contrainte en un noeud en «cliquant» avec la souris sur ce dernier. On recherche alors dans la zone où la couleur tend le plus vers le rouge. La valeur de contrainte obtenue pour le cas présenté sur la figure III-13 est alors de 728 MPa.

À titre d'illustration, la figure III-14 présente les résultats en déplacements équivalents obtenus pour une tôle de MRV 6/2 de profil  $n = \infty$ . Le déplacement équivalent est défini comme la norme des déplacements suivant les deux axes perpendiculaires (suivant les deux plans de symétrie du noyau magnétique).

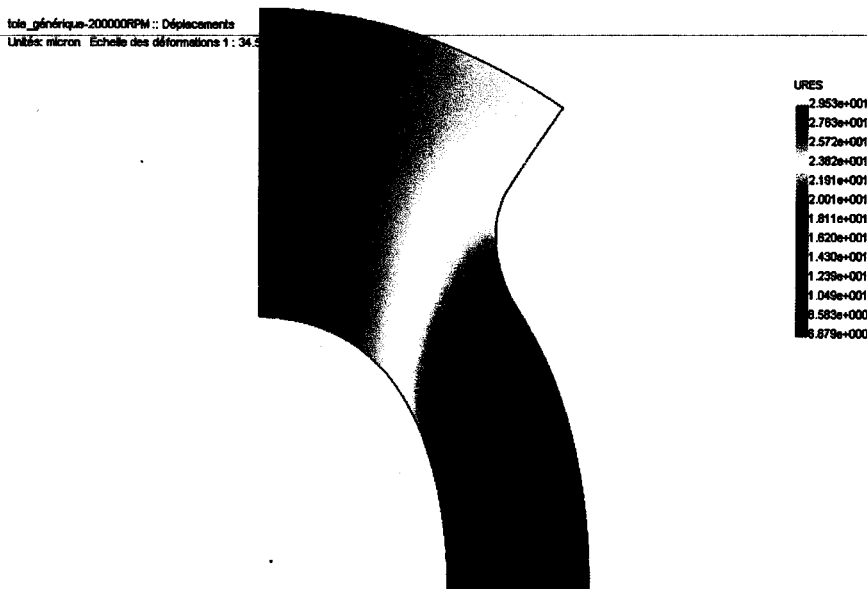


FIG. III-14 – Exemple de résultats (déplacements équivalents) obtenus sur une tôle de MRV 6/2 de profil  $n = \infty$  avec  $R_0 = 4,25$  mm,  $R_1 = 7$  mm,  $R_2 = 10,2$  mm  $L_d = 8$  mm et  $R_a = 1,5$  mm.

Les rayons sont  $R_0 = 4,25$  mm,  $R_1 = 7$  mm et  $R_2 = 10,2$  mm. La largeur de la dent est  $L_d = 8$  mm. Le rayon de raccordement est de 1,5 mm. Les déplacements sont exprimées en  $\mu\text{m}$ . Le déplacement maximal est de  $29 \mu\text{m}$  sur la surface extérieure de la dent. Ces  $29 \mu\text{m}$  correspondent à presque un tiers de l'entrefer (0.1 mm). À partir des résultats en contraintes donnés par la méthode des éléments finis, dans la section suivante, nous allons réaliser l'optimisation des coefficients  $C_a$  à  $C_p$ , qui apparaissent dans les équations III-87, III-92 et III-93.

### III.7.4 Ajustement des formules de concentration de contraintes

Nous allons maintenant aborder la méthode utilisée pour trouver les coefficients présents dans les formules (III-87), (III-92) et (III-93). Pour ce faire, un grand nombre d'essais est réalisé sur des géométries variées et les résultats analytiques seront ensuite ajustés au mieux aux valeurs numériques de référence.

Pour chaque géométrie de tôle testée avec *COSMOS/Designstar*, les contraintes globales (sans concentration de contraintes) sont calculées.

Ces valeurs sont ensuite pondérées par les coefficients de concentration de contraintes, où interviennent les coefficients à optimiser. Les contraintes de Von Mises analytiques sont alors calculées.

#### III.7.4.A Processus d'optimisation

L'optimisation des coefficients est une minimisation de l'erreur sur l'ensemble des résultats au sens des moindres carrés.



Facteur de concentration $K_B$		
	Avant Optimisation [56]	Après Optimisation
$C_a$	2,966	3
$C_b$	-6,32	-6,78
$C_c$	8,18	7,10
$C_d$	-4,03	-1,90
Facteur de concentration $K_{fA}$		
	Avant Optimisation [49]	Après Optimisation
$C_e$	+1,027	fixé à 1
$C_f$	+0,271	+0,282
$C_g$	+0,216	+0,221
$C_h$	-0,470	-0,565
$C_i$	-0,183	0,159
$C_j$	non pris en compte (0)	0,075
Facteur de concentration $K_{tA}$		
	Avant Optimisation [49]	Après Optimisation
$C_k$	+1,010	fixé à 1
$C_l$	+0,344	+0,315
$C_m$	+0,336	+0,336
$C_n$	-0,468	-0,687
$C_o$	+0,233	-0,189
$C_p$	non pris en compte (0)	0,090

TAB. III-2 – Valeurs des coefficients utilisés dans les formules de concentration de contraintes aux points A et B (équation (III-87), (III-92) et (III-93)) avant et après le processus d'optimisation.

Les valeurs de départ de chaque coefficient sont celles données par l'ajustement de la fonction cubique sur la valeurs expérimentales de Timoshenko et Goodier [56, 48] pour  $K_{tB}$ , et celles fournies par Brennan *et al.*[49] pour  $K_{tA}$  et  $K_{fA}$ .

L'erreur en valeur absolue associée à chaque essai permet d'obtenir les valeurs moyenne et maximale du modèle. On réalise alors une optimisation sous contrainte du modèle en imposant une limite maximale. Cette limite maximale d'abord élevée et ensuite abaissée durant l'optimisation.

La méthode de Newton-Raphson utilisée pour la résolution ne converge pas systématiquement vers le minimum global ou alors les critères ne sont pas tous remplis. Plusieurs tentatives sont réalisées après modification légère d'un coefficient afin de parvenir à un optimum satisfaisant (valeurs de coefficients non aberrantes et erreur maximale acceptable).

#### III.7.4.B Coefficients optimisés

Après optimisation des coefficients, une combinaison de valeurs obtenues sont regroupées dans le tableau III-2, en compagnie des valeurs initiales, à des fins de comparaison.

On remarque la dépendance des facteurs  $K_{tA}$  et  $K_{fA}$  avec le paramètre  $(R_2 - R_1)/R_a$  qui se manifeste par la non-nullité des coefficients  $C_j$  et  $C_p$ , respectivement égaux à 0,075 et 0,090.

Avant optimisation, l'erreur maximale du modèle sur les contraintes de Von Mises au point B est

de 21,8% et la moyenne des valeurs absolues des erreurs est de 11,68%. L'erreur maximale du modèle sur les contraintes de Von Mises au point *A* est de 27,4% et la moyenne des valeurs absolues de l'erreur est de 11,16%.

Avec les valeurs du tableau III-2, l'erreur maximale du modèle sur les contraintes de Von Mises au point *B* est de 12,31% et la moyenne des valeurs absolues des erreurs est de 2,48%. L'erreur maximale du modèle sur les contraintes de Von Mises au point *A* est de 14,83% et la moyenne des valeurs absolues de l'erreur est de 6,1%.

Afin de mieux visualiser les résultats obtenus, les valeurs de contraintes donnés par le modèle sont tracées en fonction des valeurs de référence. Dans un tel graphique, un résultat exact est représenté par un point situé sur une droite  $y = x$ , appelée droite d'erreur nulle. Plus le nuage de point est concentré autour de cette droite, plus le modèle est juste.

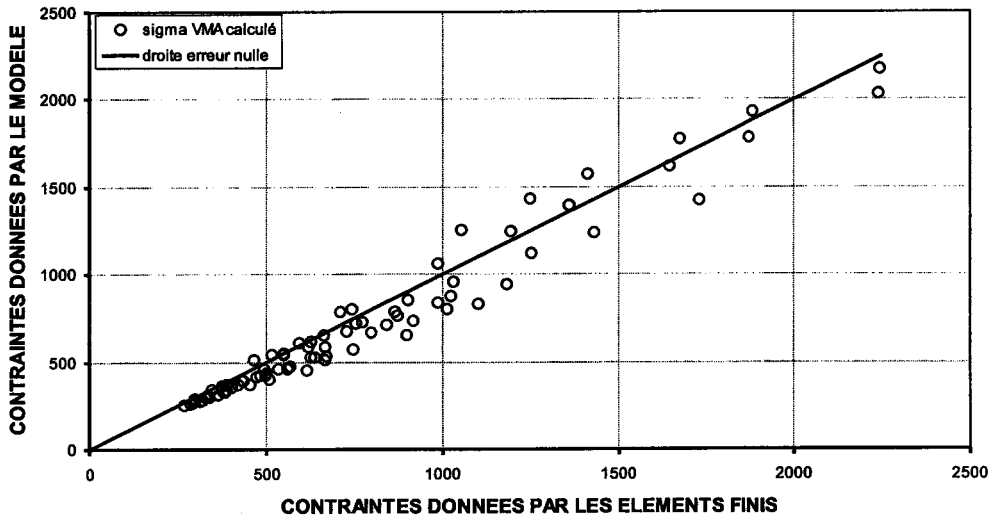
Les figures III-15(a) et (b) présentent les résultats de la contrainte au point *A* respectivement avant et après optimisation des coefficients. La droite d'erreur nulle est tracée afin de visualiser plus facilement les divergences entre le modèle analytique et les résultats donnés par *COSMOS/ designstar*. Une erreur positive se traduit par un décalage vertical du point au dessus de la droite d'erreur nulle.

L'optimisation des coefficients concernant la contrainte au point *A* a concentré le nuage de point aux alentours de la droite d'erreur nulle. Avant optimisation (figure III-15(a)), le nuage suit globalement la direction de la droite, mais il est dispersé de part et d'autre. La valeur absolue de l'erreur est en moyenne de 11,16% et son maximum vaut 27%. La figure III-15(b) montre en revanche que le nuage de points reste proche de la droite. L'erreur absolue après optimisation est en moyenne de 3,96% et culmine à 14,7%.

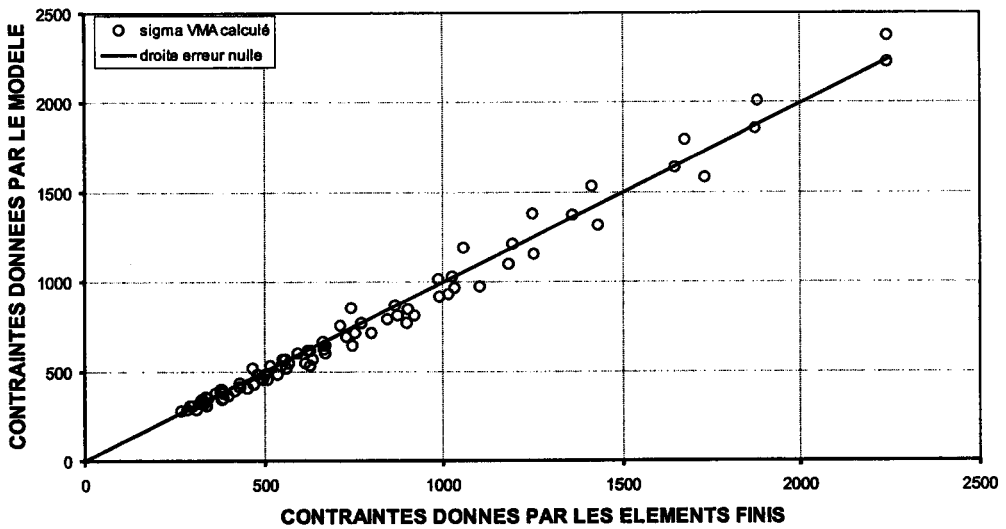
Les figures III-16(a) et (b) présentent les résultats de la contrainte au point *B* respectivement avant et après optimisation des coefficients. La droite d'erreur nulle est tracée afin de visualiser plus facilement les divergences entre le modèle analytique et les résultats donnés par *COSMOS/ designstar*. Une erreur positive se traduit par un décalage vertical du point au dessus de la droite d'erreur nulle.

L'optimisation a recentré le nuage de point aux alentours de la droite d'erreur nulle sans améliorer sensiblement la densité des points. Avant optimisation, le nuage est effet déjà bien regroupé, mais il surestime en tout point la valeur exacte (tous les points sont au dessus du trait). La figure III-16(a) montre que l'utilisation d'une formule ajustée à partir des résultats de Timoshenko n'est pas la modélisation idéale du point *B*, cependant elle est déjà très correcte. La figure III-16(b) montre que le nuage n'est pas plus dense après optimisation, mais qu'il suit mieux la droite d'erreur nulle.

Les figures III-17(a) et (b) présentent les résultats de la contrainte maximale dans le noyau, respectivement avant et après optimisation des coefficients. La droite d'erreur nulle est tracée afin de visualiser plus facilement les divergences entre le modèle analytique et les résultats donnés par *COSMOS/ designstar*. Une erreur positive se traduit par un décalage vertical du point au dessus de la droite d'erreur nulle.

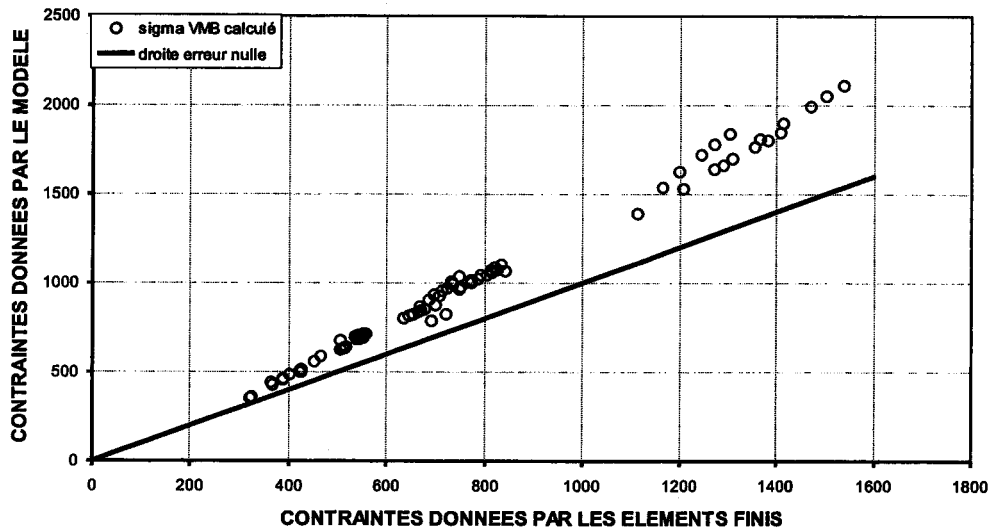


(a)

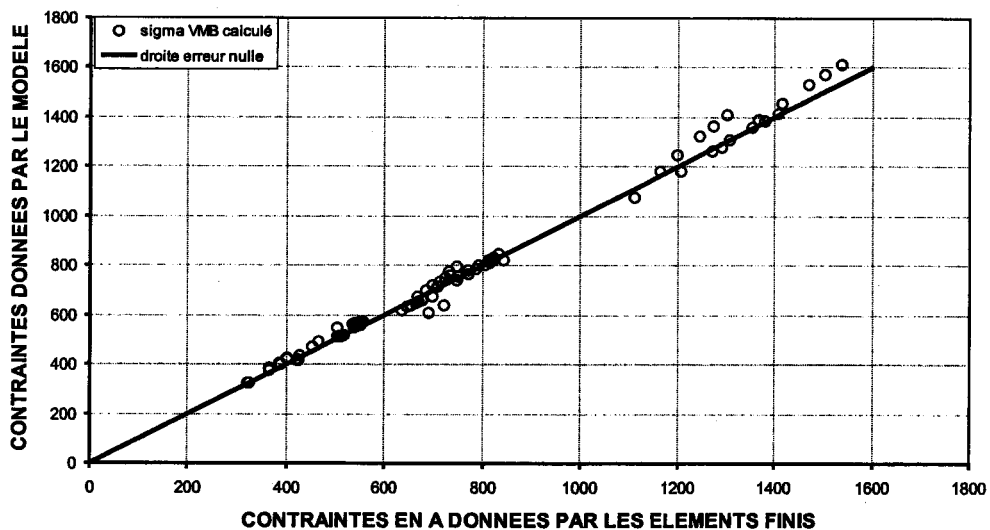


(b)

FIG. III-15 – Contraintes de Von Mises au point A (base de la dent) données par le modèle analytique en fonction des résultats fournis par COSMOS/ designstar, (a) avant optimisation (formules de [49]) et (b) après optimisation des coefficients. Une erreur positive se traduit par un décalage vertical du point au dessus de la droite.



(a)



(b)

FIG. III-16 – Contraintes de Von Mises au point B (bord intérieur de l'anneau) données par le modèle analytique en fonction des résultats fournis par COSMOS/ designstar, (a) avant optimisation (formules de [25]) et (b) après optimisation des coefficients. Une erreur positive se traduit par un décalage vertical du point au dessus de la droite.

L'optimisation a concentré le nuage de point aux alentours de la droite d'erreur nulle. L'effet conjoint de l'optimisation aux points A et B est bien visibles ici. Avant optimisation, le nuage suit bien la direction de la droite d'erreur nulle, mais il est relativement dispersé. Dans la demie partie supérieure de la figure III-17(a), l'utilisation de la formule de Brennan surestime la contrainte maximale. La figure III-17(b) montre en revanche que le nuage de point est plus dense et suit mieux la droite. L'objectif d'amélioration du modèle est donc atteint.

### III.7.5 Conclusion concernant le modèle analytique

Les résultats obtenus dans le cadre du modèle  $n = \infty$  sont encourageants. Ils permettent d'approcher de façon convenable la valeur de la contrainte maximale (moins de 15% d'erreur avec une erreur en valeur absolue de 5% en moyenne). Les résultats sont satisfaisants compte tenu des hypothèses faites au départ, et de l'application de la résistance des matériaux dans un domaine loin de ses applications habituelles.

Cependant, il est à craindre que la précision du modèle ne soit pas aussi bonne lors de l'exploitation d'autres géométries, en particulier pour des profils avec des valeurs de  $n$  faibles.

Divers exemples d'application pratique du modèle analytique à la conception d'un noyau magnétique de rotor à axe traversant vont être présentés dans le chapitre suivant.

## III.8 Application à la conception du noyau

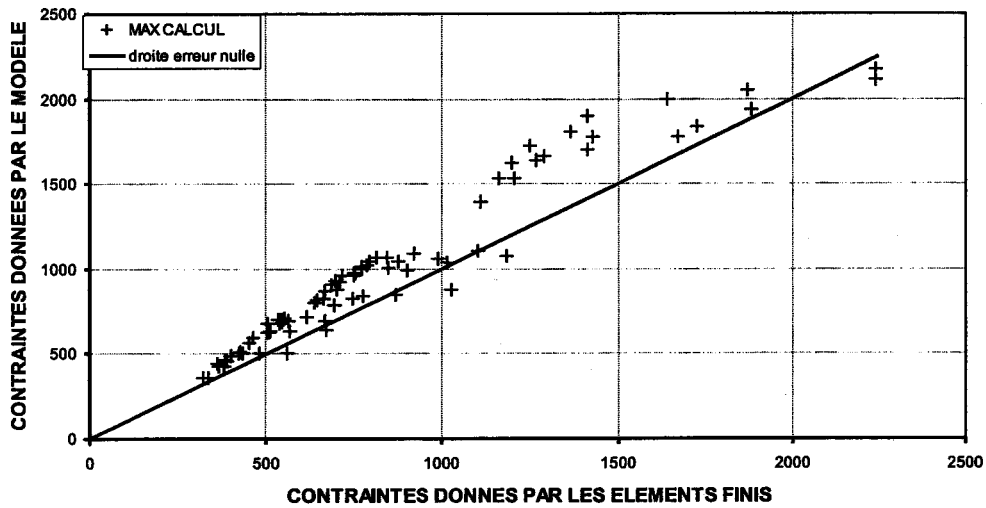
Dans cette section, nous allons étudier diverses configurations possibles du noyau, en fonction de critères électromagnétiques. Ces critères sont basés sur des considérations telles que l'aptitude du noyau à laisser passer le flux magnétique, ou le profil de la dent, qui influence l'onde de couple, ou encore la hauteur de la dent, qui joue directement sur la différence de réluctance entre la position d'opposition et celle de conjonction.

### III.8.1 Influence de la largeur de la dent

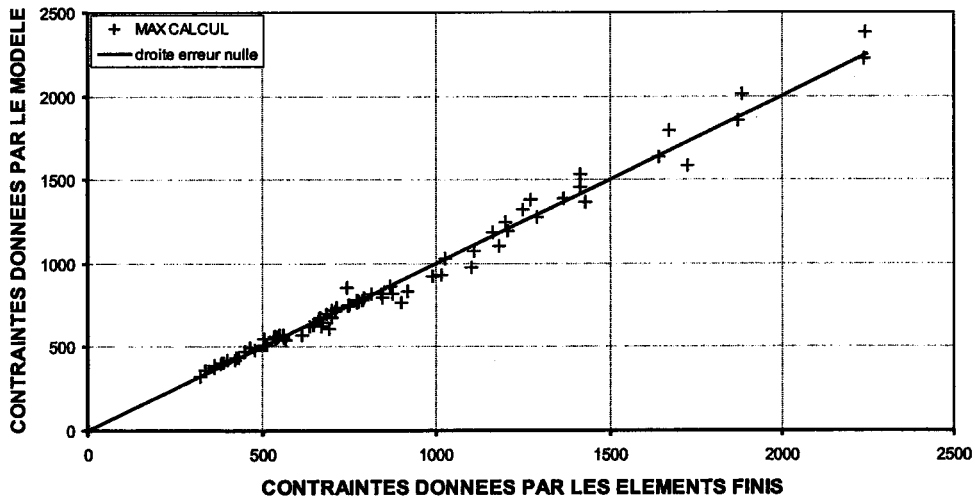
Nous allons, dans un premier temps, illustrer l'influence de la largeur  $L_d$  de la dent du noyau. La géométrie de l'axe traversant et le montage des roulements imposent deux valeurs de rayons intérieur  $R_0$ , 3 et 4,25. Pour l'une et l'autre de ces valeurs, nous allons réaliser diverses études de géométrie du noyau magnétique.

La figure III-18 présente la variation de la contrainte de Von Mises maximale lorsque la largeur de dent varie entre 4 et 12 mm, dans le cas d'un axe traversant de rayon  $R_0 = 3\text{mm}$ . Les profils de dents étudiés sont les profils  $n = 4$ ,  $n = 16$  ou  $n = \infty$  (voir figure III-2).

La figure III-18 montre que quelque soit le profil de la dent, la variation de la contrainte de Von Mises est quasi-parabolique et présente un maximum de contrainte aux alentours d'une largeur de dent de 10 mm. La position du maximum a tendance à se décaler vers la gauche lorsque l'exposant de



(a)



(b)

FIG. III-17 – Contraintes de Von Mises maximales dans le noyau données par le modèle analytique en fonction des résultats fournis par COSMOS/ designstar, (a) avant optimisation et (b) après optimisation des coefficients. Une erreur positive se traduit par un décalage vertical du point au dessus de la droite.

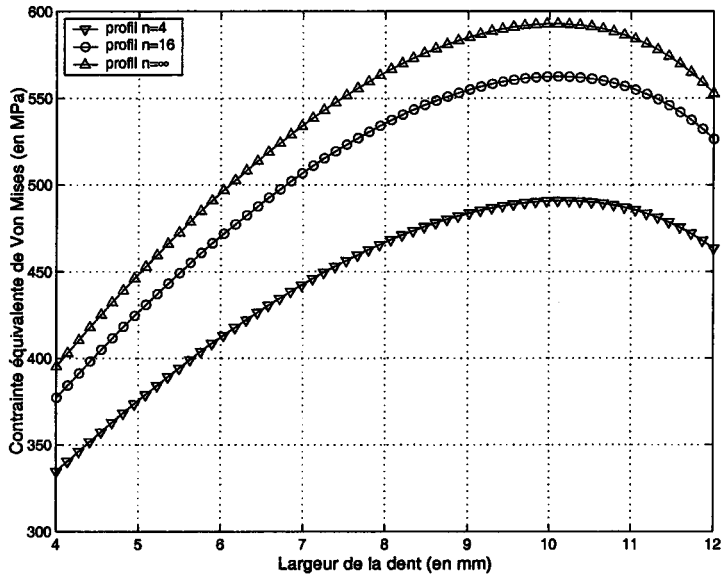


FIG. III-18 – Contrainte de Von Mises maximale dans le noyau, pour une dent de profil  $n = 4$ ,  $n = 16$  ou  $n = \infty$ , en fonction de la largeur de la dent – rayons  $R_0 = 3 \text{ mm}$ ,  $R_1 = 7 \text{ mm}$  et  $R_2 = 10,2 \text{ mm}$  et  $R_a = 1 \text{ mm}$

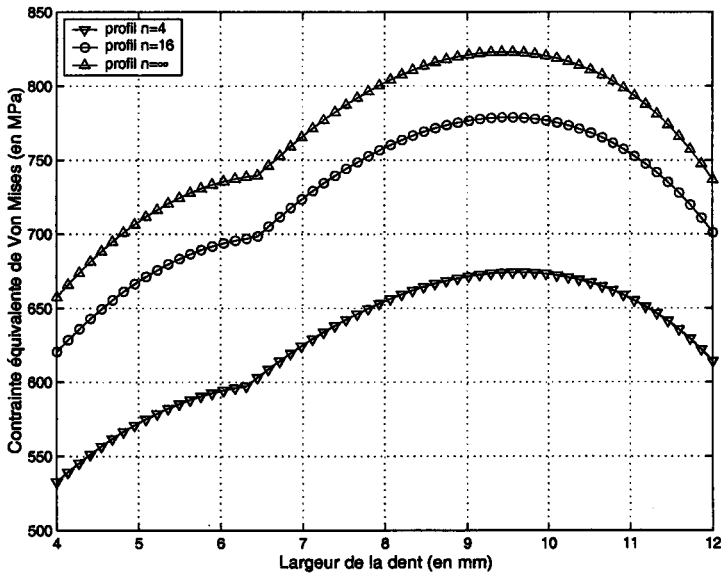


FIG. III-19 – Contrainte de Von Mises maximale dans le noyau, pour une dent de profil  $n = 4$ ,  $n = 16$  ou  $n = \infty$ , en fonction de la largeur  $L_d$  de la dent – rayons  $R_0 = 4 \text{ mm}$ ,  $R_1 = 7 \text{ mm}$  et  $R_2 = 10,2 \text{ mm}$  et  $R_a = 1 \text{ mm}$

profil  $n$  augmente. La valeur de ce maximum est d'environ 490, 560 et 590 MPa respectivement pour les profils  $n = 4$ ,  $n = 16$  et  $n = \infty$ . Pour un rayon  $R_0 = 3$  mm et pour une hauteur de dent de 3 mm, la forme de la dent et sa largeur peuvent varier indifféremment sans que la contrainte maximale ne dépasse la limite admissible de 700 MPa.

Cette variation de la contrainte suit celle de la force globale  $F$  appliquée au noyau.

La figure III-19 présente la variation de la contrainte de Von Mises maximale lorsque la largeur de dent varie entre 4 et 12 mm, dans le cas d'un axe traversant de rayon  $R_0 = 4,25$  mm. Les profils de dents étudiés sont les profils  $n = 4$ ,  $n = 16$  ou  $n = \infty$ .

Contrairement aux constatations faites sur la figure III-18, la figure III-19 montre des formes de courbes plus particulières. Si ces dernières présentent toujours un maximum, elles montrent toutes trois une cassure dans leur évolution aux alentours d'une largeur de dent de 6,5 mm. En ce point, la contrainte maximale passe en effet du bord intérieur du noyau (point B) à la base de la dent (point A). Par ailleurs, la valeur du maximum, observée cette fois à  $L_d = 9,5$  mm, est d'environ 680, 770 et 820 MPa respectivement pour les profils  $n = 4$ ,  $n = 16$  et  $n = \infty$ . Pour un rayon  $R_0 = 4,25$  mm et pour une hauteur de dent de 3 mm, les résultats montrent que seule la contrainte associée au profil  $n = 4$  reste constamment en deçà de la limite admissible de 700 MPa. Les profils  $n = 16$  et  $n = \infty$  limitent respectivement à 6,5 et 4,8 mm la largeur de la dent. Au delà, la contrainte maximale est supérieure à la limite élastique du matériau magnétique testé.

A présent, nous allons étudier l'influence de la hauteur de la dent sur la tenue mécanique du noyau.

### III.8.2 Influence de la hauteur de la dent

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'influence de la hauteur de la dent sur le niveau de contrainte dans la tôle. Pour chacun des rayons  $R_0 = 3$  ou 4,25 mm, la hauteur de la dent (différence  $R_2 - R_1$ ) varie de 1 mm à 4 mm. Des largeurs de 5 mm, 7,5 mm et 10 mm sont étudiées. L'exposant de profil des dents est  $n = 16$ .

La figure III-20 présente le cas du noyau avec un rayon intérieur  $R_0$  de 3 mm. Le rayon extérieur est fixé à 10,2 mm. La variation de la hauteur de la dent est obtenue par modification du rayon intermédiaire  $R_1$ .

La première observation que l'on peut faire est l'absence d'optimum de contrainte. Les trois courbes varient positivement avec la hauteur de la dent. Le niveau de contrainte le plus élevé est atteint avec une largeur de dent  $L_d = 10$  mm. Mais les deux autres courbes sont plus infléchies et une largeur  $L_d = 8$  mm donnent des niveaux de contrainte équivalents aux grandes hauteurs de dents ( $R_2 - R_1 = 4$  mm). Lorsque la hauteur de la dent est faible, les variations de contraintes sont bien reliées à celle de la force centrifuge appliquée à la dent. Plus la dent est large, plus le volume de la dent est sensible à sa hauteur, les contraintes évoluent plus vite.

La figure III-21 présente le cas du noyau magnétique avec un rayon intérieur  $R_0$  de 4 mm. Le rayon



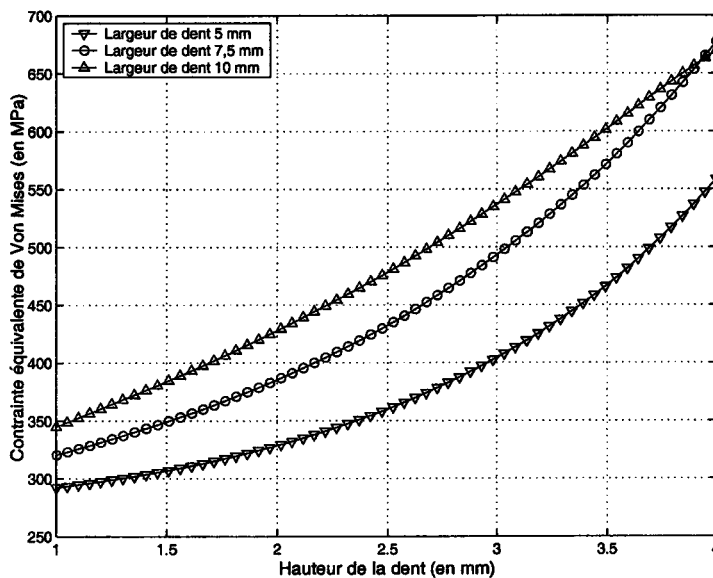


FIG. III-20 – Contrainte de Von Mises maximale dans le noyau, pour une dent de largeur  $L_d = 5, 7,5$  ou  $10$  mm, en fonction de la hauteur  $R_2 - R_1$  de la dent – rayons  $R_0 = 3$  mm,  $R_2 = 10,2$  mm et  $R_a = 1$  mm, profil  $n = 16$ .

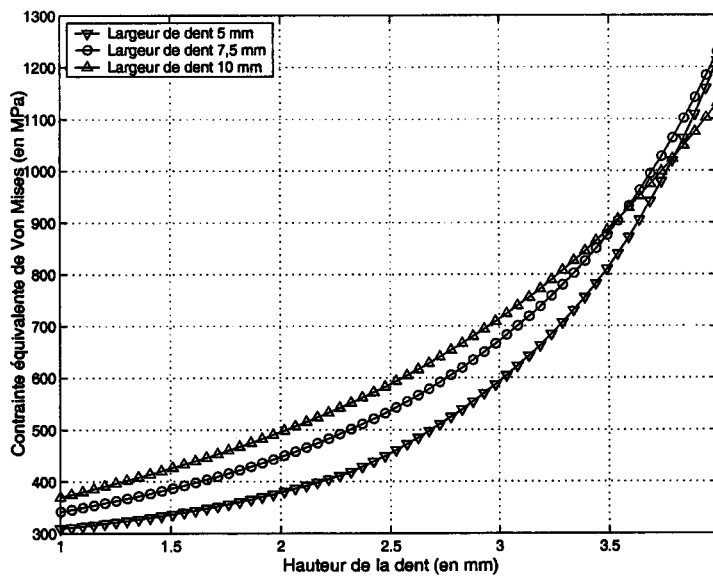


FIG. III-21 – Contrainte de Von Mises maximale dans le noyau, pour une dent de largeur  $L_d = 5, 7,5$  ou  $10$  mm, en fonction de la hauteur  $R_2 - R_1$  de la dent – rayons  $R_0 = 4$  mm,  $R_2 = 10,2$  mm et  $R_a = 1$  mm, profil  $n = 16$ .

extérieur est fixé à 10,2 mm. La variation de la hauteur de la dent est obtenue par modification du rayon intermédiaire  $R_1$ . L'influence de la hauteur de la dent sur le niveau de contrainte dans la tôle est présentée pour des largeurs de 5 mm, 7,5 mm et 10 mm sont étudiées. L'exposant de profil des dent est  $n = 16$ . Le rayon de raccordement est de 1 mm

La figure III-21 présente sensiblement les mêmes tendances de variation que celles que montraient la figure III-20. Dans la zone de hauteur inférieures à 3,5 mm, les courbes présentent des niveaux de contraintes d'autant plus fort que la largeur de dent est importante. En revanche lorsque la hauteur de dent est plus grande, la hiérarchie s'inverse et une dent moins large pénalise la tenue mécanique. Aux abords de cette zone, les contraintes sont maximales à la base de la dent. Ce phénomène s'accroît si le rayon de raccordement est inférieur à la valeur de 1 mm étudiée ici.

### III.8.3 Influence du rayon de raccordement

Les figures III-22 (a), (b), (c) et (d) présentent l'influence du rayon de raccordement sur l'évolution des contraintes avec la largeur de la dent, pour trois types de profil  $n = 4$ ,  $n = 16$  et  $n = \infty$ . La hauteur de la dent est de 3 mm. Les échelles de contraintes sont identiques, afin de pouvoir comparer directement les graphiques.

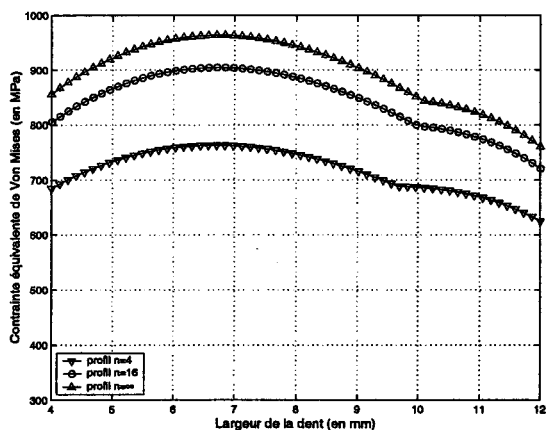
Si le rayon  $R_a$  est de 0,5 mm, le maximum global de la contrainte se trouve à la base de la dent. Les profils  $n = 16$  et  $n = \infty$  présentent des contraintes constamment supérieures à la limite admissible de 700 MPa, avec un maximum de contrainte respectivement de 900 et 960 MPa, pour une dent de largeur 6,5 mm. On remarque que cette valeur rayon de raccordement provoque une concentration de contraintes suffisante pour que le point  $A$  devienne le siège du risque maximum de rupture. La contrainte au point  $B$  est peu ou pas modifiée.

Lorsque la concentration de contraintes est moindre (quand  $R_a$  augmente), le niveau des contraintes en  $A$  diminue. Si le rayon  $R_a$  est de 0,75 mm, il existe deux maximums locaux à  $L_d = 6.5$  et 10 mm. Pour des valeurs de  $R_a$  supérieur à 1, il n'y a plus de largeur de dent, qui donne une contrainte maximale à la base de la dent. Pour 1,5 mm, on observe donc une variation continue de la contrainte et de sa dérivée par rapport à  $L_d$ .

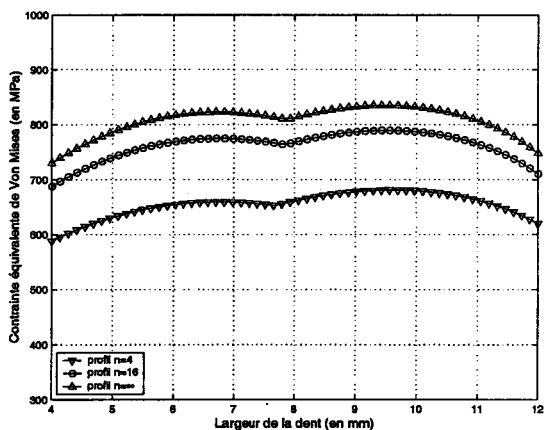
Un rayon de raccordement bien choisi sera celui qui ne provoque pas d'augmentation globale de la contrainte dans le noyau, mais qui ne pénalise pas la forme du profil ni la variation de réductance qui reste le but premier de la forme du noyau.

### III.8.4 Remarque sur la géométrie de la dent

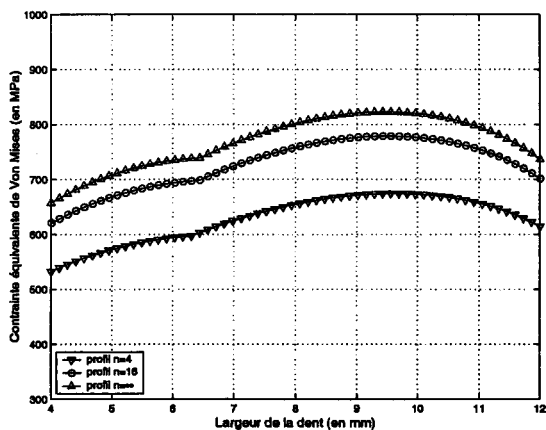
Du point de vue mécanique, l'étude de la contrainte maximale dans le noyau montre qu'il est intéressant, pour une hauteur de dent fixée (3 mm) d'avoir une dent de largeur faible (entre 5 et 7,5 mm). Le faible encombrement de la dent incite à penser qu'une structure à 4 pôles rotoriques (MRV 6/4) est possible puisque 4 dents peuvent se loger sur la périphérie de l'anneau : Une étude



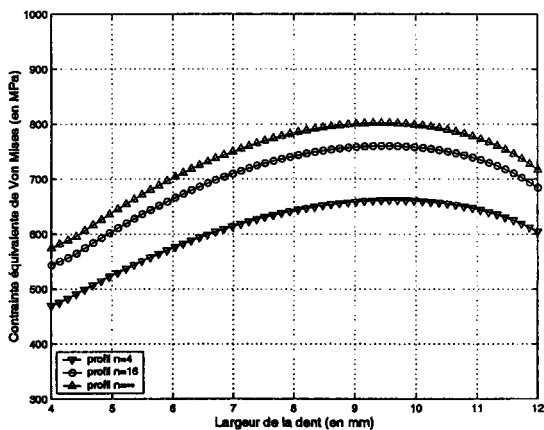
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. III-22 – Influence de la largeur de la dent  $L_d$  sur les contraintes pour les profils  $n = 4$ ,  $n = 16$  et  $n = \infty$  selon que le rayon de raccordement vaut 0,5 mm (a), 0,75 mm (b), 1 mm (c) ou 1,5 mm (d) – La hauteur de dent est de 3 mm.

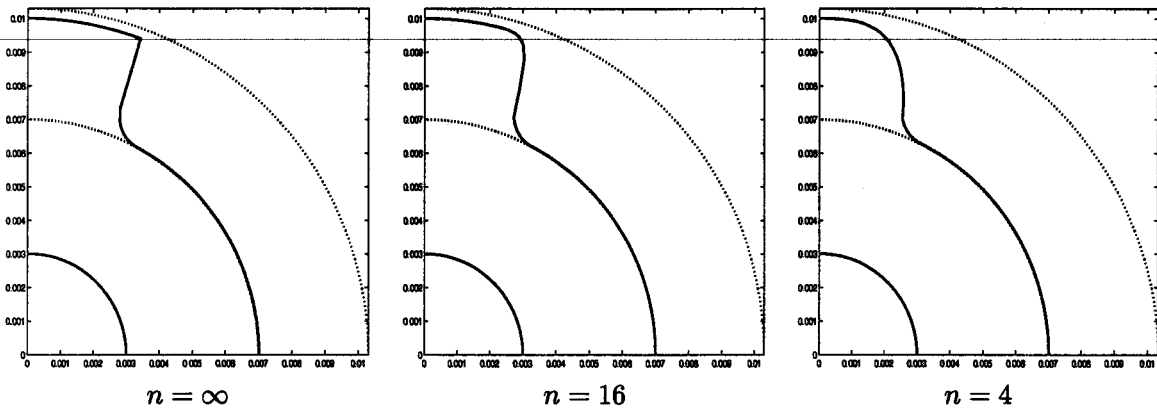


FIG. III-23 – Géométrie des tôles pour différentes valeurs de  $n$ . Les autres dimensions sont  $R_2 = 10$  mm,  $R_1 = 6$  mm,  $R_0 = 3$  mm,  $L_d = 5$  mm et  $R_a = 1$  mm.

complémentaire des contraintes dans cette structure peut être réalisée.

### III.8.5 Influence de la forme de la dent sur le couple moteur

Nous allons présenter quelques résultats obtenus lors de l'optimisation de la forme du rotor d'une MRV 6/2, afin d'illustrer la relation entre la forme de la dent et l'onde de couple obtenue.

Une étude conjointe du couple moteur et de la contrainte maximale dans les tôles effectuée en utilisant des logiciels de calcul par éléments finis est présentée dans [47].

La figure III-23 présente 3 profils de dents étudiés. Les profils des dents sont définis par  $n = \infty$ ,  $n = 16$  et  $n = 4$ . Les autres caractéristiques des profils sont  $R_2 = 10$  mm,  $R_1 = 7$  mm,  $R_0 = 3$  mm,  $L_d = 5$  mm et  $R_a = 1$  mm.

La figure III-24 présente les variations du couple produit par la phase alimentée, pour les 3 profils de tôles définies ci-dessus, en fonction de la position angulaire  $\theta$  du rotor et pour un courant de 4 A.

La forme de la dent influence notablement la forme de l'onde du couple. La position du maximum de couple est située à 15, 25 et 30° respectivement pour les profils  $n = 4$ ,  $n = 16$  et  $n = \infty$ . Le profil  $n = \infty$  permet d'obtenir un couple statique maximum de 0,116 N.m pour un angle de 25° qui correspond à celui où le coin de la dent rotor est en face du coin de la dent stator.

Le profil  $n = 16$  présente une onde de couple comparable à celle du profil  $n = \infty$ . Le couple maximum de 0,117 N.m est produit à 20°. Le couple moyen est de 0,0441 N.m.

Le profil  $n = 4$  génère un couple maximum identique aux deux précédents (0,117 N.m) mais pour un angle de 15° environ. Le couple croit rapidement dès que la dent n'est plus dans la position de conjonction (0°). Le couple moyen est cependant de 7% inférieur à celui de la dent  $n = \infty$  du fait de l'étroitesse de l'onde de couple.

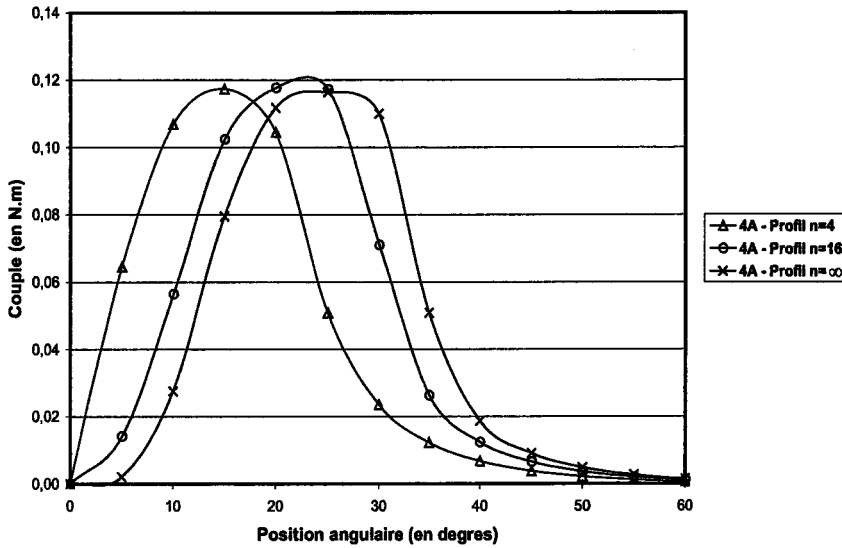


FIG. III-24 – Variation du couple produit en fonction de la position angulaire du rotor pour différentes valeurs de  $n$  pour un courant de 4 A dans la phase. Les autres dimensions sont  $R_2 = 10$  mm,  $R_1 = 6$  mm,  $R_0 = 3$  mm,  $L_d = 5$  mm et  $R_a = 1$  mm.

### III.8.6 Représentation en schéma-bloc du modèle des contraintes

Nous pouvons à présent définir le schéma bloc du modèle obtenu. Le modèle est présenté sur la figure III-25. Le modèle fournit en sortie le couple de frottement du roulement. Le système a pour entrée la géométrie du roulement, sa vitesse et son accélération. Le modèle a également en entrée les efforts et les angles de contact ainsi que la dimensions des contacts.

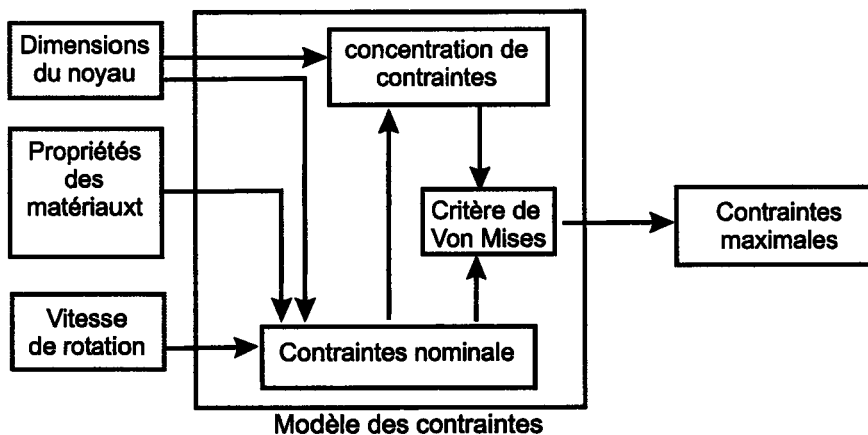


FIG. III-25 – Modèle des contraintes sous forme de schéma-bloc.

### III.9 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode analytique pour le calcul des contraintes maximales dans le noyau d'une machine à réluctance variable 6/2. Sur la base de méthodes approchées de résistance des matériaux, elle permet d'obtenir rapidement la valeur de la contrainte en deux points critiques de la géométrie du noyau: la base de la dent et le bord intérieur du noyau. Le noyau a été modélisé par un anneau de section variable sur lequel s'appliquent les forces de centrifugation de la dent. Dans un premier temps, le calcul des contraintes globales est fait par superposition des contraintes de centrifugation de l'anneau (calculées par la mécanique des milieux continus) et des contraintes dues à la dent (calculées par la méthode de résistance des matériaux). Les contraintes globales sont alors pondérées par des facteurs de concentration de contraintes, fonction de la géométrie. La formulation des facteurs obtenus de la littérature est optimisée pour être adaptée à une géométrie à laquelle elle n'était pas destinée. Les résultats obtenus sur une grande variété de géométrie de noyau ont permis d'obtenir une précision de résultats de l'ordre de 6,1% en moyenne. L'erreur maximale est de 14,7% après optimisation des lois de concentration de contraintes.

L'influence de divers paramètres géométriques, hauteur et largeur de dent, épaisseur de l'anneau ou encore profil de la dent, a été présentée.

Pour illustrer le couplage entre le problème électrotechnique du couple produit par une géométrie de noyau et le problème des contraintes mécaniques qu'il subit, nous avons présenté l'influence de la forme de la dent sur la forme de l'onde du couple produit par la phase. Le profil de la dent modifie la répartition du couple sur la plage angulaire où la phase est alimentée.

Nous avons constaté qu'il pouvait être intéressant de considérer le problème des contraintes dans un noyau à 4 pôles (MRV 6/4), puisque cette étude sur la structure 6/2 montrent qu'il est préférable de concevoir une géométrie de dent peu large, qui sur le plan de l'encombrement périphérique permet de placer 4 dents.

Ce modèle permet de connaître le niveau de contrainte associé à une géométrie de noyau et d'évaluer rapidement l'influence d'une modification de la géométrie de la dent sur la tenue mécanique du noyau. Dans le cadre d'une démarche de conception menée conjointement d'un point de vue électromagnétique et mécanique, ce modèle permet d'optimiser la géométrie mécanique du noyau.

## Chapitre IV

# Etude des paliers et modélisation thermique : Problème couplé mécanique-thermique

Afin de pouvoir prédire les vibrations du rotor, il est essentiel d'étudier avec précision les roulements à billes à contact oblique soumis à de hautes vitesses de rotation. La morphologie, les paramètres décrivant les roulements à billes ainsi que les méthodes classiquement utilisées pour modéliser ce type de paliers sont décrits dans de nombreux ouvrages [64, 65, 66, 41].

Dans cette partie, nous allons définir les critères de choix d'un palier pour réaliser le guidage d'un rotor d'électrobroche. Puis nous détaillerons les raisons, qui nous ont poussé à choisir le guidage par roulements à billes à contact oblique.

Le guidage d'une électrobroche pour l'usinage grande-vitesse doit posséder les qualités suivantes :

1. il doit être précis (pas de jeu) afin d'obtenir une bonne qualité dimensionnelle des pièces fabriquées;
2. il doit assurer une bonne rigidité qui limitera l'amplitude des vibrations du rotor lors de l'usinage et atténuera le déplacement de la broche sous l'action des efforts de coupe;
3. il doit être fiable afin de limiter les temps de maintenance et de réparation (disponibilité de la machine). Sa durée de vie doit être élevée;
4. il doit dissiper le minimum de puissance afin de conserver la capacité de coupe de la broche (peu de frottements);
5. il doit supporter les longues durées de fonctionnement, et atteindre sa stabilité thermique rapidement (temps minimum entre la mise en route de la machine et les premiers copeaux);
6. il doit être léger et compact afin de limiter la taille de l'électrobroche et améliorer ainsi la dynamique de la machine-outil.

Nous allons succinctement énumérer les différents types de paliers utilisés couramment dans une électrobroche à grande vitesse.

## IV.1 Paliers pour la grande vitesse

On peut dénombrer 4 types de paliers utilisés en grande vitesse :

- les paliers fluides,
- les paliers à éléments roulants,
- les paliers magnétiques.

Sous le nom de paliers fluides sont regroupés les paliers utilisant la pression dans un fluide (gazeux ou liquide) pour obtenir la sustentation de l'arbre et son positionnement. Dans les applications nécessitant une forte rigidité, les liquides sont utilisés pour leur faible compressibilité.

Sous l'appellation de paliers à éléments roulant, nous désignons ici les roulements ou les butées à billes, à aiguilles, à rouleaux. Dans les applications à grande vitesse, les éléments roulants utilisés sont des billes (roulements à billes).

Les paliers magnétiques utilisent les forces d'attraction magnétique pour obtenir la sustentation de l'arbre moteur. Ces paliers doivent être le plus souvent contrôlés activement pour obtenir une position stable de l'axe tournant. Ils sont de plus en plus utilisés dans les broches hautes vitesse en raison de l'absence de frottement. Les pertes sont essentiellement dues aux pertes dans les circuits électriques et magnétiques.

Pour l'électrobroche du laboratoire, le choix du système de guidage s'est porté sur les roulements à billes à contact oblique. Les raisons de ce choix sont les suivantes :

1. ces roulements ont un rapport rigidité/volume très supérieur à celui des paliers magnétiques. Par exemple, pour une bague intérieure de 100 mm, un roulement atteint une rigidité radiale de  $108 \text{ daN}/\mu\text{m}$  [31] contre environ  $50 \text{ daN}/\mu\text{m}$  pour des paliers magnétiques de diamètre identique;
2. à rigidité égale le poids du roulement est beaucoup plus faible que celui d'un palier magnétique;
3. le guidage est sûr : une coupure d'alimentation de l'électrobroche ne change pas les propriétés des paliers;
4. la seule difficulté de mise en oeuvre relève de la fabrication mécanique des pièces dans lesquelles sera assemblé le roulement, afin d'assurer un fonctionnement durable;
5. aucune énergie n'est nécessaire au fonctionnement d'un roulement à billes. Un système de lubrification est cependant à prévoir;
6. le montage de roulements à contact obliques permet de réaliser une précontrainte de ces roulements, pour annuler le jeu, régler la rigidité, améliorer la dynamique des roulements et de l'électrobroche;
7. le coût de l'installation se résume à celui des paliers et du système de lubrification.

Du point de vue de la qualité du guidage, les roulements à billes présente l'inconvénient de générer des vibrations fonction de la cinématique interne aux roulements (vitesses relatives des composant)



Caractéristiques techniques du matériau		$Si_3N_4$	100Cr6
Densité	$[kg/dm^3]$	3,19-3,21	7,8
Coefficient de dilatation linéaire	$[10^{-6}/^{\circ}C]$	20 – 1000°C	3,2
		20 – 300°C	-
Module d'élasticité	[GPa]	à 20°C	315
Coefficient de Poisson	[GPa]	à 20°C	0,26
Dureté	[HV10]	à 20°C	1700
Tenacité	$[MN/m^{1,5}]$	à 20°C	6-8
Température limite d'utilisation	$[^{\circ}C]$		$\approx 1000$
Conductibilité thermique	$[W/m/^{\circ}C]$	à 20°C	30-40
Résistivité électrique	$[\Omega.mm^2/m]$	à 20°C	$10^{17} - 10^{18}$
Magnétisable			non

TAB. IV-1 – Comparaison entre les propriétés du Nitrure de Silicium ( $Si_3N_4$ ) et de l'acier pour roulement 100Cr6 (acier faiblement allié à 1% de Carbone avec 1,5% de Chrome [62]).

et du nombre de billes. Sous l'action des efforts d'usinage, les bagues du roulement ne sont plus concentriques, une pulsation de la rigidité radiale (variable elastic compliance [67]) due à la position des billes dans le roulement apparaît alors et la surface usinée présente des irrégularités.

### Type de roulements choisis

Afin d'obtenir une meilleure rigidité, une tenue en température accrue et une vitesse limite supérieure, des billes en céramique (nitrure de silicium  $Si_3N_4$ ) sont utilisées au lieu de billes en acier. Ce matériau présente des caractéristiques meilleures et sur une plus large plage de températures que l'acier utilisé dans les roulements conventionnels, comme en témoigne le tableau IV-1, synthèse de données fournies par [31] et [68].

Concernant les caractéristiques présentées dans ce tableau, remarquons en tout premier lieu la légèreté de la céramique face à l'acier (réduction de 60% du poids). La dynamique du roulement en vitesse maximale et accélération s'en trouve améliorée.

Les modules d'élasticité nous montrent que la rigidité d'une bille céramique est 50% plus haute que celle d'une bille acier. Un roulement équipé de billes céramiques gagne ainsi près de 40% de rigidité d'après les résultats donnés dans [31, 68].

D'un point de vue électromagnétique, on pourra remarquer l'isolation électrique réalisée par les billes céramiques et leur insensibilité magnétique à proximité du stator de la MRV.

Actuellement, les roulements utilisés sur le prototype de MRV sont des roulements à billes à contact oblique SNFA VEX 6 /NS 7. «VEX» est une désignation du constructeur. Le chiffre 6 désigne le diamètre intérieur, /NS nitrure de silicium.

Ces roulements possèdent 8 billes et une cage en résine renforcé de fibres de coton phénolique. Le poids du roulement n'excède pas 6 grammes. La vitesse maximale du roulement équipé de billes céramiques est donnée à 242000 tr/mn, lorsque le roulement est dans les conditions optimales de fonctionnement (montage parfait et bonne lubrification).

## IV.2 Modélisation et calcul des angles de contact dans un roulement à billes

La connaissance précise des angles de contact intérieur et extérieur dans un roulement à billes à contact oblique est primordiale pour décrire le comportement macroscopique de ce dernier. La rigidité et le couple résistant qui interviennent dans la dynamique du rotor sont en effet liés au comportement des éléments roulants sous charge et en mouvement.

Dans cette partie, nous allons détailler le calcul des angles de contact d'un roulement soumis à une force purement axiale, appelée classiquement précharge. Cette précharge crée alors un déplacement relatif des bagues et un arc-boutement des billes. Ce dernier se traduit par une modification de l'angle de contact  $\alpha_f$ , donné par le constructeur, vers une valeur supérieure  $\alpha_p$ .

Le roulement est ensuite étudié en rotation. Les angles de contact vont se modifier afin de compenser la force centrifuge et le moment gyroscopique. Les équations et leur résolution seront détaillées dans le deuxième paragraphe. Un modèle explicite sera alors proposé pour éviter l'emploi d'une résolution numérique.

Dans le dernier paragraphe, nous illustrerons les calculs par l'étude de deux roulements à contact oblique : un roulement de grande dimension et un roulement haute vitesse, plus spécifique de notre application. L'influence de la vitesse et de la précharge seront décrites par le calcul numérique et le modèle explicite afin de confronter les résultats.

### IV.2.1 Macrogéométrie d'un roulement à bille

Un roulement à billes à contact oblique est composé d'une bague intérieure fixée au rotor, d'une bague extérieure fixé au carter du moteur et d'une rangée de  $Z$  billes de diamètre  $d_b$  uniformément réparties par la cage sur un cercle de diamètre  $d_m$ . La figure IV-1 décrit la section d'un roulement à billes dans le plan de la bille contenant l'axe de rotation  $\vec{Y}$  et le centre  $G$  de la bille. Les billes sont en contact avec les bagues extérieure et intérieure, respectivement, aux points A et B. Les deux pistes extérieure et intérieure sont supposées de section circulaire avec, respectivement, des centres de courbures  $C_o$  et  $C_i$  et des rayons de courbure  $R_o$  et  $R_i$ .

### IV.2.2 Notations pour les calculs relatifs aux roulements

Pour l'analyse dynamique du roulement, la bille est modélisée comme une masse  $m_b$  concentrée au centre de gravité de la bille  $G$  où les forces centrifuges sont appliquées.

L'état libre de la bille (indice  $f$ ) fait référence au moment où le roulement est immobile et non précontraint. L'angle de contact libre  $\alpha_f$  est représenté sur la figure IV-1.  $C_{of}$  et  $C_{if}$  représentent respectivement la position des centres de courbure  $C_o$  et  $C_i$  des pistes extérieure et intérieur. La distance entre les centres de courbure des pistes est défini par  $C_{of}C_{if} = a_f$

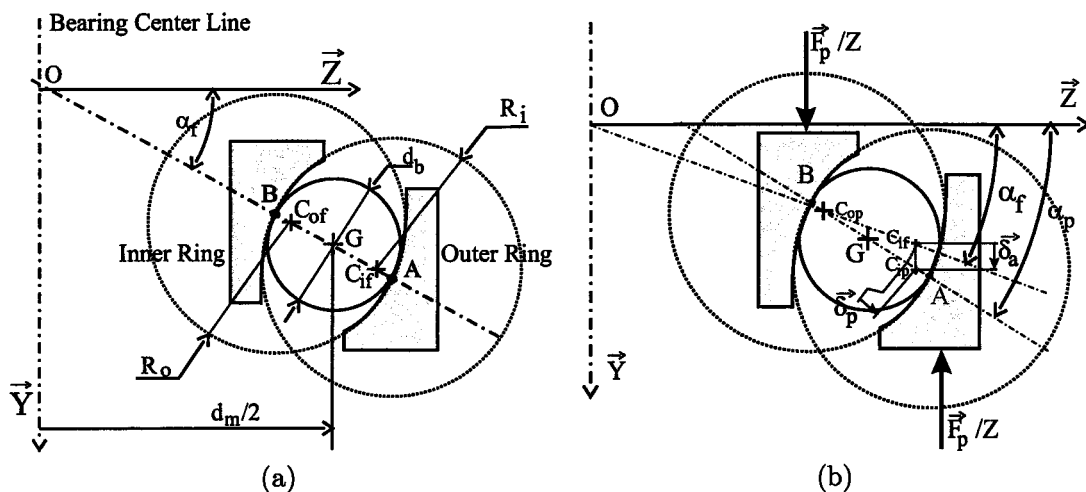


FIG. IV-1 – État libre (a) et état précontraint (b) de la bille

L'état précontraint de la bille (indice  $p$ ) est ensuite défini comme celui où une force purement axiale  $\vec{F}_p$  (précharge) est appliquée sur le roulement encore immobile (voir Figure IV-1). Les angles de contact extérieur et intérieur  $\alpha_o$  et  $\alpha_i$  sont égaux au même angle noté  $\alpha_p$ .  $C_{op}$  et  $C_{ip}$  représentent respectivement les positions des centres de courbure des pistes extérieure et intérieure,  $C_o$  et  $C_i$ , lorsque la précharge est appliquée. Sous la précharge  $\vec{F}_p$ , la bague intérieure subit un déplacement par rapport à la bague extérieure (translation)  $\vec{\delta}_a$  dans la direction  $\vec{Y}$ . Par conséquent  $C_i$  subit le même déplacement par rapport à la bague extérieure et on obtient  $\vec{\delta}_a = \overrightarrow{C_{if}C_{ip}}$ .

Chaque bille est supposée soumise à une force élémentaire  $\vec{F}_p/Z$  suivant l'axe  $\vec{Y}$ . La précharge est appliquée par l'intermédiaire d'un ressort dont la rigidité axiale est beaucoup plus faible que celle du roulement. Par conséquent,  $F_p$  peut être considérée comme constante et non influencée par la vitesse et les variations d'angles. La distance entre les centres de courbure des pistes devient :

$$C_{op}C_{ip} = a_f + \delta_p \tag{IV-1}$$

### IV.2.3 Variation de l'angle de contact statique en fonction de la précharge appliquée

Ce paragraphe va d'abord présenter une méthode couramment utilisée pour la résolution du problème. Une discussion concernant l'algorithme servant à sa résolution amènera une nouvelle proposition plus précise et plus systématique. L'angle statique du roulement sous précontrainte se verra finalement adjoindre une solution analytique approchée.

#### IV.2.3.A Méthode classique

Toutes les notations sont détaillée sur la figure IV-1. La figure IV-3 permet également de comprendre la cinématique du roulement lors de l'application de la précharge.

Pour calculer la valeur exacte de l'angle de contact statique  $\alpha_p$ , Jones [65] propose la formule implicite (IV-2) trouvée à partir de l'analyse des forces appliquées à la bille et tenant compte de la déformation de cette dernière :

$$\chi = \sin \alpha_p \left( \frac{\cos \alpha_f}{\cos \alpha_p} - 1 \right)^n \quad (\text{IV-2})$$

avec  $\chi$  le facteur de charge défini par  $\chi = \frac{F_p}{ZK_f a_f^n}$ .

Le coefficient  $K_f$ , appelé constante de déformation normale dans [41], sera défini plus loin par l'équation (IV-8).

Si sous une charge de contact normale  $Q$ , les deux centres des solides élastiques se rapprochent d'une valeur  $\delta_p$ , alors il existe entre  $Q$  et  $\delta_p$ , conformément à la théorie du contact de Hertz [69] la loi de comportement non-linéaire suivante :

$$Q = K_f \delta_p^n \quad (\text{IV-3})$$

La bille est modélisée comme deux ressorts non linéaires, de raideur  $k_i$  et  $k_o$ , disposés en série. Pour une force de contact  $Q$ , la déformation totale, notée  $\delta_p$ , est définie comme la somme des deux déformations  $\delta_i$  et  $\delta_o$  :

$$\delta_p = \delta_i + \delta_o \quad (\text{IV-4})$$

$\delta_i$  et  $\delta_o$  sont les déformations locales aux contacts dues aux forces normales  $Q_i$  et  $Q_o$ . Les lois de comportement aux points A et B sont les suivantes :

$$Q_i = k_i \delta_i^n \quad (\text{IV-5})$$

$$Q_o = k_o \delta_o^n \quad (\text{IV-6})$$

En substituant dans l'équation (IV-4) les valeurs de  $\delta_i$  et  $\delta_o$  calculées en fonction de la force et des raideurs, on obtient l'expression suivante :

$$\left( \frac{Q}{K_f} \right)^{1/n} = \left( \frac{Q}{k_o} \right)^{1/n} + \left( \frac{Q}{k_i} \right)^{1/n} \quad (\text{IV-7})$$

d'où l'expression de  $K_f$  est donnée par [70] :

$$K_f = \left[ \left( \frac{1}{k_o} \right)^{1/n} + \left( \frac{1}{k_i} \right)^{1/n} \right]^{-n} \quad (\text{IV-8})$$

avec  $k_o$  et  $k_i$  les modules élastiques des contacts extérieur et intérieur :

$$k_i = \frac{E_i^*}{(\Sigma \rho_i)^{1/2} (\delta_i^*)^{3/2}} \quad (\text{IV-9})$$

$$k_o = \frac{E_o^*}{(\Sigma \rho_o)^{1/2} (\delta_o^*)^{3/2}} \quad (\text{IV-10})$$

Les différents termes  $\Sigma \rho$  (somme des courbures) et  $\delta^*$  (coefficient de la loi force-déplacement) sont des fonctions de la géométrie du roulement et peuvent explicitement, et pour chacun des contacts intérieur

et extérieur, être calculés par les formules suivantes:

$$\Sigma\rho_i = \frac{4}{d_b} - \frac{1}{R_i} + \frac{2 \cos \alpha_i}{d_m - d_b \cos \alpha_i} \quad (IV-11)$$

$$\Sigma\rho_o = \frac{4}{d_b} - \frac{1}{R_o} - \frac{2 \cos \alpha_o}{d_m + d_b \cos \alpha_o} \quad (IV-12)$$

où  $d_b$  est le diamètre de la bille,  $R$  le rayon de courbure de la piste au point de contact,  $d_m$  est le diamètre moyen du roulement.  $\alpha_i$  et  $\alpha_o$  désignent les angles de contact intérieur et extérieur.  $E_i^*$  et  $E_o^*$  sont appelés modules équivalents d'élasticité et peuvent être calculés, pour les deux contacts, à partir des équations (IV-13) et (IV-14).

$$\frac{1}{E_i^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_b^2}{E_b} + \frac{1 - \nu_{ir}^2}{E_{ir}} \right) \quad (IV-13)$$

$$\frac{1}{E_o^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_b^2}{E_b} + \frac{1 - \nu_{or}^2}{E_{or}} \right) \quad (IV-14)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $E$  le module d'Young. Les indices  $ir$ ,  $or$  et  $b$  désignent respectivement les matériaux de la bague intérieur, extérieur et des billes. Le paramètre  $\delta^*$  est calculé par le modèle approché exposé en annexes.

#### IV.2.3.B Résolution numérique de Harris

Pour résoudre numériquement l'équation (IV-2), Harris a choisi d'utiliser la méthode de Newton-Raphson, pour laquelle il a mis au point l'algorithme de calcul itératif ( $j$  est indice d'itération) :

$$\alpha_{p,j+1} = \alpha_{p,j} + \frac{\chi - f(\alpha_{p,j})}{f'(\alpha_{p,j})} \quad (IV-15)$$

Où les fonctions  $f$ ,  $f'$  sont données par les formules :

$$f(\alpha_{p,j}) = \sin \alpha_{p,j} \left( \frac{\cos \alpha_f}{\cos \alpha_{p,j}} - 1 \right)^n$$

$$f'(\alpha_{p,j}) = \frac{df}{d\alpha_{p,j}} = \cos \alpha_{p,j} \left( \frac{\cos \alpha_f}{\cos \alpha_{p,j}} - 1 \right)^n + n \tan^2 \alpha_{p,j} \left( \frac{\cos \alpha_f}{\cos \alpha_{p,j}} - 1 \right)^{n-1} \cos \alpha_f$$

On fait l'hypothèse implicite de l'indépendance de la raideur des contacts avec l'angle de contact.

En plus de l'apparente complexité de sa formulation, l'utilisation d'une telle méthode peut s'avérer délicate parce que le calcul itératif présente de multiples possibilités d'instabilité. L'initiation de l'algorithme est délicate. Par exemple, débiter avec la valeur  $\alpha_{p,0} = \alpha_f$  fournit une valeur infinie pour  $\alpha_{p,1}$ . Par ailleurs, la stabilité et la vitesse de convergence dépendent fortement des angles initiaux.

Afin d'illustrer le problème de stabilité de la méthode, la figure IV-2 montre le nombre d'itérations nécessaires à l'obtention, ou non, d'une valeur approchée à moins de 0.1% de la solution exacte. Les angles de contact  $\alpha_f$  testés,  $7^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $25^\circ$  et  $40^\circ$ , sont des valeurs standards. La formulation de Harris est utilisée avec deux angles d'initialisation  $\alpha_{p,0} = \alpha_f + 0.5^\circ$  ou  $\alpha_{p,0} = \alpha_f + 5^\circ$ , afin de mieux percevoir l'influence du bon choix de l'angle de départ. Cette méthode présente une grande sensibilité à la valeur initiale et c'est la raison pour laquelle, une autre formulation de cette méthode a dû être mise au point.

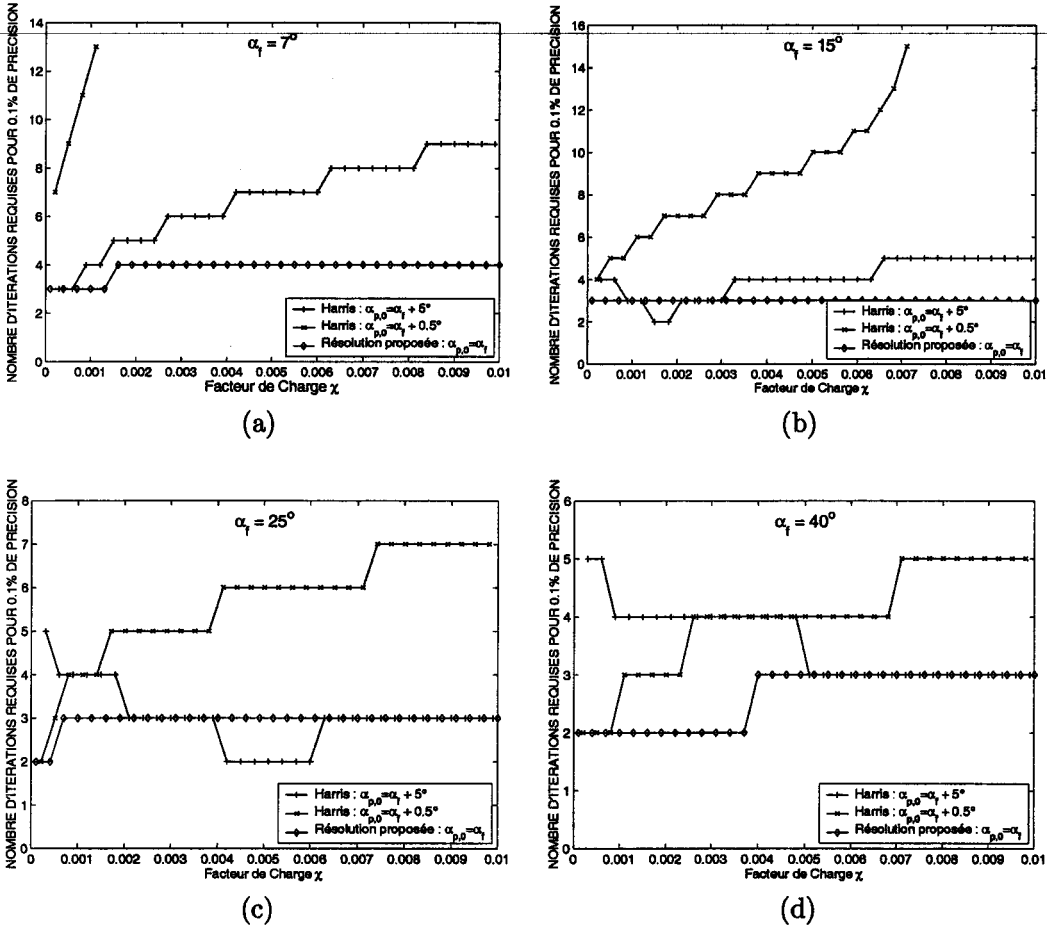


FIG. IV-2 – Nombre requis d'itérations pour atteindre le résultat de référence, à moins de 0.1% près, par la méthode de Newton-Raphson et la formulation de Harris ou par l'algorithme proposé. Roulement à billes avec un angle de contact de  $7^\circ$  (a),  $15^\circ$  (b),  $25^\circ$  (c),  $40^\circ$  (d).

#### IV.2.3.C Autre formulation du problème de l'angle de contact statique

La méthode de résolution proposée est plus systématique et plus sûre et permet d'accéder au résultat exact sans aucun problème de convergence ou de stabilité. Cette méthode servira par la suite de base à un modèle analytique approché. La géométrie du contact permet d'écrire les équations suivantes (voir figure IV-3) :

$$(a_f + \delta_p) \sin \alpha_p = a_f \sin \alpha_f + \delta_a \quad (\text{IV-16})$$

$$(a_f + \delta_p) \cos \alpha_p = a_f \cos \alpha_f \quad (\text{IV-17})$$

L'hypothèse d'une force de précontrainte  $F_p$  purement axiale et répartie uniformément sur les  $Z$  billes permet d'écrire l'équation d'équilibre de la bague extérieure dans la direction de l'axe du roulement sous la forme :

$$-\frac{F_p}{Z} + Q \sin \alpha_p = 0 \quad (\text{IV-18})$$

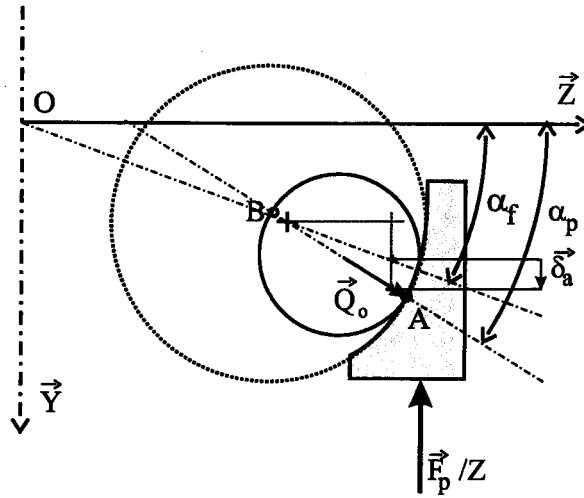


FIG. IV-3 – État précontraint de la bille – paramètres.

La loi de comportement globale (IV-3) de la bille permet d'écrire:

$$\delta_p = \left( \frac{Q}{K_f} \right)^{1/n} \tag{IV-19}$$

En substituant alors  $Q$  dans cette expression par sa valeur  $F_p/(Z \sin \alpha_p)$ , on peut réécrire l'équation (IV-17) sous la forme:

$$\cos \alpha_p = \frac{a_f \cos \alpha_f}{\left( a_f + \left( \frac{F_p}{Z K_f \sin \alpha_p} \right)^{1/n} \right)} \tag{IV-20}$$

En utilisant la définition du facteur de charge  $\chi$ , on obtient:

$$\cos \alpha_p = \frac{\cos \alpha_f}{1 + \left( \frac{\chi}{\sin \alpha_p} \right)^{1/n}} = \frac{\cos \alpha_f}{1 + \left( \frac{\chi}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_p}} \right)^{1/n}} \tag{IV-21}$$

L'équation (IV-21) peut être résolue par la méthode de Newton-Raphson ou une méthode de type point fixe en utilisant les notations  $u_0 = \cos \alpha_f$  et  $u_j = \cos \alpha_{p,j}$ .

On peut réécrire l'équation (IV-21) sous la forme d'une suite:

$$u_{j+1} = \frac{u_0}{1 + \chi^{1/n} (1 - u_j^2)^{-1/2n}} \tag{IV-22}$$

On constate que les résultats donnés par l'algorithme de Newton-Raphson sont plus précis et la stabilité de la méthode est assurée. Le calcul peut être initié directement avec la valeur de l'angle de contact libre  $\alpha_f$  sans aucun problème de stabilité. Les figures IV-2 (a) (d) présentent la comparaison entre la solution de Harris et la solution proposée.

Pour illustrer la convergence de l'algorithme proposé, on étudie l'exemple d'un facteur de charge très élevé, qui induit la plus grande variation de l'angle de contact et l'erreur la plus importante. Les angles de contact libres sont pris comme précédemment entre  $7^\circ$  et  $62^\circ$ . Les résultats sont donnés

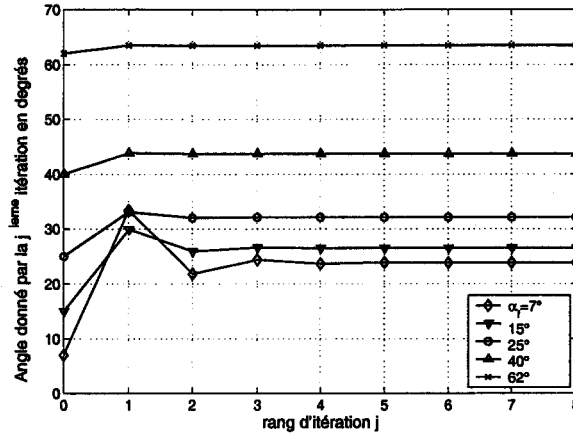


FIG. IV-4 – Convergence de la suite  $u_n$  donné par l'équation (IV-22) – Résultats obtenus pour les différentes itération du calcul et pour des angles de contact libre de  $7^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $40^\circ$  ou  $62^\circ$ .

angle de contact	itération			
	$n^{\circ}1$	$n^{\circ}2$	$n^{\circ}5$	$n^{\circ}10$
$7^\circ$	40,2	-8,41	-0,631	$8,7 \cdot 10^{-4}$
$15^\circ$	12,8	-2,30	-0,091	$3 \cdot 10^{-5}$
$25^\circ$	3,04	-0,329	$-4,5 \cdot 10^{-3}$	0
$40^\circ$	0,377	$-1,5 \cdot 10^{-3}$	$-10^{-5}$	0
$62^\circ$	0,187	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	0	0

TAB. IV-2 – Erreur en % de différents termes de la suite  $u_n$  pour différents angles de contact de l'état libre.

sur la figure IV-4. L'algorithme converge après 5 itérations seulement, et la seconde itération est déjà acceptable pour les angles supérieurs à  $20^\circ$ . Le tableau IV-2 montre l'erreur relative en % sur la valeur de l'angle pour les différentes étapes du calcul itératif. A partir de cette formulation, un modèle approché peut être développé et permet d'obtenir explicitement la valeur de l'angle de contact dans un roulement à billes précontraint.

#### IV.2.3.D Modèle approché de l'angle de contact statique

En constatant que la suite étudiée dans la section précédente, présente dès le deuxième terme des résultats encourageants, il apparaît qu'une modification légère de la formulation de ce dernier peut amener à obtenir des résultats encore plus proche de la réalité.

L'expression du second terme  $u_2$  de la suite présentée précédemment peut s'écrire sous la forme :

$$u_2 = \frac{u_0}{1 + \chi^{1/n} \left( 1 - u_0^2 \left( 1 + \chi^{1/n} \left( 1 - u_0^2 \right)^{-1/2n} \right)^{-2} \right)^{-1/2n}} \quad (\text{IV-23})$$



$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
0,8037	0,5388	0,0587

TAB. IV-3 – Coefficients optimaux pour le modèle calculé par la méthode des moindres carrés.

Par la suite,  $\alpha_p$  sera évalué à partir de la relation :

$$\cos \alpha_p = \frac{\cos \alpha_f}{1 + \chi^{1/n} \left( 1 - \cos^2 \alpha_f \left( 1 + \mu_1 \chi^{\mu_2} (\sin \alpha_f)^{-2\mu_3} \right)^{-2} \right)^{-1/2n}} \quad (IV-24)$$

L'équation (IV-24) coïncide avec l'équation (IV-23) lorsqu'on pose  $u_2 = \cos \alpha_p$ ,  $u_0 = \cos \alpha_f$  et si  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1/n$  et  $\mu_3 = 1/(2n)$ . Ainsi les valeurs optimales des coefficients  $\mu_1$  à  $\mu_3$  peuvent être recherchées afin d'obtenir la meilleure prédiction de l'angle de contact précontraint  $\alpha_p$ .

L'étude de l'expression du second terme,  $u_2$ , de la suite montre que l'erreur maximale correspond à la combinaison d'un angle de contact  $\alpha_f$  faible et d'un facteur de charge très élevé.

En modifiant les coefficients  $\mu_1$  à  $\mu_3$ , l'erreur va être réduite et le modèle pourra alors être utilisé pour prédire l'influence de la précharge sur les roulements qui équipent la machine à réluctance variable du laboratoire.

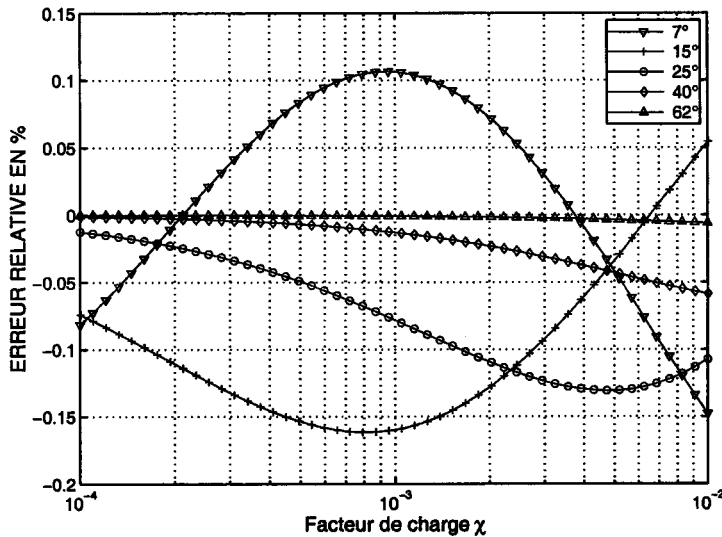


FIG. IV-5 – Erreurs relatives sur l'angle de contact dans l'état précontraint entre la valeur exacte  $U_{40}$  et le modèle proposé en fonction du facteur de charge, pour différents angles dans l'état libre.

Afin d'obtenir une expression explicite utile dans les problèmes d'optimisation et de contrôle, une méthode des moindres carrés, appliquée à des valeurs d'angles comprises entre 7° et 62° et des facteurs de charge allant de  $10^{-8}$  à  $10^{-2}$ , a permis de minimiser les erreurs. Le tableau IV-3 donne les valeurs des coefficients obtenus après le processus d'optimisation.

La figure IV-5 présente, en fonction du facteur de charge  $\chi$ , l'erreur relative, sur l'angle de contact de l'état précontraint, entre les valeurs du modèle et celles de la quarantième itération de l'équation

angle de contact $\alpha_f$	second terme $u_2$ erreur max. (%)	modèle proposé	
		erreur max. (%)	au point $\chi =$
$7^\circ$	-8,41	-0,1478	$1,0 \times 10^{-3}$
$15^\circ$	-2,30	-0,1616	$0,8 \times 10^{-3}$
$25^\circ$	-0,33	-0,1309	$4,7 \times 10^{-3}$
$40^\circ$	-0,015	-0,0587	$1 \times 10^{-2}$
$62^\circ$	-0,025	-0,0060	$1 \times 10^{-2}$

TAB. IV-4 – Erreur maximale en % du deuxième terme  $u_2$  et du modèle proposé pour différents angles de contact de l'état libre – La position de la valeur maximale de l'erreur du modèle est donnée dans la dernière colonne.

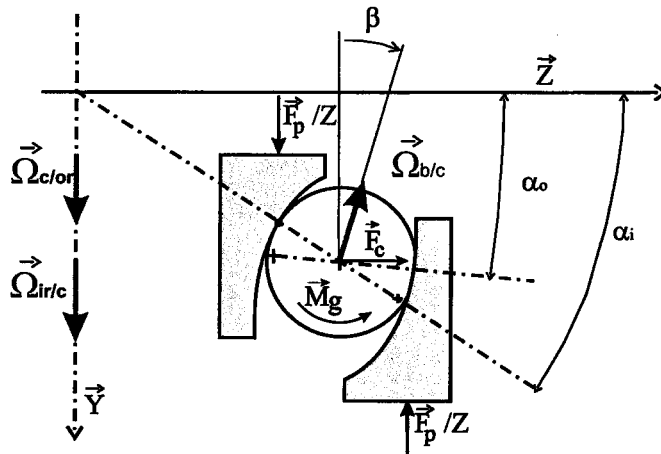


FIG. IV-6 – Paramètres et vitesses pour l'étude dynamique.

(IV-22). Le tableau IV-4 présente l'erreur relative avant (terme  $u_2$ ) et après modification (modèle proposé) des paramètres  $\mu_1$  à  $\mu_3$ .

On peut noter qu'un facteur de charge  $\chi$  de  $10^{-2}$  représente une charge axiale de 71200 N pour un roulement à contact oblique de type 218 [41]. L'erreur relative maximale donnée par le modèle est d'environ -0.16%. Cette précision est satisfaisante pour de nombreuses applications surtout pour des processus d'optimisation dans des phases de conception.

#### IV.2.4 Variation des angles de contact avec la vitesse dans un roulement à billes précontraint

Dans cette partie, les équations pour la détermination des angles intérieur et extérieur sont établies dans un premier temps, afin d'obtenir des équations implicites dont la résolution numérique sera, par la suite, considérée comme résultat de référence. Cela permettra ensuite de chercher une méthode analytique approchée qui sera utile à la prédiction du comportement du roulement et de ses éléments roulants dans des utilisations avec de grandes vitesses de rotation.

#### IV.2.4.A Vitesses dans le roulement

Il s'agit ici d'établir les équations qui définissent les vitesses de rotation des différents éléments d'un roulement à billes.

Les équations (IV-25) to (IV-28) sont écrites dans le repère lié à la cage du roulement (voir figure IV-6) :

$$\vec{V}_{A \in b/c} = \vec{\Omega}_{b/c} \wedge \vec{GA} \quad (IV-25)$$

$$\vec{V}_{A \in or/c} = -\vec{\Omega}_{c/or} \wedge \vec{OA} \quad (IV-26)$$

$$\vec{V}_{B \in b/c} = \vec{\Omega}_{b/c} \wedge \vec{GB} \quad (IV-27)$$

$$\vec{V}_{B \in ir/c} = \vec{\Omega}_{ir/c} \wedge \vec{OB} = (\vec{\Omega}_{ir/or} - \vec{\Omega}_{c/or}) \wedge \vec{OB}$$

où  $\vec{V}_{P \in S_1/S_2}$  est la vitesse d'un point P appartenant au solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_2$ , et  $\vec{\Omega}_{S_1/S_2}$  est la vitesse de rotation du solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_2$ . Les indices  $b$ ,  $c$ ,  $or$  et  $ir$  font respectivement référence au mouvement de la bille, de la cage et des bagues extérieure et intérieure. Afin de simplifier les expressions dans les calculs qui vont suivre, les notations suivantes seront utilisées :

$$\vec{\Omega}_{ir/or} = \Omega \vec{Y} \quad (IV-28)$$

$$\vec{\Omega}_{c/or} = \Omega_c \vec{Y} \quad (IV-29)$$

$$\vec{\Omega}_{b/c} = \Omega_b \left( -\cos \beta \vec{Y} + \sin \beta \vec{Z} \right) \quad (IV-30)$$

$\beta$  est l'angle formé par l'axe de rotation de la bille avec l'axe de rotation du roulement. De même que dans [41], les déformations sont supposées négligeables et on a alors :

$$\|\vec{GA}\| = \|\vec{GB}\| \approx \frac{d_b}{2} \quad (IV-31)$$

avec les notations données dans la figure IV-6, on a les relations suivantes :

$$\vec{GA} = \frac{d_b}{2} \left( \sin \alpha_o \vec{Y} + \cos \alpha_o \vec{Z} \right) \quad (IV-32)$$

$$\vec{GB} = \frac{d_b}{2} \left( -\sin \alpha_i \vec{Y} - \cos \alpha_i \vec{Z} \right) \quad (IV-33)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{Z} = \frac{d_m}{2} + \frac{d_b}{2} \cos \alpha_o \quad (IV-34)$$

$$\vec{OB} \cdot \vec{Z} = \frac{d_m}{2} - \frac{d_b}{2} \cos \alpha_i \quad (IV-35)$$

Au point A et B, on suppose qu'il n'y a pas de glissement relatif entre la bille et les bagues. Cette condition d'égalité des vitesses de deux points en contact permet d'écrire :

$$\vec{V}_{A \in b/or} = \vec{V}_{A \in b/c} - \vec{V}_{A \in or/c} = \vec{0} \quad (IV-36)$$

La substitution des équations (IV-25), (IV-26) et (IV-32) dans l'équation (IV-36) donne :

$$\Omega_b \frac{d_b}{2} \cos (\alpha_o - \beta) = \Omega_c \left( \frac{d_m}{2} + \frac{d_b}{2} \cos \alpha_o \right) \quad (IV-37)$$

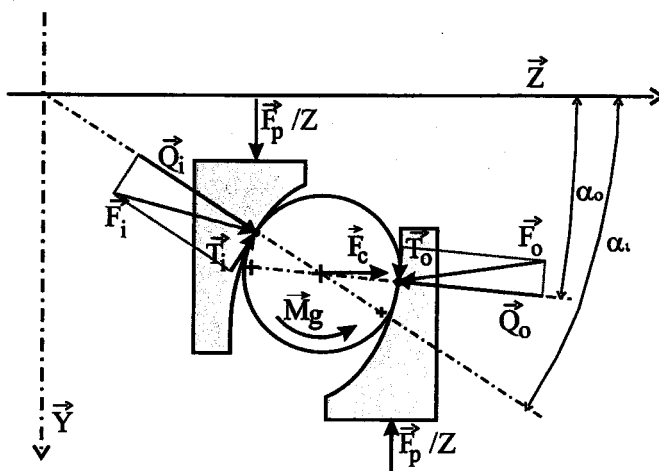


FIG. IV-7 - État dynamique de la bille soumise à une précharge  $\vec{F}_p$  pour une vitesse de rotation du roulement  $\vec{\Omega}$ .

La même analyse appliquée au contact intérieur (point B) fournit l'expression suivante :

$$\Omega_b \frac{d_b}{2} \cos(\alpha_i - \beta) = (\Omega - \Omega_c) \left( \frac{d_m}{2} - \frac{d_b}{2} \cos \alpha_i \right) \quad (\text{IV-38})$$

Finalement, en utilisant les équations (IV-37) et (IV-38), l'expression de la vitesse de rotation  $\Omega_c$  de la cage du roulement prend la forme :

$$\Omega_c = \Omega \frac{(d_m - d_b \cos \alpha_i) \cos(\alpha_o - \beta)}{d_m (\cos(\alpha_o - \beta) + \cos(\alpha_i - \beta)) + d_b \sin(\alpha_i - \alpha_o) \sin \beta} \quad (\text{IV-39})$$

On suppose par la suite que le mouvement relatif de la bille sur la bague intérieure est un mouvement de roulement pur. Harris montre alors que la valeur de l'angle  $\beta$  est donnée par [67]:

$$\tan \beta = \frac{\sin \alpha_o}{\cos \alpha_o + \frac{d_b}{d_m}} \quad (\text{IV-40})$$

Si la cage extérieure est fixe, l'équation (IV-39) devient :

$$\frac{\Omega_c}{\Omega} = \frac{1 - \frac{d_b}{d_m} \cos \alpha_i}{1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o)} \quad (\text{IV-41})$$

Concernant la vitesse de rotation des billes sur leur propre axe, l'équation (IV-37) donne :

$$\Omega_b = \Omega_c \frac{1 + \frac{d_b}{d_m} \cos \alpha_o}{\frac{d_b}{d_m} \cos(\alpha_o - \beta)} \quad (\text{IV-42})$$

Les équations (IV-41) et (IV-42) permettront par la suite de calculer la force centrifuge ainsi que l'effet gyroscopique appliqué à la bille. Nous allons à présent étudier l'équilibre des forces appliquées à la bille.

#### IV.2.4.B Équilibre des forces appliquées à la bille

En reprenant les résultats de Jones [65] et Harris [41], l'équation d'équilibre des forces, qui s'appliquent sur une bille du roulement, est la suivante (voir figure IV-7) :

$$\vec{Q}_o + \vec{T}_o + \vec{Q}_i + \vec{T}_i + \vec{F}_c = \vec{0} \quad (\text{IV-43})$$

avec la force centrifuge  $F_c$ , appliquée au centre de gravité de la bille et calculée comme suit [41] :

$$\vec{F}_c = \frac{d_m}{2} m_b \Omega_c^2 \vec{Z} \quad (\text{IV-44})$$

L'équation (IV-43), projetée sur l'axe  $\vec{Z}$  lié à la cage, donne :

$$-Q_o \cos \alpha_o - T_o \sin \alpha_o + Q_i \cos \alpha_i + T_i \sin \alpha_i + F_c = 0 \quad (\text{IV-45})$$

De même, en vertu de l'équilibre des forces appliquées aux bagues extérieures et intérieures, la projection des forces  $\vec{Q}_o$  et  $\vec{T}_o$  pour la bague extérieure et celle des forces  $\vec{Q}_i$  et  $\vec{T}_i$  pour la bague intérieure sur l'axe  $\vec{Y}$  donnent les relations :

$$-\frac{F_p}{Z} + Q_o \sin \alpha_o - T_o \cos \alpha_o = 0 \quad (\text{IV-46})$$

$$\frac{F_p}{Z} - Q_i \sin \alpha_i + T_i \cos \alpha_i = 0 \quad (\text{IV-47})$$

On suppose qu'aucun moment de résistance n'apparaît aux points A et B. L'équation des moments du principe fondamental donne :

$$\vec{G}A \wedge \vec{F}_o + \vec{G}B \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_g \quad (\text{IV-48})$$

où  $\vec{M}_g$  représente le moment gyroscopique calculé par la formule (IV-49).

L'axe de rotation de la bille, dirigé par  $\vec{\Omega}_{b/c}$  forme un angle  $-\beta$  avec l'axe  $\vec{Z}$ . Par conséquent, le moment gyroscopique est calculé à partir de la formule [41] :

$$M_g = -J_b \Omega_c \Omega_b \sin \beta \quad (\text{IV-49})$$

où  $J_b$  est le moment d'inertie de la bille par rapport à un axe passant par son centre. A partir de (IV-44) et (IV-49), on obtient :

$$\frac{M_g}{d_b F_c} = -\frac{J_b \Omega_b 2 \sin \beta}{m_b \Omega_c d_b d_m} \quad (\text{IV-50})$$

Comme  $\frac{J_b}{m_b} = \frac{1}{10} d_b^2$ , la combinaison des équations (IV-37), (IV-50) donne :

$$\frac{M_g}{d_b F_c} = -\frac{1}{5} \left( 1 + \frac{d_b}{d_m} \cos \alpha_o \right) \frac{\sin \beta}{\cos(\alpha_o - \beta)} \quad (\text{IV-51})$$

En substituant l'angle  $\beta$  par sa valeur donnée par l'équation (IV-40), le terme  $\frac{\sin \beta}{\cos(\alpha_o - \beta)}$  se simplifie pour donner le résultat :

$$\frac{\sin \beta}{\cos(\alpha_o - \beta)} = \frac{\sin \alpha_o}{1 + d_b/d_m \cos \alpha_o} \quad (\text{IV-52})$$

L'expression (IV-51) devient alors :

$$\frac{M_g}{d_b F_c} = -\frac{1}{5} \sin \alpha_o \quad (\text{IV-53})$$

D'autre part, en accord avec Jones [65], on suppose que le moment gyroscopique est intégralement équilibré par les deux forces tangentielles,  $\vec{T}_o$  et  $\vec{T}_i$ , aux deux points de contact  $A$  et  $B$ . Il est alors possible de les écrire comme suit :

$$T_o = \lambda_o \frac{M_g}{d_b} \quad (\text{IV-54})$$

$$T_i = \lambda_i \frac{M_g}{d_b} \quad (\text{IV-55})$$

avec  $\lambda_o$  et  $\lambda_i$  des coefficients de proportionnalité sans dimension.

En utilisant les équations (IV-48), (IV-54) et (IV-55), on peut écrire :

$$\frac{d_b}{2} T_o + \frac{d_b}{2} T_i = -M_g \quad (\text{IV-56})$$

pour finalement obtenir la relation :

$$\lambda_o + \lambda_i = 2 \quad (\text{IV-57})$$

L'hypothèse du contrôle par la bague extérieure (outer race control) qui a été utilisée pour le calcul des vitesses de rotation implique que le moment gyroscopique est alors compensé uniquement par la bague extérieure. Cela impose ici d'écrire  $\lambda_o = 2$  et  $\lambda_i = 0$ .

#### IV.2.4.C Résolution des équations de la dynamique

Par substitution de (IV-54) et (IV-55) dans les équations (IV-46) et (IV-47), on obtient :

$$Q_o = \frac{F_p}{Z \sin \alpha_o} - 2 \frac{M_g \cos \alpha_o}{d_b \sin \alpha_o} \quad (\text{IV-58})$$

$$Q_i = \frac{F_p}{Z \sin \alpha_i} \quad (\text{IV-59})$$

En substituant à présent ces équations dans l'expression (IV-45), il s'ensuit :

$$\frac{F_p}{Z \tan \alpha_o} - \frac{F_p}{Z \tan \alpha_i} + \frac{2}{\sin \alpha_o} \frac{M_g}{d_b} = F_c \quad (\text{IV-60})$$

En divisant par  $F_p$  et en remplaçant  $\frac{M_g}{d_b F_c}$  par son expression donnée par l'équation (IV-53), l'équation implicite précédente se simplifie pour obtenir :

$$\frac{1}{\tan \alpha_o} - \frac{1}{\tan \alpha_i} = \frac{7 Z F_c}{5 F_p} \quad (\text{IV-61})$$

Cette équation contient encore dans son terme de droite une fonction des deux angles de contact, à travers l'expression de la force centrifuge, d'où :

$$\frac{1}{\tan \alpha_o} - \frac{1}{\tan \alpha_i} = \frac{7 Z}{5 F_p} m_b \frac{d_m}{2} \Omega^2 \left( \frac{1 - d_b/d_m \cos \alpha_i}{1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o)} \right)^2 \quad (\text{IV-62})$$

Cela constitue la première équation permettant la résolution du problème des angles de contact.

Une deuxième équation est donnée par l'hypothèse d'une charge purement axiale, qui implique, lorsque la vitesse varie, un déplacement du centre de courbure  $C_{ip}$  uniquement selon l'axe  $\vec{Y}$ . Les projections sur les axes  $\vec{Y}$  et  $\vec{Z}$  de la relation de Chasle  $\overrightarrow{C_{ip}G} + \overrightarrow{GC_{op}} = \overrightarrow{C_{ip}C_{op}}$  donnent :

$$(a_o + \delta_o) \cos \alpha_o + (a_i + \delta_i) \cos \alpha_i = (a_o + a_i) \cos \alpha_f \quad (\text{IV-63})$$

$$(a_o + \delta_o) \sin \alpha_o + (a_i + \delta_i) \sin \alpha_i = (a_o + a_i) \sin \alpha_f + \delta_a \quad (\text{IV-64})$$

où  $\delta_a$  est le déplacement relatif du point  $C_{ip}$  par rapport au point  $C_{op}$  suivant l'axe  $\vec{Y}$  (voir Figure IV-1).

Comme le point  $C_{ip}$  est considéré comme fixe, le déplacement  $\vec{\delta}_a$  correspond à la longueur de  $\overrightarrow{C_{of}C_{op}}$ .

Les montages de roulement à précontrainte rigide, type écrou à encoches et rondelle-frein, imposent au roulement la déformation axiale  $\delta_a$ , qui sera alors la donnée et la force  $F_p$  l'inconnue, ce qui conduirait à utiliser la relation (IV-64).

Dans le cas d'une précharge élastique qui nous intéresse plus particulièrement pour la MRV, puisque c'est la solution technique à adopter pour obtenir les plus hautes vitesses de rotation, la valeur de  $\|\vec{\delta}_a\|$  est une inconnue du problème et la force  $F_p$  est imposée. Il apparaît que la force  $F_p$  augmente la valeur de la déformation  $\delta_a$ . En revanche, l'augmentation de la vitesse de rotation tend à diminuer  $\delta_a$ , et par conséquent, il existe une vitesse qui, à précontrainte fixée, annule la valeur de la déformation  $\delta_a$ . Cet effet est mis en évidence dans les résultats de Harris [41].

Pour la résolution du problème angulaire, l'équation (IV-63), dans laquelle aucune nouvelle inconnue n'apparaît, est utilisée et donne la relation :

$$\alpha_o = \arccos \left( \frac{(a_o + a_i) \cos \alpha_f - (a_i + \delta_i) \cos \alpha_i}{(a_o + \delta_o)} \right) \quad (\text{IV-65})$$

Le système formé par les équations (IV-61) et (IV-65) est alors utilisé pour résoudre le problème des angles de contact dynamiques. Les résultats de références pour le calcul de l'erreur sont ceux donnés par la résolution numérique du système d'équations (IV-62) et (IV-63).

Pour le calcul des angles de contact, les phénomènes de cinématique complexes, qui entrent en jeu, imposent d'avoir recours à des méthodes numériques pour obtenir la solution, comme le montrent les travaux de Harris [41], Nelias [71] ou Liao et Lin [72].

#### IV.2.4.D Résolution explicite des équations pour le calcul des angles

Nous allons maintenant chercher une méthode de résolution des équations (IV-61) et (IV-65) si possible littérale et explicite.

Le calcul explicite des dérivées première et seconde permet une résolution semi-analytique par un algorithme de Newton-Raphson à pas optimisé.

En effectuant les changements de variables  $X_o = \tan(\alpha_o)$  et  $X_i = \tan(\alpha_i)$ , on obtient le système d'équation suivant :

$$\left( a_o + \frac{F_p}{Z K_o} \frac{(1 + X_o^2)^{1/3}}{X_o^{2/3}} \right) \frac{1}{(1 + X_o^2)^{1/2}} + \left( a_i + \frac{F_p}{Z K_i} \frac{(1 + X_i^2)^{1/3}}{X_i^{2/3}} \right) \frac{1}{(1 + X_i^2)^{1/2}} = (a_o + a_i) \cos \alpha_f \quad (\text{IV-66})$$

$$\frac{1}{X_o} - \frac{1}{X_i} = \frac{7 Z}{5 F_p} m_b \frac{d_m}{2} \Omega^2 \left( \frac{1 - d_b/d_m (1 + X_i^2)^{-1/2}}{1 + (1 + X_o X_i) ((1 + X_i^2) (1 + X_o^2))^{-1/2}} \right)^2 \quad (\text{IV-67})$$

Dans l'équation (IV-67), le terme de droite de l'égalité, qui traduit l'état de charge dynamique du roulement, est une fonction des angles. En supposant, dans un premier temps, l'angle  $\alpha_i$  proche de l'angle  $\alpha_p$  et l'angle  $\alpha_i - \alpha_o$  proche de zéro, on obtient une première approximation du terme  $Z F_c/F_p$ , notée  $D$  :

$$D = \frac{7 Z}{5 F_p} m_b \frac{d_m}{2} \Omega^2 \left( \frac{1 - \frac{d_b}{d_m} \cos \alpha_p}{2} \right)^2 \quad (\text{IV-68})$$

On obtient alors une approximation de  $X_o$  à partir de l'équation (IV-67) en substituant le terme de droite par  $D$  :

$$X_o = \frac{X_i}{1 + D X_i} \quad (\text{IV-69})$$

A partir de l'équation (IV-66), nous définissons une fonction d'erreur  $Err(X_i)$  :

$$Err(X_i) = \left( a_o + \frac{F_p}{Z K_o} \frac{(1 + X_o^2)^{1/3}}{X_o^{2/3}} \right) \frac{1}{(1 + X_o^2)^{1/2}} + \left( a_i + \frac{F_p}{Z K_i} \frac{(1 + X_i^2)^{1/3}}{X_i^{2/3}} \right) \frac{1}{(1 + X_i^2)^{1/2}} - (a_o + a_i) \cos \alpha_f \quad (\text{IV-70})$$

La dérivée de cette fonction par rapport à  $X_i$  est :

$$\frac{d Err}{d X_i} = \frac{\partial Err}{\partial X_i} + \frac{\partial Err}{\partial X_o} \frac{\partial X_o}{\partial X_i} \quad (\text{IV-71})$$

avec :

$$\frac{\partial Err(X_k)}{\partial X_k} = \frac{2 \left( a_k (1 + X_k^2)^{2/3} + \frac{F_p}{Z K_k} X_k^{4/3} \right)}{3 X_k (1 + X_k^2)^{7/6}} - \frac{(5 X_k^2 + 2) \left( a_k X_k^{2/3} + \frac{F_p}{Z K_k} (1 + X_k^2)^{1/3} \right)}{3 X_k^{5/3} (1 + X_k^2)^{3/2}} \quad (\text{IV-72})$$

où  $k$  désigne les indices  $i$  ou  $o$ . On a également :

$$\frac{d X_o}{d X_i} = \frac{1}{(1 + D X_i)^2} \quad (\text{IV-73})$$

Un calcul similaire peut être réalisé pour obtenir la dérivée-seconde de la fonction  $Err(X_i)$ .



Résoudre l'équation (IV-66) revient à avoir  $Err(X_i) = 0$  que nous proposons de résoudre par itération. On note  $j$  le numéro de l'itération courante, la valeur de la variable  $X_i$  lors de l'itération  $j$  est alors notée  $X_{i,j}$ . Pour obtenir la valeur à l'itération  $j+1$ , on pose le développement limité à l'ordre 2 de la fonction  $Err(X_i)$  au point  $X_{i,j}$ , soit :

$$Err(X_{i,j+1}) = Err(X_{i,j}) + \frac{dErr(X_{i,j})}{dX_i} (X_{i,j+1} - X_{i,j}) + \frac{1}{2} \frac{d^2Err(X_{i,j})}{dX_i^2} (X_{i,j+1} - X_{i,j})^2 \quad (IV-74)$$

$Err(X_{i,j+1}) = 0$  donne la solution du polynôme de  $X_{i,j+1} - X_{i,j}$  :

$$X_{i,j+1} - X_{i,j} = \left( -\frac{\frac{dErr(X_{i,j})}{dX_i}}{\frac{d^2Err(X_{i,j})}{dX_i^2}} + \frac{\frac{dErr(X_{i,j})}{dX_i}}{\frac{d^2Err(X_{i,j})}{dX_i^2}} \sqrt{1 - 2 \frac{d^2Err(X_{i,j})}{dX_i^2} \frac{Err(X_{i,j})}{\left(\frac{dErr(X_{i,j})}{dX_i}\right)^2}} \right) \quad (IV-75)$$

qui, en utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction racine-carrée, donne la formule :

$$X_{i,j+1} = X_{i,j} - \frac{Err(X_{i,j})}{\frac{dErr(X_{i,j})}{dX_i}} \left( 1 + \frac{\frac{d^2Err(X_{i,j})}{dX_i^2}}{\frac{dErr(X_{i,j})}{dX_i}} \frac{Err(X_{i,j})}{\frac{dErr(X_{i,j})}{dX_i}} \right) \quad (IV-76)$$

Cette formule permet de réaliser un calcul avec un pas optimisé tenant compte de la courbure de la fonction pour obtenir le résultat plus rapidement.

A partir de la valeur  $X_{i,j+1}$ , on calcule la valeur  $X_{o,j+1}$  par la formule (IV-69). Ces deux valeurs permettent de réinitialiser le terme  $D$  avant initier une nouvelle itération.

Si à l'itération  $N$  la précision est satisfaisante, les angles de contact sont donnés par :

$$\alpha_i = \arctan X_{i,N} \quad (IV-77)$$

$$\alpha_o = \arctan X_{o,N} \quad (IV-78)$$

Par la suite, les résultats obtenus par cette méthode approchée vont être comparés à ceux fournis par une résolution numérique exacte des équations.

## IV.2.5 Applications numériques du modèle explicite - comparaison avec la résolution numérique

Nous allons illustrer les résultats obtenus par le modèle explicite précédent à travers deux exemples précis de roulements.

### IV.2.5.A Roulement à billes à contact oblique type 218

On a choisi pour l'étude un roulement à billes à contact oblique du type 218 (série ISO 02). Ce roulement conventionnel est équipé d'une cage et de billes en acier. Ses caractéristiques dimensionnelles sont données par  $d_b = 22,23$  mm,  $d_m = 125,26$  mm,  $R_i = R_o = 11,63$  mm,  $\alpha_f = 40^\circ$  et  $Z = 16$  billes [41].

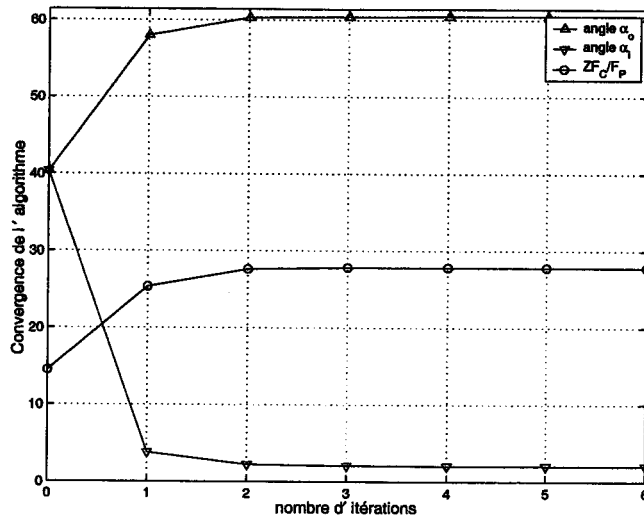


FIG. IV-8 – Convergence de l'algorithme (angles et terme  $ZF_c/F_p$ ) en fonction du nombre d'itérations réalisées (roulement à billes à contact oblique de type 218 -  $F_p=2\ 000\ N$  et  $\Omega=15\ 000\ tr/min$ ).

	itération							valeur exacte
	0	1	2	3	4	5	6	
$\alpha_i$	40,36	57,95	60,26	60,41	60,4269	60,4279	60,4280	<b>60,4280</b>
err. sur $\alpha_i$ (%)	-33	-4,1	-0,26	-0,021	$-1,7.10^{-3}$	$-1,4.10^{-4}$	0	
$\alpha_o$	40,36	3,77	2,20	2,03	2,017	2,0162	2,0161	<b>2,0161</b>
err. sur $\alpha_i$ (%)	1902	87	9,57	0,766	0,061	$5.10^{-3}$	$4.10^{-4}$	

TAB. IV-5 – Résultats des 6 premières itérations du calcul des angles de contact dans un roulement type 218 ( $F_p=2\ 000\ N$ ,  $\Omega=15\ 000\ tr/min$ )

Afin de tester la convergence de l'algorithme proposé au IV.2.4.D, on définit les conditions de fonctionnement pour  $F_p = 2\ 000\ N$  et  $\Omega = 15\ 000\ tr/min$ . Les angles de contact sont alors fortement modifiés.

La figure IV-8 présente la convergence de l'algorithme en fonction du nombre d'itérations réalisées.

On remarque la convergence très rapide de l'algorithme, conformément aux propriétés d'un algorithme de Newton-Raphson. Il faut cependant attendre la 2<sup>ème</sup> itération pour que le terme  $ZF_c/F_p$  ait convergé vers sa valeur exacte. Cela provient de la forte variation de l'angle  $\alpha_i$  et de la différence  $\alpha_i - \alpha_o$ . Un fois ce terme bien évalué, l'algorithme converge en quelques itérations.

Le tableau IV-5 présente les résultats de la figure précédente sous forme numérique. L'erreur relative à chaque itération est également donnée pour les deux angles intérieur et extérieur par rapport au résultat exact. La résolution numérique exacte du système d'équation sera réalisée par la fonction *fminsearch* de *MATLAB*, avec les valeurs d'initialisation  $\alpha_f$  pour les deux angles. L'algorithme de résolution utilisé est la méthode directe du simplex (*Nelder-Mead simplex method*).

Les deux résolutions explicite et numérique donnent le même résultat après convergence. L'erreur devient acceptable dès la deuxième itération. En effet, l'erreur sur l'angle extérieur devient inférieure à 5%. A la deuxième itération, l'angle intérieur est estimé à 0,13% par défaut. L'algorithme est donc

capable de donner très rapidement la valeur exacte des angles.

Dans la suite de ce paragraphe, nous présenterons les résultats obtenus à la troisième itération.

Le tableau IV-6 présente les résultats concernant les mêmes angles pour une précharge élastique appliquée de 17800 N et pour des vitesses de rotation allant de 0 (statique) à 15 000 tr/min.

Vitesse $\Omega$ (tr/min)	angle $\alpha_o$ (degrés)			angle $\alpha_i$ (degrés)		
	Solution Numérique	Modèle	Erreur Relative	Solution Numérique	Modèle	Erreur Relative
statique	41,507	41,507	+0,000%	41,507	41,507	-0,000%
3000	40,671	40,067	+0,000%	42,328	42,328	-0,000%
6000	38,060	38,060	+0,000%	44,749	44,749	-0,000%
10000	31,368	31,383	+0,048%	50,055	50,045	+0,021%
15000	19,190	19,474	+1,478%	57,012	56,989	-0,235%

TAB. IV-6 – Angles donnés par la troisième itération pour un roulement à contact oblique de type 218. Comparaison avec la solution exacte, pour différentes vitesses de rotation ( $F_p=17\ 800\ N$ )

L'erreur maximale est commise pour la vitesse de rotation de 15 000 tr/min et vaut de -0,235% pour l'angle de contact extérieur et 1,478% pour l'angle de contact extérieur.

La figure IV-9 montre la variation des angles de contact intérieur et extérieur dans le roulement de type 218 lorsque la précharge évolue et pour différentes vitesses.

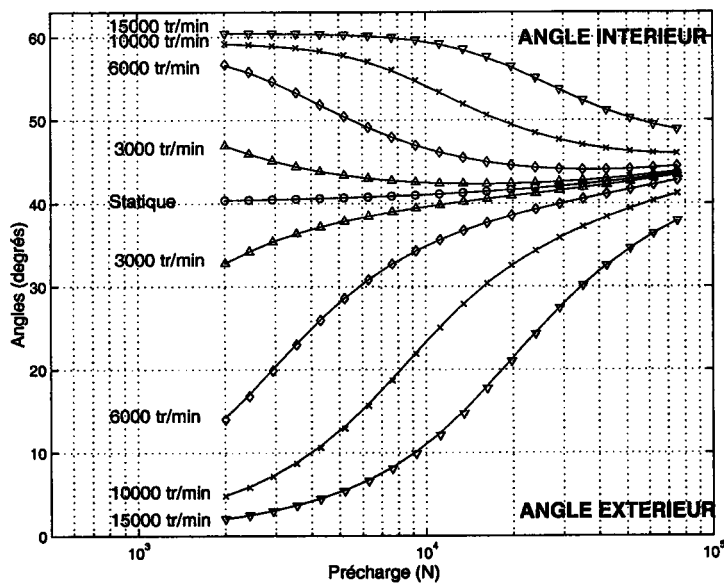


FIG. IV-9 – Angles donnés par la troisième itération (courbes) et le calcul numérique (symboles) en fonction de la force de précontrainte et de la vitesse de rotation dans le cas d'un roulement à billes à contact oblique de type 218.

On observe sur la figure IV-9 une bonne corrélation entre les résultats du modèle (courbes) et les résultats numériques (symboles). L'erreur produite n'est pas décelable sur le graphique. Les tendances de variations sont fidèlement reproduites.

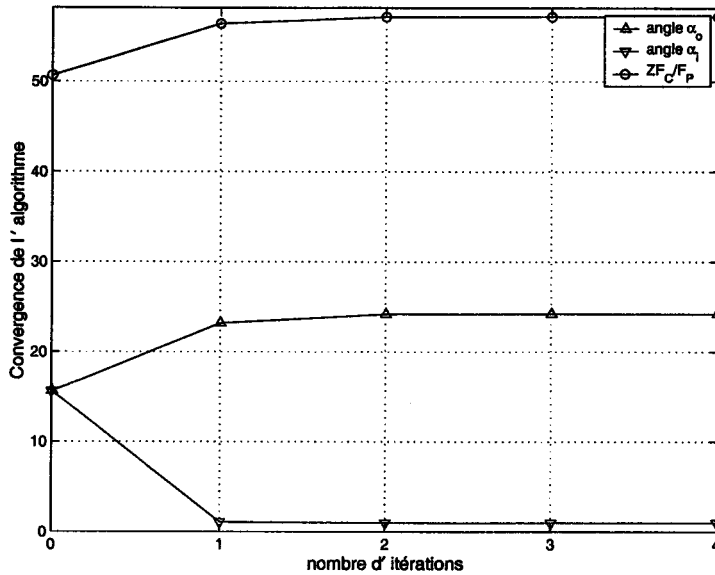


FIG. IV-10 – Convergence de l'algorithme (angles et terme  $ZF_c/F_p$ ) en fonction du nombre d'itérations réalisées (roulement à billes à contact oblique de type VEX 6/NS -  $F_p=4$  N et  $\Omega=200\ 000$  tr/min.

Le modèle donne globalement des résultats d'une précision satisfaisante pour le type de roulement étudié ici.

#### IV.2.5.B Roulement à billes à contact oblique de haute précision SNFA VEX 6/NS

Les roulements de haute précision SNFA VEX 6/NS sont les roulements à billes à contact oblique, qui équipent la machine à réluctance variable du laboratoire. Ces roulements hybrides sont munis de billes céramiques en nitrure de silicium  $Si_3N_4$  (notation /NS) et de bagues en acier à roulements. Les hautes qualités de fabrication permettent à des roulements de petit diamètre d'atteindre des vitesses optimales supérieures à 200 000 tr/min.

Ce roulement hybride est défini par les caractéristiques suivantes  $d_b = 3,17$  mm,  $d_m = 11,5$  mm,  $R_i = R_o = 1,66$  mm,  $\alpha_f = 15^\circ$  et  $Z = 8$  billes.

La figure IV-10 présente la convergence de l'algorithme en fonction du nombre d'itérations réalisées lorsque le roulement est soumis à une force de 4 N et à la vitesse de 200 000 tr/min. .

Comme dans le cas du roulement de type 218, la convergence de l'algorithme est très rapide. La deuxième itération fournit déjà une solution très acceptable.

Le tableau IV-7 présente les résultats de la figure précédente sous forme numérique. L'erreur relative de chacun des itérations est également donnée pour les deux angles intérieur et extérieur par rapport au résultat exact donné par la fonction numérique *fminsearch* du logiciel MATLAB.

L'erreur devient acceptable dès la deuxième itération. L'erreur sur l'angle extérieur est alors de moins de 0,18% par défaut. L'angle intérieur est estimé pour sa part à 0,009% par excès. On peut remarquer que la convergence est encore plus rapide que dans le premier exemple étudié. D'une manière

itération	0	1	2	3	4	exacte
angle intérieur	15,59	23,14	24,15	24,1801	24,1807	24,1807
erreur (%)	-35	-4,28	0,09	$-2,4 \cdot 10^{-3}$	$-6 \cdot 10^{-4}$	
angle extérieur	15,59	1,08	0,97	0,9649	0,9645	0,9645
erreur (%)	1517	12,03	1,294	0,035	-0,0009	

TAB. IV-7 – Résultats des 4 premières itérations du calcul des angles de contact dans un roulement type VEX 6/NS ( $F_p=4\text{ N}$ ,  $\Omega=200\ 000\text{ tr/min}$ )

générale, plus l'angle  $\alpha_f$  est faible, plus l'algorithme converge rapidement.

La figure IV-11 présente les variations des deux angles de contact lorsque la précharge évolue entre 1 et 100 N et pour différentes vitesses de rotation de 0 à 200 000 tr/min.

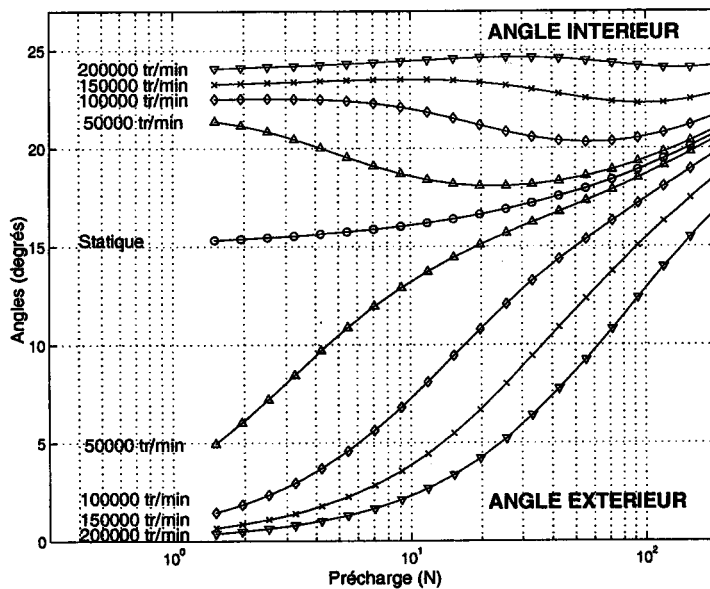


FIG. IV-11 – Angles donnés après 3 itérations de l'algorithme (courbes) comparé aux résultats numériques (symboles) pour diverses vitesses de rotation  $\Omega$  en fonction de la précharge  $F_p$  ( $C=1$ )

Du point de vue de la précision du modèle, on remarque que ce dernier reproduit fidèlement les évolutions des angles. Les tendances de variation sont très bien reproduites dans l'exemple présenté.

Le tableau IV-8 présente les résultats du modèle explicite et de la résolution numérique concernant l'angle de contact  $\alpha_p$  en charge pour le roulement VEX 6/NS soumis à une précharge de 8, 25, 50 ou 100 N.

Le tableau IV-9 présente les résultats obtenus grâce au modèle et les compare à ceux que le calcul numérique fournit, lorsque le roulement tourne à 100 000 tr/min. Les résultats sont donnés pour des valeurs de précontrainte recommandées par le fabricant [31].

Comme dans le cas du roulement 218 précédemment étudié, l'erreur maximale se produit lorsque la précharge est faible. Elle atteint alors  $-0,012\%$  pour l'angle de contact extérieur. Pour des valeurs supérieures de précharge, l'erreur devient négligeable.

Le même roulement à billes est étudié alors qu'il tourne à sa vitesse maximale de 200 000 tr/min.

Précharge Statique	$\alpha_p$		erreur %
	Exact	Modèle	
8 N	15,945	15,947	$5,9 \cdot 10^{-3}\%$
25 N	16,885	16,885	$2,3 \cdot 10^{-3}\%$
50 N	17,797	17,799	$16,4 \cdot 10^{-3}\%$
100 N	19,070	19,068	$-10,4 \cdot 10^{-3}\%$

TAB. IV-8 – Angle de contact statique  $\alpha_p$  dans un roulement à contact oblique hybride donné par le modèle et comparé à la solution numérique.

Précharge $F_p$	angle $\alpha_o$ (degrés)			angle $\alpha_i$ (degrés)		
	Solution Numérique	Modèle	Erreur Relative	Solution Numérique	Modèle	Erreur Relative
8 N	6,187	6,188	-0,0121%	22,198	22,198	-0,0014%
25 N	11,963	11,963	+0,0012%	20,867	20,867	-0,0004%
50 N	14,976	14,976	+0,0001%	20,319	20,319	-0,0001%
100 N	17,455	17,455	+0,000%	20,586	20,586	-0,0000%

TAB. IV-9 – Angles de contact dynamiques concernant le roulement à billes hybride haute vitesse obtenus à la troisième itération et comparés à la solution numérique pour une vitesse de rotation de 100 000 tr/min

Le tableau IV-10 compare alors les résultats obtenus après 3 itérations de l'algorithme proposé et la solution numérique exacte. On constate que les résultats sont très proches des valeurs fournies par la résolution numérique. A nombre d'itérations égales, la vitesse tend à augmenter l'erreur qui reste cependant tout à fait acceptable (moins de 0,035%).

Précharge $F_p$	angle $\alpha_o$ (degrés)			angle $\alpha_i$ (degrés)		
	Solution Numérique	Modèle	Erreur Relative	Solution Numérique	Modèle	Erreur Relative
8 N	1,866	1,867	0,035%	24,404	24,403	-0,0026%
25 N	5,135	5,136	0,027%	24,647	24,646	-0,0031%
50 N	8,646	8,647	0,015%	24,520	24,519	-0,0030%
100 N	12,875	12,876	0,004%	24,170	24,169	-0,0014%

TAB. IV-10 – Angles de contact dynamique concernant le roulement à billes hybride haute vitesse obtenus à la troisième itération et comparés à la solution numérique pour une vitesse de rotation de 200 000 tr/min

Pour illustrer l'influence du rapport d'osculation  $C = a_o/a_i$ , le roulement haute vitesse est à nouveau étudié, mais en simulant des chemins de roulement dissymétriques. On prendra alors une vitesse de 200 000 tr/min et une précharge de 8 N.

Les valeurs de C choisies pour illustrer l'exemple sont  $C = 1/4, 1/2, 1, 2, \text{ et } 4$ . Les deux rayons de courbure sont modifiés conjointement pour ajuster la valeur de C recherchée tout en gardant constant  $a_f = a_o + a_i$  (l'angle  $\alpha_p$  reste constant). Les valeurs de  $R_o$  et  $R_i$  sont données dans le tableau IV-11.

<i>C</i>	0,25	0,5	1	2	4
<i>R<sub>o</sub></i>	1,614	1,632	1,661	1,680	1,702
<i>R<sub>i</sub></i>	1,702	1,680	1,661	1,632	1,614

TAB. IV-11 – Valeurs des rayons de courbure pour différentes valeurs du rapport des facteurs d’osculation

Les résultats obtenus pour les angles de contact  $\alpha_i$  et  $\alpha_o$  sont présentés dans le tableau IV-12. A des fins de comparaison, la dernière colonne du tableau présente la valeur de l’angle de contact  $\alpha_p$  dans l’état précontraint (en statique). Les résultats concernant  $\alpha_p$  sont ceux donnés par la résolution numérique. Les faibles variations de l’angle de contact  $\alpha_p$  est la conséquence des modifications des raideurs de contact avec la courbure des pistes.

<i>C</i>	angle $\alpha_o$ (degrés)			angle $\alpha_i$ (degrés)			$\alpha_p$ Solution (Num.)
	Solution Numérique	Modèle	Erreur Relative	Solution Numérique	Modèle	Erreur Relative	
1/4	1,925	1,925	0,002%	18,988	18,988	-0,000%	15,916
1/2	1,909	1,909	0,007%	20,971	20,971	-0,001%	15,939
1	1,866	1,867	0,034%	24,404	24,403	-0,003%	15,946
2	1,757	1,762	0,226%	30,196	30,191	-0,019%	15,935
4	1,513	1,538	1,638%	39,821	39,760	-0,151%	15,909

TAB. IV-12 – Angles donnés par le modèle explicite comparé aux résultats numériques en fonction du rapport d’osculation  $C = a_o/a_i$  ( $\Omega=200\ 000$  tr/min,  $F_p=8$  N)

L’erreur maximale dans cet exemple atteint 1,53% lorsque  $a_o \gg a_i$  ( $C=4$ ) avec la valeur de précharge que l’on a choisie. Dans l’ensemble, les résultats obtenus après 3 itérations sont acceptables. Le modèle décrit donc convenablement le comportement de roulements à pistes dissymétriques.

La figure IV-12 présente les variations des angles avec la vitesse pour le roulement SNFA VEX 6/NS soumis à une précharge de 8 N, pour différentes valeurs du rapport  $C = a_o/a_i$ . Les variations des angles associées à la valeur  $C = 1$  sont tracés avec des symboles ronds, qui permettent de guider la lecture du graphique.

L’influence du rapport  $C = a_o/a_i$  est beaucoup plus marquée en ce qui concerne l’angle intérieur que pour l’angle extérieur. Compte-tenu du fait, que l’angle  $\alpha_i$  est déterminant dans la rigidité (voir paragraphe IV.3), des valeurs de  $C$  inférieure à 1 sont préférables pour limiter les fluctuations des termes de rigidité avec la vitesse de rotation. Il convient cependant de tempérer ces propos, puisque la pression au contact extérieur augmente lorsque  $C$  diminue (variation de la force normale en  $1/\sin(\alpha_i)$ ).

#### IV.2.6 Représentation en schéma-bloc du modèle des angles de contact dans le roulement

Nous pouvons à présent définir le schéma bloc du modèle obtenu. Le modèle est présenté sur la figure IV-13. Le modèle fournit en sortie les angles de contacts intérieur et extérieur. Le système a pour entrée la géométrie et les propriétés des matériaux du roulement. Le modèle a également en

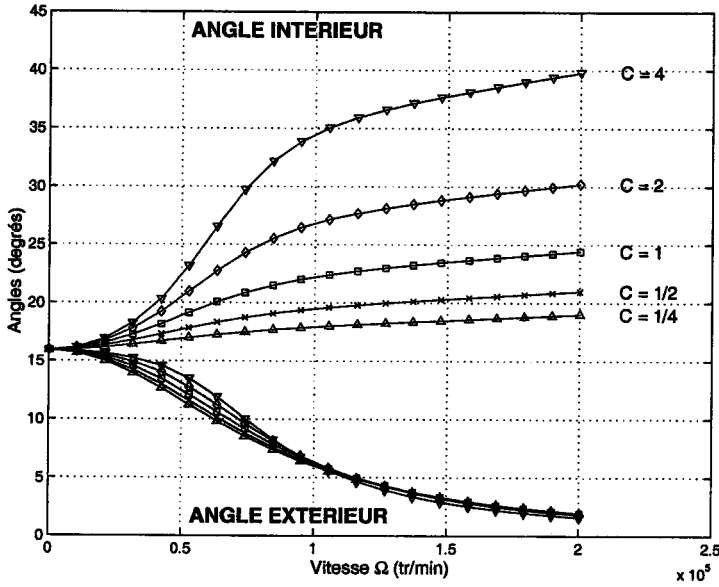


FIG. IV-12 – Angles donnés après 3 itérations de l’algorithme (courbes) comparés aux résultats numériques (symboles) pour différentes valeurs du rapport d’osculation  $C = a_o/a_i$  en fonction de la vitesse de rotation ( $F_p = 8 N$ )

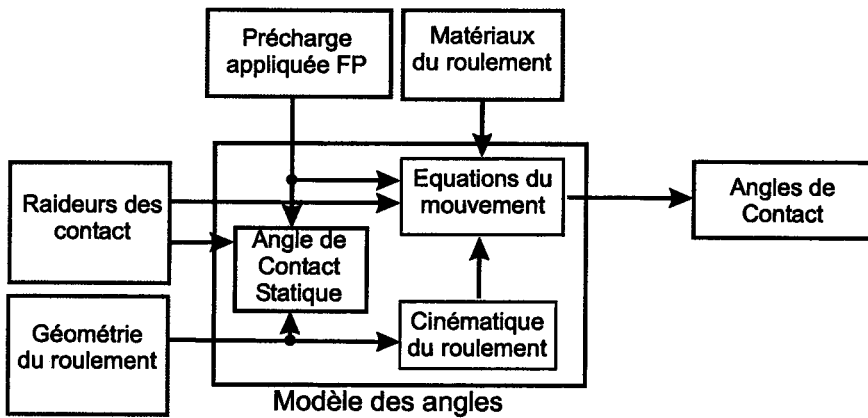


FIG. IV-13 – Modèle des angles de contact sous forme de schéma-bloc



entrée la précharge et les angles de contacts (qui font implicitement intervenir la vitesse)

#### IV.2.7 Conclusion

Dans cette partie, nous avons modélisé la cinématique du roulement à billes à contact oblique. Après avoir établi les équations, nous avons proposé une méthode explicite de type itérative de résolution du problème, que nous avons alors confronté à la résolution numérique exacte des équations. Deux exemples de roulements ont été étudiés afin d'illustrer les résultats et la pertinence de la méthode proposée.

Les résultats obtenus sont très proches de la valeur exacte dès la troisième itération et la convergence est rapide.

En comparaison avec la complexité du problème initial, le modèle présenté est une alternative intéressante à la résolution numérique. Il permet de calculer explicitement les angles de contact et leur évolution.

Les autres grandeurs liées aux angles, comme les pressions de contact, la rigidité du roulement et le couple de frottement dans le roulement vont alors pouvoir être évaluées.

## IV.3 Modélisation du contact entre deux solides élastiques

### IV.3.1 Introduction

La rigidité d'un roulement à billes est non seulement fonction des angles de contact mais également des rigidités des contacts. Nous avons donc besoin de connaître la relation entre les forces de contact et la déformation des solides qui en résulte.

En ce qui concerne les forces de contacts et la modélisation des déformations, plusieurs études existent à commencer par la théorie de Hertz [69] du contact entre solides et les théories des contacts elliptiques. L'utilisation dans ces modèles d'intégrales elliptiques augmente la complexité mathématique et rend la résolution analytique impossible. Alors que Brewe et Hamrock [73], Greenwood *et al.*[74] ont travaillé sur la simplification du modèle de contact dans le cas d'un contact faiblement elliptique, Houpert a présenté un modèle simplifié pour la loi de comportement de la bille, dans le cadre d'une étude analytique sur la répartition des efforts dans un roulement chargé indéfiniment [2].

Dans un premier temps, nous allons décrire la théorie de Hertz proprement dite. Ensuite un modèle analytique approché visant à éviter les méthodes numériques de résolution habituellement utilisées. Ce modèle sera enfin confronté aux résultats fournis par la résolution exacte des équations de la théorie.

### IV.3.2 Théorie du Contact de Hertz

Dans cette partie, qui présente une démarche classique et générale de calcul des efforts, des déformation ou encore des aires de contact entre deux solides élastiques, nous allons d'abord rappeler succinctement le modèle de contact de Hertz pour deux solides élastiques en contact, pour ensuite proposer un modèle simplifié et explicite permettant de ne pas avoir recours aux classiques tables de valeurs.

#### IV.3.2.A Présentation de la théorie

En 1881, H. Hertz pose l'hypothèse que l'effort s'applique sur une petite surface de contact due aux déformations locales, plutôt qu'un point ou une ligne de contact, évitant ainsi l'apparition dans les calculs de contraintes infinies. Cette méthode, connue sous le nom de "théorie du contact de Hertz", est fréquemment utilisée.

Elle permet d'obtenir les relations entre les forces de contact existant entre 2 solides en contact et les déplacements relatifs de leur centres respectifs. Les lois de comportement des contacts présentées dans ce rapport utiliseront ce modèle [69].

Une brève revue des hypothèses et de la théorie proprement dite est présentée en annexe C.

La théorie a pour objectif de trouver la relation entre les courbures  $\rho$  des solides en contact et la forme de la surface de contact. La forme des solides est représentée par un paramètre  $F(\rho)$ . La surface de contact (ellipse) est représentée par son ellipticité  $\kappa$ . La relation entre ces deux paramètres est une

équation transcendante.

#### IV.3.2.B Méthodes numériques pour la résolution des problèmes de contact

La méthode la plus classique est celle qui consiste à utiliser des tables numériques, qui regroupent les différentes solutions des équations et des intégrales elliptiques complètes et donne implicitement la relation entre  $\kappa$  et  $F(\rho)$  (voir tableau C-1 en annexe C).

Les lois de comportement d'un contact sont alors obtenues en exploitant la formule (C-8). On obtient la loi de comportement (ou relation force-déplacement) du contact qui est de la forme :

$$Q = k \delta^{3/2} \quad (\text{IV-79})$$

$k$  est appelé module d'élasticité du contact [70] ou encore facteur géométrique du contact hertzien [2]. Il ne dépend que de la morphologie des surfaces en contact et des matériaux en présence et est donné en  $N.m^{-3/2}$ . La formule (C-8) donne alors son expression :

$$k = \frac{2\sqrt{2} E^*}{(\Sigma\rho)^{1/2}(\delta^*)^{3/2}} \quad (\text{IV-80})$$

Pour obtenir l'expression des modules élastiques, il faut donc connaître la valeur de  $\delta^*$  qui n'est pas accessible explicitement puisque les intégrales elliptiques n'ont pas de solutions explicites. Cependant, il est possible de calculer une valeur approchée de la solution et d'obtenir ainsi un modèle explicite.

#### IV.3.2.C Méthodes approchées pour la résolution des problèmes de contact

Les valeurs des modules élastiques  $k_o$  et  $k_i$  ont été approchées par L. Houpert [2] et peuvent être calculées comme suit :

$$k_i = a_0 \left( \frac{\mathcal{R}_{1i}}{\mathcal{R}_{2i}} \right)^{a_1} \mathcal{R}_{2i}^{0.5} E_i^* \quad (\text{IV-81})$$

$$k_o = a_0 \left( \frac{\mathcal{R}_{1o}}{\mathcal{R}_{2o}} \right)^{a_2} \mathcal{R}_{2o}^{0.5} E_o^* \quad (\text{IV-82})$$

Les rayons de courbure réduits  $\mathcal{R}$  ont pour définition dans le cas des roulements à contact oblique :

$$\mathcal{R}_{1i} = \left( \frac{2}{d_b} - \frac{1}{R_i} \right)^{-1} \quad (\text{IV-83})$$

$$\mathcal{R}_{2i} = \left( \frac{2}{d_b} + \frac{2 \cos \alpha_i}{d_m - d_b \cos \alpha_i} \right)^{-1} \quad (\text{IV-84})$$

$$\mathcal{R}_{1o} = \left( \frac{2}{d_b} - \frac{1}{R_o} \right)^{-1} \quad (\text{IV-85})$$

$$\mathcal{R}_{2o} = \left( \frac{2}{d_b} - \frac{2 \cos \alpha_o}{d_m + d_b \cos \alpha_o} \right)^{-1} \quad (\text{IV-86})$$

Les coefficients  $a_0$  et  $a_1$  sont donnés par Houpert en fonction du rapport des courbures équivalentes  $\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_2$  des surfaces en contact comme présenté dans le tableau IV-13.

$\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2$	$a_0$	$a_1$
de 1 à 4	0.6669	0.2625
de 4 à 100	0.5673	0.3450
de 100 à 13000	0.4472	0.4110

TAB. IV-13 – coefficients pour la loi de comportement de Houpert [2].

Cette formule approchée, présentée dans le cadre d'une étude sur la répartition des efforts dans un roulement à billes, donne des résultats satisfaisants.

D'autres études sur les contacts faiblement elliptiques ont été comparées par Greenwood [74], mais ne sont pas adaptées au cas des roulements à billes. En effet, les modèles ne sont proposés que pour des valeurs du rapport  $\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2$  inférieures à 20, or les roulements présentent des surfaces de contact avec un rapport de rayons équivalents compris entre 4 et 100 [2]. Cela représente des valeurs de  $F(\rho)$  comprises entre 0,6 et 0,98. Les différents exemples de roulements présentés par Harris [41] donnent des valeurs de  $\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2$  comprises entre 26 et 32 environ pour le contact intérieur et entre 19 et 22 pour le contact extérieur.

Dans l'optique de connaître avec précision, non seulement les modules d'élasticité, mais aussi les valeurs des semi-axes et de la pression de Hertz, il est nécessaire d'obtenir des modèles, valables dans le cas des roulements à billes, permettant d'atteindre ce but sans recourir aux méthodes numériques.

### IV.3.3 Modèle approché de contact Hertzien

Nous allons dans un premier temps chercher une relation approchée donnant directement l'ellipticité  $\kappa$  en fonction du paramètre  $F(\rho)$ .

#### IV.3.3.A Calcul du paramètre d'ellipticité $\kappa$

La première étape consiste à résoudre, pour de nombreuses valeurs de  $F(\rho)$  comprises entre 0 et 1, l'équation (C-1) et de tracer la fonction  $\kappa = f(F(\rho))$ . L'étude essentiellement graphique de la fonction obtenue, de sa forme et de ses valeurs particulières a permis d'opter pour une fonction du type :

$$\kappa = 1 - \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1} \left( 1 - F(\rho)^{\mu_2 + \mu_3 F^{\mu_4}(\rho)} \right)^{-\mu_5} \quad (\text{IV-87})$$

comme solution de l'équation implicite. Le choix s'est d'abord porté sur une fonction dont les coefficients  $\mu_2$  et  $\mu_4$  valaient respectivement 1 et 0. Le modèle était alors précis à 1%. Le choix de la fonction finale a permis d'améliorer sensiblement la précision.

La fonction (IV-87) a pour valeurs 1 et  $+\infty$  lorsque  $F(\rho)$  vaut respectivement 0 et 1.

La fonction est ensuite optimisée au sens des moindres carrés, à l'aide de la fonction *fminsearch* de MATLAB.

Les valeurs optimales trouvées pour les coefficients  $\mu_1$  à  $\mu_5$  sont données dans le tableau IV-14.

$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$
0,38357	1,03985	0,21733	1,93105	0,54796

TAB. IV-14 – Coefficients de la relation IV-87.

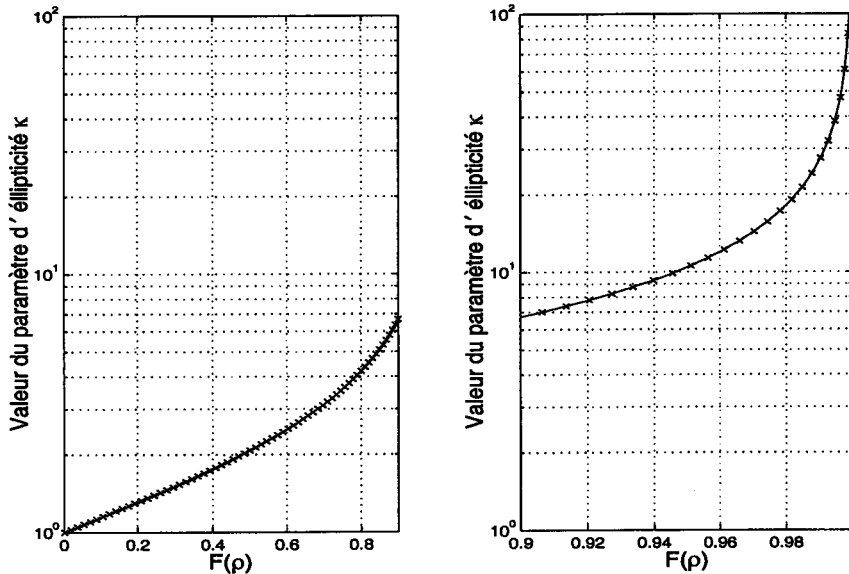


FIG. IV-14 – Valeurs du paramètre d'excentricité  $\kappa$  donné par le modèle approché (courbe) et par l'équation implicite (symboles), en fonction du paramètre géométrique  $F(\rho)$ . à gauche : pour  $F(\rho)$  compris entre 0 et 0,9, à droite : pour  $F(\rho)$  compris entre 0,9 et 1.

Afin d'illustrer les résultats donnés par cette formulation approchée de  $\kappa$ , la figure IV-14 présente les résultats et les erreurs en fonction de  $F(\rho)$ .

La figure montre que les résultats donnés par le modèle (équation (IV-87)), concordent avec les valeurs exactes fournies par la résolution numérique de l'équation implicite (C-1). Harris avait, par sa part, tracé les résultats de la théorie de Hertz sur 3 graphiques, avec dilatation de l'échelle [41]. Il est possible, comme suggéré dans les travaux de Deeg [75], d'opérer un changement de variable, en utilisant une autre variable  $\Omega$ , telle que  $\Omega = \arccos F(\rho)$  et d'obtenir ainsi une distorsion de l'axe des abscisses favorable à la précision des tracés.

Concernant la précision des résultats obtenus, le modèle fournit des valeurs de  $\kappa$  qui approchent à moins de 0,35% près la valeur exacte. L'erreur maximale avoisine 0.35% lorsque le paramètre  $F(\rho)$  vaut 0,08, valeur qui n'est jamais atteinte dans des roulements à billes. Classiquement,  $F(\rho)$  est compris dans la fourchette 0.9 (contact elliptique) et 0,99 (contact fortement elliptique).

#### IV.3.3.B Calcul approché des intégrales elliptiques complètes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$

Après le calcul approché de  $\kappa$ , la difficulté restant alors à surmonter est le calcul des intégrales elliptiques qui n'a pas de solution explicite. Le modèle approché n'a d'utilité que s'il permet une résolution explicite du problème de contact, condition par conséquent astreinte à l'obtention d'une

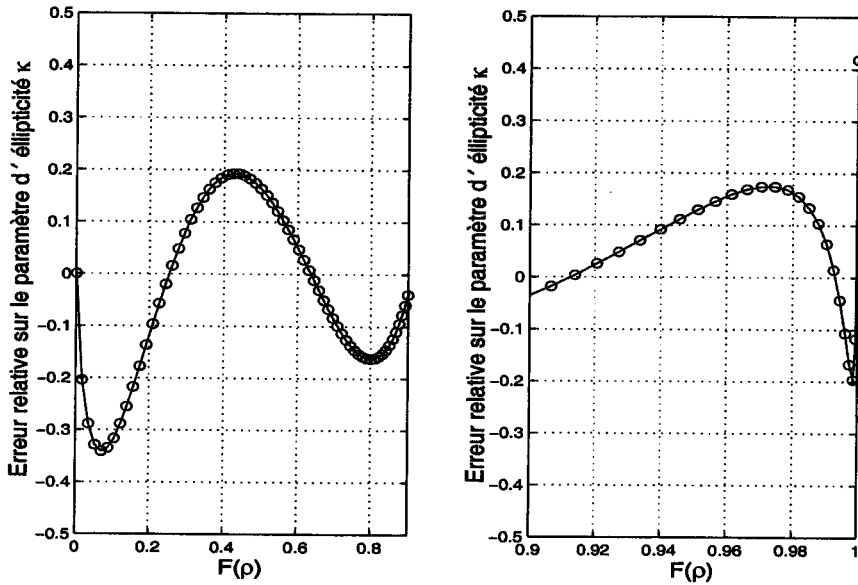


FIG. IV-15 – Erreur en % du modèle approché sur la valeur du paramètre d'ellipticité, en fonction du paramètre géométrique  $F(\rho)$ . à gauche : pour  $F(\rho)$  compris entre 0 et 0,9, à droite : pour  $F(\rho)$  compris entre 0,9 et 1.

formule explicite pour les intégrales elliptiques de premier et second type.

La méthode appliquée est semblable à la précédente, à savoir un calcul complet des valeurs numériques exactes des intégrales elliptiques complètes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{E}$  pour toutes les valeurs envisageables d'ellipticité  $\kappa$  prises entre 1 et 1000. Puis à l'aide d'un outil de régression polynomiale et par des tracés de la fonction avec des changement de variables, l'expression approchée des intégrales elliptiques a été obtenue avec, pour point de départ les formules proposées par Brewe et Hamrock [73] ou Johnson [76], et les travaux de Deeg sur les algorithmes de calcul [75]. Brewe et Hamrock ont proposé les formules suivantes, en ce qui concerne la solution de l'équation implicite et la valeur de l'intégrale elliptique complète du deuxième ordre  $\mathcal{E}$  [73], pour les contacts moyennement elliptiques mais non circulaires.

$$\kappa \approx 1.0339 \tan^2 \frac{\Omega}{2} = 1.0339 \left( \frac{1 + F(\rho)}{1 - F(\rho)} \right)^{0.636} \quad (\text{IV-88})$$

$$\mathcal{E}(\kappa) \approx 1.0003 + 0.5968 \cdot \left( \frac{1.0339}{\kappa} \right)^{1.572} \quad (\text{IV-89})$$

Puis dans des travaux plus récents [77], ces mêmes auteurs ont modifié le modèle afin de l'étendre au cas particulier du contact circulaire.

$$\kappa \approx \left( \frac{1 + F(\rho)}{1 - F(\rho)} \right)^{2/\pi} \quad (\text{IV-90})$$

$$\mathcal{E}(\kappa) \approx 1 + \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{k\pi/2} \quad (\text{IV-91})$$

La formule de R. Maertens, appelée aussi formule "YNOT" (Why not),  $(a^y + b^y)^{1/y}$ , probablement inspirée de la formule approchée d'Euler de 1773 pour le calcul du périmètre d'une ellipse  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,

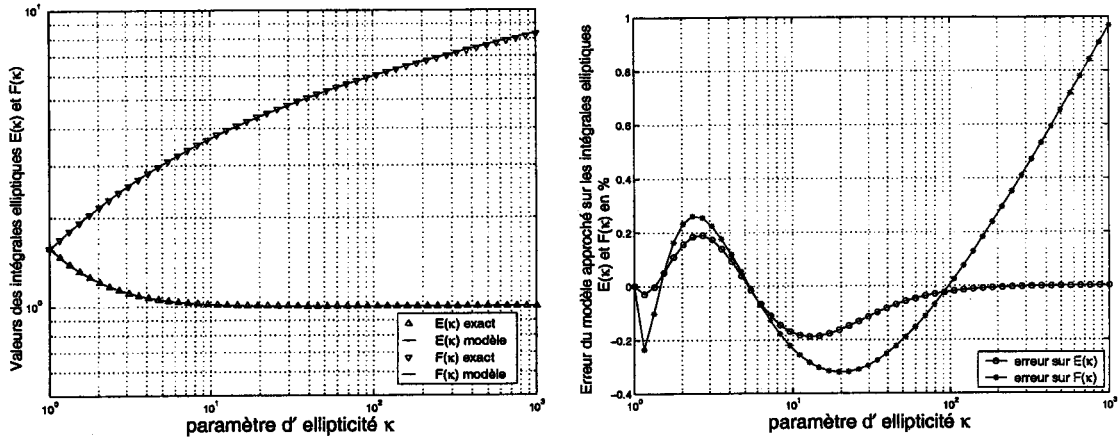


FIG. IV-16 – à gauche : Valeurs des intégrales elliptiques complètes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{E}$  donnés par le modèle (courbe) et la solution numérique exacte (symboles) en fonction de la valeur du paramètre d'ellipticité  $\kappa$ .  
 à droite : Erreur relative sur les intégrales elliptiques complètes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{E}$  entre les valeurs du modèle et la solution numérique exacte en fonction de la valeur du paramètre d'ellipticité  $\kappa$ .

permet d'écrire une autre expression [78] :

$$\mathcal{E}(\kappa) = (1 + \kappa^y)^{1/y} \tag{IV-92}$$

avec la constante  $y = \ln(2)/\ln(\pi/2)$ , donnée par Maertens et calculée pour répondre à la condition aux limites  $\mathcal{E}(\kappa = 1) = \pi/2$ .

Pour notre modèle approché, la forme et les différents paramètres présents dans les formules ont été calculés, pour que les fonctions soient justes lorsque le contact est circulaire, soit pour  $\kappa = 1$ , et pour présenter une erreur minimale jusqu'à un contact fortement elliptique avec  $\kappa = 1\,000$ . Le modèle approché obtenu est le suivant. L'expression de  $\mathcal{E}$  est dérivée de celle de Hamrock et Brewe[77].

$$\mathcal{F}(\kappa) = \frac{\pi}{2} + 0.872 (\log \kappa)^{1.063} \tag{IV-93}$$

$$\mathcal{E}(\kappa) = 1 + \frac{\pi/2 - 1}{\kappa^{4/3} (1 + 0.0421 (\kappa^{4/3} - 1))} \tag{IV-94}$$

La figure IV-16 présente les résultats obtenus pour les intégrales elliptiques complètes  $\mathcal{E}(\kappa)$  et  $\mathcal{F}(\kappa)$ . Les valeurs de  $\kappa$  sont comprises entre 1 et 1 000. Pour des valeurs de  $\kappa$  inférieures à 100, les erreurs commises par le modèle sont en deçà de 0,3%, pour l'intégrale elliptique complète du premier type  $\mathcal{F}$ , et en deçà de 0,2% pour l'intégrale du deuxième type  $\mathcal{E}$ . La majorité des roulements à billes présentant des valeurs de  $\kappa$  inférieure à 100 [2], la légère divergence du modèle (+1%) pour l'intégrale elliptique  $\mathcal{F}$ , observée pour des valeurs de  $\kappa$  proche de 1 000, n'a donc pas trop d'importance. Notons qu'il est délicat, dans ce cas, de parler de contact ponctuel : l'exposant  $n = 3/2$  pourrait tendre vers la valeur de 10/9 du contact linéaire.

A titre de comparaison, la figure IV-17 présente les résultats donnés par le modèle dérivé de la

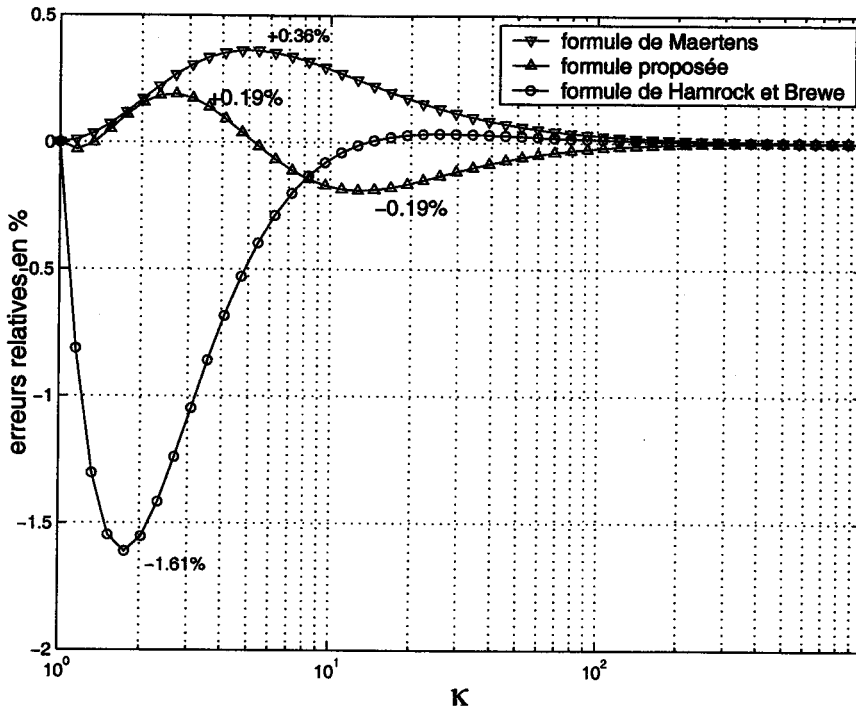


FIG. IV-17 – Comparaison de l'erreur sur la valeur de l'intégrale elliptique complète  $\mathcal{E}$  générées par la formule dérivée de l'expression de Maertens, le modèle proposé et la formule de Hamrock et Brewe en fonction de la valeur du paramètre d'ellipticité  $\kappa$ .

formule de Maertens, avec ceux de notre formulation (modèle proposé) et les résultats de Hamrock et Brewe.

La formule de Maertens (IV-92) donne une légère surestimation, maximum +0.36% de la valeur de l'intégrale du second type et est juste pour les grandes valeurs  $\kappa$  et pour  $\kappa = 1$ . La formule proposée (IV-94) présente une erreur tantôt négative, tantôt positive qui n'excède pas 0,19% en valeur absolue. Elle donne les meilleurs résultats sur la plage  $1 \leq \kappa < 10$ . La formule proposée par Hamrock, exacte pour  $\kappa = 1$ , est la meilleure pour les valeurs de  $\kappa$  comprises entre 10 et 256, mais donne l'erreur la plus grande 1,61% par défaut pour  $\kappa = 1,757$ . Les formules que nous proposons sont donc une bonne alternative au calcul numérique des intégrales elliptiques complètes.

#### IV.3.4 Application du modèle au calcul des caractéristiques du contact Hertzien

Dans cette section, nous allons illustrer les résultats des différents modèles en calculant les grandeurs de la théorie de Hertz, que sont les dimensions de l'ellipse, la déformation et la pression de Hertz.

##### IV.3.4.A Dimensions de l'ellipse de contact

Les expressions des intégrales elliptiques complètes trouvées précédemment vont permettre de calculer explicitement, et pour chacun des contacts, les valeurs des demi-axes  $a$  et  $b$  ( $a > b$ ), de la



déformation  $\delta$  et de la contrainte maximale de contact  $p_0$  par les formules suivantes :

$$a = \left( \frac{3Q}{2\Sigma\rho E^*} \right)^{1/3} \left( \frac{2\kappa^2}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi/2 - 1}{\kappa^{4/3} (1 + 0.0421 (\kappa^{4/3} - 1))} \right) \right)^{1/3} \tag{IV-95}$$

$$b = \left( \frac{3Q}{2\Sigma\rho E^*} \right)^{1/3} \left( \frac{2}{\pi\kappa} \left( 1 + \frac{\pi/2 - 1}{\kappa^{4/3} (1 + 0.0421 (\kappa^{4/3} - 1))} \right) \right)^{1/3} \tag{IV-96}$$

$$\delta = \frac{3Q}{2aE^*} \left( 2 + \frac{0.872}{\pi} (\log \kappa)^{1.063} \right) \tag{IV-97}$$

$$p_0 = \frac{3Q}{2\pi ab} \tag{IV-98}$$

avec  $\kappa$  donné par l'équation (IV-87).

La figure IV-18 présente les résultats donnés par le modèle approché et la solution numérique exacte pour les semi axes et la surface de l'ellipse de contact en fonction du facteur d'osculation  $f = (2r - d_b)/d_b$  allant de  $10^{-3}$  à 1. Dans un roulement à billes à contact oblique, ce facteur est de l'ordre de 0,05 [2]. La solution exacte est calculée à l'aide de l'équation (C-1), de l'expression initiale des intégrales elliptiques complètes et des formules (C-9) à (C-10).

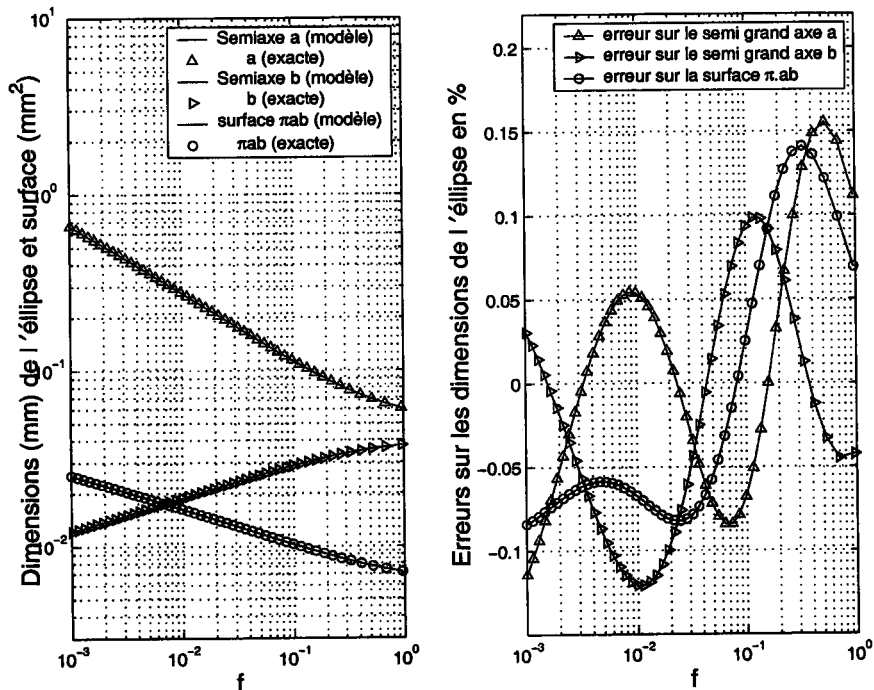


FIG. IV-18 – à gauche : Valeurs du grand demi-axe  $a$ , du petit demi-axe  $b$  et de la surface de l'ellipse de contact données par le modèle (courbe) et la solution numérique exacte (symboles) en fonction du facteur d'osculation  $f = (2r - d_b)/d_b$  ( $10^{-3} < f < 1$ ) pour une force normale de 10 N -  $d_b = 3.17$  mm,  $d_m = 11.5$  mm. à droite : Erreur relative sur les valeurs du grand demi-axe  $a$ , du petit demi-axe  $b$  et de la surface de l'ellipse.

Les courbes fournies par le modèle donnent des valeurs proches des résultats calculés numériquement. Du fait de l'optimisation des coefficients au sens des moindres carrés, l'erreur change de signe plu-

sieurs fois. L'erreur relative sur la valeur des semi-axes reste globalement dans la fourchette  $\pm 0,15\%$ . Pour la surface, cette erreur reste inférieure à  $0,14\%$  en valeur absolue. Dans la zone concernant plus spécifiquement les roulements à billes à contact oblique (soit environ  $0,01 < f < 0,1$ ), l'erreur varie entre  $-0,12\%$  et  $+0,09\%$  pour le semi-axe a, l'erreur varie entre  $-0,08\%$  et  $+0,05\%$  pour le semi-axe b. Pour la surface de l'ellipse, cette erreur reste entre  $-0,08\%$  et  $+0,04\%$ .

#### IV.3.4.B Déformations des contacts

La figure IV-19 présente les erreurs relatives commises sur la valeur de la déformation  $\delta$  ou le rapprochement mutuel des deux centres des solides. Trois modèles sont représentés: le modèle de Greenwood pour les contacts moyennement elliptiques, utilisant une régression de puissance aux abords de  $\kappa = 1$ , le modèle de Houpert précédemment explicité et le modèle approché que nous proposons.

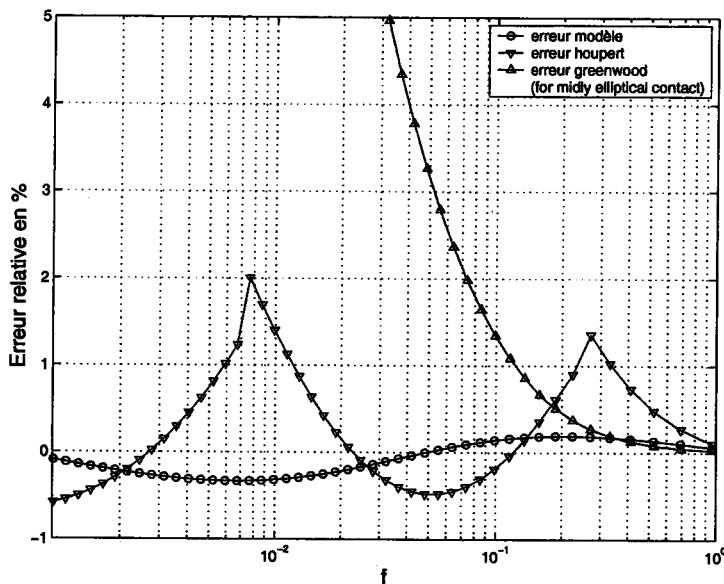


FIG. IV-19 – Comparaison entre les erreurs sur le calcul de la déformation commise par le modèle proposé, le modèle de Houpert et le modèle de Greenwood (pour les contacts faiblement elliptiques) en fonction du facteur d'osculation  $f = (2r - d_b)/d_b$ .

Lorsque l'ellipse de contact est pratiquement circulaire ( $\kappa$  proche de 1), le modèle de Greenwood donne les meilleurs résultats lorsque  $f$  excède 0,3475. Le modèle de Houpert, conçu pour minimiser l'erreur pour différentes plages de valeurs de  $\kappa$ , change par conséquent de signe plus souvent. Il donne la valeur exacte lorsque  $f = 0,0027$ ; 0,0226 et 0,1192. L'erreur est inférieure à 2%, et dans la zone concernant les roulements à contact oblique, l'erreur n'excède pas 0,5% en valeur absolue. Le modèle proposée donne la valeur exacte lorsque  $f = 0,0486$ . Le modèle donne une erreur comprise entre  $-0,333\%$  et  $+0,191\%$  sur toute l'étendue de valeur de  $f$ . Pour la zone des roulements à billes à contact oblique, cette erreur s'échelonne entre  $-0,31\%$  et  $+0,141\%$ .

On peut donc considérer que le modèle permet d'obtenir une bonne solution approchée du problème

de Hertz en terme de déformation dans les roulements.

#### IV.3.4.C Pression de Hertz

La figure IV-20 présente les résultats donnés par le modèle, les valeurs exactes concernant les contraintes de Hertz en GPa et les déformations en  $\mu\text{m}$ , ainsi les erreurs relatives correspondantes. La force de contact est de 10 N.

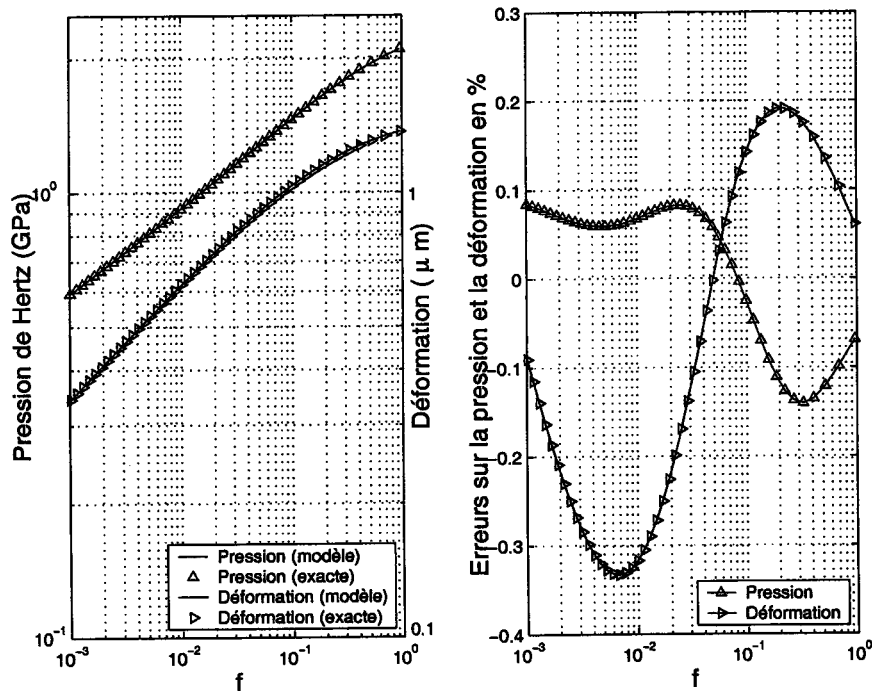


FIG. IV-20 – à gauche : Valeurs de la déformation et de la pression de Hertz au centre de l'ellipse de contact données par le modèle (courbe) et la solution numérique exacte (symboles) en fonction du facteur d'osculation  $f = (2r - d_b)/d_b - F = 10 \text{ N}$   $d_b = 3.17 \text{ mm}$ ,  $d_m = 11.5 \text{ mm}$ .

à droite : Erreur relative sur les valeurs de la déformation et de la contrainte maximale au centre de l'ellipse de contact, entre les valeurs du modèle et la solution numérique exacte, en fonction du facteur d'osculation  $f$ .

La pression maximale de contact, appelée pression de Hertz, est obtenue avec une erreur inférieure à 0,15%. Puisque la pression de Hertz est proportionnelle à l'inverse de la surface de contact, l'erreur sur la pression est pratiquement la même (au signe près) que celle observée lors du calcul de la surface de l'ellipse.

#### IV.3.5 Représentation en schéma-bloc du modèle de Hertz

Nous pouvons à présent définir le schéma bloc du modèle obtenu. Le modèle est présenté sur la figure IV-21.

Le modèle fournit en sortie les raideurs de contacts et la dimensions des ellipses de contact. La pression de contact est également calculée. Le système a pour entrée la géométrie et les propriétés des

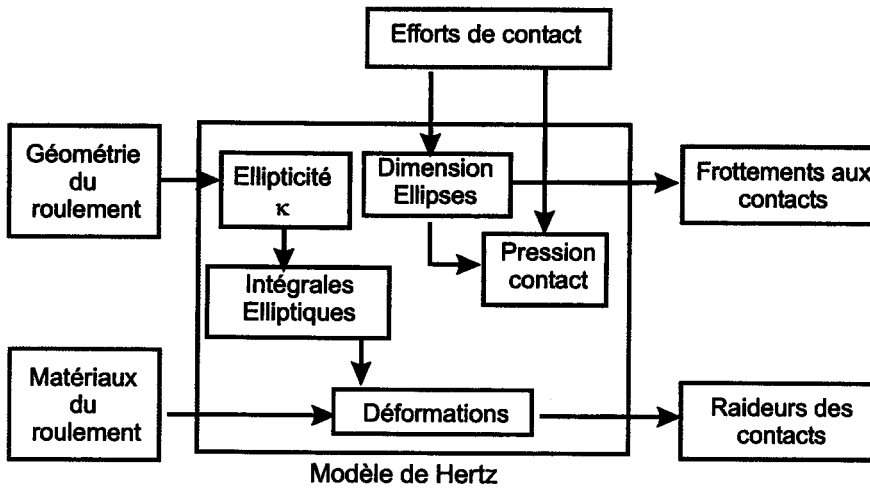


FIG. IV-21 – Schéma-bloc du modèle de Hertz.

matériaux du roulement ainsi que les efforts aux contacts intérieur et extérieur.

#### IV.3.6 Conclusion

L'étude de la théorie de Hertz a été détaillée. Un modèle permettant de trouver la valeur de l'ellipticité de la surface de contact entre une bille et une surface a été proposée. Le résultat exact est approché avec une formulation explicite à moins de 0,3%. Parallèlement, les intégrales elliptiques ont été approchées, afin de s'affranchir totalement du calcul numérique. En utilisant ces résultats, le contact entre une bille et la piste intérieur d'un roulement a été étudié. Les résultats exacts concernant la déformation et la pression de Hertz sont obtenus respectivement à moins de 0,35% et 0,15% près.

Ce modèle approché permet donc d'avoir une bonne estimation des grandeurs caractéristiques des contacts dans un roulement à billes. Ces résultats sont utilisées pour le calcul de la rigidité d'un roulement à billes.

## IV.4 Étude de la rigidité de roulement à billes utilisés à grande vitesse

La rigidité des roulements à billes, qui supportent le rotor, joue un rôle déterminant dans le comportement dynamique global du rotor. La connaissance précise des relations forces-déplacements dans un roulement passe par l'étude approfondie des efforts internes. Cette relation est caractérisée par une matrice de rigidité. Pour obtenir la matrice de rigidité du roulement à billes, les méthodes habituelles utilisent la sommation des efforts de contact sur les  $Z$  billes du roulement pour obtenir la réaction du roulement associée à un déplacement [79, 71, 80, 72].

La force associée à un déplacement est une somme de termes non linéaires, qui traduisent chacun la loi du contact de chaque bille. Des calculs analytiques ont été menés pour remplacer cette sommation discrète des efforts par la somme continue de fonctions de répartition. Cela conduit à l'utilisation des intégrales elliptiques de Sjövall  $J_a$  et  $J_r$  [81], qui n'ont pas plus d'expression analytique, que celles utilisées dans la théorie de Hertz. Dans ces intégrales, la possibilité d'efforts de contact négatifs ( $f(\epsilon) \leq 0$ ) est empêchée par l'emploi de la fonction  $\max(0, f(\epsilon))$  [82], ce qui s'apparente à des bornes d'intégration fonction de  $\epsilon$ , entre lesquelles  $f(\epsilon)$  est alors positive, description faite par Houpert [2].

Dans ce même article, Houpert donne un modèle analytique pour le calcul des roulements à billes. Il est ici utilisé pour décrire le déplacement relatif des deux points de contact, en fonction de 5 déplacements imposés à la bague intérieure par rapport à la bague extérieure. Le modèle est destiné à être utilisé dans des logiciels de calcul par éléments finis, et permet le calcul de l'effort maximal de contact. Les efforts sont obtenus par le calcul d'intégrales sur toute la périphérie du roulement.

Hernot *et al.* [82] calcule la matrice de rigidité du roulement à partir de fonctions du facteur de distribution des charges  $\epsilon$ , qui est le rapport du déplacement axial sur le déplacement radial imposé à la bague intérieure. Chaque terme de la matrice contient une intégrale elliptique, notées  $J_{aa}$ ,  $J_{ar}$  ou  $J_{rr}$ , dont la formulation s'apparente à celle des intégrales de Sjövall. Chacune de ces fonctions est par la suite remplacées par 2 fonctions approchées, qui donnent explicitement la valeur des termes  $J_{aa}$ ,  $J_{ar}$  et  $J_{rr}$  en fonction de  $\epsilon$ , selon que  $\epsilon$  est inférieur ou supérieur à 1. Les fonctions choisies sont une suite de termes en puissances non entières de  $\epsilon$ . Cependant les auteurs ne décrivent pas, dans ce travail, la précision de l'approximation ainsi obtenue.

Dans le premier paragraphe, le modèle conduisant au calcul des déformations de chaque bille (pincement [2]) est redéfini en fonction de la position orbitale de la bille et en fonction des 5 degrés de liberté imposés à la bague intérieure (liée au rotor).

Dans le deuxième paragraphe, les équations d'équilibre de chaque bille, les lois de comportement des contacts et les équations de déformations établies au paragraphe IV.2.4 permettent d'obtenir le système de 8 équations non linéaires pour la résolution du problème. Les paramètres choisis sont les déformations locales et globales, les angles de contact, les efforts normaux et les efforts tangentiels au

contact.

Dans le troisième paramètre, la résolution du problème concernant les efforts extérieurs est présentée. Les 5 efforts (3 forces et 2 moments) associés à un jeu de 5 déplacements imposés (3 translations et 2 rotations) sont calculés en réalisant une sommation des efforts appliqués par chaque bille sur la bague intérieure.

Dans la quatrième paragraphe, la méthode numérique de résolution du système non-linéaire est détaillée, avant de calculer les forces appliquées au roulement par sommation des efforts de chaque billes.

Chaque terme de la matrice de rigidité du roulement est alors calculé et ses variations en fonction de l'angle de contact, de la vitesse et de la précharge sont enfin explicitées.

#### IV.4.1 Modèle de déplacement à 5 degrés de liberté

Il s'agit d'étudier l'influence d'un déplacement imposé, défini par 3 translations, et 2 rotations, d'où 5 degrés de liberté. Ce modèle a été explicité par Houpert [2] et utilisé par Hernot *et al.*[82] pour le calcul de la matrice de rigidité.

La figure IV-22 présente les paramètres angulaires et dimensionnels utilisés pour le calcul de l'énergie. Les points de contact extérieur et intérieur, entre la  $j^{\text{ième}}$  bille et les bagues, sont notés  $A_j$  et  $B_j$ .

La position de la bille dans le plan du roulement est repérée par l'angle  $\phi$  lequel est une fonction du temps  $t$  puisque la bille suit le mouvement de rotation de la cage (mouvement orbital).

La bague intérieure se voit imposer 5 déplacements (modèle à 5 degrés de liberté). Les trois translations sont notées  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  et  $\delta_z$  respectivement suivant les axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du repère fixe (lié à la bague extérieure). De même, deux rotations de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure sont imposées autour de l'axe  $X$  et de l'axe  $Z$  et repérées respectivement par les angles  $\theta_X$  et  $\theta_Z$ .

La bague intérieure tourne d'abord d'un angle  $\theta_Z$  autour de  $Z$  puis d'un angle  $\theta_X$  autour du nouvel axe  $X_1$ . La position du centre de la bille est alors obtenue par une dernière rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $y$ .

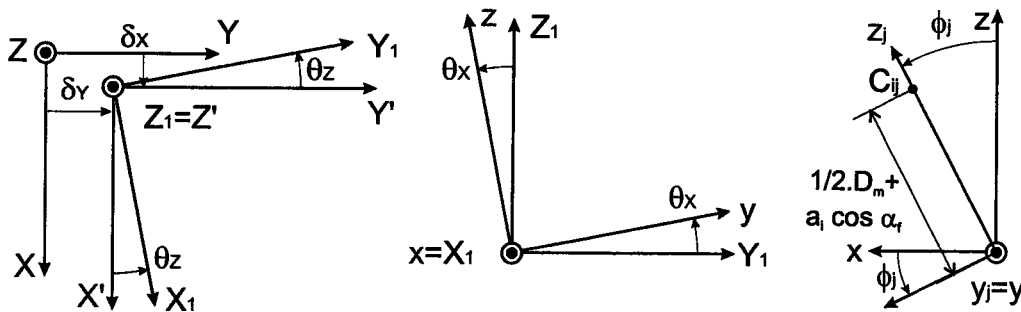


FIG. IV-22 – Position du centre de courbure  $C_{ij}$  au niveau de la  $j^{\text{ième}}$  bille du roulement. La translation  $\delta_z$  du repère  $X'Y'Z'$  suivant  $Z$  par rapport au repère  $XYZ$  n'est pas représentée.

Le point  $C_{ij}$  (centre de courbure de la piste intérieure) au niveau de la  $j^{\text{ième}}$  bille située dans la position orbitale  $\phi_j$  se déplace alors d'une valeur notée  $\delta_r(\phi_j)$  suivant la direction radiale ( $z_j$ ) et d'une valeur notée  $\delta_a(\phi_j)$  suivant la direction axiale ( $y_j$ ).

Le passage de la base  $XYZ$  à la base  $X_1Y_1Z_1$  s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_Z & \sin \theta_Z & 0 & -\delta_X \cos \theta_Z & -\delta_Y \sin \theta_Z & 0 \\ -\sin \theta_Z & \cos \theta_Z & 0 & \delta_X \sin \theta_Z & -\delta_Y \cos \theta_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\delta_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-99})$$

Cette formulation permet la prise en compte directe des rotations et des translations.

Le passage de la base  $X_1Y_1Z_1$  à la base  $xyz$  s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_X & \sin \theta_X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_X & \cos \theta_X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-100})$$

Le passage de la base  $xyz$  à la base  $x_jy_jz_j$  s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_j & 0 & -\sin \phi_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \phi_j & 0 & \cos \phi_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-101})$$

En posant  $z_j = dm/2 + a_i \cos \alpha_f = R$ ,  $x_j = 0$  et  $y_j = 0$ , on obtient le déplacement relatif du point  $C_{ij}$  par rapport au point  $C_{oj}$  (du repère fixe) par inversion des matrices. Les déplacements radial  $dr$  et axial  $da$  à la position orbital  $\phi$  sont donnés par :

$$dr(\phi) = \sqrt{X^2(\phi) + Z^2(\phi)} - R \quad (\text{IV-102})$$

$$da(\phi) = \delta_Y - R \cos \phi \sin \theta_X \cos \theta_Z + R \sin \theta_Z \sin \phi \quad (\text{IV-103})$$

avec les coordonnées  $X$  et  $Z$  données par :

$$X = \delta_X + R \cos \phi \sin \theta_X \sin \theta_Z + R \cos \theta_Z \sin \phi \quad (\text{IV-104})$$

$$Z = \delta_Z + R \cos \phi \cos \theta_X \quad (\text{IV-105})$$

Les angles  $\theta_X$  et  $\theta_Z$  étant très petits, les expressions de  $dr(\phi)$  et  $da(\phi)$  deviennent :

$$\delta_r(\phi) \approx \delta_X \sin \phi + \delta_Z \cos \phi \quad (\text{IV-106})$$

$$\delta_a(\phi) \approx \delta_Y + R \theta_Z \sin \phi - R \theta_X \cos \phi \quad (\text{IV-107})$$

Ces deux fonctions de déformation sont utilisées par la suite pour calculer les angles de contact.

#### IV.4.2 Calcul des forces appliquées par une bille

Soit la  $j$ ème bille du roulement, à une position orbitale  $\phi_j$ .

Nous avons établis auparavant que le problème des angles et des forces de contact pouvait être résolu par les équations d'équilibres de la bille (IV-43 et IV-48). Ces équations permettent d'obtenir les relations suivantes :

$$-Q_{oj} \cos \alpha_{oj} - T_{oj} \sin \alpha_{oj} + Q_{ij} \cos \alpha_{ij} + T_{ij} \sin \alpha_{ij} + F_{cj} = 0 \quad (\text{IV-108})$$

$$Q_{oj} \sin \alpha_{oj} - T_{oj} \cos \alpha_{oj} - Q_{ij} \sin \alpha_{ij} + T_{ij} \cos \alpha_{ij} = 0 \quad (\text{IV-109})$$

En supposant un contrôle par la bague extérieure, nous avons obtenu :

$$T_{ij} = 0 \quad (\text{IV-110})$$

$$T_{oj} = \frac{2}{d_b} M_g = -\frac{2}{5} F_{cj} \sin \alpha_{oj} \quad (\text{IV-111})$$

avec :

$$F_{cj} = m_b \frac{d_m}{2} \Omega^2 \left( \frac{1 - d_b/d_m \cos \alpha_{ij}}{1 + \cos(\alpha_{ij} - \alpha_{oj})} \right)^2 \quad (\text{IV-112})$$

A ces équations s'ajoutent, les équations de la position du centre de la bille (IV-63), (IV-64), qui peuvent faire intervenir les fonctions de déformation (IV-107) et (IV-106) pour étudier les variations sous charge des angles de chacune des billes du roulement. Les équations (IV-63), (IV-64) deviennent :

$$(a_{oj} + \delta_{oj}) \cos \alpha_{oj} + (a_{ij} + \delta_{ij}) \cos \alpha_{ij} = (a_{oj} + a_{ij}) \cos \alpha_f + \delta_r(\phi_j) \quad (\text{IV-113})$$

$$(a_{oj} + \delta_{oj}) \sin \alpha_{oj} + (a_{ij} + \delta_{ij}) \sin \alpha_{ij} = (a_{oj} + a_{ij}) \sin \alpha_f + \delta_a(\phi_j) \quad (\text{IV-114})$$

Les relations forces-déplacements (IV-5) et (IV-6) viennent compléter le système d'équation. Ces équations étaient les suivantes :

$$Q_{ij} = k_{ij} \delta_{ij}^n$$

$$Q_{oj} = k_{oj} \delta_{oj}^n$$

Les coefficients  $k_{oj}$  et  $k_{ij}$  des lois de comportement sont des fonctions des angles de contact  $\alpha_{oj}$  et  $\alpha_{ij}$ . Cette relation entre les rigidités locales et les angles de contact est représentée par les équations (IV-9) à (IV-14).

#### IV.4.3 Résolution du système pour une bille

Les équations sont exploitées afin de ne conserver comme inconnues que les déformations  $\delta_{ij}$  et  $\delta_{oj}$  et les angles de contact  $\alpha_{ij}$  et  $\alpha_{oj}$ .



Les équations (IV-108), (IV-109), (IV-113) et IV-114 sont réécrites sous la formes de fonctions d'erreurs :

$$err_1 = -Q_{oj} \cos \alpha_{oj} - T_{oj} \sin \alpha_{oj} + Q_{ij} \cos \alpha_{ij} + T_{ij} \sin \alpha_{ij} + F_{cj} \quad (IV-115)$$

$$err_2 = Q_{oj} \sin \alpha_{oj} - T_{oj} \cos \alpha_{oj} - Q_{ij} \sin \alpha_{ij} + T_{ij} \cos \alpha_{ij} \quad (IV-116)$$

$$err_3 = (a_{oj} + \delta_{oj}) \cos \alpha_{oj} + (a_{ij} + \delta_{ij}) \cos \alpha_{ij} - (a_{oj} + a_{ij}) \cos \alpha_f - \delta_r(\phi) \quad (IV-117)$$

$$err_4 = (a_{oj} + \delta_{oj}) \sin \alpha_{oj} + (a_{ij} + \delta_{ij}) \sin \alpha_{ij} - (a_{oj} + a_{ij}) \sin \alpha_f - \delta_a(\phi) \quad (IV-118)$$

La somme  $err_1^2 + err_2^2 + err_3^2 + err_4^2$  est alors minimisée par rapport aux paramètres de déformations  $\delta_{oj}$  et  $\delta_{ij}$ , ainsi que par rapport aux angles de contact  $\alpha_{oj}$  et  $\alpha_{ij}$ . Cette minimisation est réalisée avec la fonction *lsqnonlin* de *MATLAB*, qui est adaptée pour la minimisation de fonctions non-linéaires par la méthode des moindres carrés.

Les angles de contact et les déformations sont alors connus et les lois de comportement permettent ensuite de retrouver les efforts appliqués à la bille.

#### IV.4.4 Calcul des forces appliquées au roulement

Dans le cadre de cette étude, la bague intérieure est soumise à des déplacements relatifs par rapport à la bague extérieure fixe. Les deux bagues ne sont plus nécessairement centrées et parallèles. Les efforts appliqués à chaque bille sont alors fonctions de sa position orbitale (angle  $\phi_j$ ).

La condition  $Q_{ij} \sin \alpha_{ij} = F_P/Z$  n'est plus vérifiée. L'étude de l'équilibre des forces appliquées à la bague intérieure permet cependant d'écrire :

$$F_X - \sum_{j=1}^Z Q_{ij} \cos \alpha_{ij} \sin \phi_j = 0 \quad (IV-119)$$

$$F_Y - \sum_{j=1}^Z Q_{ij} \sin \alpha_{ij} = 0 \quad (IV-120)$$

$$F_Z - \sum_{j=1}^Z Q_{ij} \cos \alpha_{ij} \cos \phi_j = 0 \quad (IV-121)$$

$$M_X + \sum_{j=1}^Z Q_{ij} \sin \alpha_{ij} R \cos \phi = 0 \quad (IV-122)$$

$$M_Z - \sum_{j=1}^Z Q_{ij} \sin \alpha_{ij} R \sin \phi = 0 \quad (IV-123)$$

Pour résoudre le problème d'un roulement précontraint par un ressort (force  $F_Y = F_P$  imposée), il faut réaliser un calcul itératif, ici de type Newton-Raphson, en utilisant le paramètre  $\delta_Y$  comme variable.

#### IV.4.5 Etude de la rigidité du roulement

Dans le cadre de cette approche numérique des forces, les dérivations sont réalisées par différences finies centrées. Les termes de la matrice obtenue ne sont pas parfaitement symétriques du fait de la précision du calcul numérique. Une symétrisation est alors effectuée en calculant la moyenne des termes diagonalement opposés.

##### IV.4.5.A Étude dans une base restreinte à 3 DDL

Pour l'étude de la rigidité du roulement, nous définissons les paramètres de déplacement suivant la direction radiale  $r$ , axial  $a$  et angulaire  $\theta$ . Ces paramètres sont définis par :

$$r = \sqrt{X^2 + Z^2} \quad a = Y \quad \theta = \sqrt{\theta_X^2 + \theta_Z^2}$$

En étudiant la rigidité du roulement à bille à partir de ces paramètres, il est possible de définir la matrice de rigidité symétrique du roulement dans la base  $(r, a, \theta)$  :

$$K_{R1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r}{\partial r} & \frac{\partial F_r}{\partial a} & \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F_a}{\partial r} & \frac{\partial F_a}{\partial a} & \frac{\partial F_a}{\partial \theta} \\ \frac{\partial M_\theta}{\partial r} & \frac{\partial M_\theta}{\partial a} & \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{ra} & K_{r\theta} \\ K_{ra} & K_{aa} & K_{a\theta} \\ K_{r\theta} & K_{a\theta} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-124})$$

Les termes de rigidités dans la matrice sont des fonctions non linéaires des paramètres  $r, a, \theta$ .

En utilisant les projections sur chaque axe :

$$F_X = F_r \frac{X}{r} \quad F_Y = F_a \quad F_Z = F_r \frac{Z}{r} \quad M_{\theta X} = M_\theta \frac{\theta_X}{\theta} \quad M_{\theta Z} = M_\theta \frac{\theta_Z}{\theta}$$

On peut revenir à la matrice de rigidité dans la base  $(X, Y, Z, \theta_X, \theta_Z)$ . Les termes de la matrice s'obtiennent en différenciant chaque force par rapport à chacun des paramètres.

$$K_R = \begin{bmatrix} K_{rr} \frac{X^2}{r^2} + F_r \frac{Z^2}{r^3} & K_{ra} \frac{X}{r} & \frac{XZ}{r^2} (K_{rr} - \frac{F_r}{r}) & K_{r\theta} \frac{X\theta_X}{r\theta} & K_{r\theta} \frac{X\theta_Z}{r\theta} \\ K_{ra} \frac{X}{r} & K_{aa} & K_{ra} \frac{Z}{r} & K_{a\theta} \frac{\theta_X}{\theta} & K_{a\theta} \frac{\theta_Z}{\theta} \\ \frac{XZ}{r^2} (K_{rr} - \frac{F_r}{r}) & K_{ra} \frac{Z}{r} & K_{rr} \frac{Z^2}{r^2} + F_r \frac{X^2}{r^3} & K_{r\theta} \frac{X\theta_X}{r\theta} & K_{r\theta} \frac{X\theta_Z}{r\theta} \\ K_{r\theta} \frac{X\theta_X}{r\theta} & K_{a\theta} \frac{\theta_X}{\theta} & K_{r\theta} \frac{X\theta_X}{r\theta} & K_{\theta\theta} \frac{\theta_X^2}{\theta^2} + M_\theta \frac{\theta_Z^2}{\theta^3} & \frac{\theta_X\theta_Z}{\theta^2} (K_{\theta\theta} - \frac{M_\theta}{\theta}) \\ K_{r\theta} \frac{X\theta_Z}{r\theta} & K_{a\theta} \frac{\theta_Z}{\theta} & K_{r\theta} \frac{X\theta_Z}{r\theta} & \frac{\theta_X\theta_Z}{\theta^2} (K_{\theta\theta} - \frac{M_\theta}{\theta}) & K_{\theta\theta} \frac{\theta_Z^2}{\theta^2} + M_\theta \frac{\theta_X^2}{\theta^3} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-125})$$

Ce résultat montre qu'il suffit d'étudier les rigidités dans la base des déplacements radiaux, axial et angulaires (3 DDL,  $r, a, \theta$ ) pour connaître le comportement du roulement dans la base à 5 DDL  $(X, Y, Z, \theta_X, \theta_Z)$ .

L'influence de divers paramètres dimensionnels ou de fonctionnement sur les rigidités est étudiée dans les paragraphes suivants.

#### IV.4.6 Influence de l'angle et de la précharge

Le roulement à billes à contact oblique *SNFA VEX6/NS* est étudié ici à titre d'exemple afin de mettre en évidence l'influence des conditions de montage et d'utilisation sur les raideurs axiale et radiale.

Les calculs précédents montrent que la raideur du roulement est intimement liée à la précharge appliquée, d'une part, et à l'angle de contact d'autre part. A l'arrêt, la force de précontrainte agit directement sur la rigidité des contacts entre les billes et les bagues, mais également sur l'angle de contact  $\alpha_p$ , ce qui a pour effet de modifier le rapport entre les raideurs radiale  $K_{XX}$  (ou  $K_{ZZ}$ ) et axiale  $K_{YY}$ .

##### IV.4.6.A Rigidité radiale ( $K_{XX}$ )

La rigidité radiale d'un roulement est étudiée pour des angles libres de 10, 12, 15, 18 ou 25° angles disponibles au catalogue. La figure IV-23 présente les valeurs de la rigidité du roulement dans la direction radiale en statique au repos et tournant à 100000 tr/min et 200000 tr/min.

L'augmentation de la rigidité radiale du roulement avec la précharge appliquée est clairement illustrée sur cette figure et ce quelle que soit la vitesse : la non-linéarité des contacts se retrouve dans le comportement global du roulement. L'augmentation de l'angle de contact  $\alpha_f$  diminue la rigidité radiale du roulement. En statique, la rigidité radiale d'un roulement d'angle  $\alpha_f = 25^\circ$  est de 30% inférieure à celle obtenue pour un angle  $\alpha_f = 10^\circ$ .

La force centrifuge générée par la rotation du roulement et par le mouvement orbital des billes entraîne une modification importante du comportement du roulement. Deux observations importantes peuvent être faites : d'une part la forte diminution de la rigidité radiale avec la vitesse, d'autre part la diminution de cette rigidité avec l'angle de contact. Par ailleurs il est à noter la faible influence des faibles valeurs de précharge lorsque la vitesse est élevée : les rigidités varient peu pour des précharges inférieures à 4 N. Pour les précharges plus importantes, une forte remontée de la précharge est observée.

##### IV.4.6.B Rigidité axiale ( $K_{YY}$ )

La rigidité axiale d'un roulement est maintenant étudiée pour des angles libres de 10, 12, 15, 18 ou 25° angles disponibles au catalogue. La figure IV-24 présente les valeurs de la rigidité du roulement suivant la direction axiale pour un roulement au repos et tournant à 100000 tr/min et 200000 tr/min. Les échelles sont conservées d'un graphique à l'autre pour une comparaison plus aisée.

En statique, la rigidité axiale augmente fortement lorsque la précharge ou l'angle varient. La rigidité axiale d'un roulement d'angle  $\alpha_f = 25^\circ$  est plus de 2 fois supérieure à celle obtenu pour un angle  $\alpha_f = 10^\circ$  pour  $F_P = 100$  N.

La vitesse provoque un effondrement de la rigidité axiale qui tend à devenir constante pour les faibles valeurs de précharge.

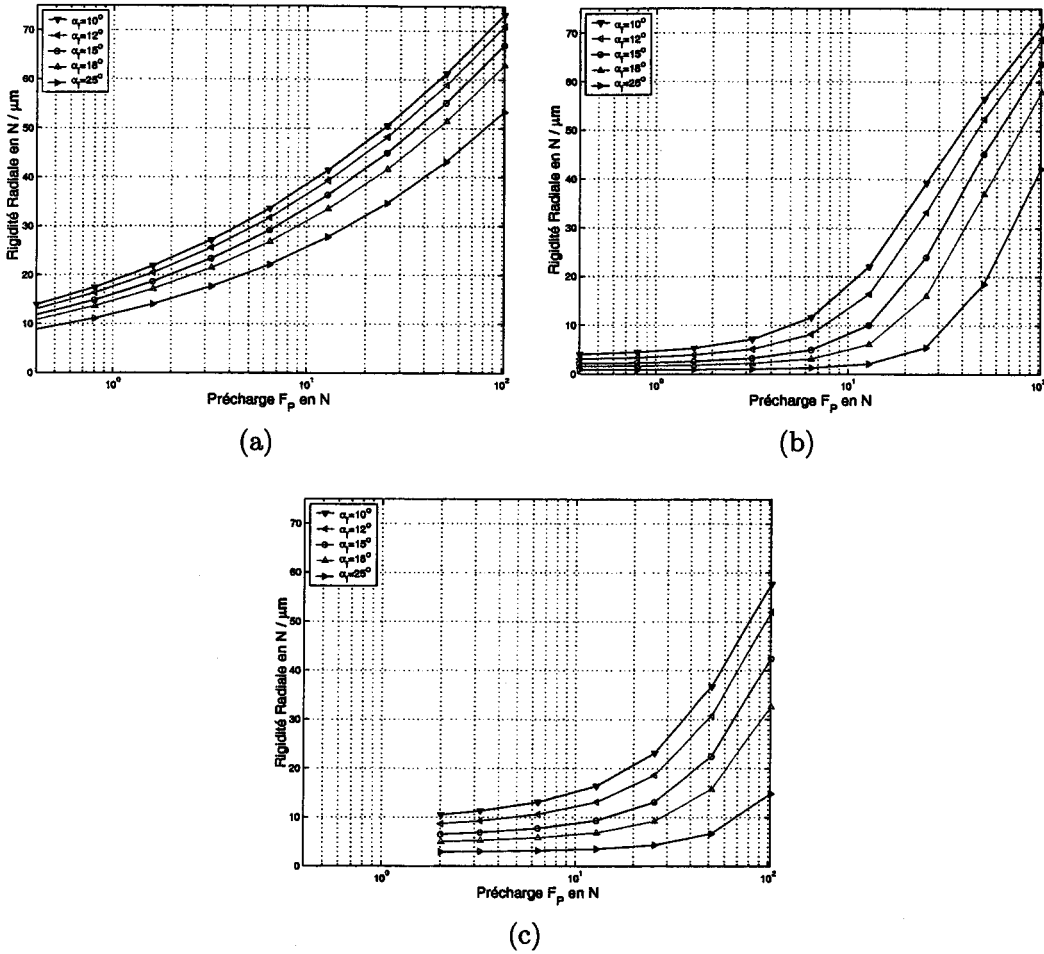


FIG. IV-23 – Variation de la raideur radiale  $K_{XX}$  en statique (a) à 100000 tr/min (b) et à 200000 tr/min (c) en fonction de la précharge appliquée  $F_p$  pour différents angles de contact  $\alpha_f$ .

#### IV.4.6.C Rigidité angulaire ( $K_{\theta x \theta x}$ )

La rigidité angulaire d'un roulement est maintenant étudiée pour des angles libres de 10, 12, 15, 18 ou 25° angles disponibles au catalogue. La figure IV-25 présente les valeurs de la rigidité angulaire du roulement autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de rotation du roulement. Les cas du roulement au repos, à 100000 tr/min et à 200000 tr/min sont successivement décrits. Les échelles sont conservées d'un graphique à l'autre pour une comparaison plus aisée.

Les courbes sont similaires à celles de la raideur axiale. La vitesse provoque une très forte diminution de la rigidité. L'influence de l'angle de contact sur la valeur de rigidité n'est pas la même selon que la précharge est faible ou forte. A 200000 tr/min, le point où la tendance l'inverse est ainsi clairement visible.

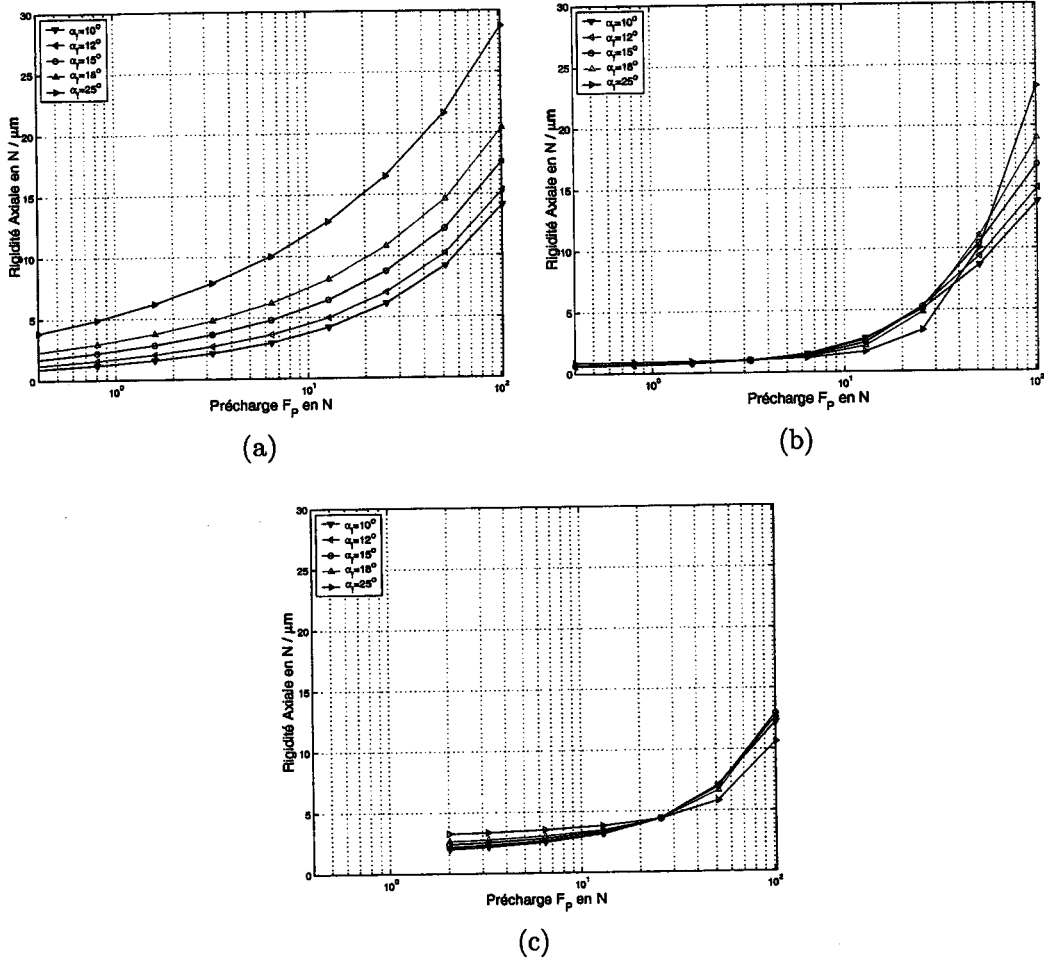


FIG. IV-24 – Variation de la raideur axiale  $K_{YY}$  en statique (a) à 100000 tr/min (b) et à 20000 tr/min (c) en fonction de la précharge appliquée  $F_p$  pour différents angles de contact  $\alpha_f$ .

#### IV.4.7 Influence de la vitesse et la précharge

Pour le roulement précédemment étudié, lorsque l'angle de contact a été choisi, le seul paramètre pouvant influencer les termes de rigidité est la précharge.

L'influence de la précharge sur les variations des rigidités radiale et axiale en fonction de la vitesse de rotation est étudiée

La figure IV-26 présente les variations des rigidités radiale ( $K_{XX}$ ), axiale ( $K_{YY}$ ) et angulaire ( $K_{\theta x \theta x}$ ) ainsi que les variations du terme de couplage entre le déplacement radial suivant  $X$  et angulaire autour de  $Z$  ( $K_{X \theta z}$ ) avec la vitesse de rotation  $\Omega$  et la précharge  $F_p$ . Les précharges étudiées sont celles préconisées par le constructeur (12, 25 et 50 N). Le cas de précharges faibles (4 N) est également étudié pour en connaître l'influence sur le comportement du roulement. Les échelles sont conservées d'un graphique à l'autre pour une comparaison plus aisée.

Toutes les rigidités sont fortement perturbées par la vitesse de rotation, qu'elle que soit la précharge appliquée. Les tendances de variations avec la vitesse et la précharge sont homothétiques. 2 zones sont

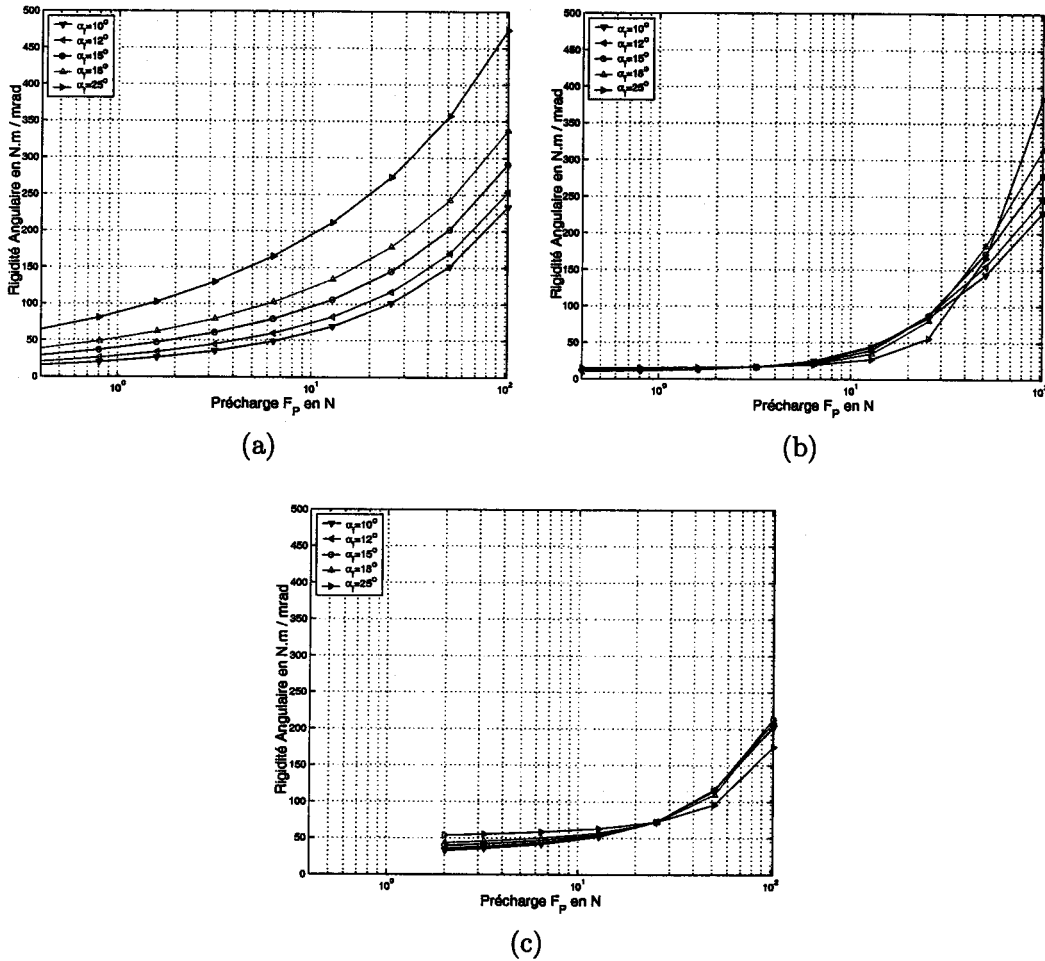


FIG. IV-25 – Variation de la raideur angulaire  $K_{\theta_x \theta_x}$  en statique (a) à 100000 tr/min (b) et à 200000 tr/min (c) en fonction de la précharge appliquée  $F_P$  pour différents angles de contact  $\alpha_f$ .

observables : la première où les angles varient de façon importante, ce qui crée un effondrement des rigidités et la seconde où les effets centrifuges génèrent une lente remontée des rigidités (le phénomène est plus marqué aux faibles précharges).

#### IV.4.8 Représentation en schéma-bloc du modèle de rigidité

Nous pouvons à présent définir le schéma bloc du modèle obtenu. Le modèle est présenté sur la figure IV-27.

Le modèle fournit en sortie la matrice de rigidité du roulement à billes. Le système a pour entrée la géométrie et les propriétés des matériaux du roulement. Le modèle a également en entrée la précharge et les angles de contacts (qui font implicitement intervenir la vitesse)

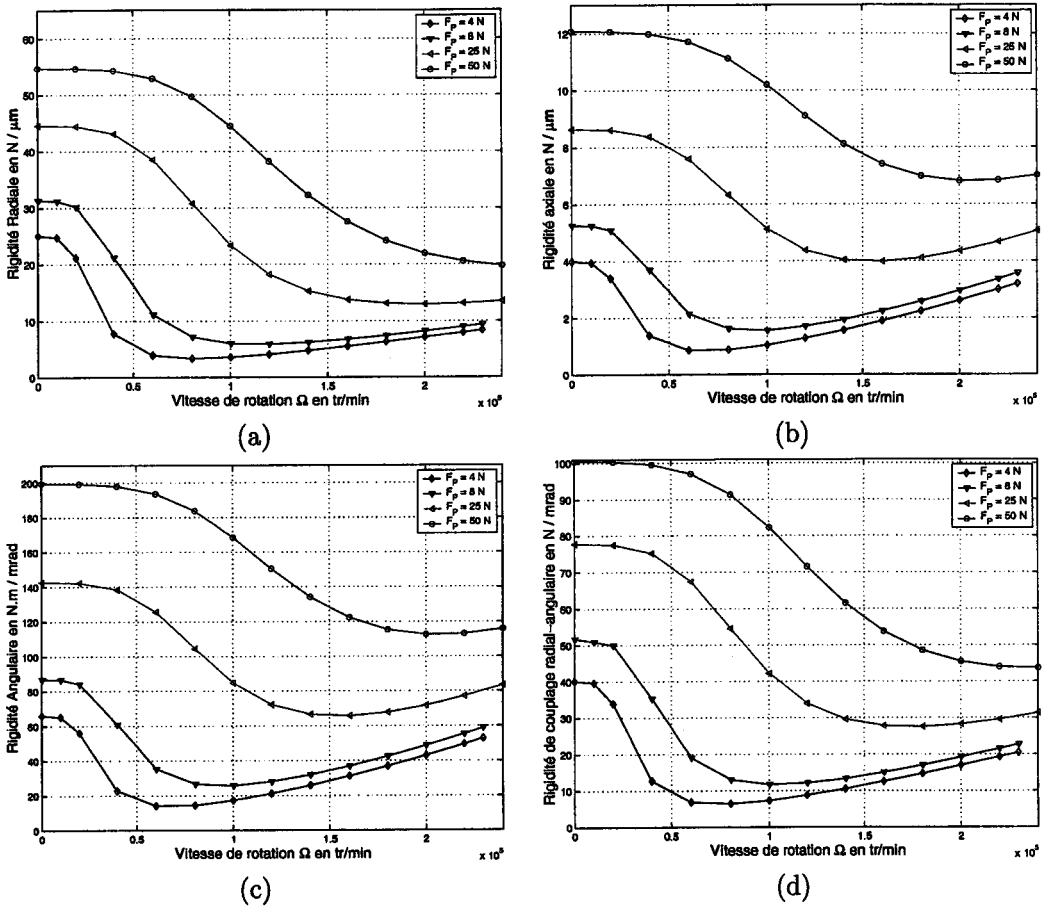


FIG. IV-26 – Variation des rigidités axiale  $K_{XX}$  (a), radiale  $K_{YY}$  (b) et angulaire  $K_{\theta z \theta z}$  (c) et de la rigidité de couplage  $K_{X\theta z}$  (a) en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  et pour différentes précharges appliquées  $F_P$

#### IV.4.9 Conclusions sur la rigidité d'un roulement à billes

Nous avons réalisé le calcul des déformations de chaque bille en fonction de sa position orbitale et en fonction des 5 déplacements imposés à la bague intérieure par rapport à la bague extérieure. Le système d'équations permettant la résolution du problème en terme d'angles de contact, de déformation et en terme d'effort a été explicité.

Le système a ensuite été résolu pour chaque bille en utilisant une méthode de résolution des moindres carrés. La sommation de l'effort dû à chaque élément roulant a fourni la force de réaction du roulement puis tous les termes de la matrice de rigidité ont été calculés par différences finies centrées.

L'influence de la précharge et de la vitesse de rotation a été étudiée en fonction de l'angle de contact du roulement à billes choisi. Pour un angle de contact fixé, l'influence conjointe de la vitesse et de la précharge a également été décrite. Il a été constaté la forte diminution des rigidités du roulement lorsque la vitesse augmente, ce qui sera préjudiciable à la stabilité du rotor et de l'électrobroche.

A partir de cette étude de la rigidité des roulements, il est à présent possible de modéliser plus

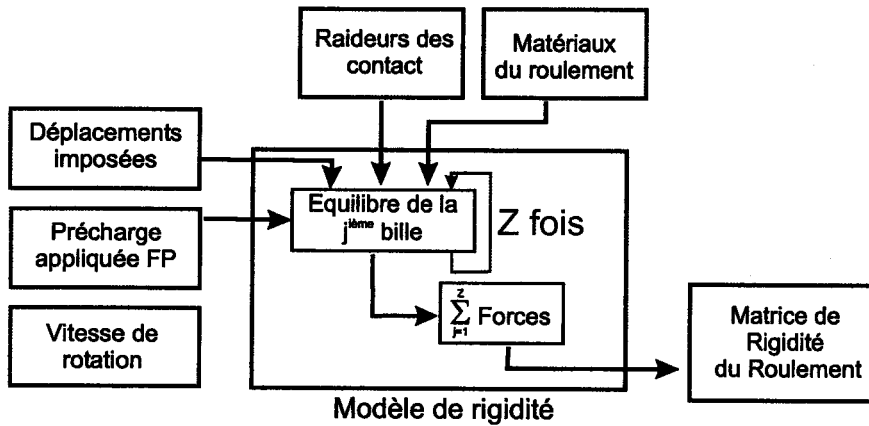


FIG. IV-27 – Schéma-bloc du modèle de la rigidité du roulement

précisément le comportement dynamique du rotor de la MRV et de ses roulements à billes, en fonction du montage des roulements (précharge) et de la vitesse de rotation du rotor. La méthode de sommation des efforts préférée ici aux intégrales de Sjövall [81] permettent en particulier l'étude de l'influence de la position orbitale du train de billes sur les rigidités et sur les forces.



## IV.5 Couple de frottement dans un roulement à billes

La connaissance et la prédiction du comportement dynamique d'un rotor guidé par un montage de roulements à billes passe par l'étude approfondie de ses paliers et des frottements internes.

Ce frottement est généré par les glissements relatifs dus aux mouvements des composants d'un roulement (billes, cage, bagues intérieure et extérieure).

Des essais réalisés sur une grande diversité de roulement ont permis à Palmgren [64] de mettre en place un modèle permettant de calculer le couple de frottement en fonction de la vitesse et de la force appliquée. Pour tous les phénomènes dissipatifs, hormis ceux dus à la présence de lubrifiant, Palmgren propose, pour le couple statique du roulement dû à la seule précharge  $F_p$ , la formulation suivante [67] :

$$C_a = z \left( \frac{F_p}{C_s} \right)^y \left( \frac{F_p}{\tan \alpha_f} \right) d_m \quad (\text{IV-126})$$

avec  $z$  un coefficient sans dimension fonction du type de roulement dont l'ordre de grandeur est de  $10^{-3}$  ( $8 \cdot 10^{-4}$  pour un angle de  $15^\circ$ ),  $y$  un exposant compris entre 0,33 et 0,5 selon l'angle de contact et  $d_m$ ,  $\alpha_f$  respectivement le diamètre moyen du roulement et l'angle de contact libre.  $d_m$  est donné en mm, les forces en N et les couples en N mm.  $C_s$  est la capacité dynamique en N, fonction des dimensions et des matériaux du roulement. Pour chaque type de roulement, pour chaque angle et selon la force appliquée, les coefficients sont donnés par des tableaux numériques [67, 83].

Palmgren donne également une formulation du couple visqueux dû à la lubrification, en fonction de la viscosité du fluide  $\nu_0$  (en centistokes), la vitesse de rotation  $N$  en tr/min :

$$C_b = 10^{-7} f_0 (\nu_0 N)^{2/3} d_m^3 \quad (\text{IV-127})$$

$f_0$  est un coefficient donné en fonction du type de roulement utilisé et de la lubrification utilisée (graisse, brouillard ou bain d'huile). Dans le cas d'un roulement à billes à contact oblique ( $15^\circ$ ), on a  $f_0 = 2$ . Le facteur  $10^{-7}$  permet exprimer le couple en N mm.

La somme de  $C_a$  et  $C_b$  permet d'obtenir le couple de frottement total dans le roulement. Ce modèle a été utilisé lors du dimensionnement de notre MRV pour obtenir les pertes dans les roulements [1, 84].

Cependant les influences de l'accélération et des angles de contact ne sont pas prises en compte dans le modèle de Palmgren. Afin de connaître avec le maximum de précision, les pertes dans un roulement soumis à une force axiale pure, nous allons établir un modèle, permettant de prendre en compte les caractéristiques précises des roulements et permettant de décrire au mieux les phénomènes internes.

Dans un premier temps, la cinématique de la bille est étudiée et les paramètres des mouvements sont mis en place. Le mouvement de la bille est modélisé conformément aux travaux de Jones [85], et de Harris [41].

Dans un deuxième temps, la modélisation des efforts appliqués à la bille est explicitée.

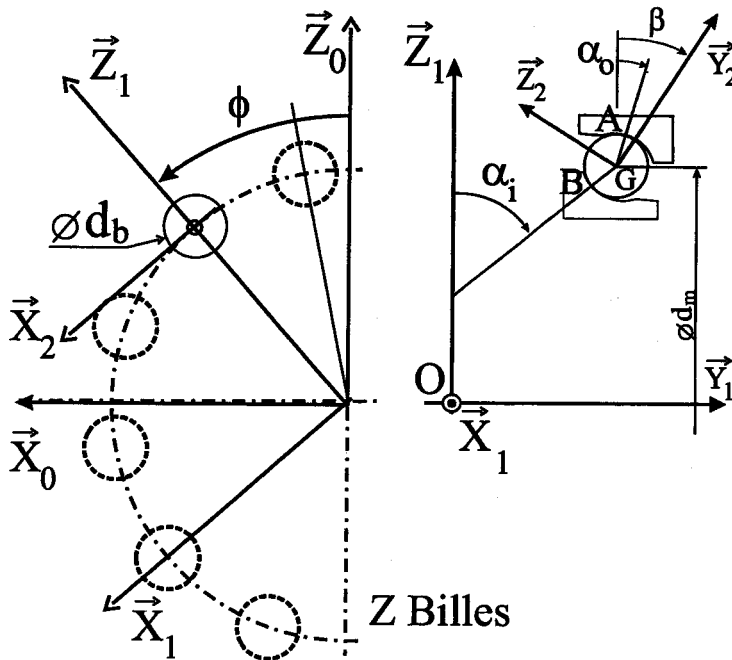


FIG. IV-28 – Repères utilisés pour l'étude cinématique.

Ensuite, l'action de la cage sur les billes est déduite des efforts appliqués à la cage et de la cinématique de cette dernière. L'ensemble des moments de frottement générés par le mouvement relatif des billes et des bagues est décrit suivant la modélisation de Hachkowski et Peterson [86], s'appuyant sur les travaux de Todd et Johnson [87].

Tous les efforts étant connus et le mouvement de la bille étant défini, les équations de la dynamique sont alors résolues pour finalement obtenir l'expression du couple de frottement du roulement.

Ce résultat sera illustré par l'étude des roulements à très grande vitesse utilisés dans la MRV. L'influence de la vitesse et de l'accélération sur le roulement est démontrée ainsi que l'influence de la précharge appliquée.

#### IV.5.1 Cinématique de la bille

La figure IV-28 représente les repères utilisés pour l'étude cinématique. Le repère fixe (indice 0) est lié à la bague extérieure. Le repère lié à la cage du roulement (indice 1) est obtenu par rotation d'un angle  $\phi$  autour de l'axe  $(O, \vec{Y}_0)$ . Le repère (indice 2) est obtenu par rotation d'un angle  $\beta$  autour de l'axe  $(G, \vec{X}_1)$ .

Dans le repère fixe liée à la bague extérieure, la cage est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{Y}_0)$  avec une vitesse angulaire notée  $\dot{\phi} = \Omega_c$ . La bille est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(G, \vec{Z}_2)$  avec une vitesse angulaire notée  $\Omega_b$  par rapport au repère  $R_2$ . Le repère  $(G, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$  est animée d'une vitesse de rotation  $\dot{\beta}$  autour de l'axe  $(G, \vec{X}_1)$ .

Le vecteur-rotation de la bille par rapport à la cage n'a pas de composante suivant l'axe  $X_2$ . On

suppose que les forces de frottement sont suffisantes pour empêcher la rotation de la bille autour de l'axe  $(G, \vec{X}_2)$  sous l'effet du moment gyroscopique. La vitesse de la bille est donc supposée dans le plan  $(G, Y_1, Z_1)$ .

La vitesse du point G de la bille par rapport à la bague extérieure exprimée dans le repère lié à la cage est donnée par :

$$\vec{V}_{G \in R_3/R_0} = \frac{d_m}{2} \Omega_c \vec{X}_1 \quad (\text{IV-128})$$

#### IV.5.1.A Torseur dynamique

L'accélération du point G (centre de gravité de la bille) s'écrira donc :

$$\vec{\Gamma}_{G \in R_3/R_0} = \frac{d_m}{2} \dot{\Omega}_c \vec{X}_1 - \frac{d_m}{2} \Omega_c^2 \vec{Z}_1 \quad (\text{IV-129})$$

La vitesse de rotation de la bille par rapport à la bague extérieure a pour expression :

$$\vec{\Omega}_{b/R_0} = \vec{\Omega}_{b/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \quad (\text{IV-130})$$

$$= \Omega_b \vec{Z}_2 + \dot{\beta} \vec{X}_1 + \Omega_c \vec{Y}_1 \quad (\text{IV-131})$$

Cette expression reformulée dans le repère lié à la cage devient :

$$\vec{\Omega}_{b/R_0} = \dot{\beta} \vec{X}_1 + (\Omega_c - \Omega_b \cos \beta) \vec{Y}_1 + \Omega_b \sin \beta \vec{Z}_1 \quad (\text{IV-132})$$

On supposera que la vitesse de rotation  $\dot{\beta}$  est négligeable devant les autres vitesses de rotation mises en jeu. Par conséquent, le premier terme en  $\vec{X}_1$  disparaît dans l'équation IV-132. Le tenseur d'inertie  $\vec{I}$  de la bille supposée parfaitement sphérique est un tenseur diagonal dont chacun des termes vaut  $\frac{m_b d_b^2}{10}$  [41]. Le moment cinétique de la bille exprimé dans le repère  $R_1$  est donné par :

$$\vec{\sigma}_0(b/R_0) = \vec{I} \cdot \vec{\Omega}_{b/R_0} \quad (\text{IV-133})$$

$$= \frac{m_b d_b^2}{10} \left[ (\Omega_c - \Omega_b \cos \beta) \vec{Y}_1 + \Omega_b \sin \beta \vec{Z}_1 \right] \quad (\text{IV-134})$$

L'expression du moment dynamique calculé dans le repère fixe et exprimée dans le repère lié à la cage  $R_1$  est par ailleurs de la forme :

$$\vec{\delta}_{O/R_0} = \frac{d}{dt} \{ \vec{\sigma}_0(b/R_0) \} + \underbrace{m_b \vec{V}_{O/R_0} \wedge \vec{V}_{G \in b/R_0}}_{=\vec{\delta}} \quad (\text{IV-135})$$

d'où :

$$\vec{\delta}_{O/R_0} = \frac{m_b d_b^2}{10} \left\{ \begin{array}{c} \Omega_c \Omega_b \sin \beta \\ \dot{\Omega}_c - \dot{\Omega}_b \cos \beta \\ \dot{\Omega}_b \sin \beta \end{array} \right\}_{R_1} \quad (\text{IV-136})$$

$\{ \}_{R_1}$  désigne un vecteur exprimé dans le repère  $R_1$ .

### IV.5.1.B Mouvements relatifs aux contacts

Il est nécessaire de décrire les mouvements relatifs des billes aux points de contact intérieur et extérieur. Ces vitesses permettent de déterminer la distribution des forces et moments de frottement. Au point de contact extérieur, la vitesse de passage de la bille sur la bague est donnée par la vitesse de la cage  $\Omega_c$ . Au contact intérieur, la vitesse de passage de la bille sur la bague intérieure est donnée par  $\Omega - \Omega_c$ .

On note  $\vec{\Omega}_{or/b}$  et  $\vec{\Omega}_{ir/b}$ , les vitesses de rotation des bagues extérieure et intérieure par rapport à la bille.

$\vec{\Omega}_{or/b}$  peut être décomposé au point B en une composante de pivotement (spin) suivant la normale au contact ( $\vec{AG}$ ) et notée  $\Omega_{so}$  et en une composante de roulement (roll) dans le plan de contact et notée  $\Omega_{ro}$ .

La projection sur l'axe  $\vec{AG}$  de la vitesse de rotation  $\Omega_{or/b}$  dans le repère lié à la cage donne :

$$\Omega_{so} = -\Omega_c \sin \alpha_o + \Omega_b \sin (\alpha_o - \beta) \quad (\text{IV-137})$$

Pour le mouvement de roulement, les vitesses relatives de roulement s'obtiennent par les formules :

$$\Omega_{ro} = \Omega_c \cos \alpha_o - \Omega_b \cos (\alpha_o - \beta) \quad (\text{IV-138})$$

De la même manière, la vitesse de la bague intérieure  $\Omega_{ir/b}$  peut être projetée sur la normale au contact  $\vec{BG}$  pour donner la composante de pivotement  $\Omega_{si}$ .

$$\Omega_{si} = (\Omega - \Omega_c) \sin \alpha_i + \Omega_b \sin (\alpha_i - \beta) \quad (\text{IV-139})$$

Pour le mouvement de roulement,  $\Omega_{ri}$  est donnée par :

$$\Omega_{ri} = -(\Omega - \Omega_c) \cos \alpha_i - \Omega_b \cos (\alpha_i - \beta) \quad (\text{IV-140})$$

### IV.5.2 Modélisation des efforts appliqués à une bille

Dans un premier temps, nous allons recenser les différentes actions qui s'appliquent sur les billes. Ces efforts sont des efforts de contact appliqués par les deux bagues et par la cage, et des efforts dynamiques et aérodynamiques.

#### IV.5.2.A Modélisation des efforts de contact entre les bagues et la bille

La surface de contact entre une bille et les bagues sont des ellipses. Les forces de contact sur la surface de contact sont réduites au centre de l'ellipse (points A et B) à une résultante et un moment.

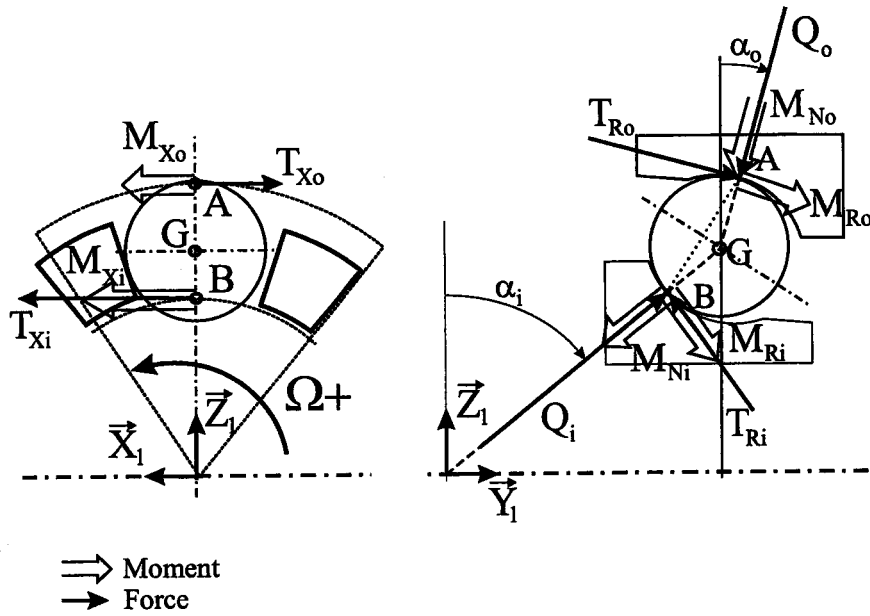


FIG. IV-29 – Forces et moments appliqués à la bille aux contacts avec les bagues

**Bague extérieure** Les forces et les moments de contact au point A sont représentées sur la figure IV-29. La résultante des forces de contact exercées par la bague extérieure sur la bille au point A se décompose en une force notée  $Q_o$  normale au plan de l'ellipse et une force tangentielle  $T_o$  comprise dans le plan de l'ellipse de contact. Cette force tangentielle  $T_o$  se décompose en une composante notée  $T_{Ro}$  dans le plan  $(A, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$  et une autre notée  $T_{X_o}$  suivant l'axe  $\vec{X}_1$ . Le moment en A des forces appliquées par la bague extérieure sur la bille se décompose en un moment  $M_{N_o}$  normal au plan de l'ellipse et un moment tangent  $M_{T_o}$  dans le plan de l'ellipse. Ce moment  $M_{T_o}$  a pour composantes un moment  $M_{R_o}$  dans le plan  $(A, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$  et un moment  $M_{X_o}$  suivant l'axe  $\vec{X}_1$ .

**Bague intérieure** Les forces et les moments de contact au point B sont représentées sur la figure IV-29. La résultante des forces de contact exercées par la bague intérieure sur la bille au point B se décompose en une force notée  $Q_i$  normale au plan de l'ellipse et une force tangentielle  $T_i$  comprise dans le plan de l'ellipse de contact. Cette force tangentielle  $T_i$  se décompose en une composante notée  $T_{Ri}$  dans le plan  $(B, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$  et une autre notée  $T_{X_i}$  suivant l'axe  $\vec{X}_1$ . Le moment en A des forces appliquées par la bague intérieure sur la bille se décompose en un moment  $M_{N_i}$  normal au plan de l'ellipse et un moment tangent  $M_{T_i}$  dans le plan de l'ellipse. Ce moment  $M_{T_i}$  a pour composantes un moment  $M_{R_i}$  dans le plan  $(B, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$  et un moment  $M_{X_i}$  suivant l'axe  $\vec{X}_1$ .

Les forces de contacts et les moments sont la conséquence des frottements existants entre la bille et les bagues intérieure et extérieure. Ils sont représentés sur la figure IV-29 comme s'opposant au mouvement qui leur donne naissance. Les moments  $M_{R_o}$  et  $M_{R_i}$  sont appelés moments de résistance au roulement.  $M_{N_o}$  et  $M_{N_i}$  sont, eux, les moments de conformité.

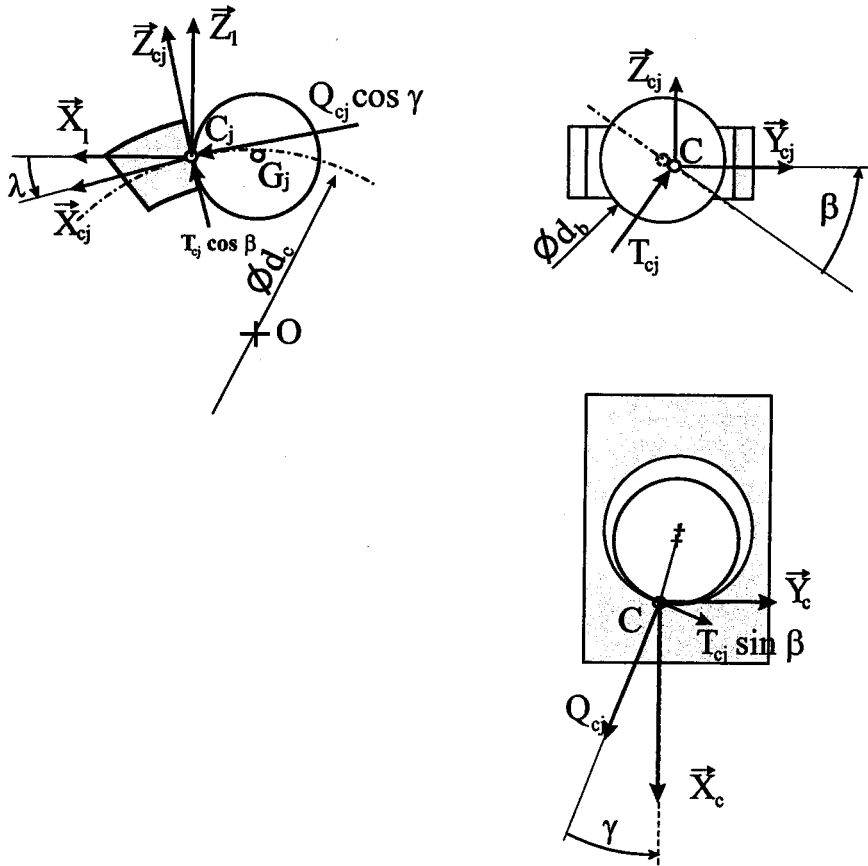


FIG. IV-30 – Forces et moments appliqués par la  $j^{\text{ième}}$  bille sur la cage au point  $C_j$ .

#### IV.5.2.B Modélisation des efforts de contact entre la cage et la bille

Le contact entre la cage et la bille est supposé ponctuel et situé sur un diamètre  $d_c$ .

La figure IV-30 montre la disposition des efforts appliqués par la  $j^{\text{ième}}$  bille sur la cage et les repères utilisés pour les calculs.

Le repère  $(C, \vec{X}_{cj}, \vec{Y}_{cj}, \vec{Z}_{cj})$  est obtenu par une rotation, d'angle  $\lambda$  autour de l'axe  $(C, \vec{Y}_1)$  telle que  $\vec{X}_{cj}$  soit colinéaire et opposée à la normale au contact (tangent au cercle de diamètre  $d_c$ ). L'angle  $\lambda$  vaut (voir triangle COG) :

$$\lambda = \arcsin \frac{d_b}{d_c} \quad (\text{IV-141})$$

Les forces de contact de la bille sur la cage sont supposées réduites au point C à une force normale  $Q_c$  normale au contact telle que  $\vec{Q}_c = Q_c (\cos \gamma \vec{X}_{cj} - \sin \gamma \vec{Y}_{cj})$  et une force tangentielle  $\vec{T}_c$ , située dans le plan tangent à la bille au point C et de même direction que la vitesse de glissement notée  $\vec{V}_{C \in b/c}$  du point C appartenant à la bille par rapport à la cage. La valeur de cette vitesse de glissement est donnée par :  $(-\Omega_b \cos \beta \cdot \vec{Y}_{cj} + \Omega_b \sin \beta \cdot \vec{Z}_{cj}) \wedge \frac{d_b}{2} \cdot \vec{X}_{cj}$  d'où :

$$\vec{V}_{C \in b/c} = \frac{d_b}{2} \Omega_b \sin \beta \cdot \vec{Y}_{cj} + \frac{d_b}{2} \Omega_b \cos \beta \cdot \vec{Z}_{cj} \quad (\text{IV-142})$$

On suppose que le frottement entre la bille et la cage suit une loi de Coulomb et la force  $\vec{T}_c$ , orientée dans la direction de  $\vec{V}_{C \in b/c}$ , est telle que :

$$\vec{T}_c = \mu_c Q_c \text{sign}(\vec{V}_{C \in b/c}) = \mu_c Q_c \text{sign}(\Omega_b) \quad (\text{IV-143})$$

Le signe de  $\vec{V}_{C \in b/c}$  est en effet donné par le sens de rotation de la bille/cage, donc par le signe de  $\Omega_b$ .

Pour établir la formulation de la force appliquée à la bille par la cage, cette dernière est supposée parfaitement centrée sur l'axe du roulement. On considère également que la force normale  $Q_c$  peut être dirigée vers la bille ou vers la cage, pour rendre compte des sens de rotation.

### IV.5.2.C Modélisation des efforts aérodynamiques sur la bille

Nous allons utiliser la modélisation de Nelias [71] pour le calcul des efforts aérodynamiques sur la bille.

La vitesse du centre de gravité de la bille dans le repère fixe est donnée par  $V_G = \frac{d_m}{2} \Omega_c$ . La surface exposée à l'air lors de l'avancement est le maître-couple (surface frontale) de la bille ( $\pi d_b^2/4$ ), dont est déduite la surface à l'abri de la cage d'épaisseur  $e_c$ , soit :

$$S_a = \pi \frac{d_b^2}{4} - e_c d_b \quad (\text{IV-144})$$

La force du fluide sur la bille opposée à la vitesse est donnée par :

$$F_a = \frac{1}{2} \rho_a C_{xp} S_a \left( \frac{d_m}{2} \Omega_c \right)^2 \text{sign} \Omega_c \quad (\text{IV-145})$$

Le coefficient  $C_{xp}$  est l'équivalent du coefficient de traînée aérodynamique due aux efforts de pression appliqués à la bille ( $C_x$  de pression). Il est de l'ordre de 0,4 à 0,5 lorsque le nombre de Reynolds  $Re = (d_b d_m \Omega_c)/\nu_a$  varie de  $10^3$  à  $2.10^5$  [71].

## IV.5.3 Calcul des efforts appliqués à la cage

### IV.5.3.A Principe fondamental de la dynamique appliqué à la cage

Les efforts appliqués par chacune des billes sont supposés égaux et le mouvement de la cage est une rotation d'axe  $(0, \vec{Y}_1)$ .

**Equation des résultantes appliquées à la cage** Le mouvement de la cage est assimilé à une rotation suivant l'axe du roulement, par conséquent la somme des efforts appliqués à la cage est nul. L'équation des résultantes appliquées à la cage donne :

$$\sum_{j=1}^Z \left( \vec{Q}_{C_j \in b/c} + \vec{T}_{C_j \in b/c} \right) = \vec{0} \quad (\text{IV-146})$$

$C_j$  est le point d'application de la force  $\vec{Q}_{Cj}$  au point  $C_j$  entre la  $j^{ieme}$  bille et la cage. Ce qui donne alors :

$$\sum_{j=1}^Z \begin{pmatrix} (Q_c \cos \gamma + T_c \sin \beta \sin \gamma) \vec{X}_{Cj} \\ +(-Q_c \sin \gamma + T_c \sin \beta \cos \gamma) \vec{Y}_{Cj} \\ +T_c \cos \beta \vec{Z}_{Cj} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (\text{IV-147})$$

En supposant la même répartition des efforts en chacun des Z points de contact entre les billes et la cage, la relation (IV-147) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} (Q_c \cos \gamma + T_c \sin \beta \sin \gamma) \sum_{j=1}^Z \vec{X}_{Cj} \\ +(-Q_c \sin \gamma + T_c \sin \beta \cos \gamma) \sum_{j=1}^Z \vec{Y}_{Cj} \\ +T_c \cos \beta \sum_{j=1}^Z \vec{Z}_{Cj} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (\text{IV-148})$$

Soit  $\phi_{Cj}$  l'angle formée, à l'instant t, par le repère  $R_{Cj}$  lié à la cage au point  $C_j$  et le repère fixe. On peut écrire :

$$\phi_{Cj} = \frac{2\pi}{Z} j + \Omega_c t \quad (\text{IV-149})$$

où  $\Omega_c$  est la vitesse de rotation de la cage autour de  $(O, \vec{Y}_0)$  et j est l'indice de la bille. On a alors :

$$\vec{X}_{Cj} = -\sin \phi_{Cj} \vec{X}_0 + \cos \phi_{Cj} \vec{Z}_0 \quad (\text{IV-150})$$

$$\vec{Y}_{Cj} = \vec{Y}_0 \quad (\text{IV-151})$$

$$\vec{Z}_{Cj} = \cos \phi_{Cj} \vec{X}_0 + \sin \phi_{Cj} \vec{Z}_0 \quad (\text{IV-152})$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} -(Q_c \cos \gamma + T_c \sin \beta \sin \gamma) \sum_{j=1}^Z \sin \phi_{Cj} + T_c \cos \beta \sum_{j=1}^Z \cos \phi_{Cj} \\ +Z (-Q_c \sin \gamma + T_c \sin \beta \cos \gamma) \\ +(Q_c \cos \gamma + T_c \sin \beta \sin \gamma) (-\sum_{j=1}^Z \cos \phi_{Cj}) + T_c \cos \beta \sum_{j=1}^Z \sin \phi_{Cj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV-153})$$

La première et la troisième ligne de cette relation conduisent toutes deux à des expressions identiquement nulles. La deuxième coordonnée permet de déterminer la valeur de l'angle  $\gamma$ .

**Equation des moments appliqués à la cage** L'équation dynamique des moments appliqués à la cage donne :

$$\sum_{j=1}^Z \left( O\vec{C}_j \wedge \vec{Q}_{Cj} + O\vec{C}_j \wedge \vec{T}_{Cj} \right) - M_{res} \vec{Y}_0 = J_c \Omega_c \vec{Y}_0 \quad (\text{IV-154})$$

où l'inertie de la cage par rapport à son axe de rotation  $\vec{Y}_0$  est notée  $J_c$ .

$M_{res}$  est un moment résistant appliqué à la cage dû à l'écoulement de différents fluides en contact avec la cage en rotation. Ces fluides sont l'air ambiant et le fluide de lubrification.

L'équation (IV-154) écrite dans le repère  $R_{Cj}$  devient :

$$\sum_{j=1}^Z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d_c}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Q_c \cos \gamma \\ -Q_c \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^Z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d_c}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T_c \sin \beta \sin \gamma \\ T_c \sin \beta \cos \gamma \\ T_c \cos \beta \end{pmatrix} - M_{res} \vec{Y}_0 = J_c \Omega_c \vec{Y}_0 \quad (\text{IV-155})$$



La coordonnée suivant l'axe  $\vec{Y}_0$  donne :

$$Z \frac{d_c}{2} Q_c \cos \gamma + Z \frac{d_c}{2} T_c \sin \beta \sin \gamma - M_{res} = J_c \dot{\Omega}_c \quad (\text{IV-156})$$

D'après (IV-143) on déduit, pour l'effort normal, la relation :

$$Q_c = \frac{2 J_c \dot{\Omega}_c + 2 M_{res}}{Z d_c (\cos \gamma + \mu_c \text{sign}(\Omega_b) \sin \beta \sin \gamma)} \quad (\text{IV-157})$$

L'effort tangentiel prend alors la forme :

$$T_c = \mu_c \text{sign}(\Omega_b) \frac{2 J_c \dot{\Omega}_c + 2 M_{res}}{Z d_c (\cos \gamma + \mu_c \text{sign}(\Omega_b) \sin \beta \sin \gamma)} \quad (\text{IV-158})$$

Notons que la force  $Q_c$  est directement orientée dans la bonne direction donnée par  $\Omega_c$ , quelque soit le sens de rotation, ce qui n'est pas le cas de  $T_c$ . Cette force induira un couple de frottement supplémentaire dans le roulement.

#### IV.5.3.B Expression des moments résistants dus aux frottements fluides

Le moment résistant  $M_{res}$  est décomposé en une part aérodynamique, notée  $M_{ra}$ , et une part due aux frottements visqueux avec le lubrifiant, notée  $M_{rh}$ .

**Frottements aérodynamiques sur la cage** Le moment résistant  $M_{ra}$  est supposé prendre la forme suivante [30] :

$$M_{ra} = \frac{\rho_a}{2} C_{xf} S_c \left( \frac{d_c}{2} \Omega_c \right) \frac{d_c}{2} |\Omega_c| \quad (\text{IV-159})$$

$S_c$  est la surface de la cage exposée au fluide,  $\rho_a$  est la masse volumique du fluide et  $\Omega_c$  est la vitesse de rotation de la cage. La valeur absolue permet de modéliser une force constamment opposée au déplacement quelque soit le sens de rotation, plus précisément quelque soit le signe de  $\Omega_c$ .

$C_{xf}$  est un coefficient de frottement aérodynamique (dit  $C_x$  de frottement) qui est une fonction du nombre de Reynolds  $\mathcal{R}e$ , qui détermine les caractéristiques de l'écoulement autour de la cage. Ce nombre sans dimension est donné par un écoulement tangent à la cage :

$$\mathcal{R}e = \frac{V \cdot D_c}{\nu_a} = \frac{\Omega_c \cdot d_c^2}{2 \nu_a} \quad (\text{IV-160})$$

avec  $\nu_a$  la viscosité cinématique (en  $\text{m}^2/\text{s}$ ). L'étude du  $C_x$  est du domaine de l'aérodynamique, et ne sera pas approfondie ici. On se bornera à affirmer que le  $C_{xf}$  évolue avec le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}e$  à une puissance  $p$  ( $-1 < p < 0$ ) pour les faibles valeurs de  $\mathcal{R}e$ , et tend à devenir constant lorsque  $\mathcal{R}e$  dépasse plusieurs millions. Sa valeur est alors uniquement fonction de la qualité de la surface en rotation (rugosité relative).

L'ordre de grandeur dans le cas d'un écoulement tangent à la surface considéré est compris entre  $2 \times 10^{-3}$  (haute vitesse et rugosité très faible) et  $10^{-2}$  (basse vitesse ou forte rugosité).

Dans la pratique, vue la complexité de l'écoulement autour de la cage, il est nécessaire d'identifier l'expression du  $C_x$  par une série d'essai. En effet, le modèle proposé demeure très simple, en regard des phénomènes qu'il tente de simuler. L'écoulement autour de la cage et des billes est probablement tridimensionnel, du fait de l'interaction entre les billes et la cage, d'une part, et le mouvement orbital des billes, d'autre part. La complexité du problème impose souvent l'utilisation de codes de calcul par éléments finis pour connaître l'allure de l'écoulement à chaque vitesse de rotation.

**Frottements visqueux** Dans les roulements haute vitesse, la cage est nécessairement centrée par rapport à une bague [31]. Cela constitue un des choix à disposition de l'utilisateur lors de l'achat. Ce centrage se traduit par un faible jeu radial entre la cage et la bague concernée. Ce faible jeu, associé à de la lubrification entraîne des frottement fluides [67]. Dans le cas d'un centrage de la cage par la bague extérieure (fixe), le couple de frottement peut être calculé par :

$$M_{rh} = \xi_h \tau S_c \frac{D_c}{2} \quad (\text{IV-161})$$

où  $\tau$ ,  $S_c$  désignent respectivement la contrainte de cisaillement du fluide et la surface de la cage en contact avec le fluide.  $\xi_h$  est un coefficient fonction de la seule géométrie de la cage.

La contrainte de cisaillement est fonction de la vitesse de cisaillement donnée par le rapport de la vitesse linéaire de la cage  $d_c \Omega_c / 2$  sur l'épaisseur du film fluide. Le comportement est supposé décrit par le modèle isotherme de fluide non-newtonien du type Ree-Eyring [88, 71] :

$$\tau = \tau_0 \sinh^{-1} \left( \mu_0 \frac{\Omega_c \cdot d_c}{2 j_c \tau_0} \right) \quad (\text{IV-162})$$

avec  $\mu_0$  la viscosité dynamique (en Pa.s) du fluide présent dans le jeu  $j_c$  entre la cage et la bague.  $\tau_0$  est une contrainte de référence. Cette loi présente l'avantage de changer de signe en même temps que le sens de rotation.

Le jeu radial moyen  $j_c$  entre la cage et la bague utilisée pour le centrage est supposé ici être complètement rempli de lubrifiant.

Maintenant que les efforts de la bille sur la cage sont connus, nous allons pouvoir réaliser le calcul de la dynamique de la bille.

#### IV.5.4 Établissement des équations de la dynamique d'une bille

Dans la suite, nous n'avons plus besoin de spécifier la bille considérée puisque les forces appliquées sur chaque bille sont identiques.

##### IV.5.4.A Torseur des actions de contact

Le torseur des forces appliquées en A sur la bille a pour expression (voir figure IV-29) :

$$\left\{ \vec{T}_{A/bille} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} T_{Xo} \\ -Q_o \sin \alpha_o - T_{Ro} \cos \alpha_o \\ -Q_o \cos \alpha_o + T_{Ro} \sin \alpha_o \end{array} \parallel \begin{array}{l} M_{Xo} \\ M_{No} \sin \alpha_o - M_{Ro} \cos \alpha_o \\ M_{No} \cos \alpha_o + M_{Ro} \sin \alpha_o \end{array} \right\} \quad (\text{IV-163})$$

Le torseur des forces appliquées en B sur la bille s'écrit :

$$\left\{ \vec{T}_{A/bille} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} T_{X_i} \\ Q_i \sin \alpha_i - T_{R_i} \cos \alpha_i \\ Q_i \cos \alpha_i + T_{R_i} \sin \alpha_i \end{array} \parallel \begin{array}{l} M_{X_i} \\ +M_{N_i} \sin \alpha_i - M_{R_i} \cos \alpha_i \\ +M_{N_i} \cos \alpha_i + M_{R_i} \sin \alpha_i \end{array} \right\} \quad (IV-164)$$

Dans le cadre de l'hypothèse du contrôle par la bague extérieure, la forces  $T_{R_i}$  est nulle.

Le torseur des forces appliquées en C sur la bille s'écrit :

$$\left\{ \vec{T}_{C/bille} \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} (Q_c \cos \gamma + T_c \sin \beta \sin \gamma) \cos \lambda + T_c \cos \beta \sin \lambda \\ (-Q_c \sin \gamma + T_c \sin \beta \cos \gamma) \\ -(Q_c \cos \gamma + T_c \sin \beta \sin \gamma) \sin \lambda + T_c \cos \beta \cos \lambda \end{array} \parallel \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (IV-165)$$

Il est maintenant possible d'appliquer le principe fondamental de la dynamique aux actions appliquées à la bille.

#### IV.5.4.B Principe fondamental de la dynamique appliqué à la bille

On applique le principe fondamental de la dynamique pour obtenir l'équation des résultantes :

$$\sum \vec{F}_{bagues/bille} = m_b \vec{\Gamma}_{G \in bille/R_0} \quad (IV-166)$$

et l'équation des moments :

$$\sum \vec{M}_{bagues/bille} + \sum G \vec{K} \wedge \vec{F}_{K \in bagues/bille} = \vec{\delta}_{O/R_0} \quad (IV-167)$$

Ces deux équations vectorielles fournissent les 6 équations scalaires d'équilibre sur chacun des axes du repère lié à la cage :

$$T_{X_o} + T_{X_i} - F_a - (Q_c \cos \gamma - T_c \sin \beta \sin \gamma) \cos \lambda - T_c \cos \beta \sin \lambda = m_b \frac{d_m}{2} \dot{\Omega}_c \quad (IV-168)$$

$$-Q_o \sin \alpha_o - T_{R_o} \cos \alpha_o + Q_i \sin \alpha_i + Q_c \sin \gamma - T_c \sin \beta \cos \gamma = 0 \quad (IV-169)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -Q_o \cos \alpha_o + T_{R_o} \sin \alpha_o + Q_i \cos \alpha_i + T_{R_i} \sin \alpha_i \\ +(Q_c \cos \gamma + T_c \sin \beta \sin \gamma) \sin \lambda - T_c \cos \beta \cos \lambda \end{array} \right\} = -m_b \frac{d_m}{2} \Omega_c^2 \quad (IV-170)$$

$$M_{X_o} + M_{X_i} - \frac{d_b}{2} T_{R_i} + \frac{d_b}{2} T_{R_o} = \frac{m_b d_b^2}{10} (\Omega_c \Omega_b \sin \beta) \quad (IV-171)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -M_{N_o} \sin \alpha_o - M_{R_o} \cos \alpha_o + M_{N_i} \sin \alpha_i - M_{R_i} \cos \alpha_i \\ +T_{X_o} \frac{d_b}{2} \cos \alpha_o - T_{X_i} \frac{d_b}{2} \cos \alpha_i + T_c d_b/2 \cos \beta \end{array} \right\} = \frac{m_b d_b^2}{10} (\dot{\Omega}_c - \dot{\Omega}_b \cos \beta) \quad (IV-172)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{N_o} \cos \alpha_o + M_{R_o} \sin \alpha_o + M_{N_i} \cos \alpha_i + M_{R_i} \sin \alpha_i \\ -T_c \frac{d_b}{2} \sin \beta \end{array} \right\} = \frac{m_b d_b^2}{10} (\dot{\Omega}_b \sin \beta) \quad (IV-173)$$

Lors du calcul des angles de contact  $\alpha_i$  et  $\alpha_o$ , les efforts dus à la cage ne sont pas pris en compte et les moments  $M_{X_i}$  et  $M_{X_o}$  sont négligés.

#### IV.5.5 Résolution des équations de la dynamique

Les résultats précédents concernant les angles de contacts  $\alpha_i$  et  $\alpha_o$  sont utilisés pour la résolution des équations de la dynamique. Pour simplifier les expressions, on note :

$$A_1 = -F_a - (Q_c \cos \gamma - T_c \sin \beta \sin \gamma) \cos \lambda - T_c \cos \beta \sin \lambda \quad (IV-174)$$

$$A_2 = -M_{N_o} \sin \alpha_o - M_{R_o} \cos \alpha_o + M_{N_i} \sin \alpha_i - M_{R_i} \cos \alpha_i + T_c d_b/2 \cos \beta \quad (IV-175)$$

Le système des équations (IV-168) et (IV-172) deviennent alors :

$$T_{X_o} + T_{X_i} + A_1 = m_b \frac{d_m}{2} \dot{\Omega}_c \quad (\text{IV-176})$$

$$T_{X_o} \frac{d_b}{2} \cos \alpha_o - T_{X_i} \frac{d_b}{2} \cos \alpha_i + A_2 = \frac{m_b d_b^2}{10} (\dot{\Omega}_c - \dot{\Omega}_b \cos \beta) \quad (\text{IV-177})$$

On a alors :

$$\begin{Bmatrix} T_{X_o} \\ T_{X_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{d_b}{2} \cos \alpha_o & -\frac{d_b}{2} \cos \alpha_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} m_b \frac{d_m}{2} \dot{\Omega}_c - A_1 \\ \frac{m_b d_b^2}{10} (\dot{\Omega}_c - \dot{\Omega}_b \cos \beta) - A_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-178})$$

La force  $T_{X_i}$  intervient directement dans l'expression du moment résistant dans un roulement. Cette expression va à présent être donnée dans la section suivante.

#### IV.5.6 Expression du couple de frottement du roulement

Le couple de frottement du roulement sur son axe de rotation correspond à la somme des efforts et des moments appliqués par les billes sur la bague intérieure. Il est donné par la formule suivante [86]:

$$C_R = -Z \left( \frac{1}{2} T_{X_i} (d_m - d_b \cos \alpha_i) + M_{N_i} \sin \alpha_i + (M_{R_i} + M_{H_i}) \cos \alpha_i \right) \quad (\text{IV-179})$$

Le modèle permet donc de prédire le couple de frottement d'un roulement à billes après une étape d'identification des différents coefficients des lois de frottements. Le calcul des relations entre la force normale au contact et les moments sont donnés en annexe D.

Nous allons pouvoir étudier alors les caractéristiques dynamiques des roulements utilisés dans la MRV du laboratoire.

#### IV.5.7 Application aux roulements utilisés dans la MRV

Pour les applications numériques, les caractéristiques du roulement, les propriétés des fluides présents dans le roulement et divers autres coefficients vont être explicités et, si besoin est, commentés. Ensuite, diverses études seront présentées pour illustrer les phénomènes de frottement dans le roulement.

##### IV.5.7.A Roulement haute vitesse

Le roulement étudié est du type SNFA VEX6/NS avec  $d_b = 3,17$  mm,  $d_m = 11,5$  mm,  $Z = 8$  billes et l'angle  $\alpha_f = 12$  ou  $15^\circ$ . La cage du roulement a une largeur de 6 mm, une inertie  $J_c = 7.10^{-3}$  kg.mm<sup>2</sup> autour de l'axe Y. Elle est réalisée en fibres de coton phénolique imprégnées de résines époxydes.

##### IV.5.7.B Propriétés des fluides

Nous allons détailler les caractéristiques des fluides présents dans le roulement à billes qui seront utilisées dans les calculs.

type	Neopentylpoly-ol(tetra)ester	
spécification	MIL-L-23699	
Caractéristiques à 100°C		
$\tau_0$	156	kPa
viscosité cinématique	5.2	$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
densité	0.931	
coeff de piézo-viscosité $\lambda$	3,41	GPa <sup>-1</sup>

TAB. IV-15 – Caractéristiques du lubrifiant.

**Lubrifiant** Les caractéristiques des propriétés des fluides choisis pour les calculs sont extraites des travaux de Pinel *et al.*[89] sur la comparaison entre la lubrification par jet d'huile ou brouillard d'huile dans les roulements haute vitesse.

La valeur de la contrainte de cisaillement de référence  $\tau_0$  est extraite de Nelias [71]. On a choisi les propriétés du fluide à une température moyenne de 100°C, pour prendre en compte l'échauffement du roulement. Les données concernant le lubrifiant sont regroupées dans le tableau IV-15.

Tous les paramètres du modèle de frottement fluide visqueux entre la cage et les billes sont connus. On supposera que le fluide a des propriétés constantes quelque soit la vitesse de rotation (pas d'influence de la centrifugation). Le film fluide présent entre la cage et une bille est supposé rester d'épaisseur constante (cage centrée, pas d'échappement du fluide en dehors du roulement).

**Air ambiant** La viscosité cinématique de l'air est prise égale à  $\nu_a = 15.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Sa masse volumique est supposée constante est égale à  $\rho_a = 1,2 \text{ kg}/\text{m}^3$ . Ces caractéristiques sont en réalité fortement influencée par la pression et la température, suivant les lois de thermodynamique. Nous supposerons néanmoins ces données constantes.

#### IV.5.7.C Coefficient de frottement

Jones [65] avait auparavant utilisé pour l'étude des frottements un coefficient de 0,06 à 0,07, qui nous paraît surestimé dans le cas de roulements correctement lubrifiés. Comme suggéré par Harris [67] dans l'étude des frottements dans les roulements lubrifiés, le coefficient de frottement entre une bille et les bagues est dans cette pré-étude supposé égale à  $\mu_r = 0,02$ . Cette même valeur est également utilisée pour les frottements bille-cage.

#### IV.5.7.D Influence de la précharge

La figure (IV-31) présente les variations du couple de frottement que nous avons calculé, lorsque la précharge évolue de 1 N à 100 N, pour différentes vitesses de rotation.

Pour les hautes vitesses, le couple de frottement est essentiellement lié aux frottements fluides qui s'additionnent au couple dû aux frottements de Coulomb. Le couple à 200000 tr/min sous 100 N est

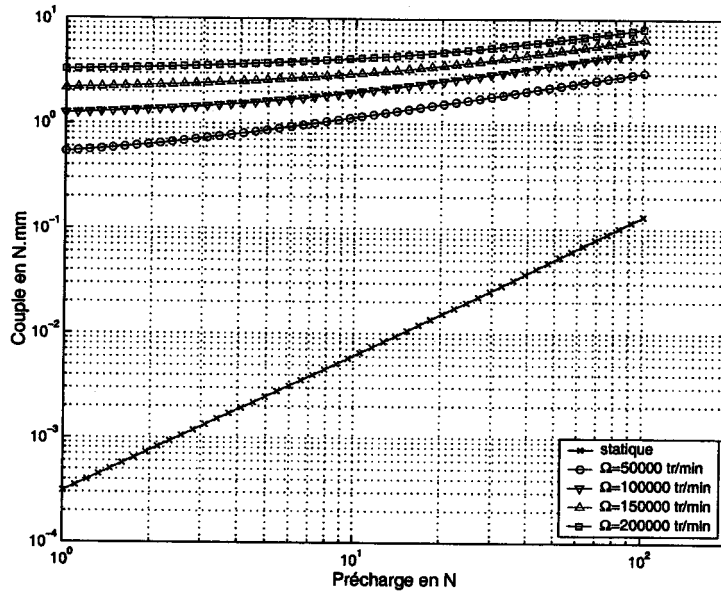


FIG. IV-31 – Couple de frottement dans un roulement VEX 6 /NS (billes céramique  $Si_3N_4$ , angle de contact  $15^\circ$ ) en fonction de la précharge et pour différentes vitesses de rotation  $\Omega$ .

de l'ordre de 7,3 N.mm avec les caractéristiques du lubrifiant choisi.

#### IV.5.7.E Influence de la vitesse

**Couple de frottement** La figure (IV-32) présente les variations du couple de frottement dans le roulement, lorsque la vitesse de rotation évolue d'un fonctionnement quasi statique jusqu'à 200000 tr/min, et pour des précharges de 4 à 64 N.

Le comportement non linéaire avec la vitesse s'accroît avec la charge appliquée. Le couple maximal à 200000 tr/min est de 6,7 N.mm pour la précharge de 64 N.

**Puissance dissipée** La figure (IV-33) présente les variations de la puissance dissipée dans le roulement, lorsque la vitesse de rotation évolue d'un fonctionnement quasi statique jusqu'à 200000 tr/min, et pour des précharges de 4 à 64 N.

Avec les caractéristiques choisies pour les fluides, la puissance dissipée dans un roulement VEX 6/NS à 200000 tr/min est respectivement de 78 W et 170 W pour une précharge de 4 N et 64 N. Cette valeur est cependant très sensible aux propriétés du lubrifiant ou de l'air dans le moteur. Il est donc impératif de connaître avec précision le comportement du fluide, y compris ses variations avec la température.

Cette puissance doit être rapportée aux 6 grammes que pèse le roulement. Sans refroidissement efficace, la température du roulement s'élèverait au delà de la limite admise par le matériau de la cage ( $120^\circ\text{C}$  en fonctionnement permanent [83]).

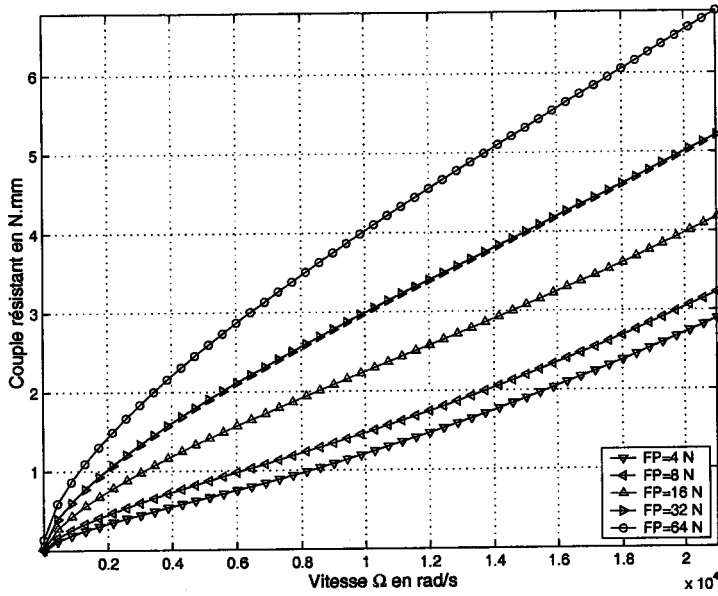


FIG. IV-32 – Couple de frottement dans un roulement VEX 6 /NS (billes céramique  $Si_3N_4$ , angle de contact  $15^\circ$ ) en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  et pour différentes précharges.

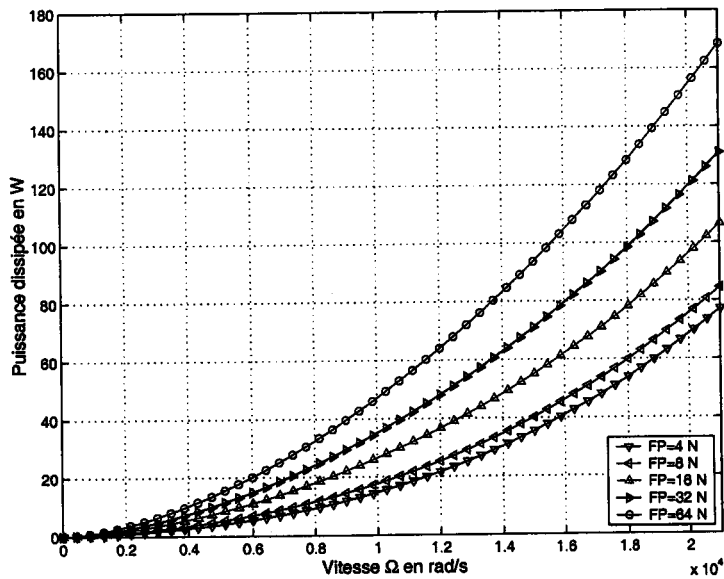


FIG. IV-33 – Puissance dissipée dans un roulement VEX 6 /NS (billes céramique  $Si_3N_4$ , angle de contact  $15^\circ$ ) en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  et pour différentes précharges.

#### IV.5.7.F Influence de l'angle de contact

Les roulements actuellement utilisés dans la machine à réluctance variable présentent un angle de contact de  $15^\circ$ . La possibilité d'utiliser un angle plus faible ( $12^\circ$ ) ou plus grand ( $18^\circ$ ) est proposée dans les catalogues, sans qu'il soit aisé d'imaginer a priori l'avantage que cela peut présenter. La figure IV-34 présente l'évolution du couple de frottement statique en fonction de la précharge appliquée, et pour différents angles  $\alpha_f$  de  $10^\circ$ ,  $12^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $18^\circ$  et  $25^\circ$ .

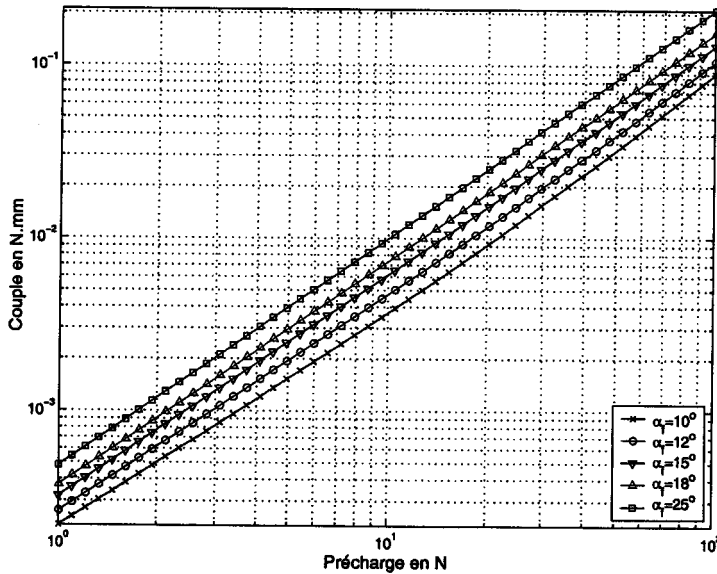


FIG. IV-34 – Couple statique d'un roulement du type VEX 6 /NS (billes céramique  $Si_3N_4$ ) en fonction de la précharge appliquée, et pour différents angles de contact.

La nette dépendance du couple statique avec l'angle de contact est ainsi vérifiée. Le couple de frottement d'un roulement avec un angle de  $10^\circ$  est de 32% inférieur à celui d'un roulement à  $15^\circ$ . En revanche, le couple de frottement d'un roulement avec un angle de  $25^\circ$  est de 50% supérieur à celui d'un roulement à  $15^\circ$ . En ce qui concerne le couple statique, il peut paraître intéressant d'utiliser un angle de contact faible.

La figure IV-35 présente l'évolution du couple de frottement en fonction de la vitesse de rotation pour une précharge appliquée de 25 N, et pour différents angles  $\alpha_f$  de  $10^\circ$ ,  $12^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $18^\circ$  et  $25^\circ$ .

On remarque ici que l'influence de l'angle n'est pas la même lorsque la vitesse évolue. En fonctionnement quasi-statique, l'influence du couple confirme les résultats de la figure IV-34. Cependant lorsque la vitesse est comprise entre 1000 tr/min et 120000 tr/min environ, le couple de frottement est plus faible pour les grands angles que pour les angles faibles. Au delà de cette vitesse de 120000 tr/min, le couple de frottement devient nettement plus grand lorsque les angles sont prononcés.



#### IV.5.8 Représentation en schéma-bloc du modèle du couple de frottement

Nous pouvons à présent définir le schéma bloc du modèle obtenu. Le modèle est présenté sur la figure IV-36. Le modèle fournit en sortie le couple de frottement du roulement. Le système a pour entrées la géométrie du roulement, sa vitesse et son accélération. Le modèle a également en entrées les efforts et les angles de contact ainsi que la dimensions des contacts.

#### IV.5.9 Conclusions sur le couple de frottement dans un roulement à billes

Dans ce paragraphe, nous avons étudié la cinématique d'un roulement à billes puis les efforts appliqués à la bille. En appliquant le principe fondamentale de la dynamique, nous sommes parvenus à établir l'expression du couple de frottement du roulement en fonction de la précharge appliquée et des propriétés des fluides à l'intérieur du roulement (lubrifiant et air). Un exemple de roulement a été utilisé afin d'illustrer les résultats en terme de couple de frottement et de puissance dissipée. Les influences de la précharge, de la vitesse et de l'angle de contact sur le couple de frottement du roulement ont été décrites.

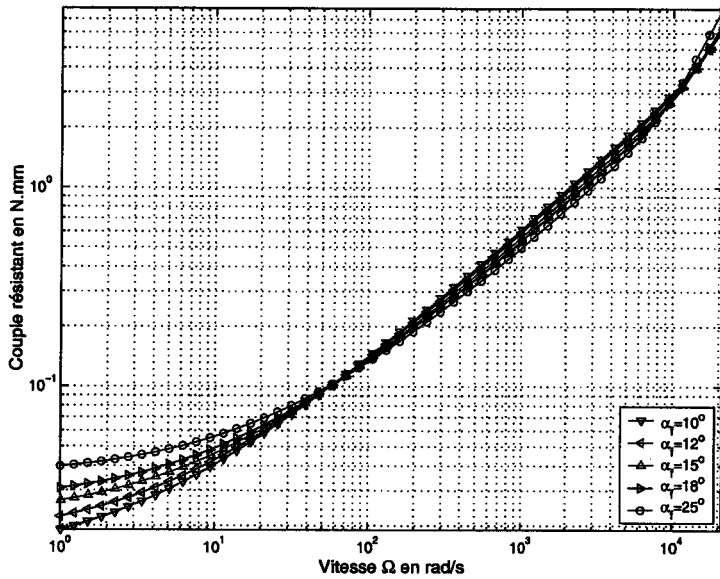


FIG. IV-35 – Couple de frottement d'un roulement du type VEX 6 /NS (billes céramique  $Si_3N_4$ ) en fonction de la vitesse de rotation pour une précharge appliquée de 25 N, et pour différents angles de contact.

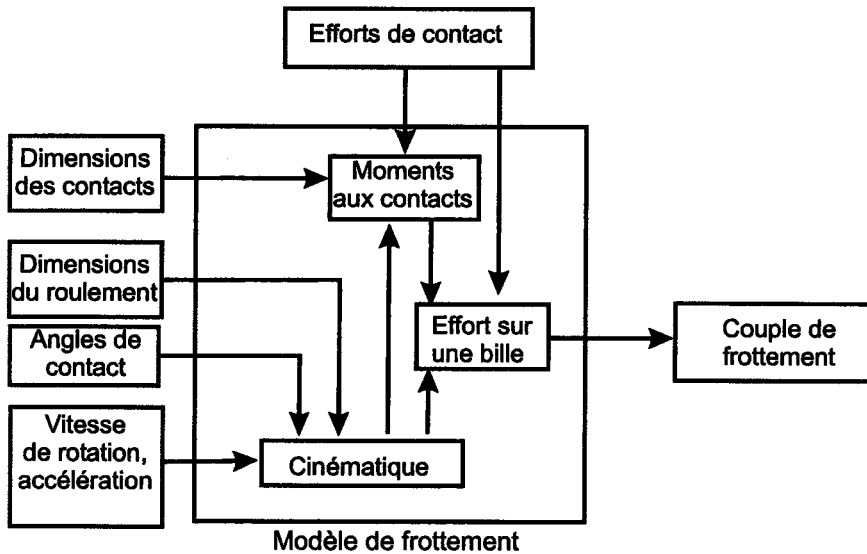


FIG. IV-36 – Modèle du couple de frottement sous forme de schéma-bloc.

#### IV.5.10 Conclusion sur l'étude des paliers

L'étude sur les paliers haute vitesse a recensé les différentes catégories de paliers et les critères de choix d'un palier dans une application grande vitesse.

La méthode de calcul des angles de contact a d'abord été explicitée. A partir de l'étude de la cinématique dans le roulement, les efforts appliqués à la bille ont permis d'obtenir les équations donnant les angles de contact. La résolution explicite proposée permet en 3 itérations d'obtenir la valeur des angles de contact avec une bonne précision (moins de 0,1% en moyenne).

La théorie de Hertz a ensuite été détaillée et une solution approchée permettant une résolution explicite a été proposée. Les dimensions de l'ellipse, la pression de contact et les déformations des contacts sont approchés à moins de 0,2% pour les dimensions de l'ellipse de contact et la pression de contact, et moins de 0,35% pour la déformation des solides.

La matrice de rigidité d'un roulement à billes soumis à une précharge purement axiale a alors été calculée à partir de l'énergie de déformation des billes, afin de réaliser des études vibratoires du rotor. L'influence de l'angle de contact, de la précharge et de la vitesse a été détaillé.

La modélisation du couple de frottement dans le roulement à billes à contact oblique a été étudiée afin de connaître avec plus de précision la dynamique de l'électrobroche autour de son axe de rotation. Un modèle permettant de connaître l'influence de l'angle de contact, de la vitesse et de la précharge sur le couple de frottement a été développé.

Ces résultats permettent de compléter le modèle mécanique et thermique de la MRV afin de mieux connaître son comportement et les performances dont elle est capable.

## IV.6 Modélisation des échanges thermiques dans la MRV

De très nombreux auteurs ont traité les problèmes d'échanges thermiques afin de calculer la circulation des flux de chaleurs dans un solide.

Pour une étude des problèmes généraux de transfert de chaleur, on pourra se reporter, entre autres, aux ouvrages de Leontiev [90] et d'Eyglunent [91] ou encore ceux de Carslaw et Jaeger [92] et Padet [93] respectivement pour des échanges par conduction ou des échanges par convection.

Evaluer les échanges thermiques dans la MRV consiste à pouvoir prédire les limites admissibles en terme de dissipation de chaleur et permet de dimensionner un dispositif visant à extraire cette chaleur du moteur.

L'objectif de cette partie est de modéliser les échanges thermiques dans la MRV et de relier les diverses pertes produites dans le moteur à l'échauffement subi par ce dernier.

### IV.6.1 Recensement des pièces constitutives

Nous allons dans un premier temps, modéliser le moteur avec la totalité des pièces majeures qui le constituent.

Au niveau du stator sont recensées les dents (indice  $d$ ) et la culasse statorique (indice  $c$ ) ainsi que les bobines (indice  $b$ ).

Au niveau du rotor, on dénombre le noyau magnétique (indice  $n$ ) l'axe traversant (indice  $a$ ) ainsi que 2 flasques de positionnement (indice  $f$ ).

Les roulements sont décomposés en bague intérieure (indice  $bi$ ), bague extérieure (indice  $bo$ ) et éléments roulants (indice  $el$ ). La cage n'est pas modélisée, le flux la traversant étant supposé faible (cage en polymère). Elle ne contribue qu'à générer des pertes par frottement (qui seront rapportées aux interfaces bille/bague).

Le bâti moteur est composée d'un carter (indice  $e$ ) qui assure le positionnement du stator et deux flasques (indice  $f$ ) qui positionnent les roulements (et donc le rotor) par rapport au carter.

### IV.6.2 Gaz interne au moteur

Le gaz à l'intérieur du moteur est supposé être à une température uniforme. Du fait de la rotation du rotor, le brassage de l'air est tel que cette hypothèse est justifiée. La température de l'air (ou du gaz) est notée  $T_i$ .

### IV.6.3 Pertes dans la MRV

Toutes les indices des pertes font référence au type de pertes considérées (Majuscule) et à la pièce où elles sont injectées dans le modèle.

Les pertes joules (indice  $J$ ) sont dissipées uniquement dans les bobines stator, puisque dans le cas d'une MRV il n'y a pas de bobinage au rotor (rotor froid). Dans les bobines de résistance  $R$  et

parcourue par un courant efficace  $I_{eff}$ , les pertes joules sont donc notées  $P_{Jb}$  et données par :

$$P_{Jb} = R I_{eff}^2 \quad (IV-180)$$

En revanche, les pertes fer (indice F) sont dissipées au rotor (dans le noyau) et au stator. Les pertes fer du noyau sont notées  $P_{Fn}$ . Les pertes fer du stator sont séparées en 2 parties : les pertes dans les dents notées  $P_{Fd}$  et les pertes dans la culasse statorique notées  $P_{Fc}$ . Dans une approche simplifiée (induction sinoïdale), les pertes fer massiques dans des tôles d'épaisseur  $e$  parcourue à la fréquence  $f$  par une induction d'amplitude  $B_{max}$  peuvent s'écrire sous la forme [13]:

$$P_{Fd} = K_H f B_{max}^2 + K_F (e f B_{max})^2 \quad (IV-181)$$

où les coefficients  $K_H$  et  $K_F$  sont obtenus à partir des courbes des fabricants.  $K_H$  et  $K_F$  sont respectivement de  $0,05 \text{ J/kg/T}^2$  et  $0,2 \text{ W/kg/T}^2$ .

Nous avons choisi de différencier les pertes fer dans les dents afin de dissocier l'induction  $B_{max}$  dans les dents de celle dans la culasse (fonctionnement à saturation qui induit de fortes pertes volumiques).

Du point de vue électrique, nous avons modélisé les pertes par courant de Foucault (indice E en référence à "Eddy current") dans les flasques de positionnement du noyau. Selon le matériau choisi, ces derniers peuvent être conducteurs et générer un échauffement supplémentaire par induction, le champ magnétique qui les traverse est en effet variable. Ces pertes sont notée  $P_{Efq}$ .

Les pertes mécaniques (indice M) dans les roulements à billes dont une fraction est dissipée au contact intérieur (notée  $P_{Mbi}$ ) et l'autre partie est dissipée au contact extérieur (notée  $P_{Mbo}$ ).

Les pertes par frottement aérodynamiques (indice A) dans le moteur sont supposées être transmises au fluide interne. Elles sont notée  $P_{Ai}$ .

#### IV.6.4 Schéma des échanges thermiques

La figure IV-37 présente les différents échanges susceptibles de se produire entre les pièces du moteur. Chaque flux de chaleur est indiqué et la température de pièces est notée. Ces grandeurs sont autant d'inconnues du problème. Les entrées du système sont les pertes dans la MRV. Les inconnues sont au nombre de 37. Le schéma des échanges met clairement en évidence la position centrale du fluide interne au moteur (ici l'air) dans les échanges.

#### IV.6.5 Mise en équation du modèle thermique de la MRV

Pour un noeud du réseau thermique, nous avons la relation suivante :

$$\sum \Phi_{entrants} + Pertes - \sum \Phi_{sortants} = 0 \quad (IV-182)$$

Le flux de chaleur donnée par la pièce  $i$  à la pièce  $j$  du système est noté  $\Phi_{ij}$ . Pour chaque flux du réseau thermique, nous pouvons écrire une relation du type :

$$T_i - T_j = R_{ij} \Phi_{ij} \quad (IV-183)$$

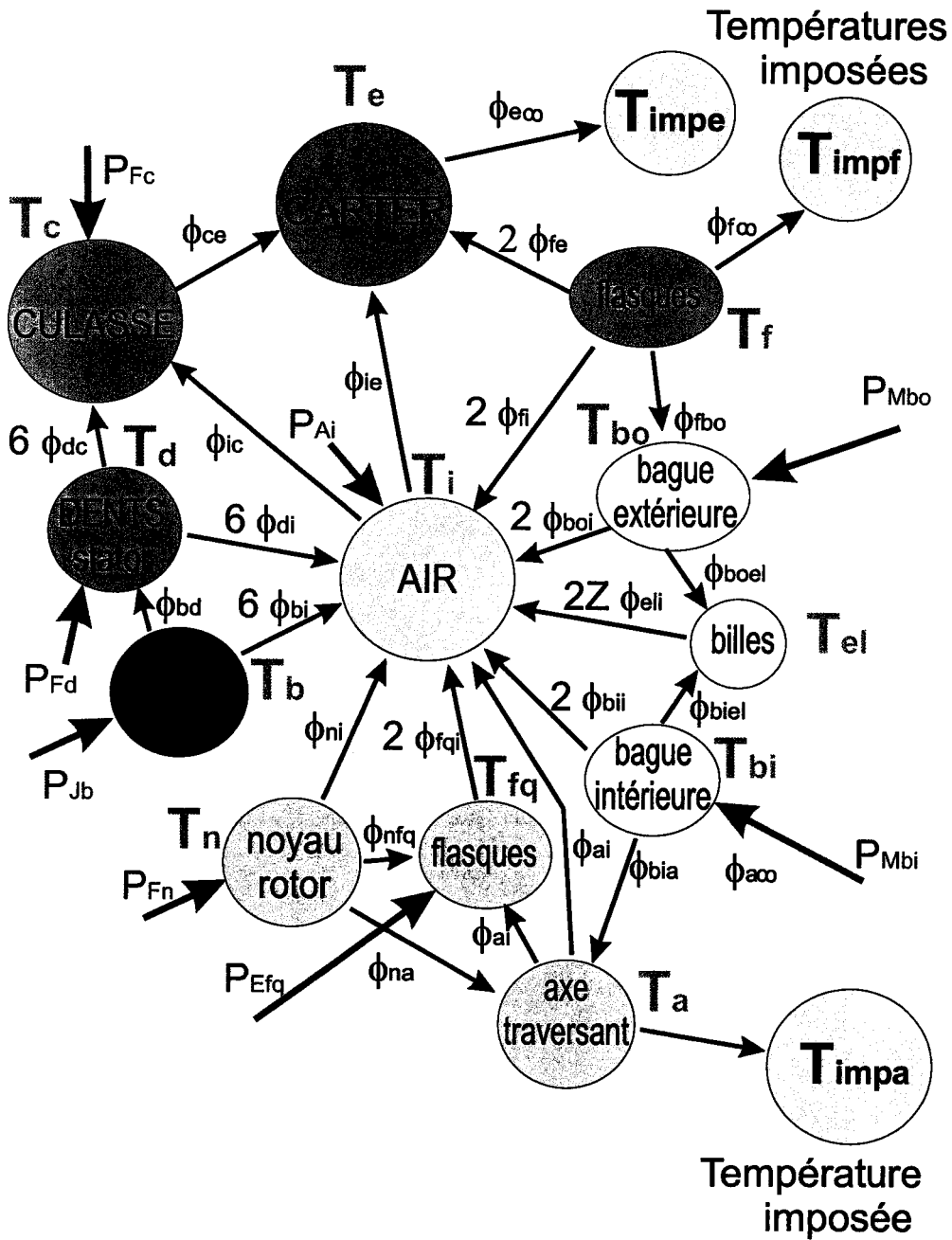


FIG. IV-37 - Réseau des échanges dans la MRV.

$R_{ij}$  est appelée résistance thermique associée aux échanges de chaleur de  $i$  avec  $j$ .

Nous pouvons regrouper tous les flux de chaleur pour former un vecteur colonne noté  $\Phi$  (dimension  $25 \times 1$ ). De même, les inconnues de température sont regroupées dans un vecteur noté  $\Theta$  (dimension  $12 \times 1$ ). Les températures imposées au système sont regroupées dans un autre vecteur noté  $\Theta_{imp}$ , (dimension  $3 \times 1$ ). On pose alors :

$$\mathbf{X} = \{\Phi, \Theta, \Theta_{imp}\}^T \quad (\text{IV-184})$$

$\Theta$  donne la répartition de température dans le moteur. On définit par ailleurs le vecteur des pertes du système noté  $\mathbf{P}$ , qui regroupe les puissances dissipées aux divers endroits du système. L'exploitation des 40 équations du système (12 relations flux-puissances, 25 relations flux-température, et 3 égalités pour imposer les températures) permet d'écrire le vecteur entrée du système :

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{P}, 0, \Theta_{imp}\}^T \quad (\text{IV-185})$$

L'expression des vecteurs  $\Phi$ ,  $\Theta$ ,  $\Theta_{imp}$  et  $\mathbf{P}$  sont les suivantes :

$$\Phi = \{\Phi_{bd}, \Phi_{bi}, \Phi_{dc}, \Phi_{di}, \Phi_{ce}, \Phi_{ic}, \Phi_{ie}, \Phi_{fe}, \Phi_{eoo}, \Phi_{fi}, \Phi_{fo}, \Phi_{bof}, \Phi_{boel}, \dots \quad (\text{IV-186})$$

$$\dots \Phi_{boi}, \Phi_{eli}, \Phi_{biel}, \Phi_{bia}, \Phi_{bii}, \Phi_{ni}, \Phi_{nfg}, \Phi_{na}, \Phi_{afq}, \Phi_{fq}, \Phi_{ai}, \Phi_{ao}\}^T \quad (\text{IV-187})$$

$$\Theta = \{T_b, T_d, T_c, T_e, T_i, T_f, T_{bo}, T_{el}, T_{bi}, T_a, T_n, T_{fq}\}^T \quad (\text{IV-188})$$

$$\Theta_{imp} = \{T_{impe}, T_{impf}, T_{impa}\}^T \quad (\text{IV-189})$$

$$\mathbf{P} = \{P_{Jb}, P_{Fd}, P_{Fc}, 0, 0, P_{Mo}, 0, P_{Mi}, P_{Fn}, P_{Efq}, 0, P_{Ai}\}^T \quad (\text{IV-190})$$

$T_{impe}$  et  $T_{impf}$  sont les températures imposées respectivement au niveau du carter et des flasques.  $T_{impa}$  est la température de l'air au niveau de l'axe sortant.

La matrice thermique est de dimension  $40 \times 40$ . Le calcul montre qu'elle peut être écrite sous la forme :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & -\mathbf{R}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-191})$$

où  $\mathbf{R}_{11}$ ,  $\mathbf{R}_{21}$ ,  $\mathbf{R}_{22}$ ,  $\mathbf{R}_{23}$  sont des sous-matrices thermiques, respectivement de dimension  $12 \times 25$ ,  $25 \times 25$ ,  $25 \times 12$  et  $25 \times 3$ .  $\mathbf{I}_{33}$  désigne la matrice identité ( $3 \times 3$ ).  $\mathbf{R}_{21}$  est diagonale. L'expression de chaque matrice est donnée en annexe E.

Le système d'équations prend donc la forme suivante :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} \quad (\text{IV-192})$$

A partir des expressions de chacun des vecteurs et des matrices, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \\ \Theta_{imp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & -\mathbf{R}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Theta_{imp} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-193})$$

La résolution du système permet d'écrire le vecteur des températures recherchées sous la forme :

$$\Theta = (\mathbf{R}_{11} \mathbf{R}_{21}^{-1} \mathbf{R}_{22})^{-1} \mathbf{P} + (\mathbf{R}_{11} \mathbf{R}_{21}^{-1} \mathbf{R}_{22})^{-1} \mathbf{R}_{11} \mathbf{R}_{21}^{-1} \mathbf{R}_{23} \Theta_{\text{imp}} \quad (\text{IV-194})$$

La répartition des températures dans le moteur est donc fonction des conditions limites de températures  $\Theta_{\text{imp}}$  et des pertes  $\mathbf{P}$  dans le moteur.

Pour finir la modélisation de la thermique du moteur, il nous reste à définir les résistances thermiques qui composent la diagonale de la sous-matrice  $\mathbf{R}_{21}$ .

#### IV.6.6 Echanges dans la MRV équipée du rotor de Fayard [1]

Nous allons appliquer le modèle à la MRV du laboratoire dans laquelle est monté le rotor de Fayard. Du point de vue thermique, ce rotor est équipée d'un axe traversant en acier, et un enrobage en kevlar-epoxy dont les propriétés sont proches de celle d'un isolant thermique.

Les pertes fer (par hystérésis et par courant de Foucault) dans le noyau, les dents et la culasse statorique sont calculées en fonction de l'épaisseur et des propriétés du matériau des tôles, et en fonction de l'amplitude et de la fréquence de variation de l'induction dans chaque partie magnétique [13].

**Répartition des températures dans le moteur** Les figures IV-38(a) à (d) présentent la répartition de la température dans un plan radial passant par une dent statorique, respectivement à une vitesse de 50000, 100000, 150000 et 200000 tr/min. La précharge appliquée aux roulements est de 10 N.

La température de la bobine varie entre 90°C et 140°C lorsque la vitesse passe de 50000 à 200000 tr/min. Jusqu'à 100000 tr/min, la bobine et la dent stator sont les points chauds du moteur. Au delà de 100000 tr/min, l'ensemble axe et noyau est le point le plus chaud du moteur atteignant jusqu'à 190°C.

**Température maximale dans le moteur en fonction de la vitesse** La figure IV-39 présente l'évolution de la température maximale dans le moteur en fonction de la vitesse de rotation du rotor et pour des précharges  $F_P$  appliquées aux roulements, pour une température imposée au carter de 60°C. A vitesse nulle, la température maximale est de 90°C dans les bobines statoriques. Dans la zone des basses vitesses (moins de 50000 tr/min), la précharge n'a pas d'influence sur la température maximale dans le moteur. Cette dernière augmente progressivement de 90 à 100°C lorsque la vitesse de rotation passe de 0 à 50000 tr/min. Pour les vitesses supérieures à 50000 tr/min, les courbes présentent chacune une vitesse de transition où la courbe de température maximale s'infléchit. La vitesse de rotation où cette transition se produit est d'autant plus basse que la précharge est élevée. Cette transition correspond à la vitesse où les pertes dans les roulements à billes deviennent telles que la température globale du rotor est supérieure à celle des bobinages du stator. Si l'on se fixe une



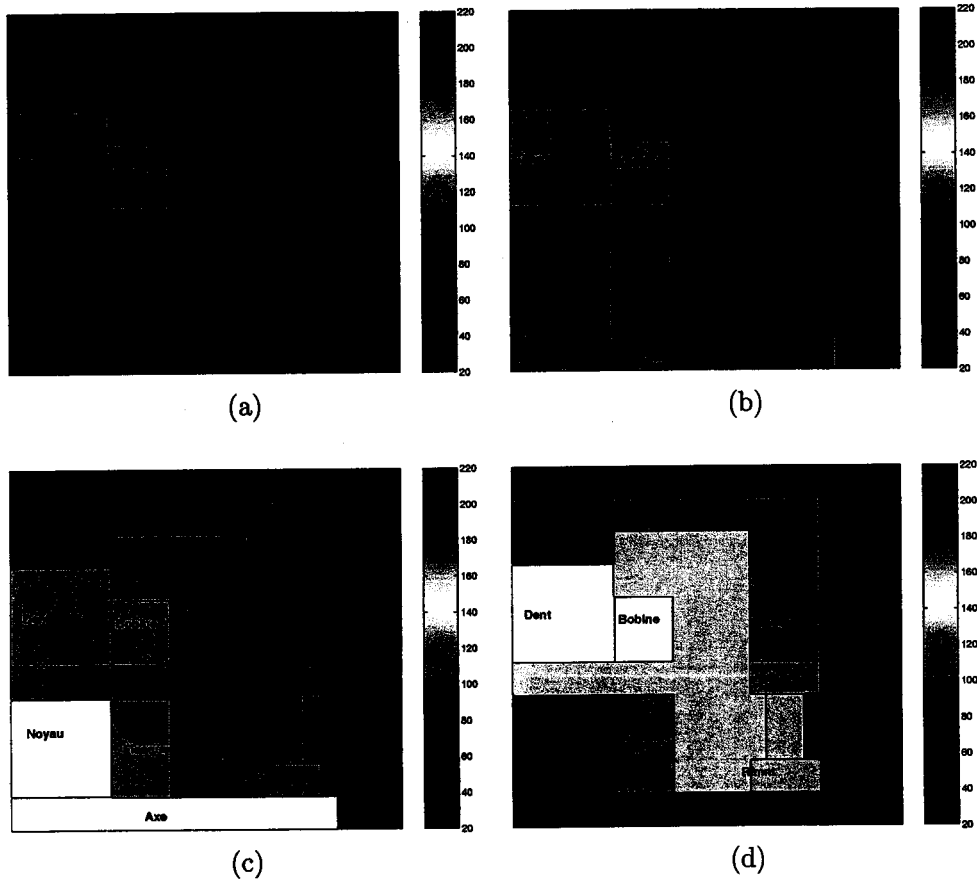


FIG. IV-38 – Représentation schématique de la MRV et de la répartition des températures à des vitesses de rotation de 50000 tr/min (a), 100000 tr/min (b), 150000 tr/min (c) et 200000 tr/min (d). La précharge des roulements est de 10 N, la température imposée au carter est de 60°C.

température maximale de 150°C, on constate l'insuffisance du refroidissement externe pour tourner à 200000 tr/min, puisque la vitesse maximale admissible est de 150000 tr/min pour une précharge de 8 N (minimum préconisé par SNFA).

#### IV.6.7 Conclusion concernant les échanges thermiques dans la MRV

Dans ce paragraphe, nous avons réalisé la modélisation des échanges thermiques en fonction des dimensions et des matériaux des pièces constituant la MRV. Les pertes mécaniques, électriques et magnétiques dans les différentes parties de la machine ont été recensées et calculées.

Nous avons ensuite modélisé les échanges thermiques entre les composants du moteur et établi la matrice thermique de la MRV. La relation entre les pertes dans le moteur et la répartition des températures a été obtenue.

Nous avons enfin illustré le modèle thermique par l'étude de la répartition des températures dans la MRV équipée du rotor actuel à différentes vitesses. Nous avons mis en évidence des températures très élevées (supérieures à 150°C) au rotor lorsque la vitesse dépasse 150000 tr/min. Enfin, l'influence

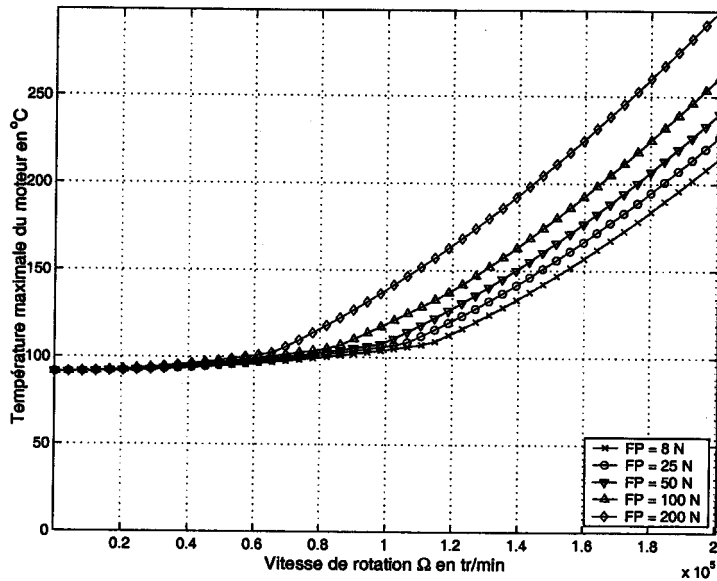


FIG. IV-39 – *Température maximale dans le moteur en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  du rotor et pour différentes précharges  $F_P$  appliquée au roulement (température imposée au carter de  $60^\circ\text{C}$ ).*

de la vitesse  $\Omega$  et de la précharge  $F_P$  appliquées aux roulements sur la température maximale dans le moteur a été décrite. Nous avons pu constater l'importance des pertes dans les roulements sur la température maximale atteinte dans le moteur.

Cette étude permet de connaître les propriétés thermiques de la MRV et d'en déduire la vitesse de rotation maximale admissible à laquelle une température critique est atteinte dans le moteur. Cette limite thermique est définie pour une précharge appliquée aux roulements et un refroidissement limite donnée.

## IV.7 Application des modèles à une électrobroche

Dans ce paragraphe, nous allons illustrer les résultats donnés par les modèles par une étude globale des phénomènes à la fois vibratoire, thermique et de fiabilité d'une électrobroche. Les données de la MRV actuelle seront d'abord utilisées afin de caractériser son domaine de fonctionnement en terme de vitesse admissible et en fonction du réglage des roulements puis, pour la même géométrie, l'influence du choix des matériaux utilisés pour fabriquer le rotor sera présentée.

### IV.7.1 Paramètres de réglage du fonctionnement

La géométrie du rotor étant déjà définie, le seul paramètre mécanique à disposition de l'utilisateur de l'électrobroche est le réglage de la précharge  $F_P$ .

Le système de refroidissement qui assure le refroidissement du carter est également un moyen d'optimisation du fonctionnement. Une température imposée plus basse a pour effet d'augmenter la vitesse de limite thermique.

### IV.7.2 Détermination du domaine de fonctionnement

Nous allons définir une zone dans l'espace (précharge  $F_P$ , vitesse  $\Omega$ ) où le fonctionnement de l'électrobroche pourra être stable et durable.

L'étude vibratoire précédente montre que la dynamique du rotor est d'autant meilleure que la contrainte appliquée est forte (rigidité accrue des roulements).

En réalité, il faut considérer que l'application visée par le projet (usinage grande vitesse) est un processus industriel, qui nécessite une fiabilité maximale, qu'une précharge élevée ne pourrait assurer pour deux raisons :

- la première est une question d'endurance des roulements (durée de vie). Les roulements sont des organes mécaniques sollicités en fatigue : une précharge doublée divise par 8 la durée de vie et les roulements doivent être changés plus fréquemment;
- la seconde est une question d'échauffement : la puissance dissipée croît rapidement avec la précharge, jusqu'à ce que la température soit trop importante, entraînant pèle-mêle la dégradation des propriétés du lubrifiant, le bleuissement des bagues et leur amollissement (traitement thermique), la destruction de la cage en polymère [67].

Par conséquent, afin d'étudier convenablement l'influence de la précharge sur la bonne marche du rotor, les trois vitesses limites vont pouvoir être utilisées : la limite vibratoire, la limite thermique et la limite d'endurance (ou durée de vie).

#### IV.7.2.A Limite vibratoire

L'action de la précharge sur le comportement vibratoire s'effectue en améliorant la rigidité des roulements, qui est une fonction globalement croissante avec la précharge appliquée. A partir des

modèles précédents, on obtient la première pulsation propre (en rad/s) en fonction de la précharge et de la vitesse de rotation. On en déduit directement par simple conversion la vitesse limite  $N_{max1}$  (en tr/min) à laquelle le rotor entre en résonance.

Pour le calcul de la courbe de vitesse limite, nous avons considéré une vitesse maximale admissible valant 80% de la première pulsation propre. A 80% de la vitesse critique, l'amplitude des déformations dynamiques vaut déjà trois fois l'amplitude de flèche statique [32].

#### IV.7.2.B Limite thermique

On appelle limite thermique la température maximale admissible en un point du moteur. La courbe de limite thermique  $N_{max3}$  est calculée pour différentes températures imposées au carter.

Nous avons choisi la température de 150°C. Cette température est la limite admissible en fonctionnement continu par l'isolation des tôles magnétiques [63]. Globalement, aucun point du moteur ne doit dépasser cette valeur limite.

Pour le calcul des pertes dans les roulements qui interviennent dans le bilan thermique de la MRV, les propriétés du fluide lubrifiant sont supposées constantes et calculées pour 120°C. Elles sont  $\tau_0 = 1,56.10^5 Pa$ ,  $\mu_0 = 3,7 10^{-3} Pa.s$ ,  $\nu_0 = 4 10^{-6} m^2/s$ ,  $\rho_0 = 0,92 kg/m^3$  [71].

La courbe de limite thermique est déclinée en fonction de la température imposée au carter de 20, 40, et 60°C.

#### IV.7.2.C Limite d'endurance

La durée de vie d'un roulement à billes peut être exprimée en fonction des efforts aux deux contacts  $Q_i$  et  $Q_o$ . Cette durée de vie exprimée en millions de cycles, est donnée par la formule suivante [67] :

$$L = \left( L_o^{-9/8} + L_i^{-9/8} \right)^{-8/9} \quad (IV-195)$$

avec  $L_o$ , et  $L_i$  les durées de vie de chacun des contacts extérieur et intérieur :

$$L_o = \left( \frac{Q_{co}}{Q_o} \right)^3 \quad (IV-196)$$

$$L_i = \left( \frac{Q_{ci}}{Q_i} \right)^3 \quad (IV-197)$$

$Q_{co}$  et  $Q_{ci}$  sont respectivement les capacités de charge en N du contact extérieur et intérieur. Elles correspondent à la charge cyclique qu'il faut appliquer pour obtenir la rupture du contact après 1 million de cycles.

Elles sont données par les formules :

$$Q_{ci} = A \left( \frac{2r_i}{2r_i - d_b} \right)^{0,41} \frac{(1 - d_b/d_m \cos\alpha_i)^{1,39}}{(1 + d_b/d_m \cos\alpha_i)^{1/3}} \left( \frac{d_b}{d_m} \right)^{0,3} d_b^{1,8} Z^{-1/3} \quad (IV-198)$$

$$Q_{co} = A \left( \frac{2r_o}{2r_o - d_b} \right)^{0,41} \frac{(1 + d_b/d_m \cos\alpha_o)^{1,39}}{(1 - d_b/d_m \cos\alpha_o)^{1/3}} \left( \frac{d_b}{d_m} \right)^{0,3} d_b^{1,8} Z^{-1/3} \quad (IV-199)$$

A est une donnée des matériaux (en N.mm) et vaut 98,1 pour un roulement tout acier.  $d_b$  est en mm dans la formule. Pour obtenir la valeur de ce coefficient pour un roulement hybride (billes en céramique), nous utilisons les données constructeurs qui donne un charge dynamique de base inférieure de 30% à celle d'un roulement tout acier. Le coefficient de 98,1 devient donc 68,5 [83].

La durée de vie du roulement  $L_h$  est prise successivement à 2 000, 4 000 et 8 000 heures de fonctionnement. 8 000 heures correspondent à la durée prévue par les constructeurs pour l'intervalle entre deux entretiens d'une électrobroche.

Les forces normales  $Q$  sont donnés par les équations IV-58 et IV-59.

En posant la durée de vie de la broche  $L_h$  en heures, on obtient la vitesse maximale  $N_{max}$  (en tr/min) de fonctionnement à laquelle peut tourner la MRV, soit :

$$N_{max2} = \frac{L 10^6}{60 L_h} = \frac{10^6}{60 L_h} \left( \frac{Z}{F_p} \right)^3 \left( (Q_{co} \sin \alpha_o)^{-27/8} + (Q_{ci} \sin \alpha_i)^{-27/8} \right)^{-8/9} \quad (\text{IV-200})$$

Hormis l'influence de la précharge sur les angles de contact et par conséquent sur les valeurs des capacités de charge, la durée de vie est inversement proportionnelle au cube de la précharge appliquée.

### IV.7.3 Domaine de fonctionnement du rotor actuel

L'étude est réalisée sur le rotor à technologie axe traversant développé par Fayard [28, 1], qui ne possède donc pas d'extension de l'axe sortant. L'axe traversant est en acier ( $E = 206\,800$  MPa,  $G = 82\,000$  MPa,  $\rho = 7\,850$  kg/m<sup>3</sup> et  $\lambda = 16$  W/m/°C). L'enrobage (flasque) est composé d'enroulement filamenteux de fibres de Kevlar (60% en volume) imprégnées de résines époxydes ( $E = 85\,000$  MPa,  $G = 2\,100$  MPa,  $\rho = 1\,350$  kg/m<sup>3</sup> et  $\lambda = 0,05$  W/m/°C).

La figure IV-40 présente les courbes de vitesses limites (vibratoire, thermique et d'endurance) du rotor de Fayard [28, 1] en fonction de la précharge appliquée aux roulements hybrides (billes en céramiques), qui le supportent. Les limites d'endurances sont données pour  $L_h = 2\,000$ , 4 000 et 8 000 h. Les limites thermiques sont données pour des températures imposées au carter de  $T = 20$ , 40 et 60°C.

La zone de fonctionnement de la MRV correspondant à une limite d'endurance à 4 000 h de fonctionnement et une température de 40°C imposée du carter, est colorée en jaune clair.

Pour la zone de fonctionnement colorée ( $T = 40^\circ\text{C}$  et  $L_h = 4\,000$  h), la vitesse optimale de fonctionnement est de 175 000 tr/min pour une précharge très faible 0,06 N. En deçà de cette limite en raison de la rigidité trop faible des roulements, les vibrations limitent la vitesse. Pour une précharge comprise entre 0,06 et 32 N, la vitesse est limitée par les échanges thermiques. Au delà de 32 N, la durée de vie des roulements limite les performances de l'électrobroche.

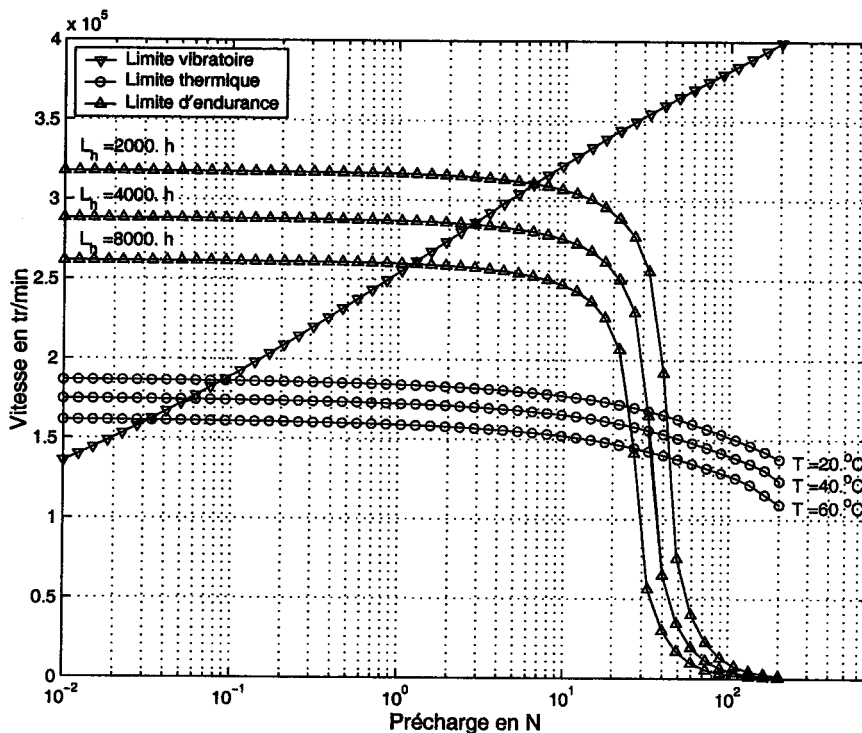


FIG. IV-40 – Exemple de courbes limites de vitesse pour les critères vibratoire, thermique et d'endurance pour l'électrobroche actuelle [1] en fonction de la précharge appliquée. Le domaine de fonctionnement pour une durée de vie de 4 000 heures et une température imposée au carter de 40°C est coloré en jaune.

#### IV.7.4 Etude d'autres combinaisons de matériaux

Nous allons réaliser la même étude que précédemment en évaluant le domaine de fonctionnement obtenu en utilisant d'autres combinaisons de matériaux utilisés pour fabriquer l'axe et les flasques du rotor.

L'étude porte sur un axe traversant présentant une extension (axe sortant) de 20 mm.

Le matériau de l'axe peut être de l'acier ( $E = 206\,800$  MPa,  $G = 82\,000$  MPa,  $\rho = 7\,850$  kg/m<sup>3</sup> et  $\lambda = 16$  W/m/°C), de l'aluminium ( $E = 73\,000$  MPa,  $G = 27\,500$  MPa,  $\rho = 2\,780$  kg/m<sup>3</sup> et  $\lambda = 170$  W/m/°C) ou de la céramique nitrure de silicium ( $E = 315\,000$  MPa,  $G = 125\,000$  MPa,  $\rho = 3\,190$  kg/m<sup>3</sup> et  $\lambda = 30$  W/m/°C).

Le matériau des flasques rotoriques peut être un composite de Kevlar/Epoxy (solution actuelle  $E = 85\,000$  MPa,  $G = 2\,100$  MPa,  $\rho = 1\,350$  kg/m<sup>3</sup> et  $\lambda = 0,02$  W/m/°C), de l'aluminium ( $E = 73\,000$  MPa,  $G = 27\,500$  MPa,  $\rho = 2\,780$  kg/m<sup>3</sup> et  $\lambda = 170$  W/m/°C) ou un composite Carbone/Epoxy ( $E = 134\,000$  MPa,  $G = 4\,200$  MPa,  $\rho = 1\,530$  kg/m<sup>3</sup> et  $\lambda = 36,8$  W/m/°C). Les données sont extraites de [27].

Les combinaisons de matériaux étudiés sont les suivantes :

- **Combinaison 1 :** axe en acier et flasques en Kevlar/Epoxy (Combinaison du rotor actuel avec

un axe sortant de 20 mm.)

- **Combinaison 2 :** axe en acier et flasques en Aluminium.
- **Combinaison 3 :** axe en aluminium et flasques en Carbone/Epoxy.
- **Combinaison 4 :** axe en céramique et flasques en Aluminium.

La figure IV-41 présente les domaines de fonctionnement associés à chaque combinaison de matériaux précédemment décrite. La limite d'endurance est donnée pour  $L_h = 8\ 000$  h. La limite thermique est donnée pour une température imposée au carter de  $T = 60^\circ\text{C}$ . Le domaine de fonctionnement possible est coloré.

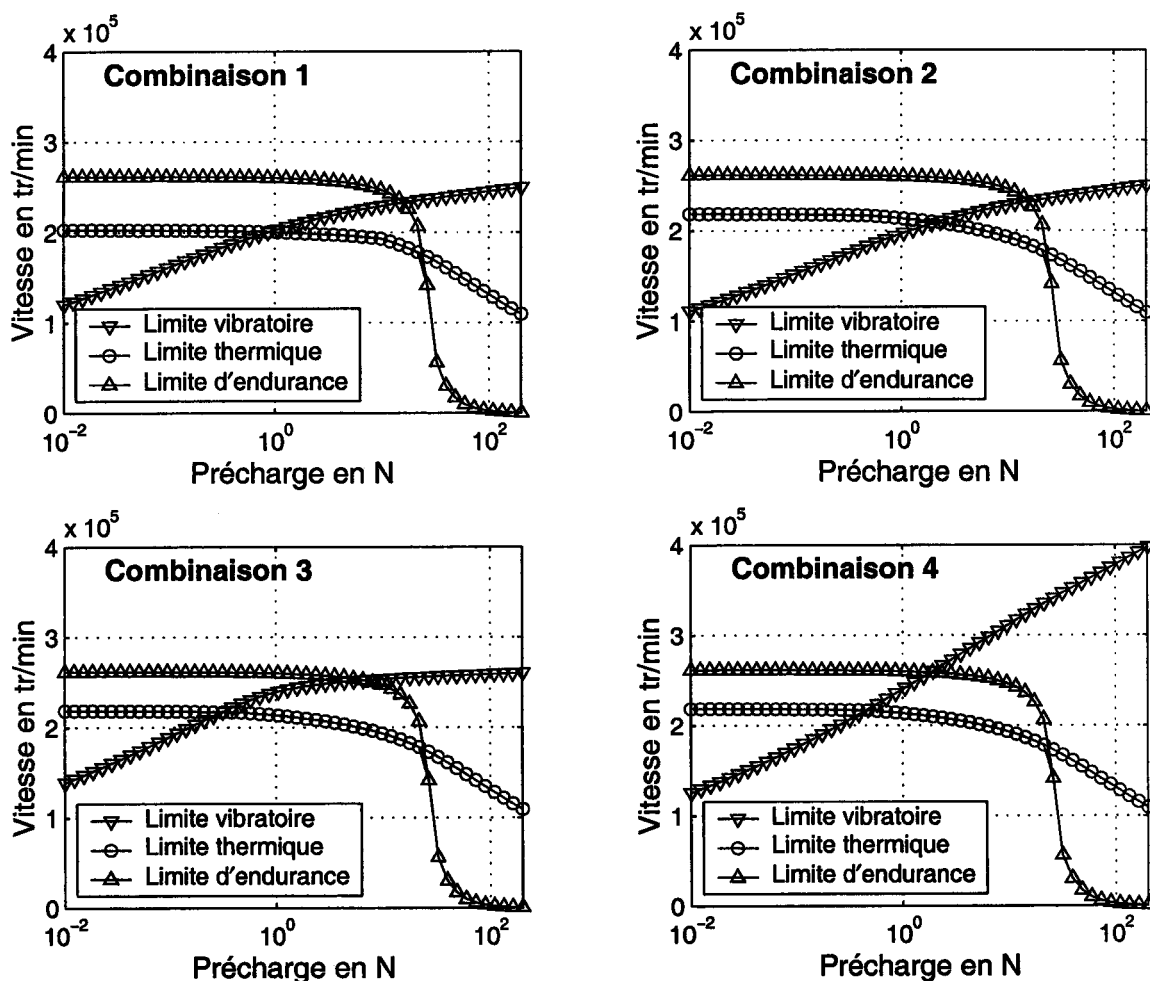


FIG. IV-41 – Courbes limites de vitesse pour les critères vibratoire, thermique et d'endurance pour les différentes combinaisons de matériaux présentées en fonction de la précharge appliquée aux roulements. Le domaine de fonctionnement coloré est établi pour une durée de vie de 8 000 heures et une température imposée au carter de  $60^\circ\text{C}$ .

Pour des précharges faibles, la limite vibratoire des trois premières combinaisons augmente rapidement avec la précharge (mode rigide), mais pour les précharges assez élevées, le mode de flexion de l'axe sortant limite la vitesse du rotor : la courbe limite varie peu avec la précharge. en revanche,

Combinaisons	1	2	3	4
Vitesse maximale pour la précharge $F_P(N)$ de	200300	209000	216900	216600
Plage de précharge	1	2,11	0,32	0,46
	0,84-1,05	1,21-5,75	0,14-5,75	0,23-5,75

TAB. IV-16 – Valeurs maximales de vitesse et plages de précharges autorisées pour atteindre au moins 200 000 tr/min pour les différentes combinaisons proposées.

la rigidité de la céramique permet de repousser la fréquence du mode flexible de l'axe au delà des précharges étudiées ici.

Du point de vue de la limite thermique, lorsque les flasques sont suffisamment conducteurs pour évacuer la chaleur dégagée au noyau (combinaisons 2, 3 et 4), la limite thermique n'est plus fonction du matériau du flasque. La température maximale est d'abord située au stator (les précharges faibles n'ont pas d'influence sur la vitesse) puis la température maximale est produite par les roulements : la précharge fait alors chuter rapidement la vitesse limite.

Nous allons nous intéresser à la vitesse optimale autorisée par chaque combinaison ainsi qu'à la plage de précharge permise pour 200 000 tr/min. Les résultats de chaque combinaison sont regroupées dans le tableau IV-16

La combinaison la plus performante est la troisième (axe aluminium et flasque en carbone/epoxy. Elle autorise une vitesse d'environ 217 000 tr/min pour une précharge cependant très légère 2,1 N. La solution utilisant l'axe céramique est cependant équivalente en terme de performance mais présente une rigidité bien supérieure. (module de Young 4 fois plus grand).

#### IV.7.5 Conclusion concernant l'application des modèles à une électrobroche

Dans ce paragraphe, nous avons utilisé les modèles de la dynamique vibratoire et de la thermique de la MRV ainsi que le modèle des roulements à billes pour obtenir le domaine de fonctionnement d'une électrobroche.

Dans un premier temps, nous avons défini les limites de fonctionnement dans l'espace (précharge  $F_p$ , vitesse  $\Omega$ ). Ces limites sont des limites vibratoires, thermiques et d'endurance des roulements.

Ensuite, nous avons appliqué les modèles à la MRV actuelle pour en caractériser le domaine de fonctionnement (vitesse autorisée en fonction de la précharge appliquées aux roulements). Nous avons pu mettre en évidence l'importance du refroidissement externe sur le domaine de fonctionnement de l'électrobroche.

Enfin, nous avons étudié l'influence du choix des matériaux utilisés pour réaliser l'axe traversant et les flasques rotoriques pour la même géométrie que le rotor actuel, mais avec une extension de l'axe (axe sortant). L'assemblage de flasques réalisés en aluminium et d'un axe traversant en acier est la solution autorisant la vitesse la plus élevée et une plage de précharge étendue.

Les modèles proposés permettent de caractériser un actionneur en fonction de ses caractéristiques



propres (géométrie et matériaux constitutifs) et en fonction des conditions d'utilisation (précharge, vitesse et température) et de pouvoir prédire l'influence de tel ou tel paramètre sur les performances globales de la machine.

# Conclusion générale et perspectives

Ce travail de thèse porte sur la conception et la modélisation d'une électrobroche Grande Vitesse et sur la résolution de problèmes couplés. Nous avons étudié conjointement des phénomènes :

- d'ordre mécanique, concernant le rotor et les paliers qui le guident en rotation mais également les contraintes mécaniques dans les matériaux du noyau magnétique, dues à la rotation du rotor;
- d'ordre électrotechnique, concernant le profil du noyau rotorique pour la création du couple moteur;
- d'ordre thermique, concernant les échauffements dus aux pertes internes au moteur.

Ces phénomènes apparaissent lors de l'utilisation d'une MRV et doivent, par conséquent, être pris en compte lors de la conception d'une électrobroche grande vitesse.

Dans le chapitre II, nous avons étudié les vibrations du rotor de la MRV, afin d'estimer son comportement dynamique, en proposant une autre méthode que celle de calcul par éléments finis (EF). En effet, la méthode de calcul par EF, certes précise, est coûteuse en temps de calcul et incompatible avec une démarche de conception et d'optimisation, où un grand nombre de calculs est nécessaire.

Nous avons obtenus un modèle qui prévoit le comportement dynamique du rotor en utilisant les méthodes de la résistance des matériaux (RDM) et de la mécanique des vibrations linéaires. Le modèle permet d'obtenir le comportement dynamique d'un élément générique de rotor, en fonction de sa géométrie et des propriétés mécaniques de ses matériaux constitutifs. La matrice de rigidité du roulement a été prise en compte dans le calcul.

Les fréquences propres sont obtenues avec une précision très satisfaisante en regard de la simplicité et de la rapidité d'application du modèle à n'importe quelle nouvelle géométrie. Les formes propres sont elles-aussi fidèles aux résultats de référence obtenus par le calcul par éléments finis. Nous avons donc montré que l'utilisation des méthodes approchées de RDM pouvait être appliquée à notre problème.

Le calcul analytique des matrices de masse, de rigidité et de couplage gyroscopique a permis d'éviter le recours aux variables symboliques et de gagner en rapidité de calcul.

Afin d'obtenir un modèle 100% analytique, nous avons ensuite limité le nombre de degrés de liberté à 4 déplacements radiaux en 4 points caractéristiques du rotor, où les masses sont concentrées. La matrice de compliance est obtenue en dérivant deux fois l'énergie de déformation par rapport à chaque force puis

inversée pour donner la matrice de rigidité du rotor. Les résultats obtenus en terme de fréquence sont plus approchés, mais les tendances de variation sont bien respectées et le temps de calcul permet une utilisation répétitive de ce modèle. Le modèle proposé réalise 1500 calculs approchés des fréquences et des formes propres d'une nouvelle géométrie de rotor pendant le temps nécessaire à un logiciel d'éléments finis pour générer un seul résultat. Nous avons enfin montré que l'étude précédente d'un seul élément de rotor permettait de prédire le comportement d'un rotor à plusieurs éléments assemblés en série dans le but d'augmenter la puissance de l'électrobroche.

Dans le chapitre III, nous cherchons à connaître les contraintes maximales dans le noyau de la MRV, afin de pouvoir réaliser un choix éclairé du matériau en terme de propriétés non seulement magnétiques mais également mécaniques, car nous avons besoin de prédire la tenue mécanique d'un profil de couple optimisé. Nous avons montré, dans le chapitre précédent, que le choix du matériau influence également le comportement vibratoire. Le choix du matériau constitue donc un problème de couplage fort entre les études mécanique et électrotechnique.

Dans cette étude d'optimisation, nous cherchons également à éviter l'utilisation des méthodes de calcul par éléments finis lors du calcul des contraintes mécaniques. Pour ce faire, une modélisation par une fonction continue du profil de la dent du noyau rotorique a d'abord été proposée afin de garder une grande liberté lors de la conception électrotechnique et mécanique du noyau. La géométrie du noyau a été ensuite dissociée du contour équivalent à la matière qui contribue à la résistance mécanique. L'étude des forces centrifuges et les techniques de la RDM ont permis d'obtenir les contraintes nominales en deux points présumés critiques du noyau. Des formules analytiques de concentration de contrainte extraites de la littérature ont finalement été appliquées aux contraintes nominales pour obtenir l'expression analytique de la contrainte équivalente de Von Mises. Cette relation a été confrontée à un grand nombre de résultats de simulation calculés par éléments finis. La précision du modèle est grandement améliorée par optimisation des paramètres de la relation analytique obtenue précédemment. Les valeurs exactes de contraintes sont approchées à moins de 10% sur l'ensemble des configurations testées. L'étude de l'influence de la hauteur et de la largeur de la dent réalisée pour différents diamètres de l'axe traversant a permis de montrer qu'il était mécaniquement intéressant de limiter la largeur de la dent pour réduire les contraintes.

Dans le chapitre IV, nous cherchons à évaluer la matrice de rigidité d'un roulement à billes qui intervient dans l'étude des vibrations du rotor. Nous avons pu constater que cette rigidité globale dépendait non seulement des rigidités locales des deux contacts entre les bagues et chacune des billes, mais également de la direction des efforts et donc des angles de contact internes du roulement.

Une détermination précise des angles de contact dans les roulements à billes soumis à une force purement axiale a ainsi été effectuée.

Nous nous sommes d'abord intéressé au problème de l'angle de contact dans le roulement après application de la précharge. A partir des travaux de Jones, nous avons pu proposer une méthode itérative de résolution plus systématique dont la convergence vers la valeur exacte est assurée, avant d'en extraire une loi explicite qui donne directement l'angle de contact sous charge avec moins de 0,15% d'erreur, indépendamment du roulement étudié.

D'autre part, une étude de la cinématique d'un roulement et des forces a été réalisée et nous a permis d'obtenir un système d'équations non linéaires dont la résolution fournit les angles de contact, lorsque le roulement précontraint est entraîné en rotation. Un modèle explicite itératif reliant les angles de contact aux caractéristiques des roulements à billes (dimensions, matériaux), d'une part, et à leurs conditions d'utilisation (précharge, vitesse), d'autre part, a pu être proposé. Lors de l'étude de l'influence de la précharge, de la vitesse de rotation et des dimensions des roulements sur les angles de contact, nous avons pu constater que la précision du modèle était satisfaisante dès la troisième itération et que, quelque soit le roulement étudié, les résultats concordaient parfaitement avec ceux donnés par la résolution numérique.

Parallèlement à cette étude sur les angles, le modèle de contact de Hertz entre deux solides élastiques a été exploité afin d'obtenir les rigidités locales des contacts. Nous recherchons là encore une formulation des rigidités de contact ne nécessitant aucune résolution numérique, contrairement à la plupart des méthodes classiques, lesquelles font intervenir les intégrales elliptiques complètes de la théorie de Hertz initiale. Nous avons proposé une résolution approchée donnant directement le résultat avec une précision d'au moins 0,15%, en fonction de la géométrie des solides, utilisée dans la théorie. Les intégrales elliptiques sont par ailleurs approchées avec une précision d'au moins de 0,3%, sur une large plage d'ellipticité. Nous sommes parvenus alors à un modèle généraliste reliant les propriétés locales des contacts à une géométrie quelconque de roulement et aux forces appliquées.

La matrice de rigidité d'un palier est obtenue en dérivant par deux fois l'énergie de déformation du roulement à billes, calculée par sommation discrète de l'énergie potentielle de chacune des billes. Par un développement limité autour du point de fonctionnement défini par la précharge axiale et la vitesse, l'énergie potentielle de chaque bille a été calculée à partir des 5 DDL de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure. La matrice de rigidité du roulement à billes obtenue est de dimension  $5 \times 5$ , et présente des termes de couplages entre les DDL de translation et les DDL de rotation. Le comportement non linéaire du roulement est mis en évidence. L'influence de la vitesse de rotation, de la précharge, mais également de l'angle de contact choisi, ont alors été présentées. Nous avons pu mettre en évidence la modification importante du comportement dynamique du roulement entre le fonctionnement statique et le fonctionnement à vitesse de rotation élevée, ce qui confirme l'importance d'une telle étude pour accéder à un résultat réaliste au niveau du comportement vibratoire du rotor et de ses paliers.

L'étude des paliers a finalement abordé le problème des frottements dans les roulements à billes, afin de pouvoir non seulement quantifier les pertes mécaniques que leur utilisation implique, mais également connaître le couple de frottement dans les paliers pour en tenir compte dans les lois de commande de l'axe de l'électrobroche. Il y a par conséquent par l'intermédiaire des roulement un couplage entre la mécanique du rotor, la loi de commande et le fonctionnement électrique du moteur.

Nous avons cherché ici à décrire avec précision la partie mécanique du couplage. Après application du principe fondamental de la dynamique appliqués à la bille, le couple de frottement du roulement est obtenu par sommation des actions dues à chaque bille. L'influence de la précharge appliquée au roulement et de sa vitesse de rotation sur le couple de frottement a été réalisée. Les tendances de variations obtenus pour un jeu de paramètres choisis dans la littérature, sont conformes à d'autres résultats obtenus par d'autres auteurs et les ordres de grandeurs sont respectés. Il serait intéressant d'identifier les valeurs précises des différents paramètres du modèle, pour affiner les résultats.

Parallèlement à cette étude des performances mécaniques des paliers, les échanges thermiques dans la MRV ont été décrits à la fin du chapitre IV, afin de mieux connaître la limite admissible en termes de pertes internes au moteur. Les échanges entre chaque composant du roulement a été modélisé par une relation linéaire entre le flux de chaleur et la température supposée uniforme de chaque élément du moteur. Les résistances thermiques entre chaque élément ont été explicitée en fonction d'une géométrie simplifiée et du matériau de chaque composant du moteur. Les pertes (Joule, fer, mécanique ou aérodynamiques) dans la MRV ont été quantifiées. Les pertes dans les dents stator et dans la culasse ont été séparées pour prendre en compte les fréquences et les inductions maximales qui peuvent être différentes. La matrice thermique de la MRV a alors été obtenue et a ensuite permis de décrire l'évolution de la répartition des températures dans le moteur et la variation de sa température maximale en fonction de la vitesse et des performances du refroidissement externe.

Nous avons finalement pu appliquer les modèles présentés dans ce mémoire dans une étude concrète des performances de l'électrobroche actuelle et des améliorations pouvant être obtenue par l'emploi de nouveaux matériaux. Ces performances potentielles sont définies dans l'espace (vitesse de rotation, précharge appliquée), qui lie les performances possibles à la précharge choisis (réglage). La première pulsation propre est obtenue par utilisation des résultats des chapitre II et IV, pour connaître la limite vibratoire. La limite thermique, définie comme la vitesse à laquelle une température critique est atteinte pour un refroidissement externe donné, est obtenue par la modélisation thermique (chapitre IV). Une étude complémentaire concernant la durée de vie des roulements à billes a été détaillée afin d'en extraire la limite d'endurance de la broche associée à une durée d'utilisation minimale. Afin de caractériser l'électrobroche actuelle, son domaine de fonctionnement admissible a été établi. Les résultats confirment l'idée suivant laquelle des améliorations tant au niveau des pertes que du refroidissement doivent être réalisée afin de pouvoir fonctionner durablement à la vitesse désirée de 200 000 tr/min. En plus de l'adjonction nécessaire de l'axe sortant, des combinaisons de matériaux

différentes ont été étudiées afin d'augmenter la vitesse maximale possible.

Il serait intéressant utiliser de l'aluminium pour réaliser les flasques rotoriques, et de l'acier pour l'axe traversant. Cette solution permettrait non seulement d'augmenter de plus de 8% la vitesse de rotation (217000 tr/min) par rapport à une solution qui utiliserait les mêmes matériaux qu'actuellement, mais également d'élargir la plage de précharges autorisant la vitesse de 200 000 tr/min.

Les modèles présentés dans ce mémoire peuvent être utilisés dans le cadre d'une démarche d'optimisation visant à concevoir une structure de MRV performante et fiable. Ils permettent de prévoir l'influence d'une modification géométrique ou des matériaux sur les performances d'une future structure composée d'un ou plusieurs éléments de rotor, différents ou non.

Nous avons constaté dans le chapitre III, qu'il serait nécessaire d'utiliser un empilement de tôles ferromagnétiques réalisées en matériaux du type verres métalliques (amorphe), pour la réalisation du noyau rotorique. De part leur structure cristalline, ces matériaux ont en effet l'avantage de présenter à la fois de bonnes performances dans le domaine électrotechnique (bonne perméabilité et haute induction de saturation) et dans le domaine mécanique (dureté et résistance mécanique élevée), mais leur structure cristallographique leur confère une mauvaise ténacité et une grande fragilité. Un traitement thermique (annealing) permet de réduire légèrement cette faiblesse mécanique en diminuant les contraintes résiduelles, tout en améliorant les performances magnétiques, mais des ruptures prématurées par fatigue dues aux sollicitations cycliques peut néanmoins survenir en particulier au stator. Il serait donc intéressant d'utiliser les nombreuses études vibratoires réalisées sur des stators de MRV, afin de mieux connaître l'impact de la géométrie sur les vibrations et sur la tenue en fatigue du matériau.

Dans le chapitre III, nous avons également mis en évidence l'avantage en terme de tenue mécanique, que présentent des dents rotoriques de petites dimensions, qui motiveraient une étude complémentaire pour une structure 6/4. Par ailleurs, cette structure présente l'intérêt d'une symétrie centrale dans la section du noyau rotorique, et donc une rigidité de flexion identique pour tous les axes du rotor. Une structure 6/4 nécessite néanmoins des fréquences d'alimentation deux fois plus élevées, ce qui augmente les problèmes liés aux pertes et donc les contraintes thermiques.

A partir des modèles, il serait également intéressant étudier les performances de nouvelles générations de roulements à billes utilisant des matériaux nouveaux, avec ou sans cage (full complement) pour caractériser les performances d'une électrobroche équipée de tels roulements.

# Bibliographie

- [1] H. Fayard. Procédés à réluctance variable pour la conversion d'énergie électromécanique directe-application à l'usinage grande vitesse. Thèse de Doctorat, Université de Metz, 10 mars 1999.
- [2] L. Houpert. A uniform analytical approach for ball and roller bearings calculations. *ASME J. Tribol.*, 119:851–858, 1997.
- [3] Ugv: des travaux courants à des vitesses dépassant celles habituelles. *Revue Technique du travail des métaux*, (70):29–34, janvier-février 2003. URL [www.trametal.com/revues/pdf/26\\_2\\_2.pdf](http://www.trametal.com/revues/pdf/26_2_2.pdf).
- [4] B. Multon and J. Bonal. Les entrainements électromécaniques directs: diversité, contraintes et solution. *Actes de la journée sur "la conversion électromécanique directe", ENS Cachan, 4 février 1999*.
- [5] D. Lambert. Augmentation des performances des machines-outils par la réduction des masses mobiles. *Actes des 3<sup>èmes</sup> assises Machines et Usinage Grande Vitesse, IFMA, Clermont-Ferrand, France*, pages 281–286, 10-11 mars 2004.
- [6] R. Vives Fos. Etude d'électrobroches à réluctance variable pour l'usinage à très grande vitesse. Thèse de Doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, mai 1993.
- [7] J. Vigneau. Usinage à grande vitesse. pages 1–3, Octobre 1991.
- [8] Dossier usinage grande vitesse. *Usine Nouvelle*, page 47, février 1995.
- [9] Fraisage utgv: usiner à grande vitesse et à sec réduit les temps et les coûts. *Revue Technique du travail des métaux*, (50):21–30, novembre 2000. URL [www.trametal.com/revues/pdf/4\\_2\\_1.pdf](http://www.trametal.com/revues/pdf/4_2_1.pdf).
- [10] M. Menegotto. Permanent magnets built-in synchronous motors for machine tool's electros-pindle. *Actes des 3<sup>ème</sup> Assises Machines Outils et Usinage Grande Vitesse, IFMA, Clermont-Ferrand*, pages 271–280, 10-11 mars 2004. en anglais.
- [11] C. Fioroni and M. Ghassempouri. Usinage très grandes vitesses: Urane sx 80000 tr/min. *Actes des 3<sup>èmes</sup> Assises Machines Outils et Usinage Grande Vitesse, IFMA, Clermont-Ferrand*, pages 31–39, 10-11 mars 2004.
- [12] D. Brun-Picard. Influence des lois de mouvement sur les déformations et les vibrations des

- machines à grande vitesse. *Actes des 3<sup>èmes</sup> Assises Machines Outils et Usinage Grande Vitesse, IFMA, Clermont-Ferrand*, pages 81–90, 10–11 mars 2004.
- [13] G. Segulier and F. Notelet. *Electrotechnique Industrielle*. Technique et documentation - Lavoisier, 1996.
- [14] T.J.E. Miller. *Switched Reluctance Motors and their control*. Oxford, U.K.: Clarendon, 1993.
- [15] S. Ayari. *Etude des vibrations des machines à réductance variable : Influence des caractéristiques géométriques et de l'excentricité rotorique*. PhD thesis, Thèse de Doctorat, LE.Si.R, ENS Cachan, mars 2000.
- [16] F. Camus, B. Humeau, M. Besbes, and M. Gabsi. Reduction des vibrations des machines à réductance variable. action sur la commande. *Actes de la Journée Vibrations et bruits acoustiques des machines électriques, LESIR, Cachan, France*, pages 47–56, avril 1997.
- [17] T.J.E. Miller. Faults and unbalanced forces in the switched reluctance machine. *IEEE trans on Industry Applications*, 31(2):319–328, March/April 1995.
- [18] M. Besbes, Ch. Picod, F. Camus, and M. Gabsi. Influence of stator geometry upon the vibratory behaviour and electromagnetic performances of switched reluctance motors. *IEE proceedings Electric Power Applications*, 145(5):462–468, september 1998.
- [19] J.D. Ede, Z.Q. Zhu, and D. Howe. Rotor resonances of high speed permanent magnet brushless machines. *IEEE transaction on Industry Applications*, 38(6):1542–1548, december 2002.
- [20] M. BesBes. Contribution à la modélisation numérique des phénomènes couplés magnétoélastiques—application à l'étude des vibrations d'origines magnétiques dans les mrv. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, juin 1995.
- [21] MN. Anwar and I. Husain. Radial force calculation and acoustic noise prediction in switched reluctance machines. *IEEE transactions on industry applications*, 36(6):1589–1597, November/december 2000.
- [22] F. Camus, B. Humeau, M. Besbes, and M. Gabsi. Prédiction des vibrations du stator d'une machine à réductance variable en fonction du courant absorbé. *J. Phys.III France*, 7:387–404, february 1997.
- [23] JF. Antoine. Contribution à l'optimisation mécanique du rotor d'un moteur ultra-rapide. Master's thesis, Université de Metz, France, juillet 2000.
- [24] M. Lalanne et P. Berthier et J. Der Hagopian. *Mécanique des vibrations linéaires*. Masson, Paris, seconde édition, 1986.
- [25] S. Timoshenko, D.H. Young, and W. Weaver. *Vibration Problems in Engineering*. Wiley, New York, fourth édition, 1974.
- [26] JF. Antoine, L. Morel, and G. Abba. Rotor optimisation of an high speed machine. *Proceedings of EM 2001 Congress, Bolona, Italy*, pages 467–471, june 19–20 2001.



- [27] D. Gay. *Matériaux Composites*. Hermès, Paris, 2<sup>ème</sup> édition, 1989.
- [28] L. Miranda and B. Jourdain. Etude et réalisation d'un prototype de moteur à grande vitesse. Technical report, ENIM, 1997. Rapport de projet de fin d'étude.
- [29] M. Kerguignas et G. Caignaert. *Résistance des Matériaux*. Dunod Université, Paris, 1977.
- [30] M. Fourar et C. Chèze. *Mécanique des milieux déformables*. Technosup. Ellipses, Paris, 2002.
- [31] SNFA. *Roulements à billes à contact oblique pour haute vitesse*. juillet 1998.
- [32] G. Venizelos. *Vibration des structures*. Technosup. Ellipses, Paris, 1988.
- [33] D.A. Wells. *Theory and problems in Lagrangian Dynamics*. Schaum/s Outline Series, 1967.
- [34] J.P. Den Hartog. *Mechanical Vibrations*. Mc Graw-Hill, fourth edition, 1956.
- [35] M. Lalanne and G. Ferraris. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. John Wiley, New York, 1990.
- [36] W.D. Pilkey. *Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices*. John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [37] R. Bigret. *Vibrations des machines tournantes et des structures*. Technique et Documentation - Lavoisier, Paris, 1980. Tomes I à IV.
- [38] C. Barthod. Suspension et motorisation d'un rotor en lévitation magnétique. Thèse de doctorat, Université de Savoie, 4 juillet 1996.
- [39] Z. Abduljabbar, M.M. ElMadany, and A.A. AlAbdulwahad. Active vibration control of a flexible rotor. *Computer and structure*, 58(3):499–511, 1996.
- [40] SP Lele and SK Maiti. Modelling of transverse vibrations of short beams for crack detection and measurement of crack extension. *Journal of Sound and Vibration*, 3(257):559–583, 2002.
- [41] T.A. Harris. *Rolling Bearing Analysis*. John Wiley and sons, New York, third edition, 1991.
- [42] JF. Antoine, G. Abba, and C. Sauvey. Approximate explicit calculation of first vibration frequencies of an unsymmetrical high speed rotor. *IMECE 2003 Congress, Washington D.C., USA*, Nov. 15-21 2003. 55133.pdf.
- [43] J. Mandel. *Cours de Mécanique des milieux continus*. Gauthier Villar, Paris, 1966.
- [44] R.D. Cook and W.C. Young. *Advanced Mechanics of Materials*. Prentice Hall, New Jersey, second edition, 1999.
- [45] S. Laroze et R. Boudet. *Résistance des matériaux appliquées aux organes de machines*. Techniques de l'Ingénieur, Paris, 1996.
- [46] Pont-à-Mousson SA. *Formulaire*. Technique et Documentation - Lavoisier, Paris, 3<sup>ème</sup> édition, 1989.
- [47] JF. Antoine, C.Sauvey, C. Visa, and G. Abba. Optimisation de la forme d'un rotor de mrv 6/2 pour l'ugv. *Electrotechnique du Futur 2003, Gif sur Yvette, France*, 9-10 Dec. 2003.

- [48] R.E. Peterson. *Stress Concentration Factors*. John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [49] F.P. Brennan, P. Peleties, and A.K. Hellier. Predicting weld toe stress concentration factors for t and skewed t-joint plate connections. *International Journal of Fatigue*, 22:573–584, 2000.
- [50] R.V. Baud. Study of stresses by means of polarized light and transparencies. *Proc. Engrs. Soc. West. Penn*, 44:199, 1928.
- [51] F. Leckie. Stress concentration factors – an analysis tool. 2003. URL <http://www.stacieglass.com/scf/>.
- [52] Magnetics. Tape wound cores – design manual twc-500. 2000. URL <http://www.mag-inc.com>.
- [53] A. Bazergui, T. Bui-Quoc, A. Biron, and G. Melntyre et C. Labergie. *Résistance des Matériaux*. Editions de l'école polytechnique de Montréal, 2eme edition, 1996.
- [54] W.C Young. *Roark's Formulas of Stress and Strain*. McGraw-Hill, New York, sixth edition, 1989.
- [55] S. Timoshenko. On the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces along a diameter. *Phil. Mag.*, 44:1014, 1922.
- [56] S. Timoshenko and J.N. Goodier. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, third edition, 1970.
- [57] H. Neuber. Theory of notch stresses. *Office of Technical Services*, 1961.
- [58] M.G. Garrell, A.J. Shih, E.Lara-Curzio, and R.O Scattergood. Finite-element analysis of stress concentration in astm d 638 tension specimens. *Journal of Testing and Evaluation*, 31(1):1–6, 2003. URL [www.astm.org](http://www.astm.org). Paper ID *JTE11402\_311*.
- [59] W. Waldman, M. Heller, and G.X. Chen. Optimal free-form shapes for shoulder fillets in flat plates under tension and bending. *International Journal of Fatigue*, 23:509–523, 2001.
- [60] N.A. Noda and Y. Takase. Stress concentration formula useful for any dimensions of shoulder fillet in a round bar under tension and bending. *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 26:245–255, 2003.
- [61] D. Tranxuan. Optimum fillet radius for a latch. *Computers and Structures*, 61(4):645–650, 1996.
- [62] M.Colombié et al.. *Pratique des matériaux industriels – Matériaux Métalliques*. Dunod, Paris, 2002.
- [63] Honeywell Metglas Solutions. Magnetic alloy 2605SA1 (iron based) technical bulletin. 2003. URL <http://www.metglas.com/downloads/2605sa1.pdf>.
- [64] A. Palmgren. *Ball and Roller Bearing Engineering*. Burbank, Philadelphia, third edition, 1959.
- [65] A.B. Jones. A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions. *ASME J.Basic Eng.*, 82:309–320, June 1960.

- [66] P. Eschmann, L. Hasbargen, and K. Weigand. *Ball and Roller Bearings, Theory, design and applications*. R. Oldenburg Verlag, 2nd edition, 1978.
- [67] T.A. Harris. *Rolling Bearing Analysis*. John Wiley and sons, New York, fourth edition, 2001.
- [68] SKF. *Roulements hybrides de précision pour broches performantes*. 1996.
- [69] H. Hertz. The contact of elastic solids. *J. Reine und Angewandte Mathematik*, 92:156–171, 1881.
- [70] N.T. Liao and J.F. Lin. Ball bearing skidding under radial and axial loads. *Mechanism and Machine theory*, 37:91–113, 2002.
- [71] D. Nelias. *Contribution to Bearing Analysis - Rolling Bearing Modeling - Surface Damage in EHL Contact for Real or Dented Surfaces*. Research habilitation, english version, Claude Bernard University, Lyon, France, december 1999.
- [72] N.T. Liao and J.F. Lin. A new method for the analysis of deformation and load in a ball bearing with variable contact angle. *Journal of Mechanical Design*, 123:1–9, june 2001.
- [73] D.E. Brewe and B.J. Hamrock. Simplified solution for elliptical contact deformation between two elastic solids. *ASME J. Lub. Technol.*, 99:485–487, 1977.
- [74] J.A. Greenwood. Analysis of elliptical hertzian contacts. *Tribology International*, 30(3):235–237, 1997.
- [75] E.W. Deeg. New algorithms for calculating hertzian stresses, déformations and contact zone parameters. *AMP journal of technology*, 2:14–24, November 1992.
- [76] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [77] B.J. Hamrock and D.E. Brewe. Simplified equation for stresses and déformations. *ASME J. Lub. Technol.*, 105:171–177, 1983.
- [78] G.P. Michon. Perimeter of an ellipse. available at <http://home.att.net/~numericana/answer/ellipse.htm>, 2003.
- [79] G.D. Hagi and M.D. Gafitanu. Dynamic characteristics of high speed angular contact ball bearings. *Wear*, 211:22–29, 1997.
- [80] C.H. Chen and K. Wang. An integrated approach toward the dynamics analysis of high speed spindles. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116:514–522, October 1994. Part 2: Dynamics Under Moving End Load.
- [81] H. Sjövall. The load distribution within ball and roller bearings under given external radial and axial load. *Teknisk Tidskrift, Mek*, 1933.
- [82] X. Hernot, M. Sartor, and J. Guillot. Calculation of the stiffness matrix of angular contact ball bearings by using the analytical approach. *Journal of Mechanical Design*, 122:83–80, March 2000.
- [83] FAG. *Roulements à billes, Roulements à rouleaux, Paliers, Accessoires*. FAG roulements, 2000.

- [84] C. Duploux and R. Villefond. Développement et mise au point de prototypes de moteur à grande vitesse. Technical report, ENIM, 1999. Rapport de projet de fin d'étude.
- [85] A.B. Jones. Ball motion and sliding friction in ball bearings. *ASME J. Basic Eng.*, 81:1-12, March 1959.
- [86] M.R. Hachkowski and L.D. Peterson. *Reduction of Hysteresis in the Load Displacement Response of Precision Deployment Machine through Load Path Management*. Phd report, University of Colorado, Boulder Colorado, 1998.
- [87] M.J. Todd and K.L. Johnson. A model for coulomb torque hysteresis in ball bearings. *International Journal of Mechanical Science*, 29:339-354, 1987.
- [88] J. Bell. Lubrification of rolling surfaces by a Ree-Eyring fluid. *ASLE Trans.*, 5:160-171, 1963.
- [89] S.I. Pinel, H.R. Signer, and E.V. Zaretsky. Comparison between oil-mist and oil-jet lubrication of high-speed, small-bore angular-contact ball bearings. Technical report, NASA, august 2001. URL <http://gltrs.grc.nasa.gov/GLTRS>.
- [90] A. Leontiev. *Théorie des échanges de chaleur et de masse*. Editions Mir, Moscou, 1985.
- [91] B. Eyglunet. *Thermique théorique et pratique*. Editions Hermès, Paris, 1994.
- [92] H.S. Carslaw and J.C Jaeger. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, second edition, 1959.
- [93] J. Padet. *Principe des transferts convectifs*. Polytechnica, Paris, 1997.
- [94] J.A. Wensing. *On the dynamics of ball bearings*. Enschede, Nederlands, december 1998.
- [95] M.R. Hachkowski, L.D. Peterson, and M.S. Lake. Analytical model of nonlinear hysteresis mechanisms in a rolling element joint, 12-15 april 1999. AIAA-99-1268.
- [96] C. Barus. Isothermals, isopiestic and isometrics relative to viscosity. *American J. Science*, 45: 87-96, 1893.
- [97] C. Roelands. *Correlation Aspects of Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of lubricating Oils*. PhD thesis, Delft University of Technology, 1966.
- [98] A.K. Mohanty, A.A. Tawfek, and B.V.S.S.S Prasad. Heat tranfer from a rotating cylinder in crossflow. *Experimental Thermal and Heat Science*, 10:54-61, 1995.
- [99] A.A. Kendoush. Approximate solution of the convective heat transfer from an isothermal rotating cylinder. *Int. J. Heat and Fluid flow*, 17:439-441, 1996. technical note.
- [100] R.E.M. Morales, A. Balparada, and A. Silveira-Neto. Large-eddy simulation of the combined convection around a heated rotating cylinder. *International Journal of Heat and Mass transfer*, 42:941-959, 1999.
- [101] F.M. Mahfouz and H.M. Bahr. Forced convection from a rotationally oscillating cylinder placed in a uniform stream. *Internation Journal of Heat and Mass transfer*, 43:3093-3104, 2000.
- [102] F. Kreith. Convection heat transfer in rotating systems. *Adv. in Heat transfer*, 5:129-251, 1968.

## Annexe A

# Etude des coefficients de section réduite

La section réduite est une notion de résistance des matériaux permettant de prendre en compte la répartition des contraintes tangentielles  $\tau$  dans une section  $S$  soumis à un effort tranchant  $T$ . La section réduite est définie à partir de l'énergie de cisaillement  $W$  par unité de longueur :

$$\frac{dW}{dx} = \iint_S \frac{\tau^2}{2G} dS = \frac{1}{2} \frac{T^2}{G S_r} \quad (\text{A-1})$$

Le calcul montre que la valeur  $\frac{1}{2} \frac{T^2}{G S_r}$  est supérieure à la valeur  $\frac{1}{2} \frac{T^2}{G S}$ , que l'on obtiendrait en utilisant la valeur moyenne des contraintes  $\frac{T}{S}$  pour réaliser les calculs. La quantité  $S_r$  (en  $m^2$ ) est donc inférieure à la section réelle  $S$ , d'où le nom de section réduite.

Le coefficient de section réduite  $a$  est défini par la relation:

$$\frac{1}{2} \frac{T^2}{G S_r} = \frac{1}{2} a \frac{T^2}{G S} \quad (\text{A-2})$$

Dans la suite, nous allons étudier la détermination de ce coefficient en fonction des dimensions et des composants de la section, pour une section circulaire et mono-composant puis pour une section bi-composant.

### A.0.5.A section circulaire mono-composant

Dans le cas d'une section circulaire à un seul composant, le calcul exact est réalisé suivant la méthode décrite par Gay [27], à partir de fonctions de gauchissement et des conditions aux limites. La notion de gauchissement est détaillée plus bas. La méthode est identique à celle détaillée dans le paragraphe suivant. Elle donne des coefficients de section réduite  $a_x$  et  $a_z$  égaux à  $7/6$ .

Gay donne cette définition du gauchissement :

*"Le gauchissement longitudinal d'une section droite est la quantité dont cette section se déplace hors du plan qui la caractériserait si elle se mouvait vraiment comme un solide plan indéformable"* [27].

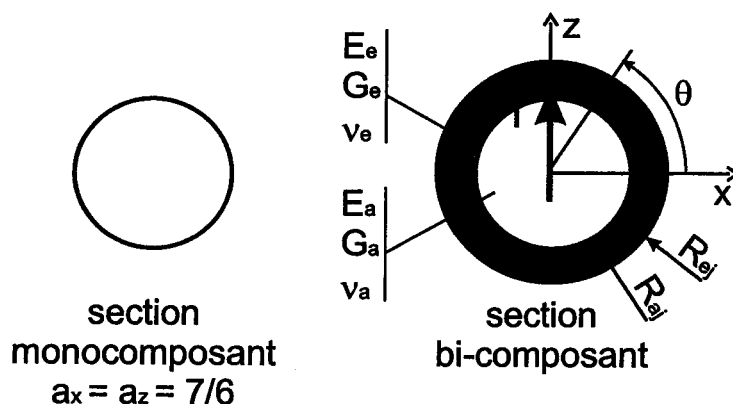


FIG. A-1 – Représentation de sections mono- et bi-composant. Le repère et les notations sont définis pour le calcul. bi-composant

Le gauchissement longitudinal est noté  $\eta_y$ . Pour un effort tranchant  $T_z$ , la fonction de gauchissement  $g$  est définie par :

$$\eta_y = \frac{T_z}{\langle GS \rangle} g(x, z) \quad (\text{A-3})$$

#### A.0.5.B section circulaire composite

Dans le cas des sections soumises à une contrainte de cisaillement et contenant deux matériaux différents, il est nécessaire de calculer précisément les coefficients de section réduite à partir des équations d'équilibre et des conditions aux limites sur le contour extérieur et aux frontières intérieures. L'objectif est de savoir quelle influence ont les hétérogénéités de section sur l'énergie de cisaillement globale.

La méthode utilisée est celle donnée par Gay [27] mais transposée en coordonnées cylindriques plus adéquates dans notre cas de section axisymétrique.

La figure A-1 présente les notations de géométrie et des matériaux utilisées pour réaliser les calculs. On considère le cas de l'effort tranchant  $T_z$  appliqué à une section axisymétrique et bi-composant. Conformément à la représentation de la figure A-1, les propriétés des matériaux présents dans la section sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Pour } r \leq R_{aj}, & \quad \text{on a le matériau de l'axe tel que } E = E_a \text{ et } G = G_a \\ \text{Pour } R_{aj} \leq r \leq R_{ej}, & \quad \text{on a le matériau de l'enrobage tel que } E = E_e \text{ et } G = G_e \end{aligned}$$

Les fonctions de gauchissement pour l'axe et l'enrobage sont notées  $g_{oa}$  et  $g_{oe}$  et sont les solutions des

équations d'équilibres suivantes :

$$\nabla^2 g_{oa} = -\frac{E_a \langle GS \rangle}{G_a \langle EI \rangle} r \sin \theta \quad (\text{A-4})$$

$$\nabla^2 g_{oe} = -\frac{E_e \langle GS \rangle}{G_e \langle EI \rangle} r \sin \theta \quad (\text{A-5})$$

avec l'expression du Laplacien  $\nabla^2$  en coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  donnée par:

$$\nabla^2(f) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (\text{A-6})$$

Le terme du Laplacien suivant  $y$  est le terme de droite dans les équations (A-4) et (A-5). Une des hypothèses faite avec cette méthode est la non-influence du gauchissement de la section sur les contraintes normales suivant l'axe  $y$ . Sur le contour extérieur ( $r = R_{ej}$ ), la fonction  $g_{oe}$  répond à la condition :

$$\frac{\partial g_{oe}}{\partial r} = 0 \quad (\text{A-7})$$

Sur la frontière intérieure (interface entre axe et enrobage:  $r = R_{aj}$ ), on a les conditions de continuité internes de déformation et de contraintes tangentielles :

$$g_{oa} = g_{oe} \quad (\text{A-8})$$

$$G_a \frac{\partial g_{oa}}{\partial r} = G_e \frac{\partial g_{oe}}{\partial r} \quad (\text{A-9})$$

La continuité des déplacements impose l'hypothèse du collage parfait entre les deux surfaces à l'interface. Si les deux composants sont frettés, cette condition n'est vérifiée que dans l'hypothèse de non-glissement. Une dernière condition est celle d'unicité qui doit être vérifiée:

$$\sum_j \left( \iint_{S_j} E_j g_{oj} dS_j \right) = 0 \quad (\text{A-10})$$

Les fonctions  $g_{oe}$  et  $g_{oa}$  solutions des équations (A-4) et (A-5), ont pour expressions :

$$g_{oe} = \left( a_1 r^3 + a_2 r + \frac{a_3}{r} \right) \sin \theta \quad (\text{A-11})$$

$$g_{oa} = \left( b_1 r^3 + b_2 r + \frac{b_3}{r} \right) \sin \theta \quad (\text{A-12})$$

Les coefficients  $a_1$  et  $b_1$  sont obtenus par application des équations d'équilibre (A-4) et (A-5). Il vient alors :

$$a_1 = -\frac{1}{8} \frac{E_e \langle GS \rangle}{G_e \langle EI \rangle} \quad (\text{A-13})$$

$$b_1 = -\frac{1}{8} \frac{E_a \langle GS \rangle}{G_a \langle EI \rangle} \quad (\text{A-14})$$

L'application de l'équation aux limites sur le contour extérieur (contrainte de cisaillement nulle suivant  $r$ ) donne ensuite la valeur de  $a_2$

$$a_2 = -3 a_1 R_{ej}^2 + \frac{a_3}{R_{ej}^2} \quad (\text{A-15})$$

où les valeurs des coefficients  $a_1$  et  $a_3$  sont respectivement données par les équations (A-13) et (A-17). La condition de continuité des contraintes tangentielles à travers la frontière intérieure ( $r = R_{aj}$ ) fournit alors le coefficient  $b_2$  :

$$b_2 = 3 a_1 \frac{G_e}{G_a} (R_{aj}^2 - R_{ej}^2) - 3 b_1 R_{aj}^2 + a_3 \frac{G_e}{G_a} \frac{R_{aj}^2 - R_{ej}^2}{R_{ej}^2 R_{aj}^2} \quad (\text{A-16})$$

La condition de continuité des déformations à la frontière intérieure ( $r = R_{aj}$ ) fournit alors le coefficient  $a_3$ .

$$a_3 = -a_1 R_{ej}^2 R_{aj}^2 \cdot \frac{G_a (R_{aj}^2 - 3 R_{ej}^2) + 3 G_e (R_{ej}^2 + R_{aj}^2)}{G_a (R_{ej}^2 + R_{aj}^2) + G_e (R_{ej}^2 - R_{aj}^2)} - 2 b_1 \frac{G_a R_{ej}^2 R_{aj}^4}{G_a (R_{ej}^2 + R_{aj}^2) + G_e (R_{ej}^2 - R_{aj}^2)} \quad (\text{A-17})$$

Le calcul montre que la condition d'unicité est vérifiée, quelque soit la valeur de  $b_3$ , qui est donc indéterminée et sera prise égale à 0.

Le coefficient de section réduite  $a_x$  est alors donné par l'expression :

$$a_x = \frac{1}{\langle EI_x \rangle} \left\{ \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_{aj}} E_a g_{oa} r \sin \theta r dr d\theta + \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=R_{aj}}^{R_{ej}} E_e g_{oe} r \sin \theta r dr d\theta \right\} \quad (\text{A-18})$$

On obtient tous calculs faits :

$$a_x = \frac{C_{f1}}{6} \left( \begin{array}{l} (7 Ee^2 Ge Ga + 7 Ga^2 Ee^2) Re^8 \\ + (-20 Ga^2 Ee^2 + 20 Ee^2 Ge Ga) Ra^2 Re^6 \\ + (18 Ga^2 Ee^2 + (-54 Ee^2 + 36 Ea Ee) Ga Ge) Ra^4 Re^4 \\ + ((-24 Ea Ee + 20 Ee^2 + 7 Ea^2) Ga Ge - 4 Ga^2 Ee^2 + Ge^2 Ea^2) Ra^6 Re^2 \\ + (-Ge^2 Ea^2 + (7 Ea^2 - 12 Ea Ee + 7 Ee^2) Ga Ge - Ga^2 Ee^2) Ra^8 \end{array} \right) \quad (\text{A-19})$$

avec :

$$C_{f1} = \frac{((Ga - Ge) Ra^2 + Ge Re^2)}{((Ea - Ee) Ra^4 + Ee Re^4)^2 ((Ga + Ge) Re^2 + (Ga - Ge) Ra^2) Ge Ga} \quad (\text{A-20})$$

Puisque la section est axisymétrique (circulaire), le calcul du coefficient de section réduite suivant l'axe  $z$  n'est pas nécessaire. On a en effet  $a_z = a_x$ .

On pose les notations suivantes :

$$\lambda_R = \frac{R_{aj}}{R_{ej}} \quad \lambda_E = \frac{E_a}{E_e} \quad \lambda_G = \frac{G_a}{G_e} \quad (\text{A-21})$$



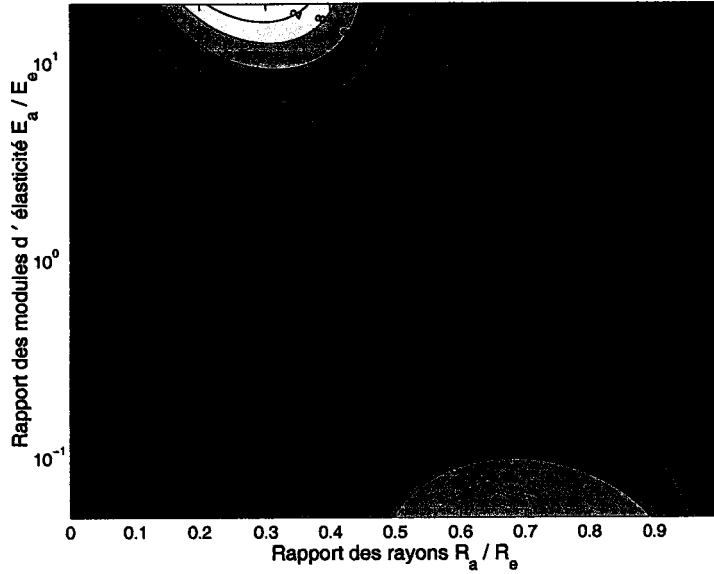


FIG. A-2 – Variation du coefficient de section réduite pour une section circulaire composée d'un axe (rayon  $R_a$ , module d'Young  $E_a$  et coefficient de poisson  $\nu_a$ ) et d'un enrobage de rayon (rayon  $R_e$ , module d'Young  $E_e$  et coefficient de poisson  $\nu_e$ ) en fonction des rapports  $R_a/R_e$  et  $E_a/E_e$  lorsque  $\nu_a = 0,05$  et  $\nu_e = 0,4$

On obtient alors l'expression du coefficient de section réduite en fonction des coefficients  $\lambda_G$ ,  $\lambda_E$  et  $\lambda_R$  :

$$a_x = \frac{C_{f2}}{6} \left( \begin{array}{l} \lambda_R^8 (-\lambda_G^2 + (7 - 12\lambda_E + 7\lambda_E^2)\lambda_G - \lambda_E^2) \\ + \lambda_R^6 ((7\lambda_E^2 - 24\lambda_E + 20)\lambda_G - 4\lambda_G^2 + \lambda_E^2) \\ + \lambda_R^4 ((36\lambda_E - 54)\lambda_G + 18\lambda_G^2) \\ + \lambda_R^2 (20\lambda_G - 20\lambda_G^2) \\ + 7\lambda_G + 7\lambda_G^2 \end{array} \right) \quad (\text{A-22})$$

avec :

$$C_{f2} = \frac{(\lambda_G - 1)\lambda_R^2 + 1}{((\lambda_E - 1)\lambda_R^4 + 1)^2 ((\lambda_G - 1)\lambda_R^2 + \lambda_G + 1)\lambda_G} \quad (\text{A-23})$$

On vérifie qu'en absence d'axe ( $\lambda_R = 0$ ) ou d'enrobage ( $\lambda_R = 1$ ), ou pour deux matériaux identiques  $\lambda_E = \lambda_G = 1$ , on retrouve bien la valeur de  $7/6$  d'une section homogène. Les figures A-2 à ?? présentent les variations du coefficient de section réduite selon les matériaux utilisés ou les dimensions de la section.

Les figures A-2 à A-4 présentent la variation du coefficient de section réduite  $a_x$  pour une section circulaire composée d'un axe (rayon  $R_{aj}$ , module d'Young  $E_a$  et coefficient de poisson  $\nu_a$ ) et d'un enrobage (rayon  $R_{aj} \leq \text{rayon} \leq R_{ej}$ , module d'Young  $E_e$  et coefficient de poisson  $\nu_e$ ) en fonction des rapports  $R_{aj}/R_{ej}$  et  $E_a/E_e$ . La figure A-2 présente les résultats lorsque  $\nu_a = 0,05$  et  $\nu_e = 0,4$ . La figure A-3 illustre le cas où  $\nu_a = \nu_e$  et la figure A-4, celui où  $\nu_a = 0,4$  et  $\nu_e = 0,05$ .

Le coefficient de Poisson est compris entre 0 et 0,5. Les faibles valeurs étant illustrées par les céramiques (diamant, silice, carbure de tungstène), les valeurs moyennes par les métaux (Fer, Acier,

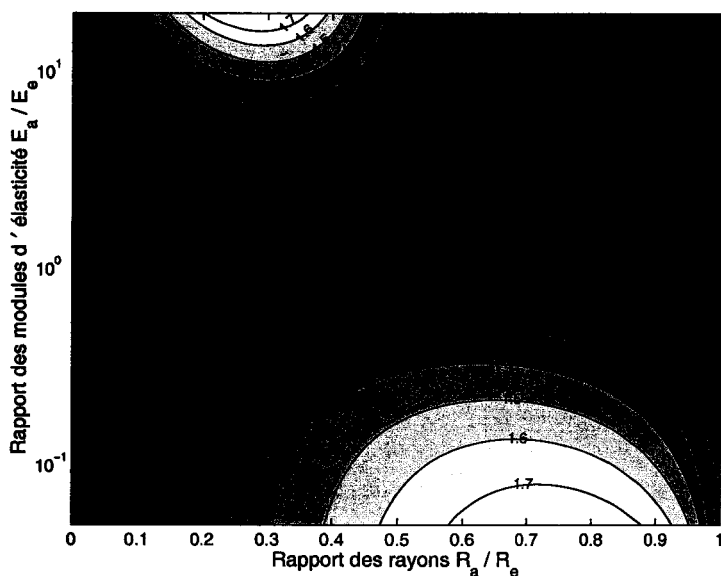


FIG. A-3 – Variation du coefficient de section réduite pour une section circulaire composée d'un axe (rayon  $R_a$ , module d'Young  $E_a$  et coefficient de poisson  $\nu_a$ ) et d'un enrobage de rayon (rayon  $R_e$ , module d'Young  $E_e$  et coefficient de poisson  $\nu_e$ ) en fonction des rapports  $R_a/R_e$  et  $E_a/E_e$  lorsque  $\nu_a = \nu_e$

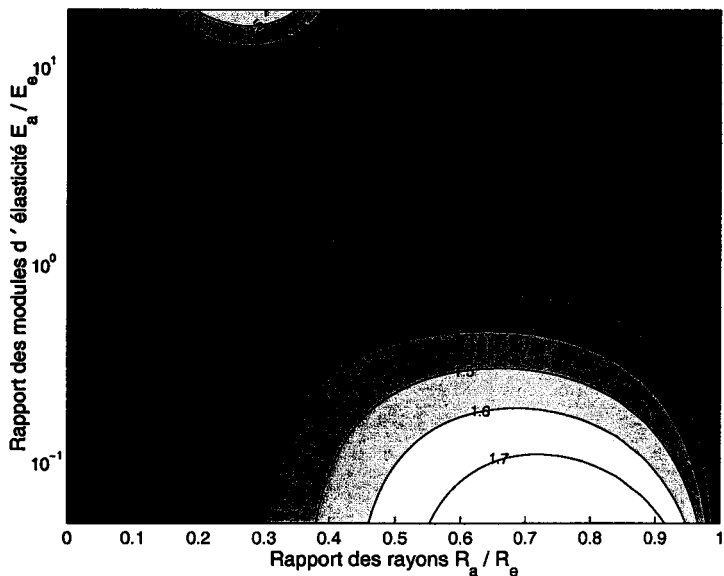


FIG. A-4 – Variation du coefficient de section réduite pour une section circulaire composée d'un axe (rayon  $R_a$ , module d'Young  $E_a$  et coefficient de poisson  $\nu_a$ ) et d'un enrobage de rayon (rayon  $R_e$ , module d'Young  $E_e$  et coefficient de poisson  $\nu_e$ ) en fonction des rapports  $R_a/R_e$  et  $E_a/E_e$  lorsque  $\nu_a = 0,4$  et  $\nu_e = 0,05$

$(1 + \nu_a)/(1 + \nu_e)$	0.75	0.833	0.90	1	1.111	1.2	1.33
$R_{aj}/R_{ej}$	0.644	0.628	0.615	0.600	0.583	0.571	0.555
$E_a/E_e$	2.209	2.516	2.769	3.159	3.606	3.974	4.541
$a_x$	1.070	1.073	1.075	1.078	1.081	1.083	1.087

TAB. A-1 – Positions et valeurs des minima du coefficient de section réduite pour différentes valeurs du rapport  $(1 + \nu_a)/(1 + \nu_e)$

Aluminium, Cuivre) et les valeurs hautes par les polymères (Polyamide, Polyéthylène, Kevlar, Caoutchouc) [30]. Les coefficients de Poisson choisis pour l'exemple sont les valeurs extrêmes trouvées dans [27].

Dans le paragraphe A.0.5.A, on avait affirmé que le coefficient de section réduite était égale 7/6 lorsque la section circulaire était mono-composant, ce qui est le cas également si l'enrobage est fait dans le même matériau que l'axe. Sur la figure A-3, où  $\nu_a = \nu_e$  et pour la valeur  $E_a/E_e = 1$ , on observe bien une ligne de niveau  $a_x = 1,1667 = 7/6$  pour la valeur  $E_a/E_e = 1$ .

On observe un unique minimum global, dont la position varie avec les valeurs de  $\nu$ . Cet optimum correspond à une section réduite maximale et, par conséquent, à une rigidité minimale de la section considérée. Les valeurs et les positions des minima, calculées par le module *fminsearch* de *MATLAB*, sont regroupées dans le tableau A-1.

Remarque : la fonction ne présente pas de maximum contrairement à ce que peut éventuellement suggérer la figure .

L'étude des limites en terme de  $E_a/E_e$  permet de vérifier que, lorsque l'axe est infiniment plus rigide que l'enrobage (enrobage équivalent à du vide), la valeur du coefficient de section réduite est de 7/6 indépendamment de la taille de l'axe. Lorsque l'axe a un rayon faible, la variation avec la valeur de  $R_a/R_e$  est d'autant plus brutale que le rapport  $\lambda_E$  est grand.

En revanche lorsque l'enrobage est infiniment plus résistant le coefficient de section réduite est donné par la fonction :

$$a_x = \frac{7 \lambda_R^4 + 34 \lambda_R^2 + 7}{6 (\lambda_R^2 + 1)^2} \quad (\text{A-24})$$

La valeur à droite de  $a_x$ , lorsque le rayon de l'axe tend vers 0, est de 7/6 (analogie avec un axe mono-composant percé au centre de sa section). Cette limite tend vers la valeur 2, lorsque l'enrobage est d'épaisseur faible (analogie à un tube à paroi mince). Cette valeur est retrouvée par le calcul avec l'hypothèse de non-dépendance de la contrainte tangentielle suivant  $r$  dans l'épaisseur d'un tube à paroi mince.

Les figures A-5(a) et (b) présentent l'évolution du coefficient de section réduite dans un cône dont le rayon extérieur  $R_{ej}$  évolue respectivement entre 3 et 5 mm et entre 5 et 10 mm. Les valeurs entre 3 mm et 10 mm nous intéressent plus particulièrement dans notre application.

Le rayon de l'axe traversant est fixé à  $R_{aj} = 3$  mm pour notre moteur. Le résultat est présenté en

	acier	aluminium AU4G	Kevlar 60% résine Epoxy	Carbone 60% résine Epoxy
module d'Young E (MPa)	205000	75000	5600	7000
module de Coulomb G (MPa)	79000	27000	2100	4200

TAB. A-2 – Propriétés mécaniques de différents matériaux utilisables pour la fabrication d'un rotor de Machines à Réductance Variable. (d'après [27])

fonction des différents matériaux utilisés pour l'axe et l'enrobage. Ces matériaux sont l'acier, l'aluminium et des composites unidirectionnels de fibres de carbone ou de Kevlar dans une résine époxyde. Leurs propriétés sont résumées dans le tableau A-2. Pour les composites, les propriétés sont celles du sens transverse (perpendiculairement à l'axe des fibres), qui sont environ 20 fois plus faibles que celle du sens longitudinal[27].

La figure A-5(a) montre l'influence limitée des propriétés mécaniques des matériaux en présence lorsque  $R_{ej}$  est inférieur au double de  $R_{aj}$ . Le coefficient reste de l'ordre de 7/6. En revanche, la figure A-5(b) montre que ce coefficient peut prendre des valeurs bien supérieures si les modules d'Young sont très différents. Pour un axe en aluminium et un enrobage en Kevlar/époxy, le coefficient est de l'ordre de 2,2 pour un rayon  $R_{ej}$  de 10 mm. La valeur maximale de cette courbe est de  $a_x = 2,42$  lorsque  $R_{ej} = 11,61$ . Notons que pour un enrobage d'aluminium sur un axe en acier, le coefficient reste constamment inférieur à la valeur de 7/6. Les variations du coefficient demeurent faibles dans ce cas (entre 1,08 et 1,1667).

**A.0.5.B.i Remarque** Ce calcul a été réalisé à partir d'une hypothèse de répartition de la contrainte normale suivant l'axe de rotation. Cette hypothèse ne répond pas aux conditions aux limites au bord du cône si la variation de rayon est brusque. En effet, les contraintes doivent être tangentes en tout point à la surface extérieure, donc l'hypothèse de la contrainte parallèle à l'axe de rotation est d'autant plus discutable que la variation de section, le long de l'axe, est rapide. Il convient donc ici de nuancer les résultats que peut donner le modèle si le cône est très prononcé.

Toutes ces raisons nous incite par la suite à utiliser la valeur de 7/6 comme valeur moyenne du coefficient de section réduite.

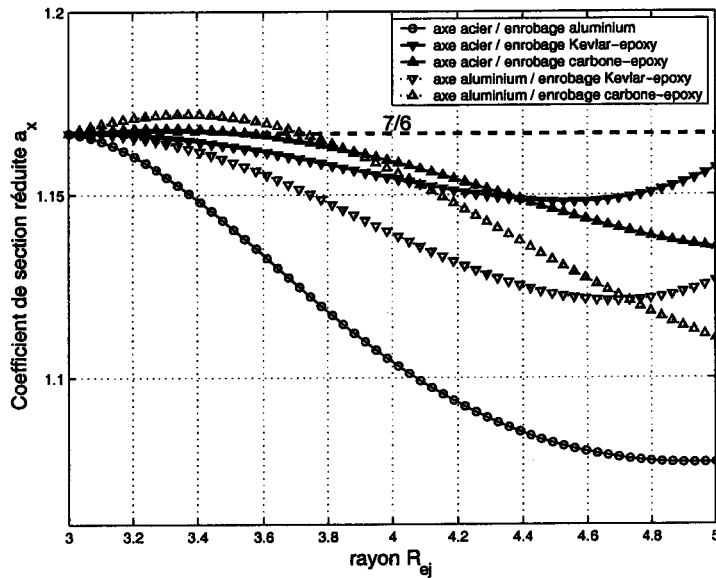


Figure A-5 (a)

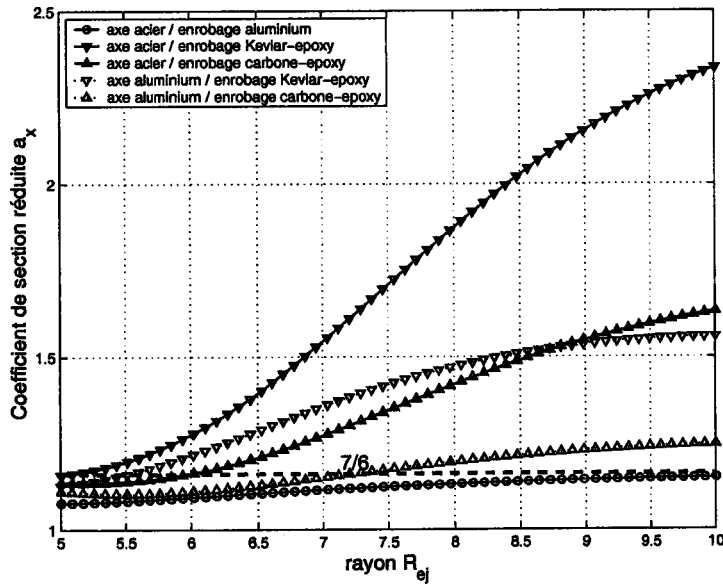


Figure A-5 (b)

FIG. A-5 – Variation du coefficient de section réduite pour une section circulaire composée d'un axe (rayon  $R_{aj} = 3$ ) et d'un enrobage de rayon  $R_{ej}$  variant entre 3 et 5 mm (a) ou entre 5 et 10 mm (b) et en fonction des matériaux utilisés pour l'axe (acier ou aluminium) et l'enrobage (aluminium, Kevlar/epoxy ou carbone/epoxy)

## Annexe B

# Pré-calcul de l'énergie potentielle

Nous allons présenter la démarche du pré calcul analytique, en étudiant le cas de l'énergie potentielle de flexion.

Le rotor est composé de  $N$  tronçons. On considère le  $\lambda^{\text{ième}}$  tronçon du rotor.

$$R_{e\lambda} = a_\lambda y + b_\lambda \quad (\text{B-1})$$

Dans le repère lié au stator (fixe), les fonctions de déformation sont donnés par le vecteur translation suivant :

$$\Phi(y,t) = \left\{ \begin{array}{l} \phi_X(y,t) \\ \phi_Z(y,t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n q_k(t) y^{k-1} \\ \sum_{k=1}^n q_{k+n}(t) y^{k-1} \end{array} \right\} \quad (\text{B-2})$$

et par le vecteur rotation:

$$\Theta(y,t) = \left\{ \begin{array}{l} \theta_X(y,t) \\ \theta_Z(y,t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n q_{k+2n}(t) y^{k-1} \\ \sum_{k=1}^n q_{k+3n}(t) y^{k-1} \end{array} \right\} \quad (\text{B-3})$$

Nous avons montré que l'énergie potentielle de flexion du  $\lambda^{\text{ième}}$  tronçon du rotor s'écrivait sous la forme :

$$U_f(\lambda,t) = \frac{1}{2} \int_{y=L_{\lambda-1}}^{L_\lambda} \left( \begin{array}{l} \langle EI_Z \rangle(\lambda,y) \left( \frac{\partial \theta_Z}{\partial y} \right)^2 \\ -2 \langle EI_{XZ} \rangle(\lambda,y) \frac{\partial \theta_X}{\partial y} \frac{\partial \theta_Z}{\partial y} \\ + \langle EI_X \rangle(\lambda,y) \left( \frac{\partial \theta_X}{\partial y} \right)^2 \end{array} \right) dy \quad (\text{B-4})$$

D'où l'expression suivante :

$$U_f(\lambda,t) = \frac{1}{2} \int_{y=L_{\lambda-1}}^{L_\lambda} \left( \begin{array}{l} \langle EI_Z \rangle(\lambda,y) \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{k=1}^n q_{k+3n}(t) y^{k-1} \right) \right)^2 \\ -2 \langle EI_{XZ} \rangle(\lambda,y) \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{k=1}^n q_{k+3n}(t) y^{k-1} \right) \times \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{j=1}^n q_{j+2n}(t) y^{j-1} \right) \\ + \langle EI_X \rangle(\lambda,y) \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{k=1}^n q_{k+2n}(t) y^{k-1} \right) \right)^2 \end{array} \right) dy \quad (\text{B-5})$$

Pour simplifier les écritures, on gardera les notations ci-dessus pour les fonctions de rigidité, sans reprendre leurs expressions (équations (II-35) à (II-37)). En dérivant les fonctions de déformations par

rapport à  $y$ , on obtient alors :

$$U_f(\lambda, t) = \frac{1}{2} \int_{y=L_{\lambda-1}}^{L_\lambda} \left( \begin{array}{l} \langle EI_Z \rangle(\lambda, y) \left( \sum_{k=2}^n (k-1) q_{k+3n}(t) y^{k-2} \right)^2 \\ - 2 \langle EI_{XZ} \rangle(\lambda, y) \left( \sum_{j=1}^n (j-1) q_{j+2n}(t) y^{j-2} \right) \\ \quad \times \left( \sum_{k=2}^n (k-1) q_{k+3n}(t) y^{k-2} \right) \\ + \langle EI_X \rangle(\lambda, y) \left( \sum_{k=1}^n (k-1) q_{k+2n}(t) y^{k-2} \right)^2 \end{array} \right) dy \quad (B-6)$$

En remarquant la propriété suivante pour le produit d'une somme :

$$\left( \sum_{k=1}^n u_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} u_k \times \sum_{j=k+1}^n u_j \quad (B-7)$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} U_f(\lambda, t) = & \frac{1}{2} \int_{y=L_{\lambda-1}}^{L_\lambda} \left( \begin{array}{l} \langle EI_Z \rangle(\lambda, y) \left( \sum_{k=2}^n (k-1)^2 q_{k+3n}^2(t) y^{2(k-2)} \right) \\ + 2 \langle EI_Z \rangle(\lambda, y) \left( \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) q_{k+3n}(t) y^{k-2} \right) \\ \quad \times \sum_{j=k+1}^n (j-1) q_{j+3n}(t) y^{j-2} \end{array} \right) dy \\ & - \int_{y=L_{\lambda-1}}^{L_\lambda} \left( \langle EI_{XZ} \rangle(\lambda, y) \left( \sum_{j=1}^n (j-1) q_{j+2n}(t) y^{j-2} \right) \right) dy \\ & + \frac{1}{2} \int_{y=L_{\lambda-1}}^{L_\lambda} \left( \begin{array}{l} \langle EI_X \rangle(\lambda, y) \left( \sum_{k=2}^n (k-1)^2 q_{k+2n}^2(t) y^{2(k-2)} \right) \\ + 2 \langle EI_X \rangle(\lambda, y) \left( \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) q_{k+2n}(t) y^{k-2} \right) \\ \quad \times \sum_{j=k+1}^n (j-1) q_{j+2n}(t) y^{j-2} \end{array} \right) dy \end{aligned} \quad (B-8)$$

De cette expression, on peut obtenir les termes dues à la flexion dans la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$ . Dans le cas présent (énergie de flexion), seuls les termes de  $\mathbf{K}$  relatifs aux coefficient généralisés  $q_{j=2n+1, \dots, 4n}$  sont donnés. L'énergie de cisaillement fera, pour sa part, intervenir tous les coefficients et créera des couplages entre  $q_k$  et  $q_{k+3n}$  ainsi qu'entre  $q_{k+n}$  et  $q_{k+2n}$ .

Dans l'équation (B-8), les coefficients  $q_j$  sont des constantes. Par conséquent les produits  $q_j q_k$  peuvent être sortis du signe d'intégration. Les termes d'intégration deviennent alors les coefficients d'une somme de carrés et de double produits. La dérivation par rapport aux coefficients généralisés devient très aisée.

En dérivant l'expression (B-8) conformément aux équations de Lagrange on obtient les termes de

K correspondant à l'énergie du tronçon  $\lambda$  suivant :

$$\begin{aligned} K_{\lambda f}(i+2n, j+2n) &= \frac{\partial^2 U_f(\lambda, t)}{\partial q_{j+2n} \partial q_{i+2n}} = \int_{y=L_{\lambda-1}}^{L_{\lambda}} \langle EI_Z \rangle(\lambda, y) (i-1)(j-1) y^{i+j-4} dy \\ &= K_{\lambda f}(j+2n, i+2n) \end{aligned} \quad (\text{B-9})$$

$$\begin{aligned} K_{\lambda f}(i+2n, j+3n) &= \frac{\partial^2 U_f(\lambda, t)}{\partial q_{j+3n} \partial q_{i+2n}} = - \int_{y=L_{\lambda-1}}^{L_{\lambda}} \langle EI_{XZ} \rangle(\lambda, y) (i-1)(j-1) y^{i+j-4} dy \\ &= K_{\lambda f}(j+3n, i+2n) \end{aligned} \quad (\text{B-10})$$

$$\begin{aligned} K_{\lambda f}(i+2n, j+3n) &= \frac{\partial^2 U_f(\lambda, t)}{\partial q_{j+3n} \partial q_{i+3n}} = - \int_{y=L_{\lambda-1}}^{L_{\lambda}} \langle EI_X \rangle(\lambda, y) (i-1)(j-1) y^{i+j-4} dy \\ &= K_{\lambda f}(j+3n, i+3n) \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

où  $i$  et  $j$  sont des entiers définis entre 1 et  $n$ .

**Remarque :** vues les notations assez longues utilisées pour les indices, on a préféré prendre la notation  $K(i, j)$  plutôt que la notation  $K_{ij}$ .

Pour obtenir le terme final de la matrice K, il faut recalculer chaque valeur de  $K_{\lambda c}$  associée à l'énergie potentielle de cisaillement, ensuite calculer la somme des contributions des  $N$  tronçons à la rigidité totale par la formule :

$$K(i, j) = \sum_{k=1}^N (K_{\lambda c}(i, j) + K_{\lambda f})(i, j) \quad (\text{B-12})$$



# Annexe C

## Théorie du contact de Hertz

La complexité de la théorie et de ses notations impose de n'en présenter ici que les résultats principaux.

Les principales hypothèses formulées par Hertz pour sa théorie du contact sont les suivantes :

- (a) Au point de contact, la forme des deux surfaces en contact peut être décrite par un polynôme du second degré à deux variables;
- (b) Les deux surfaces sont parfaitement lisses;
- (c) Les contraintes et déformations de contact satisfont aux équations différentielles d'équilibres des corps élastiques, homogènes et isotropes;
- (d) Les contraintes disparaissent à grande distance de la zone de contact;
- (e) Les contraintes tangentielles dans et hors de la zone de contact sont nulles;
- (f) La somme de contraintes normales dans la zone de contact est égale à la force appliquée aux deux solides;
- (g) La distance entre les deux corps est nulle à l'intérieur mais finie à l'extérieur hors de la zone de contact;
- (h) En absence de force, la zone de contact se réduit à un point.

Les déformations de la bille sont supposées être, d'une part, concentrées dans le voisinage des points de contact et, d'autre part, relativement petites comparées aux dimensions des corps en présence. La déformation relative des deux solides, sous l'action de la force  $Q$  normale agissant sur le contact, est notée  $\delta$ . Ces déformations prennent en compte celle de la bille et de la piste en contact.

La zone de contact est supposée être une ellipse dont les demi-axes ont pour longueurs  $a$  et  $b$  ( $a \geq b$  par convention). On appelle paramètre d'excentricité de l'ellipse le rapport  $\kappa = \frac{a}{b}$  dont la valeur est alors strictement supérieure ou égale à 1.

La solution classique du problème du contact hertzien entre deux solides élastiques  $I$  et  $II$  est définie à partir de deux paramètres liés à la géométrie des contacts donnés par les formules (C-2) et (C-3) et un paramètre lié aux matériaux en présence, noté  $E^*$ , appelé module d'élasticité équivalent

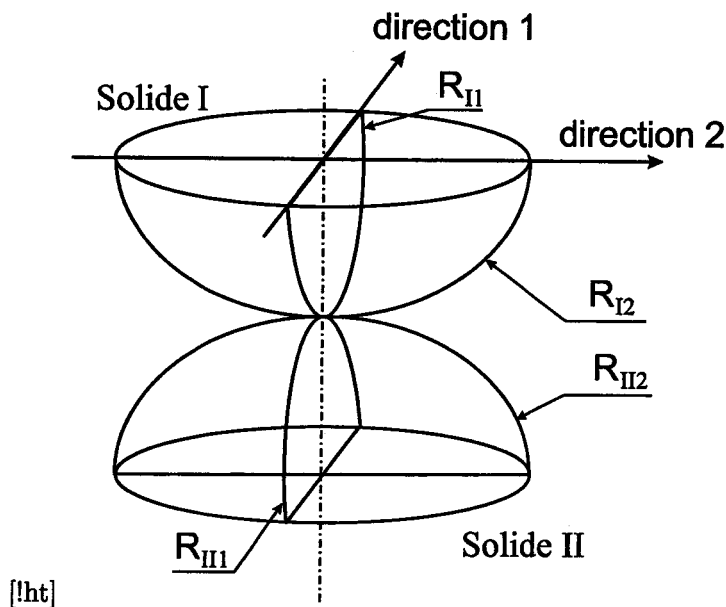


FIG. C-1 – *Representation de deux solide en contact*

donné par les formules (C-12) et (C-13) pour chacun des contacts intérieur et extérieur [41, 70].

On note  $\rho$  la courbure de la surface du solide  $I$  ou  $II$  en contact dans la direction latérale 1 ou dans la direction de roulement 2 comme présenté dans [41]. Si le rayon de courbure est toujours de signe positif, la courbure peut être : soit positive quand la surface étudiée est convexe dans le plan considéré, soit négative, quand cette surface est concave.

La théorie de Hertz montre que le paramètre d'excentricité  $\kappa$  est relié à la géométrie des deux surfaces en contact, représentée par  $F(\rho)$  par l'équation transcendante suivante [41]:

$$F(\rho) = \frac{(\kappa^2 + 1)\mathcal{E} - 2\mathcal{F}}{(\kappa^2 - 1)\mathcal{E}} \quad (\text{C-1})$$

avec  $F(\rho)$  donné par la relation :

$$F(\rho) = \frac{(\rho_{I1} - \rho_{I2}) + (\rho_{II1} - \rho_{II2})}{\Sigma \rho_i} \quad (\text{C-2})$$

avec :

$$\Sigma \rho = \rho_{I1} + \rho_{I2} + \rho_{II1} + \rho_{II2} \quad (\text{C-3})$$

**Remarque :**  $F(\rho)$  est parfois noté  $\cos \Omega$  dans d'autres travaux [75] ou formulaires techniques, ce qui permet en particulier de tracer plus facilement les fonctions, et de s'affranchir du nombre de décimales nécessaires quand  $F(\rho)$  tend vers 1. (voir, pour illustration, le tableau C-1).

Les termes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{E}$  dans l'équation (C-1) sont respectivement les intégrales elliptiques complètes de

premier et second types, dont les expressions sont les suivantes:

$$\mathcal{F}(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \sin^2 \phi \right]^{-1/2} d\phi \quad (\text{C-4})$$

$$\mathcal{E}(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \sin^2 \phi \right]^{1/2} d\phi \quad (\text{C-5})$$

L'équation implicite est présente sous une forme équivalente dans les travaux de Wensing sur les roulements [94], mais les notations différentes utilisées rendent la comparaison délicate. Un algorithme numérique de calcul des grandeurs de la théorie de Hertz est donné par [75].

Une fois la solution de l'équation implicite obtenue et la valeur de  $\kappa$  trouvée à partir de celle de  $F(\rho)$ , les expressions permettent d'obtenir les valeurs des deux semi-axes de l'ellipse,  $a$  et  $b$ , et d'évaluer le rapprochement relative  $\delta$  de deux points éloignés appartenant à l'un et l'autre des solides en contact.

$$a = a^* \left( \frac{3Q}{2\Sigma\rho E^*} \right)^{1/3} \quad (\text{C-6})$$

$$b = b^* \left( \frac{3Q}{2\Sigma\rho E^*} \right)^{1/3} \quad (\text{C-7})$$

$$\delta = \delta^* \left( \frac{3Q}{2\Sigma\rho E^*} \right)^{2/3} \frac{\Sigma\rho}{2} \quad (\text{C-8})$$

où les valeurs  $a^*$ ,  $b^*$  et  $\delta^*$  dépendent uniquement du paramètre  $F(\rho)$  selon les expressions suivantes :

$$a^* = \left( \frac{2\kappa^2 \mathcal{E}}{\pi} \right)^{1/3} \quad (\text{C-9})$$

$$b^* = \left( \frac{2\mathcal{E}}{\pi\kappa} \right)^{1/3} \quad (\text{C-10})$$

$$\delta^* = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \left( \frac{\pi}{2\kappa^2 \mathcal{E}} \right)^{1/3} \quad (\text{C-11})$$

Les résultats de la théorie de Hertz sont habituellement présentés sous forme de tables numériques. Le tableau C-1 est extrait de [41]. Nous lui avons ajouté la dernière colonne concernant le paramètre d'excentricité de l'ellipse  $\kappa$ .

Dans le cas d'un roulement à billes, la géométrie de la piste intérieure présente une courbure positive dans la direction de roulement, puisque suivant cette direction la surface est convexe, alors que la surface est concave et la courbure négative dans la direction dite latérale. Au contact extérieur, en revanche, la surface étant concave dans les deux directions latérale et de roulement, les deux courbures sont négatives.

Les deux paramètres  $\Sigma\rho$  et  $F(\rho)$  doivent être alors défini pour chacun des contacts intérieur et extérieur en fonction du diamètre de la bille  $d_b$ , du diamètre moyen du roulement  $d_m$ , des angles de contact  $\alpha_i$  et  $\alpha_o$  et des rayons de courbure  $R_i$  et  $R_o$  de chacun des deux chemins de roulement.

$F(\rho)$ = $\cos \Omega$	$\Omega$ (degrés) [75]	$a^*$	$b^*$	$\delta^*$	$\kappa$
0	90.00	1	1	1	1
0.1075	83.82	1.0760	0.9315	0.9974	1.1551
0.3204	71.31	1.2623	0.8114	0.9761	1.5557
0.4795	61.34	1.4556	0.7278	0.9429	2
0.5916	53.73	1.6440	0.6687	0.9077	2.4884
0.6716	47.80	1.8258	0.6245	0.8733	2.9236
0.7332	42.84	2.011	0.5881	0.8494	3.4195
0.7948	37.36	2.265	0.5480	0.7961	4.0629
0.83495	33.38	2.494	0.5186	0.7602	4.8091
0.87366	29.11	2.800	0.4863	0.7169	5.7577
0.90999	24.49	3.233	0.4499	0.6636	7.1860
0.93657	20.51	3.798	0.4166	0.6112	9.1166
0.95738	16.78	4.395	0.3830	0.5551	11.475
0.97920	11.70	5.267	0.3490	0.4960	15.0917
0.983797	10.32	6.448	0.3150	0.4352	20.4698
0.990902	7.734	8.062	0.2814	0.3745	28.649
0.995112	5.667	10.222	0.2497	0.3176	40.937
0.997300	4.211	12.798	0.2232	0.2705	57.339
0.9981847	3.452	14.839	0.2072	0.2427	71.617
0.9989156	2.668	17.974	0.18822	0.2106	95505
0.9994785	1.850	23.55	0.16442	0.17167	143.23
0.9998527	0.9834	37.38	0.13050	0.11995	286.43
1	0.0000	$\infty$	0	0	$\infty$

TAB. C-1 - Paramètres de contact adimensionnels de la théorie de Hertz - les deuxième et dernière colonnes ont été rajoutées au tableau de Harris [41] - La deuxième colonne représente un autre paramètre  $\Omega$  utilisé par Deeg [75] dont l'échelle plus linéaire est parfois utilisée

En tenant compte des conventions de signes énoncée plus haut, le paramètre  $\Sigma\rho$  est donné pour les contacts intérieur ou extérieur par les expressions :

$$\Sigma\rho_i = \frac{4}{d_b} - \frac{1}{R_i} + \frac{2 \cos \alpha_i}{d_m - d_b \cos \alpha_i}$$

$$\Sigma\rho_o = \frac{4}{d_b} - \frac{1}{R_o} - \frac{2 \cos \alpha_o}{d_m + d_b \cos \alpha_o}$$

De même, on obtient le paramètre  $F(\rho)$  pour chacun des contacts par les relations :

$$F(\rho)_i = \left( \frac{1}{R_i} + \frac{2 \cos \alpha_i}{d_m - d_b \cos \alpha_i} \right) (\Sigma\rho_i)^{-1}$$

$$F(\rho)_o = \left( \frac{1}{R_o} - \frac{2 \cos \alpha_o}{d_m + d_b \cos \alpha_o} \right) (\Sigma\rho_o)^{-1}$$

Les modules d'élasticité équivalents  $E_i^*$  et  $E_o^*$  peuvent être calculés respectivement par :

$$\frac{1}{E_i^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_b^2}{E_b} + \frac{1 - \nu_{ir}^2}{E_{ir}} \right) \quad (C-12)$$

$$\frac{1}{E_o^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_b^2}{E_b} + \frac{1 - \nu_{or}^2}{E_{or}} \right) \quad (C-13)$$

$\nu$  est le coefficient de Poisson et  $E$  le module d'Young. Les indices *ir*, *or* et *b* désignent respectivement les matériaux de la bague intérieur, extérieur et des billes. Comme illustration, des billes en acier à roulement en contact avec des bagues du même matériau ont un module d'Young équivalent d'environ  $2,26 \times 10^{11} N/mm^2$ .

## Annexe D

# Calcul des moments de frottement

### Relations entre forces et moments de contact

Le contact entre la bille et les bagues n'est pas ponctuel mais réparti sur une ellipse de contact. En chaque point de l'ellipse, on peut définir un point appartenant à la bille et un autre appartenant à la bague. Considérant une ellipse très allongée, Johnson [76] a montré qu'il existe au moins une et au plus deux lignes, où les vitesses des points de la bille sont les mêmes que celles de la bague concernée. Il n'y a donc pas de glissement dans ces deux bandes de l'ellipse, qui sont appelées bandes de non-glissement. Le nombre (1 ou 2) de bandes et leur position le long du grand axe de l'ellipse est fonction de la cinématique de la bague et de la bille, et plus précisément des taux de pivotement [71] ("spin to roll ratio"). Ce taux est défini comme le rapport de la vitesse de rotation de la bille autour de la normale au contact ( $\Omega_s$ ) sur la vitesse de roulement ( $\Omega_r$ ) autour du grand axe de l'ellipse de contact considérée.

Les taux de pivotement ("spin to roll ratio") aux contacts extérieur et intérieur sont respectivement notés  $\epsilon_o$  et  $\epsilon_i$  et donnés par les formules [41] :

$$\epsilon_o = - \left( 1 + \frac{d_b}{d_m} \cos \alpha_o \right) \tan(\alpha_o - \beta) + \frac{d_b}{d_m} \sin(\alpha_o) \quad (D-1)$$

$$\epsilon_i = \left( 1 - \frac{d_b}{d_m} \cos \alpha_i \right) \tan(\alpha_i - \beta) + \frac{d_b}{d_m} \sin(\alpha_i) \quad (D-2)$$

avec l'angle  $\beta$  d'inclinaison de l'axe de rotation de la bille [41] donné par l'équation IV-40. Cette relation a été définie par la condition de contrôle par la bague extérieure (outer race control) [65]. Cela signifie que le mouvement au contact est un mouvement de roulement pure, d'où  $\epsilon_o = 0$ .

Une étude des vitesses de glissement effectuée par Hachkowski et Peterson [86] a donné la répartition des vitesses sur une ellipse de contact pour différentes valeurs du taux de pivotement  $\epsilon$ , comme représenté sur la figure D-1.

La position des deux points de non-glissement sur le grand axe de l'ellipse de contact extérieure (demi grand axe  $b_o$ ) sont notés  $y_{1o}$  et  $y_{2o}$ .

On définit les nombres adimensionnels  $\eta_{1o} = \frac{y_{1o}}{b_o}$  et  $\eta_{2o} = \frac{y_{2o}}{b_o}$  qui permettent de définir la répartition

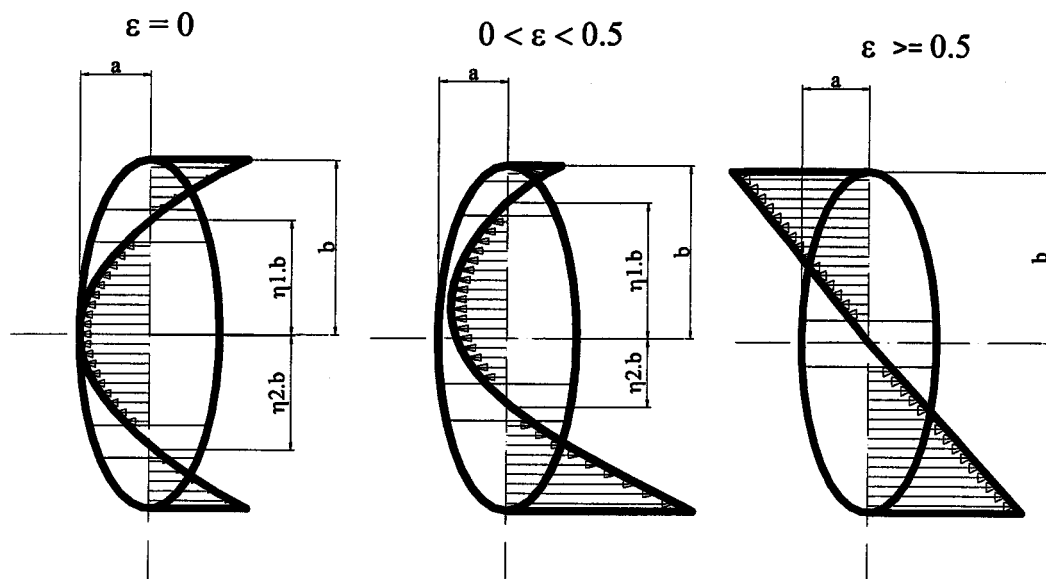


FIG. D-1 - Position des bandes de non-glisement (en grisé) et répartition des vitesses de glissement sur l'ellipse de contact selon le taux de pivotement  $\epsilon$  d'après Hachkowski et Peterson [86].

des vitesses sur l'ellipse.

De même, la répartition des vitesses sur l'ellipse de contact intérieure est définie par  $\eta_{1i} = \frac{y_{1i}}{b_i}$  et  $\eta_{2i} = \frac{y_{2i}}{b_i}$ .

En posant  $\eta_{1i,2i} = \epsilon_i \pm \Delta_i$  et  $\eta_{1o,2o} = \epsilon_o \pm \Delta_o$ , Todd et Johnson [87] ont montré que  $\Delta$  et le taux de pivotement  $\epsilon$  étaient reliés par :

$$\Delta^3 - 3\Delta (1 - \epsilon^3) + 1 = 0 \quad (\text{D-3})$$

La position des points de non-glisement est donnée par la racine réaliste de l'équation (D-3), qui donne  $0 \leq \Delta \leq 0.5$  quand  $0 \leq \epsilon \leq 0.5$  est la suivante au contact intérieur :

$$\eta_{1i,2i} = \epsilon_i \pm 2(1 - \epsilon_i^3)^{1/2} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{-1}{2(1 - \epsilon_i^3)^{3/2}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] \quad (\text{D-4})$$

Au contact extérieur compte tenu de  $\epsilon_o = 0$  (outer race control) on a  $\eta_{1o,2o} = \pm 2 \sin \frac{\pi}{18} = \pm 0,34729$ . A partir de ces valeurs représentatives de la répartition des vitesses de glissement, les forces de frottement seront intégrées sur toute la surface de contact pour obtenir les moments dus aux frottements.

## Relations pour le calcul des moments de frottement

**Moments de pivotement :** Les moments orientés suivant la normale au contact sont appelés moments de friction de pivotement (spin) et sont donnée par [87, 86] :

$$M_{No} = C_{No} \mu_r Q_o b_o \text{sign}(\Omega_c) \quad (\text{D-5})$$

$$M_{Ni} = C_{Ni} \mu_r Q_i b_i \text{sign}(\Omega_c) \quad (\text{D-6})$$

La fonction  $sign(\Omega_c)$  intervient dans les expressions afin de rendre compte du changement d'orientation des moments lorsque le sens de rotation du roulement s'inverse.

Les coefficients  $C_{No}$  et  $C_{Ni}$  sont fonction de la répartition des vitesses de glissement respectivement sur les ellipses de contact extérieure et intérieure donnés par [86]

$$C_{No} = \frac{3}{4} \left[ \eta_{1o}^2 \left( 1 - \frac{\eta_{1o}^2}{2} \right) - \eta_{2o}^2 \left( 1 - \frac{\eta_{2o}^2}{2} \right) \right] \quad (D-7)$$

$$C_{Ni} = \frac{3}{4} \left[ \eta_{1i}^2 \left( 1 - \frac{\eta_{1i}^2}{2} \right) - \eta_{2i}^2 \left( 1 - \frac{\eta_{2i}^2}{2} \right) \right] \quad (D-8)$$

Les moments  $M_{Ni}$  et  $M_{No}$  ne sont pas des fonctions linéaires de la force appliquée, puisque les demi-axes  $b_o$  et  $b_i$  sont des fonctions non linéaire de la force de contact.

**Moments de conformité :** Les moments orientés selon la direction de roulement sont appelés moments de friction de conformité. Leurs expressions calculées par Todd et Johnson sont données par les formules suivantes :

$$M_{Ro} = C_{Ro} \frac{2\mu_r Q_o b_o^2}{d_b} sign(\Omega_{ro}) \quad (D-9)$$

$$M_{Ri} = C_{Ri} \frac{2\mu_r Q_i b_i^2}{d_b} sign(\Omega_{ri}) \quad (D-10)$$

Les coefficients  $C_{Ro}$  et  $C_{Ri}$  sont donnés par :

$$C_{Ro} = \frac{1}{4} \left[ \frac{2}{5} + \eta_{2o}^3 \left( 1 - \frac{3\eta_{2o}^2}{5} \right) - \eta_{1o}^3 \left( 1 - \frac{3\eta_{1o}^2}{5} \right) \right] \quad (D-11)$$

$$C_{Ri} = \frac{1}{4} \left[ \frac{2}{5} + \eta_{2i}^3 \left( 1 - \frac{3\eta_{2i}^2}{5} \right) - \eta_{1i}^3 \left( 1 - \frac{3\eta_{1i}^2}{5} \right) \right] \quad (D-12)$$

**Moments de résistance au roulement :** Les moments de résistance au roulement sont dus aux pertes internes dans les matériaux (pertes par hystérésis) et à la présence de lubrifiant. Ils sont orientés selon la direction de roulement et données par les formules suivantes :

$$M_{Ho} = \left( \frac{3}{16} v_h + v_o \right) Q_o a_o sign(\Omega_{ro}) \quad (D-13)$$

$$M_{Hi} = \left( \frac{3}{16} v_h + v_i \right) Q_i a_i sign(\Omega_{ri}) \quad (D-14)$$

Le coefficient hystérique  $v_h$  sans dimension prend en compte les phénomènes dissipatifs dans les matériaux en présence. Il est de l'ordre de  $5.10^{-4}$  pour l'acier [95].

Les coefficients sans dimension  $v_o$  et  $v_i$  tiennent compte de la présence de lubrifiant sur les pistes de roulement. Ils sont fonction du lubrifiant de la vitesse et de la géométrie et prennent la forme suivante [71]:

$$v_o = 4,25 \left( \frac{b_o}{a_o} \right)^{0,91} \frac{R_{xo}^{1,068} E^{0,222} (\mu_o U_{ro})^{2/3}}{Q_o^{0,8673}} \lambda^{0,022} \quad (D-15)$$

$$v_i = 4,25 \left( \frac{b_i}{a_i} \right)^{0,91} \frac{R_{xi}^{1,068} E^{0,222} (\mu_i U_{ri})^{2/3}}{Q_i^{0,8673}} \lambda^{0,022} \quad (D-16)$$



$U_r$  est la vitesse moyenne de roulement.  $R_x$  est le rayon équivalent de Hertz dans la direction de roulement des billes (plan du roulement).  $\lambda$  est le coefficient viscosité-pression de la loi de Barus [96], loi qui décrivait empiriquement l'influence de la pression sur la viscosité (phénomène de piézo-viscosité) du lubrifiant [67]. Remarquons ici que ces travaux sont contemporains de ceux de Hertz [69] et Boussinesq [43] sur les contacts entre solides ce qui témoigne de l'importance ressentie pour le problème du contact.

L'étude des propriétés du lubrifiant prend également en compte l'influence de la température en utilisant des lois comme celle de Roelands [97].

## Annexe E

# Sous-matrices du modèle thermique du moteur

La matrice thermique du moteur est de la forme :

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{E-1})$$

Où les termes  $R_{11}$ ,  $R_{12}, \dots$ ,  $R_{44}$  sont des sous-matrices thermiques.  $I$  est une matrice identité de taille  $3 \times 3$ .

$R_{11}$  est une matrice  $12 \times 25$  que l'on découpe en deux sous-matrices :

$$R_{11} = [R_{11a} \quad R_{11b}] \quad (\text{E-2})$$

Avec les sous-matrices suivantes :

$$R_{11a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & Z \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & 0 & -1 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E-3})$$

$$\mathbf{R}_{11b} = \begin{bmatrix}
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
 \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
 \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 1 & 0 & 0 & \vdots & & & & & & & & \vdots \\
 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 0 & 0 & Z & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & & & 0 \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & \dots & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
 -2 & -2Z & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0
 \end{bmatrix} \tag{E-4}$$

où  $Z$  est le nombre de billes du roulement.

$\mathbf{R}_{21}$  est une matrice carré et diagonale  $25 \times 25$  que l'on découpe en deux sous-matrices pour une pagination plus aisée.

$$\mathbf{R}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{21a} & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{21b} \end{bmatrix} \tag{E-5}$$

Avec les sous-matrices suivantes :

$$\mathbf{R}_{21a} = \text{diag} (R_{bd}, R_{bi}, R_{dc}, R_{di}, R_{ce}, R_{ic}, R_{ie}, R_{fe}, R_{eco}, R_{fi}, R_{fco}, R_{bof}, R_{boel}) \tag{E-6}$$

$$\mathbf{R}_{21b} = \text{diag} (R_{boi}, R_{eli}, R_{biel}, R_{bia}, R_{bii}, R_{ni}, R_{nfq}, R_{na}, R_{afq}, R_{fqi}, R_{ai}, R_{aco}) \tag{E-7}$$

La notation  $R_{xz}$  est utilisé pour désigner la résistance thermique associé aux échanges entre  $x$  et  $y$ . La signification des indices est la suivante :  $b$  est utilisé pour désigner les bobines,  $d$  pour les dents,  $i$  pour l'air interne au moteur,  $c$  pour la culasse statorique,  $e$  pour le carter,  $f$  pour les flasques,  $co$  pour le milieu ambiant,  $bo$  et  $bi$  respectivement pour les bagues extérieur et intérieur du roulement,  $el$  pour les éléments roulants (billes),  $n$  pour le *noyau* rotorique,  $a$  pour l'axe et  $fq$  pour les flaques rotoriques.



## Annexe F

# Evaluation des résistances thermiques dans la MRV

Dans la matrice thermique de nombreux termes sont déterminés, mais il reste à définir les résistances thermiques afin de terminer le travail de modélisation.

La géométrie du moteur étant tridimensionnelle, les échanges de chaleur le sont aussi, mais pour simplifier le modèle et éviter des calculs importants (par élément finis), nous décidons de découper les trajectoires tridimensionnelles en une succession de trajectoire uniaxiale et ou radiale. De plus, la longueur parcourue par le flux de chaleur est considérée comme celle du parcours moyen du flux.

La géométrie du moteur va être dans un premier temps détaillée afin d'en extraire les dimensions essentielles aux calculs futurs.

### F.0.5.C Modèle géométrique du moteur

La figure F-1 représente une coupe radiale d'un sixième de la partie fixe du moteur (stator, dent, bobine et carter). Les différentes parties du moteur prenant part aux échanges thermiques sont dessinées et nommées. Les dimensions principales de la dent, de la culasse statorique, de la bobine et du carter, mais également les notations utilisées par la suite, sont explicitées. La bobine est également représentée dans son plan afin de détaillée la géométrie simplifiée utilisée dans les calculs. L'orientation des tôles du stator est symbolisée par les hachures horizontales.

La figure F-2 représente une coupe axiale de la moitié de la MRV. Les différentes parties du moteur prenant part aux échanges thermiques sont dessinées et nommées. Les dimensions principales du carter, de l'ensemble flaque-roulement et du rotor, ainsi que les notations utilisées par la suite, sont explicitées. L'orientation des tôles du stator et du noyau est symbolisée par les hachures verticales.

A partir des dimensions données sur les figures F-1 et F-2, nous allons modéliser les résistances thermiques des composants du moteur.

**Généralités sur le calcul des résistances thermiques** Lorsque le flux est conduit dans une direction privilégiée (flux axial) à travers une pièce prismatique de section  $S$  constante, de longueur

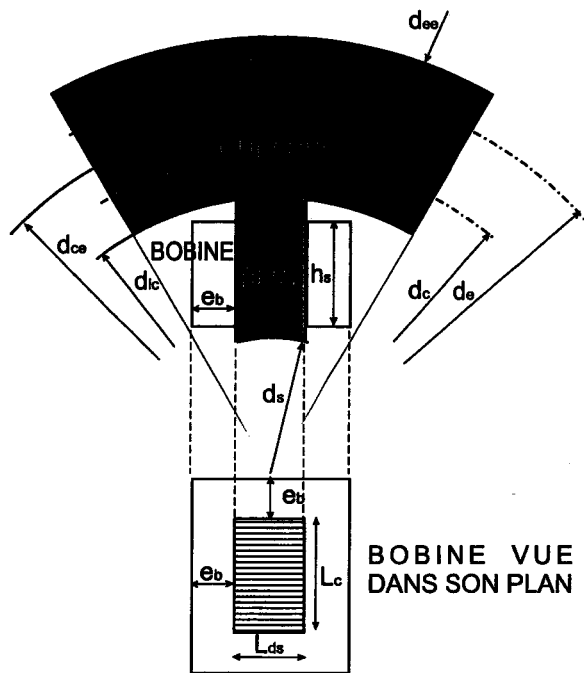


FIG. F-1 – Paramètres dimensionnels du stator et de la bobine pour l'étude thermique et géométrie de la bobine vue dans le plan des enroulements.

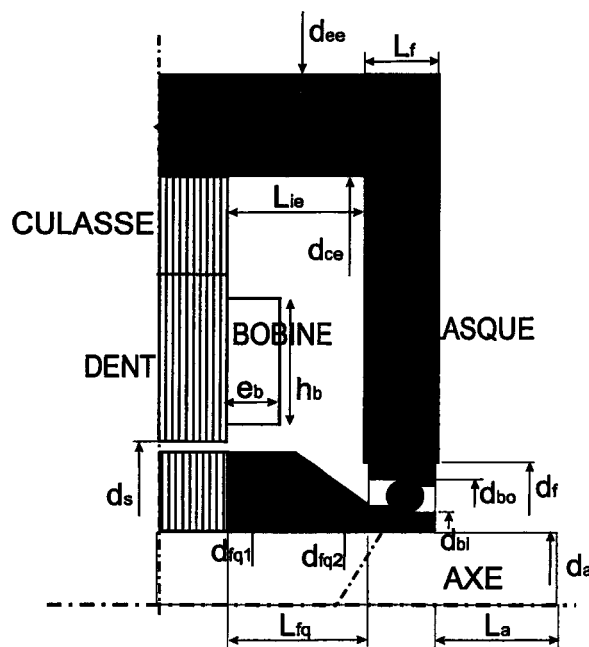


FIG. F-2 – Paramètres dimensionnels du flasque, des roulements et du rotor.

$L$  et de conductivité  $\lambda$ , la résistance thermique de la pièce est donnée par :

$$R = \frac{L}{\lambda S} \quad (\text{F-1})$$

Lorsque le flux est conduit radialement (entre un rayon  $r_1$  et un rayon  $r_2$ ) dans une pièce cylindrique d'épaisseur  $L$  et de conductivité  $\lambda$ , la résistance thermique de la pièce axisymétrique est donnée par :

$$R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda L} \quad (\text{F-2})$$

Lorsque le flux est transmis par convection à travers une surface  $S$ , la résistance thermique de la pièce axisymétrique est donnée par :

$$R = \frac{1}{kS} \quad (\text{F-3})$$

$k$  est appelé coefficient d'échange par convection. Dans la suite, nous chercherons à décomposer le trajet des flux de chaleur en trajet radiaux et axiaux afin d'utiliser les formules ci-dessus.

**Échanges entre la culasse du stator et le carter ( $R_{ce}$ )** La température  $T_c$  de la culasse stator est évaluée au diamètre notée  $d_c$  (diamètre correspondant à la demi épaisseur de la culasse). De même, la température du carter  $T_e$  est évaluée au diamètre  $d_e$ . L'interface culasse-carter est situé au diamètre  $d_{ce}$ .  $\lambda_e$  et  $L_e$  désignent respectivement le coefficient de conductibilité et la longueur du carter (modélisé par un cylindre creux).  $\lambda_c$  et  $L_c$  désignent respectivement le coefficient de conductibilité et la longueur du stator. La résistance thermique est calculé par l'hypothèse d'un flux purement radial. Elle correspond à la résistance thermique de deux tubes concentriques et en série, d'où l'expression suivante:

$$R_{ce} = \frac{\ln(d_e/d_{ce})}{2\pi\lambda_e L_e} + \frac{\ln(d_{ce}/d_c)}{2\pi\lambda_c L_c} \quad (\text{F-4})$$

**Échanges entre une dent et la culasse du stator ( $R_{dc}$ )** On suppose un flux de chaleur purement uniaxial dans la dent. La température  $T_d$  de la dent est évaluée au milieu de la dent (diamètre  $(d_c + d_s)/2$ ) d'après les notations de la figure F-1. La largeur de la dent stator est notée  $L_{ds}$ . La dent du stator est réalisée dans le même matériau que la culasse, nous obtenons alors :

$$R_{dc} = \frac{d_c - (d_c + d_s)/2}{2\lambda_c L_{ds} L_c} \quad (\text{F-5})$$

$L_{ds} \times L_c$  correspond à la section de la dent.

**Échanges entre la dent et la bobine du stator ( $R_{db}$ )** On suppose un flux de chaleur purement orthoradial entre la dent et la bobine. La conductivité du matériau de la bobine est  $\lambda_b$ . Le flux parcourt une demi épaisseur de la dent ( $L_{ds}/2$ ) et la demi épaisseur de la bobine ( $e_b/2$ ), et ce de part et d'autre de la dent. On a deux résistances  $R$  identiques et en parallèles : la résistance équivalente est  $R/2$ . Nous pouvons alors écrire :

$$R_{bd} = \frac{1}{2} \left( \frac{L_{ds}/2}{\lambda_c (d_{ci} - d_s) L_c} + \frac{e_b/2}{\lambda_b h_b (L_c + e_b)} \right) \quad (\text{F-6})$$

**Échanges entre la bobine du stator et le fluide interne au moteur ( $R_{bi}$ )** On suppose des enroulements rectangulaires (voir le schéma de la bobine sur la figure F-1). Pour passer du centre de la bobine, au fluide interne, le flux parcourt d'abord la moitié de l'épaisseur de la bobine par conduction, puis il est échangé par convection à travers la paroi.

La surface de passage utilisée dans le calcul de la conduction est celle correspondant au périmètre moyen de la bobine  $2 L_c + 2 L_{ds} + 2 e_b$  multiplié par la hauteur  $h_b$ . Le coefficient d'échange par convection entre la surface extérieure de la bobine et l'air interne est noté  $k_{bi}$ . La surface extérieure de la bobine est  $h_b (2 L_c + 2 L_{ds} + 4 e_b)$ . Nous avons alors :

$$R_{bi} = \frac{e_b/2}{\lambda_b h_b (2 L_c + 2 L_{ds} + 2 e_b)} + \frac{1}{k_{bi} h_b (2 L_{ds} + 2 L_c + 4 e_b)} \quad (\text{F-7})$$

**Échanges entre la dent du stator et le fluide interne au moteur ( $R_{di}$ )** On suppose des échanges uniquement à l'extrémité de la dent en bordure de l'entrefer. Le flux parcourt d'abord la demi-longueur de la dent  $((d_c - d_s)/2)$  puis est échangé par convection à travers la surface de l'extrémité de la bobine  $(L_{ds} \times L_c)$  avec un coefficient d'échange par convection noté  $k_{di}$ . Par conséquent, nous obtenons la valeur suivante pour  $R_{di}$ :

$$R_{di} = \frac{d_c - d_s}{2 \lambda_c L_{ds} L_c} + \frac{1}{k_{di} L_{ds} L_c} \quad (\text{F-8})$$

**Échanges entre la culasse statorique et le fluide interne au moteur ( $R_{ic}$ )** Le flux de chaleur est transmis par convection (coefficient d'échange  $k_{ic}$ ) à travers la surface (surface interne de la culasse et les 2 surfaces latérales). La section  $(L_c L_{ds})$  des 6 dents doit être soustraite. La résistance thermique de conduction est négligée devant celle de convection : les tôles sont bonnes conductrices et l'air est ralenti par la présence des bobines.

$$R_{ic} = \frac{1}{k_{ic} [L_c (\pi d_{ic} - 6 L_{ds}) + 2 \pi / 4 (d_{ce}^2 - d_{ic}^2)]} \quad (\text{F-9})$$

**Échanges entre le carter et le fluide interne au moteur ( $R_{ie}$ )** Le flux de chaleur est transmis par convection (coefficient d'échange  $k_{ie}$ ) à travers la surface  $2 \pi d_{ce} L_{ie}$  (surface interne exposée à l'air du moteur). Nous supposons que la résistance thermique de conduction est négligeable face à celle due à la convection (carter en aluminium et faible vitesse d'air).

$$R_{ie} = \frac{1}{k_{ie} (2 \pi d_{ie} L_{ie})} \quad (\text{F-10})$$

**Échanges entre le flasque du carter et le carter ( $R_{fe}$ )** Le flasque est modélisé comme un disque d'épaisseur  $L_f$ , de diamètres intérieur  $d_f$  et extérieur  $d_{ee}$ .

La température du flasque est mesurée au diamètre moyen  $(d_{ee} + d_f)/2$  de ce dernier. La température du carter est mesurée dans la section centrale du cylindre.



Le flux radial échangé passe d'un diamètre  $(d_{ee} + d_f)/2$  à un diamètre  $d_e$ . La conductivité du matériau constituant le flasque est notée  $\lambda_f$ . Ensuite le flux passe de l'extrémité au centre de carter (longueur  $L_e/2$ ) à travers une section donnée par  $\pi/4(d_{ee}^2 - d_{ce}^2)$ .

$$R_{fe} = \frac{\ln[2 d_e / (d_{ee} + d_f)]}{2 \pi \lambda_f L_f} + \frac{L_e/2}{\lambda_e \pi/4 (d_{ee}^2 - d_{ce}^2)} \quad (\text{F-11})$$

**Échanges entre le flasque du carter et l'air interne ou externe au moteur ( $R_{fi}$  et  $R_{f\infty}$ )**  
La température du flasque est mesurée au diamètre moyen de ce dernier. Elle est supposée uniforme sur la surface. Les coefficients d'échange par convection, supposés constants sur les surfaces, sont notés  $k_{fi}$  et  $k_{f\infty}$  respectivement pour les échanges avec l'air interne et externe au moteur. D'où les résistances thermiques suivantes :

$$R_{fi} = \frac{1}{k_{fi} \pi/4 (d_{ce}^2 - d_f^2)} \quad (\text{F-12})$$

$$R_{f\infty} = \frac{1}{k_{f\infty} \pi/4 (d_{ee}^2 - d_f^2)} \quad (\text{F-13})$$

Le coefficient d'échange par convection  $k_{f\infty}$  sera supposé indépendant de la vitesse de rotation du moteur (air extérieur et paroi fixe). La convection est naturelle (l'échauffement de l'air crée son mouvement).

**Échanges entre les billes et l'ensemble flasque-bague extérieure  $R_{boel}$**  La température du flasque est mesurée au diamètre moyen  $(d_{ee} - d_f)/2$  du flasque, la température de la bille est supposée uniforme. L'épaisseur du flasque et la largeur de la bague du roulement sont notées  $L_f$  et  $L_{bo}$ . Les flux de chaleur sont radiaux. Le flux passe d'abord du diamètre  $d_{bo}$  au diamètre  $d_f$  à travers le matériau de la bague extérieure (conductivité  $\lambda_{bo}$ ), puis il passe du diamètre  $d_f$  au diamètre  $(d_{ee} + d_f)/2$ . La résistance thermique  $R_{fbi}$  prend la forme :

$$R_{fbi} = \frac{\ln(d_f/d_{bo})}{2 \pi \lambda_{bo} L_{bo}} + \frac{\ln[(d_{ee} + d_f)/(2 d_{bo})]}{2 \pi \lambda_f L_f} \quad (\text{F-14})$$

**Échanges entre les billes du roulement et l'air interne au moteur ( $R_{eli}$ )** La température des billes est supposée uniforme. Les échanges thermiques sont du type convectifs (avec un coefficient  $k_{eli}$  supposé constant sur toute la surface). La surface d'une bille de diamètre  $d_{el}$  est donnée par  $\pi d_{el}^2$ . La résistance thermique  $R_{eli}$  prend la forme :

$$R_{eli} = \frac{1}{k_{eli} \pi d_{el}^2} \quad (\text{F-15})$$

Le coefficient  $k_{eli}$  est une fonction de la vitesse de la rotation de la bille. Sa détermination sera réalisée plus bas.

**Échanges entre l'ensemble rotor et les billes  $R_{biel}$**  La bague intérieure est définie par son diamètre intérieur  $d_a$  et extérieur  $d_{bi}$ , par sa largeur  $L_{bi}$  et son coefficient de conductivité  $\lambda_{bi}$ . L'axe est supposé être à une température  $T_r$  uniforme (Température moyenne du rotor). La résistance thermique associée au flux de la bague vers les billes est alors donnée par :

$$R_{biel} = \frac{\ln(d_{bi}/d_a)}{2\pi\lambda_{bi}L_{bi}} \quad (F-16)$$

**Échanges entre l'ensemble rotor et l'air intérieur ( $R_{ri}$ )** Afin de limiter le nombre d'inconnues, le rotor est supposé à une température uniforme (effets de conduction négligés) comme représenté par le schéma des échanges simplifié (figure F-2).

Le coefficient d'échange par convection est noté  $k_{ri}$ . La surface d'échange est donnée par la somme de toutes les surfaces métalliques du rotor. Ces surfaces sont la section des 2 dents rotoriques (largeur  $L_{dr}$ , longueur  $L_c$ ) et la surface extérieure des deux flasques rotoriques (surface unitaire  $\pi/4(d_{fq1} + d_{fq2}) \cdot L_{fq}$ ).

Si on prend en compte les effets de la centrifugation du fluide autour du rotor en rotation, la pression apparente du fluide sur la paroi du fluide (dans la couche limite) chute. En effet, pour une trajectoire circulaire du fluide, la pression croit lorsque l'on se déplace vers les grands diamètres [30]. Un vide partiel dans l'entrefer crée une diminution des échanges thermiques par rapport à ceux obtenus à la pression atmosphérique (diminution de la masse volumique du fluide en autres) .

L'étude complète et précise des effets de la centrifugation de l'air dépasse le cadre de cette étude approchée des échanges, c'est pourquoi en absence de connaissances précises sur les propriétés de l'écoulement, nous choisissons de négliger les échanges dans l'entrefer. La résistance thermique du rotor est alors :

$$R_{ri} = \frac{1}{k_{ri} [2(\pi/4(d_{fq1} + d_{fq2}) \cdot L_{fq})]} \quad (F-17)$$

**Échanges entre l'ensemble rotor et l'air externe au moteur à travers l'axe sortant ( $R_{a\infty}$ )** Ce flux de chaleur transite par l'axe sortant baignée dans l'air ambiant. Des échanges par convection forcée s'installent. Le mouvement relatif de l'axe par rapport l'air ambiant force le fluide à bouger, favorisant ainsi les échanges.

Le coefficient  $k_{a\infty}$  est supposé constant sur toute la surface de l'axe. L'axe sortant est modélisé comme une ailette de section circulaire (diamètre  $d_a$ ) et de longueur  $L_a$ . La conductivité du matériau de l'axe est notée  $\lambda_a$ . Connaissant l'expression du flux de chaleur  $\Phi$  échangée par une ailette pour une différence de température entre la base (ici le plan du roulement) et l'air externe [91], on obtient la résistance thermique  $R_{a\infty}$  par le rapport  $\Delta T/\Phi$ . Dans le cas d'une ailette cylindrique, la résistance thermique a pour expression :

$$R_{a\infty} = \frac{2}{\pi(k_{a\infty}\lambda_a)^{1/2}d_a^{3/2}} \frac{\cosh(L_a/l) + Bi^{1/2} \sinh(L_a/l)}{\sinh(L_a/l) + Bi^{1/2} \cosh(L_a/l)} \quad (F-18)$$

où  $Bi$  est le nombre de Biot. Dans le cas de l'axe cylindrique, le nombre de Biot est égale à  $Bi = k_{a\infty} \cdot d_a / (4 \lambda_a)$ .  $l$  est une longueur caractéristique donnée par  $l = [\lambda_a d_a / (4 k_{a\infty})]^{1/2}$ . Le coefficient  $k_{a\infty}$  est une fonction de la vitesse de la rotation de l'axe. Sa détermination sera réalisée plus bas.

#### F.0.5.D Coefficients d'échange par convection

Il s'agit d'identifier dans les formules précédentes, les valeurs des coefficients d'échange par convection. Ces coefficients correspondent à la quantité de chaleur évacuée par une paroi de  $1 \text{ m}^2$  présentant une température de  $1^\circ\text{C}$  supérieur à celle de l'air de la pièce (milieu infini). Leur valeur est liée à la vitesse du fluide circulant le long de la surface refroidie, mais également à la forme de la surface et à la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent). Les propriétés du fluide refroidissant la surface viennent s'ajouter au problème [91].

Comme la plupart des problèmes de mécanique des fluides et de thermique, la recherche des coefficients d'échange par convection peut être réalisée par l'analyse dimensionnelle [93].

Les effets de la centrifugation de l'air ne sont pas pris en compte dans les coefficients d'échanges. L'hypothèse d'un brassage permanent de l'air autour des solides (en dehors de l'entrefer) est faite, il n'y a pas de raréfaction de l'air à la surface des solides.

Le mouvement du rotor ou de son axe est celui d'un cylindre en rotation. La convection autour d'un cylindre en rotation a été étudiée, entre autres, par Mohanty *et al.* [98] et Kendoush [99] et par l'analyse dimensionnelle, respectivement pour un cylindre dans un flux croisé et dans un air calme (solution approchée à partir de Carslaw et Jaeger [92]). Des études de problèmes plus complexes (convection naturelle et forcée autour d'un cylindre, ou cylindre en oscillations angulaires dans un flux croisé) ont été depuis décrites par Morales *et al.* [100] ou Mahfouz et Bahr [101].

**Convection autour de l'axe sortant** Pour la surface cylindrique de l'axe (diamètre  $d_a$  et vitesse de rotation  $\Omega$ ), Kendoush [99] propose l'utilisation de la formule (obtenue par l'analyse dimensionnelle) :

$$\frac{k_{a\infty} d_a}{\lambda_{air}} = 0,6366 (Re Pr)^{1/2} \quad (\text{F-19})$$

où  $k_{a\infty}$  est le coefficient d'échange par convection entre l'axe sortant et l'air ambiant.

Le terme de gauche de l'équation est connu sous le nom de nombre de Nusselt.  $Re$  et  $Pr$  sont les nombres de Reynolds et de Prandtl (sans dimensions) donnés par :

$$Re = \frac{\Omega d_a^2}{2 \nu_{air}} \quad (\text{F-20})$$

$$Pr = \frac{\nu_{air} \rho_{air} C_p}{\lambda_{air}} \quad (\text{F-21})$$

$\nu_{air}$  est la viscosité cinématique de l'air.  $\rho_{air}$  est la masse volumique de l'air.  $C_p$  et  $\lambda_{air}$  sont respectivement la chaleur massique et la conductivité thermique de l'air. Ces grandeurs varient en

T K	$\lambda_{air}$ $W.m^{-1}.K^{-1}$	$\rho_{air}$ $kg.m^{-3}$	$C_p$ $J.kg^{-1}.K^{-1}$	$\nu_{air}$ $m^2.s^{-1}$	Pr -
300	0,0262	1,177	1006	$15,7 \times 10^{-6}$	0,709
350	0,0300	0,998	1009	$20,8 \times 10^{-6}$	0,698
400	0,0337	0,883	1014	$25,9 \times 10^{-6}$	0,688

TAB. F-1 - Propriétés thermophysiques de l'air à différentes températures.

fonction de la température du fluide, mais on montre que pour les gaz, le nombre de Prandtl varie peu. Le tableau F-1 donne les caractéristiques thermophysiques de l'air à différentes températures [93].

Puisque le nombre de Prandtl est d'environ 0,7 pour l'air, Kendoush propose de simplifier l'équation F-19 en posant  $Pr \approx 0,7$  on obtient alors la valeur du coefficient d'échange thermique autour de l'axe sortant :

$$k_{acc} = 0,376 \Omega^{1/2} \cdot \frac{\lambda_{air}}{\nu_{air}^{1/2}} \quad (F-22)$$

L'influence bénéfique de la vitesse de rotation est ici mise en évidence. L'effet de la centrifugation de l'air n'est pas pris en compte.

**Convection autour des billes du roulement** Pour la surface de la bille (diamètre  $d_{el}$ ) en rotation à une vitesse  $\Omega_{el}$  autour de son propre axe de rotation, Kreith [102] propose l'utilisation de la formule (obtenue par l'analyse dimensionnelle) :

$$\frac{k_{eli} d_{el}}{\lambda_{air}} = 0,33 Re^{0,5} Pr^{0,4} \quad (F-23)$$

qui donne alors la valeur du coefficient d'échange par convection  $k_{eli}$  autour des billes ( $Pr \approx 0,7$ ):

$$k_{eli} = 0,202 \Omega^{1/2} \frac{\lambda_{air}}{\nu_{air}^{1/2}} \quad (F-24)$$

L'efficacité du refroidissement est d'autant plus grande que la vitesse du moteur est élevée. Il convient ici de nuancer ce résultat si un vide partiel apparaît à la surface du rotor. Si la pression diminue, les échanges seront modifiés.

**Convection autour du rotor** En ce qui la surface du rotor, de diamètre moyen  $d_{rm}$  en rotation à une vitesse  $\Omega$ , nous supposons que le coefficient d'échange par convection est égale à celui obtenu pour un cylindre de diamètre  $d_r$  en rotation d'après [99] :

$$k_{ri} = 0,376 \Omega^{1/2} \cdot \frac{\lambda_{air}}{\nu_{air}^{1/2}} \quad (F-25)$$