



HAL
open science

Ensemble des double-classes pour la désintégration des représentations des groupes de Lie nilpotents et noyaux d'opérateurs sur les groupes de lie exponentiels

Jawhar Abdennadher

► **To cite this version:**

Jawhar Abdennadher. Ensemble des double-classes pour la désintégration des représentations des groupes de Lie nilpotents et noyaux d'opérateurs sur les groupes de lie exponentiels. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 2004. Français. NNT : 2004METZ008S . tel-01750237

HAL Id: tel-01750237

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750237>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UNIVERSITÉ DE METZ
U.F.R. de Mathématiques

Année universitaire : 2003/2004

THÈSE DE DOCTORAT
Spécialité : Mathématiques

sera présentée par

Jawhar ABDENNADHER

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ METZ

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	20040225
Cote	S/m304/08
Lec	

Ensemble des double-classes pour la désintégration des
représentations des groupes de Lie nilpotents

et

noyaux d'opérateurs sur les groupes de Lie exponentiels.

Soutenance: le 30 Juin 2004 devant le jury composé de:

Didier ARNAL, *examineur*
Hidénori FUJIWARA, *rapporteur*
Jean LUDWIG, *directeur*
Carine MOLITOR-BRAUN, *examineur*
Angela PASQUALE, *examineur*
Guenter SCHLICHTING, *rapporteur*
Tilman WURZBACHER, *examineur*

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



031 520563 9

UNIVERSITÉ DE METZ
U.F.R. de Mathématiques

Année universitaire : 2003/2004

THÈSE DE DOCTORAT
Spécialité : Mathématiques

sera présentée par

Jawhar ABDENNADHER

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ METZ

Ensemble des double-classes pour la désintégration des
représentations des groupes de Lie nilpotents

et

noyaux d'opérateurs sur les groupes de Lie exponentiels.

Soutenance: le 30 Juin 2004 devant le jury composé de:

Didier ARNAL, *examineur*

Hidénori FUJIWARA, *rapporteur*

Jean LUDWIG, *directeur*

Carine MOLITOR-BRAUN, *examineur*

Angela PASQUALE, *examineur*

Guenter SCHLICHTING, *rapporteur*

Tilmann WURZBACHER, *examineur*

Table des matières

1	Notations et rappels.	5
1.1	Généralités.	5
1.1.1	Notations et conventions.	6
1.1.2	Une "ancienne" version pour définir la représentation induite. . .	9
1.1.3	Une deuxième méthode pour définir la représentation induite. . .	10
1.2	La théorie de Kirillov.	13
1.3	Noyaux d'opérateurs.	15
1.4	Quelques outils.	17
1.4.1	Topologie de Zariski.	17
1.4.2	Espaces de Schwartz et transformée de Fourier.	18
2	Ensemble des double-classes sur les groupes de Lie nilpotents.	20
2.1	Description de l'ensemble des double-classes.	20
2.1.1	Outils.	22
2.1.2	Théorème fondamental.	25
2.2	Mesure sur l'ensemble des double-classes.	37
2.2.1	Préliminaires.	37
2.2.2	Mesure sur l'ensemble des doubles-classes	40
2.2.3	Théorème fondamental.	42
2.2.4	Exemple.	58
3	Désintégration de la restriction d'une représentation unitaire et irréductible sur un groupe de Lie nilpotent.	60
3.1	Désintégration de $ind_B^G \chi_l _H$ en irréductibles.	60
3.1.1	Une première désintégration.	61
3.1.2	Désintégration d'une représentation monomiale en irréductibles. . .	63
3.1.3	La désintégration finale.	69
3.2	Désintégration du produit tensoriel.	73
3.2.1	Application de l'algorithme de désintégration.	74
3.2.2	Critère d'irréductibilité du produit tensoriel.	84

4	Noyaux d'opérateur pour les représentations unitaires et irréductibles des groupes de Lie exponentiels.	90
4.1	Rappels de quelques résultats.	90
4.1.1	Cas des groupes de Lie nilpotents.	91
4.1.2	Cas des groupes de Lie exponentiels.	91
4.2	Un contre-exemple.	95
4.2.1	La structure de \mathfrak{g}	95
4.2.2	$\mathfrak{m} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_3$	95
4.2.3	La polarisation \mathfrak{b} est apprivoisée.	95
4.2.4	Conventions et notations.	96
4.2.5	Calcul du noyau.	96
4.2.6	\mathbf{F} n'est pas un noyau.	98
4.2.7	Conclusion.	101
4.3	Cas où la polarisation est un idéal.	101
4.3.1	Exemple.	102
4.3.2	Particularité de ce cas.	103
4.3.3	Un problème équivalent.	104
4.3.4	Lemme de la condition suffisante.	107
4.3.5	Théorème du rétracte.	111

Introduction.

Le problème de désintégrer la restriction d'une représentation unitaire π d'un groupe localement compact G à un sous-groupe fermé H , a intéressé plusieurs chercheurs dans la théorie des représentations. Dans ce cadre, on peut citer les travaux de Corwin et Greenleaf qui ont étudié ce problème pour les groupes de Lie nilpotents. Leur résultat essentiel apparut dans [5] concerne les multiplicités des représentations de H dans la désintégration centrale canonique de $\pi|_H$. En utilisant toujours la méthode des orbites, Fujiwara a établi dans [8] un résultat plus général puisqu'il prouve que si G est un groupe de Lie résoluble exponentiel, alors

$$\pi|_H \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} n_{\pi}(\sigma) \sigma \, d\nu(\sigma) ,$$

où la multiplicité $n_{\pi}(\sigma)$ de $\sigma \in \hat{H}$ est le nombre des H -orbites qui sont contenues dans $\Omega_G(\pi) \cap p^{-1}(\Omega_H(\sigma))$, ce qu'on définit en notant :

- $p : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ l'application qui restreint une forme linéaire $l \in \mathfrak{g}^*$ à \mathfrak{h} ,
- Ω_G (respectivement Ω_H pour le sous-groupe H), la correspondance biunivoque de Kirillov entre l'ensemble \hat{G} des classes d'équivalence de ses représentations unitaires et irréductibles, et $\mathfrak{g}^*/Ad^*(G)$, l'ensemble des orbites coadjointes.

L'innovation qu'apporte cette thèse est qu'on donne une description concrète et explicite à cette désintégration de $\pi|_H$, en utilisant une méthode différente de celle des orbites. L'idée a pour origine les travaux de Mackey qui datent depuis les années 50. Ce dernier a prouvé dans [16] que si π est induite à partir d'une représentation ρ de B à G , alors sa restriction $(ind_B^G \rho)|_H$ sur un sous-groupe fermé H se désintègre sur l'ensemble des double-classes $H \backslash G / B$ muni d'une certaine mesure bien précise. L'objectif du **chapitre 3** est de concrétiser cette désintégration quand il s'agit d'un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe $G = \exp \mathfrak{g}$, puis d'explicitier un opérateur d'entrelacement \mathcal{T} qui justifie l'équivalence

$$(ind_B^G \chi_l)|_H \simeq \int_{H \backslash G / B}^{\oplus} \sigma(\tilde{g}) d\gamma(\tilde{g}) ,$$

où l désigne une forme linéaire sur \mathfrak{g} vérifiant $\langle l, [X, X'] \rangle = 0$, pour tout X et X' éléments de $\mathfrak{b} := Lie(B)$, il s'en suit que $\chi_l : x = \exp X \longmapsto e^{-i\langle l, X \rangle}$ est alors un caractère sur B . L'expression de la classe d'équivalence $\sigma(\tilde{g})$ dans l'ensemble des représentations unitaires du sous-groupe fermé et connexe H , sera précisée ultérieurement pour tout $\tilde{g} \in H \backslash G / B$. Une étude de l'ensemble des double-classes est alors indispensable, détaillée dans le **chapitre 2**, elle a permis de bien décrire cet espace dans le **théorème 2.1.9**, puis de le munir d'une "bonne" mesure $d\gamma$ qu'on explicite en énonçant

le **théorème 2.2.10**. Grâce à cette mesure, on prouve au **théorème 3.1.2** que \mathcal{T} une isométrie. On peut enfin se référer au travail de Ludwig et de Baklouti [3] concernant la désintégration des représentations monomiales pour aboutir à la désintégration de $\pi|_H$ en irréductibles, et finir par appliquer ce résultat pour désintégrer le produit tensoriel de représentations.

La théorie étudiée au **chapitre 4** est plutôt indépendante des résultats obtenus dans les deux premiers, sans toutefois sortir du cadre des représentations des groupes de Lie exponentiels. Elle concerne en effet les noyaux d'opérateurs des représentations unitaires et irréductibles des groupes de Lie exponentiels, dans ce cadre, un résultat de Leptin qu'il prétend prouver dans [13], sera mis en cause. La méthode des orbites développée par Kirillov et Bernat dans [4], qui paramétrise le dual unitaire \hat{G} d'un groupe de Lie résoluble exponentiel $G = \exp \mathfrak{g}$ par son espace des orbites coadjointes, permet d'écrire une représentation π unitaire et irréductible de G comme l'induite à partir d'un caractère χ_l d'un sous-groupe de Lie B , dont l'algèbre de Lie \mathfrak{b} est une polarisation de Pukanszky de \mathfrak{g} en une certaine forme linéaire $l \in \mathfrak{g}^*$. En gardant la notation π_l pour la représentation de $L^1(G)$ associée à $\pi_l := \text{ind}_B^G \chi_l \in \hat{G}$, et qu'on définit par

$$\pi_l(f) = \int_G f(g) \pi_l(g) dg, \quad f \in L^1(G),$$

on obtient une représentation irréductible de $L^1(G)$ sur le même espace \mathcal{H}_{π_l} et associant à toute fonction $f \in L^1(G)$, un opérateur $\pi_l(f)$ qui est à noyau. Dans le cas des groupes de Lie nilpotents, toute fonction F à support compact et infiniment dérivable sur $G \times G$, et satisfaisant une propriété de covariance (1.3.3) qu'on précisera, est le noyau $\mathcal{K}_{\pi_l}(f)$ d'un certain opérateur $\pi_l(f)$, où $f \in L^1(G)$. Howe a traduit ce résultat par l'existence d'un rétracte

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} : \mathcal{C}_c^\infty(G/B \times G/B ; \chi_l) & \longrightarrow & L^1(G) \\ & F & \longmapsto \mathcal{R}(F) =: f \end{array}$$

qui provient de la surjectivité de $\mathcal{K}_{\pi_l} : \mathcal{S}(G) \longrightarrow \mathcal{S}(G/B \times G/B ; \chi_l)$, associant à toute fonction f de Schwartz sur G , le noyau $\mathcal{K}_{\pi_l}(f)$ de l'opérateur $\pi_l(f)$ qui est une fonction de Schwartz sur $G \times G$ modulo $B \times B$, qui vérifie la relation de covariance (1.3.3), (d'où la notation $\mathcal{S}(G/B \times G/B ; \chi_l)$ pour l'ensemble d'arrivé de \mathcal{K}_{π_l}). Cependant, dans le cas plus général des groupes de Lie exponentiels, ce résultat n'est plus vrai même si on impose à la polarisation \mathfrak{b} d'être apprivoisée, c'est à dire vérifiant certaines conditions que Leptin juge être suffisantes pour établir son résultat dans [13]. Un contre-exemple sera exhibé au **chapitre 4** de sorte que la fonction proposée $F \in \mathcal{C}_c^\infty(G/B \times G/B ; \chi_l)$ ne puisse être le noyau d'aucune fonction $f \in L^1(G)$, pourtant, la polarisation $\mathfrak{b} = \text{Lie} B$ est apprivoisée comme il sera vérifié au début de l'exemple. On terminera le chapitre par regarder le cas où la polarisation est un idéal, dans lequel on construit un rétracte \mathcal{R} comme ci-dessus, tout en prouvant que ce résultat, énoncé dans le **théorème 4.3.12**, devient vrai.

Chapitre 1

Notations et rappels.

Sans avoir recours à le rappeler ultérieurement, les notations, définitions et conventions introduites ci-dessous seront adoptées pour tous les autres chapitres.

1.1 Généralités.

G désigne toujours un groupe de Lie résoluble exponentiel, connexe et simplement connexe, dont l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est engendrée par les n vecteurs de sa base $\mathcal{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$.

Définition 1.1.1 \mathcal{Z} est dite une base de Malcev de \mathfrak{g} si dans la suite de sous-espaces vectoriels $(\mathfrak{g}_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ donnée par

$$\mathfrak{g}_{n+1} := \{0\} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{g}_i := \text{vect} \langle Z_i, \dots, Z_n \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}, \quad (1.1.1)$$

tous les \mathfrak{g}_i , $i \in \{2, \dots, n\}$, sont des sous-algèbres de Lie de \mathfrak{g} , et vérifient si \mathfrak{g}_i n'est pas un idéal de \mathfrak{g} , alors \mathfrak{g}_{i-1} et \mathfrak{g}_{i+1} le sont. Si de plus, toutes ces sous-algèbres de Lie sont des idéaux de \mathfrak{g} , alors \mathcal{Z} sera dite une base de Jordan-Hölder.

Proposition 1.1.2 Une algèbre de Lie est résoluble si et seulement si elle possède une base de Malcev. Elle admet une base de Jordan-Hölder si et seulement si elle est complètement résoluble.

Démonstration.

Voir [4]. ■

1.1.1 Notations et conventions.

1. Le groupe de Lie G étant exponentiel, on notera "Log" l'inverse du difféomorphisme $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$. Par la formule de Campbell-Baker-Hausdorff, cette application permet de munir l'algèbre de Lie d'une loi de composition interne, définie par :

$$CBH(X, Y) = \text{Log}(\exp X \cdot \exp Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (1.1.2)$$

2. Par convention, si $U_1, \dots, U_k \in \mathfrak{g}$, avec $k \geq 2$, alors la notation $U_1 \dots U_k$ désigne l'élément $\exp(U_1) \dots \exp(U_k)$ de G .
3. On a deux systèmes de coordonnées sur G . Le premier, dit système de coordonnées de première espèce est défini par la bijection

$$\begin{aligned} \Psi : G &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ g &\longmapsto (z_1, \dots, z_n) \quad / \quad g = \exp \left(\sum_{i=1}^n z_i Z_i \right). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Par contre, le système de coordonnées du seconde espèce s'obtient par

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ g &\longmapsto (x_1, \dots, x_n) \quad / \quad g = x_1 Z_1 \dots x_n Z_n. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

4. Les représentations adjointes de \mathfrak{g} et de G , notées respectivement $ad := ad_{\mathfrak{g}}$ et $Ad := Ad_G$ sont données par :

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow \text{End}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto ad X \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

il s'agit d'un morphisme d'algèbres de Lie, où pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $ad X$ est l'endomorphisme de \mathfrak{g} , $Y \mapsto [X, Y]$.

$$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ x = \exp X &\longmapsto Ad x = e^{ad X} \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

cet homomorphisme de groupes est de classe C^∞ . Pour tout $x \in G$, l'automorphisme $Ad x$ de \mathfrak{g} , est lié à celui de G noté $i_x : y \mapsto xyx^{-1}$, par la relation

$$\forall x \in G, \quad i_x(\exp Y) = \exp(Ad x(Y)), \quad \forall Y \in \mathfrak{g}. \quad (1.1.7)$$

5. Un sous-groupe de Lie B de G désigne toujours un sous-groupe fermé, connexe et simplement connexe de G .
6. Toutes les bases qu'on considère sont des bases de Malcev. En notant \mathfrak{b} l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé B de G , on lui fixe une base de Malcev $\mathcal{X} = (X_1, \dots, X_q)$ comme celle de \mathfrak{g} qu'on a noté $\mathcal{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$. Ainsi, les groupes G et B sont munis canoniquement de leurs mesures de Haar invariantes à gauche, notées respectivement μ_G et μ_B , qui sont définies de sorte que

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(G), \quad \mu_G(f) = \int_G f(g) d\mu_G(g) := \int_{\mathbb{R}^n} f(z_1 Z_1 \dots z_n Z_n) dz, \quad (1.1.8)$$

$\mathcal{C}_c(G)$ est l'ensemble des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont continues et à support compact, et $dz = dz_1 \dots dz_n$ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n . (Pareil pour μ_B). Cet ensemble est dense dans l'espace normé $L^1(G) := \{f : G \rightarrow \mathbb{C}, \mu_G(|f|) < \infty\}$.

7. Les groupes de Lie unimodulaires faisant exception, généralement la mesure $d\mu_G(g)$ souvent notée tout simplement dg , n'est pas invariante à droite. La fonction module de G caractérise la quasi-invariance à droite de la mesure de Haar, par la formule :

$$\forall x \in G, \quad \int_G f(gx^{-1}) dg = \Delta_G(x) \int_G f(g) dg. \quad (1.1.9)$$

Dans [14], il est justifié que Δ_G est bien définie ainsi, indépendamment de la fonction $f \in \mathcal{C}_c(G)$, et qu'on a

$$\Delta_G(x) = |\det \text{Ad}x|^{-1} = e^{-\text{tr } \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\text{Log } x)}, \quad \forall x \in G. \quad (1.1.10)$$

Il est aussi utile de rappeler que cette fonction module vérifie la propriété

$$\forall f \in L^1(G), \quad \int_G f(g^{-1}) \Delta_G(g^{-1}) dg = \int_G f(g) dg. \quad (1.1.11)$$

8. Une base de Malcev de \mathfrak{g} relative à \mathfrak{b} , - notée $\mathcal{Z}(\mathfrak{b}) := (Z_{k_1}, \dots, Z_{k_p})$ avec $p = n - q$ est la codimension de \mathfrak{b} -, est aussi construite de façon canonique à partir de \mathcal{Z} . Pour cela, on pose $\mathcal{I}^{\mathfrak{a}/\mathfrak{b}} := \{i \in \{1, \dots, n\}, Z_i \notin \mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{i+1}\} = \{k_1 < \dots < k_p\}$. On vérifie alors qu'il y'a au moins une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} , parmi deux sous-espaces vectoriels consécutifs de la suite obtenu

$$\mathfrak{b}^{p+1} := \mathfrak{b} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{b}^j := \mathbb{R}Z_{k_j} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Z_{k_p} \oplus \mathfrak{b} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{b}^1 = \mathfrak{g}. \quad (1.1.12)$$

Les vecteurs formant cette base, dite aussi une base coexponentielle de \mathfrak{g} relative à \mathfrak{b} , nous fournissent le difféomorphisme \mathcal{D}_B suivant :

$$\mathcal{D}_B : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & G/B \\ w = (w_1, \dots, w_p) & \longmapsto & w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p} \cdot B \end{array} \quad (1.1.13)$$

Il s'en suit que l'espace $\mathcal{C}_c(G/B)$ des fonctions numériques $\varphi : G/B \rightarrow \mathbb{C}$, qui sont continues et à support compact, se confond avec $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^p)$ et se munit de la mesure image de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^p . Notée $d_{\mu_{g/b}}(\dot{g}) := \mathcal{D}_{B^*}(dw)$ avec $\dot{g} := g \cdot B \in G/B$, cette dernière se définit pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(G/B)$ par

$$\mu_{g/b}(\varphi) = \int_{G/B} \varphi(\dot{g}) d\dot{g} := \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p} \cdot B) dw, \quad (1.1.14)$$

où $d\dot{g} = d_{\mu_b}(\dot{g})$ et dw est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^p .

9. Notons qu'à partir de \mathcal{D}_B , on obtient un 3^{ème} système de coordonnées Θ pour G , (autre que Φ et Ψ), il est décrit par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Theta} & \mathbb{R}^n \\ \mathcal{O}_B \downarrow & & \uparrow Id \\ G/B \times B & \xrightarrow{\mathcal{D}_B^{-1} \times \Phi_B} & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \end{array} \quad (1.1.15)$$

tel que pour $g \in G$, on a

$$\Theta(g) = (y_1, \dots, y_n) \iff \left(\begin{array}{l} w := (y_1, \dots, y_p) \quad \text{et} \quad x := (y_{p+1}, \dots, y_n) \quad \text{vérifient} \\ \mathcal{D}_B(w) = g \cdot B \quad \text{et} \quad g = w_g b_g \quad \text{où} \quad \begin{cases} w_g := y_1 Z_{k_1} \dots y_p Z_{k_p} \\ b_g := y_{p+1} X_1 \dots y_n X_q \end{cases} \end{array} \right)$$

En fait, si on décompose le difféomorphisme \mathcal{O}_B en $(\mathcal{O}_{B_1}, \mathcal{O}_{B_2})$, alors il est donné par

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{B_1}(g) = g \cdot B \\ \mathcal{O}_{B_2}(g) = w_g^{-1} g \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} w_g := w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p} \\ (w_1, \dots, w_p) = \mathcal{D}_B^{-1}(g \cdot B) \end{cases} \quad (1.1.16)$$

Remarque 1.1.3 Souvent on utilise la notation \mathfrak{p} pour désigner un idéal de \mathfrak{g} , si c'est le cas de la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{b} =: \mathfrak{p}$, c'est à dire pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, $[Y, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$, alors la restriction de $ad_{\mathfrak{g}}(Y)$ à \mathfrak{p} est un endomorphisme de \mathfrak{p} . On conserve la notation $ad_{\mathfrak{p}}$ pour le prolongement de la représentation adjointe de \mathfrak{p} sur toute l'algèbre \mathfrak{g} .

$$ad_{\mathfrak{p}} := \widetilde{ad}_{\mathfrak{p}} : \begin{array}{l} \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(\mathfrak{p}) \\ Y \longmapsto ad_{\mathfrak{g}} Y \end{array}$$

Aussi on peut considérer la restriction de la représentation adjointe $ad_{\mathfrak{g}}$ de \mathfrak{g} à l'idéal \mathfrak{p} ,

$$ad_{\mathfrak{g}|_{\mathfrak{p}}} : \begin{array}{l} \mathfrak{p} \longrightarrow \text{End}(\mathfrak{g}) \\ X \longmapsto ad_{\mathfrak{g}} X \end{array}$$

donc l'endomorphisme de \mathfrak{b} défini par $ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}} := ad_{\mathfrak{g}|_{\mathfrak{b}}} - ad_{\mathfrak{b}}$ est nul si \mathfrak{b} est un idéal.

1.1.2 Une "ancienne" version pour définir la représentation induite.

B étant un sous-groupe de Lie de G , il a été prouvé dans [14] que la mesure $d\dot{g}$ définie sur G/B ci-dessus, est quasi-invariante à gauche. Faisant intervenir sur G un caractère réel χ , on peut écrire une formule similaire à (1.1.9) qui est :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(G/B), \int_{G/B} \varphi(xg \cdot B) d\dot{g} = \chi(x) \int_{G/B} \varphi(\dot{g}) d\dot{g}, \quad \forall x \in G. \quad (1.1.17)$$

On montre dans le premier chapitre de [14], que ce caractère de G est une extension de celui qu'on définit sur B par

$$\Delta_{G,B}(x) := \frac{\Delta_G(x)}{\Delta_B(x)} = e^{-\text{tr } \text{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}(\text{Log } x)}, \quad \forall x \in B, \quad (1.1.18)$$

de plus, que toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(G)$ vérifie

$$\begin{aligned} \int_G f(g) dg &= \int_{G/B} \varphi_f(\dot{g}) d\dot{g} \\ \text{où } \varphi_f(\dot{g}) &\longmapsto \int_B \chi(gb) f(gb) db \in \mathcal{C}_c(G/B). \end{aligned}$$

On a donc l'égalité

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{C}_c(G), \int_G f(g) dg &= \int_{G/B} \int_B \chi(gb) f(gb) db d\dot{g} \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \int_B (\chi f)((w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p})b) db dw. \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Considérons maintenant une représentation unitaire (ρ, \mathcal{H}_ρ) du sous-groupe B , et notons π son induite de B à G . Sur le sous-espace $\mathcal{C}_c(G/B, \rho)$ des fonctions continues sur G , formé par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c(G/B, \rho) &= \left\{ \eta : G \rightarrow \mathcal{H}_\rho, \quad \text{continue et à support compact modulo } B, \right. \\ &\quad \left. \text{tel que } \eta(gb) = \rho(b^{-1})(\eta(g)) \quad , \quad \forall (g, b) \in G \times B \right\}, \end{aligned}$$

on définit une norme en posant pour tout $\eta \in \mathcal{C}_c(G/B, \rho)$,

$$\|\eta\|_2^2 = \int_{G/B} \|\eta(g)\|_{\mathcal{H}_\rho}^2 d\dot{g}.$$

Pour justifier que cette norme est bien définie, on associe à $\eta \in \mathcal{C}_c(G/B, \rho)$ la fonction $\varphi_\eta : g \cdot B \mapsto \varphi_\eta(g) = \|\eta(g)\|_{\mathcal{H}_\rho}^2$. Se rappelant de la relation de covariance vérifiée par η et du fait que ρ est unitaire, on affirme que $\varphi_\eta \in \mathcal{C}_c(G/B)$, bien définie et positive. Maintenant, on exprime mieux cette norme par

$$\|\eta\|_2 = (\mu_b(\varphi_\eta))^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathcal{C}_c(G/B, \rho)$ pour cette norme, sera noté $\mathcal{H}_\pi := L^2(G/B; \rho) = \overline{\mathcal{C}_c(G/B, \rho)}$.

Il s'agit de l'espace de $\pi = \text{ind}_B^G \rho$ sur lequel, -en tout point $x \in G$ -, l'opérateur unitaire $\pi(x)$ agit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\pi & \xrightarrow{\pi(x)} \mathcal{H}_\pi & \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi) . \\ \eta & \longmapsto \pi(x)\eta : \begin{array}{l} G \rightarrow \mathbb{C} \\ y \mapsto \chi(x)^{\frac{1}{2}} \eta(x^{-1}y) \end{array} \end{aligned}$$

Remarque 1.1.4 *Quelque soit $x \in G$, on a :*

$$\|\pi(x)\eta\|_2^2 = \int_{G/B} |\chi(x)^{\frac{1}{2}} \eta(x^{-1}g)|^2 dg = \chi(x) \int_{G/B} |\eta(x^{-1}g)|^2 dg.$$

C'est donc la propriété (1.1.17) qui permet d'en tirer que l'opérateur $\pi(x)$ est isométrique.

Le but de rappeler cette définition de la représentation induite adoptée par Leptin, est de mettre en évidence qu'elle est équivalente à celle détaillée ci-dessous. La comparaison des deux expressions du noyaux d'opérateurs permettra à la fin, de conclure que les résultats obtenus sont indépendants de la méthode choisie pour la réaliser.

1.1.3 Une deuxième méthode pour définir la représentation induite.

Une deuxième façon pour réaliser la représentation $\pi = \text{ind}_B^G \rho$ induite à partir d'une représentation unitaire (ρ, \mathcal{H}_ρ) d'un sous-groupe de Lie B de G , consiste à introduire :

- les espaces :

$$\begin{aligned} * \quad K(G, B) = & \left\{ \zeta : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{continue et à support compact modulo } B, \right. \\ & \left. \text{tel que } \zeta(gb) = \Delta_{G, B}(b)^{-1} \zeta(g), \forall (g, b) \in G \times B \right\} \end{aligned}$$

$$* K_\rho(G, B) = \left\{ \xi : G \rightarrow \mathcal{H}_\rho, \quad \text{continue et à support compact modulo } B, \right. \\ \left. \xi(gb) = \Delta_{G,B}(b)^{-\frac{1}{2}} \rho(b^{-1})(\xi(g)), \forall (g, b) \in G \times B \right\}$$

– une forme linéaire positive et G -invariante sur $K(G, B)$, notée $\mu_{G,B}$ ou souvent écrite sous forme intégrale :

$$\mu_{G,B}(\zeta) = \oint_{G/B} \zeta(g) d\mu_{G,B}(g), \quad \forall \zeta \in K(G, B). \quad (1.1.20)$$

Son existence est assurée par [4], -où on affirme aussi son unicité à un scalaire multiplicatif près-, de sorte que si pour $f \in \mathcal{C}_c(G)$ on définit l'application ζ_f par

$$\zeta_f(g) := \int_B \Delta_{G,B}(b) f(gb) d\mu_B(b)$$

alors celle-ci appartient à $K(G, B)$ et vérifie

$$\oint_{G/B} \zeta_f(g) d\mu_{G,B}(g) = \int_G f(g) d\mu_G(g).$$

En explicitant ces notations après avoir remplacé ζ_f par son expression, la formule devient

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(G), \quad \int_G f(g) dg = \oint_{G/B} \left(\int_B \Delta_{G,B}(b) f(gb) db \right) dg. \quad (1.1.21)$$

Remarque 1.1.5 *Tout comme la mesure $\mu_{g/b}$, la forme linéaire $\mu_{G,B}$ sur $K(G, B)$ est aussi connue de façon explicite, puisqu'il suffit de se ramener d'une fonction $\zeta \in K(G, B)$ à la fonction $\psi_\zeta \in \mathcal{C}_c(G/B)$ qu'on définit par $\psi_\zeta(g) := \chi(g)\zeta(g)$, $\forall g \in G/B$. On aura :*

$$\mu_{G,B}(\zeta) = \mu_{g/b}(\psi_\zeta) \quad \text{ou encore} \quad \oint_{G/B} \zeta(g) d\mu_{G,B}(g) = \int_{G/B} \psi_\zeta(g) d\mu_{g/b}(g).$$

Enfin, on peut écrire

$$\oint_{G/B} \zeta(g) dg = \int_{G/B} \chi(g)\zeta(g) dg = \int_{\mathbb{R}^p} (\chi\zeta)(w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p}) dw.$$

On retrouve alors (1.1.19) puisque (1.1.21) devient

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(G), \quad \int_G f(g) dg = \int_{G/B} \chi(g)\zeta_f(g) dg = \int_{G/B} \chi(g) \int_B \Delta_{G,B}(b) f(gb) db dg.$$

Ceci permet de compléter $K(G, B)$ pour la forme linéaire $\mu_{G,B}$ et d'obtenir

$$\overline{K(G, B)} = \left\{ \zeta : G \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tel que } \zeta(gb) = \Delta_{G,B}(b)^{-1}\zeta(g), \forall (g, b) \in G \times B \right. \\ \left. \text{et } \mu_{G,B}(|\zeta|) := \int_{G/B} |\chi(g)\zeta(g)| dg < \infty \right\}.$$

La dernière étape consiste à munir $K_\rho(G, B)$ d'une norme $\|\cdot\|_2$. Pour cela, remarquons qu'à toute fonction $\xi \in K_\rho(G, B)$, on peut associer une fonction $\zeta \in K(G, B)$ qu'on définit par $\zeta(g) := \|\xi(g)\|_{\mathcal{H}_\rho}^2$. On pose alors

$$\|\xi\|_2^2 := \oint_{G/B} \zeta(g) dg = \oint_{G/B} \|\xi(g)\|_{\mathcal{H}_\rho}^2 dg,$$

et \mathcal{H}_π le complété de $K_\rho(G, B)$ pour cette norme qu'on note

$$\mathcal{H}_\pi := L^2(G/B, \rho) = \overline{K_\rho(G, B)}.$$

Il s'agit de l'espace de la représentation induite $\pi = \text{ind}_B^G \rho$, sur lequel elle agit par translation à gauche :

$$\forall x \in G, \quad \pi(x) : \xi \mapsto \pi(x)\xi \quad \left(\begin{array}{l} G \rightarrow \mathbb{C} \\ y \mapsto \xi(x^{-1}y) \end{array} \right); \quad \pi(x) \in \mathcal{U}(L^2(G/B, \rho)).$$

La G -invariance de $\mu_{G,B}$ sur $K(G, B)$ fait de $\pi(x)$ une isométrie, pour tout $x \in G$.

Remarques 1.1.6

1. Dans le cas particulier où $\Delta_{G|_B} = \Delta_B$, c'est à dire $\Delta_{G,B} \equiv 1$ sur B , et donc $\chi \equiv 1$ sur G , la forme linéaire $\mu_{G,B}$ n'est autre que la mesure G -invariante sur G/B et les deux définitions de la représentation induite coïncident.
2. Dans le cas général, on considère l'isométrie

$$\overline{C_c(G/B, \rho)} \ni \eta \mapsto \chi^{-\frac{1}{2}}\eta =: \xi \in \overline{K_\rho(G, B)}$$

qui est un entrelacement pour les deux réalisations de la représentation induite, elles sont donc équivalentes.

Dans ce qui suit, on utilisera la deuxième méthode pour définir la notion de représentations monomiales, c'est l'induite à partir d'un caractère de B . On s'intéresse plus particulièrement à l'ensemble des représentations unitaires et irréductibles de G , dont l'ensemble des classes d'équivalence est noté \hat{G} . Sa paramétrisation par l'espace des orbites coadjointes est brièvement rappelée ci-dessous.

1.2 La théorie de Kirillov.

Au début, et seulement dans ce paragraphe, on fait distinction entre une représentation unitaire π de G , et sa classe notée $\bar{\pi}$ formée par les représentations unitaires de G qui lui sont équivalentes. après, toute représentation sera confondue avec sa classe.

Sur le dual de \mathfrak{g} noté \mathfrak{g}^* , ensemble des formes linéaires sur \mathfrak{g} , définissons les représentations coadjointes de \mathfrak{g} et de G , notées respectivement $ad^* := ad_{\mathfrak{g}}^*$ et $Ad^* := Ad_G^*$, par :

$$\begin{aligned} ad^* : \mathfrak{g} &\longrightarrow End(\mathfrak{g}^*) \\ X &\longmapsto ad^* X \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

où pour tout $l \in \mathfrak{g}^*$, $ad^* X (l) : Y \longmapsto l(-ad X (Y)) = \langle l, [Y, X] \rangle$.

$$\begin{aligned} Ad^* : G &\longrightarrow Aut(\mathfrak{g}^*) \\ x &\longmapsto Ad^* x \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

tel que $x.l := Ad^* x (l)$, ($l \in \mathfrak{g}^*$), est la forme linéaire : $Y \longmapsto \langle l, Ad x^{-1} (Y) \rangle$.

Notation. L'orthogonal dans \mathfrak{g}^* d'une sous-algèbre de Lie \mathfrak{b} de \mathfrak{g} est noté

$$\mathfrak{b}^\perp = \{f \in \mathfrak{g}^*, f|_{\mathfrak{b}} = 0\}.$$

Soient pour $l \in \mathfrak{g}^*$, les définitions suivantes :

Définitions 1.2.1

1. $G.l := \{x.l, x \in G\}$ l'orbite de l pour l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^* .
Plus généralement, si B est un sous-groupe fermé quelconque de G , alors on note $B.l := \{x.l, x \in B\}$.
2. notons pour $1 \leq i \leq n+1$,
 - $l_i := l|_{\mathfrak{g}_i}$ la restriction de l sur la sous-algèbre \mathfrak{g}_i , vue comme élément de \mathfrak{g}_i^* ,
 - $\mathfrak{g}_i(l_i) := \{X \in \mathfrak{g}_i, \langle l, [X, Y] \rangle = 0 \forall Y \in \mathfrak{g}_i\}$ dit le stabilisateur de l_i dans \mathfrak{g}_i ,
soit $s := \dim \mathfrak{g}_i(l_i)$, la dimension du stabilisateur de l dans \mathfrak{g} ,
3. désignons par \mathcal{S}_l l'ensemble de toutes les sous-algèbres de Lie de \mathfrak{g} qui sont subordonnées à l , c'est à dire les sous-algèbres de Lie isotropes pour la forme bilinéaire alternée sur \mathfrak{g} associée à l , qu'on définit par $B_l(X, Y) := \langle l, [X, Y] \rangle$.

$$\mathcal{S}_l = \{\mathfrak{h} : \text{sous-algèbre de Lie de } \mathfrak{g}, \langle l, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle = 0\}.$$

Son sous-ensemble formé par les sous-algèbres de dimension maximale est noté \mathcal{M}_l . D'après [4], il n'est autre que $\mathcal{M}_l = \{\mathfrak{h} \in \mathcal{S}_l, \dim(\mathfrak{h}) = \frac{n+s}{2} = s + \frac{n-s}{2}\}$.

($n - s$ est pair puisque $\mathfrak{g}(l) = \ker(B_l)$ est le noyau d'une forme bilinéaire alternée).
On appelle \mathcal{M}_l l'ensemble des polarisations de \mathfrak{g} en l .

Remarque 1.2.2 Si $\mathfrak{b} \in \mathcal{S}_l$, alors on peut définir sur son groupe B le caractère χ_l par

$$\chi_l(\exp X) = e^{-i\langle l, X \rangle}, \quad \forall X \in \mathfrak{b}.$$

La représentation monomiale $\text{ind}_B^G \chi_l$ est notée $\pi_{(l, \mathfrak{b})}$, et on pose \mathcal{P}_l le sous-ensemble de \mathcal{S}_l formé par les sous-algèbres \mathfrak{h} tel que $\pi_{(l, \mathfrak{h})}$ est irréductible.

$$\mathcal{P}_l = \{\mathfrak{h} \in \mathcal{S}_l, \bar{\pi}_{(l, \mathfrak{h})} \in \hat{G}\}.$$

Proposition 1.2.3 Soit $\mathfrak{b} \in \mathcal{S}_l$. On a :

$$\mathfrak{b} \in \mathcal{P}_l \iff B.l = l + \mathfrak{b}^\perp, \quad (1.2.3)$$

et dans ce cas, \mathfrak{b} est une polarisation de \mathfrak{g} en l ($\mathfrak{b} \in \mathcal{M}_l$), dite polarisation de Pukanszky.

Démonstration.

Voir [21]. ■

Exemples 1.2.4

1. Notons $\mathfrak{b}(l)$ la sous-algèbre de \mathfrak{g} donnée par

$$\mathfrak{b}(l) := \sum_{i=1}^n \mathfrak{g}_i(l_i), \quad (1.2.4)$$

c'est la polarisation de Vergne, qui est une polarisation de Pukanszky de \mathfrak{g} en l .

2. Si G est nilpotent, alors $\mathcal{M}_l = \mathcal{P}_l$.

Théorème 1.2.5 En notant $\mathfrak{g}^*/G := \{G.l, l \in \mathfrak{g}^*\}$, on définit une bijection entre cet ensemble de toutes les orbites coadjointes et l'ensemble \hat{G} des classes des représentations unitaires et irréductibles de G . Notons Θ cette application appelée la bijection de Kirillov, elle est donnée par

$$\begin{aligned} \Theta : \mathfrak{g}^*/G &\longrightarrow \hat{G} \\ G.l &\longmapsto \bar{\pi}_{(l, \mathfrak{b})} \quad \text{où } \mathfrak{b} \in \mathcal{P}_l \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Ω sa bijection réciproque est définie par

$$\Theta^{-1}(\bar{\pi}) =: \Omega(\bar{\pi}) = G.l \iff \exists \mathfrak{b} \in \mathcal{P}_l, \quad (\text{et donc } \forall \mathfrak{b} \in \mathcal{P}_l), \quad \pi_{(l, \mathfrak{b})} \in \bar{\pi}.$$

Démonstration.

Voir [14]. ■

1.3 Noyaux d'opérateurs.

Soit π une représentation unitaire et irréductible de G . Fixons $B = \exp \mathfrak{b}$ et $l \in \mathfrak{g}^*$ tels que $\pi = \pi_{(l, \mathfrak{b})}$. La représentation de $L^1(G)$, qu'on définit ci-dessous, a le même espace $\mathcal{H}_\pi = \overline{K_{\chi_l}(G, B)} = L^2(G/B, \chi_l)$ que π , elle aussi sera notée π . Associant à une fonction $f \in L^1(G)$, l'opérateur écrit sous sa forme intégrale

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g) dg \quad (1.3.1)$$

agit sur $L^2(G/B, \chi_l)$ de la façon suivante :

$$\mathcal{H}_\pi \ni \xi \xrightarrow{\pi(f)} \pi(f)\xi : \left(\begin{array}{l} G \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_G f(g)(\pi(g)\xi)(x) dg \end{array} \right) \in \mathcal{H}_\pi .$$

Notation. Notons pour f dans $L^1(G)$, la fonction $\mathcal{K}_\pi(f)$ définie sur presque tout $G \times G$ par

$$\mathcal{K}_\pi(f)(x, y) = \Delta_G^{-1}(y) \int_B \Delta_{G, B}(b)^{\frac{1}{2}} f(xby^{-1})\chi_l(b) db. \quad (1.3.2)$$

Propriétés. Fixons $f \in L^1(G)$.

1. Il est facile de justifier que $\mathcal{K}_\pi(f)$ vérifie : pour presque tout couple $(x, y) \in G \times G$,

$$\mathcal{K}_\pi(f)(xb, yb') = \bar{\chi}_l(b)\chi_l(b')\mathcal{K}_\pi(f)(x, y), \quad \forall b, b' \in B. \quad (1.3.3)$$

L'ensemble des fonctions $F : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$, vérifiant cette relation de covariance et qui s'identifient, -moyennant le difféomorphisme \mathcal{D}_{B^-} , avec des fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$, sera noté $\mathcal{C}_c^\infty(G/B \times G/B ; \chi_l)$. Cette identification se généralise en confondant $\mathcal{K}_\pi(f)$ avec

$$F : \begin{array}{l} \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \\ (s_1, \dots, s_p ; t_1, \dots, t_p) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \mathbb{C} \\ \mathcal{K}_\pi(f)(s_1 Z_{k_1} \dots s_p Z_{k_p}, t_1 Z_{k_1} \dots t_p Z_{k_p}) \end{array}$$

2. La formule (1.3.3) permet de construire une fonction de $\overline{K(G, B)}$ pour presque tout x fixé dans G et pour tout ξ fixé dans $L^2(G/B, \chi_l)$. A celle-ci qu'on définit par

$$\mathcal{K}_\pi(f)(x, \cdot)\xi : G \ni y \mapsto \mathcal{K}_\pi(f)(x, y)\xi(y) \in \mathbb{C}, \quad (1.3.4)$$

on peut appliquer la forme linéaire $\mu_{G, B}$ pour obtenir

$$\oint_{G/B} \mathcal{K}_\pi(f)(x, y) \xi(y) dy = \oint_{G/B} \left(\Delta_G^{-1}(y) \int_B \Delta_{G,B}(b)^{\frac{1}{2}} f(xby^{-1}) \chi_l(b) db \right) \xi(y) dy ,$$

or d'après (1.1.11), on a

$$\begin{aligned} \int_B \Delta_{G,B}(b)^{\frac{1}{2}} f(xby^{-1}) \chi_l(b) db &= \int_B \Delta_{G,B}(b)^{-\frac{1}{2}} f(xb^{-1}y^{-1}) \chi_l(b^{-1}) \Delta_B(b^{-1}) db \\ &= \int_B f(x(yb)^{-1}) \chi_l(b)^{-1} \Delta_G(b)^{-\frac{1}{2}} \Delta_B(b)^{-\frac{1}{2}} db \end{aligned}$$

et comme $\chi_l(b^{-1}) \xi(y) = \Delta_{G,B}(b)^{\frac{1}{2}} \xi(yb)$, alors

$$\begin{aligned} &\oint_{G/B} \Delta_G^{-1}(y) \left(\int_B f(x(yb)^{-1}) \Delta_G(b)^{-\frac{1}{2}} \Delta_B(b)^{-\frac{1}{2}} \chi_l(b)^{-1} db \right) \xi(y) dy = \\ &\oint_{G/B} \Delta_G^{-1}(y) \left(\int_B f(x(yb)^{-1}) \Delta_G(b)^{-\frac{1}{2}} \Delta_B(b)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{G,B}(b)^{\frac{1}{2}} \xi(yb) db \right) dy = \\ &\oint_{G/B} \Delta_G^{-1}(y) \left(\int_B f(x(yb)^{-1}) \Delta_G(b)^{-1} \Delta_G(b)^{\frac{1}{2}} \Delta_B(b)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{G,B}(b)^{\frac{1}{2}} \xi(yb) db \right) dy = \\ &\oint_{G/B} \left(\int_B f(x(yb)^{-1}) \Delta_G(yb)^{-1} \Delta_{G,B}(b) \xi(yb) db \right) dy =: \oint_{G/B} \left(\int_B f_{\xi,x}(yb) \Delta_{G,B}(b) db \right) dy, \end{aligned}$$

où $f_{\xi,x}$ est la fonction de $L^1(G)$ qu'on définit par $f_{\xi,x}(y) := f(xy^{-1}) \xi(y) \Delta_G(y)^{-1}$, $\forall y \in G$.
La formule (1.1.21) écrite pour $f_{\xi,x}$ donne

$$\begin{aligned} \oint_{G/B} \left(\int_B f_{\xi,x}(yb) \Delta_{G,B}(b) db \right) dy &= \int_G f_{\xi,x}(y) dy = \int_G f(xy^{-1}) \xi(y) \Delta_G^{-1}(y) dy \\ &= \Delta_G(x^{-1}) \int_G f((yx^{-1})^{-1}) \xi(yx^{-1}x) \Delta_G^{-1}(yx^{-1}) dy \\ &= \int_G f(y^{-1}) \xi(yx) \Delta_G^{-1}(y) dy, \end{aligned}$$

ce dernier passage provient de la définition même de la fonction module.

De nouveau, on applique (1.1.21) pour conclure que

$$\oint_{G/B} \mathcal{K}_\pi(f)(x, y) \xi(y) dy = \int_G f(y) \xi(y^{-1}x) dy = \int_G f(y) (\pi(y)\xi)(x) dy = (\pi(f)\xi)(x).$$

Cette étude se résume par la proposition suivante :

Proposition 1.3.1 *Pour toute fonction $f \in L^1(G)$, l'opérateur $\pi(f)$ donné par (1.3.1) est un opérateur à noyau. L'application $\mathcal{K}_\pi : f \mapsto \mathcal{K}_\pi(f)$, associant à $f \in L^1(G)$ le noyau de l'opérateur $\pi(f)$ est donnée, pour presque tout $(x, y) \in G \times G$, par*

$$\mathcal{K}_\pi(f)(x, y) = \Delta_G^{-1}(y) \int_B \Delta_{G,B}(b)^{\frac{1}{2}} f(xby^{-1}) \chi_l(b) db.$$

Remarque 1.3.2 *Le calcul du noyau obtenu par la première méthode donnerait :*

$$\mathcal{K}_\pi(f)(x, y) = \chi(x)^{\frac{1}{2}} \Delta_G^{-1}(y) \chi(y)^{\frac{1}{2}} \int_B \Delta_{B,G}(b)^{-\frac{1}{2}} f(xby^{-1}) \chi_l(b) db. \quad (1.3.2)'$$

La formule de covariance devient alors : $\forall (x, y) \in G \times G, \forall (b, h) \in B \times B$,

$$\mathcal{K}_\pi(f)(xb, yh) = \Delta_{B,G}(b)^{\frac{1}{2}} \Delta_{B,G}(h)^{\frac{1}{2}} \bar{\chi}_l(b) \chi_l(h) \mathcal{K}_\pi(f)(x, y). \quad (1.3.3)'$$

Elle permet d'en tirer que $\mathcal{K}_\pi(f)(x, \cdot) \in L^2(G/B, \chi_l)$, et de justifier l'égalité :

$$\pi(f)\xi(x) = \int_{G/B} \mathcal{K}_\pi(f)(x, y)\xi(y) d\dot{y} \quad \forall x \in G. \quad (1.3.4)'$$

Enfin, ces deux expressions du noyau coïncident évidemment, dès que $\Delta_{G|_B} = \Delta_B$, puisqu'elles deviennent :

$$\mathcal{K}_\pi(f)(x, y) = \Delta_G^{-1}(y) \int_B f(xby^{-1}) \chi_l(b) db. \quad (1.3.5)$$

1.4 Quelques outils.

Certaines notions n'auront pas l'occasion d'être développées dans les chapitres qui suivent, leur introduction ci-dessous sera supposée connue.

1.4.1 Topologie de Zariski.

La notion d'ouverts de Zariski est indispensable pour le 2nd chapitre. On consacre alors ce paragraphe pour donner les définitions suivantes :

Définition 1.4.1 *Si $P \in \mathbb{R}[X, \dots, X_n]$, alors $\mathfrak{F}(P) := \{x \in \mathbb{R}^n, P(x) = 0\}$ est dit un ensemble algébrique.*

Remarques 1.4.2

1. Aux polynômes constants $\mathbf{1}$ et $\mathbf{0}$, sont associés respectivement les ensembles algébriques $\mathfrak{F}(\mathbf{1}) = \emptyset$ et $\mathfrak{F}(\mathbf{0}) = \mathbb{R}^n$.
2. Il est clair que si $(P_i)_{i \in I}$ est une famille finie de polynômes sur \mathbb{R}^n , alors

$$\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}(P_i) = \mathfrak{F}\left(\sum_{i \in I} P_i^2\right).$$

Il s'en suit que les ensembles algébriques sont les fermés d'une topologie (moins fine que la topologie naturelle) sur \mathbb{R}^n , dite la topologie de Zariski.

Définition 1.4.3 Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe, et $\mathcal{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ une base de Jordan-Hölder de son algèbre de Lie \mathfrak{g} . \mathcal{U} est dit un ouvert de Zariski de G son image par Ψ (et/ou par Φ) est un ouvert de Zariski de \mathbb{R}^n .

1.4.2 Espaces de Schwartz et transformée de Fourier.

Dans le dernier chapitre, on devra rappeler la définition de $\mathcal{ES}(G/B \times G/B; \chi_1)$ pour un groupe de Lie G résoluble exponentiel. Ceci nécessite d'abord les définitions suivantes :

Définitions 1.4.4 Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Notons

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^q) := \{h : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ continue, } \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} h(x) = 0\}.$$

2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^q)$ désigne l'espace de Schwartz. Il est constitué par les applications $h : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{C}$, qui sont infiniment dérivables et à décroissance rapide.

$$h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^q) \iff \forall \beta \in \mathbb{N}^q, \forall P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_q], P(D^\beta h) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^q),$$

où on note $D^\beta h = \frac{\partial^{|\beta|} h}{\partial^{\beta_1} x_1 \dots \partial^{\beta_q} x_q}$, (avec $|\beta| := \beta_1 + \dots + \beta_q$ pour $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$).

3. Son sous-espace formé par les fonctions à décroissance exponentielle sera noté $\mathcal{E}(\mathbb{R}^q)$. Une application h de cet espace vérifie :

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{R}^q, \forall \beta = (\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{N}^q, \mathcal{E}^\alpha(D^\beta h) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^q),$$

où \mathcal{E}^α désigne l'application : $\mathbb{R}^q \ni x = (x_1, \dots, x_q) \mapsto e^{\sum_1^q \alpha_i x_i} \in \mathbb{R}$.

4. Pour $1 \leq j \leq q$, l'opérateur transformée de Fourier partielle suivant la $j^{\text{ème}}$ direction sera noté \mathcal{F}_j . Il agit sur une fonction de Schwartz $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^q)$ par

$$\mathcal{F}_j h : s = (s_1, \dots, s_q) \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(s_1, \dots, s_{j-1}, t, s_{j+1}, \dots, s_q) e^{-i s_j t} dt.$$

La composée $\mathcal{F}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{F}_{i_n}$, quand $\{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, q\}$, sera notée $\mathcal{F}_{i_n, \dots, i_1}$.

5. Notons $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q) \in \{0, 1\}^q$ avec $\gamma_j = 1 \iff j \in \{j_1, \dots, j_m\} =: \mathcal{J}_\gamma$, le choix des directions $\{j_1, \dots, j_m\}$ parmi $\{1, \dots, q\}$. Ensuite, on pose
- P est le polynôme de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_q]$:

$$(x_1, \dots, x_q) \mapsto 1 + \sum_{j \notin \mathcal{J}_\gamma} x_j^2,$$

- \mathbb{R}^γ le sous-ensemble de \mathbb{R}^q formé par

$$\mathbb{R}^\gamma := \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{R}^q, \alpha_j \neq 0 \iff j \in \mathcal{J}_\gamma\}.$$

Définissons $\mathcal{E}_\gamma \mathcal{S}(\mathbb{R}^q)$ le sous-espace vectoriel des fonctions $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^q)$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^\gamma, \forall \beta \in \mathbb{N}^q, P^k \mathcal{E}^\alpha (D^\beta h) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^q).$$

Il s'agit de l'espace des fonctions de Schwartz sur \mathbb{R}^q qui sont à décroissance exponentielle dans les directions j_1, \dots, j_m , et à décroissance rapide dans les autres directions.

Chapitre 2

Ensemble des double-classes sur les groupes de Lie nilpotents.

Dans tout ce qui suit, G désigne un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe, et $\mathcal{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ une base de Jordan-Hölder de son algèbre de Lie \mathfrak{g} , avec Z_n central. L'idéal engendré par $\{Z_i, Z_{i+1}, \dots, Z_n\}$ est noté \mathfrak{g}_i et G_i son sous-groupe de Lie.

2.1 Description de l'ensemble des double-classes.

Soient H et B deux sous-groupes de Lie de G . Comme pour \mathfrak{g} , fixons des bases de Jordan-Hölder $\mathcal{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ et $\mathcal{X} = (X_1, \dots, X_q)$ pour leurs algèbres de Lie respectives \mathfrak{h} et \mathfrak{b} .

Définition 2.1.1 On définit la double-classe relative à H et B d'un élément $g \in G$, et on la note $\tilde{g} = H \cdot g \cdot B$, le sous-ensemble de G donné par : $H \cdot g \cdot B = \{h \cdot g \cdot b, (h, b) \in H \times B\}$. L'ensemble de toutes ces doubles-classes sera noté $H \backslash G / B$.

Notations.

- Notons par $\mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$, \mathcal{I} et $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ les sous-ensembles respectifs de $\{1, \dots, n\}$ suivants :
 - $\mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = \{i \in \{1, \dots, n\}, Z_i \notin \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{i+1}\}$, et de même se définit $\mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}$,
 - $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \cap \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}$,
 - enfin, $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ est le sous-ensemble de \mathcal{I} caractérisé par :

$$i \in \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) \iff \begin{array}{l} \text{il existe un ouvert de Zariski non vide } \mathcal{U}_i \subseteq G, \\ \text{tel que } \forall g \in \mathcal{U}_i, Z_i \notin \mathfrak{h} + \text{Ad } g \mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{i+1}. \end{array} \quad (2.1.1)$$

2. Désignons aussi par \mathcal{W}_i , pour tout indice i de \mathcal{I} , la partie de G donnée par :

$$\mathcal{W}_i = \begin{cases} \{g \in G, Z_i \notin \mathfrak{h} + \text{Ad } g \mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{i+1}\} & \text{si } i \in \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}), \\ \{g \in G, Z_i \in \mathfrak{h} + \text{Ad } g \mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{i+1}\} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Remarque 2.1.2 Dans ces ensembles d'indices et ces ensembles de G , c'est la suite d'idéaux formée par les $(\mathfrak{g}_i)_{1 \leq i \leq n}$ et obtenue par la base \mathcal{Z} , qui influe sur leurs définitions. On peut alors remplacer tout vecteur Z_i ($1 \leq i \leq n$) de la base, par

$$Z'_i := Z_i + U_{i+1}, \text{ où } U_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1},$$

sans modifier ces ensembles. Par conséquent, on peut travailler avec une base de Jordan-Hölder $\mathcal{Y}' := (Y'_1, \dots, Y'_m)$ de \mathfrak{h} , formée par des vecteurs de la nouvelle base \mathcal{Z}' , en choisissant pour tout $j_k \in \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} =: \{j_1, \dots, j_m\}$ (et donc $Z_{j_k} \in \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{j_k+1}$), un couple $(Y'_k, U_{j_k+1}) \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}_{j_k+1}$, qui réalise $Z_{j_k} = Y'_k - U_{j_k+1}$. Ainsi, forcément les vecteurs $Y'_k = Z_{j_k} + U_{j_k+1} =: Z'_{j_k}$, ($k \in \{1, \dots, m\}$), forment une base de Jordan-Hölder \mathcal{Y}' de \mathfrak{h} .

Proposition 2.1.3 Les \mathcal{W}_i ont la propriété (\mathcal{P}_1) de stabilité par multiplication à droite avec des éléments de B et à gauche avec des éléments de H .

Démonstration.

La stabilité par multiplication à droite avec des éléments de B est évidente. Maintenant si $g \in G$ et $h \in H$, alors il est clair que $U_{i+1}(h) := \text{Ad } h^{-1}(Z_i) - Z_i \in \mathfrak{g}_{i+1}$ et donc

$$\begin{aligned} Z_i \in \mathfrak{h} + \text{Ad } g \mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{i+1} &\iff Z_i + U_{i+1}(h) = \text{Ad } h^{-1}(Z_i) \in \mathfrak{h} + \text{Ad } g \mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{i+1} \\ &\iff Z_i \in \mathfrak{h} + \text{Ad } hg \mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{i+1} \end{aligned}$$

il s'en suit que $g \in \mathcal{W}_i \iff hg \in \mathcal{W}_i$.

■

Remarque 2.1.4 Les sous-groupes de Lie H et B jouent des rôles symétriques dans toutes les définitions précédentes. En particulier, on a $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \mathcal{I}(\mathfrak{b}, \mathfrak{h})$.

2.1.1 Outils.

Bien que cette partie fait appel à de simples résultats algébriques, elle présente un moyen indispensable dans la suite du chapitre.

Lemme 2.1.5 Soit une famille $\mathcal{F}(t) = \{V^1(t), \dots, V^k(t)\}$ formée de k vecteurs de \mathbb{R}^n , qui dépendent polynômialement d'un paramètre $t \in \mathbb{R}^n$, c'est à dire, il existe un ensemble de polynômes $\{P_j^r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n], 1 \leq r \leq k, 1 \leq j \leq n\}$ vérifiant :

$$V^r(t) = \sum_{j=1}^n P_j^r(t) Z_j, \quad \forall 1 \leq r \leq k. \quad (2.1.3)$$

Notons ici, $\mathcal{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n , et $r = \text{Max}\{\text{rang}(\mathcal{F}(t)), t \in \mathbb{R}^n\}$.

On a alors le résultat suivant :

1. $\mathcal{V}_r = \{t \in \mathbb{R}^n, \text{rang}(\mathcal{F}(t)) = r\}$ est un ouvert de Zariski de \mathbb{R}^n .
2. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, c'est l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}^n, Z_i \notin \text{vect} \langle \mathcal{F}(t) \rangle\}$, ou bien c'est son complémentaire, qui contient un ouvert de Zariski \mathcal{U}_i non vide de \mathbb{R}^n .

Démonstration.

Tout d'abord, si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n, k, \mathbb{R})$ est une matrice réelle n lignes et k colonnes, alors une sous-matrice carrée de \mathbf{A} notée $\mathbf{A}_c \in \mathcal{M}(r, \mathbb{R})$, d'ordre $r \leq \min\{n, k\}$, qui correspond aux choix des lignes $\{L_{n_1}, \dots, L_{n_r}\}$ et des colonnes $\{C_{k_1}, \dots, C_{k_r}\}$, sera identifiée avec $c = (n_1, \dots, n_r; k_1, \dots, k_r)$. Ainsi, on note :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \triangleright \mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} a_{n_1 k_1} & \dots & a_{n_1 k_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_r k_1} & \dots & a_{n_r k_r} \end{pmatrix} \equiv (n_1, \dots, n_r; k_1, \dots, k_r) = c$$

L'ensemble de toutes les sous-matrices carrées d'ordre r sera noté \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} = \left\{ c = (n_1, \dots, n_r; k_1, \dots, k_r), 1 \leq n_1 < \dots < n_r \leq n, 1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq k \right\}.$$

Pour le premier point, considérons pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, la matrice \mathbf{A}^t des vecteurs $(V^1(t), \dots, V^k(t))$ dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

$$\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} P_1^1(t) & \dots & P_1^k(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n^1(t) & \dots & P_n^k(t) \end{pmatrix}$$

Définissons aussi, pour toute sous-matrice $c \in \mathcal{C}$, le polynôme $P_c \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ par :

$$P_c(t) = \det_r(\mathbf{A}_c^t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^n.$$

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_r &= \left\{ t \in \mathbb{R}^n, \exists c \in \mathcal{C}, P_c(t) \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ t \in \mathbb{R}^n, \sum_{c \in \mathcal{C}} P_c^2(t) \neq 0 \right\}.\end{aligned}$$

Ceci finit la preuve de 1.

Pour le second point, c'est une conséquence du premier. Soient en effet, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{F}_i(t) = \{V^1(t), \dots, V^k(t), V^{k+1}(t) := Z_i\}$ et $r_i = \max\{\text{rang}(\mathcal{F}_i(t)), t \in \mathbb{R}^n\} \in \{r, r+1\}$. Posons aussi, -comme pour la famille \mathcal{F} -, l'ensemble $\mathcal{V}'_{r_i} := \{t \in \mathbb{R}^n, \text{rang}(\mathcal{F}_i(t)) = r_i\}$.

- Si $r_i = r$, alors $\forall t \in \mathcal{V}_r \cap \mathcal{V}'_{r_i}, \text{rang}\{V^1(t), \dots, V^k(t)\} = \text{rang}\{V^1(t), \dots, V^k(t), Z_i\}$.

Donc, l'ouvert de Zariski non vide de \mathbb{R}^n défini par $\mathcal{U}_i := \mathcal{V}_r \cap \mathcal{V}'_{r_i}$ est inclu dans $\{t \in \mathbb{R}^n, Z_i \in \text{vect} < \mathcal{F}(t) >\}$.

- Si $r_i = r+1$, alors il est clair que $\mathcal{U}_i := \mathcal{V}'_{r_i} \subseteq \{t \in \mathbb{R}^n, Z_i \notin \text{vect} < \mathcal{F}(t) >\}$. ■

Proposition 2.1.6 Dans l'expression (2.1.2), chaque sous-ensemble \mathcal{W}_i de G , ($i \in \mathcal{I}$), contient un ouvert de Zariski non vide de G , noté \mathcal{U}_i .

Démonstration.

Soit $i \in \mathcal{I}$. Définissons la famille $\mathcal{F}(t) = \{V^1(t), \dots, V^k(t)\}$ de la façon suivante :

- les vecteurs $V^r(t)$, ($1 \leq r \leq q$), engendrent $\text{Ad}G(\mathfrak{b})$, on prend

$$V^r(t) = \text{Ad}(t_1 Z_1 \dots t_n Z_n) X_m, \quad \forall 1 \leq r \leq q,$$

qui s'écrivent sous la forme (2.1.3), puisque G est nilpotent.

- les autres vecteurs $\{V^{q+1}, \dots, V^k\}$ sont constants et forment un système générateur de $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{i+1}$.

Ainsi, le lemme précédent appliqué à la famille polynômiale $\mathcal{F}(t)$ qui engendre l'espace vectoriel $\mathfrak{h} + \text{Ad}G(\mathfrak{b}) + \mathfrak{g}_{i+1}$, donne un ouvert de Zariski non vide de \mathbb{R}^n correspondant à l'image par le difféomorphisme Φ^{-1} , de l'ouvert cherché $U_i \subseteq \mathcal{W}_i$. ■

Remarque 2.1.7 Si \mathcal{U}_i ne vérifie pas (\mathcal{P}_1) , alors on le remplace par

$$\bigcup_{\substack{h \in H \\ b \in B}} h \mathcal{U}_i b$$

qui reste un ouvert de Zariski de G et contenu dans \mathcal{W}_i . Enfin, on obtient un ouvert de Zariski non vide de G et vérifiant (\mathcal{P}_1) , en posant

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_i. \tag{2.1.4}$$

L'ensemble d'indices $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ caractérisant l'ensemble des double-classes $H \backslash G / B$, est alors :

$$\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i \in \mathcal{I}, \forall g \in \mathcal{U}, Z_i \notin \mathfrak{h} + \text{Ad}g\mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{i+1}\}. \quad (2.1.5)$$

Notations. Posons $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i_1 < \dots < i_d\}$, et notons :

$$1. \quad \begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^d &\longrightarrow G \\ (t_1, \dots, t_d) &\longmapsto t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

$$2. \quad \mathcal{V} = \phi^{-1}(\mathcal{U}) := \{t \in \mathbb{R}^d, \phi(t) \in \mathcal{U}\} \quad (2.1.7)$$

$$3. \quad \begin{aligned} \mathbf{p} : G &\longrightarrow H \backslash G / B \\ g &\longmapsto \tilde{g} = H \cdot g \cdot B \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

$$4. \quad \tilde{\mathcal{U}} = \mathbf{p}(\mathcal{U}) := \{\tilde{g}, g \in \mathcal{U}\} \quad (2.1.9)$$

$$5. \quad \begin{aligned} \tilde{\phi}_r : \quad \mathcal{V} &\longrightarrow \tilde{\mathcal{U}} \\ (t_1, \dots, t_d) &\longmapsto H \cdot \phi(t) \cdot B \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Proposition 2.1.8 (i) L'ouvert \mathcal{V} donné par (2.1.7), est un ouvert de Zariski de \mathbb{R}^d .
(ii) Munissons $H \backslash G / B$ de la topologie quotient, (c'est la plus fine topologie qui rend la projection continue), alors \mathbf{p} est aussi ouverte.

Démonstration.

(i) C'est immédiat, puisque ϕ est polynômiale, et donc l'image réciproque d'un ouvert de Zariski de G est un ouvert de Zariski de \mathbb{R}^d .

(ii) Soit \mathcal{O} un ouvert de G . Pour montrer que son image $\mathbf{p}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $H \backslash G / B$, il faut vérifier que $\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{p}(\mathcal{O}))$ est un ouvert de G .

Soit pour tout $(h, b) \in H \times B$, l'ouvert de G donné par : $h \cdot \mathcal{O} \cdot b := \{hxb, x \in \mathcal{O}\}$.

Il est clair que

$$\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{p}(\mathcal{O})) = \bigcup_{(h,b) \in H \times B} h \cdot \mathcal{O} \cdot b$$

est un ouvert comme réunion d'ouverts. ■

2.1.2 Théorème fondamental.

Généralement, il n'est pas évident de déterminer l'ensemble des double-classes point par point. D'ailleurs cela n'est pas nécessaire puisque tout ce qui nous intéresse, c'est d'explicitier l'ensemble \tilde{U} représentant les classes de presque tous les éléments de G . Avant d'énoncer le théorème décrivant l'ensemble cherché, exhibons un exemple pour se rendre compte de la structure compliquée de $H \backslash G / B$. Il y sera clair que le calcul fait à la méthode "traditionnelle" est très pénible bien qu'on est dans les meilleurs des cas : \mathfrak{h} et \mathfrak{b} abéliennes, plusieurs produits commutent, petites dimensions,...

2.1.2.1 Exemple.

On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \text{vect} \langle Z_1, \dots, Z_7 \rangle$ dont les seuls crochets non nuls sont donnés par :

$$[Z_1, Z_4] = Z_6 \quad [Z_1, Z_5] = Z_7 \quad [Z_2, Z_3] = Z_7$$

Considérons les sous-algèbres de Lie $\mathfrak{h} = \text{vect} \langle Z_4, Z_5, Z_7 \rangle$ et $\mathfrak{b} = \text{vect} \langle Z_3, Z_4, Z_7 \rangle$, et notons $H = \exp \mathfrak{h}$ et $B = \exp \mathfrak{b}$ leurs groupes de Lie respectifs.

Soit $g = z_1 Z_1 \dots z_7 Z_7 \in G$, avec $(z_1, \dots, z_7) \in \mathbb{R}^7$.

En utilisant le fait que certains produits commutent, on peut écrire :

$$g = z_1 Z_1 \cdot z_5 Z_5 \cdot z_2 Z_2 \cdot z_6 Z_6 \cdot z_3 Z_3 \cdot z_4 Z_4 \cdot z_7 Z_7 .$$

Or,

$$z_1 Z_1 \cdot z_5 Z_5 = z_1 z_5 Z_7 \cdot z_5 Z_5 \cdot z_1 Z_1,$$

donc

$$\begin{aligned} \tilde{g} = H \cdot g \cdot B &= H \cdot (z_1 Z_1 \cdot z_5 Z_5) \cdot z_2 Z_2 \cdot z_6 Z_6 \cdot (z_3 Z_3 \cdot z_4 Z_4 \cdot z_7 Z_7) \cdot B \\ &= H \cdot (z_1 z_5 Z_7 \cdot z_5 Z_5 \cdot z_1 Z_1) \cdot z_2 Z_2 \cdot z_6 Z_6 \cdot B \\ &= H \cdot z_1 Z_1 \cdot z_2 Z_2 \cdot z_6 Z_6 \cdot B. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $(z_1, z_2, z_6) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} z_1 Z_1 \cdot z_2 Z_2 \cdot z_6 Z_6 &= \left(-\frac{z_6}{z_1} Z_4\right) \cdot z_1 Z_1 \cdot z_2 Z_2 \cdot \left(\frac{z_6}{z_1} Z_4\right) \\ \implies H \cdot z_1 Z_1 \cdot z_2 Z_2 \cdot z_6 Z_6 \cdot B &= H \cdot z_1 Z_1 \cdot z_2 Z_2 \cdot B \end{aligned}$$

On en déduit que si \mathcal{V} désigne $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, alors l'ensemble des doubles-classes est :

$$\begin{aligned} H \backslash G / B &= \{H \cdot z_1 Z_1 \cdot z_2 Z_2 \cdot B, (z_1, z_2) \in \mathcal{V}\} \dot{\cup} \{H \cdot z_2 Z_2 \cdot z_6 Z_6 \cdot B, (z_2, z_6) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathfrak{p}(G \setminus G_2) \dot{\cup} \mathfrak{p}(G_2) \end{aligned}$$

Ainsi, le sous-ensemble $\tilde{\mathcal{U}}' := \mathbf{p}(G \setminus G_2)$ de $H \setminus G / B$ représentant les double-classes de presque tous les éléments de G , est donné par

$$\tilde{\mathcal{U}}' = \{H \cdot z_1 Z_1 \cdot z_2 Z_2 \cdot B, (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}.$$

2.1.2.2 Cas général.

Ce résultat se généralise par le théorème suivant :

Théorème 2.1.9 $\tilde{\phi}_r : t = (t_1, \dots, t_d) \mapsto H \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B$, donnée par (2.1.10), est un homéomorphisme de \mathcal{V} dans $\tilde{\mathcal{U}}$.

Plan de la démonstration.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de certains résultats que nous énonçons ci-dessous, sous forme de lemmes. La preuve générale se base sur un raisonnement par récurrence sur la codimension de \mathfrak{b} , notée p . L'exploitation de l'hypothèse de récurrence appliquée à une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{c} =: \text{Lie}(C)$ définie convenablement, permettra de passer de $H \setminus G / C$ à $H \setminus G / B$ tout en prouvant le résultat voulu. La discussion que nécessite ce passage, porte sur une comparaison entre $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{c})$ et $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$.

En notant $l = \max \mathcal{I}^{\mathfrak{a}/\mathfrak{b}} = \{k_1 < \dots < k_p =: l\}$, qui vérifie $\mathfrak{g}_{l+1} \subset \mathfrak{b}$ et $Z_l \notin \mathfrak{b}$, on obtient une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} par considération du sous-espace vectoriel

$$\mathfrak{c} := \mathfrak{b} \oplus \mathbb{R}Z_l = \mathfrak{b} + \mathfrak{g}_l. \quad (2.1.11)$$

Pour distinguer les différences entre les éléments caractéristiques de $H \setminus G / B$ et de $H \setminus G / C$, on aura besoin d'introduire, aussi pour \mathfrak{c} , les définitions et notations analogues à celles faites pour \mathfrak{b} .

1. Notons $\mathcal{I}^\circ = \mathcal{I}^{\mathfrak{a}/\mathfrak{h}} \cap \mathcal{I}^{\mathfrak{a}/\mathfrak{c}} = \mathcal{I} \setminus \{l\}$, car $\mathcal{I}^{\mathfrak{a}/\mathfrak{c}} = \mathcal{I}^{\mathfrak{a}/\mathfrak{b}} \setminus \{l\} = \{k_1 < \dots < k_{p-1}\}$.

On rencontre les deux situations suivantes :

a) $\mathcal{I} = \mathcal{I}^\circ \cup \{l\}$. C'est dans le cas où $l \in \mathcal{I}^{\mathfrak{a}/\mathfrak{h}}$, ou encore $Z_l \notin \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{l+1}$.

b) $\mathcal{I}^\circ = \mathcal{I}$. C'est dans le cas contraire : $Z_l \in \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{l+1}$.

2. Soit $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{c})$ l'ensemble d'indices caractérisant les double-classes relatives à H et C .

3. Comme on a noté $\tilde{g} = H \cdot g \cdot B$ la double-classe d'un élément $g \in G$ relativement à H et B , on note $\tilde{g} = H \cdot g \cdot C \in H \setminus G / C$ celle relative à H et C .

4. Soit aussi, comme dans (2.1.4), l'ouvert de Zariski non vide de G

$$\mathcal{U}^\circ = \bigcap_{i \in \mathcal{I}^\circ} \mathcal{U}_i^\circ. \quad (2.1.4)^\circ$$

5. De même que dans (2.1.6),..., (2.1.10) pour $H \setminus G / B$, on définit respectivement $\phi^\circ, \nu^\circ, \mathfrak{p}^\circ, \tilde{\mathcal{U}}^\circ$ et $\tilde{\phi}_r^\circ$, pour $H \setminus G / C$.

Rappelons (2.1.5) qui nous donne :

$$\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{c}) = \{i \in \mathcal{I}^\circ, \forall g \in \mathcal{U}^\circ, Z_i \notin \mathfrak{h} + \text{Ad}g\mathfrak{c} + \mathfrak{g}_{i+1}\}. \quad (2.1.5)^\circ$$

Comme,

$$\forall i \in \mathcal{I} \setminus \{l\}, \quad i < l, \quad \text{et donc} \quad \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}_{i+1}.$$

Il s'en suit que pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} + \text{Ad}g\mathfrak{c} + \mathfrak{g}_{i+1} &= \mathfrak{h} + \text{Ad}g(\mathfrak{b} + \mathfrak{g}_i) + \mathfrak{g}_{i+1} \\ &= \mathfrak{h} + \text{Ad}g\mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{i+1}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

- $\forall i \in \mathcal{I}^\circ, \mathcal{U}_i^\circ = \mathcal{U}_i$.
- $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{c}) = \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) \setminus \{l\}$.

Par suite, le cas a) : $l \in \mathcal{I}$, se partage en deux sous-cas :

a-1) $l \in \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$.

Cette situation se caractérise par le fait que dans l'ouvert de Zariski \mathcal{U}_l non vide de G , donné par la **proposition 2.1.6**, on a $\forall g \in \mathcal{U}_l, Z_l \notin \mathfrak{h} + \text{Ad}g\mathfrak{b}$.

a-2) $l \notin \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$.

Ce cas correspond à $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{c}) = \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ tout comme le **cas b)** : $\mathcal{I}^\circ = \mathcal{I}$. De plus, pour tout $g \in \mathcal{U}_l$, on a $Z_l \in \mathfrak{h} + \text{Ad}g\mathfrak{b}$, ($\mathfrak{g}_{l+1} \subseteq \text{Ad}g\mathfrak{b}$).

Enfin, on simplifie encore le problème en supposant que la base de Jordan-Hölder de \mathfrak{h} est formée par des vecteurs de \mathcal{Z} . Cette supposition ne fait pas perdre de généralités comme on l'a signalé dans la **remarque 2.1.2**.

Lemme 2.1.10 L'action de G_l sur l'ensemble des double-classes $H \setminus G / B$ donnée par

$$\begin{aligned} G_l \times H \setminus G / B &\longrightarrow H \setminus G / B \\ (w, \tilde{g} = H \cdot g \cdot B) &\longmapsto H \cdot wgw^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

est triviale.

Démonstration.

Vérifions que cette action est triviale en même temps qu'elle est bien définie. Pour cela, considérons un triplet $(h, g, b) \in H \times G \times B$, et montrons que $\forall w \in G_l, H \cdot w h g b w^{-1} \cdot B = \tilde{g}$.

Posons $Z := \log(hgb) \in \mathfrak{g}$, $X := \log w \in \mathfrak{g}_l$, et notons X_1 et X_2 les vecteurs respectifs de \mathfrak{g}_{l+1} et \mathfrak{g}_{l+2} , donnés par :

$$\begin{cases} X_1 := (e^{adX} - Id)(Z) = e^{adX}(Z) - Z = [X, Z_1] + \frac{1}{2}[X, [X, Z]] + \dots \\ X_2 := CBH(-Z, X_1) + Z - X_1 = \frac{1}{2}[-Z, X_1] + \frac{1}{12}[X_1, [Z, X_1]] - \frac{1}{12}[[Z, X_1], Z] + \dots \end{cases}$$

Il est facile d'établir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} w h g b w^{-1} &= i_w(\exp Z) = \exp(Ad w(Z)) \\ &= \exp(e^{adX} Z) = \exp(Z + X_1) \\ &= (\exp Z)(\exp(-Z) \exp(Z + X_1)) \\ &= (hgb) \exp(CBH(-Z, Z + X_1)) \\ &= (hgb) \exp(X_1 + X_2) \end{aligned}$$

Il s'en suit que $H \cdot w h g b w^{-1} \cdot B = H \cdot h g b \exp(X_1 + X_2) \cdot B = H \cdot h g b \cdot B = H \cdot g \cdot B$. ■

Lemme 2.1.11 Dans le cas particulier où l'une des sous-algèbres de Lie \mathfrak{h} ou \mathfrak{b} , est un idéal de \mathfrak{g} , le résultat du **théorème 2.1.9** est immédiat.

Démonstration.

La symétrie du problème signalée dans la **remarque 4.3.5** permet de se contenter par prouver le lemme en supposant que \mathfrak{h} est un idéal de \mathfrak{g} , dans quel cas, $\mathfrak{h} + \mathfrak{b} = Lie(H.B)$ est aussi une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} . De plus, vu que

$$\forall g \in G, Adg\mathfrak{h} = \mathfrak{h},$$

alors c'est clair que

$$\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \mathcal{I} \cap \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}+\mathfrak{b}}.$$

Or,

$$\mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}+\mathfrak{b}} \subset \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \cap \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}} = \mathcal{I},$$

et donc

$$\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}+\mathfrak{b}}.$$

Enfin, $\tilde{\phi}_r$ n'est autre que l'application

$$\mathbb{R}^d \ni t = (t_1, \dots, t_d) \xrightarrow{\mathcal{D}_{H.B}} t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot H.B \in G/H.B,$$

car pour tout $g \in G$, on a

$$H \cdot g \cdot B = \{hgb, h \in H, b \in B\} = \{gh'b, g^{-1}hg =: h' \in H, b \in B\} = g \cdot H \cdot B.$$

D'après (1.1.13), et vu que $\mathcal{Z}(\mathfrak{h} + \mathfrak{b}) = (Z_{i_1}, \dots, Z_{i_d})$ est la base coexponentielle de \mathfrak{g} relative à $\mathfrak{h} + \mathfrak{b}$ obtenue à partir de \mathcal{Z} , on déduit que $\tilde{\phi}_r$ est un difféomorphisme. ■

Remarques 2.1.12

1. Si on avait supposé que \mathfrak{b} est un idéal de \mathfrak{g} au lieu de \mathfrak{h} , la preuve du lemme ci-dessus aurait fait intervenir l'ensemble des classes à droite $H \cdot B \backslash G$ au lieu de celui des classes à gauche. Ceci ne change pas grandes choses vu que ces deux ensembles sont difféomorphes.
2. Le résultat est donc vrai si $p = 1$, en effet, si la sous-algèbre de Lie \mathfrak{b} est de codimension 1, alors elle est un idéal de \mathfrak{g} .
Notre hypothèse de récurrence : validité du résultat du théorème considéré, sera supposée vraie pour toute sous-algèbre de Lie de dimension strictement inférieure à celle de \mathfrak{b} . En particulier, puisque la codimension de \mathfrak{c} est $p - 1$, on suppose que $\tilde{\phi}_r^\circ : \mathcal{V}^\circ \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}^\circ \subset H \backslash G / C$ est un homéomorphisme.

Notation. Il nous sera utile de faire intervenir la projection

$$\begin{aligned} \Lambda^\circ : H \backslash G / B &\longrightarrow H \backslash G / C \\ H \cdot g \cdot B &\longmapsto H \cdot g \cdot C \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

pour la preuve du lemme ci-dessous.

Lemme 2.1.13 $\tilde{\phi}_r : \mathcal{V} \longrightarrow \tilde{\mathcal{U}}$ est bijective.
 $(t_1, \dots, t_d) \longmapsto H \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B$

Démonstration.

La surjectivité de $\tilde{\phi}_r$ est équivalente à :

$$H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot B = \mathcal{U} \quad (2.1.13)$$

où on note

$$H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot B := \{h\phi(t)b, h \in H, t \in \mathcal{V}, b \in B\}.$$

En effet, tout élément $H \cdot g \cdot B \in \tilde{\mathcal{U}}$, avec $g \in \mathcal{U} = H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot B$, s'écrit alors comme

$$\begin{aligned} H \cdot g \cdot B &= H \cdot h\phi(t)b \cdot B, \quad \text{où } h \in H, t \in \mathcal{V} \text{ et } b \in B \\ &= H \cdot \phi(t) \cdot B = \tilde{\phi}_r(t). \end{aligned}$$

Remarquons que la preuve de (2.1.13) nécessite seulement la vérification de l'inclusion

$$H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot B \supseteq \mathcal{U} \quad (2.1.14)$$

en effet, l'autre inclusion est une conséquence directe de la propriété (\mathcal{P}_1) de stabilité de \mathcal{U} par multiplication à droite, respectivement à gauche, avec des éléments de B , respectivement de H .

Pour montrer l'injectivité de $\tilde{\phi}_r$ ainsi que le point (2.1.14), on applique l'hypothèse de récurrence : $\tilde{\phi}_r^\circ$ bijective, et on discute tous les cas possibles expliqués dans le plan de la démonstration.

Cas a-1) $l \in \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i_1, \dots, i_d = l\}$.

Écrivons tous les éléments utiles pour la caractérisation de $H \backslash G / C$.

$$- \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{c}) = \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) \setminus \{l\} = \{i_1, \dots, i_{d-1}\}.$$

$$- \phi^\circ : \quad \mathbb{R}^{d-1} \quad \longrightarrow \quad G \\ s = (t_1, \dots, t_{d-1}) \longmapsto t_1 Z_{i_1} \dots t_{d-1} Z_{i_{d-1}}$$

$$- \mathcal{V}^\circ = \phi^{\circ-1}(\mathcal{U}^\circ) : \text{ouvert de Zariski de } \mathbb{R}^{d-1}, \text{ car } \mathcal{U}^\circ \text{ est un ouvert de Zariski de } G. \\ \text{Remarquons que } \bigcap_{i \in \mathcal{I}^\circ} \mathcal{U}_i = \mathcal{U}^\circ \supseteq \mathcal{U} = \mathcal{U}^\circ \cap \mathcal{U}_l.$$

$$- \tilde{\mathcal{U}}^\circ = \{\tilde{g} = H \cdot g \cdot C, g \in \mathcal{U}^\circ\}.$$

$$- \tilde{\phi}_r^\circ : \quad \mathcal{V}^\circ \quad \longrightarrow \quad \tilde{\mathcal{U}}^\circ \\ s = (t_1, \dots, t_{d-1}) \longmapsto H \cdot \phi^\circ(s) \cdot C$$

• $\tilde{\phi}_r$ est surjective? Prouvons (2.1.14), sachant qu'on a

$$H \cdot \phi^\circ(\mathcal{V}^\circ) \cdot C \supseteq \mathcal{U}^\circ. \quad (2.1.14)^\circ$$

Soit $u \in \mathcal{U} = \mathcal{U}^\circ \cap \mathcal{U}_l$,

comme $u \in \mathcal{U}^\circ$, donc, -d'après (2.1.14) $^\circ$ -, il existe $h \in H, s = (s_1, \dots, s_{d-1}) \in \mathcal{V}^\circ$ et $c \in C$, tel que $u = h\phi^\circ(s)c$.

En écrivant $c = (\exp \gamma Z_l)b$ où $b \in B$ et $\gamma \in \mathbb{R}$,

et en posant $t = (s_1, \dots, s_{d-1}, t_d := \gamma) \in \mathbb{R}^d$,

on obtient que $u = h\phi(t)b$.

Mais $t \in \mathcal{V}$ car $\phi(t) = h^{-1}ub^{-1} \in \mathcal{U}$, toujours grâce à (\mathcal{P}_1) .

D'où $u \in H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot B$.

• $\tilde{\phi}_r$ est injective ?

Soient $t = (t_1, \dots, t_d), t' = (t'_1, \dots, t'_d) \in \mathcal{V}$ tels que $H \cdot \phi(t) \cdot B = H \cdot \phi(t') \cdot B$.

Posons $s = (t_1, \dots, t_{d-1}), s' = (t'_1, \dots, t'_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$.

Justifions que $\phi^\circ(s) \in \mathcal{U}^\circ$, pour en tirer que $s \in \mathcal{V}^\circ$.

Comme $t \in \mathcal{V}$, alors $\phi(t) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}^\circ \cap \mathcal{U}_l$ et donc $\phi(t) \in \mathcal{U}^\circ$.

Rappelons que d'après (\mathcal{P}_1) , on a la stabilité de \mathcal{U}° par multiplication à droite avec des éléments de C , et puisque $Z_l \in \mathfrak{c}$, alors $\phi^\circ(s) = \phi(t) \exp(-t_d Z_l) \in \mathcal{U}^\circ$.

Ainsi $s \in \mathcal{V}^\circ$. De même $s' \in \mathcal{V}^\circ$.

Maintenant, du fait que

$$H \cdot \phi(t) \cdot C = H \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot C = H \cdot \phi^\circ(s) \exp(t_d Z_l) \cdot C = H \cdot \phi^\circ(s) \cdot C,$$

et de même, $H \cdot \phi(t') \cdot C = H \cdot \phi^\circ(s') \cdot C$, on tire :

$$\begin{aligned} H \cdot \phi(t) \cdot B = H \cdot \phi(t') \cdot B &\implies H \cdot \phi(t) \cdot C = H \cdot \phi(t') \cdot C \\ &\implies H \cdot \phi^\circ(s) \cdot C = H \cdot \phi^\circ(s') \cdot C \\ &\implies s = s' \end{aligned}$$

ce dernier passage découle de l'injectivité de $\tilde{\phi}_r^\circ$.

Enfin, soit $h = \exp Y \in H$ et $b = \exp X \in B$, tel que $\phi(t) = h\phi(t')b$. On a donc : $\phi(t)\phi(t')^{-1} = h\phi(t')b\phi(t')^{-1}$.

Détaillons chacun des termes de cette égalité.

$$\begin{aligned} \phi(t)\phi(t')^{-1} &= \phi^\circ(s) \exp((t_d - t'_d)Z_l) \phi^\circ(s)^{-1} = \exp((t_d - t'_d)Z_l) \mod[G_{l+1}] \\ &= h (\phi(t')b\phi(t')^{-1}) = (\exp Y) \exp(Ad\phi(t')(X)) \end{aligned}$$

De cette égalité, puis, par passage à l'algèbre de Lie, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \exists U_{l+1} \in \mathfrak{g}_{l+1}, \quad \exp((t_d - t'_d)Z_l + U_{l+1}) &= (\exp Y) \exp(Ad\phi(t')(X)) \\ (\exp -Y) \exp((t_d - t'_d)Z_l + U_{l+1}) &= \exp(Ad\phi(t')(X)) \\ CBH(-Y, (t_d - t'_d)Z_l + U_{l+1}) &= Ad\phi(t')(X) \\ &= -Y + (t_d - t'_d)Z_l \mod[\mathfrak{g}_{l+1}] \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} (t_d - t'_d)Z_l &= Y + Ad\phi(t')(X) \mod[\mathfrak{g}_{l+1}] \\ &\in \mathfrak{h} + Ad\phi(t')(b) \end{aligned}$$

Ce qui permet de déduire que $t_d = t'_d$, vu que $\phi(t') \in \mathcal{U}$ et $Z_l \notin \mathfrak{h} + Ad\mathfrak{g}b \forall g \in \mathcal{U}$. Et comme $s = s'$, alors $t = t'$ et on conclut que $\tilde{\phi}_r$ est aussi injective.

Cas a-2) $l \in \mathcal{I}$ mais $l \notin \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i_1, \dots, i_d\}$.

Écrivons, comme pour l'autre cas, les éléments caractéristiques de $H \backslash G / C$.

- $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{c}) = \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i_1, \dots, i_d\}$.

- $\phi^\circ = \phi: \mathbb{R}^d \longrightarrow G$

$$t = (t_1, \dots, t_d) \longmapsto t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d}$$

- Soit \mathcal{U}_l un ouvert de Zariski non vide de G , caractérisé par :

$$\forall g \in \mathcal{U}_l, Z_l \in \mathfrak{h} + \text{Ad}g\mathfrak{b}.$$

- $\mathcal{V}^\circ = \phi^{-1}(\mathcal{U}^\circ)$: ouvert de Zariski de \mathbb{R}^d , contenant $\mathcal{V} = \phi^{-1}(\mathcal{U})$ car $\mathcal{U}^\circ \supseteq \mathcal{U}$,
on a en effet, $\mathcal{U}^\circ = \bigcap_{i \in \mathcal{I}^\circ} \mathcal{U}_i \supseteq \mathcal{U} = \mathcal{U}^\circ \cap \mathcal{U}_l$.

- $\tilde{\mathcal{U}}^\circ = \{\tilde{g} = H \cdot g \cdot C, g \in \mathcal{U}^\circ\}$.

- $\tilde{\phi}_r^\circ: \mathcal{V}^\circ \longrightarrow \tilde{\mathcal{U}}^\circ$

$$t = (t_1, \dots, t_d) \longmapsto H \cdot \phi(t) \cdot C$$

Remarquons que la projection Λ° , définie dans (2.1.12), permet décrire

$$\tilde{\phi}_{r|_{\mathcal{V}^\circ}}^\circ = \Lambda^\circ \circ \tilde{\phi}_r^\circ \quad (2.1.15)$$

• $\tilde{\phi}_r^\circ$ est surjective ? Prouvons (2.1.14) : $H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot B \supseteq \mathcal{U}$, en utilisant le fait que

$$H \cdot \phi(\mathcal{V}^\circ) \cdot C \supseteq \mathcal{U}^\circ. \quad (2.1.14)^\circ$$

Soit $u \in \mathcal{U} = \mathcal{U}^\circ \cap \mathcal{U}_l$.

De même que pour le cas précédent, puisque $u \in \mathcal{U}^\circ$, il s'écrit sous la forme $u = h\phi^\circ(t)c = h\phi(t)c$, où $h \in H, c = \exp(\gamma Z_l)b \in C$ et $t \in \mathcal{V}^\circ \subset \mathcal{V}$.

Ensuite, on a $u \in \mathcal{U}_l$, donc $Z_l \in \mathfrak{h} + \text{Ad}u\mathfrak{b}$, il existe alors $Y =: \log y \in \mathfrak{h}$ et $X =: \log x \in \mathfrak{b}$, tels que

$$\gamma Z_l = Y + \text{Ad}u(X). \quad (1)$$

De plus, si on pose

$$U_{l+1} := \text{CBH}(Y, \gamma Z_l) - Y - \gamma Z_l = \frac{1}{2}[Y, \gamma Z_l] + \dots \in \mathfrak{g}_{l+1}$$

$$w_1 := (-\gamma Z_l) \cdot (\gamma Z_l + U_{l+1}) \in G_{l+1} \subset B$$

alors on obtient :

$$\begin{aligned} \exp(Y) \exp(\gamma Z_l - Y) &= \exp(\text{CBH}(Y, \gamma Z_l - Y)) \\ &= \exp(\gamma Z_l + U_{l+1}) \\ &= \exp(\gamma Z_l) w_1 =: w \in G_l. \end{aligned} \quad (2)$$

Ainsi, de (1) et (2) on déduit que

$$\begin{aligned}\exp(\text{Ad } u (X)) &= \exp(\gamma Z_l - Y) \\ &= \exp(-Y)w\end{aligned}$$

Par suite,
$$uxu^{-1} = y^{-1}w.$$

Or $u = h\phi(t)c$, d'où $uxu^{-1} = h\phi(t)c x c^{-1}\phi(t)^{-1}h^{-1}$,

donc, en notant $b' = cyc^{-1} \in B$, les deux égalités ci-dessus permettent d'écrire :

$$y^{-1}wh\phi(t) = h\phi(t)b'.$$

La multiplication à droite de ces deux membres, par c , donne :

$$\begin{aligned}y^{-1}w u &= h\phi(t)b' c \\ &= h\phi(t)b'(\exp \gamma Z_l)b,\end{aligned}$$

ou encore,
$$wu b^{-1} = y h\phi(t)b'(\exp \gamma Z_l).$$

Soit $h' := yh \in H$, donc : $ub^{-1} = w^{-1}(h'\phi(t)b')\exp \gamma Z_l.$

On en tire que
$$ub^{-1} w_1 = w^{-1}(h'\phi(t)b')(\exp \gamma Z_l) w_1,$$
 et par suite

$$H \cdot ub^{-1}w_1 \cdot B = H \cdot w^{-1}(h'\phi(t)b')w \cdot B.$$

Enfin, vu que $w_1, b, b' \in B, h' \in H, w \in G_l$, et grâce à (2.1.10), on déduit que :

$$H \cdot u \cdot B = H \cdot h'\phi(t)b' \cdot B = H \cdot \phi(t) \cdot B.$$

Conclusion : $u \in H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot B$, ce qui prouve (2.1.14). En particulier, ça prouve aussi que

$$H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot C = H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot B \tag{2.1.16}$$

qui nous sera utile pour le prochain lemme.

• $\tilde{\phi}_r$ est injective ? Il suffit de se rappeler de (2.1.15) : l'application $\tilde{\phi}_{r|_{\mathcal{V}}}^\circ = \Lambda^\circ \circ \tilde{\phi}_r$ est injective par hypothèse de récurrence, il doit être le cas aussi pour $\tilde{\phi}_r$.

Cas b) $l \notin \mathcal{I} = \mathcal{I}^\circ$ ou encore $Z_l \in \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{l+1}$.

Nécessairement $Z_i \in \mathfrak{h}$, en effet, la base \mathcal{V} de \mathfrak{h} est formée par des vecteurs de \mathcal{Z} .
Ce cas est facile puisque les éléments caractéristiques suivants, sont les mêmes pour $H \backslash G / B$ et pour $H \backslash G / C$:

- $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{c}) = \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i_1, \dots, i_d\}$.
- $\phi^\circ = \phi$
- $\mathcal{U}^\circ = \mathcal{U} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_i$ et $\mathcal{V}^\circ = \phi^{\circ-1}(\mathcal{U}^\circ) = \phi^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$.

La différence est seulement pour $\tilde{\phi}_r^\circ$ qui est donnée par :

$$\tilde{\phi}_r^\circ = \Lambda^\circ \circ \tilde{\phi}_r : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{U}}^\circ \\ t = (t_1, \dots, t_d) & \longmapsto & H \cdot \phi(t) \cdot C \end{array} \quad (2.1.17)$$

• $\tilde{\phi}_r$ est surjective ? D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^\circ = H \cdot \phi^\circ(\mathcal{V}^\circ) \cdot C = H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot C, \quad (2.1.13)^\circ$$

donc, pour montrer (2.1.14), il suffit de vérifier que $H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot C \subseteq H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot B$.

Soit $u = h\phi(t)c \in H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot C$ où $h, t = (t_1, \dots, t_d), c = \exp(\gamma Z_i)b$, γ et b sont des éléments respectivement de $H, \mathcal{V}, C, \mathbb{R}$ et B .

On a :

$$\begin{aligned} u &= h\phi(t)c = h\phi(t)\exp(\gamma Z_i)b \\ &= (h\exp(\gamma Z_i))\exp(-\gamma Z_i)\phi(t)\exp(\gamma Z_i)b \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} H \cdot u \cdot B &= H \cdot (h\exp(\gamma Z_i))\exp(-\gamma Z_i)\phi(t)\exp(\gamma Z_i)b \cdot B \\ &= H \cdot \exp(-\gamma Z_i)\phi(t)\exp(\gamma Z_i) \cdot B. \end{aligned}$$

Ce dernier passage est dû au fait que $h, \exp(\gamma Z_i) \in H$ et $b \in B$.

Enfin, d'après le **lemme 2.1.10**, on obtient $u \in H \cdot \phi(t) \cdot B$, ce qui finit la preuve.

Remarquons aussi que (2.1.13)[°] donne alors (2.1.16) : $H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot C = H \cdot \phi(\mathcal{V}) \cdot B$.

• $\tilde{\phi}_r$ est injective ? C'est une conséquence immédiate de l'injectivité de $\tilde{\phi}_r^\circ$. En effet, d'après (2.1.17), on a : $\tilde{\phi}_r^\circ = \Lambda^\circ \circ \tilde{\phi}_r$. ■

Lemme 2.1.14 $\tilde{\phi}_r$ est bicontinue.

Démonstration.

Puisque les applications ϕ et \mathfrak{p} données respectivement par (2.1.6) et (2.1.8) sont continues, alors c'est aussi le cas de $\tilde{\phi}_r = \mathfrak{p} \circ \phi|_{\mathcal{V}}$. Pour conclure, il faut prouver que

cette application est aussi ouverte, ce qu'on fait par récurrence sur p . Mais tout d'abord, écrivons que

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_r \text{ est ouverte} &\iff \text{pour tout ouvert } \mathcal{W} \text{ de } \mathcal{V}, \mathbf{p} \circ \phi(\mathcal{W}) \text{ est ouvert dans } \tilde{\mathcal{U}} \\ &\iff \forall \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} \text{ ouvert, } \mathbf{p}^{-1}(\mathbf{p} \circ \phi(\mathcal{W})) = H.\phi(\mathcal{W}).B \text{ ouvert de } G. \end{aligned}$$

On a déjà remarqué que si $p = 1$, alors on n'a pas de problèmes puisque $\tilde{\phi}_r$ serait un difféomorphisme. Supposons alors que $\tilde{\phi}_r^\circ$ est ouverte, et reprenons la discussion des cas précédents.

Soit \mathcal{W} un ouvert de \mathcal{V} , montrons que $H.\phi(\mathcal{W}).B$ est un ouvert de G .

- Si on est dans l'un des deux derniers cas (**Cas a-2** ou **Cas b**), \mathcal{W} est alors un ouvert de \mathcal{V}° , et l'hypothèse de récurrence donne que $H.\phi(\mathcal{W}).C$ est un ouvert de G . Mais les calculs faits dans la preuve précédente qui ont permis de montrer que

$$H.\phi(\mathcal{V}).C = H.\phi(\mathcal{V}).B \tag{2.1.16}$$

permettent de voir aussi que $H.\phi(\mathcal{W}).C = H.\phi(\mathcal{W}).B$, et donc tout marche bien.

- Dans le **Cas a-1**), on doit passer par l'application

$$\begin{aligned} \Xi : H \times \mathbb{R}^d \times B &\longrightarrow G \\ (h, t, b) &\longmapsto h\phi(t)b \end{aligned}$$

et montrer qu'elle est ouverte, sachant, -par hypothèse de récurrence-, que c'est le cas de Ξ° définie par :

$$\begin{aligned} \Xi^\circ : H \times \mathbb{R}^{d-1} \times C &\longrightarrow G \\ (h, t^\circ, c) &\longmapsto h\phi^\circ(t^\circ)c \end{aligned}$$

une fois c'est fait, on déduit directement que l'image par Ξ de l'ouvert $H \times \mathcal{W} \times B$, -qui est $H.\phi(\mathcal{W}).B$ -, est un ouvert de G .

Considérons un pavé de $H \times \mathbb{R}^d \times B$ qui s'écrit comme produit cartésien d'ouverts H', \mathcal{W}' et B' respectifs de H, \mathbb{R}^d et B , où $\mathcal{W}' = \mathcal{W}'^\circ \times \Gamma$ est aussi produit d'un ouvert de \mathbb{R}^{d-1} par un ouvert de \mathbb{R} . (Il suffit de considérer les ouverts qui sont de cette forme et montrer que leurs images sont des ouverts). Il est clair que l'ensemble $C' := \{\exp(\gamma Z_l)b, \gamma \in \Gamma, b \in B'\}$ est un ouvert de C . Enfin, on voit directement que $\Xi(H' \times \mathcal{W}' \times B') = \Xi^\circ(H' \times \mathcal{W}'^\circ \times C')$ qui est un ouvert de G par hypothèse de récurrence. ■

Démonstration du théorème 2.1.9. C'est les résultats des deux lemmes précédents. ■

1.1.2.3 Retour à l'exemple.

Revenons à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \text{vect} \langle Z_1, \dots, Z_7 \rangle$ avec ses crochets

$$[Z_1, Z_4] = Z_6 \quad [Z_1, Z_5] = Z_7 \quad [Z_2, Z_3] = Z_7$$

et ses sous-algèbres de Lie $\mathfrak{h} = \text{vect} \langle Z_4, Z_5, Z_7 \rangle$ et $\mathfrak{b} = \text{vect} \langle Z_3, Z_4, Z_7 \rangle$. On a

$$\mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = \{1, 2, 3, 6\}, \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}} = \{1, 2, 5, 6\} \text{ et donc } \mathcal{I} = \{1, 2, 6\}.$$

De plus, si $g = z_1 Z_1 \dots z_7 Z_7 \in G$, avec $(z_1, \dots, z_7) \in \mathbb{R}^7$, alors les calculs donnent que $\text{Ad} g \mathfrak{b} = \langle Z_3, Z_4 + z_1 Z_6, Z_7 \rangle$. Il s'ensuit que dans l'ouvert de Zariski $\mathcal{U}_6 := G \setminus G_2$, on a :

$$\forall g \in \mathcal{U}_6, \quad Z_6 \in \mathfrak{h} + \text{Ad} g \mathfrak{b} + \mathfrak{g}_7 = \langle Z_3, Z_4, Z_5, z_1 Z_6, Z_7 \rangle,$$

par contre, pour $i = 1, 2$, on a

$$\forall g \in G =: \mathcal{U}_i, \quad Z_i \notin \mathfrak{h} + \text{Ad} g \mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{i+1}.$$

Par suite

$$\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i \in \mathcal{I} = \{1, 2, 6\}, Z_i \notin \mathfrak{h} + \text{Ad} g \mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{i+1} \forall g \in \mathcal{U} = G \setminus G_2\} = \{1, 2\}.$$

Le reste des éléments caractéristiques de $H \setminus G / B$ sont :

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow G \\ (t_1, t_2) &\longmapsto t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{V} = \phi^{-1}(\mathcal{U}) := \{t \in \mathbb{R}^2, t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \in G \setminus G_2\} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathbf{p}(\mathcal{U}) = \{H \cdot z_1 Z_1 \dots z_7 Z_7 \cdot B, z = (z_1, \dots, z_7) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^6\}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_r: \quad \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} &\longrightarrow \tilde{\mathcal{U}} \\ (t_1, t_2) &\longmapsto H \cdot t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \cdot B \end{aligned}$$

Le **théorème 2.1.5** assurant que $\tilde{\phi}_r$ est un homéomorphisme, -et en particulier qu'elle est surjective-, permet de confirmer le calcul fait précédemment au bout duquel, on a trouvé que

$$\mathbf{p}(G \setminus G_2) = \tilde{\phi}_r(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}).$$

2.2 Mesure sur l'ensemble des double-classes.

Soient $H = \exp \mathfrak{h}$ et $B = \exp \mathfrak{b}$ deux sous-groupes de Lie, du groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe : $G = \exp \mathfrak{g}$. Toutes les notations et conventions introduites dans la section précédente, restent valable jusqu'à la fin du chapitre.

2.2.1 Préliminaires.

Dans cette partie préliminaire où on se concentre sur le groupe de Lie H , fixons un élément $y \in H$ et un sous-groupe de Lie $K = \exp \mathfrak{k}$ de H .

Rappel. Rappelons qu'une base coexponentielle de \mathfrak{h} relative à \mathfrak{k} est donnée par $\mathcal{Y}(\mathfrak{k}) := (Y_{j_1}, \dots, Y_{j_r})$ où $\{j_1, \dots, j_r\} = \mathcal{I}^{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}$. De plus, le difféomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathfrak{k}} : \quad \mathbb{R}^r &\longrightarrow H/K \\ s = (s_1, \dots, s_r) &\longmapsto s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot K \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

nous fournit une mesure $\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}$ sur H/K , définie de la façon suivante : pour toute application $\varphi \in \mathcal{C}_c(H/K)$, on pose

$$\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}(\varphi) = \int_{H/K} \varphi(\ddot{h}) d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}(\ddot{h}) := \int_{\mathbb{R}^r} \varphi(\mathcal{E}_{\mathfrak{k}}(s)) ds = \int_{\mathbb{R}^r} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot K) ds \quad (2.2.2)$$

où $\forall h \in H$, $\ddot{h} := h \cdot K \in H/K$ et $ds := ds_1 \dots ds_r$ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^r . Quand il n'y'a pas de confusions, on note $d\ddot{h} := d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}(\ddot{h})$.

Proposition 2.2.1 Notons P l'action du groupe H identifié à \mathbb{R}^m , sur l'ensemble H/K identifié à \mathbb{R}^r , définie par :

$$P : \quad \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r \\ (y = (y_1, \dots, y_m), s = (s_1, \dots, s_r)) \longmapsto y \cdot s =: (s'_1, \dots, s'_r)$$

$$\text{tel que} \quad y_1 Y_{j_1} \dots y_m Y_{j_m} \cdot s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot K = s'_1 Y_{j_1} \dots s'_r Y_{j_r} \cdot K.$$

Alors cette action est décrite par $r - 1$ polynômes P_2, \dots, P_r , de la façon suivante :

$$s' = P(y, s) \iff \begin{cases} s'_1 = s_1 + y_{j_1} \\ s'_2 = s_2 + y_{j_2} + P_2(y_1, \dots, y_{j_2-1}; s_1) \\ \vdots \\ s'_i = s_i + y_{j_i} + P_i(y_1, \dots, y_{j_i-1}; s_1, \dots, s_{i-1}) \\ \vdots \\ s'_r = s_r + y_{j_r} + P_r(y_1, \dots, y_{j_r-1}; s_1, \dots, s_{r-1}) \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Démonstration.

Voir [19]. ■

Corollaire 2.2.2 *La mesure $\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}$ définie en (2.2.2), est invariante à gauche.*

Notations.

1. On note :

$$\iota_y : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ h & \longmapsto & yhy^{-1} =: h' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{cases} K' := yKy^{-1} = \iota_y(K) \\ \mathfrak{k}' := \text{Lie}(K') = \text{Ad } y \mathfrak{k} \end{cases}$$

2. Définissons aussi $\bar{\iota}_y$ par :

$$\bar{\iota}_y : \begin{array}{ccc} H/K & \longrightarrow & H/K' \\ \bar{h} = h \cdot K & \longmapsto & yhy^{-1} \cdot K' =: \bar{h}' \end{array}$$

On justifie dans la proposition ci-dessous, que cette application est bien définie, que c'est même un difféomorphisme qui transporte la mesure $\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}$ sur H/K en une mesure $\mu'_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}} = \bar{\iota}_y \star \mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}$ invariante sur H/K' et définie par : $\forall \psi \in C_c(H/K')$

$$\begin{aligned} \mu'_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}(\psi) &= \int_{H/K'} \psi(\bar{h}') d_{\mu'_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}}(\bar{h}') = \bar{\iota}_y \star \mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}(\psi) \\ &= \int_{H/K} \psi(\bar{\iota}_y(\bar{h})) d_{\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}}(\bar{h}). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

3. Enfin, le difféomorphisme $P := \mathcal{E}_{\mathfrak{k}'}^{-1} \circ \bar{\iota}_y \circ \mathcal{E}_{\mathfrak{k}}$ décrit par le tableau ci-dessous, possède une particularité intéressante, qui fera l'objet du prochain lemme.

$$\begin{array}{ccc} H/K & \xrightarrow{\bar{\iota}_y} & H/K' \\ \mathcal{E}_{\mathfrak{k}} \uparrow & & \downarrow (\mathcal{E}_{\mathfrak{k}'}^{-1}) \\ \mathbb{R}^r & \xrightarrow{P} & \mathbb{R}^r \end{array} \quad (2.2.5)$$

Proposition 2.2.3 *L'application $\bar{\iota}_y$ est bien définie, de plus, c'est un difféomorphisme.*

Démonstration.

C'est clair que si $h \in H$ et $k \in K$, alors $y(hk)y^{-1} \cdot K' = yhy^{-1} \cdot K'$.

En effet, on peut écrire $y(hk)y^{-1} = yh y^{-1} y ky^{-1} = (yhy^{-1}) k'$ où $k' := yky^{-1} \in K'$.

Donc l'application $\bar{\iota}_y$ est bien définie.

C'est un difféomorphisme parce que ι_y est un automorphisme de H . ■

Lemme 2.2.4 *Le difféomorphisme $P = \mathcal{E}_{\mathfrak{k}'}^{-1} \circ \bar{\iota}_y \circ \mathcal{E}_{\mathfrak{k}}$ est polynômial. Plus précisément, il existe des polynômes $P_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{i-1}]$, $i \in \{2, \dots, r\}$, tels que : $\forall s = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$,*

$$s' := P(s) = (s_1, s_2 + P_2(s_1), \dots, s_i + P_i(s_{i-1}, \dots, s_1), \dots, s_r + P_r(s_{r-1}, \dots, s_1)) \quad (2.2.6)$$

Démonstration.

Il faut utiliser un raisonnement analogue à celui de la **proposition 2.2.1**, après avoir prouvé que la base coexponentielle de \mathfrak{h} relative à \mathfrak{k} est la même que celle relative à \mathfrak{k}' .

Ceci revient à prouver que $\mathcal{I}^{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}} = \mathcal{I}^{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}'}$.

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$, on suppose que $Y_i \in \mathfrak{k} + \mathfrak{h}_{i+1}$, soit donc $U_{i+1} \in \mathfrak{h}_{i+1}$ tel que $Y_i + U_{i+1} \in \mathfrak{k}$.

Ainsi, $Ad y(Y_i + U_{i+1}) \in Ad y(\mathfrak{k})$,

et comme $Ad y(Y_i + U_{i+1}) \equiv Y_i \pmod{[\mathfrak{h}_{i+1}]}$, alors $Y_i \in Ad y(\mathfrak{k}) + \mathfrak{h}_{i+1}$.

En conclusion, $i \in \mathcal{I}^{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}} \iff Y_i \notin \mathfrak{k} + \mathfrak{h}_{i+1} \iff Y_i \notin Ad y(\mathfrak{k}) + \mathfrak{h}_{i+1} \iff i \in \mathcal{I}^{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}'}$

■

Corollaire 2.2.5 *La mesure $\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}'}$, invariante sur H/K' qu'on obtient comme dans (2.2.2) par le difféomorphisme $\mathcal{E}_{\mathfrak{k}'}$, n'est autre que la mesure $\bar{\iota}_y \star \mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}$ définie dans (2.2.4).*

$$\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}'} = \mu'_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}} \quad (2.2.7)$$

Démonstration.

En se rappelant que les bases coexponentielles de \mathfrak{h} relatives à \mathfrak{k} et relative à \mathfrak{k}' sont les mêmes, on peut écrire pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c(H/K')$,

$$\begin{aligned} \mu'_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}(\psi) &= \int_{H/K} \psi(\bar{\iota}_y \ddot{h}) d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}(\ddot{h}) = \int_{\mathbb{R}^r} \psi(\bar{\iota}_y(\mathcal{E}_{\mathfrak{k}}(s))) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^r} \psi(s'_1 Y_{j_1} \dots s'_r Y_{j_r} \cdot K') ds \end{aligned}$$

où $s' = (s'_1, \dots, s'_r) = \mathcal{E}_{\mathfrak{k}'}^{-1}(\bar{\iota}_y(\mathcal{E}_{\mathfrak{k}}(s_1, \dots, s_r))) = P(s) \in \mathbb{R}^r$, $\forall (s_1, \dots, s_r) = s \in \mathbb{R}^r$,

$= (s_1, s_2 + P_2(s_1), \dots, s_i + P_i(s_{i-1}, \dots, s_1), \dots, s_r + P_r(s_{r-1}, \dots, s_1))$ d'après (2.2.6).

Ce changement de variable s'effectue moyennant un difféomorphisme de Jacobien 1 :

$$\mathcal{J}_P = \begin{vmatrix} 1 & \dots & & & \\ 0 & 1 & & \frac{\partial P_i}{\partial s_j} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

donc,

$$\mu'_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^r} \psi(s'_1 Y_{j_1} \dots s'_r Y_{j_r} \cdot K') ds' = \mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}'}(\psi).$$

■

2.2.2 Mesure sur l'ensemble des doubles-classes

Commençons par introduire les définitions et notations suivantes :

Définitions 2.2.6 Pour tout $g \in G$, et pour toute application $\varphi \in \mathcal{C}_c(G/B)$, continue et à support compact modulo B , notons :

1. $K_g := H \cap gBg^{-1}$ le sous-groupe de Lie de H , d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_g = \mathfrak{h} \cap \text{Ad}g\mathfrak{b}$.
- 2.

$$\begin{aligned} \varphi_g : H/K_g &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \check{h} = h \cdot K_g &\longmapsto \varphi(hg \cdot B) \end{aligned}$$

Justifions que pour tout $g \in G$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(G/B)$, l'application φ_g est bien définie. Pour cela, soient h et h' deux éléments de H tels que $\check{h} = \check{h}'$, c'est à dire $h^{-1}h' =: k \in K_g \subset gBg^{-1}$. On a donc

$$\varphi_g(\check{h}') = \varphi(h'g \cdot B) = \varphi((hk)g \cdot B) = \varphi((hg)(g^{-1}kg) \cdot B) = \varphi(hg \cdot B) = \varphi_g(\check{h}).$$

Remarque 2.2.7 Il sera vérifié dans la **remarque 2.2.16**, que si φ est une application continue dont le support est un compact inclu dans \mathcal{U} , alors

$$\forall g \in \mathcal{U}, \varphi_g \in L^1(H/K_g), \quad (2.2.8)$$

mais pour le moment, on admet ce résultat pour énoncer la proposition suivante.

Proposition 2.2.8 Soit pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(G/B)$, qui vérifie $\text{supp}(\varphi) \subseteq \mathcal{U}$, l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{U}} \subset H \backslash G/B &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tilde{g} = H \cdot g \cdot B &\longmapsto \tilde{\varphi}(\tilde{g}) \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{\varphi}(\tilde{g}) := \int_{H/K_g} \varphi_g(\check{h}) d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_g}(\check{h}) = \int_{H/H \cap gBg^{-1}} \varphi(hg \cdot B) d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_g}(\check{h}). \quad (2.2.9)$$

Alors $\tilde{\varphi}$ est bien définie.

Démonstration. Assurons-nous qu'en tout point $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{U}}$, la valeur de $\tilde{\varphi}(\tilde{g})$ est indépendante du représentant de la double-classe. Pour cela, soit $g' \in G$ tel que $\tilde{g}' = \tilde{g}$, écrivons alors $g' = ygx$ où $y \in H$ et $x \in B$.

Comme pour $\varphi_g : H/K_g \ni \bar{h} = h \cdot K_g \mapsto \varphi(hg \cdot B) \in \mathbb{C}$, notons $\varphi_{g'}$ la fonction :

$$\varphi_{g'} : H/K_{g'} \ni \bar{h} = h \cdot K_{g'} \mapsto \varphi(hg' \cdot B) \in \mathbb{C}.$$

Ensuite, adoptons les notations utilisées dans le **corollaire 2.2.5** qui finira par nous donner le résultat.

$$\begin{aligned} K_{g'} &:= yK_g y^{-1} \\ &= y(H \cap gBg^{-1})y^{-1} \\ &= H \cap ygBg^{-1}y^{-1} \\ &= H \cap g'x^{-1}Bxg'^{-1} \\ &= H \cap g'Bg'^{-1} \\ &= K_{g'} \end{aligned}$$

En particulier, $\mathfrak{k}_{\tilde{g}'} := \text{Lie}(K_{g'}) = \text{Lie}(K_{g'}) =: \mathfrak{k}_{g'} = \text{Ad } y \mathfrak{k}_g$.

Enfin, on obtient que

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\tilde{g}') &= \int_{H/K_{g'}} \varphi_{g'}(\bar{h}) d_{\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_{g'}}}(\bar{h}) \\ &= \int_{H/K_{g'}} \varphi_{g'}(\bar{h}) d_{\mu'_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_g}}(\bar{h}) \\ &\quad \text{car } \mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_{g'}} = \mu'_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_g} \quad \text{d'après (2.2.7),} \\ &= \int_{H/K_g} \varphi_g(\bar{h}) d_{\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_g}}(\bar{h}) \\ &\quad \text{d'après sa définition donnée par (2.2.4),} \\ &= \tilde{\varphi}(\tilde{g}). \end{aligned}$$

■

Remarques 2.2.9

1. La proposition ci-dessus permet de considérer seulement les éléments g de \mathcal{U} qui sont sous la forme $g = t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} = \phi(t) =: g_t$, où $t \in \mathcal{V}$.
2. Le **lemme 2.1.5** permet aussi de tirer que, dans un ouvert de Zariski \mathcal{U}_0 non vide de G , on a la constance de l'ensemble d'indices $\mathcal{I}^{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_g}$, ainsi la base de Malcev de \mathfrak{h} relative à \mathfrak{k}_g , notée $\mathcal{Y}(\mathfrak{k}_g) =: (Y_{j_1}, \dots, Y_{j_r})$ est la même pour tout $g \in \mathcal{U}_0$.

3. Dans son expression donnée par (2.1.4), on remplace \mathcal{U} par un ouvert de Zariski, encore plus petit et non vide de G . Dorénavant, \mathcal{U} désigne :

$$\mathcal{U} := \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_0. \quad (2.1.4)'$$

4. Compte tenu de ces remarques, l'expression de l'application $\tilde{\varphi}$ devient :

$$\begin{aligned} \forall g = \phi(t), t \in \mathcal{V}, \quad \tilde{\varphi}(\tilde{g}) &= \int_{H/H \cap gBg^{-1}} \varphi(hg \cdot B) d_{\mu_h/\nu_g}(\tilde{h}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^r} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B) ds. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

2.2.3 Théorème fondamental.

Comme dans la section 2, on énonce ci-dessous le théorème fondamental concernant la mesure sur l'ensemble des double-classes, puis on le prouve par récurrence sur la codimension de B en discutant les mêmes cas.

Théorème 2.2.10 *Il existe une mesure $d\gamma$ sur $H \backslash G/B$, dite la mesure associée à la fonction rationnelle F définie sur \mathcal{V} et notée $F := F_{(H,B)} \in \mathbb{R}(X_1, \dots, X_d)$, cette mesure est décrite de la façon suivante : pour toute fonction $\psi : H \backslash G/B \rightarrow \mathbb{C}$, continue et à support compact dans $\tilde{\mathcal{U}}$,*

$$\gamma(\psi) = \int_{H \backslash G/B} \psi(\tilde{g}) d\gamma(\tilde{g}) = \int_{\mathcal{V}} \psi(H \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B) |F(t_1, \dots, t_d)| dt \quad (2.2.11)$$

où $dt := dt_1 \dots dt_d$ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

De plus, cette mesure vérifie : $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(G/B)$, $\gamma(\tilde{\varphi}) = \int_{G/B} \varphi(\dot{g}) d\dot{g}$, ou encore :

$$\int_{G/B} \varphi(\dot{g}) d\dot{g} = \int_{H \backslash G/B} \left(\int_{H/H \cap gBg^{-1}} \varphi(hg \cdot B) d_{\mu_h/\nu_g}(\tilde{h}) \right) d\gamma(\tilde{g}) \quad (2.2.12)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(\int_{\mathbb{R}^r} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B) ds \right) |F(t)| dt \quad (2.2.13)$$

Plan de la démonstration.

Signalons l'importance de revenir sur tous les détails précisés dans le plan de la démonstration du **théorème 2.1.9**. La preuve se base sur un raisonnement par récurrence

analogue à celui fait dans la section précédente. Donc on supposera par la suite, que pour le sous-groupe de Lie $C = \exp \mathfrak{c}$, qui est de codimension plus petite que celle de B , il existe une mesure $d\gamma^\circ$ sur l'ensemble des double-classes $H \backslash G / C$, vérifiant l'énoncé du **théorème 2.2.10**. De plus, il nous faut définir pour $H \backslash G / C$ aussi, les éléments suivants :

1. Pour tout $\varphi^\circ \in \mathcal{C}_c(G/C)$, définissons l'application $\widetilde{\varphi}^\circ : H \backslash G / C \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\widetilde{\varphi}^\circ(\widetilde{g}) := \int_{H/H \cap gCg^{-1}} \varphi^\circ(hg \cdot C) d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_g^\circ}(\dot{h}),$$

où

– $\mathfrak{k}_g^\circ = \mathfrak{h} \cap \text{Ad}g\mathfrak{c} = \text{Lie}(K_g^\circ)$,

– $\dot{h} = h \cdot K_g^\circ \in H/H \cap gCg^{-1}$,

– $\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_g^\circ}$ est la mesure sur $H/H \cap gCg^{-1}$ obtenue à partir de la base de Malcev de \mathfrak{h} relative à $\mathfrak{h} \cap \text{Ad}g\mathfrak{c}$, qu'on note $\mathcal{Y}(\mathfrak{k}_g^\circ)$ et qui est la même pour tout $g \in \mathcal{U}^\circ$.

2. Soit $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{c}) = \{i_1, \dots, i_{d'}\}$, avec $d' \in \{d-1, d\}$ d'après la section précédente.

Soit aussi $F^\circ := F_{(H,C)} \in \mathbb{R}(X_1, \dots, X_{d'})$ une fonction rationnelle définie sur \mathcal{V}° et décrivant la mesure $d\gamma^\circ$ sur l'ensemble des double-classes $H \backslash G / C$ comme dans (2.2.11) : $\forall \psi^\circ : H \backslash G / C \rightarrow \mathbb{C}$, continue et à support compact dans $\widetilde{\mathcal{U}}^\circ$,

$$\gamma^\circ(\psi^\circ) = \int_{H \backslash G / C} \psi^\circ(\widetilde{g}) d\gamma^\circ(\widetilde{g}) = \int_{\mathcal{V}^\circ} \psi^\circ(H \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_{d'} Z_{i_{d'}} \cdot C) |F^\circ(t_1, \dots, t_{d'})| dt.$$

On suppose que la relation (2.2.12) est vérifiée pour $H \backslash G / C$, c'est à dire, pour toute fonction $\varphi^\circ \in \mathcal{C}_c(G/C)$ continue et à support compact modulo C dans \mathcal{U}° ,

$$\int_{G/C} \varphi^\circ(g \cdot C) dg = \int_{H \backslash G / C} \left(\int_{H/H \cap gCg^{-1}} \varphi^\circ(hg \cdot C) d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_g^\circ}(\dot{h}) \right) d\gamma^\circ(\widetilde{g}). \quad (2.2.12)^\circ$$

Ensuite, distinguons les caractéristiques de chacun des cas à discuter. Il nous faut comparer $\mathcal{Y}^\circ(\mathcal{U}^\circ)$ avec $\mathcal{Y}(\mathcal{U})$, les bases de Malcev de \mathfrak{h} relatives à $\mathfrak{h} \cap \text{Ad}g\mathfrak{c}$, respectivement à $\mathfrak{h} \cap \text{Ad}g\mathfrak{b}$, pour g quelconque dans \mathcal{U} .

Cas a-1) $l \in \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i_1, \dots, i_d = l\}$.

Rappelons que dans ce cas, on a : $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{c}) = \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) \setminus \{l\} = \{i_1, \dots, i_{d-1}\}$, ($d' = d-1$).
Vérifions que $\mathcal{Y}(\mathcal{U}) = \mathcal{Y}^\circ(\mathcal{U}^\circ) = (Y_{j_1}, \dots, Y_{j_r})$, ce qui provient du fait que

$$\mathfrak{h} \cap \text{Ad}g(\mathfrak{b}) = \mathfrak{h} \cap \text{Ad}g(\mathfrak{c}), \quad \forall g \in \mathcal{U}.$$

En effet, si l'inclusion était stricte : $\mathfrak{h} \cap \text{Ad}g(\mathfrak{b}) \subsetneq \mathfrak{h} \cap \text{Ad}g(\mathfrak{c})$ pour un certain $g \in \mathcal{U}$, alors

$$\exists X \in \mathfrak{b} \text{ tel que } Y := \text{Ad}g(X + Z_l) \in \mathfrak{h} \cap (\text{Ad}g(\mathfrak{c}) \setminus \text{Ad}g(\mathfrak{b})).$$

Dans ce cas, on aurait

$$\begin{aligned} \text{Ad } g(Z_l) &= Y - \text{Ad } g(X) \in \mathfrak{h} + \text{Ad } g(\mathfrak{b}) \\ &\equiv Z_l \text{ mod } [\mathfrak{g}_{l+1}] \end{aligned}$$

ce qui contredit cette situation puisqu'on est dans le cas où $Z_l \notin \mathfrak{h} + \text{Ad } g \mathfrak{b}$, $\forall g \in \mathcal{U}$.

Cas a-2) $l \in \mathcal{I}$ mais $l \notin \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i_1, \dots, i_d\}$.

On a vu que $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{c}) = \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i_1, \dots, i_d\}$, ($d' = d$). Par contre, on verra que $\mathcal{Y}(\mathcal{U}) = (Y_{j_1}, \dots, Y_{j_r}) \neq \mathcal{Y}^\circ(\mathcal{U}^\circ)$, provenant du fait que $\mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{b}) \subsetneq \mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{c})$. Ce cas étant caractérisé par : $\forall g \in \mathcal{U}$, $Z_l \in \mathfrak{h} + \text{Ad } g \mathfrak{b}$, soit donc pour tout $g \in \mathcal{U}$, un couple $(Y_g, X_g) \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{b}$ qui vérifie $Z_l = Y_g + \text{Ad } g X_g$. Il devient facile de vérifier que $Y_g \in \mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{c})$ sans qu'il appartienne à $\mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{b})$. En effet, notons les éléments U_g et V_g de \mathfrak{g}_{l+1} , et donc de \mathfrak{b} , donnés par $U_g := \text{Ad } g(Z_l) - Z_l$ et $V_g := \text{Ad } g^{-1}(U_g)$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} Y_g &= Z_l - \text{Ad } g(X_g) = Z_l + (U_g - \text{Ad } g(V_g)) - \text{Ad } g(X_g) \\ &= \text{Ad } g(Z_l) - \text{Ad } g(X_g + V_g) = \text{Ad } g(Z_l - X_g - V_g) \\ &\in (\text{Ad } g(\mathfrak{c}) \setminus \text{Ad } g(\mathfrak{b})) \cap \mathfrak{h} \quad \text{car} \quad Z_l - X_g - V_g \in \mathfrak{c} \setminus \mathfrak{b}. \end{aligned}$$

Comparons maintenant pour tout $1 \leq i \leq m$, et pour tout $g \in \mathcal{U}$, l'intersection de l'idéal $\mathfrak{h}_i := \text{vect} \langle Y_i, \dots, Y_m \rangle$ avec $\text{Ad } g(\mathfrak{b})$ et celle avec $\text{Ad } g(\mathfrak{c})$. Vu que : $\mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{c}) = (\mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{b})) \oplus \mathbb{R}Y_g$, alors on a la caractérisation de ce cas par

$$\forall g \in \mathcal{U}, \exists l_g \in \{1, \dots, m\}, \mathfrak{h}_i \cap \text{Ad } g(\mathfrak{c}) = \begin{cases} (\mathfrak{h}_i \cap \text{Ad } g(\mathfrak{b})) \oplus \mathbb{R}Y_g & \text{si } 1 \leq i \leq j_{l_g} \\ \mathfrak{h}_i \cap \text{Ad } g(\mathfrak{b}) & \text{si } j_{l_g} < i \leq m \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Avec un raisonnement utilisé au paravant, le lemme (2.1.5) permet de supposer que l_g est le même pour tous les $g \in \mathcal{U}$, noté alors l_0 , et la base de Malcev de \mathfrak{h} relative à $\mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{c})$ est donc $\mathcal{Y}^\circ(\mathcal{U}^\circ) = (Y_{j_1}, \dots, Y_{j_{l_0-1}}, Y_{j_{l_0+1}}, \dots, Y_{j_r})$, pour tout $g \in \mathcal{U}^\circ$.

Cas b) $Z_l \in \mathfrak{h}$.

Dans ce cas, c'est le vecteur $Y_{j_r} = Z_l$ qui disparaît dans $\mathcal{Y}^\circ(\mathcal{U}^\circ)$. En effet, tout d'abord, si $g \in \mathcal{U}$, alors Z_l est un vecteur de la base de Malcev de \mathfrak{h} relative à $\mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{b})$ car si non, il serait dans $\text{Ad } g(\mathfrak{b})$ contredisant ainsi le fait que $Z_l \notin \mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{l+1} = \mathfrak{b}$, (par définition, $l = \max \mathcal{I}^{\mathfrak{b}/\mathfrak{b}}$). Ensuite, $Z_l \in \text{Ad } g(\mathfrak{c})$ car $\text{Ad } g^{-1}(Z_l) \equiv Z_l \text{ mod } [\mathfrak{g}_{l+1}]$ et $\mathfrak{g}_l \subset \mathfrak{c}$, d'où $Z_l \in \mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{c})$ et donc $Z_l \notin \mathcal{Y}^\circ(\mathcal{U}^\circ)$. Enfin, si $Z_l = Y_{j_{l_0}}$ avec $l_0 \leq r-1$, alors on aurait $\mathfrak{h}_{j_{r-1}} \subset \mathfrak{h}_{j_{l_0}} = \mathfrak{g}_l \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_l$, et donc $\mathfrak{h}_{j_r} \subset \mathfrak{g}_{l+1} \subset \text{Ad } g(\mathfrak{b})$, $\forall g \in \mathcal{U}$. Ce qui est absurde puisque Y_{j_r} est un vecteur de la base de malcev $\mathcal{Y}(\mathcal{U})$ de \mathfrak{h} relative à $\mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{b})$. On a donc $l_0 = r$ et par suite $\mathcal{Y}^\circ(\mathcal{U}^\circ) = (Y_{j_1}, \dots, Y_{j_{r-1}})$.

Afin de procéder par récurrence, il est utile de faire intervenir l'application \mathcal{T} suivante :

$$\mathcal{T} : \mathcal{C}_c(G/B) \longrightarrow \mathcal{C}_c(G/C)$$

$$\varphi \longmapsto \mathcal{T}(\varphi) =: \varphi^\circ$$

où φ° est donnée par :

$$\varphi^\circ(x \cdot C) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x \exp(w_p Z_l) \cdot B) dw_p . \quad (2.2.15)$$

Il suffit de se rappeler que les mesures sur G/B et G/C sont définies respectivement à partir des difféomorphismes \mathcal{E}_b et \mathcal{E}_c suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \xrightarrow{\mathcal{E}_b} & G/B \\ w=(w_1, \dots, w_p) & \longmapsto & w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p} \cdot B \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{p-1} & \xrightarrow{\mathcal{E}_c} & G/C \\ w^\circ=(w_1, \dots, w_{p-1}) & \longmapsto & w_1 Z_{k_1} \dots w_{p-1} Z_{k_{p-1}} \cdot C \end{array}$$

et que $k_p = \max \mathcal{I}^{a/b} = l$, pour remarquer que l'application \mathcal{T} vérifie :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(G/B), \quad \int_{G/B} \varphi(g \cdot B) dg = \int_{G/C} \varphi^\circ(g \cdot C) dg, \quad \text{où } \varphi^\circ = \mathcal{T}(\varphi). \quad (2.2.16)$$

Enfin, pour la preuve du théorème, on aura besoin des lemmes ci-dessous, dans certains passages de la discussion des trois cas.

Lemme 2.2.11 Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $X \cdot \alpha Z_l \cdot B = \alpha Z_l \cdot X \cdot B$.

Démonstration.

Soit $x = \exp(X) \in G$, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$(-\alpha Z_l) \cdot X \cdot \alpha Z_l = \exp(-\alpha Z_l) \exp(X) \exp(\alpha Z_l) = \exp(\text{Ad}(\exp(-\alpha Z_l))X).$$

Or $\text{Ad}(\exp(-\alpha Z_l))(X) = e^{-\alpha \text{ad } Z_l} X = X + Y$ où $Y := -\alpha[Z_l, X] + \frac{\alpha^2}{2}[Z_l, [Z_l, X]] + \dots$, donc $(-X) \cdot (-\alpha Z_l) \cdot X \cdot \alpha Z_l = \exp(-X) \exp(X+Y) = \exp(\text{CBH}(-X, X+Y)) =: \exp(Z)$, avec $Z = Y + \frac{1}{2}[-X, Y] + \frac{1}{12}[[-X, Y], X + Y] - \frac{1}{12}[[-X, Y], -X] + \dots \in \mathfrak{g}_{l+1}$ car Y aussi est dans cet idéal $\mathfrak{g}_{l+1} \subset \mathfrak{b}$. Donc $Z \in \mathfrak{b}$, et alors $X \cdot \alpha Z_l \cdot B = \alpha Z_l \cdot X \cdot B$. ■

Lemme 2.2.12 Rappelons que dans le cas a-2), on a pour tout $g \in \mathcal{U}^\circ$, la base de Malcev de \mathfrak{h} relative à $\mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{c})$ est $\mathcal{Y}^\circ(\mathcal{U}^\circ) = (Y_{j_1}, \dots, Y_{j_{i_0-1}}, Y_{j_{i_0+1}}, \dots, Y_{j_r})$, il s'en suit que :

- (i) $Y_{j_{i_0}} \in \text{Ad } g(\mathfrak{c}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0+1}}$, mais $Y_{j_{i_0}} \notin \text{Ad } g(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0+1}}$.
- (ii) La caractérisation (2.2.14) devient :

$$\forall g \in \mathcal{U}, \quad \mathfrak{h} \cap (\text{Ad } g(\mathfrak{c}) + \mathfrak{h}_i) = \begin{cases} \mathfrak{h} \cap (\text{Ad } g(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_i) \oplus \mathbb{R} Y_{j_{i_0}} & \text{si } 1 \leq i \leq j_{i_0} \\ \mathfrak{h} \cap (\text{Ad } g(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_i) & \text{si } j_{i_0} < i \leq m \end{cases} \quad (2.2.14)'$$

(iii) Définissons l'application $Q : \mathcal{V} \ni t \mapsto Q(t) \in \mathbb{R}$ comme suit :

* Considérons pour $g := \phi(t) = t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \in \mathcal{U}$, un choix quelconque d'un couple $(R_g, S_g) \in (\mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{c})) \times \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}$, $Y_{j_{i_0}} = R_g + S_g \in (\mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{c})) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}$.

* Notons alors $\alpha_g =: Q(t)$ la coordonnée dans la direction de Z_l du vecteur $\text{Ad } g^{-1}(R_g) \in \mathfrak{c} = \mathbb{R}Z_l \oplus \mathfrak{b}$.

L'application Q est bien définie, à valeurs dans \mathbb{R}^* , et elle vérifie :

$$\forall t \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \exp\left(\frac{\alpha}{Q(t)} R_{\phi(t)}\right) \phi(t) \cdot B = \phi(t) \exp(\alpha Z_l) \cdot B \quad (2.2.17)$$

Démonstration.

Pour (i), c'est clair que $Y_{j_{i_0}} \in \mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{c}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}$, puisqu'il n'apparaît pas parmi les vecteurs de la base coexponentielle $\mathcal{Y}^\circ(\mathcal{U}^\circ)$, et donc $Y_{j_{i_0}} \in \text{Ad } g(\mathfrak{c}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}$.

Par contre, si on pouvait écrire $Y_{j_{i_0}} = \text{Ad } g(T'_g) + S'_g$, où $(T'_g, S'_g) \in \mathfrak{b} \times \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}$, alors on aurait : $\text{Ad } g(T'_g) = Y_{j_{i_0}} - S'_g \in \mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{b})$, et donc $Y_{j_{i_0}} \in \mathfrak{h} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}$. Ceci est absurde, en effet, $Y_{j_{i_0}}$ est un vecteur de $\mathcal{Y}(\mathcal{U})$.

Le point qui nécessite une preuve est le (iii).

Tout d'abord, écrivons $\text{Ad } g^{-1}(R_g)$ pour $g = \phi(t)$ avec $t \in \mathcal{V}$, sous la forme :

$$\text{Ad } g^{-1}(R_g) = \alpha_g Z_l + T_g \quad \text{avec} \quad T_g \in \mathfrak{b} \quad \text{et} \quad \alpha_g = Q(t).$$

Si $Q(t) = 0$, alors on aurait $Y_{j_{i_0}} = R_g + S_g = \text{Ad } g(T_g) + S_g \in \text{Ad } g(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}$, ce qui est faux d'après (i), et donc Q est à valeurs dans \mathbb{R}^* . Pour démontrer qu'elle est aussi bien définie indépendamment des choix de R_g et de S_g , il suffit de remarquer que la somme $\mathbb{R}Z_l \oplus (\text{Ad } g(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1})$ est une somme directe. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $Z_l \in \text{Ad } g(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}$, et ça serait alors le cas aussi de $Y_{j_{i_0}}$ car :

$$\begin{aligned} Y_{j_{i_0}} = R_g + S_g &= \alpha_g \text{Ad } g(Z_l) + \text{Ad } g(T_g) + S_g \\ &= \alpha_g (Z_l + U_g) + \text{Ad } g(T_g) + S_g \quad \text{avec} \quad U_g := \text{Ad } g(Z_l) - Z_l \in \mathfrak{g}_{l+1} \\ &= \alpha_g Z_l + \text{Ad } g(T_g + \alpha_g \text{Ad } g^{-1}(U_g)) + S_g \\ &\equiv \alpha_g Z_l \quad \text{mod} [\text{Ad } g(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}] \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Ainsi, $Q : t \mapsto \alpha_{\phi(t)}$ est bien définie par la projection de $Y_{j_{i_0}}$ sur la direction de Z_l , orthogonalement à l'espace vectoriel $\text{Ad } \phi(t)(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}$.

Enfin, pour justifier l'égalité (2.2.17), soient $t \in \mathcal{V}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $R_{\phi(t)} = Y_{j_{i_0}} - S_{\phi(t)} \in \mathfrak{h}_{j_{i_0}} \setminus \mathfrak{h}_{j_{i_0+1}}$ comme ci-dessus. On a :

$$\begin{aligned} \phi(t)^{-1} \exp\left(\frac{\alpha}{Q(t)} R_{\phi(t)}\right) \phi(t) &= \exp\left(\text{Ad } \phi(t)^{-1} \left(\frac{\alpha}{Q(t)} R_{\phi(t)}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\alpha}{Q(t)} \text{Ad } \phi(t)^{-1} (R_{\phi(t)})\right) \\ &= \exp\left(\frac{\alpha}{Q(t)} (Q(t)Z_l + T_{\phi(t)})\right) \\ &\equiv \exp(\alpha Z_l) \quad \text{mod } [B] \end{aligned}$$

ce qui donne $\exp\left(\frac{\alpha}{Q(t)} R_{\phi(t)}\right) \phi(t) \cdot B = \phi(t) \exp(\alpha Z_l) \cdot B$. ■

Corollaire 2.2.13 *De son expression donnée par (2.2.18) : pour tout $t \in \mathcal{V}$, $Q(t)$ n'est autre que la coordonnée du vecteur $Y_{j_{i_0}}$ selon la direction de Z_l , on peut déduire que la fonction Q est rationnelle.*

Démonstration. Notons $k := \dim(\text{Ad } g(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0+1}})$ (la même pour tout les $g \in \mathcal{U}$). Considérons la famille $\mathcal{F}_g = \mathcal{F}_{\phi(t)}$ pour $g = \phi(t)$, avec $t \in \mathcal{V}$, formée par les vecteurs $\{V^1(t), \dots, V^k(t), V^{k+1}(t) = Z'_{k+1} := Y_{j_{i_0}}\}$ qu'on définit de la façon suivante.

- Pour $r = m+1, \dots, k$, ($m = \dim \mathfrak{b} \leq k$), on pose $V^r(t) := Z'_r \in \mathfrak{h}_{j_{i_0+1}}$ qu'on choisit de sorte que $\text{Ad } \phi(t)(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0+1}} = \text{Ad } \phi(t)(\mathfrak{b}) \oplus \mathbb{R}Z'_{m+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Z'_k$, $\forall t \in \mathcal{V}$. Un tel choix est possible comme conséquence du **lemme 2.1.5**.
- Pour $1 \leq r \leq m$, on pose $V^r(t) := \text{Ad } \phi(t)(X_r)$. Ses coordonnées $(Q_1^r(t), \dots, Q_n^r(t))$ dans la base \mathcal{Z} sont polynômiales en t et permettent de l'écrire sous la forme

$$V^r(t) = \sum_{i=1}^n Q_i^r(t) Z_i \equiv \sum_{j=1}^{k+1} P_j^r(t) Z'_j \quad \text{mod } [\text{vect}\{\{Z_1, \dots, Z_n\} \setminus \{Z'_1, \dots, Z'_{k+1}\}\}] \quad (2.2.19)$$

- * les $Q_i^r, P_j^r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d], \forall 1 \leq i \leq n$, satisfont à $Z_i = Z'_j \implies Q_i^r = P_j^r$,
- * les Z'_j sont connus pour $j = m+1, \dots, k+1$ et seront précisés ci-dessous pour $j = 1, \dots, m$.

Notons alors que $(V^1(t), \dots, V^k(t), Z'_{k+1} = Y_{j_{i_0}})$ devient une base de l'espace vectoriel

$$F_g = F_{\phi(t)} := \mathbb{R}Y_{j_{i_0}} \oplus \text{Ad } g(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0+1}} = \text{vect} \langle V^1(t), \dots, V^k(t), V^{k+1}(t) := Y_{j_{i_0}} \rangle .$$

Puisque la matrice des vecteurs de la famille $\mathcal{F}_{\phi(t)}$ dans la base \mathcal{Z} , (formée par n lignes et $k+1$ colonnes), est de rang $k+1$, alors on choisit m vecteurs Z'_1, \dots, Z'_m , qui avec

Z'_{m+1}, \dots, Z'_k et $Z'_{k+1} = Y_{j_{i_0}}$, correspondent au choix de $k+1$ colonnes aboutissant à une sous-matrice carrée inversible d'ordre $k+1$. A une permutation près, cette dernière s'écrit comme :

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} P_1^1(t) & \dots & P_1^m(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_m^1(t) & \dots & P_m^m(t) & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ P_{m+1}^1(t) & \dots & P_{m+1}^m(t) & 1 & 0 \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ P_k^1(t) & \dots & P_k^m(t) & \vdots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ P_{k+1}^1(t) & \dots & P_{k+1}^m(t) & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(k+1, \mathbb{R}).$$

Imposons le choix de $Z'_1 := Z_l$, ceci est possible pour les deux raisons suivantes :

- * $Z_l \notin \{Z'_{m+1}, \dots, Z'_k, Z'_{k+1}\}$ car tous ces vecteurs, -contrairement à Z_l , sont dans \mathfrak{h} .
- * on ne peut pas avoir $P_1^1(t) = \dots = P_1^m(t) = 0$, qui contredit notre hypothèse de ce cas : $Z_l \in \text{vect} \langle V^1(t), \dots, V^k(t), Y_{j_{i_0}} \rangle = F_{\phi(t)} = \mathbb{R}Z_l \oplus \text{Ad } g(\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}$.

Enfin, notons $\mathbf{B}(t)$ l'inverse de la transposée de $\mathbf{A}(t)$ qui s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{B}(t) = (\text{tr } \mathbf{A}(t))^{-1} =: \begin{pmatrix} R_1^1(t) & \dots & R_1^{k+1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k+1}^1(t) & \dots & R_{k+1}^{k+1}(t) \end{pmatrix} \in GL(k+1, \mathbb{R}).$$

Un simple exercice d'algèbre linéaire permet de démontrer que Q coïncide avec $\frac{1}{R_1^{k+1}}$.

Q est alors rationnelle puisque c'est le cas de toutes les fonctions $R_i^j \in \mathbb{R}(X_1, \dots, X_d)$.

Exercice : $Q = \frac{1}{R_1^{k+1}}$?

Complétons $\mathcal{F}_{\phi(t)}$ par des vecteurs Z'_{k+2}, \dots, Z'_n de telle sorte que

$$V(t) := \{V^1(t), \dots, V^k(t), V^{k+1}(t) = Z'_{k+1}, \dots, V^n(t) := Z'_n\}$$

soit une base de \mathfrak{g} pour tous les $t \in \mathcal{V}$.

La matrice de cette nouvelle base dans l'ancienne base $\mathcal{Z}' := (Z'_1, \dots, Z'_n)$ est :

$$\mathbf{P}_{\mathcal{Z}' \rightarrow V(t)} = \begin{pmatrix} \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{A}(t) & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots \\ \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \vdots & Q_i^r & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & 0 & 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Son inverse est alors :

$$\mathbf{P}_{V(t) \rightarrow \mathcal{Z}'} = \begin{pmatrix} \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & (\mathbf{A}(t))^{-1} & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots \\ \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \vdots & * & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & 0 & 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Mat}(\mathcal{Z}', V(t)).$$

En regardant de près cette matrice, on constate que sa première colonne, qui correspond aux coordonnées de $Z'_1 = Z_l$ dans la base $V(t)$, est donnée par :

$$\begin{pmatrix} R_1^1(t) \\ \vdots \\ R_1^{k+1}(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Z_l &= R_1^1(t)V^1(t) + \dots + R_1^k(t)V^k(t) + R_1^{k+1}(t)Y_{j_{i_0}} \\ &\equiv R_1^{k+1}(t)Y_{j_{i_0}} \quad \text{mod} [\text{Ad } \phi(t) (\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}] \\ &\equiv \frac{1}{Q(t)}Y_{j_{i_0}} \quad \text{mod} [\text{Ad } \phi(t) (\mathfrak{b}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}] \quad \text{d'après (2.2.18)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } Q = \frac{1}{R_1^{k+1}}.$$

■

Remarque 2.2.14 Toujours dans le cadre du **lemme 2.2.12**, on peut faire une preuve analogue à celle qui montre que Q est rationnelle en $t \in \mathcal{V}$, utilisant de simples résultats d'algèbre linéaire, et permettant de définir des applications qui sont aussi rationnelles $R, (\text{respectivement } S) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto R_{\phi(t)}, (\text{respectivement } t \mapsto S_{\phi(t)})$, et qui présentent des solutions du système d'équations suivant :

$$L(t) : \begin{cases} R_{\phi(t)} + S_{\phi(t)} = Y_{j_{i_0}} \\ R_{\phi(t)} \in \mathfrak{h} \cap \text{Ad } \phi(t) (\mathfrak{c}) \\ S_{\phi(t)} \in \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1} \end{cases}$$

Ce système admet toujours des solutions vu que $Y_{j_{i_0}} \in \mathfrak{h} \cap \text{Ad } \phi(t) (\mathfrak{c}) + \mathfrak{h}_{j_{i_0}+1}, \forall t \in \mathcal{V}$, par contre, il faut se restreindre à un ouvert de Zariski \mathcal{V}' non vide de \mathbb{R}^d , encore plus petit que \mathcal{V} , où une famille $\{L'(t), t \in \mathcal{V}'\}$ de sous-matrices carrées extraites des matrices $\{L(t), t \in \mathcal{V}'\}$ du système considéré, soient inversibles et de même rang r que celui de presque tous les $L(t), t \in \mathcal{V}$. Quitte à supposer l'ouvert de Zariski \mathcal{U} de G encore plus petit, (en l'interceptant avec l'ouvert $H \cdot \phi(\mathcal{V}') \cdot B$ de G), on a une construction rationnelle des applications R et S .

Démonstration du théorème 2.2.10. A partir de la fonction rationnelle $F^\circ = F_{(H,C)} \in \mathbb{R}(X_1, \dots, X_{d'})$ qui décrit la mesure $d\gamma^\circ$ sur l'ensemble des double-classes $H \backslash G / C$ par : $\forall \psi^\circ \in \mathcal{C}_c(H \backslash G / C)$,

$$\begin{aligned} \gamma^\circ(\psi^\circ) &= \int_{H \backslash G / C} \psi^\circ(\tilde{g}) d\gamma^\circ(\tilde{g}) \\ &= \int_{\mathcal{V}^\circ} \psi^\circ(H \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_{d'} Z_{i_{d'}} \cdot C) |F^\circ(t_1, \dots, t_{d'})| dt, \end{aligned} \quad (2.2.11)^\circ$$

construisons $F = F_{(H,B)} \in \mathbb{R}(X_1, \dots, X_d)$ qui satisfait à l'énoncé du théorème. Il faut prouver que la fonction rationnelle F , proposée dans chacun des cas à discuter, vérifie :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(G/B), \int_{G/B} \varphi(\dot{g}) d\dot{g} = \int_{\mathcal{V}} \left(\int_{\mathbb{R}^r} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B) ds \right) |F(t)| dt.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c(G/B)$. Posons $\varphi^\circ := \mathcal{T}(\varphi) \in \mathcal{C}_c(G/C)$, qu'on a définie dans (2.2.15) par :

$$\varphi^\circ(\dot{x}) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x \exp(\alpha Z_l) \cdot B) d\alpha, \quad \forall \dot{x} = x \cdot C \in G/C.$$

Puisque, d'après (2.2.16), on a

$$\int_{G/B} \varphi(\dot{g}) d\dot{g} = \int_{G/C} \varphi^\circ(\dot{g}) d\dot{g},$$

alors, le problème revient à vérifier que

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\int_{\mathbb{R}^r} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B) ds \right) |F(t)| dt = \int_{H \backslash G/C} \left(\int_{H/H \cap g C g^{-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(hg \exp(\alpha Z_l) \cdot B) d\alpha \right) d\mu_{\mathfrak{t}_g^\circ}(\dot{h}) \right) d\gamma^\circ(\tilde{g}). \quad (2.2.20)$$

Cas a-1) $l \in \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i_1, \dots, i_d = l\}$.

Définissons $F \in \mathbb{R}(X_1, \dots, X_d)$ par : $F(t) := F^\circ(t_1, \dots, t_{d-1})$, $\forall t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathcal{V}$.
(Remarquons qu'on a déjà justifié dans (2.1.9) que $t^\circ := (t_1, \dots, t_{d-1}) \in \mathcal{V}^\circ, \forall t \in \mathcal{V}$).
Grâce à l'étude précédente, et d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{H \backslash G/C} \left(\int_{H/H \cap g C g^{-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(hg \exp(\alpha Z_{i_d}) \cdot B) d\alpha \right) d\mu_{\mathfrak{t}_g^\circ}(\dot{h}) \right) d\gamma^\circ(\tilde{g}) = \\ & \int_{\mathcal{V}^\circ} \left(\int_{\mathbb{R}^r} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_{d-1} Z_{i_{d-1}} \exp(t_d Z_{i_d}) \cdot B) dt_d \right) ds \right) |F^\circ(t^\circ)| dt^\circ = \\ & \int_{\mathcal{V}^\circ \times \mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^r} \left(\varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_{d-1} Z_{i_{d-1}} \cdot t_d Z_{i_d} \cdot B) \right) ds \right) |F(t)| dt^\circ dt_d = \\ & \int_{\mathcal{V}} \left(\int_{\mathbb{R}^r} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B) ds \right) |F(t)| dt. \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'égalité (2.2.20).

Cas a-2) $l \in \mathcal{I}$ mais $l \notin \mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i_1, \dots, i_d\}$.

On pose dans ce cas, F le produit des deux fonctions rationnelles F° et Q .

Tout d'abord, notons pour tout $s = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$, $s^\circ := (s_1, \dots, s_{i_0-1}, s_{i_0+1}, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^{r-1}$.
Ensuite, rappelons que si $g = \phi(t)$ où $t \in \mathcal{V}$, alors $Y_{j_{i_0}}$ s'écrit sous la forme

$$Y_{j_{i_0}} = R_{\phi(t)} + S_{\phi(t)} \in (\mathfrak{h} \cap \text{Ad } \phi(t)(\mathfrak{c})) + \mathfrak{h}_{j_{i_0+1}},$$

et que d'après le lemme 2.2.12, on a l'égalité (2.2.17) vérifiée par Q , qui sert à justifier le second passage dans le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \int_{H/H \cap g C g^{-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(hg \exp(\alpha Z_l) \cdot B) d\alpha \right) d\mu_{\mathfrak{t}_g^\circ}(\dot{h}) = \\ & \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi((s_1 Y_{j_1} \dots s_{i_0-1} Y_{j_{i_0-1}} \cdot s_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s_r Y_{j_r}) \phi(t) \exp(\alpha Z_l) \cdot B) d\alpha \right) ds^\circ = \\ & \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi((s_1 Y_{j_1} \dots s_{i_0-1} Y_{j_{i_0-1}} \cdot s_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s_r Y_{j_r}) \exp\left(\frac{\alpha}{Q(t)} R_{\phi(t)}\right) \phi(t) \cdot B) d\alpha \right) ds^\circ \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $s_{i_0} := \frac{\alpha}{Q(t)}$, le dernier terme de l'égalité devient :

$$\int_{\mathbb{R}^{r-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi((s_1 Y_{j_1} \dots s_{i_0-1} Y_{j_{i_0-1}} \cdot s_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s_r Y_{j_r} \cdot s_{i_0} R_{\phi(t)}) \phi(t) \cdot B) |Q(t)| ds_{i_0} \right) ds^\circ =$$

$$|Q(t)| \int_{\mathbb{R}^r} \varphi((s_1 Y_{j_1} \dots s_{i_0-1} Y_{j_{i_0-1}} \cdot s_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s_r Y_{j_r} \cdot s_{i_0} R_{\phi(t)}) \phi(t) \cdot B) ds.$$

Vu qu'en remplaçant $Y_{j_{i_0}}$ par $Y_{j_{i_0}} - S_g = R_g$, on obtient toujours une base de Malcev $(R_{\phi(t)}, Y_{j_{i_0+1}}, \dots, Y_{j_r})$ de $\mathfrak{h}_{j_{i_0}}$ relative à $\mathfrak{h}_{j_{i_0}} \cap \text{Ad } g(\mathfrak{b})$ (car $S_g \in \mathfrak{h}_{j_{i_0+1}}$), et compte tenu de la **proposition 2.2.1**, on peut identifier l'action de $H_{j_{i_0}}$ sur $H_{j_{i_0}}/H_{j_{i_0}} \cap gBg^{-1}$ avec une fonction polynômiale $P : \mathbb{R}^{r-j_{i_0}+1} \times \mathbb{R}^{r-i_0+1} \rightarrow \mathbb{R}^{r-i_0+1}$, et en tirer que

$$s_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s_r Y_{j_r} \cdot s_{i_0} R_{\phi(t)} = s'_{i_0} R_{\phi(t)} \cdot s'_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s'_r Y_{j_r} \cdot T_{\phi(t)}, (s'_{i_0}, \dots, s'_r) = P(y_0; s_0)$$

$$\text{où } \begin{cases} y_0 := (y_{j_{i_0}} = 0, y_{j_{i_0+1}} = 0, \dots, 0, y_{j_{i_0+1}} = s_{i_0+1}, 0, \dots, 0, y_{j_r} = s_r, 0, \dots, y_r = 0), \\ s_0 := (s_{i_0}, 0, \dots, 0), \\ T_{\phi(t)} \in \mathfrak{h}_{j_{i_0}} \cap \text{Ad } \phi(t) \mathfrak{b}, (\text{ donc } \exp(T_{\phi(t)}) \phi(t) \cdot B = \phi(t) \cdot B). \end{cases}$$

De plus, on connaît la forme explicite de $s'_o := (s'_{i_0}, \dots, s'_r)$ donnée par (2.2.3), qui suite à un simple calcul devient :

$$s'_0 = y_0 \cdot s_0 \iff \begin{cases} s'_{i_0} = s_{i_0} + 0 \\ s'_{i_0+1} = 0 + y_{j_{i_0+1}} + P_2(0, \dots, y_{j_{i_0+1}-1} = 0; s_{i_0}) \\ \quad = s_{i_0+1} + Q_2(s_{i_0}) \\ \vdots \\ s'_r = 0 + y_{j_r} + P_r(0, \dots, 0, y_{j_{i_0+1}} = s_{i_0+1}, \dots, y_{j_r-1} = 0; s_{i_0}, 0, \dots, 0) \\ \quad = s_r + Q_r(s_{i_0}, s_{i_0+1}, \dots, s_{r-1}) \end{cases}$$

Ainsi, un dernier changement de variables $s' := Q(s)$, où Q est le difféomorphisme

$$\mathbb{R}^r \ni s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{l_0-1} \\ | \\ s_{l_0+1} \\ \vdots \\ s_{r-1} \\ s_r \\ s_{l_0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{l_0-1} \\ s_{l_0} \\ s_{l_0+1} + Q_2(s_{l_0}) \\ \vdots \\ s_{r-1} + Q_{r-1}(s_{l_0}, s_{l_0+1}, \dots, s_{r-2}) \\ s_r + Q_r(s_{l_0}, s_{l_0+1}, \dots, s_{r-1}) \\ | \\ s_{l_0} \end{pmatrix} =: s' \in \mathbb{R}^r, \quad (2.2.21)$$

dont le jacobien est 1, permet de finir le calcul précédent :

$$\begin{aligned} & \int_{H/H \cap g C g^{-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(hg \exp(\alpha Z_l) \cdot B) d\alpha \right) d_{\mu_g^\circ}(\dot{h}) = \\ & |Q(t)| \int_{\mathbb{R}^r} \varphi((s_1 Y_{j_1} \dots s_{l_0-1} Y_{j_{l_0-1}} \cdot s_{l_0+1} Y_{j_{l_0+1}} \dots s_r Y_{j_r} \cdot s_{l_0} R_{\phi(t)}) \phi(t) \cdot B) ds = \\ & |Q(t)| \int_{\mathbb{R}^r} \varphi((s_1 Y_{j_1} \dots s_{l_0-1} Y_{j_{l_0-1}} \cdot s_{l_0} R_{\phi(t)} \cdot s'_{l_0+1} Y_{j_{l_0+1}} \dots s'_r Y_{j_r}) \exp(T_{\phi(t)}) \phi(t) \cdot B) ds = \\ & |Q(t)| \int_{\mathbb{R}^r} \varphi((s'_1 Y_{j_1} \dots s'_{l_0-1} Y_{j_{l_0-1}} \cdot s'_{l_0} R_{\phi(t)} \cdot s'_{l_0+1} Y_{j_{l_0+1}} \dots s'_r Y_{j_r}) \phi(t) \cdot B) ds' = \\ & |Q(t)| \int_{H/H \cap g B g^{-1}} \varphi((h)g \cdot B) d_{\mu_g}(\dot{h}), \quad \text{car } (Y_{j_1}, \dots, Y_{j_{l_0-1}}, R_{\phi(t)}, Y_{j_{l_0+1}}, \dots, Y_{j_r}) \\ & \text{est une base de Malcev de } \mathfrak{h} \text{ relative à } \mathfrak{h} \cap Ad g \mathfrak{b}. \end{aligned}$$

Enfin, on en déduit l'égalité (2.2.20) cherchée, puisque

$$\begin{aligned} & \int_{H \backslash G / C} \left(\int_{H/H \cap g C g^{-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(hg \exp(\alpha Z_l) \cdot B) d\alpha \right) d_{\mu_g^\circ}(\dot{h}) \right) d\gamma^\circ(\tilde{g}) = \\ & \int_{\mathcal{V}^\circ} \left(|Q(t)| \int_{H/H \cap g B g^{-1}} \varphi(h(t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d}) \cdot B) d_{\mu_g}(\dot{h}) \right) |F^\circ(t)| dt = \\ & \int_{\mathcal{V}^\circ} \left(\int_{\mathbb{R}^r} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B) ds \right) |Q(t)| |F^\circ(t)| dt = \\ & \int_{\mathcal{V}} \left(\int_{\mathbb{R}^r} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B) ds \right) |F(t)| dt. \end{aligned}$$

Cas b) $Z_l \in \mathfrak{h}$.

Dans ce cas, il suffit d'utiliser le **lemme 2.2.11** dans le second passage du calcul ci-dessous, avant de remarquer que $Y_{j_r} = Z_l$, pour conclure que la fonction rationnelle

$F : \mathcal{V} \ni t \longmapsto F(t) := F^\circ(t)$, répond au problème. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{H \backslash G / C} \left(\int_{H / H \cap g C g^{-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(hg \exp(\alpha Z_l) \cdot B) d\alpha \right) d\mu_{\mathfrak{g}^\circ}(\dot{h}) \right) d\gamma^\circ(\tilde{g}) = \\
& \int_{\mathcal{V}^\circ} \left(\int_{\mathbb{R}^{r-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_{r-1} Y_{j_{r-1}} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot \alpha Z_l \cdot B) d\alpha \right) ds^\circ \right) |F^\circ(t^\circ)| dt^\circ = \\
& \int_{\mathcal{V}} \left(\int_{\mathbb{R}^{r-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_{r-1} Y_{j_{r-1}} \cdot \alpha Z_l \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B) d\alpha \right) ds^\circ \right) |F^\circ(t)| dt = \\
& \int_{\mathcal{V}} \left(\int_{\mathbb{R}^{r-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_{r-1} Y_{j_{r-1}} \cdot s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B) ds_r \right) ds^\circ \right) |F(t)| dt = \\
& \int_{\mathcal{V}} \left(\int_{\mathbb{R}^r} \varphi(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B) ds \right) |F(t)| dt.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.15 *Il s'agit d'un corollaire de la preuve et non pas de l'énoncé même du théorème : l'ouvert $\mathcal{D}_{\mathfrak{B}}^{-1}(\mathcal{U}/B) = \{w \in \mathbb{R}^p, \exists g \in \mathcal{U}, g \cdot B = w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p} \cdot B\}$, est homéomorphe à $\mathbb{R}^r \times \mathcal{V}$.*

Démonstration.

Notons \mathcal{O} cet ouvert de Zariski de \mathbb{R}^p et définissons l'application $\Upsilon : \mathbb{R}^r \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{O}$ par $\Upsilon(s, t) := \mathcal{D}_{\mathfrak{B}}^{-1}(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B)$, $\forall s = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$, $\forall t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathcal{V}$. Pour montrer que cette application est un homéomorphisme, (toujours par récurrence sur codimension de \mathfrak{b}), on suppose qu'au niveau $H \backslash G / C$, l'application Υ° est un homéomorphisme. Faisons intervenir aussi les difféomorphismes

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}_C : \mathbb{R}^{p-1} & \longrightarrow & G/C \\
w^\circ & \longmapsto & w_1 Z_{k_1} \dots w_{p-1} Z_{k_{p-1}} \cdot C
\end{array}
, \quad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}_B : \mathbb{R} & \longrightarrow & C/B \\
\alpha & \longmapsto & \exp \alpha Z_l \cdot B
\end{array}$$

la projection $p : C \ni g \longmapsto c \cdot B \in C/B$, et l'application continue suivante :

$$\begin{array}{ccc}
m : \mathbb{R}^{p-1} & \longrightarrow & G \\
w^\circ = (w_1, \dots, w_{p-1}) & \longmapsto & (-w_{p-1}) Z_{k_{p-1}} \dots (-w_1) Z_{k_1}
\end{array}$$

- Dans le **Cas a-1**) où $i_d = l = k_p$, Υ° est l'homéomorphisme

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^r \times \mathcal{V}^\circ & \longrightarrow & \mathcal{O}^\circ \\
(s, t^\circ) & \longmapsto & \mathcal{D}_C^{-1}(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_{d-1} Z_{i_{d-1}} \cdot C)
\end{array}$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}^r$ et $t \in \mathcal{V}$, en notant $t^\circ = (t_1, \dots, t_{d-1}) \in \mathcal{V}^\circ$, on peut vérifier que

$$\Upsilon(s, t) = (\Upsilon^\circ(s, t^\circ) ; \alpha(s, t^\circ) + t_d),$$

où $\alpha(s, t^\circ)$ désigne $C_B^{-1} \circ p(m \circ \Upsilon^\circ(s, t^\circ)(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_{d-1} Z_{i_{d-1}}))$.
 En effet, posons $w^\circ = (w_1, \dots, w_{p-1}) := \Upsilon^\circ(s, t^\circ)$, alors il existe $c = \exp(\alpha Z_l) b \in C$,
 (avec $\alpha \in \mathbb{R}, b \in B$), tel que $s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_{d-1} Z_{i_{d-1}} = (w_1 Z_{k_1} \dots w_{p-1} Z_{k_{p-1}}) c$.
 Or, $m(\Upsilon^\circ(s, t^\circ)) = (-w_{p-1}) Z_{k_{p-1}} \dots (-w_1) Z_{k_1}$, et donc en le multipliant à gauche
 par les deux membres de légalité précédente, on obtient

$$m \circ \Upsilon^\circ(s, t^\circ)(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_{d-1} Z_{i_{d-1}}) = c,$$

ou encore,

$$C_B^{-1} \circ p(m \circ \Upsilon^\circ(s, t^\circ)(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_{d-1} Z_{i_{d-1}})) = C_B^{-1}(\exp(\alpha Z_l) b \cdot B) = \alpha.$$

Mais aussi,

$$\begin{aligned} s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_{d-1} Z_{i_{d-1}} \cdot t_d Z_{i_d} &= (w_1 Z_{k_1} \dots w_{p-1} Z_{k_{p-1}}) \exp(\alpha Z_l) b \exp(t_d Z_l) \\ &= (w_1 Z_{k_1} \dots w_{p-1} Z_{k_{p-1}} \cdot (\alpha + t_d) Z_{k_p}) \exp(-t_d Z_l) b \exp(t_d Z_l) \end{aligned}$$

et donc

$$s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_{d-1} Z_{i_{d-1}} \cdot t_d Z_{i_d} \cdot B = w_1 Z_{k_1} \dots w_{p-1} Z_{k_{p-1}} \cdot (\alpha + t_d) Z_{k_p} \cdot B$$

par suite,

$$D_B^{-1}(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_{d-1} Z_{i_{d-1}} \cdot t_d Z_{i_d}) = (w_1, \dots, w_{p-1}, \alpha + t_d)$$

ce qui justifie l'expression donnée pour Υ , et fait d'elle une application continue.
 Enfin, pour montrer la continuité de Υ^{-1} à partir de celle de

$$\begin{aligned} (\Upsilon_1^{\circ-1}, \Upsilon_2^{\circ-1}) := \Upsilon^{\circ-1} : \mathcal{O}^\circ &\longrightarrow \mathbb{R}^r \times \mathcal{V}^\circ \\ w^\circ &\longmapsto (s = \Upsilon_1^{\circ-1}(w^\circ), t^\circ = \Upsilon_2^{\circ-1}(w^\circ)) \end{aligned}$$

la même manipulation que précédemment permet de prouver que si on décompose
 Υ^{-1} en $(\Upsilon_1^{-1}, \Upsilon_2^{-1})$, alors pour tout $w = (w^\circ, w_p) \in \mathcal{O}$, on a

$$\begin{cases} \Upsilon_1^{-1}(w) = \Upsilon_1^{\circ-1}(w^\circ) \\ \Upsilon_2^{-1}(w) = (t^\circ = \Upsilon_2^{\circ-1}(w^\circ), t_d = w_p - \alpha \circ \Upsilon^{\circ-1}(w^\circ)) \end{cases}$$

D'où Υ^{-1} est aussi continue, et alors Υ est un homéomorphisme.

– Si on est dans le **Cas a-2**), alors l'homéomorphisme Υ° devient l'application qui à
 tout $s^\circ = (s_1, \dots, s_{i_0-1}, s_{i_0+1}, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^{r-1}$, et $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathcal{V}^\circ$, associe

$$\Upsilon^\circ(s^\circ, t) = D_C^{-1}(s_1 Y_{j_1} \dots s_{i_0-1} Y_{j_{i_0-1}} \cdot s_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot C) \in \mathcal{O}^\circ.$$

Tout d'abord, on considère pour t fixé dans \mathcal{V} , le difféomorphisme de \mathbb{R}^r , qu'on note
 $\mathbf{R}(\cdot, t) := \mathcal{E}_{t(t)}^{-1} \circ \mathcal{E}'_{t(t)}$: la composée de deux difféomorphismes explicités ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathfrak{t}(t)} : \mathbb{R}^r &\longrightarrow H/H \cap \phi(t)B\phi(t)^{-1} \\ s &\longmapsto s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot H \cap \phi(t)B\phi(t)^{-1} \end{aligned}$$

et $\mathcal{E}'_{\mathfrak{t}(t)}$ défini pareillement, mais en considérant une autre base coexponentielle de \mathfrak{h} relative à $\mathfrak{h} \cap \text{ad}\phi(t)\mathfrak{b}$, qui est donnée par $(Y_{j_1}, \dots, Y_{j_{i_0-1}}, R_{\phi(t)}, Y_{j_{i_0+1}}, \dots, Y_{j_r})$. Grâce au fait que le vecteur $R_{\phi(t)}$ est rationnel en t comme on l'a signalé dans la **remarque 2.2.14**, l'application $\mathbf{R} : (s, t) \longmapsto \mathcal{E}_{\mathfrak{t}(t)}^{-1} \circ \mathcal{E}'_{\mathfrak{t}(t)}(s)$ est continue de $\mathbb{R}^r \times \mathcal{V}$ dans \mathbb{R}^r , et c'est aussi le cas de $\mathbf{R}' : (s, t) \longmapsto \mathcal{E}'_{\mathfrak{t}(t)}^{-1} \circ \mathcal{E}_{\mathfrak{t}(t)}(s)$.

Soient $s \in \mathbb{R}^r$ et $t \in \mathcal{V}$. Posons $s' = (s'_1, \dots, s'_r) := \mathbf{R}'(s, t)$ et notons, -comme dans l'expression (2.2.21)-, $s'' = (s'_1, \dots, s'_{i_0-1}, s''_{i_0+1}, \dots, s''_r, s'_{i_0}) := \mathbf{Q}^{-1}(s')$, (on a défini le difféomorphisme \mathbf{Q} de \mathbb{R}^r dans le cas a-2) de la preuve précédente). Ensuite, utilisons l'hypothèse de récurrence pour définir $w^\circ = \Upsilon^\circ(s''^\circ, t) \in \mathbb{R}^{p-1}$ où $s''^\circ := (s'_1, \dots, s'_{i_0-1}, s''_{i_0+1}, \dots, s''_r) \in \mathbb{R}^{r-1}$. Il s'en suit qu'il existe $c \in B$, qui s'écrit sous la forme $c = \exp(\alpha Z_l)b$, (avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $b \in B$), tel que

$$w_1 Z_{k_1} \dots w_{p-1} Z_{k_{p-1}} = (s'_1 Y_{j_1} \dots s'_{i_0-1} Y_{j_{i_0-1}} \cdot s''_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s''_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d}) c$$

c'est à dire

$$w_1 Z_{k_1} \dots w_{p-1} Z_{k_{p-1}} = (s'_1 Y_{j_1} \dots s'_{i_0-1} Y_{j_{i_0-1}} \cdot s''_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s''_r Y_{j_r}) \phi(t) \exp(\alpha Z_l) b. \quad (2.2.22)$$

Rappelons que d'après la formule (2.2.17) prouvée dans le **lemme 2.2.12**, on a

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \exp\left(\frac{\beta}{Q(t)} R_{\phi(t)}\right) \phi(t) \cdot B = \phi(t) \exp(\beta Z_l) \cdot B$$

qui, -en l'appliquant pour $\beta := s'_{i_0} Q(t)$ -, permet de tirer de (2.2.22) que si on pose $w = (w^\circ, w_p) \in \mathbb{R}^p$, pour $w_p \in \mathbb{R}$, alors on obtient que $\mathcal{D}_B(w) = w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p} \cdot B =$

$$(s'_1 Y_{j_1} \dots s'_{i_0-1} Y_{j_{i_0-1}} \cdot s''_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s''_r Y_{j_r}) \exp(s'_{i_0} R_{\phi(t)}) \phi(t) \exp((\alpha - s'_{i_0} Q(t) + w_p) Z_l) \cdot B$$

$$= (s'_1 Y_{j_1} \dots s'_{i_0-1} Y_{j_{i_0-1}} \cdot s'_{i_0} R_{\phi(t)} \cdot s'_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s'_r Y_{j_r}) \phi(t) \exp((\alpha - s'_{i_0} Q(t) + w_p) Z_l) \cdot B$$

car $\mathbf{Q}(s'_1, \dots, s'_{i_0-1}, s''_{i_0+1}, \dots, s''_r, s'_{i_0}) = s'$, (voir ces calculs dans la preuve précédente).

Et puisque $\mathbf{R}(s', t) = s$, alors il existe $y(s, t) \in H \cap \phi(t)B\phi(t)^{-1}$ tel que pour la valeur $w_p := s'_{i_0} Q(t) - \alpha$, on obtient de l'égalité précédente ce qui suit

$$\begin{aligned} w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p} \cdot B &= (s_1 Y_{j_1} \dots s_{i_0-1} Y_{j_{i_0-1}} \cdot s_{i_0} Y_{j_{i_0}} \cdot s_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s_r Y_{j_r}) y(s, t) \phi(t) \cdot B \\ &= (s_1 Y_{j_1} \dots s_{i_0-1} Y_{j_{i_0-1}} \cdot s_{i_0} Y_{j_{i_0}} \cdot s_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s_r Y_{j_r}) \phi(t) \cdot B \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\mathcal{D}_B^{-1}(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B) = (w^\circ, w_p),$$

ou encore

$$\Upsilon(s, t) = (\Upsilon^\circ(s''^\circ, t), s'_{i_0} Q(t) - \alpha).$$

Mais l'application $\mathbf{Q}^{-1} \circ \mathbf{R}' : (s, t) \mapsto s'' = (s''^\circ; s'_{i_0})$ est continue sur $\mathbb{R}^r \times \mathcal{V}$, ainsi que $\alpha : (s^\circ, t) \mapsto \alpha = \alpha(s^\circ, t)$, sauf que son expression est légèrement modifiée par rapport au cas précédent puisqu'elle devient

$$\alpha(s^\circ, t) = \mathcal{C}_B^{-1} \circ p(m \circ \Upsilon^\circ(s''^\circ, t)(s'_1 Y_{j_1} \dots s'_{i_0-1} Y_{j_{i_0-1}} \cdot s''_{i_0+1} Y_{j_{i_0+1}} \dots s''_r Y_{j_r} \dots t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d})).$$

L'important, c'est que de nouveau, la continuité de Υ° implique celle de Υ .

Maintenant, pour tirer la continuité de $\Upsilon^{-1} = (\Upsilon_1^{-1}, \Upsilon_2^{-1})$ à partir de celle de $\Upsilon^{\circ-1}$, reprenons les calculs ci-dessus dans le sens inverse, on trouve alors que pour tout $w = (w_1, \dots, w_p) \in \mathcal{O}$, $\Upsilon^{-1}(w)$ s'obtient en posant $w^\circ := (w_1, \dots, w_{p-1}) \in \mathcal{O}^\circ$, $s^\circ = (s_1, \dots, s_{i_0-1}, s_{i_0+1}, \dots, s_r) := \Upsilon_1^{\circ-1}(w^\circ) \in \mathbb{R}^{r-1}$, $t^\circ := \Upsilon_2^{\circ-1}(w^\circ) \in \mathcal{V}^\circ = \mathcal{V}$, et $s := (s^\circ, s_{i_0} := \frac{w_p + \alpha(s^\circ, t)}{Q(t)}) \in \mathbb{R}^r$, alors on obtient que les composantes de Υ^{-1}

$$\begin{cases} \Upsilon_1^{-1}(w) = \mathbf{R}(\mathbf{Q}(s), \Upsilon_2^{\circ-1}(w^\circ)) \\ \Upsilon_2^{-1}(w) = \Upsilon_2^{\circ-1}(w^\circ) \end{cases}$$

sont continues.

- Enfin, pour le **Cas b)**, des calculs beaucoup plus simples permettent d'aboutir à

$$\Upsilon(s, t) = (w^\circ = \Upsilon^\circ(s^\circ, t); w_p = s_r + \alpha(s^\circ, t)), \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}^r \times \mathcal{V},$$

où $(s, t) \mapsto s^\circ$ et $(s, t) \mapsto \alpha(s^\circ, t)$ sont continues sur $\mathbb{R}^r \times \mathcal{V}$ et données par

$$s^\circ = (s_1, \dots, s_{r-1}) \quad \text{et} \quad \alpha(s^\circ, t) = -\mathcal{C}_B(m \circ \Upsilon^\circ(s^\circ, t)(s_1 Y_{j_1} \dots s_{r-1} Y_{j_{r-1}} \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d})).$$

On trouve aussi que

$$\Upsilon^{-1}(w) = \left(s = (s^\circ := \Upsilon_1^{\circ-1}(w^\circ), s_r = w_p - \alpha(s^\circ, t)); t = \Upsilon_2^{\circ-1}(w^\circ) \right), \quad \forall w \in \mathcal{O}$$

où $w^\circ := (w_1, \dots, w_{p-1}) \in \mathcal{O}^\circ$, $s^\circ := (s_1, \dots, s_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}$ pour tout $(w, s) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^r$.
On en déduit que Υ est un homéomorphisme. ■

Remarques 2.2.16

1. Comme conséquence de ce corollaire, on justifie l'hypothèse (2.2.8) qu'on a admise en définissant $\tilde{\varphi}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(G/B)$.

2. On obtient une désintégration de $L^2(G/B)$ en $\bigcup_{\tilde{g} \in H \backslash G/B} L^2(H/H \cap gBg^{-1}, \chi_{g,i})$.

2.2.4 Exemple.

Reprenons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \text{vect} \langle Z_1, \dots, Z_7 \rangle$ de l'exemple proposé dans la section précédente :

$$[Z_1, Z_4] = Z_6 \quad [Z_1, Z_5] = Z_7 \quad [Z_2, Z_3] = Z_7$$

Considérons aussi les mêmes sous-algèbres de Lie qu'au paravant :

$$\mathfrak{h} = \text{vect} \langle Z_4, Z_5, Z_7 \rangle = \text{Lie}(H) \quad \text{et} \quad \mathfrak{b} = \text{vect} \langle Z_3, Z_4, Z_7 \rangle = \text{Lie}(B).$$

Rappelons que l'étude précédente de cet exemple a permis de décrire l'ensemble des double-classes de G modulo H et B . On en a déduit que l'ouvert de Zariski de $H \backslash G / B$ des classes présentées par $\mathcal{U} = G \setminus G_2$, est homéomorphe à $\mathcal{V} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_r : \quad \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} &\longrightarrow \tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{g}, g \in \mathcal{U}\} . \\ t = (t_1, t_2) &\longmapsto H \cdot t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \cdot B \end{aligned}$$

Le but consiste à munir $H \backslash G / B$ par une mesure $d\gamma(\tilde{g}) = F(t)dt$ comme l'indique le **théorème 2.2.10** :

- $F = F_{(H,B)}$ est une fonction rationnelle définie sur \mathcal{V} ,
ici, elle est même polynômiale et est donnée par $F(t) = t_1, \forall t = (t_1, t_2) \in \mathcal{V}$,
- pour toute fonction $\psi : H \backslash G / B \rightarrow \mathbb{C}$, continue et à support compact dans $\tilde{\mathcal{U}}$,

$$\gamma(\psi) = \int_{H \backslash G / B} \psi(\tilde{g}) d\gamma(\tilde{g}) = \int_{\mathcal{V}} \psi(H \cdot t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \cdot B) |F(t_1, t_2)| dt_1 dt_2,$$

- pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(G/B)$, on a :

$$\int_{G/B} \varphi(\dot{g}) d\dot{g} = \int_{H \backslash G / B} \left(\int_{H / H \cap g B g^{-1}} \varphi(hg \cdot B) d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}}(\ddot{h}) \right) d\gamma(\tilde{g}).$$

Essayons d'adopter les notations qui nous ont servi dans ce chapitre.

D'abord, puisque $\mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}} = \{1, 2, 5, 6\}$, ($p = 4$), la base de Malcev de \mathfrak{g} relative à \mathfrak{b} est

$$(Z_{k_1} := Z_1, Z_{k_2} := Z_2, Z_{k_3} := Z_5, Z_{k_4} := Z_6).$$

Le difféomorphisme

$$w = (w_1, \dots, w_4) \xrightarrow{\varepsilon_{\mathfrak{b}}} w_1 Z_{k_1} \dots w_4 Z_{k_4} \cdot B$$

décrit alors la mesure $d\dot{g}$ sur G/B par :

$$\int_{G/B} \varphi(g \cdot B) d\dot{g} = \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(w_1 Z_1 \cdot w_2 Z_2 \cdot w_3 Z_5 \cdot w_4 Z_6 \cdot B) dw, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(G/B).$$

Ensuite, comme pour tout $g = \phi(t) = t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \in \mathcal{U}$, (avec $t = (t_1, t_2) \in \mathcal{V}$), on a :

$$\mathfrak{k}_g := \mathfrak{h} \cap \text{Ad } g \mathfrak{b} = \text{vect} \langle Z_4, Z_5, Z_7 \rangle \cap \text{vect} \langle Z_3, Z_4 + t_1 Z_6, Z_7 \rangle = \mathbb{R} Z_7,$$

alors $\tilde{\varphi}$ est définie pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(G/B)$, en $\tilde{g} = H \cdot t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \cdot B \in \tilde{\mathcal{U}}$, par :

$$\tilde{\varphi}(\tilde{g}) := \int_{H/H \cap g B g^{-1}} \varphi(hg \cdot B) d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_g}(\tilde{h}) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(s_1 Z_4 \cdot s_2 Z_5 \cdot t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \cdot B) ds_1 ds_2.$$

Un simple calcul donne $s_1 Z_4 \cdot s_2 Z_5 \cdot t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \cdot B = t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \cdot s_2 Z_5 \cdot (-t_1 s_1) Z_6 \cdot B$, donc le changement de variable $(w_3, w_4) := (s_2, -t_1 s_1)$ transforme l'intégrale ci-dessus, en

$$\tilde{\varphi}(\tilde{g}) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \cdot w_3 Z_5 \cdot w_4 Z_6 \cdot B) \left| \frac{1}{-t_1} \right| dw_3 dw_4.$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \int_{H \backslash G/B} \tilde{\varphi}(\tilde{g}) d\gamma(\tilde{g}) &= \int_{\mathcal{V}} \tilde{\varphi}(H \cdot t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \cdot B) |F(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \cdot w_3 Z_5 \cdot w_4 Z_6 \cdot B) \frac{dw_3 dw_4}{|t_1|} \right) |t_1| dt_1 dt_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t_1 Z_1 \cdot t_2 Z_2 \cdot w_3 Z_5 \cdot w_4 Z_6 \cdot B) dw_3 dw_4 dt_1 dt_2 \\ &= \int_{G/B} \varphi(g \cdot B) dg. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Désintégration de la restriction d'une représentation unitaire et irréductible sur un groupe de Lie nilpotent.

Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} engendrée par sa base de Jordan-Hölder $\mathcal{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$. Soit H un sous-groupe de Lie de G et $\mathcal{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ une base de Jordan-Hölder de son algèbre de Lie $\mathfrak{h} := \text{Lie}(H)$. Considérons une forme linéaire $l \in \mathfrak{g}^*$, et $\mathfrak{b} =: \text{Lie}(B)$ une polarisation de \mathfrak{g} en l . Soit $\pi = \text{ind}_B^G \chi_l$ la représentation unitaire et irréductible de G , induite à partir du caractère $\chi_l : B \ni x = \exp X \mapsto e^{-i\langle l, X \rangle}$.

3.1 Désintégration de $\text{ind}_B^G \chi_l|_H$ en irréductibles.

Commençons ce chapitre par rappeler brièvement les résultats essentiels du chapitre précédent, dont le but était de fournir le matériel nécessaire pour résoudre le problème de la désintégration de $\text{ind}_B^G \chi_l|_H$ sur l'ensemble des double-classes $H \backslash G / B$. On s'engage alors à respecter les notations et les définitions qui ont été introduites précédemment, et à les adopter dans tout ce qui suit.

Rappels.

1. L'ensemble d'indices introduits dans (2.1.5) :

$$\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = \{i \in \mathcal{I}, \forall g \in \mathcal{U}, Z_i \notin \mathfrak{h} + \text{Ad}g\mathfrak{b} + \mathfrak{g}_{i+1}\} = \{i_1, \dots, i_d\},$$

caractérise $H \backslash G / B$ par son ouvert de Zariski non vide $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{g} = H \cdot g \cdot B, g \in \mathcal{U}\}$ qui est, -d'après le **théorème 2.1.9-**, homéomorphe à un ouvert de Zariski de \mathbb{R}^d :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_r : \mathcal{V} &\longrightarrow \tilde{\mathcal{U}} \\ (t_1, \dots, t_d) &\longmapsto H \cdot \phi(t) \cdot B \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

2. En munissant $H \backslash G / B$ par sa mesure donnée par le **théorème 2.2.10**, toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(G/B)$ vérifie (2.2.12) :

$$\int_{G/B} \varphi(\dot{g}) d\dot{g} = \int_{H \backslash G / B} \left(\int_{H/H \cap gBg^{-1}} \varphi(hg \cdot B) d_{\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}_g}}(\ddot{h}) \right) d\gamma(\tilde{g}).$$

3.1.1 Une première désintégration.

Proposition 3.1.1 *Pour tout $g \in G$, notons $\sigma(g)$ la représentation monomiale de H donnée par $\sigma(g) := \text{ind}_{K_g}^H \chi_{g \cdot l|_{\mathfrak{h}}}$, avec $K_g = H \cap gBg^{-1}$ et $g \cdot l = \text{Ad}^*g(l)$. On a alors*

$$\forall z \in \tilde{g}, \quad \sigma(z) \simeq \sigma(g). \quad (3.1.1)$$

Souvent, $\sigma(g)$ sera confondue avec $\sigma(\tilde{g})$: sa classe d'équivalence dans l'ensemble des représentations unitaires de H .

Démonstration.

Soit $z = ygx \in \tilde{g}$, avec $y \in H$ et $x \in B$. Considérons l'isométrie

$$\mathcal{A} : L^2(H/H \cap gBg^{-1}, \chi_{g \cdot l}) = \mathcal{H}_{\sigma(g)} \longrightarrow \mathcal{H}_{\sigma(x)} = L^2(H/H \cap zBz^{-1}, \chi_{z \cdot l})$$

définie pour tout $\xi \in L^2(H/H \cap gBg^{-1}, \chi_{g \cdot l})$, par $\mathcal{A}\xi : H \ni h \mapsto \xi(hy) \in \mathbb{C}$.

Il est clair que $\mathcal{A}\xi \in L^2(H/H \cap zBz^{-1}, \chi_{z \cdot l})$, en effet si $h \in H$ et $k \in H \cap zBz^{-1}$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\xi(hk) &= \xi(hky) = \xi(hy(y^{-1}ky)) \\ &= \bar{\chi}_{g \cdot l}(y^{-1}ky) \xi(hy) \\ &= \bar{\chi}_{z \cdot l}(k) \mathcal{A}\xi(h). \end{aligned}$$

De plus, en notant $K := K_g = H \cap gBg^{-1}$ comme dans le paragraphe préliminaire 2, alors $K' := yKy^{-1} = H \cap ygBg^{-1}y^{-1} = H \cap zx^{-1}Bxz^{-1} = K_z$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\xi\|_{\mathcal{H}_{\sigma(x)}}^2 &= \int_{H/K'} |\mathcal{A}\xi(h)|^2 d_{\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}'}}(\ddot{h}) = \int_{H/K'} \psi(\ddot{h}) d_{\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}'}}(\ddot{h}) = \mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}'}(\psi) \\ \text{où} \quad \psi : H/H \cap zBz^{-1} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ h \cdot K' &\longmapsto |\mathcal{A}\xi(h)|^2 \end{aligned}$$

Mais d'après le **corollaire 2.2.5**, on a (2.2.7) : $\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}' = \mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}'$, qui permet de déduire que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\xi\|_{\mathcal{H}_{\sigma(\mathfrak{x})}}^2 &= \mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}'(\psi) = \mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}'(\psi) = \int_{H/K} \psi(yhy^{-1} \cdot K') d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}(\ddot{h}) \\ &\quad \text{d'après la définition de } \mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}' \text{ dans (2.2.4)} \\ &= \int_{H/K} |\mathcal{A}\xi(yhy^{-1})|^2 d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}(\ddot{h}) = \int_{H/K} |\xi(yh)|^2 d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}(\ddot{h}) \\ &= \int_{H/K} |\xi(h)|^2 d\mu_{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}}(\ddot{h}) \quad \text{grâce au corollaire 2.2.2} \\ &= \|\xi\|_{\mathcal{H}_{\sigma(g)}}^2. \end{aligned}$$

On justifie ainsi que \mathcal{A} est une isométrie. Enfin, on vérifie aussi que cet opérateur entrelace les deux représentations considérées, puisque pour tout $\xi \in \mathcal{H}_{\sigma(g)}$, on a

$$\mathcal{A}(\sigma(g)\xi)(h) = \sigma(g)\xi(hy) = \xi(g^{-1}hy) = \mathcal{A}\xi(g^{-1}h) = \sigma(g)(\mathcal{A}\xi(h)), \quad \forall g, h \in H. \quad \blacksquare$$

Théorème 3.1.2 *La désintégration de la restriction d'une représentation unitaire et irréductible $\pi = \text{ind}_B^G \chi_i \in \hat{G}$, à un sous-groupe de Lie H de G , se fait sur l'ensemble des double-classes $H \backslash G / B$ de la façon suivante :*

$$\pi|_H \simeq \int_{H \backslash G / B}^{\oplus} \sigma(\tilde{g}) d\gamma(\tilde{g}). \quad (3.1.2)$$

Démonstration. Définissons l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : L^2(G/B, \chi_i) &\longrightarrow L^2(H \backslash G / B; \bigcup_{\tilde{g} \in H \backslash G / B} L^2(H/H \cap gBg^{-1}, \chi_{g,i})) \\ \xi &\longmapsto \mathcal{T}\xi \end{aligned}$$

de la façon suivante : $\forall \tilde{g} \in H \backslash G / B, \quad \begin{matrix} H \\ h \end{matrix} \xrightarrow{\mathcal{T}\xi(\tilde{g})} \mathbb{C} \in L^2(H/H \cap gBg^{-1}, \chi_{g,i})$.

Tout a été fait pour que \mathcal{T} soit une isométrie, en effet, pour tout $\xi \in L^2(G/B, \chi_i)$, en définissant l'application $\varphi_\xi \in L^1(G/B)$ par $\varphi_\xi : g \cdot B \mapsto |\xi(g)|^2$, à laquelle on applique la formule (2.2.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}\xi\|_{\mathcal{H}_{\sigma(g)}}^2 &= \int_{H \backslash G / B} \left(\int_{H/H \cap gBg^{-1}} |\xi(hg)|^2 d\ddot{h} \right) d\gamma(\tilde{g}) \\ &= \int_{H \backslash G / B} \left(\int_{H/H \cap gBg^{-1}} \varphi_\xi(hg \cdot B) d\ddot{h} \right) d\gamma(\tilde{g}) = \int_{G/B} \varphi_\xi(\dot{g}) d\dot{g} \\ &= \int_{G/B} |\xi(g)|^2 d\dot{g} = \|\xi\|_{\mathcal{H}_\pi}^2. \end{aligned}$$

Enfin, l'isométrie \mathcal{T} est un entrelacement qui justifie l'équivalence (3.1.2), vu que pour tout $y \in H$, on a :

$$\mathcal{T}\left(\pi_{|_H}(y)\xi\right) = \left(\int_{H \setminus G/B}^{\oplus} \sigma(\tilde{g})d\gamma(\tilde{g})\right)(y)(\mathcal{T}\xi), \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_\pi,$$

en effet, si $\tilde{g} \in H \setminus G/B$, alors on a :

$$\begin{aligned} \forall h \in H, \quad \mathcal{T}\left(\pi_{|_H}(y)\xi\right)(\tilde{g})(h) &= \pi_{|_H}(y)\xi(hg) \\ &= \xi(y^{-1}hg) = \mathcal{T}\xi(\tilde{g})(y^{-1}h) \\ &= \sigma(\tilde{g})(y)\left(\mathcal{T}\xi(\tilde{g})\right)(h) \\ &= \left(\int_{H \setminus G/B}^{\oplus} \sigma(\tilde{g})d\gamma(\tilde{g})\right)(y)\left(\mathcal{T}\xi(\tilde{g})\right)(h). \end{aligned}$$

■

Remarque 3.1.3 L'inverse de l'opérateur \mathcal{T} s'obtient à l'aide de l'homéomorphisme Υ . En effet,

$$\mathcal{T}^{-1} : L^2(H \setminus G/B; \bigcup_{\tilde{g} \in H \setminus G/B} L^2(H/H \cap gBg^{-1}, \chi_{g,l})) \longrightarrow L^2(G/B, \chi_l)$$

associe à toute fonction $\eta : H \setminus G/B \longrightarrow \bigcup_{\tilde{g} \in H \setminus G/B} L^2(H/H \cap gBg^{-1}, \chi_{g,l})$,

l'application $\xi := \mathcal{T}^{-1}\eta \in L^2(G/B, \chi_l)$,

qui est définie en tout point $u \in \mathcal{U}$ de la façon suivante :

si $\dot{u} = u \cdot B$, on pose alors $w := \mathcal{D}_B^{-1}(\dot{u}) \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$, et $(s, t) = \Upsilon^{-1}(w) \in \mathbb{R}^r \times \mathcal{V}$, l'image de u par ξ n'est autre que

$$\xi(u) = \eta(H \cdot t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \cdot B)(s_1 Y_{j_1} \dots s_r Y_{j_r}).$$

3.1.2 La désintégration d'une représentation monomiale en irréductibles.

L'écriture de $\pi_{|_H}$ sous la forme donnée par (3.1.2), n'est pas encore sa désintégration finale, vu que les représentations $\sigma(\tilde{g})$ de H ne sont pas généralement irréductibles. Cependant, ce problème a été déjà résolu par Ludwig et Baklouti dans [3]. On rappelle ci-dessous leurs résultats essentiels à ce propos. Ainsi certaines notations qu'ils ont adoptées

seront conservées, sauf qu'on traite ici la désintégration d'une représentation monomiale de H qui est induite à partir d'un caractère sur un sous-groupe fermé de H .

Notations. Dans toute cette section, on désigne par t un paramètre qu'on suppose fixé, (donc ne jouant aucun rôle pour l'instant).

1. On considère une forme linéaire $l^t \in \mathfrak{h}^*$, et une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{h} , notée \mathfrak{k}^t , qui est subordonnée à l^t . On définit sur son groupe $K^t = \exp \mathfrak{k}^t$, le caractère χ_{l^t} :

$$\chi_{l^t}(\exp X) = e^{-i\langle l^t, X \rangle}, \quad \forall X \in \mathfrak{k}^t.$$

2. désignons par Γ_{l^t} l'espace affine homéomorphe à \mathbb{R}^r suivant

$$\Gamma_{l^t} := l^t + (\mathfrak{k}^t)^\perp = \{f \in \mathfrak{h}^*, \langle f, Y \rangle = \langle l^t, Y \rangle \quad \forall Y \in \mathfrak{k}^t\}.$$

3. La représentation monomiale $\text{ind}_{K^t}^H \chi_{l^t}$ est notée $\sigma_{(l^t, \mathfrak{k}^t)}$, et sa désintégration en irréductibles s'écrit :

$$\sigma_{(l^t, \mathfrak{k}^t)} \simeq \int_{\mathfrak{W}^t}^{\oplus} \rho_{f^t} d\lambda^t(f^t),$$

où l'espace de désintégration \mathfrak{W}^t , ses éléments f^t , sa mesure $d\lambda^t$, ainsi que les représentations $\rho_{f^t} \in \hat{H}$, seront précisés dans ce qui suit.

3.1.2.1 Orbites saturées et orbites non saturées.

Afin de déterminer l'ensemble d'indices décrivant l'espace de désintégration, on a besoin de définir la saturation d'une orbite. On verra que cette notion ne dépend que de la suite d'idéaux

$$\mathfrak{h}_{m+1} := \{0\} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{h}_j := \text{vect} \langle Y_j, \dots, Y_m \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}.$$

On s'intéresse à l'action unipotente de H sur \mathfrak{h}^* donnée par la représentation coadjointe

$$\begin{aligned} H \times \mathfrak{h}^* &\longrightarrow \mathfrak{h}^* \\ (h, f) &\longmapsto h \cdot f = \text{Ad}^* h (f) \end{aligned}$$

Vu que Y_1^* est H -invariante par cette action, alors pour toute forme linéaire $f \in \mathfrak{h}^*$, on rencontre l'une des deux situations suivantes :

- (i) $f + \mathbb{R}Y_1^* \subseteq H \cdot f$,
- (ii) $f + \mathbb{R}Y_1^* \cap H \cdot f = \{f\}$.

Définition 3.1.4 Dans la 1^{ère} situation, on dit que l'orbite de f est saturée dans la direction de $\mathbb{R}Y_1^* = \mathfrak{h}_2^\perp$. Dans le second cas, $H \cdot f$ est non saturée.

Remarque 3.1.5 La notion de saturation se définit pour toute action unipotente d'un groupe de Lie nilpotent N , connexe et simplement connexe, sur un espace vectoriel réel V de dimension fini. En fixant une direction par un vecteur $v \in V$ qui est N -invariant, tout élément $x \in V$ détermine une droite $L_x = x + \mathbb{R}v$ et on a l'un des deux cas précisés ci-dessus qui détermine la saturation ou la non-saturation de l'orbite $N \cdot x$ dans cette direction.

Considérons maintenant la base de Malcev de \mathfrak{h} relative à \mathfrak{k}^t associée à la base $\mathcal{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$. On rappelle qu'elle est donnée par $\mathcal{Y}(\mathfrak{k}^t) := \{Y_{j_1}, \dots, Y_{j_r}\}$ où les j_k sont les indices de $\mathcal{I}^{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}^t} = \{j \in \{1, \dots, m\}, Y_j \notin \mathfrak{k}^t + \mathfrak{h}_{j+1}\}$. En plus, elle permet de définir la suite de sous-algèbres de Lie de \mathfrak{h} suivante :

$$(\mathfrak{k}^t)^{r+1} := \mathfrak{k}^t \subsetneq \dots \subsetneq (\mathfrak{k}^t)^k := \mathbb{R}Y_{j_k} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_{j_r} \oplus \mathfrak{k}^t \subsetneq \dots \subsetneq (\mathfrak{k}^t)^1 = \mathfrak{h}.$$

La remarque 2.1.2 permet de considérer pour les j_k n'appartenant pas à $\mathcal{I}^{\mathfrak{h}/\mathfrak{k}^t}$, donc $j_k \in \{j_{r+1} < \dots < j_m\} := \{1, \dots, m\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$, des vecteurs $Y_{j_k}^t$ formant une base de \mathfrak{k}^t (ceci en répétant la même manipulation décrite dans la remarque : c'est à dire quand $Y_{j_k} \in \mathfrak{k}^t + \mathfrak{h}_{j_k+1}$, considérer un nouveau vecteur $Y_{j_k}^t$ de $\mathfrak{k}^t \cap Y_{j_k} + \mathfrak{h}_{j_k+1}$ qui prendra la place de Y_{j_k} , la nouvelle base obtenue est toujours une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{h}). En complétant la suite de sous-algèbres de Lie précédente qui passe par \mathfrak{k}^t , on obtient celle associée à $\mathcal{Y}'(t) := (Y'_1(t) := Y_{j_1}^t, \dots, Y'_r(t) := Y_{j_r}^t; Y'_{r+1}(t) := Y_{j_{r+1}}^t, \dots, Y'_m(t) := Y_{j_m}^t)$ qui est une nouvelle base de Malcev de \mathfrak{h} . Notons les sous-algèbres de cette suite par

$$(\mathfrak{k}^t)^{m+1} := \mathfrak{h}_{m+1}^t = \{0\} \subsetneq (\mathfrak{k}^t)^m := \mathfrak{h}_m^t = \langle Y_{j_m}^t \rangle \subsetneq \dots \subsetneq (\mathfrak{k}^t)^{r+2} := \mathfrak{h}_{r+2}^t \subsetneq (\mathfrak{k}^t)^{r+1} = \mathfrak{k}^t \\ \mathfrak{k}^t = \mathfrak{h}_{r+1}^t \subsetneq (\mathfrak{k}^t)^r = \mathfrak{h}_r^t \subsetneq \dots \subsetneq (\mathfrak{k}^t)^k = \mathfrak{h}_k^t = \langle Y_{j_k}^t, \dots, Y_{j_m}^t \rangle \subsetneq \dots \subsetneq (\mathfrak{k}^t)^1 = \mathfrak{h}_1^t = \mathfrak{h}.$$

Soit maintenant pour tout $k \in \{1, \dots, r+1\}$ et pour tout $f \in \Gamma_{l^t}$, $f_k := f|_{\mathfrak{h}_k^t}$ la restriction de f sur \mathfrak{h}_k^t vue comme une forme linéaire sur cette algèbre de Lie, alors la dimension de son orbite, notée $d_k(f) := \dim(H_k^t \cdot f_k)$, pour l'action coadjointe de $H_k^t := \exp(\mathfrak{h}_k^t)$, n'est autre que le rang de la matrice de la forme bilinéaire alternée associée à l^t .

$$d_k(f) = \dim(H_k^t \cdot f_k) = \text{rang} \left((\langle f, [Y_i'(t), Y_{i'}'(t)] \rangle)_{k \leq i, i' \leq m} \right).$$

Il est clair que $d_{r+1}(l^t) = 0$ puisque \mathfrak{k}^t est subordonnée à l^t , $(Y_i'(t), Y_{i'}'(t)) \in \mathfrak{k}^t \forall i, i' \geq r+1$, et donc toute la matrice est nulle). On a même $d_{r+1}(f) = 0 \forall f \in \Gamma_{l^t} = l^t + (\mathfrak{k}^t)^\perp$.

Enfin, l'argument d'algèbre linéaire qu'on a souvent utilisé permet de définir de la même façon que précédemment, un ouvert de Zariski \mathcal{W}_k^t non vide de Γ_{l^t} où toutes les formes linéaires f ont le même $d_k(f)$. (Il est donc maximal d'après le lemme 2.1.5). On pose

$$d_k := \max_{f \in \Gamma_{l^t}} d_k(f) = d_k(f) \forall f \in \mathcal{W}_k^t,$$

Définition 3.1.6 Les éléments de $\mathcal{W}^t := \bigcap_{1 \leq k \leq r} \mathcal{W}_k^t$ sont dits en position générale.

Remarques 3.1.7 Soit $f \in \Gamma_t$.

1. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la H_r^t -orbite de f est saturée par rapport à $\mathfrak{h}_{r+1}^t{}^\perp$,
- (ii) $\mathfrak{h}_r^t(f) \subseteq \mathfrak{h}_{r+1}^t$,
- (iii) $d_r(f) \neq 0$.

2. On généralise alors cette notion pour $k \in \{1, \dots, r\}$ par l'équivalence :

la H_k^t -orbite de f est saturée si et seulement si $d_k(f) > d_{k+1}(f)$.

3.1.2.2 Résultat de Baklouti-Ludwig.

Adoptons leurs notations que les auteurs ont utilisé pour établir leur résultat dans [3].

Notations.

1. Notons I^t (respectivement L^t), l'ensemble d'indices de saturations, (respectivement de non-saturation).

$$I^t = \{k \in \{1, \dots, r\}; d_k > d_{k+1}\} \quad \text{et} \quad L^t = \{k \in \{1, \dots, r\}; d_k = d_{k+1}\},$$

et posons $L^t := \{k_1 < \dots < k_i\}$.

2. Ensuite, soit \mathfrak{W}^t le sous-espace affine de Γ_t constitué par les formes linéaires

$$f_{(o)}^t = l^t + \sum_{1 \leq j \leq i} o_j Y_{k_j}^{t*}, \quad o = (o_1, \dots, o_i) \in \mathbb{R}^i.$$

3. \mathfrak{W}^t étant homéomorphe à \mathbb{R}^i , il sera muni de la mesure de Lebesgue :

$$\forall f^t = f_{(o)}^t \in \mathfrak{W}^t, \quad d\lambda^t(f^t) = do.$$

4. Adoptons aussi la notation \mathfrak{W}_0^t pour l'ouvert de Zariski de \mathfrak{W}^t décrit dans [3] à la page 168, "sur lequel tous les objets suivants seront bien définis". Pour toute forme linéaire $f^t \in \mathfrak{W}_0^t$, nous considérons

- ★ une polarisation $\mathfrak{b}(f^t)$ de \mathfrak{h} en f^t ,
- ★ une base de Malcev $\mathfrak{X}(f^t) = (X_1^t(f^t), \dots, X_a^t(f^t))$ de \mathfrak{h} relative à $\mathfrak{b}(f^t)$,
- ★ une base de Malcev $\mathfrak{Y}(f^t) = (Y_1^t(f^t), \dots, Y_c^t(f^t))$ de $\mathfrak{b}(f^t)$ relative à $\mathfrak{k}^t \cap \mathfrak{b}(f^t)$,
- ★ et enfin une base de Malcev $\mathfrak{U}(f^t) = (U_1^t(f^t), \dots, U_b^t(f^t))$ de \mathfrak{k}^t relative à $\mathfrak{k}^t \cap \mathfrak{b}(f^t)$.

Dans ces définitions, les entiers a, c et b ne dépendent pas de $f^t \in \mathfrak{W}_0^t$. En outre tous les vecteurs $X_j^t(f^t), Y_j^t(f^t)$ et $U_j^t(f^t)$ varient de façon rationnelle et C^∞ avec $f^t = f_{(o)}^t \in \mathfrak{W}_0^t$, ils seront notés respectivement dans cet ordre $X_j(t, o), Y_j(t, o)$ et $U_j(t, o)$ où le paramètre o décrit l'ouvert de Zariski de \mathbb{R}^i noté $\mathcal{O}^t := \{o \in \mathbb{R}^i, f_{(o)}^t \in \mathfrak{W}_0^t\}$ qui est homéomorphe à \mathfrak{W}_0^t . En particulier les dénominateurs de ces expressions ne s'annulent pas sur \mathcal{O}^t . Baklouti et Ludwig ont bien détaillé dans leur article [3] le processus de construction de tous ces objets, qui se fait par récurrence. Nous allons seulement énoncer leur **théorème 3.3** juste après la définition suivante :

Définition 3.1.8 Pour $f^t \in \mathfrak{W}_0^t$, désignons par

- $\mathfrak{b}(f^t)$ la polarisation ci-dessus, et

$$B(f^t) := \exp(\mathfrak{b}(f^t))$$

son groupe de Lie,

- la mesure

$$d\dot{u} := d\mu_{\mathfrak{b}(f^t)/\mathfrak{b}(f^t) \cap K^t}(\dot{u})$$

qui est $B(f^t)$ -invariante sur $B(f^t)/B(f^t) \cap K^t$ et qu'on obtient grâce à $\mathfrak{W}(f^t)$.

Alors on définit l'intégrale

$$T_{B(f^t), K^t} \xi(h) := \int_{B(f^t)/B(f^t) \cap K^t} \xi(hu) \chi_{f^t}(u) d\dot{u} \quad (3.1.3)$$

qui existe pour toute fonction de Schwartz ξ dans $\mathcal{S}(H/K^t, \chi_{f^t})$ et h dans H . Ceci est justifié dans [6] où Corwin et Greenleaf prouvent que

$$\begin{array}{ccc} T_{B(f^t), K^t} : \mathcal{S}(H/K^t, \chi_{f^t}) & \longrightarrow & \mathcal{S}(H/B(f^t), \chi_{f^t}) \\ \xi & \longmapsto & T_{B(f^t), K^t} \xi \end{array}$$

est une application linéaire, continue et surjective.

Théorème 3.1.9 (Baklouti-Ludwig). La désintégration de la représentation monomiale $\sigma_{(f^t, \mathfrak{k}^t)} = \text{ind}_{K^t}^H \chi_{f^t}$ en irréductibles est donnée par

$$\sigma_{(f^t, \mathfrak{k}^t)} \simeq \int_{\mathfrak{W}_0^t}^{\oplus} \rho_{f^t} d\lambda^t(f^t), \quad (3.1.4)$$

où l'espace de désintégration \mathfrak{W}_0^t est l'ouvert de Zariski précisé ci-dessus, qui permet le choix continu de polarisations $\mathfrak{b}(f^t)$ de \mathfrak{h} en $f^t \in \mathfrak{W}_0^t$.

(On rappelle aussi que $d\lambda^t$ est la mesure de Lebesgue sur \mathfrak{W}_0^t et $\rho_{f^t} = \text{ind}_{B(f^t)}^H \chi_{f^t} \in \hat{H}$).

De plus, l'opérateur

$$\begin{aligned} U^t : L^2(H/K^t, \chi_{t^t}) &\longrightarrow L^2\left(\mathfrak{W}_0^t; \bigcup_{f^t \in \mathfrak{W}_0^t} L^2(H/B(f^t), \chi_{f^t})\right) \\ \xi &\longmapsto U^t \xi \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

qu'on définit au début sur $\mathcal{S}(H/K^t, \chi_{t^t})$ par :

$$U^t(\xi)(f^t) := T_{B(f^t), K^t} \xi,$$

(cette expression était précisée dans (3.1.3) pour tout $\xi \in \mathcal{S}(H/K^t, \chi_{t^t})$ et $f^t \in \mathfrak{W}_0^t$), cet opérateur se prolonge en un opérateur linéaire et isométrique sur $L^2(H/K^t, \chi_{t^t})$ qui entrelace les deux termes de l'équivalence (3.1.4).

Démonstration.

Voir le théorème 3.3 dans [3]. ■

Remarques 3.1.10

1. De manière plus explicite, le résultat précédent se résume en

$$\sigma_{(t^t, t^t)} \simeq \int_{\mathcal{O}^t \subseteq \mathbb{R}^i}^{\oplus} \rho_{f_{(o)}^t} d\mathfrak{o}, \quad (3.1.4)'$$

et que ces deux représentations sont entrelacées par

$$U^t : L^2(H/K^t, \chi_{t^t}) \longrightarrow L^2\left(\mathcal{O}^t; \bigcup_{o \in \mathcal{O}^t} L^2(H/B(f_{(o)}^t), \chi_{f_{(o)}^t})\right) \quad (3.1.5)'$$

où pour tout $\xi \in \mathcal{S}(H/K^t, \chi_{t^t})$, et $o \in \mathcal{O}^t$, on a : $\forall h \in H$,

$$\begin{aligned} U^t(\xi)(o)(h) &= T_{B(f_{(o)}^t), K^t} \xi(h) = \int_{B(f_{(o)}^t)/B(f_{(o)}^t) \cap K^t} \xi(hu) \chi_{t^t}(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^c} \xi\left(h(y_1 Y_1(t, o) \dots y_c Y_c(t, o))\right) \chi_{t^t}(y_1 Y_1(t, o) \dots y_c Y_c(t, o)) dy \end{aligned}$$

avec une variation rationnelle (C^∞) des vecteurs $Y_j(t, o)$ par rapport à $o \in \mathcal{O}^t$.

2. Ajoutons que dans [3], il a été prouvé que l'inverse de U^t noté V^t est l'opérateur

$$V^t : L^2(\mathcal{O}^t ; \bigcup_{o \in \mathcal{O}^t} L^2(H/B(f_{(o)}^t), \chi_{f_{(o)}^t})) \longrightarrow L^2(H/K^t, \chi_t)$$

tel que l'image $V^t(\eta)$ d'un vecteur η

$$\mathcal{O}^t \ni o \xrightarrow{\eta} \eta(o) \in L^2(H/B(f_{(o)}^t), \chi_{f_{(o)}^t})$$

est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} V^t(\eta)(h) &= \int_{\mathcal{O}^t} T_{K^t, B(f^t)}(\eta(o))(h) do \\ &= \int_{\mathcal{O}^t} \int_{\mathbb{R}^b} \eta(o) \left(h(u_1 U_1(t, o) \dots u_b U_b(t, o)) \right) \chi_{f_{(o)}^t}(u_1 U_1(t, o) \dots u_b U_b(t, o)) du do. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

3.1.3 La désintégration finale.

Une autre façon d'énoncer le **théorème 3.1.2** est la suivante :

Théorème 3.1.2' La restriction de $\pi = \text{ind}_B^G \chi_t \in \hat{G}$, au sous-groupe H se désintègre en

$$\pi|_H \simeq \int_{\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d}^{\oplus} \sigma(\tilde{\phi}_r(t)) |F(t)| dt, \quad (3.1.2)'$$

où on pose $\sigma(\tilde{\phi}_r(t)) = \text{ind}_{K_{\phi(t)}}^H \chi_{it} =: \sigma(l^t, \mathfrak{k}^t)$ pour tout $t \in \mathcal{V}$,

(avec $\phi(t) = t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d} \in \mathcal{U}$ et $K_{\phi(t)} = H \cap \phi(t) B \phi(t)^{-1} =: K^t$ dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}^t := \text{Log } K^t$ est subordonnée à la forme linéaire $l^t := \text{Ad}^* \phi(t)(l)|_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^*$).

L'opérateur \mathcal{T} qu'on a proposé dans la preuve de ce théorème s'écrit alors

$$\mathcal{T} : L^2(G/B, \chi_t) \longrightarrow L^2(\mathcal{V} ; \bigcup_{t \in \mathcal{V}} L^2(H/K^t, \chi_{it}))$$

$$\xi \longmapsto \mathcal{T}\xi : \mathcal{V} \ni t \mapsto \begin{array}{c} H \xrightarrow{\mathcal{T}\xi(t)} \mathbb{C} \\ h \mapsto \xi(h\phi(t)) \end{array} \in L^2(H/K^t, \chi_{it})$$

Ensuite, il suffit de combiner ce résultat avec le précédent pour obtenir la désintégration de $\pi|_H$ en irréductibles, qui est

$$\pi|_H \simeq \int_{\mathcal{V}}^{\oplus} \left(\int_{\mathcal{O}^t}^{\oplus} \rho_{f_{(o)}^t} do \right) |F(t)| dt.$$

On obtient comme opérateur d'entrelacement

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} : L^2(G/B, \chi_i) &\longrightarrow L^2\left(\mathcal{V}; \bigcup_{t \in \mathcal{V}} L^2(\mathcal{O}^t, \bigcup_{o \in \mathcal{O}^t} \mathcal{H}_{\rho_{f_{(o)}^t}})\right) \\ \xi &\longmapsto \mathfrak{S}\xi : t \longmapsto \mathfrak{S}\xi(t) \end{aligned}$$

avec $\mathfrak{S}\xi(t) = U^t(T\xi(t)) : \mathcal{O}^t \ni o \longmapsto \mathfrak{S}\xi(t, o) \in \mathcal{H}_{\rho_{f_{(o)}^t}} = L^2(H/B(f_{(o)}^t), \chi_{f_{(o)}^t})$
dont la valeur en un point $h \in H$, devient grâce à la première **remarque 3.1.10** :

$$\mathfrak{S}\xi(t, o)(h) = \int_{\mathbb{R}^c} \xi\left(h(u_1 Y_1(t, o) \dots u_c Y_c(t, o))(t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d})\right) \chi_{it}(u_1 Y_1(t, o) \dots u_c Y_c(t, o)) du.$$

Remarque 3.1.11 *En fait, dans la formule ci-dessus, on a supposé que la codimension c de $\mathfrak{k}^t \cap \mathfrak{b}(f_{(o)}^t)$ dans $\mathfrak{b}(f_{(o)}^t)$ est la même pour tout $t \in \mathcal{V}$ et $o \in \mathcal{O}^t$. Ceci est tout à fait légitime comme on l'a souvent justifié par le **lemme 2.1.5**. On peut même aller plus loin et considérer au lieu de l'ouvert $\{(v, o), v \in \mathcal{V}, o \in \mathcal{O}^t\}$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^i$, un ouvert \mathfrak{W} de \mathbb{R}^{d+i} vérifiant "la propriété de lissité" qu'on explique et qu'on justifie dans le rappel suivant.*

Rappel. Il est utile de rappeler quelques détails techniques dans la construction des vecteurs $X_j^t(f_{(o)}^t)$, $Y_j^t(f_{(o)}^t)$ et $U_j^t(f_{(o)}^t)$ introduits précédemment comme dans [3]. Dans leur article, les auteurs utilisent un raisonnement par récurrence sur $s \in \{0, \dots, \dim(h)\}$ et effectuent des remplacements du type

$$S_{s+1}^t(f_{(o)}^t) \rightsquigarrow S_{s+1}^t(f_{(o)}^t) - \frac{\langle f_{(o)}^t, [S_{s+1}^t(f_{(o)}^t), T_{s+1}^t(f_{(o)}^t)] \rangle}{\langle f_{(o)}^t, [W_{s+1}^t(f_{(o)}^t), T_{s+1}^t(f_{(o)}^t)] \rangle} W_{s+1}^t(f_{(o)}^t)$$

pour certains vecteurs des bases coexponentielles considérées. Pour t fixé dans \mathcal{V} , la variation rationnelle par rapport à $o \in \mathbb{R}^i$ des vecteurs

$$S_j^t(f_{(o)}^t) = S_j(t, o), \quad (S_j^t = X_j^t, Y_j^t \text{ ou } U_j^t)$$

était alors une conséquence immédiate de cette construction qui fait de ces vecteurs des fonctions rationnelles et C^∞ sur \mathcal{O}^t . Le même argument reste valable pour généraliser cette propriété sur un ouvert de Zariski \mathfrak{W} non vide de \mathbb{R}^{d+i} de sorte que si on note un élément quelconque w de \mathfrak{W} comme

$$w = (w_1, \dots, w_{d+i}) = (t := (w_1, \dots, w_d), o := (w_{d+1}, \dots, w_{d+i})) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^i,$$

alors on obtient que $t \in \mathcal{V}$ et que les fonctions S_j , ($S_j = X_j, Y_j$ ou U_j),

$$\begin{aligned} S_j : \mathfrak{W} \subseteq \mathbb{R}^{d+i} &\longrightarrow \mathfrak{h} \\ w = (t, o) &\longmapsto S_j(t, o) = S_j^t(f_{(o)}^t) \end{aligned}$$

sont des fonctions rationnelles bien définies sur \mathfrak{W} .

La conclusion de l'étude de la désintégration de $\pi|_H$ en irréductibles, se résume dans le théorème suivant :

Théorème 3.1.12 *Considérons la représentation unitaire et irréductible $\pi = \text{ind}_B^G \chi_l$ de G associée à la forme linéaire $l \in \mathfrak{g}^*$. La désintégration en représentations unitaires et irréductibles de sa restriction au sous-groupe fermé H , s'obtient de la façon suivante.*

- On prend nos bases de Jordan-Hölder \mathcal{Z} et \mathcal{Y} respectivement de \mathfrak{g} et \mathfrak{h} de telle sorte que \mathcal{Y} soit formée par des vecteurs de \mathcal{Z} .
- On détermine l'ensemble d'indices $\mathcal{I}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) =: \{i_1, \dots, i_d\}$ et l'ouvert de Zariski \mathcal{V} de \mathbb{R}^d caractérisant l'ensemble des double-classes $H \backslash G / B$ par le **théorème 2.1.9**.
- On munit $H \backslash G / B$ de la mesure

$$d\gamma(\bar{g}) = |F_{(H,B)}(t)| dt$$

qu'on a précisée dans le **théorème 2.2.10**.

- Pour tout $t \in \mathcal{V}$, on a une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{h} , notée $\mathfrak{k}^t = \mathfrak{h} \cap \text{Ad}\phi(t)\mathfrak{b}$, qui est subordonnée à la forme linéaire $l^t = \text{Ad}^*\phi(t)(l)|_{\mathfrak{b}} \in \mathfrak{h}^*$.

En cherchant les indices de non-saturation pour les orbites des formes linéaires qui sont en position générale dans $\Gamma_{l^t} = l^t + (\mathfrak{k}^t)^\perp$, on obtient un ensemble d'indices

$$L^t = \{k_1 < \dots < k_i\} = L,$$

qui est le même pour presque tout $t \in \mathcal{V}$, (dans un ouvert de Zariski de \mathcal{V}).

Il permet alors de définir sur \mathfrak{h} les formes linéaires décrites dans la section 3.1.2.

$$f(t, o) := f_{(o)}^t = l^t + \sum_{1 \leq j \leq i} o_j Y_{k_j}^{t*}, \quad o = (o_1, \dots, o_i) \in \mathbb{R}^i.$$

On construit ensuite, -grâce à [3], un ouvert \mathfrak{W} de \mathbb{R}^{d+i} dans lequel on a

* un choix continu

$$C: \mathfrak{W} \ni (t, o) \mapsto \mathfrak{b}(f(t, o)) \subseteq \mathfrak{h},$$

de polarisations $\mathfrak{b}(f(t, o))$ de \mathfrak{h} en $f(t, o) \in \mathfrak{h}^*$,

* la propriété de lissité est vérifiée pour les fonctions

$$X_j, Y_j, U_j : \mathfrak{W} \ni (t, o) \mapsto X_j(t, o), Y_j(t, o), U_j(t, o) \in \mathfrak{h},$$

qui forment des vecteurs respectifs pour

- une base de Malcev $\mathfrak{X}(f(t, o)) = (X_1(t, o), \dots, X_a(t, o))$ de \mathfrak{h} relative à $\mathfrak{b}(f(t, o))$,
- une base de Malcev $\mathfrak{Y}(f(t, o)) = (Y_1(t, o), \dots, Y_c(t, o))$ de $\mathfrak{b}(f(t, o))$ relative à $\mathfrak{k}^t \cap \mathfrak{b}(f(t, o))$,
- une base de Malcev $\mathfrak{U}(f(t, o)) = (U_1(t, o), \dots, U_b(t, o))$ de \mathfrak{k}^t relative à $\mathfrak{k}^t \cap \mathfrak{b}(f(t, o))$.

- On note maintenant pour tout $w = (t, o) \in \mathfrak{M}$, la représentation unitaire et irréductible de H ,

$$\rho(w) := \rho_{f(t, o)} = \text{ind}_{B(f(t, o))}^H \chi_{f(t, o)} \in \hat{H}.$$

Alors, on a

$$\textcircled{1} \quad \pi|_H \simeq \int_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \rho(w) dw, \quad (3.1.7)$$

où la mesure dw sur $\mathfrak{M} \subseteq \mathbb{R}^{d+i}$ est donnée pour $w = (t, o) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^i$ par le produit

$$dw = |F(t)| dt do,$$

$F = F_{(H, B)}$, dt et do sont les mesures de Lebesgue respectivement sur \mathbb{R}^d et \mathbb{R}^i .

$\textcircled{2}$ L'équivalence (3.1.7) est mise en évidence par l'entrelacement isométrique suivant

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} : L^2(G/B, \chi_i) &\longrightarrow L^2\left(\mathfrak{M}; \int_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\rho(w)} dw\right) \\ \xi &\longmapsto \mathfrak{S}\xi : w \longmapsto \mathfrak{S}\xi(w) \end{aligned}$$

où pour tout $w = (t, o) \in \mathfrak{M}$,

$$h \xrightarrow{\mathfrak{S}\xi(w)} \mathbb{C} \in \mathcal{H}_{\rho(w)} = L^2(H/B(f(t, o)), \chi_{f(t, o)})$$

est donné par

$$\mathfrak{S}\xi(t, o)(h) = \int_{\mathbb{R}^c} \xi\left(h(u_1 Y_1(t, o) \dots u_c Y_c(t, o))(t_1 Z_{i_1} \dots t_d Z_{i_d})\right) \chi_{t, t}(u_1 Y_1(t, o) \dots u_c Y_c(t, o)) du.$$

$\textcircled{3}$ L'inverse de cet opérateur d'entrelacement est

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{-1} : L^2\left(\mathfrak{M}; \int_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\rho(w)} dw\right) &\longrightarrow L^2(G/B, \chi_i) \\ \eta &\longmapsto \mathfrak{S}^{-1}(\eta) \end{aligned}$$

qui a pour expression

$$\mathfrak{S}^{-1}(\eta) = T^{-1}(\zeta(\eta)), \quad \text{où}$$

- l'opérateur T^{-1} est donné dans la **remarque 3.1.3**,
- pour tout $\eta \in L^2\left(\mathfrak{W}; \int_{\mathfrak{W}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\rho(w)} dw\right)$, l'opérateur

$$\zeta(\eta) \in L^2(H \backslash G/B; \bigcup_{\tilde{g} \in H \backslash G/B} L^2(H/H \cap gBg^{-1}, \chi_{g,l}))$$

est défini en tout point $\tilde{g} = \tilde{\phi}_r(t) \in \tilde{U}, (t \in \mathcal{V})$, par :

$$\begin{array}{ccc} \zeta(\eta)(t) := \zeta(\eta)(\tilde{g}) & = & V^t(\xi_{\eta}^t) \in L^2(H/K^t, \chi_{t^t}) \\ H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ h & \longmapsto & (\zeta(\eta)(t))(h) \end{array}$$

- avec . V^t est l'inverse de U^t dont l'expression est donnée par la formule (3.1.6),
 et . où on définit $\xi_{\eta}^t \in L^2\left(\mathcal{O}^t; \bigcup_{o \in \mathcal{O}^t} L^2(H/B(f_{(o)}^t), \chi_{f_{(o)}^t})\right)$ sur l'ouvert

de Zariski non vide $\mathcal{O}^t := \left\{ o \in \mathbb{R}^i, (t, o) \in \mathfrak{W} \right\}$ de \mathbb{R}^i , par

$$\xi_{\eta}^t: \mathcal{O}^t \ni o \longmapsto \eta(t, o) \in L^2(H/B(f(t, o)), \chi_{f(t, o)}).$$

Donc $\zeta(\eta)(t)$ est la fonction de $L^2(H/K^t, \chi_{t^t})$ suivante :

$$\zeta(\eta)(t) : h \longmapsto \int_{\mathcal{O}^t} \left[\int_{\mathbb{R}^b} (\eta(t, o)) \left(h(u_1 U_1(t, o) \dots u_b U_b(t, o)) \right) \chi_{f(t, o)}(u_1 U_1(t, o) \dots u_b U_b(t, o)) du \right] do.$$

Démonstration.

La seule partie qui n'a pas été prouvée encore est le point ③ concernant l'inverse de l'opérateur \mathfrak{S} . Sa preuve découle immédiatement de la deuxième **remarque 3.1.10** et du **théorème 3.4** de [3].

■

3.2 Désintégration du produit tensoriel.

Dans cette partie, on va donner une solution au problème de la désintégration du produit tensoriel $\pi_1 \otimes \pi_2$ de deux représentations unitaires et irréductibles de G . Il s'agit donc d'une application directe du résultat précédent puisqu'il suffit de considérer

$$\mathbb{G} := G \times G$$

qui est un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe ayant

$$\mathcal{G} := \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$$

comme algèbre de Lie,

- la représentation unitaire et irréductible

$$\Pi := \pi_1 \times \pi_2$$

de \mathbb{G} , dont l'espace est le produit tensoriel (voir [22]) de ceux de π_1 et π_2 :

$$\mathcal{H}_\Pi = \mathcal{H}_{\pi_1} \hat{\otimes} \mathcal{H}_{\pi_2}.$$

$\pi_1 \otimes \pi_2$ est alors équivalente à la restriction de Π au sous-groupe fermé de \mathbb{G} , noté \mathbb{H} , formé par ses éléments diagonaux.

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \Pi|_{\Delta}, \quad \text{où } \Delta = \{(g, g), g \in G\} =: \mathbb{H}.$$

Grâce au **théorème 3.1.12**, on sait désintégrer cette restriction en des représentations unitaires et irréductibles du groupe \mathbb{H} qui s'identifie avec G .

3.2.1 Application de l'algorithme de désintégration.

Réalisons nos représentations π_1 et π_2 de G par

$$\pi_j = \pi_{(l_j, \mathfrak{b}_j)} = \text{ind}_{B_j}^G \chi_{l_j} \in \hat{G},$$

où pour $j = 1, 2$,

- \mathfrak{b}_j est une polarisation de \mathfrak{g} en $l_j \in \mathfrak{g}^*$,
- χ_{l_j} est le caractère sur $B_j = \exp(\mathfrak{b}_j)$ défini par

$$\chi_{l_j}(\exp X) = e^{-i\langle l_j, X \rangle}, \quad \forall X \in \mathfrak{b}_j.$$

Notons $l := (l_1, l_2)$ la forme linéaire sur $\mathcal{G} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qu'on définit par

$$l = (l_1, l_2) : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{Z} := (X, Y) & \longmapsto & \langle l, \mathbf{Z} \rangle = \langle l_1, X \rangle + \langle l_2, Y \rangle \end{array} \in \mathcal{G}^*.$$

Alors Π est la représentation unitaire et irréductible de \mathbb{G} , induite à partir du caractère

$$\chi_i(\exp \mathbf{Z}) = e^{-i\langle l, (X, Y) \rangle}, \quad \forall \mathbf{Z} = (X, Y) \in \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2,$$

du sous-groupe $\mathbb{B} := B_1 \times B_2 = \exp(\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)$, à \mathbb{G} :

$$\Pi = \pi_1 \times \pi_2 = \text{ind}_{B_1 \times B_2}^{G \times G} \chi_{(l_1, l_2)} \in \hat{\mathbb{G}}.$$

En fait, son espace $L^2(G \times G / B_1 \times B_2, \chi_{(l_1, l_2)})$ n'est autre que

$$L^2(\mathbb{G} / \mathbb{B}, \chi_i) = L^2(G / B_1, \chi_{l_1}) \hat{\otimes} L^2(G / B_2, \chi_{l_2}).$$

3.2.1.1 Notations et choix de la base pour \mathcal{G} .

Partant de la base de Jordan-Hölder $\mathcal{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ de \mathfrak{g} , on se propose de définir une "bonne" base de Jordan-Hölder $(\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{2n})$ de \mathcal{G} dans le sens qu'elle permet de

- construire une base de Jordan-Hölder

$$(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n) \text{ pour } \Delta_{\mathfrak{g}} := \{(Z, Z), Z \in \mathfrak{g}\} = \text{Lie}(\mathbb{H})$$

formée par des vecteurs de la base de \mathcal{G} ,

- déterminer facilement les indices $\mathbb{I}(\Delta_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)$ pour l'ensemble des double-classes $\mathbb{H} \backslash \mathbb{G} / \mathbb{B}$ en fonctions de $\mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1}$ et $\mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_2}$.

Un choix qui convient très bien est donnée par

$$\mathbf{Z}_i := \begin{cases} (Z_j, Z_j) & \text{si } i = 2j - 1 \text{ est impair,} \\ (Z_j, -Z_j) & \text{si } i = 2j \text{ est pair} \end{cases} \quad (j \in \{1, \dots, n\}).$$

La base de $\Delta_{\mathfrak{g}}$ est alors donnée par les $\mathbf{Y}_j := (Z_j, Z_j) = \mathbf{Z}_{2j-1}$, $j = 1, \dots, n$.

Notons enfin que la suite d'idéaux de \mathcal{G} qu'on obtient de cette base est

$$\mathcal{G}_{2n+1} := \{0\} \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{G}_{2j+1} = \text{vect} \langle \mathbf{Z}_{2j+1}, \dots, \mathbf{Z}_{2n} \rangle = \mathfrak{g}_{j+1} \times \mathfrak{g}_{j+1}$$

$$\subsetneq \mathcal{G}_{2j} = \text{vect} \langle \mathbf{Z}_{2j}, \mathbf{Z}_{2j+1}, \dots, \mathbf{Z}_{2n} \rangle = \mathfrak{g}_{j+1} \times \mathfrak{g}_{j+1} \oplus \mathbb{R}(Z_j, -Z_j)$$

$$\subsetneq \mathcal{G}_{2j-1} = \mathfrak{g}_j \times \mathfrak{g}_j \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{G}_1 = \text{vect} \langle \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{2n} \rangle = \mathcal{G}.$$

3.2.1.2 L'ensemble des double-classes.

Vu que $\mathbb{I}^{\mathfrak{g}/\Delta_{\mathfrak{g}}} = \{i \in \{1, \dots, 2n\}, \mathbf{Z}_i \notin \Delta_{\mathfrak{g}} + \mathcal{G}_{i+1}\} = \{2j, j = 1, \dots, n\}$,

alors $i \in \mathbb{I} = \mathbb{I}^{\mathfrak{g}/\Delta_{\mathfrak{g}}} \cap \mathbb{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}$ si et seulement si i est pair ($i = 2j$ avec $j \in \{1, \dots, n\}$), et vérifiant

$$\mathbf{Z}_i = (Z_j, -Z_j) \notin \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2 + \mathcal{G}_{i+1}.$$

Mais $\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2 + \mathcal{G}_{i+1} = (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{g}_{j+1}) \times (\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{g}_{j+1})$, et donc $\mathbb{I} = \{2j, j \in \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1} \cup \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_2}\}$.

Proposition 3.2.1

$$\mathbb{I}(\Delta_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2) = \{2j, j \in \mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)\}. \quad (3.2.1)$$

Démonstration.

Tout d'abord, gardons la notation \mathcal{U} pour l'ouvert de Zariski non vide de G où l'ensemble d'indices $\mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$ caractérisant l'ensemble des double-classes $B_1 \backslash G / B_2$ est donné par la formule (2.1.5)

$$\mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) = \{j \in \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1} \cap \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_2}, \forall g \in \mathcal{U}, Z_j \notin \mathfrak{b}_1 + \text{Ad}g\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{g}_{j+1}\}.$$

Il s'en suit que l'ensemble définit par

$$\mathbb{U} := \{(g_1, g_2) \in \mathbb{G}, g_1^{-1}g_2 \in \mathcal{U}\}$$

est un ouvert de Zariski non vide de \mathbb{G} . C'est lui qui nous permettra de définir l'ensemble d'indices $\mathbb{I}(\Delta_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)$ caractérisant $\mathbb{H} \backslash \mathbb{G} / \mathbb{B}$ par la formule analogue à (2.1.5) suivante :

$$\mathbb{I}(\Delta_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2) = \left\{ i \in \mathbb{I}, \forall (g_1, g_2) \in \mathbb{U}, \mathbf{Z}_i \notin \Delta_{\mathfrak{g}} + \text{Ad}(g_1, g_2) (\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2) + \mathcal{G}_{i+1} \right\}.$$

- Commençons par prouver l'inclusion " \supseteq " pour l'égalité (3.2.1).

Soit donc $j \in \mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$ et posons $i := 2j$ qui appartient déjà à \mathbb{I} puisqu'on sait que

$$\mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) \subseteq \mathcal{I} = \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1} \cap \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_2} \quad \text{et que} \quad \mathbb{I} = \{2j, j \in \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1} \cup \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_2}\}.$$

Il suffit alors de montrer que $\forall (g_1, g_2) \in \mathbb{U}$,

$$\mathbf{Z}_i = (Z_j, -Z_j) \notin \Delta_{\mathfrak{g}} + \text{Ad } g_1 (\mathfrak{b}_1) \times \text{Ad } g_2 (\mathfrak{b}_2) + \mathfrak{g}_{j+1} \times \mathfrak{g}_{j+1}, \quad (3.2.2)$$

ce qu'on prouve par absurde. Supposons qu'il existe une couple $(g_1, g_2) \in \mathbb{U}$ pour lequel (3.2.2) est fautive. Écrivons donc

$$(Z_j, -Z_j) = (Y, Y) + (\text{Ad } g_1 (X_1), \text{Ad } g_2 (X_2)) + (U, V)$$

pour certains vecteurs Y, X_1, X_2, U et V respectivement dans $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ et \mathfrak{g}_{j+1} .
La soustraction des deux égalités du système obtenu

$$\begin{cases} Z_j = Y + Ad_{g_1}(X_1) + U \\ -Z_j = Y + Ad_{g_2}(X_2) + V \end{cases}$$

permet de tirer que $Z_j = Ad_{g_1}\left(\frac{X_1}{2}\right) + Ad_{g_2}\left(\frac{-X_2}{2}\right) + \frac{U - V}{2}$.

Il est clair qu'en appliquant $Ad_{g_1^{-1}}$ et en regardant modulo \mathfrak{g}_{j+1} , la dernière égalité donne

$$\begin{aligned} Z_j &\equiv \frac{X_1}{2} + Ad_{(g_1^{-1}g_2)}\left(\frac{-X_2}{2}\right) \quad \text{mod } [\mathfrak{g}_{j+1}] \\ &\in \mathfrak{b}_1 + Ad_g(\mathfrak{b}_2) \quad \text{mod } [\mathfrak{g}_{j+1}] \end{aligned}$$

où $g := g_1^{-1}g_2 \in \mathcal{U}$ (par définition de \mathcal{U}). Ceci contredit le fait que $j \in \mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$.

- Pour l'autre inclusion : $\mathbb{I}(\Delta_g, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2) \subseteq \{2j, j \in \mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)\}$, partons d'un indice i du premier ensemble, il est donc pair ($i = 2j$), car on sait d'après ce qui précède que $\mathbb{I}(\Delta_g, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2) \subset \mathbb{I} \subset \{2j, j \in \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1} \cup \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_2}\}$.

Utilisons de nouveau un raisonnement par absurde. La formule (3.2.2) qui sera contredite provient de la définition même de $\mathbb{I}(\Delta_g, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)$. En effet, il existe un ouvert de Zariski non vide \mathcal{U}' de \mathbb{G} où on a

$$\forall (g_1, g_2) \in \mathcal{U}', (Z_j, -Z_j) \notin \Delta_g + Ad_{g_1}(\mathfrak{b}_1) \times Ad_{g_2}(\mathfrak{b}_2) + \mathfrak{g}_{j+1} \times \mathfrak{g}_{j+1}.$$

1^{ère} étape. Elle consiste à prouver tout d'abord que $j \in \mathcal{I} = \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1} \cap \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_2}$.

Supposons que ce n'est pas le cas, par exemple que $j \notin \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_2}$. Soit donc $X_2 \in \mathfrak{b}_2$ qui vérifie $Z_j - X_2 \in \mathfrak{g}_{j+1}$, et alors pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} Ad_g(Z_j) &\equiv Ad_g(X_2) \quad \text{mod } [\mathfrak{g}_{j+1}] \\ &\equiv Z_j \quad \text{mod } [\mathfrak{g}_{j+1}] \end{aligned}$$

Ainsi, on peut définir pour tout $g \in G$, un vecteur $U_g \in \mathfrak{g}_{j+1}$ de sorte que

$$Z_j = Ad_g(X_2) + U_g.$$

On peut maintenant tirer la contradiction en écrivant pour tout $(g_1, g_2) \in \mathcal{U}'$,

$$(Z_j, -Z_j) = (Z_j, Z_j) + (0, Ad_{g_2}(-2X_2)) + (0, -2U_{g_2}).$$

2^{ème} étape. Vu que $j \in \mathcal{I}$ (d'après l'étape 1), on a alors

$$j \notin \mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) \iff Z_j \in \mathfrak{b}_1 + \text{Ad}g\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{g}_{j+1}, \quad \forall g \in \mathcal{U},$$

c'est ce qu'on suppose.

Soit (g_1, g_2) un élément de l'ouvert de Zariski non vide de \mathbb{G} qu'on définit par $\mathcal{U}'' := \mathcal{U}' \cap \mathcal{U}$. Ainsi $g := g_1^{-1}g_2 \in \mathcal{U}$, on lui considère alors des vecteurs X_1, X_2 et U respectivement dans $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ et \mathfrak{g}_{j+1} tels que $Z_j = X_1 + \text{Ad}g(X_2) + U$.

D'où $\text{Ad } g_1(Z_j) \equiv \text{Ad } g_1(X_1) + \text{Ad } g_2(X_2) \pmod{[\mathfrak{g}_{j+1}]}$ et Z_j s'écrit alors

$$Z_j = \text{Ad } g_1(X_1) + \text{Ad } g_2(X_2) + V \quad \text{avec } V \in \mathfrak{g}_{j+1}.$$

Posons enfin $Y := -\text{Ad } g_1(X_1) + \text{Ad } g_2(X_2)$, on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} (Z_j, -Z_j) &= (Y, Y) + (\text{Ad } g_1(2X_1), \text{Ad } g_2(-2X_2)) + (V, -V) \\ &\in \Delta_{\mathfrak{g}} + \text{Ad } g_1(\mathfrak{b}_1) \times \text{Ad } g_2(\mathfrak{b}_2) + \mathfrak{g}_{j+1} \times \mathfrak{g}_{j+1} \end{aligned}$$

ce qui est impossible à cause de (3.2.2) puisque $(g_1, g_2) \in \mathcal{U}'$, et alors $j \in \mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$. ■

Notations.

1. Notons $\mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) =: \{j_1 < \dots < j_d\}$ et $\mathbb{I}(\Delta_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2) =: \{i_1, \dots, i_d\}$, ($i_k := 2j_k$). L'application qui lui correspond comme dans (2.1.6) est

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{G} = G \times G \\ (t_1, \dots, t_d) &\longmapsto t_1 \mathbf{Z}_{i_1} \dots t_d \mathbf{Z}_{i_d} = (t_1 Z_{j_1}, -t_1 Z_{j_1}) \dots (t_d Z_{j_d}, -t_d Z_{j_d}) \end{aligned}$$

Par suite, l'ouvert de Zariski de \mathbb{R}^d homéomorphe à celui de $\mathbb{H} \setminus \mathbb{G} / \mathbb{B}$ qu'on obtient du **théorème 2.1.9** est $\{t \in \mathbb{R}^d, \phi(t)^{-1}\phi(-t) \in \mathcal{U}\}$, où $\phi(t) = t_1 Z_{j_1} \dots t_d Z_{j_d}$ pour tout $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$. Son intersection avec $\{t \in \mathbb{R}^d, \phi(t) \in \mathcal{U}\}$, notée \mathcal{V} , est un ouvert de Zariski de \mathbb{R}^d valable à la fois pour $\mathbb{H} \setminus \mathbb{G} / \mathbb{B}$ et pour $B_1 \setminus G / B_2$.

2. Désignons par F la fonction rationnelle définie sur \mathcal{V} qui munit $\mathbb{H} \setminus \mathbb{G} / \mathbb{B}$ de sa mesure décrite dans le **théorème 2.2.10**.

3. Soit pour $t \in \mathcal{V}$, la forme linéaire sur \mathcal{G} , notée (l_1^t, l_2^{-t}) et définie par :

$$(l_1^t, l_2^{-t}) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longmapsto \langle \text{Ad}^* \phi(t)(l_1), X \rangle + \langle \text{Ad}^* \phi(-t)(l_2), Y \rangle \in \mathbb{R}.$$

Sa restriction sur $\Delta_{\mathfrak{g}}$ s'identifie alors avec $l^t := \text{Ad}^* \phi(t)(l_1) + \text{Ad}^* \phi(-t)(l_2) \in \mathfrak{g}^*$.

4. Si $t \in \mathcal{V}$, on pose

$$\mathfrak{b}_1^t \times \mathfrak{b}_2^{-t} := \text{Ad } \phi(t)(\mathfrak{b}_1) \times \text{Ad } \phi(-t)(\mathfrak{b}_2) =: \text{Lie}(B_1^t \times B_2^{-t})$$

qui est une polarisation de \mathcal{G} en (l_1^t, l_2^{-t}) , et on note $\mathfrak{k}^t \times \mathfrak{k}^t$ son intersection avec $\Delta_{\mathfrak{g}}$. C'est clair que \mathfrak{k}^t est la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} obtenue par l'intersection

$$\text{Ad } \phi(t)(\mathfrak{b}_1) \cap \text{Ad } \phi(-t)(\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{k}^t.$$

Donc les représentations de \mathbb{H} ,

$$\sigma(t) := \sigma(\mathbb{H} \cdot (g_1, g_2) \cdot \mathbb{B}) \quad \text{où } t \in \mathcal{V}, \quad \mathbb{H} \cdot (g_1, g_2) \cdot \mathbb{B} = \mathbb{H} \cdot (\phi(t), \phi(-t)) \cdot \mathbb{B}$$

qui apparaissent dans la première désintégration (3.1.2) comme on l'a énoncé dans le **théorème 3.1.2**, s'identifient aux représentations de G , -qu'on a notées $\sigma_{(t^t, \mathfrak{k}^t)}$ -, et qui sont induites à partir du caractère χ_{t^t} de $K^t = \exp(\mathfrak{k}^t)$. Ceci permet d'énoncer un premier théorème pour la désintégration du produit tensoriel $\pi_1 \otimes \pi_2$.

Théorème 3.2.2

$$\begin{aligned} \pi_1 \otimes \pi_2 &\simeq \int_{B_1 \backslash G / B_2}^{\oplus} \sigma(\tilde{g}) \, d\gamma(\tilde{g}) \\ &\simeq \int_{\mathcal{V}}^{\oplus} \sigma_{(t^t, \mathfrak{k}^t)} |F(t)| dt, \end{aligned}$$

où $\sigma_{(t^t, \mathfrak{k}^t)} = \text{ind}_{K^t}^G \chi_{t^t}$.

Démonstration.

On applique le **théorème 3.1.2** à la représentation Π du groupe G , restreinte au sous-groupe \mathbb{H} . L'étude ci-dessus donne immédiatement le résultat. ■

Remarque 3.2.3 Les formes linéaires $l^t = \text{Ad}^* \phi(t) (l_1) + \text{Ad}^* \phi(-t) (l_2)$ associées aux représentations $\sigma(\tilde{\phi}_r(t))$, $t \in \mathcal{V}$, appartiennent à $G \cdot l_1 + G \cdot l_2$. Ceci nous rassure puisque dans [11], Kirillov prouve que les représentations $\sigma \in \hat{G}$ qui apparaissent dans la désintégration du produit tensoriel $\pi_1 \otimes \pi_2$ correspondent aux orbites qui sont contenues dans la somme des orbites $\Omega_1 + \Omega_2$, où $\Omega_j := \Omega(\bar{\pi}_j) = G \cdot l_j$, $j = 1, 2$.

3.2.1.3 Les indices de non-saturation.

Rappelons que pour presque tous les $t \in \mathbb{R}^d$, on a la même base coexponentielle $\mathcal{Z}(\mathfrak{k}^t) := (Z_{j_1}, \dots, Z_{j_r})$ où les j_k sont les indices de $\mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}^t} = \{j \in \{1, \dots, n\}, Z_j \notin \mathfrak{k}^t + \mathfrak{g}_{j+1}\}$. Il est donc justifié de supposer la constance de cette base de Malcev de \mathfrak{g} relative à toutes les sous-algèbres \mathfrak{k}^t pour t dans \mathcal{V} . On note comme avant $\{(\mathfrak{k}^t)^k\}_{1 \leq k \leq r+1}$ la suite décroissante de sous-algèbres de Lie de \mathfrak{g} qui en résulte

$$(\mathfrak{k}^t)^{r+1} := \mathfrak{k}^t \subsetneq \dots \subsetneq (\mathfrak{k}^t)^k := \mathbb{R}Z_{j_k} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Z_{j_r} \oplus \mathfrak{k}^t \subsetneq \dots \subsetneq (\mathfrak{k}^t)^1 = \mathfrak{g}.$$

On cherche ensuite l'ensemble des indices de non-saturation. Il est aussi indépendant de $t \in \mathcal{V}$ et donné par $L = \{k \in \{1, \dots, r\}; d_k = d_{k+1}\} = \{k_1 < \dots < k_i\}$. Malheureusement, on peut pas avoir plus de précisions quant à ces indices qui dépendent des choix de polarisations. On recommande l'exemple suivant pour souligner cette dépendance.

3.2.1.4 Exemple.

Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie engendrée par $\langle Z_1, \dots, Z_7 \rangle$, avec les seuls crochets non nuls

$$\begin{aligned} [Z_1, Z_3] &= Z_7 & [Z_2, Z_3] &= Z_5 & [Z_2, Z_6] &= Z_7 \\ [Z_3, Z_4] &= -Z_6 & [Z_4, Z_5] &= Z_7 \end{aligned}$$

Il est clair que la base \mathcal{Z} formée par ces vecteurs dans cet ordre, est une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g} =: \text{Lie}(G)$. De plus, il est évident que le centre de \mathfrak{g} est $\mathfrak{z} = \mathbb{R}Z_7$ et que toute forme linéaire $f \in \mathfrak{g}^*$, non nulle sur \mathfrak{z} , a pour orbite $G \cdot f = \text{Ad}^*(G)f = f + \mathfrak{z}^\perp$.
Considérons une forme linéaire $l \in \mathfrak{g}^*$ ne s'annulant pas sur les vecteurs Z_7, Z_6 , ni Z_5 .

$$l = \sum_{i=1}^7 \alpha_i Z_i^*, \quad \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \in \mathbb{R}^*.$$

Son stabilisateur est alors réduit à \mathfrak{z} : $\mathfrak{g}(l) = \mathbb{R}Z_7$. Cependant, il y'a plusieurs polarisations de \mathfrak{g} en l , on en choisit $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ et \mathfrak{b}_4 données ci-dessous, et on note les représentations $\pi_i := \text{ind}_{B_i}^G \chi_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, qu'on distingue de leur classe d'équivalence dans l'ensemble des représentations unitaires et irréductibles notée $\pi_i \in \hat{G}$.

$$\mathfrak{b}_1 := \text{vect} \langle Z_7, Z_6, Z_5, Z_3 \rangle, \mathfrak{b}_2 := \text{vect} \langle Z_7, Z_4, Z_2, Z_1 \rangle, \mathfrak{b}_4 := \text{vect} \langle Z_7, Z_6, Z_4, Z_1 \rangle$$

et

$$\mathfrak{b}_3 := \text{vect} \langle Z_7, Z_6 + \alpha_6 Z_5 + \alpha_5 \alpha_6 Z_3 + \alpha_6 Z_2 + (1 + \frac{1}{\alpha_5}) Z_1, Z_5 + \alpha_5 Z_3 + Z_2 + \frac{1}{\alpha_6} Z_1, Z_4 + \alpha_6 Z_3 \rangle.$$

1. Désintégration de $\pi_1 \otimes \pi_2$.

Vu que $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}$, alors $\mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) = \emptyset$ et $B_1 \backslash G / B_2$ est trivial. Cette condition qui sera examinée dans la suite est évidemment nécessaire pour l'irréductibilité du produit tensoriel. Par contre, elle est insuffisante comme on le verra sur cet exemple. Ainsi, d'après le théorème précédent, on a

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \sigma_{(l^t, \mathfrak{k}^t)}, \quad t = 0, \quad \sigma_{(l^t, \mathfrak{k}^t)} = \text{ind}_{B_1 \cap B_2}^G \chi_{2l}.$$

La base de Malcev $\mathcal{Z}(\mathfrak{k}) := (Z_{j_1} = Z_1, \dots, Z_{j_r} = Z_6)$ de \mathfrak{g} relative à $\mathfrak{k} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 = \mathbb{R}Z_7$, donne la suite

$$\mathfrak{k}^{r+1} = \mathfrak{k} = \mathfrak{g}_7 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{k}^k := \mathbb{R}Z_{j_k} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Z_{j_r} \oplus \mathbb{R}Z_7 = \mathfrak{g}_k \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{k}^1 = \mathfrak{g},$$

et en calculant, -pour une forme linéaire $f \in \Gamma_{2l} = 2l + \mathfrak{k}^\perp = 2\alpha_7 Z_7^* + \mathbb{R}Z_6^* \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Z_1^*$, tous les stabilisateurs $\mathfrak{k}^k(f|_{\mathfrak{g}_k}) = \mathfrak{g}_k(f_k) = \{X \in \mathfrak{g}_k, \langle f, [X, \mathfrak{g}_k] \rangle = \{0\}\}$, $k = 1, \dots, 6$, on détermine l'ensemble des indices de non-saturation qui est

$$L = \{k \in \{1, \dots, 6\}, \mathfrak{g}_k(f_k) \not\subseteq \mathfrak{g}_{k+1} \quad \forall f \in \Gamma_{2l} \text{ en position générale} \}.$$

La calcul donne pour $f = 2\alpha_7 Z_7^* + \sum_{i=1}^6 \beta_i Z_i^* \in \Gamma_{2l}$, (où $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 6$), que

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g}_6(f_6) = \mathfrak{g}_6 & \not\subseteq \mathfrak{g}_7 \implies 6 \in L, \\ \mathfrak{g}_5(f_5) = \mathfrak{g}_5 & \not\subseteq \mathfrak{g}_6 \implies 5 \in L, \\ \mathfrak{g}_4(f_4) = \mathfrak{g}_6 & \subset \mathfrak{g}_5 \implies 4 \notin L, \\ \mathfrak{g}_3(f_3) = \text{vect} \langle Z_7, Z_6, Z_3 - \frac{\beta_6}{2\alpha_7} Z_5 \rangle & \not\subseteq \mathfrak{g}_4 \implies 3 \in L, \\ \mathfrak{g}_2(f_2) = \text{vect} \langle Z_7, Z_3 - \frac{\beta_6}{2\alpha_7} Z_5 + \frac{\beta_6}{2\alpha_7} Z_6 \rangle & \subset \mathfrak{g}_3 \implies 2 \notin L, \\ \mathfrak{g}(f) = \mathfrak{g}_7 & \subset \mathfrak{g}_2 \implies 1 \notin L. \end{array}$$

On en déduit que $L = \{k_1 = 3, k_2 = 5, k_3 = 6\}$ et que l'espace de désintégration \mathfrak{W} est l'ensemble des formes linéaires

$$f_{(o)} = 2l + \sum_{k_j \in L} o_j Z_{k_j}^*, \quad o = (o_1, o_2, o_3) \in \mathbb{R}^3$$

qui sont sur la même orbite $G \cdot 2l = \Gamma_{2l} = 2l + \mathfrak{z}^\perp =: \Omega(\pi_{2l})$.

Enfin, la formule (3.1.4) donnée par le théorème de (Baklouti-Ludwig). donne

$$\begin{aligned} \sigma_{(2l, \mathfrak{k})} &\simeq \int_{\mathfrak{W}}^{\oplus} \rho_f d\lambda^t(f^t) \\ &\simeq \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} \rho_{f_{(o)}} do \end{aligned}$$

où $\rho_{f_{(o)}} = \text{ind}_{B(f_{(o)})}^G \chi_{f_{(o)}} = \pi_{2l} \in \hat{G}$.

Utilisons en seconde étape les deux autres représententes de la classe de π_i , pour vérifier qu'on a toujours $\pi_i \otimes \pi_i \simeq \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} \pi_{2l} do$.

2. Désintégration de $\pi_3 \otimes \pi_4$.

Du fait que

$$- \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_3} = \{4, 5, 6\}, \mathcal{I}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_4} = \{2, 3, 5\} \text{ et donc } \mathcal{I} = \{5\}$$

- $Z_5 \notin \mathfrak{b}_3 + \text{Ad } g(\mathfrak{b}_4) + \mathfrak{g}_6 = \mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_4 = \text{vect} \langle Z_7, Z_6, Z_5 + Z_2, Z_4, Z_3, Z_1 \rangle \quad \forall g \in G$
 découle que $\mathcal{I}(\mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_4) = \{5\}$. Remarquons qu'on rencontre ici un cas particulier qu'on a déjà discuté, c'est que \mathfrak{b}_4 est un idéal de \mathfrak{g} , et donc l'ensemble des double-classes $B_3 \backslash G / B_4$ n'est autre que $B_3 B_4 \backslash G$ qui est homéomorphe (même difféomorphe) à \mathbb{R} , et $\tilde{\phi}_r(t) = B_3 \cdot tZ_5 \cdot B_4 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Ensuite, il faut calculer la fonction rationnelle $\mathbb{F} \in \mathbb{R}(X_1, \dots, X_d)$ qui donne la mesure sur $\mathbb{H} \backslash \mathbb{G} / \mathbb{B}$. Malheureusement, bien que cet ensemble de double-classes est caractérisé par les mêmes indices, le même ouvert de Zariski \mathcal{V} de \mathbb{R}^d , ils n'ont pas la même fonction qui définit leurs mesures. C'est ce qu'on peut mettre en évidence après le calcul suivant.

- Pour déterminer F qui donne la mesure sur $B_3 \setminus G / B_4$, "remarquons" que
 - $\mathfrak{b}_3 \cap Ad g (\mathfrak{b}_4) = \mathfrak{b}_3 \cap \mathfrak{b}_4 = vect < Z_7, Z_6 + \frac{1}{\alpha_5} Z_1 >$, il s'en suit que la base coexponentielle déterminant $B_3 / B_3 \cap B_4$ est donnée par (Y_{j_1}, Y_{j_2}) où

$$Y_{j_1} = Z_4 + \alpha_6 Z_3 \text{ et } Y_{j_2} = Z_6 + \alpha_6 (Z_5 + \alpha_5 Z_3 + Z_2) + (1 + \frac{1}{\alpha_5}) Z_1.$$
 - pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout couple $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$s_1 Y_{j_1} \cdot s_2 Y_{j_2} \cdot t Z_5 \cdot B_4 = s_2 \alpha_6 Z_2 \cdot s_1 \alpha_6 Z_3 \cdot (t + s_2 \alpha_6 - \frac{s_2^2 \alpha_6^2 \alpha_5}{2}) Z_5 \cdot B_4.$$
 - enfin, par un simple changement de variable, on justifie l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(s_2 \alpha_6 Z_2 \cdot s_1 \alpha_6 Z_3 \cdot (t + s_2 \alpha_6 - \frac{s_2^2 \alpha_6^2 \alpha_5}{2}) Z_5 \cdot B_4) ds_1 ds_2 \right) \alpha_6^2 dt =$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(w_2 Z_2 \cdot w_3 Z_3 \cdot w_5 Z_5 \cdot B_4) dw = \int_{G/B_4} \varphi(g \cdot B_4) dg,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(G/B_4)$.

Or, le premier membre de cette égalité n'est autre que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(s_1 Y_{j_1} \cdot s_2 Y_{j_2} \cdot t Z_5 \cdot B_4) ds_1 ds_2 \right) \alpha_6^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{B_3/B_3 \cap B_4} \varphi(h \exp(t Z_5) \cdot B_4) d\ddot{h} \right) |F(t)| dt$$

où on pose F la fonction rationnelle sur \mathbb{R} qui vaut la constante α_6^2 . Compte tenu du dernier membre de cette égalité, on en déduit que c'est $F = F_{(B_3, B_4)}$ la fonction qui définit la mesure sur $B_3 \setminus G / B_4$.

- Pour déterminer maintenant \mathbb{F} , il faut écrire l'égalité suivante, qui se justifie par la résolution d'un système provenant du passage des coordonnées de seconde espèce à celle de première espèce.

Pour tout $(s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, t) \in \mathbb{R}^6$, on a

$$s_2 Z_2 \cdot s_3 Z_3 \cdot s_4 Z_4 \cdot s_5 Z_5 \cdot s_6 Z_6 \cdot t Z_5 \cdot B_3 = w_4 Z_4 \cdot w_5 Z_5 \cdot w_6 Z_6 \cdot B_3$$

$$s_2 Z_2 \cdot s_3 Z_3 \cdot s_4 Z_4 \cdot s_5 Z_5 \cdot s_6 Z_6 \cdot (-t Z_5) \cdot B_4 = u_2 Z_2 \cdot u_3 Z_3 \cdot t' Z_5 \cdot B_4$$

$$\text{avec } \begin{aligned} (u_2, u_3, t') &= (s_2, s_3, s_5 - t) \\ w_4 &= s_4 - \frac{s_3 - s_2 \alpha_5}{\alpha_6} \\ w_5 &= s_5 + t - s_2 + \frac{s_2^2 \alpha_5}{2} \\ w_6 &= s_6 - s_3 s_4 + \frac{s_3^2}{2 \alpha_6} + \frac{(s_2 \alpha_5)^2}{2 \alpha_6} - \frac{s_2 \alpha_5}{\alpha_6} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

On se sert de ces égalités pour effectuer un changement de variables dans l'intégration d'une fonction $\Phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{G}/\mathbb{B})$:

$$\int_{\mathbb{R}^6} \Phi \left((s_2 Z_2 \cdot s_3 Z_3 \cdot s_4 Z_4 \cdot s_5 Z_5 \cdot s_6 Z_6 \cdot t Z_5, s_2 Z_2 \cdot s_3 Z_3 \cdot s_4 Z_4 \cdot s_5 Z_5 \cdot s_6 Z_6 \cdot (-t Z_5)) \cdot (B_3 \times B_4) \right) (ds_2 \dots ds_6) dt$$

qui n'est autre que

$$\int_{\mathbb{H} \setminus \mathbb{G} / \mathbb{B}} \left[\int_{\mathbb{H} / \mathbb{H} \cap \mathbb{B}} \Phi \left((h, h) (\exp(tZ_5), \exp(-tZ_5)) \cdot \mathbb{B} \right) d(h, h) \right] d\gamma(\mathbb{H} \cdot t(Z_5, -Z_5) \cdot \mathbb{B})$$

D'autre part, vu que la bijection $(s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, t) \mapsto (w_4, w_5, w_6, u_2, u_3, t')$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^6 dont le Jacobien est 1, alors en effectuant le changement de variable décrit par la formule (3.2.3) cette intégrale devient

$$\int_{\mathbb{R}^6} \Phi \left((w_4 Z_4, w_5 Z_5, w_6 Z_6, u_2 Z_2, u_3 Z_3, t' Z_5) \cdot (B_3 \times B_4) \right) dw_4 dw_5 dw_6 du_2 du_3 dt'$$

qui vaut

$$\int_{\mathbb{G} / \mathbb{B}} \Phi \left((g, g') \cdot \mathbb{B} \right) d(g, g'),$$

ce qui prouve que \mathbb{F} est la constante 1.

Passons enfin au résultat donné par le **théorème 3.2.2** qui se traduit par

$$\pi_3 \otimes \pi_4 \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \sigma_{(l^t, \mathfrak{k}^t)} |\mathbb{F}(t)| dt, \quad \text{avec}$$

$\sigma_{(l^t, \mathfrak{k}^t)} = \text{ind}_{K^t}^G \chi_{l^t}$, où on pose $l^t = \text{Ad}^* \exp(tZ_5)(l) + \text{Ad}^* \exp(-tZ_5)(l) = 2l$, et $\text{Lie}(K^t) = \mathfrak{k}^t = \text{Ad} \exp(tZ_5)(\mathfrak{b}_3) \cap \text{Ad} \exp(-tZ_5)(\mathfrak{b}_4) = \mathfrak{b}_3 \cap \mathfrak{b}_4 = \text{vect} \langle Z_7, Z_6 + \frac{1}{\alpha_5} Z_1 \rangle$.
Donc, si on note $\sigma = \text{ind}_K^G \chi_{2l}$ avec $K = B_3 \cap B_4$, alors

$$\pi_3 \otimes \pi_4 \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \sigma dt.$$

Enfin, on cherche les indices de non-saturations, on obtient que $L = \{k_1 = 5, k_2 = 6\}$ et on en déduit que

$$\sigma \simeq \int_{\mathbb{R}^2}^{\oplus} \pi_{2l} do.$$

Finalement, on retrouve la première expression de la désintégration de $\pi_l \otimes \pi_l$:

$$\pi_3 \otimes \pi_4 \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \sigma dt \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \left(\int_{\mathbb{R}^2}^{\oplus} \pi_{2l} do \right) dt \simeq \pi_1 \otimes \pi_2.$$

3.2.2 Critère d'irréductibilité du produit tensoriel.

Il est évident que l'étude faite dans cette section permet de tirer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\pi_{l_1} \otimes \pi_{l_2}$ soit irréductible est qu'il existe deux polarisations \mathfrak{b}_1 et \mathfrak{b}_2 de \mathfrak{g} , respectivement en l_1 et l_2 , qui satisfont aux deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) = \emptyset \\ \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \text{ est une polarisation de } \mathfrak{g} \text{ en } l_1 + l_2 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Proposition 3.2.4 Une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) = \emptyset$ est que $\mathfrak{b}_1 + \text{Ad}g\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}$ pour tout g dans un ouvert de Zariski non vide de G .

Démonstration.

La condition est suffisante par définition de $\mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$. Elle est aussi nécessaire. En effet, supposons que dans l'ouvert de Zariski non vide de G donné par $\mathcal{U}_{max} := \{g \in G, \dim(\mathfrak{b}_1 + \text{Ad}g\mathfrak{b}_2) \text{ est maximale}\}$, cette dimension est strictement inférieure à n , on la note $d_{max} < n$. On définit de même les ouverts de Zariski $(\mathcal{U}_j)_{1 \leq j \leq n}$ non vides de G par $\mathcal{U}_j := \{g \in G, \dim(\mathfrak{b}_1 + \text{Ad}g\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{g}_j) \text{ est maximale}\}$ et $(d_j)_{1 \leq j \leq n}$ les dimensions correspondantes. Il est clair que $d_1 = n \geq \dots > \dots \geq d_n = d_{max}$. Soit i l'indice maximal vérifiant $d_i = n$, donc $i < n$ et $d_{i+1} < n$. Il s'en suit que pour tout g dans l'ouvert de Zariski non vide $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_{i+1}$, on a $\mathfrak{b}_1 + \text{Ad}g\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{g}_{i+1} \subsetneq \mathfrak{g} = \mathfrak{b}_1 + \text{Ad}g\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{g}_i$ et par suite $Z_i \notin \mathfrak{b}_1 + \text{Ad}g\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{g}_{i+1}$, $\forall g \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_{i+1}$, ce qui implique que $i \in \mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$ et cet ensemble ne serait pas alors vide. ■

Corollaire 3.2.5

$$\mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) = \emptyset \quad \iff \quad \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}.$$

Démonstration. Il suffit de justifier que la condition $\mathfrak{b}_1 + \text{Ad}g\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}$ est vérifiée pour tout g dans un ouvert de Zariski \mathcal{U} non vide de G , si et seulement si elle est vraie dans G tout entier. On obtiendrait alors la première implication grâce à la proposition précédente, ($g := e$). Ensuite, pour l'autre sens, on se "déplace" sur l'orbite coadjointe de l_2 par l'action de $g \in G$. Ainsi, pour g quelconque dans G , la représentation

$$\pi_{g \cdot l_2} := \text{ind}_{B'_2}^G \chi_{g \cdot l_2} \simeq \pi_{l_2} \in \hat{G}, \quad \text{avec } B'_2 = gB_2g^{-1} = \exp(\text{Ad}g\mathfrak{b}_2),$$

dont le produit tensoriel avec π_{l_1} reste irréductible, permet de tirer que $\mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \text{Ad}g\mathfrak{b}_2) = \emptyset$, et en particulier $\mathfrak{b}_1 + \text{Ad}g\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}$, (grâce au 1^{er} sens appliqué à $\mathfrak{b}'_2 := \text{Lie}(B'_2) = \text{Ad}g\mathfrak{b}_2$).

En conclusion, tout ce qu'il faut prouver, c'est que $\mathfrak{b}_1 + \text{Ad}g\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}$, $\forall g \in G$, en supposant que \mathcal{U} est un ouvert de Zariski non vide de G où cette égalité est vraie. On utilise un argument topologique, c'est que le produit B_1B_2 est à la fois ouvert et fermé dans G :

- c'est un fermé comme produit de deux sous-groupes fermés connexes d'un groupe de Lie nilpotent,
- c'est un ouvert comme réunion quelconque d'ouverts qu'on précise ci-dessous.

Rappelons que l'étude de l'ensemble des double-classes (1^{er} paragraphe du second chapitre), traduit l'égalité $\mathfrak{b}_1 + Adg\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}$, $\forall g \in \mathcal{U}$, par le fait qu'on est dans le cas où on a une seule double-classe et qui est la même $\tilde{g} = B_1 \cdot g \cdot B_2 = B_1 \cdot x \cdot B_2$ pour tout $g \in \mathcal{U}$, (x fixé dans \mathcal{U}). On peut toujours se ramener au cas où le neutre de G est dans \mathcal{U} , ceci en conjugant B_2 par x et en travaillant avec $B'_2 = xB_2x^{-1}$. Donc on obtient $\tilde{g} = \tilde{e}$, $\forall g \in \mathcal{U}$. Ainsi, $\mathcal{U} \subseteq B_1B_2$.

On en tire que $B_1\mathcal{U}B_2 = \bigcup_{(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2} b_1\mathcal{U}b_2 \subseteq B_1B_2$.

L'autre inclusion étant une évidence, on vient justifier que B_1B_2 est aussi un ouvert. Enfin, puisqu'on est dans un connexe, $G = B_1B_2$. De nouveau, on se sert des résultats établis dans le paragraphe qui décrit l'ensemble des double-classes, plus précisément, comme conséquence de la **proposition 2.1.3**, l'intersection des ensembles \mathcal{W}_i qui donne

$$\{g \in G, \mathfrak{b}_1 + Ad g \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}\}$$

vérifie la propriété (\mathcal{P}_1) de stabilité par multiplication à droite avec des éléments de B_1 et à gauche avec des éléments de B_2 . Mais puisqu'il contient \mathcal{U} , alors il contient $B_1\mathcal{U}B_2 = G$, c'est donc G tout entier. ■

Une deuxième preuve pour la proposition consiste à utiliser le lemme suivant, ce qui nous aurait dispensés de revenir sur les résultats établis dans le second chapitre.

Lemme 3.2.6 Soient \mathfrak{b}_1 et \mathfrak{b}_2 deux sous-algèbres de Lie de \mathfrak{g} , et B_1 et B_2 leurs groupes respectifs. Alors on a $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}$ si et seulement si $B_1B_2 = G$.

Démonstration.

Le sens qui nécessite une preuve est " \Leftarrow ". Mais en supposant que $B_1B_2 = G$, on revient à $\mathcal{I}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) = \emptyset$, qui d'après la **proposition 3.2.4** est équivalent à l'existence de l'ouvert de Zariski \mathcal{U} non vide de G vérifiant $\mathfrak{b}_1 + Adg\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}$, $\forall g \in \mathcal{U}$. De nouveau grâce à l'implication directe, on a $\forall g \in \mathcal{U}$, $B_1(gB_2g^{-1}) = G$. En particulier, pour tout $g \in \mathcal{U}$, $G \ni g^{-1} = b_1(gb_2g^{-1})$ pour un certain couple $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$, et $g = b_1^{-1}b_2^{-1} \in B_1B_2$. On obtient que $\mathcal{U} \subseteq B_1B_2$ et puis, -par l'argument topologique précédent-, on en déduit que $B_1B_2 = G$. ■

Remarques 3.2.7

1. Par considération des classes d'équivalence des représentations unitaires et irréductibles de G , il est clair que si un choix de polarisations comme (3.2.4) existe, alors tout autre choix entraîne aussi la satisfaction de ces deux conditions.

2. La théorie de Kirillov qu'on a rappelée dans le **théorème 1.2.5**, permet d'énoncer le critère d'irréductibilité du produit tensoriel en sa version orbitale. En effet, on a

Proposition 3.2.8 Soient $\pi_1 := \bar{\pi}_{(l_1, \mathfrak{b}_1)}$, $\pi_2 := \bar{\pi}_{(l_2, \mathfrak{b}_2)} \in \hat{G}$ deux représentations unitaires et irréductibles de G . Notons $\Omega(\bar{\pi}_j) = G \cdot l_j$, ($j = 1, 2$), leurs orbites respectives pour l'action coadjointe. Alors l'irréductibilité du produit tensoriel $\pi_1 \otimes \pi_2$ implique que la somme des orbites est l'orbite de la somme. Autrement dit, s'il existe un choix de polarisations \mathfrak{b}_1 et \mathfrak{b}_2 de \mathfrak{g} , (respectivement en l_1 et l_2), tel que

$$\begin{cases} \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \text{ est une polarisation de } \mathfrak{g} \text{ en } l_1 + l_2 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

alors nécessairement

$$G \cdot l_1 + G \cdot l_2 = G \cdot (l_1 + l_2). \quad (3.2.5)$$

Démonstration.

On prouve l'implication "(3.2.4) \implies (3.2.5)" par récurrence sur la dimension de \mathfrak{g} . Dans le cas de l'algèbre de Lie abélienne de dimension 2, les orbites sont ponctuelles et le résultat est alors trivial. Supposons donc que l'implication considérée a lieu pour toute algèbre de Lie \mathfrak{h} de dimension strictement inférieure à n , ($n \geq 3$). On suppose que de telles polarisations \mathfrak{b}_1 et \mathfrak{b}_2 , de \mathfrak{g} respectivement en l_1 et l_2 , existent. Soit \mathfrak{h} un idéal de \mathfrak{g} de codimension 1, et contenant \mathfrak{b}_1 . (On évite le cas trivial où l'une des représentations est un caractère sur G , puisque le résultat devient évident). Écrivons $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}X$ où $X \in \mathfrak{g}(l_2) \setminus \mathfrak{h}$, ceci est possible et traduit la non-saturation de $G \cdot l_2$ par rapport à \mathfrak{h}^\perp , car sinon, on aurait que le stabilisateur de l_2 est inclus dans \mathfrak{h} , il s'en suit que la polarisation de Vergne \mathfrak{b}'_2 , de \mathfrak{g} en l_2 , relativement à une base de Jordan-Hölder passant par \mathfrak{h} , est aussi incluse dans \mathfrak{h} . Par conséquent $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}'_2 \subseteq \mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ contredisant ainsi que $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \hat{G}$. Notons qu'au niveau de \mathfrak{h} , on a les polarisations $\mathfrak{p}_1 := \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{p}_2 := \mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{b}_2$, respectivement en $f_1 := l_1|_{\mathfrak{h}}$, $f_2 := l_2|_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^*$, qui sont "convenables", c'est à dire

$$\begin{cases} \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{b}_1 + (\mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}, \\ \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \subseteq \mathfrak{h}, \text{ c'est donc une polarisation de } \mathfrak{h} \text{ en } f_1 + f_2 \end{cases} \quad (3.2.4)^\circ$$

Par hypothèse de récurrence, on en tire que $H \cdot f_1 + H \cdot f_2 = H \cdot (f_1 + f_2)$. La conclusion découle de [6] où on précise l'influence de la saturation des orbites sur la structure de leurs projections. En effet, ça permet de tirer

- de la saturation de l'orbite de l_1 , que $(G \cdot l_1)|_{\mathfrak{h}} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \exp(tX) \cdot (H \cdot f_1)$,
- de la non-saturation de l'orbite de l_2 , que $(G \cdot l_2)|_{\mathfrak{h}} = H \cdot f_2$.
- Mais on sait aussi que l'orbite de $l_1 + l_2$ est saturée, puisque $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \subseteq \mathfrak{h}$ est que c'est une polarisation de \mathfrak{g} en $l_1 + l_2$, d'où $G \cdot (l_1 + l_2)|_{\mathfrak{h}} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \exp(tX) \cdot (H \cdot (f_1 + f_2))$.

Avec l'hypothèse de récurrence, ces égalités permettent de montrer l'inclusion qui nécessite une preuve $G \cdot l_1 + G \cdot l_2 \subseteq G \cdot (l_1 + l_2)$, l'autre est évidente. Écrivons donc pour $j = 1, 2$, les formes linéaires $l_j = f_j + \alpha_j X^*$ où $\alpha_j \in \mathbb{R}$ et $f_j = l_j|_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^*$ est confondue avec une forme linéaire sur \mathfrak{g} . Soient aussi pour $j = 1, 2$, $g_j = \exp(t_j X) h_j \in G$, avec $(t_j, h_j) \in \mathbb{R} \times H$. Dans les égalités qui suivent, on justifie le passage à la seconde ligne par le fait que $X \in \mathfrak{g}(l_2)$ et celui à la troisième ligne par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} g_1 \cdot l_1 + g_2 \cdot l_2 &= \exp(t_1 X_1) \cdot (h_1 \cdot f_1) + \alpha_1 X^* + h_2 \cdot f_2 + \alpha_2 X^* \\ &= \exp(t_1 X_1) \cdot (h_1 \cdot f_1 + h_2 \cdot f_2) + \alpha_1 X^* + \alpha_2 X^* \\ &= \exp(t_1 X_1) \cdot (h \cdot (f_1 + f_2)) + (\alpha_1 + \alpha_2) X^*, \quad \text{pour un certain } h \in H, \\ &= \exp(t_1 X_1) \cdot (h \cdot (l_1 + l_2)) \in G \cdot (l_1 + l_2) \end{aligned}$$

■

Remarque 3.2.9 *La réciproque de l'implication précédente est fautive, comme on le voit sur le groupe de Heisenberg ($[X, Y] = Z$). En effet, bien que la somme de deux orbites est une orbite, (les orbites génériques sont les hyperplans $\Omega_\delta = \delta Z^* + \mathbb{R}Y^* + \mathbb{R}X^*$, $\delta \in \mathbb{R}$), le produit tensoriel est génériquement non irréductible. Faut-il donc ajouter une deuxième condition avec (3.2.5) pour obtenir l'équivalence ?*

Proposition 3.2.10 *Si on est dans les mêmes hypothèses que la proposition 3.2.8, alors l'irréductibilité du produit tensoriel $\pi_1 \otimes \pi_2$ implique que l'intersection des stabilisateurs est le stabilisateur de la somme. Cela veut dire que si \mathfrak{b}_1 et \mathfrak{b}_2 sont deux polarisations de \mathfrak{g} , (respectivement en l_1 et l_2), tel que*

$$\begin{cases} \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \text{ est une polarisation de } \mathfrak{g} \text{ en } l_1 + l_2 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

alors

$$\mathfrak{g}(l_1) + \mathfrak{g}(l_2) = \mathfrak{g}. \quad (3.2.6)$$

Démonstration.

Commençons par montrer que "(3.2.4) \implies $\mathfrak{g}(l_1) \cap \mathfrak{g}(l_2) = \mathfrak{g}(l_1 + l_2)$ ".

Vu que l'inclusion " \subseteq " est triviale, il suffit de vérifier que les dimensions sont égales. Notons les dimensions des sous-espaces vectoriels de \mathfrak{g} comme suit :

- $s_j := \dim \mathfrak{g}(l_j)$ et $p_j := \dim \mathfrak{b}_j = \frac{n + s_j}{2}$, $j = 1, 2$.
- $s := \dim \mathfrak{g}(l_1 + l_2)$ et $p := \dim (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) = \frac{n + s}{2}$ car $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ est une polarisation en $l_1 + l_2$ d'après (3.2.4).

En plus, comme $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}$, alors $p = p_1 + p_2 - n$ qui permet de tirer que $s = s_1 + s_2 - n$. Mais $n' := \dim(\mathfrak{g}(l_1) + \mathfrak{g}(l_2)) = s_1 + s_2 - s' \leq n$, où on pose $s' := \dim(\mathfrak{g}(l_1) \cap \mathfrak{g}(l_2))$, et donc $s \leq s'$. Or $\mathfrak{g}(l_1) \cap \mathfrak{g}(l_2) \subseteq \mathfrak{g}(l_1 + l_2)$, en particulier $s' \leq s$, et on conclut que $s = s'$ et que $\mathfrak{g}(l_1) \cap \mathfrak{g}(l_2) = \mathfrak{g}(l_1 + l_2)$. Enfin, pour déduire (3.2.6), réécrivons que $n' = \dim(\mathfrak{g}(l_1) + \mathfrak{g}(l_2)) = s_1 + s_2 - s' = s_1 + s_2 - s = n$. ■

Théorème 3.2.11 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\pi_{l_1} \otimes \pi_{l_2} \in \hat{G}$
2. il existe (et donc pour toutes) polarisations \mathfrak{b}_1 et \mathfrak{b}_2 , (respectivement en l_1 et l_2),

$$\begin{cases} \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \text{ est une polarisation de } \mathfrak{g} \text{ en } l_1 + l_2 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

3. les orbites coadjointes associées par la bijection de Kirillov à π_{l_1} et π_{l_2} vérifient

$$G \cdot l_1 + G \cdot l_2 = G \cdot (l_1 + l_2), \quad (3.2.5)$$

et la somme des stabilisateurs est \mathfrak{g} tout entière :

$$\mathfrak{g}(l_1) + \mathfrak{g}(l_2) = \mathfrak{g}. \quad (3.2.6)$$

Démonstration.

On a déjà prouvé que (1) \iff (2) \implies (3).

Pour montrer l'implication (3) \implies (1), on se réfère aux travaux de Corwin, Greenleaf et Fujiwara reliant les multiplicités des représentations qui apparaissent dans la désintégration de la restriction de $\pi \in \hat{G}$ à un sous-groupe fermé H de G , au nombre des H -orbites qui sont contenues dans $\Omega_G(\pi) \cap p^{-1}(\Omega_H(\sigma))$. La désintégration centrale canonique de $\pi|_H$, notée de manière générale par

$$\pi|_H \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} n_{\pi}(\sigma) \sigma \, d\nu(\sigma),$$

devrait s'écrire, -pour dire que le produit tensoriel est irréductible-, de la façon suivante

$$\begin{aligned} \pi_{l_1} \otimes \pi_{l_2} &\simeq \text{ind}_{B_1 \cap B_2}^{\Delta G} \chi_{(l_1, l_2)} =: \sigma_{(l_1, l_2)} \in \hat{\Delta G} \\ &\equiv \pi_{l_1 + l_2} \in \hat{G}. \end{aligned}$$

Il faut donc prouver seulement que la multiplicité $n_{\pi_{l_1} \times \pi_{l_2}}(\sigma_{(l_1, l_2)})$ est 1. En effet, du fait que $G \cdot l_1 + G \cdot l_2$ est une orbite, on sait déjà (voir **remarque 3.2.3**) que seule la représentation $\pi_{l_1 + l_2}$ associée à l'orbite de la somme, qui intervient dans la désintégration. D'après [5] et [8], cette multiplicité est le nombre des ΔG -orbites contenues dans

$$\Omega_{G \times G}(\pi_{l_1} \times \pi_{l_2}) \cap p^{-1}(\Omega_{\Delta G}(\sigma_{(l_1, l_2)})).$$

On rappelle que la projection p qui à une forme linéaire sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, associe sa restriction à la sous-algèbre diagonale, est donnée par

$$\begin{aligned} p : \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* &\longrightarrow (\delta \mathfrak{g})^* \equiv \mathfrak{g}^* \\ (f_1, f_2) &\longmapsto f_1 + f_2 \end{aligned}$$

d'où l'équivalence suivante

$$(f_1, f_2) \in \Omega_{G \times G}(\pi_{l_1} \times \pi_{l_2}) \cap p^{-1}(\Omega_{\Delta G}(\sigma_{(l_1, l_2)})) \iff \begin{cases} (f_1, f_2) \in G \cdot l_1 \times G \cdot l_2 \\ f_1 + f_2 \in \Delta G \cdot (l_1, l_2) \end{cases},$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \Omega_{G \times G}(\pi_{l_1} \times \pi_{l_2}) \cap p^{-1}(\Omega_{\Delta G}(\sigma_{(l_1, l_2)})) &= \{(g_1 \cdot l_1, g_2 \cdot l_2), \exists g \in G, g_1 \cdot l_1 + g_2 \cdot l_2 = g \cdot (l_1 + l_2)\} \\ &= G \cdot l_1 \times G \cdot l_2, \text{ car } G \cdot l_1 + G \cdot l_2 = G \cdot (l_1 + l_2). \end{aligned}$$

En plus, cette intersection contient une seule ΔG -orbite puisque si $(f_1, f_2) \in \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ est telle que sa ΔG -orbite soit contenue dans $G \cdot l_1 \times G \cdot l_2$, alors nécessairement elle est sur la ΔG -orbite de (l_1, l_2) . En effet,

- d'une part, $\Delta G \cdot (f_1, f_2) \subseteq G \cdot l_1 \times G \cdot l_2$. En particulier, il existe $(g_1, g_2) \in G \times G$, tel que $(f_1, f_2) = (g_1 \cdot l_1, g_2 \cdot l_2)$.
- D'autre part, d'après (3.2.6), on a $\mathfrak{g}(l_1) + \mathfrak{g}(l_2) = \mathfrak{g}$, et donc $G(l_1)G(l_2) = G$ grâce au **lemme 3.2.6**. Ainsi, il existe $(x_1, x_2) \in G(l_1) \times G(l_2)$, tel que $x := g_1^{-1}g_2 = x_1x_2^{-1}$. Par suite, $g := g_1x_1 = g_2x_2$ vérifie $(g, g) \cdot (l_1, l_2) = (g \cdot l_1, g \cdot l_2) = (g_1 \cdot l_1, g_2 \cdot l_2)$.

Finalement $(f_1, f_2) \in \Delta G \cdot (l_1, l_2)$. ■

Exemple 3.2.12 Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie engendrée par $\langle Z_1, \dots, Z_8 \rangle$, avec les seuls crochets non nuls

$$\begin{aligned} [Z_1, Z_2] &= Z_5 & [Z_2, Z_3] &= Z_6 \\ [Z_4, Z_1] &= Z_8 & [Z_3, Z_4] &= Z_7 \end{aligned}$$

On considère les formes linéaires $l_1 = Z_6^*, l_2 = Z_8^* \in \mathfrak{g}^*$, et les polarisations respectives

$$\mathfrak{b}_1 := \text{vect} \langle Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1 \rangle \quad \text{et} \quad \mathfrak{b}_2 := \text{vect} \langle Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2 \rangle.$$

Il est évident que la somme de ces deux polarisations (qui sont aussi des idéaux de \mathfrak{g}), est \mathfrak{g} tout entière. La première condition du critère d'irréductibilité (3.2.4) est alors satisfaite. Leur intersection est $\mathfrak{b} := \text{vect} \langle Z_8, Z_7, Z_6, Z_5, Z_3, Z_2 \rangle$ qui est une polarisation de \mathfrak{g} en $l_1 + l_2$. On en déduit que le produit tensoriel des représentations unitaires et irréductibles associées à ces formes linéaires est irréductible, c'est à dire $\pi_{l_1} \otimes \pi_{l_2} \in \hat{G}$.

Chapitre 4

Noyaux d'opérateur pour les représentations unitaires et irréductibles des groupes de Lie exponentiels.

Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel, connexe et simplement connexe. Une base de Malcev $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ de son algèbre de Lie \mathfrak{g} est fixée pour tout le chapitre.

4.1 Rappels de quelques résultats.

On a établi dans la proposition 1.3.1 que si $\pi = \text{ind}_B^G \chi_l$ est la représentation unitaire et irréductible de G , induite à partir du caractère χ_l associé à la forme linéaire $l \in \mathfrak{g}^$, de $B = \exp \mathfrak{b}$ à G , ($\mathfrak{b} \in \mathcal{P}_l$ est une polarisation de Pukanszky), alors l'expression du noyau de l'opérateur $\pi(f)$, quand $f \in L^1(G)$, est donnée par*

$$\mathcal{K}_\pi(f)(x, y) = \Delta_G^{-1}(y) \int_B \Delta_{G,B}(b)^{\frac{1}{2}} f(xby^{-1}) \chi_l(b) db, \quad \forall (x, y) \in G \times G.$$

4.1.1 Cas des groupes de Lie nilpotents.

Soit $\pi = \pi_{(l,b)} \in \hat{G}$, et soit pour tout $f \in L^1(G)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pi(f) : G \times G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \mathcal{K}_\pi(f)(x, y) = \int_B f(xby^{-1})\chi_l(b) db \end{aligned}$$

le noyau de l'opérateur $\pi(f)$.

Avant d'énoncer le résultat de Howe pour les groupes nilpotents, remarquons d'abord que la définition ci-dessous est indépendante de la base de Jordan-Hölder \mathcal{Z} considérée.

Définition 4.1.1 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G)$ est l'ensemble des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, qui s'indentifient à des fonctions $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \ni (z_1, \dots, z_n) \mapsto f(z_1 Z_1 \dots z_n Z_n) \in \mathbb{C}$, qui sont de Schwartz sur \mathbb{R}^n .

Ceci est aussi valable pour l'espace $\mathcal{S}(G/B \times G/B ; \chi_l)$ des fonctions $F : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$, vérifiant la relation de covariance (1.3.3) :

$$\mathcal{K}_\pi(f)(xb, yb') = \bar{\chi}_l(b)\chi_l(b')\mathcal{K}_\pi(f)(x, y), \quad \forall x, y \in G, \forall b, b' \in B,$$

et qui se confondent, -grâce au difféomorphisme \mathcal{D}_B -, avec des fonctions $\tilde{F} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$ définies par

$$\tilde{F}(w_1, \dots, w_p ; w'_1, \dots, w'_p) := F(w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p}, w'_1 Z_{k_1} \dots w'_p Z_{k_p}) \quad \forall w, w' \in \mathbb{R}^p. \quad (4.1.1)$$

Théorème 4.1.2 L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pi : \mathcal{S}(G) &\longrightarrow \mathcal{S}(G/B \times G/B ; \chi_l) \\ f &\longmapsto \mathcal{K}_\pi(f) \end{aligned}$$

est un épimorphisme continu et ouvert.

Démonstration.

Voir [10]. ■

4.1.2 Cas des groupes de Lie exponentiels.

La notion d'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G)$ n'as pas généralement de sens pour les groupes de Lie exponentiels, vu que si l'on définit comme ci-dessus pour les groupes de Lie nilpotents, on obtiendra un ensemble qui dépend de la base de Malcev choisie. Ceci n'est pas

l'unique raison qui empêche la généralisation du résultat de Howe, en effet, l'exemple suivant montre que la fonction F avec laquelle se confond le noyau de l'opérateur $\pi(f)$, n'est même pas une fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$ bien que $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$. Par conséquent, $\pi(f)$ n'est pas un opérateur compact.

4.1.2.1 Exemple.

Interressons-nous au groupe "ax + b" dont le seul crochet non nul de son algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}U \oplus \mathbb{R}V$ est $[U, V] = V$. On commence par distinguer l'influence sur la "définition" de $\mathcal{S}(G)$, de passer de la première base de Malcev $\mathcal{Z}_1 = (Z_1 := U, Z_2 := V)$ à la deuxième \mathcal{Z}_2 où on pose $(Z_1 := V, Z_2 := U)$.

Une fonction $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ s'identifie avec $f_1 : \mathbb{R}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto f_1(\alpha, \beta) := f(\alpha U. \beta V) \in \mathbb{C}$ (respectivement avec $f_2 : \mathbb{R}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto f_2(\alpha, \beta) := f(\alpha V. \beta U) \in \mathbb{C}$), par considération de la base \mathcal{Z}_1 , (respectivement par considération de \mathcal{Z}_2).

Et comme $\alpha V. \beta U = \beta U. e^{-\beta} \alpha V$, alors $f_2(\alpha, \beta) = f_1(\beta, e^{-\beta} \alpha)$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Il s'en suit qu'on a pas équivalence entre $f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Maintenant, on considère la forme linéaire $l := V^* \in \mathfrak{g}^*$, et $\mathfrak{b} = \mathbb{R}V$ la polarisation de Pukanszky de \mathfrak{g} en l . Son groupe de Lie $B = \exp \mathfrak{b}$ étant unimodulaire, on vérifie qu'on a alors $\Delta_{G/B} = \Delta_B \equiv 1$ puisque $\Delta_G(\exp(\alpha U + \beta V)) = e^{-\alpha}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il s'en suit que l'expression du noyau de $\pi(f)$, où $\pi := \pi(l, \mathfrak{b})$ et $f \in L^1(G)$, se réduit à

$$\mathcal{K}_\pi(f)(x, y) = \Delta_G^{-1}(y) \int_B f(xhy^{-1}) \chi_l(h) dh, \quad \forall x, y \in G. \quad (1.3.5)$$

Mais $\mathcal{K}_\pi(f)$ se confond avec l'application $F : \mathbb{R}^2 \ni (u, u') \mapsto \mathcal{K}_\pi(f)(\exp uU, \exp u'U) \in \mathbb{C}$ qui devient

$$\begin{aligned} F(u, u') &= \Delta_G^{-1}(\exp u'U) \int_{\mathbb{R}} f(uU. \lambda V. (-u'U)) e^{-i\langle l, \lambda V \rangle} d\lambda \\ &= e^{u'} \int_{\mathbb{R}} f(u - u', \lambda e^{u'}) e^{-i\lambda} d\lambda \\ &= e^{u'} \int_{\mathbb{R}} f(u - u', \lambda') e^{-i\lambda' e^{-u'}} e^{-u'} d\lambda' \\ &= \mathcal{F}_2 f(u - u', e^{-u'}). \end{aligned}$$

On en déduit que F ne possède pas forcément une limite nulle en l'infinie, et donc l'opérateur $\pi(f)$ n'est pas compact.

4.1.2.2 Les résultats de Ludwig et de Ludwig-Leptin.

Le problème de construire pour $\pi = \text{ind}_B^G \chi_l$ un rétracte \mathcal{R}_π , qui associe à une fonction $F \in \mathcal{S}(G/B \times G/B; \chi_l)$, la fonction $f \in L^1(G)$, de sorte que F soit le noyau de $\pi(f)$,

ne possède pas de solutions pour les groupes de Lie exponentiels. Il a fallu alors introduire les espaces $\mathcal{ES}(G/B \times G/B ; \chi_i)$ et $\mathcal{ES}(G)$ que Ludwig a caractérisés dans [15] par les conditions ci-dessous, pour prouver l'existence d'une telle application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_\pi : \mathcal{ES}(G/B \times G/B ; \chi_i) & \longrightarrow & \mathcal{ES}(G) \\ F & \longmapsto & \mathcal{R}_\pi(F) \end{array} \quad (4.1.2)$$

vérifiant $\mathcal{K}_\pi(\mathcal{R}_\pi(F)) = F$.

Définition 4.1.3 Une fois la base \mathcal{Z} est fixée, ainsi que la polarisation \mathfrak{b} et la base coexponentielle $\mathcal{Z}(\mathfrak{b}) = (Z_{k_1}, \dots, Z_{k_p})$ associée, on peut définir pour un choix de directions $\{j_1, \dots, j_m\} =: \mathcal{J}_\gamma$, avec $\gamma \in \{0, 1\}^{2p}$, l'espace $\mathcal{E}_\gamma \mathcal{S}(G/B \times G/B ; \chi_i)$. C'est l'espace vectoriel des fonctions $F : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$, vérifiant la relation de covariance (1.3.3) et s'identifiant par (4.1.1) à des fonctions \tilde{F} qui sont dans $\mathcal{E}_\gamma \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2p})$. De même se définit $\mathcal{E}_\delta \mathcal{S}(G)$ à partir de $\mathcal{E}_\delta \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si $\delta \in \{0, 1\}^n$.

Pour énoncer le résultat de Ludwig, mettons-nous dans le cadre de ses hypothèses où on suppose que la suite (1.1.1) provenant de la base \mathcal{Z} , passe par un idéal nilpotent \mathfrak{n} qui contient $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. (Par abus de langage, on dit que \mathcal{Z} passe par \mathfrak{n}).

$$\mathfrak{g}_{n+1} := \{0\} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{g}_i := \text{vect} \langle Z_i, \dots, Z_n \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{n} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}. \quad (4.1.3)$$

On suppose aussi que \mathfrak{b} est la polarisation de Vergne de \mathfrak{g} en l relative à cette base. Dans la définition de $\mathcal{E}_\delta \mathcal{S}(G)$, δ va jouer le rôle de l'ensemble des directions qui sortent de \mathfrak{n} , et cet espace sera noté $\mathcal{ES}(G, \mathfrak{n})$ ou tout simplement $\mathcal{ES}(G)$. Sans entrer dans les détails très techniques qui permettent de déterminer l'ensemble des directions γ , l'espace $\mathcal{ES}(G/B \times G/B ; \chi_i)$ est formé par les fonctions $F \in \mathcal{E}_\gamma \mathcal{S}(G/B \times G/B ; \chi_i)$, qui par n'importe quelle transformée de Fourier partielles $\mathcal{F}_{i_1, \dots, i_n} F$, suivant des directions bien précises, restent dans cet espace. Le résultat en sa version améliorée dans [14], se résume par le théorème suivant :

Théorème 4.1.4 Si \mathfrak{b} est la polarisation de Vergne de \mathfrak{g} en l relative à \mathcal{Z} , alors l'espace $\mathcal{ES}(G/B \times G/B ; \chi_i)$ est bien défini indépendamment de toute base de Malcev \mathcal{Z} passant par un idéal nilpotent \mathfrak{n} qui contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. En plus, toute fonction F de cet espace est le noyau d'un opérateur $\pi(f)$ où $f \in \mathcal{ES}(G)$. On construit enfin un rétracte continue comme dans (4.1.2).

Démonstration.

Voir [14].

■

4.1.2.3 Le résultat d'Andele.

On suppose qu'on a les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent, sauf qu'on n'impose pas à \mathfrak{b} d'être la polarisation de Vergne. Cette condition est trop forte, Andele généralise dans sa thèse [1] le **théorème 4.1.4** pour toute polarisation qui soit fortement adaptée à \mathfrak{n} . Une telle polarisation est définie comme suit :

Définition 4.1.5 Soit \mathfrak{n} un idéal nilpotent de \mathfrak{g} et contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. La polarisation \mathfrak{b} de \mathfrak{g} en $l \in \mathfrak{g}^*$, est dite fortement adaptée à \mathfrak{n} , s'il existe une base de Malcev \mathcal{Z} de \mathfrak{g} passant par \mathfrak{n} , et que si on a

- $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{n}$ est une polarisation de \mathfrak{n} en $l|_{\mathfrak{n}}$,
- \mathfrak{b} est $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})$ -invariante.

Souvent, on considère le nilradical de \mathfrak{g} , c'est l'idéal nilpotent maximal \mathfrak{m} , obtenu par la somme de tous les idéaux nilpotents de \mathfrak{g} .

4.1.2.4 Le "résultat" de Leptin.

Pour avoir un résultat semblable au cas des groupes de Lie nilpotents, où toute fonction $F \in \mathcal{S}(G/B \times G/B ; \chi_l)$ est le noyau d'un opérateur $\pi(f)$ avec $f \in \mathcal{S}(G)$, Leptin a traité dans [13] le cas particulier où la polarisation \mathfrak{b} est apprivoisée, en espérant que ça permettrait d'avoir, -pour les groupes de Lie exponentiels-, le résultat plus particulier suivant

$$\mathcal{C}_c^\infty(G/B \times G/B ; \chi_l) \subseteq \{\mathcal{K}_\pi(f), f \in L^1(G)\}. \quad (4.1.4)$$

La définition de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(G/B \times G/B ; \chi_l)$ s'obtient de façon analogue à celle de l'espace $\mathcal{S}(G/B \times G/B ; \chi_l)$ donnée après la **définition 4.1.1** pour les groupes de Lie nilpotents, (on y remplace \mathcal{S} par \mathcal{C}_c^∞ tout simplement). En fait, contrairement à l'espace des fonctions de Schwartz, la base coexponentielle $\mathcal{Z}(\mathfrak{b})$ servant à l'identification (4.1.1) de $\mathcal{C}_c^\infty(G/B \times G/B ; \chi_l)$ avec $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$ n'a pas d'influence sur la "bonne définition" de cet espace, vu que ses fonctions sont à supports compacts. Signalons enfin que Leptin a prouvé que la polarisation apprivoisée existe toujours, voici sa définition.

Définition 4.1.6 Soit \mathfrak{b} une polarisation de \mathfrak{g} en $l \in \mathfrak{g}^*$. Elle est dite apprivoisée, si c'est la polarisation de Vergne relativement à une base de Malcev \mathcal{Z} qui passe par le nilradical \mathfrak{m} de \mathfrak{g} , et qui passe aussi par un idéal \mathfrak{h} vérifiant :

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \mathfrak{g} &= \mathfrak{g}(l) + \mathfrak{h}, & (\beta) \quad \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{m}) &= \mathfrak{m} \\ (\gamma) \quad \forall X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}, & \operatorname{tr}(ad_{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}} X) &= 0. \end{aligned}$$

4.2 Un contre-exemple.

Malheureusement, ce dernier résultat est incorrect. En effet, l'inclusion (4.1.4) n'a pas lieu pour le groupe de Lie $G = \exp \mathfrak{g}$ de l'exemple ci-dessous, bien que les hypothèses de Leptin sont satisfaites.

4.2.1 La structure de \mathfrak{g} .

Soit l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \langle Z_1, \dots, Z_9 \rangle$ définie par les crochets non nuls suivants :

$$\begin{array}{lll} [Z_1, Z_7] = -Z_7 & [Z_2, Z_3] = -Z_3 & [Z_2, Z_4] = Z_4 \\ [Z_1, Z_8] = Z_8 & [Z_2, Z_5] = Z_5 & [Z_2, Z_6] = -Z_6 \\ [Z_1, Z_2] = Z_9 & [Z_3, Z_5] = Z_9 & [Z_4, Z_6] = Z_9 \end{array}$$

Sa base de Malcev $\mathcal{Z} = (Z_1, \dots, Z_9)$ est une base de Jordan-Hölder puisqu'elle définit la suite d'idéaux :

$$\mathfrak{g}_{10} = \{0\} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{g}_i := \text{vect} \langle Z_i, \dots, Z_9 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}.$$

Le groupe de Lie connexe et simplement connexe, $G = \exp \mathfrak{g}$ qui lui est associé, est alors complètement résoluble, exponentiel, de plus il est unimodulaire puisque la somme des racines est nulle.

4.2.2 $\mathfrak{m} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_3$.

Si on s'intéresse à l'idéal $\mathfrak{g}_3 = \langle Z_3, \dots, Z_9 \rangle$ de \mathfrak{g} , alors on remarque que

- cette algèbre de Lie est définie seulement par les crochets

$$[Z_3, Z_5] = Z_9 \quad [Z_4, Z_6] = Z_9$$

qui fait d'elle l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_2 = \langle Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_9 \rangle$ si on oublie Z_7 et Z_8 qui n'y jouent aucun rôle,

- c'est aussi l'idéal nilpotent maximal : $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_3$,
- enfin, on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_3$.

4.2.3 La polarisation \mathfrak{b} est apprivoisée.

Considérons maintenant la forme linéaire $l := Z_9^* \in \mathfrak{g}^*$, dont le stabilisateur est

$$\mathfrak{g}(l) = \langle Z_7, Z_8, Z_9 \rangle.$$

L'idéal \mathfrak{g}_5 étant abélien, on a $\mathfrak{g}_5(l_5) = \mathfrak{g}_5 = \langle Z_5, \dots, Z_9 \rangle$. Calculons le reste des stabilisateurs : $\mathfrak{g}_4(l_4) = \langle Z_5, Z_7, Z_8, Z_9 \rangle$, $\mathfrak{g}_3(l_3) = \langle Z_7, Z_8, Z_9 \rangle$ et $\mathfrak{g}_2(l_2) = \langle Z_2, Z_7, Z_8, Z_9 \rangle$, pour tirer que la polarisation de Vergne de \mathfrak{g} en l relativement à la base \mathcal{Z} est

$$\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{10} \mathfrak{g}_i(l_i) = \langle Z_2, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8, Z_9 \rangle.$$

Ensuite, il suffit de prendre $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}$ dans la **définition 4.1.6** pour conclure que \mathfrak{b} est une polarisation apprivoisée. En effet, le premier point est évident (les conditions (α) et (β) sont satisfaites). Le second point découle du fait que $B = \exp \mathfrak{b}$ est aussi unimodulaire, et donc $\Delta_{G|_B} = 1$. Par conséquent, on a (γ) :

$$\text{tr}(\text{ad}_{\mathfrak{g}|_{\mathfrak{b}}} X) = 0 = \text{tr}(\text{ad}_{\mathfrak{h}|_{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}}} X), \quad \forall X \in \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}. \quad (\mathfrak{h} = \mathfrak{g}).$$

4.2.4 Conventions et notations.

La représentation $\pi = \text{ind}_B^G \chi_1$ a pour espace $\mathcal{H}_\pi = L^2(G/B, \chi_1)$ qui s'identifie grâce à

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_B : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow G/B \\ x = (x_1, x_3, x_4) &\longmapsto x_1 Z_1 \cdot x_3 Z_3 \cdot x_4 Z_4 \cdot B \end{aligned}$$

avec $L^2(\mathbb{R}^3)$. Ceci en définissant l'application $\tilde{\xi} : x = (x_1, x_3, x_4) \longmapsto \xi(x_1 Z_1 \cdot x_3 Z_3 \cdot x_4 Z_4)$, pour tout $\xi \in L^2(G/B, \chi_1)$. On procède de la même façon pour identifier

- $C_c^\infty(G/B \times G/B ; \chi_1)$ avec $C_c^\infty(\mathbb{R}^6)$,

où toute fonction $F : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ qui, -en particulier-, vérifie la relation de covariance (1.3.3), se confond avec l'application $\tilde{F} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^6)$, tel que $\tilde{F}(x_1, x_3, x_4; y_1, y_3, y_4) := F(x_1 Z_1 \cdot x_3 Z_3 \cdot x_4 Z_4 ; y_1 Z_1 \cdot y_3 Z_3 \cdot y_4 Z_4)$.

- $L^1(G)$ avec $L^1(\mathbb{R}^9)$,

en posant $\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_9) := f(x_1 Z_1 \cdot x_2 Z_2 \dots x_9 Z_9)$, pour toute fonction f qui est intégrable sur G .

Par convention, dans les notations qui vont suivre, on ne fait plus la distinction entre \tilde{F} et F , ni entre \tilde{f} et f qui seront notées respectivement F et f .

4.2.5 Calcul du noyau.

Rappelons que dans ce cas particulier où $\Delta_{G|_B} = \Delta_B$, on a pour toute fonction $f \in L^1(G)$, l'expression (1.3.5) du noyau de l'opérateur $\pi(f)$, qui, -compte tenu du fait que G

est unimodulaire-, devient

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pi(f)(x, y) &= \int_B f(xby^{-1})\chi_1(b) db \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} f(x(t_2Z_2.t_5Z_5.t_6Z_6.t_7Z_7.t_8Z_8.t_9Z_9)y^{-1})e^{-it_9} dt. \end{aligned}$$

Effectuons ce calcul pour $(x := x_1Z_1.x_3Z_3.x_4Z_4 ; y := y_1Z_1.y_3Z_3.y_4Z_4) \in G \times G$, où $(x_1, x_3, x_4; y_1, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^6$. On obtient que les coordonnées du seconde espèces de $x(t_2Z_2.t_5Z_5.t_6Z_6.t_7Z_7.t_8Z_8.t_9Z_9)y^{-1} =: xbt_9y^{-1}$, sont données par

$$\Phi(xbt_9y^{-1}) = (x_1 - y_1, t_2, e^{t_2}x_3 - y_3, e^{-t_2}x_4 - y_4, t_5, t_6, e^{-y_1}t_7, e^{y_1}t_8, t_9 + y_1t_2 + y_4t_6 + y_3t_5)$$

et donc, l'expression du noyau devient

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pi(f)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^6} e^{-it_9} \\ & f(x_1 - y_1, t_2, e^{t_2}x_3 - y_3, e^{-t_2}x_4 - y_4, t_5, t_6, e^{-y_1}t_7, e^{y_1}t_8, t_9 + y_1t_2 + y_4t_6 + y_3t_5) \\ & dt_9 dt_8 dt_7 dt_6 dt_5 dt_2 \end{aligned}$$

Par le changement de variables $t'_9 := t_9 + y_1t_2 + y_4t_6 + y_3t_5$, cette intégrale devient

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pi(f)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^5} e^{i(y_1t_2 + y_4t_6 + y_3t_5)} \\ & \int_{\mathbb{R}} e^{-it'_9} f(x_1 - y_1, t_2, e^{t_2}x_3 - y_3, e^{-t_2}x_4 - y_4, t_5, t_6, e^{-y_1}t_7, e^{y_1}t_8, t'_9) dt'_9 \\ & dt_8 dt_7 dt_6 dt_5 dt_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{iy_1t_2} e^{iy_4t_6} e^{iy_3t_5} \\ & \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}_9 f(x_1 - y_1, t_2, e^{t_2}x_3 - y_3, e^{-t_2}x_4 - y_4, t_5, t_6, t'_7, t'_8, 1) dt'_8 dt'_7 \right) dt_6 dt_5 dt_2 \end{aligned}$$

où $t'_8 := e^{y_1}t_8$ et $t'_7 := e^{-y_1}t_7$, et donc $dt'_8 dt'_7 = dt_8 dt_7$.

On a de nouveau des transformées de Fourier partielles relativement aux 7^{ème} et 8^{ème} variables de f en 0, puis dans les directions des 5^{ème} et 6^{ème} variables, respectivement en $-y_3$ et $-y_4$. Finalement, on obtient

$$\mathcal{K}_\pi(f)(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{9,8,7,6,5} f(x_1 - y_1, t_2, e^{t_2}x_3 - y_3, e^{-t_2}x_4 - y_4, -y_3, -y_4, 0, 0, 1) e^{iy_1t_2} dt_2.$$

4.2.6 F n'est pas un noyau.

Considérons maintenant une application non nulle $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, choisie de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{supp}(\phi) \subset [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], \\ \phi \text{ est paire et positive,} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(u) du = \phi(0) = 1. \end{array} \right.$$

Posons $F := \otimes^6 \phi$, la fonction de $C_c^\infty(\mathbb{R}^6)$ définie par $F(z) = \phi(z_1) \dots \phi(z_6)$, $\forall z \in \mathbb{R}^6$. On va raisonner par absurde et supposer que la fonction de $C_c^\infty(G/B \times G/B; \chi_1)$ qui s'identifie à F , est le noyau $\mathcal{K}_\pi(f)$ pour une certaine fonction $f \in L^1(G)$. Du calcul précédent, on tire que pour tout $z = (x_1, x_3, x_4; y_1, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^6$, on a

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{9,8,7,6,5} f(x_1 - y_1, s, e^s x_3 - y_3, e^{-s} x_4 - y_4, -y_3, -y_4, 0, 0, 1) e^{iy_1 s} ds.$$

Donc, si $z' := (x_1 + y_1, x_3, x_4; y_1, -y_3, -y_4)$, alors son image par F est

$$\begin{aligned} F(z') &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{9,8,7,6,5} f(x_1, s, e^s x_3 + y_3, e^{-s} x_4 + y_4, y_3, y_4, 0, 0, 1) e^{iy_1 s} ds \\ &= \phi(x_1 + y_1) \phi(x_3) \phi(x_4) \phi(y_1) \phi(y_3) \phi(y_4), \end{aligned}$$

ceci est d'après l'expression de F et la parité de ϕ . Ensuite, vu que dans cette égalité, l'intégrale est une transformée de Fourier en $-y_1$ de la fonction qu'on note θ ,

$$\theta : s \longmapsto \mathcal{F}_{9,8,7,6,5} f(x_1, s, e^s x_3 + y_3, e^{-s} x_4 + y_4, y_3, y_4, 0, 0, 1),$$

et qui donne aussi la fonction de Schwartz : $t \longmapsto (\phi(x_3) \phi(x_4) \phi(y_3) \phi(y_4)) \phi(x_1 + t) \phi(t)$, alors on obtient θ par transformation de Fourier inverse :

$$\begin{aligned} \theta(y_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(-t) e^{ity_1} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \phi(x_3) \phi(x_4) \phi(y_3) \phi(y_4) \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1 + t) \phi(t) e^{ity_1} dt \\ &= \mathcal{F}_{9,8,7,6,5} f(x_1, y_1, e^{y_1} x_3 + y_3, e^{-y_1} x_4 + y_4, y_3, y_4, 0, 0, 1) \\ &= \mathcal{F}_{9,8,7,6,5} f(x_1, y_1, x_2, y_2, y_3, y_4, 0, 0, 1), \end{aligned}$$

avec $x_2 := e^{y_1} x_3 + y_3$ et $y_2 := e^{-y_1} x_4 + y_4$. En particulier, on peut définir sur \mathbb{R}^6 la fonction Θ par

$$\begin{aligned} \Theta(x_1, y_1, x_2, y_2, y_3, y_4) &= \mathcal{F}_{9,8,7,6,5} f(x_1, y_1, x_2, y_2, y_3, y_4, 0, 0, 1) \\ &= \frac{1}{2\pi} \phi(e^{-y_1}(x_2 - y_3)) \phi(e^{y_1}(y_2 - y_4)) \phi(y_3) \phi(y_4) \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1 + t) \phi(t) e^{ity_1} dt \end{aligned}$$

Or, $f \in L^1(\mathbb{R}^9)$, et donc

$$g : (x_1, y_1, x_2, y_2, y_3, y_4) \mapsto \mathcal{F}_{9,8,7} f(x_1, y_1, x_2, y_2, y_3, y_4, 0, 0, 1) \in L^1(\mathbb{R}^6),$$

mais, toujours par des transformations de Fourier inverses, on a

$$\begin{aligned} g(x_1, y_1, x_2, y_2, y_3, y_4) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \Theta(x_1, y_1, x_2, y_2, r, s) e^{iry_3} e^{isy_4} dr ds \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1 + t) \phi(t) e^{ity_1} dt \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^2} \phi(e^{-y_1}(x_2 - r)) \phi(e^{y_1}(y_2 - s)) \phi(r) \phi(s) e^{iry_3} e^{isy_4} dr ds \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1 + t) \phi(t) e^{ity_1} dt \\ &\quad \int_{\mathbb{R}} \phi(e^{-y_1}(x_2 - r)) \phi(r) e^{iry_3} dr \int_{\mathbb{R}} \phi(e^{y_1}(y_2 - s)) \phi(s) e^{isy_4} ds. \end{aligned}$$

Soit $E := \{z = (z_1, \dots, z_6) \in \mathbb{R}^6, |z_6| \leq e^{z_2}\}$, et soit $\mathbf{1}_E$ sa fonction caractéristique.

Posons $h := (2\pi)^3 |g| \mathbf{1}_E$ qui est alors dans $L^1(\mathbb{R}^6)$ puisque c'est le cas de g . En plus, il est facile de vérifier que

$$h(x_1, y_1, x_2, y_2, y_3, y_4) = \alpha \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1 + t) \phi(t) e^{ity_1} dt \right| \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(e^{-y_1}(x_2 - r)) \phi(r) e^{iry_3} dr \right|$$

$$\begin{aligned} \text{où } \alpha &= \mathbf{1}_E(x_1, y_1, x_2, y_2, y_3, y_4) \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(e^{y_1}(y_2 - s)) \phi(s) e^{-i(y_2-s)y_4} e^{iy_2 y_4} ds \right| \\ &\geq \mathbf{1}_E(x_1, \dots, y_4) \left| \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(e^{y_1}(y_2 - s)) \phi(s) e^{-i(y_2-s)y_4} ds \right) \right| \\ &\geq \mathbf{1}_{\{|y_4| \leq e^{y_1}\}}(x_1, \dots, y_4) \int_{\{s \in \mathbb{R}, |e^{y_1}(y_2-s)| \leq \frac{\pi}{4}\}} \phi(e^{y_1}(y_2 - s)) \phi(s) \cos(y_4(y_2 - s)) ds, \end{aligned}$$

car si $|y_4| \leq e^{y_1}$ et $|e^{y_1}(y_2 - s)| \leq \frac{\pi}{4}$, alors $|y_4(y_2 - s)| \leq \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos(y_4(y_2 - s)) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Ainsi, } \alpha =: \alpha(x_1, \dots, y_4) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_E(x_1, \dots, y_4) \int_{\mathbb{R}} \phi(e^{y_1}(y_2 - s)) \phi(s) ds.$$

L'application k définie sur \mathbb{R}^2 par

$$k(x_1, y_1) = \int_{\mathbb{R}^4} |h(x_1, y_1, x_2, y_2, y_3, y_4)| dx_2 dy_2 dy_3 dy_4$$

devrait être alors intégrable sur \mathbb{R}^2 car $h \in L^1(\mathbb{R}^6)$, elle vérifie aussi l'inégalité suivante :

$$k(x_1, y_1) \geq \beta(x_1, y_1) \gamma(x_1, y_1) \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1 + t) \phi(t) e^{ity_1} dt \right|$$

avec

$$\begin{aligned} \beta(x_1, y_1) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(e^{-y_1}(x_2 - r)) \phi(r) e^{iry_3} dr \right| dx_2 dy_3 \\ \gamma(x_1, y_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\{|y_4| \leq e^{y_1}\}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(e^{y_1}(y_2 - s)) \phi(s) ds \right) dy_2 \right) dy_4 . \end{aligned}$$

Détaillons l'expression des fonctions β et γ en fonction de la constante $c = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt > 0$.

$$\gamma = \frac{2e^{y_1}}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(e^{y_1} y_2) dy_2 \right) \phi(s) ds = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(y'_2) dy'_2 \right) \phi(s) ds = \sqrt{2} c^2 ,$$

$$\begin{aligned} \beta &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} \phi(e^{-y_1}(x_2 - r)) dx_2 \phi(r) e^{iry_3} dr dy_3 \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} \phi(x'_2) e^{y_1} dx'_2 \phi(r) e^{iry_3} dr dy_3 \right| \\ &\geq c \left| \int_{\mathbb{R}} e^{y_1} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(r) e^{iry_3} dr \right) dy_3 \right| = c e^{y_1} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(-y_3) dy_3 \right| = c e^{y_1} 2\pi \phi(0) = 2\pi c e^{y_1} . \end{aligned}$$

Par suite,

$$k(x_1, y_1) \geq 2\sqrt{2}\pi c^3 e^{y_1} \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1 + t) \phi(t) e^{ity_1} dt \right| ,$$

ça implique que la fonction

$$\left((x_1, y_1) \mapsto e^{y_1} \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1 + t) \phi(t) e^{ity_1} dt \right) \in L^1(\mathbb{R}^2) ,$$

entraînant que si on l'intègre par rapport à x_1 , on obtient une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, il s'agit de l'application

$$y_1 \mapsto e^{y_1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(x_1 - s) \phi(s) e^{-is y_1} ds \right) dx_1 = e^{y_1} c \hat{\phi}(y_1)$$

Finalement, la parité de ϕ , et donc de $\hat{\phi}$, permet de déduire de ce qui précède que

$$y_1 \mapsto e^{|y_1|} \hat{\phi}(y_1)$$

est dans $L^1(\mathbb{R})$, contredisant ainsi le lemme qui va suivre puisqu'on a supposé que $\phi \not\equiv 0$.

Lemme 4.2.1 Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Alors on a :

$$\Psi : t \mapsto e^{|t|} \hat{\psi}(t) \text{ est intégrable} \iff \psi \equiv 0 .$$

Démonstration.

Supposons que Ψ est intégrable.

Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $|b| < 1$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |s|) |e^{izs} \hat{\psi}(s)| ds < \infty .$$

On obtient donc une extension holomorphe $\tilde{\psi}$ de ψ sur tout le domaine $\mathcal{D} := \mathbb{R} + i] - 1, 1[$ de \mathbb{C} , définie par :

$$\tilde{\psi}(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izs} \hat{\psi}(s) ds \quad \forall z \in \mathcal{D} .$$

L'analyticité de $\tilde{\psi}$, qui coïncide avec ψ sur \mathbb{R} , et donc nulle sur un intervalle de \mathbb{R} de la forme $[a, +\infty[$, implique que ces deux applications sont identiquement nulles. ■

4.2.7 Conclusion.

En conclusion, il n'est pas suffisant que la représentation $\pi \in \hat{G}$, soit induite à partir d'une polarisation apprivoisée \mathfrak{b} de \mathfrak{g} en $l \in \mathfrak{g}^*$, pour que toute application $F \in C_c^\infty(G/B \times G/B ; \chi_l)$ soit le noyau $\mathcal{K}_\pi(f)$ d'un opérateur $\pi(f)$ pour une certaine fonction $f \in L^1(G)$. La prochaine section a pour but de rectifier ce résultat et de l'améliorer par la construction d'un rétracte, ceci est sous réserve de remplacer l'hypothèse "la polarisation est apprivoisée" par "la polarisation est un idéal de \mathfrak{g} ".

4.3 Cas où la polarisation est un idéal.

Soit $\pi = \text{ind}_B^G \chi_l$ la représentation unitaire et irréductible de G , induite à partir du caractère χ_l de B , qui est associé à la forme linéaire $l \in \mathfrak{g}^*$, et qu'on définit par

$$\chi_l(\exp X) = e^{-i\langle l, X \rangle}, \quad \forall X \in \mathfrak{b},$$

et tel que la polarisation $\mathfrak{b} = \text{Lie}(B)$ soit une polarisation de Pukanszky de \mathfrak{g} en l . Faisons référence à la section 1.3 où on a défini l'espace $C_c^\infty(G/B \times G/B ; \chi_l)$. L'objectif est de prouver que si $\mathfrak{b} =: \mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$ est un idéal de \mathfrak{g} , alors $C_c^\infty(G/P \times G/P ; \chi_l)$ est inclu dans l'ensemble des noyaux. On vient de prouver par le contre-exemple que ce n'est pas le cas si on suppose que la polarisation est seulement apprivoisée. Avant de généraliser notre résultat, il est utile de reprendre les calculs sur le même exemple ci-dessus, mais en choisissant une autre polarisation \mathfrak{p} qui sera un idéal de \mathfrak{g} .

4.3.1 Exemple.

Sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \text{vect} \langle Z_1, \dots, Z_9 \rangle$ définie dans le paragraphe 4.2.1, on considère toujours la forme linéaire $l = Z_9^*$, mais on choisit cette fois comme polarisation de Pukanszky de \mathfrak{g} en l , l'idéal $\mathfrak{p} := \langle Z_1, Z_3, Z_4, Z_7, Z_8, Z_9 \rangle$ de \mathfrak{g} . Soit $\pi = \text{ind}_P^G \chi_l \in \hat{G}$. Pour tout $f \in L^1(G)$, l'expression du noyau de $\pi(f)$ est :

$$\mathcal{K}_\pi(f)(x, y) = \int_P f(xhy^{-1})\chi_l(h) dh.$$

Si $x = x_2Z_2.x_5Z_5.x_6Z_6 \pmod{P}$ et $y = y_2Z_2.y_5Z_5.y_6Z_6 \pmod{P}$ alors ,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pi(f)(x, y) &= \int_P f(xhy^{-1})\chi_l(h) dh \\ &= \int_P f((x_2Z_2.x_5Z_5.x_6Z_6)h(y_2Z_2.y_5Z_5.y_6Z_6)^{-1})\chi_l(h) dh \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} f((x_2Z_2.x_5Z_5.x_6Z_6)(t_1Z_1.t_3Z_3.t_4Z_4.t_7Z_7.t_8Z_8.t_9Z_9)(y_2Z_2.y_5Z_5.y_6Z_6)^{-1})e^{-it_9} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} f(t_1, x_2 - y_2, e^{-y_2}t_3, e^{y_2}t_4, e^{y_2}(x_5 - y_5), e^{-y_2}(x_6 - y_6), t_7, t_8, t_9 - t_1x_2 - t_3x_5 - t_4x_6)e^{-it_9} dt \end{aligned}$$

ceci est en adoptant nos conventions et notations précisées dans la section 4.2.4, et suite au calcul qui donne

$$\begin{aligned} (x_2Z_2.x_5Z_5.x_6Z_6)(t_2Z_2.t_5Z_5.t_6Z_6.t_7Z_7.t_8Z_8.t_9Z_9)(y_2Z_2.y_5Z_5.y_6Z_6)^{-1} &= t_1Z_1.(x_2 - y_2)Z_2 \\ &\cdot e^{-y_2}t_3Z_3.e^{y_2}t_4Z_4.e^{y_2}(x_5 - y_5)Z_5.e^{-y_2}(x_6 - y_6)Z_6.t_7Z_7.t_8Z_8.(t_9 - t_1x_2 - t_3x_5 - t_4x_6)Z_9 \end{aligned}$$

Si on achève ce calcul comme on a fait précédemment dans la section 4.2.5 pour calculer le noyau, alors on obtient que $\mathcal{K}_\pi(f)(x_2, x_5, x_6; y_2, y_5, y_6) =$

$$\mathcal{F}_{9,8,7,4,3,1}f(x_2, x_2 - y_2, e^{y_2}x_5, e^{-y_2}x_6, e^{y_2}(x_5 - y_5), e^{-y_2}(x_6 - y_6), 0, 0, 1).$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(0) = 1$, et soit T l'opérateur qui "déforme" une application $F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^6)$ en $TF \in C_c^\infty(\mathbb{R}^9)$, de la façon suivante : pour tout $Z = (z_1, \dots, z_9) \in \mathbb{R}^9$,

$$TF(Z) = F(z_1, e^{z_2 - z_1}z_3, e^{z_1 - z_2}z_4, z_1 - z_2, e^{z_2 - z_1}(z_3 - z_5), e^{z_1 - z_2}z_4 - z_6)\phi(z_7)\phi(z_8)\phi(z_9 - 1).$$

Prouvons que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\pi : C_c^\infty(G/P \times G/P ; \chi_l) &\longrightarrow L^1(G) \\ F &\longmapsto \mathcal{R}_\pi(F) := (\mathcal{F}_{9,8,7,4,3,1})^{-1}(TF) \end{aligned}$$

est un rétracte, c'est à dire qu'elle vérifie

$$\mathcal{K}_\pi(\mathcal{R}_\pi(F)) = F, \quad \forall F \in C_c^\infty(G/P \times G/P ; \chi_l).$$

Soit $F \in C_c^\infty(G/P \times G/P ; \chi_i)$ qu'on identifie avec une fonction de $C_c^\infty(\mathbb{R}^6)$. On note f l'application de $L^1(G)$ qui se confond avec celle de $L^1(\mathbb{R}^9)$ définie en tout $Z \in \mathbb{R}^9$ par

$$f(Z) := (\mathcal{F}_{9,8,7,4,3,1})^{-1}(TF)(Z).$$

Il est clair que $f \in L^1(\mathbb{R}^9)$ puisque $TF \in C_c^\infty(\mathbb{R}^9)$. De plus, le calcul précédent donne

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pi(f)(x_2, x_5, x_6; y_2, y_5, y_6) &= \mathcal{F}_{9,8,7,4,3,1} f(x_2, x_2 - y_2, e^{y_2} x_5, e^{-y_2} x_6, e^{y_2}(x_5 - y_5), e^{-y_2}(x_6 - y_6), 0, 0, 1) \\ &= TF(x_2, x_2 - y_2, e^{y_2} x_5, e^{-y_2} x_6, e^{y_2}(x_5 - y_5), x_6 - y_6, 0, 0, 1) \\ &= F(x_2, x_5, x_6; y_2, y_5, y_6), \end{aligned}$$

$$d'où \mathcal{K}_\pi(f) = F.$$

4.3.2 Particularité de ce cas.

On suppose dans tout le reste de la section qu'il existe une polarisation de Pukanszky \mathfrak{p} de \mathfrak{g} en l , qui soit aussi un idéal de \mathfrak{g} . D'après l'expression (1.1.18) de $\Delta_{G,P}$ et la remarque qui l'a précédée, il est clair qu'on a $\Delta_{G,P} = 1$. Ainsi, pour toute fonction $f \in L^1(G)$, on a l'expression (1.3.5) du noyau de $\pi(f)$ qui, -pour presque tout $(x, y) \in G \times G^-$, est donnée par

$$\mathcal{K}_\pi(f)(x, y) = \Delta_G^{-1}(y) \int_P f(xhy^{-1}) \chi_l(h) dh.$$

Moyennant le changement de variable $u := yhy^{-1}$ dans l'intégrale ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pi(f)(x, y) &= e^{\text{tr}(\text{ad}_\mathfrak{g} \log y)} \int_P f(xy^{-1}u) \chi_l(y^{-1}uy) e^{-\text{tr}(\text{ad}_\mathfrak{g}(\log y)|_{\mathfrak{p}})} du \\ &= \delta(y) \int_P f(xy^{-1}u) \chi_{\text{Ad}^*y(l)}(u) du, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

où $\delta(\exp Y) := e^{\text{tr}(\text{ad}_\mathfrak{g} Y)} e^{-\text{tr}(\text{ad}_\mathfrak{g} Y|_{\mathfrak{p}})} = e^{\text{tr}(\text{ad}_\mathfrak{g} Y) - \text{tr}(\text{ad}_\mathfrak{p} Y)}$, $\forall Y \in \mathfrak{g}$.

Proposition 4.3.1 Pour tout $y \in G$, on a $\delta(y) = \delta(yb)$, $\forall b \in P$.

Démonstration.

Soient $y \in G$ et $b \in P$. D'une part, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pi(f)(x, yb) &= \chi_l(b) \mathcal{K}_\pi(f)(x, y) \\ &= \chi_l(b) \delta(y) \int_P f(xy^{-1}u) \chi_{\text{Ad}^*y(l)}(u) du. \end{aligned}$$

D'autre part, on peut écrire, -par définition de l'application δ -, que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pi(f)(x, yb) &= \delta(yb) \int_P f(xb^{-1}y^{-1}u) \chi_{Ad^*(yb)(l)}(u) du \\ &= \delta(yb) \int_P f(xy^{-1}w) \chi_{Ad^*(yb)(l)}(yby^{-1}w) dw, \end{aligned}$$

ceci est obtenu par le changement de variable $w := (yb^{-1}y^{-1})u$ qui reste dans P puisque c'est un sous-groupe distingué de G .

On remarque aussi que $Ad^*b(l_{|\mathfrak{p}}) = l_{|\mathfrak{p}}$, dû au fait que \mathfrak{p} stabilise $l_{|\mathfrak{p}}$, ($\langle l_{|\mathfrak{p}}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \rangle = \{0\}$). Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \chi_{Ad^*(yb)(l)}(yby^{-1}) &= \chi_{Ad^*y(l)}(\exp(Ad y (\text{Log } b))) \\ &= e^{-i\langle Ad^*y(l), Ad y (\text{Log } b) \rangle} = \chi_l(b), \end{aligned}$$

qui, -en la remplaçant dans l'intégrale précédente-, permet de déduire que $\delta(yb) = \delta(y)$. ■

Enfin, il est pratique de simplifier le problème en supposant que la polarisation \mathfrak{p} est abélienne. Il faut donc justifier qu'on ne perd pas de généralités avec cette supposition.

4.3.3 Un problème équivalent.

Notations.

1. De la formule de Jacobi, on peut tirer que la sous-algèbre de Lie $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ est aussi un idéal de \mathfrak{g} , notons $[P, P] := \exp([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}])$ son groupe de Lie qui est alors un sous-groupe fermé distingué de G .
2. Posons $\bar{G} = G/[P, P]$ et $\bar{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ son algèbre de Lie.
3. Du fait que \mathfrak{p} est subordonnée à l , on peut définir sur $\bar{\mathfrak{g}}$ la forme linéaire $\bar{l} \in \bar{\mathfrak{g}}^*$ par $\langle \bar{l}, \bar{X} \rangle := \langle l, X \rangle$, $\forall \bar{X} = X + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \in \bar{\mathfrak{g}}$.
4. Il s'en suit que $\bar{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ est une polarisation de Pukanszky, abélienne de $\bar{\mathfrak{g}}$ en \bar{l} .
5. Enfin, considérons la représentation unitaire et irréductible de \bar{G} , notée $\bar{\pi} = \text{ind}_P^{\bar{G}} \chi_{\bar{l}}$. Pour énoncer la proposition suivante, on se servira de la projection canonique $s : x \mapsto x \cdot [P, P]$, de G sur le groupe quotient \bar{G} .

Proposition 4.3.2 Les deux représentations π et $\bar{\pi} \circ s$ sont équivalentes dans l'ensemble des représentations unitaires et irréductibles de G .

Démonstration.

En remarquant que G/P et $\bar{G}/\bar{P} = (G/[P, P]) / (P/[P, P])$ sont isomorphes, il suffit de considérer l'opérateur \mathcal{U} ci-dessous, et de vérifier qu'il s'agit d'une isométrie qui entrelace ces deux représentations.

$$\mathcal{U} : \begin{matrix} L^2(G/P ; \chi_l) \\ \xi \end{matrix} = \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \begin{matrix} \mathcal{H}_{\bar{\pi}} = L^2(\bar{G}/\bar{P} ; \chi_l) \\ \mathcal{U}\xi =: \bar{\xi} \end{matrix} \quad \text{où } \bar{\xi}(\bar{x}) := \xi(x) \quad (4.3.2)$$

on voit alors que pour tout $\bar{x} \in \bar{G}/\bar{P}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\pi(g)\xi)(\bar{x}) &= \overline{\pi(g)\xi}(\bar{x}) = \pi(g)\xi(x) \\ &= \xi(g^{-1}x) = \bar{\xi}(\bar{g}^{-1}\bar{x}) \\ &= \bar{\pi}(\bar{g})(\bar{\xi})(\bar{x}), \end{aligned}$$

ce qui donne
$$\mathcal{U}(\pi(g)\xi) = (\bar{\pi} \circ s)(g) (\mathcal{U}\xi). \quad (4.3.3)$$

■

Notations.

1. Comme pour \mathcal{U} défini dans (4.3.2), soit \mathcal{V} l'extension sur $L^2(G/P \times G/P ; \chi_l)$ de l'opérateur

$$\begin{matrix} C_c^\infty(G/P \times G/P ; \chi_l) \\ F \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C_c^\infty(\bar{G}/\bar{P} \times \bar{G}/\bar{P} ; \chi_l) \\ \bar{F} \end{matrix}, \quad \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}) := F(x, y)$$

c'est aussi une isométrie pour le choix convenable des mesures $d_{\mu_{g/P}}(g \cdot P)$ sur G/P et $d_{\mu_{\bar{g}/\bar{P}}}(\bar{g} \cdot \bar{P})$ sur \bar{G}/\bar{P} , décrites dans (1.1.14).

2. Soit aussi $s : L^1(G) \ni f \mapsto \bar{f} \in L^1(\bar{G})$, l'épimorphisme canonique qui réalise

$$\forall f \in L^1(G), \quad \int_G f(g) dg = \int_{G/[P, P]} \bar{f}(\bar{g}) d\bar{g}.$$

Remarque 4.3.3 Pour $f \in L^1(G)$, il suffit de remplacer $\pi(f)$ par son expression donnée dans (1.3.1), pour trouver une formule analogue à (4.3.3), c'est

$$\mathcal{U}(\pi(f)\xi) = (\bar{\pi} \circ s)(f) (\mathcal{U}\xi). \quad (4.3.3)'$$

Avec ces notations et cette remarque, on peut prouver le théorème suivant :

Théorème 4.3.4 *Le diagramme suivant est commutatif,*

$$\begin{array}{ccc}
 L^1(G) & \xrightarrow{\mathbf{s}} & L^1(\bar{G}) \\
 \mathcal{K}_\pi \downarrow & & \downarrow \mathcal{K}_{\bar{\pi}} \\
 L^2(G/P \times G/P ; \chi_1) & \xrightarrow{\mathbf{v}} & L^2(\bar{G}/\bar{P} \times \bar{G}/\bar{P} ; \chi_1)
 \end{array} \quad (4.3.4)$$

Autrement dit, en partant de $f \in L^1(G)$, alors le noyau $\mathcal{K}_\pi(f)$ de l'opérateur $\pi(f)$ est lié à $\mathcal{K}_{\bar{\pi}}(\bar{f})$, (celui de $\bar{\pi}(\bar{f})$ où $\bar{f} = \mathbf{s}(f) \in L^1(\bar{G})$), par la relation

$$\mathcal{K}_{\bar{\pi}}(\bar{f}) = \overline{\mathcal{K}_\pi(f)} : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \mathcal{K}_\pi(f)(x, y).$$

Démonstration.

Soit $\tilde{\xi} \in \mathcal{H}_{\bar{\pi}}$, on doit montrer que

$$\bar{\pi}(\bar{f})\tilde{\xi}(\bar{x}) = \int_{\bar{G}/\bar{P}} \overline{\mathcal{K}_\pi(f)}(\bar{x}, \bar{y})\tilde{\xi}(\bar{y}) d(\bar{y} \cdot \bar{P}) \quad \forall \bar{x} \in \bar{G}.$$

Comme $\tilde{\xi} = \bar{\xi}$, où $\xi = \mathcal{U}^{-1}\tilde{\xi} \in \mathcal{H}_\pi$, alors

$$\begin{aligned}
 \bar{\pi}(\bar{f})\tilde{\xi}(\bar{x}) &= \bar{\pi} \circ \mathbf{s}(f)\mathcal{U}(\xi)(\bar{x}) \\
 &= \mathcal{U}(\pi(f)\xi)(\bar{x}) \quad \text{d'après (4.3.3)',} \\
 &= \pi(f)\xi(x) \\
 &= \int_{G/P} \mathcal{K}_\pi(f)(x, y)\xi(y) dy
 \end{aligned}$$

et c'est par définition de \mathcal{U} , -qui est une isométrie-, qu'on peut conclure. ■

Corollaire 4.3.5

$$\begin{array}{ccc}
 F \in C_c^\infty(G/P \times G/P ; \chi_1) & & \bar{F} \in C_c^\infty(\bar{G}/\bar{P} \times \bar{G}/\bar{P} ; \chi_1) \\
 \text{est le noyau } \mathcal{K}_\pi(f) \text{ de } \pi(f) & \iff & \text{est le noyau } \mathcal{K}_{\bar{\pi}}(\bar{f}) \text{ de } \bar{\pi}(\bar{f}) \\
 \text{pour } f \in L^1(G) & & \text{pour } \bar{f} \in L^1(\bar{G})
 \end{array}$$

Cela justifie notre supposition, dans tout le reste du paragraphe, que P est commutatif. En particulier, il sera identifié avec son algèbre de Lie \mathfrak{p} , et muni de la mesure de Lebesgue.

4.3.4 Lemme de la condition suffisante.

La représentation unitaire et irréductible $\pi = \text{ind}_P^G \chi_l$ de G , est supposée induite d'une polarisation de Pukanszky $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$ qui est aussi un idéal abélien de \mathfrak{g} . Toute base $\mathcal{X} = (X_1, \dots, X_m)$ est une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{p} \cong P \cong \mathbb{R}^m$ qui le munit de la mesure de Lebesgue :

$$\begin{aligned} \forall f \in C_c(P), \quad \mu_P(f) &= \int_P f(x) d\mu_P(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1 X_1 \dots x_m X_m) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(\exp(x_1 X_1 + \dots + x_m X_m)) dx. \end{aligned}$$

Notons $\Omega := \Omega(\pi) = G \cdot l$ l'orbite coadjointe de l , et Ω_0 sa restriction sur \mathfrak{p} .

$$\Omega_0 := \{Ad^*y(l)|_{\mathfrak{p}} = Ad^*y(l|_{\mathfrak{p}}) =: y \cdot l|_{\mathfrak{p}}, y \in G\} \subseteq \mathfrak{p}^*.$$

Remarques 4.3.6

1. Vu que \mathfrak{p} est une polarisation abélienne, en particulier elle stabilise $l|_{\mathfrak{p}}$, et donc on a que G/P et Ω_0 sont difféomorphes grâce à la bijection

$$\begin{aligned} \tilde{A}: G/P &\longrightarrow \Omega_0 \\ y \cdot P &\longmapsto y \cdot l|_{\mathfrak{p}} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

2. Le diagramme suivant nous servira à la fin de cette section,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \xrightarrow{A} & A(\mathbb{R}^p) \subseteq \mathbb{R}^m \\ \mathcal{D}_p \downarrow & & \uparrow c_{\mathfrak{p}^*} \\ G/P & \xrightarrow{\tilde{A}} & \Omega_0 \subseteq \mathfrak{p}^* \end{array} \quad (4.3.6)$$

dans lequel, si $w = (w_1, \dots, w_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, alors on a l'équivalence

$$A(w) = \alpha \quad \iff \quad w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p} \cdot l|_{\mathfrak{p}} = \alpha_1 X_1^* + \dots + \alpha_m X_m^*.$$

(L'identification de \mathfrak{p}^* avec \mathbb{R}^m est notée $C_{\mathfrak{p}^*}$, et permet de confondre $f = \alpha_1 X_1^* + \dots + \alpha_m X_m^* \in \mathfrak{p}^*$ avec ses coordonnées $C_{\mathfrak{p}^*}(f) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$).

3. On reviendra aussi sur la description de cette paramétrisation des orbites de l'action coadjointe du groupe exponentiel G sur \mathfrak{p}^* . Pour les détails de cette description, on fait référence à [17], d'où on peut tirer la lissité de A , ainsi que celle de son inverse. Il s'en suit enfin que $A(\mathbb{R}^p)$ est une sous-variété (lisse) de \mathbb{R}^m .

4.3.4.1 Les espaces $C_c^\infty(G/P \times \mathfrak{p}^*; \chi)$ et $CS(G/P \times \mathfrak{p}, G)$.

Définition 4.3.7 Introduisons l'espace $C_c^\infty(G/P \times \mathfrak{p}^*; \chi)$ formé par toutes les fonctions $\tilde{f} : G \times \mathfrak{p}^* \rightarrow \mathbb{C}$, qui satisfont aux propriétés suivantes :

- (i) \tilde{f} est infiniment dérivable sur $G \times \mathfrak{p}^*$,
- (ii) \tilde{f} vérifie la relation de covariance

$$\forall (x, q) \in G \times \mathfrak{p}^*, \quad \tilde{f}(xh, q) = \bar{\chi}_q(h) \tilde{f}(x, q), \quad \forall h \in P, \quad (4.3.7)$$

où χ_q est le caractère sur P associé à la forme linéaire $q \in \mathfrak{p}^*$:

$$\chi_q(\exp X) = e^{-i\langle q, X \rangle}, \quad \forall X \in \mathfrak{p}.$$

- (iii) \tilde{f} est à support compact dans $G/P \times \mathfrak{p}^*$.

Remarques 4.3.8

1. De façon naturelle, toute fonction $\tilde{f} \in C_c^\infty(G/P \times \mathfrak{p}^*; \chi)$ vérifie la deuxième relation de covariance suivante

$$\forall (x, q) \in G \times \mathfrak{p}^*, \quad \tilde{f}(x, Ad^*b(q)) = \tilde{f}(x, q), \quad \forall b \in P \quad (4.3.8)$$

puisque la commutativité de \mathfrak{p} entraîne sa stabilisation à toute forme linéaire $q \in \mathfrak{p}^*$.

2. Comme les espaces définis précédemment, et toujours grâce au difféomorphisme \mathcal{D}_P , on confond aussi $C_c^\infty(G/P \times \mathfrak{p}^*; \chi)$ avec $C_c^\infty(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m)$, en identifiant une fonction \tilde{f} du premier espace avec celle de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\left((w_1, \dots, w_p); (x_1, \dots, x_m) \right) \longmapsto \tilde{f}(w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p}, x_1 X_1^* + \dots + x_m X_m^*).$$

Notations. On va adopter des notations semblables à celles de la **définition 1.4.4**.

1. Pour $p, m \in \mathbb{N}$, tel que $p + m = n$, soit $CS(p, m, \mathbb{R}^n)$ le sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^n)$ formé par les fonctions de Schwartz qui sont à support compact dans les directions des p premières coordonnées.
2. Grâce à (1.1.16), on a le difféomorphisme \mathcal{O}_P qui identifie G avec $G/P \times \mathfrak{p}$, et qui a servi pour définir le 3^{ème} système de coordonnées sur G obtenu par Θ . Ceci permet l'extension de la définition de $CS(p, m, \mathbb{R}^n)$ pour le groupe G . On note alors $CS(G/P \times \mathfrak{p}, G)$ l'espace de toutes les fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, dont la composée par Θ^{-1} donne une fonction de $CS(p, m, \mathbb{R}^n)$.

$$CS(G/P \times \mathfrak{p}, G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \circ \Theta^{-1} \in CS(p, m, \mathbb{R}^n)\} \subset L^1(G).$$

3. L'opérateur de transformée de Fourier partielle inverse $\bar{\mathcal{F}}_{\mathfrak{p}^*}$ dans la direction de \mathfrak{p}^* , agit sur $\mathcal{C}_c^\infty(G/P \times \mathfrak{p}^*; \chi)$ par

$$\bar{\mathcal{F}}_{\mathfrak{p}^*} \tilde{f} : (x, U) \mapsto \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{\mathfrak{p}^*} \tilde{f}(x, q) e^{i\langle q, U \rangle} dq.$$

Conséquence.

On peut définir à partir de $\tilde{f} \in \mathcal{C}_c^\infty(G/P \times \mathfrak{p}^*; \chi)$, la fonction $f \in \mathcal{CS}(G/P \times \mathfrak{p}, G)$ par la formule

$$f(xu) := \bar{\mathcal{F}}_{\mathfrak{p}^*} \tilde{f}(x, \text{Log } u), \quad \forall x \in G, \forall u \in P. \quad (4.3.9)$$

En effet, tout ce qu'il faut vérifier, c'est que f est bien définie par cette expression, puisque la condition du support compact dans la direction de G/P et de Schwartz dans les autres, provient des propriétés de la transformation de Fourier qu'on a appliquée partiellement à une fonction de support compact.

Soient donc $x, y \in G$, $U, V \in \mathfrak{p}$, tels que $x \exp U = y \exp V$.

Posons $h := \exp(U - V) \in P$ qui est abélien, et donc $xh = x \exp U \exp(-V) = y$.

Ainsi, en se rappelant de la propriété de covariance (4.3.7), on obtient

$$\begin{aligned} f(y \exp V) = \bar{\mathcal{F}}_{\mathfrak{p}^*} \tilde{f}(y, V) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{\mathfrak{p}^*} \tilde{f}(yh, q) e^{i\langle q, V \rangle} dq \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{\mathfrak{p}^*} \bar{\chi}_q(h) \tilde{f}(x, q) e^{i\langle q, V \rangle} dq \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{\mathfrak{p}^*} e^{i\langle q, U - V \rangle} \tilde{f}(x, q) e^{i\langle q, V \rangle} dq \\ &= \bar{\mathcal{F}}_{\mathfrak{p}^*} \tilde{f}(x, U) = f(x \exp U). \end{aligned}$$

4.3.4.2 La condition suffisante.

Fixons $F \in \mathcal{C}_c^\infty(G/P \times G/P; \chi_l)$. Définissons sur $G \times \Omega_0$, la fonction \tilde{f}_0 par

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 : G \times \Omega_0 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y \cdot l_{\mathfrak{p}}) &\longmapsto \delta(y)^{-1} F(xy, y) \end{aligned}$$

Proposition 4.3.9 \tilde{f}_0 est bien définie, de classe \mathcal{C}^∞ et à support compact sur $G \times \Omega_0$ modulo P . De plus, elle vérifie la relation de covariance

$$\forall (x, y \cdot l_{\mathfrak{p}}) \in G \times \Omega_0, \quad \tilde{f}_0(xh, y \cdot l_{\mathfrak{p}}) = \bar{\chi}_{y \cdot l_{\mathfrak{p}}}(h) \tilde{f}_0(x, y \cdot l_{\mathfrak{p}}), \quad \forall h \in P. \quad (4.3.7)_0$$

On résume ces propriétés en écrivant $\tilde{f}_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(G/P \times \Omega_0; \chi)$.

Démonstration.

Pour que \tilde{f}_0 soit bien définie, il faut s'assurer que si dans Ω_0 , on a $y \cdot l_p = z \cdot l_p$, (qui, -d'après (4.3.5)-, est équivalent à $y \cdot P = z \cdot P$), alors $\tilde{f}_0(x, y \cdot l_p) = \tilde{f}_0(x, z \cdot l_p)$. Ceci provient en effet du fait que $F(xy, y) = F(xz, z)$ à cause de la relation de covariance (1.3.3) satisfaite par F , de plus, la **proposition 4.3.1** donne $\delta(y) = \delta(z)$ et permet de conclure la bonne définition de \tilde{f}_0 .

Ensuite, pour la relation de covariance, soient $x \in G$ et $y \cdot l_p \in \Omega_0$, alors pour tout $h \in P$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(xh, y \cdot l_p) &= \delta(y)^{-1} F(xhy, y) = \delta(y)^{-1} F((xy)(y^{-1}hy), y) \\ &= \delta(y)^{-1} \bar{\chi}_{l_p}(y^{-1}hy) F(xy, y) = \bar{\chi}_{y \cdot l_p}(h) \tilde{f}_0(x, y \cdot l_p). \end{aligned}$$

Enfin, prouver la lissité de \tilde{f}_0 , c'est se ramener à l'aide des cartes décrites dans (4.3.6) à la fonction $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \ni (w, v) \mapsto \delta(v_1 Z_{k_1} \dots v_p Z_{k_p})^{-1} F((w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p}), (v_1 Z_{k_1} \dots v_p Z_{k_p}))$ et d'en tirer qu'elle est C^∞ comme produit de fonctions lisses. La compacité du support de \tilde{f}_0 découle aussi de celle du support de F . En effet, soit K un compact de G vérifiant F est nulle "à l'extérieur" de $K \cdot P \times K \cdot P$, ou encore

$$\forall x, y \in G, (x \cdot P \cap K = \emptyset \text{ ou } y \cdot P \cap K = \emptyset) \implies F(x, y) = 0.$$

Il est évident que le sous-ensemble $K' := \{x \in G, K \cap x^{-1} \cdot K \neq \emptyset\}$ est un compact de G , en effet, ce n'est rien autre que $\{y^{-1}z, (y, z) \in K \times K\} = K^{-1}K$. Du fait que P est distingué découle aussi que $K'P = KPK^{-1} = \{x \in G, K \cap x^{-1}K \cdot P \neq \emptyset\}$, c'est donc un compact de G/P . Sa particularité est qu'on a si $(x, y) \in G \times G$ tel que $x \cdot P \cap K' = \emptyset$ ou $y \cdot P \cap K = \emptyset$, alors $\tilde{f}_0(x, y) = 0$, en effet

- Si $y \cdot P \cap K = \emptyset$, alors $F(xy, y) = 0$ et donc $\tilde{f}_0(x, y) = 0$.
- Sinon, c'est $x \cdot P \cap K' = \emptyset$, et il existe $b \in P$ tel que $yb =: c \in K$.

Raisonnons par absurde, si on suppose que $xy \cdot P \cap K \neq \emptyset$, alors on pourrait écrire $xyh =: d \in K$ pour un certain $h \in P$. La contradiction apparait dès qu'on remplace $c = yb = x^{-1}dh^{-1}b \in x^{-1}KP \cap K \neq \emptyset \implies x \in K'P$ (faux car $x \cdot P \cap K' = \emptyset$).

Ainsi, $xy \cdot P \cap K = \emptyset$, et par suite $F(xy, y) = 0 = \tilde{f}_0(x, y)$.

En conclusion, $\text{supp}(\tilde{f}_0) \subset K'P \times KP$, (compact de $G/P \times G/P$).

■

Lemme 4.3.10 Soit $\tilde{f} \in C_c^\infty(G/P \times \mathfrak{p}^*; \chi)$, et soit $f \in \mathcal{CS}(G/P \times \mathfrak{p}, G)$ comme (4.3.9). Si pour tout $x \in G$ et pour tout $y \cdot l_p \in \Omega_0$, on a $\tilde{f}_0(x, y \cdot l_p) = \tilde{f}(x, y \cdot l_p)$, alors le noyau de $\pi(f)$ est $\mathcal{K}_\pi(f) = F$. Autrement dit, on a

$$\tilde{f}|_{G \times \Omega_0} = \tilde{f}_0 \implies F = \mathcal{K}_\pi(f). \tag{4.3.10}$$

Démonstration.

Supposons que la condition $\tilde{f}|_{G \times \Omega_0} = \tilde{f}_0$ est vérifiée.

D'après (4.3.1), l'expression du noyau de $\pi(f)$ en $(x, y) \in G \times G$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pi(f)(x, y) &= \delta(y) \int_P f(xy^{-1}u) \chi_{Ad^*y(l)}(u) du \\ &= \delta(y) \int_{\mathfrak{p}} f(xy^{-1} \exp U) e^{-i \langle Ad^*y(l), U \rangle} dU \\ &= \delta(y) \int_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{p}^*} \tilde{f}(xy^{-1}, U) e^{-i \langle Ad^*y(l_{|\mathfrak{p}}), U \rangle} dU. \end{aligned}$$

Le dernier passage est justifié par la formule (4.3.9). Enfin, par transformée de Fourier d'une transformée de Fourier inverse, on aboutit à ce que

$$\mathcal{K}_\pi(f)(x, y) = \delta(y) \tilde{f}(xy^{-1}, Ad^*y(l_{|\mathfrak{p}})),$$

mais \tilde{f} coïncide avec \tilde{f}_0 sur $G \times \Omega_0$, et donc

$$\mathcal{K}_\pi(f)(x, y) = \delta(y) \tilde{f}_0(xy^{-1}, Ad^*y(l_{|\mathfrak{p}})) = \delta(y) \left(\delta(y)^{-1} F((xy^{-1})y, y) \right) = F(x, y).$$

■

On se rend compte maintenant de l'utilité de la **proposition 4.3.9**, puisque \tilde{f}_0 avec ses propriétés de lissité, de compacité du support modulo P , et de covariance, est un bon candidat pour avoir une extension en une fonction $\tilde{f} \in C_c^\infty(G/P \times \mathfrak{p}^*; \chi)$.

4.3.5 Théorème du rétracte.

On a établi dans le **lemme 4.3.10** la suffisance de la condition que \tilde{f}_0 admet une extension $\tilde{f} \in C_c^\infty(G/P \times \mathfrak{p}^*; \chi)$, pour que F soit un noyau, et dans ce cas, on a la formule (4.3.9) qui nous procure la fonction $f =: \mathcal{R}_\pi(F) \in \mathcal{CS}(G/P \times \mathfrak{p}, G)$ réalisant $\mathcal{K}_\pi(f) = F$. On va prouver dans ce qui suit, que cette condition est toujours réalisée.

4.3.5.1 Construction de l'extension.

Le but de ce paragraphe est de prouver que toute fonction de $C_c^\infty(G/P \times \Omega_0; \chi)$ se prolonge en une fonction de $C_c^\infty(G/P \times \mathfrak{p}^*; \chi)$. Soit donc $F \in C_c^\infty(G/P \times G/P; \chi_1)$ et

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 : G \times \Omega_0 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y \cdot l_{|\mathfrak{p}}) &\longmapsto \delta(y)^{-1} F(xy, y) \end{aligned} \quad \in \quad C_c^\infty(G/P \times \Omega_0; \chi).$$

Rappelons le diagramme (4.3.6)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \xrightarrow{A} & A(\mathbb{R}^p) \subseteq \mathbb{R}^m \\ \mathcal{D}_p \downarrow & & \uparrow c_{p^*} \\ G/P & \xrightarrow{\bar{A}} & \Omega_0 \subseteq \mathfrak{p}^* \end{array}$$

qui paramétrise l'orbite $\Omega_0 = \{y \cdot l_p, y \in G\} \subseteq \mathfrak{p}^*$, par la sous-variété différentiable de \mathbb{R}^m décrite par

$$\mathcal{M} := \left\{ A(w) =: (A^1(w), \dots, A^m(w)), w \in \mathbb{R}^p \right\},$$

où les applications $A^j \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$, pour tout $1 \leq j \leq m$.

Un élément $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^m$, correspond à $q_\alpha = \alpha_1 X_1^* + \dots + \alpha_m X_m^* \in \Omega_0$, qui provient de l'action coadjointe d'un élément unique de la forme $w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p} \in G$, sur l_p . Ainsi, on a l'équivalence $A(w) = \alpha \iff w_1 Z_{k_1} \dots w_p Z_{k_p} \cdot l_p = \alpha_1 X_1^* + \dots + \alpha_m X_m^*$.

Tout d'abord, fixons une forme linéaire $q^\circ =: \alpha_1^\circ X_1^* + \dots + \alpha_m^\circ X_m^* = w_1^\circ Z_{k_1} \dots w_p^\circ Z_{k_p} \cdot l_p \in \Omega_0$. Pour construire un prolongement de \tilde{f}_0 , - en première étape -, dans un voisinage V° de $q^\circ \equiv \alpha^\circ = (\alpha_1^\circ, \dots, \alpha_m^\circ)$ dans \mathbb{R}^m , énonçons la proposition suivante.

Proposition 4.3.11 Soit \mathcal{M} une sous-variété différentiable d'une variété \mathcal{N} , (de dimensions notées $\dim(\mathcal{M}) =: p$ et $\dim(\mathcal{N}) =: m$). Soit $\alpha^\circ \in \mathcal{M}$. Alors il existe un système de coordonnées $C = (C^1, \dots, C^m)$ valable dans un voisinage V° de α° dans \mathcal{N} , tels que $C^1(\alpha^\circ) = \dots = C^m(\alpha^\circ) = 0$, et tel que

$$U^\circ := \{ \alpha \in V^\circ, C^{p+1}(\alpha) = \dots = C^m(\alpha) = 0 \}$$

avec les restrictions de (C^1, \dots, C^p) sur U° , forment un atlas de cartes locales de \mathcal{M} contenant α° .

Démonstration.

Il s'agit de la proposition 3.2 (P. 23), de [18]. ■

On applique cette proposition pour la sous-variété $\mathcal{M} = A(\mathbb{R}^p)$ de $\mathcal{N} := \mathbb{R}^m$, elle nous procure alors un difféomorphisme local $C = (C^1, \dots, C^m)$ au voisinage V° de α° ,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m \supseteq V^\circ & \xrightarrow{C} & C(V^\circ) \subseteq \mathbb{R}^m \\ \alpha & \mapsto & C(\alpha) = (C^1(\alpha), \dots, C^m(\alpha)) \end{array}$$

qui vérifie $C(\alpha^\circ) = 0_{\mathbb{R}^m}$, et tel que le voisinage dans \mathfrak{p}^* de $q^\circ = \alpha_1^\circ X_1^* + \dots + \alpha_m^\circ X_m^*$,

$$V^*(q^\circ, \mathfrak{p}^*) =: V^* := \{ q_\alpha := \alpha_1 X_1^* + \dots + \alpha_m X_m^*, \alpha \in V^\circ \}$$

soit caractérisé par

$$\forall q = q_\alpha \in V^*, \quad q \in \Omega_0 \iff C^{p+1}(\alpha) = \dots = C^m(\alpha) = 0 \iff \alpha \in U^\circ.$$

Quitte à prendre un rayon $R > 0$ tel que le pavé ouvert de \mathbb{R}^m , -centré en 0 et de rayon R -, soit inclu dans $C(V^\circ)$, puis travailler dans ce nouveau ouvert, on peut supposer que V° est le voisinage de α° , donnée par $V^\circ := C^{-1}\left(] - R, R[\right]^m$). En particulier, sa fermeture est un compact de \mathfrak{p}^* , de plus, l'ouvert $W^\circ := C^{-1}\left(] - \frac{R}{2}, \frac{R}{2}[\right]^m$ vérifie

$$W^\circ \subset \overline{W^\circ} \subset V^\circ. \quad (4.3.11)$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est inclu dans $] - R, R[$ et tel que $\varphi(0) = 1$.

- En première étape, on explique la procédure pour définir \tilde{f} en un point $(x, q) \in G \times \mathfrak{p}^*$ dans le voisinage $G \times V^*$ de (x, q°) . Donc si on note $q =: q_\alpha$, alors $\alpha \in V^\circ$ et on a

$$q \in \Omega_0 \iff C(\alpha) = (C^1(\alpha), \dots, C^p(\alpha), 0, \dots, 0).$$

a) Notons $q_\alpha^\circ := C^{-1}\left((C^1(\alpha), \dots, C^p(\alpha), 0, \dots, 0) \right) \in V^\circ \equiv V^*$.

On a bien $q_\alpha^\circ \in \Omega_0$, de plus, $q_\alpha^\circ = q_\alpha \iff q_\alpha \in \Omega_0$.

b) On pose en tout point $(x, q) \in G \times \mathfrak{p}^*$ dans le voisinage $G \times V^*$ de (x, q°) , où $x =: \mathcal{O}_P^{-1}(\dot{x}, p_x)$ (avec $\dot{x} = x \cdot P \in G/P$ et $p_x \in P$ sont donnés comme dans le diagramme 1.1.15), et $q =: q_\alpha$,

$$\tilde{f}(x, q) := \bar{\chi}_{q_\alpha}(p_x) \chi_{q_\alpha^\circ}(p_x) \tilde{f}_0(x, q_\alpha^\circ) \prod_{j=p+1}^m \varphi(C^j(\alpha)).$$

- En seconde étape, on voit que cette manière proposée pour définir \tilde{f} , permet la vérification des propriétés de lissité et de covariance à cette fonction, et qu'elle coïncide effectivement avec \tilde{f}_0 sur $G \times (\Omega_0 \cap V^*)$.

a) Lissité : toutes les fonctions qui apparaissent dans la définition de \tilde{f} sont de classes \mathcal{C}^∞ , ainsi que les système de coordonnées C qui est un difféomorphisme.

b) Covariance : c'est grâce à (4.3.7)₀, pour tout $h \in P$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{f}(xh, q_\alpha) &= \bar{\chi}_{q_\alpha}(p(xh)) \chi_{q_\alpha^\circ}(p(xh)) \tilde{f}_0(xh, q_\alpha^\circ) \prod_{j=p+1}^m \varphi(C^j(\alpha)) \\ &= \left(\bar{\chi}_{q_\alpha}(p_x h) \chi_{q_\alpha^\circ}(p_x) \chi_{q_\alpha^\circ}(h) \right) \bar{\chi}_{q_\alpha^\circ}(h) \tilde{f}_0(x, q_\alpha^\circ) \prod_{j=p+1}^m \varphi(C^j(\alpha)) \\ &= \left(\bar{\chi}_{q_\alpha}(h) \chi_{q_\alpha^\circ}(p_x) \bar{\chi}_{q_\alpha}(p_x) \right) \tilde{f}_0(x, q_\alpha^\circ) \prod_{j=p+1}^m \varphi(C^j(\alpha)) \\ &= \bar{\chi}_{q_\alpha}(h) \tilde{f}(x, q_\alpha). \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

c) Si $q_\alpha \in \Omega_0$, alors, $q_\alpha^\circ = q_\alpha$ et $C^{p+1}(\alpha) = \dots = C^m(\alpha) = 0$, ceci implique que

$$\tilde{f}(x, q_\alpha) = \tilde{f}_0(x, q_\alpha^\circ) = \tilde{f}_0(x, q_\alpha).$$

- En dernière étape, pareillement à l'extension $\tilde{f} =: \tilde{f}_{(q^\circ)}$ de \tilde{f}_0 sur le voisinage V° , et de la même manière détaillée ci-dessus, on construit des extensions $\tilde{f}_{(q^1)}, \dots, \tilde{f}_{(q^d)}$ de \tilde{f}_0 , respectivement sur des voisinages V^1, \dots, V^d dans \mathfrak{p}^* , des formes linéaires q^1, \dots, q^d qu'on précise tout de suite.

a) La compacité du support de \tilde{f}_0 permet d'avoir un compact K de Ω_0 qui vérifie

$$\forall q \in \Omega_0 \setminus K, \quad \tilde{f}_0(x, q) = 0 \quad \forall x \in G.$$

Couvrons alors ce compact par un nombre fini de voisinages W^1, \dots, W^d dans \mathfrak{p}^* , respectivement de certaines formes linéaires $q^1, \dots, q^d \in \Omega_0$, où on a des extensions respectives $\tilde{f}_{(q^1)}, \dots, \tilde{f}_{(q^d)} \in C_c^\infty(G/P \times \mathfrak{p}^*; \chi)$ de \tilde{f}_0 , décrites par la 1^{ère} étape. (En fait, l'extension $\tilde{f}_{(q^j)}$ est définie sur l'ouvert V^j qui est plus grand d'après notre construction (4.3.11), et ceci pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$).

- b) Notons $\mathfrak{K} := \bigcup_{j=1}^d \overline{W^j}$ qui est un compact de \mathfrak{p}^* , et soit pour tout q dans son complémentaire, $B(q, r_q)$ une boule ouverte centrée en q et de rayon r_q , et qui est incluse dans cet ouvert $\mathfrak{p}^* \setminus \mathfrak{K}$. Ainsi, on peut couvrir \mathfrak{p}^* par une famille d'ouverts, en écrivant

$$\mathfrak{p}^* = \left(\bigcup_{j=1}^d V^j \right) \cup \left(\bigcup_{q \notin \mathfrak{K}} B(q, r_q) \right).$$

Vu qu'il s'agit d'un espace pré-compact, on peut définir de ce recouvrement une famille $(U^i)_{i \in I}$ d'ouverts "plus petits" (dans le sens que chaque U^i est inclu ou bien dans une boule ouverte $B(q, r_q)$, ou bien dans un certain V^j), tels que

- toute forme linéaire $q \in \mathfrak{p}^*$ n'appartient qu'à un nombre fini de ces ouverts,
- on a une famille de fonctions $(h_i)_{i \in I}$, dite une partition C^∞ de l'unité, dont l'existence est assurée par [12], et qui vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i \in C_c^\infty(\mathfrak{p}^*), \\ \text{supp}(h_i) \subset U^i, \\ 0 \leq h_i \leq 1, \\ \sum_{i \in I} h_i = 1. \end{array} \right.$$

Puisque tout ouvert U^i ayant une intersection non vide avec K , est forcément inclu dans un certain V^j ($j =: j(i)$ est même unique par construction), alors

on peut définir sur $G \times \mathfrak{p}^*$ la fonction

$$g_j : (x, q) \longmapsto \begin{cases} h_i(q) \tilde{f}_{(q^j)}(x, q), & \text{si } q \in U^i \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Du fait que $\text{supp}(h_i) \subseteq U^i \subseteq V^j$, découle que $g_j \in C_c^\infty(G \times \mathfrak{p}^*)$.

Enfin, et toujours parceque K est un compact, on peut supposer que de tels ouverts U^i (qui l'interceptent), sont en nombre fini. Posons $\{i_1, \dots, i_k\}$ leurs indices associés et $\{j_1, \dots, j_m\} := \{j(i_1), \dots, j(i_k)\}$.

c) Définissons \tilde{f} comme la somme des g_j ,

$$\tilde{f} := \sum_{j=1}^m g_j,$$

et vérifions que c'est bien une extension de \tilde{f}_0 comme désirée.

- soit $(x, q) \in G \times \Omega_0$.

$$\tilde{f}(x, q) = \sum_{j=1}^m g_j(x, q) = \sum_{j/q \in V^j} h_i(q) \tilde{f}_{(q^j)}(x, q) = \tilde{f}_0(x, q) \sum_{i \in I} h_i(q) = \tilde{f}_0(x, q).$$

- pour la covariance, (4.3.7) est une conséquence immédiate du fait que toutes les fonctions $\tilde{f}_{(q^j)}$ satisfont à cette propriété. On obtient donc que pour tout $x \in G, q \in \mathfrak{p}^*$ et $h \in P$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(xh, q) &= \sum_{j/q \in V^j} h_i(q) \tilde{f}_{(q^j)}(xh, q) \\ &= \sum_{j/q \in V^j} h_i(q) \bar{\chi}_q(h) \tilde{f}_{(q^j)}(x, q) \\ &= \bar{\chi}_q(h) \tilde{f}(x, q). \end{aligned}$$

- enfin, \tilde{f} est évidemment dans $C_c^\infty(G \times \mathfrak{p}^*)$ puisque c'est la somme finie de fonctions de ce type.

4.3.5.2 Conclusion.

C'est le théorème suivant.

Théorème 4.3.12 Soient G un groupe de Lie résoluble exponentiel, connexe et simplement connexe, et l une forme linéaire sur son algèbre de Lie \mathfrak{g} . Si $\mathfrak{p} =: \text{Lie}(P)$ est une polarisation de Pukanszky de \mathfrak{g} en l , qui est aussi un idéal de \mathfrak{g} , et $\pi = \text{ind}_P^G \chi_l$, alors pour toute fonction $F \in C_c^\infty(G/P \times G/P; \chi_l)$, il existe une fonction $f \in L^1(G)$ admettant F comme noyau pour $\pi(f)$.

Bibliographie

- [1] Andele, J. *Noyaux d'opérateurs sur les groupes de Lie exponentiels*, Thèse, Univ. de Metz (1997).
- [2] Arnal, D. ; Fujiwara, H. ; Ludwig, J. *Opérateurs d'entrelacement pour les groupes de Lie exponentiels*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. **I319**, No.6, 549-551 (1994).
- [3] Baklouti, A. ; Ludwig, J. *Désintégration des représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents*, J. Lie Theory **9**, No.1, 157-191 (1999).
- [4] Bernat, P. ; Conze, N. ; Duflo, M. ; Levy-Nahas, M. ; Rais, M. ; Renouard, P. ; Vergne, M. *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Monographies de la Société Mathématique de France. 4. Paris : Dunod. X, (1972).
- [5] Corwin, Lawrence ; Greenleaf, Frederick P. *Spectrum and multiplicities for restrictions of unitary representations in nilpotent Lie groups*, Pac. J. Math. **135**, No.2, 233-267 (1988).
- [6] Corwin, Lawrence J. ; Greenleaf, Frederick P. *Representations of nilpotent Lie groups and their applications*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 18. Cambridge etc. : Cambridge University Press. VIII, (1990).
- [7] Dixmier, J. *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles*, Bull. Soc. Math. Fr. **85**, 113-121 (1957).
- [8] Fujiwara, H. *Sur les restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels*. [J] Invent. Math.
- [9] Fujiwara, H. *Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents*, Pac. J. Math. **127**, No.2, 329-352 (1987).
- [10] Howe, Roger E. *On a connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associated to singularities*, Pac. J. Math. **73**, 329-363 (1977).
- [11] Kirillov, A.A. *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Uspehi Mat. Nauk **17**, 57-110, (1962).
- [12] Kobayashi, Sh. ; Nomizu, K. *Foundations of differential geometry*, New York-London : Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons. XI, (1963).
- [13] Leptin, H. , *Irreduzible darstellungen von exponentialgruppen und operatoren mit glatten kernen*, J. reine angew. Math. **494**, 1-34, (1998).
- [14] Leptin, H. ; Ludwig, J. *Unitary representation theory of exponential Lie groups*, De Gruyter Expositions in Mathematics. 18. Berlin : De Gruyter, (1994).

- [15] Ludwig, J. Irreducible representations of exponential solvable Lie groups and operators with smooth kernels, *J. Reine Angew. Math.* **339**, 1-26 (1983).
- [16] Mackey, George W. *The theory of unitary group representations, Chicago Lectures in Mathematics.* Chicago - London : The University of Chicago Press, (1976).
- [17] Molitor-Braun, C. Exponential actions and maximal \mathfrak{D} -invariant ideals, *Manuscr. Math.* **96**, No.1, 23-35 (1998).
- [18] Pressley, A. *Elementary differential geometry, [B] Springer Undergraduate Mathematics Series.* London : Springer. X, (2001).
- [19] Pukanszky, L. *Leçons sur les représentations des groupes, Paris : Dunod. VIII, (1967).*
- [20] Pukanszky, L. Unitary representations of solvable Lie groups, [*J*] *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér.* **4**, 457-608 (1971).
- [21] Pukanszky, L. On the theory of exponential groups, *Trans. Am. Math. Soc.* **126**, 487-507 (1967).
- [22] Sakai, S. *C^* -algebras and W^* -algebras. Reprint of the 1971 edition, Classics in Mathematics.* Berlin : Springer. XII, (1998).

05 <0040'225