

Conjecture des diviseurs de zéro et propriété (T)

Christian Masse

▶ **To cite this version:**

Christian Masse. Conjecture des diviseurs de zéro et propriété (T). Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 2004. Français. NNT : 2004METZ001S . tel-01750258

HAL Id: tel-01750258
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750258

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 2004 001 S
Cote S/M/3 04/01
Loc

Christian Masse

Conjecture des diviseurs de zéro et Propriété (T)

Mars 2004

Jury :

Prof. Claire ANANTHARAMAN-DELAROCHE (Rapporteur - Université d'Orléans)
Prof. Bachir BEKKA (Directeur de Thèse - Université de Metz)
Prof. Jean LUDWIG (Université de Metz)
Prof. Carine MOLITOR-BRAUN (Université du Luxembourg)
Prof. Alain VALETTE (Université de Neuchâtel)
Prof. Tilmann WURZBACHER (Université de Metz)

Thèse soutenue en vue d'obtenir le titre de docteur en mathématiques de l'université de Metz.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ
031 495796 6

PRL 091 610 205

Table des matières

Introduction **3**

1 Conjecture des diviseurs de zéro **6**

1 Problématique 6
2 Quelques résultats généraux 7
3 Cas des groupes abéliens 9
3.1 Transformée de Fourier 9
3.2 Cas des groupes $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{Z}^n$ 10
3.3 Cas des groupes abéliens localement compact, sans sous-groupe compact non trivial 12
4 Cas des groupes nilpotents 13
4.1 Cas du groupe de Heisenberg 13
4.2 Cas des groupes de Lie nilpotents non abéliens connexes 16
4.3 Etude d'une classe d'équations différentielles 17
5 Cas semi-simple 19
5.1 Définitions et notations 19
5.2 Transformée de Fourier sphérique 20
5.3 Formule de Plancherel, prolongement de la transformée de Fourier sphérique 24
5.4 Cas des fonctions bi-invariantes par K 26
5.5 Problème des diviseurs de zéro pour les fonctions K-biinvariantes dans le cadre L^p 26
6 Cas discret 28
6.1 Généralités 29
6.2 Cas des groupes ordonnables (à gauche ou à droite) 31
6.2.1 Généralités 31
6.2.2 Preuve de Linnell 34
6.2.3 Variations sur la preuve de Linnell 36

6.2.4 Conjecture dans le cadre $l^p, p > 2$ 38
6.3 Exemples de groupes ordonnables 39
6.3.1 Cas des groupes libres 39
6.3.2 Cas des groupes discrets nilpotents sans torsion 42
6.3.3 Cas des groupes de tresses 44
6.4 Seconde approche du problème des diviseurs de zéro 44

2 Propriété (T) pour le groupe $Sp(n,1)$ **50**

1 Généralités sur les groupes de Kazhdan 50
2 Propriété (T) pour $Sp(n,1)$, preuve d'après Cowling-Haagerup 54
2.1 Généralités sur les groupes de Lie de rang un 54
2.2 Groupes de type H 55
2.3 Preuve de la propriété (T) 61
2.4 Annexe 69
3 Propriété (T) pour $Sp(n,1)$, preuve de Bekka-de la Harpe-Valette 71
3.1 Préliminaires 71
3.1.1 Cohomologie 71
3.1.2 Paires de Gelfand et cohomologie 72
3.1.3 Opérateurs de Laplace 76
3.1.4 Structure riemannienne sur G/K 77
3.2 Stratégie de la preuve 80
3.3 Preuve du théorème 2.18 80
3.4 Preuve du théorème 2.19 83

Bibliographie **90**

Introduction

Ce travail comporte deux parties indépendantes; le premier chapitre traite de la conjecture des diviseurs de zéro. Dans le deuxième chapitre, nous prouvons que le groupe $Sp(n,1)$ est un groupe de Kazhdan de deux manières différentes.

Dans le premier chapitre, nous étudions la conjecture des diviseurs de zéro. La situation est la suivante : G étant un groupe localement compact, on se donne une fonction continue α non nulle à support compact sur G et ξ une fonction de carré intégrable telles que le produit de convolution $\alpha * \xi$ soit nul. La conjecture des diviseurs de zéro est que $\xi = 0$, c'est-à-dire que l'opérateur de convolution sur $L^2(G)$ associé à α est injectif. Il est facile de voir que cette conjecture ne peut être vraie que si G ne possède aucun sous-groupe compact non trivial (voir paragraphe 2, proposition 1.2).

Cette conjecture a été beaucoup étudié dans le cas d'un groupe discret (voir plus bas), mais elle ne semble pas l'avoir été pour d'autres classes de groupes. Elle possède comme corollaire intéressant l'absence de valeur propre des opérateurs de convolution sur $L^2(G)$ associés à des mesures à support compact sur G (voir paragraphe 2, proposition 1.5).

La conjecture est satisfaite dans le cas $G = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{Z}^n$. Ceci est dû au fait que la transformée de Fourier d'une fonction à support compact admet un prolongement analytique. Nous généralisons ce résultat à tous les groupes abéliens (voir paragraphe 3, proposition 1.11).

Il est naturel de conjecturer que le problème des diviseurs de zéro admet une réponse positive dans le cas des groupes de Lie nilpotents connexes (comme c'est le cas pour les groupes de Lie nilpotents discrets). De manière surprenante, ceci n'est pas le cas; nous montrons que cette conjecture est fausse pour tout groupe de Lie nilpotent connexe non abélien (voir paragraphe 4, théorème 1.14). La preuve est basée sur la découverte, faite en collaboration avec Jean Ludwig et Carine Molitor, d'un opérateur différentiel invariant à gauche sur le groupe de Heisenberg, dont le noyau dans $L^2(G)$ est non trivial. Nous menons une étude approfondie de ce noyau dans l'espace de Schwartz (voir paragraphe 4.3).

Dans le cas des groupes de Lie semi-simples, on doit restreindre la classe des fonctions α et ξ considérées plus haut, car un tel groupe G (à l'exception du revêtement universel $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ de $SL_2(\mathbb{R})$) possède toujours un sous-groupe compact non trivial. Soit K un sous-groupe compact maximal de G. Il est raisonnable d'étudier le problème pour des fonctions K-bi-invariantes α et ξ. Nous montrons, à l'aide de la transformée de Fourier, que la conjecture des diviseurs de zéro est vraie pour cette classe de fonctions (voir paragraphe 5, théorème 1.21). Nous montrons également que, dès qu'on quitte le cadre L^2, la conjecture des diviseurs de zéro n'est plus vraie : pour tout groupe de Lie semi-simple G et pour tout nombre réel $p > 2$, il existe des fonctions K-biinvariantes α à support compact et ξ dans $L^p(G)$ toutes deux non nulles, telles que $\alpha * \xi = 0$ (voir paragraphe 5, théorème 1.22).

On passe alors au cas où G est un groupe discret. On se base pour cela sur les travaux de Linnell ([24], [25]), qui a démontré la conjecture dans le cas des groupes ordonnables. Nous reproduisons sa preuve, dont nous donnons une variante plus courte (voir paragraphes 6.2.2 et 6.2.3). D'autre part, nous montrons que la conjecture n'est pas vraie pour le groupe libre dans le cadre $l^p, p > 2$ (voir paragraphe 6.2.4). Ceci avait déjà été prouvé par Linnell et Puls; notre preuve, basée sur des arguments différents, est cependant plus conceptuelle. Nous donnons ensuite quelques exemples de groupes ordonnables (notamment les groupes libres et les groupes discrets nilpotents sans torsion). Dans le cas des groupes libres, nous donnons aussi une variante complètement différente, essentiellement dûe à Connes et basée sur les modules de Fredholm (voir paragraphe 6.4).

Le second chapitre est consacré à l'étude d'une famille de groupes particuliers. En 1967, D. Kazhdan ([22]) a découvert une classe assez remarquable de groupes localement compacts, à savoir les groupes possédant la propriété (T). Ces groupes ont de nombreuses propriétés de rigidité, et il existe de nombreuses applications en géométrie, en théorie des graphes, en théorie des algèbres d'opérateurs... On trouvera des exemples de groupes de Kazhdan au paragraphe 2.1 du chapitre 2.

En 1969, B. Kostant a prouvé ([23]) que le groupe $G = Sp(n, 1)$ est un groupe de Kazhdan. Néanmoins, la preuve est longue et utilise des résultats assez profonds sur la classification des fonctions sphériques. Dans le chapitre 2, nous donnerons deux preuves plus élémentaires de ce résultat.

La première preuve (voir paragraphe 2.2) est basée sur l'article [5] de Cowling et Haagerup. Elle suit la stratégie suggérée par Cowling dans son rapport de [16]. L'idée principale consiste à restreindre les fonctions sphériques au groupe nilpotent N de la décomposition d'Iwasawa $G = KAN$. En estimant la norme de ces restrictions dans l'algèbre de Fourier-Stieltjes de N, on prouve que $Sp(n, 1)$ possède la propriété (T) (voir paragraphe 2.3, théorème 2.10).

La deuxième preuve (voir paragraphe 2.3) repose sur des idées de Gromov ([14]) et de Shalom. Elle est développée dans un livre à paraitre de B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette. On procède en deux étapes. Tout d'abord, on prouve que si G est un groupe

de Lie simple de centre fini ne possédant pas la propriété (T), si K est un sous-groupe compact maximal de G, alors il existe une action isométrique affine de G et une application harmonique de G/K dans un espace de Hilbert, non constante et G-équivariante (voir paragraphe 3.3, théorème 2.18). On conclut en prouvant que si $G = Sp(n,1)$, toute application harmonique G-équivariante (pour toute action isométrique affine) est constante (voir paragraphe 3.4, théorème 2.19).

Chapitre 1

Conjecture des diviseurs de zéro

1 Problématique

Soit G un groupe localement compact. On note $C_c(G)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur G, et $L^2(G)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur G. On peut définir le produit de convolution entre une fonction $\alpha \in C_c(G)$ et une fonction $\xi \in L^2(G)$ par la formule :

$$\alpha * \xi(x) = \int_G \alpha(g)\xi(g^{-1}x)dg, \qquad x \in G.$$

où dg désigne une mesure de Haar de G.

La conjecture des diviseurs de zéro s'énonce sous la forme suivante :

Conjecture 1.1 *Soit $\alpha \in C_c(G)$ et soit $\xi \in L^2(G)$ telles que $\alpha * \xi = 0$ dans $L^2(G)$. Alors $\alpha = 0$ ou $\xi = 0$ dans $L^2(G)$.*

Dans ce chapitre, on démontre cette conjecture dans différentes situations; on donne des contre-exemples prouvant que cette conjecture est fausse dans d'autres cas.

2 Quelques résultats généraux

Donnons quelques résultats généraux concernant la conjecture des diviseurs de zéro.

Proposition 1.2 *Soit G un groupe localement compact. On suppose qu'il existe un sous-groupe compact K non trivial de G. Alors la conjecture des diviseurs de zéro est fausse.*

Preuve. Notons μ_K la mesure de Haar normalisée sur K. L'ensemble des fonctions $f \in L^2(G)$ telles que $\mu_K * f = f$ sont les fonctions K-invariantes à gauche. Comme K est supposé non trivial, il existe $f \in L^2(G)$, non invariante par K. Ainsi, la fonction $\xi = \mu_K * f - f$ est un élément non nul de $L^2(G)$, tel que $\mu_K * \xi = 0$.

Soit $\varphi \in C_c(G)$ une fonction non nulle, positive. Posons $\alpha = \varphi * \mu_K$. Alors $\alpha \in C_c(G)$, et de plus, $\alpha * \xi = 0$. ■

Proposition 1.3 *Soit G un groupe localement compact vérifiant la conjecture des diviseurs de zéro. Alors la conjecture des diviseurs de zéro est vraie pour tout sous-groupe fermé.*

Preuve. Soit H un sous-groupe fermé de G. Soit $\alpha \in C_c(H), \alpha \neq 0$. Soit $\xi \in L^2(H)$ tel que $\alpha * \xi = 0$.

Soit D un ensemble borélien qui soit un domaine fondamental pour l'action de H sur G à gauche. Alors $L^2(G) \cong L^2(H) \otimes L^2(D)$. Par cet isomorphisme, la représentation régulière $\lambda_G|_H$ est équivalente à $\lambda_H \otimes Id_{L^2(D)}$.

Soit $f \in L^2(D)$ positive non nulle. Alors $\xi \otimes f$ est un élément de $L^2(G)$, et

$$\begin{aligned} \alpha * (\xi \otimes f) &= (\alpha * \xi) \otimes f \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soit $\varphi \in C_c(G)$ telle que $\varphi * \alpha \neq 0$. Alors $\varphi * \alpha$ est une fonction continue à support compact sur G, et $(\varphi * \alpha) * (\xi \otimes f) = 0$. Comme la conjecture 1.1 est vraie pour le groupe G, $\xi \otimes f = 0$ et donc $\xi = 0$. ■

La proposition suivante montre que pour le problème des diviseurs de zéro, on peut se restreindre à des groupes compactement engendrés.

Proposition 1.4 *Soit G un groupe localement compact. On suppose que la conjecture des diviseurs de zéro est vraie pour tout sous-groupe compactement engendré. Alors elle est vraie pour le groupe G.*

Preuve. Soit $\alpha \in C_c(G), \alpha \neq 0$. Soit $\xi \in L^2(G)$ tel que $\alpha * \xi = 0$. Soit H le sous-groupe engendré par le support de α; c'est un sous-groupe ouvert (car contenant un ouvert de G), compactement engendré. Soit T un système de représentants de $H\backslash G$. Alors

$$G = \bigcup_{t\in T} Ht \text{ (réunion disjointe)}$$
$$L^2(G) = \bigoplus_{t\in T} L^2(Ht), \text{ où } L^2(Ht) \simeq L^2(H)$$

Décomposons la fonction ξ sur ces sous-espaces : $\xi = \bigoplus_{t\in T} \xi_t$, $\xi_t \in L^2(Ht)$. Alors

$$\alpha * \xi = 0 \Longleftrightarrow \alpha * \xi_t = 0 \ \forall t \in T.$$

Mais $\alpha \in C_c(H)$ et $\xi_t \in L^2(H)$ donc ξ_t est nulle pour tout indice $t \in T$ et donc $\xi = 0$. ■

Application de la conjecture des diviseurs de zéro au problème des valeurs propres d'opérateurs de convolutions

Soit G un groupe localement compact. Soit $M_C(G)$ l'ensemble des mesures sur G à support compact. Soit $\mu \in M_C(G)$. Notons $T_\mu : L^2(G) \to L^2(G)$ l'opérateur de convolution à gauche associé à μ.

Proposition 1.5 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La conjecture des diviseurs de zéro est vraie.
(ii) Pour tout $\mu \in M_c(G)\backslash\{0\}$, $\ker T_\mu = \{0\}$ sur $L^2(G)$.
(iii) T_μ n'a pas de valeurs propres si $\mu \notin \mathbb{C}\delta_e$.

Preuve. L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est triviale. Prouvons que $(iii) \Rightarrow (ii)$.

Si $\mu \notin \mathbb{C}\delta_e$, il est clair que $\ker T_\mu = \{0\}$. Si $\mu \in \mathbb{C}\delta_e$, alors l'opérateur T_μ est un multiple de l'identité, et donc son noyau est aussi trivial.

Prouvons enfin que $(i) \Rightarrow (iii)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $0 \neq \xi \in L^2(G)$ tels que $T_\mu \xi = \lambda\xi$. Alors $(T_\mu - \lambda\delta_e)\xi = 0$.

Supposons que $\varphi * \mu = \lambda\varphi$ pour toute fonction $\varphi \in C_c(G)$. Alors en prenant une unité approchée φ_i dans $C_c(G)$, on aurait

$$\begin{aligned}\mu &= \lim \varphi_i * \mu \\ &= \lim \lambda\varphi_i \\ &= \lambda\delta_e\end{aligned}$$

dans la topologie faible sur l'espace des mesures $M(G)$ sur G.

Comme $\mu \neq \lambda\delta_e$, on peut donc trouver une fonction $\varphi \in C_c(G)$ telle que $\varphi * \mu \neq \lambda\varphi$
Pour $\beta = \varphi * \mu - \lambda\varphi \in C_c(G)\backslash\{0\}$, on a donc

$$\begin{aligned} T_\beta\xi =&(\varphi * \mu - \lambda\varphi) * \xi \\ =&\varphi * (\mu * \xi) - \lambda\varphi * \xi \\ =&T_\varphi(\mu * \xi - \lambda\xi) \\ =&T_\varphi(T_\mu - \lambda\delta_e)\xi \\ =&0. \end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que la conjecture des diviseurs de zéros est vraie pour le groupe G. ■

Proposition 1.6 *Le noyau de l'opérateur T_μ est invariant par convolution à droite par toute mesure bornée sur G. En particulier, $\ker T_\mu$ est invariant par translation à droite par des éléments de G.*

Preuve. Pour tout $\xi \in \ker T_\mu$, pour toute mesure bornée ν sur G,

$$\begin{aligned} T_\mu(\xi * \nu) &= \mu * (\xi * \nu) \\ &= (\mu * \xi) * \nu \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui signifie que $\xi * \nu \in \ker T_\mu$ ■

3 Cas des groupes abéliens

3.1 Transformée de Fourier

Soit G un groupe abélien localement compact.

Dans la suite, $\widehat{G}$ désigne le groupe des caractères du groupe G.

On dispose de la transformée de Fourier:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} : L^2(G) &\to L^2(\widehat{G}) \\ \xi &\mapsto \mathfrak{F}\xi \end{aligned}$$

où $\mathfrak{F}\xi$ est définie par

$$\forall \chi \in \widehat{G}, \quad \mathfrak{F}\xi(\chi) = \int_G \xi(x)\overline{\chi(x)}dx,$$

dx étant une mesure de Haar de G.

En fait, l'application $\mathfrak{F}$ est bien définie sur $L^1(G) \cap L^2(G)$ et elle se prolonge en une isométrie sur tout $L^2(G)$. On notera souvent $\widehat{\xi}$ à la place de $\mathfrak{F}\xi$.

On vérifie facilement que pour toute fonction $\xi \in L^1(G) \cap L^2(G)$ et pour tout caractère $\chi \in \widehat{G}$, $\mathfrak{F}(\alpha * \xi)(\chi) = \widehat{\alpha}(\chi)\widehat{\xi}(\chi)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}(\chi)\widehat{\xi}(\chi) &= \Big(\int_G \alpha(y)\overline{\chi(y)}dy\Big)\Big(\int_G \xi(x)\overline{\chi(x)}dx\Big) \\
&= \int_G \alpha(y)\Big(\int_G \xi(x)\overline{\chi(yx)}dx\Big)dy \\
&= \int_G \alpha(y)\Big(\int_G \xi(y^{-1}x)\overline{\chi(x)}dx\Big)dy \\
&= \int_G \Big(\int_G \alpha(y)\xi(y^{-1}x)dy\Big)\overline{\chi(x)}dx \\
&= \int_G (\alpha * \xi)(x)\overline{\chi(x)}dx \\
&= \mathfrak{F}(\alpha * \xi)(\chi).
\end{aligned}$$

Cette formule se prolonge à $L^2(G)$ à condition d'écrire des égalités presque partout.

3.2 Cas des groupes $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{Z}^n$

Intéressons nous pour commencer au cas du groupe $G = \mathbb{R}^n$.

Lemme 1.7 *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Si f s'annule sur un sous-ensemble de mesure positive, alors $f = 0$.*

Preuve. On procède par récurrence sur n. Le lemme est trivial pour $n = 1$.

Soit $n > 1$. Soit $N = \{x \in U; f(x) = 0\}$. Par hypothèse, il existe un sous-ensemble V de U de la forme $V = [a, b] \times \overline{V}$ tel que

$$\int_V 1_N(y)dy \neq 0.$$

D'après le théorème de Fubini,

$$\int_{\overline{V}} 1_N(y_1, \overline{y})dy_1 d\overline{y} \neq 0$$

pour tout y_1 dans un sous-ensemble I de mesure positive dans $[a, b]$. Pour un tel y_1 la fonction analytique $\overline{y} \mapsto f(y_1, \overline{y})$ s'annule sur un ensemble de mesure positive, et donc

est nulle d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $f(y_1, \overline{y}) = 0$ pour tout $y_1 \in I, \overline{y} \in \overline{V}$. Comme I est de mesure positive, on en déduit que f est identiquement nulle sur V. ■

Proposition 1.8 *Soit $\alpha \in C_c(\mathbb{R}^n)$ et soit $0 \neq \xi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que $\alpha * \xi = 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors $\alpha = 0$.*

Preuve. Notons $\widehat{\xi}$ la transformée de Fourier usuelle au sens L^2; en appliquant cette transformée à l'équation $\alpha * \xi = 0$, on obtient $\widehat{\alpha} \cdot \widehat{\xi} = 0$. Or, par hypothèse, $\xi \neq 0$ donc $\widehat{\xi} \neq 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Il existe donc un borélien de mesure positive $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que $\widehat{\xi} \neq 0$ presque partout dans U, et par conséquent, $\widehat{\alpha} = 0$ presque partout dans U. Comme $\widehat{\alpha}$ est continue, on a même $\widehat{\alpha} = 0$ dans U tout entier.

En outre, la transformée de Fourier d'une application continue à support compact est une fonction analytique; $\widehat{\alpha}$ est donc une fonction analytique, nulle sur un borélien de mesure positive, et donc d'après le lemme 1.7, $\widehat{\alpha} = 0$. On applique la transformée de Fourier inverse pour en déduire que $\alpha = 0$. ■

Proposition 1.9 *La conjecture des diviseurs de zéro est vraie dans le cas du groupe $\mathbb{Z}^n$.*

Preuve. On peut supposer que la fonction α est de la forme :

$$\alpha = \sum_{k=1}^{N} a_k \delta_{z_k} \text{ où } z_k = (p_1^{(k)}, \cdots, p_n^{(k)}) \in \mathbb{Z}^n.$$

Cette écriture de la mesure α entraîne l'écriture de la transformée de Fourier $\widehat{\alpha}$:

$$\widehat{\alpha} = \sum_{k=1}^{N} a_k \widehat{z_k} \text{ où pour tout } \chi \in \widehat{G}, \quad \widehat{z_k}(\chi) = \overline{\chi(z_k)}.$$

On sait de plus que $\widehat{G} \cong \mathbb{T}^n$ où $\mathbb{T}^n$ est le tore à n dimensions. Par suite, tout caractère $\chi \in \widehat{G}$ peut s'écrire sous la forme $\chi = (\exp^{(2i\pi\theta_1)}, \cdots, \exp^{(2i\pi\theta_n)})$ avec $\theta_i \in [0, 1]$. Pour un tel caractère χ,

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}(\chi) = 0 &\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{N} a_k \overline{\chi(z_k)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{N} a_k \exp^{-2i\pi(\theta_1 p_1^{(k)} + \cdots + \theta_n p_n^{(k)})} = 0. \end{aligned}$$

On trouve une fonction analytique nulle sur un borélien de mesure non nulle de $[0, 1]^n$ (par identification), donc cette fonction est nulle sur tout l'ensemble produit $[0, 1]^n$. Par conséquent, la transformée de Fourier $\widehat{\alpha}$ est nulle, donc $\alpha = 0$. ■

3.3 Cas des groupes abéliens localement compact sans sous-groupe compact non trivial

Citons d'abord le théorème de structure des groupes abéliens (cf [19]):

Tout groupe abélien localement compact et compactement engendré est topologiquement isomorphe à un produit de la forme

$$\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times F$$

où $a, b \in \mathbb{N}$ et où F est un groupe abélien compact.

Rappelons ([19]) que le groupe des caractères d'un groupe produit est simplement le produit des groupes des caractères de chaque composante.

Lemme 1.10 *Soit G_1 et G_2 deux groupes abéliens sans sous-groupes compacts qui vérifient la propriété suivante : si f est une fonction continue sur $G_1 (resp\ G_2)$ à support compact telle que $\widehat{f}$ s'annule sur un sous-ensemble de $G_1 (resp\ G_2)$ de mesure strictement positive, alors $f = 0$.*

Soit $G = G_1 \times G_2$. Alors toute fonction continue f à support compact telle que $\widehat{f}$ s'annule sur un sous-ensemble de G de mesure strictement positive est nulle.

Preuve. Soit f une fonction continue à support compact. Soit $\chi_1 \in \widehat{G}_1, \chi_2 \in \widehat{G}_2$. Alors

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\chi_1, \chi_2) &= \int_{G_1} \overline{\chi_1(x)} \int_{G_2} \overline{\chi_2(x)} f(x,y) dy dx \\ &= \int_{G_1} \overline{\chi_1(x)} \widehat{f^x}(\chi_2) dx\end{aligned}$$

où $f^x(y) = f(x,y)$.

Soit $\sigma_{\chi_2} : G_1 \to \mathbb{C}, x \mapsto \widehat{f^x}(\chi_2) = \int_{G_2} \overline{\chi_2(y)} f(x,y) dy$ pour $\chi_2 \in \widehat{G}_2$ fixé. Comme f est continue à support compact, σ_{χ_2} est aussi à support compact, et de plus,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\chi_1, \chi_2) &= \int_{G_1} \overline{\chi_1(x)} \sigma_{\chi_2}(x) dx \\ &= \widehat{\sigma_{\chi_2}}(\chi_1).\end{aligned}$$

Soit $E = \{(\chi_1, \chi_2) \in \widehat{G}_1 \times \widehat{G}_2;\ \ \widehat{f}(\chi_1, \chi_2) = 0\}$; par hypothèse, E est un fermé de mesure non nulle.

Pour $\chi_2 \in \widehat{G}_2$, notons $E_{\chi_2} = \{\chi_1 \in \widehat{G}_1;\ \ (\chi_1, \chi_2) \in E\}$.

Par définition, $\widehat{\sigma_{\chi_2}}$ est nul sur E_{χ_2} et par hypothèse, σ_{χ_2} est nulle pour tout χ_2 tel que $|E_{\chi_2}| \neq 0$. Ainsi, pour de tels χ_2,

$$\int_G \chi_2(y) f(x,y) dy = \widehat{f^x}(\chi_2) = 0 \quad \forall x \in G_1.$$

Or, d'après le théorème de Fubini,

$$|E| = \int_{\widehat{G}_2} |E_{\chi_2}| d\chi_2.$$

Ainsi, $\{\chi_2 \in \widehat{G}_2;\ \ E_{\chi_2} \neq 0\}$ est de mesure strictement positive.
On en déduit que $f^x = 0$ pour tout $x \in G_1$ et donc $f = 0$. ■

Proposition 1.11 *La conjecture des diviseurs de zéro est vraie pour tout groupe localement compact abélien sans sous-groupe compact.*

Preuve. En appliquant les propositions 1.8, 1.9 et le lemme 1.10 aux groupes $G_1 = \mathbb{R}^n$ et $G_2 = \mathbb{Z}^n$, on voit que la conjecture des diviseurs de zéro est vraie si G est un groupe localement compact abélien compactement engendré sans sous-groupe compact.

Le cas d'un groupe localement compact abélien sans sous-groupe compact se déduit de la proposition 1.4 ■

4 Cas des groupes nilpotents

Tous les résultats de ce paragraphe, concernant les groupes nilpotents, sont issus d'un travail en commun avec Jean Ludwig et Carine Molitor-Braun.

Nous allons voir que la conjecture a une réponse négative dans le cas des groupes nilpotents connexes.

4.1 Cas du groupe de Heisenberg

Notations et préliminaires. Soit $H_1 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le groupe de Heisenberg, le produit étant défini par la formule :

$$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)).$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_1$ du groupe de Lie H_1 possède une base X, Y, Z avec $[X,Y] = Z$ telle que l'application exponentielle exp : $\mathfrak{h}_1 \to H_1$ soit identique, c'est-à-dire

$$\exp(aX + bY + cZ) = (a,b,c).$$

On fait agir l'algèbre $\mathfrak{h}_1$ sur l'espace $C^\infty(H_1)$ comme algèbre d'opérateurs différentiels invariants à gauche par la formule :

$$\begin{aligned}\varphi * (aX+bY+cZ)(x,y,z) =& \frac{d}{ds}\Big(\varphi\big((x,y,z)\cdot\exp(s(aX+bY+cZ))\big)\Big)\Big|_{s=0}\\ =& \frac{d}{ds}\Big(\varphi\big((x,y,z)\cdot(sa,sb,sc)\big)\Big)\Big|_{s=0}\end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\varphi * X(x,y,z) &= \frac{d}{ds}\Big(\varphi\big((x,y,z)\cdot\exp sX\big)\Big)\Big|_{s=0}\\ &= \frac{d}{ds}\Big(\varphi\big((x,y,z)\cdot(s,0,0)\big)\Big)\Big|_{s=0}\\ &= \frac{d}{ds}\Big(\varphi\big((x+s,y,z+\frac{1}{2}(-ys))\big)\Big)\Big|_{s=0}\\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) - \frac{1}{2}y\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi * Y(x,y,z) &= \frac{d}{ds}\Big(\varphi\big((x,y,z)\cdot\exp sY\big)\Big)\Big|_{s=0}\\ &= \frac{d}{ds}\Big(\varphi\big((x,y,z)\cdot(0,s,0)\big)\Big)\Big|_{s=0}\\ &= \frac{d}{ds}\Big(\varphi\big((x,y+s,z+\frac{1}{2}xs)\big)\Big)\Big|_{s=0}\\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z) + \frac{1}{2}x\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z).\end{aligned}$$

Par conséquent, l'élément $X+iY$ dans $(\mathfrak{h}_1)_{\mathbb{C}}$, l'algèbre complexifiée de $\mathfrak{h}_1$, agit comme suit :

$$\begin{aligned}\varphi * (X+iY)(x,y,z) &= \varphi * X(x,y,z) + i\varphi * Y(x,y,z)\\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) - \frac{1}{2}y\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z) + \frac{1}{2}ix\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z)\\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\varphi(x,y,z) + \frac{i}{2}(x+iy)\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z)\end{aligned}$$

et de même,

$$\varphi * (X-iY)(x,y,z) = \Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\varphi(x,y,z) - \frac{i}{2}(x-iy)\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z).$$

Proposition 1.12 *Il existe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ non nulle telle que $\varphi * (X+iY) = 0$, où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ désigne l'espace de Schwartz du groupe $\mathbb{R}^3$.*

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; ce réel non nul λ représente le paramètre caractérisant les représentations unitaires irréductibles de dimension infinie du groupe de Heisenberg H_1. On définit alors une fonction $\varphi_0(\lambda) \in C^\infty(H_1)$ par la formule :

$$\varphi_0(\lambda)(x,y,z) = e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}e^{-i\lambda z}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\varphi_0(\lambda) * (X+iY)(x,y,z) &= \Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\varphi_0(\lambda)(x,y,z) + \frac{i}{2}(x+iy)\frac{\partial \varphi_0(\lambda)}{\partial z}(x,y,z) \\
&= -\frac{\lambda}{2}xe^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}e^{-i\lambda z} - \frac{i\lambda}{2}ye^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}e^{-i\lambda z} \\
&\quad - \frac{i}{2}(x+iy)i\lambda e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}e^{-i\lambda z} \\
&= \big(-\frac{\lambda}{2}x - \frac{i\lambda}{2}y + \frac{1}{2}(x+iy)\lambda\big)e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}e^{-i\lambda z} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Néanmoins, $\varphi_0(\lambda) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$; il faut donc perturber cette fonction pour obtenir une fonction de Schwartz. Pour cela, considérons $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\mathrm{supp}\Phi \subseteq]0,+\infty[$. Posons alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(\lambda)(x,y,z)\Phi(\lambda)d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Phi(\lambda)e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}e^{-i\lambda z}d\lambda.
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est la transformée de Fourier partielle (par rapport à la variable λ) de la fonction $\Phi(\lambda)e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}$; or, cette fonction est une fonction de Schwartz en λ, x, y car $\mathrm{supp}\Phi \subseteq]0,+\infty[$, donc φ est aussi une fonction de Schwartz. Enfin,

$$\begin{aligned}
\varphi * (X+iY)(x,y,z) &= \Big(\int_{\mathbb{R}} \Phi(\lambda)\varphi_0(\lambda)(.,.,.)d\lambda\Big) * (X+iY)(x,y,z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Phi(\lambda)\big(\varphi_0(\lambda) * (X+iY)\big)(x,y,z)d\lambda \\
&= 0 \quad \big(\text{Comme } \Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \text{on peut permuter } * \text{ et } \int\big). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposition 1.13 *Pour le groupe de Heisenberg H_1, la conjecture 1.1 est fausse.*

Preuve. D'après la proposition 1.12, il existe $0 \neq \varphi \in \mathcal{S}(H_1)$ telle que $\varphi * (X+iY) = 0$. Par passage à l'adjoint, on obtient $(X-iY) * \varphi^* = 0$, où $\varphi^*(a) = \overline{\varphi(a^{-1})}$.

Choisissons $0 \neq \xi \in C_c^\infty(H_1)$ tel que $\xi * (X - iY) \neq 0$; une telle fonction ξ existe, il suffit d'après l'équation située avant la proposition 1.12 que

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\xi(x,y,z) - \frac{i}{2}(x - iy)\frac{\partial \xi}{\partial z}(x,y,z) \neq 0.$$

On pose alors $\alpha = \xi * (X - iY)$; donc $\alpha \in C_c^\infty(H_1)$, $\alpha \neq 0$, et

$$\begin{aligned} \alpha * \varphi^* &= \big(\xi * (X - iY)\big) * \varphi^* \\ &= \xi * \big((X - iY) * \varphi^*\big) \\ &= 0. \ \blacksquare \end{aligned}$$

4.2 Cas des groupes de Lie nilpotents non abéliens connexes

Nous allons montrer que le résultat négatif pour le groupe de Heisenberg s'étend à tout groupe de Lie nilpotent non abélien.

Théorème 1.14 *Soit G un groupe de Lie nilpotent non abélien connexe. Alors la conjecture 1.1 est fausse.*

Preuve.

On distingue deux cas.

Supposons dans le premier cas que le groupe G soit simplement connexe. Le groupe G n'est pas abélien, donc $\{0\} \neq \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \neq \mathfrak{g}$, où $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ désigne le centre de l'algèbre $\mathfrak{g}$. Ainsi il existe $Y \in \mathfrak{g}$ tel que $\{0\} \neq [\mathfrak{g}, Y] \subseteq \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et par conséquent, il existe $X, Z \in \mathfrak{g}$ tels que $Z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et $[X, Y] = Z$, c'est à dire tels que

$$\mathfrak{h}_1 = < X, Y, Z >$$

soit une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Le sous-groupe fermé de G correspondant est isomorphe au groupe de Heisenberg H_1, et on peut conclure à l'aide des propositions 1.13 et 1.3.

Supposons pour le deuxième cas que G ne soit pas simplement connexe.

Soit $\widetilde{G}$ le revêtement universel de G; $\widetilde{G}$ est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe.

Notons $\Gamma = \pi_1(G)$ le groupe fondamental de G; d'après la théorie générale des revêtements des groupes de Lie, Γ est un sous-groupe discret du centre de $\widetilde{G}$, et

$$G \simeq \widetilde{G}/\Gamma.$$

On sait de plus que le centre du groupe $\widetilde{G}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour un certain entier n.

Comme Γ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^n$, il est isomorphe à $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^l \times \{0\}$ pour certains entiers k, l.

Or, Γ est un groupe discret, donc il est isomorphe à $\mathbb{Z}^l \times \{0\}$.

Comme G n'est pas simplement connexe, l n'est pas nul et Γ n'est pas réduit à l'élément neutre. Par suite, si $Z(G)$ désigne le centre de G,

$$\begin{aligned} Z(G) &\simeq Z(\widetilde{G})/\Gamma \\ &\simeq \mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}^l \times \{0\}) \end{aligned}$$

Le groupe $K := \mathbb{R}^l/\mathbb{Z}^l$ est donc un sous-groupe compact non trivial du centre de G, donc de G. Par conséquent, d'après la proposition 1.2, la conjecture des diviseurs de zéro est fausse. ■

4.3 Etude d'une classe d'équations différentielles

Nous allons étudier l'ensemble de toutes les fonctions de Schwartz qui sont solutions de l'équation $f * (X + iY) = 0$.

Théorème 1.15 *(i) Soit $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ avec supp$\Phi \subseteq]0, +\infty[$, ψ holomorphe choisie telle que $\psi(x,y)e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}$ soit une fonction de Schwartz en x, y pour tout $\lambda > 0$. Alors la fonction Ψ définie par la formule*

$$\Psi(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x,y)\Phi(\lambda)e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}e^{-i\lambda z}d\lambda$$

vérifie $\Psi * (X + iY) = 0$.

(ii) Soit $f \in \mathcal{S}(H_1)$ telle que $f * (X + iY) = 0$. Alors, en notant $\widehat{f}^3$ la transformée de Fourier partielle de f par rapport à la troisième variable, on a $\widehat{f}^3(.,.,\lambda) = 0$ si $\lambda \in [0, +\infty[$. De plus, pour tout $\lambda > 0$, il existe une fonction $F(x,y,\lambda)$ holomorphe en $x + iy$, telle que $\widehat{f}^3(x,y,-\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}F(x,y,\lambda)$.

Preuve. (i) Soit

$$\varphi_0(\lambda)(x,y,z) = e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}e^{-i\lambda z}.$$

Soit

$$\psi_0(\lambda)(x,y,z) = \psi(x,y)e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}e^{-i\lambda z}.$$

On vérifie que

$$\begin{aligned}
&\psi_0(\lambda) * (X+iY)(x,y,z)\\
&= \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\psi(x,y)\Big]\varphi_0(\lambda)(x,y,z) + \psi(x,y)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\varphi_0(\lambda)(x,y,z)\Big]\\
&\quad + \frac{i}{2}(x+iy)\psi(x,y)\frac{\partial\varphi_0(\lambda)}{\partial z}(x,y,z)\\
&= \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\psi(x,y)\Big]\varphi_0(\lambda)(x,y,z).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\psi_0(\lambda) * (X+iY) = 0 \Longleftrightarrow \Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\psi(x,y) = 0.$$

Comme ψ est holomorphe, la deuxième condition est vérifiée.

De plus, Ψ est une fonction de Schwartz, car $\psi(x,y)\Phi(\lambda)e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}$ est une fonction de Schwartz de $\mathbb{R}^3$. Ainsi,

$$\Psi * (X+iY) = 0.$$

(ii) Ecrivons $\widehat{f}^3(x,y,-\lambda)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}^3(x,y,-\lambda) &= e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}\Big[e^{\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}\widehat{f}^3(x,y,-\lambda)\Big]\\
&= e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}F(x,y,\lambda).
\end{aligned}$$

La fonction f est une fonction de Schwartz, donc il est en de même de la transformée de Fourier partielle $\widehat{f}^3$. Ainsi,

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}F(x,y,\lambda)e^{-i\lambda z}d\lambda.$$

Par hypothèse, f est annulée par $X+iY$, i.e.

$$\begin{aligned}
0 &= f * (X+iY)(x,y,z)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)F(x,y,\lambda)\Big]e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}e^{-i\lambda z}d\lambda\\
&= \widehat{H}^3(x,y,z)
\end{aligned}$$

où $H(x,y,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)F(x,y,\lambda)\Big]e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)}$.

Par conséquent, H est nulle presque partout, et ainsi, $\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)F(x,y,\lambda) = 0$. Cette égalité a même lieu partout, étant donné que la fonction F est continue.

Pour λ fixé, la fonction $F(x,y,\lambda)$ est donc holomorphe en $x+iy$.

En outre, $f \in \mathcal{S}(H_1)$, de même que $\widehat{f}^3$, donc $F(x,y,\lambda) = 0$ si $\lambda \in]-\infty, 0]$, ce qui entraine la formule

$$\widehat{f}^3(.,.,\lambda) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda \in [0,+\infty[. \ \blacksquare$$

5 Cas semi-simple

Soit G un groupe de Lie semi-simple, connexe, non compact de centre fini. Il est bien connu que le sous-groupe compact maximal K de G est non trivial; la conjecture des diviseurs de zéro est donc toujours fausse. Néanmoins, la conjecture des diviseurs de zéro reste intéressante si on restreint la classe des fonctions α et ξ considérées. On supposera ici que $\alpha \in C_c(G)$ est invariant à droite, c'est-à-dire que $\alpha \in C_c(G/K)$. Il n'est pas intéressant de supposer que $\xi \in L^2(G)$, ou même que $\xi \in L^2(G/K)$, car on obtient des contre exemples faciles. En effet, écrivons

$$L^2(G/K) = \bigoplus_{\delta \in \hat{K}} \chi_\delta * L^2(G/K)$$

la décomposition de l'espace $L^2(G/K)$ en composantes isotypiques selon l'action de K, où χ_δ est le caractère de $\delta \in \hat{K}$. On a alors

$$\alpha * \left(\chi_\delta * L^2(G/K)\right) = 0 \ \forall \delta \neq 1.$$

Comme on le verra, le cas intéressant à considérer est celui où on suppose que α et ξ sont tous deux bi-invariantes par K (on observera que $\chi_1 * L^2(G/K)$ est l'espace des fonctions K-bi-invariantes dans $L^2(G)$). On verra que dans ce cas, la conjecture est vraie.

Auparavant, nous avons besoin de quelques définitions et notations.

5.1 Définitions et notations

Dans ce paragraphe, on suivra en grande partie les notations de [11].

Soit $G = KAN$ la décomposition d'Iwasawa de G; rappelons que K est un sous-groupe compact maximal de G, N est un groupe nilpotent et que l'algèbre $\mathfrak{A}$ associée au sous-groupe A est une algèbre abélienne.

La mesure de Haar sur G relative à cette décomposition est donnée par la formule

$$dx = e^{2\rho(\log a)} dk da dn \quad \text{si} \quad x = kan,$$

où $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} dim(\mathfrak{g}_\alpha)\alpha$ est la demi-somme (pondérée) des racines positives et où $\log : A \to \mathfrak{A}$ désigne l'inverse de l'application exponentielle.

On note $\mathfrak{A}^*$ l'ensemble des formes linéaires à valeurs réelles sur $\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*$ l'ensembles de formes linéaires complexes sur $\mathfrak{A}$. On note encore $\mathfrak{F}_I = i\mathfrak{A}^*$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{A}$ à valeurs dans $i\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{P}(\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*)$ l'espace des fonctions entières sur $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*$ de type Paley-Wiener, i.e. des fonctions entières sur $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*$ qui sont des transformées de Fourier de fonctions de classe C^∞ sur A à support compact.

Soit $\mathcal{W}$ le groupe de Weyl du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{A})$; c'est un groupe fini, engendré par des transformations linéaires de $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*$ (en fait des réflexions) qui laissent $\mathfrak{A}^*$ stable. On note $|\mathcal{W}|$ le cardinal de ce groupe.

On peut définir sur le groupe G l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide; on le note $\mathcal{C}(G)$. Cet espace peut être muni de semi-normes bien définies; on munit $\mathcal{C}(G)$ de la topologie définie par ces semi-normes (cf [11, def 6.1.2]).

On note $\mathcal{C}(G\backslash\backslash K)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(G)$ constitué de fonctions sphériques. On le munit de la topologie relative aux semi-normes définies sur $\mathcal{C}(G)$.

On note encore $C_c(G\backslash\backslash K)$ (resp. $C_c^\infty(G\backslash\backslash K)$) l'espace des fonctions bi-invariantes par K à support compact (resp. de classe C^∞ à support compact).

Citons quelques propriétés de ces espaces de fonctions :

$C_c^\infty(G) \subseteq \mathcal{C}(G) \subseteq L^2(G)$ avec injections continues.

$C_c^\infty(G\backslash\backslash K) \subseteq \mathcal{C}(G\backslash\backslash K)$ avec inclusion continue et dense.

$\mathcal{C}(G)$ est une algèbre de convolution.

$\mathcal{C}(G\backslash\backslash K)$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{C}(G)$.

Dans la suite, c désigne la fonction de Harish-Chandra; c'est une fonction bien définie et méromorphe sur $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*$. De plus, on peut prouver que son inverse c^{-1} est analytique sur $\mathfrak{F}_I$, et que $|c(\lambda)|^{-2}d\lambda$ est la mesure de Plancherel de $\mathfrak{F}_I$. Enfin, elle vérifie la relation $c(-\lambda) = \overline{c(\lambda)}$.

Enfin, soit $a : G \to A$ la projection canonique (issue de la décomposition d'Iwasawa), et soit $H : G \to \mathfrak{A}$ définie par $H = \log \circ a$. Les fonctions sphériques élémentaires sont les fonctions définies sur G par la formule

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K e^{(\lambda-\rho)(H(xk))}dk, \quad \lambda \in \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*.$$

5.2 Transformée de Fourier sphérique

Définitions. Soit f une fonction sur G bi-invariante par K. On définit sa transformée de Fourier sphérique par la formule :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}f(\lambda) &= \widetilde{f}(\lambda) \\ &= \int_G f(x)\varphi_\lambda(x)dx\end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que l'intégrale précédente soit absolument convergente.

En particulier si $f \in C_c(G\backslash\backslash K)$, la transformée de Fourier $\mathcal{H}f$ est définie sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tout entier.

On définit encore la transformée d'Abel, notée $\mathcal{A}$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : C_c^\infty(G\backslash\backslash K) &\to C_c^\infty(A) \\ f &\mapsto \mathcal{A}f \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{A}f(a) = e^{\rho(\log a)} \int_N f(an)dn \quad , a \in A.$$

Soit $\widehat{\cdot}$ la transformée de Fourier usuelle sur $C_c(A)$.

Lemme 1.16 *Pour tout $f \in C_c^\infty(G\backslash\backslash K)$, $\mathcal{H}f = \widehat{\mathcal{A}f}$.*

Preuve. Pour $g \in C_c(A)$, la transformée de Fourier $\widehat{g}$ est la fonction définie sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ par la formule

$$\widehat{g}(\lambda) = \int_A g(a)e^{\lambda(\log a)}da.$$

On utilise alors la représentation intégrale des fonctions sphériques élémentaires φ_λ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}f(\lambda) &= \int_G f(x)\varphi_\lambda(x)dx \\ &= \int_G f(x) \int_K e^{(\lambda-\rho)(H(xk))}dkdx \\ &= \int_G \int_K f(xk)e^{(\lambda-\rho)(H(xk))}dkdx \\ &= \int_G f(y)e^{(\lambda-\rho)(H(y))}dy \\ &= \int_{A\times N} f(an)e^{(\lambda+\rho)(\log a)}dadn \\ &= \int_A e^{\lambda(\log a)}\big(e^{\rho(\log a)} \int_N f(an)dn\big)da \\ &= \int_A (\mathcal{A}f)(a)e^{\lambda(\log a)}da. \ \blacksquare \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.16, il est clair que pour tout $f \in C_c^\infty(G\backslash\backslash K)$,

$$\mathcal{H}f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*).$$

Lemme 1.17 *$\mathcal{H}$ est un homomorphisme de l'algèbre de convolution $C_c^\infty(G\backslash\backslash K)$ dans l'algèbre de multiplication $\mathcal{P}(\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*)$.*

Preuve. Soit $u, v \in C^\infty(G\backslash\backslash K)$ telles que l'une au moins de ces deux fonctions soit à support compact. On note alors

$$< u, v >= \int_G u(x)v(x)dx.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}f(\lambda) &= \int_G f(x)\varphi_\lambda(x)dx \\ &=< f, \varphi_\lambda > .\end{aligned}$$

Montrons que l'application $C_c^\infty(G\backslash\backslash K) \to \mathbb{C}, \quad u \mapsto < u, \varphi_\lambda >$ est un homomorphisme pour $\lambda \in \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*$ fixé :

$$\begin{aligned}< u * v, \varphi_\lambda > &= \int_G u * v(y)\varphi_\lambda(y)dy \\ &= \int_G \int_G u(x)v(x^{-1}y)\varphi_\lambda(y)dxdy \\ &= \int_G \int_G u(x)v(y)\varphi_\lambda(xy)dxdy \\ &= \int_G \int_G \int_K u(x)v(ky)\varphi_\lambda(xky)dxdydk \\ &= \int_G \int_G \int_K u(x)v(y)\varphi_\lambda(xky)dxdydk \\ &= \int_G \int_G u(x)v(y)\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)dxdy \\ &=< u, \varphi_\lambda >< v, \varphi_\lambda >\end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y) = \int_K \varphi_\lambda(xky)dk$).
Ainsi, pour toute forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f * g)(\lambda) &=< f * g, \varphi_\lambda > \\ &=< f, \varphi_\lambda >< g, \varphi_\lambda > \\ &= \mathcal{H}f(\lambda)\mathcal{H}g(\lambda). \ \blacksquare\end{aligned}$$

Lemme 1.18 *$\mathcal{H} : C_c(G\backslash\backslash K) \to \mathcal{P}(\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*)$ est injective.*

Preuve. Soit $f_0 \in C_c(G\backslash\backslash K)$ telles que $\mathcal{H}f_0 = 0$, i.e. $\forall \lambda \in \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*, \mathcal{H}f_0(\lambda) = 0$. Notons $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$.

La fonction f_0 est bornée, donc $f_0 * f_0^*$ est continue, et par conséquent, le nombre $f_0 * f_0^* * f(x)$ existe pour tout $f \in C_c(G\backslash\backslash K)$, pour tout $x \in G$.

Soit $F : C_c(G\backslash\backslash K) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto (f_0 * f_0^* * f)(e)$. Il est clair que pour tout $f \in C_c(G\backslash\backslash K), \quad F(f * f^*) \geq 0$.

En outre, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|F(f * g)|^2 \leq F(f * f^*)F(g * g^*).$$

Soit ϕ une fonction proche de la fonction δ de Dirac sur G.

Soit $\phi^\natural(x) = \int_K \int_K \phi(kxk')dkdk'$ la fonction K-biinvariante associée. On applique l'inégalité précédente avec $g = \phi^\natural$: il en découle que

$$|F(f)|^2 \leq M|F(f * f^*)|$$

pour une certaine constante M. On réitère ce processus :

$$\begin{aligned} |F(f)|^2 &\leq M|F(f * f^*)| \\ &\leq M^{1+1/2}F(f * f^* * f * f^*)^{1/2} \\ &\leq \cdots \\ &\leq M^{1+1/2+\ldots+1/2^n}||F||^{1/2^n}||(f * f^*)^{2^n}||^{1/2^n}. \end{aligned}$$

Mais dans une algèbre de Banach commutative quelconque,

$$\begin{aligned} \sup_\phi |\widetilde{g}(\phi)| &:= \sup_\phi |\int_G g(x)\phi(x)dx| \\ &= \lim_{m\to+\infty} ||g^m||^{1/m}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|F(f)|^2 \leq M' \sup_\phi |\widetilde{(f * f^*)}(\phi)| = M' \sup_\phi |\widetilde{f}(\phi)\widetilde{f}^*(\phi)|$$

où M' est une constante. Or, par hypothèse, $\widetilde{f_0} = 0$ donc $|F(f_0 * f_0^*)| = 0$. Par un calcul élémentaire, on vérifie que

$$\begin{aligned} F(f_0 * f_0^*) &= (f_0 * f_0^* * f_0 * f_0^*)(e) \\ &= \int_G |f_0 * f_0^*(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Ainsi, $f_0 * f_0^*(e) = 0$. Or, $f_0 * f_0^*(e) = \int_G |f_0(x)|^2 dx$.

Par conséquent, $f_0 = 0$, ce qui prouve que la transformée de Fourier sphérique $\mathcal{H}$ est injective. ■

Corollaire 1.19 *La transformée d'Abel $\mathcal{A} : C_c^\infty(G\backslash\backslash K) \to C_c^\infty(A)$ est injective.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{A}f = 0$ pour $f \in C_c^\infty(G\backslash\backslash K)$.

Alors $\widehat{\mathcal{A}f} = 0$ où $\widehat{\ }$ désigne la transformée de Fourier usuelle. Par le lemme 1.16, $\mathcal{H}f = 0$. Le lemme 1.18 entraine alors que $f = 0$, i.e. $\mathcal{A}$ est injective. ■

5.3 Théorème de Plancherel, prolongement de la transformée de Fourier sphérique

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant ([11, thm 6.4.2]):

Théorème de Plancherel. *Soit $(dx, d\lambda)$ une paire admissible de mesures de Haar sur G et $\mathfrak{F}_I$. Alors pour tout $f \in C(G\backslash\backslash K)$,*

$$\int_G |f(x)|^2 dx = |\mathcal{W}|^{-1} \int_{\mathfrak{F}_I} |(\mathcal{H}f)(\lambda)|^2 |c(\lambda)|^{-2} d\lambda.$$

En particulier, $\mathcal{H}$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme unitaire de $L^2(G\backslash\backslash K)$ dans $L^2(\mathfrak{F}_I, |\mathcal{W}|^{-1}|c(\lambda)|^{-2}d\lambda)^{\mathcal{W}}$.

Définition. Rappelons la définition d'une paire admissible de mesures de Haar :

Si $G = KAN$ est une décomposition d'Iwasawa du groupe G, notons $\overline{N}$ l'image du sous-groupe N par l'involution de Cartan θ associée à la décomposition. On appelle mesure de Haar canonique $d\overline{n}$ sur $\overline{N}$ la mesure normalisée par

$$\int_{\overline{N}} e^{-2\rho(H(\overline{n}))} d\overline{n} = 1.$$

La mesure de Haar canonique sur N est la mesure dont l'image par θ est $d\overline{n}$; on la note dn.

Une mesure de Haar dx sur G est dite admissible si $dx = e^{2\rho(\log a)} dk da dn$, où dk vérifie $\int_K dk = 1$ et où dn est la mesure canonique sur N. Ainsi, dx est entièrement déterminée par le choix de da.

Si $d\lambda$ est une mesure de Haar sur $\mathcal{F}_I$, on dit que $(dx, d\lambda)$ est une paire admissible si $d\lambda$ est duale de da,

$$\text{i.e.} \quad \forall f \in \mathcal{S}(A), \qquad f(a) = \int_{\mathcal{F}_I} \widehat{f}(\lambda) e^{-\lambda(\log a)} d\lambda, \qquad a \in A$$

où $\widehat{f}(\lambda) = \int_A f(a) e^{\lambda(\log a)} da$, $\lambda \in \mathcal{F}_I$ est la transformée de Fourier usuelle et où $\mathcal{S}(A)$ désigne l'espace de Schwartz classique.

Pour prouver le théorème de Plancherel, on utilise le théorème suivant :

Théorème 1.20 *Soit $(dx, d\lambda)$ une paire admissible de mesures de Haar sur G et $\mathfrak{F}_I$. Alors la transformée de Fourier sphérique $\mathcal{H}$ est un isomorphisme topologique d'algèbres entre l'algèbre de convolution $\mathcal{C}(G\backslash\backslash K)$ et l'algèbre de multiplication $\mathcal{S}(\mathfrak{F}_I)^{\mathcal{W}}$, qui est l'ensemble des éléments de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathfrak{F}_I)$ invariants par le groupe de Weyl $\mathcal{W}$. De plus,*

$$\forall f \in \mathcal{C}(G\backslash\backslash K),\ \ (\mathcal{H}f)(\lambda) = \int_G f(x)\varphi_\lambda(x)dx,\ \ \lambda \in \mathfrak{F}_I$$

et

$$f(x) = |\mathcal{W}|^{-1} \int_{\mathfrak{F}_I} (\mathcal{H}f)(\lambda)\varphi_{-\lambda}(x)c(\lambda)^{-1}c(-\lambda)^{-1}d\lambda,\ \ x \in G.$$

Preuve. Il y a deux méthodes pour la preuve de ce théorème : la première est due à Harish-Chandra, et la deuxième à Helgason, Gangolli et Rosenberg. Ici, nous nous contenterons de donner l'isomorphisme réciproque :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{J}: & \mathcal{S}(\mathfrak{F}_I)^{\mathcal{W}} & \to & \mathcal{C}(G\backslash\backslash K) \\ & a & \mapsto & \mathcal{J}a \end{array}$$

où

$$(\mathcal{J}a)(x) = |\mathcal{W}|^{-1} \int_{\mathfrak{F}_I} a(\lambda)\varphi_{-\lambda}(x)c(\lambda)^{-1}c(-\lambda)^{-1}d\lambda, \qquad x \in G. \ \blacksquare$$

Donnons à présent la preuve du théorème de Plancherel.

Par densité, il suffit de prouver ce théorème pour $f \in C_c^\infty(G\backslash\backslash K)$.
On pose $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Alors

$$\begin{aligned} (f * f^*)(e) &= \int_G f(x)f^*(x^{-1})dx \\ &= \int_G f(x)\overline{f(x)}dx \\ &= \int_G |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Vérifions de plus que si $\lambda \in \mathfrak{F}_I, \mathcal{H}f^*(\lambda) = \overline{\mathcal{H}f}(\lambda)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}f^*(\lambda) &= \int_G f^*(x)\varphi_\lambda(x)dx \\
&= \int_G \overline{f(x^{-1})}\varphi_\lambda(x)dx \\
&= \int_G \overline{f(x)}\varphi_\lambda(x^{-1})dx \\
&= \int_G \overline{f(x)}\varphi_{-\lambda}(x)dx \\
&= \overline{\int_G f(x)\overline{\varphi_{-\lambda}(x)}dx} \\
&= \overline{\int_G f(x)\varphi_{\overline{-\lambda}}(x)dx} \\
&= \overline{\int_G f(x)\varphi_\lambda(x)dx} \qquad (\lambda \in \mathfrak{F}_I, \text{donc } \overline{\lambda} = -\lambda) \\
&= \overline{\mathcal{H}f}(\lambda).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $\mathcal{H}(f * f^*) = \mathcal{H}f \cdot \mathcal{H}f^* = \mathcal{H}f \cdot \overline{\mathcal{H}f}$.
On applique alors le théorème 1.20 avec $f * f^*$ et $x = e$:

$$
f * f^*(e) = |\mathcal{W}|^{-1} \int_{\mathfrak{F}_I} \mathcal{H}(f * f^*)(\lambda)\varphi_{-\lambda}(e)c(\lambda)^{-1}c(-\lambda)^{-1}d\lambda,
$$

$$
\text{i.e.} \qquad \int_G |f(x)|^2 dx = |\mathcal{W}|^{-1} \int_{\mathfrak{F}_I} |\mathcal{H}f(\lambda)|^2 |c(\lambda)|^{-2} d\lambda. \quad \blacksquare
$$

5.4 Cas des fonctions bi-invariantes par K

Théorème 1.21 *Soit $\alpha \in C_c(G\backslash\backslash K)$ et $\xi \in L^2(G\backslash\backslash K)$ telles que $\alpha * \xi = 0$. Alors $\alpha = 0$ ou $\xi = 0$.*

Preuve. Soit $\alpha \in C_c(G\backslash\backslash K)$ et $\xi \in L^2(G\backslash\backslash K)$ telles que $\alpha * \xi = 0$.
Alors $\mathcal{H}\alpha \cdot \mathcal{H}\xi = 0$. Mais d'après les lemmes 1.16 et 1.17, $\mathcal{H}\alpha = \widehat{\mathcal{A}}\alpha$ est une fonction entière, donc l'ensemble des zéros de $\mathcal{H}\alpha$ est de mesure nulle. Ainsi, $\mathcal{H}\alpha = 0$ presque partout ou $\mathcal{H}\alpha \neq 0$ presque partout.

• Premier cas : $\mathcal{H}\alpha = 0$ presque partout, donc $\mathcal{H}\alpha = 0$. Par le lemme 1.18, $\alpha = 0$ presque partout et par continuité, $\alpha = 0$.

• Deuxième cas : $\mathcal{H}\alpha \neq 0$ presque partout. Alors $\mathcal{H}\xi = 0$ presque partout, et d'après la formule de Plancherel, $\int_G |\xi(x)|^2 dx = 0$. On en déduit que $\xi = 0$ presque partout. $\blacksquare$

5.5 Problème des diviseurs de zéro pour les fonctions K-biinvariantes dans le cadre L^p

On peut énoncer le problème des diviseurs de zéro pour l'espace $L^p(G), p \geq 1$:
Soit $\alpha \in C_c(G), \alpha \neq 0$ et $\xi \in L^p(G)$ tels que $\alpha * \xi = 0$ dans $L^p(G)$. A-t-on $\xi = 0$?

Il est intéressant de remarquer que le théorème précédent n'est plus vrai dans le cadre L^p pour tout $p > 2$.

Théorème 1.22 *Soit $p > 2$ et G un groupe de Lie semi-simple. Alors il existe $\alpha \in C_c(G)$ et $\Theta \in L^p(G)$, α, Θ K-biinvariantes et toutes deux non nulles telles que $\alpha * \Theta = 0$.*

Preuve. Soit φ une fonction sphérique de G dont la représentation unitaire π appartient à la série principale de G. On a

$$\varphi(g) = < \pi(g)\xi, \xi >$$

pour un vecteur unitaire K-fixe $\xi \in L^2(G)$.

Soit Z un élément non nul du centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathcal{G}$, vu comme opérateur différentiel sur $C^\infty(G)$. Alors par le lemme de Schur,

$$\begin{aligned} Z\varphi(g) &= < \pi(g)\pi(Z)\xi, \xi > \\ &= \lambda_Z < \pi(g)\xi, \xi > \\ &= \lambda_Z \varphi(g) \end{aligned}$$

pour un scalaire $\lambda_Z \in \mathbb{C}$.

Soit $f \in C_c(G\backslash\backslash K)$ tel que $Zf \neq \lambda_Z f$. On pose $\alpha = Zf - \lambda_Z f$. Alors $\alpha \in C_c(G\backslash\backslash K)$ et, comme Z est dans le centre de l'algèbre envelopante,

$$\begin{aligned} \alpha * \varphi &= Zf * \varphi - \lambda_Z f * \varphi \\ &= Z * f * \varphi - \lambda_Z f * \varphi \\ &= f * (Z * \varphi) - \lambda_Z f * \varphi \\ &= f * (Z\varphi - \lambda_Z \varphi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, comme π appartient à la série principale, il est bien connu que $\varphi \in L^p(G)$ pour tout $p > 2$ (A. Borel et N. Wallach, Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, Princeton Princeton Univ. press 1980).

De plus, φ est K-biinvariante. ■

6 Cas discret

Les définitions sont légèrement modifiées dans le cas discret par rapport au cas continu. Nous devons donc énoncer la conjecture des diviseurs de zéro dans ce cadre spécifique. Définissons les espaces de fonctions qui interviennent dans ce contexte.

Notons $\mathbb{C}G$ l'ensemble des sommes formelles à support fini, i.e. des sommes formelles de la forme $\sum_{g\in G} a_g g$, $a_g \in \mathbb{C}$, $a_g = 0$ pour tout $g \in G$ sauf un nombre fini.

Notons $l^2(G)$ l'ensemble des sommes formelles de carré sommable, i.e. des sommes formelles de la forme $\sum_{g\in G} a_g g$, $a_g \in \mathbb{C}$, $\sum |a_g|^2 < \infty$.

Notons $l^\infty(G)$ l'ensemble des sommes formelles bornées, i.e. des sommes formelles de la forme $\sum_{g\in G} a_g g$, $a_g \in \mathbb{C}, \sup_{g\in G} |a_g| < \infty$.

Il est clair que $\mathbb{C}G \subseteq l^2(G) \subseteq l^\infty(G)$.

On définit une multiplication $l^2(G) \times l^2(G) \to l^\infty(G)$ par la formule

$$\alpha\beta = \sum_{g,h\in G} a_g b_h gh \quad \text{pour} \quad \alpha = \sum_{g\in G} a_g g \quad \text{et} \quad \beta = \sum_{g\in G} b_g g.$$

Remarquons que pour $\alpha \in \mathbb{C}G$ et pour $\beta \in l^2(G)$, on a $T_\alpha \beta := \alpha * \beta = \alpha\beta$. Souvent, nous ne ferons pas la distinction entre α et l'opérateur de convolution associée T_α. Nous écrirons par exemple $\ker \alpha$ au lieu de $\ker T_\alpha$.

La conjecture devient alors :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}G$ et soit $\beta \in l^2(G)$ telles que $\alpha\beta = 0$. Alors $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

Remarque. Dans le cas des groupes discrets avec torsion (cas analogue à celui de la proposition 1.2), on peut construire explicitement des diviseurs de zéro; soit donc G un groupe avec un élément de torsion différent de l'élément neutre, noté par exemple g tel que $g^n = e$. Alors

$$(1 + g + g^2 + \cdots + g^{n-1})(1 - g) = 0.$$

En particulier, l'algèbre $l^2(G)$ possède des diviseurs de zéro.

Ce calcul très simple montre que la conjecture des diviseurs de zéro n'est pas vraie s'il existe un élément de torsion non trivial. Dans la suite, tous les groupes considérés seront donc supposés sans torsion.

6.1 Généralités

Commençons par démontrer une proposition générale.

Proposition 1.23 *Soit G un groupe discret, et soit $\alpha \in \mathbb{C}G$. On note T_α l'opérateur de convolution à gauche associé à α (c'est-à-dire $T_\alpha(\xi) = \alpha * \xi$). Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\ker T_\alpha = \{0\}$

(ii) $Im(T_\alpha^*) = Im(T_{\alpha^*})$ *est dense dans* $l^2(G)$

(iii) ImT_α *est dense dans* $l^2(G)$

(iv) $\ker T_\alpha^* = \{0\}$

(v) α *est un vecteur cyclique pour la représentation régulière gauche de* G *dans* $l^2(G)$

(vi) α *est un vecteur cyclique pour la représentation régulière droite de* G *dans* $l^2(G)$

Preuve. Les équivalences $(i) \Leftrightarrow (ii)$ et $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ découlent du fait général que $\ker T = Im(T^*)^\perp$ pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

Prouvons d'abord l'équivalence entre (i) et (iii). Soit $T_\alpha = U|T_\alpha|$ la décomposition polaire de l'opérateur T_α, où U est l'isométrie partielle sur $l^2(G)$ d'espace initial $(\ker T_\alpha)^\perp$ et d'espace final $(\overline{ImT_\alpha})$.

On a $U \in VN(G), U^*U$ est la projection orthogonale de $l^2(G)$ sur $(\ker T_\alpha)^\perp$, et UU^* est la projection orthogonale sur $\overline{ImT_\alpha}$. De plus, si τ désigne la trace sur $VN(G)$, on a $\tau(U^*U) = \tau(UU^*)$.

Si $\ker T_\alpha = \{0\}$, alors $U^*U = I$, et donc $\tau(U^*U) = 1$. Ceci implique par fidélité de la trace que $UU^* = I$, c'est-à-dire que $\overline{ImT_\alpha} = l^2(G)$.

On montre la réciproque par le même raisonnement.

Prouvons ensuite l'équivalence entre (i) et (v). Soit $X_\alpha = \overline{< \lambda(g)\alpha;\ g \in G >}$ le sous-espace cyclique pour la représentation régulière gauche engendré par α dans $l^2(G)$. Pour $\xi \in l^2(G)$, on a

$$\begin{aligned} \xi \in X_\alpha^\perp &\Longleftrightarrow < \lambda(g)\alpha, \xi >= 0 \ \ \forall g \in G \\ &\Longleftrightarrow \alpha * \xi^* = 0 \\ &\Longleftrightarrow \xi^* \in \ker \alpha \end{aligned}$$

Ceci montre que $X_\alpha^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \ker T_\alpha = \{0\}$.

Enfin, l'équivalence entre les propriétés (iv) et (vi) découle de l'équivalence entre (i) et (v), et du fait que $(X_{\alpha^*})^*$ est le sous-espace cyclique pour la représentation régulière droite par α. ■

Définitions et notations. Nous avons encore besoin d'introduire quelques notions avant de commencer la preuve de la conjecture dans le cas des groupes ordonnables (à gauche ou à droite).

Le produit scalaire sur $l^2(G)$ est donné par la formule

$$(\alpha, \beta) = \sum_{g \in G} a_g \overline{b_g} \quad \text{pour} \quad \alpha = \sum_{g \in G} a_g g \quad \text{et} \quad \beta = \sum_{g \in G} b_g g.$$

Si $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$, on pose

$$\alpha^* = \sum_{g \in G} \overline{a_g} g^{-1}.$$

Soit $\mathcal{L}(l^2(G))$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $l^2(G)$. Comme nous identifions chaque α avec l'opérateur de convolution à gauche T_α, nous pouvons considérer $\mathbb{C}G$ comme une sous-algèbre de $\mathcal{L}(l^2(G))$. L'algèbre de von Neumann de G, notée $VN(G)$, est l'adhérence de $\mathbb{C}G$ dans $\mathcal{L}(l^2(G))$ pour la topologie faible (ou forte) des opérateurs.

L'application $\theta \mapsto \theta 1$ de $VN(G)$ dans $l^2(G)$ est injective, donc on peut identifier $VN(G)$ à un sous-espace de $l^2(G)$:

$$\mathbb{C}G \subseteq VN(G) \subseteq l^2(G).$$

Remarque. Si $\alpha \in VN(G) \subset l^2(G)$, il n'y a pas d'ambiguité pour les définitions précédentes : par exemple, $(\alpha\beta)(1) = (\alpha 1)(\beta 1)$ est le produit des opérateurs α et β. De même, $\alpha^*.1 = (\alpha.1)^*$, où α^* est l'adjoint de l'opérateur α et où $(\alpha 1)^*$ est définie par l'involution sur $l^2(G)$.

La trace canonique sur $VN(G)$ est définie par $\tau : VN(G) \to \mathbb{C}$, $\tau(\alpha) = a_1$.

Lemme 1.24 *La trace τ est finie, fidèle sur $VN(G)$.*

Preuve. Vérifions que τ est bien une trace.
Il est clair que τ est linéaire. De plus,

$$\begin{aligned} \tau(\alpha\alpha') &= \sum_{g \in G} a_g a'_{g^{-1}} \\ &= \sum_{g \in G} a_{g^{-1}} a'_g \\ &= \tau(\alpha'\alpha). \end{aligned}$$

En outre,

$$\alpha^*\alpha = \sum_{g, g' \in G} a_g \overline{a_{g'}} g g'^{-1}$$

donc

$$\tau(\alpha^*\alpha) = \sum_{g\in G} |a_g|^2.$$

En particulier, $\tau(\alpha^*\alpha) \geq 0$, ce qui démontre que τ est une trace finie. Le fait que τ soit une trace fidèle découle aussi de la formule précédente :

$$\tau(\alpha^*\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \forall g \in G,\ a_g = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0. \ \blacksquare$$

Remarque. L'existence de la trace fidèle τ montre que l'algèbre $VN(G)$ est une algèbre de von Neumann finie. En effet, soit E, F deux projections dans $VN(G)$ telles que

$$E \sim F \leq E.$$

Par définition de l'équivalence de deux projections, il existe une isométrie partielle V telle que

$$E = V^*V \quad \text{et} \quad F = VV^*.$$

Alors

$$\tau(E - F) = \tau(V^*V) - \tau(VV^*) = 0.$$

Supposons que $E > F$. La trace τ est fidèle, donc $\tau(E - F) > 0$ ce qui est absurde. Ainsi, $E = F$.

6.2 Cas des groupes ordonnables (à gauche ou à droite)

6.2.1 Généralités

Soit $U(G)$ l'ensemble des opérateurs affiliés à $VN(G)$; par définition, $\theta \in U(G)$ est un opérateur fermé, défini sur une partie dense tel que $u\theta u^* = \theta$ pour tout opérateur unitaire u dans le commutant $VN(G)'$ de $VN(G)$. On dispose alors (algébriquement) de la suite d'inclusions :

$$\mathbb{C}G \subseteq VN(G) \subseteq l^2(G) \subseteq U(G).$$

La partie difficile de la preuve de Linnell de la conjecture des diviseurs de zéro dans le cas des groupes ordonnables consiste à démontrer la proposition suivante :

Proposition 1.25 *Si $\mu \in l^2(G)\backslash\{0\}$ et si $\beta \in l^2(G)\backslash\{0\}$ sont tels que $\mu\beta = 0$, alors il existe $\gamma \in l^2(G)$ non nul tel que $\gamma\mu = 0$.*

On a besoin de deux lemmes pour prouver ce théorème : le premier nous permet de travailler dans l'algèbre de von Neumann de G, et le deuxième prouve le théorème dans cette algèbre. Dans la preuve du lemme 1.26, on utilise des idées de la démonstration du théorème 10 de [2].

Lemme 1.26 *Soit $\alpha \in l^2(G)$. Alors il existe des éléments $\theta_1, \theta_2 \in VN(G)$ qui ne sont pas des diviseurs de zéro tels que $\theta_1\alpha \in VN(G)$ et $\alpha\theta_2 \in VN(G)$.*

Preuve. Il suffit de prouver l'existence d'un élément $\theta_2 \in VN(G)$ qui ne soit pas un diviseur de zéro tel que $\alpha\theta_2 \in VN(G)$:

en effet, si $\alpha \in l^2(G)$, alors $\alpha^* \in l^2(G)$, donc il existe $\widetilde{\theta} \in VN(G)$ non diviseur de zéro tel que $\alpha^*\widetilde{\theta} \in VN(G)$; alors $\widetilde{\theta}^*\alpha = (\alpha^*\widetilde{\theta})^* \in VN(G)$, et il suffit de prendre $\theta_1 = \widetilde{\theta}^*$.

On définit un opérateur non borné β sur le sous-espace dense $VN(G)$ de $l^2(G)$ par la formule

$$\beta\lambda = \alpha\lambda, \lambda \in VN(G).$$

Ainsi, pour tout $\mu \in VN(G)$,

$$(\beta\lambda, \mu) = (\alpha\lambda, \mu) = (\lambda, \alpha^*\mu),$$

ce qui prouve que β a un adjoint, noté β^*, défini sur $VN(G)$ par $\beta^*\mu = \alpha^*\mu$. Ainsi, β se prolonge en un opérateur fermé $\widehat{\alpha}$.

En outre, le commutant $VN(G)'$ de $VN(G)$ est constitué des opérateurs de la forme $\lambda \mapsto \lambda\gamma$, où $\lambda \in l^2(G)$ et $\gamma \in VN(G)$. En particulier si $\varphi \in VN(G)'$ est unitaire (i.e. $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi = 1$),

$$\varphi\widehat{\alpha}\varphi^* = \widehat{\alpha}.$$

Ainsi, par définition, $\widehat{\alpha}$ est un opérateur fermé affilié à $VN(G)$.

Par suite, $1 + \widehat{\alpha}^*\widehat{\alpha}$ est inversible. On pose $\delta = \widehat{\alpha}(1 + \widehat{\alpha}^*\widehat{\alpha})^{-1}$ et $\theta = (1 + \widehat{\alpha}^*\widehat{\alpha})^{-1} \in VN(G)$; alors on a $\widehat{a}\theta = \delta$, où $\delta \in VN(G)$ et où $\theta \in VN(G)$ n'est pas un diviseur de zéro dans $VN(G)$ (car c'est un élément injectif à image dense). ■

Lemme 1.27 *Soit G un groupe, et soit $\alpha \in VN(G)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

$$(i) \exists\theta \in VN(G)\backslash\{0\} \text{ tel que } \theta\alpha = 0.$$
$$(ii) \exists\varphi \in VN(G)\backslash\{0\} \text{ tel que } \alpha\varphi = 0.$$

Preuve. Si $\alpha = 0$, le lemme est trivial; supposons donc $\alpha \neq 0$.

Soit $l(\alpha) = \{x \in VN(G);\ x\alpha = 0\}$ et $r(\alpha) = \{x \in VN(G);\ \alpha x = 0\}$.

Alors il existe une unique projection f de $VN(G)$ telle que $l(\alpha) = VN(G)(1 - f)$, et il existe une unique projection e de $VN(G)$ telle que $r(\alpha) = (1 - e)VN(G)$.

Ecrivons la décomposition polaire de l'opérateur α, agissant sur $l^2(G)$:

$$\alpha = v|\alpha|,$$

où $|\alpha| = (\alpha^*\alpha)^{1/2}$ et où v est une isométrie partielle telle que $v^*v = e$ et $vv^* = f$ (cf [29,thm 1.13.1]).

Supposons que $l(\alpha) = 0$. Alors $f = 1$, donc $vv^* = 1$. $VN(G)$ étant une algèbre de von Neumann finie, ceci entraine que $v^*v = 1$, i.e. $e = 1$. Par conséquent, $r(\alpha) = \{0\}$.

De même, $r(\alpha) = \{0\}$ implique $l(\alpha) = \{0\}$. ■

Nous pouvons à présent prouver le résultat annoncé précédemment.

Proposition 1.25 *Si $\mu \in l^2(G)\backslash\{0\}$ et si $\beta \in l^2(G)\backslash\{0\}$ sont tels que $\mu\beta = 0$, alors il existe $\gamma \in l^2(G)$ non nul tel que $\gamma\mu = 0$.*

Preuve. Soit $\mu, \beta \in l^2(G)$ non nuls tels que $\mu\beta = 0$.

Puisque $\beta \in l^2(G)$, on peut appliquer le lemme 1.26; il existe donc $\theta \in VN(G)$ non diviseur de zéro tel que $\beta\theta \in VN(G)$. De même, il existe $\theta_1 \in VN(G)$ non diviseur de zéro tel que $\theta_1\mu \in VN(G)$.

Ainsi,

$$\theta_1\mu\beta\theta = 0.$$

On applique alors le lemme 1.27 avec $\alpha = \theta_1\mu$ et $\varphi = \beta\theta$; remarquons que α et φ ne sont pas nuls car θ, θ_1 ne sont pas des diviseurs de zéro. On trouve ainsi $\widetilde{\theta} \in VN(G)$ non nul tel que

$$\widetilde{\theta}\theta_1\mu = 0.$$

De plus, $\widetilde{\theta}\theta_1 \neq 0$, car $\widetilde{\theta}$ est non nul et θ_1 n'est pas un diviseur de zéro. En posant $\gamma = \widetilde{\theta}\theta_1$, on a $\gamma\mu = 0$. ■

Introduisons à présent la notion de groupes ordonnables.

Définition *Soit G un groupe discret. On dit que G est ordonnable à droite si G est totalement ordonné par une relation $\leq$ telle que $a \leq b$ implique $ag \leq bg$ pour tous $a, b, g \in G$.*

Remarque. On définit de manière analogue la notion de groupe ordonnable à gauche. On peut montrer que G est ordonnable à gauche si et seulement si G est ordonnable à droite (mais les ordres considérés ne sont pas nécessairement identiques).

Exemples.

1) $\mathbb{R}$ est ordonnable à droite.

2) Soit A un groupe abélien discret sans torsion. Alors A est ordonnable à droite; en effet, A se plonge dans le produit tensoriel $A \otimes \mathbb{Q}$, qui est un $\mathbb{Q}$ espace vectoriel de dimension au plus dénombrable, et donc se plonge dans $\mathbb{R}$.

3) Les groupes libres sont ordonnables à droite (voir paragraphe 6.3.1).

4) Les groupes nilpotents discrets sans torsion sont ordonnables à droite (voir paragraphe 6.3.2).

5) Les groupes de tresses sont ordonnables à gauche (voir paragraphe 6.3.3).

6.2.2 Preuve de Linnell

Théorème 1.28 *La conjecture des diviseurs de zéro est vraie dans le cas où le groupe discret G est ordonnable (à droite ou à gauche).*

Preuve. Soit $\leq$ l'ordre total invariant à gauche de G.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}G$ non nul; on peut supposer que $\alpha = 1 + \sum_{g>1} a_g g$:
en effet, si $\alpha\beta = 0$, alors pour tout $g \in G$, $g\alpha\beta = 0$. Notons g_0 le plus petit élément de G tel que a_{g_0} soit non nul. Alors

$$\frac{1}{a_{g_0}} g_0^{-1}\alpha\beta = 0,$$

et l'élément $\widetilde{\alpha} = \frac{1}{a_{g_0}} g_0^{-1}\alpha$ est de la forme souhaitée.

Notons $A = \{g\alpha; g > 1\} \subseteq l^2(G)$.
Par définition du produit, on a, pour $g > 1$:

$$\begin{aligned} g\alpha &= g\big(1 + \sum_{h>1} a_h h\big) \\ &= g + \sum_{h>1} a_h gh. \end{aligned}$$

De plus, si $g > 1$ et $h > 1$, alors $gh > 1$ (car $h > 1$ implique $gh > g$ et $g > 1$). Ainsi, $gA \subseteq A$.

Soit U le plus petit sous-espace fermé de $l^2(G)$ contenant A, i.e. $U = \overline{Vect(A)}$ est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble A.
Soit V le complémentaire orthogonal de U.
Décomposons l'élément $\alpha \in l^2(G)$ sur U et V :

$$\alpha = \xi + \mu, \qquad \xi \in U, \mu \in V.$$

Si $g > 1$, alors $g\mu \in U$:
en effet, d'après la décomposition de α, $g\mu = g\alpha - g\xi$. Or, $\xi \in U$. Ainsi,

$$\xi = \lim \xi_i \quad \text{où} \quad \xi_i \in Vect(A).$$

Les vecteurs ξ_i sont de la forme

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_{k,i} g_{k,i} \alpha \quad \text{avec} \quad \lambda_{k,i} \in \mathbb{C}, g_{k,i} > 1, g_{k,i} \in G.$$

Ainsi,

$$g\xi_i = \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_{k,i} g g_{k,i} \alpha \quad \text{avec} \quad g g_{k,i} > 1,$$

donc $g\xi_i$ est un élément de $Vect(A)$. Par suite, $g\xi = \lim g\xi_i$ est un élément de U.

D'autre part, $g\alpha \in A \subseteq U$ par définition de A, et comme U est un sous-espace, $g\mu$ est dans U.

Par conséquent, comme $\mu \in V$ et comme V est le complémentaire orthogonal de U, on a

$$(\mu, g\mu) = 0 \qquad \forall g > 1.$$

Ainsi, pour tout $g > 1, (\mu\mu^*, g) = 0$:
en effet, si $\mu = \sum_{h \in G} m_h h$, alors

$$\mu^* = \sum_{h \in G} \overline{m_h} h^{-1}.$$

Ainsi,

$$\mu\mu^* = \sum_{h \in G} \sum_{h' \in G} m_h \overline{m_{h'}} h h'^{-1}.$$

D'autre part, si $g > 1$,

$$g\mu = \sum_{h \in G} m_h g h = \sum_{h \in G} m_{g^{-1}h} h,$$

et donc par définition du produit scalaire,

$$0 = (\mu, g\mu) = \sum_{h \in G} m_h \overline{m_{g^{-1}h}}.$$

Alors, $(\mu\mu^*, g)$ est le coefficient de $\mu\mu^*$ suivant g, donc

$$\begin{aligned}(\mu\mu^*, g) &= \sum_{h \in G} m_h \overline{m_{g^{-1}h}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Par suite, pour tout $g \in G$ différent de 1, $(\mu\mu^*, g) = 0$, car $(\mu\mu^*, g^{-1}) = \overline{(\mu\mu^*, g)}$, donc $\mu\mu^*$ est orthogonal à tous les éléments de $\mathbb{C}G$, sauf 1 (et ses multiples). On en déduit que

$$\mu\mu^* = \lambda 1, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Supposons que $\alpha \in \mathbb{C}G, \beta \in l^2(G)\backslash\{0\}$ tels que $\alpha\beta = 0$.
Alors $\xi\beta + \mu\beta = 0$. Mais,

$$\xi\beta = \lim_i \Big(\sum_{k=1}^{n_i} \lambda_{k,i} g_{k,i} \alpha\beta \Big) = 0,$$

donc $\mu\beta = 0$.

Supposons $\mu \neq 0$. D'après le proposition 1.25, il existe $\gamma \in l^2(G)$ non nul tel que $\gamma\mu = 0$. Par suite, $\gamma\mu\mu^* = 0$, et donc $\lambda\gamma = 0$. Comme $\lambda \neq 0$, on a $\gamma = 0$ ce qui est absurde par définition de γ. Ainsi, $\mu = 0$, donc $\alpha = 0$ (car $\alpha \notin U$). ■

6.2.3 Variations sur la preuve de Linnell

Nous allons à présent démontrer d'une autre manière le théorème 1.28, en donnant un autre argument pour la dernière partie de la preuve. Rappelons les notations introduites dans la démonstration précédente du théorème 1.28 :

Soit $A = \{g\alpha; g > 1\} \subseteq l^2(G)$.

Soit U le plus petit sous-espace fermé de $l^2(G)$ contenant A, i.e. $U = \overline{Vect(A)}$ est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble A.

Soit V le complémentaire orthogonal de U. Décomposons l'élément $\alpha \in l^2(G)$ sur U et V :

$$\alpha = \xi + \mu, \qquad \xi \in U, \mu \in V.$$

On a montré que $\mu\mu^* = \lambda 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et que $\mu\beta = 0$. Supposons $\mu \neq 0$.
Notons encore

$$\mathcal{H}_\mu = \overline{Vect(\lambda_G(G)\mu)}$$

la sous-représentation cyclique de $l^2(G)$ engendrée par μ, où λ_G désigne la représentation régulière gauche du groupe G.

Lemme 1.29 *L'espace $\mathcal{H}_\mu$ est $\lambda_G(G)$-invariant, et il existe une isométrie linéaire Φ de $l^2(G)$ dans $\mathcal{H}_\mu$ qui commute avec $\lambda_G(g), g \in G$.*

Preuve. Montrons l'invariance de $\mathcal{H}_\mu$. Soit $x \in \mathcal{H}_\mu$; x s'écrit sous la forme

$$x = \lim \sum_i a_i \lambda_G(g_i)\mu, \quad a_i \in \mathbb{C}, g_i \in G.$$

Par suite,

$$\lambda_G(g)x = \lim \sum_i a_i \lambda_G(gg_i)\mu$$

est la limite d'éléments de $Vect(\lambda_G(G))$, donc $\lambda_G(g)x \in \mathcal{H}_\mu$, ce qui prouve que l'espace $\mathcal{H}_\mu$ est $\lambda_G(G)$-invariant.

Montrons l'existence d'une isométrie linéaire Φ de $l^2(G)$ dans $\mathcal{H}_\mu$ qui commute avec $\lambda_G(g), g \in G$. On définit cette application linéaire en donnant l'image des éléments de la base :

$$\Phi(g) = \frac{1}{\|\mu\|}\lambda_G(g)\mu = \frac{g\mu}{\|\mu\|}.$$

Vérifions que ϕ commute avec $\lambda_G(h), h \in G$:

$$\begin{aligned}
\big(\lambda_G(h) \circ \Phi\big)(g) =& \lambda_G(h)\Big(\frac{g\mu}{\|\mu\|}\Big) \\
=& \frac{hg\mu}{\|\mu\|} \\
=& \Phi(hg) \\
=& \big(\Phi \circ \lambda_G(h)\big)(g).
\end{aligned}$$

Vérifions enfin que Φ est une isométrie, en utilisant le fait que $\mu\mu^* = \lambda 1$ (et donc $\|\mu\|^2 = \|\mu\mu^*\| = \lambda$). Pour cela, soit $\xi \in l^2(G)$. Alors

$$\begin{aligned}
\|\phi(\xi)\|^2 =& \frac{\|\xi\mu\|^2}{\|\mu\|^2} \\
=& \frac{\|\sum_{g\in G} \xi_g g\mu\|^2}{\|\mu\|^2} \\
=& \frac{(\sum_{g\in G} \xi_g g\mu, \sum_{h\in G} \xi_h h\mu)}{\|\mu\|^2} \\
=& \frac{\sum_{g,h\in G} \xi_g \overline{\xi_h}(g\mu, h\mu)}{\|\mu\|^2} \\
=& \frac{\sum_{g,h\in G} \xi_g \overline{\xi_h}(\mu\mu^*, g^{-1}h)}{\|\mu\|^2} \\
=& \frac{\sum_{g\in G} |\xi_g|^2 \lambda}{\|\mu\|^2} \\
=& \|\xi\|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, Φ possède bien les propriétés annoncées. ■

Autre preuve du théorème 1.28. Soit $U : l^2(G) \to l^2(G)$ l'isométrie partielle d'espace initial $\mathcal{H}_\mu$ et d'espace final $l^2(G)$ définie par $U = 0$ sur l'orthogonal de $\mathcal{H}_\mu$ et $U = \Phi^{-1}$ sur $\mathcal{H}_\mu$.

Alors U^*U est la projection orthogonale sur $\mathcal{H}_\mu$ et $UU^* = I$. Par conséquent, $\tau(U^*U) = 1$, donc $U^*U = 1$ et ainsi, $\mathcal{H}_\mu = L^2(G)$. Or, on sait que $\mu\beta = 0$, donc pour tout $\eta \in \mathcal{H}_\mu$, $\eta\beta = 0$. En particulier, $\beta = \delta_1\beta = 0$. ■

6.2.4 Conjecture dans le cadre $l^p, p > 2$

Soit $G = F_N$ le groupe libre sur N générateurs $S = \{s_1, \cdots, s_N\}$. Soit $T = Cay(G, S)$ le graphe de Cayley de G; T est un arbre. Soit $x_0 = e$ le point base de T.

Soit $A : l^\infty T \to l^\infty T$ l'opérateur de moyenne définie par la formule

$$\begin{aligned} Af(gx_0) &= \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left(f(s_i^{-1}gx_0) + f(s_igx_0)\right) \\ &= \frac{1}{2N}\left(\chi_{S\cup S^{-1}} * f\right)(gx_0) \end{aligned}$$

pour tout $f \in l^\infty T$, où $\chi_{S\cup S^{-1}}$ est la fonction indicatrice de la partie $S \cup S^{-1}$.

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et soit $\varphi_z : T \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\varphi_z(gx_0) = \frac{z}{(q+1)(z^2-q)}\left(\left(\frac{z}{q}\right)^{n-1} + \frac{z^2-q^2}{z^{n+1}}\right)$$

où $n = d(x_0, gx_0)$ est la distance de gx_0 à x_0 dans T et où $q = 2N - 1$; remarquons que φ_z ne dépend que de l'entier n.

Il est bien connu (Pierre Cartier, Géométrie et analyse sur les arbres, Séminaire Bourbaki 407, 1971/72, 123-140) que φ_z est fonction propre de A pour la valeur propre $\lambda = z + qz^{-1}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = \sqrt{q}$. Alors $\varphi_z \in l^p(T)$ pour tout $p > 2$.

En effet, le cardinal de l'ensemble $\{x \in T / d(x_0, x) = n\}$ est égal à $(q+1)q^{n-1}$; ainsi,

$$\sum_{x\in T}|\varphi_z(x)|^p = \sum_{n\in\mathbb{N}}(q+1)q^{n-1}|\varphi_z(n)|^p$$

et on peut vérifier que cette série converge pour tout $p > 2$.

On peut considérer φ_z comme une fonction $\tilde{\varphi_z}$ sur le groupe G : $\tilde{\varphi_z}(g) = \varphi(gx_0)$. Alors $\varphi_z \in l^p(G)$ pour tout $p > 2$. On a donc démontré le théorème suivant :

Théorème 1.30 *Soit $G = F_N$ le groupe libre engendré par N générateurs $s_1, \cdots, s_N$. Soit $\alpha = \frac{1}{2N}\chi_{S\cup S^{-1}} - \lambda\delta_e \in \mathbb{C}G\backslash\{0\}$ où $S = \{s_1, \cdots s_N\}, z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = \sqrt{q}, \lambda = z + qz^{-1}$ et $q = 2N - 1$. On a alors $\alpha * \varphi_z = 0$.*

Remarque.

L'existence de contre-exemples à la conjecture des diviseurs de zéro dans le cadre l^p a déjà été remarquée par Linnell et Puls, qui donnent un tel contre-exemple de manière ad-hoc (cf [26]). La construction ci-dessus est plus conceptuelle.

6.3 Exemples de groupes ordonnables

6.3.1 Cas des groupes libres

Le but de ce qui suit est de prouver que le groupe libre à deux générateurs, noté F_2, est ordonnable à gauche. La preuve se fait en deux étapes : tout d'abord, on démontre qu'il existe un homomorphisme injectif de F_2 dans $Homeo^+(\mathbb{R})$, le groupe des homéomorphismes de la droite réelle qui préservent l'orientation. Ensuite, on prouve que tout groupe dénombrable G tel qu'il existe un homomorphisme injectif de G dans $Homeo^+(\mathbb{R})$, est ordonnable à gauche.

Lemme 1.31 *Il existe un homomorphisme injectif φ de F_2 dans $SL_2(\mathbb{R})$, ie $SL_2(\mathbb{R})$ contient un sous-groupe libre sur deux générateurs.*

Preuve. Pour prouver ce lemme, on utilise une méthode appelée Ping-Pong de Klein. Notons a, b les deux générateurs du groupe libre F_2. Soit $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; x et y sont des éléments de $SL_2(\mathbb{R})$. On définit un homomorphisme φ de F_2 dans $SL_2(\mathbb{R})$ par son image sur les générateurs du groupe F_2 :

$$\varphi(a) = x, \quad \varphi(b) = y.$$

Il faut prouver que l'application φ ainsi définie est injective. Pour cela, soit $g \in F_2 \backslash \{e\}$. On veut prouver que $\varphi(g) \neq \varphi(e)$; φ étant un homomorphisme, on sait que $\varphi(e) = Id$, où Id désigne la matrice identité de $SL_2(\mathbb{R})$.

Remarquons tout d'abord que $x^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $y^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$.

Posons

$$A = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}; |\alpha| > |\beta|\}$$

et

$$B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}; |\alpha| < |\beta|\}.$$

On vérifie facilement que $x^n B \subseteq A$ et que $y^n A \subseteq B$.

En fonction de l'écriture de g, $\varphi(g)$ s'écrit sous une des formes suivantes :

$$x^{n_1}y^{m_1}\cdots x^{n_r}y^{m_r} \qquad (1)$$
$$x^{n_1}y^{m_1}\cdots x^{n_r} \qquad (2)$$
$$y^{m_1}\cdots x^{n_r}y^{m_r} \qquad (3)$$
$$y^{m_1}\cdots x^{n_r} \qquad (4)$$

Supposons que $\varphi(g) = Id$. Quel que soit l'écriture de $\varphi(g)$, on peut se ramener au cas (2) : par exemple, si $\varphi(g) = x^{n_1}y^{m_1}\cdots x^{n_r}y^{m_r}$, on prend $n_0 \neq -n_1$, et l'équation $\varphi(g) = Id$ peut alors s'écrire $x^{n_0+n_1}y^{m_1}\cdots x^{n_r}y^{m_r}x^{-n_0} = Id$.

Soit alors $(\alpha, \beta) \in B$. On applique ce couple à l'égalité

$$x^{n_1}y^{m_1}\cdots x^{n_r} = Id.$$

D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} &x^{n_r}(\alpha,\beta) \in A \\ &y^{m_{r-1}}x^{n_r}(\alpha,\beta) \in B \\ &\qquad\vdots \\ &x^{n_1}y^{m_1}\cdots x^{n_r}(\alpha,\beta) \in A. \end{aligned}$$

Mais $x^{n_1}y^{m_1}\cdots x^{n_r}(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta) \in B$, ce qui est absurde. Ainsi, $\varphi(g) \neq Id$, donc l'application φ est bien un homomorphisme injectif. ■

Lemme 1.32 *(i) Il existe un homomorphisme injectif entre $SL_2(\mathbb{R})$ et $Homeo^+(S^1)$, le groupe des homéomorphismes du cercle qui préservent l'orientation.*
(ii) Il existe un homomorphisme injectif de F_2 dans $Homeo^+(\mathbb{R})$.

Preuve. (i) Pour construire cet homomorphisme, on a besoin d'introduire le groupe

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}); |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

Ce groupe $SU(1,1)$ est isomorphe au groupe $SL_2(\mathbb{R})$. En outre, il existe un homomorphisme injectif de $SU(1,1)$ dans $Homeo^+(S^1)$, défini par la formule

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}, \qquad |z| = 1.$$

En composant les deux homomorphismes précédents, on obtient le résultat.

(ii) Considérons le sous-groupe G de $Homeo^+(\mathbb{R})$ des homéomorphismes de la droite réelle qui commutent avec les translations entières, i.e. le groupe des homéomorphismes f

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tels que $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il existe un homomorphisme surjectif de G dans l'ensemble des homéomorphismes du cercle, qui a pour noyau l'ensemble des translations entières :

$$\Phi : f \mapsto \widetilde{f}, \quad \widetilde{f}(x+\mathbb{Z}) = f(x) + \mathbb{Z} \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit $\psi : F_2 \to Homeo^+(S^1)$ un plongement du groupe libre F_2 sur deux générateurs a, b. On choisit $A', B' \in G$ qui se projettent respectivement sur $A = \psi(a)$ et $B = \psi(b)$ par Φ, c'est-à-dire tels que $\Phi(A') = A$ et $\Phi(B') = B$.

Par la propriété universelle du groupe libre, il existe un unique homomorphisme $\psi' : F_2 \to G$ tel que $\psi'(a) = A'$ et $\psi'(b) = B'$. On a alors $\Phi \circ \psi' = \psi$. Comme ψ est injectif, ceci montre que ψ' est aussi injectif. ■

Lemme 1.33 *Soit G un groupe discret. On suppose qu'il existe un homomorphisme injectif ϕ de G dans $Homeo^+(\mathbb{R})$. Alors G est ordonnable à gauche.*

Preuve.

Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ avec stabilisateur trivial, i.e.

$$Stab(x_0) = \{\gamma \in G; \ \ \phi(\gamma)(x_0) = x_0\} = \{e\}.$$

Alors on définit un ordre total invariant à gauche sur G en posant

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \text{ si } \phi(\gamma_1)(x_0) \leq \phi(\gamma_2)(x_0)$$

où le signe $\leq$ dans le membre de droite désigne l'ordre total de $\mathbb{R}$:

en effet, il est clair que $\leq$ est un ordre sur G. Il est invariant à gauche puisque l'homéomorphisme $\phi(\gamma)$ préserve l'orientation. Enfin, l'ordre est total : en effet, soit $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Supposons que $\phi(\gamma_1)(x_0) = \phi(\gamma_2)(x_0)$. Alors $\phi(\gamma_2^{-1})\phi(\gamma_1)(x_0) = e$, donc par injectivité de ϕ, $\gamma_1 = \gamma_2$ ce qui est absurde. Ainsi, on a bien un ordre total sur G.

Dans le cas où il n'existe pas de point x_0 avec stabilisateur trivial, soit (x_i) une suite dense de points de $\mathbb{R}$. On dit que $\gamma_1 \leq \gamma_2$ si $\gamma_1 = \gamma_2$ ou si le premier indice i pour lequel $\phi(\gamma_1)(x_i) \neq \phi(\gamma_2)(x_i)$ est tel que $\phi(\gamma_1)(x_i) < \phi(\gamma_2)(x_i)$.

Montrons qu'on a ainsi défini un ordre total invariant à gauche sur G.

Remarquons d'abord que si γ_1, γ_2 sont des éléments de G,

$$\gamma_1 = \gamma_2 \Longleftrightarrow \forall i, \ \ \phi(\gamma_1)(x_i) = \phi(\gamma_2)(x_i).$$

En particulier, si $\gamma_1 \neq \gamma_2$, il existe un indice i tel que $\phi(\gamma_1)(x_i) \neq \phi(\gamma_2)(x_i)$, et donc $\gamma_1 \leq \gamma_2$ ou $\gamma_2 \leq \gamma_1$.

Vérifions que $\leq$ est transitive. Pour cela, soit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in G$ tels que $\gamma_1 \leq \gamma_2$ et $\gamma_2 \leq \gamma_3$. Le résultat est trivial si $\gamma_1 = \gamma_2$ ou si $\gamma_2 = \gamma_3$; supposons donc que $\gamma_1 \neq \gamma_2$ et que

$\gamma_2 \neq \gamma_3$. Soit i le premier indice tel que $\phi(\gamma_1)(x_i) \neq \phi(\gamma_2)(x_i)$ et soit j le premier indice tel que $\phi(\gamma_2)(x_j) \neq \phi(\gamma_3)(x_j)$. On considère trois cas :

Si $i = j$, alors pour tout $k < i$, on a $\phi(\gamma_1)(x_k) = \phi(\gamma_2)(x_k) = \phi(\gamma_3)(x_k)$ et $\phi(\gamma_1)(x_i) < \phi(\gamma_2)(x_i) < \phi(\gamma_3)(x_i)$, donc $\gamma_1 \leq \gamma_3$.

Si $i < j$, alors pour tout $k < i$, on a $\phi(\gamma_1)(x_k) = \phi(\gamma_2)(x_k) = \phi(\gamma_3)(x_k)$ et $\phi(\gamma_1)(x_i) < \phi(\gamma_2)(x_i) = \phi(\gamma_3)(x_i)$, donc $\gamma_1 \leq \gamma_3$.

Si $i > j$, alors pour tout $k < j$, on a $\phi(\gamma_1)(x_k) = \phi(\gamma_2)(x_k) = \phi(\gamma_3)(x_k)$ et $\phi(\gamma_1)(x_j) = \phi(\gamma_2)(x_j) < \phi(\gamma_3)(x_j)$, donc $\gamma_1 \leq \gamma_3$.

Ainsi, la relation $\leq$ est transitive. Il est clair que $\leq$ est réflexive et antisymétrique, donc c'est une relation d'ordre sur G. Cet ordre est invariant à gauche car l'homéomorphisme $\phi(\gamma)$ préserve l'orientation. Le fait que l'ordre soit total provient de notre remarque préliminaire. ■

En combinant ces trois lemmes, on voit que le groupe libre à deux générateurs est ordonnable à gauche. Plus généralement, on peut montrer que les groupes libres à n générateurs sont ordonnables à gauche.

On en déduit à l'aide du théorème 1.28 que la conjecture des diviseurs de zéro est vraie dans le cas des groupes libres.

Remarque Rappelons (voir paragraphe 6.4) que Linnell et Pulls ont montré dans [26] que la conjecture des diviseurs de zéro est fausse pour le groupe libre F_N dans le cadre l^p pour tout $p > 2$.

6.3.2 Cas des groupes discrets nilpotents sans torsion

Dans ce paragraphe, nous voulons prouver que tout groupe nilpotent discret sans torsion est ordonnable. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.34 *Soit G un groupe, Z le centre de G et $H = \pi^{-1}(Centre(G/Z))$, où $\pi : G \to G/Z$ désigne la surjection canonique. Si Z est sans torsion, alors H/Z est sans torsion.*

Preuve. Soit $g \in H$ tel que $\pi(g)^n = 1$ pour un entier $n \geq 1$; alors $g^n \in Z$. Il faut montrer que $g \in Z$. Comme Z est sans torsion, il suffit de vérifier que $[x, g]^n = 1$ pour tout $x \in G$, où $[x, g] = xgx^{-1}g^{-1}$ est le commutateur de x et de g.

Soit $x \in G$. On a $gxg^{-1} = x[x^{-1}, g]$. Comme H/Z est le centre de G/Z, on a $[x^{-1}, g] \in Z$. Par suite, $g^2xg^{-2} = gxg^{-1}[x^{-1}, g] = x[x^{-1}, g]^2$ et par récurrence, $g^nxg^{-n} = x[x^{-1}, g]^n$.

Comme $g^n \in Z$, on a $[x^{-1}, g]^n = 1$. ■

Corollaire 1.35 *Soit G un groupe nilpotent sans torsion. Soit $\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$ la suite centrale descendante, définie par $G_i/G_{i-1} = Centre(G/G_{i-1})$. Alors le groupe G_i/G_{i-1} est sans torsion pour tout $1 \leq i \leq n$.*

Preuve. On remarque que

$$\begin{aligned} G_i/G_{i-1} &= (G_i/G_{i-2})/(G_{i-1}/G_{i-2}) \\ &= Centre\Big((G/G_{i-2})/(G_{i-1}/G_{i-2})\Big) \end{aligned}$$

pour tout indice $i \geq 2$ et on procède par récurrence. ■

Proposition 1.36 *Les groupes nilpotents discrets sans torsion sont ordonnables à gauche.*

Preuve. Soit G un groupe discret nilpotent sans torsion. Il existe alors une suite finie

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_i \subset \cdots G_n = G$$

de sous-groupes de G telle que G_{i-1} soit distingué dans G_i et telle que chaque quotient

$$Q_i = G_i/G_{i-1}$$

soit abélien, sans torsion d'après le corollaire 1.35 (donc en particulier ordonnable à gauche).

Notons $\leq_i$ un ordre total invariant à gauche sur Q_i. Nous allons construire un ordre sur G à l'aide de ces ordres sur Q_i:

Soit $\gamma, \gamma' \in G$. Soit i le plus grand entier tel que $\gamma^{-1}\gamma' \notin G_{i-1}$. Alors $\gamma^{-1}\gamma' \in G_i$, donc il détermine un élément $[\gamma^{-1}\gamma']_i$ de Q_i. On pose alors

$$\gamma \leq \gamma' \Longleftrightarrow [\gamma^{-1}\gamma']_i \leq_i 1.$$

Cette formule définit un ordre total invariant à gauche sur G; le seul point non trivial à vérifier est la transitivité de l'ordre. Soit donc $\gamma_1 \leq \gamma_2$ et $\gamma_2 \leq \gamma_3$. Par définition, il existe des entiers i, j tels que $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ soit un élément de G_i mais pas de G_{i-1} et tel que $\gamma_2^{-1}\gamma_3$ soit un élément de G_j mais pas de G_{j-1}. Etudions les différents cas possibles.

Si $j < i$, alors $\gamma_1^{-1}\gamma_3 = (\gamma_1^{-1}\gamma_2)(\gamma_2^{-1}\gamma_3)$ est un élément de G_i mais pas de G_{i-1}. Alors $[\gamma_1^{-1}\gamma_3]_i = [\gamma_1^{-1}\gamma_2]_i[\gamma_2^{-1}\gamma_3]_i$. Mais $[\gamma_2^{-1}\gamma_3]_i$ est l'élément neutre du groupe Q_i, et donc $[\gamma_2^{-1}\gamma_3]_i = 1$. Ainsi, $[\gamma_1^{-1}\gamma_3]_i \leq_i 1$.

Si $i < j$, on raisonne de manière symétrique.

Si $i = j$, alors $\gamma_1^{-1}\gamma_3 = (\gamma_1^{-1}\gamma_2)(\gamma_2^{-1}\gamma_3)$ est un élément de G_i. Si $\gamma_1^{-1}\gamma_3$ est aussi un élément de G_{i-1}, alors $[\gamma_1^{-1}\gamma_3]_i \leq_i 1$. Sinon, alors il faut évaluer $[\gamma_1^{-1}\gamma_3]_k$, où k est un entier plus grand que i et j. Ainsi, $[\gamma_1^{-1}\gamma_3]_k = 1$.

Ainsi, l'ordre est transitif, et le groupe G est ordonnable à gauche. ■

6.3.3 Cas des groupes de tresses

Dans cette partie, on se contente de donner la définition des groupes de tresses, et de citer un théorème de Dehornoy (cf [6]).

Définition *Le groupe de tresses sur n brins, noté B_n, est défini par présentation :*

$$B_n = < \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}; \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, |i-j| \geq 2, \text{ et } \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j, |i-j| = 1 > .$$

On définit de manière analogue le groupe B_∞, avec une infinité de générateurs et les mêmes relations.

Théorème 1.37 *Les groupes de tresses $B_n, 2 \leq n \leq \infty$, sont ordonnables à gauche.*

Preuve. On se contente de définir l'ordre total invariant à gauche : si $\beta_1, \beta_2 \in B_n$, alors on dit que $\beta_1 < \beta_2$ si et seulement si il existe un indice i tel que le mot de tresse $\beta_1^{-1}\beta_2$ admette au moins une représentation où apparait s_i et où n'apparaissent ni σ_i^{-1}, ni les $\sigma_j^{\pm 1}, j < i$. ■

6.4 Seconde approche du problème des diviseurs de zéro

Cette méthode est basée sur la technique des modules de Fredholm, introduite par Connes dans sa preuve du fait que $C_r^*(F_2)$, la C*-algèbre réduite du groupe libre à deux éléments F_2, ne possède pas de projection non triviale (voir [3]). Nous suivrons cette preuve là. Le point de départ est le lemme suivant.

Lemme 1.38 *Soit A une algèbre de von Neumann finie, avec une trace finie fidèle et normalisée τ. Soit p une projection dans A. Si $\tau(p) \in \mathbb{Z}$, alors $p = 0$ ou $p = 1$.*

Preuve. On sait que $\tau(p) = \tau(p^*p) \geq 0$ et que $\tau(1-p) = \tau((1-p)(1-p)^*) \geq 0$, donc $\tau(p) \in \mathbb{N}$ et $1 - \tau(p) = \tau(1-p) \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\tau(p) = 0$ ou $\tau(p) = 1$. Dans le premier cas, on a $\tau(1-p) = \tau((1-p)(1-p)^*) = 0$ et donc par fidélité de la trace, $p = 1$. De même, dans le second cas, $p = 0$. ■

Théorème 1.39 *Soit $G = F_2$ le groupe libre sur deux générateurs. Soit $\alpha \in \mathbb{C}G$. Soit $p_\alpha \in VN(G)$ la projection orthogonale sur $\ker T_\alpha$. Alors $\tau(p_\alpha) \in \mathbb{Z}$, où τ est la trace canonique sur $VN(G)$.*

Corollaire 1.40 *Soit $G = F_2$ et soit $\alpha \in \mathbb{C}G \backslash \{0\}$. Alors $\ker T_\alpha = \{0\}$.*

Preuve. D'après le théorème 1.39 et le lemme 1.38, $p = 0$ ou $p = 1$. Mais par hypothèse, $\alpha \neq 0$ donc le deuxième cas est exclus. ■

Remarque. Supposons que G possède des éléments de torsion. Soit Q le sous-groupe de $\mathbb{Q}$ engendré par les inverses des ordres de ces éléments. Il a été conjecturé que $\tau(p_\alpha) \in Q$ pour tout $\alpha \in C_c(G)$. Un contre-exemple à cette conjecture a été donné dans [13].

Preuve du théorème 1.39

Soit $G = F_2$ le groupe libre sur deux générateurs a et b.

Première étape : Construction d'un module de Fredholm

Soit $T = (V, E)$ le graphe de Cayley de G. Rappelons que l'ensemble des sommets de T est $V = G$ et que $x, y \in V$ sont liés par une arête (i.e. $\{x, y\} \in E$) si et seulement si $y = xg$ pour un $g \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$.

Il est bien connu que T est un arbre. Etant donnés $x, y \in V$, il existe donc une unique géodésique $[x, y]$ les reliant. Fixons $x_0 \in V$ et définissons une application

$$\beta : V \backslash \{x_0\} \to E, x \mapsto \beta(x)$$

où $\beta(x) \in E$ est l'arête contenant x et contenue dans $[x_0, x]$. Il est clair que β est une bijection. On choisit un point $* \notin E$ et on étend β à V par $\beta(x_0) = *$, obtenant ainsi une bijection $\beta : V \to E \cup \{*\}$.

Le groupe G agit par translations à gauche sur V et sur E. On étend l'action de G sur E en une action sur $E \cup \{*\}$ par $g* = *$ pour tout $g \in G$.

L'application β est presque G-équivariante au sens suivant.

Lemme 1.41 *Soit $g \in G$. L'ensemble $\{x \in V / \beta(gx) \neq g\beta(x)\}$ est fini.*

Preuve. Pour $x \in V$, on a $gx = x_0$ si et seulement si $x = g^{-1}x_0$. Le segment $[x_0, g^{-1}x_0]$ contient un nombre fini de sommets. Pour tout $x \notin [x_0, g^{-1}x_0]$, on a $gx \neq x_0$ et $g\beta(x)$ est une arête contenant gx et contenue dans $g[x_0, x] = [gx_0, gx]$. Comme T est un arbre et $gx \notin [gx_0, x_0]$, $g\beta(x)$ est également contenue dans $[x_0, gx]$ et donc $g\beta(x) = \beta(gx)$. ■

Soient $l^2(V)$ et $l^2(E)$ les espaces de Hilbert avec bases V et E respectivement. On définit un isomorphisme

$$\Phi : l^2(V) \to l^2(E) \oplus \mathbb{C}\{*\}$$

par la formule $\Phi(\delta_x) = \delta_{\beta(x)}$ pour tout $x \in V$.

Soit $\pi^+ = \lambda_G$ la représentation régulière gauche dans $l^2(V) = l^2(G)$ et soit $\pi = \rho \oplus 0$, où ρ est la représentation de G sur $l^2(E)$ associée à l'action de G sur E et où 0 est la représentation 0 sur $\mathbb{C}\{*\}$.

On définit π^- la représentation de G sur $l^2(V)$ par

$$\pi^-(g) = \Phi^{-1}\pi(g)\Phi \ \forall g \in G;$$

π^- est donc unitairement équivalente à π.

Lemme 1.42 *La représentation π^- de G s'étend linéairement en une représentation de $VN(G)$.*

Preuve. Comme π^- et π sont équivalentes, il suffit de le montrer pour ρ. L'action de G sur E est libre (si $g\{x,y\} = \{x,y\}$ pour $x, y \in V$ et $g \in G$, alors $g = e$). Ceci montre que ρ est un multiple de la représentation régulière λ_G (en fait, $\rho = \lambda_G \oplus \lambda_G$ car G possède deux orbites dans E). Comme λ_G s'étend à $VN(G)$, ceci termine la preuve. ■

Lemme 1.43 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}G$, l'opérateur $\pi^+(\alpha) - \pi^-(\alpha) \in \mathcal{L}(l^2(V))$ est de rang fini.*

Preuve. Par linéarité, il suffit de montrer que $\pi^+(g) - \pi^-(g)$ est de rang fini pour tout $g \in G$.

Par le lemme 1.41, l'ensemble $\{x \in V / \beta(gx) \neq g\beta(x)\}$ est fini. Pour tout $x \in V$ tel que $\beta(gx) = g\beta(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\pi^-(g)\delta_x &= \Phi^{-1}\pi(g)\Phi(\delta_x) \\
&= \Phi^{-1}(\pi(g)\delta_{\beta(x)}) \\
&= \Phi^{-1}(\delta_{g\beta(x)}) \\
&= \Phi^{-1}(\delta_{\beta(gx)}) \\
&= \delta_{gx} \\
&= \pi^+(g)\delta_x.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\pi^+(g)$ et $\pi^-(g)$ coincident sur le sous-espace de $l^2(V)$ de codimension finie engendré par $\{\delta_x / x \in V, \beta(gx) = g\beta(x)\}$. ■

Deuxième étape : Calcul de la trace

Soit $\tau : VN(G) \to \mathbb{C}$, $\tau(T) =< T\delta_e, \delta_e >=< T\delta_x, \delta_x >$ pour tout $x \in V$ la trace canonique sur $VN(G)$. Nous allons relier $\tau(T)$ à la trace usuelle des opérateurs pour certains $T \in VN(G)$.

Lemme 1.44 *Soit $T \in VN(G)$ tel que $\pi^+(T) - \pi^-(T)$ soit un opérateur de rang fini. Alors*

$$\tau(T) = trace(\pi^+(T) - \pi^-(T)) = \sum_{x \in V} < \big(\pi^+(T) - \pi^-(T)\big)\delta_x, \delta_x > .$$

Preuve. Pour tout $g \in G$, on a :

$$\begin{aligned} < \big(\pi^+(g) - \pi^-(g)\big)\delta_{x_0}, \delta_{x_0} > &=< \pi^+(g)\delta_{x_0}, \delta_{x_0} > - < \pi^-(g)\delta_{x_0}, \delta_{x_0} > \\ &=< \lambda(g)\delta_{x_0}, \delta_{x_0} > - < (\Phi^{-1}\pi(g)\Phi)\delta_{x_0}, \delta_{x_0} > \\ &= \tau(g) - < \pi(g)\delta_{\beta(x_0)}, \delta_{\beta(x_0)} > \\ &= \tau(g) - < \pi(g)\delta_*, \delta_* > \\ &= \tau(g) \text{ car } \pi(g)\delta_* = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $x \in V\backslash\{x_0\}$, on a

$$\begin{aligned} < \big(\pi^+(g) - \pi^-(g)\big)\delta_x, \delta_x > &=< \lambda(g)\delta_x, \delta_x > - < \pi(g)\delta_{\beta(x)}, \delta_{\beta(x)} > \\ &=< \delta_{gx}, \delta_x > - < \delta_{g\beta(x)}, \delta_{\beta(x)} > \\ &= 0; \end{aligned}$$

en effet, si $g = 1, < \delta_{gx}, \delta_x >=< \delta_{g\beta(x)}, \delta_{\beta(x)} >= 1$ et si $g \neq 1, gx \neq x$ et $g\beta(x) \neq \beta(x)$, donc $< \delta_{gx}, \delta_x >=< \delta_{g\beta(x)}, \delta_{\beta(x)} >= 0$.

Il en découle que

$$trace\big(\pi^+(g) - \pi^-(g)\big) = \sum_{x \in V} < \big(\pi^+(g) - \pi^-(g)\big)\delta_x, \delta_x >= \tau(g).$$

Par linéarité, on a donc

$$trace\big(\pi^+(T_\alpha) - \pi^-(T_\alpha)\big) = \tau(T_\alpha) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{C}G.$$

Par densité de $\mathbb{C}G$ dans $VN(G)$ et par continuité de τ et des formes linéaires positives $T \mapsto < \big(\pi^+(T) - \pi^-(T)\big)\delta_x, \delta_x >$, il en découle que $trace\big(\pi^+(T) - \pi^-(T)\big) = \tau(T)$ pour tout $T \in VN(G)$ tel que $\pi^+(T) - \pi^-(T)$ soit de rang fini. ■

Troisième étape : Quelques lemmes généraux

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

Lemme 1.45 *Soient T, S deux opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$. Soient p, q les projections orthogonales sur* $\ker T$ *et* $\ker S$. *Supposons que $T - S$ soit de rang fini. Alors $p - q$ est de rang fini.*

Preuve. Soit $\varphi = T - S$. Par hypothèse, $\mathcal{K} = \ker(T - S)$ est de codimension finie dans $\mathcal{H}$. Comme T et S coincident sur $\mathcal{K}$, on a $\ker T \cap \mathcal{K} = \ker S \cap \mathcal{K}$. Ainsi, p et q coincident sur $\ker T \cap \mathcal{K}$.

D'autre part, comme $\mathcal{K}$ est de codimension finie dans $\mathcal{H}$, $\ker T \cap \mathcal{K}$ et $\ker S \cap \mathcal{K}$ sont de codimension finie dans $\ker T$ et $\ker S$ respectivement. Il en découle que $(\ker T)^\perp$ et $(\ker S)^\perp$

sont de codimension finie dans $(\ker T \cap \mathcal{K})^\perp = (\ker S \cap \mathcal{K})^\perp$. Ainsi, $(\ker T)^\perp \cap (\ker S)^\perp$ est de codimension finie dans $(\ker T \cap \mathcal{K})^\perp$ et donc dans $(\ker T)^\perp$.

Il est clair que $p = q = 0$ sur $(\ker T)^\perp \cap (\ker S)^\perp$.

Soit $\mathcal{K}' = [\ker T \cap \mathcal{K}] \oplus (\ker T)^\perp \cap (\ker S)^\perp$. Comme $\ker T \cap \mathcal{K}$ est de codimension finie dans $\ker T$ et que $(\ker T)^\perp \cap (\ker S)^\perp$ est de codimension finie dans $(\ker T)^\perp$, $\mathcal{K}'$ est de codimension finie dans $\mathcal{H}$. De plus, $p = q$ sur $\mathcal{K}'$. ■

Lemme 1.46 *Soient $p, q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ deux projections telles que $p - q$ soit un opérateur à trace sur $\mathcal{H}$. Alors $trace(p - q) \in \mathbb{Z}$.*

Preuve. Soit $T = (p - q)^2$. Alors T est auto-adjoint et compact. De plus, $Tp = pT$ et $Tq = qT$. Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathcal{H}_\lambda$ la décomposition de $\mathcal{H}$ en sous-espaces propres $\mathcal{H}_\lambda$ de T. Pour tout $\lambda \neq 0, \dim \mathcal{H}_\lambda < \infty$.

Comme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \ker T \\ &= \ker(p - q)^2 \\ &= \ker(p - q), \end{aligned}$$

les projections p et q coincident sur $\mathcal{H}_0$. On a donc

$$trace(p - q) = trace(p - q)\big|_{\bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathcal{H}_\lambda}.$$

Comme p et q commutent avec T, chaque $\mathcal{H}_\lambda$ est invariant sous p et sous q. On a donc

$$trace(p - q) = \sum_{\lambda \neq 0} \big(trace(p|_{\mathcal{H}_\lambda}) - trace(q|_{\mathcal{H}_\lambda})\big).$$

On a en outre $trace(p|_{\mathcal{H}_\lambda}) \in \mathbb{N}$ et $trace(q|_{\mathcal{H}_\lambda}) \in \mathbb{N}$, car $\dim \mathcal{H}_\lambda < \infty$. Ainsi, $trace(p|_{\mathcal{H}_\lambda}) - trace(q|_{\mathcal{H}_\lambda}) \in \mathbb{Z}$. Le terme de gauche étant fini, on a

$$trace(p|_{\mathcal{H}_\lambda}) - trace(q|_{\mathcal{H}_\lambda}) \neq 0$$

pour au plus un nombre fini de λ. Il en découle que $trace(p - q) \in \mathbb{Z}$. ■

Quatrième étape : Intégralité de la trace

Soit $\alpha \in \mathbb{C}G$. Soit $p \in VN(G)$ la projection orthogonale sur $\ker T_\alpha$. Nous voulons montrer que $\tau(p) \in \mathbb{Z}$. Soient p^+, p^- les projections orthogonales sur $\ker \pi^+(T_\alpha)$ et sur $\ker \pi^-(T_\alpha)$ respectivement.

Lemme 1.47 *(i) $\pi^+(p) = p^+$.*
(ii) Il existe une projection p_* de rang 1 telle que $\pi^-(p) = p^- - p_*$.

Preuve. (i) Comme $\pi^+ = \lambda_G$, on a $\ker \pi^+(T_\alpha) = \ker T_\alpha$ et donc $p^+ = p = \pi^+(p)$.

(ii) La représentation π^- est équivalente à la représentation $\lambda_G \oplus \lambda_G \oplus 0$. Il existe donc une décomposition $l^2(V) = \mathcal{H} \oplus \mathbb{C}\delta_{x_0}$ en sous-espaces $\pi^-(G)$-invariants avec $\pi^-(G)\big|_{\mathbb{C}\delta_{x_0}} = 0$ et il existe un isomorphisme $T : \mathcal{H} \to l^2(G) \oplus l^2(G)$ entrelaçant π^- et $\lambda_G \oplus \lambda_G$. On a ainsi

$$\begin{aligned}[\ker \pi^-(\alpha)] \cap \mathcal{H} &= T^{-1}\Big(\ker \big(\lambda_G(\alpha) \oplus \lambda_G(\alpha)\big)\Big) \\ &= T^{-1}(\ker T_\alpha \oplus \ker T_\alpha)\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\pi^-(p)\big|_{\mathcal{H}} &= T^{-1}[\lambda_G(p) \oplus \lambda_G(p)]T \\ &= T^{-1}[p \oplus p]T,\end{aligned}$$

il en découle que $\pi^-(p)\big|_{\mathcal{H}}$ est la projection orthogonale sur $\ker \pi^-(T_\alpha) \cap \mathcal{H}$. Comme $\pi^-(p) = \pi^-(\alpha) = 0$ sur $\mathbb{C}\delta_{x_0}$, on a

$$\pi^-(p)\big|_{\mathbb{C}\delta_{x_0}} = 0 \text{ et } \mathbb{C}\delta_{x_0} \subseteq \ker \pi^-(T_\alpha).$$

Comme p^- est la projection sur $\ker \pi^-(T_\alpha)$, $p^- = I$ sur $\mathbb{C}\delta_{x_0}$, d'où $p^- = \pi^-(p) + p_*$, où p_* est la projection sur $\mathbb{C}\delta_{x_0}$. ■

Fin de la preuve du théorème 1.39

Par le lemme 1.43, $\pi^+(\alpha) - \pi^-(\alpha)$ est de rang fini. Le lemme 1.45 implique que $p^+ - p^-$ est de rang fini. Par le lemme 1.47, $\pi^+(p) - \pi^-(p) = (p^+ - p^-) + p_*$ est également de rang fini. Le lemme 1.46 implique alors que $trace\big(\pi^+(p) - \pi^-(p)\big) \in \mathbb{Z}$. Mais $\tau(p) = trace(\pi^+(p) - \pi^-(p))$ d'après le lemme 1.44. Ainsi, $\tau(p) \in \mathbb{Z}$. ■

Chapitre 2

Propriété (T) pour Sp(n,1)

Dans le chapitre 9 de [16], Pierre de la Harpe et Alain Valette ont prouvé que le groupe $Sp(n,1)$, le groupe des isométries de l'espace hyperbolique sur les quaternions, a la propriété (T) de Kazhdan. La preuve, dûe entre autres à Kostant ([23]), est longue et assez fastidieuse. Le but de ce chapitre est de donner deux preuves raisonnablement courtes, et n'utilisant que des résultats assez connus, de ce théorème. L'esquisse de démonstration la première preuve que nous allons détailler ici se trouve dans le review par M. Cowling de [16], et utilise très largement des idées de [5]. On peut aussi trouver des indications un peu plus précises dans [31]. La deuxième preuve, basée sur des idées de Gromov et de Shalom, est développée dans un livre à paraitre de B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette.

1 Généralités sur les groupes de Kazhdan

Soit G un groupe localement compact.

Les représentations $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ considérées sont supposées unitaires et fortement continues sur des espaces de Hilbert complexes, ce qui signifie que

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{H}_\pi &\to \mathcal{H}_\pi \\ (g, \xi) &\mapsto \pi(g)\xi \end{aligned}$$

est une application continue.

UNIVERSITE DE METZ
S C D

Définition *Pour un nombre réel $\varepsilon > 0$ et un ensemble compact $K \subseteq G$, on dit qu'un vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ est (ε, K) invariant si*

$$\sup_{k \in K} \|\pi(k)\xi - \xi\| < \varepsilon.$$

On dit que π possède presque des vecteurs invariants si pour tout couple (ε, K), il existe un vecteur unité (ε, K) invariant dans $\mathcal{H}_\pi$.

Définition *On dit que le groupe G a la propriété (T), ou que G est un groupe de Kazhdan, si toute représentation de G qui possède presque des vecteurs invariants a des vecteurs non triviaux invariants :*

$$\exists 0 \neq \eta \in \mathcal{H}_\pi \text{ tel que } \pi(\mathrm{g})\eta = \eta \quad \forall \mathrm{g} \in \mathrm{G}.$$

Définition *Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ et soit $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ deux représentations unitaires de G. On dit que π est faiblement contenue dans ρ si toute fonction de type positif associée à π peut être approchée uniformément sur les sous-ensembles compacts de G par des sommes finies de fonctions de type positif associées à ρ. On note alors $\pi \prec \rho$.*

Ceci signifie que pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, pour tout sous-ensemble compact Q de G et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{H}_\rho$ tels que pour tout $x \in Q$,

$$| < \pi(x)\xi, \xi > - \sum_{i=1}^{n} < \rho(x)\eta_i, \eta_i > | < \varepsilon.$$

Définition *Soit $\widehat{G}$ le dual de G, c'est à dire l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G. On le munit de la topologie de Fell, basée sur la contenance faible :*

si S est une partie de $\widehat{G}$, $\pi \in \widehat{G}$ est dans l'adhérence de $S \iff \pi$ est faiblement contenue dans S (on note alors $\pi \prec S$).

Ceci signifie que chaque fonction normalisée de type positif associée à un vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}_\pi$

$$\begin{aligned} \varphi_\xi : & G \to \mathbb{C} \\ & g \mapsto < \pi(g)\xi, \xi > \end{aligned}$$

peut être approchée uniformément sur les sous ensembles compacts de G par des combinaisons convexes de fonctions normalisées de type positifs associées à des représentations dans S.

Remarques 1) π possède presque des vecteurs invariants $\Longleftrightarrow$ π contient faiblement la représentation triviale 1_G.

2) π possède un vecteur invariant $\Longleftrightarrow$ π contient la représentation triviale comme sous représentation.

3) G a la propriété (T) $\Longleftrightarrow$ Toute représentation qui contient faiblement 1_G contient 1_G.

Proposition 2.1 *G a la propriété (T) $\Longleftrightarrow$ 1_G est isolée dans $\widehat{G}$.*

Preuve. Supposons que le groupe G est de Kazhdan.

Soit $S \subseteq \widehat{G}$ tel que $1_G \in \overline{S}$; on va prouver que $1_G \in S$.

On a supposé que $1_G \in \overline{S}$, donc $1_G \prec \bigoplus_{\pi \in S} \pi$. Ainsi, $1_G = \pi$ pour un $\pi \in S$, et par conséquent, la représentation triviale 1_G est isolée dans $\widehat{G}$.

Réciproquement, supposons que la représentation triviale 1_G soit isolée dans $\widehat{G}$.

Soit P l'enveloppe convexe de 0 et des fonctions normalisées de type positif sur G associées aux représentations de G. On munit P de la topologie de la convergence uniforme sur les sous ensembles compacts de G; alors P est compact.

Soit P_0 l'enveloppe convexe fermée de tous les points extrémaux de P qui sont différents de la fonction constante égale à 1; par hypothèse, $1 \notin P_0$.

Soit K la réunion des segments joignant 1 et un point de P_0.

D'après le théorème de Krein Milmann, $K = P$.

Prouvons que le groupe G a la propriété (T).

Soit π une représentation de G possédant presque des vecteurs invariants.

Soit φ une fonction normalisée de type positif associée à π, appartenant à $P \backslash P_0$.

Par définition de K,

$$\varphi = \lambda + (1-\lambda)\psi, \quad \psi \in P_0, \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Faisons des constructions GNS pour ces différentes fonctions :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= < \pi(x)\xi, \xi >, \quad \xi \in \mathcal{H}_\pi. \\ \lambda &= < \pi_1(x)\xi_1, \xi_1 >, \quad \xi_1 \in \mathcal{H}_{\pi_1}. \\ (1-\lambda)\psi(x) &= < \pi_2(x)\xi_2, \xi_2 >, \quad \xi_2 \in \mathcal{H}_{\pi_2}. \end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{K} = \overline{< (\pi_1(x) \oplus \pi_2(x))(\xi_1 \oplus \xi_2) >} \subseteq \mathcal{H}_{\pi_1} \oplus \mathcal{H}_{\pi_2},$$

et soit

$$\varphi(x) =< (\pi_1 \oplus \pi_2)(x)(\xi_1 \oplus \xi_2), \xi_1 \oplus \xi_2 > .$$

On notera au passage que le vecteur $\xi_1 \oplus \xi_2$ est cyclique pour $\mathcal{K}$.

On définit encore une application u de $\mathcal{H}_\pi$ dans $\mathcal{K}$ par

$$u(\sum_j \lambda_j \pi(x_j)\xi) = \sum_j \lambda_j(\pi_1(x_j) \oplus \pi_2(xj))(\xi_1 \oplus \xi_2).$$

En fait, u est une isométrie qui entrelace les deux actions de G, et

$$\begin{aligned} < \pi_1(x)\xi_1, \xi_1 > &= \lambda \\ &=< \pi_1(e)\xi_1, \xi_1 > \\ &= \|\xi_1\|^2. \end{aligned}$$

donc d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz,

$$\pi_1(x)\xi_1 = c(x)\xi_1,$$

où $c(x) \in \mathbb{C}$ ne dépend que de x.

De plus,

$$< c(x)\xi_1, \xi_1 >= \|\xi_1\|^2,$$

donc

$$c(x) = 1,$$

et ainsi

$$\pi(x)\xi_1 = \xi_1 \quad \forall x \in G.$$

Si $\xi_1 = 0$, alors $\lambda = 0$ ce qui est exclus. Ainsi, ξ_1 est un vecteur fixe non nul dans $\mathcal{K}$; en utilisant l'isométrie u, on obtient un vecteur fixe non nul dans $\mathcal{H}_\pi$, ce qui prouve que G a la propriété (T). ■

Exemples

1) Si G est compact, alors G a la propriété (T).

2) Soit G un groupe de Lie non compact réel simple, de rang réel supérieur ou égal à 2. Alors G est un groupe de Kazhdan.

Cela a été démontrée par Wang en 1969; il suffit en fait d'étudier $SL(3,\mathbb{R})$ et $Sp(2,\mathbb{R})$, car un tel groupe G possède un sous groupe fermé de centre fini localement isomorphe à $SL(3,\mathbb{R})$ ou à $SO(2,3) \cong Sp(2,\mathbb{R})$.

2 Propriété (T) pour Sp(n,1), preuve d'après Cowling-Haagerup

2.1 Généralités sur les groupes de Lie de rang 1

A isomorphisme local près, il en existe trois familles et un groupe exceptionnel :

$SO_0(n,1)$, $n \geq 2$,
$SU(n,1)$, $n \geq 2$,
$Sp(n,1)$, $n \geq 2$,
$F_{4(-20)}$, qui est un groupe d'isométries en rapport avec les octaves de Cayley.

Les trois familles sont définies comme ceci : Soit $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ et soit

$$[x,y] = \overline{y_0}x_0 - \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i}x_i \text{ où } x, y \in \mathbb{F}^{n+1}.$$

Le groupe des isométries pour cette forme bilinéaire $[\cdot\,,\cdot]$ est appelé :

$$O(n,1) \text{ si } \mathbb{F} = \mathbb{R},$$
$$U(n,1) \text{ si } \mathbb{F} = \mathbb{C},$$
$$Sp(n,1) \text{ si } \mathbb{F} = \mathbb{H}.$$

On note

$$SU(n,1) = U(n,1) \cap SL(n+1,\mathbb{C})$$

et $SO_o(n,1)$ la composante connexe de $SO(n,1) = O(n,1) \cap SL(n+1,\mathbb{C})$ qui contient l'identité.

En fait, on peut exprimer le groupe $Sp(n,1)$ comme un sous groupe du groupe $M_{n+1}(\mathbb{H})$:

$$Sp(n,1) = \{g \in GL_{n+1}(\mathbb{H});\quad g^* J g = J\}$$

où g^* désigne la matrice transposée conjuguée de g et où J désigne la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Supposons à présent que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ et notons $G = SU(n,1)$ ou $Sp(n,1)$ ou $F_{4(-20)}$.

Soit $G = KAN$ la décomposition d'Iwasawa de G; rappelons que K est un sous-groupe compact maximal de G, que N est un groupe nilpotent, et que l'algèbre $\mathfrak{A}$ associée au sous-groupe A est une algèbre abélienne. Si $\mathcal{N}$ désigne l'algèbre de Lie du groupe N, alors

$$\mathcal{N} = \mathcal{G}_\alpha \oplus \mathcal{G}_{2\alpha} \text{ où } \mathcal{G}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z^* & 0 \\ z & 0 & -z \\ 0 & z^* & 0 \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{F}^{n-1} \right\}$$

$$\text{et } \mathcal{G}_{2\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} w & 0 & -w \\ 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & w \end{pmatrix} ; w \in \mathbb{F}, w + \overline{w} = 0 \right\}.$$

$$\text{En particulier, } \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{G}_\alpha = \begin{cases} 4(n-1) \text{ pour } Sp(n,1) \\ 2(n-1) \text{ pour } SU(n,1) \\ 8 \text{ pour } F_{4(-20)} \end{cases}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{G}_{2\alpha} = \begin{cases} 3 \text{ pour } Sp(n,1) \\ 1 \text{ pour } SU(n,1) \\ 7 \text{ pour } F_{4(-20)} \end{cases}$$

2.2 Groupes de type H

On pourra consulter [5] pour une introduction sur les groupes de type H.

Définition *Un groupe de type H est un groupe de Lie, noté N, réel, connexe, simplement connexe dont l'algèbre de Lie est de type H.*

Une algèbre de Lie $\underline{\mathcal{N}}$ est de type H si elle s'écrit comme une somme directe $\underline{\mathcal{N}} = \underline{\mathcal{V}} \oplus \underline{\mathcal{Z}}$ où :

i) $\underline{\mathcal{V}}, \underline{\mathcal{Z}}$ sont deux espaces réels euclidiens.

ii) $\underline{\mathcal{Z}}$ est le centre de $\underline{\mathcal{N}}$.

iii) $\forall V \in \underline{\mathcal{V}}$ de norme 1, $adV : \left(\ker ad(V)\right)^{\perp_{\underline{\mathcal{V}}}} \to \underline{\mathcal{Z}}$ est une isométrie surjective.

L'ensemble des groupes de type H est une classe de groupes nilpotents (de pas 2) comprenant la composante nilpotente N de la décomposition d'Iwasawa ($G = KAN$) des groupes de Lie $Sp(n,1), SU(n,1)$ et $F_{4(-20)}$.

Nous avons vu au paragraphe précédent que l'algèbre associée à ces groupes N peut s'écrire sous la forme $\mathcal{N} = \mathcal{G}_\alpha \oplus \mathcal{G}_{2\alpha}$. L'espace $\mathcal{G}_\alpha$ correspond à $\underline{\mathcal{V}}$, tandis que l'espace $\mathcal{G}_{2\alpha}$ correspond à $\underline{\mathcal{Z}}$.

Notations Pour simplifier les notations, on note, pour $v \in \underline{\mathcal{V}}$ et $z \in \underline{\mathcal{Z}}$,

$$(v,z) = \exp(v + z/4) \in N.$$

On définit les entiers p, q, r, a par les formules suivantes :

$$2p = \dim_{\mathbb{R}} \underline{\mathcal{V}},$$
$$q = \dim_{\mathbb{R}} \underline{\mathcal{Z}},$$
$$r = p + q,$$
$$a = p/2.$$

Représentations unitaires irréductibles d'un groupe de type H

Nous avons besoin d'étudier le dual unitaire d'un groupe de type H.

Soit $S_{\underline{\mathcal{Z}}}$ la sphère unité de $\underline{\mathcal{Z}}$.
On munit l'espace $\underline{\mathcal{V}}$ d'une structure hermitienne complexe : si $\omega \in S_{\underline{\mathcal{Z}}}$,

$$\{V, W\}_\omega = < V, W > + i < [V, W], \omega > \quad \forall V, W \in \underline{\mathcal{V}}.$$

On note $\underline{\mathcal{V}}_\omega$ l'espace $\underline{\mathcal{V}}$ muni de cette nouvelle structure $\{.,.\}_\omega$.
Il existe deux classes de représentations irréductibles unitaires d'un groupe N de type H : celles qui sont triviales sur le centre (elles n'interviennent pas dans la formule de Plancherel) et les autres, qu'on peut paramétrer par $\mathbb{R}^+ \times S_{\underline{\mathcal{Z}}}$, et définies de la manière suivante :
Soit $H(\underline{\mathcal{V}}_\omega)$ l'espace des fonctions entières sur $\underline{\mathcal{V}}_\omega$.
Soit $\nu > 0$.
On définit un espace de Hilbert par :

$$H_{\nu,\omega} = \{\xi \in H(\underline{\mathcal{V}}_\omega);\ \|\xi\|_\nu^2 = \int_{\underline{\mathcal{V}}} |\xi(v)|^2 \exp(-2\nu|v|^2) dv < \infty\}.$$

Le groupe N agit sur l'espace $H_{\nu,\omega}$ par la représentation unitaire $\sigma_{\nu,\omega}$:

$$(\sigma_{\nu,\omega}(v, z)\xi)(w) = \exp(-\nu(|v|^2 + 2\{w, v\}_\omega + i < z, \omega >))\xi(w + v)$$

pour $v, w \in \underline{\mathcal{V}}, z \in \underline{\mathcal{Z}}$.

Cette représentation se prolonge en une représentation de l'espace $M^1(N)$ des mesures bornées sur N : pour $\mu \in M^1(N)$,

$$\sigma_{\nu,\omega}(\mu)\zeta = \int_{\underline{\mathcal{V}}} \int_{\underline{\mathcal{Z}}} \sigma_{\nu,\omega}(v, z)\zeta \mu(v, z) d\mu(v, z).$$

D'autre part, si $R > 0$, on définit une mesure Φ_R par la formule:

$$\Phi_R(u) = \int_{\underline{\mathcal{V}}} u(v, 0) \exp(-R|v|^2) dv \quad \forall u \in C_0(N).$$

Proposition 2.2 *Soit ζ un polynôme homogène de degré d dans l'espace $H_{\nu,\omega}$.Alors*

$$\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R)\zeta = \pi^p(R-\nu)^d(R+\nu)^{-d-p}\zeta.$$

Preuve. Soit $\omega \in S_{\underline{Z}}$ et soit ζ un polynôme homogène de degré d dans $H_{\nu,\omega}$.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R)\zeta(w) &= \int_{\underline{\mathcal{V}}} \exp(-R|v|^2)\sigma_{\nu,\omega}(v,0)\zeta(w)dv \text{ par définition de } \Phi_R \\
&= \int_{\underline{\mathcal{V}}} \exp(-R|v|^2)\exp(-\nu(|v|^2+\{w,v\}_\omega))\zeta(w+v)dv \\
&= \int_{\underline{\mathcal{V}}} \exp(-R|v-w|^2)\exp(-\nu(|v-w|^2+2\{w,v-w\}_\omega))\zeta(v)dv \\
&= \int_{\underline{\mathcal{V}}} \exp(-R|v-w|^2)\exp(-\nu(\{v+w,v-w\}_\omega))\zeta(v)dv \\
&= \int_{\underline{\mathcal{V}}} \exp(-R|v-w|^2)\exp(-\nu(|v|^2-|w|^2-\{v,w\}_\omega+\{w,v\}_\omega))\zeta(v)dv \\
&= \exp(\nu|w|^2)\int_{\underline{\mathcal{V}}} \exp(-R|v-w|^2)\exp(-\nu|v|^2)\exp(2i\nu Im\{v,w\}_\omega))\zeta(v)dv.
\end{aligned}$$

On remarquera qu'on a utilisé la formule :

$$\begin{aligned}
\{v+w,v-w\}_\omega &= \{v-w,v-w\}_\omega + 2\{w,v-w\}_\omega \\
&= |v-w|^2 + 2\{w,v-w\}_\omega.
\end{aligned}$$

Pour conclure, on identifie $\underline{\mathcal{V}}_\omega$ avec $\mathbb{C}^p$ et on utilise le fait que ζ est une somme de monômes homogènes de degré d; l'intégrale se décompose alors en une somme de p intégrales du type de celle du lemme 2.11 (voir annexe, paragraphe 2.4). Par suite, on a bien

$$\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R)\zeta = \pi^p(R-\nu)^d(R+\nu)^{-d-p}\zeta. \ \blacksquare$$

Opérateur de Laplace

Introduisons à présent un laplacien sur le groupe N.
Soit $\{\omega_k\}$ une base orthonormale de $\underline{Z}$.
On pose

$$\Delta_{\underline{Z}}u(v,z) = -\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(v,z+t\omega_k)\Big|_{t=0} \qquad \forall (v,z)\in N, u\in C^\infty(N).$$

Soit $\nu > 0, \omega \in S_{\underline{Z}}$ et $\xi \in H_{\nu,\omega}$.

On note également $\sigma_{\nu,\omega}$ la représentation de l'algèbre enveloppente de $\mathcal{N}$ déduite de $\sigma_{\nu,\omega}$

Lemme 2.3 *On a* $\sigma_{\nu,\omega}(\Delta_{\underline{Z}})\xi = \nu^2\xi$, *et par conséquent,* $\sigma_{\nu,\omega}(\Delta_{\underline{Z}}^a)\xi = \nu^{2a}\xi = \nu^p\xi$.

Preuve. Cette propriété se démontre par un calcul direct :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\nu,\omega}(\Delta_{\underline{Z}})\xi(w) &= -\sum_{k=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\sigma_{\nu,\omega}(0, t\omega_k)\xi(w)\Big)\Big|_{t=0} \\
&= -\sum_{k=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\exp(-i\nu t < \omega_k, \omega >)\xi(w)\Big)\Big|_{t=0} \\
&= \nu^2 \sum_{k=1}^{q} < \omega_k, \omega >^2 \xi(w) \\
&= \nu^2\xi(w). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Considérons la distribution tempérée $\Phi_R * \Delta_{\underline{Z}}$; elle est définit sur N par le crochet de dualité suivant :

$$< \Phi_R * \Delta_{\underline{Z}}, u > = < \Phi_R, \Delta_{\underline{Z}} u > \quad \forall u \in C_c^\infty(N).$$

Lemme 2.4 *On a* $\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R * \Delta_{\underline{Z}}) = \sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R)\sigma_{\nu,\omega}(\Delta_{\underline{Z}})$.

Preuve. Là encore, cette propriéte se démontre par un calcul direct :

$\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R * \Delta_{\underline{Z}})\xi(w)$

$= \Phi_R(\Delta_{\underline{Z}})\Big(\sigma_{\nu,\omega}(.)\xi(w)\Big)$ par dualité

$= \int_{\underline{\mathcal{V}}} \exp(-R|v|^2)\Delta_{\underline{Z}}\Big(\sigma_{\nu,\omega}(.)\xi(w)\Big)(v,0)dv$ par définition de Φ_R

$= \int_{\underline{\mathcal{V}}} \exp(-R|v|^2)\Big(-\sum_{k=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\sigma_{\nu,\omega}(v, t\omega_k)\xi(w)\Big)\Big)\Big|_{t=0} dv$ par définition de $\Delta_{\underline{Z}}$

$= \int_{\underline{\mathcal{V}}} \exp(-R|v|^2)(-\sum_{k=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\exp\Big(-\nu(|v|^2 + 2\{w,v\}_\omega + i < t\omega_k, \omega >)\Big)\xi(w+v)\Big)\Big|_{t=0})dv$ par définition de $\sigma_{\nu,\omega}$

$= \int_{\underline{\mathcal{V}}} \exp\Big(-R|v|^2 \exp\Big(-\nu(|v|^2 + 2\{w,v\}_\omega)\Big)\nu^2\xi(w+v)dv.$

D'autre part,

$\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R)\sigma_{\nu,\omega}(\Delta_{\underline{Z}})\xi(w)$

$= \Phi_R(\sigma_{\nu,\omega}(.)\sigma_{\nu,\omega}(\Delta_{\underline{Z}})\xi(w))$

$= \int_{\underline{V}} \sigma_{\nu,\omega}(v,0)\sigma_{\nu,\omega}(\Delta_{\underline{Z}})\xi(w)\exp(-R|v|^2)dv$

$= \int_{\underline{V}} \exp(-R|v|^2)\exp(-\nu(|v|^2+2\{w,v\}_\omega))\sigma_{\nu,\omega}(\Delta_{\underline{Z}})\xi(w+v)dv$

$= \int_{\underline{V}} \exp(-R|v|^2)\exp(-\nu(|v|^2+2\{w,v\}_\omega))\nu^2\xi(w+v)dv$ par le lemme 2.3.

Ainsi, $\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R * \Delta_{\underline{Z}})\xi(w) = \sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R)(\sigma_{\nu,\omega}(\Delta_{\underline{Z}})\xi)(w)$,

i.e. $\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R * \Delta_{\underline{Z}}) = \sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R)\sigma_{\nu,\omega}(\Delta_{\underline{Z}})$. ■

Corollaire 2.5 *On considère la distribution tempérée $\Phi_R * \Delta^a_{\underline{Z}}$ sur N. Soit $R > 0, \nu > 0, \omega \in S_{\underline{Z}}$ et $\xi \in H_{\nu,\omega}$ homogène de degré d.*
Alors $\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R * \Delta^a_{\underline{Z}})\xi = (\pi\nu)^p(R-\nu)^d(R+\nu)^{-d-p}\xi$.

Preuve. C'est encore un calcul direct, qui utilise la proposition 2.2 :

$$\begin{aligned}\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R * \Delta^a_{\underline{Z}})\xi =& \sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R)\sigma_{\nu,\omega}(\Delta^a_{\underline{Z}})\xi\\ =& \sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R)(\nu^p\xi)\\ =& \nu^p\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R)\xi\\ =& (\pi\nu)^p(R-\nu)^d(R+\nu)^{-d-p}\xi \text{ d'après la proposition 2.2.}\end{aligned}$$ ■

Algèbre de Fourier-Stieljes

L'algèbre de Fourier-Stieltjes de N, noté $B(N)$ est l'espace de tous les coefficients $\varphi : n \mapsto < \pi(n)\xi, \eta >$ $(\xi, \eta \in H_\pi)$ de toutes les représentations unitaires π de N. Muni de la multiplication point par point, $B(N)$ est une algèbre; c'est même une algèbre de Banach pour la norme

$$\|\varphi\|_B = inf\{\|\xi\|\|\eta\|;\ \ \varphi(n) = < \pi(n)\xi, \eta >\}.$$

On remarque que si $\varphi \in B(N)$, sa norme en tant qu'élément de l'algèbre de Fourier est minorée par sa norme supérieure :

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_\infty =& sup_{n\in N}|\varphi(n)|\\ =& sup_{n\in N}| < \pi(n)\xi, \eta > |\\ \leq& sup_{n\in N}\|\pi(n)\xi\|\|\eta\| = \|\xi\|\|\eta\|.\end{aligned}$$

Ceci est vrai quel que soient ξ, η vérifiant $\varphi(n) = < \pi(n)\xi, \eta >$, donc $\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_B$.

Proposition 2.6 *Si u est une fonction de classe C^∞ sur N telle que $u \in B(N)$ et telle que $\Delta^{p/2}_{\underline{Z}}u$ soit intégrable, alors :*

$$|\int_{\underline{\mathcal{V}}} \Big((\Delta_{\underline{Z}})^{p/2}u\Big)(v,0)dv| \leq \pi^p \|u\|_B.$$

Preuve. D'après le corollaire 2.5,

$$\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R * \Delta^a_{\underline{Z}})\xi = (\pi\nu)^p(R-\nu)^d(R+\nu)^{-d-p}\xi.$$

pour tout polynome homogène ξ de degré d.

La norme d'opérateur de $\sigma_{\nu,\omega}$ sur l'espace $\mathcal{H}_d$ des polynomes homogènes de degré d est donc inférieure ou égale à $(\pi\nu)^p(R-\nu)^d(R+\nu)^{-d-p}\xi$.

Notons $\|.\|$ la norme d'opérateur sur $H_{\nu,\omega}$. Alors comme la somme directe des espaces $\mathcal{H}_d$ est dense dans $H_{\nu,\omega}$,

$$\begin{aligned}\|\sigma_{\nu,\omega}(\Phi_R * \Delta^a_{\underline{Z}})\| \leq & (\pi\nu)^p(R-\nu)^d(R+\nu)^{-d-p} \\ \leq & \pi^p \text{ d'après le lemme 2.12 (voir annexe, paragraphe 2.4).}\end{aligned}$$

D'autre part, par définition de la norme sur $B(N)$,

$$|< \Phi_R * \Delta^a_{\underline{Z}}, u >| \leq \sup_{\sigma} \|\sigma(\Phi_R * \Delta^a_{\underline{Z}})\| \|u\|_B,$$

le sup étant pris sur l'ensemble $\widehat{N}$ des représentations irréductibles unitaires σ de N. Or, l'ensemble des représentations $\sigma_{\nu,\omega}$ est un ensemble dense dans $\widehat{N}$, c'est-à-dire

$$\sup_{\sigma\in\widehat{N}} \|\sigma(\Phi_R * \Delta^a_{\underline{Z}})\| = \sup_{\sigma,\omega} \|\sigma(\Phi_R * \Delta^a_{\underline{Z}})\|,$$

donc

$$\| < \Phi_R * \Delta^a_{\underline{Z}}, u > \| \leq \pi^p \|u\|_B$$

et par conséquent,

$$|\int_{\underline{\mathcal{V}}} \exp(-R\|v\|^2)\Big((\Delta_{\underline{Z}})^{p/2}u\Big)(v,0)dv| \leq \pi^p \|u\|_B.$$

En faisant tendre R vers 0, on a l'estimation voulue :

$$|\int_{\underline{\mathcal{V}}} \Big((\Delta_{\underline{Z}})^{p/2}u\Big)(v,0)dv| \leq \pi^p \|u\|_B. \quad \blacksquare$$

2.3 Preuve de la propriété (T)

Dans la suite, G désigne un des groupes $Sp(n,1), SU(n,1)$ ou $F_{4(-20)}$. On considère une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$; rappelons que la composante N est de type H.

Notons $\mathcal{G}, \mathcal{A}, \mathcal{N}$ les algèbres de Lie des groupes de Lie G, A, N respectivement. Alors $\mathcal{N} = \mathcal{G}_\alpha \oplus \mathcal{G}_{2\alpha}$, où $\mathcal{G}_\alpha$ et $\mathcal{G}_{2\alpha}$ sont les sous espaces propres associés à la représentation adjointe de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{G}$.

Notons $p = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{G}_\alpha$ et $q = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{G}_{2\alpha}$.

Soit B la forme de Killing sur $\mathcal{G}$. On définit une forme quadratique définie positive sur $\mathcal{G}$ par :

$$|X+Y|^2 = -(2p+4q)^{-1} B(X/2+Y/4, X/2+Y/4).$$

On prend, comme coordonnées sur N, $\exp(X+Y/4)$, où $X \in \mathcal{G}_\alpha$ et $Y \in \mathcal{G}_{2\alpha}$; on veut exprimer ces coordonnées dans la décomposition de Cartan $G = KAK$.

Pour cela, fixons $H_\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $\alpha(H_\alpha) = 1$. Alors pour $X \in \mathcal{G}_\alpha$ et $Y \in \mathcal{G}_{2\alpha}$,

$$\exp(X+Y/4) = k_1 \exp(tH_\alpha) k_2$$

où $k_1, k_2 \in K$ et où $2\sinh t = (4|X|^2 + |X|^4 + |Y|^2)$.

A l'aide de cette relation, on peut trouver l'identification suivante, qui joue un role primordial dans la suite :

Identification *L'espace des restrictions à N des fonctions de classe C^∞ sur G bi-invariantes par K coincide avec l'espace des fonctions de la forme $\exp(X+Y/4) \mapsto f(4|X|^2 + |X|^4 + |Y|^2)$, où f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 2.7 *Soit (u_k) une suite uniformément bornée de fonctions de classe C^∞ sur G, biinvariantes par K, qui convergent uniformément vers 1 sur les sous ensembles compacts de G.*

Soit f_k une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$u_k\Big(\exp(X+\frac{Y}{4})\Big) = f_k(4\,|X|^2 + |X|^4 + |Y|^2).$$

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\quad f_k^{(i)}(t) = o(t^{-i}), \quad 0 \le i \le p/2.$

(ii) $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \left| f_k^{(p/2)}(t) \right| t^{p/2-1} dt < \infty.$

(iii) $\quad f_k^{(p/2)}(4t^2+t^4)t^{p/2-1}$ *est majorée par une fonction intégrable.*

Alors

$$\liminf_{k\to\infty} \|u_k|_N\|_B \geq G(p,q) := \frac{\pi^{1/2}\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(\frac{q}{2})\Gamma(\frac{p+1}{2})}.$$

Ce théorème va nous permettre de prouver rapidement que $Sp(n,1)$ est un groupe de Kazhdan; donnons une esquisse de cette preuve. Si $G = Sp(n,1)$ ne possède pas la propriété (T), il existe une suite φ_k de fonctions sphériques normalisées sur G qui converge uniformément vers 1 sur les sous-ensembles compacts de G. Alors on va montrer que les fonctions $u_k = \varphi_k|_N$ vérifient les hypothèses du théorème 2.7. On conclut, car d'une part, $G(p,q) > 1$, mais d'autre part, $1 = \|u_k\|_B$.

Pour prouver le théorème 2.7, nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 2.8 *Soit (f_k) une suite de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses (i), (ii), et (iii) du théorème, et telle que f_k converge vers 1 uniformément sur les compacts. Alors*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty f_k^{(p/2)}(4t^2+t^4)t^{2p-1}dt = \frac{(-1)^{p/2}}{4}\Gamma(p/2).$$

Preuve. Soit $a = p/2$.

Commencons par vérifier que $\int_0^\infty f_k^{(a)}(4t^2+t^4)t^{2p-1}dt$ existe.

Pour t assez grand, $t^4 + 4t^2 \simeq t^4$.

Or,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f_k^{(p/2)}(t^4)t^{2p-1}dt =& \frac{1}{4}\int_0^\infty f_k^{(a)}(s)s^{p/2-1/4}s^{-3/4}ds\\ =& \frac{1}{4}\int_0^\infty f_k^{(a)}(s)s^{p/2-1}ds.\end{aligned}$$

La fonction f_k vérifie (ii) donc cette intégrale est absolument convergente, ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^\infty f_k^{(a)}(4t^2+t^4)t^{p/2-1}dt$ est convergente.

A présent, on pose $s = 4 + 4t^2 + t^4$.

Alors

$$\begin{aligned}(s^{1/2}-2)^{p-1}s^{-1/2}ds =& (t^2+2-2)^{p-1}(t^2+2)^{-1}(8t+4t^3)dt\\ =& 4t(t^2)^{p-1}(t^2+2)^{-1}(t^2+2)dt\\ =& 4t^{2p-1}dt.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f_k^{(a)}(4t^2+t^4)t^{4a-1}dt =& \frac{1}{4}\int_4^\infty f_k^{(a)}(s-4)(s^{-1/2}-2)^{p-1}s^{-1/2}ds\\ =& \frac{(-1)^a}{4}\int_4^\infty f_k(s-4)g'(s)ds\end{aligned}$$

où

$$g(s) = (\frac{d}{ds})^{a-1}\Big((s^{1/2}-2)^{p-1}s^{-1/2}\Big).$$

Pour avoir ceci, on a intégré par parties, en remarquant qu'il n'y a pas de termes bornés, car les $p-2$ premières dérivées de la fonction $s \mapsto (s^{1/2}-2)^{p-1}s^{-1/2}$ s'annulent en $s=4$ et car $f_k^{(i)}(t) = o(t^{-i})$ $0 \leq i \leq p/2$.

En outre, il est clair que g est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\begin{aligned}
g'(s) =&(\frac{d}{ds})^a((s^{1/2}-2)^{p-1}s^{-1/2}) \\
=&(\frac{d}{ds})^a((\sum_{h=0}^{p-1} C_h^{p-1}s^{h/2}(-2)^{p-1-h})s^{-1/2}) \\
=&(\frac{d}{ds})^a(\sum_{h=0}^{p-1} C_h^{p-1}s^{(h-1)/2}(-2)^{p-1-h}) \\
=&\sum_{h=0}^{p-1} C_h^{p-1}(-2)^{p-1-h}(\frac{d}{ds})^a(s^{(h-1)/2}) \\
=&\sum_{h=0}^{p-1} C_h^{p-1}(-2)^{p-1-h}(s^{(h-p-1)/2})[(h-1)/2]_p
\end{aligned}$$

où $[b]_a = b(b-1)\dots(b-a+1)$.

En particulier si $h = p-1$, on a $[(h-1)/2]_a = 0$, et si $h < p-1$, alors $h-p-1$ est un entier strictement inférieur à -2 donc inférieur ou égal à -3. Ainsi, $s^{(h-p-1)/2}$ tend vers 0 (quand $s \to \infty$) au moins aussi vite que $s^{-3/2}$, d' où

$$\int_4^\infty |g'(s)|ds < \infty.$$

Grâce à l'hypothèse (iii), on peut appliquer le théorème de la convergence dominée :

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty f_k^{(a)}(4t^2+t^4)t^{4a-1}dt =&\frac{(-1)^a}{4}\int_4^\infty \lim_{k\to\infty} f_k(s-4)g'(s)ds \\
=&\frac{(-1)^a}{4}\int_4^\infty g'(s)ds \\
=&\frac{(-1)^a}{4}(\lim_{s\to\infty} g(s) - g(4)) \\
=&\frac{(-1)^a}{4}\lim_{s\to\infty} g(s).
\end{aligned}$$

En effectuant un calcul similaire à celui de $g'(s)$, on prouve que

$$g(s) = \sum_{h=0}^{p-1} C_h^{p-1}(-2)^{p-1-h}(s^{(h-p+1)/2})[(h-1)/2]_{a-1}.$$

Quand on fait tendre s vers ∞, on voit que le seul terme non nul est celui obtenu pour $h = p-1$, ce qui prouve que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty} g(s) =&[a-1]_{a-1}\\ =&(a-1)!\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty f_k^{(a)}(4t^2+t^4)t^{4a-1}dt =&\frac{(-1)^a}{4}[a-1]_{a-1}\\ =&\frac{(-1)^a}{4}\Gamma(a).\ \blacksquare\end{aligned}$$

Lemme 2.9 *Soit f une fonction sur N de classe C^∞ vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème 2.7. On définit $u : N \to \mathbb{R}$ par $u(v,z) = f(4|v|^2+|v|^4+|z|^2)$. Alors*

$$\int_{\underline{\mathcal{V}}}\Big((\Delta_{\underline{z}})^{p/2}u\Big)(v,0)dv = \frac{(-1)^{p/2}2^{p+1}\pi^p\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(p)\Gamma(q/2)}\int_0^{+\infty} f^{(p/2)}(4t^2+t^4)t^{2p-1}dt.$$

Preuve. On pose $s = 4|v|^2+|v|^4$.
D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned}u(v,z) =&f(s+|z|^2)\\ =&\sum_{h=0}^{H}\frac{f^{(h)}(s)}{h!}|z|^{2h}+\frac{1}{H!}\int_s^{s+|z|^2} f^{(H+1)}(t)(s+|z|^2-t)^H dt,\quad H\in\mathbb{N}\\ =&\sum_{h=0}^{H}\frac{f^{(h)}(s)}{h!}|z|^{2h}+\frac{1}{H!}\int_0^{|z|^2}(|z|^2-t)^H f^{(H+1)}(t+s)dt\end{aligned}$$

donc

$$\Delta_{\underline{z}}^a u(v,z) = \sum_{h=0}^{H}\frac{f^{(h)}(s)}{h!}\Delta_{\underline{z}}^a(|z|^{2h})+\frac{1}{H!}\Delta_{\underline{z}}^a\Big(\int_0^{|z|^2}(|z|^2-t)^H f^{(H+1)}(t+s)dt\Big).$$

Or,

$$\begin{aligned}\Delta_{\underline{z}}(|z|^{2h}) =& -\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(|z+t\omega_k|^{2k}\Big)\Big|_{t=0}\\ =& -2h(2h+q-2)|z|^{2h-2}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\Delta_{\underline{Z}}^{a}(|z|^{2h}) =& -2h(2h+q-2)\Delta_{\underline{Z}}^{a-1}(|z|^{2h-2})\\ =&(-1)^{a}2h(2h+q-2)\dots(2h-2a+2)(2h-2a+2+q-2)|z|^{2h-2a}\\ =&(-1)^{a}2^{p}h(h-1+q/2)\dots(h-a+1)(h-a+q/2)|z|^{2h-2a}\\ =&(-1)^{a}2^{p}\frac{h!}{(h-a)!}(h-1+q/2)\dots(h-a+q/2)|z|^{2h-2a}\\ =&(-1)^{a}2^{p}\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(h+q/2)}{\Gamma(h-a+1)\Gamma(h-a+q/2)}|z|^{2h-2a}.\end{aligned}$$

Supposons que $H \geq p$.
Alors

$$\Delta_{\underline{Z}}^{a}\Big(\int_0^{|z|^2}(|z|^2-t)^{H}f^{(H+1)}(t+s)dt\Big) = \int_0^{|z|^2}(|z|^2-t)^{H}P(z,t)f^{(H+1)}(s+t)dt$$

où P est un polynôme, donc en prenant $z=0$ dans la formule

$$\Delta_{\underline{Z}}^{a}u(v,z) = \sum_{h=0}^{H}\frac{f^{(h)}(s)}{h!}\Delta_{\underline{Z}}^{a}(|z|^{2h}) + \frac{1}{H!}\Delta_{\underline{Z}}^{a}\Big(\int_0^{|z|^2}(|z|^2-t)^{H}f^{(H+1)}(t+s)dt\Big),$$

on voit que tous les termes de la somme sont nuls (sauf pour $h=a$), et l'intégrale est nulle. Ainsi,

$$\begin{aligned}\Delta_{\underline{Z}}^{a}u(v,0) =&\frac{f^{(a)}(s)}{a!}\Delta_{\underline{Z}}^{a}(|z|^{2a})\\ =&\frac{1}{a!}f^{(a)}(s)(-1)^{a}2^{p}\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(a+q/2)}{\Gamma(1)\Gamma(q/2)}\\ =&f^{(a)}(s)(-1)^{a}2^{p}\frac{\Gamma(a+q/2)}{\Gamma(q/2)}\\ =&f^{(a)}(s)(-1)^{a}2^{p}\frac{\Gamma(r/2)}{\Gamma(q/2)}\ \text{où } r=p+q.\end{aligned}$$

On intègre sur $\underline{\mathcal{V}}$, en remplacant s par $4|v|^2+|v|^4$:

$$\begin{aligned}\int_{\underline{\mathcal{V}}}\Big((\Delta_{\underline{Z}})^{a}u\Big)(v,0)dv =&(-1)^{a}2^{p}\frac{\Gamma(r/2)}{\Gamma(q/2)}\int_{\underline{\mathcal{V}}}f^{(a)}(4|v|^2+|v|^4)dv\\ =&\frac{(-1)^{a}2^{p+1}\pi^{p}\Gamma(\frac{r}{2})}{\Gamma(p)\Gamma(q/2)}\int_0^{+\infty}f^{(a)}(4t^2+t^4)t^{2p-1}dt\end{aligned}$$

par passage aux coordonnées polaires. ■

Preuve du théorème 2.7

D'après le lemme 2.9, $(\Delta_{\underline{Z}})^a u_k$ est intégrable sur N, et donc

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} \|u_k|_N\|_B &\geq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{\pi^p} \int_{\underline{\mathcal{Y}}} \Big((\Delta_{\underline{Z}})^a u_k\Big)(v,0)dv \text{ d'après la proposition 2.6} \\
&= \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{\pi^p} 2^{p+1} \frac{\pi^p \Gamma(\frac{r}{2})}{\Gamma(p)\Gamma(q/2)} \Big| \int_0^{+\infty} f_k^{(p/2)}(4t^2+t^4)t^{2p-1}dt \Big| \\
&\qquad \text{d'après le lemme 2.9} \\
&= 2^{p+1} \frac{\Gamma(r/2)\Gamma(a)}{4\Gamma(q/2)\Gamma(p)} \text{ d'après le lemme 2.8} \\
&= \frac{2^{p-1}\Gamma\Big((p+q)/2\Big)\Gamma(p/2)}{\Gamma(q/2)\Gamma(p)}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma(q/2)\Gamma(p)} = \frac{\pi^{1/2}}{2^{p-1}\Gamma(q/2)\Gamma((p+1)/2)},$$

donc

$$\liminf_{k\to\infty} \|u_k|_N\|_B \geq \frac{\pi^{1/2}\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(\frac{q}{2})\Gamma(\frac{p+1}{2})}.$$

ce qui achève la preuve du théorème 2.7. ■

En particulier, si $G = Sp(n,1)$, $\liminf_{k\to\infty} \|u_k|_N\|_B \geq 2n-1 > 1$ pour $n \geq 2$ et si $G = F_{4(-20)}$, $\liminf_{k\to\infty} \|u_k|_N\|_B \geq 21$.

Fonctions sphériques.

Introduisons encore quelques résultats connus sur le comportement asymptotique des fonctions sphériques sur $Sp(n,1)$ et $F_{4(-20)}$. On les notera φ_s, $s \in \mathbb{C}$.

Tout d'abord, on les normalise de telle sorte que φ_s, pour s imaginaire pur, corresponde à la représentation de la série principale sphérique, et que φ_1 corresponde à la représentation triviale.

On sait que $\varphi_s \equiv \varphi_t$ si et seulement si $s = \pm t$, donc on peut supposer que $Re(s) \geq 0$.

De plus, φ_s est une fonction hermitienne si et seulement si $s \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

En outre, on connait le comportement asymptotique des fonctions $a \mapsto \varphi_s(\exp aH_\alpha)$ où H_α est tel que $\alpha(H_\alpha) = 1$:

$$\varphi_s\Big(\exp(aH_\alpha)\Big) \simeq c(s)\exp\Big((s-1)(p+q)a\Big) \text{ quand } a \to +\infty$$

où c désigne la fonction de Harish Chandra.

En particulier, φ_s est bornée si et seulement si $|Re(s)| \leq 1$.

Les fonctions sphériques φ_s sont des fonctions de classe C^∞ sur G, biinvariantes par K, donc d'après l'identification du paragraphe 2.3 (avant le théorème 2.7), il existe pour tout nombre complexe s une fonction f_s de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\varphi_s\Big(\exp(X+Y/4)\Big) = f_s(4|X|^2+|X|^4+|Y|^2).$$

Ces fonctions f_s ont le comportement asymptotique suivant :

$$f_s(t) \simeq c(s)t^{(s-1)(p+q)/2} \text{ quand } t \to +\infty.$$

En effet, pour X, Y bien choisis,

$$\begin{aligned} f_s(t) =& f_s(4|X|^2+|X|^4+|Y|^2) \\ =& \varphi_s\Big(\exp(X+Y/4)\Big) \\ =& \varphi_s\Big(k_1\exp(aH_\alpha)k_2\Big) \end{aligned}$$

où $2\sinh a = (4|X|^2+|X|^4+|Y|^2)^{1/2} = t^{1/2}$.

$$\begin{aligned} \text{Or, } \operatorname{arg\,sinh} t =& \ln(t+\sqrt{1+t^2}), \\ \text{donc } a =& \operatorname{arg\,sinh}(\frac{1}{2}\sqrt{t}) \\ =& \ln(\frac{1}{2}\sqrt{t}+\sqrt{1+\frac{t}{4}}), \\ \text{d'où } a \simeq& \ln(\frac{1}{2}\sqrt{t}+\frac{1}{2}\sqrt{t}) = \ln(\sqrt{t}) \quad \text{quand } t \to +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le comportement asymptotique de φ_s, on a

$$f_s(t) \simeq c(s)\exp\Big((s-1)(p+q)\ln(\sqrt{t})\Big) = c(s)t^{(s-1)(p+q)/2} \text{ quand } t \to +\infty.$$

Nous pouvons à présent démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.10 *$Sp(n,1), n \geq 2$ et $F_{4(-20)}$ sont des groupes de Kazhdan.*

Preuve. On raisonne par l'absurde.

Ainsi, supposons que G ne possède pas la propriété (T).

Alors la représentation triviale 1_G n'est pas isolée dans le dual $\widehat{G}$, muni de la topologie de Fell, donc il existe une suite $(\varphi_{s_k})_{k\geq 1}$ de fonctions sphériques de type positif qui converge uniformément vers 1 sur les sous ensembles compacts de G.

Ces fonctions sphériques φ_{s_k} sont bornées (par 1) et hermitiennes, donc on peut supposer que $s_k \in]0,1] \cup i\mathbb{R}$. En outre, à chaque φ_{s_k} correspond une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, notée f_{s_k}, telle que

$$\varphi_{s_k}\Big(\exp(X+Y/4)\Big) = f_{s_k}(4|X|^2 + |X|^4 + |Y|^2).$$

Vérifions, à l'aide du comportement asymptotique des fonctions f_{s_k}, que l'on peut appliquer le théorème 2.7 :

$$f_{s_k}(t) \simeq c(s_k)t^{(s_k-1)(p+q)/2} \text{ quand } t \to +\infty,$$

$$f'_{s_k}(t) \simeq c_1(s_k)t^{(s_k-1)(p+q)/2-1} \text{ quand } t \to +\infty,$$

$$\vdots$$

$$f^{(i)}_{s_k}(t) \simeq c_i(s_k)t^{(s_k-1)(p+q)/2-i} \text{ quand } t \to +\infty,$$

donc

$$f^{(i)}_{s_k}(t) = o(t^{-i}) \text{ pour } 0 \leq i \leq p/2.$$

De plus,

$$|f^{(p/2)}_{s_k}(t)|t^{p/2-1} \simeq \widetilde{c}(s_k)t^{(s_k-1)(p+q)/2-1} \text{ quand } t \to +\infty,$$

donc

$$\int_1^{+\infty} |f^{(p/2)}_{s_k}(t)|t^{p/2-1}dt < \infty.$$

Enfin, il est clair que les f_{s_k} sont majorées par des fonctions intégrables; ainsi,

$$\liminf_{k\to\infty} \|\varphi_{s_k}|_N\|_B > 1.$$

D'autre part, faisons une construction GNS pour la fonction sphérique φ_{s_k} : il existe une représentation unitaire irréductible π_{s_k} et un vecteur unitaire ξ_{s_k} tels que

$$\varphi_{s_k}(n) = < \pi_{s_k}(n)\xi_{s_k}, \xi_{s_k} >$$

ce qui implique que

$$\|\varphi_{s_k}|_N\|_B = \varphi_{s_k}(e) = 1.$$

Ceci est absurde, donc l'hypothèse de départ est fausse; par suite, G est un groupe de Kazhdan. ■

Remarque Si $G = SU(n,1)$, alors $G(p,q) = 1$ et il n'y a pas de contradiction.

2.4 Annexe

Voici les preuves de deux lemmes purement calculatoires utilisés lors de démonstrations précédentes; le lemme 2.11 a été utilisé dans la preuve de la proposition 2.2, tandis que le lemme 2.12 a été utilisé dans celle de la propostion 2.6.

Lemme 2.11 *Soient ν, R des nombres réels positifs, s,t des réels quelconques et k un entier naturel non nul. Alors*

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} (x+iy)^k \exp\Big(-\nu(x^2+y^2)\Big) \exp\Big(-R\Big((x-t)^2+(y-s)^2\Big)\Big) \exp\Big(2i\nu(yt-xs)\Big)dxdy$$

$$= \pi(t+is)^k(R-\nu)^k(R+\nu)^{-k-1} \exp\Big(-\nu(t^2+s^2)\Big).$$

Preuve. Commençons par démontrer le résultat suivant :

si μ est un réel strictement positif, si u, v sont des réels quelconques et si k est un entier naturel, alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} (x+iy)^k \exp\Big(-\mu(x^2+y^2)+2i\mu(yu-xv)\Big)dxdy = \frac{\pi}{\mu^{k+1}}\Big(-\mu(u+iv)\Big)^k \exp\Big(-\mu(u^2+v^2)\Big).$$

Pour cela, soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. On définit une fonction $\widetilde{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ par la formule :

$$\widetilde{g}(u,v) = \int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \exp\Big(2i\mu(yu-xv)\Big)dxdy.$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\Big)\widetilde{g}(u,v) &= \frac{1}{2}\int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)(2i\mu y - 2i^2\mu x)\exp\Big(2i\mu(yu-xv)\Big)dxdy \\ &= \mu\int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)(x+iy)\exp\Big(2i\mu(yu-xv)\Big)dxdy.\end{aligned}$$

Par itérations successives, on obtient :

$$\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\Big)\Big]^k \widetilde{g}(u,v) = \mu^k \int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)(x+iy)^k \exp\Big(2i\mu(yu-xv)\Big)dxdy.$$

En particulier pour $g(x,y) = \exp\Big(-\mu(x^2+y^2)\Big)$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(u,v) &= \int\int_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\mu(x^2+y^2)\Big)\exp\Big(2i\mu(yu-xv)\Big)dxdy \\
&= \exp\Big(-\mu(u^2+v^2)\Big)\int\int_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(-\mu(x^2+y^2+2iyu-2ixv-u^2-v^2)\Big)dxdy \\
&= \exp\Big(-\mu(u^2+v^2)\Big)\int\int_{\mathbb{R}^2}\exp\left(-\mu\Big((x-iv)^2+(y-iu)^2\Big)\right)dxdy \\
&= \frac{\pi}{\mu}\exp\Big(-\mu(u^2+v^2)\Big) \\
&\qquad\qquad \text{car } \int_{\mathbb{R}}\exp(-cs^2)ds = \sqrt{\pi/c} \text{ pour } c>0,
\end{aligned}$$

donc $\widetilde{g}(u,v) = \frac{\pi}{\mu}\exp\Big(-\mu(u+iv)(u-iv)\Big)$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\mathbb{R}^2}(x+iy)^k\exp\Big(-\mu(x^2+y^2)\Big)\exp\Big(2i\mu(yu-xv)\Big)dxdy \\
&= \frac{1}{\mu^k}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\Big)\Big]^k\widetilde{g}(u,v) \\
&= \frac{\pi}{\mu^{k+1}}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\Big)\Big]^k\left(\exp\Big(-\mu(u+iv)(u-iv)\Big)\right) \\
&= \frac{\pi}{\mu^{k+1}}\Big(-\mu(u+iv)\Big)^k\exp\Big(-\mu(u^2+v^2)\Big)
\end{aligned}$$

ce qui est la formule annoncée.

Par prolongement analytique, ceci reste vrai pour tout nombre complexe μ tel que $Re(\mu) > 0$ et pour tous complexes u, v.

Posons $\mu = \nu + R, u = (\nu t - iRs)/\mu, v = (\nu s + iRt)/\mu$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^2}(x+iy)^k\exp\Big(-\nu(x^2+y^2)\Big)\exp\left(-R\Big((x-t)^2+(y-s)^2\Big)\right)\exp\Big(2i\nu(yt-xs)\Big)dxdy$$

$$= \exp(-Rt^2+Rs^2)\int_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(-(\nu+R)(x^2+y^2)\Big)\exp\Big(2R(xt+ys)+2i\nu(yt-xs)\Big)dxdy$$

$$= \exp\Big(-R(t^2+s^2)\Big)\int_{\mathbb{R}^2}(x+iy)^k\exp\Big(-\mu(x^2+y^2)\Big)\exp\Big(2i\mu(yu-xv)\Big)dxdy$$

$$= \exp\Big(-R(t^2+s^2)\Big)\frac{\pi}{\mu^{k+1}}\Big(-\mu(u+iv)\Big)^k\exp\Big(-\mu(u^2+v^2)\Big)$$

$$= \pi(t+is)^k(R-\nu)^k(R+\nu)^{-k-1}\exp\Big(-\nu(t^2+s^2)\Big). \blacksquare$$

Lemme 2.12 *Soient R, ν des nombres réels positifs, non tous deux nuls et soient $p, d \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\frac{\nu^p(R-\nu)^d}{(R+\nu)^{d+p}} \leq 1.$$

Preuve. On a $0 \leq |R-\nu| \leq (R+\nu)$, donc $0 \leq |R-\nu|^d \leq (R+\nu)^d$.
De plus, $0 \leq \nu^p \leq (R+\nu)^p$.
Ces deux inégalités sont à termes positifs ou nuls, donc on peut les multiplier termes à termes :

$$0 \leq \nu^p(|R-\nu|^d) \leq (R+\nu)^{p+d}.$$

Comme $R > 0$ ou $\nu > 0$, ceci prouve le résultat annoncé. ■

3 Propriété (T) pour Sp(n,1), preuve de Bekka-de la Harpe-Valette

3.1 Préliminaires

3.1.1 Cohomologie

Dans la première partie du chapitre, nous avons utilisé le fait qu'un groupe est de Kazhdan si et seulement si la représentation triviale est isolée dans le dual du groupe. Voyons à présent une autre caractérisation de la propriété (T).

Définition *Soit G un groupe topologique, et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Une action isométrique affine de G sur $\mathcal{H}$ est la donnée d'un homomorphisme α de G dans le groupe $Is(\mathcal{H})$ des isométries affines de $\mathcal{H}$ tel que l'application $G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}, (g, \xi) \mapsto \alpha(g)\xi$ soit continue.*

Définition *On dit qu'un groupe topologique G a la propriété (FH) si toute action isométrique affine de G sur un espace de Hilbert réel possède un point fixe.*

Définitions *Soit G un groupe localement compact, π une représentation unitaire (continue) de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $b : G \to \mathcal{H}$ une application continue.*

(i) On dit que b est un cocycle par rapport à π si b vérifie la relation

$$b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h) \quad \forall g, h \in G.$$

On note $Z^1(G,\pi)$ l'espace vectoriel des cocyles.

(ii) On dit que b est un cobord s'il existe un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ tel que

$$b(g) = \pi(g)\xi - \xi \quad \forall g \in G.$$

On note $B^1(G,\pi)$ le sous-espace vectoriel de $Z^1(G,\pi)$ formé des cobords.

(iii) Le premier groupe de cohomologie de G à valeurs dans π est le groupe quotient

$$H^1(G,\pi) = Z^1(G,\pi)/B^1(G,\pi).$$

Remarque Soit $\alpha : G \mapsto Is(\mathcal{H})$ une action isométrique affine de G sur $\mathcal{H}$. Sa composée avec la projection canonique $Is(\mathcal{H}) \to U(\mathcal{H})$ est une représentation unitaire π de G. Ainsi, pour tout $g \in G$, l'isométrie affine $\alpha(g)$ s'écrit

$$\alpha(g) = b(g) + \pi(g)$$

où $b(g)$ est une translation. Le fait que α soit multiplicative implique que b est un cocycle. Si de plus α est conjugué à π via une translation de vecteur fixe ξ, alors b est un cobord.

Théorème 2.13 (Delorme-Guichardet) *Soit G un groupe topologique.*

(i) Si G est un groupe de Kazhdan, alors G a la propriété (FH).

(ii) Si G est localement compact, σ-compact et si G a la propriété (FH), alors G a la propriété (T).

Remarque On ne sait pas, dans le cas d'un groupe topologique, si les propriétés (T) et (FH) sont équivalentes.

3.1.2 Paires de Gelfand et cohomologie

Définition *Soit G un groupe localement compact et K un sous-groupe compact de G. On dit que la paire (G,K) est une paire de Gelfand si l'algèbre de convolution $C_c(G\backslash\backslash K)$ des fonctions intégrables sur G biinvariantes par K est commutative.*

Exemples de paires de Gelfand

1) Soit G un groupe commutatif et K le sous-groupe trivial réduit à l'élément neutre. Alors (G,K) est une paire de Gelfand.

2) Soit $G = SO(n) \times \mathbb{R}^n$ et $K = SO(n)$. Si $n \geq 2$, alors (G,K) est une paire de Gelfand.

3) Soit $G = SO(n+1)$. Le groupe G opère sur la sphère unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$. On suppose $n \geq 2$. Notons K le stabilisateur pour cette action du point $(1, 0, \cdots, 0)$; le groupe K est isomorphe à $SO(n)$. Alors (G, K) est une paire de Gelfand.

4) Soit $G = SO_0(1, n)$ le groupe de Lorentz, c'est-à-dire la composante connexe contenant l'élément neutre du groupe $O(1, n)$ des transformations de $\mathbb{R}^{n+1}$ laissant invariante la forme quadratique

$$x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2.$$

On suppose $n \geq 2$. Soit K le sous-groupe de G des transformations qui laissent fixe le vecteur $(1, 0, \cdots, 0)$; le groupe K est isomorphe à $SO(n)$. Alors (G, K) est une paire de Gelfand.

5) Soit T un arbre, et $S(T)$ l'ensemble de ces sommets. Soit G le groupe des isométries de $S(T)$. Fixons un sommet $x_0 \in S(T)$. Soit K le stabilisateur de x_0 pour l'action canonique de G sur $S(T)$; $S(T)$ s'identifie à G/K . Alors (G, K) est une paire de Gelfand.

6) Soit G un groupe de Lie réel semi-simple à centre fini. Soit K un sous-groupe compact maximal de G. Alors (G, K) est une paire de Gelfand d'après un résultat classique d'Helgason.

Remarque Soit (G, K) une paire de Gelfand, et soit π une représentation unitaire irréductible de G. A l'aide du lemme de Schur, on peut prouver que $\mathcal{H}^K$, le sous-espace des vecteurs invariants par $\pi(K)$, est de dimension 0 ou 1 (sur $\mathbb{C}$). Si il est de dimension 1, on dit que π est une représentation sphérique.

Lemme 2.14 *Soit G un groupe topologique, et soit K un sous-groupe compact de G. Soit π une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui ne contient pas la représentation triviale (voir la remarque après la définition de la topologie de Fell, paragraphe 2.1). On suppose de plus que $\mathcal{H}^K$ est de dimension finie et non nul. Alors π ne possède presque pas de vecteurs invariants. En particulier si (G, K) est une paire de Gelfand et si π est une représentation sphérique unitaire de G, alors π ne possède presque pas des vecteurs invariants.*

Preuve. On raisonne par l'absurde; supposons que π possède presque des vecteurs invariants, c'est-à-dire qu'il existe une suite généralisée $(\xi_i)_i$ de vecteurs unités telle que

$$\lim_i \|\pi(g)\xi_i - \xi_i\| = 0$$

uniformément sur les sous-ensembles compacts de G. Pour tout indice i assez grand, posons

$$\eta_i = \frac{1}{\|\int_K \pi(k)\xi_i dk\|} \int_K \pi(k)\xi_i dk,$$

dk étant une mesure de Haar sur K.

Il est clair que η_i est un vecteur unité de $\mathcal{H}^K$, tel que

$$\lim_i \|\pi(g)\eta_i - \eta_i\| = 0$$

uniformément sur les sous-ensembles compacts de G.

Par hypothèse, le sous-espace $\mathcal{H}^K$ est de dimension finie, donc sa sphère unité est compacte. Ainsi, il existe une sous-suite qui converge vers un vecteur unité $\eta \in \mathcal{H}^K$. Par passage à la limite, on voit que η est invariant par $\pi(G)$, ce qui contredit le fait que π ne contient pas la représentation triviale. ■

Le théorème suivant est dûe à P. Delorme ([7]); nous donnons une preuve non publiée de Y. Shalom.

Théorème 2.15 *Soit (G, K) une paire de Gelfand, et soit π une représentation sphérique de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ distincte de la représentation triviale. Alors $H^1(G, \pi) = \{0\}$.*

Preuve. Soit α une action affine de G sur $\mathcal{H}$, de partie linéaire π. Il faut prouver que α possède un point fixe global.

Soit $b \in Z^1(G, \pi)$ le cocycle défini par

$$\alpha(g)v = \pi(g)v + b(g), \qquad v \in \mathcal{H}.$$

Pour toute mesure de Borel μ à support compact sur G, on peut définir une transformation affine $\alpha(\mu)$ sur $\mathcal{H}$ par l'intégrale à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$

$$\alpha(\mu)v = \int_G \alpha(g)v d\mu(g), \qquad v \in \mathcal{H},$$

c'est-à-dire

$$\alpha(\mu)v = \pi(\mu)v + \int_G b(g)d\mu(g), \qquad v \in \mathcal{H}.$$

Soit μ_0 une mesure de probabilité sur G symétrique, biinvariante par K, absolument continue par rapport à une mesure de Haar à gauche sur G et à support compact. On suppose de plus que le sous-groupe engendré par le support de μ_0 est dense dans G.

• 1^{ere} *étape* : L'opérateur $\alpha(\mu_0)$ a un unique point fixe v_0 dans $\mathcal{H}$. En effet, d'après le lemme 2.14, π ne possède presque pas de vecteur invariant. Ainsi, 1 n'appartient pas au spectre de l'opérateur $\pi(\mu_0)$. Comme μ_0 est symétrique, l'opérateur $\pi(\mu_0)$ est auto-adjoint, donc $\|\pi(\mu_0)\| < 1$. De plus, si $v, w \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\|\alpha(\mu_0)v - \alpha(\mu_0)w\| &\leq \|\pi(\mu_0)v - \pi(\mu_0)w\| \\ &\leq \|\pi(\mu_0)\|\|v - w\|.\end{aligned}$$

Par suite, $\alpha(\mu_0)$ est une contraction stricte sur l'espace affine de Hilbert $\mathcal{H}$, donc $\alpha(\mu_0)$ possède un unique point fixe v_0.

• 2^{eme} *étape* : Le sous-espace affine des points fixes par $\alpha(K)$ est de dimension ≥ 1. En effet, la mesure μ_0 est K-invariante à gauche, donc pour tout $k \in K$,

$$\begin{aligned}\alpha(k)v_0 &= \alpha(k)\alpha(\mu_0)v_0 \\ &= \alpha(\mu_0)v_0 \\ &= v_0.\end{aligned}$$

De plus, la représentation π est sphérique, donc il existe un vecteur non nul $v_1 \in \mathcal{H}$ fixe par $\pi(K)$. Par suite, $v_2 = v_0 + v_1$ est fixe par $\alpha(K)$, et il est différent de v_0.

• 3^{eme} *étape* : Soit $M_1(G\backslash\backslash K)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur G à support compact, biinvariantes par K. Alors v_0 est fixe par $\alpha(\mu)$ pour tout $\mu \in M_1(G\backslash\backslash K)$. En effet, comme (G, K) est une paire de Gelfand, l'algèbre $C_c(G\backslash\backslash K)$ est par définition commutative. Toute mesure de $M_1(G\backslash\backslash K)$ peut être approchée (pour la topologie faible) par des mesures absolument continues avec une densité de $C_c(G\backslash\backslash K)$, donc $M_1(G\backslash\backslash K)$ est aussi commutatif. Par suite, si $\mu \in M_1(G\backslash\backslash K)$,

$$\begin{aligned}\alpha(\mu)v_0 &= \alpha(\mu)\alpha(\mu_0)v_0 \\ &= \alpha(\mu_0)\alpha(\mu)v_0\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\alpha(\mu)v_0$ est un point fixe de $\alpha(\mu_0)$. Par unicité du point fixe de $\alpha(\mu_0)$, on en déduit que $\alpha(\mu)v_0 = v_0$.

• 4^{eme} *étape* : Le point v_0 est fixe par $\alpha(G)$. En effet, soit ν_K la mesure de Haar normalisée sur K, vue comme mesure sur G. Comme $\nu_K * \delta_g * \nu_K$ est une mesure de probabilité sur G à support compact biinvariante par K, le vecteur v_0 est fixe par $\alpha(\nu_K * \delta_g * \nu_K)$ d'après la 3^{eme} étape. Ainsi, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned}v_0 &= \alpha(\nu_K * \delta_g * \nu_K)v_0 \\ &= \alpha(\nu_K)\alpha(\delta_g)\alpha(\nu_K)v_0 \\ &= \alpha(\nu_K)\alpha(\delta_g)\int_K \alpha(k)v_0 dk \\ &= \alpha(\nu_K)\alpha(\delta_g)\int_K v_0 dk \\ &= \alpha(\nu_K)\alpha(\delta_g)v_0 \\ &= \alpha(\nu_K)\alpha(g)v_0 \\ &= \int_K \alpha(k)\alpha(g)v_0 dk.\end{aligned}$$

Ainsi, le sous-ensemble affine fermé

$$\mathcal{A} = \{v \in \mathcal{H};\ \int_K \alpha(k)v dk = v_0\}$$

contient la $\alpha(G)$-orbite de v_0. Par irréductibilité de π, on en déduit que $\mathcal{A} = \mathcal{H}$ ou que $\mathcal{A} = \{v_0\}$. Mais d'après la deuxième étape, le sous-espace affine des points fixes par $\alpha(K)$ est de dimension au moins 1, donc $\mathcal{A} = \{v_0\}$, c'est-à-dire $\alpha(G)v_0 = \{v_0\}$, ce qui montre que l'action affine α possède un point fixe global. ■

3.1.3 Opérateur de Laplace

Introduisons la notion de laplacien sur une variété riemannienne.

Définition *Soit M une variété riemannienne de dimension finie n; on note T_xM l'espace tangent en $x \in M$, et $\exp_x$ l'application exponentielle riemannienne en x. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit $f : M \to \mathcal{H}$ une application de classe C^2. Le laplacien de f est l'application $\Delta f : M \to \mathcal{H}$ définie par*

$$\Delta f(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2} f(\exp_x tX_i)\big|_{t=0},$$

où $X_1, \cdots, X_n$ est une base orthonormale de T_xM.

Remarques 1) L'expression du laplacien ne dépend pas de la base orthonormale choisie.

2) Une propriété fondamentale du laplacien est le fait qu'il commute avec les isométries de M, i.e. si $\varphi : M \to M$ est une isométrie, alors pour toute application de classe C^2 $f : M \to \mathcal{H}$,

$$\Delta(f \circ \varphi) = (\Delta f) \circ \varphi$$

3) Les seules propriétés du laplacien que nous allons utiliser sont les suivantes :

•Δ est G-invariant, c'est-à-dire que Δ commute avec les translations à gauche par des éléments de G.

•Δ annule les constantes.

Définition Une application $f : M \to \mathcal{H}$ est harmonique si $\Delta f = 0$. Ceci est équivalent au fait que l'application $x \mapsto < f(x), u >$ est une fonction harmonique sur M pour tout $u \in \mathcal{H}$.

Proposition 2.16 *Soit $f : M \to \mathcal{H}$ une application de classe C^2. Alors pour tout $x \in M$,*

$$\Delta \|f\|^2(x) = 2\Re < \Delta f(x), f(x) > -2\|df_x\|^2_{HS},$$

où $\|df_x\|_{HS} = (Tr(df_x^* df_x))^{1/2}$ est la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle de f au point x.

Preuve. Pour $X \in T_xM$, on a

$$\frac{d}{dt} < f, f > (\exp_x tX) = < \frac{d}{dt} f(\exp_x tX), f(\exp_x tX) > + < f(\exp_x tX), \frac{d}{dt} f(\exp_x tX) >$$
$$= 2\Re < \frac{d}{dt} f(\exp_x tX), f(\exp_x tX) >$$

et par conséquent,

$$\frac{d^2}{dt^2} < f, f > (\exp_x tX) = 2\Re < \frac{d^2}{dt^2} f(\exp_x tX), f(\exp_x tX) >$$
$$+ 2 < \frac{d}{dt} f(\exp_x tX), \frac{d}{dt} f(\exp_x tX) > .$$

En évaluant en $t = 0$, on trouve

$$\frac{d^2}{dt^2} < f, f > (\exp_x tX)\big|_{t=0} = 2\Re < \frac{d^2}{dt^2} f(\exp_x tX)\big|_{t=0}, f(x) > +2\|df_x(X)\|^2.$$

Par suite, si $X_1, \cdots, X_n$ est une base orthonormale de l'espace tangent T_xM, on a :

$$\Delta \|f\|^2(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2} f(\exp_x tX_i)\big|_{t=0}$$
$$= -2\Re \sum_{i=1}^{n} < \frac{d^2}{dt^2} f(\exp_x tX_i)\big|_{t=0}, f(x) > -2\sum_{i=1}^{n} \|df_x(X_i)\|^2$$
$$= 2\Re < \Delta f(x), f(x) > -2\|df_x\|^2_{HS}. \blacksquare$$

3.1.4 Structure riemannienne sur G/K.

Soit (G, K) une paire de Gelfand. Nous rappelons ici la construction d'une structure riemannienne G-invariante sur G/K. La référence principal pour tout ce paragraphe est [17].

Soit $x_0 = K$ l'origine de G/K.

Il existe une involution de Cartan notée θ, c'est-à-dire un automorphisme involutif de G tel que le sous-groupe K soit l'ensemble des éléments de G stables par θ. Posons

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathcal{G};\ d\theta_e(X) = -X\}$$

La décomposition $\mathcal{G} = \mathcal{T} \oplus \mathcal{P}$ est appelée décomposition de Cartan de $\mathcal{G}$. Fixons un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{P}$. Soit $A = \exp \mathfrak{a}$ le sous-groupe de G correspondant. Alors on a les décompositions suivantes :

$$G = KAK \qquad \text{et} \qquad G = K \exp \mathcal{P},$$

appelées décompositions de Cartan de G.

Tout élément $X \in \mathcal{P}$ définit un vecteur tangent $D_X \in T_{x_0}(G/K)$ par la formule

$$D_X f(x_0) = \frac{d}{dt} f\big((\exp tX)x_0\big)\big|_{t=0}$$

où $f \in C^\infty(G/K)$ et $g \in G$. L'application $X \mapsto D_X$ est une bijection linéaire entre $\mathcal{P}$ et l'espace tangent $T_{x_0}(G/K)$. Ainsi, on peut identifier $\mathcal{P}$ et $T_{x_0}(G/K)$.

Pour $g \in G$, soit $\lambda(g)$ le difféomorphisme de l'espace symétrique G/K défini par translation à gauche par g :

$$\lambda(g)hK = ghK, \qquad h \in G.$$

Remarquons que si $k \in K$, l'isomorphisme linéaire $d\lambda(k)_{x_0}$ de $T_{x_0}(G/K)$ correspond à l'application linéaire $Ad(k) : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, car

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(k \exp tX x_0)\big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} f(k \exp tX k^{-1} x_0)\big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(\exp tAd(k)X x_0)\big|_{t=0}\end{aligned}$$

pour toute application $f \in C^\infty(G/K)$.

Le sous-groupe K est compact, donc il existe un produit scalaire K-invariant $< .,. >$ sur $T_{x_0}(G/K)$, ou, de manière équivalente, un produit scalaire $Ad(K)$-invariant sur $\mathcal{P}$. Si $x = gx_0$, on définit un autre produit scalaire sur $T_x(G/K)$ par la formule

$$< d\lambda(g)_{x_0}(X), d\lambda(g)_{x_0}(Y) >_x = < X, Y >, \quad X, Y \in \mathcal{P}.$$

Ce nouveau produit scalaire est bien défini, puisque $< .,. >$ est invariant par K. En outre, il définit une structure riemannienne G-invariante sur G/K.

Proposition 2.17 *Soit G/K un espace symétrique riemannien. On suppose que l'action de K sur l'espace tangent $T_{x_0}(G/K)$ est irréductible. Soit α une action isométrique affine sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et soit $F : G/K \to \mathcal{H}$ une application G-équivariante de classe C^1. Si F n'est pas constante, alors il existe $\lambda > 0$ tel que λF soit une isométrie locale.*

Preuve. Soit π la partie linéaire de α. On identifie l'espace tangent $T_{x_0}(G/K)$ avec $\mathcal{P}$ comme ci dessus, et on identifie l'espace tangent en un vecteur $v \in \mathcal{H}$ avec $\mathcal{H}$. Comme l'application F est supposée G-équivariante, on a pour tout $k \in K$ et pour tout $X \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}dF_{x_0}(Ad(k)X) &= \frac{d}{dt} F(\exp tAd(k)X x_0)\big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} F(k \exp tX x_0)\big|_{t=0} \\ &= \pi(k) \frac{d}{dt} F(\exp tX x_0)\big|_{t=0} \\ &= \pi(k) dF_{x_0}(X).\end{aligned}$$

Ceci prouve que la forme bilinéaire symétrique Q définie sur $T_{x_0}(G/K) \cong \mathcal{P}$ par la formule

$$Q(X,Y) = < dF_{x_0}(X), dF_{x_0}(Y) >$$

est $Ad(K)$-invariant. Soit A la matrice symétrique réelle $n \times n$, où n est la dimension (sur $\mathbb{R}$) de l'espace G/K, définie par

$$Q(X,Y) = < AX, Y >, \quad X, Y \in \mathcal{P}.$$

Alors A commute avec $Ad(k), k \in K$, donc les sous-espaces propres de A sont invariants par K. Comme nous avons supposé que K agit de manière irréductible sur l'espace $\mathcal{P}$, on en déduit que A a une unique valeur propre, et donc $A = cI_n$ pour une constante $c \geq 0$. Par suite,

$$\|dF_{x_0}(X)\|^2 = c\|X\|^2 \quad \forall X \in T_{x_0}(G/K).$$

L'application F étant G-équivariante, on a, pour $g \in G$ et pour $x = gx_0$,

$$F = \alpha(g) \circ F \circ \lambda(g^{-1})$$

et pour la différentielle,

$$dF_x = \pi(g) dF_{x_0} d\lambda(g^{-1})_x.$$

Comme $\lambda(g^{-1})$ est une isométrie, on a alors pour tout $X \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \|dF_x(d\lambda(g)_{x_0} X)\| &= \|dF_{x_0}(X)\| \\ &= c\|X\| \\ &= c\|d\lambda(g)_{x_0}(X)\|_x. \end{aligned}$$

Comme F n'est pas constante par hypothèse, la constante c est non nulle et donc $\frac{1}{\sqrt{c}}F$ est une isométrie locale. ■

Remarque Si G est un groupe de Lie simple, l'action de K sur $T_{x_0}(G/K)$ est toujours irréductible. De manière plus générale, c'est aussi le cas si G/K est un espace symétrique riemennien irréductible. Nous pourrons donc appliquer la proposition précédente.

3.2 Stratégie de la preuve

Pour prouver que $Sp(n,1)$ est un groupe de Kazhdan, nous allons combiner les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.18 *Soit G un groupe de Lie simple de centre fini, et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Si G ne possède pas la propriété (T), alors il existe une*

action isométrique affine de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et une application $F : G/K \to \mathcal{H}$ harmonique, G-équivariante et non constante.

Théorème 2.19 *Soit $G = Sp(n,1)$ et $K = Sp(n) \times Sp(1)$. Toute application harmonique $F : G/K \to \mathcal{H}$, G-équivariante par rapport à une action isométrique affine de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est constante.*

En fait, nous allons donner une preuve du théorème 2.18 dans un cadre plus général; on supposera que G est un groupe de Lie connexe tel que $Hom(G, \mathbb{R}) = \{0\}$ et que (G, K) est une paire de Gelfand.

3.3 Preuve du théorème 2.18

Nous allons utiliser, pour prouver le théorème 2.18, le théorème suivant sans le démontrer :

Théorème 2.20 (Shalom [29]) *Soit G un groupe compactement engendré. Si G ne possède pas la propriété (T) de Kazhdan, alors il existe une représentation continue unitaire irréductible π de G telle que $H^1(G, \pi) \neq \{0\}$.*

Construction de l'application F.

On raisonne par l'absurde; supposons donc que G ne possède pas la propriété (T). D'après le théorème 2.20, il existe $\pi \in \widehat{G}$ telle que $H^1(G, \pi)$ ne soit pas nul. Remarquons que la représentation π n'est pas triviale, donc elle n'est pas non plus sphérique d'après le théorème 2.15.

Soit $b \in Z^1(G, \pi)$ tel que $b \notin B^1(G, \pi)$. L'application b est un cocycle, donc la formule

$$\alpha(g)v = \pi(g)v + b(g)$$

définit une action isométrique affine. De plus, $\alpha|_K$ a un unique point fixe, noté v_0 : l'existence d'un point fixe provient du fait que le sous-groupe K est compact. Pour montrer l'unicité, supposons que $v_0 \neq v_1$ soient fixes par $\alpha|_K$. Alors pour tout $k \in K$,

$$\begin{aligned} \pi(k)(v_0 - v_1) &= \pi(k)v_0 - \pi(k)v_1 \\ &= \alpha(k)v_0 - b(k) - \alpha(k)v_1 + b(k) \\ &= v_0 - v_1. \end{aligned}$$

Ainsi, $v_0 - v_1$ est fixe par $\pi(K)$, ce qui contredit le fait que π ne soit pas sphérique.

Soit F l'application orbitale :

$$F : G \to \mathcal{H}, \quad g \mapsto \alpha(g)v_0.$$

F est non constante, car b n'est pas un cobord.

Lemme 2.21 *(i) Pour toute mesure de probabilité μ sur G invariante à gauche par K,*

$$\int_G F(gh)d\mu(h) = F(g) \qquad \forall g \in G.$$

(ii) Fixons $g_0 \in G$. Alors l'application

$$g \mapsto \int_K F(g_0kg)dk$$

est constante, de valeur $F(g_0)$.

Preuve. (i) Pour tout $v \in \mathcal{H}$, l'intégrale $\int_K \alpha(k)vdk$ est fixe par $\alpha(K)$, donc par unicité du point fixe v_0,

$$\int_K \alpha(k)vdk = v_0 \qquad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Ainsi, par K-invariance à gauche de μ et puisque $\alpha(g)$ est une application affine, on a pour tout $g \in G$

$$\begin{aligned}\int_G F(gh)d\mu(h) &= \int_G \int_K F(gkh)dkd\mu(h)\\ &= \alpha(g)\Big(\int_G \big(\int_K \alpha(k)\alpha(h)v_0dk\big)d\mu(h)\Big)\\ &= \alpha(g)v_0\\ &= F(g).\end{aligned}$$

(ii) Fixons $g \in G$. Soit $\mu = \nu_K * \delta_g$ où ν_K est la mesure de Haar normalisée du groupe K vue comme mesure sur G. Alors μ est une mesure de probabilité, K-invariante à gauche et de plus,

$$\begin{aligned}\int_K F(g_0kg)dk &= \int_K \big(\int_G F(g_0kx)d\delta_g(x)\big)dk\\ &= \int_G \big(\int_G F(g_0kx)d\delta_g(x)\big)d\nu_K(k)\\ &= \int_G F(g_0h)d(\nu_K * \delta_g)(h)\\ &= \int_G F(g_0h)d\mu(h)\\ &= F(g_0) \text{ d'après (i). } \blacksquare\end{aligned}$$

Le vecteur v_0 est fixe par $\alpha(K)$, donc l'application F définit par passage au quotient une autre application G-équivariante, encore notée F :

$$F : G/K \to \mathcal{H}.$$

Proposition 2.22 *L'application $F : G/K \to \mathcal{H}$ est de classe C^∞ et harmonique.*

Preuve. Pour $u \in \mathcal{H}$, posons $f_u : G/K \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto < F(x), u >$.

(i) Montrons que pour tout $u \in \mathcal{H}$, l'application f_u est de classe C^∞ sur G/K (i.e. F est de classe C^∞ au sens faible). Pour cela, soit μ une mesure de probabilité sur G, K-invariante à gauche. D'après le lemme 2.21,

$$\int_G f_u(gh)d\mu(h) = f_u(g), \quad \forall g \in G,$$

où f_u est vue comme une fonction de G. Ceci est vraie en particulier si μ est définie à l'aide d'une densité sur G de classe C^∞.

La fonction f_u est clairement continue. Supposons que f_u soit de classe $C^i, i \geq 0$. D'après la formule intégrale, f_u est de classe C^{i+1}. Ainsi, par récurrence, f_u est de classe C^∞ sur G, donc de classe C^∞ sur G/K.

(ii) Il reste à prouver que F est harmonique.

Si f est une fonction sur G/K et si $g \in G$, on note ${}^g f$ la fonction sur G/K définie par translations à gauche : ${}^g f(x) = f(gx)$. Comme $x \mapsto gx$ est une isométrie de G/K, on a

$${}^g \Delta f = \Delta({}^g f), \quad \forall f \in C^\infty(G/K), g \in G.$$

Ainsi, pour un élément $g_0 \in G$ fixé,

$$\begin{aligned}\int_K {}^{g_0 k}(\Delta f_u)dk &= \int_K \Delta({}^{g_0 k} f_u)dk \\ &= \Delta(\int_K {}^{g_0 k} f_u dk).\end{aligned}$$

Mais d'après le lemme 2.21, la fonction

$$x \mapsto \int_K {}^{g_0 k} f_u(x)dk = \int_K f_u(g_0 kx)dk$$

est constante de valeur $f_u(g_0)$. Par conséquent, on peut conclure que pour tout $x \in G/K$,

$$0 = \int_K {}^{g_0 k}(\Delta f_u)(x)dk = \int_K (\Delta f_u)(g_0 kx)dk.$$

En particulier pour $x = x_0$, on a $kx_0 = x_0$ et donc

$$0 = \int_K (\Delta f_u)(g_0 k x_0) dk = \Delta f_u(g_0 x_0).$$

Cette relation est vraie pour tout $g_0 \in G$, donc $\Delta f_u = 0$ pour tout $u \in \mathcal{H}$. Par suite, $\Delta F = 0$ et donc F est une application harmonique. ■

2.4 Preuve du théorème 2.19

Soit X un espace symétrique riemannien irréductible de rang 1. D'après la classification d'E. Cartan, X est un espace hyperbolique $\mathbb{H}^n(\mathbb{K})$, où $n \geq 1$ et où $\mathbb{K}$ est l'un des quatre corps $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ et si $n \leq 2$, Cay.

Soit G la composante connexe contenant l'identité du groupe des isométries de X. Fixons un point base $x_0 \in X$, alors le stabilisateur K de x_0 est un sous-groupe compact maximal de G. De plus, G agit de manière transitive sur X, et dons X s'identifie à G/K. D'après [17], on a les possibilités suivantes :

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $G = SO_0(n,1)$ et $K = SO(n)$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $G = SU(n,1)$ et $K = S(U(n) \times U(1))$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, $G = Sp(n,1)$ et $K = Sp(n) \times Sp(1)$.
- Si $\mathbb{K} = \text{Cay}$, $G = SO_0(8,1)$ et $K = SO(8)$.
- Si $\mathbb{K} = \text{Cay}$, $G = F_{4(-20)}$ et $K = \text{Spin}(9)$.

On notera que $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ n'est pas réellement un espace symétrique, et qu'il y a des isomorphismes locaux en petite dimension :

$$SU(1,1) \simeq SO_0(2,1) \text{ et } Sp(1,1) \simeq SO_0(4,1).$$

Pour notre but, il est vraiment important de normaliser les métriques de telle sorte que si $m \leq n$, le plongement $\mathbb{H}^m(\mathbb{K}) \to \mathbb{H}^n(\mathbb{K})$ soit une isométrie.

Définition *Une fonction f sur G/K est dite radiale si pour tout $x \in G/K$, $f(x)$ dépend seulement de la distance géodésique $d(x, x_0)$, c'est-à-dire si il existe une fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x \in G/K$, $f(x) = \varphi(r)$ où $r = d(x, x_0)$.*

D'après [9] ou [18], le laplacien d'une fonction radiale a une expression très simple sur $\mathbb{H}^n(\mathbb{H})$:

$$\Delta f(x) = -\frac{d^2\varphi}{dr^2} - m(r)\frac{d\varphi}{dr},$$

où

$$m(r) = m_1 \coth r + 2m_2 \coth 2r$$

et

$$d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K},\ m_1 = d(n-1),\ m_2 = d-1.$$

Remarque Soit $F : X \to \mathcal{H}$ une application G-équivariante par rapport à une action isométrique affine α de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Supposons que $F(x_0) = 0$, ce qui implique que $\alpha\big|_K$ est une isométrie linéaire. Si $d(x, x_0) = d(y, x_0)$, alors il existe $k \in K$ tel que $y = kx$, par transitivité de K sur les sphères centrées en l'origine x_0. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|F(y)\|^2 &= \|\alpha(k)F(x)\|^2 \\ &= \|F(x)\|^2, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\|F\|^2$ est une fonction radiale.

Lemme 2.23 *Soit $X = G/K$ un espace symétrique riemannien irréductible de rang 1. Soit α une action isométrique affine du groupe G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit $F : X \to \mathcal{H}$ une application G-équivariante de classe C^2 telle que $F(x_0) = 0$. Alors*

$$\Re < \Delta F(x), F(x) > \geq 0 \qquad \forall x \in X.$$

Preuve. Soit π la partie linéaire de α, et soit $b \in Z^1(G, \pi)$ le cocycle correspondant :

$$\alpha(g)v = \pi(g)v + b(g), \quad g \in G, v \in \mathcal{H}.$$

On remarquera que comme F est de classe C^2 sur G, le cocycle b est de classe C^2 sur G/K : en effet,

$$\begin{aligned} F(gx_0) &= \alpha(g)F(x_0) \\ &= \alpha(g)(0) \\ &= b(g). \end{aligned}$$

Soit $P = \exp(\mathcal{P})$, et soit $G = PK$ la décomposition de Cartan de G. Ainsi, pour $x \in X$, il existe un unique $g \in P$ tel que $g^{-1}x_0 = x$. Fixons encore Y dans la sphère unité de $\mathcal{P} \simeq T_{x_0}X$. Si $k \in K$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(g^{-1} \exp tAd(k)Y x_0) &= \frac{d}{dt} F(g^{-1}k \exp tY x_0) \\ &= \frac{d}{dt} b(g^{-1}k \exp tY) \\ &= \frac{d}{dt} (b(g^{-1}k) + \pi(g^{-1}k)b(\exp tY)) \\ &= \pi(g^{-1}k) \frac{d}{dt} b(\exp tY). \end{aligned}$$

Posons

$$B = \frac{d}{dt} b(\exp tY)\big|_{t=0}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} b(\exp tY) &= \lim_{s\to 0} \frac{b(\exp(t+s)Y) - b(\exp tY)}{s} \\ &= \pi(\exp tY) \lim_{s\to 0} \frac{b(\exp sY)}{s} \\ &= \pi(\exp tY)B.\end{aligned}$$

Soit $\pi(Y)$ l'opérateur défini par la formule

$$\pi(Y) = \frac{d}{dt}\pi(\exp tY)\big|_{t=0}.$$

C'est un opérateur non borné, agissant sur les vecteurs C^∞ de $\mathcal{H}$. De plus, d'après ce qui précède,

$$\frac{d^2}{dt^2} F(g^{-1}\exp tAd(k)Yx_0)\big|_{t=0} = \pi(g^{-1}k)\pi(Y)B.$$

D'autre part, d'après l'expression du laplacien dans une base othonormale,

$$\Delta F(x) = -dimX \int_{\mathcal{P}_1} \frac{d^2}{dt^2} F(g^{-1}\exp tZx_0)\big|_{t=0} d\nu(Z),$$

où $\mathcal{P}_1$ est la sphère unité de $\mathcal{P}$ et où ν est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathcal{P}_1$. Comme K agit transitivement sur $\mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned}\Delta F(x) &= -dimX \int_K \frac{d^2}{dt^2} F(g^{-1}\exp tAd(k)Yx_0)\big|_{t=0} dk \\ &= -dimX \int_K \pi(g^{-1}k)\pi(Y)B dk.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}< \Delta F(x), F(x) > &= -\, dimX \int_K < \pi(g^{-1}k)\pi(Y)B, b(g^{-1}) > dk \\ &= -\, dimX \int_K < \pi(k)\pi(Y)B, \pi(g)b(g^{-1}) > dk \\ &= dimX \int_K < \pi(k)\pi(Y)B, b(g) > dk.\end{aligned}$$

On utilise ensuite la théorie de la décomposition d'une représentation en intégrale directe (on pourra consulter à ce sujet [8]); il existe un espace mesuré (Λ, μ) tel que π s'écrive comme une intégrale directe de représentations unitaires irréductibles :

$$\pi = \int_\Lambda^\oplus \pi_\lambda d\mu_\lambda.$$

Le cocycle b se décompose aussi :

$$b = \int_\Lambda^\oplus b_\lambda d\mu_\lambda,$$

où $b_\lambda \in Z^1(G, \pi_\lambda)$ est de classe C^2 pour μ-presque tout $\lambda \in \Lambda$. Posons alors

$$B_\lambda = \frac{d}{dt} b_\lambda(\exp tY)\big|_{t=0}.$$

D'après le théorème de Fubini,

$$< \Delta F(x), F(x) >= \dim X \int_\Lambda < \int_K \pi_\lambda(k)\pi_\lambda(Y)B_\lambda dk, b_\lambda(g) > d\mu_\lambda.$$

Nous allons prouver que μ-presque partout, l'intégrande du membre de droite a une partie réelle positive ou nulle.

Soit P_λ l'opérateur défini par

$$P_\lambda = \int_K \pi_\lambda(k)dk.$$

Alors P_λ est la projection orthogonale de l'espace $\mathcal{H}_\lambda$ de la représentation π_λ sur le sous-espace de tous les vecteurs $\pi_\lambda(K)$-invariants.

Si π_λ n'est pas sphérique, alors $P_\lambda = 0$, donc l'intégrande à évaluer est nulle.

Supposons que π_λ soit sphérique. Alors d'après le théorème 1.15, le cocycle b_λ est un cobord et donc il existe un vecteur $\xi_\lambda \in \mathcal{H}_\lambda$ tel que

$$b_\lambda(h) = \pi_\lambda(h)\xi_\lambda - \xi_\lambda, \quad h \in G.$$

Par hypothèse, $b(k) = 0$ pour tout $k \in K$, donc pour presque tout $\lambda \in \Lambda, b_\lambda\big|_K = 0$. Le vecteur ξ_λ est donc $\pi_\lambda(K)$-invariant pour presque tout $\lambda \in \Lambda$. De plus, $B_\lambda = \pi_\lambda(Y)\xi_\lambda$, car b_λ est un cobord, donc

$$\begin{aligned} < \int_K \pi_\lambda(k)\pi_\lambda(Y)B_\lambda dk, b_\lambda(g) > &=< P_\lambda\pi_\lambda(Y)B_\lambda, b_\lambda(g) > \\ &=< \pi_\lambda(Y)^2\xi_\lambda, P_\lambda(\pi_\lambda(g)\xi_\lambda - \xi_\lambda) > \\ &=< \pi_\lambda(Y)^2\xi_\lambda, P_\lambda\pi_\lambda(g)\xi_\lambda > - < \pi(Y)^2\xi_\lambda, \xi_\lambda > . \end{aligned}$$

Or, l'espace des vecteurs $\pi(K)$-invariants est de dimension 1, donc il existe $c_\lambda \in \mathbb{C}$ de module plus petit que 1 telle que

$$P_\lambda\pi_\lambda(g)\xi_\lambda = \overline{c_\lambda}\xi_\lambda.$$

Par suite,

$$< \int_K \pi_\lambda(k)\pi_\lambda(Y)B_\lambda dk, b_\lambda(g) >= (c_\lambda - 1) < \pi(Y)^2\xi_\lambda, \xi_\lambda > .$$

La représentation π_λ étant anti-auto-adjointe, on a

$$< \pi_\lambda(Y)^2\xi_\lambda, \xi_\lambda >\leq 0.$$

En outre, $\Re(c_\lambda - 1) \leq 0$, donc on a bien

$$\Re\Big(< \int_K \pi_\lambda(k)\pi_\lambda(Y)B_\lambda dk, b_\lambda(g) > \Big) \geq 0. \ \blacksquare$$

Proposition 2.24 *Soit $X = G/K$ un espace symétrique riemannien irréductible de rang 1. Soit α une action isométrique affine du groupe G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit $F : X \to \mathcal{H}$ une application G-équivariante, de classe C^2 telle que $F(x_0) = 0$, qui soit de plus une isométrie locale. On définit une fonction φ sur $\mathbb{R}^+$ par la formule*

$$\varphi(r) = \|F(x)\|^2, \quad r = d(x, x_0), x \in X.$$

Alors

$$\varphi(r) \leq \frac{2\dim X}{m_1 + 2m_2} r + \circ(r) \quad \textit{quand } r \to +\infty,$$

avec égalité si F est une application harmonique.

Preuve. D'après la proposition 2.16 et d'après l'expression du laplacien d'une fonction radiale sur $\mathbb{H}^n(\mathbb{H})$,

$$\begin{aligned} \Delta\|F\|^2(x) =& 2\Re < \Delta F(x), F(x) > -2\|dF_x\|^2_{HS} \\ =& -\varphi''(r) - m(r)\varphi'(r), \end{aligned}$$

donc

$$\varphi''(r) + m(r)\varphi'(r) = -2\Re < \Delta F, F > +2\|dF_x\|^2_{HS}.$$

Posons $\psi = \varphi'$. L'application F est une isométrie locale, donc $\|dF_x\|^2_{HS} = \dim X$, et par conséquent,

$$\psi'(r) + m(r)\psi(r) = -2\Re < \Delta F, F > (r) + 2dimX.$$

On reconnait là une équation différentielle ordinaire du premier ordre, qu'on peut résoudre par la méthode de la variation des constantes. La solution générale associée à l'équation homogène est donnée par la formule

$$\psi_0(r) = C(\sinh r)^{-m_1}(\sinh 2r)^{-m_2},$$

et donc une solution particulière de l'équation inhomogène est

$$\psi(r) = (\sinh r)^{-m_1}(\sinh 2r)^{-m_2}\int_0^r (2\dim X - 2\Re\langle \Delta F, F\rangle)(s)(\sinh s)^{m_1}(\sinh 2s)^{m_2} ds$$

D'après le lemme 2.23, $\Re < \Delta F, F >\geq 0$, et on obtient donc l'estimation

$$\psi(r) \leq 2\dim X(\sinh r)^{-m_1}(\sinh 2r)^{-m_2}\int_0^r (\sinh s)^{m_1}(\sinh 2s)^{m_2} ds,$$

avec égalité si F est harmonique.

On pose alors $f(r) = (\sinh r)^{m_1}(\sinh 2r)^{m_2}$, et on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{f(r)}\int_0^r f(s)ds &= \lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{f'(r)}\\ &= \frac{1}{m_1+2m_2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\psi(r) \leq \frac{2\dim X}{m_1+2m_2} + o(1) \quad \text{quand } r\to+\infty,$$

avec à nouveau égalité si F est harmonique. Il suffit d'intégrer pour avoir le résultat pour la fonction φ. ■

On se place à présent dans le cas $G = Sp(n,1), n\geq 2$ et $K = Sp(n)\times Sp(1)$. On note $X = \mathbb{H}^n(\mathbb{H})$. Alors $\dim X = 4n, m_1 = 4(n-1)$ et $m_2 = 3$. Ainsi,

$$\frac{2\dim X}{m_1+2m_2} = 2 - \frac{2}{2n+1}.$$

Preuve du théorème 2.19 On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une action isométrique affine α de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et une application $F : X\to\mathcal{H}$ non constante, G-équivariante, harmonique de classe C^2. Quitte à remplacer F par λF pour un certain $\lambda > 0$, on peut supposer d'après la proposition 2.17 que F est une isométrie locale (on doit alors remplacer l'action α par l'action affine ayant la même partie linéaire, et donné par le cocycle $\lambda b, b$ étant le cocycle associé à α).

De même, quitte à remplacer F par $F - F(x_0)$, on peut supposer que $F(x_0) = 0$. Ici, il faut remplacer l'action α par l'action ayant la même partie linéaire, et donné par le cocyle $g\mapsto b(g) + \pi(g)F(x_0) - F(x_0)$.

Restreignons l'application F à la droite hyperbolique $Y = \mathbb{H}^1(\mathbb{H})$. Bien sur, $F|_Y$ n'a aucune raison d'être encore une application harmonique, mais elle est équivariante pour le groupe des isométries $Sp(1,1)$ de l'espace Y. Les métriques étant normalisées de telle sorte que l'inclusion de Y dans X soit une isométrie, les applications $F|_Y$ et F ont le même

comportement asymptotique. Ainsi, d'après la proposition 2.24, on a pour $x \in Y$ et pour $r = d(x, x_0)$,

$$\|F|_Y\|^2(r) = \frac{4n}{2n+1} r + o(r), \quad r \to +\infty.$$

D'autre part, d'après la même proposition,

$$\|F|_Y\|^2(r) \leq \frac{4}{3} r + o(r), \quad r \to +\infty.$$

D'après l'inégalité $4/3 < 4n/(2n+1)$, on obtient une contradiction, ce qui prouve le théorème 2.19. ■

Remarque Si $G = F_{4(-20)}, K = \mathrm{Spin}(9), X = \mathbb{H}^2(\mathrm{Cay})$, alors

$$\frac{2 \dim X}{m_1 + 2m_2} = 16/11,$$

et la preuve du théorème 2.19 est absolument la même.

Bibliographie

[1] D. Arnal et J. Ludwig, *Q.U.P. and Paley-Wiener properties of unimodular, especially nilpotent, Lie groups*, Proceedings of the AMS 125, 1997.

[2] S.K. Berberian, *The maximal ring of quotients of a finite Von Neumann algebra*, Rocky Mountain journal of mathematics 12, 1982.

[3] A. Connes, *Non Commutative Differential Geometry* , Publ. Math. IHES 62, 1985.

[4] L. Corwin et F.P. Greenleaf, "Representations of nilpotent Lie groups and their applications", Cambridge studies in advanced mathematics 18, 1990.

[5] M. Cowling et U. Haagerup, *Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie groupe of real rank one*, Invent. Math. 96, 1989.

[6] P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen et B. Wiest, *Why are braids orderable ?*, Panoramas et synthèses 14, SMF 2002.

[7] P. Delorme, *1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles*, Bull. Soc. Math. France 105, 1977.

[8] J. Dixmier, "Les C^*-algèbres et leurs représentations", Gauthier-Villars, 1969.

[9] J. Faraut, *Analyse harmonique sur les paires de Gelfand et les espaces hyperboliques* dans "Analyse Harmonique", Publication CIMPA 1981.

[10] D.R. Farkas et R.L. Snider, *When is the augmentation ideal principal ?*, Arch. Math. 33, 1979.

[11] R. Gangolli et V.S. Varadarajan, "Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups", Springer-Verlag, 1988.

[12] E. Ghys, *Groups acting on the circle*, Enseign. Math. 47, 2001.

[13] R. Grigorchuk, P.A. Linnell, T. Schick et A. Zuk, *On a conjecture of Atiyah*, C.R. Acad.Sci. Paris t.331, 2000.

[14] M. Gromov, *Random walk in random groups*, Preprint IHES, 2002.

[15] A. Guichardet, *Sur la cohomologie des groupes topologiques II*, Bull. Soc. Math. France 96, 1972.

[16] P. de la Harpe et A. Valette, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque 175, Soc. Math. de France, 1989.

[17] S. Helgason, "Differential geometry, Lie groups and symetric spaces", Academic Press, 1978.

[18] S. Helgason, "Groups and geometric analysis", Academic Press, 1984.

[19] E. Hewitt et K.A. Ross, "Abstract harmonic analysis I", Springer-Verlag, 1979.

[20] R. Kadison et J. Ringrose, "Fundamentals of the theory of operator algebras I", Academic Press, 1983.

[21] R. Kadison et J. Ringrose, "Fundamentals of the theory of operator algebras II", Academic Press, 1986.

[22] D. Kazhdan, *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funct. Anal. Appl. 1, 1967.

[23] B. Kostant, *On the existence and irreducibility of certain series of representations*, Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1969.

[24] P.A. Linnell, *Zero divisors and $L^2(G)$*, C.R.Acad.Sci.Paris t.315, 1992.

[25] P.A. Linnell, *Analytic versions of the zero divisor conjecture*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 252, 1998.

[26] P.A. Linnell et M. Puls, *Zero divisors and $L^p(G)$, II*, New York J. Math. 7, 2001.

[27] W. Rudin, "Real and complex analysis", McGraw-Hill, 1963.

[28] W. Rudin, "Functional analysis', McGraw-Hill, 1973.

[29] S. Sakai, "C* algebras and W* algebras", Springer, 1998.

[30] Y. Shalom, *Rigidity of commensurators and irreductible lattices*, Invent. Math. 141, 2000.

[31] A. Valette, *Old and new about Kazhdan's property (T)*, Baldoni, Vellada and M.A. Picardello, 1994.