



**HAL**  
open science

# Simulation numérique de modèles cinétiques réduits pour l'étude de la dynamique des plasmas de fusion par confinement magnétique

David Coulette

► **To cite this version:**

David Coulette. Simulation numérique de modèles cinétiques réduits pour l'étude de la dynamique des plasmas de fusion par confinement magnétique. Autre [cond-mat.other]. Université de Lorraine, 2013. Français. NNT : 2013LORR0159 . tel-01750340

**HAL Id: tel-01750340**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750340v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THÈSE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Spécialité : Physique

présentée par :

**David Coulette**

préparée au sein de l'**Institut Jean Lamour**

---

## **Simulation numérique de modèles cinétiques réduits pour l'étude de la dynamique des plasmas de fusion par confinement magnétique**

---

Thèse soutenue publiquement le 06/12/2013, à Vandoeuvre-lès-Nancy devant le jury composé de :

Nicolas Besse	Maître de Conférence (HDR), IJL, Université de Lorraine	Directeur de thèse
Jacques Blum	Professeur, Laboratoire J.A Dieudonné, Université de Nice	Rapporteur
Jean Marcel Rax	Professeur, LOA, École Polytechnique, Palaiseau	Rapporteur
Pierre Bertrand	Professeur émérite, IJL, Université de Lorraine	Président
Özgür Gürçan	Chargé de Recherche CNRS, LPP, École Polytechnique, Palaiseau	Examinateur
Simon Labrunie	Maître de Conférence (HDR), IECN, Université de Lorraine	Examinateur
Séraphin Mefire	Professeur, IECN, Université de Lorraine	Examinateur
Yanick Sarazin	Ingénieur CEA (HDR), CEA Cadarache	Examinateur



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Contexte et objectifs</b>	<b>7</b>
1.1	Fusion thermonucléaire par confinement magnétique . . . . .	8
1.2	Transport dans un Tokamak . . . . .	10
1.2.1	Configuration du champ de confinement . . . . .	10
1.2.2	Transport dans un plasma de Tokamak . . . . .	11
1.3	Modèle gyrocinétique pour l'étude de l'instabilité ITG . . . . .	14
1.3.1	Dynamique électronique et quasi-neutralité . . . . .	16
1.4	Le modèle multi-water-bag . . . . .	18
1.5	Structure de la présentation des travaux . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Modèles et schémas en géométrie cylindrique</b>	<b>23</b>
2.1	Modèle physique . . . . .	24
2.1.1	Modélisation d'une colonne de plasma . . . . .	24
2.1.2	Analyse spectrale et modèles dynamiques . . . . .	26
2.1.3	Détermination des paramètres Water-Bag . . . . .	28
2.2	Schéma numériques et implémentations . . . . .	39
2.2.1	Modèle non-linéaire . . . . .	39
2.2.2	Modèle quasi-linéaire . . . . .	40
2.2.3	Problème spectral linéaire . . . . .	40
2.3	Modèles alternatifs pour l'analyse linéaire . . . . .	43
2.3.1	Modèle fluide à trois moments . . . . .	44
2.3.2	Modèle cinétique continu . . . . .	44
2.4	Critère d'instabilité . . . . .	44
2.4.1	Critère local pour un équilibre symétrique . . . . .	47
2.4.2	Critère intégraux d'instabilité . . . . .	50
2.5	Conclusions . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Analyse linéaire en géométrie cylindrique : résultats numériques</b>	<b>55</b>
3.1	Cas test - Paramètres d'équilibre . . . . .	56
3.2	Validation des solveurs . . . . .	58
3.2.1	Convergence en résolution radiale . . . . .	58
3.2.2	Influence du nombre de bags . . . . .	58
3.2.3	Consistance des solveurs . . . . .	60
3.2.4	Comparaison croisée avec le modèle quasi-linéaire . . . . .	65
3.2.5	Comparaison avec les modèles fluides et cinétiques . . . . .	66
3.2.6	Comparaison avec une méthode d'ansatz . . . . .	67
3.2.7	Coût numérique - Parallélisation . . . . .	71
3.3	Caractérisation spectrale des modes instables . . . . .	73

3.3.1	Structure du spectre dans le plan complexe . . . . .	73
3.4	Dépendances paramétriques . . . . .	77
3.4.1	Localisation des modes instables . . . . .	77
3.4.2	Balayage paramétrique : seuil de déclenchement . . . . .	81
3.5	Conclusions . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Simulations non linéaires</b>	<b>87</b>
4.1	Protocole de simulation- Aperçu de la dynamique globale . . . . .	88
4.1.1	Protocole de simulation . . . . .	88
4.1.2	Quantités conservées par le modèle non-linéaire . . . . .	88
4.1.3	Description de la dynamique globale . . . . .	90
4.1.4	Évolution de la perturbation dans l'espace réel . . . . .	100
4.2	Validation de la phase linéaire du code non-linéaire . . . . .	105
4.2.1	Taux de croissance dans la phase linéaire . . . . .	106
4.2.2	Fréquences dans la phase linéaire . . . . .	110
4.2.3	Géométrie des enveloppes radiales dans la phase linéaire . . . . .	112
4.3	Comparaison des modèles à l'approche de la saturation . . . . .	113
4.4	Conclusions et remarques . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Analyse linéaire en géométrie torique</b>	<b>121</b>
5.1	Modèle - Contours d'équilibre . . . . .	122
5.1.1	Configuration magnétique . . . . .	122
5.1.2	Modèle multi-water-bag multi-faisceau . . . . .	122
5.1.3	Contours d'équilibre . . . . .	123
5.1.4	Caractéristiques particulières de l'équilibre considéré . . . . .	130
5.2	Analyse linéaire . . . . .	132
5.3	Résolution du problème bi-dimensionnel . . . . .	133
5.3.1	Définition du problème . . . . .	133
5.3.2	Méthode numérique et implémentation . . . . .	134
5.4	Méthode asymptotique en modes de ballonnement . . . . .	136
5.4.1	Représentation en modes de ballonnement . . . . .	136
5.4.2	Orderings et développement asymptotique . . . . .	139
5.4.3	Problème intégral à l'ordre zéro . . . . .	139
5.4.4	Détermination de $\theta_{k0}$ . . . . .	142
5.4.5	Problème à l'ordre 2 : détermination de l'enveloppe radiale et de la fréquence globale . . . . .	143
5.5	Méthode asymptotique : schémas numériques . . . . .	144
5.5.1	Problème intégral aux valeurs propres . . . . .	144
5.6	Conclusions . . . . .	154
<b>6</b>	<b>Analyse linéaire en géométrie torique : résultats numériques</b>	<b>157</b>
6.1	Cas test Cyclone - paramètres et grandeurs d'équilibre . . . . .	158
6.1.1	Paramètres du cas Cyclone . . . . .	158
6.1.2	Distribution multi-water-bag d'équilibre . . . . .	158
6.1.3	Résultats de référence pour le cas Cyclone . . . . .	163
6.2	Distributions sans contours fermés (faible $\mu$ ) . . . . .	170
6.2.1	Résultats du code QUALITORO - intégration en temps . . . . .	170
6.2.2	Méthode asymptotique (code ASYMPTORO) . . . . .	178
6.2.3	Comparaison entre les deux méthodes . . . . .	187

6.2.4	Comparaison avec les résultats de référence . . . . .	192
6.3	Distribution avec contours fermés : vers les limites du modèle? . . . . .	192
6.4	Discussion des résultats - Perspectives . . . . .	197
6.4.1	Discussions des résultats . . . . .	197
6.4.2	Perspectives . . . . .	197
<b>Conclusion générale</b>		<b>199</b>
<b>A Dérive de polarisation</b>		<b>201</b>
<b>B Résolution de l'équivalence exacte pour <math>2N</math> moments par une méthode aux valeurs propres</b>		<b>205</b>
<b>C Conditions d'extension de l'équivalence exacte au sens des moments</b>		<b>207</b>
C.1	Inégalité générale vérifiée par les moments Water-Bag . . . . .	207
C.2	Définitions de bornes explicites . . . . .	208
C.2.1	Propriétés générales . . . . .	208
C.2.2	Bornes de $\mathcal{F}_{A,p,q}$ sous contraintes . . . . .	209
C.2.3	Bornes d'extensibilité sur le préfacteur dans le cas Maxwellien . . . . .	214
<b>D Modèles fluide et cinétique continu</b>		<b>215</b>
D.1	Modèle fluide à trois moments . . . . .	215
D.2	Modèle Maxwellien continu . . . . .	216
<b>E Transformation de Fourier en coordonnées polaires - évaluation discrète</b>		<b>217</b>
E.1	Transformation de Fourier en coordonnées polaires . . . . .	217
E.2	Calcul de la transformée de Hankel discrète - séries de Fourier-Bessel . . . . .	218
E.2.1	Décomposition en série de Bessel . . . . .	218
E.2.2	Troncature - approximation de la transformée de Hankel . . . . .	219
<b>F Stabilité du schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 4</b>		<b>221</b>
<b>Table des figures</b>		<b>229</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>239</b>





# Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier les membres de mon jury, qui ont accepté d'examiner mon travail. Je leur suis gré de l'intérêt et de la rigueur qu'ils ont montré dans cette tâche, ainsi que de la pertinence des questions qu'ils ont soulevées. Nombre d'entre elles nourriront à n'en pas douter mes travaux de recherches futurs.

Bien que, pour des raisons de forme académique, un travail de thèse se présente de prime abord comme une démarche essentiellement individuelle, il va sans dire que son succès n'est possible que par les actions conjointes d'une multitude. S'il m'apparaît impossible de rendre adéquatement justice à tous de l'aide et du soutien que j'ai pu retirer de leurs actes, paroles ou simplement de leur présence, je souhaite par ces quelques mots leur signifier ma profonde reconnaissance.

Tout d'abord, à tout seigneur tout honneur, à Nicolas Besse, qui a accepté de me faire confiance et de prendre sous son aile un thésard quelque peu hors-normes. Tant par son excellence scientifique que par sa grande disponibilité, il a été pour moi un guide fiable et constant tout au long de ce travail. Je salue sa patience face à mes raisonnements "à la physicienne" qui eussent pu à bon droit faire rugir le mathématicien rigoureux qu'il est.

Je tiens à remercier les collègues de l'Institut Jean Lamour, et particulièrement de l'équipe 107, dont l'accueil chaleureux m'a été d'un soutien précieux. Tant la diversité que la qualité des échanges, scientifiques ou autres, que j'ai pu avoir avec eux, m'ont permis chaque jour, de venir travailler le sourire aux lèvres. Je remercie particulièrement Guillaume Boussein et Jordan Cavalier, mes deux co-impétrants de l'équipe 107, pour avoir supporté quotidiennement la présence du "vieil" étudiant que je suis, mes calembours à deux sous, et mon niveau micro-podo-ballistique<sup>1</sup> abyssal.

Je remercie enfin ma famille pour m'avoir soutenu pendant toutes ces années, et supporté avec patience les humeurs oscillantes d'un thésard affairé. Ce travail, et plus encore, leur est dédié.

---

1. *lit.* : relatif au baby-foot



# Chapitre 1

## Contexte et objectifs

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Fusion thermonucléaire par confinement magnétique . . .</b>	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Transport dans un Tokamak . . . . .</b>	<b>10</b>
1.2.1	Configuration du champ de confinement . . . . .	10
1.2.2	Transport dans un plasma de Tokamak . . . . .	11
<b>1.3</b>	<b>Modèle gyrocinétique pour l'étude de l'instabilité ITG . .</b>	<b>14</b>
1.3.1	Dynamique électronique et quasi-neutralité . . . . .	16
<b>1.4</b>	<b>Le modèle multi-water-bag . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>1.5</b>	<b>Structure de la présentation des travaux . . . . .</b>	<b>20</b>

---

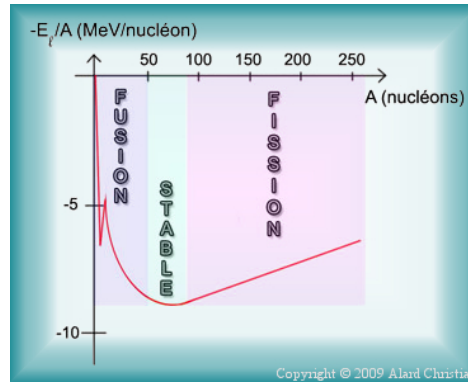
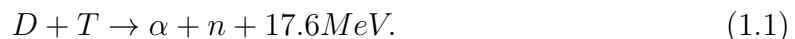


FIGURE 1.1 – Courbe d'Aston ; énergie de liaison par nucléon

## 1.1 Fusion thermonucléaire par confinement magnétique

Depuis la découverte des réactions nucléaires et le développement de la science du noyau, la mise à profit de ces dernières pour la production d'énergie a constitué un objectif technologique majeur. Les énergies de liaison nucléaires, de 6 ordres de grandeurs supérieures à celle mises en oeuvre dans les réactions chimiques, promettent en effets des densités énergétiques (ratio énergie/masse mise en oeuvre) sans contrepartie avec les autres sources d'énergies. Deux voies sont possibles pour extraire des noyaux l'énergie de liaison entre nucléons, qui correspondent aux deux grandes catégories de réactions nucléaire : la fission de noyaux lourds, qui se fragmentent en noyaux plus légers, et la fusion de noyaux légers en noyaux plus lourds. Les gains énergétiques associés aux deux types de réactions peuvent être appréciés en observant la courbe d'Aston (Figure 1.1). Il y apparaît clairement que la partie de la courbe la plus intéressante à exploiter devrait être la partie gauche, correspondant aux réactions de fusion, la forte pente de la courbe dans cette zone pouvant faire espérer des rendements énergétiques importants. C'est pourtant la partie droite qui est exploitée par l'industrie nucléaire (civile) depuis le milieu du vingtième siècle, au travers de la fission de noyaux lourds (essentiellement  $U^{235}$ ), qui ont en sus le mauvais goût de générer une descendance d'isotopes radio-actifs à longue durée de vie, dont le retraitement et le stockage sont pour le moins problématiques. Cet apparent paradoxe n'est pas le fruit d'un oubli ou d'une quelconque perversité mais résulte des conditions drastiques nécessaires à l'obtention d'un nombre significatif de réactions de fusion. Considérons par exemple la réaction de fusion entre un noyau de deutérium et de tritium, meilleure candidate actuelle pour un réacteur de fusion thermonucléaire. Le bilan réactionnel est



Cette réaction produit une particule  $\alpha$  (un ion Hélium) et un neutron rapide ( $14 \text{ MeV}$ ). La section efficace de réaction, en supposant un deutéron incident sur un noyau fixe de tritium, est maximale avec une valeur de  $5 \text{ barns}$  pour une énergie cinétique du deutéron incident d'environ  $120 \text{ keV}$ . A titre de comparaison, la section efficace pour un neutron thermique ( $E \approx 0,025 \text{ eV}$ ) est de l'ordre de  $600 \text{ barns}$ . Pour un mélange D-T à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ , le taux de réaction effectif, obtenu en moyennant sur les vitesses des deux populations, est maximal pour une tempéra-

ture d'environ  $70keV$ . Pour des températures de l'ordre de quelques dizaines de  $keV$ , le milieu réactionnel forme un plasma complètement ionnisé. Dans un tel milieu, les pertes par rayonnement de freinage dues aux collisions Coulombiennes, fonctions croissantes de la température, entraînent une déperdition trop importante d'énergie pour maintenir l'état du milieu. Le point d'équilibre entre la production d'énergie de fusion et les pertes par rayonnement de freinage conduisent à une température optimale pour la réaction  $D - T$  de l'ordre de  $15keV$ . Outre les pertes par rayonnement, le milieu réactionnel perd de l'énergie par transfert thermique.

L'effet global de ces pertes peut être, de manière très grossière, caractérisé par un temps caractéristique  $\tau_E$  appelé temps de confinement de l'énergie  $\tau_E$ . Formellement  $\tau_E$  peut être défini comme le taux de variation  $\frac{d \ln E_{tot}}{dt}$  auquel on a soustrait les contributions liées aux sources (fusion ou autre) et au rayonnement de freinage. Notons que  $\tau_E$  ainsi défini est fonction de l'état réel du système à un instant donné. On suppose ici qu'il est possible de lui substituer une valeur générique représentative, dépendant des caractéristiques globales (taille, mode de confinement, pression moyenne,...) du système. A minima, l'énergie produite par les réactions de fusion doit pouvoir compenser les pertes par rayonnement et par transfert thermique de manière à se maintenir à la température souhaitée. Cette condition se traduit par une contrainte liant le temps de confinement, la densité et la température du milieu réactionnel, le critère de Lawson, de la forme

$$nT\tau_E \geq (nT\tau_E)_{min}, \quad (1.2)$$

où  $(nT\tau_E)_{min}$  dépend de la température d'opération. Une présentation détaillée de l'établissement de cette relation peut être trouvée notamment dans [70] et [27]. Pour la fusion  $D - T$  à la température optimale de  $15keV$ ,  $(nT\tau_E)_{min}$  est de l'ordre de  $8.10^5 J.m^{-3}.s$ . Cette estimation peut être affinée en prenant en compte les éventuelles sources de chauffage additionnelles, sans changer la forme globale de la relation obtenue. Le maintien des conditions exprimées par le critère de Lawson suppose l'existence d'un mécanisme de confinement permettant de limiter  $\tau_E$  et de maintenir l'intégrité du système.

Plusieurs voies sont possibles pour assurer ce confinement. Au coeur des étoiles, le confinement est assuré par l'interaction gravitationnelle. Ce mode de confinement est par nature limité aux systèmes de très grande taille. Deux voies sont envisagées pour la réalisation de réacteurs artificiels. La voie inertielle met en oeuvre une compression violente d'une cible  $D - T$  par un ensemble de faisceaux lasers de haute puissance. Le court temps de confinement est compensé par la densité élevée. Le fonctionnement est par nature intermittent. La voie magnétique repose sur le confinement du plasma par un champ magnétique intense : la densité plus faible est compensée par des temps de confinement de l'ordre de la seconde. Les configurations magnétiques envisagées pour assurer le confinement du plasma sont nombreuses, qui diffèrent par leur topologie et le mode de génération du champ. Parmi celles-ci, les configurations Tokamak occupent une place prépondérante. C'est notamment le type de configuration sélectionné pour la réalisation du projet ITER (International Tokamak Experimental Reactor), en cours de réalisation sur le site de Cadarache.

## 1.2 Transport dans un Tokamak

### 1.2.1 Configuration du champ de confinement

Le champ magnétique de confinement dans une machine de type Tokamak possède, comme son nom l'indique, une topologie torique. Les lignes de champ ont la géométrie d'une hélice enroulée autour de l'axe principal de la machine. Dans le volume intérieur du tore, les lignes de champ définissent, de manière lâche ou dense en fonction de leur hélicité, un ensemble de surfaces magnétiques emboîtées. Nous nous restreindrons, dans toute la suite à cette partie du volume de confinement. Nous adopterons en outre, parmi les configurations compatibles avec la topologie évoquée précédemment, une configuration géométrique particulièrement simple : les surfaces magnétiques sont assimilées à des tores concentriques à section circulaire. En coordonnées toroidales  $(r, \vartheta, \varphi)$ , le champ de confinement  $\mathbf{B}$  prend la forme

$$\mathbf{B}(r, \vartheta) = B\mathbf{b} = \frac{B_0 R_0}{R} (b_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + b_\varphi \mathbf{e}_\varphi), \quad (1.3)$$

où  $R_0$  est le grand rayon du tore,  $0 < r < a$ ,  $a < R_0$  est le petit rayon du tore,  $R = R_0 + r \cos \vartheta$ ,  $b_\vartheta = r/(q(r)R)b_\varphi$ ,  $b_\varphi = (1 + (r/qR)^2)^{-1/2}$ .

Le facteur de sécurité  $q(r)$  caractérise l'hélicité des lignes de champ, d'équation  $\varphi - q\vartheta = cte$ , sur une surface magnétique  $r = cte$  donnée. Une ligne de champ passant par le point de coordonnées  $(r, \vartheta_0, \varphi_0)$  passe après  $N_t$  tour toroidaux en  $(r, \vartheta_0 + N_t 2\pi/q, \varphi_0 + N_t 2\pi)$ . Si  $q$  est rationnel, la ligne de champ se referme sur elle-même après un nombre fini  $N_t$  de tours toroidaux et un nombre  $N_p = N_t/q$  de tours poloidaux (voir Figure 1.2(a)). Si  $q$  est irrationnel, la ligne de champ ne se referme jamais sur elle-même et couvre de manière dense la surface magnétique (voir Figure 1.2(b)). Notons qu'à toutes fins pratiques, la distinction entre une surface rationnelle pour laquelle les valeurs minimales de  $N_t$  et  $N_p$  sont de grands entiers et une surface irrationnelle est illusoire. La densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  implique en outre qu'on peut trouver une surface irrationnelle aussi près que l'on veut de toute surface rationnelle. Si l'on considère un élément de volume de plasma au voisinage d'une surface magnétique (à  $dq$  près), la longueur de premier retour d'une ligne de champ traversant le volume est définie par l'approximation rationnelle  $N_t/N_p$  de  $q$  à  $dq$  près qui minimise  $(N_t, N_p)$ . Le caractère fini de cette longueur de premier retour induit des effets de quantification par l'introduction de conditions aux limites périodiques suivant la ligne de champ. Pour les surfaces irrationnelles, ou pour les surfaces rationnelles à "grand"  $(N_t, N_p)$ , ces effets sont inexistantes ou indécélables. Les surfaces rationnelles d'intérêt sont celles pour lesquelles il existe une approximation rationnelle  $N_t/N_p$  de  $q$  telle que  $N_t$  et  $N_p$  soient de "petits" entiers, pour lesquelles la longueur de premier retour est suffisamment courte (en regard du libre parcours moyen) pour que des phénomènes périodiques cohérents puissent apparaître. Ces surfaces sont en conséquences dites résonnantes.

Dans une configuration Tokamak, si la composante toroidale dominante du champ provient d'un système d'aimants entourant le plasma, une part importante de la composante poloidale est générée par un courant circulant dans le plasma lui-même. La rétroaction de l'état du plasma sur le champ de confinement ouvre la voie au développement d'instabilités à grande échelle qui peuvent entraîner une perte brutale de confinement. Nous mettrons de côté par suite ces phénomènes, considérant que sur les échelles de temps que nous considérerons, les conditions permettant l'établissement d'un régime stationnaire à grande échelle pour le plasma et le champ magnétique sont

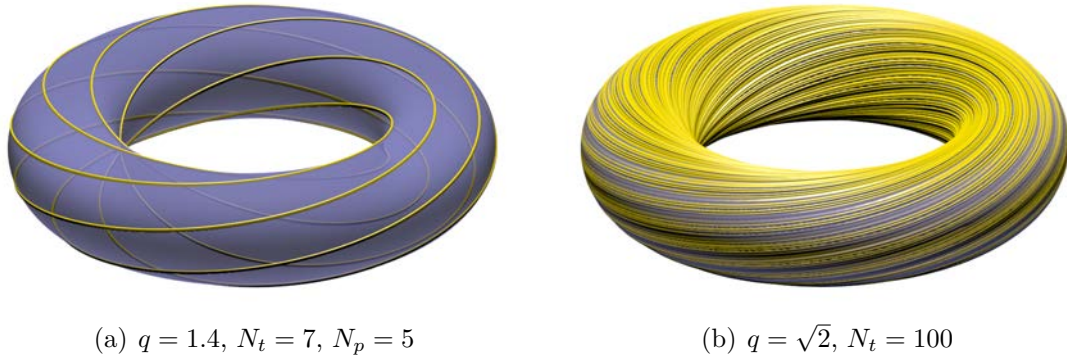


FIGURE 1.2 – Ligne de champ sur une surface magnétique rationnelle (a) et irrationnelle (b)

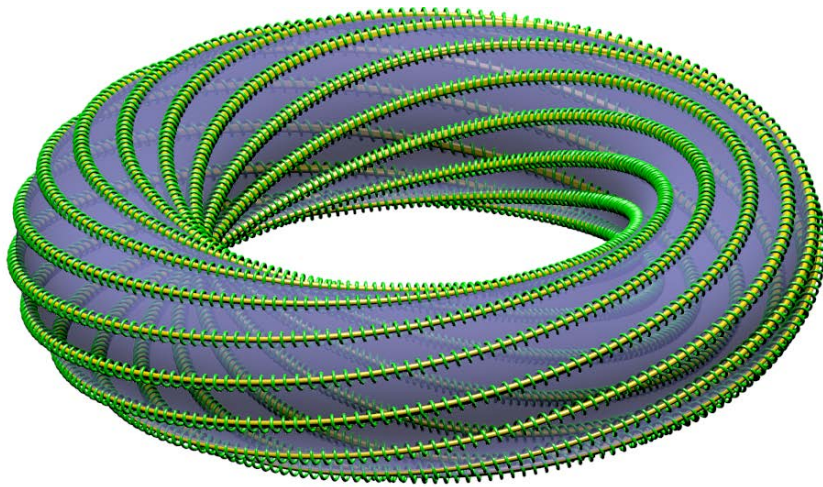


FIGURE 1.3 – Trajectoire d'une particule (vert) autour d'une ligne de champ ; ni la modulation du rayon de Larmor et de la fréquence cyclotron ni l'effet des dérives ne sont représentés

établies. Le champ magnétique pourra en conséquence être supposé imposé de l'extérieur et constant dans le temps à l'échelle des phénomènes étudiés.

### 1.2.2 Transport dans un plasma de Tokamak

La configuration du champ de confinement étant définie, nous pouvons maintenant aborder les mécanismes de transport qui vont déterminer le temps de confinement  $\tau_E$ . En présence d'un champ magnétique suffisamment intense et lentement variable à la fois en espace et en temps, le mouvement d'une particule chargée peut être considéré comme la composition de deux mouvements d'échelles temporelles distinctes : un rapide mouvement de rotation dans un plan perpendiculaire au champ, le mouvement cyclotron, et le mouvement de dérive du centre de rotation, ou centre guide. La séparation des échelles de temps de ces deux mouvements implique l'existence d'un invariant adiabatique, le moment magnétique  $\mu$ .

Si l'on néglige, en première approximation, la composante perpendiculaire du mouvement du centre guide par rapport à sa composante parallèle ainsi que les variations

d'intensité du champ magnétique, le mouvement, entre deux collisions, se réduit à la composition d'un mouvement libre le long d'une ligne de champ et à la rotation cyclotron. Il en résulte une forte anisotropie des propriétés de transport du plasma : le libre parcours moyen des particules dans un plan perpendiculaire au champ est de l'ordre du rayon de Larmor et les coefficients de transport collisionnel dans les directions perpendiculaires au champ sont considérablement réduits. Les temps de confinements résultant de ce type de transport, dit "classique", sont typiquement de l'ordre de plusieurs minutes, soit largement supérieurs à ceux nécessaires pour satisfaire le critère de Lawson.

Le champ de confinement n'est cependant constant ni en norme ni en direction. En raison de la conservation du flux, l'intensité du champ décroît en raison inverse de la distance à l'axe principal de la machine. Elle reste cependant suffisamment importante pour maintenir l'invariance du moment magnétique. Les variations spatiales du champ magnétique ont des conséquences importantes sur la nature du mouvement des particules. Tout d'abord, le rayon de Larmor et la fréquence cyclotron sont modulées spatialement par les variations de l'intensité du champ. La conservation conjointe de l'énergie cinétique totale  $E = \frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \mu B$ <sup>1</sup> et du moment magnétique  $\mu$  implique un transfert d'énergie entre le mouvement parallèle et le mouvement perpendiculaire, et la possible apparition d'un phénomène de piégeage magnétique. La variation de  $\mathbf{B}$  implique en outre une excursion radiale de la trajectoire du centre guide par rapport à une surface magnétique de référence.

Notons  $B_{max}$  la valeur maximale de l'intensité du champ potentiellement visité par une particule. Pour une particule dont l'énergie vérifie  $E > \mu B_{max}$ , la vitesse parallèle, bien que modulée lors du parcours du gradient de champ, ne s'annule jamais. Une telle particule peut entre deux collisions suivre une ligne de champ (à l'excursion radiale près) et décrire dans ce mouvement un grand nombre de tours autour du grand axe du système, de la même manière qu'un pendule possédant suffisamment d'énergie peut indéfiniment tourner dans le même sens. Ce mouvement de rotation est caractérisé par la fréquence de transit  $\omega_t$ . Une particule vérifiant cette condition est dite passante. Pour une particule dont l'énergie est telle que  $E < \mu B_{max}$ , il existe une valeur critique de l'intensité du champ magnétique  $B_{crit}$  pour laquelle la vitesse parallèle admet un point de rebroussement. La particule se retrouve piégée dans la zone de bas champ  $B \leq B_{crit}$ . Pour une intensité du champ de la forme  $B = B_0 R_0 / R$ , la nappe cylindrique  $B = B_{crit}$  intersecte une surface magnétique sur deux contours critiques symétriques par rapport au plan équatorial. La trajectoire de la particule admet un point tournant situé sur chacun de ces contours, et le centre guide effectue un mouvement de type pendulaire entre ces deux points, caractérisé par la fréquence de rebond  $\omega_b$ . En prenant comme référence la surface magnétique contenant les points tournants, l'excursion radiale du centre guide, maximale dans la région de champ faible, donne à la projection dans un plan de coupe poloidal de la trajectoire du centre guide la forme d'une banane. Les particules possédant ce type de trajectoires sont dites piégées.

Dans tous les cas, mais à plus forte raison pour les particules piégées pour lesquelles elle est plus importante, l'excursion radiale de la trajectoire du centre guide diminue l'efficacité du confinement, permettant un transport de l'énergie sur des distances de l'ordre de la largeur de banane  $l_b$ .

Même en tenant compte de cet effet, les coefficients de transport collisionnel devraient

---

1. On néglige ici le champ électrique et les fluctuations du champ magnétique



aisément permettre l'obtention de temps de confinement de l'énergie compatible avec les conditions opératoires de fonctionnement d'une machine de fusion.

Or, les coefficients de transport obtenus à partir des données expérimentales sont typiquement de un à deux ordres de grandeurs supérieurs à ceux prévus par les modèles de transport classique et néo-classique. Ce transport, dit "anormal", s'observe en outre toujours conjointement à la présence de fluctuations turbulentes de faible niveau des champs caractérisant le plasma (densité, température) et du champ électromagnétique ([79, 80]). Les caractéristiques spectrales de cette "micro-turbulence" sont les suivantes :

- ◇ Les fréquences caractéristiques de ces fluctuations dans le domaine temporel sont typiquement en deçà des fréquences cyclotrons ioniques et électroniques, et des processus radiatifs.

$$\omega_{turb} \ll \omega_{CI} \ll \omega_{CE}, \omega_{radiatif} \quad (1.4)$$

- ◇ Le spectre  $\omega_{turb} = f(\mathbf{k})$  est fortement dispersif, avec une largeur spectrale

$$\Delta\omega_{turb}/\omega_{turb} \sim 1. \quad (1.5)$$

- ◇ le spectre spatial présente une forte anisotropie entre les directions parallèles et perpendiculaires au champ de confinement

$$k_{\parallel turb} \ll k_{\perp turb}. \quad (1.6)$$

- ◇ Les fréquences caractéristiques temporelles  $\omega_{turb}$  et spatiales  $\mathbf{k}_{\perp turb}$  sont de l'ordre des fréquences diamagnétiques caractéristiques des ondes dites "de dérive".

$$\omega_{turb} \sim \omega^* \stackrel{def}{=} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_D = \mathbf{k} \cdot \left( \frac{k_B T}{q_s B} \mathbf{b} \times \frac{\nabla P}{P} \right) \quad (1.7)$$

Ces caractéristiques, ainsi que leurs dépendances vis à vis des paramètres globaux des décharges (profils radiaux de densité, température, pression) ont conduit à attribuer l'existence du transport anormal au développement d'instabilités mettant en jeu des interactions *cohérentes* entre les populations de particules chargées et le champ électromagnétique, nourries par l'énergie libre liée aux gradients globaux.

Nous nous restreindrons dans toute la suite au cas de la turbulence électrostatique, les fluctuations du champ magnétique étant négligées. En présence d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  non nul, la vitesse du centre guide d'une particule magnétisée se voit adjoindre une vitesse de dérive, dite de champs croisés

$$\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{\mathbf{b} \times \nabla \phi}{B} \quad (1.8)$$

Le champ d'advection local<sup>2</sup> correspondant est tangent aux iso-potentiels du champ électrostatique dans tout plan perpendiculaire au champ magnétique. Il en résulte un mouvement convectif le long des iso-potentiels. Examinons, par exemple, le flux convectif d'un moment quelconque (densité, énergie, magnétisation...) de la distribution ionique. On suppose que le moment scalaire  $m$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  sont sujets à des fluctuations stochastiques  $(\delta m, \delta \mathbf{E})$  telles que  $\langle \delta m \rangle = \langle \delta \mathbf{E} \rangle = \vec{0}$ , où  $\langle \cdot \rangle$  désigne une

---

2. C'est à dire en considérant une zone suffisamment petite pour que  $\mathbf{B}$  puisse y être considéré comme uniforme.

moyenne d'ensemble. La contribution des fluctuations au flux moyen d'advection de  $m$  est alors

$$\langle \Gamma_{\mathbf{m}} \rangle_{turb} = \langle m \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \rangle - \langle m \rangle \langle \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \rangle = \langle \delta m \delta \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \rangle \quad (1.9)$$

Si les variations des fluctuations de densité et du champ électrique sont parfaitement incohérentes, donc statistiquement indépendantes, alors  $\langle \delta m \delta \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \rangle = \langle \delta m \rangle \langle \delta \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \rangle = \vec{0}$  et aucun transport effectif ne résulte du champ turbulent. Tout écart à la nullité de la cross-corrélation  $\langle \delta m \delta \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \rangle$  provoque l'apparition d'un flux moyen non-nul.

Parmi les instabilités électrostatiques susceptibles de générer de telles fluctuations cohérentes et ainsi concourir au transport anormal, l'instabilité de gradient de température ionique, couramment désignée par l'acronyme ITG (pour *Ion Temperature Gradient instability*) occupe une place importante. Son déclenchement et son importance sont liés à la valeur du gradient radial de température de la population ionique. Elle recouvre de fait deux mécanismes distincts, correspondant à deux branches distinctes de la relation de dispersion

- ◇ la branche dite "slab", qui peut se développer indépendamment de la géométrie du champ magnétique, et notamment dans un champ uniforme. Elle est déstabilisée par le gradient de température  $\kappa_T = d_r \ln T$  et stabilisée par le gradient de densité  $\kappa_n = d_r \ln n$ . Son déclenchement et sa localisation sont typiquement liés à la valeur du facteur  $\eta_i = \kappa_T / \kappa_n$  qui traduit la compétition entre gradients de température et densité.
- ◇ la branche dite "torique" : l'influence du gradient d'intensité du champ magnétique vient s'ajouter aux paramètres pilotant l'instabilité, induisant une localisation poloidale de l'instabilité préférentiellement côté bas-champ. La localisation radiale subit la double influence de celle des zones de gradient et des surfaces résonnantes.

### 1.3 Modèle gyrocinétique pour l'étude de l'instabilité ITG

La séparation d'échelle, évoquée précédemment, entre le mouvement cyclotron et le mouvement de dérive du centre guide d'une particule en présence d'un champ magnétique intense permet un découplage de la dynamique de ce dernier du mouvement cyclotron. La description du mouvement d'une particule dans un espace des phases à six dimensions  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  est remplacée par la description du mouvement d'un moment magnétique  $\mu$  dont la position du centre coïncide avec le centre guide de la particule, dans un espace à cinq dimensions  $(\mathbf{X}, v_{\parallel}, \mu)$ . Notons que ce moment magnétique ne doit en général pas être considéré comme une pseudo-particule ponctuelle : il est plus juste de l'assimiler à une boucle de courant centrée en  $\mathbf{X}$  et de rayon (variable) égal au rayon de Larmor  $\rho$ .

Une description du traitement perturbatif conduisant au modèle gyrocinétique a été exposée, dans un cadre plus général, par Kruskal ([52]). Une présentation synthétique du traitement spécifique au modèle gyrocinétique est donnée dans [8] et divers développements dans [58, 59, 29, 24, 38, 77]. La dynamique de la fonction de distribution des centres guides est gouvernée par l'équation de Vlasov gyrocinétique

$$\partial_t f + \mathbf{V}_{GC} \cdot \nabla f + \left( \frac{dv_{\parallel}}{dt} \right) \partial_{v_{\parallel}} f = 0, \quad (1.10)$$

où le champ d'advection en espace  $\mathbf{V}_{GC}$  se décompose en

$$\mathbf{V}_{GC} = \frac{B}{B_{\parallel}^*} \left[ \underbrace{v_{\parallel} \mathbf{b}}_{\text{dérive parallèle}} + \underbrace{\frac{v_{\parallel}^2}{\Omega_{CI}} \nabla \times \mathbf{b}}_{\text{dérive de courbure}} + \underbrace{\frac{1}{B} \mathbf{b} \times \nabla \mathcal{J}_{\mu} \phi}_{\text{dérive de champs croisés}} + \underbrace{\frac{\mu}{q_i B} \mathbf{b} \times \nabla B}_{\text{dérive de gradient}} \right], \quad (1.11)$$

le champ d'accélération parallèle en

$$\left( \frac{dv_{\parallel}}{dt} \right) = -\frac{1}{m_i} \frac{\mathbf{B}^*}{B_{\parallel}^*} \cdot (\mu \nabla B + q_i \nabla J_{\mu} \phi), \quad (1.12)$$

où  $\mathbf{B} = B \mathbf{b}$  et le champ magnétique corrigé  $\mathbf{B}^*$  est défini par  $\mathbf{B}^* = \mathbf{B} + \frac{m_i v_{\parallel}}{q_i} \nabla \times \mathbf{b}$ ,  $J_{\mu}$  désigne l'opérateur de gyromoyenne

$$J_{\mu} f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}(\xi)) d\xi, \quad (1.13)$$

où  $\boldsymbol{\rho} = \rho(\cos \xi \mathbf{e}_1 + \sin \xi \mathbf{e}_2)$ ,  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{b})$  forment une base orthonormée directe et  $\rho(\mathbf{X}, \mu) = \left( \frac{2\mu B}{\Omega_{CI}^2} \right)^{1/2}$ . La forme de l'opérateur de gyromoyenne met clairement en évidence le caractère non-local du modèle gyrocinétique lorsque  $\mu \neq 0$  : en raison de la valeur finie du rayon de Larmor, la dynamique du centre guide en  $\mathbf{X}$  est pilotée à la fois par les conditions locales en  $\mathbf{X}$  et sur le cercle de Larmor centré en  $\mathbf{X}$ .

On peut noter que le moment magnétique invariant  $\mu$  n'est pas une variable dynamique de (1.10) et peut en conséquence être considéré comme un simple paramètre. La population ionique peut donc être séparée en classes correspondant chacune à une valeur de  $\mu$ , et caractérisée chacune par une distribution en vitesse parallèle  $f_{\mu}(\mathbf{r}, v_{\parallel}, t)$  dont la dynamique est régie par (1.10). Le couplage entre ces différentes populations et la population électronique étant assuré de manière indirecte par le potentiel électrostatique.

La validité de la dérivation du modèle gyrocinétique repose sur un certain nombre de relations d'échelle sur les quantités statiques et dynamiques intervenant dans le modèle. Les échelles de variations spatiales et temporelles du champ magnétique sont caractérisées par le paramètre  $\epsilon_B$  au travers des orderings

$$\rho_i |\nabla \ln B| \sim \epsilon_B \quad (1.14)$$

et

$$|\omega_c| |\partial_t \ln B| \sim \epsilon_B^3. \quad (1.15)$$

Les variations spatiales de la fonction de distribution d'équilibre sont caractérisées de même par  $\epsilon_f = \rho_i / L_f$ . Dans le cas d'un équilibre maxwellien on peut spécialiser l'ordering en définissant  $\epsilon_n = \rho_i / L_n$ ,  $\epsilon_T = \rho_i / L_T$ .

Le spectre des quantités fluctuantes ioniques et électromagnétiques est caractérisé par les orderings

$$|k_{\perp}| \rho_i = \epsilon_{\perp} \sim 1 \quad (1.16)$$

et

$$\frac{\omega}{\Omega_{CI}} = \epsilon_{\omega} \ll 1. \quad (1.17)$$

L'anisotropie spectrale est caractérisée par

$$\frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \sim \frac{\epsilon_{\omega}}{\epsilon_{\perp}} \quad (1.18)$$

L'amplitude des fluctuations est caractérisée par le paramètre d'ordre  $\epsilon_{\delta}$

$$\left| \frac{\delta f}{f} \right| \sim \frac{|\delta \mathbf{B}|}{B} \sim \frac{|\delta E_{\perp}|}{Bv_{th}} \sim \epsilon_{\delta} \ll 1 \quad (1.19)$$

### 1.3.1 Dynamique électronique et quasi-neutralité

Nous avons jusqu'ici considéré une description de la dynamique exclusivement du point de vue ionique. Il est tout à fait possible de développer un modèle gyrocinétique pour la dynamique électronique. La grande différence d'inertie entre les ions et les électrons peut entraîner cependant une séparation des échelles temporelles de leurs dynamiques respectives. Nous allons exploiter la différence d'inertie entre ions et électrons afin de modéliser le comportement de ces derniers sans avoir à résoudre explicitement leur dynamique. Notons tout d'abord que les électrons sont plus fortement magnétisés que les ions, à savoir

$$m_e \ll m_i \rightarrow \rho_e \ll \rho_i \text{ et } \Omega_{CE} \gg \Omega_{CI}, \quad (1.20)$$

$T_e$  et  $T_i$  étant supposées du même ordre de grandeur.

Aux échelles ioniques considérées ( $L \sim \rho_i$ ), la position des électrons peut donc être assimilée à celle de leur centre guide. En outre, la faiblesse de l'inertie électronique permet de considérer la variation temporelle du potentiel électrostatique comme lente en regard de la dynamique électronique. Le long des lignes de champ, le mouvement non contraint des électrons leur permet de réagir quasi-instantanément à toute variation du champ et de maintenir un équilibre thermodynamique local. Notons que cette réorganisation rapide de la population électronique le long d'une ligne de champ doit conserver la charge le long de la ligne de champ. L'écrantage ne peut donc concerner la composante moyenne du champ  $\langle \phi \rangle_{LC}$ , qui nécessite un transport de charge perpendiculaire beaucoup plus lent. Sous ces hypothèses la réponse en densité de la population électronique est

$$n_e(\mathbf{r}, t) = n_0(r) \exp \left[ \frac{e(\phi - \langle \phi \rangle_{LC})}{k_B T_e(r)} \right] \quad (1.21)$$

où  $n_{e0}(r) = n_0(r)$ ,  $T_e(r)$  sont respectivement les profils radiaux de densité et température électronique à l'équilibre.

Sachant que  $T_e \sim T_i$ , l'ordering  $e\phi/(k_B T_e) \sim \epsilon_{\delta}/\epsilon_{\perp}$  permet de linéariser (1.21) en

$$n_e(\mathbf{r}, t) = n_0(r) \left( 1 - \frac{e(\phi(\mathbf{r}, t) - \langle \phi \rangle_{LC})}{k_B T_e} \right) \quad (1.22)$$

L'équation de Vlasov gyrocinétique et (1.22) couplent respectivement la fonction de distribution des centres guides et la densité électronique au potentiel électrostatique. La fermeture du système est assurée par l'équation de Poisson

$$\Delta \phi = \frac{e}{\epsilon_0} (Z_i n_i - n_e) \quad (1.23)$$

Notons que dans cette équation, la densité ionique  $n_i$  est la densité réelle des particules. Il est important de noter que cette dernière ne s'identifie pas, en présence d'un potentiel perturbatif non-nul, à la densité gyromoyennée  $n_{Gi}$  des centres-guides. Il faut ajouter à cette dernière la densité de polarisation  $n_{pol}$ , donnée ici sous forme linéarisée

$$n_i(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\int d^3v J_\mu f}_{n_{Gi}} + \underbrace{\nabla_\perp \cdot \left( \frac{n_0}{B\Omega_{CI}} \right) \nabla_\perp \phi}_{n_{pol}} \quad (1.24)$$

Le détail de l'établissement de (1.24), que l'on peut trouver plus ou moins explicitement dans [24, 8], est donné dans l'annexe A.

L'équation de Poisson, multipliée par  $k_B T_e / (en_0 \phi)$ , en tenant compte du fait que  $T_e \sim T_i$ , devient

$$\underbrace{-\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_0} \frac{\Delta \phi}{\phi}}_{\sim \lambda_D^2 k^2} = 1 - \frac{\langle \phi \rangle_{LC}}{\phi} + \underbrace{\frac{k_B T_e}{e \phi} \left( \frac{Z_i n_{iG}}{n_0} - 1 \right)}_{\sim \epsilon_\perp / \epsilon_\delta} + \underbrace{\frac{Z_i k_B T_e}{e B \Omega_{CI}}}_{\sim \rho_i^2} \left[ \underbrace{\frac{\nabla_\perp^2 \phi}{\phi}}_{k_\perp^2} + \underbrace{\left( \nabla_\perp \ln \frac{n_0}{B^2} \right) \cdot \frac{\nabla_\perp \phi}{\phi}}_{\sim (\epsilon_n + \epsilon_B) / \rho_i} \right]_{\epsilon_\perp^2 + \epsilon_\perp (\epsilon_n + \epsilon_B)} \quad (1.25)$$

Aux échelles considérées, bien supérieures à la longueur de Debye, le terme du premier membre est négligeable. On obtient l'équation dite de quasi-neutralité avec dérive de polarisation linéarisée

$$Z_i n_i - n_e \approx 0, \quad (1.26)$$

soit

$$-\nabla_\perp \cdot \left( \frac{n_0}{B\Omega_{CI}} \right) \nabla_\perp \phi + \frac{n_0 e}{k_B T_e} (\phi - \langle \phi \rangle_{LC}) = Z_i \int d^3v J_\mu f - n_0 \quad (1.27)$$

Bien que la réduction gyrocinétique d'une part et l'hypothèse d'adiabaticité pour les électrons entraîne une réduction notable de la taille du problème à résoudre, le système formé de (1.10) pour chaque valeur de  $\mu$  considérée, et de (1.27) reste fort coûteux du point de vue numérique. Le modèle présenté ici, ainsi que des versions plus générales, ont fait l'objet de nombreuses implémentations, qui diffèrent à la fois par les méthodes numériques et les hypothèses simplificatrices employées (full-f ou  $\delta f$ , électromagnétique ou électrostatique, électrons adiabatiques ou non...). On peut parmi les plus aboutis citer GYSELA ([31, 34, 32]), ORB5 ([48]), GENE ([37, 47]), GYRO ([11]), GS2 ([23, 47], GT5D ([44]), XGC ([53]), GKW ([67]). Une mise en perspective synthétique de l'utilisation des simulations gyrocinétiques dans l'étude de la micro-turbulence est développée dans [30]. Dans tous les cas, la nécessité de résoudre une équation de transport quadri-dimensionnelle impose des coûts importants en terme de temps de calcul. Une approche couramment employée pour développer des modèles moins coûteux consiste à construire un modèle d'évolution des premiers moments en vitesse de la fonction de distribution. Dans ces modèles dits "fluides", les équations de transport des moments s'obtiennent en prenant les moments de l'équation de Vlasov. La structure de l'équation impose cependant un couplage de chaque moment avec le moment d'ordre supérieur : une relation de fermeture (équation d'état) est nécessaire pour obtenir un système consistant et fini.

Le modèle multi-water-bag, qui va être décrit maintenant, peut être considéré comme une sorte d'intermédiaire entre les modèles fluides et cinétiques : tout en préservant une

représentation de l'espace des vitesses, il possède la propriété intéressante de permettre de réduire d'une dimension supplémentaire la dimension du problème par rapport aux modèles cinétiques.

## 1.4 Le modèle multi-water-bag

La réduction multi-water-bag exploite les propriétés d'une classe de solutions faibles de l'équation de Vlasov gyrocinétique. Considérons une distribution en vitesse parallèle de la forme

$$f(\mathbf{r}, v_{\parallel}, t) = \sum_{j=1}^N A_j \sum_{k=1}^{2n_j} (-1)^k H(v_{j,k}(\mathbf{r}, t) - v_{\parallel}) \quad (1.28)$$

où les poids  $A_j$  sont positifs et constants,  $H$  est la fonction de Heaviside, et les champs scalaires  $v_{j,k}$  sont appelés contours de la distribution et vérifient  $v_{j,k} < v_{j,k+1}, \forall k$  et  $v_{j,k} \neq v_{j',k'}$ . La distribution est en substance une combinaison linéaire de  $\sum_j n_j$  fonctions portes en vitesse parallèle, les "water-bags", dont les bornes sont formées par les paires de contours. Un exemple très général d'une telle distribution est donné figure 1.4. Par simple substitution de (1.28) dans l'équation de Vlasov (1.10), il apparaît que la distribution définie par (1.28) est une solution faible exacte de (1.10) à la condition que les contours restent distincts et vérifient l'équation de transport

$$\partial_t v_{j,k} + \mathbf{v}_{GC} \cdot \nabla v_{j,k} + \frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0, \quad (1.29)$$

où les champs d'advection et de force sont obtenus par la substitution  $v_{\parallel} = v_{j,k}$ . L'équation de Vlasov quadridimensionnelle est ainsi réduite à un système de  $2 \sum n_j$  équations de transport tridimensionnelles. La conservation de la hauteur  $A_j$  de chaque "water-bag" est une conséquence de l'incompressibilité de l'écoulement dans l'espace des phase (invariance de Liouville), qui vaut leur dénomination aux water-bags (outres). Nous nous restreindrons par la suite à une classe de distributions multi-water-bag "unimodales", c'est à dire telles que  $n_j = 1, \forall j$ . Pour cette classe de distributions, on peut adopter une convention d'indexation algébrique pour les contours en condensant les paires d'indices  $(j, k), k = 1, 2$  sous l'indice général  $(-1)^k j$  et la distribution prend la forme

$$f = \sum_j A_j H(v_j(\mathbf{r}, t) - v_{\parallel}) \quad (1.30)$$

où la sommation s'étend sur  $j = -N, \dots, -1, 1, \dots, N, A_j > 0, j = 1, N, A_{-j} = -A_j$ . Un exemple d'une telle fonction est donné figure 1.5. La description de l'évolution de la fonction de distribution dans le cadre d'un modèle multi-water-bag peut être vue de la sorte : plutôt que de considérer l'évolution de la valeur de  $f$  en un point  $(\mathbf{r}, v_{\parallel})$  de l'espace des phases, on suit l'évolution de la géométrie d'un nombre fini de lignes de niveau de la fonction de distribution. Toutes les variations spatio-temporelles de la fonction de distribution interviennent au travers de celle des contours. Les variations en vitesses parallèles sont "condensées" au niveau des contours : la dérivée (au sens faible)  $\partial_{v_{\parallel}} f$  est une mesure atomique  $\sum_j A_j \delta(v_j - v_{\parallel})$ .

D'un point de vue numérique, l'intérêt *potentiel* d'une telle approche est double. D'une part, le découplage en vitesse parallèle se prête à une parallélisation triviale. D'autre part, l'échantillonnage en vitesse parallèle n'étant pas rigidement fixé pour l'ensemble du domaine spatial, on peut espérer l'adapter au mieux à la situation physique décrite.

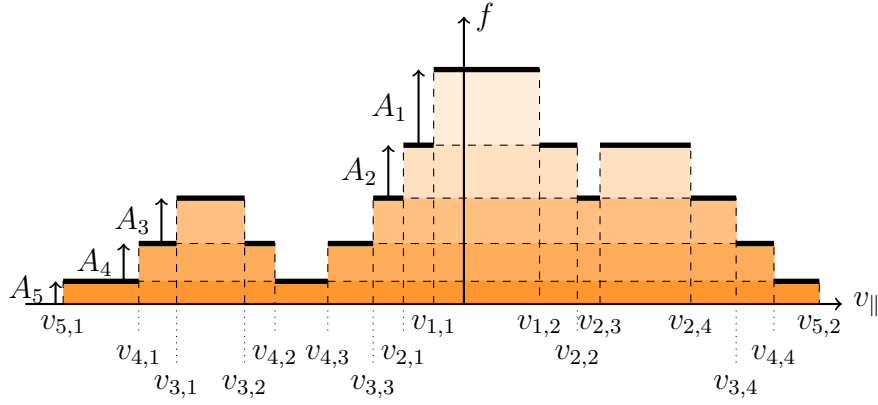


FIGURE 1.4 – Distribution multi-water-bag : cas général

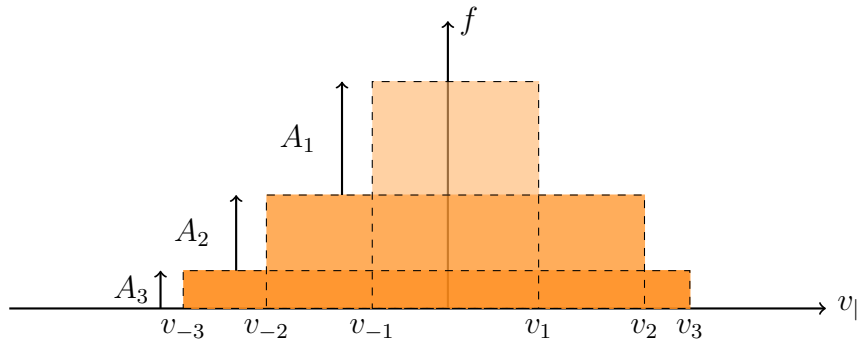


FIGURE 1.5 – Distribution multi-water-bag unimodale

Développé et promu par P. Bertrand et R. Feix notamment ([5]), le modèle multi-water-bag a été utilisé avec profit, sous sa forme locale en espace, pour l'étude d'instabilités ([35]) et de l'armortissement Landau ([60]). L'analyse linéaire de l'instabilité ITG a été abordée en géométrie cylindrique par P. Morel ([62],[60],[61]), toujours dans un cadre local (pour une unique position  $r_0$  du domaine radial). Une première étude linéaire, locale elle aussi à la fois radialement et poloidalement, de l'instabilité en géométrie torique a été effectuée par R. Klein dans le cadre de sa thèse ([50]). Le code semi-lagrangien GMWB3D-SLC de simulation non-linéaire en géométrie cylindrique a été développé par N. Besse ([6]). Une première approche de l'analyse linéaire globale a été réalisée par l'auteur dans le cadre d'un stage de Master 2.

Le travail présenté ici s'inscrit dans la continuité de ces travaux, en constituant à la fois une extension et une restriction : extension car les analyses locales sont remplacées par des analyses globales, donnant accès non-seulement aux caractéristiques spectrales temporelles de l'instabilité, mais aussi à leurs caractéristiques géométriques ; restriction en ce sens que tous les modèles multi-water-bag utilisés sont caractérisés par un petit nombre (5 – 10) de bags. Les raisons de cette restriction sont multiples : d'une part, pour cette plage de nombre de bags, le coût numérique des modèles water-bag est du même ordre que celui des modèles fluides, et permet une économie substantielle par rapport aux modèles cinétiques non-réduits. Il est donc utile de déterminer si le modèle permet, à ce faible taux de discrétisation en vitesse parallèle, de rendre compte des

effets cinétiques sur la dynamique. D'autre part, la nature des méthodes numériques mises en oeuvre ne peut être considérée en pratique comme indépendante du nombre de bags, en raison de la finitude des moyens de calcul aussi bien en terme de précision que de performance.

La dynamique de la micro-turbulence dans les plasmas de fusion thermonucléaire, et notamment l'instabilité de gradient de température ionique, ont constitué et constituent toujours un vaste champ de recherche, tant sur le plan expérimental que théorique. La complexité d'une part d'une caractérisation expérimentale précise de la turbulence et du transport, et d'autre part de la dynamique non-linéaire des phénomènes mis en jeu, conduit à une grande variété d'approches de la problématique, chacune portant ses succès et questionnements. Le travail présenté ici n'aborde par nécessité qu'un aspect fort étroit de ce champ de recherche. Plus que la mise en évidence de phénomènes nouveaux, il s'articule autour d'une évaluation de la pertinence d'un modèle : déterminer dans quelle mesure il est possible de rendre compte, qualitativement et quantitativement, de la dynamique turbulente de l'instabilité de gradient de température ionique par l'utilisation d'un modèle multi-water-bag pour un faible nombre de bags. Outre le fait que cette évaluation est un préalable indispensable à toute utilisation "active" du modèle pour rendre compte des phénomènes effectivement observés, elle permet en retour d'apprécier la robustesse de certaines observations à un changement de modèle.

## 1.5 Structure de la présentation des travaux

Le programme de recherche, et conséquemment la présentation des travaux et résultats, s'articule en premier chef sur les deux types de géométries magnétiques abordées : un modèle cylindrique à champ uniforme et un modèle torique à surfaces magnétiques circulaires concentriques. Les chapitres 2,3 et 4 sont consacrés à l'analyse de l'instabilité en géométrie cylindrique ([16, 15]) et les chapitres 5 et 6 à la géométrie torique. Bien que certaines caractéristiques de l'instabilité et méthodes d'analyse soient communes aux deux types de géométries abordées, les différences, à la fois en terme de description de l'équilibre, de nature et de dimension des modèles et des problèmes numériques afférents justifient un traitement séparé des deux géométries.

Dans les deux cas, la démarche d'analyse commence par la définition d'un modèle de type multi-water-bag pour décrire la fonction de distribution ionique. La seconde étape est la recherche d'une distribution multi-water-bag qui soit solution stationnaire de l'équation de Vlasov, et permette de décrire au mieux la situation d'équilibre instable dont on veut analyser la dynamique subséquente. Nous verrons que cette étape est loin d'être triviale, et conditionne fortement le succès du reste de l'analyse. La troisième étape consiste en une analyse de stabilité linéaire globale au voisinage de la solution stationnaire obtenue. Elle conduit dans tous les cas à la nécessité de résoudre un problème aux valeurs propres différentiel ou intégral-différentiel. Une large part du travail a été dévoué à la recherche de méthodes efficaces permettant de résoudre ce type de problèmes. C'est à cette étape que s'arrête la démarche en géométrie torique. En géométrie cylindrique, l'analyse de stabilité linéaire se voit complétée d'une étude des premières étapes de la saturation non-linéaire de l'instabilité. La mise en oeuvre de simulations non-linéaires du système Vlasov-Quasi-neutralité, conduit d'une part à une description des propriétés qualitatives du champ turbulent au moyen de diagnostics développés à cet effet, et d'autre part, par comparaison avec des modèles dynamiques linéaires et quasi-linéaires, d'une analyse des mécanismes de saturation de l'instabilité.



Dans tout les cas, les modèles théoriques, méthodes numériques et implémentations, et les résultats obtenus seront présentés séquentiellement. Il est bien entendu que cette dissociation est très largement arbitraire, et ne traduit aucunement le déroulement, par nature itératif, du travail de recherche.



# Chapitre 2

## Modèles et schémas en géométrie cylindrique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Modèle physique . . . . .</b>	<b>24</b>
2.1.1	Modélisation d'une colonne de plasma . . . . .	24
2.1.2	Analyse spectrale et modèles dynamiques . . . . .	26
2.1.3	Détermination des paramètres Water-Bag . . . . .	28
<b>2.2</b>	<b>Schéma numériques et implémentations . . . . .</b>	<b>39</b>
2.2.1	Modèle non-linéaire . . . . .	39
2.2.2	Modèle quasi-linéaire . . . . .	40
2.2.3	Problème spectral linéaire . . . . .	40
<b>2.3</b>	<b>Modèles alternatifs pour l'analyse linéaire . . . . .</b>	<b>43</b>
2.3.1	Modèle fluide à trois moments . . . . .	44
2.3.2	Modèle cinétique continu . . . . .	44
<b>2.4</b>	<b>Critère d'instabilité . . . . .</b>	<b>44</b>
2.4.1	Critère local pour un équilibre symétrique . . . . .	47
2.4.2	Critère intégraux d'instabilité . . . . .	50
<b>2.5</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>53</b>

---

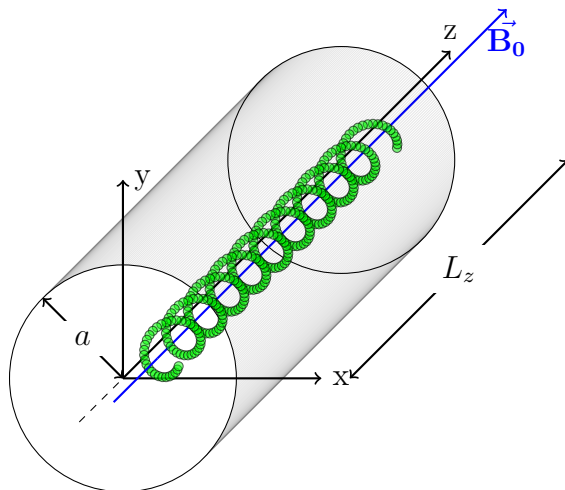


FIGURE 2.1 – Géométrie cylindrique

## 2.1 Modèle physique

### 2.1.1 Modélisation d'une colonne de plasma

#### Géométrie du champ - état d'équilibre

Le volume de confinement du plasma est assimilé à un cylindrique de longueur  $L_z$  et de rayon  $a$  (Fig. 2.1). Le champ magnétique  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ , aligné avec l'axe du cylindre, est constant en direction et en norme. La topologie du tore est néanmoins préservée en imposant à toutes les quantités physiques des conditions aux limites périodiques dans la direction  $z$ . Dans toute la suite, les dépendances spatiales des champs seront exprimées en coordonnées cylindriques  $(r, \vartheta, z)$ . Afin d'éviter les divergences en  $r = 0$ , le domaine radial est restreint à une couronne  $[r_{min} > 0, a]$ . Le plasma considéré est constitué d'une population d'ions totalement ionisés de charge  $q_i = Z_i e$  et de masse  $m_i$  et d'électrons formant un système quasi-neutre du point de vue électrique. Aucun champ électrique extérieur n'étant appliqué, seul sera considéré le champ électrique généré par le plasma lui-même. Aux échelles considérées, supérieures aux longueurs de Debye des espèces en présence, ce champ moyen est fonction de l'écart local à la neutralité définie par  $n_e = Z_i n_i$ .

La structure de confinement ainsi définie entraîne une simplification notable de la dynamique du plasma. En l'absence de champ électrique et de collisions, le mouvement des particules est la simple composition de deux mouvements périodiques : la "révolution" selon l'axe  $\mathbf{e}_z$  et le mouvement cyclotron (Fig. 2.1). Les énergies cinétiques parallèles  $E_{\parallel} = \frac{mv_z^2}{2}$  et perpendiculaires  $E_{\perp} = \mu B_0$  sont des invariants exacts du mouvement. Dans cette situation le confinement dans le plan perpendiculaire au champ est parfait.

Considérons maintenant l'état macroscopique initial du système, en supposant l'existence de collisions. L'absence de confinement le long des lignes de champ assure une diffusion beaucoup plus importante que dans le plan perpendiculaire : l'équilibre thermodynamique local sur une ligne de champ est atteint beaucoup plus rapidement que l'équilibre global, qui se traduirait à terme par l'extinction du plasma, mais n'est jamais atteint en présence de sources de chauffage. Dans l'état d'équilibre local qui nous

intéresse, les fonctions de distribution relatives aux deux espèces ne dépendent pas de  $z$ .

Dans une configuration réelle cette invariance le long des lignes de champ s'étendrait aux surface magnétiques (lorsque le facteur de sécurité est irrationnel), impliquant une dépendance essentiellement radiale des champs de l'équilibre local. Nous allons préserver cette caractéristique en ajoutant un degré de symétrie poloïdale supplémentaire à la situation d'équilibre considérée. Les fonctions de distribution des particules à l'équilibre sont donc considérées comme ayant une dépendance purement radiale. Dans toute la suite, l'état d'équilibre local de référence pour chaque espèce est de plus de type Boltzmannien, avec des fonctions de distribution Maxwelliennes de la forme

$$f_s(r, \mathbf{v}) \propto \frac{n_s(r)}{T_s(r)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s(r)}\right). \quad (2.1)$$

Dans cet état d'équilibre local sans champ électrique, le plasma est localement neutre, et les densités ioniques et électronique vérifient la relation

$$n_e = Z_i n_i \quad (2.2)$$

## Dynamique ionique

La dynamique des ions est décrite par l'équation de Vlasov gyrocinétique. Dans la configuration magnétique adoptée, les vitesses de dérive liées à la courbure et au gradient du champ magnétique s'annulent. Une simplification supplémentaire est introduite en considérant la limite dite de dérive cinétique du modèle gyrocinétique, pour laquelle le moment magnétique  $\mu$  de la population d'ions considérée est suffisamment petit pour que l'opérateur de gyromoyenne se réduise à l'identité. Sous ces hypothèses, l'équation de Vlasov pour les ions devient

$$\partial_t f + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{e}_z}{B_0} \cdot \nabla_{\perp} f + v_{\parallel} \partial_z f + \frac{q_i}{m_i} E_z \partial_{v_{\parallel}} f = 0. \quad (2.3)$$

Toutes les quantités sont par la suite normalisées par les grandeurs de référence définies dans le tableau 2.1.1.

La fonction de distribution ionique est modélisée par une distribution Multi-Water-Bag

Grandeur physique	Facteur de normalisation
$T$	$\bar{T} = T_e(r_0)$
$t$	$\bar{t} = \frac{1}{\Omega_{CI}} = \frac{m_i}{Z_i e B}$
$v, u$	$\bar{v} = c_s = \sqrt{\frac{k_B T_e(r_0)}{m_i}}$
$z, r$	$\bar{L} = \rho_s = \bar{v} \bar{t} = \frac{c_s}{\Omega_{CI}}$
$\phi$	$\bar{\phi} = \frac{k_B \bar{T}}{Z_i e}$

TABLE 2.1 – Conventions de normalisation

définie par

$$f(\mathbf{r}, v_{\parallel}, t) = \sum_j A_j \mathcal{H}(v_j(\mathbf{r}, t) - v_{\parallel}), \quad (2.4)$$

où  $j = -N, \dots, -1, 1, \dots, N$ ,  $A_{-j} = -A_j$  et  $\mathcal{H}$  est la fonction de Heaviside. Les équations de transport des contours  $v_j$  sont alors

$$\partial_t v_j + \frac{1}{r} (\partial_r \phi \partial_\vartheta v_j - \partial_r v_j \partial_\vartheta \phi) + \partial_z \left( \phi + \frac{v_j^2}{2} \right) = 0, \quad (2.5)$$

et la quasi-neutralité

$$-\nabla \cdot (n_0 \nabla_\perp \phi) + \frac{n_0}{Z_i T_e} (\phi - \langle \phi \rangle_{LC}) = \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N A_j v_j - n_0. \quad (2.6)$$

## 2.1.2 Analyse spectrale et modèles dynamiques

Le système d'équations de transport (2.5) fermé par la quasi-neutralité (2.6) constitue ce que nous nommerons par la suite le modèle non-linéaire du système. A partir d'une analyse spectrale en espace, nous allons développer deux modèles approchés qui nous permettront d'aborder la dynamique de croissance et de saturation de la turbulence.

La périodicité selon les variables  $(z, \vartheta)$  nous permet de développer les champs décrivant les contours de la distribution et le potentiel électrique en série de Fourier

$$X(r, \vartheta, z) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} X_m^n(r, t) e^{i(m\vartheta + nk_\parallel z)}, \quad (2.7)$$

où  $k_\parallel = \frac{2\pi}{L_z}$  et  $X_{-m}^{-n} = (X_m^n)^*$ . Le système (2.5)-(2.6) prend alors la forme

$$\begin{aligned} \partial_t v_{jm}^n &= -ink_\parallel \phi_m^n \\ &- \sum_{m', n'} ik'_\vartheta \left( \partial_r \phi_{m-m'}^{n-n'} v_{jm'}^{n'} - \partial_r v_{j m-m'}^{n-n'} \phi_{m'}^{n'} \right) - in' k_\parallel v_{j m-m'}^{n-n'} v_{jm'}^{n'}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

et

$$\left[ -\frac{1}{r} \partial_r (r n_0 \partial_r) + k_\vartheta^2 \right] \phi_m^n + \frac{n_0}{Z_i T_e} (\phi_m^n - \delta_n^0 \phi_m^0) = \sum_j A_j v_{jm}^n - n_0 \delta_n^0 \delta_m^0, \quad (2.9)$$

où  $\delta_j^i$  est le symbole de Kronecker et  $k_\vartheta = m/r$ .

L'évolution du mode  $(0, 0)$ , correspondant aux champs moyennés en  $(\vartheta, z)$ , est régie uniquement par des termes d'auto-couplage

$$\partial_t v_{j0}^0 = -i \sum_{m,n} k_\vartheta (\partial_r \phi_{-m}^{-n} v_{jm}^n - \partial_r v_{j -m}^{-n} \phi_m^n) = -2 \sum_{\substack{m>0 \\ n>0}} k_\vartheta \partial_r \mathfrak{S}(\phi_m^n v_{jm}^{n*}). \quad (2.10)$$

En l'absence de perturbations brisant la symétrie cylindrique, le terme source de (2.10) est nul, confirmant la stationnarité de l'état d'équilibre que nous avons considéré. L'équation de quasi-neutralité prenant une forme particulièrement simple pour le mode  $(0, 0)$ , il est possible d'explicitier l'équation de transport régissant la composante radiale du champ électrique moyen, et par là-même la composante poloidale moyenne de la vitesse de dérive

$$\partial_t \langle v_\vartheta \rangle_{z,\vartheta} := \partial_t \partial_r \phi_0^0 = 2 \sum_j A_j \sum_{\substack{m>0 \\ n>0}} \frac{k_\vartheta}{n_0} \mathfrak{S}(\phi_m^n v_{jm}^{n*}). \quad (2.11)$$

Ce champ moyen de cisaillement de vitesse, où écoulement zonal, joue un rôle crucial dans le développement et la saturation du champ turbulent. A tout instant, le mode  $(0, 0)$  est la somme de sa valeur d'équilibre initial et de la contribution liée à cet écoulement zonal initialement nul.

Dans l'état d'équilibre initial considéré, seul le mode  $(m, n) = (0, 0)$  est non-nul en raison de la dépendance purement radiale des contours d'équilibre. Considérons maintenant l'évolution d'un mode  $(m, n) \neq (0, 0)$ . Sous l'hypothèse que la turbulence reste faible, plus précisément que le spectre spatial reste dominé par le mode  $(0, 0)$ , on peut envisager que les termes de couplage quadratiques de (2.8) impliquant le mode  $(0, 0)$  dominent les autres. Cette hypothèse est par construction vérifiée à l'équilibre, mais a de fortes chances d'être violée lorsque le champ turbulent croît et que son spectre s'enrichit. Gardant à l'esprit cette limite, on définit le modèle quasi-linéaire en tronquant (2.8) pour un mode  $(m, n)$  tous les termes de couplage n'impliquant pas  $(0, 0)$ . L'équation d'évolution d'un mode  $(m, n) \neq (0, 0)$  dans le modèle quasi-linéaire est alors

$$\partial_t v_{jm}^n + i(k_\vartheta \partial_r \phi_0^0 + nk_{\parallel} v_{j0}^0) v_{jm}^n + i(nk_{\parallel} - k_\vartheta \partial_r v_{j0}^0) \phi_m^n = 0. \quad (2.12)$$

L'équation d'évolution du mode  $(0, 0)$ , qui contient exclusivement des termes d'auto-couplage des modes  $(m, n) \neq (0, 0)$  n'est pas affectée par la troncature et garde la même forme que dans le modèle non-linéaire.

Considérons maintenant le système à un instant  $t_0$  tel que l'évolution du mode  $(0, 0)$  puisse être considérée comme lente en regard de celle des autres modes. C'est notamment le cas dans la situation d'équilibre initial. Les termes liés au mode  $(0, 0)$  dans (2.12) sont alors considérés comme constants en temps. On peut alors prendre la transformée de Laplace de (2.12) ( avec  $s = -i\omega = -i\omega_R + \gamma$ ,  $\gamma > 0$ ) et l'on obtient, pour un mode  $n \neq 0$ ,

$$\tilde{v}_{jm}^n(\omega, r) = \frac{nk_{\parallel} - k_\vartheta d_r v_{j0}^0}{\omega - nk_{\parallel} v_{j0}^0 - k_\vartheta d_r \phi_0^0} \tilde{\phi}_m^n(\omega, r) + i \frac{v_{jm}^n(r, t = t_0)}{\omega - nk_{\parallel} v_{j0}^0 - k_\vartheta d_r \phi_0^0}, \quad (2.13)$$

et la quasi-neutralité prend la forme

$$-\frac{1}{r} \partial_r (rn_0 \partial_r \tilde{\phi}_m^n) + n_0 \left( \frac{1}{Z_i T_e} + k_\vartheta^2 \right) \tilde{\phi}_m^n = \sum_j A_j \tilde{v}_{jm}^n. \quad (2.14)$$

où les champs  $(v_{j0}^0, \phi_0^0)$  sont pris à  $t = t_0$ . Le système (2.13)-(2.14), en annulant la contribution des conditions initiales, définit un problème aux valeurs propres de paramètre spectral  $\omega$ . La résolution du problème aux valeurs initiales pour un mode de Fourier spatial  $(m, n)$  s'obtient par transformée de Laplace inverse de la décomposition de l'état initial du mode sur l'ensemble des vecteurs propres

$$\phi_m^n(r, t) = \sum_k \langle \tilde{\phi}_{mk}^{n\dagger}(r) | \phi_m^n(r, t_0) \rangle \tilde{\phi}_{mk}^n(r) \exp(-i\omega_k t), \quad (2.15)$$

où la sommation  $\sum_k$ , notée sous forme discrète s'entend comme la somme de l'intégrale sur le spectre continu et de la somme discrète sur le spectre ponctuel.  $\tilde{\phi}_k^\dagger$  désigne le vecteur propre gauche relatif à la valeur propre  $\omega_k$ . Notons que l'opérateur n'étant pas hermitien, ce dernier ne se réduit pas au transconjugué  $\tilde{\phi}_k^t$  du vecteur propre droit.

On peut envisager un modèle combinant la résolution complète du problème spectral pour une suite discrète d'instant  $t_i = i\Delta t$ , où  $\Delta t$  est fixé par la variation supposée lente du champ  $(0, 0)$  d'une part, et d'autre part la résolution de la dynamique du

mode  $(0, 0)$  obtenue à partir de l'évolution temporelle de la projection de l'état du système sur l'ensemble du spectre du problème spectral. Ce modèle dit, quasi-linéaire adiabatique, n'est pas d'un intérêt pratique évident, en raison du coût important de la résolution du problème spectral complet (modes stables inclus).

Nous restreindrons l'exploitation des solutions du problème spectral en temps au mode le plus instable pour chaque couple de paramètres  $(m, n)$ . D'autre part, afin de permettre des comparaisons significatives, l'évolution temporelle du champ  $(0, 0)$  ne sera pas calculée de manière auto-consistante mais extraite des données de simulation du modèle non-linéaire.

Le tableau 2.2 présente une synthèse des modèles utilisés par la suite, ainsi que des hypothèses qui les sous-tendent.

Modèles	Hypothèses/Décomposition spectrale			Équations maîtresses	
	$\frac{ X_m^n }{ X_0^0 } \ll 1$	$\frac{ \partial_t \ln  X_0^0  }{ \partial_t \ln  X_m^n  } \ll 1$	$X_m^n(r, t)$	$(0, 0)$	$(m, n)$
<b>Non-linéaire (NL)</b>	non	non	/	(2.8)	(2.8)
Quasi-linéaire (QL)	oui	non	/	(2.10)	(2.12)
Quasi-linéaire adiabatique	oui	oui	$\sum_q X_q(r) e^{-i\omega_q t}$	(2.10)	(2.13)
<b>QL forcé</b>	oui	non	/	Importé	(2.12)
<b>Linéaire</b>	oui	oui	$\sum_q X_q(r) e^{-i\omega_q t}$	Importé	(2.13)
<b>Linéaire à 1 mode</b>	oui	oui	$X_{q_{max}} e^{-i\omega_{q_{max}} t}$	Importé	(2.13)

TABLE 2.2 – Les modèles dont le nom est en gras ont été implémentés

### 2.1.3 Détermination des paramètres Water-Bag

Un intérêt notable des distributions de type multi-water-bag est qu'elles constituent des solutions exactes (au sens des distributions) de l'équation de Vlasov et permettent un découplage de la dynamique en vitesse parallèle. Pour modéliser adéquatement le système physique considéré, encore faut-il pouvoir générer des conditions initiales permettant d'approcher au mieux l'état d'équilibre du système. Ces conditions seront données par les poids  $A_j$  et les contours initiaux  $v_j(\mathbf{r}, t = 0)$  (figure 2.2). Une première condition sur ces paramètres est la stationnarité de l'état d'équilibre vis-à-vis de l'équation de Vlasov. En l'absence de champ électrostatique, cette condition se traduit pour les contours par

$$\partial_z v_j^2 = 0, \forall j, \quad (2.16)$$

qui implique une dépendance des contours d'équilibre en  $(r, \vartheta)$  uniquement. Comme on l'a vu précédemment, nous considérons une situation d'équilibre possédant la symétrie azimutale (poloïdale) et nous nous restreignons donc à des contours d'équilibre qui présentent une dépendance purement radiale. Toute distribution multi-water-bag définie par  $A_j, v_j(r)$  vérifie les conditions de stationnarité et de symétrie. L'état d'équilibre local que nous cherchons à approcher est défini par une distribution Maxwellienne symétrique ( $\langle v_{\parallel} \rangle = 0$ ) en vitesse parallèle

$$f^c(r, v_{\parallel}) \propto \frac{n(r)}{\sqrt{T(r)}} \exp\left(-\frac{m_i v_{\parallel}^2}{2T(r)}\right). \quad (2.17)$$



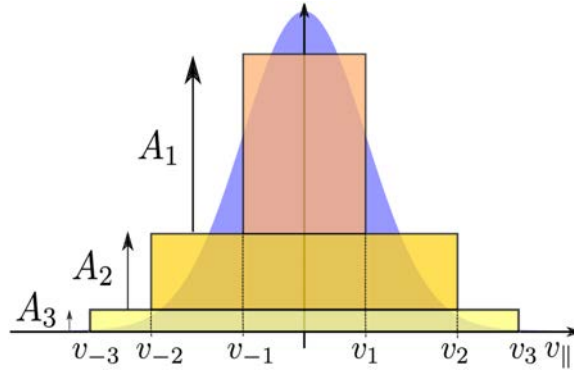


FIGURE 2.2 – Une distribution Multi-Water-Bag à 3 bags et la Maxwellienne de référence

Considérons tout d'abord ce qu'il devrait advenir lorsque le nombre de bags tend vers l'infini. Les deux distributions sont considérées, pour une position  $r_0$  de référence, sur leur restriction à un intervalle  $[-v_{max}, v_{max}]$ . Pour une valeur du nombre de bags  $N$  donnée, les contours sont équi-répartis sur une grille de pas  $\Delta v$ . Lorsque  $N$  augmente, les contours emplissent l'espace en vitesse parallèle et les sommes partielles  $\sum_{j=k}^N A_j$  tendent vers les valeurs de la fonction de référence. Les poids  $A_j$ , peuvent ainsi être approchés par

$$A_j = -(f^c(v_j + \Delta v, r_0) - f(v_j - \Delta v, r_0)). \quad (2.18)$$

L'approximation locale ainsi définie est similaire à celle employée lors d'une quadrature par la méthode des trapèzes. Une telle méthode a été utilisée avec succès pour des distributions à grand nombre de bags par P. Morel ([62, 61]) dans le traitement local (à une position  $r = r_0$  du domaine radial) du problème qui nous intéresse. Essayons maintenant d'étendre la distribution water-bag sur le reste du domaine radial. En raison de la constance des poids  $A_j$ , les contours de la distribution water-bag devraient tendre à s'identifier aux lignes de niveau de la fonction de distribution de référence lorsque le nombre de bags augmente. Cette convergence des contours vers les lignes de niveaux n'est possible que si la géométrie et la topologie de ces dernières est compatible avec les caractéristiques que doivent respecter les contours water-bag. Une ligne de niveau est en effet définie par l'équation implicite

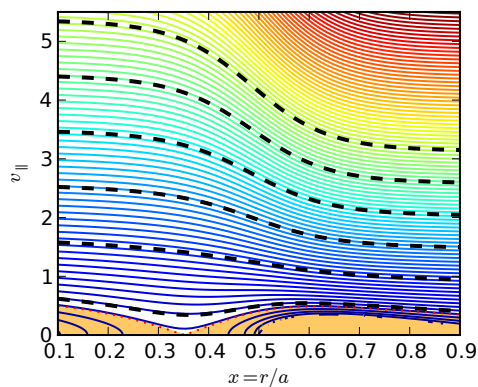
$$f(v_{||}, r) = f(v_0, r_0) \quad (2.19)$$

Pour pouvoir associer un contour  $v_j(r)$  à une telle ligne par la relation  $f(v_j(r), r) = f(v_j(r_0), r_0)$  il est nécessaire que ladite équation possède une solution unique et définie sur tout le domaine radial. Dans le cas d'une Maxwellienne l'inversion de (2.19) conduit à

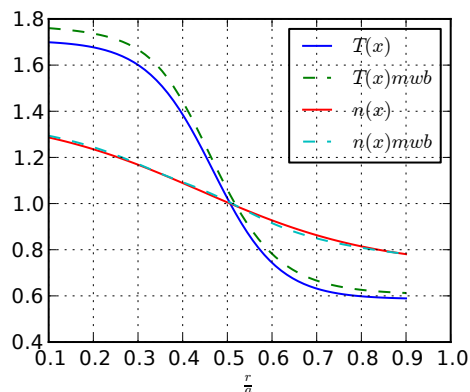
$$v_{||}^2 = \frac{T}{T_0} v_0^2 \left( 1 - \frac{2T_0}{v_0^2} \ln \left( \frac{\alpha_0}{\alpha} \right) \right), \quad (2.20)$$

où  $\alpha$  est le préfacteur Maxwellien  $\alpha = n/\sqrt{T}$ . Une ligne de niveau passant par  $v_0, r_0$  sera définie pour  $r \neq r_0$  tant que

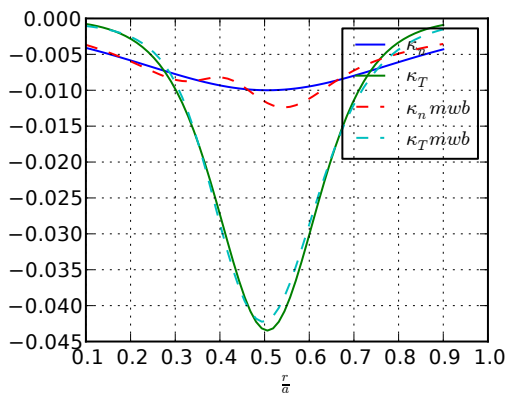
$$\alpha > \alpha_0 \exp \left( \frac{-v_0^2}{2T_0} \right). \quad (2.21)$$



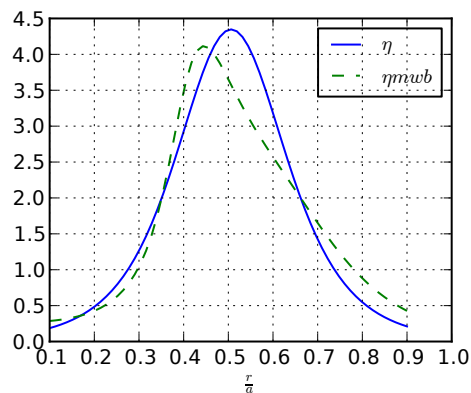
(a) Lignes de niveaux de la Maxwellienne et contours positifs des bags (pointillés); la zone interdite aux contours est indiquée en orange



(b) Profils radiaux de densité et température; référence en trait continu et profils issus des moments water-bag en pointillés



(c) Profils radiaux des gradients normalisés



(d) Profil radiaux de  $\eta_i = \kappa_T/\kappa_n$

FIGURE 2.3 – Génération d'une distribution multi-water-bag à 6 bags par suivi des lignes de niveau de la Maxwellienne; bien que l'approximation semble correcte pour les profils de densité et température (b), des distortions apparaissent dans les profils des gradients (c) et du facteur  $\eta_i$ .

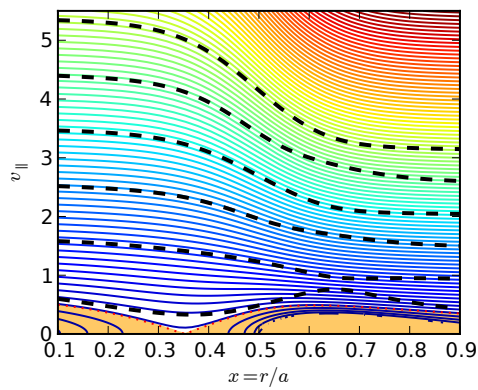
Cette condition peut-être assurée soit en choisissant la position de référence  $r_0$  de manière à ce que  $\alpha(r_0) = \min_r \alpha$ , soit en bornant inférieurement  $v_0$ . Dans tous les cas, lorsque le nombre de bags tend vers l'infini, les contours de la distribution water-bag ne pourront approcher que la classe des lignes de niveau définies sur tout le domaine radial. Les lignes de niveau à faible vitesse qui se referment en  $v_{\parallel} = 0$ , qui existent à partir du moment où le préfacteur  $\alpha$  varie sur le domaine radial, ne seront jamais approchées. La ligne de niveau critique, d'équation  $v = \sqrt{2T \ln(\alpha/\alpha_{min})}$ , qui entoure cette zone interdite aux contours est celle dont la vitesse s'annule pour la valeur minimale du préfacteur  $\alpha$  (Figure 2.3(a)). Cette difficulté de la distribution water-bag à approcher la géométrie de la fonction de référence aux faibles vitesses se retrouve pour les distributions à faible nombre de bags. Les profils radiaux des contours de vitesse élevée en regard de  $\sqrt{T}$  sont essentiellement pilotés par le profil de température  $v_j(r) \approx v_j(r_0)\sqrt{T/T_0}$ . Les profils des contours correspondant aux vitesses faibles ont une évolution plus complexe, due à la modulation par le terme de (2.20) dépendant du préfacteur  $\alpha = n/\sqrt{T}$ . Si les écarts absolus entre les profils de densité et température de référence et water-bag restent modestes (Figure 2.3(b)), les profils radiaux des gradients de ces quantités sont distordus. La géométrie des profils radiaux gradients normalisés  $\kappa_n = d_r \ln n$ ,  $\kappa_T = d_r \ln T$  du rapport  $\eta_i = \kappa_T/\kappa_n$  de la distribution water-bag est notablement perturbée par rapport aux profils de référence (Figure 2.3 (c) et (d)). Si les valeurs locales au point de référence  $r_0$  convergent bien vers les valeurs de référence lorsque l'on augmente le nombre de bags, les distortions des valeurs des gradients persistent pour  $r \neq r_0$  même pour des valeurs importantes (typiquement la centaine) du nombre de bags. Cette distortion est rédhitoire pour une étude globale et précise de l'instabilité de gradient de température ionique dont  $\eta_i$  est un paramètre déterminant. Pour les distributions à faible ( $\leq 10$ ) nombre de bags, une autre méthode de génération de la distribution est donc est à plus forte raison nécessaire.

Pour ces distributions à petit  $N$ , la grande différence de régularité et de support entre la distribution water-bag et la Maxwellienne nous conduit à choisir un critère d'équivalence au sens faible : la distance à minimiser est ici basée sur les moments en vitesse parallèle des deux distributions. L'équilibre de référence sera donc déterminé par la donnée des profils radiaux des moments en vitesse parallèle

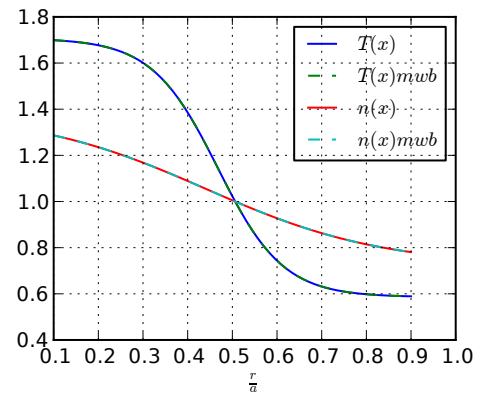
$$\mathcal{M}_k^c(r) = \int v_{\parallel}^k f^c(r, v_{\parallel}) dv_{\parallel} \quad (2.22)$$

de la distribution de référence. Le choix de la fonctionnelle des moments à minimiser n'est pas trivial : choisir des contraintes lâches offre plus de souplesse dans la construction de la distribution MWB mais ouvre la porte à l'introduction d'artefacts n'ayant pas de correspondance physique. Ici le choix est fait d'une contrainte forte, à savoir l'équivalence exacte au sens des moments. Nous chercherons donc à égaliser les moments Water-Bag et les moments Maxwelliens jusqu'à un ordre suffisant pour permettre de définir de manière univoque les poids et contours d'équilibre.

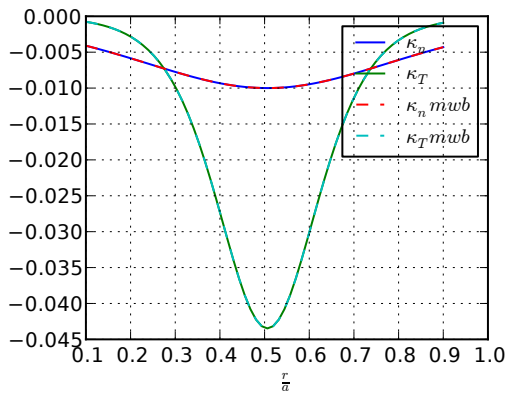
Cette procédure est à plus d'un titre intéressante. Elle peut notablement se généraliser à un équilibre de référence non Maxwellien. Mais elle assure surtout une approximation de l'équilibre compatible avec les modèles fluides basés sur les premiers moments en vitesse parallèle. En outre, l'instabilité de gradient de température ionique étant pilotée par les gradients de température et densité, nous voulons pouvoir contrôler les fonctionnelles correspondantes dans le cas multi-water-bag, condition indispensable pour pouvoir comparer de manière significative le modèle water-bag à des modèles fluides



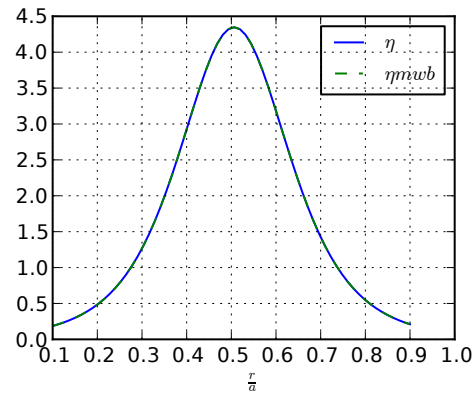
(a) Lignes de niveaux de la Maxwellienne et contours positifs des bags obtenus par équivalence exacte (pointillés) ; les contours à faible vitesse diffèrent sensiblement des lignes de niveau



(b) Profils radiaux de densité et température



(c) Profils radiaux des gradients normalisés



(d) Profil radiaux de  $\eta_i = \kappa_T / \kappa_n$

FIGURE 2.4 – Génération d'une distribution multi-water-bag à 6 bags par la méthode d'équivalence exacte au sens des moments ; les profils de densité et température sont approchés à la précision machine ; la géométrie des profils des gradients et du profil en  $\eta_i$  est préservée.

ou cinétiques.

Pour une distribution Maxwellienne symétrique, les moments s'expriment par

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{2p+1}^C = 0 \\ \mathcal{M}_{2p}^C(r) = n(r)T(r)^p J_{2p} \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $J_{2p}$  est le moment Gaussien normalisé d'ordre  $2p$  ( $J_0 = 1$ ;  $J_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}$ ,  $p > 0$ ). Dans le cas de la distribution multi-water-bag les moments ont pour expression

$$\mathcal{M}_k^{MWB} = \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^{j=N} A_j \frac{v_j^{k+1}(r)}{k+1}. \quad (2.24)$$

L'annulation des moments d'ordre impair s'obtient trivialement en imposant l'antisymétrie des contours  $v_{-j} = -v_j$  et les moments d'ordre pair s'expriment alors

$$\mathcal{M}_{2p}^{MWB}(r) = \sum_{j=1}^N \frac{2}{2p+1} A_j v_j^{2p+1}(r). \quad (2.25)$$

La condition d'équivalence exacte jusqu'à l'ordre  $2p_{max}$  est alors, pour tout  $p$  tel que  $0 \leq p \leq p_{max}$  et  $r \in [r_{min}, a]$ ,

$$\mathcal{M}_{2p}^{MWB}(r) - \mathcal{M}_{2p}^C(r) = 0. \quad (2.26)$$

Aux contraintes algébriques définies par (2.26) nous devons ajouter deux contraintes supplémentaires. Tout d'abord une condition d'ordre strict sur les contours sur l'étendue du domaine radial

$$v_1(r) < v_2(r) < \dots < v_N(r), \quad \forall r, \quad (2.27)$$

qui assure le non-croisement des contours d'équilibre. Nous allons ensuite garantir non-seulement la positivité mais la décroissance de la distribution multi-water-bag en tant que fonction de  $|v_{||}|$  en imposant la positivité des poids  $A_j$  pour  $j > 0$ . Notons que la simple positivité ne requiert que d'imposer la positivité des sommes partielles  $\sum_{j=k}^N A_j$  avec  $k > 0$ . La contrainte de décroissance est ajoutée afin d'éviter le risque d'introduire des artefacts liés au signe du gradient en vitesse parallèle.

Considérons le système (2.26) en un point  $r_0$  du domaine radial. En choisissant  $p_{max} = 2N - 1$ , c'est à dire en considérant les moments pairs jusqu'à l'ordre  $4N - 2$ , on obtient un système polynomial à de  $2N$  équations à  $2N$  inconnues ( $A_j, v_j(r_0)$ ). Ce problème peut être reformulé comme un problème aux valeurs propres de Hankel généralisé (voir Annexe B pour une rapide démonstration) et a notamment été utilisé par A.C. Calder et J.G. Laframboise ([10]) pour traiter l'équivalence sur les moments en module de la vitesse. La solution obtenue est unique et optimale dans le sens où l'équivalence au sens des moments est vérifiée jusqu'à l'ordre maximal. En raison même de l'unicité de la solution, elle se prête mal à l'extension de l'équivalence au sens des moments et empêche tout contrôle a priori sur la position des contours  $v_j$  et donc sur la discrétisation en vitesse parallèle. Pour conserver ce contrôle, nous choisissons une condition moins contraignante en requérant l'équivalence au sens des moments seulement pour les  $N$  premiers moments. Le système étant sous-contraint, nous pouvons choisir a priori arbitrairement les valeurs locales des contours  $v_j(r_0)$ . La stratégie globale de résolution est décrite par l'algorithme 1. Si le choix de la position de référence  $r_0$  et des contours de référence est a priori arbitraire, les conditions de positivité des poids et d'extension radiale sans croisement vont en retour contraindre ce choix.

**Algorithme 1** Équivalence au sens des moments : méthode globale

---

```

1: Choix d'une position de référence  $r_0$ 
2:  $SUCCESS \leftarrow FAUX$ 
3: répéter
4:   Choix de  $v_j(r_0), j = 1, \dots, N$ . ▷ Noeuds de référence
5:   Calcul des poids  $A_j$  ▷ Équivalence locale
6:   si ( $A_j > 0, \forall j$ ) alors ▷ Condition de positivité
7:     Calcul de  $v_j(r)$  pour  $r \neq r_0$  ▷ Extension radiale de l'équivalence
8:     si ( $|v_j(r) - v_k(r)| > \epsilon, \forall j, k, r$ ) alors ▷ Condition de non-croisement
9:        $SUCCESS \leftarrow VRAI$ 
10:    fin si
11:  fin si
12: jusqu'à SUCCESS

```

---

**Équivalence exacte locale**

Pour un nombre de bags donné  $N$ , tout ensemble ordonné de  $N$  réels positifs peut à priori être choisi comme noeuds de référence  $v_j(r_0) = V_j$ . La terme noeud est ici employé en raison de la similitude du problème avec les problèmes d'interpolation polynomiale. Ceux-ci étant choisi le problème (2.26) avec  $p_{max} = N - 1$  peut être reformulé en

$$\sum_j A_j V_j (V_j^2)^p = (p + \frac{1}{2}) \mathcal{M}_{2p}^C(r_0), \quad 0 \leq p \leq N - 1. \quad (2.28)$$

Pour alléger les notations, on définit les moments modifiés  $\mathcal{M}_{2p}^M$  par

$$\mathcal{M}_{2p}^M = (p + \frac{1}{2}) \mathcal{M}_{2p}^C. \quad (2.29)$$

En posant  $X_j = A_j V_j$  et  $C_j = V_j^2$  et  $Y_p = \mathcal{M}_{2p}^M$  le système précédent devient pour  $0 \leq p \leq N - 1$

$$\sum_{j=1}^N X_j C_j^p = Y_p, \quad (2.30)$$

ou sous forme matricielle

$$\mathcal{C}X = Y, \quad (2.31)$$

où  $C_{pj} = C_j^p$ . La matrice  $\mathcal{C}$  est une matrice de Vandermonde de noeuds  $C_j$ . Nous allons expliciter son inverse afin d'obtenir une expression pour les poids  $A_j$ . Le polynôme d'interpolation de Lagrange  $\mathcal{L}_j(Z)$  aux noeuds  $C_k, j \neq k$  est défini par

$$\mathcal{L}_j(Z) = \frac{\prod_{k \neq j} (Z - C_k)}{\prod_{k \neq j} (C_j - C_k)} = \sum_{p=0}^{N-1} \lambda_{jp} Z^p. \quad (2.32)$$

En utilisant la propriété d'interpolation de  $\mathcal{L}_j(Z)$  et  $C_{pj} = C_j^p$  on obtient

$$\sum_k \sum_p \lambda_{jp} C_{pk} = \sum_k \sum_p \lambda_{jp} C_k^p = \sum_k \mathcal{L}_j(C_k) = \delta_{kj}. \quad (2.33)$$

L'inverse de  $\mathcal{C}$  est donc la matrice dont la  $j^{eme}$  ligne est formée des coefficient polynomiaux de  $\mathcal{L}_j$ . La solution de (2.30) s'explicite en

$$\forall j, X_j = \sum_p \lambda_{jp} Y_p. \quad (2.34)$$

Revenant aux variables initiales, l'expression des poids  $A_j$  est

$$A_j = \frac{1}{V_j} \sum_p \lambda_{jp} \mathcal{M}_{2p}^M. \quad (2.35)$$

Nous allons maintenant mettre à profit cette expression pour établir une condition sur les noeuds  $V_j$  permettant de garantir la positivité des poids  $A_j$ .

Soit  $\sigma_p(X_1, X_2, \dots, X_{N-1})$  le  $p$ -ième polynôme symétrique et  $\sigma_{jp} := \sigma_p(X_1 = V_{j_1}, X_2 = V_{j_2}, \dots, X_{N-1} = V_{j_{N-1}})$  où  $j_1, j_2, \dots, j_{N-1} \neq j$ . On a alors

$$\prod_{k \neq j} (Z + V_k^2) = \sum_{p=0}^{N-1} \sigma_{jp} Z^p. \quad (2.36)$$

Les coefficients  $\lambda_{jp}$  du polynôme d'interpolation de Lagrange s'expriment

$$\lambda_{jp} = \frac{(-1)^{N+p-1} \sigma_{jp}}{\prod_{k \neq j} (V_j^2 - V_k^2)}. \quad (2.37)$$

En prenant en compte la relation d'ordre  $V_1 < V_2 < \dots < V_N$ , le signe du dénominateur est  $(-1)^{N-j}$  et la condition  $A_j > 0$  peut être reformulée en

$$(-1)^j \sum_{p=0}^{N-1} (-1)^{p-1} \sigma_{jp} \mathcal{M}_{2p}^M > 0. \quad (2.38)$$

Définissons le polynôme symétrique à  $N - 1$  variables  $S = \sum_p (-1)^{p-1} \sigma_p \mathcal{M}_{2p}$ . Soient  $\mathcal{V}^{+1}, \mathcal{V}^{-1}, \mathcal{V}^0$  les variétés de  $(\mathbb{R}^{+*})^{N-1}$  sur lesquelles  $S$  est respectivement positif, négatif et nul. Pour tout  $j$  on note  $W_j$  le point de  $(\mathbb{R}^{+*})^{N-1}$  dont les coordonnées sont la suite ordonnée  $V_k, k \neq j$ . La condition de positivité des poids devient

$$\forall j, W_j \in \mathcal{V}^{(-1)^j}. \quad (2.39)$$

Considérons maintenant  $j' > j$  de parités distinctes. En prenant en compte l'invariance de  $S$  par toute permutation des variables dans  $(\mathbb{R}^{+*})^{N-1}$ , nous déduisons de (2.39) l'existence nécessaire de  $\alpha_{jj'}$  tel que

$$V_j^2 < \alpha_{jj'} < V_{j'}^2 \quad \text{et} \quad (\alpha_{jj'}, \{V_k^2, k \neq j, j'\}) \in \mathcal{V}^0 \quad (2.40)$$

Pour clarifier cette propriété, prenons un exemple avec  $N = 4$ . Les contraintes de positivité des noeuds sont alors

$$S(V_2^2, V_3^2, V_4^2) < 0 \quad (2.41)$$

$$S(V_1^2, V_3^2, V_4^2) > 0 \quad (2.42)$$

$$S(V_1^2, V_2^2, V_4^2) < 0 \quad (2.43)$$

$$S(V_1^2, V_2^2, V_3^2) > 0 \quad (2.44)$$

Des conditions (2.41) et (2.42), on déduit l'existence d'une racine  $\alpha_{12}$  de  $S(X, V_3^2, V_4^2)$  entre  $V_1^2$  and  $V_2^2$ . De (2.42) et (2.43), on déduit l'existence d'une racine  $\alpha_{23}$  de  $S(V_1^2, Y, V_4^2)$  soit par symétrie de  $S$  une racine  $\alpha_{23}$  de  $S(X, V_1^2, V_4^2)$ . En appariant de la sorte les autres

inégalités, on déduit l'existence nécessaire de quatre réels positifs  $(\alpha_{12}, \alpha_{14}, \alpha_{23}, \alpha_{34})$  tels que

$$V_1^2 < \alpha_{12} < V_2^2 \quad \text{et} \quad (\alpha_{12}, V_3^2, V_4^2) \in \mathcal{V}^0 \quad (2.45)$$

$$V_1^2 < \alpha_{14} < V_4^2 \quad \text{et} \quad (\alpha_{14}, V_2^2, V_3^2) \in \mathcal{V}^0 \quad (2.46)$$

$$V_2^2 < \alpha_{23} < V_3^2 \quad \text{et} \quad (\alpha_{23}, V_1^2, V_4^2) \in \mathcal{V}^0 \quad (2.47)$$

$$V_3^2 < \alpha_{34} < V_4^2 \quad \text{et} \quad (\alpha_{12}, V_1^2, V_2^2) \in \mathcal{V}^0 \quad (2.48)$$

Déduire des conditions d'entrelacement (2.40) une procédure constructive pour choisir les noeuds initiaux en garantissant la positivité des poids nécessiterait une caractérisation complète de la variété algébrique  $\mathcal{V}^0$ , tâche qui dépasse largement le cadre de ce travail. La structure des relations d'entrelacement des noeuds  $V_j$  avec les racines  $\alpha_{jj'}$  nous permet cependant d'une part de rendre compte de la grande sensibilité du signe des poids aux valeurs des noeuds observée numériquement, et d'autre part de se convaincre qu'il n'existe pas de méthode "simple" permettant d'assurer la positivité des poids.

Une condition lâche sur les valeurs des noeuds extrêmes  $V_1, V_N$  peut cependant être obtenue soit à partir des relations obtenues et de la relation d'ordre sur les  $V_j$ , soit de manière plus directe en partant du système initial. Considérons deux relations d'équivalence exacte aux ordres respectifs  $2p$  et  $2q$ . En divisant chacune des équations par le moment de référence et en prenant la différence on obtient

$$\sum_j A_j \left( \frac{V_j^{2p+1}}{\mathcal{M}_{2p}^M} - \frac{V_j^{2q+1}}{\mathcal{M}_{2q}^M} \right) = \sum_j A_j \frac{V_j^{2q+1}}{\mathcal{M}_{2p}^M} \left( V_j^{2(p-q)} - \frac{\mathcal{M}_{2p}^M}{\mathcal{M}_{2q}^M} \right) = 0. \quad (2.49)$$

En supposant  $A_j > 0$  pour tout  $j$  on déduit que pour tout  $(p, q) \in [1, N]^2$ , il existe  $j_1, j_2$  tels que

$$V_{j_1} < \left( \frac{\mathcal{M}_{2p}^M}{\mathcal{M}_{2q}^M} \right)^{\frac{1}{2(p-q)}} < V_{j_2}. \quad (2.50)$$

En prenant en compte la relation d'ordre  $V_1 < V_2 \cdots < V_N$ , on obtient une condition nécessaire sur les noeuds extrêmes

$$V_1 < \min_{p,q} \left( \frac{\mathcal{M}_{2p}^M}{\mathcal{M}_{2q}^M} \right)^{\frac{1}{2(p-q)}} \quad (2.51)$$

$$V_N > \max_{p,q} \left( \frac{\mathcal{M}_{2p}^M}{\mathcal{M}_{2q}^M} \right)^{\frac{1}{2(p-q)}}. \quad (2.52)$$

Dans le cas d'une distribution de référence Maxwellienne ces conditions deviennent

$$V_1 < \sqrt{3} \sqrt{T(r_0)}, \quad (2.53)$$

$$V_N > \sqrt{2N-1} \sqrt{T(r_0)}. \quad (2.54)$$

Ces contraintes, qui imposent une extension minimale au support de la distribution des noeuds initiaux, limitent l'augmentation de la résolution en vitesse parallèle avec le nombre de bacs.



### Extension de l'équivalence sur le domaine radial

Une fois qu'un jeu de noeuds initiaux  $V_j = v_j(r_0)$  a été choisi et les poids  $A_j$  calculés, il faut déterminer les profils radiaux des contours  $v_j(r), r \neq r_0$ . Pour ce faire il faut, pour toute valeur de  $r \neq 0$ , résoudre pour les inconnues  $V_j = v_j(r)$  le système  $S(r)$  de  $N$  équations polynomiales

$$\sum_j A_j V_j^{2p+1} - \mathcal{M}_{2p}^M(r) = 0, \quad (2.55)$$

où  $p$  varie de 0 à  $N - 1$ . Pour chaque valeur de  $r$ , le système polynomial à  $N$  variables  $S(r)$  peut avoir un grand nombre de solutions, rendant prohibitif le coût d'une résolution exhaustive : l'apparente simplicité de la forme du système, en raison de son caractère "creux" (très peu de coefficients monomiaux sont non-nuls dans chaque équation), masque la taille très importante du problème qui rendrait une approche de type algébrique (voir [63, 14, 2]), que ce soit par triangularisation ou linéarisation, bien trop coûteuse.

Sachant que nous connaissons une solution de  $S(r_0)$ , que nous souhaitons construire des profils radiaux  $v_j(r)$  continus, et que l'application  $r \mapsto S(r)$  est continue, il est naturel d'adopter une démarche de résolution par une méthode homotopique : en supposant connue une solution  $V(r)$  de  $S(r)$ , la solution de  $S(r+dr)$  est obtenue par une méthode de Newton prenant comme point de départ  $V(r)$  (voir algorithme 2). Cette procédure

---

#### Algorithme 2 Extension de l'équivalence par continuation

---

```

1:  $r \leftarrow r_0$ 
2: tant que  $r < a$  (resp.  $r > 0$ ) faire
3:    $W \leftarrow V(r)$ 
4:    $r \leftarrow r + \Delta_r$  (resp.  $r \leftarrow r - \Delta_r$ )
5:   répéter ▷ Méthode de Newton
6:      $\Delta(W) \leftarrow [\mathcal{M}^{MWB}(V) - \mathcal{M}^M(r)]$  ▷ Calcul de l'erreur résiduelle
7:      $W \leftarrow W - (J_{\Delta}^{-1})(W)$  ▷  $J_{\Delta}$  est la Jacobienne du système
8:     si  $\min_j |W_{j+1} - W_j| < \epsilon$  alors ▷ Test de la distance inter-contour
9:       <ECHEC>
10:    fin si
11:  jusqu'à Convergence
12:   $V(r') \leftarrow W$ 
13: fin tant que

```

---

de continuation est itérée dans le sens des  $r$  croissants et décroissants à partir de  $V(r_0)$ . La condition de non-croisement des contours est assurée par l'imposition d'une borne inférieure sur  $\min \{V_{j+1} - V_j\}$ . La matrice Jacobienne du système ayant une structure de Vandermonde, elle devient singulière dès que deux contours sont trop proches. Le problème du recollement des solutions avant et après croisement ne nécessite pas ici d'être traité, dans la mesure où l'on cherche à éviter le croisement. Cette condition de non-croisement implique une contrainte a posteriori sur le choix des noeuds  $v_j(r_0)$ .

L'expérimentation numérique à partir de jeux de noeuds fixés manuellement ou générés aléatoirement exhibe un taux d'échec important de la procédure de continuation pour des profils d'entrée en densité et température typiques des cas que nous voulons aborder. Ces observations conduisent à se demander si les limitations observées sont

contingentes aux cas choisis ou découlent de limites structurelles du modèle multi-water-bag.

De fait, la seconde hypothèse s'avère être correcte : la structure polynomiale des moments multi-water-bag implique nécessairement une limite à l'extensibilité de la distribution. En prenant comme point de départ un jeu de poids  $A_j$  et de noeuds  $v_j(r_0)$ , l'espace des jeux de moments accessibles par prolongation des contours sans croisement ne couvre pas l'intégralité de l'espace des jeux de moments.

Définissons tout d'abord de manière générique les conditions de non-croisement des contours et de finitude du support en vitesse parallèle. La condition de non-croisement des contours positifs est caractérisée en définissant un minorant  $\epsilon$  pour la distance inter-contour, à savoir  $v_{j+1} - v_j > \epsilon$ . Le cas particulier du croisement du premier contour positif  $v_1$  avec son homologue antisymétrique  $v_{-1}$  est prohibé par l'introduction d'un minorant  $V_0 > 0$  tel que  $v_1 > V_0$ . On définit également un majorant  $V_M$  du dernier contour positif  $v_N$  de manière à limiter l'extension de la distribution en vitesse parallèle. Le cas le plus général s'obtient en faisant tendre  $\epsilon$  et  $V_0$  vers 0 et  $V_M$  vers  $+\infty$ . Notons  $V$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{N+}$  dont les composantes  $V_j$  sont les valeurs des contours positifs  $v_j$  en un point  $r$ . Supposons connus les poids  $A_j$  et notons  $A$  le vecteur de composantes  $A_j$ . Les contraintes de non-croisement et de support définissent un polytope  $\mathcal{C}_V$  de  $\mathbb{R}^{N+}$  dont l'intérieur est l'ensemble des points  $V$  satisfaisant les contraintes. Ce polytope contient par définition le point correspondant au jeu de noeuds  $v_j(r_0)$  qui a permis de construire les  $A_j$ . Considérons maintenant l'application  $\mathcal{M}_{MWB}$  qui à un point  $V$  de  $\mathbb{R}^{N+}$  associe le vecteur dont les composantes sont les  $N$  premiers moments multi-water-bag d'ordre pair. L'image de  $\mathcal{C}_V$  par cette application est un sous-espace  $\mathcal{C}_M$  de  $\mathbb{R}^{N+}$ , qui définit l'ensemble des jeux de moments water-bag accessible sous les contraintes de non-croisement et de support.

Le problème de l'extension de l'équivalence au sens des moments peut se résumer ainsi : la donnée des profils radiaux des moments de référence définit une courbe  $\Gamma_M(r)$  de  $\mathbb{R}^{+N}$ . L'objectif est de construire une courbe  $\Gamma_V(r)$  de  $\mathcal{C}_V$  telle que  $\mathcal{M}_{MWB}(\Gamma_V(r)) = \Gamma_M(r), \forall r$ . On peut maintenant se demander si il est possible de construire des distributions telles que le problème de l'extension radiale aura une solution pour une large classe de courbes de moments de référence  $\Gamma_M$ . Sans connaissance a priori de  $\Gamma_M$ , on peut cependant essayer de caractériser le sous-espace  $\mathcal{C}_M$  associé à un jeu de poids  $A_j$  et des paramètres de contraintes  $V_0, \epsilon, V_M$ .

On peut effectivement montrer que, pour tout  $(p, q)$  entiers, il existe deux constantes strictement positives  $m_{A,p,q}$  et  $M_{A,p,q}$  dépendant du vecteur poids  $A = (A_j), j = 1 \dots N$  telles que

$$m_{A,p,q}^{2p+1} \left( \mathcal{M}_{2q}^{MWB} \right)^{\frac{2p+1}{2q+1}} < \mathcal{M}_{2p}^{MWB} < M_{A,p,q}^{2p+1} \left( \mathcal{M}_{2q}^{MWB} \right)^{\frac{2p+1}{2q+1}}. \quad (2.56)$$

Cette propriété est vraie même dans le cas limite  $\epsilon, V_0 \rightarrow 0, V_M \rightarrow \infty$ . Dans le cas où les trois paramètres ont des valeurs finies, il est possible d'expliciter les valeurs pour des constantes correspondantes  $m_{A,p,q,\epsilon,V_0,V_M}$  et  $M_{A,p,q,\epsilon,V_0,V_M}$  en tenant compte des contraintes. La démonstration est reportée en annexe C en raison de sa longueur. Un point important est que les encadrements obtenus sont lâches : ils correspondent à des situations critiques où presque toutes ou toutes les contraintes de non-croisement ou de support sont violées, c'est à dire aux sommets et arêtes de  $\mathcal{C}_V$ . Les encadrements obtenus correspondent à des situations où la courbe de continuation atteindrait une arête ou un sommet du polytope en ayant réussi à éviter tout contact préalable avec une "face". Cette situation très particulière explique le caractère optimiste des encadrements obtenus : dans la pratique, la courbe de continuation homotopique va plus probablement

intersecter le bord du polytope des contraintes par la violation d'une contrainte unique. L'extensibilité effective dépend fortement et non-linéairement du point de départ  $V$  et de la courbe de référence  $\Gamma_M$ , ce qui empêche de définir des conditions génériques plus strictes.

Le choix du jeu de noeuds initiaux a donc une influence sensible sur l'extensibilité de la distribution. Ce fait impose une restriction majeure en comparaison avec les modèles exclusivement locaux, pour lesquels seules importent les contraintes de positivité des poids et d'échantillonnage en vitesse parallèle. Il impose en outre une recherche, dans un espace de grande taille, de noeuds initiaux adéquats adaptés à chaque situation d'équilibre et chaque nombre de bags. Nous allons voir que dans le cas Maxwellien, on peut réduire un tant soit peu le travail de recherche, où du moins générer des jeux de noeuds initiaux permettant de couvrir de nombreuses situations d'équilibre.

En effet, dans le cas d'une distribution Maxwellienne, l'espace des moments de référence est de faible dimension, en raison de la dépendance de la Maxwellienne centrée en fonction des seules densité et température. En définissant les contours renormalisés  $u_j(r) = v_j(r)/\sqrt{T}$ , le préfacteur Maxwellien  $\alpha(r) = \frac{n}{\sqrt{T}}$  et  $K_{2p} = (p + \frac{1}{2})J_{2p}$ , la condition d'équivalence exacte pour le moments d'ordre  $2p$  devient

$$\sum_j A_j u_j^{2p+1}(\alpha) = \alpha K_{2p}. \quad (2.57)$$

Le problème de l'extensibilité radiale est ainsi restreint à celui de l'extensibilité en  $\alpha$ . Les contraintes sur les moments (2.56) imposent des bornes en  $\alpha$  (voir annexe C), qui restent lâches. La réduction à l'extensibilité en  $\alpha$  permet cependant de rechercher des jeux de noeuds initiaux  $v_j(\alpha_0)$ , qui serviront au calcul des poids et comme point de départ à la procédure continuation homotopique, et maximisent l'extensibilité en  $\alpha$ . Cette recherche peut s'effectuer indépendamment de la nature exacte des profils de densité et de température. L'obtention de jeux de noeuds génériques de ce type est cruciale pour les balayages paramétriques sur les valeurs des gradients, pour lesquels on veut pouvoir générer un grand nombre de distributions correspondant à des profils d'équilibre différents tout en gardant l'échantillonnage initial en vitesse parallèle, de manière à assurer la continuité de la fonctionnelle  $(n, T) \rightarrow v_j$ .

## 2.2 Schéma numériques et implémentations

Les méthodes numériques mises en oeuvre pour la résolution des problèmes décrits précédemment vont maintenant être décrites succinctement.

### 2.2.1 Modèle non-linéaire

Une implémentation du modèle non-linéaire à été réalisée par N.Besse ([6]). Le code GMWB3D-SLC utilise un schéma semi-lagrangien de Runge Kutta d'ordre 2 en temps, avec une interpolation par splines cubiques en espace. La quasi-neutralité est résolue en décomposant tout d'abord les champs dans l'espace de Fourier  $(m, n)$ . L'enveloppe radiale d'un mode  $(m, n)$  du potentiel est solution d'un système linéaire résolu par factorisation LU. Les méthodes numériques sont décrites dans [6].

Bien que parfaitement fonctionnel, le code GMWB3D-SLC ne se prêtait pas aisément

au couplage avec des codes extérieurs. Deux modifications ont été apportées. Un premier module a été intégré afin de permettre l'importation de profils d'équilibre et de perturbations externes, de manière à pouvoir initialiser les simulations non-linéaires à l'aide de profils d'équilibre et de combinaisons de modes propres linéaires consistants. L'ensemble des diagnostics a d'autre part été externalisé. Lors d'une simulation, le code génère à intervalles de temps spécifiés une sauvegarde de l'état complet du système, à savoir  $2N_{bag} + 1$  champs scalaires tridimensionnels. Un code de post-traitement, parallélisé en temps, permet ensuite d'extraire les informations pertinentes à partir de ces données brutes. L'intérêt de cette démarche est de rendre indépendantes les phases de calcul et de post-traitement, au prix d'un coût de stockage plus important ou d'une résolution temporelle inférieure à coût de stockage constant.

### 2.2.2 Modèle quasi-linéaire

Le modèle quasi-linéaire décrit l'interaction couplée entre un champ moyen  $(0, 0)$  et un ensemble de modes  $(m, n)$ . L'objectif poursuivi dans cette étude n'est pas d'examiner la dynamique propre de ce modèle, mais d'analyser l'influence du mode  $(0, 0)$  sur un mode  $(m, n)$  initialement instable, dont on peut s'attendre à ce qu'elle soit déterminante pour la saturation de l'instabilité. De manière à pouvoir effectuer des comparaisons avec l'évolution du même mode  $(m, n)$  dans le modèle non-linéaire complet, il est nécessaire que le champ moyen  $(0, 0)$  soit le même dans les deux cas : la différence observée ne sera alors due qu'à la présence des couplages non-linéaires avec les autres modes  $(m', n') \neq (0, 0)$ . C'est la raison pour laquelle l'implémentation considérée résout la dynamique du mode  $(m, n)$  à partir de l'évolution du mode  $(0, 0)$  extraite des données de simulation non-linéaire.

Le problème unidimensionnel décrit par (2.12) et (2.9) est résolu en temps par une méthode de Runge-kutta explicite d'ordre 4. Le système tridiagonal résultant de la discrétisation de (2.9) par un schéma aux différences finies centrées d'ordre 2 est résolu trivialement par l'algorithme de Thomas ([76]).

Dans l'implémentation en régime forcé réalisée (code QUALIMUWABA), les problèmes relatifs aux divers modes  $(m, n)$  sont indépendants et traités en parallèle.

### 2.2.3 Problème spectral linéaire

Notons tout d'abord que, dans le problème aux valeurs propres défini par (2.13) et (2.14), les nombres d'ondes  $(m, n)$  jouent le rôle de simples paramètres : les différents modes de Fourier sont découplés en raison de la symétrie des champs  $(0, 0)$ . Pour un couple  $(m, n)$  donné, le problème peut être résolu alternativement pour le potentiel électrostatique en éliminant les contours perturbés, pour les contours en éliminant le potentiel.

#### Résolution sur le potentiel

Par substitution de l'expression des contours perturbés  $\tilde{v}_j^n$  de (2.13) dans la quasi-neutralité (2.14)

$$\left[ -\frac{1}{rn_0} d_r (rn_0 d_r) + G(m, n, \omega, r) \right] \tilde{\phi}_m^n(\omega, r) = 0, \quad (2.58)$$

avec

$$G(m, n, \omega, r) = \frac{1}{Z_i T_e} + (k_\vartheta)^2 - \sum_j \frac{A_j}{n_0} \frac{nk_{\parallel} - k_\vartheta d_r v_{j0}^0}{\omega - nk_{\parallel} v_{j0}^0 - k_\vartheta d_r \phi_0^0}. \quad (2.59)$$

Le problème peut être reformulé sous forme "Schrödinger" par la transformée de Liouville  $\tilde{\psi}_m^n = \sqrt{rn_0} \tilde{\phi}_m^n$ , et prend la forme

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + Q(r, m, n, \omega) \right] \tilde{\psi}_m^n = 0, \quad (2.60)$$

où

$$Q(r, m, n, \omega) = B_m(r) + F(r, m, n, \omega), \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} B_m(r) &= (k_\vartheta)^2 + \frac{1}{Z_i T_e} + \frac{1}{\sqrt{rn_0}} \frac{d^2}{dr^2} \sqrt{rn_0}, \\ &= \left( \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right) + \frac{1}{Z_i T_e} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\kappa_n^2}{2} + \frac{\kappa_n}{r} + d_r \kappa_n \right], \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$F(r, m, n, \omega) = - \sum_j \frac{A_j}{n_0} \frac{nk_{\parallel} - \frac{m}{r} d_r v_{j0}^0}{\omega - nk_{\parallel} v_{j0}^0 - \frac{m}{r} d_r \phi_0^0} = - \sum_j \frac{\Gamma_j(r, m, n)}{\omega - \alpha_j(r, m, n)}, \quad (2.63)$$

avec les notations

$$\kappa_n(r) = d_r \ln(n_0), \quad (2.64)$$

$$\alpha_j(r, m, n) = nk_{\parallel} v_{j0}^0 + k_\vartheta d_r \phi_0^0, \quad (2.65)$$

$$\Gamma_j(r, m, n) = \frac{A_j}{n_0} (nk_{\parallel} - k_\vartheta d_r v_{j0}^0). \quad (2.66)$$

Le problème aux valeurs propres défini par (2.60) et les conditions de Dirichlet homogènes en  $r = r_{min}$  et  $r = a$  est un problème différentiel unidimensionnel aux valeurs propres. L'opérateur différentiel est discrétisé sur une grille radiale uniforme  $r_i = r_{min} + ih_r$  de taille  $N_r$  par un schéma aux différences finies centrées d'ordre 2. La discrétisation de (2.60) conduit au système matriciel de taille  $(N_r - 2) \times (N_r - 2)$

$$E(\omega)\psi = \begin{pmatrix} a_1(\omega) & -1 & 0 & \cdots & \cdots \\ -1 & a_2(\omega) & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = 0, \quad (2.67)$$

où les éléments diagonaux sont définis par  $a_i = 2 + h_r^2 Q(r_i, \omega)$ . La structure tridiagonale du problème discret, qui permet une évaluation efficace du déterminant de la matrice  $E(\omega)$ , nous conduit à une méthode de résolution en deux étapes : la relation de dispersion  $D(\omega) = \det(E(\omega)) = 0$  est dans un premier temps résolue pour obtenir une valeur propre  $\omega_k$ . Le vecteur propre correspondant  $(\psi)_k$  est ensuite obtenu par décomposition en valeurs singulières (SVD) de  $E(\omega_k)$ .

La structure creuse des matrices tridiagonales permet une évaluation économe en temps de leur déterminant (voir [73] et [25] par exemple). Soit  $E_i$  une suite de matrices de taille  $i \times i$  croissante, dont les éléments s'identifient à ceux de  $E$ , à savoir

$$\forall (k, j) \in [1, i]^2, (E_i)_{kj} = E_{kj} \quad (2.68)$$

Soit  $D_i = \det(E_i)$ . En développant l'évaluation de  $D_i$  en colonnes on obtient la relation de récurrence

$$D_i(\omega) = a_i(\omega)D_{i-1}(\omega) - D_{i-2}(\omega), \quad (2.69)$$

avec les conditions initiales  $D_{-1} = 0, D_0 = 1$ . On peut ainsi calculer  $D(\omega)$  en itérant (2.69) jusqu'à  $i = N_r - 2$ . La dérivée  $D'(\omega)$  s'obtient simultanément par

$$D'_i(\omega) = a'_i(\omega)D_{i-1}(\omega) + a_i(\omega)D'_{i-1}(\omega) - D'_{i-2}(\omega). \quad (2.70)$$

Avant que de décrire l'algorithme de recherche des valeurs propres dans le plan complexe, notons tout d'abord deux caractéristiques du problème à résoudre. Tout d'abord, nous cherchons en priorité à déterminer les valeurs propres de partie imaginaire maximale, c'est-à-dire les modes les plus instables. D'autre part, la présence des pôles sur l'axe réel rend le comportement de  $D(\omega)$  extrêmement oscillant au voisinage de celui-ci, et la recherche de racines dans cette zone plus coûteuse. La stratégie globale de l'algorithme se divise en deux étapes :

1. **localisation** : trouver un contour rectangulaire de position la plus haute possible dans le plan complexe supérieur ne contenant qu'une seule racine de  $D$ .
2. **raffinement** : déterminer une valeur plus précise de la racine ainsi localisée par une méthode de Newton initiée à partir du centre du contour.

L'étape de localisation est obtenue par une procédure récursive de translation et bisection dans le plan complexe, en partant d'un contour rectangulaire placé suffisamment haut. Dans une première phase, le contour est subdivisé et translaté verticalement jusqu'à ce que l'estimation du nombre de racines intérieures soit non-nulle. La recherche se poursuit ensuite par quadrisection jusqu'à obtenir le contour le plus haut ne contenant qu'une seule racine. L'estimation du nombre de racines encloses par le contour est obtenue par l'intégration le long du contour de

$$I = \frac{1}{2\pi} \frac{d \ln(D(\omega))}{d\omega}. \quad (2.71)$$

En admettant que le domaine enclos par le contour ne contient aucun pôle de  $D$  et qu'aucune racine de  $D$  ne se trouve exactement sur le contour, le résultat de cette intégration est égal, d'après le principe de l'argument, au nombre de racines (multiplicité comprise) appartenant au domaine enclos par le contour. Cette méthode est identique à la première étape de la méthode de Davies ([19]).

Afin d'éviter qu'au cours de la procédure le contour ne rencontre l'axe réel, un paramètre de seuil permet d'imposer une borne inférieure sur la position du bord inférieur de ce dernier. Ce paramètre borne de fait inférieurement le taux de croissance minimal des racines pouvant être obtenues par l'algorithme. Il a en outre une influence notable sur la performance de l'algorithme : les oscillations importantes de l'argument de l'intégrand de (2.71) au voisinage de l'axe réel rendent en effet l'évaluation de l'intégrale particulièrement coûteuse.

Une fois obtenu un contour ne contenant qu'une racine et dont les dimensions sont au dessous d'un certain seuil, une méthode de Newton est appliquée à partir du centre du contour. Si la méthode ne peut converger, l'algorithme retourne à l'étape de quadrisection. L'algorithme s'arrête sous trois conditions

- la méthode de Newton converge à l'intérieur du contour duquel elle a été lancée.
- un contour contenant un seul zéro, et dont les dimensions sont inférieures à la précision requise à été trouvé.

— la recherche atteint la limite inférieure sans avoir trouvé de racine.

Une fois  $\omega_k$  trouvée, la matrice  $E(\omega_k)$  est décomposée en valeurs singulières. Le vecteur singulier correspondant à la plus petite valeur singulière est retenu comme vecteur propre associé à  $\omega_k$  après deux vérifications : la valeur singulière associée doit être proche du zéro machine, et d'autre part bien inférieure en module à la seconde plus petite valeur singulière, ce qui permet de vérifier que le noyau de  $E(\omega_k)$  est bien approché par un sous-espace de dimension 1.

### Linéarisation spectrale

La réduction de taille du problème, qui fait passer de  $2N_{bag}$  fonctions inconnues à une seule, se fait au prix d'une dépendance non-linéaire dans le paramètre spectral  $\omega$ . Il est possible de retrouver une dépendance linéaire en  $\omega$ . Définissons pour tout  $j$  les nouveaux champs inconnus  $\tilde{w}_{jm}^n$  par

$$(\omega - \alpha_j)\tilde{w}_{jm}^n = \tilde{\psi}_m^n, \quad (2.72)$$

ou de manière équivalente

$$\tilde{w}_{jm}^n = \frac{A_j \sqrt{rn_0}}{\Gamma_j n_0} v_{jm}^n. \quad (2.73)$$

En éliminant  $\tilde{\psi}_m^n$  nous obtenons un système de  $2N$  équations couplées,

$$\left[ \frac{d^2(\alpha_j w_{jm}^n)}{dr^2} - (B\alpha_j + \Gamma_j)w_{jm}^n - \sum_{k \neq j} \Gamma_k w_{km}^n \right] - \omega \left[ \left( \frac{d^2}{dr^2} - B \right) w_{jm}^n \right] = 0. \quad (2.74)$$

Le problème ainsi posé est de même dimension que le problème initial et prend la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé sur  $\tilde{W} = (\tilde{w}_{jm}^n, j \in [-N, N]^*)$  et linéaire dans le paramètre spectral  $\omega$ . Sous cette forme le problème peut être résolu par une méthode dense standard de factorisation QZ.

## 2.3 Modèles alternatifs pour l'analyse linéaire

Lors de la construction de l'équilibre, nous avons vu qu'il est possible d'assurer l'égalité entre les moments en vitesse d'une distribution multi-water-bag et les moments d'une distribution Maxwellienne de référence. Ce critère d'équivalence ne garantit pas a priori que les solutions obtenues avec une distribution multi-water-bag peuvent approcher les solutions du problème continu. Deux modèles alternatif de la dynamique ionique sont donc envisagés à fins de comparaison : un modèle fluide à 3 moments, choisi pour sa simplicité, et un modèle cinétique (Maxwellien) continu qui fera office de référence. Le traitement perturbatif étant similaire à celui effectué dans le cas de la distribution multi-water-bag, il ne sera pas détaillé. Le problème pour le potentiel électrostatique prend la même forme que dans le cas multi-water-bag, le seul changement apparaissant dans la forme de la fonction de réponse en densité ionique  $F(r, m, n, \omega)$ . Les calculs permettant d'aboutir aux formes données ci-après sont exposés dans l'annexe D.

### 2.3.1 Modèle fluide à trois moments

Le modèle fluide est obtenu en prenant les 3 premiers moments en vitesse parallèle  $(n, u, P)$  de l'équation de Vlasov-gyrocinétique. La fermeture est assurée par l'annulation du flux thermique. La linéarisation du modèle conduit à la fonction de réponse en densité  $F(m, n, \omega, r)$  pour le modèle fluide

$$F_{fluide} = \frac{k_{\vartheta} \kappa_n \omega^2 - (nk_{\parallel})^2 \omega + k_{\vartheta} (nk_{\parallel})^2 T (\kappa_T - 2\kappa_n)}{\omega (\omega^2 - 3(nk_{\parallel})^2 T)}, \quad (2.75)$$

où  $\kappa_{n,T} = d_r \ln(n, T)$ , avec les conditions de normalisations définies dans le tableau 2.1.1. La fonction de réponse fluide est, de même que la fonction de réponse multi-water-bag, une fraction rationnelle en  $\omega$ . Elle possède dans le cas fluide trois pôles résonnants en  $\omega = (0, \pm nk_{\parallel} \sqrt{3T})$ .

### 2.3.2 Modèle cinétique continu

La forme de la réponse ionique  $\frac{\tilde{n}_i}{n_0}$  pour une distribution d'équilibre  $f_0$  quelconque, obtenue par le développement en perturbation à l'ordre 1 de l'équation de Vlasov gyrocinétique est

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_0} = \left[ \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nk_{\parallel} \partial_v f_0 + k_{\vartheta} \partial_r f_0}{nk_{\parallel} v + k_{\vartheta} d_r \phi_0 - \omega} dv \right] \tilde{\phi}. \quad (2.76)$$

Pour un équilibre maxwellien  $f_0 = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{v^2}{2T}}$  en l'absence de potentiel électrostatique, la réponse en perturbation de densité ionique devient

$$F_{kin} = \frac{k_{\vartheta}}{nk_{\parallel} \sqrt{2T}} \left( \left[ \kappa_n - \frac{\kappa_T}{2} \right] Z + \kappa_T \xi (1 + \xi Z) \right) - \frac{1}{T} (1 + \xi Z). \quad (2.77)$$

où  $\xi = \frac{\omega}{nk_{\parallel} \sqrt{2T}}$ ,  $Z(\xi)$  est la fonction de Fried et Conte ([28]).

Dans le cadre des comparaisons entre le modèle water-bag et le modèle cinétique, il est utile de remarquer une propriété importante. Le modèle linéaire a été développé en substituant dans l'équation de Vlasov une distribution multi-water-bag, puis en linéarisant le système obtenu. Si l'on inverse l'ordre de la procédure et qu'on insère une distribution water-bag dans (2.76), on obtient la même forme. Le modèle water-bag linéaire peut donc être vu comme une formule de quadrature particulière pour le calcul de la réponse en densité ionique (2.76).

## 2.4 Critère d'instabilité

L'instabilité de gradient de température ionique est une instabilité dite "à seuil". L'existence de modes instables implique des conditions nécessaires sur les valeurs des gradients d'équilibre : pour une valeur de  $\kappa_n$  donnée, un mode est déstabilisé à partir d'une valeur de seuil  $\kappa_T$ . La condition de seuil est souvent exprimée à partir du rapport  $\eta_i = \kappa_T / \kappa_n$ . L'établissement d'une condition de seuil à partir du problème spectral revient à rechercher les conditions que doit vérifier la fonction de distribution d'équilibre afin que le problème spectral possède au moins une valeur propre de partie imaginaire positive. Notons que pour une distribution d'équilibre quelconque, on ne peut à priori



expliciter la fonction de réponse ionique (2.76) à partir des seuls moments de la fonction de distribution. La possibilité d'exprimer une condition pour le déclenchement de l'instabilité à partir de valeurs de  $\kappa_n, \kappa_T$  provient dans le cas de la Maxwellienne du fait qu'elle est définie de manière univoque par la seule donnée de  $n$  et  $T$ . L'obtention d'une condition de seuil algébrique nécessite en outre de faire un certain nombre d'hypothèses sur la nature de l'enveloppe du potentiel, par exemple en substituant à  $\tilde{\phi}$  un ansatz défini par un petit nombre de paramètres géométriques, dont les valeurs doivent pouvoir être raisonnablement encadrées. Ce type de traitement se trouve par exemple dans [31], la condition de seuil obtenue, est de la forme

$$\kappa_T = \kappa_n \pm \sqrt{\kappa_n^2 + 2 \left( \frac{nk_{\parallel}}{k_{\vartheta}} \right)^2 (2 + k_{\vartheta}^2 + f(r))} \quad (2.78)$$

où pour simplifier les expressions on n'a considéré que le cas où  $\tau = T_i/T_e = 1$ . La fonction  $f(r)$  est une fonctionnelle de la densité d'équilibre et de l'ansatz (ici réel) utilisé pour le potentiel électrostatique. Notons qu'une telle condition n'est exploitable que si  $f(r)$  peut être adéquatement bornée.

Dans le cas d'une distribution multi-water-bag, la fonction de réponse en densité ne peut s'exprimer uniquement à partir des moments de la distribution d'équilibre. Nous allons donc rechercher à établir un certain nombre de conditions d'existence de solutions instables à partir des paramètres intervenant explicitement dans l'opérateur définissant le problème spectral, à savoir le profil de densité d'équilibre et les paramètres water-bag. En outre, les hypothèses sur les propriétés du potentiel solution seront réduites au minimum. Le principe général de la méthode est le suivant : à partir d'une formulation faible du problème aux valeurs propres, on obtient par séparation des parties réelles et imaginaires deux équations. De même que le problème initial, la dépendance en  $\omega$  des expressions obtenues est de type fraction rationnelle et peut se ramener à une dépendance polynomiale. Le haut degré ( $2N$ ) en  $\omega$  empêche une explicitation des solutions. On va mettre à profit la structure algébrique du problème pour faire apparaître des polynômes en  $\omega_R$  de degré 2 dont les coefficients sont eux-mêmes des fonctions bornées de  $\omega_R$ . Les conditions de positivité des discriminants permettent d'obtenir des critères d'existence pour les solutions instables. Le fait que les coefficients polynomiaux soient des fonctions bornées est important : en mettant à profit que les racines extrémales d'une famille de polynômes dont les coefficients parcourent un espace borné sont atteintes sur les bords du domaine (voir [4, 65]), on pourra ainsi obtenir des encadrements de  $\gamma$  et  $\omega_R$ . L'objectif n'est à l'évidence pas d'obtenir de bonnes approximations des solutions, mais de pouvoir établir des conditions d'existence génériques et d'apprécier les comportements paramétriques (dépendances spectrales) de manière générale.

Exprimons le problème (2.60) sous forme faible. Pour tout  $u \in H_0^1([0, a] \rightarrow \mathbb{C})$  on a

$$\int_{r_{min}}^a d_r u d_r \psi + u Q_{m,n,\omega} \psi = 0. \quad (2.79)$$

En posant  $u = \psi^*$  et en séparant parties réelles et imaginaires on obtient

$$\begin{cases} \int_{r_{min}}^a [ |d_r \psi|^2 + Q_{\Re} |\psi|^2 ] dr = 0 \\ \int_{r_{min}}^a Q_{\Im} |\psi|^2 dr = 0 \end{cases}, \quad (2.80)$$

où  $Q_{\Re}, Q_{\Im}$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires du pseudo-potentiel  $Q$  que l'on peut expliciter en posant  $\omega = \omega_R + i\gamma = nk_{\parallel}(X + iY)$ ,

$$\begin{cases} Q_{\Im} = -YS_1 \\ Q_{\Re} = B_m - XS_1 + S_2 \end{cases}, \quad (2.81)$$

avec

$$\begin{cases} S_1(X, Y) = \sum_j \frac{A_j}{n_0} \frac{(1 - \frac{k_{\vartheta} d_r V_j}{nk_{\parallel}})}{(X - V_j - \frac{k_{\vartheta} d_r \phi_0}{nk_{\parallel}})^2 + Y^2} \\ S_2(X, Y) = \sum_j \frac{A_j}{n_0} \frac{(1 - \frac{k_{\vartheta} d_r V_j}{nk_{\parallel}})(V_j + \frac{k_{\vartheta} d_r \phi_0}{nk_{\parallel}})}{(X - V_j - \frac{k_{\vartheta} d_r \phi_0}{nk_{\parallel}})^2 + Y^2} \end{cases}, \quad (2.82)$$

et où  $B_m$  est défini par (2.62). En exploitant l'inégalité de Poincaré,  $\psi$  étant  $C^1$  sur le domaine, on a

$$\int_0^a |\psi|^2 dr < (a)^2 \int_0^a |d_r \psi|^2 dr, \quad (2.83)$$

que l'on peut exprimer de manière alternative par

$$\exists \lambda_{\psi} > 1, \int_{r_{min}}^a |d_r \psi|^2 dr = \left(\frac{\lambda_{\psi}}{a}\right)^2 \int_{r_{min}}^a |\psi|^2 dr. \quad (2.84)$$

On supposera de plus par la suite  $\lambda_{\psi} < +\infty$ , qui assure la finitude du champ électrique. L'existence d'un mode instable supposant  $Y \neq 0$  on peut réécrire les conditions précédentes comme

$$\begin{cases} \text{CS1} : \int_{r_{min}}^a |\psi|^2 S_1 dr = 0 \\ \text{CS2} : \int_{r_{min}}^a |\psi|^2 \left[ B_m + \left(\frac{\lambda_{\psi}}{a}\right)^2 + S_2 \right] dr = 0. \end{cases} \quad (2.85)$$

La nullité des intégrales implique que, pour  $\gamma \neq 0$ ,

**Lemme 1.** *Il existe au moins deux ouverts  $(I_{1+}, I_{1-}) \subset ]r_{min}, a[^2$  tels que  $S_1$  soit positive sur  $I_{1+}$  et négative sur  $I_{1-}$ . La continuité de  $S_1$  implique que  $S_1$  doit s'annuler au moins une fois sur  $]0, a[$*

**Lemme 2.** *Il existe au moins deux ouverts  $I_{2+}, I_{2-} \subset ]r_{min}, a[^2$  tel que  $B_m + S_2 + \left(\frac{\lambda_{\psi}}{a}\right)^2$  soit positive sur  $I_{2+}$  et négative sur  $I_{2-}$ . Si l'on suppose que les gradients s'annulent suffisamment vite à l'origine pour que  $B_m$  soit dominée par le terme en  $\frac{m^2}{r^2}$ , alors  $B_m + S_2 + \left(\frac{\lambda_{\psi}}{a}\right)^2$  est positive au voisinage de l'origine, et  $B_m + S_2 + \left(\frac{\lambda_{\psi}}{a}\right)^2$  doit donc s'annuler en un point au moins du domaine.*

Ces conditions sont difficiles à exploiter dans le cas général en raison de l'asymétrie possible des contours et de la présence du potentiel. Dans le cas particulier d'un équilibre symétrique sans champ électrique, les expressions des deux critères se simplifient notablement. Nous allons tout d'abord à partir des conditions CS1 et CS2 établir d'une part des conditions d'existence locales indépendantes pour CS1 et CS2. Dans un deuxième temps nous établirons des critères intégraux, qui permettront d'exploiter simultanément les deux contraintes.

### 2.4.1 Critère local pour un équilibre symétrique

Pour un équilibre initial sans champ électrique et des bags symétriques,  $S_1$  et  $S_2$  se simplifient en regroupant les termes antisymétriques  $j, -j$ , sous la forme

$$\begin{cases} S_1 = - \sum_{j=1}^N \chi_j \frac{\frac{(k_\vartheta \kappa_j)}{nk_\parallel} X^2 - 2X + \frac{(k_\vartheta \kappa_j)}{nk_\parallel} [Y^2 + V_j^2]}{D_j} \\ S_2 = \sum_{j=1}^N \chi_j \frac{X^2 - 2 \frac{k_\vartheta \kappa_j V_j^2}{nk_\parallel} X + Y^2 + V_j^2}{D_j} \end{cases} \quad (2.86)$$

où on définit les dénominateurs résonants  $D_j = [(X - V_j)^2 + Y^2][(X + V_j)^2 + Y^2]$  et les densités partielles  $\chi_j = \frac{2A_j V_j}{n_0}$ . L'équivalence au sens des moments implique que  $\sum_{j=1}^N \chi_j = 1$ . Pour  $Y > 0$ , le facteur résonnant  $1/D_j$  est borné lorsque  $X$  parcourt  $\mathbb{R}$ . Il admet selon la valeur de  $Y$  un maximum en  $X = 0$  ou deux maxima en  $X = \pm \sqrt{V_j^2 - Y^2}$

$$0 < \frac{1}{D_j} < \begin{cases} \frac{1}{(V_j^2 + Y^2)^2}, & Y^2 > V_j^2 \\ \frac{1}{4V_j^2 Y^2}, & Y^2 < V_j^2 \end{cases}, \quad (2.87)$$

soit pour  $Y > 0$  et pour tout  $X$

$$0 < \frac{1}{D_j} < \frac{1}{4Y^2 V_j^2}. \quad (2.88)$$

On définit en outre la fonction de réponse globale  $\mathcal{R}(X, Y) = \sum_j \frac{\chi_j}{D_j}$  qui est bornée également

$$0 < \mathcal{R} < \frac{1}{4Y^2} \sum_j \frac{1}{V_j^2}, \quad (2.89)$$

les fonctions résonantes partielles  $\xi_j(X, Y) = \frac{1}{\mathcal{R}(X, Y)} \frac{\chi_j}{D_j}$ , et l'opérateur  $\langle \bullet \rangle_j = \sum_k \xi_k(\bullet)_k$ . Notons que ni  $S_1$  ni  $S_2$  ne peuvent s'annuler en  $r$  si tous les  $\kappa_j$  y sont nuls : la présence de gradients est bien nécessaire à l'existence de solutions instables. Les coefficients  $\xi_j$  traduisent la double pondération des contributions des contours par la densité partielle et les résonances Landau.

**Lemme 3** (Critère local CL1). *Il existe  $r_1$  tel que*

$$\sum_{j,k} \xi_j \xi_k \left[ 1 - \left( \frac{k_\vartheta}{nk_\parallel} \right)^2 \kappa_j \kappa_k (Y^2 + V_k^2) \right] > 0. \quad (2.90)$$

*Au point  $r_1$ , il existe  $(j, k)$  tels que*

$$1 - \left( \frac{k_\vartheta}{nk_\parallel} \right)^2 \kappa_j \kappa_k (Y^2 + V_k^2) > 0 \quad (2.91)$$

*Au point  $r_1$ ,  $X$  vérifie la condition de point fixe*

$$X_\pm = \frac{nk_\parallel}{\langle k_\vartheta \kappa_j \rangle} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \langle \kappa_j \rangle \langle \kappa_k (Y^2 + V_k^2) \rangle} \right] \quad (2.92)$$

*Démonstration.* On peut regrouper les termes de  $S_1$  pour faire apparaître un polynôme de degré 2 en  $X$  :

$$-S_1 = \left( \sum_j \frac{\chi_j}{D_j} \frac{k_\vartheta \kappa_j}{nk_\parallel} \right) X^2 - 2 \left( \sum_j \frac{\chi_j}{D_j} \right) X + \left( \sum_j \frac{\chi_j}{D_j} \frac{k_\vartheta \kappa_j}{nk_\parallel} (Y^2 + V_j^2) \right) \quad (2.93)$$

La condition de positivité du discriminant, nécessaire à l'existence d'une solution  $X$  réelle est

$$\Delta' = \mathcal{R}^2(X, Y) \sum_{j,k} \xi_j \xi_k \left[ 1 - \left( \frac{k_\vartheta}{nk_\parallel} \right)^2 \kappa_j \kappa_k (Y^2 + V_k^2) \right] > 0 \quad (2.94)$$

On en déduit une condition nécessaire (mais non suffisante) pour l'existence d'une solution  $X$  réelle :

$$\exists j, k, r_1 : 1 - \left( \frac{k_\vartheta}{nk_\parallel} \right)^2 \kappa_j \kappa_k (Y^2 + V_k^2) > 0 \quad (2.95)$$

$$\exists j, k, r_1 : 1 - \kappa_j \kappa_k V_k^2 \left( \frac{k_\vartheta}{nk_\parallel} \right)^2 > \kappa_j \kappa_k \left( \frac{k_\vartheta}{nk_\parallel} \right)^2 Y^2 \quad (2.96)$$

En  $r_1$  on peut exprimer la solution  $X$

$$X_\pm = \frac{nk_\parallel}{\langle k_\vartheta \kappa_j \rangle} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \langle \kappa_j \rangle \langle \kappa_k \rangle (Y^2 + V_k^2)} \right] \quad (2.97)$$

Notons que cette relation ne fait qu'exprimer une condition de point fixe pour  $X$ , le membre de droite contenant des fonctions de  $X$ .  $\square$

**Lemme 4** (Critère local CL2). *Il existe  $r_2$  tel que*

$$0 < \gamma^2 < \frac{k_\vartheta^2 \left( \langle \kappa_j V_j^2 \rangle \right)^2 - (nk_\parallel)^2 \langle V_j^2 \rangle}{1 + \frac{4 \left( B_m + \left( \frac{\lambda_\psi}{a} \right)^2 \right)}{\sum_j \frac{1}{V_j^2}}} \quad (2.98)$$

En  $r_2$ ,  $X$  vérifie la condition de point fixe

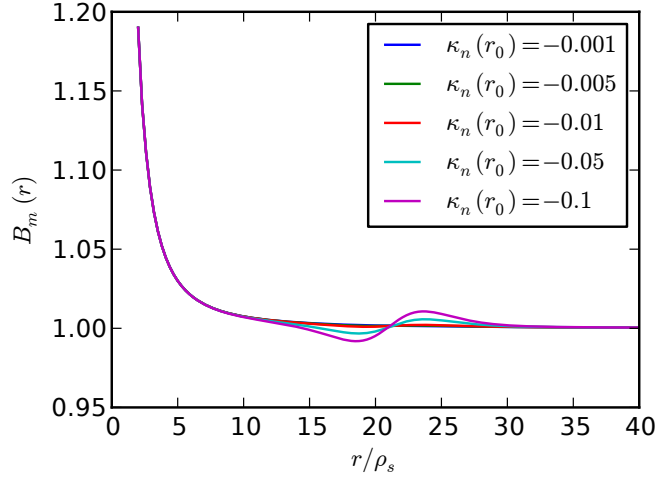
$$X_\pm = \left\langle \frac{k_\vartheta \kappa_j V_j^2}{nk_\parallel} \right\rangle \pm \sqrt{\left\langle \frac{k_\vartheta \kappa_j V_j^2}{nk_\parallel} \right\rangle^2 - \langle V_j^2 \rangle - Y^2 - \frac{\beta_m}{\mathcal{R}}}, \quad (2.99)$$

où  $\beta_m = B_m + \left( \frac{\lambda_\psi}{a} \right)^2$ .

*Démonstration.* Examinons la condition sur  $S_2$ . Le terme  $B_m$  résulte de la compétition du terme axifuge en  $k_\vartheta^2$  et du terme de température électronique d'une part et du terme de courbure lié au gradient de densité et à la géométrie

$$B_m(r) = \left( \frac{m}{r} \right)^2 + \frac{1}{Z_i T_e} + \frac{1}{\sqrt{rn_0}} \frac{d^2}{dr^2} \sqrt{rn_0} \quad (2.100)$$

La possibilité pour  $B_m$  de changer de signe dépend de la convexité de  $\sqrt{rn_0}$ . Nous allons supposer par la suite que ce terme de courbure est insuffisant pour rendre  $B_m$  négatif, ce qui est le cas pour les cas traités. Sur la figure 2.5, on peut observer le profil

FIGURE 2.5 –  $B_m(r)$  pour  $m = 1, Z_i = 1, T_e = cte = 1$ .

radial de  $B_m$  pour les valeurs typiques de gradient utilisées, et pour  $m = 1$  (le pire des cas). On observe que que le gradient de densité intervient de deux manières dans le développement de l'instabilité : à travers les termes diamagnétiques il a tendance à stabiliser le système en compétition avec le gradient de température alors qu'à travers le terme de courbure lié à la dérive de polarisation, il peut avoir tendance à favoriser la localisation et donc l'émergence de l'instabilité. On peut pour une large classe de cas considérer que  $\beta_m = B_m + \left(\frac{\lambda_\psi}{a}\right)^2$  est positif sur tout le domaine. La condition d'annulation de  $\beta_m + S_2$ , d'après (2.85) et (2.86), implique qu'il doit exister  $r_2$  tel que

$$X^2 - 2\left\langle \frac{k_\vartheta \kappa_j V_j^2}{nk_\parallel} \right\rangle X + \langle V_j^2 \rangle + Y^2 + \frac{\beta_m}{\mathcal{R}} = 0, \quad (2.101)$$

soit

$$\Delta' = \left( \left\langle \frac{k_\vartheta \kappa_j V_j^2}{nk_\parallel} \right\rangle \right)^2 - Y^2 - \langle V_j^2 \rangle - \frac{\beta_m}{\mathcal{R}}. \quad (2.102)$$

Or on a en utilisant l'inégalité (2.89)

$$\frac{\beta_m}{\mathcal{R}} > \frac{4Y^2 \beta_m}{\sum_j \frac{1}{V_j^2}}, \quad (2.103)$$

d'où

$$0 < Y^2 < \frac{\left( \left\langle \frac{k_\vartheta \kappa_j V_j^2}{nk_\parallel} \right\rangle \right)^2 - \langle V_j^2 \rangle}{1 + \frac{4\beta_m}{\sum_j \frac{1}{V_j^2}}}. \quad (2.104)$$

Lorsque cette condition est vérifiée on obtient une seconde condition de point fixe (pour  $r_2$  éventuellement différent du  $r_1$  sélectionné pour la condition précédente).  $\square$

Les critères locaux qui viennent d'être établis permettent de mettre en évidence un certain nombre de propriétés de l'instabilité. Le lemme 3 ne permet pas de borner le taux de croissance a priori, en raison de l'indétermination sur les signes des gradients.

On observe cependant que l'existence d'une solution est favorisée par la présence de couples de contours dont les gradients ont des signes différents. Réciproquement, si les signes des gradients de tous les contours sont identiques, le critère sera nécessairement violé à partir d'une valeur critique de  $m$ . Or nous avons observé lors de la construction des équilibres que pour les distributions envisagées, le premier (plus rarement le second) contour est une fonction croissante du rayon dans la zone de pic en  $\eta$  alors que les contours à plus grande vitesse sont décroissants (ils sont proches d'un comportement en  $\sqrt{T}$ ). C'est cette opposition des signes des gradients entre le premier contour et les autres qui traduit la grande valeur de  $\eta$ . Notons que pour  $\eta_i = cte = 2$ , soit  $n \sim \sqrt{T}$ , l'équivalence exacte au sens des moments possède une solution triviale  $v_j = v_j(r_0)\sqrt{T/T_0}$ . Ce cas très particulier a été testé pour quelques valeurs de  $\kappa_T$  et il semble stable pour le modèle water-bag. L'existence de contours de variations radiales antagonistes et la condition CL1 peut être vue comme un analogue partiel du critère local sur la valeur de  $\eta_i$ .

Le critère établi dans le lemme 4 est plus instructif : le taux de croissance est majoré par une fonctionnelle bornée. A  $m$  fixé, on obtient nécessairement une coupure haute-fréquence en  $n$ .

Le caractère local de ces deux critères ne permet cependant pas de les faire jouer simultanément, les positions respectives où ils sont respectés pouvant être différentes. Les critères intégraux développés ci-après permettent de pallier cette limite, au prix de quelques hypothèses supplémentaires.

## 2.4.2 Critère intégraux d'instabilité

**Définition 1.** *On suppose, sans perte de généralité que*

$$\int |\psi|^2 dr = 1 \quad (2.105)$$

*Soit*

$$R = \int |\psi|^2 \sum_j \frac{\chi_j}{D_j} dr \quad (2.106)$$

*R est borné par*

$$0 < R < \frac{1}{4Y^2} \int |\psi|^2 \sum_j \frac{1}{V_j^2} \quad (2.107)$$

*Soit*

$$\tau = \frac{1}{R} \int |\psi|^2 (B_m + \left(\frac{\lambda_\psi}{a}\right)^2) dr \quad (2.108)$$

*On a*

$$\tau > Y^2 \underbrace{\frac{4 \int |\psi|^2 (B_m + \left(\frac{\lambda_\psi}{a}\right)^2) dr}{\int |\psi|^2 \sum_j \frac{1}{V_j^2}}}_{\rho} \quad (2.109)$$

*On peut donc poser  $\tau = xY^2$  avec  $\rho > 0$ ,  $x > \rho$ . On suppose ici que  $|\psi|$  décroît suffisamment vite pour que  $\rho < +\infty$  dans le cas  $r_{min} = 0$ . Cela suppose notamment que  $\int_0^a |\psi|^2 r^{-2} dr < +\infty$ . Redéfinissons l'opérateur  $\langle f_j \rangle$  par*

$$\langle f_j \rangle = \frac{\int_{r_{min}}^a |\psi|^2 \sum_k \frac{\chi_k}{D_k} f_k dr}{R} \quad (2.110)$$

On note que

$$|\langle f_j \rangle| < \sup_{r,j} |f_j| \quad (2.111)$$

On pose  $\Omega_0^* = \langle \frac{k_\vartheta}{nk_\parallel} \kappa_j \rangle$  et  $\Omega_2^* = \langle \frac{k_\vartheta}{nk_\parallel} \kappa_j V_j^2 \rangle$ .

On obtient le système

$$\Sigma \begin{cases} \Omega_0^* X^2 - 2X + \Omega_0^* Y^2 + \Omega_2^* = 0 \\ X^2 - 2X\Omega_2^* + \langle V_j^2 \rangle + (1+x)Y^2 = 0 \end{cases} \quad (2.112)$$

**Lemme 5.**

$$\Omega_0^* \neq 0 \quad (2.113)$$

*Démonstration.* Supposons  $\Omega_0^* = 0$ . On a alors

$$2X = \Omega_{2*} \quad (2.114)$$

Et par substitution dans la seconde équation

$$3\Omega_{2*}^2 + \langle V_j^2 \rangle + Y^2(1+x) = 0, \quad (2.115)$$

qui mène à une absurdité en raison de la positivité de tous les termes.  $\square$

On peut donc réécrire le système sous la forme

$$\Sigma \begin{cases} X^2 - \frac{2X}{\Omega_0^*} + Y^2 + \frac{\Omega_2^*}{\Omega_0^*} = 0 \\ X^2 - 2X\Omega_2^* + \langle V_j^2 \rangle + Y^2(1+x) = 0 \end{cases} \quad (2.116)$$

**Lemme 6.** *L'existence d'une solution réelle  $X$  au système  $\Sigma$  implique les relations suivantes*

$$\Delta_1 = 1 - \Omega_0^* \Omega_2^* > 0, \quad \Delta_2 = (\Omega_2^*)^2 - \langle V_j^2 \rangle > 0 \quad (2.117)$$

*Démonstration.* La preuve découle simplement de la positivité des discriminants de chacune des équations.  $\square$

**Lemme 7.** *Les deux équations polynomiales de  $\Sigma$  sont linéairement indépendantes*

$$\Omega_0^* \Omega_2^* \neq 1 \text{ et } \frac{\Omega_2^*}{\Omega_0^*} - \langle V_j^2 \rangle + xY^2 \neq 0 \quad (2.118)$$

*Démonstration.* Supposons que les deux polynômes sont linéairement dépendants. L'égalité des coefficients en  $X^2$  implique l'égalité des autres coefficients d'où on déduit

$$\begin{cases} \Omega_0^* \Omega_2^* = 1 \\ xY^2 = \frac{\Omega_2^*}{\Omega_0^*} - \langle V_j^2 \rangle = (\Omega_2^*)^2 - \langle V_j^2 \rangle \end{cases} \quad (2.119)$$

Le discriminant réduit de la seconde équation est

$$\Delta_2' = (\Omega_2^*)^2 - \langle V_j^2 \rangle - Y^2(1+x) \quad (2.120)$$

Soit par substitution de l'expression pour  $xY^2$

$$\Delta_2' = -Y^2 \quad (2.121)$$

Il n'existe dans ce cas pas de solution réelle  $X$ .  $\square$

**Lemme 8.**

$$X = \frac{(\Omega_2^* - \Omega_0^* \langle V_j^2 \rangle) - x\Omega_0^* Y^2}{2(1 - \Omega_2^* \Omega_0^*)} = \frac{\Omega_0^* \Delta_2 + \Omega_2^* \Delta_1 - x\Omega_0^* Y^2}{2\Delta_1} \quad (2.122)$$

ou de manière équivalente

$$Y^2 = \frac{(\Omega_2^* - \Omega_0^* \langle V_j^2 \rangle) - 2X(1 - \Omega_2^* \Omega_0^*)}{x\Omega_0^*} = \frac{\Omega_0^* \Delta_2 + \Omega_2^* \Delta_1 - 2X\Delta_1}{x\Omega_0^*} \quad (2.123)$$

*Démonstration.* Le résultat s'obtient par simple combinaison linéaire des deux équations.  $\square$

**Lemme 9.** *L'existence de solutions au système  $\Sigma$  est sujette à la condition*

$$\Delta_1^2 \delta(x) = x^2(1 - \Omega_0^* \Omega_2^*) + x \left[ 2 + \Omega_0^* \langle V_j^2 \rangle - 3\Omega_0^* \Omega_2^* \right] + (1 - \Omega_0^* \Omega_2^*)^2 > 0 \quad (2.124)$$

ou de manière équivalente

$$\delta(x) = 1 + \frac{x^2}{\Delta_1} + x \left[ 1 + \frac{1}{\Delta_1} - \frac{(\Omega_0^*)^2 \Delta_2}{\Delta_1^2} \right] > 0 \quad (2.125)$$

On a en outre les relations de point fixe

$$X = \frac{\Delta_1}{x\Omega_0^*} \left[ 1 + \sigma \sqrt{\delta(x)} \right], \quad (2.126)$$

$$Y^2 = \frac{\langle V_j^2 \rangle}{x} \left[ \frac{\Omega_2^*}{\Omega_0^* \langle V_j^2 \rangle} - 1 \right] - \frac{2\Delta_1}{(x\Omega_0^*)^2} \left[ 1 + \sigma \sqrt{\delta(x)} \right], \quad (2.127)$$

où  $\sigma = \pm 1$ .

*Démonstration.* En substituant l'expression (2.123) dans la première équation de  $\Sigma$  on obtient le polynôme

$$(x\Omega_0^* X)^2 - 2(x\Omega_0^* X)[x + 1 - \Omega_0^* \Omega_2^*] + x\Omega_0^* [\Omega_2^* - \Omega_0^* \langle V_j^2 \rangle] + x^2 \Omega_0^* \Omega_2^* = 0, \quad (2.128)$$

dont le discriminant réduit est  $\Delta_1^2 \delta(x)$ . La condition de point fixe pour  $X$  s'en déduit directement. L'expression de  $Y^2$  s'obtient ensuite par substitution de  $X$  dans (2.123).  $\square$

### Discussion des relations obtenues

Les conditions simultanées de positivité de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  permettent de déduire

$$\frac{\langle V_j^2 \rangle \Omega_0^*}{\Omega_2^*} < 1 \quad (2.129)$$

Dans le cas où  $\Omega_0^*$  et  $\Omega_2^*$  sont de signe opposés, cette condition est trivialement réalisée. Dans le cas où ils sont de même signe, on en déduit

$$\frac{\Omega_2^*}{\langle V_j^2 \rangle \Omega_0^*} > 1 \quad (2.130)$$



Sans faire plus d'hypothèses, on ne peut exploiter cette condition. On peut cependant la mettre en correspondance avec la limite fluide ( $nk_{\parallel} \rightarrow 0$ ) du critère cinétique (2.78). A la limite  $nk_{\parallel} \rightarrow 0$  les facteurs résonnants  $1/D_j$  s'identifient à  $1/(X^2 + Y^2)^2$  et s'éliminent de l'opérateur  $\langle \cdot \rangle$ . On obtient alors  $R = 1$  et en explicitant les facteurs  $\chi_j$

$$\begin{cases} \Omega_0^* = \int_{r_{min}}^a dr |\psi|^2 \frac{k_{\vartheta}}{nk_{\parallel}} \frac{1}{n_0} \sum_j 2A_j d_r V_j = \int_{r_{min}}^a dr |\psi|^2 \frac{k_{\vartheta}}{nk_{\parallel}} \kappa_n \\ \Omega_2^* = \int_{r_{min}}^a dr |\psi|^2 \frac{k_{\vartheta}}{nk_{\parallel}} \frac{1}{n_0} \sum_j 2A_j d_r V_j V_j^2 = \int_{r_{min}}^a dr |\psi|^2 \frac{1}{n_0} d_r \mathcal{M}_2 = \int_{r_{min}}^a dr |\psi|^2 \frac{k_{\vartheta}}{nk_{\parallel}} T(\kappa_n + \kappa_T) \\ \langle V_j^2 \rangle = \int_{r_{min}}^a dr |\psi|^2 \frac{1}{n_0} \sum_j 2A_j V_j^3 = \int_{r_{min}}^a dr |\psi|^2 3T \end{cases} \quad (2.131)$$

En supposant le mode fortement localisé autour de  $r = r_0$  on obtient à partir de (2.130) la condition locale

$$\frac{\kappa_n + \kappa_T}{3\kappa_n} > 1 \text{ soit } \eta > 2, \quad (2.132)$$

qui correspond bien à la limite fluide du critère cinétique. Les hypothèses utilisées pour obtenir (2.132) à partir de (2.130) sont loin d'être a priori vérifiées et les seuils effectivement trouvés pourront en conséquence très nettement s'écarter de cette limite. Comme nous le verrons dans l'analyse des résultats numériques, les fréquences  $X$  sont typiquement de l'ordre de  $-1$  et  $Y < 1$ . Pour ces contours assez espacés  $\Delta v \sim 1$ , comme c'est le cas pour les distributions à peu de bords, l'ordering des facteurs résonnants  $1/D_j$  sera particulièrement sensible aux variations de  $X$  pour les petites valeurs de  $Y$ . La condition (2.130) pourra donc s'éloigner notablement de la condition de seuil fluide locale.

Considérons maintenant la dépendance de  $Y^2$  en  $m$  dans (2.123). On suppose que  $\lambda_{\psi}/a \sim k_{\vartheta}$ , ce qui revient à supposer que le rapport d'aspect des cellules de convection est de l'ordre de 1 et que  $k_{\perp} \sim k_{\vartheta}$ . On peut alors minorer la dépendance en  $m$  de  $x$  ainsi

$$x > \rho \sim 1 + (m\rho_s/r_0)^2, \quad (2.133)$$

où  $r_0$  est choisi dans la zone où le module du mode est maximal. Nous considérons toujours le cas où  $\Omega_0^*$  et  $\Omega_2^*$  sont de même signe. La condition  $\Delta_1 > 0$  implique alors que le produit  $\Omega_0^* \Omega_2^*$  reste borné lorsque  $m \rightarrow \infty$ . Le rapport des fréquences  $\Omega_2^*/\Omega_0^*$  ne dépendant de  $m$  qu'au travers de  $(X, Y)$ , et ces variations étant faibles dans la limite des grands  $x$ , il est lui aussi borné. De l'expression de  $Y^2$ , on obtient un scaling en  $Y \sim (1 + c(m)^2)^{-1/2}$  lorsque  $m \rightarrow \infty$ . Cette décroissance relativement lente sera retrouvée lors de l'examen des résultats numériques.

Examinons maintenant les dépendances en  $n$ . L'expression de  $X$  donne une dépendance primaire linéaire en  $nk_{\parallel}$  en raison du terme en  $1/\Omega_0^*$ . La coupure aux hautes fréquences parallèles est notamment impliquée, de même que précédemment, par la condition de positivité de  $\Delta_2$ . On a en effet

$$n^2 \Delta_2 = \underbrace{n^2 (\Omega_2^*)^2}_1 - n^2 \langle V_j^2 \rangle \quad (2.134)$$

Le terme 1 est borné par construction, d'où une coupure haute en  $n$  à  $m$  constant.

## 2.5 Conclusions

Le modèle multi-water-bag pour l'étude de l'instabilité ITG en géométrie cylindrique a été défini. Au modèle non-linéaire, déjà implémenté par N. Besse, se sont vus adjoindre un modèle d'analyse linéaire et un modèle quasi-linéaire, pour lesquels des codes spécifiques ont été développés.

L'analyse de la méthode de génération de la distribution d'équilibre nous a permis de mettre évidence les contraintes fortes qui apparaissent dès lors que l'on cherche à obtenir une bonne représentation de l'équilibre initial sur l'ensemble du domaine radial. Ces contraintes entraînent des restrictions notables sur le contrôle que l'on peut avoir sur la discrétisation en vitesse parallèle.

L'établissement de critères d'existence de solutions instables au problème linéaire, nous a permis d'apprécier, de manière qualitative, les conditions de déclenchement et les dépendances spectrales du système. On peut noter particulièrement la sensibilité des conditions d'existence de solutions à la distribution en vitesse parallèle pour les taux de croissance faibles.

Ces observations seront croisées avec l'analyse des résultats numériques qui va suivre.

# Chapitre 3

## Analyse linéaire en géométrie cylindrique : résultats numériques

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Cas test - Paramètres d'équilibre . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>3.2</b>	<b>Validation des solveurs . . . . .</b>	<b>58</b>
3.2.1	Convergence en résolution radiale . . . . .	58
3.2.2	Influence du nombre de bords . . . . .	58
3.2.3	Consistance des solveurs . . . . .	60
3.2.4	Comparaison croisée avec le modèle quasi-linéaire . . . . .	65
3.2.5	Comparaison avec les modèles fluides et cinétiques . . . . .	66
3.2.6	Comparaison avec une méthode d'ansatz . . . . .	67
3.2.7	Coût numérique - Parallélisation . . . . .	71
<b>3.3</b>	<b>Caractérisation spectrale des modes instables . . . . .</b>	<b>73</b>
3.3.1	Structure du spectre dans le plan complexe . . . . .	73
<b>3.4</b>	<b>Dépendances paramétriques . . . . .</b>	<b>77</b>
3.4.1	Localisation des modes instables . . . . .	77
3.4.2	Balayage paramétrique : seuil de déclenchement . . . . .	81
<b>3.5</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>84</b>

---

	SMALL	MEDIUM	BIG
$r_{min}\rho_s^{-1}$	1	0.1	0.1
$r_{max}\rho_s^{-1}$	9	14.5	20
$N_r$	128	128	128
$r_0/a$	0.5	0.5	0.5
$\kappa_n\rho_s$	$10^{-2}$	$5.51 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}$
$\Delta_{r_n}\rho_s^{-1}$	2	2.9	4
$\kappa_T\rho_s$	$10^{-1}$	$2.7586 \cdot 10^{-1}$	$10^{-1}$
$\Delta_{r_T}\rho_s^{-1}$	0.3	1.45	2
$k_{\parallel}\rho_s$	$10^{-3}$	$4.17 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$
$N$	6	6	6

TABLE 3.1 – Jeux de paramètres de référence pour les trois familles de cas test

### 3.1 Cas test - Paramètres d'équilibre

Les cas test utilisés dans les simulations numériques sont définis par un jeu de paramètres permettant la construction de l'équilibre. En premier lieu, les paramètres  $a, k_{\parallel} = 2\pi/L_z$  caractérisent la géométrie du domaine. Le paramètre  $a/\rho_s$ , qui caractérise l'étendue du domaine radial. Résoudre correctement des échelles de l'ordre du rayon de Larmor ionique impose typiquement un échantillonnage radial  $N_r > 2a/\rho_s$ . Les valeurs typiques de  $\rho^* = \rho_s/a$  rencontrées dans les Tokamaks sont de l'ordre de  $10^{-2}$  à  $10^{-3}$ . Afin de limiter les coûts en temps de calcul et de stockage, qui sans être rédhibitoires pour l'exploitation d'un code "en production", sont particulièrement pénalisants dans la phase de mise au point des codes, les tailles de domaine radial sélectionnées dans les études numériques sont en-deçà des valeurs typiques des Tokamaks. Les trois tailles sélectionnées  $a/\rho_s = 10, 14.5, 20$  définissent trois familles de cas test "SMALL", "MEDIUM", "BIG". Les dénominations employées sont à l'évidence relatives, les trois cas définissant des domaines petits eu égard aux valeurs typiques rencontrées dans les Tokamaks. Les paramètres du cas "MEDIUM" ont été sélectionnés pour permettre une comparaison directe [9, 31] codes CYGNE, ORB5, GYSELA). Les profils radiaux de densité et température sont définis par des fonctions "en escalier" de la forme

$$X(r) = \exp\left(\kappa_X \Delta_{r_X} \tanh\left(\frac{r - r_{0X}}{\Delta_{r_X}}\right)\right), \quad (3.1)$$

avec  $X = n, T$ . Les paramètres  $r_{0X}, \Delta_{r_X}$  permettent de fixer respectivement la localisation et la largeur de la zone de gradient, alors que  $\kappa_X$  détermine la valeur maximale du gradient normalisé  $d_r \ln X$ .

Pour chacune des familles SMALL, MEDIUM, BIG, un jeu de paramètres de référence est choisi pour être utilisé lors des simulations non-linéaires. Les balayages paramétriques sont effectués à partir de ces valeurs dans l'analyse linéaire.

Pour une valeur donnée des paramètres, la construction de la distribution d'équilibre nécessite de choisir une suite de valeurs initiales pour les contours à la position de référence. Comme on l'a vu au chapitre 2, ce jeu de noeuds initiaux doit assurer la positivité des poids et l'extensibilité sur le domaine radial. Procéder par essai-erreurs jusqu'à obtenir une configuration admissible pour chaque jeu de paramètres d'équilibre est possible pour les quelques cas de référence, mais s'avère tout à fait exclu pour les

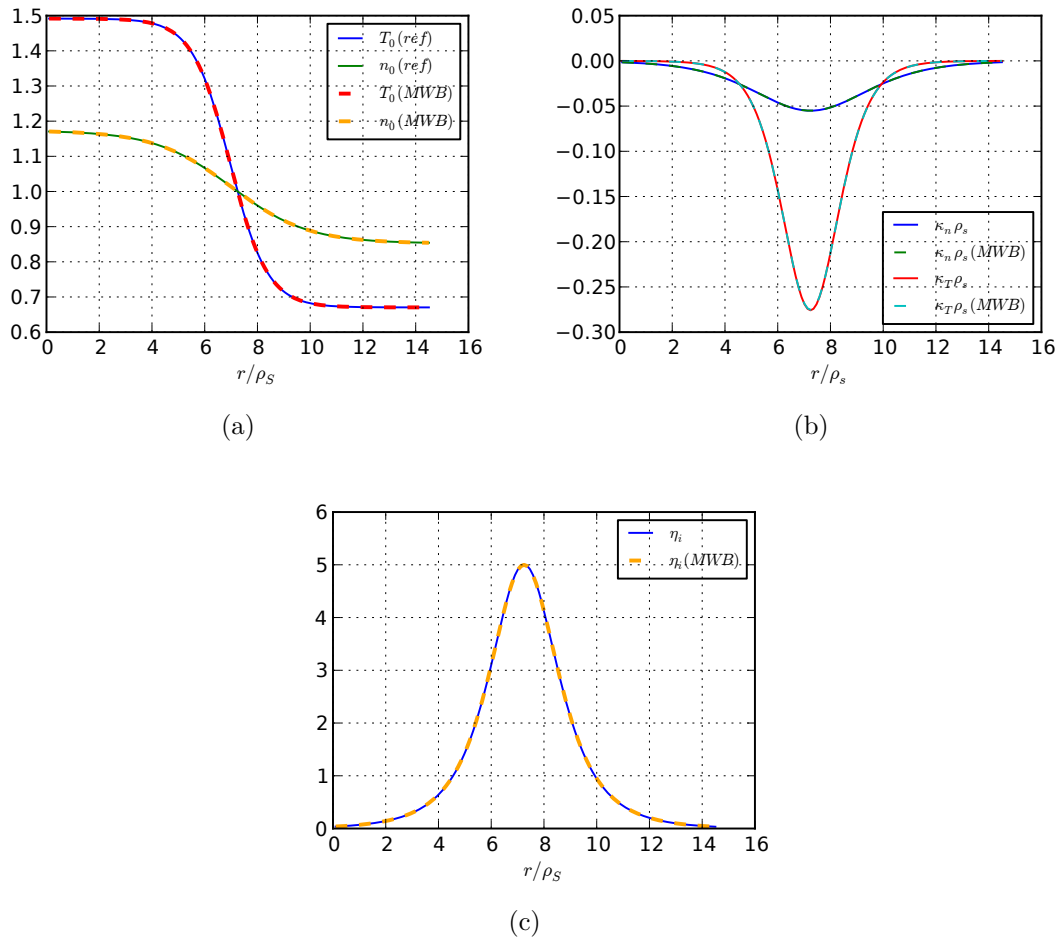


FIGURE 3.1 – Cas test MEDIUM : profils radiaux d'équilibres (a) ; gradients normalisés (b) ; rapport des gradients  $\eta_i = \kappa_T / \kappa_n$  ; les profils de référence imposés sont indiqués en trait continu et en pointillés les profils Multi-Water-Bag pour une distribution à 6 bags

balayages paramétriques sur les valeurs des gradients, au cours desquels l'extensibilité radiale de la distribution peut être mise en défaut. L'extensibilité radiale se traduisant dans le cas de l'équivalence avec un équilibre Maxwellien par une extensibilité en  $\alpha = n/\sqrt{T}$  des contours renormalisés  $U_j = V_j/\sqrt{T}$ , un code spécifique de génération de noeuds initiaux  $U_j(\alpha_0)$  maximisant cette extensibilité a donc été implémenté. La démarche procède essentiellement par essai-erreur, avec une procédure en trois étapes :

1. Tout d'abord l'espace des configurations explorées est restreint par la donnée de plusieurs paramètres. Le premier est la borne supérieure en vitesse parallèle de la distribution, correspondant au noeud  $U_N$ . Ce paramètre est autorisé à varier dans un intervalle défini. Les valeurs des autres noeuds sont alors fixées par deux méthodes alternatives. La première consiste à faire varier la valeur de  $U_1$  et à imposer l'équipartition des noeuds. Les distributions obtenues sont dites "iso-V". La seconde consiste à générer les autres noeuds à partir de  $U_N$  par une suite de contractions homothétiques  $U_j = \rho_j U_{j+1}$ , où les facteurs de contractions  $\rho_j < 1$  sont tirés aléatoirement entre deux bornes  $[\rho_{min}, \rho_{max}]$ , permettant d'éliminer a priori des configurations trop déséquilibrées de noeuds. Les distributions obtenues par cette seconde méthode de génération sont dites de noeuds "optimaux", dans le sens où elles permettent une meilleure optimisation de l'extensibilité radiale.
2. Une fois un jeu de noeuds généré, la positivité des poids correspondants est testée.
3. L'extensibilité en  $\alpha$ , caractérisée le domaine de non-croisement  $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$  est déterminée par continuation des contours.

Pour chaque valeur de  $N$ , le jeu de noeuds initiaux  $U_j$  garantissant une extensibilité maximale est conservé.

## 3.2 Validation des solveurs

### 3.2.1 Convergence en résolution radiale

Les taux de croissance (Fig. 3.2 (a)) et fréquences (Fig. 3.2 (b)) convergent typiquement de manière quadratique, avec des variations relatives en deça de 1% lorsque  $h_r \approx 0.1\rho_s$ . Si l'on exclut les cas de sous-échantillonnage excessif, la convergence des taux de croissance et fréquence est monotone, les deux grandeurs croissant en valeur absolue. Le sous-échantillonnage radial conduit donc à sous-estimer de quelques points de pourcentage les valeurs respectives de  $\omega_R$  et  $\gamma$ .

### 3.2.2 Influence du nombre de bags

Pour une géométrie et des profils de densité et température donnés, fixer le nombre de bags ne suffit pas à déterminer de manière univoque la distribution multi-water-bag d'équilibre. L'utilisation de la méthode de génération d'équilibres par équivalence au sens des moments (section 2.1.3) réduit notablement le nombre de distributions admissibles : pour un nombre de bag  $N$  donné, la distribution est entièrement caractérisée par le choix des valeurs des contours à la position de référence, c'est-à-dire une liste ordonnée de  $N$  réels positifs. Si les critères de positivité de poids et d'extensibilité des contours sur le domaine radial réduisent notablement l'ensemble des jeux de noeuds initiaux pouvant être sélectionnés, ils ne permettent néanmoins pas de réduire cet ensemble à un jeu unique. En toute rigueur, l'analyse de l'influence du nombre de bag

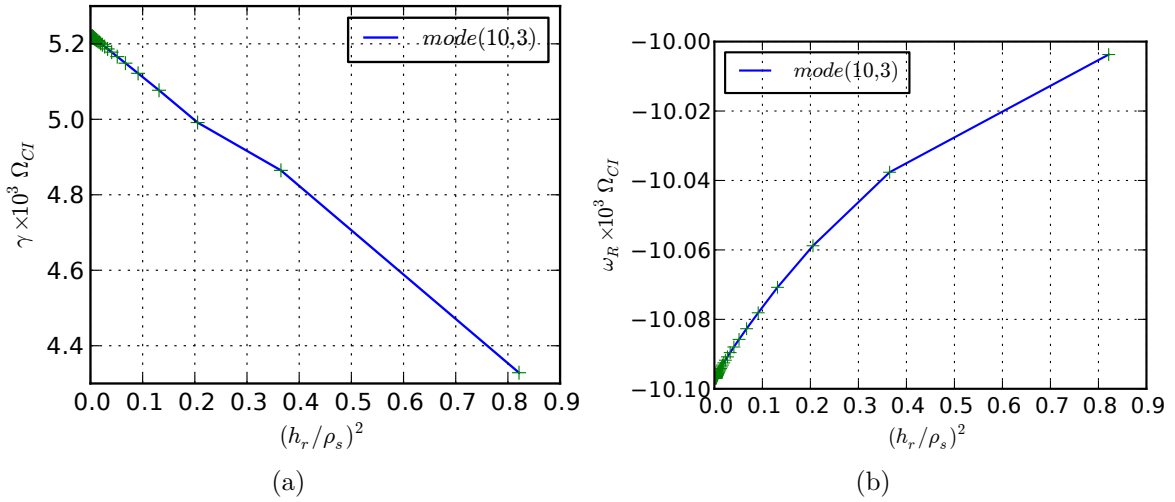


FIGURE 3.2 – Cas MEDIUM - Convergence en résolution radiale de  $(\omega_R, \gamma)$  pour le mode le plus instable (10, 3).

devrait en conséquence nous conduire à balayer pour chaque valeur de  $N$  un large échantillon de distributions admissibles. Pour peu que la dispersion des résultats pour un nombre de bags donné ne soit pas supérieure à celle observée en faisant varier le nombre de bags, l'analyse de grandeurs moyennées sur chaque échantillon permettrait de définir une forme de convergence sur le nombre de bags. Cette approche s'avère impraticable dans le cadre de cette étude, où l'on considère uniquement des distributions à petit nombre de bags. En effet le nombre de bags va typiquement caractériser la finesse de la discrétisation en vitesse parallèle. Pour un nombre restreint de bags, même en supposant une borne maximale raisonnable pour le support de la distribution (typiquement  $v_{max}c_s^{-1} = 4 - 8$ ), il n'est pas possible de faire varier notablement la résolution en vitesse parallèle. Ce fait est amplifié par les conditions d'admissibilité des jeux de noeuds, qui nécessitent d'espacer davantage les contours lorsque  $N$  augmente. On peut donc s'attendre dans ces conditions d'un part à une sensibilité non négligeable des résultats à la distribution des noeuds à  $N$  fixé, et conjointement à l'absence de convergence clairement définie avec  $N$ . Un balayage extensif des jeux de noeuds pour chaque valeur de  $N$  s'avérant en conséquence non seulement coûteux mais insuffisant pour permettre de mettre en évidence un comportement convergent, nous examinons ici seulement deux types de configurations admissibles pour chaque valeur de  $N$ , générée à partir des noeuds dits "optimaux" et "iso-V" définis section 3.1.

Les résultats obtenus nous permettent de vérifier effectivement l'absence d'une convergence globale nettement définie avec le nombre de bags. Le comportement observé dépend du nombre d'onde  $n$  considéré. Pour les "petites" valeurs de  $n$ , on observe une évolution monotone des taux de croissance et fréquences avec le nombre de bags, donnant lieu à une pseudo-convergence (Figure 3.3(a)). Ces situations correspondent à des modes dont les paramètres sont robustes par rapport aux variations des paramètres d'entrée, comme on le verra lors des comparaisons avec les modèles fluide et cinétique continu.

Pour les "grandes" valeurs de  $n$  en revanche, les résultats présentent une grande variabilité et le comportement pseudo-convergent n'est plus observé (Figure 3.3(b)).

Précisons maintenant ce qu'il faut entendre par "petites" et "grandes" valeurs de  $n$ .

$(m, n)$	$\gamma(NLS)$	$\gamma(LS)$	Rel error
(8,5)	1,827795073	1,8277951339	-3,33E-008
(9,5)	1,8588793653	1,8588793812	-8,55E-009
(10,5)	1,8715262512	1,8715262519	-3,63E-010
(11,5)	1,8707877033	1,8707876949	4,46E-009
(12,5)	1,8601922576	1,8601922433	7,66E-009
(13,5)	1,8422651104	1,8422650928	9,56E-009

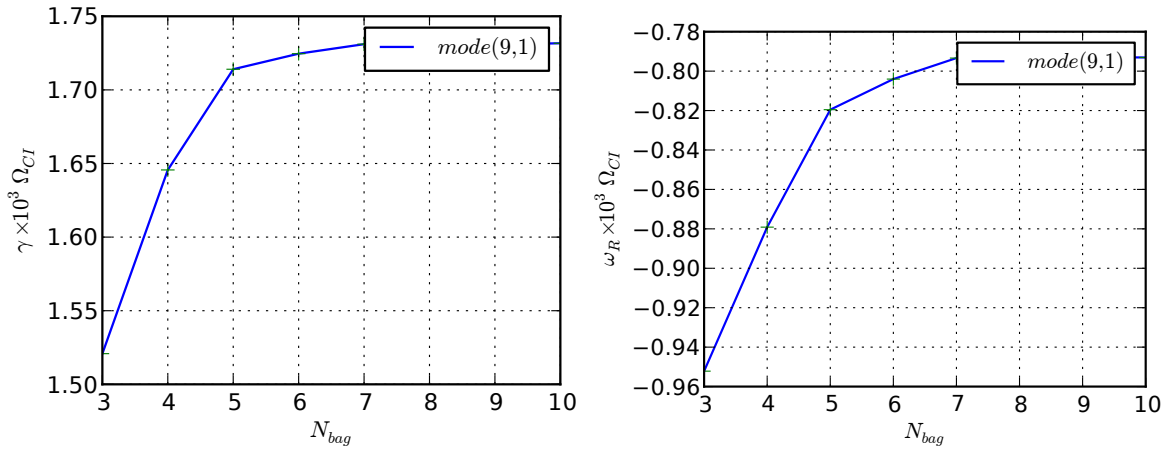
TABLE 3.2 – SMALL case : Linear and nonlinear eigenvalue solver comparison ; Growth rates

De fait la quantité qui contrôle la sensibilité des résultats à l'échantillonnage en vitesse parallèle est le taux de croissance normalisé  $Y(m, n) = \gamma/(nk_{\parallel})$ , qui est une fonction strictement décroissante de  $n$  dans tous les cas étudiés. Considérons le cas limite où  $Y \approx 0$ . La réponse de densité ionique en fonction de la fréquence normalisée  $X = \omega_R/(nk_{\parallel})$ , présente de fortes variations localisées au voisinage des pôles résonnants  $V_j$ . Au voisinage de l'axe réel, la réponse ionique, et en conséquence la relation de dispersion, seront donc sensibles à la distribution des contours en vitesse parallèle (Figures 3.3(c) et 3.4). Le facteur  $Y$  joue un rôle similaire à celui d'un facteur d'amortissement dans un filtre linéaire : lorsque la valeur relative de  $Y$  par rapport à la distance caractéristique entre contours  $\Delta V$  augmente, la modulation due aux résonances est lissée. Les modes correspondants sont alors moins sensibles aux détails de la distribution en vitesse.

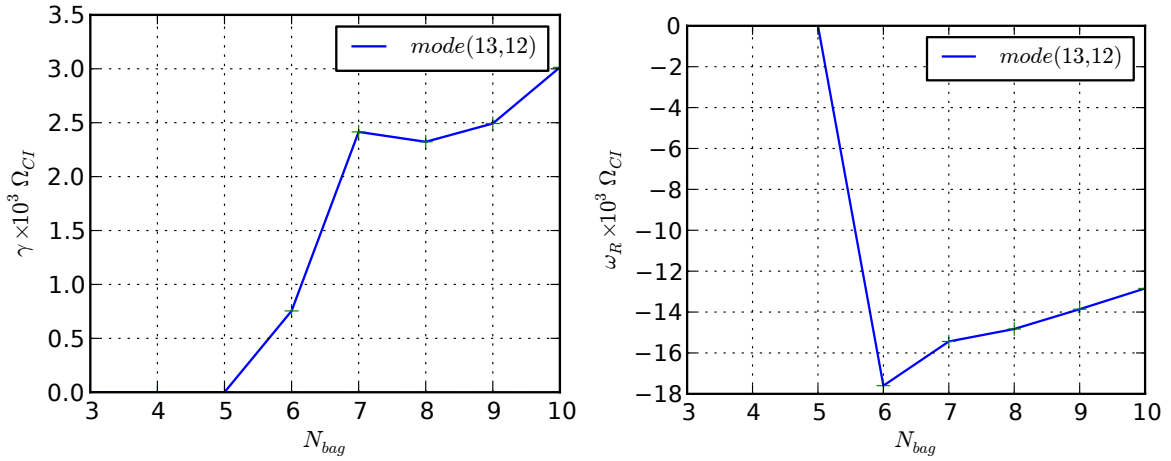
### 3.2.3 Consistance des solveurs

Bien que les formulations respectivement linéaires et non-linéaires en  $\omega$  du problème linéaire ne soient pas strictement équivalentes, les deux méthodes de résolution devraient produire des résultats consistants pour les modes instables qui nous intéressent. C'est effectivement le cas pour la majorité des modes dans le plan spectral  $(m, n)$ , où les erreurs relatives sur les taux de croissance et fréquences s'échelonnent de  $10^{-5}$  à  $10^{-9}$  (voir Tableau 3.2 pour quelques valeurs représentatives). Des différences peuvent cependant apparaître aux frontières de la zone instable dans le plan  $(m, n)$ , où les modes sont proches de l'extinction. Les comparaisons sont ici effectuées sur le mode le plus instable pour chaque couple  $(m, n)$ . Sur la figure 3.6 (a) on peut voir les valeurs propres obtenues par le solveur linéaire, pour l'ensemble des couples  $(m, n)$  balayés dans la région du plan complexe qui nous intéresse ( $X = \omega_R/(nk_{\parallel}) \approx -1$ ). Pour la plupart des couples  $(m, n)$ , un mode domine nettement les autres (figure 3.6 (b)), mais pour certains modes à bas  $m$ , des grappes de valeurs propres de fréquences réelles très proches et de taux de croissance différents peuvent apparaître (voir Figure 3.6 (c)). Ces modes ne sont pas des artefacts provenant de la linéarisation spectrale, comme on peut l'observer pour le mode (13, 1) sur la Figure 3.6 (d), où l'on a superposé les solutions obtenues par le solveur linéaire avec une représentation de l'argument de la relation de dispersion non-linéaire.

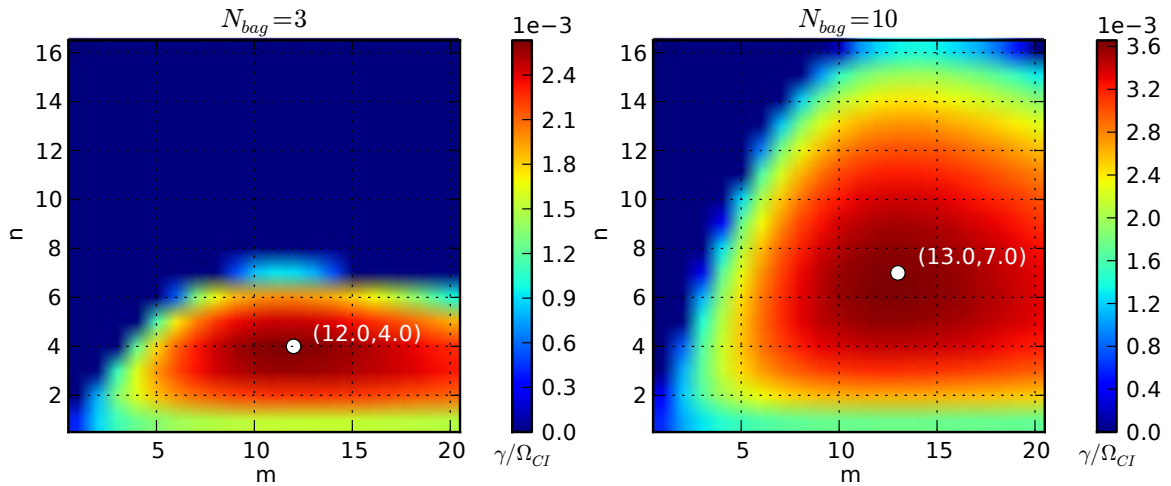




(a) Cas BIG ; Pseudo-Convergence pour les modes à bas nombre d'onde parallèle  $n$



(b) Cas BIG ; Effet d'échantillonnage en  $v_{\parallel}$  pour les modes à haut  $n$



(c) Cas BIG ; Carte spectrale en  $\gamma$  pour des distributions à 3 et 10 bags

FIGURE 3.3 – Pseudo-convergence en  $N$  des taux de croissance et fréquences ; Effet d'échantillonnage en  $v_{\parallel}$

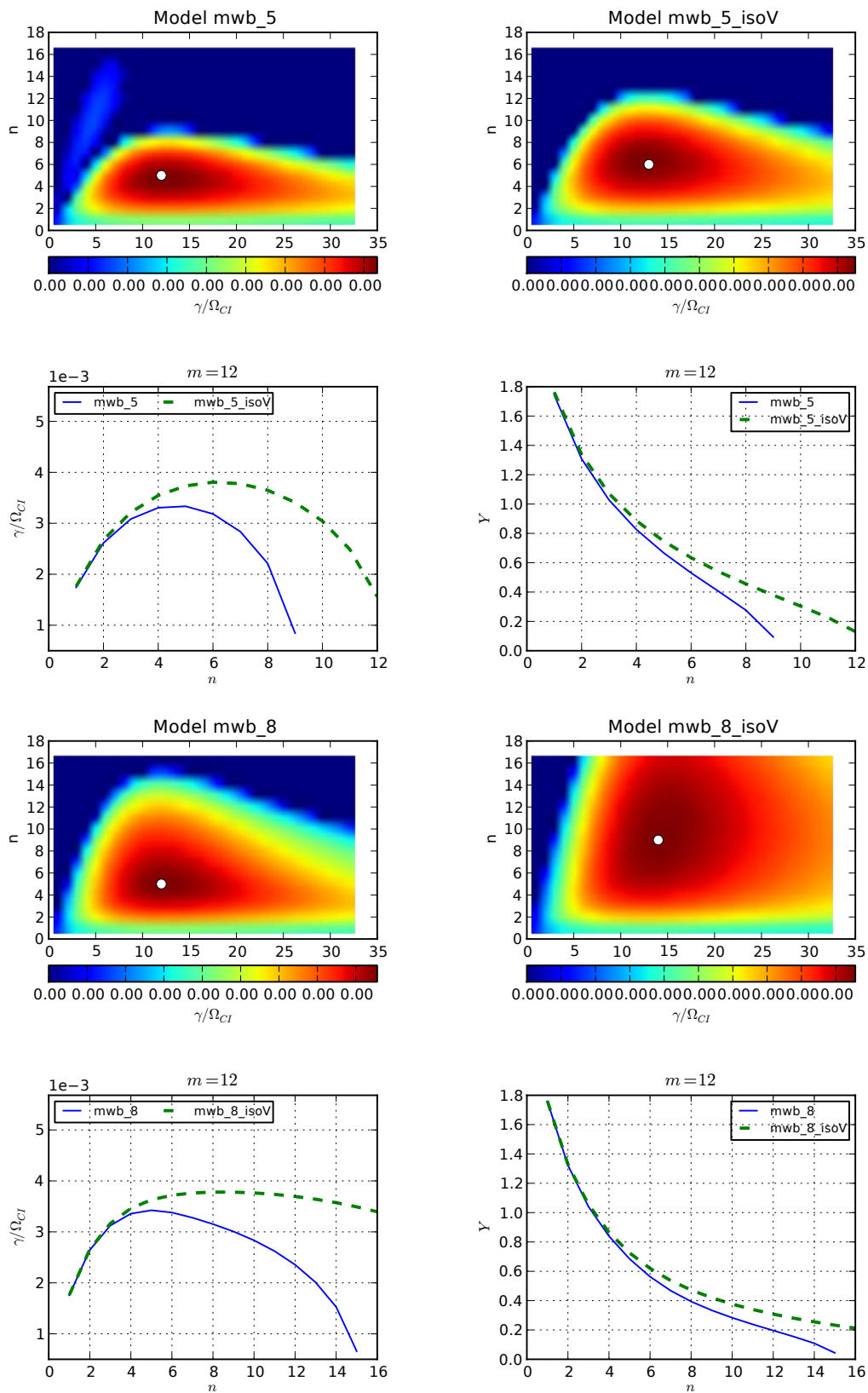


FIGURE 3.4 – Sensibilité à la distribution des noeuds initiaux pour des distributions à 5 et 8 bacs

$(m, n)$	$\omega_R(NLS)$	$\omega_R(LS)$	Rel error
(8,5)	-5,5108860553	-5,510881896	7,54E-007
(9,5)	-5,5070797926	-5,5070780569	3,15-007
(10,5)	-5,5073286127	-5,5073279088	1,28E-007
(11,5)	-5,5101623143	-5,5101620336	5,09E-008
(12,5)	-5,51458852	-5,5145884077	2,036E-008
(13,5)	-5,5199428596	-5,5199428125	8,53E-009

TABLE 3.3 – Cas SMALL : Comparaison des solveurs linéaire et non-linéaire; Fréquences

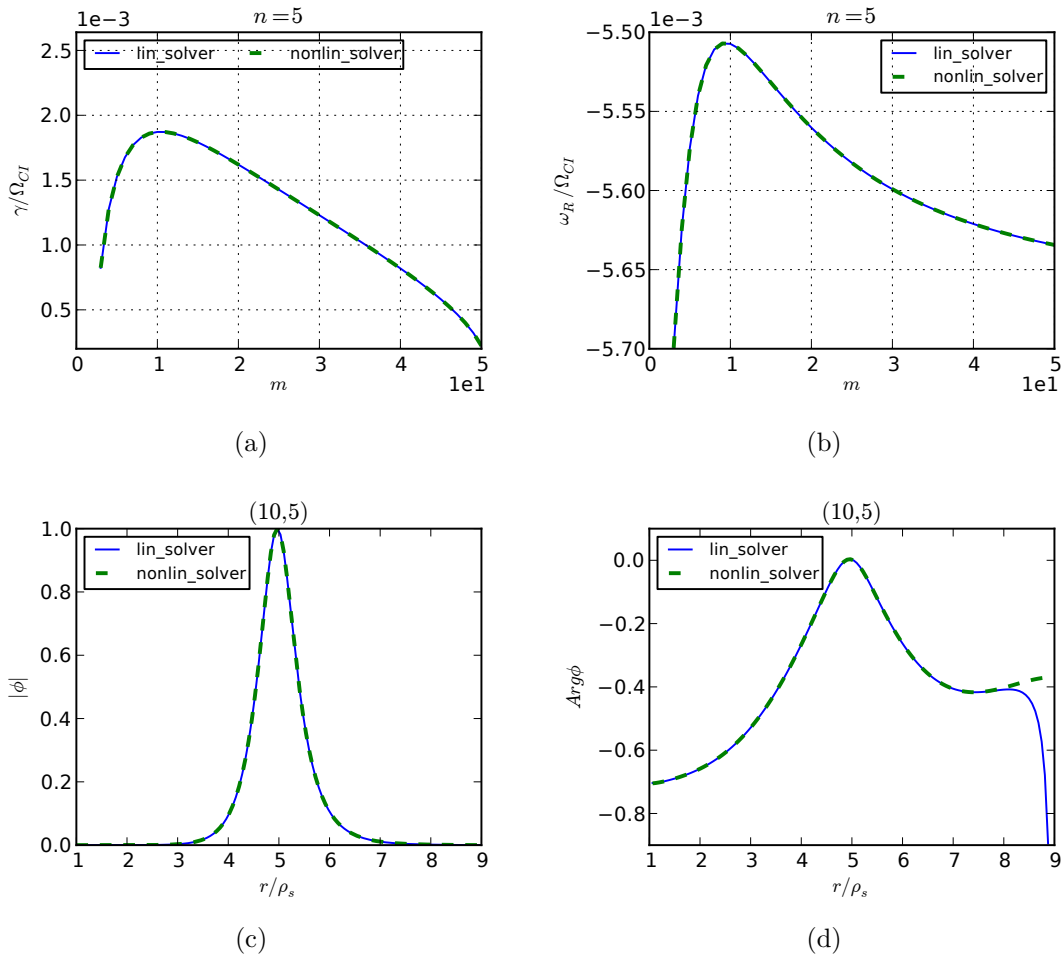


FIGURE 3.5 – Cas SMALL : comparaison des solveurs linéaire et non-linéaire sur les taux de croissance (a), fréquences (b), module (c) et argument (d) de l'enveloppe radiale du mode (10, 5)

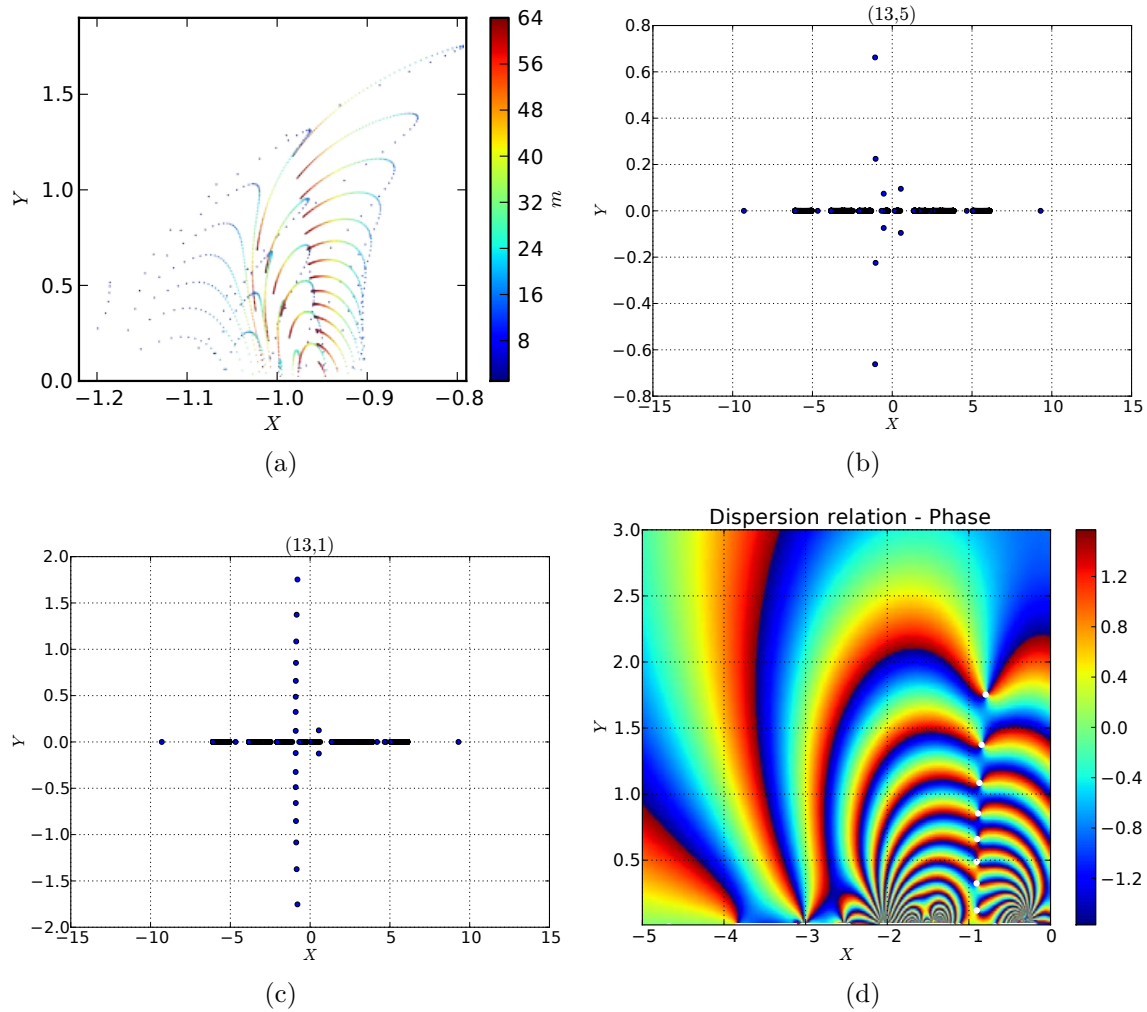


FIGURE 3.6 – Cas BIG : (a) Plan rapproché sur le spectre complet (tous couples  $(m, n)$  confondus) dans la région d'intérêt du plan complexe normalisé  $X + iY = \frac{\omega}{nk_{\parallel}}$  ; (b) spectre du mode le plus instable  $(13, 5)$  ; (c) spectre du mode  $(13, 1)$  ; (d) argument de la relation de dispersion non-linéaire pour le mode  $(13, 1)$ . Les valeurs propres obtenues par le solveur linéaire sont indiquées par des disques blancs

Cas	Mode	$\gamma_{lin}$	$\gamma_{QL}$	$\delta\gamma$	$\omega_{R,lin}$	$\omega_{R,QL}$	$\delta\omega_R$
SMALL	(6,3)	1.5883	1.6283	2.5 %	-3.186	-3.1447	-1.3 %
SMALL	(10,5)	1.8567	1.9142	3.1 %	-5.214	-5.3461	2.5 %
MEDIUM	(6,3)	4.4897	4.5756	1.9 %	-10.5845	-10.6921	1.0 %
MEDIUM	(10,3)	5.2086	5.2366	0.5 %	-10.0941	-10.0632	-0.3 %
BIG	(6,3)	2.6241	2.6407	0.6 %	-3.2542	-3.1447	-3.4 %
BIG	(13,5)	3.3111	3.3014	-0.3 %	-5.3687	-5.3461	-0.4 %

TABLE 3.4 – Comparaison croisée entre résultats du code spectral linéaire et du code quasi-linéaire forcé; les taux de croissance et fréquences sont normalisés à  $10^{-3}\Omega_{CI}$ ;  $\delta$  indique un écart relatif; la plage temporelle d'intégration du code quasi-linéaire est  $[0, 10000\Omega_{CI}^{-1}]$  avec un pas  $\Delta_t = 20\Omega_{CI}^{-1}$

### 3.2.4 Comparaison croisée avec le modèle quasi-linéaire

Une fois obtenu une collection de modes propres pour une situation d'équilibre donnée, nous allons vérifier la consistance des données spectrales obtenues par intégration directe en temps du modèle linéaire. Il suffit pour cela d'utiliser le code implémentant le modèle quasi-linéaire, dans lequel les valeurs des champs moyens  $(0, 0)$  sont forcées à leurs valeurs d'équilibre. L'état initial du système est obtenu en ajoutant aux champs d'équilibre une combinaison linéaire arbitraire de modes propres instables. Pour chaque couple  $(m, n)$ , seul le mode propre le plus instable est sélectionné. L'objectif de cette démarche est double : d'une part, nous pouvons obtenir une phase linéaire non bornée en temps, puisqu'aucun mécanisme de saturation n'intervient. Nous pouvons en conséquence estimer les taux de croissance et surtout les fréquences de manière précise. D'autre part, nous pouvons vérifier la stabilité et la précision du schéma d'intégration en temps de manière directe. Notons que le schéma étant explicite, la condition de stabilité (dite A-stabilité) peut s'obtenir directement à partir du spectre complet du problème linéaire ( $\Delta t|\omega|_{max} \leq C$ , où  $\Delta t$  est le pas de temps,  $|\omega|_{max}$  est la valeur propre réelle de plus grand module, et  $C$  une constante qui dans le cas du schéma de Runge-Kutta utilisé vaut environ 3). Nous avons cependant besoin d'évaluer la précision du schéma avec des pas de temps du même ordre que ceux qui nous seront imposées lors des comparaisons croisées avec le code non-linéaire, est qui sont de l'ordre de  $10\Omega_{CI}^{-1}$ .

Les taux de croissance pour le code quasi-linéaire sont obtenus par régression logarithmique sur des quantités globales ( $\|\phi\|_2$ ,  $\|\phi\|_\infty$ ) et locales ( $|\phi|(r_0)$ ). Les fréquences  $\omega_R$  sont obtenues par Transformée de Fourier Rapide (FFT) sur le signal temporel local  $\cos(\arg(\phi(r_0, t)))$ . Les résultats numériques font apparaître un bon accord entre les valeurs des deux modèles, avec des erreurs relatives de  $10^{-3}$  à  $10^{-2}$  (voir table 3.4). Les caractéristiques géométriques du mode sont également bien préservées. L'enveloppe subit une légère distorsion durant la phase transitoire initiale puis se cale sur celle du mode propre linéaire. Le bon accord rendant l'évaluation visuelle de l'écart entre les deux modèles difficile, l'adéquation des enveloppes est analysée quantitativement en suivant l'évolution temporelle de  $\|\frac{\phi_{ql}}{\|\phi_{ql}\|_\infty} - \frac{\phi_{lin}}{\|\phi_{lin}\|_\infty}\|_\infty$ , et pour les modes bien localisés, celle de l'index radial de l'enveloppe discrétisée ainsi que des premiers moments géométriques qui permettent d'estimer la position du maximum et la largeur du mode.

L'accord entre les deux codes est à nouveau satisfaisant. Les erreurs relatives entre les paramètres caractéristiques de centrage et largeur de mode obtenus pour chacun des deux modèles sont de l'ordre de  $10^{-3}$ . Les écarts absolus restent dans tous les cas inférieurs au pas de la grille radiale. A la suite d'une légère distorsion de l'enveloppe

durant le régime transitoire, l'enveloppe radiale obtenue par le code intégré en temps se stabilise, avec un maximum sur le domaine radial de l'erreur relative de quelques pourcents au plus.

### 3.2.5 Comparaison avec les modèles fluides et cinétiques

La consistance des deux méthodes de résolution du problème spectral ayant été établie dans le cas du modèle multi-water-bag, nous pouvons maintenant entreprendre une comparaison avec des modèles qui adoptent une représentation différente de la dynamique ionique et en conséquence une forme différente pour fonction de réponse en densité  $\tilde{n}_i(\omega)$ . Le premier modèle, qui ne sera abordé que succinctement, est un modèle fluide à 3 moments, avec fermeture adiabatique. Il a été choisi en raison de sa simplicité et ne constitue pas en conséquence un cas représentatif de l'ensemble des modèles fluides. Il s'agit plutôt d'un modèle minimal, qui permet d'apprécier la robustesse des caractéristiques spectrales obtenues.

Le second modèle, qui fait office de modèle de référence, est le modèle cinétique continu. Une précision s'impose ici : du point de vue de l'implémentation numérique, aucun modèle n'est continu. L'intégration numérique en vitesse parallèle nécessite toujours une forme de formule de quadrature. Dans le cas MWB, cette quadrature s'obtient par la somme sur les contours de la distribution multi-water-bag. Dans le cas cinétique "continu", elle s'effectue, de manière implicite, par l'algorithme responsable du calcul de la fonction de Fried et Conte, ou fonction de dispersion plasma, et qui revient au calcul de la fonction erreur complexe. La grande précision de ce calcul nous permet, en regard de la faible discrétisation offerte par le modèle Multi-Water-Bag, d'identifier à toutes fins pratiques les résultats obtenus par l'implémentation du modèle cinétique continu à ceux du modèle exact.

Les comparaisons ont été effectuées pour les trois cas test de référence. Des distributions multi-water-bag ont été générées pour un nombre de bags variant de  $N = 4$  à  $N = 10$  à partir des deux types de jeux de noeuds initiaux évoqués précédemment.

#### Comparaison des fréquences et taux de croissance

De l'analyse des taux de croissances et fréquences respectives des divers modèles, ressortent deux observations très générales. D'une part, les écarts relatifs entre modèles sur les fréquences  $\omega_r$  tendent à être inférieurs à ceux observés sur les taux de croissance. D'autre part, considérant maintenant l'évolution de ces écarts relatifs dans le plan spectral  $(m, n)$ , on observe une faible variabilité de ces derniers avec  $m$  pour  $n$  fixé, et une dépendance en  $n$  croissante à  $m$  fixé. Les résultats tendent à converger pour les faibles valeurs de  $n$  (limite fluide), les différences apparaissant lorsque  $n$  croît (voir Figure 3.12). Cette observation est en accord avec l'analyse présentée section 3.2.2 de l'influence du nombre et de la position des contours sur les caractéristiques spectrales de l'instabilité : les différents modèles tendent à converger pour les grandes valeurs du taux de croissance normalisé  $Y = \gamma(n)/nk_{\parallel}c_s$ , les différences liées aux spécificités de chaque modèle apparaissant lorsque  $Y$  diminue.

Il en résulte que pour la gamme de distributions multi-water-bag testées, aucun schéma de convergence vers le modèle cinétique continue ne peut se dégager, quand bien même l'accord peut dans certain cas sembler convenable. Les contraintes de génération de la distribution empêchent une nette augmentation de la résolution en vitesse parallèle avec le nombre de bags. La variabilité induite par la position des contours à  $N$  fixé peut

dans ce cas être supérieure à celle obtenue en variant  $N$  (voir Figure 3.8). Il apparaît que la combinaison du critère d'équivalence au sens des moments et de la méthode de sélection des noeuds employés pour la construction des distribution multi-water-bag ne sont pas suffisants pour induire une nette décroissance de l'écart entre modèle water-bag et modèle continu avec  $N$ .

Il peut être opportun à ce point de la discussion de se demander si un mode de calcul des paramètres water-bag permettant une convergence optimale des spectres pourrait être utilisé. Dans la mesure où nous recherchons à établir un accord optimal entre les spectres des opérateurs intervenant dans le problème aux valeurs propres pour chacun des modèles, on pourrait définir la distance à minimiser à partir de tout ou partie de ces spectres, ou des opérateurs eux-mêmes. La première stratégie est d'un intérêt limité : en l'absence d'expression explicite de la solution cible correspondant au problème continu, elle nécessiterait la résolution complète de ce dernier pour optimiser les paramètres du problème réduit. La seconde stratégie, ne faisant appel qu'aux données d'équilibre, semble a priori plus intéressante. Les opérateurs correspondant à chacun des modèles ayant la même forme du point de vue différentiel, il s'agirait de minimiser une distance entre les fonctions de réponse en densité  $F(r, m, n, \omega)$  sur un sous ensemble convenablement choisi de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{C}$ . Il est clair que le gain que l'on peut espérer d'une telle procédure se ferait au prix d'une perte de la généralité de la méthode.

L'attention portée dans l'analyse précédente aux divergences observées entre le modèle multi-water-bag et le modèle cinétique continu ne doit cependant pas masquer le fait qu'un accord remarquable, relativement à la faiblesse de la résolution en vitesse parallèle, est observée sur une partie du spectre. Pour les "basses" valeurs de  $n$  (à savoir les grandes valeurs de  $Y$ ) l'accord est excellent et reste convenable dans la zone la plus instable du plan spectral. Les divergences apparaissent dans la zone de coupure supérieure en  $n$ . Les erreurs relatives sur les taux de croissance varient de moins de 1% à quelques % dans la zone d'accord. L'erreur sur la fréquence de coupure parallèle haute est typiquement de quelques (0,1,2)  $k_{\parallel}$  mais peut parfois atteindre 5 à 6 dans le pire des cas.

### Comparaison des enveloppes des modes propres

Dans les cas étudiés, pour lesquels la zone de piquage des gradients est bien localisée, la géométrie de l'enveloppe des solutions les plus instables est déterminée essentiellement par

- les conditions aux limites (lorsque  $a$  est suffisamment petit)
- le terme axifuge  $(\frac{m}{r})^2$  qui conditionne le comportement de la solution pour  $r \rightarrow r_{min}$ .
- le potentiel de Liouville  $Q(r, \omega)$  dans la zone de gradient

Les modes les plus instables sont caractérisés par une enveloppe en module unimodale (un seul lobe) approximativement centrée sur la zone de gradient. Cette géométrie est robuste par changement du modèle. Les enveloppes en module présentent de légères distorsion de courbure. Les différences sont plus visibles sur les profils de phase (Figure 3.9).

### 3.2.6 Comparaison avec une méthode d'ansatz

En tenant compte de la robustesse observée dans la géométrie des solutions dans le cas où l'équilibre se caractérise par une unique zone instable bien localisée, il peut

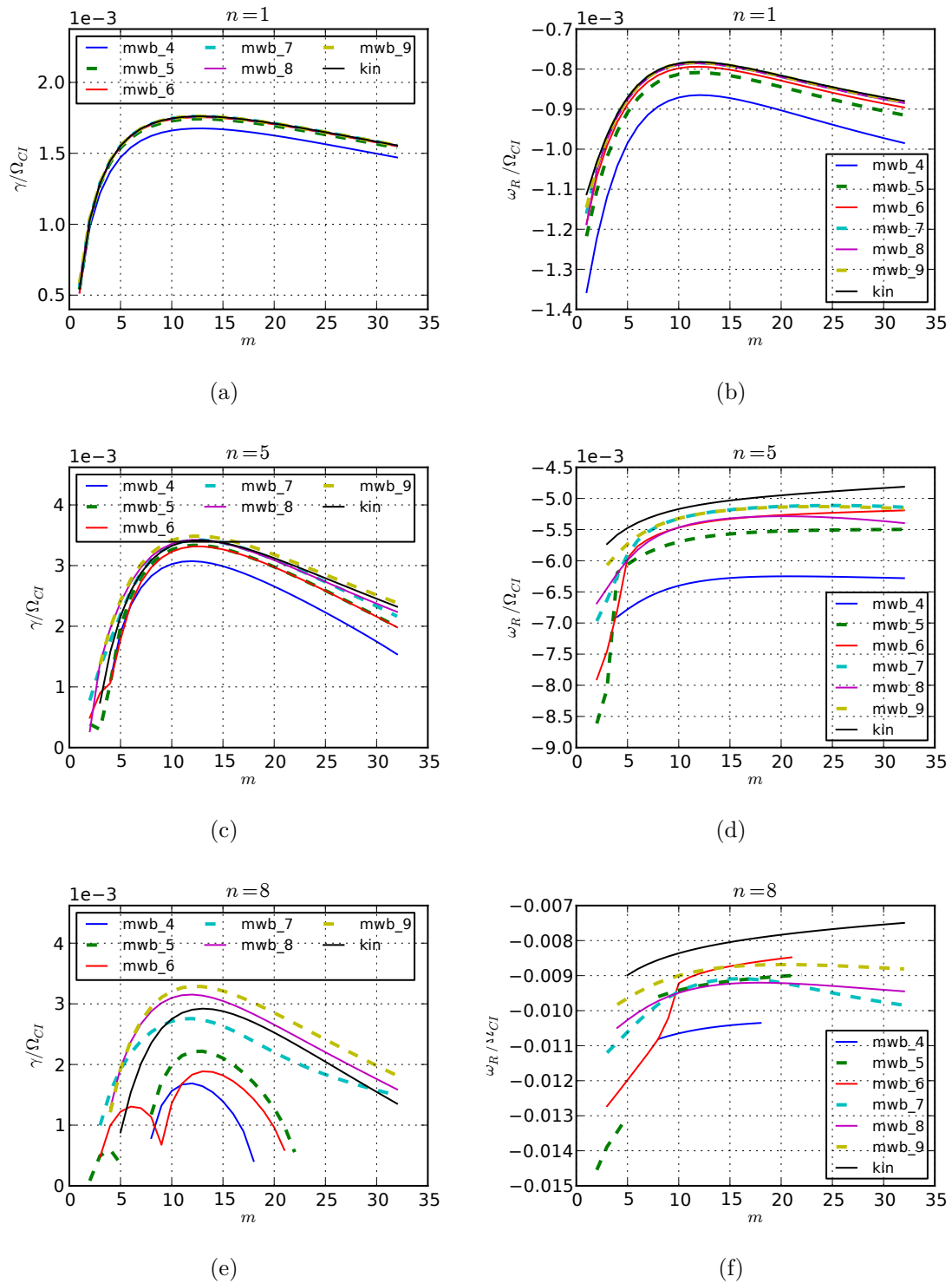
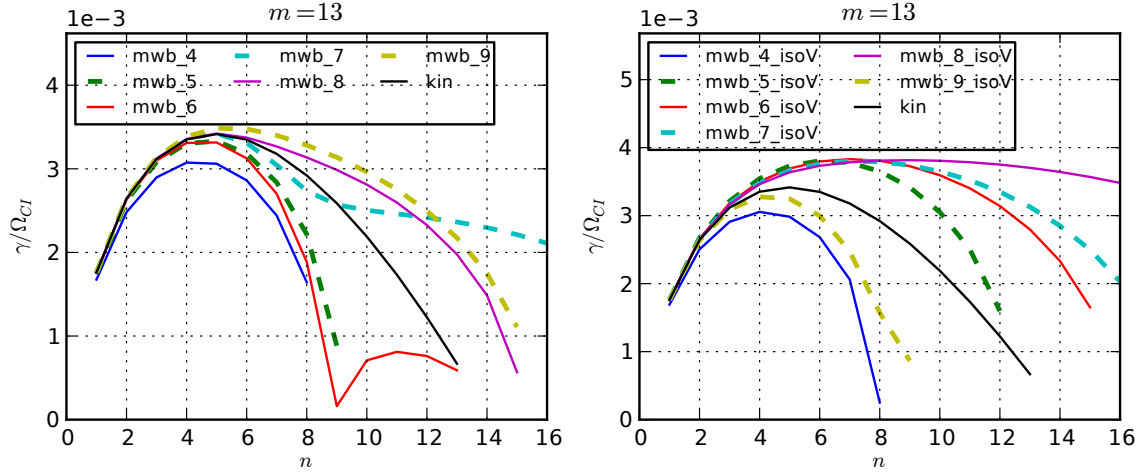
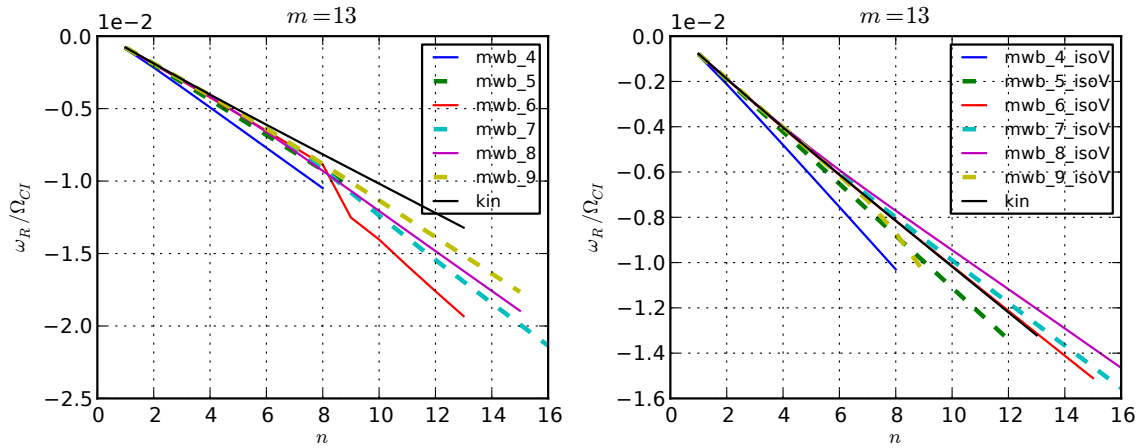


FIGURE 3.7 – Cas BIG ; Dépendance en  $m$  pour trois valeurs de  $n$  des taux de croissance (a)(c)(e) et fréquences (b)(d)(f) pour des distributions multi-water-bag à noeuds optimisant l'extension radiale (mwb\_N) et le modèle cinétique continu (kin).

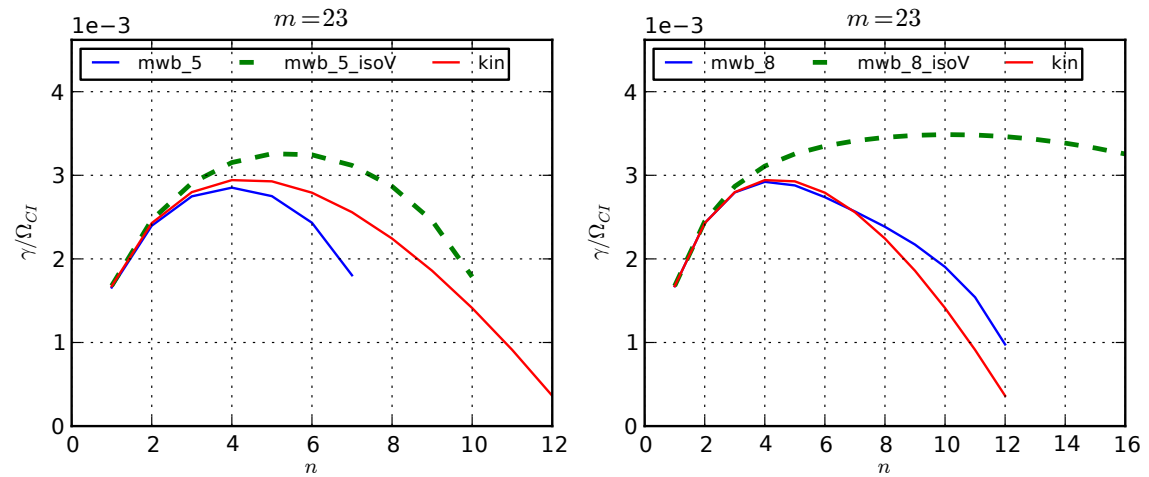




(a) Taux de croissance



(b) Fréquences



(c) influence de l'échantillonnage en  $v_{\parallel}$

FIGURE 3.8 – Cas BIG : Dépendance en  $n$  des taux de croissance (a) et fréquences (b) pour des distributions multi-water-bag à noeuds optimisant l'extension radiale (mwb\_N), à noeuds iso-répartis (mwb\_N\_isoV) et le modèle cinétique continu (kin) ; Influence de la distribution des contours des bags (c).

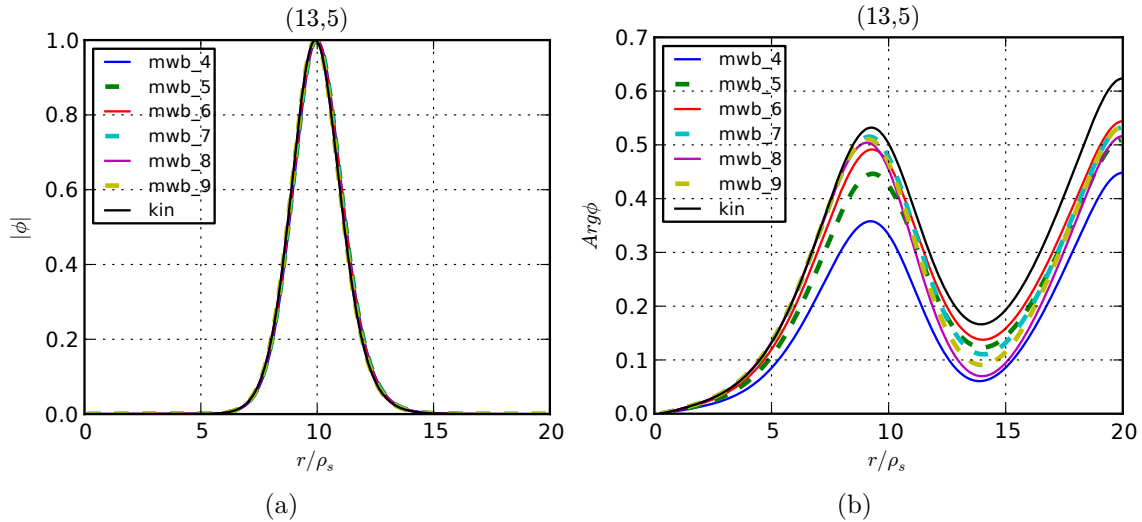


FIGURE 3.9 – Cas BIG : Module et phase de l'enveloppe radiale du mode le plus instable (13, 5).

être tentant de recourir à une méthode d'ansatz pour résoudre le problème linéaire de manière rapide. En choisissant un ansatz raisonnable, c'est à dire concordant avec l'observation des solutions pour un certain nombre de cas, pour le potentiel électrostatique  $\phi$ , on obtient une relation de dispersion locale dans la zone de gradient. Cette approche a notamment été utilisée dans [31], avec le code KINEZERO. Afin de permettre les comparaisons, nous adoptons ici le même ansatz, de la forme

$$\phi(r) = \exp \left[ - \left( \frac{r - r_0}{\frac{\Delta r_n}{\Delta r_T}} \right)^2 \right], \quad (3.2)$$

soit une gaussienne centrée sur la zone du maximum en  $\eta_i$ . Une remarque s'impose sur les propriétés de ce choix. Pour obtenir une relation de dispersion locale en  $r_0$  à partir du problème aux valeurs propres, il faut fixer les valeurs de deux grandeurs complexes  $d_r^2 \phi(r_0)$  and  $d_r \phi(r_0)$ , à une constante multiplicative arbitraire près. L'ansatz purement réel choisi précédemment revient à annuler  $d_r \phi(r_0)$  et  $\Im d_r^2 \phi(r_0)$  et à fixer la courbure de la partie réelle du mode.

La comparaison des résultats de CYLGYR pour le modèle cinétique continu avec ceux donnés dans [31] se fait en deux temps. La comparaison est effectuée pour le cas test MEDIUM, dont les paramètres sont identiques à ceux de [31]. Les codes diffèrent à la fois par le solveur utilisé et le caractère local (ansatz) ou global du problème résolu, toute comparaison directe serait de fait ambiguë. En conséquence, une première comparaison est effectuée sur les résultats de la méthode d'ansatz. On peut observer un bon accord entre les deux solveurs pour cette méthode, qui nous permet de vérifier que le solveur de CYLGYR n'introduit pas d'artefacts significatifs. Nous pouvons maintenant évaluer l'écart entre les résultats obtenus par la méthode d'ansatz et la résolution exacte du problème différentiel radial. Les erreurs relatives observées pour ce cas entre la méthode d'ansatz et la méthode globale varient de 5% à 20%. Comme on peut le voir Figure 3.10 (c), malgré la bonne coïncidence globale des modules des enveloppes, la sensibilité de la solution à la fois à la courbure locale du module de l'enveloppe et la

Modèle	$\langle t_{eig} \rangle (s)$
fluide	0,419
MWB 4	0,833
MWB 6	1,461
MWB 8	2,351
MWB 10	3,337
kin	84,379
fluide (ansatz )	0,0116
kin (ansatz)	1,349

TABLE 3.5 – Cas MEDIUM ; solveur non-linéaire ; temps moyen par mode propre  $\langle t_{eig} \rangle$  sur Intel XEON 3680 pour une carte spectrale de  $24 \times 8 = 192$  modes ;  $N_r = 128$  ; précision requise dans le plan complexe  $\epsilon = 10^{-5}nk_{\parallel}$ .

non-nullité de la phase entraînent des différences notables pour les taux de croissance obtenus.

Bien que la méthode d'ansatz présente des avantages certains en terme de temps de calcul (voir section 3.2.7), la sensibilité des résultats au choix de l'ansatz pour les cas testés justifie amplement le coût de la résolution du problème global.

### 3.2.7 Coût numérique - Parallélisation

Le coût en temps du solveur non-linéaire varie linéairement avec la résolution radiale, de même qu'avec le nombre de bags lorsque le modèle water-bag est utilisé. Pour donner un ordre de grandeur, sur un processeur Intel Xeon 3680, le temps moyen de résolution est de  $0.2ms/(N \times N_r \times n_{modes})$  pour une précision  $\epsilon = 10^{-5}nk_{\parallel}$  en  $\omega$  et une borne inférieure du domaine complexe  $\gamma_{min} = 10^{-2}nk_{\parallel}$ . Si l'on affine la précision requise à  $10^{-8}$ , le temps de calcul peut augmenter d'un facteur 20 à 30 selon les cas. Il est important de noter que ces temps peuvent sensiblement varier en fonction de la zone du plan complexe où résident les solutions, la convergence des intégrales de contour étant plus lente lorsque l'on se rapproche de l'axe réel.

Le schéma de parallélisation statique implémenté est trivial et résulte de l'indépendance des problèmes relatifs aux divers couples  $(m, n)$  du plan spectral. Il faut noter que les tâches correspondant à chacun des couples  $(m, n)$  pouvant avoir des durées sensiblement différentes (en raison de la variation de  $\gamma$ ), la parallélisation complète est largement sous-optimale en terme d'utilisation des ressources. Pour une utilisation modérée, typiquement le balayage d'une centaine d'équilibres avec 100 – 400 couples spectraux  $(m, n)$ , cette perte d'efficacité ne justifie pas le développement d'un schéma dynamique de type client-serveur.

Le coût du solveur linéaire est contrôlé par le coût  $c$  de la factorisation QZ implémentée dans LAPACK, le coût de construction de l'opérateur étant comparativement négligeable. Le coût de la factorisation QZ suit une loi cubique  $c \propto T^3 = (2N * (N_r - 2))^3$  à la fois en temps de calcul et espace mémoire. Sa vitesse d'exécution est limitée par la bande passante mémoire dès dépassement de la taille du cache local. S'il s'avère inutilement coûteux lorsque l'on ne recherche que les modes les plus instables, il offre cependant la possibilité d'examiner l'ensemble du spectre du problème linéaire, afin notamment de vérifier la présence de racines groupées qui rendraient caduque la sélection

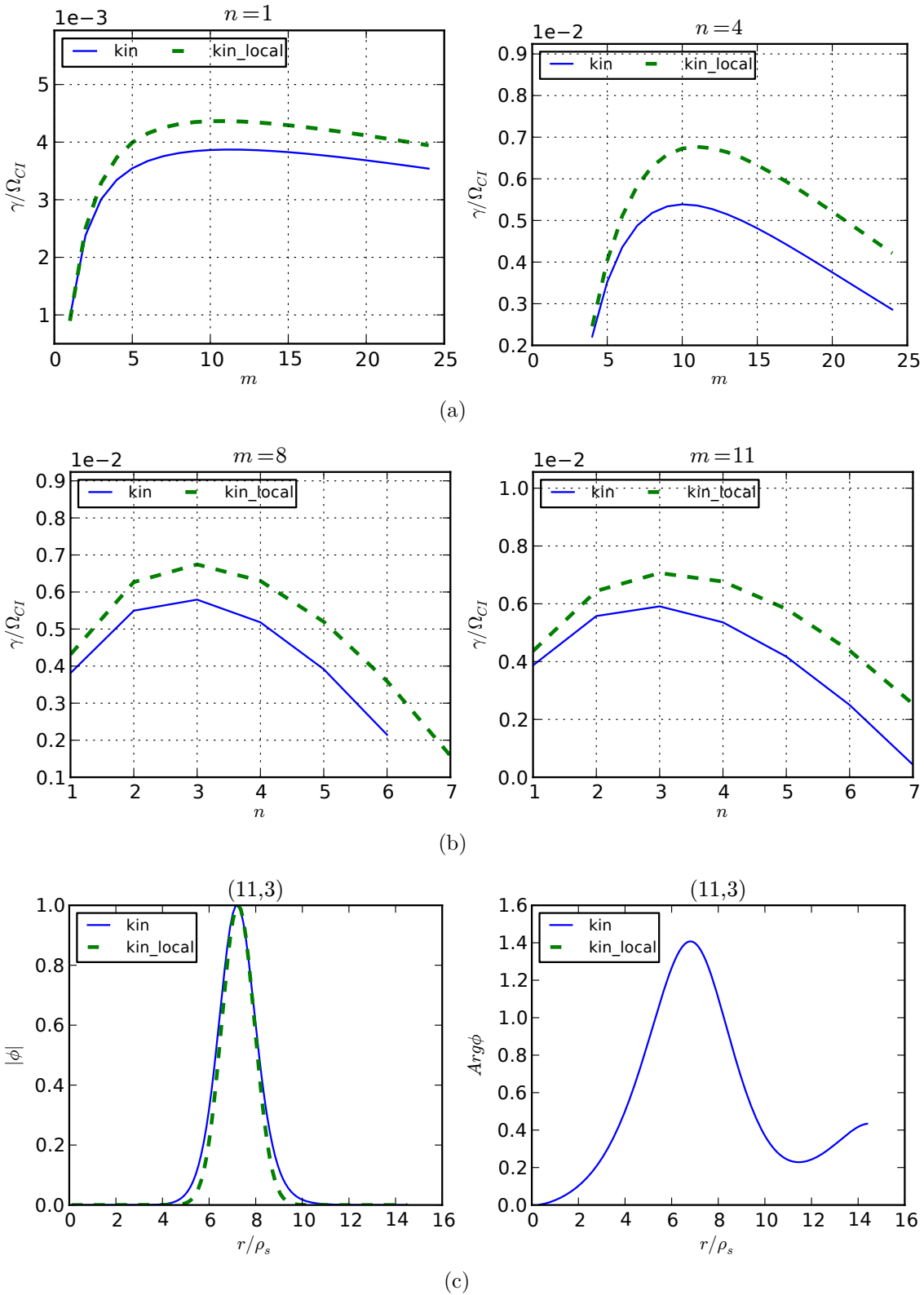


FIGURE 3.10 – Cas test MEDIUM : Comparaison des résultats de la méthode d'ansatz et de la méthode globale pour le modèle cinétique continu; taux de croissance (a)(b), profil radiaux en module et phase (c) - la phase pour la méthode d'ansatz est identiquement nulle sur le domaine radial.

tion spectrale effectuée lorsque l'on ne considère que le mode le plus instable pour un couple  $(m, n)$ .

### 3.3 Caractérisation spectrale des modes instables

#### 3.3.1 Structure du spectre dans le plan complexe

Examinons tout d'abord l'allure générale du spectre complet du problème discrétisé fourni par le solveur linéaire pour un couple de paramètres spectraux  $(m, n)$  donné. Il se compose d'une part d'une écrasante majorité de modes stables, formant un quasi-continuum par morceaux sur l'axe réel, et d'autre part d'un petit nombre de modes instables, représentant typiquement au plus 2% dans le meilleur des cas. Ce rapport n'est évidemment qu'indicatif, l'augmentation de la résolution radiale tendant à enrichir la partie stable du spectre.

L'enveloppe convexe du spectre dans le plan complexe présente une forte anisotropie, l'étendue en fréquence dominant largement l'étendue en taux de croissance, avec des rapports d'aspects typiques  $\max |\omega_R| \propto 10^2 \max |\gamma|$ .

Ces deux caractéristiques rendent hasardeuse l'analyse de l'instabilité au voisinage de la stabilité marginale en raison de la dégradation du conditionnement des valeurs propres. En outre, la signification que l'on peut donner aux modes instables dont le taux de croissance est très inférieur au taux maximal est douteuse. Si l'on considère un équilibre initialement perturbé par une combinaison de modes propres (pour un couple  $(m, n)$ ), les contributions des modes stables et des modes les moins instables sont rapidement dominées par celles des modes les plus instables dans la phase de croissance linéaire, à l'issue de laquelle l'effet des non-linéarités va perturber le spectre. Les modes les moins instables sont en conséquence saturés avant que de pouvoir contribuer de manière significative à la composante de Fourier  $(m, n)$  du champ turbulent. Dans le cas d'une situation de turbulence déjà développée, la situation est similaire : même en considérant une situation pour laquelle le couplage d'un mode de Fourier  $(m, n)$  avec le mode  $(0, 0)$  est dominant et que l'évolution temporelle du mode  $(0, 0)$  est suffisamment lente pour que l'analyse spectrale ait un sens, la distinction entre modes stables et quasi-stables est en pratique impossible. Dans la suite de l'analyse, les modes tels que  $\gamma/(nk_{\parallel}c_s) < 10^{-2}$  sont considérés comme stables.

#### Dépendances spectrales des modes les plus instables : fréquences

Une première caractérisation de l'instabilité s'obtient en examinant la dépendance en les nombres d'ondes  $(m, n)$  du mode le plus instable pour chaque couple  $(m, n)$ . L'observation de la variation du taux de croissance permet d'identifier une ou plusieurs zones d'instabilité dans le plan spectral  $(m, n)$ . Dans une grande majorité des cas testés, et pour des équilibres présentant un seul pic en  $\eta_i$ , la zone d'instabilité dans le plan spectral est unique et y définit un îlot d'instabilité (voir Figure 3.11). Les coupures hautes et basses en  $n$  sont abruptes (Figure 3.12 (a)), ainsi que la coupure basse en  $m$  (Figure 3.12 (c)). Le taux de croissance normalisé  $Y$  décroît toujours strictement avec  $n$ . Pour les grands nombres d'ondes poloidaux  $m$ , on observe une décroissance lente et quasi-affine du taux de croissance dans la zone centrale d'instabilité (Figures 3.12 (c) et (d)). Cette absence de coupure nette en  $m$ , et par extension en  $k_{\perp}$ , est caractéristique du modèle de dérive cinétique où le seul effet de rayon de Larmor fini pris en compte est

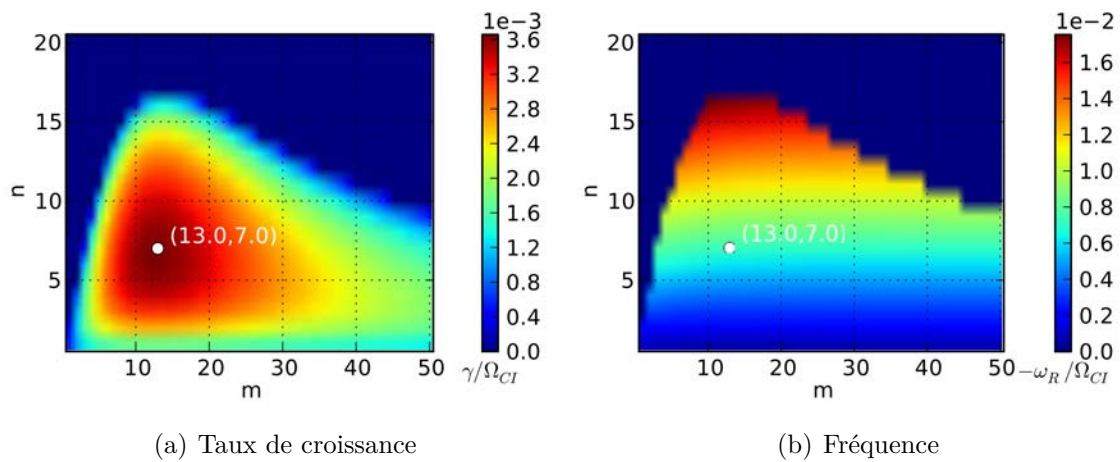


FIGURE 3.11 – Cas test BIG ;  $N = 10$  ; Cartes de taux de croissance et fréquence dans le plan spectral  $(m, n)$

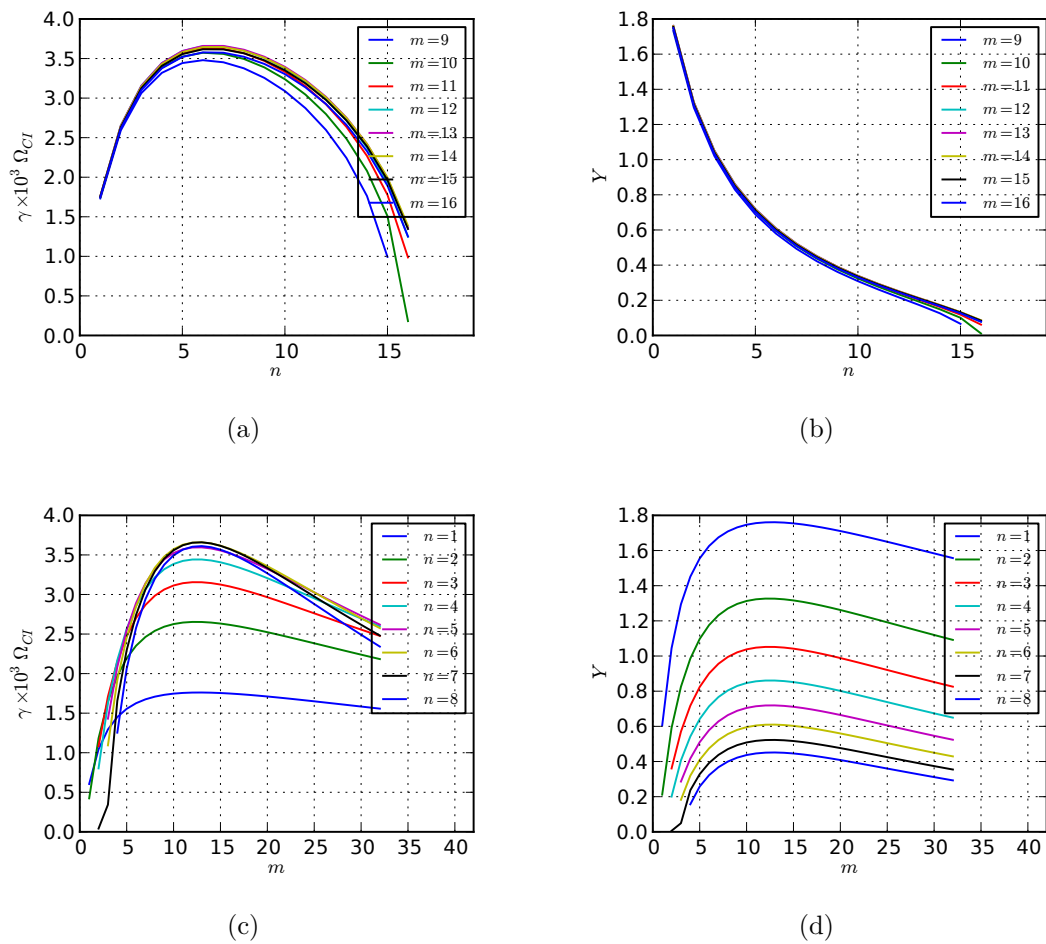


FIGURE 3.12 – Cas test BIG ;  $N = 10$  ; Dépendances en  $(m, n)$  des taux de croissance bruts  $\gamma$  et normalisés  $Y = \gamma / (nk_{\parallel} c_s)$

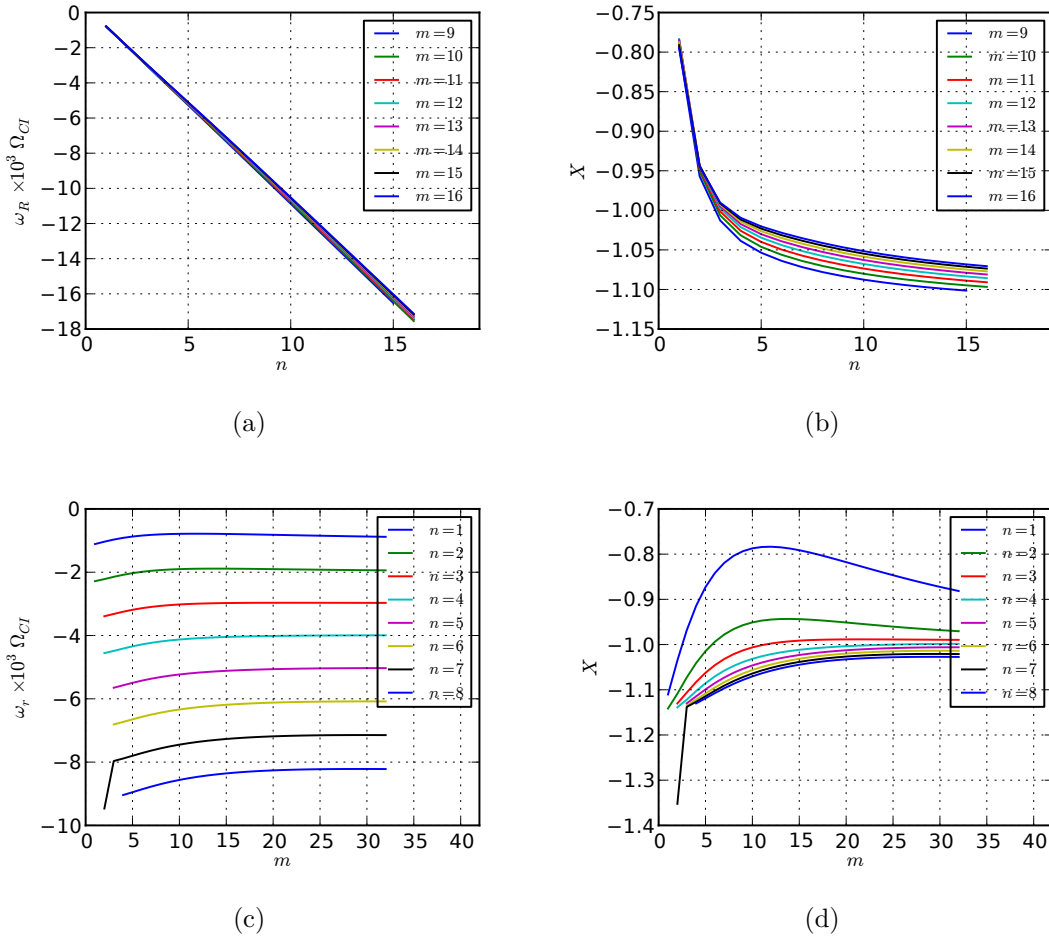


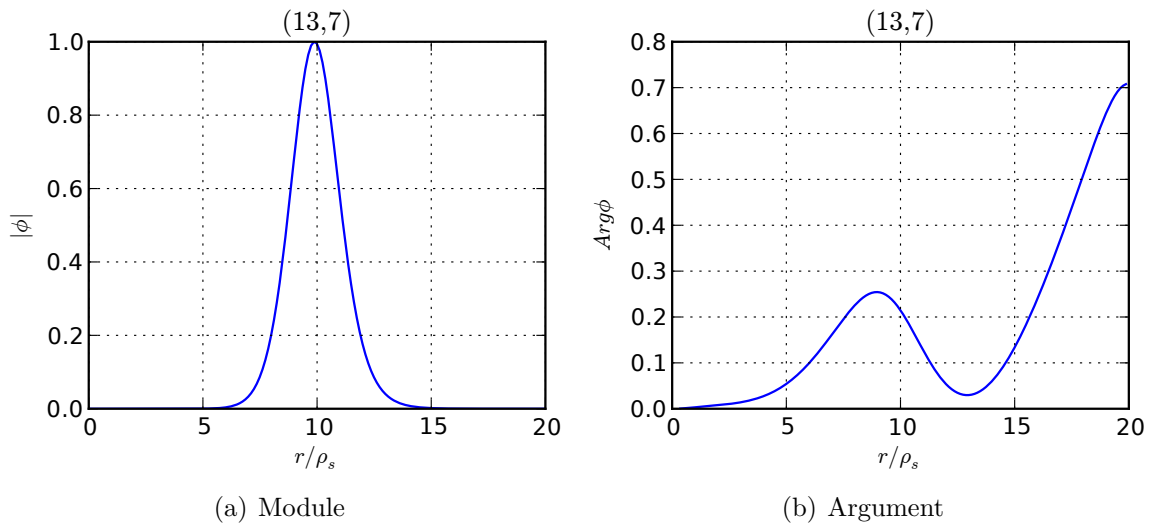
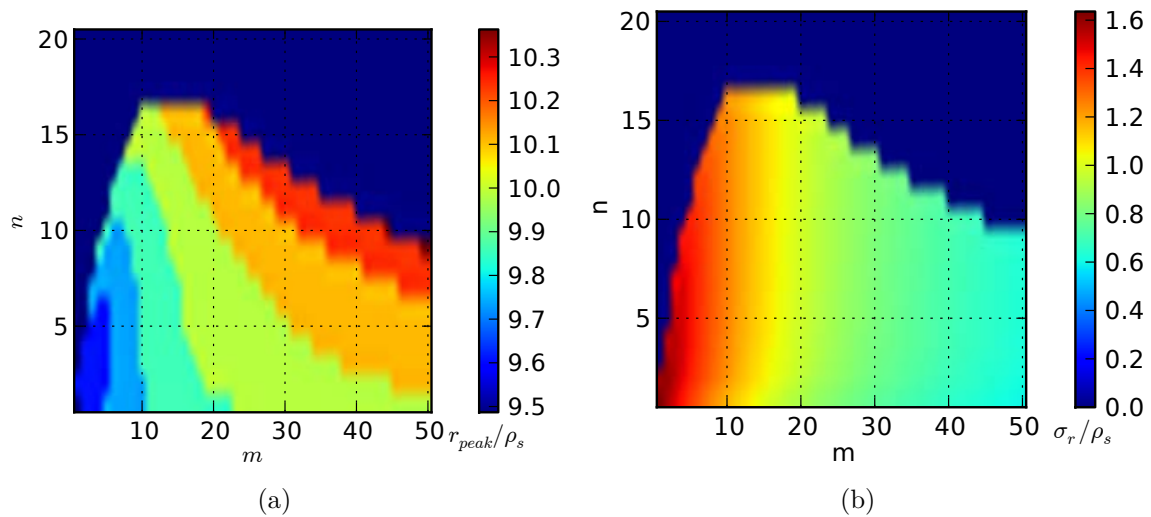
FIGURE 3.13 – Cas est BIG ;  $N = 10$  ; Dépendances en  $(m, n)$  des fréquences brutes  $\omega_R$  et normalisées  $X = \omega_R/(nk_{\parallel}c_s)$

la dérive de polarisation. Comme on le verra lors de l'étude de l'instabilité en géométrie torique, la prise en compte de la gyromoyenne, ou plus exactement de populations pour lesquelles  $\mu \neq 0$ , tend à borner le spectre en  $k_{\perp}$  dans l'intervalle  $0 < k_{\perp}\rho_i < 1$ .

La fréquence réelle  $\omega_R$ , quant à elle, est dominée par une dépendance linéaire en  $n$ , avec  $-\omega_R/(nk_{\parallel}c_s) \approx -1$ , traduisant le caractère acoustique de la propagation le long des lignes de champ (Figure 3.13(a) et (b)). L'excursion relative de  $\omega_R$  par rapport à  $-nk_{\parallel}c_s$  est typiquement de quelques pourcents et jusqu'à 10 – 20% pour les basses fréquences parallèles (Figure 3.13 (c) et (d)).

### Dépendances spectrales de la géométrie des modes les plus instables

Les enveloppes des modes instables sont unimodales en module et localisées dans la zone avoisinant le pic en  $\eta_i$  (Figure 3.14 (a)). La localisation est robuste aux variations dans le plan spectral  $(m, n)$ , comme on peut le voir Figure 3.15 (a), où l'on a représenté la position du maximum du module de l'enveloppe radiale. La géométrie particulièrement simple des modules des enveloppes permet une estimation de la largeur caractéristique du mode en calculant l'écart-quadratique moyen  $\sigma^2 = \int (r - \bar{r})^2 |\phi| dr$  ou l'inverse de la courbure au maximum  $d_r^2 |\phi|(r_{peak})$ . La largeur caractéristique est une

FIGURE 3.14 – Enveloppe radiale du mode (13,7) pour le cas test BIG avec  $N = 10$ FIGURE 3.15 – Position  $r_{peak}$  et largeur  $\sigma$  de l'enveloppe du mode dans le plan spectral



fonction décroissante de  $m$  à  $n$  constant (Figure 3.15 (b)). Pour les cas considérés (zone de gradient unique et assez étroite), et pour  $n$  fixe, l'inverse de la largeur de mode  $1/\sigma$  peut être modélisée convenablement par une dépendance parabolique en  $k_{\vartheta}(r_{peak})$  de la forme  $1/\sigma = c_0 + c_1 k_{\vartheta} + c_2 k_{\vartheta}^2$ . Ce modèle est compatible avec la dépendance directe en  $k_{\vartheta}$  du problème de Liouville (par substitution d'un ansatz gaussien centré en  $r_0$  dans (2.58)) si l'on néglige la dépendance en  $m$  de  $\omega$ . Il serait cependant abusif de vouloir le généraliser, en raison de la spécificité des cas-test envisagés, où la zone d'instabilité est très étroite.

Les variations de phase peuvent atteindre des niveaux non-négligeables sur le domaine radial. Les variations les plus abruptes apparaissent cependant dans les zones où le module du potentiel est faible ou bien dans des zones où la variation en module est dominante : la géométrie du mode est donc peu perturbée.

## 3.4 Dépendances paramétriques

### 3.4.1 Localisation des modes instables

Il convient maintenant de vérifier la corrélation, que nous avons admise jusqu'à présent, entre la localisation des modes les plus instables et celle de la zone de pic en  $\eta_i$ , caractéristique de la branche cylindrique de l'instabilité. Pour ce faire, on considère une série d'équilibre différents uniquement par la position de référence  $r_0$  du maximum de  $\eta_i$ , tous les autres paramètres étant maintenus constants. Considérons tout d'abord l'évolution en fonction de  $r_0$  des caractéristiques spectrales du mode le plus instable sur tout le plan spectral  $(m, n)$ . Le taux de croissance  $\gamma$  et la fréquence normalisée  $X$  du mode montrent une quasi-invariance par translation de la zone de gradient. La position du mode est fortement corrélée avec celle du maximum en  $\eta_i$ . Le nombre d'onde poloïdal évolue de manière à maintenir  $k_{\vartheta}(r_0)$  constant. Cette invariance spectrale peut être confirmée pour le reste du spectre en observant l'évolution des courbes  $f(n, m) = \gamma(n, k_{\vartheta}(r_0))$ . Comme on peut le voir Figure 3.16, à  $n$  fixé, les différentes courbes sont quasiment confondues, impliquant que  $f(n, m) \approx f(n)$ .

Dans l'analyse qui a précédé, seuls des équilibres possédant une unique zone de gradient fortement localisée ont été considérés. Ayant observé la corrélation en la localisation des modes les plus instables et le pic en  $\eta_i$ , il peut-être intéressant, pour vérifier le caractère local de l'instabilité, de construire un équilibre présentant plusieurs pics. Nous nous bornerons ici à considérer deux pics seulement. Les profils de densité et température correspondants prennent la forme d'escaliers à deux marches (Figure 3.17). Trois situations d'équilibre sont à prendre en compte : les deux premières sont caractérisées par un pic en  $\eta_i$  unique, respectivement situé en  $r_1 = 5\rho_s$  et  $r_2 = 15\rho_s$ . Dans la troisième les deux pics sont présents simultanément. Notons qu'on ne peut a priori définir strictement un morphisme de l'espace des états d'équilibre vers l'espace des spectres obtenus. Cela supposerait d'une part une définition précise d'une loi de composition des équilibres à laquelle devrait correspondre une loi de composition des spectres. On peut cependant observer si certaines propriétés des équilibres à un pic unique sont préservées dans le spectre de l'équilibre à deux pics. Pour ce faire, nous comparons la carte spectrale de taux de croissance  $\gamma_{1+2}$  de l'équilibre à deux pics (Figure 3.19) avec la carte construite à partir des maxima  $\max(\gamma_1, \gamma_2)$  des cartes individuelles des équi-

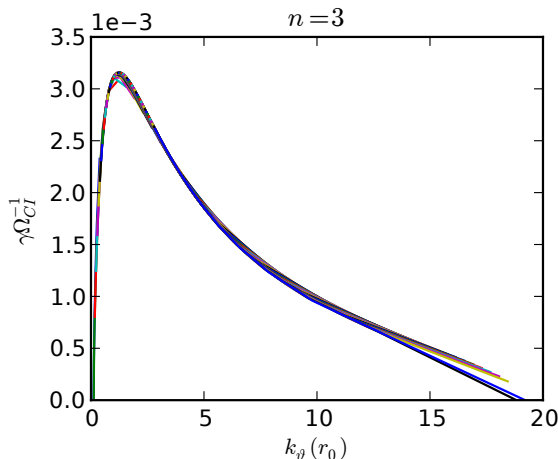


FIGURE 3.16 – Cas test BIG ; balayage sur la position  $r_0$  du pic en  $\eta_i$  ; superposition des taux de croissance en tant que fonction de  $k_{\vartheta}(r_0)$  pour les modes  $(m, 3)$ ,  $m \in [1, 50]$ .

libres à un pic (Figures 3.18(a) et (b)). L'association d'un mode à une zone de gradient particulière se fait lorsqu'elle est possible en examinant les paramètres de position et de largeur de mode (Figure 3.20).

On observe un léger effet déstabilisant de la combinaison des zones de gradient, l'enveloppe convexe de la zone d'instabilité dans le plan  $(m, n)$  étant légèrement plus étendue que celle de l'union des zones instables individuelles. Dans la situation considérée, où les deux pics sont assez éloignés, ce couplage est relativement faible et les taux de croissance de l'équilibre à deux pics sont proches des maxima des taux individuels. L'observation des paramètres de localisation confirme que les modes conservent leur individualités lors de la combinaison des équilibres. Sur la figures 3.20 (a)(b) apparaissent clairement deux zones distinctes de localisation du centre de l'enveloppe du mode correspondant aux deux zones de pic de gradients. Les enveloppes des modes les plus instables restent unimodales, se localisent sur l'une ou l'autre des zones de gradient, et coïncident étroitement avec les enveloppes correspondantes des équilibres à un pic. Un exemple de la transition de localisation sur chacune des zones est visible sur les figures 3.20 (c) et (d).

A l'intérieur de chaque zone la largeur caractéristique du mode évolue continûment avec  $m$  (Figure 3.20 (b)), comme observé précédemment pour les équilibres à pic de gradient unique (Figure 3.15). Ces observations confirment le caractère local de l'instabilité.

Notons cependant que ces observations n'excluent pas l'existence de modes à enveloppes multimodales, mais que ces derniers ne sont pas les plus instables dans le cas considéré. Cela se comprend aisément si l'on se réfère à l'invariance de  $k_{\vartheta}(r_0)$  observée lors de la translation de la zone de gradient. Dans l'équilibre à deux pics considéré, les valeurs de pic des gradients sont identiques et les fréquences diamagnétiques distinctes en raison de la monotonie de  $k_{\vartheta}$  avec  $r$ . Pour obtenir des modes à enveloppes multimodales très instables, ou du moins rendre la "compétition" entre les deux zones de gradient plus subtile, il faudrait compenser la variation en  $k_{\vartheta}$  par une modulation inverse des gradient de manière à ce que les fréquences diamagnétiques soient égales pour chacun des deux pics.

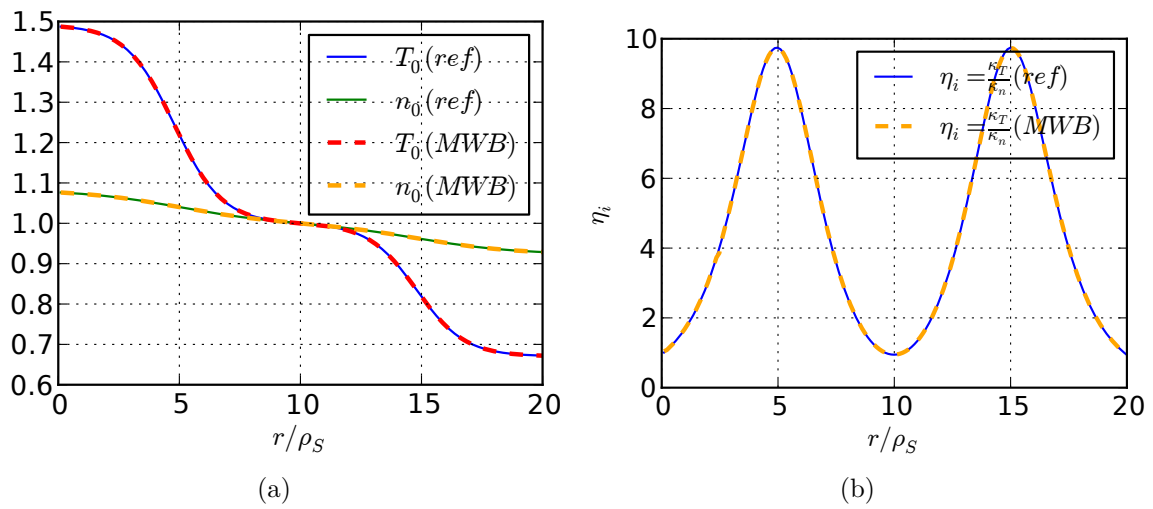


FIGURE 3.17 – Cas test BIG ; profils à deux zones de gradient ; densité et température (a) ;  $\eta_i$  (b)

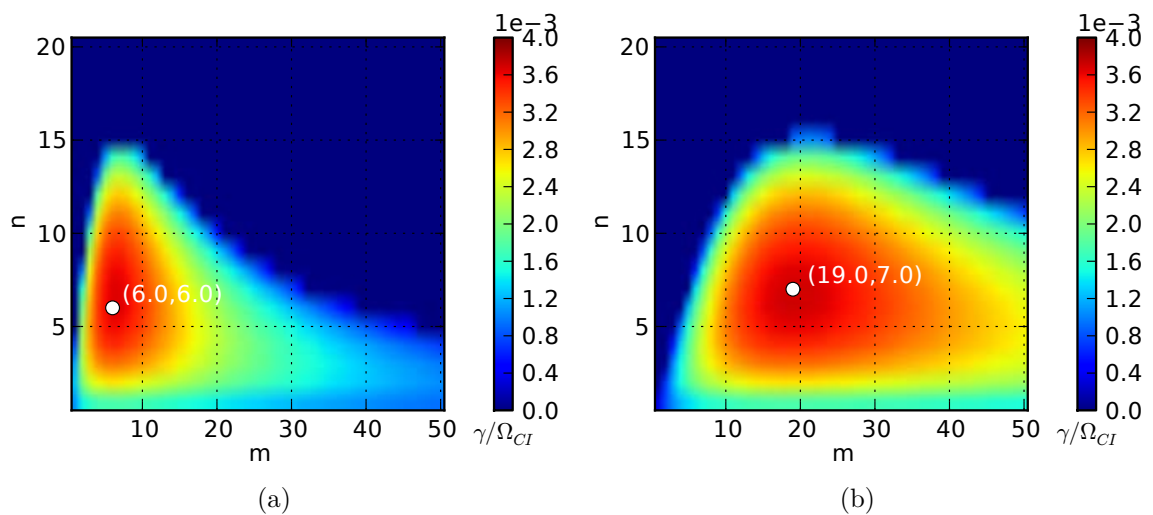


FIGURE 3.18 – Analyse de l'équilibre à deux pics en  $\eta_i$  ; cartes de taux de croissances pour chacun des équilibres à un pic

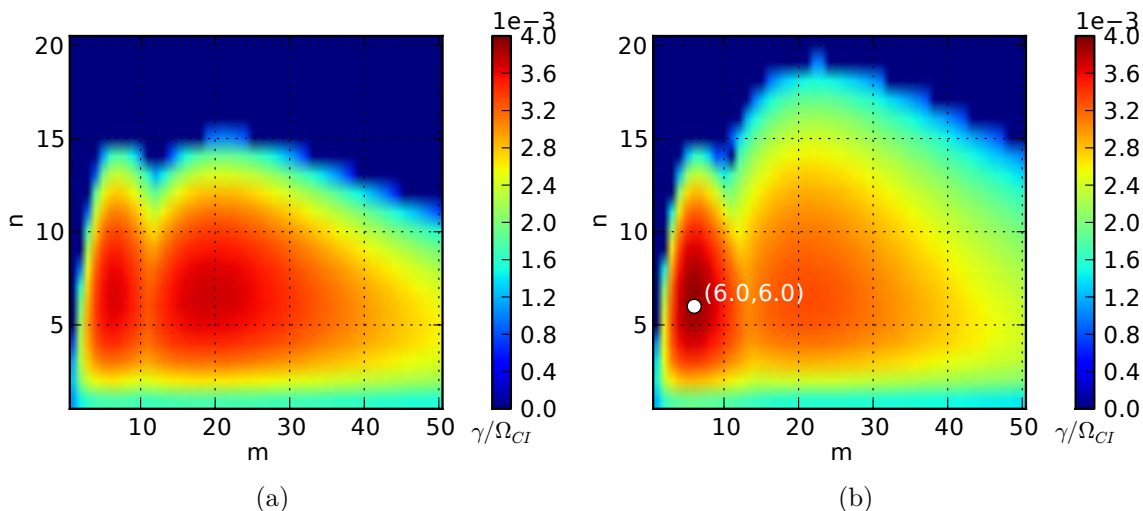


FIGURE 3.19 – Analyse de l'équilibre à deux pics en  $\eta_i$ ; maximum des taux de croisances des équilibres à un pic (a) et taux de croissance de l'équilibre à deux pics (b)

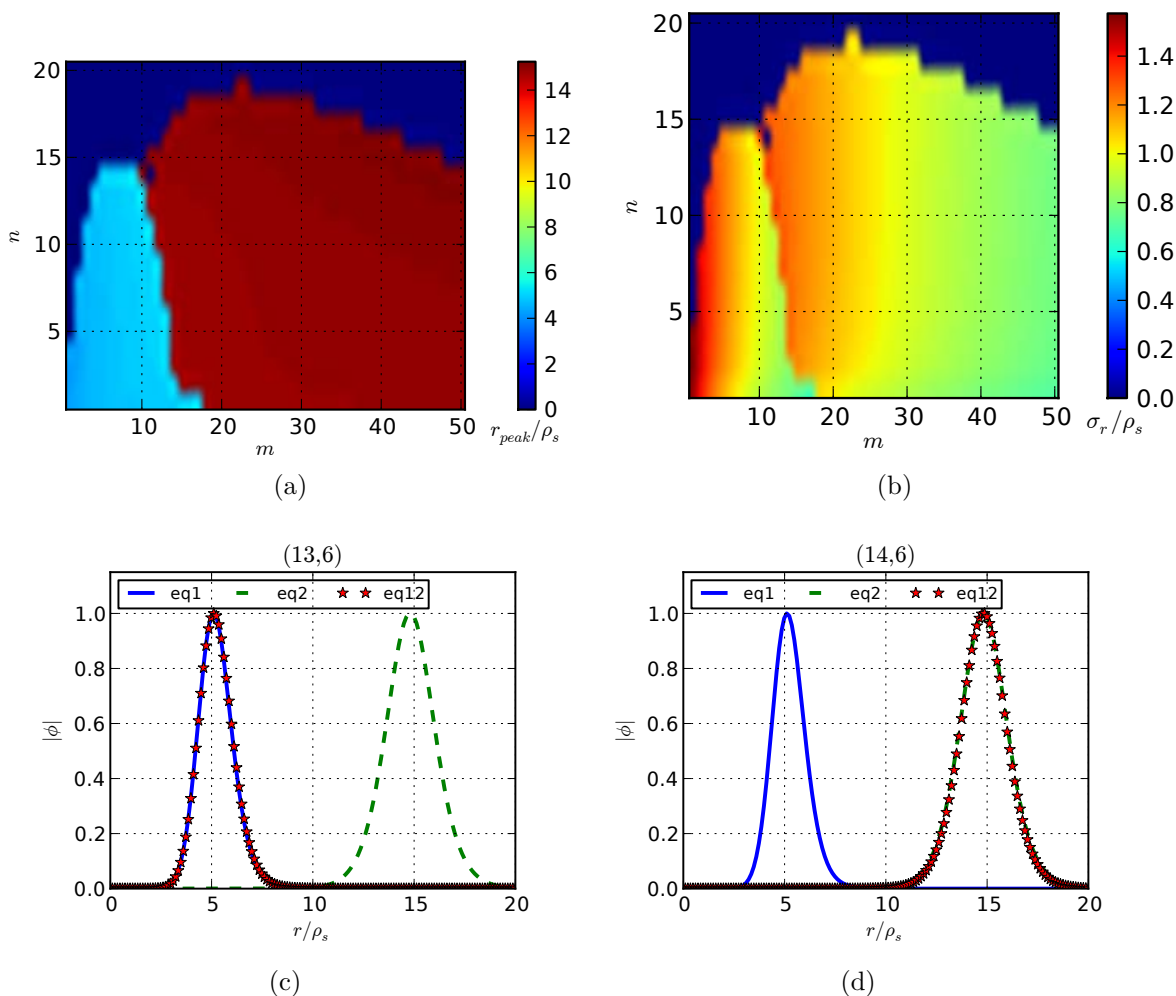


FIGURE 3.20 – Analyse de l'équilibre à deux pics en  $\eta_i$ ; localisation des modes les plus instables (a); largeur caractéristique  $\sigma$  (b); module de l'enveloppe radiale du mode (13,6) (c) et du mode (14,6) (d) pour chacun des équilibre à un pic ("eq1" et "eq2") et l'équilibre à deux pics ("eq12").

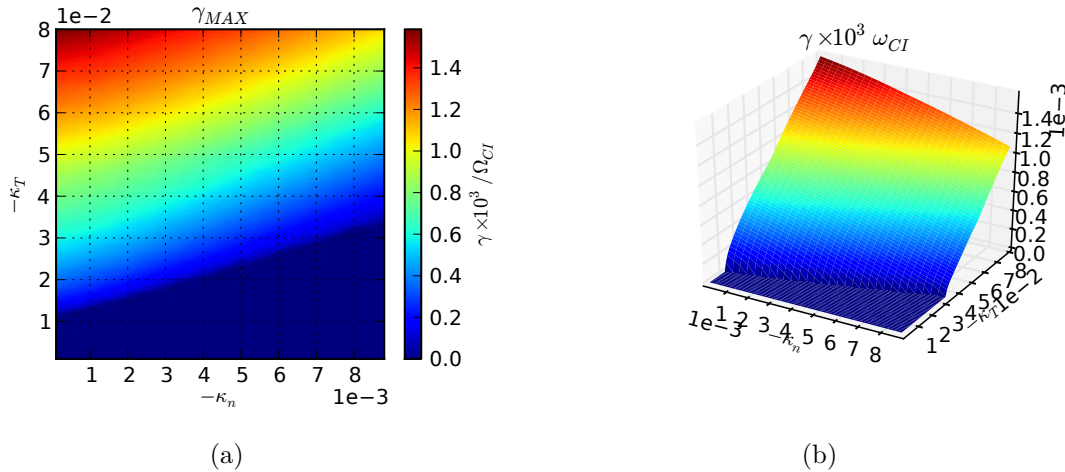


FIGURE 3.21 – Cas test SMALL ; distribution à 10 bags ; Balayage paramétrique sur les gradients ; taux de croissance

### 3.4.2 Balayage paramétrique : seuil de déclenchement

Pour un problème global, la notion de seuil de déclenchement de l'instabilité n'a a priori pas de sens. On peut effectivement partager l'espace (de dimension infinie) de toutes les configurations d'équilibre possibles en deux sous-espaces complémentaires en fonction de l'existence ou non de solutions instables dans les spectres associés. Il est cependant impossible a priori de caractériser l'appartenance à l'un ou l'autre de ces sous-espaces, et donc d'établir un critère de stabilité, à partir d'un nombre fini de paramètres numériques. Le caractère local de l'instabilité observé précédemment nous permet cependant de définir un critère local, valable pour une classe restreinte de profils d'équilibre. L'analyse de stabilité est restreinte à une famille d'équilibres possédant une seule zone de gradient, localisée au centre  $r_0$  du domaine. La famille est générée en faisant varier les gradients normalisés de température et de densité au centre, tous les autres paramètres étant maintenus constants. Pour chaque valeur de  $(\kappa_n(r_0), \kappa_T(r_0))$ , le taux de croissance maximal sur tout le domaine spectral  $(m, n)$  est conservé, ainsi que les caractéristiques du mode associé.

Le balayage en gradient est effectué pour le cas test SMALL, pour plusieurs distributions multi-water-bag ( $N = 6, 8, 10$ ), le modèle fluide ainsi que pour le modèle cinétique continu, qui sert à nouveau de référence. Une plage de 2400 équilibres a été balayée, le problème étant résolu pour chaque équilibre sur une carte de 200 modes  $(m, n)$ . Le cas SMALL a été choisi en raison de la plus petite taille de la zone d'instabilité dans le plan spectral, qui permet de limiter le coût global du calcul. Considérons tout d'abord le cas d'une distribution multi-water-bag à 10 bags. L'évolution de  $\gamma_{MAX}$  dans le plan paramétrique  $(\kappa_n(r_0), \kappa_T(r_0))$  fait clairement apparaître pour chaque valeur du gradient de densité un seuil en gradient de température de déclenchement de l'instabilité. L'évolution de ce seuil est quasi-affine dans la zone de gradients explorée

$$\kappa_{T\text{seuil}} = \alpha\kappa_n + \beta, \quad (3.3)$$

avec  $\alpha \approx 3.8$ . La fréquence du mode le plus instable varie par sauts brusques correspondant au passage d'un nombre d'onde parallèle au suivant. Ce dernier est une fonction croissante, par paliers, du gradient de température. L'évolution de  $m$  est plus

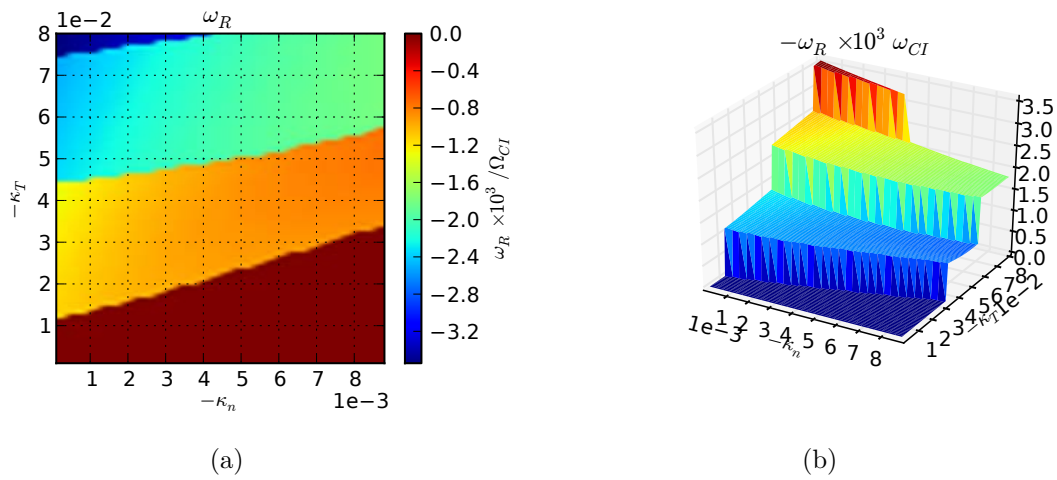


FIGURE 3.22 – Cas test SMALL ; distribution à 10 bags ; Balayage paramétrique sur les gradients ; fréquence

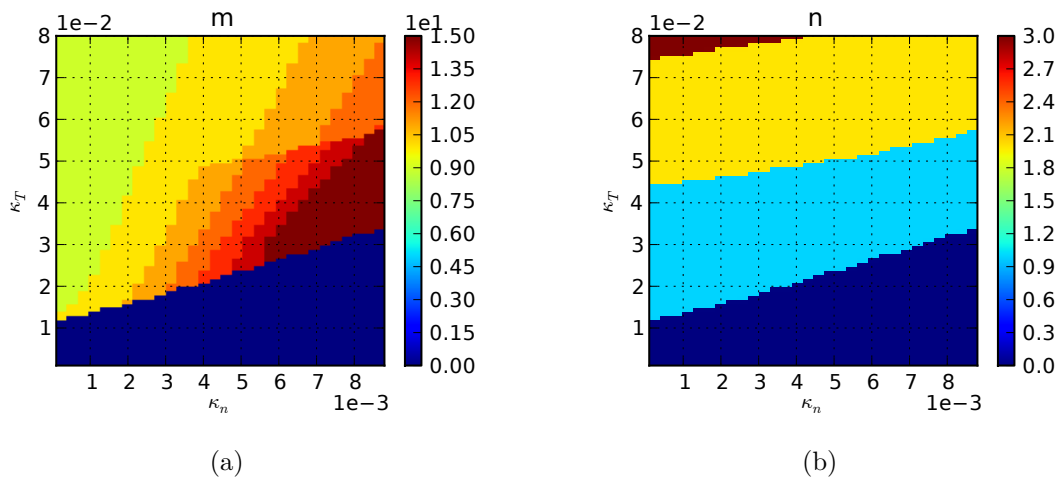


FIGURE 3.23 – Cas test SMALL ; distribution à 10 bags ; Balayage paramétrique sur les gradients ; nombres d'ondes ( $m, n$ ) du mode le plus instable

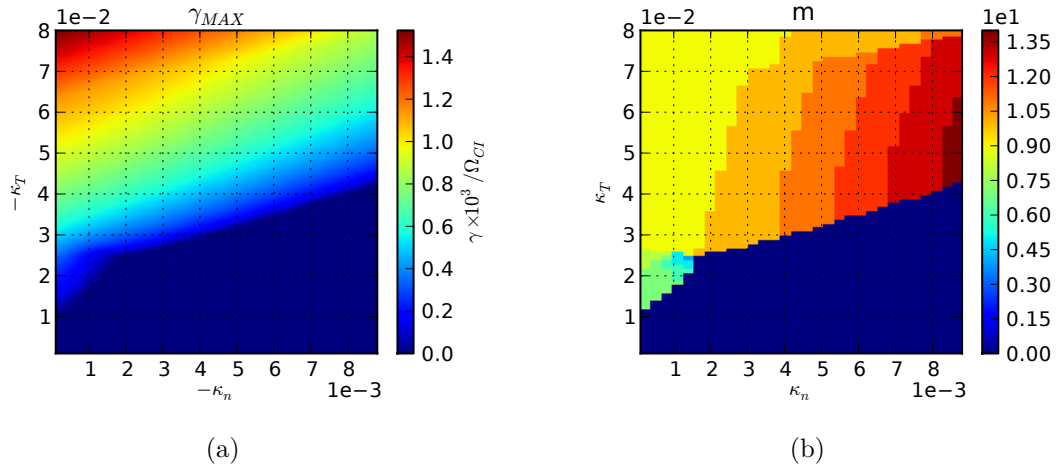


FIGURE 3.24 – Cas test SMALL ; distribution à 6 bags ; Balayage paramétrique sur les gradients ; taux de croissance (a) et nombre d’onde poloïdal (b)

complexe : si on observe presque partout une croissance avec le gradient de densité, une zone d’inversion est visible, corrélée avec le saut en  $n$ , pour les plus grandes valeurs de  $\kappa_n$ .

Les mêmes observations peuvent être faites sur le modèle cinétique et les modèles water-bag à 6 et 8 bags, à une réserve près. Pour ces deux derniers modèles, le seuil n’est plus représenté adéquatement par une loi affine. On observe une discontinuité de comportement au voisinage du seuil, avec une variation rapide du nombre d’onde poloïdal (Figure 3.24). Ces discontinuités de comportement semblent corrélées avec la diminution du nombre de bags, mais le nombre de cas explorés n’est pas suffisant pour en évaluer précisément le mécanisme. Les dépendances complexes du taux de croissance avec la structure de la distribution d’équilibre (pondération par les densités partielles et résonances) mises en évidence lors de l’examen des critères d’instabilité au chapitre 2 incitent à la prudence quant à la possibilité d’établir d’un critère de seuil multi-water-bag analytiquement à la fois simple et valide pour un grand nombre de cas.

Comparons maintenant les seuils water-bag avec les seuils de références fournis par le modèle cinétique continu (Figure 3.25(a)). Ayant observé précédemment qu’au voisinage de l’extinction peuvent apparaître des différences importantes entre les taux de croissance des différents modèles water-bag et du modèle cinétique continu, il n’est pas étonnant que des écarts sensibles soient observés sur les seuils en gradient. Si le modèle à 10 bags semble assez proche du modèle continu, rien ne permet d’affirmer une convergence nette avec le nombre de bags sur les cas testés. Notons que si les écarts au voisinage du seuil sont assez importants, les taux de croissance des divers modèles water-bag sont pour une large plage de gradients très proches de ceux du modèle continu avec des écarts relatifs de quelques points de pourcentage (Figure 3.25(b)).

Une différence notable existe entre les résultats présentés ici et ceux obtenus par Pierre Morel ([60, 62]) dans le cadre d’une analyse locale au centre de la zone de gradient. Dans ce dernier cas, la frontière entre les zones stables et instables présentait des inflexions notables, avec une structure multi-lobée, les seuils water-bag pouvant s’éloigner notablement des seuils cinétiques. Les inflexions observées étaient notablement plus importante que celle remarquée dans le cas à 6 bags évoqué plus haut. Dans le cas global, la structure observée est nettement plus régulière. Parmi les causes probables de cette

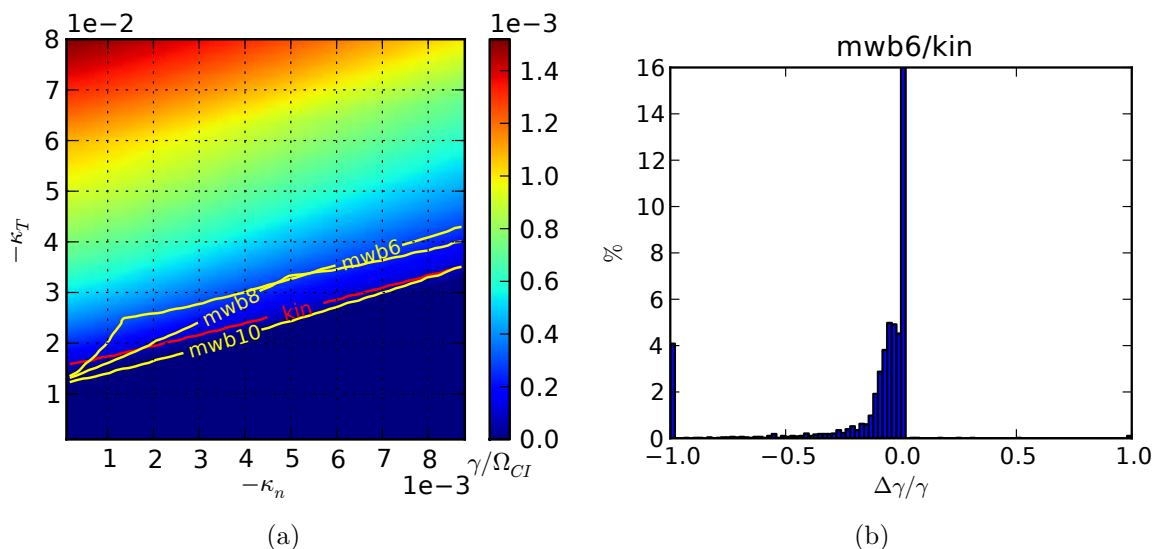


FIGURE 3.25 – Cas test SMALL ; comparaisons croisées ; balayage paramétrique sur les gradients ; cartes en taux de croissance et lignes de seuil (interpolées) pour les modèles water-bag (mwbN) et cinétique continu (kin) (a) ; distribution des erreurs relative sur les taux de croissance pour le modèle water-bag à 6 bags et le modèle cinétique continu (b).

régularisation, on peut citer, par ordre de prédominance

- la nature fortement discrète du spectre en  $k_y$  et la valeur unique des gradients dans le cadre de l'analyse locale. Dans le cas global la variation en  $m$  est complétée de la variabilité radiale de  $r$  et des gradients dans la zone de forts gradients. Cette extension du spectre en fréquences diamagnétiques atténue la différence de réponse en deux équilibres possédant des gradients voisins.
- la nature (et les paramètres) de l'ansatz utilisé dans la méthode locale. En combinaison avec l'effet précédent, on peut supposer une inadéquation de l'ansatz à représenter les modifications de la solution dues aux variations des gradients.

D'une manière plus générale, le système résonnant obtenu lors d'une analyse locale contient un nombre plus faible de degrés de liberté que dans le système discrétisé utilisé dans l'analyse globale. La continuité des profils d'équilibre permet de considérer le système global comme un ensemble de système locaux voisins et couplés entre eux. Il n'est donc pas étonnant d'observer une réponse spectrale plus régulière que dans le cas local.

### 3.5 Conclusions

Il est bien entendu que la gamme restreinte de cas-test envisagés ne saurait permettre une généralisation des observations effectuées à toutes les configurations d'équilibre envisageables. Nous n'avons notablement pas considéré de cas où les signes des gradients de température et densité sont opposés ( $\eta_i < 0$ ), ni à plus forte raison de configurations d'équilibres plus "baroques". Le balayage en position de la zone de gradient, ainsi que l'étude des configurations à deux pics en  $\eta_i$ , montrant le caractère local de l'instabilité, nous permettent cependant de supposer que les observations effectuées peuvent être généralisées à une classe d'équilibres assez large, présentant une ou plu-



sieurs zones de gradients à  $\eta_i$  positif distribuées sur le domaine radial. Ces restrictions étant posées, nous pouvons résumer les observations effectuées en quelques points.

Tout d'abord, les caractères locaux de l'instabilité est confirmé : le mode le plus instable tend à se localiser autour de la zone du pic en  $\eta_i$ .

Ensuite, les caractéristiques spectrales, à savoir la dépendance  $\omega = f(k)$  sont qualitativement similaires à celles observées lors des analyses locales. On observe des coupures abruptes en  $k_{\parallel}$  sur les taux de croissance, de même que pour la coupure basse en  $k_{\theta}$ . La décroissance en  $k_{\theta}$  est plus lente : ce scaling est caractéristique des modèles de dérive cinétiques avec dérive de polarisation où l'absence de gyromoyenne permet au spectre de s'étendre jusqu'à  $k_{\perp}\rho_s \sim 1$  et au-delà.

Les enveloppes radiales des modes les plus instables sont unimodales en module, et ce même dans les configurations à plusieurs pics en  $\eta$ . Notons que cela n'interdit pas l'existence de modes instables multimodaux, mais qu'ils ne sont pas les plus instables. Les variations de phase peuvent être conséquentes sur le domaine radial. Les variations les plus importantes apparaissent dans les zones d'inflexion de l'enveloppe du module ("épaules" des modes) mais sont faibles dans la zone de pic et dans les zones de queue des enveloppes en module. La géométrie globale du mode est donc peu perturbée par ces variations de phase.

Les comparaisons avec le modèle cinétique continu font apparaître que pour des distributions à peu de bords comme celles que nous avons utilisées, l'adéquation entre le modèle water-bag et le modèle cinétique ne peut être réalisée sur l'ensemble du spectre. Les divergences apparaissent pour les modes dont le taux de croissance normalisé  $\gamma/(nk_{\parallel}c_s)$  est de l'ordre ou inférieur à la distance inter-contour typique  $\Delta_v/c_s$ . Ces écarts influent sur les fréquences de coupures spatiales et conséquemment sur les seuils d'instabilité. Ces réserves exceptées, un bon accord peut être observé entre le modèle multi-water-bag et le modèle cinétique continu.



# Chapitre 4

## Simulations non linéaires

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Protocole de simulation- Aperçu de la dynamique globale</b>	<b>88</b>
4.1.1	Protocole de simulation . . . . .	88
4.1.2	Quantités conservées par le modèle non-linéaire . . . . .	88
4.1.3	Description de la dynamique globale . . . . .	90
4.1.4	Évolution de la perturbation dans l'espace réel . . . . .	100
<b>4.2</b>	<b>Validation de la phase linéaire du code non-linéaire</b> . . . .	<b>105</b>
4.2.1	Taux de croissance dans la phase linéaire . . . . .	106
4.2.2	Fréquences dans la phase linéaire . . . . .	110
4.2.3	Géométrie des enveloppes radiales dans la phase linéaire . . .	112
<b>4.3</b>	<b>Comparaison des modèles à l'approche de la saturation</b> .	<b>113</b>
<b>4.4</b>	<b>Conclusions et remarques</b> . . . . .	<b>118</b>

---

Ayant d'une part analysé les caractéristiques du problème linéaire spectral, tant du point de vue numérique que de celui des dépendances paramétriques, nous pouvons maintenant envisager de croiser ses résultats avec ceux des codes quasi-linéaire forcé et non-linéaire. L'objectif de ces comparaisons est double. Dans un premier temps, les hypothèses sous-tendant les modèles quasi et non-linéaire étant vérifiées à l'instant initial, les évolutions prévues par les trois modèles doivent être quasiment identiques durant la phase initiale de croissance linéaire, sous réserve, comme on le verra, que cette phase existe. La comparaison des trois modèles permet dans cette phase une validation croisée des codes respectifs. D'autre part, la violation inéluctable des hypothèses sous-tendant les modèles quasi-linéaire et linéaire va conduire à une divergence entre les prédictions des trois modèles à l'approche de la saturation. L'examen de cette divergence permettra d'éclairer le mécanisme de saturation de l'instabilité.

Outre ces comparaisons, qui ne peuvent par nature porter que sur des caractéristiques communes aux trois modèles, les données de simulation non-linéaire ouvrent la voie à une description plus large de la dynamique observée. Un certain nombre de diagnostics ont été implémentés à cet effet.

## 4.1 Protocole de simulation- Aperçu de la dynamique globale

### 4.1.1 Protocole de simulation

Les données spectrales (modes et fréquences propres) obtenues par l'analyse linéaire d'un équilibre donné sont utilisées afin de générer de manière contrôlée une perturbation de l'équilibre initial. Une perturbation à  $p$  modes d'un champ scalaire  $X$  ( $X = (v_j, \phi)$ ) est construite par la combinaison linéaire

$$\tilde{X} = \epsilon_{glob} \sum_{q=1}^p \epsilon_q X_q(r) \cos(m_q \vartheta + n_q k_{\parallel} z + \alpha_q(r) + \beta_q), \quad (4.1)$$

où  $\epsilon_{glob}$  définit l'échelle globale de la perturbation, les poids relatifs  $\epsilon_q < 1$  permettent de pondérer les différents modes propres,  $(X_q, \alpha_q)$  sont respectivement les modules et phases des enveloppes radiales du  $q$ -ième mode propre de paramètres spectraux  $(m_q, n_q)$ ,  $\beta_q$  est un facteur de phase aléatoire. Diverses combinaisons ont été utilisées pour les tests numériques : perturbation à 1 mode, 2 modes et perturbation par un bain de modes (de 10 à 300). Dans tous les cas discutés ci-après, le même poids a été affecté à tous les modes propres intervenant dans la perturbation, à savoir  $\epsilon_q = 1, \forall q$ . L'état des champs  $(v_j, \phi)$  est sauvegardé à intervalles de temps réguliers (typiquement 10 à  $20\Omega_{CI}^{-1}$ ). Ces données brutes sont ensuite traitées par le code de post-traitement "GMWB3D-post-process", qui procède au calcul des diverses quantités dérivées (champs dans l'espace de Fourier, densité, température, spectres en  $k_{\perp}$ , ...). Les profils radiaux des champs moyens  $(0, 0)$  sont ensuite utilisés en entrée du code linéaire et du code quasi-linéaire forcé. Un schéma synthétique de la chaîne ce traitement est représenté Figure 4.1.

### 4.1.2 Quantités conservées par le modèle non-linéaire

Le modèle non-linéaire possède des invariants intégraux, dont certains sont mis à profit pour s'assurer de la précision du schéma d'intégration numérique. Par intégration

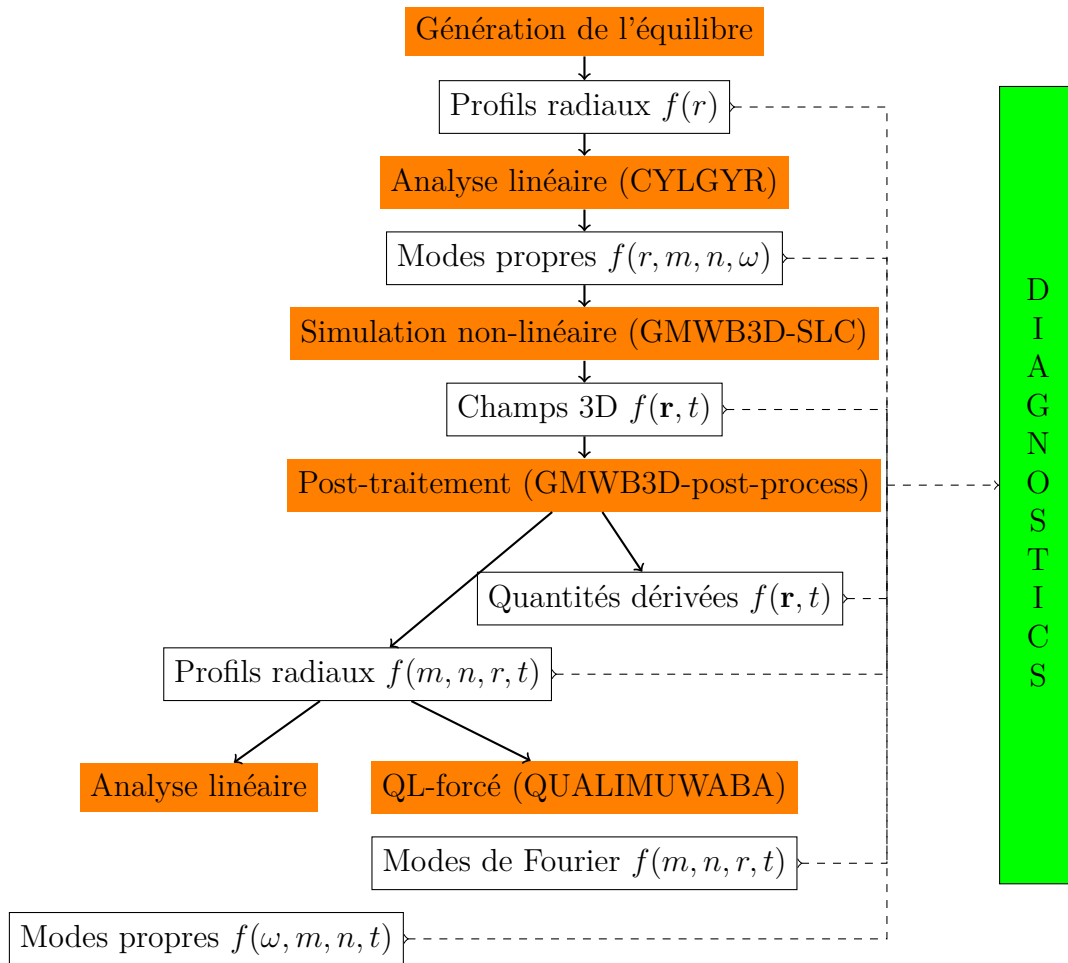


FIGURE 4.1 – Chaîne de traitement pour les simulations croisées

de l'équation de transport des contours (équation 2.5 du chapitre 2) sur le volume complet de simulation  $\mathcal{C}$ , en tenant compte des conditions aux limites on obtient une loi de conservation

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} v_j d\mathbf{r} = 0, \quad (4.2)$$

valable pour chaque contour pris individuellement. A partir de l'équation de transport (4.2), il est possible de dériver des équations de conservation pour toute fonctionnelle de la forme

$$I_{\mathcal{F}} = \int_{\mathcal{C}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f) dv_{\parallel} d\mathbf{r}. \quad (4.3)$$

Les fonctionnelles mises à disposition dans le code de post-traitement sont  $\mathcal{F}(f) = \|f\|_1$  (masse),  $\mathcal{F}(f) = \|f\|_2$ ,  $\mathcal{F}(f) = f \ln f$  (entropie). Notons que l'équivalence entre la conservation de la masse et de la norme  $L^1$  est induite par le fait que la distribution multi-water-bag est par construction définie positive. Cette propriété évite en outre d'avoir à vérifier la positivité de  $f$ . La forme particulière de la distribution assure de plus une évolution bornée de  $f$ , par conservation du principe du maximum

$$\min f(t=0) < f(t) < \max f(t=0), \quad (4.4)$$

propriété structurale qui ne nécessite pas non plus d'être vérifiée. Outre les invariants intégraux induits par (4.2) et les invariants structuraux précités, l'énergie totale est également conservée,

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\mathcal{C}} \sum_j A_j \frac{v_j^3}{6} d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}} \left( \sum_j A_j v_j - n_0 \right) \phi d\mathbf{r} \right] = 0. \quad (4.5)$$

Lors des simulations, la dissipation numérique peut entraîner la violation des lois de conservation (4.2) et (4.5). L'estimation de l'importance de ces pertes est effectuée pour une grandeur intégrale conservée  $Q$  parmi celles citées plus haut, en calculant sa variation relative par rapport à sa valeur initiale  $Q(t=0)$ .

Sur la figure 4.2, on peut voir une telle estimation pour la masse et l'énergie totale, pour un cas-test typique. Les lois de conservations sont bien respectées dans la phase linéaire initiale ( $\omega_{CI} t \leq 5000$ ), durant laquelle les structures à petite échelle générées non-linéairement par la perturbation restent négligeables. Dans la phase de turbulence à plus large spectre qui suit, la dissipation des échelles inférieures au pas de grille conduit à la violation des lois de conservation.

### 4.1.3 Description de la dynamique globale

Les évolutions temporelles des différentes simulations présentent un certain nombre de traits communs qu'il peut être utile de décrire avant l'examen plus quantitatif qui sera effectué par la suite. Les différences pouvant apparaître en fonction de la nature du spectre de la perturbation initiale seront discutées le cas échéant. Parmi les modes de Fourier  $(m, n)$  composant les champs  $(v_j, \phi)$  qui caractérisent l'état du système, il est utile de distinguer trois classes :

1. le mode  $(0, 0)$ , correspondant aux champs moyennés en  $(\vartheta, z)$ . Il peut lui-même être considéré comme la somme de deux contributions : d'une part le champ

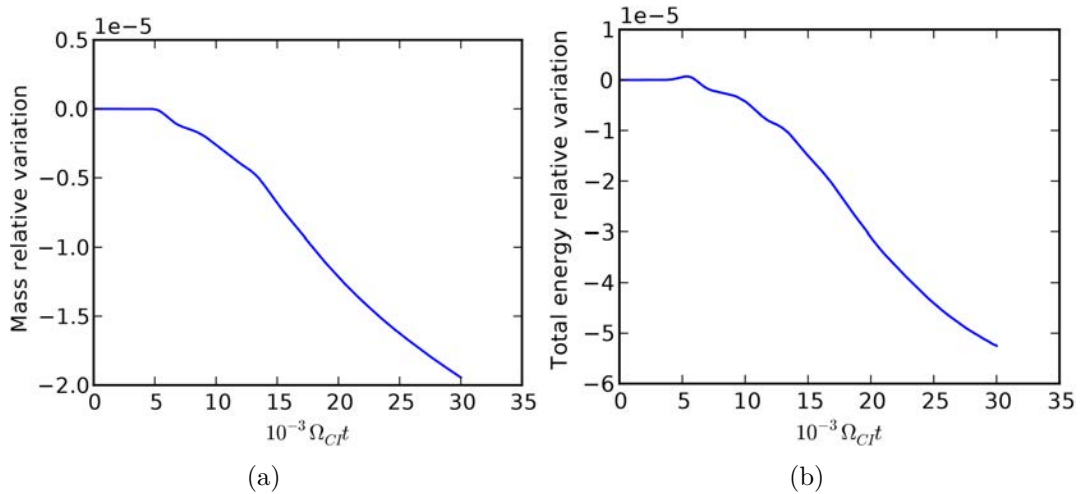


FIGURE 4.2 – Tests de conservation d'invariants intégraux du code non-linéaire GMWB3D-SLC; Évolution en temps de la variation relativement à la valeur initiale de la masse (a) et de l'énergie totale (b) pour un cas test typique (cas SMALL- perturbation par un mode unique)

d'équilibre, dominant pour les contours  $v_j$  et nul pour le potentiel électrostatique. D'autre part, le champ variable qui va être généré non-linéairement au cours de la croissance du champ turbulent, et qui correspond à l'apparition d'un champ de cisaillement en vitesse poloïdale, dit "écoulement zonal".

2. les modes  $(m, n) \neq (0, 0)$  présents dans la perturbation initiale sous la forme de modes propres instables, que l'on peut qualifier de "primaires". Ils vont dominer le champ turbulent dans la phase initiale de croissance linéaire de l'instabilité.
3. les modes  $(m, n) \neq (0, 0)$  absents de la perturbation initiale, qualifiés de "secondaires". Ils sont générés non-linéairement au cours de la croissance du champ turbulent.

La distinction qui a été faite entre modes primaires et secondaires est ici entièrement fondée sur la composition de la perturbation initiale, et non par le mécanisme dominant leur mode d'évolution. Une autre distinction peut être faite sur la stabilité de ces modes vis à vis de l'équilibre initial. En effet, si en raison de la méthode de construction, tous les modes qualifiés de primaires sont instables, les modes dits secondaires peuvent être a priori linéairement stables ou instables vis à vis de l'équilibre. Dans le second cas, ils peuvent dès leur apparition sous l'effet des couplages non-linéaires connaître une phase de croissance quasi-linéaire, majoritairement pilotée par le couplage avec  $(0, 0)$ .

La première phase de la dynamique, dite de croissance linéaire, est caractérisée par la croissance des modes primaires par interaction avec la composante d'équilibre du mode  $(0, 0)$ . La croissance de ce champ turbulent primaire entraîne d'une part l'évolution du mode  $(0, 0)$  et l'apparition des écoulements zonaux, et d'autre part et plus généralement un enrichissement du spectre par une double cascade harmonique et l'apparition des modes secondaires. La saturation de la croissance des modes primaires est produite en retour par la rétroaction de l'écoulement zonal et/ou les couplages avec le reste du champ turbulent.

Du point de vue global, on observe une dynamique de relaxation des champs moyens vers un état proche de la stabilité marginale, et la génération d'un champ turbulent

de bas niveau étendu dans le plan spectral. Nous n'épuiserons à l'évidence pas dans le cadre de cette étude toute la complexité de la dynamique d'interaction entre écoulements zonaux et turbulence d'onde. Pour une approche plus générale du problème, on peut se référer à [42, 66, 45]. Une analyse de l'impact du profil de densité d'équilibre sur la génération de écoulements zonaux et le transport résultant exploitant le code GYSELA peut être trouvée dans [74], dans le cas de l'équation de Vlasov-gyrocinétique en géométrie cylindrique.

### Évolution des champs moyens (0, 0)

Considérons tout d'abord l'évolution des champs moyens. La génération des écoulements zonaux est couplée avec une relaxation des profils radiaux des contours, et en conséquence des profils radiaux de densité et température. Il est important de rappeler que ces profils sont relatifs au centres guides, les profils relatifs aux particules dans l'espace réel étant par construction maintenus constants. Les relaxations observées ne traduisent donc pas un transport radial des particules, mais la différence entre la densité des particules et celle des centres guides générée par les écoulements zonaux en raison de la dérive de polarisation.

Sur les figures 4.3 et 4.5, respectivement dans le cas d'une perturbation à 1 mode et par un bain de 239 modes, on peut voir les profils de densité et température moyens dans la situation d'équilibre initial et dans l'état final. Au voisinage du pic en  $\eta$  initial, au centre du domaine, le profil de densité se raidit alors que le profil de température s'aplatit, conduisant à une réduction du facteur  $\eta$ . Des deux côtés de cette zone on observe la présence de zones de diminution des gradients, correspondant à une inversion du sens du champ de cisaillement en vitesse poléidale. Les figures 4.4 (a) - 4.6 (a) et 4.4 (b) - 4.6 (b) montrent l'écoulement zonal et les contributions respectives de la courbure de ce dernier et du gradient d'équilibre au gradient de densité moyenne dans l'état final, liés par l'équation de quasi-neutralité moyennée en  $(z, \vartheta)$

$$d_r \langle n(t) \rangle_{z, \vartheta} = d_r n_0 - d_r \left\{ \frac{1}{r} d_r [r n_0 d_r \phi_0^0] \right\}. \quad (4.6)$$

Il convient ici de préciser que les temps de simulations utilisés ne permettent pas de qualifier l'état final d'état asymptotique. Dans l'implémentation actuelle du code non-linéaire, les conditions aux limites radiales pour le potentiel électrostatiques sont des conditions de Dirichlet homogènes. Pour le mode (0, 0), le choix de ces conditions ne se justifie que tant que le champ turbulent reste localisé au centre du domaine. Pour des temps de simulation plus longs, la croissance non-bornée de l'écoulement zonal au voisinage de  $r_{min}$ , où le potentiel est contraint à 0, conduit à l'apparition d'un champ électrique radial important. Les temps de simulations sont choisis de manière à ce qu'un état proche de la stabilité marginale soit atteint mais avant que l'écoulement zonal au bord du domaine n'atteigne des valeurs trop importantes.

Le déroulement du processus de relaxation des champs moyens dépend de la structure spectrale de la perturbation initiale. Dans le cas des perturbations à peu de modes, la relaxation des profils de gradients moyens s'effectue en plusieurs étapes ( Figures 4.7 (a) et 4.8 (a)) : le système passe par une succession d'états alternativement stables et instables vis à vis des modes primaires (Figure 4.9 (a)) ainsi qu'une évolution non



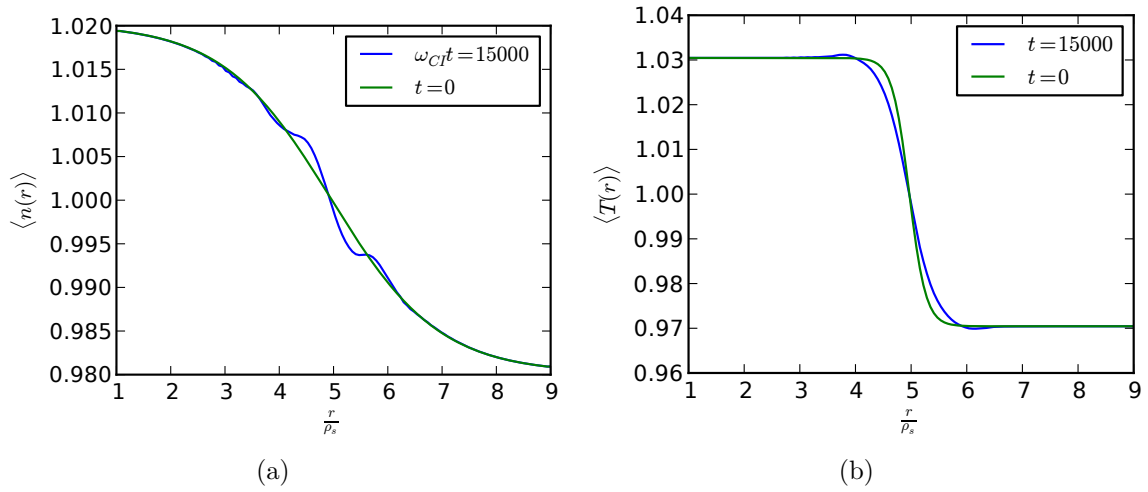


FIGURE 4.3 – Cas test SMALL perturbé par (10, 5) ; profils radiaux de la densité moyenne (a) et de la température moyenne (b) aux instants initiaux et finaux de la simulation

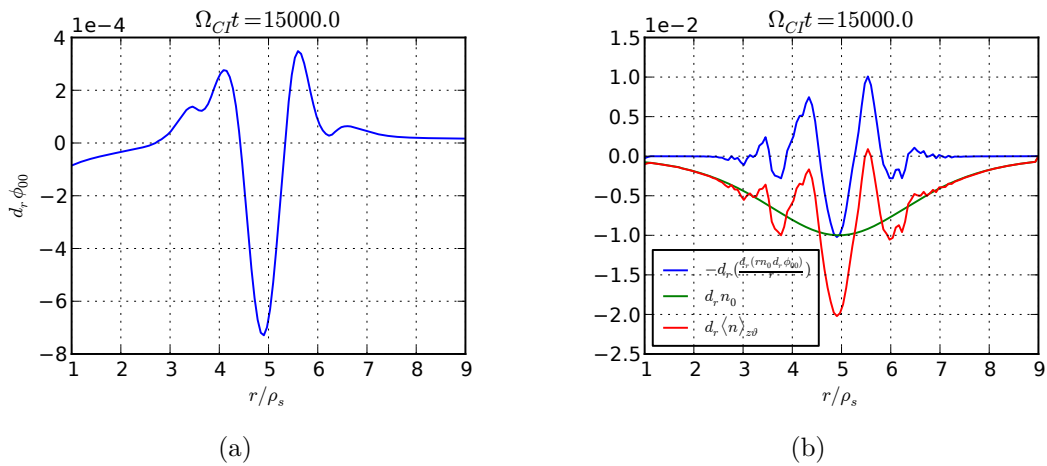


FIGURE 4.4 – Cas test SMALL perturbé par (10, 5) ; écoulement zonal à la fin de la simulation (a) ; contributions respectives de l'équilibre  $d_r n_0$  et de l'écoulement zonal  $d_r \left\{ \frac{1}{r} d_r [rn_0 d_r \phi_0^0] \right\}$  au gradient de densité moyen des centres guides (b)

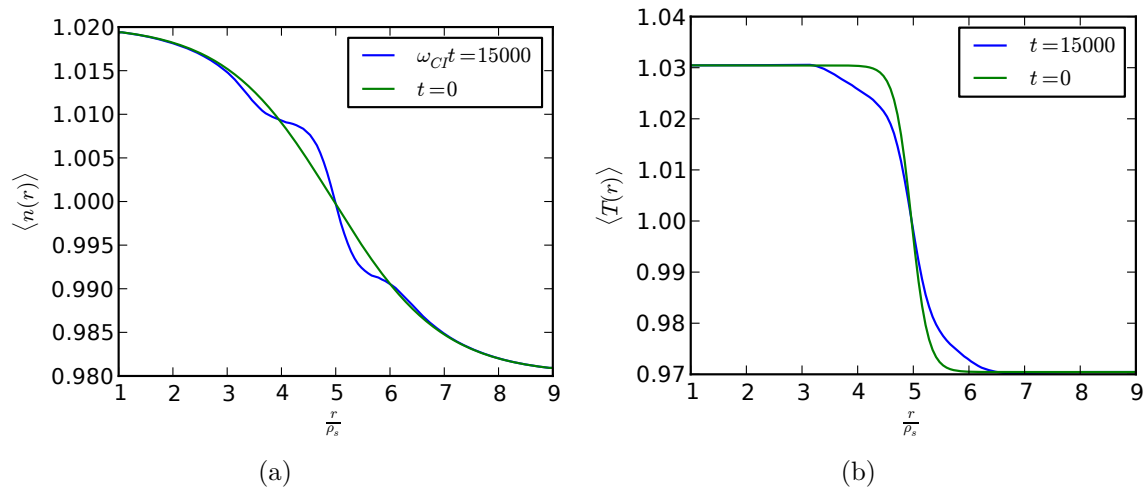


FIGURE 4.5 – Cas test SMALL perturbé par un bain de 239 modes; profils radiaux de la densité moyenne (a) et de la température moyenne (b) aux instants initiaux et finaux de la simulation.

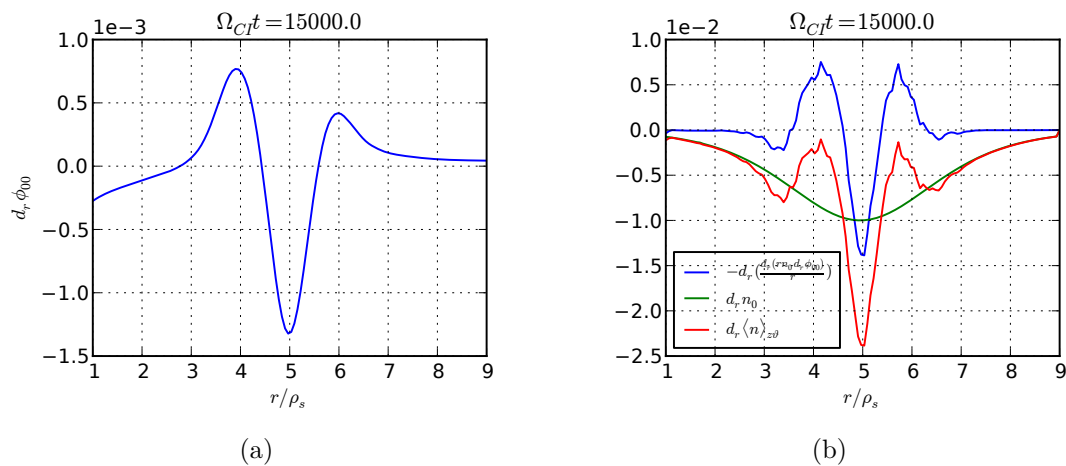


FIGURE 4.6 – Cas test SMALL perturbé par un bain de 239 modes; écoulement zonal à la fin de la simulation (a); contributions respectives de l'équilibre  $d_r n_0$  et de l'écoulement zonal  $d_r \left\{ \frac{1}{r} d_r [r n_0 d_r \phi_0^0] \right\}$  au gradient de densité moyen des centres guides (b)

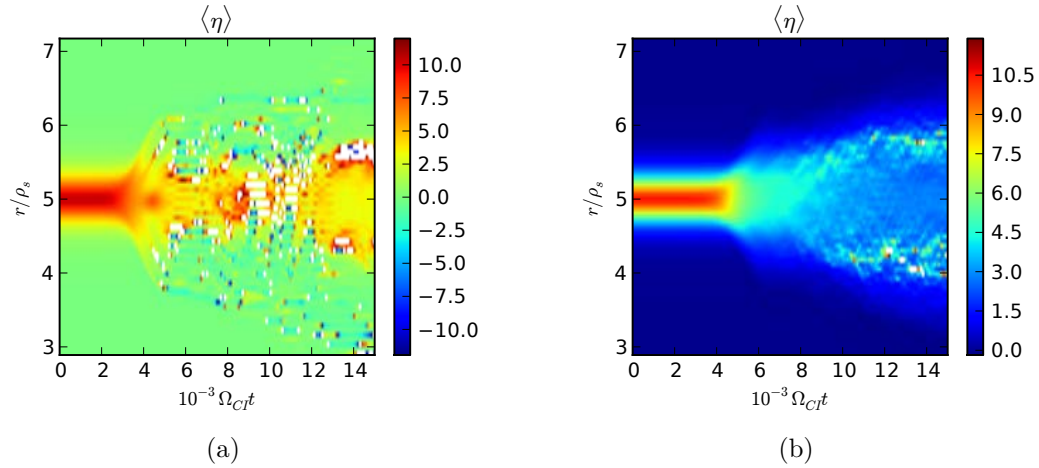


FIGURE 4.7 – Cas test SMALL ; Évolution temporelle du gradient normalisé  $\eta_i$  calculé à partir des profils radiaux des champ moyens  $(0, 0)$  ; perturbation par  $(10, 5)$  (a) et par un bain de 239 modes(b)

monotone vers la stabilité globale (Figure 4.9 (b)). La structure de l'écoulement zonal, invariante durant la phase de croissance linéaire, est fortement perturbée au cours des oscillations successives du système.

Dans le cas de perturbations à large spectre, le comportement oscillatoire est grandement atténué (Figures 4.7 (b) et 4.8 (b)) et l'on observe une relaxation quasi-monotone vers la stabilité marginale (Figure 4.9 (c)). La géométrie de l'écoulement zonal connaît elle aussi une transition plus régulière entre deux structures stables caractérisant respectivement la phase de croissance linéaire et l'état post-saturation (Figure 4.10 (b)).

Les différences observées entre les dynamiques d'évolution des cas de perturbations à peu de modes et de perturbations à large spectre montrent une claire dépendance du nombre de degrés de liberté initiaux dans l'espace spectral sur le comportement dynamique du système. Le comportement d'oscillations couplées observé pour les systèmes à petit nombre de modes, résultant de la boucle de rétroaction "courte" entre ces modes et l'écoulement zonal, ne peut être extrapolé aux systèmes à grand nombre de modes, où la dynamique est lissée, spatialement et temporellement, par la combinaison des contributions des divers modes à la croissance de l'écoulement zonal.

### Évolution globale du spectre turbulent

La caractérisation de l'évolution du spectre du champ turbulent peut être abordée de plusieurs manières. L'observation directe du spectre de puissance dans le plan  $(m, n)$  en fonction du temps pour les perturbations à peu de modes permet une identification rapide des cascades harmoniques ascendantes et descendantes. Sur la figure 4.11, on peut voir une telle évolution pour le cas SMALL perturbé par un unique mode  $(6, 3)$  à  $t = 0$  (figure 4.11(a)). La croissance du mode génère tout d'abord les harmoniques directes du mode  $(6, 3)$  (diagonale dans le plan  $(m, n)$ ) ainsi que l'écoulement zonal ((figure 4.11(b) et (c)), qui finit par dominer. On observe ensuite un élargissement progressif du spectre 4.11 (d), (e) et (f)) qui finit par être dominé par le mode  $(0, 0)$  secondé de modes basses fréquences (notamment  $(0, 3)$ ). Afin de pouvoir apprécier plus facilement l'évolution du spectre tout en préservant la capacité d'identification

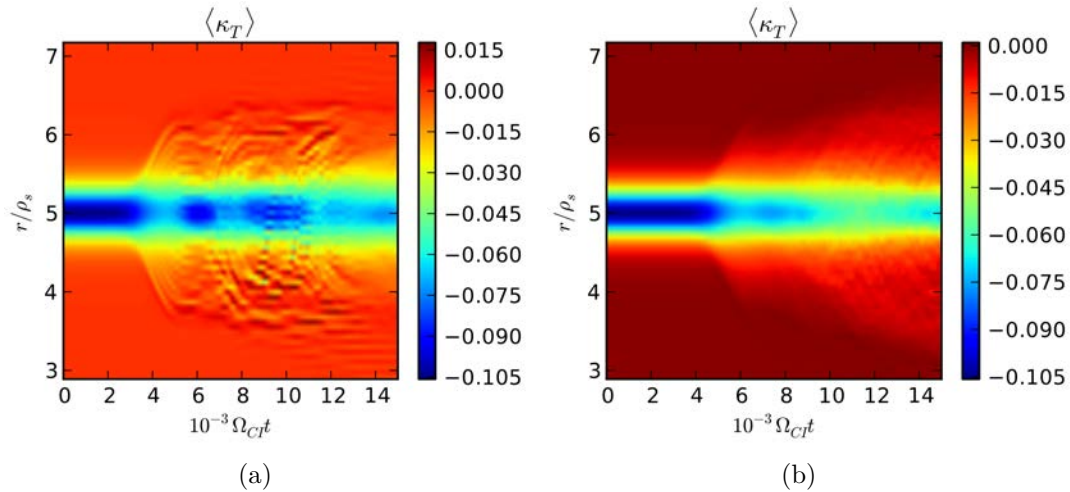


FIGURE 4.8 – Cas test SMALL ; évolution du profil radial du gradient de température moyen pour une perturbation par (10, 5) (a) et un bain de 239 modes (b).

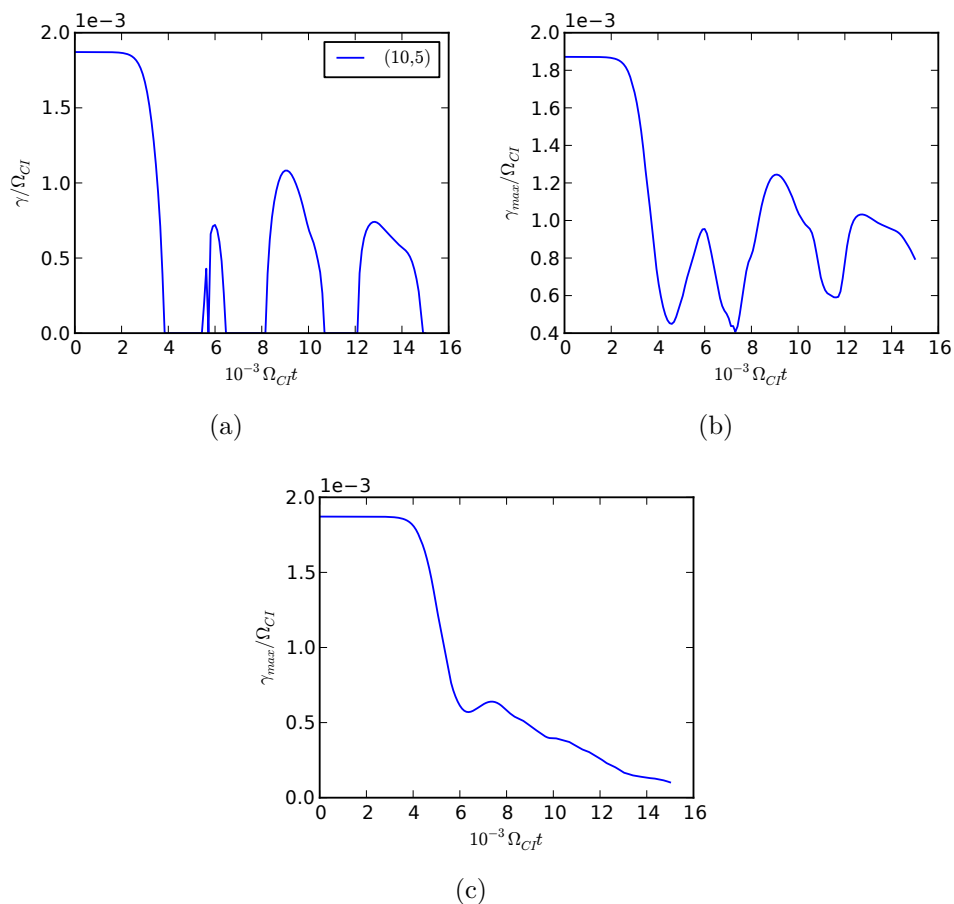


FIGURE 4.9 – Cas test SMALL ; évolution en temps des taux de croissance linéaires calculés par le code linéaire à partir des champs (0, 0) extraits des données de simulation du code non-linéaire ; taux de croissance linéaire du mode (10, 5) pour une perturbation à 1 mode par (10, 5) (a) ; taux de croissance linéaire maximal pour l'ensemble des modes  $(m, n)$  pour une perturbation à un mode (10, 5) (b) et par un bain de 239 modes (c)

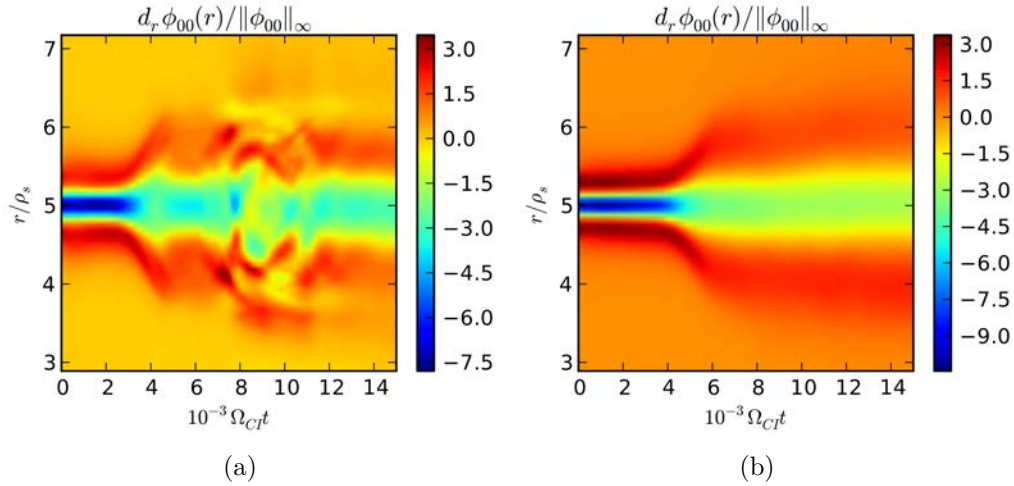


FIGURE 4.10 – Cas test SMALL; évolution en temps du champ de cisaillement en vitesse poloïdale moyen dans le cas d’une perturbation par (10, 5) (a) et par un bain de 239 modes (b).

directe des modes dominants au cours du temps, une représentation plus compacte peut être adoptée. A chaque instant on considère le poids relatif  $R_m^n$  d’un mode  $(m, n)$  dans le spectre de puissance auquel on a éventuellement appliqué une fonction de filtre monotone. En l’absence de filtrage on obtient simplement le spectre normalisé

$$R_m^n = \frac{\|\phi_m^n\|_2^2}{\sum_{n', m'} \|\phi_{m'}^{n'}\|_2^2}, \quad (4.7)$$

où  $\|f\|_2 = \int_{r_{min}}^a |f(r)|^2 dr$ . Les modes dont le poids relatif dépasse un certain seuil sur l’ensemble de la simulation sont inclus dans la représentation, les contributions des autres étant regroupée en une classe distincte. Une telle représentation est donnée Figure 4.12, toujours dans le cas SMALL perturbé par un unique mode (6, 3). Changer la fonctionnelle sur laquelle sont calculés les poids permet un ajustement de la représentation des modes les moins importants (Figure 4.12 (b)). En gardant à l’esprit la distortion introduite par ce filtrage non-linéaire, on obtient ainsi un aperçu qualitatif synthétique de l’évolution spectrale : l’apparition des harmoniques directes (12, 6) et (18, 9) du mode primaire (6, 3), la montée et les oscillations de l’écoulement zonal, l’élargissement du spectre et la présence dans l’état final de modes basse fréquence, notamment le (0, 3) observé dans le spectre complet.

La différence de dynamique entre les perturbations à peu de modes et à spectre large évoquée lors de la description de l’évolution des champs moyens est aussi mise en évidence par cette représentation (Figure 4.13). Dans le cas de la perturbation à 1 mode, on retrouve le comportement oscillatoire de l’écoulement zonal, conjointement à celui du mode primaire, la génération des harmoniques du primaire, ainsi que l’apparition de modes basses fréquences  $(m, 0)$  secondant l’écoulement zonal. Dans le cas de la perturbation par un bain, la représentation permet d’observer d’une part la croissance initiale des modes les plus instables parmi les primaires, à savoir le groupe voisin de (10, 5) dans le plan  $(m, n)$ , et la croissance continue de l’écoulement zonal.

Une appréciation plus globale du spectre turbulent dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, c’est à dire intégrant à la fois les variations radiales et poloïdales du

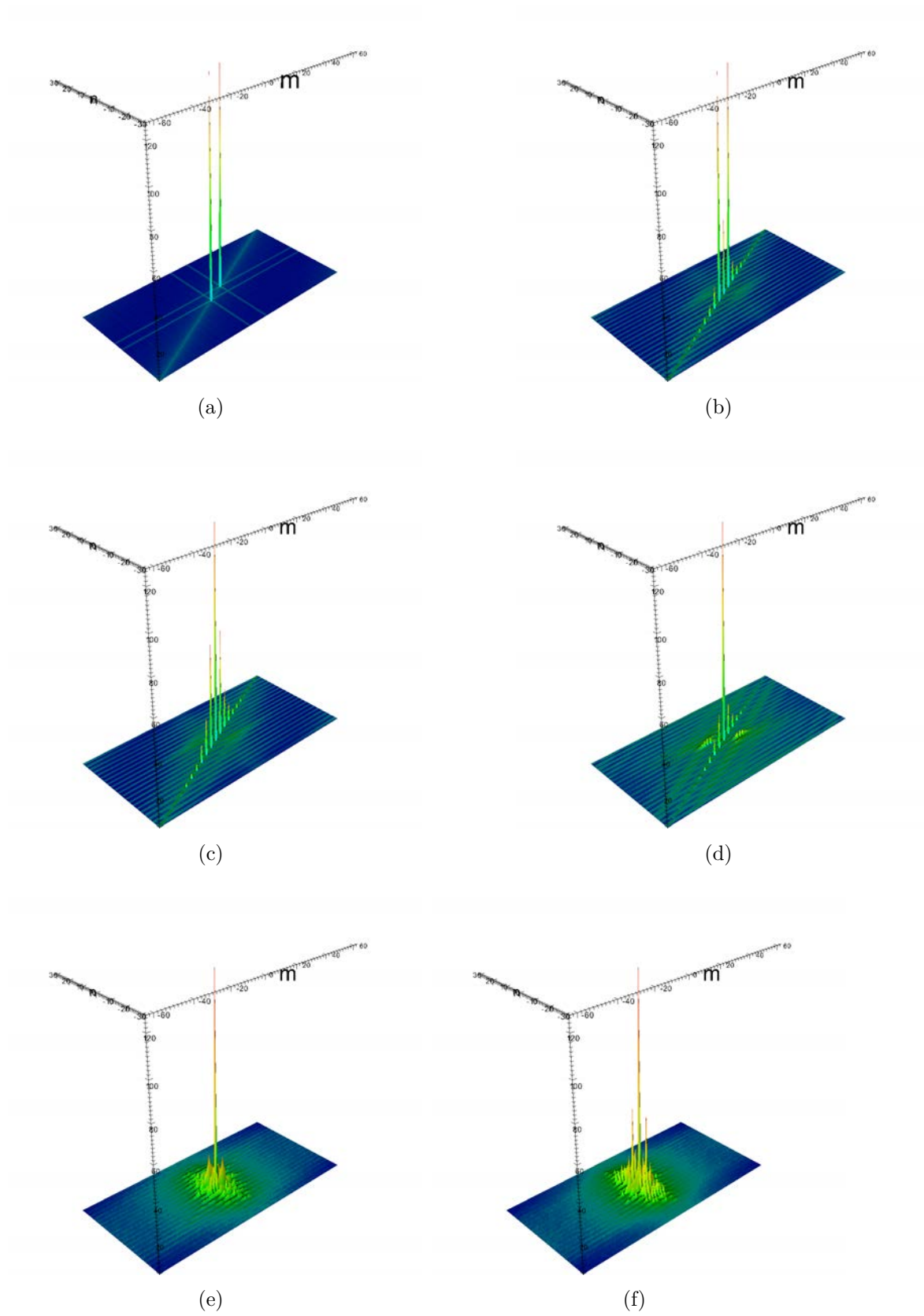


FIGURE 4.11 – Cas test SMALL ; perturbation par  $(6, 3)$ . Évolution temporelle dans le plan spectral  $(m, n)$  de  $\|\phi\|^2$

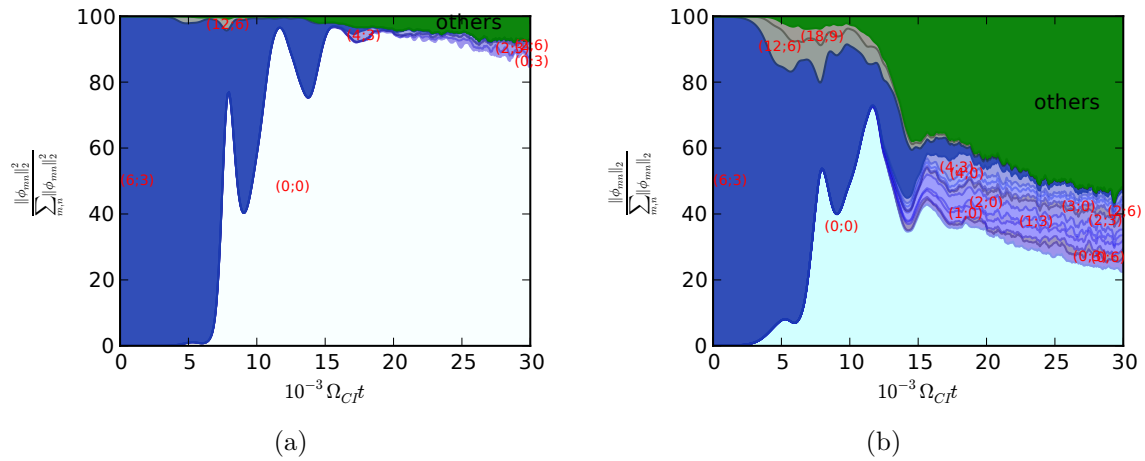


FIGURE 4.12 – Cas SMALL ; perturbé par (6,3) ; évolution de la composition du spectre ; poids relatifs sur  $\|\phi_{mn}\|_2^2$  (a) et  $\|\phi_{mn}\|_2$

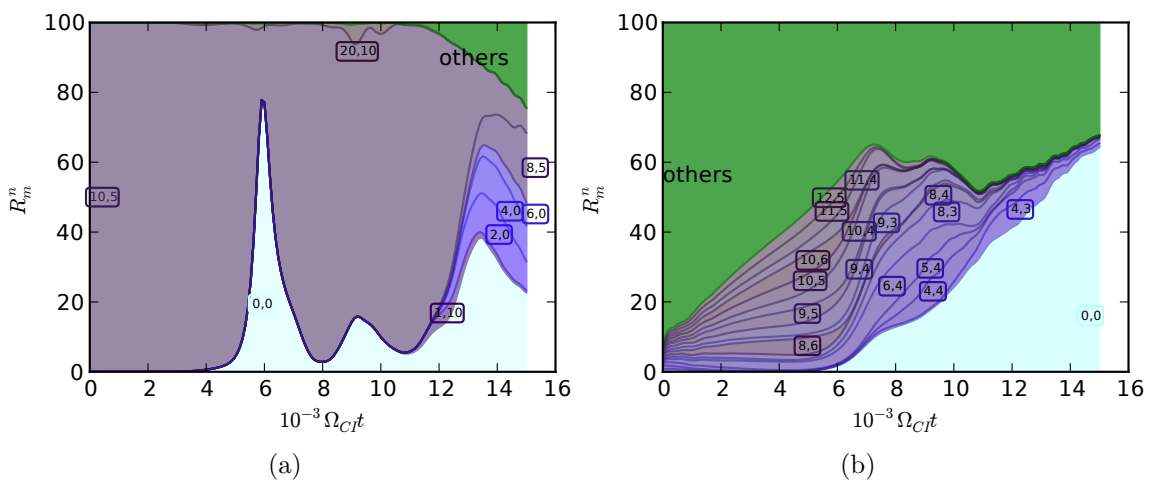


FIGURE 4.13 – Cas test SMALL ; évolution des compositions spectrales  $R_m^n$  dans le cas d’une perturbation par (10,5) (a) et par un bain de 239 modes (b)

champ turbulent peut être obtenue à partir des modes de Fourier en  $(m, n)$ . L'obtention du spectre en  $k_{\perp}$  d'un mode  $m$  s'obtient par transformée de Hankel (ou Fourier-Bessel, voir [3, 17, 36]) de son enveloppe radiale

$$f_m(k_{\perp}) \propto \int_0^{\infty} f_m(r) J_m(k_{\perp} r) r dr, \quad (4.8)$$

où  $J_m$  est la fonction de Bessel d'ordre  $m$ . La méthode utilisée pour approximer cette transformée à partir de données sur une grille radiale fixe est donnée en annexe E. Les contributions (quadratiques) en  $n$  sont sommées. Dans tous les cas testés, le spectre en  $k_{\perp}$  semble tendre vers un spectre possédant une queue en loi de puissance (Figure 4.14). En appliquant un algorithme de régression multi-segments (Figure 4.15), on peut obtenir les exposants caractéristiques correspondant. Les valeurs obtenues sont cependant peu exploitables en raison du caractère non-stationnaire de la dynamique, du faible nombre de décades accessibles avec la résolution spatiale utilisée et enfin du nombre de simulations effectuées, trop peu important pour une approche statistique.

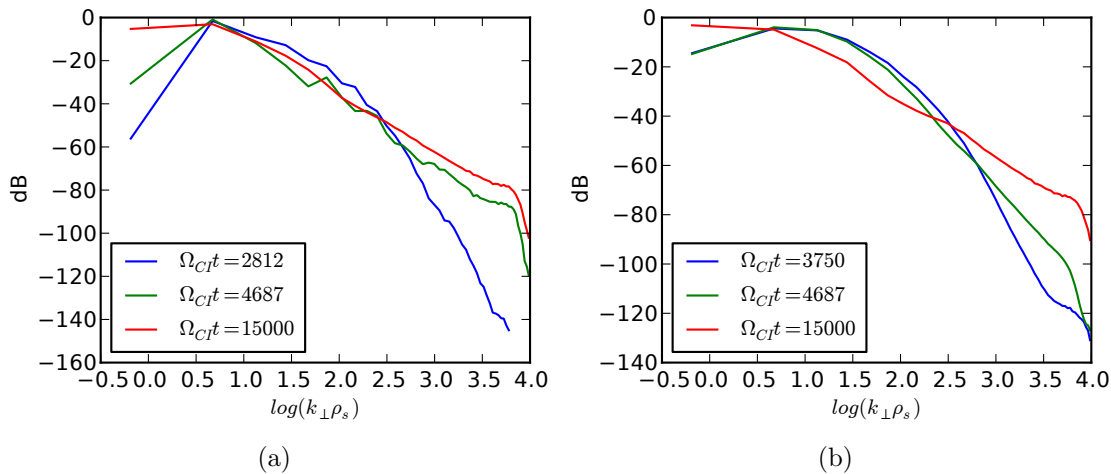


FIGURE 4.14 – Cas SMALL ; spectre de puissance du potentiel électrostatique ; perturbation par  $(10, 5)$  (a) ; perturbation par un bain de 239 modes (b)

#### 4.1.4 Évolution de la perturbation dans l'espace réel

L'observation de l'évolution des champs tridimensionnels (potentiel, perturbation de densité,...) dans l'espace réel permet une appréciation directe de la dynamique globale. Cette observation constitue toujours la première étape de l'analyse des résultats de simulations. Si elle permet de se faire une bonne idée de l'évolution globale du système, particulièrement dans le cas simple des perturbations à 1 mode, elle ne permet en tout état de cause que des constatations très qualitatives et générales, en raison de la complexité des champs observés. Ce type de diagnostic se prêtant par nature assez mal à une exposition écrite, nous nous restreindrons à deux exemples significatifs.

Considérons tout d'abord le cas d'une perturbation à 1 mode. Sur la figure 4.16 est représentée la perturbation de densité à quelques instants clés de la simulation. La vignette Figure 4.16 (a) montre la géométrie de la perturbation à l'instant initial, géométrie qui reste invariante durant la phase linéaire (en excluant le court transitoire initial). Les vignettes Figure 4.16 (b)(c)(d) et (e) représentent quelques étapes de la



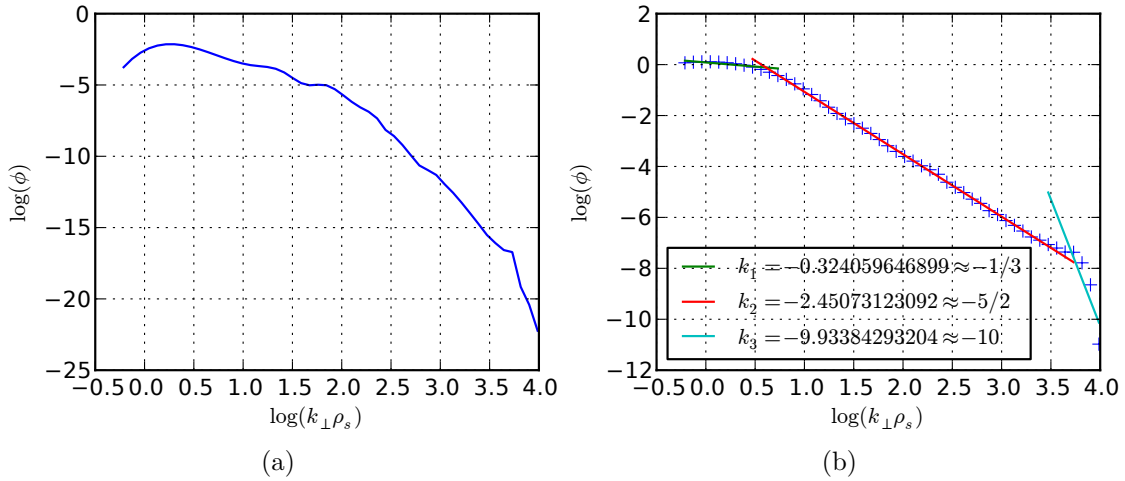


FIGURE 4.15 – Cas SMALL perturbé par (6, 3); spectre de puissance du potentiel électrostatique durant la phase de croissance linéaire (a) régression multi-segment sur le spectre à la fin de la simulation (b)

dynamique juste après la première phase de saturation de l'instabilité. On peut y constater le cisaillement poloidal des cellules de convection qui conduit à leur élongation puis leur déchirement et à l'apparition de cellules convectives de plus petite taille. La figure 4.16 (f) montre l'état final de la simulation. Le flot turbulent est fortement dominé par le mode (0, 0) à symétrie cylindrique, avec la présence notable du mode (0, 3).

La figure 4.17 présente quelques instantanés du potentiel électrostatique pour le cas MEDIUM perturbé par un bain de 101 modes. De même que précédemment, la première vignette 4.17 (a) dépeint l'état initial. Le second instantané 4.17 (b) est pris à la fin de la phase de croissance linéaire. Le spectre est toujours riche mais on observe clairement la domination du mode (10, 3), linéairement le plus instable, secondé de ses proches voisins dans le plan spectral. Les trois vignettes suivantes 4.17 (c)(d)(e) montrent, de même que précédemment l'étirement radial, le cisaillement puis la dissociation des cellules de convection, par l'écoulement zonal, qui devient dominant par la suite (figure 4.17 (f)).

Sur la figure 4.18, on peut apprécier, dans le cadre de la même simulation (cas MEDIUM avec bain de 101 modes), l'évolution du second contour négatif  $v_{-2}$ . Rappelons qu'en raison de la forme de la vitesse de dérive de champ croisés  $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \propto \mathbf{e}_z \times \nabla \phi$ , le champ électrostatique peut être vu comme un champ de vorticité potentielle pour les contours dans les plans perpendiculaires au champ magnétique, l'advection se faisant le long des isopotentiels. On peut utilement mettre en relation l'évolution des cellules de convection dans la figure 4.17 avec l'apparition de digitations radiales 4.18 (b) qui brisent la symétrie de l'équilibre 4.18 (a), de leur cisaillement poloidal (4.18 (c)) jusqu'à la formation de vortex (figure 4.18 (d)) conduisant à une filamentation en espace (4.18 (e) (f)). La limitation du repliement des structures par la taille de grille finie, est clairement visible dans les dernières étapes.

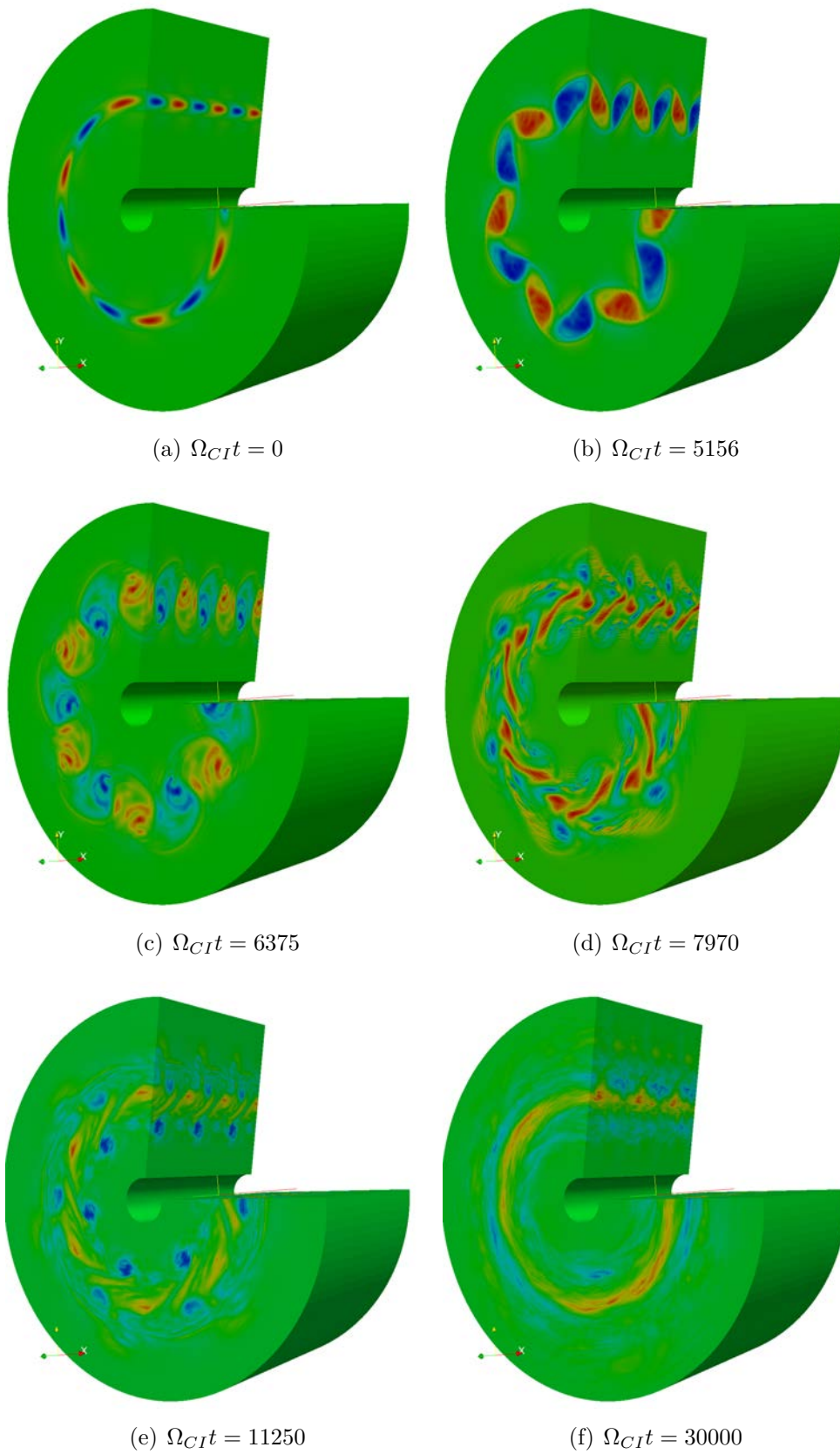
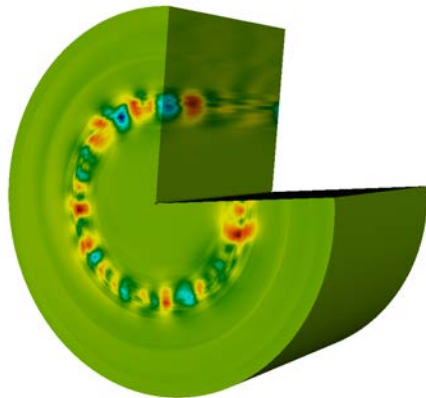
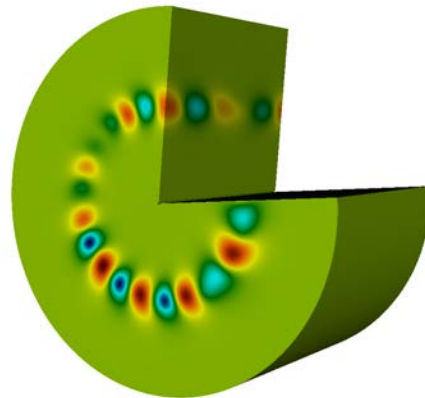


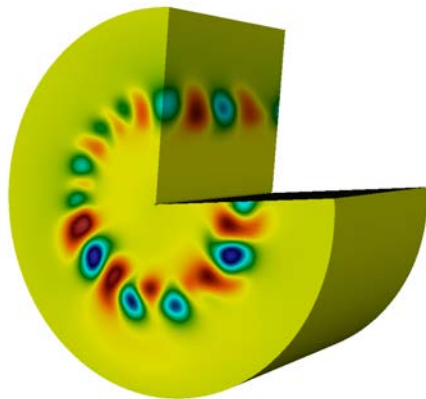
FIGURE 4.16 – Cas test SMALL perturbé par  $(6, 3)$ ; perturbation de densité  $n(\mathbf{r}, t) - n(\mathbf{r}, 0)$  à quelques instants clés de la simulation.



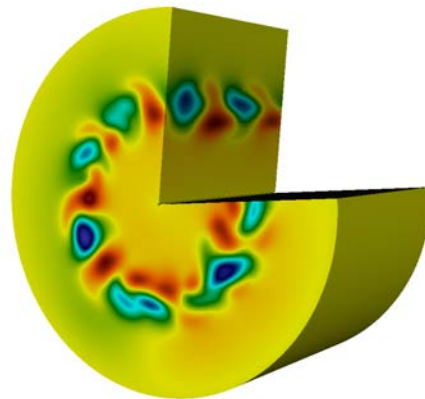
(a)  $\Omega_{CIt} = 0$



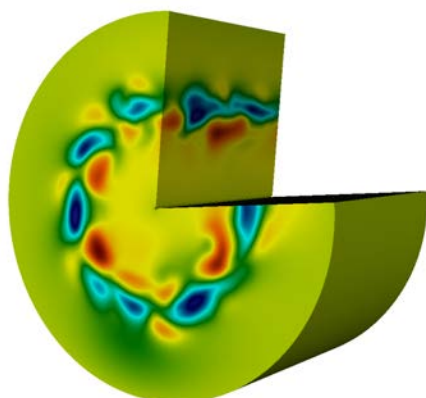
(b)  $\Omega_{CIt} = 2000$



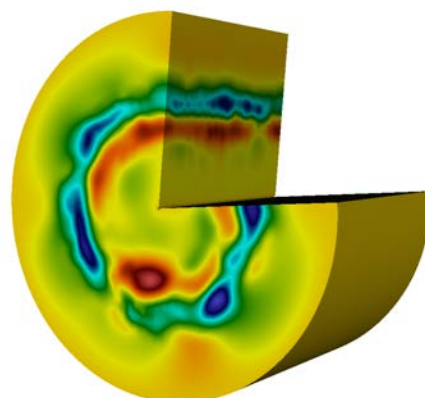
(c)  $\Omega_{CIt} = 2473$



(d)  $\Omega_{CIt} = 2698$



(e)  $\Omega_{CIt} = 2923$



(f)  $\Omega_{CIt} = 3597$

FIGURE 4.17 – Cas test MEDIUM perturbé par un bain de 101 modes; potentiel électrostatique à quelques instants clés de la simulation.

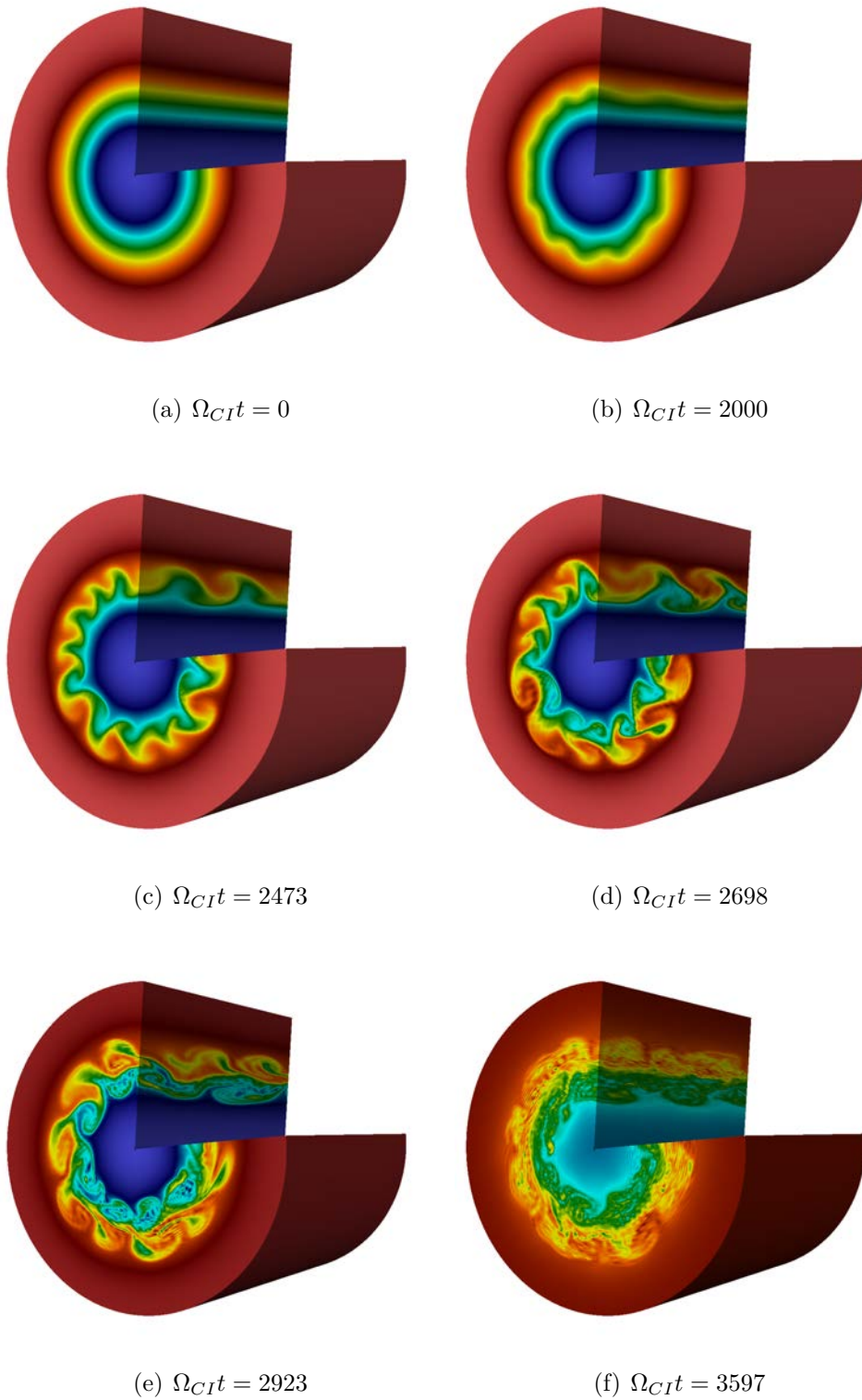


FIGURE 4.18 – Cas test MEDIUM perturbé par un bain de 101 modes ; contour  $v_{-2}$  à quelques instants clés de la simulation.

## 4.2 Validation de la phase linéaire du code non-linéaire

Le code non-linéaire est initialisé au moyen d'une perturbation de faible amplitude, construite à partir de l'enveloppe  $\phi_{mq}^n(r)$  d'un unique mode propre instable pour chaque valeur de  $(m, n)$ . Préalablement à toute autre analyse de la divergence des différents modèles dynamiques, il convient de vérifier que durant la phase linéaire, c'est-à-dire tant que l'évolution du champ moyen  $(0, 0)$  par rapport à sa valeur d'équilibre est négligeable, le mode de Fourier  $\phi_m^n(r, t)$  tend bien après un régime transitoire initial vers un mode propre de l'opérateur discrétisé d'évolution temporelle du code non-linéaire dont les caractéristiques spectrales coïncident avec celles du mode propre linéaire. Il convient pour ce faire de vérifier les propriétés suivantes.

- L'enveloppe normalisée  $\frac{\phi_m^n(r, t)}{\|\phi_m^n\|_\infty(t)}$  est un invariant temporel durant la phase linéaire, et coïncide avec l'enveloppe radiale du mode linéaire.
- Le taux de croissance non-linéaire, calculé par régression linéaire sur des quantités globales ( $\|\phi_m^n\|_2(t)$ ,  $\|\phi_m^n\|_\infty(t)$ ), ou locales ( $|\phi_m^n|(r_0, t)$ ), est égal au taux de croissance linéaire. La région de régression permettant le calcul du taux non-linéaire est détectée de manière semi-automatique : parmi un ensemble de fenêtres temporelles candidates, le code de post-traitement détermine la fenêtre de régression minimisant l'erreur entre les données et le modèle linéaire. L'ensemble des fenêtres temporelles testées est restreint par l'ajustement de paramètres bornant à la fois leur position et leur étendue. (voir Figure 4.19 (a)).
- La fréquence non-linéaire, obtenue par transformée de Fourier en temps du signal local  $\cos(\arg \phi_m^n(r_0, t))$ , coïncide avec la fréquence linéaire  $\omega_r$  (voir Figure 4.19 (b)).

Dans le cas d'une perturbation à un unique mode  $(m, n)$ , on peut en outre de manière très aisée vérifier la dynamique d'évolution du mode  $(0, 0)$  générée par la croissance de la perturbation, qui prend une forme particulièrement simple. Dans la phase linéaire, on a d'après (2.13)

$$\Im(\phi_m^n v_j^{n*}) = -\gamma |\phi_m^n(\omega, r)|^2 \frac{nk_{\parallel} - k_{\vartheta} d_r V_j^{eq}}{(\omega_R - nk_{\parallel} V_j^{eq})^2 + \gamma^2} e^{2\gamma t}, \quad (4.9)$$

où  $eq$  dénote que les champs gardent leur valeur d'équilibre. Par substitution dans (2.11) on obtient

$$\partial_t \langle v_{\vartheta} \rangle_{z, \vartheta} = -2\gamma \frac{m}{rn_0} |\phi_m^n(\omega, r)|^2 \sum_j A_j \frac{nk_{\parallel} - k_{\vartheta} d_r V_j^{eq}}{(\omega_R - nk_{\parallel} V_j^{eq})^2 + \gamma^2} e^{2\gamma t}. \quad (4.10)$$

Le mode  $(0, 0)$  prend donc la forme  $f(r) \exp(\gamma_{00} t)$  où  $f(r)$  est une enveloppe radiale indépendante du temps et  $\gamma_{00} = 2\gamma$ .

Dans le cas des bains de modes incluant plusieurs couples  $(m, n)$ , et en supposant qu'un seul mode propre par couple  $(m, n)$  est utilisé pour éviter tout phénomène de modulation, l'intégration en temps de (4.10) conduit à une combinaison  $\sum_q f_q(r) \exp(2\gamma_q t)$  et on a ainsi

$$\phi_0^0(r, t) = f_{q_{max}}(r) e^{2\gamma_{max} t} \left( 1 + \sum_{q \neq q_{max}} \frac{f_q}{f_{q_{max}}} e^{2(\gamma_q - \gamma_{max}) t} \right), \quad (4.11)$$

CASE	Mode	$\gamma_{lin}$	$\gamma_{nl}$	$\delta(\%)$	$\gamma_{00}$	$\delta_{00}(\%)$	$\delta'_{00}(\%)$
SMALL	(6,3)	1,588	1,572	-1.05	3.147	-0.9	0.1
SMALL	(10,5)	1.872	1,885	0,7	3.674	-1.9	-2.5
MEDIUM	(6,3)	4.490	4.486	-0.07	8.905	-0.8	-0.7
MEDIUM	(10,3)	5.209	5.193	-0.3	10.347	-0.7	-0.4
BIG	(6,3)	2.624	2.615	-0.4	5.076	-3.3	-2.9
BIG	(13,5)	3.311	3.502	5.7	7.132	7.7	1.8

TABLE 4.1 – Perturbations à un mode : Taux de croissance ;  $\gamma_{nl}$  est estimé par régression logarithmique sur  $\|\phi\|_2$  ;  $\delta$  indique l'écart relatif entre les taux linéaires et non-linéaires ;  $\delta_{00}$  et  $\delta'_{00}$  sont les écarts relatifs entre le taux de croissance  $\gamma_{00}$  du mode (0,0) et respectivement  $2\gamma_{lin}$  et  $2\gamma_{nl}$  ; toutes les fréquences sont exprimées en  $10^{-3}\Omega_{CI}$ .

où  $\gamma_{max} = \gamma_{q_{max}} = \max_q \gamma_q$ . La croissance du mode (0,0) est dominée par le terme relatif au mode  $(m, n)$  le plus instable lorsque  $t \gg \sup_{q \neq q_{max}} \tau_q$  où

$$\tau_q = \frac{1}{2(\gamma_{max} - \gamma_q)} \ln \left\| \frac{(p-1)f_q}{f_{q_{max}}} \right\|_{\infty}. \quad (4.12)$$

En fonction du nombre, de la pondération relative des différents modes, de la distribution des valeurs de  $\gamma$ , et de la durée de la phase linéaire, il est possible d'observer une phase de croissance linéaire plus ou moins bien définie selon les cas pour le mode (0,0). Le taux de croissance correspondant est proche de  $2\gamma_{max}$ .

### 4.2.1 Taux de croissance dans la phase linéaire

Un bon accord est observé entre les taux de croissance linéaires et non-linéaires, avec des erreurs relatives typiquement de l'ordre de 1%, et allant jusqu'à 5%, sur l'ensemble des cas traités. Dans le cas des perturbations à 1 mode, la croissance du mode (0,0) avec un taux  $\gamma_{00} = 2\gamma$  est confirmée à quelques points près. Le tableau 4.1 présente quelques exemples représentatifs.

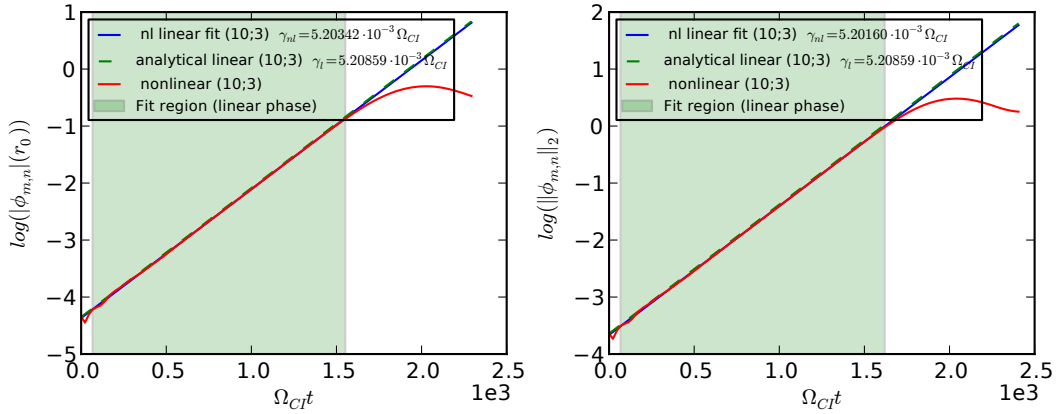
Dans le cas d'une perturbation à deux modes, on vérifie dans un premier temps l'orthogonalité des deux modes utilisés vis à vis de l'opérateur d'évolution temporelle : les taux de croissance obtenus dans la phase linéaire sont proches de ceux obtenus dans le cas où ces modes sont injectés individuellement dans la perturbation (Table 4.2). On observe dans un second temps que le taux de croissance du mode (0,0) se situe entre les taux de croissances obtenus pour les cas à modes uniques soit

$$2 \times \gamma_{mode1} \approx \gamma_0^0(mode1) < \gamma_0^0(mode1 + mode2) < \gamma_0^0(mode2) \approx 2 \times \gamma_{mode2}. \quad (4.13)$$

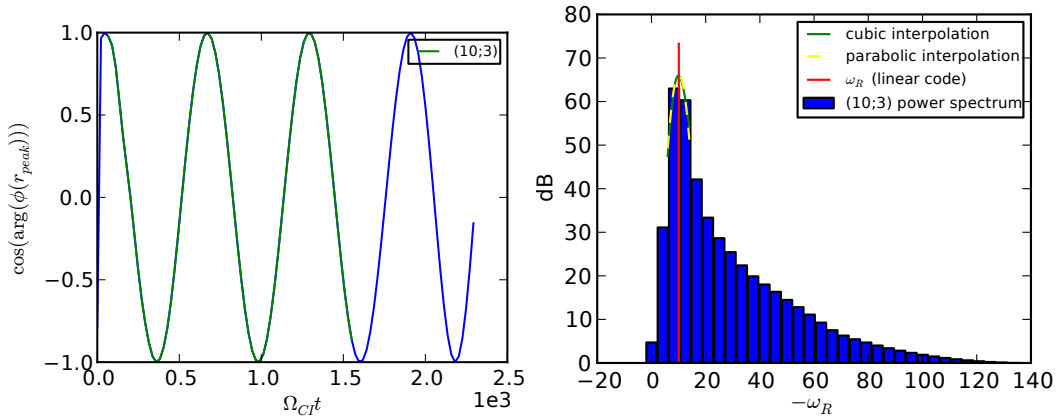
Cette relation ne peut conduire à une quelconque généralisation dans la mesure où la pondération entre ceux-ci dans le flux pilotant le mode (0,0) fait intervenir à la fois

- la géométrie de l'enveloppe,
- la valeur de  $k_{\vartheta}$ ,
- le taux de croissance à travers le facteur  $e^{2\gamma t}$ .

Dans les cas étudiés on a à la fois  $\gamma_2 > \gamma_1$ ,  $k_{\vartheta 2} > k_{\vartheta 1}$ , et des enveloppes proches. Le taux de croissance du mode (0,0) est en conséquence très proche du double du mode



(a) Estimation des taux de croissance dans la phase linéaire par régression globale et locale ; droite de régression (trait continu bleu) sur les données non-linéaires et estimation affine (pointillé vert) à partir du taux de croissance linéaire



(b) Estimation de la fréquence réelle par détection du pic du spectre de puissance temporel

FIGURE 4.19 – Cas MEDIUM perturbé par le seul mode (10,3) : Détermination des caractéristiques temporelles de la phase linéaire du code non-linéaire ; la fenêtre temporelle, utilisée pour calculer le spectre de (b), identifiée par la couleur verte, est la fenêtre optimale de régression déterminée en (a) ; des estimations de la position en fréquence du pic sur le spectre sont obtenues par interpolation polynomiale du spectre au voisinage du maximum discret en fréquence

Cas	Mode	$\gamma_{lin}$	$\gamma_{nl}$	$\delta(\%)$	$\gamma_{00}$
SMALL	(6, 3)	1,588	1,548	-2,546	3,498
SMALL	(10, 5)	1,872	1,853	-0,982	3,498
MEDIUM	(6, 3)	4,490	4,506	0,372	10,164
MEDIUM	(10, 3)	5,209	5,234	0,487	10,164
BIG	(6, 3)	2,624	2,625	0,049	7,086
BIG	(13, 5)	3,311	3,502	5,774	7,086

TABLE 4.2 – Perturbation à deux modes : taux de croissance dans la phase linéaire. Écart relatif  $\delta$  entre les taux linéaires et non-linéaire ;  $\gamma_{00}$  Taux de croissance du mode (0, 0)

le plus instable.

Le cas des perturbations par bains de mode est sensiblement plus complexe. Certains des modes parmi les moins instables peuvent en effet voir leur phase linéaire réduite à néant par la conjonction de deux phénomènes : d'une part la durée de la phase transitoire augmente sensiblement, et d'autre part la saturation due au niveau du mode (0, 0) intervient relativement plus précocement puisque ce dernier est majoritairement conditionné par l'évolution des modes les plus instables. Si l'on exclut ces modes pour lesquels la notion de phase linéaire n'a plus de sens opératoire, on observe un bon accord entre taux et fréquences linéaires et non-linéaire même dans le cas des bains de modes. Les écart relatifs restent du même ordre que dans le cas des perturbations à un mode.

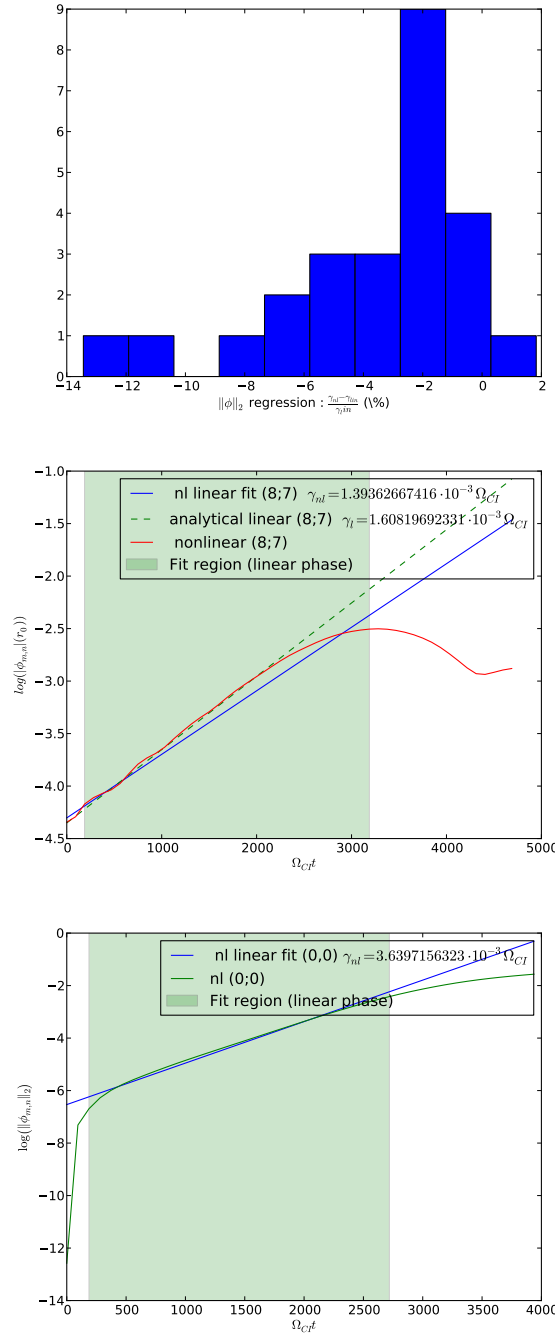
Considérons tout d'abord le cas test SMALL, perturbé par un bain initial de 25 modes de même amplitude sélectionnés dans le plan  $(m, n)$  autour du mode le plus instable. L'accord entre taux linéaire et non-linéaire reste bon (de l'ordre d'1%) pour une majorité de modes mais la saturation précoce de certains modes conduit à une sous-estimation du taux de croissance pour les modes concernés. Les quelques écarts importants ne sont donc pas tant dûs à un désaccord entre taux linéaires et non-linéaires, qu'à la faible durée de la phase linéaire proprement dite : on peut réduire ces écarts en adaptant les limites de la fenêtre de régression jusqu'à une limite où la notion même de phase linéaire perd son sens. Le mode (0, 0) conserve une phase de croissance linéaire large, avec un taux de  $3,63 \times 10^{-3} \Omega_{CI}$ , légèrement inférieur au double de celui du mode le plus instable (10, 5), qui vaut  $1.872 \times 10^{-3} \Omega_{CI}$ .

Considérons maintenant un cas extrême, le cas test BIG, perturbé par les 237 modes les plus instables obtenus par l'analyse linéaire. Les taux de croissance linéaires s'étendent sur une large plage de valeurs de  $2,8 \times 10^{-5} \Omega_{CI}$  à  $3,3 \times 10^{-3} \Omega_{CI}$ . La croissance du mode (0, 0), qui pilote la saturation des modes linéaires, se produit à un taux de  $5,65 \times 10^{-3} \Omega_{CI}$ , inférieur au double du taux du mode le plus instable (13,5) avec  $3,46 \times 10^{-3} \Omega_{CI}$ , mais supérieur au double de nombreux autres. Pour un mode à bas taux ou particulièrement sensible aux variations du mode (0, 0), le démarrage de la phase de saturation va se produire antérieurement à ce qu'il serait si la perturbation ne contenait que ce mode. La fenêtre de croissance linéaire entre le transitoire initial et la saturation va être considérablement réduite, voire réduite à néant. Sur la figure 4.2.1, on peut noter la grande dispersion des écarts entre taux linéaire et non-linéaire. Pour une grande majorité de modes, les écarts restent de l'ordre de quelques points. Pour certains modes le taux non-linéaire n'a plus de sens attendu qu'il n'a plus de phase



Mode	$\gamma_l$	$\gamma_{nl}$	$\epsilon(\%)$
(8,3)	1,691	1,585	-6,300
(9,3)	1,716	1,662	-3,127
(10,3)	1,728	1,692	-2,084
(11,3)	1,731	1,684	-2,752
(12,3)	1,728	1,630	-5,683
(8,4)	1,805	1,691	-6,351
(9,4)	1,832	1,785	-2,589
(10,4)	1,845	1,839	-0,317
(11,4)	1,846	1,798	-2,598
(12,4)	1,839	1,786	-2,883
(8,5)	1,828	1,861	1,826
(9,5)	1,859	1,819	-2,125
(10,5)	1,872	1,855	-0,869
(11,5)	1,871	1,833	-2,039
(12,5)	1,860	1,719	-7,601
(8,6)	1,765	1,555	-11,895
(9,6)	1,802	1,779	-1,269
(10,6)	1,815	1,768	-2,642
(11,6)	1,813	1,791	-1,218
(12,6)	1,799	1,704	-5,266
(8,7)	1,608	1,392	-13,440
(9,7)	1,654	1,653	-0,050
(10,7)	1,670	1,590	-4,802
(11,7)	1,666	1,645	-1,265
(12,7)	1,646	1,591	-3,363

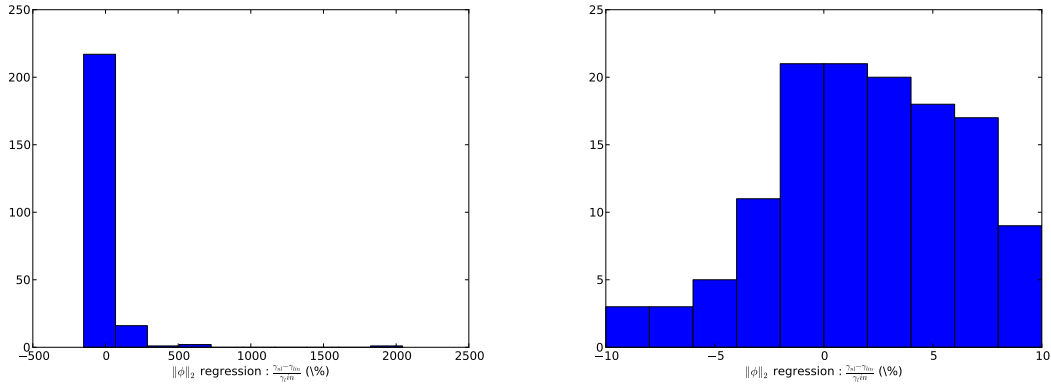
(a) SMALL - 25 - Régression sur  $\|\phi\|_2$  - Les taux non-linéaires sont majoritairement sous-estimés.



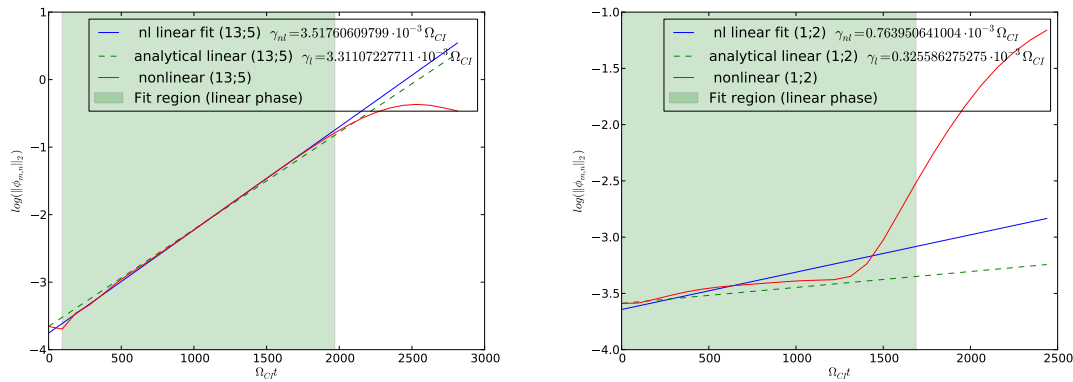
(b) SMALL -25 Distribution des écart relatifs des taux de croissance  $(\gamma_{nl} - \gamma_{lin})/\gamma_{lin}$  - Saturation du mode (8,7) à l'intérieur de la fenêtre de régression - Taux de croissance du mode (0,0)

FIGURE 4.20 – Cas test SMALL - Bain de 25 modes au voisinage du plus instable

linéaire discernable. Le mode (13, 5), le plus instable, possède une phase linéaire bien définie. Pour le mode (12, 6), en revanche, plus sensible aux variations du mode (0, 0), il n'est plus possible de distinguer clairement de phase linéaire.



(a) BIG - Bain de 237 modes - Répartition des écarts sur les taux de croissance  $(\gamma_{nl} - \gamma_{lin})/\gamma_{lin}$



(b) BIG - Bain de 237 modes - Le mode (13,5) possède une phase linéaire bien définie - Dans le cas du mode (1,2), ce n'est plus le cas

FIGURE 4.21 – Phase linéaire pour un bain de 237 modes - Mise en évidence de l'absence de phase linéaire proprement dit pour certains modes

## 4.2.2 Fréquences dans la phase linéaire

En tenant compte du fait que l'estimation des fréquences réelles est limitée en précision par le faible nombre de périodes du signal dans la phase linéaire (typiquement deux à trois périodes), on observe également un bon accord entre les estimations de fréquences non-linéaires et les fréquences linéaires. Les écarts en valeur absolue, entre les fréquences linéaires et les fréquences de pic discrètes sont toujours inférieurs à la résolution en fréquence. La correction des effets d'échantillonnage s'effectue par interpolation polynomiale (quadratique ou cubique) du spectre au voisinage du maximum discret. Les écarts relatifs observés entre ces estimations et les fréquences linéaires sont de l'ordre de quelques points (voir Table 4.3).

Cas	Mode	$\omega_{lin}$	$\omega_{max}$	$\Delta\omega$	$\omega_{parab}$	$\delta_{parab}$ (%)
SMALL	(6,3)	-3,186	-3,351	0,838	-3,015	-5,382
SMALL	(10,5)	-5,507	-5,745	0,957	-5,531	0,423
MEDIUM	(6,3)	-10,584	-9,864	1,644	-10,281	-2,870
MEDIUM	(10,3)	-10,094	-8,343	2,086	-10,104	0,102
BIG	(6,3)	-3,254	-3,830	0,957	-3,323	2,128
BIG	(13,5)	-5,369	-5,362	1,340	-5,338	-0,571

TABLE 4.3 – Perturbation à un mode : Fréquences réelles ;  $\omega_{max}$  : fréquence correspondant au maximum discret ;  $\Delta\omega$  : résolution de la grille en fréquence ;  $\omega_{parab}$  : position du pic de fréquence obtenu par interpolation parabolique ;  $\delta_{parab}$  : écart relatif avec  $\omega_{lin}$  ; les fréquences sont exprimées en  $10^{-3}\Omega_{CI}$ .

Cas	Mode	$\omega_{lin}$	$\omega_{max}$	$\Delta\omega$	$\omega_{parab}$	$\delta_{parab}$ (%)
SMALL	(6,3)	-3,186	-3,723	0,931	-3,071	-3,609
SMALL	(10,5)	-5,507	-5,745	0,957	-5,445	-1,130
MEDIUM	(6,3)	-10,584	-8,599	2,150	-9,558	-9,699
MEDIUM	(10,3)	-10,094	-8,343	2,086	-10,120	0,260
BIG	(6,3)	-3,254	-2,578	1,289	-2,432	-25,259
BIG	(13,5)	-5,369	-5,362	1,340	-5,112	-4,785

TABLE 4.4 – Perturbation par 2 modes : Fréquences réelles ;  $\omega_{max}$  : position du pic de fréquence sur la grille -  $\Delta\omega$  : résolution de la grille en fréquence -  $\omega_{parab}$  : position du pic en fréquence obtenue par interpolation parabolique ;  $\delta_{parab}$  : écart relatif avec  $\omega_{lin}$

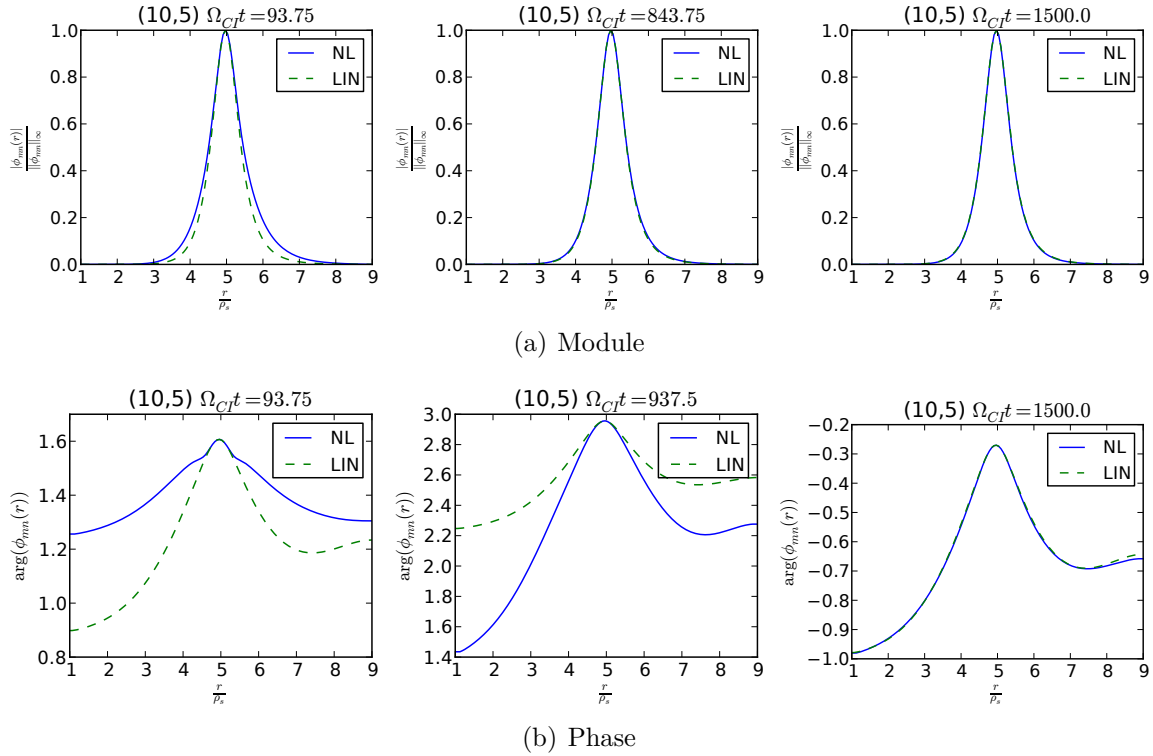


FIGURE 4.22 – CAS SMALL : perturbation à 1 mode par (10, 5) ; évolution de l’enveloppe radiale du mode (10, 5) à trois instants clés de la croissance initiale ; par construction, les enveloppes coïncident exactement à  $t = 0$  (non représenté) ; l’excursion maximale durant le transitoire a lieu à  $t = 93,75\Omega_{CI}^{-1}$  ; la coïncidence en module apparaît à  $t = 843\Omega_{CI}^{-1}$  et plus tardivement en phase à  $t = 1500\Omega_{CI}^{-1}$ .

### 4.2.3 Géométrie des enveloppes radiales dans la phase linéaire

La comparaison de la géométrie des enveloppes radiales des modes est effectuée de deux manières. L’inspection visuelle des profils radiaux du module et de la phase (argument) permet une première évaluation de la congruence des profils linéaires et non-linéaires.

Dans un second temps, la structure simple (unimodale) de l’enveloppe des modes permet le suivi temporel d’un petit nombre de paramètres caractéristiques. Le comportement observé est identique pour tous les cas considérés. Une distortion légère de l’enveloppe du mode est observée lors de la phase transitoire initiale, après laquelle l’enveloppe non-linéaire converge vers l’enveloppe linéaire, à la fois en module et en phase (Figure 4.22). L’erreur relative sur les modules respectifs des modes non-linéaires et linéaires culmine à quelques points de pourcentage durant le transitoire puis reste inférieure à 1% lors de la phase linéaire. L’enveloppe du potentiel électrostatique moyenné en  $(z, \vartheta)$  converge durant le transitoire vers le profil asymptotique correspondant à la phase linéaire, en cohérence avec l’évolution prédite par l’équation 4.10. A l’issue de cette phase de convergence initiale, les variations de l’enveloppe normalisée sont négligeables dans la phase de croissance linéaire proprement dite. Sur la figure 4.23 sont représentés, à titre d’exemple, les évolutions respectives de l’enveloppe du mode (0, 0) du potentiel ainsi que du champ de cisaillement poloïdal correspondant à quelques instants clés du début de la phase linéaire, dans le cas d’une perturbation à 1 mode.

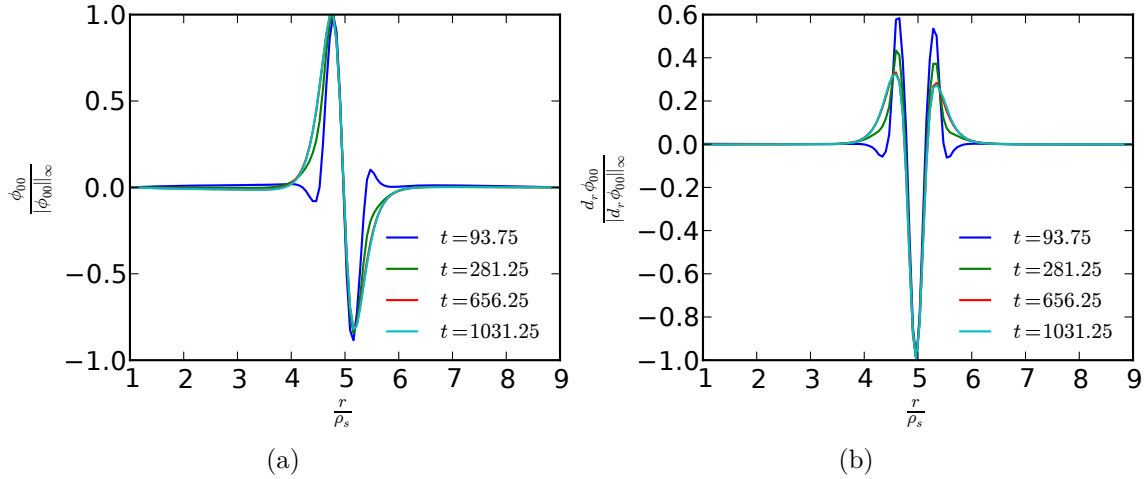


FIGURE 4.23 – Cas SMALL : perturbation à un mode par  $(10, 5)$ ; évolution des enveloppes radiales du potentiel électrostatique moyenné en  $(z, \vartheta)$  (a) et de la vitesse de dérive polôïdale moyenne (b) au début de la phase linéaire.

### 4.3 Comparaison des modèles à l'approche de la saturation

Ayant vérifié la coïncidence des trois modèles dynamiques dans la phase de croissance linéaire, nous pouvons maintenant examiner la divergence entre les trois modèles à l'approche de la première saturation. Rappelons rapidement les hypothèses sous-tendant les modèles linéaires adiabatiques à 1 mode et quasi-linéaire pour la description de la dynamique d'un mode de Fourier  $(m, n)$ . Le modèle quasi-linéaire suppose que la dynamique du mode est pilotée par le couplage de ce mode avec le champ moyen  $(0, 0)$  variable dans le temps. Le modèle linéaire adiabatique à 1 mode suppose que la dynamique peut-être adéquatement décrite à un instant  $t$  en utilisant les caractéristiques du mode propre le plus instable provenant du spectre calculé à partir des champ moyens  $(0, 0)$  à l'instant  $t$ .

La divergence entre le modèle quasi-linéaire forcé et le modèle non-linéaire apparaît dès lors que les couplages avec les modes autres que  $(0, 0)$  ne sont plus négligeables. La divergence entre le modèle quasi-linéaire forcé et le modèle linéaire adiabatique à 1 mode apparaît pour deux raisons intimement liées :

- les modifications du spectre entre deux instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$  sont telles que la projection du mode propre calculé à  $t_i$  sur la bases de vecteurs propres calculée à  $t_{i+1}$  couvre un large sous-espace : cet étalement spectral implique que les caractéristiques dynamiques d'un unique mode ne peuvent plus représenter adéquatement la dynamique.
- les variations du champ  $(0, 0)$  sont trop rapides pour assurer une séparation des spectres en temps du mode  $(0, 0)$  et du mode  $(m, n)$ .

La distinction entre ces deux sources de divergence supposerait un troisième modèle, où l'on effectuerait à chaque instant une projection du mode sur la base complète de vecteurs propres (stables y compris) à  $t_i$  de manière à calculer son évolution jusqu'à  $t_{i+1}$ . Cette approche se révèle par trop coûteuse en regard l'information qu'elle apporte : le modèle quasi-linéaire forcé permet de manière peu coûteuse d'obtenir l'évolution du

mode de Fourier, et le modèle linéaire permet d'apprécier si cette évolution peut se résumer à une variation paramétrique aisément quantifiable.

Du point de vue du modèle linéaire, le phénomène de saturation se traduit par une stabilisation du mode. La quantité qui varie le plus notablement est le taux de croissance qui tend vers 0. Au voisinage de la stabilité, la fréquence du mode varie peu et le processus de saturation est comme on le verra trop court en regard de la période du mode pour que cette variation soit mesurable dans les autres modèles. La bande de fréquence correspondant au mode initial reste dominante tout au long de la simulation pour ces deux derniers modèles. C'est donc en priorité sur le taux de croissance que peuvent porter les comparaisons. Les quantités correspondantes pour les modèles non-linéaire et quasi-linéaire forcé sont celles qui coïncident avec le taux de croissance linéaire dans la phase linéaire, à savoir les dérivées logarithmiques en temps de fonctionnelles locales ou globales du mode. Notons qu'à la différence du modèle linéaire, les modes de Fourier des modèles quasi et non-linéaires ne sont a priori pas factorisables en le produit d'une enveloppe radiale lentement variable et un facteur global d'évolution temporelle rapide. Il est donc nécessaire d'observer en sus l'évolution de la géométrie de l'enveloppe, afin d'estimer la pertinence de la comparaison des taux de croissance.

La stabilisation d'un mode de Fourier  $(m, n)$  peut être attribuée à deux mécanismes distincts

- la variation non-linéaire du champ  $(0, 0)$  sous l'effet du champ turbulent conduit à l'apparition de l'écoulement zonal et à une relaxation congruente des profils radiaux moyens.
- les couplages non-linéaires avec les modes autres que  $(0, 0)$  conduisent à un transfert d'énergie du mode perturbé vers le reste du spectre.

Comme on peut le présager au vu des évolutions spectrales décrites précédemment, les deux mécanismes peuvent a priori entrer en jeu dans le cadre des simulations non-linéaires. La divergence entre le modèle quasi-linéaire forcé et le modèle non-linéaire permet d'identifier la présence du second mécanisme.

Le premier mécanisme, seul responsable de la saturation des modèles linéaires et quasi-linéaires peut lui-même être compris comme la combinaison de plusieurs effets liés à l'évolution du mode  $(0, 0)$ .

$$\tilde{v}_{jm}^n(\omega, r) = \frac{\overbrace{nk_{\parallel} - k_{\vartheta} d_r v_{j0}^0}^1}{\underbrace{\omega - nk_{\parallel} v_{j0}^0}_2 - \underbrace{k_{\vartheta} d_r \phi_0^0}_3} \tilde{\phi}_m^n(\omega, r) \quad (4.14)$$

La relaxation des profils moyens entraîne d'une part une variation des gradients (terme 1 dans l'équation) pouvant amener le système sous le seuil pour le mode considéré, et d'autre part un décalage asymétrique des pôles résonants (terme 2) qui peut lui aussi stabiliser le mode. La croissance de l'écoulement zonal entraîne en sus l'existence d'un champ de cisaillement en vitesse poloïdale (terme 3). La variation radiale du décalage Doppler résultant peut aussi conduire à la stabilisation du mode. Dans tous les cas test abordés ce dernier terme ne semble pas jouer de rôle prépondérant dans la saturation initiale : les résultats obtenus par le code linéaire en le supprimant artificiellement sont identiques (à la tolérance requise de la part du code près) aux résultats bruts. La saturation peut donc être essentiellement attribuée à la relaxation des profils moyens, particulièrement à travers les variations des gradients.

Dans le cas des perturbations à un mode, les modèles non-linéaires et linéaires sont en

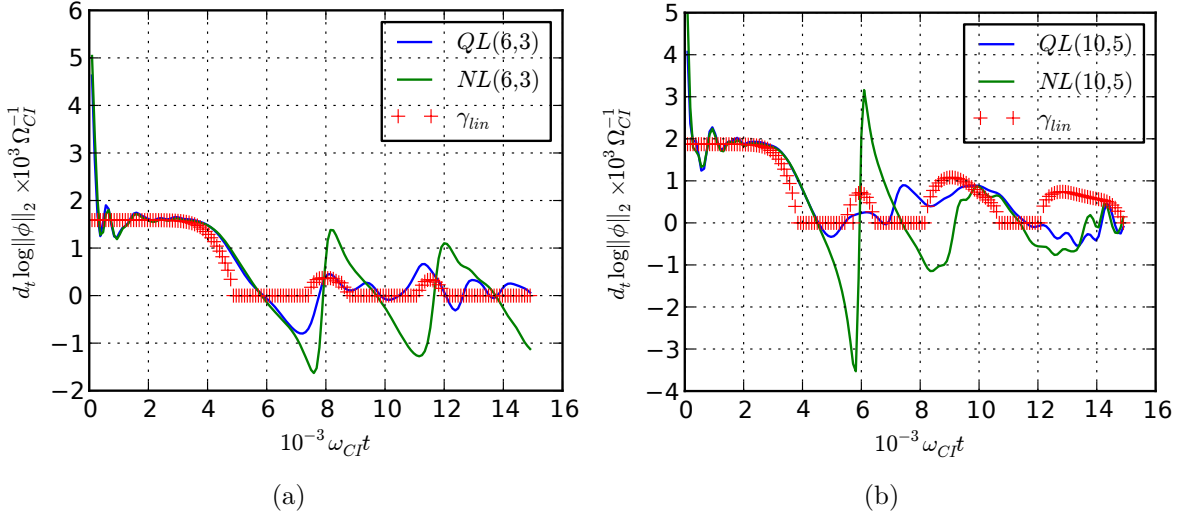


FIGURE 4.24 – Cas test SMALL ; comparaison des pseudo taux de croissance des modèles quasi-linéaire (QL) et non-linéaire avec le taux de croissance linéaire ; perturbation à 1 mode respectivement par (6, 3) (a) and (10, 5) (b).

accord jusqu'à la première saturation. Le modèle linéaire quant à lui prédit une saturation plus précoce (Figure 4.24). La saturation peut donc être attribuée exclusivement à l'influence de l'écoulement zonal. La divergence apparaissant entre le modèle linéaire et le modèle quasi-linéaire peut quant à elle être attribuée à la variation rapide du mode (0, 0), qui viole l'hypothèse d'adiabaticité. Il est important de noter que durant cette première phase de saturation la géométrie de l'enveloppe du mode est peu perturbée dans le cas des codes non-linéaires et quasi-linéaires, alors que celle du mode linéaire montre un léger élargissement.

Dans le cas des perturbations à spectre large, le mécanisme de saturation est plus complexe. Les modèles non-linéaires et quasi-linéaires divergent, impliquant une influence non-négligeable des couplages non-linéaires avec les modes autres que (0, 0), qui apparaissent ici en grand nombre (Figure 4.25).

Considérons le cas de deux modes, différents par leur taux de croissance initial, pour le cas test SMALL : le mode (6, 3) et le mode (10, 5), qui est le plus instable dans tout le plan spectral pour l'équilibre initial. Ainsi qu'on peut le voir en comparant les figures 4.24 (b) et 4.25 (b), les dynamiques de saturations de (10, 5) sont similaires dans le cas d'une perturbation à 1 mode ou à large spectre, avec des temps de saturation (durée estimée entre la fin de la phase linéaire et la première annulation du taux de croissance) de l'ordre de  $2000\Omega_{CI}^{-1}$ . Cet accord n'est pas surprenant : au cours de la phase linéaire, dans le cas du bain de modes, le flot turbulent est de plus en plus dominé par le mode (10, 5) qui est le plus instable ; le terme source pilotant l'évolution de l'écoulement zonal va donc approcher celui du cas où seul (10, 5) est seul présent.

Dans le cas du mode (6, 3), visible sur les figures 4.24 (a) et 4.25 (a)), on peut tout d'abord remarquer que le processus de saturation est plus lent, pour les trois modèles dynamiques, dans le cas d'une perturbation à large spectre, avec un temps de première saturation de l'ordre de  $8000\Omega_{CI}^{-1}$ . Si l'on considère uniquement le modèle quasi-linéaire, afin d'exclure l'effet des couplages non-linéaires, il semble que l'efficacité en terme de stabilisation de la rétroaction du mode (0, 0) sur le mode (6, 3) soit plus importante

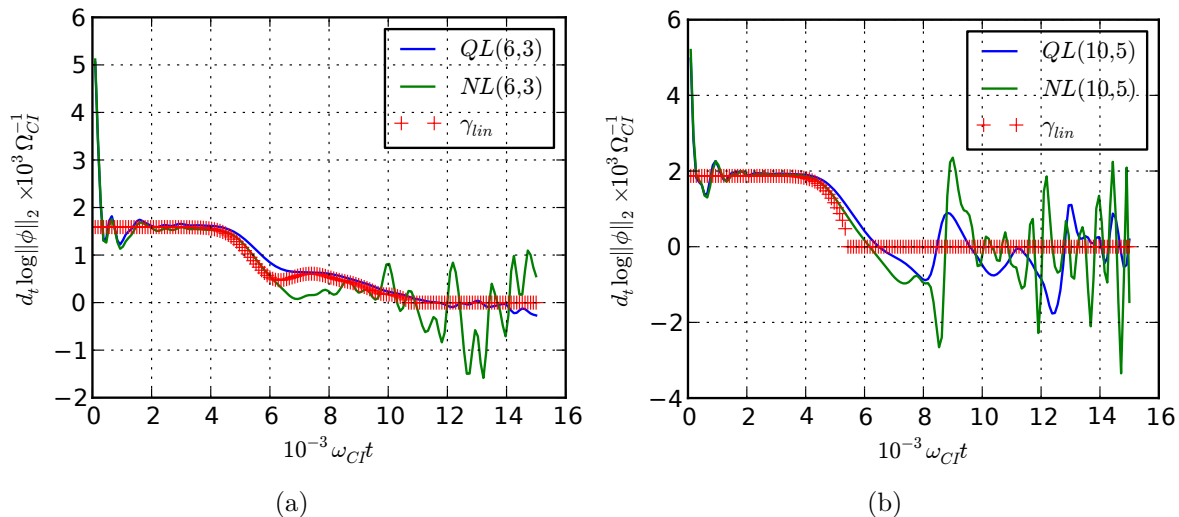


FIGURE 4.25 – Cas test SMALL; comparaison des taux de croissances apparents des modes de Fourier du potentiel électrostatique des modèles non-linéaires et quasi-linéaires avec les taux de croissance linéaires dans le cas d’une perturbation par 239 modes; extraits des données pour les modes (6, 3) (a) et (10, 5) (b).

lorsque le mode (0, 0) est généré exclusivement par (6, 3) (Figure 4.25 (a)). Ce phénomène est observable même dans le cas d’une perturbation à deux modes, (6, 3) et (10, 5). Le caractère dominant de (10, 5) dans l’évolution du mode (0, 0) suffit à briser la corrélation entre (6, 3) et (0, 0) (Figure 4.26).

Dans le cas de la perturbation à deux modes par (10, 5) et (6, 3) (Figures 4.26 (b) et (c)), on peut observer un fait notable. Le mode le plus instable (10, 5), qui pilote l’évolution de l’écoulement zonal, est le premier conduit à la saturation par la rétroaction du mode (0, 0), permettant ainsi au mode (6, 3) d’atteindre un niveau plus élevé que (10, 5). Il apparaît que dans ce cas, une estimation naïve de la composition du spectre turbulent à partir des seuls taux de croissances calculés à l’équilibre serait erronée. La saturation précoce des modes les plus instables par l’écoulement zonal peut donc conduire à une inversion de la prépondérance de certains modes dans le spectre. En d’autres termes, la relaxation vers la stabilité marginale n’est pas un processus uniforme dans le plan spectral  $(m, n)$ , comme on peut le voir sur les cartes de taux de croissance linéaire Figure 4.27.

On peut en outre noter un accord remarquable entre le taux de croissance linéaire et le modèle non-linéaire au début de la saturation (Figure 4.25 (a)) entre  $t = 4000\Omega_{CI}^{-1}$  et  $t = 6000\Omega_{CI}^{-1}$ . Cet accord apparent ne doit absolument pas être vu comme la marque du succès du modèle linéaire à prévoir la dynamique du mode : l’effet des couplages non-linéaires, visible par comparaison avec le modèle quasi-linéaire, compense partiellement la divergence entre les modèles. Le bon accord entre le modèle linéaire et le modèle quasi-linéaire entre  $t = 6000\Omega_{CI}^{-1}$  et  $t = 10000\Omega_{CI}^{-1}$  (Figure 4.25 (a)), peut en revanche être considéré comme le signe que la condition d’adiabaticité est à nouveau valide, en raison d’un ralentissement de l’évolution du mode (0, 0) dû à la saturation des modes les plus instables (Figure 4.25 (b)).



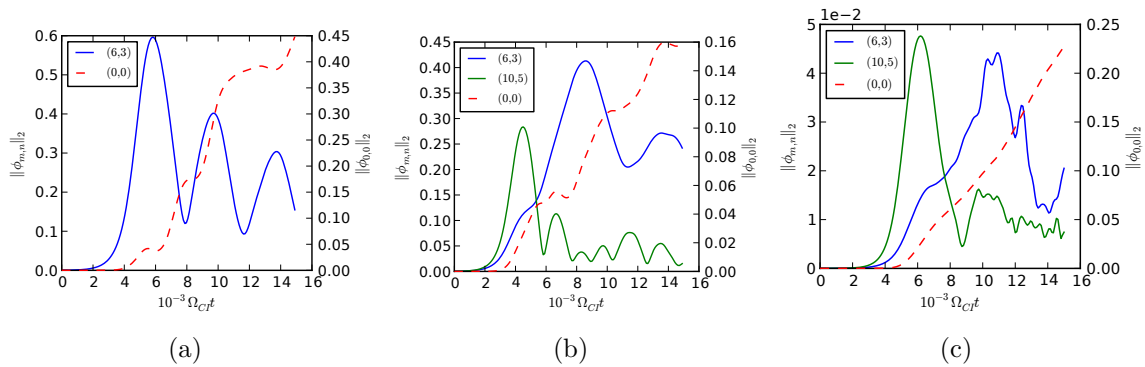


FIGURE 4.26 – Cas test SMALL; enveloppe radiale du potentiel électrostatique en norme  $L_2$ ; (a) perturbation par un mode unique  $(6, 3)$ ; (b) perturbation par  $(6, 3)$  et  $(10, 5)$ ; (c) perturbation par un bain de 237 modes

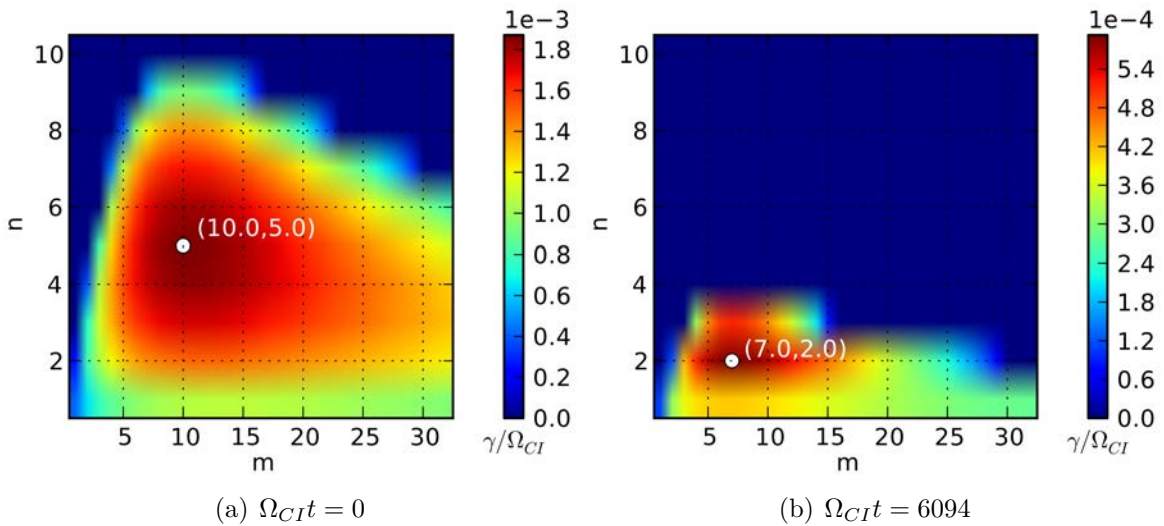


FIGURE 4.27 – Cas test SMALL perturbé par un bain de 237 modes; carte de taux de croissance linéaire dans le plan spectral pour l'équilibre initial (a) et calculée à partir des champs moyens extraits des données de simulation non-linéaire à  $\Omega_{CI}t = 6094$  (b).

## 4.4 Conclusions et remarques

L'ensemble des simulations non-linéaires effectuées répond à deux problématiques : d'une part une vérification de la consistance des modèles dynamiques développés, et d'autre part une analyse des mécanismes de saturation initiale de l'instabilité. Les comparaisons effectuées dans la phase linéaire, durant laquelle les trois modèles dynamiques proposés doivent coïncider, permettent une validation croisée des codes associés à chacun des modèles. L'analyse des résultats a montré un bon accord, tant sur le plan des caractéristiques temporelles, dans la limite des possibilités de leur détermination, que des caractéristiques géométriques des modes les plus instables. Notons que cette validation ne peut à proprement parler être considérée comme complète, dans la mesure où ni les modes linéairement stables ni les modes faiblement instables n'ont fait l'objet de comparaisons croisées. L'accord des trois modèles sur les modes qui de fait dominant le champ turbulent à l'issue du transitoire initial peut néanmoins à toutes fins pratiques être considéré comme un critère de validation suffisant. Outre cette validation croisée, qui permet d'établir une consistance interne au modèle multi-water-bag, les caractéristiques génériques de la dynamique du système correspondent à ce qui est habituellement observé pour ce type de scénario de simulation : relaxation des gradients moyens, apparition d'écoulements zonaux importants qui dominant un champ turbulent à large spectre.

Le lecteur pourrait s'étonner à ce stade de l'absence de comparaisons quantitatives du code non-linéaire avec un code extérieur, de la même manière que cela a été fait avec le modèle cinétique continu. Ce type de comparaisons a été envisagé, avec la version 4D du code semi-langrangien GYSELA ([31, 34]), mais abandonné pour plusieurs raisons qu'il est utile de mentionner. Premièrement, à la différence du modèle linéaire, il n'existe pas d'équivalent du modèle cinétique continu : toute comparaison devrait donc tenir compte de la résolution en vitesse parallèle effectivement utilisée dans chacun des codes, à savoir le nombre de bags et taille de grille respectivement. Secondement, un nombre de cas-test (équilibre et perturbation) important devrait être utilisé pour que les comparaisons obtenues puissent être considérées comme autres qu'anecdotiques. Enfin, les comparaisons avec le modèle cinétique continu dans le cadre de l'analyse linéaire ont montré, pour les distributions à faible nombre de bags, une grande sensibilité des résultats à la distribution des contours initiaux pour les faibles valeurs du taux de croissance. Cette variabilité se retrouvera nécessairement à la saturation de l'instabilité. Notons tout d'abord que les comparaisons effectuées dans le cadre de l'analyse linéaire pour le modèle multi-water-bag et de la validation de la phase linéaire d'une part, et dans [31] en ce qui concerne GYSELA d'autre part, impliquent qu'on observera nécessairement dans la phase de croissance linéaire un accord des codes similaire à celui obtenu pour les résultats linéaires. A l'approche de la saturation, les idiosyncrasies propres à chaque modèle (résolution et distribution des noeuds de la grille en vitesse parallèle) feront nécessairement apparaître des différences, dont les causes exactes seront difficiles à analyser, en raison de la variabilité propre à chaque modèle. Obtenir des résultats significatifs dans ce cas nécessiterait un balayage paramétrique très important, au risque de ne pouvoir conclure qu'à une évidence, à savoir que la variabilité des résultats obtenus par des modèles "non-convergés" est trop importante pour que les comparaisons soient significatives. En raison du coût important en temps de calcul et de traitement que nécessiteraient de tels scénarios de comparaisons, et malgré leur intérêt intrinsèque, le bénéfice attendu n'a pas semblé justifier leur mise en oeuvre.

La question qui a guidé la démarche d'analyse des mécanismes de saturation initiale de l'instabilité est de savoir dans quelle mesure on peut rendre compte de l'évolution du système à partir de données de l'analyse linéaire. Ayant observé un bon accord des trois modèles dans la phase de croissance linéaire, on peut en conclure qu'il est possible de prévoir l'état complet du système, écoulements zonaux compris, à l'issue de cette phase uniquement à partir des données d'analyse linéaires, relativement peu coûteuses à obtenir. Les comparaisons entre les trois modèles à la saturation initiale ont permis d'établir que dans les cas considérés, la première saturation résultait essentiellement de la relaxation des gradients due à l'apparition de écoulements zonaux. La rapidité d'évolution des champs moyens dans cette phase de saturation initiale rend caduques les hypothèses d'évolution lente sous-tendant le modèle linéaire "adiabatique". En outre, le processus de saturation n'est pas uniforme dans le plan spectral. Une conséquence importante de ce fait est que le spectre obtenu à l'issue de la saturation peut être sensiblement différent du spectre en fin de phase linéaire. De même, la structure des écoulements zonaux peut subir des modifications importantes durant la saturation. Une différence notable de comportement est observée entre les cas de perturbations à peu de modes et à spectre large, les mécanismes de rétroaction avec l'écoulement zonal étant bien plus marqués dans le premier cas. Ces différences ont deux conséquences : d'une part, tout résultat obtenu pour un système à peu de modes doit être extrapolé avec la plus grande prudence (voire pas du tout). D'autre part, la plus grande continuité de comportement dans le cas des perturbations à spectre large, permet d'envisager des cas où un modèle quasi-linéaire, bien que strictement inexact, pourrait présenter un accord tolérable avec les données brutes. Il est utile de rappeler que les cas-tests sélectionnés, pour lesquels les gradients d'équilibre sont importants et fortement localisés, et les domaines radiaux assez étroits, conduisent à la générations d'écoulements zonaux très marqués et exacerbent les divergences entre les différents modèles.



# Chapitre 5

## Analyse linéaire en géométrie torique

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Modèle - Contours d'équilibre . . . . .</b>	<b>122</b>
5.1.1	Configuration magnétique . . . . .	122
5.1.2	Modèle multi-water-bag multi-faisceau . . . . .	122
5.1.3	Contours d'équilibre . . . . .	123
5.1.4	Caractéristiques particulières de l'équilibre considéré . . . . .	130
<b>5.2</b>	<b>Analyse linéaire . . . . .</b>	<b>132</b>
<b>5.3</b>	<b>Résolution du problème bi-dimensionnel . . . . .</b>	<b>133</b>
5.3.1	Définition du problème . . . . .	133
5.3.2	Méthode numérique et implémentation . . . . .	134
<b>5.4</b>	<b>Méthode asymptotique en modes de ballonnement . . . . .</b>	<b>136</b>
5.4.1	Représentation en modes de ballonnement . . . . .	136
5.4.2	Orderings et développement asymptotique . . . . .	139
5.4.3	Problème intégral à l'ordre zéro . . . . .	139
5.4.4	Détermination de $\theta_{k0}$ . . . . .	142
5.4.5	Problème à l'ordre 2 : détermination de l'enveloppe radiale et de la fréquence globale . . . . .	143
<b>5.5</b>	<b>Méthode asymptotique : schémas numériques . . . . .</b>	<b>144</b>
5.5.1	Problème intégral aux valeurs propres . . . . .	144
<b>5.6</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>154</b>

---

## 5.1 Modèle - Contours d'équilibre

### 5.1.1 Configuration magnétique

Le champ magnétique de confinement est ici considéré dans une configuration simplifiée : les surfaces magnétiques sont des tores concentriques et la configuration n'admet pas de point  $X$ . Si certains effets géométriques (excentricité des surfaces magnétiques, anisotropie poloidale, modulation toroïdale de l'intensité du champ) sont négligés, les caractéristiques majeures de la configuration Tokamak dans le volume intérieur à la dernière surface de flux fermée sont préservées. En coordonnées toriques  $(r, \vartheta, \varphi)$ , sur le volume défini par  $\vartheta, \varphi \in [0; 2\pi], r_{min} < r < a$  le champ magnétique confinant a pour expression

$$\mathbf{B} = B(b_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + b_\varphi \mathbf{e}_\varphi) = \frac{B_0 R_0}{R} \left( \frac{r}{qR} \mathbf{e}_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi \right), \quad (5.1)$$

où  $R = R_0 + r \cos \vartheta$ ,  $R_0, a$  sont respectivement les grands et petit rayons du tore. Le paramètre  $q = q(r)$  désigne le facteur de sécurité et  $s(r) = r d_r \ln q$  traduit le cisaillement des lignes de champ ("shear"). La dépendance radiale du facteur de sécurité est représentée par un profil parabolique  $q = q_0 + q_2(r/a)^2$ . Par la suite, les dépendances radiales seront repérées en fonction de  $r$  ou de sa valeur normalisée au petit rayon du tore  $x = r/a$ , voire du facteur de sécurité  $q$ . Les champs dérivés intervenant dans l'expression de la dynamique ionique, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 en  $\epsilon_r = r/R_0$ , s'explicitent en

$$\frac{\nabla B}{B} = -\frac{1}{R} (-\cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta), \quad (5.2)$$

où les corrections d'ordre  $\epsilon_r^2 = (r/R)^2$  sont négligées<sup>1</sup>,

$$\mathbf{b} \times \frac{\nabla B}{B} = \frac{b_\varphi}{R} (-\sin \vartheta \mathbf{e}_r - \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta), \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \frac{b_\varphi}{R} \left( -\sin \vartheta \mathbf{e}_r - \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \frac{3 - 2s}{q} \mathbf{e}_\varphi \right) \quad (5.4)$$

### 5.1.2 Modèle multi-water-bag multi-faisceau

La fonction de distribution ionique est modélisée par une distribution multi-water-bag en  $v_{||}$  et multi-faisceau en  $\mu$  :

$$f(\mathbf{r}, t, v_{||}, \mu) = \sum_{j,l} A_{jl} \mathcal{H}(v_{jl}(\mathbf{r}, t) - v_{||}) \delta(\mu - \mu_l) \quad (5.5)$$

où  $\mathcal{H}$  dénote la fonction de Heaviside et où l'on utilise la convention d'indexation algébrique sur les indices parallèles des contours  $j = -N, \dots, -1, 1, \dots, N$

$$\forall l : j > 0 \Rightarrow A_{jl} > 0 \quad (5.6)$$

$$\forall l, j : A_{-j,l} = -A_{j,l} \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

---

1. Cette approximation revient à identifier l'intensité du champ  $B$  à la valeur de la composante toroïdale dominante  $B_\varphi$ .

Par défaut les sommations s'entendent sur tout le spectre des indices, soit

$$\sum_{j,l}(\bullet) = \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \sum_{l=1}^{N_\mu}(\bullet). \quad (5.9)$$

Afin d'alléger les notations, on adoptera par la suite les conventions suivantes.

- ◇ Lorsque le contexte ne nécessitera pas la distinction d'indice en  $j, l$ , les paires d'indices  $j, l$  pourront être remplacées par un indice générique indexant tous les couples possibles.
- ◇ Lorsque cela n'entraînera pas d'ambiguïté et permettra d'alléger les notations, la valeur  $\mu_l$  et l'indice  $l$  seront dénotées toutes deux par  $\mu$ .
- ◇ Lorsque le regroupement de paires de contours  $-j, j$  sera effectué, notamment dans le traitement des grandeurs d'équilibres symétriques, les bornes de sommation seront explicitées.

La substitution de 5.5 dans l'équation de Vlasov gyrocinétique conduit aux  $2N \times N_\mu$  équations de transport des contours

$$\partial_t v_{j\mu} + \mathbf{V}_{GC} \cdot \nabla v_{j\mu} = \left( \frac{dv_{\parallel}}{dt} \right), \quad (5.10)$$

avec

$$\mathbf{V}_{GC} = \frac{1}{\mathcal{F}_{tj\mu}} \left[ v_{j\mu} \vec{b} + \frac{v_{j\mu}^2}{\Omega_{CI}} \nabla \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \left( \mu \frac{\nabla B}{B} + \frac{q_i \nabla \mathcal{J}_\mu \phi}{B} \right) \right], \quad (5.11)$$

$$\left( \frac{dv_{\parallel}}{dt} \right) = \frac{-1}{\mathcal{F}_{tj\mu}} \left( \mathbf{b} + \frac{v_j}{\Omega_{CI}} \nabla \times \mathbf{b} \right) \cdot \left( \frac{\mu}{m_i} \nabla B + \frac{q_i}{m_i} \nabla \mathcal{J}_\mu \phi \right), \quad (5.12)$$

et

$$\mathcal{F}_{tj\mu} = 1 + \frac{v_{j\mu}}{\Omega_{CI}} \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b}. \quad (5.13)$$

L'équation de quasi-neutralité avec dérive de polarisation et électrons "adiabatiques"

$$-\nabla \cdot \left( \frac{n_i^0}{B\Omega_{CI}} \nabla_{\perp} \phi \right) + \frac{n_e^0}{T_e} (\phi - \langle \phi \rangle_{LC}) = \sum_{j,\mu} A_{jl} \mathcal{J}_\mu v_{j\mu} - n_e^0, \quad (5.14)$$

où l'on assimilera le gradient perpendiculaire à sa restriction aux variables  $(r, \theta)$  et où la moyenne  $\langle \cdot \rangle_{LC}$  est assimilée à la moyenne en  $(\vartheta, \varphi)$  sur les surfaces de flux  $r = cte$ .

### 5.1.3 Contours d'équilibre

Le choix d'une distribution d'équilibre appropriée pour l'étude des instabilités de gradient de température ionique dans le cadre du modèle gyrocinétique n'est pas trivial. Laissons un instant de côté les spécificités propres au modèle multi-water-bag. Suivant le même raisonnement que dans le cas cylindrique, on peut supposer établi un équilibre thermodynamique local sur les surfaces magnétiques. La fonction de distribution ionique d'équilibre est alors une Maxwellienne locale

$$f^{loc}(r, \vartheta, v_{\parallel}, \mu) d^3v \propto \frac{n(r)}{\sqrt{T(r)}} \frac{B(r, \vartheta)}{T(r)} \exp \left( -\frac{v_{\parallel}^2/2 + \mu B(r, \vartheta)}{T(r)} \right) dv_{\parallel} d\mu \quad (5.15)$$

où  $n(r), T(r)$  sont les profils radiaux de densité et température. Une caractéristique importante de cette forme d'équilibre est qu'il n'est pas une solution stationnaire de

l'équation de Vlasov gyrocinétique. Si, dans le cadre de l'analyse linéaire, les perturbations causées par cet écart à la stationnarité induisent des corrections en général minimales sur les caractéristiques de l'instabilité, ce n'est pas le cas des simulations quasi ou non-linéaires. Dans ce cas en effet, le système va en priorité chercher à retourner à l'équilibre par la génération de champ électrique important, essentiellement du mode  $(0, 0)$ , et ainsi masquer voire empêcher le développement de l'instabilité : l'excursion radiale des trajectoires ioniques due aux dérives de courbure et de gradient génère une séparation de charge responsable de l'apparition de ces champs. Cet écueil est évité par l'utilisation d'une distribution Maxwellienne dite canonique. Cette dernière est construite comme une fonction des invariants hamiltoniens des trajectoires d'équilibre, ce qui permet d'assurer sa stationnarité. Dans le cas d'un équilibre sans champ électrique, ces invariants sont l'énergie  $E = \frac{m_i v_{\parallel}^2}{2} + \mu B$  (comme dans le cas local) et le moment toroïdal  $P_{\varphi}$  qui est conservé dans une configuration axisymétrique. La dépendance en  $r$  (qui n'est pas un invariant) de la Maxwellienne locale est donc remplacée par une dépendance en  $P_{\varphi}$ .

$$f = c(P_{\varphi}) \exp(-E/T(P_{\varphi})), \quad (5.16)$$

où  $E = E(r, \vartheta, v_{\parallel}, \mu)$ ,  $P_{\varphi} = P_{\varphi}(r, \vartheta, v_{\parallel}, \mu)$ . Une différence notable entre la Maxwellienne locale et la Maxwellienne canonique est la brisure de la symétrie en vitesse parallèle (voir [21, 43]). Comme il est noté dans [43], si le choix d'une Maxwellienne locale en place d'une Maxwellienne canonique a des conséquences importantes sur la structure et l'intensité des écoulements zonaux dans le cadre de simulations non-linéaires, l'impact de ce choix est faible dans le cadre d'une analyse linéaire. Nous pourrions donc considérer l'équilibre de référence comme caractérisé par une Maxwellienne locale sans craindre une perturbation importante des résultats.

### Recherche de contours axisymétriques stationnaires

Afin de caractériser les contours d'équilibre, cherchons les solutions stationnaires axisymétriques de (5.10) en l'absence de champ électrique. Les conventions de normalisation définies Table 2.1.1 sont adoptées où les quantités de références sont prises en  $r = a/2$  et  $\vartheta = 0$ . Un contour stationnaire axisymétrique  $v_{j\mu}(r, \vartheta)$  est solution de

$$\left[ v_{j\mu} \mathbf{b} + \frac{v_{j\mu}^2}{B} \nabla \times \mathbf{b} + \mu \mathbf{b} \times \frac{\nabla B}{B} \right] \cdot \nabla v_{j\mu} + \mu \mathbf{b} \cdot \nabla B + \underbrace{\mu v_{j\mu} \frac{\nabla B}{B} \cdot \nabla \times \mathbf{b}}_{\mathcal{O}\left(\frac{r}{R_0}\right)^2} = 0 \quad (5.17)$$

Dans la configuration magnétique adoptée, le terme  $\mu(\nabla \times \mathbf{b}) \cdot \frac{\nabla B}{B}$  est négligeable, et par substitution de (5.3) et (5.4) on obtient

$$\underbrace{\frac{1}{q} \partial_{\vartheta} \left( \frac{v_{j\mu}^2}{2} + \mu B \right)}_{\mathcal{O}(1)} - \underbrace{\left( \mu + \frac{v_{j\mu}^2}{B} \right) \left( \sin \vartheta \partial_r v_{j\mu} + \frac{\cos \vartheta}{r} \partial_{\vartheta} v_{j\mu} \right)}_{\mathcal{O}(\rho^* \approx 10^{-2})} = 0. \quad (5.18)$$

En tenant compte de l'ordering indiqué dans (5.18), considérons tout d'abord la forme approchée de l'équation

$$\partial_{\vartheta} \left( \frac{v_{j\mu}^2}{2} + \mu B \right) = 0, \quad (5.19)$$



qui traduit formellement la conservation de l'énergie sur une surface magnétique. En supposant connu le profil radial  $v_{j\mu}(r, \vartheta_0)$  on obtient

$$v_{j\mu}(r, \vartheta) = \pm \sqrt{v_{j\mu}(r, \vartheta_0)^2 + 2\mu(B(r, \vartheta_0) - B(r, \vartheta))}, \quad (5.20)$$

sous réserve que l'argument de la racine soit positif. Notons tout d'abord que l'invariance de l'équation approchée par changement du signe de  $v_{j\mu}$  implique l'existence de deux solutions identiques au signe près. En supposant que l'on a construit une distribution symétrique en  $\vartheta = \vartheta_0$  avec  $V_{-j}(r, \vartheta_0) = -V_j(r, \vartheta_0)$ , cette propriété peut-être étendue à la solution approchée en choisissant pour  $V_j(r, \vartheta)$  la branche de même signe que  $V_j(r, \vartheta_0)$ . Nous supposons par la suite que c'est le cas lorsque la solution approchée est considérée. Considérons maintenant un point  $r_0$  du domaine radial et notons  $B_{max} = B(r_0, \pi)$ . Si  $V_j(r_0, \vartheta_0)^2 + 2\mu(B(r_0, \vartheta_0) - B_{max}) > 0$  alors  $|V_{\pm j}(r_0, \vartheta)| > 0$  pour tout  $\vartheta$ . Les branches positives et négatives restent distinctes, et le bag est topologiquement ouvert. Dans le cas contraire, en raison de la monotonie en  $\vartheta$  de  $B(r_0, \vartheta)$  il existe un angle limite  $\vartheta_{lim}$  tel que  $V_{\pm j}(r_0, \vartheta_{lim}) = 0$ , au-delà duquel les contours ne sont plus définis. Les branches positive et négative du bag se rencontrent en  $\vartheta_{lim}$  et le bag y est topologiquement fermé. La distinction ouvert/fermé que nous faisons ici correspond formellement aux classes de particules passantes/piégées dans un Tokamak. Il est cependant préférable d'éviter d'accoler aux contours les adjectifs passant/piégé et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, en fonction du profil radial en  $\vartheta_0$ , un même contour peut-être alternativement ouvert et fermé lorsque  $r$  varie. D'autre part, à chaque bag est associée une classe de particules dont la vitesse parallèle est encadrée par les valeurs des contours : un bag ouvert "contient" donc toujours des particules piégées, bien que la topologie de son contour soit celle des trajectoires passantes.

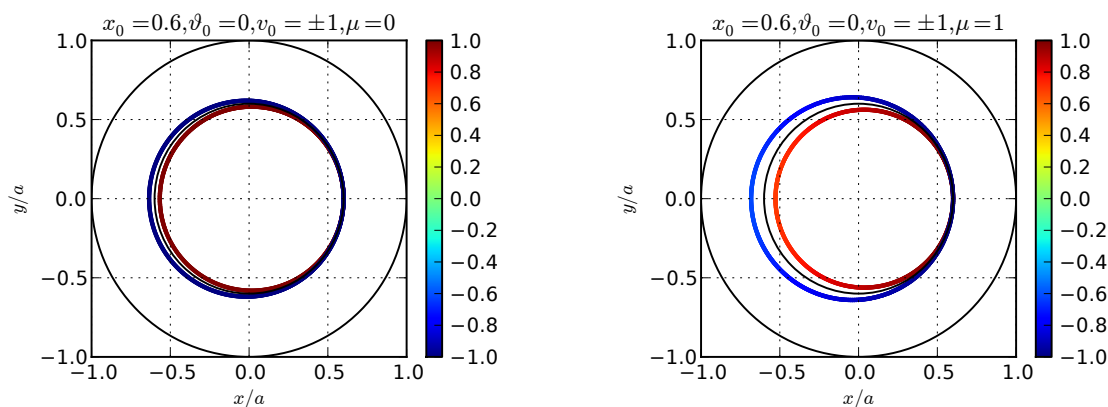
Revenons à l'équation (5.18). Elle peut-être intégrée en utilisant une méthode de caractéristiques. Prenant comme point de départ dans l'espace  $(r, \vartheta, v_{\parallel})$  un point  $P_0$  tel que  $r = r_0, \vartheta = \vartheta_0, v_{\parallel} = V_j(r_0)$ , on construit la caractéristique passant par  $P_0$  par intégration sur  $t$  de

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = - \left( \mu + \frac{v_{\parallel}^2}{B} \right) \sin \vartheta \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{q} v_{\parallel} - \left( \mu + \frac{v_{\parallel}^2}{B} \right) \frac{\cos \vartheta}{r} \\ \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial_{\vartheta} B}{q} \end{cases} \quad (5.21)$$

En faisant varier  $r_0$  on peut ainsi générer un faisceau de caractéristiques à partir desquelles on reconstruit par la suite  $v_{j\mu}(r, \vartheta)$  par interpolation ([54]). L'intérêt de cette méthode, par comparaison avec une méthode d'intégration suivant  $\vartheta$ , réside dans le comportement au voisinage des points de rebroussement pour lesquels la vitesse parallèle s'annule et change de signe. Lorsque l'on intègre en  $\vartheta$ , la solution connaît des variations brutales avant l'annulation à l'angle limite, rendant l'intégration plus difficile (il faut de fait déterminer le support de la solution en même temps que la solution elle-même). A l'opposé, le comportement des caractéristiques aux points d'annulation de la vitesse est tout à fait régulier. Le problème de la détermination de l'ensemble de définition des nappes positives et négatives de la solution reconstruite  $v_j(r, \vartheta)$  sur une grille discrète en  $(r, \vartheta)$  est repoussé à l'étape d'interpolation.

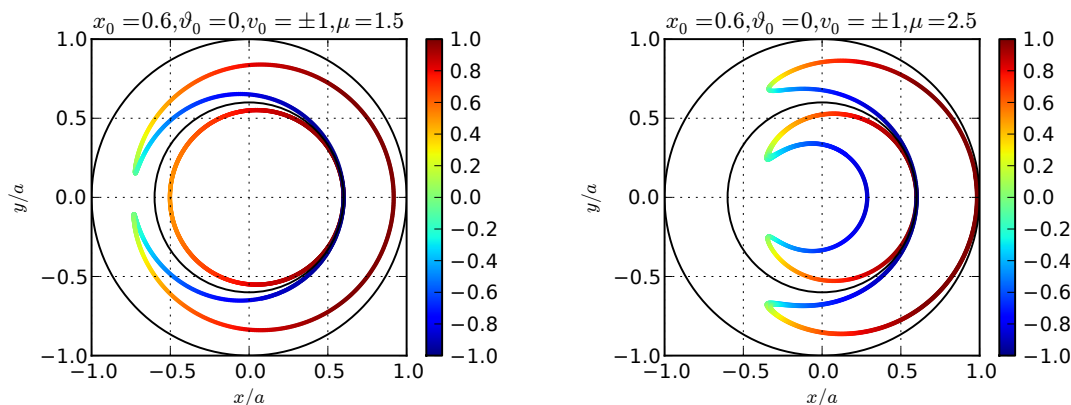
Une différence notable est à relever lorsque l'on résout l'équation exacte : l'invariance par changement du signe en vitesse parallèle n'est plus vérifiée. Les solutions obtenues

en prenant pour base des profils radiaux symétriques  $v_{-j\mu}(r, \vartheta_0) = -v_{j\mu}(r, \vartheta_0)$  ne sont pas égales au signe près. Sur la figure 5.1, on a représenté les paires de caractéristiques obtenues par intégration du système (5.21) à partir d'un point  $r_0, \vartheta_0$  pour deux valeurs symétriques de la vitesse parallèle  $\pm v_0$ , et ce pour diverses valeurs de l'angle dit de "pitch"  $\alpha_0$  caractérisant la répartition de l'énergie cinétique initiale dans l'espace des vitesses ( $\tan^2 \alpha_0 = v_{\perp}^2/v_{\parallel}^2 = 2\mu B(r_0, \vartheta_0)/v_0^2$ ). L'excursion radiale et l'asymétrie entre les branches positives et négatives augmente avec  $\alpha_0$ . Dans le cas de la solution approchée évoquée plus haut, les caractéristiques sont des arcs de cercle de rayon  $r_0$ . L'approximation (5.20) est formellement équivalente à la réduction à zéro de la largeur de banane et au recentrage des branches positives et négatives sur une surface de flux unique  $r = r_0$ . Si cette approximation n'induit qu'une légère correction pour les petites valeurs de  $\mu$  (Figures 5.1 (a) et (b)), elle conduit à une importante distortion pour les plus grande valeurs (Figures 5.1 (c) et (d)). L'asymétrie en vitesse parallèle des caracté-



(a)  $\alpha_0 = 0^\circ$ . Une branche de signe constant par condition initiale. Faible excursion radiale.

(b)  $\alpha_0 = 54.34^\circ$ . Une branche de signe constant par condition initiale. Excursion radiale plus marquée



(c)  $\alpha_0 = 59.6^\circ$ . Une branche de signe constant  $v_0 = +1$  et deux branches pour  $v_0 = -1$

(d)  $\alpha_0 = 65.6^\circ$ . Chaque condition initiale génère deux branches

FIGURE 5.1 – Caractéristiques d'équilibre générées à partir des conditions initiales  $(x_0, \vartheta_0, v_0)$  et  $(x_0, \vartheta_0, v_0)$  pour 4 valeurs de  $\alpha_0$ ; le cercle intérieur noir correspond à la surface magnétique  $x = 0,6$  et donne la géométrie de la solution symétrique approchée

ristiques obtenues par la résolution de l'équation exacte a une conséquence importante pour la construction de l'équilibre. En fonction de la valeur de l'angle  $\alpha$ , la caracté-

ristique issue de  $(r_0, \vartheta_0, v_0 > 0)$  peut présenter une seule branche de signe constant et égal à celui de  $v_0$ , où deux branches de signes opposés coïncidant aux angles limites  $\pm\vartheta_L$ . Il en va de même pour la caractéristique construite à partir de  $(r_0, \vartheta_0, -v_0)$ . Si les deux caractéristiques sont ouvertes, comme c'est le cas Figures 5.1(a) et (b), on peut les associer respectivement aux contours  $V_j$  et  $V_{-j}$ . Si l'une où les deux se referment, on obtient deux branches positives et/ou deux branches négatives. Figure 5.1 (c) par exemple, la caractéristique générée par  $+v_0$  donne lieu à une unique branche positive alors que celle issue de  $-v_0$  donne lieu à deux branches. Dans le cas de la figure 5.1 (c), chacune des conditions initiales génère deux branches.

Si l'on impose le raccordement des contours positifs et négatifs à l'angle limite, on doit sélectionner les deux branches positives et négatives correspondant à une unique condition initiale en  $(r_0, \vartheta_0)$ , et éliminer la caractéristique correspondant à l'autre condition initiale. La symétrie en vitesse est brisée sur l'ensemble du domaine radial, notamment en  $\vartheta_0$ . Une fois cette sélection effectuée pour en un point du domaine radial, elle s'étend aux points voisins tant afin d'assurer la continuité de la solution en  $r$ .

Réciproquement, si l'on force la symétrie en  $\vartheta_0$  en sélectionnant la branche positive issue de  $v_0$  et la branche négative issue de  $-v_0$ , le raccordement aux angles limites n'est plus assuré ni la continuité du comportement lorsque l'on fera varier  $v_0$  avec  $r$ . Cette dernière option est donc à exclure.

La construction d'une solution continue radialement nécessite donc tout d'abord de vérifier la présence de caractéristiques pour lesquelles la vitesse change de signe. Si toutes les caractéristiques sont de signe constant sur l'ensemble du domaine, les contours positifs et négatifs doivent être générés à partir de deux profils de référence distincts. Dans le cas contraire, il faut opérer une sélection pour assurer la continuité. Ainsi si la résolution numérique de l'équation de stationnarité d'un contour ne pose pas de difficultés particulières, l'asymétrie en vitesse parallèle des solutions empêche de fixer des contours de référence symétriques en  $\vartheta_0$  et couple les branches négatives et positives. La génération des profils radiaux des contours de références  $v_{\pm j\mu}(r, \vartheta_0)$ , que l'on souhaiterait pouvoir réaliser comme dans le cas cylindrique par équivalence au sens des moments, se retrouve couplée à la résolution du problème  $2D$ . La différence entre la solution exacte et la solution approchée est similaire à celle qui existe entre Maxwellienne canonique et Maxwellienne locale : pour cette dernière sont négligés les effets de toroidicité liés à la dérive de courbure et la dérive de gradient.

On utilisera par la suite la forme approchée de la solution, qui permet de garantir la symétrie en vitesse parallèle et d'établir un principe d'équivalence au sens des moments avec une Maxwellienne locale. La dépendance poloidale, au travers de l'intensité  $B$  du champ magnétique, est en outre de même nature pour la solution approchée que pour les surfaces de niveau de la Maxwellienne locale. L'expression de  $v_{\parallel}$  pour une telle surface passant par un point  $(r_0, \vartheta_0, v_0, \mu)$  est en effet

$$v_{\parallel} = \pm \sqrt{\mathcal{V}_0(r)^2 + 2\mu (B(r, \vartheta_0) - B(r, \vartheta))}, \quad (5.22)$$

avec

$$\mathcal{V}_0^2(r) = v_0^2 + 2T \ln \left[ \frac{n(r)}{n(r_0)} \left( \frac{T(r_0)}{T(r)} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + 2\mu \left[ B(r_0, \vartheta_0) \frac{T(r)}{T(r_0)} - B(r, \vartheta_0) \right], \quad (5.23)$$

sous réserve d'existence. Les conséquences de la variation de  $B$  pour la topologie d'une surface de niveau de la Maxwellienne locale sont ainsi de même nature que pour les

contours obtenus par la solution approchée. S'ajoute en outre une possibilité de fermeture sur le domaine radial en  $\vartheta = \vartheta_0$  due aux variations radiales des moments et de l'intensité du champ magnétique. Une comparaison plus explicite entre les deux types de surfaces sera effectuée lors de l'exploitation des résultats numériques au chapitre 6. Le faible impact sur les résultats linéaires observé dans [43] entre le choix d'une Maxwellienne locale et d'une Maxwellienne canonique (qui se rapproche de la solution stationnaire exacte) nous incite à penser que cette approximation n'aura pas de conséquences importantes sur la pertinence des résultats obtenus. Comme nous le verrons dans l'analyse des résultats, les difficultés liées à la présence de contours fermés, communs aux solutions exactes et approchées, font passer la distinction entre ces dernières au second plan.

### Stratégie de construction de l'équilibre

En utilisant la forme approchée (5.20), on peut à partir de profil radiaux symétriques de référence  $v_{\pm j\mu}(r_0, \vartheta_{0j\mu})$  construire les profils bidimensionnels  $v_{\pm j\mu}(r, \vartheta)$ . Notons qu'on peut à priori choisir des angles de référence  $\vartheta_{0j\mu}$  distincts pour chaque contour lors de l'application de (5.20). La dépendance en  $j$  des angles de référence risquant de générer des croisements de contours lorsque  $\vartheta$  varie, il est préférable de la supprimer. On peut donc, sans risque de croisement, sélectionner un angle de référence  $\theta_{0\mu}$  pour chaque valeur de  $\mu$ . Reste donc à déterminer les angles et profils radiaux de référence et à fixer les valeurs des poids  $A_{j\mu}$ . La fonction d'équilibre de référence est une Maxwellienne locale

$$f(r, \vartheta, v_{\parallel}, \mu) d^3v \propto \frac{n(r)}{\sqrt{T(r)}} \frac{B(r, \vartheta)}{T(r)} \exp\left(-\frac{v_{\parallel}^2/2 + \mu B(r, \vartheta)}{T(r)}\right) dv_{\parallel} d\mu \quad (5.24)$$

Il est possible, à l'instar de la procédure utilisée en géométrie cylindrique, de définir un critère d'équivalence au sens des moments sur des moments à la fois en vitesse parallèle et en  $2\mu B = v_{\perp}^2$ . Notons  $\mathcal{M}_{2p, 2k}$  le moment d'ordre  $2p$  en vitesse parallèle et  $2k$  vitesse perpendiculaire (soit  $k$  en  $2\mu B$ ). Pour la distribution multi-water-bag considérée on a

$$\mathcal{M}_{2p, 2k}^{MWB} = 2\pi B \sum_{j, l} A_{j\mu_l} (2\mu_l B)^k \frac{v_{j\mu_l}^{2p+1}}{2p+1}, \quad (5.25)$$

soit en explicitant  $v_{j\mu_l}$  grâce à (5.20)

$$\mathcal{M}_{2p, 2k}^{MWB} = 4\pi B \sum_{j, l} A_{j\mu_l} (2\mu_l B)^k \frac{\left[ v_{j\mu_l}^2(r, \vartheta_{0\mu_l}) + 2\mu_l (B(r, \vartheta_{0\mu_l}) - B(r, \vartheta)) \right]^{\frac{2p+1}{2}}}{2p+1} \quad (5.26)$$

et pour la Maxwellienne locale

$$\mathcal{M}_{2p, 2k}^C = n(r) T(r)^p J_{2p} (2T(r))^k k!, \quad (5.27)$$

où on définit, de même qu'au chapitre 2, ( $J_0 = 1$ ;  $J_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!}$ ,  $p > 0$ ). La comparaison de (5.26) et (5.27) fait apparaître une différence fondamentale entre les séries de moments relatives à chacune des distributions : les moments de la Maxwellienne locale ont une dépendance purement radiale (ils sont constants sur les surfaces magnétiques), alors que les moments multi-water-bag montrent une dépendance poloïdale a priori irréductible

pour un nombre fini de bags et de valeurs de  $\mu$ .

L'utilisation d'un critère d'équivalence exacte étendu en espace, comme cela a été fait en géométrie cylindrique, conduit dans ce cas à des systèmes souffrant de limites similaires en terme de conditionnement numérique, mais aggravées à la fois par l'augmentation de l'espace des moments considérés et la dépendance bidimensionnelle des contours. La dépendance poloïdale des moments multi-water-bag interdit de fait une équivalence exacte sur l'ensemble du domaine en espace. En relâchant la contrainte d'équivalence à une équivalence approchée sur un nombre fini de moments, on obtient un problème d'optimisation fonctionnelle sur les variables  $(\vartheta_{0\mu}, A_{j\mu}, v_{j\mu}(r, \vartheta_{0\mu}))$ . Afin d'éviter d'avoir à résoudre ce type de problème dans sa plus grande généralité, nous allons réduire le problème à un problème unidimensionnel à la fois en espace et en vitesse, en restreignant l'équivalence sur les moments en  $2\mu B$  à l'ordre 0 et en donnant à la distribution multi-water-bag une forme localement séparable en  $v_{\parallel}$  et  $\mu$ .

On considère ainsi une forme séparable des coefficients de la distribution en posant

$$A_{j\mu} = A_j A_l \quad (5.28)$$

où  $\sum_l A_l = 1$ , et

$$\vartheta_{0\mu} = \vartheta_0, \quad (5.29)$$

qui impose l'égalité des angles de référence, et

$$v_{j\mu}(r, \vartheta_0) = v_{j0}(r), \quad (5.30)$$

qui impose la coïncidence des profils de référence pour les différentes valeurs de  $\mu$ . Cette coïncidence ne viole pas la condition de non-croisement des contours puisque cette dernière ne s'applique qu'aux contours correspondant à une même valeur de  $\mu$ . La distribution multi-water-bag est ainsi rendue séparable en  $v_{\parallel}$  et  $\mu$  sur la ligne  $\vartheta = \vartheta_0$ . L'intégration en  $\mu$ , sur le domaine radial en  $\vartheta = \vartheta_0$  des deux distributions conduit à deux distributions en vitesse parallèle, soit un problème d'équivalence qui peut être résolu par équivalence au sens des moments de la même manière que dans le cas cylindrique. Une différence est à noter cependant. Si l'intégration en  $\mu$  de la Maxwellienne locale conduit à la disparition de la dépendance en  $B$  (equation (5.27) avec  $k = 0$ ), ce n'est pas le cas pour la distribution multi-faisceau-multi-water-bag (equation (5.26) avec  $k = 0$ ). Tous les moments water-bag  $\mathcal{M}_{2p,0}^{MWB}$  conservent le facteur  $2\pi B$  issu du jacobien. Si les facteurs constants peuvent être absorbés dans les coefficients  $A_{j\mu}$ , la prise en compte de la variation radiale de  $B$  en  $\vartheta_0$  est néanmoins nécessaire. L'équivalence exacte s'exprime alors

$$\frac{2\pi}{2p+1} \sum_j A_j v_{j0}(r)^{2p+1} = \frac{n(r)}{B(r, \vartheta_0)} T(r)^p J_{2p} \quad (5.31)$$

On obtient un problème similaire au cas cylindrique en remplaçant la densité de référence  $n(r)$  par le rapport  $n(r)/B(r, \vartheta_0)$ . Dans le cas, considéré par défaut, où l'angle de référence est  $\vartheta_0 = 0$ , c'est-à-dire côté bas-champ, la variation de  $B$  tend à diminuer le gradient de densité "apparent"  $n/B$  et donc à augmenter le facteur  $\eta$  "apparent". Par apparent, on entend ici les profils qui généreraient les mêmes contours en l'absence de variation radiale du jacobien. L'effet est inverse si l'angle de référence est pris côté fort-champ, et nul pour  $\vartheta_0 = \pi/2$ . La dépendance radiale de  $B$  introduit une dépendance des profils radiaux des contours de références  $v_{j\mu}(r, \vartheta_0)$  en fonction de  $\vartheta_0$ . Il est

important de noter que cette dépendance n'est pas compensée par la dépendance en  $B$  des contours bidimensionnels reconstruits par la suite : des valeurs distinctes de  $\vartheta_0$  conduisent à des distributions et des moments différents. Le choix de l'angle de référence  $\vartheta_0$  influencera donc à la fois les profils radiaux des contours de référence au travers de la dépendance radiale de  $B(r, \vartheta_0)$  et la nature de l'influence de modulation polôidale des contours  $v_{j\mu}$  sur leur topologie. Il est par exemple possible d'assurer qu'aucun contour fermé n'existe, quel que soit  $\mu$ , en choisissant  $\vartheta = \pi$ . A l'opposé lorsque  $\vartheta = 0$ , les valeurs de  $\mu$  critiques conduisant à la fermeture des contours seront minimales. Reste à définir les poids relatifs  $A_{\mu_l} = A_l$ , qui vont pondérer les contributions des divers moments magnétiques  $\mu = \mu_l$ . En intégrant en  $\vartheta = \vartheta_0$  les deux distributions en vitesse parallèle, et en conservant la dépendance en  $\mu$ , on obtient la condition d'équivalence entre deux distributions en  $\mu$

$$\sum_l A_l \delta(\mu - \mu_l) \equiv \frac{1}{T(r)} \exp\left(-\frac{\mu B(r, \vartheta_0)}{T(r)}\right), \quad (5.32)$$

où l'on a éliminé la densité  $n$  et le jacobien  $2\pi B$  commun aux deux distributions partiellement intégrées. Il apparaît clairement que la dépendance spatiale de la Maxwellienne locale partiellement intégrée ne peut être prise en compte par les facteurs de pondération constants  $A_l$ .

La séparabilité partielle introduite par la factorisation des poids  $A_{j\mu_l} = A_j A_l$  et le choix de contours et d'angles de références communs à toutes les valeurs de  $\mu$ , qui nous permet de définir les contours de références à partir des seuls moments en vitesse parallèle, empêche par construction de rendre compte de la variation spatiale de la Maxwellienne intégrée en vitesse parallèle.

Les poids  $A_l$  sont en conséquence calculés à partir de la dépendance en  $\mu$  de la Maxwellienne en un point de référence  $(r_0, \vartheta_0)$ . Notons que le choix de la position radiale  $r_0$  est a priori arbitraire. Deux possibilités peuvent être envisagées : d'une part, en choisissant  $r = r_{min} \approx 0$ , on obtient une valeur représentative de  $B/T$  proche du centre du domaine. En choisissant  $r_0 \approx r_{peak}$  où  $r_{peak}$  est le centre de la zone de gradient  $\eta_i$ , on privilégie une pondération coïncidant au mieux avec la situation locale au centre de la zone de gradient côté bas-champ.

Une fois choisi le point de référence, les poids  $A_l$  sont calculés par une simple règle de quadrature trapézoïdale sur les noeuds  $\mu_l = (l - 1)\Delta\mu$  équirépartis sur  $[0, \mu_{max}]$

$$A_l = w_l \frac{\exp(-\mu_l (B(r_0, \vartheta_0)/T(r_0)))}{\sum_l w_l \exp(-\mu_l (B(r_0, \vartheta_0)/T(r_0)))}, \quad (5.33)$$

où  $w_1 = w_{N_\mu} = 1/2$  et  $w_l = 1$  si  $l \neq 1, N_\mu$ . Le choix d'une telle règle de quadrature n'est assurément pas optimal en terme de précision. La distribution de référence étant exponentielle, le choix le plus naturel serait l'utilisation d'une formule de quadrature de Gauss-Laguerre, assurant par nature l'équivalence aux sens des moments en  $\mu$ . Cette approche a le défaut d'imposer les valeurs de  $\mu_l$ , ce qui a conduit à l'exclure afin de garder un certain contrôle sur la distribution en  $\mu$ .

#### 5.1.4 Caractéristiques particulières de l'équilibre considéré

La distribution multi-water-bag construite par la méthode qui vient d'être décrite présente certaines particularités qu'il convient de souligner pour le développement de

l'analyse linéaire qui va suivre. L'équilibre initial étant défini par la donnée de profils radiaux de densité  $n(r)$  et température  $T(r)$  de la Maxwellienne locale, nous allons examiner les dépendances spatiales des quantités correspondantes pour la distribution multi-water-bag.

En regroupant les paires de contours symétriques dans l'expression des moments, la densité s'explique en

$$n^{MWB}(r, \vartheta) = \mathcal{M}_{0,0}^{MWB} = 4\pi B \sum_l \sum_{j=1}^N A_j A_l v_{j\mu_l}(r, \vartheta), \quad (5.34)$$

la température parallèle en

$$T_{\parallel}^{MWB}(r, \vartheta) = \frac{\mathcal{M}_{2,0}^{MWB}}{\mathcal{M}_{0,0}^{MWB}} = \frac{\sum_l A_l \sum_{j=1}^N A_j v_{j\mu_l}(r, \vartheta)^3}{3 \sum_l A_l \sum_{j=1}^N A_j v_{j\mu_l}(r, \vartheta)}, \quad (5.35)$$

et la température perpendiculaire en

$$T_{\perp}^{MWB}(r, \vartheta) = \frac{\mathcal{M}_{0,2}^{MWB}}{2\mathcal{M}_{0,0}^{MWB}} = \frac{\sum_l A_l \sum_{j=1}^N A_j v_{j\mu_l}(r, \vartheta) \mu_l B(r, \vartheta)}{\sum_{j=1}^N A_l \sum_l A_j v_{j\mu_l}(r, \vartheta)}. \quad (5.36)$$

A l'angle de référence commun  $\vartheta = \vartheta_0$ , où l'on rappelle que  $v_{j\mu_l}(r, \vartheta_0) = v_{j0}(r)$  ces expressions deviennent

$$n^{MWB}(r, \vartheta_0) = 4\pi B \sum_l A_l \sum_{j=1}^N A_j v_{j0}(r) = n(r), \quad (5.37)$$

$$T_{\parallel}^{MWB}(r, \vartheta_0) = \frac{\sum_l A_l \sum_{j=1}^N A_j v_{j0}(r)^3}{3 \sum_l A_l \sum_{j=1}^N A_j v_{j0}(r)} = T(r), \quad (5.38)$$

et

$$T_{\perp}^{MWB}(r, \vartheta_0) = \frac{\sum_l A_l \sum_{j=1}^N A_j v_{j0}(r) \mu_l B}{\sum_{j=1}^N A_l \sum_l A_j v_{j0}(r)} = \sum_l A_l \mu_l B(r, \vartheta_0). \quad (5.39)$$

Deux constatations s'imposent à partir de ces expressions. D'une part, si la densité et la température parallèle coïncident, par construction, avec les densités et températures de référence en  $\vartheta = \vartheta_0$ , ce n'est plus le cas sur le reste du domaine. D'autre part, la température perpendiculaire ne coïncide ni avec la température parallèle ni avec la température de référence, même à l'angle de référence  $\vartheta = \vartheta_0$ . La coïncidence de  $T_{\perp}$  avec  $T$  se fait uniquement en  $(r_0, \vartheta_0)$  dans la limite du continu ( $N_{\mu} \rightarrow +\infty$ ), de par la règle de quadrature (5.33).

Ainsi la forme de distribution sélectionnée introduit d'une part une modulation poloidale des densités et température absente des profils de référence, et d'autre part une anisotropie dans l'espace des vitesses. Ces deux phénomènes sont liés aux variations

spatiales de l'intensité du champ de confinement.

Examinons maintenant l'impact de ces variations sur les gradients spatiaux de température et de densité. Les variations spatiales des contours approchés obtenus par (5.20) s'explicitent en

$$\begin{cases} \partial_{\vartheta} v_{j\mu_l} = -\frac{\mu_l \partial_{\vartheta} B}{v_{j\mu_l}} \\ \partial_r v_{j\mu_l} = \frac{v_{j0} d_r v_{j0} + \mu_l (\partial_r B(r, \vartheta_0) - \partial_r B(r, \vartheta))}{v_{j\mu_l}} \end{cases} \quad (5.40)$$

Les gradients des contours peuvent donc prendre des valeurs importantes et divergent même en cas de fermeture du contour. Ces variations brutales se répercutent sur les moments, notamment la densité

$$\begin{cases} \partial_{\vartheta} n^{MWB}(r, \vartheta) = 4\pi \sum_l A_l \sum_{j=1}^N A_j \partial_{\vartheta} B(r, \vartheta) \left( v_{j\mu_l} - \frac{\mu_l}{v_{j\mu_l}} \right) \\ \partial_r n^{MWB}(r, \vartheta) = 4\pi \sum_l A_l \sum_{j=1}^N A_j \left( \partial_r B(r, \vartheta) \left( v_{j\mu_l} - \frac{\mu_l}{v_{j\mu_l}} \right) + \frac{v_{j0} d_r v_{j0} + \mu_l \partial_r B(r, \vartheta_0)}{v_{j\mu_l}} \right) \end{cases} \quad (5.41)$$

Les profils de référence étant communs, les zones d'annulation (ou de forte baisse pour les contours quasi-fermés) des contours pour des valeurs de  $\mu$  différentes sont distinctes, et il ne peut y avoir compensation de la divergence des gradients pour un nombre fini de contours et de valeurs de  $\mu$ . Le phénomène est de même nature pour les autres moments water-bag. La nature discrète de la distribution en vitesse se traduit par une irrégularité spatiale des moments de la distribution.

Lors de l'analyse linéaire qui va suivre, la présence de ces divergences et de la fermeture possible des contours ne sera pas explicitement prise en compte. Le modèle général est donc développé en supposant une plage de valeur de  $\mu$  suffisamment restreinte. La prise en compte éventuelle de la divergence des gradients et du couplage induit par la fermeture ne sera considérée que lors de la mise au point des méthodes de résolution du problème de stabilité linéaire.

## 5.2 Analyse linéaire

Nous allons maintenant effectuer le développement au premier ordre en perturbation de l'équation d'évolution (5.10) des contours. En notant  $v_{j\mu}(r, \vartheta)$  est le champ axisymétrique d'équilibre, et  $w_{j\mu}(r, \vartheta, \varphi, t)$  le champ perturbé on obtient à l'ordre un en perturbation

$$\left[ \mathcal{F}_{j\mu}^I \partial_t + \mathcal{F}_{j\mu}^{II} \cdot \nabla + \mathcal{F}_{j\mu}^{III} \right] w_{j\mu} + \mathcal{G}_{j\mu} \cdot \nabla \mathcal{J}_{\mu} \phi = 0, \quad (5.42)$$

avec :

$$\mathcal{F}_{j\mu}^I = 1 + \frac{v_{j\mu}}{B} \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \quad (5.43)$$

$$\mathcal{F}_{j\mu}^{II} = v_{j\mu} \mathbf{b} + \frac{v_{j\mu}^2}{B} \nabla \times \mathbf{b} + \mu \mathbf{b} \times \frac{\nabla B}{B} \quad (5.44)$$

$$\mathcal{F}_{j\mu}^{III} = \left[ \mathbf{b} + \frac{2v_{j\mu}}{B} \nabla \times \mathbf{b} \right] \cdot \nabla v_{j\mu} \quad (5.45)$$

$$\mathcal{G}_{j\mu} = \frac{v_{j\mu}}{B} \nabla \times \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \times \nabla v_{j\mu}}{B} \quad (5.46)$$



Les champs d'advection sont par la suite développés selon leurs composantes à savoir

$$[\mathcal{F}_{jt}\partial_t + \mathcal{F}_{jx}\partial_x + \mathcal{F}_{j\vartheta}\partial_\vartheta + \mathcal{F}_{j\varphi}\partial_\varphi + \mathcal{F}_{j0}]w_j + [\mathcal{G}_{jx}\partial_x + \mathcal{G}_{j\vartheta}\partial_\vartheta + \mathcal{G}_{j\varphi}\partial_\varphi]\mathcal{J}_\mu\phi = 0 \quad (5.47)$$

Le terme  $\mathcal{F}_{jt}$ , parfois appelé terme de Baños, est proche de l'unité dans les cas considérés. Alors que sa prise en compte est nécessaire pour assurer la conservation de l'énergie dans le cadre d'un code non-linéaire effectivement intégré en temps, il introduit dans le cadre de l'analyse linéaire une correction mineure sur les fréquences propres. Dans la résolution du problème bidimensionnel complet par intégration en temps, il sera pris en compte en divisant toutes les autres composantes des opérateurs par sa valeur. Dans le cas de la méthode asymptotique, il sera pris égal à un. Dans toute la suite il sera formellement pris égal à 1, et la normalisation par  $\mathcal{F}_{jt}$  ne sera pas explicitée pour alléger les notations (les composantes renormalisées des opérateurs gardent le même nom que les composantes brutes).

## 5.3 Résolution du problème bi-dimensionnel

### 5.3.1 Définition du problème

De même qu'en géométrie cylindrique, la périodicité selon  $(\vartheta, \varphi)$  permet de développer les champs perturbés en série de Fourier

$$w_{j\mu}(r, \vartheta, \varphi, t) = \sum_n \sum_m w_{j\mu m}^n(r, t) \exp(i(m\vartheta + n\varphi)) \quad (5.48)$$

L'axisymétrie des quantités d'équilibre et l'approximation du gradient perpendiculaire à sa restriction aux variables  $r, \vartheta$  permet une séparation de la variable  $\varphi$ . Les modes de Fourier de nombre d'onde  $n$  différents sont découplés et  $n$  peut-être traité comme un paramètre. La dépendance poloïdale des quantités d'équilibre et du champ de confinement ne permet pas un tel découplage des modes de Fourier en  $\vartheta$ . Les produits entre les composantes des opérateurs et les perturbations dans l'espace réel donnent lieu à des convolutions sur le nombre d'onde poloïdal  $m$  dans l'espace de Fourier. Le problème reste irréductiblement bi-dimensionnel en espace.

Nous considérerons dans toute la suite que le nombre d'onde  $n \neq 0$  est fixé et omettrons l'indexation par  $n$  des quantités afin d'alléger les notations. On condensera sous la forme  $w_{j\mu}$  le vecteur constitué des différents modes poloidaux du champ perturbé de nombre d'onde  $n$  dans l'espace de Fourier  $w_{j\mu} = (w_{j\mu m'}^n(r, t))$ ,  $m' \in [-m_{max}, m_{max}]$ . Le problème aux valeurs initiales linéaire dans l'espace de Fourier s'explicité en

$$\partial_t w_{j\mu} + F_{j\mu} w_{j\mu} + G_{j\mu} \mathcal{J}_\mu \phi = 0, \quad (5.49)$$

$$Q\phi = \sum_{j\mu} A_{j\mu} \mathcal{J}_\mu w_{j\mu}. \quad (5.50)$$

Le problème spectral correspondant est un problème aux valeurs propres généralisé, linéaire en  $\omega$  de la forme

$$-i\omega w_{j\mu} + F_{j\mu} w_{j\mu} + G_{j\mu} \mathcal{J}_\mu \sum_{k\mu'} A_{k'\mu'} Q^{-1} J_{\mu'} w_{k'\mu'} = 0, \quad (5.51)$$

où  $(j, \mu)$  décrit l'ensemble des paires d'indices discrets. L'inversion de l'opérateur  $Q$  est ici formelle, et ne sous-entend pas nécessairement la construction explicite de  $Q^{-1}$ .

Notons tout d'abord que la résolution directe d'une version discrétisée en espace du problème aux valeurs propres généralisé par une méthode de factorisation dense est à rejeter d'emblée en raison de la grande taille du problème : pour des valeurs typiques du nombre de bords  $N = 5 - 10$ , du nombre de valeurs de  $\mu$   $N_\mu = 1 - 10$  et de la grille en  $(r, \vartheta)$   $N_r \times N_\vartheta \approx 128 \times 128$ , la taille du problème  $2 \times N \times N_\mu \times N_r \times N_\vartheta$  est de l'ordre de  $10^5$  à  $10^6$ .

### 5.3.2 Méthode numérique et implémentation

En regroupant les inconnues  $w_{j\mu}, \forall (j, \mu)$  dans un vecteur généralisé  $X$ , le problème (5.49)-(5.50) s'écrit formellement

$$\partial_t X = AX, \quad (5.52)$$

où  $A$  est un opérateur intégral-différentiel linéaire, dépendant uniquement des grandeurs d'équilibre. Ces dernières, ainsi que les différents tenseurs dont dépend  $A$ , sont pré-calculées dans un code externe, implémenté en Python([71]).

Le problème est discrétisé radialement sur une grille uniforme et poloidalement sur les modes de Fourier  $m \in [-M, M]$ ; les opérateurs différentiels radiaux (d'ordres un et deux) font l'objet d'une discrétisation aux différences finies centrées. L'intégration en temps s'effectue par un schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 4. A chacune des 4 sous-itérations d'index  $k$  du schéma, l'action de l'opérateur d'évolution sur le vecteur généralisé  $(w_{j\mu}, \phi)_k$ <sup>2</sup> est effectuée en deux étapes successives (voir algorithme 3) : l'évolution des contours  $w_{j\mu}$  est calculée explicitement à partir de (5.50) (5.50) appliqué à  $(w_{j\mu}, \phi)_k$ , ce qui permet d'obtenir  $w_{j\mu(k+1)}$ . Les advections des différents contours étant découplées, l'étape d'advection est trivialement parallélisée sur les  $2 \times N \times N_\mu$  contours. On peut ainsi calculer la densité  $n_{(k+1)}$ . Le potentiel  $\phi_{(k+1)}$  est obtenu à partir de la densité gyromoyennée par résolution de la quasi-neutralité (5.50) par factorisation LU. On peut noter que l'opérateur  $Q$  dépendant uniquement des grandeurs d'équilibre, sa factorisation est effectuée une fois pour toute lors de l'initialisation. L'opérateur de gyromoyenne discrétisé est obtenu par le développement à l'ordre 2 de

---

#### Algorithme 3 Opérateur d'évolution pour le problème bi-dimensionnel

---

```

1: INPUT  $(w_{j\mu k}, \phi_k)$ 
2: pour  $(j, \mu) \in (-N, \dots, -1, 1, \dots, N]^* \times (1, \dots, N_\mu)$  faire    ▷ Boucle parallélisée
3:    $\psi_k \leftarrow GYROMOYENNE(\phi_k)$ 
4:    $\Delta w_{j\mu} \leftarrow ADVECTION(w_{j\mu}, \psi_k)$ 
5:    $w_{jl(k+1)} \leftarrow EVOLUTION(w_{jlk}, \Delta w_{j\mu})$     ▷ Dépend de l'étape du schéma
6: fin pour    ▷ Fin de la section parallèle
7:  $\tilde{n}_{k+1} \leftarrow DENSITE(w_{j,l,(k+1)})$     ▷ Condensation sur 1 processus
8:  $J_\mu \tilde{n}_{k+1} \leftarrow GYROMOYENNE(\tilde{n}_{k+1})$ 
9:  $\phi_{k+1} \leftarrow Q^{-1} J_\mu \tilde{n}_{k+1}$     ▷ Broadcast de  $\phi_{k+1}$  aux autres processus

```

---

la fonction de Bessel  $J_0(k_\perp \rho_i)$  dans l'espace de Fourier

$$J_0(k_\perp) = 1 - \frac{(k_\perp \rho_i)^2}{4} + \mathcal{O}((k_\perp \rho_i)^4) \quad (5.53)$$

---

2.  $\phi$  n'est de fait qu'une grandeur annexe, totalement déterminée à un instant donné par la quasi-neutralité. L'ajout de  $\phi$  traduit simplement son existence en tant que variable intermédiaire

qui conduit dans l'espace réel à une approximation de l'inverse

$$(\mathcal{J}_\mu)^{-1} \approx 1 - \frac{\rho_i^2}{4} \Delta_\perp \quad (5.54)$$

L'application  $Y = \mathcal{J}_\mu X$  est calculée de manière implicite par la résolution de  $\mathcal{J}_\mu^{-1} Y = X$  par factorisation LU de l'opérateur radial correspondant, discrétisé par une méthode aux différences finies centrées d'ordre 2, pour chaque valeur de  $m$ . Une discussions des méthodes susceptibles d'être utilisées pour une évaluation numérique de l'action de l'opérateur de gyromoyenne a été effectuée dans [18].

Les contraintes de stabilité du schéma d'intégration en temps (voir annexe F) conditionnent le pas d'intégration en temps, qui doit vérifier  $\Delta t |\omega_M| < C \approx 3$ , où  $\omega_M$  est la valeur propre imaginaire de  $A$  (et donc réelle de  $iA$  d'où la dénomination  $\omega$ ) de plus grand module. Cette dernière peut être calculée en résolvant le problème aux valeurs propres par une méthode itérative, la méthode d'Arnoldi avec redémarrage implicite (IRAM pour "Implicitly Restarted Arnoldi Method", voir [75, 55, 56, 26, 12]), implémentée dans la bibliothèque PARPACK ([57]). La méthode d'Arnoldi est une méthode itérative qui fait partie de la famille des méthodes dites "de Krylov", particulièrement adaptées aux problèmes de grande taille pour lesquels les méthodes de factorisation dense ont un coût prohibitif (pour une présentation des méthodes adaptées aux problèmes aux valeurs propres de grande taille voir [72]). Le principe général de ces méthodes est la résolution approchée du problème dans un sous-espace de dimension réduite, dit sous-espace de Krylov. Pour un vecteur  $X_0$  donné et un opérateur  $A$ , le sous-espace de Krylov de dimension  $k$  de générateur  $X_0$  est le sous espace engendré par la suite de vecteurs  $(X_0, AX_0, \dots, A^k X_0)$ , à savoir les itérés jusqu'à l'ordre  $k$  de la méthode de la puissance appliquée à  $X_0$ <sup>3</sup>. La méthode consiste à construire une base orthonormée d'un sous-espace de Krylov de dimension  $k$ , puis à déterminer par une méthode dense le spectre de la projection de l'opérateur  $A$  dans ce sous-espace. Les valeurs obtenues, dites valeurs de Ritz, peuvent constituer des approximations de certaines valeurs propres de  $A$ , dont la qualité dépend de l'angle entre le vecteur propre recherché et sa projection dans le sous-espace de Krylov (ou de manière équivalente de la taille relative du vecteur résiduel obtenu lorsque l'on approxime le vecteur propre par son projecté). Le redémarrage de la méthode consiste à filtrer le spectre de Ritz des valeurs propres correspondant à des zones du spectre non-désirées, et à construire un nouveau vecteur  $X_0$  à partir d'une combinaison linéaire des vecteurs propres des valeurs conservées. Le sous-espace de Krylov suivant sera ainsi plus riche dans les directions associées à la région du spectre souhaitée.

L'intérêt de la méthode d'Arnoldi, sous sa forme la plus simple, est quelle ne requiert que de pouvoir former le produit  $AX$  à partir d'un  $X$  donné, seule opération nécessaire pour construire un sous-espace de Krylov. Cette opération est peu coûteuse (relativement à une inversion par exemple) et correspond à une itération de l'algorithme 3. Elle peut être vue comme une version élaborée de la méthode de la puissance, additionnée d'un filtrage polynomial adaptatif.

Il peut paraître superflu d'implémenter un solveur aux valeurs initiales, qui ne permet dans tous les cas que d'obtenir le mode le plus instable, alors qu'un solveur aux valeurs propres est disponible. La forte asymétrie du spectre de l'opérateur d'évolution dans le plan complexe empêche cependant une utilisation de la méthode d'Arnoldi directe

---

3. On peut le voir aussi comme le sous ensemble engendré par l'ensemble des images de  $X_0$  par l'espace des polynôme de  $A$  de degré inférieur à  $k$

pour la détermination des modes les plus instables. D'une part, la méthode ne permet que d'obtenir les points extrémaux de l'enveloppe convexe du spectre. Ceci devrait en théorie nous permettre d'obtenir le mode le plus instable. Cependant, à l'instar de la méthode de la puissance dont elle peut être considérée comme une version élaborée, la méthode d'Arnoldi directe a tendance à converger vers les valeurs propres de plus grand module. Or le spectre de l'opérateur d'évolution présente une forte anisotropie : les fréquences des modes stables sont en valeur absolues supérieures de plusieurs ordres de grandeur (typiquement 3 à 4) au taux de croissance et fréquence du mode le plus instable recherché : le filtrage de ces modes à haute fréquence peut rendre le coût de la méthode (en terme de taille du sous-espace utilisé et de nombre d'itérations nécessaires) prohibitif voire empêcher la convergence (voir [56]).

## 5.4 Méthode asymptotique en modes de ballonnement

### 5.4.1 Représentation en modes de ballonnement

Confronté à un problème de grande taille tel que problème spectral (5.51), ou son équivalent intégral-différentiel pour le cas général d'une distribution continue en  $(v_{\parallel}, \mu)$ , on peut se demander s'il n'est pas susceptible d'être réduit à un problème plus modeste. Une telle réduction peut-être possible si l'on cherche la solution dans un espace de dimension réduite. La définition de ce sous-espace suppose une connaissance a priori de propriétés robustes de certaines solutions du problème. Dans le cas qui nous intéresse, c'est l'anisotropie  $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$  qui peut être mise à profit, ainsi que la séparation d'échelle  $L_n^{-1}, L_T^{-1} \ll k_{\perp}$  entre les gradients d'équilibre et le spectre de la perturbation dans les directions perpendiculaires au champ de confinement.

Plaçons-nous pour ce faire dans un système de coordonnées permettant d'explicitier les variations parallèlement et perpendiculairement à la direction locale du champ magnétique

$$\begin{cases} \eta = \vartheta \\ \alpha = \varphi - q\vartheta \\ x = r/a = \rho_{\star} r \end{cases} \quad \text{d'où on tire} \quad \begin{cases} \partial_r = \rho_{\star} (\partial_x - q'(x)\partial_{\alpha}) \\ \partial_{\vartheta} = \partial_{\eta} - q\partial_{\alpha} \\ \partial_{\varphi} = \partial_{\alpha} \end{cases} \quad (5.55)$$

La variable  $\alpha$  permet de sélectionner une ligne de champ sur la surface magnétique repérée par  $x$ .  $\alpha$  et  $x$  étant fixé,  $\eta$  fait office d'abscisse curviligne le long de la ligne de champ. L'équation d'une ligne de champ dans le système de coordonnées  $(x, \alpha, \eta)$  est donc particulièrement simple

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \alpha = \alpha_0 \end{cases} \quad (5.56)$$

Les opérateurs de dérivation parallèle et perpendiculaires deviennent

$$\begin{cases} \partial_{\parallel} = \partial_{\eta} \\ \nabla_{\perp} = \rho_{\star} (\partial_x - q'\partial_{\alpha}) \mathbf{e}_r + \frac{b_{\varphi}^2 \rho_{\star}}{x} (\partial_{\eta} - q\partial_{\alpha}) \left( \mathbf{e}_{\vartheta} - \left(\frac{r}{qR}\right)^2 \mathbf{e}_{\varphi} \right) \end{cases}, \quad (5.57)$$

où  $\mathbf{q} = q(1 + (\frac{r}{qR})^2)$  et où l'on rappelle que  $r/(qR) = b_{\vartheta}/b_{\varphi}$ . Le choix de  $x = r/a$  comme variable radiale n'est pas indispensable. On peut de fait utiliser indifféremment  $r, x$  ou

même le facteur de sécurité  $q$  lorsqu'il est monotone sur le sous-domaine radial exploré. En raison de la périodicité du tore en  $(\vartheta, \varphi)$  la solution générale du problème linéaire pour le potentiel électrostatique peut s'écrire

$$\phi(r, \vartheta, \varphi, t) = \sum_{\omega} \phi_{\omega}(r, \vartheta, \varphi) e^{-i\omega t} = \sum_{n, m, \omega} \phi_{n\omega}^m(r) e^{i(n\varphi + m\vartheta - \omega t)} = \sum_{n, \omega} \phi_{n\omega}(r, \theta) e^{i(n\varphi - \omega t)} \quad (5.58)$$

Considérons maintenant, pour  $\omega$  fixé, la solution  $\tilde{\phi}_{\omega}(x, \eta, \alpha)$  correspondante dans le système de coordonnées  $(x, \alpha, \eta)$  soit

$$\phi_{\omega}(r, \vartheta, \varphi) = \tilde{\phi}_{\omega}(\rho_{\star} r, \vartheta, \varphi - q\vartheta) \quad (5.59)$$

$\tilde{\phi}_{\omega}$  hérite en  $\alpha$  de la périodicité de  $\phi$  en  $\varphi$ , on peut donc écrire

$$\tilde{\phi}_{\omega}(x, \eta, \alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\phi}_{n\omega}(x, \eta) e^{in\alpha} \quad (5.60)$$

Par identification des séries de Fourier en  $\phi$  et  $\alpha = \phi - q\vartheta$  on en déduit

$$\tilde{\phi}_{n\omega}(\rho_{\star} r, \vartheta) = \phi_{n\omega}(r, \vartheta) e^{inq\vartheta} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_{n\omega}^m(r) e^{i(m+nq)\vartheta}. \quad (5.61)$$

Le mode de Fourier (en  $\alpha$ )  $\tilde{\phi}_{n\omega}(x, \eta)$  n'est donc en général pas périodique en  $\eta$ , sa périodicité dépendant de la rationalité de  $q$ . Le problème étant découpé en  $n$  en raison de l'axisymétrie des quantités d'équilibre, l'inconnue est l'enveloppe bidimensionnelle, périodique en  $\vartheta$

$$\phi_{n\omega}(r, \vartheta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_{n\omega}^m(r) e^{im\vartheta}. \quad (5.62)$$

Supposons qu'il existe  $\hat{\Phi}_{n\omega}(x, \eta) \in L^2([r_{min}, a] \times \mathbb{R})$ , telle que  $\phi_{n\omega}(r, \vartheta)$  soit la  $2\pi$  périodisée de  $\hat{\Phi}_{n\omega}(x, \eta)$  c'est-à-dire

$$\phi_{n\omega}(r, \vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta' \hat{\Phi}_{n\omega}(\rho_{\star} r, \eta') \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta(\eta' - \vartheta - 2p\pi) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\Phi}(\rho_{\star} r, \vartheta + 2p\pi), \quad (5.63)$$

sous réserve que  $\hat{\Phi}$  s'annule suffisamment rapidement à l'infini pour que la série converge. Le mode poloïdal  $\phi_{n\omega}^m$  s'obtient simplement par

$$\phi_{n\omega}^m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \phi_{n\omega}(r, \vartheta) e^{-im\vartheta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{\Phi}_{n\omega}(\rho_{\star} r, \eta) e^{-im\eta}, \quad (5.64)$$

de même sous réserve de convergence. Le mode  $\tilde{\phi}_{n\omega}$  s'exprime alors

$$\tilde{\phi}_{n\omega}(x, \eta) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\Phi}(x, \eta + 2p\pi) e^{inq\eta} \quad (5.65)$$

Nous allons maintenant donner une forme eikonale à  $\hat{\Phi}$  afin d'isoler les oscillations rapides de l'enveloppe du mode

$$\hat{\Phi}_{n\omega}(x, \eta) = \hat{\phi}_{n\omega}(x, \eta) e^{in\mathcal{S}(x, \eta)}, \quad (5.66)$$

$$\mathcal{S} = -q\eta + S(x) \quad (5.67)$$

Notons que l'enveloppe  $\hat{\phi}(x, \eta)$  étant indéterminée, le choix de la forme de  $\mathcal{S}$  n'implique aucune hypothèse supplémentaire, et le mode  $\tilde{\phi}_\omega$  devient

$$\tilde{\phi}_\omega(x, \eta, \alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_{n\omega}(x, \eta + 2p\pi) e^{in(\alpha - 2\pi pq + S(x))} \quad (5.68)$$

Reste à donner une forme plus explicite à  $S(x)$ . Examinons pour cela composante radiale du gradient perpendiculaire du facteur de phase de (5.68)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \cdot \nabla_\perp(\alpha - 2\pi qnp + S) &= \rho_\star (\partial_x - q' \partial_\alpha)(\alpha - 2\pi qp + S) \\ &= \rho_\star q' (2\pi np - 1 + \frac{S'}{q'}) \end{aligned} \quad (5.69)$$

En posant  $S(x) = S_2(q)$  le ratio  $S'/q'$  s'identifie à  $S'_2$  que l'on peut identifier comme un facteur de phase  $\theta_k(x)$ , qui fait office de nombre d'onde radial normalisé. Si on utilise  $q$  comme coordonnée radiale (dans l'hypothèse ou le profil de  $q$  le permet),  $\theta_k$  est exactement le nombre d'onde "radial" conjugué de  $q$ . On pose donc

$$S(x) = \int dq \theta_k. \quad (5.70)$$

Sans perte de généralité pour l'instant, on explicite en sus la dépendance paramétrique de l'enveloppe  $\hat{\phi}$  en  $\theta_k$  et on note

$$\hat{\phi}(x, \eta) = \hat{\phi}(x, \eta, \theta_k(x)). \quad (5.71)$$

Le mode  $\tilde{\phi}_\omega$  se décompose sous la forme

$$\tilde{\phi}_\omega(x, \eta, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_{n\omega}(x, \eta + 2p\pi, \theta_k(x)) e^{in(\varphi - 2\pi pq + \int dq \theta_k)} \quad (5.72)$$

La forme (5.72) définit la représentation en modes de ballonnement de la perturbation (voir [68, 64, 39, 40, 13]). Le problème est reporté sur la détermination de l'enveloppe  $\hat{\phi}(x, \eta, \theta_k)$  et de la dépendance radiale de  $\theta_k(x)$ .

Examinons maintenant la forme générique que prend le problème aux valeurs propres dans cette représentation. Le problème peut s'écrire  $\mathcal{L}_\omega \phi_\omega = 0$  où  $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire intégro-différentiel de la forme

$$\mathcal{L}_\omega = \sum_{j\mu} \mathcal{J}_\mu \mathcal{L}_{j\mu}(x, \eta, \omega, \partial_\varphi^{l_\varphi}, \partial_x^{l_x}, \partial_\vartheta^{l_\vartheta}), \quad (5.73)$$

où les dépendances en  $(x, \eta)$  traduisent les évolutions lentes liées aux grandeurs d'équilibre, et les indices représentent formellement  $l_\varphi, l_\vartheta, l_x$  les ordres de dérivations (ou d'intégration) éventuellement multiples des opérateurs intervenant dans  $\mathcal{L}$ . L'action de  $\mathcal{L}$  en représentation de ballonnement se traduit par

$$\mathcal{L}_\omega \phi = \sum_{n, p \in \mathbb{Z}^2} e^{in(\alpha + \int dq \theta_k)} \sum_{j\mu} \mathcal{J}_\mu \mathcal{L}_{j\mu}(x, \eta, \omega, (in)^{l_\varphi}, (\partial_x - inq'(\eta - \theta_k))^{l_x}, (\partial_\eta - inq)^{l_\vartheta}) \mathcal{J}_\mu \hat{\phi}_{n\omega} \quad (5.74)$$

et donc pour l'enveloppe  $\hat{\phi}_{n\omega}$  par le problème

$$\sum_{j\mu} \mathcal{J}_\mu \mathcal{L}_{j\mu}(x, \eta, \omega, (in)^{l_\varphi}, (\partial_x - inq'(\eta - \theta_k))^{l_x}, (\partial_\eta - inq)^{l_\vartheta}) \mathcal{J}_\mu \hat{\phi} = 0 \quad (5.75)$$

Le problème reste sous cette forme bi-dimensionnel. La représentation utilisée va cependant permettre une analyse asymptotique multi-échelles, qui permet un découplage et une réduction de la dimensionnalité aux ordres les plus bas.

### 5.4.2 Orderings et développement asymptotique

Le développement asymptotique repose sur l'anisotropie  $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ . Le paramètre d'ordre choisi est  $\epsilon = 1/n$  dans la limite des grands nombre d'ondes toroidaux. Les paramètres d'échelle caractérisant le système sont

$$\epsilon_r = \frac{r}{R_0} \sim \epsilon_a, \quad \epsilon_{\omega} = \frac{\omega}{\Omega_{CI}}, \quad \epsilon_k = \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}}, \quad \epsilon_{\perp} = k_{\perp} \rho_i, \quad \epsilon_{\nabla_{\perp}} = \frac{1}{k_{\perp} a} = \frac{\rho_{\star}}{\epsilon_{\perp}} \quad (5.76)$$

En supposant que  $0 < \epsilon < \epsilon_{\perp} \leq 1$  et on peut exprimer les relations d'échelles en fonction de  $\epsilon$

$$\epsilon_{\nabla_{\perp}} = \mathcal{O}(\epsilon), \quad \rho_{\star} = \mathcal{O}(\epsilon_{\perp} \epsilon_{\nabla_{\perp}}) \lesssim \mathcal{O}(\epsilon), \quad \epsilon_k = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon \epsilon_a}{q}\right), \quad k_{\parallel} \rho_i = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon \epsilon_a \epsilon_{\perp}}{q}\right). \quad (5.77)$$

Les inconnues  $(\hat{\phi}, \theta_k, \omega)$  et les opérateurs sont développés en séries formelles de puissances de  $\epsilon^{\gamma}$ ,  $0 < \gamma < 1$ .

Selon la variable  $\eta$ , deux échelles sont identifiables. La variation de phase rapide en  $nq\eta$  est prise en compte dans la forme de l'eikonale. Reste uniquement la variation lente de l'enveloppe  $\hat{\phi}$ .

On peut identifier, a priori, deux échelles pour la variation radiale. Une première échelle, rapide, correspond à la variation de la phase  $n \int dq \theta_k$ , et d'ordre  $1/nq'$ , qui caractérise la modulation du mode par le caractère résonnant ou non des surfaces magnétiques. Une seconde échelle, lente, du même ordre que celle des grandeurs d'équilibre, caractérise la dépendance en  $x$  de l'enveloppe  $\hat{\phi}$ . On suppose en outre l'existence d'une troisième échelle, intermédiaire entre les deux précédentes pour la variation radiale de  $\theta_k$ , correspondant à l'enveloppe radiale lente du mode.

Le détail des calculs, assez complexes, conduisant à la formulation du problème aux ordres les plus bas, peut être trouvé dans [7]. Le problème aux ordres les plus bas qui nous intéressent ici se décompose ainsi

- ◇ A l'ordre zéro, les variations radiales sont éliminées. On obtient un problème aux valeurs propres intégral unidimensionnel en  $\eta$  pour l'enveloppe  $\hat{\phi}_0(x, \eta, \omega_0, \theta_{k0})$ , où  $(x, \theta_{k0})$  sont des paramètres, formellement noté  $\mathcal{L}_0 \hat{\phi}_0 = 0$ . En résolvant le problème aux valeurs propres local correspondant pour diverses valeurs de  $(x, \theta_{k0})$  on obtient une fréquence locale  $\omega_0(x, \theta_{k0})$  et les enveloppes  $\hat{\phi}_0(x, \eta, \theta_{k0})$  correspondantes.
- ◇ les dépendances radiale de  $\theta_k$  sont rejetées sur la contribution d'ordre un. Ce choix permet de ne pas résoudre explicitement l'ordre un.
- ◇ A l'ordre deux, la fréquence globale et l'enveloppe radiale correspondant à la contribution  $\theta_{k1}$  sont obtenues par la résolution d'un problème aux valeurs propres différentiel sur le domaine radial.

### 5.4.3 Problème intégral à l'ordre zéro

A l'ordre 0 du développement asymptotique, pour  $x$  et  $\vartheta_{k0}$  fixés, le potentiel  $\hat{\phi}_0(\vartheta)$  est solution du problème intégral aux valeurs propres transcendantal

$$\hat{\phi}_0(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{K}(\theta, \eta, \omega_0) \hat{\phi}_0(\eta) d\eta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \omega_0 \in \mathbb{C}, \Im \omega_0 > 0 \quad (5.78)$$

où le noyau intégral se décompose en

$$\mathbb{K}(\theta, \eta, \omega) = \sum_{\mu} \sum_{j=1}^N \mathbb{K}_{j\mu}(\theta, \eta, \omega_0) \quad (5.79)$$

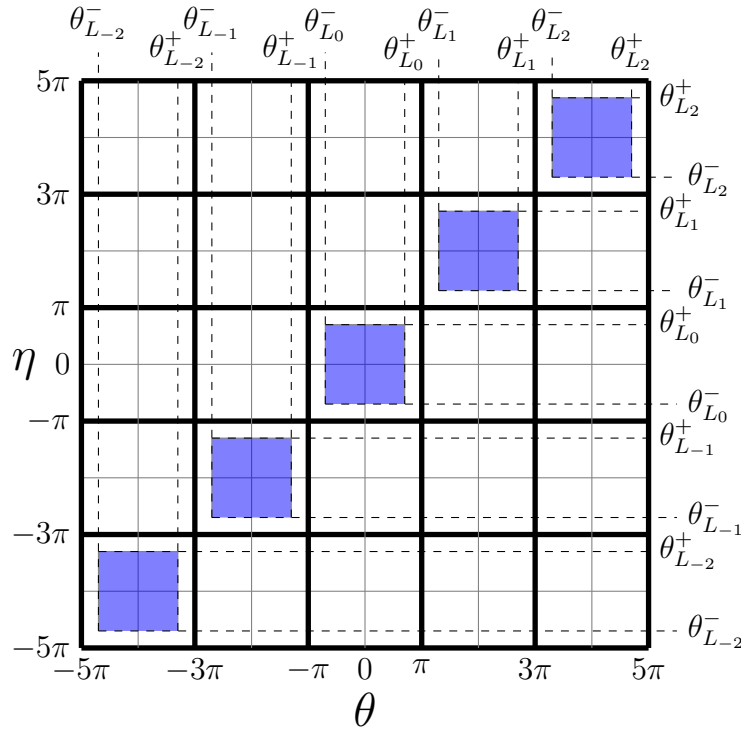


FIGURE 5.2 – Domaines de définition (en bleu) de la contribution au noyau d'un contour fermé dans le plan  $(\theta, \eta)$ ; les contours ouverts sont définis sur l'ensemble de la grille

La structure de  $\mathbb{K}_{j\mu}$  dépend de la nature ouverte ou fermée du contour d'équilibre  $v_{j\mu}$  en  $x$ . On note respectivement  $\mathbb{K}_{j\mu}^{\mathcal{O}}$  ("Open") et  $\mathbb{K}_{j\mu}^{\mathcal{C}}$  ("Closed"), les contributions au noyau d'un contour ouvert ou fermé. La première distinction entre ces deux contributions est la nature de leur support sur  $\mathbb{R}^2$ . La différence de support entre les deux types de contours provient de deux intégrations successives le long des trajectoires d'équilibres lors de l'établissement de (5.78) à partir des conditions aux limites.

Dans le cas des contours ouverts, les conditions aux limites d'annulation de la perturbation sont en  $\eta = \pm\infty$  et les contributions pour les contours ouverts ont en conséquence pour support  $\mathbb{R}^2$ .

Dans le cas des contours fermés, la perturbation est supposée s'annuler aux angles limites du contour d'équilibre correspondant. L'intégration s'effectue donc "localement", pour  $p \in \mathbb{Z}$ , entre les angles limites  $\theta_{Lpj\mu}^-$  et  $\theta_{Lpj\mu}^+$  définis par  $\theta_{Lpj\mu}^\pm = 2p\pi \pm \theta_{Lj\mu}$ . (voir figure 5.2). La contribution d'un contour fermé se décompose donc en

$$\mathbb{K}_{j\mu}^{\mathcal{C}} = \sum_{p=p_{\min}}^{p_{\max}} \mathbf{1}_{] \theta_{Lpj\mu}^-, \theta_{Lpj\mu}^+ ]} \mathbb{K}_{pj\mu}^{\mathcal{C}} \quad (5.80)$$

Les restrictions aux ensembles de définition adéquats seront sous-entendues pour toutes les expressions définies ci-après.

Les contributions respectives des contours ouverts et fermés s'explicitent en

$$\mathbb{K}_{j\mu}^{\mathcal{O}} = -i\mathcal{P}_{j\mu}(\theta)\mathcal{F}_{j\mu}(\omega_0, \eta) \exp \left[ i\mathcal{I}_{j\mu} \left( \min(\theta, \eta), \max(\theta, \eta), \omega_0 \right) \right], \quad (5.81)$$



et

$$\mathbb{K}_{pj\mu}^c = \mathcal{P}_{j\mu}(\theta) \mathcal{F}_{j\mu}(\omega_0, \eta) \frac{2 \cos \mathcal{I}_{j\mu}(\theta_{Lpj\mu}^-, \min(\theta, \eta), \omega_0) \cos \mathcal{I}_{j\mu}(\theta_{Lpj\mu}^+, \max(\theta, \eta), \omega_0)}{\sin \mathcal{I}_{j\mu}(\theta_{Lpj\mu}^-, \theta_{Lpj\mu}^+, \omega_0)} \quad (5.82)$$

avec les définitions

$$\mathcal{P}_{j\mu}(\theta) = \frac{2\pi B(\theta)}{Q(\theta)} A_{j\mu} \frac{\mathcal{J}_{\mu 0}(\theta)}{v_{j\mu}(\theta)}, \quad (5.83)$$

$$Q(\theta) = n_0 \left[ \frac{1}{Z_i T_e} + \frac{1}{B^2} \left( \frac{nq\rho_\star}{x} \right)^2 (1 + s^2(\theta - \theta_{k0})^2) \right] + 4\pi B \sum_{j\mu} A_{j\mu} \frac{\mathcal{J}_{0\mu}^2}{v_{j\mu}}, \quad (5.84)$$

$$\mathcal{J}_{\mu 0} = J_0 \left( \frac{|n|q\rho_\star}{x} \rho_i \sqrt{1 + s^2(\theta - \theta_{k0})^2} \right) \quad (5.85)$$

$$\mathcal{F}_{j\mu}(\omega_0, \eta) = \frac{\mathcal{J}_{\mu 0}(\eta)}{v_{j\mu}(\eta)} \frac{qR}{b_\varphi} (\omega_0 + \omega_{j\mu}^\star - \omega_{dj\mu} + i\omega_{\diamond j\mu}) \quad (5.86)$$

$$\omega_{j\mu}^\star(\eta) = \frac{nb_\varphi\rho_\star}{B} \left\{ \frac{\rho_\star}{x} [qv_{j\mu}\partial_x v_{j\mu} - q'(\eta - \vartheta_{k0})v_{j\mu}\partial_\eta v_{j\mu}] + \left[ q'(\eta - \theta_{k0}) \sin \eta + \mathfrak{q} \frac{\cos \eta}{x} \right] \frac{v_{j\mu}^2}{R} \right\} \quad (5.87)$$

$$\omega_{dj\mu}(\eta) = \frac{nb_\varphi\rho_\star}{R} \left[ \mu + \frac{v_{j\mu}^2}{B} \right] \left[ q'(\eta - \theta_{k0}) \sin \eta + \mathfrak{q} \frac{\cos \eta}{x} \right] \quad (5.88)$$

$$\omega_{\diamond j\mu}(\eta) = -2 \frac{b_\varphi\rho_\star v_{j\mu}}{RB} \left[ \sin \eta \partial_x v_{j\mu} - \frac{\cos \eta}{x} \partial_\eta v_{j\mu} \right] \quad (5.89)$$

$$\mathcal{I}_{j\mu}(\theta, \eta, \omega_0) = \int_\theta^\eta d\tilde{\eta} \frac{qR}{b_\varphi v_{j\mu}} [\omega_0 - \omega_{dj\mu} + i\omega_{\diamond j\mu}] \quad (5.90)$$

Lorsque les contours d'équilibre sont obtenus par la méthode approchée, c'est-à-dire lorsque

$$v_{j\mu}^2(x, \eta) = v_{j\mu}^2(x, \eta_0) + 2\mu(B(x, \eta_0) - B(x, \eta)), \quad (5.91)$$

Le terme  $\omega_{j\mu}^\star - \omega_{dj\mu}$  du préfacteur  $\mathcal{F}_{j\mu}(\omega_0, \eta)$  se simplifie notablement, à des corrections d'ordre  $\epsilon_r^2$  près, en

$$\omega_{j\mu}^\star - \omega_{dj\mu} = \frac{nb_\varphi\rho_\star^2\mathfrak{q}}{xB} d_x \left[ \frac{v_{j\mu}^2(x, \eta_0)}{2} + \mu B(x, \eta_0) \right] \quad (5.92)$$

Avant toute démarche de discrétisation du problème (5.78), il convient d'examiner les propriétés du noyau intégral  $\mathbb{K}$ , tant du point de vue des dépendances spatiales que de la dépendance en  $\omega_0$ . Notons  $Op(\mathbb{K}(\omega_0))$  l'opérateur intégral associé à  $\mathbb{K}$ . Le problème (5.78) s'exprime

$$(\mathcal{I} - Op(\mathbb{K}(\omega_0)))\phi = 0 \quad (5.93)$$

Une caractérisation rigoureuse des propriétés spectrales de l'opérateur  $\mathcal{I} - Op(\mathbb{K}(\omega_0))$  a été effectuée dans [7]. Nous nous contenterons ici d'en exploiter les résultats, sans recourir au formalisme de la théorie des opérateurs. En substance, le noyau  $\mathcal{K}(\omega_0)$ ,  $\omega_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\Im\omega_0 > 0$  possède des propriétés de décroissance suffisantes pour assurer l'existence de solutions  $\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$  du problème aux valeurs propres. Quelques remarques s'imposent cependant sur les singularités d'une part en  $\omega_0$  et d'autre part  $(\eta, \theta)$  apparaissant dans le noyau.

Examinons tout d'abord les singularités potentielles en  $\omega_0$ . Les termes en  $\sin \mathcal{I}_{j\mu}$  au

dénominateur des contributions des contours fermés induisent la présence d'une infinité dénombrable de singularités sur l'axe réel. Le caractère réel de ces singularités provient de l'annulation de la contribution à  $\mathcal{I}_{j\mu}(-\theta_{Lj\mu}, +\theta_{Lj\mu}, \omega_0)$  du terme en  $\omega_{\diamond j\mu}$

$$\int_{2p\pi-\theta_L}^{2p\pi+\theta_L} d\eta \frac{qR\omega_{\diamond j\mu}}{b_\varphi v_{j\mu}} = q\rho_\star \int_{-\theta_L}^{+\theta_L} \frac{d\eta}{B} [\sin \eta \partial_x v_{j\mu} - \frac{\cos \eta}{x} \partial_\eta v_{j\mu}] = 0, \quad (5.94)$$

en raison de la périodicité en  $\eta$  de l'intégrand, de la parité en  $\eta$  de  $B$  et  $\partial_x v_{j\mu}$  et de l'imparité de  $\partial_\eta v_{j\mu}$  (voir (5.1) et (5.40)).

La contribution en  $\omega_{dj\mu}$  se simplifie notablement

$$\begin{aligned} \int_{2p\pi-\theta_{Lj\mu}}^{2p\pi+\theta_{Lj\mu}} d\tilde{\eta} \frac{qR}{b_\varphi v_{j\mu}} \omega_{dj\mu} &= nq\rho_\star \int_{-\theta_{Lj\mu}}^{\theta_{Lj\mu}} d\tilde{\eta} \left[ \frac{\mu}{v_{j\mu}} + \frac{v_{j\mu}}{B} \right] \left( q'(\eta + 2p\pi - \theta_{k0}) \sin \eta + \mathfrak{q} \frac{\cos \eta}{x} \right) \\ &= nq\rho_\star \int_{-\theta_{Lj\mu}}^{\theta_{Lj\mu}} d\tilde{\eta} \left[ \frac{\mu}{v_{j\mu}} + \frac{v_{j\mu}}{B} \right] \left( q' \eta \sin \eta + \mathfrak{q} \frac{\cos \eta}{x} \right), \end{aligned} \quad (5.95)$$

où l'on a éliminé les contributions impaires de l'intégrand. On note que le résultat est indépendant de  $p$  et  $\theta_{k0}$ . Pour chaque contour fermé, ces singularités liées au mouvement de rebond des orbites piégées, forment une suite discrète  $(\omega_{kj\mu}, k \in \mathbb{Z})$  définie par

$$\omega_{kj\mu} = \frac{nq\rho_\star \int_{-\theta_{Lj\mu}}^{\theta_{Lj\mu}} d\tilde{\eta} \left[ \frac{\mu}{v_{j\mu}} + \frac{v_{j\mu}}{B} \right] \left( q' \eta \sin \eta + \mathfrak{q} \frac{\cos \eta}{x} \right) + k\pi}{\int_{-\theta_{Lj\mu}}^{-\theta_{Lj\mu}} d\tilde{\eta} \frac{qR}{b_\varphi v_{j\mu}}}. \quad (5.96)$$

La présence de ces singularités nécessitera une certaine prudence dans l'évaluation du noyau au voisinage de l'axe réel. Notons que nous n'avons défini le problème que dans le plan complexe supérieur, puisque nous recherchons les modes les plus instables.

Examinons maintenant les propriétés géométriques du noyau  $\mathbb{K}$  au travers de ses dépendances en  $(\theta, \eta)$ . Les termes en  $1/v_{j\mu}$  intervenant dans le préfacteur  $\mathcal{P}_{j\mu}$  et  $Q(\theta)$  introduisent des divergences du noyau aux angles limites. Les divergences en  $\theta$  de  $\mathcal{P}$  sont compensées par celles de  $Q$ , à la condition que l'argument de  $J_0$  dans  $\mathcal{J}_\mu$  évalué à l'angle limite ne coïncide pas exactement avec un zéro de  $J_0$ . Nous considérerons que ce cas est suffisamment rare pour pouvoir être traité le cas échéant par un filtrage approprié. Les singularités en  $\eta$  dues à  $\mathcal{P}_{j\mu}$  ne sont pas compensées, mais font l'objet d'une intégration. En développant l'expression d'un contour fermé défini par (5.20) (ou (5.91)) au voisinage de l'angle limite  $\theta_{Lj\mu}$  on obtient

$$\frac{1}{v_{j\mu}(\theta)} \sim (\theta - \theta_{Lj\mu})^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.97)$$

et les singularités en  $\eta$  sont donc intégrables.

#### 5.4.4 Détermination de $\theta_{k0}$ .

Supposons résolu le problème à l'ordre zéro, c'est à dire connus les couples  $(\omega_0, \hat{\phi}_0(\eta))$  pour chaque valeur des paramètres  $(x, \theta_{k0}) \in [x_{min}, x_{max}] \times [-\pi, \pi]$ . La restriction à  $[-\pi, \pi]$  du balayage en  $\theta_{k0}$  est due à la périodicité de l'opérateur en  $\theta_{k0}$ , qui provient de celle des quantités d'équilibre.<sup>4</sup> Le problème local en  $(x, \theta_{k0})$  pouvant éventuellement avoir plusieurs solutions, nous considérerons qu'une unique nappe obtenue par

4. On peut le vérifier par la substitution  $\theta_{k0} \rightarrow \theta_{k0} + 2k\pi$  puis l'absorption de  $2k\pi$  par un changement des variables d'intégration muettes dans les expressions définissant l'opérateur

sélection des solutions locales telle que  $\omega_0(x, \theta_{k0})$  soit continue. Dans la pratique, cette nappe est en outre celle qui correspond au mode le plus instable. Rien n'empêche en théorie de considérer séparément chacune des autres.

Nous admettrons que les dépendances paramétriques en  $(x, \theta_{k0})$  de l'opérateur autorisent l'existence d'au moins un point (0) pour les fonctions  $\omega_{0R} = \Re\omega_0(x, \theta_{k0})$  et  $\gamma_0 = \Im\omega_0(x, \theta_{k0})$ . Si la périodicité de l'opérateur en  $\theta_{k0}$  assure l'existence de points critiques tel que  $\partial_{\theta_{k0}}\omega_0 = 0$ , le comportement en  $x$  est a priori indéterminé, et dépend des variations radiales des grandeurs d'équilibre (contours et champ magnétique). Pour des équilibres présentant une zone de gradient localisée, on peut raisonnablement conjecturer l'existence de points critiques  $\partial_x\omega_0 = 0$ . Une représentation synthétique de l'allure de  $\gamma_0$  (ou  $\omega_{R0}$ ) est donnée figure 5.3. La topologie est similaire à celle du portrait de phase en "oeil de chat" d'un oscillateur. Notons que dans la pratique, le portrait est couramment tronqué avant les séparatrices par la limite d'extinction du mode  $\gamma = 0$ . La solution globale que nous recherchons correspond à la ligne de niveau  $\omega_0(x, \theta_{k0}(x)) = \omega_{glob}$ , localisée entre  $x_{1glob}$  et  $x_{2glob}$ . Si nous connaissons  $\omega_{glob}$ , la dépendance radiale  $\theta_{k0}(x)$  serait définie de manière implicite en suivant la ligne de niveau correspondante.

La méthode de résolution adoptée consiste à considérer  $\theta_{k0}$  comme une constante à cet ordre, les dépendances radiales étant rejetées à l'ordre suivant, soit sur  $\theta_{k1}(x)$ . Afin que ce choix n'impose pas une limitation arbitraire du spectre ou du domaine radial, on cherche  $\theta_{k0}$  de manière à maximiser l'extension spectrale et radiale. La valeur de  $\theta_{k0}$  assurant cette optimisation est  $\theta_{k0T}$ , correspondant aux points tournants du portrait de phase 5.3, pour laquelle

$$\partial_{\theta_{k0}}\omega_0(x, \theta_{k0T}) = 0, \forall x. \quad (5.98)$$

Le choix  $d_x\theta_{k0} = 0$  implique, à l'ordre un du développement asymptotique, la nullité de  $\omega_1$ . L'ordre un, qui donne la correction d'enveloppe  $\hat{\phi}_1$  n'est pas résolu explicitement. Les relations obtenues à cet ordre sont mises à profit pour exprimer le problème à l'ordre 2 sur  $\theta_{k1}$  en fonction de  $\omega_0(x) = \omega_0(x, \theta_{k0T})$ .

#### 5.4.5 Problème à l'ordre 2 : détermination de l'enveloppe radiale et de la fréquence globale

Nous utiliserons dans toute cette partie  $q$  comme coordonnée radiale, étant entendu que  $q(x)$  est monotone sur le sous-domaine considéré. A l'ordre 2,  $\theta_{k1}$  est solution de l'équation de Ricatti

$$\frac{i}{n}\partial_q - \theta_{k1} + \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\partial_{\theta_{k0}}^2\omega_0} = 0, \quad (5.99)$$

où  $\omega_0$  et  $\partial_{\theta_{k0}}^2\omega_0$  sont évaluées en  $(x, \theta_{k0T})$  et  $\omega$  est la fréquence globale recherchée. Le problème peut être mis sous la forme d'une équation de Schrödinger en considérant comme inconnue non pas  $\theta_{k1}$  mais l'enveloppe radiale

$$A_1(q) = A_1(q_0) \exp \left[ in \int_{q_0}^q d\tilde{q} \theta_{k1}(\tilde{q}) \right] \quad (5.100)$$

où  $q_0$  est une position de référence de phase arbitraire.  $A_1$  est solution de

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial q^2} - n^2 Q(\omega, q) \right) A_1 = 0, \quad (5.101)$$

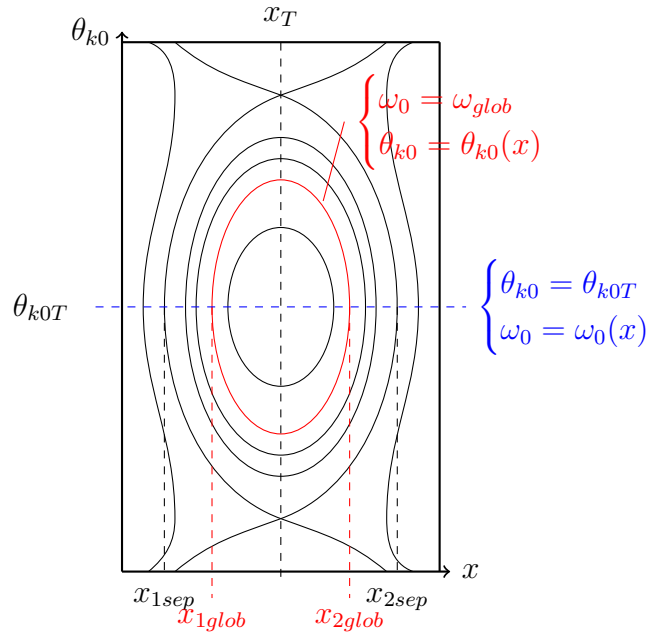


FIGURE 5.3 – Représentation formelle des solutions  $\gamma_0, \omega_{R0} = f(x, \theta_{k0})$ ; lignes de niveaux  $\omega_0 = cte$  au voisinage d'un point ( $O$ )

où le potentiel  $Q$  est défini par

$$Q(\omega, q) = -\frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\partial_{\theta_{k0}}^2 \omega_0}. \quad (5.102)$$

La résolution du problème aux valeurs propres unidimensionnel ainsi défini permet d'obtenir la fréquence globale  $\omega$  et l'enveloppe radiale lente  $A_1$ . Le mode global peut ainsi être reconstruit à partir des solutions locales  $\hat{\phi}_0(\omega, \theta_{k0T}, \eta)$  et de  $A_1$ .

## 5.5 Méthode asymptotique : schémas numériques

### 5.5.1 Problème intégral aux valeurs propres

#### Discrétisation

La discrétisation du problème intégral (5.78), problème de Fredholm de seconde espèce ([49, 69]), peut comme nous allons le voir s'effectuer de plusieurs manières. La première étape est une restriction du support en  $\eta$  des solutions recherchées. Cette restriction s'opère en choisissant un entier  $p_{max}$  et en restreignant les solutions à l'ensemble  $\{\hat{\phi} \in L^2([-2\pi p_{max}, 2\pi p_{max}]), \hat{\phi}(-2\pi p_{max}) = \hat{\phi}(2\pi p_{max}) = 0\}$ . Une telle restriction sera valide si la solution décroît suffisamment vite en  $\eta$  lorsque  $|\eta| \rightarrow +\infty$  pour que le report de la condition aux limites de l'infini à  $\pm 2\pi p_{max}$  ait une influence négligeable. Cette propriété devra être vérifiée a posteriori. Sur l'intervalle ainsi défini, on définit une suite discrète de noeuds  $(\eta_i, i = 1, N_\eta)$ . La répartition des noeuds  $\eta_i$  n'est à ce stade pas nécessairement uniforme.

Une première méthode pour discrétiser le problème intégral est la méthode de quadra-

ture directe. En posant  $\phi_i = \hat{\phi}(\eta_i)$  on a pour tout  $i \in 1, \dots, N_\eta$

$$\phi_i = \sum_j w_j \phi_j K(\eta_i, \eta_j, \omega_0) = \sum_j w_j K_{ij}^{quad}(\omega_0) \phi_j, \quad (5.103)$$

où les poids  $w_j$  définissent une formule de quadrature sur les noeuds  $\eta_i$ . Deux méthodes de quadrature ont été implémentées et testée : une méthode des trapèzes sur grille uniforme et une méthode de Gauss-Hermite. On obtient dans les deux cas un problème aux valeurs propres non-linéaire de taille  $N_\eta$ .

La méthode de quadrature directe a le mérite de la simplicité. Dans l'hypothèse où la solution nécessiterait un large support et/ou une discrétisation fine (notamment pour bien intégrer les singularités), la taille de l'opérateur risque de rendre difficile la recherche de valeurs propres par les méthodes exposées ci-après. On peut obtenir un opérateur de taille plus restreinte en décomposant  $\hat{\phi}$  sur une base de fonctions. Dans notre cas, les fonctions d'Hermite sont bien adaptées, à la nature du support et des conditions aux limites. On décompose donc  $\hat{\phi}$  sur une base de fonctions d'Hermite ( $\psi_k, k = 1, N_f$ ) sous la forme

$$\hat{\phi} = \sum_{k=1}^{N_f} \phi_k \psi_k, \quad (5.104)$$

avec

$$\psi_k(\eta) = \frac{e^{-\frac{\eta^2}{2}}}{\sqrt{2^k k!}} H_k(\eta) \quad (5.105)$$

où  $H_n$  est le  $n$ -ième polynôme d'Hermite. Et on a pour tout  $\theta$

$$\sum_k \phi_k \left[ \psi_k(\theta) - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(\eta) \mathbb{K}(\theta, \eta, \omega_0) \right] = 0, \quad (5.106)$$

que l'on multiplie par  $\psi_l(\theta)$  avant d'intégrer en  $\theta$  pour obtenir, pour tout  $l \in 1, \dots, N_f$

$$\sum_k \phi_k \left[ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\theta \psi_l(\theta) \psi_k(\theta)}_{D_{lk}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta d\theta \psi_l(\theta) \psi_k(\eta) \mathbb{K}(\theta, \eta, \omega_0)}_{K_{lk}^{proj}(\omega_0)} \right] = 0. \quad (5.107)$$

Pour un support d'intégration sur  $\mathbb{R}$ , l'orthogonalité des fonctions d'Hermite impliquerait une réduction du tenseur  $D_{lk}$  à l'identité  $\delta_{kl}$ . En pratique, l'évaluation des éléments de matrices  $K_{lk}$  nécessite une forme de quadrature numérique, et le tenseur  $D_{lk}$  est calculé afin de vérifier la préservation de l'orthogonalité. En supposant donnés les noeuds  $\eta_i$  et les poids  $w_i$  définis comme précédemment, les éléments de l'opérateur s'explicitent en

$$D_{lk} = \sum_i w_i \psi_{li} \psi_{ki}, \quad (5.108)$$

et

$$K_{lk}^{proj}(\omega_0) = \sum_i \sum_j w_i w_j \psi_{li} \psi_{kj} K_{ij}^{quad}(\omega_0), \quad (5.109)$$

où  $\psi_{li} = \psi_l(\eta_i)$ . L'opérateur matriciel ainsi défini est de taille  $N_f \times N_f$ . L'intérêt de cette méthode est de découpler, par la projection du problème dans un espace de fonctions, la résolution d'intégration caractérisée par  $N_\eta$  de la taille de l'espace de travail. Notons que l'utilisation d'une formule de quadrature unique dans le calcul des éléments de

matrices n'est pas indispensable a priori. On peut tout à fait envisager une quadrature adaptée à chaque élément, voire une méthode d'intégration itérative. Nous allons voir par la suite pourquoi cette possibilité a été rejetée.

Examinons tout d'abord plus en détail l'évaluation numérique de la valeur du noyau  $\mathbb{K}$  en  $(\theta, \eta)$ . Pour chaque valeur de  $(j, \mu)$ , les préfacteurs  $\mathcal{P}_{j\mu}$  (Équation (5.83)) et  $\mathcal{F}_{j\mu}$  (Équation (5.86)) peuvent faire l'objet d'une évaluation directe. L'évaluation des arguments  $\mathcal{I}_{j\mu}$  (Équation (5.90)) nécessite cependant une intégration en  $\eta$ . Les divers intégrant composant celui de  $\mathcal{I}_{j\mu}$  sont soit des fonctions de la forme  $f_p(\eta)$  ou  $\eta f_p(\eta)$ , où  $f_p$  est une fonction  $2\pi$  périodique en  $\eta$ . Lorsque  $|\eta - \theta| > 2\pi$ , pour les contours ouverts, le domaine d'intégration  $[\eta_{inf}, \eta_{sup}]$  est subdivisé ainsi

$$[\eta_{inf}, \eta_{sup}] = \left\{ \bigcup_{k=0}^{k_m-1} [\eta_{inf} + 2k\pi, \eta_{inf} + 2(k+1)\pi] \bigcup [2k_m\pi, \eta_{sup}] \right\} \quad (5.110)$$

avec  $k_m = \lfloor \frac{\eta_{sup} - \eta_{inf}}{2\pi} \rfloor$ . Les intégrales de  $f_p$  et  $\eta f_p$  se réduisent respectivement à

$$\int_{\eta_{inf}}^{\eta_{sup}} f_p d\eta = k_m \int_{\eta_{inf}}^{\eta_{inf} + 2\pi} f_p d\eta + \int_{2k_m\pi}^{\eta_{sup}} f_p d\eta \quad (5.111)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\eta_{inf}}^{\eta_{sup}} \eta f_p d\eta &= \sum_{k=0}^{k_m-1} \int_{\eta_{inf} + 2k\pi}^{\eta_{inf} + 2(k+1)\pi} \eta f_p d\eta + \int_{\eta_{inf} + 2k_m\pi}^{\eta_{sup}} \eta f_p d\eta \\ &= \sum_{k=0}^{k_m-1} \int_{\eta_{inf}}^{\eta_{inf} + 2\pi} (\eta + 2k\pi) f_p(\eta + 2k\pi) d\eta + \int_{\eta_{inf} + 2k_m\pi}^{\eta_{sup}} \eta f_p d\eta \\ &= \sum_{k=0}^{k_m-1} \int_{\eta_{inf}}^{\eta_{inf} + 2\pi} \eta f_p(\eta) d\eta + 2\pi \sum_{k=0}^{k_m-1} k \int_{\eta_{inf}}^{\eta_{inf} + 2\pi} f_p(\eta) d\eta + \int_{\eta_{inf} + 2k_m\pi}^{\eta_{sup}} \eta f_p d\eta \\ &= k_m \int_{\eta_{inf}}^{\eta_{inf} + 2\pi} \eta f_p d\eta + \pi k_m (k_m - 1) \int_{\eta_{inf}}^{\eta_{inf} + 2\pi} f_p d\eta + \int_{2k_m\pi}^{\eta_{sup}} \eta f_p d\eta \end{aligned} \quad (5.112)$$

soit au calcul de 2 ou 3 intégrales sur des intervalles de largeur inférieure ou égale à  $2\pi$ . Ces dernières sont calculées par une méthode itérative : l'intervalle de départ est subdivisé en  $n$  sous-intervalles sur lesquels est appliquée une formule de quadrature de Gauss-Legendre avec un petit nombre de noeuds (typiquement 12–15). La convergence est vérifiée sur la variation relative des résultats obtenus en  $n$  et  $n+1$ . La convergence est typiquement rapide ( $n = 2-4$ ), même dans le cas des contours fermés pour lesquels il faut intégrer la singularité aux angles limites.

Considérons à présent la dépendance en  $\omega_0$  de  $\mathbb{K}(\theta, \eta, \omega_0)$  pour  $(\theta, \eta)$  fixés. La contribution d'un contour ouvert est de la forme

$$(a + \omega_0 b) \exp i(c + d\omega_0) \quad (5.113)$$

et celle d'un contour fermé

$$(a + \omega_0 b) \frac{\cos(c + \omega_0 d) \cos(e + \omega_0 f)}{\sin(g + \omega_0 h)}, \quad (5.114)$$

où  $(a, b, c, d, e, f)$  dépendent de  $(j, \mu, \eta, \theta)$  et  $(g, h)$  de  $(j, \mu)$ . Quelle que soit la méthode de discrétisation, les non-linéarités en  $\omega_0$  empêchent de décomposer l'opérateur intégral sous une forme simple. Deux stratégies de construction sont possibles : soit

donner une valeur numérique à  $\omega_0$  et évaluer numériquement toutes les composantes de l'opérateur, en usant éventuellement de méthodes adaptatives, soit précalculer les coefficients  $a, b, \dots$  une fois pour toute sur une grille géométrique prédéterminée et composer l'opérateur à partir de  $\omega_0$  et de ces coefficients précalculés. La première méthode n'aura d'intérêt que si la valeur effective de  $\omega_0$  permet d'accélérer grandement le calcul des composantes (notamment par l'écrasement rapide du noyau loin de la diagonale, qui permettrait une convergence rapide de certaines intégrales dans le cas de la méthode de projection) mais nécessite de recalculer toutes les composantes, dont les intégrales  $\mathcal{I}_{j\mu}$  à chaque changement de  $\omega_0$ . Comme nous le verrons par la suite, la méthode de recherche des valeurs propres peut nécessiter de construire l'opérateur discret pour un grand nombre de valeurs de  $\omega_0$ . Pour cette raison c'est la seconde méthode qui a été choisie, et qui implique aussi le choix d'une méthode de quadrature commune dans le cas de la méthode de projection. Les différents éléments permettant de construire les composantes du noyau sur une grille  $(\eta_i, \eta_j)$  sont précalculés, et l'opérateur est assemblé pour chaque valeur de  $\omega_0$ . Le fait d'opérer ainsi sur une structure géométrique fixée par avance permet en outre de mettre à profit certaines symétries pour minimiser le coût du calcul initial, et de ne stocker que des fonctions univariées de  $\eta$ .

L'indépendance entre les calculs des différentes composantes et des contributions de chacun des contours pourrait conduire à vouloir paralléliser d'une part les étapes de précalcul et d'autre part d'assemblage de l'opérateur. Cette démarche a été testée mais s'est avérée infructueuse : les surcoûts dus à la synchronisation compensent le gain dû au parallélisme en raison du faible coût individuel de chaque tâche. La préconstruction et l'assemblage de l'opérateur s'effectuent de fait plus lentement en exécution parallèle que séquentielle.

### Résolution du problème aux valeurs propres local

Quelle que soit la méthode de discrétisation, on obtient un problème aux valeurs propres de la forme

$$M(\omega_0)X = 0, \quad (5.115)$$

où la matrice  $M$  dépend non-linéairement de  $\omega_0$ . La non-linéarité de  $M$  en  $\omega_0$  empêche l'utilisation directe des méthodes denses de factorisations (QZ), ou même des méthodes itératives, habituellement utilisées pour la résolution de problèmes spectralement linéaires. Le caractère transcendantal de la non-linéarité en  $\omega_0$  exclut de recourir aux méthodes de linéarisation spectrale, qui ne peuvent s'appliquer qu'aux problèmes polynomiaux ou rationnels dans le paramètre spectral. La méthode employée ici est fondée sur l'utilisation de fonctionnelles de  $M$  qui s'annulent lorsque  $M$  est singulier. Trois fonctionnelles ont été envisagées :

- ◇ Le déterminant  $\det M$ . Il est obtenu par factorisation  $LU$  de  $M$ , puis produit des éléments diagonaux de  $L$ .
- ◇ La valeur propre de plus petit module  $\min_i \lambda_i$ . Son obtention nécessite le calcul du spectre par factorisation  $QR$ .
- ◇ Le minimum  $\sigma_{min}$  des valeurs singulières de  $M$ . Il nécessite la décomposition en valeurs singulières (SVD) de  $M$ .

À l'issue de quelques tests sur des opérateurs artificiellement construits et sur des cas tests réels, c'est le déterminant qui a été sélectionné, à la fois pour des raisons de coût de factorisation et d'analyticité en  $\omega_0$ . La fonctionnelle  $\sigma_{min}/\sigma_{max}$  est utilisée en sus

comme fonction de vérification de la qualité des racines obtenues, la valeur absolue du déterminant n'étant pas un critère numérique de singularité pertinent.

L'analyticité de  $\det M$  permet, de la même manière que cela été fait dans le cas de l'analyse linéaire en géométrie cylindrique, d'utiliser une méthode d'intégration de contour pour rechercher les valeurs propres. Une différence notable cependant est qu'il n'est pas possible d'évaluer  $d_{\omega_0} \det M$  autrement que par une approximation nécessitant plusieurs évaluations, coûteuses, de  $\det M$  autour de  $\omega_0$ . La méthode de Davies ([19]), où sa variante développée par P. Kravanja ([51]) ne sont donc pas efficacement applicables dans ce cas. Une méthode ne requérant pas le calcul de la dérivée a donc été sélectionnée, la méthode d'Henrici ([1, 46]). Notons tout d'abord que cette méthode permet uniquement de déterminer le nombre de zéros d'une fonction analytique inclus dans un contour fermé du plan complexe en supposant que la fonction n'y admet aucun pôle, à la différence des méthodes basées sur l'intégration de moments comme la méthode de Davies ou certaines de ses variantes sans dérivée ([20]) qui permettent en outre d'obtenir une approximation des zéros par la résolution d'un problème aux valeurs propres de petite taille.

Le comptage des racines d'une fonction analytique  $f$ , encloses dans un contour fermé  $\Gamma$  du plan complexe est effectué par l'évaluation, à partir du principe de l'argument, de

$$N_z = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{f(\Gamma)} \frac{dw}{w}, \quad (5.116)$$

où on a posé  $w = f(z)$  et admis que  $\Gamma$  ne contient aucun pôle de  $f$ .  $N_z$  peut donc être vue comme le nombre d'enroulements de l'image de  $\Gamma$  par  $f$  autour de l'origine, soit la variation totale de l'argument de  $f$

$$N_z = \frac{1}{2\pi} [\arg f(z)]_{z \in \Gamma} \quad (5.117)$$

La méthode d'Henrici consiste à évaluer cette variation totale sous la forme d'une somme discrète sur  $z_k \in \Gamma$

$$N_z = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{N_p} \arg \left( \frac{f(z_{k+1})}{f(z_k)} \right), \quad (5.118)$$

sous réserve que pour tout  $k$ , la variation totale de l'argument de  $f$  sur  $[z_k, z_{k+1}]$  soit inférieure à  $\pi$ , soit

$$[\arg f(z)]_{z \in [z_k, z_{k+1}]} \leq \pi \quad (5.119)$$

Il est important de noter que cette condition ne peut pas être assurée, pour une fonction analytique quelconque, par la donnée d'un nombre fini de valeurs de  $f$  sur le contour  $\Gamma$ . Rien n'empêche en effet, aussi fine que soit la grille  $z_k$ , qu'une variation importante de la phase intervienne entre deux points  $z_k$  et  $z_{k+1}$ . Sans plus d'information sur les variations de  $f$ , il n'est donc pas possible d'estimer la densité minimale requise pour que la condition (5.119) soit vérifiée. Dans la pratique, on choisit une séquence initiale  $z_k$  uniformément répartie en angle autour du centre du contour. Le nombre initial de points est déterminé à partir de la taille du contour et d'un paramètre de densité minimale évalué empiriquement à partir de tests préalables de calibrage. La condition (5.119) ne pouvant être évaluée de manière discrète, elle est remplacée par une condition locale sur la variation d'argument entre deux points successifs, en utilisant un majorant inférieur à  $\pi$ . Si cette condition n'est pas vérifiée, un point supplémentaire est inséré au centre



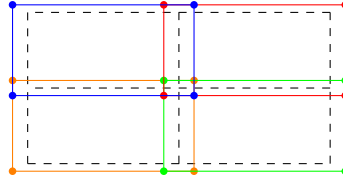


FIGURE 5.4 – Quadrisection d'un contour rectangulaire dans le plan complexe ; le contour parent est indiqué en pointillés

de tous les intervalles  $[z_k, z_{k+1}]$  concernés. La terminaison (éventuellement sans succès) de l'algorithme est assurée en bornant  $N_z$ .

Ayant défini la procédure permettant le comptage des zéros enclos dans un contour fermé, nous allons maintenant décrire l'algorithme de recherche des zéros dans le plan complexe. Cet algorithme, s'il présente des similitudes avec celui qui a été décrit au chapitre 2, s'en écarte suffisamment pour qu'il soit utile de le décrire. Il en constitue de fait une généralisation, et sa conception s'appuie sur le manque de souplesse de comportement de l'algorithme précédent.

L'algorithme de recherche est fondé sur un principe de section/exclusion. Son fonctionnement est récursif : à partir d'un contour initial  $\Gamma_0$ , dit "racine", définissant le domaine de recherche, l'algorithme génère récursivement une arborescence de sous-contours. L'ossature de la récursion est décrite dans l'algorithme 4. Le comptage du nombre de racines  $N(\Gamma)$  dans un contour est effectué par la méthode d'Henrici. Lorsque le contour ne contient qu'une seule racine, on essaie d'obtenir une valeur affinée de la racine par une méthode de la sécante lancée à partir du centre du contour et d'un point intérieur voisin. Le succès du raffinement de la racine  $\omega$  est vérifié, outre par le critère de convergence de la méthode de la sécante, par la décomposition en valeurs singulière de l'opérateur  $M(\omega)$  et le calcul du rapport  $|\sigma_{min}/\sigma_{max}|$ . En cas de succès du raffinement, la racine est sauvegardée. En cas d'échec ou lorsque le contour contient plus d'un zéro, il génère quatre contours enfants par quadrisection. Un léger facteur de dilatation est ensuite appliqué aux contours enfants, pour éviter la perte d'une racine lorsqu'elle est proche de la frontière (voir Figure 5.4).

La procédure de recherche est alors réitérée pour chacun des contours enfants. Afin d'éviter des calculs inutiles, chaque contour communique à son parent le nombre total de racines raffinées que contient sa descendance. Cette remontée d'information permet de stopper la recherche prématurément si un nombre total de racines maximal est souhaité. L'obtention d'au plus  $N$  racines de partie imaginaire maximale s'obtient simplement en fixant cette borne et en définissant l'ordre de la boucle de recherche (algorithme 4 ligne 15) sur les contours enfants pour qu'elle s'effectue des contours les plus élevés aux plus bas dans le plan complexe. Un exemple de la structure de recherche ainsi générée est donné Figure 5.5.

L'algorithme a été implémenté de manière générique et entièrement modulaire : il est possible de changer la géométrie des contours (rectangles, cercles, ellipses), la cardinalité de l'arbre (autre que quadrisection), de choisir la méthode de comptage et la recherche éventuelle d'approximations par une méthode de type Davies lorsque la dérivée est disponible ainsi que la méthode utilisée pour le raffinement des racines

**Algorithme 4** Algorithme récursif de localisation des racines

---

```

1: procedure RECHERCHE( $\Gamma$ )
2:    $N(\Gamma) \leftarrow HENRICI(\Gamma)$  ▷ Comptage des racines
3:   si  $N(\Gamma) = 0$  alors
4:     SORTIE
5:   fin si
6:   si  $N(\Gamma) = 1$  alors
7:     RAFFINE( $\Gamma$ ) ▷ Tente d'obtenir une valeur raffinée de la racine
8:     si RACINE RAFFINÉE alors
9:       SAUVE RACINE
10:      INCREMENTE  $N_r(PARENT(\Gamma))$ 
11:      SORTIE
12:    fin si
13:  fin si
14:  GENERE ENFANTS( $\Gamma$ ) ▷ Création de 4 sous-contours
15:  pour  $\Gamma'$  parmi ENFANTS( $\Gamma$ ) faire ▷ Boucle sur les sous-contours
16:    Appel RECHERCHE( $\Gamma'$ ) ▷ Relance la procédure sur le sous-contour
17:    si  $N_r = N(\Gamma)$  alors ▷ Toutes les racines trouvées dans le sous-arbre
18:      INCREMENTE  $N_r(PARENT(\Gamma))$ 
19:      SORTIE ▷ On évite une recherche inutile
20:    fin si
21:  fin pour
22: fin procedure

```

---

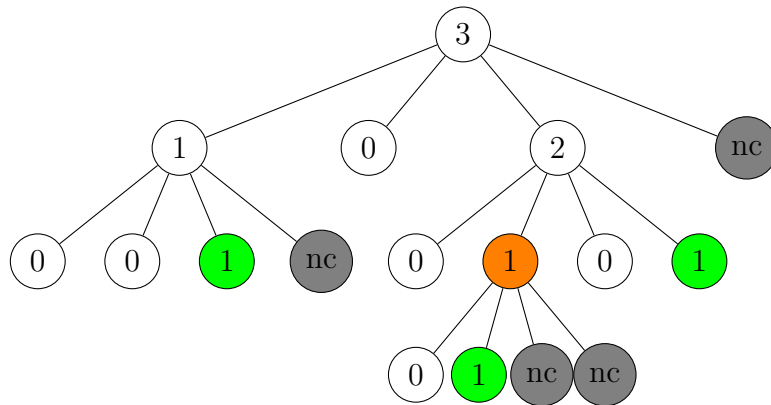


FIGURE 5.5 – Arborescence de recherche ; les nombres indiquent la valeur de retour de la procédure de comptage ; "nc" désignent les noeuds pour lesquels le comptage n'est pas nécessaire ; les noeuds coloriés en vert correspondent à un succès du raffinement ; le noeud colorié en orange correspond à un échec du raffinement qui oblige à une nouvelle quadrisection

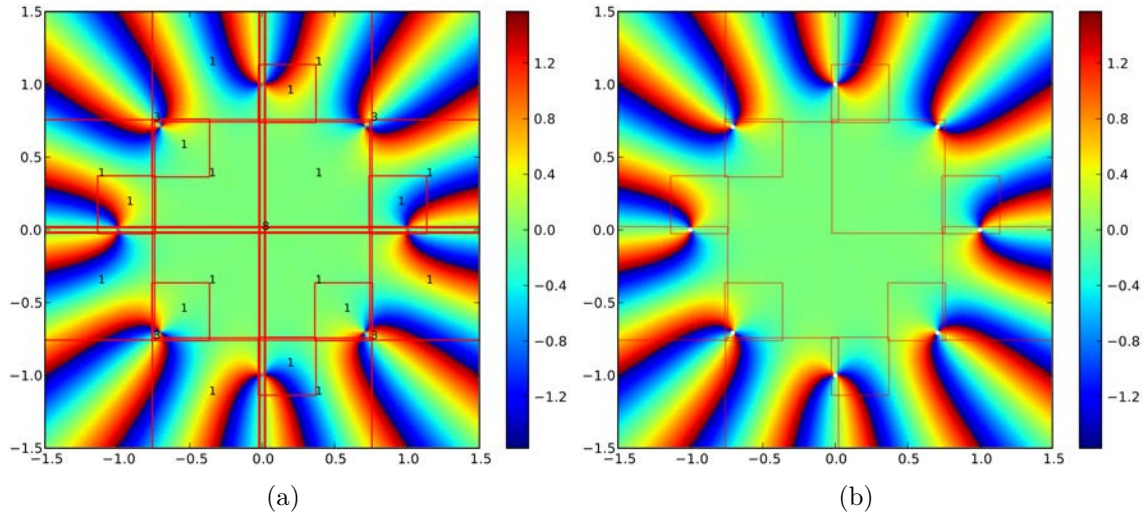


FIGURE 5.6 – Comportement du solveur récursif pour l'équation polynomiale  $f(z) = z^8 - 1 = 0$ ; les rectangles rouges indiquent les contours pris en compte; le nombre d'enroulement associé est indiqué au centre; les points blancs indiquent les racines raffinées; le fond est  $\arg(f(z))$ ; (a) intégralité de l'arbre (b) contours contenant une racine raffinée - la dilatation des sous-contours entraîne une redondance mais évite l'échec du solveur par coïncidence d'une racine et d'un contour

(sécante ou Newton).<sup>5</sup> Dans tous les résultats présentés ci-après, la méthode d'Henrici et la méthode de la sécante sont employées respectivement pour le comptage et le raffinement des racines. Un exemple du comportement du solveur dans le cas simple de la résolution de  $z^8 - 1 = 0$  permet de voir l'intérêt du facteur d'échelle appliqué après la quadrisection des contours dans le plan complexe. Sur les figures 5.6 (a) et (b) sont représentés respectivement l'intégralité des contours utilisés lors de la recherche et les contours contenant une racine raffinée. La dilatation des sous-contours après quadrisection, si elle entraîne de possibles redondances, permet d'éviter le problème lié à la coïncidence d'une racine avec une frontière de subdivision. Même si ce cas peut paraître assez rare, il arrivera nécessairement lors de l'étude d'une famille d'équations dépendant continûment de paramètres, comme c'est le cas lors du balayage en  $(x, \theta_{k0})$  pour notre problème. La figure 5.7 montre l'image discrète du rectangle racine par  $f(z) = z^8 - 1$  après convergence de la méthode d'Henrici. La superposition des 8 enroulements successifs est ici due aux symétries combinées de  $f$  et du contour. Une fois les racines calculées, les vecteurs propres associés sont obtenus par décomposition en valeurs singulières de l'opérateur.

### Résolution du problème aux valeurs propres global

La résolution du problème de Schrödinger (5.101) ne pose pas de difficultés particulières. Le potentiel  $Q$  est obtenu par interpolation sur une grille uniforme en  $q$  à partir des données du problème local  $\omega_0(x, \theta_{k0T})$ . Le problème est discrétisé par un schéma aux différences finies centrées d'ordre 2. Des conditions de Dirichlet homogènes sont

5. Cette modularité a permis l'adaptation rapide du solveur à la résolution d'une relation de dispersion dans le cadre de recherches sur les propulseurs à effet Hall ([41])

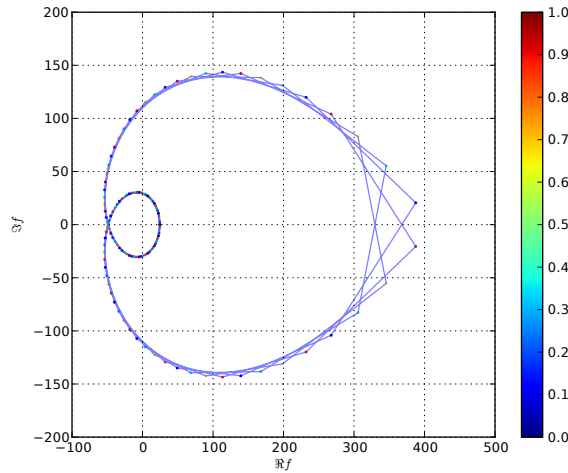


FIGURE 5.7 – Image discrète par  $f(z) = z^8 - 1$  du premier contour rectangulaire de centre  $(0, 0)$  et dimensions  $3 \times 3$  dans le plan complexe ; les points correspondent aux valeurs discrètes effectivement calculées dans la méthode de Henrici ; la couleur indique l’abscisse curviligne angulaire le long du contour rectangulaire

appliquées aux extrémités du domaine radial, correspondant aux points d’annulation du taux de croissance  $\gamma_0(q, \theta_{k0T})$ .

La détermination des valeurs propres se fait par la recherche des racines du déterminant de l’opérateur discrétisé, et le vecteur propre est obtenu par SVD. Le schéma de résolution est identique à celui déployé pour la résolution du problème spectralement non-linéaire en géométrie cylindrique. Notons que le problème étant spectralement linéaire (du type  $A - \lambda B = 0$ ), on pourrait tout aussi bien utiliser une méthode dense. Les difficultés numériques éventuelles peuvent intervenir dans la détermination précise de l’opérateur  $Q$ . Si la détermination de  $\omega_0(x, \theta_{k0T})$  ne pose pas de problème particulier, le calcul de  $\partial_{\theta_{k0}}^2 \omega_0(x, \theta_{k0T})$  nécessite de bien caractériser la géométrie de  $\omega_0(x, \theta_{k0})$  au voisinage de  $\theta_{k0T}$ . Attendu que les variations relatives de  $\omega_0$  sont par nature faibles dans cette zone, la détermination de la courbure nécessite d’utiliser une bande suffisamment large en  $\theta_{k0}$  autour de  $\theta_{k0T}$ , en raison de la précision finie du solveur. Cela est particulièrement vrai aux extrémités du domaine radial, où la courbure diminue fortement et permet d’obtenir un potentiel  $Q$  confinant.

### Stratégies globales de résolution - parallélisation

La résolution du problème global peut nécessiter la résolution séquentielle de trois problèmes

1. Déterminer l’angle  $\theta_{k0T}$ . Cette étape suppose la résolution du problème local sur l’ensemble du domaine en  $(x, \theta_{k0})$ . La résolution en  $(x, \theta_{k0})$  sera gouvernée par la nécessité d’obtenir une valeur suffisamment précise de  $\theta_{k0T}$ .
2. Déterminer  $\omega_0(x, \theta_{k0})$  avec précision sur toute l’extension radiale dans une bande  $\theta_{k0T} \pm \Delta\theta_{k0}$  permettant une détermination de  $\partial_{\theta_{k0}}^2 \omega_0$ .
3. Déterminer l’enveloppe radiale et la fréquence globale par résolution du problème (5.101).

Le coût de la résolution est essentiellement lié à celui des deux premières étapes, la troisième étant particulièrement rapide.

Considérons tout d'abord la première étape. Le domaine en  $(x, \theta_{k0})$ , soit  $[x_{min}, x_{max}] \times [-\pi, \pi]$ , est discrétisé sur une grille uniforme de taille  $N_x \times N_{\theta_{k0}}$ . Deux caractéristiques antagonistes du problème local peuvent être mises à contribution : d'une part, l'indépendance paramétrique en  $(x, \theta_{k0})$  permet d'envisager une parallélisation sur l'ensemble de la grille. D'autre part la continuité de la dépendance en  $(x, \theta_{k0})$  de l'opérateur définissant le problème local peut être mise à contribution pour le résoudre plus rapidement. En supposant connue la solution  $\omega_1$  en un point  $(x_1, \theta_{k01})$  du domaine, on peut tenter de résoudre le problème local pour un point voisin  $(x_2, \theta_{k02})$  en court-circuitant complètement l'étape de localisation des racines par la méthode d'intégration de contour décrite précédemment. Posons  $\omega_2 = \omega_1 + \delta\omega$ , et notons  $f(\omega, x, \theta_{k0}) = \det M(\omega, x, \theta_{k0})$  on a en  $(x_2, \theta_{k02})$

$$0 = f(\omega_2, x_2, \theta_{k02}) = f(\omega_1 + \delta\omega, x_2, \theta_{k02}), \quad (5.120)$$

soit en développant  $f$  à l'ordre un en  $\omega$

$$\delta\omega = -\frac{f(\omega_1, x_2, \theta_{k02})}{\partial_\omega f(\omega_1, x_2, \theta_{k02})}, \quad (5.121)$$

qui définit une itération de la Méthode de Newton. La dérivée de  $f$  étant inaccessible, elle est linéarisée à l'ordre 1, et (5.121) définit alors une itération de la méthode de la sécante, déjà utilisée dans la procédure de raffinement du problème local. En utilisant  $\omega_1$  comme une estimation initiale de la solution recherchée  $\omega_2$ , on génère sur un petit cercle autour de  $\omega_1$  une suite de valeurs tests  $\tilde{\omega}_k = \omega_1 + \delta\omega_k$  (voir figure 5.8), puis on applique directement la méthode de la sécante sur le déterminant de l'opérateur en  $(x_2, \theta_{k02})$  à partir des couples  $(\omega_1, \tilde{\omega}_k)$ . Parmi les valeurs convergées  $\hat{\omega}_k$ , on sélectionne pour  $\omega_2$  celle qui est la plus proche de  $\omega_1$ . Le succès de cette méthode, dite "par continuité", suppose d'une part que la finesse de la grille en  $(x, \theta_{k0})$  soit suffisante pour qu'au moins un des couples  $(\omega_1, \omega_1 + \delta\omega_k)$  soit dans le bassin d'attraction de la méthode de la sécante pour  $\omega_2$ , et d'autre part qu'il ne se produise pas de croisement de branches de la relation de dispersion lorsque l'on parcourt le plan  $(x, \theta_{k0})$ . En notant  $x_2 = x_1 + \delta x, \theta_{k02} = \theta_{k01} + \delta\theta_{k0}$  on peut en effet développer le numérateur de (5.121) en

$$f(\omega_1, x_2, \theta_{k02}) = \underbrace{f(\omega_1, x_1, \theta_{k01})}_{=0} + \delta x \partial_x f(\omega_1, x_1, \theta_{k01}) + \delta \theta_{k0} \partial_{\theta_{k0}} f(\omega_1, x_1, \theta_{k01}), \quad (5.122)$$

qui rend plus explicite la relation entre l'estimation initiale  $\delta\omega$  et les variations de  $f$  dans le plan  $(x, \theta_{k0})$ . Notons que les dérivées de  $f$  en  $x$  et  $\theta_{k0}$  n'étant pas simplement accessibles, nous ne pouvons les exploiter pour développer une itération de Newton globale en  $(\omega, x, \theta_{k0})$ .

La méthode de "continuité" à l'intérêt d'être particulièrement rapide en comparaison de la méthode d'intégration de contour lancée sur un large domaine en  $\omega$  : le nombre de constructions de l'opérateur et d'évaluations du déterminant est typiquement réduit de deux ordres de grandeur. On peut ainsi envisager une résolution purement séquentielle du problème dans le plan  $(x, \theta_{k0})$ . Une première solution est obtenue en un point du domaine par l'utilisation de la méthode de résolution complète (localisation puis raffinement), et les autres par continuité.

A partir de ces deux stratégies extrêmes, on peut envisager des schémas combinant

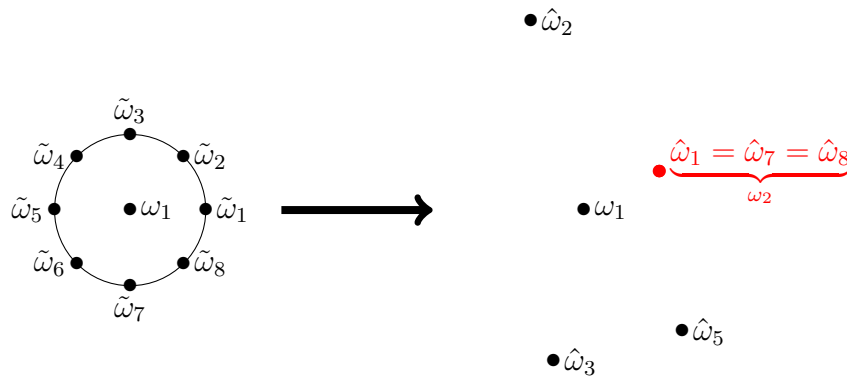


FIGURE 5.8 – Méthode de prolongement par continuité ; génération de couple test pour la méthode de la sécante au voisinage de la solution approchée  $\omega_1$

les deux méthodes : on peut par exemple résoudre par la méthode complète sur une ligne  $x = x_0$ , puis prolonger par continuité pour  $x \neq x_0$ , les opérations s'effectuant en parallèles pour chaque valeur de  $\theta_{k0}$ .

Une fois  $\theta_{k0T}$  déterminé, on résout le problème local sur une bande centrée en  $\theta_{k0T}$ . Une stratégie mixte est employée : le problème est parallélisé sur la largeur de bande en  $\theta_{k0}$  et résolu par continuité pour les variations en  $x$ .

Le choix du dosage entre méthode complète et méthode de continuité résulte de compromis. Tout d'abord, il est important de noter que la parallélisation complète dans le plan  $(x, \theta_{k0})$  peut s'avérer très coûteuse. En effet le temps de résolution du problème local peut grandement varier en fonction de la position  $(x, \theta_{k0})$ . D'autre part, cette méthode impose le calcul d'un grand nombre de valeurs de  $\omega_0$  qui ne seront pas utilisées par la suite. Le point  $(O)$  recherché étant souvent proche du centre du domaine  $(x = 0.5, \theta_{k0} = 0)$ , une méthode moins coûteuse est employée, qui met à profit cette localisation.

La stratégie globale utilisée par défaut se décompose ainsi (voir figure 5.9)

1. On résout le problème complet sur la ligne  $\theta_{k0} = 0$ . La résolution est parallélisée en  $x$ . On détermine la position  $x_{ref}$  telle que le taux de croissance soit maximal.
2. On résout le problème complet sur la ligne  $x = x_{ref}$ . La résolution est parallélisée en  $\theta_{k0}$ . On en déduit  $\theta_{k0T}$ .
3. Sur une fine bande centrée en  $\theta_{k0T}$ , on résout le problème complet en  $x_{ref}$  puis on prolonge par continuité pour  $x \neq x_{ref}$ . L'ensemble de procédure est effectuée en parallèle sur les valeurs de  $\theta_{k0}$ .
4. on résout le problème de Schrödinger sur l'enveloppe globale.

## 5.6 Conclusions

Un modèle multi-water-bag a été développé pour l'analyse linéaire de l'instabilité de gradient de température ionique dans une géométrie torique à surfaces magnétiques circulaires concentriques.

L'équilibre de référence est obtenu par équivalence locale au sens des moments pour un angle poloidal  $\theta_0$ . L'extension à l'ensemble du domaine est obtenu par l'utilisation

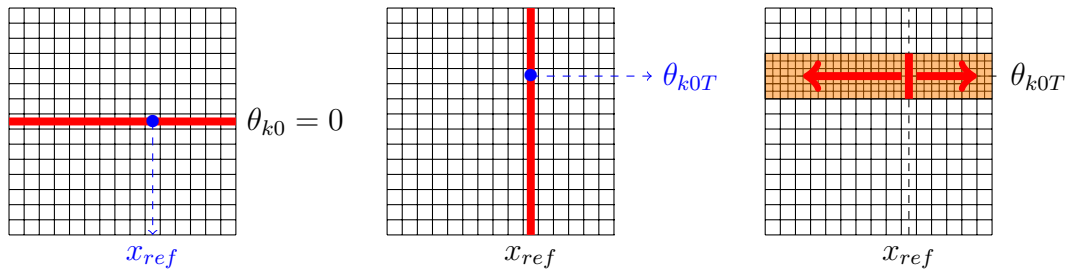


FIGURE 5.9 – Stratégie de résolution globale par défaut ; résolution parallèle en  $\theta_{k0} = 0$ , résolution parallèle en  $x_{ref}$ , résolution mixte à partir de  $x_{ref}$  sur une bande centrée autour de  $\theta_{k0T}$ .

d'une solution approchée de la forme stationnaire de l'équation de Vlasov. L'obtention d'une configuration d'équilibre satisfaisante s'est révélée plus ardue que dans le cas unidimensionnel abordé en géométrie cylindrique. La stratégie d'équivalence au sens des moments, qui permettait dans le cas unidimensionnel d'éviter les caractéristiques d'équilibre critiques ( $v_{\parallel} \rightarrow 0$ ) tout en maintenant une bonne représentation des variations des moments, est mise en défaut en géométrie torique. La modulation poloïdale de la vitesse parallèle due au gradient de l'intensité du champ magnétique conduit à l'existence de paires de contours pouvant se refermer en  $v = 0$ . Les difficultés numériques liées à l'existence de telles surfaces critiques seront abordées lors de la présentation des résultats des premières expérimentations numériques.

Deux méthodes de résolutions ont été développées pour l'analyse de stabilité linéaire. Une première méthode, limitée à l'obtention du mode le plus instable pour une valeur du nombre d'onde toroïdal  $n$ , consiste en une intégration en temps du modèle bidimensionnel linéarisé. La résolution du problème aux valeurs propres correspondant par une méthode spectrale itérative est limitée à la détermination des conditions de stabilité de la méthode d'intégration en temps.

Le second modèle utilise la représentation en modes de ballonnement et met à profit l'anisotropie de la perturbation et les séparations d'échelles entre grandeurs d'équilibre et perturbées pour permettre une résolution spectrale du problème de stabilité linéaire. La résolution du problème bidimensionnel initial est remplacée par la résolution d'un ensemble de problèmes unidimensionnels indépendants. La solution globale est ensuite construite à partir des solutions locales obtenues.





# Chapitre 6

## Analyse linéaire en géométrie torique : résultats numériques

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Cas test Cyclone - paramètres et grandeurs d'équilibre .</b>	<b>158</b>
6.1.1	Paramètres du cas Cyclone . . . . .	158
6.1.2	Distribution multi-water-bag d'équilibre . . . . .	158
6.1.3	Résultats de référence pour le cas Cyclone . . . . .	163
<b>6.2</b>	<b>Distributions sans contours fermés (faible <math>\mu</math>) . . . . .</b>	<b>170</b>
6.2.1	Résultats du code QUALITORO - intégration en temps . . .	170
6.2.2	Méthode asymptotique (code ASYMPTORO) . . . . .	178
6.2.3	Comparaison entre les deux méthodes . . . . .	187
6.2.4	Comparaison avec les résultats de référence . . . . .	192
<b>6.3</b>	<b>Distribution avec contours fermés : vers les limites du modèle ? . . . . .</b>	<b>192</b>
<b>6.4</b>	<b>Discussion des résultats - Perspectives . . . . .</b>	<b>197</b>
6.4.1	Discussions des résultats . . . . .	197
6.4.2	Perspectives . . . . .	197

---

Paramètre	$R_0$	$a$	$[x_{min}, x_{max}]$	$q(x)$	$\rho_*$	$\epsilon_a$
Valeur	220	82	[0.25, 0.75]	$0,854 + 2.184x^2$	$1.22 \cdot 10^{-2}$	0.36

Paramètre	$L_n$	$\Delta_{rn}$	$L_T$	$\Delta_{rT}$
Valeur	100	$0.4a$	32.1	$0.15a$

TABLE 6.1 – Paramètres adimensionnés pour le cas de référence CYCLONE; on rappelle que le profil radial du facteur de sécurité est donné par  $q(r) = q_0 + q_2(r/r_0)^2$

## 6.1 Cas test Cyclone - paramètres et grandeurs d'équilibre

### 6.1.1 Paramètres du cas Cyclone

Les paramètres décrivant l'équilibre ont été sélectionnés afin de permettre des comparaisons externes. A la différence du cas de la géométrie cylindrique, il existe pour la géométrie torique des jeux de paramètres plus ou moins standardisés permettant la confrontation de résultats de multiples codes. Le plus utilisé pour l'analyse des instabilités ITG en géométrie torique est le cas test dit "Cyclone base case" dont les paramètres sont basés sur une décharge du Tokamak Doublet III-D, alias DIII-D. Le cas est caractérisé par un ensemble de paramètres sans dimension. L'intérêt d'une telle référence adimensionnée et qu'elle permet une certaine souplesse dans la détermination des paramètres absolus, qui peuvent être choisis en cohérence avec les contraintes de chaque code.

Les paramètres adimensionnés caractérisant le cas test CYCLONE sont des quantités locales exprimées en  $r_0 = a/2$

$$\epsilon_{r_0} = \frac{r_0}{R_0} = 0.18, \quad \frac{R_0}{L_T} = 6.92, \quad \eta_i = 3.12, \quad q = 1.4, \quad s = rd_r \ln q = 0.78 \quad (6.1)$$

Dans le système d'adimensionnement défini Table 2.1.1 p. 25, le jeu de paramètres numériques compatibles avec les paramètres adimensionnés du cas CYCLONE sont donnés dans le tableau 6.1. Notons que toutes les grandeurs intervenant dans l'adimensionnement sont calculées en  $x = 0.5$  et à l'angle de référence utilisé pour la construction des contours ( $\vartheta = 0$  par défaut). Le cas CYCLONE ne donnant que des paramètres locaux, les largeurs des zones de gradients de température et densité, à priori arbitraires, ont été affectées de valeurs "raisonnables", et sont par exemple comparables à celles utilisées dans [43].

### 6.1.2 Distribution multi-water-bag d'équilibre

La distribution d'équilibre multi-water-bag est construite en suivant la méthode décrite au chapitre 5. Nous présentons ici la méthode utilisé par défaut, pour une distribution multi-water-bag à 6 bags, pour laquelle la majorité des résultats ont été obtenus. Les expérimentations portant sur des équilibres alternatifs seront évoquées au besoin dans l'exposition des résultats.

La position poloidale de référence est choisie en  $\vartheta = 0$ , soit au minimum de l'intensité

du champ magnétique. Cette référence est commune à toutes les valeurs du moment magnétique. Les contours d'équilibre ont pour expression

$$v_{j\mu}(x, \vartheta) = \text{sign}(j) \sqrt{v_j(x, 0)^2 + 2\mu(B(x, 0) - B(x, \vartheta))}. \quad (6.2)$$

Les contours de référence  $v_j(x, 0)$ , communs à toutes les valeurs de  $\mu$ , sont obtenus par équivalence au sens des moments sur le domaine radial en  $\vartheta = 0$ . Les profils correspondants sont donnés sur la figure 6.1. Un point important est à relever concernant la construction des profils de référence. Si l'on compare les profils de gradients et le facteur  $\eta_i$  avec ceux des cas tests utilisés en géométrie cylindrique, le cas CYCLONE peut paraître être un cas "facile" du point de vue de l'équivalence au sens des moments. La relative faiblesse du facteur  $\eta_i$  (3.12 contre 10 dans les cas cylindriques), qui conditionne l'extension radiale de l'équivalence, devrait de fait entraîner des contraintes assez lâches sur la géométrie des contours d'équilibre, et particulièrement sur les variations du premier contour. Ce n'est cependant pas le cas, en raison de la présence du jacobien  $2\pi B$  dans les moments multi-water-bag. Si le facteur  $2\pi$  peut être absorbé sans conséquences dans les valeurs des poids  $A_j$ , ce n'est pas le cas de la variation radiale de  $B$  : l'équivalence radiale effectuée dans le cas torique correspond à l'équivalence en géométrie cylindrique avec un profil de densité  $n_{cyl} = n/B(x, 0)$  (figure 6.2(a)). Ce profil possède un gradient plus faible que le profil de référence, entraînant une augmentation du facteur  $\eta_{cyl}$  correspondant (figure 6.2)). De plus, pour assurer un certain réalisme à la configuration d'équilibre, les profils de gradients sont plus étalés que dans les cas tests examinés en géométrie cylindrique. Ces deux propriétés impliquent que, de même qu'en géométrie cylindrique, les contraintes de construction de la distribution multi-water-bag empêchent un choix arbitraire de la position des noeuds de référence initiaux. Le premier contour en particulier doit typiquement avoir une valeur de quelques dixièmes de  $c_s$  à l'abscisse de référence  $x = 0.5$  (voir figure 6.1(d)). De même qu'en géométrie cylindrique, son sens de variation est opposé à celui des autres contours et des gradients de référence. La présence de ce contour à faible vitesse, indispensable pour assurer une bonne représentation des moments de la distribution d'équilibre, a des conséquences importantes sur la nature des contours bidimensionnels qui en seront déduits.

Comme on l'a vu au chapitre 5, pour un contour bidimensionnel défini par (6.2), il peut pour  $x$  donné exister un angle limite  $\vartheta_L(x)$  où la valeur du contour s'annule. Pour une configuration magnétique donnée, l'existence de  $\vartheta_L$  dépend à la fois de la valeur du contour de référence  $v_j(x, 0)$  et de celle du moment magnétique. Réciproquement, en supposant donnés les contours de référence  $v_j(x, 0)$ , on peut définir pour chaque contour un profil de moment critique  $\mu_{jcrit}(x)$ . Le moment critique  $\mu_{jcrit}(x)$  correspond à la valeur minimale qu'il faut donner à  $\mu$  pour que le contour admette un angle limite en  $x$ . Cette valeur correspond au cas où cet angle critique est égal à  $\pi$ , soit

$$\mu_{jcrit}(x) = \frac{v_j(x, 0)^2}{2(B(x, \pi) - B(x, 0))}. \quad (6.3)$$

Les profils des moments critiques sont donnés Figure 6.3. Si on suppose une distribution initiale isotrope dans l'espace des vitesses, le support en  $\mu$  de la distribution se déduit du support en vitesse parallèle. Si on a fixé  $v_{max}$  en  $(x = 0.5, \vartheta = 0)$ , alors on doit avoir  $\mu_{max} B(x = 0.5, \vartheta = 0) = v_{max}^2/2$ . Pour la distribution à 6 bags de référence, on a  $v_{max} = 4.1$  et  $B(0.5, 0) = 1$  soit  $\mu_{max} \approx 8$ . Notons que ce choix d'une référence locale est nécessaire pour assurer la cohérence avec le calcul des poids  $A_l$ . En raison même de cette pondération, l'importance relative des populations à  $\mu$  élevé est faible.

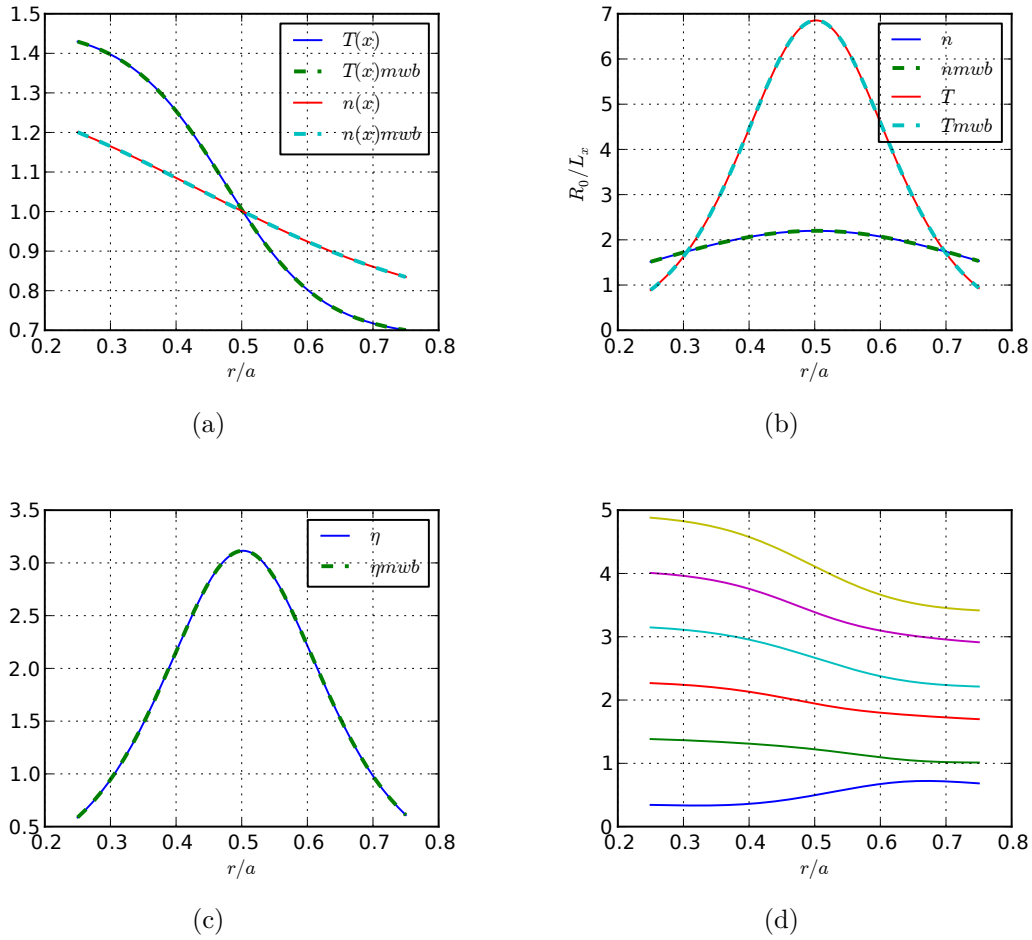


FIGURE 6.1 – Cas CYCLONE; profils radiaux de référence et pour une distribution à 6 bags; densité et température (a); gradients de température et densité (b); facteur  $\eta_i$  (c); contours positifs pour la distribution à 6 bags (d)

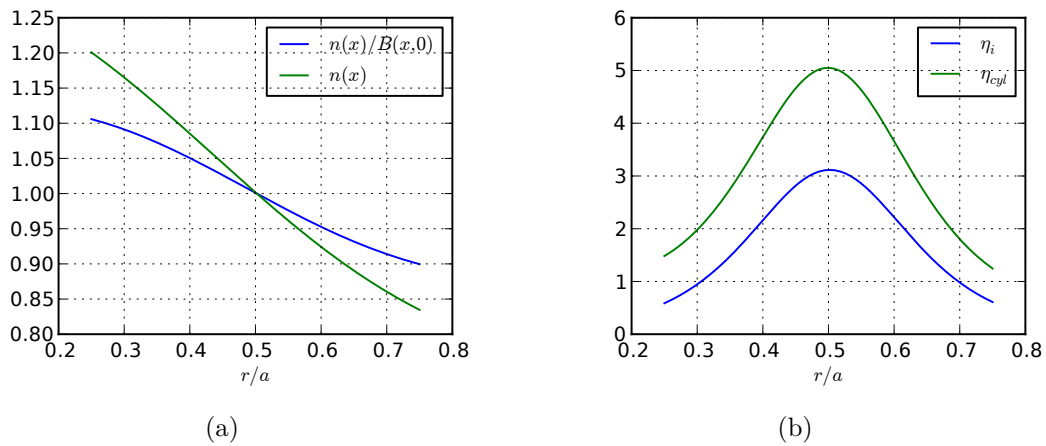


FIGURE 6.2 – Effet de la variation radiale du champ magnétique sur l'équivalence aux sens des moments; profil de densité (a); facteur  $\eta_i$

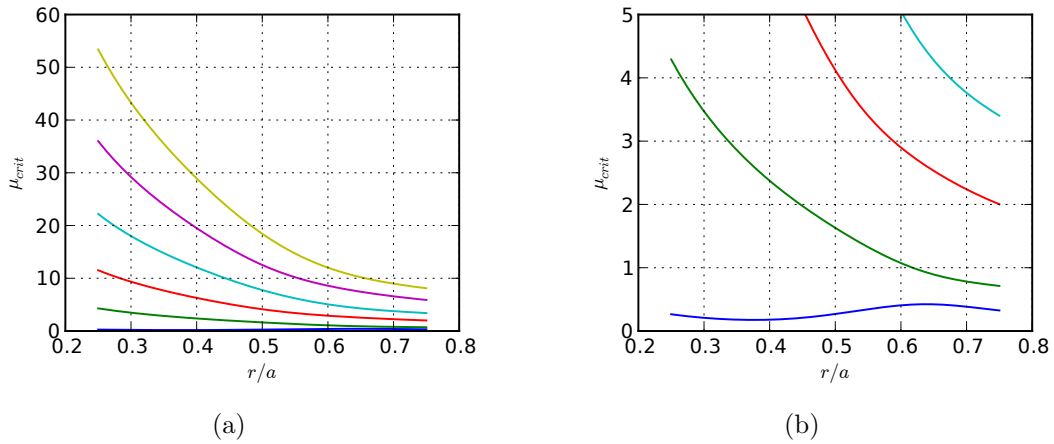


FIGURE 6.3 – Cas CYCLONE ; moment magnétiques critiques pour la distribution à 6 bags (a) ; vue partielle pour les petites valeurs de  $\mu$  (b)

En considérant une plage de valeurs de  $\mu$  s'étendant de 0 à 8, deux traits marquants peuvent être tirés de l'observation des profils des moments critiques figure 6.3 :

1. pour les valeurs hautes de  $\mu$ , la majorité des bags se refermeront sur le domaine.
2. le premier contour est susceptible de se refermer, et ce même pour de petites valeurs de  $\mu$ . La valeur de  $\mu$  minimale conduisant à la fermeture du premier contour en un point du domaine est de l'ordre de 0.17. La topologie du premier bag est en conséquence particulièrement sensible au choix des valeurs du moment magnétique. (figure 6.4).

Les conséquences de ces propriétés sont importantes. Il n'est pas possible de construire une distribution d'équilibre isotrope sans que des contours fermés apparaissent. Faire disparaître entièrement les contours fermés nécessiterait de fixer  $\mu_{max} < 0.17$ , ce qui revient à sélectionner une distribution extrêmement anisotrope dans l'espace des vitesses. La faible valeur des moments critiques minimaux est liée au choix de l'angle de référence  $\vartheta = 0$ , qui maximise la variation potentielle de  $B$  à partir de l'angle de référence. Quel que soit l'angle de référence  $\vartheta_0$  choisi, l'isotropie initiale dans l'espace des vitesses est brisée dès que l'on s'éloigne de la ligne  $\vartheta = \vartheta_0$  de référence. En choisissant comme angle de référence  $\pi$  afin d'éliminer toute possibilité d'avoir des contours fermés, on obtient en  $\vartheta = 0$  une distribution dont l'anisotropie favorise grandement la direction parallèle. Le choix de  $\vartheta = 0$  comme angle de référence par défaut est justifié a priori par la phénoménologie connue de l'instabilité : les modes se localisant préférentiellement côté bas-champ, il est souhaitable de représenter au mieux l'état du système dans cette zone.

Une fois les profils radiaux des contours d'équilibre en  $\vartheta = 0$  et les poids  $A_j$  correspondant calculés, le choix des valeurs du moment magnétique permet de générer les poids  $A_l$  et les contours bidimensionnels  $v_{j\mu}(x, \vartheta)$ . Pour apprécier plus directement l'effet du choix des valeurs de  $\mu$  utilisées sur les quantités d'équilibre, nous ne considérerons que trois cas particuliers mais significatifs, définis chacun par le nombre de valeurs de  $N_\mu$  et les moments extrémaux ( $\mu_{min}, \mu_{max}$ ). Les valeurs des moments sont uniformément réparties sur l'intervalle  $[\mu_{min}, \mu_{max}]$ . Les trois exemples considérés sont les suivants.

1.  $N_\mu = 1$   $\mu_{min} = \mu_{max} = 0$ . Ce cas correspond à la limite de dérive cinétique  $\mu \rightarrow 0$ . Les contours d'équilibre ne subissent pas de variation poloïdale, et en

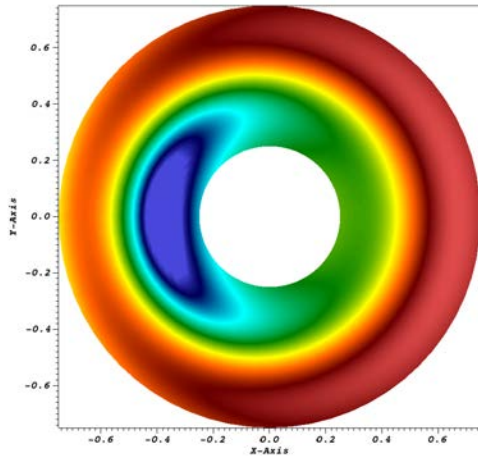
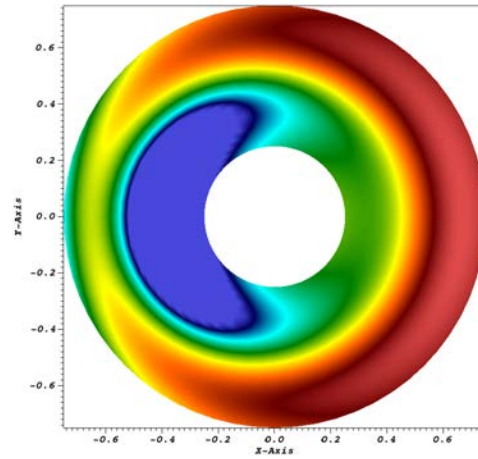
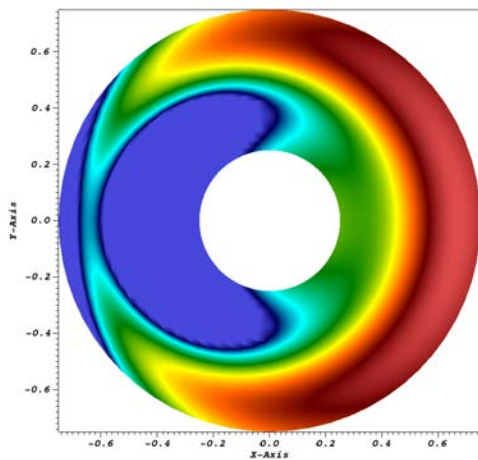
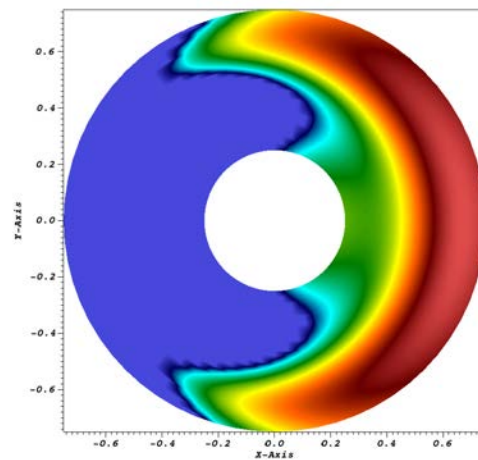
(a)  $\mu = 0.2$ (b)  $\mu = 0.3$ (c)  $\mu = 0.4$ (d)  $\mu = 0.6$ 

FIGURE 6.4 – Cas Cyclone ;  $N = 6$  ; Évolution de la topologie du premier contour avec  $\mu$  ; la zone en bleu correspond à l'annulation du contour

conséquence aucun contour ne se referme.

2.  $N_\mu = 1$ ,  $\mu_{min} = \mu_{max} = 1$ . Seule la valeur moyenne  $\mu = 1$  est utilisée.
3.  $N_\mu = 20$ ,  $\mu_{min} = 0$ ,  $\mu_{max} = 8$ .

Les profils bidimensionnels  $(x, \vartheta)$  de la densité, de la température et de leurs gradients radiaux normalisés respectifs  $\kappa_n$  et  $\kappa_T$  des distributions correspondant à ces trois exemples sont donnés Figures 6.5, 6.6 et 6.7. Comme on peut le voir, la modulation poloïdale de la température  $T_{||}$  est relativement faible, mis à part dans le cas très particulier de la seconde distribution, pour laquelle les faibles valeurs de  $\mu$  sont entièrement absentes. Le profil de densité montre en revanche une modulation poloïdale notable, même dans le cas  $\mu = 0$ , en raison du jacobien  $2\pi B$ . Dans le cas  $\mu = 0$ , cela conduit à une inversion du gradient de densité radial lorsque l'on passe du côté bas-champ au côté haut-champ. Cet effet est partiellement compensé dans le cas de la troisième distribution par la modulation poloïdale des contours, mais un effet d'excéntrage du profil de densité persiste. En outre, comme cela a été évoqué au chapitre 5, on observe la présence de pics de gradient localisés au niveau des frontières des contours qui se ferment. L'effet est de même nature pour le gradient de température, et la conjugaison de ces irrégularités conduit à des pics localisés du facteur  $\eta_i$  sur les limites des contours fermés. Ce dernier, dont on rappelle que la valeur maximale nominale est de 3.12 peut atteindre dans ces zones des valeurs de plus de cent.

Sur la figure 6.8 (a) on peut observer la topologie des différents contours pour le cas  $N_\mu = 1, \mu = 1$ . Le premier bag se referme sur tout le domaine radial (Figure 6.8 (c)), alors que le second ne se referme que pour la partie supérieure du domaine radial (Figure 6.8 (d)). On peut en outre apprécier l'effet du sens de variation du profil radial du contour de référence sur la géométrie de la frontière du contour bidimensionnel. Sur la figure 6.8 (b) sont représentées quelques surfaces de niveau de la Maxwellienne locale utilisée comme référence. La topologie de ces dernières est similaire à celle des contours, à l'exception de la zone à faible vitesse côté bas-champ. En effet dans cette dernière zone, et notamment en  $\vartheta = 0$ , les surfaces de niveau de la Maxwellienne sont susceptibles de se refermer radialement (Figure 6.9 (a)). La dépendance poloïdale de l'effet du gradient radial de  $B$  sur la structure des surfaces de niveau de la Maxwellienne locale apparaît clairement en comparant la géométrie des lignes de niveau en  $\vartheta = 0$ ,  $\vartheta = \pi/2$  et  $\vartheta = \pi$ . En  $\vartheta = \pi/2$  (Figure 6.9 (b)), le gradient radial de  $B$  s'annule, et la géométrie des lignes de niveaux est pilotée par les profils de densité et température. En  $\vartheta = 0$  (Figure 6.9 (a)), le gradient radial de  $B$  est de même signe que celui de  $n$  et  $T$ , et de signe opposé en  $\vartheta = \pi$  (Figure 6.9 (c)).

L'annulation de la vitesse (et la divergence du gradient radial) sont évités par construction pour les contours de la distribution water-bag, lors de la construction des contours de référence en  $\vartheta = 0$  par équivalence au sens des moments sur les moments en vitesse parallèle.

### 6.1.3 Résultats de référence pour le cas Cyclone

Comme nous l'avons évoqué précédemment, le cas Cyclone a été utilisé à maintes reprises pour le calibrage de codes fluides et cinétiques, linéaires aussi bien que non-linéaires. Une étude comparative synthétisant les résultats obtenus à partir de divers codes a notamment été publiée dans [22]. Ces résultats sont souvent utilisés comme référence, par exemple pour les résultats du code GT3D publiés dans [43], du code

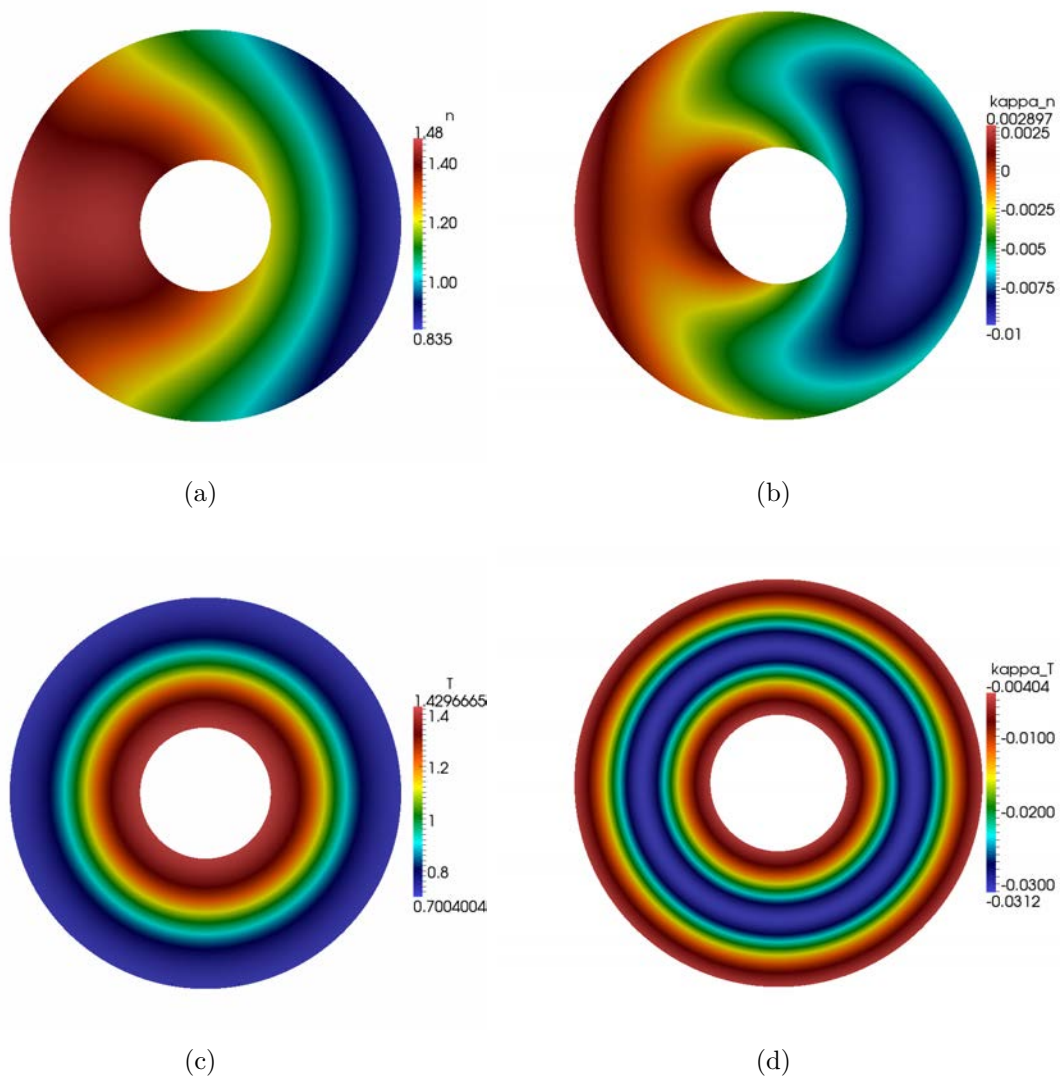


FIGURE 6.5 – Cas CYCLONE  $N = 6$ ;  $N_{\mu} = 1$   $\mu_{min} = \mu_{max} = 0$ ; demi plan de coupe  $\varphi = 0$ ; densité (a), gradient radial de densité  $\kappa_n$  (b), température  $T_{\parallel}$  (c) et gradient radial de température  $\kappa_{T_{\parallel}}$ ; la température  $T_{\perp}$  (non-représentée) est nulle



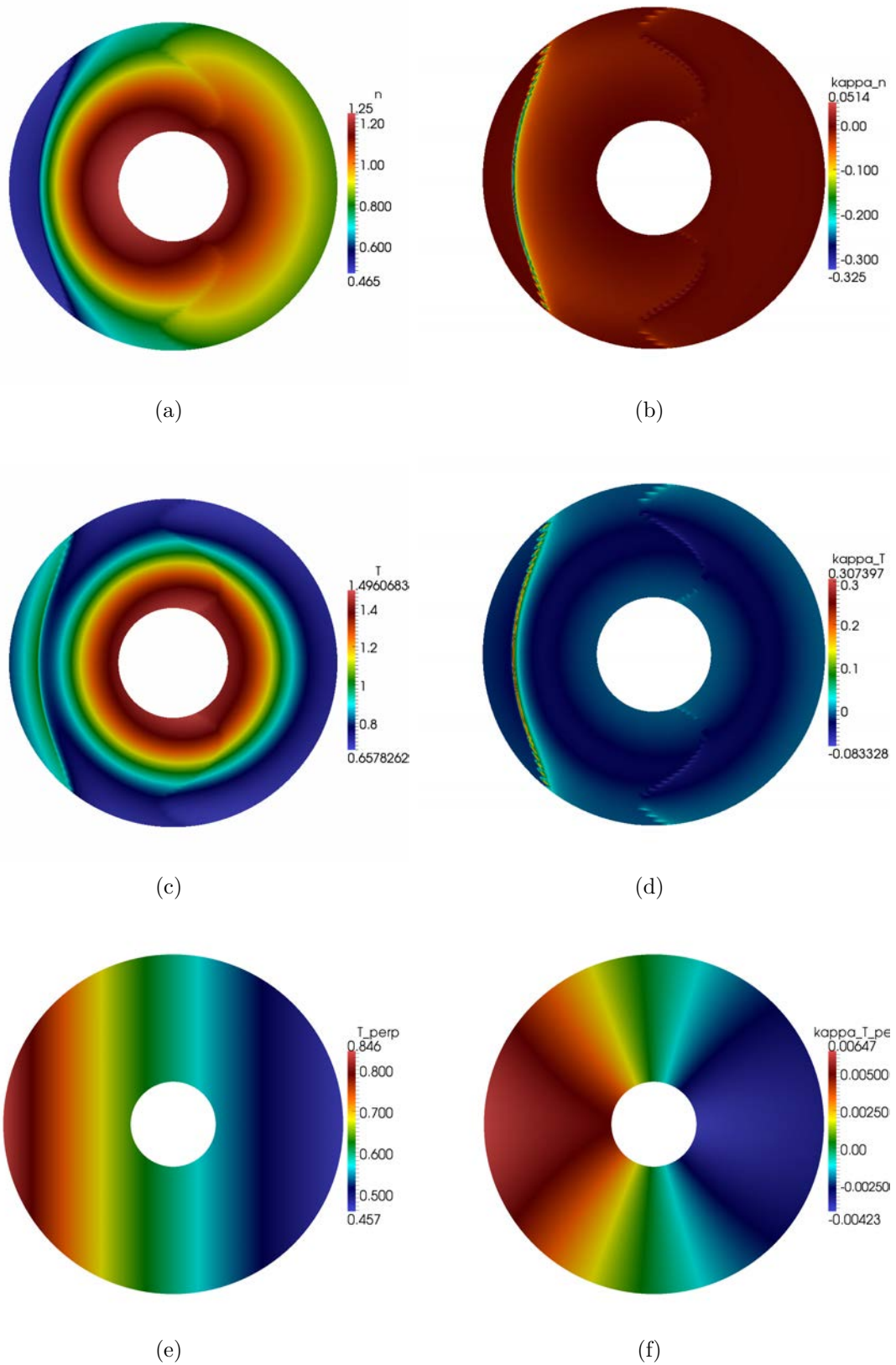


FIGURE 6.6 – Cas CYCLONE  $N = 6$ ;  $N_{\mu} = 1$ ,  $\mu_{min} = \mu_{max} = 1$ ; demi plan de coupe  $\varphi = 0$ ; densité (a), gradient radial de densité  $\kappa_n$  (b), température  $T_{\parallel}$  (c), gradient radial de température  $\kappa_{T_{\parallel}}$  (d), température  $T_{\perp}$  (e), gradient radial de température  $\kappa_{T_{\perp}}$  (f)

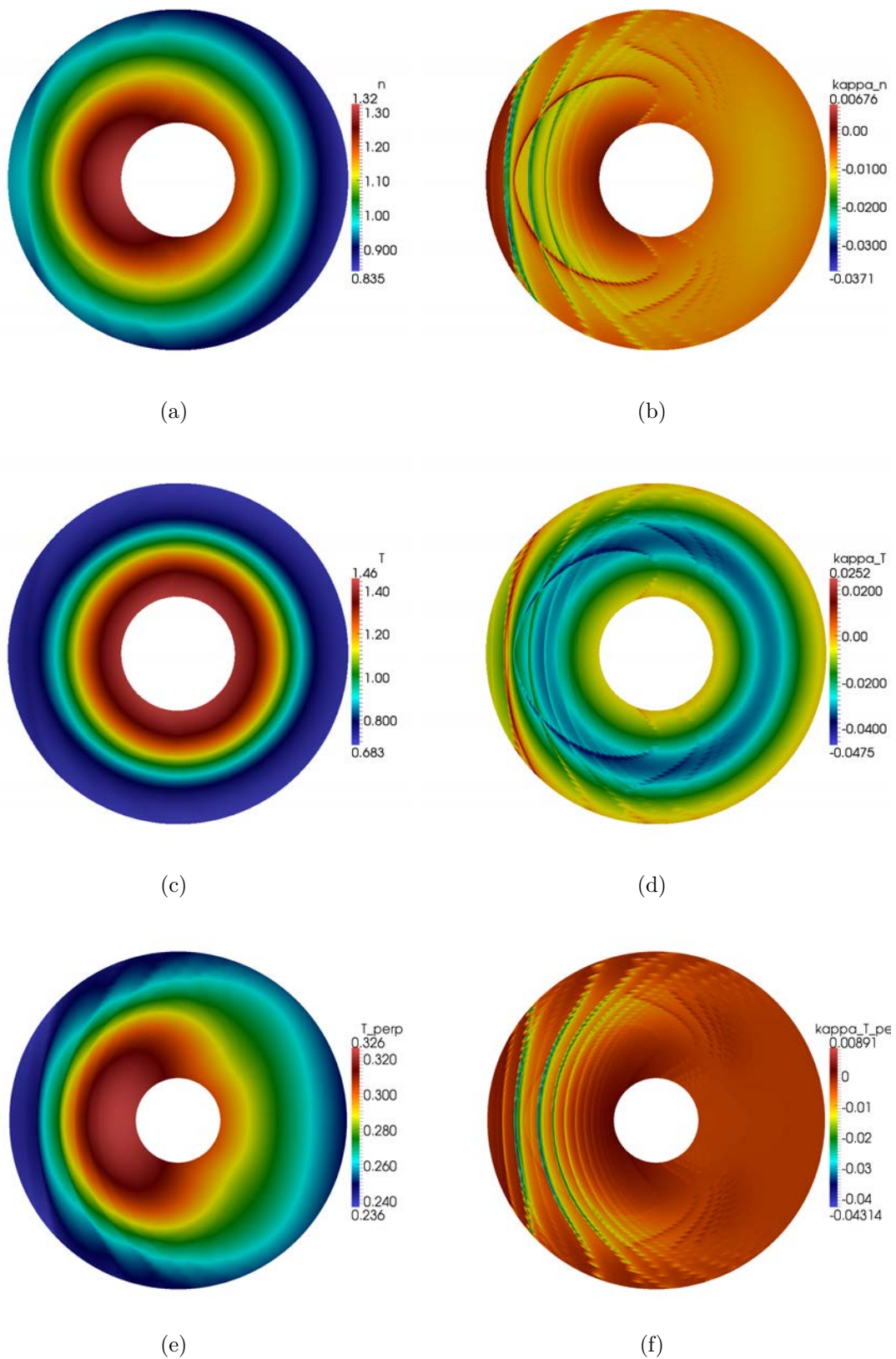


FIGURE 6.7 – Cas CYCLONE  $N = 6$ ;  $N_{\mu} = 20$   $\mu_{min} = 0, \mu_{max} = 8$ ; demi plan de coupe  $\varphi = 0$ ; densité (a), gradient radial de densité  $\kappa_n$  (b), température  $T_{\parallel}$  (c), gradient radial de température  $\kappa_{T_{\parallel}}$ , température  $T_{\perp}$  (e), gradient radial de température  $\kappa_{T_{\perp}}$  (f)

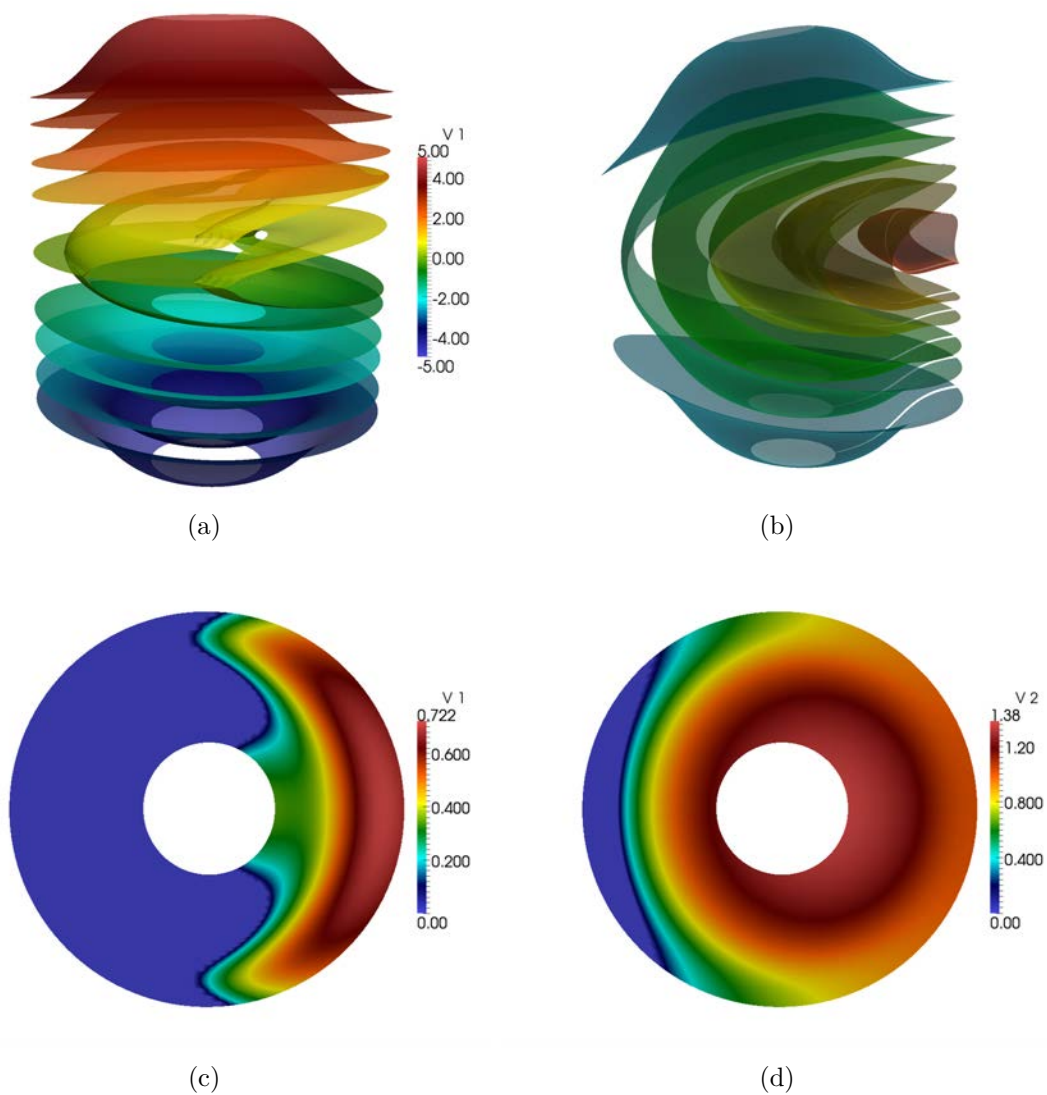
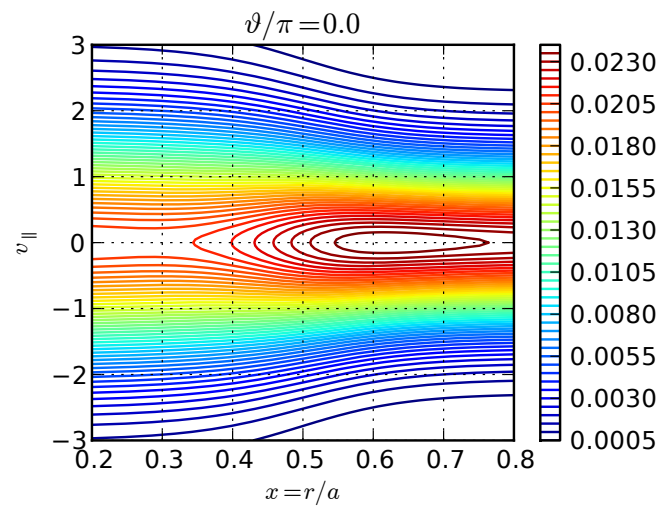
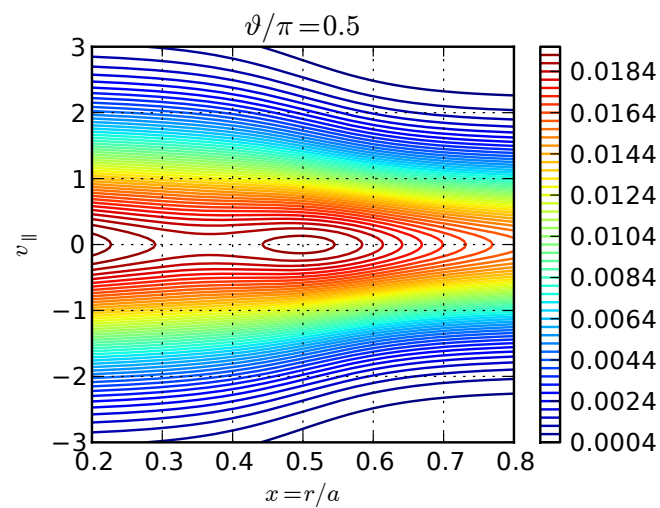


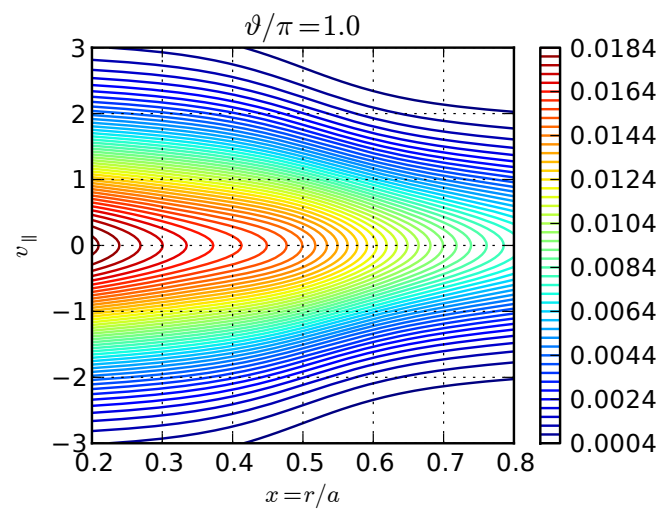
FIGURE 6.8 – Cas CYCLONE  $N = 6$ ;  $N_\mu = 1$   $\mu = 1$ ; aperçu de la topologie des contours d'équilibre (a) et des surfaces de niveau de la Maxwellienne locale (b); vue en élévation - la coordonnée verticale est la vitesse parallèle - le côté bas-champ est à droite; vue en plan des contours  $v_1$  (b) et  $v_2$  (c) qui se ferment sur le domaine



(a)



(b)



(c)

FIGURE 6.9 – Cas Cyclone ; lignes de niveau dans le plan  $(x, v_{\parallel})$  de la Maxwellienne locale pour  $\mu = 1$  en  $\vartheta = 0$  (a) ,  $\vartheta = \pi/2$  (b),  $\vartheta = \pi$  (c)

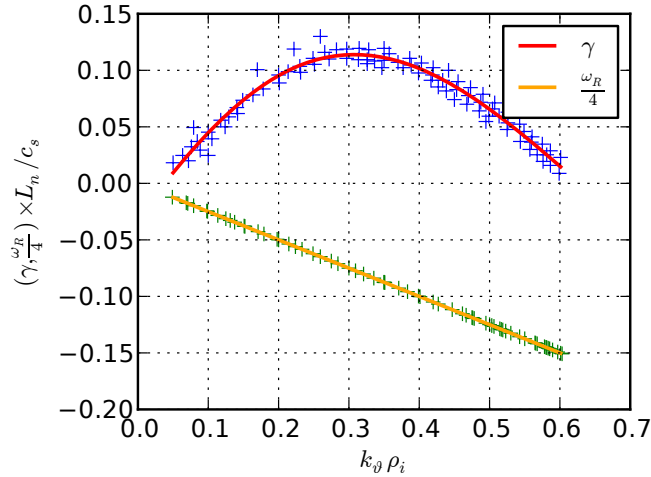


FIGURE 6.10 – Cas Cyclone; taux de croissance et fréquence en fonction de  $k_{\perp}\rho_i$ ; données issues de [22] et interpolantes qui serviront de référence

GYSELA dans [33].

Afin de rendre plus aisées les références aux résultats obtenus dans [22], les données relatives aux taux de croissances et fréquence des modes les plus instables ont été extraites et sont reproduites figure 6.10. Un intérêt majeur de ces résultats est qu'ils ont été obtenus à partir de codes et de modèles variés (fluides, gyrocinétique) : le bon accord de ces différents codes et modèles nous permet de supposer une certaine robustesse des taux de croissance et fréquences des modes par changement de modèle, et ainsi éviter dans une première approche un balayage paramétrique coûteux sur les paramètres du modèle water-bag (nombre de bags et support en vitesse parallèle).

Les interpolantes lissées obtenues à partir des données seront utilisées comme base de comparaison avec les résultats water-bag.

En géométrie cylindrique, le comportement spectral de l'instabilité se caractérisait par les dépendances en  $(m, n)$  du taux de croissance et de la fréquence. Dans la géométrie torique à équilibre axisymétrique considéré, seuls les modes de Fourier toroidaux peuvent être considérés comme indépendants. La caractérisation spectrale de l'instabilité se traduira donc par l'analyse des dépendances du taux de croissance et de la fréquence en fonction du nombre d'onde toroïdal  $n$ . On notera que les résultats présentés figure 6.10 sont exprimés en fonction de  $k_{\perp}\rho_i$ . Ce type d'indexation des modes est courant dans la littérature (on trouve parfois également  $k_{\perp}\rho_s$ , et  $k_y\rho_i$  pour les modèles "slab"). Cette notation est en toute rigueur impropre, repose sur deux considérations. Tout d'abord, les premières analyses de l'instabilité ont été effectuées dans un cadre radialement local. Conjointement, pour un nombre d'onde toroïdal  $n$  donné et une position  $r_0$ , on peut considérer le spectre de Fourier poloïdal comme dominé par le premier mode poloïdal résonnant  $m = \pm nq(r_0)$ . On peut donc associer à chaque mode toroïdal  $n$  une valeur représentative unique de  $k_{\perp}\rho_i$

$$k_{\perp}\rho_i = \frac{nq(r_0)\rho_i}{r_0} \quad (6.4)$$

Notons que pour lever toute ambiguïté, la position  $(r, \theta)$  où  $\rho_i$  est évalué doit être précisée. L'intérêt d'une telle représentation est son caractère adimensionné, et le fait que

$k_{\vartheta}\rho_i$  (ou  $k_{\perp}\rho_s$ ) pilote effectivement les termes liés aux effets de rayon de Larmor fini du modèle gyrocinétique (gyromoyenne, dérive de polarisation). Le désavantage réside dans les ambiguïtés liées au choix de la position pour le calcul de  $k_{\vartheta}\rho_i$  lorsque le modèle n'est pas local, et aux conventions, pas systématiquement explicitées, conduisant au calcul de  $\rho_i$  (localisation, définition de la vitesse thermique)

Afin de lever ces ambiguïtés, les résultats bruts du modèle water-bag seront présentés à la fois en fonction du nombre d'onde toroïdal  $n$  et de  $k_{\vartheta}\rho_s$  afin de permettre une comparaison rapide avec les résultats de la figure 6.10. Notons que pour les résultats présentés dans [22] et synthétisés dans la figure 6.10, la définition utilisée pour la vitesse thermique et le fait que  $T_e = T_i$  impliquent  $\rho_s = \rho_i$ .

Ces restrictions étant posées, nous pouvons rapidement décrire le comportement spectral du taux de croissance et de la fréquence de l'instabilité tels qu'ils apparaissent sur la figure 6.10. Le taux de croissance présente une évolution quasi-parabolique avec un maximum unique au voisinage de  $k_{\vartheta}\rho_i \approx 0.3$ . La fréquence a un comportement linéaire, avec  $\omega_R \approx -k_{\vartheta}\rho_i c_s / L_n$ .

## 6.2 Distributions sans contours fermés (faible $\mu$ )

### 6.2.1 Résultats du code QUALITORO - intégration en temps

#### Paramètres du code - Etat initial - Parallélisation

Le tableau 6.2 présente les paramètres typiques pour le code d'intégration en temps QUALITORO. Les différentes valeurs du nombre d'onde  $n$  sont traitées séquentiellement. Notons que pour une utilisation optimale du code en terme de ressources, il serait préférable d'adapter les paramètres à chaque valeur de  $n$ . En effet la résolution polioïdale  $N_{\vartheta}$  fixe la gamme de fréquences  $k_{\vartheta}$ . La résolution choisie doit permettre de résoudre à minima une bande de quelques nombre d'ondes correspondant aux résonances  $m = \pm nq(r)$  dans la zone radiale de pic en  $\eta_i$ . Lors d'un balayage en  $n$ , la valeur maximale de  $n$  fixe donc la résolution polioïdale minimale. En outre la condition de A-stabilité, qui borne la valeur du pas de temps, suit une loi affine en  $n$ . De même lors d'un balayage paramétrique, c'est la plus haute valeur de  $n$  qui limite la valeur du pas de temps  $\Delta t$ . Enfin, les fréquences et taux de croissance pour un mode  $n$  déterminent la plage temporelle optimale : le mode doit avoir le temps de croître et d'osciller sur plusieurs périodes pour qu'une détermination des taux de croissance et fréquences soit possible. Pour le bas du spectre (petits  $n$ ) les taux de croissances sont faibles, ainsi que les fréquences nécessitant une plage temporelle plus large. Les paramètres choisis lors d'un balayage paramétrique en  $n$  résultent d'un compromis entre ces différents facteurs, de manière à permettre que la majorité des modes soient bien résolus. Pour les parties extrêmes du spectre, à l'issue d'un premier balayage, le code peut être relancé avec des paramètres adaptés aux caractéristiques de chaque mode. Nous présenterons ici les résultats bruts obtenus pour un balayage en  $n$  incluant les valeurs extrémales de  $n$  pour lesquelles les paramètres ne sont plus adaptés, afin de mettre en évidence l'effet de ces limitations.

Les paramètres de parallélisation sont pour partie imposés et pour partie ajustables. Le nombre de processus MPI est imposé par le nombre de contours distincts, auquel il faut ajouter le processus chargé de la quasi-neutralité, soit  $N_{proc} = 2 \times N \times N_{\mu}$ . Le nombre de processus légers ('threads') par processus MPI peut être choisi librement.

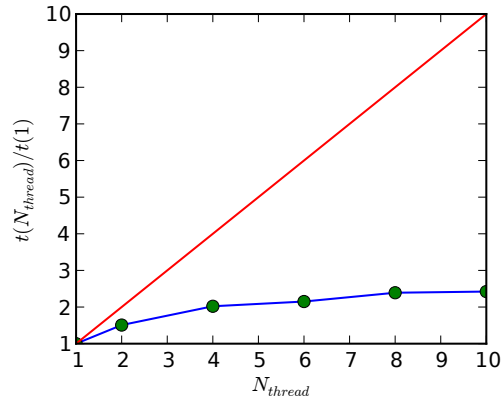


FIGURE 6.11 – Coefficient multiplicateur pour la parallélisation OpenMP du code QUALITORO; Cas Cyclone;  $N_r = N_\vartheta = 128$ ;  $N_{proc} = 13$ ; multiplicateurs calculés pour 1000 pas de temps; la ligne rouge correspond à une parallélisation idéale  $t(N_{thread}) = N_{thread} \times t(1)$

La parallélisation correspondante est d’une efficacité limitée, comme on peut le voir Figure 6.11. Cette faible efficacité est due au fait que seule l’évaluation de l’opérateur d’advection est efficacement parallélisée.

Le système est initialisé par une perturbation aléatoire en  $(x, \vartheta)$ , modulé par une

$N$	$N_\mu$	$N_r$	$N_\vartheta$	$\Omega_{CI}\Delta t$	$N_{steps}$	$T_{diag}$	$N_\varphi$	$n_{min}$	$n_{max}$	$N_{proc}$	$N_{thread}$
6	1	128	128	1.0	28000	200	20	6	44	13	4

TABLE 6.2 – Paramètres du code hybride QUALITORO;  $\Delta_t$  pas d’intégration en temps;  $N_{steps}$  nombre de pas de temps;  $N_\phi$  nombre de valeurs distinctes du nombre d’onde toroïdal  $n$ ;  $N_{proc}$  nombre de processus MPI ( $2 \times N \times N_\mu + 1$ );  $N_{threads}$  nombre de processus légers (threads) par processus MPI utilisé pour la parallélisation OpenMP

enveloppe radiale gaussienne (Figure 6.12).

### Taux de croissance et fréquences

L’émergence puis la croissance du mode sont suivies en observant l’évolution du potentiel électrostatique. S’il est également possible de suivre la perturbation densité voire les perturbations relatives à chaque contour, le choix du potentiel permet d’apprécier les caractéristiques majeures du mode sans accroître inutilement la taille des données de diagnostic. Après une phase initiale transitoire, le mode instable émerge et connaît une phase de croissance linéaire. La détermination de la fréquence et du taux de croissance du mode est effectuée localement sur le domaine radial. Pour tous les résultats présentés ici, la position radiale choisie est  $x_0 = 0.5$ , soit au centre de la zone de gradient. La localisation radiale et poloïdale de l’enveloppe du mode pouvant varier avec  $n$ , on vérifie par observation directe que le point de mesure choisi se situe bien dans la zone où l’enveloppe est maximale.

La mesure des taux de croissance et fréquences (Figure 6.13) est obtenue par des

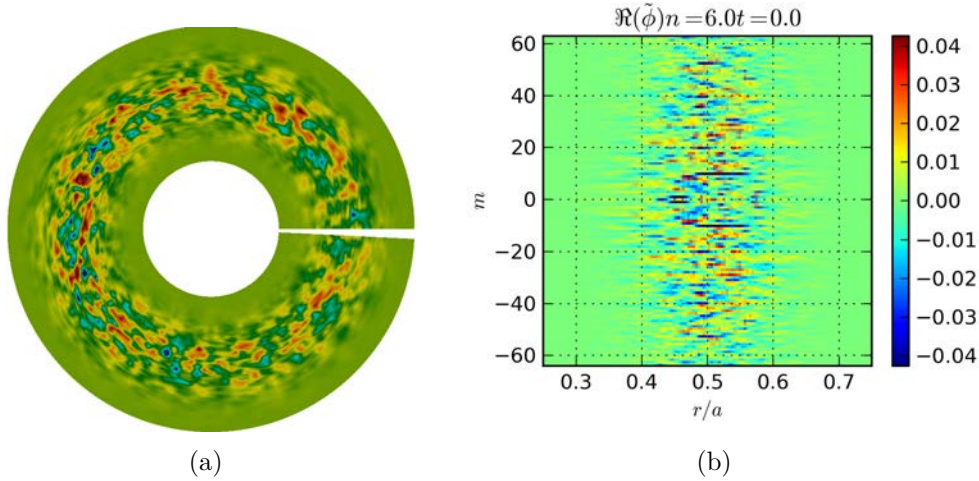


FIGURE 6.12 – État initial du potentiel électrostatique pour le code QUALITORO dans l'espace direct  $(x, \vartheta)$ (a) et mixte  $(x, m)$ (b)

méthodes similaires à celles employées pour l'analyse de la phase linéaire du code non-linéaire en géométrie cylindrique. Le taux de croissance est obtenu par une régression logarithmique à deux segments sur le potentiel intégré poloïdalement  $\int |\phi(x_0, \vartheta, t)|^2 d\vartheta$ . Le support temporel  $[0, t_{max}]$  est subdivisé par l'algorithme en deux intervalles  $[0, t_1]$  et  $[t_1, t_{max}]$  de manière à minimiser les erreurs cumulées de régressions sur chacun des intervalles. Le taux de croissance est obtenu à partir de la régression sur le second intervalle. De même, la détermination de la fréquence se fait localement par détermination du pic en fréquence du spectre de Fourier en temps de  $\cos \arg \phi(x_0, \vartheta_0, t)$  sur la plage temporelle  $[t_1, t_{max}]$  définie précédemment, ce qui permet d'obtenir un spectre filtré de la majorité des fréquences transitoires. Dans tous les résultats présentés l'angle choisi pour la détermination de la fréquence est  $\vartheta_0 = 0$ , soit côté bas-champ qui correspond à la zone de localisation poloïdale du maximum de l'enveloppe du mode.

Sur la figure 6.14, sont présentés les taux et fréquences obtenus pour le cas Cyclone. Le comportement spectral de  $(\gamma, \omega_R)$  est de même nature que celui observé pour les résultats de références. Le taux de croissance connaît une variation unimodale, avec un maximum autour de  $n = 30$ . Les gammes de valeurs de  $\gamma$  sont en bon accord avec celles du cas de référence. La fréquence  $\omega_R$  suit une loi affine en fonction de  $n$ .

On note une discontinuité des évolutions de  $\gamma$  et  $\omega_R$  pour les faibles valeurs de  $n$ . Bien que dans cette zone les incertitudes sur la détermination de  $\gamma$  et  $\omega_R$  soient plus importantes, pour les raisons évoquées plus haut, elles ne suffisent pas à expliquer les discontinuités observées : les données obtenues en relançant le code avec des paramètres plus adaptés à ces valeurs de  $n$  (temps de simulation plus long) ne semblent pas réduire notablement cette discontinuité. La présence d'un croisement de branches (inversion de l'ordre en  $\gamma$  de deux branches instables de la relation de dispersion) pourrait expliquer un tel comportement. Le code d'intégration en temps ne permet cependant pas de confirmer une telle hypothèse, puisque seule la branche la plus instable est accessible. Elle sera examinée à nouveau à partir des résultats du code asymptotique. Une différence majeure avec les données de référence est le centrage du spectre et le support en fréquence du spectre. Le maximum est plus élevé et le spectre plus étendu en fréquence. Cette propriété n'est pas surprenante pour le cas considéré. Pour  $\mu = 0$ , l'opérateur



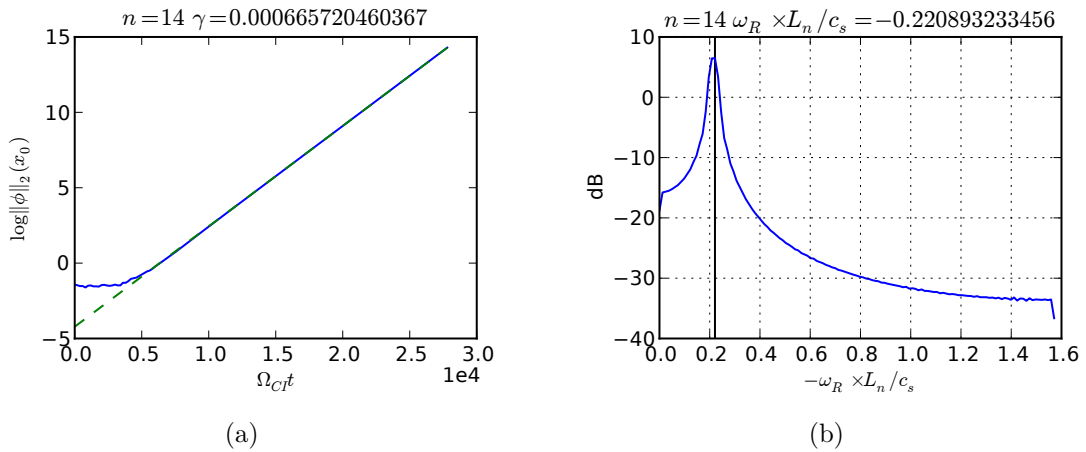


FIGURE 6.13 – Code QUALITORO ; détermination des caractéristiques spectrales ; régression logarithmique sur  $\sqrt{\int d\vartheta |\phi(x_0, \theta)|^2}$  pour l'obtention de  $\gamma$  ; détermination de la fréquence de pic du spectre de Fourier en temps de  $\cos(\arg \phi(x_0, \vartheta_0))$

de gyromoyenne est réduit à l'identité, et le seul effet de rayon de Larmor fini est la dérive de polarisation. Nous retrouvons certaines caractéristiques des modèles de dérive cinétique déjà observées en géométrie cylindrique : centrage du spectre autour de  $k_{\vartheta} \rho_s \sim 1$  et atténuation limitée aux petites longueurs d'onde. Notons qu'en raison de la sélection d'hélicité ( $m + nq \approx 0$ ) qui advient en géométrie torique, il faut lorsque l'on confronte les comportements spectraux cylindriques et toriques tenir compte du fait que  $n$  et  $m$  ne sont plus indépendants dans ce dernier cas.

### Géométrie des modes

Les caractéristiques géométriques de l'enveloppe des modes (Figures 6.16 et 6.17) varient avec le nombre d'onde toroïdal  $n$ . Aux petits nombres d'onde, la structure des modes est proche de celle déjà observée en géométrie cylindrique. Le mode est localisé radialement dans la zone de gradient, avec un spectre étroit en  $m$ , et une faible localisation poloïdale. Lorsque  $n$  croît, le caractère "ballonnant" du mode instable est de plus en plus marqué. L'enveloppe radiale lente, qui correspond à la zone de pic des gradients est modulée par les variations rapides dues aux surfaces résonnantes conjointement à un élargissement du spectre en  $m$ . poloïdalement, le mode possède une enveloppe lente et se localise préférentiellement côté bas-champ. Radialement, on observe un excentrage de l'enveloppe vers les  $x$  croissants lorsque  $n$  croît (Figure 6.15).

En outre on voit apparaître pour les grandes valeurs de  $n$  une brisure spontanée de la symétrie haut-bas ( $\vartheta \rightarrow -\vartheta$ ), le centrage de l'enveloppe poloïdale lente se décalant par rapport à  $\vartheta = 0$ . Notons que cet effet n'est pas fortement marqué mais décelable pour les hautes valeurs de  $n$ . (Figure 6.17 (c))

La résonance en hélicité du mode est particulièrement visible en observant la dépendance radiale du spectre poloïdal du mode (Figure 6.2.1). Ce dernier se concentre sur une bande étroite<sup>1</sup> autour de la résonance  $m = -nq$ . On peut voir en outre, pour le

1. Il peut être utile d'attirer l'attention du lecteur sur l'échelle logarithmique utilisée pour la représentation spectrale figure 6.2.1, qui peut donner l'illusion d'une résonance large ; dans une repré-

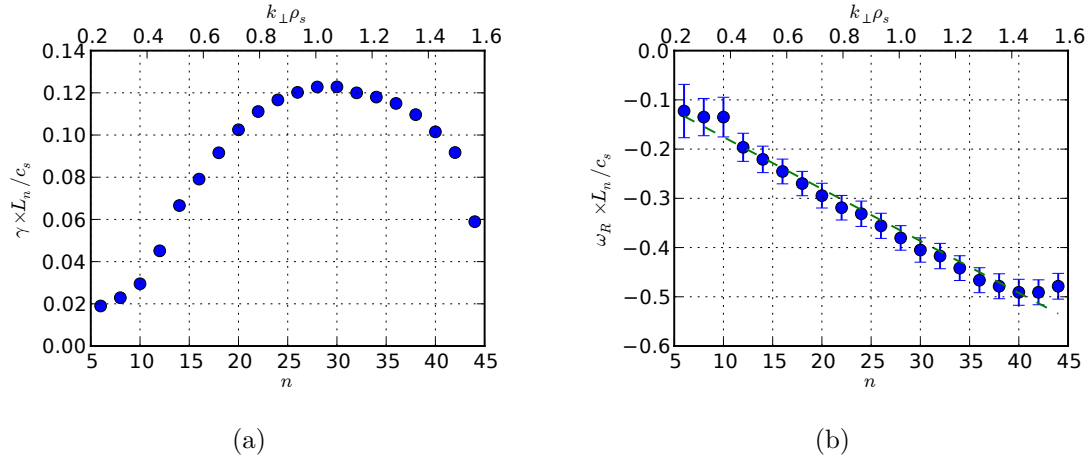


FIGURE 6.14 – Cas Cyclone;  $N = 6$ ,  $N_\mu = 1$ ,  $\mu = 0$ ; code QUALITORO; taux de croissance (a) et fréquences (b) obtenus à partir du potentiel électrostatique en  $(x_0 = 0.5, \vartheta_0 = 0)$

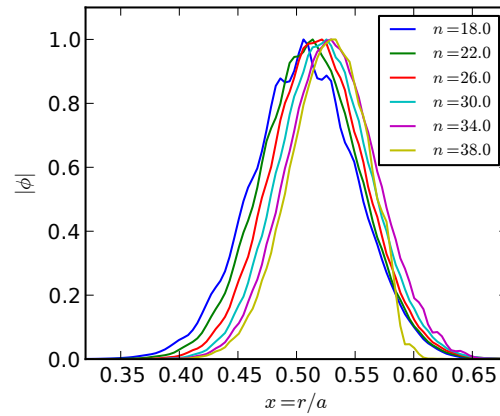
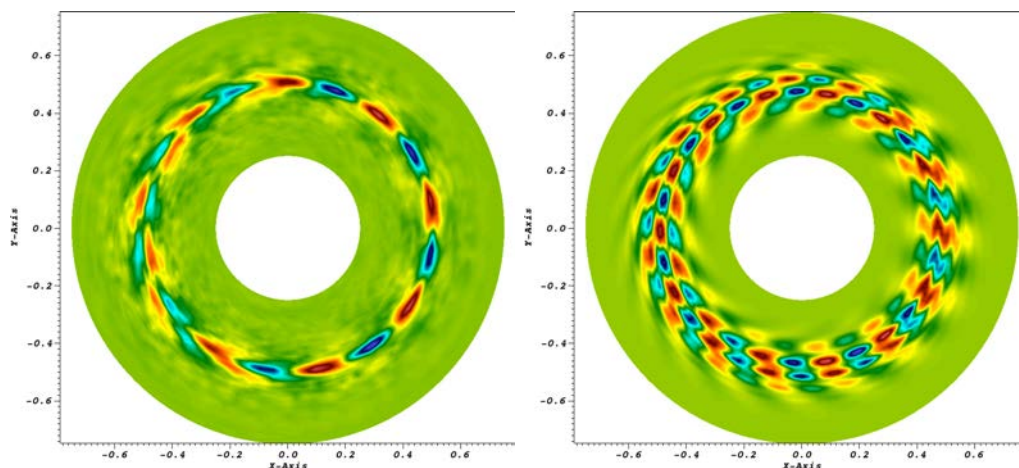
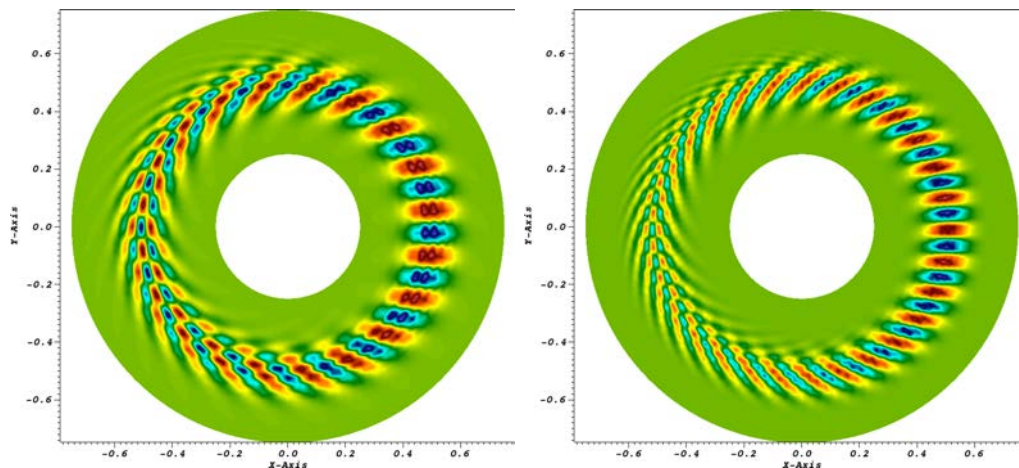


FIGURE 6.15 – Code QUALITORO; Cas Cyclone;  $N = 6$ ,  $N_\mu = 1$ ,  $\mu = 0$ ; Profil radial du module de l'enveloppe du potentiel en  $\vartheta = 0$  pour quelques valeurs de  $n$

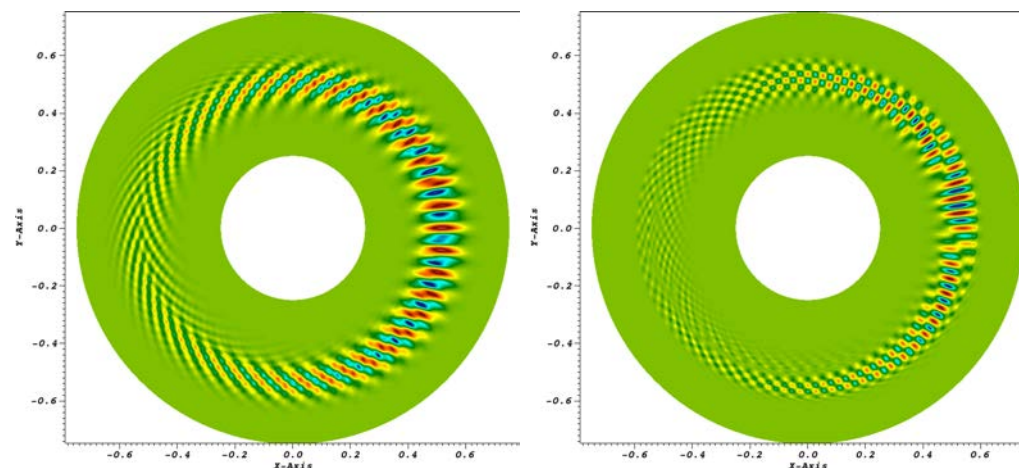
mode  $n = 40$ , la coupure induite par la résolution poléidale finie sur la partie externe ( $x > 0.55$ ) du domaine radial. Ces caractéristiques sont conformes à celles qui sont observées dans [43].



(a)  $n = 6, 10$



(b)  $n = 14, 20$



(c)  $n = 28, 40$

FIGURE 6.16 – Cas Cyclone ; code QUALITORO ; partie réelle du potentiel électrostatique

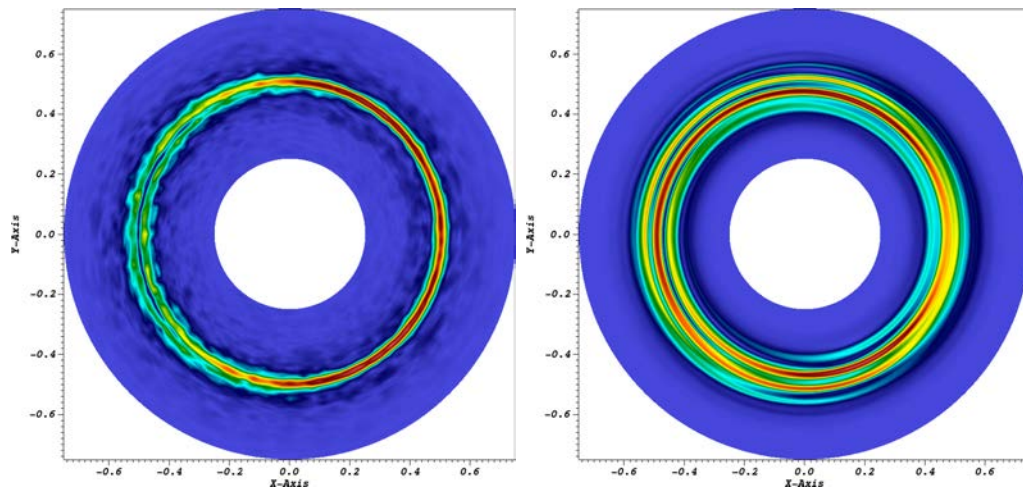
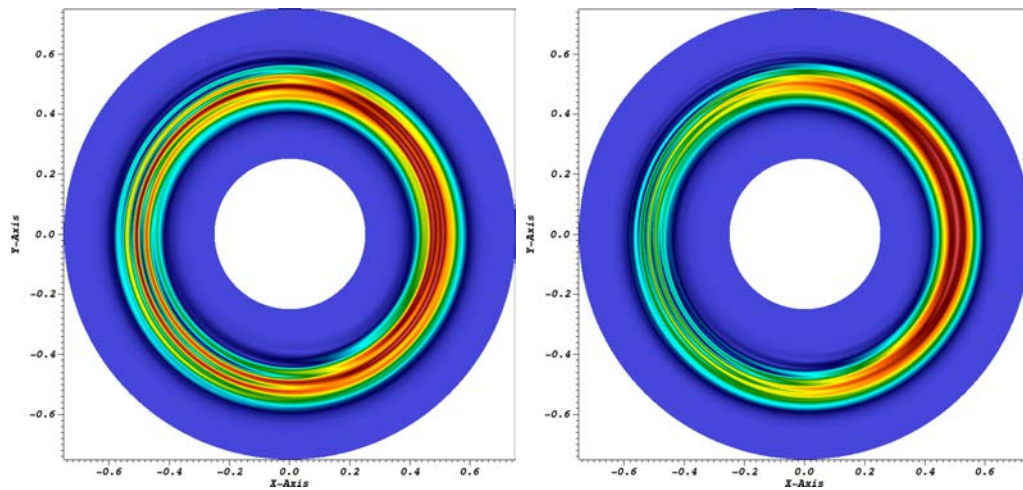
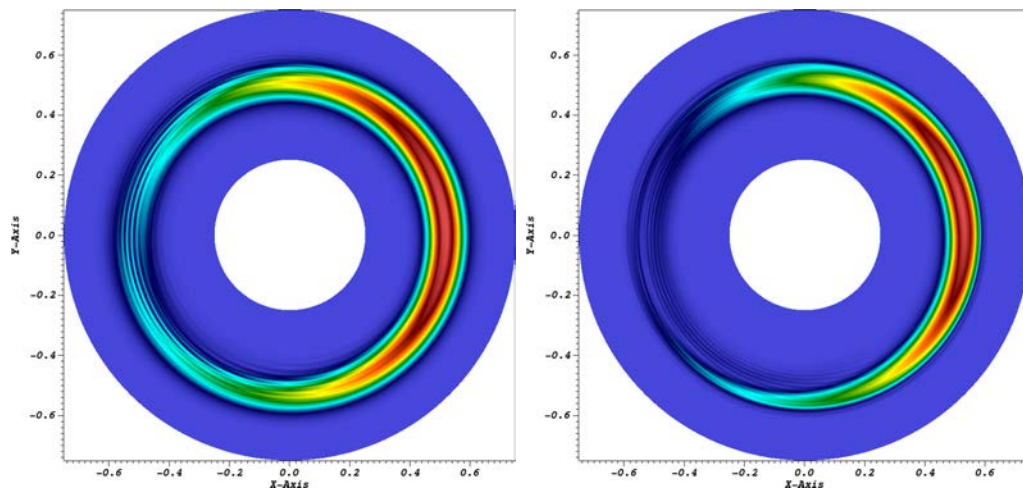
(a)  $n = 6, 10$ (b)  $n = 14, 20$ (c)  $n = 28, 40$ 

FIGURE 6.17 – Cas Cyclone ;  $N = 6$ ,  $N_\mu = 1$ ,  $\mu = 0$  ; code QUALITORO ; module du potentiel électrostatique

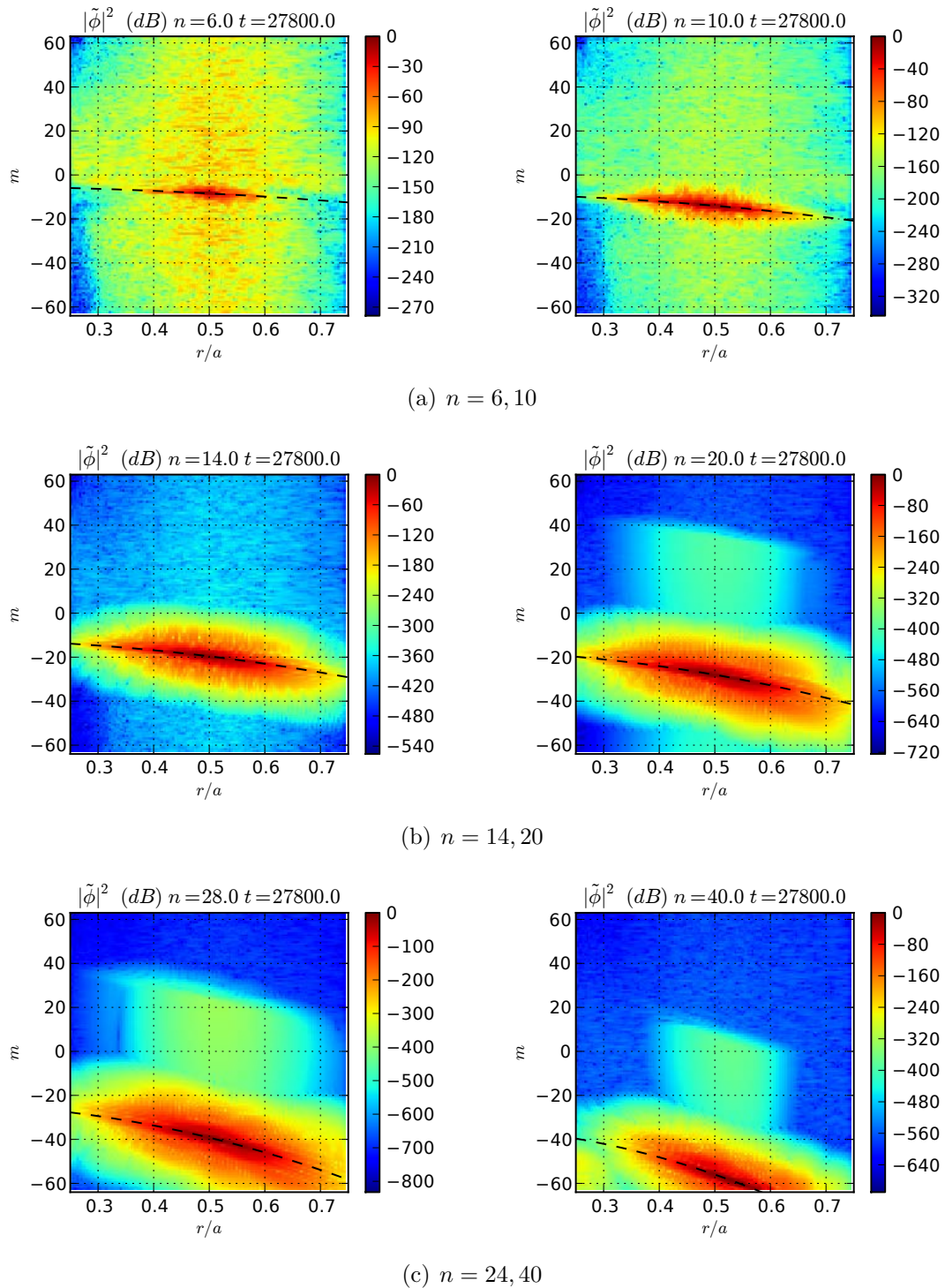


FIGURE 6.18 – Cas Cyclone ;  $N = 6$ ,  $N_\mu = 1$ ,  $\mu = 0$  ; code QUALITORO ; dépendance radiale du spectre de puissance en  $m$  ; la ligne pointillée correspond à la résonance  $m = -nq(r)$

## Effet de moment magnétique non-nul

Bien que la gamme de valeurs du moment magnétique accessible tout en évitant l'existence de contours fermés soit restreinte ( $\mu_{max} = 0.17$ ), on peut néanmoins observer l'effet de l'introduction de valeurs non-nulles du moment magnétique. Rappelons que le moment magnétique intervient de plusieurs manières sur l'opérateur d'évolution du système : il introduit une modulation des contours d'équilibre, pilote le terme de dérive de gradient ainsi que la réponse spectrale (en  $k_{\perp}\rho_s$  donc  $n$ ) au travers de l'opérateur de gyromoyenne.

Un balayage sur le nombre d'onde toroidal  $n$  a été effectué pour trois distributions diffé-

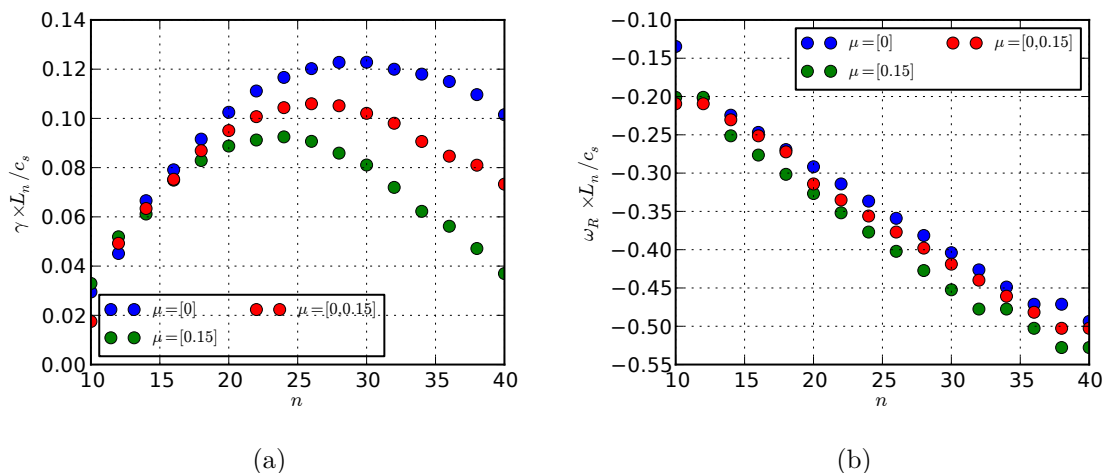


FIGURE 6.19 – Code QUALITORO ; Cas Cyclone ; effet du moment magnétique  $\mu$  sur les taux de croissance (a) et fréquences (b) pour deux distributions à une seule valeur de  $\mu$  et une distribution à deux valeurs de  $\mu$ .

rant uniquement par les valeurs du moment magnétique. Les deux premières possèdent chacune une unique valeur de  $\mu$ , respectivement  $\mu = 0$  et  $\mu = 0.15$ . La troisième combine les deux valeurs. Les taux de croissance et fréquences obtenus lors de ce balayage sont donnés Figure 6.19. On observe sans grande surprise que les résultats obtenus pour la distribution à deux valeurs de  $\mu$  sont encadrés par les résultats correspondants pour les distributions à une seule valeur de  $\mu$ .

L'effet de l'augmentation de  $\mu$  sur les valeurs du taux de croissance est multiple. Tout d'abord, on observe une stabilisation pour la partie supérieure du spectre ( $n > 15$ ), croissante avec  $n$ . On observe d'autre part une légère déstabilisation pour la partie basse du spectre. La position du maximum est en outre décalée vers les basses fréquences, et sa valeur diminue avec  $\mu$ . L'effet de l'augmentation de  $\mu$  sur la fréquence  $\omega_R$  se traduit pas une augmentation (en valeur absolue) de  $\omega_R$ . A valeur constante en  $\omega_r$ , cela revient à un décalage du spectre vers les basses fréquences en  $n$  (ou  $k_{\perp}\rho_s$ ). Pour la plage de valeurs de  $\mu$  considérée, les propriétés géométriques des modes, déjà commentées pour le cas  $\mu = 0$ , ne sont pas notablement altérées.

### 6.2.2 Méthode asymptotique (code ASYMPTORO)

La méthode asymptotique en modes de ballonnement décrite au chapitre 5 a été implémentée dans le code ASYMPTORO. Bien que deux méthodes de discrétisation du

problème intégral local aient été implémentées, nous restreindrons ici la présentation des résultats à la méthode de quadrature directe. Pour les cas envisagés, la méthode de projection n'offre en effet pas d'avantages particulier : le coût supérieur de construction de l'opérateur n'est pas compensé par une accélération notable du calcul de la relation de dispersion (déterminant de l'opérateur discret) et de la détermination de ses racines : la méthode de projection se révèle de fait plus coûteuse. La présentation des résultats qui va suivre retrace le cheminement de la méthode de résolution décrite au chapitre 5. Nous considérerons tout d'abord la résolution du problème intégral aux valeurs propres paramétré par  $(x, \vartheta_{k0})$ . Nous vérifierons ensuite que la topologie de la fréquence locale  $\omega_0(x, \vartheta_{k0})$  est bien celle du diagramme en "oeil de chat" décrit au chapitre 5, et permet la détermination de la coordonnée  $\vartheta_{k0T}$  des points tournants.

### Résolution du problème aux valeurs propre local en $(x, \vartheta_{k0})$

La résolution du problème intégral aux valeurs propres décrit section 5.5 nécessite le choix d'une part du support nécessairement fini sur  $\mathbb{R}$  de la solution discrète approchant l'enveloppe  $\hat{\phi}(\eta)$ , et d'autre par celui de la résolution en  $\eta$ . Le support, défini comme  $[-(2p_{max} + 1)\pi, (2p_{max} + 1)\pi]$  est déterminé par le choix de l'entier  $p_{max}$ . La résolution  $h_\eta$  est ensuite fixée par le choix de la taille de grille  $N_\eta$ . Nous considérerons ici uniquement le cas d'une grille uniforme, pour laquelle  $h_\eta = (2p_{max} + 1)2\pi/(N_\eta - 1)$ . Sur la figure 6.20, sont représentées les évolutions du taux de croissance et de la fréquence en fonction de  $h_\eta$  pour une série de valeurs de  $p$  et  $N_\eta$ , pour le mode  $n = 25$  en  $(x = 0.5, \vartheta_{k0} = 0)$ . On obtient une convergence à moins de 5% en variation relative pour  $h_\eta \sim 0.2$ . Il est important de noter que la convergence en  $h_\eta$  des fréquences et taux de croissance n'est pas suffisante pour que le choix des paramètres  $(p_{max}, N_\eta)$  assure une bonne représentation de la solution, comme nous allons le constater en examinant les enveloppes des solutions.

La largeur typique de l'enveloppe radiale de la solution  $\hat{\phi}(\eta)$  décroît en effet avec le

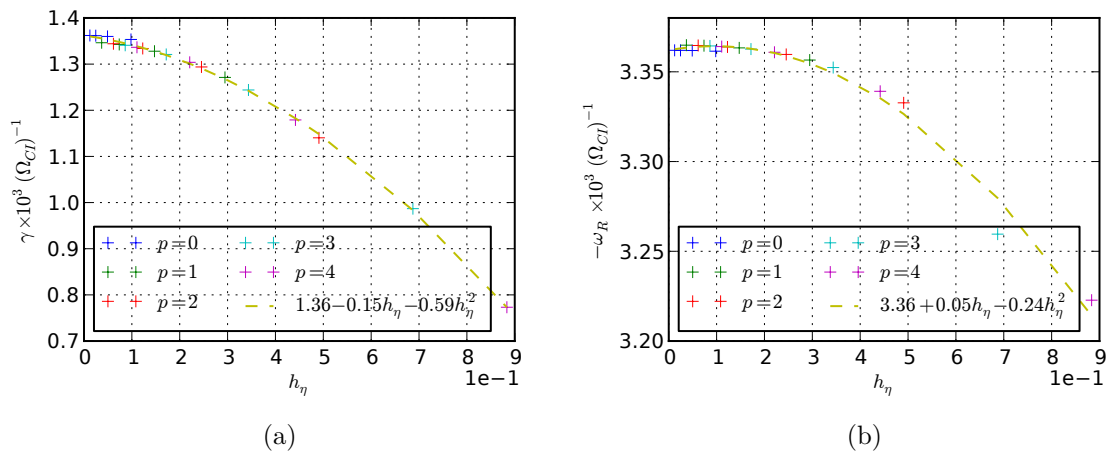


FIGURE 6.20 – Code ASYMTORO ; cas test Cyclone ; méthode de quadrature directe ; mode  $n = 25$  ; test de convergence pour la résolution du problème intégral aux valeurs propres local en  $(x = 0.5, \vartheta_{k0} = 0)$  ; le paramètre  $p_{max}$  (abrégé en  $p$  sur les légendes) caractérise le support en  $\eta$   $([-(2p_{max} + 1)\pi, (2p_{max} + 1)\pi])$  ; balayage de la résolution  $N_\eta$  sur les valeurs 65, 129, 257, 513 ; le taux de croissance  $\gamma$  et la fréquence  $\omega_R$  exhibent une convergence quasi-quadratique en  $h_\eta = (2p + 1)2\pi/(N_\eta - 1)$

nombre d'onde  $n$ . Pour la partie supérieure du spectre (typiquement  $n \geq 15$ ) l'enveloppe est localisée typiquement localisée sur  $[-2\pi, 2\pi]$ , et on peut donc obtenir une bonne approximation de la solution pour  $p = 1$ .

Sur la figure 6.21, sont représentés à la fois la solution et les caractéristiques du noyau intégral  $\mathbb{K}$  correspondant. Une valeur de  $p_{max} = 2$  a été choisie pour assurer que la localisation de l'enveloppe n'est pas limitée par le choix de  $p_{max}$ . De manière consistante avec la solution observée, le noyau est fortement localisé en module dans  $[-2\pi; 2\pi]^2$  (Figure 6.21 (a)). En dehors de cette zone, il devient quasi-diagonal, et on pourrait donc restreindre le domaine sans perturber notablement la solution.<sup>2</sup> Il est important de noter que c'est la largeur de bande de l'opérateur, caractérisant la décroissance en  $|\eta - \theta|$ , qui conditionne celle de l'enveloppe de la solution. Outre la décroissance globale lente en  $\theta$  due aux préfacteurs et visible sur la diagonale, cette décroissance est majoritairement contrôlée par les facteurs exponentiels des contributions au noyau. Ce sont ces facteurs également qui conduisent à des oscillations de phase de plus en plus rapides du noyau lorsque  $|\eta - \theta|$  augmente (Figure 6.21). On peut noter que la diagonale de l'opérateur (Figure 6.21), dont la décroissance lente est majoritairement contrôlée par le facteur  $1/Q$  (Équation (5.84)) pour ces petites valeurs de  $\mu$ , peut être bien plus étendue que le mode lui même.

Considérons maintenant le cas du mode  $n = 10$  (figure 6.22). Deux modes instables ont été trouvés dans la zone de recherche (figure 6.22 (e)). L'apparition d'une deuxième solution pour les petites valeurs de  $n$  tend à confirmer l'existence d'un croisement de branches que nous avons conjecturé lors de l'examen des résultats du code d'intégration en temps.

La diagonale du noyau présente une décroissance plus lente, et la largeur de bande est également plus étendue, nécessitant d'étendre le support de recherche à  $[-7\pi, 7\pi]$  soit  $p_{max} = 3$ . Deux conséquences sont observables pour les enveloppes : d'une part et sans surprise l'extension de leur support. D'autre part, l'apparition d'oscillations sur les queues des enveloppes. Ces dernières, qui étaient masquées dans le cas du mode précédent par l'écrasement rapide de l'enveloppe, sont liées aux oscillations de phase du noyau (figure 6.22 (b)) déjà observées précédemment.

---

2. Pour un noyau strictement diagonal en dehors du domaine central  $[-2\pi, 2\pi]$ , la solution complète est la solution obtenue pour le système tronqué au domaine à  $[-2\pi; 2\pi]$ , prolongée par 0 sur le reste du domaine



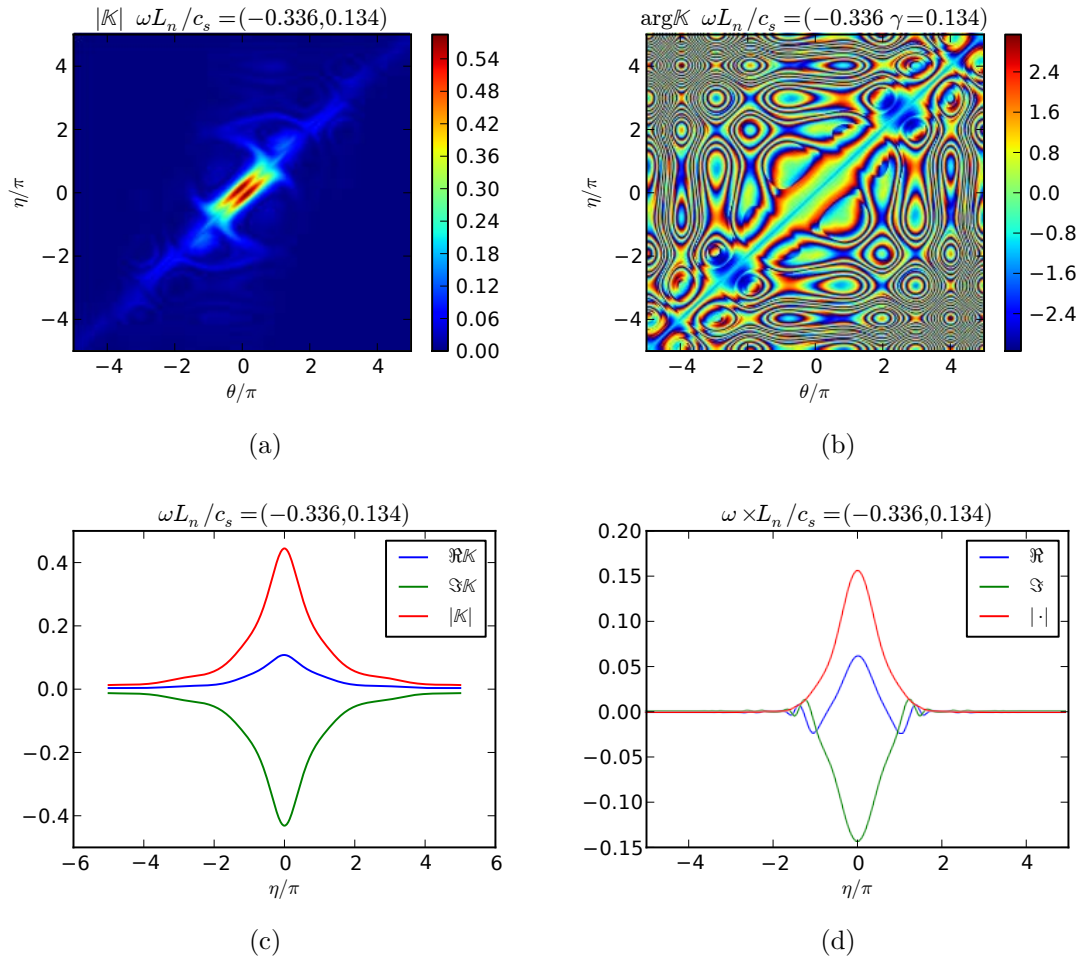


FIGURE 6.21 – Code ASYPTORO ; Cas Cyclone ;  $n = 25$  ; solution locale du problème aux valeurs propres en  $(x = 0.5, \vartheta_{k0} = 0)$  sur  $[-5\pi; 5\pi]$  ; module (a), argument (b) et diagonale (c) du noyau intégral pour la solution  $\hat{\phi}(\eta)$  la plus instable (d)

### Problème global

Avant que de mettre en oeuvre l'algorithme de détermination rapide de l'angle  $\theta_{k0T}$ , encore faut-il s'assurer que la dépendance paramétrique de la fréquence locale  $\omega_0(x, \vartheta_{k0})$  implique bien la présence d'un point ( $O$ ) dans le plan  $(x, \vartheta_{k0})$ . Pour ce faire, le problème local est résolu de manière indépendante sur une grille  $(x, \vartheta_{k0})$ . Bien que trivialement parallélisable, ce type de balayage paramétrique "à l'aveugle" est coûteux en raison de la grande variabilité dans le plan  $(x, \vartheta_{k0})$  du temps de calcul nécessaire à l'obtention d'une solution locale, et de la nécessité de calibrer les paramètres du solveur pour le pire des cas. Comme cela a été évoqué lors de la description du solveur, la convergence de la méthode d'Henrici ne peut être garantie a priori : le choix des paramètres de la méthode résulte donc d'un compromis entre robustesse (pas de solutions manquées) et temps de calcul.

En outre, et comme on l'a vu précédemment dans le cas du mode  $n = 10$ , de multiples solutions peuvent exister. Pour les grandes valeurs du taux de croissances, les différentes nappes sont bien ordonnées et la sélection du mode le plus instable pour chaque  $(x, \vartheta_{k0})$  suffit à assurer la continuité. Au voisinage de l'extinction ( $\gamma \rightarrow 0$ ) cependant,

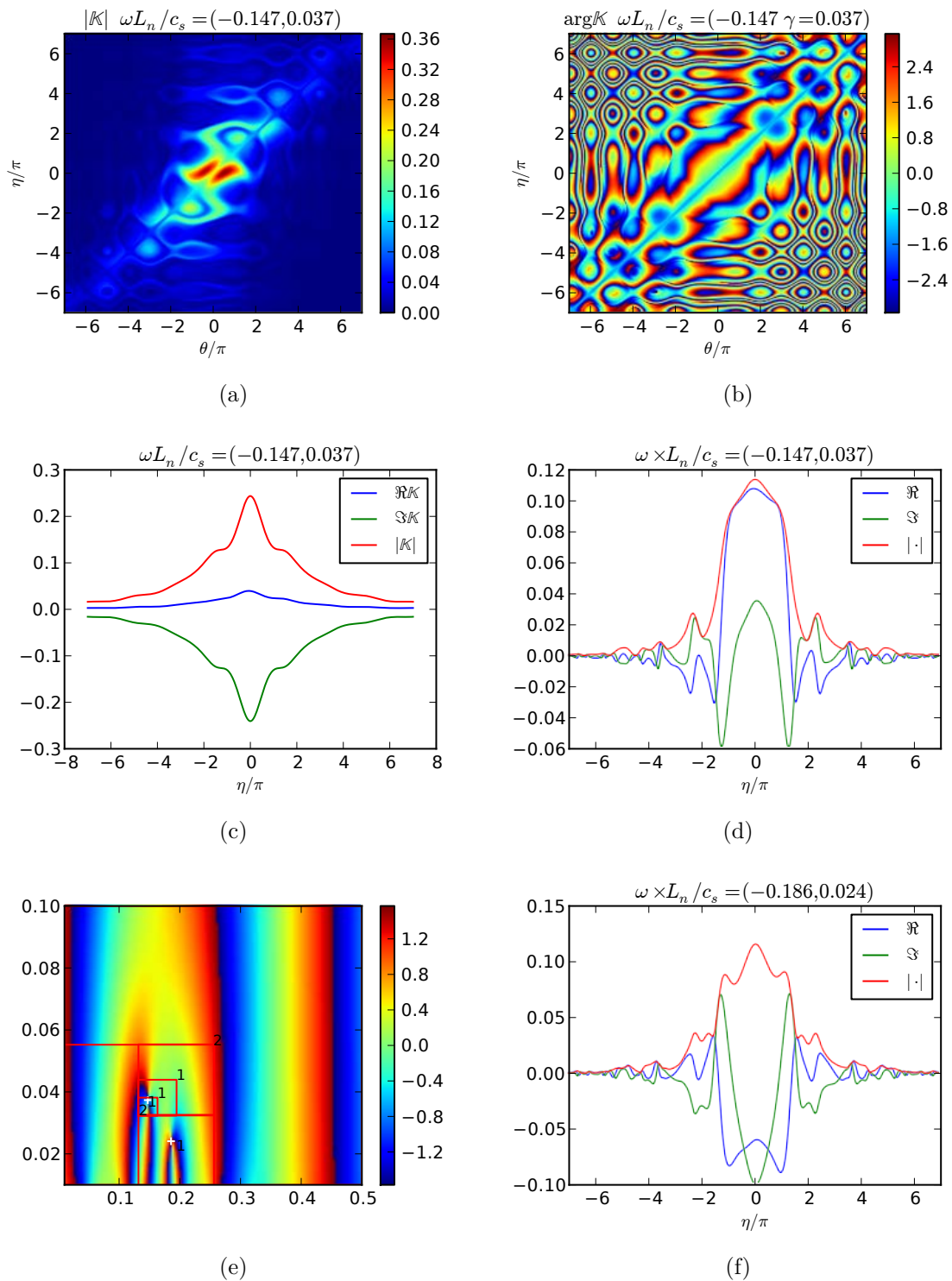


FIGURE 6.22 – Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $n = 10$  ; solution locale du problème aux valeurs propres en  $(x = 0.5, \vartheta_{k0} = 0)$  sur  $[-7\pi; 7\pi]$  ; module (a), argument (b) et diagonale (c) du noyau intégral pour la solution  $\hat{\phi}$  la plus instable (d) ; argument de la relation de dispersion dans le plan  $(-\omega_r, \gamma)$  (e) ; enveloppe  $\hat{\phi}(\eta)$  de la deuxième solution (f)

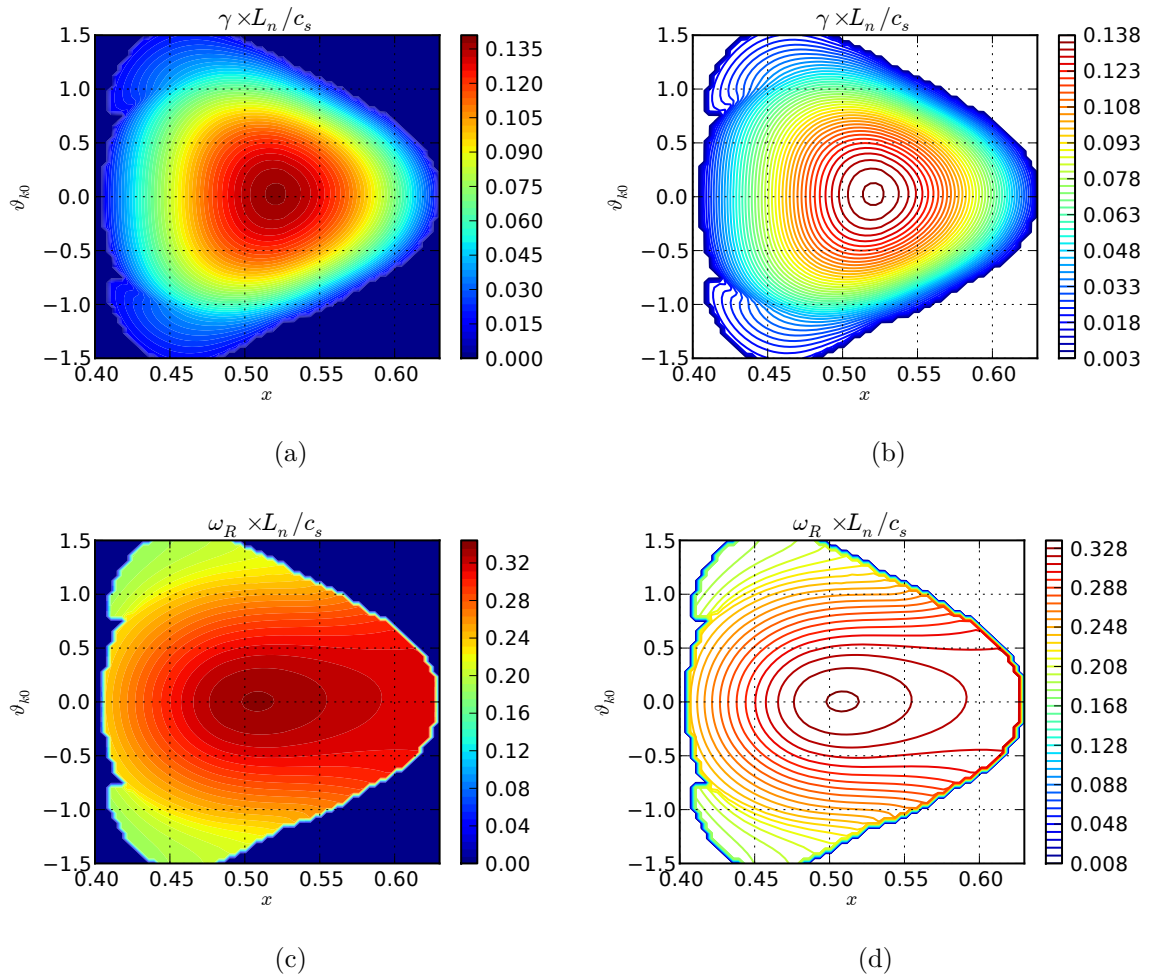


FIGURE 6.23 – Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ; Fréquences locales  $(\gamma, \omega_R)$  dans le plan  $(x, \theta_{k0})$  ;  $n = 25$ ,  $p_{max} = 2$ ,  $N_\eta = 257$  ; seuil de détection  $\gamma_{min} \times L_n / c_s = 0.016$

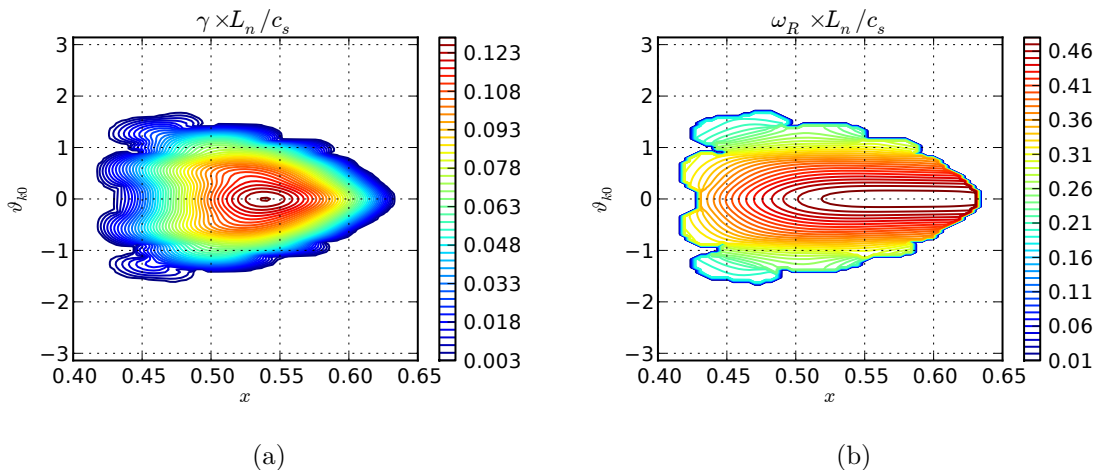


FIGURE 6.24 – Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $n = 40$ ,  $p_{max} = 1$ ,  $N_\eta = 185$  ; dépendance en  $(x, \vartheta_{k0})$  des taux de croissance (a) et fréquences locales (b)

des croisements en  $\gamma$  peuvent se produire, conduisant à des discontinuités en  $\omega_R$  si l'on sélectionne uniquement le mode le plus instable. Cette difficulté ne pose pas de problème pour la méthode de résolution globale, qui opère majoritairement loin de ces zones. Un seuil est fixé sur la valeur minimale du taux de croissance afin d'éviter ces dernières. De même, après avoir localisé grossièrement sur une grille lâche la zone de taux de croissance la plus élevée, le domaine en  $(x, \vartheta_{k0})$  est réduit à cette zone.

Sur la figure 6.23, on peut voir le résultats d'un tel balayage pour le mode  $n = 25$ . La présence d'un point ( $O$ ) est clairement visible. On peut remarquer une troncature des lignes de niveaux  $\omega_R$  qui restent ouvertes à droite du domaine. Ce phénomène est dû à la troncature de la nappe en raison de la condition de seuil sur  $\gamma$ . Il faudrait pour déterminer la prolongation de ces lignes en  $\omega_R$  poursuivre la résolution du problème sous le seuil, et même pour  $\gamma < 0$  par prolongement analytique. Cette particularité n'a pas d'incidence sur la méthode de résolution employée.

La localisation du point ( $O$ ) et de l'ensemble de la zone d'instabilité ( $\gamma > 0$ ) varie avec le nombre d'onde  $n$ . Si pour les cas testés l'angle de ballonnement reste très proche de  $\vartheta_{k0} = 0$ , la position radiale du point ( $O$ ) croît avec  $n$ . Cet effet est consistant avec l'excentrage de l'enveloppe radiale du mode lorsque  $n$  croît (Figure 6.15) pour le code d'intégration en temps. Sur la figure 6.24 sont représentées les variations des taux de croissance et fréquences locales dans le plan  $(x, \vartheta_{k0})$  pour le mode  $n = 40$ . Outre l'excentrage du point ( $O$ ) vers les grandes valeurs de  $x$ , on observe un creusement de la surface  $\gamma = f(x, \vartheta_{k0})$  dans la zone radiale  $x \leq 0.52$ . Ainsi en  $x = 0.5$ , le taux de croissance présente un minimum proche en  $\vartheta_{k0} = 0$  et deux maxima symétriques pour  $\vartheta_{k0} \approx \pm 0.5$ . Une recherche de  $\vartheta_{k0T}$  basée uniquement sur les variations de  $\gamma$  en  $x = 0.5$  (soit au centre de la zone de gradient) pourrait conduire à sélectionner un des deux maxima au lieu de  $\vartheta_{k0T} \approx 0$ , conduisant à une troncature du spectre. C'est cette propriété qui nous conduit à effectuer d'abord un balayage sur  $x$  afin de prendre en compte le décalage radial du point ( $O$ ) par rapport au centre de la zone de gradient.

La très faible variation de  $\vartheta_{k0T}$  par rapport à zéro a conduit à la stratégie de balayage "en croix" (voir chapitre 5) utilisée pour résoudre le problème global. Un premier balayage en  $x$  est effectué en  $\vartheta_{k0} = 0$  et permet d'obtenir une bonne approximation  $x_{ref}$  de l'abscisse du point ( $O$ ). Un second balayage, cette fois en  $\vartheta_{k0}$ , permet de déterminer

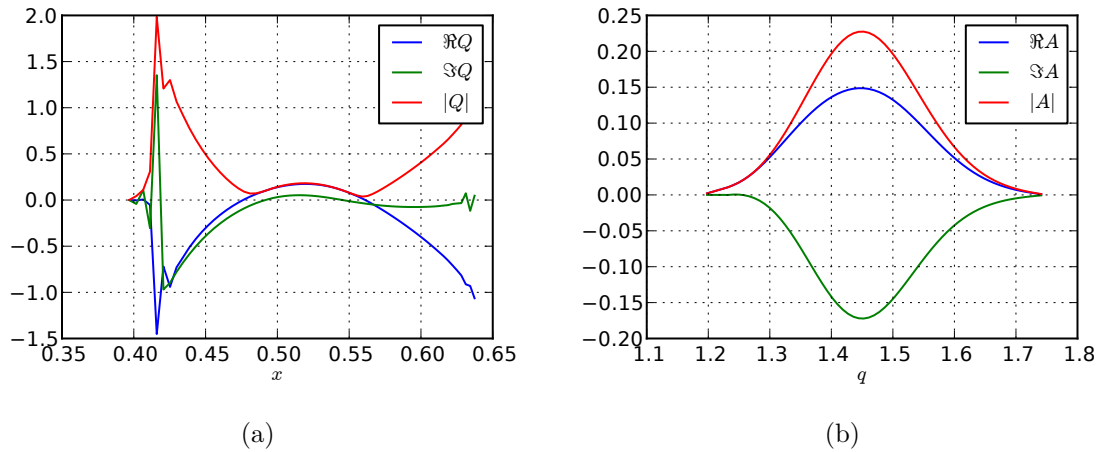


FIGURE 6.25 – Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $n = 24$ ,  $p_{max} = 2$ ,  $N_\eta = 257$  ; détermination de l’enveloppe radiale lente  $A$  ; profil radial du pseudo potentiel  $Q$  (a) ; profil radial de la solution  $A(x)$  (b)

$\theta_{k0T}$ . La résolution du problème sur une bande étroite autour de  $\theta_{k0T}$ , permet de poser le problème de Schrödinger sur l’enveloppe radiale lente.

La détermination de la fréquence globale  $\omega$  se fait sans difficulté par la recherche des racines du déterminant de l’opérateur discrétisé radialement. La valeur propre correspondant au mode le plus instable est sélectionnée. Sur la figure 6.25, on peut voir les profils radiaux respectifs du pseudo-potential  $Q$  de l’équation de Schrödinger vérifiée par l’enveloppe lente  $A$ , ainsi que la solution correspondante, pour le mode  $n = 24$ . Les oscillations visibles sur les bords du domaine pour le pseudo-potential sont dues à la sensibilité de l’évaluation des dérivées secondes en  $\vartheta_{k0}$  de la fréquence et du taux de croissance au voisinage de l’extinction. Ces oscillations ne perturbent pas notablement la détermination de l’enveloppe tant que le pseudo-potential reste globalement bien confinant sur le domaine radial.

Outre l’enveloppe lente  $A(x)$  la reconstruction du mode global nécessite les enveloppes  $\hat{\phi}(\eta, x, \theta_{k0T})$  calculées précédemment. Les solutions  $\hat{\phi}(\eta, x, \theta_{k0T})$  correspondant aux diverses valeurs de  $x$  étant calculées de manière complètement indépendante, elles sont affectées d’un facteur de phase arbitraire. Le module des enveloppes radiales est bien continu en  $x$  (figure 6.26(a)) mais il faut multiplier chaque solution d’un facteur de phase de module unité de manière à assurer la continuité de l’argument, et ainsi des parties réelles et imaginaires (Figure 6.26(a)). Après cet alignement de phase, le mode global  $\phi(x, \theta)$  (figure 6.27) est reconstruit par la formule

$$\phi(x, \vartheta) \sim \sum_{p=-p_{max}}^{p_{max}} \hat{\phi}(x, \vartheta + 2p\pi, \theta_{k0T}) A(x) e^{-inq(x)(\vartheta + 2p\pi - \theta_{k0T})}, \quad (6.5)$$

où on rappelle que  $A(x) = e^{in \int dq' \theta_{k1}(q')}$  est l’enveloppe lente à l’ordre 1. Les intégrales sur  $q'$  sont prises de  $q_{ref}$  à  $q$ . Le facteur de phase arbitraire résultant du choix de  $q_{ref}$  est pris égal à un.

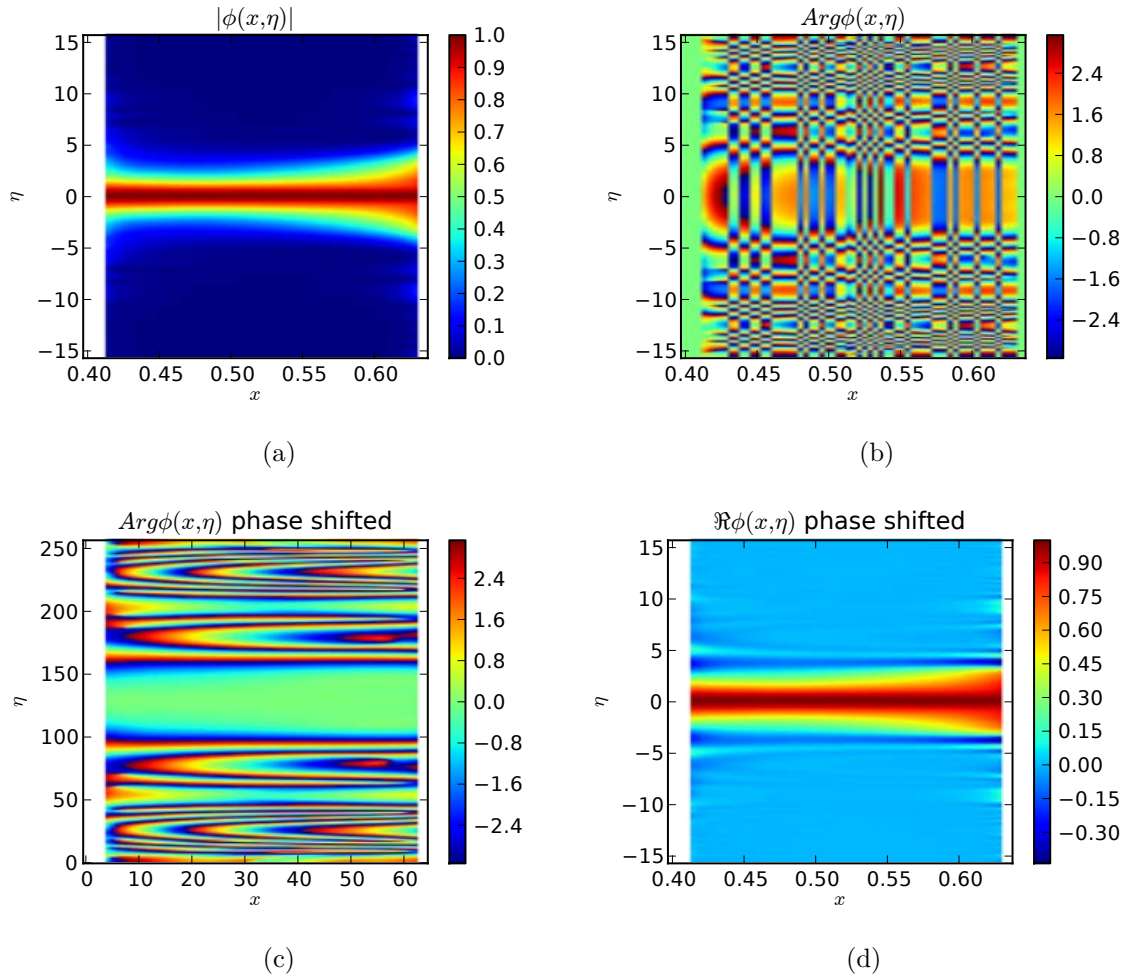


FIGURE 6.26 – Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $n = 24$ ,  $p_{max} = 2$ ,  $N_\eta = 257$  ; enveloppes locales  $\hat{\phi}(x, \eta, \theta_{k0T})$  ; module (a) et argument (b) des solutions brutes ; argument (c) et partie réelle (d) après alignement des phases

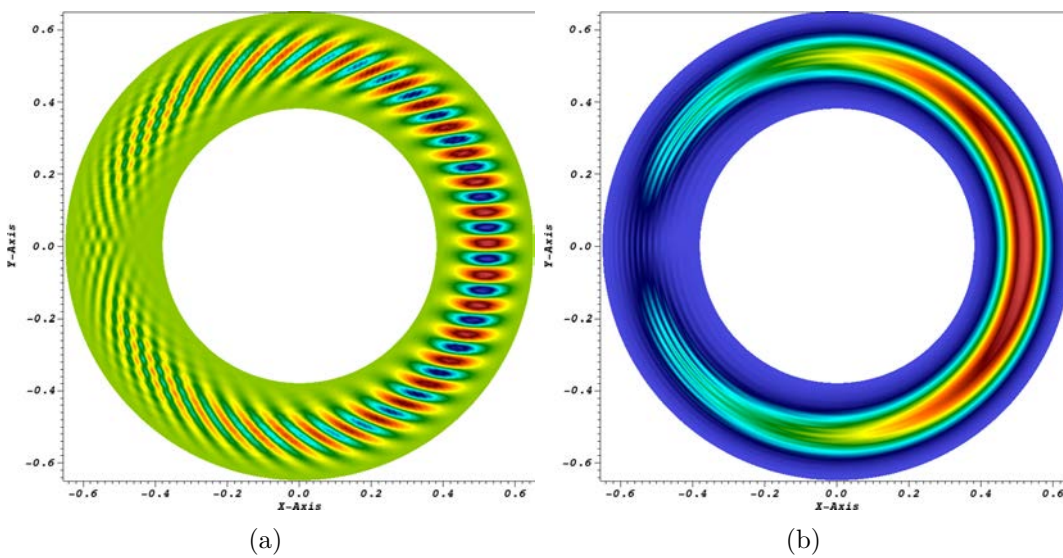


FIGURE 6.27 – Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $n = 24$ ,  $p_{max} = 2$ ,  $N_\eta = 257$  ; solution globale  $\phi(x, \vartheta)$  ; partie réelle (a) et module (b)

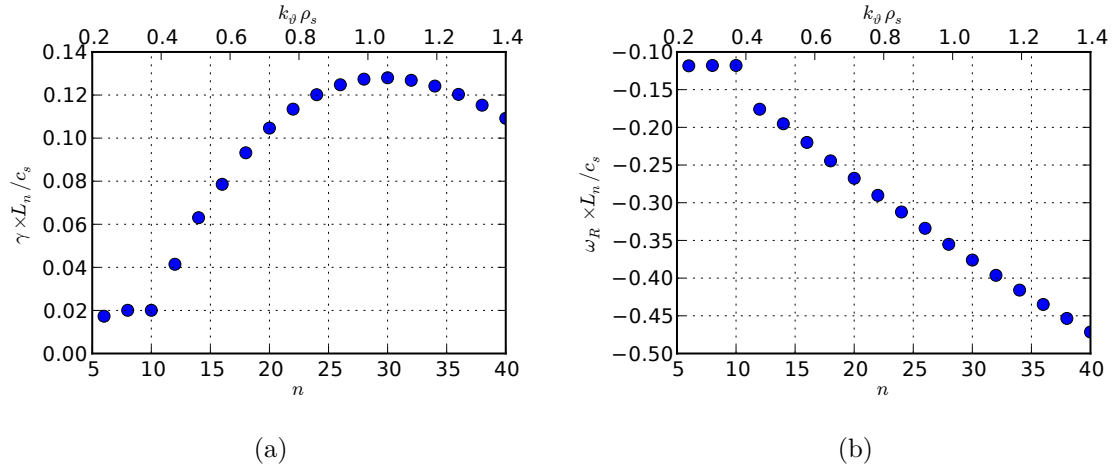


FIGURE 6.28 – Code ASYMPTORO; Cas Cyclone;  $N_\mu = 1$ ,  $\mu = 0$ ; dépendance en  $n$  des taux de croissance (a) et fréquences (b) globale

### Dépendances en $n$ et $\mu$

L'évolution des caractéristiques spectrales et géométriques des modes avec le nombre d'onde  $n$  est similaire à celle observée précédemment pour le code d'intégration en temps (figure 6.28). Nous retrouvons la discontinuité de comportement aux basses valeurs de  $n$ , qui ne peut ainsi être attribué à un artefact lié à l'une ou l'autre des méthodes. La dépendance en  $\mu$  des taux de croissance et fréquences est de même nature que pour la méthode d'intégration en temps : atténuation du taux de croissance pour la partie haute du spectre, légère amplification pour les plus basses valeurs de  $n$ , et décalage du maximum vers le bas du spectre.

L'évolution de la géométrie des modes est similaire à celle observée précédemment, pour la majorité des valeurs de  $n$  : outre la structure ballonnante, qui dans ce cas est intrinséquement liée à la méthode, on observe également un décentrage radial de l'enveloppe vers l'extérieur du tore lorsque  $n$  croît.

### 6.2.3 Comparaison entre les deux méthodes

Ayant observé une bonne cohérence entre les solutions fournies par chacune des deux méthodes, nous pouvons envisager une comparaison plus directe des résultats. Notons que nous comparons ici deux balayages en  $n$  dont les paramètres ont été fixés, pour chaque méthode, de manière à bien résoudre le problème pour la partie centrale du spectre en  $n$ . Nous ne chercherons donc pas à établir de comparaisons fines sur les résultats, qui nécessiteraient, pour chaque méthode et chaque valeur de  $n$ , un balayage sur les paramètres (résolution, support...) garantissant une convergence fine. Nous restreignons ici la comparaison à la plage de valeurs de  $n$  pour laquelle l'évolution des taux de croissance et fréquences est continue, et pour laquelle les résultats fournis par chacune des deux méthodes peuvent être considérés comme suffisamment fiables pour que l'incertitude sur les données obtenues soit du même ordre ou inférieure aux écarts entre les deux méthodes pour les modes les plus instables. La confrontation des taux de croissance (figure 6.30 (a)) et fréquences (figure 6.30 (b)) montre un bon accord entre les deux méthodes pour les modes les plus instables avec des écarts relatifs de

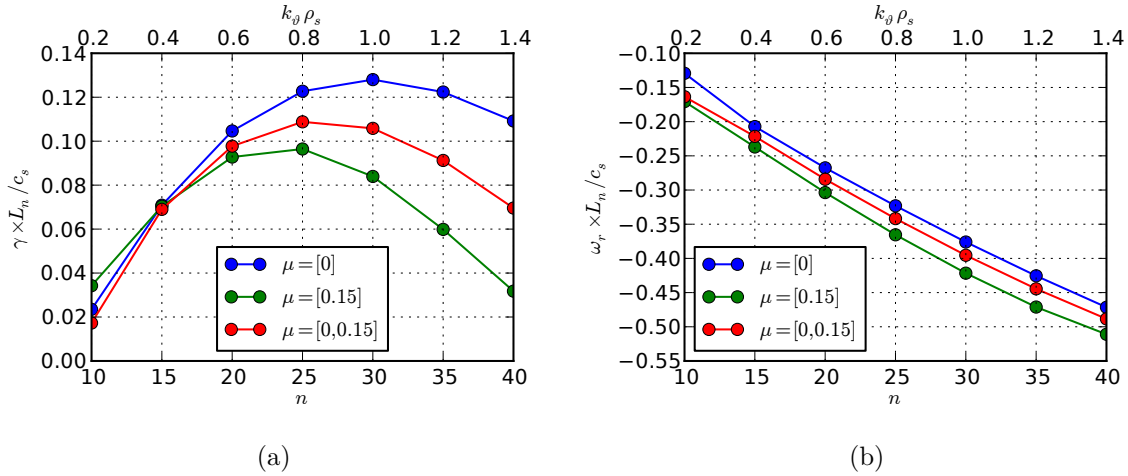


FIGURE 6.29 – Code ASYPTORO ; Cas Cyclone ; effet du moment magnétique  $\mu$  sur les taux de croissance (a) et fréquences (b) pour deux distributions à une seule valeur de  $\mu$  et une distribution à deux valeurs de  $\mu$ .

l'ordre de 5% (Figures 6.30 (c) et (d)). On observe une augmentation de l'écart pour les modes les moins instables.

Dans la bande considérée  $n \in [10, 40]$ , la géométrie des enveloppes des modes montre également un bon accord entre les deux méthodes. On peut en voir un exemple figure 6.31 pour le mode  $n = 20$ . Les localisations poloidales et radiales sont concordantes, avec une atténuation légèrement plus forte côté fort champ pour le mode asymptotique (figures 6.31(c) et (d)).

Pour l'ensemble des modes testés, un seul cas présente de nettes disparités entre le mode obtenu par la méthode asymptotique et la méthode d'intégration en temps. Il s'agit du mode  $n = 6$ , représenté figure 6.32. Alors que l'enveloppe du mode obtenue par le code d'intégration en temps présente un seul lobe radial, le mode obtenu par la méthode asymptotique en présente deux. Il est important de noter que l'enveloppe radiale lente de ce dernier est unimodale et que son centrage correspond à celui du mode obtenu par la méthode d'intégration en temps : la modulation radiale observée est donc due à un effet d'interférences lors de la recombinaison du mode.

Plusieurs hypothèses peuvent expliquer cette divergence, qui sont citées ici pour mémoire mais n'ont pas été à ce jour été validées ou invalidées (en raison du grand nombre de tests qu'elles supposent et de la finitude des ressources à notre disposition) : la première est une insuffisance de la convergence d'une ou des deux méthodes, particulièrement la méthode asymptotique. Pour les basses valeurs de  $n$ , et les bas taux de croissance, la décroissance en  $(\eta, \theta)$  du noyau intégral est lente, ce qui suppose un mode étendu. Si on a choisi un support assez large ( $p_{max} = 3$ ) lors des tests, il est possible qu'il faille encore l'étendre pour affiner suffisamment la géométrie du mode. Une deuxième hypothèse est la perte de validité du développement asymptotique lui-même pour les faibles valeurs de  $n$  aux ordres les plus bas utilisés ici.



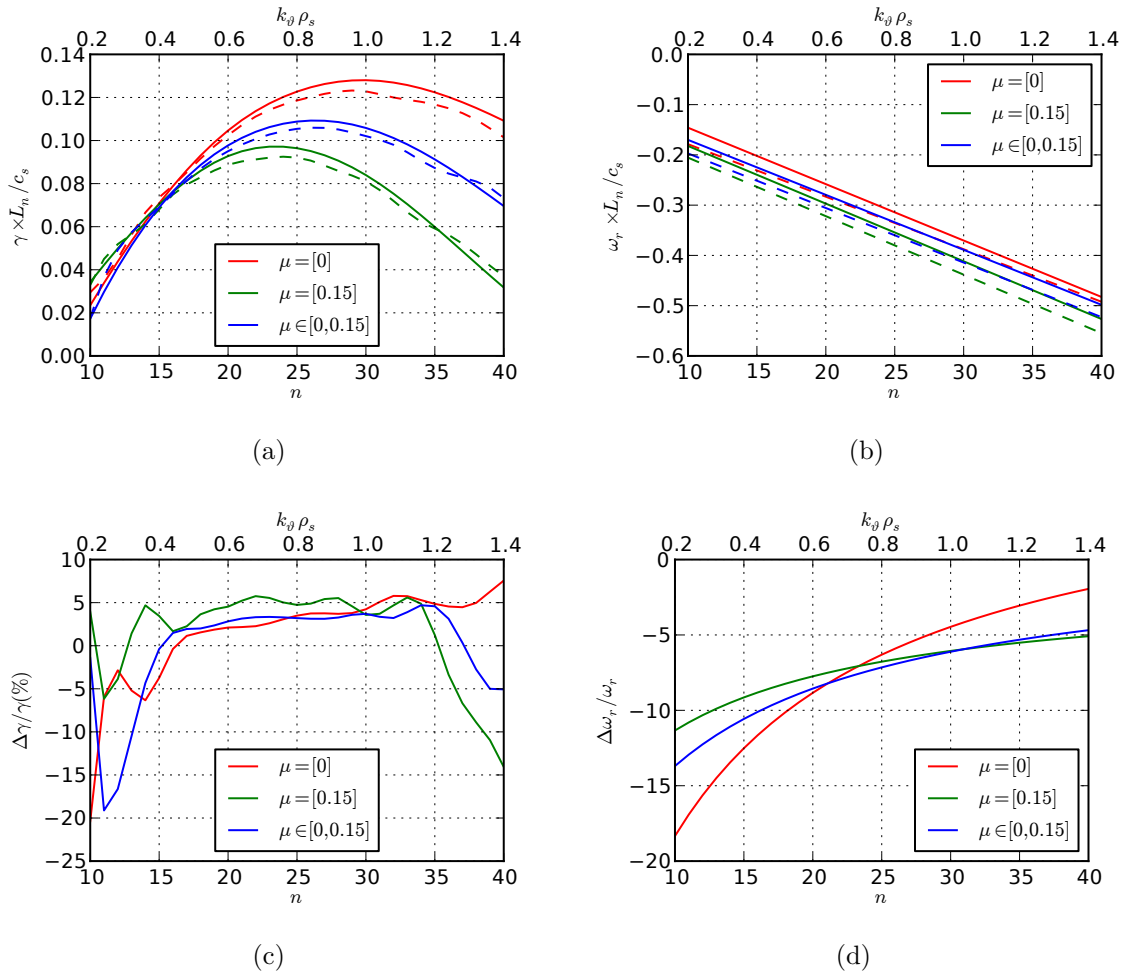


FIGURE 6.30 – Cas cyclone ; comparaisons des taux de croissance et fréquences obtenus par la méthode d'intégration en temps (traits continus) et la méthode asymptotique (pointillés) ; les données sont respectivement représentées par une interpolation par splines cubiques pour le taux de croissance et un ajustement affine pour la fréquence ; écarts relatifs sur les taux de croissance (c) et fréquences (d)

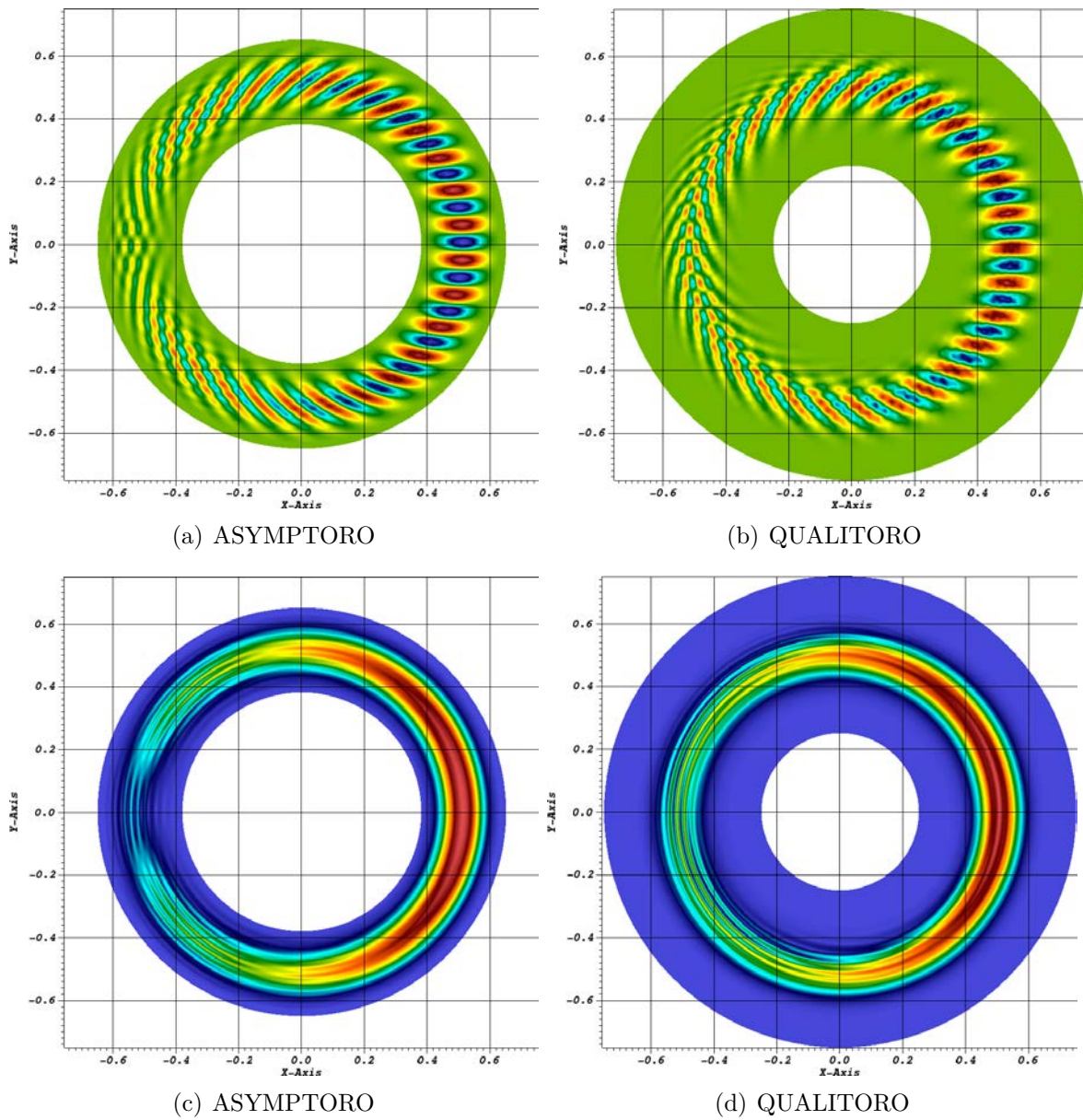


FIGURE 6.31 – Cas cyclone ;  $N_\mu = 1$ ,  $\mu = 0$  ; mode  $n = 20$  ; partie réelle (a)(b) et module (c)(d) des enveloppes obtenues par chacune des deux méthodes

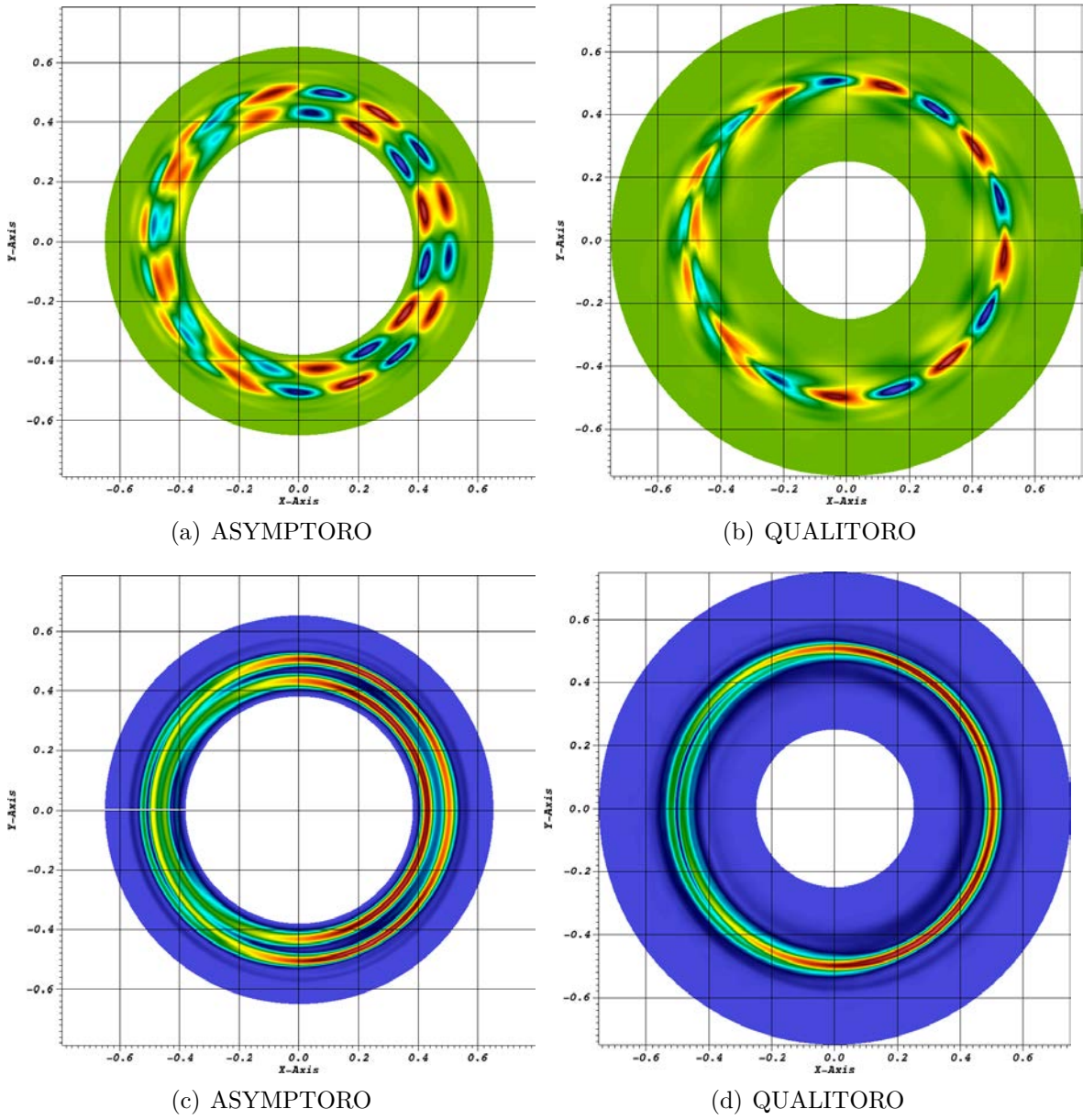


FIGURE 6.32 – Cas cyclone ;  $N_\mu = 1$ ,  $\mu = 0$  ; mode  $n = 6$  ; partie réelle (a)(b) et module (c)(d) des enveloppes obtenues par chacune des deux méthodes

### 6.2.4 Comparaison avec les résultats de référence

La cohérence observée, pour une large part du spectre, entre les deux méthodes implémentées, permet d'esquisser une première comparaison des résultats obtenus (figure 6.30) avec ceux de [22] synthétisés dans la figure 6.10. Une première constatation, évidente, est la différence de centrage du spectre : le taux de croissance maximal est atteint pour  $k_{\theta}\rho_s \approx 0.35$  pour les données de références, alors qu'il est de l'ordre de 0,8 pour la distribution à 6 bags et deux valeurs de  $\mu$  testée. Ce décalage s'explique aisément par la faiblesse de l'effet de la gyromoyenne pour la plage de valeurs de  $\mu$  particulièrement restreinte qui a été utilisée. Pour des codes gyrocinétiques ou gyrofluides tels que ceux utilisés dans [22], l'intégration en  $\mu$  se fait sur une plage généralement plus importante lorsqu'elle est discrète, ou est effectuée analytiquement à partir de la Maxwellienne d'équilibre.

La tendance au décalage vers les basses fréquences spatiales observée indique cependant que l'on peut espérer un meilleur accord en étendant la gamme de valeurs de  $\mu$ . Un deuxième point est la valeur même du taux de croissance : le maximum est à  $\gamma \approx 0.12L_n/c_s$  pour le cas de référence. La distribution "intermédiaire" à deux valeurs de  $\mu$  a son maximum à  $\gamma \approx 0.11L_n/c_s$ . Il est ici plus difficile d'estimer le comportement attendu en étendant la plage de valeurs de  $\mu$  : l'atténuation observée pour la partie supérieure du spectre, tendrait à supposer une diminution de ce maximum, et donc à une sous-évaluation de  $\gamma$  par rapport aux données de référence. Cependant le léger redressement observé pour les basses valeurs de  $n$ , qui sont en outre moins affectées par l'effet de la gyromoyenne, pourrait permettre une augmentation suffisante des taux dans la zone basse du spectre pour compenser cette atténuation.

Il est bien évident que ces tendances ne garantissent absolument pas une convergence vers les résultats de référence pour une plus grande étendue en  $\mu$ , mais elles ne semblent pas l'exclure.

Les écarts observés entre les résultats de références et ceux obtenus avec des distributions ne contenant que des contours ouverts montrent la nécessité d'étendre la gamme de valeurs de  $\mu$ . Comme cela a été exposé dans la section 6.1.2, cette extension implique nécessairement, avec la méthode de construction de l'équilibre utilisée jusqu'à présent, l'apparition de contours fermés présentant des angles limites sur tout ou partie du domaine radial.

## 6.3 Distribution avec contours fermés : vers les limites du modèle ?

La présence de contours fermés a des conséquences importantes, et comme nous allons le constater dommageables, sur le comportement des deux méthodes implémentées. Nous ne présenterons ici qu'une sélection restreinte des résultats obtenus lors des expérimentations numériques effectuées avec des distributions présentant des contours fermés, de manière à mettre en lumière à la fois les difficultés rencontrées et les pistes de résolutions envisageables.

Il est tout d'abord nécessaire de préciser que si les quantités d'équilibre sont les mêmes pour chacune des deux méthodes, la prise en compte de l'existence de contours fermés est différente pour chacun d'eux.

Dans le cas de la méthode par intégration en temps, la fermeture n'est pas prise en compte explicitement : le support spatial des composantes de l'opérateur d'évolution

en temps est limité pour chaque contour à celui du contour d'équilibre correspondant et prolongé par 0 partout ailleurs. Le support discret de cet opérateur exclu donc les points d'annulation des contours. Pour toute valeur de  $\mu$ , les évolutions des contours perturbés  $w_{j\mu}$  et  $w_{-j\mu}$  restent découplées.

Dans le cas de la méthode asymptotique, la fermeture est explicitement prise en compte lors de l'intégration le long des contours d'équilibre qui conduit à la formulation du problème intégral aux valeurs propres. Les perturbations relatives à deux contours d'équilibre symétriques sont astreintes à posséder le même support que les contours d'équilibre et à s'annuler aux angles limites. Cette condition aux limites couple les deux perturbations, et la nature périodique du mouvement de rebond associé aux caractéristiques "piégées" de l'équilibre est bien prise en compte.

C'est pour cette raison d'une part, et d'autre part en raison de la plus grande sélectivité spectrale (en  $\omega$ ) de la méthode asymptotique aux valeurs propres, que la majeure partie des expérimentations avec des distributions présentant des contours fermés ont été conduites. Avant que de les détailler plus avant, examinons rapidement l'effet de l'introduction de contours fermés pour le code d'intégration en temps.

La présence de contours fermés a deux conséquences (liées) sur l'opérateur d'évolution utilisé dans la méthode d'intégration en temps. D'une part, au voisinage des angles limites, les gradients poloidaux et radiaux d'un contour fermé divergent. D'autre part, la nature bornée du support en  $\vartheta$  et la prolongation par zéro entraînent l'apparition de hautes fréquences dans le développement en série de Fourier du contour, et des composantes de l'opérateur d'évolution qui en dépendent. Les conséquences sur l'évolution temporelle du système sont les mêmes : des divergences localisées aux angles limites apparaissent. Une diminution drastique du pas de temps de manière à résoudre les hautes fréquences qui apparaissent, si elle ne conduisait à un coût prohibitif de la méthode, ne permettrait pas de garantir d'obtenir le "bon" mode. En effet les irrégularités spatiales qui apparaissent dans les profils des gradients de densité et température en raison de la présence des contours fermés peuvent induire des modes réellement instables (i.e. indépendamment de la condition de stabilité) localisés aux angles limites. La réduction de ces irrégularités ne peut se faire qu'à la limite du continu à la fois en  $\mu$  ( $N_\mu \rightarrow \infty$ ) et en vitesse parallèle  $N_{bag} \rightarrow \infty$ ). Ainsi, sauf à effectuer un filtrage a priori lors de la construction de l'équilibre (ce point sera développé par la suite), ou a posteriori mais de manière très artificielle et difficile à justifier physiquement par l'introduction de termes dissipatifs ad-hoc dans les zones de fort gradient des contours, la méthode d'intégration en temps se prête mal à la prise en compte des contours fermés. Notons qu'un changement de paramétrisation prenant en compte le mouvement de rebond des particules piégées, et mettant à profit l'invariant longitudinal associé est difficilement envisageable : un contour peut être alternativement ouvert et fermé sur dans plusieurs zones contiguës du domaine radial. Les conditions de continuités aux interfaces entre ces zones rendraient impossible un traitement séparé des dynamiques respectives de chaque zone.

La méthode asymptotique en modes de ballonnement permet, par son caractère local à la fois radialement et en  $\omega$  d'examiner plus en détail l'effet de l'introduction de contours fermés dans la distribution d'équilibre.

Considérons tout d'abord le problème intégral aux valeurs propres pour un couple  $(x, \theta_{k0})$  donné, où  $x$  est tel qu'un ou plusieurs contours possèdent un angle limite. Rappelons rapidement les conséquences de la présence de contours fermés sur le noyau de l'opérateur intégral. La fermeture induit tout d'abord l'apparition de résonances sur

la fréquence de rebond et ses harmoniques. Ces résonances forment une suite discrète sur l'axe réel indépendante de  $(\eta, \theta)$ . Leur effet peut être tempéré en fixant de manière adéquate la fenêtre spectrale utilisée dans le plan complexe. Elle ne constitue donc pas un obstacle majeur à la résolution du problème, tant que la valeur propre recherchée n'est pas trop proche d'une résonance.

Un deuxième effet de la fermeture est l'apparition de singularités dues aux termes en  $1/v_{j\mu}$ . Ces singularités sont intégrables : l'évaluation numérique des intégrales  $\mathcal{I}_{j\mu}$  (Équation (5.90)) ne pose pas de problème. Les singularités apparaissant dans les préfacteurs nécessitent plus de précautions. En ce qui concerne la dépendance en  $\eta$  (variable muette d'intégration) du noyau, leur présence nécessite une résolution suffisante à permettre leur intégration. En ce qui concerne la dépendance en  $\theta$ , il y a compensation entre des singularités du numérateur de  $\mathcal{P}$  (Équation (5.83)) par celles du dénominateur  $Q$  (Équation (5.84)). Au voisinage d'un angle limite relatif à un contour fermé, la contribution de ce contour au noyau devient dominante, et s'annule immédiatement après l'angle limite. Ainsi, si les singularités en  $\theta$  ne donnent pas lieu à des divergences effectives, elles introduisent des discontinuités dans la dépendance du noyau en  $\theta$  : la nature discrète de la distribution en vitesse parallèle et en la variable  $\mu$  se traduit par une irrégularité en espace du noyau. Cet effet est du même ordre que celui observé pour les gradients des moments de la distribution d'équilibre. Sur la figure 6.33 on peut observer l'effet des singularités sur le noyau intégral pour une distribution à 11 valeurs de  $\mu$  s'échelonnant de 0 à 1.

Si les singularités n'empêchent pas l'existence d'une solution  $\hat{\phi}$  au problème intégral, elles entraînent une perte de régularité de la solution au voisinage des angles limites (Figure 6.33(d)).

Concernant l'évolution de la dépendance en  $n$  avec  $\mu$ , les tendances observées pour les distributions ne comportant que des contours ouverts se confirment. Sur la figure 6.34 on peut voir le résultat d'un balayage en  $n$  pour la résolution du problème local en  $(x = 0.5, \theta_{k0} = 0)$ . Il est important de noter qu'il s'agit ici de fréquences locales : la dépendance en  $n$  des taux globaux correspondants (non calculés ici) peut être légèrement différente. Ces variations sont cependant minimales et on peut considérer le centrage global du spectre local en  $x = 0.5$  comme représentatif de celui du spectre global. Pour cette distribution, le maximum du taux de croissance est obtenu en  $k_{\vartheta}\rho_s \approx 0.5$ , position qui se rapproche du maximum en  $k_{\vartheta}\rho_s \approx 0.35$  du cas de référence. De même l'évolution de la fréquence réelle se rapproche de celle du cas de référence  $\omega_R L_n / c_s \approx -k_{\vartheta}\rho_s$ , avec une dépendance  $\omega_R L_n / c_s \approx -0.8k_{\vartheta}\rho_s$ .

Si ces résultats locaux montrent une certaine robustesse de la méthode asymptotique à l'introduction de contours fermés, leur extension à la résolution globale pose de nouvelles difficultés. La continuité de comportement de l'opérateur en  $x$  mise à profit dans la résolution globale du problème global lorsque tous les contours sont ouverts est mise en difficulté à la fois par l'apparition de gradients radiaux importants en amont des transitions ouvert/fermé et les discontinuités en aval qui en résultent. Ces discontinuités ont jusqu'à présent empêché d'obtenir une solution globale du problème pour les quelques distributions testées. La figure 6.35 montre les dépendances radiales des fréquences locales et de l'enveloppe de la solution pour le mode  $n = 16$  lors du balayage (en parallèle) d'une bande étroite en  $x$  autour de  $x = 0.5$  pour  $\theta_{k0} = 0$ . Pour ce mode qui est le plus instable pour le scan local en  $x = 0.5$  et constitue donc a priori un cas favorable, on observe des irrégularités dans les dépendances radiales des taux de croissances, fréquences ainsi que dans la structure de l'enveloppe.

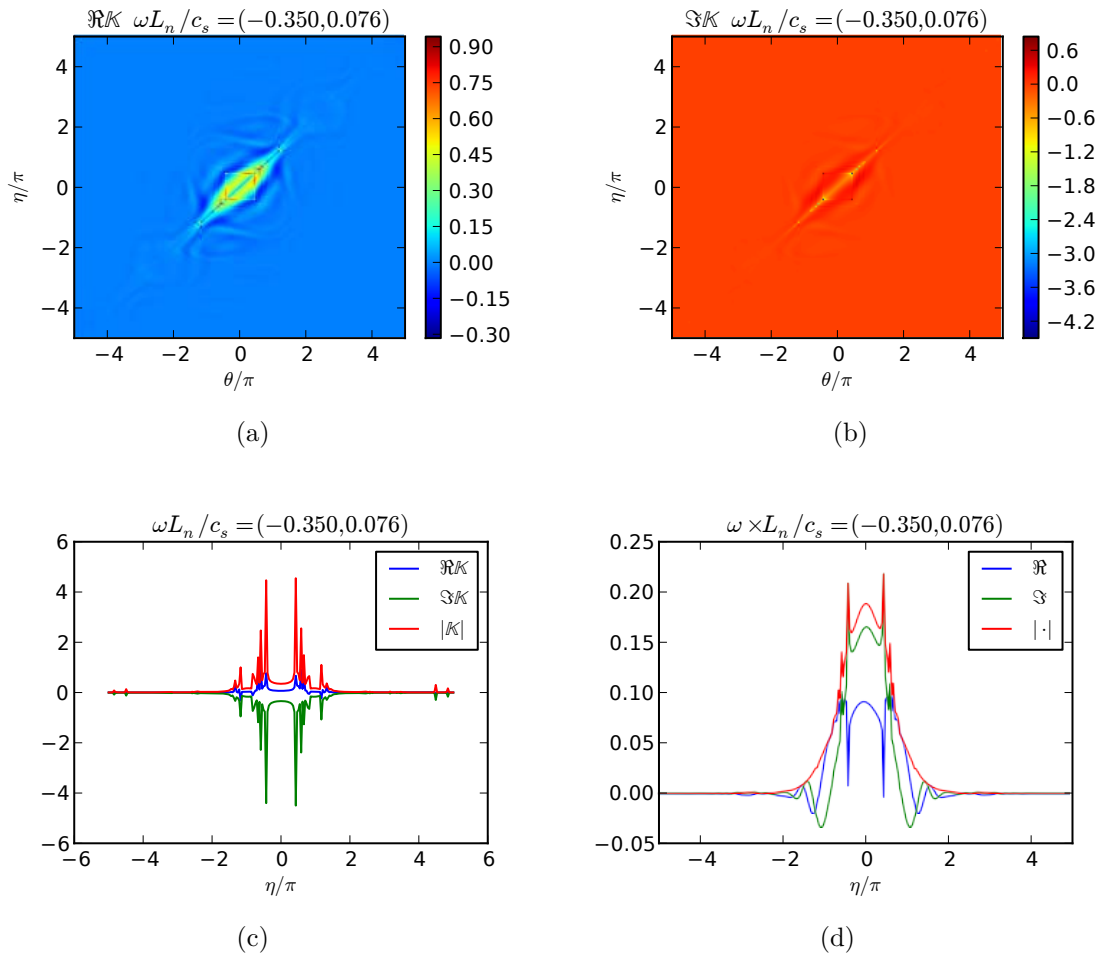


FIGURE 6.33 – Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $N_\mu = 11$ ,  $\mu \in [0; 1]$ ,  $N_\eta = 257$ ,  $p_{max} = 2$ , mode  $n = 16$  en  $(x = 0.5, \theta_{k0} = 0)$  ; partie réelle (a), imaginaire (b) et diagonale (c) du noyau pour la solution la plus instable (d)

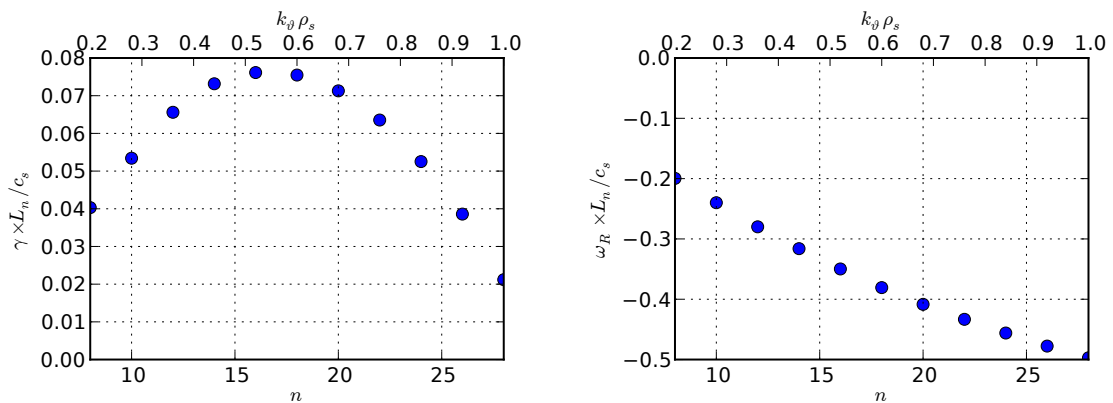


FIGURE 6.34 – Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $N_\mu = 11$ ,  $\mu \in [0; 1]$ ,  $N_\eta = 257$ ,  $p_{max} = 2$  ; dépendance en  $n$  du taux de croissance (a) et de la fréquence (b) du problème intégral aux valeurs propres en  $(x = 0.5, \theta_{k0} = 0)$

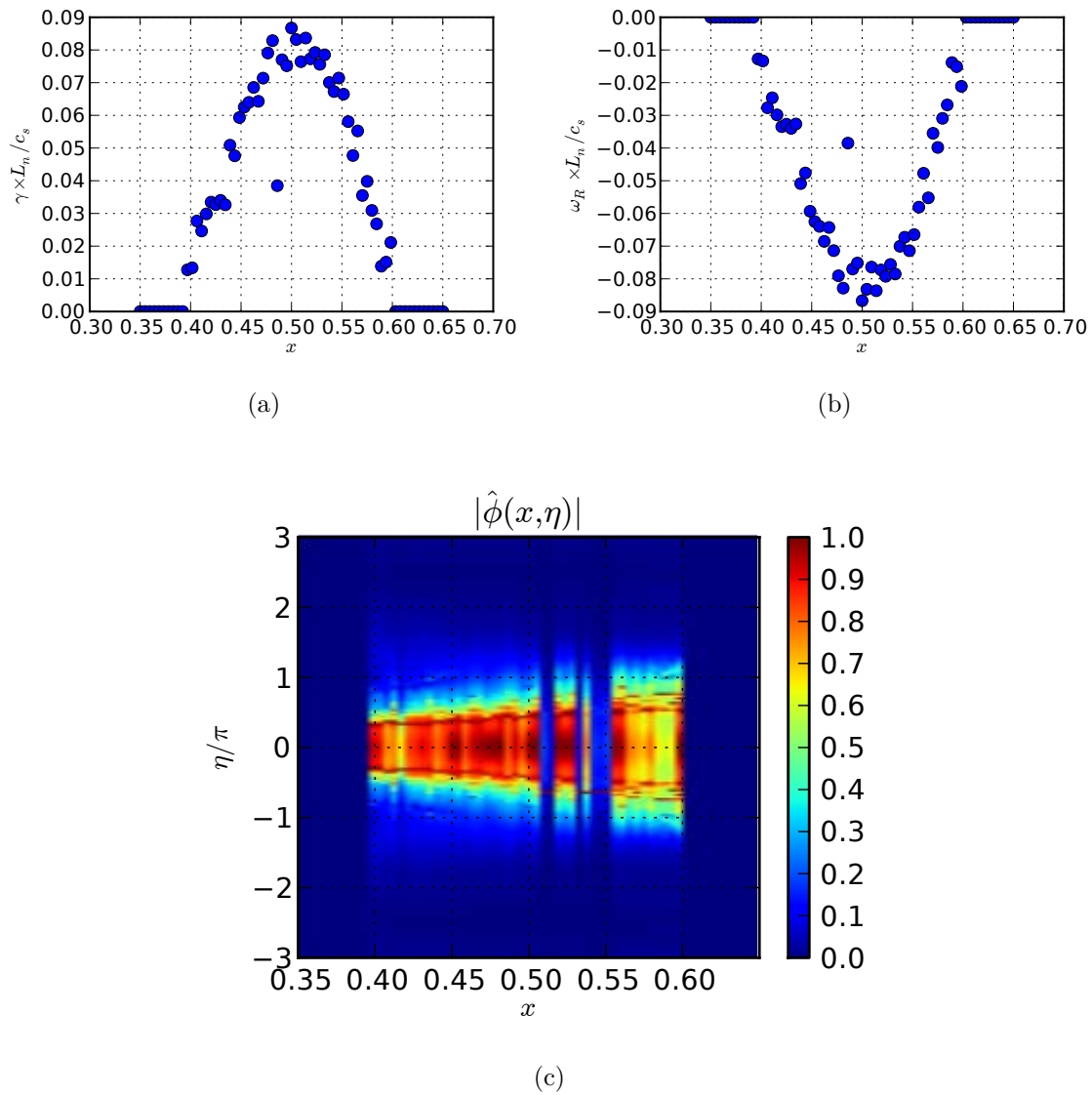


FIGURE 6.35 – Code ASYPTORO ; Cas Cyclone ;  $N_\mu = 11$ ,  $\mu \in [0; 1]$ ,  $N_\eta = 185$ ,  $p_{max} = 1$ ,  $N_x = 65$  ; mode  $n = 16$  ; dépendances radiales du taux de croissance (a) et de la fréquences (b) dans une bande radiale centré en  $x = 0.5$  pour  $\theta_{k0} = 0$  ; dépendance radiale du module de l'enveloppe  $\hat{\phi}(\eta)$  correspondant aux solutions (d)



## 6.4 Discussion des résultats - Perspectives

### 6.4.1 Discussions des résultats

Les résultats obtenus pour les distributions ne présentant pas de contours fermés pour le cas Cyclone et une distribution à 6 bags, montrent d'une part une bonne adéquation entre les deux méthodes implémentées pour la majorité des modes, et d'autre part une dépendance en  $n$  cohérente avec celle des résultats de référence. Si pour ces distributions, la faiblesse des valeurs de  $\mu$  (et en conséquence du rayon de Larmor) en regard des modèles cinétiques et fluides de référence entraîne un décalage du spectre vers les hautes fréquences par rapport aux résultats de référence, les dépendances en  $\mu$  observées montrent une tendance à la correction de ce décalage.

La prise en compte de distributions intégrant des contours fermés met en revanche en défaut les méthodes utilisées dans leur implémentation actuelle. L'annulation des contours aux angles limites introduit des singularités qui réduisent fortement la régularité des solutions (lorsqu'elles existent). La nature discrète de la distribution, à la fois en vitesse parallèle et en  $\mu$ , rejaillit sur la structure des dépendances spatiales en  $(\vartheta, r)$  du système. La méthode asymptotique permet cependant d'obtenir des solutions locales en  $(x, \theta_{k0})$  qui confirment le recentrage de la réponse en  $n$  vers le bas du spectre, et une tendance à l'adéquation avec les résultats de référence. L'extension de ces résultats à l'ensemble du domaine radial reste difficile en raison des discontinuités de comportement de l'opérateur dues au changement de topologie des contours d'équilibre sur le domaine radial.

La grande sensibilité des résultats obtenus à l'augmentation des valeurs de  $\mu$  est intimement liée à la manière dont est construite la distribution d'équilibre. Lors de la construction des contours de référence en  $\vartheta = 0$ , l'équivalence au sens des moments en vitesse parallèle implique, ainsi que dans le cas de la géométrie cylindrique, l'existence nécessaire d'un contour à faible vitesse parallèle (le premier contour). Ce premier contour, dont le sens de variation radiale est opposé à celui des contours à plus grande vitesse, est nécessaire pour traduire la différence entre les évolutions radiales de la densité et de la température, et en conséquence la valeur maximale du facteur  $\eta_i$ .

Lors de l'extension en  $\vartheta$  des contours (relation 6.2), c'est ce premier contour se fermera pour les plus petites valeurs de  $\mu$ .

La simple élimination de ce contour (ou de manière équivalente une élévation globale des contours de référence sur l'échelle des vitesses parallèles), permet d'augmenter la plage de  $\mu$  accessibles sans fermeture des contours, mais réduit par là-même le facteur  $\eta_i$  de la distribution et conduit à la stabilisation du mode.

### 6.4.2 Perspectives

Les solutions envisageables pour pallier aux difficultés rencontrées, peuvent être regroupées en deux approches, éventuellement combinables.

La première, que l'on pourrait qualifier de préventive, consiste en une amélioration de la procédure de génération de la distribution d'équilibre, de manière à contrôler plus efficacement la topologie des contours d'équilibre. On peut ainsi envisager de vouloir éliminer complètement la présence de contours fermés, ou générer des contours présentant une topologie uniforme sur le domaine radial. Ce contrôle se fera nécessairement au prix de l'introduction d'une anisotropie dans l'espace des vitesses et/ou d'une perte de fiabilité dans la représentation des gradients d'équilibre, par exemple en introduisant

des tolérances sur l'équivalence au sens des moments. La faisabilité d'une telle approche n'est pas garantie a priori et touche aux limites du modèle water-bag : le report de l'ensemble des variations de la fonction de distribution sur les variations spatiales des bags, qui constitue l'essence de la réduction water-bag, implique nécessairement de fortes contraintes sur la géométrie et la topologie des contours lorsqu'augmente la proportion de trajectoires critiques dans l'espace des phases.

La seconde approche, que l'on peut qualifier de "curative", consiste à prendre acte de la présence de contours fermés et adapter les méthodes numériques pour mieux prendre en compte ces situations. L'application de procédures de filtrage des singularités locales peut permettre de réduire l'irrégularité des solutions obtenues. Des expérimentations ont été entreprises dans ce sens, mais il reste difficile d'établir des critères "raisonnables" de filtrage qui réduisent les irrégularités sans introduire de distortion majeures dans la nature des solutions. Indépendamment de ces éventuelles procédures de filtrage, les expérimentations entreprises avec la méthode asymptotique tendent à faire espérer l'obtention de solutions globales par une amélioration de la robustesse des procédures de résolution.

# Conclusion

Nous avons envisagé au cours de ce travail l'analyse de l'instabilité de gradient de température ionique au moyen d'un modèle gyrocinétique multi-water-bag. Ainsi qu'annoncé en introduction, l'axe directeur de ce travail était la qualification de la pertinence du modèle dans le cadre d'une analyse non-locale (spatialement) des mécanismes de développement de la turbulence liée à l'instabilité ITG. Le bilan des résultats obtenus et l'évocation de quelques questions encore ouvertes se fera en conséquence dans cette perspective.

L'analyse linéaire de l'instabilité en géométrie cylindrique, dans le cadre de laquelle la comparaison avec un modèle cinétique "continu" est possible, nous a permis de caractériser le comportement des modèles multi-water-bag à petit nombre de bags. Les propriétés spectrales et géométriques de l'instabilité sont bien représentées par de tels modèles. D'un point de vue quantitatif, les divergences avec le modèle continu apparaissent au voisinage de l'extinction des modes à haute fréquence ainsi qu'au voisinage de la limite de stabilité vis à vis des gradients d'équilibre. Dans ces situations où la dynamique devient plus sensible à la structure fine de la fonction de distribution, la nature fortement discrète des modèles multi-water-bag à petit nombre de bags induit des écarts par rapport à la référence continue. Ce phénomène n'est pas spécifique au modèle multi-water-bag : un traitement adéquat de la dynamique des résonances Landau au voisinage de la stabilité marginale nécessite pour tout modèle discret un échantillonnage suffisant en vitesse parallèle. Cette restriction posée, l'insistance que nous avons portée sur la détermination des écarts au modèle continu ne doit cependant pas masquer le bon accord observé pour une grande partie du spectre.

Cet accord nous a conduit à poursuivre l'analyse du développement de l'instabilité au moyen de simulations numériques non-linéaires. Outre la mise en évidence au moyen de diagnostics appropriés de l'évolution globale du spectre turbulent et des écoulements zonaux, nous avons examiné par la confrontation de trois modèles dynamiques le mécanisme de saturation initiale de l'instabilité. Si le nombre et la spécificité des cas d'étude envisagés ne nous permettent en aucun cas de proposer des affirmations générales quant à ces mécanismes, nous avons pu mettre en lumière les limites d'une approche de la dynamique fondée sur les données d'analyse linéaire.

L'extension du modèle multi-water-bag à la fois dans l'espace des vitesses par la prise en compte de la distribution en moment magnétique et dans l'espace réel par l'utilisation d'une configuration magnétique torique (introduisant à la fois les effets de la courbure et la variation d'intensité du champ de confinement) nous a conduit plus près des limites du modèle multi-water-bag étendu en espace. Lorsque la distribution d'équilibre est restreinte de manière à proscrire l'existence de contours critiques (fermés), les deux méthodes d'analyse linéaire développées et implémentées permettent d'obtenir des caractéristiques spectrales et géométriques des modes les plus instables présentant un bon accord qualitatif avec la littérature. Cette restriction topologique

limite cependant l'étendue de la distribution en vitesse perpendiculaire et minore notamment l'influence sur le spectre de l'instabilité des effets de rayon de Larmor fini induits par la gyromoyenne.

Les résultats obtenus en admettant cette fois l'existence de contours critiques font apparaître un transfert de l'irrégularité de la distribution en vitesse vers les dépendances spatiales des solutions obtenues. Outre les difficultés qui en résultent pour le traitement numérique du modèle, la présence de variations rapides des contours d'équilibres critiques met en défaut l'ordering gyrocinétique.

Ainsi est mise en évidence une propriété inhérente à la réduction multi-water-bag. Le transfert de l'ensemble des variations de la fonction de distributions dans l'espace des phases aux variations spatiales des contours des bags, qui permet la réduction, conduit à l'apparition de contraintes fortes sur la géométrie et la topologie des contours. En géométrie cylindrique, le recourt à des distributions présentant des contours critiques a été évité par l'utilisation de l'équivalence au sens des moments. L'interdiction de contours critiques combinée à une bonne représentation des variations spatiales limite cependant la résolution accessible en vitesse parallèle, dont l'augmentation amène à un croisement des contours. En géométrie torique, il semble difficile d'éviter la présence de contours critiques tout en maintenant une représentation adéquate à la fois de l'espace des vitesses et des variations spatiales de la fonction de distribution.

Deux axes de travail principaux peuvent être envisagés pour améliorer les performances du modèle. Une première approche est le développement d'une méthode plus souple de génération des distributions d'équilibre, relaxant les contraintes fortes de la méthode d'équivalence au sens des moments. S'il est peu probable, au vue des contraintes sur les moments imposés par la structure des distributions multi-water-bag, que l'on puisse générer des distributions ne contenant aucun contour critique tout en maintenant une adéquation fine des variations spatiales de l'équilibre considéré, on peut pour le moins espérer étendre le champ des situations physiques pertinentes accessibles à une modélisation water-bag. Une seconde approche consiste en la prise en compte explicite de l'existence de contours critiques, comme cela a été fait dans le cadre du modèle asymptotique en géométrie torique. La possibilité d'un traitement numérique adéquat et efficace de ces situations complexes (divergence des gradients, transitions de topologie en espace et dans le temps) reste une question ouverte.

Les limitations du modèle multi-water-bag étendu en espace et les deux axes de recherche évoqués concernent une utilisation du modèle dans un cadre où l'on veut pouvoir prescrire de manière précise l'ensemble des caractéristiques de la situation physique. Lorsqu'une approche plus phénoménologique est envisagée, et que ces contraintes peuvent être relâchées, le modèle multi-water-bag peut être un outil pertinent pour l'étude des propriétés génériques de la dynamique turbulente dans un cadre cinétique, avec un coût comparable à celui des modèles fluides.

# Annexe A

## Dérive de polarisation

Le traitement présenté ici est classique, à la différence qu'aucune hypothèse n'est faite sur la nature de la fonction de distribution. La position dans l'espace des phases des centres-guides est repérée par  $Z = (\mathbf{X}, v_{\parallel}, \mu, \xi)$  et la position des particules par  $\mathbf{x}$ . La fonction de distribution des centres guides, perturbation comprise, est notée  $F$ . L'opérateur  $\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne sur le gyroangle  $\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{2\pi}$ . L'opérateur de gyromoyenne est noté  $J_{\mu}$ .

La densité dans l'espace réel s'exprime par

$$n(\mathbf{x}) = \int d^6 Z \delta(\mathbf{X} - \mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}) \left( \underbrace{F(\mathbf{X})}_1 + \underbrace{\frac{q_i}{B} (\phi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}) - \langle \phi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}') \rangle)}_2 \partial_{\mu} F(\mathbf{X}) \right). \quad (\text{A.1})$$

La densité totale peut être séparée en deux contributions correspondant aux termes notés 1 et 2 dans (A.1). La première contribution est la densité des centres guides

$$\tilde{n}(\mathbf{x}) = \int d^6 Z \delta(\mathbf{X} - \mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}) F(\mathbf{X}) = \int 2\pi d\mu dv_{\parallel} \langle F(\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho}) \rangle(\mathbf{x}) = \int 2\pi B d\mu dv_{\parallel} (J_{\mu} F)(\mathbf{x}). \quad (\text{A.2})$$

La seconde est la densité de polarisation

$$n_{pol} = \int d^3 v q_i \left( \underbrace{\phi(\mathbf{x})}_1 - \underbrace{\langle \phi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}') \rangle(\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho})}_2 \right) \left( \frac{\partial_{\mu} F}{B} \right) (\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho}), \quad (\text{A.3})$$

que nous séparons en  $n_{pol} = I_1 + I_2$  correspondant aux contributions des termes 1 et 2 de (A.3). On pose  $G = F/B$ . Les fonctions  $\phi$  et  $G$  sont exprimées à partir de leur transformée de Fourier en espace à savoir

$$\phi(\mathbf{x}) = \int d^3 k \phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{A.4})$$

et de même pour  $G$ . Avant que de calculer ces contributions, il est utile d'établir les expressions pour deux types d'intégrales sur le gyroangle qui apparaîtront dans la suite des calculs.

$$I_g(\mathbf{k}, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi e^{i\mathbf{k}\cdot\rho}, \quad (\text{A.5})$$

et

$$\mathbf{I}_{g\rho} = \frac{1}{2\pi} \int d\xi \boldsymbol{\rho} e^{i\mathbf{k}\cdot\rho} \quad (\text{A.6})$$

Soit  $\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$ . En choisissant comme base perpendiculaire locale  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  tels que  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{k}_\perp/k_\perp$  et  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{b}$ , il vient  $\rho = \rho(\cos \xi_1 + \sin \xi_2)$  et on obtient

$$I_g(\mathbf{k}, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi e^{ik_\perp \rho \sin \xi} = J_0(k_\perp \rho), \quad (\text{A.7})$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0, et

$$\mathbf{I}_{g\rho}(\mathbf{k}, \rho) = \frac{\rho}{2\pi} \left[ \underbrace{\int d\xi \cos \xi e^{-ik_\perp \rho \sin \xi}}_0 \mathbf{e}_1 + \int d\xi \sin \xi e^{-ik_\perp \rho \sin \xi} \mathbf{e}_2 \right], \quad (\text{A.8})$$

soit

$$\mathbf{I}_{g\rho}(\mathbf{k}, \rho) = \frac{\rho}{2\pi} \frac{-1}{i} \frac{d}{dk_\perp \rho} \int e^{-ik_\perp \rho \sin \xi} d\xi \mathbf{e}_2 = -i\rho J_1(k_\perp \rho) \frac{\mathbf{k}_\perp}{k_\perp} \quad (\text{A.9})$$

Le terme  $I_1$  s'explique en

$$I_1(\mathbf{x}) = \int d^3k \int d^3k' \int dv_\parallel d\mu B q_i e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \phi(\mathbf{k}) \partial_\mu G(\mathbf{k}') \int_0^{2\pi} d\xi e^{i\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\rho}}, \quad (\text{A.10})$$

d'où

$$I_1(\mathbf{x}) = \int d^3k d^3k' dv_\parallel d\mu 2\pi B q_i \phi(\mathbf{k}) \partial_\mu G(\mathbf{k}') \mathcal{K}_1(\mathbf{k}', \rho) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{A.11})$$

avec

$$\mathcal{K}_1(\mathbf{k}', \rho) = J_0(k'_\perp \rho). \quad (\text{A.12})$$

Le passage en Fourier pour  $\phi$ , superflu à priori pour  $I_1$  a été effectué en prévision de la combinaison avec  $I_2$ . Examinons maintenant le terme 2 de (A.3).

$$\langle \phi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}^\dagger) \rangle(\mathbf{X}) = \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}} \phi(\mathbf{k}) J_0(k_\perp \rho^\dagger), \quad (\text{A.13})$$

soit pour  $\mathbf{X} = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho})$

$$\langle \phi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}^\dagger) \rangle(\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho}) = \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho})} \phi(\mathbf{k}) J_0(k_\perp \rho^\dagger), \quad (\text{A.14})$$

où le rayon  $\rho^\dagger$  est calculé en  $\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho}$ .

$$\frac{\rho^\dagger}{\rho} = \sqrt{\frac{B(\mathbf{x})}{B(\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho})}} \approx 1 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \ln B + \mathcal{O}(\epsilon_B^2), \quad (\text{A.15})$$

avec  $\epsilon_B = \frac{\rho}{L_B}$ . En développant on obtient

$$J_0(k_\perp \rho^\dagger) = J_0(k_\perp \rho) - J_1(k_\perp \rho) \frac{k_\perp \rho}{2} \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \ln B \quad (\text{A.16})$$

Posons  $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} + \mathbf{k}'$ . La correction due au gradient de  $B$  introduit une dépendance dans le gyroangle. La contribution  $I_2$  à la densité de polarisation s'explique alors en

$$I_2(\mathbf{x}) = \int d^3k d^3k' d\mu dv_\parallel 2\pi q_i B e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x}} \phi(\mathbf{k}) \partial_\mu G(\mathbf{k}') \mathcal{K}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \rho), \quad (\text{A.17})$$

avec

$$\mathcal{K}_2 = J_0(k_\perp \rho) J_0(k''_\perp \rho) + i J_1(k_\perp \rho) \frac{k_\perp \rho}{2} J_1(k''_\perp \rho) \frac{\rho \mathbf{k}''_\perp}{k''_\perp} \cdot \nabla \ln B \quad (\text{A.18})$$

Le terme correctif d'ordre  $(k_{\perp}\rho)^2(k'_{\perp}\rho)\epsilon_B$  sera par la suite négligé. En regroupant (A.11) et (A.17) obtient

$$n_{pol}(\mathbf{x}) = \int d^3k d^3k' dv_{\parallel} d\mu 2\pi B q_i \phi(\mathbf{k}) \partial_{\mu} G(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \mathcal{K}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \rho), \quad (\text{A.19})$$

où le noyau de convolution  $\mathcal{K}$  est

$$\mathcal{K}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \rho) = J_0(k'_{\perp}\rho) - J_0(k_{\perp}\rho)J_0(k'_{\perp}\rho). \quad (\text{A.20})$$

En intégrant par partie en  $\mu$  on a :

$$\int d\mu \partial_{\mu} G(\mathbf{k}) \mathcal{K}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \rho) = \underbrace{[GK]_0^{+\infty}}_0 - \int d\mu G \partial_{\mu} \mathcal{K} \quad (\text{A.21})$$

On suppose maintenant que les variations du potentiel perturbé  $\phi$  et de  $G$  sont telles que  $k_{\perp}\rho < 1$  et  $k'_{\perp}\rho < 1$ . Le noyau  $\mathcal{K}$  se développe à l'ordre 2 en

$$\mathcal{K}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \rho) = \frac{(k_{\perp}\rho)^2}{4} + \frac{(k'_{\perp}\rho)^2}{4} - \frac{(k'_{\perp}\rho)^2}{4} = \frac{\rho^2}{2} \mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{k}_{\perp} + \mathbf{k}'_{\perp}). \quad (\text{A.22})$$

et en utilisant le fait que  $\partial_{\mu}\rho^2 = 2B/m_i\Omega_{CI}^2$  on obtient

$$\partial_{\mu} \mathcal{K} = \frac{B}{m_i\Omega_{CI}^2} \mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{k}_{\perp} + \mathbf{k}'_{\perp}) \quad (\text{A.23})$$

et la densité de polarisation devient

$$n_{pol}(\mathbf{x}) = -\frac{2\pi m_i}{q_i} \int d^3k d^3k' dv_{\parallel} d\mu \phi(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{k}_{\perp} + \mathbf{k}'_{\perp}) \quad (\text{A.24})$$

L'intégration du terme en  $k_{\perp}^2$  conduit à

$$n_1 = \frac{1}{\Omega_{CI}} \int d^3k k_{\perp}^2 \phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \underbrace{\int 2\pi B d\mu dv_{\parallel} \underbrace{\int d^3k' G(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}}_{G(\mathbf{x})}}_{n(\mathbf{x})/B(\mathbf{x})} = \frac{n}{B\Omega_{CI}} \nabla_{\perp} \cdot (\nabla_{\perp} \phi) \quad (\text{A.25})$$

L'intégration du terme en  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'$  donne

$$n_2 = \frac{1}{\Omega_{CI}} \int 2\pi B d\mu dv_{\parallel} \underbrace{\int d^3k' \mathbf{k}'_{\perp} G(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}}_{-i\nabla_{\perp}(F/B)} \cdot \underbrace{\int d^3k \mathbf{k}_{\perp} \phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}_{-i\nabla_{\perp}\phi} \quad (\text{A.26})$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\nabla_{\perp}(n/B)}$$

$$n_2 = \frac{1}{\Omega_{CI}} \left( \nabla_{\perp} \frac{n}{B} \right) \cdot (\nabla_{\perp} \phi) = \left[ \nabla_{\perp} \left( \frac{n}{B\Omega_{CI}} \right) - \frac{n}{B\Omega_{CI}} \nabla_{\perp} \ln B \right] \cdot \nabla_{\perp} \phi \quad (\text{A.27})$$

L'ordering  $k_{\perp} \gg \frac{1}{L_B}$  permet de négliger le terme en  $\nabla_{\perp} B$  et d'exprimer la densité de polarisation sous la forme conservative habituelle

$$n_{pol}(\mathbf{x}) = \nabla_{\perp} \cdot \left( \frac{n}{B\Omega_{CI}} \nabla_{\perp} \phi \right) \quad (\text{A.28})$$

Il est important de noter que la densité est ici la densité totale et non la densité d'équilibre. L'expression est par la suite linéarisée à l'ordre 1 en perturbation. L'approximation consistant à négliger le terme en  $\nabla_{\perp} B$  dans (A.27) ne devrait en toute rigueur plus être valable car  $L_{n_0}$  et  $L_B$  sont du même ordre a priori. Dans la limite de grand rapport d'aspect  $\epsilon_B \ll \epsilon_n$ , elle devient cependant valide. Il est difficile d'établir à partir de la littérature ([8, 77, 38, 24]) si le caractère conservatif de (A.3), nécessaire pour assurer la conservation de la charge et de l'énergie, est imposé de manière parfaitement rigoureuse ou si les variations spatiales de  $B$ ,  $\Omega_{CI}$ ,  $\rho_i$  sont parfois négligées.





## Annexe B

# Résolution de l'équivalence exacte pour $2N$ moments par une méthode aux valeurs propres

Dans le cas de l'équivalence locale, comme cela est fait dans [10] pour des distributions en module de la vitesse, il est possible d'exhiber un ensemble particulier de noeuds et poids maximisant l'ordre le plus haut d'équivalence. La technique est un cas particulier d'une méthode plus générale de résolution des système d'équations polynomiales qui consiste à associer au problème polynomial un problème aux valeurs propres dans un espace de grande dimension (voir [63, 14, 2]). Considérons le problème (2.26) jusqu'à l'ordre  $4N - 2$ , soit un système de  $2N$  equations polynomiales pour les noeuds  $V_j$ . Pour tout  $p$  tel que  $0 \leq p \leq N - 1$ , on peut extraire  $N + 1$  equations consécutives de l'ordre  $2p$  à l'ordre  $2(p + N)$  et on obtient ainsi pour tout  $k$  tel que  $0 \leq k \leq N$

$$\sum_j A_j V_j^{2p+2k+1} = \mathcal{M}_{2(p+k)}^{\mathcal{M}}, \quad (\text{B.1})$$

soit

$$\sum_j A_j V_j^{2k+1} V_j^{2p} = \mathcal{M}_{2(p+k)}^{\mathcal{M}}. \quad (\text{B.2})$$

Soit  $\mathcal{V}$  la matrice de Vandermonde de taille  $N$  construite à partir des noeuds  $V_j^2, j = 1, N$ . Tant que les noeuds  $V_j^2$  sont distincts deux à deux,  $\mathcal{V}$  est inversible. Soient  $\nu_{pj}$  les coefficients de  $\mathcal{V}^{-1}$ . On peut alors réécrire l'équation (B.2) comme

$$A_j V_j^{2k+1} = \sum_p \nu_{pj} \mathcal{M}_{2(p+k)}^{\mathcal{M}}, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (\text{B.3})$$

En réécrivant (B.3) au rang  $k + 1$  pour  $0 \leq k \leq N - 1$  on obtient

$$\sum_p \nu_{pj} \mathcal{M}_{2(p+k+1)}^{\mathcal{M}} = A_j V_j^{2(k+1)+1} = V_j^2 A_j V_j^{2k+1} = V_j^2 \sum_p \nu_{pj} \mathcal{M}_{2(p+k)}^{\mathcal{M}} \quad (\text{B.4})$$

Des équations (B.3) et (B.4) on déduit pour tout  $k$  tel que  $0 \leq k \leq N - 1$

$$\sum_p \nu_{pj} \mathcal{M}_{2(p+k+1)}^{\mathcal{M}} = V_j^2 \sum_p \nu_{pj} \mathcal{M}_{2(p+k)}^{\mathcal{M}}. \quad (\text{B.5})$$

Les noeuds  $V_j^2$  sont en conséquence les valeurs propres d'un problème aux valeurs propres généralisé  $H_1 - \lambda H_0 = 0$  où  $H_1$  et  $H_0$  les matrices de Hankel construites à

partir des moments modifiés  $\mathcal{M}_p^M$ . Pour les petites valeurs de  $N$ , ce problème peut être résolu pour obtenir les noeuds. Les poids  $A_j$  sont alors calculés en résolvant (2.26) pour les  $N$  premiers moments. Les poids obtenus sont positifs pour  $N \leq 7$ , mais commencent à osciller pour  $N \geq 8$ . Ces noeuds peuvent ainsi fournir un bon point de départ pour l'analyse locale pour  $N \leq 7$ , mais les distributions ainsi construites présentent de faibles possibilités d'extension non-locale, ce qui limite l'étendue des situations physiques accessibles.

# Annexe C

## Conditions d'extension de l'équivalence exacte au sens des moments

Nous allons ici démontrer que les moments en vitesse parallèle d'une distribution Multi-Water-Bag vérifient des inégalités provenant exclusivement de la structure algébrique de la distribution et indépendants des moments de références utilisés pour l'équivalence au sens des moments. Lors de la construction d'une distribution Multi-Water-Bag par équivalence au sens des moments, les inégalités seront transférées de l'espace des moments water-bag au sous-espace des moments de référence compatibles, c'est à dire vérifiant ces inégalités. Au travers des dépendances spatiales de moments de références, cette restriction de l'espace des moments accessibles implique une restriction de l'extension spatiale de l'équivalence au sens des moments. Rappelons tout d'abord que l'expression du moment Multi-Water-Bag d'ordre  $2p$  pour une distribution symétrique est

$$\mathcal{M}_{2p}^{MWB} = \sum_{j=1}^N 2A_j \frac{V_j^{2p+1}}{2p+1}, \quad (\text{C.1})$$

où  $A_j > 0, V_j > 0$ . Les  $V_j$  sont notés en majuscules afin de mettre l'accent sur le fait que nous ne considérons pas ici les  $V_j$  en tant que champs scalaires sur l'espace réel mais les moments Water-Bag en tant que fonctions des contours positifs  $V_j, j \in [1, N]$ , considérés comme des points de  $\mathbb{R}^N$ . Conséquemment, la sommation sur les indices des contours s'effectue par défaut de 1 à  $N$ . Afin de simplifier les notations on note  $A = (A_1, A_2, \dots, A_N) \in (\mathbb{R}^{+*})^N$  et  $V = (V_1, V_1, \dots, V_N) \in \mathbb{R}^N$ . Afin d'éviter toute confusion avec les indices de coordonnées, il sera fait usage pour l'indexation de suites discrètes de points de  $\mathbb{R}^N$  d'exposants entre parenthèses ( $V^{(i)}$  par exemple).

### C.1 Inégalité générale vérifiée par les moments Water-Bag

$A \in (\mathbb{R}^{+*})^N$  étant donné, on définit l'application  $\mathcal{L}_{p,A} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$  par

$$\mathcal{L}_{p,A}(V) = \left( \mathcal{M}_{2p}^{MWB} \right)^{\frac{1}{2p+1}} = \left( \sum_j 2A_j \frac{V_j^{2p+1}}{2p+1} \right)^{\frac{1}{2p+1}}. \quad (\text{C.2})$$

Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{L}_{p,A}$  définit une  $2p + 1$ -norme pondérée sur  $\mathbb{R}^N$ . Toutes les normes étant équivalentes sur  $\mathbb{R}^N$ , on en déduit que pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $p \neq q$  il existe  $(m_{A,p,q}, M_{A,p,q}) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$  satisfaisant pour tout  $V \in \mathbb{R}^N$  les inégalités

$$m_{A,p,q} \mathcal{L}_{q,A}(V) < \mathcal{L}_{p,A}(V) < M_{A,p,q} \mathcal{L}_{q,A}(V), \quad (\text{C.3})$$

d'où l'on déduit la condition générale sur les moments Water-Bag

$$m_{A,p,q}^{2p+1} \left( \mathcal{M}_{2q}^{MWB} \right)^{\frac{2p+1}{2q+1}} < \mathcal{M}_{2p}^{MWB} < M_{A,p,q}^{2p+1} \left( \mathcal{M}_{2q}^{MWB} \right)^{\frac{2p+1}{2q+1}}. \quad (\text{C.4})$$

## C.2 Définitions de bornes explicites

### C.2.1 Propriétés générales

La condition (C.4) est trop générale pour fournir des restrictions utiles en pratique, attendu qu'elle a été établie dans tenir compte d'aucune restriction sur  $V$ . Nous allons établir maintenant des conditions plus restrictives en prenant en compte des contraintes sur l'espace des  $V$  admissibles : nous allons d'une part limiter l'étendue en vitesse parallèle et d'autre part contrôler la distance minimale entre deux contours par l'ajout de paramètres de contrôles. A partir de (C.4), nous allons définir une famille de fonctions dont les valeurs extrémales fournissent les bornes recherchées. Cette approche nous permet de reformuler le problème comme un problème d'optimisation et de mettre à profit le formalisme éprouvé de la théorie de l'optimisation.

**Définition 2.** De (C.4) on définit sur  $(\mathbb{R}^{+*})^N$  l'application  $\mathcal{F}_{A,p,q}$  par

$$\mathcal{F}_{A,p,q}(V) := \left( \frac{\mathcal{L}_{p,A}(V)}{\mathcal{L}_{q,A}(V)} \right)^{(2p+1)(2q+1)} = \frac{(q + \frac{1}{2})^{2p+1} \left( \sum_j A_j V_j^{2p+1} \right)^{2q+1}}{(p + \frac{1}{2})^{2q+1} \left( \sum_j A_j V_j^{2q+1} \right)^{2p+1}}. \quad (\text{C.5})$$

Les bornes recherchées sont les extrema de  $\mathcal{F}$  sur un sous-espace de  $(\mathbb{R}^{+*})^N$  défini en adéquation avec les contraintes. Attendu que  $\mathcal{F}_{A,p,q} = \frac{1}{\mathcal{F}_{A,q,p}}$ , on peut en toute généralité se restreindre au cas  $q > p$ . Les cas  $p > q$  s'obtiennent par simple inversion des inégalités.

**Propriété 1.** Les  $\mathcal{F}_{A,p,q}$  sont invariantes d'échelle (homogènes de degré 0). Pour tout  $(p, q)$  tel que  $p \neq q$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  on a

$$\mathcal{F}_{A,p,q}(\lambda V) = \mathcal{F}_{A,p,q}(V). \quad (\text{C.6})$$

un corollaire de la proposition précédente (en dérivant par rapport à  $\lambda$ ) est que pour tout  $V$

$$V \cdot \nabla \mathcal{F}_{A,p,q}(V) = 0. \quad (\text{C.7})$$

**Propriété 2.** Pour tout  $k \in [1, N]$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{A,p,q}}{\partial V_k} = 0 \Leftrightarrow V_k = \left( \frac{\sum_q}{\sum_p} \right)^{\frac{1}{2(q-p)}}, \quad (\text{C.8})$$

où  $\Sigma_i := \sum_{j=1}^N A_j V_j^{2i+1}$ ,  $i = p, q$ .

*Démonstration.*

$$\frac{1}{\mathcal{F}_{A,p,q}} \frac{\partial \mathcal{F}_{A,p,q}}{\partial V_k} = (2p+1)(2q+1)A_k \left( \frac{V_k^{2p}}{\Sigma_p} - \frac{V_k^{2q}}{\Sigma_q} \right) \quad (\text{C.9})$$

En prenant en compte le fait que  $\mathcal{F}_{A,p,q} \neq 0$  et  $V \in (\mathbb{R}^{+*})^N$  on a

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{A,p,q}}{\partial V_k} = 0 \iff V_k = \left( \frac{\Sigma_q}{\Sigma_p} \right)^{\frac{1}{2(q-p)}} \quad (\text{C.10})$$

□

De la propriété précédente et de l'expression des composantes du gradient, on déduit les propriétés énoncées ci-après.

**Propriété 3.** *Soit  $V \in (\mathbb{R}^{+*})^N$  and  $1 \leq j, j' \leq N$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

$$\begin{aligned} \{(\nabla \mathcal{F}_{A,p,q})_j > 0 \text{ et } (\nabla \mathcal{F}_{A,p,q})_{j'} < 0\} &\iff V_{j'} > V_j \\ \{(\nabla \mathcal{F}_{A,p,q})_j = 0 \text{ et } (\nabla \mathcal{F}_{A,p,q})_{j'} = 0\} &\iff V_{j'} = V_j \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Dans les cas pour lesquels  $q < p$  le sens de l'inégalité est inversé pour la première proposition.

**Propriété 4.** *Soit  $V \in (\mathbb{R}^{+*})^N$ .*

$$\mathcal{F}_{a,p,q}(V) = 0 \iff V \in \text{span}[1, 1, \dots, 1] \cap (\mathbb{R}^{+*})^N. \quad (\text{C.12})$$

*Démonstration.* La condition d'annulation de la  $k^{\text{ième}}$  composante du gradient implique que  $V_k$  aie une valeur indépendante de  $k$ . Si  $N > 1$ , le gradient peut s'annuler seulement si  $V_k = V'_k, \forall k, k'$  c'est à dire sur le sous-espace de dimension 1 engendré par  $[1, 1, 1, \dots, 1]$ , où tous les contours se croisent. La propriété d'invariance d'échelle implique que les points critiques sur  $\text{span}[1, 1, \dots, 1]$  sont dégénérés. □

## C.2.2 Bornes de $\mathcal{F}_{A,p,q}$ sous contraintes

La validité de la réduction Multi-Water-Bag suppose d'une part que les  $V_k$  restent distincts et strictement positifs. Cette restriction est formalisée par l'introduction d'une borne inférieure  $V_0$  pour la valeur du premier contour  $V_1$  et d'une borne inférieure  $\epsilon$  pour la distance entre contours. Nous voulons en outre éviter de considérer des distributions dont le support en vitesse parallèle s'étend indéfiniment : on impose donc un majorant  $V_M$  au dernier contour  $V_N$ . Ces contraintes posées, nous pouvons reformuler la recherche des extrema de  $\mathcal{F}_{A,p,q}$  sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes. Suivant la notation standard en théorie de l'optimisation, les  $N+1$  fonctions de contraintes d'inégalités sont notées  $g_i(V)$  (les contraintes d'égalités  $h_i(V)$  sont dans notre cas absentes).

**Définition 3.** *Explicitons tout d'abord les expressions des contraintes*

$$\begin{aligned} g_1(V) &:= V_0 - V_1 & , \quad i = 1 \\ g_i(V) &:= V_{i-1} - V_i + \epsilon & , \quad i = 2, \dots, N \\ g_{N+1}(V) &:= V_N - V_M & , \quad i = N + 1 \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

La Jacobienne correspondante est la matrice de taille  $(N+1) \times N$ , notée  $(\nabla g)^T$ , dont la  $i^{\text{eme}}$  ligne est  $(\nabla g_i)^T$ . Ses composantes s'explicitent trivialement à partir de la définition des  $g_i$ . Pour tout  $j$  tel que  $1 \leq j \leq N$  on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial V_j} &= -\delta_j^1, & i=1 \\ \frac{\partial g_i}{\partial V_j} &= \delta_j^{i-1} - \delta_j^i, & i=2, \dots, N \\ \frac{\partial g_{N+1}}{\partial V_j} &= \delta_j^N, & i=N+1. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Pour alléger les notations, on note par la suite  $\mathcal{F}_{A,p,q} = f$  avec  $q > p$  et  $\mathcal{C} := (\mathbb{R}^{+*})^N$ . Le problème consistant à minimiser  $f$  devient

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min_V f \\ \text{s.t.} \quad & g \leq 0 \\ & V \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Le problème  $(P^*)$  de recherche d'un maximum peut être défini de manière similaire en minimisant  $f^* = \mathcal{F}_{A,q,p} = 1/f, q > p$ . Les démonstrations des résultats qui suivent seront explicitées seulement pour le problème  $P$ . Les éventuelles modifications à apporter pour  $P^*$  (inversions d'inégalités) seront mentionnées le cas échéant. Rappelons tout d'abord les conditions nécessaires d'optimalité au premier ordre, dites conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), pour l'existence d'un minimum local en l'absence de contraintes d'égalité.

**Théorème 1.** *Soit  $\bar{V}$  un point admissible (c'est à dire vérifiant  $g(\bar{V}) \leq 0$ ) de  $P$ . Si  $\bar{V}$  est un minimum local alors il existe  $\lambda \in (\mathbb{R}^+)^{N+1}$  tel que*

$$\begin{aligned} \nabla f + (\nabla g)^T \lambda &= 0, \\ \lambda_i &\geq 0, & i=1, \dots, N+1 \\ \lambda_i g_i(\bar{V}) &= 0, & i=1, \dots, N+1. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Les gradients des contraintes étant des constantes, la première des conditions s'exprime de manière simple sous la forme

$$(\nabla f)_j(\bar{V}) + \lambda_{j+1} - \lambda_j = 0, \quad j=1, \dots, N. \quad (\text{C.17})$$

Nous allons maintenant établir quelques propriétés de  $f$  pour les points admissibles de  $P$ .

**Propriété 5.** *Soit  $\bar{V}$  un point admissible de  $P$ . Alors*

$$(\nabla f)_1(\bar{V}) > 0, \quad (\text{C.18})$$

$$(\nabla f)_N(\bar{V}) < 0. \quad (\text{C.19})$$

*Démonstration.* Supposons que  $\frac{\partial f}{\partial V_1} \leq 0$ . Alors selon la propriété 3, pour tout  $j > 1$  on a  $\frac{\partial f}{\partial V_j} < 0$ , et ainsi  $\sum_j V_j \frac{\partial f}{\partial V_j} < 0$ , en contradiction avec la propriété d'invariance d'échelle  $\sum_j V_j \frac{\partial f}{\partial V_j} = 0$ . La seconde inégalité est prouvée de manière similaire.  $\square$

**Propriété 6.** *Soit  $\bar{V}$  un point admissible de  $P^*$ . Alors*

$$(\nabla f)_1(\bar{V}) < 0 \quad (\text{C.20})$$

$$(\nabla f)_N(\bar{V}) > 0 \quad (\text{C.21})$$

**Propriété 7.** Soit  $\bar{V}$  un point admissible de  $(P)$  (resp.  $(P^*)$ ). Si il existe  $j_1$  tel que  $(\nabla f)_{j_1}(\bar{V}) = 0$ , alors il est unique.

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $j_2 \neq j_1$  tel que  $\frac{\partial f}{\partial V_{j_2}} = 0$ . De la propriété 2 on déduit que  $V_{j_1} = V_{j_2}$ , en contradiction avec l'hypothèse que  $\bar{V}$  est admissible, puisqu'au moins une contrainte est violée.  $\square$

Des deux précédentes propriétés nous déduisons le signe des composantes du gradient de  $f$ .

**Propriété 8.** Soit  $\bar{V}$  un point admissible de  $(P)$ . il existe un unique  $j_1$ , tel qu'une et une seule des propositions suivantes est vraie ?

- pour tout  $j$  tel que  $j < j_1$ ,  $(\nabla f)_j > 0$  et pour tout  $j \geq j_1$ ,  $(\nabla f)_j < 0$ .
- pour tout  $j$  tel que  $j < j_1$ ,  $(\nabla f)_j > 0$ ,  $(\nabla f)_{j_1} = 0$ , et pour tout  $j > j_1$ ,  $(\nabla f)_j < 0$ .

**Propriété 9.** Soit  $\bar{V}$  un point admissible de  $(P^*)$ . Il existe un unique  $j_1$ , tel qu'une et une seule des propositions suivantes est vraie.

- pour tout  $j$  tel que  $j < j_1$ ,  $(\nabla f)_j < 0$  et pour tout  $j \geq j_1$ ,  $(\nabla f)_j > 0$ .
- pour tout  $j$  tel que  $j < j_1$ ,  $(\nabla f)_j < 0$ ,  $(\nabla f)_{j_1} = 0$ , et pour tout  $j > j_1$ ,  $(\nabla f)_j > 0$ .

On peut maintenant déduire une relation d'ordre pour les multiplicateurs KKT  $\lambda_i$ .

**Propriété 10.** Soit  $\bar{V}$  un point admissible de  $(P)$  satisfaisant aux conditions KKT (C.16). Il existe un unique  $j_1$ ,  $1 < j_1 < N + 1$ , tel qu'une et une seule des propositions suivantes est vraie.

- $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{j_1} < \lambda_{j_1+1} < \dots < \lambda_{N+1}$ .
- $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{j_1} = \lambda_{j_1+1} < \lambda_{j_1+2} < \dots < \lambda_{N+1}$ .

*Démonstration.* Ces relations d'ordre sont une conséquence directe des propriétés 8 et (C.17).  $\square$

**Propriété 11.** Soit  $\bar{V}$  un point admissible de  $(P^*)$  satisfaisant aux conditions KKT (C.16). Il existe un unique  $j_1$ ,  $1 < j_1 < N + 1$ , tel qu'une et une seule des propositions suivantes est vraie.

- $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{j_1} > \lambda_{j_1+1} > \dots > \lambda_{N+1}$ .
- $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{j_1} = \lambda_{j_1+1} > \lambda_{j_1+2} > \dots > \lambda_{N+1}$ .

Nous allons maintenant restreindre l'ensemble des points où  $f$  admet un extremum en éliminant les points qui violent les conditions KKT. Cette procédure d'élimination est d'abord effectuée pour les cas communs à  $(P)$  et  $(P^*)$ .

**Propriété 12.** Soit  $\bar{V}$  un point admissible de  $(P)$  (resp.  $(P^*)$ ). Soit  $I = \{i, g_i(\bar{V}) = 0\}$ . Si  $\bar{V}$  vérifient les conditions KKT (C.16), alors  $\text{card}(I) \in \{N, N - 1\}$ .

*Démonstration.* Considérons tout d'abord le cas trivial  $\text{card}(I) = N + 1$ . Dans ce cas, toutes les contraintes sont saturées. Cette situation n'est possible que si le choix des paramètres  $(V_0, V_M, \epsilon)$  est tel que le système  $g = 0$  possède une solution, réduisant l'ensemble des solutions admissibles à cet unique point. Dans ce cas  $V_j = V_0 + (j - 1)\epsilon$  pour tout  $j$  et  $V_M = V_N = V_0 + (N - 1)\epsilon$ .  $f$  est constante dans ce cas. Nous considérons par la suite que les paramètres sont choisis de manière à éviter ce cas extrême.

Supposons donc que  $\text{card}(I) < N - 1$ . Il existe alors  $i_1 < i_2 < i_3$  tels que  $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \lambda_{i_3} = 0$ , ce qui contredit la propriété 10 (resp. propriété 11).  $\square$





La restriction précédente ne s'applique pas à  $(P^*)$ , attendu que les signes des composantes du gradients sont compatible avec la propriété 6.

**Propriété 14.** (Solution admissibles de  $(P)$  (resp.  $(P^*)$ ) sur une arête) Soit  $E^{(i,i+1)}$  une arête ainsi que définie par la définition 5. Si  $\bar{V} \in E^{(i,i+1)}$  est un minimum local de  $f$  (resp.  $f^*$ ) alors

$$2 \leq i \leq N - 1. \quad (\text{C.26})$$

*Démonstration.* Supposons que  $i = 1$ . On a alors  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . De (C.17) on déduit que  $(\nabla f)_1 = 0$ , en contradiction avec la propriété 5 (resp. 6). Le  $i = N$  est exclu de la même manière.  $\square$

En considérant maintenant à la fois  $(P)$  et  $(P^*)$ , nous avons jusqu'ici établi que les extrema de  $f$  sont atteints sur certains des  $N + 1$  sommets  $V^{(i)}$ , ou sur certains points critiques des  $N$  arêtes  $E^{i,i+1}$ . Réduire plus avant la sélection nécessiterait d'ajouter des hypothèses sur (ou de spécifier exactement) les valeurs des paramètres  $(V_0, V_M, \epsilon)$  et des poids  $A_j$ . L'ensemble des points obtenus étant suffisamment restreint pour envisager de le parcourir numériquement pour un jeu de paramètres donnés, nous nous contentons d'explicitier les valeurs de  $f$  pour les extrema possibles.

**Propriété 15.** Valeur de  $f$  sur les sommets Soit  $1 \leq i \leq N + 1$ . On a

$$f(V^{(i)}) = \frac{(q + \frac{1}{2})^{2p+1} \left( \Sigma_{p,i-1}^0 + \Sigma_{p,i}^M \right)^{2q+1}}{\left( p + \frac{1}{2} \right)^{2q+1} \left( \Sigma_{q,i-1}^0 + \Sigma_{q,i}^M \right)^{2p+1}}, \quad (\text{C.27})$$

avec

$$\begin{aligned} \Sigma_{l,k}^0 &:= \sum_{j=1}^k A_j (V_0 + (j-1)\epsilon)^{2l+1}, \\ \Sigma_{l,k}^M &:= \sum_{j=k}^N A_j (V_M - (N-j)\epsilon)^{2l+1}. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

**Propriété 16.** (Valeurs de  $f$  aux points critiques sur les arêtes) Soit  $1 \leq i \leq N$ . Si un extremum local  $V^{(i,i+1)}$  de  $f$  existe sur l'arête  $E^{(i,i+1)}$  alors

$$V_i^{(i,i+1)} = \left( \frac{\Sigma_{q,i-1}^0 + \Sigma_{p,i+1}^M}{\Sigma_{p,i-1}^0 + \Sigma_{p,i}^M} \right)^{\frac{1}{2(q-p)}} \quad (\text{C.29})$$

soumis à la condition d'existence

$$V_0 + (i-1)\epsilon < V_i^{(i,i+1)} < V_M - (N-i)\epsilon. \quad (\text{C.30})$$

On a alors

$$f(V^{(i,i+1)}) = \frac{(q + \frac{1}{2})^{2p+1} \left( \Sigma_{p,i-1}^0 + \Sigma_{p,i+1}^M + A_i (V_i^{(i,i+1)})^{2p+1} \right)^{2q+1}}{\left( p + \frac{1}{2} \right)^{2q+1} \left( \Sigma_{q,i-1}^0 + \Sigma_{q,i+1}^M + A_i (V_i^{(i,i+1)})^{2q+1} \right)^{2p+1}}. \quad (\text{C.31})$$

Les majorants et minorants recherchés sont donc

$$m_{A,p,q,\epsilon,V_0,V_M} = \min_i \left\{ f(V^{(i)}), f(V^{(i,i+1)}) \right\}, \quad (\text{C.32})$$

et

$$M_{A,p,q,\epsilon,V_0,V_M} = \max_i \left\{ f(V^{(i)}), f(V^{(i,i+1)}) \right\}, \quad (\text{C.33})$$

où les extrema sont pris sur les valeurs admissible uniquement.

### C.2.3 Bornes d'extensibilité sur le préfacteur dans le cas Maxwellien

Considérons le cas où une distribution Multi-Wate-Bag, dont les contours obéissent aux contraintes  $g_i$ , vérifie l'équivalence exacte au sens des moments avec une distribution Maxwellienne pour les  $N$  premiers moments d'ordre pair. Pour  $0 \leq p, q \leq N - 1$  on a

$$m_{A,p,q,\epsilon,V_0,V_M} < \frac{(\mathcal{M}_{2p}^C)^{2q+1}}{(\mathcal{M}_{2q}^C)^{2p+1}} < M_{A,p,q,\epsilon,V_0,V_M}. \quad (\text{C.34})$$

A l'ordre  $2p$  un moment Maxwellien s'explique en

$$\mathcal{M}_{2p}^C = nT^p J_{2p}, \quad (\text{C.35})$$

où  $J_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p(p)!}$ . En définissant le préfacteur Maxwellien  $\alpha = \frac{n}{\sqrt{T}}$  on obtient

$$m_{A,p,q,\epsilon,V_0,V_M} < \alpha^{2(q-p)} \frac{J_{2p}^{2q+1}}{J_{2q}^{2p+1}} < M_{A,p,q,\epsilon,V_0,V_M}, \quad (\text{C.36})$$

d'où on déduit un majorant et un minorant de  $\alpha$  pour  $q > p$

$$\left( m_{A,p,q,\epsilon,V_0,V_M} \frac{J_{2q}^{2p+1}}{J_{2p}^{2q+1}} \right)^{\frac{1}{2(q-p)}} < \alpha < \left( M_{A,p,q,\epsilon,V_0,V_M} \frac{J_{2q}^{2p+1}}{J_{2p}^{2q+1}} \right)^{\frac{1}{2(q-p)}}. \quad (\text{C.37})$$

Il est important de noter que cet encadrement du préfacteur Maxwellien n'est pas assez serré pour permettre de déterminer à priori une bonne estimation de l'extensibilité en  $\alpha$  de la distribution. Les extrema sont en effet atteints lorsque toutes ou presque des contraintes sont saturées. Dans la pratique, l'extensibilité sera limitée par la violation d'une contrainte seule, et dépend étroitement et de manière fortement non-linéaire du point de départ  $V$ .

# Annexe D

## Modèles fluide et cinétique continu

### D.1 Modèle fluide à trois moments

Les trois premiers moment de l'équation de dérive cinétique pour les ions conduisent au système

$$\begin{cases} \partial_t n + \frac{1}{rB} (\partial_r \phi \partial_\theta n - \partial_\theta \phi \partial_r n) + \partial_z n v = 0 \\ Mn \left[ \partial_t u \frac{1}{rB} (\partial_r \phi \partial_\theta u - \partial_\theta \phi \partial_r u) + u \partial_z u \right] + \partial_z P + n q_i \partial_z \phi = 0 \\ \partial_t P + \frac{1}{rB} (\partial_r \phi \partial_\theta P - \partial_\theta \phi \partial_r P) + \partial_z P + 2 \partial_z Q_h + 2P \partial_z u = 0 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

La fermeture au quatrième moment est assurée par la condition sur le flux  $Q_h = 0$ . Au premier ordre en perturbation ( $X = X_0 + X_1$ ,  $X \in \{n, u, P\}$ ) le système devient

$$\begin{cases} \partial_t n_1 - \frac{1}{rB} \partial_r n_0 \partial_\theta \phi + n_0 \partial_z u_1 = 0 \\ M_i n_0 \partial_t u_1 + \partial_z P_1 + n_0 q_i \partial_z \phi = 0 \\ \partial_t P_1 - \frac{1}{rB} \partial_r P_0 \partial_\theta \phi + 3P_0 \partial_z u_1 = 0. \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Les quantités perturbées sont développées en séries de Fourier en  $(z, \vartheta)$  et font l'objet d'une transformée de Laplace en temps  $X_1 = \tilde{X}(r) e^{i(m\vartheta + nk_{\parallel} z - \omega t)}$ . En omettant les termes liés aux conditions initiales ( $X_1(r, t=0) \rightarrow 0$ ) on obtient le système

$$\begin{cases} n_0 k_z \tilde{u} - \omega \tilde{n} - \frac{m}{rB} \partial_r n_0 \tilde{\phi} = 0 \\ k_z \tilde{P} - \omega M_i n_0 \tilde{u} + k_z n_0 q_i \tilde{\phi} = 0 \\ 3P_0 k_z \tilde{u} - \omega \tilde{P} - \frac{m}{rB} \partial_r P_0 \tilde{\phi} = 0 \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

En éliminant  $\tilde{P}$  et  $\tilde{u}$  du système ci-dessus, on peut exprimer l'enveloppe radiale de la perturbation de densité ionique en fonction de celle du potentiel

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_0} = \frac{\frac{mk_z^2 T_i}{rB M_i} (2\kappa_n - \kappa_T) + \frac{\Omega_{CI} k_z^2}{B} \omega - \frac{m \kappa_n}{rB} \omega^2}{\omega \left( \omega^2 - \frac{3k_z^2 T_i}{M_i} \right)} \tilde{\phi}, \quad (\text{D.4})$$

où  $\kappa_{(n,T)} = d_r \ln(n_0, T_0)$ . Avec les conditions de normalisations définies en 2.1.1, la fonction de réponse en densité ionique du modèle fluide devient

$$F_{fluide} = \frac{k_\vartheta \kappa_n \omega^2 - (nk_{\parallel})^2 \omega + k_\vartheta (nk_{\parallel})^2 T (\kappa_T - 2\kappa_n)}{\omega \left( \omega^2 - 3(nk_{\parallel})^2 T \right)}, \quad (\text{D.5})$$

## D.2 Modèle Maxwellien continu

La forme de la réponse ionique  $\frac{\tilde{n}_i}{n_0}$  dont la forme pour une distribution d'équilibre  $f_0$  quelconque, obtenue par le développement en perturbation à l'ordre 1 de l'équation de Vlasov est

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_0} = \left[ \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nk_{\parallel} \partial_v f_0 + k_{\vartheta} \partial_r f_0}{nk_{\parallel} v + k_{\vartheta} d_r \phi_0 - \omega} dv \right] \tilde{\phi}. \quad (\text{D.6})$$

Pour un équilibre maxwellien  $f_0 = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{v^2}{2T}}$  en l'absence de potentiel électrostatique la réponse en perturbation de densité ionique devient

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_0} = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_{\vartheta} \left[ \kappa_n + \frac{\kappa_T}{2} \left( \frac{v^2}{T} - 1 \right) \right] - nk_{\parallel} \frac{v}{T} e^{-\frac{v^2}{2T}}}{nk_{\parallel} v - \omega} \frac{dv}{\sqrt{2\pi T}} \right] \tilde{\phi}. \quad (\text{D.7})$$

En posant  $v = \sqrt{2T}t$  on obtient

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_0} = \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{k_{\vartheta}}{nk_{\parallel} \sqrt{2T}} \left( \kappa_n - \frac{\kappa_T}{2} + \kappa_T t^2 \right) - \frac{t}{T}}{t - \frac{\omega}{nk_{\parallel} \sqrt{2T}}} e^{-t^2} dt \right] \tilde{\phi}. \quad (\text{D.8})$$

Soit  $\xi = \frac{\omega}{nk_{\parallel} \sqrt{2T}}$ , on note  $Z(\xi)$  la fonction de Fried et Conte ([28]), transformée de Hilbert de la Gaussienne définie pour  $\Im \xi > 0$  par

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \xi} dt. \quad (\text{D.9})$$

En intégrant par parties il vient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{t - \xi} dt = -\frac{1}{2} Z'(\xi) = (1 + \xi Z(\xi)) \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t^2}}{t - \xi} dt = -\frac{\xi}{2} Z'(\xi) = \xi(1 + \xi Z(\xi)) \quad (\text{D.11})$$

$$(\text{D.12})$$

et la réponse ionique devient

$$F_{kin} = \frac{k_{\vartheta}}{nk_{\parallel} \sqrt{2T}} \left( \left[ \kappa_n - \frac{\kappa_T}{2} \right] Z + \kappa_T \xi (1 + \xi Z) \right) - \frac{1}{T} (1 + \xi Z). \quad (\text{D.13})$$

# Annexe E

## Transformation de Fourier en coordonnées polaires - évaluation discrète

### E.1 Transformation de Fourier en coordonnées polaires

Considérons une fonction  $f$  sur le plan  $\mathbb{R}^2$  et sa transformée de Fourier  $F$ , liées par

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int d^2k F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{E.1})$$

On peut exprimer  $f$  et  $F$  respectivement dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier en coordonnées polaires  $(r, \vartheta)$  et  $(k, \alpha)$ . La périodicité en les variables  $\vartheta$  et  $\alpha$  permet un développement en séries Fourier

$$f(r, \vartheta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(r) e^{im\vartheta} \quad (\text{E.2})$$

et

$$F(k, \alpha) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} F_m(k) e^{im\alpha} \quad (\text{E.3})$$

**Définition 6.** On définit la transformée de Hankel d'ordre  $m$   $\mathcal{H}_m$  par

$$\mathcal{H}_m[f](k) = F(k) = \int_0^{+\infty} f(r) J_m(kr) r dr, \quad (\text{E.4})$$

où  $J_m$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $m$ . La transformée est son propre inverse, à savoir

$$f(r) = \int_0^{+\infty} F(k) J_m(kr) k dk. \quad (\text{E.5})$$

**Lemme 10.** On a l'identification pour tout  $m \in \mathbb{Z}$

$$F_m(k) = (-i)^m \mathcal{H}_m[f_m(r)] \quad (\text{E.6})$$

*Démonstration.*

$$f(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int d^2r f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{E.7})$$

Soit en substituant à  $f$  sa décomposition en séries de Fourier

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r dr d\vartheta f_m(r) e^{i(m\vartheta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (\text{E.8})$$

or  $\mathbf{k} = k(\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) = k(\sin \beta \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y)$ , avec  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  d'où

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} r dr f_m(r) \int_0^{2\pi} e^{i(m\vartheta - kr(\cos \vartheta \sin \beta + \sin \vartheta \cos \beta))} \quad (\text{E.9})$$

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} r dr f_m(r) \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i(m\vartheta - kr \sin(\vartheta + \beta))} \quad (\text{E.10})$$

en posant  $\vartheta' = \vartheta + \beta$  on obtient

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-im\beta} \int_0^{+\infty} r dr f_m(r) \int_{\beta}^{2\pi + \beta} d\vartheta' e^{i(m\vartheta' - kr \sin(\vartheta'))} \quad (\text{E.11})$$

d'où, en exploitant l'identité classique (voir [78] p. 20) sur les fonctions de Bessel

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\beta + 2\pi} e^{im\vartheta - z \sin \vartheta} d\vartheta, \quad \forall \beta, \quad (\text{E.12})$$

on déduit

$$F(\mathbf{k}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{im\alpha} (-i)^m \int_0^{+\infty} r dr f_m(r) J_m(kr) \quad (\text{E.13})$$

□

La détermination de la représentation polaire de la transformée de Fourier de  $f$  nécessite donc de calculer, pour chaque mode poloidal  $m$ , la transformée de Hankel de l'enveloppe radiale  $f_m$  du mode. Une méthode permettant l'obtention d'une approximation discrète de cette transformée lorsque  $f$  est connue sur une grille radiale discrète est exposée dans la section suivante.

## E.2 Calcul de la transformée de Hankel discrète - séries de Fourier-Bessel

### E.2.1 Décomposition en série de Bessel

Les enveloppes radiales dont on cherche à calculer la transformée de Hankel ont un support fini  $[0, a]$  sur  $\mathbb{R}$ . L'enveloppe radiale  $f_m(r)$  peut être décomposée ([36]) en série de Bessel

$$f_m(r) = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} c_p J_m \left( x_{mp} \frac{r}{a} \right), \quad (\text{E.14})$$

où  $x_{mp}$  est le  $p$ -ième zéro (non-nul) de  $J_m$ . Les fonction de Bessel dilatées  $J_{mp}(r) = J_m(x_{mp} \frac{r}{a})$ ,  $p \in \mathbb{N}$  forment une base orthogonale pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_0^a u(r)v(r)r dr. \quad (\text{E.15})$$

On a en effet

$$\langle J_{mp}, J_{mq} \rangle = \int_0^a J_m \left( x_{mp} \frac{r}{a} \right) J_m \left( x_{mq} \frac{r}{a} \right) r dr = a^2 \int_0^1 J_m(x_{mp}\nu) J_m(x_{mq}\nu) \nu d\nu \quad (\text{E.16})$$

soit

$$\langle J_{mp}, J_{mq} \rangle = \frac{a^2}{2} \delta_{pq} J_{m+1}^2(x_{mp}). \quad (\text{E.17})$$

Les coefficients de la décomposition de  $f_m$  s'obtiennent par la projection orthogonale de  $f$  sur la base  $J_{mp}, p \in \mathbb{N}$

$$c_p = \frac{\langle f, J_{mp} \rangle}{\langle J_{mp}, J_{mp} \rangle} = \frac{\int_0^a f_m(r) J_m \left( x_{mp} \frac{r}{a} \right) r dr}{\frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(x_{mp})}. \quad (\text{E.18})$$

On peut identifier l'intégrale au numérateur de (E.18) avec l'évaluation de la transformée de Hankel de  $f_m$  en  $k = x_{mp}/a$ . Soit

$$\mathcal{H}_m[f] \left( \frac{x_{mp}}{a} \right) = \frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(x_{mp}) c_p \quad (\text{E.19})$$

## E.2.2 Troncature - approximation de la transformée de Hankel

Supposons  $f_m$  connue sur une grille radiale  $(r_k, k = 1, \dots, N_r)$ . En tronquant la série (E.14) à l'ordre  $p = N_r$  on a pour  $1 \leq k \leq N_r$

$$f_m(r_k) = \sum_{p=1}^{N_r} c_p J_m \left( x_{mp} \frac{r_k}{a} \right) = \sum_{p=1}^{N_r} \frac{J_m \left( x_{mp} \frac{r_k}{a} \right)}{\frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(x_{mp})} \mathcal{H}_m[f] \left( \frac{x_{mp}}{a} \right) \quad (\text{E.20})$$

qui définit un système  $N_r \times N_r$  que l'on peut résoudre pour obtenir les valeurs de la transformée de Hankel de  $f$  aux fréquences  $\frac{x_{mp}}{a}$ . Cette dernière est donc approchée par valeurs discrètes sur la grille de fréquences  $\frac{x_{mp}}{a}, p = 1, \dots, N_r$ . La qualité de l'approximation dépend du spectre effectif de  $f$ , ou de manière équivalente du support en fréquence de sa transformée de Hankel.





## Annexe F

# Stabilité du schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 4

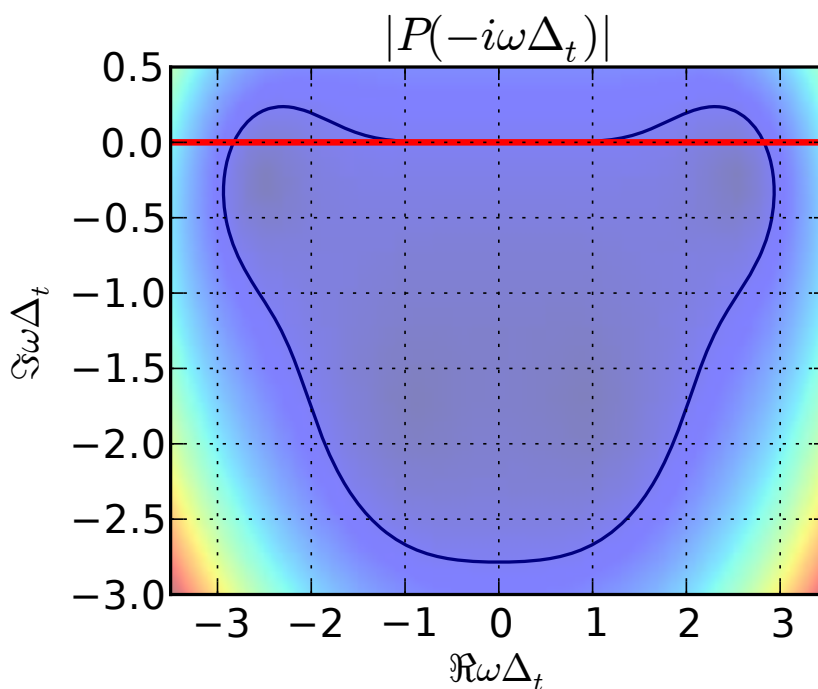


FIGURE F.1 – Diagramme de stabilité de RK4 explicite ; la frontière du domaine  $|P| = 1$  est indiquée en noir

On considère une équation d'évolution de la forme

$$\partial_t v + Av = 0, \quad (\text{F.1})$$

où  $v(t) \in \mathbb{R}^N$  et  $A$  un endomorphisme linéaire. Soit  $\Delta t$  le pas de discrétisation en temps. En supposant connu  $v(t)$ ,  $v(t + \Delta t)$  est obtenu par le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 suivant.

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{\Delta t}{6} (d_1 + 2d_2 + 2d_3 + d_4), \quad (\text{F.2})$$

où

$$\begin{aligned} d_1 &= -Av \\ d_2 &= -A \left( v + \frac{\Delta t}{2} d_1 \right) \\ d_3 &= -A \left( v + \frac{\Delta t}{2} d_2 \right) \\ d_4 &= -A (v + \Delta t d_3) \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

On note  $v_n = v(t_n) = v(n\Delta t)$  la suite des valeurs obtenu par application du schéma de Runge-Kutta. Par simple substitution on obtient la relation de récurrence

$$v_{n+1} = P(-\Delta t A)v_n, \quad (\text{F.4})$$

où  $P$  est le polynôme

$$P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{24}, \quad (\text{F.5})$$

qui correspond au développement de Taylor de la solution formelle  $\exp(-At)$ . Le vecteur  $v_0 = v(t=0)$  peut être décomposé sous la forme

$$v_0 = \sum_k c_k v_k, \quad (\text{F.6})$$

où  $v_k$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$  (les  $\lambda_k$  n'étant pas nécessairement tous distincts). On peut expliciter le vecteur  $v_n$  sous la forme

$$v_n = \sum_k c_k (P(-\lambda_k \Delta t))^n v_k \quad (\text{F.7})$$

Notons qu'à un mode propre de fréquence complexe  $\omega$  correspond une valeur propre  $\lambda = i\omega$ . La stabilité de la méthode requiert que pour un mode propre stable ou amorti on aie  $|P(-i\omega\Delta t)| \leq 1$ .

# Bibliographie

- [1] « A reliable algorithm for computing the topological degree of a mapping in  $\{R^2\}$  ». Dans : *Applied Math. and Comput.* 196.2 (2008), p. 666–678.
- [2] « Affine solution sets of sparse polynomial systems ». Dans : *J. Symb. Comput.* 51.0 (2013), p. 34–54.
- [3] N. BADDOUR. « Operational and convolution properties of two-dimensional Fourier transforms in polar coordinates ». Dans : *J. Opt. Soc. Am. A* 26 (8 2009), p. 1767–1777.
- [4] A.C. BARTLETT, C.V. HOLLOT et Huang LIN. « Root locations of an entire polytope of polynomials : It suffices to check the edges ». Dans : *Math. Contr. Signal. Syst.* 1.1 (1988), p. 61–71.
- [5] P. BERTRAND et al. « Stability of Inhomogeneous TwoStream Plasma with a WaterBag Model ». Dans : *Phy. Fluids* 15 (1972), p. 1275,1281.
- [6] N. BESSE et P. BERTRAND. « Gyro-water-bag approach in nonlinear gyrokinetic turbulence ». Dans : *J. Comput. Phys.* (2009), p. 3973–3995.
- [7] N. BESSE et D. COULETTE. « Asymptotic and spectral analysis of the gyrokinetic-waterbag integro-differential operator in toroidal geometry ». Dans : *Submitted* (2012).
- [8] A.J. BRIZARD et T.S. HAHM. « Foundations of nonlinear gyrokinetic theory ». Dans : *Rev. Mod. Phys.* 79 (2007), p. 421–468.
- [9] M. BRUNETTI et al. « A semi-lagrangian code for nonlinear global simulations of electrostatic drift-kinetic ITG modes ». Dans : *Comput. Phys. Commun.* 163 (2004), p. 1–21.
- [10] A C CALDER et J G LAFRAMBOISE. « Multiple-water-bag simulation of inhomogeneous plasma motion near an electrode ». Dans : *J. Comput. Phys.* 65.1 (1986), p. 18–45. ISSN : 0021-9991.
- [11] J. CANDY et R.E WALTZ. « An Eulerian gyrokinetic-Maxwell solver ». Dans : *J. Comput. Phys.* 186 (2003), p. 545,581.
- [12] R. CARDEN. *Ritz Values and Arnoldi Convergence for Nonsymmetric Matrices (Master Thesis)*. 2009.
- [13] J.W. CONNOR et J. B. TAYLOR. « Ballooning modes or Fourier modes in a toroidal plasma? » Dans : *Phys. Fluids* 30 (1987), p. 3180–3185.
- [14] Robert M. CORLESS, Karin GATERMANN et Ilias S. KOTSIREAS. « Using symmetries in the eigenvalue method for polynomial systems ». Dans : *J. Symb. Comput.* 44.11 (2009), p. 1536–1550.

- [15] D. COULETTE et N. BESSE. « Multi-water-bag models of ion temperature gradient instability in cylindrical geometry ». Dans : *Phys. Plasmas* 20 (2013), p. 052107.
- [16] D. COULETTE et N. BESSE. « Numerical comparisons of gyrokinetic multi-water-bag models ». Dans : *J. Comp. Phys.* 248 (2013), p. 1–32.
- [17] M.J. CREE et P.J BONES. « Algorithms to numerically evaluate the Hankel transform ». Dans : *Computers Math. Applic.* 26 (1993), p. 1–12.
- [18] N. CROUSEILLES, M. MEHRENBERGER et H. SELLAMA. « Numerical Solution of the Gyroaverage Operator for the Finite Gyroradius Guiding-Center Model ». Dans : *Commun. Comput. Phys.* 8 (3 2010), p. 484–510.
- [19] B. DAVIES. « Locating the zeros of an analytic function ». Dans : *J. Comput. Phys.* 66.1 (1986), p. 36–49.
- [20] J.L. DELVES et J.N LYNES. « A numerical method for locating the zeros of an analytic function ». Dans : *Math. Comp.* 21 (), p. 543–560.
- [21] G. DIF-PRALADIER et al. « Defining an equilibrium state in global full-f gyrokinetic models ». Dans : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 13 (2008), p. 65–71.
- [22] A. M. DIMITS et al. « Comparisons and physics basis of tokamak transport models and turbulence simulations ». Dans : *Phys. Plasmas* 7 (2000), p. 969.
- [23] W. DORLAND et al. « Electron Temperature Gradient Turbulence ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 85 (26 2000), p. 5579,5582.
- [24] D.H.E DUBIN et al. « Non-linear gyrokinetic equations ». Dans : *Phys. Fluid.* 26 (1983), p. 3524–3535.
- [25] Moawwad EL-MIKKAWY. « Comments on A note on a three-term recurrence for a tridiagonal matrix ». Dans : *Appl. Math. Comput.* 139.2-3 (2003), p. 503 –511.
- [26] M. EMBREE. *The Arnoldi eigenvalue iteration with exact shifts can fail.* 2009.
- [27] J FREIDBERG. *Plasma Physics and Fusion energy.* Cambridge University Press, 2007.
- [28] B. D. FRIED et S.D. CONTE. « The Plasma Dispersion Function ». Dans : Academic Press, New York NY, 1961.
- [29] E.A FRIEMAN et Liu CHEN. « Nonlinear gyrokinetic equations for lowfrequency electromagnetic waves in general plasma equilibria ». Dans : *Phys. Fluids* 25 (1982), p. 502–508.
- [30] X. GARBET et al. « Gyrokinetic simulations of turbulent transport ». Dans : *Nucl. Fusion* 50.4 (2010), p. 043002.
- [31] V. GRANDGIRARD et al. « A drift-kinetic Semi-Lagrangian 4D code for ion turbulence simulation ». Dans : *J. Comput. Phys.* 217.2 (2006), p. 395 –423.
- [32] V. GRANDGIRARD et al. « Computing ITG turbulence with a full-f semi-Lagrangian code ». Dans : *Commun. Nonlinear Sci.* 13.1 (2008), p. 81 –87.
- [33] V. GRANDGIRARD et al. « GYSELA , a full-f global gyrokinetic Semi-Lagrangian code for ITG turbulence simulations ». Dans : *AIP Conf. Proc.* 871 (2006), p. 100–111.

- [34] V GRANDGIRARD et al. « Global full-f gyrokinetic simulations of plasma turbulence ». Dans : *Plasma Phys. Contr. F.* 49.12B (2007), B173.
- [35] E. GRAVIER et al. « Gyrokinetic-water-bag modeling of low-frequency instabilities in a laboratory magnetized plasma column ». Dans : *Phys. Plasmas* 15.12 (2008).
- [36] Manuel GUIZAR-SICAIROS et Julio C. GUTIERREZ-VEGA. « Computation of quasi-discrete Hankel transforms of integer order for propagating optical wave fields ». Dans : *J. Opt. Soc. Am. A* 21 (1 2004), p. 53–58.
- [37] T. GÖRLER et al. « The global version of the gyrokinetic turbulence code GENE ». Dans : *J. Comput. Phys.* 230.18 (2011), p. 7053 –7071.
- [38] T.S. HAHM, Lu WANG et J. MADSEN. « Fully electromagnetic nonlinear gyrokinetic equations for tokamak edge turbulence ». Dans : *Phys. Plasmas* 16 (2009), p. 022305.
- [39] R. D. HAZELTINE, D. A. HITCHCOCK et S.M. MAHAJAN. « Uniqueness and inversion of the ballooning representation ». Dans : *Phys. Fluids* 24 (1981), p. 180–181.
- [40] R. D. HAZELTINE et W.A NEWCOMB. « Inversion of the ballooning representation ». Dans : *Phys. Fluids B* 2 (1990), p. 7–11.
- [41] C. HONORÉ et al. « Micro fluctuation control and Hall thruster operation ». Dans : *40th EPS conference on Plasmas Physics*. 2013.
- [42] W. HORTON. « Drift waves and transport ». Dans : *Rev. Mod. Phys.* 71 (1999), p. 735–778.
- [43] Y. IDOMURA, S. TOKUDA et Y. KISHIMOTO. « Global gyrokinetic simulation of ion temperature gradient driven turbulence in plasmas using a canonical Maxwellian distribution ». Dans : *Nucl. Fusion* 43 (2003), p. 234,243.
- [44] Y. IDOMURA et al. « Conservative global gyrokinetic toroidal full-f five-dimensional Vlasov simulation ». Dans : *Comput. Phys. Commun.* 179.6 (2008), p. 391 –403.
- [45] K. ITOH et al. « Physics of zonal flows ». Dans : *Phys. Plasmas* 13.5, 055502 (2006), p. 055502.
- [46] J. C. D. Martin J.L.G. ZAPATA. « A geometric algorithm for winding number computation with complexity analysis ». Dans : *J. Complexity* 28 (2011), p. 320–345.
- [47] F. JENKO et al. « Electron temperature gradient driven turbulence ». Dans : *Phys. Plasmas* 7 (2000), p. 1904–1910.
- [48] S. JOLLIET et al. « A global collisionless PIC code in magnetic coordinates ». Dans : *Comput. Phys. Commun.* 177.5 (2007), p. 409 –425.
- [49] Hideaki KANEKO et Yuesheng XU. « Gauss-Type Quadratures for Weakly Singular Integrals and their Application to Fredholm Integral Equations of the Second Kind ». Dans : *Math. Comp.* 62 (1994), p. 739–753.
- [50] Rudy KLEIN. « Le modèle gyro-water-bag appliqué à l'étude des instabilités dans les plasmas magnétisés ». Thèse de doct. Université Henri Poincaré, 2009.
- [51] P. KRAVANJA et M. van BAREL. « Computing the zeroes of analytic functions ». Dans : Springer , Berlin, 2000.

- [52] M. KRUSKAL. « Asymptotic Theory of Hamiltonian and other Systems with all Solutions Nearly Periodic ». Dans : *J. Math. Phys.* 3 (1962), p. 806–828.
- [53] S KU et al. « Gyrokinetic particle simulation of neoclassical transport in the pedestal/scrape-off region of a tokamak plasma ». Dans : *Journal of Physics : Conference Series*. T. 46. 1. IOP Publishing. 2006, p. 87.
- [54] S.Y. LEE, G. WOLBERG et S.Y. SHIN. « Scattered data interpolation with multi-level B-splines ». Dans : *IEEE Transactions on visualization and computer graphics* 3 (3 1997), p. 1–17.
- [55] R. B. LEHOUCQ et J. A. SCOTT. *An Evaluation of Software for Computing Eigenvalues of Sparse Nonsymmetric Matrices*. 1996.
- [56] R. LEHOUCQ. « On the Convergence of an Implicitly Restarted Arnoldi Method ». Dans : *SIAM J. Matrix Anal. Appl* 23 (1999), p. 551–562.
- [57] R. LEHOUCQ et al. *PARPACK*. 1996. URL : [http://www.caam.rice.edu/~kristyn/parpack\\_home.html](http://www.caam.rice.edu/~kristyn/parpack_home.html).
- [58] R.G. LITTLEJOHN. « A guiding center Hamiltonian : A new approach ». Dans : *J. Math. Phys.* 20 (1979), p. 2445–2458.
- [59] R.G. LITTLEJOHN. « Hamiltonian perturbation theory in noncanonical coordinates ». Dans : *J. Math. Phys.* 23 (1982), p. 742–747.
- [60] P. MOREL et al. « Gyrokinetic modelling : a multi water bag approach ». Dans : *Phys. Plasmas* 14.11 (2007), p. 112109.
- [61] P. MOREL et al. « The water bag model and gyrokinetic applications ». Dans : *Commun. Nonlinear Sci.* 13 (2008), p. 11–17.
- [62] Pierre MOREL. « Le modèle Water Bag appliqué aux équations cinétiques des plasmas de Tokamak ». Thèse de doct. Université Henri Poincaré, 2008.
- [63] H. Michael MÖLLER et Ralf TENBERG. « Multivariate Polynomial System Solving Using Intersections of Eigenspaces ». Dans : *J. of Symb. Comput.* 32.5 (2001), p. 513–531.
- [64] W. A. NEWCOMB. « The ballooning transformation ». Dans : *Phys. Fluids B* 2 (1990), p. 86–96.
- [65] « On the Continuous Dependence of the Roots of a Polynomial on its Coefficients ». Dans : *The American Mathematical Monthly* 84 (5 1977), p. 368–370.
- [66] K Itoh P H DIAMOND S-I Itoh et T S HAHM. « Zonal flows in plasma — a review ». Dans : *Plasma Phys. Contr. F.* 47.5 (2005), R35–R41.
- [67] AG PEETERS et al. « The nonlinear gyro-kinetic flux tube code GKW ». Dans : *Comput. Phys. Commun.* 180.12 (2009), p. 2650–2672.
- [68] J. D. Meiss R. D. HAZELTINE. *Plasma confinement*. Dover publications, 2003.
- [69] S. RAHBAR et E. HASHEMIZADEH. « A Computational Approach to the Fredholm Integral Equation of the Second Kind ». Dans : *Proceedings of the World Congress on Engineering 2008 Vol II*. 2008.
- [70] J.M RAX. *Physique des Tokamaks*. Éditions de l'École Polytechnique, 2011.
- [71] G. von ROSSUM et AL. *Python*. URL : <http://www.python.org>.

- [72] Y. SAAD. *Numerical methods for large eigenvalue problems (2nd Edition)*. SIAM, 2001.
- [73] Davod Khojasteh SALKUYEH. « A note on a three-term recurrence for a tridiagonal matrix ». Dans : *Applied Mathematics and Computation* 176.2 (2006), p. 442–444.
- [74] Y. SARAZIN et al. « Interplay between transport barriers and density gradient ». Dans : *Phys. Plasmas* 13 (2006), p. 092307.
- [75] D.C SORENSEN. « Implicit Application of polynomial filters in a k-step Arnoldi method ». Dans : *SIAM J. Matrix Anal. and Appl* 13 (1992), p. 357–385.
- [76] L.H. THOMAS. *Elliptic Problems in Linear Differential Equations over a Network - Watson Sci. Comput. Lab Report*. Columbia University, 1949.
- [77] Lu WANG et T.S. HAHM. « Nonlinear gyrokinetic theory with polarization drift ». Dans : *Phys. Plasmas* 17 (2010), p. 082304.
- [78] G. N. WATSON. *A Treatise on the theory of Bessel functions (2nd Edition)*. Cambridge University Press, 1966.
- [79] A. J. WOOTTON et al. « Fluctuations and anomalous transport in tokamaks ». Dans : *Phys. Fluids B* 2 (1990), p. 2879–2903.
- [80] S. Ejima et AL. « Scaling of energy confinement with minor radius, current and density in Doublet III Ohmically heated plasmas ». Dans : *Nucl. Fusion* 22 (1982), p. 1627–1649.





# Table des figures

1.1	Courbe d'Aston ; énergie de liaison par nucléon . . . . .	8
1.2	Ligne de champ sur une surface magnétique rationnelle (a) et irrationnelle (b) . . . . .	11
1.3	Trajectoire d'une particule (vert) autour d'une ligne de champ ; ni la modulation du rayon de Larmor et de la fréquence cyclotron ni l'effet des dérives ne sont représentées . . . . .	11
1.4	Distribution multi-water-bag : cas général . . . . .	18
1.5	Distribution multi-water-bag unimodale . . . . .	19
2.1	Géométrie cylindrique . . . . .	24
2.2	Une distribution Multi-Water-Bag à 3 bags et la Maxwellienne de référence	29
2.3	Génération d'une distribution multi-water-bag à 6 bags par suivi des lignes de niveau de la Maxwellienne ; bien que l'approximation semble correcte pour les profils de densité et température (b), des distortions apparaissent dans les profils des gradients (c) et du facteur $\eta_i$ . . . . .	30
2.4	Génération d'une distribution multi-water-bag à 6 bags par la méthode d'équivalence exacte au sens des moments ; les profils de densité et température sont approchés à la précision machine ; la géométrie des profils des gradients et du profil en $\eta_i$ est préservée. . . . .	32
2.5	$B_m(r)$ pour $m = 1, Z_i = 1, T_e = cte = 1$ . . . . .	49
3.1	Cas test MEDIUM : profils radiaux d'équilibres (a) ; gradients normalisés (b) ; rapport des gradients $\eta_i = \kappa_T/\kappa_n$ ; les profils de référence imposés sont indiqués en trait continu et en pointillés les profils Multi-Water-Bag pour une distribution à 6 bags . . . . .	57
3.2	Cas MEDIUM - Convergence en résolution radiale de $(\omega_R, \gamma)$ pour le mode le plus instable (10,3). . . . .	59
3.3	Pseudo-convergence en $N$ des taux de croissance et fréquences ; Effet d'échantillonnage en $v_{\parallel}$ . . . . .	61
3.4	Sensibilité à la distribution des noeuds initiaux pour des distributions à 5 et 8 bags . . . . .	62
3.5	Cas SMALL : comparaison des solveurs linéaire et non-linéaire sur les taux de croissance (a), fréquences (b), module (c) et argument (d) de l'enveloppe radiale du mode (10,5) . . . . .	63

3.6	Cas BIG : (a) Plan rapproché sur le spectre complet (tous couples $(m, n)$ confondus) dans la région d'intérêt du plan complexe normalisé $X+iY = \frac{\omega}{nk_{\parallel}}$ ; (b) spectre du mode le plus instable (13, 5); (c) spectre du mode (13, 1); (d) argument de la relation de dispersion non-linéaire pour le mode (13, 1). Les valeurs propres obtenues par le solveur linéaire sont indiquées par des disques blancs . . . . .	64
3.7	Cas BIG; Dépendance en $m$ pour trois valeurs de $n$ des taux de croissance (a)(c)(e) et fréquences (b)(d)(f) pour des distributions multi-water-bag à noeuds optimisant l'extension radiale (mwb_N) et le modèle cinétique continu (kin). . . . .	68
3.8	Cas BIG : Dépendance en $n$ des taux de croissance (a) et fréquences (b) pour des distributions multi-water-bag à noeuds optimisant l'extension radiale (mwb_N), à noeuds iso-répartis (mwb_N_isoV) et le modèle cinétique continu (kin); Influence de la distribution des contours des bags (c). . . . .	69
3.9	Cas BIG : Module et phase de l'enveloppe radiale du mode le plus instable (13, 5). . . . .	70
3.10	Cas test MEDIUM : Comparaison des résultats de la méthode d'anstaz et de la méthode globale pour le modèle cinétique continu; taux de croissance (a)(b), profil radiaux en module et phase (c) - la phase pour la méthode d'ansatz est identiquement nulle sur le domaine radial. . . . .	72
3.11	Cas test BIG; $N = 10$ ; Cartes de taux de croissance et fréquence dans le plan spectral $(m, n)$ . . . . .	74
3.12	Cas est BIG; $N = 10$ ; Dépendances en $(m, n)$ des taux de croissance bruts $\gamma$ et normalisés $Y = \gamma/(nk_{\parallel}c_s)$ . . . . .	74
3.13	Cas est BIG; $N = 10$ ; Dépendances en $(m, n)$ des fréquences brutes $\omega_R$ et normalisées $X = \omega_R/(nk_{\parallel}c_s)$ . . . . .	75
3.14	Enveloppe radiale du mode (13, 7) pour le cas test BIG avec $N = 10$ . . . . .	76
3.15	Position $r_{peak}$ et largeur $\sigma$ de l'enveloppe du mode dans le plan spectral . . . . .	76
3.16	Cas test BIG; balayage sur la position $r_0$ du pic en $\eta_i$ ; superposition des taux de croissance en tant que fonction de $k_{\theta}(r_0)$ pour les modes $(m, 3)$ , $m \in [1, 50]$ . . . . .	78
3.17	Cas test BIG; profils à deux zones de gradient; densité et température (a); $\eta_i$ (b) . . . . .	79
3.18	Analyse de l'équilibre à deux pics en $\eta_i$ ; cartes de taux de croissances pour chacun des équilibres à un pic . . . . .	79
3.19	Analyse de l'équilibre à deux pics en $\eta_i$ ; maximum des taux de croissances des équilibres à un pic (a) et taux de croissance de l'équilibre à deux pics (b) . . . . .	80
3.20	Analyse de l'équilibre à deux pics en $\eta_i$ ; localisation des modes les plus instables (a); largeur caractéristique $\sigma$ (b); module de l'enveloppe radiale du mode (13, 6) (c) et du mode (14, 6) (d) pour chacun des équilibre à un pic ("eq1" et "eq2") et l'équilibre à deux pics ("eq12"). . . . .	80
3.21	Cas test SMALL; distribution à 10 bags; Balayage paramétrique sur les gradients; taux de croissance . . . . .	81
3.22	Cas test SMALL; distribution à 10 bags; Balayage paramétrique sur les gradients; fréquence . . . . .	82

3.23	Cas test SMALL ; distribution à 10 bags ; Balayage paramétrique sur les gradients ; nombres d'ondes $(m, n)$ du mode le plus instable . . . . .	82
3.24	Cas test SMALL ; distribution à 6 bags ; Balayage paramétrique sur les gradients ; taux de croissance (a) et nombre d'onde poloïdal (b) . . . . .	83
3.25	Cas test SMALL ; comparaisons croisées ; balayage paramétrique sur les gradients ; cartes en taux de croissance et lignes de seuil (interpolées) pour les modèles water-bag (mwbN) et cinétique continu (kin) (a) ; distribution des erreurs relative sur les taux de croissance pour le modèle water-bag à 6 bags et le modèle cinétique continu (b). . . . .	84
4.1	Chaîne de traitement pour les simulations croisées . . . . .	89
4.2	Tests de conservation d'invariants intégraux du code non-linéaire GMWB3D-SLC ; Évolution en temps de la variation relativement à la valeur initiale de la masse (a) et de l'énergie totale (b) pour un cas test typique (cas SMALL- perturbation par un mode unique) . . . . .	91
4.3	Cas test SMALL perturbé par $(10, 5)$ ; profils radiaux de la densité moyenne (a) et de la température moyenne (b) aux instants initiaux et finaux de la simulation . . . . .	93
4.4	Cas test SMALL perturbé par $(10, 5)$ ; écoulement zonal à la fin de la simulation (a) ; contributions respectives de l'équilibre $d_r n_0$ et de l'écoulement zonal $d_r \left\{ \frac{1}{r} d_r [r n_0 d_r \phi_0^0] \right\}$ au gradient de densité moyen des centres guides (b) . . . . .	93
4.5	Cas test SMALL perturbé par un bain de 239 modes ; profils radiaux de la densité moyenne (a) et de la température moyenne (b) aux instants initiaux et finaux de la simulation. . . . .	94
4.6	Cas test SMALL perturbé par un bain de 239 modes ; écoulement zonal à la fin de la simulation (a) ; contributions respectives de l'équilibre $d_r n_0$ et de l'écoulement zonal $d_r \left\{ \frac{1}{r} d_r [r n_0 d_r \phi_0^0] \right\}$ au gradient de densité moyen des centres guides (b) . . . . .	94
4.7	Cas test SMALL ; Évolution temporelle du gradient normalisé $\eta_i$ calculé à partir des profils radiaux des champ moyens $(0, 0)$ ; perturbation par $(10, 5)$ (a) et par un bain de 239 modes(b) . . . . .	95
4.8	Cas test SMALL ; évolution du profil radial du gradient de température moyen pour une perturbation par $(10, 5)$ (a) et un bain de 239 modes (b). . . . .	96
4.9	Cas test SMALL ; évolution en temps des taux de croissance linéaires calculés par le code linéaire à partir des champs $(0, 0)$ extraits des données de simulation du code non-linéaire ; taux de croissance linéaire du mode $(10, 5)$ pour une perturbation à 1 mode par $(10, 5)$ (a) ; taux de croissance linéaire maximal pour l'ensemble des modes $(m, n)$ pour une perturbation à un mode $(10, 5)$ (b) et par un bain de 239 modes(c) . . . . .	96
4.10	Cas test SMALL ; évolution en temps du champ de cisaillement en vitesse poloïdale moyen dans le cas d'une perturbation par $(10, 5)$ (a) et par un bain de 239 modes (b). . . . .	97
4.11	Cas test SMALL ; perturbation par $(6, 3)$ . Évolution temporelle dans le plan spectral $(m, n)$ de $\ \phi\ ^2$ . . . . .	98
4.12	Cas SMALL ; perturbé par $(6, 3)$ ; évolution de la composition du spectre ; poids relatifs sur $\ \phi_{mn}\ _2^2$ (a) et $\ \phi_{mn}\ _2$ . . . . .	99

4.13	Cas test SMALL ; évolution des compositions spectrales $R_m^n$ dans le cas d'une perturbation par (10, 5) (a) et par un bain de 239 modes (b) . . .	99
4.14	Cas SMALL ; spectre de puissance du potentiel électrostatique ; perturbation par (10, 5) (a) ; perturbation par un bain de 239 modes (b) . . .	100
4.15	Cas SMALL perturbé par (6, 3) ; spectre de puissance du potentiel électrostatique durant la phase de croissance linéaire (a) régression multi-segment sur le spectre à la fin de la simulation (b) . . . . .	101
4.16	Cas test SMALL perturbé par (6, 3) ; perturbation de densité $n(\mathbf{r}, t) - n(\mathbf{r}, 0)$ à quelques instants clés de la simulation. . . . .	102
4.17	Cas test MEDIUM perturbé par un bain de 101 modes ; potentiel électrostatique à quelques instants clés de la simulation. . . . .	103
4.18	Cas test MEDIUM perturbé par un bain de 101 modes ; contour $v_{-2}$ à quelques instants clés de la simulation. . . . .	104
4.19	Cas MEDIUM perturbé par le seul mode (10, 3) : Détermination des caractéristiques temporelles de la phase linéaire du code non-linéaire ; la fenêtre temporelle, utilisée pour calculer le spectre de (b), identifiée par la couleur verte, est la fenêtre optimale de régression déterminée en (a) ; des estimations de la position en fréquence du pic sur le spectre sont obtenues par interpolation polynomiale du spectre au voisinage du maximum discret en fréquence . . . . .	107
4.20	Cas test SMALL - Bain de 25 modes au voisinage du plus instable . . .	109
4.21	Phase linéaire pour un bain de 237 modes - Mise en évidence de l'absence de phase linéaire proprement dit pour certains modes . . . . .	110
4.22	CAS SMALL : perturbation à 1 mode par (10, 5) ; évolution de l'enveloppe radiale du mode (10, 5) à trois instants clés de la croissance initiale ; par construction, les enveloppes coïncident exactement à $t = 0$ (non représenté) ; l'excursion maximale durant le transitoire a lieu à $t = 93,75\Omega_{CI}^{-1}$ ; la coïncidence en module apparaît à $t = 843\Omega_{CI}^{-1}$ et plus tardivement en phase à $t = 1500\Omega_{CI}^{-1}$ . . . . .	112
4.23	Cas SMALL : perturbation à un mode par (10, 5) ; évolution des enveloppes radiales du potentiel électrostatique moyenné en $(z, \vartheta)$ (a) et de la vitesse de dérive poloidale moyenne (b) au début de la phase linéaire.	113
4.24	Cas test SMALL ; comparaison des pseudo taux de croissance des modèles quasiliénaire (QL) et nonlinéaire avec le taux de croissance linéaire ; perturbation à 1 mode respectivement par (6, 3) (a) and (10, 5) (b). . .	115
4.25	Cas test SMALL ; comparaison des taux de croissances apparents des modes de Fourier du potentiel électrostatique des modèles non-linéaires et quasi-linéaires avec les taux de croissance linéaires dans le cas d'une perturbation par 239 modes ; extraits des données pour les modes (6, 3) (a) et (10, 5) (b). . . . .	116
4.26	Cas test SMALL ; enveloppe radiale du potentiel électrostatique en norme $L_2$ ; (a) perturbation par un mode unique (6, 3) ; (b) perturbation par (6, 3) et (10, 5) ; (c) perturbation par un bain de 237 modes . . . . .	117
4.27	Cas test SMALL perturbé par un bain de 237 modes ; carte de taux de croissance linéaire dans le plan spectral pour l'équilibre initial (a) et calculée à partir des champs moyens extraits des données de simulation non-linéaire à $\Omega_{CI}t = 6094$ (b). . . . .	117

5.1	Caractéristiques d'équilibre générées à partir des conditions initiales $(x_0, \vartheta_0, v_0)$ et $(x_0, \vartheta_0, v_0)$ pour 4 valeurs de $\alpha_0$ ; le cercle intérieur noir correspond à la surface magnétique $x = 0,6$ et donne la géométrie de la solution symétrique approchée . . . . .	126
5.2	Domaines de définition (en bleu) de la contribution au noyau d'un contour fermé dans le plan $(\theta, \eta)$ ; les contours ouverts sont définis sur l'ensemble de la grille . . . . .	140
5.3	Représentation formelle des solutions $\gamma_0, \omega_{R0} = f(x, \theta_{k0})$ ; lignes de niveaux $\omega_0 = cte$ au voisinage d'un point $(O)$ . . . . .	144
5.4	Quadrisection d'un contour rectangulaire dans le plan complexe; le contour parent est indiqué en pointillés . . . . .	149
5.5	Arborescence de recherche; les nombres indiquent la valeur de retour de la procédure de comptage; "nc" désignent les noeuds pour lesquels le comptage n'est pas nécessaire; les noeuds coloriés en vert correspondent à un succès du raffinement; le noeud colorié en orange correspond à un échec du raffinement qui oblige à un nouvelle quadrisection . . . . .	150
5.6	Comportement du solveur récursif pour l'équation polynomiale $f(z) = z^8 - 1 = 0$ ; les rectangles rouges indiquent les contours pris en compte; le nombre d'enroulement associé est indiqué au centre; les points blancs indiquent les racines raffinées; le fond est $arg(f(z))$ ; (a) intégralité de l'arbre (b) contours contenant une racine raffinée - la dilatation des sous-contours entraîne une redondance mais évite l'échec du solveur par coïncidence d'une racine et d'un contour . . . . .	151
5.7	Image discrète par $f(z) = z^8 - 1$ du premier contour rectangulaire de centre $(0, 0)$ et dimensions $3 \times 3$ dans le plan complexe; les points correspondent aux valeurs discrètes effectivement calculées dans la méthode de Henrici; la couleur indique l'abscisse curviligne angulaire le long du contour rectangulaire . . . . .	152
5.8	Méthode de prolongement par continuité; génération de couple test pour la méthode de la sécante au voisinage de la solution approchée $\omega_1$ . . . . .	154
5.9	Stratégie de résolution globale par défaut; résolution parallèle en $\theta_{k0} = 0$ , résolution parallèle en $x_{ref}$ , résolution mixte à partir de $x_{ref}$ sur une bande centrée autour de $\theta_{k0T}$ . . . . .	155
6.1	Cas CYCLONE; profils radiaux de référence et pour une distribution à 6 bords; densité et température (a); gradients de température et densité (b); facteur $\eta_i$ (c); contours positifs pour la distribution à 6 bords (d) . . . . .	160
6.2	Effet de la variation radiale du champ magnétique sur l'équivalence aux sens des moments; profil de densité (a); facteur $\eta_i$ . . . . .	160
6.3	Cas CYCLONE; moment magnétiques critiques pour la distribution à 6 bords (a); vue partielle pour les petites valeurs de $\mu$ (b) . . . . .	161
6.4	Cas Cyclone; $N = 6$ ; Évolution de la topologie du premier contour avec $\mu$ ; la zone en bleu correspond à l'annulation du contour . . . . .	162
6.5	Cas CYCLONE $N = 6$ ; $N_\mu = 1$ $\mu_{min} = \mu_{max} = 0$ ; demi plan de coupe $\varphi = 0$ ; densité (a), gradient radial de densité $\kappa_n$ (b), température $T_{  }$ (c) et gradient radial de température $\kappa_{T_{  }}$ ; la température $T_{\perp}$ (non-représentée) est nulle . . . . .	164

6.6	Cas CYCLONE $N = 6$ ; $N_\mu = 1$ , $\mu_{min} = \mu_{max} = 1$ ; demi plan de coupe $\varphi = 0$ ; densité (a), gradient radial de densité $\kappa_n$ (b), température $T_{\parallel}$ (c), gradient radial de température $\kappa_{T_{\parallel}}$ (d), température $T_{\perp}$ (e), gradient radial de température $\kappa_{T_{\perp}}$ (f) . . . . .	165
6.7	Cas CYCLONE $N = 6$ ; $N_\mu = 20$ $\mu_{min} = 0, \mu_{max} = 8$ ; demi plan de coupe $\varphi = 0$ ; densité (a), gradient radial de densité $\kappa_n$ (b), température $T_{\parallel}$ (c), gradient radial de température $\kappa_{T_{\parallel}}$ , température $T_{\perp}$ (e), gradient radial de température $\kappa_{T_{\perp}}$ (f) . . . . .	166
6.8	Cas CYCLONE $N = 6$ ; $N_\mu = 1$ $\mu = 1$ ; aperçu de la topologie des contours d'équilibre (a) et des surfaces de niveau de la Maxwellienne locale (b); vue en élévation - la coordonnée verticale est la vitesse parallèle - le côté bas-champ est à droite; vue en plan des contours $v_1$ (b) et $v_2$ (c) qui se ferment sur le domaine . . . . .	167
6.9	Cas Cyclone; lignes de niveau dans le plan $(x, v_{\parallel})$ de la Maxwellienne locale pour $\mu = 1$ en $\vartheta = 0$ (a) , $\vartheta = \pi/2$ (b), $\vartheta = \pi$ (c) . . . . .	168
6.10	Cas Cyclone; taux de croissance et fréquence en fonction de $k_{\vartheta} \rho_i$ ; données issues de [22] et interpolantes qui serviront de référence . . . . .	169
6.11	Coefficient multiplicateur pour la parallélisation OpenMP du code QUALITORO; Cas Cyclone; $N_r = N_{\vartheta} = 128$ ; $N_{proc} = 13$ ; multiplicateurs calculés pour 1000 pas de temps; la ligne rouge correspond à une parallélisation idéale $t(N_{thread}) = N_{thread} \times t(1)$ . . . . .	171
6.12	État initial du potentiel électrostatique pour le code QUALITORO dans l'espace direct $(x, \vartheta)$ (a) et mixte $(x, m)$ (b) . . . . .	172
6.13	Code QUALITORO; détermination des caractéristiques spectrales; régression logarithmique sur $\sqrt{\int d\vartheta  \phi(x_0, \theta) ^2}$ pour l'obtention de $\gamma$ ; détermination de la fréquence de pic du spectre de Fourier en temps de $\cos(\arg \phi(x_0, \vartheta_0))$ . . . . .	173
6.14	Cas Cyclone; $N = 6$ , $N_\mu = 1$ , $\mu = 0$ ; code QUALITORO; taux de croissance (a) et fréquences (b) obtenus à partir du potentiel électrostatique en $(x_0 = 0.5, \vartheta_0 = 0)$ . . . . .	174
6.15	Code QUALITORO; Cas Cyclone; $N = 6$ , $N_\mu = 1$ , $\mu = 0$ ; Profil radial du module de l'enveloppe du potentiel en $\vartheta = 0$ pour quelques valeurs de $n$ . . . . .	174
6.16	Cas Cyclone; code QUALITORO; partie réelle du potentiel électrostatique	175
6.17	Cas Cyclone; $N = 6$ , $N_\mu = 1$ , $\mu = 0$ ; code QUALITORO; module du potentiel électrostatique . . . . .	176
6.18	Cas Cyclone; $N = 6$ , $N_\mu = 1$ , $\mu = 0$ ; code QUALITORO; dépendance radiale du spectre de puissance en $m$ ; la ligne pointillée correspond à la résonance $m = -nq(r)$ . . . . .	177
6.19	Code QUALITORO; Cas Cyclone; effet du moment magnétique $\mu$ sur les taux de croissance (a) et fréquences (b) pour deux distributions à une seule valeur de $\mu$ et une distribution à deux valeurs de $\mu$ . . . . .	178

6.20 Code ASYMPTORO ; cas test Cyclone ; méthode de quadrature directe ; mode  $n = 25$  ; test de convergence pour la résolution du problème intégral aux valeurs propres local en  $(x = 0.5, \vartheta_{k0} = 0)$  ; le paramètre  $p_{max}$  (abrégé en  $p$  sur les légendes) caractérise le support en  $\eta$   $([-(2p_{max} + 1)\pi; (2p_{max} + 1)\pi])$  ; balayage de la résolution  $N_\eta$  sur les valeurs 65, 129, 257, 513 ; le taux de croissance  $\gamma$  et la fréquence  $\omega_R$  exhibent une convergence quasi-quadratique en  $h_\eta = (2p + 1)2\pi/(N_\eta - 1)$  . . . . . 179

6.21 Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $n = 25$  ; solution locale du problème aux valeurs propres en  $(x = 0.5, \vartheta_{k0} = 0)$  sur  $[-5\pi; 5\pi]$  ; module (a), argument (b) et diagonale (c) du noyau intégral pour la solution  $\hat{\phi}(\eta)$  la plus instable (d) . . . . . 181

6.22 Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $n = 10$  ; solution locale du problème aux valeurs propres en  $(x = 0.5, \vartheta_{k0} = 0)$  sur  $[-7\pi; 7\pi]$  ; module (a), argument (b) et diagonale (c) du noyau intégral pour la solution  $\hat{\phi}$  la plus instable (d) ; argument de la relation de dispersion dans le plan  $(-\omega_r, \gamma)$  (e) ; enveloppe  $\hat{\phi}(\eta)$  de la deuxième solution (f) . . . . . 182

6.23 Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ; Fréquences locales  $(\gamma, \omega_R)$  dans le plan  $(x, \theta_{k0})$  ;  $n = 25, p_{max} = 2, N_\eta = 257$  ; seuil de détection  $\gamma_{min} \times L_n/c_s = 0.016$  . . . . . 183

6.24 Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $n = 40, p_{max} = 1, N_\eta = 185$  ; dépendance en  $(x, \vartheta_{k0})$  des taux de croissance (a) et fréquences locales (b) . . . . . 184

6.25 Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $n = 24, p_{max} = 2, N_\eta = 257$  ; détermination de l'enveloppe radiale lente  $A$  ; profil radial du pseudo potentiel  $Q$  (a) ; profil radial de la solution  $A(x)$  (b) . . . . . 185

6.26 Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $n = 24, p_{max} = 2, N_\eta = 257$  ; enveloppes locales  $\hat{\phi}(x, \eta, \theta_{k0T})$  ; module (a) et argument (b) des solutions brutes ; argument (c) et partie réelle (d) après alignement des phases . 186

6.27 Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $n = 24, p_{max} = 2, N_\eta = 257$  ; solution globale  $\phi(x, \vartheta)$  ; partie réelle (a) et module (b) . . . . . 186

6.28 Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ;  $N_\mu = 1, \mu = 0$  ; dépendance en  $n$  des taux de croissance (a) et fréquences (b) globale . . . . . 187

6.29 Code ASYMPTORO ; Cas Cyclone ; effet du moment magnétique  $\mu$  sur les taux de croissance (a) et fréquences (b) pour deux distributions à une seule valeur de  $\mu$  et une distribution à deux valeurs de  $\mu$  . . . . . 188

6.30 Cas cyclone ; comparaisons des taux de croissance et fréquences obtenus par la méthode d'intégration en temps (traits continus) et la méthode asymptotique (pointillés) ; les données sont respectivement représentées par une interpolation par splines cubiques pour le taux de croissance et un ajustement affine pour la fréquence ; écarts relatifs sur les taux de croissance (c) et fréquences (d) . . . . . 189

6.31 Cas cyclone ;  $N_\mu = 1, \mu = 0$  ; mode  $n = 20$  ; partie réelle (a)(b) et module (c)(d) des enveloppes obtenues par chacunes des deux méthodes 190

6.32 Cas cyclone ;  $N_\mu = 1, \mu = 0$  ; mode  $n = 6$  ; partie réelle (a)(b) et module (c)(d) des enveloppes obtenues par chacunes des deux méthodes . . . . 191

6.33	Code ASYMPTORO; Cas Cyclone; $N_\mu = 11$ , $\mu \in [0; 1]$ , $N_\eta = 257$ , $p_{max} = 2$ , mode $n = 16$ en $(x = 0.5, \theta_{k0} = 0)$ ; partie réelle (a), imaginaire (b) et diagonale (c) du noyau pour la solution la plus instable (d) . . .	195
6.34	Code ASYMPTORO; Cas Cyclone; $N_\mu = 11$ , $\mu \in [0; 1]$ , $N_\eta = 257$ , $p_{max} = 2$ ; dépendance en $n$ du taux de croissance (a) et de la fréquence (b) du problème intégral aux valeurs propres en $(x = 0.5, \theta_{k0} = 0)$ . . .	195
6.35	Code ASYMPTORO; Cas Cyclone; $N_\mu = 11$ , $\mu \in [0; 1]$ , $N_\eta = 185$ , $p_{max} = 1$ , $N_x = 65$ ; mode $n = 16$ ; dépendances radiales du taux de croissance (a) et de la fréquences (b) dans une bande radiale centré en $x = 0.5$ pour $\theta_{k0} = 0$ ; dépendance radiale du module de l'enveloppe $\hat{\phi}(\eta)$ correspondant aux solutions (d) . . . . .	196
C.1	Positions des contours pour un sommet $V^{(i)}$ et une arête $E^{(i,i+1)}$ du polytope des contraintes. . . . .	212
F.1	Diagramme de stabilité de RK4 explicite; la frontière du domaine $ P  = 1$ est indiquée en noir . . . . .	221



# Liste des tableaux

2.1	Conventions de normalisation . . . . .	25
2.2	Les modèles dont le nom est en gras ont été implémentés . . . . .	28
3.1	Jeux de paramètres de référence pour les trois familles de cas test . . .	56
3.2	SMALL case : Linear and nonlinear eigenvalue solver comparison ; Growth rates . . . . .	60
3.3	Cas SMALL : Comparaison des solveurs linéaire et non-linéaire ; Fréquences . . . . .	63
3.4	Comparaison croisée entre résultats du code spectral linéaire et du code quasi-linéaire forcé ; les taux de croissance et fréquences sont normalisés à $10^{-3}\Omega_{CI}$ ; $\delta$ indique un écart relatif ; la plage temporelle d'intégration du code quasi-linéaire est $[0, 10000\Omega_{CI}^{-1}]$ avec un pas $\Delta_t = 20\Omega_{CI}^{-1}$ . . . .	65
3.5	Cas MEDIUM ; solveur non-linéaire ; temps moyen par mode propre $\langle t_{eig} \rangle$ sur Intel XEON 3680 pour une carte spectrale de $24 \times 8 = 192$ modes ; $N_r = 128$ ; précision requise dans le plan complexe $\epsilon = 10^{-5}nk_{\parallel}$ .	71
4.1	Perturbations à un mode : Taux de croissance ; $\gamma_{nl}$ est estimé par régression logarithmique sur $\ \phi\ _2$ ; $\delta$ indique l'écart relatif entre les taux linéaires et non-linéaires ; $\delta_{00}$ et $\delta'_{00}$ sont les écarts relatifs entre le taux de croissance $\gamma_{00}$ du mode $(0, 0)$ et respectivement $2\gamma_{lin}$ et $2\gamma_{nl}$ ; toutes les fréquences sont exprimées en $10^{-3}\Omega_{CI}$ . . . . .	106
4.2	Perturbation à deux modes : taux de croissance dans la phase linéaire. Écart relatif $\delta$ entre les taux linéaires et non-linéaire ; $\gamma_{00}$ Taux de croissance du mode $(0, 0)$ . . . . .	108
4.3	Perturbation à un mode : Fréquences réelles ; $\omega_{max}$ : fréquence correspondant au maximum discret ; $\Delta\omega$ : résolution de la grille en fréquence ; $\omega_{parab}$ : position du pic de fréquence obtenu par interpolation parabolique ; $\delta_{parab}$ : écart relatif avec $\omega_{lin}$ ; les fréquences sont exprimées en $10^{-3}\Omega_{CI}$ . . . . .	111
4.4	Perturbation par 2 modes : Fréquences réelles ; $\omega_{max}$ : position du pic de fréquence sur la grille - $\Delta\omega$ : résolution de la grille en fréquence - $\omega_{parab}$ : position du pic en fréquence obtenue par interpolation parabolique ; $\delta_{parab}$ : écart relatif avec $\omega_{lin}$ . . . . .	111
6.1	Paramètres adimensionnés pour le cas de référence CYCLONE ; on rappelle que le profil radial du facteur de sécurité est donné par $q(r) = q_0 + q_2(r/r_0)^2$ . . . . .	158

6.2	Paramètres du code hybride QUALITORO; $\Delta_t$ pas d'intégration en temps; $N_{steps}$ nombre de pas de temps; $N_\phi$ nombre de valeurs distinctes du nombre d'onde toroïdal $n$ ; $N_{proc}$ nombre de processus MPI ( $2 \times N \times N_\mu + 1$ ); $N_{threads}$ nombre de processus légers (threads) par processus MPI utilisé pour la parallélisation OpenMP . . . . .	171
-----	--	-----

**Résumé** Ce travail de recherche s'inscrit dans la problématique de la compréhension des phénomènes de transport turbulent de l'énergie et des particules au sein des plasmas de coeur des machines de fusion thermonucléaire par confinement magnétique. L'instabilité dite de gradient de température ionique, considérée comme une des sources majeures de transport turbulent, y est étudiée au moyen d'un modèle gyrocinétique. Dans le cadre d'un modèle cinétique, le comportement de la population d'ions est modélisé par l'évolution en temps de la fonction de distribution dans un espace des phases à six dimension. Le modèle gyrocinétique met à profit l'anisotropie liée au mouvement cyclotron dans un champ magnétique intense pour réduire la dimension du problème à trois dimensions d'espace et deux de vitesse. L'originalité de ce travail consiste en l'utilisation d'un modèle réduit, dit "Multi-Water-Bag", pour la fonction de distribution, qui permet de réduire à nouveau la dimension du problème en le mettant sous la forme d'un système fini d'équations de conservation dans l'espace réel à trois dimensions. Ce modèle est développé dans deux types de géométries simples de champ de confinement, l'une cylindrique et l'autre torique. En géométrie cylindrique, le développement de l'instabilité est analysé au travers de trois modèles dynamiques : linéaire, quasi-linéaire et non-linéaire. L'analyse de stabilité linéaire permet d'obtenir les caractéristiques spectrales des et géométriques de l'instabilité à partir d'une situation d'équilibre instable. Les dépendances paramétriques vis à vis de l'équilibre sont analysées. Dans un deuxième temps, la confrontation par le biais de simulations numériques trois modèles dynamiques permet l'examen du développement de la turbulence à partir de la situation d'équilibre initiale, ainsi que les premières étapes de la saturation de l'instabilité. En géométrie torique, une analyse linéaire de stabilité est effectuée au moyen de deux méthodes distinctes, respectivement par intégration en temps et analyse spectrale, pour obtenir les caractéristiques spectrales des modes les plus instables. Pour chacune des géométries envisagées, les diverses méthodes numériques implémentées sont décrites et leurs performances évaluées. Une attention particulière est portée tout au long de ce travail à la mise en balance des avantages et limites inhérents à la réduction Multi-Water-Bag étendue en espace. Dans tous les cas envisagés, l'analyse a été restreinte à des modèles faiblement résolus en vitesse, de manière à tirer un profit maximum de la réduction tout en préservant le caractère cinétique de la description. Du côté des avantages, outre la possibilité d'une réduction significative de la taille des problèmes, la structuration du modèle en un système fini d'équations fluides conduit à une parallélisation triviale. Les limites du modèles sont envisagées selon deux perspectives. La première, évidente, est celle de l'analyse de l'impact de la faible discrétisation en vitesse des modèles utilisés. Des comparaisons avec un modèle continu dans le cas cylindrique, et des résultats externes obtenus par des codes mieux résolus dans le cas torique, permettent d'éclairer ces limites. La seconde concerne le paramétrage du modèle. Les paramètres définissant un modèle Multi-Water-Bag n'ayant pas de contrepartie physique directe, leur détermination requiert l'emploi d'une procédure d'équivalence. La structure spécifique au modèle ainsi que les méthodes d'équivalences employées conditionnent l'étendue des situations physiques accessibles à une modélisation multi-water-bag. Si le modèle présente d'excellentes performances au vu de son coût pour nombre de situations abordées, une amélioration des méthodes permettant la détermination de ses paramètres est nécessaire pour étendre la gamme des situations physiques abordables.

**Abstract** The research exposed therein is developed in the context of the study of turbulent energy and particles transport phenomena occurring in core magnetically confined fusion plasmas. A study of the ion temperature gradient instability, thought to be one of the main sources of turbulent transport in magnetic fusion devices, is carried out using a gyrokinetic model. In the kinetic framework, ions population dynamics is modeled through the time evolution of the particle distribution function in a six dimensional phase space. The gyrokinetic model leverages the strong anisotropy arising from cyclotron motion in a strong magnetic confinement field to reduce the problem dimensions to three in real space and only two in velocity space. The main originality of this work is the use of a reduced model, the so-called "Multi-Water-Bag" model, to further reduce the problem dimension by expressing it as a finite system of conservation equations in real space. The model is developed in two types of confinement field geometries, one cylindrical and the other toroidal. In cylindrical geometry, the growth of the instability is analysed by the mean of three dynamical models : linear, quasi-linear and non-linear. Starting from a given unstable stationary state, linear stability analysis allows one to obtain spectral and geometrical characteristics of the instability. Parametric dependencies in regard to the initial situation of such characteristics are analyzed. In a second phase, comparing results of numerical simulations implementing the three dynamical models, the growth of turbulence is analysed as well as the first stages of non-linear saturation of the instability. In toroidal geometry, a linear stability analysis is performed. Two different methods, time-based and spectral, were implemented in order to obtain the spectral and geometrical characteristics of the most unstable modes. In both field geometries encompassed by this research, the numerical methods used to obtain the results are described and their performances analyzed. Throughout the work, particular care is given to the balance between the benefits and the limits of the Multi-Water-Bag reduction. In all cases considered, analysis was restricted models exhibiting low resolution in velocity space, in order to take full advantage of the reduction while preserving the kinetic features of the description. In the benefits side, apart from the possibility of a significant reduction of problem size, the structure of the model lends itself to straightforward parallelization schemes. Limits of the model are examined from two main perspectives. Along the first and most obvious one, the impact of the low resolution in velocity space of the model on the instability features are examined. Comparisons with a continuous model in the cylindrical case and external results in the toroidal case, allow one to characterize those limits. The second analysis direction deals with model parameters setting. As the parameters defining a Multi-Water-Bag model do not have direct physical counterparts, their computation calls for the use of specific matching procedures. Both model specific structure and matching methods constrain the range of physical situations that can be matched by a Multi-Water-Bag model. On the one hand, for numerous situations, the models shows excellent performances considering its cost. On the other hand, constraints arising from model parameters setting impose strong limits on the range of physical situations than can be accurately modeled. On the other hand, the methods used to set the model parameters have to be extended in order to allow for a wider range of physical situations to be modeled.

