



**HAL**  
open science

# Stabilité hydrodynamique et magnétohydrodynamique d'un jet capillaire tournant

Karim Loueslati

► **To cite this version:**

Karim Loueslati. Stabilité hydrodynamique et magnétohydrodynamique d'un jet capillaire tournant. Physique [physics]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2000. Français. NNT : 2000INPL007N . tel-01750434

**HAL Id: tel-01750434**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750434v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

00INPL007N



INSTITUT  
NATIONAL  
POLYTECHNIQUE DE  
LORRAINE

LABORATOIRE D'  
ENERGÉTIQUE ET DE  
MÉCANIQUE  
THÉORIQUE ET  
APPLIQUÉE



Thèse présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'I.N.P.L.

Spécialité : Mécanique et Energétique

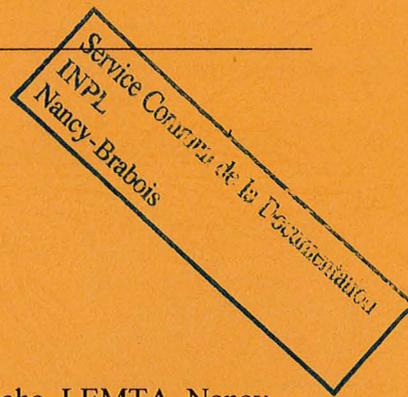
Par

Karim LOUESLATI

*Stabilité hydrodynamique et magnétohydrodynamique  
d'un jet capillaire tournant*



D 136 019607 9



Soutenue le 21 Janvier 2000 devant le jury composé de Messieurs :

- |                   |            |   |
|-------------------|------------|---|
| O. SERO-GUILLAUME | Président  | Directeur de Recherche, LEMTA, Nancy      |
| J. SCOTT          | Rapporteur | Professeur ECL – LMFA, Lyon               |
| P. MARTY          | Rapporteur | Professeur Univ. Fourier – LEGI, Grenoble |
| S. LE DIZES       | Examineur  | Chargé de Recherche, IRPHE, Marseille     |
| J.P. BRANCHER     | Examineur  | Professeur ENSEM – LEMTA, Nancy           |

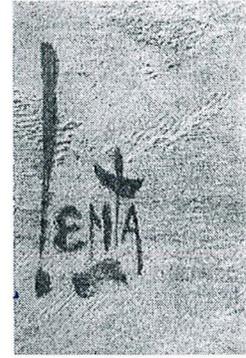
156019 607 9

00 INPL007N



INSTITUT  
NATIONAL  
POLYTECHNIQUE DE  
LORRAINE

LABORATOIRE D'  
ENERGÉTIQUE ET DE  
MÉCANIQUE  
THÉORIQUE ET  
APPLIQUÉE



[M] 2000 LOUESLATI, K

Thèse présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'IN.P.L.

Spécialité : Mécanique et Energétique

Par

Karim LOUESLATI

---

***Stabilité hydrodynamique et magnétohydrodynamique  
d'un jet capillaire tournant***

---

Soutenu le 21 Janvier 2000 devant le jury composé de Messieurs :

|                   |            |   |
|-------------------|------------|---|
| O. SERO-GUILLAUME | Président  | Directeur de Recherche, LEMTA, Nancy      |
| J. SCOTT          | Rapporteur | Professeur ECL – LMFA, Lyon               |
| P. MARTY          | Rapporteur | Professeur Univ. Fourier – LEGI, Grenoble |
| S. LE DIZES       | Examineur  | Chargé de Recherche, IRPHE, Marseille     |
| J.P. BRANCHER     | Examineur  | Professeur ENSEM – LEMTA, Nancy           |

*A mes parents Béchir et Nanie  
Mon frère Sami, ma belle-sœur Raphaëlle  
Et ma compagne Cristel*

## Remerciements

---

J'ai commencé, depuis quatre ans, mes travaux de recherches au LEMTA et le nombre de personnes qui ont, directement ou indirectement, contribué à ce qu'ils aboutissent sous cette forme est important. Et, j'y viendrai par la suite, une grande partie de cette contribution est d'ordre scientifique. Toutefois, je tiens à remercier aussi tout ceux qui m'ont aidé à surmonter les autres difficultés inhérentes au travail de thèse. Ainsi, Marie-Hélène Zoberman, ma maman adoptive au laboratoire, a toujours su me faciliter les tracasseries administratives, préparer mes déplacements ou me gronder si je lui ponctionnais trop de bonbons durant mes pauses. Identiquement, la sympathie des personnels ITA et IATOS a toujours été un facteur de bien-être au sein du laboratoire. Même si ces personnes n'ont pas contribué directement au travail scientifique, je les remercie pour leur apport au niveau humain. Evidemment, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Jean-Pierre Brancher, de m'avoir permis d'effectuer mes travaux de recherches en toute liberté et laisser choisir les différentes voies d'investigation qu'il mettait à ma disposition. Malgré un emploi du temps souvent chargé, Didier Bernardin a toujours su répondre "rapidement" à mes petites questions. A part quelquefois, où il me satellisait dans des espaces de "Tupolev", je repartais alors sans pouvoir me rappeler de ma question, il m'a toujours été d'un grand secours, qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance. Toutes mes journées au laboratoire auraient sans doute été plus monotones si Jean-Christophe Leprévost n'avait pas partagé mon bureau, à bien des égards il a lui aussi contribué à l'avancée scientifique de mon travail et je lui en sais gré. Il ne me faudrait pas non plus oublier l'ensemble des personnes qui ont assuré une relecture du manuscrit : Emmanuel Plaut, Julian Scott et Olivier Séro-Guillaume pour leurs conseils éclairés sur le chapitre I et mon double beau-père Bernard Mirgain pour l'ensemble de ses corrections orthographique et grammaticale. Toutes ces aides scientifiques sont importantes, mais je n'aurais sans doute pas pu mener mon travail de thèse sans l'appui des membres de ma famille et je les en remercie tous. Outre le soutien (moral et matériel) inconditionnel de mes parents proches, je tiens à remercier spécialement ma compagne, Cristel, qui a toujours su trouver les mots pour me remettre en selle dans les moments de doute et supporter mes humeurs bougonnes lorsque mon travail faisait du surplace. Une pensée, pour terminer ces remerciements, à mon ami le docteur Philippe Chevalier qui aurait dû être à mes côtés à la soutenance comme j'aurais aimé le voir soutenir.

|  |           |
|--|-----------|
| <b>INTRODUCTION .....</b>  | <b>4</b>  |
| <b>CHAPITRE I STABILITE LINEAIRE ET NATURE DES INSTABILITES .....</b>    | <b>7</b>  |
| <b>I. INTRODUCTION A LA STABILITE DES ECOULEMENTS PARALLELES .....</b>   | <b>7</b>  |
| 1. INTRODUCTION .....  | 7         |
| 2. MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET RÉOLUTION.....                           | 10        |
| 2.1 <i>Ecoulement de base et perturbation.....</i>                       | 11        |
| 2.2 <i>Décomposition en modes normaux.....</i>                           | 12        |
| 2.3 <i>Résolution.....</i>   | 14        |
| 3. PERTINENCE ET LIMITES DE LA THÉORIE LINÉAIRE.....                     | 17        |
| <b>II. NATURE DES INSTABILITES.....</b>                                  | <b>22</b> |
| 1. INTRODUCTION .....  | 22        |
| 2. INSTABILITÉS CONVECTIVES ET ABSOLUES – CONCEPTS LOCAUX .....          | 23        |
| 2.1 <i>Réponse impulsionnelle ou fonction de Green .....</i>             | 23        |
| 2.2 <i>Contour d'intégration et branches spatio-temporelles.....</i>     | 26        |
| 2.3 <i>Evaluation de la fonction de Green par la méthode du col.....</i> | 28        |
| 2.4 <i>Fréquence absolue .....</i>                                       | 31        |
| 3. PERTINENCE ET LIMITES DE LA THÉORIE SPATIO-TEMPORELLE LOCALE .....    | 37        |
| <b>BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I .....</b>                                 | <b>41</b> |
| <b>CHAPITRE II STABILITE DES JETS TOURNANTS CAPILLAIRES.....</b>         | <b>44</b> |
| <b>I. JET AVEC ROTATION SOLIDE.....</b>                                  | <b>47</b> |
| 1. DÉFINITION DU MODÈLE .....  | 47        |
| 2. FONCTIONS PROPRES ET ÉQUATION DE DISPERSION.....                      | 50        |
| 2.1 <i>Zone interne .....</i>  | 51        |
| 2.2 <i>Zone externe.....</i>   | 52        |
| 2.3 <i>Raccordement à l'interface .....</i>                              | 54        |
| 3. STABILITÉ TEMPORELLE .....  | 56        |
| 3.1 <i>Sans rotation interne .....</i>                                   | 56        |
| 3.2 <i>Influence de la rotation .....</i>                                | 65        |
| CONCLUSIONS DE L'ÉTUDE TEMPORELLE.....                                   | 71        |
| 4. TRANSITIONS IA/IC .....   | 72        |
| 4.1 <i>Transition de tension de surface .....</i>                        | 72        |
| 4.2 <i>Transition du jet chaud, cisaillement et rotations .....</i>      | 75        |
| CONCLUSIONS DE L'ÉTUDE SPATIO-TEMPORELLE .....                           | 85        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>II. MODÈLE DE JET VISQUEUX.....</b>  | <b>87</b>  |
| INTRODUCTION .....  | 87         |
| 1. FONCTIONS PROPRES ET PROBLÈME AUX VALEURS PROPRES .....                    | 87         |
| 1.1 Détermination des fonctions propres du jet visqueux .....                 | 89         |
| 1.2 Condition de passage de l'interface et problèmes aux valeurs propres..... | 92         |
| 2. INFLUENCE DE LA VISCOSITÉ DU JET SUR LA STABILITÉ .....                    | 95         |
| 2.1 Stabilité temporelle .....  | 95         |
| 2.2 Transitions IA/IC.....  | 96         |
| <b>III. INFLUENCE DE LA VISCOSITE EXTERNE .....</b>                           | <b>102</b> |
| 1. FONCTIONS PROPRES ET PROBLÈME AUX VALEURS PROPRES .....                    | 102        |
| 2.1 Détermination des fonctions propres de l'écoulement externe .....         | 104        |
| 2.2 Conditions de raccordement .....  | 106        |
| 2. INFLUENCE DE LA VISCOSITÉ EXTERNE .....                                    | 108        |
| 2.1 Stabilité temporelle .....  | 108        |
| 2.2 Transitions IA/IC.....  | 112        |
| <b>IV. CONCLUSIONS SUR LES MODELES VISQUEUX .....</b>                         | <b>115</b> |
| 1. JET VISQUEUX .....   | 115        |
| 2. FLUIDE EXTÉRIEUR VISQUEUX .....  | 115        |
| <b>BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II.....</b>                                      | <b>117</b> |
| <b>CHAPITRE III STABILITE DES JETS AVEC CHAMP MAGNETIQUE AXIAL.....</b>       | <b>120</b> |
| <b>I. JET TOURNANT DE FLUIDE CONDUCTEUR.....</b>                              | <b>120</b> |
| 1. INTRODUCTION .....   | 120        |
| 2. EQUATIONS DE LA MHD.....   | 122        |
| 2.1 Equation de l'induction.....  | 122        |
| 2.2 Equations du mouvement .....  | 125        |
| 3. MODÈLE À GRAND NOMBRE DE REYNOLDS MAGNÉTIQUE.....                          | 126        |
| 3.1. Hypothèses et écoulement de base .....                                   | 127        |
| 3.2 Détermination des champs perturbés.....                                   | 131        |
| 3.3 Equation de dispersion.....   | 135        |
| 3.4 Influence du champ magnétique sur la stabilité temporelle.....            | 136        |
| 4. MODÈLES À NOMBRE DE REYNOLDS MAGNÉTIQUE QUELCONQUE.....                    | 147        |
| 4.1 Détermination des champs perturbés.....                                   | 147        |
| 4.2 Influence du Reynolds magnétique sur la stabilité temporelle.....         | 154        |
| 5. TRANSITIONS IA/IC .....  | 158        |
| 5.1 Fluide parfaitement conducteur .....                                      | 159        |
| 5.2 Fluide résistif.....  | 169        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>II. JET CAPILLAIRE DE FLUIDE MAGNETIQUE .....</b>              | <b>174</b> |
| 1 INTRODUCTION .....  | 174        |
| 2 ECOULEMENT DE BASE .....  | 177        |
| 2.1 <i>Système d'équation</i> .....                               | 178        |
| 2.2 <i>Recherche du champ propre de base</i> .....                | 180        |
| 2.3 <i>Equation de dispersion</i> .....                           | 182        |
| 3. INFLUENCE DU CHAMP MAGNÉTIQUE SUR LA STABILITÉ TEMPORELLE..... | 185        |
| 4 TRANSITIONS IA/IC .....   | 189        |
| <b>BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE III .....</b>                        | <b>191</b> |
| <b>CHAPITRE IV CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....</b>              | <b>193</b> |
| <b>I. CONCLUSIONS.....</b>  | <b>193</b> |
| <b>II. PERSPECTIVES .....</b>                                     | <b>194</b> |
| 1. EXTENSIONS THÉORIQUES.....                                     | 194        |
| 2. PERSPECTIVES EXPÉRIMENTALES .....                              | 195        |
| 2.1 <i>Description du montage expérimentale</i> .....             | 196        |
| 2.2 <i>Mesures préliminaires</i> .....                            | 198        |
| 2.3 <i>Simulation numérique sous PHOENICS</i> .....               | 199        |
| 2.4 <i>Visualisations expérimentales</i> .....                    | 202        |

# INTRODUCTION

Un des intérêts majeurs lorsqu'on travaille avec des liquides conducteurs d'électricité ou des liquides magnétiques est de pouvoir modifier les écoulements par l'intermédiaire du champ magnétique appliqué. Cette possibilité est due aux forces de volume d'origine électromagnétique : forces volumiques de Laplace dans le cas d'un conducteur non magnétique ( $\mu_0 \vec{j} \wedge \vec{H}$  où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide,  $\vec{j}$  la densité de courant et  $\vec{H}$  le champ) ou forces magnétiques dans le cas du liquide magnétique ( $\mu_0 \vec{M} \cdot \text{Grad} |\vec{H}|$  où  $\vec{M}$  est l'aimantation volumique). De même aux interfaces entre un liquide magnétique et un fluide non magnétique apparaît, par le saut d'induction magnétique, la densité d'efforts surfaciques  $\mu_0/2(\vec{M} \cdot \vec{n})\vec{n}$  où  $\vec{n}$  est la normale extérieure au fluide magnétique. Dans le cas de conducteurs liquides soumis à des champs de grandes fréquences, par l'effet de peau électromagnétique induit par le saut tangentiel du champ, une densité surfacique :  $-\mu_0 H^2/2 \cdot \vec{n}$ . Ces propriétés sont avec l'induction électrique à la base de la magnétohydrodynamique et, avec l'aimantation, de la ferro-hydrodynamique. On aura donc par le champ magnétique une possibilité de contrôle des écoulements et de leur stabilité. On peut alors confiner, guider, former, brasser, freiner ou accélérer un écoulement. Avec un champ tournant dans un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement, il est possible de mettre le fluide en rotation et donc de créer de l'hélicité. Les effets interfaciaux concernant la stabilité d'écoulements à surface libre sont connus. Un champ magnétique transverse à la surface libre d'un liquide magnétique au repos, a une action déstabilisatrice et est à l'origine de l'instabilité de Cowley–Rosensweig<sup>1</sup>. Par contre, un champ parallèle à l'interface aura un effet stabilisant (cf. Rosensweig<sup>2</sup>, Brancher & Séro-Guillaume<sup>3</sup>). Pour un liquide conducteur soumis à un champ de grande fréquence, la pression  $\mu_0 H^2/2$  a un effet stabilisateur. Le mécanisme est analogue à celui rencontré dans l'instabilité de Kelvin-Helmholtz où l'inertie par le terme d'énergie cinétique  $\rho U^2/2$  joue un rôle déstabilisant. L'étude présentée ici concerne le contrôle des jets noyés et surtout des jets capillaires. La motivation se trouvait, à l'origine, dans certains problèmes posées dans les procédés métallurgiques. Par exemple, lors du remplissage de lingotière comment briser le jet d'acier liquide pour empêcher la concentration trop forte d'énergie cinétique sur son axe : soit on freine le jet en appliquant un

champ magnétique transverse soit on l'excitant par un champ pulsant à la fréquence du mode le plus instable ou bien en le mettant en rotation, de manière à obtenir un éclatement tourbillonnaire. Un autre exemple est le procédé de pulvérisation d'un jet (cf. Witkowsky & Marty<sup>4</sup>), destiné à l'obtention de poudre. Dans ce cas, on a affaire à un jet capillaire et une mise en rotation suffisante du jet conduit à une rupture en goutte. Nous nous sommes placés dans le cas général des jets capillaires tournants avec ou sans champ magnétique longitudinal. Pour un liquide conducteur, les paramètres de contrôles sont alors le nombre de Weber, le nombre d'Alfvén et le nombre de swirl comparant respectivement l'importance relative des effets d'inertie et tension superficielle, les effets inertiels et les électromagnétiques, les effets de rotation et de mouvement longitudinal. Pour les liquides magnétiques, un paramètre supplémentaire intervient : c'est la susceptibilité magnétique  $\chi_0$  du milieu. Dans ce mémoire, nous avons repris dans un cas général les études de stabilité temporelle portant sur les jets tournants mais nous avons aussi développé une analyse du caractère absolu ou convectif de l'instabilité et de l'influence des différents paramètres de contrôles. Dans un premier chapitre, nous nous bornerons à faire des rappels indispensables, pour la suite, sur les notions d'instabilité convective ou absolue d'un écoulement et les méthodes de détermination de la nature de l'instabilité. Dans les chapitres suivants, la stabilité d'un modèle de jet tournant est analysée : le tourbillon de Rankine avec vitesse axiale. Le jet est en rotation solide et sa vitesse axiale est constante. A l'extérieur du jet, le fluide ambiant est animé d'une vitesse axiale différente de celle du jet et sa vitesse azimutale décroît en  $1/r$ . La première partie du travail est constituée des analyses temporelle et spatio-temporelle des instabilités, en fonction des mécanismes physiques présents : tension superficielle, couches de mélange axiale et azimutale, différence de densité et forces centrifuges. L'influence stabilisatrice de la viscosité du jet sur les instabilités centrifuges et la déstabilisation des modes neutres de Kelvin par la viscosité du fluide environnant sont mises en évidence. La modification des transitions absolu/convectif, issues de la tension de surface, de la différence de densité ou du cisaillement, est caractérisée en fonction des nombres de Reynolds interne et externe. En seconde partie, la stabilisation de l'écoulement, en présence d'un champ magnétique axial et lorsque le jet est un fluide parfaitement conducteur et non magnétique, est montrée. L'importance de la stabilisation par le champ magnétique étant fonction de la conductivité électrique du fluide, l'influence du nombre de Reynolds magnétique est étudiée. Le champ magnétique est montré comme facteur de diminution des zones d'instabilité absolues si le jet n'est pas en rotation. Sous certaines conditions, l'addition de la rotation du jet et du champ

magnétique peut amener à une transition vers l'état absolument instable. Enfin, dans le cas où le jet, constitué de fluide magnétique et non conducteur, est non tournant, l'importance du champ magnétique axial sur la stabilité spatio-temporelle du système est quantifiée.

---

<sup>1</sup> M. D. Cowley & R.E. Rosensweig, *The interfacial stability of a ferromagnetic fluid*.  
J. Fluid Mech., **30**, pp. 671-688, 1967.

<sup>2</sup> R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*  
Cambridge University Press, 1985.

<sup>3</sup> J. P. Brancher & O. Sero-Guillaume, *Sur l'équilibre des liquides magnétiques, application à la magnéto-statique*.  
Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, **2**, pp. 265-283, 1983.

<sup>4</sup> M. Witkowsky & P. Marty, *Effect of a rotating magnetic field of a arbitrary frequency on a liquid metal column*.  
Eur. J. Mech., B/Fluids, **17**, n°2, pp. 239-254, 1998

# CHAPITRE I

## STABILITE LINEAIRE ET NATURE DES INSTABILITES

*Résumé :* Nous nous intéressons dans ce premier chapitre aux notions de stabilité linéaire temporelle et spatio-temporelle des écoulements. La stabilité linéaire apporte des renseignements quant à la nature stable ou instable d'un écoulement. En complément, l'analyse spatio-temporelle amène à la détermination de la nature des instabilités.

### I. INTRODUCTION A LA STABILITE DES ECOULEMENTS PARALLELES

#### 1. Introduction

On s'intéresse à l'équilibre ou l'équilibre dynamique d'un système physique. L'état solution sera notre état de base. Si l'état de base est perturbé, soit les perturbations s'amplifient soit elles sont amorties. On dira que dans le premier cas l'état de base ou la solution de base est instable, et dans le deuxième stable. Une illustration simple et classique du changement d'équilibre d'un système dynamique est la sphère soumise à la force de gravitation. Sur une surface concave (fig. 1.b), une sphère en équilibre le restera sous l'action de perturbations de faibles amplitudes. Tandis que sur une surface convexe l'équilibre devient instable (fig. 1.c).

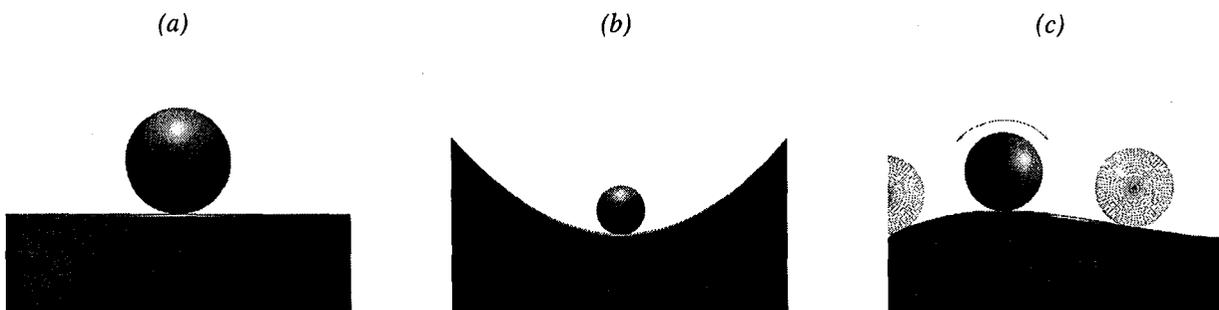


Figure 1 : Positions d'équilibre stables et instables

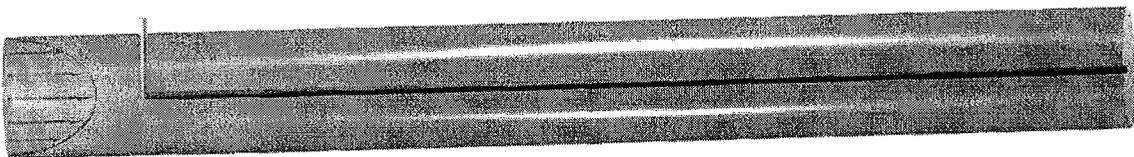
(a) Neutre (b) Stable (c) Instable

Les systèmes hydrodynamiques obéissent aussi à ces notions d'état stable ou instable vis à vis de perturbations. Les premières études de stabilité hydrodynamiques ont été formulées à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, notamment par Helmholtz, Kelvin, Rayleigh et Reynolds. Et depuis, nombres d'ouvrage sur la stabilité ont été édités. Les quelques notions de stabilité qui vont suivre pourront donc être complétées par la lecture d'ouvrages tels que ceux de Chandrasekhar<sup>1</sup>, Drazin & Reid<sup>2</sup> ou Lin<sup>3</sup>.

L'étude de la stabilité d'un écoulement consiste à déterminer la réponse du système à des perturbations à partir de son état d'équilibre. Les perturbations ne constituent pas une simple vue de l'esprit et n'apparaissent pas uniquement par un forçage théorique. Tout système réel comporte son lot de perturbations d'origines différentes. Elles peuvent être issues de l'imperfection des matériaux utilisés (défaut, rugosité), d'impuretés au sein du fluide ou de la porte de la salle d'expérimentation qui vient d'être fermée. Imposées au système, ces perturbations vont l'écarter de sa « position » d'équilibre et induire une réaction de sa part. Si l'écoulement est stable, il reviendra à sa état initial. Si l'écoulement est instable, il va s'éloigner de son état de base pour évoluer vers un nouvel état. En se plaçant du point de vue des perturbations, si l'équilibre est stable, les perturbations vont s'atténuer spatio-temporellement et disparaître. Inversement, pour un écoulement instable, les perturbations vont voir leurs amplitudes croître et dans ce cas éloigner le système de son équilibre. L'expérience de Reynolds<sup>4</sup> illustre les transitions entre les écoulements stables et instables.

$Re < Re_c$

(a)



$Re > Re_c$

(b)

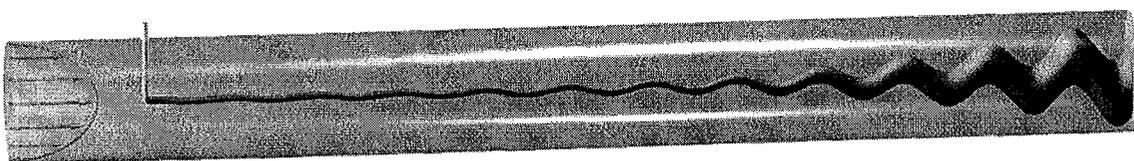


Fig. 2 : Schéma de l'expérience de Reynolds  
(a) Ecoulement Stable (b) Instable

Un traceur passif est injecté en un point amont d'un écoulement en conduite (cf. fig. 2), la ligne d'émission est alors un moyen de visualiser l'évolution de perturbations. Si l'écoulement est stable (fig. 2.a), après introduction de perturbations, la ligne d'émission reste parallèle à l'axe principale de l'écoulement, les particules ne subissent aucune fluctuation. Maintenant, si l'écoulement est instable les perturbations ne vont plus être amorties et vont s'amplifier spatio-temporellement et modifier profondément l'écoulement en aval. Ce dernier va subir une désorganisation et des fluctuations spatiales et temporelles. La distinction entre les deux écoulements est effectuée grâce au nombre adimensionnel de *Reynolds* :

$$Re = U.D/\nu .$$

Le nombre de Reynolds, défini *via* le diamètre de la conduite  $D$ , la vitesse débitante  $U$ , et la viscosité cinématique du fluide  $\nu$ , va caractériser la stabilité de l'écoulement ainsi que la nature du régime. Si le nombre de Reynolds est inférieur à une valeur seuil  $Re_c \cong 3000$ , appelée Reynolds critique, l'écoulement est stable et est dit laminaire. Au delà, l'écoulement va devenir instable et une transition progressive vers la turbulence va s'effectuer.

Les perturbations sont à la base même de cette transition, en leur absence ou si leur intensité est trop faible, la transition n'existe pas. Des expériences ont ainsi montré que la transition pouvait être retardée si la conduite était mieux isolée de toutes formes de perturbations. Le régime laminaire peut être alors maintenu jusqu'à  $Re \cong 50\,000$ . Dans ce cas précis, la stabilité du système dépend de l'amplitude des perturbations injectées, l'écoulement est stable vis-à-vis de petites perturbations (stabilité linéaire) mais est instable pour des perturbations d'amplitude suffisamment grande (instabilité non linéaire). Nous avons affaire là à une bifurcation dite sous-critique et on parlera de stabilité conditionnelle.

La détermination de l'évolution en espace et en temps des perturbations est une façon de savoir si l'écoulement étudié est stable ou instable. Les analyses de stabilité s'effectuent donc à partir d'une configuration d'écoulement dont on ne sait si elle est stable ou non mais qui vérifie les équations fondamentales de la mécanique. En toute rigueur, toutes les formes de perturbations, vérifiant les équations du système étudié, devraient être injectées en plus de l'écoulement de base, afin d'en connaître l'évolution.

Cependant, la plupart des études de stabilité reposent sur une modélisation de perturbations infinitésimales et comme nous le verrons, donnent souvent de bonnes prédictions sur les transitions réelles.

## 2. Modélisation mathématique et résolution

Considérons un système hydrodynamique en état stationnaire. Son état est déterminé par les caractéristiques physiques (masse volumique, viscosité etc..) associées au(x) fluide(s) en présence, mais aussi ses paramètres géométriques, ses champs de vitesse, de température ou ses gradients de pression. Il existe un ensemble infini de paramètres  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$  qui vont définir le système et intervenir sur sa stabilité. Il est souvent commode dans les analyses de stabilité de combiner entre elle les grandeurs caractéristiques du problème afin d'obtenir des nombres sans dimension. Ainsi, le nombre de Reynolds représente les effets d'advection liés au déplacement inertiel du fluide par rapport aux effets de diffusion du mouvement par viscosité. Ces nombres réduits sont l'expression de l'influence de phénomènes physiques ou de leurs rapports et peuvent être utiles pour définir une base de similitude de problèmes équivalents.

Les transitions entre écoulement stable et instable sont alors déterminées dans l'espace des paramètres de contrôle que constituent l'ensemble des nombre réduits spécifiques au problème.

En considérant la stabilité d'un tel système, il devient essentiel de déterminer sa réponse à des perturbations. Le système est-il stable ou instable pour ce type de perturbation *i.e.* les perturbations augmentent elles ou sont-elles atténuées?

Il est clair qu'un écoulement est considéré comme instable s'il existe au moins un type de perturbation qui le rend instable. Et la proposition complémentaire en découle : un écoulement est considéré stable, si et seulement si, il l'est respectivement pour tout type de perturbation admissible. En d'autres mots, il n'existe aucun mode de perturbation qui s'amplifie.

Dans tout ce qui suit, nous allons employer le terme de système ou d'écoulement stable dans le sens de stable linéairement, c'est à dire vis-à-vis de perturbations infinitésimales. Ainsi lorsque un écoulement sera dit instable dans les analyses menées, il y a de fortes chances pour que l'instabilité puisse être observée expérimentalement. Mais si la stabilité du système est avérée, il est sous-entendu qu'en réalité d'autres formes de perturbations peuvent le déstabiliser. Une analyse non linéaire devient indispensable. Les relations entre analyse linéaire et non-linéaire sont les suivantes :

*stable non linéaire  $\Rightarrow$  stable linéaire*

*instable linéaire  $\Rightarrow$  instable non linéaire*

## 2.1 Écoulement de base et perturbation

L'analyse de stabilité linéaire consiste à introduire des perturbations de petites amplitudes par rapport aux amplitudes caractéristiques de l'écoulement de base que l'on veut analyser. L'écoulement de base doit être, en principe<sup>‡</sup>, solution des équations gouvernant son mouvement. En rajoutant des perturbations, la solution est légèrement écartée de sa valeur initiale et les différents champs se décomposent en deux parties. Une partie est issue de la solution de base  $F_0(\vec{X}, t)$  et l'autre de la perturbation  $f(\vec{X}, t)$ .

Chaque champ peut alors s'écrire :

$$(1) \quad F(\vec{X}, t) = F_0(\vec{X}, t) + \varepsilon \cdot f(\vec{X}, t)$$

où  $\varepsilon$  représente la faible amplitude des champs perturbés.

L'équation (1) peut aider à formaliser mathématiquement les notions de stabilité et d'instabilité. Suivant la théorie de stabilité des système d'équations différentielles ordinaires, nous pouvons définir un écoulement de base comme étant stable (au sens de Liapounov) si, pour tout  $\tau > 0$ , il existe un nombre positif  $\xi$  tel que :

$$(2) \quad \|F(\vec{X}, 0) - F_0(\vec{X}, 0)\| < \xi \quad \text{entraîne} \quad \|F(\vec{X}, t) - F_0(\vec{X}, t)\| < \tau \quad \text{pour tout } t > 0$$

Les champs  $F(\vec{X}, t)$  sont alors introduits aussi bien dans les équations du mouvement que dans les conditions aux limites. C'est à ce niveau qu'intervient le caractère linéaire de la théorie puisque les termes quadratiques  $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^n$  vont être négligés par rapport aux termes d'ordre  $\varepsilon$ .

Une fois linéarisées, les équations du mouvement aboutissent à un système d'équations linéaires portant sur les champs perturbés. Couplé aux conditions aux limites, ce dernier constitue un système aux valeurs propres de type Rayleigh ou Orr-Sommerfield.

---

<sup>‡</sup> Il est fréquent de trouver des études de stabilité analytiques ou numériques dont l'écoulement de base n'est pas solution des équations du mouvement. Nonobstant, ces analyses donnent des résultats non dénués d'intérêt (cf., par exemple, travaux de Nor & al<sup>5</sup> sur le déclenchement de l'effet dynamo dans les tourbillons de Taylor-Green).

Sa résolution conduit à la détermination des perturbations solutions des équations du mouvement, soit des perturbations qui peuvent exister dans le cas étudié. En général, la solution triviale (amplitudes de perturbations identiquement nulles) n'est pas l'unique solution du problème et on est amené à résoudre un système aux valeurs propres pour lequel il faut déterminer les fonctions propres associées.

L'étape suivante est constituée d'une résolution soit numérique, soit analytique. Dans ce dernier cas, l'expression mathématique des fonctions perturbées est alors connue explicitement. Cependant pour la plupart des écoulements réels les fonctions propres ne peuvent être déterminées. Les raisons en sont multiples. Du fait de leur complexité, les écoulements de base réels sont, en général, difficilement modélisables de façon parfaite. Et même si cela est le cas, la recherche des fonctions propres peut se révéler laborieuse.

La modélisation mathématique du problème intervient donc fortement dans les études de stabilité linéaire. Pour notre part, nous avons préféré miser sur des modélisations simples des écoulements de base et adopter une méthode de résolution analytique.

## **2.2 Décomposition en modes normaux**

En pratique, la réaction de l'écoulement de base à l'introduction de perturbation est examinée en décomposant toute perturbation élémentaire comme étant la superposition de fluctuations élémentaires. Ces perturbations élémentaires constituent alors des modes qui n'interagissent pas entre eux et la stabilité de l'écoulement doit être examinée pour chacun d'eux. Pour illustrer notre propos, nous allons prendre un exemple d'écoulement stationnaire et unidirectionnel suivant un axe  $z$ , normal au plan  $(x, y)$ ; le champ de vitesse de base  $[0, 0, U_0(y)]$  ne dépendant que de la coordonnée transverse et est donc invariant par translation suivant  $x$  ou  $z$ .

Ce type d'écoulement, appelé aussi écoulement parallèle, constitue souvent une approche des écoulements de base non parallèles, c'est à dire pour lesquels il existe une évolution dans la direction principale de l'écoulement, ici  $z$ . La simplicité de l'approche réside dans le fait que si l'écoulement de base admet une faible évolution suivant l'axe  $z$ , il est permis de le découper en « tranches » indépendantes dans sa direction principale.

Ainsi à chaque position  $z_0$  correspond un profil de vitesse, de densité ou de température *locales*. En général, seule l'analyse de stabilité de la première tranche est effectuée, sans tenir compte de l'évolution spatiale. La généralisation de l'analyse locale est de considérer l'écoulement dans sa globalité. L'analyse est alors dite *globale*. Nous ne considérerons ici que des analyses de niveau local cependant les concepts associés à notre exemple peuvent être étendus à une analyse globale.

Reprenons notre écoulement unidirectionnel. A cet écoulement est superposé une perturbation représentée par  $P(x, y, z, t)$  où  $t$  représente la variable de temps. Cette perturbation arbitraire peut être décomposée en un ensemble de modes normaux sur une base de Fourier<sup>‡</sup> :

$$(3) \quad \psi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(y, t) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x dk_z \quad \text{avec} \quad P(x, y, z, t) = \text{Re}(\psi(x, y, z, t))$$

où  $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$  est le nombre d'onde associé à la perturbation élémentaire  $\psi_k(y, t)$ .

Les équations perturbées étant linéaires, la réaction du système à la perturbation générale  $\psi(x, y, z, t)$  est équivalente à la somme des réactions aux perturbations élémentaires pour tout nombre d'onde  $k$ . La stabilité générale du système est donc liée à celle de chaque nombre d'onde. Ainsi, s'il existe ne serait ce qu'un seul nombre d'onde  $k_c$  pour lequel l'écoulement est instable, alors des instabilités de longueurs caractéristiques  $\lambda_c = 2\pi/k_c$  peuvent se développer.

Si l'axe  $z$  est un axe de symétrie de l'état stationnaire, la perturbation est écrite dans le repère cylindrique  $[r, \theta, z]$  :

$$(4) \quad \psi(r, \theta, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(r, t) e^{i(m\theta + kz)} dk$$

où  $m$  est appelé nombre d'onde azimutale.

---

<sup>‡</sup> Le nombre d'onde  $k$  peut appartenir à un ensemble dénombrable à valeurs dans  $\mathfrak{R}$ . Ceci est souvent le cas lorsque l'on travaille sur des écoulements fermés tel que l'écoulement de Rayleigh-Bénard. Les conditions aux limites imposent alors des valeurs discrètes du nombre d'onde

Le nombre d'onde  $m$  est un nombre entier relatif pour respecter la périodicité de l'écoulement suivant son azimut,  $k$  est dénommé alors nombre d'onde axiale.

Du fait de la linéarisation, les modes  $\psi_k$  sont indépendants les uns des autres et l'ensemble des nombres d'onde axiale peut être représenté par la seule variable  $k$ . La dépendance de  $\psi_k(r, t)$  en temps est éliminée en recherchant des solutions de la forme :

$$(5) \quad \psi_k(r, t) = \psi(k, \omega) \exp(i(\omega t + m\theta + kz))$$

où  $\omega$  est la pulsation complexe de l'onde élémentaire.

### 2.3 Résolution

Les perturbations satisfont un système d'équations différentielles partielles issues de la linéarisation des équations du mouvement. Dans l'espace physique  $(x, t)$ , le système d'E.D.P. peut être mis sous la forme d'un opérateur différentiel ou même intégro-différentiel  $L$  appliqué à la perturbation  $\psi(x, t)$  :

$$(6) \quad L \left[ -i \frac{\partial}{\partial x}, -i \frac{\partial}{\partial t}, R_i \right] \psi(x, t) = 0$$

Où  $R_i$  représente l'ensemble des paramètres de contrôles, tels que le nombre de Reynolds.

La résolution du problème aux valeurs propres va amener à la connaissance des fonctions propres de perturbations. Associé aux conditions aux limites, il est souvent possible d'obtenir une équation liant  $\omega$  et  $k$ , de la forme :

$$(7) \quad D(k, \omega, R_i) = 0.$$

Cette relation est l'équation de *dispersion* appelée quelquefois équation séculaire. La suite de l'analyse réside dans la détermination de  $\omega$  comme fonction de  $k$  ou inversement de  $k$  comme fonction de  $\omega$ , solutions de (7). Ainsi, deux types de résolution s'offrent à nous : une *résolution temporelle* ou une *résolution spatiale*.



### ⇒ Résolution spatiale

Le deuxième type d'analyse de stabilité est l'analyse dite spatiale. A l'inverse de l'analyse temporelle, la pulsation est réelle et le nombre d'onde axiale est complexe :

$$(10) \quad k(\omega) = k_r(\omega) + ik_i(\omega) \text{ avec } \omega \in \mathfrak{R}$$

Ainsi l'écoulement est :

$$(11) \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \text{spatialement } \textit{stable} \text{ si } k_i > 0, \\ &\Rightarrow \text{marginale} \text{ment } \textit{stable} \text{ si } k_i = 0 \text{ et} \\ &\Rightarrow \text{spatialement } \textit{instable} \text{ si } k_i < 0. \end{aligned}$$

Si une résolution spatiale est entreprise, elle correspond à la réponse de l'écoulement de base à une perturbation dont la partie temporelle est oscillante. Physiquement, des fluctuations temporelles de fréquence  $\omega$  sont introduites à une position  $z_0$  de l'écoulement de base (au niveau d'une buse d'injection par exemple), et l'analyse théorique doit prédire le développement spatial des instabilités.

Le choix entre l'analyse spatiale ou l'analyse temporelle n'est pas toujours justifiée dans les études de stabilité. En effet, ce choix dépend du problème que l'on veut traiter. Ainsi, si l'on considère un écoulement de base non perturbé et qu'une perturbation initiale est introduite à  $t = 0$ , l'analyse temporelle est appropriée. Si la perturbation est une source continue en temps (forçage), alors l'analyse spatiale peut être adoptée. Nous avons choisi, pour notre part, de nous appuyer sur une résolution temporelle car les instabilités spatiales ou spatio-temporelles ne peuvent se développer que sur des systèmes instables temporellement.

Pour les écoulements instables, il existe en fait une relation entre les perturbations qui sont spatialement amplifiées et celles qui le sont temporellement. Cette relation, mise en évidence par Gaster<sup>5</sup>, permet de déduire, suivant certaines hypothèses, le taux d'amplification maximale  $k_i$  de la théorie spatiale en fonction de celui de la théorie temporelle  $\omega_i$  :

$$(12) \quad \omega_i = k_i \frac{\partial \omega_r}{\partial k_r}$$

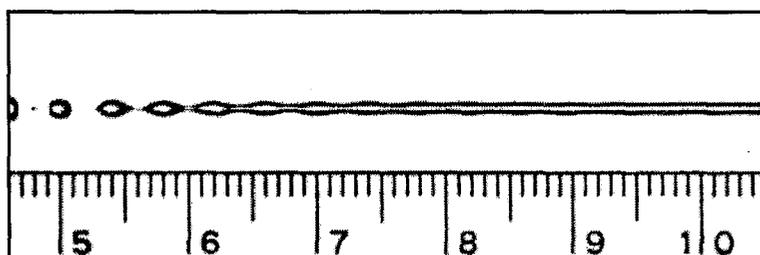
Nous verrons dans la théorie spatio-temporelle, en particulier dans l'identification des branches spatialement amplifiées, qu'il existe d'autres relations entre les approches temporelle et spatiale. Mais avant cela, et afin de donner une idée de la pertinence des analyses de stabilité vis-à-vis de la réalité, nous allons donner quelques exemples où théorie et expérience sont en bon accord.

### 3. Pertinence et limites de la théorie linéaire

Au vu des paragraphes précédents, la théorie de stabilité linéaire pourrait apparaître comme trop simple et réductrice pour pouvoir apporter des résultats utilisables expérimentalement. Pourtant, le nombre d'études de stabilité linéaire en accord avec l'expérience abondent. Nous pourrions donc donner beaucoup de résultats tels que ceux issus de l'analyse de stabilité des écoulements de Taylor-Couette ou de Rayleigh-Bénard. Nous n'allons citer ici que deux exemples qui nous paraissent intéressants et reliés à notre sujet : à commencer par le jet capillaire, c'est à dire avec une interface faisant intervenir les phénomènes de tension superficielle dus à la non miscibilité des fluides.

De nombreux travaux ont été publiés concernant les jets capillaires et leur rupture. L'analyse temporelle étant assez simple à réaliser en hypothèse de fluide parfait et d'apesanteur, il est possible de comparer la longueur d'onde de la perturbation d'amplification maximale issue de la théorie à celle de l'expérience.

La figure 4 illustre les instabilités dues à la tension de surface entre le jet et le fluide externe, en l'occurrence de l'air.



*Fig. 4 : Instabilité capillaire d'un jet circulaire  
d'après Goedde & Yuen*

L'expérience a été, entre autres, menée par Goedde & Yuen<sup>6</sup> sur un jet circulaire légèrement excité acoustiquement juste après la buse d'injection.

Une instabilité sinueuse du jet, appelée *instabilité de Rayleigh*, se développe et conduit à la rupture en gouttes du jet. Les auteurs ont pu mesurer les taux de croissance temporelle des perturbations en fonction de leurs longueurs d'onde axiale. Nous avons reproduit la courbe  $\omega_i(k)$  où les auteurs ont superposé la courbe théorique et les résultats expérimentaux.

Sur la figure 5, on constate que les résultats théoriques sont très proches des valeurs expérimentales. En particulier, le maximum du taux de croissance et son nombre d'onde correspondant ( $k \approx 0.7$ ) sont bien évalués par la prédiction théorique.

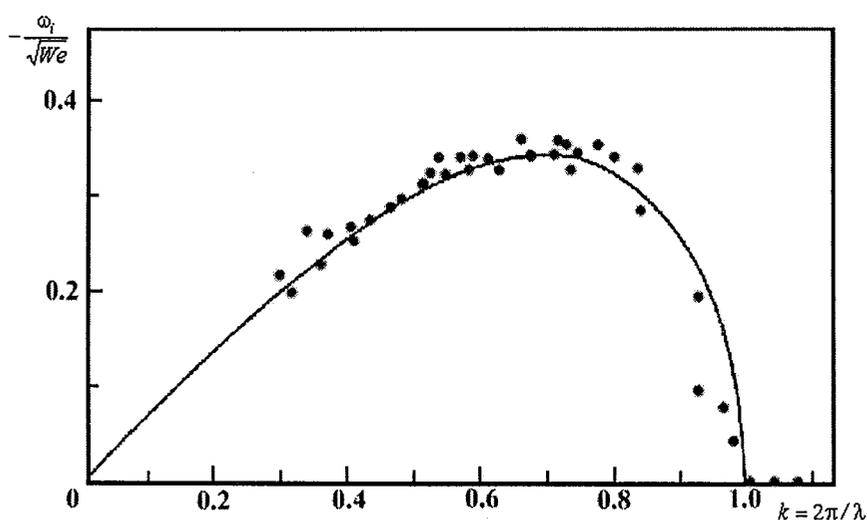


Fig. 5 : Taux de croissance temporelle d'après Goedde & Yuen  
 ———— Courbe Théorique      ● Points expérimentaux

Cette correspondance entre théorie et expérience doit pourtant être limitée sur un intervalle où l'amplification des perturbations est linéaire. En effet, la croissance exponentielle des perturbations débute par une phase où l'approximation linéaire de la théorie est valable. Mais le développement réel des instabilités fait ensuite intervenir une phase de saturation des perturbations. Les perturbations ne pouvant, bien évidemment, pas croître exponentiellement au fil du temps sans limites, leur croissance doit, à un moment donné, commencer à saturer. Cette saturation est liée en grande partie à l'importance croissante, au sein des équations du mouvement, des termes non-linéaires. Ces derniers vont interagir entre eux et une analyse non linéaire doit être effectuée. Si l'on se réfère à l'expérience du jet capillaire, la formation des satellites et leurs topologies ne peuvent être abordées avec une analyse simplement linéaire.

Une deuxième analyse de stabilité, intéressante à présenter, a été effectuée par Chandrasekhar<sup>1</sup> sur un écoulement tournant. Intéressante car elle met en jeu des ondes stationnaires, pour lesquelles il n'existe pas de croissance temporelle.

A la suite des travaux de Kelvin<sup>7</sup>, l'auteur a déterminé les modes stationnaires qui peuvent se développer sur une colonne de fluide mise en rotation. La géométrie est constituée d'un cylindre de rayon  $R_1$  tournant à une vitesse angulaire  $\Omega$ . Plongé dans un bac cylindrique de rayon  $R_2$ , le système est borné, et seul un ensemble discret de longueurs d'onde  $\{\lambda\}$  peut exister :

$$(13) \quad \lambda = n\pi R_2 / H \quad \text{avec} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

où  $H$  est la hauteur de fluide contenue dans le récipient. Expérimentalement, les modes peuvent être excités et maintenus par l'intermédiaire d'un petit disque situé sur l'axe de rotation. Le disque excitateur peut être déplacé en hauteur afin de contrôler la fréquence d'oscillation  $p$  ( $\omega$ , pour notre notation). Nous avons reproduit la légende d'origine.

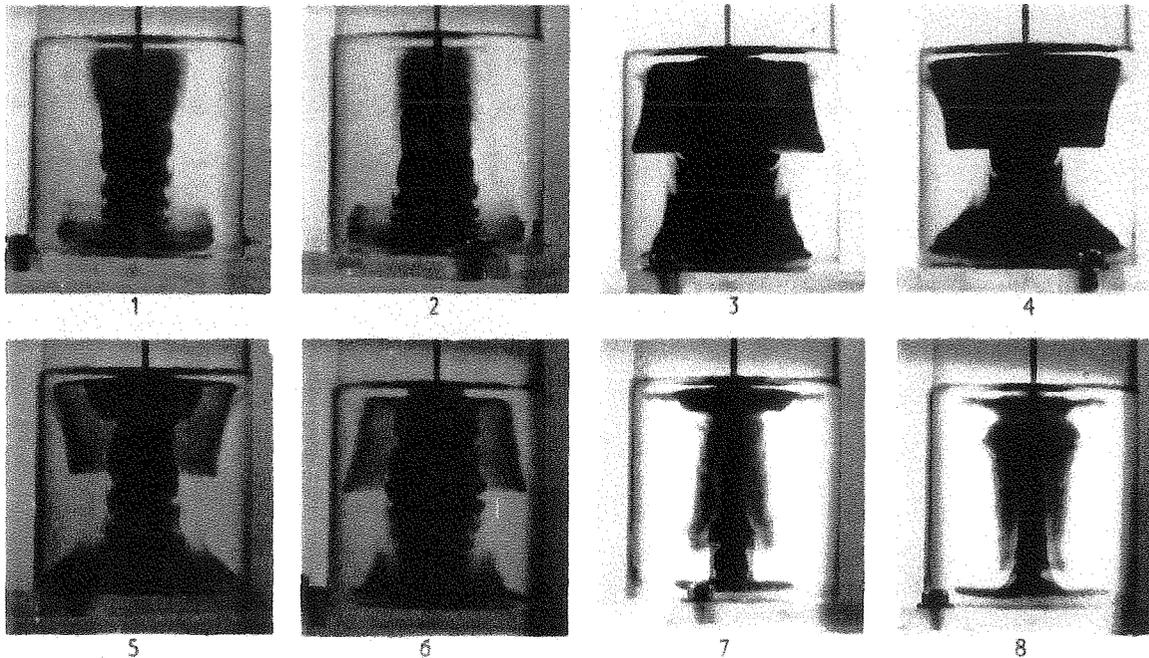


FIG. 64. Photographs illustrating the oscillations of a rotating column of fluid in the modes  $m = 0, j = 1$  (photographs 1 and 2),  $m = 0, j = 2$  (photographs 3, 4, 5, and 6), and  $m = 0, j = 3$  (photographs 7 and 8). The data for the different photographs are as follows:

| Photographs | Rotation period (sec) | $\Omega/p$ |             | Intervals between photographs (sec) |
|-------------|-----------------------|------------|-------------|-------------------------------------|
|             |                       | observed   | theoretical |                                     |
| 1, 2        | 2.295                 | 1.316      | 1.318       | 1.25                                |
| 3, 4        | 3.047                 | 0.788      | 0.7886      | 1.50                                |
| 5, 6        | 4.040                 | 0.789      | 0.7886      | 2.00                                |
| 7, 8        | 4.056                 | 0.646      | 0.6444      | 1.25                                |

(The height of the column is 8.25 cm in all cases.)

Fig. 6 : Ondes stationnaires sur une colonne de fluide en rotation d'après Chandrasekhar

La concordance à 99% entre résultats théoriques et expérimentaux est comme le dit l'auteur « remarquable ». Malgré ces deux exemples où la théorie linéaire est en accord avec l'expérience, celle-ci admet des limites.

⇒ Limites de la théorie linéaire.

Tout d'abord, et nous l'avons évoqué précédemment, la théorie linéaire ne peut donner de résultats valables lorsque les non linéarités commencent à devenir prépondérantes. Et en particulier, les écoulements où la bifurcation vers un nouvel écoulement a été opérée. Ainsi, étudier la stabilité de l'écoulement laminaire de Poiseuille lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à sa valeur critique n'a guère d'implications physiques. En revanche, une approche numérique non linéaire, comme celle de Brancher<sup>8, 9</sup> sur les instabilités secondaires des jets, peut alors être employée.

En second lieu, le caractère dual de la théorie - spatiale ou temporelle- peut conduire à des interprétations erronées lorsque le bon choix n'est pas fait.

Ainsi pour le jet capillaire, lorsque la vitesse débitante du jet est suffisamment importante, les perturbations issues de l'orifice, qu'elles soient imposées ou dues au bruit environnant, vont être advectées par la vitesse du jet sans pouvoir se disperser et avec une croissance de type temporelle.

A vitesse plus faible, l'advection n'est plus suffisante et une importante dispersion accompagne la croissance des perturbations. L'approche temporelle doit alors être remplacée par une analyse spatio-temporelle. La divergence progressive entre les deux analyses vient du fait que lorsque la vitesse devient faible, des instabilités situées en aval peuvent influencer la dynamique de l'écoulement amont *i.e.* des ondes amplifiées de vitesse de phases négatives se propagent vers l'amont (rétroaction).

Cette remontée des ondes vers l'amont a été vérifiée pour un jet d'eau avec gravité par Chauhan & al.<sup>10</sup>. L'écoulement est perturbé en un point précis  $z_s$  de son axe grâce à un cristal piézo-électrique, les taux de croissance spatiaux étant obtenus à partir de la perturbation interfaciale à différents temps.

La figure 7 représente la position à différents temps d'ondes amplifiées émises au point spatio-temporel  $[t = 0, z = z_s]$ . La longueur des ondes se dirigeant vers l'aval correspond à celle prédite par la théorie temporelle. Mais ainsi que le constate l'auteur, des ondes se propagent aussi vers l'amont et leur longueur est d'environ la moitié de celle de l'aval. Seule une analyse spatio-temporelle peut alors nous renseigner quantitativement sur ces ondes propagatives.

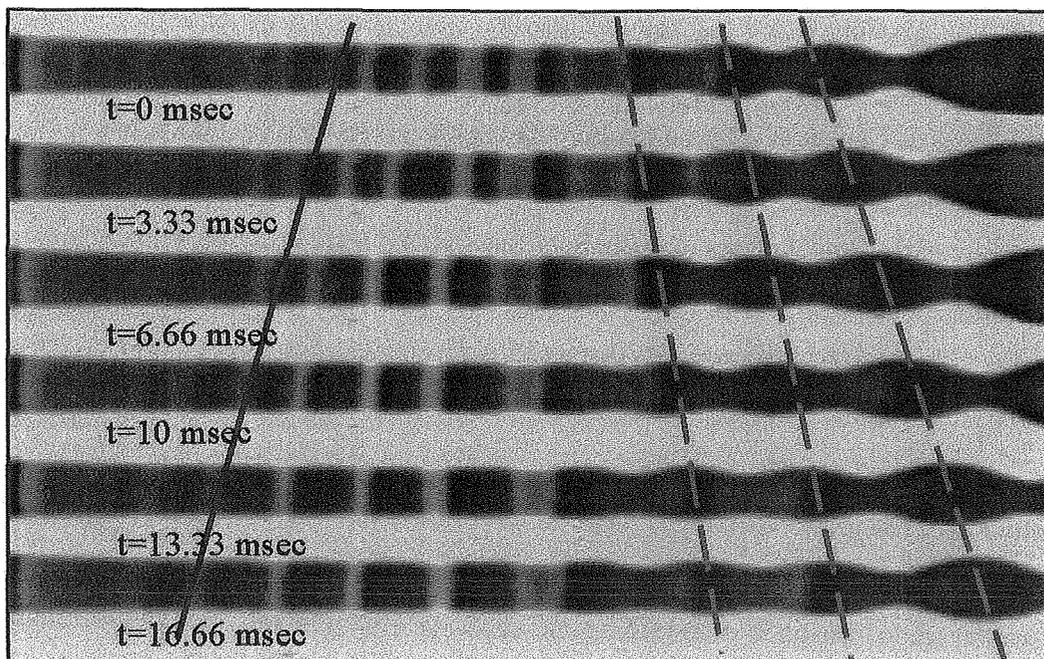


Fig. 7 : Remontée et advection d'ondes d'instabilités d'un jet capillaire d'après Chauhan

La rupture du jet peut intervenir dès la sortie de buse si la vitesse du jet devient trop faible. Ce phénomène est intimement lié à la nature de l'instabilité : *convective* ou *absolue*. Ce changement de dynamique a été aussi observé sur un disque en rotation par Lingwood<sup>11</sup>, le passage du régime laminaire au régime turbulent correspondant à la transition convectif/absolu.

Nous allons donc présenter une synthèse rapide de ces notions et de la modélisation mathématique qui s'y rapporte. Nous ne présenterons que des résultats relatifs à une résolution analytique de la nature des instabilités. Cependant, il faut avoir en tête qu'il existe aussi des simulations numériques directes telles que celles, sur le tourbillon de Batchelor, de Delbende & al<sup>12</sup>.

## II. NATURE DES INSTABILITES

### 1. Introduction

Nous avons pour but dans cette seconde partie de rappeler des notions essentielles sur la nature des instabilités. Nous nous attacherons ensuite à donner des exemples qui prouvent la validité de l'analyse spatio-temporelle pour les écoulements ouverts mais aussi les faiblesses de son niveau local.

Nous avons vu que l'analyse de la stabilité linéaire d'écoulements ouverts ou bornés donnait de bonnes approximations sur les processus d'instabilité. Les processus étant souvent contrôlés par un forçage périodique dans le temps et dans l'espace, les approches temporelles et spatiales sont adaptées à la prédiction de l'évolution de tels écoulements. Cependant, pour d'autres écoulements ouverts avec cisaillement tels que les jets de faible densité (jets chaud) ou les sillages, une analyse spatiale seule ou une analyse temporelle seule ne peuvent décrire entièrement les processus d'instabilité. En particulier, elles perdent leurs pertinences lorsque la nature de l'instabilité n'est plus *convective*.

Un écoulement est *convectivement* instable si toutes les perturbations amplifiées sont advectées par l'écoulement moyen. Inversement, un écoulement sera dit *absolument* instable si il existe au moins un onde d'instabilité qui croît en contaminant l'écoulement aval mais aussi amont. Afin de déterminer la nature de l'instabilité, la réponse de l'écoulement à une *impulsion*, introduite à une position spatio-temporelle donnée, doit être déterminée. La nature de l'instabilité étant alors liée à l'advection ou non de l'énergie impulsionnelle. Il est évident que cette définition de la nature de l'instabilité dépend entièrement du référentiel choisi.

De manière similaire aux analyses spatiale et temporelle, il existe deux niveaux de modélisation. Soit l'écoulement de base est considéré comme faiblement modifié dans sa direction principale et une approche locale peut être menée ; soit l'écoulement doit être analysé dans son ensemble et une analyse globale doit être entreprise. Ces différents concepts ont été formalisés en grande partie par Bers<sup>13</sup> en physique des plasmas puis par Huerre<sup>14,15</sup> et Monkewitz<sup>14,15,16</sup> en mécanique des fluides.

Nous allons présenter, dans la suite immédiate, la modélisation mathématique de ces notions et les méthodes de résolution associées et détailler quelque peu les étapes de la technique de résolution.

## 2. Instabilités convectives et absolues – concepts locaux

Considérons un écoulement bidimensionnel et parallèle, de champ de vitesse  $[U(y, t), 0, 0]$ . L'écoulement ne variant pas suivant sa direction principale  $x$ , l'approche peut être prise de façon locale et les champs perturbés décomposés sous forme de modes normaux élémentaires  $\psi(x, y, t)$ . Afin de simplifier les écritures, nous allons ignorer les variations suivant  $y$ , ce qui n'enlève en aucune façon les caractéristiques essentielles des concepts énoncés.

En appliquant aux perturbations élémentaires une transformation de Fourier en temps et en espace, il est possible d'écrire sous réserve d'existence de l'intégrale :

$$(14) \quad \psi(k, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int \psi(x, t) e^{-i(\omega t + kx)} dt dx$$

$\psi(k, \omega)$  est la fonction propre associée à l'équation de dispersion. Dans un premier temps, la pulsation  $\omega$  est prise complexe et le nombre d'onde axial  $k$  réel.

### 2.1 Réponse impulsionnelle ou fonction de Green

L'analyse de la nature de l'instabilité repose entièrement sur la réponse du système pour les temps longs, à une *impulsion* localisée en temps et en espace, notée  $\delta(x)\delta(t)$  où  $\delta$  est la distribution de Dirac. La question est alors la suivante : quel va être le comportement des perturbations issues de l'impulsion ?

Si l'impulsion  $\delta(x)\delta(t)$  est introduite à  $x=0, t=0$  sur le système de base (6), la réponse impulsionnelle  $G(x, t)$ , appelée aussi *fonction de Green*, vérifie :

$$(15) \quad L \left[ -i \frac{\partial}{\partial x}, -i \frac{\partial}{\partial t}, R_i \right] G(x, t) = \delta(x)\delta(t)$$

L'écoulement de base est ainsi référencé :

⇒ linéairement *stable* si :

$$(16) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x,t) = 0 \text{ pour tout rayon } x/t = C^{te},$$

et

⇒ linéairement *instable* si :

$$(17) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x,t) = \infty \text{ sur au moins un rayon } x/t = C^{te}$$

Le comportement asymptotique, à  $t = \infty$ , de la fonction de Green détermine la nature absolue ou convective de l'écoulement, si celui est instable. Ainsi, l'écoulement est désigné comme :

⇒ *convectivement instable* si :

$$(18) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x,t) = 0 \text{ sur le rayon } x/t = 0,$$

et

⇒ *absolument instable* si :

$$(19) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x,t) = \infty \text{ sur le rayon } x/t = 0$$

Nous avons représenté sur la figure 8, les trois principaux cas de réponse impulsionnelle. Si la fonction de Green est atténuée sur l'axe  $x = 0$  pour les  $t$  croissants mais qu'il existe des zones spatio-temporelle de croissance, l'écoulement est convectivement instable. Si l'axe  $x = 0$  est traversé par une réponse croissante, l'écoulement est absolument instable. Enfin, si la fonction de Green s'atténue dans toute les directions spatio-temporelles, l'écoulement est stable.

Physiquement , l'impulsion induit un paquet d'ondes qui va être emporté loin de sa source si l'instabilité est de nature convective, va contaminer tout l'écoulement à partir du point source dans le cas absolu, ou enfin être atténué avec ou sans advection si l'écoulement est stable.

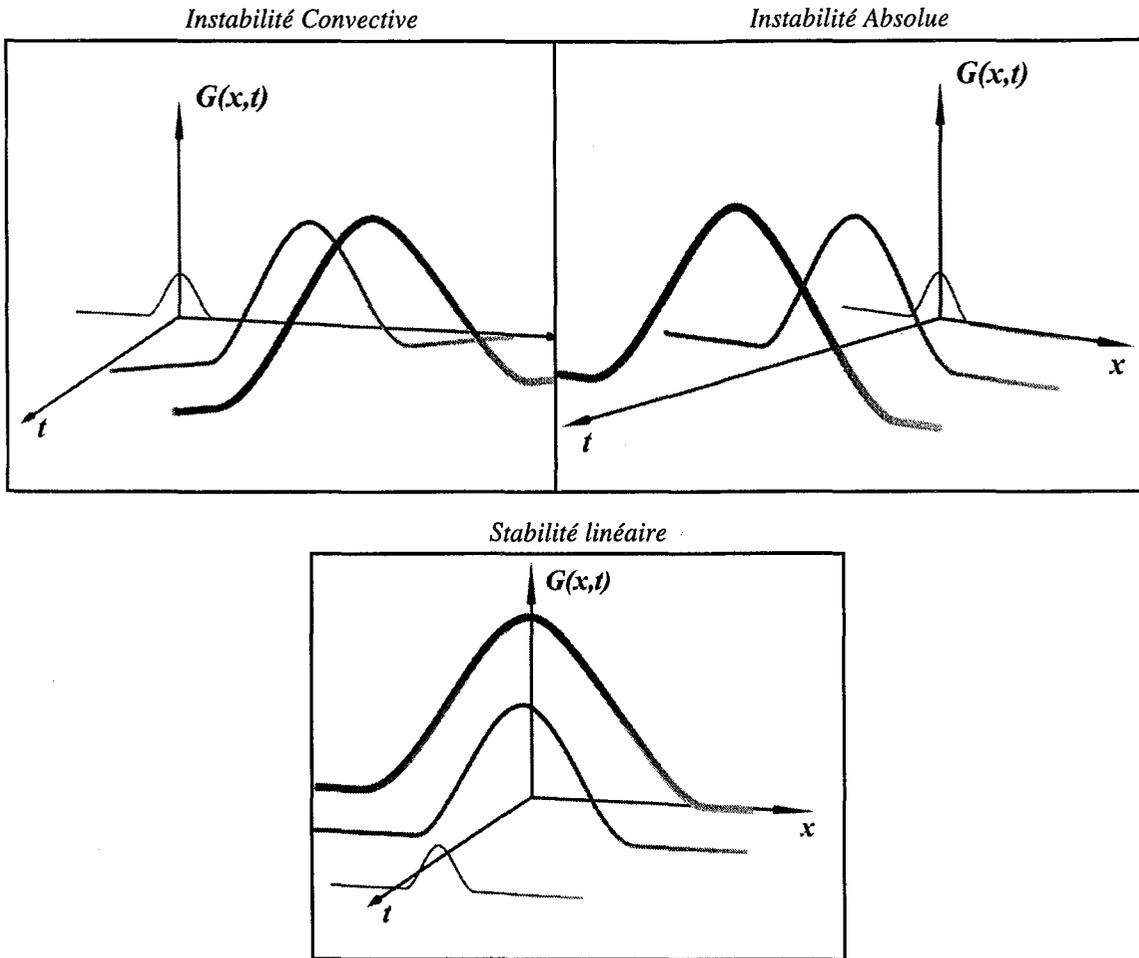


Fig. 8 : Evolution spatio-temporelle de la fonction de Green

Le but de toute analyse de nature d'instabilité est donc la détermination du comportement asymptotique pour les temps longs de la fonction de Green. Pour cela, nous allons appliquer la transformée de Fourier à la fonction de Green :

$$(20) \quad G(k, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t) e^{-i(\omega t + kx)} dx dt$$

Son inverse est définie par :

$$(21) \quad G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_F \int_L G(k, \omega) e^{i(\omega t + kx)} d\omega dk$$

où  $F$  et  $L$  sont des contours d'intégration respectivement dans les plans  $(k_r, k_i)$  et  $(\omega_r, \omega_i)$ .

La transformée de Fourier de l'équation (15) nous donne alors :

$$(22) \quad G(k, \omega) = \frac{1}{D(k, \omega, R_i)} \quad \text{soit} \quad G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_F \int_L \frac{e^{i(\omega t + kx)}}{D(k, \omega, R_i)} d\omega dk$$

## 2.2 Contour d'intégration et branches spatio-temporelles

Afin de satisfaire le principe de causalité, *i.e.*  $G(x, t) = 0$  pour  $t < 0$ , le contour d'intégration  $L$  dans le plan  $\omega$  complexe doit être pris en dessous des singularités de  $1/D(k, \omega, R_i)$  (pôles, points de branchements et coupures associées). Nous pouvons ainsi prendre pour le chemin d'intégration  $L$  une ligne  $\omega_i = K_0 < 0$  en dessous de toute les solutions  $\omega(k)$  et des autres coupures, satisfaisant l'équation de dispersion pour  $k$  réel, nous supposons pour simplifier qu'il n'existe qu'une seule branche temporelle  $\omega(k)$  et qu'il n'existe aucune autre singularité en dehors de ce cas.

Le contour  $L$  est refermé à l'infini avec un demi-cercle inférieur pour les temps négatifs, et un demi-cercle supérieur qui englobe les pôles de  $D(k, \omega, R_i)$ , pour les temps positifs .

Les figures correspondant aux description précédentes, dans le plan complexe  $\omega$  (fig. 9.a) et dans le plan complexe  $k$  (fig. 9.b) sont les suivantes :

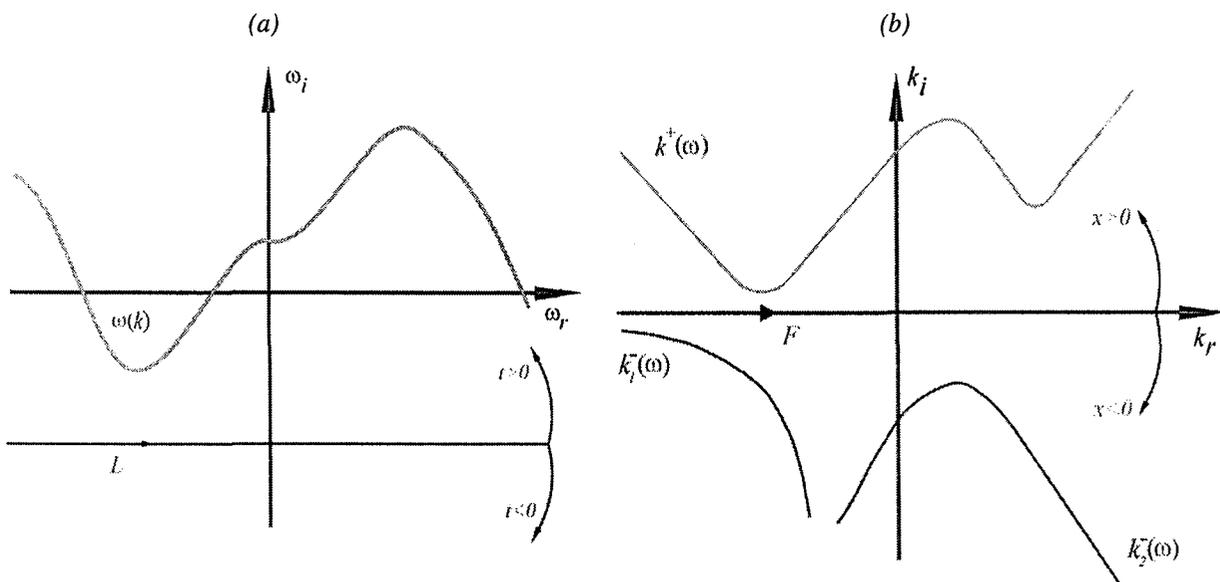


Fig. 9 : Contours d'intégration  $L$  et  $F$   
 (a) dans le plan complexe  $\omega$   
 (b) dans le plan complexe  $k$

On note sur la figure 9.b que le chemin d'intégration  $F$  est pris sur l'axe réel  $k_i = 0$  et que suivant l'équation de dispersion, le nombre de branches spatiales n'est pas obligatoirement égal au nombre de branches dans le plan  $\omega$ . Chaque branche spatiale est paramétrée sur un intervalle  $\omega_i$  correspondant à celui de la figure 9.a. La partie imaginaire de  $\omega_i$  est prise constante est égale  $K_0$ .

En résumé les branches spatiales sont les branches  $k(\omega)$  avec  $\omega \in L$  et les branches temporelles sont les branches  $\omega(k)$  avec  $k \in F$ . Pour les couples  $(k, \omega)$  solutions de l'équation de dispersion  $D(k, \omega, R_i) = 0$  il y a équivalence entre les relations :

$$(23) \quad \omega \in L \Rightarrow k \notin F \quad \text{et sa négation} \quad k \in F \Rightarrow \omega \notin L$$

Lorsque la valeur de  $K_0$  tend vers  $-\infty$ , il est possible de distinguer deux types de branches spatiales : les branches amplifiées  $k^+$  et les branches atténuées  $k^-$ .

Cette dénomination vient du fait que les branches, notées avec un index positif, correspondent à des perturbations qui se propagent vers l'écoulement aval<sup>‡</sup> ( $x > 0$ ) tandis pour les branches notées avec un index négatif, les perturbations se propagent vers l'amont ( $x < 0$ ). En outre, lorsque  $|K_0|$  est assez élevé, les branches spatiales amplifiées se trouvent au dessus du contour  $F$ ,  $k_i > 0$  et  $x > 0$ , et à l'opposé les branches atténuées se trouvent en dessous  $k_i < 0$  et  $x < 0$ . Ainsi, aucune branche n'est spatialement amplifiée, le terme modal  $e^{-k_i x}$  tend toujours vers 0 aussi bien dans la direction amont que la direction aval.

Nous allons voir dans ce qui suit qu'en appliquant le théorème des résidus, il est possible de montrer que la contribution de l'intégrale lorsque  $t < 0$  est nulle : aucun pôle ne se trouve à l'intérieur du contour en demi-cercle et la contribution sur ce contour même étant nulle. Le principe de causalité est ainsi bien vérifié.

---

<sup>‡</sup> Cette dénomination est valable pour les écoulements de type jets. Au contraire pour les écoulements de sillages le sens de l'advection s'inverse. Les branches  $k^+$  se propagent alors vers l'amont ( $x < 0$ ) tandis que les branches  $k^-$  se propagent vers l'aval ( $x > 0$ ).

La réponse impulsionnelle sera donc entièrement évaluée par la réunion de l'intégrale du contour en demi-cercle se refermant pour les temps positifs et de la droite  $[-\infty + iK_0 \dots + \infty + iK_0]$ .

### 2.3 Evaluation de la fonction de Green par la méthode du col

En appliquant le théorème des résidus dans le plan complexe  $\omega$ , la fonction de dispersion étant supposée méromorphe en  $\omega$  et aussi en  $k$ , la partie temporelle de la double intégrale (22) peut être obtenue. En effet, nous pouvons écrire que :

$$(24) \quad G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \oint_F G(k, t) e^{ikx} dk \quad \text{avec}$$

$$(25) \quad G(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + iK_0}^{+\infty + iK_0} \frac{e^{i\omega(k)t}}{D(k, \omega, R_i)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{L^+} \frac{e^{i\omega(k)t}}{D(k, \omega, R_i)} d\omega \quad \text{pour } t > 0$$

$$(26) \quad G(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + iK_0}^{+\infty + iK_0} \frac{e^{i\omega(k)t}}{D(k, \omega, R_i)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{L^-} \frac{e^{i\omega(k)t}}{D(k, \omega, R_i)} d\omega \quad \text{pour } t < 0$$

où  $\omega = \omega(k)$  sont les pôles de la fonctions  $1/D(k, \omega, R_i)$  situés au dessus de la droite  $\omega_i = K_0$ .

$L^+$  et  $L^-$  représentent les demi-cercles supérieur et inférieur qui se ferment à l'infini (cf. fig.

9.a). En considérant que  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} (\omega/D(k, \omega, R_i)) = 0$ , il est possible d'utiliser le lemme de Jordan

qui induit une contribution nulle du contour  $L^+$ . L'expression (26) se réduit ainsi à :

$$(27) \quad G(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + iK_0}^{+\infty + iK_0} \frac{e^{i\omega(k)t}}{D(k, \omega(k), R_i)} d\omega = -i \sum \text{Res} \left[ \frac{1}{D(k, \omega(k), R_i)}, \omega(k) \right] \quad \text{pour } t > 0$$

Le développement en séries de Taylor de la fonction  $D(k, \omega, R_i)$  au voisinage de  $\omega = \omega(k)$  nous donne :

$$(28) \quad D(k, \omega(k), R_i) = \frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega(k), R_i)(\omega - \omega(k)) + O((\omega - \omega(k))^2)$$

En considérant que les pôles de la fonction  $\omega(k)$  sont uniquement simples, i.e.  $\partial D/\partial\omega \neq 0$ , il advient que la relation (27) devient :

$$(29) \quad G(x,t) = -\frac{i}{2\pi} H(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\left(\omega(k)+k\frac{x}{t}\right)}}{\frac{\partial D}{\partial\omega}(k, \omega(k), R_i)} dk \quad \text{sans restriction d'espace ni de temps.}$$

Afin de satisfaire le principe de causalité pour les temps négatifs, la fonction d'Heaviside  $H(t)$  a été introduite. De la même façon que pour  $G(k,t)$ , nous avons tenu compte du fait que les contributions, dans le plan complexe  $k$ , des demi-cercles étaient nulles.

Dans ce paragraphe, nous avons réduit l'évaluation de la fonction de Green à celle d'une intégrale du type :

$$(30) \quad I(t) = \int_C \varphi(k) e^{t f(k)} dk$$

où  $\varphi(k)$  et  $f(k)$  sont analytiques sur le contour  $C$ . Il suffit maintenant d'en calculer la limite lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

La limite lorsque  $t \rightarrow +\infty$  de l'intégrale (27) peut être évaluée grâce à la *méthode du col* appelée aussi *méthode de la plus grande pente*. Cette méthode consiste à approximer l'intégrale sur la partie du contour  $C$  où  $|e^{t f(k)}|$ , soit  $e^{t \operatorname{Re}(f(k))}$ , est grand. D'après le théorème de Cauchy, le résultat ne dépend que des points limites de  $C$  et est indépendant du chemin parcouru entre ces points. Il devient donc possible de déformer le contour d'intégration  $C$  en un chemin  $\tilde{C}$  qui passe par un point  $k_0$  où la fonction  $\operatorname{Re}(f(k))$  atteint sa valeur maximale.

Le point  $k_0$  est un *point selle* ou *point méplat* de la fonction  $f$  et vérifie :

$$(31) \quad f'(k_0) = 0.$$

En notant  $f(k) = u(x, y) + iv(x, y)$  avec  $k = x + iy$ , la représentation graphique 3D du point selle et de sa projection 2D est la suivante :

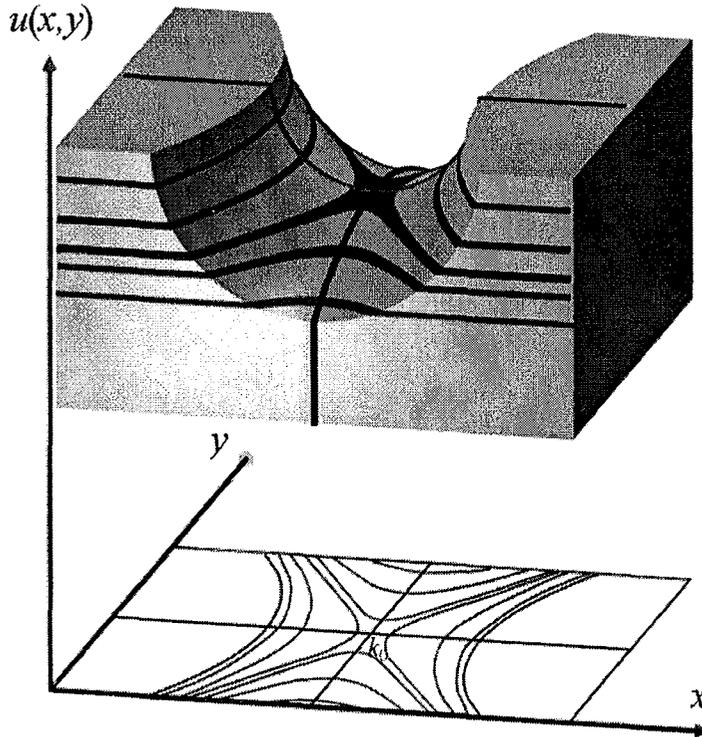


Fig. 10 : Point selle et sa projection dans le plan  $(x, y)$

La connaissance du point selle  $k_0$  amène après quelques développements à la détermination de la limite de l'intégrale (30) :

$$(32) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = e^{tf(k_0)} \sqrt{-\frac{2\pi}{t \frac{\partial^2 f}{\partial k^2}(k_0)}} \varphi(k_0)$$

En reprenant la dernière formulation de la fonction de Green (29), sa limite peut alors être calculée grâce à la formule (32) en posant :

$$(33) \quad f(k) = i \left( \omega(k) + k \frac{x}{t} \right) \quad \text{et} \quad \varphi(k) = -\frac{i}{2\pi} \frac{H(t)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega(k), R_i)}$$

La réponse impulsionnelle aux temps longs est :

$$(34) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x,t) \approx -i e^{i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi t \frac{d^2\omega}{dk^2}(k_0)}} \frac{e^{i\left(\omega(k_0) + k_0 \frac{x}{t}\right)}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k_0, \omega(k_0), R_i)}$$

Cette expression est celle utilisée par Huerre & Monkewitz, à la seule différence du terme multiplicatif  $i$  qui provient du fait que nous avons utilisé une décomposition en mode normaux en  $e^{+i\omega t}$  au lieu de  $e^{-i\omega t}$ . Il nous faut maintenant trouver le couple  $(\omega_0, k_0)$ .

## 2.4 Fréquence absolue

Grâce à l'expression (34), nous savons que la réponse impulsionnelle sur un rayon  $x/t = C^{te}$  est dominée par un nombre d'onde complexe  $k_0$  qui, en accord avec (29), doit vérifier :

$$(35) \quad \frac{d\omega}{dk}(k_0) = -\frac{x}{t}$$

Physiquement, la relation (35) nous indique que si l'on se déplace suivant la direction principale de l'écoulement à la vitesse  $U_0$  constante, le paquet d'onde va être dominé dans son advection par une onde dont la vitesse de groupe est  $U_0$  et dont le taux de croissance temporelle sera :

$$(36) \quad \sigma_i = \text{Re}[i(\omega(k_0) + k_0 x/t)] = -\omega_i(k_0) + k_{0,i} d\omega/dk(k_0)$$

Dans beaucoup de problèmes, le taux de croissance temporelle  $\sigma_i = -\omega_i(k)$  avec  $k$  réel admet un maximum à  $\sigma_{i,max} = \sigma_i(k_{max})$  pour lequel :

$$(37) \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial k}(k_{max}) = 0$$

Ainsi au niveau spatio-temporelle, le long du rayon  $x = ct$  avec  $c = \partial\omega_r / \partial k_r(k_{max})$ , la phase de la fonction de Green (33) présente un point selle pour  $k_0 = k_{max}^\ddagger$  et le taux de croissance correspondant est  $\sigma_{i,max} = -\omega_{i,min}$ . C'est le maximum des taux de croissance observés sur tous les rayons  $x/t$ . Nous retrouvons là un critère de stabilité linéaire, équivalent à 10, basé sur le signe de  $\omega_{i,min}$ .

Afin de savoir si une instabilité est absolue, *i.e.* croît sur place, il faut déterminer la valeur de  $k_0$  à une position  $x$  fixée de l'écoulement, soit connaître l'onde dominante à vitesse de groupe nulle et donc résoudre :

$$(38) \quad \frac{\partial\omega}{\partial k}(k_0) = 0$$

La fréquence  $\omega(k_0)$  notée  $\omega_0$  est appelée *fréquence absolue*. Et à la vue de la forme de la limite de la fonction de Green (32), la partie imaginaire de  $\omega_0$  détermine la nature de l'instabilité.

Avec les définitions (18) et (19), nous pouvons caractériser l'instabilité par le signe de  $\omega_{0,i} = \omega_i(k_0)$ , ainsi :

$$(39) \quad \text{si } \omega_{0,i} < 0 \text{ l'écoulement est } \textit{absolument instable},$$

$$(40) \quad \text{si } \omega_{0,i} > 0 \text{ l'écoulement est } \textit{convectivement instable}.$$

Nous avons là une condition nécessaire et suffisante sur  $\omega_0$  pour la caractérisation de l'instabilité locale.

---

<sup>‡</sup> En n'oubliant pas que  $\frac{d\omega}{dk} = \frac{\partial\omega_r}{\partial k_r} + i \frac{\partial\omega_i}{\partial k_r}$ .

⇒ Recherche analytique de  $\omega_0$ .

En reprenant l'équation de dispersion et en la dérivant par rapport à  $k$  on peut aboutir à un système dont la solution est la fréquence absolue  $\omega_{0,i}$  :

$$(41) \quad D(k, \omega, R_i) = 0, \quad \frac{dD}{dk} = \frac{\partial D}{\partial k} + \frac{\partial D}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial k} = 0$$

Or au point selle  $k_0$  la dérivée  $\partial\omega/\partial k$  est nulle, le point selle peut ainsi être déduit du système suivant :

$$(42) \quad \begin{cases} D(k_0, \omega_0, R_i) = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial k}(k_0, \omega_0, R_i) = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial \omega}(k_0, \omega_0, R_i) \neq 0 \end{cases}$$

Ce système d'équation constitue une condition nécessaire mais pas suffisante. En effet, il peut exister des couples  $(\omega, k)$  vérifiant le système (42) mais qui ne sont pas des points selles pertinents de la phase de  $G(x, t)$ , soit de la fonction  $\omega(k)$  puisque l'on se trouve sur le rayon  $x/t = 0$ . Il convient de rajouter le critère de pincement (Bers<sup>13</sup>).

⇒ Recherche graphique de  $\omega_0$ .

Avant déformation du chemin d'intégration  $F$ , les branches amplifiées et atténuées sont de part et d'autre de l'axe réel (cf. fig. 10.b). Cette configuration de départ se rapportant à la valeur  $K_0 = -\infty$  de la partie imaginaire du contour  $L$  dans le plan complexe  $\omega$ . En augmentant dans la valeur de  $K_0$ , c'est à dire lorsque  $\omega_i = \omega_{0,i} - i\varepsilon$ , avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le contour  $F$  quitte l'axe réel pour être lui aussi déformé, tout en évitant les singularités de l'intégrande (29). Il n'y a aucune garantie, *a priori*, que cela soit possible.

Les branches  $k^+$  et  $k^-$ , devant éviter toute rencontre avec le contour  $F$  (cf. relations 23), doivent être déformer elles aussi jusqu'à se toucher en un point  $k_0$ , en d'autres mots jusqu'à produire un *pincement* sur le contour  $F$ .

Si  $\omega_0$  est la fréquence correspondante, par définition l'équation de dispersion  $D(k, \omega_0, R_i) = 0$  présente une *racine double* au point où  $k^+(\omega_0) = k^-(\omega_0) = k_0$  et donc on retrouve :

$$(43) \quad D(k_0, \omega_0, R_i) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial k}(k_0, \omega_0, R_i) = 0$$

Le développement de Taylor de  $D(k, \omega, R_i)$  autour de telles racines doubles donne :

$$(44) \quad D(k, \omega, R_i) = \frac{\partial D}{\partial \omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial k^2}(k - k_0)^2 + \frac{\partial^2 D}{\partial k \partial \omega}(k - k_0)(\omega - \omega_0) + \dots$$

Donc en supposant que

$$(45) \quad \frac{\partial^2 D}{\partial k^2}(k_0, \omega_0) \neq 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \omega}(k_0, \omega_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad C = \sqrt{-2 \frac{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k_0, \omega_0)}{\frac{\partial^2 D}{\partial k^2}(k_0, \omega_0)}} \neq 0$$

nous pouvons approximer les branches qui se pincent à l'ordre inférieur :

$$(46) \quad k_{1,2}(\omega) \approx k_0 \pm C \sqrt{\omega - \omega_0}$$

La racine double est ainsi un *point de branchement algébrique* d'ordre 2 appelée aussi singularité logarithmique de la fonction  $k(\omega)$ . Afin d'être sûr qu'il s'agit bien d'un point de pincement, il est nécessaire de rajouter à (43) la condition de pincement qui dit que :

$$(47) \quad \text{Les branches } k_1 \text{ et } k_2 \text{ doivent correspondre aux branches } k^+ \text{ et } k^-$$

La description géométrique du pincement étant difficile à appréhender, nous avons représenté un processus comprenant des pincements valides et non valides. Les paramètres  $R_i$  sont considérés constants dans la suite.

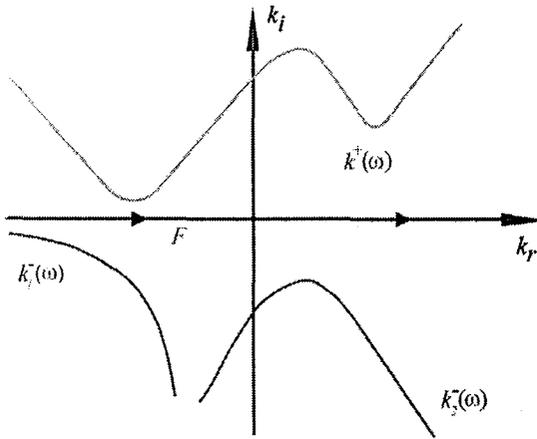


Fig. 11.a

Sur la première figure, le contour  $F$  n'est pas déformé, les branches  $k^+$  et  $k^-$  sont de part et d'autre de l'axe  $k_i = 0$ . Dans le plan  $\omega$ , le contour  $L$  est une ligne horizontale dont la partie imaginaire est constante.

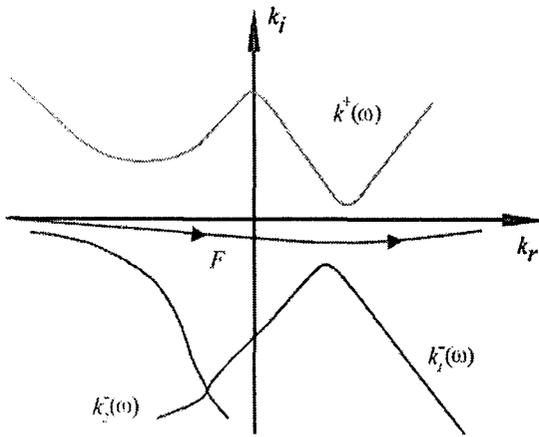


Fig. 11.b

Sur la figure 11.b, La ligne  $L$  a été remontée. Les branches spatiales reliées directement à  $L$  subissent une déformation.  $K_0$  reste cependant inférieure au minimum  $\omega_{i,max}$  de l'analyse temporelle. Sinon la branche  $k^+(\omega)$  couperait l'axe  $k_i = 0$  au(x) point(s)  $\omega_i(k_r) = K_0$ . Le contour  $F$  doit alors lui aussi être déformé pour passer par un chemin qui évite les branches  $k(\omega)$ . On remarque que les branches  $k_1^-(\omega)$  et  $k_2^-(\omega)$  ont fusionné en un point  $k^*$  qui vérifie (42) mais qui n'est pas un point de pincement valide.

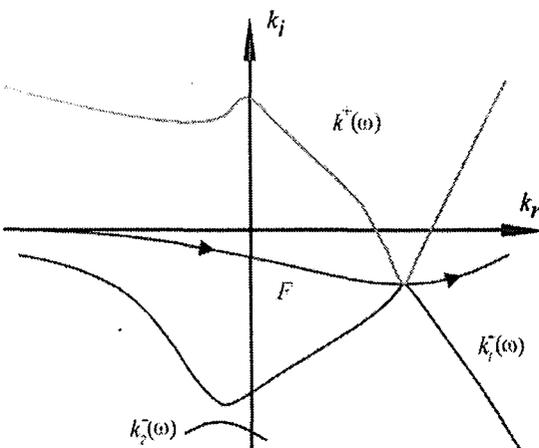


Fig. 11.c

Enfin sur la dernière figure, la valeur  $K_0$  du contour  $L$  correspond à la fréquence absolue, les branches  $k^+$  et  $k_1^-$  pincement sur le contour  $F$  au point  $k_0$  vérifiant (43). La nature de l'instabilité est dérivée du signe de  $\omega_{0,i} = K_0$ .

Nous avons exposé ici la méthode de recherche graphique de  $\omega_0$  dans l'espace  $k(\omega)$  déterminé par le processus de pincement. Cette approche a été popularisée par Huerre et Monkewitz. Une autre approche graphique est possible dans le plan  $\omega(k)$  par la recherche de point de rebroussement ; des compléments peuvent être trouvés dans l'article de Kupfer, Bers & Ram<sup>17</sup>.

Le point selle ayant été déterminé avec certitude par la méthode graphique, il est possible généralement de le suivre si la relation de dispersion est explicite. En résolvant toujours le système (43), il est en effet possible d'utiliser la continuité du point selle dans l'espace de dimension  $n$  des paramètres de contrôles  $(R_0, R_1, \dots, R_n)$ . Un changement de paramètre de contrôle comme par exemple la diminution du nombre de Reynolds, affecte l'équation de dispersion et donc la valeur de la fréquence absolue.

A partir d'une fréquence absolue non nulle connue pour un ensemble fixé de paramètres de contrôles, il est possible de suivre la valeur d'un des paramètres  $R_0$  lorsque  $\omega_{0,i} \rightarrow 0$ . Une valeur critique  $R_{0c}$  est alors trouvée pour  $\omega_{0,i} = 0$ . Physiquement, elle correspond à la valeur marginale séparant les instabilités convectives de celles absolues. En général, les modélisations comportent au moins deux paramètres de contrôles ce qui permet aux auteurs de tracer des courbes marginales séparant les zones convectives des zones absolues, dans des plans  $(R_0, R_1)$ . Il convient de vérifier a posteriori, que le point selle initial suivi dans l'espace de contrôle  $(R_0, R_1)$  constitue toujours une racine double caractéristique de la transition.

Nous l'avons vu dans la description géométrique, le pincement entre deux branches spatiales n'est pas obligatoirement un point selle pertinent de la fonction  $\omega(k)$ . Des branches  $k^-$  peuvent donner naissance à une racine double vérifiant le critère (43). Plus rarement, un pincement non caractéristique de transition, peut s'effectuer en deux branches  $k^+$ .

De plus, il faut aussi rajouter que la branche amplifiée  $k^+$  peut pincer plusieurs fois dans des régions distinctes de l'espace spatial complexe  $k(\omega)$  pour un ensemble de paramètres de contrôles différents. Il se produit alors des croisements de point selle, dont celui qui a une fréquence absolue dominante prend le pas sur la nature de l'instabilité du système. Ce cas particulier sera évoqué dans le chapitre II puisqu'il intervient pour les jets chauds. Néanmoins, nous allons le présenter dans la suite immédiate, cette « double transition » ayant été calculée théoriquement par Jendoubi & Strykowski<sup>18</sup>, et reliée à diverses expériences.

### 3. Pertinence et limites de la théorie spatio-temporelle locale

Après avoir exposé la théorie locale sur la nature des instabilités, il est légitime de se demander si elle peut conduire à une bonne modélisation de ce qui intervient expérimentalement. Nous allons donc citer quelques travaux où les instabilités mises en évidence expérimentalement trouvent leur explication dans la théorie spatio-temporelle.

Un premier exemple est celui du jet chaud pour lequel la densité est inférieure à celle du fluide ambiant. Des expériences ont été notamment réalisées avec des jets d'air chaud par Monkewitz & al.<sup>19</sup>. Il a été observé que le jet chauffé présentait des oscillations auto-entretenues lorsque sa masse volumique était inférieure de 30% à celle de l'air ambiant. Le jet est alors déstabilisé de façon globale comme l'indique la figure 12 tirée des travaux de Monkewitz & al.<sup>17</sup>.

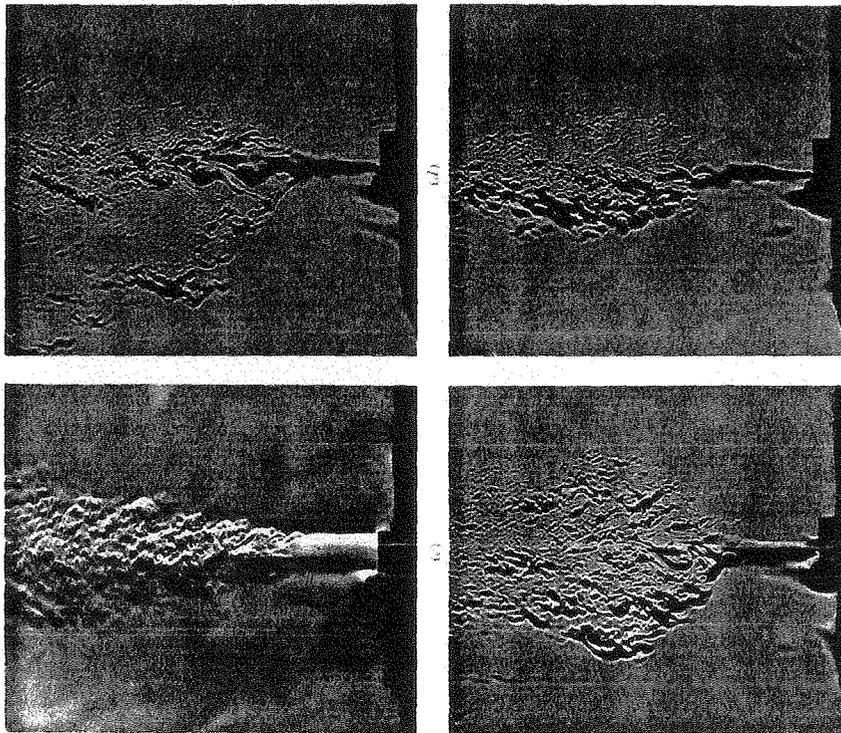


Fig. 12 : Expérience de jet chaud d'après Monkewitz et al.

Au dessus de la densité critique le jet ne subit aucune oscillation (photo en bas à gauche). Par contre, si sa température est suffisamment élevée, sa densité va chuter en dessous du seuil critique et l'ensemble du jet va subir des oscillations. On peut remarquer sur les trois autres photos prises à différents instants, les différences d'épanouissement du jet induites par les mouvements oscillatoires. L'angle d'ouverture du jet, qui est d'environ  $20^\circ$  pour un jet homogène, est fortement augmenté par les oscillations jusqu'à plus de  $45^\circ$ .

Les oscillations correspondent à des lâchés réguliers d'anneaux tourbillons. Un nombre de Strouhal, basé sur le diamètre et la vitesse du jet, peut ainsi être calculé :  $St = fD_0/U_0$ . Deux modes axisymétriques distincts, correspondant à deux nombres de Strouhal différents, ont été mis en évidence par des analyses de spectres. Les valeurs des nombres de Strouhal sont alors compris entre 0.25 et 0.5. Les auteurs ont identifié l'oscillation globale comme étant provoquée par une transition locale d'un état instable-convectif vers un état instable-absolu (IC/IA), de l'instabilité de cisaillement. En effet, la transition expérimentale intervient pour un rapport  $S$  de densité intérieur sur extérieur d'environ 0.72 et les études de transition IA/IC donnent des résultats très proches.

Ainsi Jendoubi & Strykowski ont étudié les courbes de transitions d'un jet dont le profil de base est en tangente hyperbolique, avec un paramètre de contre-courant  $R$  et un paramètre de densité. Identiquement à l'expérience, deux modes ont été trouvés (fig. 13) qui correspondent à deux points selles situés dans des zones différentes de l'espace des paramètres  $(S, R)$ .

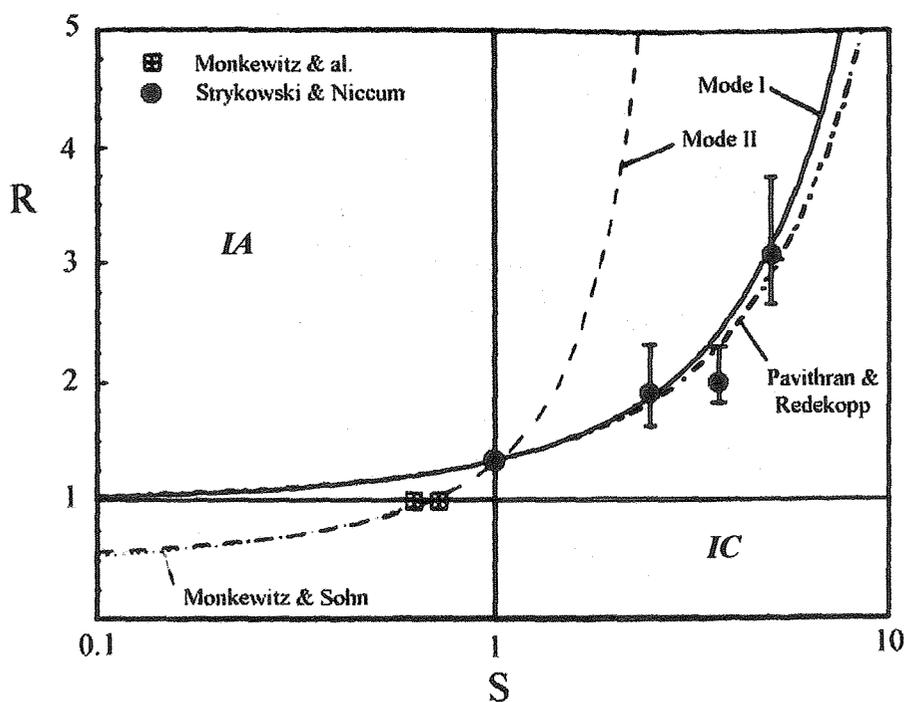


Fig. 13 : Courbes théoriques de transition et points expérimentaux d'après Jendoubi & Strykowski

Non seulement, les courbes de transition théoriques sont en accord avec les transitions expérimentales mais de plus, les nombres de Strouhal basés sur la partie réelle de la fréquence absolue sont compris dans le même intervalle que celui de l'expérience.

Un deuxième exemple concerne l'instabilité de Rayleigh. L'analyse spatio-temporelle a été effectuée pour un jet capillaire à profil de base variable par Leib & Goldstein<sup>20</sup>. Ils ont démontré que le jet qui se rompt en goutte (cf. fig. 4), devient absolument instable lorsque le nombre de Weber  $We$  dépasse 0.32. Le nombre de Weber est défini par  $We = \sigma / (\rho U_0^2 R_0)$ , où  $\sigma$  est la tension de surface,  $\rho$  est la masse volumique du liquide,  $U_0$  sa vitesse uniforme et  $R_0$  son diamètre.

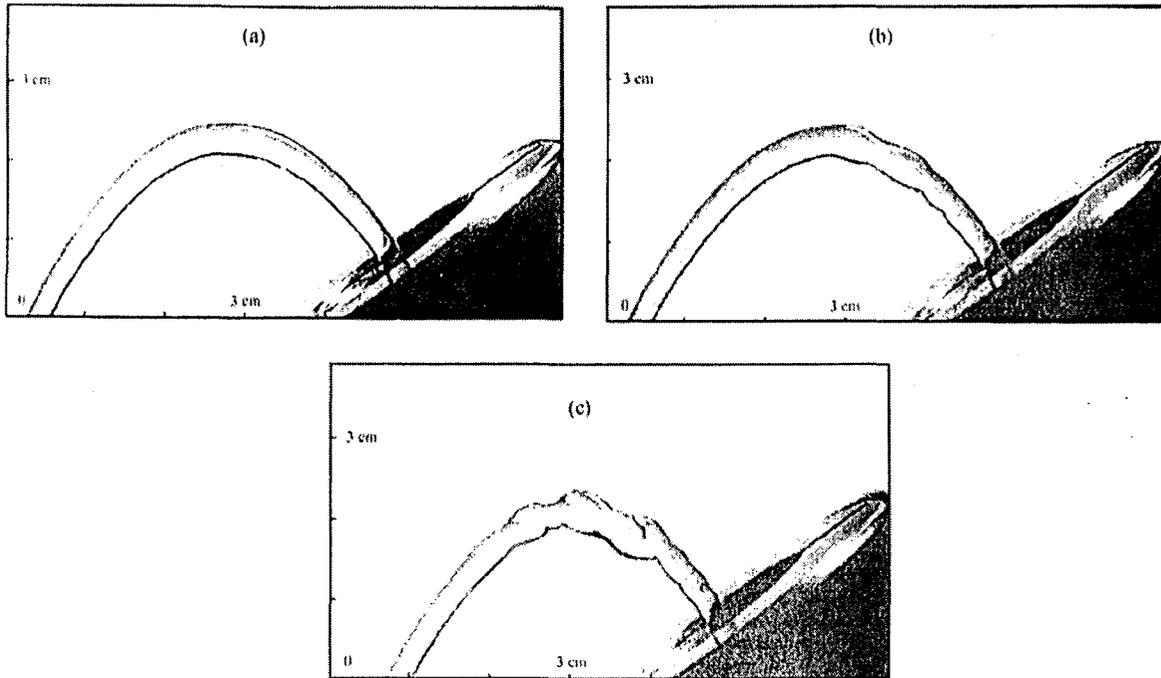
Monkewitz & al. ont trouvé expérimentalement que l'intervalle des nombres de Weber où la cassure intervient, était compris entre 0.06 et 0.5 suivant la valeur du nombre de Reynolds (basé sur  $R_0$  et  $U_0$ ). En particulier, il a été observé qu'au dessus de  $We = 0.3$ , l'instabilité de goutte à goutte remonte vers l'amont. La distance de cassure, mesurée entre la buse et la formation de goutte, devient nulle aux alentours de  $We = 0.5$  et  $Re = 180$ .

A travers ces deux exemples, il paraît clair que la théorie spatio-temporelle peut contribuer à la compréhension des instabilités de façon qualitative mais aussi quantitative. Cependant, nous n'avons présenté ici et n'utiliserons dans la suite qu'une approche locale et non globale des écoulements. De plus, certaines hypothèses sont sous-jacentes dans la recherche de la réponse impulsionnelle, il existe ainsi des domaines de l'espace complexe  $k$  qui sont exclus. Nous allons donc mettre quelques bémols à la pertinence des résultats issus de la théorie spatio-temporelle locale.

⇒ Limites de la théorie spatio-temporelle locale.

En premier lieu, lorsque l'on effectue une analyse locale la dépendance suivant l'axe principal de l'écoulement est ignorée. Pourtant, il est évident que beaucoup d'écoulements admettent une variation suivant cet axe. Ainsi, la force de pesanteur intervient le plus souvent dans les expériences de rupture de jet capillaire. Et ainsi, même si la théorie locale donne des transitions assez proches de la réalité, une étude globale comme celle effectuée par Le Dizès<sup>21</sup> apporte des précisions sur l'instabilité locale et le devenir global de l'écoulement. D'autre part, et comme le note l'auteur, il existe des écoulements pour lesquels des modes globaux se développent alors que l'analyse locale ne donnent aucune région d'instabilité absolue.

Ce cas de figure a été montré théoriquement sur un jet capillaire incliné par Yakubenko<sup>22</sup>. Ce dernier a aussi mis en évidence cette instabilité globale du jet de façon expérimentale, la figure 14 montre ainsi une zone proche de la buse où des ondes d'amplitudes finies se développent.



*Fig. 14 : Expérience de jet incliné d'après Yakubenko.  
 (a) Écoulement stable.  
 (b) Commencement du mode global.  
 (c) Mode global développé.*

Il est à noter cependant que cet écoulement n'est pas faiblement parallèle et donc que les prédictions de l'analyse locale sont difficilement applicables.

Une autre limite issue directement de la modélisation mathématique peut intervenir. En effet, dans les couches de mélanges par exemple, les modes temporels deviennent non analytiques au voisinage de  $k = 0$ . Afin de contourner le problème Huerre & Monkewitz<sup>14</sup> ont introduit une transformation de Hilbert sur les perturbations réelles, leur associant ainsi des fonctions perturbées complexes analytiques. Mais cette application de la transformée de Hilbert à la fonction de Green induit une réponse impulsionnelle nulle pour le demi-plan  $k_r < 0$ . Ainsi toutes les fréquences absolues pour lesquelles  $k_r < 0$  doivent être exclues.

Nombre d'auteurs tels que Lim & Redekopp<sup>23</sup> arrêtent leurs calculs de transition lorsque l'axe  $k_r = 0$  est traversé et nous excluons de même les nombres d'onde axiale dont la partie réelle est négative.

# BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I

- <sup>1</sup> Chandrasekhar S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*.  
Clarendon Press, Oxford. 1961.
- <sup>2</sup> P.G. Drazin & W.H. Reid, *Hydrodynamic stability*.  
Cambridge University Press. 1981.
- <sup>3</sup> C.C. Lin, *The theory of hydrodynamic stability*.  
Cambridge University Press. 1955.
- <sup>4</sup> O. Reynolds, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinous, and of the law of resistance in parallel channels*.  
Phil. Trans. Roy. Soc., 174, pp. 935-82. 1883.
- <sup>5</sup> M. Gaster, *A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability*.  
J. Fluid Mech., 14, pp. 222-224. 1962.
- <sup>6</sup> E.F. Goedde & M.C. Yuen, *Experiments on a liquid jet instability*.  
J. Fluid Mech., 40, pp. 495-511. 1970.
- <sup>7</sup> Lord Kelvin, *Vibrations of a columnar vortex*  
Math. Phys. Papers, IV, Hydrodynamics and general dynamics, Cambridge. 1910.
- <sup>8</sup> P. Brancher, *Etude numérique des instabilités secondaires de jets*.  
Thèse de Doctorat. Ecole Polytechnique. 1996.
- <sup>9</sup> P. Brancher, J.M. Chomaz & P. Huerre, *Direct numerical simulations of round jet : vortex induction and side-jets*.  
Phys. Fluids, 6, pp. 1768-1774. 1994.

---

<sup>10</sup> A. Chauhan, C. Maldarelli , D. Papageorgiou & D. Rumschitzki, *Experimental manifestation of absolute instability in a jet.*

Annual AIChE Meeting. 1998.

<sup>11</sup> R.J. Lingwood, *An experimental study of absolute instability of the rotating disc boundary-layer flow.*

J. Fluid Mech., **314**, pp.373-405. 1997.

<sup>12</sup> I. Delbende, J.M. Chomaz & P. Huerre, *Absolute/Convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response.*

J. Fluid Mech., **355**, pp. 229-254. 1998.

<sup>13</sup> A. Bers, *Space-time evolution of plasma instabilities – Absolute and convective.*

Handbook of Plasma Physics, **Vol. I**, pp. 451-517. Amsterdam. 1983.

<sup>14</sup> P. Huerre & P.A . Monkewitz, *Absolute and convective instabilities in free shear layers.*

J. Fluid Mech., **159**, pp. 151-168. 1985.

<sup>15</sup> P. Huerre & P.A . Monkewitz, *Local and global instabilities in spatially developing flows.*

Annu. Rev. Fluid Mech., **22**, pp. 473-537. 1990.

<sup>16</sup> P.A. Monkewitz, *The role of absolute and convective instability in predicting the behavior of fluid systems.*

Eur. J. Mech., B/Fluids, **9**, n°5, 395-413, 1990.

<sup>17</sup> K. Kupfer, A. Bers & A.K. Ram, *The cusp map in the complex-frequency plane for absolute instabilities.*

Phys. Fluids, **30**, pp. 3075-3082. 1987.

<sup>18</sup> S. Jendoubi & P.J. Strykowski, *Absolute and convective instability of axisymmetric jet with external flow.*

Phys. Fluids, **6**, pp. 3000-3009. 1994.

---

<sup>19</sup> P.A. Monkewitz, D.W. Bechert, B. Barsikow & B. Lehmann, *Self-excited oscillations and mixing in a heated round jet*.

J. Fluid Mech., **213**, pp. 611-639. 1990.

<sup>20</sup> S. J. Leib & M. E. Goldstein, *The generation of capillary instabilities on a liquid jet*.

J. Fluid Mech., **168**, pp. 479-500. 1986.

<sup>21</sup> S. Le Dizès, *Global modes in falling capillary jets*.

Eur. J. Mech., B/Fluids, **16**, n°6, 761-778. 1997.

<sup>22</sup> P.A. Yakubenko, *Global capillary instability of an inclined jet*.

J. Fluid Mech., **346**, pp. 191-200. 1997.

<sup>23</sup> D.W. Lim & L.G. Redekopp, *Absolute instability for variable density, swirling jet flows*.

Eur. J. Mech. B/Fluids, **17**, n°2, pp. 165-185. 1998.

# CHAPITRE II

## STABILITE DES JETS TOURNANTS

### CAPILLAIRES

Résumé : Ce chapitre se consacre à l'analyse de la stabilité temporelle et des transitions entre instabilités convectives et absolues pour différents modèles de jets tournants. Dans un premier temps nous étudierons un modèle simple de fluide parfait incompressible. Les influences de la rotation et de la tension de surface sur la stabilité de l'écoulement sont ainsi mises en évidence. Le modèle est ensuite étendu en tenant compte soit de la viscosité du fluide environnant soit de celle du jet.

#### Introduction

Depuis presque un siècle, la stabilité des jets a été étudiée de façon ininterrompue. Et depuis quelques décennies, beaucoup d'auteurs ont développé des études visant à déterminer les évolutions spatiale, temporelle ou même spatio-temporelle de jets mis en rotation. Cet engouement pour les jets tournants s'explique notamment par la prolifération d'exemples naturels ou d'applications qui peuvent être rencontrés, tels que les flammes mises en rotation ou les tourbillons d'apex. Nombre d'auteurs ont ainsi contribué à la compréhension des instabilités qui peuvent survenir sur de tels systèmes.

Des conditions suffisantes d'instabilité portant sur le profil de vitesse de l'écoulement ont été établies, on peut citer notamment celle de Leibovich & Stewartson<sup>1</sup> portant sur un tourbillon non visqueux avec vitesse axiale :

$$(1) \quad V \frac{d\Omega}{dr} \left[ \frac{d\Gamma}{dr} \frac{d\Omega}{dr} + \left( \frac{dW}{dr} \right)^2 \right] < 0$$

où  $V(r)$  est la vitesse azimutale,  $W(r)$  la vitesse axiale,  $\Gamma = rV(r)$  la circulation et  $\Omega = V(r)/r$  la rotation angulaire.

Des études de stabilité sur différents modèles de jets tournants ont été menées, telles celles de Lessen & Paillet<sup>2,3</sup> portant sur la stabilité temporelle d'un jet visqueux auquel un tourbillon de

Batchelor était adjoint. Ces travaux ont été récemment corrigés et étendus à grands nombres de Reynolds par Khorrami<sup>4</sup>. Khorrami a ainsi mis en relief la persistance des modes non visqueux à faibles nombres de Reynolds et la présence de modes visqueux instables. Martin & Meiburg<sup>5</sup> ont, quant à eux, souligné l'interaction entre les instabilités de Kelvin-Helmholtz et de type centrifuge.

D'autres modèles, plus simples, ont permis de caractériser les différents mécanismes intervenant sur la stabilité du système. Ainsi, pour le mode axisymétrique à faible nombre de swirl, une résonance entre les ondes de Kelvin inhérentes au tourbillon de Rankine et les instabilités de cisaillement a été mise en lumière par Loiseleux, Chomaz & Huerre<sup>6</sup>.

L'analyse du développement spatio-temporel des instabilités apporte aussi de précieux renseignements. En effet, les instabilités qui apparaissent pour un ensemble de paramètres de contrôles fixés peuvent être soit advectées par l'écoulement moyen, soit croître sur place et déstructurer totalement l'écoulement. Suivant cette optique, plusieurs travaux rendent compte des transitions entre instabilités de nature convective et de nature absolue. Pour expliquer le brusque changement de topologie lors d'éclatement tourbillonnaire, Loiseleux & al<sup>6</sup> ont montré la possibilité de transition vers un état absolument instable pour un tourbillon de Rankine non visqueux avec vitesse axiale et sans contre-courant. Dans le cas d'un tourbillon de Batchelor non visqueux, Olendraru, Sellier, Chomaz & Huerre<sup>7</sup> corroborent cette possibilité de transition. Même si, le propos doit être nuancé au vu des résultats numériques obtenus par Delbende, Chomaz & Huerre<sup>8</sup>. En effet, la transition serait déplacée vers des zones à contre-courant non nul, du fait de la présence de viscosité. Un des derniers travaux sur le sujet a été produit par Alfons Michalke<sup>9</sup>. Ce dernier s'est intéressé à la stabilité spatio-temporelle de jets tournants avec la présence au sein du jet d'un écoulement de retour (profil de Monkewitz). En particulier, Michalke trouve des fréquences absolues au sein du jet du même ordre que celles obtenues expérimentalement par Lehmann & al.<sup>10</sup>.

C'est dans le cadre de toutes ces études que nous avons voulu insérer nos différents modèles. Nous commençons par un modèle simple de jet avec vitesse axiale constante et mis en rotation solide. Nous dérivons les influences des divers mécanismes d'instabilité sur la stabilité de l'écoulement, comme par exemple, l'influence de la tension de surface et celle du rapport de densité entre le fluide externe et le jet. Des travaux similaires tels que ceux, récents, de Lim & Redekopp<sup>11</sup> existent mais les résultats restent limités à une analyse spatio-temporelle et l'influence de la tension superficielle ignorée. De plus, les variations des transitions

convectif/absolu dues à des croisements de point de pincement n'ont pas été mises en lumière. Sur ce dernier point, nous montrerons le rôle prédominant de la circulation externe sur ces croisements.

Le second modèle repose sur l'introduction de la viscosité du jet. Chandrasekhar<sup>12</sup> a été le premier à tenir compte de la viscosité et montré que celle-ci tendait à réduire les taux de croissance temporelle et ainsi à diminuer l'instabilité de Rayleigh. Leib Goldstein<sup>13</sup> ont quantifié l'influence stabilisatrice de la viscosité sur l'instabilité et sa nature. Lin & Reitz<sup>14</sup> ont quant à eux complété ces derniers résultats à de faibles rapports de densité. Nous avons, pour notre part, étendu les courbes de transition aux très faibles nombres de Reynolds et pour divers rapports de densité. De plus, aucun modèle de jet visqueux tournant, de type Rankine, n'avait été traité jusqu'à présent. Dans la continuité des travaux effectués nous montrerons le caractère stabilisateur de la viscosité sur les instabilités dues à la rotation.

Enfin nous nous intéresserons à l'influence de la viscosité du fluide externe. La stabilité des jets en rotation solide a jusqu'ici été abordée, selon deux points de vue. Soit le jet et la partie externe étaient considérés comme des fluides parfaits, soit le jet était le seul à subir l'influence de la viscosité. Cependant, dans la majeure partie des expériences en laboratoire, la vitesse à l'extérieur du jet reste faible, les effets visqueux auraient donc là loisirs à s'exprimer. En effet, pour un jet submergé, les propriétés du fluide intérieur sont généralement identiques à celles du fluide externe. Le nombre de Reynolds intérieur basé sur la vitesse du jet peut alors se révéler bien supérieur au nombre de Reynolds externe basé lui sur la vitesse extérieure. Ce dernier point nous amène tout naturellement à nous poser la question suivante : quelle est l'influence de la viscosité externe sur la stabilité du système ? Nous avons donc étudié la stabilité temporelle et spatio-temporelle d'un tourbillon de Rankine avec vitesse axiale constante évoluant dans un milieu extérieur visqueux possédant lui aussi une vitesse mais où toute rotation est absente. Le propos de la dernière section de ce chapitre est de caractériser la stabilité du système en fonction du nombre de Reynolds externe. Nous montrerons ainsi que la viscosité externe peut aboutir à générer des modes instables à partir des modes neutres de Kelvin.

Quel que soit le modèle étudié, nous nous attacherons dans un premier temps à exposer les principaux résultats concernant la stabilité temporelle du jet. Ensuite, nous nous intéresserons aux transitions entre instabilité convectives et absolues, suivant une approche de type local. En particulier, nous caractériserons l'intervention des différents mécanismes les uns par rapport aux autres.

# I. JET AVEC ROTATION SOLIDE

## 1. Définition du modèle

Nous allons considérer un jet de masse volumique  $\rho_0$  et de rayon  $R_0$ , débouchant dans un fluide ambiant de masse volumique  $\rho_1$  (cf. figure 1). Le jet est animé d'une vitesse axiale constante  $U_0$  et d'une vitesse angulaire  $\Omega_0$ . Le fluide ambiant possède lui aussi une vitesse axiale constante  $U_1$  mais sa vitesse azimuthale est potentielle et décroît en  $1/r$ .

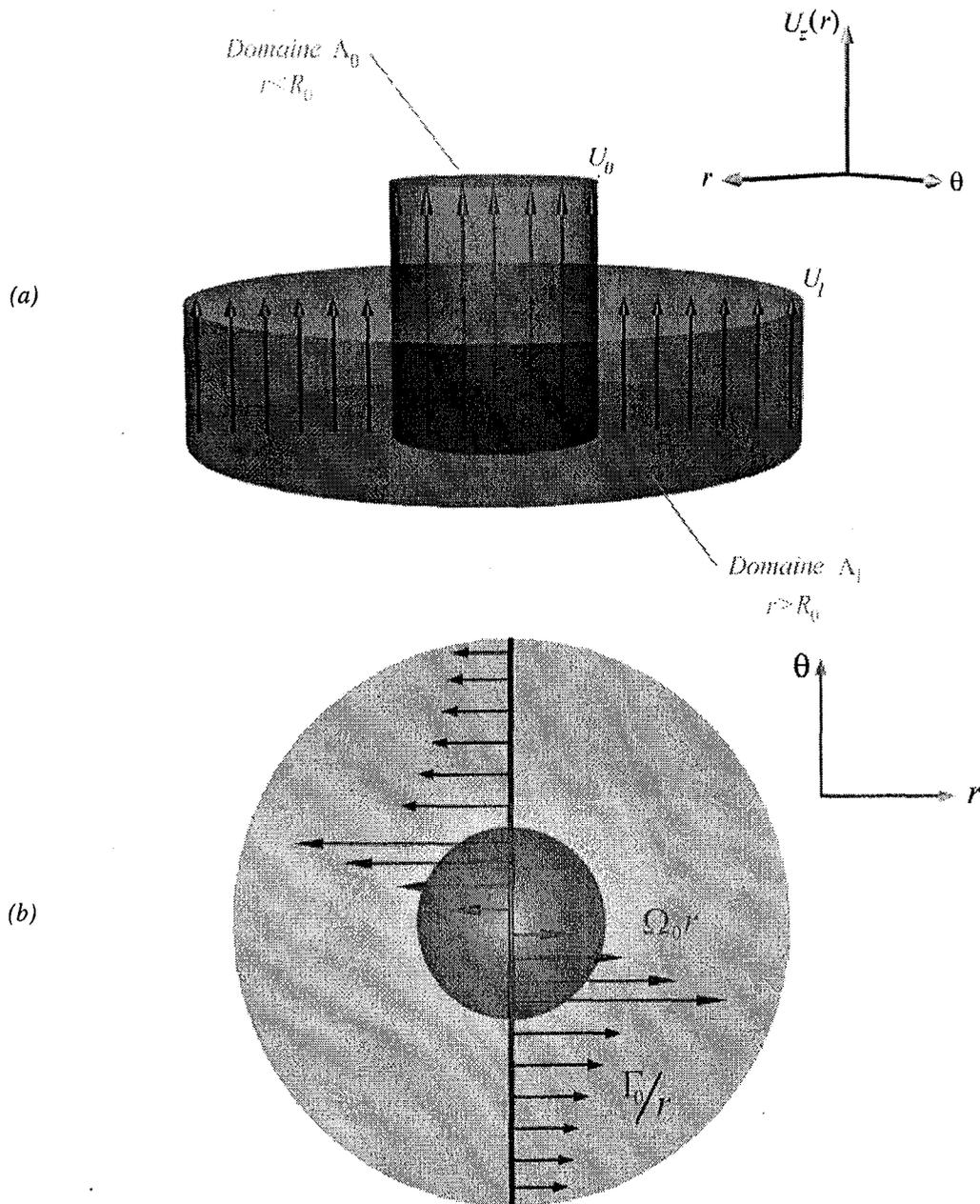


Figure 1 : Ecoulement de base  
(a) vitesse axiale (b) vitesse azimuthale

Les champs de vitesses pour les domaines  $\Lambda_0$  et  $\Lambda_1$  sont respectivement dans le repère cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  :

$$(2) \quad \vec{U}_0(r, \theta, z, t) = \Omega_0 r \vec{e}_\theta + U_0 \vec{e}_z \quad \text{pour} \quad \forall r < R_0 ; U_0 = C^{te}, \Omega_0 = C^{te}$$

$$(3) \quad \vec{U}_1(r, \theta, z, t) = \Gamma_0 / r \vec{e}_\theta + U_1 \vec{e}_z \quad \text{pour} \quad \forall r > R_0 ; U_1 = C^{te}, \Gamma_0 = C^{te}$$

La différence de vitesse axiale  $U_0 - U_1$  entre le jet et l'extérieur est une modélisation simple de la couche de cisaillement sous la forme d'une couche de vorticité infiniment mince. Quant à la différence de vitesse azimutale  $\Omega_0 R_0 - \Gamma_0 / R_0$ , elle modélise une couche de cisaillement azimutale.

Les hypothèses effectuées pour ce modèle sont les suivantes :

- ⇒ les fluides en présence sont non visqueux, incompressibles et isothermes,
- ⇒ l'écoulement de base est considéré comme stationnaire,
- ⇒ la pesanteur est négligée.

En accord avec ces hypothèses, l'écoulement dans chaque domaine est régi par les équations de conservation de la masse et d'Euler :

$$(4) \quad \text{div} \vec{U}_i = 0$$

$$(5) \quad \frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t} + \overline{\text{Grad} \vec{U}_i} \cdot \vec{U}_i = - \frac{1}{\rho_i} \overrightarrow{\text{Grad} P_i} \quad \text{avec} \quad i = 0, 1$$

Il convient de rajouter à ces équations des conditions aux limites, notamment à l'interface entre les deux fluides, en  $r = R_0$ . En effet, à la traversée de l'interface, il existe des relations de saut sur les champs dynamiques et cinématiques.

Ainsi, les forces de tension superficielle doivent être équilibrées par le saut des contraintes et la vitesse radiale doit être continue, ceci nous donne :

$$(6) \quad \left[ \vec{n} \cdot \overline{\overline{\Sigma}} \cdot \vec{n} \right] = \sigma \cdot \text{div} \vec{n} \quad \text{pour la contrainte normale,}$$

$$(7) \quad \left[ \vec{U} \cdot \vec{n} \right] = 0 \quad \text{pour la vitesse,}$$

où  $\overline{\overline{\Sigma}} = -P\overline{\overline{I}}$  est le tenseur des contraintes,  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à l'interface et  $\sigma$  le coefficient de tension de surface exprimé est  $N/m$ .

Les équations (4) et (7) sont identiquement vérifiées par notre choix des grandeurs de base cinématiques. En contrepartie, les pressions internes et externes sont déduites des équations d'Euler (5) et de la relation (6), on a ainsi :

- Pour le domaine  $\Lambda_0$  :

$$(8) \quad P_0(r) = P_\infty - \frac{\rho_1 \Gamma_0^2}{2R_0^2} + \frac{\sigma}{R_0} + \frac{\rho_0 \Omega_0^2}{2} (r^2 - R_0^2)$$

- Pour le domaine  $\Lambda_1$  :

$$(9) \quad P_1(r) = P_\infty - \frac{\rho_1 \Gamma_0^2}{2r^2}$$

où  $P_\infty$  est la pression en  $r = \infty$ . Ces dernières expressions sont caractéristiques de systèmes tournants : les pressions diminuent lorsque la distance à l'axe du jet diminue et lorsque les rotations externe ou interne sont amplifiées. L'écoulement de base étant entièrement déterminé, nous pouvons maintenant introduire des perturbations infinitésimales afin d'en connaître la stabilité.

## 2. Fonctions propres et équation de dispersion

Les perturbations sont ajoutées aux champs de base. Les champs de vitesse et pression finaux vont s'exprimer de façon suivante :

$$(10) \quad (\vec{U})_i = \vec{U}_i + \vec{u}_i(r, \theta, z, t)$$

$$(11) \quad (P)_i = P_i + p_i(r, \theta, z, t) \quad \text{avec } i = 0, 1.$$

Les perturbations étant d'amplitude faible, elles sont telles que  $\|\vec{u}_i\|/\|\vec{U}_i\| \ll 1$  et  $\|p_i\|/\|P_i\| \ll 1$ .

L'ordre de grandeur des perturbations sera assimilé par la suite de ce document au facteur  $\varepsilon$ .

Nous l'avons vu au chapitre I, en situation d'écoulements parallèles, les perturbations peuvent être décomposées en modes normaux et écrites sous la forme :

$$(12) \quad \vec{u}(r, \theta, z, t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_r \\ \tilde{u}_\theta \\ \tilde{u}_z \end{pmatrix} (r, \theta, z, t) = \begin{pmatrix} i u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} (r) e^{i(\omega t + m\theta + kz)},$$

$$(13) \quad p(r, \theta, z, t) = \tilde{p}(r) e^{i(\omega t + m\theta + kz)},$$

où l'entier relatif  $m$  est le nombre d'onde azimutale, le complexe  $k$  le nombre d'onde axiale et  $\omega$  la pulsation complexe<sup>‡</sup>.

L'interface est elle-même perturbée, et peut être définie par l'équation suivante :

$$(14) \quad f(r, \theta, z, t) = r - (R_0 + \tilde{\eta}) = 0 \quad \text{avec } \tilde{\eta} = \eta e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \quad \text{où } \eta = C^{te}$$

---

<sup>‡</sup> Afin de simplifier les légendes de figure, nous confondrons la partie imaginaire de la pulsation  $\omega_i$  avec le taux de croissance temporelle  $\sigma_i$ , il faut simplement avoir à l'esprit que  $\sigma_i = -\omega_i$

Afin d'éclairer le rôle du nombre d'onde azimutale, nous avons représenté sur la figure suivante des coupes transversales du jet pour différents modes azimutaux.

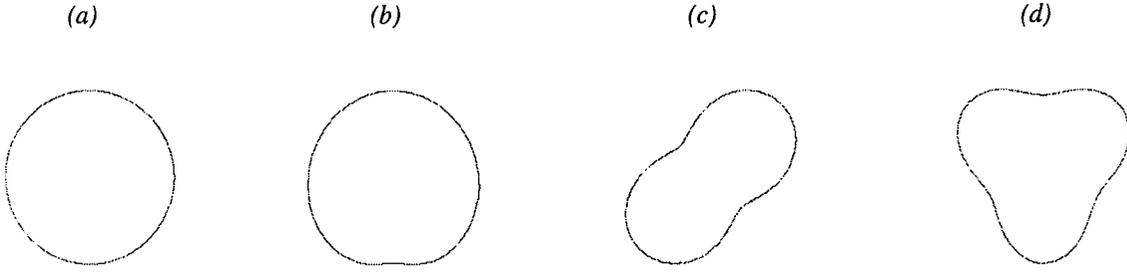


Fig. 2 : Déformation azimutale du jet  
(a)  $m=0$ , (b)  $m=1$ , (c)  $m=2$ , (d)  $m=3$ .

Les formes (12) et (13) sont introduites dans les équations du mouvement et de continuité, et l'on peut écrire pour les deux milieux, les équations linéarisées suivantes :

$$(15) \quad \text{div} \vec{u}_i = 0$$

$$(16) \quad \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + \overline{\text{Grad} \vec{U}_i} \cdot \vec{u}_i + \overline{\text{Grad} \vec{u}_i} \cdot \vec{U}_i = - \frac{1}{\rho_i} \overline{\text{Grad} p_i}$$

## 2.1 Zone interne

Après injection de la forme modale des champs perturbés, les équations linéarisées d'Euler et de continuité nous donnent le système suivant :

$$(17) \quad u'_{r_0}(r) + \frac{u_{r_0}(r)}{r} + \frac{m}{r} u_{\theta_0}(r) + k u_{z_0}(r) = 0$$

$$(18) \quad \begin{cases} \alpha_0 u_{r_0}(r) + 2\Omega_0 u_{\theta_0}(r) = -\frac{\tilde{p}'_0(r)}{\rho_0} \\ \alpha_0 u_{\theta_0}(r) + 2\Omega_0 u_{r_0}(r) = -\frac{m\tilde{p}_0(r)}{\rho_0 r} \\ \alpha_0 u_{z_0}(r) = -\frac{k}{\rho_0} \tilde{p}_0(r) \end{cases}$$

où  $\alpha_0 = \omega + m\Omega_0 + kU_0$  est la fréquence Doppler intérieure.

Après réarrangement des équations (17) et (18), il est possible d'obtenir une équation portant uniquement sur la pression perturbée :

$$(19) \quad \tilde{p}_0''(r) + \frac{1}{r} \tilde{p}_0'(r) - \left( \beta^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \tilde{p}_0(r) = 0 \quad \text{avec} \quad \beta^2 = k^2 \alpha_0^{-2} (4S^2 - \alpha_0^2).$$

La solution de l'équation (19) est une combinaison linéaire de fonction de Bessel de première et seconde espèce d'ordre  $m$ , respectivement,  $J_m(\beta r)$  et  $Y_m(\beta r)$ .

Cependant, la fonction  $Y_m$  n'étant pas définie en  $r = 0$ , la pression perturbée se réduit à l'expression ci-dessous :

$$(20) \quad \tilde{p}_0(r) = A_0 J_m(\beta r)$$

Les fonctions propres des vitesses dérivent alors directement de (18) :

$$(21) \quad \begin{cases} u_{r_0} = -i \frac{A_0 k^2}{\rho_0 \alpha_0 \beta^2} \left( \frac{2\Omega_0 m}{\alpha_0 r} J_m(\beta r) + \beta J_m'(\beta r) \right) \\ u_{\theta_0} = \frac{A_0}{\rho_0 (4\Omega_0^2 - \alpha_0^2)} \left( 2\Omega_0 \beta J_m'(\beta r) + \frac{\alpha_0 m}{r} J_m(\beta r) \right) \\ u_{z_0} = -\frac{k A_0}{\rho_0 \alpha_0} J_m(\beta r) \end{cases}$$

où la convention  $J_m'(\beta r) = \left. \frac{dJ_m(x)}{dx} \right|_{x=\beta r}$  a été adoptée.

L'ensemble des fonctions propres du jet a été déterminé à la constante  $A_0$  près. Cette dernière est représentative de l'amplitude de la perturbation à  $t = 0$  et sa valeur ne peut être explicitée sans connaître la condition initiale de perturbation.

## 2.2 Zone externe

A l'extérieur du jet, l'écoulement de base est au départ irrotationnel et l'on cherche une solution pour la vitesse perturbée sous la forme  $\vec{u}_1 = \vec{Grad}(-i\varphi)$ .

Etant donné que  $div \vec{u}_1 = 0$ , il advient que le laplacien de la fonction potentielle est nulle :

$$(22) \quad \Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

En remplaçant le développement modal de  $\varphi$  dans cette expression, nous aboutissons à une équation de Bessel modifiée qui admet comme solution une composition linéaire des fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèces d'ordre  $m$  respectivement  $I_m$  et  $K_m$ . Le potentiel solution est alors connu à deux constantes  $A_1$  et  $B_1$  près :

$$(23) \quad \varphi(r, \theta, z, t) = (A_1 K_m(kr) + B_1 I_m(kr)) e^{i(\omega t + m\theta + kz)}$$

Etant donné que la fonction  $I_m$  diverge lorsque  $r \rightarrow \infty$ , nous sommes dans l'obligation d'annuler le coefficient  $B_1$ , sous peine de ne plus avoir une perturbation d'amplitude finie. De plus, à l'infini la fonction  $K_m(kr)$  se comporte suivant un développement en  $\sqrt{\pi/(2k)} e^{-kr}$ , or pour un nombre d'onde axiale dont la partie réelle est négative, la perturbation possède une limite non définie. l'introduction de  $s = \text{sign}(k_r)$  permet que la perturbation soit nulle à l'infini.

La solution en vitesse et en pression perturbées s'écrit donc au final :

$$(24) \quad \begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{\text{Grad}}(-iA_1 K_m(skr) e^{i(\omega t + m\theta + kz)}) = A_1 e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \begin{cases} -iK'_m(skr) \\ mK_m(skr) \\ r \\ kK_m(skr) \end{cases} \\ \tilde{p}_1 = -\rho_1 A_1 \omega K_m(skr) e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \end{cases}$$

Toutes les fonctions propres étant connues, elles doivent vérifier les équations de saut à l'interface.

### 2.3 Raccordement à l'interface

La condition de saut dynamique en  $r = R_0 + \tilde{\eta}$  s'écrit :

$$(25) \quad \vec{n} \cdot (\vec{\Sigma}_1 - \vec{\Sigma}_0) \vec{n} = \sigma \operatorname{div} \vec{n}$$

où  $(\Sigma_l)_{ij} = -(P_l + \tilde{p}_l) \delta_{ij}$  avec  $l = 0, 1$ .

Une fois développée à l'ordre  $\varepsilon$  la relation (25) donne :

$$(26) \quad \tilde{\eta} \left( \frac{\partial P_0}{\partial r}(R_0) - \frac{\partial P_1}{\partial r}(R_0) \right) + \tilde{p}_0(R_0) + \tilde{p}_1(R_0) = \sigma \tilde{\eta} \frac{k^2 R_0^2 + m^2 - 1}{R_0^2}$$

Soit, en introduisant les fonctions propres calculées précédemment :

$$(27) \quad \rho_0 \Omega_0^2 R_0 \eta - \rho_1 \frac{\Gamma_0^2}{R_0^3} + A_0 J_m(\beta R_0) + \rho_1 \omega A_1 K_m(sk R_0) = \sigma \eta \frac{k^2 R_0^2 + m^2 - 1}{R_0^2}$$

Les deux autres conditions portent sur la matérialité de l'interface :

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \vec{\operatorname{Grad}} \tilde{\eta} \cdot \vec{U}_0 = u_{r_0}(R_0) \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \vec{\operatorname{Grad}} \tilde{\eta} \cdot \vec{U}_1 = u_{r_1}(R_0) \end{cases}$$

Les relations (27) et (28) constituent un système de trois équations linéaires portant sur les trois inconnues  $A_0$ ,  $A_1$  et  $\eta$ . En exprimant, grâce à (28),  $A_0$  et  $A_1$  en fonction de l'amplitude de la déformation à l'interface  $\eta$ , l'équation de saut (27) peut être réduite et  $\eta$  éliminée. La relation de dispersion est ainsi obtenue :

$$(29) \quad D(k, \omega, R_i) = \left( \rho(\alpha_1 + m\Gamma)^2 + (We(k^2 + m^2 - 1) + \rho\Gamma^2 - S^2) k \frac{K'_m(sk)}{K_m(sk)} \right) \left( 2mS + \alpha_0 \beta \frac{J'_m(\beta)}{J_m(\beta)} \right) + \frac{\alpha_0^3 \beta^2}{k} \frac{K'_m(sk)}{K_m(sk)} = 0$$

avec  $\alpha_0 = \omega + mS + k$  et  $\alpha_1 = \omega + (1 + \Delta)k$ .

La réduction du saut de pression, effectuée par rapport au rayon  $R_0$ , à la vitesse  $U_0$  et la masse volumique  $\rho_0$ , a fait apparaître des nombres sans dimensions ; le nombre de swirl  $S$ , défini par le rapport de la vitesse azimutale maximale à la vitesse axiale, la rotation externe étant caractérisée par le rapport de la circulation  $\Gamma_0$  à  $U_0 R_0$  :

$$(30) \quad S = \frac{\Omega_0 R_0}{U_0}, \quad \Gamma = \frac{\Gamma_0}{U_0 R_0},$$

et le nombre de Weber  $We$ , rapport des effets de tension superficielle aux effets d'inertie :

$$(31) \quad We = \frac{\sigma}{\rho_0 R_0 U_0^2}$$

Enfin,  $\rho$  est le rapport de la masse volumique externe sur celle de l'intérieur et  $\Delta$  est le paramètre de co-courant ou contre-courant :

$$(32) \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{U_1}{U_0} - 1.$$

Les champs de vitesse de base prennent la forme adimensionnelle suivante :

$$(33) \quad \vec{U}_0(r, \theta, z) = (0, S, 1) \quad \text{pour } r < 1$$

$$(34) \quad \vec{U}_1(r, \theta, z) = (0, \Gamma, 1 + \Delta) \quad \text{pour } r > 1$$

Le paramètre  $\Delta$  est défini via le rapport des vitesses axiales :  $U_1/U_0 = 1 + \Delta$ . Ce dernier est la représentation du cisaillement présent à l'interface des deux fluides. Ainsi, si  $\Delta > 0$ , la vitesse externe est supérieure à celle de l'intérieur, nous sommes dans le cas de sillages en co-courants. Si  $-1 < \Delta < 0$ , c'est une configuration de jet en co-courant. Et enfin, si  $\Delta < -1$ , nous sommes dans le cas jet en contre-courant. Le cas  $\Delta = 0$  traduit simplement la présence d'un écoulement uniforme, sans cisaillement. La relation de dispersion (29) est identique à celle obtenu par Lim & Redekopp<sup>11</sup>, si l'on excepte les termes de confinement spatial spécifique à leurs travaux et la

tension de surface spécifique aux nôtres. La suite de ce document réside sur l'analyse de l'équation de dispersion, puisqu'elle caractérise l'évolution de la perturbation et donc la stabilité de l'écoulement. Nous allons nous intéresser dans les deux parties suivantes à la stabilité temporelle, puis aux transitions entre instabilité convective et absolue dans l'espace des paramètres de contrôle.

### 3. Stabilité temporelle

Dans ce paragraphe, nous allons considérer que la pulsation  $\omega$  est complexe et que le nombre d'onde axiale  $k$  est réel. Ainsi, le signe de la partie imaginaire de  $\omega$ , va déterminer la stabilité de notre modèle.

La relation (29) n'admettant pas toujours des solutions évidentes  $\omega(k)$  sous forme analytique, la résolution a été opérée numériquement sous Matlab par une méthode de Levenberg-Marquardt. La procédure consiste à déterminer, pour des valeurs fixées du nombre d'onde axiale  $k_0$  et des paramètres de contrôles, des valeurs  $\omega(k_0) = \omega_0 + i\omega_0$ , vérifiant la relation de dispersion. Puis, les valeurs de départ sont suivies sur un intervalle  $[k_0..k_1]$ , pas à pas, grâce au solveur de Matlab.

#### 3.1 Sans rotation interne

Si la rotation interne est nulle, une solution analytique  $\omega(k)$  peut être tirée de l'équation (24). Pour toute cette partie non visqueuse, il n'existe qu'une seule branche temporellement  $\omega_+(k)$  et si l'on excepte la configuration du jet tournant où, nous l'évoquons plus loin, des modes neutres sont présents, la seule autre solution est une branche atténuée  $\omega_-(k)$  i.e. à valeur complexe positive. En effet, le nombre de swirl étant nul le coefficient  $\beta$  est égal alors à  $ik$ . La solution  $\omega(k)$  s'écrit alors de la manière suivante :

$$(35) \quad \omega(k) = \frac{-k - \rho L_m(k)(k(1 + \Delta) + m\Gamma)}{1 + \rho L_m(k)} \pm \frac{\sqrt{(1 + \rho L_m(k))(We(k^2 + m^2 - 1) + \rho\Gamma^2)k \frac{I'_m(k)}{I_m(k)} - \rho(k\Delta + m\Gamma)^2 L_m(k)}}{1 + \rho L_m(k)}$$

où la fonction  $L_m(k)$  a été définie par  $L_m(k) = -\frac{I'_m(k)K_m(k)}{I_m(k)K'_m(k)}$ .

Pour plus de clarté dans l'écriture, nous avons introduit ici la fonction de Bessel modifiée de première espèce  $I_m$ , cependant une solution en  $J_m$  peut être facilement déduite en utilisant la relation  $i^m I_m(k) = J_m(ik)$ . La stabilité du système étant déterminée par la partie imaginaire de  $\omega$ , l'expression (35) va faire intervenir une partie imaginaire non nulle dès que le signe du terme sous la racine devient négatif.

### 3.1.1 Instabilités de cisaillement et tension superficielle

Pour un jet non tournant submergé ( $\rho = 1$ ), en l'absence de tension de surface, seule la couche de cisaillement occasionne l'instabilité du jet et donne naissance aux anneaux tourbillons, le modèle a été analysé par Batchelor & Gill<sup>15</sup>. Comme l'indique la figure 3, aucune longueur d'onde n'est sélectionnée dans ce cas.

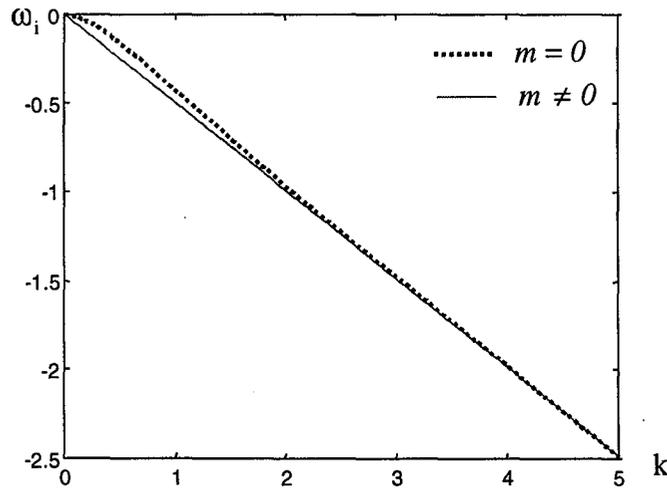


Fig. 3 : Instabilité de cisaillement du jet submergé  
 $We = 0, S = 0, \Delta = -1$

Dans la limite des petites longueurs d'onde, ( $k \gg 1$ ), les petites échelles donnent lieu à des ondes amplifiées, il n'existe pas de nombre d'ondes de coupure du fait de l'épaisseur nulle de la couche de cisaillement. Cependant, pour des profils de vitesse plus proches de la réalité, la sélection de la longueur séparant les anneaux tourbillons est fonction de la taille de la couche de mélange et de l'amplitude de la vitesse du jet (Michalke<sup>16</sup>). Pour notre modèle et dans la limite des grands nombres d'ondes, la pulsation est donnée alors par :

$$(36) \quad \omega \approx \left( -1 - \rho \frac{\Delta}{1 + \rho} \pm i \frac{\sqrt{\rho}}{1 + \rho} \Delta \right) k$$

Soit pour le jet submergé avec  $\rho = 1$  et  $\Delta = -1$  (vitesse extérieure nulle), le résultat bien connu :

$$(37) \quad \omega \approx -k(1 \pm i)/2$$

Pour la configuration de jet, l'influence du paramètre de contre-courant  $\Delta$  est purement quantitative : *plus la quantité  $\Delta$  est négative, plus les taux de croissance sont amplifiés et inversement.*

Quant au rapport de masse volumique  $\rho$ , il est possible de montrer que l'amplification maximale de la perturbation est obtenue pour  $\rho = 1$ . Sur la figure 4.a, on peut constater que l'introduction de la tension superficielle fait apparaître une fréquence préférentielle. En effet, la tension de surface stabilise totalement les perturbations de petites longueurs d'ondes ( $k \gg 1$ ) et ceci pour l'ensemble des modes azimutaux.

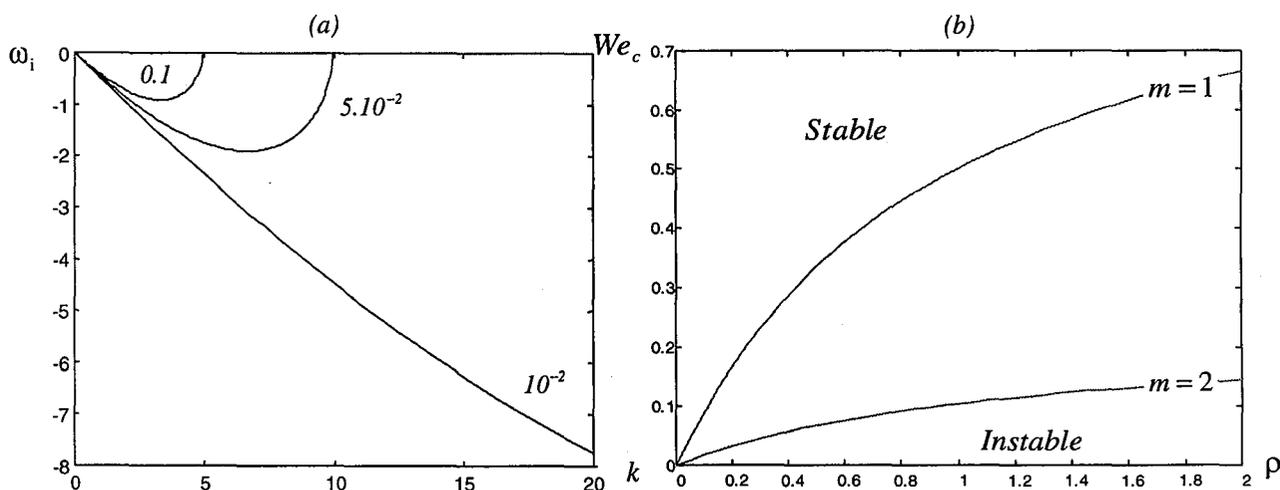


Fig. 4 : Influence stabilisatrice de la tension superficielle – Modes asymétriques  
 $\rho = 1, S = 0, \Delta = -1$

(a) Taux de croissance pour  $m = 1$ ,  $We = 10^{-2}$  à  $10^{-1}$

(b) Nombre de Weber critique en fonction de  $\rho$

Cependant, il faut distinguer le mode axisymétrique des autres modes azimutaux. En effet, les modes non axisymétriques peuvent être entièrement stabilisés grâce à la tension de surface. Comme on peut le constater sur la figure 4.b, le nombre de Weber critiques séparant les zones instables des zones stables, augmente avec un accroissement du rapport des masses volumiques. Nous avons calculé les nombres de Weber critique pour les 10 premiers modes azimutaux non nuls et pour plusieurs valeurs de  $\rho$  (fig. 5).

Le résultat est le suivant : *la stabilisation due à la tension superficielle augmente avec le nombre d'onde azimutale.*

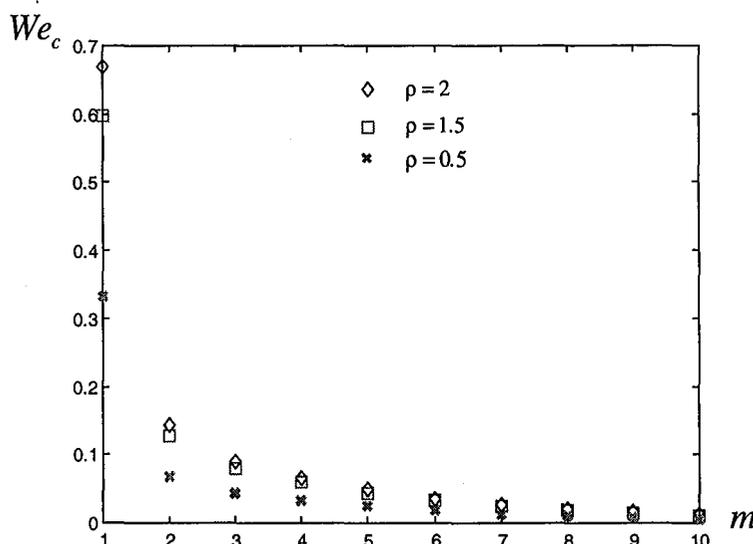


Fig. 5 : Nombre de Weber critique en fonction de  $m$  – Jet capillaire non tournant.

De façon générale, l'effet de la tension superficielle est de minimiser la surface interfaciale séparant deux fluides non miscibles, minimisant par là l'énergie potentielle du système. La tension superficielle apporte donc un effet stabilisant en créant une force de rappel vers la position moyenne d'une surface plane.

Pour une surface courbe la situation n'est plus la même, la tension superficielle intervient le long de la surface perturbée dont l'expression littérale par unité de longueur est la suivante :

$$(38) \quad S = 2\pi + \pi\eta^2 (k^2 + m^2 - 1)/4 + o(\eta^2)$$

La partie perturbée de cette surface est reliée à l'expression du rayon de courbure perturbé. Le rayon de courbure qui intervient dans le saut de la contrainte normale s'écrit :

$$(39) \quad @ = 1 + (k^2 + m^2 - 1)\tilde{\eta} + o(\tilde{\eta})$$

Ainsi qu'on peut le voir sur cette dernière expression la contribution de la perturbation au rayon de courbure va dépendre du nombre d'onde axial et du mode azimutal : *c'est l'instabilité de Rayleigh.*

Pour le mode axisymétrique, il va y avoir changement de signe de cette contribution entre  $k > 1$  et  $k < 1$ , et la tension superficielle n'appliquera plus une force de rappel mais une force de sens opposée, déstabilisant par là même le système.

Le nombre de Weber agit donc comme un paramètre déstabilisateur : *le mode axisymétrique est déstabilisé pour des longueurs d'onde supérieures au rayon du jet*. Et il existe alors un extremum, pour le taux de croissance temporelle, fonction du nombre de Weber, nous donnant ainsi une fréquence préférentielle de déstabilisation (cf. fig. 6).

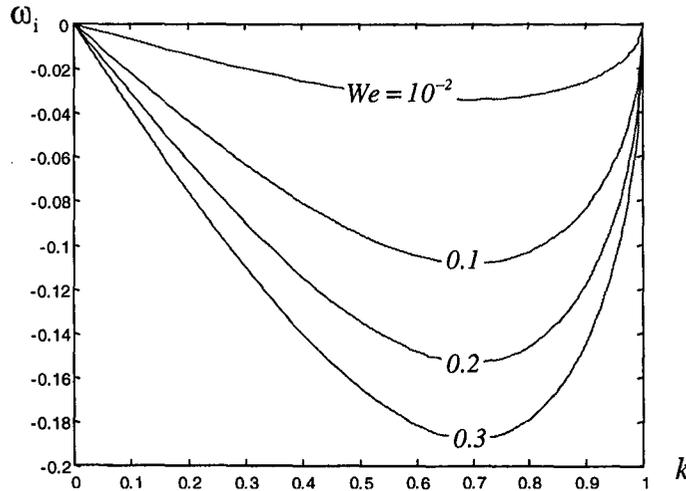


Fig. 6 : Influence déstabilisatrice de la tension de surface – Mode axisymétrique  
 $\rho = 0, S = 0, \Delta = -1$

Dans la configuration d'un jet dense ( $\rho = 0$ ), le nombre d'onde axiale correspondant au taux de croissance maximal tend vers une valeur constante de  $k_0 = 0.677$  lorsque le nombre de Weber tend vers 1, tandis que  $\omega_{i_{max}}$  croît de façon linéaire. Ce nombre d'onde constant correspond à une longueur d'onde préférentielle d'instabilité  $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \approx 4.25R_0$ , en variables non réduites. On peut vérifier aisément que la longueur d'onde où la perturbation est maximale devient constante lorsque le nombre de Weber s'amplifie et évaluer la valeur de cette constante. En effet, en supposant que le nombre d'onde  $k$  est inférieur à 1, le minimum de la fonction  $\omega_i(k)$  est donné par :

$$(40) \quad \frac{\partial \omega_i(k)}{\partial k} = \sqrt{We} \frac{\sqrt{k} \left( (I_1^2(k) - I_0^2(k))(1 - k^2) + 2kI_1(k)I_0(k) \right)}{2I_1(k)\sqrt{(k^2 - 1)}I_0^3(k)} = 0$$

En effectuant le développement de Taylor des fonctions de Bessel jusqu'à l'ordre 4, on aboutit à une expression polynomiale qui nous donne la solution constante suivante :  $k_0 = 0.698$ . Nous

avons une bonne approximation de la longueur d'onde de la perturbation la plus amplifiée. La valeur de son taux de croissance est fortement liée au nombre de Weber. Elle est proportionnelle à la racine du nombre de Weber. Il n'existe pas d'extremum absolu, plus le nombre de Weber est élevé plus le système est instable. Expérimentalement, Goedde & Yuen<sup>17</sup> ont vérifié la bonne cohérence entre la théorie et les observations. Ainsi pour des configurations à faible viscosité, les taux de croissance et la longueur d'onde préférentielle du jet sont proches des prédictions. Nous nous sommes aussi intéressés aux jets dont la masse volumique est inférieure à celle du fluide extérieur, les taux de croissance deviennent alors plus importants et l'instabilité se déplace vers des structures plus petites.

Ainsi, pour un nombre de Weber égal à 0.1, comme l'indique la figure 7, il existe une valeur limite pour le nombre d'onde axiale d'amplification maximale, cette valeur limite correspond à environ 10 fois celle correspondant au jet dense. Il convient évidemment de ne retenir que l'aspect qualitatif de ce résultat. Au niveau expérimental, la pesanteur étant bien souvent présente, la force d'Archimède modifie profondément l'écoulement pour de tels rapports de masse volumique.

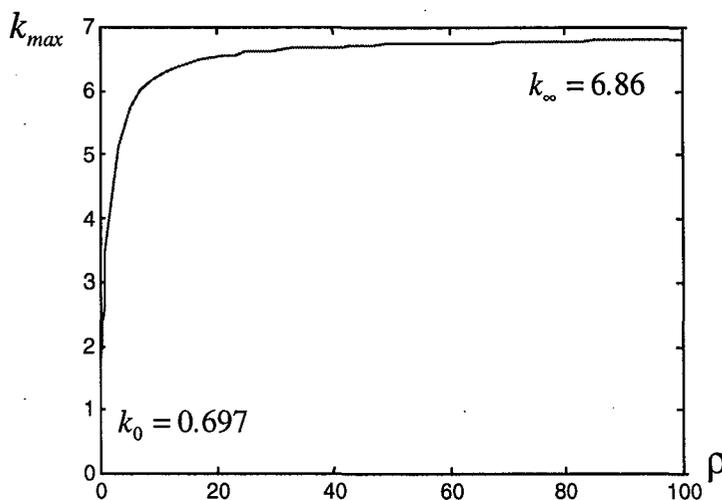


Fig. 7 : Evolution du nombre d'onde amplifié en fonction de  $\rho$  – Mode axisymétrique.  
 $We = 0.1, S = 0, \Delta = -1$

### 3.1.2 Influence de la rotation potentielle

En présence de rotation ou à circulation fixée les modes azimutaux positifs et négatifs ne sont pas similaires. Ce qui peut aussi se comprendre sous la forme : les rotations trigonométriques et anti-trigonométriques n'ont pas le même effet à nombre d'onde azimutale constant. L'incidence de la rotation externe sur la stabilité d'un jet tournant homogène ( $\rho = 1$ ) sans tension de surface a été effectuée par Lessen & al.<sup>18</sup>. Les auteurs ont dérivé plusieurs résultats lorsque seule la rotation externe était présente et pour une rotation du cœur du jet continue à l'interface ( $S = \Gamma$ ).

Pour notre modèle, dans le cas où la rotation du jet est nul ( $S = 0$ ), l'équation (30) nous permet de déduire la valeur critique de la circulation :

$$(41) \quad \Gamma_c = \frac{m\Delta k \pm \sqrt{O(k)}}{(1 + \rho L_m(k)) \frac{kK'_m(sk)}{K_m(sk)} + m^2}$$

$$\text{où } O(k) = -(1 + \rho L_m(k)) \frac{kK'_m(sk)}{K_m(sk)} \left( k^2 \Delta^2 + We(1 + \rho L_m(k))(k^2 + m^2 - 1) \left( (1 + \rho L_m(k)) \frac{kK'_m(sk)}{K_m(sk)} + m^2 \right) \right)$$

Si l'on se place dans le cas où  $We = 0$ ,  $\Delta = -1$ , et  $\rho = 1$ , le résultat des auteurs précités est retrouvé (fig. 8). Le jet demeure toujours instable dans la limite  $k \rightarrow \infty$ , les ondes courtes engendrées par le cisaillement sont influencées seulement à un ordre inférieur par la rotation. Comme l'indique la figure 8, la rotation induit une zone stable pour tous les modes azimutaux. Les modes les moins stables sont alors les modes de contra-rotations tels que  $\text{sgn}(m) = -\text{sgn}(\Gamma)$ .

⇒ Mode axisymétrique

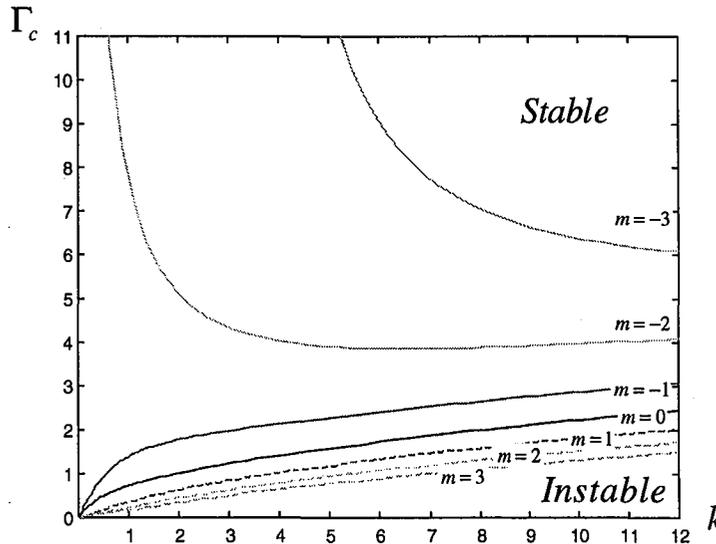


Fig. 8 : Courbe de stabilité marginale pour le jet avec circulation externe  
 $We = 0, S = 0, \rho = 1, \Delta = -1$

Le caractère stabilisateur de la circulation est fortement liée à la masse volumique du fluide environnant le jet. Ainsi, il est évident que la circulation n'influe aucunement sur la stabilité du jet si la densité extérieure est négligeable. Il est donc légitime de se demander si une augmentation de  $\rho$  va promouvoir les instabilités de cisaillement au profit de la stabilisation de la circulation ou l'inverse.

Nous avons donc calculé les courbes marginales du mode axisymétrique pour différentes valeurs de  $\rho$ . Le résultat présenté sur la figure ci-dessous est explicite : *plus la masse volumique du fluide extérieur est importante, plus les zones stables sont larges*. De plus, *la valeur critique de la circulation est proportionnelle au facteur de contre-courant  $\Delta$* .

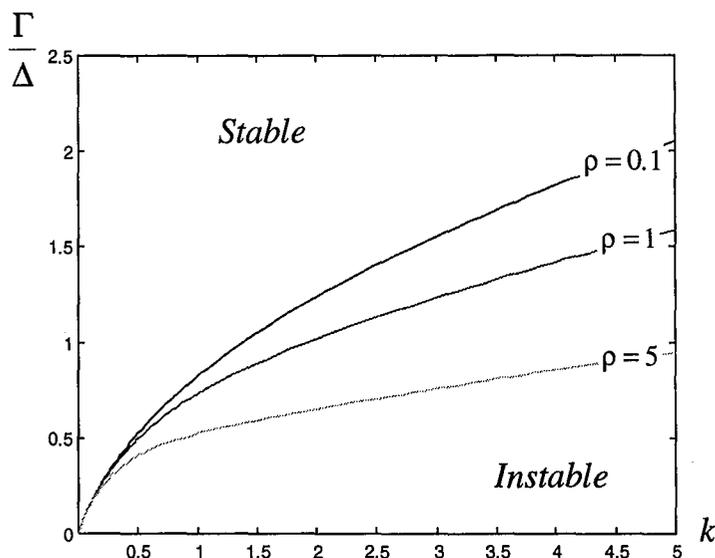


Fig. 9 : Circulation externe marginale en fonction de  $k$  – Mode axisymétrique  
 $We = 0, S = 0$

La circulation externe ne peut donc pas stabiliser entièrement la couche de mélange. Cependant, en pratique les couches de mélange ne sont pas infiniment minces et la viscosité intervient d'un point de vue expérimental. Les nombres d'onde amplifiés ne sont pas infinis, ce qui induit que la stabilisation due à la circulation devrait intervenir plus fortement que les prévisions théoriques présentées ici.

Les travaux de Lessen & al.<sup>18</sup> ne prenant pas en compte la tension de surface, il nous a semblé intéressant d'observer comment la combinaison de la tension de surface et de la circulation intervenait sur le système.

Nous l'avons exposé précédemment la tension superficielle stabilise en premier lieu les petites structures indépendamment du mode azimutal. Il est donc logique, si l'on rajoute une circulation, que cette dernière puisse conduire à une stabilisation partielle pour le mode  $m = 0$  ou même totale pour les modes asymétriques.

La figure 10.a indique comment la circulation intervient sur le nombre de Weber critique pour le mode axisymétrique. Pour  $\Gamma = 0$ , la tension de surface crée une zone stable pour les nombres d'onde supérieurs à  $k = 1$ , mais en dessous de ce seuil, son rôle s'inverse, les perturbations sont toujours instables.

L'introduction de la circulation entraîne deux modifications. Premièrement, la zone stable aux grands nombres d'ondes est élargie et en second lieu la rotation externe fait apparaître une zone de stabilité à faibles nombres d'ondes et faibles Weber. Plus la valeur de la circulation augmente, plus les zones stables sont importantes. On constate sur la seconde figure que le couplage  $\Gamma - \rho$  conserve son caractère stabilisateur (figure 10.b).

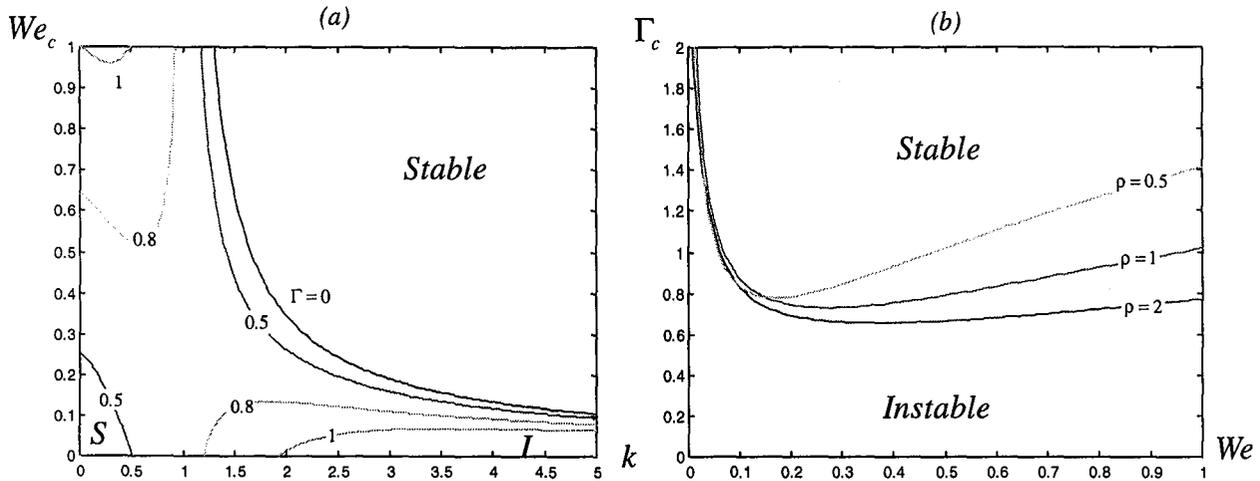


Fig. 10 : Jet non tournant sans vitesse axiale externe – Mode axisymétrique  
 (a) Weber critique en fonction de  $k$  pour  $\rho=1$  et  $\Gamma=0, 0.5, 0.8, 1$ .  
 (b) Circulation critique en fonction du Weber, pour  $\rho = 0.5, 1, 2$ .

⇒ Modes azimutaux non axisymétriques

Lorsque  $m \neq 0$ , les courbes marginales sont moins équivoques. En effet, on le constate pour le mode  $m=1$ , sur les figures 11.a et 11.b, les co-rotations sont stabilisatrices tandis que les contra-rotations sont déstabilisatrices jusqu'à environ  $\Gamma = -1$ , en dessous de cette valeur le nombre de Weber critique devient inférieur à celui correspondant à  $\Gamma = 0$ .

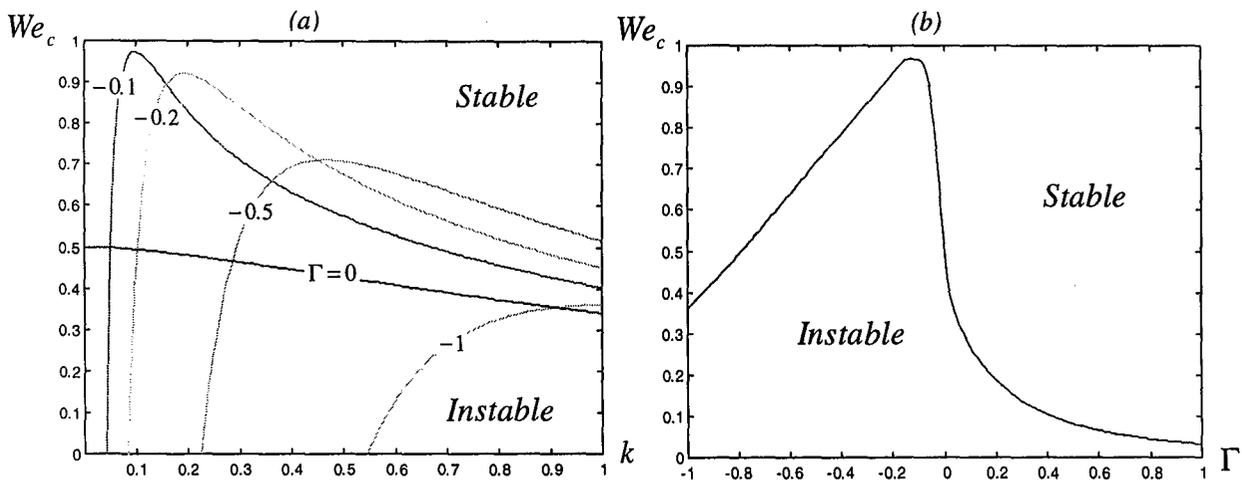


Fig. 11 : Evolution du Weber critique pour le jet submergé non tournant – Mode asymétrique  $m = 1$   
 (a) En fonction de  $k$  pour  $\Gamma = [-1..0]$   
 (b) En fonction de la circulation  $\Gamma$

De façon similaire au mode  $m = 1$ , les rotations co-grades stabilisent le mode  $m = 2$ , quel que soit le rapport  $\rho$ . Quant aux contra-rotations, elles ont une influence plus complexe. Beaucoup moins stabilisatrices que leurs homologues positives pour les grandes valeurs de  $\rho$ , les *contra-rotations sont déstabilisatrices lorsque le rapport de densité diminue*.

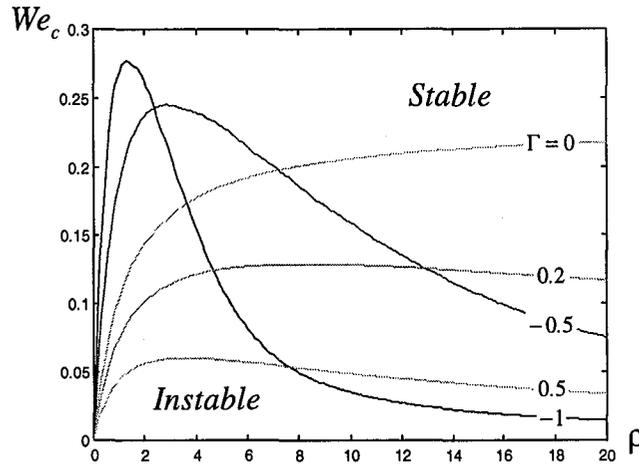


Fig. 12 : Courbe de stabilité marginale pour le jet non tournant – Mode asymétrique  $m = 2$   
 $S = 0, \Delta = -1$

### 3.2 Influence de la rotation

De manière générale, l'introduction de la rotation amène à une déstabilisation de tous les modes. Cependant, l'influence du swirl n'est pas identique pour chaque mode azimutal.

#### 3.2.1 Mode axisymétrique

Si la masse volumique à l'extérieur du jet est négligeable ( $\rho = 0$ , jet dense), le mode axisymétrique est dominé par les effets inertiels dus à la rotation.

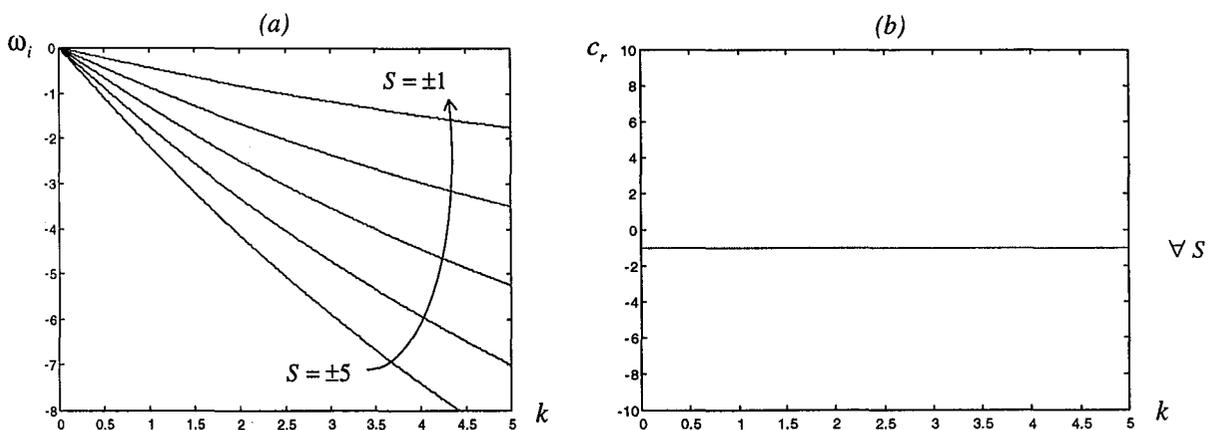


Fig. 13 : Instabilité centrifuge du jet dense,  $\rho = 0, 1 \leq |S| \leq 5$  – Mode axisymétrique  
 (a) Taux de croissance (b) vitesse de phase  $c_r = \omega_r/k$

Les taux de croissance s'amplifient avec l'augmentation du nombre de swirl (fig. 13.a) et la propagation des ondes au sein du jet s'effectue à vitesse de phase constante (fig. 13.b). Nous avons donc ici des ondes de nature non dispersive, liées en totalité à l'inertie de rotation du fluide interne. Le signe de la vitesse azimutale n'intervient pas du fait de l'invariance des équations.

Lorsque la densité externe est nulle, les instabilités de Kelvin-Helmholtz issues de la couche de mélange ne peuvent se développer puisqu'elles reposent sur une différence d'impulsion à l'interface entre les deux fluides. La quantité impulsionnelle  $\rho \Delta$  étant nulle, il ne peut y avoir d'interaction entre les deux fluides, à l'interface. Les résultats énoncés ici sont donc indépendants du paramètre de contre-courant  $\Delta$ , ce qui peut être aisément vérifié en annulant  $\rho$  dans l'équation de dispersion (29).

Comme on peut le constater sur la fig. 14, dans la configuration de deux fluides de même densité le swirl est un paramètre qui induit toujours une déstabilisation. Mais, les taux de croissance ont été amoindris par l'influence de la couche de mélange. Il existe là une compétition entre les instabilités centrifuges et les instabilités de couche de mélange.

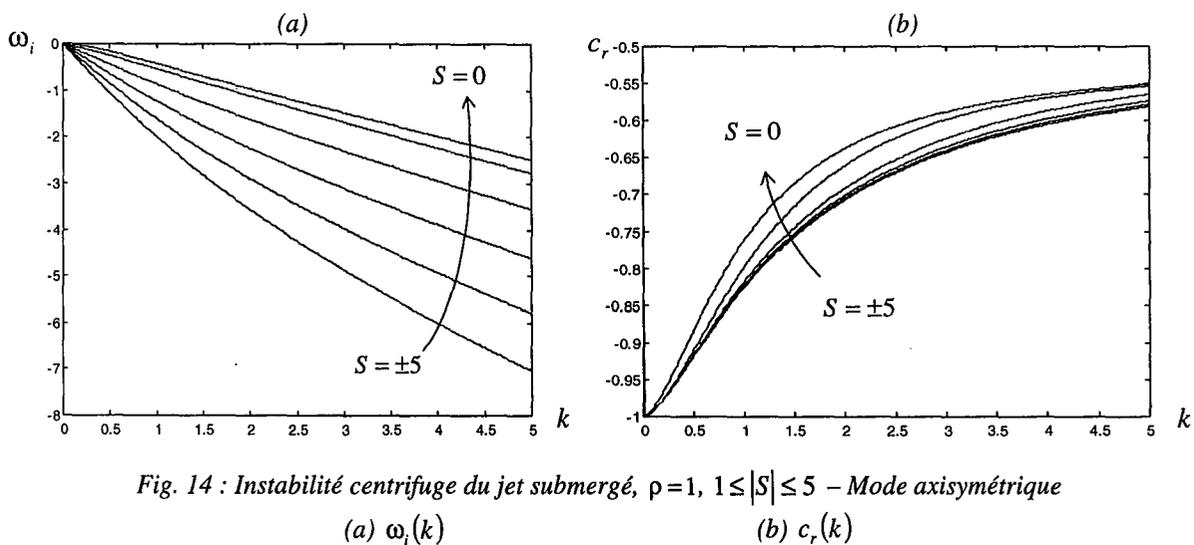


Fig. 14 : Instabilité centrifuge du jet submergé,  $\rho=1$ ,  $1 \leq |S| \leq 5$  – Mode axisymétrique

(a)  $\omega_i(k)$

(b)  $c_r(k)$

Contrairement au tourbillon de Rankine avec circulation externe, traité par Loiseleux & al., la rotation n'induit pas d'effet stabilisateur sur l'instabilité primaire du mode axisymétrique, c'est à dire les anneaux tourbillons. Cette différence provient des actions opposées entre rotation interne et rotation externe. La rotation interne est toujours déstabilisatrice tandis que la rotation externe est stabilisatrice. Ceci explique que, si l'on considère que la vitesse azimutale reste constante à la traversée du jet ( $\Gamma = S$ ), l'influence de la rotation globale extérieur-intérieur est stabilisatrice.

La figure 15 illustre l'influence de la circulation couplée à la rotation solide. A l'identique du paragraphe précédent, la circulation externe conserve un pouvoir stabilisateur sur le jet. Ainsi, on peut observer qu'une augmentation du paramètre  $\Gamma$ , pour un nombre de swirl donné, diminue sensiblement les taux de croissance et rejette les longueurs d'ondes instables vers des valeurs plus petites.

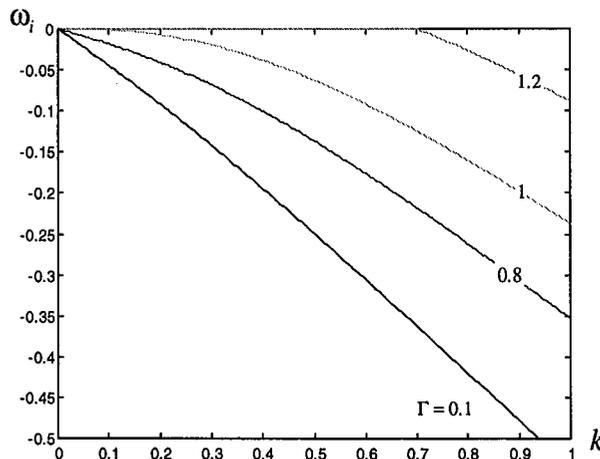


Fig. 15 : Influence de la circulation sur le jet submergé tournant – Mode axisymétrique  
 $S = 1, \rho = 1, \Delta = -1$

### 3.2.2 Modes asymétriques

Les modes asymétriques peuvent être classés en deux groupes distincts, les modes  $m = \pm 1$  et  $|m| > 1$ . En effet, les modes courbes ou « bending modes » en anglais se distinguent quelque peu des grands nombres azimutaux.

Dans le cas d'un jet dense ( $\rho = 0$ ), nous avons représenté sur la figure 16, l'évolution du taux de croissance temporelle pour les modes azimutaux  $m = 1$  et  $m = 2$  avec des nombres de swirl compris entre 0.5 et 2. Quel que soit le nombre azimutal, en l'absence de rotation, le jet est marginalement stable. L'introduction d'une vitesse azimutale va fortement déstabiliser le système.

Pour le mode  $m = 1$ , une bande neutre apparaît pour les faibles nombres d'ondes compris entre 0 et  $\frac{1}{2}$ . Ceci correspond à la stabilisation de grandes structures, de l'ordre du diamètre du jet ou supérieures.

Pour les modes azimutaux supérieurs ou égaux à 2 (figure 16.b), le phénomène de déstabilisation n'induit pas de bandes neutres à faibles nombres d'ondes. A l'inverse, ces derniers sont vivement déstabilisés, les taux de croissance, pour  $k \ll 1$ , restant cependant inférieurs à ceux des faibles longueurs d'ondes, plus amplifiées.

De plus, on peut remarquer que pour un nombre d'onde axiale nul, le taux de croissance temporelle est différent de zéro.

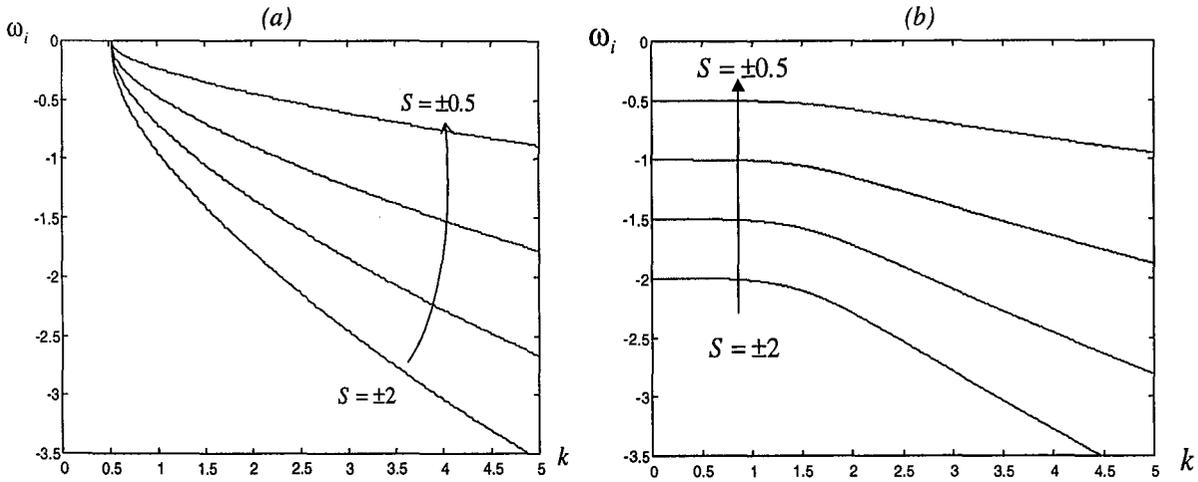


Fig.16 : Influence de la rotation sur le jet dense – Modes asymétriques  
 (a)  $m=1$   $0.5 \leq |S| \leq 2$   $\Delta = -1, \Gamma = 0, We = 0$  (b)  $m=2$

Ce résultat est à mettre en analogie avec celui sur les *ondes de Kelvin* présentes dans le tourbillon de Rankine en l'absence de vitesse axiale (Saffman<sup>19</sup>, Chandrasekhar<sup>10</sup>).

Quel que soit le mode azimuthal étudié, une infinité d'ondes inertielles se propagent de façon neutre sur la colonne en rotation avec les pulsations suivantes :

$$(42) \quad \omega_n = \pm \frac{2Sk}{\sqrt{1 + \frac{\beta_n^2(k)}{k^2}}} - mS$$

Dans la limite des petits nombres d'ondes  $k \ll 1$ , le coefficient  $\beta_n(k)$  a pour limite le  $n^{\text{ième}}$  zéro de la fonction de Bessel  $J_0$ . La pulsation limite est alors  $\omega_n \xrightarrow[k=0]{} -mS$ . Nous sommes donc en présence de pulsations non nulles pour un nombre d'onde  $k$  nul.

De façon analogue, si l'on développe la relation de dispersion (29), pour  $\rho = 0$ , au voisinage de  $k = 0$ , les modes azimuthaux  $m = 0$  et  $m = 1$  ne donnent aucune branche amplifiée mais pour les modes supérieurs à  $|m| = 1$ , on obtient les relations suivantes :

$$(43) \quad \omega_m \approx -\text{sgn}(m) \left( |m| - 1 \pm i\sqrt{|m| - 1} \right) S - k + o(k^2)$$

Il existe donc bien des branches temporelles amplifiées pour des perturbations de longueurs d'onde infinies. Ce résultat corrobore parfaitement les courbes obtenues numériquement.

Ainsi que nous l'a montré la figure 16, le sens de la rotation n'influe aucunement sur les résultats précédents. Cependant, une élévation de la masse volumique externe va dissocier les modes en co-rotations ( $\text{sgn}(m) = \text{sgn}(S)$ ) de ceux en contra-rotations (fig. 17). L'instabilité croissante en fonction de la rotation mais aussi du nombre d'onde azimuthale est mise en relief sur la figure 17. Pour les modes azimuthaux supérieurs à 1, à swirl constant, la co-rotation de la perturbation et du jet amène une déstabilisation plus importante que pour la contra-rotation.

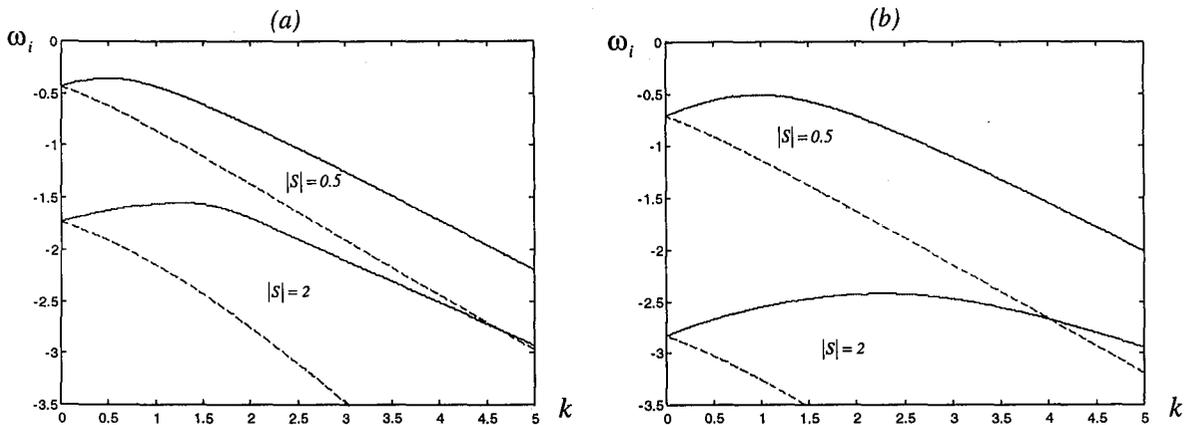


Fig. 17 : Influence de la rotation sur le jet submergé – Modes asymétriques  
 ----- Co-rotation, ——— Contra-rotation.  
 (a)  $m=2$   $\rho=1, \Delta=-1, \Gamma=0$  (b)  $m=3$

Enfin, nous avons représenté sur la figure ci-dessous, différentes courbes de taux de croissance temporelle à nombre de swirl constant et pour plusieurs valeurs de circulation. La circulation conserve sa double influence – stabilisatrice en co-rotation avec la perturbation, sinon déstabilisatrice – évoquée dans le cas du jet non tournant.

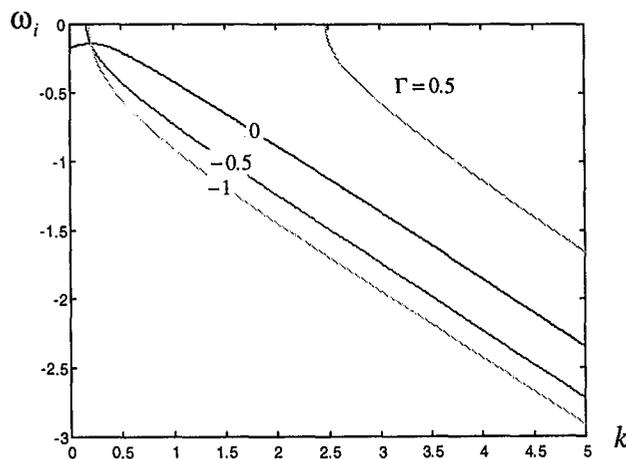


Fig. 18 : Influence de la circulation sur le jet submergé tournant – Mode asymétrique  $m = 2$   
 $We = 0, \Delta = -1, S = 0.2$

Pour l'ensemble des résultats présentés jusqu'à ici, aucun nombre d'onde axial  $n$  n'obtient de taux de croissance temporelle maximum. La tension de surface va amener le système à sélectionner une longueur d'onde préférentielle.

### 3.2.3 Avec tension de surface

L'introduction d'une rotation en plus de la tension superficielle ne modifie pas qualitativement les résultats énoncés dans le 3.1.1.

Comme on peut le constater sur la figure 19.a, la diminution du taux de croissance s'accompagne d'une augmentation de la longueur d'onde préférentielle. Nonobstant, au delà de l'unité l'influence du nombre de Weber induit toujours une déstabilisation uniquement pour le mode *axisymétrique*.

Pour un nombre de Weber compris entre 0 et 1, la tension superficielle diminue l'amplitude des taux de croissance temporelle quel que soit le nombre d'onde azimutale (figure 19.b).

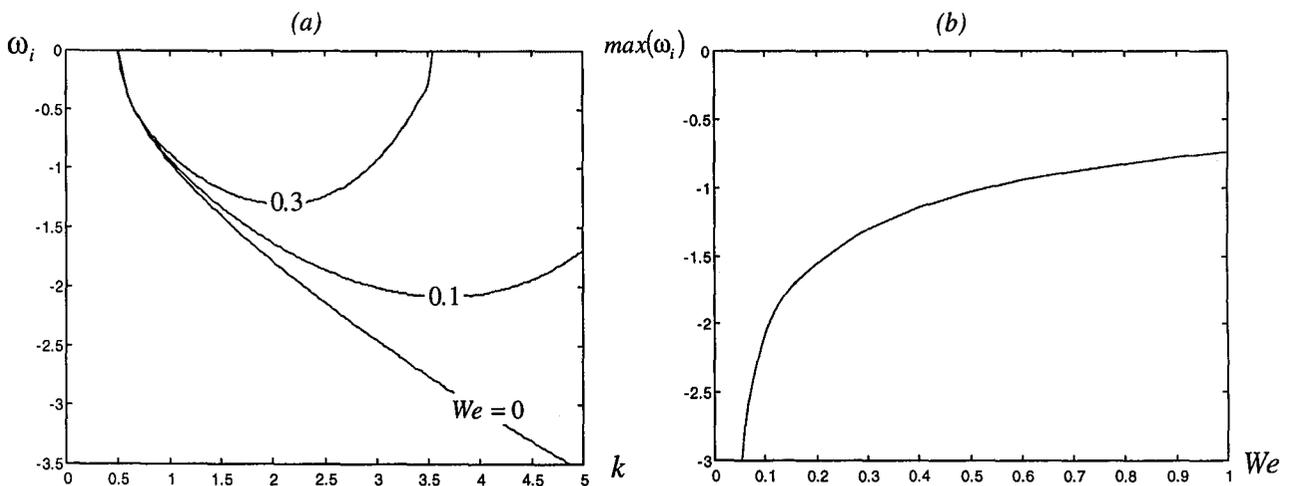


Fig. 19 : Influence de la tension de surface sur le jet dense tournant – Mode asymétrique  $m = 1$   
 $S = 2, \Delta = -1, \Gamma = 0$

(a) Partie imaginaire de  $\omega(k)$

(b) Minimum de  $\omega_i(k)$  en fonction du nombre de Weber

## Conclusions de l'étude temporelle

### Pour le mode $m=0$ :

⇒ En l'absence de rotation, la tension de surface stabilise les perturbations de faibles longueurs d'ondes mais amène aussi à une déstabilisation du jet pour des perturbations de l'ordre de grandeur du jet. La stabilisation de la tension de surface agit sur le mode d'atomisation ou mode de Taylor, associé aux variations de contraintes à l'interface. Quant, à la déstabilisation, elle est à l'origine du phénomène de rupture du jet en gouttes et dénommée instabilité de Rayleigh. Si la densité du fluide externe n'est pas négligeable par rapport à celle du jet, une rotation du fluide ambiant va stabiliser cette instabilité, rejetant les zones instables vers les grands nombres de Weber. Il existe alors une compétition entre le mode de Rayleigh et celui de Taylor.

⇒ La mise en rotation du jet induit toujours une augmentation des taux de croissance temporelle quel que soit le rapport de densité  $\rho$ . Pour des rapports de densité non nuls, la valeur des taux de croissance est alors déterminée par l'importance relative des effets de cisaillement axial à ceux d'inertie centrifuge.

⇒ Pour ce qui est des effets de la circulation externe, ils sont toujours de nature stabilisatrice aussi bien sur les instabilités de cisaillement, de tension de surface ou dues à la rotation du jet.

### Pour les modes $m \neq 0$ :

⇒ La tension superficielle atténue toute perturbation du jet pour ramener ce dernier à sa configuration initiale où la surface interfaciale est minimale.

⇒ Lorsqu'une rotation est imposée au jet, tous les modes azimutaux sont instables. Cependant pour des rapports de masse volumique non nuls, les modes contrarotatifs sont plus stables que leurs homologues en co-rotation.

⇒ De façon analogue à la rotation interne, la rotation externe amène à une distinction entre les modes azimutaux positifs et négatifs. L'instabilité de cisaillement du jet submergé est ralenti pour les modes co-rotatifs mais moindrement pour les modes en contra-rotation. Ces derniers

peuvent alors être prédominants de façon analogue au tourbillon d'apex analysé par Lessen & Paillet.

L'instabilité de tension superficielle est encore plus sensible au sens azimutal de la perturbation puisque les taux de croissance sont plus importants lorsque  $m\Gamma$  devient négatif.

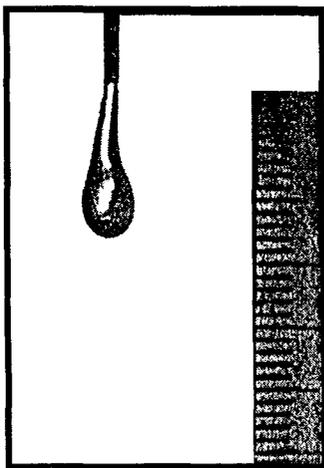
*Que l'on considère la mise en rotation du jet ou celle du fluide environnant, les perturbations co-grades agissent comme un renforcement de l'action déstabilisatrice ou stabilisatrice de la vitesse azimutale. Et inversement, les perturbations rétrogrades diminuent ou même inversent l'action de la rotation.*

## 4. Transitions IA/IC

### 4.1 Transition de tension de surface

La manifestation la plus courante d'instabilité sur les jets capillaires consiste en l'amplification de perturbations qui sont advectées par la vitesse moyenne si cette dernière est suffisamment élevée. Cependant, si la vitesse est réduite une rupture du jet apparaît en aval et des gouttes peuvent remonter jusqu'à la buse. Cette rupture est caractéristique d'une transition IA/IC. Une analyse menée par Leib & Goldstein a montré qu'en l'absence de gravité et de fluide ambiant ( $\rho = 0$ ), un jet liquide à faible vitesse pouvait devenir absolument instable à cause des effets de tension de surface. Le nombre de Weber critique où la transition s'effectue est  $We_c = 0.32$ .

Expérimentalement, Monkewitz & al. ont observé que le nombre de Weber se trouvait dans un



*Fig. 20 : Jet absolument instable d'après Vihinen & al.*

intervalle proche de cette valeur pour un jet soumis à la force de gravitation. Plus récemment, Vihinen & al.<sup>20</sup> ont réalisé l'expérience dans une tour à goutte, pour un jet en apesanteur et fortement visqueux. Ainsi que le montre la figure 20, la transition est quelque peu différente de celle du jet pesant. Nous allons voir dans la suite, comment intervient la rotation sur cette transition du mode axisymétrique. Aucun résultat ne peut être établi pour les autres modes azimutaux puisqu'ils sont temporellement stables lorsque  $\rho = 0$ .

En partant de cette transition du jet non tournant, l'addition du swirl à l'écoulement de base a été évaluée. La courbe séparant les zones absolues des zones convectives a été tracé sur la figure 21, elle correspond à une fréquence absolue  $\omega_0$ , nulle. La rotation du jet accroît la zone convective jusqu'à une valeur optimale  $S = 0.62$ , puis l'effet de la rotation s'inverse progressivement puisque, *pour les grands nombres de swirl, la zone absolue est étendue*. Ainsi, pour  $S = 2$ , le nombre de Weber critique a été divisé par un facteur 10 par rapport au cas non tournant.

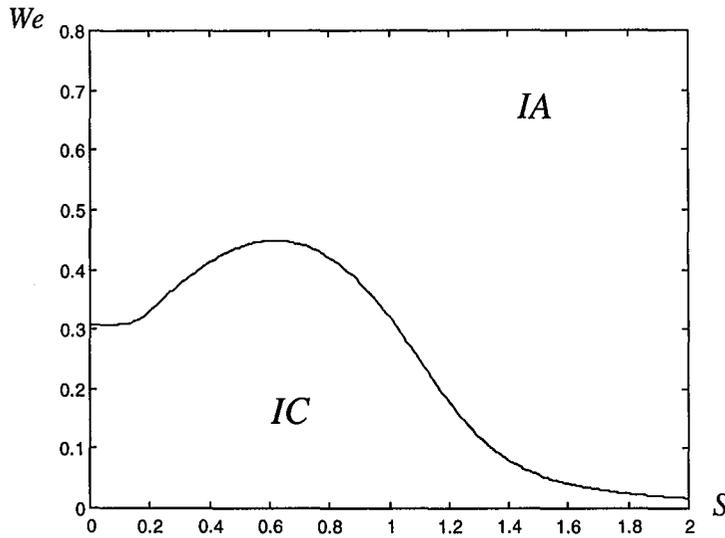


Fig. 21 : Transition IA/IC du jet tournant pour  $m = 0, \rho = 0$

L'évolution de la partie réelle de la fréquence absolue ainsi que celle du nombre d'onde axiale est montré sur la figure suivante.

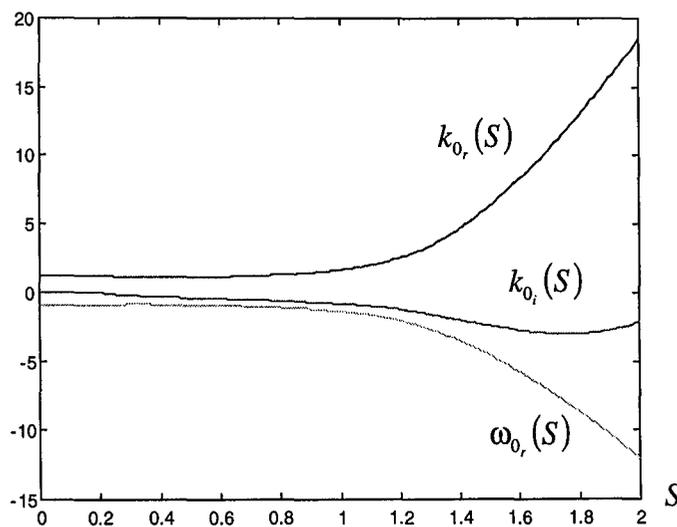


Fig. 22 : Variation de  $k_0$  et  $\omega_0$ , en fonction de  $S$ , pour  $m = 0, \rho = 0$

Sur la figure 23, l'influence de la masse volumique du fluide externe est mis en évidence. En partant d'un rapport de densité nul, l'augmentation progressive du paramètre  $\rho$  réduit la zone convective.

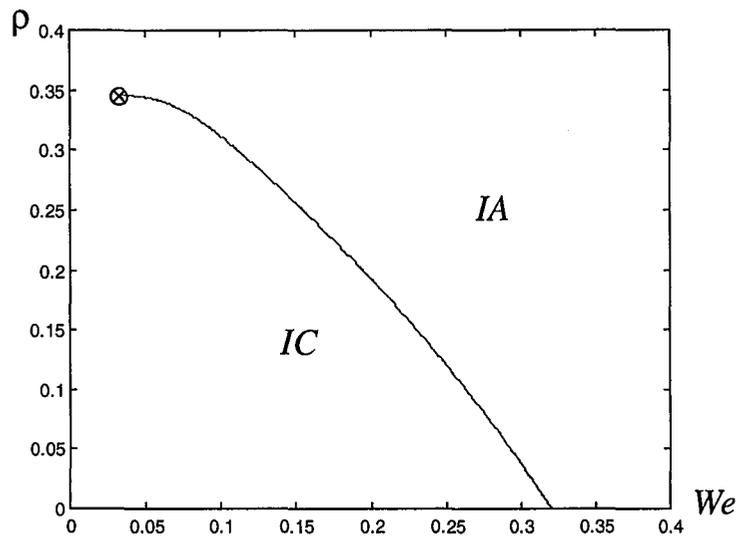


Fig. 23 : Evolution de la transition de goutte à goutte en fonction du rapport de densité pour  $m = 0, \Delta = -1$

Le point marqué d'une croix est un point singulier, nos calculs n'ont pu être menés pour des nombres de Weber inférieurs. En effet, lorsque la tension superficielle tend vers 0, la partie réelle de  $\omega_0$  ainsi que celle de  $k_0$  tendent vers l'infini. La taille des instabilités seraient donc de plus en plus réduites lorsque la densité du fluide ambiant augmente et la tension de surface s'estompe. Ce résultat est en accord avec l'analyse linéaire qui prédit une diminution de la longueur d'onde préférentielle du jet lorsque le nombre de Weber devient faible.

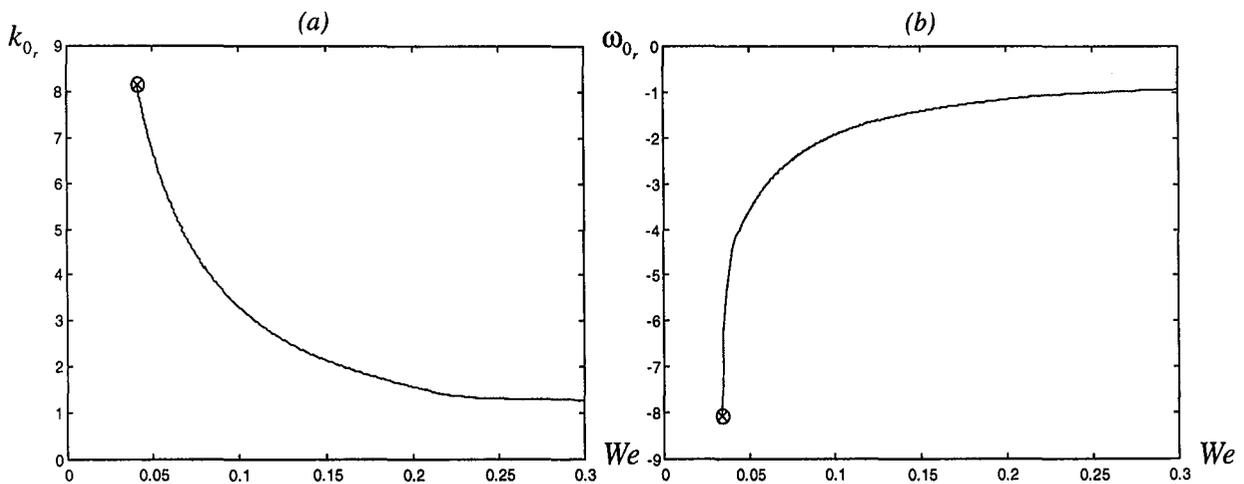


Fig. 24 : Evolution de la pulsation et du nombre d'onde absolus en fonction du nombre de Weber

Enfin, même si la tension superficielle stabilise les modes non axisymétriques, dans bien des configurations, en particulier lorsque  $\rho \neq 0$ , ces derniers présentent des taux de croissance temporelle non nuls dus à la couche de cisaillement, ainsi, il est possible de caractériser la nature de l'instabilité (fig. 25).

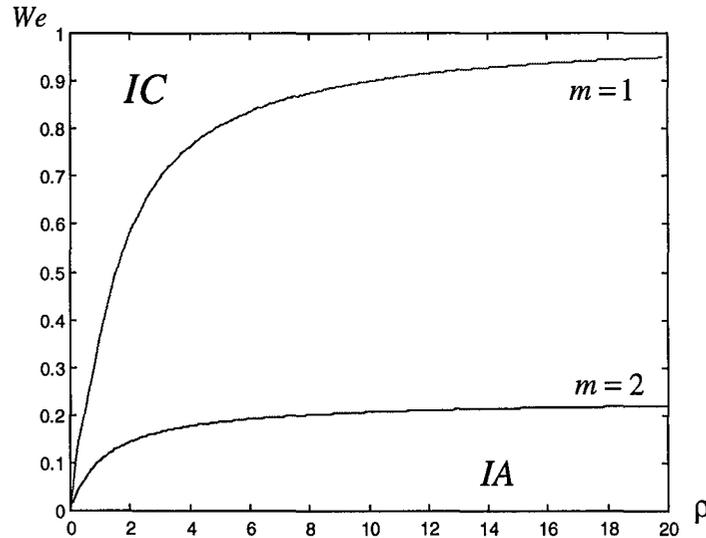


Fig. 25 : Courbes de transition  $We(\rho)$  pour  $m = 1$  et  $m = 2$ .

Similairement au mode axisymétrique, le rapport de densité  $\rho$  amplifie les zones absolument instables, le mode asymétrique le plus dangereux est alors le mode  $m = 1$ .

#### 4.2 Transition du jet chaud, cisaillement et rotations

Pour un jet chauffé débouchant dans un fluide ambiant de masse volumique plus importante, le mode axisymétrique a été caractérisé comme absolument instable par Monkewitz & Sohn<sup>21</sup>. Confirmé expérimentalement par Monkewitz & al.<sup>22</sup>, le jet présente un changement abrupt pour un rapport de densité  $\rho = 1.52$ . Cette transition a donc été prédite par l'analyse spatio-temporelle d'un modèle simple de jet avec couche de cisaillement infiniment mince.

En partant de cette transition, il est intéressant de qualifier et de quantifier l'influence des rotations internes et externes, ainsi que du paramètre de contre-courant  $\Delta$ .

Nous allons montrer que les modes asymétriques, en l'absence de vitesse axiale à l'extérieur, peuvent aussi développer des transitions vers des états absolument instables lorsque le ratio  $\rho$  augmente.

En utilisant la continuité de l'équation de dispersion par rapport à la variable  $m$ , il nous a été possible de suivre l'évolution du rapport  $\rho$  de transition en fonction du mode azimutal, en l'absence de vitesse externe c'est à dire pour  $\Delta = -1^\ddagger$ . Ainsi, en partant du mode  $m=0$  la densité externe du fluide doit être augmentée pour faire transiter les modes azimutaux non nuls. Les modes  $m=1, 2, 3, 4$  et  $5$  transitent respectivement pour des valeurs  $\rho = 2.85, 4.13, 5.36, 6.56$  et  $7.68$  (cf. fig. 26.a).

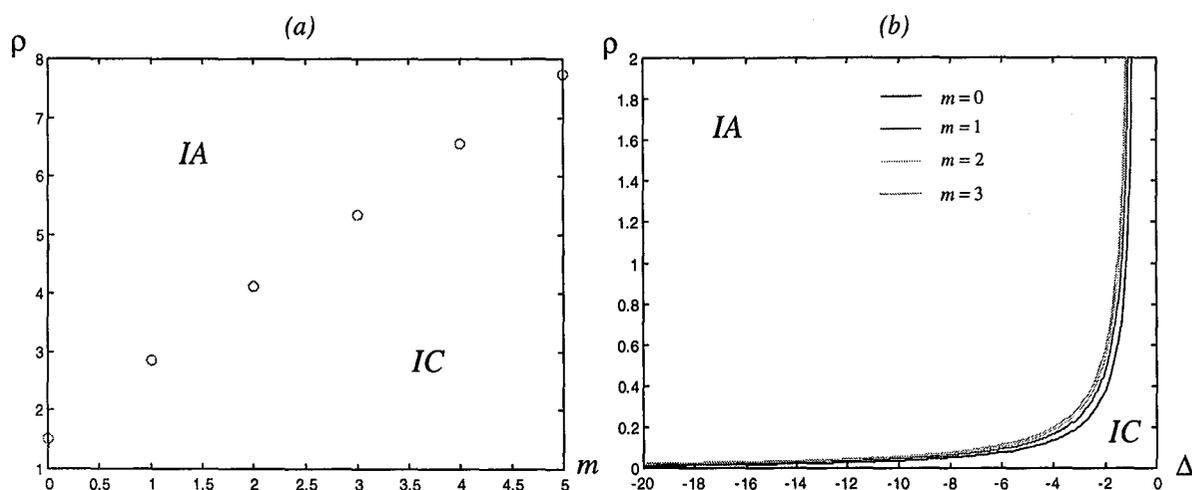


Fig. 26 : Transition du jet chaud sans et avec contre-courant en fonction de  $m$

Les modes asymétriques présentent donc des transitions pour de grands rapports de densités mais restent plus convectivement instables que le mode axisymétrique. Les valeurs critiques trouvées sont identiques à celles calculées récemment par Lim & Redekopp<sup>11</sup> pour les modes 1 à 3.

En modifiant le paramètre de contre-courant, la figure 26.b nous montre qu'il est possible d'étendre la transition à des rapports de densité élevés si la vitesse extérieure tend vers celle du jet, *i.e.*  $\Delta \rightarrow 0$ . Inversement, en adjoignant du contre-courant, *i.e.*  $\Delta \rightarrow -\infty$ , pour chacun des modes azimutaux la transition s'effectue pour des rapports de densité plus faibles. Ainsi pour un jet homogène ( $\rho = 1$ ), les transitions des modes azimutaux  $m = 0, 1, 2, 3$  s'effectuent respectivement pour des valeurs de contre-courant  $\Delta = -1.18, -1.38, -1.47$  et  $-1.53$ .

On note que *le mode axisymétrique demeure le mode le plus dangereux*, quels que soient  $\Delta$  et  $\rho$ , sa zone absolument instable restent dominante.

<sup>‡</sup> Les pincements ont été confirmés graphiquement a posteriori.

⇒ Jet chaud et rotation en bloc

A partir de la transition du jet chaud, l'influence de la rotation du jet pour le mode  $m = 0$  est montrée sur les figure 27.a et 27.b. En accord avec la courbe de transition dérivée par Lim & Redekopp<sup>11</sup>, l'augmentation du nombre de swirl accroît sensiblement la zone convective. Ainsi, *la mise en rotation du jet pourrait repousser l'apparition du mode global du jet chaud*. Les calculs ont cependant été arrêtés dès que la valeur de la partie réelle du nombre d'onde devenait négative, suivant le principe que la réponse impulsionnelle est nulle pour  $k_r < 0$ .

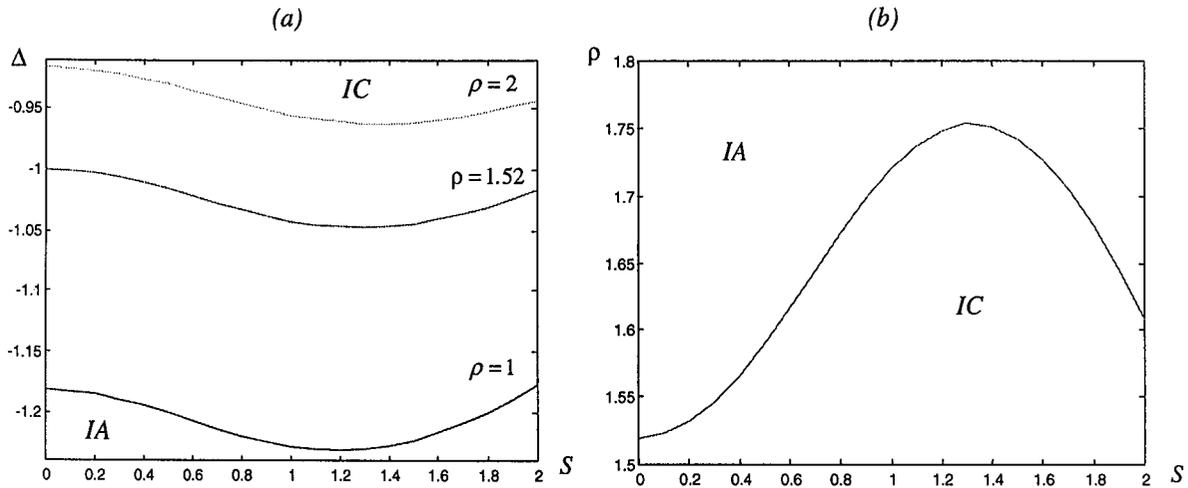


Fig. 27 : Influence du swirl sur la transition du jet chaud.  
 (a) Transition  $\Delta(S)$  pour différents  $\rho$  (b) Transition  $\rho(S)$  pour  $\Delta = -1$

Nous avons étendu sur les figure 28.a et 28.b les courbes de transition pour les premiers modes azimutaux.

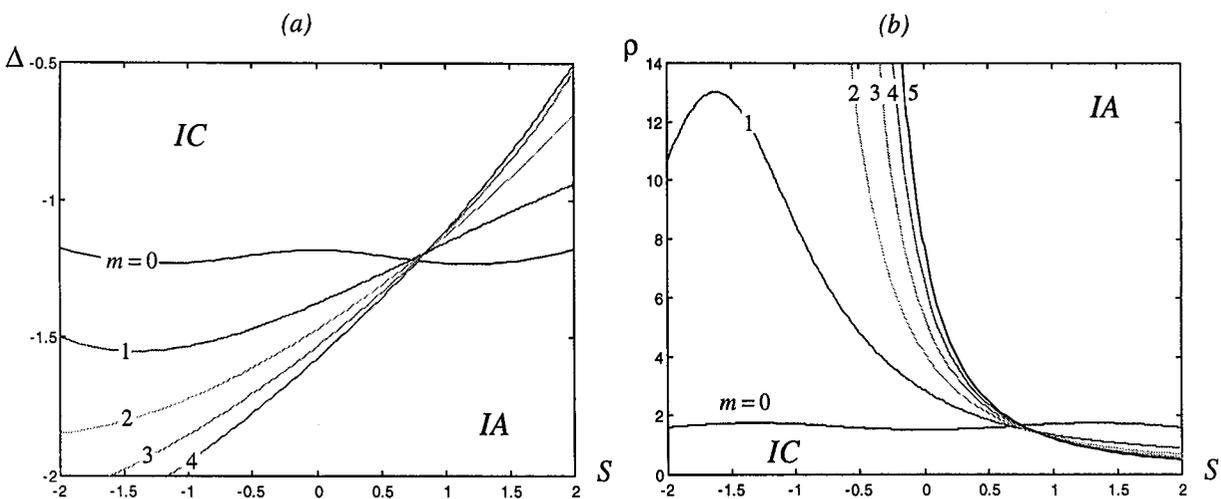


Fig. 28 : Influence du swirl sur les transitions des modes asymétriques.  
 (a) Transition  $\Delta(S)$  pour  $\rho = 1$  (b) Transition  $\rho(S)$  pour  $\Delta = -1$

L'instabilité absolue du mode axisymétrique domine les modes contrarotatifs, mais lorsque le swirl dépasse la valeur critique  $S_c \approx 0.8$ , la transition des modes co-rotatifs devient prépondérante. Les paramètres de contre-courants et les rapports de densité critiques, pour les modes asymétriques, sont de valeurs voisines, cependant les grands nombres azimutaux dominent la transition.

En accord avec la figure 28.a et 28.b, nous pouvons conclure que *les modes non axisymétriques peuvent induire des transitions vers l'instabilité absolue pour un jet homogène ( $\rho = 1$ ) et aussi pour un jet chaud, en l'absence de contre-courant externe ( $\Delta = -1$ ).*

Pour l'ensemble de ces transitions, la masse volumique du fluide extérieur n'est pas négligeable. La discontinuité de vitesse azimutale à l'interface entre les deux fluides peut, par conséquent, jouer un rôle primordiale. Nous allons donc donner quelques résultats sur l'influence de la circulation externe sur la nature de l'instabilité des jets chauds ou cisailés.

⇒ Circulation externe.

Un des cas les plus étudiés est celui où la vitesse azimutale est continue à la traversée de l'interface, lorsque  $S = \Gamma$ . Les transitions IA/IC inhérentes à ce modèle ont été analysées par Loiseleux & al.<sup>6</sup> et Lim & Redekopp<sup>11</sup>. Ignorées par les seconds auteurs, la courbe de transition  $\Delta(S)$  présente, pour le mode axisymétrique, des discontinuités dues à des croisement successifs de points selles (cf. fig. 29).

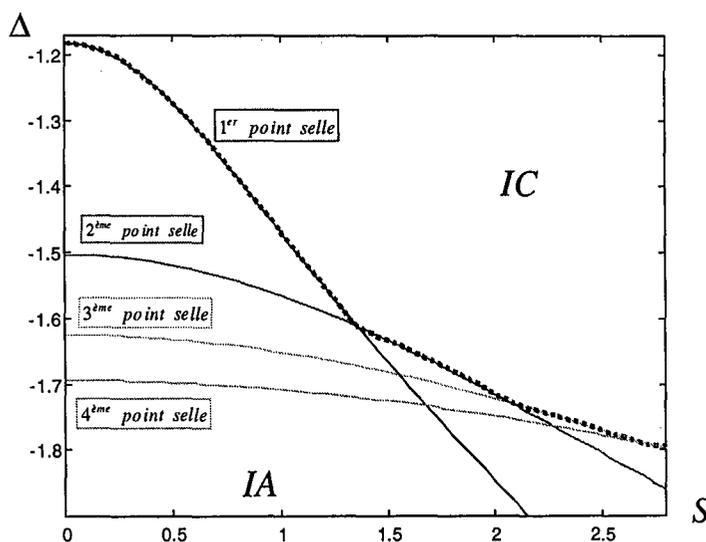


Fig. 29 : Transition IA/IC du tourbillon de Rankine pour le mode  $m = 0$ .  
La courbe en pointillée délimite les modes dominants.

La rotation déplace la zone convective vers des contre-courants plus importants, en comparant le figure 29 à la courbe  $\rho = 1$  de la figure 27.a, il est clair que *la circulation externe renforce le caractère convectif de la rotation du jet.*

La succession des points de pincement est analogue à celle de Jendoubi & Strykowski<sup>23</sup>, ces derniers ont répertorié deux modes pour le jet chaud sans rotation. Chaque point de pincement donne naissance à un mode (I, II, III, IV...) qui va dominer la nature de l'instabilité suivant les valeurs des paramètres de contrôles. Ainsi que le montre les figures 30.a à 30.c, dans l'espace complexe  $(k_r, k_i)$ , la branche amplifiée  $k^+(\omega)$  vient pincer successivement les branches  $k_1^-(\omega)$ ,  $k_2^-(\omega)$  et  $k_3^-(\omega)$ . Ces courbes ont été calculées pour des valeurs de  $\omega$ , comprises sur un intervalle  $[-9..0]$  mais surtout pour des valeurs de paramètres de contrôles  $(\Delta, S)$  différents. Pour des paramètres donnés, le point selle dont la partie imaginaire de la fréquence absolue est la plus petite détermine le caractère convectif ou absolu de l'instabilité.

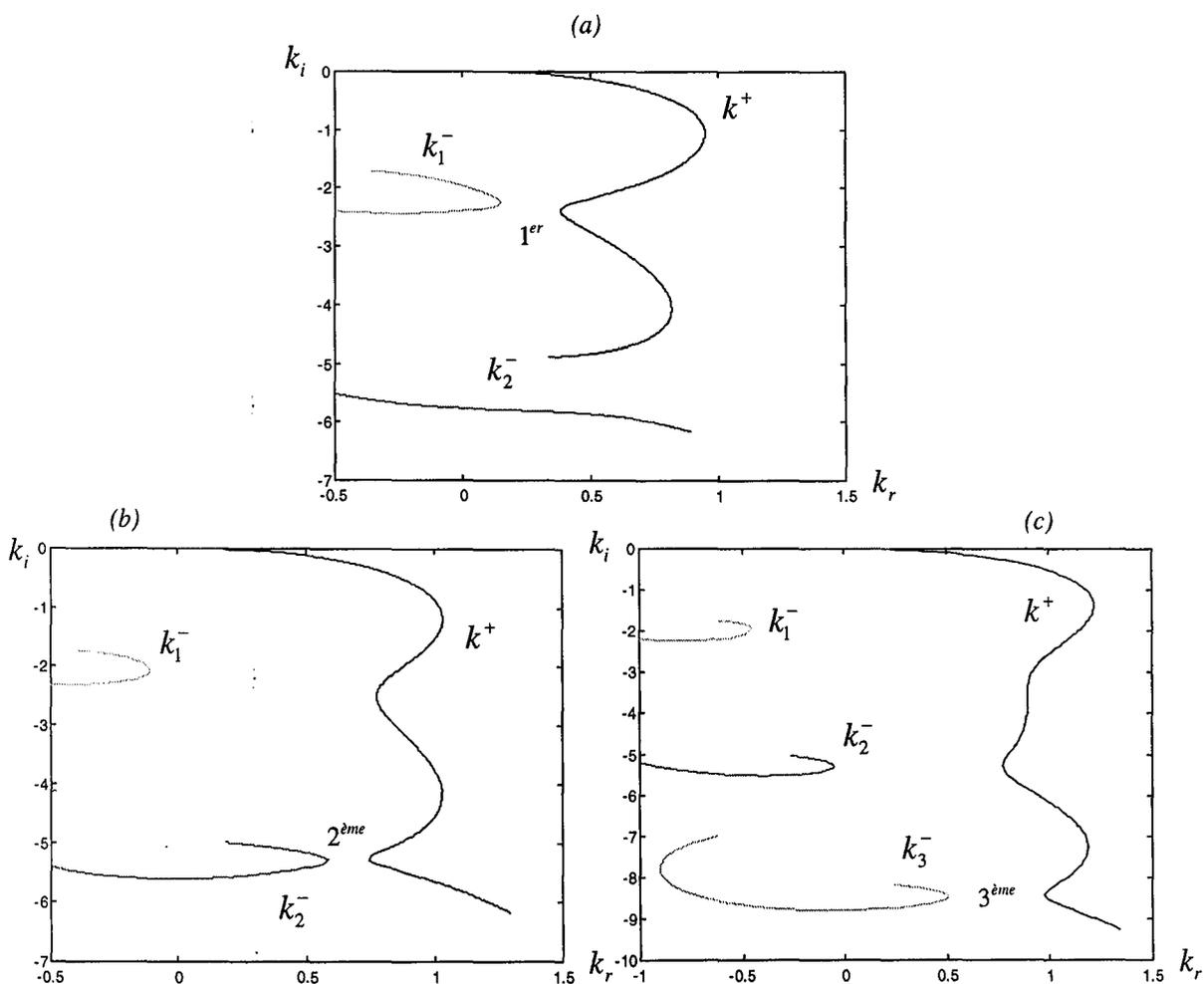


Fig. 30 : Configurations des branches spatiales  $k^+(\omega)$  et  $k^-(\omega)$  lors des trois premiers pincements.

(a)  $S = 1.8, \Delta = -1.77$

(b)  $S = 1.8, \Delta = -1.68$

(c)  $S = 2.5, \Delta = -1.76$

La circulation, en plus d'élargir la zone convectivement instable, fait intervenir les modes successifs à plus ou moins grands swirls. Lorsque la circulation et le swirl ont un rapport égal à  $1/2$ , le mode II intervient aux alentours de  $S = 2.4$  (fig. 31.a), alors que pour un rapport de 2, le mode II prédomine dès  $S = 0.7$  (fig. 31.b).

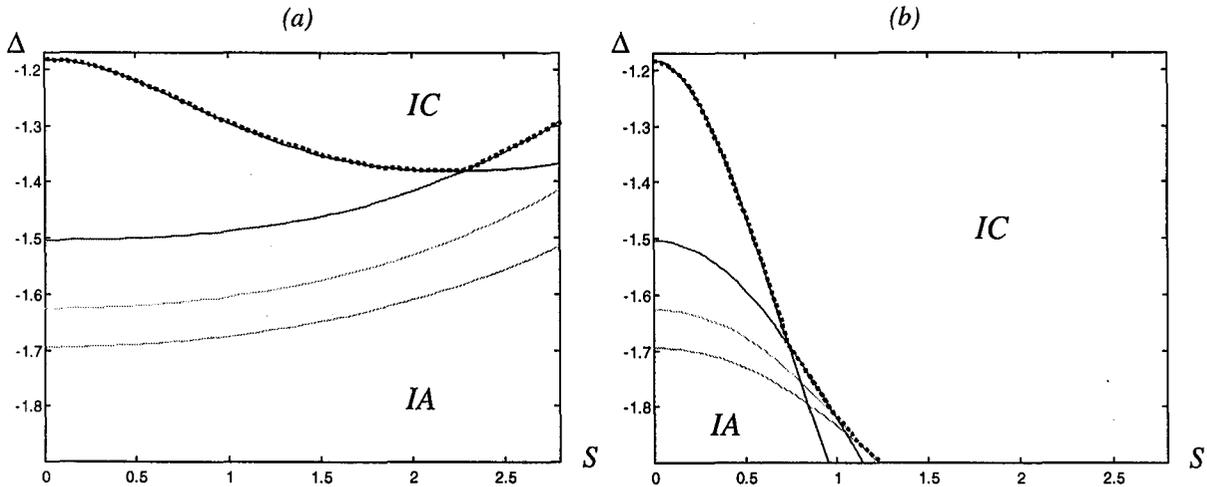


Fig. 31 : Influence du rapport  $\Gamma/S$  sur la transition de cisaillement du mode axisymétrique.  
 (a)  $\Gamma/S = 1/2$       (b)  $\Gamma/S = 2$

Les modes asymétriques interviennent aussi sur la transition lorsque la vitesse azimutale est continue à l'interface. Le mode axisymétrique constitue une majeure partie de la courbe globale de transition mais inversement au cas du seul jet tournant, ce sont les modes contrarotatifs croissants qui interviennent lorsque le swirl augmente (fig. 32).

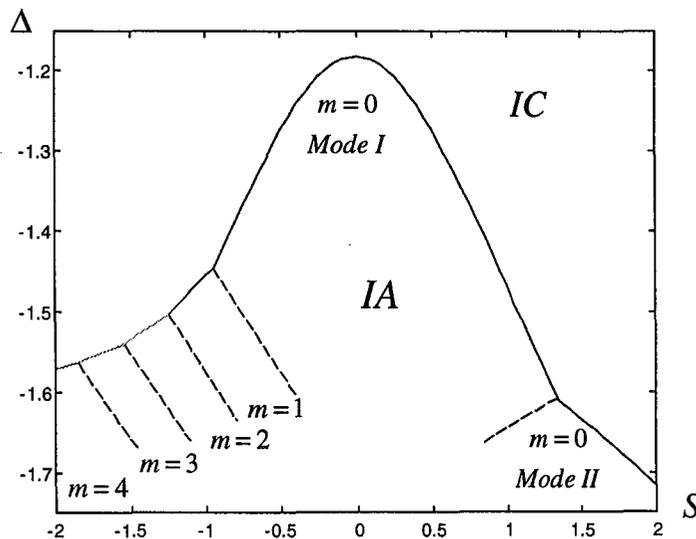


Fig. 32 : Transition IA/IC jet en configuration de Rankine avec contre-courant.

Cette dernière courbe n'a aucune correspondance avec les travaux de Loiseleux & al., du moins pour les modes asymétriques. En effet, les auteurs ont considéré, pour le mode axisymétrique, une première famille de points selles identique à celle que nous donnons et ont opté pour une deuxième famille pour les modes asymétriques.

Les auteurs ont considéré la seconde famille comme «plus significative» que la première et ont trouvé des possibilités de transition pour les modes azimutaux contrarotatifs tels que  $|m| \geq 2$ . Le mode azimutal  $m=2$  ayant été relevé comme un mode précurseur de l'éclatement tourbillonnaire dans certaines expériences, les auteurs mettent ainsi en lumière la possible correspondance avec la transition IA/IC du mode  $m=-2$ .

Nous ne prendrons pas en compte, tout comme Lim & Redekopp, cette famille de points selles et ceci pour deux raisons : la première est que, pour ces courbes de transitions, la partie réelle du nombre d'onde axiale est le plus souvent négative, *i.e.* la réponse impulsionnelle est nulle. Et en second lieu, nous avons suivi l'évolution des points de pincement lorsqu'un paramètre de contrôle temporellement stabilisateur, tel que le nombre de Weber ou le nombre d'Alfvén (cf. chapitre II), variait : les courbes de transition IA/IC traversent, sans aucune difficulté de résolution numérique, les zones temporellement stables.

En l'absence de cisaillement azimutal, nous donnons ci-dessous les transitions du jet chaud sans contre-courant et en configuration de Rankine pour différents modes azimutaux.

Comme le montre les figures 33.a et 33.b, la rotation entraîne une forte augmentation de la zone convective, pour tout mode azimutal.

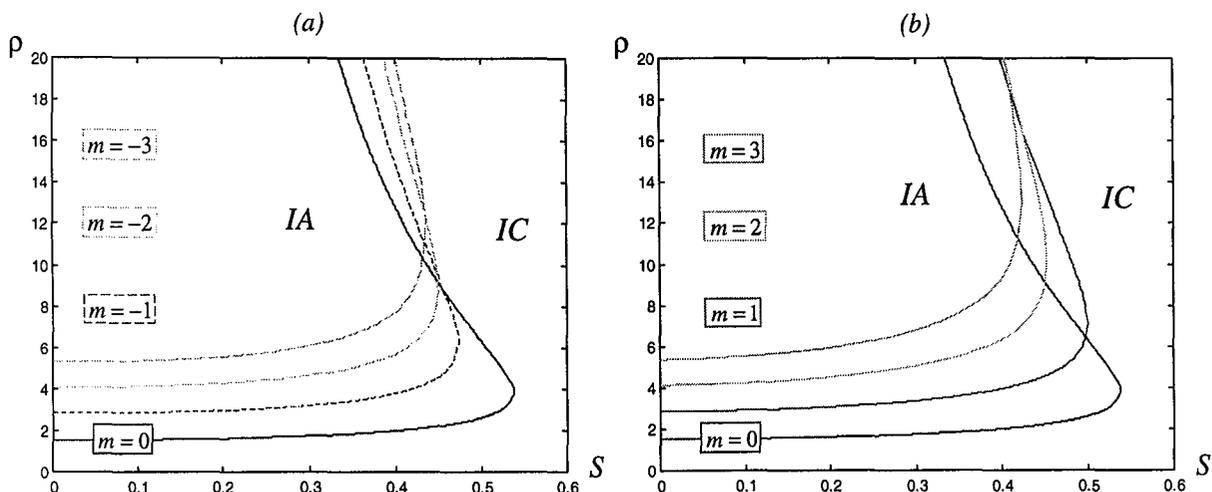


Fig. 33 : Transition du jet chaud en configuration de Rankine.  
 (a) modes rétrogrades (b) modes co-grades

En comparaison avec le jet tournant dans un milieu au repos, la circulation externe induit des zones convectives plus larges et les modes asymétriques ne peuvent concurrencer le mode  $m = 0$  que pour des rapports de densité assez élevés. En l'occurrence, le premier mode qui intervient après le mode axisymétrique est le mode  $m = 1$  aux environs du point  $S = 0.5$  et  $\rho = 6.5$ . On peut noter aussi la faible différence entre les modes négatifs (fig. 33.a) et positifs (fig. 33.b) légèrement plus absolus.

Pour terminer cette étude spatio-temporelle, nous allons présenter des résultats de transition qui pourrait avoir une explication directe dans la transition observée sur un jet coaxial eau-air où le gaz est mis en rotation rapide.

⇒ Rupture d'un jet liquide par un jet coaxial d'air en rotation

Hopfinger & Lasheras<sup>24</sup> ont menée une expérience sur un jet liquide sans vitesse azimutale auquel est adjoint un jet d'air coaxial en rotation. Issue d'une buse d'injection convergente, les jets coaxiaux présente deux vitesses axiales distinctes mais seul le jet d'air entraîne en rotation

par cisaillement le jet de liquide.

Les auteurs ont trouvé que le jet central demeurait peu affecté par la rotation externe lorsque le nombre de swirl, défini par le rapport de la vitesse azimutale à la vitesse axiale de l'air, était inférieur à une valeur  $S_{wc}$  (fig. 34.a). Mais juste en dessous de cette valeur le jet subit une forte expansion radiale et se désintègre (fig. 34.b).

En notant,  $U_g$  (resp.  $U_l$ ) et  $V_g$  (resp.  $V_l$ ) les vitesses axiale et azimutale du gaz (resp. du liquide), le nombre de swirl interne est défini par  $S_w = V_g/U_g$  et le rapport d'énergie cinétique axiale par  $M = \rho_g U_g^2 / \rho_l U_l^2$ .

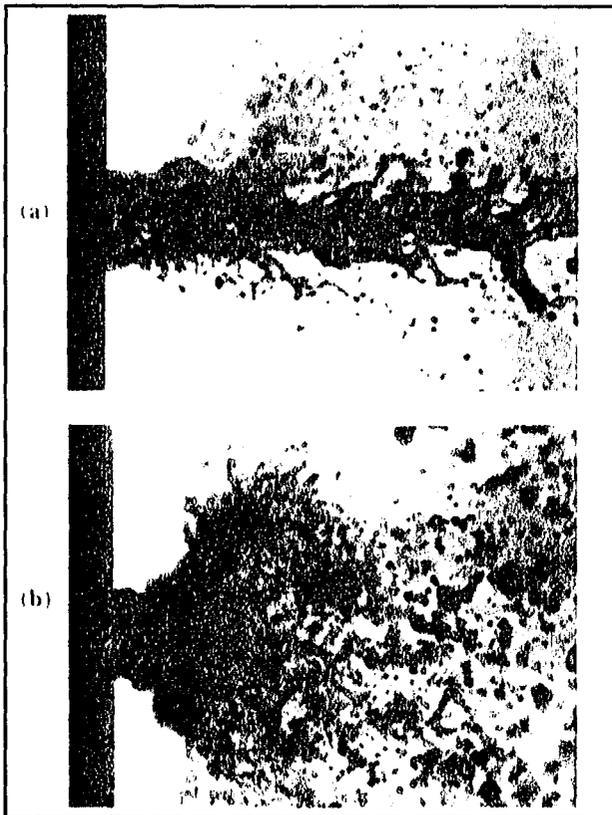


Fig. 34 : Effets de la rotation d'un jet coaxial d'air sur un jet d'eau d'après Hopfinger & Lasheras.

Pour de faibles nombres  $M$ , l'expansion du jet apparaît avant l'atomisation du cœur liquide, le nombre de swirl critique  $S_{wc}$  varie en  $M^{1/2}$ . Dans la limite des grands  $M$ , le liquide est atomisé en gouttes qui sont distribuées uniformément autour du jet, la valeur critique tend vers une valeur constante  $S_{wc} = 0.45$ . Dans ce second cas, lorsque le swirl est augmenté au dessus de la valeur  $1.5 S_{wc}$  soit 0.7, les gouttes se répartissent dans une couche conique dont l'intérieur est gazeux. Dans ces deux configurations, les auteurs assurent que la tension de surface joue un rôle secondaire.

Bien que notre modèle ne corresponde pas exactement à l'expérience, puisque la nappe d'air en rotation ne s'étend pas à l'infini, nous avons cherché la courbe de transition dans l'espace des paramètres  $(M, S)$ ; le lien avec nos paramètres de contrôles étant le suivant :

$$(44) \quad M = \rho(1 + \Delta)^2 \quad \text{et} \quad S_{wc} = \frac{\Gamma}{1 + \Delta}$$

Aucun point selle n'ayant été trouvé en l'absence de rotation du jet, nous avons peu à peu augmenté le nombre de swirl externe  $S = V_i/U_i$  jusqu'à trouver un point selle. Nous avons ainsi pu tracer une courbe de transition théorique pour un nombre de swirl  $S = 4.9$  et la comparer aux points expérimentaux (fig. 35).

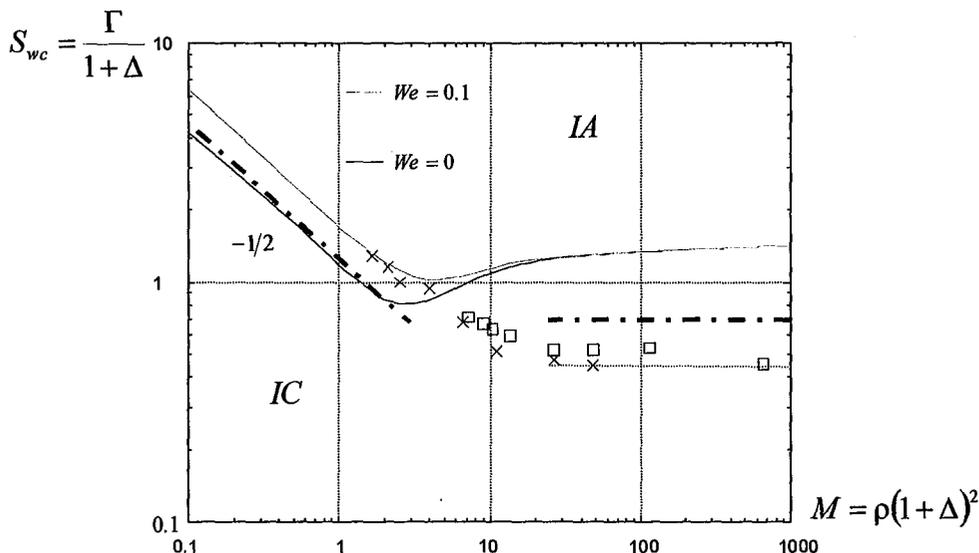


Fig. 35 : Nombre de swirl critique en fonction du rapport de flux cinétique gaz/liquide,  $\rho = 0.0013$

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| $\square \times$ Points expérimentaux d'atomisation | ----- Limites d'apparition du cône |
| --- Valeur limite d'atomisation                     | — — — Courbe de transition AI/IC   |

Comme l'indique la figure 35, la courbe de transition IA/IC est proche de celle délimitant l'apparition du cône pour les faibles  $M$  et la pente  $-1/2$  semble correspondre avec les observations expérimentales. Pour les grands ratio de flux axiaux, le seuil expérimental d'apparition du cône est cependant plus faible que celui de la courbe théorique, qui tend tout de même vers une valeur constante. Si la tension de surface est rajoutée, la courbe de transition demeure inchangé pour les forts co-courants et la transition est déplacée vers la zone absolue. Ce point est en accord avec les observations expérimentales des auteurs qui notent que la tension de surface n'a pas d'influence lorsque la vitesse de l'air est importante ( $M \gg 1$ ) et commence à influencer le jet lorsque le nombre de Weber est au moins de l'ordre 0.01, pour des vitesses d'air plus faible ( $M \ll 1$ ).

Nous avons tracé, sur la figure ci-dessous, l'évolution de la partie réelle de la fréquence absolue en fonction du paramètre de co-courant  $M$ .

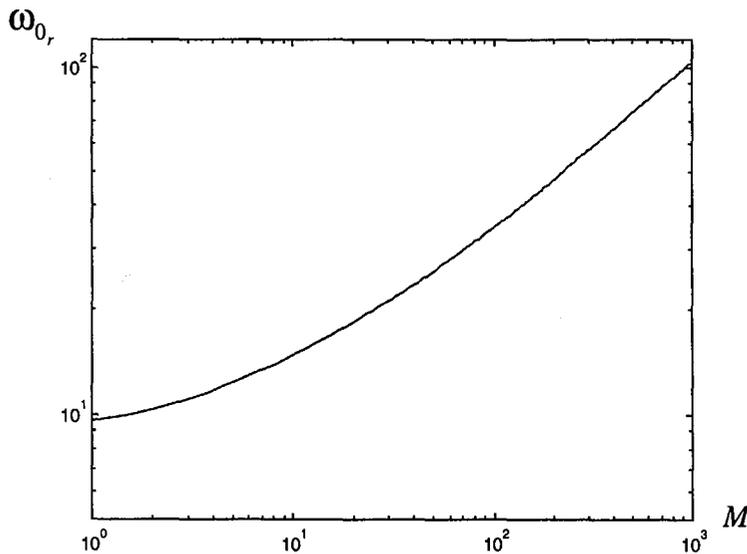


Fig. 36 : Evolution de la fréquence absolue  $\omega_0(M)$ , avec  $\omega_0 = 0, \rho = 0.0013, We = 0$

On le constate sur la figure 36, au fur et à mesure que le co-courant augmente, la fréquence devient plus grande. Ceci nous indique que la taille des structures, mises en cause dans le processus instable, diminue. Cette évolution serait peut être caractéristique d'un passage du mode d'instabilité de Rayleigh, qui tend à rompre le jet en gouttes, vers le régime de Taylor qui lui est due aux fluctuations de pressions et de cisaillement à l'interface et qui tend à produire des gouttelettes de diamètre plus petit que celui du jet (atomisation).

L'explication d'un mode global instable initiée par une région localement absolue pourrait donc être retenu. Néanmoins, nous resterons prudents et ne tirerons pas de conclusion hâtive. En effet, on peut facilement observer sur la figure 35 que l'écoulement devient non-linéaire, assez rapidement, suivant sa direction axiale, la théorie linéaire devenant caduque.

## Conclusions de l'étude spatio-temporelle.

Nous avons caractérisé dans cette dernière section, les effets de la rotation en bloc du jet et de la circulation externe, sur les transitions entre instabilités convectives et absolues. Les principaux résultats sont les suivants :

⇒ Instabilité de goutte à goutte

La rotation du jet accroît l'instabilité convective due à la tension superficielle jusqu'à une valeur de swirl  $S = 1.03$ . Au delà, l'influence de la rotation s'inverse et la zone absolue devient plus importante.

La densité externe a été caractérisée comme un facteur de promotion de l'instabilité absolue capillaire, le mode axisymétrique reste le plus dangereux.

⇒ Instabilité du jet chaud, de cisaillement

Nous avons dérivé pour plusieurs modes azimutaux les courbes de transitions IA/IC dues à une différence de masse volumique et/ou de vitesse axiale entre le jet et le fluide ambiant.

En l'absence de rotation, le résultat de Monkewitz & Sohn a été retrouvé, le mode axisymétrique développe une zone localement absolue lorsque  $\rho \geq 1.52$ . Les modes asymétriques peuvent développer eux aussi des instabilités absolues mais pour des rapports de densité plus élevés.

En accord avec les travaux de Lim & Redekopp, la rotation du jet permet d'atteindre des rapports de densité plus élevés et d'augmenter la force du contre-courant sans transiter vers l'état absolument instable. Ainsi, en l'absence de vitesse à l'extérieur du jet, pour un nombre de swirl fixé à 1.3, le ratio de densité passe de 1.52 à 1.75.

Les transitions des modes azimutaux non nuls n'ayant pas été étudiées jusqu'alors, nous avons mis en évidence qu'à partir d'un nombre de swirl  $S = 0.7$  les modes co-rotatifs de nombre d'onde azimutal élevé, contrôlent la nature des instabilités, aussi bien dans l'espace  $(\Delta, S)$  que  $(\rho, S)$ .

En présence de circulation externe, même si le mode  $m = 0$  est dominant, la transition reste reliée à différents modes azimutaux. Inversement au cas précité, ce sont les modes contrarotatifs qui peuvent prendre le contrôle.

De plus, la modification des points de pincement par la rotation externe a été mise en lumière. Pour chaque nombre d'onde azimutale, une augmentation de la circulation amplifie les changements du point selle dominant. Les modes I, II, III... se succèdent alors pour des nombres de swirl de plus en plus réduits. Ainsi, dans le cas où  $\Gamma = S$  et  $m = 0$ , le mode II apparaît pour un couple  $(S = 2.3, \Delta = -1.37)$ , alors que si  $\Gamma = 2S$ , il apparaît dès  $(S = 0.7, \Delta = -1.68)$ .

Dans tous les cas de jet en rotation que nous avons traité, la circulation constitue un facteur d'instabilité convective dans l'espace des paramètres  $(\Delta, S)$  et  $(\rho, S)$ .

## II. MODELE DE JET VISQUEUX

### Introduction

En terme de stabilité de jets, la viscosité joue le plus souvent un rôle modérateur et stabilisateur face aux différents types d'instabilités d'origine non visqueuses telles que les couches de mélange ou la tension superficielle. En général, lorsque le nombre de Reynolds est fini, le terme diffusif présent dans les équations de Navier-Stokes intervient en dissipant de l'énergie et atténue la croissance des perturbations. Pourtant, Khorrami<sup>4</sup> et Duck & Khorrami<sup>25</sup> ont mis en évidence que l'introduction de perturbations visqueuses sur un tourbillon de Batchelor avec vitesse axiale pouvait donner naissance à des modes visqueux instables. Ces résultats ont été dérivés plus précisément pour les modes azimutaux  $m = 0$  et  $m = 1$ . Neutres pour un fluide parfait, ces deux modes vont être déstabilisés par la viscosité, avec cependant des taux de croissance temporelle d'ordres inférieurs à ceux des modes non visqueux. Les instabilités visqueuses présentent alors des valeurs de  $|\omega_i|$  maximales pour des ondes de grandeurs longueurs, de l'ordre de la taille du rayon du cœur visqueux. Les auteurs notent dans leurs travaux qu'ils n'entrevoient aucune raison pour que le mécanisme d'instabilité visqueuse ne soit pas présent pour d'autres types de tourbillon. Partant de cette supposition, nous avons développé des modèles de jet tournant avec viscosité afin d'infirmer ou de confirmer l'existence de modes visqueux instables et plus généralement mettre en lumière l'influence de la viscosité sur les transitions IA/IC. Le premier modèle tient compte uniquement de la viscosité du jet tandis que le second ne prend en compte que la viscosité du fluide externe.

### 1. Fonctions propres et problème aux valeurs propres

Les champs de vitesse et de pression de l'écoulement de base sont, dans cette seconde partie, identiques à la configuration non visqueuse précédente. La seule différence réside dans l'introduction de la viscosité du jet. Les équations du mouvement utilisées pour le jet ne sont donc plus les équations d'Euler mais les équations de Navier-Stokes :

$$(45) \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overline{\text{Grad} \vec{U} \cdot \vec{U}} = -\frac{1}{\rho_0} \text{Grad} P + \nu_0 \Delta \vec{U}$$

où  $\nu_0$  est la viscosité cinématique du jet.

En réduisant l'équation (45) par rapport aux grandeurs caractéristiques  $U_0$ ,  $R_0$  et  $\rho_0$ , on obtient :

$$(46) \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overline{\text{Grad} \vec{U}} \cdot \vec{U} = - \text{Grad} P + \frac{1}{Re_0} \Delta \vec{U}$$

où  $Re_0 = U_0 R_0 / \nu_0$  est le nombre de Reynolds dit «intérieur». Les champs de pression réduits pour l'écoulement de base sont les suivants :

$$(47) \quad P_0(r) = \frac{1}{2} S^2 (r^2 - 1) - \frac{1}{2} \rho \Gamma^2 + P_\infty + We \quad \text{pour } r < 1$$

$$(48) \quad P_1(r) = P_\infty - \frac{1}{2} \frac{\rho \Gamma^2}{r^2} \quad \text{pour } r > 1$$

où  $P_\infty$  représente la pression adimensionnelle à l'infini.

Des conditions de saut à l'interface doivent être rajoutées à celles du jet non visqueux (6) et (7). Les composantes tangentielles de la contrainte, issues de la viscosité du jet, doivent être contrebalancées par celles du fluide ambiant. Le fluide extérieur étant un fluide parfait, les composantes tangentielles de la contrainte rattachée au jet doivent s'annuler sur le bord du jet. Il convient d'insister sur le fait, qu'à l'interface, *il n'existe pas de condition d'adhérence entre les deux fluides*. La condition de raccordement de vitesse entre les deux fluides ne serait à prendre en compte que si l'on était en présence de deux fluides visqueux.

Les conditions de raccord à l'interface ( $r = 1$ ) sont donc ainsi :

$$(49) \quad \left[ \overline{\Sigma} \cdot \vec{n} \right] = \sigma \cdot (\text{div} \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad \text{pour le vecteur contrainte,}$$

$$(50) \quad \left[ \vec{U} \cdot \vec{n} \right] = 0 \quad \text{pour la vitesse,}$$

Les champs de base étant connus, les fonctions propres au sein du fluide externe étant les mêmes que dans la section précédente, il nous faut, exclusivement, déterminer les fonctions propres des perturbations qui se développent au sein du jet.

## 1.1 Détermination des fonctions propres du jet visqueux

En utilisant les décompositions (12) et (13) des perturbations sous forme normale, puis en effectuant le changement de variables suivant :

$$(51) \quad U(r) = i(u_\theta(r) - u_r(r))$$

$$(52) \quad V(r) = i(u_\theta(r) + u_r(r))$$

$$(53) \quad W(r) = iu_z(r)$$

les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$(54) \quad \frac{d^2U(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr} - \left( k^2 + iRe_0(\alpha_0 - 2S) + \frac{(m-1)^2}{r^2} \right) U(r) + Re_0 \left( \frac{m}{r} \tilde{p}(r) + \frac{d\tilde{p}(r)}{dr} \right) = 0,$$

$$(55) \quad \frac{d^2V(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} - \left( k^2 + iRe_0(\alpha_0 + 2S) + \frac{(m+1)^2}{r^2} \right) V(r) + Re_0 \left( \frac{m}{r} \tilde{p}(r) - \frac{d\tilde{p}(r)}{dr} \right) = 0,$$

$$(56) \quad \frac{d^2W(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW(r)}{dr} - \left( k^2 + i\alpha_0 Re_0 + \frac{m^2}{r^2} \right) W(r) + kRe_0 \tilde{p}(r) = 0.$$

où  $\alpha_0 = \omega + mS + k$ . Quant à l'équation de continuité, elle prend la forme suivante :

$$(57) \quad \frac{(m-1)U(r)}{r} + \frac{(m+1)V(r)}{r} + 2kW(r) - \frac{dU(r)}{dr} + \frac{dV(r)}{dr} = 0,$$

Afin de résoudre le système d'équations (54) à (57), la solution est décomposée en deux parties. La première est issue des équations homogènes, sans terme de pression, solution correspondant à une perturbation purement cinématique. La deuxième solution est une solution particulière du système, engendrée sur la base des fonctions de Bessel modifiées de premières espèces  $I_m$ ; les fonctions de secondes espèces  $K_m$  sont volontairement exclues car elles divergent lorsque  $r \rightarrow 0$ .

### ⇒ Solutions Homogènes

Les solutions homogènes, issues des équations (54) à (56), sont les suivantes :

$$(58) \quad \begin{cases} U_h(r) = A_h I_{m-1}(\sqrt{iRe_0(\alpha_0 - 2S)}r) \\ V_h(r) = B_h I_{m+1}(\sqrt{iRe_0(\alpha_0 + 2S)}r) \\ W_h(r) = C_h I_m(\sqrt{iRe_0\alpha_0}r) \end{cases}$$

En remplaçant les expressions (58) dans l'équation de continuité (57), les fonctions de Bessel d'arguments différents étant indépendantes, il advient, que si le terme  $Re_0S$  est non nul les coefficients  $A_h$ ,  $B_h$  et  $C_h$  doivent être annulés.

Ainsi, les solutions homogènes dépendent de la mise en rotation ou non du jet :

$$(59) \quad \begin{cases} U_h(r) = A_h I_{m-1}(\sqrt{k^2 + i\alpha_0 Re_0}r) \\ V_h(r) = B_h I_{m+1}(\sqrt{k^2 + i\alpha_0 Re_0}r) \\ W_h(r) = C_h I_m(\sqrt{k^2 + i\alpha_0 Re_0}r) \end{cases} \quad \text{si } Re_0S = 0$$

avec la relation  $C_h = \frac{\sqrt{k^2 + iRe_0\alpha_0}}{2k}(A_h - B_h)$ , issue de l'équation de continuité.

$$(60) \quad \begin{cases} U_h(r) = 0 \\ V_h(r) = 0 \\ W_h(r) = 0 \end{cases} \quad \text{si } Re_0S \neq 0$$

### ⇒ Solutions Particulières

Motivé par la forme des équations de Navier-Stokes (54) à (56), la recherche des solutions particulières est effectuée pour des fonctions de la forme :

$$(61) \quad \begin{cases} U_p(r) = A_1 I_{m-1}(qr) \\ V_p(r) = B_1 I_{m+1}(qr) \\ W_p(r) = C_1 I_m(qr) \end{cases} \quad \text{et } \tilde{p}_p(r) = \pi I_m(qr)$$

Une fois remplacées dans les équations de Navier-Stokes et de continuité, les expressions (61) amènent à une équation polynomiale du troisième degré portant sur l'argument  $Q = \sqrt{q}$  :

$$(62) \quad Q^3 - (2i\alpha_0 Re_0 + 3k^2)Q^2 + (Re_0\alpha_0(4ik^2 - Re_0\alpha_0) + 3k^4)Q + Re_0^2(k^2\alpha_0^2 - 4S^2k^2) - k^4(k^2 + 2iRe_0\alpha_0) = 0$$

Les solutions de (62) sont données par :

$$(63) \quad \begin{cases} q_1 = \sqrt{k^2 + \frac{2}{3}i\alpha_0 Re_0 - \frac{1}{3} \frac{Re_0^2\alpha_0^2}{C_2^{1/3}(k)} + \frac{1}{3}C_2^{1/3}(k)} \\ q_2 = \sqrt{k^2 + \frac{2}{3}i\alpha_0 Re_0 + \frac{1}{6} \frac{Re_0^2\alpha_0^2(1+i\sqrt{3})}{C_2^{1/3}(k)} - \frac{1}{6}(1-i\sqrt{3})C_2^{1/3}(k)} \\ q_3 = \sqrt{k^2 + \frac{2}{3}i\alpha_0 Re_0 + \frac{1}{6} \frac{Re_0^2\alpha_0^2(1-i\sqrt{3})}{C_2^{1/3}(k)} - \frac{1}{6}(1+i\sqrt{3})C_2^{1/3}(k)} \end{cases}$$

avec  $C_2 = 54Re_0^2k^2S^2 + iRe_0^3\alpha_0^3 + 6\sqrt{3}kRe_0S\sqrt{27Re_0^2k^2S^2 + iRe_0^3\alpha_0^3}$ .

Dans le cas où  $Re_0S = 0$ , la solution du problème homogène pour l'argument  $q$  se réduit à :

$$(64) \quad q = k$$

### ⇔ Solutions Générales

Les fonctions propres solutions s'écrivent donc au final :

$$(65) \quad \begin{cases} U(r) = \sum_{i=1}^3 A_i I_{m-1}(q_i r) \\ V(r) = \sum_{i=1}^3 B_i I_{m+1}(q_i r) \\ W(r) = \sum_{i=1}^3 C_i I_m(q_i r) \\ \tilde{p}(r) = \sum_{i=1}^3 \pi_i I_m(q_i r) \end{cases} \quad \text{si } Re_0S \neq 0$$

Où les coefficients  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  sont liés aux coefficients  $\pi_i$  par les relations :

$$(66) \quad \begin{cases} A_i = \frac{Re_0 q_i(k)}{k^2 - q_i^2 + iRe_0(\alpha_0 - 2S)} \pi_i \\ B_i = -\frac{Re_0 q_i(k)}{k^2 - q_i^2 + iRe_0(\alpha_0 + 2S)} \pi_i \\ C_i = \frac{Re_0 k}{k^2 - q_i^2 + iRe_0 \alpha_0} \pi_i \end{cases} \quad \text{avec } i = 1, 2, 3$$

Dans le second cas, la solution générale s'écrit :

$$(67) \quad \begin{cases} U(r) = AI_{m-1}(kr) + A_h I_{m-1}(\sqrt{k^2 + i\alpha_0 Re_0 r}) \\ V(r) = BI_{m+1}(kr) + B_h I_{m+1}(\sqrt{k^2 + i\alpha_0 Re_0 r}) \\ W(r) = CI_m(kr) + C_h I_m(\sqrt{k^2 + i\alpha_0 Re_0 r}) \\ p(r) = \pi I_m(kr) \end{cases} \quad \text{si } Re_0 S = 0$$

avec les relations  $A = -ik/\alpha_0$ ,  $B = -A$  et  $C = A$ , issues de la résolution des équations de continuité et de Navier-Stokes. Il est à noter que ces dernières solutions sont équivalentes à celles, non réduites, trouvées par Chandrasekhar (chapitre XII, §111).

## 1.2 Condition de passage de l'interface et problèmes aux valeurs propres

Les conditions aux limites sont écrites de part et d'autre de l'interface. Les conditions à respecter en  $r=1+\eta e^{i(\omega t+m\theta+kz)}$  sont les suivantes :

⇒ Condition d'interface matérielle (respectivement en  $r^-$  et  $r^+$ ) :

$$(68) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\eta e^{i(\omega t+m\theta+kz)}) + \vec{\nabla} (\eta e^{i(\omega t+m\theta+kz)}) \cdot (S \vec{e}_\theta + \vec{e}_z) = \tilde{u}_{0r}(r, \theta, z, t)$$

$$(69) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\eta e^{i(\omega t+m\theta+kz)}) + \vec{\nabla} (\eta e^{i(\omega t+m\theta+kz)}) \cdot (\Gamma \vec{e}_\theta + (1+\Delta) \vec{e}_z) = \tilde{u}_{1r}(r, \theta, z, t).$$

⇒ Condition d'égalité de la contrainte :

$$(70) \quad (\overline{\overline{\Sigma}}_1 - \overline{\overline{\Sigma}}_0) \cdot \vec{n} = We(\text{div} \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

où  $\overline{\overline{\Sigma}}_i$  représente le tenseur des contraintes du milieu  $i$ .

Les tenseurs des contraintes du jet et du fluide extérieur sont donnés par :

$$(71) \quad (\Sigma_0)_{ij} = -(P_0 + \tilde{p}_0)\delta_{ij} + \frac{2}{Re_0}(D_0)_{ij}$$

$$(72) \quad (\Sigma_1)_{ij} = -(P_1 + \tilde{p}_1)\delta_{ij}$$

La seconde partie du membre de droite de l'expression (71) représente les effets de viscosité.

$(D_0)_{ij}$  est le tenseur des taux de déformations défini par :

$$(73) \quad (D_0)_{ij} = \frac{1}{2} \left( (U_0 + u_0)_{i,j} + (U_0 + u_0)_{j,i} \right).$$

Les équations de raccordement (68) à (70) se développent ainsi :

$$(74) \quad \alpha_0 \eta - u_{0,r}(1) = 0,$$

$$(75) \quad (\alpha_1 + m\Gamma)\eta - u_{1,r}(1) = 0,$$

$$(76) \quad \left( (1 - k^2 - m^2)We + \frac{\partial P_0}{\partial r}(1) - \frac{\partial P_1}{\partial r}(1) \right) \eta + \tilde{p}_0(1) - \tilde{p}_1(1) + \frac{2}{Re_0} \frac{\partial u_{0,r}}{\partial r}(1) = 0,$$

$$(77) \quad \frac{\partial u_{0,\theta}}{\partial r}(1) - u_{0,\theta}(1) + i m u_{0,r}(1) = 0,$$

$$(78) \quad \frac{\partial u_{0,z}}{\partial r}(1) + i k u_{0,r}(1) = 0.$$

Le nombre de constantes à déterminer ainsi que la forme des fonctions propres rendent quelque peu lourde une mise en forme scalaire de l'équation de dispersion. Par contre, il est plus aisé de l'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$(79) \quad M_{ij} \cdot A_j = 0$$

avec  $\vec{A} = (Z, \eta, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$  si  $Re_0 S \neq 0$  ou  $\vec{A} = (Z, \eta, A_h, B_h, \pi)$  si  $Re_0 S = 0$ .

Ainsi, dans la configuration où  $Re_0 S \neq 0$ , la matrice  $M$  carré de dimension 5 se formule ainsi :

$$\begin{aligned}
 M_{1j} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2i\alpha_0 \\ A_1 I_{m-1}(q_1) - B_1 I_{m+1}(q_1) \\ A_2 I_{m-1}(q_2) - B_2 I_{m+1}(q_2) \\ A_3 I_{m-1}(q_3) - B_3 I_{m+1}(q_3) \end{pmatrix} & M_{2j} &= \begin{pmatrix} -s(K_{m-1}(sk) + K_{m+1}(sk)) \\ 2i(\alpha_1 + m\Gamma) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 M_{3j} &= \begin{pmatrix} -\frac{ip(\alpha_1 + m\Gamma)}{k} K_m(sk) \\ (1 - k^2 - m^2)We + S^2 - \rho\Gamma^2 \\ I_m(q_1) + \frac{(A_1 - B_1)q_1 I_m(q_1) + B_1(m+1)I_{m+1}(q_1) + A_1(m-1)I_{m-1}(q_1)}{Re_0} \\ I_m(q_2) + \frac{(A_2 - B_2)q_2 I_m(q_2) + B_2(m+1)I_{m+1}(q_2) + A_2(m-1)I_{m-1}(q_2)}{Re_0} \\ I_m(q_3) + \frac{(A_3 - B_3)q_3 I_m(q_3) + B_3(m+1)I_{m+1}(q_3) + A_3(m-1)I_{m-1}(q_3)}{Re_0} \end{pmatrix} \\
 M_{4j} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2A_1(m-1)I_{m-1}(q_1) + q_1(A_1 + B_1)I_m(q_1) - 2B_1(m+1)I_{m+1}(q_1) \\ 2A_2(m-1)I_{m-1}(q_2) + q_2(A_2 + B_2)I_m(q_2) - 2B_2(m+1)I_{m+1}(q_2) \\ 2A_3(m-1)I_{m-1}(q_3) + q_3(A_3 + B_3)I_m(q_3) - 2B_3(m+1)I_{m+1}(q_3) \end{pmatrix} \\
 M_{5j} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_1 k I_{m-1}(q_1) + C_1 m I_m(q_1) + (2C_1 q_1 - B_1 k) I_{m+1}(q_1) \\ A_2 k I_{m-1}(q_2) + C_2 m I_m(q_2) + (2C_2 q_2 - B_2 k) I_{m+1}(q_2) \\ A_3 k I_{m-1}(q_3) + C_3 m I_m(q_3) + (2C_3 q_3 - B_3 k) I_{m+1}(q_3) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La condition nécessaire, d'une solution non triviale à (79), c'est à dire  $\vec{A} \neq \vec{0}$ , est la nullité du déterminant de  $M$ . Cette relation est strictement équivalente à l'écriture d'une relation de dispersion. Ce qui revient à poser :

$$(80) \quad D(\omega, k, m, S, \Gamma, We, Re_0, \rho) = \det(M) = 0$$

## 2. Influence de la viscosité du jet sur la stabilité

### 2.1 Stabilité temporelle

L'introduction de la viscosité du jet n'ayant qu'un aspect stabilisateur, nous ne présenterons que quelques courbes caractéristiques de stabilisation, à commencer par le mode axisymétrique. Ainsi que le montre la figure 37.a, en l'absence de rotation, pour un fluide ambiant de même densité que le jet, la viscosité du jet diminue les taux de croissance de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. En configuration de Rankine, la diminution du nombre de Reynolds s'accompagne aussi d'une diminution des taux de croissance (cf. fig. 37.b).

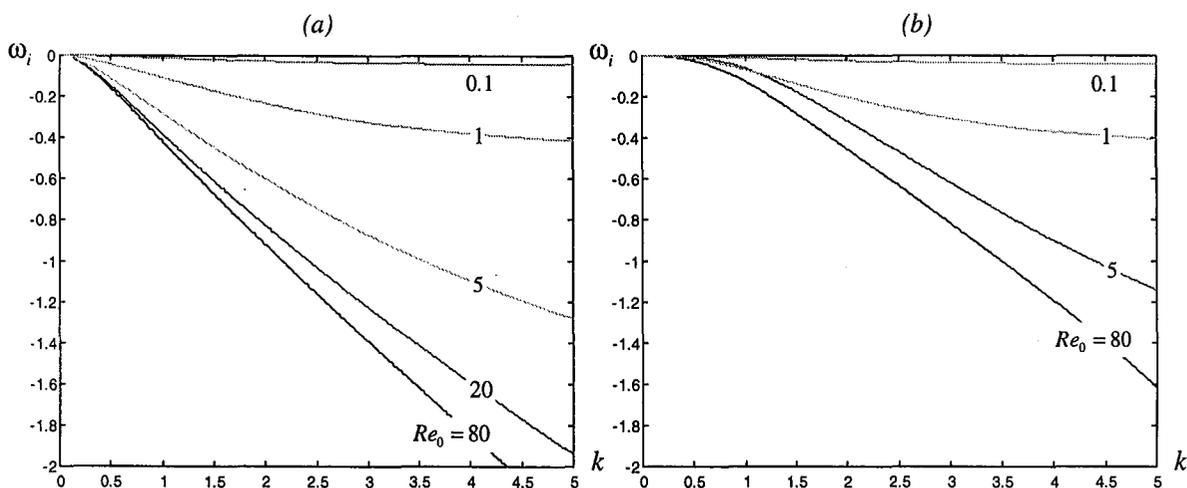


Fig. 37 : Influence de la viscosité sur le jet submergé – Mode axisymétrique

(a) Jet non tournant  $\rho = 1, S = 0, \Delta = -1$

(b) Jet en configuration de Rankine  $\rho = 1, S = 2, \Delta = -1, \Gamma = S$

Nous avons représenté sur les figures 39.a et 39.b les taux de croissance pour le mode  $m = 2$ , en contra-rotation et en co-rotation par rapport au tourbillon de Rankine.

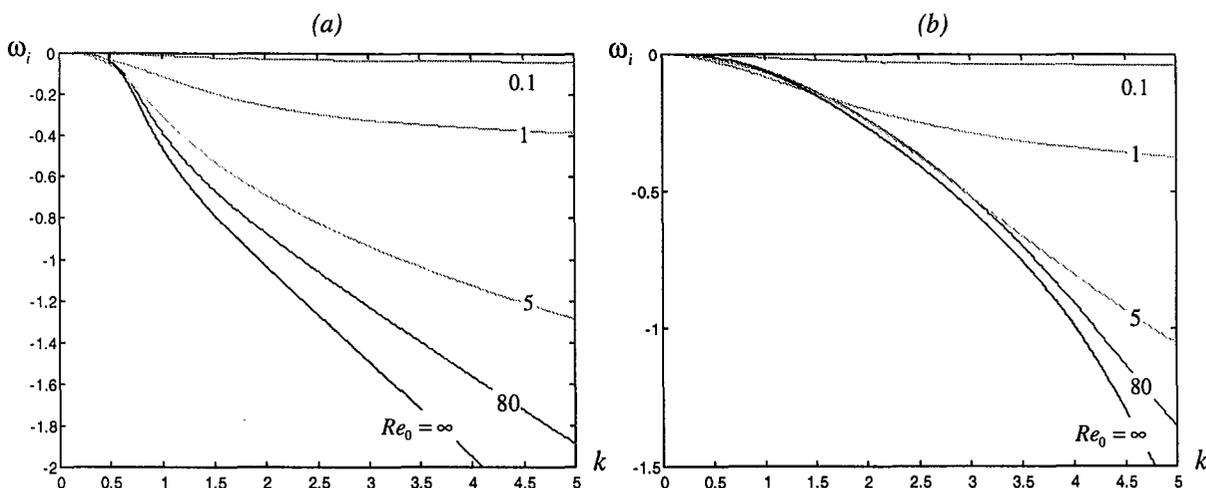


Fig. 39 : Influence de la viscosité sur le tourbillon de Rankine  $\rho = 1, \Delta = -1, We = 0$  – Mode asymétrique  $m=2$

(a) Contra-rotation,  $\Gamma = S = -1.5$

(b) Co-rotation,  $\Gamma = S = 1.5$

Les courbes ont qualitativement la même allure que dans le cas du jet non visqueux et lorsque le nombre de Reynolds est élevé, les taux de croissance tendent vers ceux du fluide parfait, ceci constituant un point de validation de notre relation de dispersion (80).

De façon similaire au mode  $m = 2$ , tous les modes non axisymétriques sont, eux aussi, stabilisés par l'introduction de la viscosité du jet.

Pour tous les modes azimutaux, il existe une infinité de solutions à valeurs  $\omega_i$  positives, soit des branches temporellement atténuées induites par la viscosité du jet (fig. 40.a).

La figure 40.b illustre la stabilisation par la viscosité sur le jet tournant capillaire. La diminution du nombre de Reynolds, à swirl et nombre de Weber constants, entraîne une croissance moindre des perturbations et une migration du nombre d'onde axial le plus amplifié vers 0.7, correspondant au mode préférentiel de la tension de surface.

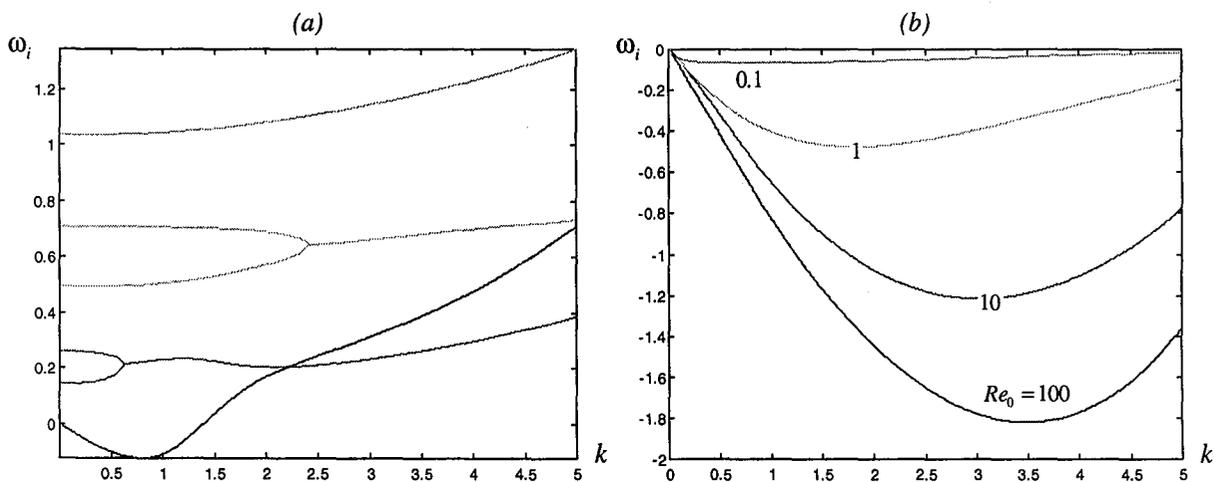


Fig. 40 : Influence de la viscosité sur le jet tournant avec tension de surface – Mode axisymétrique  
 $\rho = 1.10^{-3}, \Delta = -1, \Gamma = 0$

(a) Branches stables et instables pour  $S=0.3$  et  $We=0.1$   
 (b) Evolution de la branche instable en fonction du Reynolds pour  $S=2$

En conclusion, on peut affirmer que la viscosité du jet est un facteur de stabilisation temporelle pour l'ensemble des mécanismes d'instabilité du jet capillaire tournant.

## 2.2 Transitions IA/IC

Dans le cadre des transitions entre instabilités convectives et absolues, quelques auteurs tels que Leib & Goldstein<sup>13</sup>, Lin & Reitz<sup>26</sup>, Lin & Lian<sup>27</sup> et Le Dizès<sup>28</sup> ont effectué des travaux qui tiennent en compte la viscosité du jet.

Ainsi, Leib & Goldstein ont été les premiers à montrer que la viscosité amplifiait la zone convective permettant donc un accroissement de la tension de surface sans pour autant amener de transition vers l'état absolu. Ce résultat a été étendu à des rapports de densité non nuls par Lin &

Lian, l'augmentation de la masse volumique externe favorisant la zone absolument instable. Cependant, ces derniers travaux ont pour cadre un jet capillaire non tournant et seule la transition liée à la tension de surface est analysée, pour une plage de Reynolds plus petite que la nôtre. Nous avons donc étendu les résultats au jet tournant, pour la transition capillaire mais aussi pour les transitions de cisaillement et de jet chaud.

⇨ Transition due à la tension de surface

Nous présentons ici différentes courbes de transition lorsque le nombre de Reynolds n'est pas nul. En premier lieu, nous avons calculé l'évolution du nombre de Weber critique en fonction du nombre de Reynolds (fig. 41). Les courbes ont été volontairement tracées dans le plan  $(1/We, Re_0)$  afin de pouvoir les comparer avec les résultats déjà existants.

On constate que pour le jet dense,  $\rho = 0$ , l'augmentation de la viscosité amène à une augmentation du nombre de Weber où s'effectue la transition. La zone convective est élargie lorsque le nombre de Reynolds décroît. Lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment important, de l'ordre du millier, le nombre de Weber critique peut être assimilé à la valeur asymptotique  $We = 0.32$  correspondant à la transition du jet non visqueux. Ce résultat est en accord avec les travaux de Leib & Goldstein et de Lin & Lian qui ont dérivé les courbes de transition pour des Reynolds inférieurs à 250.

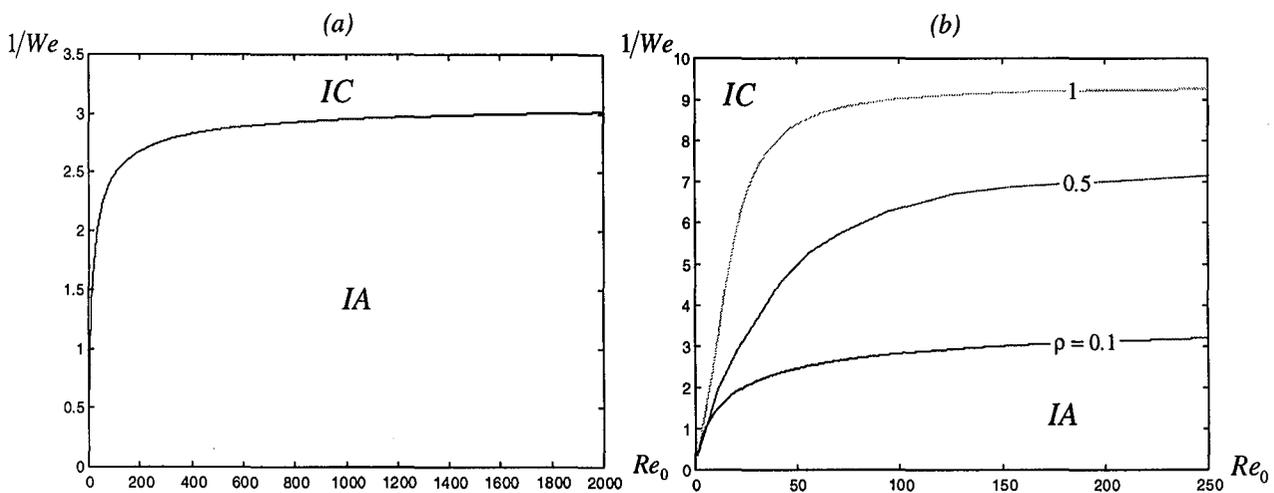


Fig. 41 : Influence de la viscosité sur la transition de tension superficielle - Mode axisymétrique

(a) Evolution du Weber critique en fonction du Reynolds - Jet dense  
 (b) Evolution du Weber critique en fonction du Reynolds -  $\rho = 0.1, 0.5, 1$

La figure 41.b représente les variations des courbes marginales  $We(Re_0)$  pour différents rapports de densité. Comme on le constate, si la masse volumique du fluide extérieur n'est pas nulle, la

zone absolue est augmentée, la masse volumique externe assure donc une promotion de l'instabilité absolue de façon analogue au cas non visqueux.

Qualitativement, nous retrouvons des courbes marginales de même allure que celles trouvées par Lin & Lian pour un jet visqueux avec effets du fluide extérieur ; cependant, il existe une différence quantitative dans le cas d'un rapport de densité  $\rho = 0.0013$ . Ce cas correspond à un jet d'eau débouchant dans de l'air et les auteurs trouvent une courbe marginale relativement éloignée du cas où  $\rho = 0$ , or pour notre part les deux courbes peuvent être confondues.

Une autre divergence que nous devons de citer, mais celle-ci basée sur une confrontation théorie-expérience, est constituée par la courbe de transition  $We(Re_0)$  pour de très faibles Reynolds. En effet, une expérience sur l'instabilité de goutte à goutte d'un jet de glycérine ou d'huile de silicone, a été effectuée dans une tour à goutte de la NASA. Vihinen, Honohan & Lin<sup>20</sup> ont ainsi pu montrer qu'en l'absence de gravité et à faibles nombres de Reynolds le mécanisme d'instabilité absolue reste la tension de surface (fig. 42.a et 42.b).

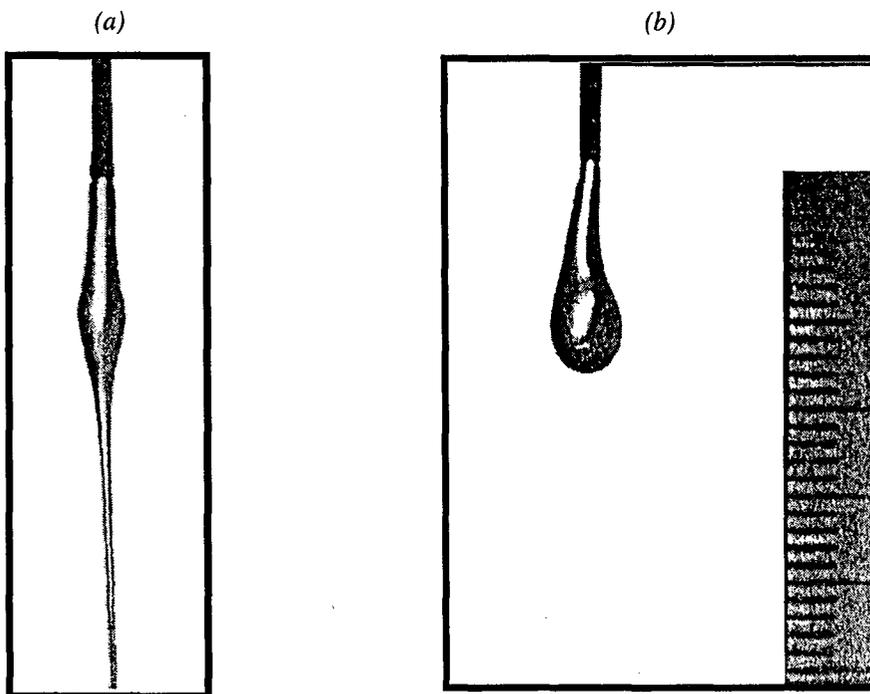


Fig. 42 : Expérience de jet en microgravité d'après Vihinen & al.,  $Re_0 = 0.082, We = 2.86$

(a) 0.2 s après lâché d'une goutte

(b) 0.4 s après lâché d'une goutte

A partir de différents essais, les auteurs ont pu reconstitué la courbe séparant l'état convectif de celui absolue (fig. 43), et les résultats sont qualitativement en bon accord avec les différents théories existantes, la viscosité agit comme un facteur d'instabilité convective. Mais comme le

note les auteurs, aucune étude n'a été capable d'étendre les résultats aux faibles nombres de Reynolds par manque de précision numérique.

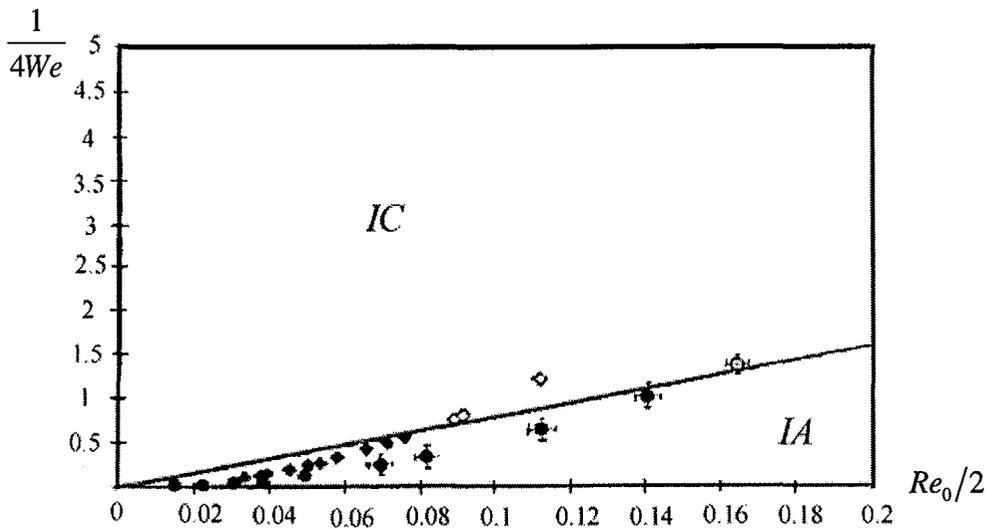


Fig. 43 : Expérience de jet en microgravité  
 Courbe de transition d'après Vihinen & al.

La figure 44 expose notre courbe de transition théorique à faibles nombres de Reynolds. La linéarité entre le nombre de Weber critique et le nombre de Reynolds est identique à celle issue de l'expérience mais les ordres de grandeurs sont différents. En fait, la relation entre le nombre de Weber théorique et expérimental est exactement  $We_{th} = 40.We_{exp}$ . En utilisant cette relation, les droites théorique et expérimentale se superposent parfaitement.

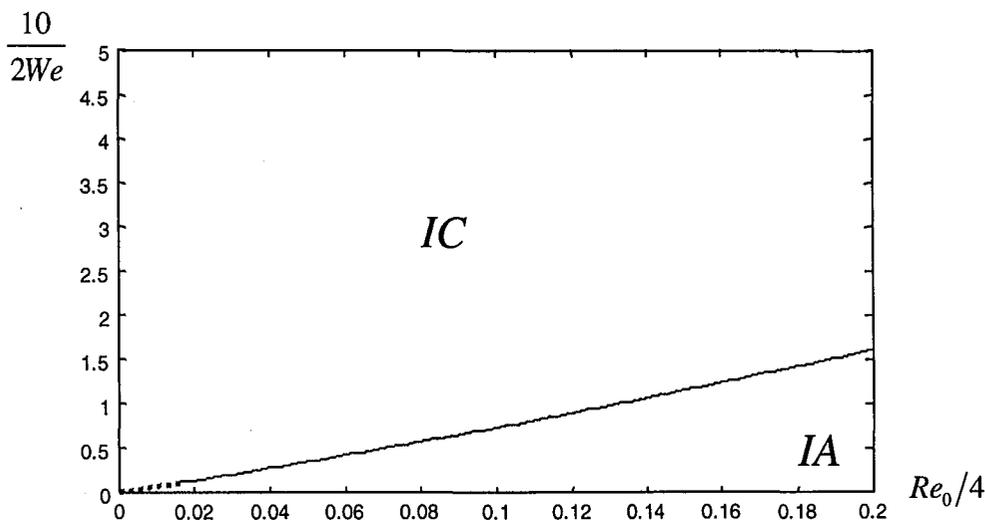


Fig. 44 : Transition du jet capillaire à faibles Reynolds – Mode axisymétrique  
 Les pointillés prolongent la courbe théorique après divergence de la résolution

S.P. Lin nous ayant confirmé que les unités de la figure 43 étaient valides, nous n'expliquons guère la différence d'ordre observée. Des discussions avec les auteurs sont en cours.

Nous avons évoqué dans la première partie de ce chapitre, la modification, par la rotation du jet, de la transition IA/IC due à la tension de surface. En diminuant le nombre de Reynolds, la courbe de transition se déplace vers la zone absolue (fig. 45). Il est ainsi possible d'atteindre des nombres de Weber bien plus élevés que pour un fluide parfait. De plus, on peut noter que le nombre de swirl, pour lequel le nombre de Weber est maximum, devient de plus en plus grand lorsque les effets de viscosité augmentent.

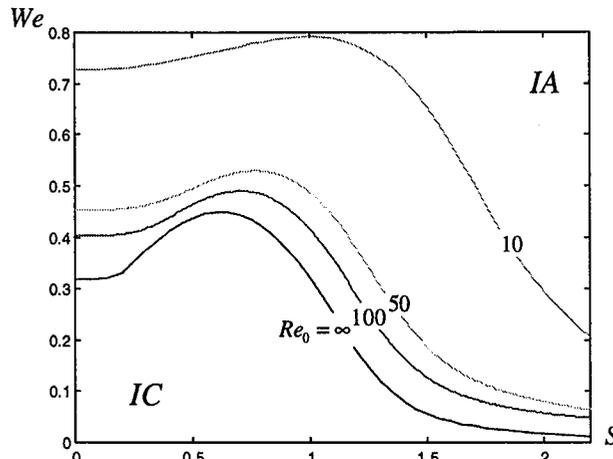


Fig. 45 : Transition du jet tournant capillaire – Mode axisymétrique

⇒ Transition du jet chaud et de cisaillement

Nous présentons ci-dessous l'influence de la viscosité sur la transition du jet chaud pour différents nombres azimutaux et plusieurs nombres de Reynolds (fig. 46.a). Plus le nombre de Reynolds est faible, plus le rapport de densité où la transition s'effectue est important. La viscosité constitue encore un facteur d'instabilité convective. Et, les modes les plus sensibles à l'influence stabilisatrice de la viscosité sont les modes asymétriques élevés.

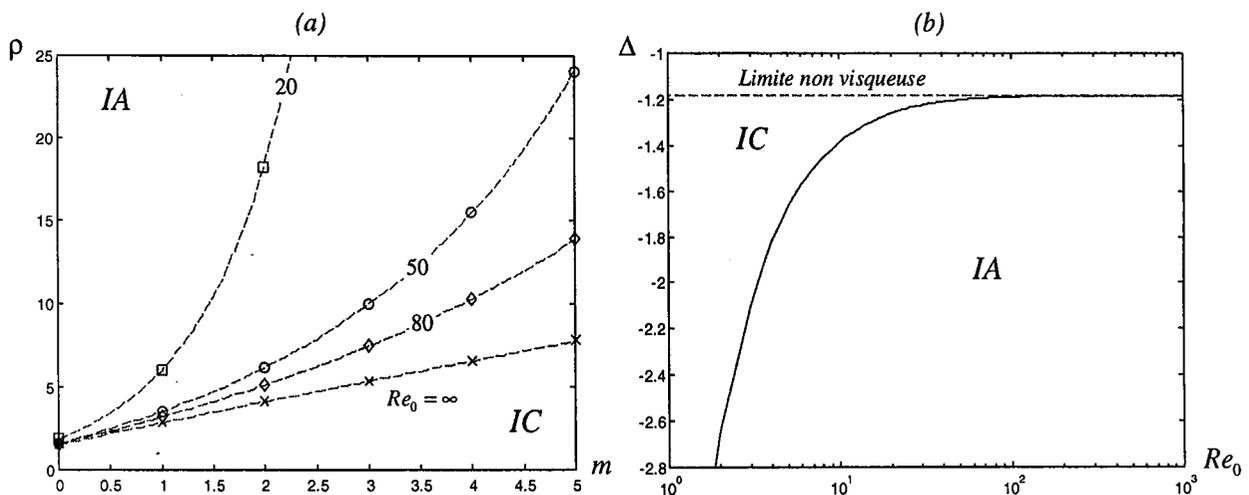


Fig. 46 : Influence de la viscosité sur les transitions du jet non tournant  
 (a) Rapport de densité critique en fonction de  $m$  et  $Re_0$   
 (b) Evolution du paramètre  $\Delta$  en fonction du Reynolds,  $\rho = 1, We = 0, S = 0$

Sur la figure 46.b, dans le cas d'un jet submergé, l'évolution du facteur marginal de cisaillement a été représenté en fonction du nombre de Reynolds, pour le mode axisymétrique. En augmentant progressivement les effets de viscosité, la transition vers l'instabilité absolue se décale vers les forts contre-courants. D'autre part, dans la limite des grands Reynolds, le paramètre de contre-courant tend vers la valeur du modèle non-visqueux.

Les mêmes remarques peuvent être faites pour la transition du jet chaud en rotation (fig. 47). Une forte viscosité du jet permettrait d'utiliser des jets de masse volumique plus faibles, a fortiori en présence de rotation.

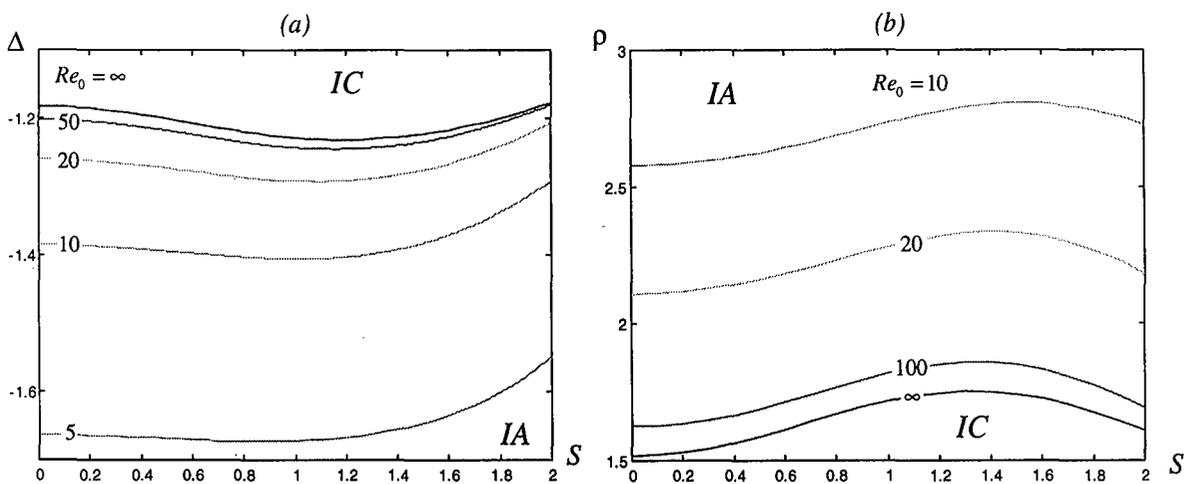


Fig. 47 : Influence de la viscosité sur les transitions du jet tournant - Mode axisymétrique  
 (a) Facteur de contre-courant pour  $\Delta = -1, We = 0, \Gamma = 0$  (b) Rapport de densité pour  $\rho = 1, We = 0, \Gamma = 0$

### III. INFLUENCE DE LA VISCOSITE EXTERNE

Nous venons de l'évoquer, la viscosité du jet tournant opère comme un facteur d'atténuation des perturbations instables mais qu'en est il de la viscosité du fluide ambiant ? L'influence de la viscosité du fluide entourant un jet a été prise en compte et analysée par Lin & Ibrahim<sup>29</sup>. Ces derniers ont effectué une étude de stabilité temporelle pour un jet de liquide visqueux avec un fluide externe lui aussi visqueux mais les auteurs se sont surtout attaché à mettre en évidence la compétition entre le mode de Taylor et celui de Rayleigh. Dans le cadre des jets tournants, les travaux qui existent sur le tourbillon de Batchelor visqueux ne peuvent distinguer les effets de viscosité «externe» et de ceux «interne». Nous avons donc repris le tourbillon de Rankine mais en tenant en compte la viscosité du fluide environnant le jet.

#### 1. Fonctions propres et problème aux valeurs propres

L'écoulement de base est légèrement différent de celui étudié jusqu'à présent : nous ne tiendrons plus en compte la rotation potentielle à l'extérieur du jet. En effet, la composante tangentielle de la contrainte à l'interface, issue du fluide visqueux ambiant, ne peut être contrebalancée que si la circulation externe est nulle. Dans le cas contraire, l'écoulement de base n'est plus solution des relations de saut à l'interface. Les grandeurs constantes, associées à chaque zone, sont  $\rho_0$  et  $\rho_1$  pour la masse volumique,  $U_0$  et  $U_1$  pour la vitesse axiale et enfin  $\nu_1$  pour la viscosité cinématique de la zone externe (cf. fig. 48).

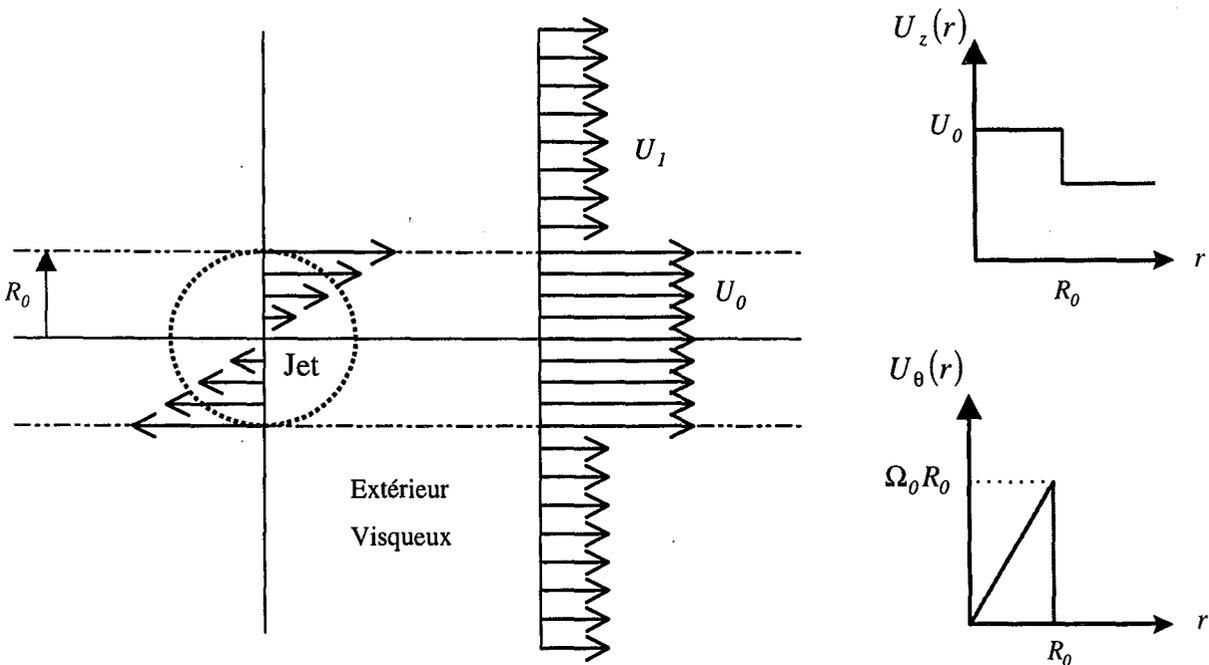


Fig. 48 : Profils de vitesse de l'écoulement de base

En notant toujours les grandeurs rattachées au jet avec l'indice 0 et celles de l'extérieur avec l'indice 1, les champs réduits de vitesse de base sont :

$$(81) \quad \vec{U}_0(r, \theta, z) = (0, S, 1) \quad \text{pour } r < 1$$

$$(82) \quad \vec{U}_1(r, \theta, z) = (0, 0, 1 + \Delta) \quad \text{pour } r > 1$$

Les champs de pression réduits pour l'écoulement de base sont les suivants :

$$(83) \quad P_0(r) = \frac{r^2 - 1}{2} S^2 + P_\infty + We \quad \text{pour } r < 1$$

$$(84) \quad P_1(r) = P_\infty \quad \text{pour } r > 1$$

où  $P_\infty$  représente la pression adimensionnelle à l'infini.

L'ensemble des champs cinématiques et dynamiques vérifient : les équations d'Euler pour le jet, les équations de Navier-Stokes pour l'écoulement extérieur ainsi que les conditions de raccordement (49) et (50). L'équation réduite du mouvement, pour le fluide visqueux, est la suivante :

$$(85) \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overline{\text{Grad} \vec{U}} \cdot \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{Grad} P} + \frac{1 + \Delta/2}{Re_1} \Delta \vec{U}$$

où  $Re_1 = R_0 (U_0 + U_1) / (2\nu_1)$  est le nombre de Reynolds dit «extérieur». Le choix des vitesses axiales intérieure et extérieure pour la construction de ce nombre adimensionnel a été fait afin de faire apparaître la vitesse moyenne à l'interface. Notre modèle possédant une couche de mélange infiniment mince et le fluide extérieur n'étant pas spatialement borné, la longueur caractéristique de l'écoulement dans sa globalité est toujours le rayon  $R_0$  du jet.

L'écoulement intérieur est identique à celui du jet tournant non visqueux, les fonctions propres solutions sont donc les mêmes que celles du paragraphe I.2.1. A l'extérieur du jet, en l'absence de vorticité et de viscosité, nous avons vu que la potentialité de l'écoulement de base est conservée après perturbation. Pour le modèle présent, du fait de la présence de la viscosité, il n'existe plus de fonction potentielle dont dérive le champ de vitesse. Il est indispensable de résoudre les équations de Navier-Stokes (85) et de continuité (15).

## 2.1 Détermination des fonctions propres de l'écoulement externe

En utilisant le changement de variable (51) à (53), les équations du mouvement et de conservation de la masse linéarisées s'écrivent :

$$(86) \quad \frac{d^2U(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr} - \left( k^2 + i \frac{\alpha_1 Re_1}{1 + \Delta/2} + \frac{(m-1)^2}{r^2} \right) U(r) + \frac{Re_1}{\rho(1 + \Delta/2)} \left( \frac{m}{r} \tilde{p}(r) + \frac{d\tilde{p}(r)}{dr} \right) = 0,$$

$$(87) \quad \frac{d^2V(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} - \left( k^2 + i \frac{\alpha_1 Re_1}{1 + \Delta/2} + \frac{(m+1)^2}{r^2} \right) V(r) + \frac{Re_1}{\rho(1 + \Delta/2)} \left( \frac{m}{r} \tilde{p}(r) - \frac{d\tilde{p}(r)}{dr} \right) = 0,$$

$$(88) \quad \frac{d^2W(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW(r)}{dr} - \left( k^2 + i \frac{\alpha_1 Re_1}{1 + \Delta/2} + \frac{m^2}{r^2} \right) W(r) + \frac{k Re_1}{\rho(1 + \Delta/2)} \tilde{p}(r) = 0,$$

$$(89) \quad \frac{(m-1)U(r)}{r} + \frac{(m+1)V(r)}{r} + 2k W(r) - \frac{dU(r)}{dr} + \frac{dV(r)}{dr} = 0.$$

où  $\alpha_1 = \omega + (1 + \Delta)k$  est la fréquence Doppler extérieure. Afin de résoudre le système d'équations (86) à (89), nous utilisons la même démarche que pour les fonctions propres du jet visqueux : la solution générale est constituée d'une solution aux équations homogènes et d'une solution particulière.

### ⇔ Solutions Homogènes

Sans tenir compte de l'équation de continuité, la solution générale du système homogène est :

$$(90) \quad \begin{cases} U_h(r) = D_1 K_{m-1}(s_1 q_1 r) + d_1 I_{m-1}(q_1 r) \\ V_h(r) = E_1 K_{m+1}(s_1 q_1 r) + e_1 I_{m+1}(q_1 r) \\ W_h(r) = F_1 K_m(s_1 q_1 r) + f_1 I_m(q_1 r) \end{cases},$$

où  $q_1 = \sqrt{k^2 + i\alpha_1 Re_1 / (1 + \Delta/2)}$ . Etant donnée que la fonction  $I_m$  diverge lorsque  $r \rightarrow \infty$ , nous sommes dans l'obligation d'annuler les coefficients  $d_1$ ,  $e_1$  et  $f_1$ , sous peine de ne plus avoir une perturbation d'amplitude finie et faible. Le terme  $s_1$  représente le signe de la partie réelle de  $q_1$ . En effet, à l'infini la fonction  $K_m(s_1 q_1 r)$  se comporte suivant un développement en  $\sqrt{\pi / (2s_1 q_1)} e^{-s_1 q_1 r}$ , l'introduction de  $s_1$  permet que la perturbation soit nulle à l'infini.

L'équation de continuité nous donne une relation entre les 3 coefficients  $D_1$ ,  $E_1$  et  $F_1$  :

$$(91) \quad F_1 = \frac{s_1 q_1}{2k} (E_1 - D_1).$$

### ⇨ Solutions Particulières

La seconde partie de la résolution repose sur l'introduction de solutions particulières dans le système (86) à (89), sous la forme :

$$(92) \quad \begin{cases} U_p(r) = D_2 K_{m-1}(qr) \\ V_p(r) = E_2 K_{m+1}(qr) \\ W_p(r) = F_2 K_m(qr) \\ \tilde{p}(r) = \pi_2 K_m(qr) \end{cases}$$

La base des fonctions  $I_m$  est volontairement exclue, pour la raison précédemment citée. Une fois résolu, le système nous amène aux expressions de  $q$  et des coefficients  $D_2$ ,  $E_2$  et  $\pi_2$  suivantes :

$$(93) \quad q = sk, \quad D_2 = -sZ, \quad E_2 = sZ \quad \text{et} \quad \pi_2 = \frac{i\rho\alpha_1}{k} Z \quad \text{où} \quad s = \text{sgn}(k_r).$$

La solution complète de (86-89), se compose de la somme des solutions homogènes et particulières :

$$(94) \quad \begin{cases} U(r) = D_1 K_{m-1}(s_1 q_1 r) - sZ K_{m-1}(skr) \\ V(r) = E_1 K_{m+1}(s_1 q_1 r) + sZ K_{m+1}(skr) \\ W(r) = \frac{s_1 q_1}{2k} (E_1 - D_1) K_m(s_1 q_1 r) + Z K_m(skr), \\ \tilde{p}(r) = \frac{i\rho\alpha_1}{k} Z K_m(skr) \end{cases}$$

Nous avons donc déterminé les fonctions propres du fluide visqueux externe et le raccordement, avec le jet de fluide parfait, s'effectue à l'interface perturbée.

## 2.2 Conditions de raccordement

Les conditions aux limites sont les suivantes :

⇒ Condition d'interface matérielle (respectivement en  $r^-$  et  $r^+$ ) :

$$(95) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\eta e^{i(\omega t + m\theta + kz)}) + \vec{\nabla}(\eta e^{i(\omega t + m\theta + kz)}).(S \vec{e}_\theta + \vec{e}_z) = \tilde{u}_{0r}(r, \theta, z, t)$$

$$(96) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\eta e^{i(\omega t + m\theta + kz)}) + \vec{\nabla}(\eta e^{i(\omega t + m\theta + kz)}).(1 + \Delta)\vec{e}_z = \tilde{u}_{1r}(r, \theta, z, t).$$

⇒ Condition d'égalité de la contrainte :

$$(97) \quad (\bar{\bar{\Sigma}}_1 - \bar{\bar{\Sigma}}_0) \cdot \vec{n} = We(\text{div} \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

Les tenseurs des contraintes sont données par :

$$(98) \quad \begin{cases} (\Sigma_0)_{ij} = -(P_0 + \tilde{p}_0)\delta_{ij} \\ (\Sigma_1)_{ij} = -(P_1 + \tilde{p}_1)\delta_{ij} + \frac{2\rho(1 + \Delta/2)}{Re_1}(D_1)_{ij} \end{cases}$$

Les équations de raccordement (95) à (98) se développent ainsi :

$$(99) \quad \alpha_0 \eta - u_{0r}(1) = 0$$

$$(100) \quad \alpha_1 \eta - u_{1r}(1) = 0$$

$$(101) \quad \left( (1 - k^2 - m^2)We + \frac{\partial P_0}{\partial r}(1) \right) \eta + \tilde{p}_0(1) - \tilde{p}_1(1) + 2 \frac{\rho}{Re_1} (1 + \Delta/2) \frac{\partial u_{1r}}{\partial r}(1) = 0$$

$$(102) \quad \frac{\partial u_{1\theta}}{\partial r}(1) - u_{1\theta}(1) + i m u_{1r}(1) = 0$$

$$(103) \quad \frac{\partial u_{1z}}{\partial r}(1) + i k u_{1r}(1) = 0$$

De la même manière que pour le jet visqueux, le système d'équations (99) à (103) peut se mettre sous la forme  $M_{ij} \cdot A_j = 0$  avec  $\vec{A} = (A, Z, \eta, D_r, E_r)$ .

La matrice  $M$  carré d'ordre 5 se formule ainsi :

$$M_{1j} = \begin{pmatrix} J_m(\beta) \\ \frac{\rho s}{Re_1} ((m-1)K_{m-1}(sk) - (m+1)K_{m+1}(sk)) - \frac{\rho}{k} \left( i\alpha_1 + 2\frac{k^2}{Re_1} \right) K_m(sk) \\ (1-k^2-m^2)We + S^2 \\ -\frac{\rho}{Re_1} ((m-1)K_{m-1}(s_1q_1) - s_1q_1K_m(s_1q_1)) \\ -\frac{\rho}{Re_1} ((m+1)K_{m+1}(s_1q_1) + s_1q_1K_m(s_1q_1)) \end{pmatrix}$$

$$M_{2j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{m(m-1)}{k} K_m(sk) - 2msK_{m+1}(sk) \\ 0 \\ (m-1)K_{m+1}(s_1q_1) - \frac{s_1}{q_1} \left( 2m(m-1) + \frac{1}{2}q_1^2 \right) K_m(s_1q_1) \\ -(m+1)K_{m+1}(s_1q_1) - s_1q_1K_m(s_1q_1) \end{pmatrix}$$

$$M_{3j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4k(mK_m(sk) - skK_{m+1}(sk)) \\ 0 \\ (q_1^2 + k^2)K_{m+1}(s_1q_1) - \frac{ms_1}{q_1} (q_1^2 + 2k^2)K_m(s_1q_1) \\ s_1q_1mK_m(s_1q_1) - (q_1^2 + k^2)K_{m+1}(s_1q_1) \end{pmatrix}$$

$$M_{4j} = \begin{pmatrix} \left( \frac{\alpha_0\beta}{\alpha_0 + 2S} J_{m+1}(\beta) - mJ_m(\beta) \right) \\ \alpha_0 - 2S \\ 0 \\ \alpha_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{5j} = \begin{pmatrix} 0 \\ s(K_{m+1}(sk) - K_{m-1}(sk)) \\ 2i\alpha_1 \\ K_{m+1}(s_1q_1) \\ -K_{m-1}(s_1q_1) \end{pmatrix}$$

La suite de l'analyse réside dans la résolution de  $Det(M) = 0$  et tout d'abord nous allons caractériser l'influence de la viscosité externe sur la stabilité temporelle du jet.

## 2. Influence de la viscosité externe

### 2.1 Stabilité temporelle

Comme il est possible de le constater dans les conditions de raccordement, l'influence de la viscosité du fluide ambiant est directement proportionnelle au rapport de densité  $\rho$ , autrement dit plus  $\rho$  est important, plus les effets de viscosité sont amplifiés. Dans ce qui suit, nous ne considérerons qu'un jet submergé pour lequel  $\rho = 1$ . Ainsi, sur la figure 49, l'influence de la viscosité extérieure sur l'instabilité capillaire du mode axisymétrique est clairement établie : *plus la viscosité est prépondérante, plus l'instabilité de tension superficielle est atténuée*. Le nombre d'onde le plus amplifié diminue avec le nombre de Reynolds extérieur, mais en même temps les structures de petites tailles ( $k \gg 1$ ) ne sont plus marginalement stables. La viscosité externe joue donc un rôle dans la génération d'ondes de courtes longueurs, là où se développent les instabilités de Taylor, tout comme les fluctuations de pression lorsque le jet est non visqueux.

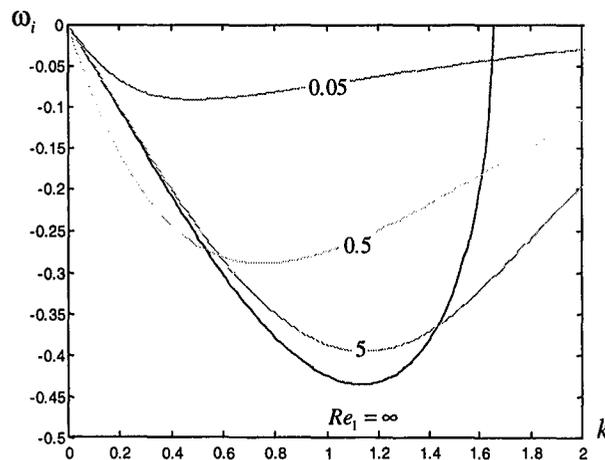


Fig. 49 : Influence de la viscosité sur l'instabilité du jet capillaire  
Mode axisymétrique –  $\rho = 1, We = 0,5, S = 0, \Delta = -1$

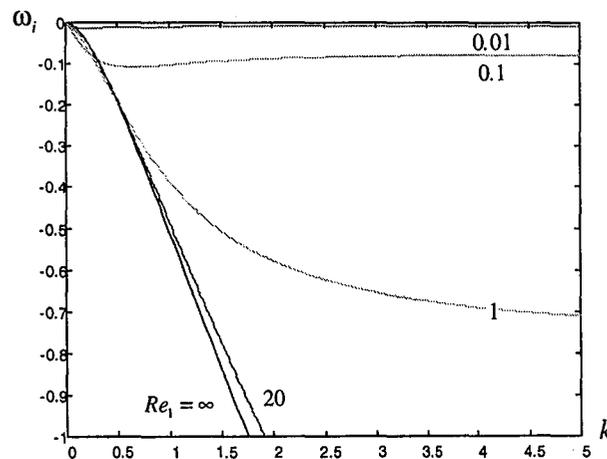


Fig. 50: Influence de la viscosité sur le jet cisailé  $\rho = 1, We = 0, S = 0, \Delta = -1,2$  – Mode axisymétrique

Ainsi que l'établit la figure 50, les instabilités de Kelvin-Helmholtz sont atténuées lorsque le nombre de Reynolds diminue. Ce résultat est valable pour l'ensemble des modes azimutaux. En utilisant la relation de dispersion (29) pour laquelle les deux fluides sont parfaits, il est possible de constater que la branche non visqueuse est proche de celle à  $Re_1 = 20$ . Mais contrairement au cas du fluide parfait, ce modèle visqueux sélectionne un nombre d'onde d'amplification maximale et le nombre d'onde le plus amplifié tend vers de faibles valeurs lorsque les effets de viscosité augmente. Ainsi, pour un nombre de Reynolds extérieur de 0.01, les structures les plus instables ont une taille de plus de 10 fois celle du jet.

*En l'absence de rotation du jet, la viscosité externe est un mécanisme de stabilisation des instabilités de cisaillement et de tension de surface.* Intéressons nous maintenant à son influence sur les instabilités centrifuges.

#### ⇒ Rotation du jet et viscosité externe

Nous avons vu dans la première section de ce chapitre que lorsque l'on considère un jet submergé tournant, en l'absence de toute viscosité, la seule branche temporellement amplifiée est caractéristique d'une compétition entre les instabilités d'origine centrifuge et celles de cisaillement. Nous avons représenté sur la figure l'évolution de la branche amplifiée du mode axisymétrique, pour différents nombre de Reynolds. La figure ci-dessous dénote de la stabilisation, par la viscosité du fluide environnant le jet, de cette branche amplifiée.

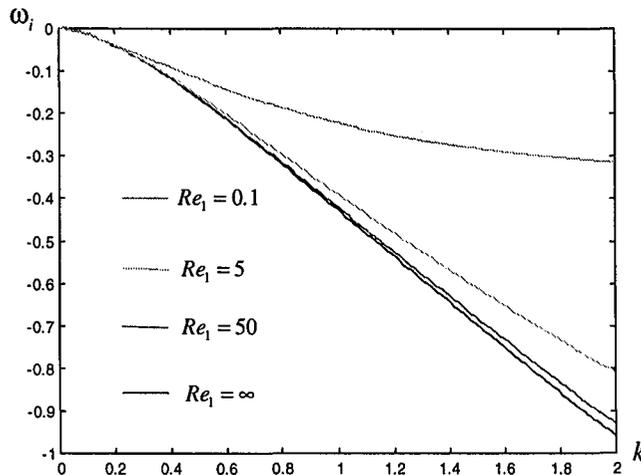


Fig. 51 : Influence de la viscosité sur le jet submergé tournant – Mode axisymétrique  
 $\rho = 1, We = 0, S = 1, \Delta = -1$

Nous l'avons évoqué en début de chapitre, il existe une infinité de branches inertielles neutres. Ces modes de Kelvin possèdent des parties réelles qui évoluent suivant la relation (42), leurs parties imaginaires, et donc leurs amplifications temporelles, étant nulles.

Cette infinité de modes est aussi présente lorsque le fluide ambiant est visqueux. Les figures 52.a et 52.b, représentant la partie réelle de la pulsation, mettent en évidence la conservation de ces modes lorsque le nombre de Reynolds est fini.

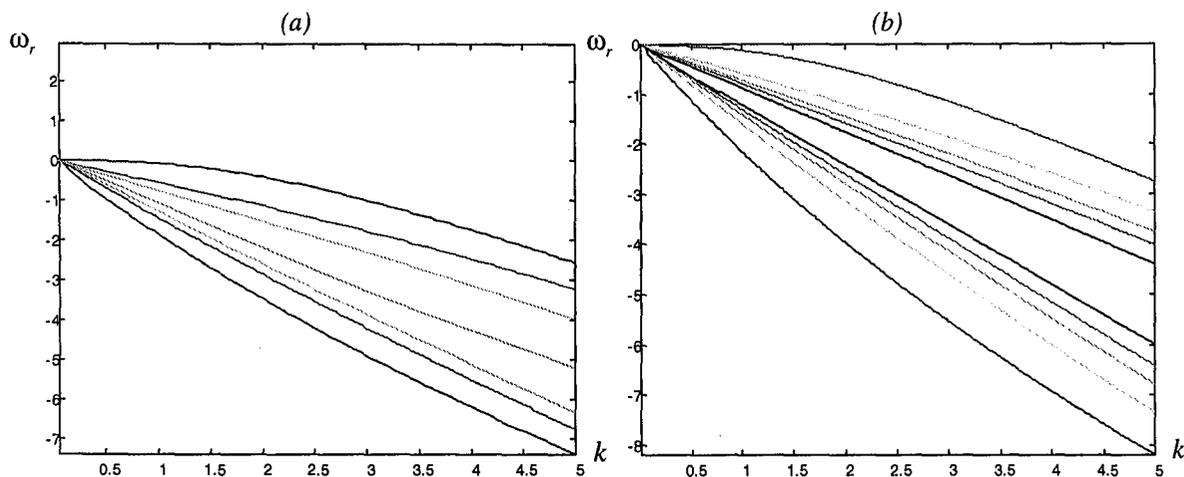


Fig. 52 : Mode de Kelvin –  $m=0, S=1.5, \rho=1, We=0, \Delta=-1$

(a) Fluide extérieur parfait ( $\omega_i = 0$ )

(b) Fluide extérieur visqueux  $Re_1 = 15$  ( $\omega_i \neq 0$ )

Cependant, les modes de Kelvin ne constituent plus des perturbations neutres. La figure 54.a représente les parties imaginaires de la pulsation correspondantes à la figure 53.b. Alors que dans le cas où la viscosité externe est nulle, les perturbations se propagent sans amplification ou atténuation, l'introduction de la viscosité fait apparaître des modes de Kelvin atténués mais aussi amplifiés.

Sur la figure 53.b, on peut constater que, pour les nombres d'onde azimutale non nuls, les modes de Kelvin sont aussi influencés par la viscosité externe.

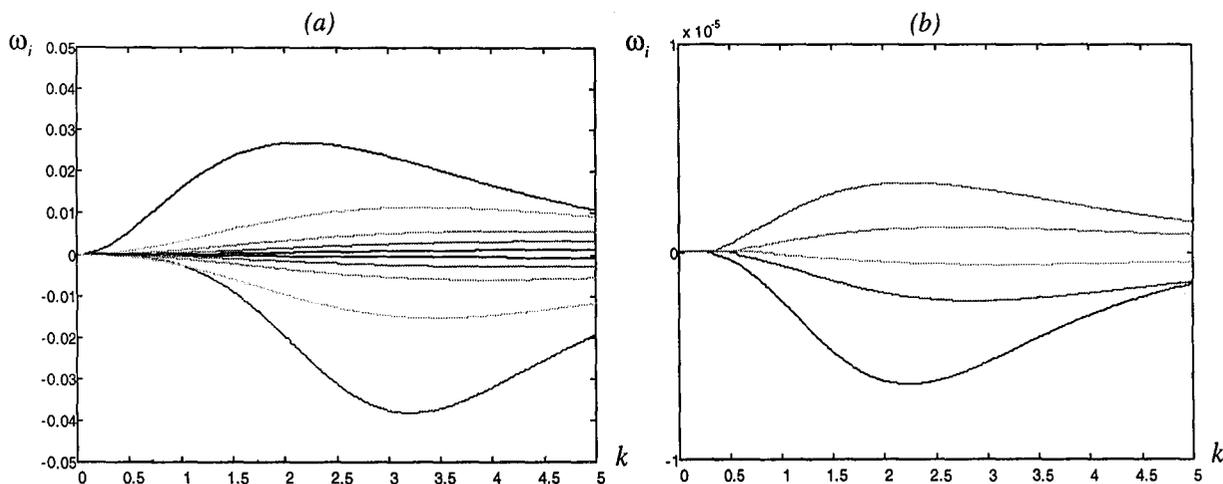


Fig. 53 : Mode de Kelvin en présence de viscosité externe

(a)  $Re_1 = 15, S=1.5, \rho=1, We=0, \Delta=-1$  – Mode axisymétrique

(b)  $Re_1 = 1.10^{-3}, S=1.2, \rho=1, We=0, \Delta=-1$  – Mode  $m=2$

Les figures 54.a et 54.b nous montrent l'évolution en fonction du nombre d'onde axiale, pour des nombres de swirl de 1 et 1.5, de ces modes de Kelvin lorsque le nombre de Reynolds extérieur est faible.

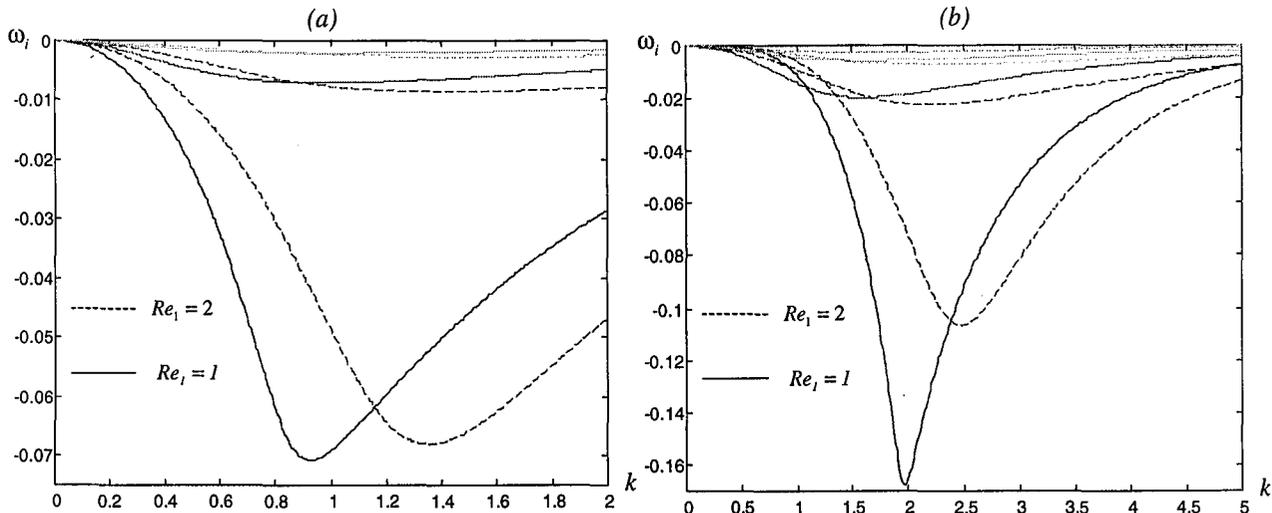


Fig. 54 : Influence de la viscosité sur les modes de Kelvin du jet submergé tournant – Mode axisymétrique  
 $\rho = 1, We = 0, \Delta = -1$

(a) Trois premiers modes instables pour  $S = 1$       (b) Quatre premiers modes instables pour  $S = 1.5$

Comme on peut le noter, il existe des branches de Kelvin qui sont amplifiées et l'amplification s'accroît avec l'augmentation des effets visqueux, à l'inverse des branches amplifiées évoquées jusqu'à présent. En fait, les modes de Kelvin voient leurs taux d'amplification temporelle s'accroître de façon ordonnée. En effet, toutes les branches ne sont pas amplifiées, et celles qui le sont exhibent chacune une amplification différente, ce qui permet de les classer. Ainsi, à un nombre de swirl donné, une diminution ou une augmentation du nombre de Reynolds ne va pas changer la suprématie du mode prédominant et la même constatation peut être faite en modifiant un paramètre de contrôle autre que le nombre de Reynolds.

Quant à l'influence de la rotation du jet, elle est identique à celle de l'étude non visqueuse, les taux de croissance augmente avec le nombre de swirl. Tout comme dans l'étude de Khorrami sur le tourbillon de Batchelor, les perturbations visqueuses les plus amplifiées ont une longueur caractéristique de l'ordre du rayon du jet et leurs taux d'amplification sont plus faibles que ceux des perturbations d'origine non visqueuse.

## 2.2 Transitions IA/IC

La seule étude, à notre connaissance, qui existe sur la nature convective ou absolue d'un jet qui tient en compte la viscosité du fluide externe est celle de Lin & Lian<sup>27</sup>. Reprenant le modèle de fluides visqueux de Lin & Ibrahim<sup>29</sup>, les auteurs caractérisent l'instabilité due à la tension de surface d'un jet de liquide dans un gaz ; les deux fluides étant visqueux et bornées spatialement. La viscosité externe est alors trouvée comme un paramètre d'instabilité absolue.

⇒ Transition due à la tension de surface

A partir de notre modèle, en ne considérant pas la mise en rotation du jet, ce résultat est retrouvé. Ainsi, pour un rapport de densité eau – air, le nombre de Weber critique diminue lorsque le nombre de Reynolds devient faible (fig. 55).

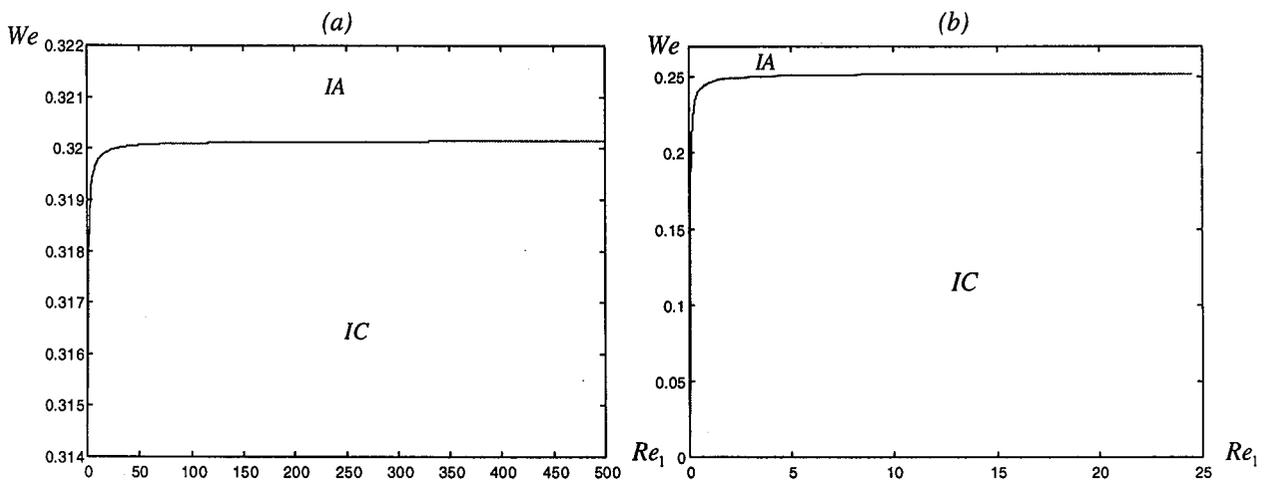


Fig. 55 : Influence de la viscosité sur la transition du jet capillaire – Mode axisymétrique

(a) Jet dense non tournant,  $\rho = 10^{-3}$ ,  $\Delta = -1$

(b) Avec masse volumique externe  $\rho = 0.1$

La première figure (55.a) correspond à l'évolution du nombre de Weber critique en fonction du nombre de Reynolds extérieur, pour le jet dense. Les variations du nombre critique sont négligeables sur presque tout l'intervalle en Reynolds et la valeur  $We = 0.32$  du cas non-visqueux est retrouvée asymptotiquement. Cependant à faibles viscosité la zone absolument instable se déplace légèrement vers des nombres de Weber plus faibles. Cette augmentation de la zone absolue se remarque plus si la densité du fluide externe augmente. De la sorte, la seconde figure correspond au cas où la densité extérieure n'est plus négligeable. Lorsque le nombre de Reynolds tend vers 0, la zone absolue s'étend alors à tous les nombres de Weber.

En accord avec le modèle de Lin & Lian, nous trouvons là, une influence déstabilisatrice de la viscosité externe.

Si le jet est mis en rotation, la zone convective se réduit aussi au fur et à mesure que les effets de viscosité augmentent. Les courbes présentées ci-dessous sont inachevées car des divergences numériques ( $k_r \rightarrow \infty$ ) sont apparues. Malgré le manque d'information, il est clair que la viscosité restreint la zone convective à une «bulle».

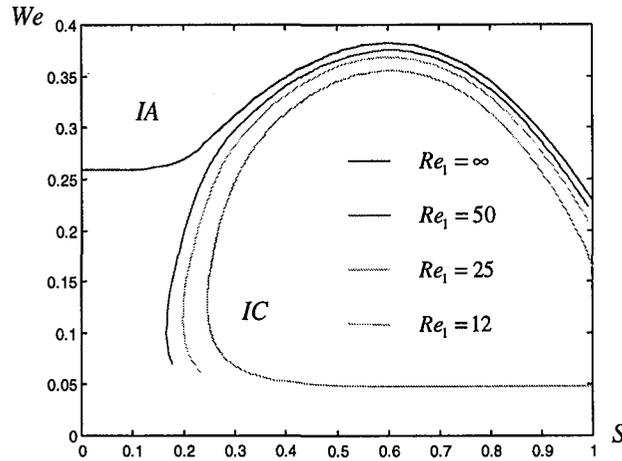


Fig. 56 : Influence de la viscosité sur la transition du jet capillaire tournant – Mode axisymétrique  
 $\rho = 0.1, \Delta = -1$

#### ⇨ Transition du jet chaud et cisaillement

En partant de la transition du jet cisailé non tournant et en diminuant le nombre de Reynolds, le facteur de cisaillement évolue vers des valeurs de plus en plus grandes. Ainsi, la viscosité amène à une transition vers l'instabilité absolue pour des configurations de jets avec faibles contre-courants et même, comme l'indique la figure 57, pour des configurations de jets en co-courants ( $\Delta > -1$ ). Afin de dissocier complètement les effets de viscosité et de ceux de cisaillement, *i.e.* nombre de Reynolds indépendant du facteur  $\Delta$ , les variations de  $\Delta$  ont été tracées en fonction de  $Re_1/(1 + \Delta/2)$ .

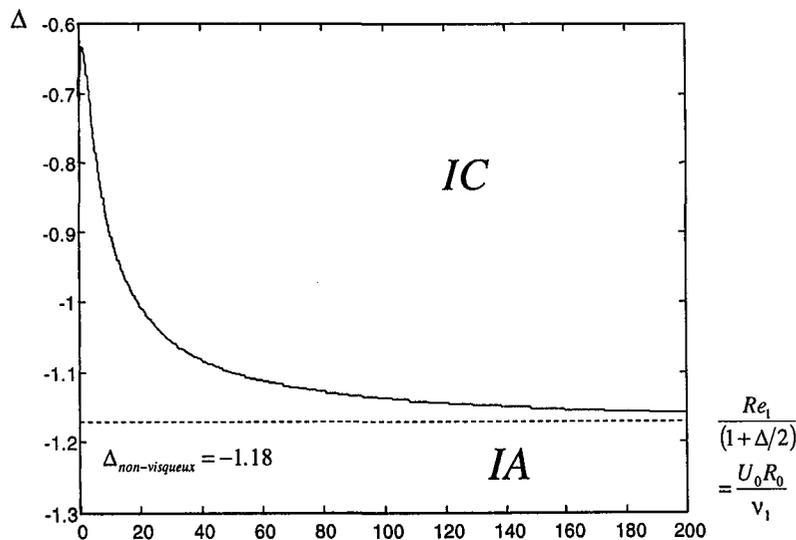


Fig. 57 : Influence de la viscosité sur la transition du jet cisailé – Mode axisymétrique  
 $\rho = 1, We = 0, S = 0$

Les mêmes remarques peuvent être faites pour le jet chaud (cf. fig. 58.a). La viscosité augmente encore une fois la zone absolue et la possibilité de transition vers un état absolument instable est étendue au jet de densité supérieure à celle du fluide ambiant. Dans la même gamme de Reynolds,  $\omega_r$  évolue rapidement pour tendre vers 0, ce qui serait caractéristique de basse fréquence au sein de l'écoulement, soit d'une augmentation de la taille des structures instables.

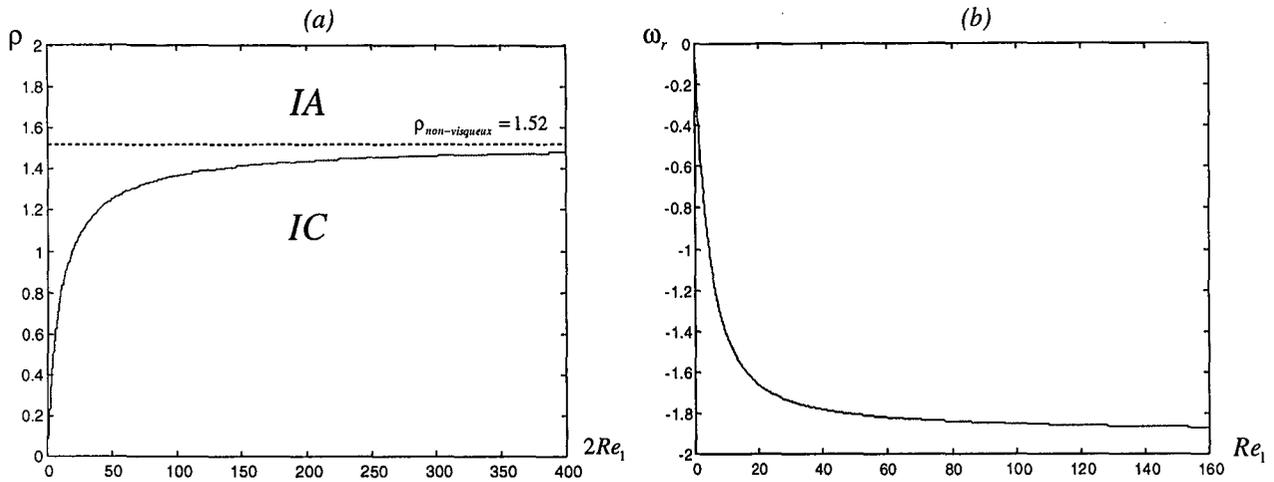


Fig. 58 : Influence de la viscosité sur la transition du jet chaud – Mode axisymétrique  
 (a) Rapport de densité  
 (b) Partie réelle de la fréquence absolue

Comme le montre les figures 59.a et 59.b, l'introduction de la rotation du jet ne modifie pas l'influence déstabilisatrice de la viscosité externe. Dans la transition due à la différence de masse volumique ou celle due à la différence de vitesse axiale, *une diminution du nombre de Reynolds augmente les zones absolument instables.*

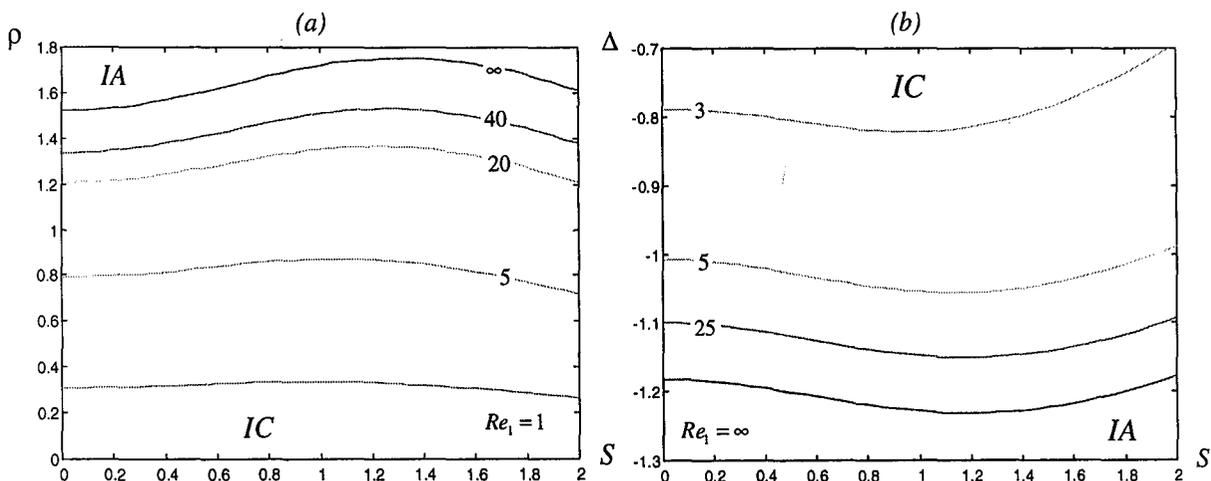


Fig. 59 : Influence de la viscosité sur la transition du jet tournant – Mode axisymétrique  
 (a) Transition  $\rho(S)$  pour différents nombres de Reynolds  
 (b) Transition  $\Delta(S)$  pour différents nombres de Reynolds

## IV. CONCLUSIONS SUR LES MODELES VISQUEUX

### 1. Jet visqueux

Dans la configuration d'un jet de fluide visqueux en rotation solide, nous avons développé un analyse linéaire décrivant l'évolution temporelle de perturbations. L'étude temporelle, amène à la constatation que la viscosité joue un rôle stabilisateur sur l'ensemble des mécanismes d'instabilité. Ainsi, les instabilités de Rayleigh ou celles induites par la couche de cisaillement, sont nettement atténuées par la viscosité du jet. Lorsque le jet possède une vitesse azimutale ou si l'on considère la configuration de Rankine, l'introduction d'un nombre de Reynolds fini atténue les taux de croissance pour l'ensemble des nombres d'ondes azimutaux.

Quant aux transitions entre instabilités convectives et absolues, la viscosité du jet n'a qu'une seule influence : elle augmente les zones convectives quel que soit le cas de figure étudié. Nous retrouvons là, les résultats déjà donnés par Leib & Goldstein ou Lin & Lian, pour les jets non tournants. Les modes non axisymétriques étant plus influencés par la stabilisation de la viscosité, la majeure partie des résultats présentés l'ont été pour le mode le plus dangereux : le mode  $m = 0$ . Les résultats concernant la transition de tension de surface pour le jet non tournant, ont été ici étendu à une large gamme de Reynolds. En particulier, à très faible Reynolds, la linéarité entre le nombre de Weber critique et le nombre de Reynolds a été établie. Nous avons pu ainsi comparé nos résultats aux résultats expérimentaux de Vihinen & al. mais la différence entre les deux approches reste inexpliquée. Dans le cas d'un jet d'eau tournant dans de l'air, la viscosité augmente largement la zone convective, ainsi pour un nombre de Reynolds de 10, il serait possible d'atteindre un nombre de Weber deux fois supérieur au Weber critique du jet de fluide parfait. Enfin, les zones absolument instables du jet cisailé ou du jet chaud sont réduites avec l'augmentation des effets de viscosité. L'utilisation de jet de fluide fortement visqueux peut donc être une solution pour diminuer la croissance des instabilités du jet tournant, et permet d'augmenter la densité du fluide externe ou de d'augmenter la force du contre-courant, sans pour autant transiter vers un état absolument instable.

### 2. Fluide extérieur visqueux

Dans la dernière partie de ce chapitre, une solution au problème de stabilité linéaire d'un jet tournant entouré de fluide visqueux, a été dérivée. La viscosité externe du fluide a été caractérisée comme étant un facteur de stabilisation des instabilités d'origine non visqueuse telles que les instabilité capillaire ou centrifuge.

D'autre part, nous avons mis en évidence que les ondes inertielles ou modes de Kelvin dues à la rotation, neutres en l'absence de viscosité, peuvent donner naissance à des ondes évanescentes ou amplifiées lorsque les effets de viscosité deviennent importants. Ce résultat est à mettre en parallèle avec les instabilités visqueuses présentes pour le tourbillon de Batchelor avec vitesse axiale.

Sur la nature des instabilités, la viscosité externe entraîne une extension des zones absolument instables et la rotation du jet ne modifie pas fondamentalement les courbes de transition pour le jet chaud et le jet cisailé. Cependant, pour la transition du jet capillaire, la résolution n'a pu être menée que sur un faible intervalle de nombre de swirl et la nature de l'instabilité n'a pas pu être caractérisée à faible swirl.

## Bibliographie du chapitre II

- <sup>1</sup> S. Leibovich & K. Stewartson, *A sufficient condition for instability columnar vortex*.  
J. Fluid Mech., **126**, pp. 335-356. 1983.
- <sup>2</sup> M. Lessen & F. Paillet, *The stability of a training line vortex. Part 1. Inviscid theory*.  
J. Fluid Mech. **65**, pp. 753-763. 1974.
- <sup>3</sup> M. Lessen & F. Paillet, *The stability of a training line vortex. Part 2. Viscous theory*.  
J. Fluid Mech. **65**, pp. 769-779. 1974.
- <sup>4</sup> M. R. Khorrami, *On the viscous modes of instability of a training-line vortex*.  
J. Fluid Mech., **225**, pp. 197-212. 1991.
- <sup>5</sup> J. E. Martin & E. Meiburg, *On the stability of the swirling jet shear layer*.  
Phys. Fluids, **6**, pp. 424-426. 1994.
- <sup>6</sup> T. Loiseleux, J. M. Chomaz & P. Huerre, *The effect of swirl on jets and wakes : linear instability of the Rankine vortex with axial flow*.  
Phys. Fluids **10**, pp. 1120-1134. 1998.
- <sup>7</sup> C. Olendraru, A. Sellier, M. Rossi & P. Huerre, *Inviscid instability of the Batchelor vortex : Absolute-convective transition and spatial branches*.  
Phys. Fluids **11**, pp. 1805-1820. 1999.
- <sup>8</sup> I. Delbende, J. M. Chomaz & P. Huerre, *Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex : a numerical study of the linear impulse response*.  
J. Fluid Mech., **355**, pp. 229-254. 1998.
- <sup>9</sup> A. Michalke, *Absolute inviscid instability of a ring jet with back-flow and swirl*.  
Eur. J. Mech. B/Fluids, **18**, pp. 3- 12. 1999.

---

<sup>10</sup> B. Lehmann, C. Hassa & J. Helbig, Three-component laser-Doppler measurements of the confined model flow behind a swirl nozzle.

Dev. Laser Tech. And Fluid Mech. pp. 383-398.1997.

<sup>11</sup> D. W. Lim & L. G. Redekopp, Absolute instability conditions for a variable density swirling jet flows.

Eur. J. Mech. B/Fluids, **17**, pp. 165- 185. 1998.

<sup>12</sup> Chandrasekhar S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*.

Clarendon Press, Oxford. 1961.

<sup>13</sup> S. J. Leib & M. E. Goldstein, *Convective and absolute instability of a viscous liquid jet*.

Phys. Fluids, **29**, pp. 952-954. 1986.

<sup>14</sup> S.P. Lin & Reitz, *Drop and spray formation from a liquid jet*.

Annu. Rev. Fluid Mech., **30**, pp. 85-105. 1998

<sup>15</sup> G.K. Batchelor & A.E. Gill, *Analysis of the stability of axisymmetric jets*.

J. Fluid Mech., **14**, pp. 529.1962

<sup>16</sup> A. Michalke, *Survey on jet instability theory*.

Prog. Aerospace Sci., **21**, 159-199. 1984.

<sup>17</sup> E. .F. Goedde & M. C. Yuen, *Experiments on liquid jet instability*.

J. Fluid Mech., **40**, pp. 495-51. 1970.

<sup>18</sup> M. Lessen, N. V. Deshpande & B. hadji-Ohanes, *Stability of a potential vortex with non-rotating and rigid-body rotating top-hat jet*.

J. Fluid Mech., **60**, pp. 459-466. 1973

<sup>19</sup> P.G. Saffman, *Vortex Dynamics*.

Cambridge University Press, Cambridge. 1992.

- 
- <sup>20</sup> I. Vihinen, A.M. Honohan & S.P. Lin, *Image of absolute instability in a liquid jet*.  
Phys. Fluids, **9**, pp. 3117-3119. 1997.
- <sup>21</sup> P.A. Monkewitz & K.D. Sohn, *Absolute instability in hot jets*.  
AIAA J., **26**, pp. 911-916. 1988.
- <sup>22</sup> P.A. Monkewitz, D.W. Bechert, B. Barsikow & B. Lehmann, *Self-excited oscillations and mixing in a heated round jet*.  
J. Fluid Mech., **213**, pp. 611-639. 1990.
- <sup>23</sup> S. Jendoubi & P.J. Strykowski, *Absolute and convective instability of axisymmetric jet with external flow*.  
Phys. Fluids, **6**, pp. 3000-3009. 1994.
- <sup>24</sup> E.J. Hopfinger & J.C. Lasheras, *Explosive breakup of a liquid jet by a swirling coaxial gas jet*.  
Phys. Fluids, **8**, pp. 1696-1698. 1996.
- <sup>25</sup> P.W. Duck & M.R. Khorrami, *A note on the effects of viscosity on the stability of a training-line vortex*.  
J. Fluid Mech., **245**, pp. 175-189. 1992.
- <sup>26</sup> S.P. Lin & R.D. Reitz, *Drop and spray formation from a liquid jet*  
Annu. Rev. Fluid Mech., **30**, pp. 85-105. 1998.
- <sup>27</sup> S.P. Lin & Z.W. Lian, *Absolute and convective instability of a viscous liquid jet surrounded by a viscous gas in a vertical pipe*.  
Phys. Fluids, **5**, pp. 771-773. 1992.
- <sup>28</sup> S. Le Dizès, *Global modes in falling capillary jets*.  
Eur. J. Mech., B/Fluids, **16**, n°6, 761-778. 1997
- <sup>29</sup> S.P. Lin & E.A. Ibrahim, *Instability of a viscous liquid jet surrounded by a viscous gas in a vertical pipe*.  
J. Fluid Mech., **218**, pp. 641-658. 1990.

# CHAPITRE III

## STABILITE DES JETS AVEC CHAMP MAGNETIQUE AXIAL

Résumé : *L'influence d'un champ magnétique axial sur la stabilité d'un jet tournant de fluide conducteur est analysée dans la première partie de ce chapitre. En second lieu, nous nous intéressons au cas d'un jet non tournant de fluide magnétique. Les analyses de stabilité temporelle et les transitions entre instabilités convectives et absolues sont obtenues en fonction des divers paramètres de contrôle.*

### I. JET TOURNANT DE FLUIDE CONDUCTEUR

#### 1. Introduction

La *Magnétohydrodynamique* ou M.H.D. constitue une partie commune entre la physique des plasmas et la mécanique des fluides électriquement conducteurs.

En effet, si un métal liquide tel que le mercure ou un métal fondu, un gaz faiblement ionisé ou un plasma, se trouvent en présence d'un champ magnétique, une interaction va se produire entre les effets d'origine magnétique et les effets d'origine hydrodynamique.

Le fluide conducteur, lors de son déplacement au sein d'un champ magnétique, sera le siège de champs électriques qui vont induire des courants électriques de Foucault et ainsi modifier le champ magnétique initial. En retour, le champ magnétique crée des forces volumiques (force de Laplace) et des efforts à la surface du fluide. Ces forces vont agir sur les champs cinématiques et dynamiques associés aux fluides, en un mot modifier l'écoulement. L'étude de l'interaction entre le fluide et le champ magnétique constitue l'essence même de la MHD.

De nombreuses et importantes applications industrielles faisant intervenir les métaux liquides ont été développées : pompage électromagnétique du sodium utilisé comme fluide caloporteur dans les réacteurs nucléaires, brassage et lévitation dans certains procédés métallurgiques, fours à induction.

A des échelles plus grandes, la magnétohydrodynamique intervient dans l'étude de nombreux phénomènes géophysiques et astrophysiques : effet dynamo terrestre, champs magnétiques et vitesses de rotation des étoiles, taches, éruptions et vent solaires, rayonnement des pulsars.

Dans ce dernier cas, l'interaction entre les champs cinématiques et magnétiques est qualifiée de forte. Dans le but de caractériser l'importance de cette interaction, un nombre sans dimension a été défini : le nombre de *Reynolds magnétique*.

En prenant une dimension caractéristique de l'écoulement  $L$ , une vitesse de référence  $U$ , le nombre de Reynolds magnétique peut alors être défini par  $Re_m = \mu\gamma UL$  où  $\gamma$  est la conductivité électrique du fluide et  $\mu$  la perméabilité magnétique du milieu considéré. Aux échelles géophysiques et astrophysiques, les grandeurs mises en jeu sont très élevées, le nombre de Reynolds magnétique est alors largement supérieur à l'unité : de l'ordre de la centaine pour la géophysique, le nombre de Reynolds magnétique peut être considéré comme infini pour certains phénomènes astrophysiques en particulier pour les jets MHD (cf. figure 1).

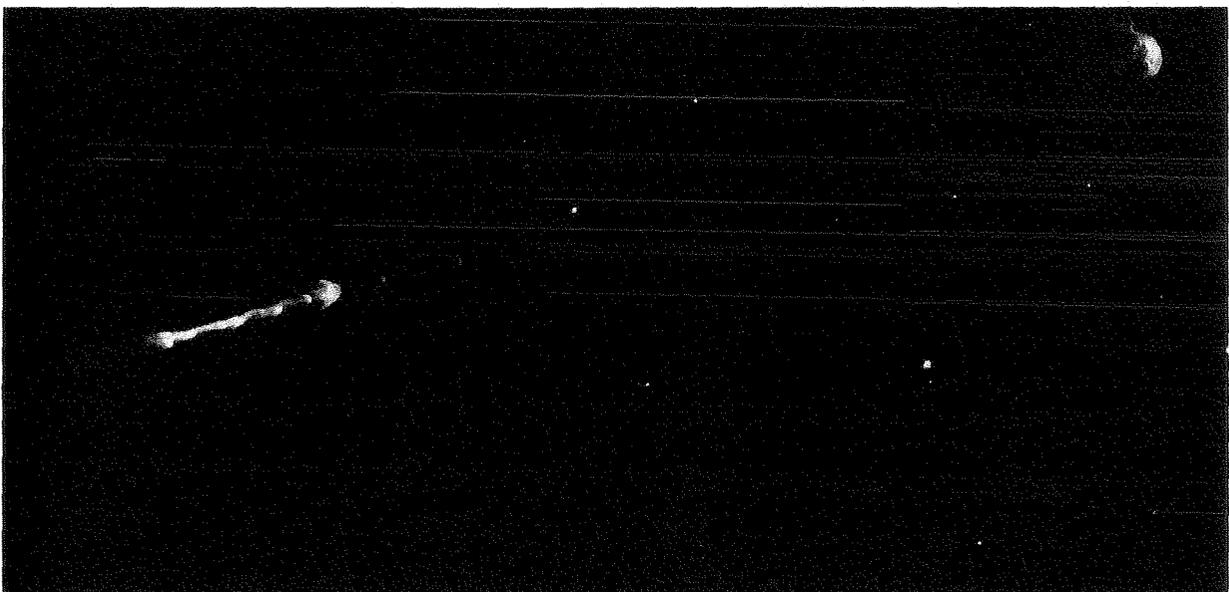


Figure 1 : Observation du jet MHD HH111

Les échelles de longueur sont alors de l'ordre de l'année lumière ; quant aux vitesses caractéristiques, elles atteignent plusieurs milliers de kilomètres par seconde.

Il est légitime de se poser la question suivante : quelle est l'influence d'un champ magnétique sur la stabilité de ces jet MHD ou à l'échelle du laboratoire sur des jets de fluide conducteur ?

Avant d'exposer cette étude de stabilité, nous allons donner brièvement les équations constitutives de la MHD.

## 2. Equations de la MHD

### 2.1 Equation de l'induction

Comme nous l'avons exposé en introduction, la MHD se consacre à l'étude des interactions entre le champ de vitesse  $\vec{U}$  et le champ d'induction magnétique  $\vec{B}$ . Ainsi, elle est formée d'un couplage de deux disciplines classiques : l'Electromagnétisme et l'Hydrodynamique. Le système d'équations régissant les systèmes MHD est en conséquence constitué des équations de Maxwell pour la partie électromagnétique et des équations de Navier-Stokes pour la partie hydrodynamique. Si l'on note  $\vec{E}$  le champ électrique,  $\mu$  la perméabilité magnétique (égale à celle du vide  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m$ ) et  $\vec{j}$  la densité de courant, les équations de Maxwell prennent la forme ci-dessous :

$$(1.1) \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

$$(1.2) \quad \vec{\text{Rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$(1.3) \quad \vec{\text{Rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Le fluide n'étant pas considéré ici comme magnétique, l'induction et le champ magnétiques sont directement reliés par  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ .

De plus, la densité de courant est rattachée au champ par la loi d'Ohm relative à un conducteur en mouvement dans un champ magnétique. Cette dernière s'écrit dans le référentiel du laboratoire :

$$(2) \quad \vec{j} = \gamma (\vec{E} + \mu_0 \vec{U} \wedge \vec{H})$$

Dans cette relation, le champ d'induction dû au mouvement  $\mu_0 \vec{U} \wedge \vec{H}$  s'ajoute au champ électrique  $\vec{E}$  produit dans le repère fixe; la conductivité électrique  $\gamma$  est supposée scalaire et non modifiée par la présence du champ  $\vec{H}$  (l'effet Hall est négligeable dans les métaux).

La divergence de (1.2) implique :

$$(3) \quad \text{div} \vec{j} = 0$$

Les champs électrique  $\vec{E}$  et de densité de courant  $\vec{j}$  étant directement reliés au champ magnétique  $\vec{H}$  par les relations (1.2) et (1.3), il est usuel de prendre  $\vec{H}$  comme grandeur électromagnétique fondamentale. En général, les notions d'induction et de champ magnétique peuvent être confondues, en tout cas pour les fluides conducteurs non magnétiques où leur relation est linéaire.

L'équation du champ, traduisant l'évolution spatio-temporelle du champ magnétique, se déduit alors facilement en utilisant le rotationnel de la loi d'Ohm (2) :

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 \vec{Rot} \vec{E} = \mu_0 \vec{Rot} \left( \vec{U} \wedge \vec{B} - \frac{1}{\gamma} \vec{j} \right) = \vec{Rot}(\vec{U} \wedge \vec{H}) - \frac{1}{\gamma} \vec{Rot}(\vec{Rot} \vec{H})$$

et ainsi :

$$(4) \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{Rot}(\vec{U} \wedge \vec{H}) + \frac{1}{\mu_0 \gamma} \Delta \vec{H}$$

L'équation de l'induction révèle au membre de droite deux mécanismes physiques d'origine différente ; le terme  $\vec{Rot}(\vec{U} \wedge \vec{H})$ , proportionnel à la vitesse du fluide, est l'expression de la *convection* du champ magnétique tandis que le terme  $1/\mu_0 \gamma \Delta \vec{H}$ , proportionnel à la conductivité du fluide, exprime sa *diffusion*.

Si nous réduisons l'équation du champ magnétique (4) par rapport aux grandeurs suivantes :  $\omega_0$  une pulsation caractéristique du champ magnétique,  $U_0$  une vitesse caractéristique de l'écoulement,  $H_0$  et  $L_0$  un champ magnétique et une longueur caractéristiques, la forme réduite suivante est obtenue :

$$(5) \quad \frac{\omega_0 L_0}{U_0} \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial t^*} = \vec{Rot}^* \left( \vec{U}^* \wedge \vec{H}^* \right) + \frac{1}{Re_m} \Delta \vec{H}^*$$

où  $Re_m = \mu_0 \gamma L_0 U_0$  est le nombre de Reynolds magnétique précédemment défini.

Le nombre de *Reynolds magnétique*, appelé ainsi par analogie avec le nombre de Reynolds intervenant dans l'équation réduite de la vorticité de un fluide visqueux, représente les effets de convection rapportés à ceux de diffusion. Deux cas possibles se présentent alors :

⇒ Si  $Re_m \ll 1$ , la convection devient négligeable devant la diffusion et l'équation de l'induction (5) s'écrit :

$$(6) \quad \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial t^*} = \frac{1}{Re_\omega} \Delta \vec{H}^*$$

Où  $Re_\omega = \mu_0 \gamma \omega_0 L_0^2$  est appelé le paramètre d'écran.

L'équation (6) est la forme classique de l'équation de diffusion d'un champ vectoriel dont  $Re_\omega^{-1}$  est le coefficient adimensionnel de diffusion. Ainsi, plus la conductivité du fluide est importante, plus la vitesse de diffusion du champ magnétique est réduite, les courants de Foucault s'opposent aux variations. En un temps  $T_0$ , le champ magnétique aura diffusé sur une distance de l'ordre de  $\sqrt{T_0/Re_\omega}$ .

La diffusion intervient aussi sur la pénétration d'un champ alternatif à l'intérieur du fluide. Les lignes de flux magnétiques restent concentrées dans une couche dont l'épaisseur est de l'ordre de  $\sqrt{L_0^2/Re_\omega}$  : c'est l'*effet de peau*.

⇒ Si  $Re_m \gg 1$ , cette fois le terme prépondérant est celui de convection et l'équation d'évolution du champ magnétique se réduit à :

$$(7) \quad \frac{\omega_0 L_0}{U_0} \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial t^*} = \vec{Rot}^* \left( \vec{U}^* \wedge \vec{H}^* \right)$$

La principale propriété de ce cas de figure consiste dans le gel du champ magnétique au sein de la matière, le champ magnétique et le champ de vitesse demeurant alors étroitement solidaires (théorème du flux gel , Alfvén 1942).

## 2.2 Equations du mouvement

Nous l'avons vu au paragraphe précédent, l'équation de l'induction fait intervenir le champ de vitesse. En contrepartie, le champ magnétique agit sur le champ de vitesse à travers la force volumique de *Laplace* :

$$(8) \quad \vec{f} = \frac{\mu_0}{\rho} \vec{j} \wedge \vec{H} = \frac{\mu_0}{\rho} \text{Rot } \vec{H} \wedge \vec{H} = \frac{\mu_0}{\rho} \left( \overline{\text{Grad } \vec{H} \cdot \vec{H}} - 1/2 \text{Grad } H^2 \right)$$

Compte tenu de la forme (8) de la *force de Laplace*, l'équation de Navier-Stokes pour un fluide conducteur va s'écrire sous la forme :

$$(9) \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overline{\text{Grad } \vec{U} \cdot \vec{U}} = -\frac{1}{\rho} \text{Grad } P + \frac{\mu_0}{\rho} \text{Rot } \vec{H} \wedge \vec{H} + \nu \Delta \vec{U}$$

Où  $\nu$  représente la viscosité cinématique du fluide considéré.

De même que les efforts de pression et de viscosité du fluide peuvent être représentés par la divergence du tenseur des contraintes intrinsèques, les efforts d'origine magnétique peuvent aussi être mis sous la forme de la divergence d'un tenseur. En notation de Kronecker, le tenseur des efforts magnétiques ou *tenseur de Maxwell*  $\overline{\overline{T}}$ , est structuré de la manière suivante :

$$(10) \quad T_{ij} = \mu_0 (H_i H_j - 1/2 H^2 \delta_{ij})$$

avec  $\delta_{ij}$  tenseur unité. Nous avons tenu compte ici de la simple linéarité entre l'induction et le champ magnétique ; cette forme du tenseur de Maxwell ne peut être appliqué dans le cas d'un fluide magnétique, par exemple.

Les équations constitutives de la MHD sont la réunion des équations de l'induction (4) et du mouvement (9) :

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overline{\text{Grad } \vec{U} \cdot \vec{U}} = -\frac{1}{\rho} \text{Grad } P + \frac{\mu_0}{\rho} \text{Rot } \vec{H} \wedge \vec{H} + \nu \Delta \vec{U} \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{Rot}(\vec{U} \wedge \vec{H}) + \frac{1}{\mu_0 \gamma} \Delta \vec{H} \end{cases}$$

Nous allons maintenant nous intéresser à deux modèles distincts ; pour le premier, le Reynolds magnétique sera considéré comme infini (hypothèse intéressante par la simplification du problème), alors que dans le second cas, nous étendrons le modèle pour des valeurs de Reynolds magnétique finies.

### 3. Modèle à grand nombre de Reynolds magnétique

Les premiers résultats concernant les jets et les colonnes de fluide conducteur avec champs magnétiques ont commencé dans les années 1960 avec les travaux de Chandrasekhar<sup>1</sup> et de Gupta<sup>2,3</sup>. L'effet d'un champ magnétique axial, uniforme sur l'instabilité capillaire d'une colonne cylindrique de rayon  $R_0$ , au repos, a été exposée par Chandrasekhar qui a montré que, pour un fluide parfaitement conducteur, la condition de stabilité d'une perturbation axisymétrique de nombre d'onde axiale  $k$  était :

$$(12) \quad 1 - k^2 R_0^2 - \frac{\mu H_0^2 R_0}{\sigma I_1(kR_0) K_1(kR_0)} \leq 0,$$

où  $H_0$  est l'intensité du champ axial,  $\mu$  la perméabilité magnétique du fluide et  $\sigma$  le coefficient de tension superficielle.

Dans ce cas le champ a un effet stabilisant, en particulier si l'intensité du champ est telle que :

$$(13) \quad H_0 \geq \sqrt{\frac{\sigma}{2\mu R_0}}$$

les perturbations axisymétriques, quels que soit leurs nombres d'onde  $k$ , restent stables.

Plus récemment, l'effet stabilisateur d'un champ magnétique axial sur la stabilité temporelle magnétohydrodynamique d'un jet de gaz, coaxial à un écoulement de liquide dans un cylindre a été mis en évidence par Elazab<sup>4</sup>.

L'imposition d'un champ magnétique n'a cependant pas toujours une influence stabilisatrice sur les jets et les colonnes de fluide. Dans le cas d'un liquide conducteur, l'influence de l'introduction d'un courant axial (en conséquence d'un champ magnétique orthoradial) sur la stabilité d'un jet capillaire a été étudiée par Gupta<sup>2</sup>, le courant ayant un effet déstabilisateur.

Plus récemment, Yakubenko<sup>5</sup> a étendu les résultats de Gupta en analysant le passage entre les instabilités convective et absolue. L'analyse menée pour un fluide magnétique et faiblement conducteur et uniquement pour le mode axisymétrique a montré que la présence du courant élargissait la zone absolue de l'instabilité capillaire. De plus, bien que des grandes valeurs de perméabilité magnétique réduisent l'instabilité temporelle, les résultats de Yakubenko ont mis en lumière qu'un accroissement de la perméabilité rendait l'écoulement absolument instable.

Toujours dans un cadre de transition entre instabilité convective et instabilité absolue, Shugai & Yakubenko<sup>6</sup> ont déterminé qu'un champ magnétique axial uniforme pouvait supprimer l'instabilité absolue due à la tension de surface d'un jet capillaire de fluide parfait, parfaitement conducteur. Simultanément, nous avons étendu ces résultats à un jet mis en rotation (Loueslati & Brancher<sup>7</sup>). Nous allons exposer dans la suite ces derniers résultats.

### 3.1. Hypothèses et écoulement de base

Considérons un jet infiniment long de fluide conducteur, de masse volumique  $\rho_0$ , de perméabilité magnétique  $\mu_0$  égale à celle du vide et de conductivité  $\gamma$ . Le jet évolue dans un fluide extérieur de masse volumique  $\rho_1$ . Un champ magnétique longitudinal stationnaire et uniforme  $\vec{B}_0$  est appliqué dans l'ensemble des deux milieux interne et externe  $\Lambda_0$  et  $\Lambda_1$ .

Le jet de rayon  $R_0$  est animé d'une circumduction autour de son axe de symétrie, sa vitesse azimutale est  $\Omega_0 r$  et sa vitesse axiale est uniforme et égale à  $U_0$  (cf. figure 2). Dans le fluide environnant le jet, la vitesse axiale est considérée comme constante et égale à  $U_1$  tandis que la vitesse azimutale est potentielle de circulation  $\Gamma_0$ .

Etant donné la géométrie cylindrique du problème, nous nous placerons par la suite dans un repère orthonormé cylindrique de vecteurs de base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . Ainsi tout vecteur peut être décomposé suivant les directions radiale, orthoradiale et axiale.

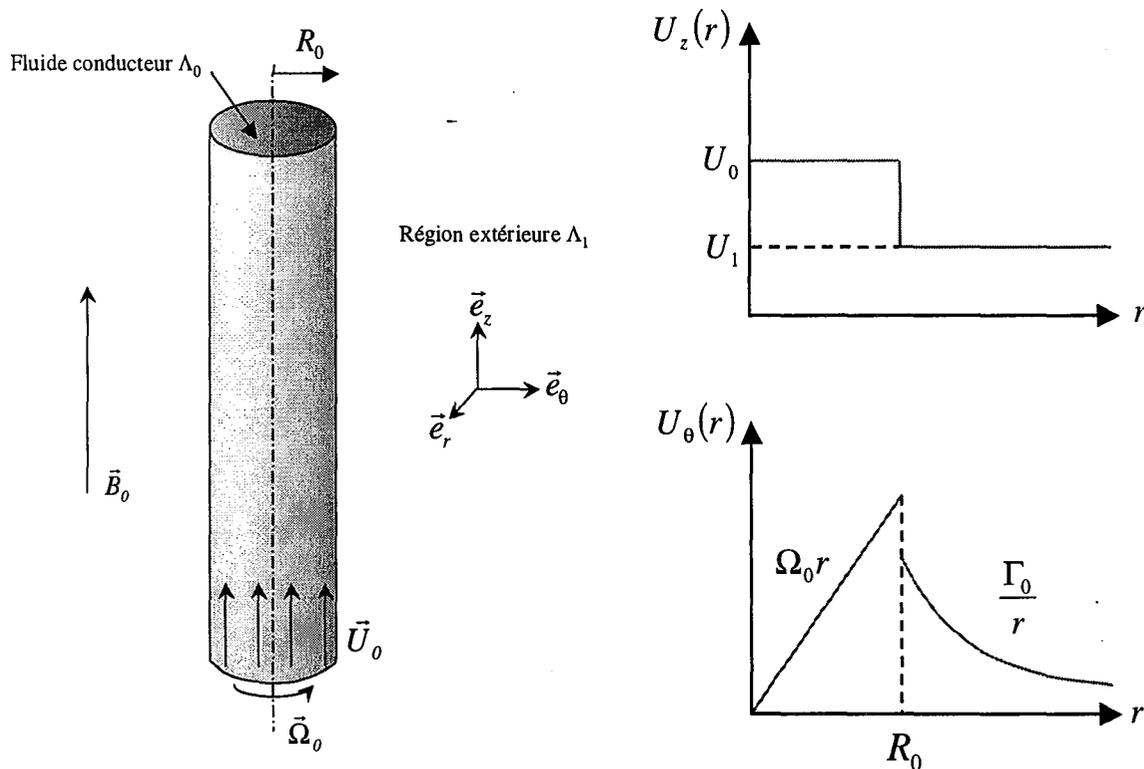


Fig. 2 : Ecoulement de base

Dans le repère cylindrique, les champs cinématique et magnétique relatifs à l'écoulement de base peuvent être notés pour le domaine  $\Lambda_0$  :

$$(14) \quad \begin{cases} \vec{U}_0(r, \theta, z) = (0, \Omega_0 r, U_0) \\ \vec{H}_0(r, \theta, z) = H_0 \vec{e}_z \end{cases} \quad \forall r < R_0,$$

et pour le domaine  $\Lambda_1$  :

$$(15) \quad \begin{cases} \vec{U}_1(r, \theta, z) = (0, \Gamma_0/r, U_1) \\ \vec{H}_1(r, \theta, z) = H_0 \vec{e}_z \end{cases} \quad \forall r > R_0.$$

Les hypothèses effectuées pour ce modèle sont les suivantes :

- ⇒ les fluides en présence sont non visqueux, incompressibles et isothermes,
- ⇒ l'écoulement de base est considéré comme stationnaire,
- ⇒ la pesanteur est négligée,
- ⇒ le nombre de Reynolds magnétique est élevé ( $R_{em} \gg 1$ ) et il n'existe pas de courants surfaciques à l'interface des deux fluides.

Le système d'équations régissant l'écoulement est constitué de la loi de conservation de la masse, de l'équation de Navier-Stokes et de l'équation de l'induction et aussi conditions aux limites, notamment, à l'infini et à l'interface des deux fluides.

La conservation de la masse pour un fluide incompressible s'écrit, par rapport au champ de vitesse :

$$(16) \quad \operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

En tenant compte du fait que le Reynolds magnétique est élevé et que le fluide conducteur est non visqueux, notre système d'équations (11) pour l'intérieur devient le suivant :

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{\operatorname{Rot}}(\vec{U} \wedge \vec{H}) \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overline{\operatorname{Grad} \vec{U}} \cdot \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \vec{\operatorname{Grad}} P + \frac{\mu_0}{\rho} \vec{\operatorname{Rot}} \vec{H} \wedge \vec{H} \end{cases}$$

A l'extérieur, le fluide n'étant pas conducteur, aucune force d'origine magnétique ne peut intervenir, le système d'équations se réduit à :

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overline{\operatorname{Grad} \vec{U}} \cdot \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \vec{\operatorname{Grad}} P \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \vec{\operatorname{Rot}} \vec{H} = \vec{0} \end{cases}$$

Afin de compléter ces systèmes d'équations il nous faut introduire des conditions aux limites sur les différents champs. Les conditions aux limites les plus importantes se situent à l'interface entre les deux fluides et sont basées sur les sauts des champs magnétique, dynamique et cinématique. Le saut de la composante normale de l'induction magnétique, et donc du champ, à la traversée de l'interface est nul ; le saut de la contrainte normale doit être équilibré par les forces de tension superficielle. La dernière condition consiste en la matérialité de l'interface.

Ces trois conditions à l'interface s'écrivent de la façon suivante :

$$(19) \quad [\vec{H} \cdot \vec{n}] = 0 \quad \text{composante normale du champ magnétique,}$$

$$(20) \quad \left[ \vec{n} \cdot \left( \overline{\overline{\Sigma}} + \overline{\overline{T}} \right) \cdot \vec{n} \right] = \sigma \cdot \text{div} \vec{n} \quad \text{contrainte normale,}$$

$$(21) \quad \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \vec{Grad} \tilde{\eta} \cdot \vec{U}_i = u_{r_i}(r) \quad \text{interface matérielle, avec } i = 0, 1.$$

Où  $\sigma$  est le coefficient de tension superficielle à l'interface des deux fluides,  $\vec{n}$  le vecteur normal à l'interface,  $\overline{\overline{\Sigma}} = -P\overline{\overline{I}}$  le tenseur des contraintes intrinsèques et  $\overline{\overline{T}}$  le tenseur de Maxwell défini par la relation (10). La perturbation de l'interface conserve la forme précédemment exposée au précédent chapitre :  $\tilde{\eta} = \eta e^{i(\omega t + m\theta + kz)}$ .

Il convient de rajouter que chaque grandeur de base ou perturbée doit rester spatialement finie et en particulier, en  $r=0$  et à l'infini.

La modélisation de l'écoulement de base exposée ici repose sur un choix de grandeurs cinématique et magnétique, ce qui correspond le plus souvent aux paramètres imposés expérimentalement. Il nous faut donc en déduire les champs de pression qui s'y rapportent. Une fois les champs cinématique et magnétique connus, les expressions des pressions sont aisément obtenues en utilisant les équations (17) à (21) :

- Pour le domaine  $\Lambda_0$  :

$$(22) \quad P_0(r) = P_\infty - \frac{\rho_1 \Gamma_0^2}{2R_0^2} - \frac{\sigma}{R_0} + \frac{\rho_0 \Omega_0^2}{2} (r^2 - R_0^2)$$

- Pour le domaine  $\Lambda_1$  :

$$(23) \quad P_1(r) = P_\infty - \frac{\rho_1 \Gamma_0^2}{2r^2}$$

où  $P_\infty$  est la pression en  $r = \infty$ .

L'ensemble des champs de base étant déterminé, il nous est alors possible d'introduire des fonctions de perturbation sous forme de modes normaux dans les différentes équations du système, de les linéariser et de les résoudre. Une fois la forme des solutions perturbées obtenue, les conditions de continuité à la frontière entre les deux fluides vont nous permettre d'obtenir l'équation de dispersion reliant  $\omega$  et  $k$ .

### 3.2 Détermination des champs perturbés

Les fonctions perturbées de vitesse, de pression et de champ magnétique prennent l'apparence classique ci-dessous :

- pour la vitesse :

$$(24) \quad \vec{u} = (\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta, \tilde{u}_z)(r, \theta, z, t) = (i u_r, u_\theta, u_z)(r) e^{i(\omega t + m\theta + kz)},$$

- pour la pression :

$$(25) \quad \tilde{p}(r) = p(r) e^{i(\omega t + m\theta + kz)},$$

- et enfin, pour le champ magnétique :

$$(26) \quad \vec{h} = (\tilde{h}_r, \tilde{h}_\theta, \tilde{h}_z)(r, \theta, z, t) = (i h_r, h_\theta, h_z)(r) e^{i(\omega t + m\theta + kz)}.$$

En notant avec un indice 0 les grandeurs relatives au jet et avec un indice 1 celles de l'extérieur, l'équation de l'induction pour l'intérieur s'écrit après linéarisation à l'ordre  $\epsilon$  :

$$(27) \quad \frac{\partial \vec{h}_0}{\partial t} = \overline{\text{Grad}} \vec{U}_0 \cdot \vec{h}_0 - \overline{\text{Grad}} \vec{h}_0 \cdot \vec{U}_0 + \overline{\text{Grad}} \vec{u}_0 \cdot \vec{H}_0 - \overline{\text{Grad}} \vec{H}_0 \cdot \vec{u}_0$$

Les termes quadratiques ont bien sûr été négligés et cette expression de l'équation de l'induction à l'ordre  $\varepsilon$  nous donne une relation directe entre le champ magnétique et la vitesse perturbés :

$$(28) \quad \vec{h}_0 = \kappa \vec{u}_0 \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{kH_0}{\omega + m\Omega_0 + kU_0}.$$

De même que dans le cas du jet libre non tournant avec champ magnétique longitudinal, le champ magnétique perturbé est directement proportionnel à la vitesse perturbée. Cette relation est en accord avec l'hypothèse de champ gelé dans la matière; si la perturbation de vitesse ou le champ magnétique de base sont nuls, la perturbation de champ magnétique le devient aussi.

L'équation de continuité prend la forme :

$$(29) \quad \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + r u_r \right) + \frac{m}{r} u_\theta + k u_z = 0$$

Compte tenu de la forme (28) de la perturbation de champ, la projection des équations de Navier-Stokes suivant  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  nous donne les relations ci-dessous :

$$(30) \quad \begin{cases} \left( \omega + m\Omega_0 + kU_0 - \frac{\mu_0 H_0 \kappa}{\rho_0} k \right) u_{r_0} + 2\Omega_0 u_{\theta_0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Pi_0(r)}{\partial r} e^{-i(\omega t + m\theta + kz)} \\ \left( \omega + m\Omega_0 + kU_0 - \frac{\mu_0 H_0 \kappa}{\rho_0} k \right) u_{\theta_0} + 2\Omega_0 u_{r_0} = -\frac{m}{\rho_0 r} \Pi_0(r) e^{-i(\omega t + m\theta + kz)} \\ \left( \omega + m\Omega_0 + kU_0 - \frac{\mu_0 H_0 \kappa}{\rho_0} k \right) u_{z_0} = -\frac{k}{\rho_0} \Pi_0(r) e^{-i(\omega t + m\theta + kz)} \end{cases}$$

où  $\Pi_0(r) = \tilde{p}_0(r) + \mu_0 \vec{h}_0 \vec{H}_0$  est la somme des perturbations de pression hydrodynamique et de pression magnétique. Il est alors possible d'exprimer grâce aux relations (30) les composantes de vitesse en fonction de la pression totale  $\Pi_0(r)$  et d'insérer ces expressions dans l'équation de continuité.

On aboutit alors à une équation de Bessel portant sur la pression  $\Pi_0(r)$  :

$$(31) \quad \Pi_0''(r) + \frac{1}{r} \Pi_0'(r) + \left( \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \Pi_0(r) = 0$$

$$\text{Avec } \beta^2 = \frac{k^2(4\Omega_0^2 - \alpha^2)}{\alpha^2} \text{ et } \alpha = \omega + m\Omega_0 + kU_0 - \frac{\mu_0 H_0 \kappa k}{\rho_0}.$$

La solution de cette équation est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel de première et deuxième espèces d'ordre  $m$ ,  $J_m(\beta r)$  et  $Y_m(\beta r)$  :

$$\Pi_0(r) = (A_0 J_m(\beta r) + B_0 Y_m(\beta r)) e^{i(\omega t + m\theta + kz)}$$

Compte tenu du fait que la pression doit rester finie en  $r = 0$  et que  $\lim_{r \rightarrow 0} Y_m(r) = +\infty$ , la solution se restreint à la base des  $J_m$  :

$$(32) \quad \Pi_0(r) = \tilde{p}_0(r) + \mu_0 \vec{h}_0 \vec{H}_0 = A_0 J_m(\beta r) e^{i(\omega t + m\theta + kz)}$$

avec  $A_0$  une constante arbitraire.

En remplaçant cette expression dans le système (30), le champ de vitesse perturbée est obtenu :

$$(33) \quad \begin{cases} u_{r_0} = -i \frac{A_0 k^2}{\rho_0 \alpha \beta^2} \left( \frac{2\Omega_0 m}{\alpha r} J_m(\beta r) + \beta J_m'(\beta r) \right) \\ u_{\theta_0} = \frac{A_0}{\rho_0 (4\Omega_0^2 - \alpha^2)} \left( 2\Omega_0 \beta J_m'(\beta r) + \frac{\alpha m}{r} J_m(\beta r) \right) \\ u_{z_0} = -\frac{k A_0}{\rho_0 \alpha} J_m(\beta r) \end{cases}$$

où la notation  $J_m'(\beta r) = \left. \frac{dJ_m(x)}{dx} \right|_{x=\beta r}$  a été adoptée.

A l'extérieur du jet, la résistivité est infinie : le milieu ne conduit pas l'électricité, il ne peut donc exister de densités de courants  $\vec{j}$  ce qui entraîne que le rotationnel du champ magnétique est nul et en conséquence que le champ dérive d'un potentiel magnétique  $\phi$  tel que  $\vec{h}_1 = \vec{Grad}(-i\phi)$ . Etant donné que  $div \vec{h}_1 = 0$ , le potentiel vérifie :

$$(34) \quad \Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

En remplaçant le développement modal de  $\phi$  dans cette expression, nous aboutissons à une équation de Bessel modifiée qui admet comme solution une composition linéaire des fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèces d'ordre  $m$  respectivement  $I_m$  et  $K_m$ .

Le potentiel doit être nul à l'infini et par conséquent le terme en  $I_m$  est nul car  $\lim_{r \rightarrow \infty} I_m(r) = +\infty$ . La solution est alors connue à une constante  $B$  près :

$$(35) \quad \phi(r, \theta, z, t) = BK_m(skr) e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \quad \text{où } s = \text{sign}(k_r)$$

Ceci nous donne pour le champ magnétique perturbé :

$$(36) \quad \vec{h}_1 = B e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \begin{cases} -i K'_m(skr) \\ mK_m(skr) \\ \frac{r}{kK_m(skr)} \end{cases}$$

L'équation de Navier-Stokes, dans le milieu non conducteur, nous donne facilement le champ de vitesse et le champ de pression :

$$(37) \quad \begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{Grad}(-iA_1 K_m(skr) e^{i(\omega t + m\theta + kz)}) = A_1 e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \begin{cases} -i K'_m(skr) \\ mK_m(skr) \\ \frac{r}{kK_m(skr)} \end{cases} \\ \tilde{p}_1 = -\rho_1 A_1 \omega K_m(skr) e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \end{cases}$$

Toutes les fonctions propres du problème ont été déterminées et nous allons relier les constantes  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $\eta$  et  $B$  entre elles grâce aux conditions de passage à l'interface, ce qui nous amènera à l'équation transcendante liant  $\omega$  et  $k$ .

### 3.3 Equation de dispersion

A l'ordre  $\varepsilon$ , les équations de continuité, évaluées en  $r = R_0$ , nous donnent les 4 relations consécutives :

⇒ Continuité du champ normal :

$$(38.1) \quad \vec{h}_1(R_0) \cdot \vec{n} - \vec{h}_0(R_0) \cdot \vec{n} = 0,$$

⇒ Continuité de la contrainte normale :

$$(38.2) \quad \tilde{p}_1(R_0) - \Pi_0(R_0) + \frac{\mu_0}{2} H_0 h_{z_1}(R_0) - \tilde{\eta} \frac{\partial P_0}{\partial r}(R_0) = \frac{\sigma}{R_0^2} (R_0 - \tilde{\eta} (1 - m^2 - k^2 R_0^2)),$$

⇒ Conditions d'interface matérielle :

$$(38.3) \quad \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \vec{Grad} \tilde{\eta} \cdot \vec{U}_0 = u_{r_0}(R_0)$$

$$(38.4) \quad \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \vec{Grad} \tilde{\eta} \cdot \vec{U}_1 = u_{r_1}(R_0)$$

La résolution du système (38.1) à (38.4) amène à l'élimination de l'ensemble des constantes et l'obtention *in fine* de l'équation de dispersion. Chaque grandeur a été réduite par rapport au rayon  $R_0$ , à la vitesse  $U_0$ , au champ magnétique  $H_0$  et la masse volumique  $\rho_0$ .

L'équation de dispersion réduite est alors la suivante :

$$(39) \quad \boxed{D(\omega, k, R_i) = \left( \rho(\omega + (1 + \Delta)k + m\Gamma)^2 - A_1 k^2 + k(We(k^2 + m^2 - 1) + \rho\Gamma^2 - S^2) \frac{K'_m(sk)}{K_m(sk)} \right) \left( 2mS + \alpha\beta \frac{J'_m(\beta)}{J_m(\beta)} \right) + (\omega + mS + k) \frac{\alpha^2 \beta^2}{k} \frac{K'_m(sk)}{K_m(sk)} = 0}$$

La réduction de l'expression a fait apparaître plusieurs nombres sans dimensions  $R_i$ ; le *nombre d'Alfvén* appelé quelquefois paramètre d'interaction, défini par le rapport des effets magnétiques sur ceux d'inertie, le *nombre de Weber* rapport des effets de tension superficielle aux effets d'inertie :

$$(40.1) \quad Al = \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho_0 U_0^2}, \quad We = \frac{\sigma}{\rho_0 R_0 U_0^2},$$

le *nombre de swirl* défini par le rapport de la vitesse azimutale maximale à la vitesse axiale, la rotation externe étant caractérisée par le rapport de la circulation  $\Gamma_0$  à  $U_0 R_0$  :

$$(40.2) \quad S = \frac{\Omega_0 R_0}{U_0}, \quad \Gamma = \frac{\Gamma_0}{U_0 R_0},$$

enfin,  $\rho$  est le rapport de la masse volumique externe sur celle de l'intérieur et  $\Delta$  est le paramètre de co-courant ou contre-courant :

$$(40.3) \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{U_1}{U_0} - 1.$$

En annulant les effets de champ magnétique, la relation de dispersion (39) est équivalente à celle du chapitre II. Par contre, si seul le champ magnétique est imposé sur un jet non tournant en l'absence de fluide externe, le résultat de Chandrasekhar<sup>1</sup>, qui concerne uniquement le mode axisymétrique (chapitre XII, §112), est retrouvé. Nous allons, par la suite, nous intéresser à l'influence du champ magnétique sur les divers mécanismes d'instabilité et leurs transitions spatio-temporelles respectives.

### 3.4 Influence du champ magnétique sur la stabilité temporelle

#### 3.4.1 Sans rotation solide

Si la rotation interne est nulle, une solution analytique  $\omega(k)$  peut être tirée de l'équation (39). En effet, le nombre de swirl étant nul, le coefficient  $\beta$  est égal alors à  $ik$  et la fonction de Bessel  $J_m$  peut être remplacée par la fonction de Bessel modifiée  $I_m$ .

La solution s'écrit alors de la manière suivante :

$$(41) \quad \omega = \frac{-k - \rho L_m(k)(k(1+\Delta) + m\Gamma)}{I + \rho L_m(k)} \pm \sqrt{\frac{(1 + \rho L_m(k)) \left( (We(k^2 + m^2 - 1) + \rho\Gamma^2) k \frac{I'_m(k)}{I_m(k)} - Alk^2(1 + L_m(k)) \right) - \rho(k\Delta + m\Gamma)^2 L_m(k)}{I + \rho L_m(k)}}$$

où la fonction  $L_m(k)$  a été définie par  $L_m(k) = -\frac{I'_m(k)K_m(k)}{I_m(k)K'_m(k)}$ .

La stabilité temporelle est bien sûr déterminée par le signe du terme sous la racine. On constate que chaque nombre adimensionnel intervient sous la racine et donc sur la stabilité du système. Comme nous allons le voir, quelle que soit l'origine de l'instabilité du jet une augmentation progressive du nombre d'Alfvén introduit une forte stabilisation du mécanisme d'instabilité.

#### ⇒ Couche de cisaillement.

Dans le cas de l'instabilité de couche de cisaillement, le champ magnétique stabilise en premier lieu les faibles nombres d'onde axiale. Ainsi, pour le mode axisymétrique (fig. 3.a), une bande neutre  $[0..k_c]$  apparaît, le système demeurant instable pour  $k > k_c$ , les faibles longueurs d'onde sont toujours les plus amplifiées.

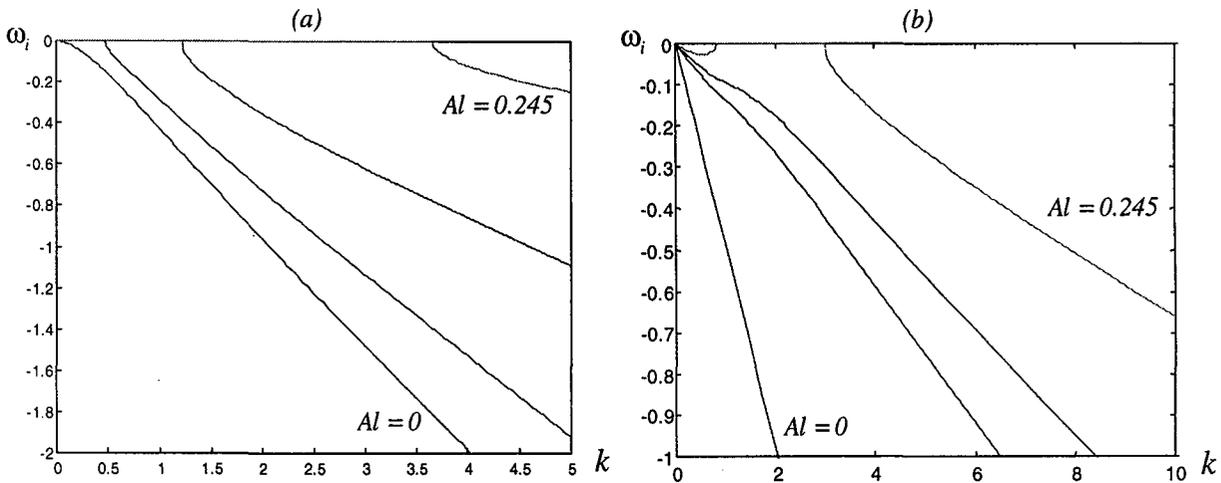


Fig. 3 : Cas du jet submergé, sans tension superficielle, ni rotation avec saut de vitesse axiale.  
Partie imaginaire  $\omega_i(k)$  pour  $\rho=1, We=0, S=0, \Gamma=0, \Delta=-1$  et  $0 \leq Al \leq 0.245$   
(a)  $m=0$  (b)  $m=1$

Les autres modes azimutaux (fig. 3.b) subissent une stabilisation analogue, la seule différence notable est la présence d'une bulle d'instabilité à faibles nombres d'onde axiale  $k$ .

Le mode axisymétrique pourrait donc, en présence d'un champ magnétique axial, développer des instabilités de cisaillement analogues à celles hors champ, alors que les modes azimutaux asymétriques ont le choix entre des grandes et des faibles longueurs d'onde.

Cet état de fait s'appréhende plus facilement en calculant la variation du nombre d'Alfvén critique en fonction du nombre d'onde axiale  $k$ . Le nombre d'Alfvén critique représente la valeur marginale séparant les zones de stabilité des zones d'instabilité. L'expression analytique de ce nombre critique est obtenue en utilisant l'expression du taux de croissance temporelle (41), en écrivant simplement que la partie imaginaire de la pulsation est nulle.

Nous avons représenté sur la figure 4 cette évolution pour le mode axisymétrique et pour les modes  $m = 1, 2, 3, 4$ .

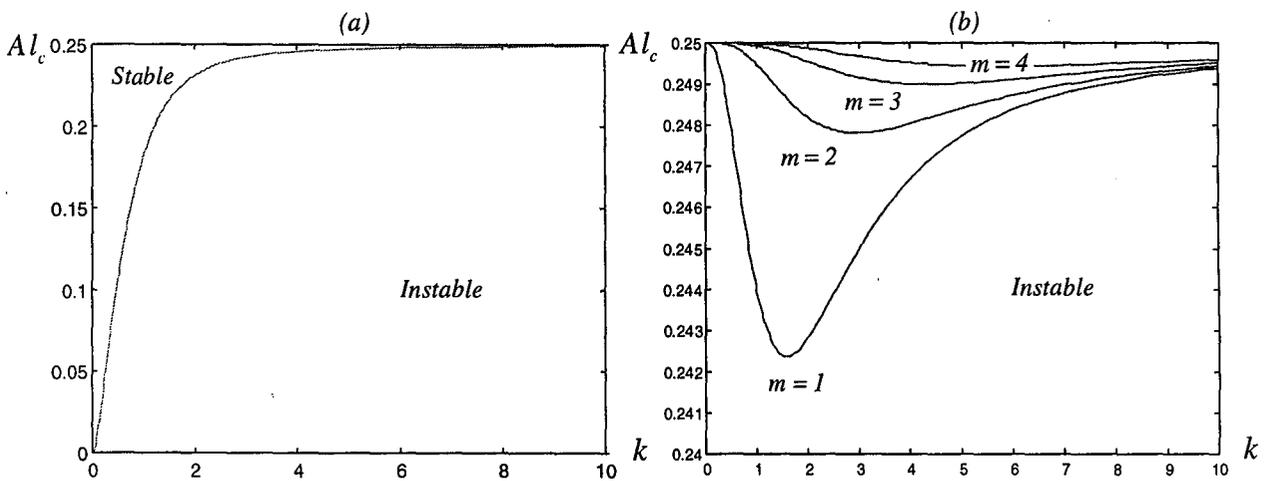


Fig. 4 : Nombre d'Alfvén critique en fonction de  $k$ . Jet submergé, non tournant, sans tension de surface.

$$\rho = 1, We = 0, S = 0, \Gamma = 0, \Delta = -1$$

(a) mode axisymétrique (b) modes asymétriques

La figure 4.a confirme que pour le mode  $m = 0$ , le nombre d'Alfvén critique le plus élevé se situe dans la limite de  $k \rightarrow +\infty$ . A la différence des modes asymétriques (figure 4.b) où il existe deux extrema de même valeur : à l'infini mais aussi pour  $k \rightarrow 0$ . Le nombre azimutal a une importance prédominante sur la stabilité ; en effet, plus  $|m|$  est petit, plus le champ magnétique a une influence stabilisatrice. Toutefois, ce résultat ne peut être étendu à n'importe quelle valeur de rapport de densité  $\rho$ , il convient de distinguer les jets légers  $\rho > 1$  des jets denses  $\rho \leq 1$ .

⇒ Si le rapport de densité est pris inférieur ou égal à 1, les nombres d'onde amplifiés se situent toujours à infini et il nous est devenu alors possible de trouver l'extremum du nombre d'Alfvén critique en calculant sa limite lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , à nombre de Weber nul :

$$(42) \quad \boxed{Al_{c_{max}} = \frac{\rho \Delta^2}{2(1+\rho)}} \quad \text{pour} \quad \rho \leq 1$$

Cette expression correspond à la valeur maximale du champ magnétique qu'il faut injecter au système afin de supprimer les instabilités de la couche de vorticité. Cette valeur est non seulement indépendante du nombre d'onde azimutale, mais aussi de la circulation externe  $\Gamma$  qui prédomine sur les ondes de grandes longueurs. Ce résultat confirme que *le cisaillement azimutal n'intervient pas aux mêmes échelles que le cisaillement axial*.

⇒ Si maintenant le fluide extérieur est de densité supérieure à celle du jet, les nombres d'onde où l'amplification est maximale ne se situent plus aux frontières  $k=0$  et  $k \rightarrow +\infty$ . Nous avons représenté leur évolution en fonction de la densité pour les modes azimutaux  $m=1$  et  $m=2$ , lorsque la vitesse extérieure est nulle ( $\Delta = -1$ ). Leurs valeurs évoluent avec le rapport de densité  $\rho$  jusqu'à devenir égales à une constante pour un rapport de densité critique  $\rho_c$  dépendant du nombre d'onde azimutale comme l'indique les figures 5.a et 5.b. Bien sûr, à chaque courbe  $k_{max}(\rho)$  correspond aussi une évolution du nombre d'Alfvén critique.

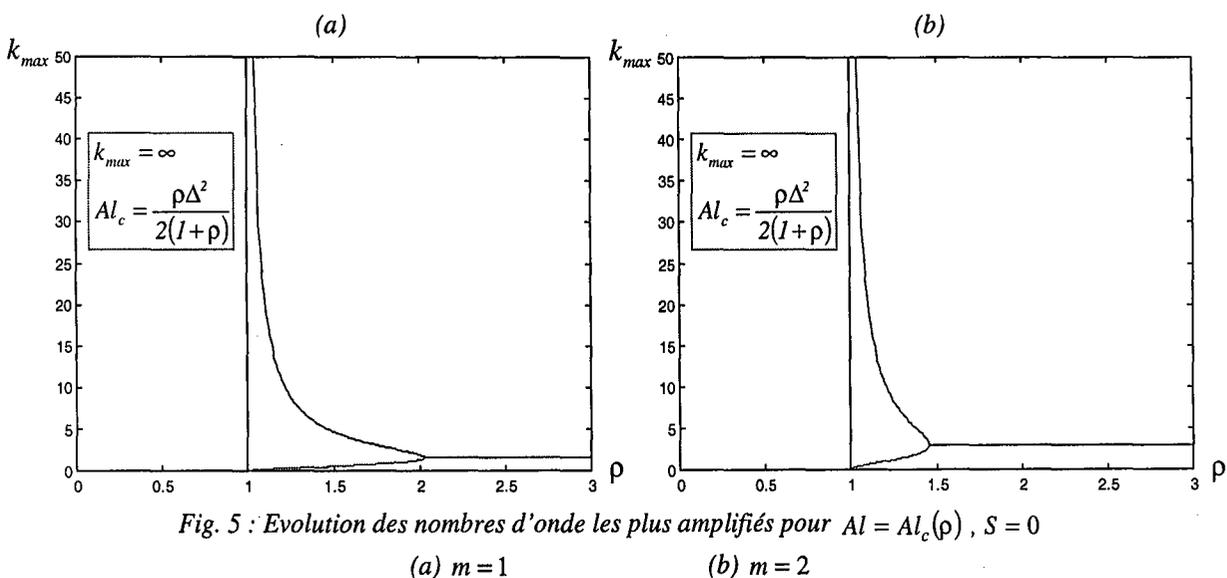


Fig. 5 : Evolution des nombres d'onde les plus amplifiés pour  $Al = Al_c(\rho)$ ,  $S = 0$

(a)  $m = 1$

(b)  $m = 2$

Pour  $\rho \leq 1$  la formule (42) nous donne une valeur analytique de  $Al_c$ , tandis que pour  $\rho > 1$ , il convient de suivre le nombre d'onde le plus amplifié et ainsi le nombre d'Alfvén critique correspondant. Le résultat étant faiblement dépendant du nombre azimutal  $m$ , nous ne donnons ici que la transition pour le mode axisymétrique.

Ainsi que l'indique la figure 6, *l'instabilité de cisaillement peut être supprimée par la présence d'un champ magnétique*. Plus le fluide extérieur possède une masse volumique importante, plus l'instabilité se déclenche de façon prononcée (en terme de taux de croissance) et plus le champ stabilisateur doit être important.

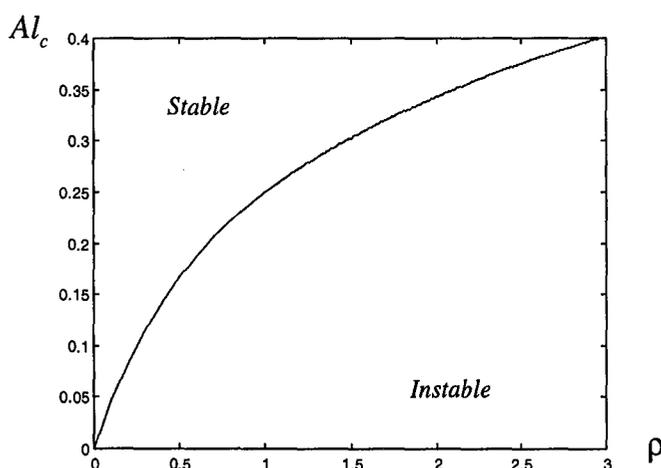


Fig. 6 : Influence du rapport de densité sur le nombre d'Alfvén critique – Mode axisymétrique  
 $We = 0, S = 0, \Gamma = 0, \Delta = -1$

⇒ **Couche de cisaillement axial et tension superficielle.**

⇒ Mode axisymétrique

Pour le mode axisymétrique, l'effet de la tension superficielle n'est pas univoque. Il existe en effet une compétition entre l'instabilité de cisaillement qui prend naissance aux grands nombres d'onde et l'instabilité capillaire qui déstabilise les faibles nombres d'onde mais stabilise les grands nombres.

L'introduction d'un champ magnétique axial renforce fortement l'action stabilisatrice de la tension superficielle à petites longueurs d'ondes et amenuise son action déstabilisatrice à grandes longueurs d'ondes.

Ainsi, la zone de stabilité est réduite pour des rapports de densité faibles, là où l'instabilité de tension superficielle est prépondérante, tandis qu'elle est élargie pour des  $\rho$  supérieurs du fait de la stabilisation de la couche de cisaillement par la tension superficielle (fig. 7.a).

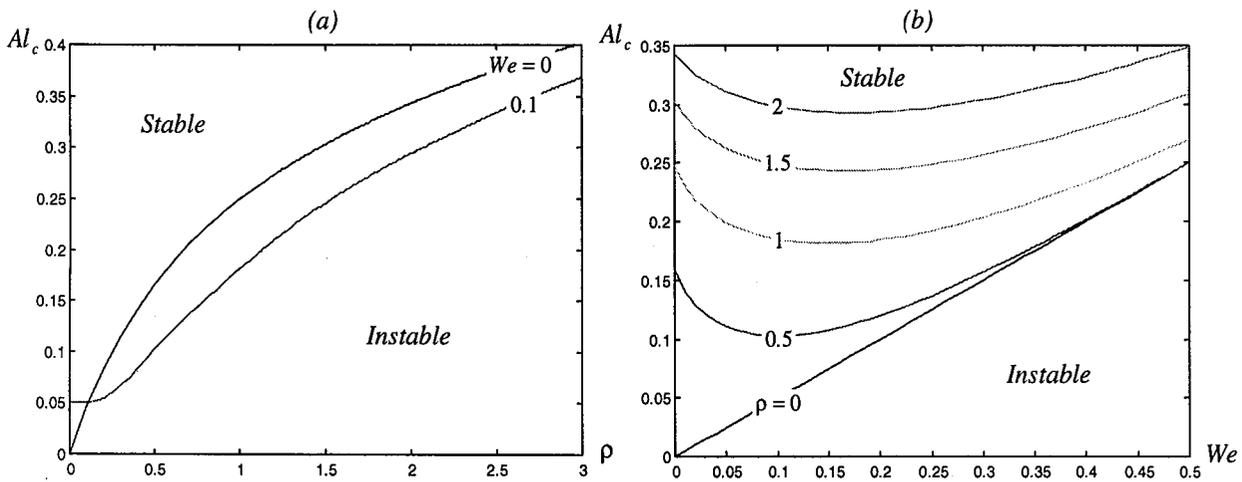


Fig. 7 : Alfvén critique - Mode axisymétrique.

$$S = 0, \Gamma = 0, \Delta = -1$$

(a) en fonction de  $\rho$

(b) en fonction de  $We$

Pour un rapport de densité nul, la valeur du nombre d'Alfvén à partir duquel le système est stable est égale à la moitié du Weber :

$$(43) \quad \boxed{Al_c = \frac{We}{2}} \quad \text{pour} \quad \rho = 0$$

Ce résultat est équivalent à la relation (13) non réduite trouvée par Chandrasekhar<sup>1</sup>.

Néanmoins, l'action stabilisatrice du champ magnétique sur les instabilités de Kelvin-Helmholtz et capillaire est contrecarrée par une augmentation du rapport de densité. Partant de la progression du nombre d'Alfvén critique en fonction du nombre de Weber pour un rapport de densité  $\rho$  nul, nous avons représenté sur la figure 7.b les courbes marginales de stabilité pour différentes valeurs de  $\rho$ , le caractère déstabilisateur de  $\rho$  devient alors évident. Lorsque  $\rho$  est non nul, la courbe marginale est dominée par les effets d'inertie à faibles nombres de Weber et les effets de tension superficielle à grands Weber.

⇒ Modes non axisymétriques

Nous ne présentons pas de modes azimutaux supérieurs à  $m = 1$ , car contrairement à la couche de cisaillement pure (cf. fig. 4.b), à nombre de Weber fixé, *plus le mode azimutal est important, plus un champ magnétique est stabilisant*. Le mode asymétrique le plus dangereux est le mode  $m = 1$ . Si la tension superficielle est introduite, la zone de stabilité des modes non axisymétriques (fig. 8) est élargie, ce qui est cohérent avec les résultats présentés dans le chapitre II. Le champ magnétique agit alors comme un renforcement de l'action stabilisatrice de la tension superficielle.

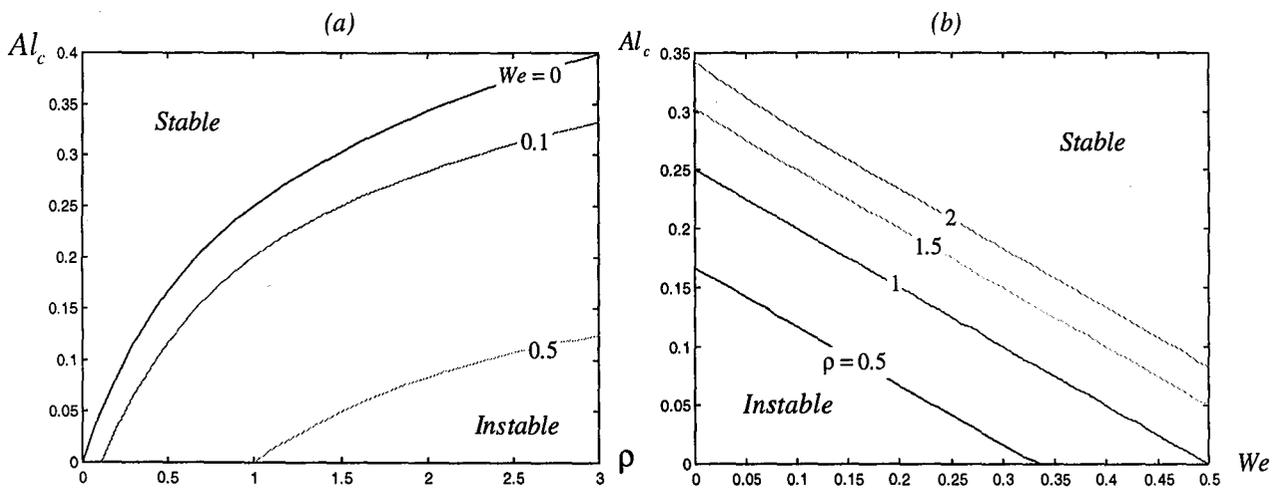


Fig. 8 : Nombre d'Alfvén critique - Mode asymétrique  $m = 1$ .

$$S = 0, \Gamma = 0, \Delta = -1$$

(a) en fonction de  $\rho$

(b) en fonction de  $We$

Les modes non axisymétriques présentent des nombres d'Alfvén critiques sensiblement plus faibles que pour le mode axisymétrique. Les actions stabilisatrices du champ magnétique et de la tension superficielle sont alors combinées, et quelle que soit la valeur du rapport de densité, le nombre d'Alfvén critique diminue linéairement avec le nombre de Weber (fig. 8.b).

⇒ **Circulation externe.**

La circulation externe, en présence du champ magnétique, conserve son pouvoir stabilisateur sur le mode axisymétrique mais dans la limite de rapport de masse volumique non nul puisque son influence est directement proportionnelle au nombre  $\rho$  ; c'est pourquoi les résultats ci-dessous sont dérivés exclusivement pour un rapport  $\rho = 1$ .

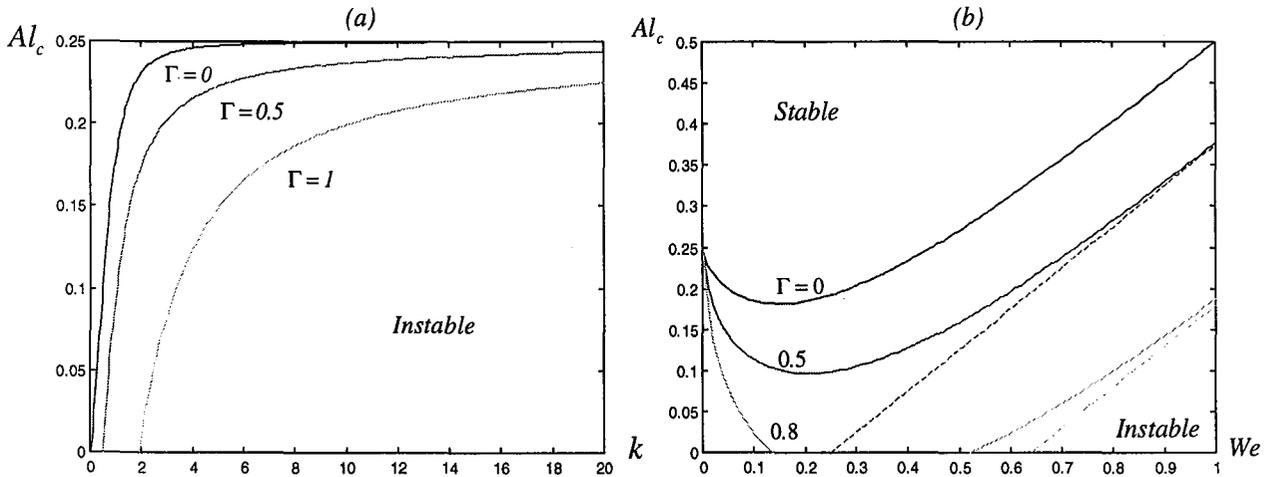


Fig. 9 : Nombre d'Alfvén critique - Mode axisymétrique.

$\rho = 1, S = 0, \Delta = -1$

(a) en fonction de  $k$

(b) en fonction du Weber, -----Valeurs asymptotiques (rel. 44)

Ainsi que le présente la figure 9.a, une augmentation de la circulation diminue la valeur du nombre d'Alfvén critique aux faibles nombres d'onde. La circulation externe agit en premier lieu sur les grandes longueurs d'ondes et ne modifie donc pas le nombre d'Alfvén critique stabilisant la couche de vortécité infiniment mince (cf. relation 42) ;

En introduisant la tension de surface, le nombre d'Alfvén critique évolue en fonction du nombre de Weber, du rapport de densité, de la circulation externe, mais surtout du mode azimutal. Ainsi, pour le mode axisymétrique (fig. 10.b), la circulation externe va largement élargir les zones de stabilité au détriment des zones d'instabilité capillaire ( $We \gg 1$ ) et de Kelvin-Helmholtz ( $We \ll 1$ ).

Dans le cas où l'instabilité capillaire domine, il nous a été possible d'étendre le résultat de Chandrasekhar en calculant la limite asymptotique du nombre d'Alfvén critique lorsque  $k \rightarrow \infty$  :

$$(44) \quad Al_c = 1/2(We - \rho\Gamma^2)$$

Pour les nombres d'onde azimutale non nuls, il convient bien sûr de différencier les co-rotations des contra-rotations. La figure 10.b nous montre que, pour le mode  $m = 1$ , le champ magnétique va augmenter les zones de stabilité, en commençant par les faibles longueurs d'ondes, et ceci aussi bien pour les rotations positives que négatives.

Cependant, le caractère plus instable des modes contrarotatifs, évoqué au chapitre précédent, est conservé puisque les nombres d'Alfvén critiques sont plus importants que ceux de co-rotation, phénomène valable aussi avec la présence de tension de surface (fig. 10.b). De manière générale, à rotation externe fixée, *les modes azimutaux rétrogrades sont plus difficiles à stabiliser par le champ que les modes co-rotatifs.*

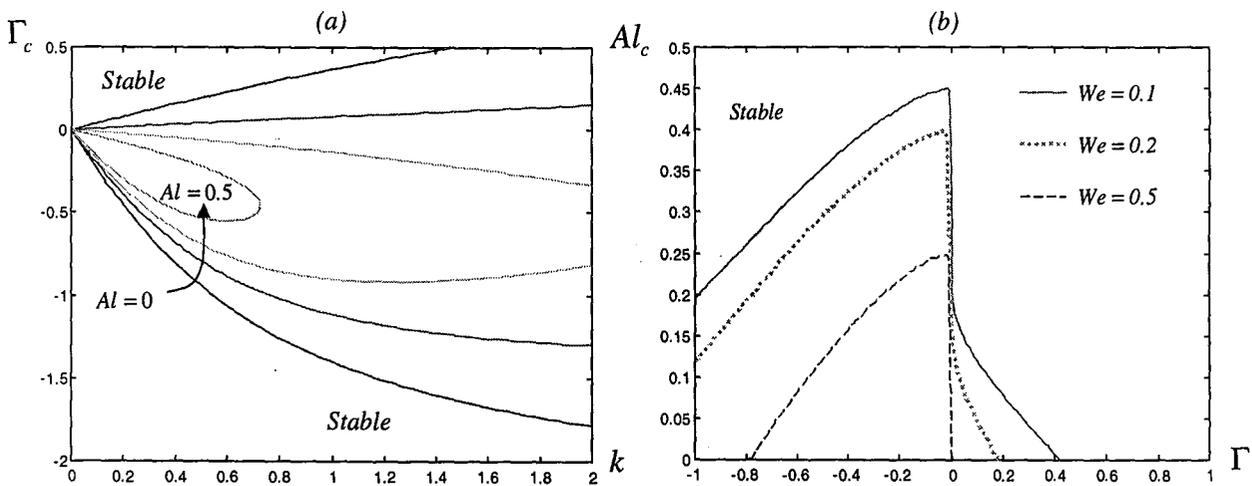


Fig. 10 : Influence de la circulation et du champ magnétique – Mode asymétrique  
 $m = 1, \rho = 1, S = 0, \Delta = -1$

(a) Circulation critique en fonction de  $k$  et du nombre d'Alfvén,  $We = 0$   
 (b) Nombre d'Alfvén critique en fonction de  $\Gamma$  et du nombre de Weber

### 3.4.2 Avec rotation solide

Lorsqu'une rotation du jet est imposée, il n'est plus possible de résoudre analytiquement pour  $\omega(k)$  l'équation de dispersion (39) : la résolution est alors opérée numériquement grâce au logiciel Matlab.

A l'instar des résultats du paragraphe précédent, le champ magnétique conserve son efficacité stabilisatrice sur l'ensemble des modes azimutaux. Que le jet soit seul en rotation (sans circulation externe), que le rapport de densité soit nul ou non et quel que soit le mode azimutal, *le champ magnétique diminue largement les taux de croissance temporelle.* Lorsque la densité extérieure est nulle, le champ magnétique s'oppose uniquement à l'instabilité centrifuge due à la rotation du jet. Ainsi, pour le mode axisymétrique, la diminution des taux de croissance s'accompagne d'une migration du maximum d'instabilité vers les grandes longueurs d'ondes (cf.

figure 11.a). La stabilisation totale par le champ se termine donc par des longueurs d'ondes bien supérieures au rayon du jet.

La figure 11.a illustre le phénomène de stabilisation du champ magnétique : *plus le champ magnétique est intense, plus la stabilisation est importante pour tout nombre de swirl*. Par exemple, à rotation constante lorsque le nombre d'Alfvén est doublé, le taux de croissance d'amplification maximale est divisé environ par un facteur 2.

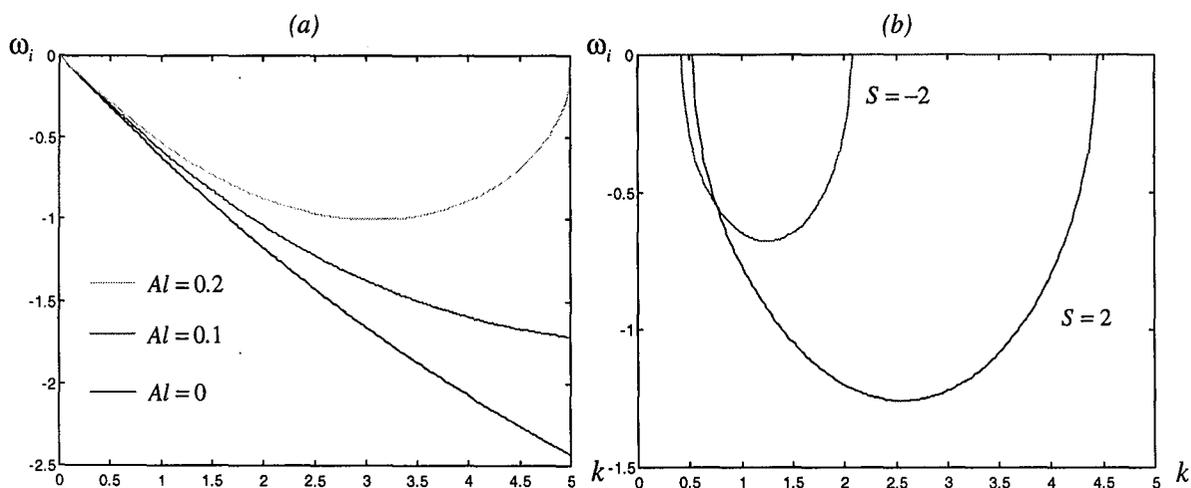


Fig. 11 : Influence du champ magnétique sur le jet tournant

(a)  $m = 0, \rho = 0, S = 1.4$

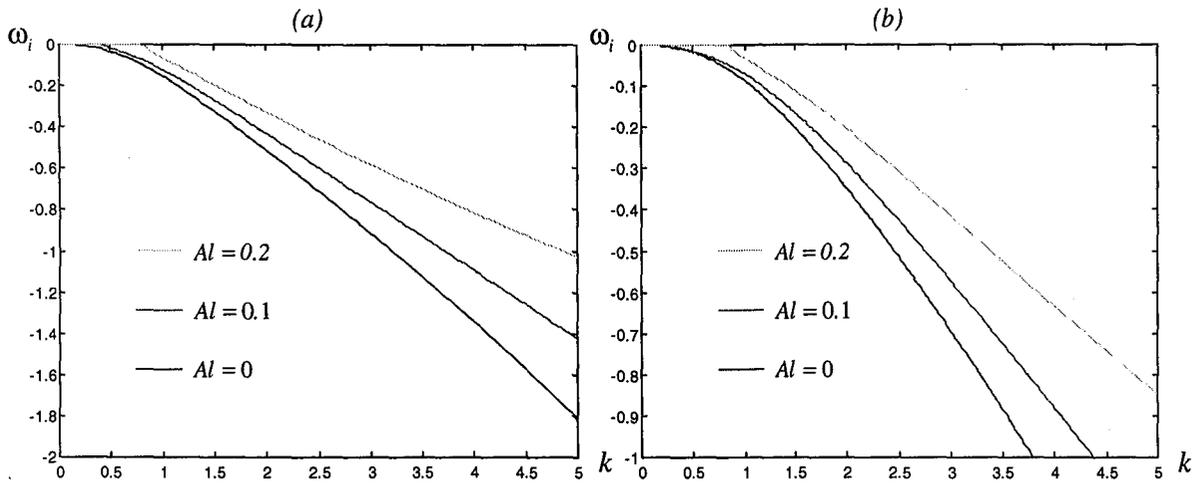
(b)  $m = 1, \rho = 1$

Pour les modes asymétriques (11.b), l'instabilité d'amplification maximale se déplace elle aussi vers des longueurs d'ondes de plus en plus grandes avec l'augmentation du champ mais les perturbations les plus instables tendent alors vers une longueur caractéristique de l'ordre du rayon du jet.

Si le rapport de densité n'est pas nul, la stabilisation du champ magnétique diminue, celui-ci devant stabiliser les instabilités centrifuges et en plus celles de cisaillement. Il est à noter que le champ magnétique ne modifie en rien le fait que *les modes co-grades restent plus amplifiés que les modes en rétrogrades*.

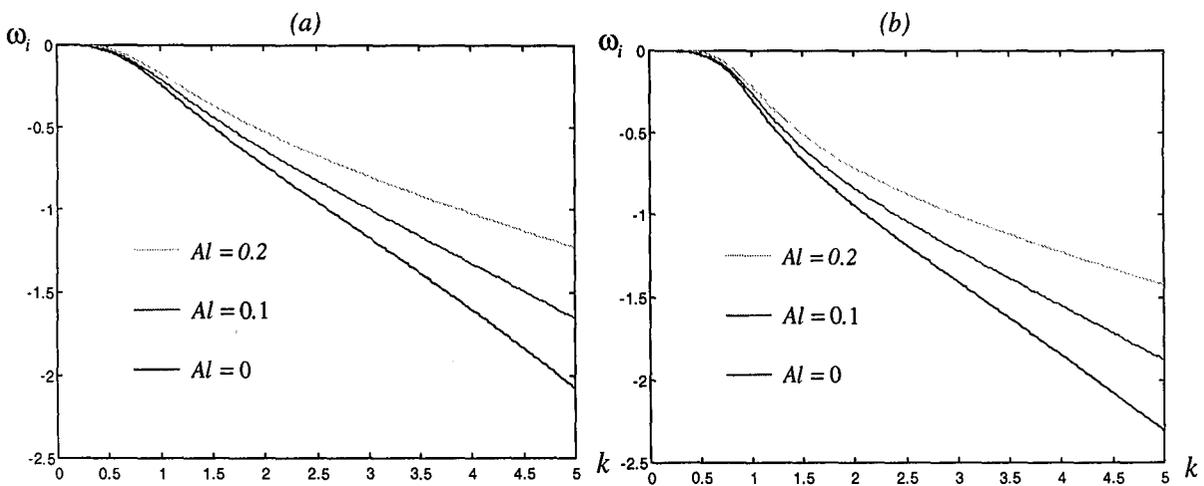
Une configuration intéressante à traiter est le cas où la circulation externe n'est pas nulle et en particulier lorsque la vitesse azimutale est continue à la traversée de l'interface, c'est-à-dire  $\Gamma = S$ . Nous l'avons évoqué au chapitre II, la rotation est globalement stabilisatrice dans ce cas de figure et l'introduction du champ magnétique va alors renforcer la stabilisation centrifuge.

Dans la situation de perturbations azimutales tournant dans le même sens que la rotation du jet, chaque mode fait apparaître une bande neutre qui s'élargit avec le nombre d'Alfvén, le mode le plus amplifié restant toujours le mode axisymétrique (cf. figure 12.a).



*Fig. 12 : Influence du champ magnétique sur le Tourbillon de Rankine*  
 $\rho=1, We=0, S=2, \Gamma=S, \Delta=-1$   
 (a) Taux de croissance pour  $m=0$   
 (b) Taux de croissance pour  $m=1$

Pour les modes rétrogrades, comme indiqué sur la figure 13, la situation s'inverse : il n'existe plus de bande neutre et les modes les plus amplifiés correspondent aux grands nombres azimutaux.



*Fig. 13 : Influence du champ sur le tourbillon de Rankine - Modes asymétriques.*  
 $\rho=1, S=-2, \Gamma=S, \Delta=-1$   
 (a) Taux de croissance pour  $m=1$   
 (b) Taux de croissance pour  $m=2$

## 4. Modèles à nombre de Reynolds magnétique quelconque

Dans toutes les analyses de stabilité temporelle effectuées pour les jets conducteurs, cités jusqu'à présent, aucune ne tenait compte d'une conductivité finie du jet, soit d'un nombre de Reynolds magnétique de valeur fini. Seul Chandrasekhar<sup>1</sup> a abordé le problème pour un jet capillaire non tournant et exclusivement pour le mode axisymétrique et comme il le dit lui-même : « il est important d'établir comment une résistivité finie modifie la suppression de l'instabilité capillaire d'un jet de liquide en présence d'un champ axial » (Chapitre XII, p. 545). L'étude effectuée est intéressante par la détermination des fonctions propres des perturbations, mais reste sommaire et les résultats donnés sur l'influence de la résistivité sont très succincts et limités au cas des grandes résistivités. Une autre étude que l'on se doit de citer est celle de Wilson<sup>8</sup> concernant l'influence d'un champ magnétique parallèle à une colonne de fluide conducteur en rotation. Motivée par l'étude des techniques de zone flottante utilisée pour la croissance des cristaux, l'auteur présente des résultats de stabilité dans le cas de fluides visqueux et résistifs pour arriver à la conclusion qu'un champ magnétique ne peut stabiliser totalement les perturbations axisymétriques si le fluide n'a pas une conductivité infinie.

Au vu de ces travaux, il nous est apparu important de compléter notre étude menée pour des fluides parfaitement conducteurs par une extension de notre modèle à des nombres de Reynolds magnétiques quelconques. La configuration de l'écoulement de base reste celle du paragraphe précédent (cf. fig. 1), le jet est en rotation solide, l'extérieur possède une vitesse azimutale potentielle. Le seul changement est l'introduction du terme diffusif dans l'équation de l'induction (17).

### 4.1 Détermination des champs perturbés

L'introduction du nombre de Reynolds magnétique ne modifie en rien les solutions déjà obtenues pour l'extérieur du jet, les fonctions propres déterminées précédemment sont donc toujours valables. Nous allons uniquement nous attacher à déterminer les champs perturbés du jet et à les injecter dans les conditions de passage à l'interface. Ces conditions sont les mêmes que dans le modèle précédent avec en plus la condition de raccordement des composantes tangentielles du champ magnétique à l'interface entre les deux fluides.

Ces dernières, vérifiées pour le champ de base, donnent à l'ordre  $\varepsilon$  :

$$(45) \quad h_{\theta_0}(R_0) = h_{\theta_1}(R_0) \quad \text{et} \quad h_{z_0}(R_0) = h_{z_1}(R_0)$$

Les équations linéarisées du mouvement ne sont pas modifiées. Quant aux équations de l'induction, en reprenant les notations du paragraphe 3.2, elles font intervenir maintenant la conductivité  $\gamma$  du fluide considéré :

$$(46) \quad \begin{cases} (\omega + m\Omega_0 + kU_0)h_{r_0}(r) + \frac{i}{\mu_0\gamma} \left( h_{r_0}''(r) + \frac{h_{r_0}'(r)}{r} - (m^2 + 1 + k^2 r^2) \frac{h_{r_0}(r)}{r^2} - \frac{2m}{r^2} h_{\theta_0}(r) \right) = kH_0 u_{r_0} \\ (\omega + m\Omega_0 + kU_0)h_{\theta_0}(r) + \frac{i}{\mu_0\gamma} \left( h_{\theta_0}''(r) + \frac{h_{\theta_0}'(r)}{r} - (m^2 + 1 + k^2 r^2) \frac{h_{\theta_0}(r)}{r^2} - \frac{2m}{r^2} h_{r_0}(r) \right) = kH_0 u_{\theta_0} \\ (\omega + m\Omega_0 + kU_0)h_{z_0}(r) + \frac{i}{\mu_0\gamma} \left( h_{z_0}''(r) + \frac{h_{z_0}'(r)}{r} - (m^2 + k^2 r^2) \frac{h_{z_0}(r)}{r^2} \right) = kH_0 u_{z_0} \end{cases}$$

L'écriture du système (46) peut être simplifiée en posant les changements de variables suivants :

$$(47) \quad \begin{cases} U_0(r) = i(u_{\theta_0} - u_{r_0}) \\ V_0(r) = i(u_{\theta_0} + u_{r_0}) \\ W_0(r) = iu_{z_0} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X_0(r) = (h_{\theta_0} - h_{r_0}) \\ Y_0(r) = (h_{\theta_0} + h_{r_0}) \\ Z_0(r) = h_{z_0} \end{cases}$$

En tenant compte de ces changements de variables, les équations du mouvement, réduites par rapport aux grandeurs caractéristiques  $(U_0, R_0, \rho_0, H_0)$ , se mettent sous la forme suivante :

$$(48) \quad \begin{cases} i(\alpha - 2S)U_0(r) = \frac{m\Pi_0(r)}{r} + \frac{\partial\Pi_0(r)}{\partial r} - Alk X_0(r) \\ i(\alpha + 2S)V_0(r) = \frac{m\Pi_0(r)}{r} - \frac{\partial\Pi_0(r)}{\partial r} - Alk Y_0(r) \\ i\alpha W_0(r) = k\Pi_0(r) - Alk Z_0(r) \end{cases}$$

où  $\alpha = \omega + mS + k$ .

L'équation de l'induction (46) s'écrit quant à elle :

$$(49) \quad \begin{cases} X_0''(r) + \frac{X_0'(r)}{r} - \left( \frac{(m-1)^2}{r^2} + k^2 + i\alpha Re_m \right) X_0(r) = -k Re_m U_0(r) \\ Y_0''(r) + \frac{Y_0'(r)}{r} - \left( \frac{(m+1)^2}{r^2} + k^2 + i\alpha Re_m \right) Y_0(r) = -k Re_m V_0(r) \\ Z_0''(r) + \frac{Z_0'(r)}{r} - \left( \frac{m^2}{r^2} + k^2 + i\alpha Re_m \right) Z_0(r) = -k Re_m W_0(r) \end{cases}$$

Il convient bien sûr d'ajouter les équations de continuité du champ de vitesse (29) et du champ magnétique :

$$(50) \quad \begin{cases} V_0'(r) - U_0'(r) + \frac{m+1}{r} V_0(r) + \frac{m-1}{r} U_0(r) + 2kW_0(r) = 0 \\ Y_0'(r) - X_0'(r) + \frac{m+1}{r} Y_0(r) + \frac{m-1}{r} X_0(r) + 2kZ_0(r) = 0 \end{cases}$$

Motivé par la forme des équations (48) et (49), la recherche des solutions propres est effectuée pour des fonctions de la forme :

$$(51) \quad \begin{array}{ll} U_0(r) = A_1 I_{m-1}(qr) & X_0(r) = D_1 I_{m-1}(qr) \\ V_0(r) = B_1 I_{m+1}(qr) & \text{et} \quad Y_0(r) = E_1 I_{m+1}(qr) \\ W_0(r) = C_1 I_m(qr) & Z_0(r) = F_1 I_m(qr) \quad \Pi_0(r) = \pi I_m(qr) \end{array}$$

La base des fonctions de Bessel modifiées de secondes espèces  $K_m$  a été volontairement exclue du fait de leurs singularités en  $r=0$ . En remplaçant les expressions (51) dans les équations de l'induction et du mouvement, il est possible d'établir une relation entre les coefficients du champ, de la vitesse et ceux de la pression. L'injection de ces coefficients dans les équations de continuité nous amènent à une équation portant sur l'argument  $q$ . Mais avant tout, examinons les solutions particulières.

### Cas particuliers :

⇒ Sans rotation

Si la rotation solide du jet n'est pas prise en compte les arguments des fonctions de Bessel sont les suivants :

$$(52) \quad \begin{cases} q_1(k) = k \\ q_2(k) = \sqrt{k^2 + iRe_m \frac{\alpha^2 - A k^2}{\alpha}} \end{cases}$$

Ce résultat est en accord avec les solutions non réduites obtenues par Chandrasekhar pour le mode axisymétrique.

⇒ Sans champ magnétique

Maintenant si le champ magnétique de base est supprimé, les vitesses perturbées n'interviennent plus dans l'équation de l'induction et inversement le champ magnétique perturbé n'intervient plus dans les équations de Navier-Stokes à l'ordre  $\varepsilon$ .

Les fonctions propres sont les suivantes :

$$(53) \quad I_m(\beta r) \quad \text{avec} \quad \beta = \sqrt{-\frac{4S^2 - \alpha^2}{\alpha^2}} k \quad \text{pour le champ de vitesse et}$$

$$(54) \quad I_m\left(\sqrt{k^2 + i\alpha Re_m r}\right) \quad \text{pour le champ magnétique.}$$

Le facteur  $\alpha$  étant dépendant du profil de vitesse du jet (cf. Eq. 48).

Les problèmes de stabilité hydrodynamique et magnétique deviennent presque "découplés". Presque, car l'équation du champ magnétique fait toujours intervenir les vitesses de l'écoulement de base. D'un côté, une analyse de stabilité purement hydrodynamique doit être menée sur le champ de vitesse, tandis qu'une autre doit l'être sur le champ magnétique perturbé. Ces deux analyses restent indépendantes, si les champs hydrodynamiques et magnétiques restent dans leurs configurations stables.

*A contrario*, si par exemple le champ magnétique devient instable, il peut alors croître de façon exponentielle plus rapide que la perturbation de vitesse et intervenir via les termes quadratiques de l'équation de Navier-Stokes ; la vitesse perturbée devant contrebalancer cette croissance, le

système va alors s'accoupler. Ce cas de figure où l'écoulement de base amène à une amplification d'un germe de champ magnétique est désigné sous le nom d'*effet dynamo*.

A l'origine du champ magnétique terrestre, ce phénomène de transfert de l'énergie hydrodynamique vers l'énergie magnétique est aujourd'hui largement étudié dans la communauté scientifique. Bien que cela ne soit pas encore mis vraiment en évidence, l'effet dynamo pourrait aussi se manifester dans les centrales nucléaires de type réacteur à neutrons rapides (Soto<sup>9</sup> 1999), du fait des dimensions caractéristiques importantes et de l'utilisation d'un fluide conducteur pour le refroidissement.

Une des modélisations théoriques de dynamo en milieu fluide a été proposée par Ponomarenko<sup>9</sup>. Elle consiste en un jet de fluide conducteur mis en rotation solide au sein d'un milieu extérieur au repos, mais lui aussi conducteur. L'analyse de stabilité linéaire du champ montre alors qu'il est possible d'engendrer un effet dynamo pour un nombre de swirl de 1.3 et un nombre de Reynolds magnétique de 11.7 (avec un nombre de Reynolds magnétique basé uniquement sur la vitesse axiale). Notre modélisation ne comportant pas de fluide extérieur conducteur, l'effet dynamo ne peut intervenir. La stabilité de notre système reste donc purement hydrodynamique et a été déjà évoquée dans le chapitre II.

### **Cas général :**

Si aucun paramètre de contrôle n'est annulé, les relations entre les coefficients du champ, de la vitesse et ceux de la pression sont déterminées par les équations (48) et (49) :

$$D_1 = \frac{Re_m k}{k^2 - q + i\alpha Re_m} A_1, \quad E_1 = \frac{Re_m k}{k^2 - q + i\alpha Re_m} B_1, \quad F_1 = \frac{Re_m k}{k^2 - q + i\alpha Re_m} C_1$$

$$A_1 = -i \frac{q(k^2 - q^2 + i\alpha Re_m)}{(\alpha - 2S)(k^2 - q^2 + i\alpha Re_m) - iAlk^2 Re_m} \pi,$$

$$B_1 = i \frac{q(k^2 - q^2 + i\alpha Re_m)}{(\alpha + 2S)(k^2 - q^2 + i\alpha Re_m) - iAlk^2 Re_m} \pi,$$

$$C_1 = -i \frac{k(k^2 - q^2 + i\alpha Re_m)}{\alpha(k^2 - q^2 + i\alpha Re_m) - iAlk^2 Re_m} \pi.$$

Les expressions des coefficients sont alors injectées dans les équations de continuité (50), la détermination des arguments peut être alors obtenue grâce à une équation polynomiale du sixième degré que l'on peut réduire à un troisième degré en posant  $Q = \sqrt{q}$  :

$$(55) \quad \begin{aligned} & Q^3 + \frac{(2i\alpha Re_m(k^2 - \alpha^2) + (4S^2 - \alpha^2)k^2)}{\alpha^2} Q^2 \\ & - \frac{\left( (\alpha^2 - Alk^2)^2 Re_m^2 + 4i\alpha Re_m(2S^2 - \alpha^2 + Alk^2) + k^4(8S^2 - 3\alpha^2) \right)}{\alpha^2} Q \\ & + \frac{k^6(\alpha + 2S)(\alpha - 2S) + 2i\alpha Re_m(4S^2 - \alpha^2 + Alk^2)}{\alpha^2} \\ & + \frac{k^2 Re_m^2(\alpha(\alpha + 2S) - Alk^2)(\alpha(\alpha - 2S) - Alk^2)}{\alpha^2} = 0 \end{aligned}$$

En notant cette équation  $Q^3 + A(k)Q^2 + B(k)Q + C(k) = 0$ , les arguments solutions sont les suivants :

$$(56) \quad \begin{aligned} q_1(k) &= \sqrt{\frac{K_1(k)^{1/3}}{6} - 6K_2(k) - \frac{A(k)}{3}} \\ q_2(k) &= \sqrt{-\frac{K_1(k)^{1/3}}{12} + 3C_2(k) - \frac{A(k)}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{K_1(k)^{1/3}}{6} + 6K_2(k) \right)} \\ q_3(k) &= \sqrt{-\frac{K_1(k)^{1/3}}{12} + 3C_2(k) - \frac{A(k)}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{K_1(k)^{1/3}}{6} + 6K_2(k) \right)} \end{aligned}$$

Les coefficients  $K_1(k)$  et  $K_2(k)$  sont définis par :

$$(57) \quad \begin{aligned} K_1(k) &= 36B(k)A(k) - 108C(k) - 8A(k)^3 \\ &+ 12\sqrt{12B(k)^3 - 3B(k)^2 A(k)^2 - 54A(k)B(k)C(k) + 81C(k)^2 + 12C(k)A(k)^3} \end{aligned}$$

et

$$(58) \quad K_2(k) = \frac{\frac{B(k)}{3} - \frac{A(k)^2}{9}}{K_1(k)^{1/3}}$$

La solution générale des fonctions propres est une combinaison des trois solutions indépendantes correspondant aux différentes valeurs de  $q_i$  ( $i=1,2,3$ ). Par exemple, la 3<sup>ème</sup> composante du champ de vitesse s'écrit :

$$(59) \quad W_0(r) = \sum_{i=1}^3 w_i(r) \quad \text{avec} \quad w_i(r) = C_i(k) I_m(q_i r).$$

Les fonctions  $U_0(r), V_0(r), X_0(r), Y_0(r), Z_0(r)$  et  $\Pi_0(r)$  prenant des expressions similaires, il est possible de déterminer les six constantes inconnues  $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, G, H, \eta)$  grâce aux six conditions aux limites (38.1) à (38.4) et (44). En remplaçant les solutions générales au sein des conditions aux limites, un système homogène de six équations à six inconnues est obtenu, système qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$(60) \quad M.(\pi_1, \pi_2, \pi_3, G, H, \eta) = 0$$

Les éléments de la matrice  $M$ , évaluée en  $r = 1$ , sont donnés par :

$$(61) \quad M_{1i} = \left( We(1 - k^2 - m^2) + \frac{\partial P_0}{\partial r}(r) - \frac{\partial P_1}{\partial r}(r) \right) \eta + p_0(r) - p_1(r) + Al(h_{z_0}(r) - h_{z_1}(r))$$

$$(62) \quad M_{2i} = X_0(r) - X_1(r)$$

$$(63) \quad M_{3i} = Y_0(r) - Y_1(r)$$

$$(64) \quad M_{4i} = Z_0(r) - Z_1(r)$$

$$(65) \quad M_{5i} = 2i\alpha\eta + U_0(r) - V_0(r)$$

$$(66) \quad M_{6i} = 2i(\omega + (1 + \Delta)k + m\Gamma)\eta + U_1(r) - V_1(r)$$

Ce système admet une solution non triviale si le déterminant de la matrice 6 x 6 est nul, cette condition permet d'obtenir une relation entre la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde axiale  $k$ .

Elle est équivalente à la détermination d'une équation de dispersion, difficile à expliciter dans notre cas. Nous allons ainsi résoudre dans ce qui suit l'expression suivante :

$$(67) \quad D(\omega, k, m, R_i) = \det(M) = 0$$

#### 4.2 Influence du Reynolds magnétique sur la stabilité temporelle

Nous l'avons vu précédemment, pour un fluide parfaitement conducteur le champ magnétique a toujours une influence stabilisatrice sur tous les types d'instabilités, qu'elles soient issues du cisaillement, de la tension de surface ou d'origine centrifuge. Cependant, on comprend bien que cet aspect stabilisateur du champ soit fortement lié à la résistivité électrique du fluide considéré. En effet, un fluide parfaitement résistif ne pouvant laisser passer de courants en son sein, il ne sera pas soumis aux forces magnétiques. La présence ou l'absence d'un champ magnétique extérieur n'a alors aucune influence sur la stabilité du système.

Nous nous sommes attachés dans ce qui suit à faire varier le nombre de Reynolds magnétique à nombre d'Alfvén constant et ceci pour les différents types d'instabilités, afin d'évaluer l'impact de la conductivité.

Nous avons représenté, sur la figure ci-dessous, les courbes de taux de croissance de l'instabilité de cisaillement, pour plusieurs nombres de Reynolds magnétiques. Malgré la présence du champ magnétique, lorsque le nombre de Reynolds magnétique est nul nous retrouvons bien un taux de croissance strictement égal au cas du jet libre avec l'emploi de la relation de dispersion (65).

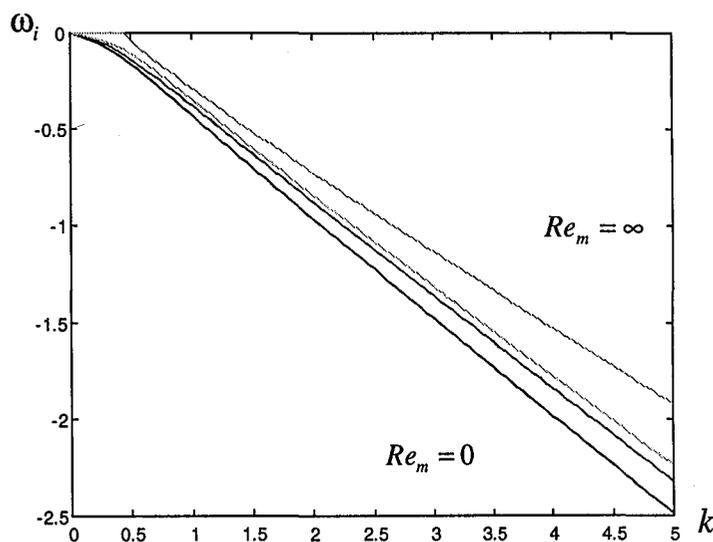


Fig. 14 : Influence du Reynolds magnétique sur la couche de cisaillement du jet submergée – Mode axisymétrique

$Al = 0.1, \rho = 1, We = 0, S = 0, \Gamma = 0, \Delta = -1$  et  $Re_m = 0, 50, 500, \infty$

Comme on le constate, une augmentation de la conductivité s'accompagne d'une diminution des taux de croissance jusqu'à la limite du fluide infiniment conducteur. Aux alentours de  $Re_m = 500$ , la stabilité du système ne peut tout de même pas être assimilée à celle d'un fluide parfaitement conducteur. Qualitativement, les grands nombres d'ondes restent toujours les plus amplifiés. Une autre conséquence de l'introduction du nombre de Reynolds est la suppression de la bande neutre à grandes longueurs d'ondes.

En fait, la limite du nombre de Reynolds magnétique à partir de laquelle il est possible d'assimiler le fluide à un conducteur parfait varie avec le nombre d'Alfvén. En l'occurrence, si l'on se fixe un écart relatif de 10% entre les taux de croissance du fluide parfaitement conducteur et le cas réel, le nombre de Reynolds magnétique nécessaire sera plus important lorsque le nombre d'Alfvén est faible.

Si une rotation est imposée au jet, l'influence du Reynolds magnétique devient beaucoup plus importante comparativement à son influence sur l'instabilité de couche de mélange (fig. 15.a). Les modes non axisymétriques ne répondent pas de la même façon, la figure 15.b nous montre ainsi que pour le mode  $m = 2$ , malgré l'imposition de nombres de Reynolds magnétiques importants les grands nombres d'ondes ne sont pas stabilisés contrairement au cas où  $Re_m = \infty$ .

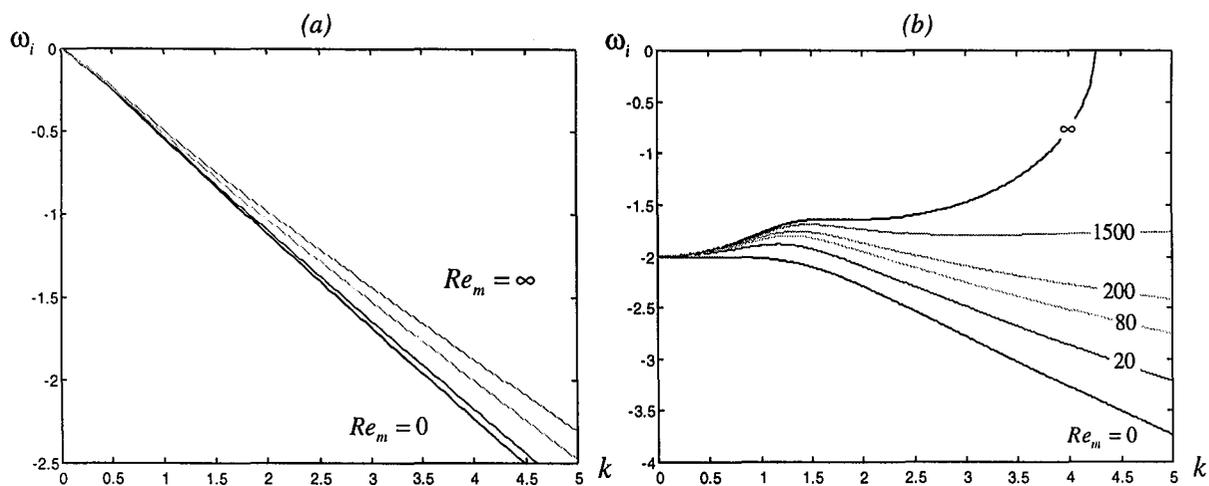


Fig. 15 : Influence du Reynolds magnétique sur le jet tournant  
 $\rho = 1, We = 0, \Gamma = 0, \Delta = -1$   
 (a)  $m = 0, Al = 0.1, S = 1$  et  $Re_m = 0, 20, 200$  et  $\infty$   
 (b)  $m = 2, Al = 0.5, S = 2$  et  $Re_m = 0, 20, 80, 200, 1500$  et  $\infty$

Quant à l'instabilité capillaire du mode axisymétrique, elle répond de façon similaire à ce que nous venons d'exposer ci-dessus, plus le nombre de Reynolds magnétique est élevé, plus la stabilisation par le champ magnétique est importante (fig. 16.a).

Une autre possibilité de visualiser l'effet du nombre de Reynolds magnétique est de suivre l'évolution du taux de croissance pour un nombre d'onde fixé. Nous nous sommes donc placés à  $k_0 = 0.6$ , non loin de l'amplification maximale de l'instabilité de tension de surface lorsque le fluide n'est pas conducteur et nous avons fait varier la valeur du  $Re_m$  de 0 à 5000 (fig. 16.b).

Il est clair que les taux de croissance sont influencés surtout pour les Reynolds magnétiques de l'ordre de la centaine ; cependant à fort nombre de Reynolds (de l'ordre de quelque milliers) les taux de croissance présentent encore un écart d'environ 30 % par rapport à la valeur à  $Re_m = \infty$ . Encore une fois, cet écart est affaibli lorsque le nombre d'Alfvén est plus important.

A l'échelle du laboratoire, il est impossible d'atteindre de telles valeurs de Reynolds magnétique, ce qui laisse présupposer qu'une stabilisation totale par un champ magnétique est difficile, voire impossible. Ce résultat abonde dans le sens de celui Wilson<sup>8</sup>.

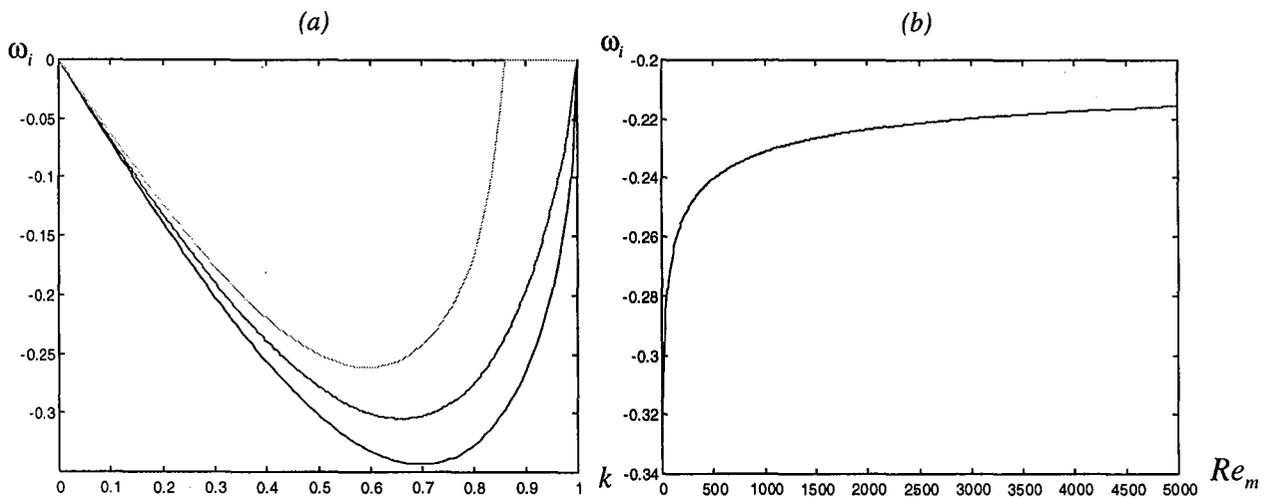


Fig. 17 : Influence de la conductivité sur le jet capillaire – Mode axisymétrique.

$$\rho = 1, We = 1, S = 0, \Gamma = 0, \Delta = -1$$

$$(a) Al = 0.1, Re_m = 0, 80 \text{ et } \infty$$

$$(b) Al = 0.2, k_0 = 0.6$$

## Conclusions de l'étude temporelle

A partir de tous les cas de figure que nous avons dérivés dans la partie précédente, nous pouvons énoncer quelques résultats généraux sur l'influence d'un champ magnétique axial sur les différents mécanismes d'instabilité d'un jet tournant de fluide conducteur :

⇒ Le champ magnétique a toujours un effet stabilisateur, les taux de croissance temporelle sont atténués au fur et à mesure que le champ magnétique s'accroît.

⇒ A nombre de Reynolds magnétique infini, le champ magnétique a le pouvoir de stabiliser aussi bien les instabilités de cisaillement, centrifuges ou même d'origine capillaire.

⇒ Dans la majorité des cas, une augmentation du nombre d'Alfvén entraîne une diminution du nombre d'onde axial le plus amplifié, les grandes structures devenant prépondérantes.

⇒ L'introduction d'un nombre de Reynolds fini ne modifie pas fondamentalement la qualité des résultats déjà obtenus, les taux de croissance temporelle sont toujours compris entre le cas d'un fluide infiniment résistif et celui d'un fluide parfaitement conducteur. Cependant, si le fluide possède une résistivité finie, il devient plus difficile de stabiliser les différentes instabilités. Ainsi pour l'instabilité primaire du jet rond submergé et sans rotation, la stabilisation de la couche de mélange est fonction de la valeur du nombre de Reynolds magnétique. Malgré l'imposition de grands nombres de Reynolds magnétique (de l'ordre de plusieurs centaines), la stabilisation du système reste moindre que celle équivalente à un nombre de Reynolds magnétique infini.

Bien que nous ayons éclairé l'influence du champ magnétique sur la stabilité d'un jet tournant capillaire, la présence du champ n'est pas synonyme d'état stable. Nous l'avons vu, en fonction des paramètres de contrôle, beaucoup de configurations restent temporellement instables. La question sous-jacente est donc la suivante : comment le champ magnétique va-t-il modifier la nature de l'instabilité, réduire les zones d'instabilité absolue ou au contraire les renforcer ? Afin de répondre à cette question, nous allons développer l'analyse de la nature des instabilités mises en œuvre par les différents mécanismes, qualifier et quantifier l'influence de la résistivité du fluide et du champ magnétique.

## 5. Transitions IA/IC

Nous l'avons au chapitre précédent, la nature de l'instabilité (convective ou absolue) est obtenue par la présence de pincement entre des branches spatiales amplifiées  $k^+(\omega)$  et atténuées  $k^-(\omega)$ . Lorsque le champ magnétique est rajouté à l'écoulement de base, aucun nouveau pincement n'est mis en jeu. Les points de pincement caractéristiques de la rotation du jet, de sa couche de mélange ou de la tension de surface sont quant à eux toujours existants. Mais la présence du champ va modifier leur lieu d'apparition dans le plan complexe  $(k_r, k_i)$  ainsi que la valeur des paramètres de contrôle associés aux pincements. Dans le prolongement du chapitre II, nous allons suivre les points de pincement qui délimitent les zones absolument instables des zones convectives, *i.e.*  $\omega_{i_0} = 0$ , en augmentant la valeur du nombre d'Alfvén. Dans un premier temps, les courbes étudiées correspondent au cas où le nombre de Reynolds magnétique est infini. Dans un second temps, nous nous intéressons tout logiquement à l'influence d'un nombre de Reynolds magnétique de valeur finie.

A partir de l'équation de dispersion (39), la recherche de la courbe marginale est opérée en résolvant le système suivant :

$$(68) \quad \begin{cases} D(\omega, k, R_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial k} D(\omega, k, R_i) = 0 \end{cases}$$

Bien sûr il convient de vérifier *a posteriori* que le point selle suivi numériquement correspond toujours à un point de pincement valide indépendamment de la valeur du nombre d'Alfvén. Lorsque le nombre de Reynolds magnétique est fini, la relation (67) doit être complétée normalement par une condition de gradient nul suivant la variable  $k$  de façon analogue au système (68). Mais dans cette situation, la relation de dispersion n'est plus explicite puisque qu'elle s'exprime à travers le déterminant d'une matrice.

Nous avons donc utilisé le fait que le déterminant est une forme multilinéaire. En effet, il est alors évident de calculer formellement la dérivée du déterminant en connaissant l'expression de chaque terme  $M_{ij}$  de la matrice :

$$(69) \quad \frac{\partial}{\partial k} \det(M) = \frac{\partial}{\partial k} \det(M \cdot \vec{e}_1, \dots, M \cdot \vec{e}_i, \dots, M \cdot \vec{e}_n) = \sum_{i=1}^n \det \left( M \cdot \vec{e}_1, \dots, \frac{\partial M}{\partial k} \cdot \vec{e}_i, \dots, M \cdot \vec{e}_n \right)$$

## 5.1 Fluide parfaitement conducteur

### 5.1.1 Tension de surface

Pour un jet de profil variable, la transition IA/IC due à la tension superficielle a été déterminée nous l'avons vu, par les travaux analytiques de Leib & Goldstein<sup>10</sup>. Ces derniers ont montré que le nombre de Weber critique qui distingue les deux natures d'instabilité était fonction du profil considéré. Ainsi pour un profil de type bouchon, la transition s'effectue pour une valeur de  $We_c = 0.32$ .

Nous sommes donc partis de ce point de transition et avons introduit un nombre d'Alfvén. Intéressons-nous maintenant au pincement mise en jeu par la tension de surface et le champ magnétique. Dans ce processus de pincement, trois branches spatiales différentes prennent part au processus.

Deux branches spatialement atténuées  $k_1^-(\omega)$  et  $k_2^+(\omega)$  viennent fusionner ponctuellement avec la branche spatialement amplifiée  $k_1^+(\omega)$ .

Lorsque  $\omega$  tend vers la fréquence absolue  $\omega_0$ , les trois courbes se déplacent l'une vers l'autre jusqu'au processus de pincement pour  $\omega = \omega_0$  (fig. 20).

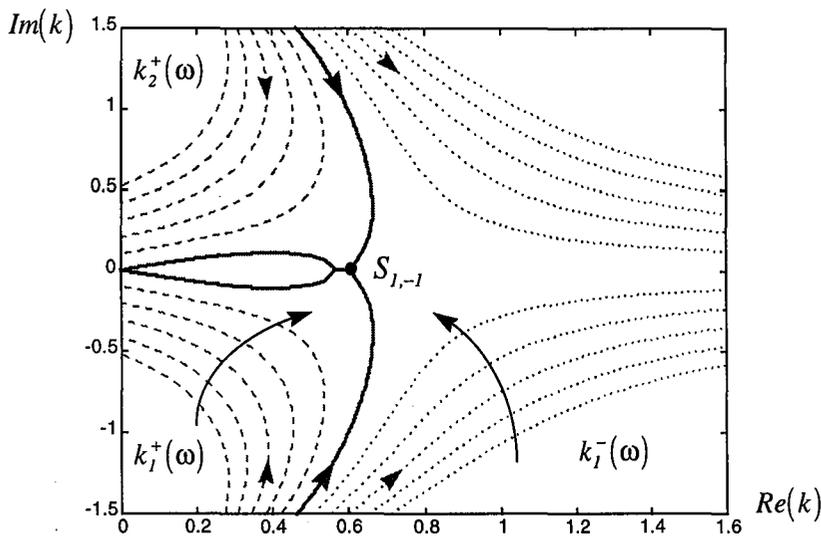


Fig. 20 : Progression des trois branches spatiales dans le plan  $k(\omega)$  correspondant à des lignes horizontales dans le plan  $\omega(k)$ ,  $m = 0$ ,  $We = 0.9003$ ,  $Al = 0.3$ . Les lignes en points, en tirets et en gras se rapportent respectivement à des valeurs négatives, positives et nulle de  $Im(\omega)$ . Les flèches sur les branches spatiales indiquent la direction de croissance de  $Re(\omega)$ . Les autres flèches représentent le mouvements des branches spatiales lorsque  $\omega$  tend vers la fréquence absolue. Le point selle  $S_{-1,1}$  est marquée par un point.

⇒ Transition due à la tension de surface.

Sur la figure 21, la courbe marginale séparant les deux types d'instabilité a été tracée pour le mode axisymétrique dans le plan  $(Al/We, We)$ . En l'absence de champ magnétique et pour  $\rho = 0$ , le nombre de Weber critique  $We = 0.32$  est retrouvé. Lorsque le nombre d'Alfvén augmente le nombre de Weber critique se déplace vers de plus grandes valeurs. Ainsi, pour un nombre de Weber donné, une augmentation du nombre d'Alfvén peut rendre convective l'instabilité capillaire et même la stabiliser (cf. paragraphe 3.2.1). En effet, la valeur critique du nombre d'Alfvén issue de l'analyse temporelle ( $Al_c = We/2$ ) est asymptotiquement retrouvée dans l'analyse spatio-temporelle.

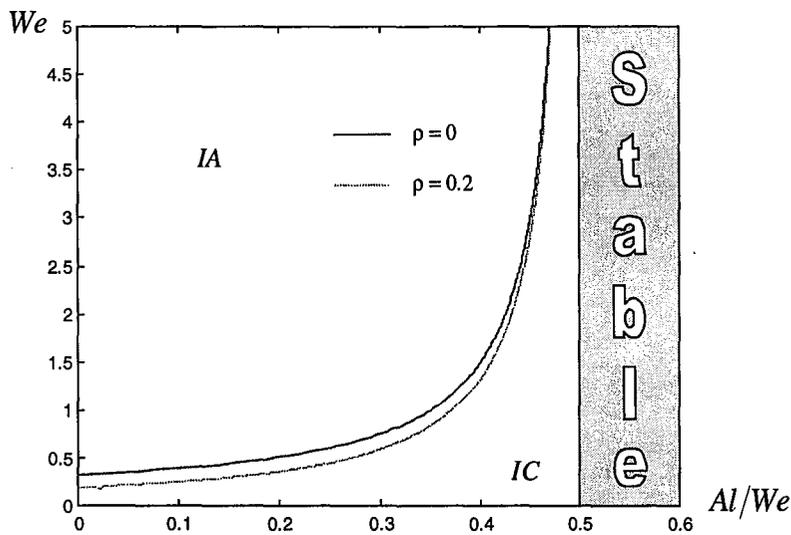


Fig. 21 : Influence du champ magnétique sur la transition capillaire – Mode axisymétrique

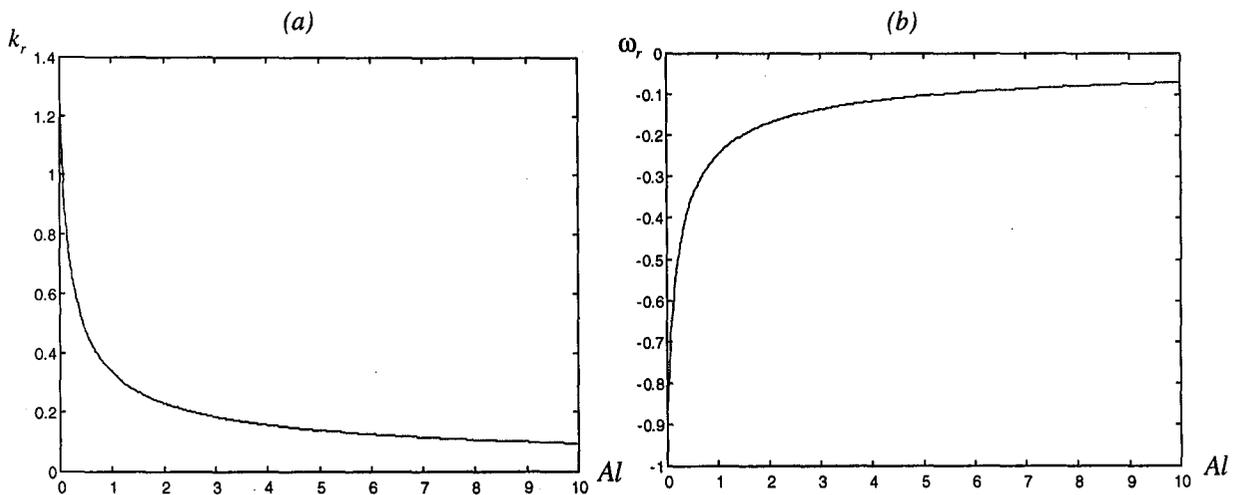


Fig. 22 : (a) Trajectoire du point selle  $k_r(We_c)$  en fonction du nombre d'Alfvén  
(b) Trajectoire du point selle  $\omega_r(We_c)$  en fonction du nombre d'Alfvén

Comme le montre la figure 22, la fréquence et le nombre d'onde axiale marginaux tendent vers 0 lorsque le nombre d'Alfvén augmente. Ceci tendrait à nous faire dire que l'instabilité de tension superficielle, sans se modifier fondamentalement en présence de champ magnétique (phénomène de goutte à goutte), devrait engendrer des structures de plus grande taille. Le champ magnétique impose des lignes de forces radiales et s'oppose à toute variation interfaciale, rejetant les variations à l'interface vers de grandes longueurs caractéristiques, conformément aux résultats de l'analyse temporelle.

L'influence du rapport de densité  $\rho$  affecte la courbe de transition en déplaçant les zones convectives dans des gammes de Weber plus faibles ; ainsi, la transition intervient à plus faible nombre de Weber. Une autre possibilité de mettre en relief l'influence de  $\rho$  consiste à tracer l'évolution de sa courbe marginale IA/IC en fonction du nombre d'Alfvén (fig. 23) en partant toujours de la transition due à la tension superficielle.

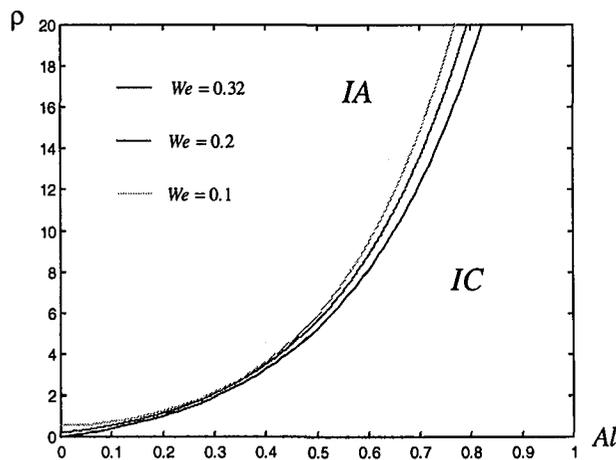


Fig. 23 : Influence du champ magnétique sur le rapport de masse volumique  $\rho$  critique  
Mode axisymétrique.

Comme il est possible de le constater sur les courbes de la figure 23, le nombre d'Alfvén conserve son efficacité stabilisatrice, tandis qu'une augmentation de la masse volumique du fluide externe amène le système à transiter vers un état absolument instable.

*Le champ magnétique donnerait ainsi la possibilité d'utiliser des fluides de rapport de masses volumiques assez faibles sans transiter vers l'instabilité absolue, ceci n'étant pas possible en son absence (cf. chapitre II).*

Malgré le fait que le mode axisymétrique soit souvent le plus étudié des modes azimutaux en terme de déclenchement d'instabilité pour les jets conducteurs (Loueslati & Brancher<sup>7</sup>, Shugai & Yakubenko<sup>6</sup>), il convient de vérifier que l'introduction du champ magnétique ne bouleverse pas cet état de fait et que pour les modes azimutaux non nuls, la tension de surface intervient toujours en tant que phénomène stabilisateur en ce qui concerne les transitions IA/IC. Nous avons donc multiplié les courbes de transition dues à la tension de surface pour plusieurs modes asymétriques, nous ne donnerons ici le résultat que pour les modes  $m = 1$  et  $m = 2$  car ils représentent les modes les plus dangereux après le mode axisymétrique.

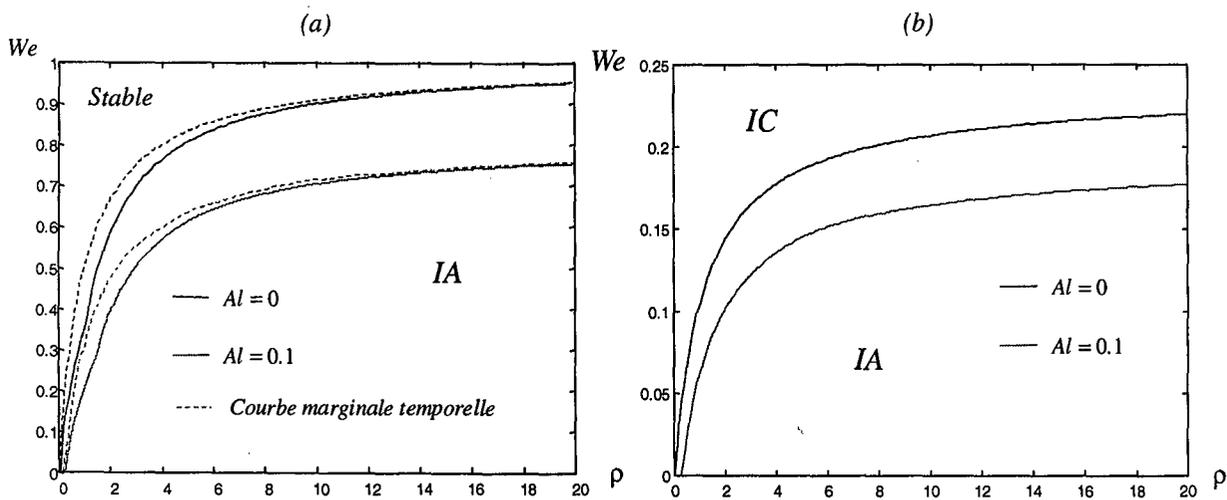


Fig. 24 : Influence du champ magnétique – Modes asymétriques  
(a)  $m = 1$   $Al=0$  et  $0.1$  (b)  $m = 2$

A rapport de masse volumique constant, les courbes de transition se situent dans des intervalles de nombres d'Alfvén et de Weber de valeurs inférieures à celles du mode axisymétrique (fig. 24.a). Similairement au mode  $m = 0$ , le champ magnétique diminue la zone d'instabilité absolue mais sans véritablement augmenter la zone convective, la diminution de la zone absolue s'effectuant au profit direct de la zone temporellement stable. Les modes asymétriques d'ordre élevé répondent au même protocole avec cependant des transitions à nombre de Weber encore plus faible (fig. 24.b). Nous pouvons donc conclure que pour le jet capillaire non tournant, la transition de l'instabilité convective vers l'instabilité absolue est « retardée » grâce à l'introduction du champ magnétique. Le mode axisymétrique reste toujours le mode prédominant de l'instabilité de « dripping ».

Nous allons nous intéresser maintenant à la combinaison du champ magnétique et de la rotation en bloc du jet.

⇒ Tension de surface et rotation.

Nous avons dérivé au chapitre II des résultats sur l'influence de la rotation du fluide interne sur l'instabilité d'origine capillaire. En adjoignant le champ magnétique, la zone absolument instable perd du terrain sur la zone convective (cf. figure 25). Et assez logiquement, *plus le champ magnétique est intense, plus la zone convective domine*.

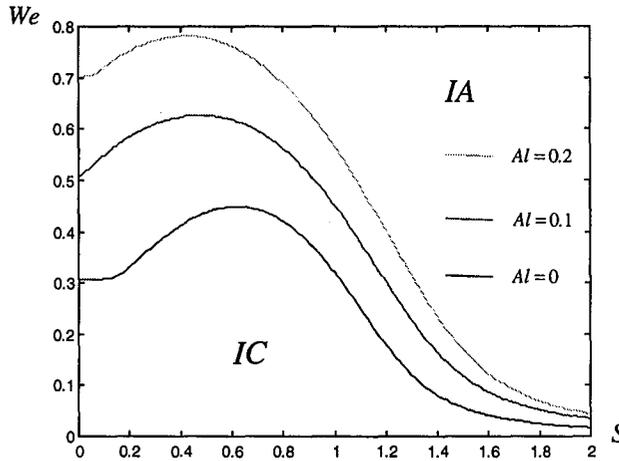


Fig. 25 : Evolution du nombre de Weber en fonction de  $S$  pour  $m = 0$ ,  $Al = 0$  et  $0.1$ .

Cependant, nous pouvons mettre en relief que l'influence du champ magnétique est plus profonde lorsque les swirls sont inférieurs à 1, et au-delà, malgré la présence du champ, les valeurs du nombre de Weber critique se rapprochent et tendent vers 0. Ainsi le champ magnétique permettrait, à nombre de swirl réduits, l'accès à des valeurs de nombre de Weber élevées sans pour autant induire de transition vers l'état absolu. Toutefois, son ascendance est plus équivoque à grands swirls. Afin de préciser l'influence du champ pour des grands swirls et des faibles nombres de Weber, nous nous sommes intéressé à l'évolution du swirl critique lorsque le nombre d'Alfvén augmente (fig. 26).

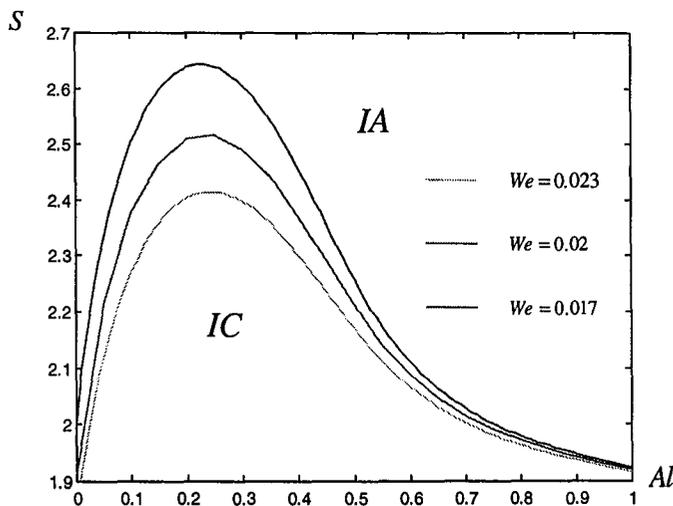


Fig. 26 : Evolution du nombre de swirl en fonction de  $Al$  pour  $m = 0$  et différents nombres de Weber.

La figure 26 montre clairement que dans cette gamme de swirl à partir d'un nombre d'Alfvén d'environ 0.25, le champ magnétique inverse son comportement. Après avoir élargi la zone convective, le processus s'inverse donc et il est même possible d'atteindre des zones absolument instables aux alentours de  $Al = 1$  alors que sans champ magnétique le système serait convectif. Notons au passage que ce comportement ambivalent du champ magnétique ne se retrouve pas à faible nombre de swirl, le champ étant alors toujours stabilisateur.

### 5.1.2 Jet chaud, cisaillement, rotation et champ magnétique

⇒ Sans rotation

Si on considère des jets dont la densité est voisine de celle du fluide extérieur, nous savons qu'il existe des transitions liées aux rapports de densité et à l'intensité de la couche de cisaillement. Intéressons-nous, dans un premier temps, au cas du jet chaud non tournant : nous avons vu que la transition IA/IC s'effectue pour  $\rho = 1.51$  lorsque le fluide extérieur est au repos, ou alors pour  $\Delta = -1.18$  lorsque  $\rho = 1$ . Cette auto-excitation du jet mise en évidence expérimentalement par Monkewitz & al.<sup>11</sup> s'effectue pour le mode axisymétrique.

Nous avons donc introduit le champ magnétique comme donnée supplémentaire. Sur la figure 27, la variation du nombre d'Alfvén, séparant les zones convectives des zones absolues, a été tracé en fonction du rapport de densité et ceci pour les modes azimuthaux  $m = 0, 1, 2,$  et  $3$ .

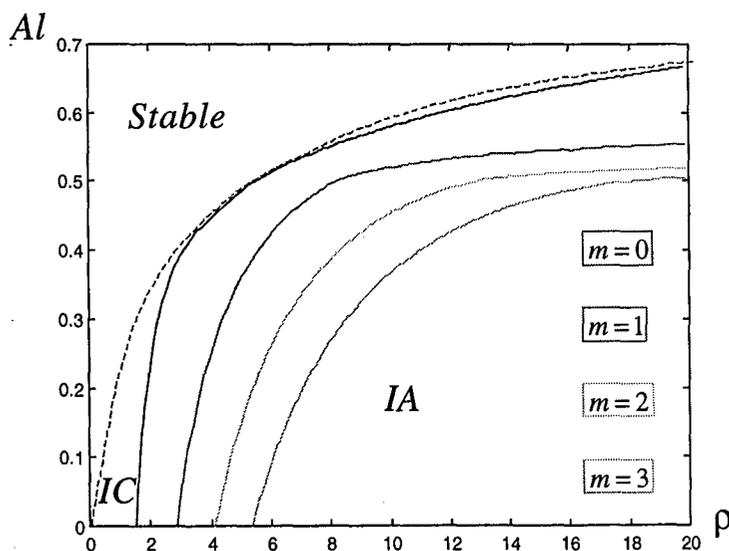


Fig. 27 : Evolution du nombre d'Alfvén en fonction de  $\rho$ .

Quel que soit le mode azimutal considéré, le champ magnétique permet de déplacer la zone absolument instable vers les grands rapports de densité. Cependant, et sans grande surprise, le mode axisymétrique reste le mode azimutal qui se déclenche en premier. Sa zone convective ne constitue pas une grande partie du diagramme, elle reste en effet comprimée entre les zones stable et absolument instable, nous pouvons même observer qu'aux environs de  $Al = 0.5, \rho = 5$ , il peut apparaître une transition directe entre l'état stable et l'état absolument instable.

En résumé, en présence d'un champ magnétique axial, il doit être possible de différer l'instabilité d'un jet de fluide conducteur se mélangeant à un fluide de densité plus importante.

La variation du paramètre de contre-courant ne change rien au caractère stabilisateur du champ magnétique, la diminution progressive de  $\Delta$  amenant tout de même à une augmentation de la zone absolue (fig. 28).

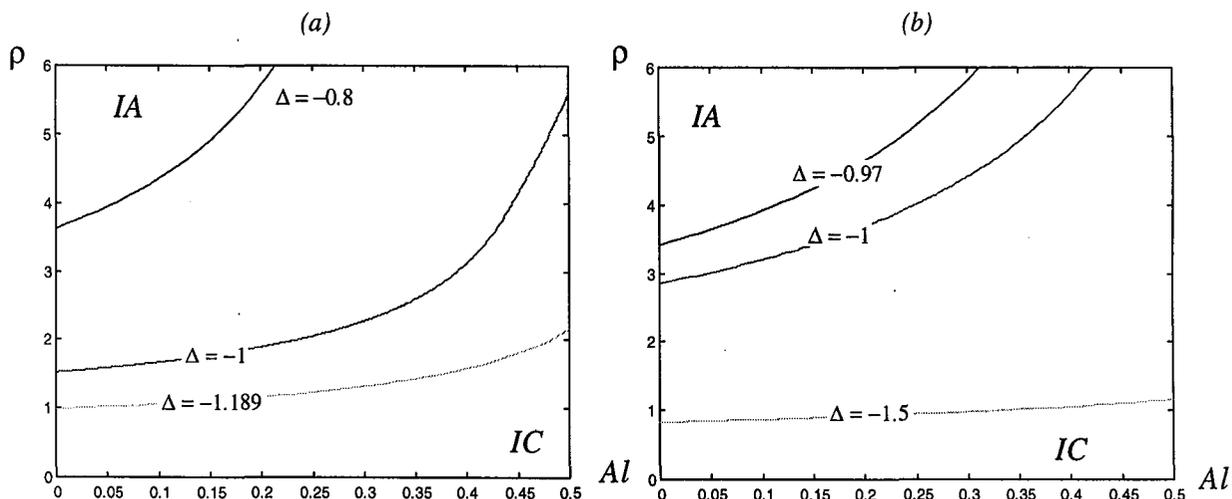


Fig. 28 : Evolution de  $\rho$  en fonction de  $Al$  pour différentes valeurs de contre-courant  
(a)  $m = 0$  (b)  $m = 1$

Nous allons poursuivre l'analyse de cette famille de points selles mais en introduisant les rotations externes et internes. En premier lieu, nous allons reprendre un modèle où la vitesse azimutale est continue à la traversée de l'interface (soit la configuration du tourbillon de Rankine). Nous l'avons évoqué au chapitre II, il existe plusieurs points selles qui interviennent les uns après les autres lors de la variation du paramètre de contrôle  $S$ .

⇒ Cas du tourbillon de Rankine

L'influence du champ magnétique peut être mise en lumière par l'analyse de l'évolution du rapport des densités  $\rho$  ou du paramètre de contre-courant  $\Delta$  en fonction de  $S$  et ceci pour plusieurs valeurs du nombre d'Alfvén.

La figure 29.a représente les courbes marginales  $\Delta_c(S)$  pour  $Al = 0, 0.5$  et  $0.8$  et nous indique qu'à faibles nombres de swirl ( $S < 0.5$ ) le champ magnétique amplifie la zone convectivement instable et qu'il est alors possible de diminuer la vitesse axiale de l'écoulement externe sans pour autant transiter. Il est à noter que les discontinuités des courbes sont dues aux croisements successifs des différents points selles.

Néanmoins, de la même façon que pour les résultats concernant la transition de tension de surface, nous constatons que pour des nombres de swirl et d'Alfvén se situant aux alentours de l'unité, le champ magnétique possède un effet absolument déstabilisateur.

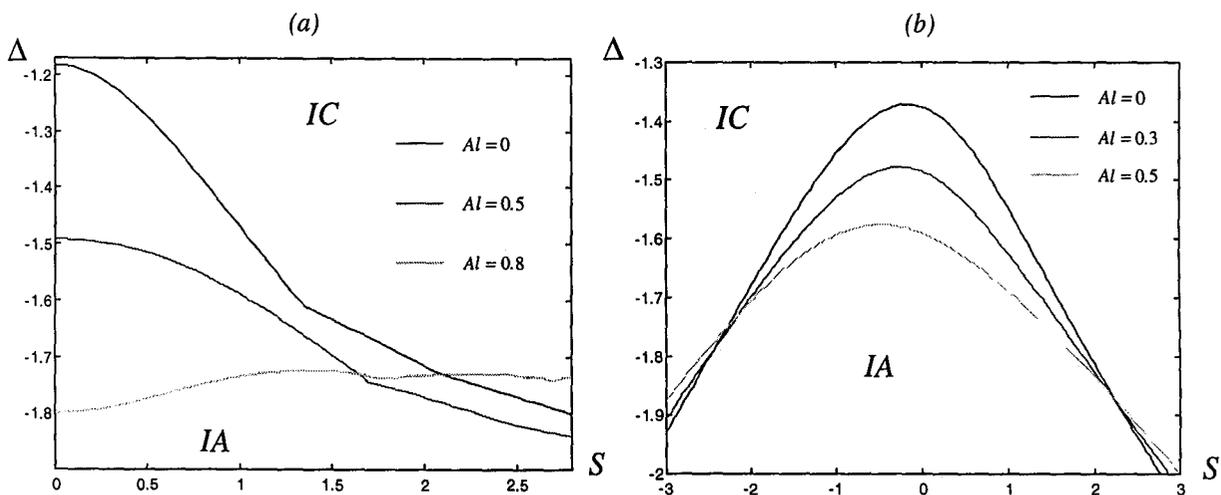


Fig. 29 : Evolution de la transition de cisaillement  $\Delta(S)$  pour plusieurs valeurs d'Alfvén

(a)  $m = 0, \rho = 1, \Gamma = S$

(b)  $m = 1, \rho = 1, \Gamma = S$

Le mode azimutal  $m = 1$  (fig. 29.b) répond de façon analogue : le champ est stabilisateur jusqu'à des valeurs *extremum* de swirl d'environ  $-2.4$  et  $2.1$ , au-delà son action s'inverse et les transitions interviennent pour des valeurs de contre-courant plus élevées que sans champ.

Nous pouvons remarquer au passage que le champ magnétique, dans son côté stabilisateur, favorise la zone convective surtout au profit des modes co-rotatifs (dissymétrie progressive des courbes par rapport à l'axe  $S = 0$ ).

Quant à la transition liée au rapport de densité et au swirl (fig. 30), l'action du champ magnétique dans la gamme de nombre d'Alfvén et de swirl étudiés est univoque, les courbes marginales se déplacent vers les zones absolument instables.

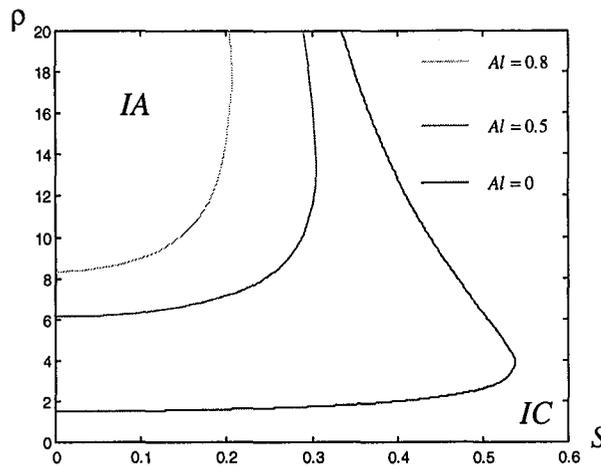


Fig. 30 : Influence du champ magnétique sur la courbe marginale  $\rho(S)$   
 $m = 0, \Delta = -1, \Gamma = S$

⇒ Sans circulation externe ( $\Gamma = 0$ ).

Nous avons montré dans le chapitre II que la rotation solide du jet modifiait les transitions des différents modes azimutaux en fonction du contre-courant et du rapport de masse volumique.

Si le champ magnétique est rajouté, les transitions deviennent encore plus complexes à appréhender. En effet, les transitions sont fortement liées au mode azimutal considéré et suivant les régions où l'on se place dans l'espace des paramètres de contrôles, le mode azimutal déclencheur d'instabilité absolue n'est pas toujours le même.

Plaçons-nous par exemple dans le plan  $(S, \Delta)$  (fig. 31). En l'absence de rotation et de champ magnétique, la transition IA/IC du mode axisymétrique surgit pour une valeur de contre-courant  $\Delta = -1.18$  et de rapport de densité  $\rho = 1$ . A champ constant et en faisant varier le nombre de swirl sur un intervalle  $[0..2]$ , il n'est pas possible de tirer de conclusions allant dans le sens de la stabilisation ou de la déstabilisation par le champ magnétique.

Le champ possède encore une fois une dualité : il existe un nombre de swirl critique  $S = 1.2$  en-dessous duquel le champ magnétique est convectivement stabilisateur et au-dessus duquel il devient absolument déstabilisateur.

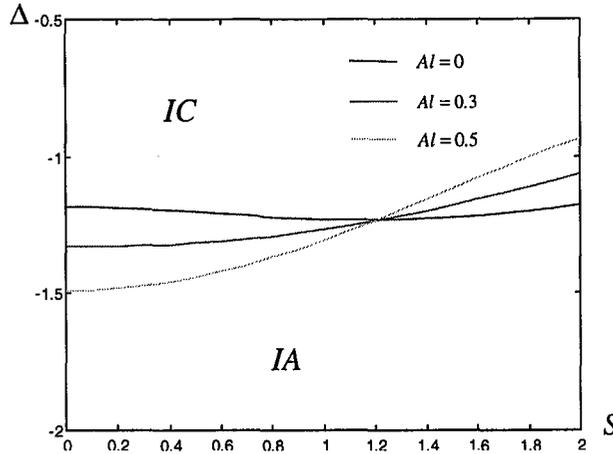


Fig. 31 : Influence du champ magnétique sur la courbe marginale  $\Delta(S)$   
 $m = 0, \rho = 1, \Gamma = 0$

Cette double action du champ magnétique est aussi présente pour les modes asymétriques. Il est possible de le constater sur les figures 32.a et 32.b, correspondant respectivement aux modes  $m = 1$  et  $2$ . Malgré le fait que le swirl critique est plus flou à déterminer du fait de l'entrecroisement des courbes marginales, nous pouvons remarquer que plus le mode azimutal est élevé, plus la valeur critique  $S_c$  devient faible.

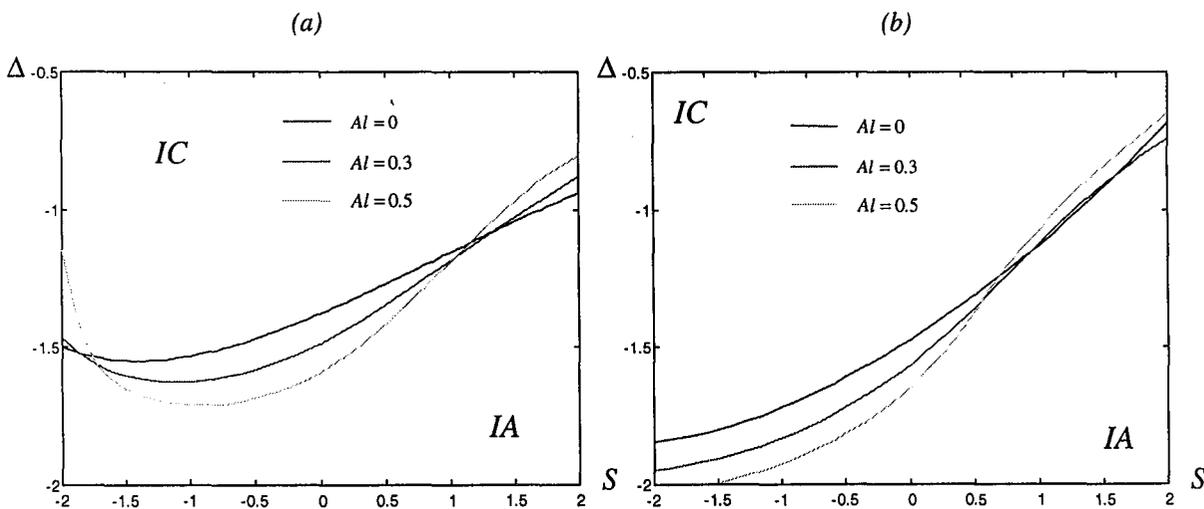


Fig. 32 : Evolution de la transition  $\Delta(S)$  pour plusieurs valeurs d'Alfvén  
 (a)  $m = 1, \rho = 1, \Gamma = 0$   
 (b)  $m = 2, \rho = 1, \Gamma = 0$

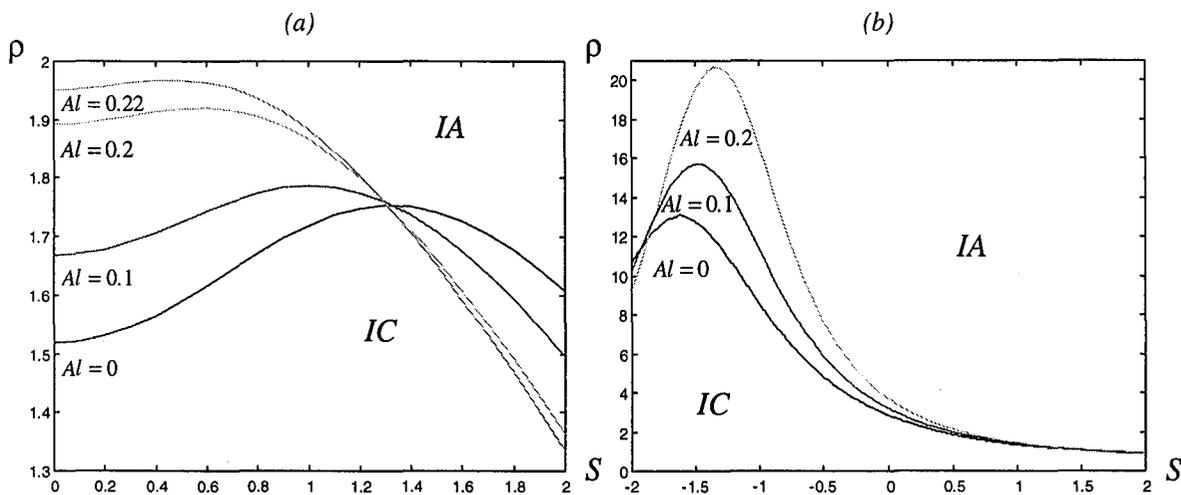


Fig. 33 : Evolution de la transition  $\rho(S)$  pour plusieurs valeurs d'Alfvén

(a)  $m = 0, \Delta = -1, \Gamma = 0$

(b)  $m = 1, \Delta = -1, \Gamma = 0$

Si l'on change de paramètres de contrôle pour se placer dans le plan  $(S, \rho)$ , les mécanismes de stabilisation-déstabilisation du champ demeurent semblables (fig. 33).

A l'inverse du modèle de Rankine que nous avons exposé dans le paragraphe précédent (cf. fig. 30), le champ n'opère plus une stabilisation globale de l'instabilité du jet chaud en rotation. Pour un nombre de swirl d'approximativement 1.3, le champ magnétique devient absolument déstabilisateur pour le mode axisymétrique (fig. 33.a). Il en va de même pour le mode  $m = 1$  (fig. 33.b).

Il semble que l'influence du champ soit fortement liée à celle de la rotation. Ainsi lorsque la vitesse azimutale du jet ou plus généralement lorsque les paramètres de rotation entraînent une déstabilisation absolue ou convective, le rajout du champ magnétique au sein de l'espace environnant le jet va amplifier l'emprise de la rotation sur la nature de l'instabilité du système.

## 5.2 Fluide résistif

Ainsi que nous l'avons décrit dans le paragraphe 4.2, l'introduction de la résistivité du jet diminue l'action stabilisatrice du champ magnétique sur les différents mécanismes d'instabilité temporelle. Toutefois son influence sur les transitions IA/IC n'a jusqu'ici jamais été étudiée. Nous ne présenterons que quelques courbes marginales de transitions lorsque le nombre de Reynolds magnétique n'est pas infini, les temps de calcul étant élevés mais surtout l'influence de  $Re_m$  étant simple à dériver : les grands nombres de Reynolds amplifient l'action du champ et inversement les faibles Reynolds l'atténuent.

Pour un jet de fluide parfaitement conducteur, l'instabilité absolue liée à la tension superficielle peut être fortement contrecarrée par l'introduction du champ magnétique axial (cf. paragraphe précédent) : nous avons donc introduit la résistivité du fluide conducteur afin d'en évaluer l'influence.

La figure 34 représente les courbes marginales  $(We, Al/We)$  pour des valeurs de nombres de Reynolds magnétiques variant entre l'infini et 0.5. L'influence du nombre de Reynolds magnétique est clairement mis en évidence : plus le fluide a une grande résistivité, plus la zone absolue s'élargit aux grands nombres d'Alfvén. Ce qui veut dire que plus le fluide est résistif, plus il faut injecter de l'énergie d'origine magnétique pour repasser en zone convective.

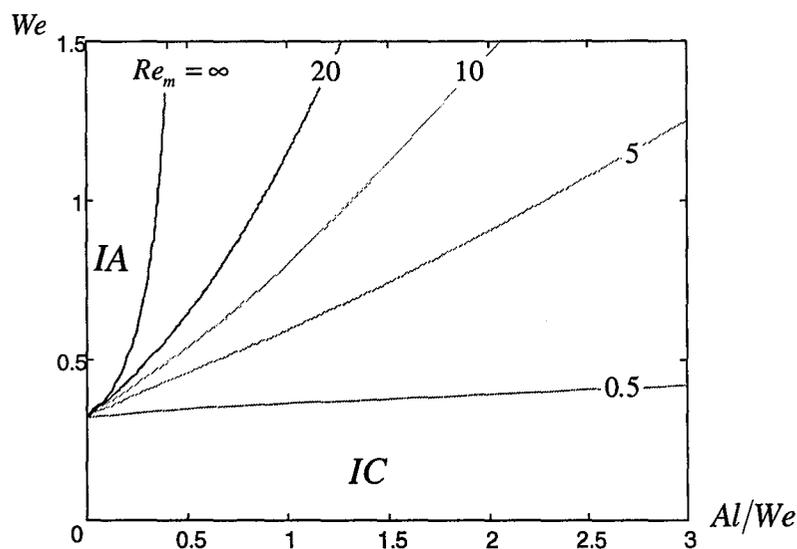


Fig. 34 : Influence du Reynolds magnétique sur la transition de tension de surface  
 $m = 0, \rho = 0, S = 0$

Une autre manière de visualiser l'influence de la conductivité du fluide est de travailler à nombre de Weber constant et de tracer l'évolution du nombre d'Alfvén critique en fonction du nombre de Reynolds magnétique (fig. 35). Il est clair que la diminution du nombre de Reynolds magnétique impose une forte augmentation du champ magnétique.

De plus on peut remarquer que la valeur limite  $Al = We/2$  est obtenue asymptotiquement lorsque  $Re_m$  tend vers l'infini. Le Reynolds magnétique joue un rôle important dans la transition néanmoins l'influence du champ magnétique, lorsque que le nombre de Reynolds magnétique atteint la centaine, est sensiblement équivalente à celle correspondant à un fluide parfaitement conducteur.

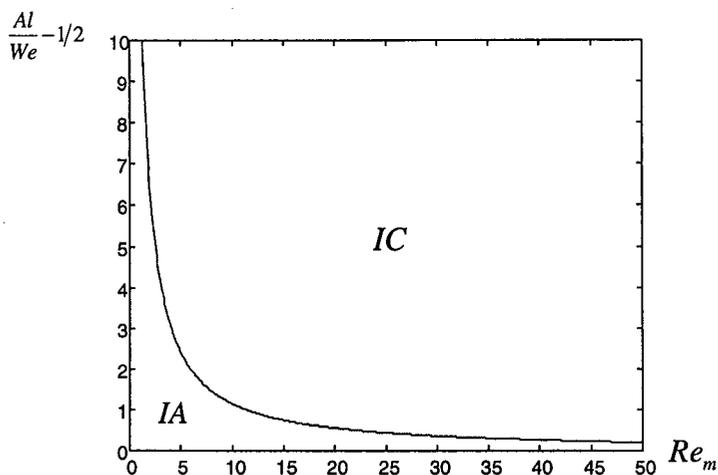


Fig. 35 : Influence du Reynolds magnétique sur la transition de tension de surface  
 $m = 0, \rho = 0, S = 0, We = 1.21$

Pour l'instabilité de cisaillement, l'introduction du nombre de Reynolds magnétique induit aussi une diminution des zones convectivement instables ainsi que l'indique la figure 36.

Inversement à l'instabilité de tension superficielle, la transition liée au cisaillement et au rapport de masse volumique est affectée aussi à très grands nombre de Reynolds magnétique. Ainsi une valeur de Reynolds de 1000 et un nombre d'Alfvén égal à 1, le paramètre de contre-courant nécessaire pour atteindre la zone convective est inférieur de 25% à celui correspondant à un fluide parfaitement conducteur.

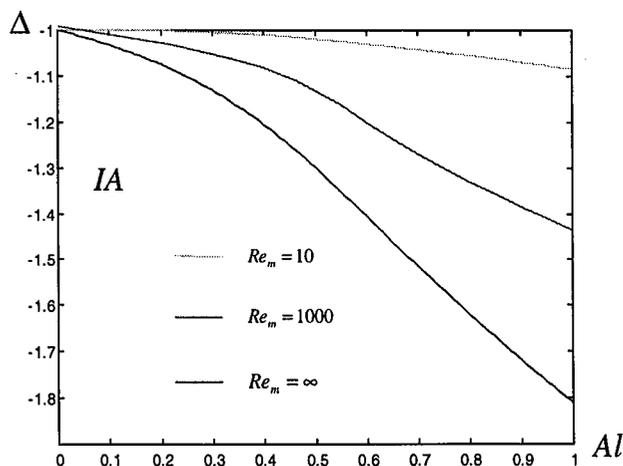


Fig. 36 : Influence du Reynolds magnétique sur la transition de cisaillement  
 $m = 0, \rho = 0, S = 0, \rho = 1.51$

Afin d'avoir une idée des Reynolds magnétiques à partir desquels le fluide pouvait être considéré comme électriquement parfait, nous avons suivi l'évolution du rapport des masses volumiques  $\rho$  en fonction du Reynolds magnétique à nombre d'Alfvén constant (fig. 37.a et 37.b).

Les droites en pointillées sur les figures ci-dessus correspondent aux limites de contre-courant en hypothèse de fluide électriquement parfait et quel que soit le nombre d'Alfvén, les courbes de transition tendent vers cette limite si le nombre de Reynolds tend vers l'infini.

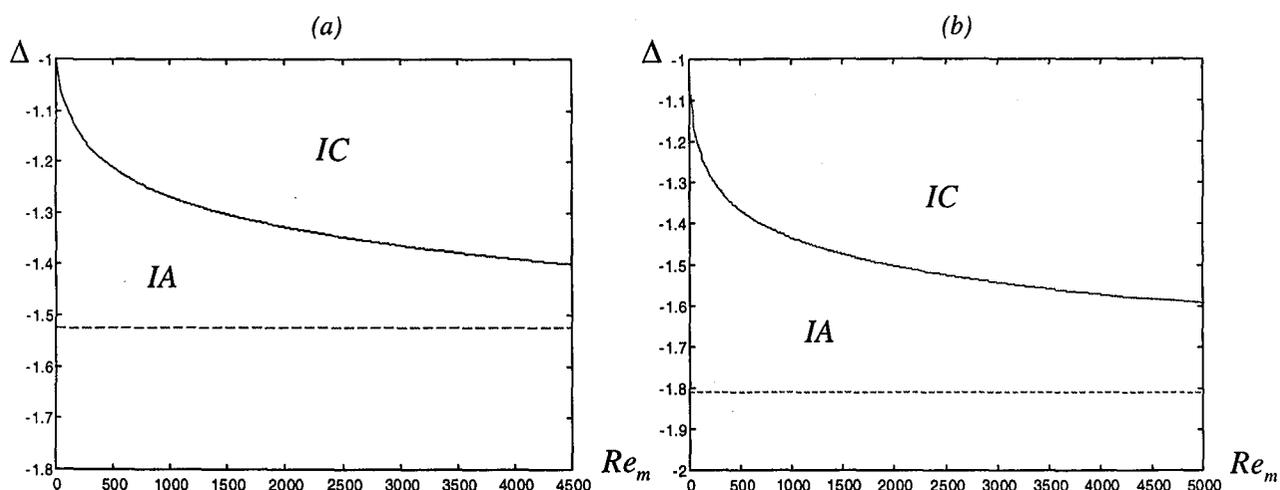


Fig. 37 : Evolution de la transition  $\Delta(Re_m)$  pour  $m=0, \rho=1.51, S=0, We=0$

(a)  $Al=0.7$       (b)  $Al=1$

Dans cette gamme de Reynolds magnétique élevé, l'écart entre la limite du contre-courant et la valeur calculée est comprise encore entre 10 et 15% suivant les valeurs d'Alfvén le fluide peut alors être considéré comme parfait. La résolution a été menée jusqu'à des Reynolds de 5000 car au-delà les schémas numériques n'étaient plus stables à cause de l'évaluation des fonctions de Bessel.

## Conclusions de l'étude spatio-temporelle

⇒ En l'absence de rotation interne, le champ magnétique constitue un retardateur du déclenchement des instabilités absolues de quelles que soient leurs origines.

⇒ Lorsque le jet est mis en rotation (avec ou sans continuité de la vitesse azimutale à l'interface), le champ peut alors, sous certaines conditions réduire les zones convectives au profit des zones absolues. Le champ agirait, dans ce cas, comme un amplificateur de l'influence de la rotation.

⇒ Pour le modèle à Reynolds magnétique fini, les résultats que nous avons obtenus montrent que la conductivité agit simplement comme un facteur multiplicatif de l'influence du champ magnétique : à faibles Reynolds magnétiques, le champ a une influence négligeable sur la nature de l'instabilité et plus le Reynolds augmente, plus l'influence du champ tend vers celle du modèle à conductivité infinie. Au vu des résultats du dernier paragraphe, l'assimilation du fluide conducteur à un fluide parfaitement conducteur doit semble-t-il être subordonnée au phénomène de transition étudié ; ainsi, là où un Reynolds magnétique de 100 suffit à valider l'hypothèse pour la transition de tension de surface, il doit être multiplié par 10 pour la transition de cisaillement.

## II. JET CAPILLAIRE DE FLUIDE MAGNETIQUE

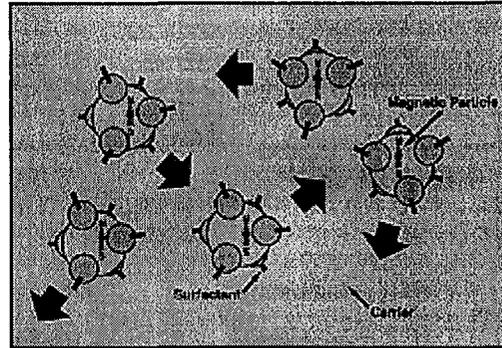
### 1 Introduction

Dans la première partie de ce chapitre, notre étude portait sur la stabilité d'un jet de fluide électriquement conducteur. Le fluide considéré pouvait alors, sous l'action d'un champ magnétique, modifier ce dernier en induisant des différences de potentiel électrique et des densités de courant. En aucun cas, le fluide ne pouvait créer de champ magnétique en l'absence de courant : il ne possédait pas de propriété d'aimantation. Nous allons, dans cette deuxième partie, utiliser un fluide de propriétés différentes, le fluide magnétique, qui lui peut induire un champ propre se superposant au champ extérieur.

Les premiers travaux sur les fluides magnétiques et leur élaboration datent de la fin des années 1950 et leur domaine d'application n'a cessé depuis de se développer. Au fil des ans, ce développement technologique a réussi à améliorer la qualité des propriétés des fluides magnétiques et permis leur utilisation dans des domaines aussi variés que la chirurgie (anévrisme) ou l'informatique (imprimante rapide à jet d'encre, dvd/cd rom). Bien sûr, beaucoup d'études de stabilité ont alors été menées, mais en ce qui nous concerne, la stabilité des jets de fluide magnétique n'a pas souvent été abordé dans la littérature occidentale. Nous pouvons tout de même citer les travaux des Russes Berkovsky & Bashtovoi<sup>12</sup> : ces derniers ont analysé théoriquement et expérimentalement les instabilités temporelles qui pouvaient se développer sur une colonne de fluide magnétique (sans vitesse axiale) et l'influence d'un champ magnétique axial sur les instabilités capillaires. Rosensweig<sup>13</sup> a dérivé quelques courbes sur la stabilité temporelle d'un jet capillaire de fluide magnétique avec champ magnétique axial, mais la relation de dispersion utilisée comporte une erreur en raison du remplacement d'une fonction de Bessel  $I_1$  par  $I_0$ .

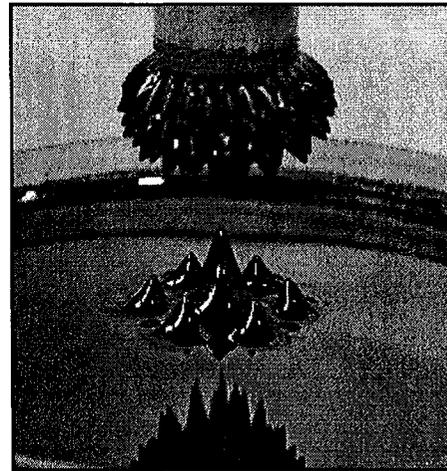
Nous allons, dans la dernière partie de ce chapitre, établir la relation de dispersion pour un jet de fluide magnétique, donner les principaux résultats de stabilité temporelle et spatio-temporelle. Mais en premier lieu, nous allons rappeler quelques définitions et propriétés inhérentes aux fluides magnétiques.

Un liquide magnétique, appelé aussi ferrofluide est une suspension colloïdale stable de particules ferromagnétiques sub-microniques dans un liquide porteur tel que l'eau, un hydrocarbure ou un diester. Les particules constituent environ 5% du volume du fluide. Ces particules doivent être de taille suffisamment petite (de l'ordre de 100 Angströms) pour éviter la précipitation ou l'agrégation. Les propriétés physico-chimiques correspondant étroitement à celles du liquide porteur, un ferrofluide peut donc être fabriqué pour un usage précis en choisissant le fluide de base approprié. Par exemple, en utilisant différents liquides de porteur, les ferrofluides peuvent posséder des viscosités s'étendant de 5 à 25000 centipoises.



Les méthodes les plus couramment utilisées pour la préparation des ferrofluides sont le broyage mécanique ou l'utilisation de procédés chimiques. La stabilité de la suspension est une propriété nécessaire afin d'étudier ces milieux. Un agent stabilisant est utilisé tel qu'une couche élastique monomoléculaire de surfactant et ceci afin d'éviter l'agglomération en présence de champ (effet dispersif). Chaque particule du liquide magnétique se comporte comme un aimant permanent sphérique avec un pôle nord et un pôle sud. En l'absence de champ magnétique extérieur, les particules sont soumises au champ brownien, pour chaque particule l'orientation magnétique est aléatoire. Ainsi d'un point de vue macroscopique le fluide a une aimantation  $M$  moyenne nulle.

Dans un champ magnétique uniforme, les dipôles s'alignent avec la zone et globalement aucune force volumique n'est appliquée sur le fluide. Cependant, dans une zone où il existe des gradients magnétiques, le fluide entier répond comme un fluide homogène et se déplace vers les régions de flux magnétique élevé. Ainsi les ferrofluides peuvent être placés, déplacés et contrôlés avec précision par un champ magnétique externe. Les forces volumiques induites par le champ sont proportionnelles au gradient de ce dernier et à la valeur de l'aimantation du fluide considéré.



Cependant, si un champ magnétique est appliqué, les moments magnétiques des particules vont avoir tendance à s'aligner suivant la direction du champ. La polarisation macroscopique du fluide magnétique augmente avec la croissance du champ extérieur, jusqu'à ce que l'aimantation

atteigne sa valeur de saturation (cf. figure 38). Les dipôles magnétiques sont alors complètement alignés avec le champ. L'aimantation est donnée par la loi de Langevin :

$$(70) \quad M = M_s \left( \coth \left( \frac{mH_0}{kT} \right) - \frac{kT}{mH_0} \right)$$

où  $M_s$  est la valeur de l'aimantation de saturation,  $m$  est l'intensité du moment magnétique d'une particule,  $k$  la constante de Boltzman et  $T$  la température absolue.

En général, le temps de relaxation est négligeable devant les autres temps caractéristiques des phénomènes intervenants, l'hypothèse selon laquelle  $\vec{M}$  et  $\vec{H}_0$  sont parallèles peut alors être admise. Le ferrofluide répond donc quasi-immédiatement aux changements du champ magnétique appliqué, et quand le champ est retiré, les moments reprennent rapidement leurs répartitions browniennes.

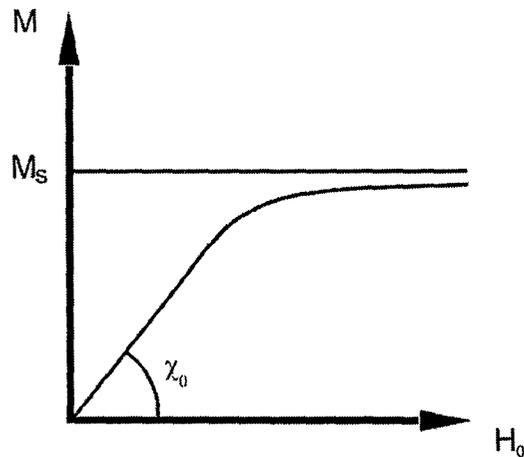


Fig. 38 : Aimantation en fonction du champ  $H_0$  appliqué.

De plus, si  $mH_0 \ll kT$ , alors la loi d'aimantation devient linéaire et peut se mettre sous la forme suivante :

$$(71) \quad \boxed{\vec{M} = \chi_0 \vec{H}_0}$$

Notre travail s'appuiera sur cette hypothèse de base.

## 2 Ecoulement de base

Nous allons considérer un jet de fluide magnétique de susceptibilité  $\chi_0$ , évoluant dans un milieu non magnétique. L'espace est plongé entièrement dans une induction magnétique constante  $\vec{B}_b^0$ , parallèle au jet, créée par une densité de courant  $\vec{j}_0$ . Les fluides en présence sont considérés comme parfaits, isothermes et non conducteurs. L'écoulement est stationnaire.

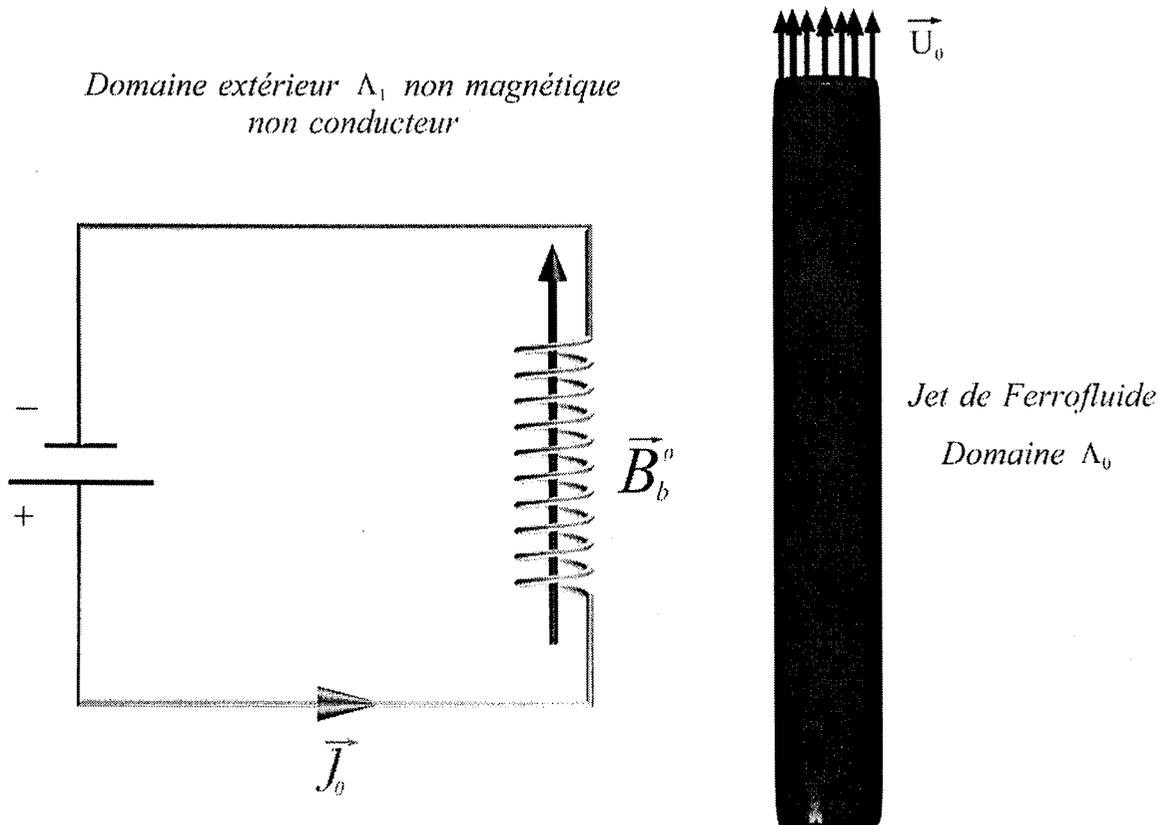


Figure 39 : Ecoulement de base.

Les champs de base sont les suivants :

$$(72) \quad \begin{cases} \vec{U}_0(r, \theta, z) = (0, 0, U_0) \\ P_0(r, \theta, z) \\ \vec{B}_0(r, \theta, z) = B_b^0 \vec{e}_z \end{cases} \quad \forall r < R_0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{V}_1(r, \theta, z) = \vec{0}, \\ P_1(r, \theta, z) = P_\infty \\ \vec{B}_1(r, \theta, z) = B_b^0 \vec{e}_z \end{cases} \quad \forall r > R_0$$

Avant d'introduire les perturbations des différents champs, il nous faut déterminer quel est le champ magnétique propre induit par la présence du ferrofluide dans les milieux  $\Lambda_0$  et  $\Lambda_1$ , ainsi que l'expression de la pression du jet  $P_0(r, \theta, z)$ . A cette fin, nous allons exposer les relations qui vont constituer le système d'équations à résoudre.

## 2.1 Système d'équation

Le système d'équations régissant l'écoulement est constitué de la loi de conservation de la masse, de l'équation de Navier-Stokes, des équations de Maxwell ainsi que des conditions aux limites.

La conservation de la masse s'écrit pour les deux fluides incompressibles :

$$(73) \quad \text{div} \vec{U} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

D'un point de vue hydrodynamique, l'équation d'Euler est utilisée en lui adjoignant un terme de forces volumiques d'origine magnétique. A partir de l'expression du tenseur de Maxwell  $T_{ij} = (H_i B_j - \mu_0/2 H^2 \delta_{ij})$ , la divergence de ce dernier peut être facilement convertie en un gradient, on a alors :

$$(74) \quad \frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t} + \overline{\text{Grad} \vec{U}_i} \cdot \vec{U}_i = -\frac{1}{\rho_i} \overrightarrow{\text{Grad} P_i} + \delta_{i0} \frac{\mu_0 \chi_0}{2\rho_i} \overrightarrow{\text{Grad} H_i^2} \quad \text{avec} \quad i = 0, 1$$

Les équations portant sur le champ et l'induction magnétique sont :

$$(75) \quad \begin{cases} \text{div} \vec{B}_i = 0 \\ \text{Rot} \vec{H}_i = \vec{j}_0 \\ \vec{B}_i = \mu_0 (\vec{H}_i + \delta_{i0} \vec{M}) \end{cases}$$

A la frontière  $\partial\Lambda$  entre le milieu magnétique et le fluide ambiant, il existe les conditions de saut suivantes :

$$(76) \quad [\vec{B} \cdot \vec{n}] = 0 \quad \text{composante normale de l'induction,}$$

$$(77) \quad [\vec{H} \cdot \vec{t}] = 0 \quad \text{composante tangentielle du champ,}$$

$$(78) \quad [\vec{n} \cdot (\vec{\Sigma} + \vec{T})] = \sigma \cdot \text{div} \vec{n} \quad \text{contrainte normale,}$$

et enfin la condition d'interface matérielle.

Si la vitesse intérieure dérive d'un potentiel, *i.e.* l'écoulement est irrotationnel, il est possible de poser que  $\vec{U}_0 = \text{Grad } \phi$ . L'équation d'Euler devient alors :

$$(79) \quad \vec{\text{Grad}} \left( \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\vec{U}_0|^2 \right) + P_0 - \frac{\mu_0 \chi_0}{2} H_0^2 \right) = 0$$

Ainsi, il existe une intégrale première pour l'équation du mouvement. Si on applique cet invariant à un jet stationnaire de vitesse uniforme et constante on a :

$$(80) \quad \frac{\rho U_0^2}{2} + P_0 - \frac{\mu_0 \chi_0}{2} H_0^2 = K \quad \text{où } K \text{ est une constante}$$

La constante  $K$  est obtenue grâce à la continuité des tenseurs des contraintes à l'interface (78) dont le développement est le suivant :

$$(81) \quad \left[ \vec{n} \cdot \left( -P \vec{I} + \vec{H} \otimes \vec{B} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \vec{I} \right) \cdot \vec{n} \right] = \sigma \cdot \text{div } \vec{n} \quad \text{soit}$$

$$P_0 - P_1 = \frac{\sigma}{R_0} - \frac{\mu_0}{2} (\vec{M} \cdot \vec{n})^2$$

La valeur de la constante est alors totalement déterminée :

$$(82) \quad K = P_\infty + \frac{\sigma}{R_0} + \frac{\rho U_0^2}{2} - \frac{\mu_0 \chi_0}{2} H_0^2$$

A partir des équations (75) à (77), il est maintenant possible de déterminer quels champs propres  $\vec{h}_i$  vont se développer dans chaque milieu  $\Lambda_i$  du fait de la présence du jet de ferrofluide.

## 2.2 Recherche du champ propre de base

Soit  $\vec{H}_b^0$  le champ magnétique créé par l'inducteur où circule la densité de courant  $\vec{j}_0$ , le milieu  $\Lambda_1$  étant non conducteur et non magnétique, en son sein le champ magnétique vérifie le système d'équations suivant :

$$(83) \quad \begin{cases} \text{div} \vec{H}_b^0 = 0 \\ \vec{\text{Rot}} \vec{H}_b^0 = \vec{j}_0 \end{cases}$$

En plaçant dans le milieu  $\Lambda_1$  un liquide magnétique, un champ propre  $\vec{h}$  va apparaître : le champ total va donc subir une modification. Si on travaille à densité de courant  $\vec{j}_0$  constante, le champ magnétique total va donc s'écrire dans chaque domaine  $\Lambda_i$  :  $\vec{H}_i = \vec{H}_0 + \vec{h}_i$

Pour le domaine extérieur  $\Lambda_1$  on peut écrire que :

$$(84) \quad \begin{cases} \text{div} \vec{B}_1 = 0 \\ \vec{\text{Rot}} \vec{H}_1 = \vec{j}_0 \\ \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \text{div} \vec{h}_1 = 0 \\ \vec{\text{Rot}} \vec{h}_1 = 0 \end{cases}$$

Le champ propre à l'extérieur dérive donc d'un potentiel et peut se mettre sous la forme  $\vec{h}_1 = \vec{\text{Grad}} \varphi_1$ . En combinant cette expression avec la divergence du champ propre, la fonction potentielle vérifie :

$$(85) \quad \Delta \varphi_1 = 0$$

Quant au domaine  $\Lambda_0$  les équations du champ magnétique sont :

$$(86) \quad \begin{cases} \text{div} \vec{B}_0 = 0 \\ \vec{\text{Rot}} \vec{H}_0 = \vec{j}_0 \\ \vec{B}_0 = \mu_0 (\vec{H}_0 + \vec{M}) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \text{div} \vec{h}_0 = -\text{div} \vec{M} \\ \vec{\text{Rot}} \vec{h}_0 = 0 \end{cases}$$

Le champ propre du jet peut lui aussi se mettre sous la forme  $\vec{h}_0 = \vec{Grad} \varphi_0$  soit  $\Delta \varphi_0 = -div \vec{M}$ .

Or, si on introduit une loi d'aimantation linéaire  $\vec{M} = \chi_0 \vec{H}_0$ , la nullité du laplacien devient évidente :

$$\Delta \varphi_0 = -div \vec{M} = -div(\chi_0 \vec{H}_0) = -\chi_0 div \vec{H}_b^0 - \chi_0 div \vec{h}_0$$

soit

$$(87) \quad (1 + \chi_0) \Delta \varphi_0 = -\chi_0 div \vec{H}_0 = 0$$

Les conditions de saut de l'induction et du champ magnétique peut être explicitées par rapport aux potentiels magnétiques  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  :

$$(88) \quad \begin{cases} \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_0)}{\partial \theta}(R_0, \theta, z) = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}(R_0, \theta, z) - \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}(R_0, \theta, z) = \vec{M} \cdot \vec{n} \end{cases}$$

Soit en introduisant la loi d'aimantation :

$$(89) \quad \begin{cases} \varphi_1(R_0, \theta, z) = \varphi_0(R_0, \theta, z) + C_1 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}(R_0, \theta, z) - (1 + \chi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}(R_0, \theta, z) = \chi_0 \vec{H}_b^0 \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

La constante  $C_1$  peut être annulée, le potentiel étant déterminé à une constante arbitraire près.

En rassemblant les relations (83), (85) et (87) le système d'équations portant sur les potentiels est le suivant :

$$(90) \quad \begin{cases} \Delta \varphi_0 = 0 \\ \Delta \varphi_1 = 0 \\ (1 + \chi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 \\ \varphi_0 = \varphi_1 \end{cases} \quad \text{en} \quad r = R_0$$

Ce système admet une solution unique (Brancher<sup>14</sup>) : la solution triviale  $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ . Malgré la présence du jet de ferrofluide, les champs propres dans chaque domaine sont nuls.

L'écoulement et les champs magnétiques de base sont maintenant totalement déterminés et il nous est possible d'introduire des perturbations.

### 2.3 Equation de dispersion

On associe maintenant à chaque grandeur une perturbation infinitésimale, en plus des champs de base. La notation de la première partie du chapitre est utilisée et les champs perturbés sont notés en minuscules avec un tilde afin de ne pas les confondre avec les champs magnétiques induits du dernier paragraphe :

⇒ Pour la partie magnétique :

$$(91) \quad \vec{H}_i = \vec{H}_b^0 + \vec{h}_i \quad \text{soit} \quad \vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{m} = \bar{\chi}_0 \left( \vec{H}_b^0 + \vec{h}_i \right),$$

$$(92) \quad \begin{cases} \vec{B}_0 = \mu_0 \left( \vec{H}_b^0 + \vec{h}_0 + \vec{M}_0 + \vec{m} \right) = \mu_0 (1 + \chi_0) \left( \vec{H}_b^0 + \vec{h}_0 \right) \\ \vec{B}_1 = \mu_0 \left( \vec{H}_b^0 + \vec{h}_1 \right) \end{cases}$$

⇒ Pour les parties cinématique et dynamique :

$$(93) \quad \vec{U}_{tot_i} = \vec{U}_i + \vec{u}_i \quad \text{soit} \quad \phi_{tot_i} = \phi_i + \tilde{\phi}_i$$

$$(94) \quad P_{tot_i} = P_i + \tilde{p}_i$$

En injectant les champs perturbés dans les équations (73) et (90), on aboutit à :

⇒ Pour la partie magnétique :

$$(95) \quad \begin{cases} \Delta \tilde{\phi}_0 = 0 \\ \Delta \tilde{\phi}_1 = 0 \\ (1 + \chi_0) \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial n} - \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial n} = 0 \\ \tilde{\phi}_0 = \tilde{\phi}_1 \end{cases} \quad \text{en } r = R_0$$

⇒ Pour les parties cinématique et dynamique :

$$(96) \quad \begin{cases} \Delta \tilde{\phi}_0 = 0 \\ \Delta \tilde{\phi}_1 = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial t} \end{cases} \quad \text{en } r = R_0$$

Une fois les solutions aux systèmes (95) et (96) obtenues, les champs magnétiques et de vitesses perturbés en découlent directement. Quant aux pressions perturbées, elles sont obtenues à l'aide de l'équation d'Euler (74). Les différents champs s'écrivent :

⇒ Pour le domaine  $\Lambda_0$

$$(97) \quad \begin{cases} \vec{U}_{tot_0}(r, \theta, z, t) = U_0 \vec{e}_z + \frac{\varepsilon A_0}{\rho_0 (\omega + kU_0)} \left( i \frac{\partial I_m(kr)}{\partial r}, -\frac{m}{r} I_m(kr), -k I_m(kr) \right) e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \\ P_{tot_0}(r, \theta, z, t) = P_\infty - \frac{\sigma}{R_0} + \varepsilon (A_0 - \mu_0 \chi_0 H_0 B_0 k) I_m(kr) e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \\ \vec{H}_{tot_0}(r, \theta, z, t) = H_b^0 \vec{e}_z - \varepsilon B_0 \left( i \frac{\partial I_m(kr)}{\partial r}, -\frac{m}{r} I_m(kr), -k I_m(kr) \right) e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \end{cases}$$

⇒ Pour le domaine  $\Lambda_1$

$$(98) \quad \begin{cases} \vec{U}_{tot_1}(r, \theta, z, t) = \varepsilon A_1 \left( -i \frac{\partial K_m(skr)}{\partial r}, \frac{m}{r} K_m(skr), k K_m(skr) \right) e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \\ P_{tot_1}(r, \theta, z, t) = P_\infty - \varepsilon \rho_1 A_1 K_m(skr) e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \\ \vec{H}_{tot_1}(r, \theta, z, t) = H_b^0 \vec{e}_z - \varepsilon B_1 \left( i \frac{\partial K_m(skr)}{\partial r}, -\frac{m}{r} K_m(skr), -k K_m(skr) \right) e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \end{cases}$$

Les équations de continuité des composantes normale et tangentielle du champ magnétique combinées à la condition d'interface matérielle conduisent aux liaisons suivantes entre les différentes constantes des champs propres :

$$A_0 = \frac{\rho_0 (\omega + kU_0)^2 \eta}{\left( \frac{\partial I_m(kr)}{\partial r} \right)_{r=R_0}}, \quad A_1 = -\frac{\omega \eta}{\left( \frac{\partial K_m(skr)}{\partial r} \right)_{r=R_0}},$$

$$B_0 = \frac{K_m(skr_0) \chi_0 H_0 k \eta}{(1 + \chi_0) K_m(skr_0) \left( \frac{\partial I_m(kr)}{\partial r} \right)_{r=R_0} - I_m(kR_0) \left( \frac{\partial K_m(skr)}{\partial r} \right)_{r=R_0}} \quad \text{et}$$

$$B_1 = \frac{I_m(kR_0) \chi_0 H_0 k \eta}{(1 + \chi_0) K_m(skr_0) \left( \frac{\partial I_m(kr)}{\partial r} \right)_{r=R_0} - I_m(kR_0) \left( \frac{\partial K_m(skr)}{\partial r} \right)_{r=R_0}}.$$

Enfin, grâce à ces dernières expressions l'équation de continuité de la contrainte normale nous fait aboutir à la relation de dispersion liant  $k$  et  $\omega$  :

$$(99) \quad -\frac{\mu_0 \chi_0^2 k (H_b^0)^2 K_m(skR_0) I_m(kR_0)}{(1+\chi_0) K_m(skR_0) I_m'(kR_0) - s K_m'(skR_0) I_m(kR_0)} + \frac{\sigma(1-m^2 - R_0^2 k^2)}{R_0^2} + \frac{\rho_0(\omega + kU_0)^2 I_m(kR_0)}{k I_m'(kR_0)} - \frac{\rho_1 \omega^2 K_m(skR_0)}{s k K_m'(skR_0)} = 0$$

Cette dernière relation peut être réduite par rapport à la base  $(\rho_0, U_0, R_0, H_0)$ , la réduction nous donne ainsi :

$$(100) \quad \boxed{D(\omega, k) = -Al \frac{\chi_0^2 k^2 K_m(sk) I_m'(k)}{(1+\chi_0) K_m(k) I_m'(k) - s K_m'(sk) I_m(k)} + We \frac{k(1-m^2 - k^2) I_m'(k)}{I_m(k)} + (\omega + k)^2 - \rho \frac{\omega^2 K_m(sk) I_m'(k)}{s K_m'(sk) I_m(k)}}$$

Les expressions des nombres d'Alfvén  $Al$ , de Weber  $We$  et du rapport de densité  $\rho$  sont exactement identiques à celles de la première partie de ce chapitre.

On note que la susceptibilité du ferrofluide  $\chi_0$  ne peut être intégrée dans le nombre d'Alfvén, elle sera considérée dans la suite comme un paramètre de contrôle supplémentaire. L'expression (100) écrite pour le mode  $m=0$  est presque la même que celle établie par Rosensweig, la fonction  $I_1$  étant placée au bon endroit.

En factorisant les deux premiers termes de l'équation de dispersion (98) par le nombre de Weber, on peut faire apparaître le nombre de *Bond magnétique*, rapport des effets magnétiques à ceux de tension superficielle :

$$(101) \quad Bo = \frac{\mu_0 (H_b^0)^2 R_0}{\sigma}$$

Lorsque le fluide est au repos, la grandeur caractéristique de réduction  $U_0$  ne peut plus être choisie. En contrepartie, on introduit un temps caractéristique issu du coefficient de tension superficielle  $T_0 = \sqrt{(\rho_1 R_0^3)/\sigma}$ . L'équation de dispersion réduite est alors :

$$(102) \quad \omega^2 \left( 1 - \rho \frac{K_m(sk)I'_m(k)}{sK'_m(sk)I_m(k)} \right) - Bo \frac{\chi_0^2 k^2 K_m(sk)I'_m(k)}{(1+\chi_0)K_m(k)I'_m(k) - sK'_m(sk)I_m(k)} + \frac{k(1-m^2-k^2)I'_m(k)}{I_m(k)} = 0$$

Cette expression est similaire à celle employée dans l'analyse de B. Berkovsky & V. Bashtovoi<sup>12</sup>.

### 3. Influence du champ magnétique sur la stabilité temporelle

Le taux de croissance temporelle peut être directement extrait de la relation (98) en utilisant la solution suivante :

$$(103) \quad \omega = -\frac{k}{(1+\rho L_m(k))} \pm \sqrt{\frac{-\rho k^2 L_m(k) - (1+\rho L_m(k)) \left( -Al \frac{\chi_0^2 k^2 K_m(sk)I'_m(k)}{(1+\chi_0)K_m(k)I'_m(k) - sK'_m(sk)I_m(k)} + We \frac{k(1-m^2-k^2)I'_m(k)}{I_m(k)} \right)}{(1+\rho L_m(k))}}$$

Pareillement au jet de fluide conducteur, le champ magnétique agit comme un facteur stabilisateur pour le jet de ferrofluide quel que soit le mode azimutal.

Ainsi, la déstabilisation du mode axisymétrique par la tension superficielle combinée à la couche de cisaillement peut être atténuée par l'introduction du champ magnétique (fig. 40.a). A nombre d'Alfvén constant, l'augmentation de la susceptibilité du fluide agit aussi dans le sens de la stabilisation (fig. 40.b). Cependant et contrairement au jet de métal liquide, l'instabilité capillaire ne pas être totalement stabilisée par le champ. Il est nécessaire d'avoir un champ magnétique infini pour stabiliser les nombres d'onde axiaux infiniment petits.

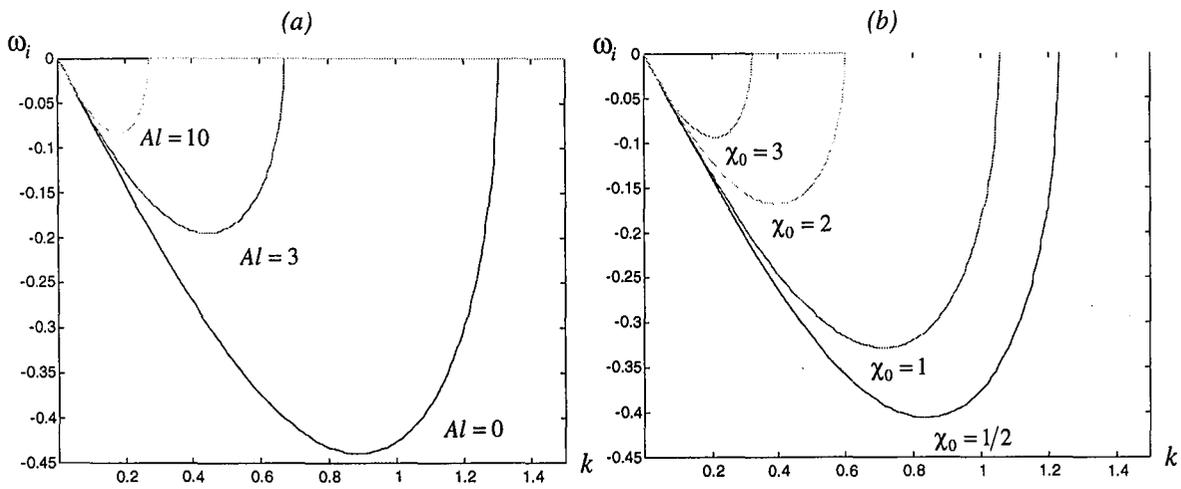


Fig. 40 : Taux de croissance temporelle pour  $m=0, \rho=1, We=1$   
 (a)  $\chi_0=1$       (b)  $Al=1$

Si l'on considère uniquement l'instabilité de tension de surface ( $\rho=0$ ), la stabilisation par le champ magnétique s'accompagne d'un changement de la longueur d'onde préférentielle du jet. Nous avons tracé sur la courbe 41, l'évolution de la longueur d'onde critique en fonction du nombre de Bond magnétique pour un nombre de Weber de 1. Comme on le constate, l'augmentation du nombre de Bond va sélectionner des structures de plus en plus grandes et la valeur de susceptibilité  $\chi_0$  amplifie ce mécanisme.

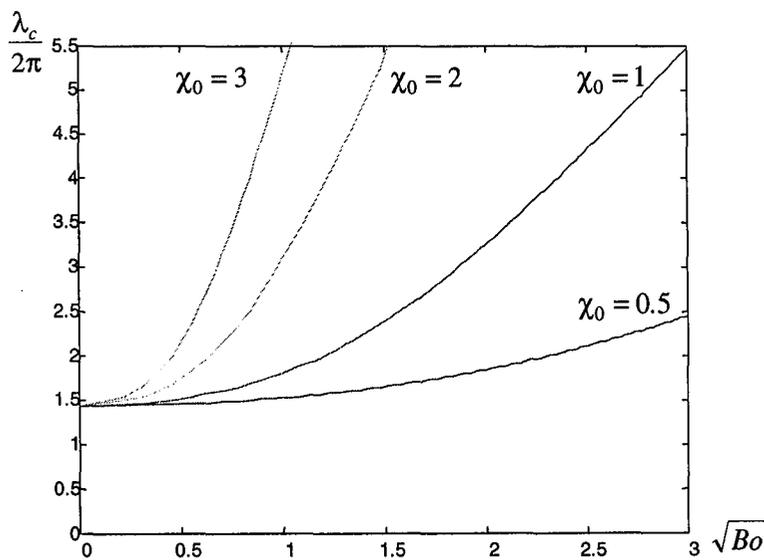


Fig. 41 : Taux de croissance temporelle pour  
 $m=0, \rho=0, We=1$

Sur la figure 42, le nombre d'Alfvén critique a été dérivé en fonction du rapport de densité  $\rho$ , sans tension superficielle. Il est clair que le champ magnétique amène à la stabilisation des instabilités de cisaillement.

Cependant on constate que les longueurs d'onde les plus amplifiées vont dépendre de  $\rho$ . Il existe, en effet, un rapport de masse volumique critique où le champ magnétique modifie brusquement les caractéristiques de la longueur d'onde critique. A  $\rho_c = 1 + \chi_0$ , les structures les plus amplifiées passent des faibles longueurs ( $\rho < \rho_c$ ) aux grandes longueurs ( $\rho > \rho_c$ ).

Conjointement, le nombre d'Alfvén critique subit une modification. Au delà de la valeur critique  $\rho_c$ , le champ magnétique à injecter augmente encore plus vite avec  $\rho$ , les grandes structures étant visiblement moins faciles à stabiliser.

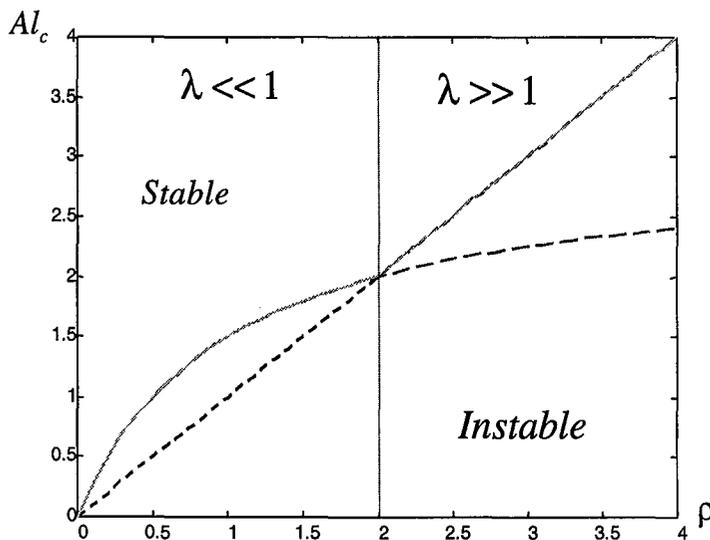


Fig. 42 : Nombre d'Alfvén critique en fonction de  $\rho$   
 $m = 0, We = 0, \chi_0 = 1$

Calculées analytiquement, les limites de  $Al_c$  pour  $k \rightarrow 0$  et  $k \rightarrow \infty$  nous donnent les expressions suivantes :

$$(104) \quad \text{----} \quad \lambda \ll 1, Al_c = \frac{\rho(2 + \chi_0)}{\chi_0^2(1 + \rho)}$$

$$(105) \quad \text{----} \quad \lambda \gg 1, Al_c = \frac{\rho}{\chi_0^2}$$

Cette coupure à  $\rho = 1 + \chi_0$  n'existe pas pour les modes azimutaux non nuls.

Les modes asymétriques sans tension de surface (et a fortiori avec) sont stabilisés par le champ magnétique plus intensément que le mode  $m = 0$ . Nous avons représenté sur les figures 42, les courbes marginales de stabilité pour le mode  $m = 1$  (le mode le plus dangereux après le mode axisymétrique).

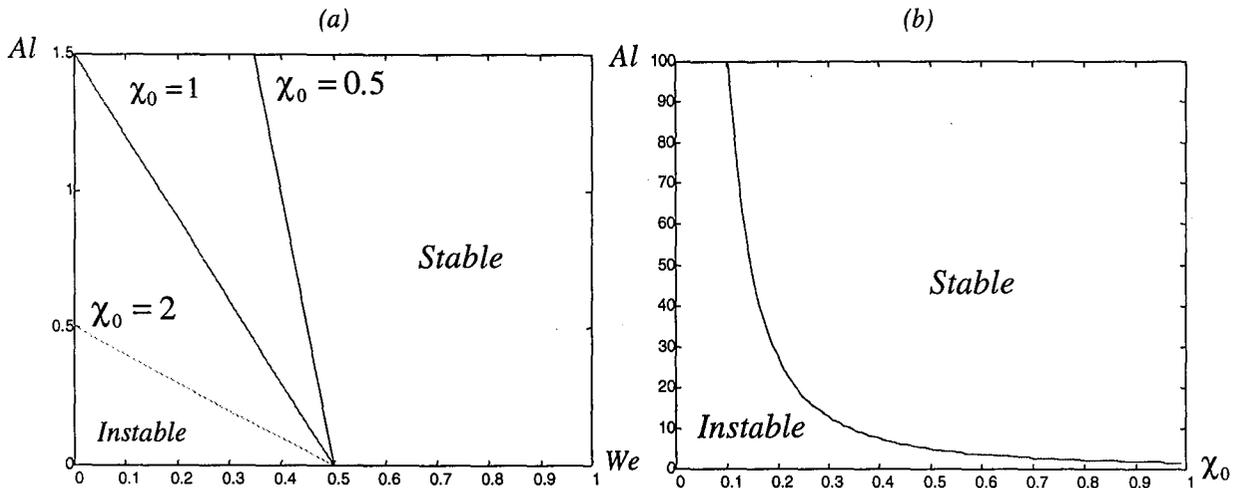


Fig. 43 : Alfvén critique pour  $m = 1$ ,  $\rho = 0$ , en fonction de  
 (a)  $We$  (b)  $\chi_0$ ,  $We=0$

Comme l'indiquent les figures 43.a et 43.b, la valeur de la susceptibilité a aussi une influence stabilisatrice pour les modes asymétriques. A faibles susceptibilités le champ magnétique tend rapidement vers des valeurs énormes.

### Conclusions de l'étude temporelle

- ⇒ Le champ magnétique intervient toujours en tant que mécanisme stabilisateur, aussi bien en ce qui concerne les instabilités d'origine capillaire ( $m = 0$ ) ou de cisaillement.
- ⇒ L'instabilité de tension superficielle du mode axisymétrique ne peut cependant pas être entièrement stabilisée par le champ, contrairement aux fluides conducteurs.
- ⇒ Le champ magnétique au-delà du rapport de masse volumique  $\rho_c = 1 + \chi_0$ , modifie la longueur d'onde des instabilités de cisaillement du mode axisymétrique.

## 4 Transitions IA/IC

Pour ce modèle de jet, seulement deux types de transition peuvent être suivis en fonction des paramètres de contrôles : la transition de tension superficielle pour le mode axisymétrique et celle du jet chaud.

Concernant la transition de goutte à goutte, nous avons suivi le point selle lorsque le nombre d'Alfvén augmente et pour plusieurs valeurs de susceptibilité (fig. 44.a).

L'introduction de champ magnétique pour des faibles susceptibilités (de l'ordre de 0.1) ne modifie pas beaucoup le nombre de Weber critique. Une légère augmentation l'amène aux alentours de 0.35. Cependant, si le fluide possède une susceptibilité de l'ordre de l'unité, la zone d'instabilité convective se réduit rapidement. Il semblerait donc que le champ magnétique, tout en faisant évoluer la longueur d'ondes d'amplification maximale, amène le jet à une transition plus rapide vers le phénomène de rupture. Ce résultat quelque peu paradoxal demande une confirmation expérimentale que nous envisageons de réaliser.

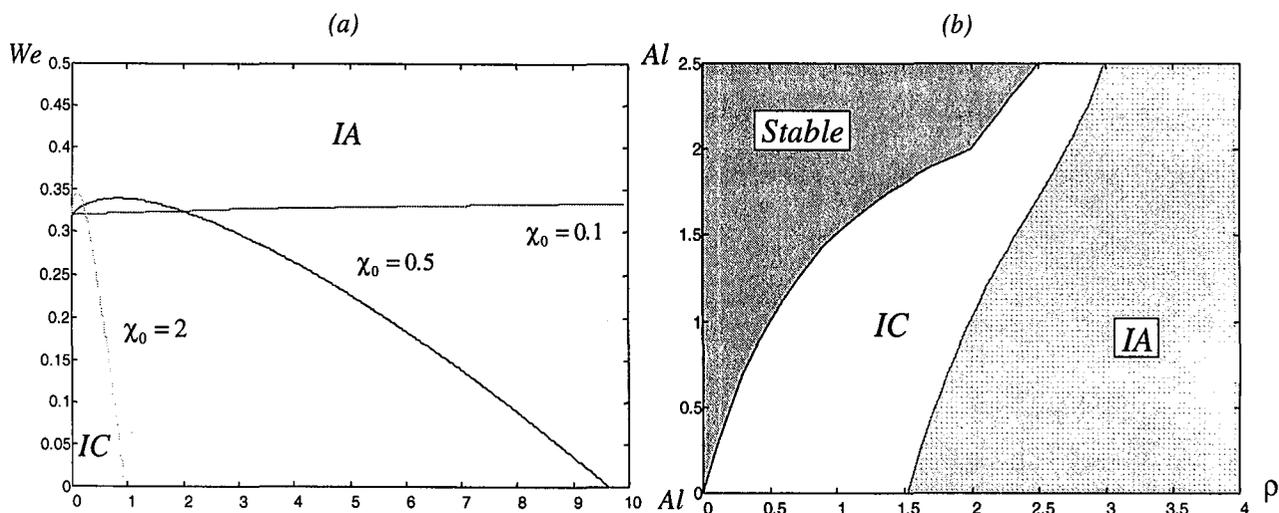


Fig. 44 : Courbes de transition IA/IC pour  $m = 0$   
 (a) Transition de tension de surface pour différents  $\chi_0$   
 (b) Transition du jet chaud,  $We = 0, \chi_0 = 1$

Quant à l'instabilité du jet chaud, nous avons suivi l'évolution de la courbe marginale dans le plan  $(Al, \rho)$  pour le mode axisymétrique (fig. 44.b). L'effet du champ magnétique est clairement établi : la zone de stabilité temporelle augmente graduellement avec le nombre d'Alfvén, contraignant ainsi les zones convectives et absolues à se décaler vers des rapports de densité plus grands.

Cette caractéristique du champ sur la transition du jet chaud est aussi valable pour les modes non axisymétriques. La figure 45 nous le confirme pour le mode  $m=1$  : le champ magnétique va à l'encontre des zones d'instabilités et en particulier permet de retarder l'apparition de la zone absolument instable lorsque la masse volumique du jet diminue.

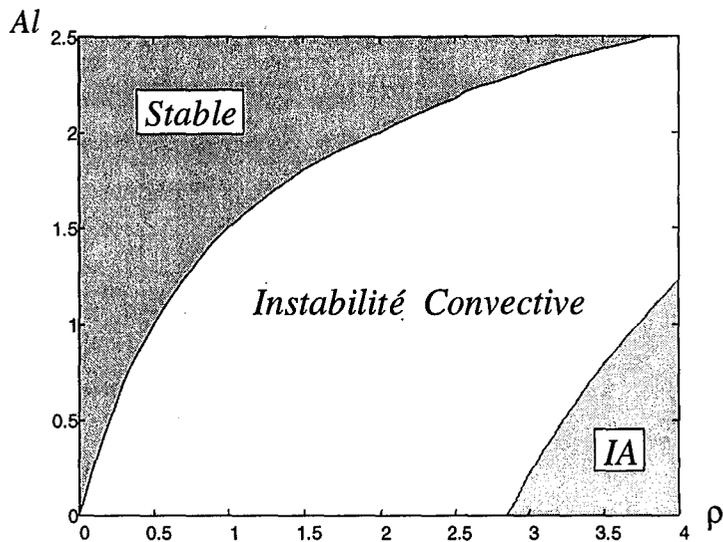


Fig. 45 : Courbes de transition IA/IC pour  $m=1, We=0, \chi_0=1$

### Conclusions de l'étude spatio-temporelle

Si l'on raisonne à nombre de Weber et à densités fixés, l'introduction d'un champ magnétique axial en présence d'un jet de ferrofluide peut être faire l'objet du récapitulatif suivant :

| Tension de surface  | Différence de densité  |
|---|--|
| Diminution des taux de croissance temporelle  |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Légère augmentation de la zone convective pour les <math>\chi_0</math> faibles.</li> <li>- Elargissement de la zone absolue à partir de <math>\chi_0 \approx 1</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Décalage des zones convective et absolue vers les fortes densités, au profit de la zone linéairement stable.</li> </ul> |

## Bibliographie du chapitre III

- <sup>1</sup> Chandrasekhar S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*.  
Clarendon Press, Oxford, 1961.
- <sup>2</sup> Gupta A.S., *On the capillary instability of a jet carrying an axial current with or without magnetic field*.  
Proc. Roy. Soc., **A278**, pp.214-227, 1964.
- <sup>3</sup> Howard L.N. & Gupta A.S., *On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows*.  
J. Fluid Mech., **14**, pp. 463-476, 1962.
- <sup>4</sup> Elazab S.S., *Magnetohydrodynamic stability of a streaming gas jet*.  
J. Plasma Physics, **49**, part 1, pp. 3-15, 1993.
- <sup>5</sup> Yakubenko P.A., *Absolute and convective instability of current-carrying jet of magnetic liquid*.  
Eur. J Mech. B Fluids **14**, pp. 823-830, 1995.
- <sup>6</sup> Shugai G.A. & Yakubenko P.A., *Convective and absolute instability of a liquid jet in a longitudinal magnetic field.*  
Phys. Fluids, **9**, pp. 1928-1932, 1997.
- <sup>7</sup> Loueslati K. & Brancher J.P., *Absolute MHD instability of a capillary swirling jet*.  
Fluid Mech. And its Appl., **51**, pp. 77-92, 1999.
- <sup>8</sup> Wilson S.K., *The effect of a uniform axial magnetic field on the capillary instability of a rigidly rotating fluid column*.  
Q. Jl Mech. appl. Math., **45**, pp. 363-406, 1992.
- <sup>9</sup> Soto J., *Etude cinématique de l'effet dynamo en milieu non homogène. Application aux Réacteurs à Neutrons Rapides*.  
Thèse de Doctorat, INPG – Grenoble, 1999.

---

<sup>10</sup> S. J. Leib & M. E. Goldstein, *The generation of capillary instabilities on a liquid jet*.  
J. Fluid Mech., **168**, pp. 479-500, 1986.

<sup>11</sup> P.A. Monkewitz, D.W. Bechert, B. Barsikow & B. Lehmann. *Self-excited oscillations and mixing in heated round jet*.  
J. Fluid Mech., **213**, pp. 611-639, 1990.

<sup>12</sup> B. Berkovsky & V. Bashtovoi, *Instabilities of magnetic fluids leading to a rupture*.  
IEEE Trans. on magn., pp. 288-297, 1980.

<sup>13</sup> R.E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*  
Cambridge University Press, 1985.

<sup>14</sup> J.P. Brancher, *Sur l'hydrodynamique des ferro-fluides*.  
Thèse de Doctorat d'Etat, 1980.

# CHAPITRE IV CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

## I. CONCLUSIONS

Nous avons développé dans tous nos modèles, des résultats qualitatifs et quantitatifs concernant la stabilité des jets tournants de fluide visqueux, de fluide magnétique ou de fluide conducteur. Chaque chapitre ayant fait l'objet d'une conclusion, nous allons simplement reprendre ici quelques points importants de notre travail.

Le chapitre I constitue un simple rappel sur les notions de stabilité linéaire ainsi que sur la nature convective ou absolue des instabilités, cette partie a été insérée dans le manuscrit pour faciliter la compréhension des chapitres suivants. En première partie du chapitre II, un modèle non visqueux de Rankine avec vitesse axiale a fait l'objet d'une étude de stabilité temporelle et d'une étude spatio-temporelle. Plusieurs travaux existent déjà sur ce modèle, nous y avons ajouté des mécanismes physiques supplémentaires tels que le rapport de densité entre le jet et le fluide extérieur, la tension de surface et le cisaillement azimuthal. Les effets de rotation du jet et ceux de la circulation externe ont été dérivés, et sur certains points nous avons pu vérifier l'accord entre nos travaux et ceux déjà existants. L'utilisation d'un fluide extérieur plus ou moins massique que celui du jet apporte des modifications des paramètres critiques, tels que le nombre de Weber ou la rotation externe, où peuvent apparaître les états instables du système. Ainsi, pour le mode axisymétrique, la zone temporellement stable est augmentée si le fluide externe est en rotation ou au contraire diminuée pour un jet capillaire non tournant. Nous avons mis en lumière l'importance de la rotation du jet et de la densité externe sur la transition de tension superficielle pour le mode  $m = 0$ . Les transitions des modes asymétriques apparaissent alors comme secondaires. La prédominance du mode axisymétrique a aussi été établie pour les transitions du jet chaud et du jet cisailé en l'absence de rotation ; si une rotation du jet est superposée à ces derniers types d'écoulements, nous avons montré que les modes azimuthaux non nuls peuvent alors prendre le pas. Enfin, nous avons précisé l'influence de la circulation externe sur ces dernières transitions : elle favorise les zones convectives mais aussi des sauts de points de pincement.

Dans la seconde partie du deuxième chapitre, nous avons introduit la diffusion liée à la viscosité du jet ou celle du fluide ambiant (dans ce second modèle la circulation externe a été ignorée). Des

solutions générales ont été trouvées pour les écoulements perturbés. Les effets visqueux, qu'ils proviennent du jet ou de l'extérieur, ont la capacité d'atténuer les taux de croissance temporelle des instabilités non visqueuses, telles que l'instabilité centrifuge, celle de cisaillement ou de tension superficielle. Toutefois, nous avons mis en évidence que les modes inertiels de Kelvin dus à la rotation du jet, sont modifiés par la viscosité externe et exhibent des taux de croissance temporelle non nuls. Comme le pressentait Khorrami, d'autres modèles que le tourbillon de Batchelor présentent des modes déstabilisés par la viscosité. Cependant, l'origine de ces modes visqueux doit probablement différer d'un modèle à l'autre et demande de plus amples développements. Le changement de la nature des différentes instabilités a été caractérisé en fonction des nombres de Reynolds intérieurs et extérieur. Dans la continuité des travaux existants, nous avons mis en évidence que la viscosité du jet assure la promotion de l'instabilité convective et inversement la viscosité du fluide extérieur celle de l'instabilité absolue.

Dans le troisième chapitre, nous avons considéré un jet de fluide électriquement conducteur ou de fluide magnétiques, les influences d'un champ magnétique axial sur les différentes instabilités ont été données. Ainsi, pour un fluide parfaitement conducteur le champ magnétique constitue un moyen de forte stabilisation temporelle du jet non tournant et les zones absolument instables sont progressivement réduites avec une augmentation de l'intensité du champ. Si le jet est mis en rotation, le champ magnétique peut alors présenter une modification de l'instabilité vers l'état absolu. Si le fluide possède une conductivité finie, le champ magnétique diffuse et son efficacité stabilisatrice se réduit. D'autre part, la diminution du nombre de Reynolds magnétique amène à une progression des zones absolues, relativement à celles du fluide parfaitement conducteur. Pour terminer, l'étude d'un jet non tournant de ferrofluide effectuée par Rosensweig a été reprise. Le champ magnétique permet d'étendre les zones convectivement instables sauf pour l'instabilité de tension de surface lorsque la susceptibilité du fluide est de l'ordre de l'unité.

## **II. PERSPECTIVES**

### **1. Extensions théoriques**

Les premières perspectives à envisager peuvent être de préciser quelques points non éclaircis de ce travail. Par exemple, de comprendre comment la viscosité externe induit une déstabilisation des modes de Kelvin et que ce qui séparent les modes de Kelvin atténués et amplifiés. Ainsi, on peut émettre des hypothèses sur les mécanismes qui rentrent en jeu tels que le saut de viscosité à l'interface ou un transfert de l'énergie visqueuse vers les perturbations neutres. De même, une explication, en collaboration avec le Professeur S.P. Lin, sur la cohérence qualitative mais

l'incohérence quantitative entre théorie et expérience portant sur l'instabilité absolue du jet capillaire visqueux, est une des perspectives que nous envisageons sérieusement de réaliser. Des constatations faites sur les effets du champ magnétique doivent aussi pouvoir être mieux éclairées. De la sorte, pourquoi un jet de fluide magnétique à faible susceptibilité exhibe-t-il des zones convectives plus importantes comparativement à un fluide de susceptibilité plus grande ?

Une deuxième série d'extensions pourrait aussi porter sur l'étude de l'effet dynamo pour un jet tournant de métal liquide noyé. En effet, les travaux déjà effectués sur le sujet sont des modèles de dynamo cinématique : le mouvement de base crée une amplification du champ. Il est possible d'imaginer que le germe de champ magnétique puisse prendre sa source dans l'apparition d'instabilités hydrodynamiques et le couplage s'effectuer par ce biais.

Enfin, il est légitime de se demander comment la loi de comportement du fluide, par exemple une loi viscoélastique, intervient au niveau des propriétés de stabilité. Est ce que les taux de croissance sont conservés, va-t-il y avoir échange entre les modes dominants ou modification profonde des transitions IA/IC, des seuils peuvent ils apparaître ? Dans ce cadre, un des premiers développements serait de se placer à faible coefficient d'élasticité et d'effectuer une approche asymptotique du problème.

## **2. Perspectives expérimentales**

Il n'est pas besoin d'insister sur le fait que les résultats de ce mémoire sont purement théoriques et que leurs liaisons avec l'expérience doivent être validées sur beaucoup de points. En effet, même si des confrontations entre théorie et expérience ont été abordées, notamment pour le jet capillaire visqueux et le jet d'eau avec écoulement d'air tournant, la majeure partie des cas expérimentaux à vérifier demande un investissement sérieux. Par exemple, la réalisation d'un jet de mercure sous champ magnétique axial requière des conditions de sûreté à cause des vapeurs nocives et des moyens de mesure en adéquation avec les particularités du fluide.

Ne nous posant pas en expérimentateurs confirmés, nous avons opté pour un projet expérimental qui ne demande, au départ, qu'un temps minimal d'investissement, possède une certaine originalité, soit simple et qui permette d'établir une comparaison au moins qualitative avec la théorie : *le jet d'eau tournant*.

## 2.1 Description du montage expérimentale

La conception de l'expérience repose globalement sur l'élaboration d'un jet tournant en rotation solide. Une des solutions les plus simples est d'entraîner le fluide en rotation grâce à une structure en nid d'abeilles. L'achat ou la fabrication de nid d'abeilles métalliques est onéreuse (jusqu'à 6000 Fr.) et nous avons donc préféré une fabrication à partir de pailles alimentaires en plastique (environ 10 Fr.). Les pailles ont été réparties uniformément dans un cylindre creux de diamètre intérieur 100 mm et de hauteur de 120 mm. Le nombre de pailles a été optimisé en fonction de la compression désirée (les pailles ne doivent pas bouger même en présence de fluide) et une déformation minimale des pailles. Le cylindre, chapeauté par des structures cylindriques fixes, peut alors être mis en rotation grâce à l'utilisation de roulement à billes avec joints toriques d'étanchéité.

Nous avons usiné quatre buses de différents diamètres : 2,5, 6, 10 et 15 mm. Les buses de forme convergente, peuvent être assemblées en bas de l'ensemble nid d'abeille–cylindres tandis que sur la partie supérieure un réservoir secondaire cylindrique est accouplé à l'ensemble (cf. fig. 1). Le tout est alors fixé sur un support métallique mais aussi isolé par un jeu de silent-blocs.

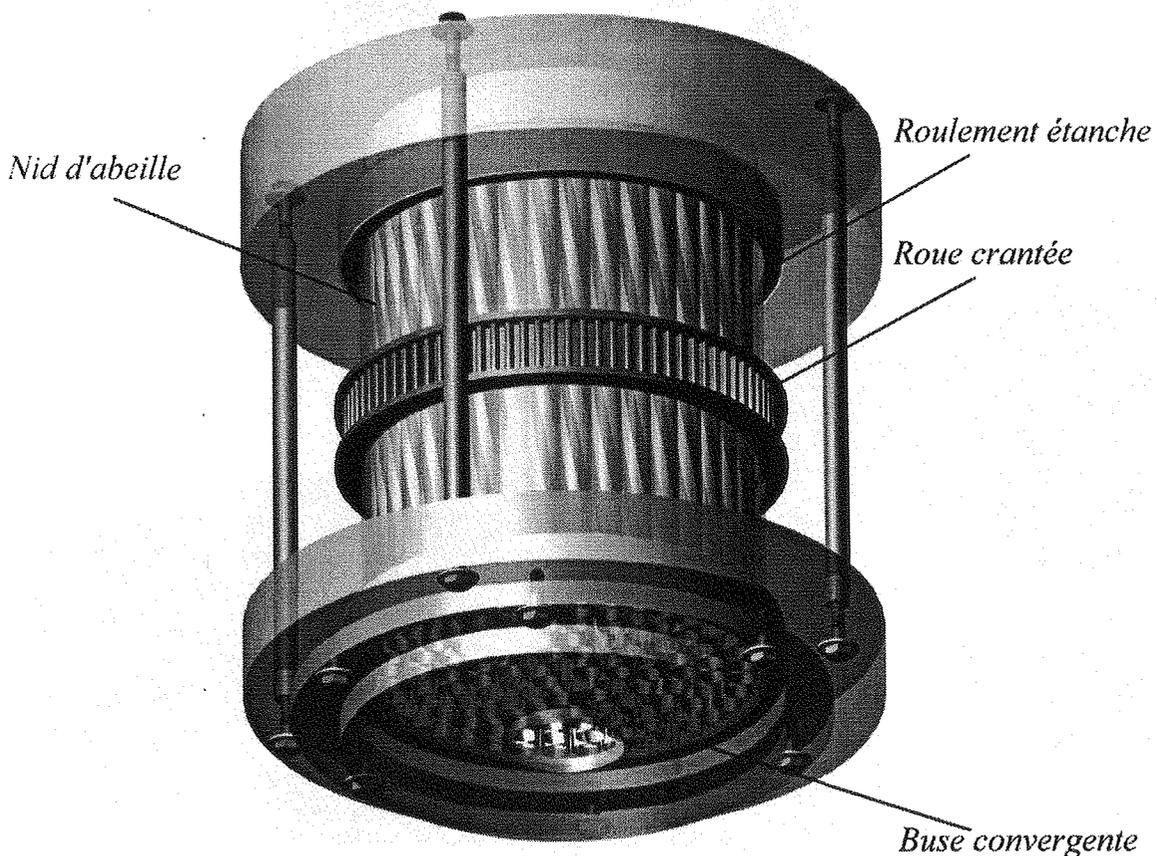


Figure 1 : Système tournant et buse d'injection

En haut du réservoir secondaire, une vanne permet de moduler le débit d'injection du fluide parvenant directement, grâce à des tuyaux souples, d'un réservoir principal situé en hauteur pour avoir une charge suffisante.

Le circuit peut alors fonctionner en boucle fermée : le jet se déverse dans un bac de réception et ce dernier alimente une pompe qui renvoie le fluide vers le réservoir principal.

La vitesse azimutale du jet est obtenue par la rotation du nid d'abeille : un moteur électrique, monté perpendiculairement au support, entraîne le nid d'abeille en rotation par l'intermédiaire d'une courroie crantée. Afin d'atténuer les bruits dus au fonctionnement du moteur, ce dernier a été isolé du banc par des silent-blocs. Le schéma global est le suivant :

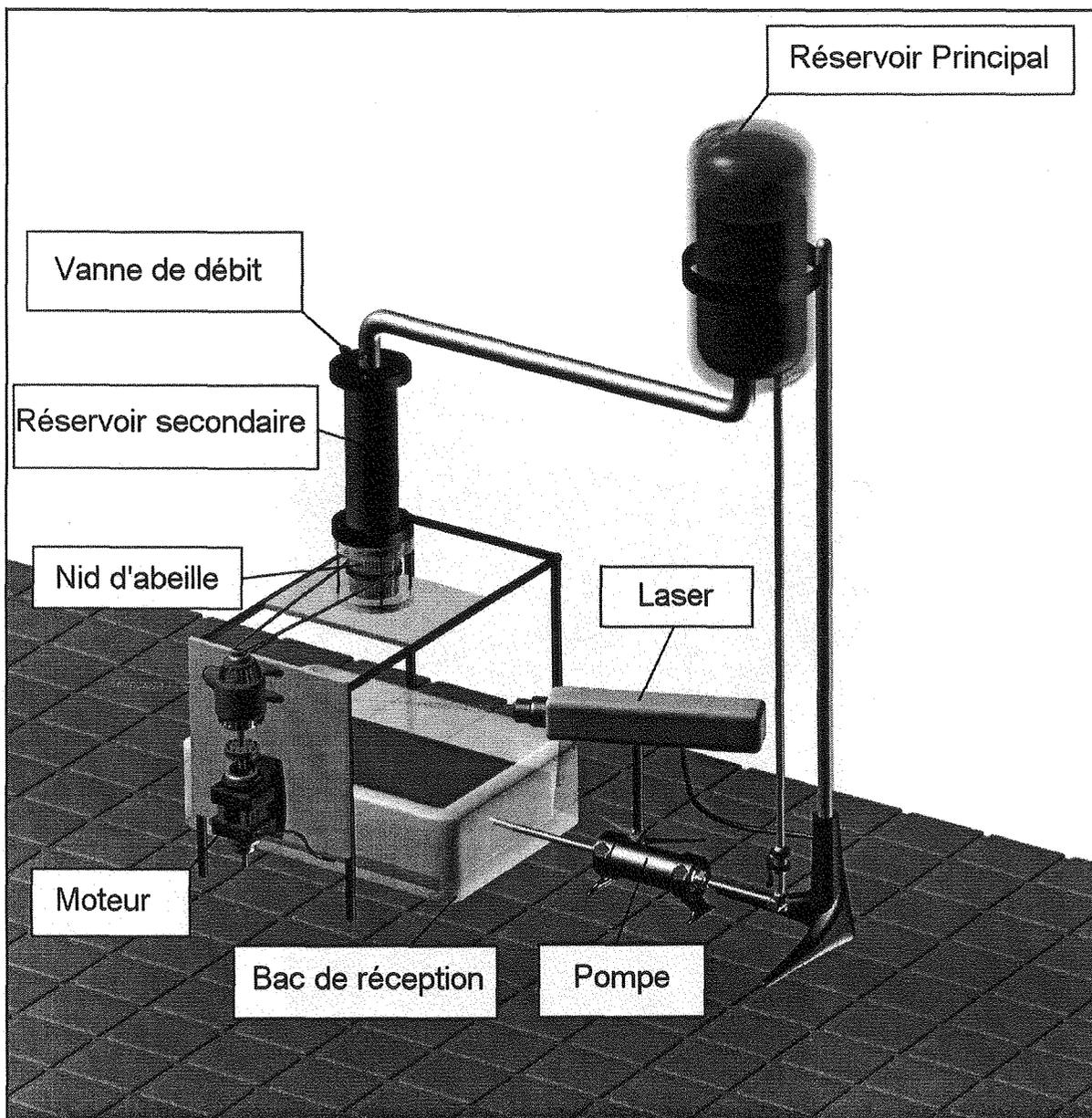


Fig. 2 : Montage expérimental du jet tournant

## 2.2 Mesures préliminaires

Une fois l'ensemble monté, il nous a fallu vérifier que la vitesse orthoradiale variait bien linéairement en sortie de buse et que la vitesse axiale était assimilable à une constante.

Quelques mesures par vélocimétrie laser ont été conduites par Fabrice Lemoine en encadrement de projet 3<sup>ème</sup> année ENSEM. Et malgré la présence d'une interface entre l'eau et l'air, les mesures laser ont été de bonne qualité. La figure ci-dessous représente ainsi quelques profils expérimentaux de vitesses azimutales pour la buse de rayon 15 mm.

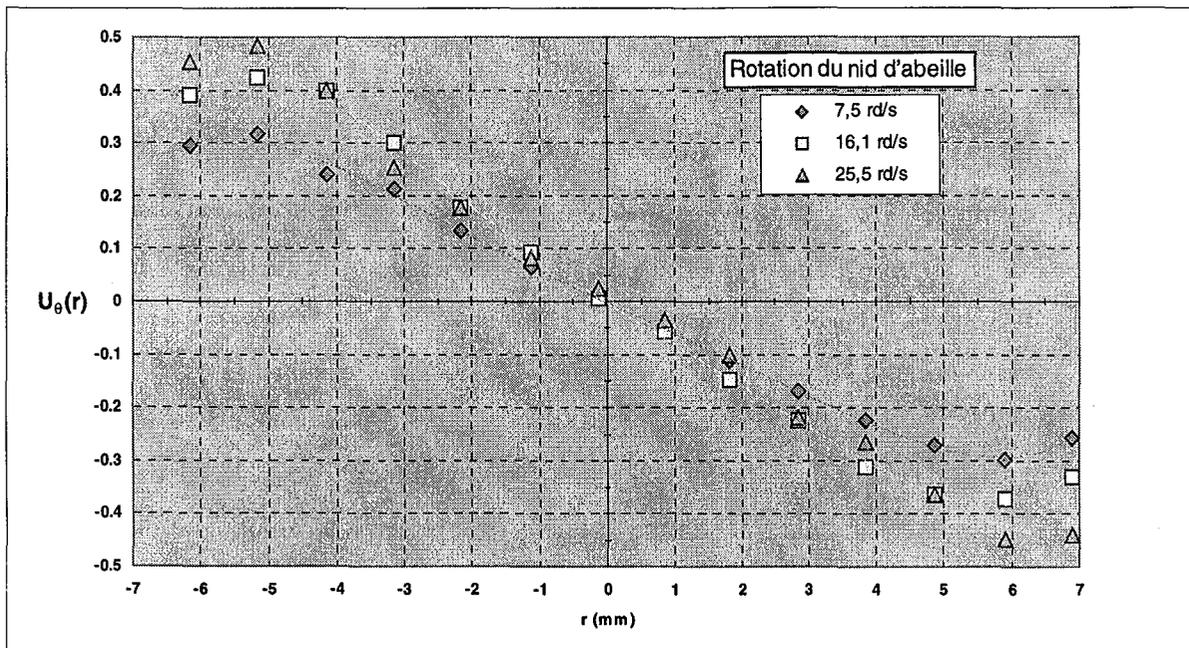


Fig. 3 : Profils expérimentaux de vitesse azimutale du jet tournant capillaire,  $Re=3750$

La qualité des profils de vitesse du jet est donc en adéquation avec le modèle théorique analysé au chapitre II. De plus, grâce à un usinage soigné des buses d'injection, les taux de turbulence demeurent très faibles et l'écoulement peut être assimilé à un écoulement laminaire de fluide parfait jusqu'aux environs d'un nombre de Reynolds de 6000 (des instabilités de faibles longueurs d'onde apparaissent à la surface du jet vers  $Re = 8000$ ).

Cependant, l'utilisation temporaire du banc d'acquisition laser n'a pas pu nous permettre de réaliser une campagne de mesure complète. Pour palier ce problème, nous avons pensé, dans un premier temps, à assimiler l'écoulement au sein de la buse à celui d'un fluide parfait et utiliser le

théorème de Kelvin. La conservation de la circulation au travers du convergent permet alors de relier la vitesse azimutale maximale de sortie de jet  $U_{\theta_0}$  à celle du nid d'abeille  $U_{\theta_1}$  :

$$(1) \quad U_{\theta_0} = U_{\theta_1} \frac{R_1}{R_0}$$

où  $R_1$  est le rayon d'injection supérieur et  $R_0$  est le rayon de sortie de buse. Mais les quelques mesures laser effectuées donnent des valeurs de rotation bien inférieures aux prédictions de la relation (1). L'existence d'effets visqueux ou de pertes de charges singulières peuvent, peut être, expliquer cette différence. Nous avons donc choisi une méthode d'investigation numérique afin de connaître l'évolution des profils de vitesse en fonction du débit et de la rotation du nid d'abeille. Les vitesses linéaires du nid d'abeille et du moteur sont identiques et la vitesse angulaire du nid d'abeille peut ainsi être déduite de celle du moteur, mesurée à l'aide d'un compte-tours à contact. De plus, la vitesse axiale peut être calculée à partir d'une mesure du débit. Ces mesures simples nous ont permis de simuler l'écoulement au sein du convergent en imposant une condition de Dirichlet en amont de la buse.

### 2.3 Simulation numérique sous PHOENICS

Nous avons modélisé la buse d'injection sous le code de volumes finis PHOENICS (Parabolic, Hyperbolic Or Elliptic Numerical Integration Code Series). Grâce à un maillage non structuré, le cône est représenté par  $NY \times NX \times NZ$  mailles suivant les directions  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  comme l'indique la figure 4.

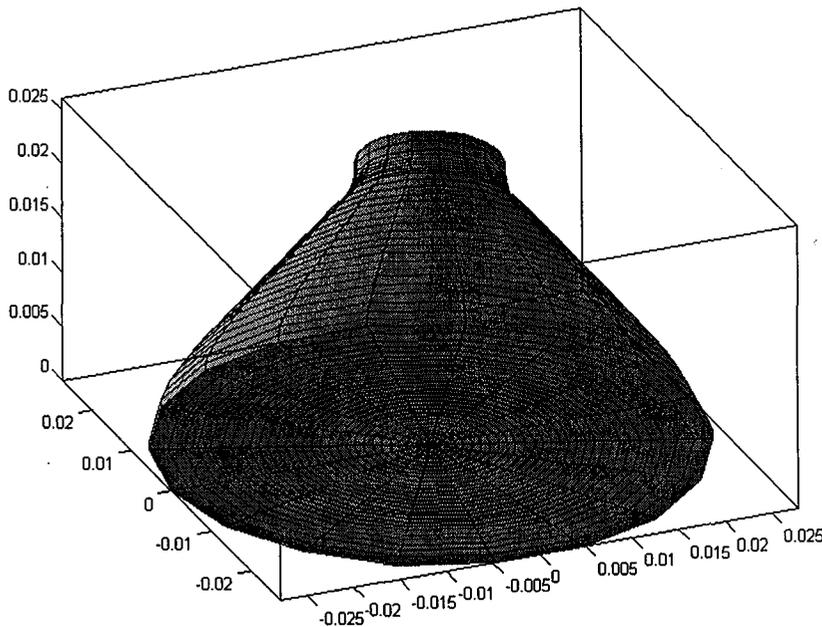


Fig. 4 : Aperçu du maillage 3D,  $NX=18$ ,  $NY=30$ ,  $NZ=30$

Les conditions aux limites imposées sont les suivantes :

$$(2) \quad \vec{U} = \Omega_1 r \vec{e}_\theta + U_1 \vec{e}_z \quad \text{en } z = 0$$

$$(3) \quad \vec{U} = \vec{0} \quad \text{à la paroi}$$

Les équations du mouvement et de continuité ont été résolues sans prendre en compte des termes transitoires et de compressibilité. En sortie de buse, les profils de vitesse sont les suivants :

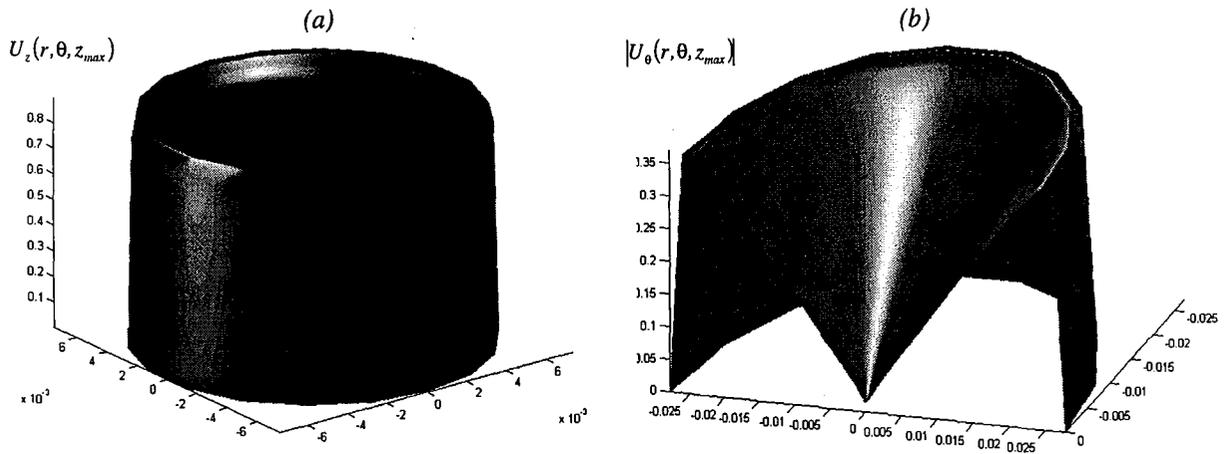


Fig. 5 : Profils de vitesses numériques pour  $Re=6000$  et  $S=0.45$   
 (a) Vitesse axiale  
 (b) Vitesse azimutale

Les profils de vitesses numériques sont en bon accord qualitatif avec les profils expérimentaux : la vitesse azimutale croît linéairement avec le rayon et la vitesse axiale est globalement constante sur la section de sortie.

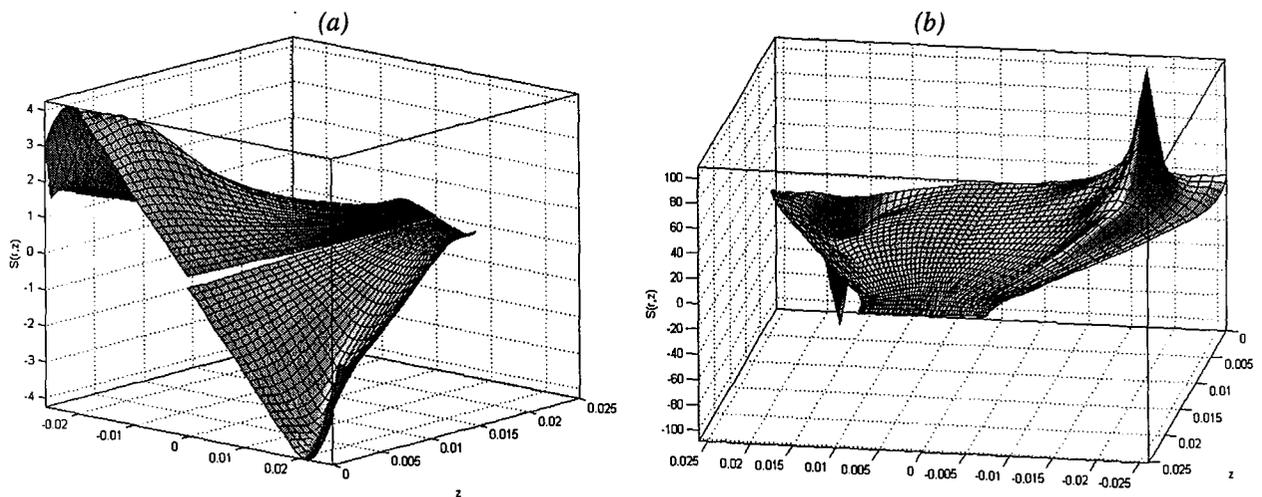


Fig. 6 : Evolution du nombre de swirl local dans la buse  
 (a)  $Re=6000$ ,  $S_{sortie}=0.33$   
 (b)  $Re=3750$ ,  $S_{sortie}=0.85$

Les figures 6.a et 6.b représentent l'évolution, suivant l'axe principal de l'écoulement, du nombre de swirl local défini par  $S_l = U_\theta(r, \theta, z)/U_z(r, \theta, z)$ . Le rapport de la vitesse azimutale à la vitesse axiale est invariant suivant  $\theta$  et diminue fortement entre l'injection dans le convergent et la sortie de buse. Il existe une zone de singularité, plus ou moins prononcée, où le swirl subit un pic, ceci pouvant expliquer qu'il n'y ait pas conservation de la circulation.

Si l'on compare quantitativement les profils expérimentaux et numériques, la valeur de la vitesse axiale est facilement retrouvée : la conservation du débit est l'un des objectifs minimum des simulations numériques et constitue une des premières conditions nécessaires de fin de convergence d'un code de CFD. La difficulté, pour le calcul de cet écoulement, résidait plus dans la bonne prédiction de la vitesse azimutale. Et comme l'indique les figures (7.a) à (7.d), les valeurs numériques approximent correctement les valeurs expérimentales : les écarts relatifs moyens varient entre 2 et 13% suivant le régime étudié.

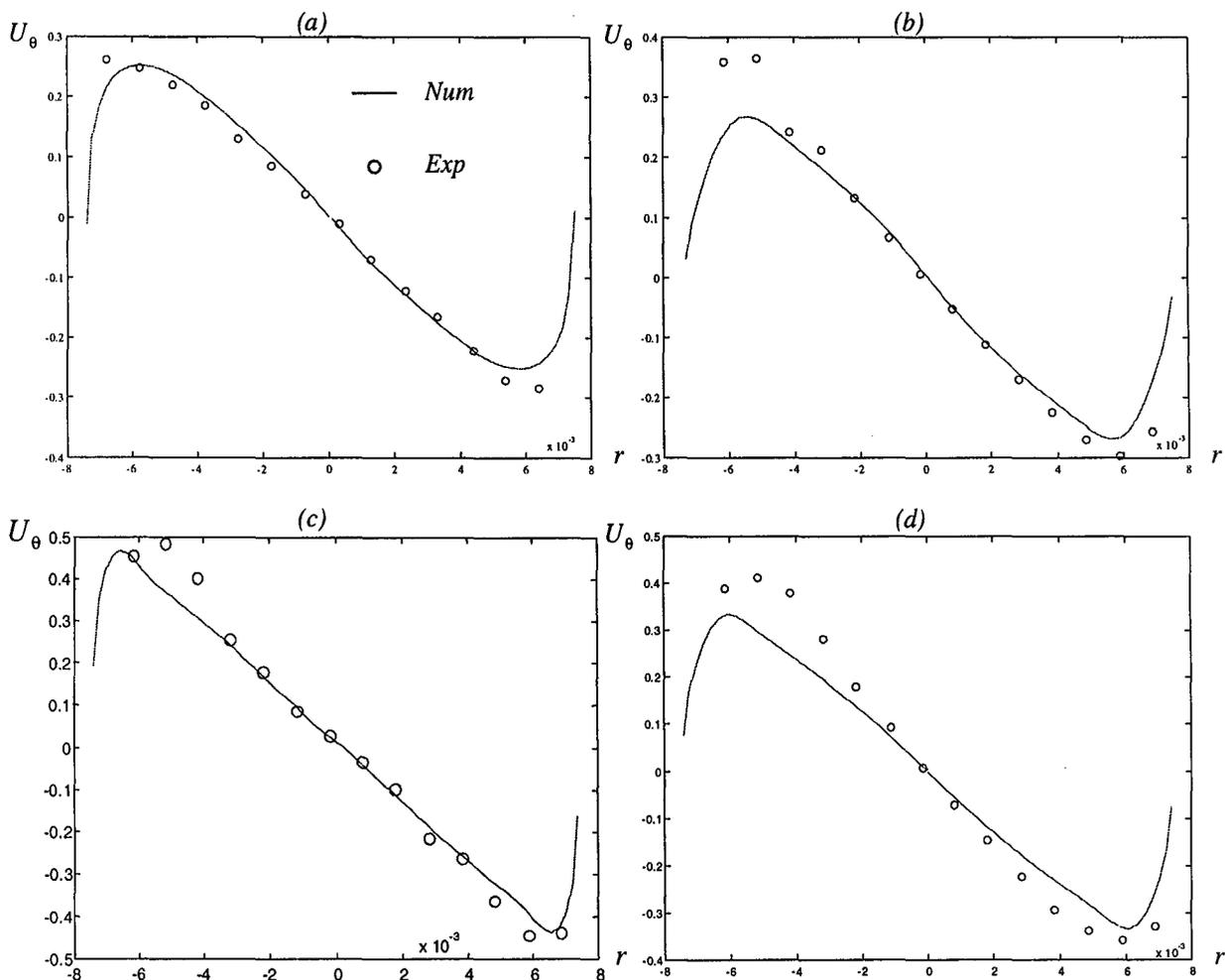
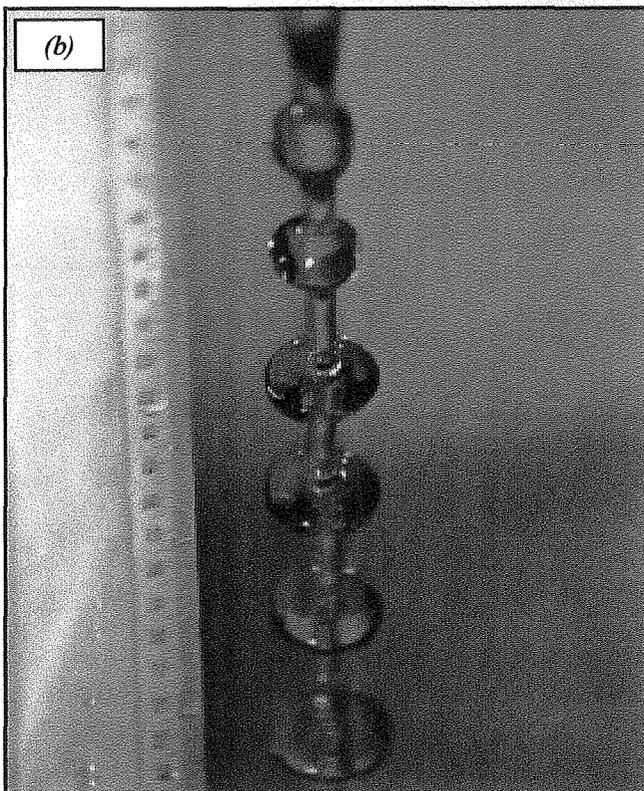
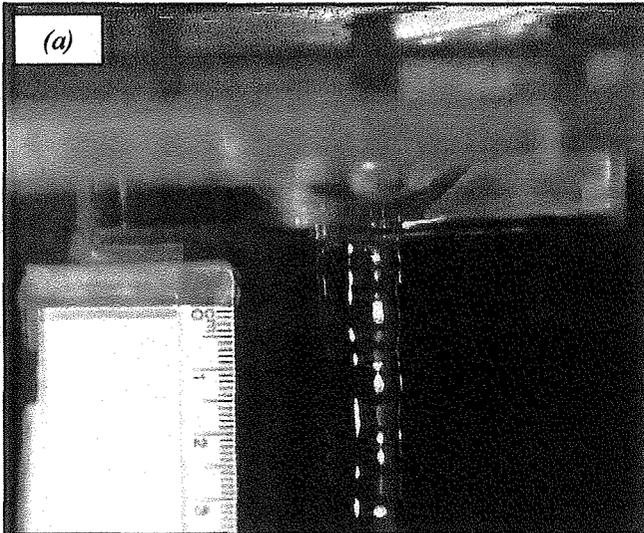


Fig.7 : Comparaison expérience–simulation des profils de vitesse azimutale  
 (a)  $Re=6000, S_{sortie}=0.33$       (b)  $Re=3750, S_{sortie}=0.73$   
 (c)  $Re=3750, S_{sortie}=0.95$       (d)  $Re=3750, S_{sortie}=0.85$

Au vu de ces validations, nous avons décidé de nous baser sur les simulations numériques pour caractériser l'écoulement en sortie de buse, *i.e.* calculer les nombres de Reynolds, de swirl et de Weber.

## 2.4 Visualisations expérimentales

Suivant les plages de rotation et de débit, plusieurs évolutions de jet ont été obtenues ; ainsi, les photographies suivantes témoignent d'une richesse d'instabilité et de bifurcation de solution, insoupçonnées au départ. Il est à noter que seule la buse 15 mm a été utilisée.



A débit suffisamment élevé, le jet non tournant est invariablement stable et seul les plages à grands Reynolds induisent des ondes de faibles longueurs à la surface du jet. L'introduction de la rotation modifie profondément la dynamique du jet et une des premières instabilités mises en évidence est une instabilité axisymétrique ressemblant fortement à l'instabilité de Rayleigh. Elle se développe pour une grande plage de nombre de Reynolds mais à faibles vitesses de rotation. Comme le montre la figure 8.a, des perturbations de grandes longueurs peuvent apparaître dès le début de la buse, croître et saturer. Les instabilités du jet sont des satellites de forme sphérique en amont puis leurs formes évoluent vers des ellipsoïdes de révolution en aval du jet. La distance entre chaque soucoupe n'évolue pratiquement pas suivant la direction axiale et est de l'ordre de  $2R_0$ . Des filets axiaux relient les soucoupes entre elles, et sont rompus en gouttes sur la fin du jet.

Fig. 8 : Instabilité en soucoupe  $Re=4525$ ,  
 $S_{sortie}=0.045$ ,  $We=0.026$   
 (a) En sortie de buse (b) Instabilité développée

Une diminution du débit induit une remonté des soucoupes vers l'écoulement amont et inversement, la distance d'apparition est advectée vers l'aval si la vitesse de sortie du jet est plus importante. En augmentant la rotation du jet, l'instabilité perd son axisymétrie et laisse place à une instabilité le plus souvent en double hélice (cf. fig. 9.a et 9.b). La distance entre chaque «étage» demeure inchangé par rapport à l'instabilité axisymétrique. La différence entre les deux évolutions du jet est surtout visible à partir d'une distance axiale d'environ  $10R_0$ , en dessous de cette distance les deux modes sont indissociables (de visu).

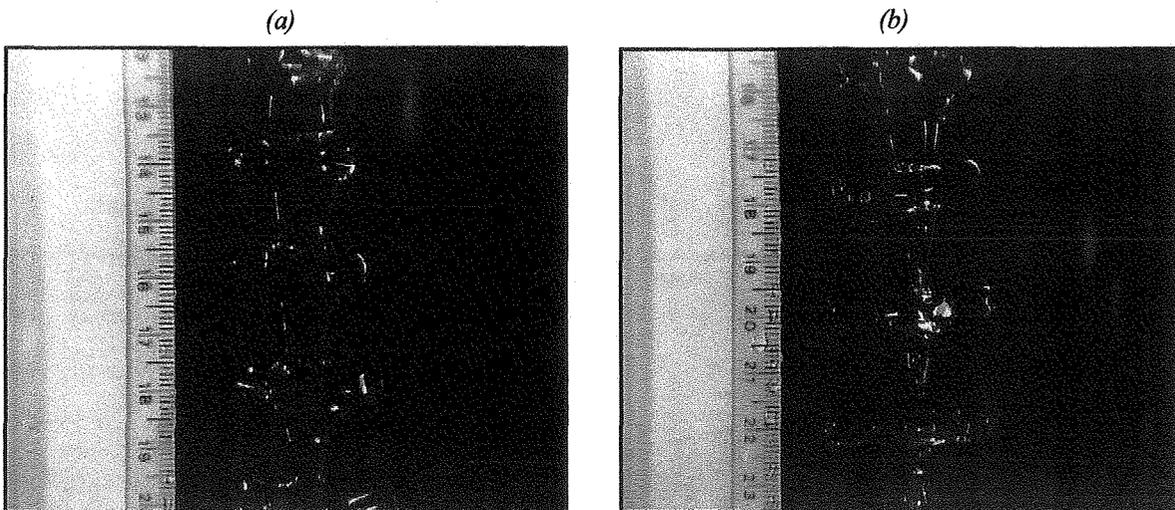


Fig. 9 : Instabilité en double hélice  $Re=4525$ ,  $We=0.026$ ,  $S_{sortie}=0.11$

En suivant vers l'aval l'instabilité en double hélice, on assiste à une rupture et une disparition des filets axiaux, il ne reste alors plus que des formes oblongues indépendantes les unes des autres (fig. 10.a), puis des gouttes satellites se détachent aux extrémités (fig. 10.b).

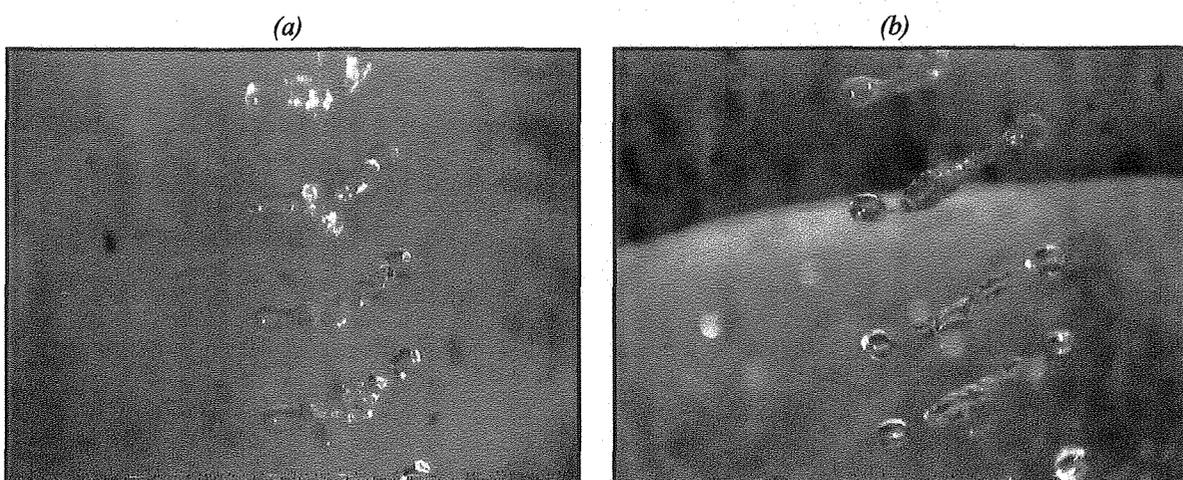
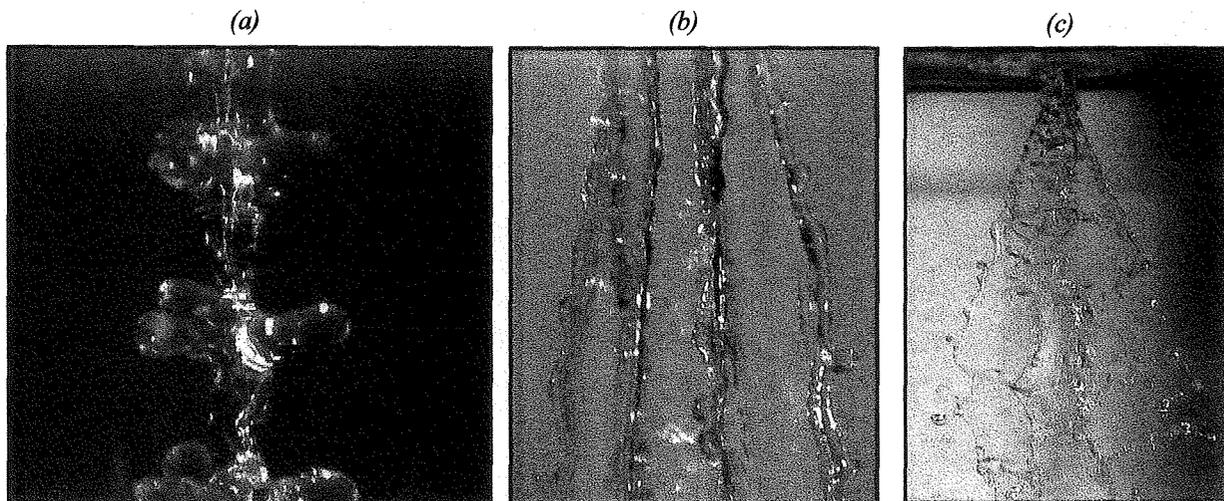


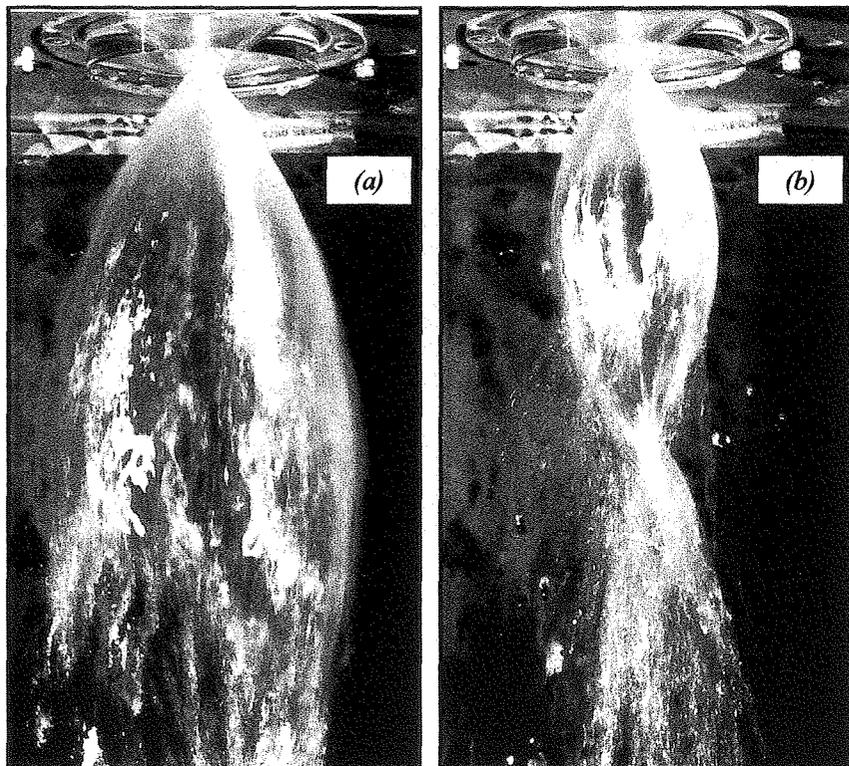
Fig. 10 : Instabilité en double hélice  $Re=4525$ ,  $We=0.026$ ,  $S_{sortie}=0.11$

Pour des valeurs de rotation égales ou supérieures des déformations azimutales 3, 4 et même 5 ont été observées (fig. 11). Cependant, les modes azimutaux supérieurs au mode 3 semblent se former différemment et à rotation plus importante que les premiers modes : la forme du jet est conique et continue, sans structures étagées. Dans cette configuration, si le débit est augmenté, plus aucun mode azimutal n'est reconnaissable, le jet est sous une forme conique pulvérisée.



*Fig. 11 : Instabilité non axisymétriques*  
 (a) Mode 3,  $Re=4525$ ,  $We=0.026$ ,  $S_{sortie}=0.15$       (b) Mode 4,  $Re=5800$ ,  $We=0.015$ ,  $S_{sortie}=0.09$   
 (c) Jet conique

Les dernières topologies observées sont des états éclatés du jet en forme de tulipes ou de bulle et correspondent à des rotations importantes (le débit est plus faible pour la bulle).



*Fig. 12 : Autres formes axisymétriques*  
 (a) Tulipe (b) Bulle

Pour l'ensemble de ces écoulements, il existe de fortes non linéarités, nous avons cependant essayé de comparer le mode en soucoupe avec nos résultats de stabilité linéaire. Le mode axisymétrique apparaît sur une intervalle de faibles rotation du nid d'abeille (20 à 40 tr/mn) puis le mode 2 vient le remplacer. Ce mode pourrait trouver son explication dans une amplification de l'instabilité de Rayleigh par la rotation. L'aplatissement des satellites serait alors dû aux forces centrifuges.

Pour une vitesse de rotation fixée à 28 tr/mn et sur une gamme de nombre de Reynolds compris entre 2000 et 6000, nous avons mesuré les fréquences temporelles et spatiales des instabilités. Grâce à un stroboscope, il nous a été possible de figer la structure des soucoupes au cours du temps et aussi de mesurer la distance entre chaque étage. Nous avons obtenue une précision moyenne sur la mesure de la fréquence en mesurant la fréquence fondamentale mais nous avons pu augmenter la précision de mesure en allant chercher les fréquences harmoniques.

| $S$   | $We$   | $Re$ | $f_{exp}$ (Hz) |
|-------|--------|------|----------------|
| 0.088 | 0.099  | 2300 | 9.75           |
| 0.05  | 0.05   | 3355 | 14             |
| 0.045 | 0.03   | 4525 | 19             |
| 0.036 | 0.0155 | 5854 | 27             |

Tableau 1 : Fréquence des instabilités du mode axisymétrique

De plus, nous avons pu vérifié que la distance  $L_0$  mesurée entre chaque satellite correspondait à la fréquence mesurée en posant simplement :

$$(4) \quad f_{exp} = \frac{U_0}{L_0}$$

où  $U_0$  est la vitesse débitante du jet. Nous l'avons évoqué dans la présentation de l'instabilité en soucoupe, la distance  $L_0$  n'évolue pratiquement pas en fonction du débit. Ceci explique pourquoi la fréquence propre  $f_{exp}$  se comporte de façon quasi-linéaire avec le nombre de Reynolds.

En reprenant notre modèle de fluide parfait, nous avons suivi l'évolution de la fréquence absolue  $\omega_0$  dans l'espace des paramètres  $(We, S)$ . L'ensemble des points expérimentaux correspondent alors à des états théoriquement instables convectifs, la partie imaginaire  $\omega_0$  de la fréquence absolue étant toujours positive.

La partie réelle  $\omega_0$ , de la fréquence absolue détermine les fréquences qui peuvent se développer sur le système :

$$(5) \quad f_{th} = \frac{\omega_{0r}}{2\pi}$$

Nous avons représenté sur la figure 13, l'évolution des fréquences théoriques et expérimentales en fonction du nombre de Reynolds.

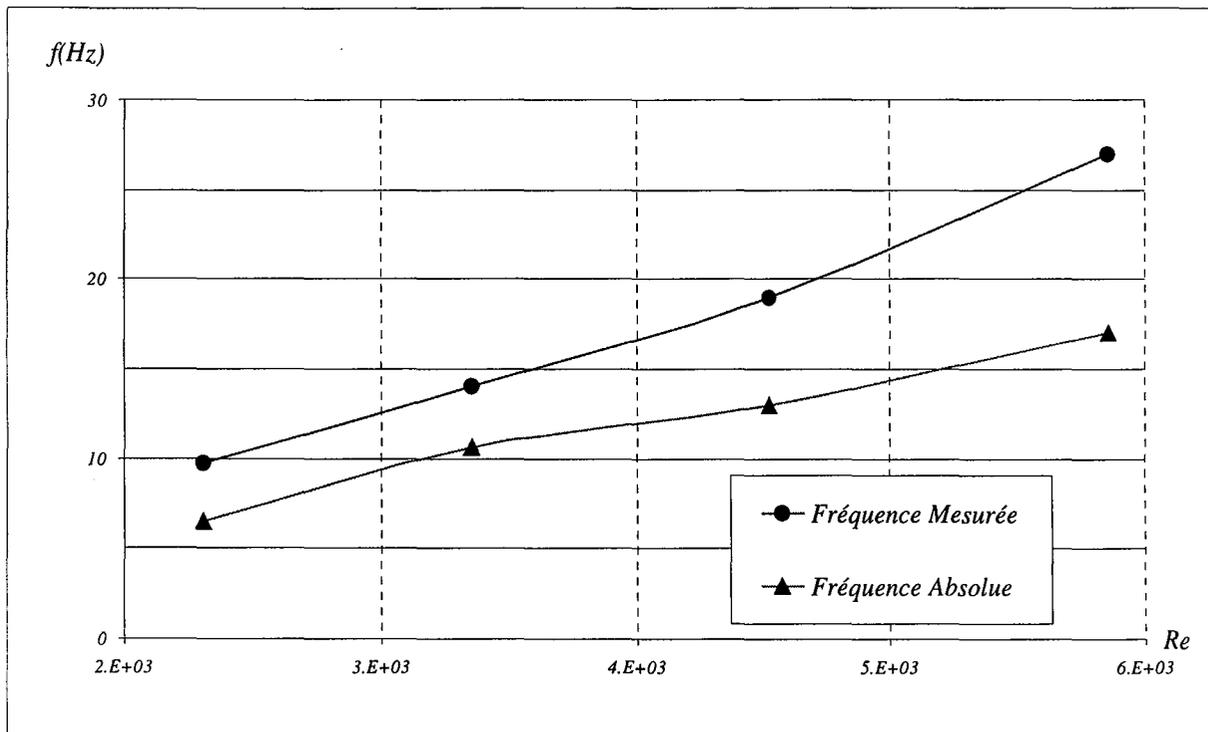


Fig. 13 : Evolution des fréquences théoriques et expérimentales en fonction du Reynolds

En tenant compte des diverses approximations lors de la détermination des points expérimentaux, les résultats semblent en bons accords quantitatifs et qualitatifs.

Pour finir, nous n'avons trouvé aucune transition théorique entre le mode axisymétrique et les modes asymétriques. Nous pensons que les déformations non axisymétriques du jet reposent sur des instabilités secondaires des soucoupes, de façon analogue au transition des gouttes sphériques en rotation vers les modes  $m = 2$  puis  $m = 3$ .

En conclusion, il nous semble qu'une véritable expérimentation sur le jet tournant capillaire constituerait un travail d'investigation intéressant et offrirait des perspectives assez riches en termes d'instabilité hydrodynamique.

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL  
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur SCOTT Julian , Professeur, Ecole Centrale de Lyon, Ecully**

**Monsieur MARTY Philippe, Professeur, L.E.G.I., Grenoble.**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Monsieur LOUESLATI Karim**

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,  
une thèse intitulée :

**"Stabilité hydrodynamique et magnétohydrodynamique d'un jet capillaire tournant".**

en vue de l'obtention du titre de :

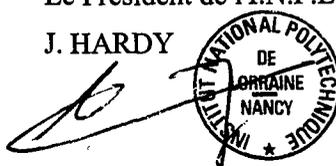
**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

Spécialité : **"MECANIQUE ET ENERGETIQUE"**

Fait à Vandoeuvre le, 7 janvier 2000

Le Président de l'I.N.P.L.,

J. HARDY



NANCY BRABOIS  
2, AVENUE DE LA  
FORET-DE-HAYE  
BOITE POSTALE 3  
F - 5 4 5 0 1  
VANDOEUVRE CEDEX

**Résumé :** L'analyse de stabilité linéaire ainsi que la détermination de la nature des instabilités (absolue ou convective) sont étudiées pour un modèle de jet tournant : le tourbillon de Rankine avec vitesse axiale. Le jet est en rotation solide et sa vitesse axiale est constante. A l'extérieur du jet, le fluide ambiant est animé d'une vitesse axiale différente de celle du jet et sa vitesse azimutale décroît en  $1/r$ .

La première partie du travail est constituée des analyses temporelle et spatio-temporelle des instabilités, en fonction des mécanismes physiques présents : tension superficielle, couches de mélange axiale et azimutale, différence de densité et forces centrifuges. L'influence stabilisatrice de la viscosité du jet sur les instabilités centrifuges et la déstabilisation des modes neutres de Kelvin par la viscosité du fluide environnant sont mises en évidence. La modification des transitions absolu/convectif, issues de la tension de surface, de la différence de densité ou du cisaillement, est caractérisée en fonction des nombres de Reynolds interne et externe.

En seconde partie, la stabilisation de l'écoulement, en présence d'un champ magnétique axial et lorsque le jet est un fluide parfaitement conducteur et non magnétique, est montrée. L'importance de la stabilisation par le champ magnétique étant fonction de la conductivité électrique du fluide, l'influence du nombre de Reynolds magnétique est étudiée. Le champ magnétique est montré comme facteur de diminution des zones d'instabilité absolues si le jet n'est pas en rotation. Sous certaines conditions, l'addition de la rotation du jet et du champ magnétique peut amener à une transition vers l'état absolument instable.

Enfin, dans le cas où le jet, constitué de fluide magnétique et non conducteur, est non tournant, l'importance du champ magnétique axial sur la stabilité spatio-temporelle du système est quantifiée.

**Abstract :** The linear stability analysis and the determination of the nature of the instabilities (absolute or convective) are studied for a model of a swirling jet: the Rankine vortex with axial velocity. The jet is in rigid-body rotation and its axial velocity is constant. At the outside of the jet, the ambient fluid has an axial speed different from that of the jet and its azimuthal speed decreases as  $1/r$ . The first part of work concerns the temporal and space-time analyses of the instabilities, according to the physical mechanisms present: surface tension, axial and azimuthal mixing layers, difference of density and centrifugal forces. The stabilizing influence of the viscosity of the jet on centrifugal instabilities and the destabilization of the neutral modes of Kelvin by the viscosity of the surrounding fluid are highlighted.

The modification of the transitions absolute/convective, resulting from the surface stress, the difference in density or shearing, is characterized according to Reynolds numbers internal and external. In the second part, the stabilization of the flow, in the presence of an axial magnetic field and when the jet is a perfectly conducting and nonmagnetic fluid, is shown. The importance of stabilization by the magnetic field being a function of the electric conductivity of the fluid, the influence of the magnetic Reynolds number is studied. The magnetic field is shown as a factor of reduction in the absolute zones of instability if the jet is not in rotation. Under certain conditions, the addition of the rotation of the jet and magnetic field can bring a transition towards the absolutely unstable state. At last, if the jet, made up of magnetic nonconducting fluid, is nonrevolving, the importance of the axial magnetic field on the space-time stability system is quantified.