



HAL
open science

Représentation de systèmes discrets sur la base des filtres orthogonaux : application à la modélisation de systèmes dynamiques multi-variables

Rachid Malti

► **To cite this version:**

Rachid Malti. Représentation de systèmes discrets sur la base des filtres orthogonaux : application à la modélisation de systèmes dynamiques multi-variables. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1999. Français. NNT : 1999INPL009N . tel-01750595

HAL Id: tel-01750595

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750595>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

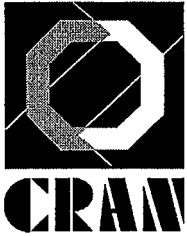
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

1360045773

99 INPL005N

(M) 1999 MALTI R.



Institut National Polytechnique de Lorraine
Ecole Doctorale IAE+M
DFD Automatique et Production Automatisée
Centre de Recherche en Automatique de Nancy



THESE

Présentée pour l'obtention du

DOCTORAT DE
L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
Spécialité Automatique et Traitement Numérique du Signal

par

Rachid MALTI

Représentation de systèmes discrets sur la base des filtres orthogonaux - Application à la modélisation de systèmes dynamiques multi-variables

Soutenue publiquement le 16 janvier 1999 devant la commission d'examen :

Président :	A. Richard	Professeur des Universités
Rapporteurs :	J.-M. Dion	Directeur de Recherches CNRS
	J.-C. Trigeassou	Professeur des Universités
Examineurs :	D. Maquin	Maître de Conférences
	M. Monsion	Professeur des Universités
	J. Ragot	Professeur des Universités
	J.-P. Richard	Professeur des Universités

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois



A ma famille.

REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur J. RAGOT, je tiens à vous remercier vivement pour votre constante disponibilité, pour l'encadrement scientifique dont vous m'avez fait bénéficier, pour les nombreuses discussions enrichissantes que j'ai pu avoir avec vous et pour la confiance totale que vous m'avez accordée tout au long de mes travaux de recherche.

Monsieur D. MAQUIN, Maître de Conférences, permettez-moi de vous adresser mes plus profonds remerciements pour la rigueur scientifique que vous m'avez transmise lors de la rédaction de divers documents, pour le soutien et les conseils que vous m'avez apportés durant la phase finale de mon travail et, au risque de me répéter, pour votre encadrement scientifique et votre constante disponibilité.

Messieurs J.-M. DION, Directeur de Recherche CNRS du Laboratoire d'Automatique de Grenoble (LAG) et J.-C. TRIGEASSOU Professeur des Universités du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle (LAI) de Poitiers, je suis sensible à l'honneur que vous me faites en acceptant d'être rapporteurs de ma thèse.

Monsieur le Professeur A. RICHARD du Centre de Recherche en Automatique de Nancy, je tiens à vous exprimer ma gratitude pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Messieurs M. MONSION Professeur des Universités du Laboratoire d'Automatique et de Productique (LAP) de Bordeaux et J.-P. RICHARD Professeur des Universités du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique de Lille (LAIL), je vous suis très reconnaissant d'avoir accepté d'examiner mon mémoire de thèse.

J'adresse mes remerciements également à tous les membres de l'équipe pour leur aide et l'excellente ambiance qu'ils ont su faire régner tout au long de ces années de travail. Je remercie particulièrement notre secrétaire Mme M. SCHWARTZ pour son aide permanente et pour sa grande disponibilité.

Je tiens à remercier ma famille pour le soutien moral qu'elle m'a témoigné.

Je ne saurais terminer ces remerciements sans une pensée à Nancy pour son constant soutien et pour sa patience durant la phase de rédaction de ma thèse.

SOMMAIRE

Introduction Générale	1
------------------------------	----------

Chapitre I : Introduction à la Représentation de Systèmes sur des Bases Orthogonales - Cas des Filtrés FIR et Laguerre	5
---	----------

1. Introduction	7
2. Base des fonctions à réponse impulsionnelle finie	8
2.1 Calcul des coefficients de Fourier liés aux fonctions δ_{kn}	11
2.2 Convergence des coefficients et de la série des filtres FIR	14
2.2.1 Convergence des coefficients de la décomposition	15
2.2.2 Convergence de la série des filtres FIR	15
2.3 Représentation dans l'espace d'état	17
2.4 Conclusions	17
3. Base des fonctions de Laguerre	19
3.1 Définition des fonctions de Laguerre discrètes	19
3.2 Fonctions de Laguerre pondérées	21
3.3 Réseau de filtres de Laguerre	23
3.4 Calcul des coefficients de Fourier liés aux fonctions de Laguerre	25
3.5 Transformée bilinéaire discrète	25
3.6 Convergence des coefficients de Fourier et de la série de Laguerre	27
3.6.1 Convergence des coefficients de la décomposition	28
3.6.2 Convergence de la série de Laguerre	28
3.7 Représentation dans l'espace d'état	33
3.7.1 Représentation dans l'espace d'état de la transformée en Z	33
3.7.2 Représentation dans l'espace d'état de la transformée bilinéaire	35
3.8 Lien entre le modèle de Laguerre et le modèle de Strejc	37
3.9 Lien avec les moments d'une fonction de transfert	39
3.10 Conclusions	41

Chapitre II : Représentation de Systèmes sur des Bases Orthogonales - Cas des Filtrés de Type Meixner, de Kautz, de la BOG et de type Meixner généralisés	43
--	-----------

1. Introduction	45
2. Base des fonctions de type Meixner	45
2.1 Définition des fonctions de type Meixner	46
2.2 Comparaison avec les fonctions de Laguerre	50
2.3 Calcul des coefficients de Fourier liés aux fonctions de type Meixner	51
2.4 Convergence des coefficients et convergence de la série de Meixner	53
2.4.1 Convergence des coefficients de la décomposition	54
2.4.2 Convergence de la série de Meixner	54
2.5 Représentation dans l'espace d'état	55
2.6 Conclusion	56
3. Base des fonctions de Kautz « à deux paramètres »	57

3.1 Définition des fonctions de Kautz	57
3.2 Réseau de filtres de Kautz	62
3.3 Calcul des coefficients de Fourier liés aux fonctions de Kautz	62
3.4 Convergence des coefficients et convergence de la série de Kautz	63
3.4.1 Convergence des coefficients de la décomposition	63
3.4.2 Convergence de la série de Kautz	64
3.5 Conclusions et perspectives	67
4. Base orthogonale généralisée	69
4.1 Synthèse des fonctions de la base orthogonale généralisée	71
4.2 Réseau de filtres de la base orthogonale généralisée	77
4.3 Calcul des coefficients de Fourier liés aux fonctions de la BOG	79
4.4 Convergence des coefficients et convergence de la série des filtres BOG	79
4.4.1 Convergence des coefficients de la décomposition	80
4.4.2 Convergence de la série des filtres BOG	82
4.5 Représentation dans l'espace d'état	85
4.6 Conclusions	87
5. Généralisation de la base de fonctions de type Meixner à plusieurs pôles réels	87
5.1 Synthèse des fonctions de la base de type Meixner généralisée	88
5.2 Comparaison avec les fonctions issues de la BOG	94
5.3 Calcul des coefficients de Fourier liés aux filtres de Meixner généralisés	95
5.4 Conclusions et perspectives	96

Chapitre III : Choix des Pôles - Conditions d'Optimalité 97

1. Introduction - Formulation du problème	99
2. CO des filtres de Laguerre [Masnadi-Shirazzi et al., 1991] et [e Silva, 1994]	103
2.1 Excitation blanche (impulsionnelle) [Masnadi-Shirazzi, 1991]	104
2.2 Expressions explicites des CO en fonction du pôle pour une classe de fonctions de transfert [Masnadi-Shirazzi, et al 1991]	105
2.3 Validité des CO pour une excitation quelconque (corrélée) [e Silva, 1994]	106
2.4 Exemple	110
2.4.1 Excitation blanche	110
2.4.2 Excitation colorée	113
3. CO des filtres de type Meixner [den Brinker, 1995a]	114
4. CO des filtres de Kautz [den Brinker, 1996a] et [e Silva, 1995]	117
5. CO des filtres BOG [Malti et al, 1998b, 1999a]	120
5.1 Synthèse des CO	121
5.2 Algorithme pour l'écriture des CO [Malti et al. 1999a]	130
5.3 Expression explicite en fonction du pôle pour une classe de fonctions de transfert [Malti et al., 1999a]	132
5.4 CO pour une excitation colorée	134
5.5 Exemple	137
5.5.1 Excitation blanche	137
5.5.2 Excitation colorée	139
6. Conclusions et perspectives	141
7. Annexe	143

Chapitre IV : Identification de Systèmes Linéaires sur la Base des Filtres Orthogonaux - Extension aux Systèmes Non Linéaires par une Technique Multimodèle 147

1. Introduction - Procédure d'identification	149
2. Identification de systèmes monovariables	152
2.1 Critère d'approximation	153
2.2 Estimation paramétrique	156

2.2.1 Estimation des coefficients de Fourier des filtres orthogonaux	157
2.2.2 Estimation des pôles des filtres de la BOG	160
3. Extension aux systèmes linéaires multivariables	174
4. Identification de systèmes non linéaires par multimodèle à base de filtres orthogonaux	179
4.1 Formulation mathématique	180
4.1.1 Partie prémisse	181
4.1.2 Partie conséquence	184
4.1.3 Modèle global	185
4.2 Estimation paramétrique	185
5. Conclusions	191
 <i>Conclusions Générales ... et Perspectives</i>	 193
 <i>Références bibliographiques</i>	 195

Introduction Générale

La modélisation des systèmes constitue un aspect fondamental de toutes les sciences appliquées. Elle vise à établir des relations mathématiques entre les différentes variables caractéristiques d'un système.

Il existe deux approches d'élaboration d'un modèle mathématique. La première, connue sous le nom de modélisation théorique (ou boîte blanche), est basée sur la connaissance des lois physico-chimiques, biologiques ou autres régissant le système réel. La deuxième, ne nécessitant aucune connaissance *a priori* du processus, consiste à sélectionner une structure de modèle et à adapter ses paramètres, en optimisant un critère de performance. Elle est connue sous le nom de modélisation expérimentale (ou boîte noire).

Les travaux présentés dans ce mémoire se situent dans le cadre de la modélisation par fonctions orthogonales discrètes de systèmes dynamiques, linéaires invariants dans le temps (LTI), causaux et stables. Ce mode de représentation est classé dans la famille des modèles dits boîtes noires. Il repose sur le fait que les fonctions orthogonales étudiées forment une base complète dans l'espace de Lebesgue, $\ell^2[0, \infty[$. Une conséquence directe de cette propriété est que, toute réponse impulsionnelle de la classe de systèmes étudiée peut être représentée de façon exacte à l'aide d'une série de fonctions orthogonales.

Les difficultés liées à ce mode de représentation proviennent du fait que l'espace $\ell^2[0, \infty[$ n'est complètement engendré que lorsque la série fonctionnelle est infinie. Il est, bien entendu, impossible, en pratique, d'estimer une infinité de coefficients liés à chaque terme de la série. Par ailleurs, la troncature à un ordre fini ne saurait être justifiée, si celle-ci n'était pas convergente. C'est pourquoi, nous avons attaché une importance particulière, dans ce document, à l'étude du domaine de convergence des séries de fonctions orthogonales. A la différence des méthodes existant dans la littérature, les conditions **nécessaires et suffisantes** ont été établies.

Notre raisonnement, dans ce mémoire est guidé par la recherche d'une représentation optimale de systèmes sur la base d'un nombre minimum de fonctions orthogonales. Quand la fonction de transfert est connue, nous montrerons que cette recherche peut mener à la réduction d'ordre du modèle. Par ailleurs, quand seule la réponse du système à une excitation persistante est connue, nous développerons des algorithmes d'identification. Dans tous les cas, la base orthogonale la plus appropriée sera choisie pour représenter un système donné sous des conditions expérimentales données. Les principaux points traités dans chaque chapitre sont détaillés ci-après.

1^{er} Chapitre : Introduction à la représentation de systèmes sur des bases orthogonales - Cas des filtres FIR et Laguerre

Ce chapitre commence par introduire les différents principes relatifs au produit scalaire et à l'orthogonalité à travers la représentation de systèmes sur la plus simple des bases orthogonales, celle des fonctions *dirac delta*, dont la transformée en \mathcal{Z} représente les filtres à réponse impulsionnelle finie (filtres FIR). La seconde partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de la base des fonctions de Laguerre, qui possède un paramètre supplémentaire : le pôle de Laguerre. C'est pourquoi, cette base est plus adaptée à la représentation de systèmes amortis ayant une dynamique dominante.

2^{ème} Chapitre : Représentation de systèmes sur des bases orthogonales - Cas des filtres de type Meixner, de Kautz, de la BOG et de type Meixner Généralisée

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité du premier. Trois bases de fonctions orthogonales existant dans la littérature y sont étudiées : la base de type Meixner, la base de Kautz et la base orthogonale généralisée (BOG).

La base de type Meixner comporte, en plus d'un pôle réel et unique, un degré de généralisation. Celui-ci apporte plus de souplesse lors de l'identification de systèmes ayant des conditions initiales mal connues. La base de Kautz admet deux pôles complexes conjugués et est, de ce fait, plus appropriée à la représentation de systèmes oscillants. Finalement, la BOG englobe à la fois la définition des bases de fonctions *dirac delta*, Laguerre et Kautz, parce qu'elle admet un nombre quelconque de pôles réels ou complexes conjugués.

¹ espace des fonctions de carrés sommables.

Après avoir étudié ces trois bases, il nous a semblé intéressant, d'en proposer une nouvelle : la base de type Meixner généralisée. Elle généralise, comme son nom l'indique, la définition de la base de type Meixner à plusieurs pôles réels. Ainsi, elle est plus adaptée à l'identification de systèmes ayant plusieurs dynamiques, à partir de conditions initiales mal connues.

Les principaux points abordés dans les **deux** premiers chapitres, pour chacune des ces bases, concernent :

- la complétude de l'espace qu'elles engendrent,
- le calcul et la convergence des coefficients de Fourier,
- la convergence de la série infinie,
- la représentation dans l'espace d'état.

3^{ème} Chapitre : Choix des pôles - Conditions d'optimalité

La décomposition d'une fonction de transfert d'un modèle surparamétrisé, sur des bases orthogonales, permet, dans certains cas, d'obtenir un modèle d'ordre réduit. Pour cela, il faut que le choix des pôles soit optimum. En effet, un tel choix minimise le nombre de filtres nécessaires à l'approximation de la fonction de transfert et, par la même occasion, le nombre total de paramètres dans le modèle final. Dans ce cadre, le calcul des pôles optima passe obligatoirement par la résolution d'équations algébriques connues sous le nom de conditions d'optimalité (CO).

A partir d'une étude bibliographique détaillée des CO des fonctions de Laguerre, de Kautz et de type Meixner, nous avons développé dans ce chapitre, ce qui constitue une des contributions majeures de notre thèse : les CO de la base orthogonale généralisée. Elles concernent le choix des pôles réels de la BOG. Deux cas de figure y sont traités. Le premier est relatif à une excitation blanche ou impulsionnelle, engendrant des sorties de filtres orthogonales. Alors que le second traite de signaux d'excitation colorés. Celui-ci introduit une difficulté supplémentaire, car les sorties de filtres ne sont plus orthogonales. Plusieurs exemples d'illustration agrémentent ce chapitre.

***4^{ème} Chapitre : Identification de systèmes linéaires sur la base des filtres orthogonaux -
Extension aux systèmes non linéaires par une technique multimodèle***

Le dernier chapitre est consacré à l'identification de systèmes à partir de leur réponse à un signal d'excitation suffisamment persistant. Le point original concerne l'optimisation des pôles de la BOG, lorsqu'un nombre fixe de filtres est utilisé. Ces algorithmes sont d'abord présentés dans le cas monovarié, puis élargis au cas multivarié. Notre travail s'inscrit dans la continuité de la thèse de S.B. Ekongolo (1996) et de notre projet de DEA [Malti, 1995].

De plus, une extension à l'identification de systèmes non linéaires par multimodèles à base de fonctions orthogonales est présentée dans la dernière partie de ce chapitre. Là aussi, l'estimation des pôles de la BOG joue un rôle important. Elle est examinée dans un exemple issu de la littérature.

Chapitre 1

*Introduction à la Représentation de Systèmes
sur des Bases Orthogonales - Cas des Filtrés FIR et Laguerre*

*Sans langage commun
les affaires ne peuvent être conclues.*

Confucius

1. Introduction

La représentation de systèmes sur la base de fonctions dites orthogonales présente le grand avantage de s'exprimer de façon linéaire par rapport aux coefficients de Fourier, une fois les paramètres non linéaires (pôles) fixés ; ceci confère à ce mode de représentation des propriétés statistiques très intéressantes pour l'identification de systèmes.

Il est toutefois important, avant d'entamer une démarche d'identification, d'effectuer une étude que nous qualifions de « mathématique » sur la représentation et l'approximation de fonctions connues, pouvant décrire une classe de systèmes physiques, sur la base de fonctions dites orthogonales.

Les systèmes traités dans ce chapitre sont linéaires, invariants dans le temps (LTI), causaux et asymptotiquement stables. Ils sont décrits soit par une équation de différence, une réponse impulsionnelle discrète ou une fonction de transfert. De par le domaine de définition de toute réponse impulsionnelle : $[0, \infty[$, et de ses spécificités vis-à-vis la classe de systèmes considérée, toute réponse impulsionnelle est une fonction de carrés sommables dans l'intervalle $[0, \infty[$. Elle appartient, de ce fait, à l'espace de Lebesgue $\ell^2[0, \infty[$. De même, sa transformée en \mathcal{Z} , représentant une fonction de transfert, est analytique à l'extérieur du cercle unité et continue à l'extérieur et sur le cercle. En conséquence, elle appartient à l'espace de Hardy $H^2(D^c)$, où D^c désigne le complément du cercle unité dans H^2 .

Ce mode de représentation sera étudié indifféremment dans l'un des deux espaces, car les fonctions dites orthogonales dans $H^2(D^c)$ représentent les transformées en \mathcal{Z} des fonctions dites orthogonales dans $\ell^2[0, \infty[$, de la même manière que les fonctions de transfert représentent la transformée en \mathcal{Z} des réponses impulsionnelles.

Les polynômes orthogonaux de Legendre, Krawtchouk, Chebysheve et Hermite, formant une base complète respectivement sur les intervalles $[0, N]$, $[0, N]$ (N entier positif), $[0, 2\pi]$, $[-\infty, \infty]$ (voir [Szegő, 1930, §2.4, p.29] pour plus de détails) et non sur l'intervalle $[0, \infty[$, sont exclus de cette étude.

En revanche, les fonctions dirac delta, Laguerre, type-Meixner, Kautz ainsi que les fonctions issues de la base orthogonale généralisée forment une base orthogonale complète dans $\ell^2[0, \infty[$. De même, leur transformée en \mathcal{Z} forme une base orthogonale complète dans $H^2(D^c)$. Elles feront donc l'objet de cette étude.

La base orthogonale complète la plus connue en automatique est incontestablement la base des fonctions dirac delta ($\{\delta_{kn}\}_{n=0,1,\dots,\infty}$, qui vaut 1 si $k=n$ et zéro autrement). Sa transformée en \mathcal{Z} engendre les filtres à réponse impulsionnelle finie (*FIR filters*). Nous commencerons notre étude par cette base de fonctions, afin d'introduire la notion d'orthogonalité et de présenter les principales propriétés qui lui sont associées. Nous examinerons, par la suite, la base des fonctions de Laguerre, qui dépend essentiellement d'un seul paramètre, appelé pôle de Laguerre et qui est, de ce fait, plus adaptée à la représentation de système ayant une dynamique dominante.

2. Base des fonctions à réponse impulsionnelle finie

Considérons un système discret, linéaire, invariant dans le temps (LTI) et causal, dont la réponse impulsionnelle, $g(k)$, est stable et la fonction de transfert, $G(z)$, de ce fait, analytique à l'extérieur du cercle unité. Il est décrit par son équation de sortie $y(k)$ en fonction de l'entrée $u(k)$ et d'une séquence stationnaire, stochastique, de moyenne nulle, $E\{v(k)\} = 0$, de matrice de covariance connue. Notons q l'opérateur avance et $G(q)$ l'opérateur représentant la fonction de transfert dans le domaine temporel. Alors $y(k)$ s'écrit :

$$y(k) = G(q)u(k) + v(k) \quad (\text{I.1})$$

La sortie de tout système, respectant ces caractéristiques, peut être exprimée en fonction de l'entrée à tous les instants précédents pondérée par la séquence des coefficients, g_n , appelée communément séquence des paramètres de Markov.

$$y(k) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n u(k-n) + v(k) \quad (\text{I.2})$$

Intuitivement, la réponse impulsionnelle $g(k)$, vient d'être exprimée, de façon exacte, sur la base orthonormée des fonctions discrètes dirac delta. Les trois représentations suivantes décrivent, de façon équivalente, le système originel dans ladite base, la première utilisant sa réponse impulsionnelle, la deuxième sa transformée de Fourier discrète et la dernière sa fonction de transfert.

$$g(k) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \delta_{kn} \quad (\text{I.3.a})$$

$$G(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{-i\omega n} \quad (\text{I.3.b}),$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \quad (\text{I.3.c})$$

Avant de poursuivre ce raisonnement, définissons la notion d'orthogonalité, qui vient d'être évoquée, pour trois catégories de fonctions :

- les fonctions de carrés sommables, pouvant représenter la réponse impulsionnelle de la classe de systèmes considérés,
- les fonctions complexes continues sur le cercle unité, pouvant représenter la transformée de Fourier discrète de la classe de systèmes considérés et, enfin,
- les fonctions complexes analytiques à l'extérieur du cercle unité et continues à l'extérieur et sur le cercle unité, pouvant représenter des fonctions de transfert de la classe de systèmes considérés.

Il est à souligner que les trois définitions suivantes sont **équivalentes**. En effet, le théorème de Parseval permet de passer de la première à la deuxième et un simple changement de variable de la deuxième à la troisième.

Définition I.1

Une séquence de fonctions $\{\ell_n(k)\}$, $k \in \mathbf{N}^+$, forme un ensemble de fonctions orthogonales dans l'espace de Lebesgue, $\ell_2[0, \infty[$, si et seulement si le produit scalaire défini par :

$$\langle \ell_n(k), \ell_m(k) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \ell_n(k) \ell_m^*(k)$$

vaut $(C_{nm} \delta_{nm})$, pour tout $n, m \in \mathbf{N}^+$, $C_{nm} \in \mathfrak{R}$. ☒

Définition I.2

Une séquence de fonctions $\{\mathcal{B}_n(e^{j\omega})\}$, $\omega \in [-\pi, \pi]$, forme un ensemble de fonctions orthogonales dans l'espace de Hardy, $H^2(\mathbb{T})$, si et seulement si le produit scalaire défini par :

$$\langle \mathcal{B}_n(e^{j\omega}), \mathcal{B}_m(e^{j\omega}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{B}_n(e^{j\omega}) \mathcal{B}_m^*(e^{j\omega}) d\omega$$

vaut $(C_{nm} \delta_{nm})$, pour tout $n, m \in \mathbf{N}^+$, $C_{nm} \in \mathfrak{R}$. ☒

Définition I.3

Une séquence de fonctions $\{\mathcal{B}_n(z)\}$, $z \in \mathbf{C}$, forme un ensemble de fonctions orthogonales dans l'espace de Hardy, $H^2(\mathbb{D}^c)$, si et seulement si le produit scalaire défini par :

$$\langle \mathcal{B}_n(z), \mathcal{B}_m(z) \rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \mathcal{B}_n(z) \mathcal{B}_m^*(z) z^{-1} dz$$

vaut $(C_{nm} \delta_{nm})$, pour tout $n, m \in \mathbf{N}^+$, $C_{nm} \in \mathfrak{R}$. ☒

Remarque

Si de plus C_{nm} vaut 1, les fonctions sont dites *orthonormales* ou *orthonormées*. ☒

Tout au long de ce document, on fera fréquemment appel aux définitions I.1 et I.3 selon que l'on traite de la réponse temporelle d'un système ou de la réponse fréquentielle.

Notons que les expressions (I.3) représentent des sommes infinies. Dans la pratique, le calcul de tous les coefficients g_n est, bien sûr, impossible. Pour pallier cette difficulté, la solution envisagée est d'approcher la somme infinie par une somme finie. On est donc directement confronté à la théorie de l'approximation fonctionnelle. Le lecteur peut se référer à [Szegö, 1930] pour plus de détails.

La troncature n'est possible que si les séries (I.3) sont convergentes. Comme nous allons le montrer, dans la suite de cette section, pour tout système stable, la séquence des paramètres de Markov tend obligatoirement vers zéro quand n tend vers l'infini. Par conséquent, la troncature de la réponse impulsionnelle à $n = N$ termes (avec $N < \infty$) est possible. Ceci conduit à un modèle à base de réponse impulsionnelle finie (cf. I.4) (*Finite impulse response –FIR– model*). Il admet une représentation en réseau assez simple comme le montre la figure I.1.

$$y(k) = \sum_{n=0}^N g_n u(k-n) + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n u(k-n)}_{\varepsilon(k)} + v(k) \tag{I.4}$$

où l'erreur de modélisation, $\varepsilon(k)$, est composée de l'erreur de troncature et du bruit original.

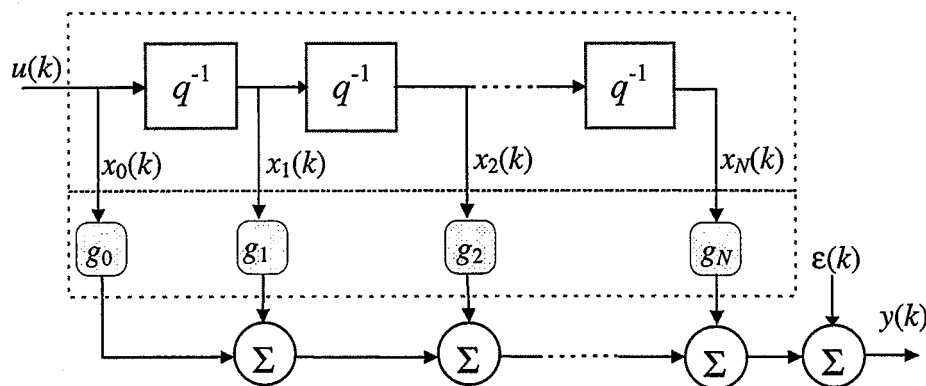


Figure I.1 - Réseau de filtres FIR

2.1 Calcul des coefficients de Fourier liés aux fonctions δ_{kn}

Le problème posé concerne le calcul des coefficients optimaux, au sens du critère quadratique, de la décomposition de la fonction de transfert $G(z)$, sur la base d'un réseau tronqué à N filtres FIR.

L'erreur de troncature, $e_N(k)$, peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$e_N(k) = \sum_{n=N+1}^{\infty} g_n \delta_{kn} \tag{I.5.a}$$

$$e_N(k) = g(k) - \sum_{n=0}^N g_n \delta_{kn} \quad (\text{I.5.b})$$

La formulation (I.5.b) faisant intervenir une somme finie est souvent préférée à (I.5.a).

L'erreur quadratique, J_N , indépendante du nombre de points (k), est définie comme étant la norme quadratique de l'erreur de troncature :

$$J_N = \|e_N(k)\|^2 = \langle e_N(k), e_N(k) \rangle \quad (\text{I.6.a})$$

Si l'on remplace $e_N(k)$ par l'une des deux formules (I.5.a) ou (I.5.b) et si l'on utilise la propriété d'orthogonalité des fonctions δ_{kn} , on aboutit à l'une des deux relations suivantes :

$$J_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} g_n^2 \quad (\text{I.6.b})$$

$$J_N = \|g(k)\|^2 - \sum_{n=0}^N g_n^2 \quad (\text{I.6.c})$$

La minimisation du critère quadratique J_N (voir plutôt (I.6.a)) par rapport aux coefficients de Fourier g_n conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_N}{\partial g_n} = 0 & \Leftrightarrow \left\langle \frac{\partial e_N(k)}{\partial g_n}, e_N(k) \right\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \left\langle \frac{\partial}{\partial g_n} \left(g(k) - \sum_{n=0}^N g_n \delta_{kn} \right), e_N(k) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

Une fois de plus, la propriété d'orthogonalité est utilisée pour écrire :

$$\left\langle \delta_{kn}, \sum_{n=0}^N g_n \delta_{kn} \right\rangle = \langle \delta_{kn}, g(k) \rangle$$

$$g_n = \langle \delta_{kn}, g(k) \rangle \quad (\text{I.7.a})$$

$$g_n = g(n) \quad (\text{I.7.b})$$

Ce résultat, bien connu, exprime les coefficients des filtres FIR comme étant la réponse impulsionnelle du système aux différents instants.

Remarques

1. Si l'on remplace la base FIR par une autre base de fonctions orthonormées, les équations (I.6.b et c) restent valables.
2. De même, le calcul des coefficients g_n en utilisant (I.7.a) s'étend aux autres bases de fonctions orthogonales. En effet, il suffit de remplacer δ_{kn} par les nouvelles fonctions. \square

Puisque le produit scalaire s'exprime également comme une intégrale dans le plan complexe, on peut calculer les coefficients g_n en appliquant le théorème des résidus à l'équation suivante :

$$g_n = \langle G(z), z^n \rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_T G(z) z^n z^{-1} dz, \quad (\text{I.7.c})$$

Rappelons que les g_n représentent les coefficients des différentes puissances de z^{-1} , comme le montre l'équation (I.3.c). En conséquence, on peut également les retrouver en effectuant une division polynomiale du numérateur de $G(z)$ sur son dénominateur, selon la technique connue sous le nom de « *Partial fraction expansion* ». Selon cette technique, l'erreur commise, lors d'un développement à l'ordre N s'écrit :

$$E_N(z) = G(z) - \sum_{n=0}^N g_n z^{-n}.$$

Elle correspond à la transformée en \mathcal{Z} de (I.5.b).

Exemple I.1

Soit $g(k)$ la réponse impulsionnelle d'un système que l'on souhaite décomposer sur la base des filtres FIR.

$$g(k) = 3(0.75)^k + 2(0.8)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

1. Les coefficients de la décomposition s'obtiennent directement en appliquant l'équation (I.7.b), ce qui donne :

$$g_8(k) = 5.00\delta_{k0} + 3.85\delta_{k1} + 2.97\delta_{k2} + 2.29\delta_{k3} + 1.77\delta_{k4} + 1.37\delta_{k5} + 1.06\delta_{k6} + 0.82\delta_{k7} + \mathbf{O}(\delta_{k8})$$

2. Si l'on dispose, à présent, de la fonction de transfert $G(z)$, au lieu de sa réponse impulsionnelle :

$$G(z) = 3\left(\frac{z}{z-0.75}\right) + 2\left(\frac{z}{z-0.8}\right),$$

on peut, alors, calculer les coefficients de la décomposition, soit en résolvant l'intégrale (I.7.c) par application du théorème des résidus, soit en effectuant une division polynomiale du numérateur de $G(z)$ par son dénominateur. Dans les deux cas, on obtient :

$$G_8(z) = 5.00 + 3.85z^{-1} + 2.97z^{-2} + 2.29z^{-3} + 1.77z^{-4} + 1.37z^{-5} + 1.06z^{-6} + 0.82z^{-7}$$

L'erreur quadratique normalisée (*Normalized Mean Square Error –NMSE–*), résultant de cette approximation est, selon (I.6.c) :

$$\frac{J_7}{\|g(k)\|^2} = \frac{\|g(k)\|^2 - \sum_{n=0}^7 g_n^2}{\|g(k)\|^2} = 3.11\%$$

Notons que les coefficients de la décomposition tendent asymptotiquement vers zéro quand l'ordre de la troncature N tend vers l'infini.

Ce résultat est-il valable pour tout système stable ? C'est la question à laquelle nous tâcherons de répondre au prochain paragraphe.

2.2 Convergence des coefficients et de la série des filtres FIR

A partir du moment où l'on dispose d'une base orthogonale complète dans $H^2(\mathcal{D}^c)$, ce qui est le cas pour les fonctions z^{-n} ($n > 0$), toute fonction (de transfert) $G(z)$, appartenant à $H^2(\mathcal{D}^c)$, s'exprime de façon exacte sur cette base :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \tag{I.8}$$

En pratique, une troncature à l'ordre N est souvent effectuée, car il n'est pas souhaitable de calculer une infinité de coefficients. Cette troncature n'est, cependant, possible que si, d'une

part, les coefficients g_n convergent vers zéro et d'autre part la série (I.8) est convergente. C'est pourquoi, nous nous proposons d'étudier les conditions de convergence associées à chacune des bases étudiées, lorsque la fonction de transfert $G(z)$ contient P pôles distincts :

$$G(z) = \sum_{i=1}^P \frac{B_i z}{z - z_i} \quad (\text{I.9})$$

Le calcul de l'intégrale (I.7.c), à l'aide du théorème des résidus permet d'obtenir les coefficients g_n de la décomposition de $G(z)$ sur la base des filtres FIR :

$$g_n = \sum_{i=1}^P B_i z_i^n \quad (\text{I.10})$$

A partir de ce résultat, on peut réécrire (I.8) ainsi :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^P B_i z_i^n \right) z^{-n} \quad (\text{I.11})$$

Notons que g_n (I.10) et $G(z)$ (I.11) représentent des sommes de P séries géométriques, dont les raisons sont respectivement z_i et $z_i z^{-1}$.

2.2.1 Convergence des coefficients de la décomposition

La convergence des coefficients g_n quand n tend vers l'infini, est liée à la convergence des séries qui la composent. Celle-ci est assurée si la norme de la plus grande raison, notée r_f , est inférieure à 1. En conséquence, le pôle dominant z_f ainsi que tous les pôles de $G(z)$, doivent être à l'intérieur du cercle unité :

$$|z_i| \leq |z_f| < 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, f, f+1, \dots, P \quad (\text{I.12})$$

On conclut que les coefficients de la décomposition d'une fonction de transfert stable ayant P pôles distincts sont toujours convergents.

2.2.2 Convergence de la série des filtres FIR

Cette section est consacrée à la détermination du domaine de convergence de la série (I.11) dans le plan de la transformée en \mathcal{Z} .

$G(z)$ étant constituée d'une somme infinie de P séries géométriques, dont les raisons sont $z_i z^{-1}$, sa convergence est assurée, si les normes de toutes les raisons sont inférieures à 1 :

$$|z_i z^{-1}| < 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, f, f+1, \dots, P$$

➤ Puisque $|z_i| < 1$, pour tout système stable,

$$|z| > 1 \quad (\text{I.13.a})$$

constitue une condition suffisante de convergence de (I.11). Elle est cependant restrictive.

➤ La condition nécessaire et suffisante est explicitée par :

$$|z| > |z_f| \geq |z_i| \quad \forall i = 1, 2, \dots, f, f+1, \dots, P. \quad (\text{I.13.b})$$

Graphiquement, le domaine de convergence de la série (I.11), sur le plan de la transformée en \mathcal{Z} , est défini par l'extérieur du cercle dont le centre est à l'origine et dont le rayon correspond à la norme du pôle dominant de $G(z)$.

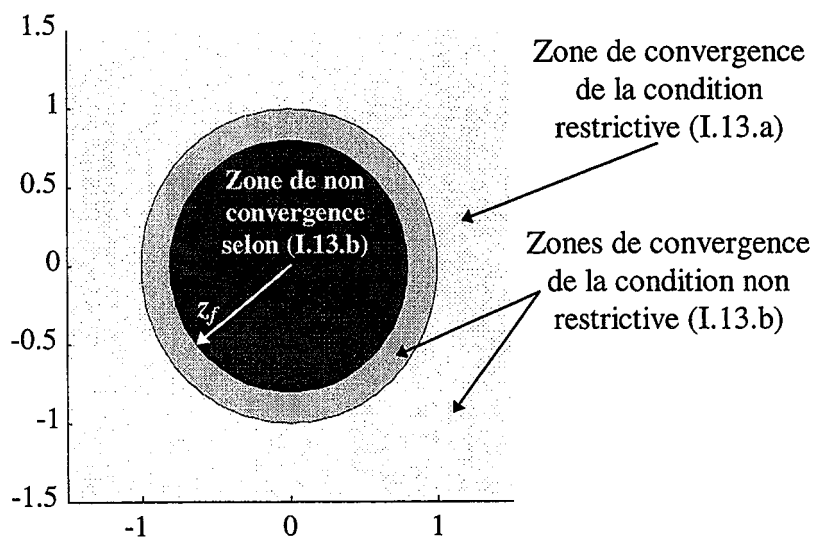


Figure I.2 - Zone de convergence de la série FIR sur le plan de la transformée en \mathcal{Z}

2.3 Représentation dans l'espace d'état

A partir de l'équation (I.4) et de la figure I.1, on peut définir les variables d'état, comme étant les sorties des filtres FIR. Il est alors facile d'établir l'équation d'état d'un réseau tronqué à N filtres :

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k) \quad (\text{I.14.a})$$

$$y(k) = CX(k) + Du(k) \quad (\text{I.14.b})$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}^T, D = [g_0] \text{ et } X(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \end{bmatrix} \quad (\text{I.14.c})$$

La matrice A , les vecteurs B et C ainsi que le vecteur d'état $X(k)$ sont de dimension N .

Exemple I.2

On reprend le système, de l'exemple I.1. Sa représentation dans l'espace d'état est définie par les équations (I.14.a et b) où la matrice A et le vecteur B sont de dimension huit et où la matrice d'observation, également de dimension huit, est constituée de l'ensemble des coefficients de la décomposition calculés précédemment : $C = [5.00, 3.85, 2.97, 2.29, 1.77, 1.37, 1.06, 0.82]$.

2.4 Conclusions

Comme nous l'avons montré au paragraphe 2.2, la représentation par une série de filtres FIR peut être conçue pour approcher tout système asymptotiquement stable. Cependant, une question inévitable que l'on est en droit de se poser est : comment choisir l'ordre de troncature N , afin d'obtenir une représentation adéquate d'un système au sens d'un critère donné ?

Afin d'y répondre, nous nous référerons à l'inégalité (I.12), pour affirmer que la norme des raisons des séries géométriques exprimées par (I.10), et de ce fait la vitesse de convergence, sont fortement liées à l'emplacement du pôle dominant. Ainsi, un pôle voisin du cercle unité génère une série géométrique, dont la norme de sa raison est proche de 1. Par conséquent, la

vitesse de convergence des coefficients est faible. Ceci est parfaitement explicable, car un modèle FIR reflète directement la réponse impulsionnelle du système (cf. I.7.b). Dès lors, **l'ordre de la troncature doit être élevé quand le système discret possède des dynamiques lentes.**

Les pôles et les zéros proches du cercle unité sont très courants. En effet, il est bien connu que, pour un bloqueur d'ordre zéro associé à un système continu, les pôles sont définis par l'équation : $z_j = e^{p_j T_e}$ où p_j représente le pôle continu et z_j son équivalent en discret. Ainsi, il est facile de voir que pour des fréquences d'échantillonnage élevées la norme des pôles est proche de 1. Par ailleurs, des fréquences d'échantillonnage relativement élevées sont conseillées pour la commande numérique (cf. [Middleton, *et al* 1990]). De façon similaire, pour une modélisation purement auto-régressive (AR) les zéros, proches du cercle unité, ralentissent la convergence des coefficients (moments) temporels (voir [Wahlberg, 1991] ou [Lindskog, 1996] pour plus de détails).

L'ordre de troncature, N , des modèles FIR est alors fortement lié à la fréquence d'échantillonnage T_e . Ainsi, quand T_e tend vers zéro l'ordre doit tendre vers l'infini afin d'approcher au mieux le comportement du système. Il serait intéressant d'utiliser des modèles de représentation moins sensibles au choix de la période d'échantillonnage.

En conclusion de cette section, on dira qu'il convient de chercher une autre base de décomposition de système, qui garde le principal avantage des filtres FIR, à savoir une représentation linéaire par rapport aux paramètres g_k , et qui, de surcroît, est moins sensible à l'emplacement du pôle ou du zéro dominant. Le problème se résume donc à choisir intelligemment la base de fonctions $\mathcal{B}(k)$ pour mieux approcher $g(k)$ et permettre ainsi une troncature à un ordre N peu élevé pour la représentation suivante :

$$g(k) \approx \sum_{n=0}^N g_n \mathcal{B}_n(k).$$

3. Base des fonctions de Laguerre

Nous venons de présenter l'inconvénient majeur des modèles FIR. Il semble évident que le choix de la base dépend de la nature du système que l'on cherche à approcher. En conséquence, une base relativement simple sera choisie pour décrire des systèmes amortis et une base plus complexe sera nécessaire pour représenter des systèmes sous-amortis ou à plusieurs pôles distribués.

3.1 Définition des fonctions de Laguerre discrètes

Trois approches différentes ont été utilisées pour la synthèse des fonctions de Laguerre discrètes.

- La première présentée par Arnold, (1966) consiste à appliquer le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (voir [Landesman, 1992]), à un ensemble particulier de séquences linéairement indépendantes.
- La seconde, présentée par King et Paraskevopoulos, (1977), consiste à générer les polynômes de Laguerre discrets à partir des polynômes de Meixner, introduits par Meixner (1934) et à calculer leurs transformées en \mathcal{Z} .
- La troisième approche est due à Roesch, (1973). Elle consiste à discrétiser, les fonctions de Laguerre continues, en calculant leurs transformées en \mathcal{Z} par exemple. Bien qu'elle soit moins connue, la définition qu'il obtient est plus générale parce qu'elle génère des fonctions orthogonales par rapport à une fonction de pondération dépendante du temps. Cette définition peut se ramener, aux deux précédentes, moyennant un choix particulier d'un paramètre. Nous reviendrons sur ce sujet au paragraphe 3.2.

Les polynômes de Laguerre discrets sont un ensemble de polynômes réels de degré n , définis causaux sur l'indice temporel k et dépendants d'un paramètre réel ξ , compris dans l'intervalle $] -1, 1[$ et qui joue le rôle de facteur d'échelle. Nous avons adopté la notation de Tanguy, (1994) qui les présente ainsi :

$$p_n(k, \xi) = \frac{1}{\xi^{2k}} \{ \Delta^n C_n^k \xi^{2k} \} = \xi^{2n} \sum_{j=0}^{\min(n,k)} C_j^n C_j^k \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)^j. \quad (\text{I.15})$$

où $n = 0, 1, 2, \dots$ et où l'opérateur Δ est défini par : $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k-1)$.

Les fonctions de Laguerre discrètes sont directement issues des polynômes de Laguerre discrets par la relation :

$$l_n(k, \xi) = \sqrt{1 - \xi^2} \frac{\xi^k}{(-\xi)^n} p_n(k, \xi) \quad (\text{I.16})$$

En combinant (I.15) et (I.16), on obtient les expressions analytiques des fonctions de Laguerre discrètes dans le domaine temporel :

$$l_n(k, \xi) = \sqrt{1 - \xi^2} \xi^k (-\xi)^n \sum_{j=0}^{\min(n,k)} C_j^n C_j^k \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)^j \quad (\text{I.17})$$

On vérifie aisément, qu'elles satisfont à la condition d'orthogonalité, énoncée par la définition I.1 (p. 9), puisque la relation suivante est satisfaite quel que soit n et m éléments de \mathbf{N}^+ :

$$\langle l_n(k, \xi), l_m(k, \xi) \rangle = \delta_{nm} \quad (\text{I.18})$$

Les trois premières fonctions sont présentées ci-dessous et tracées sur la figure I.3.

$$l_0(k, \xi) = \sqrt{1 - \xi^2} \xi^k$$

$$l_1(k, \xi) = -\sqrt{1 - \xi^2} \xi^{k+1} \left[1 + \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right) k \right]$$

$$l_2(k, \xi) = \sqrt{1 - \xi^2} \xi^{k+2} \left[1 + \left(\frac{(\xi^2 - 1)(3\xi^2 + 1)}{2\xi^4} \right) k + \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)^2 \frac{k^2}{2} \right]$$

Comme le montre la figure I.3, l'allure des fonctions de Laguerre discrètes est semblable à des transitoires oscillants amortis. Ceci leur confère une adéquation pour la représentation de signaux et systèmes fortement amortis.

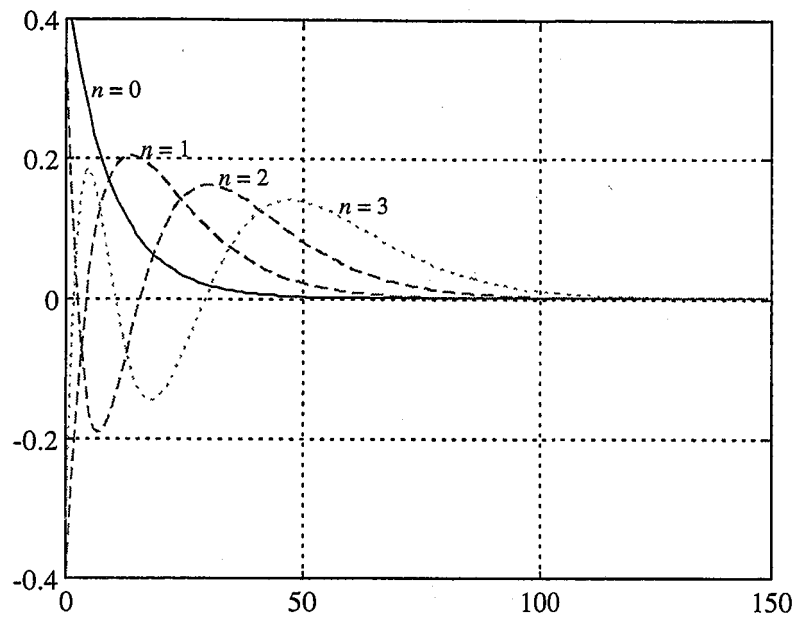


Figure I.3 - Trois premières fonctions de Laguerre discrètes pour $\xi = 0.9$

La transformée en \mathcal{Z} de la $n^{\text{ième}}$ fonction de Laguerre est donnée par :

$$L_n(z, \xi) = \frac{\sqrt{1-\xi^2} z}{z-\xi} \left(\frac{1-\xi z}{z-\xi} \right)^n \quad (\text{I.19})$$

Complétude de l'espace engendré par les filtres de Laguerre

[Wahlberg, 1991] démontre, dans le lemme 2.2, que le développement d'une fonction $G(z)$, appartenant à $H^2(D^c)$, en fonctions de Laguerre est complet si $-1 < \xi < 1$. Ce lemme permet de formuler $G(z)$ de façon exacte, à l'aide d'une série infinie de fonctions de Laguerre :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n L_n(z, \xi) \quad (\text{I.20.a})$$

ou

$$G(z) = \frac{\sqrt{1-\xi^2} z}{z-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{1-\xi z}{z-\xi} \right)^n \quad (\text{I.20.b})$$

3.2 Fonctions de Laguerre pondérées

La définition des fonctions de Laguerre pondérées, proposée par Roesch, (1973), est plus générale que la précédente (I.17 ou I.19), car elle permet d'exprimer l'orthogonalité, par rapport à une fonction de pondération non constante. Cependant, elle ne génère pas de

fonctions orthonormées. C'est pourquoi, nous utiliserons, une fois de plus, la notation de Tanguy, qui introduit un paramètre de normalisation.

Les fonctions de Laguerre pondérées, peuvent être définies, à partir de (I.17), en y ajoutant un facteur d'amortissement $b > 0$:

$$l'_n(k, \xi, b) = b^k l_n(k, \xi)$$

Leur transformée en \mathcal{Z} est :

$$L'_n(z, \xi, b) = \sqrt{1 - \xi^2} \left(\frac{z}{z - \xi b} \right) \left(\frac{b - \xi z}{z - \xi b} \right)^n \quad (\text{I.21})$$

La démonstration d'orthogonalité, par rapport à la fonction de pondération $\omega(k) = b^{-2k}$, se fait directement en utilisant la relation (I.18) entre les fonctions de Laguerre définies précédemment (I.17) :

$$\langle l_n(k, \xi), l_m(k, \xi) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} l_n(k, \xi) l_m(k, \xi) = \delta_{nm} \quad (\text{I.22.a})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} l_n(k, \xi) b^k l_m(k, \xi) b^k b^{-2k} = \delta_{nm} \quad (\text{I.22.b})$$

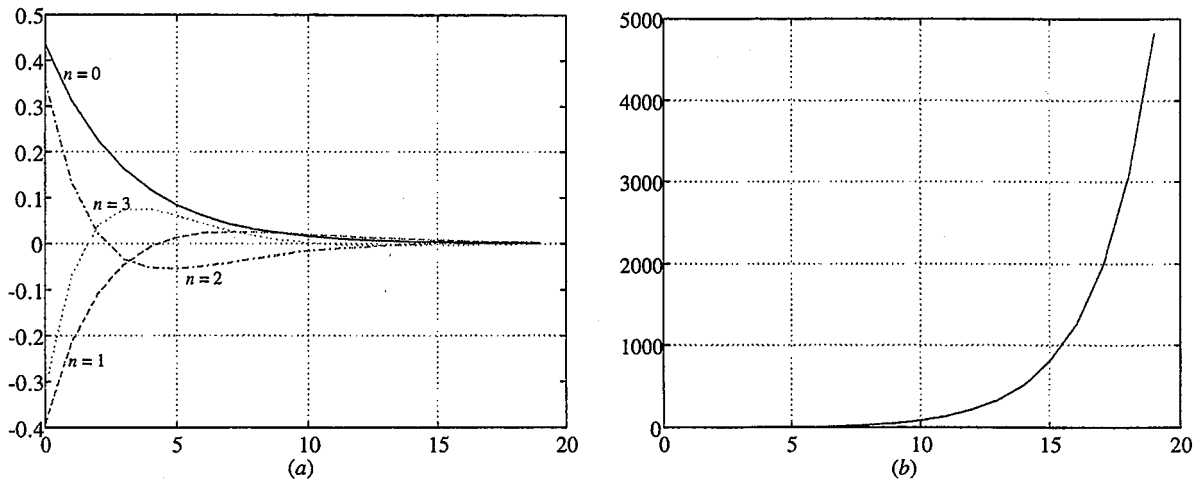
$$\Rightarrow \langle l'_n(k, \xi), l'_m(k, \xi) \rangle_{b^{-2k}} = \delta_{nm} \quad (\text{I.22.c})$$

Remarque

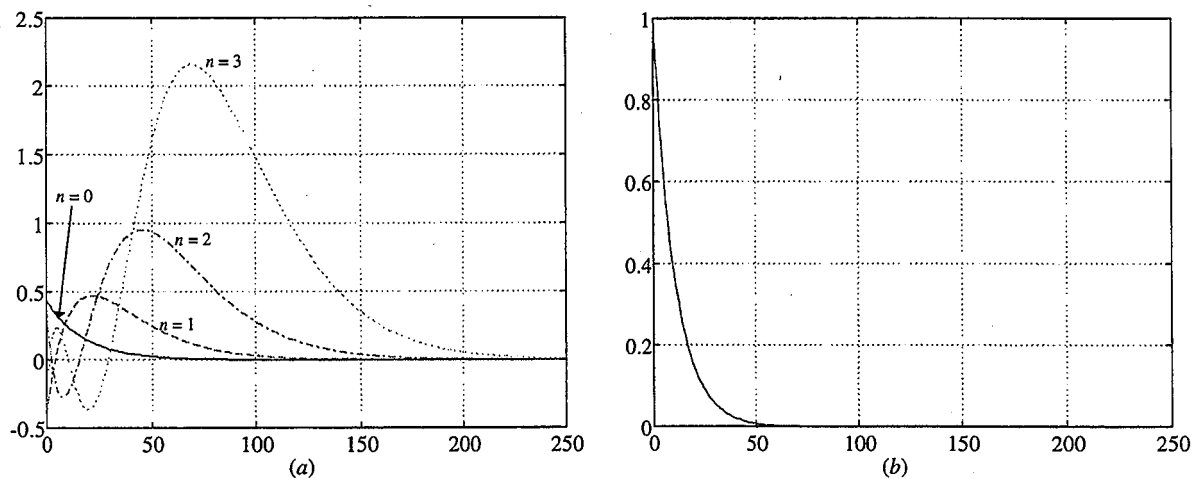
Tanguy impose que le facteur d'amortissement b soit positif. Il est, toutefois, important de signaler que :

- si $b \in]0, 1[$, la fonction de pondération est divergente,
- lorsque $b = 1$, la définition des filtres de Laguerre classiques (I.19) est obtenue,
- seul l'intervalle $b \in]1, \xi^{-1}[$ assure à la fois la stabilité des filtres de Laguerre et la convergence de la fonction de pondération,
- si $b \in]\xi^{-1}, \infty[$, les filtres de Laguerre (I.21), sont instables. ☒

Sur les figures I.4.a et I.5.a sont tracées les quatre premières fonctions de Laguerre, pour une fonction de pondération respectivement divergente et convergente.



**Figure I.4 - (a) Quatre premières fonctions de Laguerre pour $\xi = 0.9$ et $b = 0.8$.
(b) fonction de pondération divergente (0.8^{-2k})**



**Figure I.5 - (a) Quatre premières fonctions de Laguerre pour $\xi = 0.9$ et $b = 1.05$.
(b) fonction de pondération convergente (1.05^{-2k})**

3.3 Réseau de filtres de Laguerre

Les fonctions de Laguerre, présentées au paragraphe 3.1, possèdent des transformées en \mathcal{Z} permettant d'établir la relation de récurrence suivante entre elles :

$$L_0(z, \xi) = \frac{z\sqrt{1-\xi^2}}{z-\xi} \quad (\text{I.23})$$

$$L_n(z, \xi) = \frac{1-\xi z}{z-\xi} L_{n-1}(z, \xi)$$

Les filtres, $L_n(z, \xi)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, définis par (I.19) ou (I.23) sont communément appelés *filtres de Laguerre discrets*. Il est aisé de constater qu'ils sont stables si le pôle ξ , appelé *pôle de Laguerre*, est choisi à l'intérieur du cercle unité. S'il est nul ($\xi = 0$) on retrouve les filtres FIR de la figure I.1. En conséquence, les filtres de Laguerre discrets sont considérés comme une extension des filtres FIR. Ils ont l'avantage de pouvoir être implantés en réseau :

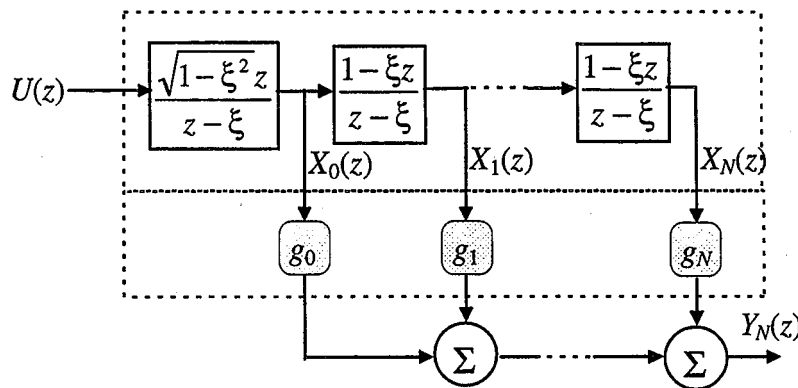


Figure I.6 - Réseau de filtres de Laguerre discrets

A l'origine de cette configuration, on retrouve les travaux de Wiener et Lee sur les fonctions de Laguerre continues. En effet, Wiener, a remarqué que les transformées de Laplace des fonctions de Laguerre peuvent être utilisées pour la représentation de systèmes dynamiques et qu'elles vérifient une relation de récurrence. Lee (1931) a implanté cette configuration sur un circuit électrique de type RLC. Ensuite, le réseau de filtres de Laguerre discrets a été synthétisé par analogie au réseau continu. Il est très utilisé pour la modélisation, *e.g.* [Wahlberg, 1991], [Mäkilä *et al.*, 1994], [Lindskog, 1996], et la commande *e.g.* [Dumont *et al.*, 1986, 1991] et [Jordan, 1996] de systèmes discrets.

Afin de pouvoir tronquer la somme donnée par l'équation (I.20) à N filtres de Laguerre, il reste à vérifier que, d'une part, les coefficients g_n de la décomposition d'une fonction de transfert en filtres de Laguerre discrets sont convergents et que, d'autre part, la série (I.20.b)

est elle-même convergente. Mais auparavant, commençons par présenter les différentes méthodes de calcul des coefficients de Laguerre.

3.4 Calcul des coefficients de Fourier liés aux fonctions de Laguerre

Comme pour les filtres FIR, les g_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, coefficients optimaux au sens du critère quadratique, sont donnés par le produit scalaire de la réponse impulsionnelle du système, $g(k)$, par l'ensemble des fonctions constituant la base (cf. remarque 2 p. 13) :

$$g_n = \langle g(k), l_n(k, \xi) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) l_n(k, \xi) \quad (\text{I.24.a})$$

Le remplacement de $l_n(k, \xi)$ par sa définition, (I.17), conduit à des expressions temporelles complexes. C'est pourquoi on privilégiera la représentation sur le plan de la transformée en \mathcal{Z} issue de la définition I.3. On détermine donc les coefficients de Laguerre, plus aisément, en calculant l'intégrale suivante par le théorème des résidus (voir par exemple [Kreysig, 1993]) :

$$g_n = \langle G(z), L_n(z, \xi) \rangle = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(z^{-1}) \frac{(1-\xi z)^n}{(z-\xi)^{n+1}} dz, \quad (\text{I.24.b})$$

Il existe un moyen de calcul des g_n , qui évite l'intégration sur le plan complexe. Pour qu'il soit présenté, il est nécessaire d'établir, au préalable, le lien entre les fonctions de Laguerre et la transformée bilinéaire.

3.5 Transformée bilinéaire discrète

Définie par (I.25), elle transforme le cercle unité du plan de la transformée en \mathcal{Z} dans le cercle unité.

$$w^{-1} = \frac{1-\xi z}{z-\xi} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1+w^{-1}\xi}{w^{-1}+\xi} \quad (\text{I.25})$$

La relation qui lie la transformée bilinéaire aux filtres de Laguerre se reflète à travers la variable w^{-1} qui représente sur la figure I.6, les blocs passe-tout, permettant d'établir le lien entre un filtre d'ordre n ($n = 0, 1, \dots, N-1$) et celui d'ordre supérieur.

Ainsi, l'application du changement de variable (I.25) à l'équation (I.20.b) permet d'écrire :

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{1+\xi w^{-1}} G\left(\frac{1+w^{-1}\xi}{w^{-1}+\xi}\right) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{1+\xi w^{-1}} \mathcal{G}(w^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k w^{-k}$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}(w^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi g_{k-1} + g_k) w^{-k} \right] \quad (\text{I.26})$$

$\mathcal{G}(w^{-1})$ est couramment appelée la *transformée bilinéaire* ou la *transformée en w de $g(t)$* .

L'équation (I.26) montre qu'il existe une relation linéaire entre les coefficients de Laguerre et les coefficients du développement de la fonction $\mathcal{G}(w^{-1})$ en série de w^{-1} . Par conséquent, quand la fonction de transfert $G(z)$ est connue, le calcul des coefficients de Laguerre, peut se faire en écrivant la transformée bilinéaire $\mathcal{G}(w^{-1})$, via le changement de variable (I.25), puis en effectuant une division polynomiale du numérateur de $\mathcal{G}(w^{-1})$ sur son dénominateur.

Exemple I.3

Reprenons l'exemple I.1 où l'approximation de la fonction de transfert $G(z)$, réécrite ci-dessous, sur la base de huit filtres FIR, a été étudiée.

$$G(z) = 3\left(\frac{z}{z-0.75}\right) + 2\left(\frac{z}{z-0.8}\right), \quad (\text{I.27})$$

En fixant le pôle de Laguerre à proximité des pôles du système, $\xi = .77$ par exemple, le changement de variable (I.25) s'écrit :

$$w^{-1} = \frac{1-0.77z}{z-0.77} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1+w^{-1}0.77}{w^{-1}+0.77}$$

La transformée bilinéaire de $G(z)$ qui en résulte est la suivante :

$$\mathcal{G}(w^{-1}) = \frac{64.16w^{-2} - 2479.5w^{-1} - 3328.3}{w^{-2} + 8.3w^{-1} - 270.4}$$

Si l'on effectue une division polynomiale du numérateur de $\mathcal{G}(w^{-1})$ sur son dénominateur, on obtient le développement de la fonction $\mathcal{G}(w^{-1})$ en série de w^{-1} :

$$\mathcal{G}(w^{-1}) = 12.308 + 9.549w^{-1} + 0.102w^{-2} + 0.038w^{-3} + 0.002w^{-4} + \mathbf{O}(w^{-5}),$$

Ensuite, en utilisant (I.26), on calcule les coefficients de la décomposition de $G(z)$ en fonctions de Laguerre :

$$G(z) = 7.854L_0(z, 0.77) + 0.045L_1(z, 0.77) + 0.030L_2(z, 0.77) + 0.001L_3(z, 0.77) + \mathbf{O}\left(\left(\frac{1-0.77z}{z-0.77}\right)^5\right)$$

(I.28)

Lorsque l'on tronque au premier terme ($N = 0$), la NMSE vaut :

$$\frac{J_0}{\|G(z)\|^2} = \frac{\|G(z)\|^2 - g_0^2}{\|G(z)\|^2} = 7 \times 10^{-6}$$

Notons que les coefficients de la décomposition, dans (I.28), tendent asymptotiquement vers zéro quand l'ordre de la troncature tend vers l'infini. Ce résultat est-il généralisable pour tout système stable ? Nous tâcherons de répondre à cette question au prochain paragraphe.

3.6 Convergence des coefficients de Fourier et de la série de Laguerre

Rappelons que toute fonction (de transfert) $G(z)$, appartenant à $H^2(D^c)$, peut s'exprimer de façon exacte sur la base d'une somme infinie de filtres de Laguerre :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n L_n(z, \xi) \tag{I.29}$$

Cependant, afin de pouvoir tronquer la série infinie à N termes, il faut qu'elle soit convergente. Vérifions, tout d'abord, sous quelles conditions les coefficients g_n , sont convergents et cherchons ensuite, s'il existe, un domaine de convergence en \mathcal{Z} de la série (I.29). Comme pour les filtres FIR, cette étude sera faite pour la fonction de transfert $G(z)$ ayant P pôles distincts :

$$G(z) = \sum_{i=1}^P \frac{B_i z}{z - z_i} \quad (\text{I.30})$$

3.6.1 Convergence des coefficients de la décomposition

Les coefficients de la décomposition de $G(z)$ sur les fonctions de Laguerre, g_n , sont calculés, à partir de l'intégrale (I.24.b) :

$$\begin{aligned} g_n &= \langle G(z), L_n(z^{-1}, \xi) \rangle = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi j} \oint_{\mathcal{T}} \left(\sum_{i=1}^P \frac{B_i z}{z - z_i} \right) \frac{(1 - \xi z^{-1})^{n-1}}{(z^{-1} - \xi)^n} z^{-1} dz \\ &= \sum_{i=1}^P B_i \left(\frac{z_i - \xi}{1 - \xi z_i} \right)^n \quad \text{avec } B_i' = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{1 - \xi z_i} B_i \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

Notons que g_n évolue selon P séries géométriques dont les raisons sont :

$$r_i = w_i = \frac{z_i - \xi}{1 - \xi z_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, f, f+1, \dots, P \quad (\text{I.32})$$

Ces séries sont toutes convergentes si la raison dominante, notée $|w_f|$, est inférieure à 1. Il est donc nécessaire que la norme de toutes les raisons soit également inférieures à 1. Par conséquent, la condition de convergence s'écrit :

$$|w_i| \leq |w_f| < 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, f, f+1, \dots, P \quad (\text{I.33})$$

En conséquence, les coefficients tendent asymptotiquement vers zéro quand n tend vers l'infini, si tous les pôles w_i sont à l'intérieur du cercle unité de la transformée bilinéaire. Puisque l'image du cercle unité, par la transformée bilinéaire inverse, est le cercle unité, la condition de convergence des coefficients de Fourier, sur le plan de la transformée en \mathcal{Z} , est directement liée à la condition de stabilité de la fonction de transfert à décomposer. Il est, par ailleurs, évident que la vitesse de convergence, symbolisée par $|w_f|$, dépend de l'emplacement, non seulement des pôles de $G(z)$, mais aussi du pôle de Laguerre.

3.6.2 Convergence de la série de Laguerre

En remplaçant la définition des fonctions de Laguerre dans (I.29), on obtient :

$$G(z) = \frac{\sqrt{1-\xi^2} z}{z-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{1-\xi z}{z-\xi} \right)^n \quad (\text{I.34.a})$$

Ensuite, en insérant l'expression des coefficients de Fourier (I.31) dans (I.34.a), on parvient à :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^P \frac{B_i(1-\xi^2)}{(1-\xi z_i)(z-\xi)} \left(\frac{z_i-\xi}{1-\xi z_i} \right)^n \left(\frac{1-\xi z}{z-\xi} \right)^n \quad (\text{I.34.b})$$

$$G(z) = \sum_{i=1}^P B'_i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_i-\xi}{1-\xi z_i} \frac{1-\xi z}{z-\xi} \right)^n \quad \text{avec} \quad B'_i = \frac{B_i(1-\xi^2)}{(1-\xi z_i)(z-\xi)} \quad (\text{I.34.c})$$

A partir des équations (I.34), on peut aborder le problème de la convergence de la série de Laguerre de deux manières différentes.

3.6.2.1 Condition restrictive

Les coefficients de Fourier g_n étant convergents (cf. § 3.6.1), on s'intéresse uniquement à la convergence de la série géométrique dont la raison est $\left| \frac{1-\xi z}{z-\xi} \right|$ dans (I.34.a).

Sur le plan de la transformée bilinéaire (I.25), la solution est immédiate. Elle correspond à l'extérieur du cercle unité :

$$|w| > 1 \quad (\text{I.35})$$

Puisque l'image du cercle unité par la transformée bilinéaire inverse est le cercle unité, le domaine de convergence de la série de Laguerre, sur le plan de la transformée en \mathcal{Z} , correspond également à l'extérieur du cercle unité. L'inégalité (I.35) représente **une condition suffisante** de convergence de la série (I.34)

3.6.2.2 Nouvelle proposition : condition non restrictive

Pour trouver la condition nécessaire et suffisante, on se réfère à l'expression (I.34.c), constituée d'une somme de P séries géométriques. Elles sont toutes convergentes si leurs normes sont inférieures à 1.

$$\left| \frac{z_i - \xi}{1 - \xi z_i} \frac{1 - \xi z}{z - \xi} \right| < 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, f, f + 1, \dots, P \quad (\text{I.36})$$

Notons w_i les pôles de $G(z)$, sur le plan de la transformée bilinéaire, w_f le pôle dont la norme est la plus grande sur ce plan et z_f son image par la transformée bilinéaire inverse. L'inégalité (I.36) s'exprime, alors :

$$|w_i w^{-1}| < 1 \Rightarrow |w| > |w_f| \geq |w_i| \quad \forall i = 1, 2, \dots, f, f + 1, \dots, P$$

En conséquence, le domaine de convergence de (I.34.c), sur le plan de la transformée bilinéaire, correspond à l'extérieur du cercle de centre (0, 0) et de rayon $|w_f|$ (voir figure I.7.a).

Le domaine de convergence sur le plan de la transformée en z peut être déduit :

- soit en cherchant l'image de la transformée bilinéaire inverse du disque délimité par le cercle dont l'équation est $w = |w_f| e^{j\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$,
- soit en résolvant directement (I.36) par rapport à z , sans passer par la transformée bilinéaire.

On préférera la seconde méthode tout en gardant la notation w_f pour $\frac{z_f - \xi}{1 - z_f \xi}$ qui peut être calculé à partir des pôles de $G(z)$ et de celui de Laguerre. On cherche donc, le lieu de z , qui vérifie :

$$\left| \frac{z - \xi}{1 - \xi z} \frac{1 - \xi z_f}{z_f - \xi} \right| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z - \xi}{1 - \xi z} \right|^2 > |w_f|^2 \quad (\text{I.37})$$

En posant $z = x + yj$, ce lieu est entièrement défini par x et y :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 - 2\xi x + \xi^2 + y^2 &> (1 - 2\xi x + \xi^2 x^2 + \xi^2 y^2) |w_f|^2 \\ \Leftrightarrow (1 - \xi^2 |w_f|^2) [(x - x_f)^2 + y^2 - r_f^2] &> 0 \end{aligned} \quad (\text{I.38.a})$$

$$\text{avec } x_f = \frac{\xi(1-|w_f|^2)}{1-\xi^2|w_f|^2} \text{ et } r_f = \frac{|w_f|(1-\xi^2)}{1-\xi^2|w_f|^2} \tag{I.38.b}$$

Puisque ξ et w_f sont inférieurs à 1, $(1-\xi^2|w_f|^2)$ est toujours positif. Par conséquent, on déduit de (I.38.a) que le domaine de convergence de la série (I.34.c), sur le plan de la transformée en \mathcal{Z} , correspond à l'extérieur du cercle de centre $(x_f, 0)$ et de rayon r_f (voir figure I.7.b)

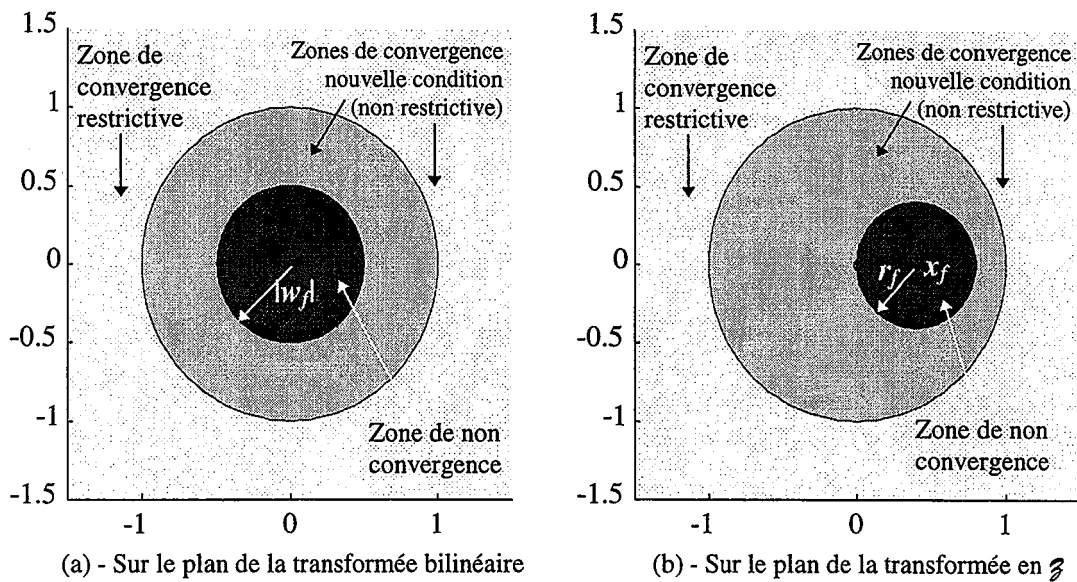


Figure I.7 - Zone de convergence de la série de Laguerre

Exemple I.4

Reprenons la fonction de transfert de l'exemple I.1 :

$$G(z) = 3\left(\frac{z}{z-0.75}\right) + 2\left(\frac{z}{z-0.8}\right),$$

Bien que les coefficients aient déjà été calculés dans l'exemple I.3, on peut vérifier qu'ils obéissent à la relation (I.28), que l'on réécrit ci-dessous pour tout ξ :

$$g_n = \frac{3\sqrt{1-\xi^2}}{(1-\xi 0.75)} \left(\frac{0.75-\xi}{1-\xi 0.75}\right)^n + \frac{2\sqrt{1-\xi^2}}{(1-\xi 0.8)} \left(\frac{0.8-\xi}{1-\xi 0.8}\right)^n$$

On souhaite étudier le domaine de convergence de la série de Laguerre associée à $G(z)$, lorsque $\xi = 0.77$. Pour ce faire on réécrit cette série à partir de (I.34.c) :

$$G(z) = \frac{2.90}{(z-0.77)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-0.05 \frac{1-0.77z}{z-0.77} \right)^n + \frac{2.12}{(z-0.77)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(0.08 \frac{1-0.77z}{z-0.77} \right)^n \quad (\text{I.39})$$

Il est évident qu'elle est convergente si la norme des raisons des deux séries géométriques qui la constituent est inférieure à 1 pour tout z :

$$\frac{z-0.77}{1-0.77z} > 0.05 \quad \text{et} \quad \frac{z-0.77}{1-0.77z} > 0.08$$

A partir de (I.38.a), on conclut que la première inégalité exclut du domaine de convergence le disque délimité par le cercle C_1 , de centre $(0, 0.769)$ et le rayon $r_1 = 0.019$. La seconde inégalité exclut le disque délimité par le cercle C_2 de centre $(0, 0.768)$ et de rayon $r_2 = 0.032$ (voir figure I.8.b). Le premier disque étant inclus dans le second, il aurait suffi de délimiter le second, afin de déterminer le lieu de la variable z qui assure la convergence des deux séries géométriques qui composent l'équation (I.39).

Il est encore plus facile de trouver le lieu de convergence, sur le plan de la transformée bilinéaire. La variable bilinéaire w est maintenant définie par :

$$w = \frac{z-0.77}{1-0.77z}$$

L'expression (I.39), s'écrit en fonction de w ainsi :

$$\mathcal{G}(w) = \frac{2.90}{(z-0.77)} \sum_{n=0}^{\infty} (-0.05w^{-1})^n + \frac{2.12}{(z-0.77)} \sum_{n=0}^{\infty} (0.08w^{-1})^n \quad (\text{I.40})$$

La détermination de la condition de convergence des deux séries géométriques de l'équation (I.40) s'écrit directement :

$$|w| > 0.05 \quad \text{et} \quad |w| > 0.08$$

Elle est représentée sur la figure I.8.a.

On voit clairement, qu'il aurait suffi de déterminer l'inégalité qui correspond au pôle dominant de la transformée bilinéaire, afin de délimiter entièrement le domaine de convergence de $\mathcal{Q}(w)$.

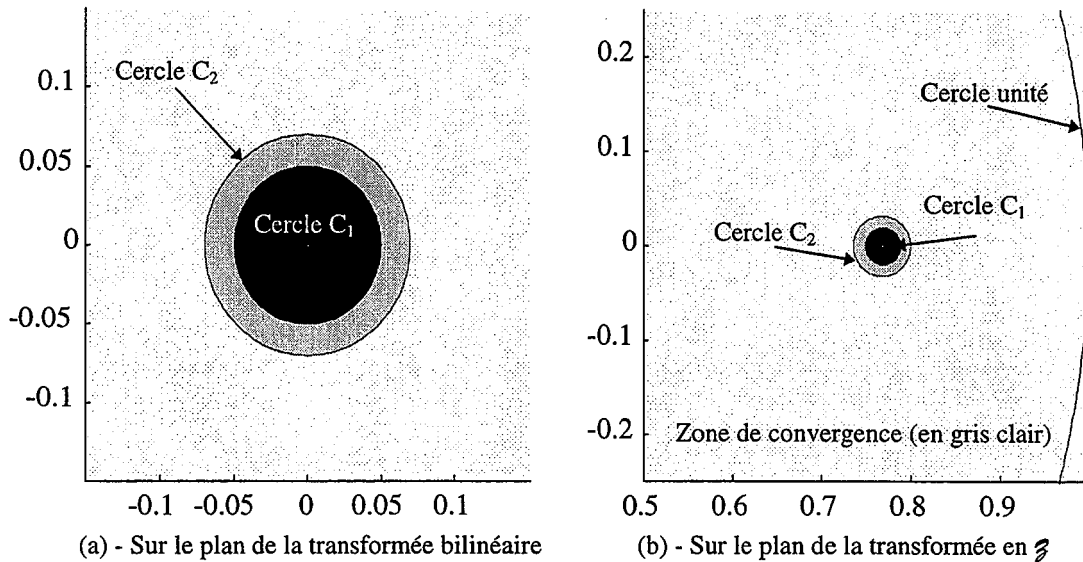


Figure I.8 - Zone de convergence de la série de Laguerre

3.7 Représentation dans l'espace d'état

La modélisation de systèmes sur la base des filtres de Laguerre admet une représentation dans l'espace d'état très conviviale qui est utilisée fréquemment pour la commande des systèmes (voir par exemple [Dumont, 1986, 1991]).

On retrouve dans la littérature deux représentations d'état issues des filtres de Laguerre ; la première utilise l'opérateur retard classique dont la transformée en \mathcal{Z} correspond à z^{-1} , alors que la seconde utilise un opérateur retard, défini explicitement par Wahlberg, (1991) et exploité en l'occurrence par Mäkilä, (1994) et Fischer *et al.* (1998).

3.7.1 Représentation dans l'espace d'état de la transformée en \mathcal{Z}

La représentation d'état, que l'on retrouve le plus fréquemment dans la littérature, correspond à un réseau de filtres de Laguerre strictement causal. C'est-à-dire qu'un retard pur est rajouté en amont du réseau de la figure I.6. Ceci n'altère pas la propriété d'orthogonalité des filtres de

Laguerre. On peut établir ensuite les équations discrètes suivantes, en prenant les sorties de filtres comme variables d'état.

$$\begin{cases} x_0(k+1) = \xi x_0(k) + \sqrt{1-\xi^2} u(k) \\ x_1(k+1) + \xi x_0(k+1) = x_0(k) + \xi x_1(k) \\ x_2(k+1) + \xi x_1(k+1) = x_1(k) + \xi x_2(k) \\ \vdots \\ x_N(k+1) + \xi x_{N-1}(k+1) = x_{N-1}(k) + \xi x_N(k) \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

A partir de la figure I.6, il est facile de voir que la sortie du réseau global, y_N , s'exprime en fonction des différentes sorties de filtres x_i multipliées par leur coefficient de Fourier respectif :

$$y_N(k) = g_0 x_0(k) + g_1 x_1(k) + \dots + g_N x_N(k)$$

Après quelques manipulations classiques [Dumont, 1986] sur le système (I.41), on montre que l'état évolue selon la relation :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + Bu(k) \\ y_N(k) &= CX(k) \end{aligned} \quad (\text{I.42.a})$$

où le vecteur d'état X est de dimension $(N+1)$, qui contient l'ensemble des sorties de filtres de Laguerre. Les éléments de la matrice carrée A , de dimension $N+1$, et du vecteur B , également de dimension $N+1$, dépendent uniquement du pôle de Laguerre. Les éléments de C sont les coefficients de Fourier de la décomposition de la fonction de transfert originelle en fonctions de Laguerre.

$$X(k) = \begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1-\xi^2 & \xi & 0 & \dots & 0 \\ -\xi(1-\xi^2) & 1-\xi^2 & \xi & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\xi)^{N-1}(1-\xi^2) & (-\xi)^{N-2}(1-\xi^2) & \dots & & \xi \end{bmatrix}, \quad B = \sqrt{1-\xi^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\xi \\ (-\xi)^2 \\ \vdots \\ (-\xi)^N \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad C = [g_0 \quad g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_N] \quad (\text{I.42.b})$$

3.7.2 Représentation dans l'espace d'état de la transformée bilinéaire

Il s'agit de trouver une représentation d'état utilisant l'opérateur de décalage de Laguerre, \mathbf{T} , défini explicitement par Wahlberg, (1991) en fonction du pôle de Laguerre :

$$\mathbf{T} = \frac{q - \xi}{1 - \xi q} \quad (\text{I.43})$$

L'opérateur retard discret q est de multiplicité 1, comprise dans le sens de [Rosemblum et Rovnyak, 1985, chapitre 1.4]. Il a été démontré dans [Wahlberg et Mäkilä, 1996] que \mathbf{T} est également un opérateur de multiplicité 1. Puisque q et \mathbf{T} ont la même multiplicité et sont, de ce fait unitairement équivalents « *unitary equivalent* », on peut établir les équations d'état en utilisant l'opérateur de Laguerre comme opérateur de décalage. Pour cela, on peut utiliser l'une des deux méthodes décrites ci-dessous :

- on considère les sorties des filtres de Laguerre comme variables d'état et on reformule le raisonnement du paragraphe 3.7.1, en fonction de l'opérateur \mathbf{T} ,
- on se base sur l'équation (I.42), et on effectue un changement d'opérateur de q à \mathbf{T} .

On propose de déterminer les équations d'état du réseau de filtres causaux de la figure I.6, et non strictement causaux comme c'est exposé au paragraphe 3.7.1. En conséquence, on ne peut utiliser que la première des deux méthodes précitées.

Il s'agit donc de retrouver les matrices de passage de l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}(k)\mathbf{T} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{X}}(k) + \bar{\mathbf{B}}u(k) \\ y_N(k) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{X}}(k) + \bar{\mathbf{D}}u(k) \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

Les sorties des filtres de Laguerre (figure I.6) satisfont aux équations de différences suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0(k) = \frac{\xi + \mathbf{T}^{-1}}{\sqrt{1-\xi^2}} u(k) \\ x_1(k) = \mathbf{T}^{-1} x_0(k) \\ x_2(k) = \mathbf{T}^{-1} x_1(k) \\ \vdots \\ x_N(k) = \mathbf{T}^{-1} x_{N-1}(k) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(x_0(k) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} u(k) \right) \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} u(k) \\ x_1(k) \mathbf{T} = x_0(k) \\ x_2(k) \mathbf{T} = x_1(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \mathbf{T} = x_{N-1}(k) \end{array} \right. \quad (\text{I.45.a})$$

La sortie globale y_N , s'exprime en fonction des sorties de filtres de Laguerre ainsi :

$$y_N(k) = g_0 x_0(k) + g_1 x_1(k) + \dots + g_N x_N(k) \quad (\text{I.45.b})$$

Pour retrouver la représentation d'état, on effectue un seul changement de variable sur x_0 :

$$\tilde{x}_0(k) = x_0(k) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} u(k) \quad (\text{I.46})$$

Ensuite, on combine l'équation de sortie (I.45.b) avec (I.46), et l'on obtient :

$$y(k) = g_0 \tilde{x}_0(k) + g_1 x_1(k) + \dots + g_N x_N(k) + \frac{g_0 \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} u(k) \quad (\text{I.47})$$

Il est alors facile d'exprimer les matrices de passage et de définir le vecteur d'état de l'équation (I.44), à partir de (I.45.a) et (I.47) :

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}_N(k) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{D}} = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (\text{I.48})$$

Notons que si $\xi = 0$, les matrices se réduisent à (I.14.c), \mathbf{T} devient q , et l'on retrouve les équations d'état des filtres FIR (I.14.a et b).

3.8 Lien entre le modèle de Laguerre et le modèle de Strejc

Le développement d'une fonction de transfert en N filtres de Laguerre peut s'écrire sous l'une des deux formes présentées ci-dessous. La deuxième est issue de la première par décomposition en éléments simples.

$$G_N(z) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}z}{z-\xi} \sum_{n=0}^N g_n \left(\frac{1-\xi z}{z-\xi} \right)^n \quad (\text{I.49.a})$$

$$G_N(z) = \sum_{n=0}^N \tilde{g}_n \frac{z}{(z-\xi)^{n+1}} \quad (\text{I.49.b})$$

La forme (I.49.b), est connue sous le nom de modèle de Strejc. On souhaite, dans cette section, établir une relation entre les coefficients de Laguerre g_n et ceux de Strejc \tilde{g}_n . Pour ce faire, on utilise le changement de variable de la transformée bilinéaire (I.25). Le passage de la fonction (I.49.a) à sa transformée bilinéaire est explicité par l'équation (I.26), reprise ci-dessous.

$$\mathcal{G}(w^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[g_0 + \sum_{k=1}^N (\xi g_{k-1} + g_k) w^{-k} \right] \quad (\text{I.50})$$

Notons qu'à partir de (I.25), on a :

$$\frac{1}{z-\xi} = \frac{\xi + w^{-1}}{1-\xi^2} \quad (\text{I.51})$$

En combinant (I.49.b) et (I.51), on déduit :

$$\mathcal{G}(w^{-1}) = \frac{1+\xi w^{-1}}{1-\xi^2} \sum_{n=0}^N \tilde{g}_n \left(\frac{\xi + w^{-1}}{1-\xi^2} \right)^n \quad (\text{I.52})$$

L'identification terme à terme des coefficients des différentes puissances de w^{-1} des équations (I.50) et (I.52), conduit, après quelques simplifications, à l'équation matricielle (I.53) qui définit entièrement le passage entre g_n et \tilde{g}_n . Les matrices multiplicatives de chaque vecteur de coefficients sont de plein rang pour toute valeur de $a \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} \xi & C_1^0 \xi^2 + C_1^0 & \xi(C_2^0 \xi^2 + C_2^1) & \xi^2(C_3^0 \xi^2 + C_3^2) & \dots \\ 0 & \xi & C_2^1 \xi^2 + C_2^0 & \xi(C_3^1 \xi^2 + C_3^1) & \dots \\ 0 & 0 & \xi & C_3^2 \xi^2 + C_3^0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{g}_0 / (1 - \xi^2)^{1/2} \\ \tilde{g}_1 / (1 - \xi^2)^{3/2} \\ \tilde{g}_2 / (1 - \xi^2)^{5/2} \\ \tilde{g}_3 / (1 - \xi^2)^{7/2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \xi & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \xi & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{I.53})$$

On montre ainsi que la famille des fonctions de Strejc, définies par :

$$S_{\mathcal{L}_n}(z) = \frac{z}{(z - \xi)^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

tronquée à l'ordre N , engendre le même sous-espace vectoriel que la famille des fonctions de Laguerre tronquée à l'ordre N . Pour cela, il faut, bien sûr, que le pôle ξ soit identique pour les deux familles de fonctions. En conséquence, l'approximation d'une fonction de transfert appartenant à $H^2(D^c)$ sur la base des fonctions de Laguerre est identique à l'approximation d'une fonction de transfert sur la base des « fonctions de Strejc ».

Calcul des coefficients \tilde{g}_n de la forme de Strejc

Mis à part la relation qui les lie aux coefficients de Laguerre, les coefficients de Strejc peuvent se calculer indépendamment, en minimisant le critère quadratique :

$$J_N = \|E_N(z)\|^2 = \langle E_N(z), E_N(z) \rangle \quad (\text{I.54.a})$$

où, l'erreur de troncature $E_N(z)$ s'écrit :

$$E_N(z) = G(z) - \sum_{n=0}^N \tilde{g}_n \frac{z}{(z - \xi)^n} \quad (\text{I.54.b})$$

Les équations d'optimalité vis-à-vis du choix des coefficients \tilde{g}_i s'explicitent ainsi :

$$\frac{\delta J_N}{\delta g_i} = 0 \Leftrightarrow \left\langle \frac{\partial E_N(z)}{\partial g_i}, E_N(z) \right\rangle = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \frac{z}{(z - \xi)^i}, G(z) - \sum_{n=0}^N \tilde{g}_n \frac{z}{(z - \xi)^n} \right\rangle = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^N \tilde{g}_n \left\langle \frac{z}{(z-\xi)^i}, \frac{z}{(z-\xi)^n} \right\rangle = \left\langle \frac{z}{(z-\xi)^i}, G(z) \right\rangle \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.55})$$

On voit que le calcul des \tilde{g}_n , n'est pas aussi simple que le calcul des coefficients des bases orthonormées, puisqu'il est nécessaire de résoudre un système de $N + 1$ équations (I.55) à $N + 1$ variables, dites *équations normales*. De même, le passage d'un ordre N à un ordre inférieur ou supérieur ne se limite pas à la suppression ou à l'ajout d'un coefficient supplémentaire mais impose la réévaluation de tous les coefficients, parce que les fonctions de Strejc ne sont pas orthogonales.

En conséquence, pour évaluer les \tilde{g}_n , il faut d'abord fixer l'ordre de troncature et ensuite résoudre le système d'équations (I.55).

3.9 Lien avec les moments d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert discrète $H(z)$, dont la réponse impulsionnelle est $h(k)$.

Les moments de $H(z)$ sont définis comme étant les coefficients du développement en série de Taylor de $H(z)$ autour de $z^{-1} = 1$ (cf. [Trigeassou, 1987] et [Marques Da Costa, 1995]) :

$$H(z) = H(1) + \frac{(z^{-1} - 1)}{1!} \left[\frac{dH(z)}{dz^{-1}} \right]_{z^{-1}=1} + \dots + \frac{(z^{-1} - 1)^n}{n!} \left[\frac{d^n H(z)}{dz^{-n}} \right]_{z^{-1}=1} + \dots$$

Ils se calculent donc, selon l'une des deux formules temporelle ou fréquentielle, pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\mathcal{M}_n = \left[\frac{d^n H(z)}{dz^{-n}} \right]_{z^{-1}=1} \quad \mathcal{M}_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} h(k) \quad (\text{I.56})$$

Pour les significations géométriques des moments d'ordre 0, 1 et 2 le lecteur peut se référer à la thèse de Marques da Costa (1995).

Remarque

La définition du moment d'ordre n correspond au produit scalaire :

$$\mathcal{M}_n = \left[\frac{d^n H(z)}{dz^{-n}} \right]_{z^{-1}=1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^n h(k) = \langle C_k^n, h(k) \rangle \quad \square$$

L'objectif du paragraphe suivant est de trouver le lien qui existe entre les moments d'une fonction de transfert et les coefficients de son développement en fonctions de Laguerre.

Lien avec les paramètres de Laguerre

La fonction de transfert $H(z)$ de tout système LTI et stable s'exprime de façon exacte comme une somme infinie de fonctions de Laguerre. On peut donc écrire :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n L_n(z, \xi) \quad (\text{I.57})$$

Le développement en série de Taylor de $H(z)$ et $L_n(z, \xi)$ autour de $z^{-1} = 1$, permet de formuler la relation précédente ainsi :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{M}_i^H \frac{(z^{-1} - 1)^i}{i!} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{M}_i^{L_n} \frac{(z^{-1} - 1)^i}{i!}$$

où \mathcal{M}_i^H et $\mathcal{M}_i^{L_n}$ représentent respectivement les moments de $H(z)$ et de $L_n(z, \xi)$.

En inversant l'ordre des sommes :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{M}_i^H \frac{(z^{-1} - 1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} h_n \mathcal{M}_i^{L_n} \right] \frac{(z^{-1} - 1)^i}{i!},$$

on déduit de la relation précédente :

$$\mathcal{M}_i^H = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \mathcal{M}_i^{L_n} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{I.58})$$

En conséquence, chaque moment d'ordre i d'une fonction de transfert appartenant à $H^2(D^c)$ s'exprime de façon exacte comme une somme infinie des moments d'ordre i de toutes les fonctions de Laguerre, pondérés par leur coefficient de Fourier respectif. Les moments des

fonctions de Laguerre sont calculables directement à partir de (I.56) en remplaçant $H(z)$ par $L_n(z, \xi)$.

Si la représentation du système (I.57) est tronquée à $N + 1$ filtres de Laguerre, comme on a l'usage de le faire, l'évaluation exacte des moments de $H(z)$, à partir de la série (I.58) se transforme alors en une approximation, à condition que cette série soit convergente. Dans ce cas, on ne peut qu'approcher les moments de la fonction de transfert originelle, \mathcal{M}_i^H , par les moments $\mathcal{M}_i^{L_n}$ des $N + 1$ fonctions de Laguerre ayant servi à l'approximation :

$$\mathcal{M}_i^H \approx \sum_{n=0}^N h_n \mathcal{M}_i^{L_n} \quad (\text{I.59})$$

La convergence de la série (I.58) est assurée, parce que d'une part les moments de toute fonction de transfert appartenant à $H^2(D^\circ)$ (y compris ceux des fonctions de Laguerre) sont convergents et que d'autre part, les coefficients de Fourier sont également convergents. La troncature de la somme (I.58) pour aboutir à l'approximation (I.59) est, de ce fait, totalement justifiée.

Remarque

Les relations (I.58) et (I.59) entre les moments d'une fonction de transfert, les moments des fonctions de Laguerre et les coefficients de Laguerre sont valables pour toutes les futures bases orthogonales, que nous allons étudier. Il suffit simplement de remplacer le coefficient de Laguerre h_n , par le coefficient de la nouvelle base et les moments de Laguerre $\mathcal{M}_i^{L_n}$, par les moments de la nouvelle base. Il ne sera donc pas utile de réécrire ces relations pour chaque base nouvellement étudiée. ☒

3.10 Conclusions

La recherche d'une représentation minimale sur la base de fonctions orthogonales a été introduite dans ce chapitre. Le but, maintenant, est de trouver les fonctions orthogonales adéquates \mathcal{E}_n qui permettront d'avoir un ordre de troncature, N , le plus petit possible :

$$G(z) = \sum_{n=0}^N g_n \mathcal{E}_n(z) \quad (\text{I.60})$$

Les fonctions de Laguerre, n'admettant qu'un pôle unique, qui de surcroît est réel, ne sont adaptées qu'à la représentation de systèmes possédant des dynamiques rapprochées et amorties. Elles ne conviennent pas à la représentation de systèmes possédant des dynamiques oscillantes ou éloignées. Il est donc nécessaire d'étudier de nouvelles bases de fonctions qui permettraient d'approcher ce type de systèmes.

Chapitre 2

*Représentation de Systèmes sur des Bases Orthogonales - Cas des
Filtres de Type Meixner, de Kautz, de la BOG et
de type Meixner généralisés*

*I do not know what I may appear to the world; but to myself I seem to have been only like a boy playing on the
seashore, and diverting myself now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary,
whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.*

Sir Isaac Newton

1. Introduction

Le second chapitre s'inscrit dans le prolongement du premier, car il traite de la représentation de systèmes sur des bases de fonctions orthogonales dont l'usage est un peu moins courant que les fonctions dirac delta et Laguerre. Il s'agit plus précisément :

- des fonctions de type Meixner, récemment proposées dans la littérature dont les fonctions de Laguerre sont considérées comme une variante. Elles admettent un pôle réel et unique et introduisent un paramètre de généralisation. Ces fonctions possèdent un intérêt particulier pour l'identification de systèmes quand les conditions initiales sont mal connues, car leur amplitude au voisinage de l'origine des temps est plus faible que celle des fonctions de Laguerre.
- Des fonctions de Kautz, qui admettent deux pôles complexes conjugués et qui sont de ce fait plus adaptées à la représentation de systèmes oscillants.
- Des fonctions issues de la base orthogonale généralisée, qui admettent un nombre quelconque de pôles, généralisant, comme leur nom l'indique, la définition des fonctions δ_{kn} , Laguerre et Kautz.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous synthétiserons une nouvelle base en introduisant un degré de généralisation, à la définition classique de la base orthogonale généralisée. Comparée aux fonctions de type Meixner, la nouvelle base admet plusieurs pôles réels. Elle sera donc considérée comme une extension des deux bases existantes.

2. Base des fonctions de type Meixner

Les fonctions de Laguerre discrètes forment une base complète dans l'espace de Lebesgue et sont caractérisées essentiellement par un seul paramètre : le pôle de Laguerre. Les fonctions orthogonales de Meixner, (1934) sont une extension des fonctions de Laguerre, car elle introduisent un paramètre supplémentaire $a \in \mathbf{N}^+$, appelé degré de généralisation. Cependant,

ces fonctions disposent d'une transformée en \mathcal{Z} irrationnelle pour toutes les valeurs de $a \neq 0$ et se réduisent aux fonctions de Laguerre discrètes, pour la valeur de $a = 0$.

den Brinker, (1995b) propose une généralisation des fonctions de Laguerre discrètes tout en gardant la propriété de rationalité de leur transformée en \mathcal{Z} . Il construit des fonctions orthonomées qu'il nomme « *Meixner like functions* », expression traduite par *fonctions de type Meixner*. Le lecteur peut se référer à [den Brinker, 1995b], pour trouver la procédure de dérivation complète de ces fonctions.

2.1 Définition des fonctions de type Meixner

Les fonctions de type Meixner, notés $m_n^{(a)}(k, \xi)$, où le degré de généralisation $(a) = 0, 1, \dots$, l'ordre $n = 0, 1, \dots$ et le pôle $\xi \in]-1, 1[$, constituent une base orthogonale complète dans l'espace de Lebesgue $\ell^2[0, \infty[$. Ces fonctions sont essentiellement gouvernées par deux paramètres de conception qui sont le pôle ξ et l'ordre de généralisation (a) . Leur définition dans le domaine fréquentiel est :

$$M_n^{(a)}(z, \xi) = (1 - \xi^2)^{a+1/2} \left(\frac{z}{z - \xi} \right)^{a+1} \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(a)} \left(\frac{1 - \xi z}{z - \xi} \right)^j \quad (\text{II.1})$$

où $L_{n+1, j+1}^{(a)}$ est l'élément $(n+1, j+1)$ de la matrice triangulaire inférieure $L^{(a)}$ évaluée de manière à satisfaire à l'orthogonalité des filtres de type Meixner (II.1). La matrice $L^{(a)}$ se calcule directement en inversant la matrice résultante de la factorisation de Cholesky de $U^a \{U^a\}^T$ (U^a signifie U puissance a), où U , de dimension $2N+1$, est une matrice bidiagonale supérieure définie par :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \xi & 0 & & \\ 0 & 1 & \xi & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

En conséquence, $L^{(a)}$ n'est pas explicitement connue, mais se calcule dès que a et N ont été choisis. Dans le domaine temporel, les fonctions de type Meixner peuvent être générées en appliquant une excitation impulsionnelle à l'entrée du réseau de la figure II.1.

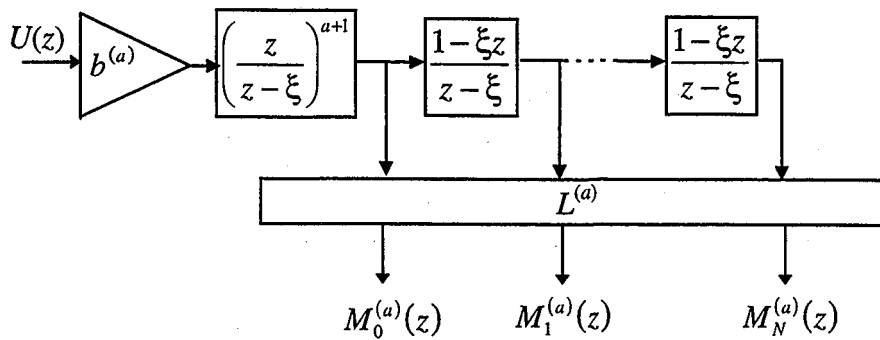


Figure II.1 - Réseau de filtrés de Meixner ($b^{(a)} = (1 - \xi^2)^{a+1/2}$)

Il est intéressant de souligner que les fonctions de type Meixner sont liées aux fonctions de Laguerre par une matrice rectangulaire orthogonale $A^{(a)}$, de dimension $(N+1) \times (2N+1)$. En effet, les $(N+1)$ premières fonctions de type Meixner, regroupées dans le vecteur colonne $\mathbf{M}^{(a)}(z, \xi)$, s'expriment à l'aide des $(2N+1)$ premières fonctions de Laguerre, regroupées, elles, dans le vecteur colonne $\mathbf{L}^{(a)}(z, \xi)$, par :

$$\mathbf{M}^{(a)}(z, \xi) = A^{(a)} \mathbf{L}(z, \xi) \tag{II.3}$$

avec : $A^{(a)} = \underbrace{L^{(a)} U^a}_{N+1 \text{ premières lignes}}$ et

➤ $\dim A^{(a)} = (N+1) \times (2N+1)$,

➤ $\dim L^{(a)} = (2N+1) \times (2N+1)$,

➤ $\dim U^a = (2N+1) \times (2N+1)$.

Précisons que pour évaluer la matrice rectangulaire $A^{(a)}$, seules les $(N+1)$ premières lignes de la multiplication des matrices carrées $L^{(a)}$ et U^a sont gardées.

On note les deux cas particuliers des fonctions de type Meixner :

- quand l'ordre de la généralisation est égal à zéro, on obtient, à partir de la décomposition de Cholesky $L^{(0)} = I$. Les fonctions de type Meixner (II.1) se simplifient alors, en fonctions de Laguerre discrètes :

$$M_n^{(0)}(z, \xi) = (1 - \xi^2)^{1/2} \left(\frac{z}{z - \xi} \right) \left(\frac{1 - \xi z}{z - \xi} \right)^n$$

➤ quand $\xi = 0$, on obtient également $L^{(a)} = I$ et le réseau de Meixner, indépendamment du degré de généralisation a , se simplifie en réseau de filtres FIR :

$$M_n^{(a)}(z, 0) = z^{-n}.$$

Complétude de la base des fonctions de type Meixner

A partir de la relation les reliant aux fonctions de Laguerre (II.3) et de la complétude de l'espace engendré par les fonctions de Laguerre, on démontre que les fonctions de type Meixner engendrent tout l'espace $H^2(D^c)$.

Exemple II.1¹

Pour un degré de généralisation $a = 3$, une troncature à quatre filtres et un pôle $\xi = 0.9$, la matrice $L^{(3)}$ s'écrit :

$$L^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.26 & 0 & 0 & 0 \\ -0.29 & 0.39 & 0 & 0 \\ 0.29 & -0.59 & 0.49 & 0 \\ -0.28 & 0.68 & -0.85 & 0.57 \end{bmatrix}$$

et les fonctions de type Meixner qui en résultent sont :

$$M_n^{(3)}(0.9, z) = 0.003 \left(\frac{z}{z - 0.9} \right)^4 \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(3)} \left(\frac{1 - 0.9z}{z - 0.9} \right)^j \quad n \text{ variant de } 0 \text{ à } 3.$$

Elles sont tracées sur la figure II.2.

¹ Nous remercions M. le Prof. den Brinker, de l'université d'Eindhoven pour nous avoir fourni la fonction Matlab qui permet de générer les fonctions de type Meixner.

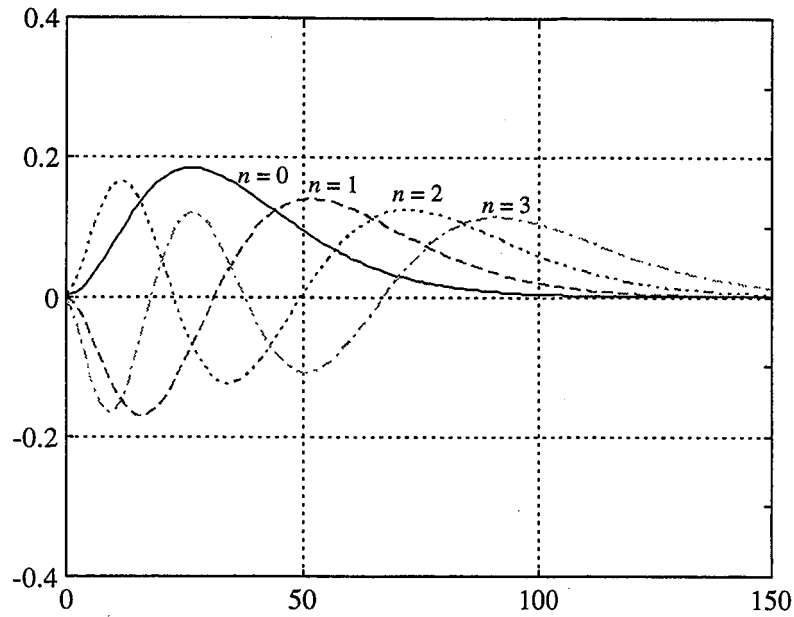


Figure II.2 - Les quatre premières fonctions de type Meixner ($a = 3$ et $\xi = 0.9$)

Les quatre premières fonctions, regroupées dans le vecteur $\mathbf{M}^{(3)}(z, 0.9)$, s'expriment à l'aide des sept premières fonctions de Laguerre discrètes, regroupées dans le vecteur $\mathbf{L}(z, 0.9)$ ainsi :

$$\mathbf{M}_{4 \times 1}^{(3)}(z, 0.9) = \mathbf{A}_{4 \times 7}^{(3)} \mathbf{L}_{7 \times 1}(z, 0.9) \text{ avec } \mathbf{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.70 & 0.63 & 0.19 & 0 & 0 & 0 \\ -0.29 & -0.40 & 0.35 & 0.74 & 0.29 & 0 & 0 \\ 0.29 & 0.21 & -0.38 & 0.11 & 0.76 & 0.36 & 0 \\ -0.28 & -0.08 & 0.29 & -0.28 & -0.04 & 0.76 & 0.41 \end{bmatrix}.$$

Le lecteur peut comparer les figures II.2 et I.3 pour voir que l'ordre de la généralisation influence sur l'amplitude des fonctions au voisinage de l'origine. Nous étudierons plus en détail ce point au paragraphe 2.2.

den Brinker, (1995b) a également formulé les fonctions de type Meixner dans le domaine temporel. En effet, après avoir défini :

➤ la fonction $w^{(a)}(k)$:

$$w^{(a)}(k) = \{(k+1)_a\}^2 \xi^{2k} u(k)$$

où $(\cdot)_a$ représente le symbole de Pochhammer² et $u(k)$ la fonction échelon,

➤ et le polynôme $p_n^{(a)}(k)$ d'ordre n :

$$p_n^{(a)}(k) = \sum_{l=0}^m C_{n+1,l+1}^{(a)} \frac{(k+n+1)_l}{(l+n)!}$$

où $C_{n+1,l+1}^{(a)}$ est une matrice dont les éléments sont :

$$C_n^{(a)} = (1-\xi^2)^{a+1/2} \sum_{j=l}^n L_{n+1,j+1}^{(a)} (-\xi)^{-j} \binom{j}{l} (\xi^2 - 1)^l,$$

il montre que les fonctions de type Meixner s'expriment dans le domaine temporel par :

$$m_n^{(a)}(k) = \sqrt{w^{(a)}(k)} p_n^{(a)}(k)$$

Par conséquent, elles s'obtiennent par la multiplication d'un polynôme par une fonction de type exponentiel.

2.2 Comparaison avec les fonctions de Laguerre

En comparant les filtres de Laguerre (I.19) aux filtres de type Meixner (II.1), on remarque que, mis à part les éléments de la matrice $L^{(a)}$ assurant l'orthogonalité, la différence du point de vue fréquentiel se résume à la substitution du filtre (passe-bas) de Laguerre d'ordre un, qui se trouve en amont du réseau de la figure I.6, par un filtre passe-bas d'ordre $(a+1)$, noté $\Omega^{(a)}(z)$:

$$\Omega^{(a)}(z) = (1-\xi^2)^{a+1/2} \left(\frac{z}{z-\xi} \right)^{a+1}$$

Signalons que les filtres de Laguerre ainsi que les filtres de type Meixner peuvent respectivement s'écrire, en fonction de $\Omega^{(a)}(z)$:

² Par définition : $\forall x \in \mathfrak{R}$ et $a \in \mathbb{N}^+$, $(x)_a = x(x+1)(x+1) \cdots (x+a-1)$

$$\triangleright L_n(z, \xi) = \Omega^{(0)}(z) \sum_{j=0}^n \left(\frac{1-\xi z}{z-\xi} \right)^j$$

$$\triangleright M_n^{(a)}(z, \xi) = \Omega^{(a)}(z) \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(a)} \left(\frac{1-\xi z}{z-\xi} \right)^j$$

La réponse impulsionnelle de $\Omega^{(a)}(z)$ est tracée sur la figure II. 3 pour différents degrés de généralisation. Cette figure montre que la pondération temporelle dépend directement de (a) . Celle qui est associée aux filtres de Laguerre, par exemple, affecte un poids plus important aux données proches de zéro, ce qui peut être gênant dans certains problèmes d'identification quand les conditions initiales sont mal connues. On privilégiera alors un degré de généralisation supérieur à un.

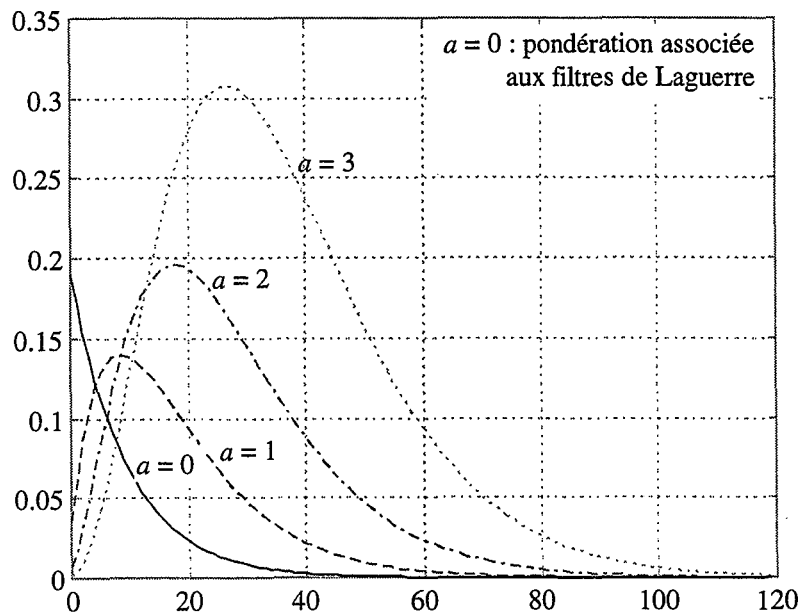


Figure II. 3 - Réponse impulsionnelle de la fonction $\Omega^{(a)}(z)$ pour $\xi = 0.9$

2.3 Calcul des coefficients de Fourier liés aux fonctions de type Meixner

A partir du moment où la matrice $L^{(a)}$ est connue, le calcul des coefficients de Fourier ne pose pas de problèmes particuliers, car l'orthogonalité des fonctions de types Meixner est assurée. En effet, les coefficients optimaux au sens du critère quadratique s'évaluent en effectuant le

produit scalaire de la fonction de transfert à décomposer par l'ensemble des fonctions de type Meixner :

$$g_n = \langle g(k), m_n^{(a)}[k, \xi] \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) m_n^{(a)}[k, \xi] \quad (\text{II.4.a})$$

$$g_n = \langle G(z), M_n^{(a)}(z, \xi) \rangle = \frac{(1-\xi^2)^{a+1/2}}{2\pi j} \oint_{\gamma} G(z) \left(\frac{1}{1-z\xi} \right)^{a+1} \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(a)} \left(\frac{z-\xi}{1-\xi z} \right)^j z^{-1} dz \quad (\text{II.4.b})$$

Relation entre les coefficients de Meixner et ceux de Laguerre

Maintenant, on propose de trouver une relation d'équivalence entre un réseau de $(N+1)$ fonctions de type Meixner et un réseau de $(2N+1)$ fonctions de Laguerre. Pour cela, il faut calculer la matrice de passage entre les coefficients de Meixner et ceux de Laguerre, tout en gardant un pôle identique pour les deux bases de fonctions.

Soit $G_N^M(z)$ le développement de $G(z)$ sur la base des fonctions de type Meixner :

$$G_N^M(z) = \sum_{n=0}^N g_n^M M_n^{(a)}(z, \xi) \Leftrightarrow G_N^M(z) = \left[g^M \right]_{N+1 \times 1}^T \left[M^{(a)}(z, \xi) \right]_{N+1 \times 1}$$

En exploitant le lien (II.3) entre $N+1$ fonctions de type Meixner et $2N+1$ fonctions de Laguerre, on peut exprimer l'approximation $G_N^M(z)$ par :

$$G_N^M(z) = \left[g^M \right]_{N+1 \times 1}^T A_{N+1 \times 2N+1}^{(a)} \left[L(z, \xi) \right]_{2N+1 \times 1} \quad (\text{II.5.a})$$

Afin de calculer les coefficients du réseau de filtres de Laguerre équivalent, on impose :

$$G_N^M(z) = \left[g^L \right]_{2N+1 \times 1}^T \left[L(z, \xi) \right]_{2N+1 \times 1} \quad (\text{II.5.b})$$

En conséquence, à partir de (II.5.a) et (II.5.b), on peut écrire :

$$\left[g^L \right]_{2N+1 \times 1}^T = \left[g^M \right]_{N+1 \times 1}^T A_{N+1 \times 2N+1}^{(a)} \quad (\text{II.6})$$

On conclut que le réseau de filtres de Laguerre, équivalent au réseau de $N+1$ filtres de type Meixner, comprend $2N+1$ termes, possède le même pôle ξ et des coefficients qui se calculent à partir de (II.6).

Remarques

1. Les coefficients de Laguerre g^L , obtenus par (II.6), ne sont pas optimaux au sens du critère quadratique pour l'approximation d'une fonction de transfert sur la base de $2N+1$ filtres de Laguerre. Ils permettent seulement de trouver le réseau de filtres de Laguerre équivalent au réseau de filtres de type Meixner. ☒

2. Le passage de $2N+1$ filtres de Laguerre à $N+1$ filtres de type Meixner n'est pas possible, car la matrice $A_{N+1 \times 2N+1}^{(a)}$, n'est pas carrée et, de ce fait, ne peut pas être inversée dans la relation (II.6). Il n'existe donc pas de réseau de $N+1$ filtres de type Meixner équivalent au réseau de $2N+1$ filtres de Laguerre. ☒

2.4 Convergence des coefficients et convergence de la série de Meixner

Puisque les fonctions de type Meixner forment une base complète dans $H^2(D^c)$, toute fonction appartenant à $H^2(D^c)$ peut s'exprimer de façon exacte sur la base des fonctions de type Meixner. Cependant, pour pouvoir tronquer la série infinie :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n M_n^{(a)}(z, \xi) \tag{II.7}$$

à N termes, il faut qu'elle soit convergente.

Puisque la matrice $L^{(a)}$ n'est pas explicitement connue, on verra que l'on ne peut statuer, dans le cas général, ni sur la convergence des coefficients ni sur celle de la série de type Meixner. Néanmoins, l'étude se porte sur la fonction de transfert $G(z)$ ayant P pôles distincts :

$$G(z) = \sum_{i=1}^P \frac{B_i z}{z - z_i} \tag{II.8}$$

2.4.1 Convergence des coefficients de la décomposition

En résolvant l'intégrale (II.4.b), à l'aide du théorème des résidus, on obtient les coefficients de Fourier de la décomposition de $G(z)$ sur la base des filtres de type Meixner :

$$g_n = \langle G(z), M_n^{(a)}(z, \xi) \rangle = \frac{(1-\xi^2)^{a+1/2}}{2\pi j} \oint_T \left(\sum_{i=1}^P \frac{B_i z}{z - z_i} \right) \left(\frac{1}{1 - z\xi} \right)^{a+1} \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(a)} \left(\frac{z - \xi}{1 - \xi z} \right)^j z^{-1} dz$$

$$\Leftrightarrow g_n = \langle G(z), M_n^{(a)}[z, \xi] \rangle = (1-\xi^2)^{a+1/2} \sum_{i=1}^P \frac{B_i}{(1 - z_i \xi)^{a+1}} \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(a)} \left(\frac{z_i - \xi}{1 - \xi z_i} \right)^j \quad (\text{II.9})$$

g_n est constitué d'une somme de P séries, dont l'étude devrait permettre de déterminer les conditions de convergence des coefficients g_n , quand n tend vers l'infini. L'expression générale de cette série est :

$$S_i = \frac{B_i}{(1 - z_i \xi)^{a+1}} \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(a)} \left(\frac{z_i - \xi}{1 - \xi z_i} \right)^j \quad i = 1, 2, \dots, P$$

Cependant, comme la matrice $\mathbf{L}^{(a)}$ n'est pas explicitement connue, on ne peut pas mener plus loin l'étude de la convergence de S_i . On peut par contre, effectuer une étude particulière dès que le degré de généralisation (a) et le pôle ξ sont fixés.

2.4.2 Convergence de la série de Meixner

En remplaçant les coefficients de la décomposition de la fonction de transfert $G(z)$, par leur expression de (II.9), on réécrit la série de Meixner (II.7) pour $G(z)$:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n M_n^{(a)}(z, \xi)$$

$$G(z) = (1-\xi^2)^{a+1/2} \left(\frac{z}{z-\xi} \right)^{a+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ g_n \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(a)} \left(\frac{1-\xi z}{z-\xi} \right)^j \right\} \quad (\text{II.10.a})$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left((1-\xi^2)^{a+1/2} \sum_{i=1}^P \frac{B_i}{(1 - z_i \xi)^{a+1}} \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(a)} \left(\frac{z_i - \xi}{1 - \xi z_i} \right)^j \right) \left((1-\xi^2)^{a+1/2} \left(\frac{z}{z-\xi} \right)^{a+1} \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(a)} \left(\frac{1-\xi z}{z-\xi} \right)^j \right) \right\}$$

$$G(z) = (1 - \xi^2)^{2a+1} \left(\frac{z}{z - \xi} \right)^{a+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^p \frac{B_i}{(1 - z_i \xi)^{a+1}} L_{n+1, j+1}^{(a)} \left(\frac{z_i - \xi}{1 - \xi z_i} \right)^j \right\} \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(a)} \left(\frac{1 - \xi z}{z - \xi} \right)^j \quad (\text{II.10.b})$$

Aucune des deux relations (II.10.a ou b) ne permet d'établir les conditions de convergence de la série, parce que, une fois de plus, les éléments de la matrice $L^{(a)}$ ne sont pas explicitement connus dans le cas général. Comme cela a été signalé, une étude particulière peut être faite dès que (a) et ξ sont fixés.

2.5 Représentation dans l'espace d'état

Pour déterminer la représentation d'état d'un réseau de type Meixner strictement causal (un retard pur est ajouté en amont du réseau de la figure II.1), la relation (II.3), exprimant l'équivalence entre $N + 1$ filtres de type Meixner et $2N + 1$ filtres de Laguerre, est directement exploitée. En effet, après le calcul des coefficients de Fourier des filtres de type Meixner, par l'une des deux relations (II.4.a) ou (II.4.b), on détermine les coefficients des filtres de Laguerre du réseau équivalent, en appliquant la relation (II.6) réécrite ci-dessous :

$$\left[\left[g^L \right]_{2N+1 \times 1} \right]^T = \left[\left[g^M \right]_{N+1 \times 1} \right]^T A_{N+1 \times 2N+1}^{(a)} \quad (\text{II.11})$$

Les équations d'état sont ensuite générées directement à partir du réseau de filtres de Laguerre équivalent dont les coefficients de Fourier sont g^L (II.11) et dont le pôle ξ est identique à celui des filtres de type Meixner. Pour cela, la méthode exposée au paragraphe I.3.7 est utilisée et l'équation d'état suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + Bu(k) \\ y_N(k) &= CX(k) \end{aligned} \quad (\text{II.12.a})$$

Le vecteur d'état X , de dimension $(2N + 1)$, contient l'ensemble des sorties du réseau équivalent des filtres de Laguerre. Les éléments de la matrice carrée A , de dimension $2N+1$, et du vecteur B , également de dimension $2N+1$, dépendent uniquement du pôle de Meixner ξ . Les éléments de C représentent les coefficients du réseau de Laguerre équivalent et sont obtenus par (II.11).

$$X(k) = \begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{2N}(k) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \cdots 0 \\ 1-\xi^2 & \xi & 0 \cdots 0 \\ -\xi(1-\xi^2) & 1-\xi^2 & \xi & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ (-\xi)^{2N-1}(1-\xi^2) & (-\xi)^{2N-2}(1-\xi^2) \cdots & \xi \end{bmatrix}, B = \sqrt{1-\xi^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\xi \\ (-\xi)^2 \\ \vdots \\ (-\xi)^{2N} \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$C = [g_0 \quad g_2 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_{2N}] \quad (\text{II.12.b})$$

Remarques

1. Rappelons que la représentation d'état traitée au paragraphe I.3.7.1 correspond à un réseau de filtres de Laguerre strictement causal. De même la représentation d'état (II.12) est synthétisée pour un réseau de filtres de type Meixner strictement causal. \square
2. La représentation d'état utilisant l'opérateur avance de Laguerre, \mathbf{T} , défini explicitement par (I.43), peut être synthétisée d'une façon identique à celle que l'on vient d'exposer. Les équations d'état résultantes sont similaires à (I.44). Les matrices de passage, de dimension $(2N+1)$, sont définies par (I.48) et les coefficients de Fourier, éléments de la matrice \bar{C} , sont obtenus par (II.11). \square

2.6 Conclusion

Le lien qui existe entre les filtres de Laguerre et les filtres de type Meixner est très intéressant parce qu'il procure une équivalence entre $2N+1$ filtres de Laguerre et $N+1$ filtres de type Meixner. Ceci permet d'exploiter un certain nombre de résultats déjà établis pour les filtres de Laguerre. De plus, les filtres de type Meixner fournissent une pondération moins importante aux données proches de zéro. Par conséquent, ils sont plus adaptés à l'identification de systèmes, dont les conditions initiales sont mal connues. Ces avantages ne viennent pas sans ajouter une complexité dans la représentation de ces fonctions.

Comme les filtres de Laguerre, les filtres de type Meixner admettent un pôle unique. Ils ne conviennent donc pas à la représentation de systèmes ayant des dynamiques oscillantes ou éloignées. Il est donc nécessaire d'étudier de nouvelles bases de fonctions qui permettent d'approcher ce type de systèmes.

3. Base des fonctions de Kautz « à deux paramètres »

Kautz, (1952) orthogonalise une famille de fonctions exponentielles continues et calcule leurs transformées de Laplace dont la structure est plus élégante que les représentations temporelles de ces fonctions. A partir de la définition globale qu'il propose est née la famille des fonctions de Kautz « à deux paramètres » qui est couramment utilisée dans la littérature pour la représentation de systèmes oscillants [Wahlberg, 1994].

La généralisation de la définition des fonctions de Kautz pour des systèmes discrets est due à [Young et al, 1962] et [Broome, 1965]. La représentation générale, que propose Broome, et qui est connue sous le nom des fonctions de Kautz généralisées, est valable pour un nombre quelconque de pôles réels ou complexes conjugués. Un cas particulier de cette représentation est obtenu en se restreignant à l'utilisation d'une seule paire de pôles complexes conjugués. Ces fonctions sont connues dans la littérature sous le nom de *fonctions de Kautz à deux paramètres*. Par simplification, nous les appellerons *fonctions de Kautz*.

3.1 Définition des fonctions de Kautz

On retrouve dans la littérature, deux définitions des fonctions de Kautz à deux paramètres. Elles sont toutes les deux issues de la forme générale proposée par Broome et donc, dans un sens, équivalentes. Nous montrerons dans cette section qu'une rotation, dont l'angle sera déterminé, permet de passer de l'une à l'autre.

Première définition

Utilisée couramment par [Wahlberg, 1994] et [Lindskog, 1996], elle vise à exprimer le dénominateur, ainsi qu'une partie du numérateur, de ces fonctions comme une multiplication de polynômes d'ordre 2, dont les racines, imposées par le choix des paramètres b et c , sont complexes et conjuguées.

$$\Psi_{2n-1}(z, b, c) = \frac{\sqrt{1-c^2}(z-b)z}{z^2 + b(c-1)z - c} \left[\frac{-cz^2 + b(c-1)z + 1}{z^2 + b(c-1)z - c} \right]^{n-1}$$

$$\Psi_{2n}(z, b, c) = \frac{\sqrt{(1-c^2)(1-b^2)}z}{z^2 + b(c-1)z - c} \left[\frac{-cz^2 + b(c-1)z + 1}{z^2 + b(c-1)z - c} \right]^{n-1}$$
(II.13)

avec $n = 1, 2, \dots, N$, $-1 < b < 1$, et $-1 < c < 1$. Ces deux contraintes assurent la stabilité asymptotique des filtres de Kautz discrets.

Lindskog, (1996) fait remarquer que si les paramètres b et c sont nuls, on retrouve le cas particulier des filtres FIR. Cependant, il ne précise pas la valeur des paramètres qui permettraient de reconnaître la représentation par filtres de Laguerre. Nous montrerons que lorsque les filtres de Kautz et les filtres de Laguerre engendrent le même espace, *i.e.* lorsque les pôles complexes de Kautz se réduisent à des pôles réels, il suffit de faire une rotation afin de passer d'une représentation à l'autre.

Deuxième définition

Elle est couramment utilisée par [den Brinker et al, 1996a] et [e Silva, 1995]. Elle consiste à expliciter directement les filtres de Kautz, à partir du pôle complexe p et de son conjugué p^* . Elle se présente ainsi :

$$\bar{\Psi}_{2n-1}(z, p) = K_1 \frac{z(z-1)}{(z-p)(z-p^*)} \left[\frac{(1-zp)(1-zp^*)}{(z-p)(z-p^*)} \right]^{n-1}$$

$$\bar{\Psi}_{2n}(z, p) = K_2 \frac{z(z+1)}{(z-p)(z-p^*)} \left[\frac{(1-zp)(1-zp^*)}{(z-p)(z-p^*)} \right]^{n-1}$$
(II.14)

avec $K_1 = \sqrt{\frac{(1+p)(1+p^*)(1-pp^*)}{2}}$, $K_2 = \sqrt{\frac{(1-p)(1-p^*)(1-pp^*)}{2}}$ et $n = 1, 2, 3, \dots$

Remarque

De la même façon que la numérotation utilisée pour les fonctions de Laguerre commence à 0, celle des fonctions de Kautz commence à 1. ☒

Equivalence entre les deux définitions

Il est évident que la condition *sine qua none*, pour que la paire de fonctions $(\Psi_{2n-1}(z, b, c), \Psi_{2n}(z, b, c))$ engendre le même plan que la paire de fonctions $(\overline{\Psi}_{2n-1}(z, p), \overline{\Psi}_{2n}(z, p))$, est que l'emplacement du pôle et de son conjugué soit identique pour les deux paires. En conséquence, on déduit les relations suivantes entre leurs paramètres respectifs :

$$\begin{aligned} pp^* &= -c \\ p + p^* &= -b(c-1) \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} c &= -pp^* \\ b &= \frac{p + p^*}{1 + pp^*} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Pourtant, en remplaçant les valeurs de c et b dans (II.13), on ne retrouve pas les fonctions définies par (II.14). On conclut que les fonctions issues de (II.13) et celles issues de (II.14) ne sont pas colinéaires, bien qu'elles engendrent le même plan. On propose donc de calculer l'angle Θ entre les fonctions paires sur ce plan fonctionnel. Du fait de l'orthogonalité, Θ doit également définir l'angle entre les fonctions impaires.

Pour trouver Θ , on utilise la définition suivante du produit scalaire :

$$\langle \Psi_{2n-1}, \overline{\Psi}_{2n-1} \rangle = \|\Psi_{2n-1}\| \|\overline{\Psi}_{2n-1}\| \cos(\Theta) \quad (\text{II.16})$$

Puisque les fonctions de Kautz de chaque définition sont normées, on peut écrire :

$$\cos(\Theta) = \langle \Psi_{2n-1}, \overline{\Psi}_{2n-1} \rangle$$

On vérifie aisément en calculant le produit scalaire, par intégration sur le plan fréquentiel que le cosinus de l'angle entre les deux fonctions est indépendant de n et qu'il vaut :

$$\cos(\Theta) = \langle \Psi_{2n-1}, \overline{\Psi}_{2n-1} \rangle = \langle \Psi_{2n}, \overline{\Psi}_{2n} \rangle = -\frac{\sqrt{(1 + \Re(p))^2 + \Im(p)^2}}{2(1 + \Re(p)^2 + \Im(p)^2)} \quad (\text{II.17})$$

Le cosinus n'étant pas une fonction surjective dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, on a besoin de déterminer le sinus de l'angle afin de retrouver celui-ci. Après quelques opérations géométriques de base, on montre que :

$$\sin(\Theta) = \langle \Psi_{2n-1}, \overline{\Psi}_{2n} \rangle = \langle \Psi_{2n}, \overline{\Psi}_{2n-1} \rangle = -\sqrt{\frac{(1 - \Re e(p))^2 + \Im m(p)^2}{2(1 + \Re e(p) + \Im m(p))}} \quad (\text{II.18})$$

Puisque le sinus et le cosinus sont négatifs, l'angle recherché se trouve dans l'intervalle $\left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ (voir figure II.4).

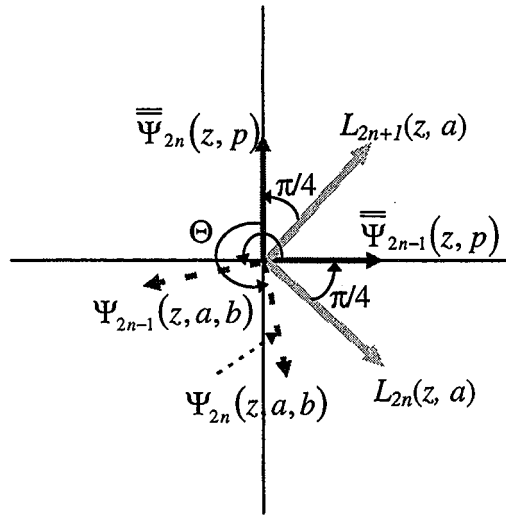


Figure II.4 - Représentation vectorielle sur un plan fonctionnel

Notons que les deux fonctions Ψ_{2n-1} et $\overline{\Psi}_{2n-1}$ ne sont jamais colinéaires ni même perpendiculaires (dans ce cas, les fonctions Ψ_{2n-1} et $\overline{\Psi}_{2n}$ seraient colinéaires), car la solution de :

$$\cos(\Theta) = 0 \text{ ou } \cos(\Theta) = 1$$

correspond à :

$$p = 1$$

ce qui n'est pas admissible de par les définitions des fonctions de Kautz (II.13) et (II.14).

En conclusion, on peut dire que pour passer d'une définition des fonctions de Kautz à l'autre, il suffit d'effectuer une rotation d'un angle Θ compris dans l'intervalle $\left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ et défini par son sinus (II.18) et son cosinus (II.17). Cet angle dépend de l'emplacement des pôles de Kautz.

Ce résultat permet d'utiliser indifféremment les définitions des fonctions de Kautz (II.13) et (II.14).

Lien avec les fonction de Laguerre quand le pôle de Kautz est réel

den Brinker *et al.*, (1996a) montrent que si le pôle p est réel, on peut alors obtenir les fonctions de Laguerre à partir des fonctions de Kautz (II.14), en écrivant :

$$\begin{aligned} L_{2m-2}(z, p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{\Psi}_{2k-1}(z, p) + \overline{\Psi}_{2k}(z, p) \right) \\ L_{2m-1}(z, p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{\Psi}_{2k-1}(z, p) - \overline{\Psi}_{2k}(z, p) \right) \end{aligned} \tag{II.19}$$

Ceci correspond à effectuer une rotation de 45° pour passer de la définition des fonctions de Kautz à la définition des fonctions de Laguerre.

A partir de ce résultat, on conclut que l'angle entre les fonctions de Laguerre et les fonctions de Kautz définies par (II.13) est :

$$\text{angle} \langle \Psi_{2n}, L_{2n-1} \rangle = \Theta + \frac{\pi}{4} \tag{II.20}$$

En conséquence, pour que Ψ_{2n} et L_{2n-1} soient colinéaires, il faudrait que Θ vaille $-\pi/4$. Ceci est vérifié pour la seule valeur $p = 0$. D'où la correspondance directe entre les filtres de Kautz (II.14) et les filtres FIR.

Remarque

La correspondance entre les filtres de Kautz et les filtres de Laguerre n'est valable que lorsque le pôle de Kautz est réel. Dans le cas contraire, les deux fonctions n'engendrent pas le même espace et aucun lien n'est possible. ☒

Complétude de l'espace engendré par les fonctions de Kautz

Une conséquence directe de l'étude de la complétude des fonctions de Kautz généralisées menée par Wahlberg, (1994) est que les fonctions de Kautz à deux paramètres engendrent entièrement $H^2(D^c)$ si :

$$n(1 - |p|) \text{ diverge quant } n \text{ tend vers l'infini (} p \text{ étant le pôle de Kautz).}$$

Cette relation est vérifiée si le pôle de Kautz est à l'intérieur du cercle unité.

3.2 Réseau de filtres de Kautz

Les filtres de Kautz discrets (II.13) permettent de construire une représentation en réseau analogue à la représentation des filtres de Laguerre. Notons que l'opérateur retard des filtres de Laguerre est remplacé par un filtre du second ordre dans le réseau suivant :

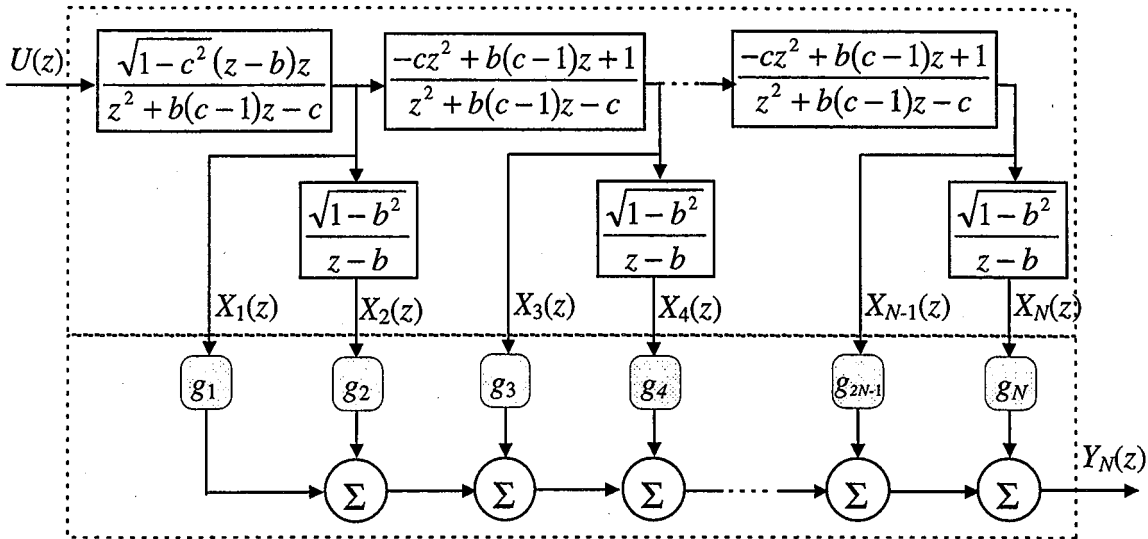


Figure II.5 - Réseau de filtres de Kautz discrets

3.3 Calcul des coefficients de Fourier liés aux fonctions de Kautz

Le calcul des coefficients optimaux au sens du critère quadratique ne pose pas de problème particulier, car l'orthogonalité des filtres de Kautz est assurée. Ils s'évaluent, comme pour les autres bases orthogonales, en effectuant le produit scalaire de la fonction de transfert à décomposer par les fonctions de Kautz :

$$g_n = \langle G(z), \Psi_k(z, p) \rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(z) \Psi_k(z^{-1}, p) z^{-1} dz, \quad (\text{II.21.a})$$

$$\Rightarrow g_{2k-1} = \frac{K_1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(z) \frac{(1-z)}{(1-pz)(1-p^*z)} \left[\frac{(z-p)(z-p^*)}{(1-pz)(1-p^*z)} \right]^{k-1} \frac{dz}{z} \quad (\text{II.21.b})$$

$$\Rightarrow g_{2k} = \frac{K_2}{2\pi j} \int_T G(z) \frac{(1+z)}{(1-pz)(1-p^*z)} \left[\frac{(z-p)(z-p^*)}{(1-pz)(1-p^*z)} \right]^{k-1} \frac{dz}{z} \quad (\text{II.21.c})$$

3.4 Convergence des coefficients et convergence de la série de Kautz

Puisque les fonctions de Kautz à deux paramètres forment une base orthogonale complète dans $H^2(D^c)$, toute fonction de transfert $G(z)$ peut s'écrire de façon exacte :

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \overline{\Psi}_n(z, p) \quad (\text{II.22})$$

Cependant, pour pouvoir tronquer la série infinie à N termes, il faut qu'elle soit convergente. Comme pour les bases de fonctions précédentes, nous proposons de vérifier d'abord que les coefficients g_n sont convergents et ensuite de trouver le domaine de convergence de la série (II.22) sur le plan de la transformée en \mathcal{Z} . La fonction de transfert traitée comporte toujours P pôles distincts :

$$G(z) = \sum_{i=1}^P \frac{B_i z}{z - z_i}$$

3.4.1 Convergence des coefficients de la décomposition

Le calcul des coefficients de la décomposition de $G(z)$ sur la base des fonctions de Kautz se fait à partir des équations (II.21.b et c). Le résultat de l'intégration sur le plan complexe est :

$$g_{2n-1} = \sum_{i=1}^P \frac{B_i K_1 (1 - z_i)}{(1 - pz_i)(1 - p^* z_i)} \left[\frac{(z_i - p)(z_i - p^*)}{(1 - pz_i)(1 - p^* z_i)} \right]^{n-1} \quad (\text{II.23.a})$$

$$g_{2n} = \sum_{i=1}^P \frac{B_i K_2 (1 + z_i)}{(1 - pz_i)(1 - p^* z_i)} \left[\frac{(z_i - p)(z_i - p^*)}{(1 - pz_i)(1 - p^* z_i)} \right]^{n-1} \quad (\text{II.23.b})$$

Notons que les coefficients pairs et impairs suivent l'évolution des P séries géométriques qui les constituent. En conséquence, la condition de convergence des g_n est que la norme des raisons de toutes les séries soit inférieure à un. Il faut donc s'assurer que pour tout z_i et pour tout pôle de Kautz, l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\left| \frac{(z_i - p)(z_i - p^*)}{(1 - pz_i)(1 - p^*z_i)} \right| < 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, P \quad (\text{II.24.a})$$

$$\Leftrightarrow |z_i - p||z_i - p^*| < |1 - z_i p||1 - z_i p^*| \quad (\text{II.24.b})$$

En posant $z_i = x_i + y_i j$, et $p = a + bj$, l'inégalité précédente peut s'écrire :

$$-(1 - a^2 - b^2)(1 - x_i^2 - y_i^2)[1 + a^2 + b^2] \left[\left(x_i - \frac{2a}{1 + a^2 + b^2} \right)^2 + y_i^2 + \frac{((1+a)^2 + b^2)((1-a)^2 + b^2)}{(1 + a^2 + b^2)^2} \right] < 0$$

Puisque les deux expressions entre crochets sont strictement positifs quel que soit le choix de x_i, y_i, a et b , on peut simplifier l'inégalité ainsi :

$$\Leftrightarrow (1 - a^2 - b^2)(1 - x_i^2 - y_i^2) > 0 \quad (\text{II.25})$$

Cette relation est toujours vraie, si les pôles de Kautz ainsi que tous les pôles de $G(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité. Ceci établit les conditions de convergence des coefficients de Kautz. Trouvons, à présent, le domaine de convergence de la série de Kautz sur le plan de la transformée en \mathcal{Z} .

3.4.2 Convergence de la série de Kautz

En remplaçant les fonctions de Kautz par leur définition, issue de (II.14), dans la série de Kautz (II.22), on obtient :

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n K^{(n)} \left[\frac{(1 - zp)(1 - zp^*)}{(z - p)(z - p^*)} \right]^{n-1} \quad (\text{II.26})$$

avec :

$$K^{(n)} = \begin{cases} K_1 \frac{z(z-1)}{(z-p)(z-p^*)} & \text{si } (n) \text{ est impair} \\ K_2 \frac{z(z+1)}{(z-p)(z-p^*)} & \text{si } (n) \text{ est pair} \end{cases}$$

De même, en remplaçant les coefficients de la décomposition de la fonction de transfert $G(z)$, décrits par (II.23) dans (II.26), on obtient :

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^P K_i^{(n)} \left[\frac{(z_i - p)(z_i - p^*)}{(1 - pz_i)(1 - p^* z_i)} \frac{(1 - zp)(1 - zp^*)}{(z - p)(z - p^*)} \right]^{n-1} \quad (\text{II.27})$$

avec

$$K_i^{(n)} = \begin{cases} B_i K_1 \frac{(1 - z_i)}{(1 - pz_i)(1 - p^* z_i)} \frac{z(z-1)}{(z-p)(z-p^*)} & \text{si } (n) \text{ est impair} \\ B_i K_2 \frac{(1 + z_i)}{(1 - pz_i)(1 - p^* z_i)} \frac{z(z+1)}{(z-p)(z-p^*)} & \text{si } (n) \text{ est pair} \end{cases}$$

On peut aborder le problème de convergence de la série de deux manières différentes :

- soit à partir de l'équation (II.26) qui génère des conditions restrictives,
- soit à partir de l'équation (II.27), qui est plus difficile à manipuler, mais qui fournit **les conditions nécessaires et suffisantes** de convergence.

3.4.2.1 Condition restrictive

Puisque la convergence des coefficients de Kautz est assurée, de par la condition (II.25), il reste à déterminer le lieu de la variable z , qui garantit la convergence de (II.26). Pour cela, soulignons que (II.26) représente une somme d'une série géométrique, dont la raison est :

$$r(z) = \frac{(1 - zp)(1 - zp^*)}{(z - p)(z - p^*)}$$

La série est convergente si la norme de $r(z)$ est inférieure à un. En conséquence, la condition suffisante de convergence vérifie :

$$|z - p||z - p^*| > |1 - zp||1 - zp^*|$$

Notons que cette inégalité est similaire, au sens près, à l'inégalité (II.24.b). Par conséquent, en posant $z = x + jy$ et en supposant que les pôles de Kautz sont à l'intérieur du cercle unité, on

déduit, à partir du résultat (II.25), que le lieu de convergence de la variable z doit satisfaire à l'inégalité :

$$x^2 + y^2 > 1$$

Le lieu de z exclut donc le cercle unité sur le plan de la transformée en \mathcal{Z} .

3.4.2.2 Nouvelle proposition : condition non restrictive

Comme il a été précisé, l'étude de l'équation (II.27) conduit aux conditions nécessaires et suffisantes de convergence de la série de Kautz. Notons que (II.27) est constituée d'une somme de P séries géométriques. Il faut donc s'assurer que la norme de toutes les séries est inférieure à 1, afin de garantir leur convergence. Il s'agit donc de résoudre l'inégalité suivante, ce qui est loin d'être évident dans le cas général :

$$\frac{|1 - zp||1 - zp^*|}{|z - p||z - p^*|} < \frac{|1 - z_i p||1 - z_i p^*|}{|z_i - p||z_i - p^*|} \quad i = 1, 2, \dots, P \quad (\text{II.28})$$

Nous verrons, à travers l'exemple qui suit, que cette inégalité ne décrit pas une forme géométrique explicitement connue. C'est une raison supplémentaire pour penser que (II.28) ne possède pas une solution analytique pouvant être explicitée dans le cas général. On peut, néanmoins, représenter le domaine de convergence graphiquement lorsque tous les paramètres de la fonction de transfert sont connus et lorsque les pôles de Kautz ont été fixés. Pour cela, il suffit de tracer les contours de niveau $\frac{|1 - z_i p||1 - z_i p^*|}{|z_i - p||z_i - p^*|}$ de la fonction $\frac{|1 - zp||1 - zp^*|}{|z - p||z - p^*|}$, où seul z est inconnu.

Exemple II.2

Soit la fonction de transfert $G(z)$:

$$G(z) = \frac{3z}{z - 0.6 - 0.6j} + \frac{3z}{z - 0.6 + 0.6j} + \frac{z}{z - 0.8}$$

En choisissant $p = 0.62 + 0.51 j$, l'approximation résultante sur la base de six filtres de Kautz est :

$$G(z) = \sum_{n=1}^6 g_n \overline{\Psi}_n(z, p) \text{ avec } g_n = [8.37, 3.86, -1.10, 2.03, -0.07, 0.03] \quad (\text{II.29})$$

L'erreur quadratique commise lors de cette approximation est : $J_6 = 0.42$.

Le domaine de convergence de la série (II.27) est défini comme étant l'extérieur de la zone hachurée de la figure II. 6.

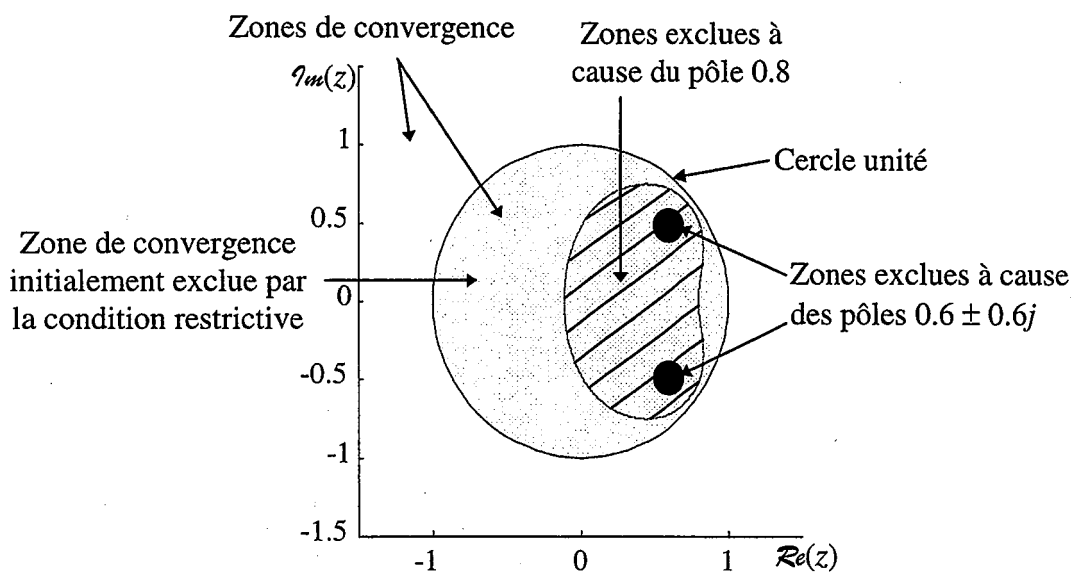


Figure II. 6 - Domaine de convergence de la série de Kautz sur le plan de la transformée en z

3.5 Conclusions et perspectives

La représentation de systèmes sur la base des filtres de Kautz a été introduite dans ce chapitre. Puisque ces filtres admettent des pôles complexes conjugués, ils conviennent particulièrement à la représentation de systèmes possédant des dynamiques oscillantes et rapprochées. Par contre, ils ne sont pas adaptés aux systèmes ayant des dynamiques éloignées. Il est donc nécessaire d'étudier une nouvelle base de fonctions et en l'occurrence la base orthogonale généralisée, qui permet de fixer simultanément plusieurs dynamiques.

Représentation dans l'espace d'état

Un point, qui n'a pas été abordé dans cette section, consiste à trouver la représentation d'état liée à l'approximation d'une fonction de transfert par des filtres de Kautz. Cette représentation peut être synthétisée en utilisant une approche analogue à celle qui a été décrite pour les fonctions de Laguerre au paragraphe I.3.7.

Lien entre les filtres de Kautz et les filtres de Laguerre à pôle complexe

La définition des fonctions de Laguerre peut être étendue aux pôles complexes, sans altérer l'orthogonalité et la complétude de l'espace qu'elles engendrent :

$$L_n(z, \xi) = \sqrt{1 - |\xi|^2} \left(\frac{z}{z - \xi} \right) \left(\frac{1 - \xi^* z}{z - \xi} \right)^n \quad \text{avec } \xi \in \mathbb{C} \quad (\text{II.30})$$

Bien que cette définition ait déjà été utilisée par e Silva, (1995), elle n'est pas très répandue dans la communauté de l'automatique, parce qu'elle n'a pas de sens physique. En effet, la réponse temporelle des filtres définis par (II.30) est complexe, alors que les réponses temporelles des systèmes physiques sont réelles.

On peut néanmoins, représenter les systèmes réels par les filtres de Laguerre à pôle complexe (II.30) en ne considérant que la partie réelle (voire imaginaire) de la réponse temporelle résultante. Cependant, il est important de souligner que l'orthogonalité des parties réelles (voire imaginaires) n'est pas respectée, bien que l'orthogonalité des signaux complexes l'est.

L'approximation d'une fonction de transfert $G(z)$, dont la réponse impulsionnelle est $g(t)$, avec la partie réelle des $N + 1$ premiers filtres (II.30) est notée ainsi :

$$g_N(t) = \Re \left\{ \mathcal{Z}^{-1} \left[\sum_{n=0}^N g_n L_n(z, \xi) \right] \right\} \quad \text{avec } \xi \text{ et } g_n \in \mathbb{C}$$

Le calcul des coefficients complexes g_n peut alors se faire en passant par la transformée bilinéaire complexe comme cela a été expliqué au paragraphe I.3.5 p. 25. Dans cette optique, il serait intéressant d'établir une relation entre les coefficients de Laguerre complexes et les coefficients de Kautz. Elle permettrait de calculer les coefficients de Kautz sans intégration dans le plan complexe cf. (II.21).

4. Base orthogonale généralisée

Bien que la complétude de l'espace engendré par les fonctions de Laguerre ou de Kautz, permette de représenter tout système LTI stable par une série infinie de fonctions et que la convergence de chaque série permette sa troncature à un nombre fini, l'ordre de troncature doit être élevé pour approcher au mieux le comportement de systèmes réels possédant des dynamiques éloignées.

L'idée que défend Lindskog, (1996) est d'utiliser plusieurs réseaux de filtres en parallèle, afin que chacun puisse approcher au mieux le comportement résultant d'une dynamique, et qu'il permette ainsi la troncature de la série associée à chaque réseau à un ordre « peu élevé ». Ainsi, s'il s'agit de modéliser le comportement dû à une dynamique amortie ou oscillante, un réseau de filtres de Laguerre ou de Kautz peut respectivement être utilisé. La connaissance *a priori* du système serait alors très appréciée pour fixer les pôles de chaque réseau. Lindskog propose, donc, de décrire toute fonction (de transfert) appartenant à $H^2(D^c)$ sous la forme :

$$G(z) \approx \sum_{l=1}^{n^L} \sum_{k=0}^{N_{g,l}^L} g_{l,k}^L L_k(z, \xi_l) + \sum_{l=1}^{n^\Psi} \sum_{k=0}^{N_{g,l}^\Psi} g_{l,k}^\Psi \Psi_k(z, p_l) \quad (\text{II.31})$$

où $n = n^L + n^\Psi$ est le nombre total de réseaux de Laguerre et de Kautz utilisés ; $N_{g,l}$ le nombre de filtres dans chaque réseau, ξ_l le pôle de Laguerre du réseau l , p_l le pôle de Kautz du réseau l et $g_{l,k}$ le coefficient de Fourier du filtre correspondant.

Cette configuration garde l'avantage principal des filtres de Laguerre et de Kautz, à savoir une représentation linéaire par rapport aux coefficients, une fois que tous les pôles sont fixés. Cependant, son inconvénient majeur est que l'orthogonalité entre fonctions de deux réseaux différents n'est pas conservée. On peut alors s'attendre à des problèmes numériques, lors du calcul des coefficients $g_{l,k}$, quand les pôles de deux réseaux différents sont proches l'un de l'autre. De plus, l'écriture (II.31) introduit une multitude de nouveaux paramètres et en l'occurrence le nombre de réseaux n , les pôles (p_l ou a_l), l'ordre de troncature $N_{g,l}$ de chaque réseau ainsi qu'un total de $(n^L N_{g,l}^L + n^\Psi N_{g,l}^\Psi)$ coefficients linéaires $g_{l,k}$. Alors, plusieurs questions surgissent concernant le choix de tous ces paramètres, et en l'occurrence :

- Combien de réseaux de filtres utiliser ?
- Quel ordre de troncature et quel pôle choisir pour chaque réseau ?
- Si l'erreur quadratique n'est pas « suffisamment petite », quelle stratégie adopter ?
 - ⇒ ajouter un nouveau réseau avec de nouvelles dynamiques,
 - ⇒ optimiser l'emplacement des pôles ou
 - ⇒ ajouter des filtres supplémentaires dans les réseaux existants ? lesquels ?

Toutefois, il est sûr qu'il faille recalculer tous les coefficients à chaque modification du nombre de filtres, puisque la propriété d'orthogonalité des fonctions constituant tous les réseaux n'est pas préservée.

Pour conserver l'orthogonalité tout en introduisant plusieurs dynamiques au modèle, Ninness et Gustafsson, (1997) proposent d'utiliser la base orthogonale généralisée (BOG) qu'ils synthétisent à partir de choix arbitraires de pôles. Cette base est également connue [den Brinker, 1996b] sous le nom de la base des filtres de Kautz généralisés. A son origine, on trouve les travaux de Broome, (1965). Cependant, elle a été délaissée au profit des bases de Laguerre et de Kautz à deux paramètres. Heuberger *et al.*, (1995) et Ninness et Gustafsson, (1997) ont, cependant, le mérite d'avoir attiré l'attention de la communauté automatique sur son utilité pour la modélisation de systèmes ayant plusieurs dynamiques. Ils l'ont récemment synthétisée de deux manières différentes :

- l'une utilise les réalisations équilibrées de fonctions passe-tout ; elle est due à Heuberger et al, (1995), et
- l'autre fixe les pôles des fonctions de transfert ; elle est due à Ninness et Gustafsson, (1997).

Nous présenterons la seconde méthode en nous attardant sur le choix des pôles complexes, car le choix des pôles réels ne pose pas de difficultés particulières.

4.1 Synthèse des fonctions de la base orthogonale généralisée

Si l'on nomme $\mathcal{E}_n(q)$ les fonctions de la nouvelle base, les auteurs montrent que les fonctions issues de la structure :

$$\mathcal{E}_n(z) = \frac{\sqrt{1-|\xi_n|^2}}{z-\xi_n} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1-\xi_{k-1}^*z}{z-\xi_k} \right) \tag{II.32}$$

conservent l'orthonormalité d'une part et la complétude de l'espace qu'elles engendrent d'autre part. Elles permettent donc d'écrire toute fonction (de transfert) appartenant à $H^2(D^c)$ sous la forme :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \mathcal{E}_n(z) \tag{II.33}$$

La procédure d'orthogonalisation, qu'ils utilisent, s'apparente à la méthode de Gram-Schmidt. Elle est détaillée ci-après.

En supposant que le pôle dominant de la fonction de transfert originelle, $G(z)$, est à proximité de ξ_0 avec $|\xi_0| < 1$, ils fixent, alors, le pôle de \mathcal{E}_0 à ξ_0 et introduisent la constante de normalisation A :

$$\mathcal{E}_0(z) = A \frac{z}{z-\xi_0} \tag{II.34}$$

Le calcul de A se fait alors ainsi :

$$\|\mathcal{E}_0\|^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint_r \mathcal{E}_0(z) \mathcal{E}_0^*(z) \frac{dz}{z} = 1 \tag{II.35}$$

$$\Leftrightarrow A = \sqrt{1-|\xi_0|^2} \tag{II.36}$$

A présent, en supposant que la fonction de transfert $G(z)$ possède un second pôle qui se trouve à proximité de ξ_1 , alors la deuxième fonction de la base sera de forme :

$$\mathcal{E}_1(z) = A' \frac{z(1-\xi_0^*z)}{(z-\xi_0)(z-\xi_1)} \tag{II.37}$$

Afin de mieux appréhender le choix de \mathcal{B}_1 (II.37), il suffit de noter que $\mathcal{B}_0(z)$ possède un pôle en ξ_0 dans le disque unité $C = \{z: |z| < 1\}$. Pour assurer l'orthogonalité de \mathcal{B}_0 et \mathcal{B}_1 il faut que le produit scalaire $\langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1 \rangle$ soit analytique dans C . Il est donc nécessaire d'inclure un zéro à $\mathcal{B}_1^*(z)$ au point ξ_0 qui assure la nullité du produit scalaire de \mathcal{B}_0 et \mathcal{B}_1 :

$$\langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1 \rangle = \frac{\sqrt{1-|\xi_0|^2}}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \frac{A'(z-\xi_0)}{(z-\xi_0)(1-\xi_0^*z)(1-\xi_1^*z)} dz = 0 \quad (\text{II.38})$$

Une fois de plus, A' est choisi de façon à ce que \mathcal{B}_1 soit normée :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_1\|^2 = 1 &\Leftrightarrow \frac{A'^2}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \frac{(\xi_0 - z)(\xi_0^*z - 1) dz}{(z - \xi_0)(z - \xi_1)(1 - \xi_0^*z)(1 - \xi_1^*z)} = 1 \\ &\Leftrightarrow A' = \sqrt{1 - |\xi_1|^2} \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Notons que lors du choix de \mathcal{B}_1 , le pôle ξ_1 peut être pris n'importe où dans le disque unité. En continuant ce raisonnement avec des pôles fixés arbitrairement, les auteurs arrivent à la formulation générale présentée dans (II.32).

Si l'on se restreint au choix d'un pôle réel et unique $\xi_n = \xi \in]-1, 1[$, quel que soit n , on retrouve la base particulière des fonctions de Laguerre. De même, si ce pôle ξ est nul, la base de filtres FIR est générée.

Cette procédure d'orthonormalisation est applicable même si l'on souhaite fixer des pôles complexes. Puisque la réponse temporelle de toute fonction de transfert doit appartenir à l'ensemble des nombres réels, Ninness et Gustafsson proposent de modifier légèrement la procédure de sélection des pôles de façon à choisir, par paire, des pôles complexes conjugués.

De plus, ils suggèrent de substituer la paire de fonctions $(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n+1})$, générées à partir de l'équation (II.32), par la paire $(\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}''_n)$ issue d'une combinaison linéaire des fonctions originelles (voir (II.40)). Ceci garantit leur orthogonalité par rapport aux autres fonctions de la base.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}'_n \\ \mathcal{E}''_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c'_0 & c'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_n \\ \mathcal{E}_{n+1} \end{pmatrix} \quad c_0, c_1, c'_0, c'_1 \in \mathcal{C}, \quad (\text{II.40})$$

Il est intéressant de souligner que les fonctions \mathcal{E}'_n et \mathcal{E}''_n engendrent un plan, dans l'espace fonctionnel de dimension infinie. Ce plan est orthogonal au sous-espace engendré par $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}$ grâce à (II.40). Les conditions que posent Ninness et Gustafsson, concernant le choix des coefficients complexes c_0, c_1, c'_0 et c'_1 , sont alors plus simples à comprendre. Les deux fonctions \mathcal{E}'_n et \mathcal{E}''_n doivent être orthonormées. Pour cela, il faut vérifier les trois conditions :

$$\triangleright \text{la normalité de } \mathcal{E}'_n \text{ qui impose } |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1, \quad (\text{II.41.a})$$

$$\triangleright \text{la normalité de } \mathcal{E}''_n \text{ qui impose } |c'_0|^2 + |c'_1|^2 = 1, \quad (\text{II.41.b})$$

$$\triangleright \text{l'orthogonalité de } \mathcal{E}'_n \text{ et } \mathcal{E}''_n \text{ qui nécessite la résolution de } c_0 c'_0{}^* + c_1 c'_1{}^* = 0. (\text{II.41.c})$$

Les auteurs posent une condition supplémentaire concernant l'appartenance des coefficients c_0, c_1, c'_0 et c'_1 à l'ensemble des réels.

Puisque sur tout plan vectoriel, il existe une infinité de paires de vecteurs orthonormés, ils obtiennent une infinité de solutions.

Pour déterminer l'ensemble des solutions, les auteurs proposent le changement de paramètre :

$$c_0 = \frac{\beta + \xi_n^* \mu}{1 - \xi_n^{*2}}, \quad c_1 = \frac{\xi_n^* \beta + \mu}{1 - \xi_n^{*2}}, \quad c'_0 = \frac{\beta' + \xi_n^* \mu'}{1 - \xi_n^{*2}} \quad \text{et} \quad c'_1 = \frac{\xi_n^* \beta' + \mu'}{1 - \xi_n^{*2}}, \quad (\text{II.42})$$

et expriment les nouvelles fonctions ainsi :

$$\mathcal{E}'_n(z) = \sqrt{\frac{1 - |\xi_n|^2}{1 - |\xi_{n-1}|^2}} \mathcal{E}_{n-1}(z) \left\{ \frac{(1 - \xi_{n-1}^* z)(\beta z + \mu)}{z^2 - (\xi_n + \xi_n^*)z + |\xi_n|^2} \right\} \quad (\text{II.43.a})$$

$$\mathcal{E}''_n(z) = \sqrt{\frac{1 - |\xi_n|^2}{1 - |\xi_{n-1}|^2}} \mathcal{E}_{n-1}(z) \left\{ \frac{(1 - \xi_{n-1}^* z)(\beta' z + \mu')}{z^2 - (\xi_n + \xi_n^*)z + |\xi_n|^2} \right\} \quad (\text{II.43.b})$$

Ils montrent que les paramètres β , μ , β' et μ' , qui s'écrivent en fonction de c_0 , c_1 , c'_0 et c'_1 et qui respectent les trois conditions (II.41) doivent satisfaire aux trois équations quadratiques :

$$\begin{aligned} x^T Mx &= |1 - \xi_n^2|^2 \\ y^T My &= |1 - \xi_n^2|^2 \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} x &= (\beta \ \mu)^T \\ y &= (\beta' \ \mu')^T \end{aligned} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 + |\xi_n|^2 & 2\Re\{\xi_n\} \\ 2\Re\{\xi_n\} & 1 + |\xi_n|^2 \end{pmatrix} \quad \text{(II.44.a)}$$

$$x^T My = 0 \quad \text{(II.44.b)}$$

La résolution de ce système d'équations utilise trois degrés de liberté. Il en reste donc un. Les auteurs trouvent, après calculs, une formulation générale de l'ensemble des solutions. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [Ninness et Gustafsson, 1997]. En ce qui concerne le reste de notre travail, nous nous intéresserons à un choix particulier de ces paramètres. Mais, auparavant, et pour compléter ce résumé, il reste à énoncer la condition de complétude de l'espace engendré par ces fonctions.

Complétude des fonctions de la BOG

Les auteurs démontrent, que les fonctions issues de la BOG engendrent complètement l'espace $H^2(D^c)$ si la condition suivante, concernant le choix des pôles, est satisfaite :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\xi_k|) = \infty. \quad \square$$

Choix particuliers des paramètres β , μ , β' et μ'

Si l'on compare le plan fonctionnel à un plan vectoriel (figure II.7), alors le degré de liberté trouvé par Ninness et Gustafsson peut être assimilé à un angle permettant de fixer des paires de fonctions (vecteurs) orthogonales sur ce plan. Cependant, si le but est d'engendrer ce plan fonctionnel, on peut se contenter de n'importe quelle paire de fonctions orthogonales qui y appartient. On va donc examiner deux choix particuliers, et cela en fixant le degré de liberté restant et en calculant les paramètres β , μ , β' et μ' résultant.

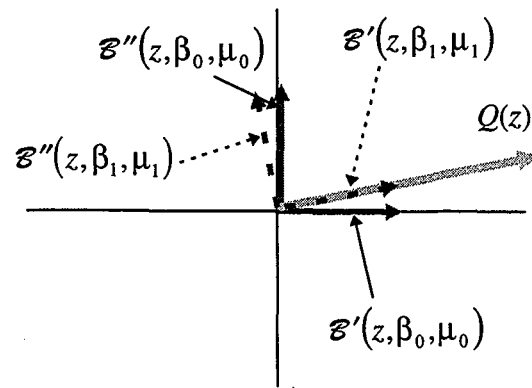


Figure II.7 - Représentation vectorielle sur un plan fonctionnel

Soit $G(z)$ une fonction (de transfert) appartenant à $H^2(D^c)$. Soit $Q(z)$ la projection de $G(z)$ sur le plan fonctionnel engendré par la paire de fonctions $(\mathcal{E}'_n, \mathcal{E}''_n)$, décrites par (II.43.a et b), (II.44.a et b). $Q(z)$ s'écrit alors :

$$Q(z) = \frac{(\rho z + \nu)z}{z^2 - (\xi_n + \xi_n^*)z + |\xi_n|^2} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 - \xi_k^* z}{z - \xi_k} \right) \quad (\text{II.45})$$

Afin de distinguer les différentes paires de fonctions orthogonales, qui engendrent ce plan fonctionnel, elles seront notées, dorénavant, en fonction de leurs paramètres β, μ, β' et μ' . Les notations $\mathcal{E}'_n(z, \beta, \mu)$ et $\mathcal{E}''_n(z, \beta', \mu')$ correspondront aux définitions (II.43).

On s'intéresse particulièrement à deux cas :

- quand $\mathcal{E}'_n(z, \beta, \mu)$ est colinéaire avec $Q(z)$,
- quand $\mathcal{E}'_n(z, \beta, \mu)$ et $\mathcal{E}''_n(z, \beta', \mu')$ correspondent aux choix de filtres de Kautz à deux paramètres.

Premier cas

On peut choisir β et μ de façon à ce que la fonction $\mathcal{E}'_n(z, \beta, \mu)$ soit colinéaire avec $Q(z)$. A ce moment $\mathcal{E}''_n(z, \beta', \mu')$ est perpendiculaire à $Q(z)$ et le coefficient de Fourier de $\mathcal{E}''_n(z, \beta', \mu')$ est nul. La décomposition de $Q(z)$ sur la paire $\mathcal{E}'_n(z, \beta, \mu)$ et $\mathcal{E}''_n(z, \beta', \mu')$ s'écrit alors exactement ainsi :

$$Q(z) = g'_n \mathcal{Z}'_n(z, \beta, \mu) \quad (\text{II.46})$$

Néanmoins, il faut déterminer lors du calcul de $Q(z)$ (II.45), à partir de la fonction de transfert originelle $G(z)$, les deux paramètres ρ et ν qui permettent, par la suite, de choisir β , μ et g'_n . Il est à souligner que cette méthode nécessite le calcul (ou l'identification) de deux paramètres ρ et ν , bien que le résultat (II.46) exprime $Q(z)$ à partir d'une seule fonction.

En conséquence, on peut, aussi bien, définir une paire arbitraire de fonctions orthogonales, en fixant β et μ , et calculer les coefficients de la décomposition de $Q(z)$ sur ces fonctions. On aura toujours deux paramètres à calculer (ou à identifier) qui sont les coefficients de la décomposition de $Q(z)$ (ou $G(z)$) sur chacune des deux fonctions :

$$Q(z) = g'_n \mathcal{Z}'_n(z, \beta_1, \mu_1) + g''_n \mathcal{Z}''_n(z, \beta_1, \mu_1)$$

C'est ce que nous proposons de faire dans le deuxième cas.

Deuxième cas

β , μ , β' et μ' qui définissent la paire de fonctions orthogonales, sont fixés de façon tout à fait arbitraire afin de rejoindre la définition des fonctions de Kautz :

$$(\beta, \mu) = \sqrt{\frac{(1+\xi)(1+\xi^*)}{2}}(1, -1) \quad \text{et} \quad (\beta', \mu') = \sqrt{\frac{(1-\xi)(1-\xi^*)}{2}}(1, 1) \quad (\text{II.47})$$

En effet, les fonctions résultantes $\mathcal{Z}'_n(z)$ et $\mathcal{Z}''_n(z)$ peuvent respectivement être comparées aux fonctions paires et impaires de Kautz (II.14) :

$$\mathcal{Z}'_n(z) = \frac{K'_n(z-1)z}{(z-\xi)(z-\xi^*)} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1-\xi_k^* z}{z-\xi_k} \right) \quad (\text{II.48.a})$$

$$\mathcal{Z}''_n(z) = \frac{K''_n(z+1)z}{(z-\xi)(z-\xi^*)} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1-\xi_k^* z}{z-\xi_k} \right) \quad (\text{II.48.b})$$

$$\text{avec } K'_n = \sqrt{\frac{(1+\xi)(1+\xi^*)(1-\xi_n \xi_n^*)}{2}} \quad \text{et} \quad K''_n = \sqrt{\frac{(1-\xi)(1-\xi^*)(1-\xi_n \xi_n^*)}{2}} \quad (\text{II.48.c})$$

Résumé de la méthode utilisée pour inclure des pôles complexes dans les fonctions issues de la BOG

Tous les pôles réels des fonctions issues de la BOG (II.32) sont fixés sans aucune contrainte.

Par contre, si l'on souhaite introduire un pôle complexe ξ_n , dans la fonction \mathcal{E}_n , il faut alors introduire son conjugué dans la fonction d'ordre supérieur \mathcal{E}_{n+1} , i.e. ($\xi_{n+1} = \xi_n^*$). Ensuite, il faut substituer la paire de fonctions ($\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}$) issue de (II.32) par la nouvelle paire de fonctions ($\mathcal{E}'_n, \mathcal{E}''_n$) de la définition (II.48) :

$$G(z) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i \mathcal{E}_i(z) + g'_n \mathcal{E}'_n(z) + g''_n \mathcal{E}''_n(z) + \dots$$

Il est parfois nécessaire, pour synthétiser les équations d'état (voir § 4.5), de revenir à la paire de fonctions ($\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}$) à partir de ($\mathcal{E}'_n, \mathcal{E}''_n$). Pour cela, il suffit d'inverser la relation linéaire (II.40), liant les deux paires de fonctions, c_0, c_1, c'_0 et c'_1 étant définis par (II.42) et (II.47).

4.2 Réseau de filtres de la base orthogonale généralisée

A partir de l'équation (II.32), on peut formuler la relation de récurrence suivante entre les fonctions de la base généralisée :

$$\mathcal{E}_0(z) = \frac{\sqrt{1-|\xi_0|^2} z}{z - \xi_0} \tag{II.49.a}$$

$$\mathcal{E}_n(z) = \frac{\sqrt{1-|\xi_n|^2}}{\sqrt{1-|\xi_{n-1}|^2}} \left(\frac{1 - \xi_{n-1}^* z}{z - \xi_n} \right) \mathcal{E}_{n-1}(z) \tag{II.49.b}$$

Le schéma bloc correspondant est :

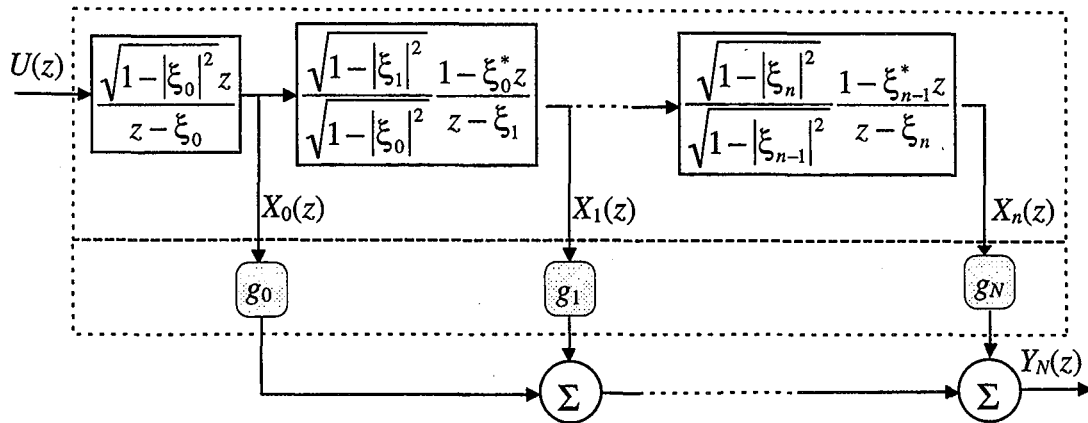


Figure II.8 - Réseau de filtres de la BOG

Ce schéma servira pour synthétiser les équations d'état des filtres issus de la BOG.

On retrouve dans l'article [Ninness et Gustafsson, 1997], le schéma bloc ci-dessous, qui montre que les filtres de la BOG sont constitués de plusieurs blocs passe-bas ayant différentes fréquences de coupure, reliés entre eux par des blocs passe-tout.

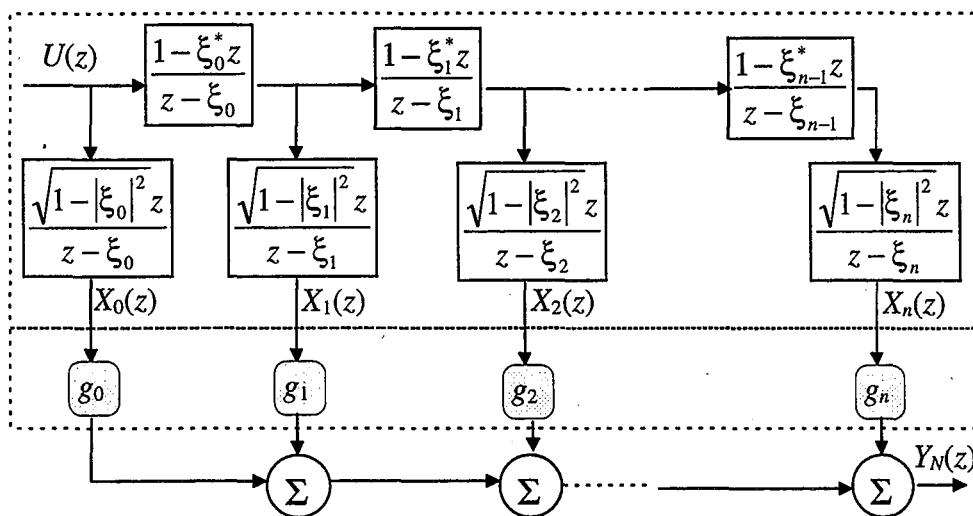


Figure II.9 - Réseau de filtres issus de la BOG [Ninness et Gustafsson, 1997]

4.3 Calcul des coefficients de Fourier liés aux fonctions de la BOG

Le calcul des coefficients optimaux, au sens du critère quadratique, se fait comme pour les autres bases orthogonales, c'est-à-dire en effectuant le produit scalaire de la fonction (de transfert) originelle par l'ensemble des fonctions de la BOG :

$$g_n = \langle G(z), \mathcal{B}_n(z) \rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_T G(z) \mathcal{B}_n(z^{-1}) z^{-1} dz \quad (\text{II.50})$$

Rappelons, cependant, que lorsque ξ_n est complexe, on remplacera la paire de fonctions $(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n+1})$ par la paire $(\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}''_n)$. C'est la raison pour laquelle on distingue les deux cas :

➤ quand ξ_n est réel

$$\Rightarrow g_n = \frac{\sqrt{1-|\xi_n|^2}}{2\pi j} \oint_T G(z) \frac{z}{(1-\xi_n z)} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(z-\xi_k^*)}{(1-\xi_k z)} dz \quad (\text{II.51.a})$$

➤ quand ξ_n est complexe, alors $\xi_{n+1} = \xi_n^*$ et les coefficients se calculent par :

$$\Rightarrow g'_n = \frac{K'_n}{2\pi j} \oint_T G(z) \frac{z(1-z)}{1-(\xi_n + \xi_n^*)z + \xi_n \xi_n^* z^2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(z-\xi_k^*)}{(1-\xi_k z)} dz \quad (\text{II.51.b})$$

$$\Rightarrow g''_n = \frac{K''_n}{2\pi j} \oint_T G(z) \frac{z(1+z)}{1-(\xi_n + \xi_n^*)z + \xi_n \xi_n^* z^2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(z-\xi_k^*)}{(1-\xi_k z)} dz \quad (\text{II.51.c})$$

où K'_n et K''_n ont été définis dans (II.48.c).

4.4 Convergence des coefficients et convergence de la série des filtres BOG

Puisque les fonctions de la BOG forment une base orthogonale complète dans $H^2(D^c)$, toute fonction (de transfert) $G(z)$ appartenant à $H^2(D^c)$ peut s'écrire :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \mathcal{B}_n(z, p) \quad (\text{II.52})$$

Cependant, afin de pouvoir tronquer la série infinie à un ordre fini N , il faut qu'elle soit convergente. Comme pour les bases de fonctions précédentes, nous proposons de vérifier d'abord que les coefficients g_n sont convergents, et ensuite de trouver le domaine de convergence de la série (II.52), sur le plan de la transformée en \mathcal{Z} . Cette étude sera faite, une fois de plus, sur une fonction de transfert à P pôles distincts :

$$G(z) = \sum_{i=1}^P \frac{B_i z}{z - z_i}$$

4.4.1 Convergence des coefficients de la décomposition

Le calcul des coefficients de la décomposition de $G(z)$ sur la BOG se fait à partir des équations (II.51.a, b et c). Le résultat de l'intégration sur le plan complexe est le suivant :

➤ quand ξ_n est réel :

$$g_n = \sum_{i=1}^P \frac{B_i \sqrt{1 - |\xi_n|^2}}{(1 - \xi_n z_i)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(z_i - \xi_k^*)}{(1 - \xi_k z_i)} \quad (\text{II.53.a})$$

➤ quand ξ_n et ξ_{n+1} sont complexes conjugués :

$$g'_n = \sum_{i=1}^P K'_n \frac{B_i (1 - z_i)}{1 - (\xi_n + \xi_n^*) z_i + \xi_n \xi_n^* z_i^2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(z_i - \xi_k^*)}{(1 - \xi_k z_i)} \quad (\text{II.53.b})$$

$$g''_n = \sum_{i=1}^P K''_n \frac{B_i (1 + z_i)}{1 - (\xi_n + \xi_n^*) z_i + \xi_n \xi_n^* z_i^2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(z_i - \xi_k^*)}{(1 - \xi_k z_i)} \quad (\text{II.53.c})$$

Notons que tous les coefficients apparaissent comme une somme de P séries $S_n(z_i)$, pouvant s'exprimer comme suit :

$$S_n(z_i) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(z_i - \xi_k^*)}{(1 - \xi_k z_i)} \quad (\text{II.54})$$

En effet, tous les coefficients de Fourier peuvent être regroupés sous la formule générale :

$$g_n = \sum_{i=1}^P \kappa_i S_n(z_i) \quad \text{avec} \quad \kappa_i = \begin{cases} \frac{B_i \sqrt{1 - |\xi_n|^2}}{1 - \xi_n z_i} \\ K'_n \frac{B_i (1 - z_i)}{1 - (\xi_n + \xi_n^*) z_i + \xi_n \xi_n^* z_i^2} \\ K''_n \frac{B_i (1 + z_i)}{1 - (\xi_n + \xi_n^*) z_i + \xi_n \xi_n^* z_i^2} \end{cases}$$

Posons $r_n(z_i, \xi_n) = \frac{z_i - \xi_n^*}{1 - \xi_n z_i}$.

Puisque κ_i est un nombre fini, les coefficients g_n sont convergents si chaque série $S_n(z_i)$ l'est aussi. Il convient, à chaque fois qu'un pôle complexe ξ_j est utilisé, d'associer le terme $r_j(z_i, \xi_j)$ au terme suivant $r_{j+1}(z_i, \xi_j^*)$ et de regrouper les deux produits successifs $r_j(z_i, \xi_j) r_{j+1}(z_i, \xi_j^*)$ de (II.54) dans un seul et même terme noté :

$$r_n^{(2)}(z_i, \xi_n) = \frac{(z_i - \xi_n)(z_i - \xi_n^*)}{(1 - \xi_n z_i)(1 - \xi_n^* z_i)} \quad \text{(II.55.a)}$$

Ainsi, on pourra réécrire la série $S_n(z_i)$:

$$S_n(z_i) = r_0(z_i, \xi_j) r_1(z_i, \xi_1) \cdots r_{j-1}(z_i, \xi_{j-1}) \underbrace{r_j^{(2)}(z_i, \xi_j)}_{r_j(z_i, \xi_j) r_{j+1}(z_i, \xi_j^*)} r_{j+2}(z_i, \xi_{j+2}) \cdots r_{n-1}(z_i, \xi_{n-1}) \quad \text{(II.55.b)}$$

Une **condition suffisante** de convergence des coefficients g_n est que le module de chaque terme de la série $\{S_n(z_i)\}_{n=0, 1, \dots, \infty}$ soit inférieur à 1. Il en résulte les conditions suivantes :

$$|r_n(z_i)| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z_i - \xi_n}{1 - \xi_n z_i} \right| < 1 \quad \forall z_i \text{ et } \forall \xi_n \text{ réel} \quad \text{(II.56.a)}$$

$$|r_n^{(2)}(z_i)| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{(z_i - \xi_n)(z_i - \xi_n^*)}{(1 - \xi_n z_i)(1 - \xi_n^* z_i)} \right| < 1 \quad \forall z_i \text{ et } \forall \xi_n \text{ complexe} \quad \text{(II.56.b)}$$

Ces deux inégalités ont été résolues, respectivement pour les filtres de Laguerre dans (I.33) et les filtres de Kautz dans (II.24.a). Le résultat est directement étendu pour le cas des pôles multiples.

Les inégalités (II.56) sont donc vérifiées si chaque pôle z_i de la fonction de transfert originelle et chaque pôle ξ_n des filtres de la BOG sont à l'intérieur du cercle unité. En conséquence, la convergence des coefficients est subordonnée à la stabilité du système décomposé et à la stabilité des filtres de la BOG.

Trouvons, à présent, le domaine de convergence de la série issue de la BOG sur le plan de la transformée en \mathcal{Z} .

4.4.2 Convergence de la série des filtres BOG

En remplaçant les coefficients de Fourier dans la série infinie (II.52), on obtient :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\sqrt{1-|\xi_n|^2} z}{z-\xi_n} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1-z\xi_j^*}{z-\xi_j} \quad (\text{II.57.a})$$

$$\Rightarrow G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^P \left(\kappa \frac{\sqrt{1-|\xi_n|^2}}{z-\xi_n} \right) \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(z_i - \xi_j^*)(1-z\xi_j^*)}{(1-z_i\xi_j)(z-\xi_j)} \quad (\text{II.57.b})$$

Il est évident que si l'on suppose que les coefficients de Fourier g_n sont convergents et que

l'on étudie la série $\prod_{j=0}^{n-1} \frac{1-z\xi_j^*}{z-\xi_j}$ de (II.57.a), on obtient alors des conditions suffisantes de

convergence. De même, si l'on étudie (II.57.b), sans faire de supposition sur les coefficients g_n , on obtient des conditions moins restrictives qu'avant. Elles demeurent, cependant,

suffisantes à cause de la nature de la série $\prod_{j=0}^{n-1} \frac{(z_i - \xi_j^*)(1-z\xi_j^*)}{(1-z_i\xi_j)(z-\xi_j)}$.

4.4.2.1 Conditions restrictives

Puisque les coefficients g_n de la BOG sont convergents, on peut affirmer, à partir de (II.57.a),

que la série est convergente si chaque terme du produit $\prod_{j=0}^{n-1} \frac{1 - z\xi_j^*}{z - \xi_j}$ est inférieur à un.

Il conviendrait, toutefois, quand un pôle complexe et son conjugué sont utilisés, d'associer les deux termes successifs du produit, comme cela a été fait dans (II.57.a et b). On peut donc écrire les conditions de convergence ainsi :

$$\left| \frac{1 - z\xi_n}{z - \xi_n} \right| < 1 \quad \text{quand } \xi_n \text{ est réel.}$$

$$\left| \frac{(1 - z\xi_n)(1 - z\xi_n^*)}{(z - \xi_n)(z - \xi_n^*)} \right| < 1 \quad \text{quand } \xi_n \text{ est complexe.}$$

Ces inégalités ont été résolues dans le cadre de l'étude des conditions restrictives de la convergence des séries de Laguerre (§ I.3.6.2.1) et de Kautz (§ II.3.4.2.1). Rappelons que le domaine qu'elles décrivent représente l'extérieur du cercle unité.

4.4.2.2 Nouvelle proposition : condition moins restrictive

Une condition moins restrictive provient de l'étude de la série (II.57.b). La convergence est

assurée quand chaque terme du produit $\prod_{j=0}^{n-1} \frac{(z_i - \xi_j^*)(1 - z\xi_j^*)}{(1 - z_i\xi_j)(z - \xi_j)}$ est inférieur à un. Là aussi, il

convient d'associer tout terme contenant un pôle complexe avec le terme qui le suit et qui contient son conjugué. Les inégalités qui définissent le domaine de convergence s'écrivent donc :

$$\left| \frac{(1 - z\xi_n)(z_i - \xi_n)}{(z - \xi_n)(1 - \xi_n z_i)} \right| < 1 \quad \text{quel que soit } \xi_n \text{ réel}$$

$$\left| \frac{(1 - z\xi_n)(1 - z\xi_n^*)(z_i - \xi_n)(z_i - \xi_n^*)}{(z - \xi_n)(z - \xi_n^*)(1 - \xi_n z_i)(1 - \xi_n^* z_i)} \right| < 1 \quad \text{quel que soit } \xi_n \text{ complexe}$$

Rappelons que la première inégalité a été résolue dans le cadre de l'étude des conditions de convergence non restrictives de la série de Laguerre (I.36). Le lieu de z satisfaisant à cette inégalité représente l'extérieur de tous les cercles dont les centres sont $(x_{fn}, 0)$ et dont les rayons sont r_{fn} , $\forall \xi_n \in \mathfrak{R}$, avec :

$$x_{fn} = \frac{\xi_n (1 - |w_{fn}|^2)}{1 - \xi_n^2 |w_{fn}|^2}, \quad r_{fn} = \frac{|w_{fn}| (1 - \xi_n^2)}{1 - \xi_n^2 |w_{fn}|^2} \quad \text{et} \quad w_{fn} = \frac{z_f - \xi_n}{1 - z_f \xi_n}.$$

La deuxième inégalité a été traitée dans le cadre de l'étude des conditions de convergence non restrictives des filtres de Kautz cf. (II.28). Sa solution n'est pas évidente dans le cas général. On peut, néanmoins, représenter le domaine de convergence graphiquement lorsque tous les paramètres de la fonction de transfert sont connus et lorsque tous les pôles de la BOG ont été fixés.

Exemple II.3

On souhaite décomposer la fonction de transfert $G(z)$ de l'exemple II.2 :

$$G(z) = \frac{3z}{z - 0.6 - 0.6j} + \frac{3z}{z - 0.6 + 0.6j} + \frac{z}{z - 0.8}.$$

sur la base de trois filtres de la BOG ayant un pôle réel, $\xi_0 = 0.9$, et deux pôles complexes conjugués, $\xi_{1,2} = 0.62 \pm 0.51j$. Le calcul des coefficients de Fourier se fait à partir de (II.51.a, b et c). L'approximation résultante s'écrit :

$$G_2(z) = 8.37 \mathcal{E}_n'(z, 0.62 \pm 0.51j) + 3.86 \mathcal{E}_n''(z, 0.62 \pm 0.51j) + 1.43 \mathcal{E}_n(z, .9) \quad (\text{II.58})$$

L'erreur quadratique normalisée (NMSE) commise lors de cette approximation se calcule directement à partir de (I.6.b) :

$$\frac{J_2}{\|G(z)\|^2} = \frac{\|G(z)\|^2 - g_0^2 - g_1^2 - g_2^2}{\|G(z)\|^2} = 4.09 \%$$

Le domaine de convergence de la série (II.58) est défini sur la figure II.10. Il exclut d'une part le cercle dont le centre est $(0, 0.0876)$ et dont le rayon est 0.076 et d'autre part les deux contours indiqués sur la figure suivante.

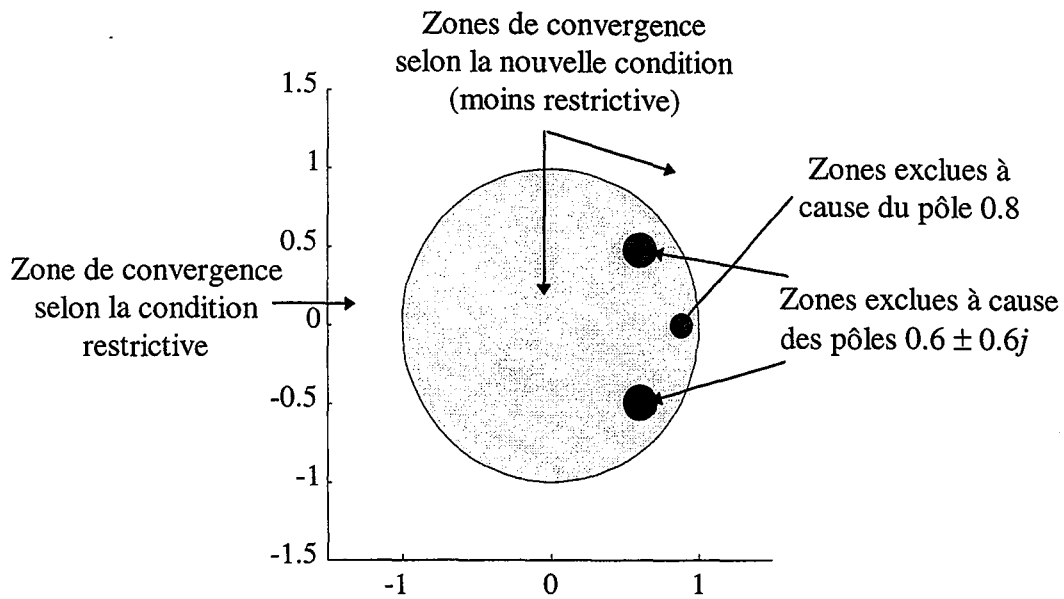


Figure II.10 - Domaine de convergence de la variable z
(extérieur des zones sombres)

4.5 Représentation dans l'espace d'état

Pour compléter cette présentation, on propose de générer les équations d'état des filtres strictement causaux issus de la BOG. Un retard pur est donc ajouté en amont du réseau de la figure II.9.

A partir de la relation de récurrence (II.49.b) et de la figure II.9, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0(k) = \frac{\sqrt{1-|\xi_0|^2}}{q-\xi_0} u(k) \\ x_1(k) = A_1 \frac{1-\xi_0^* q}{q-\xi_1} x_0(k) \\ x_2(k) = A_2 \frac{1-\xi_1^* q}{q-\xi_2} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) = A_n \frac{1-\xi_{n-1}^* q}{q-\xi_n} x_{n-1}(k) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0(k+1) = \xi_0 x_0(k) + \sqrt{1-|\xi_0|^2} u(k) \\ x_1(k+1) + A_1 \xi_0^* x_0(k+1) = A_1 x_0(k) + \xi_1 x_1(k) \\ x_2(k+1) + A_2 \xi_1^* x_1(k+1) = A_2 x_1(k) + \xi_2 x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) + A_n \xi_{n-1}^* x_{n-1}(k+1) = A_n x_{n-1}(k) + \xi_n x_n(k) \end{array} \right. \quad (\text{II.59.a})$$

$$\text{où } A_n = \frac{\sqrt{1-|\xi_n|^2}}{\sqrt{1-|\xi_{n-1}|^2}}$$

La sortie globale s'écrit :

$$y(k) = g_0 x_0(k) + g_1 x_1(k) + g_2 x_2(k) + \dots + g_n x_n(k) \quad (\text{II.59.b})$$

Définissons le changement de variables :

$$\begin{cases} z_0(k) = x_0(k) \\ z_1(k) = x_1(k) + A_1 \xi_0^* x_0(k) \\ z_2(k) = x_2(k) + A_2 \xi_1^* x_1(k) \\ \vdots \\ z_n(k) = x_n(k) + A_n \xi_{n-1}^* x_{n-1}(k) \end{cases} \quad (\text{II.60.a})$$

dont le changement réciproque est :

$$\begin{cases} x_0(k) = z_0(k) \\ x_1(k) = z_1(k) - A_1 \xi_0^* z_0(k) \\ x_2(k) = z_2(k) - A_2 \xi_1^* z_1(k) + A_2 A_1 \xi_0^* \xi_1^* z_0(k) \\ \vdots \\ x_n(k) = y_n(k) - A_n \xi_{n-1}^* z_{n-1}(k) + A_n A_{n-1} \xi_{n-1}^* \xi_{n-2}^* z_{n-2}(k) - \dots - \prod_{k=1}^n A_k \xi_k^* z_0(k) \end{cases} \quad (\text{II.60.b})$$

En remplaçant (II.60.a et b) dans (II.59.a et b), on obtient la représentation d'état du réseau de la BOG, que l'on écrit sous la forme matricielle :

$$Z(k+1) = AZ(k) + Bu(k) \quad (\text{II.61.a})$$

$$y(k) = CZ(k) \quad (\text{II.61.b})$$

avec :

$$Z(k) = \begin{bmatrix} z_0(k) \\ z_1(k) \\ z_2(k) \\ \vdots \\ z_{2N}(k) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \xi_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1(1 - \xi_0^* \xi_1) & \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 A_1 \xi_0^* (1 - \xi_1^* \xi_2) & A_1(1 - \xi_1^* \xi_2) & \xi_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A[0] & A[1] & A[2] & \dots & \xi_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - |\xi_0|^2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et
$$C = [e[0] \ e[1] \ e[3] \ \dots \ e[n]]$$

où

$$\mathcal{A}[x] = (-1)^{n+1-x} A_n \prod_{k=x}^{n-2} A_{k+1} \xi_k^* (1 - \xi_{n-1}^* \xi_n)$$

$$e[x] = g_x + \sum_{k=x+1}^n (-1)^k g_k \prod_{j=x+1}^k A_j \xi_{j-1}^*$$

et
$$A_n = \frac{\sqrt{1 - |\xi_n|^2}}{\sqrt{1 - |\xi_{n-1}|^2}}$$

4.6 Conclusions

Les filtres de la base orthogonale généralisée, admettent un nombre quelconque de pôles, qui peuvent être réels ou complexes conjugués. En conséquence, ils conviennent à la représentation de tout type de systèmes linéaires causaux et stables. De plus, cette base est considérée comme une extension des bases de fonctions dirac delta, de Laguerre et de Kautz.

5. Généralisation de la base de fonctions de type Meixner à plusieurs pôles réels

Les filtres de type Meixner (II.1) sont intéressants pour la modélisation de systèmes à partir de conditions initiales mal connues, car ils permettent, lors du processus d'identification, d'attribuer un poids « faible » aux données proches de l'origine des temps. En revanche, ces fonctions, tout comme les fonctions de Laguerre, n'admettent qu'une seule dynamique, fixée par le paramètre ξ dans (II.1) et là réside leur principal inconvénient.

Les fonctions de la base orthogonale généralisée admettent plusieurs dynamiques. En revanche, le poids qu'elles attribuent aux données proches de l'origine des temps n'est pas ajustable. Il est élevé, ce qui défavorise l'identification de systèmes quand les conditions initiales sont mal connues.

Il nous a donc semblé intéressant de construire une nouvelle base de fonctions, que nous appellerons *la base de Meixner généralisée*, qui cumule à la fois les avantages des fonctions de type Meixner et ceux des fonctions de la BOG. En effet, elle aura un degré de généralisation et elle admettra un nombre quelconque de pôles réels. **Elle sera donc considérée, comme une généralisation de la base de type Meixner.**

Pour cela, nous appliquerons, aux filtres de la BOG, la méthode que den Brinker (1995b) a appliqué aux filtres de Laguerre, pour synthétiser les filtres de type Meixner. Dans ce travail, nous ferons face à une difficulté plus accrue, à cause de la multitude des pôles utilisés. Nous inviterons le lecteur à comparer nos résultats avec les résultats relatifs aux filtres de type Meixner présentés au paragraphe II.2.

5.1 Synthèse des fonctions de la base de type Meixner généralisée

L'objectif est de montrer que les filtres de type Meixner généralisés s'écrivent dans le domaine fréquentiel :

$$M_n^{G^{(a)}}(z, \xi) = \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(a)} G_j^{(a)}(z, \xi) \prod_{k=0}^{j-1} \frac{1 - \xi_k^* z}{z - \xi_k} \quad (\text{II.62.a})$$

où la fonction $G_j^{(a)}(z, \xi)$ dépend du degré de généralisation et se présente comme suit :

$$\triangleright G_j^{(a)}(z, \xi) = \frac{z(1 - \xi_j^2)^{1/2}}{(z - \xi_j)} \prod_{k=1}^a \frac{z(1 - \xi_{j+k}^2)}{(z - \xi_{j+k})} \quad (\text{II.62.b})$$

Pour synthétiser ces filtres, définissons les deux vecteurs contenant respectivement les transformées en \mathcal{Z} des filtres de type Meixner généralisés et les transformées en \mathcal{Z} des filtres de la BOG :

$$M^{G^{(a)}}(z, \xi) = [M_0^{G^{(a)}}(z, \xi) \ M_1^{G^{(a)}}(z, \xi) \ \dots]$$

$$\mathcal{B}(z, \xi) = [\mathcal{B}_0(z, \xi) \ \mathcal{B}_1(z, \xi) \ \dots]$$

Les nouvelles fonctions sont construites de la manière suivante. Le banc de filtres BOG est mis en cascade avec une matrice orthogonale $A^{(a)}$ (figure II.11) de façon à ce que :

➤ le vecteur résultant,

$$M^{G^{(a)}}(z, \xi) = A^{(a)} \mathcal{B}_n(z, \xi) \tag{II.63}$$

contienne des fonctions rationnelles en z ,

➤ l'ordre de la transformée en \mathcal{Z} de $M_n^{G^{(a)}}(z, \xi)$ soit $n + a + 1$,

➤ les fonctions soient orthonormées et

➤ chaque fonction de transfert $M_n^{G^{(a)}}(z, \xi)$ s'exprime, comme l'indique l'équation (II.62.a), en fonction des filtres $G_j^{(a)}(z, \xi)$ de l'équation (II.62.b).

La dernière contrainte est suggérée par analogie à la contrainte imposée par den Brinker (1995b), aux filtres de type Meixner.

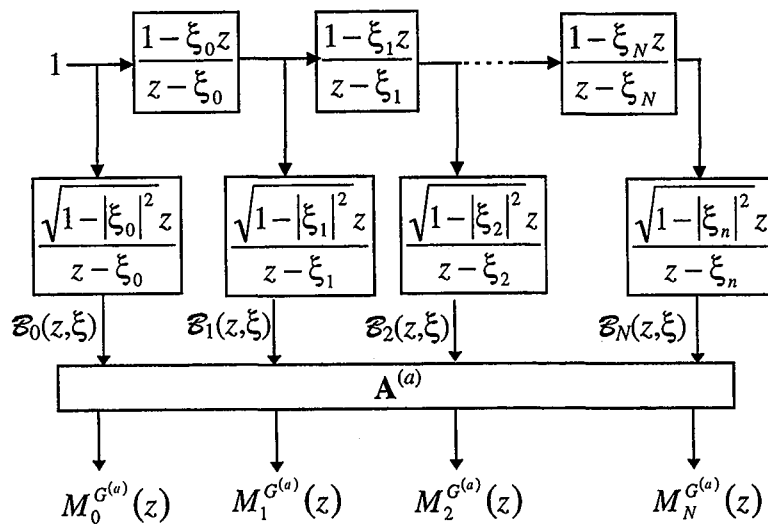


Figure II.11 - Réseau permettant de générer les filtres de type Meixner généralisés à partir des filtres issus de la BOG

A partir de (II.62.b) et pour une généralisation à l'ordre $a = 0$, il est évident que les fonctions de type Meixner généralisées se réduisent aux fonctions de la BOG. En effet, $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{I}$ (matrice identité), $G_n^{(0)}(z, \xi) = \frac{\sqrt{1-|\xi_n|^2} z}{z-\xi_n}$ et $M_n^{G^{(0)}}(z, \xi) = \mathcal{Z}(z, \xi)$.

Puisque la fonction $M_n^{G^{(a)}}$ possède $n + a + 1$ pôles, notés $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+a}$, elle peut également être générée à partir du schéma bloc de la figure II.12, qui correspond aussi à l'équation (II.62.a). Notre objectif est de calculer la matrice $\mathbf{L}^{(a)}$.

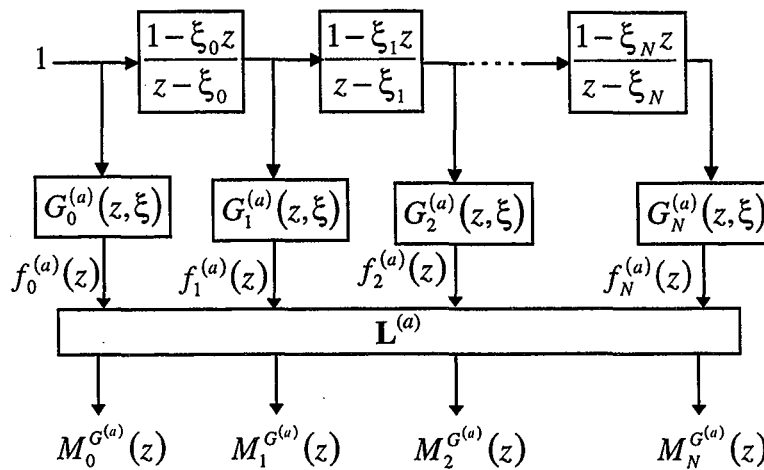


Figure II.12 - Réseau permettant de générer les filtres de type Meixner généralisés ;

$G_n^{(a)}(z, \xi)$ est défini par (II.62.b)

Les sorties intermédiaires $f_n^{(a)}(z)$ de la figure II.12, regroupées dans le vecteur $\mathbf{f}^{(a)}(z)$ s'expriment aisément à l'aide d'une opération matricielle sur les sorties des filtres de la BOG :

$$\mathbf{f}^{(a)}(z) = U^{(a)} \mathcal{Z}(z) \quad (\text{II.64})$$

avec :

$$\mathbf{f}^{(a)}(z) = [f_0^{(a)}(z) \ f_1^{(a)}(z) \ \dots]$$

$$U^{(a)} = U_{a-1} U_{a-2} \dots U_1 I \quad (\text{l'ordre de la multiplication doit être respecté) et}$$

➤ U_x , une matrice bi-diagonale supérieure de dimension $2N+1$ qui s'écrit :

$$U_x = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi_{1+x}^2}{1-\xi_0\xi_{1+x}} & \frac{\sqrt{1-\xi_0^2}\sqrt{1-\xi_1^2}\xi_{1+x}}{1-\xi_0\xi_{1+x}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1-\xi_{2+x}^2}{1-\xi_1\xi_{2+x}} & \frac{\sqrt{1-\xi_1^2}\sqrt{1-\xi_2^2}\xi_{2+x}}{1-\xi_1\xi_{2+x}} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{1-\xi_{3+x}^2}{1-\xi_2\xi_{3+x}} & \frac{\sqrt{1-\xi_2^2}\sqrt{1-\xi_3^2}\xi_{3+x}}{1-\xi_2\xi_{3+x}} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$x = 1, 2, \dots, (a-1) \quad (\text{II.65})$$

Notons que, si tous les pôles sont identiques, toutes les matrices U_x se réduisent, indépendamment de l'indice x , à la matrice U définie par (II.2), $U^{(a)}$ devient U^a (lire U puissance a) et l'on retrouve le réseau de filtres de type Meixner que l'on a présenté au paragraphe II.1.

Puisque les deux réseaux de filtres des figures II.11 et II.12 doivent être équivalents, la relation matricielle suivante est toujours vérifiée :

$$\mathbf{A}^{(a)} = \mathbf{L}^{(a)}U^{(a)} \quad (\text{II.66})$$

Puisque, la matrice $\mathbf{A}^{(a)}$ est orthogonale, l'équation suivante doit aussi être satisfaite :

$$\mathbf{A}^{(a)}\mathbf{A}^{(a)T} = \mathbf{L}^{(a)}U^{(a)}\{U^{(a)}\}^T\{\mathbf{L}^{(a)}\}^T = \mathbf{I} \quad (\text{II.67})$$

Par ailleurs, $U^{(a)}\{U^{(a)}\}^T$, matrice de dimension $2N+1$, est définie positive. On calcule donc $\mathbf{L}^{(a)}$, comme proposé par den Brinker pour les filtres de type Meixner, en inversant la décomposition de Cholesky de $U^{(a)}\{U^{(a)}\}^T$. Ensuite, la matrice \mathbf{A} est générée, à partir de (II.66) et une vérification de l'exactitude du résultat peut se faire en appliquant (II.67).

Afin de mieux illustrer cette procédure, un exemple de faibles dimensions est traité pour des ordres de généralisation peu élevés.

Exemple II.4

Trois cas seront présentés : quand l'ordre de généralisation (a) est égal à zéro, un puis deux. Pour chaque cas, les deux premières fonctions de type Meixner généralisées seront déterminées.

- Pour le choix des pôles $\xi = 0.9$ et $\xi = 0.6$, et une généralisation à l'ordre $a = 0$, les filtres issus de la nouvelle base se réduisent aux filtres de la BOG, car $\mathbf{L}^{(a)}$ est la matrice identité.

$$M_0^{G^{(0)}}(z, 0.9) = \mathfrak{Z}_0(z, 0.9) = \frac{0.436z}{z - 0.9}$$

$$M_1^{G^{(0)}}\left(z, \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \end{bmatrix}^T\right) = \mathfrak{Z}_1\left(z, \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \end{bmatrix}^T\right) = \frac{0.8z}{z - 0.6} \frac{1 - 0.9z}{z - 0.9}$$

- Pour un degré de généralisation $a = 1$, il est nécessaire de fixer un pôle supplémentaire ξ_2 , car la fonction $M_2^{G^{(0)}}$ dépend, selon la deuxième condition énoncée à la page 89, de trois pôles. Posons $\xi_2 = -0.8$. La matrice $U^{(1)}$, égale à U_1 , se présente ainsi cf. (II.65) :

$$U^{(1)} = U_1 I = \begin{bmatrix} 1.39 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.24 & -0.26 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \xi_3^2}{1 + 0.80\xi_3} \end{bmatrix}$$

Quant aux matrices $\mathbf{L}^{(1)}$ et $\mathbf{A}^{(1)}$, à partir de (II.67) et (II.66), elles s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{L}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0 & 0 \\ -0.15 & 2.88 & 0 \\ -0.17 & 3.23 & \frac{1.51 + 1.21\xi_3}{1 - \xi_3} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.31 & 0 \\ -0.21 & 0.63 & -0.74 \end{bmatrix}$$

L'élément (3, 3) de la matrice $\mathbf{L}^{(1)}$ ne joue aucun rôle dans la définition des deux premières fonctions de type Meixner généralisées. C'est pourquoi le paramètre ξ_3 n'a pas été fixé.

Les fonctions obtenues sont :

$$M_0^{G^{(1)}}(z, [0.9 \ 0.6]^T) = \underbrace{0.68}_{L_{1,1}} \underbrace{\left[\frac{0.44z \ 0.64z}{z-0.9 \ z-0.6} \right]}_{G_0^{(1)}}$$

$$M_1^{G^{(1)}}(z, [0.9 \ 0.6 \ -0.8]^T) = \underbrace{-0.15}_{L_{2,1}} \underbrace{\left[\frac{0.44z \ 0.64z}{z-0.9 \ z-0.6} \right]}_{G_0^{(1)}} + \underbrace{2.88}_{L_{2,2}} \underbrace{\left[\frac{0.80z \ 0.36z}{z-0.6 \ z+0.8} \right]}_{G_1^{(1)}} \frac{1-0.9z}{z-0.9}$$

➤ De même, pour un degré de généralisation $a=2$, il est nécessaire de fixer un pôle supplémentaire ξ_3 , car la fonction $M_2^{G^{(2)}}$ dépend maintenant de quatre pôles. Posons $\xi_3 = -0.5$. Les matrices U_1 , U_2 , et $U^{(2)}$ s'écrivent respectivement cf. (II.65) :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1.39 & 0.46 & 0 \\ 0 & 0.24 & -0.26 \\ 0 & 0 & 1.25 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 0.21 & -0.16 & 0 \\ 0 & 0.58 & -0.19 \\ 0 & 0 & \frac{1-\xi_4^2}{1+0.8\xi_4} \end{bmatrix} \text{ et } U^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.29 & 0.06 & 0.04 \\ 0 & 0.14 & -0.38 \\ 0 & 0 & \frac{1.25-1.25\xi_4^2}{1+0.8\xi_4} \end{bmatrix}$$

Quant aux matrices $L^{(2)}$ et $A^{(2)}$, elles se présentent comme suit cf. (II.67) et (II.66) :

$$L^{(2)} = \begin{bmatrix} 3.34 & 0 & 0 \\ 0.23 & 2.47 & 0 \\ -0.77 & 6.82 & \frac{2.37+1.90\xi_4}{1-\xi_4^2} \end{bmatrix} \text{ et } A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.31 & 0 \\ -0.21 & 0.63 & -0.74 \end{bmatrix}$$

Les fonctions de type Meixner qui en résultent, sont :

$$M_0^{G^{(2)}}(z, [0.9 \ 0.6 \ -0.8]) = \underbrace{3.34}_{L_{1,1}} \underbrace{\left[\frac{0.436z \ 0.64z \ 0.36z}{z-0.9 \ z-0.6 \ z+0.8} \right]}_{G_0^{(2)}}$$

$$M_1^{G^{(2)}}(z, [0.9 \ 0.6 \ -0.8 \ -0.5]) = \underbrace{0.23}_{L_{2,2}} \underbrace{\left[\frac{0.436z \ 0.64z \ 0.36z}{z-0.9 \ z-0.6 \ z+0.8} \right]}_{G_0^{(2)}} + \underbrace{2.47}_{L_{2,2}} \underbrace{\left[\frac{0.8z \ 0.36z \ 0.75z}{z-0.6 \ z+0.8 \ z+0.5} \right]}_{G_1^{(2)}} \frac{1-0.9z}{z-0.9}$$

Complétude de la base

A partir de la relation linéaire qui lie les fonctions de type Meixner généralisées aux fonctions de la BOG (II.63) et de la complétude de la base des fonctions de la BOG (voir p.74), on conclut que les fonctions de type Meixner généralisées engendrent tout l'espace $H^2(D^c)$, si la condition suivante est satisfaite :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\xi_k|) = \infty.$$

5.2 Comparaison avec les fonctions issues de la BOG

En comparant les filtres issus de la BOG (II.32) aux filtres de type Meixner généralisés (II.62.a), on remarque que, mis à part, les éléments de la matrice $L^{(a)}$ assurant l'orthogonalité, la différence au niveau de la partie dynamique se résume à la substitution du filtre passe-bas d'ordre 1, $G_j^{(0)}(z)$, qui précède la sortie de chaque filtre de la BOG (figure II.9), par un filtre passe-bas d'ordre $a + 1$ noté $G_j^{(a)}(z)$ (figure II.12).

$$\text{avec } G_j^{(a)}(z, \xi) = \frac{z(1 - \xi_j^2)^{1/2}}{(z - \xi_j)} \prod_{k=1}^a \frac{z(1 - \xi_{j+k}^2)}{(z - \xi_{j+k})}$$

Ce résultat est comparable à ce qui a été présenté pour les filtres de type Meixner au paragraphe II.2.2. De même, si la réponse impulsionnelle de $G_j^{(a)}(z)$ était tracée pour différents degrés de généralisation, on aurait obtenu des courbes similaires à celles de la figure II.3, qui auraient montré que la pondération temporelle dépend directement de a et que celle qui est associée aux filtres de la BOG fournit un poids plus important aux données proches de zéro. Ceci peut être gênant pour certains problèmes d'identification quand les conditions initiales sont mal connues. Il serait judicieux de privilégier, alors, un degré de généralisation supérieur ou égal à un.

5.3 Calcul des coefficients de Fourier liés aux filtres de Meixner généralisés

Le calcul des coefficients optimaux, au sens du critère quadratique, ne pose pas de problèmes particuliers. Il suffit, comme pour les autres bases, d'effectuer le produit scalaire de la fonction de transfert à décomposer par les filtres de type Meixner généralisés :

$$g_n = \left\langle G(z), M_n^{G(a)}(z, \xi) \right\rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_T G(z) \sum_{j=0}^n L_{n+1, j+1}^{(a)} G_j^{(a)}(z^{-1}, \xi) \left(\frac{z - \xi}{1 - \xi z} \right)^j z^{-1} dz \quad (\text{II.68})$$

Relation entre les coefficients de Fourier de la base de type Meixner généralisée et ceux de la BOG

Pour trouver la relation entre les coefficients de Fourier de la nouvelle base et ceux de la BOG, il suffit d'exploiter (II.63) qui exprime une relation linéaire entre un réseau de $N+1$ filtres de Meixner généralisés et $2N+1$ filtres de la BOG. Il est alors facile de déterminer la relation suivante, en utilisant une méthode similaire à celle qui est présentée dans II.2.3 :

$$\left[g^{BOG} \right]_{2N+1 \times 1}^T = \left[g^{G(a)} \right]_{2N+1 \times 1}^T A_{N+1 \times 2N+1}^{(a)} \quad (\text{II.69})$$

On conclut que le réseau de filtres BOG, équivalent au réseau de $N+1$ filtres de type Meixner généralisés, comprend $2N+1$ filtres, possède les mêmes pôles et des coefficients qui se calculent à partir de (II.69).

Remarques

1. Les coefficients de la BOG, g^{BOG} , obtenus par (II.69), ne sont pas optimaux au sens du critère quadratique pour l'approximation d'une fonction de transfert sur la base de $2N+1$ filtres. Ils permettent seulement de trouver le réseau de filtres BOG équivalent au réseau de filtres Meixner généralisés.
2. Il n'est pas possible de trouver un réseau de $N+1$ filtres de type Meixner généralisés équivalent à un réseau de $2N+1$ filtres de la BOG, car la matrice $A^{(a)}$ n'est pas carrée et ne peut pas, de ce fait, être inversée dans la relation (II.69). ☒
3. L'étude de la convergence des coefficients de Fourier ainsi que l'étude de la convergence de la série de type Meixner généralisée, est aussi problématique que celle des filtres de type

Meixner (voir § II.2.4). On ne peut aboutir qu'à des résultats très partiels, parce que la matrice $\mathbf{L}^{(a)}$ qui intervient dans la définition des filtres de type Meixner généralisés (II.62.a) n'est pas explicitement connue dans le cas général. Néanmoins, cette étude peut être faite, lorsque tous les paramètres sont fixés.

4. Pour la synthèse d'une représentation d'état des filtres de type Meixner généralisés, une méthode identique à celle présentée dans II.2.5 peut être utilisée. Il s'agit tout d'abord d'exploiter la relation d'équivalence (II.63) entre un réseau de $N+1$ filtres de type Meixner généralisés et un réseau de $2N+1$ filtres BOG. Ensuite, il suffit de reprendre la représentation d'état des filtres de la BOG présentée dans II.4.5. ☒

5.4 Conclusions et perspectives

Avec les filtres de la nouvelle base, on a généralisé à la fois la définition des filtres de type Meixner à des pôles réels multiples et la définition des filtres de la BOG à des degrés différents qui influent sur la vitesse de croissance de ces fonctions au voisinage de l'origine des temps. De ce fait, les nouveaux filtres sont plus adaptés à l'identification de systèmes lorsque les conditions initiales sont mal connues. Ces avantages amènent aussi une complexité dans la représentation des nouvelles fonctions.

De plus le lien qui existe entre $2N + 1$ filtres de la BOG et $N + 1$ filtres de type Meixner généralisés permet d'exploiter un certain nombre de résultats, déjà établis pour les filtres de la BOG, comme la représentation d'état.

Ce travail présente des perspectives intéressantes, telles que l'extension de la généralisation à des pôles complexes conjugués.

Il faut noter, tout de même, que la structure des filtres de type Meixner et Meixner généralisés est plus complexe que celle des filtres des autres bases. Cette complexité est introduite par la présence de la matrice $\mathbf{L}^{(a)}$ qui doit être recalculée non seulement pour chaque degré de généralisation mais également quand le nombre de filtres change. Ceci peut être gênant pour certains problèmes d'identification, où l'on a besoin de modifier l'ordre de troncature pour observer l'évolution du critère d'optimisation.

Chapitre 3

Choix des Pôles - Conditions d'Optimalité

*If I have seen a little further than others,
it is because I have stood on the shoulders of giants.*

Sir Isaac Newton

1. Introduction - Formulation du problème

Les filtres de Laguerre, type Meixner, Kautz à deux paramètres et de la base orthogonale généralisée (BOG) sont gouvernés essentiellement par un, deux ou une multitude de paramètres, appelés pôles, qui interviennent de façon non-linéaire dans leur constitution. Le choix de ces pôles est primordial, afin de permettre la troncature du réseau de filtres à un ordre « *peu élevé* », sans trop altérer, la qualité de l'approximation. Des auteurs comme Wahlberg (1994) et Lindskog (1996) préconisent une connaissance *a priori* du système à identifier, afin de mieux situer ses dynamiques et de permettre ainsi un choix adéquat du pôle de Laguerre ou ceux de Kautz. Leur idée peut facilement être étendue pour modéliser le comportement dû à toutes les dynamiques d'un système, grâce aux filtres de la BOG qui admettent un nombre quelconque de pôles.

A chaque ordre de troncature correspond un (voire plusieurs) choix optimum (optima) du (des) pôle(s) de la base orthogonale utilisée. **Les équations algébriques dont les solutions représentent des choix optima sont connues dans la littérature sous le nom de Conditions d'Optimalité (CO).** L'objectif de ce chapitre consiste à étudier, dans un premier temps, les CO connues des filtres de Laguerre, Meixner et Kautz, afin de déterminer, par la suite, ce qui constitue un des points clés de notre thèse : les CO des filtres de la BOG sous la restriction que tous les pôles appartiennent à l'ensemble des nombres réels.

Les filtres de Laguerre et ceux de type Meixner ayant un pôle unique, leurs CO s'expriment sous la forme d'une équation unique (voire plusieurs équations indépendantes). De même, puisque les filtres de Kautz possèdent deux pôles complexes conjugués, leurs CO s'expriment sous la forme d'un système de deux équations (voire plusieurs systèmes indépendants), dont les solutions fournissent les parties réelle et imaginaire des pôles de Kautz optima. En ce qui concerne les filtres de la BOG, le raisonnement est quelque peu différent, puisque le nombre de pôles à optimiser n'est pas constant, mais dépend exclusivement de l'ordre de troncature N (le décompte se fait à partir de 0), car à chaque ajout d'un filtre, un pôle supplémentaire, qui est *a priori* différent des précédents, est introduit. En conséquence, les CO s'écrivent nécessairement sous la forme d'un système de $N + 1$ équations (voire plusieurs systèmes indépendants) à $N + 1$ pôles, dont les solutions représentent les optima recherchés.

Nous avons jugé bon de reprendre la démonstration conduisant aux CO des filtres de Laguerre parce que, d'une part, notre travail clé consiste en la détermination des CO des filtres de la BOG sous la contrainte que tous les pôles soient des nombres réels, ce qui représente une extension directe des filtres de Laguerre et permet de mieux illustrer les difficultés rencontrées ; d'autre part, certaines démonstrations étant identiques pour les deux bases de fonctions, elles seront directement reprises. En revanche, nous nous contenterons de présenter les résultats exprimant les CO des filtres de type Meixner et ceux des filtres de Kautz, en y incluant des exemples d'illustration et en renvoyant le lecteur aux différents articles qui traitent du sujet.

Nous avons, jusqu'à présent, quelque peu abusé de la terminologie de « *pôle(s) optimum (optima)* » sans avoir défini au préalable le critère d'optimisation, ni même quels optima étaient recherchés. Nous tâcherons de réparer cet abus dans ce paragraphe. Signalons, tout d'abord, que la formulation du problème est identique quelle que soit la base de fonctions utilisées. Il n'y a que le nombre de paramètres pour lesquels le problème d'optimisation est à résoudre qui diffère, suivant les bases. C'est pourquoi, le problème sera posé, en guise de préambule, de façon unique pour toutes les bases considérées. Nous agirons de même pour les premières équations conduisant à la démonstration des CO, avant de bifurquer, sur les spécificités de la démonstration liée à chaque base.

Pour revenir à la formulation du problème, quelques définitions et rappels sont nécessaires. Commençons par poser $\{\mathcal{G}_n(z)\}_{n=0,1,\dots,\infty}$ comme étant des fonctions issues de l'une des quatre bases orthonormées précitées, à savoir, Laguerre, Meixner, Kautz ou GOB et g_n comme étant le coefficient de Fourier associé à la décomposition d'une fonction (de transfert) $H(z)$, appartenant à $H^2(D^c)$, sur $\mathcal{G}_n(z)$. Rappelons, que toute fonction de transfert peut s'écrire de façon exacte en termes d'une infinité de fonctions issues de l'une des bases considérées :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \mathcal{G}_n(z, \underline{\xi})$$

et que dans la réalité, cette représentation est souvent tronquée à un nombre fini de termes, mettons N , car la convergence des coefficients de Fourier et celle de la série des fonctions $\mathcal{G}_n(z)$, le permet (cf. Chapitre I et II). Cependant, la qualité de l'approximation dépend fortement du choix du (des) pôle(s) de la base utilisée.

L'erreur quadratique moyenne (*MSE* pour *Mean Squared Error*) commise à chaque troncature, que l'on notera tout au long de ce chapitre $J_N(\underline{\xi})$, dépend essentiellement du choix du (des) pôle(s), car les coefficients, s'exprimant de façon linéaire, sont directement calculés par la projection de $H(z)$ sur chacune des fonctions $\mathcal{G}(z)$, comme cela a été amplement expliqué dans les premiers chapitres. La MSE s'écrit, en fonction de l'erreur de troncature E_N :

$$J_N(\underline{\xi}) = \|E_N\|^2 = \langle E_N(z, \underline{\xi}_N), E_N(z, \underline{\xi}_N) \rangle \quad (\text{III.1})$$

où E_N s'écrit, à son tour, selon l'une des deux formules :

$$E_N(z, \underline{\xi}_N) = H(z) - \sum_{n=0}^N g_n(\underline{\xi}_n) \mathcal{G}_n(z, \underline{\xi}_n) \quad (\text{III.2.a})$$

$$E_N(z, \underline{\xi}_N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} g_n(\underline{\xi}_n) \mathcal{G}_n(z, \underline{\xi}_n) \quad (\text{III.2.b})$$

Le problème d'optimisation consiste donc à retrouver le(s) pôle(s) de chacune des bases qui minimise(ent) la MSE définie par (III.1). Ainsi, on recherche le(s) $\underline{\xi}$ qui vérifie(ent) :

$$\min_{\underline{\xi}} \{ J_N(\underline{\xi}) \} \quad (\text{III.3})$$

Après avoir noté que (III.1) est équivalent (cf. I.6.c) à :

$$J_N(\underline{\xi}) = \|h\|^2 - \sum_{n=0}^N g_n^2(\underline{\xi}) \quad (\text{III.4})$$

le problème de minimisation du critère (III.3) peut également être vu comme un problème de maximisation de l'énergie du développement :

$$\max_{\underline{\xi}} \left\{ \sum_{n=0}^N g_n^2(\underline{\xi}) \right\} \quad (\text{III.5})$$

Pour que la MSE atteigne son maximum, il faut que sa dérivée par rapport au pôle soit nulle. Si $\mathcal{G}(z)$ dépend de plusieurs pôles distincts, comme dans le cas de la BOG, on considérera la dérivée par rapport au vecteur des pôles dans (III.6). Le cas de chaque base sera traité

séparément ultérieurement. On peut donc observer qu'un optimum est atteint si les relations équivalentes, présentées ci-dessous, sont satisfaites, la première étant issue de (III.1) et la seconde, plus directement, de (III.4) ou (III.5) :

$$\frac{\partial J_N(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} = 2 \left\langle \frac{\partial E_N(z, \underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}}, E_N(z, \underline{\xi}) \right\rangle = 0 \quad (\text{III.6.a})$$

$$\frac{\partial J_N(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} = 2 \sum_{n=0}^N g_n(\underline{\xi}) \frac{\partial g_n(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} = 0 \quad (\text{III.6.b})$$

Notons que la condition (III.6.a ou b) est moins contraignante que (III.5) ou (III.3), car elle n'est pas seulement valable pour le minimum global de la MSE par rapport au(x) pôle(s), mais également pour tous les minima et maxima locaux, tout comme pour les points selles¹.

Le problème d'établir les CO se résume donc à simplifier (III.6.a ou b), dans le but de les résoudre. Il s'agit, plus clairement, de trouver les équations algébriques, qui simplifient les équations différentielles (III.6) et dont les solutions représentent les points stationnaires du critère (III.4), par rapport au(x) pôle(s). Il est évident que l'évaluation du critère sur tous ces optima permet, par la suite, de dégager le minimum global.

Avant de présenter les résultats de chaque base séparément, il est utile de rappeler les **équations normales**, qui sont valables quelle que soit la base orthogonale, et qui ont déjà été présentées dans les deux premiers chapitres. Ces équations s'obtiennent en différentiant (III.1) par rapport aux g_n :

$$\frac{\partial J_N(\underline{\xi})}{\partial g_n} = 2 \left\langle E_N(z, \underline{\xi}_N), g_n(z, \underline{\xi}_N) \right\rangle = 0 \quad n = 0, \dots, N \quad (\text{III.7})$$

¹ En présence d'un pôle unique ce sont les points en lesquels les deux premières dérivées de la fonction s'annulent, alors qu'en présence de plusieurs pôles c'est la définition tout à fait classique des points en lesquels la fonction présente des maxima par rapport à certaines variables et des minima par rapport à d'autres.

Elles conduisent à la formule permettant de calculer les coefficients de Fourier, qui a déjà été utilisée préalablement :

$$g_n(\underline{\xi}) = \left\langle H(z), \varphi_n(z, \underline{\xi}_n) \right\rangle \quad n = 0, \dots, N \quad (\text{III.8})$$

Toutes les méthodes conduisant au CO consistent à exprimer soit la dérivée de E_N par rapport au(x) pôle(s) (cf. III.6.a) en termes des fonctions de la base orthogonale soit la dérivée des coefficients de Fourier (cf. III.6.b) en termes d'autres coefficients de Fourier. Cette étape ne peut être faite qu'en examinant chaque base séparément.

2. CO des filtres de Laguerre [Masnadi-Shirazzi et al., 1991] et [e Silva, 1994]

Historiquement, Clowes, (1966), est le premier à avoir établi les CO pour un réseau de filtres de Laguerre continus, similaire au réseau discret de la figure I.6. Son résultat n'est, cependant, valable que lorsque le spectre du signal d'excitation $u(k)$ est égal à un sur toute la gamme des fréquences, respectant ainsi l'orthogonalité des sorties de filtres. Par la suite, Masnadi-Shirazzi, (1990) a trouvé les CO pour un réseau de filtres de Laguerre discrets figure I.6, toujours pour des signaux d'excitation $u(k)$ impulsionnels ou blancs. e Silva, (1994), a permis de s'affranchir de cette contrainte, en établissant les CO des réseaux de filtre de Laguerre continu et discret pour des excitations quelconques (non-nulles, bien sûr). Son résultat est, bien entendu, plus fort que le précédent, car il peut directement être utilisé pour l'optimisation du pôle de Laguerre lors d'une procédure d'identification de systèmes à partir de signaux d'excitation quelconques.

Nous commencerons cette section par la présentation de la méthode utilisée par Masnadi-Shirazzi, (1990), qui permet de déterminer les CO des filtres de Laguerre discrets, pour une excitation blanche. Ensuite, nous enchaînerons sur la démonstration de e Silva, (1994) pour une excitation corrélée.

2.1 Excitation blanche (impulsionnelle)

[Masnadi-Shirazzi, 1991]

On remplacera les fonctions $\{g_n(z)\}$ dans (III.1) à (III.8), par les fonctions de Laguerre $\{L_n(z, \xi)\}$ (I.19), où l'on explicite leur dépendance par rapport au pôle de Laguerre ξ .

Afin de simplifier d'avantage (III.6.b), on a besoin de la relation liant la dérivée des filtres de Laguerre par rapport au pôle, aux filtres de Laguerre. Celle-ci est présentée ci-dessous :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} L_0(z, \xi) = \frac{L_1(z, \xi)}{1 - \xi^2} \quad (\text{III.9.a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} L_n(z, \xi) = \frac{-n}{1 - \xi^2} L_{n-1}(z, \xi) + \frac{n+1}{1 - \xi^2} L_{n+1}(z, \xi) \quad \text{pour tout } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.9.b})$$

Cette relation peut facilement être démontrée, en dérivant la partie gauche des équations (III.9), à partir des transformées en \mathcal{Z} des filtres de Laguerre (I.19).

En effectuant le produit scalaire des deux côtés de (III.9), par la fonction de transfert à décomposer $H(z)$, et en notant que le résultat de chaque produit scalaire représente un coefficient de Fourier, on trouve la relation recherchée, entre la dérivée des coefficients par rapport au pôle et les coefficients :

$$\frac{\partial g_0(\xi)}{\partial \xi} = \frac{g_1(\xi)}{1 - \xi^2} \quad (\text{III.10.a})$$

$$\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi} = \frac{-ng_{n-1}(\xi)}{1 - \xi^2} + \frac{(n+1)g_{n+1}(\xi)}{1 - \xi^2} \quad \text{pour tout } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.10.b})$$

Ensuite, il suffit de remplacer (III.10) dans (III.6.b) et d'effectuer toutes les simplifications qui s'imposent afin de retrouver le résultat établi dans [Masnadi-Shirazzi, 1990] :

$$\frac{\partial J_N(\xi)}{\partial \xi} = \frac{2(N+1)}{1 - \xi^2} g_N(\xi) g_{N+1}(\xi) = 0$$

En conséquence, les CO des filtres de Laguerre s'écrivent :

$$g_N(\xi) = 0 \quad (\text{III.11.a})$$

ou
$$g_{N+1}(\xi) = 0 \quad (\text{III.11.b})$$

2.2 Expressions explicites des CO en fonction du pôle pour une classe de fonctions de transfert [Masnadi-Shirazzi, et al 1991]

Après avoir démontré que les CO des fonctions de Laguerre discrètes s'expriment par (III.11), Masnadi-Shirazzi et al ont explicité ces équations, directement en fonction du pôle de Laguerre pour la classe de systèmes physiques dont les réponses impulsionnelles sont du type :

$$h(k) = \sum_{i=1}^P A_i b_i^k \quad (\text{III.12})$$

où $A_i > 0$ et $0 < b_i < 1$ sont des nombres réels.

Notons que les fonctions de transfert de cette classe de systèmes sont à P pôles distincts :

$$H(z) = \sum_{i=1}^P \frac{A_i z}{z - b_i} \quad (\text{III.13})$$

Pour arriver à leurs fins, les auteurs commencent par exprimer les coefficients de Fourier de la décomposition de $H(z)$ sur les filtres de Laguerre, exclusivement en termes du pôle et des paramètres a_i et b_i de $H(z)$ (III.13). Rappelons que ce calcul a été effectué, dans le cadre de l'étude de convergence des coefficients de Fourier au paragraphe I.3.6.1 et que l'expression des coefficients est donnée par (I.31) p.28 (avec un changement de notation $z_i \Leftrightarrow b_i$). En conséquence, le coefficient qui correspond à $n = N$, s'écrit :

$$g_N(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} \sum_{i=1}^P A_i \frac{(b_i - \xi)^N}{(1 - \xi b_i)^{N+1}} \quad (\text{III.14})$$

Selon (III.11), il s'agit de trouver les valeurs de ξ , dans (III.14), qui annulent le coefficient g_N . C'est pourquoi, les auteurs raisonnent uniquement sur le numérateur de (III.14) qui sera noté dorénavant, $f_N(\xi)$:

$$f_N(\xi) = \sum_{i=1}^P A_i (b_i - \xi)^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^P (1 - \xi b_j)^{N+1} = 0 \quad (\text{III.15})$$

A partir de (III.15), $f_N(\xi)$ est exprimé sous la forme d'un polynôme de la variable ξ :

$$f_N(\xi) = \sum_{m=0}^L B_m \xi^m = 0 \quad (\text{III.16})$$

où $L = P(N+1) - 1$, représente l'ordre du polynôme et où les coefficients B_m se calculent par :

$$B_m = \frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi) \Big|_{\xi=0} \quad m = 0, 1, \dots, L$$

$f_N^{(m)}(\xi)$ étant la dérivée d'ordre m de la fonction $f_N(\xi)$.

Pour l'étude de l'équation (III.11.b), le même raisonnement est repris pour le coefficient $g_{N+1}(\xi)$. Il suffit de remplacer N par $N+1$ dans (III.14) à (III.16) et de noter que l'ordre L du polynôme (III.16) devient $P(N+2) - 1$.

Il est important de signaler que l'ordre des équations d'optimalité augmente rapidement avec l'ordre de la fonction de transfert originelle et le nombre de filtres utilisés pour son approximation.

2.3 Validité des CO pour une excitation quelconque (corrélée) [e Silva, 1994]

Rappelons que l'objectif de e Silva, (1994) est de déterminer les CO pour un réseau de filtres de Laguerre (figure I.6), quand le spectre du signal d'excitation $u(k)$ n'est pas égal à 1 sur toute la gamme des fréquences. La méthode qu'il a proposée est présentée dans cette section. Il y sera fait référence au paragraphe 5.4, lors d'une de nos démonstrations.

Dans ce cas précis, la définition de l'erreur commise lors d'une troncature à l'ordre N du réseau de filtres de Laguerre diffère de celle qui a été présentée dans (III.2 a), car elle s'écrit maintenant :

$$E_N(z, \xi) = Y(z) - \sum_{n=0}^N g_{n,N} X_n(z, \xi) \quad (\text{III.17})$$

$$\text{où} \quad Y(z) = H(z)U(z), \quad X_n(z, \xi) = L_n(z, \xi)U(z) \quad (\text{III.18})$$

et où l'on introduit un nouvel indice sur les coefficients de Fourier $g_{n,N}$, le premier signifiant qu'il s'agit du $n^{\text{ième}}$ coefficient et le second qu'il est optimal pour un réseau tronqué à N filtres.

Les équations normales, exprimées par (III.7) deviennent alors :

$$\frac{\partial J_N(\xi)}{\partial g_{n,N}} = 2 \left\langle E_N(z, \xi_N), X_n(z, \xi) \right\rangle = 0 \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (\text{III.19})$$

L'équation (III.8) n'est plus valable et le calcul des coefficients de Fourier se fait en résolvant le système (III.19) de $N + 1$ équations à $N + 1$ coefficients.

Par ailleurs, le pôle optimal vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_N(\xi)}{\partial \xi} &= 2 \left\langle E_N(z, \xi), \frac{\partial E_N(z, \xi)}{\partial \xi} \right\rangle = 0 \quad (\text{III.20}) \\ &= -2 \left\langle E_N(z, \xi), \sum_{n=0}^N g_{n,N}(\xi) \frac{\partial X_{n,N}(z, \xi)}{\partial \xi} \right\rangle - 2 \left\langle E_N(z, \xi), \sum_{n=0}^N \frac{\partial g_{n,N}(\xi)}{\partial \xi} X_{n,N}(z, \xi) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

Grâce aux équations normales (III.19), le second terme de l'addition s'annule. En conséquence, seule reste l'expression :

$$= -2 \left\langle E_N(z, \xi), \sum_{n=0}^N g_{n,N}(\xi) \frac{\partial X_{n,N}(z, \xi)}{\partial \xi} \right\rangle = 0 \quad (\text{III.21})$$

e Silva utilise ensuite les relations clés (III.9), afin de montrer, en les multipliant des deux côtés par l'excitation $U(z)$, que :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} X_0(z, \xi) = \frac{X_1(z, \xi)}{1 - \xi^2} \quad (\text{III.22.a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} X_n(z, \xi) = \frac{-n}{1-\xi^2} X_{n-1}(z, \xi) + \frac{n+1}{1-\xi^2} X_{n+1}(z, \xi) \quad \text{pour tout } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.22.b})$$

En remplaçant (III.22) dans (III.21) et en effectuant quelques simplifications, il arrive à la relation :

$$\frac{\partial J_N(\xi)}{\partial \xi} = \frac{2Ng_{N,N} \langle E_N(z, \xi), X_{N+1}(z, \xi) \rangle}{1-\xi^2} = 0 \quad (\text{III.23})$$

A partir de cette étape, l'auteur s'intéresse à la réduction de l'expression $\langle E_N(z, \xi), X_{N+1}(z, \xi) \rangle$.

La méthode proposée consiste à appliquer le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur l'ensemble des fonctions $\{X_i(z, \xi)\}_{i=0, 1, N}$. Ceci est toujours possible du fait de la non dépendance linéaire entre les $X_i(z, \xi)$. Il obtient, alors, un ensemble de fonctions orthogonales, notées $\{B_i(z)\}_{i=0, 1, N}$. Le résultat de cette orthogonalisation s'exprime à l'aide d'une matrice triangulaire inférieure T_N :

$$\tilde{B}_N(z) = T_N \tilde{X}_N(z, \xi) \quad (\text{III.24})$$

avec $\tilde{B}_N(z) = [B_0(z) \dots B_N(z)]^T$ et $\tilde{X}_N(z, \xi) = [X_0(z, \xi) \dots X_N(z, \xi)]^T$. Aussi, t_N désignera l'élément $(N+1, N+1)$ de la matrice T_N .

Du fait de la relation linéaire (III.24), il est évident que l'erreur quadratique obtenue en utilisant l'ensemble des fonctions non-orthonormées, $X_i(z, \xi)$ est identique à celle résultant de l'utilisation des fonctions orthonormées, $B_i(z)$. Par ailleurs, la propriété d'orthogonalité des $B_i(z)$ permet d'écrire :

$$E_{N+1}(z, \xi) = E_N(z, \xi) - c_{N+1} B_{N+1}(z) \quad (\text{III.25})$$

où $c_{N+1} = \langle Y, B_{N+1}(z) \rangle$ représente le $N+1^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de la décomposition de la sortie Y sur $B_{N+1}(z)$. A partir de (III.25), on peut aussi écrire :

$$\langle E_{N+1}(z, \xi), X_{N+1}(z, \xi) \rangle = \langle E_N(z, \xi), X_{N+1}(z, \xi) \rangle - c_{N+1} \langle B_{N+1}(z), X_{N+1}(z, \xi) \rangle \quad (\text{III.26})$$

Afin de simplifier (III.26), les trois propriétés suivantes sont utilisées :

- une des équations normales d'un réseau de filtres tronqué à $N+1$ termes donne directement $\langle E_{N+1}(z, \xi), X_{N+1}(z, \xi) \rangle = 0$,
- en partant de la forme spéciale de la matrice T_N (triangulaire inférieure), il est facile de montrer que $c_{N+1} = \frac{g_{N+1, N+1}(\xi)}{t_{N+1}}$ et
- à partir de (III.24), la forme spéciale de la matrice T_{N+1}^{-1} , également triangulaire inférieure, et la propriété d'orthogonalité des B_i , on montre que $\langle B_{N+1}(z), X_{N+1}(z, \xi) \rangle = t_{N+1}^{-1}$.

Il en résulte, à partir de (III.26) :

$$\langle E_N(z, \xi), X_{N+1}(z, \xi) \rangle = \frac{g_{N+1, N+1}(z)}{t_{N+1}^2}$$

En conséquence, (III.23) se ramène à :

$$\frac{\partial J_N(\xi)}{\partial \xi} = \frac{2Ng_{N, N}(\xi)g_{N+1, N+1}(\xi)}{(1-\xi^2)t_{N+1}^2} = 0 \quad \text{(III. 27)}$$

Dès lors, les CO d'un réseau tronqué à N filtres excités par un signal, non nul, s'écrivent :

$$g_{N, N}(\xi) = 0 \quad \text{(III.28.a)}$$

$$\text{ou } g_{N+1, N+1}(\xi) = 0 \quad \text{(III.28.b)}$$

(III.28.a et b) indiquent que les points stationnaires de la MSE d'un réseau tronqué à N filtres de Laguerre, par rapport au pôle, sont atteints lorsque le dernier coefficient de ce réseau est nul ou lorsque le dernier coefficient d'un réseau tronqué à $N + 1$ filtres est nul.

2.4 Exemple

Dans le souci d'illustrer les trois sous-sections précédentes à travers un seul exemple, et en l'occurrence dans le but de réduire l'ordre des polynômes dont la formule générale est donnée par (III.16), nous avons choisi un exemple de faible dimension. Nous souhaitons aussi garder le même exemple pour les filtres BOG. C'est pourquoi, nous avons choisi des dynamiques éloignées pour ce système.

La réponse impulsionnelle du système sélectionné est du type (III.12) et elle se présente ainsi :

$$h(k) = 0.3(0.9)^k + 0.6(0.7)^k - 1.5(-0.5)^k$$

Sa fonction de transfert est :

$$H(z) = \frac{0.3z}{z-0.9} + \frac{0.6z}{z-0.7} - \frac{1.5z}{z+0.5} = \frac{-0.60z(z-2.67)(z-0.82)}{(z-0.9)(z-0.7)(z+0.5)} \quad (\text{III.29})$$

Conformément à l'ordre des sous-sections, nous commencerons par étudier le cas d'une excitation blanche avant de voir le cas d'une excitation colorée.

2.4.1 Excitation blanche

Dans un premier temps, $H(z)$ a été approchée par un réseau tronqué à un certain nombre N de filtres, allant de 0 à 8. Pour chaque ordre de troncature, l'erreur quadratique commise (MSE) a été calculée à partir de l'équation (III.4), divisée par la norme quadratique de $H(z)$ (III.30) pour obtenir une MSE normalisée (NMSE pour *normalized MSE*), puis tracée en fonction du pôle de Laguerre sur la figure III.1.

$$NMSE = \frac{J_N(\xi)}{\|H(z)\|^2} \quad (\text{III.30})$$

Notons que le minimum global de l'erreur quadratique d'un réseau de filtres tronqué aux ordres $N = 1, 3, 5$ et 7 est respectivement identique au minimum global de l'erreur quadratique d'un réseau de filtres tronqué aux ordres $N = 2, 4, 6$ et 8 . Cela peut paraître surprenant, car en ajoutant un filtre de Laguerre supplémentaire, pour passer de trois à quatre filtres, par exemple, on s'attend à ce qu'il y ait une amélioration du critère quadratique. Ce raisonnement n'est pas tout à fait vrai car le minimum global pour une troncature à l'ordre $N = 3$ vérifie

l'équation (III.11.b), c'est-à-dire $g_4 = 0$, alors que le minimum global pour une troncature à l'ordre $N = 4$ vérifie l'équation (III.11.a), c'est-à-dire $g_4 = 0$; ce qui réduit, d'ailleurs, l'approximation par quatre filtres à une approximation par trois filtres et c'est la raison pour laquelle nous avons un minimum global identique pour les deux ordres de troncature.

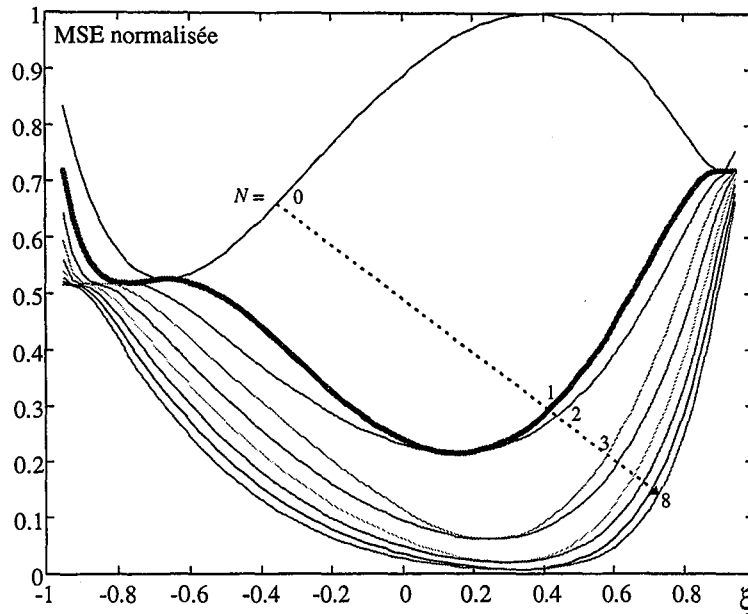


Figure III.1 - MSE normalisée en fonction du pôle de Laguerre pour différents ordres de troncature

Une approximation avec seulement deux filtres de Laguerre ($N = 1$) ne convient pas pour représenter $H(z)$ convenablement, car la figure III.1 montre que l'erreur quadratique commise est supérieure à 20% pour le meilleur choix de ξ . En revanche, cette courbe présente plusieurs optima (minima et maxima) et c'est la première raison qui nous a conduit à tracer les CO pour un ordre de troncature ($N = 1$). La seconde en est de diminuer l'ordre L du polynôme en ξ de l'équation (III.16), afin de limiter le nombre de termes. Les fonctions f_N et f_{N+1} (avec $N = 1$) calculées à partir de (III.15) et (III.16) en remplaçant toutes les variables par leur valeur, sont présentées ci-dessous et tracées sur la figure III.2.b :

$$f_1(\xi) = 1.44 - 2.24\xi - 1.82\xi^2 + 5.050\xi^3 - 2.87\xi^4 + 0.44\xi^5 \quad (\text{III.31.a})$$

$$f_2(\xi) = 0.16 - 1.58\xi + 3.86\xi^2 - 2.62\xi^3 - 3.08\xi^4 + 7.03\xi^5 - 5.74\xi^6 + 2.41\xi^7 - 0.44\xi^8 \quad (\text{III.31.b})$$

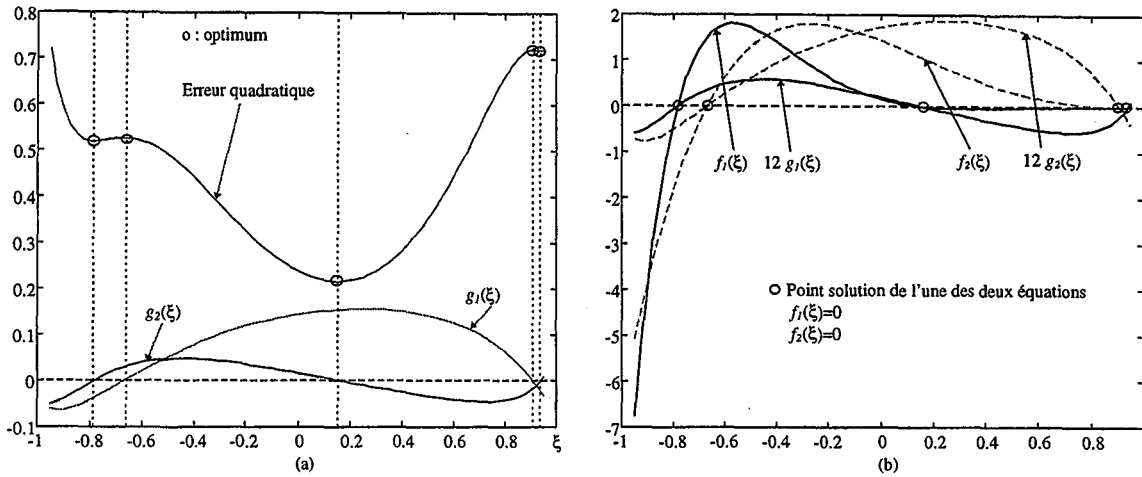


Figure III.2 - Erreur quadratique normalisée et CO pour $N = 1$.

La NMSE (III.30) a été tracée sur la figure III.2.a avec les coefficients g_1 et g_2 , en fonction du pôle, dont chaque intersection avec l'axe des abscisses indique la présence d'un optimum (cf.11). La figure b contient, en revanche les fonctions $f_1(\xi)$ et $f_2(\xi)$ et l'on peut vérifier qu'elles coupent l'axe des abscisses en les mêmes points que g_1 et g_2 . En conséquence, les solutions de (III.31) fournissent, bel et bien, les optima recherchés.

Les racines des polynômes $f_1(\xi)$ et $f_2(\xi)$ dans l'intervalle $]-1, 1[$, solutions des CO, ont été calculées numériquement. Elles sont présentées dans le tableau III.1, avec les coefficients et l'erreur quadratique normalisée (NMSE) correspondant à chaque optimum.

ξ	g_0	g_1	g_2 Pour vérif.	NMSE
-0.667	-1.232	0		52.51%
0.907	0.945	0		72.06%
-0.782	-1.184	-0.371	0	51.88%
0.154	-0.368	1.540	0	21.60%
0.939	0.917	-0.246	0	71.84%

Tableau III.1 - Points optima, solutions des CO.

Les deux premières lignes sont solutions de $f_1(\xi) = 0$. Elles vérifient d'ailleurs $g_1 = 0$. Alors que les trois dernières lignes sont solutions de $f_2(\xi) = 0$ ce qui correspond à $g_2 = 0$. En comparant toutes les NMSE de la dernière colonne du tableau III.1, on constate que le minimum global correspond à la ligne noircie.

2.4.2 Excitation colorée

Considérons, à présent, la même fonction de transfert (III.29) excitée par un signal coloré défini comme étant la réponse impulsionnelle de $F(z) = \frac{z}{z+0.6}$. La richesse spectrale de ce signal est plus faible que celle d'une impulsion. En conséquence, les pôles optima de Laguerre peuvent être amenés à changer pour les différents ordres de troncature. Nous verrons que le résultat d'e Silva, (1994), (III.28), permet de retrouver les pôles optima de Laguerre, dans cette configuration expérimentale. Il est dans ce sens plus fort que celui de [Clowes, 1966] pour les systèmes continus ou [Masnadi-Shirazzi, 1991] pour les systèmes discrets (cf. III.11) qui sont limités à des excitations blanches.

La nouvelle définition de la NMSE est :

$$NMSE = \frac{J_N(\xi)}{\|Y(z)\|^2},$$

En comparant le tracé de la NMSE pour différents ordres de troncature (figure III.3.a) avec celui de la figure III.1, on voit très clairement que les optima des filtres de Laguerre ont changé.

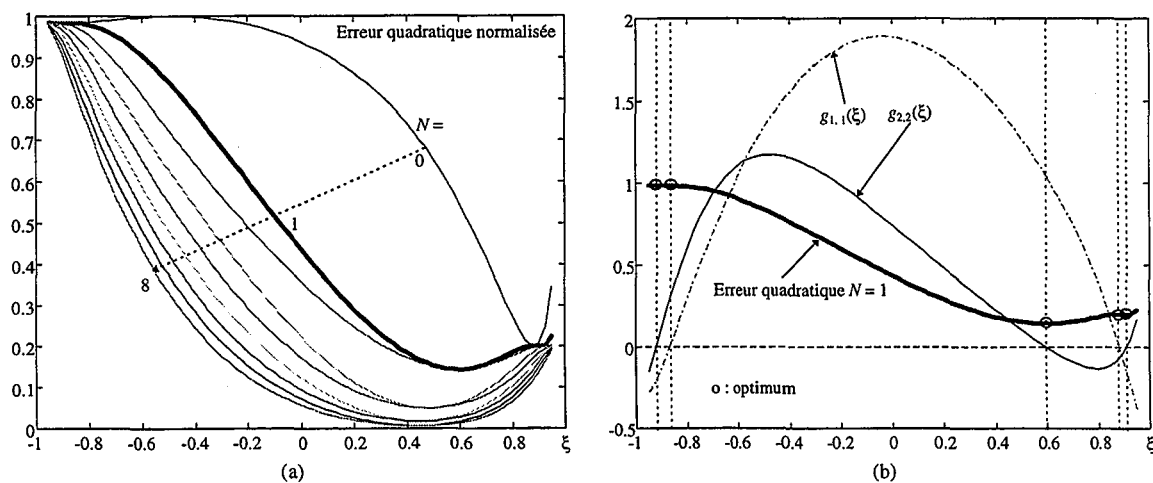


Figure III.3 (a) - NMSE en fonction du pôle de Laguerre pour différents ordres de troncature, lorsque le signal d'excitation est coloré. (b) - NMSE pour N = 1, et CO.

Comme au paragraphe 2.4.1, on s'intéresse, maintenant, à l'approximation de $H(z)$ par un réseau de deux filtres de Laguerre. On vérifie, à partir du tracé de la NMSE et celui des coefficients définissant les CO (cf. III.28) que tous les optima concordent.

Les coefficients de Fourier ainsi que la NMSE ont été évalués pour chaque optimum et les résultats reportés dans le tableau III.2. Les deux premières lignes correspondent à la solution de $g_{1,1} = 0$ et les trois dernières à la solution de $g_{2,2} = 0$. En comparant les différentes valeurs de la NMSE de la dernière colonne du tableau, on constate que la ligne en noir correspond au minimum global. En conséquence, le pôle de Laguerre minimisant l'erreur quadratique, dans cette configuration expérimentale, correspond à $\xi = 0.598$.

ξ	g_0	g_1	g_2 Pour vérif.	NMSE
-0.868	-0.484	0		98.38%
0.883	1.058	0		20.09%
-0.920	-0.450	-0.199	0	98.31%
0.598	0.522	1.042	0	14.37%
0.911	1.044	-0.159	0	20.00%

Tableau III.2 - Points optima, solutions des CO.

3. CO des filtres de type Meixner

[den Brinker, 1995a]

L'utilisation des filtres de type Meixner n'est pas très répandue dans la communauté automatique. Rappelons qu'ils ont été synthétisés récemment par den Brinker (1995b) qui a aussitôt établi les CO, [den Brinker, 1995a], concernant le choix de leur pôle unique. L'auteur commence par écrire les équations de récurrence, du même type que celles des filtres de Laguerre (III.9), entre la dérivée des filtres par rapport au pôle et les filtres de Meixner :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} M_0^{(a)} = \frac{L_{1,1}^{(a)}}{L_{2,2}^{(a)}} \frac{1+a}{1-\xi^2} M_1^{(a)} \quad (\text{III.32.a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} M_n^{(a)} = -\frac{L_{n,n}^{(a)}}{L_{n+1,n+1}^{(a)}} \frac{n+a}{1-\xi^2} M_{n-1}^{(a)} + \frac{L_{n+1,n+1}^{(a)}}{L_{n+2,n+2}^{(a)}} \frac{n+a+1}{1-\xi^2} M_{n+1}^{(a)} \quad \text{pour tout } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.32.b})$$

A partir de (III.32), l'auteur montre, en suivant exactement le même raisonnement, que les CO des filtres de type Meixner s'écrivent :

$$g_N^{(a)}(\xi) = 0 \quad (\text{III.33.a})$$

$$g_{N+1}^{(a)}(\xi) = 0 \quad (\text{III.33.b})$$

La démonstration étant identique à celle des filtres de Laguerre, elle ne figurera pas dans notre manuscrit. On renvoie, néanmoins, tout lecteur intéressé à [den Brinker, 1995a].

A notre connaissance, aucun travail n'a été effectué pour généraliser les CO des filtres de type Meixner pour des excitations colorées qui ne respectent pas l'orthogonalité des sorties des filtres de type Meixner. Cependant, si l'on pouvait se permettre un postulat, qui est, bien entendu, à prendre au conditionnel, on dirait que ces CO, sont identiques à celles des filtres de Laguerre (III.28).

Exemple III.2

L'exemple traité dans le cadre des filtres de Laguerre est repris pour les filtres de type Meixner. La fonction de transfert (III.29) est donc approchée par un nombre N de filtres. Dans un premier temps, l'erreur quadratique est tracée en fonction du pôle pour différents ordres de troncature et pour un degré de généralisation fixé de façon tout à fait arbitraire à l'ordre $a = 2$ (figure III.4.a). Ensuite, par analogie au choix effectué pour les filtres de Laguerre, l'erreur quadratique a été tracée, pour un ordre de troncature $N = 1$, avec les coefficients $g_1^{(2)}$ et $g_2^{(2)}$ définissant les CO (III.33), sur la figure III.4.b.

Il est évident, d'après cette figure, que le minimum global de l'erreur quadratique correspond à un pôle compris dans l'intervalle $[0, 0.1]$. Une résolution numérique de l'équation $g_2^{(2)} = 0$, dans cet intervalle, désigne le pôle optimum à $\xi = 0.057$. Les coefficients correspondants sont $g_0 = -0.344$ et $g_1 = 1.540$. La NMSE en ce point vaut : 22.17%.

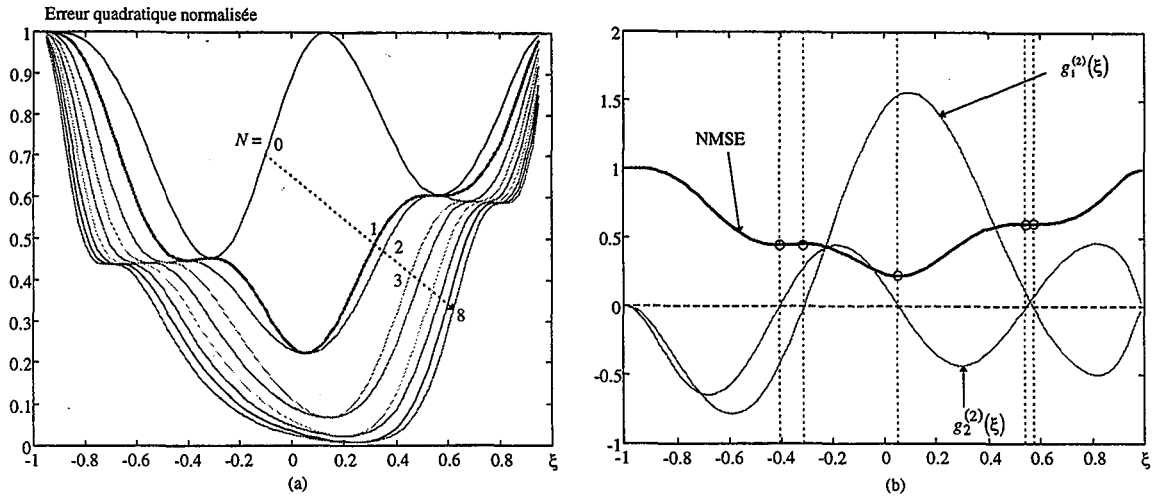


Figure III.4.a - Erreur quadratique pour une généralisation à l'ordre $a = 2$ et différents ordres de troncature, N . - b CO pour $a = 2$ et $N = 2$.

Ouvrons une parenthèse dans cet exemple pour voir l'influence du degré de généralisation. En gardant deux filtres de type Meixner, l'erreur quadratique moyenne est tracée en fonction du pôle pour différents degrés de généralisation a , sur la figure III.5.

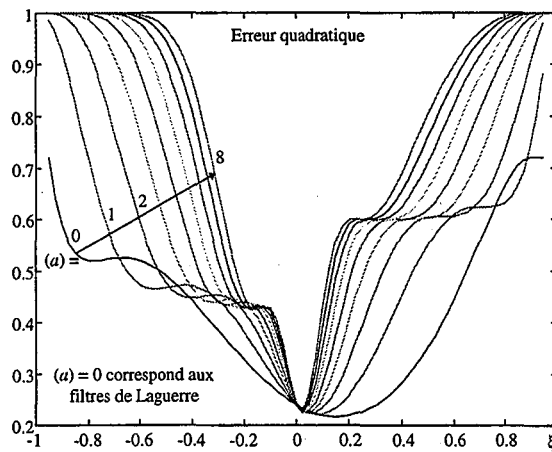


Figure III.5 - Erreur quadratique normalisée en fonction du pôle pour différents degrés de généralisation et une troncature à $N = 1$ (2 filtres de type Meixner)

Notons que pour une généralisation à l'ordre $a = 0$, on retrouve la définition tout à fait classique des filtres de Laguerre dont la courbe de la NMSE a été tracée sur la figure III.1.

La figure III.5 montre qu'il faut être plus vigilant lors du choix du pôle de Meixner quand l'ordre de la généralisation augmente et que la meilleure approximation correspond à celle des filtres de Laguerre (généralisation à l'ordre zéro). L'explication est que tous les pôles de la

fonction de transfert originelle sont de multiplicité un, cf. (III.29), et que l'identification est effectuée à partir de conditions initiales nulles.

4. CO des filtres de Kautz

[den Brinker, 1996a] et [Silva, 1995]

Le principe utilisé pour déterminer les CO des filtres de Kautz (II.14) est très sensiblement identique à ce qui a été fait jusqu'à présent. En effet, les équations (III.1) et (III.2) restent toujours valables. En revanche, si l'on définit le pôle de Kautz :

$$p = a \pm bj \quad \text{(III.34)}$$

les équations (III.3) et (III.5) sont légèrement modifiées pour prendre en compte les parties réelle et imaginaire des pôles complexes conjugués. Elles se présentent respectivement² :

$$\min_{a,b} \{J_N(a,b)\} \quad \text{et} \quad \max_{a,b} \left\{ \sum_{n=1}^N g_n^2(a,b) \right\} \quad \text{(III.35)}$$

Cette modification intervient, essentiellement, pour prendre en compte la différentiation de J_N , dans (III.6.b), par rapport aux parties réelle et imaginaire des pôles de Kautz. Les deux pôles étant liés, la différentiation ne peut pas être faite séparément pour chaque pôle. En conséquence, (III.6.b) s'écrit maintenant, en fonction de a et b , comme suit :

$$\frac{\partial J_N(p)}{\partial a} = 2 \sum_{k=1}^N g_n(p) \frac{\partial g_n(p)}{\partial a} = 0 \quad \text{(III.36.a)}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial J_N(p)}{\partial b} = 2 \sum_{k=1}^N g_n(p) \frac{\partial g_n(p)}{\partial b} = 0 \quad \text{(III.36.b)}$$

A nouveau, il est nécessaire de déterminer une relation de récurrence, du type (III.9) ou (III.32), entre les dérivées des filtres de Kautz, par rapport à a et b , et les filtres de Kautz.

² On rappelle que la numérotation des filtres de Kautz commence à 1.

Cette relation est explicitée dans [den Brinker, 1996a]. Elle comprend cinq filtres au total. A partir de celle-ci, il est facile de trouver la relation liant les dérivées des coefficients de Fourier, par rapport à a et b , aux coefficients de Fourier (du même type que III.10). La dernière étape de la démonstration consiste, à nouveau, à remplacer le résultat de cette relation dans (III.36), pour aboutir au résultat suivant, qui définit entièrement les CO des filtres de Kautz :

$$g_{N-1}(p) = 0 \quad \text{(III.37.a)}$$

et $g_N(p) = 0 \quad \text{(III.37.b)}$

ou

$$g_{N+1}(p) = 0 \quad \text{(III.38.a)}$$

et $g_{N+2}(p) = 0 \quad \text{(III.38.b)}$

e Silva (1995) étend ce résultat pour des entrées quelconques de la même manière qu'il l'a fait pour les filtres de Laguerre. Le raisonnement qu'il a utilisé est identique à ce qui a été présenté pour les filtres de Laguerre au paragraphe 2.3. Le résultat qu'il obtient, formulé ci-dessous, est plus fort que (III.37) et (III.38), parce qu'il est indépendant du choix du signal d'excitation du réseau de filtre de Kautz.

$$g_{N-1,N}(p) = 0 \quad \text{(III.39.a)}$$

et $g_{N,N}(p) = 0 \quad \text{(III.39.b)}$

ou

$$g_{N+1,N+2}(p) = 0 \quad \text{(III.40.a)}$$

et $g_{N+2,N+2}(p) = 0 \quad \text{(III.40.b)}$

$g_{i,j}$ correspond au coefficient de Fourier g_i , optimum pour un réseau de j filtres de Kautz.

Exemple III.3

La fonction de transfert (III.29), ne comprenant pas de pôles complexes conjugués, sera délaissée, pour l'instant, au profit de l'exemple proposé dans [e Silva, 1995].

Le problème posé est de déterminer les pôles de Kautz optima de la décomposition de la fonction de transfert ci-dessous sur la base de **huit filtres de Kautz**, quand le signal d'excitation est un bruit blanc filtré par $\frac{z}{z+0.8}$.

$$F(z) = \frac{0.0890z^4 - 0.2199z^3 + 0.2865z^2 - 0.2199z + 0.0890}{z^4 - 2.6918z^3 + 3.5992z^2 - 2.4467z + 0.8288} \quad (\text{III.41})$$

Notons que cette fonction de transfert possède deux paires de pôles complexes conjugués situés à :

$$p_{1,2} = 0.5819 \pm 0.7487j \text{ et } p_{3,4} = 0.7640 \pm 0.5814j \quad (\text{III.42})$$

ainsi que deux paires de zéros complexes conjugués situés à :

$$z_{1,2} = 0.3409 \pm 0.9402j \text{ et } z_{3,4} = 0.8943 \pm 0.4473j$$

Puisque les pôles (III.42), de la fonction de transfert (III.41) sont à partie réelle positive, on s'attend à ce que le minimum global de la MSE, pour ne pas dire tous les optima, soit à partie réelle positive. De plus, comme chaque pôle de Kautz possède un pôle conjugué, la MSE (III.4) est *a fortiori* symétrique par rapport à l'axe des abscisses. C'est la raison qui nous a conduit à tracer les courbes isocritères de l'erreur quadratique ainsi que les fonctions (III.39) et (III.40), uniquement sur le premier quadrant.

Chaque intersection des courbes (III.39) et (III.40), illustré respectivement sur les figures III.6 (a) et (b), correspond à un optimum de la MSE par rapport aux pôles de Kautz. L'évaluation du critère quadratique en chaque point montre que l'optimum global se trouve en $p = 0.619 \pm j 0.580$.

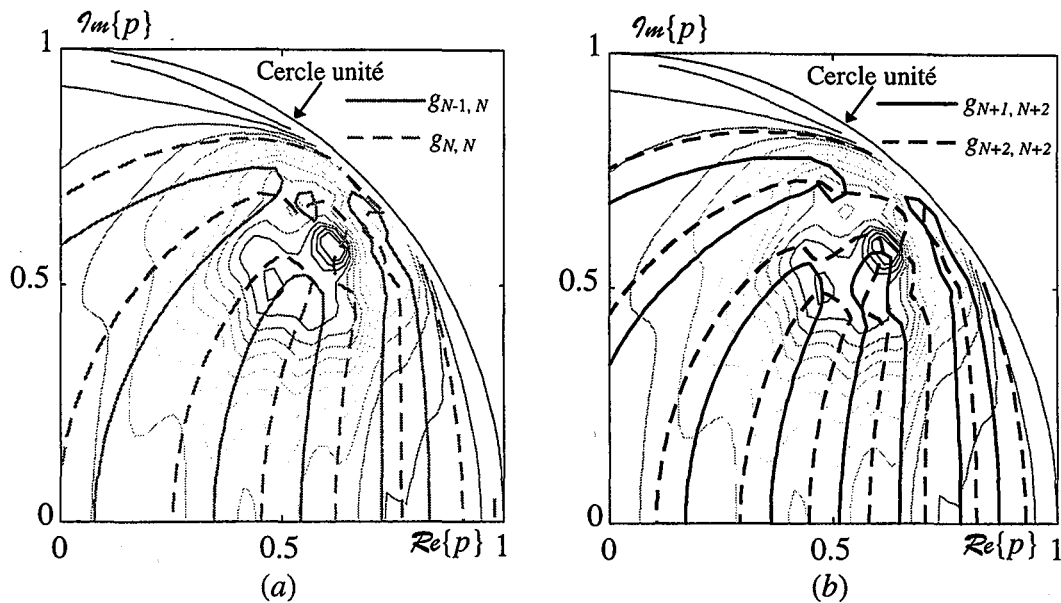


Figure III.6 - Isocritères de la MSE en fonction des parties réelle et imaginaire du pôle de Kautz ainsi que les CO : (a) $g_{7,8}$ et $g_{8,8}$ (cf. III.39) ; (b) $g_{9,10}$ et $g_{10,10}$ (cf. III.40)

Un œil avisé remarquera, cependant, l'existence d'un optimum, autour du pôle réel, $p = 0.42$, qui n'est pas détecté par les CO des filtres de Kautz, les courbes (III.39) et (III.40) ne se croisant sur aucune des deux figures. La raison en est que les pôles de Kautz sont liés entre eux (complexes conjugués) et que la différentiation dans (III.36) tient compte de ce lien. En revanche ces optima peuvent être détectés par les CO d'un réseau de 8 filtres de Laguerre (tronqué donc à $N = 7$), car les filtres de Kautz se réduisent, à une rotation près cf. (II.19), aux filtres de Laguerre, quand leurs pôles sont réels.

5. CO des filtres BOG [Malti et al, 1998b, 1999a]

Un des points clés de notre thèse, consiste à déterminer les CO relatives à un choix de pôles réels des filtres issus de la BOG. Le travail présenté comporte trois aspects essentiels qui sont :

- la synthèse des CO, à proprement parler, pour une excitation blanche et leur simplification pour aboutir à des équations similaires à celles qui ont été présentées pour les filtres de Laguerre dans (III.11),

- l'écriture des expressions explicites en fonction des pôles, suivant le raisonnement de Masnadi-Shirrazi *et al.* pour les filtres de Laguerre et
- la généralisation des CO pour des excitations non blanches.

Tout au long de cette section, nous nous référerons régulièrement à ce qui a été obtenu pour les filtres de Laguerre. De même, nous reprendrons l'exemple du paragraphe 2.4 afin de montrer l'apport des filtres de la BOG comparés aux filtres de Laguerre.

5.1 Synthèse des CO

Les fonctions $\{g_n(z)\}_{n=0,1,\dots,N}$ seront remplacées par les fonctions $\{\mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)\}_{n=0,1,\dots,N}$ issues de la BOG dans les équations (III.1) à (III.3). Ensuite, (III.2.a et b) sera substituée dans (III.6.a), pour obtenir la relation vectorielle :

$$\frac{\partial J_N(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} = 2 \left\langle \sum_{n=0}^N -g_n(\underline{\xi}_n) \frac{\partial \mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \underline{\xi}_N}, \sum_{k=N+1}^{\infty} g_k(\underline{\xi}_k) \mathcal{B}_k(z, \underline{\xi}_k) \right\rangle = 0_{(N+1) \times 1} \quad (\text{III.43})$$

Notons que chaque fonction $\mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)$ est différenciée par rapport au vecteur des pôles $\underline{\xi}_N$ et que le produit scalaire (III.43) est effectué entre chaque fonction du vecteur résultant et la fonction se trouvant à droite de ce produit.

En utilisant la propriété de linéarité du produit scalaire, (III.43) peut également s'écrire :

$$\sum_{n=0}^N -g_n(\underline{\xi}_n) \left\langle \frac{\partial \mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \underline{\xi}_N}, \sum_{k=N+1}^{\infty} g_k(\underline{\xi}_k) \mathcal{B}_k(z, \underline{\xi}_k) \right\rangle = 0_{(N+1) \times 1} \quad (\text{III.44})$$

Pour exprimer la dérivée des fonctions g_n , de Laguerre, type Meixner et Kautz, étudiées précédemment, par rapport au(x) pôle(s), on a utilisé, jusqu'à présent, des relations de récurrence entre $\frac{\partial g_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i}$ et les fonctions orthogonales. Cependant, dans le cas des fonctions issues de la BOG aucune relation de ce type n'existe, la raison en est que des pôles différents sont ajoutés à chaque ajout d'une nouvelle fonction \mathcal{B}_n .

Dérivées des fonctions de la BOG par rapport aux pôles

On commence par exprimer les dérivées recherchées en fonction de la variable z . Pour ce faire, on introduit le logarithme des deux cotés de l'équation (II.32), puis on dérive par rapport au pôle ξ_i et l'on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \xi_n)}{\partial \xi_i} = \frac{z^2 - 1}{(z \xi_i - 1)(z - \xi_i)} \mathcal{E}_n(z, \xi_n) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (\text{III.45.a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \xi_n)}{\partial \xi_n} = \frac{\xi_n z - 1}{(\xi_n^2 - 1)(z - \xi_n)} \mathcal{E}_n(z, \xi_n) \quad (\text{III.45.b})$$

Afin d'établir les CO, il faut donc réussir à exprimer la dérivée par rapport à chaque pôle en termes des fonctions de la BOG pondérées par des paramètres connus. Concrètement, il s'agit d'éliminer la variable z des équations (III.45). Pour ce faire, l'idée consiste à décomposer les dérivées par rapport à chaque pôle en fonction de la BOG. En effet, en utilisant la propriété de complétude de l'espace engendré par les fonctions de la BOG, on arrive à écrire de façon exacte les dérivées recherchées à l'aide d'une somme infinie :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \xi_n)}{\partial \xi_i} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{n,i,j}(\xi_j) \mathcal{E}_j(z, \xi_j) \quad (\text{III.46})$$

On démontre, dans l'Annexe 143, que les coefficients $C_{n,i,j}(\xi_j)$ s'écrivent en fonction des indices comme indiqué sur le tableau III.3.

j	$j < i$	$i \leq j < n$	$j = n$	$j > n$
$C_{n,i,j}$	0	$-A_{n,j} \frac{\prod_{k=j+1}^{n-1} (\xi_i - \xi_k)}{\prod_{k=j}^n (1 - \xi_i \xi_k)}$	0	$A_{n,j} \frac{\prod_{k=n+1}^{j-1} (\xi_i - \xi_k)}{\prod_{k=n}^j (1 - \xi_i \xi_k)}$
avec $A_{n,j} = \sqrt{1 - \xi_n^2} \sqrt{1 - \xi_j^2}$				

Tableau III.3 - Coefficients de la décomposition de $\frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \xi_n)}{\partial \xi_i}$ sur $\mathcal{E}_j(z, \xi_j)$; voir (III.46).

Synthèse des CO (suite)

En remplaçant ce résultat dans l'équation vectorielle (III.44), que l'on transforme en $N + 1$ équations scalaires dépendantes de l'indice i , on obtient :

$$\sum_{n=0}^N -g_n(\xi_n) \left\langle \sum_{j=0}^{\infty} C_{n,i,j} \mathcal{E}_j(z, \xi_j), \sum_{k=N+1}^{\infty} g_k(\xi_k) \mathcal{E}_k(z, \xi_k) \right\rangle = 0 \quad i = 0, \dots, N \quad \text{(III.47)}$$

Grâce à l'orthogonalité des fonctions de la BOG, (III.47) se simplifie ainsi :

$$\frac{\partial J_N(\xi_N)}{\partial \xi_i} = - \sum_{n=i}^N g_n(\xi_n) \sum_{j=N+1}^{\infty} A_{n,j} g_j(\xi_j) \frac{\prod_{k=n+1}^{j-1} (\xi_i - \xi_k)}{\prod_{k=n}^j (1 - \xi_i \xi_k)} = 0 \quad i = 0, \dots, N \quad \text{(III.48)}$$

Notons que les points stationnaires de l'erreur quadratique par rapport aux pôles sont calculés en résolvant simultanément les $N + 1$ équations (III.48) obtenues en faisant varier i de 0 à N . Cependant, chacune de ces équations est de dimension infinie et possède également une infinité de degrés de liberté, car aucune contrainte n'est imposée sur les pôles ξ_j dont l'indice j varie au delà de l'ordre de troncature, *i.e.* de $N + 1$ à l'infini, les optima étant recherchés pour les pôles dont l'indice varie entre 0 et N .

En remplaçant $A_{n,j}$ de (III.48) par sa valeur, définie dans le tableau III.3, puis en inversant l'ordre des sommes, on obtient :

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \left[\frac{g_j(\xi_j) \sqrt{1 - \xi_j^2}}{1 - \xi_i \xi_j} \sum_{n=i}^N \left(\frac{\sqrt{1 - \xi_n^2} g_n(\xi_n)}{1 - \xi_i \xi_n} \prod_{k=n+1}^{j-1} \frac{\xi_i - \xi_k}{1 - \xi_i \xi_k} \right) \right] = 0 \quad i = 0, \dots, N \quad \text{(III.49)}$$

Si la somme interne de (III.49) est, à présent, développée, une expression indépendante de l'indice j , apparaît dans tous ses termes. Elle est factorisée par rapport à la somme externe :

$$\left[\sum_{n=i}^N \left(\frac{\sqrt{1 - \xi_n^2} g_n(\xi_n)}{1 - \xi_i \xi_n} \prod_{k=n+1}^N \frac{\xi_i - \xi_k}{1 - \xi_i \xi_k} \right) \right] \left[\sum_{j=N+1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{1 - \xi_j^2} g_j(\xi_j)}{1 - \xi_i \xi_j} \prod_{k=N+1}^{j-1} \frac{\xi_i - \xi_k}{1 - \xi_i \xi_k} \right) \right] = 0 \quad i = 0, \dots, N \quad \text{(III.50)}$$

Aucune contrainte n'a encore été imposée sur les pôles ξ_j quand j varie de $N + 1$ à l'infini. Dans ce qui suit, $N + 1$ degrés de libertés seront utilisés pour la détermination des CO d'un

réseau de $N + 1$ filtres (tronqué à N). Pour mieux illustrer le raisonnement que suivi, on se propose d'isoler la somme infinie de l'équation (III.50). Posons donc :

$$h_i(\xi_N) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\xi_j^2} g_j(\xi_j)}{1-\xi_i \xi_j} \prod_{k=N+1}^{j-1} \frac{\xi_i - \xi_k}{1-\xi_i \xi_k} \quad (\text{III.51})$$

Si on calcule la valeur de $h_i(\xi_N)$ pour $i = N$, on trouve :

$$h_N(\xi_N) = \frac{\sqrt{1-\xi_{N+1}^2} g_{N+1}(\xi_{N+1})}{1-\xi_N \xi_{N+1}} + \frac{\xi_N - \xi_{N+1}}{1-\xi_N \xi_{N+1}} \sum_{j=N+2}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\xi_j^2} g_j(\xi_j)}{1-\xi_N \xi_j} \prod_{k=N+1}^{j-2} \frac{\xi_N - \xi_k}{1-\xi_N \xi_k} \quad (\text{III.52})$$

Rappelons que ξ_{N+1} représente un degré de liberté. En conséquence, en posant

$$\xi_{N+1} = \xi_N \quad (\text{III.53})$$

on élimine toute la partie droite de la somme dans (III.52).

De même, $h_{N-1}(\xi_N)$ s'exprime :

$$h_{N-1} = \frac{\sqrt{1-\xi_{N+1}^2} g_{N+1}}{1-\xi_{N-1} \xi_{N+1}} + \frac{\xi_{N-1} - \xi_{N+1}}{1-\xi_{N-1} \xi_{N+1}} \left(\frac{\sqrt{1-\xi_{N+2}^2} g_{N+2}}{1-\xi_{N-1} \xi_{N+2}} + \frac{\xi_{N-1} - \xi_{N+2}}{1-\xi_{N-1} \xi_{N+2}} \sum_{j=N+3}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\xi_j^2} g_j}{1-\xi_{N-1} \xi_j} \prod_{k=N+1}^{j-3} \frac{\xi_{N-1} - \xi_k}{1-\xi_{N-1} \xi_k} \right) \quad (\text{III.54})$$

Notons que $(\xi_{N-1} - \xi_{N+1})$ est factorisé, sur toute la partie droite de (III.54). Mais puisque, *a priori* $\xi_{N-1} \neq \xi_N$, (III.53) ne permet pas de fixer ξ_{N-1} à ξ_{N+1} . En revanche, on voit qu'à l'intérieur des parenthèses, le terme $(\xi_{N-1} - \xi_{N+2})$ peut aussi être factorisé de la somme allant de $j = N+3$ à l'infini. En conséquence, la seconde contrainte, permettant de simplifier la somme infinie, s'exprime ainsi :

$$\xi_{N+2} = \xi_{N-1} \quad (\text{III.55})$$

Elle permet à h_{N-1} de s'écrire :

$$h_{N-1}(\xi_N) = \frac{\sqrt{1-\xi_{N+1}^2} g_{N+1}(\xi_{N+1})}{1-\xi_{N-1} \xi_{N+1}} + \frac{\xi_{N-1} - \xi_{N+1}}{1-\xi_{N-1} \xi_{N+1}} \frac{\sqrt{1-\xi_{N+2}^2} g_{N+2}(\xi_{N+1})}{1-\xi_{N-1} \xi_{N+2}}$$

Le même raisonnement est ensuite repris pour tous les h_i de l'équation (III.51), i variant de $N - 2$ à 0 . La formulation générale de cette simplification est :

$$h_i(\xi_N) = \sum_{j=N+1}^{2N-i+1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi_j^2} g_j(\xi_j)}{1-\xi_i \xi_j} \prod_{k=N+1}^{j-1} \frac{\xi_i - \xi_k}{1-\xi_i \xi_k} \right) + \underbrace{\sum_{j=2N-i+2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{1-\xi_j^2} g_j(\xi_j)}{1-\xi_i \xi_j} \prod_{k=N+1}^{j-1} \frac{\xi_i - \xi_k}{1-\xi_i \xi_k} \right)}_{= \frac{\xi_i - \xi_{2N-i+1}}{1-\xi_i \xi_{2N-i+1}} \text{ (autres termes)}} \quad \text{(III. 56)}$$

Toutes les contraintes permettant de simplifier la somme infinie de (III.51) ou (III. 56) s'expriment donc ainsi :

$$\xi_{2N-i+1} = \xi_i, \quad \text{pour tout } i = 0, \dots, N \quad \text{(III.57)}$$

Graphiquement, elles sont présentées sur la figure III.7.

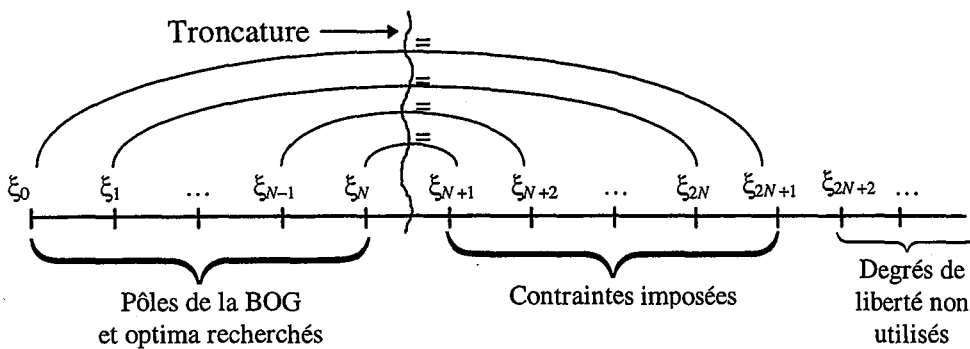


Figure III.7 - Visualisation graphique des contraintes imposées ; cf. (III.57)

Compte tenu de ces $N + 1$ contraintes, (III.50) se simplifie ainsi :

$$\left[\sum_{n=i}^N \left(\frac{\sqrt{1-\xi_n^2} g_n(\xi_n)}{1-\xi_i \xi_n} \prod_{k=n+1}^N \frac{\xi_i - \xi_k}{1-\xi_i \xi_k} \right) \right] \left[\sum_{j=N+1}^{2N-i+1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi_j^2} g_j(\xi_j)}{1-\xi_i \xi_j} \prod_{k=N+1}^{j-1} \frac{\xi_i - \xi_k}{1-\xi_i \xi_k} \right) \right] = 0 \quad \text{pour tout } i = 0, \dots, N \quad \text{(III.58)}$$

L'équation (III.58) constitue la formule générale des CO des filtres de la BOG. On se propose de résumer le résultat obtenu dans le théorème suivant.

Théorème III.1 soit :

- $\mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)$ les filtres issus de la BOG définis explicitement par (II.32)
- $g_n(\underline{\xi}_n)$ le coefficient de Fourier associé à $\mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)$,
- $\underline{\xi}_n = [\xi_0 \cdots \xi_{i-1} \xi_i \xi_{i+1} \cdots \xi_{n-1} \xi_n]^T$ le vecteur de pôles associé à $\mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)$, où chaque élément de ce vecteur est un réel compris, bien entendu, dans l'intervalle $] -1, 1[$, pour assurer la stabilité des filtres de la BOG,

alors les points stationnaires concernant le choix des pôles ξ_i d'un réseau de $N + 1$ filtres (de 0 à N) sont solutions des $N + 1$ équations (III.58) à $N + 1$ pôles, sous les $N + 1$ contraintes (III.57), toutes les équations et les contraintes étant obtenues en faisant varier i de 0 à N . ☒

Remarque

Eu égard à l'ensemble des contraintes issues de (III.57), qui sont par ailleurs illustrées sur la figure III.7, la dernière colonne du tableau III.3, peut se subdiviser en deux autres colonnes dont l'une est nulle, comme le montre le tableau III.4. Puisque la plus petite valeur que peut prendre i est 0, $C_{n,i,j}$ est nul pour tout $j > 2N + 1$. ☒

Cette simplification implique que chaque $\frac{\partial \mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i}$, de (III.46), s'exprime à l'aide d'un nombre fini de fonctions \mathcal{B}_j , allant de $j = i$ (voir tableau III.3) jusqu'à $j = 2N + 1 - i$ (voir tableau III.4) et non plus avec un nombre infini :

$$\frac{\partial \mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i} = \sum_{j=i}^{2N+1-i} C_{n,i,j}(\underline{\xi}_j) \mathcal{B}_j(z, \underline{\xi}_j) \tag{III. 59}$$

j	$2N + 1 - i \geq j$	$j > 2N + 1 - i$
$C_{n, i, j}$	$A_{n,j} \frac{\prod_{k=n+1}^{j-1} (\xi_i - \xi_k)}{\prod_{k=n}^j (1 - \xi_i \xi_k)}$	0

Tableau III.4 - Simplification de la dernière colonne du tableau III.3, compte tenu des contraintes (III.57).

A titre indicatif, quand $i = N$, on a :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(z, \underline{\xi}_N)}{\partial \xi_N} = \frac{1}{1 - \xi_N^2} \mathcal{E}_{N+1}(z, \underline{\xi}_{N+1}) \quad (\text{III.60}) \quad \boxtimes$$

Simplification des CO

Notons que les CO, telles que présentées par (III.58), ont une forme un peu complexe. L'objectif principal de cette sous-section est de simplifier l'écriture de (III.58) afin de rendre la forme des CO comparable à celle des filtres de Laguerre illustrée dans les équations (III.10). Pour ce faire, une relation d'équivalence sera d'abord établie entre deux réseaux de $N + 1$ filtres, ayant des pôles identiques, mais, ordonnés de manière différente. De plus amples détails sont donnés dans le lemme suivant.

Lemme III.1

Les deux ensembles de fonctions $\{\mathcal{E}_n(z, \underline{\xi}_n)\}_{n=0,1,\dots,N}$ et $\{\mathcal{E}_n(z, \underline{\xi}_n^{[i,N]})\}_{n=0,1,\dots,N}$ définies par (II.32), possédant des pôles identiques mais ordonnés de façon différente, comme indiqué ci-dessous :

$$\triangleright \quad \underline{\xi}_N = [\xi_0 \quad \xi_1 \quad \dots \quad \xi_N]^T$$

$$\triangleright \quad \underline{\xi}_N^{[i,N]} = [\xi_0 \quad \dots \quad \xi_{i-1} \quad \xi_N \quad \xi_{i+1} \quad \dots \quad \xi_{N-1} \quad \xi_i]^T$$

engendrent le même espace vectoriel. \(\boxtimes\)

Pour démontrer ce lemme, il suffit de montrer que la décomposition en éléments simples de chaque fonction d'ordre i issue de $\{\mathcal{E}_n(z, \underline{\xi}_n)\}_{n=0,1,\dots,N}$ est équivalente à la décomposition en éléments simples de la fonction d'ordre i issue de $\{\mathcal{E}_n(z, \underline{\xi}_n^{[i,N]})\}_{n=0,1,\dots,N}$. Intuitivement, on peut dire que ce résultat est correct, parce que des pôles identiques sont utilisés pour chacun des deux ensembles de fonctions.

A partir du lemme III.1, on peut établir une équivalence entre les coefficients de Fourier $g_n(\underline{\xi}_N)$ et $\bar{g}_n(\underline{\xi}_N^{[i,N]})$ associés à la décomposition d'une fonction de transfert $G(z)$ quelconque

appartenant à $H^2(D^c)$ sur respectivement $\{\mathcal{E}_n(z, \xi_n)\}_{n=0,1,\dots,N}$ et $\{\mathcal{E}_n(z, \xi_n^{[i,N]})\}_{n=0,1,\dots,N}$. En effet,

le lemme III.1 signifie que :

$$\sum_{n=0}^N g_n(\xi_N) \mathcal{E}_n(z, \xi_N) = \sum_{n=0}^N \bar{g}_n(\xi_N^{[i,N]}) \mathcal{E}_n(z, \xi_N^{[i,N]}) \quad (\text{III.61})$$

Puisque la permutation dans le vecteur des pôles est effectuée entre l'élément i et l'élément N , l'ordonnement des i premiers pôles n'est pas altéré. En conséquence, les premières fonctions et, de ce fait, les premiers coefficients sont identiques :

$$\mathcal{E}_n(z, \xi_N) = \mathcal{E}_n(z, \xi_N^{[i,N]}) \quad \text{et} \quad g_n(\xi_N) = \bar{g}_n(\xi_N^{[i,N]}) \quad \text{pour tout } n = 0, 1, \dots, i-1$$

En injectant ces deux égalités dans (III.61), on peut hausser l'indice inférieur de chaque somme, de $n=0$ à $n=i$. Ensuite, en remplaçant toutes les fonctions \mathcal{E}_n par leur expression (II.32) et en identifiant terme à terme tous les coefficients de toutes les puissances en z , on obtient $(N-i+1)$ équations, suffisantes pour établir une relation entre les coefficients $\bar{g}_n(\xi_N^{[i,N]})$ et $g_n(\xi_N)$ pour tout $n = i, \dots, N$.

Puisque les calculs conduisant à l'expression du dernier coefficient des fonctions permutées, en termes des coefficients des fonctions non permutées sont fastidieux, ils ne figureront pas dans ce document. Néanmoins, l'expression finale est :

$$\frac{\bar{g}_N(\xi_N^{[i,N]})}{\sqrt{1-\xi_i^2}} = \sum_{n=i}^N \left(\frac{\sqrt{1-\xi_n^2} g_n(\xi_n)}{1-\xi_i \xi_n} \prod_{k=n+1}^N \frac{\xi_i - \xi_k}{1-\xi_i \xi_k} \right) \quad (\text{III.62})$$

Notons que la partie droite de cette égalité est identique à la partie gauche de l'expression (III.58). On s'intéressera, dans le paragraphe suivant, à la simplification de la partie droite de (III.58).

L'équation (III.61) et le raisonnement qui la suit sont également valables quand l'approximation d'une fonction de transfert est faite sur la base de $2N+i-1$ au lieu de $N+1$ fonctions BOG. Une contrainte supplémentaire, celle exprimée par (III.57), est toutefois imposée sur les pôles dont l'indice est supérieur à N . L'expression du dernier coefficient de la base permutée s'écrit en fonction des autres coefficients :

$$\frac{\bar{g}_{N+1}(\xi_N^{[i,N]})}{\sqrt{1-\xi_i^2}} = \sum_{j=N+1}^{2N-i+1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi_j^2} g_j(\xi_j)}{1-\xi_i \xi_j} \prod_{k=N+1}^{j-1} \frac{\xi_i - \xi_k}{1-\xi_i \xi_k} \right) \quad (\text{III.63})$$

Le remplacement de (III.62) et (III.63) dans (III.58), permet de simplifier cette équation et aussi le théorème 1 que l'on formule, à présent, de la manière suivante :

Théorème III.1 bis : soit

- $\mathcal{B}_N(z, \xi_N)$ le filtre d'ordre N issu de la BOG défini explicitement par (II.32),
- $\xi_N = [\xi_0 \ \dots \ \xi_{i-1} \ \xi_i \ \xi_{i+1} \ \dots \ \xi_{N-1} \ \xi_N]^T$ le vecteur de pôles associé à $\mathcal{B}_N(z, \xi_N)$ où les pôles réels ξ_i sont compris dans l'intervalle $] -1, 1[\quad \forall i = 0 \dots N$,
- $g_N(\xi_N)$ le coefficient de Fourier de $\mathcal{B}_N(z, \xi_N)$,
- $\xi_N^{[i,N]} = [\xi_0 \ \dots \ \xi_{i-1} \ \xi_N \ \xi_{i+1} \ \dots \ \xi_{N-1} \ \xi_i]^T$ le vecteur des pôles ordonnés d'une autre manière, la permutation étant faite entre les pôles ξ_i et ξ_N ,
- $\mathcal{B}_{N+1}(z, \tilde{\xi}_N^{[i,N]})$ le filtre $N+1$ issu de la BOG défini explicitement par (II.32),
- $\tilde{\xi}_N^{[i,N]} = \left[\underbrace{\xi_0 \ \dots \ \xi_{i-1} \ \xi_N \ \xi_{i+1} \ \dots \ \xi_{N-1} \ \xi_i}_{N+1 \text{ elements}} \right]^T$ le vecteur des pôles utilisé pour le calcul de $\mathcal{B}_{N+1}(z, \tilde{\xi}_N^{[i,N]})$ et qui tient déjà en compte la contrainte (III.57), puisque l'élément $N+2$ de ce vecteur est égal à l'élément $N+1$ et
- $g_{N+1}(\tilde{\xi}_N^{[i,N]})$ le coefficient de Fourier lié à $\mathcal{B}_{N+1}(z, \tilde{\xi}_N^{[i,N]})$,

alors, les points stationnaires de l'erreur quadratique en fonction des pôles d'un réseau tronqué à N filtres BOG (de 0 à N) sont les solutions des $N+1$ équations (III.64), obtenues en faisant varier l'indice i comme indiqué :

$$g_N(\xi_N^{[i,N]}) g_{N+1}(\tilde{\xi}_N^{[i,N]}) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{III.64}) \quad \boxtimes$$

Corollaire III.1

Une implication directe du *théorème 1 bis* est l'obtention des CO, bien connues [Clowes, 1966], d'un réseau tronqué à N filtres de Laguerre, qui sont présentées dans (III.10). En effet, il est évident que les permutations de pôles égaux aboutissent à la même équation (III.64) écrite $N + 1$ fois. \square

Corollaire III.2

Le *théorème 1 bis* et le *lemme III.1* impliquent que les solutions de l'ensemble des équations (III.64) sont toutes symétriques par rapport à, au moins, N hyperespaces définis en faisant varier i dans :

$$\xi_i = \xi_N \quad \forall i = 0, \dots, N-1. \quad (\text{III.65})$$

Ce résultat peut être étendu à exactement $N!$ hyperespaces. En effet, à partir du moment où l'on dispose d'un vecteur de pôles, solutions des CO, toutes les permutations dans ce vecteur sont également solutions des CO. En conséquence, l'ensemble des symétries s'écrit :

$$\xi_i = \xi_j \quad \forall i \neq j \quad i = 0, \dots, N \quad \text{et} \quad j = 0, \dots, i-1 \quad \square$$

5.2 Algorithme pour l'écriture des CO [Malti et al. 1999a]

Dans cette section, les N symétries, exprimées par le *corollaire III.2*, seront utilisées pour établir un algorithme efficace décrivant le système des $N + 1$ équations à $N + 1$ variables, dont les solutions définissent les points stationnaires de la MSE par rapport aux pôles. L'algorithme est constitué des étapes suivantes :

Etape 1 : Définir le vecteur $\underline{\xi}_N^{[N,N]}$:

$$\underline{\xi}_N^{[N,N]} = [\xi_0 \quad \dots \quad \xi_{i-1} \quad \xi_i \quad \xi_{i+1} \quad \dots \quad \xi_{N-1} \quad \xi_N]^T \quad (\text{III.66})$$

contenant l'ordonnancement originel des pôles, qui est utilisé pour le calcul de $g_N(\underline{\xi}_N^{[N,N]})$; alors, le vecteur des pôles utilisé pour le calcul de $g_{N+1}(\underline{\xi}_N^{[N,N]})$ est défini, selon le *théorème 1 bis*, ainsi :

$$\underline{\tilde{\xi}}_N^{[N,N]} = \left[\begin{array}{cccccccc} \xi_0 & \cdots & \xi_{i-1} & \xi_i & \xi_{i+1} & \cdots & \xi_{N-1} & \xi_N & \xi_N \end{array} \right]^T \quad \text{(III.67)}$$

N+1 elements

Suivant cet ordonnancement, la première équation constituant le système à résoudre s'écrit :

$$g_N \left(\underline{\xi}_N^{[N,N]} \right) g_{N+1} \left(\underline{\tilde{\xi}}_N^{[N,N]} \right) = 0 \quad \text{(III.68)}$$

Etape 2 : Effectuer une première permutation dans le vecteur des pôles (III.66) entre les éléments ξ_N et ξ_{N-1} :

$$\underline{\xi}_N^{[N-1,N]} = \left[\xi_0 \quad \cdots \quad \xi_{i-1} \quad \xi_i \quad \cdots \quad \xi_{N-2} \quad \xi_N \quad \xi_{N-1} \right]^T$$

Par conséquent, $\underline{\tilde{\xi}}_N^{[N-1,N]}$, d'après le *théorème 1 bis*, s'écrit :

$$\underline{\tilde{\xi}}_N^{[N-1,N]} = \left[\begin{array}{cccccccc} \xi_0 & \cdots & \xi_{i-1} & \xi_i & \cdots & \xi_{N-2} & \xi_N & \xi_{N-1} & \xi_{N-1} \end{array} \right]^T$$

N+1 elements

Suivant le nouvel ordonnancement des pôles, la deuxième équation du système à résoudre se présente ainsi :

$$g_N \left(\underline{\xi}_N^{[N-1,N]} \right) g_{N+1} \left(\underline{\tilde{\xi}}_N^{[N-1,N]} \right) = 0 \quad \text{(III.69)}$$

Au lieu de recalculer (III.69), la symétrie avec l'hyperespace $\xi_N = \xi_{N-1}$, exprimée dans le *corollaire III.2*, est exploitée. Plus de détails seront présentés au paragraphe 5.3.

Etape 3 : Répéter l'étape 2, en effectuant les permutations entre les éléments ξ_N et ξ_{N-i} pour tout $i = 2, 3, \dots, N$, et profiter de la symétrie exprimée par (III.65) pour ne pas réécrire toutes les équations (*cf.* § III.5.3)

En résultat de cette étape, le système d'équations ci-dessous est établi :

$$\begin{cases} g_N \left(\xi_N^{[N,N]} \right) g_{N+1} \left(\tilde{\xi}_N^{[N,N]} \right) = 0 \\ g_N \left(\xi_N^{[N-1,N]} \right) g_{N+1} \left(\tilde{\xi}_N^{[N-1,N]} \right) = 0 \\ \vdots \\ g_N \left(\xi_N^{[i,N]} \right) g_{N+1} \left(\tilde{\xi}_N^{[i,N]} \right) = 0 \\ \vdots \\ g_N \left(\xi_N^{[0,N]} \right) g_{N+1} \left(\tilde{\xi}_N^{[0,N]} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.70})$$

Etape 4 : Fin.

5.3 Expression explicite en fonction du pôle pour une classe de fonctions de transfert [Malti *et al.*, 1999a]

Après avoir établi le système d'équations (III.70), qui décrit les CO d'un réseau tronqué à N filtres BOG, nous nous proposons d'expliciter (III.70), directement en fonction des pôles recherchés pour la classe de systèmes physiques dont les réponses impulsionnelles discrètes sont du type (III.12) et dont la fonction de transfert possède P pôles distincts :

$$H(z) = \sum_{i=1}^P \frac{A_i z}{z - b_i} \quad (\text{III.71})$$

où A_i et $-1 < b_i < 1$ sont des nombres réels.

Ce travail est une extension directe ce celui de Masnadi-Shirazzi *et al.* (1991), effectué dans le cadre des filtres de Laguerre et présenté au paragraphe 2.2.

Rappelons que les coefficients de la décomposition de la fonction de transfert (III.71) sur les filtres de la BOG, ont été établis dans le deuxième chapitre, lors de l'étude de leur convergence. Réécrivons donc l'équation (II.53.a)³, pour l'ordonnancement originel des pôles exprimé par (III.66) et (III.67) et pour respectivement $n = N$ et $n = N + 1$:

³ avec le changement de notation $z_i \Leftrightarrow b_i$

$$g_N(\xi_N) = \sqrt{1 - \xi_N^2} \sum_{j=1}^P A_j \frac{\prod_{k=0}^{N-1} (b_j - \xi_k)}{\prod_{k=0}^N (1 - \xi_k b_j)} \quad (\text{III.72.a})$$

$$g_{N+1}(\xi_N^{[N,N]}) = \sqrt{1 - \xi_N^2} \sum_{j=1}^P \frac{A_j}{(1 - \xi_N b_j)} \prod_{k=0}^N \frac{(b_j - \xi_k)}{(1 - \xi_k b_j)} \quad (\text{III.72.b})$$

Puisque dans (III.68), ou dans la première équation du système (III.70), les coefficients de Fourier doivent s'annuler, pour que l'on soit face à un optimum, il n'y a que le numérateur de (III.72) qui présente un intérêt pour ce calcul, à partir du moment où toutes les simplifications entre les pôles et les zéros ont été faites. En prenant uniquement la partie non nulle du numérateur de (III.72.a et b) on obtient respectivement :

$$f_N(\xi_0, \dots, \xi_N) = \sum_{j=1}^P \left\{ A_j \prod_{k=0}^{N-1} (b_j - \xi_k) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^P \left[\prod_{m=0}^N (1 - \xi_m b_l) \right] \right\} \quad (\text{III.73.a})$$

$$f_{N+1}(\xi_0, \dots, \xi_N) = \sum_{j=1}^P \left\{ A_j \prod_{k=0}^N (b_j - \xi_k) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^P \left[\left(\prod_{m=0}^N (1 - \xi_m b_l) \right) (1 - \xi_N b_l) \right] \right\} \quad (\text{III.73.b})$$

En conséquence, résoudre (III.69) équivaut à résoudre :

$$f_N(\xi_0, \dots, \xi_N) f_{N+1}(\xi_0, \dots, \xi_N) = 0 \quad (\text{III.74})$$

Soulignons que le coefficient g_{N+1} dépend des $N+2$ premiers pôles, *i.e.* de ξ_0 à ξ_{N+1} . Cependant, la contrainte imposée sur le dernier pôle, c'est-à-dire $\xi_{N+1} = \xi_N$, implique que la fonction f_{N+1} ne dépend plus que des $N+1$ premiers pôles *i.e.* de ξ_0 à ξ_N .

Selon l'étape 2 de l'algorithme et la symétrie de chacune des deux fonctions (III.73), par rapport à l'hyperespace $\xi_N = \xi_{N-1}$, résoudre (III.69) revient à résoudre :

$$f_N(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-2}, \xi_N, \xi_{N-1}) f_{N+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-2}, \xi_N, \xi_{N-1}) = 0 \quad (\text{III.75})$$

où f_N et f_{N+1} sont entièrement définies par les équations (III.73) et ne doivent aucunement être recalculées. Par conséquent, la $i^{\text{ième}}$ équation du système (III.70) est équivalente à :

$$f_N(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_N, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{N-1}, \xi_i) f_{N+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_N, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{N-1}, \xi_i) = 0 \quad (\text{III.76})$$

où les variables ξ_i et ξ_N des fonctions (III.73) ont été permutées.

Ouvrons une parenthèse pour signaler que f_N et f_{N+1} , suivant l'ordonnancement des pôles de l'équation (III.76), qui correspond d'ailleurs à la $i^{\text{ième}}$ équation du système (III.70), s'écrivent respectivement :

$$f_N(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_N, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{N-1}, \xi_i) = \sum_{j=1}^P \left\{ A_j \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N (b_j - \xi_k) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^P \left[\prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^N (1 - \xi_m b_l) \right] \right\}$$

$$f_{N+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_N, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{N-1}, \xi_i) = \sum_{j=1}^P \left\{ A_j \prod_{k=0}^N (b_j - \xi_k) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^P \left[\left(\prod_{m=0}^N (1 - \xi_m b_l) \right) (1 - \xi_i b_l) \right] \right\}$$

Ce qui ressort de ce travail, est que les $N + 1$ équations formant le système (III.70), sont synthétisées en calculant f_N (III.73.a) et f_{N+1} (III.73.b) une seule fois, puis en effectuant toutes les permutations nécessaires sur les variables de ces deux fonctions. Ce résultat est la conséquence directe du corollaire III.2. Il ne reste, à présent, qu'à résoudre les $N + 1$ équations et ce n'est pas une chose facile, comme nous le montrerons sur un exemple de faible dimension au paragraphe 5.5. Auparavant, nous généraliserons les résultats obtenus pour des excitations quelconques.

5.4 CO pour une excitation colorée

L'objectif de cette section est de montrer que le *théorème III.1 bis* est valable quand le signal d'excitation n'est pas blanc, conduisant à des sorties de filtres BOG non orthogonales entre elles. Comme pour le cas des filtres de Laguerre, un indice supplémentaire sera ajouté à l'équation (III.64), réécrite ci-dessous, pour signifier que le coefficient g_N est optimal pour un réseau tronqué à N filtres BOG (allant de 0 à N) et que le coefficient g_{N+1} est optimal pour un réseau tronqué à $N + 1$ filtres BOG (allant de 0 à $N + 1$).

$$g_{N,N} \left(\underline{\xi_N^{[i,N]}} \right) g_{N+1,N+1} \left(\underline{\xi_N^{[i,N]}} \right) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{III.77})$$

On fera très fréquemment appel aux résultats établis précédemment par [e Silva, 1995] pour les filtres de Laguerre et qui ont été présentés, à cet effet, au paragraphe 2.3. Le problème de la détermination des $N + 1$ équations sera traité équation par équation. Commençons par établir celle qui correspond à $i = N$ dans (III.77).

Toutes les équations concernant les filtres de Laguerre comprises entre (III.17) et (III.21) sont valables pour les filtres de la BOG. Il suffit simplement de remplacer chaque sortie X_n du $n^{\text{ième}}$ filtre de Laguerre par la sortie du $n^{\text{ième}}$ filtre de la BOG. Il faut donc, substituer la définition des X_n de l'équation (III.18) par celle-ci :

$$X_n(z, \xi_n) = \mathcal{Z}_n(z, \xi_n) U(z)$$

Puisque l'on s'intéresse à déterminer l'équation qui correspond à $i = N$, on remplacera, dans (III.20) et (III.21), la dérivée de toute fonction par rapport à l'unique pôle de Laguerre par la dérivée de la dite fonction par rapport au pôle ξ_N .

La principale différence entre les deux démonstrations est résumée dans les quelques lignes qui suivent.

L'équation (III.21) est différenciée par rapport au pôle ξ_N :

$$\frac{\partial J_N(\xi)}{\partial \xi_N} = -2 \left\langle E_N(z, \xi), \sum_{n=0}^N g_{n,N} \frac{\partial X_{n,N}(z, \xi_n)}{\partial \xi_N} \right\rangle = 0 \quad (\text{III.78})$$

Notons que l'unique filtre qui dépend du pôle ξ_N est \mathcal{Z}_N . En conséquence, en différenciant toutes les sorties $\{X_n\}_{n=0, 1, \dots, N}$ par rapport au pôle ξ_N , l'unique terme qui ne s'annule pas est celui qui correspond à X_N . (III.78) devient donc :

$$= -2 \left\langle E_N(z, \xi), g_{N,N} \frac{\partial X_{N,N}(z, \xi_N)}{\partial \xi_N} \right\rangle = 0 \quad (\text{III.79})$$

Ensuite, la dérivée de la sortie du $N^{\text{ième}}$ filtre par rapport au pôle ξ_N est exprimée en fonction de la sortie X_{N+1} . Il suffit, pour cela, d'effectuer le produit scalaire des deux côtés de l'équation (III.60) par $U(z)$, afin d'obtenir :

$$\frac{\partial X_N(z, \xi_N)}{\partial \xi_N} = \frac{1}{1 - \xi_N^2} X_{N+1}(z, \xi_{N+1}) \quad (\text{III.80})$$

En remplaçant (III.80) dans (III.79), et en utilisant la propriété de linéarité du produit scalaire, on arrive à la relation suivante :

$$\frac{\partial J_N(\xi)}{\partial \xi} = \frac{2g_{N,N} \langle E_N(z, \xi_N), X_{N+1}(z, \xi_N) \rangle}{1 - \xi_N^2} = 0$$

Cette équation est, par essence, très similaire à (III.23). En conséquence, le reste de la démonstration est identique à ce qu'a proposé [e Silva, 1995]. On renvoie donc le lecteur à la suite de l'équation (III.23) p.108, s'il souhaite poursuivre cette démonstration à son terme. Le résultat obtenu est très similaire à (III.27), car il s'exprime ainsi :

$$\frac{\partial J_N(\xi)}{\partial \xi} = \frac{2g_{N,N}g_{N+1,N+1}}{1 - \xi_N^2} = 0$$

On vient de montrer que l'équation, conduisant au CO, correspondant à $i = N$ dans (III.77), est :

$$g_{N,N} \left(\xi_N^{[N,N]} \right) g_{N+1,N+1} \left(\xi_N^{[N,N]} \right) = 0 \quad (\text{III.81})$$

Après avoir calculé (III.81), on notera tout simplement que, pour déterminer l'équation générale qui correspond à une permutation entre les pôles ξ_N et ξ_i , quelque soit $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, **aucune modification n'est à apporter** dans ce qui a été fait, jusqu'à présent, pour $i = N$. Il suffit de reprendre le raisonnement à partir de l'équation (III.78), dériver par rapport au pôle ξ_i et noter que (III.80) reste valable (sous réserve de remplacer ξ_N par ξ_i), car il n'y a que la dernière sortie, X_N qui dépend de ξ_i , du fait de la permutation entre ξ_i et ξ_N . Le reste du raisonnement correspond à la suite de (III.80).

5.5 Exemple

Nous reprendrons l'exemple qui a été traité au paragraphe 2.4. Rappelons que la fonction de transfert que l'on a approchée sur la base des filtres de Laguerre et que l'on va approcher, maintenant, sur la base des filtres BOG est la suivante (cf. 29) :

$$H(z) = \frac{0.3z}{z-0.9} + \frac{0.6z}{z-0.7} - \frac{1.5z}{z+0.5} = \frac{-0.60z(z-2.67)(z-0.82)}{(z-0.9)(z-0.7)(z+0.5)} \quad (\text{III.82})$$

Pour le cas des filtres de Laguerre, seul un pôle devait être calculé. Il était donc possible de faire varier l'ordre de la troncature jusqu'à $N = 8$, tout en visualisant l'erreur quadratique en fonction du pôle de Laguerre. En revanche, pour le cas des filtres de la BOG, un nouveau pôle est ajouté à chaque ajout d'un filtre supplémentaire. Par conséquent, si l'on veut visualiser l'erreur quadratique en fonction des pôles, on est rapidement limité à un maximum de deux pôles et donc deux filtres de la BOG ($N = 1$). Cela représente donc la dimension du réseau de filtres sélectionné pour cet exemple.

Conformément à ce qui a été fait pour les filtres de Laguerre, nous commencerons par étudier les CO pour une excitation blanche, puis nous verrons le cas d'une excitation colorée.

5.5.1 Excitation blanche

Les fonctions f_1 et f_2 calculées à partir de (III.73) sont :

$$\begin{aligned} f_1(\xi_0, \xi_1) = & 1.44 - 0.82\xi_0 - 1.42\xi_1 - 1.91\xi_0^2 - 0.19\xi_1^2 + 1.32\xi_0^3 - 0.10\xi_0\xi_1 + 3.07\xi_0^2\xi_1 + 0.66\xi_0\xi_1^2 \\ & - 1.64\xi_0^3\xi_1 - 1.23\xi_0^2\xi_1^2 + 0.44\xi_0^3\xi_1^2 \end{aligned} \quad (\text{III.83.a})$$

$$\begin{aligned} f_2(\xi_0, \xi_1) = & 0.16 - 1.01\xi_0 - 0.57\xi_1 + 0.97\xi_0^2 + 1.03\xi_1^2 - 0.19\xi_0^3 - 1.48\xi_1^3 + 1.26\xi_1^4 - 0.42\xi_1^5 \\ & + 1.86\xi_0\xi_1 - 1.19\xi_0^2\xi_1 + 0.24\xi_0\xi_1^2 - 2.47\xi_0^2\xi_1^2 + 0.00\xi_0^3\xi_1 - 1.88\xi_0\xi_1^3 + 5.44\xi_0^2\xi_1^3 + 1.27\xi_0^3\xi_1^2 \\ & + 0.72\xi_0\xi_1^4 - 3.51\xi_0^2\xi_1^4 + 0.08\xi_0\xi_1^5 - 2.31\xi_0^3\xi_1^3 + 0.76\xi_0^2\xi_1^5 + 1.66\xi_0^3\xi_1^4 - 0.44\xi_0^3\xi_1^5 \end{aligned} \quad (\text{III.83.b})$$

Il est intéressant de signaler que pour parvenir aux pôles optima d'une fonction de transfert d'ordre trois approchée avec seulement deux filtres de la BOG, il est nécessaire de résoudre deux équations non linéaires $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ comprenant respectivement 12 et 24 termes.

Les points stationnaires de la MSE par rapport aux deux pôles vérifient, selon (III.74) et (III.75), le système d'équations suivants :

$$f_1(\xi_0, \xi_1)f_2(\xi_0, \xi_1) = 0 \quad (\text{III.84.a})$$

et $f_1(\xi_1, \xi_0)f_2(\xi_1, \xi_0) = 0 \quad (\text{III.84.b})$

Les courbes isocritères de la MSE ont été tracées sur la figure III.8, avec les courbes de niveau zéro, issues des équations (III.84).

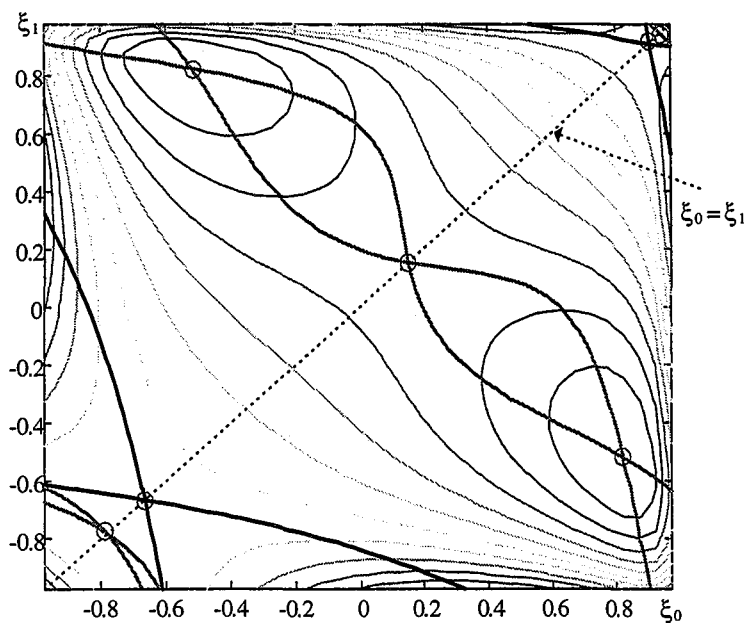


Figure III.8 - Courbes isocritères de la NMSE et courbes de niveau zéro définies par (III.84)

Notons que si $\xi_0 = \xi_1$, alors f_1 (III.83.a) et f_2 (III.83.b) se simplifient et l'on retrouve les fonctions définissant les CO des filtres de Laguerre (cf. III.31). En conséquence, tous les optima situés sur la ligne $\xi_0 = \xi_1$ représentent non seulement les optima des filtres de la BOG pour $N = 1$, mais également les optima des filtres de Laguerre, toujours pour $N = 1$.

Il existe 5 optima sur l'axe $\xi_0 = \xi_1$. L'évaluation des coefficients et de l'erreur quadratique normalisée en ces points conduit exactement aux résultats du tableau III.1. En revanche, il existe deux optima en dehors de cet axe, qui sont symétriques par rapport à $\xi_0 = \xi_1$, comme

l'indique le *corollaire III.1*. L'évaluation des coefficients et du critère quadratique normalisé (NMSE) en ces deux points, est reportée sur le tableau III.5.

ξ_0	ξ_1	g_0	g_1	g_2 Pour vérif.	NMSE
-0.521	0.821	-1.182	1.338	0	0.37%
0.821	-0.521	0.856	1.567	0	0.37%

Tableau III.5 - Pôles optima quand $\xi_0 \neq \xi_1$. Les pôles optima qui correspondent à $\xi_0 = \xi_1$ sont identiques à ceux du tableau III.1.

En conséquence, la représentation optimale de $H(z)$ à base de deux filtres BOG s'écrit :

$$g_0 \mathcal{E}(\xi_0) + g_1 \mathcal{E}(\xi_0, \xi_1) = \frac{(-0.306z + 0.796)z}{(z + 0.521)(z - 0.821)}$$

Rappelons que la NMSE qui correspond au minimum global d'un réseau de deux filtres de Laguerre est égale 21.60%, alors que la NMSE qui correspond au minimum global d'un réseau de deux filtres de la BOG est égale à 0.37%. Afin d'atteindre une précision d'approximation inférieure à 0.37% avec les filtres de Laguerre, il aurait fallu utiliser un réseau d'au moins 11 filtres, dont le pôle optimum se situe à $\xi = 0.360$. On peut alors se poser la question suivante : pourquoi est-ce que les filtres de Laguerre ne parviennent pas à approcher correctement la fonction de transfert originelle. La raison est que celle-ci est composée à la fois de pôles positifs et négatifs et que le réseau de filtres de Laguerre n'admet qu'un pôle unique. En conséquence, il est nécessaire d'en utiliser un nombre « élevé », afin d'arriver à une « bonne » qualité d'approximation. En revanche, les filtres de la BOG, permettent d'atteindre une « bonne » approximation avec relativement « peu » de filtres, grâce à la possibilité de choisir à la fois des pôles positifs et négatifs.

5.5.2 Excitation colorée

Comme au paragraphe 2.4.2, on considérera la même fonction de transfert (III.82), excitée cette fois-ci par la réponse impulsionnelle du filtre $F(z)$, avec :

$$F(z) = \frac{z}{z + 0.6} \tag{III.85}$$

Le spectre de ce signal d'excitation est moins riche que celui d'une impulsion et que cela peut engendrer des optima différents de ceux qui ont été trouvés sur la figure III.8. Néanmoins, les CO pour n'importe quel signal d'excitation (non nul, bien sûr) sont présentées par (III.77).

On a tracé sur la figure III.8 les courbes isocritères de la NMSE pour l'excitation précisée, ainsi que les courbes de niveau zéro définies par :

$$g_{1,1}(\xi_0, \xi_1)g_{2,2}(\xi_0, \xi_1, \xi_1) = 0 \quad (\text{III.86.a})$$

et $g_{1,1}(\xi_1, \xi_0)g_{2,2}(\xi_1, \xi_0, \xi_0) = 0 \quad (\text{III.86.b})$

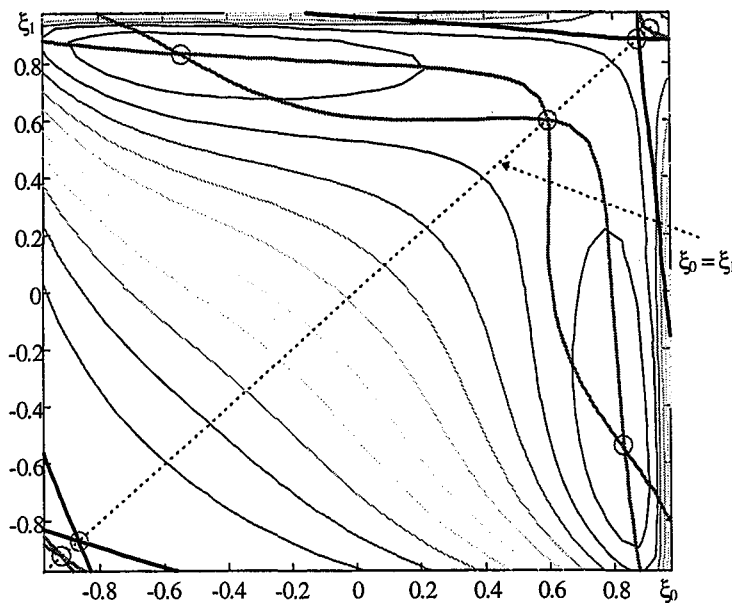


Figure III.9 - Courbes isocritères de la MSE et courbes de niveau zéro définies par (III.86). Chaque intersection représente un optimum.

Puisque, les optima situés sur l'axe $\xi_0 = \xi_1$ de la figure III.9 correspondent aux optima des filtres de Laguerre et qu'ils ont été reportés sur le tableau III.2, ils ne seront pas repris. En revanche, il existe deux optima en dehors de cet axe dont les coefficients et la NMSE sont présentés dans la tableau III.6. En comparant la NMSE de la dernière colonne avec celles du tableau III.2, on constate que les minima globaux sont les pôles ξ_0 et ξ_1 du tableau III.6.

ξ_0	ξ_1	$g_{0,1}$	$g_{1,1}$	$g_{2,2}$ Pour vérif.	NMSE
-0.553	0.834	-1.168	1.303	0	0.62%
0.834	-0.553	0.870	1.518	0	0.62%

Tableau III.6 - Pôles optima pour un réseau de deux filtres BOG. Les autres optima sont les mêmes que ceux des filtres de Laguerre (tableau III.2) p. 127

La représentation optimale de $H(z)$, excité par $F(z)$ (III.85), à base de deux filtres BOG, s'écrit :

$$g_0 \mathcal{B}(\xi_0) + g_1 \mathcal{B}(\xi_0, \xi_1) = \frac{(-0.058z + 0.153)z}{(z + 0.533)(z - 0.834)}$$

Là aussi, si l'on compare l'approximation à base de deux filtres de Laguerre à celle de deux filtres de la BOG, on note qu'il y a une diminution considérable de la NMSE (de 14.37 % à 0.62 %). Une fois de plus, c'est la possibilité de choisir des pôles à la fois positifs et négatifs qui permet d'atteindre une approximation nettement meilleure dans le deuxième cas.

6. Conclusions et perspectives

Le choix des pôles des bases orthogonales est primordial si l'on veut effectuer l'approximation optimale, au sens du critère quadratique, pour un ordre de troncature donné. De même, dans le cadre du développement de fonctions de transfert connues, sur la base des fonctions orthogonales, l'optimisation du (des) pôle(s) passe obligatoirement par la résolution d'une équation (voire d'un système d'équations) algébrique(s), dites conditions d'optimalité. Ceci explique l'intérêt particulier que plusieurs auteurs ont porté à la détermination des conditions d'optimalité relatives aux fonctions de Laguerre, type Meixner et Kautz.

Cependant, la détermination des conditions d'optimalité des filtres issus de la base orthogonale généralisée (BOG) n'a jamais été traitée dans la littérature. Ceci est probablement dû à l'absence de relations de récurrence entre les dérivées des fonctions de la BOG par rapport aux pôles et les fonctions elles-mêmes. Nous avons réussi à surmonter cette difficulté et à établir les conditions d'optimalité recherchées, sous réserve que tous les pôles de la base

orthogonale généralisée appartiennent à l'ensemble des nombres réels. Ces conditions d'optimalité ont été ramenées à une forme très comparable à celle des filtres de Laguerre et donc très simplifiée. Elles sont également valables dans le cas d'excitations colorées ce qui rend le résultat obtenu plus fort. De plus, nous avons réussi à les écrire explicitement en fonction des pôles recherchés, pour une classe très courante de systèmes physiques. Ces résultats constituent quelques-uns des points forts de notre travail.

La technique de représentation de systèmes en terme de réseaux de filtres orthogonaux issus de la base orthogonale généralisée et ayant des pôles optima, peut directement être utilisée pour la réduction d'ordre de modèles. Un exemple, certes de faible dimension, a été présenté dans ce chapitre. On peut, néanmoins, renvoyer le lecteur d'une part à [Malti, *et al.* 1998b] où l'on traite d'un exemple de dimension plus importante et d'autre part à l'article [den Brinker, *et al.* 1996c] consacré exclusivement à la réduction d'ordre de modèle, en utilisant les fonctions issues de la base orthogonale généralisée. Dans cet article, les auteurs proposent d'augmenter le nombre de filtres utilisés jusqu'à ce que le critère d'approximation soit suffisamment petit. Cependant, le choix des pôles qu'ils proposent est sous optimal, puisqu'ils préconisent de sélectionner :

- à l'ordre un, le pôle minimisant l'erreur quadratique,
- à l'ordre deux, de garder le premier pôle et de sélectionner le second de façon à minimiser l'énergie de l'erreur de modélisation de l'ordre un,
- à l'ordre trois, de garder les deux premiers pôles et de sélectionner le troisième de façon à minimiser l'énergie de l'erreur de modélisation de l'ordre deux
- et ainsi de suite, pour le quatrième, cinquième et autres pôles.

Cette solution est sous optimale, car les pôles optima pour un ordre de troncature donné doivent tous être recalculés en résolvant les conditions d'optimalité qui ont été établies dans ce chapitre.

D'un point de vue *identification de systèmes* à partir des signaux d'entrée et de sortie, les conditions d'optimalité, permettent de transformer le problème de minimisation de l'erreur quadratique, par rapport aux N pôles, en un problème de résolution de N équations non-linéaires à N paramètres. L'utilisateur a donc le choix du problème à résoudre, pour aboutir

aux pôles optima recherchés. Il nous semble, toutefois, important de souligner que les algorithmes itératifs de résolution des deux problèmes sont identiques.

Une des perspectives très intéressantes de ce travail consiste à généraliser les conditions d'optimalité de la base orthogonale généralisée, pour le choix de pôles complexes conjugués. Malheureusement, nous n'avons pas pu effectuer cette généralisation à cause de la complexité des équations rencontrées.

7. Annexe

L'objectif de cette annexe est de démontrer que les coefficients de la décomposition de

$\frac{\partial \mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i}$ sur les fonctions $\mathcal{B}_j(z, \underline{\xi}_j)$ correspondent à ceux du tableau III.3.

La projection de $\frac{\partial \mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i}$ sur chacune des fonctions $\mathcal{B}_j(z, \underline{\xi}_j)$ peut s'exprimer selon l'une des deux formules suivantes (commutativité du produit scalaire) :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i}, \mathcal{B}_j(z, \underline{\xi}_j) \right\rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_T \frac{\partial \mathcal{B}_n(z^{-1}, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i} \mathcal{B}_j(z, \underline{\xi}_j) z^{-1} dz \quad (\text{A.1})$$

$$\left\langle \mathcal{B}_j(z, \underline{\xi}_j), \frac{\partial \mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i} \right\rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_T \frac{\partial \mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i} \mathcal{B}_j(z^{-1}, \underline{\xi}_j) z^{-1} dz \quad (\text{A.2})$$

(A.1) sera utilisé quand $j \leq n$ et (A.2) quand $j > n$, pour minimiser le nombre de pôles à l'intérieur du cercle unité et pour faciliter l'application du théorème des résidus lors du calcul de différentes intégrales sur le plan complexe.

7.1 Cas $j < n$

Dans ce cas, on s'intéresse à remplir les colonnes deux et trois du tableau III.3. En conséquence, les seules valeurs possibles de i sont $0, \dots, n-1$. En remplaçant (III.45.a), dans (A.1), on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i}, \mathcal{E}_j(z, \underline{\xi}_j) \right\rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_T \frac{z^{-2} - 1}{(z^{-1}\xi_i - 1)(z^{-1} - \xi_i)} \mathcal{E}_n(z^{-1}, \underline{\xi}_n) \mathcal{E}_j(z, \underline{\xi}_j) z^{-1} dz \quad (\text{A.3})$$

Ensuite on remplaçant la définition des filtres de la BOG, on parvient à :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i}, \mathcal{E}_j(z, \underline{\xi}_j) \right\rangle = \frac{A_{n,j}}{2\pi j} \oint_T \frac{z^2 - 1}{(z - \xi_i)(1 - \xi_i z)} \frac{\prod_{k=j+1}^{n-1} (z - \xi_k)}{\prod_{k=j}^n (1 - z\xi_k)} dz$$

Notons que le seul pôle à l'intérieur du cercle unité se trouve en ξ_i , à l'unique condition près, que la fonction intégrée ne possède pas de zéro en ξ_i . Par conséquent, deux cas supplémentaires sont distingués selon la présence ou non d'un zéro en ξ_i .

7.1.1 Cas $j < i$

La fonction intégrée possède un zéro en ξ_i qui se simplifie avec l'unique pôle à l'intérieur du contour fermé. L'intégrale recherchée est donc nulle. Ce résultat est directement reporté sur la deuxième colonne du tableau III.3.

7.1.2 Cas $i \leq j < n$

L'application du théorème des résidus conduit au résultat suivant, reporté dans la troisième colonne du tableau III.3 :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i}, \mathcal{E}_j(z, \underline{\xi}_j) \right\rangle = -A_{n,j} \frac{\prod_{k=j+1}^{n-1} (\xi_i - \xi_k)}{\prod_{k=j}^n (1 - \xi_i \xi_k)}$$

7.2 Cas $j = n$

Deux cas supplémentaires sont distingués, afin d'utiliser soit (III.45.a) soit (III.45 b).

7.2.1 Cas $i = 0, \dots, n-1$

L'équation (A.1) s'écrit :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \xi_n)}{\partial \xi_i}, \mathcal{E}_n(z, \xi_n) \right\rangle = \frac{A_{n,n}}{2\pi j} \oint_T \frac{z^2 - 1}{(z - \xi_i)(1 - \xi_i z)(1 - z\xi_n)(z - \xi_n)} dz$$

On remarque la présence de deux pôles dans le cercle unité. La somme des résidus en ces pôles conduit à l'intégrale recherchée :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \xi_n)}{\partial \xi_i}, \mathcal{E}_n(z, \xi_n) \right\rangle = A_{n,n} m_i \left[\frac{-1+1}{(1 - \xi_i \xi_n)(\xi_i - \xi_n)} \right] = 0 \quad (\text{A.4})$$

7.2.2 Cas $i = n$

En utilisant (A.1) et (III.45.b), on montre que l'intégral recherchée est nulle, car le pôle en ξ_n se simplifie avec le zéro :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \xi_n)}{\partial \xi_n}, \mathcal{E}_n(z, \xi_n) \right\rangle = \frac{A_{n,n}}{2\pi j} \oint_T \frac{(\xi_n - z)}{(\xi_n^2 - 1)(1 - \xi_n z)} \frac{1}{(1 - z\xi_n)(z - \xi_n)} dz = 0 \quad (\text{A.5})$$

Ce résultat est reporté sur la quatrième colonne du tableau III.3.

7.3 Cas $j > n$

Dans ce qui suit, on choisit d'utiliser (A.2). Deux cas sont distingués d'emblée, comme cela a été fait précédemment.

7.3.1 Cas $i = 0, \dots, n-1$

En utilisant (III.45.a), on arrive à :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \xi_n)}{\partial \xi_i}, \mathcal{E}_j(z, \xi_j) \right\rangle = \frac{A_{n,j}}{2\pi j} \oint_T \frac{z^2 - 1}{(z - \xi_i)(\xi_i z - 1)} \frac{\prod_{k=n+1}^{j-1} (z - \xi_k)}{\prod_{k=n}^j (1 - z\xi_k)} dz$$

Le calcul du résidu à ξ_i , unique pôle à l'intérieur du contour fermé, conduit au résultat :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i}, \mathcal{E}_j(z, \underline{\xi}_j) \right\rangle = A_{n,j} \frac{\prod_{k=n+1}^{j-1} (\xi_i - \xi_k)}{\prod_{k=n}^j (1 - \xi_i \xi_k)}$$

7.3.2 Cas $i = n$

L'utilisation de (III.45.b), au lieu de (III.45.a), avec (A.2) donne :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_n}, \mathcal{E}_j(z, \underline{\xi}_j) \right\rangle = \frac{A_{n,j}}{2\pi j} \oint \frac{\xi_n z - 1}{(\xi_n^2 - 1)(z - \xi_n)} \frac{\prod_{k=n+1}^{j-1} (z - \xi_k)}{\prod_{k=n}^j (1 - z \xi_k)} dz$$

Le résultat de cette intégration s'écrit :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_n}, \mathcal{E}_j(z, \underline{\xi}_j) \right\rangle = A_{n,j} \frac{\prod_{k=n+1}^{j-1} (z - \xi_k)}{\prod_{k=n}^j (1 - z \xi_k)}$$

Il est reporté sur la dernière colonne du tableau III.3.

Cette étude exhaustive complète le calcul des coefficient $C_{n,i,j}$ de la décomposition de

$$\frac{\partial \mathcal{E}_n(z, \underline{\xi}_n)}{\partial \xi_i} \text{ sur } \mathcal{E}_j(z, \underline{\xi}_j) \text{ (voir tableau III.3).}$$

□

Chapitre 4

*Identification de Systèmes Linéaires sur la Base des Filtrés
Orthogonaux - Extension aux Systèmes Non Linéaires
par une Technique Multimodèle*

Knowledge itself is power.

Francis Bacon

1. Introduction - Procédure d'identification

La modélisation, activité de base du chercheur et de l'ingénieur, constitue un aspect important de toutes les sciences appliquées. Plus spécifiquement, en automatique, elle représente une des étapes fondamentales pour concevoir un système, simuler son comportement, comprendre son fonctionnement, asservir ses paramètres d'action, suivre son évolution et diagnostiquer ses défaillances. On la retrouve donc dans toutes les phases de la « vie » d'un système.

L'étape de modélisation vise à établir des relations mathématiques entre les différentes variables caractéristiques du système. Il existe deux approches permettant d'aboutir à un modèle mathématique. La première, basée sur la connaissance des lois physico-chimiques, biologiques ... *etc.* régissant le processus réel, est connue sous le nom de **modélisation théorique**. Dans cette approche, le processus est décomposé en un ensemble de phénomènes élémentaires, dont les comportements sont décrits par des lois de conservation de masse, d'énergie ou de moment, reliées par des relations de continuité pour aboutir à des modèles dits *boîtes blanches*. Ce type de modèles est, en l'occurrence, utilisé quand les lois physico-chimiques, régissant le processus réel, sont connues et/ou quand le nombre d'observations est restreint, par rapport au nombre de paramètres à estimer. Ceci est fréquemment le cas dans le génie des procédés ou le génie chimique, où le plan d'expérience ne permet pas pour des raisons de coût, de sécurité ou autres, d'acquérir un nombre de données élevé. Cependant, ces modèles nécessitent une connaissance complète du système ; il faut donc être capable d'écrire toutes les relations physiques et mathématiques décrivant son comportement. Cette hypothèse est, bien sûr, irréaliste même pour les systèmes les plus simples et pour cause :

- les processus réels, aussi simples soient-ils, sont gouvernés par des lois physiques complexes ou des équations mathématiques compliquées (non-linéaires aux dérivées partielles), dont les solutions connues ne sont qu'approximatives (après linéarisation, par exemple), et valables, le plus souvent, qu'autour d'un point de fonctionnement,
- la mise en équation d'un système nécessite toujours des hypothèses plus ou moins irréalistes et difficilement vérifiables (homogénéité d'un milieu, pertes thermiques négligeables, ...),

- les grandeurs vraies ne sont accessibles qu'à travers des capteurs, qui fournissent, tant bien que mal, des valeurs approchées et entachées d'erreurs.

L'ensemble de ces facteurs implique que l'on n'aboutit, en général, qu'à une approximation du modèle réel, qui, lui, demeure inaccessible.

C'est pourquoi, on a fréquemment recours à la **modélisation expérimentale**. Elle est basée sur la mesure des signaux d'entrée et de sortie ; elle ne requiert aucune connaissance *a priori* du système et permet d'aboutir à des modèles dits *boîtes noires*. Elle consiste à sélectionner une structure parmi une classe de modèles et à adapter ses paramètres en minimisant un critère de performance. Elle nécessite un nombre d'observations relativement élevé, afin d'augmenter la précision des paramètres calculés. Les modèles linéaires classiques que l'on retrouve le plus couramment dans la littérature sont du type ARX, ARMAX, OE, BJ, ... (voir [Ljung, 1987] pour plus de détails). Les modèles non linéaires les plus courants sont du type NARMAX [Billings *et al.*, 1981, 1982], Hammerstein [Haber *et al.*, 1990] ou à base de réseaux de neurones [Billings *et al.*, 1992], [Sjöberg, 1995] et de logique floue [Lindskog, 1996], [Boukhris, 1998].

Les modèles par filtres orthogonaux appartiennent à la famille des modèles dits *boîtes noires*. L'obtention des paramètres de ces modèles est basée sur l'étude mathématique effectuée dans les deux premiers chapitres. En effet, la complétude de l'espace $\ell^2[0, \infty[$ engendré par ces fonctions permet de représenter tout système LTI et stable par une série infinie, et la convergence des coefficients de Fourier d'une part et de la série infinie d'autre part, justifie sa troncature à un nombre fini. Devant la multitude des bases étudiées (FIR, Laguerre, Kautz, BOG, type Meixner et type Meixner généralisée), il s'agit, en règle générale, de savoir laquelle est la plus appropriée pour identifier un système donné sous des conditions expérimentales données. Notons cependant que la BOG regroupe à la fois les bases de fonctions « FIR », Laguerre et Kautz, ce qui réduit considérablement ce choix. D'autre part, rappelons que les filtres de type Meixner et de type Meixner généralisés conviennent particulièrement à l'identification de systèmes quand les conditions initiales sont mal connues. Cependant, leur structure est plus complexe, car ils nécessitent l'évaluation d'une matrice $L^{(a)}$ (voir II.1 ou II.67) assurant l'orthogonalité qui dépend non seulement du degré de généralisation et des pôles sélectionnés, mais également de l'ordre de troncature du réseau de filtres. En conséquence, $L^{(a)}$ doit être réévaluée lors de tout changement d'ordre du modèle.

L'établissement d'un modèle est une procédure itérative qui comporte essentiellement six étapes [Walter *et al.*, 1994], à savoir :

- l'acquisition de données (ou le choix des signaux d'excitations),
- le choix d'une structure de modèle,
- le choix du critère d'approximation,
- l'estimation paramétrique (choix optimal des paramètres au sens du critère sélectionné),
- l'évaluation de l'incertitude des paramètres estimés et
- la validation du modèle.

Si lors de la dernière phase, le modèle est jugé inacceptable la procédure d'identification peut être reprise à partir de l'une des phases précédentes, jusqu'à validation du modèle. En règle générale, l'estimation paramétrique est d'abord remise en question et l'ordre du modèle est réajusté, ou alors, la structure du modèle est modifiée, afin de prendre en compte d'éventuelles non linéarités ; enfin, le signal d'excitation peut être enrichi avec d'autres fréquences.

Dans ce chapitre, nous nous contenterons d'étudier la modélisation de systèmes sur la base des filtres issus de la BOG. Les différents points traités seront présentés au paragraphe IV.2. Signalons, toutefois, que nous n'accorderons pas une attention particulière ni à la première ni à la dernière étape de la procédure d'identification. Cependant, nous veillerons à ce que les signaux d'excitation soient suffisamment persistants et nous tâcherons de valider les modèles obtenus, dans les exemples traités, par des techniques classiques, soit visuelle, en comparant la réponse du système à celle du modèle sur un jeu de données n'ayant pas servi à l'identification, soit classiques [Richard, 1994] basées sur l'autocorrélation des résidus ou l'intercorrélation des résidus avec l'entrée ou la sortie du système. Les autres étapes de la procédure d'identification seront traitées plus en détails aux paragraphes suivants.

Ce chapitre est décomposé en trois parties. On s'intéressera d'abord à la modélisation de systèmes linéaires monovariés, puis, on proposera une extension des algorithmes

développés aux systèmes linéaires multivariables et finalement on étudiera le cas des multimodèles à base de fonctions orthogonales.

2. Identification de systèmes monovariables

Nos propos, dans cette section, porteront sans restriction de généralité sur des systèmes linéaires dynamiques et invariants de type monovariante représentés sous la forme d'une relation entrée-sortie. Ils peuvent être fonctionnellement décrits par le schéma :

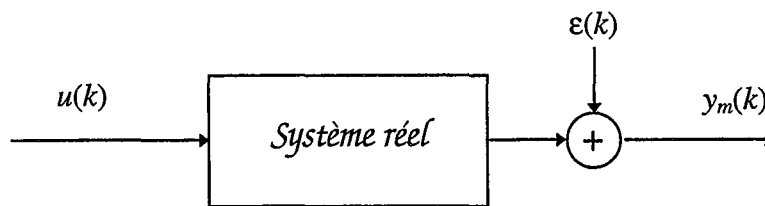


Figure IV.1 - Système SISO

où $u(k)$ représente l'entrée, $y_m(k)$ la sortie mesurée et $\varepsilon(k)$ une perturbation.

On retrouve, dans la littérature, de nombreux travaux concernant l'identification par les filtres de Laguerre et les filtres de Kautz (voir par exemple le *survey paper* de Wahlberg, (1994)). Un des problèmes cruciaux concernant ces deux bases de fonctions concerne l'optimisation des pôles. En effet, plusieurs auteurs [Lindskog, 1996], [Wahlberg, 1991], ... s'accordent à dire qu'il suffit de choisir le pôle de Laguerre (ou ceux de Kautz) à proximité des pôles dominants du système. Mais la question qui se pose alors est : comment connaître ces pôles dominant à partir de la seule connaissance des signaux d'entrée-sortie ? En fait, il existe deux moyens. Soit en identifiant de façon très approximative un système par un modèle ARX d'ordre un, ce qui permet d'avoir une vague idée sur la constante de temps dominante du système ; cette solution n'est, bien sûr, pas optimale. Soit on optimise l'erreur quadratique directement par rapport au pôle de Laguerre ou à ceux de Kautz. Cette dernière idée a été retenue par plusieurs chercheurs. Les premiers algorithmes proposés pour l'optimisation du pôle de Laguerre [Parks, 1971], [Wang, *et al.* 1994] et [Fu *et al.*, 1993] étaient contraints à l'utilisation de signaux d'excitation générant des sorties de filtres orthogonales (impulsion ou bruit blanc). Nous nous sommes affranchis de cette contrainte dans un travail réalisé en

collaboration avec S. B. Ekongolo (1996) (voir aussi [Malti, 1995]). L'algorithme d'optimisation du pôle de Laguerre à partir des signaux d'entrée-sortie quelconques (suffisamment persistant, bien sûr) est présenté dans [Malti, *et al.* 1998a]. Il nous a donc semblé extrêmement intéressant de pouvoir étendre ce type d'algorithme, afin d'optimiser la valeur des pôles réels de la BOG (mais cela peut être étendu aux pôles complexes). Ce travail s'inscrit, donc, dans la continuité du troisième chapitre où les conditions « théoriques » d'optimalité ont été établies.

La bibliographie, concernant l'identification de systèmes linéaires par les fonctions orthogonales, peut se compléter en citant d'une part, les articles qui traitent de l'identification robuste basée sur la minimisation de la norme ℓ^1 et/ou H^∞ de l'erreur d'approximation, de [Mäkilä *et al.*, 1990 et 1991], [Wahlberg *et al.*, 1996] et [Bokor *et al.*, 1998] (voir aussi toutes les références qui y figurent) et d'autre part, les articles qui traitent des techniques d'identification fréquentielle de [Ninness, 1994] et [de Vries, 1995].

Notre travail se focalisera donc sur l'identification de systèmes à partir de signaux d'excitation connus et persistants (ne générant pas obligatoirement des sorties orthogonales) à l'aide des filtres issus de la BOG. Plus précisément, nous nous proposons de développer un algorithme qui permet de trouver les pôles réels optimaux de la BOG au sens du critère d'approximation sélectionné.

2.1 Critère d'approximation

L'une des étapes de la procédure d'identification concerne le choix du critère d'approximation. Il s'agit plus précisément de définir une mesure scalaire, qui permet de juger de la qualité du modèle obtenu. Le critère quadratique est de loin le plus utilisé. Il est défini comme étant la norme quadratique de l'erreur entre la sortie du système et son estimation $e(k)$ qui est appelée aussi *erreur de prédiction* ou *résidu d'estimation* :

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{y_m(k) - \hat{y}(k)}_{e(k)} \right]^2 \quad (\text{IV.1})$$

Le critère d'approximation correspond au produit scalaire de l'erreur de prédiction $e(k)$ par elle-même :

$$J = \|e(k)\|^2 = \langle e(k), e(k) \rangle$$

Puisqu'en pratique, le nombre de données est limité et que les systèmes sont BIBO¹ stables (une entrée bornée engendre une sortie bornée), ce critère, tout comme le produit scalaire, sont souvent calculés sur un horizon fini, allant de 1 à H par exemple, sans que cela n'altère la qualité de l'approximation :

$$J = \sum_{k=1}^H [y_m(k) - \hat{y}(k)]^2 = \sum_{k=1}^H [e(k)]^2 \quad (\text{IV.2})$$

Les algorithmes d'identification développés dans ce chapitre sont basés sur la minimisation de l'erreur quadratique dans une configuration **erreur de sortie**, où l'estimateur $\hat{y}(k)$ ne contient pas la mesure $y_m(k)$:

$$e_N(k) = y_m(k) - \hat{y}_N(k) = y_m(k) - \sum_{n=0}^N g_n \underbrace{\mathcal{E}_n(k) * u(k)}_{x_n(k)} \quad (\text{IV.3})$$

$\mathcal{E}_n(k)$ représente² le filtre de rang n de la BOG, mais peut aussi être remplacé par n'importe quel autre filtre issu de l'une des bases étudiées. L'indice N de \hat{y} , e et J signifie que les réseaux de filtres sont tronqués à N . Le schéma d'identification est, bien entendu, parallèle (voir figure IV.2) ; « *Modèle* » représente le réseau de la figure II.8 mais peut aussi être remplacé par l'un des réseaux des figures I.1, I.6, II.1, II.5, ou II.12.

Puisque le critère (IV.2) est quadratique, on préfère souvent l'écriture matricielle :

$$J_N = e_N^T e_N \quad (\text{IV.4})$$

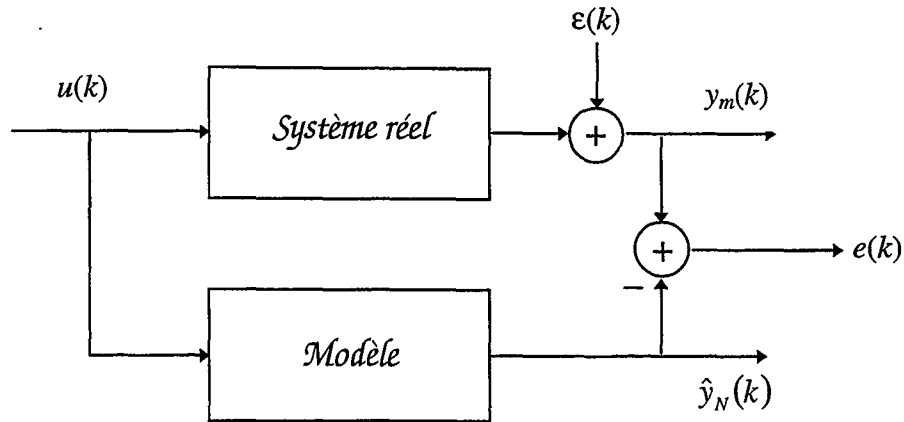
$$\text{avec } e_N = [e_N(1) \ e_N(2) \ \dots \ e_N(H)]^T$$

ou compte tenu de (IV.3) :

$$J_N = (Y_m - X\theta)^T (Y_m - X\theta) \quad (\text{IV.5})$$

¹ Bounded Input Bounded Output.

² Avec l'abus de notation $\mathcal{E}_n(k) = \mathcal{E}^{-1}\{\mathcal{E}_n(z)\}$, $\mathcal{E}_n(z)$ étant défini par (II.32).


Figure IV.2 - Schéma d'identification

avec $X = [X_0 \ X_1 \ \dots \ X_N]$, $X_i = [x_i(1) \ x_i(2) \ \dots \ x_i(H)]^T \quad i = 0, 1, \dots, N$,

$$x_i(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{x_i(z)\}, \quad x_i(z) = \frac{\sqrt{1-|\xi_i|^2} z}{z-\xi_i} \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1-\xi_{k+1}z}{z-\xi_k} \right) u(z)$$

$$Y_m = [y_m(1) \ y_m(2) \ \dots \ y_m(H)]^T \quad \text{et} \quad \theta = [g_0 \ g_1 \ \dots \ g_N]^T$$

Remarques

- Il est important, dans certaines procédures d'identification, d'utiliser des critères quadratiques pondérés soit dans le domaine temporel (pour discréditer des mesures anciennes ou en créditer d'autres) soit dans le domaine fréquentiel (pour privilégier l'identification dans une bande de fréquence, par exemple). Dans le domaine temporel, le critère quadratique pondéré est défini par (comparer avec IV.1) :

$$J_N^{(w)} = \sum_{k=1}^{\infty} w(k) [y_m(k) - \hat{y}_N(k)]^2 \quad (\text{IV.6.a})$$

avec la contrainte :

$$w(k) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \quad (\text{IV.6.b})$$

L'écriture matricielle est (comparer avec IV.5) :

$$J_N^{(w)} = (Y_m - X\theta)^T W (Y_m - X\theta) \quad (\text{IV.7})$$

où la matrice W est diagonale, définie non négative. Dans un cas plus général, elle peut être choisie symétrique (définie non négative), à partir de la connaissance du bruit de mesure, par exemple. \square

2. Le critère quadratique pondéré (IV.6.a) correspond exactement à la définition du **produit scalaire pondéré** :

$$J_N^{(w)} = \langle e(k), e(k) \rangle_w$$

qui, rappelons-le, s'écrit pour les deux suites temporelles $a(k)$ et $b(k)$ [Szegő, 1930] :

$$\langle a(k), b(k) \rangle_w = \sum_{k=0}^{\infty} a(k)b(k)w(k) \quad (\text{IV.8})$$

avec la contrainte identique à (IV.6.b) :

$$w(k) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$$

Si l'on choisit (IV.6.a) comme critère d'optimisation, il convient, alors, d'utiliser des filtres orthogonaux par rapport au produit scalaire (IV.8) où la fonction de pondération $w(k)$ est choisie identique à celle du critère d'optimisation.

Au paragraphe I.3.2, des fonctions de Laguerre orthogonales par rapport à la fonction de pondération $w(k) = b^{-2k}$ ont été présentées. A notre connaissance, mise à part cette définition et son équivalent dans le domaine continu, qui ne sont pas très répandues dans la communauté automatique, l'utilisation de bases orthogonales, par rapport à des fonctions de pondération non constantes, est pratiquement inexistante.

Il serait donc judicieux d'examiner la possibilité de construire, à partir de chacune des bases étudiées dans ce document, des fonctions orthogonales par rapport à une fonction de pondération, soit temporelle soit fréquentielle, sélectionnée lors du choix du critère quadratique pondéré. Ceci peut constituer, à notre avis, un axe de recherche intéressant. \square

2.2 Estimation paramétrique

Après avoir sélectionné une structure du modèle ainsi qu'un critère d'approximation, l'étape suivante de la procédure d'identification, qui est d'ailleurs l'une des étapes principales

considérées dans ce chapitre, concerne l'estimation des différents paramètres du modèle et l'évaluation de l'incertitude sur ces paramètres. Le point original traite du développement d'un algorithme pour l'optimisation des pôles réels de la BOG dans le cadre de l'identification de systèmes, à partir de signaux d'entrée-sortie connus, qui n'assurent pas nécessairement l'orthogonalité des sorties de filtres.

Les paramètres optimaux (coefficients de Fourier et pôles), sont obtenus en minimisant le critère quadratique :

$$(\hat{\theta}, \hat{\xi}) = \underbrace{\arg \min}_{\theta, \xi} (J_N)$$

Notons que tous les modèles utilisant les bases orthogonales, y compris les filtres de la BOG qui seront détaillés ultérieurement, sont, d'une part, linéaires par rapport aux coefficients de Fourier et, d'autre part, non linéaires par rapport aux pôles. Une méthode hiérarchique à deux niveaux (voir figure IV.3) sera donc utilisée pour l'estimation paramétrique ; au niveau supérieur, les coefficients de Fourier seront calculés par la méthode des moindres carrés simples et au niveau inférieur les pôles seront évalués par une technique itérative d'optimisation non linéaire.

2.2.1 Estimation des coefficients de Fourier des filtres orthogonaux

Bien que la base orthogonale considérée dans ce chapitre soit la BOG, le calcul des coefficients s'applique sans restriction à toutes les bases considérées dans ce document. Il s'agit donc de déterminer les coefficients de Fourier qui minimisent le critère quadratique, pour un choix fixe de pôles.

$$\hat{\theta} = \underbrace{\arg \min}_{\theta} (J_N)$$

Le modèle étant linéaire par rapport aux paramètres, les coefficients optimaux sont calculés par la méthode des moindres carrés simples, c'est-à-dire compte tenu des définitions (IV.5) :

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y_m \quad (\text{IV.9})$$

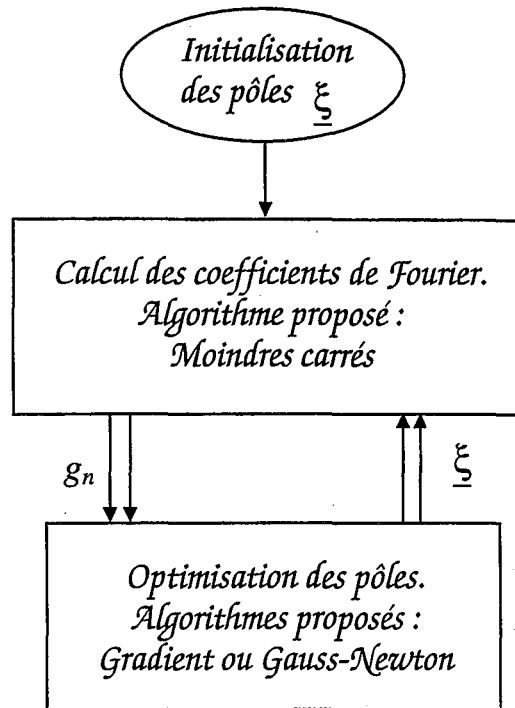


Figure IV.3 - Estimation paramétrique par la technique de relaxation.

Algorithme hiérarchique à deux niveaux.

On trouve également dans la littérature [Gunnarsson *et al.* 1991] des algorithmes utilisant la formulation récursive des moindres carrés [Ljung, 1987] pour l'estimation des coefficients de Fourier. Ces algorithmes sont parfois employés dans des schémas de commande en ligne.

Propriétés statistiques de l'estimateur

Des résultats classiques [Ljung, 1987], concernant l'estimateur des moindres carrés, seront exposés dans ce paragraphe. Nous signalerons que cet estimateur n'est pas biaisé. Ensuite, nous procéderons au calcul de la matrice de covariance des paramètres.

Supposons que la sortie observée puisse être décrite par le modèle suivant :

$$Y_m = X\theta^* + E_0 \quad (\text{IV.10})$$

où $E_0 = [e_0(1) \ e_0(2) \ \dots \ e_0(H)]^T$ représente une réalisation aléatoire du bruit et où θ^* peut être considéré comme la valeur vraie des coefficients de Fourier.

Afin de montrer que l'estimateur des moindres carrés n'est pas biaisé, il convient de trouver θ^* , lors du calcul de $\hat{\theta}$. En remplaçant (IV.10) dans (IV.9), on obtient :

$$\hat{\theta} = \theta^* + (X^T X)^{-1} X^T E_0 \quad (\text{IV.11})$$

L'espérance mathématique du vecteur des paramètres $\mathcal{E}\{\hat{\theta}\}$ s'écrit :

$$\mathcal{E}\{\hat{\theta}\} = \theta^* + \mathcal{E}\{(X^T X)^{-1} X^T E_0\}$$

Rappelons que la matrice des régresseurs définie après l'équation (IV.5) contient uniquement les vecteurs de sortie des filtres orthogonaux, car la configuration *erreur de sortie* a été adoptée (voir figure IV.2). Les vecteurs de la matrice de régression X ne sont donc pas corrélés à l'erreur E_0 . On peut alors écrire :

$$\mathcal{E}\{\hat{\theta}\} = \theta^* + (X^T X)^{-1} X^T \mathcal{E}\{E_0\}$$

Sous l'hypothèse que le bruit est de moyenne nulle, l'espérance du vecteur des coefficients de Fourier estimés (IV.11) est égale à la valeur vraie des paramètres, ce qui montre qu'il n'est pas biaisé :

$$\mathcal{E}\{\hat{\theta}\} = \theta^*$$

De plus, d'après le théorème de Gauss-Markov, sous l'hypothèse supplémentaire que le bruit suit une distribution gaussienne de matrice de covariance $(\sigma^2 I_{H \times H})$, l'estimateur des moindres carrés $\hat{\theta}$ (IV.11) est à variance minimale, dont l'expression est donnée par [Draper *et al.*, 1981] :

$$\text{cov}\{\hat{\theta}\} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

Remarque

Ljung, (1987) démontre que la variable aléatoire $\sqrt{H}(\hat{\theta} - \theta^*)$ converge en distribution vers la distribution gaussienne avec une moyenne nulle et une matrice de covariance $\sigma^2 (X^T X)^{-1}$ quand H tend vers l'infini. ☒

Puisque la variance σ^2 du bruit est le plus souvent inconnue, l'estimateur sans biais s^2 de σ^2 ($\mathcal{E}(s) = \sigma$) est donné par :

$$s^2 = \frac{e^T e}{H - (N + 1)}$$

où $(N+1)$ représente le nombre de coefficients de Fourier à calculer.

Finalement, les variances estimées s_k des différents coefficients g_k sont les termes diagonaux de la matrice $cov\{\hat{\theta}\}$.

2.2.2 Estimation des pôles des filtres de la BOG

Dans cette section, on s'intéresse au niveau inférieur de l'algorithme hiérarchique représenté sur la figure IV.3. Un algorithme itératif est nécessaire pour calculer les pôles de la BOG, minimisant le critère quadratique puisqu'il s'exprime de façon non linéaire par rapport à ces pôles. Deux méthodes d'optimisation seront présentées, à savoir l'algorithme du gradient et celui de Gauss-Newton. Signalons que l'une des propriétés inhérentes à ce type d'algorithme est que seule la convergence vers des minima locaux peut être garantie et que, si le pas des itérations de l'algorithme du gradient est inadapté, la convergence de celui-ci risque d'être lente, oscillante ou non garantie.

Remarque

Le nombre de pôles étant proportionnel au nombre de filtres utilisés, on a un nombre important de pôles à estimer quand le nombre de filtres est élevé. Par ailleurs, si le modèle est surparamétrisé, le critère quadratique peut présenter plusieurs zones « plates » et la convergence des algorithmes itératifs risque d'être fortement compromise. Une idée pour limiter ce nombre, consiste à fixer les pôles soit en progression arithmétique :

$$\xi_k = \xi_0 + k\Delta \quad (\Delta \text{ représente la raison de la progression})$$

soit en progression géométrique :

$$\xi_k = \xi_0 \Delta^k \quad (\Delta \text{ représente la raison de la progression})$$

dans la définition des filtres de la BOG :

$$\mathcal{E}_n = \frac{\sqrt{1 - |\xi_n|^2}}{z - \xi_n} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 - \xi_{k-1} z}{z - \xi_k} \right)$$

Il suffit alors d'optimiser le critère quadratique par rapport à seulement deux paramètres qui sont : la raison Δ et le premier pôle ξ_0 .

Bien que cette méthode ne fournisse qu'une solution sous optimale, elle a pour mérite de limiter le nombre de paramètres non linéaires du modèle à estimer. \square

2.2.2.1 Algorithme du gradient

L'algorithme du gradient est basé sur le développement à l'ordre un du critère J (supposé différentiable), pour des variations de pôles $\Delta \underline{\xi}^{(i)}$ suffisamment petites) :

$$J(\underline{\hat{\xi}}^{(i+1)}) = J(\underline{\hat{\xi}}^{(i)} + \Delta \underline{\hat{\xi}}^{(i)}) = J(\underline{\hat{\xi}}^{(i)}) + \left[\frac{\partial J(\underline{\xi}^{(i)})}{\partial \underline{\xi}^{(i)}} \right]_{\underline{\xi}^{(i)} = \underline{\hat{\xi}}^{(i)}}^T \Delta \underline{\hat{\xi}}^{(i)} + O(\Delta \underline{\hat{\xi}}^{(i)})$$

D'où :

$$\Delta J = J(\underline{\hat{\xi}}^{(i+1)}) - J(\underline{\hat{\xi}}^{(i)}) \approx \left[\frac{\partial J(\underline{\xi}^{(i)})}{\partial \underline{\xi}^{(i)}} \right]_{\underline{\xi}^{(i)} = \underline{\hat{\xi}}^{(i)}}^T \Delta \underline{\hat{\xi}}^{(i)}$$

La minimisation de J correspond à la minimisation de ΔJ , ce qui conduit à choisir $\Delta \underline{\hat{\xi}}^{(i)}$ colinéaire avec le gradient de J et de signe opposé. En conséquence, on peut écrire, en allégeant les notations :

$$\underline{\xi}^{(i+1)} = \underline{\xi}^{(i)} - \rho \frac{\partial J^{(i)}(\underline{\xi}^{(i)})}{\partial \underline{\xi}} \quad (\text{IV.12})$$

Le pas ρ peut être adapté, en fonction de la vitesse de convergence : si l'algorithme est lent ρ est augmenté s'il oscille autour de la solution ou s'il diverge ρ est diminué.

Le calcul du gradient se fait en différentiant (IV.4) par rapport au vecteur des pôles :

$$\frac{\partial J_N}{\partial \underline{\xi}} = 2 \frac{\partial e_N^T}{\partial \underline{\xi}} e_N \quad (\text{IV.13.a})$$

$$\text{avec : } \frac{\partial e_N^T}{\partial \underline{\xi}} = - \left[\theta^T \frac{\partial X^T}{\partial \xi_0} \quad \theta^T \frac{\partial X^T}{\partial \xi_1} \quad \dots \quad \theta^T \frac{\partial X^T}{\partial \xi_N} \right] \quad (\text{IV.13.b})$$

X ayant été défini après (IV.5).

On voit qu'il est nécessaire de déterminer les sensibilités de toutes les sorties de filtres par rapport à tous les pôles. Ce calcul s'obtient facilement à partir des équations (III.45.a et b) reprises ci-dessous :

$$\frac{\partial X_n(z)}{\partial \xi_i} = \frac{z^2 - 1}{(z\xi_i - 1)(z - \xi_i)} X_n(z) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (\text{IV.14.a})$$

$$\frac{\partial X_n(z, \xi_n)}{\partial \xi_n} = \frac{\xi_n z - 1}{(\xi_n^2 - 1)(z - \xi_n)} X_n(z, \xi_n) \quad i = n \quad (\text{IV.14.b})$$

$$\frac{\partial X_n(z, \xi_n)}{\partial \xi_i} = 0 \quad i = n + 1, \dots, N \quad (\text{IV.14.c})$$

L'utilisation de (IV.14.c) permet de simplifier d'avantage (IV.13.b) en y introduisant des blocs de zéros :

$$\frac{\partial e_N^T}{\partial \underline{\xi}} = - \left[\theta^T \begin{bmatrix} \frac{\partial X_0^T}{\partial \xi_0} \\ \frac{\partial X_1^T}{\partial \xi_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_N^T}{\partial \xi_0} \end{bmatrix} \quad \theta^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times H} \\ \frac{\partial X_1^T}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_N^T}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \theta^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times H} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{1 \times H} \\ \frac{\partial X_N^T}{\partial \xi_N} \end{bmatrix} \right] \quad (\text{IV.15})$$

Remarque : instabilité numérique de l'équation (IV.14.a)

Notons que l'équation (IV.14.a), telle qu'elle est écrite, contient un pôle instable en $z_p = \xi_i^{-1}$. Par ailleurs, la fonction $\mathcal{E}_n(z)$ possède un zéro en ce point qui, théoriquement s'élimine avec le pôle. Cependant en pratique, la moindre erreur numérique, provenant du calcul en virgule flottante, rend la dérivée du signal de sortie divergente. En conséquence, (IV.14.a) doit être réécrite de manière à éliminer le pôle et le zéro, avant de procéder à l'évaluation du signal dérivé. D'après la définition de $\mathcal{E}_n(z)$ (II.32), l'équation (IV.14.a) peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial X_n(z)}{\partial \xi_i} = \frac{z^2 - 1}{(z\xi_i - 1)(z - \xi_i)} \frac{\sqrt{1 - \xi_n^2} z}{z - \xi_n} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - z\xi_k}{z - \xi_k} U(z) \quad (\text{IV.16})$$

qui devient après simplification :

$$\frac{\partial X_n(z)}{\partial \xi_i} = \frac{1 - z^2}{(z - \xi_i)^2} \frac{\sqrt{1 - \xi_n^2} z}{z - \xi_n} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n-1} \frac{1 - z\xi_k}{z - \xi_k} U(z) \quad (\text{IV.17}) \quad \square$$

A présent, il suffit de remplacer (IV.14.b) par (IV.17), ensuite de calculer (IV.15) et enfin (IV.13.a), afin d'obtenir la forme analytique du gradient. Il ne reste plus qu'à appliquer (IV.12) pour déterminer les pôles à l'itération $(i + 1)$ en fonction des pôles à l'itération (i) .

Remarque

Une autre manière d'effectuer ce calcul consiste à utiliser les résultats du chapitre III, et plus précisément l'équation (III.46) :

$$\frac{\partial X_n(z, \xi_n)}{\partial \xi_i} = \sum_{j=i}^{2N+1-i} C_{n,i,j}(\xi_j) X_j(z, \xi_j)$$

où $C_{n,i,j}$ est défini dans le tableau III.3 pour tout $j \leq n$ et dans le tableau III.4 pour tout $j > n$. \square

Exemple IV.1

On a choisi d'appliquer la méthode du gradient sur l'exemple traité dans la section III.5.5.2. On rappelle que les conditions « théoriques » d'optimalité ont déjà été déterminées (voir tableau III.6 pour les optima globaux et le tableau III.2 pour les optima locaux). Le problème consiste à identifier, avec deux filtres de la BOG, le système dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(z) = \frac{0.3z}{z - 0.9} + \frac{0.6z}{z - 0.7} - \frac{1.5z}{z + 0.5} = \frac{-0.60z(z - 2.67)(z - 0.82)}{(z - 0.9)(z - 0.7)(z + 0.5)} \quad (\text{IV.18})$$

lorsqu'il est excité par la réponse impulsionnelle du filtre $F(z) = \frac{z}{z + 0.6}$. Il faut donc déterminer les pôles optima de la BOG dans cette configuration expérimentale, par l'algorithme du gradient, que l'on vient de présenter. Dans le but d'étudier la convergence de

celui-ci, le gradient a été évalué en différents points (ξ_0, ξ_1) et représenté par des vecteurs sur la figure IV.4.a, qui contient, en plus, les courbes isocritères de l'erreur quadratique et les pôles optima (voir figure III.9 pour plus de détails). Les observations suivantes peuvent être faites, à partir de l'analyse des directions de gradient :

- les initialisations autour des points extrêmes du type $(\xi_0, \xi_1) = (0.9, 0.9)$ ou $(\xi_0, \xi_1) = (-0.9, -0.9)$ sont à proscrire,
- si l'algorithme est initialisé sur la droite $\xi_0 = \xi_1$, cette contrainte est respectée à chaque itération, et l'on converge vers les minima des filtres de Laguerre,
- **pour toute autre initialisation, l'algorithme du gradient se dirige vers les minima globaux de l'erreur quadratique**, à condition, bien sûr, de régler le pas ρ de (IV.12) convenablement.

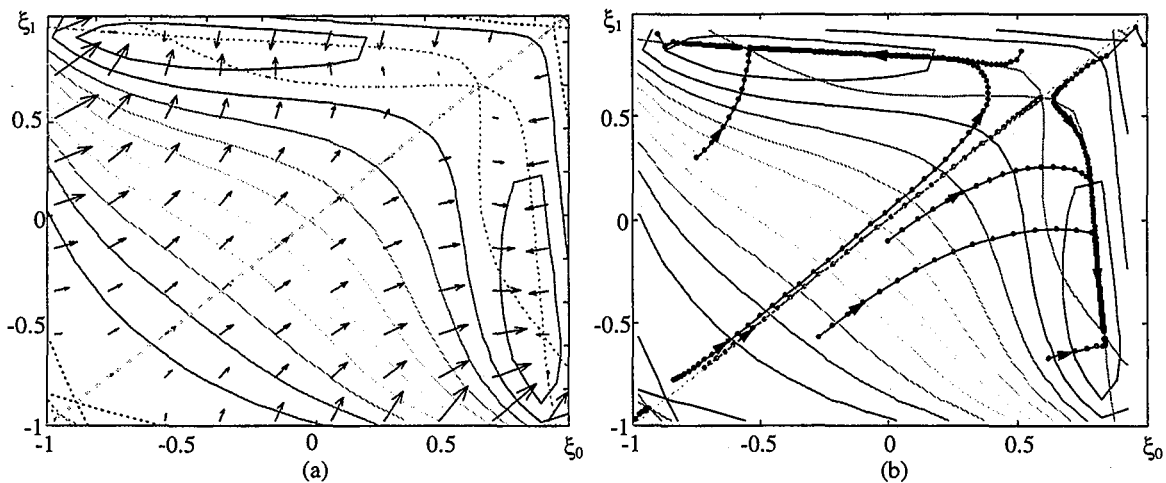


Figure IV.4 - (a) Directions du gradient. (b) Convergence vers les optima.

Ces remarques ont d'ailleurs été vérifiées, lors de diverses initialisations (voir tableau IV.1) de l'algorithme, conduisant à des convergences indiquées sur la figure IV.4.b. Le pas de l'algorithme a été fixé à $\rho = 0.03$ pour éviter une oscillation autour des minima globaux qui se trouvent à $(-0.533, 0.834)$ et $(0.834, -0.533)$.

ξ_0	-0.97	-0.74	-0.72	-0.57	0.00	0.62	-0.75	-0.90	0.52	0.99
ξ_1	-0.99	-0.84	-0.72	-0.27	0.10	-0.67	0.30	0.90	0.82	0.85

Tableau IV.1 - Initialisations « extrêmes » de l'algorithme du gradient.

(voir figure IV.4.b)

2.2.2.2 Algorithme de Gauss-Newton

On constate que l'algorithme est lent à converger, parce que le pas ρ est fixe. En réalité, il est petit quand on est loin de la solution et plus ou moins adapté quand on s'y approche. C'est pourquoi on propose d'utiliser des algorithmes de type Newton, caractérisés par des pas adaptatifs en fonction de l'emplacement des pôles à chaque itération. Ils sont basés sur le développement à l'ordre deux du critère J , supposé différentiable. Le vecteur des pôles à l'itération $(i + 1)$ s'écrit en fonction du vecteur des pôles à l'itération (i) :

$$\underline{\xi}^{(i+1)} = \underline{\xi}^{(i)} - \rho^{(New)} \left(\frac{\partial^2 J^{(i)}(\underline{\xi}^{(i)})}{\partial \underline{\xi}^T \partial \underline{\xi}} \right)^{-1} \frac{\partial J^{(i)}(\underline{\xi}^{(i)})}{\partial \underline{\xi}^T} \tag{IV.19}$$

où le pas de l'algorithme de Newton, $\rho^{(New)}$, à pour rôle d'atténuer ou d'amplifier l'effet de l'inverse du Hessien $\left(\frac{\partial^2 J^{(i)}}{\partial \underline{\xi}^T \partial \underline{\xi}} \right)^{-1}$. Généralement, le choix $\rho^{(New)} = 1$, correspond au pas optimal qui conduit au minimum de l'erreur quadratique en un nombre réduit d'itérations.

Le déplacement est maintenant interprété dans la direction, non plus du gradient, mais celle du minimum du critère quadratique. Il existe cependant une forte contrainte à l'application de cette méthode : la matrice du Hessien $\frac{\partial^2 J^{(i)}}{\partial \underline{\xi}^T \partial \underline{\xi}}$ doit être définie non négative [Boudarel, 1968], ce qui est généralement le cas quand on est proche de l'optimum. Cette condition peut, cependant, s'avérer assez contraignante du point de vue initialisation de la méthode.

Dans l'algorithme de Newton-Raphson le Hessien est calculé en différentiant le gradient (IV.13.a) par rapport au vecteur des pôles :

$$\frac{\partial^2 J^{(i)}}{\partial \underline{\xi}^T \partial \underline{\xi}} = 2 \frac{\partial e^{(i)}}{\partial \underline{\xi}^T} \frac{\partial e^{(i)}}{\partial \underline{\xi}} + 2 \frac{\partial^2 e^{(i)T}}{\partial \underline{\xi}^T \partial \underline{\xi}} e^{(i)} \tag{IV.20}$$

Le calcul de la dérivée seconde de l'erreur par rapport aux pôles nécessite la détermination de toutes les sensibilités d'ordre deux des sorties de filtres par rapport aux pôles, y compris les sensibilités croisées. Celles-ci peuvent être calculées en différenciant les équations (IV.14) par rapport à tous les pôles. De plus, pour contourner le problème d'instabilité numérique de (IV.14.a), il est nécessaire d'appliquer (IV.17) qui engendre des calculs volumineux. Tous ces facteurs, encouragent à délaissier la méthode de Newton-Raphson au profit de celle de Gauss-Newton où le Hessien approché est calculé en éliminant la partie se situant à droite de l'addition dans (IV.20). Cette méthode est d'autant plus justifiée que l'erreur $e^{(i)}$ est petite quand on s'approche de la solution et que les erreurs sont peu corrélées avec les fonctions de sensibilité du deuxième ordre [Walter *et al.*, 1994]. Le calcul du Hessien approché s'effectue donc à partir de la seule connaissance des fonctions de sensibilité du premier ordre, déjà utilisées pour le calcul du gradient :

$$\frac{\partial^2 J^{(app.)}}{\partial \underline{\xi}^T \partial \underline{\xi}} = 2 \frac{\partial e^{(i)} \partial e^{(i)T}}{\partial \underline{\xi} \partial \underline{\xi}} \quad (\text{IV.21})$$

Le Hessien approché est défini positif (bien que le Hessien ne le soit pas nécessairement) entraînant ainsi la possibilité de toujours trouver un nouveau vecteur de paramètres qui assure une diminution du critère [Walter *et al.* 1994].

Propriétés statistiques de l'estimateur

Puisque le modèle est non linéaire par rapport aux paramètres, il n'existe pas de formule théorique permettant de calculer la variance de l'estimation des paramètres. On peut toutefois accéder à son approximation par deux méthodes différentes :

- soit en linéarisant le critère quadratique à l'ordre un (développement en série de Taylor), ce qui revient à estimer les paramètres non linéaires par moindres carrés. On montre alors (pour plus de détail voir [Draper *et al.* 1981]) que la variance tend vers l'inverse du Hessien approché (IV.21), obtenu à la convergence, multiplié par la variance du bruit :

$$\text{cov}\{\hat{\underline{\xi}}\} = \sigma^2 \left[\frac{\partial^2 J^{(app.)}}{\partial \underline{\xi}^T \partial \underline{\xi}} \right]^{-1} \quad (\text{IV.22})$$

Ce résultat est à prendre avec circonspection à cause des suppositions qu'il nécessite. Il est d'autant plus valable que le critère est faiblement non linéaire autour de la solution, que le nombre de mesures est élevé et que le bruit suit réellement une distribution gaussienne ; or ces hypothèses ne sont jamais totalement satisfaites [Walter *et al.* 1994].

- soit en effectuant des simulations de Monte Carlo pour différents niveaux de bruits. Le principe de cette méthode, consiste à identifier le système un très grand nombre de fois avec des réalisations de bruit différentes, ayant des caractéristiques statistiques identiques et ensuite d'évaluer numériquement la variance de l'estimation des pôles. Cette méthode sera détaillée plus amplement dans l'exemple IV.3.

Auparavant, examinons la convergence de l'algorithme de Gauss-Newton sur l'approximation de la fonction de transfert décrite précédemment.

Exemple IV.2

Les données expérimentales de l'exemple IV.1 sont reprises. La direction de propagation de l'algorithme est maintenant définie par $\left(\frac{\partial^2 J^{(appr)}}{\partial \underline{\xi}^T \partial \underline{\xi}} \right)^{-1} \frac{\partial J}{\partial \underline{\xi}}$ (voir la figure IV.5.a). L'algorithme est initialisé, à nouveau, à partir des points du tableau IV.1). La convergence est illustrée par la figure IV.5.b.

En examinant la figure IV.5.a, on constate :

- qu'à la différence de l'algorithme du gradient, si l'initialisation est faite sur la droite $\xi_0 = \xi_1$, l'algorithme s'en écarte, pour converger vers les minima globaux,
- que l'algorithme converge de manière assez convenable, mis à part quelques cas d'initialisation extrêmes, comme par exemple autour de -0.9 ou autour de 0.9 (pour les deux pôles),
- que l'algorithme converge plus rapidement (comparé à celui du gradient).

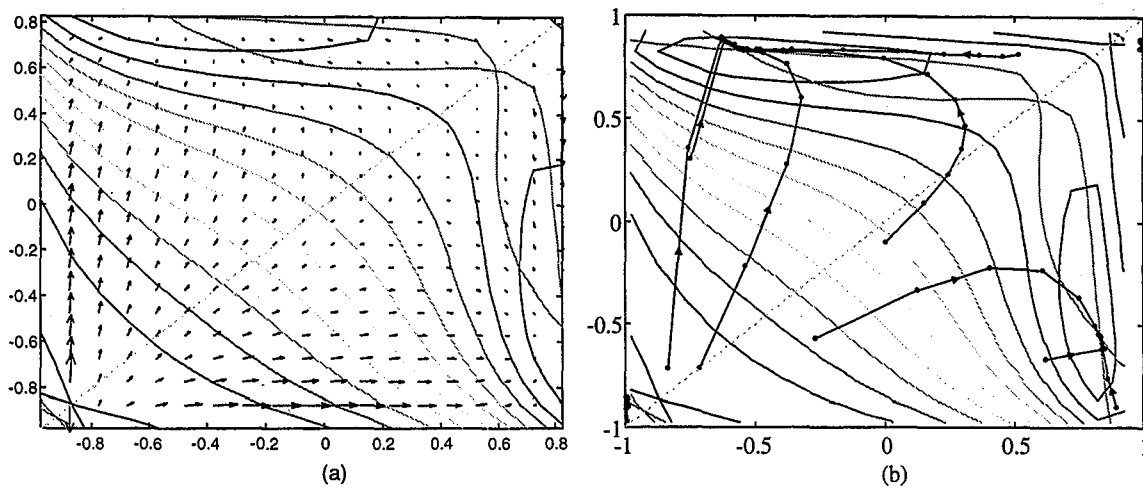


Figure IV.5 - (a) Direction de recherche de l'algorithme de Gauss-Newton.

(b) Convergence de l'algorithme de Gauss-Newton ($\rho = 1$)

A partir des exemples IV.1 et IV.2, on conclut que l'initialisation des pôles dans les algorithmes du gradient et de Gauss-Newton doit se faire de manière distribuée et bien répartie dans l'intervalle $]-1, 1[$. On rappelle que l'ordonnement des pôles n'a pas d'importance dans le résultat final, à cause de la symétrie décrite dans le corollaire III.2 p.130.

Exemple IV.3

Considérons, à présent, le cas plus complexe d'un système qui a pour fonction de transfert :

$$F(z) = \frac{3.8z^5 - 3.71z^4 + 0.3995z^3 - 0.2439z^2 + 0.254z}{z^5 - 0.85z^4 - 0.555z^3 + 0.616z^2 - 0.0733z - 0.0612} \quad (\text{IV.23})$$

dont les pôles et les zéros sont distribués comme le montre la figure IV.6. Notons la présence de deux pôles complexes conjugués.

Puisque l'on optimise par rapport aux pôles réels seulement de la BOG, on peut compenser le défaut de structure résultant, en fixant un ordre de troncature élevé. Par ailleurs, il se peut aussi qu'un modèle d'ordre réduit approche convenablement le comportement de (IV.23).

Le signal d'entrée sélectionné pour l'identification de ce système est d'amplitude et de durée aléatoire et comporte 400 points. Il est tracé avec le signal de sortie sur la figure IV.7.

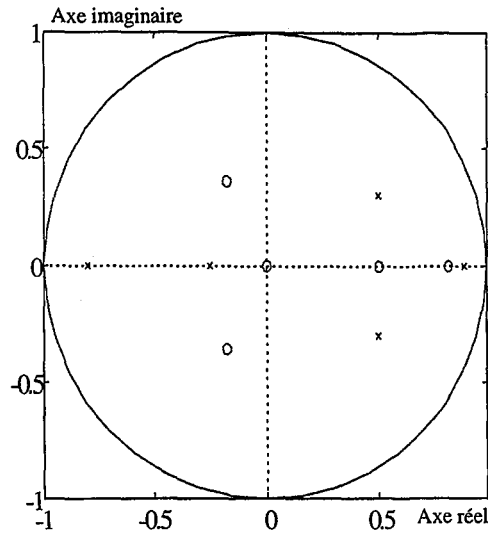


Figure IV.6 - Lieu des pôles et des zéros

L'erreur quadratique normalisée par rapport au nombre de points est redéfinie par :

$$J_N = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^H (y_m(k) - \hat{y}_N(k))^2 = \frac{1}{H} (Y - X\theta)^T (Y - X\theta) \quad (\text{IV.24})$$

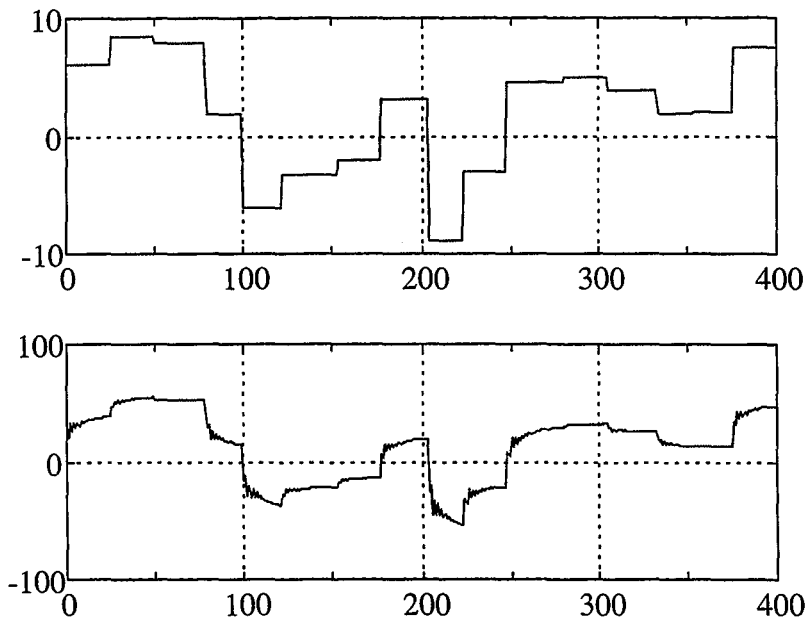


Figure IV.7 - Signaux entrée-sortie

Les pôles de la BOG ont été optimisés pour différents ordres de troncature du réseau de filtres, en appliquant l'algorithme de Gauss-Newton. L'erreur quadratique normalisée (IV.24) a été

évaluée pour chaque ordre, allant de 1 à 5, et tracée sur la figure IV.8. Les pôles optima vers lesquels l'algorithme a convergé y figurent également.

Notons que l'évolution de l'erreur quadratique devient peu importante à partir de l'utilisation de trois filtres. On retiendra donc le modèle à trois filtres BOG dont les pôles optima sont $\xi = [0.915 \ 0.340 \ -0.843]$, pour le reste de nos simulations.

Maintenant, afin d'étudier l'influence du bruit de mesure sur l'estimation des pôles, on a simulé le système défini par la fonction de transfert (IV.23) en ajoutant à sa sortie un bruit gaussien de moyenne nulle, dont la variance a été calculée de façon à ce que le rapport bruit sur signal (b/s)³ vaille -20db. La méthode de Monte Carlo a été utilisée pour évaluer la variance de l'estimation des paramètres.

Cent simulations ont été conduites avec cent réalisations de bruit différentes. Lors de chaque réalisation les pôles de la BOG ont été initialisés à $\underline{\xi} = [0.9 \ 0 \ -0.9]$ et optimisés par la méthode de Gauss-Newton. L'algorithme a été arrêté au bout de quarante itérations. Un échantillon d'une sortie bruitée est tracé sur la figure IV.9.

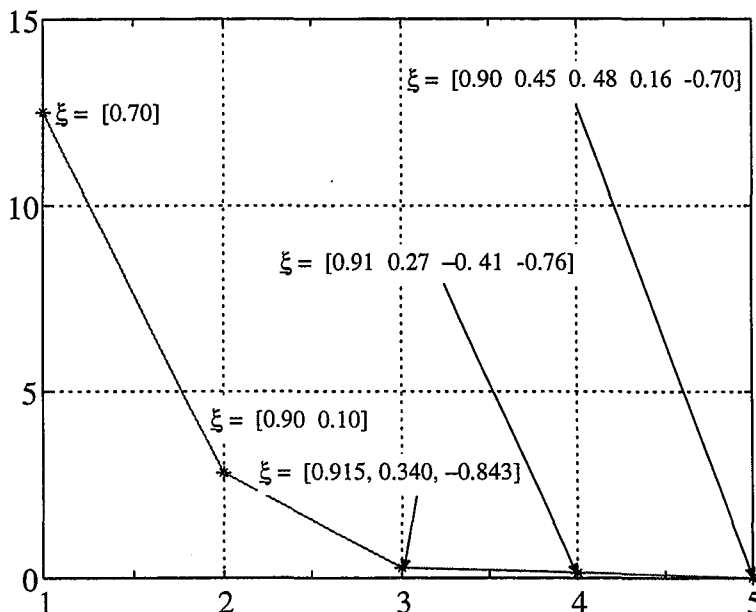


Figure IV.8 - Erreur quadratique normalisée (par rapport au nombre de mesures), fonction de l'ordre de troncature de la BOG. Les pôles sont optimisés.

³ Energie du bruit sur énergie du signal

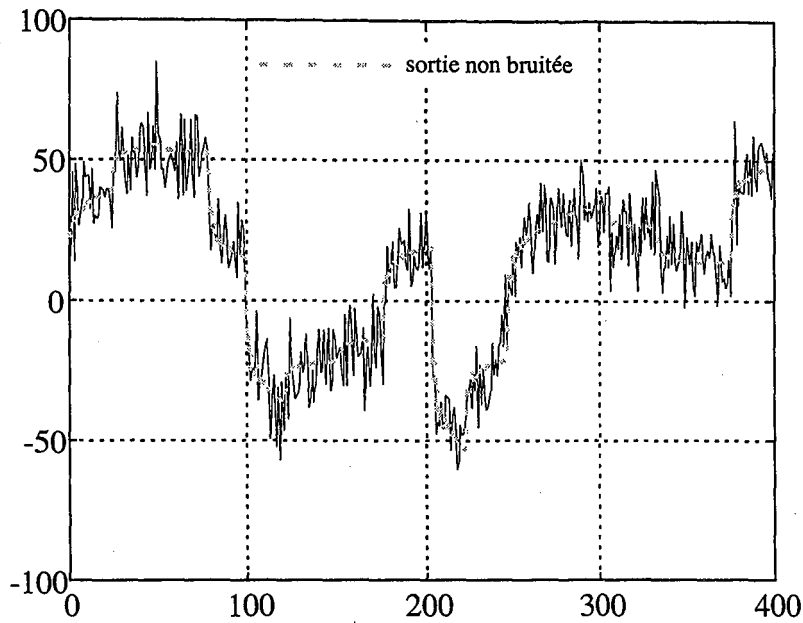


Figure IV.9 - Signal de sortie additionné à une réalisation du bruit avec $b/s = 10\%$

Les résultats de l'optimisation pour chaque réalisation sont reportés sur la figure IV.10. Les trois signaux correspondent aux trois valeurs du vecteur ξ pour les cent essais.

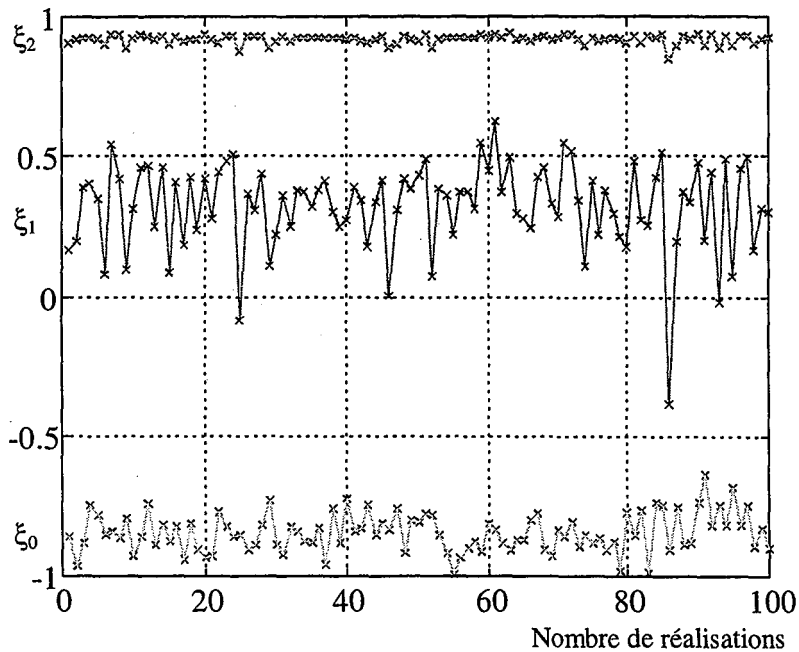


Figure IV.10 - Estimation des pôles par algorithme de Gauss-Newton pour 100 réalisations du bruit

Une estimation non biaisée de la moyenne et de la matrice de covariance des pôles a été calculée à partir de ces données expérimentales :

$$\hat{\underline{\xi}}^{(moy)} = [0.919 \ 0.324 \ -0.845] \text{ avec } cov(\underline{\xi}) = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0021 & -0.0002 \\ 0.0021 & 0.0240 & 0.0002 \\ -0.0002 & 0.0002 & 0.0047 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

La moyenne des pôles est sensiblement identique au résultat de l'identification du système, à partir de données d'entrée-sortie non bruitées, (voir figure IV.8 : $\underline{\xi} = [0.915 \ 0.340 \ -0.843]$).

De plus, l'écart-type de l'estimation des pôles se calcule à partir des éléments de la diagonale de $cov(\underline{\xi})$: $\sigma(\underline{\xi}) = [0.01 \ 0.15 \ 0.07]$. On constate que l'écart type est le plus élevé, pour la dynamique la plus faible (correspondant à $\hat{\xi}_2^{(moy)} = 0.324$), comme le montre d'ailleurs la figure IV.10.

Afin de vérifier visuellement la qualité de l'approximation, on a tracé sur la figure IV.11 la réponse non bruitée du système originel ainsi que la réponse du modèle obtenu à trois filtres BOG ayant comme pôles $\hat{\underline{\xi}}^{(moy)}$ (IV.25).

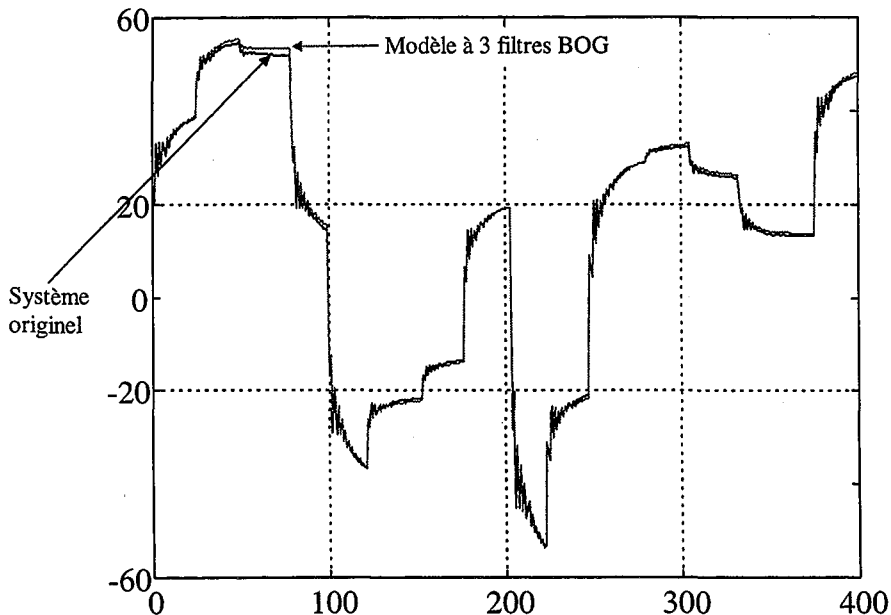


Figure IV.11 - Sortie réelle (non bruitée) et modèle obtenu tracés sur le jeu de données ayant servies à l'identification

De plus, on a tracé les signaux d'auto et d'intercorrélation des résidus sur les figures IV.12.

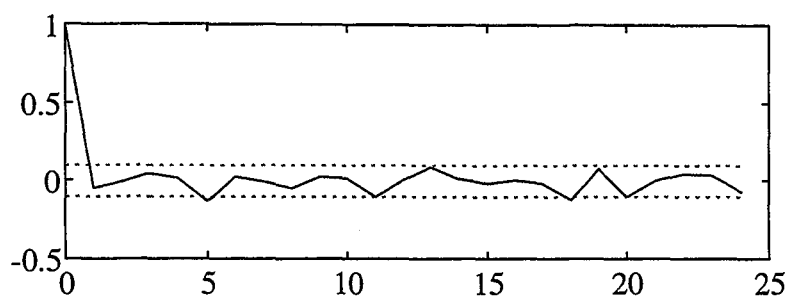


Figure IV.12.a - Fonction d'autocorrélation du résidu et intervalle de confiance à 95%

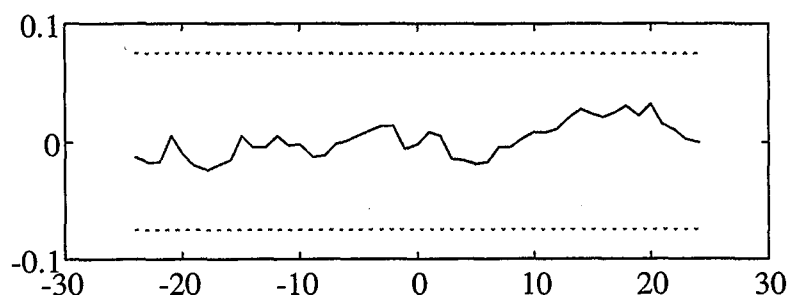


Figure IV.12.b - Fonction d'intercorrélation de l'entrée et du résidu et intervalle de confiance à 95%

Ensuite, dans le souci de valider le modèle obtenu, un nouveau jeu de données a été généré. Les réponses du système et du modèle peuvent être appréciées sur la figure IV.13.

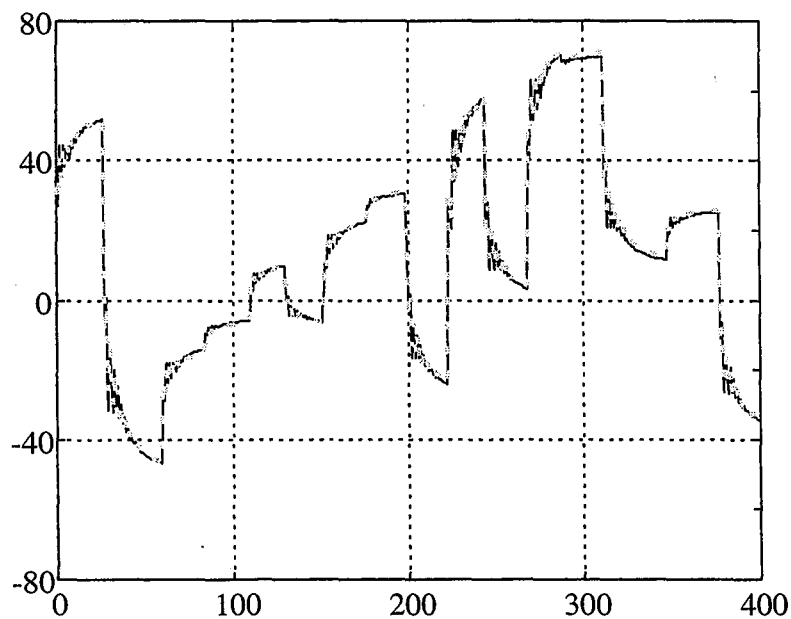


Figure IV.13 - Validation du modèle sur un nouveau jeu de données (non bruité).

De même, les signaux d'auto et d'intercorrélation des résidus sont tracés sur la figure IV.14.

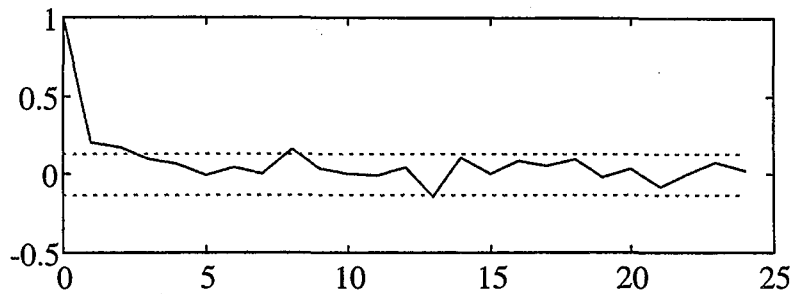


Figure IV.14.a - Fonction d'autocorrélation du résidu et intervalle de confiance à 95%

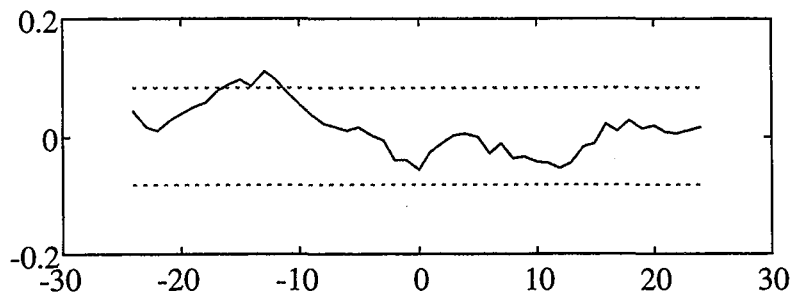


Figure IV.14.b - Fonction d'intercorrélation de l'entrée et du résidu et intervalle de confiance à 95%

On peut expliquer les légers dépassements des seuils sur les figures IV.14.a et b par le fait que le comportement de toutes les dynamiques n'a pas été modélisé. Notons toutefois que le modèle obtenu est d'ordre trois alors que la fonction de transfert originelle est d'ordre cinq. Visiblement, une approximation d'ordre supérieur devrait donner de meilleurs résultats.

3. Extension aux systèmes linéaires multivariables

En sachant que tout système dynamique multi-entrées multi-sorties (MIMO⁴), complètement observable, peut être décomposé de manière simple, en autant de sous-systèmes MISO qu'il possède de sorties, le problème d'identification d'un système MIMO peut se diviser en plusieurs problèmes d'identification de systèmes MISO. C'est pourquoi notre travail, dans

⁴ Multi Input Multi Output

cette section, concerne exclusivement l'identification de systèmes multi-entrées mono-sortie MISO⁵ (voir figure IV.15).

Dans ce cadre, l'originalité de notre travail, réside dans le fait que, les extensions proposées, s'appuient sur l'ensemble des résultats et propriétés établis au paragraphe précédent. En particulier, une extension aux cas multi-entrées mono-sortie (MISO) de l'algorithme d'optimisation des pôles de la BOG est proposée.

Chacune des entrées U_i est reliée à la sortie Y_m par une fonction de transfert F_i (figure IV.15).

On peut donc écrire :

$$Y_m(z) = \sum_{i=1}^r F_i(z)U_i(z) + W(z)$$

où $W(z)$ représente le bruit de mesure.

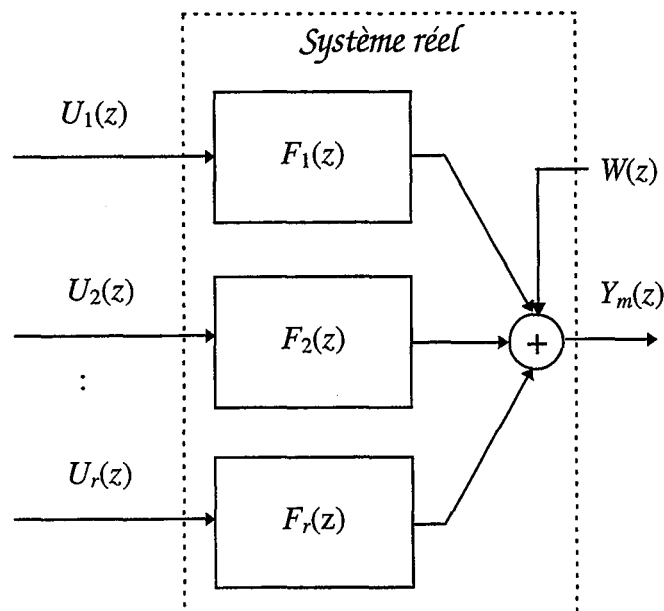


Figure IV.15 - Système multi-entrées mono-sortie (MISO)

Il existe des travaux associant les filtres orthogonaux aux systèmes multivariables. A titre d'exemple, Tanguy (1994) propose une technique d'identification en ligne de systèmes MISO stables par des filtres de Laguerre. Dans son approche, l'auteur n'a pas porté d'attention

⁵ Multi Input Single Output

particulière au choix du pôle de chaque sous-système. Ce problème a été résolu dans [Ekongolo, 1996] où une extension de l'algorithme d'optimisation des pôles de Laguerre au cas multivariable a été présentée.

Par ailleurs, on a analysé l'article de Ninness *et al.*, (1995) concernant l'identification de systèmes MIMO par les filtres de la BOG. Les auteurs proposent uniquement une méthode d'évaluation des coefficients de Fourier. Ils présentent l'idée de pouvoir fixer les pôles de chaque sous-système comme étant un avantage particulier de cette méthode. Ceci est effectivement le cas si l'on dispose d'une connaissance *a priori* de chaque sous-système. Cependant, si ce n'est pas le cas, un choix arbitraire des pôles entraîne, par compensation, l'utilisation d'un grand nombre de filtres.

Dans ce document, les pôles des sous-systèmes sont tous supposés inconnus et optimisés. Cependant, il est tout à fait envisageable de considérer une situation intermédiaire où une connaissance partielle du système serait incorporée, en fixant, *a priori*, les pôles connus et en optimisant les autres.

Ce travail s'inscrit dans la continuité de celui effectué au sein de notre équipe par Ekongolo, (1996) sur les fonctions de Laguerre.

Chacune des fonctions de transfert $F_{(i)}(z)$ est modélisée sur la base de N_i filtres orthogonaux :

$$F_{(i)}(z) \approx \sum_{n=0}^{N_i} g_{n,(i)} \mathcal{B}_n(z, \underline{\xi}_{(i)}) U_{(i)}(z) \quad (\text{IV.26})$$

La sortie globale du système MISO se formule comme suit :

$$\hat{Y}(z) = \sum_{i=1}^r F_{(i)}(z) U_{(i)}(z) \quad (\text{IV.27})$$

Le critère quadratique s'écrit :

$$J = \sum_{k=1}^H \left(y_m(k) - \underbrace{\sum_{i=1}^r \sum_{n=0}^{N_i} g_{n,(i)} \mathcal{B}_n(k, \underline{\xi}_{(i)}) * u_{(i)}(k)}_{x_{n,(i)}(k)} \right)^2$$

Sa formulation matricielle est :

$$J = (Y_m - X\Theta)^T (Y_m - X\Theta) \quad (\text{IV.28.a})$$

avec :

$$X = [X_{(1)} \ X_{(2)} \ \dots \ X_{(r)}], \quad X_{(i)} = [X_{0,(i)} \ X_{1,(i)} \ \dots \ X_{N_r,(i)}], \quad (\text{IV.28.b})$$

$$X_{n,(i)} = [x_{n,(i)}(1) \ x_{n,(i)}(2) \ \dots \ x_{n,(i)}(H)]^T \quad (\text{IV.28.c})$$

$$x_{n,(i)}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{ \mathbf{x}_{n,(i)}(z) \}, \quad \mathbf{x}_{n,(i)}(z) = \frac{\sqrt{1 - |\xi_{n,(i)}|^2}}{z - \xi_{n,(i)}} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 - \xi_{k-1,(i)} z}{z - \xi_{k,(i)}} \right) u_{(i)}(z) \quad (\text{IV.28.d})$$

$$\Theta = [\theta_{(1)}^T \ \theta_{(2)}^T \ \dots \ \theta_{(r)}^T]^T \quad \text{et} \quad \theta_{(i)} = [g_{0,(i)} \ g_{1,(i)} \ \dots \ g_{N_r,(i)}]^T \quad (\text{IV.28.e})$$

Puisque le modèle est linéaire par rapport aux coefficients de Fourier, ceux-là se calculent aisément par la méthode des moindres carrés :

$$\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y_m \quad (\text{IV.29})$$

Les propriétés statistiques de cet estimateur, présentées au paragraphe 2, sont toujours valables. En effet, si $w(k)$ est assimilé à un bruit blanc de distribution gaussienne ayant une moyenne nulle et une matrice de covariance $\sigma^2 I_{H \times H}$, alors la matrice de covariance des paramètres s'écrit : $\text{cov}\{\hat{\Theta}\} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$.

Remarque

Malgré la propriété d'orthogonalité, le conditionnement et la régularité de la matrice $X^T X$, dépendent des soins qui sont portés au choix des signaux d'excitation u_i utilisés pour l'estimation. Ces signaux doivent non seulement être suffisamment persistants, comme pour l'identification de systèmes monovariés, mais également décorrélés deux à deux, pour éviter les problèmes de conditionnement de la matrice $(X^T X)$ dans (IV.29). \square

Les pôles de tous les sous-systèmes, regroupés dans le vecteur $\underline{\xi}$, seront donc optimisés simultanément en utilisant soit la méthode du gradient, soit celle de Gauss-Newton. Signalons que, dans une configuration de r sous-systèmes avec $(N_i + 1)$ pôles dans chaque sous-système, on a un total de $\sum_{i=1}^r (N_i + 1)$ paramètres non linéaires à estimer. Afin de limiter ce nombre, on peut, une fois de plus, songer à fixer les pôles de chaque sous-système soit en progression arithmétique, soit en progression géométrique (voir remarque p.160, pour plus de détails) et n'estimer ainsi que deux paramètres pour chaque sous-système. Le nombre total de paramètres se réduit alors à $(2rN_i)$. Une deuxième solution consiste à choisir des pôles identiques pour tous les sous-systèmes. Ceci ramène le nombre de pôles à N_i .

Pour des raisons évidentes de simplicité d'écriture, seul un système MISO à deux entrées sera décrit dans ce paragraphe. La généralisation à plusieurs entrées pourrait se faire assez facilement, à partir des équations qui seront établies dans cette section. Pour optimiser les pôles par l'une des deux formules itératives (IV.12) ou (IV.19), il est nécessaire de calculer le gradient :

$$\frac{J}{\partial \underline{\xi}} = 2 \frac{\partial e^T}{\partial \underline{\xi}} e \quad (\text{IV.30})$$

avec :

$$\frac{\partial e^T}{\partial \underline{\xi}} = - \left[\underbrace{\Theta^T \left[\frac{\partial X_{(1)}^T}{\partial \xi_{0,(1)}} \quad \mathbf{0}_{N_2 \times H} \right] \quad \Theta^T \left[\frac{\partial X_{(1)}^T}{\partial \xi_{1,(1)}} \quad \mathbf{0}_{N_2 \times H} \right] \quad \dots \quad \Theta^T \left[\frac{\partial X_{(1)}^T}{\partial \xi_{N_1,(1)}} \quad \mathbf{0}_{N_2 \times H} \right]}_{\text{Différentiation par rapport aux pôles du système 1}} \right] \quad (\text{IV.31})$$

$$\underbrace{\Theta^T \left[\mathbf{0}_{N_1 \times H} \quad \frac{\partial X_{(2)}^T}{\partial \xi_{0,(2)}} \right] \quad \Theta^T \left[\mathbf{0}_{N_1 \times H} \quad \frac{\partial X_{(2)}^T}{\partial \xi_{1,(2)}} \right] \quad \dots \quad \Theta^T \left[\mathbf{0}_{N_1 \times H} \quad \frac{\partial X_{(2)}^T}{\partial \xi_{N_2,(2)}} \right]}_{\text{Différentiation par rapport aux pôles du système 2}}$$

Rappelons que le filtre d'ordre $(i-1)$ de tout modèle j ne dépend que des i premiers pôles (de ξ_0 à ξ_{i-1}). En conséquence, par application de (IV.14.c), la sensibilité des i premières sorties de chaque sous-système par rapport au pôle ξ_i est nulle. On écrit donc :

$$\frac{\partial X_{(j)}}{\partial \xi_{i,(j)}} = \begin{bmatrix} 0_{H \times i} & \frac{\partial X_{(j)}}{\partial \xi_{i,(j)}} & \dots & \frac{\partial X_{(j)}}{\partial \xi_{N_i,(j)}} \end{bmatrix}$$

avec $j = 1$ ou 2 et $i = 0, 1, \dots, N_j$.

Ceci simplifie d'avantage (IV.31). Les autres sensibilités sont définies par les équations (IV.14.a) et (IV.17). Le calcul du Hessien approché se fait directement à partir de la connaissance de la sensibilité de l'erreur de sortie par rapport au vecteur des pôles (IV.32), car selon (IV.21) :

$$\frac{\partial^2 J^{(app.)}}{\partial \underline{\xi}^T \partial \underline{\xi}} = 2 \frac{\partial e^{(i)}}{\partial \underline{\xi}} \frac{\partial e^{(i)T}}{\partial \underline{\xi}}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer (IV.12) ou (IV.19) pour déterminer les pôles optima recherchés.

4. Identification de systèmes non linéaires par multimodèle à base de filtres orthogonaux

L'approche multimodèle a été proposée par Takagi et Sugeno en 1985. Elle est basée sur l'établissement de plusieurs modèles locaux, chacun étant valable dans une région complémentaire de l'espace défini par les grandeurs permettant d'expliquer le système (grandeurs explicatives). A chaque modèle local est associé un degré de véracité qui sert de pondération non linéaire pour le calcul du modèle global.

Plusieurs chercheurs ont utilisé des modèles locaux linéaires [Takagi *et al.* 1985], [Sugeno *et al.* 1988] et [Johansen, 1994] (se référer à [Boukhris, 1998] pour une liste plus complète). L'idée d'utiliser les filtres de Laguerre pour représenter les modèles locaux est assez récente et due à Sbarbaro (1995), Sbarbaro *et al.* (1997). Nelles, (1997) a étendu cette idée à l'utilisation de filtres issus de la BOG. Le principe de cette méthode peut s'expliquer ainsi : le modèle global étant non linéaire, il est décomposé en plusieurs modèles locaux linéaires, chaque modèle local étant essentiellement valide dans une zone de fonctionnement linéaires. Les filtres orthogonaux sont utilisés pour approcher le comportement du système dans chaque zone, car la propriété de complétude de l'espace $L^2[0, \infty)$ le permet. Finalement, une

interpolation entre les différents modèles locaux fournit le modèle global. Cette procédure sera mieux illustrée lors de la modélisation d'un système monovarié.

Les problèmes liés à ce mode de représentation concernent :

- le partitionnement de l'espace de fonctionnement en zones,
- le choix du nombre optimal de modèles locaux,
- la technique de combinaison des modèles locaux.

Signalons que l'ensemble de ces points ont été abordés dans la thèse de Boukhris (1998) soutenue récemment au sein de notre équipe. Ils ne feront donc pas l'objet d'un développement dans ce document. La variante du multimodèle, utilisant des fonctions orthogonales, sera plus particulièrement présentée.

4.1 Formulation mathématique

Ce mode de représentation a pour origine la logique floue où plusieurs règles sont utilisées pour décrire le comportement d'un système. Chaque variable explicative z_i est partagée en plusieurs modalités : $A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,q_i}$.

Chaque règle $R^{(m)}$ est composée de deux parties : la partie prémisses qui suit la condition **si** et la partie conséquence qui suit le mot-clé **alors** et qui contient le modèle local :

$$R^{(m)}: \underbrace{\text{si } [z_1(k) \dots z_p(k)] \text{ est } [A_{1,m} \dots A_{p,m}]}_{\text{prémisse}} \text{ alors } \underbrace{y^{(m)}(k) = \sum_{n=0}^{N^{(m)}} g_n^{(m)} \underbrace{\mathcal{F}_n(k, \xi_n^{(m)})}_{\mathcal{X}_n^{(m)}(k, \xi_n^{(m)}) * u(k)}}_{\text{conséquence}} \quad (\text{IV.33})$$

Dans notre cas, le modèle local est entièrement défini par un réseau de filtres de la BOG que nous détaillerons plus tard.

Il faut toutefois préciser, que pour un système monovarié, une seule grandeur explicative (voir deux) est (sont) sélectionnée(s), en règle générale. Il s'agit soit de l'entrée $z_1(k) = u(k)$, soit de la sortie $z_1(k) = y(k)$ soit de l'entrée et de la sortie $[z_1(k) z_2(k)] = [u(k) y(k)]$.

4.1.1 Partie prémisse

Le degré d'appartenance de chaque variable explicative $z_i(k)$ à la modalité A_i ($i = 1, \dots, q_l$) est défini par une fonction appelée *fonction d'appartenance*. Celle-ci peut prendre plusieurs formes : triangulaire, sigmoïde, parabolique, etc. Pour notre part, nous nous conformons au choix de [Boukhris, 1998] qui consiste à prendre des fonctions continûment dérivables jusqu'à au moins l'ordre deux pour une éventuelle optimisation par rapport à leurs paramètres. Des formes gaussiennes sont donc choisies (figure IV.16.a) :

$$\mu_{l,h}(z_l(k)) = \exp\left(-\left(\frac{z_l(k) - m_{l,h}}{\sigma_{l,h}}\right)^2\right) \tag{IV.34}$$

où $l = 1, \dots, p$, p représentant le nombre de variables explicatives, $h = 2, \dots, q_l$, q_l représentant le nombre de modalités de la variable z_l . $m_{l,h}$ désigne le centre de la modalité A_h de la variable explicative z_l et $\sigma_{l,h}$ désigne le coefficient de dispersion de chaque variable z_l lié à chaque modalité A_h .

Toutes les fonctions d'appartenance seront normalisées pour des facilités de calcul (voir figure IV.16.b) :

$$\bar{\mu}_{l,h}(z_l(k)) = \frac{\mu_{l,h}(z_l(k))}{\sum_{i=1}^p \mu_{l,i}(z_l(k))}$$

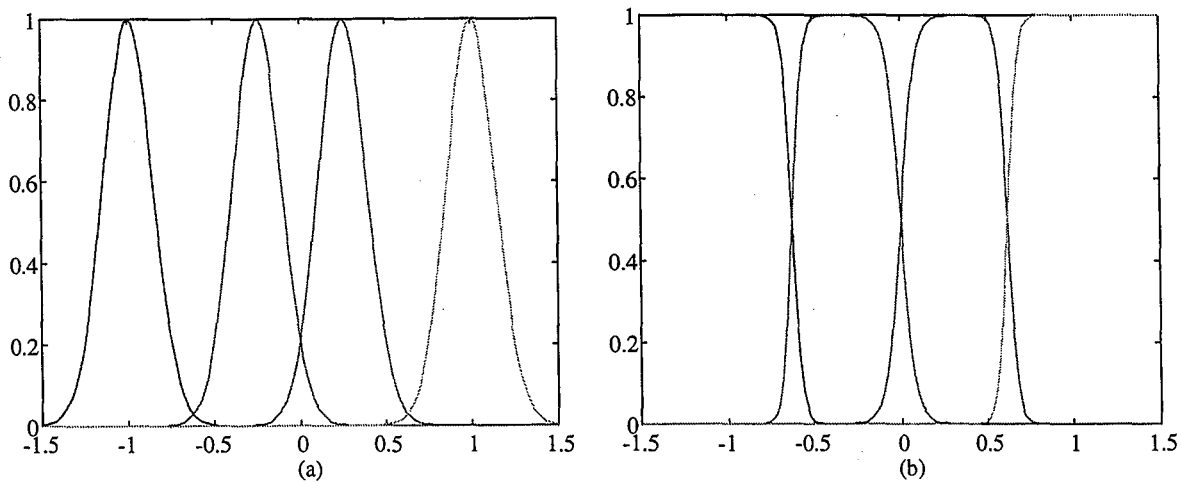


Figure IV.16 - Fonctions d'appartenance. (a) non normalisées. (b) normalisées

Si l'on suppose que chaque variable z_l admet q_l modalités différentes, alors le nombre maximal de règles (IV.33) s'obtient en effectuant la combinaison de toutes les modalités de toutes les variables de prémisse et s'élève à :

$$M = \prod_{l=1}^p q_l \quad (\text{IV.35})$$

Si une seule grandeur explicative est utilisée, le nombre de règles du type (IV.33) se réduit alors au nombre de modalités de l'unique grandeur : $M = q_1$.

Chaque fonction d'appartenance possède deux paramètres de réglage qui sont le coefficient de dispersion $\sigma_{l,h}$ et le centre $m_{l,h}$. En supposant, à nouveau, qu'il y ait q_l modalités pour chaque variable, cela fait un total de $\left(2 \prod_{l=1}^p q_l = 2M\right)$ paramètres (qui apparaissent de façon non linéaires dans le modèle) à estimer. Une tentative d'optimisation de tous ces paramètres a été présentée dans [Malti *et al.*, 1997]. Le résultat n'était pas encourageant, car le critère présentait plusieurs zones plates ce qui témoignait d'une certaine surparamétrisation du modèle. C'est pourquoi il est préférable d'adopter la solution proposée dans [Boukhris, 1998] qui consiste à :

- sélectionner un coefficient de dispersion identique ($\sigma_{l,1} = \sigma_{l,2} = \sigma_{l,m_l} = \sigma_l$) pour toutes les modalités de la même variable dans (IV.34),
- et à fixer le centre des modalités $m_{l,h}$ de façon à ce qu'elles soient régulièrement réparties dans l'espace de variation des variables de prémisse : $m_{l,h} = m_{l,h-1} + L_l$ (voir figure IV.17).

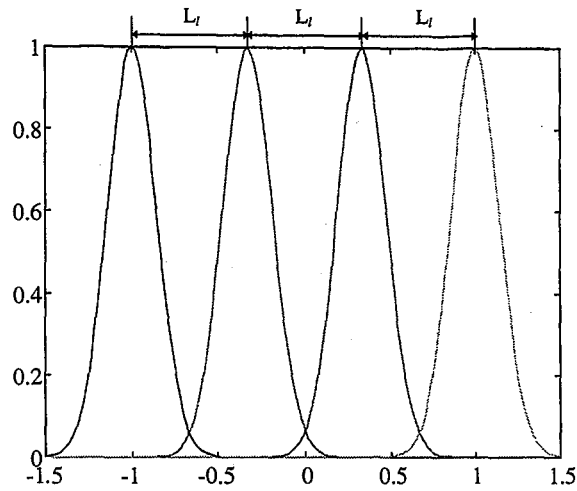


Figure IV.17 - Fonctions d'appartenance non normalisées ayant des modalités régulièrement réparties et un coefficient de dispersion identique.

Cette proposition réduit considérablement le nombre total de paramètres à estimer, qui devient maintenant $2p$, à savoir : σ_l et L_l pour chaque variable de prémisse.

Le degré de véracité de chaque règle (ou le poids affecté à chaque sous-modèle) se calcule ensuite par composition des degrés d'appartenance normalisés des variables de prémisse. L'opérateur de composition sélectionné est la multiplication (Takagi *et al.*, 1985) :

$$v^{(m)}(k) = \prod_{l=1}^p \bar{\mu}_{l,h}(z_l(k)) \tag{IV.36}$$

Remarque

Pour la variable $z_l(k)$, on peut regrouper toutes les fonctions d'appartenance associées à chaque modalité dans un vecteur ligne :

$$\bar{\mu}_l(z_l(k)) = [\bar{\mu}_{l,1}(z_l(k)) \ \bar{\mu}_{l,2}(z_l(k)) \ \dots \ \bar{\mu}_{l,q_l}(z_l(k))]$$

On exprime, alors, le degré de véracité de la $i^{\text{ème}}$ règle (IV.36) comme étant le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur résultant du produit de Kronecker (voir [Boukhris, 1998] pour la dérivation de ce résultat) :

$$\bar{\mu}_1(z_1(k)) \otimes \bar{\mu}_2(z_2(k)) \otimes \dots \otimes \bar{\mu}_p(z_p(k)) \quad \boxtimes$$

Dans le cas où il n'existe qu'une seule variable de prémisse, il est évident que le degré de véracité d'une règle est identique à sa fonction d'appartenance normalisée.

4.1.2 Partie conséquence

Comme nous l'avons précisé, l'intérêt de cette présentation est de montrer que les filtres de la BOG peuvent servir comme modèles locaux. Rappelons que la sortie (m) dans (IV.33) s'écrit :

$$y^{(m)}(k) = \sum_{n=0}^{N^{(m)}} g_n^{(m)} \underbrace{\mathcal{B}_n(k, \xi_n^{(m)})}_{x_n(k, \xi_n^{(m)})} * u(k) \quad (\text{IV.37})$$

Le nombre de filtres $N^{(m)}$ de chaque sous-modèle est *a priori* différent. De plus les coefficients de Fourier apparaissent de façon linéaire dans le modèle, ce qui n'est pas le cas des pôles de la BOG. Si l'on suppose qu'il existe p règles au total (et donc p sous-modèles) et $N^{(m)}$ filtres dans chaque sous-modèle, $\prod_{m=1}^p N^{(m)}$ pôles doivent être estimés (ou fixés), en plus des $\prod_{m=1}^p N^{(m)}$

coefficients de Fourier, dont le calcul est plus aisé. Une connaissance *a priori* du système en différents modes de fonctionnement (ou différentes zones de linéarisation) serait très appréciée afin d'éviter une optimisation globale vis-à-vis de tous les paramètres qui apparaissent de façon non linéaire dans le modèle.

Une autre solution consiste à utiliser des pôles identiques dans chaque sous-modèle, ce qui revient à remplacer les filtres de la BOG, par des filtres de Laguerre, réduisant ainsi le nombre de pôles à (p)

Remarque

Dans le cas de la modélisation d'un système multi-entrées mono-sortie, chaque sortie locale s'écrit en fonction de tous les sous-modèles relatifs à toutes les entrées :

$$y^{(m)}(k) = \sum_{s=1}^r \sum_{n=0}^{N^{(m)}} g_{n,s}^{(m)} \underbrace{\mathcal{B}_n(k, \xi_{n,s}^{(m)})}_{x_{n,s}(k, \xi_{n,s}^{(m)})} * u_s(k) \quad \boxtimes$$

4.1.3 Modèle global

La sortie globale du modèle est calculée par agrégation des sorties des différents sous-systèmes (IV.37), pondérés par les degrés de véracité $v^{(m)}(k)$ (IV.36) :

$$y(k) = \sum_{m=1}^M v^{(m)}(k) y^{(m)}(k)$$

M étant défini dans (IV.35). Compte tenu de (IV.37), on peut aussi écrire :

$$y(k) = \sum_{m=1}^M v^{(m)} \sum_{n=0}^{N^{(m)}} g_n^{(m)} x_n(k, \xi_n^{(m)})$$

$$\text{avec : } x_n(k, \xi_n^{(m)}) y = \mathcal{E}_n(k, \xi_n^{(m)}) * u(k)$$

ou encore :

$$y(k) = \phi(k) \Theta$$

avec :

$$\phi(k) = \left[v^{(1)} x_0^{(1)}(k) \dots v^{(1)} x_{N^{(1)}}^{(1)}(k) \ v^{(2)} x_0^{(2)}(k) \dots v^{(2)} x_{N^{(2)}}^{(2)}(k) \dots v^{(M)} x_0^{(M)}(k) \dots v^{(M)} x_{N^{(M)}}^{(M)}(k) \right]$$

$$\text{et : } \Theta = \left[\theta^{(1)T} \dots \theta^{(M)T} \right]^T, \quad \theta^{(m)} = \left[g_0^{(m)} \dots g_N^{(m)} \right]^T$$

En faisant varier k sur l'horizon des observations, c'est-à-dire de 1 à H et en calculant $\phi(k)$ à chaque pas, on obtient l'équation matricielle :

$$Y = \Phi \Theta \tag{IV.38}$$

$$\text{avec : } \Phi = \left[\phi(1)^T \ \phi(2)^T \ \dots \ \phi(H)^T \right]^T$$

4.2 Estimation paramétrique

Devant l'explosion du nombre de paramètres apparaissant de façon non linéaire par rapport au modèle, tant dans la partie prémisses que dans la partie conséquence, il est judicieux d'en fixer

certaines et d'en optimiser d'autres. Pour cela, une connaissance *a priori* du système est alors très utile.

Signalons toutefois que Boukhris, (1998) a exposé un panorama assez complet de méthodes existantes qui permettent de fixer le nombre de règles ainsi que le nombre de modalités de chaque variable explicative. Il a également proposé des méthodes d'optimisation des paramètres des fonctions d'appartenance selon ce qui a été décrit au paragraphe 4.1.1.

Concernant la partie conséquence, l'ensemble des paramètres à estimer (ou à fixer selon le choix) se résume :

- au nombre de filtres $N^{(m)}$ dans chaque sous-modèle m ,
- à l'ensemble des $\prod_{m=1}^p N^{(m)}$ coefficients de Fourier et
- à autant de pôles des filtres de la BOG (ou $2p$ pôles de Laguerre).

Pour fixer le nombre de filtres orthogonaux dans chaque sous-modèle, on peut s'inspirer de la méthode présentée dans [Boukhris, 1998] pour le choix de l'ordre des régresseurs.

Par ailleurs, il est évident, d'après (IV.38) et après écriture du critère quadratique :

$$J = (Y - \Phi \Theta)^T (Y - \Phi \Theta)$$

que l'estimation des coefficients de Fourier, regroupés dans le vecteur Θ , se fait directement par la méthode des moindres carrés :

$$\Theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$$

Si l'on opte pour une optimisation des pôles, une extension des algorithmes déjà présentés aux paragraphes 2 et 3 est tout à fait envisageable, d'autant plus que toutes les sensibilités des sorties de filtres, par rapport aux pôles ont déjà été calculées.

Exemple IV.4.

Nous avons pris comme exemple d'illustration un système monovarié traité à plusieurs reprises dans la littérature (voir [Narendra *et al.* 1990], [Nié, 1994] et [Boukhris, 1998]). Il est défini par :

$$y(0) = y(1) = y(2) = 0$$

$$y(k+1) = \frac{y(k)y(k-1)y(k-2)u(k-1)(y(k-2)-1)+u(k)}{1+y^2(k-1)+y^2(k-2)} \quad (\text{IV.39})$$

Un jeu de données de 800 échantillons est utilisé pour l'identification. L'entrée du système est constituée par la concaténation de signaux dont l'amplitude aléatoire varie dans l'intervalle $[-1, 1]$ et dont la durée est également aléatoire (voir figure IV.18.a). La sortie est tracée sur la figure IV.18.b.

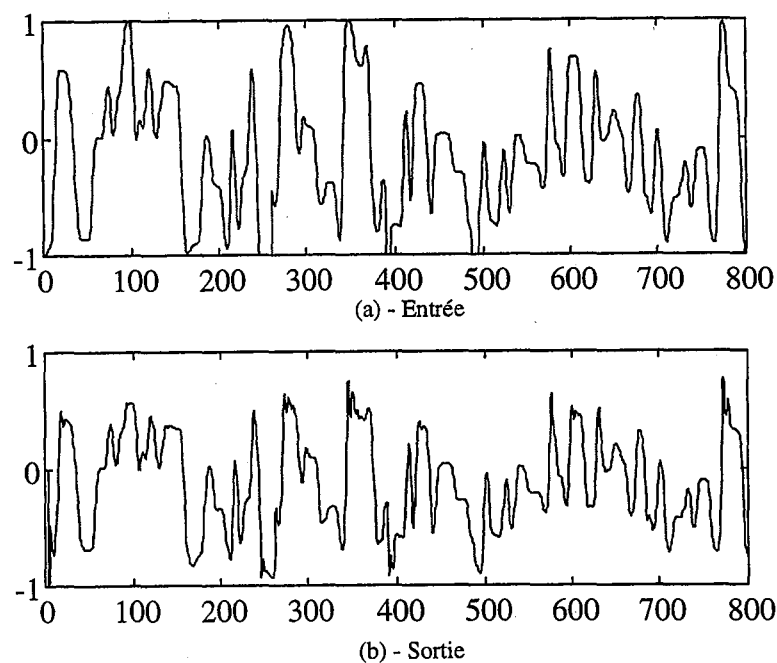


Figure IV.18 - Signaux d'excitation et sortie

Conformément à l'étude effectuée par [Boukhris, 1998],

- l'entrée du système a été prise comme variable explicative,
- elle a été divisée en sept modalités,

- les paramètres m_l des fonctions d'appartenance (voir (IV.34)) ont été fixés de façon à les répartir régulièrement dans l'intervalle $[-1, 1]$ (voir figure IV.19),
- les paramètres σ_l ont tous été choisis identiques.

Cela dit, tous les σ_l (qui sont identiques) ont été fixés de manière à ce que le taux de recouvrement soit visuellement acceptable (figure IV.19). De même, tous les centres des modalités m_l ont été sélectionnés en divisant l'espace de variation de l'entrée $[-1, 1]$ par le nombre de règles utilisées (sept) ; on obtient $\sigma = 0.0316$, $m_1 = -1$, $m_2 = -0.67$, $m_3 = -0.33$, $m_4 = 0$, $m_5 = 0.33$, $m_6 = 0.67$, $m_7 = 1$. Les fonctions d'appartenance correspondantes sont tracées sur la figure IV.19.

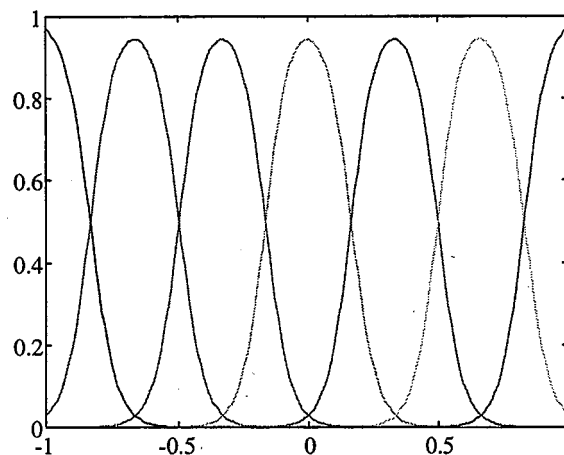


Figure IV.19 - Fonctions d'appartenance $\sigma = 0.0316$, $\delta = 0.333$

Concernant la partie conséquence, les ordres de tous les sous-modèles ont été fixés à un. Une seule fonction de la BOG (ou de Laguerre) est donc utilisée pour chaque modèle local. Les pôles ont été optimisés par l'algorithme du gradient et les résultats obtenus sont :

$$\xi_0^{(1)} = 0.645, \quad \xi_0^{(2)} = 0.380, \quad \xi_0^{(3)} = 0.521, \quad \xi_0^{(4)} = 0.479, \quad \xi_0^{(5)} = 0.445, \quad \xi_0^{(6)} = -0.217, \\ \xi_0^{(7)} = -0.650. \quad \text{(IV.40)}$$

Les coefficients de Fourier résultants correspondent à :

$$g_0^{(1)} = 0.406, \quad g_0^{(2)} = 0.561, \quad g_0^{(3)} = 0.5054, \quad g_0^{(4)} = 0.546, \quad g_0^{(5)} = 0.515, \quad g_0^{(6)} = 0.865 \text{ et} \\ g_0^{(7)} = 1.264.$$

dans le développement :

$$y(k) = \sum_{m=1}^7 v^{(m)} g_0^{(m)} x_0(k, \xi_0^{(m)})$$

$$\text{avec : } x_0(k, \xi_0^{(m)}) = \mathcal{B}_0(k, \xi_0^{(m)}) * u(k)$$

$$\mathcal{B}_0(k, \xi_0) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \mathcal{B}_0(z, \xi_0^{(m)}) \right\}, \text{ et } \mathcal{B}_0(z, \xi_0) = \frac{\sqrt{1 - \xi_0^{(m)2}} z}{z - \xi_0^{(m)}}$$

A titre comparatif, le système décrit par (IV.39), a également été approché par un modèle linéaire constitué de sept filtres de la BOG. Tous les pôles ont été optimisés par la méthode de Gauss-Newton, décrite au deuxième paragraphe. Le résultat est :

$$\xi = [0.633 \ 0.428 \ 0.279 \ 0.99 \ 0.149 \ 0.080 \ -0.508];$$

$$\theta = [0.404 \ 0.119 \ -0.198 \ 0.011 \ 0.102 \ 0.059 \ -0.322]$$

pour le développement :

$$y(k) = \sum_{n=0}^6 g_n x_n(k, \xi)$$

$$\text{avec : } x_n(k, \xi) = \mathcal{B}_n(k, \xi) * u(k),$$

$$\mathcal{B}_n(k, \xi) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \mathcal{B}_n(z, \xi) \right\}$$

$$\mathcal{B}_n(z) = \frac{\sqrt{1 - |\xi_n|^2} z}{z - \xi_n} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 - \xi_{k-1} z}{z - \xi_k} \right)$$

$$\theta = [g_0 \ \dots \ g_6]^T$$

Les pouvoirs prédictifs d'un modèle linéaire d'ordre 7, obtenu après optimisation des pôles, et du multimodèle peuvent être appréciés sur le jeu de données de la figure IV.20, également utilisé dans [Narandra *et al.* 1990], [Nie, 1994] et [Boukhris, 1998]. Il est généré par :

$$u(k) = \sin\left(\frac{2\pi k}{250}\right) \quad \text{pour } k < 500 \quad \text{(IV.41.a)}$$

$$u(k) = 0.8 \sin\left(\frac{2\pi k}{250}\right) + 0.2 \sin\left(\frac{2\pi k}{2.50}\right) \quad \text{pour } k > 500 \quad (\text{IV.41.b})$$

Notons que le modèle linéaire approche difficilement le système initial au voisinage des bornes du domaine de variation, où l'on présume que la non linéarité est la plus forte ; en revanche, le multimodèle est mieux adapté.

Il reste à signaler que l'approximation par le multimodèle sélectionné a un peu plus de mal à approcher le système autour de -1 . Visiblement, le réglage des variables de prémisse reste à peaufiner. A ce sujet, plusieurs techniques ont été proposées dans [Boukhris, 1998] pour l'optimisation de σ et de l'écart entre deux sommets des fonctions d'appartenance.

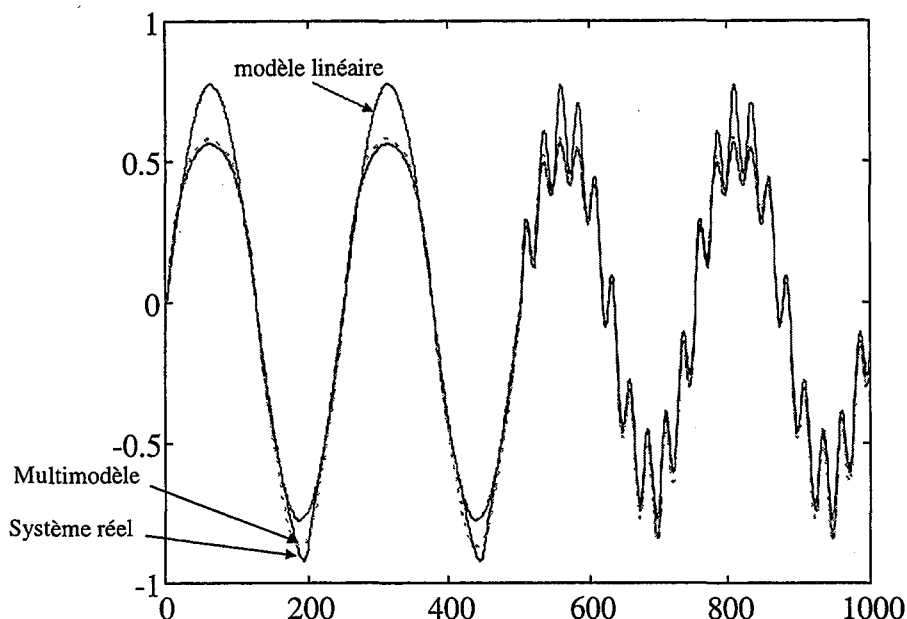


Figure IV.20 - Validation du modèle

L'erreur quadratique moyenne sur ce jeu de données est 0.00057 ce qui est comparable avec les résultats obtenus dans [Boukhris, 1998] (0.00030), après optimisation des paramètres de la partie conséquence et dans [Nie, 1994] (0.00028 mais avec 34 règles).

5. Conclusions

Dans un premier temps, le problème d'identification de systèmes linéaires sur la base de fonctions orthogonales a été abordé. L'originalité de ce travail concerne l'optimisation des pôles réels de la BOG, par des algorithmes non linéaires du type gradient ou Gauss-Newton. A cet effet, les fonctions de sensibilité des sorties de filtres, par rapport aux pôles de la BOG, calculées au troisième chapitre ont été utilisées. Le développement aux systèmes multi-variables a également été proposé. Les perspectives intéressantes de ce travail concernent l'extension de ces algorithmes au cas de l'optimisation des pôles complexes conjugués et de l'utilisation de pôles en progression arithmétique ou géométrique.

La dernière partie du chapitre concerne la représentation de systèmes non linéaires par multimodèles ayant des modèles locaux décrits par des filtres orthogonaux. Dans ce cadre, il serait intéressant de développer, à partir des travaux de [Boukhris, 1998] et des nôtres un algorithme optimisant à la fois les variables de prémisses et les pôles de la BOG.

Conclusions Générales ...

Les travaux développés dans ce mémoire concernent l'utilisation des bases de fonctions orthogonales pour la représentation de systèmes. Ce document commence par présenter six bases orthogonales existant dans la littérature. Elles diffèrent par leur nombre de pôles et par leur capacité à identifier des systèmes, à partir de conditions initiales mal connues. Après cette étude bibliographique, il nous a semblé intéressant de proposer une nouvelle base qui généralise la définition de la base de type Meixner en introduisant plusieurs pôles réels. Elle est, de ce fait, plus adaptée à la représentation de systèmes ayant plusieurs dynamiques, à partir de conditions initiales mal connues.

Les bases fonctionnelles étudiées n'engendrent **complètement** l'espace de Lebesgue $\ell^2[0, \infty[$ que si une infinité de fonctions est utilisée. Il est donc indispensable d'effectuer une troncature à un ordre fini. Pour cela, la condition *sine qua non* est que les séries fonctionnelles soient convergentes. C'est pourquoi, nous avons attaché une importance particulière à l'étude de la convergence des bases de fonctions traitées. A la différence des principales méthodes existantes, nous avons proposé des conditions **nécessaires et suffisantes**.

Nous nous sommes également intéressés à un problème plus concret : le choix des pôles de chacune de ces bases. Nous avons déterminé les conditions d'optimalité de la base orthogonale généralisée. Ce travail constitue un des points clés de notre thèse. Nous l'avons développé dans le cas général d'excitations colorées et pour le choix particulier des pôles réels. Cette étude a été illustrée par plusieurs exemples.

D'un point de vue pratique, l'identification de systèmes linéaires par des filtres issus de la base orthogonale généralisée (BOG), a été traitée. Dans ce cadre, si l'on souhaite minimiser le nombre de filtres nécessaires à une approximation, le choix des pôles est également primordial. Nous avons donc proposé des algorithmes non linéaires d'optimisation des pôles réels de la BOG. Ces algorithmes ont d'abord été développés pour des systèmes monovariabiles puis étendus aux systèmes multivariabiles.

Enfin, le cas de l'identification de systèmes non linéaires a également été abordé. Pour cela, nous avons choisi une technique multimodèle. Le principe de cette méthode peut s'expliquer ainsi : le système étant non linéaire, il est analysé sur plusieurs zones de fonctionnement linéaires. Ensuite les filtres orthogonaux sont utilisés pour approcher son comportement dans chacune de ces zones. Finalement, une interpolation entre les différents modèles locaux fournit le modèle global. Dans ce cas aussi, l'estimation des pôles de la BOG joue un rôle important. Elle est traitée dans un exemple issu de la littérature.

... et Perspectives

Au delà du travail présenté dans ce mémoire, les perspectives sont nombreuses et intéressantes. Certaines d'entre elles ont déjà été présentées dans les différents chapitres de ce mémoire.

Pour commencer, un des points extrêmement intéressants qui mériterait une investigation plus approfondie concerne l'utilisation de filtres orthogonaux par rapport à des fonctions de pondération non constantes. La motivation d'une telle recherche s'explique par le fait qu'en pratique, le critère quadratique est souvent privilégié dans sa version pondérée. Il serait alors intéressant de fixer la fonction poids dans le domaine temporel (ou fréquentiel) et d'en déduire le banc de filtres orthogonaux vis-à-vis de cette fonction poids.

Comme nous l'avons signalé au troisième chapitre, il serait avantageux de pouvoir déterminer les conditions d'optimalité concernant le choix de **pôles complexes conjugués** de la BOG. Si une telle étude était effectuée, il faudrait être vigilant lors de la recherche des pôles optima, parce que les conditions d'optimalité des pôles complexes ne sont pas valables pour des pôles réels et vice versa (*cf.* figure III.6 p. 120).

Durant la phase développement de nos travaux, nous avons considéré, sans distinction, la modélisation continue et discrète. Ce n'est que durant la phase rédaction que nous avons opté de formuler l'ensemble des résultats obtenus dans les temps discrets, pour des raisons évidentes d'homogénéité et pour éviter toute redondance. Les principaux résultats pourraient donc être transposés au cas continu.

Références bibliographiques

- [Arnold C.R., 1966], '*Laguerre functions and the Laguerre network. Their properties and digital simulation*'. Massachusetts Institute of Technology. Lincoln Laboratory. Technical note. No. 1966-28,
- [Billings S.A. et Leontaritis I.J., 1981], '*Identification of nonlinear systems using parameter estimation techniques*'. Proceedings of the IEEE Conference on Control and its Application, Warwick (U.K.). pp. 183-187.
- [Billings S.A. et Leontaritis I.J., 1982], '*Parameter estimation techniques for nonlinear systems*'. Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Washington DC. pp. 505-510.
- [Billings S.A., Jamaluddin H.B. et Chen S., 1992], '*Properties of neural networks with applications to modelling nonlinear dynamical systems*'. International Journal of Control. Vol. 55, No. 1, pp. 193-224.
- [Bokor J. et Schipp F., 1998], '*Approximate identification in Laguerre and Kautz bases*'. Automatica. Vol. 34, No. 4, pp. 463-468.
- [Boudarel R., Delmas J. et Guichet P., 1968], '*Commande optimale des processus. Tome 2. Programmation non linéaire et ses applications*'. Dunod.
- [Boukhris A., 1998], '*Identification de systèmes non linéaires par une approche multi-modèle*'. Thèse de doctorat de l'INPL.
- [Broome P.W., 1965], '*Discrete orthonormal sequences*'. Journal of the association for computing machinery. Vol. 12, No. 2, pp. 151 - 168.
- [Clowes G. J., 1965], '*Choice of the time-scaling factor for linear system approximations using orthonormal Laguerre functions*'. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 10, pp. 487 - 489.
- [de Vries D.K. et Van den Hof P.M.J., 1995], '*Frequency domain identification with generalized orthonormal basis functions*'. Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control, New Orleans (USA). pp. 1240 - 1245.

- [den Brinker A.C., 1995], '*Optimality conditions for truncated generalized Laguerre networks*'. International Journal of Circuit Theory and Applications. Vol. 23, pp. 227-235.
- [den Brinker A.C., 1995], '*Meiner-like functions having a rational z-transform*'. International Journal of Circuit Theory and Applications. Vol. 23, pp. 237-246.
- [den Brinker A.C., Benders F.P. et e Silva T.O., 1996], '*Optimality conditions for truncated Kautz series*'. IEEE Transactions on Circuits and Systems - II Analog and Digital Signal Processing. Vol. 43, No. 2, pp. 117-122.
- [den Brinker A.C., 1996], '*Optimality conditions for a specific class of truncated Kautz series*'. IEEE Transactions on Circuits and Systems - II Analog and Digital Signal Processing. Vol. 43, No. 8, pp. 597-600.
- [den Brinker A.C. et Belt H.J., 1996], '*Model reduction by orthogonalized exponential sequences*'. PRORISC/IEEE Workshop on Circuits, Systems and Signal Processing, Mierlo (Pays Bas). pp. 77-82.
- [Draper N.R. et Smith H., 1981], '*Applied regression analysis. Second edition*'. John Wiley & Sons.
- [Dumont G.A. et Zervos C.C., 1986], '*Adaptive control based on orthonormal series representation*'. IFAC Adaptive Systems in Control and Signal Processing. pp. 105-113.
- [Dumont G.A., Fu Y. et Elshafei A.L., 1991], '*Orthonormal functions in identification and adaptive control*'. IFAC Intelligent Tuning and Adaptive Control, Singapore. pp. 193 - 198.
- [e Silva T.O., 1994], '*Optimality conditions for truncated Laguerre networks*'. IEEE Transactions on Signal Processing. Vol. 42, No. 9, pp. 2528 - 2530.
- [e Silva T.O., 1995], '*Optimality conditions for truncated Kautz networks with two periodically repeating complex conjugate poles*'. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 40, No. 2, pp. 342 - 346.
- [e Silva T.O., 1997], '*Stationarity conditions for the L2 error surface of the generalized orthonormal basis functions lattice filtre*'. Signal Processing. Vol. 56, pp. 233-253.
- [Ekongolo S.B., 1996], '*Contribution à l'identification des systèmes dynamiques sur la base de filtres orthogonaux : le cas des filtres de Laguerre*'. Thèse de doctorat de l'INPL.

- [Fischer B., 1997], '*Two topics in system identification*'. Licentiate Thesis. Luleå University of Technology (Suède).
- [Fischer B. et Medvedev A., 1998], '*Laguerre shift identification of a pressurized process*'. Proceedings of the American Control Conference, ACC 98. Philadelphia, Pennsylvania (USA). pp. 1933-1937.
- [Fischer B. et Medvedev A., 1999], '*On the concept of 'persistent excitation' in Laguerre domain identification*'. Soumis à la session invitée "System identification based on orthogonal functions" European Control Conference ECC 99, Karlsruhe, Allemagne.
- [Fu Y. et Dumont G.A., 1993], '*An optimum Time Scale for Discrete Laguerre Network*'. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 38, No. 6, pp. 934-938.
- [Gunnarsson S. et Wahlberg B., 1991], '*Some asymptotic results in recursive identification using Laguerre models*'. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. Vol. 5, pp. 313-333.
- [Haber R. et Unbehauen H., 1990], '*Structure identification of nonlinear dynamic systems - A survey on input/output approaches*'. Automatica. Vol. 26, No. 4, pp. 651-677.
- [Heuberger P.S.C., Van den Hof P.M.J. et Bosgra O.H., 1995], '*A generalized orthonormal basis for linear dynamical systems*'. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 40, No. 3, pp. 451-465.
- [Johansen T.A., 1994], '*Operating regime based process modeling and identification*'. Report No. 94-109-W, Department of Engineering Cybernetics, Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway.
- [Jordan M.A., 1996], '*Adaptive robust control using discrete Laguerre functions*'. Proceedings of the 38th Midwest Symposium on Circuits and Systems. pp. 645 - 648.
- [Kautz W., 1952], '*Network synthesis for specified transient response*'. Technical report, 209, M.I.T. Research Laboratory, Electronics.
- [Kautz W., 1954], '*Transient synthesis in time domain*'. IRE Transactions on Circuit Theory. Vol. CT - 1, No. 3, pp. 29-39.
- [King R.E. et Paraskevopoulos P.N., 1977], '*Digital Laguerre filters*'. Circuit Theory and Application. Vol. 5, pp. 81-91.

- [Kreyszig E., 1993], '*Advanced engineering mathematics*'. John Wiley & Sons, Septième édition.
- [Landesman E.M. et Hestenes M.R., 1991], '*Linear algebra*'. Prentice-Hall.
- [Le Lay L., 1998], '*Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*'. Thèse de doctorat de l'Université Bordeaux I (France).
- [Lee Y.W., 1931], '*Synthesis of electrical networks by means of Fourier transforms of Laguerre functions*'. Journal of Mathematics and Physics. Vol. 11, pp. 83 - 113.
- [Lee Y.W., 1960], '*Statistical theory of communication*'. John Wiley & Sons.
- [Lindskog P., 1996], '*Methods, Algorithms and Tools for System Identification Based on Prior Knowledge*'. Ph. D. dissertation Linköping University (Suède). No. 436,
- [Ljung L., 1987], '*System identification: theory for user*'. Prentice-Hall.
- [Mäkilä P.M., 1990], '*Approximation of stable systems by Laguerre filters*'. Automatica. Vol. 26, No. 2, pp. 333 - 354.
- [Mäkilä P.M., 1991], '*Laguerre methods and $H(\infty)$ identification of continuous-time systems*'. International Journal of Control. Vol. 53, No. 3, pp. 689 - 707.
- [Mäkilä P.M., Partington J.R. et Gustafsson T.K., 1994], '*Robust identification*'. IFAC Symposium on System Identification, SYSID'94, Copenhagen (Denmark). Vol. 1, pp. 45 - 63.
- [Malti R., 1995], '*Identification en utilisant les filtres de Laguerre*'. Rapport de D.E.A. CRAN - INPL.
- [Malti R., Ragot J. et Maquin D., 1997], '*Identification par multimodèles à base de filtres de Laguerre*'. Colloque de Recherche Doctorale AGIS 97 "Automatique, Génie informatique, Image, Signal", Angers (France). Vol. 1, pp. 1-7.
- [Malti R., Ekongolo S.B. et Ragot J., 1998a], '*Dynamic SISO and MIMO system approximations based on optimal Laguerre models*'. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 43, No. 9, pp. 1318-1323.
- [Malti R., Maquin D. et Ragot J., 1998b], '*Optimality conditions for the truncated network of the generalized discrete orthonormal basis having real poles*'. The 37th Conference on Decision and Control, CDC 98 Tampa, Floride (USA), pp.2189-2194.

- [Malti R., Maquin D. et Ragot J., 1998c], '*Bilateral decomposition of a time function into Laguerre series. Application to LTI system identification*'. Journal of the Franklin Institute. Vol. 335B, No. 5, pp. 851-869.
- [Malti R., Maquin D. et Ragot J., 1999a], '*Optimum generalized orthonormal basis networks for a class of discrete-time systems*'. 14th IFAC World Congress, Pekin (Chine), à paraître.
- [Malti R., Maquin D. et Ragot J., 1999b], '*Some results on the convergence of transfer function expansions on the Laguerre series*'. Session invitée "System identification based on orthogonal functions" European Control Conference ECC 99, Karlsruhe, Allemagne, à paraître.
- [Marques da Costa P., 1995], '*Identification par surparamétrisation et commande de processus par placement de moments*'. Thèse de doctorat de l'université de Poitiers.
- [Masnadi-Shirazi M.A., 1990], '*Optimum synthesis of linear discrete-time systems using orthogonal Laguerre sequences*'. Ph.D. dissertation. New Mexico University, Albuquerque, USA.
- [Masnadi-Shirazi M. A. et Ahmed N., 1991], '*Optimum Laguerre networks for a class of discrete-time systems*'. IEEE Transactions on Signal Processing. Vol. 39, No. 9, pp. 2104 - 2108.
- [Meixner J., 1934], '*Orthogonale polynomsystem mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden funktion*'. Journal of London Mathematical Society. Vol. 9, pp. 6-13.
- [Middleton R.H. et Goodwin G.C., 1990], '*Digital estimation and control: a unified approach*'. Prentice-Hall.
- [Narendra K.S. et Parthasarathy K., 1990], '*Identification and control of dynamical systems using neural networks*'. IEEE Transactions on Neural Networks. Vol. 1, No. 1, pp. 4-27.
- [Nelles O., 1997], '*Orthonormal basis functions for nonlinear system identification with local linear model trees (LOLIMOT)*'. IFAC Symposium on System Identification, SYSID'97, Fukuoka (Japon). Vol. 2, pp. 667-672.
- [Nie J., 1994], '*A neural approach to fuzzy modeling*'. Proceedings of the American Control Conference, ACC 94. pp. 2139-2143.

- [Ninness B., 1994], '*Orthonormal bases for geometric interpretations of the frequency response estimation problem*'. IFAC Symposium on System Identification, SYSID'94, Copenhagen (Denmark). Vol. 3, pp. 591-596.
- [Ninness B., Gomez J.C. et Weller S., 1995], '*MIMO system identification using orthonormal basis functions*'. Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control, CDC 95 New Orleans (USA). pp. 703-708.
- [Ninness B. et Gustafsson F., 1997], '*A unifying construction of orthonormal bases for system identification*'. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 42, No. 4, pp. 515 - 521.
- [Ouvrard R., 1997], '*Contribution à l'identification robuste des systèmes à temps continu - Application au génie des procédés*'. Thèse de doctorat de l'université de Poitiers.
- [Parks T.W., 1971], '*Choice of time scale in Laguerre approximations using signal measurements*'. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 16, No. 5, pp. 511 - 513.
- [Richard A., 1994], '*Identification de systèmes linéaires*'. Cours de DEA.
- [Roesch M., 1973], '*Identification des systèmes linéaires par integration et récurrence*'. Thèse de doctorat de l'université de Nancy I
- [Rosenblum M. et Rovnyak J., 1985], '*Hardy classes and operator theory*'. Oxford University Press, New York.
- [Sbarbaro D., 1995], '*Context sensitive networks for modelling nonlinear dynamic systems*'. Proceedings of 3rd European Control Conference, ECC 95, Rome (Italy). pp. 2420-2424.
- [Sbarbaro D. et Johansen T.A., 1997], '*Multiple local Laguerre models for modelling nonlinear dynamic systems of the Wiener class*'. IEE Proceedings, Control Theory Applications. Vol. 144, No. 5, pp. 375-380.
- [Sjöber J., 1995], '*Nonlinear system identification with neural networks*'. Ph.D. dissertation. Department of Electrical Engineering, Linköping University (Suède).
- [Sugeno M. et Kang T.G., 1988], '*Structure identification of fuzzy models*'. Fuzzy Sets and Systems. Vol. 28, pp. 15-33.
- [Szegö G., 1930], '*Orthogonal polynomials*'. American Mathematical society. Colloquium Publications. Vol. 23,

- [**Takagi T.** et **Sugeno M.**, **1985**], '*Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control*'. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Vol. SMC15, No. 1, pp. 116-132.
- [**Tanguy N.**, **1994**], '*La transformation de Laguerre discrète*'. Thèse de doctorat de l'université de Bretagne Occidentale, Brest (France).
- [**Trigeassou J.C.**, **1987**], '*Contribution à l'extension de la méthode des moments en automatique*'. Thèse de Doctorat Es. Science, Poitiers (France).
- [**Van den Hof P.M.J.**, **Heuberger P.S.C.** et **Bokor J.**, **1995**], '*System identification with generalized orthonormal basis functions*'. Automatica. Vol. 31, No. 12, pp. 1821 - 1834.
- [**Wahlberg B.**, **1991**], '*System identification using Laguerre models*'. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 36, No. 5, pp. 551 - 562.
- [**Wahlberg B.**, **1994**], '*Laguerre and Kautz models*'. IFAC Symposium on System Identification, SYSID'94, Copenhagen (Denmark). Vol. 3, pp. 1-12.
- [**Wahlberg B.**, **1994**], '*System identification using Kautz models*'. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 39, No. 6, pp. 1276 - 1282.
- [**Wahlberg B.** et **Mäkilä P.M.**, **1996**], '*On approximation of stable linear dynamical systems using Laguerre and Kautz functions*'. Automatica. Vol. 32, No. 5, pp. 693 - 708.
- [**Walter E.** et **Pronzato L.**, **1994**], '*Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*'. Masson.
- [**Wang L.** et **Cluett W. R.**, **1994**], '*Optimal choice of time-scaling factor for linear system approximations using Laguerre models*'. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 39, No. 7, pp. 1463 - 1467.
- [**Young T.** et **Huggins W.**, **1962**], '*Complementary signals and orthogonalized exponentials*'. IRE Transactions on Circuit Theory. Vol. CT - 9, pp. 362-370.

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur DION Jean-Michel, Directeur de Recherches CNRS, IAG-ENSIEG Saint Martin
d'Hères,**

Monsieur TRIGEASSOU Jean-Claude, Professeur, LALI Poitiers.

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur MALTI Rachid

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE
LORRAINE, une thèse intitulée :

**"Représentation de systèmes discrets sur la base des filtres orthogonaux.
Application à la modélisation de systèmes dynamiques multivariables."**

en vue de l'obtention du titre de :


DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : **"AUTOMATIQUE & TRAITEMENT NUMÉRIQUE DU SIGNAL"**

Fait à Vandoeuvre le, **30 Décembre 1998**

Le Président de l'I.N.P.L.,

J. HARDY



NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANDŒUVRE CEDEX

Représentation de systèmes discrets sur la base des filtres orthogonaux - Application à la modélisation de systèmes dynamiques multi-variables

La modélisation, aspect fondamental de toutes les sciences appliquées, vise à établir des relations mathématiques entre les différentes variables caractéristiques d'un système. Les travaux développés dans ce mémoire entrent dans le cadre de la modélisation par fonctions orthogonales discrètes de systèmes dynamiques LTI et stables. Plus particulièrement, les fonctions de Laguerre, de Kautz, de type Meixner et celles issues de la base orthogonale généralisée y sont présentées. Elles diffèrent entre elles par le nombre de pôles qu'elles possèdent et par leur aptitude à l'identification de différents types de systèmes. De plus, une nouvelle base orthogonale est synthétisée. Elle généralise la définition de la base de type Meixner à un nombre quelconque de pôles réels ; de ce fait, elle est plus adaptée à la modélisation de systèmes ayant plusieurs dynamiques. Pour chaque base, les conditions nécessaires et suffisantes de convergence des coefficients de Fourier et des séries fonctionnelles ont été explicitées. Cette étude a pour but de justifier la troncature de la représentation, initialement infinie, à un ordre fini.

La décomposition d'une fonction de transfert d'un modèle surparamétrisé, sur des bases orthogonales, permet, dans certains cas, d'obtenir un modèle d'ordre réduit, puisqu'un choix optimal de pôles permet de réduire le nombre de filtres nécessaires à l'approximation de la fonction de transfert initiale. Le calcul des pôles optimaux passe obligatoirement par la résolution des équations d'optimalité. Dans ce cadre, une des contributions majeures présentées dans ce mémoire concerne la synthèse des équations d'optimalité de la base orthogonale généralisée par rapport à un choix de pôles réels. Ces résultats ont été utilisés, d'une part, pour la réduction d'ordre de modèles et, d'autre part, pour l'identification de systèmes linéaires par des filtres issus de la base orthogonale généralisée. Une extension aux systèmes non linéaires a également été proposée par une technique de multimodèle.

Mots clés : Modélisation, Identification, Fonction orthogonale, Base orthogonale généralisée, Fonction Laguerre, Fonction Kautz, Condition optimalité, Multimodèle, Optimisation pôle, Réduction ordre.

System representation on the basis of orthogonal filters - Application to modeling multivariable dynamic systems

Modeling constitutes a fundamental aspect in all applied sciences. Its principal objective is to determine mathematical relationships among all characteristic variables of a system. The work developed in the present thesis deals with the use of orthogonal functions in discrete-time system modeling and identification. Laguerre, Kautz and Meixner-like functions together with the ones obtained from the generalized orthogonal basis are considered. They differ from each other by their number of poles and by their ability to identify systems when unknown initial conditions are present. Furthermore, a new basis functions is proposed. It generalizes the definition of Meixner-like functions to any number of real poles. Hence, it is more appropriate to model systems having different dynamic behaviors. For each basis, necessary and sufficient conditions for the problem of convergence of both Fourier coefficients and the infinite series are determined.

Transfer function expansions on orthogonal functions may lead to order reduction when the original model is overparametrized. Indeed, an optimal choice of the poles reduces the total number of filters required to expand the original transfer function and hence the total number of parameters in the final model. For that purpose, the computation of optimal poles requires solving optimality equations. One of the original points developed herein concerns the synthesis of the optimality equations of the generalized orthogonal basis. Moreover, nonlinear algorithms are presented for optimizing the poles in the case of linear system identification using the generalized orthogonal basis. An extension to the nonlinear case is also proposed, using multiple model techniques.

Keywords: Modeling, Identification, Orthogonal function, Generalized orthogonal basis, Laguerre function, Kautz function, Optimality condition, Multiple model, Pole optimization, Model reduction.