



**HAL**  
open science

# La nouvelle approche hybride MAX-FEM pour la modélisation thermomécanique des couches minces

Abderrazzaq Ifis

► **To cite this version:**

Abderrazzaq Ifis. La nouvelle approche hybride MAX-FEM pour la modélisation thermomécanique des couches minces. Autre. Université de Lorraine, 2014. Français. NNT : 2014LORR0044 . tel-01750702

**HAL Id: tel-01750702**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750702>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Ecole Doctorale N° 409 : ENERGIE MECANIQUE MATERIAUX

THESE POUR OBTENIR LE GRADE DE  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LORRAINE

Présentée par  
Monsieur **Abderrazzaq IFIS**  
Spécialité : **Mécanique & Energétique**

---

**LA NOUVELLE APPROCHE HYBRIDE MAX-FEM POUR LA MODELISATION  
THERMOMECHANIQUE DES COUCHES MINCES**

---

Directeur de thèse: **Mohammed NOUARI**  
Co-encadrant de thèse: **François BILTERYST**

*Thèse présentée et soutenue à Saint Dié des Vosges le : 09/04/2014*

**Jury de thèse:**

<b>Marie-Christine Baietto</b>	<b>Directrice de recherche CNRS, LAMCOS</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Julien Yvonnet</b>	<b>Professeur, MSME, Université Paris-Est</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Emmanuelle Rouhaud</b>	<b>MCF HDR, LASMIS, UTT de Troyes</b>	<b>Examineur</b>
<b>Jean François Ganghoffer</b>	<b>Professeur, LEMTA, Université de Lorraine</b>	<b>Examineur</b>
<b>Denis MASSINON</b>	<b>Directeur de recherche et développement, Montupet SA</b>	<b>Invité</b>
<b>Mohammed Nouari</b>	<b>Professeur, LEMTA, Université de Lorraine</b>	<b>Examineur</b>
<b>François Bilteryst</b>	<b>Maitre assistant, LEMTA, Université de Lorraine</b>	<b>Examineur</b>

---

**LEMTA CNRS-UMR 7563**

GIP-InSIC – 27, rue d'Hellieule -88100 Saint-Dié des Vosges



## Dédicace

*A ma famille*



## Remerciements

Le seul moyen de se délivrer d'une tentation, c'est d'y céder paraît-il! Alors j'y cède en disant un grand Merci aux personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis d'arriver au bout de cette thèse.

Je souhaite remercier en premier lieu mon directeur de thèse, M. Mohammed Nouari, Professeur et Directeur de la recherche au sein du GIP-InSIC pour m'avoir accueilli au sein de son équipe. Je lui suis également reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise et sa sympathie. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon co-encadrant de thèse, M. François Bilteryst, Maître-assistant, pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour ses conseils avisés et son écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. Sa confiance a été l'élément moteur pour moi. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Je désire grandement remercier M. Claude Barlier, Directeur du CIRTES pour m'avoir choisi sur ce projet et pour m'avoir fait confiance tout au long de ces années de thèse. Bien sûr, atteindre ces objectifs n'aurait pas été possible sans l'aide de tous les membres du projet PROMAPAL.

Merci à Samir ATLATI, Abdelouahed Chbihi et Hamid Makkich pour leur implication dans mes travaux. Ils ont été une grande ressource pour le développement du banc d'essais et de mes travaux de développement sous ABAQUS.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille qui représente pour moi le symbole de la bonté par excellence et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.





## NOMENCLATURE

$\mathbf{x} = {}^t(x \quad y)$	Vecteur position	$\mathbf{Q}$	Vecteur de chargement thermique
$\mathbf{u} = {}^t(u_x \quad u_y)$	Déplacement extérieur	$\mathbf{I}$	Matrice identité
$\mathbf{u}^0 = {}^t(u_y^0 \quad u_y^0)$	Déplacement du problème non perturbé	$(\cdot)^+, (\cdot)^-$	Désigne la position par rapport à l'interface
$\mathbf{u}^1 = {}^t(u_x^1 \quad u_y^1)$	Premier ordre de perturbation du problème extérieur	$\mathbf{C}_M$	Matrice de correction mécanique
$\mathbf{v}^0 = {}^t(v_y^0 \quad v_y^0)$	Terme continu du développement intérieur	$\mathbf{C}_{Mth}$	Matrice de correction thermique
$\mathbf{v}^1 = {}^t(v_y^1 \quad v_y^1)$	Premier ordre de perturbation du problème intérieur	$\llbracket (\cdot) \rrbracket$	Saut du champ entre les crochets
$T$	Température extérieure	$(\cdot)_{,x}, (\cdot)_{,y}$	Dérivées du champ entre les crochets
$T^0$	Température du problème non perturbé	$\Omega_+, \Omega_-$	Les domaines décrits par les substrats
$T^1$	Premier ordre de perturbation du problème extérieur	$\Omega$	Le domaine décrit par la couche mince
$\tau^0$	Terme continu du développement thermique intérieur	$\Gamma$	L'interface de discontinuité
$\tau^1$	Premier ordre de perturbation du problème thermique intérieur	$E_1, E_3$	Les modules de Young des substrats
$\mathbf{U}$	Vecteur des déplacements extérieurs nodaux	$E_2$	Module de Young de la couche mince
$\mathbf{T}$	Vecteur des températures extérieures nodales	$\nu_1, \nu_3$	Coefficients de Poissons des substrats
$\mathbf{T}^0$	Vecteur des températures nodales du problème continu	$\nu_2$	Coefficient de Poisson de la couche mince
$\mathbf{U}^0$	Vecteur des déplacements nodaux du problème continu	$\alpha_1, \alpha_2$	Coefficients de dilatation thermique du substrat $\Omega_+$ et de la couche mince
$\mathbf{B}$	Matrice de déformation	$\lambda_{th1}, \lambda_{th2}$	Conductivités thermiques du substrat $\Omega_+$ et de la couche mince
$\mathbf{B}_{th}$	Matrice de flux	$\rho_1, c_{p1}$	Densité et capacité calorifique du substrat $\Omega_+$
$\mathbf{D}$	Matrice de Hook	$\lambda, \mu$	Coefficients de Lamé
$\mathbf{K}$	Matrice de rigidité	$e$	Epaisseur de la couche mince
$\mathbf{KT}$	Matrice de conductivité	$L$	La longueur de l'assemblage
$\mathbf{CT}$	Matrice de capacité	$\varepsilon = e/L$	Caractéristique de l'interface
$\mathbf{F}$	Vecteur de chargement mécanique	$\bar{y} = y/\varepsilon$	La variable décrivant le domaine intérieur
$\mathbf{F}_{th}$	Vecteur des efforts thermiques		



# Table des matières

<b>Chapitre I : Introduction générale et contexte industriel des travaux de thèse .....</b>	<b>11</b>
I.1. <i>Contexte industriel : Outillages de fonderie fabriqués par Stratoconception .....</i>	12
I.1.1. <i>Le procédé de la Stratoconception .....</i>	15
I.1.2. <i>Le procédé de brasage .....</i>	15
I.1.3. <i>Projet « Promapal » : fabrication des outillages de fonderie par Stratoconception.....</i>	16
I.2. <i>Problématique et objectif des travaux de thèse.....</i>	18
I.2.1. <i>Modélisation des outillages brasés .....</i>	18
I.2.2. <i>Modélisation des couches minces .....</i>	18
I.2.3. <i>Motivations et objectif des travaux : l'approche MAX-FEM pour la modélisation des couches minces .....</i>	19
<i>Références I.....</i>	21
<b>Chapitre II : Etude Bibliographique : Modélisation des couches minces.....</b>	<b>23</b>
II.1. <i>Introduction : Aperçu sur la modélisation des couches minces.....</i>	24
II.2. <i>Modélisation simplifiée des couches minces .....</i>	27
II.2.1. <i>Modèles analytiques simplifiés : assemblages adhésifs .....</i>	27
II.2.2. <i>Méthode des Eléments Finis classique (FEM).....</i>	30
II.3. <i>Méthodes multi-échelles .....</i>	32
II.3.1. <i>Développement asymptotiques raccordés (DAR ou MAE) .....</i>	33
II.3.2. <i>Méthodes d'enrichissement .....</i>	36
II.3.3. <i>Autres Méthodes .....</i>	42
II.3.4. <i>Synthèse .....</i>	49
II.4. <i>Le couplage DAR-X-FEM .....</i>	49
II.4.1. <i>Principe du couplage .....</i>	50
II.4.2. <i>Critique du modèle DAR-X-FEM.....</i>	52
II.5. <i>Synthèse .....</i>	54
<i>Références II.....</i>	55
<b>Chapitre III : Mise en œuvre de l'approche simplifiée MAX-FEM .....</b>	<b>63</b>
III.1. <i>Partie I : Mise en œuvre de l'approche MAX-FEM.....</i>	64
III.1.1. <i>Hypothèses principales.....</i>	64
III.1.2. <i>Approche MAX-FEM : .....</i>	64
III.1.2.1. <i>Approche MAX-FEM : Construction de l'enrichissement.....</i>	66
III.1.3. <i>Mise en œuvre de la méthode éléments finis MAX-FEM .....</i>	69

III.1.4.	<i>Calcul de la matrice de rigidité</i> .....	72
III.1.5.	<i>Synthèse</i> .....	75
III.2.	<i>Partie II : Applications et résultats</i> .....	76
III.2.1.	<i>Analyse mécanique unidimensionnelle</i> .....	76
III.2.2.	<i>Analyse thermique transitoire :</i> .....	79
III.3.	<i>Conclusion</i> .....	95
	<i>Références III</i> .....	96
<b>Chapitre IV :</b>	<b>Extension du modèle: Analyse macro-micro et couplage thermomécanique</b> .....	<b>97</b>
IV.1.	<i>Partie I : Analyse mécanique « macro-micro »</i> .....	98
IV.1.1.	<i>Mise en œuvre du modèle éléments finis</i> .....	98
IV.1.2.	<i>Exemple numérique et analyse des résultats</i> .....	104
III.2.1.	<i>Conclusion</i> .....	113
IV.2.	<i>Partie II : Couplage thermomécanique</i> .....	114
IV.2.1.	<i>Formulation éléments finis MAX-FEM</i> .....	114
IV.2.2.	<i>Résolution de l'équation de la chaleur</i> .....	115
IV.2.3.	<i>Résolution de l'équation d'équilibre mécanique</i> .....	116
IV.2.4.	<i>Exemple numérique et analyse des résultats</i> .....	117
IV.3.	<i>Conclusion</i> .....	120
	<i>Références IV</i> .....	122
<b>Chapitre V :</b>	<b>Utilisation de l'approche MAX-FEM pour la caractérisation thermique des couches minces</b> .....	<b>123</b>
V.1.	<i>Problématique et objectif</i> .....	124
V.2.	<i>Veille bibliographique: Caractérisation des couches minces</i> .....	125
V.2.1.	<i>Mesure de la conductivité thermique en régime permanent</i> .....	125
V.2.2.	<i>Mesure de la conductivité thermique en régime transitoire</i> .....	127
V.3.	<i>Protocole expérimental simplifié pour la caractérisation de la conductivité thermique par confrontation</i> .....	129
V.3.1.	<i>Modèle analytique : Approche MAX-FEM pour l'identification de la conductivité thermique</i> .....	130
V.3.2.	<i>Sensibilité du protocole aux points de mesure</i> .....	133
V.4.	<i>Banc et première campagne des essais</i> .....	134
V.4.1.	<i>Banc d'essais</i> .....	134
V.4.2.	<i>Campagne d'essais et résultats</i> .....	137
V.5.	<i>Conclusion</i> .....	142
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>121</b>

## **Chapitre I**

### **Introduction générale et contexte industriel des travaux de thèse**

L'intégration des couches minces au sein des structures mécaniques relève souvent du développement de procédés innovants de fabrication dans la plupart des domaines industriels de pointe. Ces couches minces doivent assurer des fonctions importantes, telles que par exemple l'assemblage (soudage, brasage et collage) ou le revêtement. Dans le milieu industriel, leur utilisation est en expansion continue dans les secteurs où l'optimisation des structures est une exigence comme les secteurs de l'aéronautique, l'aérospatiale, le nucléaire, l'outillage, l'électronique...etc.

Les procédés d'assemblage sont, par exemple, utilisés en aéronautique pour la jonction des différentes composantes des avions, selon les exigences du chargement. Tandis que les revêtements sont utilisés pour la protection des structures ou afin de leur procurer des performances thermomécaniques plus élevées. Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse s'intéressent à une application innovante des couches minces. En effet, l'utilisation de ces dernières est étudiée dans la conception et l'assemblage d'outillages rapides stratifiés, assemblés par brasage, destinés à la fonderie d'aluminium. En effet, l'utilisation du procédé de « Stratoconception® » qui permet non seulement de réduire les coûts et le temps de fabrication d'outillages, mais aussi d'améliorer les fonctionnalités existantes et/ou de créer d'autres nouvelles fonctionnalités grâce à son principe de subdivision en couches. C'est ainsi que ce procédé peut offrir aux fabricants d'outillages une grande liberté dans le choix des géométries et permet l'optimisation du design des canaux de refroidissement ou de chauffage de sections variées, suivant la surface des pièces, et ainsi d'améliorer la fonction d'échangeur de chaleur des moules.

Les présents travaux de thèse s'inscrivent dans le cadre d'un tel projet innovant intitulé «PROMAPAL». Ce dernier est une réponse à l'appel à projet FUI N°8. Il réunit Montupet : leader européen de la fonderie d'aluminium, le CIRTES : Centre de Développement Rapide de Produits et créateur du procédé de Stratoconception, l'ERMeP : Equipe de recherche du Laboratoire LEMTA et qui est spécialisée dans la modélisation et la simulation numérique des procédés de mise en forme ainsi que d'autres partenaires comme le CM2T : CRITT METALL 2T et le CTIF : Centre de recherches et développement français spécialisé en fonderie.

Le présent travail s'inscrit dans le cadre de la mission de l'ERMeP qui consiste à modéliser le comportement thermomécanique des outillages brasés en tenant en compte la présence des brasures. En effet, malgré l'épaisseur négligeable de ces dernières, elles conditionnent la tenue des outillages ainsi que leur comportement thermomécanique. De plus, cette épaisseur négligeable complique la prise en compte des joints brasés dans la simulation par

éléments finis où un raffinement de maillage devient une nécessité et les pertes en termes de temps de calcul deviennent une réalité inévitable.

La modélisation des assemblages brasés nous amène à se confronter aux problèmes des couches minces en général. En effet, l'épaisseur des brasures est assez fine pour la considérer comme une couche mince perturbant le comportement global des assemblages. Ainsi, nous nous étendons sur une problématique générale qui est la modélisation multi-échelles des couches minces. Dans l'objectif d'apporter une réponse à cette problématique, le présent travail propose une nouvelle approche hybride, qui fournit une analyse thermomécanique multi-échelles des structures contenant des couches minces (assemblages ou revêtement) sans raffinement du maillage et en ayant recours à un minimum de simulations numériques.

Afin de faciliter la lecture du manuscrit nous organisons ce dernier selon cinq grands chapitres. Ce premier introduit le contexte industriel et la problématique du présent travail. Dans un premier temps, nous introduisons le projet « Promapal » et nous justifions l'utilisation de la Stratoconception pour la fabrication des outillages de fonderie. Dans cette optique, nous donnons, en premier lieu, un aperçu sur les procédés de Stratoconception et ebrasage. Dans un deuxième temps, les deux problématiques traitées par ces travaux sont présentées: la problématique générale des couches minces où nous essayons d'apporter une réponse à la modélisation de l'ensemble des applications faisant appel aux couches mince (collage, brasage ou revêtement), et la problématique locale du brasage.

Le deuxième chapitre présente un état de l'art des travaux traitant la problématique des couches minces et la reprise d'un modèle DAR-X-FEM précurseur des travaux présentés ici. Ainsi, une veille sur les méthodes multi-échelles est présentée en complément d'autres méthodes analytiques et numériques appliquées à la modélisation des couches minces et des assemblages brasés.

Le troisième chapitre, constituant le cœur de ces travaux, présente la mise en œuvre de la méthode éléments finis simplifiée MAX-FEM. En effet, à l'issue de l'étude bibliographique, nous choisissons de répondre aux carences ou limitations notées dans la littérature par la proposition d'une nouvelle approche MAX-FEM. Cette méthode se base sur une formulation éléments finis PUM et utilise l'approche MAE pour la définition de l'enrichissement. Cette nouvelle démarche du couplage permet d'exploiter les points forts de la MAE pour une implémentation numérique plus simple et optimale en termes d'implémentation, de nombre de simulations numériques à faire et de temps de calcul.

Une fois mise en œuvre et comparée aux différentes approches existantes, la méthode MAX-FEM développée est ensuite mis en œuvre pour différentes applications « couches minces ».

L'élaboration de ces applications présente une première évaluation des performances du couplage en termes de précisions et d'optimisation aux niveaux de l'implémentation numérique et de temps de calcul. Dans cette optique nous choisissons de résoudre le problème d'élasticité linéaire et l'équation de chaleur pour des structures unidimensionnelles et axisymétriques. Ceci, permet de comparer les temps de calcul nécessaires par rapport à la FEM standard. De plus, une fois le modèle validé, une étude paramétrique est effectuée afin d'étudier la sensibilité du modèle aux différents paramètres physiques et numériques. Finalement, nous présentons une étude numérique de l'efficacité des couches isolantes dépendamment de leur résistance thermique.

Si nous parvenons, dans le troisième chapitre, à des résultats satisfaisants et répondons partiellement à nos attentes, c'est bien grâce à l'exploitation des performances de l'approche MAE. Cette dernière est encore sollicitée pour effectuer une analyse multi-échelles des structures avec couches minces. En effet, des analyses mécaniques « macro » et « micro » sont présentées dans le quatrième chapitre pour des assemblages bidimensionnels. L'objectif est de permettre, en cas de besoin, un passage à l'échelle locale pour vérifier l'état des contraintes et déformations dans le joint. Ces analyse amènent alors des réponses aux différentes questions liées au comportement des brasures et ouvrent ainsi des perspectives sur l'approfondissement dans l'analyse locale. En effet, des analyses de fissuration, de fatigue et de délaminage sont envisagées comme suite de ces travaux.

Dans les outillages fabriqués par Stratoconception, les contraintes sont principalement dues aux chargements thermiques. Par ailleurs, ces outillages sont contraints à rester dans le domaine élastique pour garder la précision dimensionnelle des pièces à fabriquer. Ainsi, un couplage thermoélastique doit être mis en œuvre. De ce fait, le quatrième chapitre répond aussi au besoin initial qui est la modélisation des outillages Stratoconçus. En effet, nous mettons en œuvre l'approche MAX-FEM en tenant en compte les contraintes thermiques.

Lors de la validation des travaux, nous nous sommes confrontés à une nouvelle problématique. Cette dernière est la caractérisation des propriétés thermomécaniques des brasures. En effet, il n'est pas judicieux de considérer que ces dernières aient un comportement identique à celui du matériau dont elles sont issues. Il est bien évident que les traitements thermiques qu'elles subissent, leur fusion et la diffusion d'autres éléments vont modifier leur comportement. Pour faire face à ces limitations, nous mettons en place un nouveau protocole expérimental visant la caractérisation de la conductivité thermique des brasures. Ce protocole, présenté dans le cinquième et dernier chapitre, est issu de l'exploitation des résultats donnés par l'approche MAE. Cette dernière permet par une simple confrontation de deux structures : homogène et brasée, d'obtenir la conductivité thermique des brasures.



Finalement, ce rapport est clôturé par une conclusion rappelant les différentes étapes de réalisation de ces travaux de thèse, ainsi que les principaux apports et limitations de l'approche développée. Les perspectives de ces travaux sont ensuite données et détaillées dans une dernière partie de ce rapport.

## ***1.1. Contexte industriel : Outillages de fonderie fabriqués par Stratoconception***

### ***1.1.1. Le procédé de la Stratoconception***

La Stratoconception est un procédé breveté de prototypage rapide permettant de fabriquer, directement par assemblage de couches, une pièce créée par CAO. Ce procédé développé au CIRTES (Centre de Développement Rapide de Produits) depuis 1990 [1] consiste à fabriquer une pièce à partir d'un ensemble de couches élémentaires simples, appelées strates, dans lesquelles sont introduits des renforts et inserts. Les strates sont fabriquées par micro-fraisage rapide à l'aide de machines à outils 2.5 axes. Les strates sont ensuite assemblées pour reconstituer le produit final. Le procédé d'assemblage est choisi selon les contraintes auxquelles la pièce sera soumise après sa mise en forme. Ainsi, selon l'application, la pièce peut être assemblée par collage, brasage ou simplement par l'utilisation des inserts. Le schéma de principe du procédé de Stratoconception est donné par la Figure (I.1).

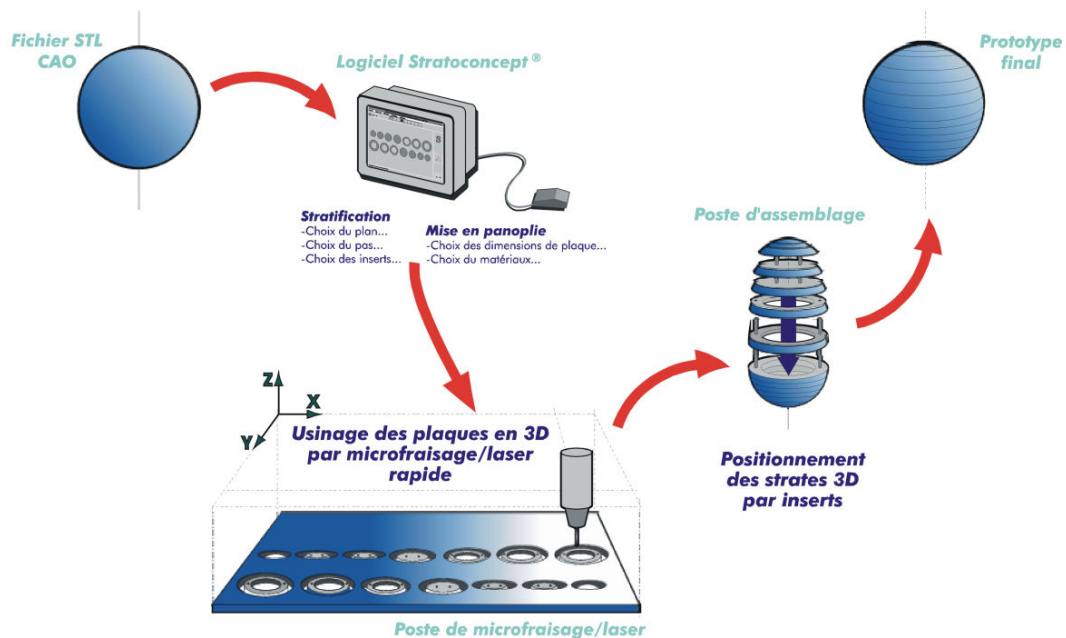


Figure.I.1. Schéma de principe du procédé de Stratoconception [1].

### ***1.1.2. Le procédé de brasage***

Le brasage [2] est un procédé métallurgique qui permet d'assembler des matériaux à partir d'un métal d'apport à bas point de fusion. Le procédé est caractérisé par sa facilité de mise

en œuvre. En effet, il consiste à chauffer l'ensemble : substrats et alliage d'apport jusqu'à la fusion de ce dernier. Le métal fondu constituera par la suite une jonction chimique liant les deux substrats, voir Figure (1.2).

Contrairement au soudage où les métaux de base et d'apport sont tous fondus localement, lors du brasage, seul le métal d'apport est fondu. Ceci permet de garder les propriétés microstructurales des substrats intacts sans subir des traitements thermiques accentués ou des modifications des caractéristiques métallurgiques de ces zones sensibles. De plus, grâce à ses nombreux avantages, le brasage est aujourd'hui très répandu, potentiellement dans l'industrie électronique et aéronautique où il permet d'assembler de nombreux composants. En effet, le brasage se caractérise par une absence de contraintes résiduelles grâce au chauffage uniforme des substrats, des faibles coûts de production, une faible consommation d'énergie, une facilité et rapidité de mise en œuvre, une absence de traitements thermiques complémentaires après brasage, etc, voir [3]. Par ailleurs, le brasage présente certaines limites lors de l'utilisation de certains alliages d'apport présentant des eutectiques. En effet, des moyen de contrôle doivent être mis en œuvre afin de vérifier la qualité des joints en termes de présence d'eutectique ou concernant l'épaisseur uniforme des joints ainsi que la présence des fissures dans le joint ou au niveau des interfaces. Il est impératif que les joints brasés aient des propriétés mécaniques qui leur permettent de résister aux sollicitations thermomécaniques sévères. Dans le deuxième chapitre, une veille bibliographique concernant les assemblages brasés est présentée.

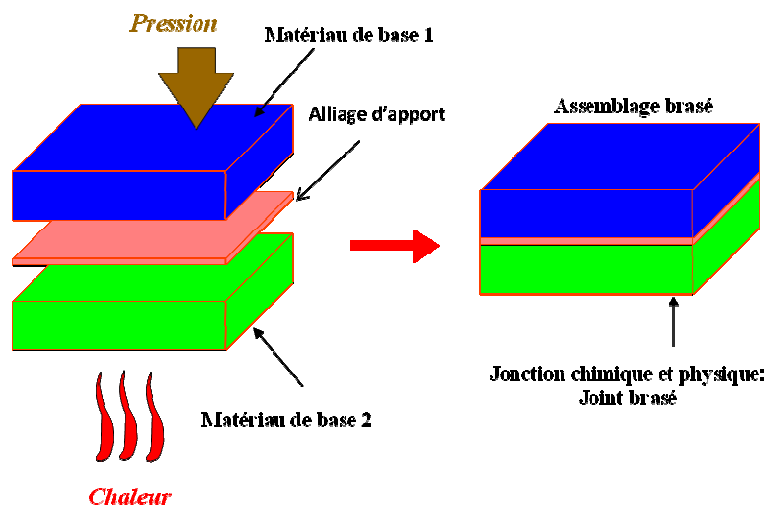


Figure.1.2. Schéma de principe du brasage [2].

### **1.1.3. Projet « Promapal » : fabrication des outillages de fonderie par Stratoconception**

Ces travaux de thèse ont été réalisés dans le cadre du projet FUI «Promapal» regroupant plusieurs partenaires industriels:

- MONTUPET : Leader Européen de la fonderie d'aluminium. L'entreprise fabrique des pièces automobiles à savoir les culasses et les jointes pour les grands groupes multinationaux et souhaite améliorer les propriétés microstructurales de ses pièces.
- CIRTES : C'est le porteur du projet qui vise le développement d'outillages intelligents destiné à la fonderie et plasturgie.
- CM2T : Centre de ressource spécialisé dans la métallurgie et la caractérisation des matériaux
- CTIF : Centre de recherches et développement spécialisé en fonderie.
- InSIC : Institut Supérieur de l'Ingénierie de la Conception dont l'équipe de recherche est spécialisée dans la simulation numérique des matériaux sous chargement extrême.

L'objectif du projet PROMAPAL est la fabrication, par Stratoconception, d'outillages destinés à la fabrication en série des pièces en aluminium. L'utilisation de ce procédé permet, en plus de la réduction des coûts de fabrication, d'améliorer les fonctionnalités existantes et même de créer de nouvelles fonctions créatives grâce à son principe d'empilement de strates assemblées par brasage [1-2]. Dans les travaux cités et dans le présent travail, la fonction concernée est le système de régulation thermique où le prototypage rapide permet d'intégrer des canaux de refroidissement ayant des géométries complexes contrairement au procédé de perçage rectiligne actuellement utilisé, voir Figure (I.3).



*Figure.I.3. Différence entre outillages standards et outillages obtenus par Stratoconception [1-2].*

La Figure I.3 présente un outillage où des nappes de régulation sont intégrées. Ces dernières permettent un refroidissement efficace et ciblé dans l'outillage. Le système de régulation, obtenu par Stratoconception permet d'améliorer le contrôle de la déformation, l'échange de chaleur et la distribution de la température dans les outillages. L'efficacité de ce procédé a bien été mise en évidence dans différentes applications [1], voir la Figure (I.4).

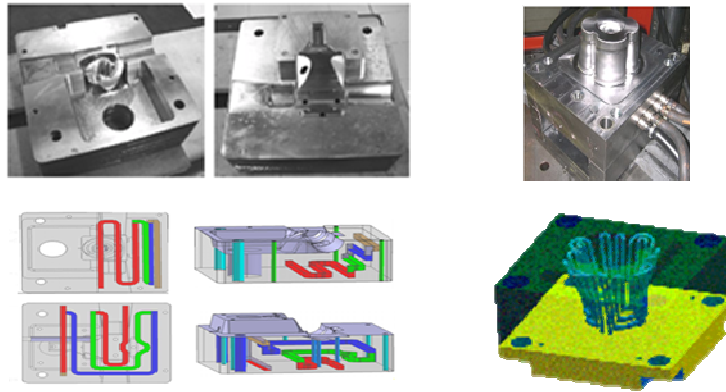


Figure.1.4. Exemples de systèmes de régulation thermique optimisés [1].

## **1.2. Problématique et objectif des travaux de thèse**

### **1.2.1. Modélisation des outillages brasés**

La présence des joints brasés dans les outillages fabriqués par le procédé de Stratoconception affecte automatiquement leur comportement thermomécanique et leur résistance. Dans le travail cité précédemment [1], une étude expérimentale a été menée afin de décrire cette influence, mais le développement des outils de modélisation et de calcul numérique est primordial afin de prédire le comportement de ce type de structure. L'objectif est de suivre l'évolution de la température, les déformations et les contraintes dans les structures considérées durant les différents cycles de chargement. Ainsi, une analyse thermomécanique transitoire doit être menée. Cependant, pour ce type d'analyse, l'épaisseur négligeable de la couche mince, ici le joint brasé, présente un grand problème pour la modélisation. En effet, afin de décrire numériquement le voisinage de ces dernières, un raffinement de maillage est exigé ce qui augmente le temps de calcul d'une manière significative.

Les travaux de thèse ont pour objectif la modélisation du comportement thermomécanique des outillages stratoconçus assemblés par brasage en tenant compte la présence des brasures sans raffinement de maillage.

### **1.2.2. Modélisation des couches minces**

En plus de cette application d'outillages brasés, les travaux entrepris dans cette thèse peuvent s'étendre à d'autres applications industrielles. En effet la problématique des couches minces est présente dans tous les secteurs et applications faisant appel aux techniques d'assemblage par apport de matière (Brasage, collage, soudage), aux revêtements et aux matériaux composites. Dans le secteur aéronautique, par exemple, le brasage apparaît comme une solution alternative face au soudage. En réalité, ce procédé est peu coûteux et ne requiert pas une grande technologie car il peut être effectué en basse

température permettant ainsi aux matériaux de conserver leur intégrité structurale [3]. De plus, et dans le même secteur, l'utilisation du collage a connu une montée significative et plus précisément dans les assemblages hybrides boulonnés et collés des jonctions aéronautiques [4]. Par ailleurs, le revêtement permet d'améliorer les propriétés thermomécaniques des structures. En effet, celui-ci présente une solution optimale permettant d'augmenter significativement les performances de la structure sans que celle-ci soit entièrement faite d'un matériau coûteux. Un dépôt de quelques micromètres de ce dernier sur la surface sollicitée est suffisant pour atteindre les caractéristiques désirées. D'un autre côté, la tendance actuelle à l'utilisation des matériaux composites pour l'optimisation mécanique des structures (masse et propriétés mécaniques) incite au développement des outils de modélisation adaptés afin de réduire le coût des études de dimensionnement.

La problématique des couches minces n'est pas restreinte à un secteur donné. Mais, elles sont présentes dans différentes applications industrielles. Ainsi, l'objectif des travaux de thèse est le développement d'une approche numérique pour la modélisation des assemblages brasés tout en restant ouvert sur d'autres développements destinés aux autres applications des « couches minces ».

### ***1.2.3. Motivations et objectif des travaux : l'approche MAX-FEM pour la modélisation des couches minces***

Dans l'objectif de décrire le comportement des outillages stratoconçus (structures contenant des couches minces), le présent travail introduit une méthode hybride couplant l'approche analytique des développements asymptotiques raccordés (MAE) et la méthode numérique de la Partition de l'Unité (PUM). Ce couplage, intitulé « MAX-FEM », permet une implémentation numérique de la MAE en faisant appel au principe de l'enrichissement. Ce dernier, permet de construire la solution globale "macro" en enrichissant la solution homogène par un terme issu de l'analyse locale "micro" au niveau de la couche mince. Ce principe a été premièrement testé par Nguyen en introduisant le modèle DAR-X-FEM [4]. Cependant, ce modèle, détaillé dans le chapitre suivant, nécessite plusieurs simulations numériques avant d'aboutir à la solution finale. De plus, il ne fournit que la solution globale sans aucune information à l'échelle locale et son implémentation numérique, faite sous MATLAB, est complexe. Finalement, le modèle DAR-X-FEM [4] ne traite que les assemblages brasés pour des configurations 1D et 2D simples sous des chargements thermiques et mécaniques découplés.

Face à ces limitations, une nouvelle démarche de modélisation moyennant une nouvelle formulation éléments finis est proposée. Cette nouvelle approche appelée MAX-FEM exploite les avantages de l'approche MAE en permettant un passage « micro-macro » sans

raffinement de maillage et en un nombre réduit de simulations numériques. De plus, l'implémentation numérique est simplifiée et les résultats extraits vont être exploitables directement pour le dimensionnement des structures avec couches minces en général et sous différents chargements couplés.

Ainsi les motivations et le cahier des charges de ces travaux se résument comme suivant :

- Construire une nouvelle approche simplifiée pour la modélisation thermomécanique des assemblages brasés
- S'étendre sur d'autres applications couches minces
- Permettre une analyse locale au voisinage des couches minces en cas de besoin
- Minimiser le temps de calcul et réduire le nombre de simulations numériques
- Simplifier l'implémentation numérique sous un code ouvert
- Garantir la précision et la convergence des résultats
- Réaliser différentes applications de la méthode et évaluer ses performances.

***Références I***

- [1] C. Pelaingre, L. Velnom, C. Barlier, C. Levailant, A cooling channels innovating design method for rapid tooling in thermoplastic injection molding, 1st conference on advanced research in virtual and rapid prototyping proceedings, 2003, Leiria, Portugal, ISBN : 972-99023-05..
- [2] F. Tsoungui, 2010, Caractérisation mécanique et microstructurale des joints brasés d'alliages aéronautiques avec du BNI-2 comme métal d'apport, thèse de doctorat à l'École de Technologie Supérieure, Montréal.
- [3] E. Paroissien, 2006, Contribution aux assemblages hybrides boulonnés et collés : Application aux jonctions aéronautiques, thèse de doctorat à l'Université de Toulouse, France.
- [1] Nguyen Dang Huy. Contribution à la modélisation et à la caractérisation du comportement des assemblages brasés. Couplage des méthodes DAR et X-FEM, 2009.





## **Chapitre II**

### **Etude Bibliographique : Modélisation des couches minces**

Ce deuxième chapitre est une étude bibliographique des travaux traitant la problématique des couches minces. Cette étude représente une veille sur les méthodes multi-échelles et d'autres méthodes analytiques et numériques appliquées à la modélisation des couches minces et des assemblages adhésifs. Finalement, le modèle DAR-X-FEM introduit dans les travaux de Nguyen est repris afin d'illustrer ces avantages et limitations ainsi que les perspectives qu'il ouvre.

### ***II.1. Introduction : Aperçu sur la modélisation des couches minces***

Les couches minces (joints adhésifs et métalliques ou revêtements) sont fortement utilisées dans l'industrie et présentent une solution pour différents verrous technologiques. Leur utilisation dans les techniques d'assemblages a augmenté de manière significative. Le recours à ce type de procédé se justifie par sa simplicité, l'optimisation du temps et du coût d'assemblage, les hautes résistances à la corrosion, fatigue et fissuration.

Le comportement thermique et mécanique de ces structures peut être décrit par des comportements issus des études expérimentales. Mais, il est trivial que la prédiction de ce comportement par des modèles analytiques ou par des simulations numériques permet d'économiser le temps et la matière. Ces dernières années, plusieurs travaux se sont intéressés à la modélisation des couches minces en général et des assemblages brasés en particulier. En effet, il est primordial de prendre en considération l'influence de ces couches lors de la modélisation des structures les contenant vu leurs propriétés différentes de celles des substrats. Cette différence se présente en termes de caractéristiques géométriques et matériaux. De plus, ces éléments constituent, en général, des zones de faiblesse pour les structures vu les difficultés liées à la maîtrise des procédés de leur mise en œuvre ou à leur comportement singulier.

Par le passé, le besoin en termes de modélisation des couches minces s'est d'abord exprimé en matière de dimensionnement des assemblages adhésifs. Dans leurs ouvrages, Adams et al. [1] et Verchery et Cardon [2] ont illustré l'importante utilisation des assemblages adhésifs dans les secteurs industriels les plus évolués, ainsi que les différentes approches de modélisation de ce type de structures. Plusieurs autres travaux se sont confrontés à la même problématique dans l'objectif d'approximer les champs thermiques et mécaniques dans les assemblages contenant des couches minces en utilisant des approches analytiques ou des méthodes numériques basées sur la méthode des éléments finis (FEM) [3-18]. Cependant, ces travaux restent limités par les premiers à des cas simples en termes de géométrie et de chargement et utilisent des approximations et des hypothèses simplificatrices, ou sont confrontés pour les seconds au problème de raffinement du maillage.

Dans l'objectif de répondre à ces limitations, des approches multi-échelles s'intéressant à la résolution des problèmes perturbés ont été développées. Que les perturbations proviennent des singularités, des discontinuités ou des couches minces, ces méthodes permettent de les prendre en considération dans la modélisation du comportement global des structures les contenant suivant différentes approches. La première consiste à suivre et tracer l'information à l'échelle locale avant de la projeter à l'échelle globale. Les méthodes basées sur les développements asymptotiques constituent le noyau des méthodes analytiques

faisant appel à ce principe. Ainsi, plusieurs travaux ont été développés pour la modélisation des assemblages adhésifs ou des problèmes singuliers [19-25]. Ces méthodes asymptotiques consistent à définir deux approximations : une à la grande échelle, loin de la perturbation et un deuxième développement au voisinage de la perturbation. Le raccordement des deux approximations définit la solution approximée du champ recherché.

De plus, les méthodes basées sur le principe de l'homogénéisation [26-35] présentent une projection numérique de cette première approche. Ce principe consiste à passer de l'échelle microscopique où la description du matériau est hétérogène à celle macroscopique où ces détails ne sont plus visibles. La méthode EF2 [27] et les projections de Dirichlet hiérarchiques [28] se basant sur ce principe permettent la description du comportement des matériaux hétérogènes en utilisant des grilles de calcul éléments finis indépendantes et de les coupler en utilisant un opérateur de transfert d'information d'une grille à l'autre.

La deuxième approche du calcul multi-échelles se caractérise par un aspect purement numérique utilisant un calcul en grilles grossières. Elle représente une extension de la méthode des éléments finis et consiste à corriger la solution globale non perturbée par des éléments de correction provenant de l'échelle locale. Cette correction est nommée « enrichissement » [36-52]. C'est ainsi que la méthode des éléments finis enrichis se définit. Cette dernière a été initiée sous la forme de la méthode multi-échelles variationnelle [36] qui consiste à construire l'enrichissement de manière analytique en utilisant les fonctions de Green [37]. Ensuite, la Partition de l'Unité (PUM) [38-41] a permis une construction numérique de l'enrichissement en définissant des fonctions spéciales ayant deux principaux objectifs : localiser l'enrichissement et corriger le champ homogène. En se basant sur ce principe, deux méthodes ont été introduites : les éléments finis généralisé GFEM [42-44] et les éléments finis étendus X-FEM [45-51]. Le principe des G-FEM consiste à introduire localement des informations sur le comportement local en faisant appel aux développements asymptotiques. De cette façon, elle permet d'améliorer localement l'approximation de la solution. Cependant, la mise en œuvre pratique de cette approche présente des difficultés relatives à la construction des fonctions d'enrichissement et aux schémas d'intégration. D'autre part, les X-FEM s'adressent aux problèmes mécaniques traitant les singularités. Elle consiste à introduire les discontinuités dans la formulation éléments finis et non dans le maillage. Ainsi, ce dernier n'est pas contraint par la mise à jour. Elle permet de résoudre les problèmes de fissuration et de singularités et de suivre l'évolution de leurs comportements indépendamment du maillage.

L'utilisation de ces deux approches de calcul multi-échelles de manière indépendante atteint rapidement ses limites. En effet, les méthodes asymptotiques perdent leur précision dans les zones d'encastrement, de jonction et de contact localisé, alors que, en outre, leur mise en

œuvre pratique reste limitée sur des cas simples et leur implémentation numérique complexe. D'autre part, la majorité des méthodes se basant sur l'homogénéisation ne décrivent pas de manière précise la répartition locale des champs calculés. Enfin, les méthodes basées sur l'enrichissement restent limitées lorsqu'il s'agit des matériaux fortement hétérogènes comme les matériaux composites. Pourtant, les deux méthodes se complètent et chacune peut pallier les limites de l'autre. De ce fait, la question se pose autour d'un couplage possible des deux approches. La méthode Arlequin [52-53] se présente comme un outil efficace pour un tel couplage. Elle permet d'utiliser différentes méthodes de résolution pour les différentes échelles et de coupler par la suite les résultats tout en assurant la continuité et l'homogénéité de la solution. D'autres possibilités de couplage s'avèrent possibles et les travaux de Nguyen [54] couplant les développements asymptotiques raccordés (MAE) et la méthode X-FEM en définit une. Cette méthode consiste à construire l'enrichissement en utilisant les MAE avant de l'injecter dans la formulation X-FEM.

D'autres méthodes traitant la problématique des couches minces existent dans la littérature. Par exemple, les méthodes sans maillage « Meshless » [55-59] traitent les problèmes discontinus sans aucun maillage. Ainsi tout problème de raffinement ou de distorsion du maillage sont évités. Cependant, ces méthodes sont principalement confrontées aux problèmes d'application des conditions aux limites et d'intégration numérique.

Les éléments finis d'interface [24-25, 60-64] comme les éléments cohésifs et les « double node » traitent aussi les problèmes de discontinuité et d'interface. Ils permettent d'introduire des éléments spécifiques dans l'interface afin de suivre son comportement lors d'un chargement. En effet, le saut de déplacement à travers cette interface est calculé en utilisant le principe de minimisation de l'énergie potentielle. L'évolution de ce saut définit l'ouverture de l'interface due à une fissure ou à un délaminage [61-64].

La majorité des méthodes précédemment citées s'appliquent aussi à la résolution de l'équation de chaleur dans des structures avec couches minces en suivant le même principe. En effet, la FEM, les méthodes asymptotiques, l'homogénéisation, la PUM, les éléments d'interface,...etc sont utilisées pour proposer des approximations du champ de température, voir [68-70]. Cependant, certaines méthodes restent plus appropriées et montrent leur pertinence et efficacité pour le traitement des problèmes thermiques en particulier.

Dans ce cadre, nous citons la méthode des quadripôles [73-75] qui, grâce à un passage à l'espace de Laplace, permet d'approximer le champ de température pour des structures multicouches et multi-matériaux. De plus, sa facilité d'implémentation numérique la rend fortement utilisée pour ce type de problèmes. Cependant, cette méthode, ne s'inscrivant

pas dans le cadre des méthodes éléments finis, reste difficile à utiliser dans le cadre de la résolution des problèmes couplés. En effet, employer cette méthode dans le cas d'un couplage thermomécanique revient à résoudre le problème thermique séparément avant d'intégrer les résultats dans un code dédié à l'analyse mécanique.

Les méthodes sans maillage montrent aussi leur efficacité face au problème de raffinement du maillage exigé par la FEM. En effet, en évitant ce problème, ces méthodes permettent de réduire le temps de calcul dans le cas des analyses transitoires [76-77].

Toujours dans ce cadre des méthodes non basées sur la FEM, la méthode des éléments frontière (Boundary Elements Method BEM) [78] permet de traiter les problèmes des couches minces. En effet, cette méthode a montré un grand intérêt pour le traitement des problèmes de revêtements en particulier. Cette efficacité revient à l'utilisation des fonctions de Green qui permettent d'approximer la solution exacte sur la surface. Ainsi, sans être obligée de passer par une formulation variationnelle et sans utiliser un maillage volumique, la BEM procure une approche simplifiée et non onéreuse en termes de maillage.

Cet aperçu bibliographique permet de suivre l'évolution des méthodes traitant la problématique des couches minces. Ces méthodes suivent des approches diversifiées et parfois complémentaires. Ainsi, pour positionner les présents travaux de thèse parmi ces approches, un retour en détail sur l'ensemble des méthodes précédemment citées sera nécessaire. Dans ce cadre, un aperçu sur les modèles analytiques simplifiés traitant la problématique des couches minces est d'abord introduit. Ensuite, les limitations que présente la FEM dans le cas de la modélisation des structures contenant des couches minces seront abordées. Ceci, permettra d'introduire les méthodes multi-échelles comme réponse à ces limitations. Parmi ces dernières, une attention particulière sera portée sur les méthodes MAE, PUM et DAR-X-FEM afin de pouvoir situer les travaux présentés ici.

## II.2. Modélisation simplifiée des couches minces

### II.2.1. Modèles analytiques simplifiés : assemblages adhésifs

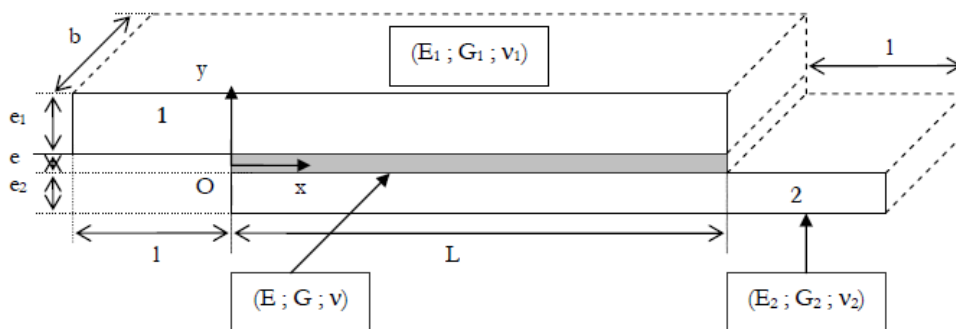


Figure.II.1. Assemblage à recouvrement simple [76].

La majorité des modèles analytiques traitant les couches minces sont principalement dédiés à la problématique des assemblages, adhésifs et métalliques, et considère des configurations simplifiées de ces derniers. En effet, dans la majorité des travaux [1-11], un joint à recouvrement simple est considéré, voir Figure (II.1).

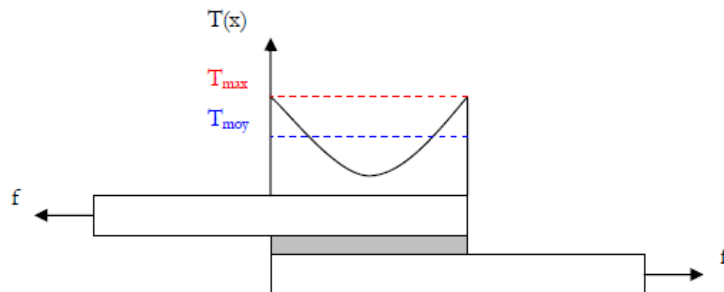
Avant le développement de modèles spécifiques, le calcul des contraintes dans les assemblages se faisait de manière classique. En effet, la contrainte de cisaillement est calculée par un simple rapport de la force de traction et de la surface de recouvrement. Cette contrainte va être injectée dans le critère de Von Mises pour l'évaluation de la tenue de la structure. Mais cette approche simplifiée ne peut être précise. En effet, elle ne tient pas compte de la particularité (épaisseur négligeable) de la couche mince et de son comportement différent de celui d'une structure standard. Ainsi, ce besoin en termes de modélisation va inciter beaucoup de chercheurs à développer des modèles prédictifs dédiés aux assemblages. Le modèle de Volkersen [7] reste pionnier pour la modélisation analytique des assemblages adhésifs. Il donne l'expression de la contrainte de cisaillement (Equation (II.1)) dans un joint à recouvrement en fonction des caractéristiques mécaniques de chaque matériau utilisé :

$$T(x) = \frac{\eta_v}{2b} \frac{\cosh(\eta_v(\frac{L}{2} - x))}{\sinh(\frac{\eta_v L}{2})} f \quad (II.1)$$

avec :

$$\eta_v = \sqrt{\frac{2G}{ee_1 E_1}}$$

où,  $E_1$  désigne le module de Young des matériaux de base et  $G$  le module de cisaillement du joint,  $F$  est la force appliquée,  $b$  représente la profondeur du joint et  $x$  représente une position donnée le long du recouvrement.



*Figure.II.2. Distribution des contraintes le long du recouvrement [56].*

Ce modèle montre que la contrainte de cisaillement est maximale au bord du joint et minimale au centre (Figure II.2 ). Ainsi, le critère de la contrainte maximale peut être retenu

en rupture. Cette dernière est exprimée en fonction de la contrainte moyenne de cisaillement (équation (II.2)):

$$T_{\max} = \frac{\eta_v L}{2 \tanh(\eta_v L)} T_{\text{moy}} \quad (\text{II.2})$$

Le point intéressant n'est pas le comportement de l'assemblage en lui-même, mais l'approche utilisée et les hypothèses de base. En effet, par le biais de ce modèle, il est possible de mettre en évidence les limitations des approches analytiques simplifiées. C'est tout d'abord la configuration simplifiée de l'assemblage (géométrie, chargement) qui est mise en question, en ne pouvant pas couvrir les domaines d'utilisation des assemblages ou des couches minces en général. Le modèle considéré ne peut être valable que lors des études de caractérisation, sur éprouvettes, précédant la réalisation des structures destinées aux applications industrielles où les géométries et chargements sont plus complexes. De plus, plusieurs hypothèses simplificatrices sont utilisées et ne permettent pas de considérer l'approche précise. Par exemple le modèle ne tient pas compte du cisaillement dans les substrats supposés en traction. De plus, la flexion du joint est négligée et la contrainte normale n'est pas calculée.

La critique de ce modèle ne peut être généralisée sur tous les modèles analytiques. En effet, d'autres modèles essaient de prendre en considération des phénomènes complexes. Par exemple, Goland et Reissner [8] apportent une réponse supplémentaire en introduisant un modèle bi-axial restituant la flexion des joints. Ce modèle considère que l'assemblage est dans un état de déformation plane. En outre, il suppose que la contrainte normale dans le joint est négligeable et que le cisaillement ne varie pas dans l'épaisseur.

D'autres travaux se présentent comme extensions de ces modèles. En effet, les auteurs essaient d'alléger les hypothèses et prendre en considération plus de phénomènes présents dans les assemblages. Chacun de ces travaux essaie de résoudre différentes limitations des travaux qui le précèdent. Mais ils restent des approches dispersées et n'arrivent pas à décrire entièrement un assemblage adhésif en tenant en compte de tous les phénomènes même dans un cas de recouvrement simple. Pour une étude bibliographique plus exhaustive, le lecteur peut se référer aux travaux [76-78].

A partir de cet aperçu, ces approches analytiques simplifiées affichent une utilisation simplifiée et une amélioration continue (Figure II.3). Toutefois, en se basant sur des hypothèses simplificatrices, elles se limitent à des familles de problèmes spécifiques alors qu'elles nécessitent d'être reformulées pour s'appliquer à d'autres configurations.

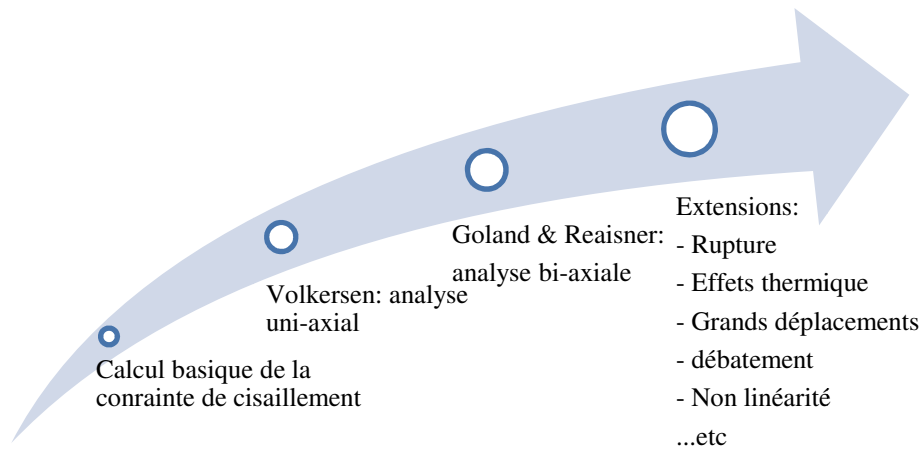


Figure.II.3. Evolutions de la modélisation analytique simplifiée des assemblages adhésifs.

### II.2.2. Méthode des Eléments Finis classique (FEM)

Dans le cadre de la modélisation numérique, la méthode des éléments finis a été appliquée au problème des couches minces [12-18]. Deux approches sont utilisées : (i)- la première consiste à ignorer la couche mince et négliger son effet sur l'ensemble de la structure, (ii)- la deuxième approche consiste à prendre en compte la couche mince lors du calcul numérique par un raffinement suffisant mais excessif du maillage ou en utilisant des éléments spécifiques.

Il est trivial que la première approche permet de simplifier le problème et donner une approximation du comportement de la structure dans un temps de calcul minimal. Par ailleurs, dans certains cas (couches isolantes par exemple), l'influence de la couche mince ne peut être négligée. En effet, elle perturbe fortement le comportement thermomécanique de la structure. A titre d'exemple, dans l'application présentée par la Figure II.4, une couche mince dont la conductivité thermique est sensiblement différente de celles des substrats est introduite dans assemblage 2D, voir Tableau II.1.

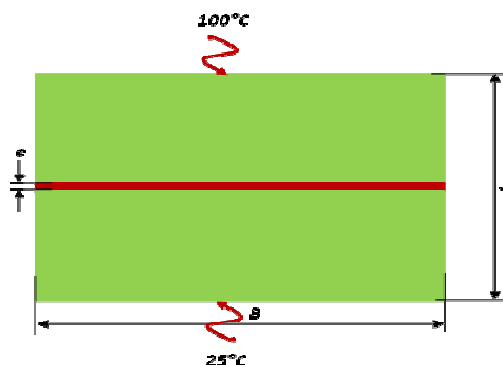


Figure.II.4. Assemblage sous chargement thermique.

La forte hétérogénéité matériau induit une différence de comportement de l'assemblage par rapport à une structure homogène, voir Figure II.5. C'est davantage significatif pour des couches complètement isolantes pouvant être utilisées pour la régulation thermique des



moules par exemple. Ainsi, il n'est pas précis d'approximer le comportement de l'assemblage par celui d'une structure homogène surtout dans le cas où les rapports de propriétés thermomécaniques sont significatifs.

Tableau II.1 Caractéristiques géométriques et données matériaux de l'assemblage.

	Substrats	Couche mince
<b>Conductivité</b>	$\lambda_1 = 370 W.m^{-1}.K^{-1}$	$\lambda_2 = 15 W.m^{-1}.K^{-1}$
<b>Diffusivité</b>	$a_1 = 1.06.10^{-4} m^2.s^{-1}$	$a_2 = 7.7.10^{-6} m^2.s^{-1}$
<b>Longueur</b>	$L = 20mm; B = 100mm$	$e = 0.1mm$
<b>Module de Young</b>	$E_1 = 127 GPa$	$E_1 = 214 GPa$
<b>Coefficient de dilatation thermique</b>	$\alpha_1 = 16.5.10^{-6} K^{-1}$	$\alpha_2 = 13.5.10^{-6} K^{-1}$

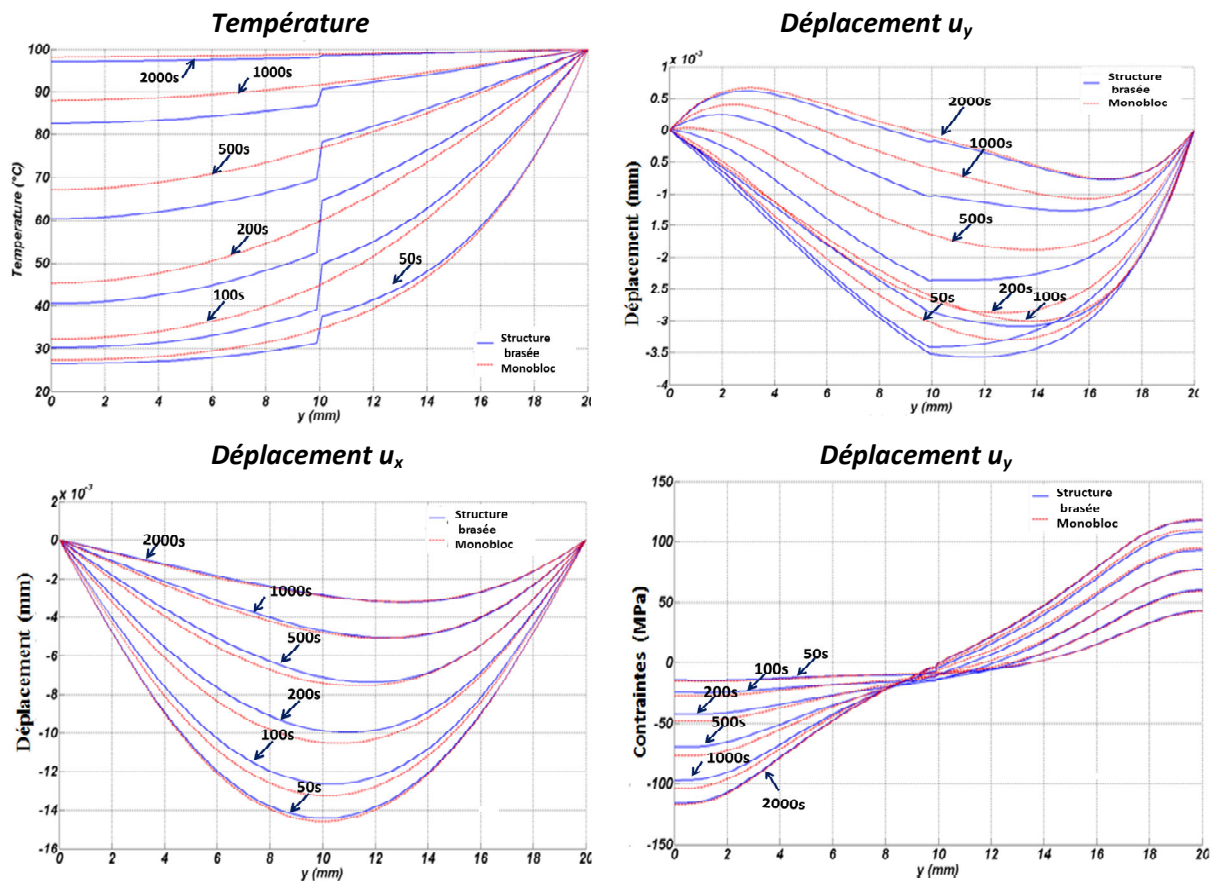


Figure.II.5. évolution de la température, des déplacements  $u_x$  et  $u_y$  et la contrainte  $\sigma_{xy}$ .

Par ailleurs, mailler finement le joint dans un calcul éléments finis s'avère très coûteux en termes de temps de calcul. En effet, avant d'aboutir aux résultats finaux, plusieurs calculs doivent être effectués afin de choisir le maillage convenable évitant la distorsion du maillage, et l'incrément de temps permettant à l'élément de capter le gradient de température. De plus, et pour des raisons de stabilité, l'incrément de temps est lié à la taille

du maillage. Ainsi, dans le cas où la couche mince est maillée, le temps de calcul augmente significativement:

$$\frac{1}{6} < \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}$$

Si le raffinement du maillage se présente comme une solution couteuse, plusieurs autres travaux numériques font appel à la méthode des éléments finis en définissant des éléments spéciaux. Cette solution essaie de prendre en compte la couche mince sans la mailler. Par exemple, dans les travaux de Carpenter et Barsoum [18], un élément unidimensionnel à quatre nœuds est introduit dans le joint en considérant ce dernier comme un élément poutre dont la déformation dans l'épaisseur est négligée. Plusieurs autres travaux introduisant des éléments spéciaux [14-15] ont été introduits pour traiter les problèmes des couches minces et plus particulièrement les joints adhésifs. Le lecteur peut se référer aux travaux [76-78] pour une liste des travaux plus détaillé.

Cette brève présentation montre que l'application de la méthode éléments finis aux couches minces a évolué dans le temps (Figure III.6). Cette évolution a introduit des éléments spécifiques qui conduiront par la suite au développement des méthodes numériques spécifiques présentées dans la section suivante.

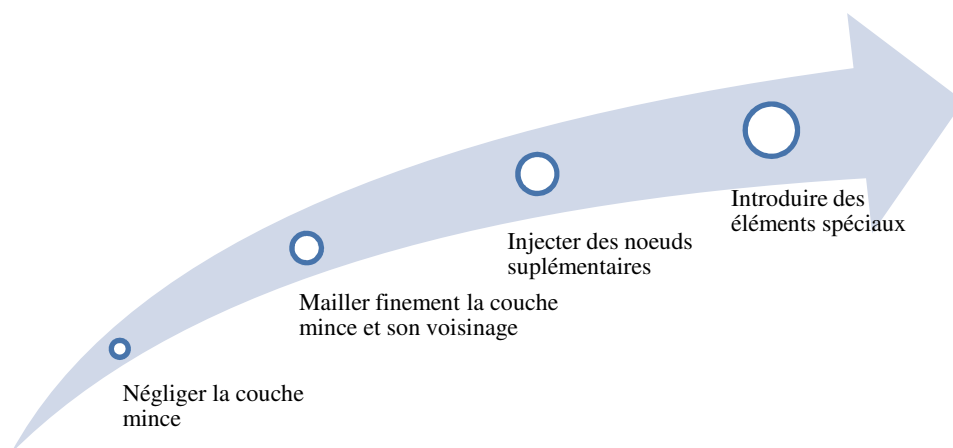


Figure.II.6. Modélisation des couches minces par la FEM classique.

### II.3. Méthodes multi-échelles

Si les approches analytiques simplifiées et la méthode des éléments finis classique ne parviennent à apporter qu'une réponse incomplète à la problématique des couches minces, des méthodes spécifiques plus récentes peuvent pallier à ces insuffisances pour les problèmes d'hétérogénéités, singularités et de changement d'échelles. En effet, de l'utilisation accrue des couches minces dans les domaines tel que l'aéronautique, le

nucléaire,... est née le besoin d'une modélisation dédiée à la prédiction du comportement de ce type de structures.

Au sein de cette famille de méthodes dites « multi-échelles », il est possible de distinguer différentes approches et procédures. En effet, face au problème de changement d'échelles, il est possible de procéder par une approche asymptotique, par homogénéisation ou par enrichissement. De plus, les méthodes dites sans maillage, les éléments d'interface, les éléments frontières et la méthode Arlequin peuvent être appliquées à cette problématique.

Le principe de chacune de ces approches, leurs différences et leurs apports pour les objectifs fixés sont présentés et illustrés dans les sections suivantes.

### II.3.1. Développements asymptotiques raccordés (DAR ou MAE)

L'approche MAE consiste en la résolution des équations mécaniques, d'un problème perturbé, à deux échelles, loin et près de la perturbation. Cette approche consiste à définir deux domaines, macro et micro. Dans les travaux [21,24-25,55] cette approche a déjà pu être appliquée sur des assemblages adhésifs contenant une couche d'épaisseur  $e$  négligeable devant une longueur  $L$  caractéristique de l'assemblage. Sur la situation bidimensionnelle décrite par Figure II.7, on introduit alors le paramètre  $\varepsilon=e/L \ll 1$ , voir.

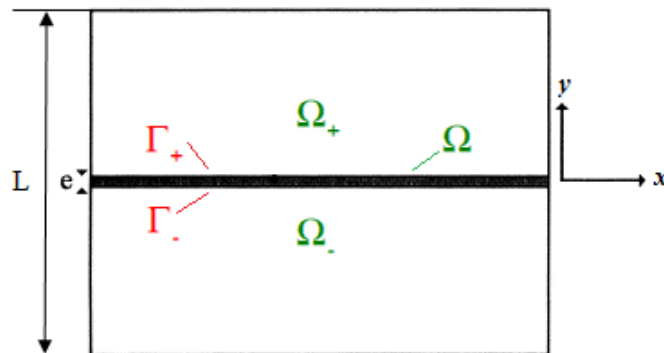


Figure.II.7. Deux substrats  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  assemblés par une couche mince adhésive  $\Omega$ .

Par MAE, deux problèmes vont être analysés, le problème "perturbé" où la couche mince joue le rôle de perturbation, et le problème "non perturbé" posé sur la structure homogène. Cela conduit à utiliser deux développements. Le premier, dit extérieur, restitue le comportement global "loin" du joint caractérisé par le paramètre de perturbation  $\varepsilon$  :

$$\mathbf{u}(x,y)=\mathbf{u}^0(x,y)+\varepsilon\mathbf{u}^1(x,y)+\dots \quad (II.3)$$

Ce développement est défini sur un domaine dit « extérieur » ( $\Omega_+ \cup \Omega_-$ ), voir Figure II.8, caractérisé par une interface de discontinuité  $\Gamma$  en lieu et place de la couche mince lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



Figure.II.8. . Domaine extérieur  $\Omega_+ \cup \Omega_-$ .

Ce développement discontinu à l'endroit de la perturbation, résulte du champ continu non perturbé  $\mathbf{u}^0$  corrigé du terme  $\varepsilon \mathbf{u}^1$  lié à la présence de la couche mince. La continuité locale au franchissement du joint sera assurée par le raccordement de (II.3) avec un second développement intérieur (II.4) valable "à proximité" de la perturbation. Ce développement décrit la solution sur un domaine semi-infini dit «intérieur» parcouru par la variable  $\bar{y}=y/\varepsilon$ , voir Figure II.9.

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x,y) = \mathbf{v}^0(x,\bar{y}) + \varepsilon \mathbf{v}^1(x,\bar{y}) + \dots \quad (II.4)$$

Le second développement décrit le déplacement à proximité de la couche mince.

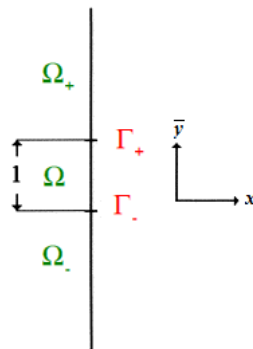


Figure.II.9. Développement intérieur décrit par la variable  $\bar{y}=y/\varepsilon$ .

Des règles de raccordement spécifiques (II.5) liant les développements (II.3) et (II.4) vont permettre, en plus des équations d'équilibre, de déterminer les différents termes introduits par les deux développements, voir [21,55].

$$\begin{cases} \lim_{\bar{y} \rightarrow \pm\infty} (\mathbf{v}^{0\pm}(x,\bar{y}) - \mathbf{u}^{0\pm}(x,0)) = \mathbf{0} \\ \lim_{\bar{y} \rightarrow \pm\infty} \left( \mathbf{v}^{1\pm}(x,\bar{y}) - \bar{y} \frac{\partial \mathbf{u}^{0\pm}}{\partial y}(x,0) - \mathbf{u}^{1\pm}(x,0) \right) = \mathbf{0} \\ \dots \end{cases} \quad (II.5)$$

La Figure II.10 présente un résumé du principe de l'approche MAE qui donne le comportement de la structure par une perturbation introduite par la présence de la couche

mince. Afin de caractériser cette perturbation, le joint est substitué par une interface de discontinuité. Un développement extérieur introduisant des termes de correction (terme  $\epsilon \mathbf{u}^1$ ) est considéré pour approximer le déplacement en tenant en compte de l'interface. Le calcul de ces termes s'appuie sur des informations à l'échelle locale en définissant un deuxième domaine à proximité de la couche mince. Ce domaine, défini par un changement de variable, est décrit par un deuxième développement intérieur qui introduit des termes supplémentaires (termes  $\epsilon \mathbf{v}^0$  et  $\epsilon \mathbf{v}^1$ ). Le calcul de ces différents termes fait appel aux conditions aux limites, de continuité et aux règles de raccordement liant les différents termes.

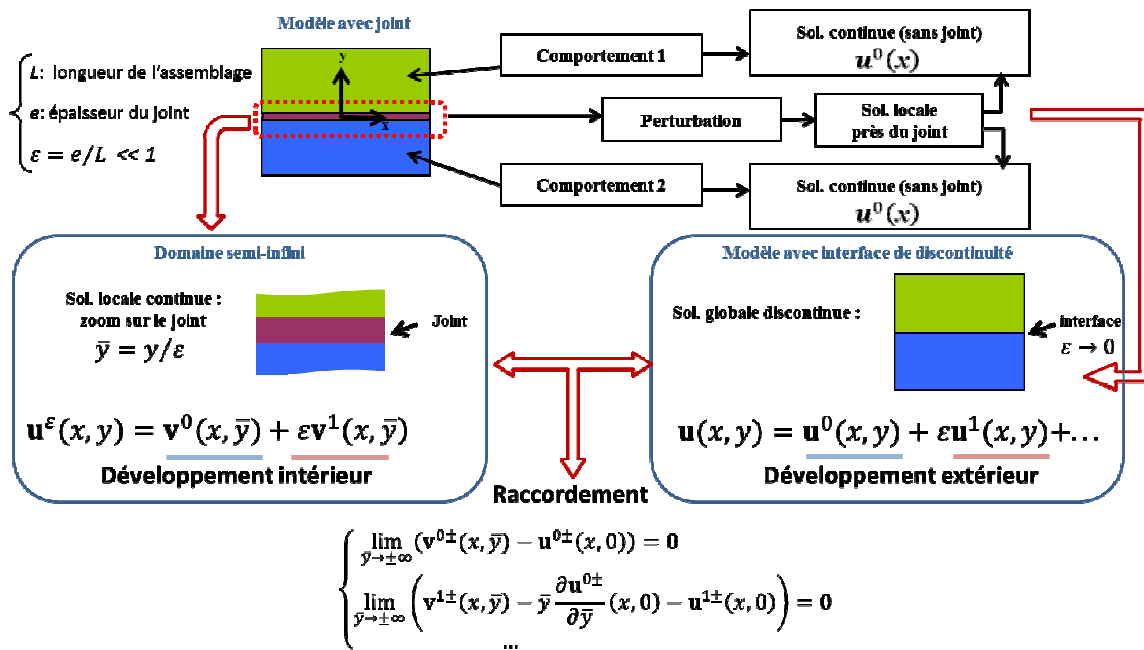


Figure.II.10. Principe de l'approche MAE.

Ainsi, cette approche permet une modélisation multi-échelles des structures avec couches minces. Son application aux structures mécaniques a permis de résoudre les problèmes de décohésion, de rupture et de délaminage des assemblages brasés ou collés [21,24-25]. Ces travaux mettent en évidence la pertinence de la méthode mais aussi ses limitations. Dans les travaux [21] par exemple, la méthode a été appliquée à des assemblages bidimensionnels dans l'objectif de décrire la rupture en mode III de ces structures. Les résultats ont été obtenus analytiquement avec précisions. Cependant, dans le mode III, seul le cisaillement est pris en compte. Ce qui facilite les calculs analytiques tandis qu'une configuration plus complexe nécessitera une implémentation numérique de la méthode. Cette dernière est très complexe à cause du nombre important d'équations à résoudre et d'inconnues à calculer en alternant les différents ordres des développements asymptotiques extérieur et intérieur. D'autres limitations sont présentées par ces travaux et concernent la validité de la méthode

près des bords. En effet, au voisinage de ces zones, il faut apporter des modifications aux développements présentés précédemment afin de prendre en compte l'effet des conditions aux limites. Par conséquent, les calculs deviennent plus complexes même sur des configurations simples. De plus, une autre difficulté de la méthode est traitée dans les travaux [24-25]. Cette dernière est liée au ratio des propriétés mécaniques des substrats et de la couche mince (modules de Young). En effet, dès que ce ratio devient important, les développements standards ne restent plus valides et la perturbation due à l'hétérogénéité matériau s'ajoute à celle causée par l'hétérogénéité géométrique. Pour faire face à cette problématique, Schmidt [25] introduit le ratio des modules de Young comme une deuxième caractéristique du problème et construit ses développements autour des deux paramètres (géométrique et matériau).

Ces travaux de thèse reposent sur la méthode MAE dont la pertinence est mise en évidence. En outre, il sera nécessaire de pallier à ses principales limitations, à savoir son implémentation numérique, les problèmes de bords et les fortes hétérogénéités matériau.

### **II.3.2. Méthodes d'enrichissement**

Afin de prendre en compte l'information locale dans le calcul de la solution globale, le principe d'enrichissement [36-51] utilise une correction de la formulation éléments finis en rajoutant un ou plusieurs termes de correction. Comparé aux méthodes précédentes (analytique, FEM, et MAE), l'enrichissement n'agit ni sur le domaine ni sur le maillage. En effet, l'objectif des méthodes basées sur ce principe est de prendre en considération les singularités (inclusions, fissures, interface,...etc.) sans raffinement de maillage ni de calcul à l'échelle microscopique. De plus, dans le cas de l'évolution de la singularité (propagation de fissure, délaminage, décohésion,...), ces méthodes doivent permettre le suivi de cette évolution sans remaillage. Ainsi, leur principe introduit un nouveau concept qui agit sur la formulation éléments finis et essaie de reproduire la discontinuité ou le changement d'échelle par le biais de l'espace d'interpolation, sans toucher au maillage.

Pour parvenir à un tel objectif, le champ de déplacement  $u_h$  est partitionné tout d'abord en deux entités différentes: le champ de déplacement classique  $u_H$  qui suppose l'absence de la perturbation, et un terme de correction  $\delta u_h$  issu de l'enrichissement spécifique.

$$u_h = u_H + \delta u_h \quad (II.6)$$

La problématique que cette partition induit réside dans les trois points suivants :

- la nécessité d'assurer la continuité globale du champ de déplacement en passant d'un élément à l'autre

- le contrôle des oscillations du terme de correction et la maîtrise de son intégration numérique
- garantir l'indépendance des deux termes lors de la formulation éléments finis. En effet la matrice de rigidité globale risque d'être singulière si elle présente des combinaisons linéaires entre ses lignes et colonnes.

Répondre à ces contraintes nécessite la construction d'un espace d'interpolation à l'aide de fonctions spéciales. Ces dernières doivent représenter le domaine étudié, ainsi qu'elles se doivent de reproduire le comportement local sur un maillage relativement grossier. Les principales approches de construction de ces fonctions sont présentées dans les sections qui suivent.

### **II.3.3.1. Méthode variationnelle et Partition de l'Unité**

La traduction du principe d'enrichissement nécessite une grande attention à la construction des espaces d'interpolation et aux degrés de liberté additionnels qui leur seront liés. Si le terme de correction est le résultat du comportement local, la première réflexion sera d'approximer ce dernier analytiquement avant de l'introduire dans la formulation éléments finis. La méthode multi-échelles variationnelle [36] adopte cette stratégie : elle ne résout numériquement que la première partie homogène alors que le second terme est approché par une expression analytique. Dans le cas d'un problème linéaire de Poisson, l'expression du terme de correction fait appel aux fonctions de Green et au résidu de  $u_H$  :

$$\delta u_h(x) = - \int_{\Omega} g(x,y) \cdot r(u_H)(y) dy \quad (II.7)$$

Par ailleurs, la difficulté de cette approche réside dans l'approximation des fonctions de Green  $g$ . En effet, elles nécessitent un calcul fin sur un ensemble de grilles emboîtées dans celles du champ homogène. En outre, les deux problèmes de dépendance linéaire et de continuité nécessitent un traitement spécifique pour annuler les fonctions de Green sur les frontières, voir [37].

Une résolution analytique présente toujours plusieurs limitations. En effet, la première question concerne son existence et la possibilité de l'obtenir pour des cas complexes. En outre, son intégration dans le calcul numérique présente un autre verrou. De ce fait, le principe d'enrichissement doit développer des approches entièrement numériques et ouvertes aux différentes applications.

Dans ce cadre, la Méthode de la Partition de l'Unité (PUM) [38-41] offre un cadre numérique simple permettant d'enrichir les espaces d'approximation construits par la méthode des éléments finis. En effet, la PUM introduit des fonctions spéciales, de nature a priori

quelconque, dans le but de localiser l'enrichissement et d'obtenir des champs bien définis dans ce domaine. Ces fonctions sont pondérées par les fonctions de forme standard de la méthode des éléments finis. De cette façon, sur chaque élément fini enrichi, les deux termes homogène et de correction, s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 u_H(x) &= \sum_i u_i \varphi_i(x) \\
 \delta u_h(x) &= \sum_i \sum_j b_{ij} f_j(x) \varphi_i(x)
 \end{aligned}
 \tag{II.8}$$

Le nom « partition de l'unité » provient de la condition que doivent remplir les fonctions d'interpolation. En effet, la somme de ces dernières doit être égale à l'unité :

$$\sum_i \varphi_i(x) = 1
 \tag{II.9}$$

L'utilisation de la PUM constitue en soi une nouvelle perspective aux méthodes multi-échelles. En effet, son atout majeur demeure la possibilité de décrire le comportement d'une structure complexe contenant des singularités sans avoir besoin de multiplier les calculs à plusieurs échelles, de remaillage ou de raffinement excessif de maillage.

Des opportunités que ce principe offre sont nées les deux méthodes des éléments finis généralisés G-FEM et étendue X-FEM présentées par la suite.

**II.3.3.2. Méthode des éléments finis généralisés (G-FEM)**

La G-FEM [42] consiste à employer des développements asymptotiques ou polynomiaux, voire d'utiliser un calcul FEM local, pour la construction des fonctions spéciales introduites par la PUM. L'utilisation des développements asymptotiques ou polynomiaux est un outil efficace permettant de reproduire la solution locale qui sera ensuite injectée dans la formulation éléments finis globale. De cette façon, l'approximation locale est nettement améliorée, et de plus, les singularités seront facilement captées.

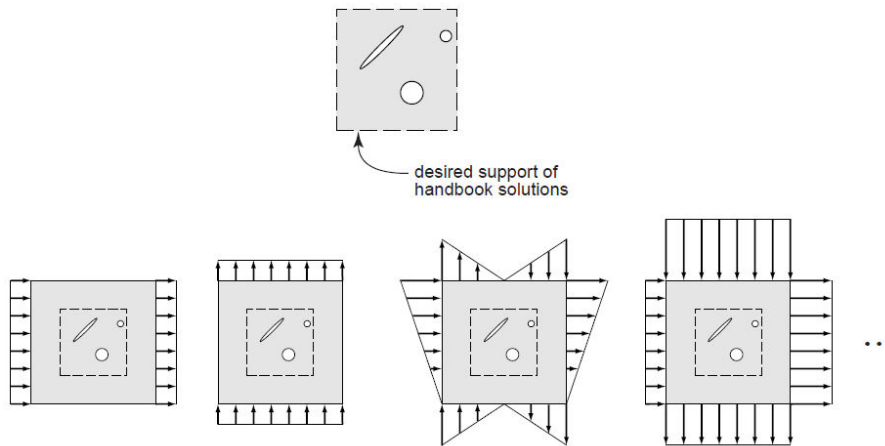


Figure.II.11. Construction des « Handbook » [42].



Par ailleurs, la deuxième approche consiste à résoudre le problème micro par FEM en construisant un ensemble appelé "handbook". Chacun des problèmes micro « handbook » est défini sur un motif mettant en jeu des groupes d'entités comme le montre la Figure II.11. La "collection" de problèmes handbook est ensuite résolue par FEM avant le calcul principal, et les solutions sont stockées afin de servir d'enrichissement dans ce dernier.

La G-FEM permet de réduire les erreurs de discrétisation par le renfort qu'apporte la construction précise des fonctions d'enrichissement. Toutefois, sa mise en œuvre bien que pratique soulève deux difficultés :

- la dépendance linéaire des fonctions de forme éléments finis et celles d'enrichissement.
- l'erreur induite lors de l'intégration numérique où la contribution des fonctions d'enrichissement risque de ne pas être prise en compte.

Afin d'apporter des réponses à ces deux problèmes, certains autres auteurs [43-44] ont proposé de recourir à des techniques de factorisation partielle ou des stratégies de régularisation pour dévier la linéarité. Toutefois, ces solutions s'avèrent très coûteuses en termes de robustesse des calculs.

### II.3.3.3. X-FEM

La méthode X-FEM [45] représente un outil très efficace pour traiter les problèmes singuliers. Elle est identique à la G-FEM et repose sur la Méthode de la Partition de l'Unité (PUM) qui permet de décrire l'évolution de la singularité par une mise à jour du schéma d'enrichissement et non par remaillage. Par contre, la seule interaction entre le maillage et la géométrie de la singularité se manifeste lors de la construction des fonctions d'enrichissement. La différence entre la X-FEM et la G-FEM réside dans le type d'applications traitées. En effet, contrairement à la G-FEM qui traite les problèmes de singularités en général, la X-FEM s'est focalisée plus sur les problèmes de propagation de fissures, des trous et inclusions [46, 51]. La formulation classique de la méthode X-FEM est donnée pour le champ de déplacement par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i^N N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_k^{N_{enr}} N_k(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \mathbf{b}_k \quad (II.10)$$

où le premier membre décrit la solution non perturbée approchée par la formulation standard FEM, tandis que le second terme, dit d'enrichissement, permet d'introduire, à l'aide des fonctions  $\psi_k$  et des paramètres d'enrichissement  $\mathbf{b}_k$ , la perturbation sur  $N_{enr}$  nœuds localisés dans son voisinage.

Dans le cas de la fissuration, deux zones différentes sont distinguées (Figure II.12): une zone (1) présentant une forte discontinuité où la matière est rompue, et une deuxième zone (2)

de faible discontinuité à la pointe de la fissure. La première zone est caractérisée par une discontinuité tangentielle et normale du champ de déplacement correspondant à l'ouverture de la fissure, tandis que la seconde présente un comportement singulier en pointe de fissure (concentration de contraintes).

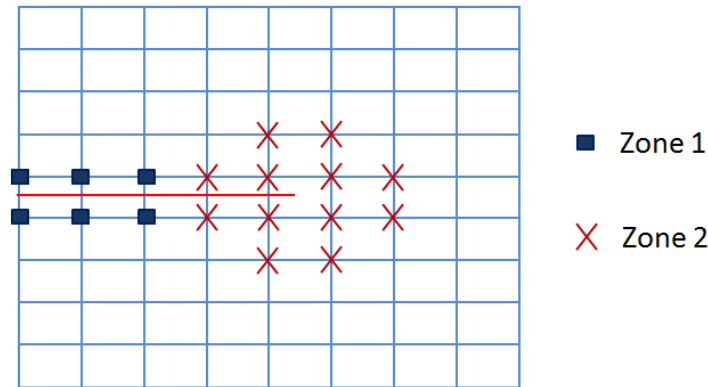


Figure.II.12. Stratégie d'enrichissement pour les problèmes de fissuration.

Pour décrire la première zone de forte discontinuité, une formulation basée sur la fonction Heaviside  $H(x)$  est introduite par l'équation (II.11). En effet, la fonction signe d'Heaviside joue un rôle double : elle permet de capturer les nœuds enrichis et de les situer par rapport à la fissure, ainsi qu'elle permet de générer la discontinuité du champ à calculer.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i^N N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_k^{N_k} N_k(\mathbf{x}) (H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_k)) \mathbf{b}_k + \sum_j^{N_j} N_j(\mathbf{x}) \sum_l^4 c_l^j F_l(\mathbf{x}) \quad (\text{II.11})$$

Avec :

$$H(\mathbf{x}) = H(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{Si } y < 0 \\ 1 & \text{Si } y \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Cependant, utilisée seule, la fonction Heaviside ne parvient pas à décrire le comportement et l'influence de cette discontinuité. Ainsi, des paramètres d'enrichissement sont utilisés afin d'introduire localement des informations aux nœuds enrichis et les transmettre, par la suite, aux nœuds standards générés lors du maillage.

On peut évoquer que sur la pointe de la fissure, des fonctions d'enrichissement particulières sont définies : ce sont les fonctions asymptotiques  $F_l(x)$  [45]. Elles sont construites à partir du champ asymptotique exact du déplacement au voisinage de la pointe de la fissure. Ces fonctions sont définies dans le but de détecter la rupture et la propagation de la fissure (par le calcul des facteurs d'intensité de contraintes), ainsi que pour décrire le comportement de la zone voisine de la pointe.

De ce bref aperçu, la méthode X-FEM (et G-FEM aussi) semble apporter la réponse attendue à la modélisation des structures contenant des singularités. En effet, elle se présente comme un méthode non exigeante en termes de maillage qui n'est contraint ni de suivre la géométrie de la singularité, ni de la mailler finement. Toutefois, une telle robustesse cache un ensemble de difficultés en termes d'implémentation numérique. La première difficulté réside dans la détection de la singularité. En effet, la géométrie de celle-ci ne peut être toujours simple comme celle présentée dans le schéma précédent. Afin de surmonter cette difficulté, les fonctions « Levels-Sets » [46] ont été introduites. Elles permettent de capter la discontinuité et ainsi d'évaluer la fonction Heaviside en calculant la distance séparant tout point de la position de la singularité. Ces fonctions ne permettent pas que la détection mais aussi de répondre à la deuxième difficulté qui est l'évolution de la singularité. En effet, au lieu de mettre à jour le maillage, ce sont ces fonctions qui sont recalculées au nouvel état de la structure.

En plus de ces deux difficultés, l'intégration numérique représente un verrou pour la X-FEM. En effet, la fonction signée ne simplifie pas cette intégration et la rend difficile lorsque la discontinuité ne partage pas l'élément enrichi équitablement suivant l'axe normal. Enfin, les degrés de liberté supplémentaires induits par l'enrichissement augmentent la taille du vecteur des degrés de liberté et de la matrice de rigidité, et de ce fait un temps de simulation plus important.

La détection de la singularité, la construction de l'enrichissement, le suivi de son évolution, l'intégration numérique et l'intégration des nouveaux DDL dans le calcul rendent l'implémentation numérique de la X-FEM plus difficile. Toutefois, les résultats qu'elle fournit accroissent sa popularité.

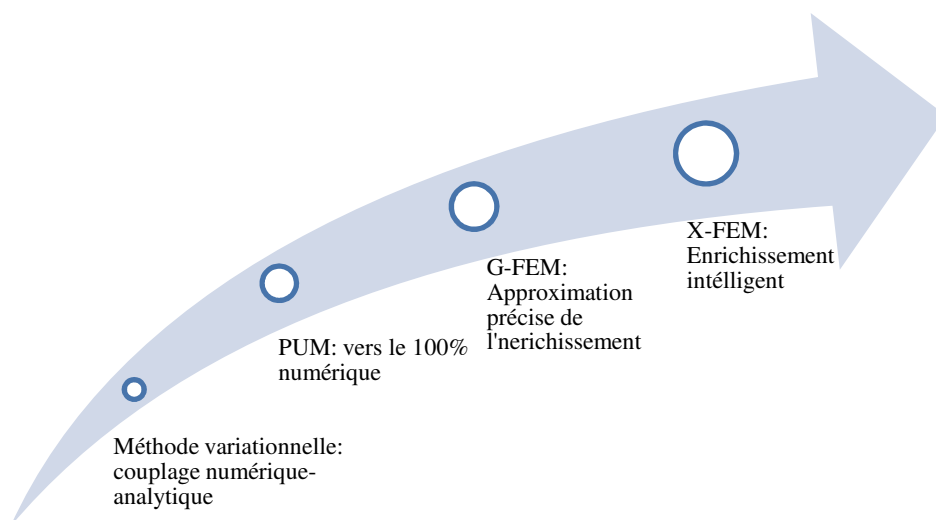


Figure.II.13. L'évolution du principe d'enrichissement

### II.3.3. Autres Méthodes

D'autres méthodes sont utilisées pour traiter les problèmes de changement d'échelle, de singularités ou d'interface et pouvant donc être appliquées à la problématique des couches minces. En effet, le voisinage de ces dernières peut être substitué par un domaine effectif homogénéisé ainsi qu'elle peuvent être prises en compte par des éléments d'interface ou des éléments frontières. Mais ceci ne permet que de générer la solution extérieure et non la solution à l'intérieur de la couche. Cependant, il est possible d'utiliser deux méthodes différentes pour le traitement de chaque échelle et ensuite les coupler grâce à la méthode Arlequin. Tout comme il est aussi possible d'utiliser les méthodes sans maillage afin d'éviter les problèmes liés à la distorsion de maillage et au nombre de degrés de liberté nécessaires dans un calcul éléments finis.

Dans cette section, le principe résumé de chaque méthode est présenté et le lecteur est invité à trouver leurs détails dans les références citées.

#### II.3.4.1. Homogénéisation

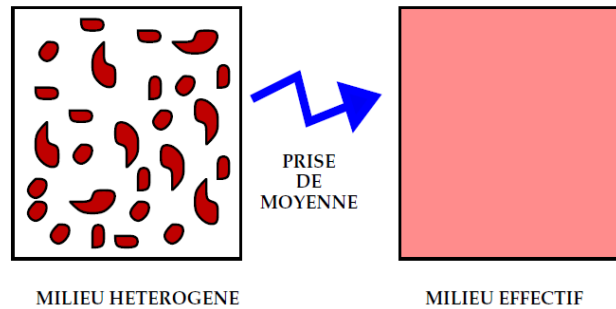


Figure.II.14. . Définition du domaine effectif homogénéisé [53].

L'homogénéisation [26-35], aussi appelée changement d'échelles ou passage « micro-macro » désigne la procédure qui consiste à déterminer la modélisation homogène d'un milieu finement hétérogène. L'homogénéisation, comme principe, constitue la base d'un ensemble de techniques permettant de passer de l'échelle microscopique hétérogène à celle macroscopique ayant un comportement grossier. Le lien entre les deux échelles se fait en supposant qu'un volume élémentaire de l'échelle grossière peut être représentatif des caractéristiques du matériau. Ainsi, les différents champs mécaniques exprimés dans les deux échelles sont supposés distincts. Le passage du local au grossier s'effectue en prenant les moyennes des tenseurs locaux, voir Equation (II.13).

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{V} \int_V \varepsilon \\
 \Sigma &= \frac{1}{V} \int_V \sigma
 \end{aligned}
 \tag{II.13}$$

Avec  $V$  est le volume élémentaire représentatif présenté dans la Figure II.14.

Ainsi les différents champs sont projetés dans un domaine effectif ou équivalent qui ne fournit aucune information précise sur le comportement local.

Par ailleurs, le passage de l'échelle grossière à celle micro est indispensable pour des analyses locales. Ce passage est obtenu par la détermination de l'équilibre de la cellule élémentaire  $V$  sous l'une des conditions classiques suivantes:

$$\begin{aligned} u &= E.x && \text{sur } \partial V \\ \sigma.n &= \Sigma.n && \text{sur } \partial V \\ u &= v + E.x && \text{sur } V \end{aligned} \tag{II.14}$$

$n$  représente un vecteur normal à la frontière  $\partial V$  et  $v$  désigne le champ inconnu du problème local soumis à des conditions de périodicité sur  $\partial V$ .

Ce principe d'homogénéisation constitue la base de plusieurs méthodes analytique et numérique traitant les milieux hétérogènes. En élasticité linéaire, par exemple, l'homogénéisation permet de construire, analytiquement, un tenseur élastique équivalent de la structure. Ce tenseur est obtenu par la décomposition du champ des déformations en deux entités : une parvenant du comportement macroscopique  $\bar{\epsilon}$  et une deuxième du comportement local des hétérogénéités  $\tilde{\epsilon}$ . Cette décomposition s'écrit :

$$\epsilon = \bar{\epsilon} + \tilde{\epsilon}(\mathbf{x}) \tag{II.15}$$

Par l'intégration de cette décomposition dans le calcul de minimisation de l'énergie interne, des coefficients élastiques effectifs sont introduit et permettent de calculer et définir une rigidité équivalente de l'élément, voire [26]. Cependant, cette résolution analytique ne peut se faire que sur des cas simples alors qu'une implémentation numérique est primordiale dans les configurations complexes.

D'autre part, une autre approche analytique permet d'effectuer un calcul d'homogénéisation des structures hétérogènes. Cette approche, dite asymptotique, fait appel aux développements asymptotiques et présente la solution globale comme une correction de la solution grossière:

$$u(x) = u^0(x) + \epsilon u^1(x, y) \tag{II.16}$$

Ainsi, de même que la MAE, un double système de coordonnées est introduit : la variable  $x$ , définie sur l'ensemble de la structure, est associée aux variations lentes des champs à l'échelle macroscopique, tandis que la variable  $y=x/\epsilon$  permet de capter les oscillations rapides à l'échelle du matériau. Dans les travaux [29], il est montré que le terme de correction  $u^1$  s'exprime sous la forme suivante:

$$u^1(x, y) = c(y) : u^0(x) \quad (\text{II.17})$$

où  $c$  représente une fonction périodique.

Même dans le cas d'utilisation de l'approche asymptotique, la résolution analytique s'avère complexe et ne peut être appliquée aux cas complexes sans implémentation numérique. De ce fait, les méthodes basées sur l'homogénéisation se sont orientées vers les éléments finis.

En se basant sur l'approche éléments finis, l'homogénéisation fait appel à des grilles de calcul. Ces grilles répétitives présentent, macroscopiquement, un comportement équivalent du volume élémentaire qu'elle contient et, microscopiquement, un comportement local détaillé obtenu par un calcul éléments finis au sein de la grille.

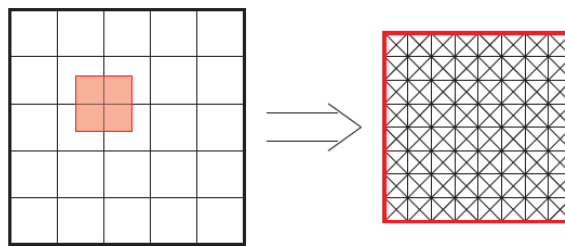


Figure.II.15. Exemple de grille de calcul [53].

Dans le cas de l'élasticité linéaire, le principe d'homogénéisation précédemment présenté est reproduit numériquement par la FEM. En effet, un premier calcul microscopique est effectué dans la maille afin d'identifier les matrices de rigidité élémentaires  $\mathbf{k}$ . A partir d'une moyenne de ces matrices, une matrice équivalente est calculée pour représenter la maille dans le calcul macroscopique. Cette approche se résume donc ainsi:

- Formulation variationnelle dans les grilles microscopiques
- Construction des matrices élémentaire  $\mathbf{k}$
- Calcul de la matrice effective  $\bar{\mathbf{K}} = \frac{1}{|V|} \int_V \mathbf{k} dV$ .

Par ailleurs, l'homogénéisation s'est aussi intéressée aux problèmes non linéaires. En effet, la méthode élément finis EF<sup>2</sup> [27] se base sur le calcul multi-grilles afin de répondre aux limitations de la méthode standard. Elle permet d'intégrer des lois de comportement différentes et de décrire l'évolution de la microstructure en utilisant une approche simple qui ne nécessite aucune résolution explicite du problème non linéaire en chaque point de Gauss. Pour ce faire, l'idée consiste à définir une relation non linéaire du comportement macroscopique du matériau, non pas à l'aide d'équations choisies a priori et homogénéisées, mais à partir des calculs éléments finis réalisés directement au niveau de la microstructure.

Ils existent plusieurs autres méthodes d'homogénéisation. Sans être exhaustifs, la méthode itérative « Multigrille » [31] et l'approche découplée NTFA (Non Uniform Transformation Analysis) appliquée aux matériaux composite inélastiques [32] peuvent être citées. De plus, pour des applications récentes, le lecteur est invité à se référer aux travaux [33-36] où une méthode d'homogénéisation très avancée est introduite et permet de traiter une large classe de problèmes non linéaires hétérogènes en petites et grandes déformations.

### II.3.4.2. Eléments d'interface

Si les différentes méthodes citées précédemment agissent sur le maillage, le domaine, le comportement et l'espace d'interpolation, les éléments d'interface [24-25, 60-64] agissent sur le champ approximé lui-même. En effet, cette méthode impose au champ de capter un saut de déplacement à travers l'interface. Ainsi, c'est au niveau de la formulation variationnelle élémentaire au sein des éléments spéciaux que cette condition est insérée.

Les éléments finis d'interface sont des éléments à épaisseur nulle  $h = 0$  (Figure II.16) qui sont localisés sur l'interface de discontinuité  $\Gamma$ . Leur fonction est de reproduire le saut de déplacement  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  ou de tout autre champ à travers l'interface, ainsi que les efforts induits.

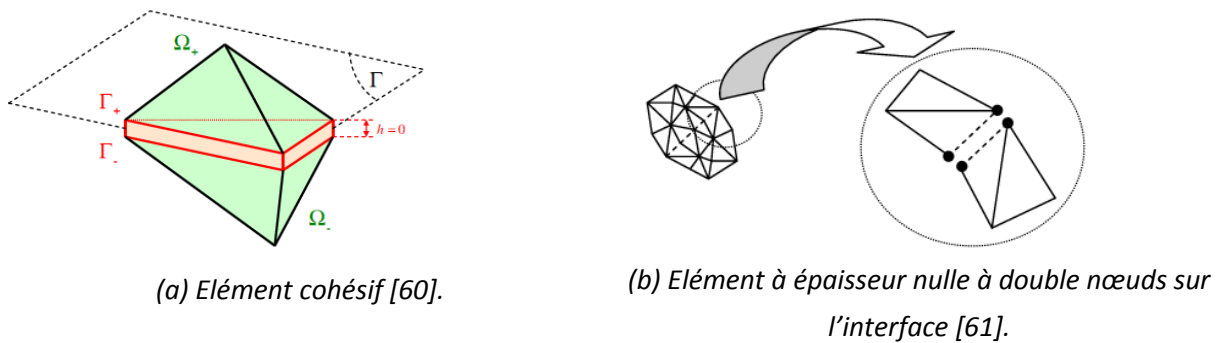


Figure.II.16. Exemples d'éléments d'interface.

Ce type d'éléments est généralement utilisé pour résoudre les problèmes de propagation de fissure, de délaminage et de fatigue [61-64]. Par exemple, les éléments cohésifs se basent sur la minimisation de l'énergie potentielle  $E_{pot}$  qui décrit l'équilibre de la structure fissurée à chaque incrément de temps.

$$E_{pot}(\mathbf{u}) = E_{el}(\mathbf{u}) + E_{fr}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) - W_{ext} \quad (II.18)$$

$E_{el}$  étant l'énergie de déformation,  $E_{fr}$  l'énergie de cohésion et  $W_{ext}$  le travail des forces extérieures.

D'un autre côté, les éléments à double nœuds sont des éléments d'interface ayant des couples de nœuds qui coïncident dans le cas indéformé alors qu'ils se séparent après déformation. La contribution de ces éléments en termes d'énergie interne est intégrée

ensuite dans la formulation éléments finis standard FEM [60]. Dans le cas d'une structure 2D, les éléments d'interface sont unidimensionnels (Figure II.17).

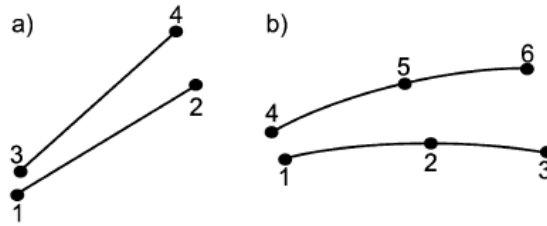


Figure II.17. Eléments d'interface: (a) linéaire; (b) quadratique [19].

### II.3.4.3. Eléments Frontières

La méthode des éléments de frontière est une méthode de discrétisation du support géométrique des équations intégrales [65]. En ce sens, elle est tout à fait similaire à la méthode des éléments finis sauf que la discrétisation est cette fois portée, uniquement, par la frontière du domaine. Par contre, à la différence de la méthode des éléments finis, pour laquelle la formulation matricielle est obtenue en utilisant une formulation variationnelle et des fonctions tests, l'idée essentielle est de vérifier exactement les équations intégrales en des points dits de collocation [65].

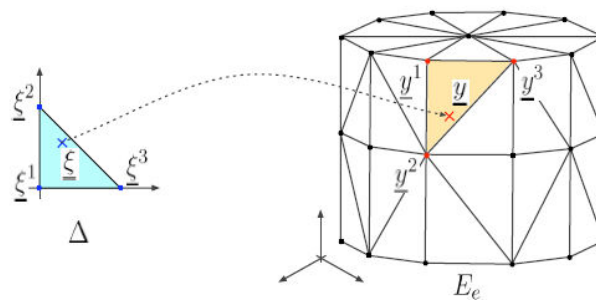


Figure II.18. Maillage triangulaire et paramétrisation sur un cylindre [65]

Le principal gain de la méthode des éléments finis de frontière réside bien sûr dans une discrétisation de la surface du domaine au lieu de son volume, permettant ainsi de réduire significativement le nombre de degrés de liberté. Cette méthode trouve son efficacité maximale dans le traitement des problèmes linéaires et homogènes, ou grossièrement hétérogènes, dans lesquels le domaine peut être infini ou dont le rapport volume/ Surface est important. Dans les travaux [76-78], cette méthode a été appliquée avec succès au problème thermique dans l'objectif d'approximer le champ de température dans des structures revêtues. En effet, pour ce type d'application, c'est l'épaisseur négligeable du revêtement qui constitue la principale problématique. Ainsi, par le biais des éléments



frontière, aucun maillage n'est exigé dans le sens de l'épaisseur et la contribution du revêtement est réduite dans sa surface extérieure (frontière).

Néanmoins, jusqu'à ce jour ces méthodes intégrales demeurent peu répandues et d'application très réduite dans le traitement des problèmes où l'influence du comportement non linéaire du matériau dans certaines régions est important. De plus, le fait qu'il s'agisse d'une méthode de collocation signifie qu'il n'existe pas de critère quant aux estimations d'erreur. Enfin, le fait d'utiliser des fonctions de base complexes (fonction de Green) et des intégrales faiblement ou fortement singulières accroît les risques de divergence numérique, demandant plus d'attention quant à la bonne définition du problème [67-68].

#### II.3.4.4. La méthode Arlequin

La méthode Arlequin s'adresse à des problèmes mécaniques dont le domaine d'étude peut être partagé suivant plusieurs zones distinctes nécessitant des niveaux d'analyse différents. L'objectif de cette approche est de proposer une stratégie permettant de mener les calculs simultanément sur ces différentes échelles, tout en étant à la fois simple d'emploi et peu coûteuse en temps de mise en œuvre et de calcul. Pour cela, les différentes zones sont chacune associées à un modèle qui peut être de nature diverse (analytique, numérique, mécanique, physico-chimique, ...etc.).

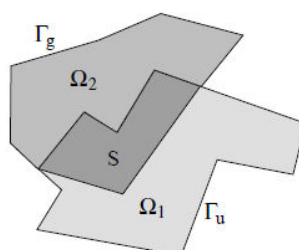


Figure.II.19. Zone de couplage de la méthode Arlequin [53].

La méthode Arlequin est initialement proposée par Ben Dhia [52]. Elle se base sur les principes suivants :

- Dans la zone de superposition S, Figure II.19, les deux modèles sont raccordés par des "efforts fictifs" contrôlant les écarts de déplacements, déformations et contraintes. Ces efforts fictifs sont représentés par des multiplicateurs de Lagrange (Equation II.19).
- Pour ne pas estimer deux fois l'énergie du système global dans la zone de superposition, les énergies élémentaires des sous-modèles sont pondérées par des fonctions dites fonctions de pondération :

$$E = \beta_1 E_{x_1}(u_1) + \alpha_1 E_{i_1}(u_1) + \beta_2 E_{x_2}(u_2) + \alpha_2 E_{i_2}(u_2) + C(\lambda, u_1 - u_2) \quad (II.19)$$

où  $E_x$  et  $E_i$  sont les énergies des efforts externes et internes de chacun des domaines,  $C$  est le terme de couplage dans le domaine  $S$  et  $\lambda$  sont les multiplicateurs de Lagrange, voir [27, 59].

La méthode Arlequin est utilisée pour la modélisation des structures présentant des zones de comportements différents. La méthode permet de coupler différentes approches utilisées pour chacune des zones. Toutefois, cela ne serait caché un ensemble de difficultés liées à la subdivision du domaine, au choix des coefficients de pondération, des multiplicateurs de Lagrange et aussi à la maîtrise du maillage. Mais ces difficultés n'empêchent pas l'expansion de l'utilisation de cette méthode pour différentes applications présentant des effets de changement d'échelles.

### **II.3.4.5. Méthodes sans maillage**

A l'exception de MAE et des éléments frontières, toutes les méthodes citées reposent sur la méthode des éléments finis dont la principale limitation réside dans le choix du maillage conforme à la géométrie (FEM) et la robustesse des calculs (X-FEM, G-FEM). Ainsi, la question qui se pose sera la possibilité de résoudre les équations mécaniques sans avoir recours au maillage. C'est dans ce cadre que les méthodes sans maillage sont introduites. En effet, contrairement à l'approche éléments finis dans laquelle l'approximation est liée aux éléments, dans les méthodes sans maillage l'approximation est ici construite exclusivement à l'aide des données nodales.

Ces dernières ont été utilisées avec succès pour le traitement de plusieurs applications où la méthode des éléments finis est limitée par les problèmes de remaillage. Les applications les plus concernées par les méthodes sans maillage sont la propagation de fissure [55], les problèmes mécaniques en grandes déformations [56] et les problèmes de transfert thermique [57]. De ce fait, il est légitime de penser que ces méthodes peuvent résoudre la problématique des couches minces et ne se confronteront pas au changement d'échelle. En effet, la liberté vis-à-vis du maillage permet de traiter des problèmes avec des géométries très complexes. Mais, ces méthodes présentent plusieurs inconvénients dont le principal est la prise en compte des conditions aux limites, très difficile et nécessitant des techniques spéciales [58]. De plus, l'intégration numérique est un deuxième inconvénient majeur de ces méthodes dont les fonctions de forme « meshless » sont rationnelles et non polynomiales.

Nous ne donnons pas une présentation détaillée de ces méthodes. Par contre, le lecteur peut se référer aux travaux [59] où une étude des avantages et inconvénients de ces méthodes est donnée.

### **II.3.4. Synthèse**

Dans cette première partie de l'étude, une liste non exhaustive des approches et méthodes dédiées ou qui peuvent être appliquées à la modélisation des couches minces a été présentée.

Comme évoqué dans l'objectif des travaux, la problématique industrielle impose d'adopter une approche simplifiée et optimale en terme d'implémentation numérique. Cette dernière doit reposer sur l'approche des éléments finis et doit permettre une analyse « micro-macro » des outillages brasés sans raffinement de maillage et en minimisant le temps de calcul.

L'ensemble de ces exigences a conduit à chercher la meilleure exploitation possible des avantages de l'ensemble des approches présentées précédemment. Ainsi, la première étape consiste à filtrer ces approches selon nos objectifs et besoins. Dans cette optique, les méthodes sans maillage demeurent trop éloignées de ces objectifs en ne se basant pas sur l'approche des éléments finis. Cette dernière, dans sa forme classique FEM sera aussi mise de côté à cause du raffinement de maillage nécessaire. En outre, les éléments d'interface ne permettent pas d'effectuer une analyse d'interphase « micro-macro ». Quant aux éléments frontières, ils seront plus adaptés aux problèmes de revêtement et non aux assemblages.

Les autres approches asymptotiques et d'enrichissement semblent avoir des atouts majeurs. Toutefois, la simplicité recherchée oblige à les reconsidérer pour faire émerger une nouvelle approche pour la modélisation optimale des couches minces. Cette reformulation peut être un couplage des différentes approches ou même leur superposition.

Dans ces travaux, c'est un couplage des approches asymptotiques et d'enrichissement qui est retenu. Cette idée provient de travaux antérieurs menés par l'équipe, et qui consistent à coupler MAE et X-FEM pour modéliser les assemblages brasés sans raffinement de maillage. Ce couplage intitulé DAR-X-FEM ou MAE-X-FEM est l'objet d'étude de la quatrième partie de ce chapitre.

### **II.4. Le couplage DAR-X-FEM**

Le recours à la construction d'une méthode hybride couplant deux approches différentes est probablement le meilleur moyen d'en tirer leurs atouts respectifs. Dans certains problèmes, où les champs de compétences des méthodes présentées précédemment trouvent ample utilité simultanément, il s'avère judicieux d'exploiter leurs avantages afin de proposer une nouvelle méthode efficace et simple à mettre en œuvre.

Dans cette optique, le couplage DAR-XFEM introduit par Nguyen [54,82] en 2009 apporte une idée innovante pour la modélisation des assemblages brasés. Il se base sur le principe

d'enrichissement pour modéliser le comportement des assemblages sans raffinement de maillage. L'enrichissement introduit dans une approche X-FEM est construit en se basant sur la méthode MAE.

Les présents travaux se présentent dans la continuité de cette approche. En effet, la pertinence de l'idée a amené à approfondir l'étude et proposer une nouvelle approche de couplage plus optimale. Avant cela, la section suivante présente ces travaux antécédents menés par Nguyen en détaillant le principe du couplage DAR-X-FEM, ses avantages et limitations.

#### II.4.1. Principe du couplage

Dans son travail [54,82], Nguyen a proposé un modèle couplant les deux méthodes MAE et X-FEM. L'idée de ce couplage est née en exploitant la similitude entre les deux approximations: X-FEM (II.22) et le développement extérieur (II.3). Ce couplage consiste à utiliser MAE pour construire la partie enrichissement X-FEM suivant la Figure II.20.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{u}^0(\mathbf{x})}_{\text{Terme non perturbé}} + \underbrace{\varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x})}_{\text{Terme de correction}} & & \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_i^N N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i}_{\text{Terme non perturbé}} + \underbrace{\sum_k^{N_{enr}} N_k(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \mathbf{b}_k}_{\text{Terme de correction}}
 \end{array}$$

Figure.II.20. . Principe du couplage MAE-X-FEM.

En s'appuyant sur le cas de la fissuration, Nguyen considère le joint brasé comme une zone de discontinuité gouvernée par l'hétérogénéité des matériaux en présence. Ainsi, en « écrasant » le joint et en le remplaçant par une interface de discontinuité, il obtient un champ présentant une forte discontinuité. Le traitement de cette dernière est similaire au cas d'une fissure, et elle peut donc être modélisée grâce à la fonction Heaviside.

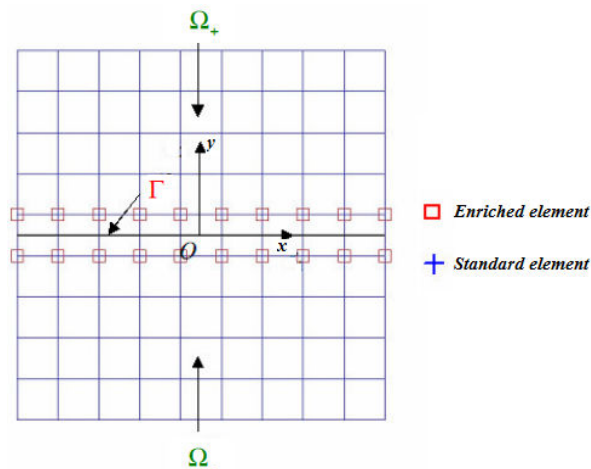


Figure.II.21. La discrétisation éléments finis considérée par le modèle DAR-X-FEM (tirée de [82]).

De ce fait, la formulation éléments finis proposée par le couplage DAR-X-FEM (II. 20) se base sur la formulation X-FEM (II.10) considérée pour les problèmes à forte discontinuité. Cette dernière utilise la fonction discontinue d'Heaviside associée aux paramètres d'enrichissement  $\mathbf{b}_k$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i^N N_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i + \sum_k^{N_{enr}} N_k(\mathbf{x})\psi_k(\mathbf{x})\mathbf{b}_k \quad (II.20)$$

En analysant la formulation éléments finis employée, il est facile d'en conclure que les paramètres d'enrichissement doivent restituer le saut à l'interface. Ainsi Nguyen a choisi de partager ce saut entre les nœuds enrichis localisés à la même abscisse :

$$\mathbf{b}_k = \frac{[\mathbf{u}](x_k, 0)}{2} \quad (II.21)$$

Le problème se réduit ainsi au calcul analytique du saut  $[\mathbf{u}]$ . C'est ainsi que la méthode MAE fournit l'information marquante. Elle permet de calculer une forme explicite du saut de déplacement à partir du champ homogène et des propriétés du joint et des substrats [82].

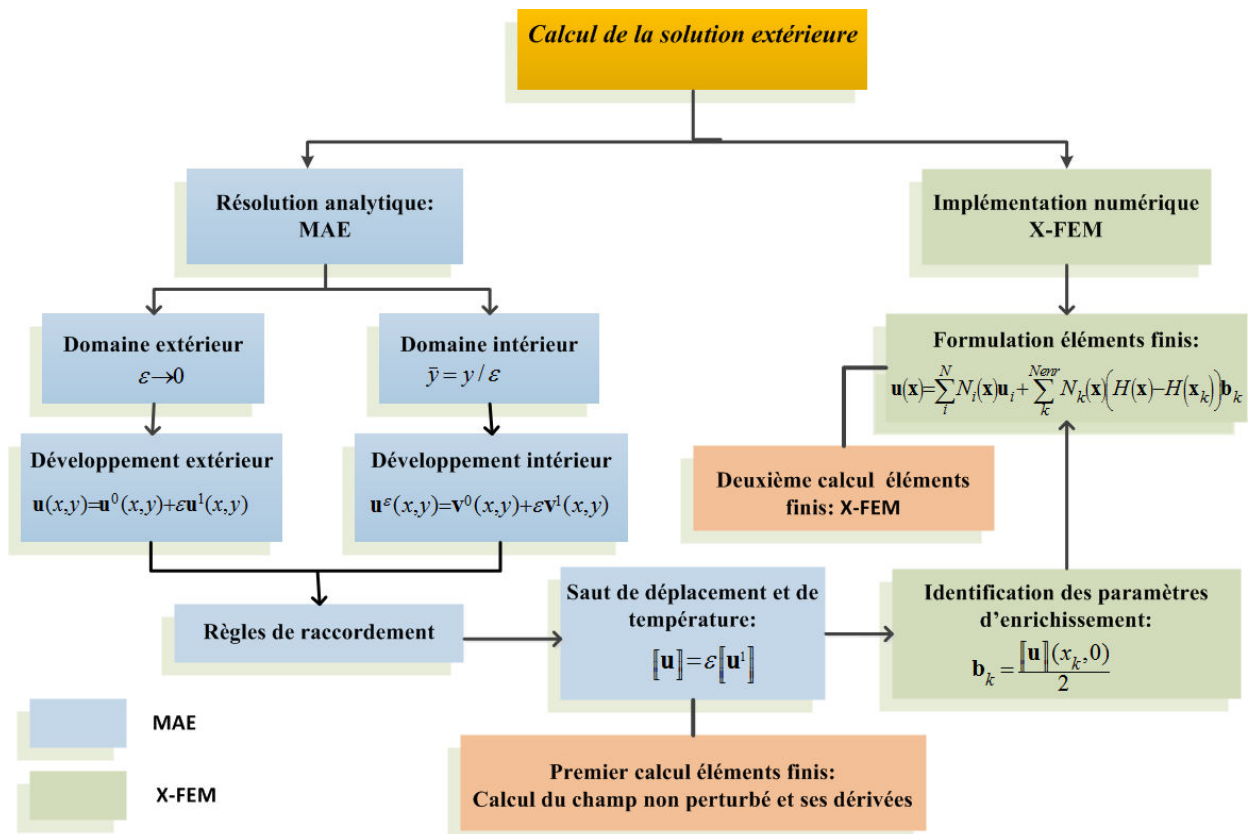


Figure.II.22. Algorithme DAR-X-FEM.

L'expression du saut  $[\mathbf{u}]$  obtenue dans [82] fait intervenir les dérivées du champ homogène  $\mathbf{u}^0$  (Equation (II.22)). Ainsi, un premier calcul élément finis doit être effectué afin de calculer

la solution homogène  $\mathbf{u}^0$ . Ensuite un post-traitement de ces résultats permet de calculer ses dérivées partielles et donc le saut. Une fois obtenu, ce dernier est injecté dans la formulation DAR-X-FEM à travers les paramètres d'enrichissement. Finalement, le modèle est implémenté sous Matlab suivant l'algorithme X-FEM standard. La Figure II.22 résume l'algorithme de mise en œuvre du modèle DAR-X-FEM.

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \varepsilon \llbracket \mathbf{u}^1 \rrbracket = \varepsilon (u^{1+}(x,0) - u^{1-}(x,0)) = \begin{cases} \varepsilon \left( \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} - 1 \right) [u_{x,y}^0(x,0) + u_{y,x}^0(x,0)] \\ \varepsilon \left( \nu_2 - \frac{E_1 \nu_1}{E_2} \right) u_{x,x}^0(x,0) + \varepsilon \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2} \right) u_{y,y}^0(x,0) \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Les premiers résultats donnés par ce modèle en termes d'approximation des champs mécaniques et thermiques découplés assurent la pertinence de l'approche adaptée. Le lecteur peut se référer aux travaux de Nguyen [54, 82] pour une présentation riche en termes d'applications et de résultats.

#### II.4.2. Critique du modèle DAR-X-FEM

Le modèle DAR-X-FEM introduit une nouvelle approche pour la modélisation des couches minces. En effet, en se basant sur le principe d'enrichissement, à travers la X-FEM, le modèle résout la problématique du maillage et permet de décrire le comportement global de la structure sans raffinement du maillage. Cet avantage est principalement dû à la méthode MAE qui fournit au modèle des résultats analytiques directement exploitables. Cependant, ce modèle est confronté à plusieurs problématiques et limitations.

##### (i) Le joint considéré comme interface

L'approche DAR-X-FEM remplace le joint par une interface de discontinuité et ne calcule que la solution globale présentant l'influence du joint sur la structure. Ceci ne représente pas une approche « micro-macro » complète. En effet, l'analyse issue de la MAE ne sert dans ce cas qu'à la construction de l'enrichissement, mais, en aucun cas, la solution locale est donnée. Ainsi, ce couplage peut être considéré proche de l'approche délivrée par l'utilisation des éléments d'interface [2].

##### (ii) Mise en œuvre

Pour l'obtention de la solution globale, deux calculs éléments finis doivent être effectués en plus d'un post-traitement des résultats. En effet, le premier calcul a pour objectif la détermination du champ homogène  $\mathbf{u}^0$  sans tenir compte de la perturbation. De l'obtention de ce champ est déduit, par post-traitement, le saut de déplacement nécessaire à la

construction de l'enrichissement. Ce post-traitement consiste à calculer les dérivées partielles du champ homogène pour les intégrer dans l'expression du saut. Enfin, après calcul des paramètres d'enrichissement, ces derniers sont injectés dans le calcul X-FEM final.

**(iii) Complexité de l'algorithme X-FEM**

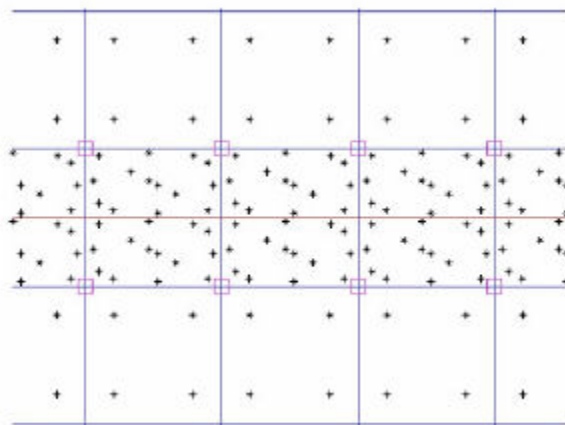


Figure.II.23. Points de gauss nécessaires à l'intégration numériques [82].

L'algorithme X-FEM lui-même présente certaines limitations. En effet, la prise en compte des nouveaux paramètres et fonctions d'enrichissement induit des étapes supplémentaires de calcul par comparaison à un algorithme FEM standard. En effet, il est nécessaire d'intégrer les contributions des nouveaux DDL représentés par les paramètres d'enrichissement via le gradient des fonctions d'enrichissement. Ceci induit aussi une expansion de la taille de la matrice de rigidité ainsi que du vecteur nodal. Enfin, lors du calcul de cette matrice, l'intégration numérique constitue une véritable difficulté. Cette dernière est liée principalement au nombre de points de Gauss nécessaires pour considérer la fonction signe au sein de l'élément enrichi, voir Figure II.23

**(iv) Position du joint dans l'élément enrichi**

Dans ses développements, Nguyen a supposé que le joint est localisé au milieu de l'élément enrichi. Cette hypothèse lui permet de considérer que les paramètres d'enrichissement sont équi-répartis sur les nœuds enrichis. Ainsi, il simplifie la prise en compte de l'interface en imposant le maillage. Ce verrou devra être levé par les développements proposés ici.

**(v) Problèmes des bords**

La méthode MAE utilisée pour la construction de l'enrichissement présente une limitation à la proximité des bords. En effet, elle ne permet pas la prise en compte des conditions aux limites en même temps que les règles de raccordement dans le voisinage des couches minces.

**(vi) Rapport des propriétés substrat/ joints**

Dans le cas de fortes hétérogénéités des caractéristiques mécaniques et thermiques, le modèle DAR-X-FEM présente là aussi des limitations. En effet, la MAE requiert dans de telles situations de considérer l'hétérogénéité matérielle marquée comme source de perturbation supplémentaire. En effet, même la solution homogène  $\mathbf{u}^0$  devient perturbée et cela pose les limites de validité du modèle DAR-X-FEM.

**(vii) Champs thermique et mécanique découplés**

Le couplage thermomécanique n'est pas pris en considération. En effet, la génération des contraintes thermiques n'est pas simple à prendre en compte par le modèle DAR-X-FEM. Cette difficulté provient du calcul MAE lui-même qui n'intègre pas le rapport des coefficients de dilatation thermique dans l'expression du saut. Cependant, ce couplage thermomécanique ne représente pas de difficultés particulières et pouvait être intégré aux travaux de Nguyen [54, 82].

## **II.5. Synthèse**

Les travaux présentés ici s'inscrivent dans la continuité de ceux de Nguyen. En effet, l'objectif est de surmonter les limitations que présente le couplage DAR-X-FEM. Afin de parvenir à cet objectif, il convient de reprendre, avec critique, ce modèle afin de s'assurer de son potentiel de développement pour la problématique industrielle posée.

Il apparaît clairement que ce sont les méthodes multi-échelles qui répondent au mieux en permettant une réflexion plus poussée tant sur le volet analytique et que sur le volet numérique.

Dans les travaux de Nguyen, l'approche MAE a montré qu'elle peut apporter une réponse au besoin évoqué plutôt en matière de modélisation multi-échelles. En effet, elle permet d'effectuer des analyses « micro-macro » grâce aux développements asymptotiques posés dans chacun des domaines intérieur et extérieur. Toutefois, au lieu de l'utiliser comme outil d'enrichissement de la méthode X-FEM en transformant le problème initial en un problème d'interface, il est judicieux de mener une réflexion inverse en cherchant l'approche d'enrichissement optimale permettant l'implémentation numérique du passage « micro-macro » de la MAE.

Dans cette optique, un nouveau modèle intitulé MAX-FEM est introduit dont l'objectif est une modélisation « micro-macro » du comportement thermoélastique des couches minces sans raffinement de maillage et sans multiplier les calculs éléments finis préliminaires. Le principe et la mise en œuvre de ce modèle est présentée dans le troisième chapitre.



## ***Références II***

- [1] R.D. Adams, J. Comyn, W.C. Wake, *Structural Adhesive Joints in Engineering*, second ed., Chapman and Hall, London, 1997.
- [2] G. Verchery, A.H. Cardon (Eds.), *Mechanical Behavior of Adhesive joints*, in: *Proceedings of the European Mechanics Colloquium 227*, Pluralis, Paris, 1987.
- [3] G. Verchery, A.H. Cardon (Eds.), *Mechanical Behavior of Adhesive joints*, in: *Proceedings of the European Mechanics Colloquium 227*, Pluralis, Paris, 1987.
- [4] NA de Bruyne. The strength of glued joints. *Aircraft Eng*, 16 (1944) 115–118.
- [5] DA Bigwood, AD Crocombe. Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joints. *Int J Adhes*, 9 (1989) 229–242.
- [6] MY Tsai, DW Oplinger, J. Morton, Improved theoretical solutions for adhesive lap joints. *Int J Solids Struct*, 35 (1998) 1163–1185.
- [7] O. Volkersen Die, Niekraft vertleilingi Zughean spruchtenmit Konstanten Laschenquers chritten, *Luftfahrtfoeshing*, 15 (1938) 41–47.
- [8] M. Goland, E. Reissner. The stresses in cemented joints. *J ApplMech*, 11 (1944) 17–27.
- [9] A.H. Nayfeh,.A continuum mixture theory of heat conduction in laminated composites. *J. Appl. Mech*, 42 (1975) 399–404.
- [10] A.J.M. Spencer. Three-dimensional elasticity solutions for stretching of inhomogeneous and laminated plates. In: Eason, G., Ogden, R.W.\_Eds., *Elasticity, Math. Methods and Applications*, (1990) 347–356.
- [11] T.G. Rogers, P. Watson, A.J.M. Spencer. Exact three-dimensional elasticity solutions for bending of moderately thick inhomogeneous and laminated strips under normal pressure. *Int. J. Solids Struct*, 42 (1995) 1659–1673.
- [12] MM. Abdel Wahab, IA. Ashcroft, AD. PA. Crocombe, Smith. Numerical prediction of fatigue crack propagation lifetime in adhesively bonded structures. *Int J Fatigue*, 24 (2002) 705–709.
- [13] T. Keller, T. Vallée. Adhesively bonded lap joints from pultruded GFRP profiles. Part I: stress–strain analysis and failure modes. *Composites: Part B*, 36 (2005) 331–340.
- [14] U. Edlund, A. Klarbring A, Analysis of eastic and elastic-plastic adhesive joints using a mathematical programming approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,78 (1990) 19-47.

- [15] RH. Andruet, DA. Dillard, SM, Holzer. Special finite elements for analysis of adhesive joints, In: European congress on computational methods in applied sciences and engineering, ECOOMAS. Barcelona, Spain, 2000.
- [16] T.G. Rogers, P. Watson, A.J.M. Spencer, Exact three-dimensional elasticity solutions for bending of moderately thick inhomogeneous and laminated strips under normal pressure, *Int. J. Solids Struct*, 42 (1995) 1659–1673.
- [17] F. Mortensen, OT Thomsen, Analysis of adhesive bonded joints: a unified approach, *Composites Science and Technology*, 62 (2002) 1011-31.
- [18] WC Carpenter, Finite element analysis of bonded connection, *International Journal of Numerical Methode in Engineering*, 6 (1973) 450–1.
- [19] A. Klarbring , A.B. Movchan, Asymptotic modelling of adhesive joints, *Mechanics of Materials*, 28 (1998).137–145.
- [20] G. Geymonat, F Krasucki, S Lenci. Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive adhesive. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 4 (1999) 201-25.
- [21] R. Abdelmoulab, D. Leguillon. Mode III near and far fields for a crack lying in or along a joint, *International Journal of Solids and Structures*, 37 (2000) 2651-2672.
- [22] F. Bilteryst, J.-J. Marigo, An energy based analysis of the pull-out problem, *European Journal of Mechanics, A/Solids* 22 (2003) 55-69.
- [23] F. Krasucki , A. Munch , Y. Ousset, Numerical simulation of debonding of adhesively bonded joint, *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002) 6355–6383.
- [24] P. Schmidt, Modeling of adhesively bonded joints by an asymptotic method, *International Journal of Engineering Science*, 46 (2008) 1291–1324.
- [25] P. Schmidt, U. Edlund, Analysis of adhesively bonded joints: a finite element method and a material model with damage, *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 66 (2006) 1271–1308.
- [26] Sanchez-Palencia E. *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*. Springer Verlag, 1980.
- [27] F. Feyel, J.-L Chaboche. FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long  $\text{SiC/Ti}$  composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188 (2000) 309-330.
- [28] T.I. Zohdi, J.T. Oden, G.J. Rodin, Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138 (1996) 273-298.

- [29] C. Toulemonde, R. Masson, and J. El Gharib. Modeling the effective elastic behavior of composites : a mixed finite element and homogenisation approach. *C. R. Mec.*, 3 (2008) 275–282,.
- [30] W.L Briggs. *A multigrid tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [31] J.C. Michel and P. Suquet. Computational analysis of nonlinear composite structures using the non uniform transformation field analysis. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193 (2004) 5477–5502.
- [32] E. Monteiro, J. Yvonnet, and Q.-C. He. Computational homogenization for nonlinear conduction in heterogeneous materials using model reduction. *Comput. Mater. Sci.*, 42 (2008) 704–712,.
- [33] J. Yvonnet, D. Gonzalez, and Q.-C. He. Numerically explicit potentials for the homogenization of nonlinear elastic heterogeneous materials. *Comput. Meth. Appl. Mech.Eng.*, 198 (2009) 2723–2737,.
- [34] J. Yvonnet and Q.-C. He. The reduced model multiscale method (r3m) for the nonlinear homogenization of hyperelastic media at finite strains. *J. Comput. Phys.*, 223 (2007) 341–368.
- [35] J. Yvonnet and Q.-C He. A non-concurrent multiscale method for computing the response of nonlinear heterogeneous structures. *Eur. J. Comput. Mech.*, 19 (2010) 105–116.
- [36] T.J.R. Hughes, G.R. Feijoo, L. Mazzei, J.B. Quincy. The variational multi-scale method a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166 (1998) 3-24.
- [37] T.J.RHughes. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127 (1995) 387-401.
- [38] I. Babuška, J.M. Melenk, The partition of unity finite element method, *Int. J.Numer.Meth.Engrg.*40 (1997) 727-758.
- [39] I. Babuška, J.M. Melenk, The partition of unity finite element method, *Int. J.Numer.Meth.Engrg.*40 (1997) 727-758.
- [40] J.M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 39 :289–14, 1996.

- [41] J. Chessa, H. Wang and T. Belytschko. On construction of blending elements for local partition of unity enriched finite element methods. *Int. J. Num. Meth.*, 57 (2003), 1015-1038.
- [42] T. Strouboulis, I. Babuška, K. Copps. The Design and Analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181 (2000) 43-69.
- [43] C.A. Duarte and D.-J. Kim. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 (2008) 487 – 504.
- [44] T.P. Fries, T. Belytschko, The extended/generalized finite element method: an overview of the method and its applications, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 84 (2010) 253-304.
- [45] N. Moes, J. Dolbow, T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer.Meth.Engrg.* 46 (1999) 131–150.
- [46] A. Gravouil, N. Moës, T. Belytschko Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. Part II: Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 53 (2002) 2569-2586.
- [47] B. Trollé, A. Gravouil, M.-C. Baietto, T.M.L. Nguyen-Tajan, Optimization of a stabilized X-FEM formulation for frictional cracks, *Finite Elements in Analysis and Design*, 59 (2012) 18-27.
- [48] A. Gravouil, E.Pierres and M.-C.Baietto. Stabilized global-local X-FEM for 3D non-planar frictional crack using relevant meshes. *Int. J. of Num. Meth. in Eng.*, 88 (2011) 1449–1475.
- [49] A. B. Tran, J. Yvonnet, Q.-C. He, C. Toulemonde, and J. Sanahuja. A multiple level set approach to prevent numerical artefacts in complex microstructures with nearby inclusions within xfem. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 85 (2010) 1436–1459.
- [50] A.B. Tran, J. Yvonnet, Q.-C. He, C. Toulemonde, and J. Sanahuja. A simple multiscale numerical method for computing the response of linear viscoelastic heterogenous structures. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 85 (2011) 1436–1459.
- [51] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level-sets in the extended finite-element method. *Int. J. Solids Struct., Comput.Method. Appl. M.*, 190 (2001) 6183-6200.

- [52] Hachmi Ben Dhia , Olivier Jamond, On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199 (2010) 1403–1414.
- [53] Guillaume RATEAU, Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles : Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées, 2003.
- [54] D.H. Nguyen, M. Lazard, F. Bilteyst, P. Lamesle, G. Dour, Modelling the brazed assembly by the coupling of the eXtended Finite Element and the matched asymptotic development methods, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 2 (2008) 321-331.
- [55] V. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflot, Meshless methods : a review and computer implementation aspects, *Math Comput Simul*, 79 (2008) 763-813
- [56] M. Duflot, A meshless method with enriched weight functions for three-dimensional crack propagation, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 65 (2010) 1970- 2006.
- [57] R.J. Cheng, K.M. Liew, A meshless analysis of three-dimensional transient heat conduction problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 36 (2012) 203-210.
- [58] J. Yvonnet, Nouvelles approches sans maillage basées sur la méthode des éléments naturels pour la simulation numérique des procédés de mise en forme, 2004.
- [59] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79 (1998) 12–49.
- [60] J.C. Gàlvez, J. Cervenka, D.A. Cendon, V. Saouma, A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete, *Cement and Concrete Research*, 32 (2002) 1567-1585.
- [61] E. Lorentz, A mixed interface finite element for cohesive zone models, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 (2008) 302-317.
- [62] M. Charlotte, J. Laverne , J. Marigo, Initiation of cracks with cohesive force models: a variational approach. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 25 (2006) 649-669.
- [63] S. Maiti and P.H. Geubelle, A cohesive model for fatigue failure of polymers. *Eng. Frac. Mech.*72 (2005) 691-708.

- [64] O. Nguyen, E.A. REPETTO, M. ORTIZ and R.A. RADOVITZKY. A cohesive model of fatigue crack growth. *Int. J. Fracture*. (2001) 351-369.
- [65] M. Bonnet. "Boundary integral equations methods for solids and fluids", John Wiley & Sons, 1999.
- [66] R. Simpson, J. Trevelyan, Evaluation of  $J_1$  and  $J_2$  integrals for curved cracks using an enriched boundary element method, *Engineering Fracture Mechanics*, 78 (2011) 623-637.
- [67] M.H. Aliabadi. "The boundary element method Vol. 2: Applications in solids and structures", John Wiley & Sons, 2002.
- [68] M. Ranjbar-Far, J. Absi, G. Mariaux, F. Dubois. Simulation of the effect of material properties and interface roughness on the stress distribution in thermal barrier coatings using finite element method, *Materials & Design* 31 (2010) 772-781.
- [69] M. Bialas. Finite element analysis of stress distribution in thermal barrier coatings, *Surface and Coatings Technology* 202 (2008) 6002-6010.
- [70] J. Yvonnet, Q.C. He, Q.Z. Zhu, J.F. Shao, A general and efficient computational procedure for modelling the Kapitza thermal resistance based on XFEM, *Computational Materials Science* 50 (2011) 1220-1224
- [71] S.T. Gu. Contributions to the modelling of imperfect interfaces and to the homogenization of heterogeneous materials, Ph.D. Thesis, Université Paris-Est Marne-la-Vallée (2008).
- [72] S.T. Gu, Q.C. He. Interfacial discontinuity relations for coupled multifield phenomena and their application to the modeling of thin interphases as imperfect interfaces, *Journal of the Mechanics & Physics of Solids* 59 (2011) 1413-1426.
- [73] D. Maillet, S. André, J.-C. Batsale, A. Degiovanni, C. Moyne. *Thermal Quadrupoles : Solving the Heat Equation through Integral Transforms*, John Wiley and Sons, New-York, 2000.
- [74] A. Salazar, R. Celorrio. Application of the thermal quadrupole method to the propagation of thermal waves in multilayered cylinders, *Journal of Applied Physics*, 100 (2006) 113-135.
- [75] A. Singh, I.V. Singh, R. Prakash. Meshless element free Galerkin methods for unsteady non linear heat transfer problems, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50 (2007) 1212-1219.

- [76]** F. Du, M.R. Lovell, T.W. Wu. Boundary element method analysis of temperature fields in coated cutting tools, *International Journal of Solids and Structures* 28 (2001) 4557-4570.
- [77]** Y.M. Zhang, Y. Gu, J.T. Chen. Internal stress analysis for single and multilayered coating systems using the boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35 (2011) 708-717.
- [78]** R.J. Cheng, K.M. Liew, A meshless analysis of three-dimensional transient heat conduction problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 36 (2012) 203-210.
- [79]** E. Paroissien, Contribution aux assemblages hybrides boulonnés et collés : Application aux jonctions aéronautiques, thèse de doctorat à l'Université de Toulouse, France, 2006.
- [80]** X. He, A review of finite element analysis of adhesively bonded joints, *International Journal of Adhesion and Adhesives* 31 (2011) 248-264.
- [81]** F. Tsoungui. Caractérisation mécanique et microstructurale des joints brasés d'alliages aéronautiques avec du BNI-2 comme métal d'apport, thèse de doctorat à l'Ecole de Technologie Supérieure, Montréal, 2010.
- [82]** Nguyen Dang Huy. Contribution à la modélisation et à la caractérisation du comportement des assemblages brasés. Couplage des méthodes DAR et X-FEM, 2009.





## **Chapitre III**

### **Mise en œuvre de l'approche simplifiée MAX-FEM**

#### **Analyse mécanique et thermique des structures unidimensionnelles avec couches minces : assemblages brasés, adhésifs et revêtements**

Ce chapitre présente la mise en œuvre de la méthode éléments finis hybride MAX-FEM. Le principe de cette dernière et sa mise en œuvre sont présentés par la première partie du chapitre. Par ailleurs, la deuxième partie met en application la méthode développée pour différentes applications « couches minces » pour l'évaluation de ses performances en termes de précisions et d'optimisation du temps de calcul. Dans cette optique, le problème d'élasticité linéaire et l'équation de chaleur sont résolus pour des structures unidimensionnelles et axisymétriques. Ces applications permettent de comparer les temps de calcul nécessaires par rapport à la FEM standard. De plus, une fois le modèle validé, une étude paramétrique est effectuée afin d'étudier la sensibilité de la méthode aux différents paramètres physiques et numériques. Finalement, une étude numérique est présentée pour l'évaluation de l'efficacité des couches isolantes en fonction de leur résistance thermique.

### III.1. Partie I : Mise en œuvre de l'approche MAX-FEM

#### III.1.1. Hypothèses principales

L'objectif global est d'approximer les champs thermomécaniques dans des structures avec couches minces. Pour ce faire, et afin de simplifier la mise en œuvre de l'approche nous travaillons en premier lieu sur une approximation du champ des déplacements dans un assemblage unidimensionnel comme présenté dans la *Figure III.1*:

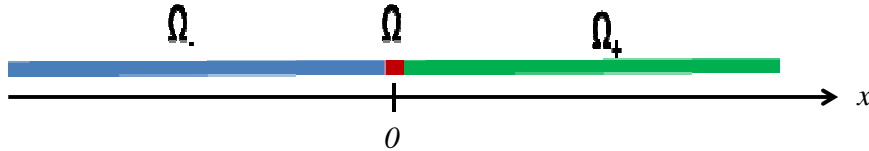


Figure.III.1. Deux substrats  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  assemblés par une couche mince  $\Omega$ .

Les premiers développements porteront sur l'analyse élastique. Ainsi, il convient de considérer l'équation d'équilibre (III.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^\pm}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega \cup \Omega_- \\ \sigma = E^\pm \frac{\partial u}{\partial x} & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega \cup \Omega_- \\ u^\pm = \bar{u}^\pm & \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Pour la suite des développements, les hypothèses suivantes sont considérées :

- Les substrats et la couche mince sont considérés élastiques et la transmission des efforts et des déplacements est supposée parfaite.
- L'épaisseur de la couche mince est négligeable devant la longueur de l'assemblage. Ainsi, le paramètre  $\varepsilon = e/L$  est retenu comme caractéristique du problème perturbé.
- L'assemblage considéré présente un rapport des modules de Young (substrat/joint) qui n'engendre pas de perturbation supplémentaire.
- Comme les développements asymptotiques raccordés, un modèle adimensionnel est considéré.

#### III.1.2. Approche MAX-FEM :

##### III.1.1.1. Motivations

Les différentes méthodes multi-échelles citées dans le chapitre précédent se basent sur différentes techniques dont les plus notables sont les approches asymptotiques et d'enrichissement. Ces approches ont fortement contribué à la résolution des problèmes nécessitant de telles analyses multi-échelles. L'objectif du présent travail est le

développement d'une méthode éléments finis simplifiée MAX-FEM par le biais d'une approche hybride tirant partie des différents avantages des modélisations analytiques et numérique retenues.

Dans le présent chapitre, une nouvelle formulation éléments finis MAX-FEM est proposée, permettant d'implémenter numériquement l'approche des développements asymptotiques raccordés MAE. En effet, contrairement à l'élément d'interface DAR-X-FEM [1], la MAX-FEM développe une analyse d'interphase en se basant sur les résultats de la MAE. Ceci permet d'effectuer des passages « micro-macro » permettant de décrire le comportement global des structures (développement dit extérieur) ainsi que les solutions locales dans et au voisinage des couches minces (développement dit intérieur).

Cependant, cette faculté des MAE à décrire le comportement des structures à différentes échelles se heurte à la difficulté de son implémentation numérique. En effet, pour des configurations géométriques et des chargements complexes, il est inconcevable d'effectuer des calculs MAE sans faire appel à une multitude de calculs numériques. Dans leur forme standard, ces calculs doivent être effectués dans chacune des échelles et pour chaque ordre. Cette limitation a été reproduite dans le modèle DAR-X-FEM et constitue l'origine du nombre de simulations nécessaires pour obtenir la solution globale finale sans pour autant obtenir la solution locale. Ainsi, l'objectif est de fournir une nouvelle stratégie d'implémentation numérique des MAE en se basant sur une des méthodes d'enrichissement. *Principe de l'approche MAX-FEM*

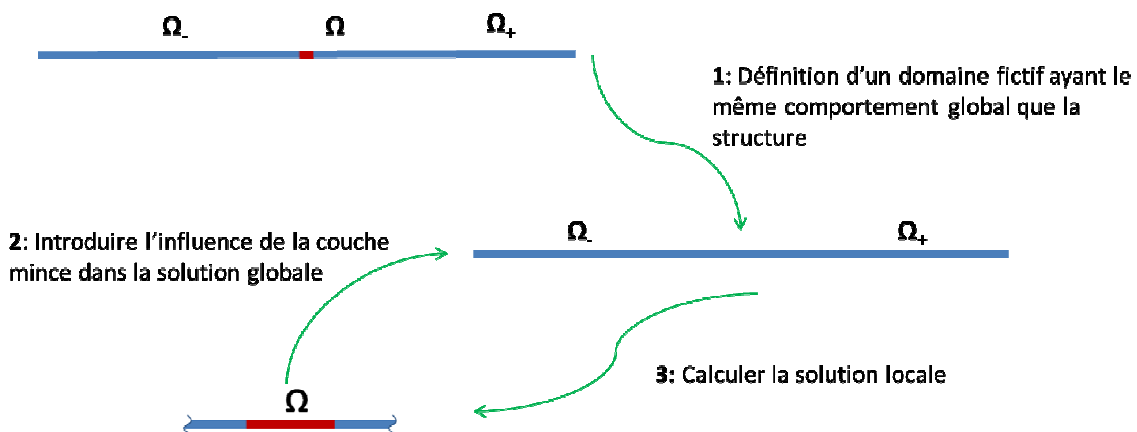


Figure.III.1.Principe de l'Approche MAX-FEM.

Comme cité précédemment, afin de mettre en œuvre la méthode éléments finis MAX-FEM, l'approche décrite par la Figure III.2 est considérée. Ce principe consiste à :

- Construire un domaine extérieur, sans couche mince, sur lequel la solution globale  $u$  du développement extérieur des MAE sera calculée par l'expression (III.1):

$$u(x)=u^0(x)+\varepsilon u^1(x)+\dots \quad (III.1)$$

Cette première étape permet de substituer la couche mince par une interface de discontinuité induisant une perturbation  $\varepsilon u^1(x)$  au champ non perturbé  $u^0(x)$ . Cette perturbation est une projection du comportement local dans le domaine extérieur.

▪ Développer une formulation éléments finis pour approximer, en un seul calcul, la solution globale  $u$  dans le domaine extérieur via une méthode d'enrichissement, voir Figure (III.3).

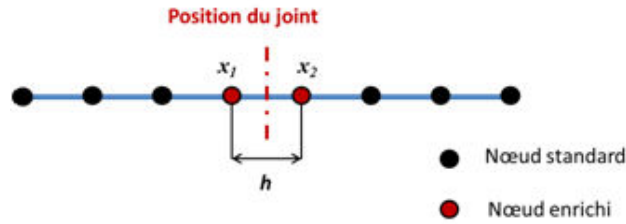


Figure.III.2.Stratégie de maillage de l'approche MAX-FEM.

En effet, cette étape permet de modéliser le domaine extérieur par des éléments enrichis dont le champ de déplacement s'écrit par:

$$u_h = u_H + \delta u_h \quad (III.2)$$

Ainsi les termes  $u^0(x)$  et  $\varepsilon u^1(x)$  de l'expression (III.1) sont respectivement reproduits par  $u_H$  et  $\delta u_h$ .

▪ Calculer la solution locale  $v$  du développement intérieur en utilisant la méthode des MAE.

$$v(y)=v^0(y)+\varepsilon v^1(y)+\dots \quad (III.3)$$

De ce fait, l'approche micro-macro suivie suit l'algorithme MAE en faisant appel au principe de l'enrichissement pour le calcul de la solution extérieure. Cette approche permet d'aboutir à une modélisation hybride analytique-numérique de la structure avec couche mince. Elle permet aussi de simplifier la résolution numérique en permettant d'aboutir aux résultats finaux en un seul calcul. Ces résultats sont présentés dans les sections suivantes.

### III.1.2.1. Approche MAX-FEM : Construction de l'enrichissement

Comme évoqué précédemment, l'objectif est de reproduire la même solution extérieure nodale que celle d'une structure avec couche minces sur une structure homogène équivalente. Ainsi, la couche mince et son voisinage sont substitués par un enrichissement des éléments contenant sa position (Figure III.3). Cependant, la seule condition imposée aux éléments enrichis est la restitution de la solution globale aux nœuds. En supposant que le développement extérieur MAE, exprimé dans les nœuds, représente la solution globale à reproduire, cette condition se traduit par l'équation (III.4):

$$u_i = u_i^0 + \varepsilon u^1(x_i) \quad (III.4)$$

Ainsi, pour reproduire le développement extérieur numériquement, nous proposons la formulation éléments finis continue suivante est proposée:

$$u(x) = \sum_i^N N_i(x) u_i^0 + \sum_i^{N_{enr}} N_i(x) H(x_i) b_i \quad (III.5)$$

où  $H(x_i)$  est la valeur de la fonction Heaviside au nœud  $x_i$ :

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x \leq 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad (III.6)$$

Le choix de cette formulation est basé sur sa similitude avec le développement extérieur des MAE et sur l'étude critique du modèle DAR-X-FEM (Section II.4.2). D'une part, comme le montre la figure (III.4), cette formulation reproduit numériquement la forme du développement extérieur. Elle fait intervenir la solution nodale homogène  $u_i^0$  ( $u_H$ ) interpolée par des fonctions de forme standards  $N_i(x)$ . Par ailleurs, le terme de perturbation (enrichissement)  $\varepsilon u^1$  ( $\delta u_h$ ) est approximé par un deuxième terme correctif faisant appel aux paramètres d'enrichissement  $b_i$  corrélés des valeurs de la fonction Heaviside aux nœuds. Cette deuxième partie fait appel aussi aux fonctions de forme classiques comme espace d'enrichissement.

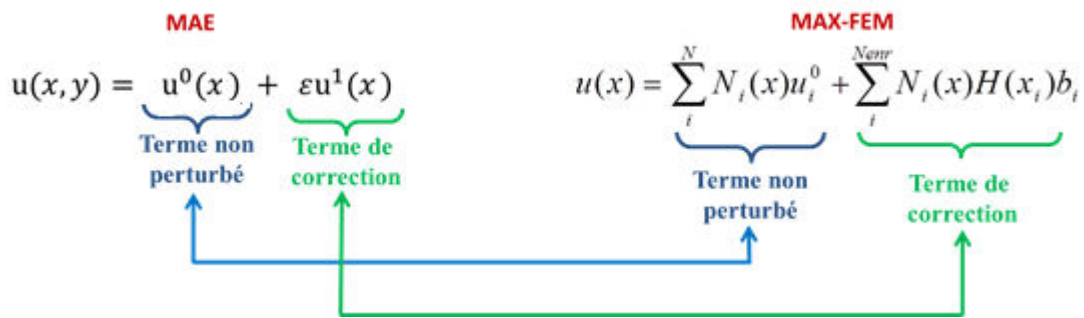


Figure.III.3. Formulation éléments finis de l'approche MAX-FEM.

D'autre part, lors de l'analyse du modèle DAR-X-FEM [1], il a été constaté que le choix de la méthode X-FEM pour le couplage n'est pas un choix optimal. Ce constat provient de la robustesse des calculs X-FEM non justifiée comparée à la nature de l'application où la couche mince est considérée plane avec un comportement linéaire et des interfaces parfaites. De plus, les caractéristiques géométriques des joints considérés n'évoluent pas lors des calculs. Ainsi, il n'y a aucune nécessité d'utiliser les fonctions de capture complexes « Level-sets » qui représentent le plus grand apport des X-FEM. Finalement, le rôle de la fonction Heaviside dans la formulation DAR-X-FEM se résume au partage du saut des

déplacements, calculé analytiquement, de part et d'autre de l'interface. Ainsi, ce besoin relativement simple, ne justifie pas la difficulté de l'intégration numérique induite par cette fonction discontinue.

De ce fait, et contrairement donc au couplage DAR-X-FEM, la formulation (III.5) est continue en supprimant la fonction Heaviside et en approximant le terme  $\epsilon \mathbf{u}^1$  par une solution équivalente continue. Cette formulation, s'inscrit donc dans une Partition de l'Unité où le même espace de fonctions de forme est utilisé pour interpoler les degrés de liberté standards et d'enrichissement.

Toutefois, l'idée d'utiliser le même espace d'interpolation peut induire une matrice de rigidité non conditionnée. Cependant, le couplage avec la MAE permet d'éviter ce problème en procurant un outil de factorisation des deux parties de la formulation (III.5). Ce résultat, constituant la clé de ce travail, est présenté dans les sections qui suivent et dont l'objectif est la construction de l'enrichissement.

▪ **Remarque I**

Avant de passer à l'identification des paramètres d'enrichissement et des matrices de correction, il est possible de remarquer que la formulation MAX-FEM proposée dans l'Equation (III.5) représente un élément fini standard auquel sont appliquées des conditions aux limites spécifiques, voir Figure (III.4). Ainsi, chaque nœud dispose d'un couple de paramètres  $(u_i^0, b_i)$ .



Figure.III.4. Conditions aux limites imposées sur l'élément contenant la position de l'interface.

En utilisant une formulation éléments finis standard de cet élément, il est facile de retrouver la formulation MAX-FEM (III.5):

$$u(x) = \sum_i^N N_i(x) u_i = \sum_i^N N_i(x) (u_i^0 + b_i) = \sum_i^N N_i(x) u_i^0 + \sum_i^N N_i(x) H(x_i) b_i \quad (\text{III.7})$$

Ceci correspond bien à la formulation d'un élément précontraint auquel sont appliquées des conditions aux limites spécifiques. Ce principe est encore mis en œuvre pour les éléments d'interface avec « double nœuds » [3]. Cependant, il ne s'agit pas, ici, d'un élément d'interface mais d'un élément linéaire continu représentant un milieu équivalent.

▪ **Remarque III**

La formulation MAX-FEM ainsi introduite et développée par la suite ne concerne que le calcul de la solution globale «macro» dans le domaine extérieur. La solution locale n'est pas écartée pour autant et son calcul est présenté dans le quatrième chapitre.

### III.1.3. Mise en œuvre de la méthode éléments finis MAX-FEM

Décrire le comportement global du domaine extérieur par enrichissement repose sur la pertinence du choix des paramètres d'enrichissement. Pour l'identification de ces derniers, la formulation proposée est confrontée au développement extérieur des MAE. Cette première étape permet de définir les conditions que les paramètres  $b_i$  doivent remplir.

#### III.1.3.1. Identification des paramètres d'enrichissement $b_i$

L'objectif de cette section est l'identification des paramètres enrichissant et corrigeant la solution non perturbée  $u^0$ . Considérons un élément recouvrant la position du joint et repérons par les indices 1 et 2 les nœuds de cet élément (Figure III.4). Le processus d'identification des paramètres  $b_i$  repose sur la confrontation de la solution nodale donnée par la formulation MAX-FEM (III.5) et celle donnée par le développement extérieur (III.1).

- En utilisant la formulation MAX-FEM:

$$\begin{cases} u_1 = u_1^0 - b_1 \\ u_2 = u_2^0 + b_2 \end{cases} \quad (III.8)$$

- En utilisant le développement extérieur:

$$\begin{cases} u_1 = u_1^0 + \varepsilon u_1^1 \\ u_2 = u_2^0 + \varepsilon u_2^1 \end{cases} \quad (III.9)$$

L'égalité des sauts calculés à la fois par (III.8) et (III.9) fournit alors la condition satisfaite par les paramètres  $b_i$  :

$$b_1 + b_2 = \varepsilon(u_2^1 - u_1^1) \quad (III.10)$$

Ainsi, les paramètres d'enrichissement sont liés aux valeurs nodales du terme de correction des MAE. Cependant, cela n'est pas une expression explicite de ces valeurs qui est telle approchée par le terme  $\varepsilon(u_2^1 - u_1^1)$  issu du calcul MAE.

Le terme  $\varepsilon(u_2^1 - u_1^1)$  provient de la résolution du problème extérieur d'ordre 1 décrit par:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ \sigma_{\pm}^1 = E \frac{\partial u^{1\pm}}{\partial x} & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ \llbracket u^1 \rrbracket = u^{1+}(0) - u^{1-}(0) \end{cases} \quad (III.11)$$

$\llbracket u^1 \rrbracket$  représente le saut de déplacement à l'interface.

De cette équation, le terme de correction  $u^1$  apparait linéaire [1] et s'exprime par:

$$u^{\pm}(x) = ax + b^{\pm} \quad (\text{III.12})$$

avec :

$$a = -\llbracket u^1 \rrbracket \text{ et } b^+ - b^- = \llbracket u^1 \rrbracket$$

Ainsi:

$$\varepsilon(u_2^1 - u_1^1) = \varepsilon(u^1(x_2) - u^1(x_1)) = a\varepsilon(x_2 - x_1) + \varepsilon(b^+ - b^-) = \varepsilon \llbracket u^1 \rrbracket (1-h) \quad (\text{III.13})$$

$h$  désignant la taille de l'élément contenant l'interface.

En tenant compte de cette approximation, la condition (III.10) imposée aux paramètres d'enrichissement devient alors :

$$b_1 + b_2 = \varepsilon(1-h) \llbracket u^1 \rrbracket \quad (\text{III.14})$$

Partant de cette dernière condition, le saut est partagé sur les deux nœuds de l'élément enrichi. Ce partage doit prendre en considération la position de chaque nœud de part et d'autre de la couche mince. Ainsi, l'expression suivante est proposée (III.15):

$$b_i = q_i \varepsilon (1-h) \llbracket u^1 \rrbracket \quad (\text{III.15})$$

avec :

$$q_1 = \frac{x_2}{h}, \quad q_2 = \frac{x_1}{h} \text{ et } q_1 + q_2 = 1$$

De ce fait, le processus d'identification ne manque que d'une expression analytique explicite du saut de déplacement  $\llbracket u^1 \rrbracket$ .

### III.1.3.2. Identification du saut de déplacement $\llbracket u^1 \rrbracket$

Le chapitre II présente la méthodologie MAE telle qu'elle peut être rencontrée dans différents travaux [1-2, 4-6]. Ainsi, les développements asymptotiques introduisent différents termes permettant d'approximer le déplacement dans les deux domaines intérieur et extérieur. Ces termes sont régis par des équations d'équilibre, de continuité et de raccordement. Dans cette section, l'algorithme pour le calcul du saut du déplacement est détaillé pour un assemblage unidimensionnel. Pour faciliter la compréhension des équations, il est important de garder en mémoire le principe de la méthode. Ce principe, stipule la concordance des deux développements dans une zone intermédiaire et conduit dans cette zone à:



$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow \pm\infty} (v^0(y) - u^0(0)) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} (v^1(y) - y \frac{\partial u^0}{\partial x}(0) - u^1(0)) = 0 \end{cases} \quad (III.16)$$

En supposant que la solution homogène  $u^0$  est connue, le terme  $v^0$  du développement intérieur est d'abord déterminé. Ce dernier est solution du système (III.17):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2}(y) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} (v^0(y) - u^0(0)) = 0 \end{cases} \quad (III.17)$$

conduisant à:

$$v^0(y) = u^0(0) \quad (III.18)$$

Et confirmant la continuité  $C^0$  du champ  $u^0$ .

Le deuxième terme  $v^1$  est défini par la résolution d'un système similaire à l'équation (III.17), combinant équation d'équilibre et raccordement avec le développement extérieur :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v^1}{\partial y^2}(y) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} (v^1(y) - y \frac{\partial u^0}{\partial x}(0) - u^1(0)) = 0 \end{cases} \quad (III.19)$$

Ainsi, le terme  $v^1$  est donné par :

$$v^{1\pm}(y) = y \frac{\partial u^{0\pm}}{\partial x}(0) + u^{1\pm}(0) \quad (III.20)$$

En assurant la continuité des contraintes et déplacements aux limites du joint  $y = \pm 1/2$ , l'expression du déplacement à l'intérieur de la couche mince, noté  $v^{1(\Omega)}$ , est solution de l'équation III.21 :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v^{1(\Omega)\pm}}{\partial y^2} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \llbracket \Sigma^0 \rrbracket = 0 & \text{pour } y = \pm 1/2 \\ \llbracket v^{1(\Omega)\pm} \rrbracket = 0 & \text{pour } y = \pm 1/2 \end{cases} \quad (III.21)$$

où  $\Sigma = \varepsilon^{-1} \Sigma^{-1} + \Sigma^0 + \varepsilon^1 \Sigma^1 + \dots$  désigne le développement du champ de contraintes. La solution de cette équation s'exprime par l'équation III.22.

$$v^{1(\Omega)\pm}(y) = y \frac{E_1}{E_2} \frac{\partial u^{0\pm}}{\partial x}(0) + \left( \frac{E_1}{E_2} - 1 \right) \frac{\partial u^{0\pm}}{\partial x}(0) + u^{1\pm}(0) \quad (III.22)$$

En considérant la continuité de ce champ en  $y=0$ , l'expression du saut des déplacements est immédiate:

$$\llbracket u^1 \rrbracket = u^{1+}(0) - u^{1-}(0) = \left(\frac{E_1}{E_2} - 1\right) \frac{\partial u^{0\pm}}{\partial x}(0) = c\varepsilon^0 \quad (\text{III.23})$$

avec  $c = \left(\frac{E_1}{E_2} - 1\right)$ .

Cette expression révèle une relation linéaire liant le saut de déplacement au gradient du champ continu  $u^0$ , et constitue le fondement de la formulation MAX-FEM III.5. En effet, les deux termes du développement extérieur (II.1) ( $u^0, u^1$ ) sont accessibles en un seul calcul éléments finis tandis que les deux termes de la formulation (III.5) peuvent être combinés comme la section suivante le présente.

#### III.1.4. Calcul de la matrice de rigidité

Nous rappelons ici, la formulation forte du problème mécanique d'un solide quelconque :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = f_v & \text{sur } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = p & \text{sur } \Gamma_\phi \\ u = u_{imp} & \text{sur } \Gamma_T \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

La formulation faible de ce problème est obtenue en multipliant par une fonction test et en intégrant sur le domaine d'étude :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} v d\Omega = \int_{\Omega} \dot{w} v d\Omega \quad \forall v \in V \quad (\text{III.25})$$

Vu la continuité du domaine effectif et l'utilisation de l'espace d'interpolation standard, cette formulation se transforme, pour un problème élastique linéaire, en un système linéaire :

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (\text{III.26})$$

$\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité équivalente,  $\mathbf{U}$  est la solution globale nodale équivalente et  $\mathbf{F}$  le vecteur des efforts nodaux. L'objectif est le calcul de la matrice de rigidité globale  $\mathbf{K}$  de manière simplifiée et en facilitant son implémentation numérique par la suite. Pour aboutir à cet objectif, des nouvelles matrices sont introduites et sont présentées dans les sections qui suivent.

##### (i) Matrice de transfert $\mathbf{C}$

A partir des résultats MAE, l'enrichissement est lié au saut de déplacement  $\llbracket u \rrbracket$  au travers de l'équation (III.15). Ce dernier est lui-même lié linéairement à la dérivée du champ

homogène  $u^0$ , par l'équation (III.23). Par conséquent, la réflexion mène à relier les deux parties de la formulation MAX-FEM (III.5). Cette factorisation permettra de réduire le nombre de degrés de liberté et facilitera le conditionnement de la matrice de rigidité.

Pour cela, les paramètres d'enrichissement sont exprimés en fonction de la solution homogène nodale  $\mathbf{U}^0$ . Ainsi l'écriture matricielle suivante est adaptée :

$$\frac{\partial u^0}{\partial x}(0) = \mathbf{B}\mathbf{U}^0 \quad (\text{III.27})$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice de déformation contenant les dérivées des fonctions de forme :

$$\mathbf{B} = \langle N_{1,x}(x) \quad N_{2,x}(x) \rangle$$

En introduisant cette relation, l'expression des paramètres  $b_i$  (III.15), devient:

$$b_i = q_i \varepsilon (1-h) \llbracket u^1 \rrbracket = q_i \varepsilon (1-h) c \mathbf{B}\mathbf{U}^0 \quad (\text{III.28})$$

La matrice de transfert  $\mathbf{C}$  est alors définie, permettant l'expression du vecteur des paramètres d'enrichissement  $\mathbf{b}$  en fonction de la solution homogène nodale  $\mathbf{U}^0$  :

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \varepsilon c (1-h) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{U}^0 = \mathbf{C}\mathbf{U}^0 \quad (\text{III.29})$$

Cette matrice constitue l'originalité de ces développements et procure plusieurs simplifications au niveau de l'implémentation numérique de l'approche MAX-FEM. En effet, elle permet d'accéder aux deux termes ( $u^0, u^1$ ) en un seul calcul. Ce constat est mis en évidence dans les développements suivants.

**(ii) Matrice de correction  $\mathbf{C}_M$**

En injectant l'expression (III.29) dans la formulation MAX-FEM (III.5), une nouvelle relation linéaire se dégage, liant les déplacements nodaux du champ global  $\mathbf{U}$  à ceux du champ homogène  $\mathbf{U}^0$  :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \mathbf{H}\mathbf{b} = \mathbf{U}^0 + \mathbf{H}\mathbf{C}\mathbf{U}^0 = (\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{C})\mathbf{U}^0 \quad (\text{III.30})$$

$\mathbf{I}$  est la matrice identité et  $\mathbf{H}$  la matrice contenant les valeurs de la fonction Heaviside :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H(x_1) & 0 \\ 0 & H(x_2) \end{bmatrix}$$

Cette factorisation mène à définir le champ global  $\mathbf{U}$  comme une correction linéaire du champ homogène  $\mathbf{U}^0$ . Ainsi, est-il possible de reproduire ce principe de correction sur la

matrice de rigidité ? Pour cela, la formulation variationnelle (III.25) du problème homogène permet d'aboutir au système linéaire (III.31) :

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{U}^0 = \mathbf{F}^0 \quad (\text{III.31})$$

où  $\mathbf{K}^0 = \int \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{B}^T dV$  est la matrice de rigidité d'un élément homogène et  $\mathbf{F}^0$  le vecteur de chargement nodal.

En supposant que le problème global (extérieur) (III.26) et le problème non perturbé (III.31) sont soumis au même chargement extérieur  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^0$ , une relation linéaire entre la matrice de rigidité standard  $\mathbf{K}^0$  et celle du problème global  $\mathbf{K}$  peut alors être définie:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^0 (\mathbf{I} + \mathbf{H} \mathbf{C})^{-1} \quad (\text{III.32})$$

Ainsi, la matrice de rigidité de l'élément enrichi se définit comme une correction de celle d'un élément standard. Cette correction se définit par une matrice  $\mathbf{C}_M$  donnée par:

$$\mathbf{C}_M = (\mathbf{I} + \mathbf{H} \mathbf{C})^{-1} \quad (\text{III.33})$$

et la matrice de rigidité s'écrit :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^0 \mathbf{C}_M \quad (\text{III.34})$$

Toutefois, il reste à vérifier si la matrice  $(\mathbf{I} + \mathbf{H} \mathbf{C})$  est inversible pour valider l'existence de la matrice  $\mathbf{C}_M$ . Puisque:

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{H} \mathbf{C}) = \det \left( \mathbf{I} + \varepsilon \frac{c}{h} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1 + \det \left( \mathbf{I} + \varepsilon \frac{c}{h} \begin{bmatrix} q_1 & -q_1 \\ -q_2 & q_2 \end{bmatrix} \right) = 1 + \varepsilon \frac{c}{h} (q_1 + q_2) > 0 \quad (\text{III.35})$$

la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  est correctement définie.

Ainsi toutes les informations liées à la couche mince sont stockées dans la matrice  $\mathbf{C}_M$ . En effet, elle contient à la fois les données géométriques (paramètre  $\varepsilon$ ) et les propriétés du matériau d'apport (module de Young  $E_2$ ). Par le biais de cette matrice, la correction présente dans le développement extérieur est reproduite sur les nœuds de l'élément enrichi. Par conséquent, ce dernier acquiert un comportement équivalent représentant la couche mince et son voisinage.

En outre, grâce à la matrice  $\mathbf{C}_M$ , les deux parties de la formulation MAX-FEM sont factorisées. Le nombre de degrés de liberté en est réduit comparé à la méthode X-FEM classique [7] ou au couplage DAR-X-FEM [1]. De plus, cette factorisation permet d'accéder à la solution globale en un seul calcul éléments finis. Finalement, les problèmes d'intégration numérique liés à la fonction Heaviside ont été écartés et le calcul numérique de la matrice

de rigidité repose sur un algorithme FEM classique. D'où la simplicité de l'approche MAX-FEM présentée ici.

### **III.1.5. Synthèse**

Les paramètres  $b_i$  et le terme non perturbé  $u^0$  n'apparaissent plus explicitement dans le système final. Ce résultat est dû à l'approche MAE qui fournit une relation linéaire entre les paramètres  $b_i$  et  $u^0$  à travers la matrice  $\mathbf{C}$ , ainsi qu'entre  $u^0$  et  $u$  à travers la formulation éléments finis de l'équation (III.5). Cette relation permet de relier la matrice de rigidité globale  $\mathbf{K}$  à la matrice de rigidité standard  $\mathbf{K}^0$  par le biais d'une matrice de correction  $\mathbf{C}_M$ . Ainsi, la résolution du système linéaire final de l'équation (III.26) conduit à la solution globale  $u$  en un seul calcul, sans aucune simulation préalable du champ  $u^0$ . Cela démarque la pertinence des travaux présentés vis-à-vis du couplage DAR-X-FEM introduit par Nguyen et d'un algorithme standard MAE [1]. Cette pertinence est le fruit d'une étude approfondie de l'approche MAE et d'une ouverture sur les différentes méthodes d'enrichissement avant de s'orienter vers la PUM.

Le résultat final est ainsi une matrice de rigidité équivalente d'un domaine équivalent dont le comportement est influencé par la présence de la couche mince. Ce principe rejoint celui de l'homogénéisation. Cependant, la construction du comportement équivalent fait appel à une matrice de correction faisant intervenir les caractéristiques de la couche mince. Cette relation est un résultat direct de l'approche MAE alors que la formulation éléments finis MAX-FEM se base sur la Partition de l'Unité. La conjonction des approches analytiques et numériques conduit dès lors, à un modèle hybride basé uniquement sur un algorithme FEM standard.

La méthode développée se base sur un principe de couplage analytique-numérique innovant. Ce principe lui permet aussi de garder son originalité par rapport aux éléments d'interface [3, 8] grâce à la détermination analytique du saut de déplacement en utilisant la MAE et non par la minimisation de l'énergie potentielle comme dans le cas des éléments cohésifs. En effet, ce principe permet d'écarter le saut de déplacement des inconnus et d'éviter l'utilisation d'éléments supplémentaires dans l'interface. Ainsi, comparé à ce type d'éléments, la MAX-FEM réduit de manière significative le nombre d'inconnus et de problèmes à résoudre. De plus, et contrairement à la méthode des double-nœuds [3], les éléments définis dans ce travail sont continus et ne sont pas forcément positionnés sur l'interface. Ils laissent en outre la possibilité de calculer le champ intérieur par un simple post-traitement, permettant au modèle hybride MAX-FEM de conserver une réelle approche multi-échelles.

### III.2. Partie II : Applications et résultats

Avant de présenter les différentes applications et résultats obtenus par l'approche MAX-FEM, sa procédure d'implémentation numérique est présentée. En effet, cette dernière a été programmée sous MATLAB dans un premier temps en se basant sur un algorithme FEM standard dans lequel est intégrée la matrice de correction.

Les matrices de correction et factorisation sont exprimées en fonction des données géométriques et matériaux pour un assemblage unidimensionnel de deux substrats identiques :

$$\mathbf{C} = \varepsilon c(1-h) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \mathbf{B} = \varepsilon c(1-h) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \langle -1/h \quad 1/h \rangle = \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{E_1}{E_2} - 1 \right) (1-h) \begin{bmatrix} -q_1 & q_1 \\ -q_2 & q_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_M = (\mathbf{I} + \mathbf{HC})^{-1} &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{E_1}{E_2} - 1 \right) (1-h) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_1 & q_1 \\ -q_2 & q_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{E_1}{E_2} - 1 \right) (1-h) \begin{bmatrix} q_1 & -q_1 \\ -q_2 & q_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ \mathbf{C}_M &= \begin{bmatrix} 1 + q_1 \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{E_1}{E_2} - 1 \right) (1-h) & -q_1 \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{E_1}{E_2} - 1 \right) (1-h) \\ -q_2 \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{E_1}{E_2} - 1 \right) (1-h) & 1 + q_2 \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{E_1}{E_2} - 1 \right) (1-h) \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

Une fois programmée, la solution MAX-FEM obtenue est comparée ensuite aux résultats donnés par la FEM (en maillant finement la couche mince) et à la solution analytique exacte de ce problème.

Différentes applications sont traitées dans cette partie. En effet, nous présentons dans un premier lieu une application mécanique nous permettant de valider notre approche et d'évaluer ses performances en termes de précision et de convergence. Ensuite des applications thermiques sont données afin d'approfondir l'étude et de mettre en évidence l'apport de l'approche MAX-FEM en termes de maillage et de temps de calcul, notamment pour des applications transitoires.

#### III.2.1. Analyse mécanique unidimensionnelle



Figure.III.5. Barre assemblée sous chargement mécanique.

L'objectif de cette première application est la validation de l'approche MAX-FEM sur un cas simple à la solution analytique connue. Ainsi, soit un assemblage brasé unidimensionnel soumis au chargement présenté dans la Figure (III.6).

Les caractéristiques géométriques de cet assemblage et ses propriétés matériaux sont données par le tableau III.1.

Tableau III.1. Caractéristiques géométriques et propriétés matériau de l'assemblage

	Modèle standard		Modèle adimensionné	
	substrat	Couche mince	substrat	Couche mince
<b>Module de Young</b>	$E_1=210GPa$	$E_1=90GPa$	$E_1=210GPa$	$E_1=90GPa$
<b>Longueur</b>	$L=100mm$	$e=0.1mm$	$L=1$	$\varepsilon=0.001$

Cette application correspond à un essai de traction sur éprouvette métallique (acier) assemblée par brasage (alliage de cuivre).

**(i) Analyse des résultats : Maillage, précision et convergence**

Le principal objectif déjà évoqué de l'approche MAX-FEM est d'éviter le raffinement du maillage. En effet, la couche mince et son voisinage sont substitués par un domaine effectif représenté par un élément enrichi. Ainsi, contrairement à la FEM, aucun raffinement du maillage à la proximité de la couche mince n'est nécessaire et seul un maillage structuré et grossier est appliqué (Tableau III.2).

Tableau III.2. Données du maillage pour les deux méthodes FEM et MAX-FEM.

	$h_{min}$	Nombre de DDL
<b>FEM</b>	0.001	101
<b>MAX-FEM</b>	0.0476	51

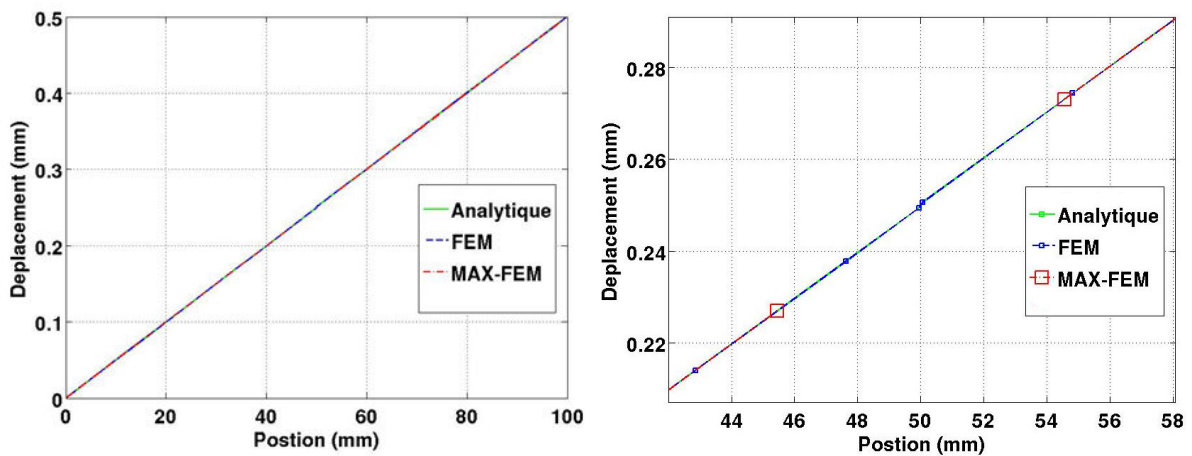


Figure.III.6. Solutions exacte, FEM et MAX-FEM.

Néanmoins, même en employant ce maillage grossier, l'approche MAX-FEM reproduit la solution FEM et la solution exacte avec grande précision. En effet, en analysant les résultats de la Figure (III.7), la solution MAX-FEM rejoint les deux solutions exacte et FEM dès la position des nœuds de cet élément enrichi. Cependant, la solution à l'intérieur de l'élément n'est pas représentée, puisqu'elle ne peut être qu'une interpolation linéaire des solutions aux nœuds dudit élément enrichi. Toutefois, cette solution dite « locale » n'est pas ignorée et est accessible facilement comme le montrera le quatrième chapitre.

Afin de valider les résultats de la Figure III.7 concernant la précision de la méthode, il est possible de procéder à un calcul des erreurs relative  $e_r = \frac{\max|u_{analytique} - u_{MAX-FEM}|}{\lambda_{analytique}}$  et énergétique  $e = \sqrt{\int_x (\varepsilon_{analytique} - \varepsilon_{MAX-FEM}) E (\varepsilon_{analytique} - \varepsilon_{MAX-FEM}) dx}$  par rapport à la solution analytique. Les résultats obtenus sont donnés par le tableau (III.3). Ce dernier montre que l'approche MAX-FEM présente une bonne précision. Cependant, la FEM montre une meilleure précision. Ceci est dû, en premier lieu, à la finesse du maillage FEM retenu. En outre, l'approche MAX-FEM présente plusieurs approximations importantes. Parmi celles-ci, la solution globale est supposée reproduite par le développement extérieur (II.2), lui-même approximation asymptotique approchée numériquement par la formulation MAX-FEM (II.5). Enfin, lors de la construction de l'enrichissement, l'approximation du terme  $\varepsilon(u_2^1 - u_1^1)$  (III.10) et les coefficients de corrélation  $q_i$  (Equation III.15) ont leur rôle également dans la justification de cet écart. Cependant, malgré toutes ces approximations, l'approche MAX-FEM présente une très bonne précision ne serait ce qu'en considérant le gain en maillage. Cette conclusion est consolidée par la suite par le gain en termes de temps de calcul dans le cas des analyses transitoires.

Tableau III.3. Calcul des erreurs relative et quadratique

	$e_r$	$e$
<b>FEM</b>	$2.528.10^{-11}$	$1.75.10^{-12}$
<b>MAX-FEM</b>	$2.723.10^{-11}$	$1.1543.10^{-11}$

Comme dernière étude effectuée pour cette application mécanique, la convergence de la méthode est testée. Pour ce faire, l'erreur énergétique est calculée pour différentes tailles du maillage. Le résultat obtenu par la Figure (III.8) est prévisible. En effet, la convergence de la méthode MAX-FEM, est forcément liée à la FEM classique. Ainsi ses performances, pour les cas d'élasticité linéaire, seront celle de la FEM classique.



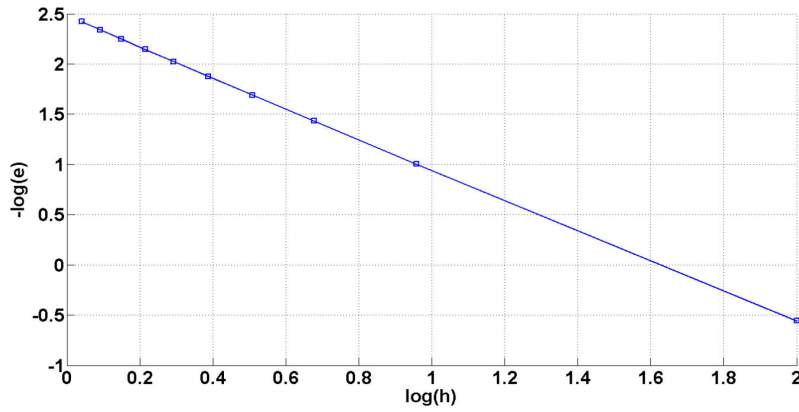


Figure.III.7. Convergence de la méthode MAX-FEM.

### III.2.2. Analyse thermique transitoire

En restant sur une approche unidimensionnelle, une analyse thermique transitoire sur des structures contenant des couches minces est réalisée. En effet, si l'analyse mécanique a permis de valider l'approche et tester ses performances, l'analyse transitoire permet d'associer le gain en maillage au temps de calcul. Ainsi, en réalisant un calcul explicite, la stabilité des calculs, l'incrément du temps et à la taille du maillage sont étroitement liés. Afin d'aboutir à un tel résultat, l'approche MAX-FEM est mise en œuvre pour la résolution de l'équation de la chaleur. La formulation éléments finis, la construction de l'enrichissement et les matrices de correction sont obtenues de manière similaire aux développements présentés dans la première partie du chapitre. Dans les sections qui suivent, nous présentons un résumé des étapes de mise en œuvre où l'objectif est le calcul de la matrice de correction  $C_{M/h}$  liée à la matrice de conductivité thermique.

#### III.2.2.1. L'approche MAX-FEM pour la résolution de l'équation de la chaleur

L'objectif de cette analyse thermique est la résolution de l'équation de la chaleur dans le domaine  $\Omega_+ \cup \Omega_-$ . La formulation forte de cette équation pour ce domaine est donnée par l'équations (III.38).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver le champs } T(x,t) \text{ satisfaisant:} \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) = \dot{w} \quad \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \text{ ]}0, t[ \\ T(x,0) = T_0 \quad \forall x \in \Omega_+ \cup \Omega_- \\ T = T_{imp} \quad \text{dans } \Gamma_T \text{ ]}0, t[ \\ -\lambda \vec{\nabla} T = \phi_{imp} \quad \text{dans } \Gamma_\phi \text{ ]}0, t[ \end{array} \right. \quad (\text{III.38})$$

La formulation faible obtenue après multiplication par les fonctions test et intégration sur le domaine  $\Omega_+ \cup \Omega_-$  s'exprime par:

$$\int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) v d\Omega = \int_{\Omega} \dot{Q} v d\Omega \quad \forall v \in V \quad (\text{III.39})$$

$V$  est le domaine des fonctions test  $v$ .

Cette formulation mène au système linéaire suivant :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{Q} \quad (\text{III.40})$$

où  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{C}$  sont respectivement les matrices de conductivité et de capacité,  $\mathbf{T}$  le vecteur des température nodales et  $\mathbf{Q}$  le vecteur de chargement thermique.

En utilisant un schéma d'Euler explicite, ce système devient :

$$\left( \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} + \mathbf{K} \right) \mathbf{T}^{n+1} = \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \mathbf{T}^n + \mathbf{Q}^{n+1} \quad (\text{III.41})$$

où  $\Delta t$  est l'incrément du temps et  $n$  le nombre d'incrément à l'instant  $t$ .

L'objectif est donc le calcul des deux matrices de conductivité  $\mathbf{K}$  et de capacité  $\mathbf{C}$ . Ainsi, suivant l'algorithme présenté dans la première partie de ce chapitre, la matrice de correction  $\mathbf{C}_{Mth}$  liant le champ de température extérieur  $T$  au champ non perturbé  $T^0$  doit être calculée. Pour parvenir à cet objectif, une procédure similaire à celle employée au calcul de la matrice de correction mécanique  $\mathbf{C}_M$  est mise en œuvre ici. Le point de départ de cette procédure est la mise en place de la formulation éléments finis approximant le champ thermique. Cette dernière est donnée par l'équation III.42:

$$T(x) = \sum_i^N N_i(x) T_i^0 + \sum_i^{N_{enr}} N_i(x) H(x) c_i \quad (\text{III.42})$$

où l'identification des paramètres de correction  $c_i$  du champ thermique dépend du saut de température  $\llbracket T^1 \rrbracket$  :

$$c_i = q_i \varepsilon (1-h) \llbracket T^1 \rrbracket \quad (\text{III.43})$$

$q_i$  les coefficients de corrélation identiques au cas mécanique :  $q_1 = -\frac{x_2}{h}$  et  $q_2 = \frac{x_1}{h}$ .

$\llbracket T^1 \rrbracket$  est ensuite obtenu en suivant le même algorithme MAE défini précédemment. Son expression est donnée par l'équation (III.44):

$$\llbracket T^1 \rrbracket = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) \frac{\partial T^0}{\partial x}(0) = c_{th} \frac{\partial T^0}{\partial x}(0) = c_{th} \phi \quad (\text{III.44})$$

A partir de cette expression, il est alors possible de déduire la matrice  $\mathbf{C}_{th}$  liant les paramètres d'enrichissement à la solution homogène  $T^0$  :

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_{th} \mathbf{T}^0 \quad (\text{III.45})$$

avec :

$$\mathbf{C}_{th} = \varepsilon c_{th} (1-h) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \mathbf{B} = \varepsilon c_{th} (1-h) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \langle -1/h \quad 1/h \rangle = \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) (1-h) \begin{bmatrix} -q_1 & q_1 \\ -q_2 & q_2 \end{bmatrix}$$

En intégrant cette expression dans la formulation élément finis (Equation III.42), la matrice de correction  $\mathbf{C}_{Mth}$ , qui relie le champ de température extérieur  $\mathbf{T}$  au champ non perturbé  $\mathbf{T}^0$ , est donnée facilement par :

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}_{Mth} \mathbf{T}^0 \quad (\text{III.46})$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{Mth} &= (\mathbf{I} + \mathbf{HC})^{-1} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) (1-h) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_1 & q_1 \\ -q_2 & q_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) (1-h) \begin{bmatrix} q_1 & -q_1 \\ -q_2 & q_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ \mathbf{C}_{Mth} &= \begin{bmatrix} 1 + q_1 \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) (1-h) & -q_1 \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) (1-h) \\ -q_2 \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) (1-h) & q_2 \frac{\varepsilon}{h} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) (1-h) \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Ainsi, la matrice de conductivité  $\mathbf{K}$  se définit par :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^0 \mathbf{C}_{Mth} \quad (\text{III.48})$$

Par ailleurs, la matrice de capacité n'est pas corrigée. En tenant compte des travaux [1], le voisinage du joint est supposé être en régime permanent. Ainsi, la matrice de capacité  $\mathbf{C}$  est celle de la FEM standard définie par l'équation (III.49). Cette hypothèse est validée par les résultats présentée dans la section qui suit.

$$\mathbf{CT} = \rho_1 c_{p1} \int_V \mathbf{N} \mathbf{N} dV \quad (\text{III.49})$$

### III.2.2.2. Résultats et discussion

La méthode MAX-FEM est implémentée sous MATLAB en utilisant un schéma Euler explicite (Equation III.41). La solution obtenue est comparée à la solution FEM standard obtenue sous le même code en sus d'autres comparaisons avec des résultats de la littérature. L'objectif principal, pour les sections suivantes, est la mise en évidence du gain en temps de calcul que procure la méthode MAX-FEM grâce à la liberté de maillage plus grande. Ce lien entre la

taille du maillage et le temps de calcul est le résultat de la condition de stabilité exigé pour un calcul explicite :

$$\frac{1}{6} < \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2} \quad (\text{III.50})$$

Par ailleurs, l'analyse thermique est complétée d'une étude paramétrique ciblant l'influence des paramètres géométriques, matériaux et numériques sur la précision de la méthode. Cette étude est réalisée pour des configurations unidimensionnelles et axisymétriques.

(i) *Transfert thermique dans une barre assemblée*

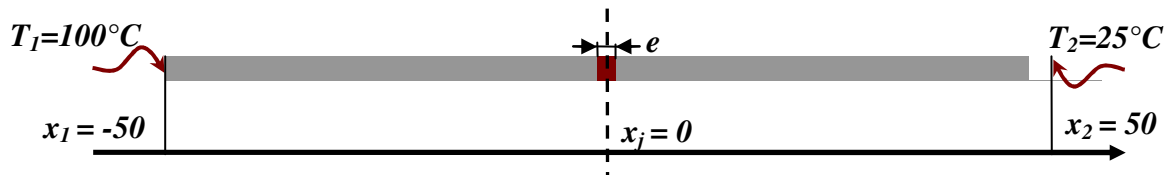


Figure.III.8.Barre sous chargement thermique.

Comme première application, soit une barre unidimensionnelle assemblée par une couche mince. Les caractéristiques géométriques, les propriétés des matériaux constituant la barre et le chargement sont donnés par la Figure III.9 et le tableau III.4.

Tableau.III.4.Données géométriques et propriétés matériau de l'assemblage.

	Modèle standard		Modèle adimensionné	
	substrat	Couche mince	substrat	Couche mince
<b>Conductivité</b>	$\lambda_1 = 26 W.m^{-1}.K^{-1}$	$\lambda_2 = 15 W.m^{-1}.K^{-1}$	$\lambda_1 = 260 W.m^{-2}.K^{-1}$	$\lambda_2 = 150 W.m^{-2}.K^{-1}$
<b>Diffusivité</b>	$a_1 = 3.98.10^{-6} m^2.s^{-1}$	$a_2 = 1.06.10^{-4} m^2.s^{-1}$	$a_1 = 3.98.10^{-4}.s^{-1}$	$a_2 = 1.06.10^{-2}.s^{-1}$
<b>Longueur</b>	$L = 100mm$	$e = 0.1mm$	$L = 1$	$e = 0.001$

Tableau.III.5. Données de l'étude

	Taille de maille minimale $h_{min}$	Nombre des DDL	Incrément de temps	Temps de calcul
<b>FEM</b>	0.1 mm	24	0.0004s	11 mn
<b>MAX-FEM</b>	4.76mm	22	0.12s	Quelques secondes

Concernant le maillage appliqué à la barre, il est nécessaire, dans le cas de la FEM, de mailler la couche mince. Ainsi, l'épaisseur du joint sera discrétisée à l'aide d'un élément. Ainsi, Pour assurer la stabilité, l'incrément du temps est choisi fonction de la taille de maille minimale et donc de l'épaisseur du joint. Par conséquent, le nombre d'itérations devient très important (de l'ordre du million pour 2000s) ce qui induit une augmentation considérable du temps de calcul ainsi que l'espace mémoire nécessaire pour le stockage des résultats pour chaque itération, voir Tableau (III.5).

A l'inverse, aucune contrainte n'est imposée au maillage MAX-FEM. En effet, le seul paramètre pouvant contrôler le choix de ce dernier est la précision souhaitée. Ainsi, pour cette application, un maillage régulier et grossier est choisi, de caractéristiques données par le Tableau (III.5).

Il peut être noté que MATLAB est limité en termes de mémoire de stockage. En conséquent, il est nécessaire d'utiliser, dans le cas de la FEM, un minimum de degrés de liberté pour permettre le stockage des résultats pour chaque incrément de temps.

Les Figure III.10, III.11 et III.12 affichent les résultats obtenus, comparés, d'une part à la FEM et d'autre part à ceux obtenus par Nguyen [1] pour la même application en utilisant les méthodes DAR-X-FEM, FEM et quadripôles.

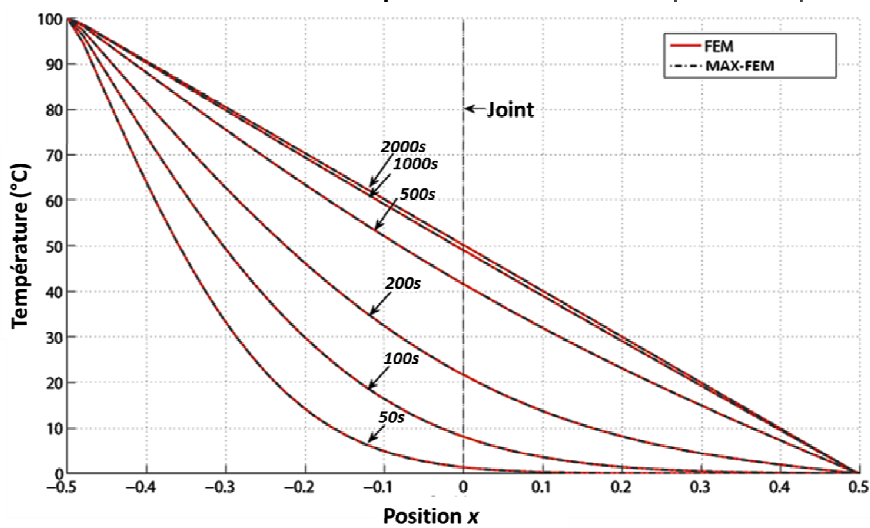


Figure.III.9.Distribution de la température dans la barre.

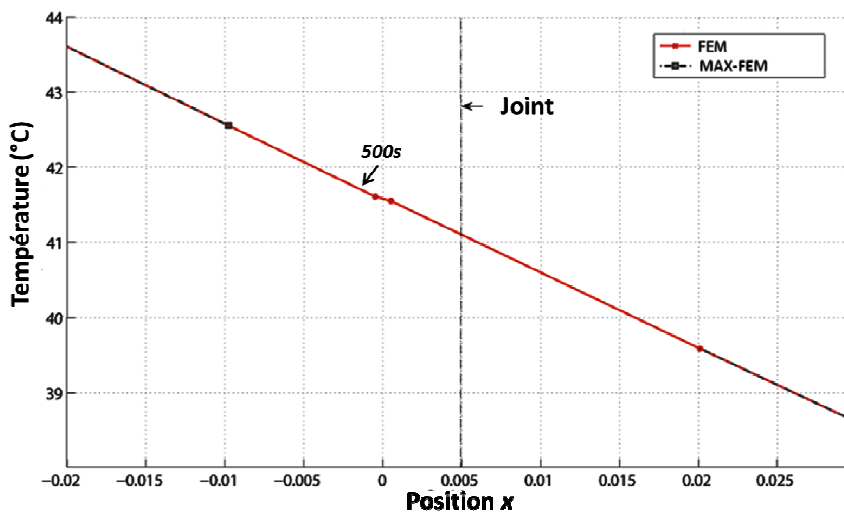


Figure.III.10.Zoom sur l'élément enrichi.

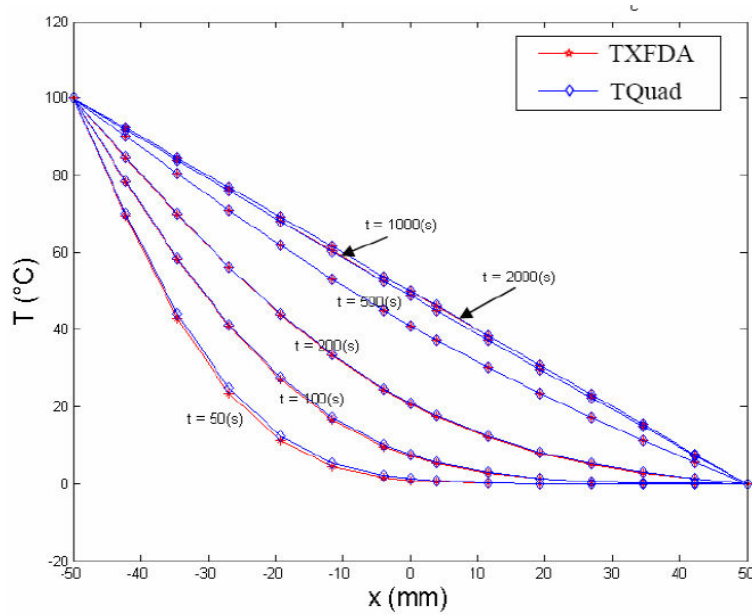


Figure.III.11. Distribution de la température : DARX-FEM et quadripôles [1].

De ces figures, il apparaît clairement que l'approche MAX-FEM reproduit avec grande précision le champ thermique donnée par la FEM à l'extérieur de l'élément enrichi. Cependant cette dernière nécessite un temps de calcul supérieur à 11mn pour 24 degrés de liberté, tandis que la MAX-FEM donne des résultats presque instantanés. Le gain en temps de calcul est aussi un point fort de la méthode des Quadripôle [9]. Mais, cette dernière nécessite un passage de l'espace temps à l'espace de Laplace pour la résolution de l'équation de la chaleur et un retour vers le passage temps pour la présentation des résultats. De plus, elle reste restreinte aux applications thermiques, ce qui ne donne pas de possibilités pour un éventuel couplage thermomécanique.

Ainsi, forte de ces résultats, l'approche MAX-FEM démontre son potentiel à traiter les problèmes du raffinement du maillage et du temps de calcul tout en préservant la précision des résultats. Ce résultat doit conduire à poursuivre pour des cas d'études plus complexes. Pour cet objectif, plusieurs analyses ont été conduites dans ce sens afin d'éprouver la validité de la méthode.

**(ii) Transfert thermique dans un assemblage multi-joints**

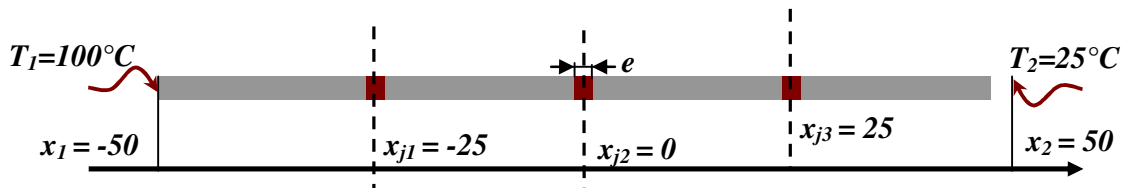


Figure.III.12. Assemblage stratifié sous un chargement thermique.

Dans l'idée de s'approcher au plus près de l'application industrielle contexte de ces travaux, l'étude d'un assemblage stratifié avec plusieurs joints est conduite (Figure III.13). Pour cette

application, les mêmes données géométriques et matériaux que l'application précédente sont retenues, voir Tableau III.4.

La première difficulté de cette application réside dans la détection de la position des joints et le choix de l'enrichissement. En effet, la forme standard de la fonction Heaviside (Equation (III.6)) ne permet pas de prendre en considération la présence de plusieurs couches minces pouvant être localisées irrégulièrement. Ainsi, pour répondre à cette problématique, une nouvelle forme de la fonction de capture est introduite (Equation (III.51)). Cette définition a principalement un rôle numérique. En effet, grâce à un fichier où sont stockées les coordonnées des joints, cette fonction effectue un test vérifiant si l'élément contient ou non une de ces positions. Ainsi, l'élément détecté est automatiquement enrichi.

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } \prod_{j=1}^m (x-x_j) < 0 \\ 1 & \text{si } \prod_{j=1}^m (x-x_j) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.51})$$

où  $m$  est le nombre de joints localisés aux positions  $x_j$ .

La deuxième difficulté est le calcul de la solution globale en prenant en considération la perturbation des joints et les éventuelles interactions entre les perturbations qu'ils engendrent. En effet, un premier point de vue consisterait à considérer que la perturbation globale est un cumul des trois perturbations causées par chacun des joints. Soit :

$$T(x) = T^0(x) + \varepsilon_1 T_1^1(x) + \varepsilon_2 T_2^1(x) + \varepsilon_3 T_3^1(x)$$

où le terme  $\varepsilon_j T_j^1(x)$  représentant la perturbation causée par le joint  $j$ , évanescence en s'éloignant de la position  $x_j$ .

Cependant, l'approche MAX-FEM ne suit guère ce principe. En effet, en plaçant un élément enrichi à l'emplacement des joints, la méthode MAX-FEM impose à la solution globale de respecter le saut de température à cet emplacement. Ainsi, la solution finale doit reproduire les trois sauts à travers chacun des trois joints. Les résultats obtenus par cette approche sont donnés par les Figure (III.13) et (III.14), où sont représentées les solutions FEM et MAX-FEM pour différents instants  $t$ .

Le premier constat est que la méthode MAX-FEM conserve son efficacité en montrant des résultats précis. En effet, la méthode reproduit la solution globale, et le saut à travers chaque joint est pris en compte. Cette précision est bien évidente sur la Figure III.15 où est reportée l'évolution de la température des deux nœuds du premier élément enrichi. Cette solution est comparée à celle obtenue par la FEM pour les mêmes points.

Le deuxième constat concerne le temps de calcul. En effet ce dernier passe de 16mn pour la FEM à quelque secondes de calcul pour la MAX-FEM en évitant de faire appel à des incréments de temps réduits.

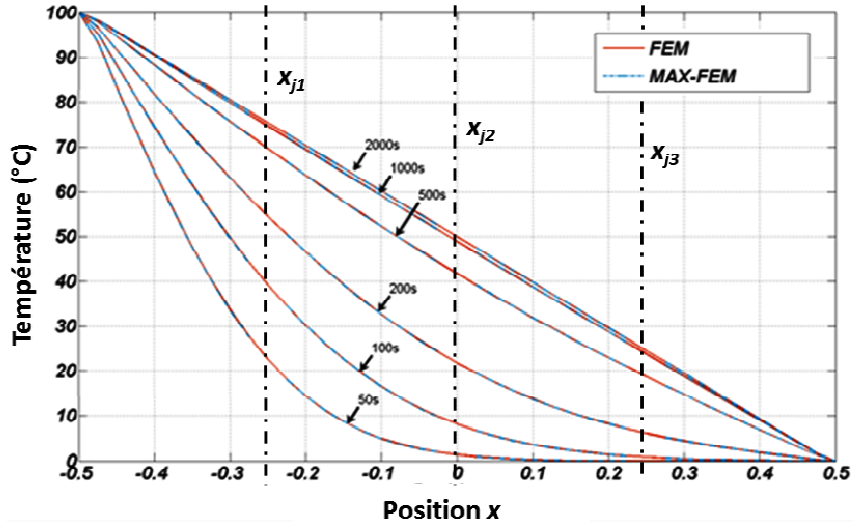


Figure.III.13.Distribution de la température dans l'assemblage stratifié.

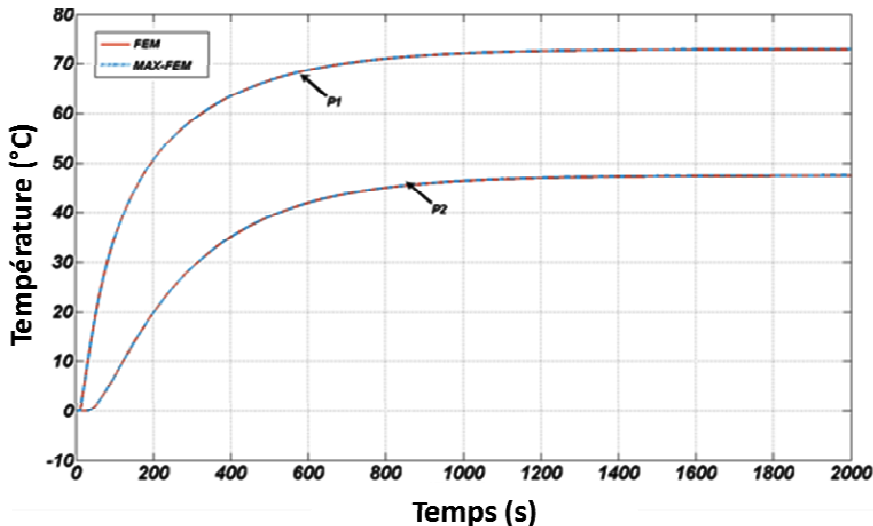


Figure.III.14.Evolution de la température dans les nœuds du premier élément enrichi.

Les performances que montre la méthode en termes de précision et de temps de calcul incitent à poursuivre les développements et les généraliser à des configurations plus complexes, notamment les outillages stratoconçus. Cependant, d'autres paramètres restent à étudier afin d'identifier les limitations de la méthode et les remèdes possibles.

Dans la suite des applications, l'effet de la position de la couche mince est ainsi étudié. L'objectif de cette analyse est de tester l'efficacité de la méthode quand le joint est localisé près des bords, notamment le cas des revêtements. De plus, l'influence du ratio des conductivités thermiques «substrat/couche mince» doit être étudiée et mise en évidence.



(iii) *Transfert thermique dans une barre revêtue*

L'une des limitations de la méthode MAE est son invalidité près des bords. En effet, dans ces zones, les développements extérieur et intérieur se retrouvent obligés de satisfaire, simultanément, les conditions aux limites et les règles de raccordement. Cette perturbation induit certainement une erreur de l'approximation obtenue [1-2, 4,6].

L'un des cas où ces problèmes de bords peuvent se manifester est le cas des revêtements. En effet, l'approche MAE sur une structure revêtue se retrouve confrontée à un problème de raccordement qui ne peut s'effectuer que sur un domaine semi-infini. De plus, la surface revêtue est soumise à des conditions aux limites que les développements tant intérieurs qu'extérieur doivent satisfaire.

Afin de résoudre ce problème, des travaux ont émergé où les auteurs introduisent des termes supplémentaires aux développements et qui permettent d'introduire les conditions aux limites dans les approximations asymptotiques près des bords, voir [1-2,4-6]. Cependant, introduire ces approches dans notre approche MAX-FEM nous fait perdre la linéarité de la relation liant le saut de température aux dérivées du champ continu. Ainsi, c'est l'ensemble de la démarche, y compris la matrice de correction, clé de ces travaux, qu'il convient de revoir.

Toutefois, une alternative se basant sur la répartition de l'enrichissement peut être proposée. La nouvelle répartition s'inspire de l'idée que l'élément MAX-FEM est un élément précontraint. Ainsi, cet élément est contraint à respecter les conditions aux limites sur son nœud extérieur alors que son nœud intérieur doit permettre la reproduction du saut de température. Par conséquent, seul le paramètre  $b_2$  reste actif au niveau de la formulation MAX-FEM.

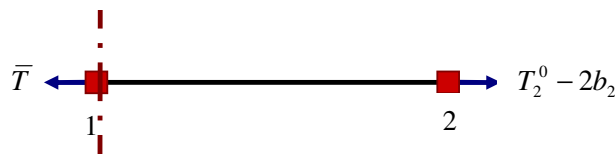


Figure.III.15. Élément de bord enrichi.

Afin de valider cette stratégie, l'étude suivante porte sur une barre revêtue (Figure III.17) soumise à des températures imposées à ses deux extrémités. Les propriétés matériaux et les caractéristiques géométriques de cette structure sont données par le tableau (III.6).



Figure.III.16.Barre revêtue sous chargement thermique.

Tableau.III.6. Caractéristiques géométrique et données matériau de la structure revêtue.

	Substrat	Couche mince
<b>Conductivité</b>	$\lambda_1 = 26 W.m^{-1}.K^{-1}$	$\lambda_2 = 0.02 W.m^{-1}.K^{-1}$
<b>Diffusivité</b>	$a_1 = 7.7.10^{-6} m^2.s^{-1}$	$a_2 = 1.06.10^{-4} m^2.s^{-1}$
<b>Longueur</b>	$L = 100mm$	$e = 0.005mm$

De manière similaire aux applications précédentes, les résultats retenus portent sur la distribution et l'évolution de la température dans la structure en utilisant les deux méthodes FEM et MAX-FEM (Figures III.18 et III.19).

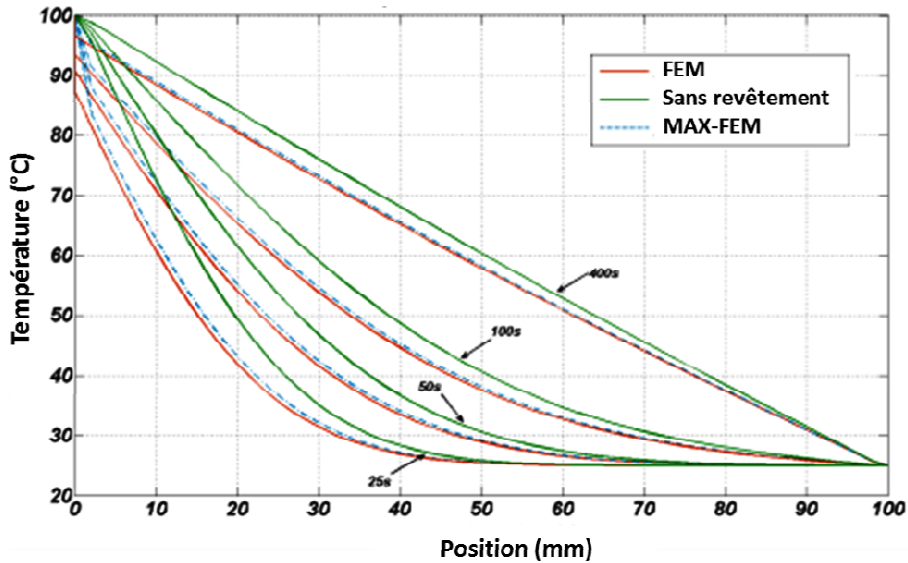


Figure.III.17.Distribution de la température dans la structure revêtue.

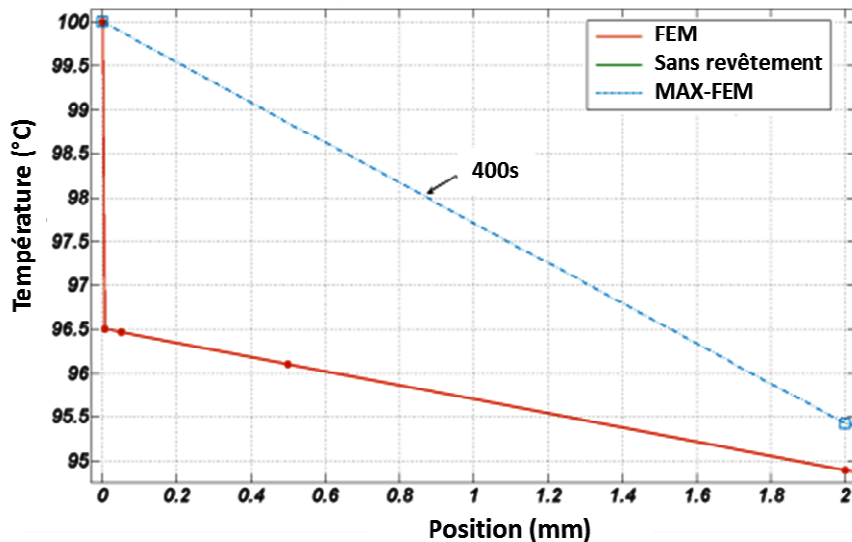


Figure.III.18.Zoom sur le bord revêtu de la structure.

Pour ce type d'application, non seulement l'influence du revêtement ne peut être négligée, mais décrire le comportement de la structure par la FEM en tenant en compte de la présence du revêtement est très coûteux là aussi en termes de temps de calcul. En effet, pour simuler 400s de chargement, 31mn de calcul sont nécessaires pour seulement 24

nœuds. Cependant, en utilisant la méthode MAX-FEM, ces mêmes résultats sont obtenus en moins d'une minute avec une précision très satisfaisante.

Toutefois, contrairement aux applications précédentes, l'écart entre les deux solutions FEM et MAX-FEM est plus important. En effet, celui-ci est dû principalement à la sensibilité à la taille du maillage  $h$ . Ainsi, plus  $h$  est petit, plus la précision augmente et la solution MAX-FEM reproduit exactement la FEM dès que  $h = e$ , voir Figure (III.20).

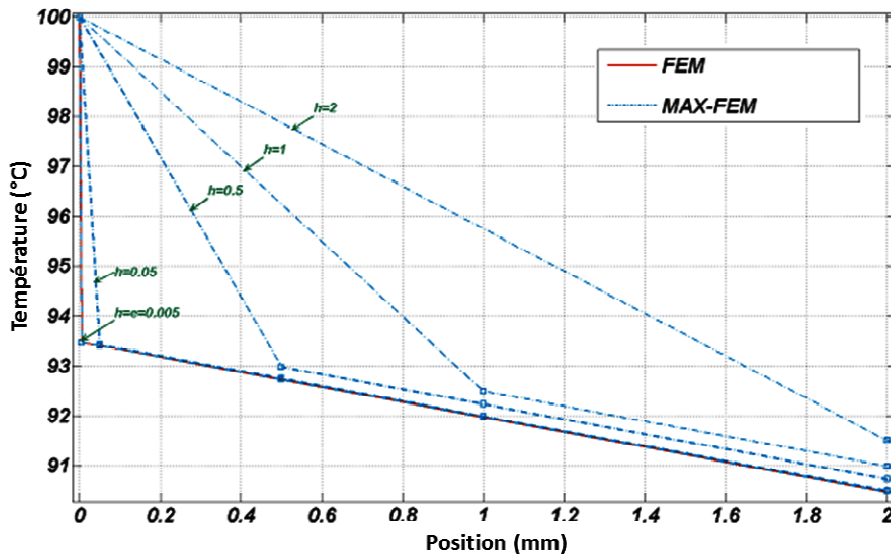


Figure.III.19.Sensibilité de la méthode MAX-FEM à la taille du maillage.

Pour cette application, la méthode MAX-FEM montre une sensibilité à la taille de l'élément enrichi. Ce résultat est principalement dû à l'approximation considérée dans l'équation (III.43):

$$\varepsilon(T_2^1 - T_1^1) = \varepsilon(1-h) \llbracket T^1 \rrbracket$$

Théoriquement, cette approximation obtenue pour un assemblage perd sa validité pour un cas de revêtement où les conditions aux limites interviennent sur le nœud extérieur de l'élément enrichi. Cependant, la précision des résultats peut être considérée satisfaisante car elle provient essentiellement de la forte contribution du saut  $\llbracket T^1 \rrbracket$  dans la valeur du terme  $\varepsilon(T_2^1 - T_1^1)$  ( $\varepsilon(T_2^1 - T_1^1) \approx \llbracket T^1 \rrbracket$ ). Ainsi, si le saut  $\llbracket T^1 \rrbracket$  est bien approximé, ce qui est le cas ici, l'erreur commise par cette approximation reste acceptable. Par conséquent, cette approximation est conservée pour ces premiers développements en gardant la motivation de rechercher une approximation plus appropriée pour les développements futurs.

**(iv) Influence du ratio des conductivités sur le transfert thermique dans un tube assemblé**

Les applications précédentes ont permis de valider l'approche MAX-FEM sur des structures unidimensionnelles assemblées ou revêtues. Dans cette section, le cas d'un ratio de

conductivités thermique important sur un tube axisymétrique (Figure III.21) est considéré. Cependant, dans un premier temps, la validité du modèle axisymétrique est testée avec un rapport de conductivité a priori non perturbant, voir tableau.III.7.

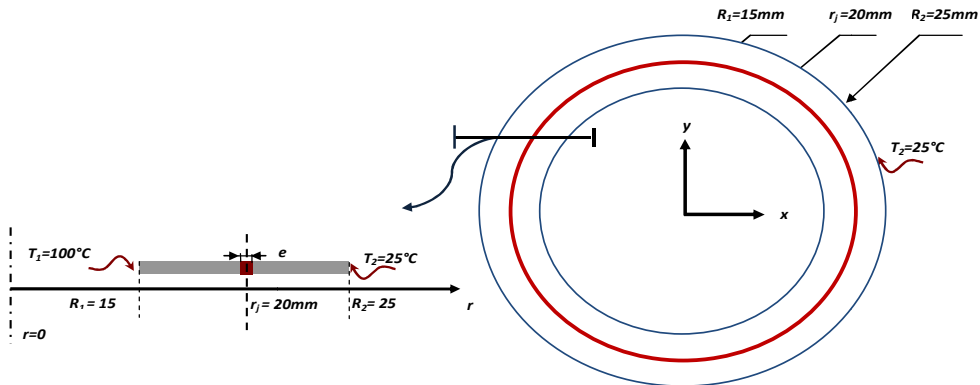


Figure.III.20. Tube assemblé sous chargement thermique.

Tableau.III.7. Caractéristiques géométriques et données matériaux du tube.

	substrat	Couche mince
<b>Conductivité</b>	$\lambda_1 = 370 W.m^{-1}.K^{-1}$	$\lambda_2 = 15 W.m^{-1}.K^{-1}$
<b>Diffusivité</b>	$a_1 = 109.10^{-6} m^2.s^{-1}$	$a_2 = 4.4.10^{-6} m^2.s^{-1}$
<b>Longueur</b>	$L = 10mm$	$e = 0.01mm$

Ici encore les deux solutions FEM et MAX-FEM sont calculées et comparées pour le tube considéré, voir Figures III.22.

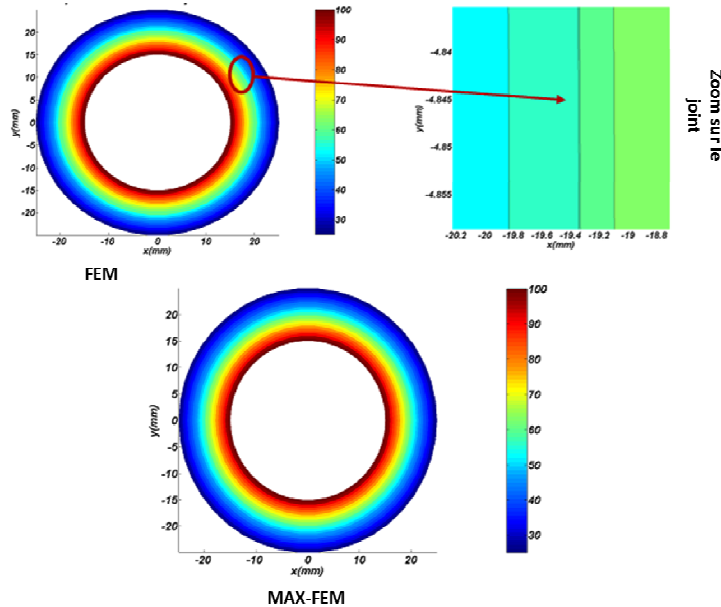


Figure.III.21.Distribution de la température dans le tube par les méthodes FEM et MAX-FEM.

Afin de comparer les deux solutions, la distribution radiale de la température à différents instants est reportée sur la Figure (III.23).

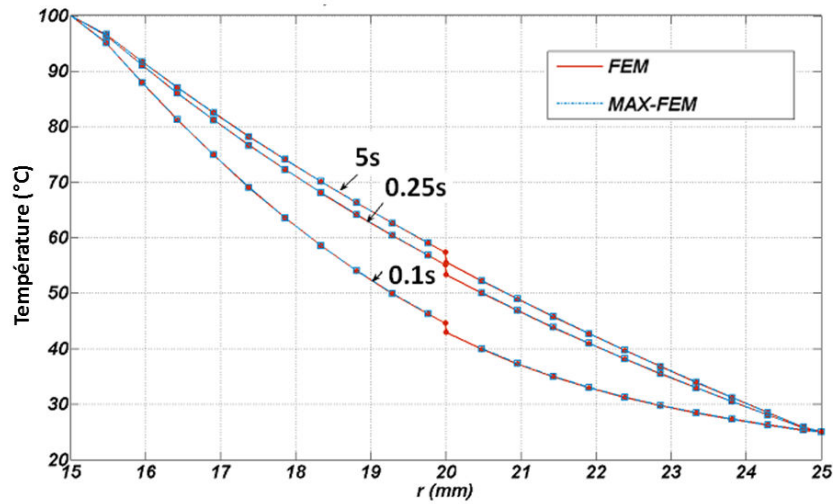


Figure.III.22.Distribution radiale de température.

Le modèle hybride MAX-FEM tient ici aussi ses promesses. Cependant, ce qui retient l'intérêt c'est l'influence du ratio des conductivités thermiques sur la précision des résultats. En effet, un grand ratio perturbe les résultats MAE et ainsi l'approximation du saut des températures n'est plus valable. Cette limitation a été illustrée dans les travaux de Nguyen [1] sans y apporter de réponses. De son côté, Schmidt [6] a traité une problématique similaire sur un problème mécanique où il considère le ratio des modules de Young  $E_1 / E_2$  devient une deuxième caractéristique de la perturbation. Ainsi, les nouveaux développements asymptotiques MAE sont construits autour des deux paramètres de perturbation  $e / L$  et  $E_1 / E_2$ . Par conséquent, il est important de vérifier si cette limitation est transmise à l'approche MAX-FEM et si négliger ce ratio fausse les résultats attendus par l'approche. Pour cela l'application précédente est reprise avec un joint isolant de conductivité  $\lambda_2 = 0.37 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Ainsi le rapport des conductivité devient  $\lambda_1 / \lambda_2 = 1000$ . Les résultats obtenus pour ce cas sont présentés par la Figure III.24.

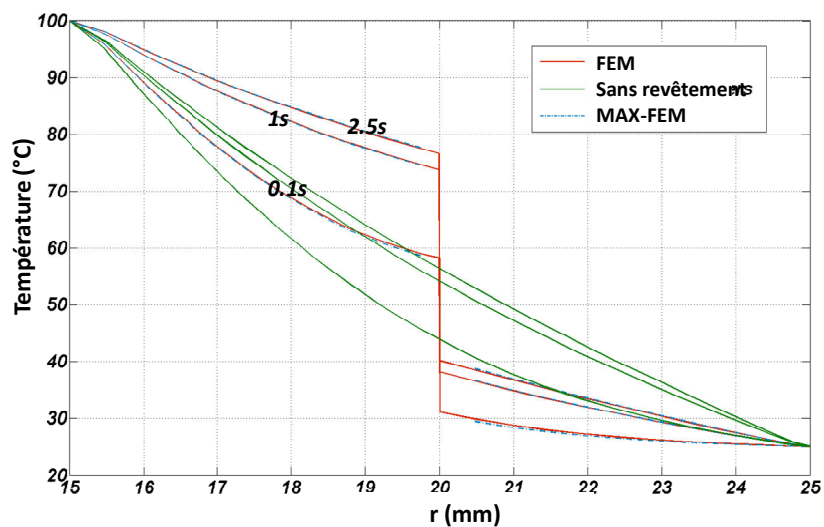


Figure.III.23.Saut de température induit par la couche isolante.

Les écarts considérés par les deux méthodes FEM et MAX-FEM sont calculés à partir des résultats des simulations. Cependant, l'écart considéré par la MAE est donné par le développement extérieur (III.1). Cet écart s'exprime par:

$$T_2 - T_1 = T_2^0 - T_1^0 + \varepsilon(T_2^1 - T_1^1)$$

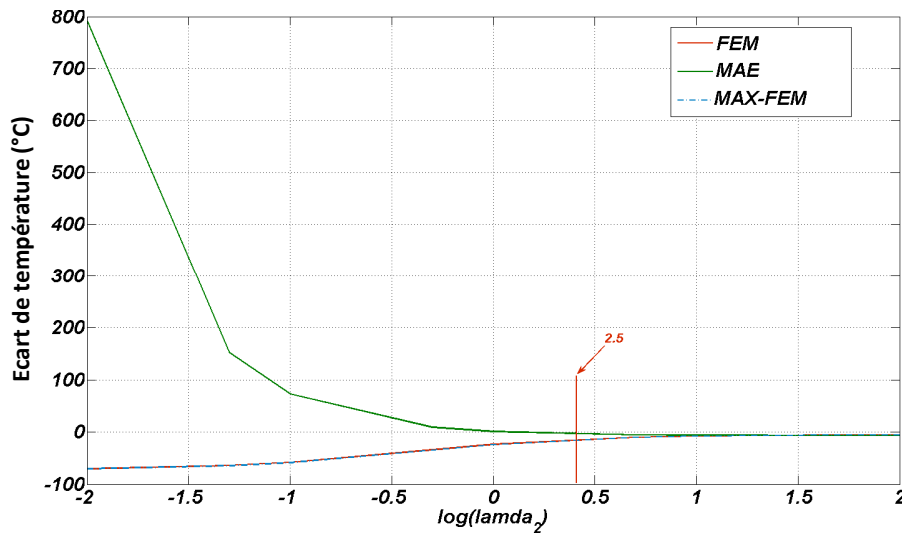


Figure.III.24.Saut de température induit par la couche isolante.

La figure III.25 montre que pour  $\lambda_2 \geq 2.5 \text{ W / K.m}$  qui correspond à un rapport  $\lambda_1 / \lambda_2 \leq 148$ , les trois méthodes convergent vers la même valeur de l'écart. Cependant dès que  $\lambda_1 / \lambda_2 \geq 148$ , la méthode MAE diverge alors que les résultats MAX-FEM continuent de coïncider avec ceux donnés par la FEM.

Si les résultats MAE étaient prévisibles, ceux obtenus par la MAX-FEM semblent surprenants bien que satisfaisants. En effet, puisque la MAE constitue la base de l'enrichissement, il conviendrait de s'attendre à ce que les limitations de la MAE se répercutent sur la validité de l'approche MAX-FEM. Il n'en est rien et ce résultat s'affranchit d'un paramètre de perturbation supplémentaire.

L'approche analytique MAE repose sur le postulat que la solution homogène  $T^0$  n'est pas impactée par le ratio des caractéristiques thermomécaniques mais juste par l'hétérogénéité géométrique. Tandis que, le modèle MAX-FEM s'affranchit de ce postulat en ne cherchant que l'enrichissement à travers la matrice de correction indépendante du terme  $T^0$ . En effet, contrairement à l'approche MAE, où le saut de température est calculé une fois la solution homogène identifiée, l'algorithme MAX-FEM calcule la solution homogène et le saut de température simultanément. Ce calcul est issu de la minimisation de l'énergie totale tout en respectant la contrainte de saut imposé à l'élément satisfaisant par le gradient de la solution homogène. Ainsi, même cette solution homogène est corrigée et cette correction permet

d'assurer l'équilibre tout en prenant en compte les deux perturbations  $e/L$  et  $\lambda_1/\lambda_2$ . En outre, ce résultat reste extrapolable au cas mécanique pour de forts ratios de rigidité.

**(v) Efficacité d'un revêtement**

En dernière application de ce chapitre, une étude de l'efficacité d'un revêtement appliqué sur un tube axisymétrique est proposée. Cette étude consiste à évaluer l'échange thermique du tube en variant la résistance thermique du revêtement  $R_{th} = \ln(r_{ext}/r_{int})/2\pi\lambda$ . Ainsi, nous considérons un tube revêtu soumis à un chargement convectif comme présenté dans la Figure III.26. Les propriétés matériaux du substrat sont les mêmes que l'application précédente et sont données par le tableau III.5.

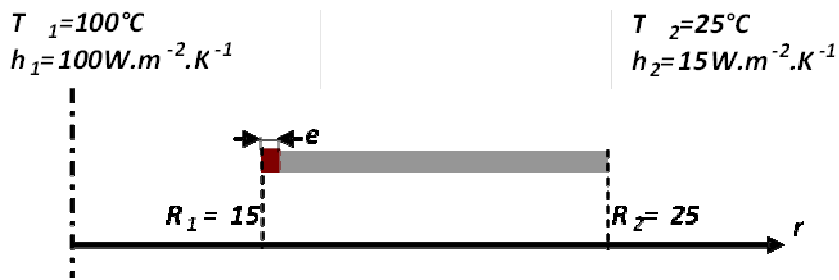


Figure.III.25.Tube revêtu sous chargement convectif.

Avant de varier la résistance thermique du revêtement, les résultats obtenus pour une résistance  $R_{th} = 0.428 K.W^{-1}$  sont représentés dans la Figures III.27.

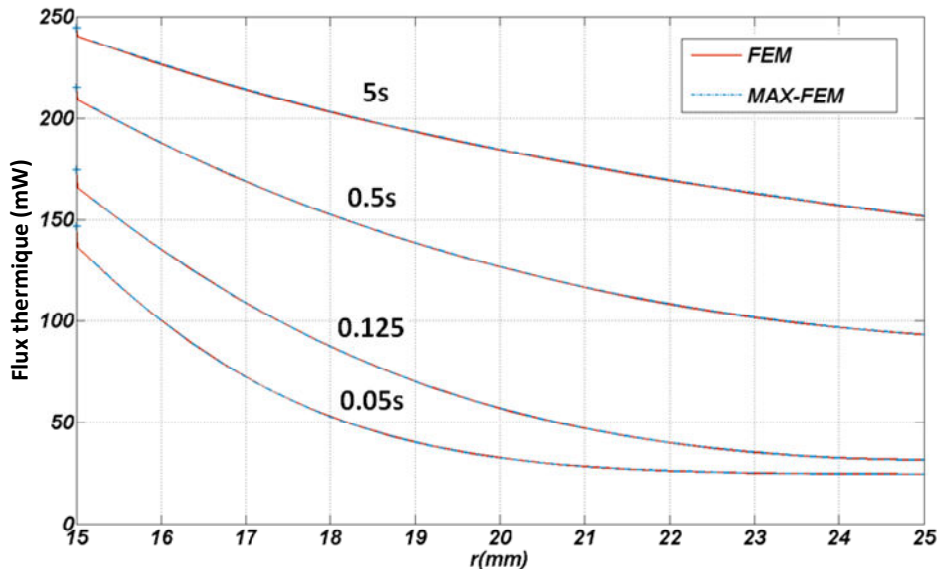


Figure.III.1.Flux de chaleur dans le tube.

Si ce premier calcul confirme encore la précision de l'approche MAX-FEM, l'intérêt principal est, de montrer la difficulté d'obtention des résultats stables par la FEM et la réaction de l'élément MAX-FEM au chargement convectif et au gradient de température important sur le bord. En effet, pour la FEM, dans le cas de ce chargement convectif, l'élément présent

dans le revêtement n'arrive pas à détecter le gradient thermique aux bords du tube. Ainsi, il est nécessaire de considérer un incrément de temps très petit permettant à l'élément de capter la variation de la température et ainsi obtenir des résultats stables. Pour cela, l'incrément de temps retenu est  $10^{-8}s$ , voir Tableau III.7. Par ailleurs, la MAX-FEM ne représente pas de sensibilité particulière au chargement convectif. En effet, des résultats stables sont obtenus pour un temps de calcul minimisé et un nombre réduit de DDL.

Tableau.III.6. Caractéristiques géométrique et données matériau du tube.

	Taille minimale	Nombre des DDL	Incrément du temps	Temps de calcul
<b>FEM</b>	0.01 mm	24	$10^{-8}s$	72 mn
<b>MAX-FEM</b>	1 mm	10	0.005s	4mn

Afin d'effectuer l'étude paramétrique, les valeurs de la résistance thermique du revêtement doivent être variées et l'échange thermique du tube doit être évalué pour chaque valeur. Ainsi, il faudra lancer plusieurs calculs demandant, dans le cas de la FEM, une optimisation de l'incrément du temps pour chaque valeur de la résistance thermique choisie. Cependant, en sachant la difficulté de cette étude illustrée dans la première application, la FEM arrive à ces limites et la MAX-FEM se présente comme un outil efficace la supplantant. Cette difficulté de la FEM n'est pas la seule. En effet, pour varier la résistance thermique, il faudra varier l'épaisseur du revêtement et/ou sa conductivité thermique. Ainsi, il sera nécessaire de définir un nouveau maillage pour chaque simulation. Tandis que, dans le cas de la MAX-FEM seules les données géométrique et matériaux du revêtement sont modifiées alors que le maillage est identique pour toutes les simulations, voir Figure III.28.

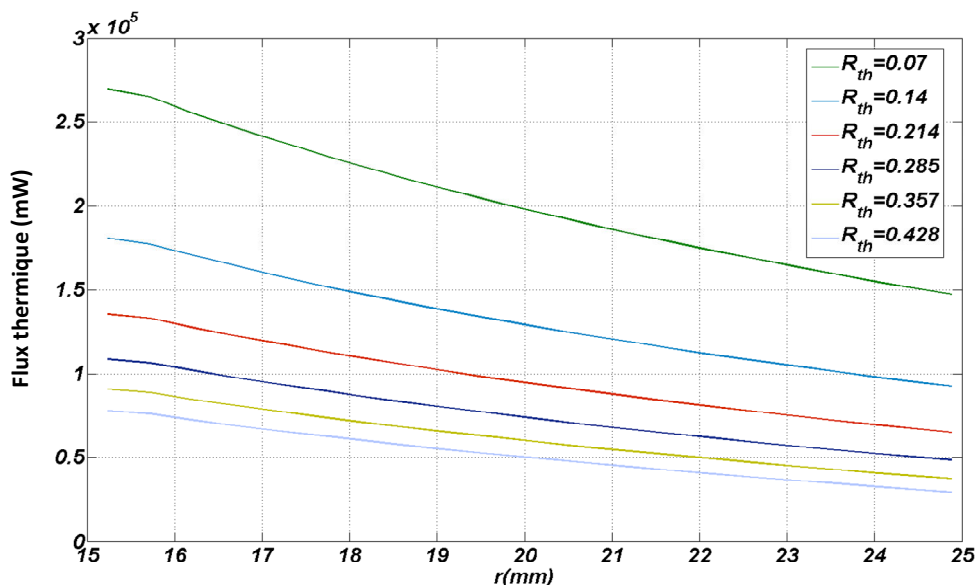


Figure.III.1. Influence de la résistance thermique sur l'échange thermique du tube.



Qualitativement, plus la résistance thermique du revêtement est importante, plus l'échange thermique du tube est important. Cependant, l'objectif de cette étude, difficilement atteignable par la FEM, est de montrer que la MAX-FEM peut être un outil efficace pour la conception et dimensionnement des structures contenant des couches minces. Cet apport se résume dans un code de calcul simple, une réduction du temps de calcul et une bonne précision des résultats.

### **III.3. Conclusion**

Dans ce chapitre, l'approche MAX-FEM a été mise en œuvre sur des applications unidimensionnelles et axisymétriques chargées mécaniquement ou thermiquement. L'efficacité et la pertinence de la méthode a été montrée par une grande liberté de maillage et un temps de calcul optimisé tout en assurant convergence et précision des résultats.

Les résultats ne sont pas le seul point fort de l'approche, mais sa simplicité d'application et d'implémentation numérique constitue son principal avantage. En effet, pour les applications industrielles visées, la motivation est l'obtention d'un outil de dimensionnement fiable et simple à mettre en œuvre. Le développement de l'approche hybride MAX-FEM constitue une réelle avancée vers cet objectif. En termes de verrous scientifiques, cette méthode unie les points forts de l'approche asymptotique et d'enrichissement. Ce couplage, basé sur les développements asymptotiques raccordés et la PUM, permet d'aboutir à une correction de la FEM. En effet, tous les développements amènent et se résument en une matrice de correction facile à identifier et transmettant toutes les informations géométriques et matériaux de la couche mince. De plus, malgré qu'elle se base sur l'approche analytique MAE, l'approche MAX-FEM évite les principales limitations grâce à la stratégie d'enrichissement. Problèmes des bords ou forte hétérogénéités matériau (conductivité, modules de Young) sont de ce fait gommés.

Numériquement, la précision de la méthode est évidemment liée à la taille de l'élément enrichi. Cependant, ce paramètre n'a aucune incidence sur la convergence de la méthode. Ainsi, un choix judicieux de ce dernier permet de trouver la conjugaison optimale entre précision et temps de calcul.

Les applications considérées pour ce troisième chapitre représentent des cas d'études simples dont l'objectif est l'évaluation de l'efficacité de l'approche. Dans le quatrième chapitre, l'approche est étendue à l'étude « micro-macro » de structures bidimensionnelles sous chargement thermomécanique. Cette extension rapprochera de l'application industrielle contexte à ces travaux.

### ***Références III***

- [1] Nguyen Dang Huy. Contribution à la modélisation et à la caractérisation du comportement des assemblages brasés. Couplage des méthodes DAR et X-FEM, 2009.
- [2] P. Schmidt. Modeling of adhesively bonded joints by an asymptotic method, *International Journal of Engineering Science*, 46 (2008) 1291–1324.
- [3] E. Lorentz. A mixed interface finite element for cohesive zone models, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 (2008) 302-317.
- [4] R. Abdelmoulab, D. Leguillon. Mode III near and far fields for a crack lying in or along a joint, *International Journal of Solids and Structures*, 37 (2000) 2651-2672.
- [5] F. Bilteryst, J.-J. Marigo. An energy based analysis of the pull-out problem, *European Journal of Mechanics, A/Solids* 22 (2003) 55-69.
- [6] P. Schmidt, U. Edlund. Analysis of adhesively bonded joints: a finite element method and a material model with damage, *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 66 (2006) 1271–1308.
- [7] N. Moes, J. Dolbow, T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer.Meth.Engrg*. 46 (1999) 131–150.
- [8] J.C. Gàlvez, J. Cervenka, D.A. Cendon, V. Saouma. A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete, *Cement and Concrete Research*, 32 (2002) 1567-1585.
- [9] D.H. Nguyen, M. Lazard, F. Bilteryst, P. Lamesle, G. Dour. Modelling the brazed assembly by the coupling of the eXtended Finite Element and the matched asymptotic development methods, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2 (2008), 321-331.

## **Chapitre IV**

### **Extension du modèle pour une analyse macro-micro, et couplage thermomécanique**

#### **Application aux assemblages brasés bidimensionnels**

Ce chapitre est une extension de l'approche MAX-FEM pour la modélisation multi-échelles des assemblages bidimensionnels sous chargement thermomécanique. Dans ce cadre, une première application mécanique multi-échelles est présentée où les deux solutions macro et micro sont données. Cette application est le résultat des développements similaires à ceux du troisième chapitre. En effet, le principe et la formulation éléments finis de l'approche MAX-FEM restent identiques ainsi que la construction de l'enrichissement. Ensuite, la mise en œuvre de méthode pour la modélisation du couplage thermomécanique est visée en tenant en compte la différence des coefficients d'expansion thermique des deux matériaux. Cette application repose sur l'association des développements mécaniques et thermiques du troisième chapitre.

### IV.1. Partie I : Analyse mécanique « macro-micro »

#### IV.1.1. Mise en œuvre du modèle éléments finis

Tout d'abord, la figure (VI.1) rappelle le principe de l'approche MAX-FEM. Ce dernier consiste à définir en un premier lieu un domaine extérieur où l'enrichissement remplace la présence physique de la couche mince. La solution dans ce domaine est donnée par la formulation MAX-FEM qui contient les informations locales. Cependant, au lieu de se restreindre qu'à la solution extérieure, une analyse locale est développée pour déterminer la solution locale « micro » au voisinage de la couche mince.

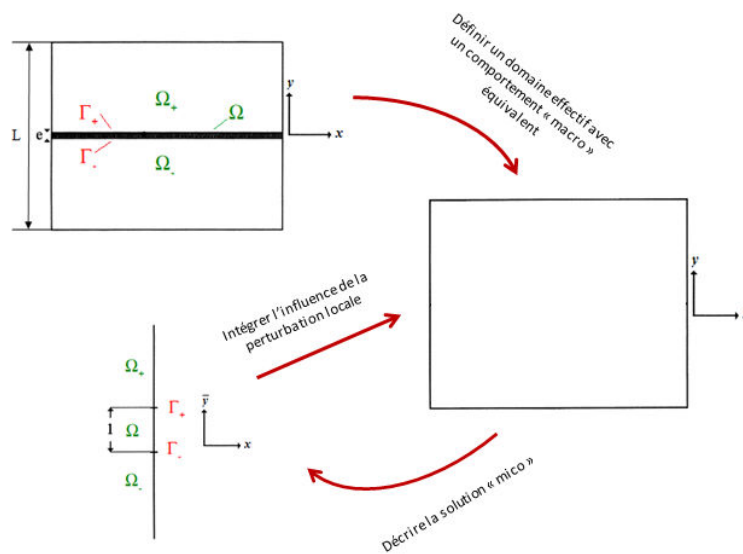


Figure.IV.1.Principe de l'approche MAX-FEM.

Ainsi, de manière similaire aux développements du troisième chapitre, la première étape consiste à remplacer l'assemblage par une structure monobloc qui reproduit la même solution extérieure nodale que l'assemblage, voir Figure (IV.2).

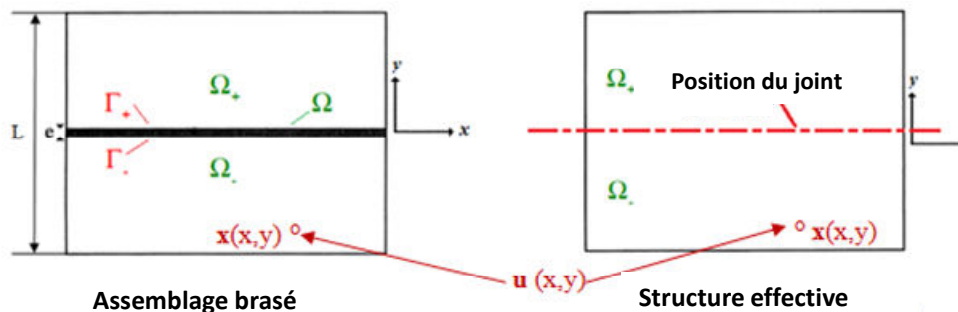


Figure.IV.2. La structure équivalente proposée.

La construction de ce domaine et les développements qui suivent reposent sur les hypothèses suivantes:

- Les substrats et la couche mince sont considérés élastiques et la transmission des efforts et des déplacements est supposée parfaite.
- L'épaisseur de la couche mince est négligeable devant la longueur de l'assemblage. Ainsi, le paramètre  $\varepsilon=e/L$  est considéré comme perturbation.
- Le paramètre  $\varepsilon$  est la seule perturbation considérée. L'assemblage étudié présente un rapport des modules de Young (substrat/joint) non perturbant.
- Pour des raisons simplificatrices, l'assemblage est considéré symétrique. Ainsi les domaines  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  sont supposés avoir le même matériau de base:  $\mu_+=\mu_-$  et  $\lambda_+=\lambda_-$ .

Une fois ces hypothèses considérées, les étapes de discrétisation éléments finis, de construction de l'enrichissement et de définition de la matrice de correction sont abordées.

#### IV.1.1.1. Construction de la formulation éléments finis MAX-FEM

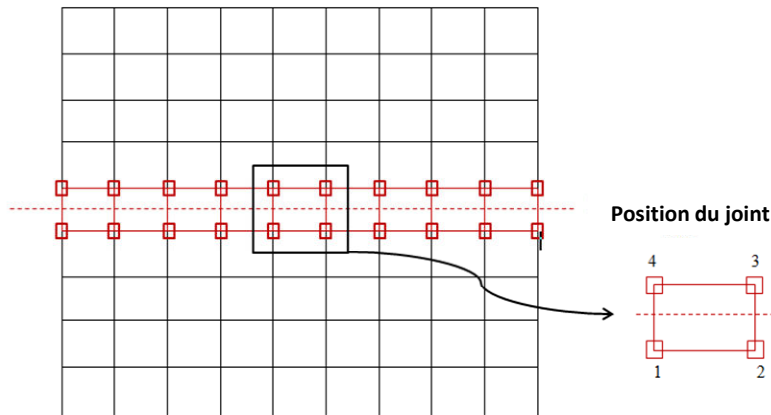


Figure.IV.3. Discrétisation éléments finis utilisant des éléments quadratiques structurés.

Comme expliqué précédemment, l'objectif est de reproduire la même solution extérieure nodale que celle d'un assemblage sur une structure monobloc. Ainsi, le voisinage du joint est substitué par un enrichissement des éléments contenant sa position (Figure IV.3). Cependant, la seule condition imposée à ces éléments enrichis est la restitution de la solution globale aux nœuds.

Pour ce faire, une formulation éléments finis basée sur la MAX-FEM (IV.1) est considérée pour ces éléments. Cette dernière consiste à définir un terme d'enrichissement continu où les paramètres  $\mathbf{b}_k$  permettent de corriger le champ homogène  $\mathbf{u}^0$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i^N N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i^0 + \sum_k^{N_{enr}} N_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}_k) \mathbf{b}_k \quad (IV.1)$$

Ces paramètres sont ensuite identifiés par confrontation de la solution donnée par la formulation (IV.1) et celle donnée par le développement extérieur (VI.2) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.2})$$

Cette confrontation consiste à exprimer les déplacements nodaux en utilisant chacune des deux expressions, soit :

- A partir de l'expression (IV.1):

$$\begin{cases} u_{x1} = u_{x1}^0 - b_{x1} \\ u_{x2} = u_{x2}^0 - b_{x2} \\ u_{x3} = u_{x3}^0 + b_{x3} \\ u_{x4} = u_{x4}^0 + b_{x4} \end{cases} \quad \begin{cases} u_{y1} = u_{y1}^0 - b_{y1} \\ u_{y2} = u_{y2}^0 - b_{y2} \\ u_{y3} = u_{y3}^0 + b_{y3} \\ u_{y4} = u_{y4}^0 + b_{y4} \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

- A partir de l'expression (IV.2):

$$\begin{cases} u_{x1} = u_{x1}^0 + \varepsilon u_{x1}^1 \\ u_{x2} = u_{x2}^0 + \varepsilon u_{x2}^1 \\ u_{x3} = u_{x3}^0 + \varepsilon u_{x3}^1 \\ u_{x4} = u_{x4}^0 + \varepsilon u_{x4}^1 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{y1} = u_{y1}^0 + \varepsilon u_{y1}^1 \\ u_{y2} = u_{y2}^0 + \varepsilon u_{y2}^1 \\ u_{y3} = u_{y3}^0 + \varepsilon u_{y3}^1 \\ u_{y4} = u_{y4}^0 + \varepsilon u_{y4}^1 \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

En calculant, à partir des deux équations (IV.3 et IV.4), le saut de déplacement entre deux nœuds partageant la même abscisse, la condition (VI.5) satisfaite par les paramètres  $\mathbf{b}_k$  est définie.

$$\begin{cases} b_{x4} + b_{x1} = \varepsilon(u_{x4}^1 - u_{x1}^1) \\ b_{x3} + b_{x2} = \varepsilon(u_{x3}^1 - u_{x2}^1) \\ b_{y4} + b_{y1} = \varepsilon(u_{y4}^1 - u_{y1}^1) \\ b_{y3} + b_{y2} = \varepsilon(u_{y3}^1 - u_{y2}^1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{b}_4 + \mathbf{b}_1 = \varepsilon(\mathbf{u}_4^1 - \mathbf{u}_1^1) \\ \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_2 = \varepsilon(\mathbf{u}_3^1 - \mathbf{u}_2^1) \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Ensuite, les termes  $\varepsilon(\mathbf{u}_4^1 - \mathbf{u}_1^1)$  et  $\varepsilon(\mathbf{u}_3^1 - \mathbf{u}_2^1)$  sont approximés par  $\varepsilon(1-h)\llbracket \mathbf{u}^1 \rrbracket(x^{4-1}, 0)$  et  $\varepsilon(1-h)\llbracket \mathbf{u}^1 \rrbracket(x^{3-2}, 0)$  respectivement.  $h = y_4 - y_1 = y_3 - y_2$  est la hauteur de l'élément contenant l'interface, tandis que  $\llbracket \mathbf{u}^1 \rrbracket(x^{4-1}, 0)$  et  $\llbracket \mathbf{u}^1 \rrbracket(x^{3-2}, 0)$  représentent les sauts de déplacement aux abscisses communes  $x^{4-1}$  entre les nœuds 1 and 4 et  $x^{3-2}$  pour les nœuds 2 et 3, respectivement. La condition (IV.5) devient alors :

$$\begin{cases} \mathbf{b}_4 + \mathbf{b}_1 = \varepsilon(1-h)\llbracket \mathbf{u}^1 \rrbracket(x_1^{4-1}, 0) \\ \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_2 = \varepsilon(1-h)\llbracket \mathbf{u}^1 \rrbracket(x_1^{3-2}, 0) \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

De manière similaire à l'application unidimensionnelle, les termes  $\varepsilon(1-h)\mathbf{u}^1(x^{4-1},0)$  et  $\varepsilon(1-h)\mathbf{u}^1(x^{3-2},0)$  sont partagés de part et d'autre du joint en introduisant les coefficients de corrélation  $q_i$  tenant compte de la position de la couche mince dans l'élément. Cela mène à :

$$\mathbf{b}_k = \begin{cases} q_1 \frac{\varepsilon}{2} (1-h) \mathbf{u}^1(x_1^{1-4}, 0) & \text{pour } k = 1, 4 \\ q_2 \frac{\varepsilon}{2} (1-h) \mathbf{u}^1(x_1^{2-3}, 0) & \text{pour } k = 2, 3 \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

Avec  $q_1 = \frac{|y_4|}{h}$ ,  $q_2 = \frac{|y_1|}{h}$  et  $q_1 + q_2 = 1$ .

A ce stade, pour finaliser la construction de l'enrichissement et ainsi la formulation MAX-FEM, il convient de déterminer une expression du saut des déplacements. Pour cela, un algorithme similaire à celui pour le cas unidimensionnel est utilisé.

#### **IV.1.1.2. Calcul du saut des déplacements**

L'objectif de cette section est le calcul du saut de déplacement  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  à travers l'interface. Afin de parvenir à cet objectif, un développement de Taylor est appliqué au développement extérieur de l'Equation (IV.2) autour de  $y=0$  :

$$\mathbf{u}^\pm(x, y) = \mathbf{u}^{0\pm}(x, 0) + y \frac{\partial \mathbf{u}^{0\pm}}{\partial y}(x, 0) + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{0\pm}}{\partial y^2}(x, 0) + \varepsilon \left[ \mathbf{u}^{\pm}(x, 0) + y \frac{\partial \mathbf{u}^{\pm}}{\partial y}(x, 0) + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{\pm}}{\partial y^2}(x, 0) \right] + \dots \quad (\text{IV.8})$$

Ensuite, ce développement est confronté au développement intérieur :

$$\mathbf{v}(x, \bar{y}) = \mathbf{v}^0(x, \bar{y}) + \varepsilon \mathbf{v}^1(x, \bar{y}) \quad (\text{IV.9})$$

L'égalité terme à terme des deux équations (IV.8) et (VI.9) quand  $\bar{y} \rightarrow \pm\infty$  introduit les règles de raccordement de l'Equation (IV.10) :

$$\begin{cases} \lim_{\bar{y} \rightarrow \pm\infty} (\mathbf{v}^{0\pm}(x, \bar{y}) - \mathbf{u}^{0\pm}(x, 0)) = \mathbf{0} \\ \lim_{\bar{y} \rightarrow \pm\infty} \left( \mathbf{v}^{\pm}(x, \bar{y}) - \bar{y} \frac{\partial \mathbf{u}^{0\pm}}{\partial y}(x, 0) - \mathbf{u}^{\pm}(x, 0) \right) = \mathbf{0} \\ \dots \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

Ainsi, les relations liant les différents termes des deux développements intérieur et extérieur sont définies. De plus, ces termes sont régis par des équations d'équilibre et de continuité

qui conduisent à des problèmes bien posés pour les différents ordres. Par exemple, le premier ordre du développement interieur est obtenu en résolvant l'équation ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{v}^0}{\partial \bar{y}^2} = \mathbf{0} \\ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} (\mathbf{v}^0(x, y) - \mathbf{u}^0(x, 0)) = 0 \end{cases} \quad (IV.11)$$

La solution de cette équation conduit à l'expression (IV.12) :

$$\mathbf{v}^0(x, \bar{y}) = \mathbf{u}^0(x, 0) \quad \forall \bar{y} \quad (IV.12)$$

Le deuxième terme  $\mathbf{v}^1$  est défini par la résolution d'une équation similaire à l'équation (IV.11).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{v}^1}{\partial \bar{y}^2} = \mathbf{0} \\ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left( \mathbf{v}^1(x, y) \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial y}(x, 0) - \mathbf{u}^1(x, 0) \right) = 0 \end{cases} \quad (IV.13)$$

Cette équation mène à l'expression ci-dessous :

$$\mathbf{v}^{1\pm}(x, \bar{y}) = \bar{y} \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial y}(x, 0) + \mathbf{u}^{1\pm}(x, 0) \quad (IV.14)$$

En utilisant la continuité des contraintes et déplacements aux limites du joint  $\bar{y} = \pm 1/2$ , l'expression du déplacement est calculée à l'intérieur de la couche mince délimitée par  $\bar{y} = \pm 1/2$ . Ce déplacement noté  $\mathbf{v}^{1(\Omega)}$  est défini dans le cas de contraintes planes par l'expression (II.11), voir [2].

$$\begin{cases} v_x^{1(\Omega)\pm}(x, \bar{y}) = \bar{y} \left[ \frac{E_1(1+\nu_1)}{E_1(1+\nu_1)} u_{x,y}^0(x, 0) + \left( \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} - 1 \right) u_{y,x}^0(x, 0) \right] + \\ \quad \pm \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \right) [u_{x,y}^0(x, 0) + u_{y,x}^0(x, 0)] + u_x^{1\pm}(x, 0) \\ v_y^{1(\Omega)\pm}(x, \bar{y}) = \bar{y} \left[ \left( \frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2} - 1 \right) u_{x,x}^0(x, 0) + \frac{E_1}{1-\nu_1^2} u_{y,y}^0(x, 0) \right] + \\ \quad \pm \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2} \right) u_{x,x}^0(x, 0) + \left( 1 - \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \right) u_{y,y}^0(x, 0) \right] + u_y^{1\pm}(x, 0) \end{cases} \quad (IV.15)$$



En considérant la continuité du champ  $\mathbf{v}^{1(\Omega)}$  en  $\bar{y}=0$ , l'expression du saut des déplacements est donnée par:

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \varepsilon \llbracket \mathbf{u}^1 \rrbracket = \varepsilon (\mathbf{u}^{1+}(x,0) - \mathbf{u}^{1-}(x,0)) = \begin{cases} \varepsilon \left( \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} - 1 \right) [u_{x,y}^0(x,0) + u_{y,x}^0(x,0)] \\ \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2} \\ \nu_2 - \frac{E_1\nu_1}{E_2} \\ \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \end{pmatrix} u_{x,x}^0(x,0) + \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \\ \frac{1-\nu_1^2}{E_2} \\ \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \end{pmatrix} u_{y,y}^0(x,0) \end{cases} \quad (IV.16)$$

Il est bien clair que cette expression révèle, encore, une relation linéaire liant le saut de déplacement aux dérivées du champ continu  $\mathbf{u}^0$ . En exploitant cette relation, l'expression du saut peut être écrite sous sa forme matricielle.

$$\llbracket \mathbf{u}^1 \rrbracket = \begin{Bmatrix} \llbracket u_x^1 \rrbracket \\ \llbracket u_y^1 \rrbracket \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ B & S & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x,x}^0(x,0) \\ u_{y,y}^0(x,0) \\ u_{x,y}^0(x,0) + u_{y,x}^0(x,0) \end{Bmatrix} \quad (IV.17)$$

Ainsi, la matrice  $\mathbf{c}$  est définie telle que  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ B & S & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A = \left( \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} - 1 \right)$ ,  $B = \begin{pmatrix} \frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2} \\ \nu_2 - \frac{E_1\nu_1}{E_2} \\ \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \end{pmatrix}$

$$\text{et } S = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \\ \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \end{pmatrix}.$$

Comme pour les développements unidimensionnels, cette relation linéaire permet de relier les deux parties de la formulation MAX-FEM (Equation (IV.1)) et ainsi accéder aux deux termes du développement extérieur ( $\mathbf{u}^0$  et  $\mathbf{u}^1$ ) en un seul calcul éléments finis.

#### IV.1.1.3. Calcul de la matrice de rigidité

En intégrant les résultats de l'équation (IV.17) dans l'expression des paramètres d'enrichissement (Equation (IV.7)), l'expression matricielle des paramètres  $\mathbf{b}_k$  est définie par:

$$\mathbf{b} = \begin{cases} q_1 \varepsilon (1-h) \begin{Bmatrix} \llbracket u_x^1(x^{1-4}, 0) \rrbracket \\ \llbracket u_y^1(x^{1-4}, 0) \rrbracket \end{Bmatrix} = q_1 \varepsilon (1-h) \mathbf{c} \mathbf{B}(x^{1-4}, 0) \mathbf{U}^0 \text{ pour } k = 1, 4 \\ q_2 \varepsilon (1-h) \begin{Bmatrix} \llbracket u_x^1(x^{2-3}, 0) \rrbracket \\ \llbracket u_y^1(x^{2-3}, 0) \rrbracket \end{Bmatrix} = q_2 \varepsilon (1-h) \mathbf{c} \mathbf{B}(x^{2-3}, 0) \mathbf{U}^0 \text{ pour } k = 2, 3 \end{cases} \quad (IV.18)$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice de déformation contenant les dérivées des fonctions de forme  $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \langle N_1(\mathbf{x}) \ N_2(\mathbf{x}) \ N_3(\mathbf{x}) \ N_4(\mathbf{x}) \rangle$  :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x}(\mathbf{x}) & 0 & N_{2,x}(\mathbf{x}) & 0 & N_{3,x}(\mathbf{x}) & 0 & N_{4,x}(\mathbf{x}) \\ N_{1,y}(\mathbf{x}) & 0 & N_{2,y}(\mathbf{x}) & 0 & N_{3,y}(\mathbf{x}) & 0 & N_{4,y}(\mathbf{x}) & 0 \\ N_{1,y}(\mathbf{x}) & N_{1,x}(\mathbf{x}) & N_{2,y}(\mathbf{x}) & N_{2,x}(\mathbf{x}) & N_{3,y}(\mathbf{x}) & N_{3,x}(\mathbf{x}) & N_{4,y}(\mathbf{x}) & N_{4,x}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Ainsi, il existe bien une matrice  $\mathbf{C}$  tel que  $\mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{U}^0$ . En effet, cette matrice peut être construite en détaillant l'équation (IV.18). En injectant ce résultat dans la formulation (IV.1), il est possible de définir, la matrice de correction  $\mathbf{C}_M$  liant les déplacements nodaux du champ global  $\mathbf{U}$  à ceux du champ non perturbé  $\mathbf{U}^0$ . En effet,

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \mathbf{H}\mathbf{b} = \mathbf{U}^0 + \mathbf{H}\mathbf{C}\mathbf{U}^0 = (\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{C})\mathbf{U}^0 \quad (\text{IV.19})$$

$\mathbf{C}_M$  est alors définie par :

$$\mathbf{C}_M = (\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{C})^{-1} \quad (\text{IV.20})$$

$\mathbf{I}$  est la matrice identité et  $\mathbf{H}$  la matrice contenant les valeurs nodales de la fonction Heaviside:

$$\mathbf{H} = {}^t \begin{bmatrix} H(\mathbf{x}_1) & 0 & H(\mathbf{x}_2) & 0 & H(\mathbf{x}_3) & 0 & H(\mathbf{x}_4) & 0 \\ 0 & H(\mathbf{x}_1) & 0 & H(\mathbf{x}_2) & 0 & H(\mathbf{x}_3) & 0 & H(\mathbf{x}_4) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

Finalement, après définition de la matrice  $\mathbf{C}_M$ , la matrice de rigidité globale peut être exprimée comme une correction de la matrice de rigidité de la FEM classique:

$$\mathbf{K} = \int {}^t \mathbf{BDB} \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{C} \mathbf{B}(x,0) \right)^{-1} dV = \int {}^t \mathbf{BDB} (\mathbf{C}_M)^{-1} dV \quad (\text{IV.22})$$

#### **IV.1.2. Exemple numérique et analyse des résultats**

L'exemple considéré porte sur une validation numérique des développements de la section précédente. L'implémentation de cette dernière a été effectuée sous ABAQUS en utilisant la UEL subroutine. La solution extérieure obtenue par la UEL est comparée avec les résultats donnée par ABAQUS IMPLICIT en maillant finement la couche mince.

##### **IV.1.2.1. Implémentation numérique : UEL subroutine**

L'implémentation numérique de la méthode développée est effectuée sous « ABAQUS IMPLICIT » en utilisant la UEL subroutine codée sous langage FORTRAN. Cette dernière

permet de définir des éléments utilisateur « User Element ». L'élaboration de cette subroutine s'est basée sur un travail antérieur introduit par Giner et al. dans [2].

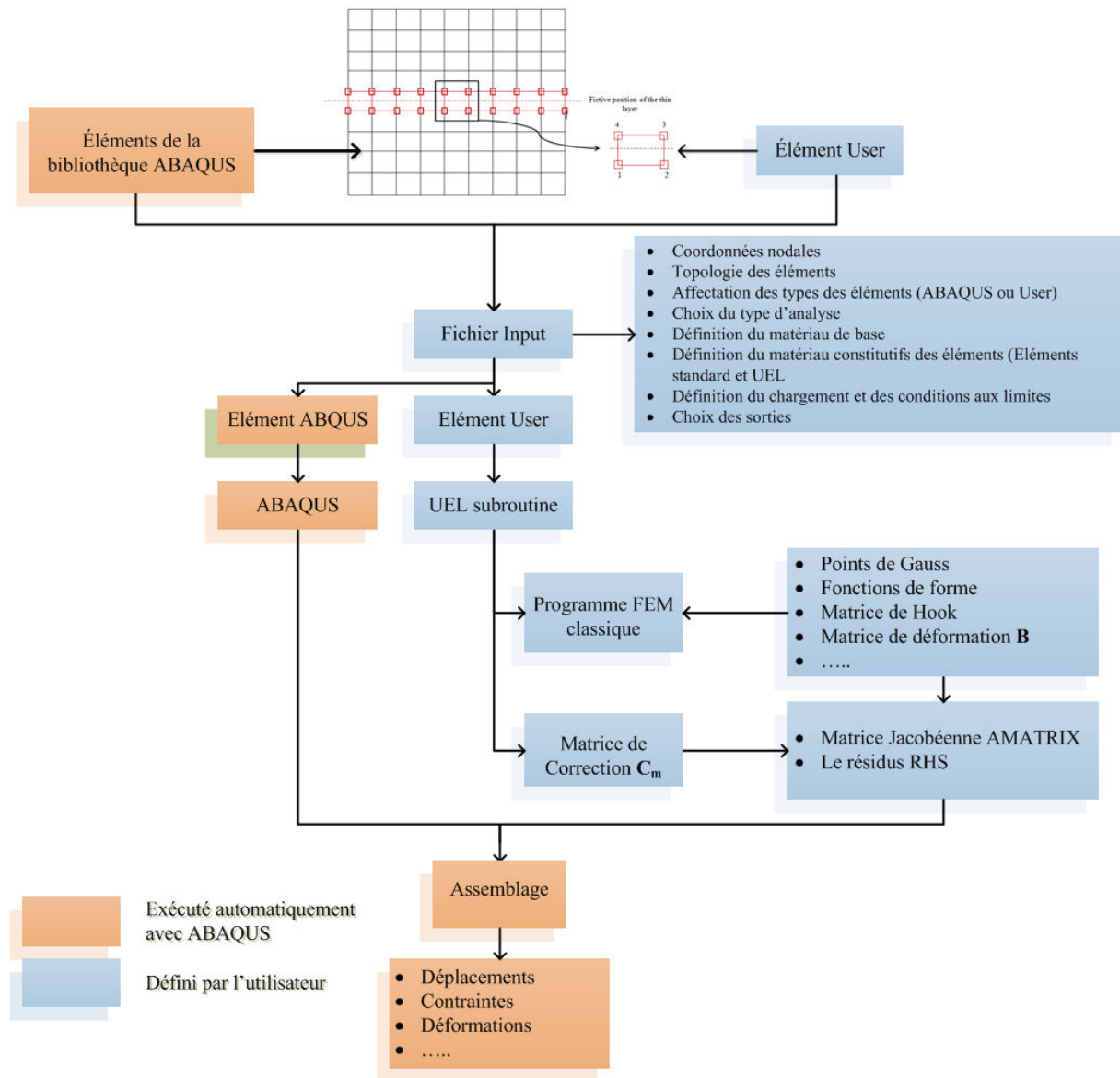


Figure.IV.4. Algorithme d'implémentation numérique de la méthode développée.

La UEL subroutine dispose de plusieurs arguments. Les plus importants sont les coordonnées nodales **COORDS**, les déplacements nodaux **U** et les variables internes **SDV**, tandis que les principales sorties sont la matrice jacobéenne **AMATRIX** et le vecteur des résidus **RHS**. Dans le cas de la FEM classique, le calcul de ces derniers est effectué pour chaque élément. En effet, les points d'intégration de Gauss, les fonctions de forme et la matrice de rigidité standard sont calculés en fonction des coordonnées nodales, la topologie de l'élément et des propriétés du matériau qui le constitue. Ces dernières entrées sont récupérées à partir du fichier « Input.inp » généré pour l'application considérée.

Dans le cas de la MAX-FEM, étant donné que le résultat de la méthode se présente comme une correction de la FEM standard, le corps du programme est constitué par l'algorithme classique de la FEM, tandis que la matrice de correction est calculée dans un sous-programme interne en fonction de l'application considérée. Ainsi, la matrice Jacobienne **AMATRIX** est calculée en corrigeant la matrice standard par la matrice de correction. La structure d'implémentation sous ABAQUS est présentée dans la Figure (IV.4).

#### IV.1.2.2. Résultats numériques

Pour mettre en œuvre la méthode MAX-FEM, l'assemblage de la Figure (IV.5) est considéré. Ce dernier est soumis à un chargement mécanique et ses propriétés géométriques et matériaux sont données par la figure (IV.5).

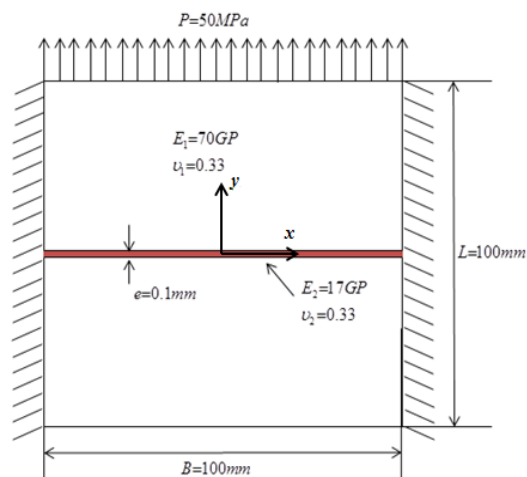


Figure.IV.5. Assemblage sous chargement mécanique.

Deux calculs éléments finis sont effectués pour cet assemblage : le premier en utilisant la FEM standard et en maillant finement le joint, le deuxième en utilisant la UEL subroutine MAX-FEM. Pour la FEM, un maillage fin est exigé afin d'éviter la distorsion du maillage dans et au voisinage du joint, voir Tableau (IV.1). Dans le cas de la MAX-FEM, un maillage uniforme de taille 2 mm est considéré. Les éléments « user » ne sont pas présentés par l'interface CAE d'ABAQUS. En effet, un post-traitement est nécessaire pour visualiser ces éléments. Mais dans ce cas, seuls les résultats nodaux retiennent l'attention pour la solution extérieure, tandis que la solution intérieure sera calculée ultérieurement.

Tableau IV.1 : Données du maillage.

	<b>FEM</b>	<b>MAX-FEM</b>
<b>Nombre de DDL</b>	10561	2601
<b><math>h_{min}</math></b>	0,1mm	2mm

(i) Solution extérieure

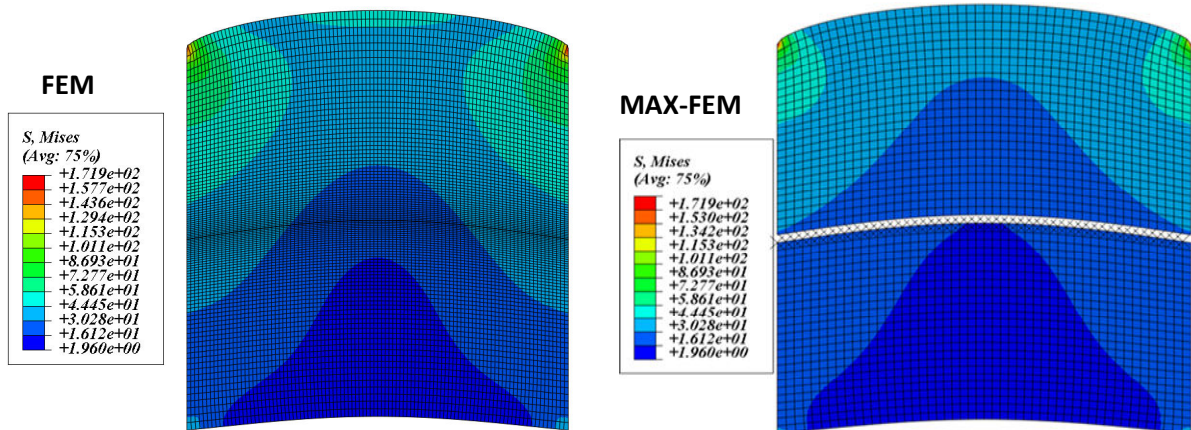


Figure.IV.6. Contraintes de Von Mises.

Dans un premier temps, le champ des contraintes est présenté et les résultats montrent que la distribution de ce dernier est bien reproduite par la MAX-FEM en considérant la FEM comme référence, voir Figure IV.6. Cependant, pour mieux comparer, le champ de contraintes dans la section  $y = 1mm$  est représenté pour la FEM et la MAX-FEM, voir Figure IV.7.

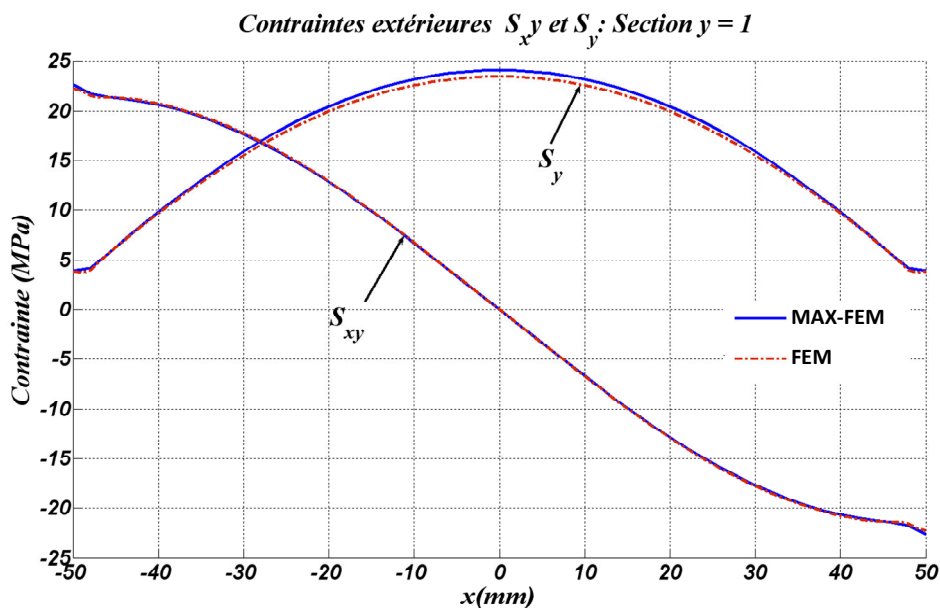


Figure.IV.7. Contraintes dans la section  $y=1mm$ .

La précision de la méthode est constatée aussi en représentant les déplacements nodaux des éléments enrichis. En effet, la Figure IV.8 présente le champ de déplacement pour les sections  $y=1mm$  et  $y=-1mm$ , c'est-à-dire aux nœuds enrichis.  $\mathbf{u}^+$  désigne le déplacement de la section  $y=1mm$  et  $\mathbf{u}^-$  celui de la section  $y=-1mm$ .

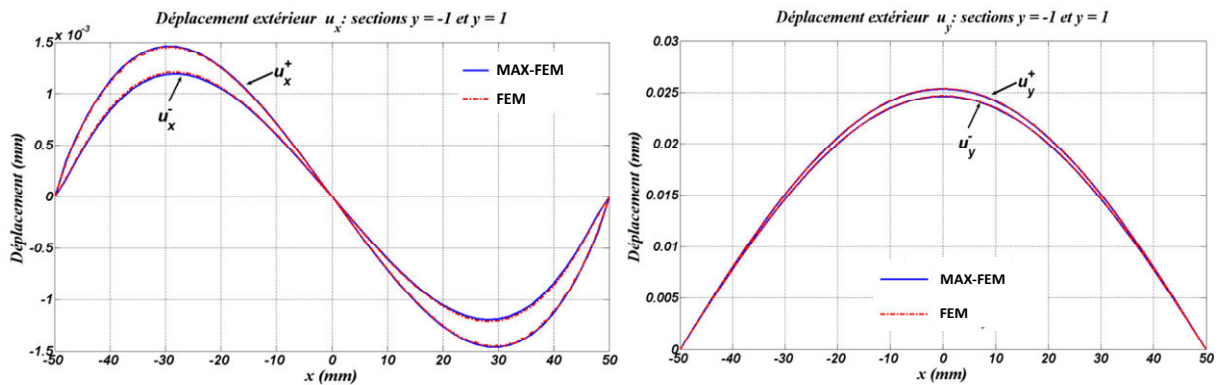


Figure.IV.8. Déplacement  $\mathbf{u}$  dans les sections  $y=-1\text{mm}$  et  $y=1\text{mm}$ .

En représentant le champ de déplacement dans la section verticale  $x=-10\text{mm}$ , il est constaté que la solution extérieure nodale obtenue par la MAX-FEM représente une bonne approximation de la solution FEM à partir des premiers nœuds de l'élément enrichi. Cependant, le maillage MAX-FEM considéré représente un rapport significatif  $h/\varepsilon=20$  contrairement à la FEM où le joint est maillé.

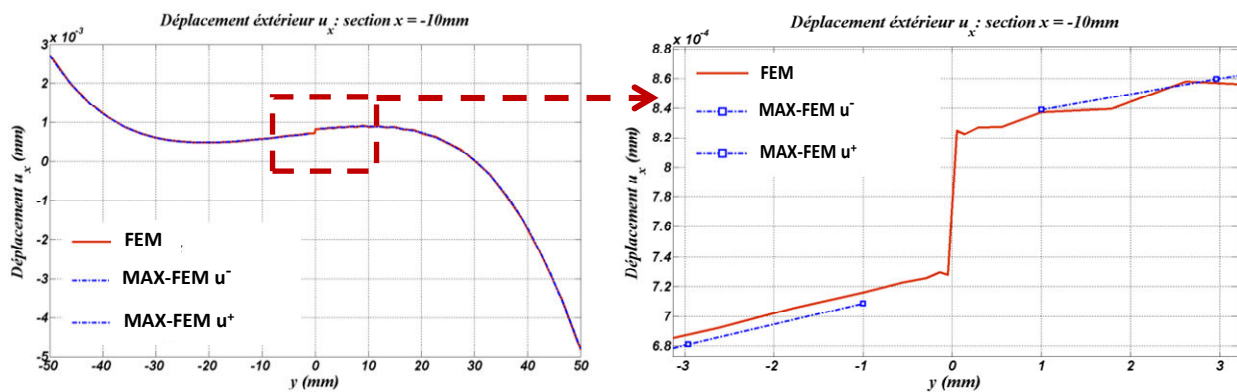


Figure.IV.9. Déplacement  $u_x$  dans la section  $x=-10\text{mm}$ .

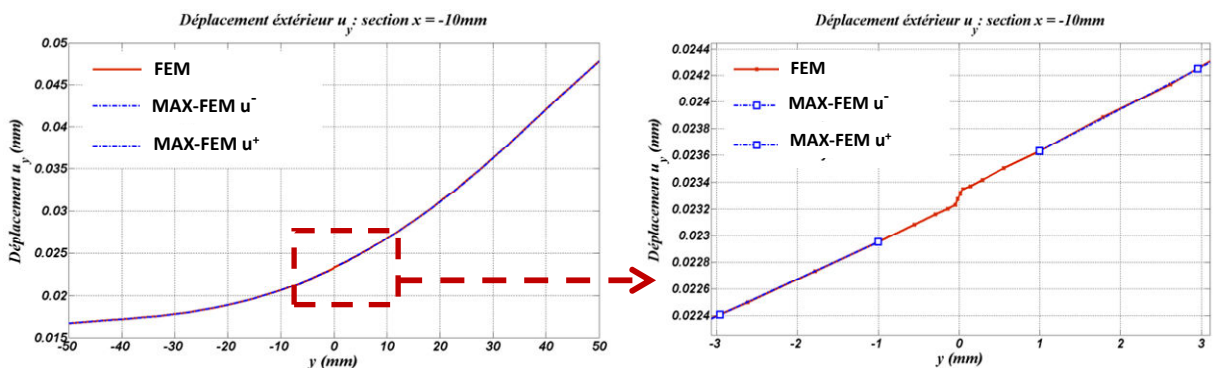


Figure.IV.10. Déplacement  $u_y$  dans la section  $x=-10\text{mm}$ .

Pour la même section, le terme  $(\mathbf{u}-\mathbf{u}^0)/\varepsilon$  est calculé. Théoriquement, ce dernier doit représenter le premier ordre de perturbation  $\mathbf{u}^1$  de la MAE. Cependant, par sa continuité et son principe de factorisation, l'approche MAX-FEM ne préserve plus ce terme de la MAE ni le

terme homogène. En effet la figure (IV.11) montre que le terme  $(\mathbf{u}-\mathbf{u}^0)/\varepsilon$  n'est pas linéaire et ne s'annule pas sur le long de la section. Ce résultat vient contredire la MAE qui suppose que le terme  $\mathbf{u}^1$  est linéaire suivant l'axe normal à la couche mince et devient presque nul en s'éloignant de la couche mince, voir section II.3.1.2. Ainsi, il est constaté que la solution MAX-FEM est obtenue sans être subdiviser en terme homogène et correctif (principe de la MAE). Ceci, confirme le résultat obtenu lors de l'analyse thermique du troisième chapitre, voir la section III.2.2.2.

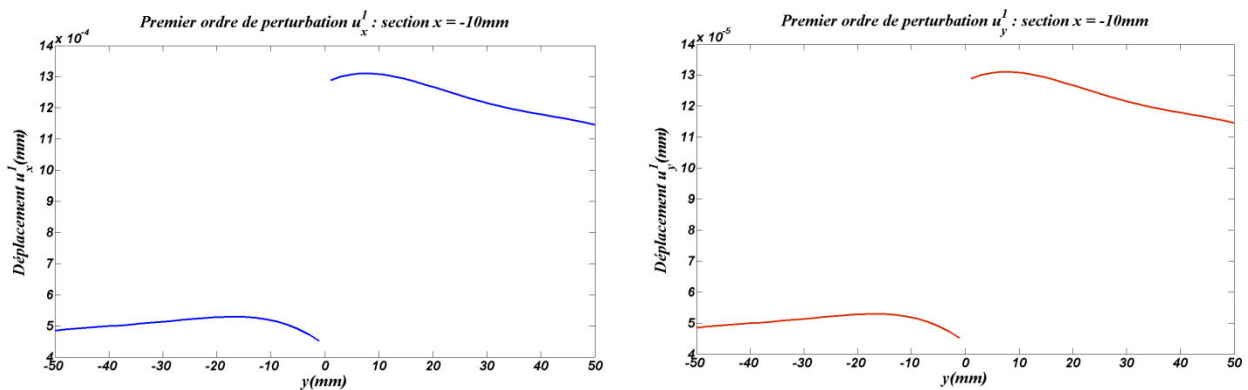


Figure.IV.11. Déplacement  $(\mathbf{u}-\mathbf{u}^0)/\varepsilon$  dans les sections  $x = -10\text{mm}$ .

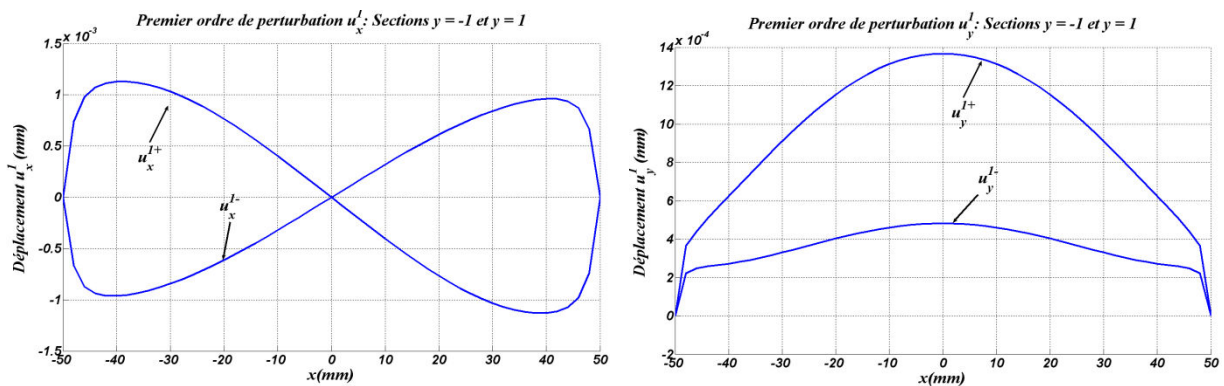


Figure.IV.12. Déplacement  $(\mathbf{u}-\mathbf{u}^0)/\varepsilon$  dans les sections  $y = -1\text{mm}$  et  $y = 1\text{mm}$ .

Un autre résultat que la MAE n'arrive pas à reproduire est le respect des conditions aux limites sur les bords. En effet, pour cette application où la couche mince coïncide avec un encastrement, le terme  $\mathbf{u}^1$  ne prendra pas en compte cette condition aux limites. Cependant, à partir de la figure (IV.12), il est clair que le terme  $(\mathbf{u}-\mathbf{u}^0)/\varepsilon$  respecte la condition d'encastrement et s'annule aux extrémités. Ceci est principalement dû aux principes de factorisation qui permettent, dans le cas des conditions de Dirichlet, d'appliquer ces dernières directement sur la solution globale. Par ailleurs, même dans le cas des conditions de Neumann, l'approche reste valable. Ce résultat a été montré dans l'application

du tube revêtu sous chargement convectif, voir section III.2.2.2. Ainsi, les limitations de la MAE et du modèle DAR-X-FEM [2] sont levées en étant capable de prendre en compte à la fois les conditions aux limites et la condition du saut.

**(ii) Solution intérieure: Post-traitement des résultats**

Dans cette section, un post-traitement des résultats est effectué sous Matlab afin de calculer la solution intérieure. L'objectif du post-traitement est de calculer les contraintes intérieures dans le joint pour un dimensionnement des assemblages. De plus, le champ de déplacement intérieur est présenté pour les différentes sections considérées précédemment.

Le déplacement intérieur est obtenu en considérant les équations (IV.13) et (IV.15). Pour l'assemblage considéré, les figures (IV.13) et (IV.14) représentent le déplacement intérieur de la section  $x = -10\text{mm}$  qui est raccordé à la solution extérieure. Ce même déplacement est représenté au long de l'interface  $y=0.05$  dans la figure IV.15.

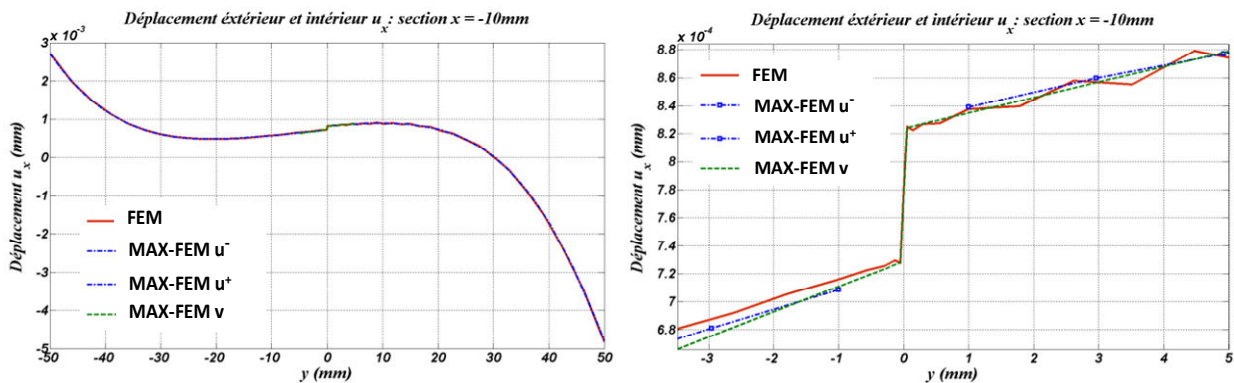


Figure.IV.13. Déplacement extérieur  $u_x$  et intérieur  $v_x$  dans le joint.

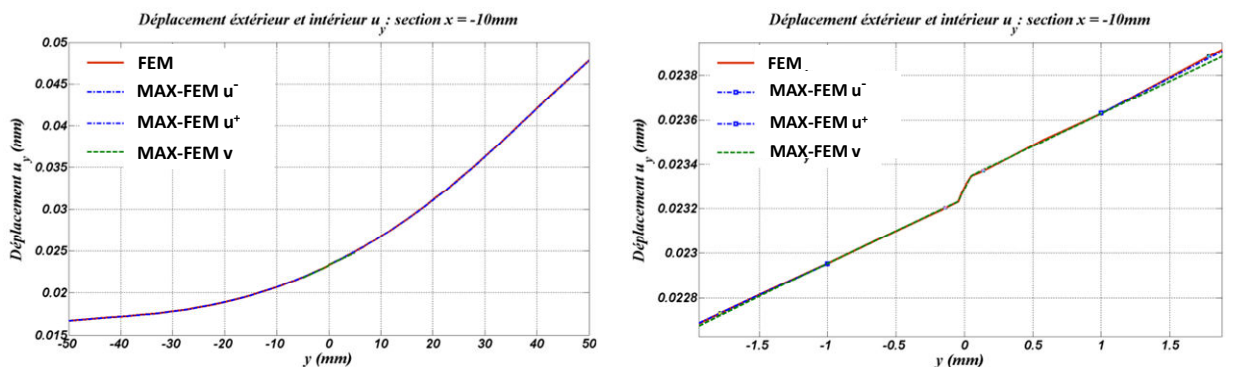


Figure.IV.14. Déplacement extérieur  $u_y$  et intérieur  $v_y$  dans le joint.

Comparé à la FEM, les résultats montrent que la solution intérieure fournit une bonne approximation du champ de déplacement dans le joint. Cependant, aucun maillage du joint n'a été effectué et ces résultats sont obtenus par un post-traitement sans aucun calcul éléments finis supplémentaire.



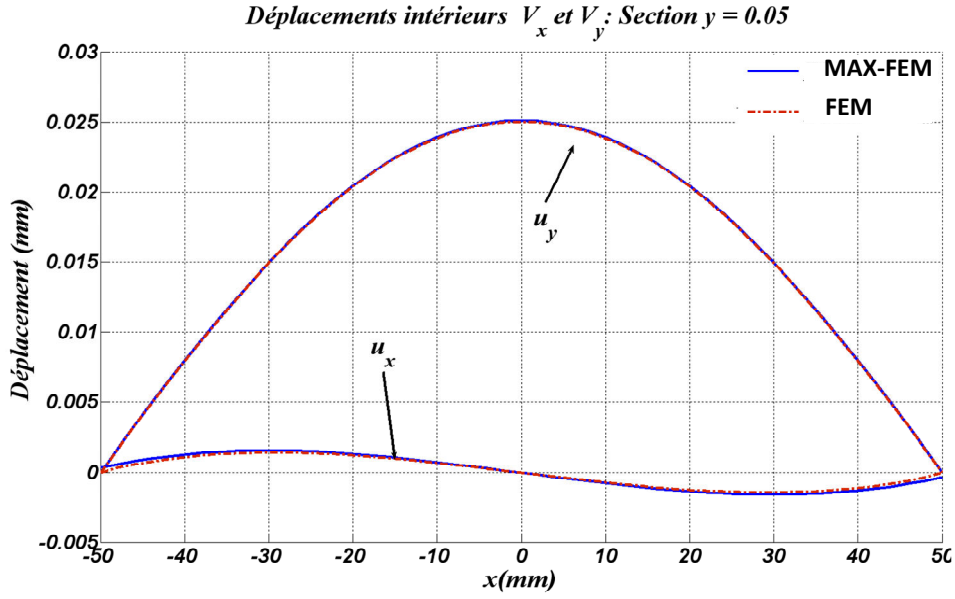


Figure.IV.15. Déplacement intérieur  $v$  à l'interface du joint  $y=0.05$ .

Par ailleurs, en ne tenant compte que du premier ordre de perturbation, le champ de contraintes à l'intérieur de la couche mince est supposé constant suivant l'épaisseur du joint ( $\sigma^e(x, y) = \Sigma^0(x, 0)$ ), voir [2]. En effet, pour prendre en compte un terme de correction de premier ordre pour le champ de contraintes, il faudra considérer des développements extérieur et intérieur de deuxième ordre pour le champ des déplacements. Ainsi, pour cette application, le champ de contraintes est donné par:

$$\Sigma^0(x, 0) = \begin{Bmatrix} \Sigma_x^0 \\ \Sigma_y^0 \\ \Sigma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} v_{x,x}^0 \\ v_{y,y}^1 \\ v_{x,y}^1 + v_{y,x}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

En dérivant l'équation (IV.16), l'expression du champ de contraintes dans le joint est définie par:

$$\Sigma^0(x, 0) = \begin{Bmatrix} \Sigma_x^0 \\ \Sigma_y^0 \\ \Sigma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \left( \begin{Bmatrix} v_{x,x}^0 \\ v_{y,y}^0 \\ v_{x,y}^0 + v_{y,x}^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ u_y \\ u_x \end{Bmatrix} \right) \quad (\text{IV.26})$$

Si, comme pour cette application, les matériaux du substrat et du joint ont le même coefficient de poisson ( $\nu_1 = \nu_2$ ), l'expression (IV.26) devient :

$$\Sigma^0(x, 0) = \begin{Bmatrix} \Sigma_x^0 \\ \Sigma_y^0 \\ \Sigma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \frac{E_2}{E_1} \sigma^0(x, 0) + \mathbf{D} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_y \\ u_x \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

Comme précisé précédemment, pour prendre compte du premier ordre des contraintes, il faudra considérer un développement extérieur du deuxième ordre pour le champ des déplacements. Dans les travaux [3-4], il est montré que le saut du déplacement du deuxième ordre est lié linéairement aux dérivées secondes du déplacement homogène (

$$\llbracket \mathbf{u}^2 \rrbracket = f\left(\frac{\partial^2 u_{ij}^0}{\partial x_i \partial x_j}\right) \text{ avec } i,j=1,2). \text{ Ainsi, il serait toujours possible d'appliquer la même}$$

démarche en intégrant la contribution des dérivées secondes des fonctions de formes à la matrice de correction. Cependant, dans le cas des éléments linéaires, ces dérivées ont une faible contribution dans le cas des éléments structurés utilisés ici. Ainsi, pour pouvoir appliquer la même démarche en utilisant des développements MAE d'ordre supérieurs, il faudra choisir aussi des éléments d'ordres supérieurs.

En appliquant cette relation, le champ de contraintes est tracé le long du joint, voir figure (IV.16).

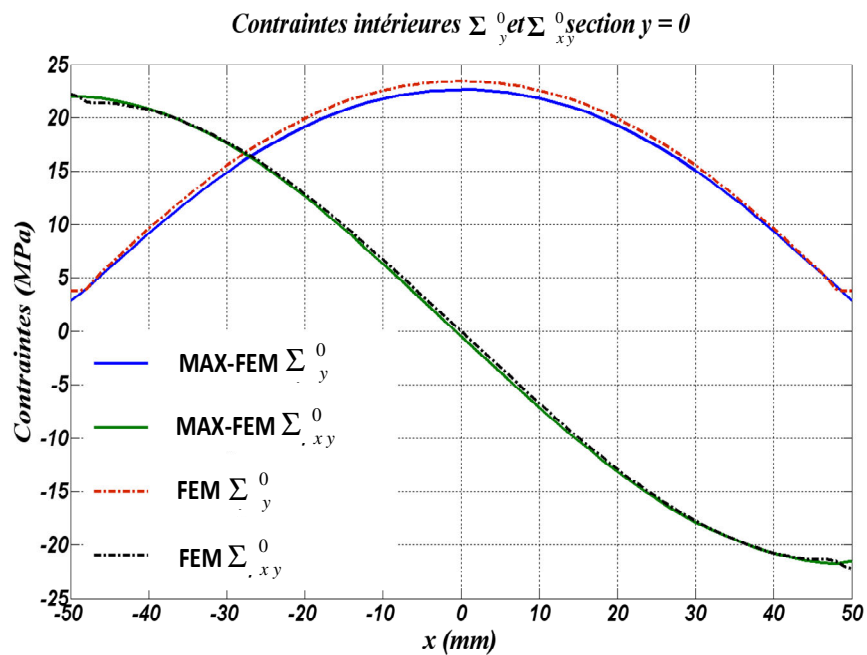


Figure.IV.16. Champ de contraintes intérieur  $\Sigma^0$  au long de la section  $\bar{y}=0$ .

Par ailleurs, près des bords, le champ de contraintes est perturbé par le phénomène des bords. En effet, l'approximation considérée ne permet pas de prendre compte la concentration des contraintes. De plus, comme indiqué précédemment, le premier ordre ne fournit pas une bonne approximation des contraintes internes [3-4]. Par conséquent, une réflexion plus approfondie sur la prise en compte de ces phénomènes singuliers doit être menée.

### **III.2.1. Conclusion**

Dans cette analyse mécanique, l'assemblage brasé est substitué par une structure monobloc ayant le même comportement mécanique, c'est-à-dire, la même solution nodale en termes de déplacements, déformations et contraintes. Afin de récupérer ce comportement une configuration bidimensionnelle de la méthode hybride MAX-FEM a été mise en place. Cette méthode permet d'accéder à la solution extérieure en un seul calcul éléments finis et permet de calculer la solution intérieure par un simple post-traitement des résultats obtenus.

La méthode développée est implémentée sous le code ABAQUS en utilisant la UEL subroutine. Les résultats obtenus par cette dernière sont comparés à ceux obtenus par la FEM sous le même code. Une analyse des résultats montre que la méthode MAX-FEM garde une bonne précision dans les deux échelles sans raffinement de maillage et en minimisant le nombre de simulations.

D'un point de vue scientifique, les travaux effectués jusqu'à présent ouvrent plusieurs portes d'investigations futures. En effet, la possibilité de l'analyse à l'échelle « micro » donnée à ce stade des travaux ne traite qu'un cas simple, tandis que le comportement du joint et des interfaces est plus complexe. Ainsi, il est envisagé, comme suite des travaux, de traiter la rupture fragile, la fatigue mécanique ainsi le comportement élasto-plastique des couches minces.

D'un point de vue ingénierie, cette méthode présente un outil efficace et optimal pour la prédiction de la distribution des champs mécaniques dans les assemblages. Elle permet aussi de caractériser l'influence de la couche mince sur le comportement global de l'assemblage. En effet, une étude paramétrique visant l'influence des propriétés mécaniques et géométriques du joint peut être élaborée. Ainsi, la méthode développée présente un outil d'aide à la décision simple et optimal en termes de maillage et de nombres de calcul.

## IV.2. Partie II : Couplage thermomécanique

Dans la section précédente, l'approche MAX-FEM a été appliquée à la modélisation du comportement mécanique des assemblages brasés bidimensionnels. Dans cette section, la même méthode est développée pour effectuer une analyse thermomécanique transitoire d'un assemblage brasé. L'objectif est d'étudier le comportement thermoélastique transitoire de l'assemblage en un minimum de temps de calcul et en une seule simulation. Dans ce cadre, l'évolution de la température et du déplacement dans la structure est décrite. Enfin, l'évolution de la perturbation causée par la couche mince ainsi que le saut de déplacement à travers l'interface sont donnés.

### Hypothèses principales :

En plus des hypothèses présentées dans la section précédente, les hypothèses suivantes sont retenues:

- En raison de son épaisseur négligeable, le joint brasé est supposé être en régime permanent au cours de la simulation. Cette hypothèse a été validée par le modèle MAX-FEM [2].
- Le régime élastique est supposé. Ainsi, seul un sens du couplage thermomécanique est considéré. La déformation n'induit donc pas de chaleur.
- Le transfert de chaleur est supposé parfait entre les substrats et le joint.

### IV.2.1. Formulation éléments finis MAX-FEM

L'algorithme de mise en œuvre de la méthode est similaire à l'application mécanique. En effet, les éléments contenant les positions fictives des joints sont décrits par une formulation éléments finis continue qui reproduit la solution extérieure nodale. Cette dernière est définie, pour les deux champs mécanique et thermique selon les expressions:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i^0 + \sum_{k=1}^{N_{enr}} N_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}_k) \mathbf{b}_k \\ T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) T_i^0 + \sum_{k=1}^{N_{enr}} N_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}_k) c_k \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

$c_k$  étant les paramètres de correction pour le champ de température. L'identification des paramètres  $\mathbf{b}_k$  et  $c_k$  s'effectue de la même manière que la section précédente, voir Figure IV.17.

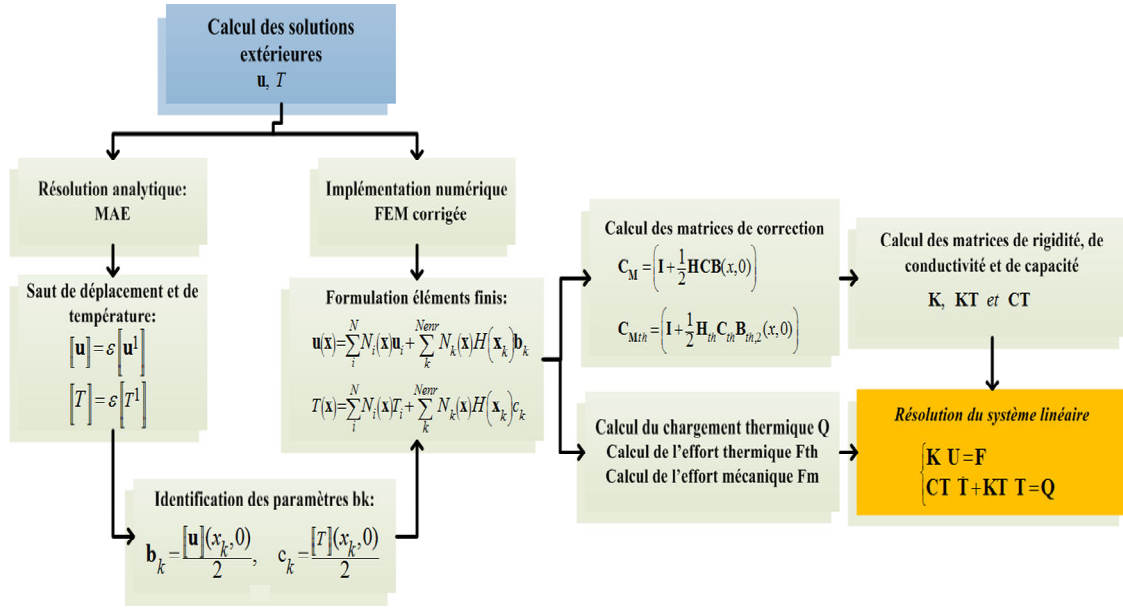


Figure.IV.17. Algorithme de l'approche MAX-FEM pour un couplage thermomécanique.

#### IV.2.2. Résolution de l'équation de la chaleur

Contrairement au troisième chapitre, l'équation de la chaleur est résolue, ici, en faisant appel au schéma d'Euler implicite (Equation IV.29). Le choix de ce schéma dépend du code choisi pour l'implémentation numérique. Dans notre cas, l'utilisation de la UEL subroutine de ABAQUS IMPLICIT contraint à utiliser un schéma implicite:

$$\left( \frac{CT}{\Delta t} + KT \right) T^{n+1} = \frac{CT}{\Delta t} T^n + Q^{n+1} \quad (IV.29)$$

$\Delta t$  étant le pas de temps et  $n$  le nombre d'incrément.

L'objectif, ici, est le calcul de la matrice de correction  $C_{Mth}$  liant le champ de température extérieur au champ non perturbé. Pour parvenir à cet objectif, une procédure similaire à celle du troisième chapitre est suivie, voir Section II.2.2.2. Cette procédure commence par l'identification des paramètres de correction du champ thermique  $c_k$  qui sont liés au saut de température par:

$$c_k = q_k (1-h) \frac{[T](x_k, 0)}{2} \quad (IV.30)$$

$[T]$  est obtenu en suivant le même algorithme MAE défini précédemment. Son expression est donnée par :

$$[T] = \varepsilon [T^1] = \varepsilon \left( \frac{\lambda_{th1}}{\lambda_{th2}} - 1 \right) \frac{\partial T^0}{\partial y}(x, 0) = \varepsilon \left( \frac{\lambda_{th1}}{\lambda_{th2}} - 1 \right) \mathbf{B}_{th,2}(x, 0) T^0 \quad (IV.31)$$

où  $[\mathbf{B}_{th}]_{,2}(x,0)$  est la deuxième ligne de la matrice de flux standard qui contient la dérivé de  $T$  suivant  $y$  en  $\mathbf{x} = (x,0)$ .

En intégrant cette expression dans la formulation élément finis de l'équation (IV.28) la matrice de correction  $\mathbf{C}_{Mth}$  qui relie le vecteur des températures nodal  $\mathbf{T}$  au champ non perturbé  $\mathbf{T}^0$  s'exprime par :

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I} + \frac{1}{2} C_{th} \mathbf{H} \mathbf{B}_{th,2}(x,0)) \mathbf{T}^0 = \mathbf{C}_{Mth} \mathbf{T}^0 \quad (IV.32)$$

avec  $C_{th} = \varepsilon \left( \frac{\lambda_{th1}}{\lambda_{th2}} - 1 \right)$  et  $\mathbf{H}$  le vecteur colonne contenant les valeurs de la fonction Heaviside dans chaque nœud ( $\mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k) = H(\mathbf{x}_k)$ ).

La matrice de conductivité  $\mathbf{KT}$  est ainsi définie par :

$$\mathbf{KT} = \lambda_{th1} \int {}^t \mathbf{B}_{th} \mathbf{B}_{th} (\mathbf{C}_{Mth})^{-1} dV \quad (IV.33)$$

### IV.2.3. Résolution de l'équation d'équilibre mécanique

En régime élastique, la résolution de l'équation d'équilibre mécanique en utilisant la FEM revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{th} \quad (IV.34)$$

$\mathbf{F}_{th}$  étant l'effort engendré par la dilatation thermique.

Le calcul de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  nécessite un calcul antérieur de la matrice de correction  $\mathbf{C}_M$ . Cette dernière est déterminée de manière quasi-identique à celle présentée dans l'analyse mécanique. La seule différence se présente dans le saut de déplacement. En effet, dans le cas d'un chargement thermomécanique, ce dernier se décompose en deux parties :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{mecanique} + \mathbf{u}_{thermique} \quad (IV.35)$$

Le premier terme  $\mathbf{u}_{mecanique}$  est dû au chargement mécanique est lié à la différence des modules de Young et des coefficients de poisson, voir Equation (IV.17). Par ailleurs, le deuxième terme  $\mathbf{u}_{thermique}$  est généré par la différence des coefficients de dilatation thermique entre les substrats et le joint brasé. Son expression est obtenue par un calcul MAE en suivant le même algorithme et en exploitant la continuité du champ de contraintes aux interfaces (Joint/substrats) :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x(x,0) \\ \mathbf{u}_y(x,0) \end{Bmatrix}_{thermique} = \begin{pmatrix} \frac{E_2 \alpha_2 - E_1 \alpha_1}{1 - \nu_2} & \frac{E_1 \alpha_1}{1 - \nu_1} \\ \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \end{pmatrix} T^0(x,0) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = C_{th}^t \mathbf{N}(x,0) \mathbf{T}^0 \quad (IV.36)$$

Etant donné que  $\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{Bmatrix}_{thermique}$  dépend du champ  $\mathbf{T}^0$  et non pas de  $\mathbf{u}^0$ , il est possible de partager la correction issue du saut global entre la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  et l'effort thermique  $\mathbf{F}_{th}$ . Ainsi, la matrice  $\mathbf{K}$  intègre la partie mécanique et reste identique à celle définie dans l'équation (IV.22), tandis que l'effort thermique subit une correction provenant du saut  $\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{Bmatrix}_{thermique}$ . L'écriture corrigée du vecteur thermique  $\mathbf{F}_{th}$  est alors donnée par :

$$\mathbf{F}_{th} = \mathbf{F}_{th}^0 + \mathbf{F}_{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{Bmatrix}} = \int_V \mathbf{B} \boldsymbol{\sigma}_{th}^0 dV + \mathbf{F}_{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{Bmatrix}} \quad (IV.37)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_{th}^0$  est le vecteur des contraintes thermiques du problème non perturbé :

$$\boldsymbol{\sigma}_{th}^0 = -\frac{E_1 \alpha_1}{1 - \nu} \Delta T^0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.38)$$

et  $\mathbf{F}_{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{Bmatrix}}$  est le chargement engendré par saut de déplacement  $\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{Bmatrix}_{thermique}$  :

$$\mathbf{F}_{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{Bmatrix}} = \mathbf{K} \mathbf{H} \mathbf{N}(x,0) \mathbf{T}^0 \quad (IV.39)$$

#### IV.2.4. Exemple numérique et analyse des résultats

Afin de valider les développements précédents, un assemblage brasé bidimensionnel sous un chargement thermomécanique est considéré, voir Figure (IV.18).

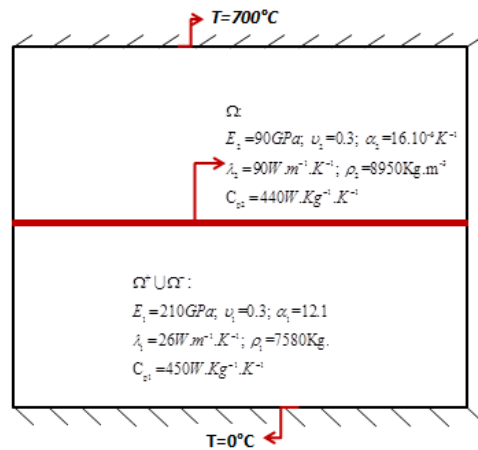


Figure.IV.18.Assemblage brasé sous chargement thermomécanique.

Le joint brasé est situé au niveau de la section  $y=3mm$ .

– **Champ thermique**

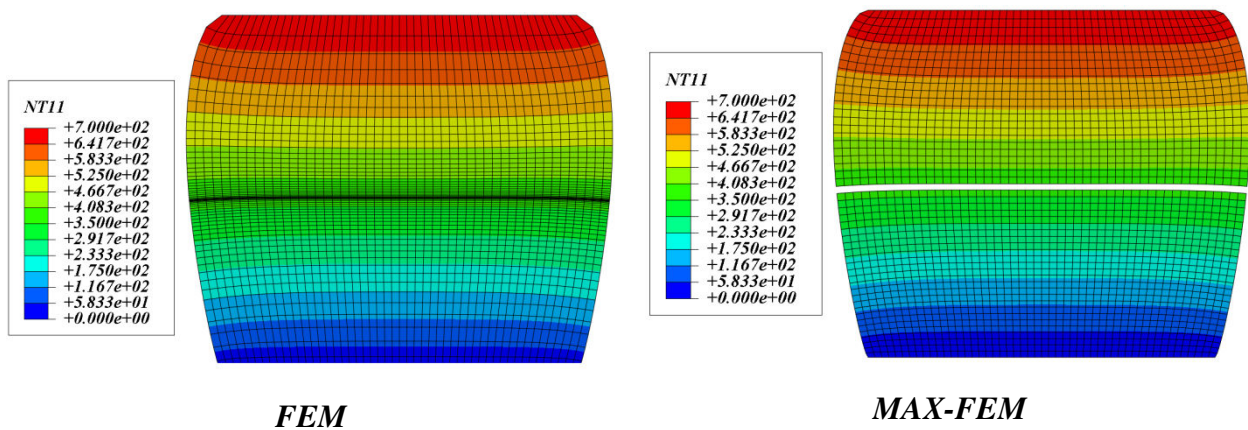


Figure.IV.19. Distribution de la température dans l'assemblage.

Afin de comparer les résultats obtenus avec ceux de la FEM, l'évolution de la température extérieure dans la section  $x = -30\text{mm}$  est présentée dans la Figure (IV.20).

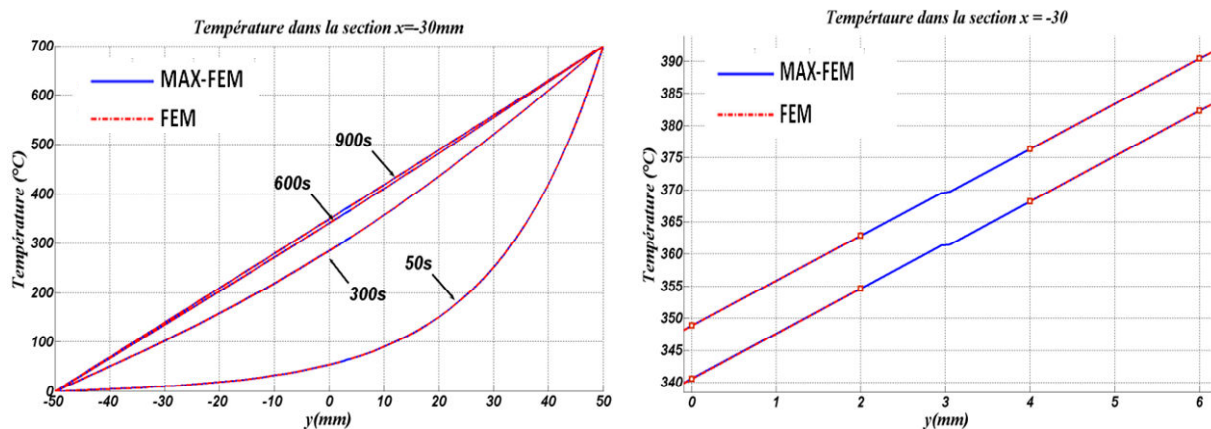


Figure.IV.20. Evolution de la température dans section  $x=-30\text{mm}$ .

Pour le champ thermique, la précision rappelle celle obtenue dans le troisième chapitre pour des applications unidimensionnelles. Cependant, dans ce cas, un schéma implicite est utilisé pour les deux simulations FEM et MAX-FEM. Ainsi, le gain du temps lié à la stabilité ne peut être constaté alors qu'il a bien été mis en évidence dans le troisième chapitre.

– **Champs mécaniques**

Les résultats obtenus par la méthode MAX-FEM (Figure IV.21, IV.22 et IV.23) restent relativement précis. Une partie de l'erreur observée est due à la différence entre les approches utilisées par la UEL et ABAQUS pour le calcul des différents termes introduits par la FEM. Une comparaison initiale du programme FEM standard entre la UEL développée et ABAQUS sans couche mince montre une erreur relative de 2.4%.



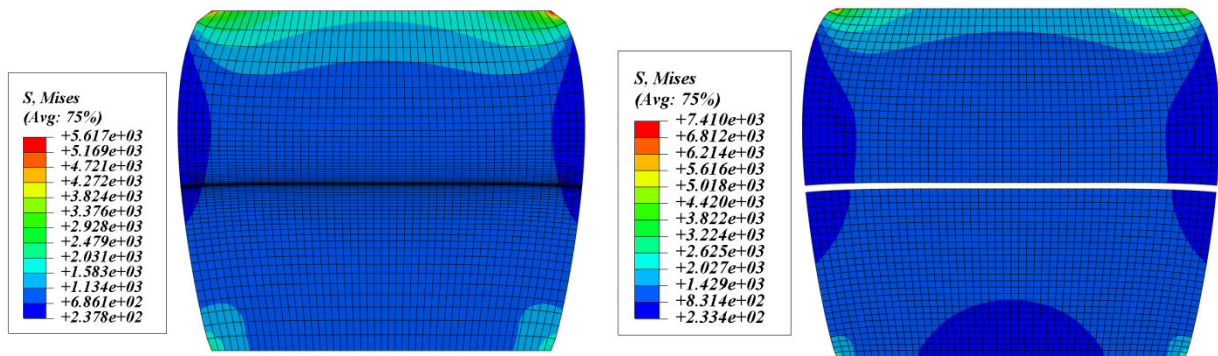


Figure.IV.21. Champs de contraintes dans l'assemblage.

Le champ des déplacements dans la section  $x=-30mm$  est présenté pour différents incréments (900, 600, 300 et 50s):

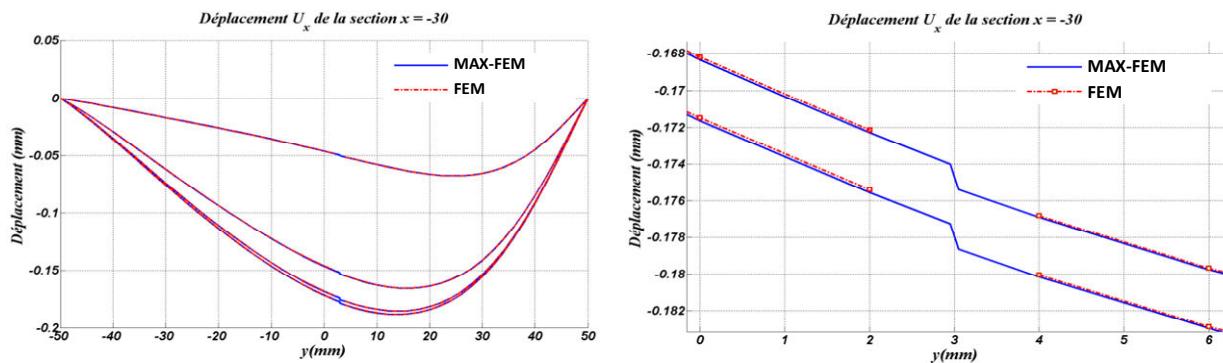


Figure.IV.22. Déplacement nodal  $u_x$  dans la section  $x=-30mm$ .

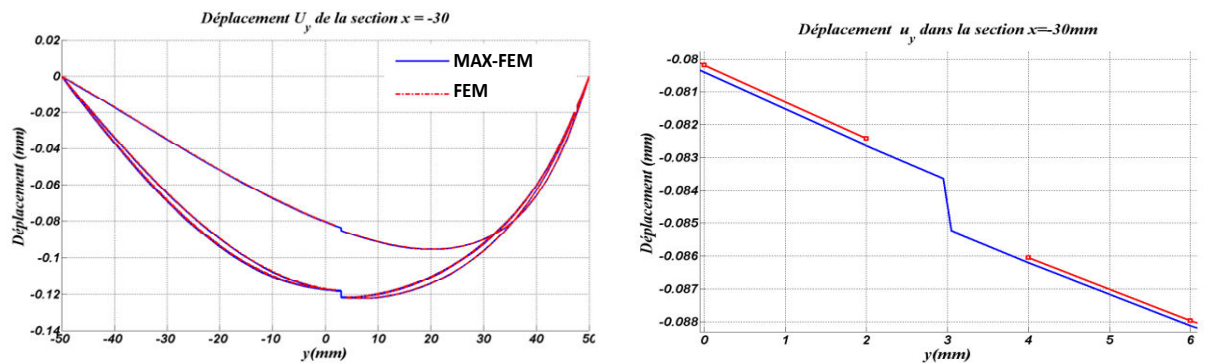


Figure.IV.23. Déplacement nodal  $u_y$  dans la section  $x=-30mm$ .

La perturbation dans la même section  $x=-30mm$  est évaluée (Figure IV.24). Cette dernière évolue d'une manière progressive en fonction du temps. Son amplitude dépend du saut de déplacement à l'interface  $y = 3mm$  dont la valeur le long de l'interface est présentée dans la Figure IV.25. Ces résultats montrent la sensibilité du saut  $\llbracket u_y \rrbracket$  au temps. Cette sensibilité provient de la partie thermique  $\llbracket u \rrbracket_{thermique}$  (Equations IV.35 et IV.36) qui dépend du terme non perturbé de la température. L'évolution de cette dernière en fonction du temps

engendre une sensibilité de  $\llbracket u_y \rrbracket$  par rapport au temps. Par contre, cet effet du temps n'est pas très ressenti pour  $\llbracket u_x \rrbracket$  qui n'a pas de composante thermique.

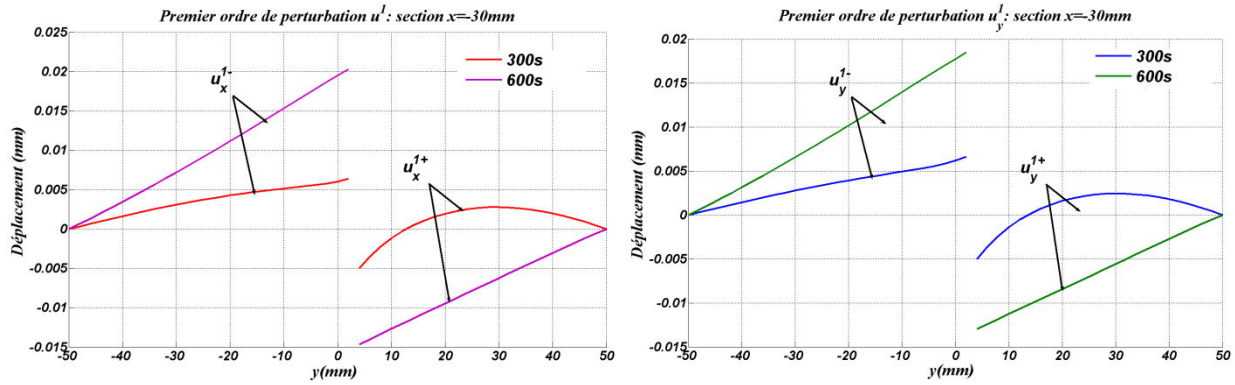


Figure.IV.24. Perturbation  $(\mathbf{u}-\mathbf{u}^0)/\varepsilon$  dans la section  $x=-30\text{mm}$ .

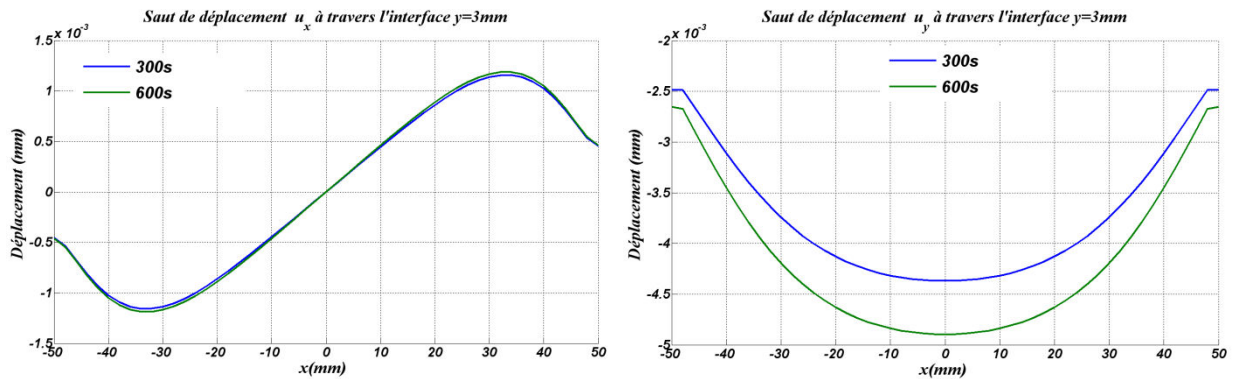


Figure.IV.25. Sauts de déplacement  $\llbracket u_x \rrbracket$  et  $\llbracket u_y \rrbracket$  au long de l'interface  $y=3\text{mm}$ .

### IV.3. Conclusion

L'analyse thermomécanique présentée dans cet axe a pour objectif la mise en évidence de l'intérêt de la méthode développée d'un point de vue ingénierie. En effet, la méthode procure une bonne précision des résultats avec une optimisation du maillage et le nombre de simulations.

La solution extérieure est calculée en fonction du temps sans aucun raffinement de maillage et sans négliger la présence de la couche mince. Le calcul de cette solution permet de suivre l'évolution de la température, des déformations et des contraintes dans la structure. Ainsi dans le cas des outillages stratifiés, cet outil permettra de prédire l'efficacité des systèmes de régulation thermique. Cependant, une étude locale des couches minces doit être effectuée pour le contrôle du niveau des contraintes dans ces zones. En effet, la différence des coefficients de dilatation thermique entre le substrat et le joint va engendrer une

concentration des contraintes dans les joints à la montée de la température. Cet effet ainsi que d'autres liés aux propriétés thermomécaniques des matériaux ainsi qu'à la géométrie des assemblages sont présentés dans le dernier chapitre comme perspectives de ces travaux.

***Références IV***

- [1]** E . Giner, N . Sukumar, JE. Tarancon, FJ. Fuenmayor. An Abaqus implementation of the extended finite element method. Eng Fract Mech., 76 (2009) 347-368.
- [2]** Nguyen Dang Huy. Contribution à la modélisation et à la caractérisation du comportement des assemblages brasés. Couplage des méthodes DAR et X-FEM, 2009.
- [3]** R. Abdelmoulab , D. Leguillon. Mode III near and far fields for a crack lying in or along a joint, International Journal of Solids and Structures, 37 (2000) 2651-2672.
- [4]** P. Schmidt, Modeling of adhesively bonded joints by an asymptotic method, International Journal of Engineering Science, 46 (2008) 1291–1324.

## **Chapitre V**

### **Utilisation de l'approche MAX-FEM pour la caractérisation thermique des couches minces**

Lors de nos développements, nous nous sommes aperçus d'un autre résultat de l'approche MAX-FEM. En effet, ce principe de correction liant, de manière linéaire, les champs thermomécaniques de la structure contenant la couche mince et ceux d'une structure homogène soumise au même chargement, peut être une base pour le développement d'un protocole expérimental dont l'objectif est la caractérisation des propriétés thermomécaniques des couches minces. Ce résultat, représente une méthode inverse qui consiste à déterminer les paramètres locaux à partir du comportement global de la structure.

Le présent chapitre est présente donc le développement de ce protocole expérimental basé sur l'approche MAX-FEM et qui consiste à déterminer ; de manière simplifiée, la conductivité thermique des couches minces sous les deux régimes permanent et transitoire. Pour atteindre cet objectif, un aperçu bibliographique sur les différentes méthodes de caractérisation thermique des matériaux est présenté. Les développements théoriques du protocole et la conception du banc d'essais sont ensuite présentés et détaillés. Finalement, une validons des résultats est proposée.

### **V.1. Problématique et objectif**

Lors d'une opération de brasage ou dépôt de revêtement, le matériau d'apport subit des transformations modifiant ses propriétés thermomécaniques. En effet, les opérations de fusion, de solidification, de diffusion...etc. modifient la microstructure et la composition chimique du matériau d'apport et son voisinage. Ainsi, il ne peut être précis de considérer que la couche mince garde les mêmes propriétés du matériau d'apport avant l'opération d'assemblage ou de dépôt revêtement. De ce fait est né le besoin de caractériser la couche mince après son élaboration.

La caractérisation thermique des couches minces ne peut se faire de manière similaire aux matériaux compacts. En effet, la détermination de la conductivité thermique dépend de la détermination précise du flux de chaleur et du gradient de température dans l'échantillon. Cette opération, difficile dans le cas d'un matériau compact, est encore plus difficile dans le cas des couches minces. En effet, la mesure directe de la conductivité thermique est effectuée généralement en faisant appel à des systèmes de chauffage résistif. Cependant, les techniques se basant sur ce principe nécessitent de déposer des capteurs de température sur la couche elle-même. Ainsi la difficulté réside dans l'adhérence de la couche à l'instrument de mesure et la nécessité de garder cette adhérence en haute température et dans des environnements sévères.

La mesure de la conductivité thermique de la couche mince peut se faire aussi à travers la diffusivité thermique. En effet, cette dernière est liée directement à la conductivité thermique, la densité et la capacité thermique. La mesure de la diffusivité se fait en régime transitoire ou quasi-permanent en appliquant des chargements thermiques variables (impulsionnels ou périodiques). Elle se base sur le calcul de la variation de température en fonction du temps. Ce dernier, étant plus facile à mesurer, rend la mesure de la diffusivité relativement simple et précise. Cependant, la difficulté des techniques de mesure de la diffusivité est principalement liée à la complexité et au coût des montages expérimentaux utilisés. De plus, dans la majorité des techniques, la couche mince doit être positionnée sur une surface extérieure. Ainsi il est difficile de les utiliser dans le cas des assemblages brasés.

Dans ces travaux, nous visons le développement d'une nouvelle technique de mesure, directe, de la conductivité thermique des couches minces. Contrairement aux méthodes existantes, cette technique consiste à relever la conductivité thermique dans les deux régimes transitoire et permanent sans passer par la diffusivité thermique. Par ces développements, nous essayons d'éviter les principales difficultés des deux familles de caractérisation classiques. En effet, comme présenté dans la suite, la technique proposée

repose sur une approche simplifiée permettant d'alléger les contraintes imposées aux dispositifs de chargement et de mesure. Cette simplification permet d'éviter l'instrumentation de la couche elle-même et la nécessité de connaître, avec précision, le flux imposé. De plus, malgré que la mesure puisse être effectuée en régime transitoire, le modèle théorique utilisé ne nécessite aucune mesure de temps et n'impose aucune contrainte au positionnement de la couche mince.

## ***V.2. Veille bibliographique: Caractérisation des couches minces***

La littérature montre plusieurs travaux visant l'identification des propriétés thermophysiques des couches minces. Ces études expérimentales dont l'objectif est la mesure de la conductivité thermique se basent sur différentes approches théoriques et utilisent une multitude de dispositifs expérimentaux. Le lecteur peut se référer, par exemple, aux travaux [1-2] pour un aperçu sur l'ensemble des méthodes de caractérisation thermique des matériaux. En plus les travaux [2-12] présentent des études où les auteurs s'intéressent à des films minces de différents matériaux métalliques et polymères. Cependant, pour cet aperçu bibliographique, notre objectif n'est pas de détailler ces travaux, mais de présenter les approches principales, modèles et dispositifs employés pour la caractérisation thermique des couches minces.

Dans ce cadre, deux approches principales peuvent être distinguées: Mesure en régime permanent de la conductivité thermique et la caractérisation de la diffusivité thermique en régime transitoire et quasi-permanent. Ainsi, nous présentons les principes de ces approches et nous donnons les deux principales méthodes qui sont la méthode de la plaque chaude et la méthode Flash.

### ***V.2.1. Mesure de la conductivité thermique en régime permanent***

La mesure directe de la conductivité thermique d'une couche mince repose sur la maîtrise du transfert thermique dans un milieu multicouche. En effet, basées sur des modèles théoriques, les techniques de mesure en régime permanent consistent à caractériser l'influence de la couche mince sur le transfert thermique dans le milieu la contenant. Cette influence est représentée par la résistance thermique de la couche et qui est directement liée à sa conductivité thermique. Ainsi en identifiant cette résistance, il est simple d'accéder à l'information souhaitée à savoir la conductivité thermique.

Le calcul de la résistance thermique de la couche peut se faire par un modèle analytique classique. Ce dernier consiste à travailler sur une configuration unidimensionnelle du milieu contenant la couche mince, voir Figure V.1.

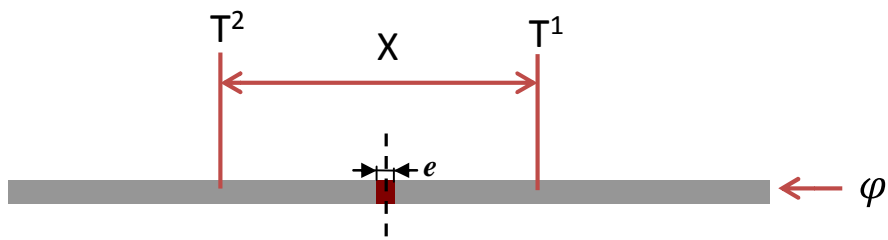


Figure.V.1. Barre soumise à un flux thermique.

En considérant le flux thermique imposé, la conductivité thermique de la couche mince est déduite à partir du gradient de température  $\Delta T$  et la résistance thermique équivalente du milieu délimité par les deux points de mesure :

$$\phi = \frac{\Delta T}{R_{eq}} = \frac{T_2 - T_1}{\frac{\lambda_1}{X - e} + \frac{\lambda_2}{e}}$$

Ainsi, la conductivité de la couche mince est identifiée en fonction du flux thermique imposé, du gradient mesuré et de la conductivité du substrat :

$$\lambda_2 = e \left( \frac{\Delta T}{\phi} - \frac{\lambda_1}{X - e} \right)$$

Pour appliquer le flux  $\phi$ , plusieurs méthodes peuvent être utilisées. En effet, un courant électrique traversant la barre génère, par effet Joule, un flux de chaleur  $R I^2$ . Cependant, la résistivité thermique de la couche mince doit être caractérisée au préalable. Par ailleurs, soumettre une des surfaces de l'éprouvette à un échange convectif peut être un moyen d'appliquer un flux connu en mesurant la température de la paroi. L'utilisation de cette approche s'avère pertinente. Cependant, il faut connaître, avec grande précision, le coefficient de convection rayonnement du milieu convectif ainsi qu'il faudra attendre le régime permanent. De plus, une mesure supplémentaire de la température de la paroi renforce l'incertitude qui, dans le cas des couches minces, doit être minimisée pour pouvoir caractériser l'effet de cette dernière.

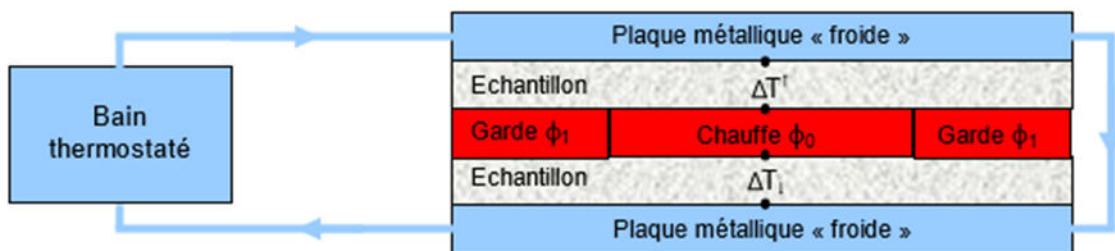


Figure.V.2. Méthode de la plaque chaude [1].



Pour des mesures qui ne nécessitent pas une grande précision, des bancs de mesure simples peuvent être conçus à partir de ces principes. Cependant, pour des meilleurs résultats, d'autres méthodes montrent plus de précisions et sont la base de bancs de mesures normalisés. Pour la mesure en régime permanent, la méthode la plus populaire et la méthode de la plaque chaude gardée utilisée pour la caractérisation des matériaux isolants. Cette méthode est normalisée ISO 8302 :1991, NF EN 1946-2 et son schéma de principe est représenté sur la figure (V.2).

Les plaques extérieures à base de matériau très conducteur sont maintenues à température constante par circulation d'un fluide issu d'un bain thermostaté. Une plaque chauffante délivre une puissance de chauffe  $\phi_0$  uniforme et constante qui est transmise aux plaques extérieures à travers les échantillons dont nous souhaitons mesurer la conductivité thermique. Le transfert unidimensionnel est assuré en entourant la zone chauffée par un anneau de garde auquel est fourni un flux  $\phi_1$  tel que la température de l'anneau soit égale à la température de la plaque chauffante. On s'assure ainsi également que tout le flux  $\phi_0$  passe à travers l'échantillon. Le flux  $\phi_1$  doit être supérieur au flux  $\phi_0$  pour compenser les pertes latérales convectives. L'anneau de garde et la plaque chauffante sont séparés par une mince couche d'air. Des thermocouples sont placés sur les deux faces des échantillons pour en mesurer les écarts de température  $\Delta T_{\downarrow}$  et  $\Delta T^{\uparrow}$ . La conductivité thermique s'en déduit par:

$$\lambda = \frac{e \phi_0}{S(\Delta T_{\downarrow} + \Delta T^{\uparrow})}$$

Où S est la surface de la plaque chauffante.

Cette méthode est applicable aux isolants pour lesquels on peut négliger les résistances de contacts par rapport à la résistance du matériau. Par ailleurs, elle peut être utilisée pour des matériaux métalliques conducteurs en se procurant des instruments de mesure précis et en contrôlant les pertes latérales. Dans les travaux [13], la méthode de la plaque chaude gardée a été utilisée pour la caractérisation des éprouvettes en acier inoxydable.

L'application de cette méthode pour des couches minces risque d'être très compliquée. En effet, la relève les gradients thermiques suppose déposer des capteurs de part et d'autre de la couche supposée mince. De plus, ce qui nous intéresse est la caractérisation de la conductivité thermique de la couche mince après son élaboration (brasure et revêtement).

### **V.2.2. Mesure de la conductivité thermique en régime transitoire**

La mesure de la conductivité thermique en régime instationnaire consiste à mesurer la diffusivité thermique et en déduire la conductivité thermique. Pour relever la diffusivité d'un

matériau plusieurs méthodes peuvent être employées : Méthode du fil chaud, Flash, plan chaud, tricouches, ...etc [1]. Cependant, pour la caractérisation des couches minces, c'est la méthode Flash [1,3,4] qui est la plus populaire. Cette dernière permet d'identifier la réaction de la couche à une pulsation thermique qui lui est appliquée, voir Figure V.3.

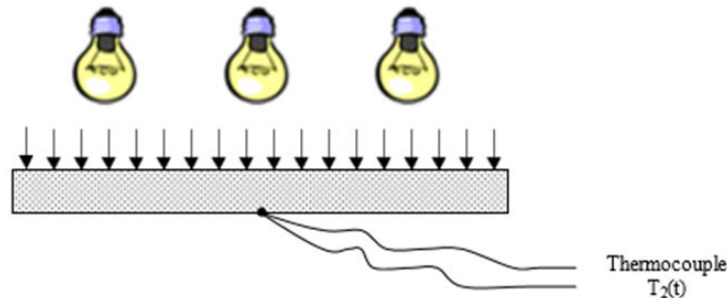


Figure.V.3. Schéma de la méthode Flash [1].

Le principe de la méthode est le suivant: On envoie une quantité d'énergie impulsionnelle sur une face de l'échantillon et à partir d'une solution analytique pour la température transitoire, proposée par Carslaw et Jaeger [14], Parker et al ont déduit une formule très simple [1] :

$$e = 1.38 \frac{a^2}{\pi^2 t_{1/2}}$$

où  $t_{1/2}$  est le temps de montée de la réponse thermique considérée de premier ordre.

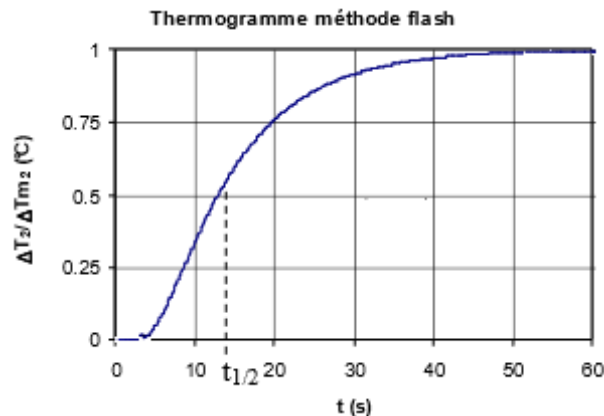


Figure.V.4. Réponse du thermocouple [1].

Ainsi, pour la mesure de la diffusivité, il ne faut que connaître l'épaisseur de l'échantillon et déterminer l'évolution de la température transitoire. Cependant, il faut aussi mesurer la chaleur spécifique à partir de la quantité d'énergie absorbée pour pouvoir déduire la conductivité thermique.

Le principe de la méthode reste relativement simple. Cependant, plusieurs hypothèses sont considérées et des précautions doivent être respectées lors de la mesure. En effet, les échanges thermiques de l'échantillon avec l'environnement doivent être négligeables. De

plus, le chauffage initial de l'échantillon doit être infiniment court et uniforme et sa température initiale doit être rigoureusement uniforme. En outre, ces conditions sont souvent trop restrictives dans la pratique ce qui exige une extension de la modélisation analytique pour prendre en compte les échanges latéraux et un dispositif expérimental maîtrisé pour contrôler la mise en œuvre de l'expérience ainsi qu'une étude de la sensibilité de la mesure aux différents paramètres de l'expérience.

En plus de ces complexités, d'autres limitations se rajoutent. En effet, le flux lumineux envoyé sur la face avant est absorbé par la surface et ne « pénètre » pas dans l'échantillon. De plus la mesure en face arrière est une grandeur proportionnelle à l'élévation de température. Ces deux conditions excluent du champ d'application, les matériaux très légers et les milieux poreux. En effet, il est très difficile de mesurer la température en surface d'un matériau très léger, la solution du thermocouple est inapplicable dans ce cas. Dans le cas d'un milieu poreux, le flash envoyé sur la face avant n'est pas absorbé intégralement au niveau de la surface, une partie pénètre dans la masse de l'échantillon à travers la porosité et fausse la mesure. Dans ces deux cas, la méthode Tricouche développée spécifiquement pour ce type de matériaux est à privilégier par rapport à la méthode Flash [1].

Dans le cas de couches minces, il est envisageable d'appliquer la méthode Flash dans le cas des revêtements. Cependant, dans le cas de brasage, il est inconcevable d'utiliser cette méthode sur une éprouvette brasée où la brasure est délimitée par d'autres substrats. Ainsi, dans ce travail, nous nous orientons vers le développement d'une méthode de caractérisation de la conductivité thermique dans les deux régimes transitoire et permanent. Cette méthode doit permettre la mesure de la connectivité thermique après l'élaboration de la structure contenant la couche mince (revêtement, brasage, collage,...). De plus, cette méthode doit être mise en œuvre par un banc d'essai simple et non coûteux.

### ***V.3. Protocole expérimental simplifié pour la caractérisation de la conductivité thermique par confrontation***

La méthode proposée dans ces travaux se base sur la confrontation du transfert thermique dans deux éprouvettes : une brasée et une autre homogène. Cette confrontation, consiste à soumettre les deux éprouvettes au même chargement et relever les températures aux mêmes localisations pour les deux éprouvettes ; et ceci de part et d'autre du joint, voir la Figure V.5:

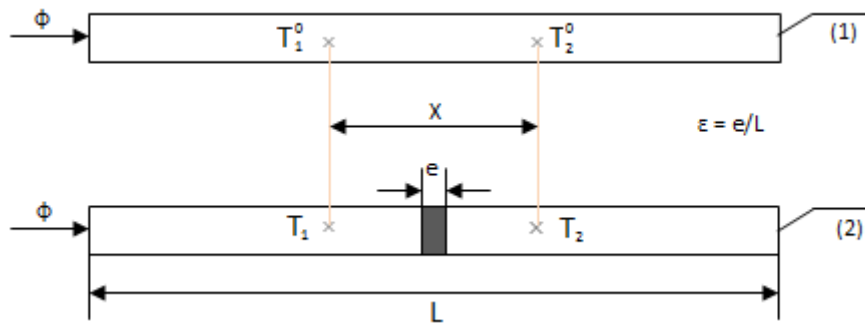


Figure.V.5. Confrontation du transfert thermique dans deux éprouvettes.

En régime permanent, il est certain que l'influence du transfert thermique dans les deux éprouvettes est due à la conductivité thermique de la couche mince. Ainsi, si nous représentons cette influence par le rapport  $\frac{\Delta T}{\Delta T^0}$ , ce dernier va être lié étroitement à  $\lambda_2$  :

$$\frac{\Delta T}{\Delta T^0} = f(\lambda_2)$$

Ainsi, notre objectif est de déterminer, analytiquement, ce lien en régime permanent. Ensuite, nous essayons de l'étendre en régime transitoire. Finalement, nous concevons un banc d'essais mettant en œuvre cette méthode.

### V.3.1. **Modèle analytique : Approche MAX-FEM pour l'identification de la conductivité thermique**

L'idée de proposer ce principe exploite les résultats des travaux de modélisation présentés dans les chapitres précédents. En effet, ce protocole est le résultat direct de l'approche MAX-FEM qui relie linéairement le saut de température à travers la couche mince à la distribution du champ de température homogène, voir Section II.2.2.2. Ce lien provient essentiellement de l'approche MAE qui relie la solution globale dans une structure assemblée et la distribution de la température dans une structure homogène. Ce résultat, nous amène à mener une réflexion sur la manière dont nous pouvons lier les deux écarts de température  $\Delta T$  et  $\Delta T^0$  en faisant apparaître la conductivité thermique de la couche mince.

Pour ce faire, nous faisons appel au développement extérieur de l'approche MAE:

$$T(x) = T^0(x) + \varepsilon T^1(x) \quad (V.1)$$

En utilisant cette expression pour le calcul de l'écart  $\Delta T = T_2 - T_1$ , nous faisons apparaître l'écart  $\Delta T^0 = T_2^0 - T_1^0$  en plus du terme de perturbation du premier ordre.

$$T_2 - T_1 = T_2^0 - T_1^0 + \varepsilon(T_2^1 - T_1^1) \quad (V.2)$$

Ainsi :

$$\Delta T = \Delta T^0 + \varepsilon(T_2^1 - T_1^1) \quad (\text{V.3})$$

Par ailleurs le terme  $\varepsilon(T_2^1 - T_1^1)$  a été approximé dans le troisième chapitre (voir équation III.13) par :

$$\varepsilon(T_2^1 - T_1^1) = \varepsilon(1-h)[T^1] \quad (\text{V.4})$$

Avec  $h = X/L$ .

Finalement, le lien entre les deux écarts et le saut de température est donné par:

$$\Delta T = \Delta T^0 + \varepsilon(1-X/L)[T^1] \quad (\text{V.5})$$

En outre, le saut de température dépend lui-même de la variation de la solution homogène :

$$[T^1] = \left( \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_2} \right) \frac{\partial T^0}{\partial x} \quad (\text{V.6})$$

ou encore :

$$[T^1] = \left( \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_2} \right) \frac{\Delta T^0}{\Delta x} \quad (\text{V.7})$$

Ainsi, en intégrant ces résultats dans l'expression (V.5), nous obtenons:

$$T_2 - T_1 = T_2^0 - T_1^0 + \varepsilon(1 - \frac{X}{L}) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) \frac{\Delta T^0}{\Delta x} = T_2^0 - T_1^0 + \varepsilon(1 - \frac{X}{L}) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) \frac{\Delta T^0}{X/L} \quad (\text{V.8})$$

En développant cette équation, nous identifions une expression liant la conductivité thermique de la couche mince au rapport  $\frac{\Delta T}{\Delta T^0}$  comme suit :

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1} \left( 1 + \frac{h}{\varepsilon(1-h)} \left( \frac{\Delta T}{\Delta T^0} - 1 \right) \right) \quad (\text{V.9})$$

Ainsi, il suffit d'appliquer cette expression pour identifier  $\lambda_2$  en régime permanent. En outre, dans ce régime, la méthode reste similaire à la méthode des résistances thermiques et il suffira d'estimer l'écart  $\Delta T^0$  par la solution analytique unidimensionnelle obtenue pour l'éprouvette homogène. Cependant, l'originalité de la méthode reste la possibilité d'étendre sa validité en régime transitoire. En effet, il est assumé précédemment (chapitre III.2.2) que l'expression du saut est valable pour tout instant  $t$ . Ainsi, l'expression V.8 reste valable en régime transitoire :

$$T_2(t) - T_1(t) = T_2^0(t) - T_1^0(t) + \varepsilon(1 - \frac{X}{L}) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) \frac{\Delta T^0(t)}{X/L} \quad (\text{V.10})$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1} \left( 1 + \frac{h}{\varepsilon(1-h)} \left( \frac{\Delta T(t)}{\Delta T^0(t)} - 1 \right) \right) \quad (\text{V.11})$$

De ce fait, l'influence de la conductivité thermique de la couche mince sur la structure assemblée à chaque instant est donnée par le rapport  $\frac{\Delta T(t)}{\Delta T^0(t)}$ . Ainsi, ce dernier doit rester constant en fonction du temps. Si ce résultat est vérifié, la conductivité thermique peut être ainsi relevée à n'importe quel instant de l'expérience sans passer par l'identification de la diffusivité thermique. Ce résultat représente l'originalité de la méthode. De plus, vu que la seule contrainte imposée au chargement et qu'il soit identique pour les deux éprouvettes, l'application d'un chargement variable peut fournir une information sur la variation de la conductivité en fonction de la température. Ce résultat peut être un atout de la méthode en cas de validité du protocole.

Un autre avantage de la méthode est la possibilité d'appliquer la même expression pour des structures et chargement bidimensionnelles. En effet, comme présenté dans le chapitre V (section V-2-2), il a été démontré que le saut de température (Equation V.12) garde un caractère unidimensionnel et peut être toujours ramené au plan de la couche mince :

$$\Delta T = \varepsilon \Delta T^1 = \varepsilon \left( \frac{\lambda_{th1}}{\lambda_{th2}} - 1 \right) \frac{\partial T^0}{\partial y}(x, 0) = \varepsilon \left( \frac{\lambda_{th1}}{\lambda_{th2}} - 1 \right) \mathbf{B}_{th,2}(x, 0) \mathbf{T}^0 \quad (V.12)$$

De ce fait, l'écart de température entre deux points d'un plan normal à la couche minces et qui sont situés de part et d'autre de cette dernière peut toujours s'écrire :

$$T_2(x, y+X/2, t) - T_1(x, y-X/2, t) = T_2^0(x, y+X/2, t) - T_1^0(x, y-X/2, t) + \varepsilon \left( 1 - \frac{X}{L} \right) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) \frac{\partial T^0}{\partial y}(x, 0, t) \quad (V.13)$$

Ainsi, l'expression (V.11) est retrouvée en approximant la dérivée  $\frac{\partial T^0}{\partial y}(x, 0, t)$  par  $\frac{\Delta T^0}{X}(t)$  :

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1} \left( 1 + \frac{h}{\varepsilon(1-h)} \left( \frac{\Delta T(t)}{\Delta T^0(t)} - 1 \right) \right) \quad (V.14)$$

Cette hypothèse reste forte et risque d'induire une erreur importante et une grande sensibilité de la méthode au positionnement des thermocouples. Ainsi, il serait préférable dans le cas où nous travaillons sur des structures bidimensionnelles, de minimiser la distance X.

Comme synthèse de cette modélisation nous pouvons dire que ce modèle permet d'alléger les conditions liées aux régimes de transfert, la direction du flux et la maîtrise de sa valeur ainsi que la nature de chargement. En effet, nous pouvons travailler, théoriquement, dans les deux régimes stationnaire et transitoire, nous pouvons appliquer des chargements variables et finalement nous pouvons travailler sur des configurations bidimensionnelles. Cependant, les deux seules contraintes imposées sont la procuration d'un chargement identique aux deux éprouvettes et la prise des mesures aux mêmes positions. Ainsi, le banc mettant en œuvre cette méthode doit respecter ces deux conditions.

### **V.3.2. Sensibilité du protocole aux points de mesure**

Avant de passer à la concrétisation de ce protocole par un banc d'essai, nous souhaitons mettre l'accent sur une limitation principale du modèle analytique. En effet, ce dernier est très sensible à la précision et la sensibilité du matériel. Comme l'indique le schéma du protocole, il faut que les mesures soient relevées aux mêmes points sur les deux éprouvettes. Cette condition nous oblige à avoir une réflexion sur le choix des moyens de mesure, leurs emplacements ainsi que leurs précisions.

Une étude numérique a été effectuée afin de vérifier l'ordre de grandeur de l'erreur en cas de non maîtrise de l'un des paramètres cités. Cette étude consiste à soumettre deux structures, une brasée et l'autre homogène, au même chargement. Ensuite en estimant l'erreur sur l'emplacement d'un thermocouple à 0.5mm, nous simulons l'erreur commise lors des mesures ainsi que leur influence sur la valeur de la conductivité. Les données de cette étude sont les suivantes :

- Nous travaillons sur des structures bidimensionnelles. En effet, dans le cas unidimensionnel, le modèle reste précis vu que la dérivée est précise alors que dans le cas bidimensionnel cette dernière engendre des erreurs importantes
- Nous considérons un modèle adimensionnel de caractéristique  $\varepsilon = e/L = 0.001$
- Nous considérons que les deux points de mesure sont séparés théoriquement de 0.1 (adimensionnel) pour les deux éprouvettes
- Le matériau de base a une conductivité  $\lambda = 26\text{W/m.K}$
- Pratiquement, pour chaque éprouvette, chaque thermocouple peut relever la mesure sur un disque de diamètre de  $1\text{mm}$
- La valeur exacte de la conductivité thermique de la brasure est  $\lambda = 90\text{W/m.K}$ .

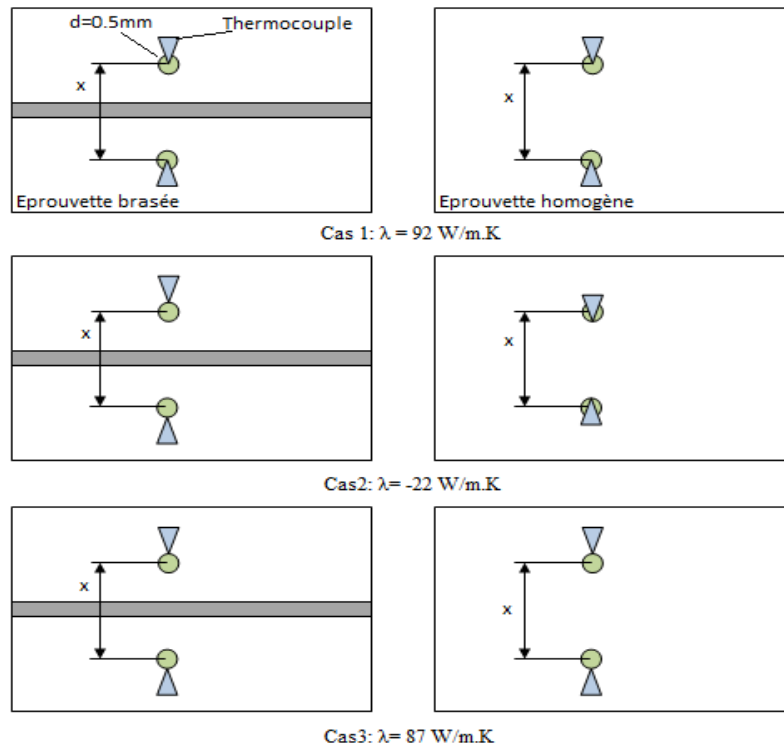
Afin d'évaluer la sensibilité de la méthode à l'erreur commise sur l'emplacement des points de mesure, nous considérons les trois cas suivants :

- Cas 1 : Le cas idéal où les thermocouples ont des positions identiques dans les deux éprouvettes
- Cas 2 : Les points de mesure ne sont pas identiques pour les deux éprouvettes et l'écart  $X$  n'est pas bien estimé
- Cas 3 : Les points de mesure sont identiques mais l'écart  $x$  n'est pas bien estimé.

La configuration et les résultats obtenus pour chaque cas sont donnés par la Figure V.6.

Des résultats obtenus, nous constatons que la précision du positionnement des instruments de mesure doit être bien contrôlée pour avoir des résultats précis. En effet, dans le cas des

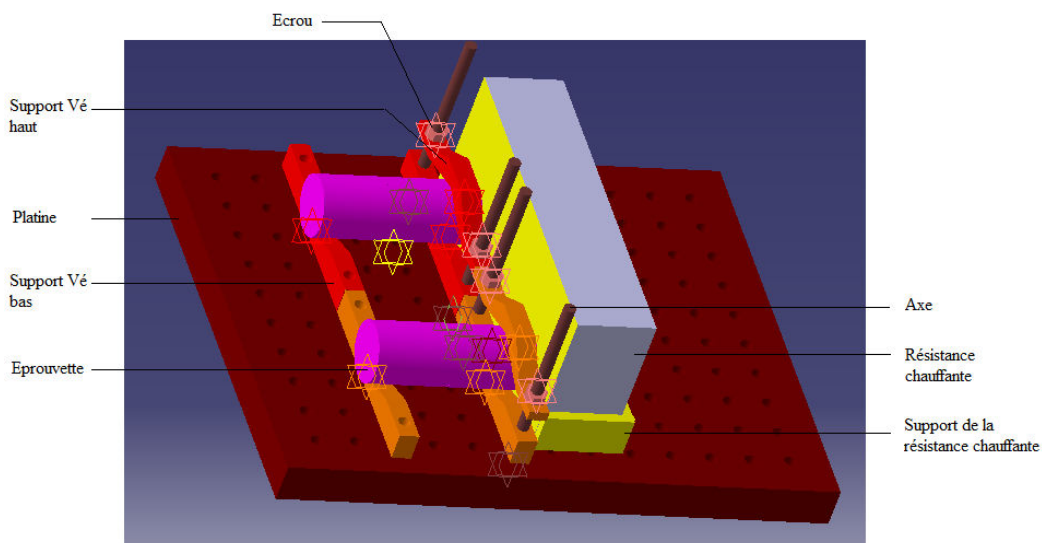
couches non isolantes, la différence enregistrée entre les deux écarts  $\Delta T$  et  $\Delta T^0$  n'est pas très importante. Ainsi, toute erreur de mesure peut cacher cette différence et fausser les résultats. Ce point constitue la principale contrainte pour la conception du banc d'essai. La conception et la réalisation de ce dernier sont présentées dans la section qui suit.



*Figure.V.6. Sensibilité du modèle à positionnement des instruments de mesure.*

## V.4. Conception du banc et première campagne des essais

### V.4.1. Banc d'essais



*Figure.V.7. Conception du banc d'essais.*



Le banc est composé des pièces simples servant à la fois comme supports des éprouvettes et en même temps comme maintient en contact des éprouvette avec le système de chauffage. Ces dernières sont des supports en V standards en plus des serres axiales pour le serrage des éprouvettes, voire figure (V.8).

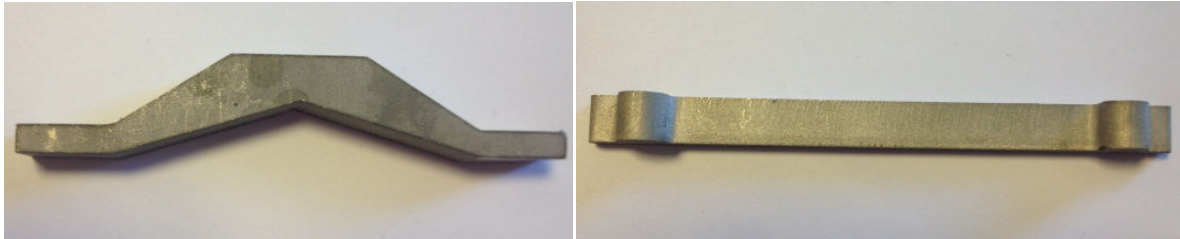


Figure.V.8. Pièces de fixation, support Vé et serre axiale.

Ensuite, nous choisissons un système de chauffe par résistance chauffante que nous allons appliquer sur les surfaces des éprouvette pour réaliser un gradient thermique, Figure (V.9).

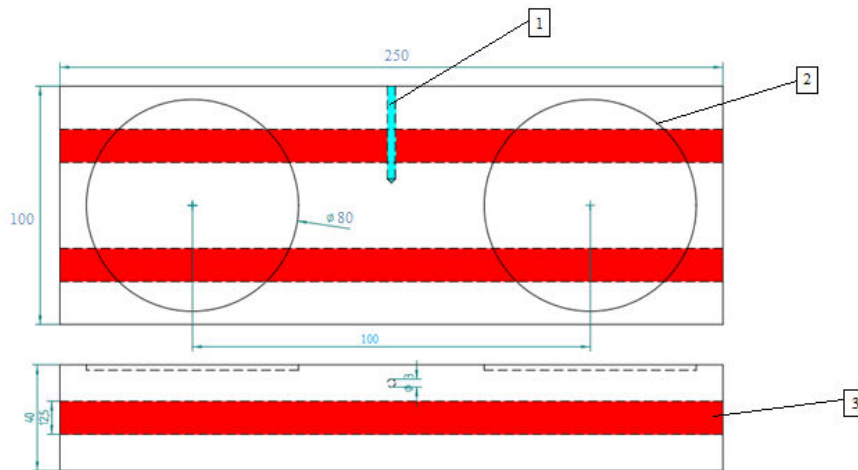


Figure.V.9. Schéma descriptif de la résistance chauffante.

Cette dernière doit avoir une température homogène sur toute la surface de chauffe et doit permettre d'appliquer des hautes températures pour une éventuelle caractérisation à haute température. Ainsi, nous choisissons une résistance qui se compose de deux éléments de chauffe d'un diamètre de  $12.5\text{mm}$  surmoulés d'un alliage de bronze. Elle atteint une température maximale de  $650^\circ\text{C}$ .

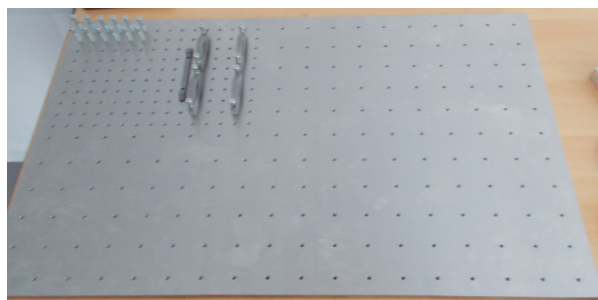


Figure.V.10. La platine et les éléments de fixation.

Le support du banc est une simple table en nid d'abeilles qui pourrait être utilisée pour d'autres applications futures (Tribomètre).

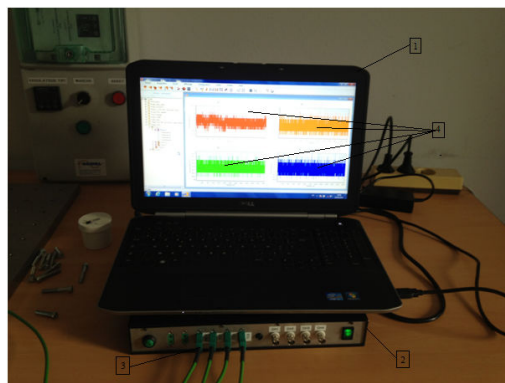
Pour le maintien des éprouvettes en contact permanent avec la résistance, nous utilisons des vis de pression réglables en hauteur grâce à des cales de réglage.

Pour relever la température dans les différentes positions choisies, Nous avons choisi des thermocouples de type K. Ces derniers fonctionnent en une plage de température allant de 0 à 1100°C et ils ont une incertitude très faible qui reste inférieure à 0.004°C en température élevée (NF EN 60-584). Ces thermocouples sont montés sur une profondeur de 10mm et sont assemblés sur les éprouvettes par une résine thermodurcissable, Figure (V.11).



*Figure.V.11. Montage des thermocouples sur les éprouvettes.*

Par ailleurs, le kit d'acquisition permet la lecture de quatre entrées simultanément, Figure V.12. Ce boîtier se caractérise par une résolution de 14bits et une fréquence permettant de relever 100 mesures par seconde.



*Figure.V.12. Kit d'acquisition.*

Finalement, des éprouvettes de dimensions 20x60 ont été réalisées à partir des matériaux utilisés pour la fabrication des outillages. La brasure (BNI-2) est un alliage à base de Nickel. Le processus de réalisation des éprouvettes respecte les contraintes du protocole. En effet, afin de garantir le bon positionnement des thermocouples, l'éprouvette brasée a été initialement

réalisée et percée de part et d'autre du joint. Ensuite, les mêmes perçages sont reproduits sur l'éprouvette homogène avant la finition des surfaces.

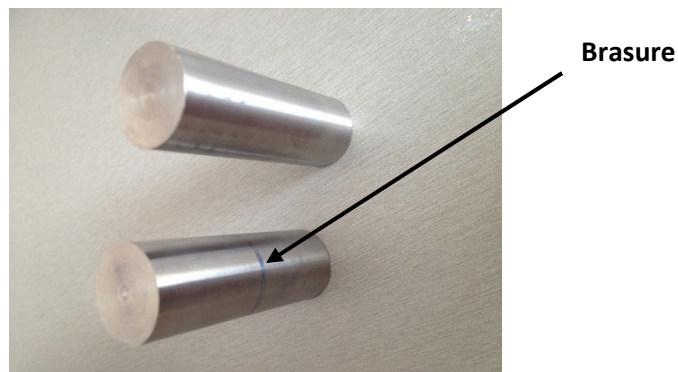


Figure.V.13. Eprouvettes homogène et brasée.

L'épaisseur de la brasure est calculée grâce à un profilomètre. L'épaisseur moyenne obtenue est  $e=0.14mm$ . Par ailleurs l'écart entre les deux point de mesure est de  $X=12mm$ .

Les éprouvettes ne sont pas revêtues pour les isoler latéralement. En effet, une telle isolation induit un régime unidimensionnel dans les éprouvettes. Cependant, travailler dans cette configuration nous amène au principe des résistances thermique et ne met pas en avant notre méthode qui reste, théoriquement, valable pour des chargements multidirectionnels. En effet, il suffit de soumettre les deux éprouvettes au même chargement et d'avoir une épaisseur négligeable de la brasure pour valider les hypothèses du modèle.

Finalement, dès la réalisation de l'ensemble de différentes composantes, nous avons réalisé le montage ci-dessous:

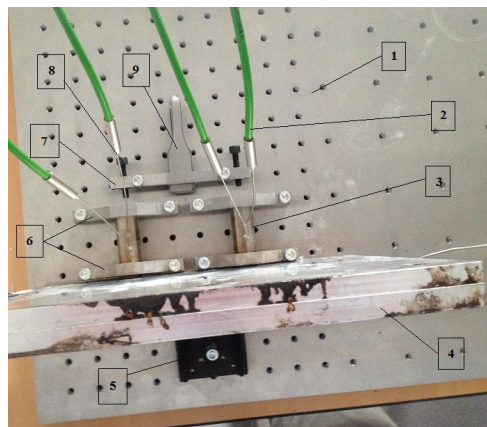


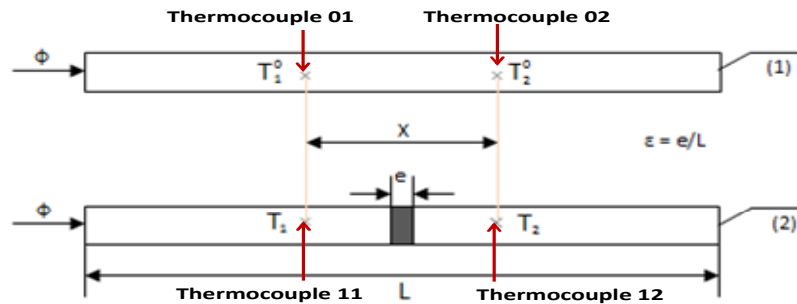
Figure.V.14. Montage expérimental.

#### V.4.2. Campagne d'essais et résultats

Nous précisons ici que la conductivité des substrats est  $\lambda_1 = 26 \text{ W/m.K}$ . Cependant, dans les travaux référencés [13] il est estimé que la conductivité de la BNI2 est égale à  $\lambda_2 =$

15W/m.K. Ainsi, l'objectif de cette section est de retrouver ce résultat par la méthode proposée.

Pour ce faire, les essais commencent par des lectures à vide des thermocouples afin de visualiser leur comportement et procéder à leur étalonnage.



*Figure.V.15. Numérotation des thermocouples.*

Ensuite, la résistance est chauffée jusqu'à sa température maximale enregistrée à 280°C et elle est mise en contact avec les éprouvettes. Une fois le thermocouple 1 affiche une température de 55°C, nous prélevons, successivement, les températures enregistrées sur les quatre thermocouples à des instants très proches sans attendre le régime permanent. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous:

*Table V.1 : Mesures relevées sur les thermocouples pour différents instants*

<i>Eprouvette homogène</i>		<i>Eprouvette brasée</i>	
<i>T01</i>	<i>T02</i>	<i>T11</i>	<i>T12</i>
55,5249	47,142	55,5681	47,1209
56,2993	48,4171	56,4586	48,5236
58,4723	50,4611	58,246	50,1851
61,2639	52,3713	61,4307	52,4733

En appliquant l'expression (V.11), les valeurs de la conductivité  $\lambda_2$  obtenues pour chaque mesure sont données par le tableau (V.2).

*Table V.2 : valeurs de la conductivité thermique  $\lambda_2$*

<i>Ecarts</i>	<i>Rapport</i>	<i>Conductivité mesurée</i>
$\Delta T^0$	R	$\lambda_2$ (W/m.K)
-8,3829	1,00767038	<b>14,271</b>
-7,8822	1,00669864	<b>15,13642</b>
-8,0112	1,00620381	<b>15,618</b>
-8,8926	1,00728696	<b>14,6</b>

Les valeurs obtenues sont très proches de la valeur de référence 15 W/m.K. En effet, la moyenne obtenue est  $\lambda_2 = 14,90$ . Ainsi l'erreur relative maximale est :

$$e = \frac{\max|\lambda_{mesurée} - \lambda_{référence}|}{\lambda_{référence}} * 100 = 4.85\%.$$

Ainsi, la méthode montre une bonne précision sans être obligé d'identifier le chargement appliqué à chaque instant. En effet, la température du contact (résistance-éprouvettes) et l'échange convectif avec l'air sont des inconnus et n'interviennent pas dans l'expression de la conductivité  $\lambda_2$ . De plus, la valeur de  $\lambda_2$  est obtenue en régime transitoire (à quelques secondes du lancement de l'essai) sans passer par la diffusivité thermique. Par ailleurs, nous avons effectué d'autres mesures après 20 mn de transfert où la température au voisinage de la brasure atteint 108 °C. Les résultats obtenus sont données par le tableau V.3.

*Table V.3 : Mesures relevées sur les thermocouples pour différents instants.*

Eprouvette homogène		Eprouvette brasée	
T01	T02	T11	T12
108,1027	94,321	108,3595	94,5068
108,1027	94,1943	108,6134	94,6363
108,1027	94,321	108,6134	94,764
108,1027	94,321	108,7416	94,8897

La température au niveau des thermocouples 01 et 02 ne varie pas. Ceci laisse penser que l'éprouvette homogène, à ce stade, a atteint ou s'approche du régime permanent. Le même constat peut être noté au niveau de l'éprouvette brasée. En effet, la variation de température est minimale.

Les nouvelles valeurs de  $\lambda_2$  sont calculées de la même manière et sont données par le tableau V.4 :

*Table V.4 : valeurs de  $\lambda_2$*

<i>Ecarts</i>		<i>Rapport</i>	<i>Conductivité mesurée</i>
$\Delta T0$	$\Delta T$	R	$\lambda_2(\text{W.m.K})$
-13,7817	-13,8527	1,00515176	<b>16,752</b>
-13,9084	-13,9771	1,00493946	<b>17,002</b>
-13,7817	-13,8494	1,00491231	<b>17,034</b>
-13,7817	-13,8519	1,00509371	<b>16,820</b>

La valeur moyenne obtenue pour ce deuxième test est  $\lambda_2 = 16,902$  avec une erreur relative maximale  $e = 13,65\%$ . Cette erreur est importante, mais avant de la lier à la précision du modèle ou aux conditions de mesure, il serait intéressant d'étudier la dépendance de la conductivité thermique de la brasure de la température. En effet, lors du premier essai, le voisinage de la brasure était à basse température 58°C tandis qu'il est à 108°C dans le deuxième test. Ce qui renforce ce constat est aussi la composition de la BNI2 qui est à base du

Nickel. Ce dernier devient un bon conducteur à haute température. Ainsi le passage de 14,90W/m.K à 16.90W/m.K peut être lié à l'effet de l'élévation de température.

Pour valider ce propos et pour mettre en avant un autre avantage de la méthode, nous appliquons un chargement variable aux deux éprouvettes. Pour ce faire, la résistance chauffante est mise en contact avec les éprouvettes dès le début de l'essai. Ainsi les éprouvettes sont soumises à une température de contact variable qui suit la montée en température de la résistance. L'enregistrement des températures au niveau des thermocouples commence dès que le premier thermocouple atteint 55°C, voir Figure (V.16).

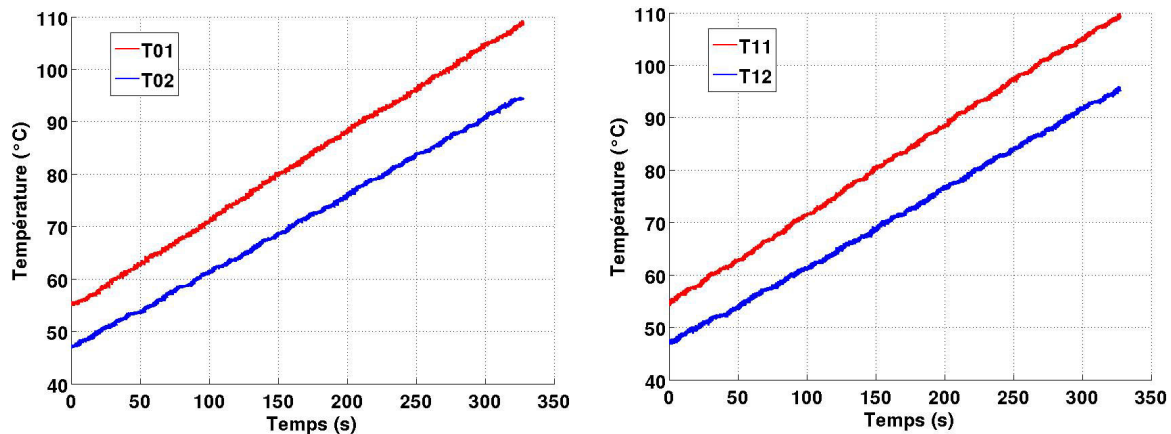


Figure.V.16. Températures relevées par les thermocouples.

Grâce à la méthode de confrontation, il n'y a aucune obligation de quantifier et mesurer avec exactitude le chargement appliqué par la résistance. En effet, le traitement des résultats repose uniquement sur le calcul du rapport  $\frac{\Delta T}{\Delta T^0}$ . Pour le calcul de ce dernier, nous passons d'abord par les deux écarts  $R_1 = \Delta T$  et  $R_0 = \Delta T^0$ , voir Figure (V.17).

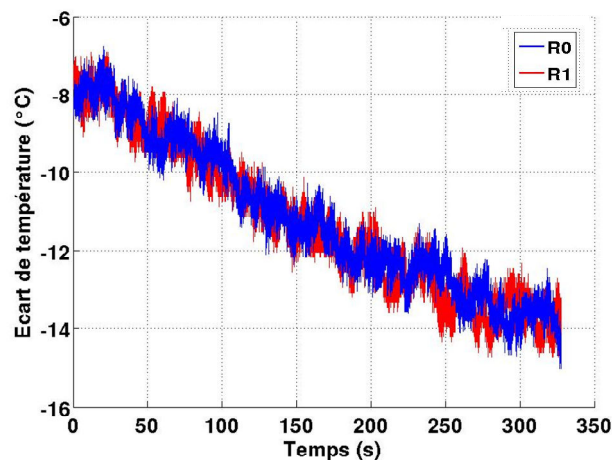


Figure.V.17. Les écarts de température dans les deux éprouvettes.

Pour éviter les bruits et les petites oscillations, un lissage de premier ordre a été utilisé sur Matlab pour approcher les deux écarts  $R_0$  et  $R_1$ . Le choix du premier ordre est issu de la tendance linéaire de ces deux rapports. En outre, d'autres lissages d'ordre supérieurs ont été testés sans aucune influence sur les résultats. Dans ce cadre, les nouvelles courbes des écarts  $R_0$  et  $R_1$  sont donnée par la figure (V.18).

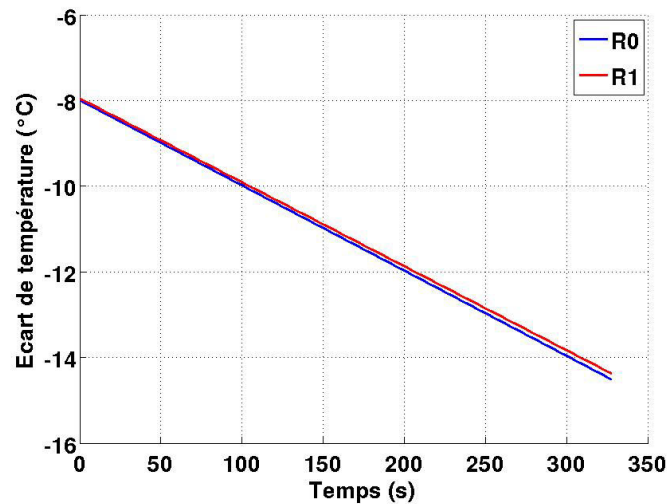


Figure.V.18. Les écarts de température après lissage.

Comme souhaité, le rapport  $R = \frac{\Delta T}{\Delta T_0}$  montre un caractère constant et ne présente qu'une faible variation, voire Figure (V.19).

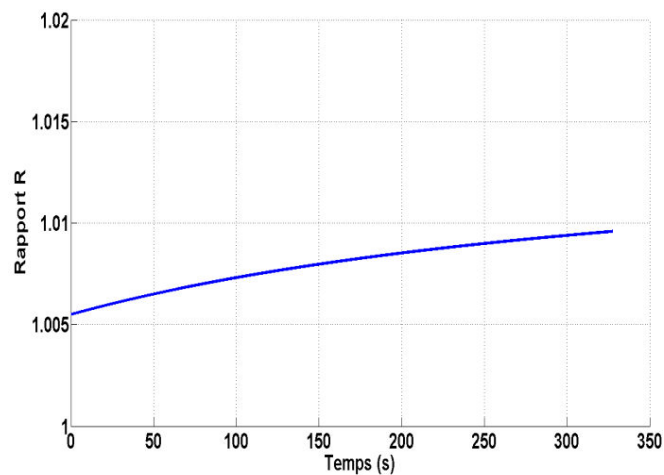


Figure.V.19. Le rapport R en fonction du temps.

Finalement la conductivité thermique peut être calculée par 'expression (V.11). L'évolution de cette dernière est donnée par la figure V.20.

Les valeurs de la conductivité thermique de la brasure sont incluses entre 13 et 16.4 W/m.K avec une moyenne de 14.81 W/m.K. En se référant toujours à la valeur 15 W/m.K, les résultats obtenus sont satisfaisants en terme de moyenne. Cependant la tendance décroissante obtenue ne reproduit pas les premiers essais révélant une tendance croissante. Ainsi, à ce stade des

travaux, nous ne pouvons pas affirmer que la tendance obtenue représente la dépendance de la conductivité de la température. Cependant, en l'absence d'informations en littérature, nous ne pouvons nier n'en plus que la BNI-2 peut devenir moins conductrice en augmentant la température. Ainsi, seule une confrontation avec une autre méthode peut révéler le bon comportement de la BNI-2 et la précision de la méthode proposée. Dans ce cadre, une confrontation avec la méthode Flash pour la caractérisation des revêtements est envisagée pour les développements futurs.

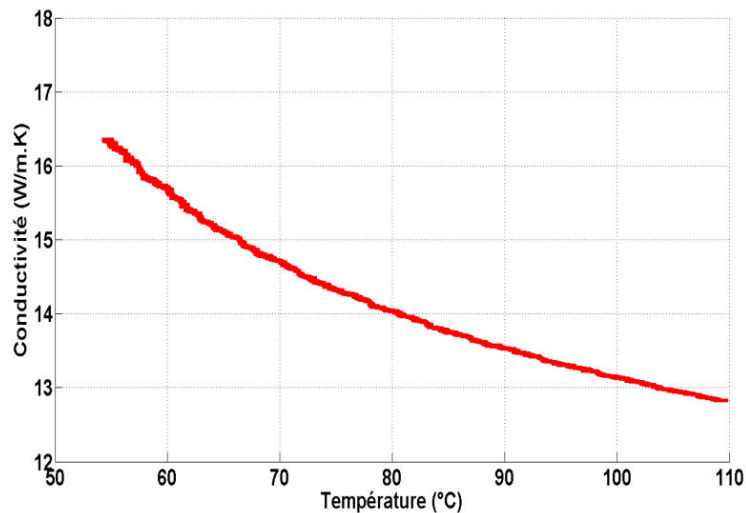


Figure.V.20. La conductivité thermique en fonction de la température.

D'un autre côté, même si nous supposons que la méthode peut révéler la variation de la conductivité en fonction de la température, il faut considérer ce comportement pour le substrat et l'intégrer dans l'expression V.11. De plus, la résistance de contact et l'effet du rayonnement qui peuvent être influents à haute température sont négligés. Ainsi, à ce stade, aucune conclusion ne peut être exploitée sauf la moyenne.

### **V.5. Conclusion**

Dans ce chapitre, un nouveau modèle analytique concrétisé par banc d'essais est introduit pour la caractérisation des couches minces (brasures) après leur élaboration. Cette nouvelle méthode simplifiée exploite les résultats de la méthode MAX-FEM pour proposer une approche de caractérisation par confrontation du comportement thermique d'une structure brasée et une homogène. Ce principe permet de se libérer des contraintes liées à la maîtrise du chargement, du régime de mesure ainsi que la configuration du transfert. En effet, par le biais de cette méthode, seules deux contraintes principales s'imposent: l'application d'un même chargement aux deux éprouvettes et la mesure aux mêmes localisations sur les deux éprouvettes.



En assurant ces deux conditions, d'autres avantages apparaissent. En effet, en n'étant pas obligés d'identifier le flux à chaque instant par une méthode analytique, il est possible d'identifier la conductivité thermique à chaque instant en appliquant le même chargement variable aux deux éprouvettes. Ainsi, l'obligation d'attendre le régime permanent est écartée et la caractérisation de la variation de la conductivité de la brasure en fonction de la température devient possible.

Un autre avantage se révèle par le caractère unidimensionnel du saut de température. En effet ce résultat permet d'éviter la condition du transfert unidimensionnel. De ce fait, il est possible de travailler sur des configurations multidimensionnelles en assurant une bonne approximation du gradient de température dans la direction normale à la couche mince.

Les travaux de développement du protocole de confrontation sont toujours en phase primaire. En effet, les résultats présentés ne sont qu'un premier test et nous donnent une idée sur les pistes à entreprendre par la suite. Cependant, les résultats obtenus sont prometteurs en termes de simplicité de mise en œuvre du banc et de l'expérience.

## Références

- [1] Yves Jannot : Théorie et pratique de la métrologie thermique, LEMTA octobre 2011.
- [2] Mesure de la diffusivité thermique et de la résistance de contact thermique des couches minces sur des substrats par la méthode impulsionnelle.
- [3] Degiovanni A. « Diffusivité et méthode flash », Revue Générale de Thermique, n°185, pp. 420-441, 1977.
- [4] Degiovanni A., Laurent A., « Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode flash », Revue de Physique Appliquée, n° 21, pp. 229-237, 1986.
- [5] Dilhaire S., Grauby S., Claeys W., Batsale J.-C., Thermal parameters identification of micrometric layers of microelectronic devices by thermoreflectance microscopy,
- [6] Gustafsson S.E., Transient hot strip techniques for measuring thermal conductivity and thermal diffusivity, The Rigaku Journal, vol. 4, n°1-2, pp. 16-28, 1987.
- [7] Hay B., Filtz J.R., Batsale J.C., Mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash , Technique de l'ingénieur, R2 995, 2002.
- [8] He Y., Rapid thermal conductivity measurement with a hot disk sensor. Part 1. Theoretical considerations. Thermochimica Acta, 436, pp. 122-129, 2005.
- [9] Hladik J., « Métrologie des propriétés thermophysiques des matériaux », Masson, 1990.
- [10] Jannot Y., Acem Z., A quadrupolar complete model of the hot disc, Measurement Science and Technology, vol.18, pp. 1229-1234, 2007.
- [11] Jannot Y., Rémy B., Degiovanni A., Measurement of Thermal Conductivity and Contact Resistance Through a Tiny Hot-Plate Experiment, High Temperatures High Pressures, 39(1), 2010.
- [12] Jannot Y., Felix V., Degiovanni A., A centered hot plate method for thermal properties measurement of thin insulating materials, Measurement Science and Technology, 2010.
- [13] Nguyen Dang Huy. Contribution à la modélisation et à la caractérisation du comportement des assemblages brasés. Couplage des méthodes DAR et X-FEM, 2009.

## Conclusion et perspectives

Dans ces travaux, une nouvelle méthode éléments finis hybride MAX-FEM a été développée pour la modélisation multi-échelles des couches minces. Ces travaux basés, sur un couplage de la MAE et la PUM, donnent comme résultat une forme FEM corrigée. Cette correction est obtenue grâce une relation linéaire dévoilée par la MAE et qui relie les sauts des champs thermomécaniques globaux (déplacement, température) aux dérivées partielles des champs homogènes. De cette liaison sont nées des matrices de correction intégrées aux matrices de rigidité et de conductivité permettant de prendre en compte toutes les propriétés géométriques et thermomécaniques de la couche mince. Ce principe de factorisation permet de simplifier l'implémentation numérique de la méthode et de réduire le nombre de calcul qui mène à la solution globale. De plus, la solution locale est obtenue par un simple post-traitement des résultats à l'aide d'expressions analytiques données par la MAE. Cette simplicité d'implémentation et la possibilité de descendre à l'échelle de la couche mince sont issues d'une étude approfondie de la MAE et constituent la première distinction de la MAX-FEM du couplage DAR-X-FEM et de la MAE.

Le principe de la méthode, qui consiste à définir un domaine équivalent sur lequel l'influence de la couche mince est projetée, peut apparaitre comme une forme d'homogénéisation. Cependant, il est important de préciser, que même si le résultat est le même, les chemins suivis sont différents. En effet, la MAX-FEM n'utilise pas le principe d'homogénéisation mais se base sur les développements asymptotiques raccordés. Par ailleurs, en admettant que l'élément MAX-FEM se procure, à travers les matrices de correction, d'un comportement global équivalent, ce résultat peut servir dans des travaux futurs à l'identification des propriétés effectives du voisinage de la couche mince.

La MAX-FEM apporte aussi une réponse à d'autres problèmes numériques fréquents pour les méthodes d'enrichissement à savoir la X-FEM, G-FEM et PUM. En effet, par son principe de factorisation, la méthode proposée assure un bon conditionnement des matrices de rigidité et de conductivité en évitant toute dépendance des deux parties de la formulation éléments finis. De plus, ce même principe permet de diminuer le nombre de degrés de liberté qui constitue une réelle limitation des autres méthodes. Finalement, l'absence physique de la couche mince dans l'élément MAX-FEM et sa substitution par les matrices de

correction permet d'éviter les problèmes liés à l'intégration numérique et le positionnement des points de Gauss par rapport à son emplacement. Ce résultat est un deuxième atout de l'approche MAX-FEM.

Différentes applications ont été traitées par la MAX-FEM. En effet, des analyses thermiques, mécaniques et thermomécaniques ont été effectuées pour des structures unidimensionnelles, axisymétriques et bidimensionnelles. Les résultats issus de ces applications ont montré la convergence de la méthode et sa grande précision. Ces performances sont prévisibles et découlent du principe de la méthode qui se présente comme une FEM corrigée. Cependant, le principal apport de la méthode par rapport à la FEM est le gain important en temps de calcul sans avoir recours à un raffinement excessif du maillage.

Les résultats obtenus pour les différentes applications montrent la libération de la MAX-FEM des limitations de la MAE. En effet, contrairement à la MAE, l'hétérogénéité des propriétés des matériaux (couche mince/ substrats) n'a pas d'incident sur la précision des résultats. De plus, la MAX-FEM apporte une réponse aux problèmes des bords auxquels se confronte la MAE. Ce résultat a été mis en évidence en traitant des applications de revêtements ainsi qu'en montrant que la solution respecte bien les conditions aux limites imposées près des bords. Comme cela a été expliqué dans le troisième chapitre, cet avantage que montre la MAX-FEM vis-à-vis de la MAE est principalement dû au principe de factorisation introduit par la MAX-FEM.

Les applications considérées traitent aussi des structures avec plusieurs couches minces. Pour ce type de structure, la formulation éléments finis doit capter les couches minces et intégrer son influence dans l'élément qui la contient. Pour cela, une nouvelle expression de la fonction Heaviside a été introduite afin de permettre la représentation des assemblages stratifiés contenant plusieurs joints brasés. D'un autre côté, dans le cas des structures soumises à un chargement thermomécanique, la différence des coefficients de dilatation thermique (couches minces/substrats) engendre des concentrations de contraintes au niveau des couches minces. Ce résultat est reproduit par la MAX-FEM en corrigeant l'effort thermique par un terme intégrant le rapport des coefficients de dilatation thermique. Ainsi, ces deux extensions permettront de converger vers l'application industrielle qui traite des structures stratifiées soumises à un chargement thermomécanique.

A partir des différentes analyses élaborées, plusieurs avantages ont été montrés par la MAX-FEM sur le plan numérique. En outre, cette approche a un réel atout sur le plan expérimental. En effet, ramener la solution globale à une correction de la solution homogène a conduit à la mise en place d'un nouveau protocole expérimental pour la caractérisation thermique des couches minces. Ce protocole permet, grâce à un banc

d'essai, de confronter le transfert thermique dans une éprouvette homogène à une éprouvette brasée afin d'identifier la conductivité thermique de la brasure après son élaboration. Cette identification peut se faire sous les deux régimes transitoire et permanent et sans être obligé de connaître avec précision le chargement imposé. De plus, les éprouvettes peuvent être de nature quelconque sans imposer un transfert unidimensionnel. Ainsi, ce protocole permet de se libérer des contraintes auxquelles sont confrontées les méthodes de caractérisation thermique classiques, à savoir la plaque chaude gardée et la méthode Flash. En effet, la seule contrainte imposée est de soumettre les deux éprouvettes aux mêmes conditions en termes de chargement, de fixation et de points de mesures. Les résultats obtenus, dans le cadre de caractérisation de la BNI-2, montrent une bonne précision du protocole en se référant à la littérature.

A partir des différents points soulignés, l'approche MAX-FEM se présente comme un outil efficace pour la modélisation et la caractérisation des couches minces. Elle montre plusieurs atouts et permet de surmonter plusieurs limitations en comparaison avec d'autres méthodes. Cependant, différents points doivent être traités afin de perfectionner cet outil numérique :

### **(i) Développements tridimensionnels**

Pour une application industrielle plus large, il serait intéressant de traiter des outillages stratifiés en 3D. Nous nous sommes à des applications 2D-axysymétriques ayant servi pour la modélisation des outillages tests sans pouvoir s'étendre à des structures tridimensionnelles. En effet, l'approche MAX-FEM est une nouvelle méthode qui nécessite encore plus de temps et plus de développements.

### **(ii) Problèmes des bords**

La méthode MAX-FEM permet de traiter certains problèmes de bords à savoir les revêtements et le respect des conditions aux limites aux bords. Cependant, dans le cas de joints débouchants chargés, l'élément MAX-FEM ne prend pas en considération le chargement présent dans le joint. En effet, l'une des principales hypothèses considérées est celle considérant que les deux problèmes extérieur et homogène sont soumis au même chargement. Afin de traiter cette problématique, il est envisageable de positionner les nœuds de l'élément enrichis sur la position de la couche mince. Ainsi, en prétendant le même principe que les revêtements, il serait possible d'intégrer le chargement de la couche mince dans l'effort correspondant à ces nœuds.

### **(iii) Problèmes non-linéaires**

Les développements mécaniques menés dans ces travaux de thèse ne traitent que des applications d'élasticité linéaire. En outre, en s'étendant à des problèmes non-linéaires, le risque de perdre la linéarité donnée par la MAE et qui permet de construire les matrices de correction est bien réel. Ainsi, l'approche MAX-FEM ne serait plus utile malgré qu'il soit possible de suivre le même schéma en s'intéressant à la matrice tangente. En effet, en corrigeant cette dernière de manière similaire à la matrice de rigidité, des résultats valides pourraient être obtenus. De plus, les travaux de Schmidt [1] traitant l'endommagement des joints adhésifs par MAE pourraient être de grande utilité. Cependant, dans ces travaux, nous nous sommes restreints à des applications d'élasticité linéaire en restant ouvert à une extension pour pouvoir traiter les problèmes d'endommagement, de rupture ductile, de délaminage, ...etc.

### **(iv) Géométries des couches minces**

A ce stade, seul des couches minces planes ont été traitées. Il serait nécessaire de s'étendre à des géométries plus complexes, à savoir des joints emboîtés, des revêtements sur des surfaces courbes,...etc. Ainsi, une nouvelle stratégie d'enrichissement doit être mise en place pour localiser la couche mince et prendre en compte son influence avec précision. Pour cela, une réflexion doit être menée sur l'utilité des fonctions « Level-sets » [2].

### **(v) Epaisseur non-uniforme des couches minces**

C'est un point qui n'a pas été traité dans ces travaux, mais qui ne représente pas de difficulté particulière. En effet, il suffit d'intégrer une expression analytique ou discrète de la variation de l'épaisseur dans les calculs.

### **(vi) Concertation de contraintes**

Dans le cas des joints emboîtés par exemple, les singularités géométriques vont certainement engendrer des concentrations de contraintes que la méthode ne peut prendre en considération à sa forme actuelle. Ainsi, une nouvelle formulation éléments finis intégrant ces singularités devrait être proposée. Dans ce cadre, les fonctions asymptotiques utilisées pour la modélisation des pointes de fissures pourraient être envisageables [3].

### **(vii) Type d'éléments enrichis**

Dans les présents travaux, des éléments structurés ont été utilisés. Ces derniers simplifient les développements numériques et le partage du saut de part et d'autre des couches minces. En outre, une étude de la sensibilité de la méthode au maillage serait nécessaire pour tester ses performances en donnant plus de liberté au maillage.

- [1] P. Schmidt, U. Edlund, Analysis of adhesively bonded joints: a finite element method and a material model with damage, *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 66 (2006) 1271–1308.
- [2] N. Moes, J. Dolbow, T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer.Meth.Engrg*. 46 (1999) 131–150.
- [3] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level-sets in the extended finite-element method. *Int. J. Solids Struct., Comput.Method. Appl. M.*, 6183-6200 :190, 2001.





---

## Abstract

This work introduces a new simplified finite elements method MAX-FEM based on hybrid analytical-numerical coupling. This method is intended to the multi-scales analysis of transient thermomechanical behavior of mediums containing thin layers such as bounded and coated structures. The MAX-FEM consists in correcting the classical Finite Elements Method (FEM) by correction matrices taking into account the presence of thin layers without any mesh refinement. The proposed correction is based on the analytical approach of Matched Asymptotic Expansions (MAE) and the numerical method of Partition of Unity Method (PUM). The developed approach can easily implemented under different numerical codes (MATLAB, ABAQUS, ...) and can be used to perform mechanical, thermal and thermomechanical analyses of 1D and 2D bounded and coated structures. The obtained results show a good accuracy with short computation time, and without any required mesh refinement. Also, the developed method overcomes the limitation of the MAE and PUM methods by exploiting the advantages of their coupling. Finally, the MAX-FEM approach was also used to develop an experimental test bench intended to the thermal characterization of thin layers. Indeed, a simple confrontation between the heat transfer in an homogeneous structure and a second structure with thin layer allows identifying the thermal conductivity in both transient and stationary regimes. The test bench is simple to release and the obtained results for brazed structure show a good accuracy of the developed approach.

**Keywords:** Thin layers, bounded structures, coated structures, Matched Asymptotic Expansions, MAE, PUM, MAX-FEM, hybrid technique, thermal characterization, Thermal conductivity, test bench.



---

## Résumé

De cette thèse, une nouvelle méthode éléments finis hybride MAX-FEM dédiée à la modélisation thermomécanique des structures avec couches minces a été développée. Cette nouvelle approche se base sur un couplage analytique-numérique de deux méthodes : les Développements Asymptotiques Raccordés (MAE) et la Partition de l'Unité (PUM). Ce couplage consiste à construire l'enrichissement de la PUM par MAE est mène à une forme corrigée de la méthode des éléments finis classique (FEM). Cette correction est obtenue à travers des matrices de correction contenant les informations géométriques et caractéristiques du matériau de la couche mince. Les matrices introduites par l'approche MAX-FEM simplifient son implémentation numérique sous différents codes de calculs (MATLAB, ABAQUS, ...) et permettent l'obtention de la solution globale en un seul calcul. Les résultats obtenus par la MAX-FEM pour des applications 1D et 2D thermomécaniques montrent une très bonne précision avec un temps de calcul minimal et sans raffinement de maillage. De plus, la MAX-FEM surmonte les limitations de la MAE ainsi que celle de la PUM en termes de nombre de calculs, de la sensibilité aux propriétés des matériaux, des conditions aux limites ainsi que l'intégration numérique. Finalement, l'approche MAX-FEM est exploitée pour le développement d'un nouveau protocole expérimental dédié à la caractérisation thermique des couches minces. Ce protocole vise l'identification, de manière simple, de la conductivité thermique de la couche mince après son élaboration et sous les deux régimes transitoire et permanent. L'approche consiste à confronter la nature du transfert thermique d'une éprouvette homogène à une contenant une couche mince. La différence relevée est directement liée à la conductivité thermique de la couche mince. Les résultats obtenus, après réalisation du banc d'essais, montrent une bonne précision de l'approche avec une méthodologie de mesure simple à mettre en œuvre.

**Mots clés:** Couches minces, Développements Asymptotiques Raccordés structures, MAE, PUM, MAX-FEM, couplage, méthode hybride, caractérisation thermique, conductivité thermique, banc d'essais.