



**HAL**  
open science

**Modélisation non-locale du comportement  
thermomécanique d'Alliages à Mémoire de Forme  
(AMF) avec prise en compte de la localisation et des  
effets de la chaleur latente lors de la transformation de  
phase : application aux structures minces en AMF**

Kodjo Mawuli Armattooé

► **To cite this version:**

Kodjo Mawuli Armattooé. Modélisation non-locale du comportement thermomécanique d'Alliages à Mémoire de Forme (AMF) avec prise en compte de la localisation et des effets de la chaleur latente lors de la transformation de phase : application aux structures minces en AMF. Autre. Université de Lorraine, 2014. Français. NNT : 2014LORR0053 . tel-01750761

**HAL Id: tel-01750761**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750761>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**Modélisation non-locale du comportement  
thermomécanique d'Alliages à Mémoire de Forme  
(AMF) avec prise en compte de la localisation et des  
effets de la chaleur latente lors de la transformation de  
phase : Application aux structures minces en AMF**

**THÈSE**

présentée et soutenue publiquement le 26 Juin 2014

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Lorraine**  
(Spécialité Mécanique et Énergétique)

par

**ARMATTOE Kodjo Mawuli**

**Composition du jury**

*Rapporteurs :* Djimédo Kondo, Professeur, Université Pierre et Marie Curie  
Ziad Moumni, Professeur, ENSTA Paristech

*Examineurs :* Etienne Patoor, Professeur, Arts et Métiers Paristech, CER de Metz  
Celine Bouby, Maître de Conférences, Université de Lorraine  
Mohamed Haboussi, Professeur, Université Paris 13, Co-directeur de thèse  
Tarak Ben Zineb, Professeur, Université de Lorraine, Directeur de thèse

Mis en page avec la classe thesul.

## Remerciements

L'aboutissement de cette thèse est l'heureux dénouement d'une longue aventure parsemée de moments riches en émotions ; une alternance entre une traversée de désert où tout paraît incertain et des jours plutôt lumineux. Dans cette aventure, j'ai embarqué toute une équipe de personnes très sympathiques du LEMTA (Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée) à qui je me dois de témoigner ici toute ma gratitude.

J'exprime mes sincères remerciements à mes directeurs de thèse Tarak Ben Zineb et Mohamed Haboussi qui ont su diriger avec compétence et délicatesse mes travaux de recherche. Leurs conseils scientifiques, leur soutien, leur patience ont permis à ce travail de voir le jour. Je remercie tout particulièrement Tarak pour son encadrement et sa disponibilité au quotidien durant tout le long de cette thèse.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury pour l'étude et l'analyse de mon mémoire : Messieurs Djimédo Kondo et Ziad Moumni d'avoir accepté d'évaluer ce travail et Monsieur Etienne Patoor qui a accepté de présider le jury de ma soutenance de thèse.

Un grand merci à toute l'équipe pédagogique de l'option de fin d'études « MSM » à l'ESSTIN (École Supérieure des Sciences et Technologies de l'Ingénieur de Nancy) : Patrice Bacher, Valérie Berry-Kromer, Céline Bouby, Alain Mikolazjak et Frédéric Thiébaud (par ordre alphabétique des noms), pour le dynamisme et la bonne ambiance au sein du groupe. Je tiens à remercier particulièrement Céline Bouby ; sa disponibilité, ses conseils et nos échanges scientifiques m'ont beaucoup aidé dans l'avancement de cette thèse. Mes remerciements vont également à Valérie Berry-Kromer pour ces encouragements. Je remercie aussi tout le personnel de l'ESSTIN.

Je remercie mes collègues Aliaa, Amani, Louis-Marc, Vitek et Walid pour la bonne ambiance au bureau et pour nos divers échanges. Ma gratitude s'adresse également aux anciens doctorants de l'équipe notamment Arnaud Duval avec qui j'ai beaucoup échangé au début de ma thèse.

Enfin, je voudrais exprimer ma profonde gratitude à toute ma famille et à tous mes amis qui ont su me soutenir et m'encourager durant toutes mes études.



*A mes défunts parents  
Que Dieu leur accorde Sa miséricorde et Sa paix  
A toute ma famille  
A tous mes amis*





# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xi</b>
<b>Chapitre 1</b>	
<b>Comportement thermomécanique instable des structures minces en AMF</b>	<b>1</b>
1.1 Description des AMF . . . . .	2
1.1.1 Généralités sur les AMF . . . . .	2
1.1.2 Comportement thermomécanique des AMF . . . . .	4
1.1.3 Applications industrielles des AMF : cas des micro-systèmes . . . . .	6
1.1.4 Influence de la chaleur latente de transformation sur le comportement des AMF . . . . .	13
1.2 Instabilités liées à la transformation de phase dans les structures minces en AMF	17
1.2.1 Effets de taille . . . . .	17
1.2.2 Phénomènes de localisation . . . . .	23
1.3 Modélisation du comportement thermomécanique des AMF . . . . .	26
1.3.1 Modèles micromécaniques . . . . .	26
1.3.2 Modèles basés sur la définition de l'énergie libre . . . . .	27
1.3.3 Modèles basés sur la théorie de la plasticité . . . . .	27
1.3.4 Modèles basés sur la dynamique moléculaire . . . . .	28
1.4 Modélisation du comportement thermomécanique instable des structures minces en AMF . . . . .	28
1.4.1 Modèles basés sur le potentiel de Landau-Ginzburg . . . . .	28
1.4.2 Modèles basés sur les approches non-locales . . . . .	29
1.4.3 Prise en compte de l'effet de la chaleur latente de transformation dans la modélisation du comportement des structures minces en AMF . . . . .	32
1.5 Conclusion . . . . .	34

**Chapitre 2**

**Modèle local du comportement thermomécanique des AMF**

2.1	Introduction . . . . .	36
2.2	Mécanismes de déformation et choix des variables internes . . . . .	36
2.3	Potentiel thermodynamique . . . . .	38
2.4	Forces motrices thermodynamiques . . . . .	41
2.5	Expressions de la dissipation . . . . .	42
2.6	Modélisation et gestion numérique des limitations physiques . . . . .	44
2.7	Conditions d’activations et lois d’évolution . . . . .	45
2.7.1	Transformation de phase . . . . .	45
2.7.2	Orientation des variantes de martensite . . . . .	45
2.7.3	Tableau récapitulatif des paramètres du modèle . . . . .	46
2.8	Implémentation numérique du modèle . . . . .	47
2.8.1	Définition des résidus . . . . .	47
2.8.2	Méthode de résolution . . . . .	47
2.8.3	Calcul des modules tangents cohérents . . . . .	48
2.9	Validation du modèle . . . . .	50
2.9.1	Validation du modèle de comportement sur des cas de chargement homogène	50
2.9.2	Application au calcul de structures : plaque trouée en AMF . . . . .	54
2.10	Conclusion . . . . .	60

**Chapitre 3**

**Modèle non-local du comportement thermomécanique des AMF**

3.1	Introduction . . . . .	62
3.2	Modélisation des instabilités dans les structures minces en AMF . . . . .	62
3.3	Modélisation du comportement des structures minces en AMF basée sur une ap- proche non-locale . . . . .	63
3.3.1	Sur la modélisation par une approche non-locale . . . . .	63
3.3.2	Les formulations intégrales . . . . .	64
3.3.3	Les formulations à gradient . . . . .	65
3.3.4	Application de l’approche non-locale implicite à la modélisation du com- portement des AMF . . . . .	67
3.4	Développement d’un élément fini 2D à contraintes planes basé sur le modèle non- local des AMF . . . . .	68
3.4.1	Équations du modèle non-local . . . . .	69
3.4.2	Formulation faible . . . . .	69
3.4.3	Formulation par éléments finis du problème non-local . . . . .	70

3.5	Validation numérique et discussions . . . . .	73
3.5.1	Simulation de la réponse d'une plaque en AMF superélastique avec un défaut matériel sollicitée en traction . . . . .	73
3.5.2	Analyse de la transformation de phase dans une plaque mince trouée sous chargement thermomécanique . . . . .	82
3.5.3	Analyse de l'influence de la taille du défaut sur le phénomène de localisation de la transformation de phase dans une plaque en AMF sous chargement thermomécanique . . . . .	87
3.6	Conclusion . . . . .	99

<b>Chapitre 4</b>
-------------------

<b>Prise en compte des effets de la chaleur latente</b>
---

4.1	Introduction . . . . .	102
4.2	Couplage thermomécanique dans les modèles de comportement des AMF . . . . .	102
4.2.1	Principaux concepts sur le couplage thermomécanique dans les AMF . . . . .	102
4.2.2	Prise en compte des effets de la chaleur latente . . . . .	103
4.3	Élément fini 2D pour le couplage thermomécanique fort dans les AMF . . . . .	106
4.3.1	Equations du modèle pour le couplage thermomécanique dans les AMF . . . . .	107
4.3.2	Formulation intégrale . . . . .	107
4.3.3	Discrétisation spatiale . . . . .	108
4.4	Validation numérique et discussion . . . . .	111
4.4.1	Test de traction avec une température initiale uniforme imposée . . . . .	113
4.4.2	Chargement de traction avec un champ de température non-uniforme . . . . .	116
4.5	Prise en compte de l'effet de la chaleur latente de transformation dans une approche non-locale . . . . .	121
4.5.1	Problème couplé thermomécanique non-local . . . . .	121
4.5.2	Formulation faible . . . . .	122
4.5.3	Discrétisation spatiale . . . . .	123
4.6	Conclusion . . . . .	126

<b>Conclusion générale</b>	<b>129</b>
----------------------------	------------

<b>Annexes</b>
----------------

<b>Annexe A</b>
-----------------

<b>Calcul des matrices <math>[B^u]</math> et <math>[B^{\bar{J}}]</math></b>
---

<b>Bibliographie</b>	<b>135</b>
----------------------	------------



# Introduction générale

Les matériaux ont toujours été au cœur des grandes innovations technologiques dans divers secteurs industriels tels que l'informatique, l'aéronautique, l'automobile ou encore le biomédical. Outre les raisons économiques, ces derniers sont souvent sélectionnés en fonction de leurs propriétés et de leur aptitude à la mise en forme.

Durant ces dernières décennies, les ingénieurs et les chercheurs, entraînés dans une quête constante de solutions de plus en plus innovantes, ne cessent d'œuvrer à la recherche et à l'élaboration de nouveaux matériaux toujours plus performants; ceci dans le but d'améliorer les applications développées en termes de poids, de résistance et de qualité.

Parmi ces nouveaux matériaux, un engouement particulier a été porté aux matériaux multifonctionnels (adaptatifs ou intelligents) à l'instar des céramiques ferroélectriques à couplage électromécanique, des matériaux magnétostrictifs à couplage magnétomécanique, et des alliages à mémoire de forme (AMF) à couplage thermomécanique. Ces derniers sont naturellement capables de changer leurs propriétés physiques en fonction de l'environnement dans lequel ils se trouvent ou en fonction de la sollicitation à laquelle ils sont soumis. Ils ont ainsi suscité de nombreux travaux de recherche ayant abouti aujourd'hui à de nombreuses applications.

Les AMF et spécialement la famille des alliages à base de NiTi sont incontestablement parmi les matériaux multifonctionnels les plus étudiés et disposent d'un très grand nombre d'applications; les efforts réalisés du point de vue scientifique sont tout à fait remarquables et confirment cette position. On dispose en effet d'un spectre assez large de travaux consacrés à la caractérisation expérimentale et à la modélisation de leurs différents comportements spécifiques. En plus de leur caractère multifonctionnel et de leur capacité à convertir l'énergie, ils possèdent également un ratio puissance/poids très élevé et sont de ce fait très adaptés au développement des micro-applications (micro-pompes, micro-actionneurs, etc.). Ces dernières sont généralement fabriquées à partir des structures minces d'AMF (fils et films).

Cependant, en raison de leur taille relativement faible, les structures minces en AMF laissent apparaître des instabilités de comportement qu'on ne voit pas dans les AMF massifs et qui débouchent sur des problèmes de localisation de la transformation et donc de la déformation. Des effets de taille des grains sont également observés pour ces structures minces à cette échelle. Le développement important d'applications miniaturisées utilisant les propriétés des AMF, rend désormais indispensable, la compréhension et la maîtrise de tels phénomènes instables. De plus, la prise en compte de ces derniers dans les modèles de comportement dédiés aux AMF s'avère nécessaire en vue de la mise en place d'outils numériques de dimensionnement.

Malgré les importantes avancées réalisées sur la modélisation du comportement thermomécanique des AMF et en particulier à base de NiTi, il existe très peu de modèles dédiés à la description du comportement des structures minces en AMF rendant compte des phénomènes de localisation et des effets de taille. De plus, la transformation de phase dans les AMF s'accompagne d'une production de chaleur latente de transformation qui influence l'évolution de la transformation. Là également, la plupart des modèles disponibles dans la littérature ne prennent

pas en compte les effets de cette chaleur latente de transformation sur le comportement des AMF.

L'objectif de ces travaux de thèse est d'apporter une contribution à la modélisation du comportement thermomécanique instable des AMF, en particulier en NiTi. La modélisation proposée est basée sur une approche non-locale ; elle vise essentiellement la description des phénomènes de localisation de la transformation de phase ainsi que la prise en compte des effets de la chaleur latente de transformation sur le comportement des AMF.

Le présent document de thèse est structuré en quatre chapitres. Le *premier chapitre* présente l'état de l'art sur l'étude du comportement des AMF et est scindé en deux parties. La première partie décrit de manière succincte le comportement des AMF, leurs propriétés et quelques exemples d'applications exploitant ces propriétés. Sont ensuite décrits de façon détaillée, les phénomènes instables observés dans les AMF lors de la transformation de phase. La deuxième partie de ce premier chapitre présente les différentes approches utilisées pour la modélisation du comportement des AMF. Un accent particulier est mis sur les approches retenues pour la modélisation des instabilités et du fort couplage thermomécanique dans les AMF.

Dans le *second chapitre*, nous présentons le modèle de comportement local des AMF qui servira de base à la modélisation non-locale proposée dans le présent travail de thèse. Ce modèle local est issu des travaux de thèse de Yves Chemisky [10] et Arnaud Duval [19], proposé en version 3D et 2D contraintes planes. Les différents mécanismes responsables du comportement macroscopique des AMF y ont été décrits à l'aide de variables bien choisies (les variables internes du modèle). Les différentes équations permettant de décrire l'évolution de ces variables ont été établies à partir de la définition d'un potentiel thermodynamique et d'une expression de la dissipation. Finalement, l'implémentation du modèle dans un code de calcul par éléments finis (Abaqus) et sa capacité à être utilisé comme un outil de dimensionnement de structures minces en AMF ont été validées sur divers exemples.

Eu égard à leur taille relativement faible, le comportement des structures minces en AMF (films et fils) n'est pas identique à celui des AMF massifs ; il est souvent marqué par la présence d'instabilités liées au caractère hétérogène de la transformation de phase. Le modèle des AMF présenté dans le chapitre précédent est développé dans un contexte local et est incapable de capturer de telles instabilités. Nous nous proposons par conséquent de l'étendre à un contexte non-local. La mise en place de ce modèle, son implémentation numérique dans le logiciel Abaqus et la validation de sa capacité à prédire les phénomènes instables observés dans les films minces d'AMF constituent les principaux objectifs du *troisième chapitre*.

Les modèles décrits dans le *second* et le *troisième* chapitre, sont consacrés à l'étude du comportement des structures minces en AMF. Ils sont développés dans l'hypothèse où la source de chaleur interne liée à la transformation de phase est négligée. Toutefois, cette chaleur latente peut fortement modifier le champ de température dans l'alliage et par ce biais, modifier également leur réponse mécanique face à une sollicitation. Le quatrième chapitre du présent document sera donc consacré à la prise en compte des effets de la chaleur latente de transformation dans la modélisation du comportement des structures minces en AMF. Ce manuscrit se termine par une conclusion générale et des perspectives.

# Table des figures

1.1	Pseudo-diagramme de phase d'un alliage à mémoire de forme. . . . .	2
1.2	Morphologie de la martensite induite : (a) thermiquement et (b) mécaniquement, d'après [64]. . . . .	3
1.3	Comportement superélastique d'un alliage à mémoire de forme : (a) Trajet de chargement et (b) réponse contrainte-déformation. . . . .	4
1.4	Comportement effet mémoire de forme : (a) Trajet de chargement et (b) Comportement dans l'espace température-contrainte-déformation. . . . .	6
1.5	Figure illustrant l'effet coactoutique d'un AMF d'après [31]. . . . .	7
1.6	Micrographie électronique d'une micro-pince pour la manipulation d'une lentille submillimétrique (à gauche). Forme souhaitée découpée au laser (1) et cycle thermomécanique sous contrainte constante (processus d'éducation) (2), principe de fonctionnement (3) (à droite), d'après [6]. . . . .	7
1.7	Comportement dans un état hors équilibre d'un alliage NiTi-Cu (a) et d'un alliage NiTi (b) d'après [6]. . . . .	8
1.8	Structure et fonctionnement d'une micro-pompe utilisant une membrane en alliage à mémoire de forme d'après [54]. . . . .	9
1.9	Évaluation de la performance de l'actionneur d'après [54]. . . . .	9
1.10	Évaluation de la performance de l'actionneur d'après [54]. . . . .	10
1.11	Étude du taux de pompage de la micro-pompe d'après [54]. . . . .	11
1.12	Prototype d'un amortisseur en AMF, d'après [62]. . . . .	11
1.13	Réalisation du dispositif d'amortissement : ressort - élément de recentrage (a), élément dissipateur d'énergie (b), amortisseur - dispositif fonctionnel complet d'après [62]. . . . .	12
1.14	Configuration du micro-amortisseur : avant chargement (a), après chargement (b), d'après [62]. . . . .	12
1.15	Chaleur latente de transformation. . . . .	14
1.16	Comparaison des courbes contrainte-déformation, évolution de la déformation et de la température au cours des expériences dans l'eau et dans l'air ( $\dot{\delta}/L = 4.10^{-4} s^{-1}$ ), d'après [81]. . . . .	15
1.17	Représentation schématique de la réponse contrainte-déformation d'une barre d'AMF : traction isotherme (faible vitesse de déformation et/ou forts échanges thermiques) (a); traction non-isotherme (vitesse de déformation élevée et/ou faibles échanges thermiques) (b), d'après [36]. . . . .	16

1.18	Effet exothermique pour un chargement superélastique à la température $T_{ext}$ . L'augmentation de la température nécessite une contrainte plus élevée pour poursuivre la transformation et engendre un effet de vitesse de déformation. Les conditions isothermique (a) et adiabatique (b) sont les limites inférieures et supérieures des courbes contrainte-déformation résultantes, d'après [23]. . . . .	16
1.19	Courbes contrainte-déformation à différentes températures pour un fil de diamètre important (a-d) et un fil de diamètre faible (e-h) sur deux cycles consécutifs. . . . .	17
1.20	Contrainte de début de transformation martensitique ( $\sigma_{Ms}$ ) en fonction de la température, ainsi que les contraintes moyennes de transformation ( $\sigma_M$ et $\sigma_A$ ), pour le fil de diamètre 466 $\mu\text{m}$ (symboles creux), et le fil de diamètre 26 $\mu\text{m}$ (symboles pleins) extraites des tests présentées sur la figure 1.19 . . . . .	18
1.21	Courbes de contrainte-déformation pour quatre micro-fils, montrant l'augmentation de la taille d'hystérésis lorsque le diamètre des fils diminue (a-d). Les courbes sont tracées pour deux chargements consécutifs. Diagramme contrainte-température des 4 micro-fils (e). . . . .	19
1.22	Pourcentage de déplacement récupérable en fonction du diamètre des piliers pour le premier et le second cycle de décharge (respectivement symboles creux et pleins) pour les échantillons testés. . . . .	20
1.23	Courbes déformation-température sous une contrainte constante de 100 MPa pour des films minces de NiTi de différentes épaisseurs d'après [39]. . . . .	20
1.24	Déformations de transformation et déformation plastique en fonction de l'épaisseur des films minces de NiTi (a). Températures de transformation en fonction de l'épaisseur des films minces de NiTi (b), d'après [39]. . . . .	21
1.25	Coupe de films minces de NiTi cristallisés montrant les mécanismes à l'origine de la résistance à la déformation, d'après [39]. . . . .	22
1.26	Courbe déformation-température de films minces de NiTi d'épaisseurs différentes d'après [28]. . . . .	22
1.27	Représentation schématique des réponses : (a) locale contrainte-déformation, (b) force-élongation globale. Configurations de l'échantillon avant, durant et après la transformation de phase martensitique [15]. . . . .	23
1.28	Représentation schématique des bandes de transformation : (a) tube avant transformation, (b) présence d'un domaine ou bande de transformation martensitique de forme hélicoïdale dans le cas d'un tube, (c) bande de transformation dans le cas d'une plaque mince, d'après [33]. . . . .	24
1.29	Réponse contrainte-déformation et morphologie des tubes : (a) cas d'un chargement en traction, (b) cas d'une torsion pure, d'après [85]. . . . .	24
1.30	Résumé d'une partie d'un test de traction uniaxiale à la vitesse $\dot{\delta}/L = 10^{-4} \text{s}^{-1}$ , d'après [83]. . . . .	25
1.31	Barre sollicitée en traction (a) ; courbe contrainte-déformation dans le cas d'un adoucissement linéaire (b) ; branches de bifurcation post-pic de la réponse force-déplacement de la barre, d'après [40]. . . . .	30
1.32	Multiple valeurs de déformations correspondant à un même niveau de contrainte (a) ; Distribution de la déformation constante par morceaux (b), d'après [40]. . . . .	30
1.33	Dépendance de la réponse contrainte-déformation d'un film en NiTi à la vitesse de chargement, d'après [35]. . . . .	32
2.1	Algorithme de résolution des équations par la méthode des éléments finis . . . . .	49
2.2	Simulation des différents comportements observés dans les AMF . . . . .	51



2.3	Tests de traction à différentes températures . . . . .	52
2.4	Simulation du refroidissement-chauffage à contrainte constante . . . . .	53
2.5	Plaque trouée en AMF étudiée . . . . .	55
2.6	Répartition de la fraction volumique pour différents niveaux de déformation . . . . .	56
2.7	Evolution de la fraction volumique de martensite le long de la ligne AB . . . . .	57
2.8	Réponse force déplacement de la plaque trouée . . . . .	57
2.9	Répartition de la fraction volumique de martensite dans la plaque en fonction de la température . . . . .	58
2.10	Evolution de la fraction volumique de martensite le long de la ligne AB pour différentes températures . . . . .	59
2.11	Déformation locale dans les éléments $E_1$ et $E_2$ et globale en fonction de la température . . . . .	59
2.12	Evolution des fractions volumiques de martensite globale dans la plaque et locale dans les éléments $E_1$ et $E_2$ en fonction de la température . . . . .	60
3.1	Définition du domaine d'interaction entre un point matériel ( $\vec{x}$ ) et son voisinage décrit par le vecteur position $\vec{y}$ d'après Duval et al. [20]. . . . .	64
3.2	Element quadrangulaire développé avec les degrés de liberté retenus, d'après [20]. . . . .	70
3.3	Algorithme de résolution implanté dans le logiciel Abaqus. . . . .	72
3.4	Plaque étudiée en AMF : (a) Dimensions en millimètres, (b) Chargement mécanique appliqué (c) Maillage, conditions aux limites et ligne AB de sortie des résultats. . . . .	74
3.5	Courbes contrainte-déformation globales ( $\frac{F}{S}, \frac{u}{L}$ ) pour différentes valeurs du paramètre $H_{\bar{f}}$ (problème homogène, pas d'imperfection). . . . .	75
3.6	Réponses loi locale et loi non-locale . . . . .	76
3.7	Evolution en fonction du temps de la contrainte nominale, de la déformation nominale, des fractions volumiques non-locales dans la zone de défaut et au sein de la plaque pour $l = 0.5\text{mm}$ et $H_{\bar{f}} = 2$ . . . . .	77
3.8	Courbes contrainte-déformation nominales pour différentes valeurs du paramètre $l$ ( $H_{\bar{f}} = 2$ ). . . . .	78
3.9	Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long du chemin AB pour différents niveaux de déformation $l = 0.5$ mm et $H_{\bar{f}} = 2$ . . . . .	79
3.10	Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long du chemin AB pour différents niveaux de déformation et différentes valeurs du paramètre de longueur interne ( $H_{\bar{f}} = 2$ ). . . . .	80
3.11	Courbes contrainte-déformation pour $l = 5$ mm et $l = 25$ mm ( $H_{\bar{f}} = 2$ ). . . . .	81
3.12	Courbes contrainte-déformation et distribution de la fraction volumique non-locale dans la bande en AMF pour $l = 1$ mm et $H_{\bar{f}} = 2$ . . . . .	82
3.13	Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite lors du refroidissement de la plaque $l = 0.5$ mm et $H_{\bar{f}} = 0.5$ . . . . .	84
3.14	Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite en fonction de la température dans les éléments $E_1$ et $E_2$ ( $l = 0.5$ mm et $H_{\bar{f}} = 0.5$ ). . . . .	85
3.15	Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long du chemin AB ( $l = 0.5$ mm et $H_{\bar{f}} = 0.5$ ). . . . .	85
3.16	Courbes contrainte-déformation globale et locales dans les éléments $E_1$ et $E_2$ ( $l = 0.5$ mm et $H_{\bar{f}} = 0.5$ ). . . . .	86
3.17	Evolution de la déformation globale et locales dans les éléments $E_1$ et $E_2$ en fonction de la température ( $l = 0.5$ mm et $H_{\bar{f}} = 0.5$ ). . . . .	86

3.18	Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long du chemin AB ( $l = 0.5$ mm et $H_{\bar{f}} = 0.5$ ). . . . .	87
3.19	Courbes contrainte-déformation globale et locales dans les éléments $E_1$ et $E_2$ ( $l = 0.5$ mm et $H_{\bar{f}} = 0.5$ ). . . . .	88
3.20	Plaque étudiée : (a) dimensions en mm ; (b) chargement thermomécanique appliqué. . . . .	88
3.21	Maillage - conditions aux limites - lignes et éléments $E_1$ et $E_2$ de sortie des résultats : (a) défaut matériel ; (b) défaut géométrique. . . . .	89
3.22	Distribution de la fraction volumique locale de martensite pour différentes valeurs du rayon du trou dans le cas de la loi locale . . . . .	90
3.23	Evolution des déformations globale et locales dans les éléments $E_1$ et $E_2$ en fonction de la température dans le cas de la loi locale (rayon du défaut géométrique $r = 10$ mm). . . . .	91
3.24	Evolution de la fraction volumique de martensite dans les éléments $E_1$ et $E_2$ en fonction de la température dans le cas de la loi locale (rayon du défaut géométrique $r = 10$ mm). . . . .	91
3.25	Distribution spatiale de la fraction volumique non-locale de martensite pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne $l$ (cas du défaut matériel avec un rayon de 10 mm). . . . .	93
3.26	Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long de la ligne AB pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne $l$ (cas du défaut matériel avec un rayon de 10 mm). . . . .	94
3.27	Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite dans l'élément $E_1$ pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne $l$ (cas du défaut matériel avec un rayon de 10 mm). . . . .	94
3.28	Distribution spatiale de la fraction volumique non-locale de martensite durant le refroidissement pour différentes valeurs du défaut géométrique ( $l = 1$ mm). . . . .	95
3.29	Distribution spatiale de la fraction volumique non-locale de martensite pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne et du rayon du défaut géométrique pour $T = -15^\circ$ C . . . . .	96
3.30	Evolution de la fraction volumique non-locale le long de la ligne AB pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne et pour un rayon de 10 mm du défaut géométrique à $T = -15^\circ$ C. . . . .	97
3.31	Evolution de la fraction volumique non-locale le long de la ligne AB pour différentes valeurs du rayon du défaut géométrique à $T = -15^\circ$ C ( $l = 0.1$ mm). . . . .	97
3.32	Evolution de la fraction volumique non-locale le long de la ligne AB pour différentes valeurs du rayon du défaut géométrique à $T = -15^\circ$ C ( $l = 10$ mm). . . . .	98
3.33	Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite dans l'élément $E_1$ pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne (rayon du défaut géométrique égal à 10 mm). . . . .	98
3.34	Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite dans l'élément $E_2$ pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne (rayon du défaut géométrique égal à 10 mm). . . . .	99
3.35	Evolution des déformations globale et locales dans les éléments $E_1$ et $E_2$ en fonction de la contrainte et de la température (rayon du défaut géométrique égal à 10 mm et $l = 0.1$ mm). . . . .	99
4.1	Élément fini quadrangulaire développé avec les trois degrés de liberté retenus. . . . .	108
4.2	Schéma de résolution du problème couplé thermomécanique implanté dans Abaqus. . . . .	111

---

4.3	Plaque étudiée en AMF : (a) Dimensions en mm ; (b) Chargement appliqué ; (c) Maillage, conditions aux limites et éléments de sortie des résultats. . . . .	112
4.4	Evolution dans le temps de la température de la plaque, de la contrainte et de la déformation nominales : (a) pour une température initiale de 20° C ; (b) pour une température initiale de 70° C. . . . .	113
4.5	Courbes contrainte-déformation nominales avec et sans prise en compte des effets de la chaleur latente de transformation : (a) pour une température initiale de 20° C ; (b) pour une température initiale de 70° C. . . . .	115
4.6	Variation de la température de la plaque en fonction de la déformation nominale avec et sans prise en compte des effets de la chaleur latente de transformation : (a) pour une température initiale de 20° C ; (b) pour une température initiale de 70° C. . . . .	115
4.7	Réponse contrainte-déformation nominale en fonction de la vitesse de déformation.	116
4.8	Variation de la température de la plaque en fonction de la vitesse de déformation.	117
4.9	Variation de la température de la plaque en fonction de la vitesse de déformation (avec $\dot{\epsilon}_0 = 6 \times 10^{-6}$ et $\dot{\epsilon} \geq \dot{\epsilon}_0$ ). . . . .	117
4.10	Variation de la contrainte maximale atteinte au sein de la plaque en fonction de la vitesse de déformation. . . . .	118
4.11	Distribution spatiale de la fraction volumique de martensite et champ de température dans la plaque pour différentes vitesses de déformation. . . . .	118
4.12	Réponse dans l'élément E <sub>2</sub> pour les différentes vitesses : (a) Variation de la température en fonction de la déformation ; (b) Evolution de la fraction volumique de martensite en fonction de la déformation. . . . .	119
4.13	Réponse dans l'élément E <sub>1</sub> pour les différentes vitesses : (a) Variation de la température en fonction de la déformation ; (b) Evolution de la fraction volumique de martensite en fonction de la déformation. . . . .	120
4.14	Contrainte-déformation dans les éléments : (a) E <sub>1</sub> ; (b) E <sub>2</sub> . . . . .	121
4.15	Élément fini quadrangulaire développé avec les quatre degrés de liberté retenus (élément associé à un élément de référence). . . . .	123
4.16	Algorithme de résolution du problème couplé thermomécanique non-local. . . . .	126



# Liste des tableaux

2.1	Paramètres matériaux du modèle. . . . .	46
2.2	Valeurs des paramètres matériaux utilisés. . . . .	50
3.1	Equations constitutives du modèle de comportement non-local des AMF . . . . .	69
3.2	Valeurs des paramètres matériaux au sein du défaut. . . . .	73
3.3	Valeurs des paramètres matériaux dans le reste de la plaque. . . . .	74
3.4	Valeurs des paramètres matériaux. . . . .	89
4.1	Valeurs des paramètres matériaux. . . . .	112



# Comportement thermomécanique instable des structures minces en AMF

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Description des AMF</b> . . . . .	<b>2</b>
1.1.1	Généralités sur les AMF . . . . .	2
1.1.2	Comportement thermomécanique des AMF . . . . .	4
1.1.3	Applications industrielles des AMF : cas des micro-systèmes . . . . .	6
1.1.4	Influence de la chaleur latente de transformation sur le comportement des AMF . . . . .	13
<b>1.2</b>	<b>Instabilités liées à la transformation de phase dans les structures minces en AMF</b> . . . . .	<b>17</b>
1.2.1	Effets de taille . . . . .	17
1.2.2	Phénomènes de localisation . . . . .	23
<b>1.3</b>	<b>Modélisation du comportement thermomécanique des AMF</b> . . . . .	<b>26</b>
1.3.1	Modèles micromécaniques . . . . .	26
1.3.2	Modèles basés sur la définition de l'énergie libre . . . . .	27
1.3.3	Modèles basés sur la théorie de la plasticité . . . . .	27
1.3.4	Modèles basés sur la dynamique moléculaire . . . . .	28
<b>1.4</b>	<b>Modélisation du comportement thermomécanique instable des structures minces en AMF</b> . . . . .	<b>28</b>
1.4.1	Modèles basés sur le potentiel de Landau-Ginzburg . . . . .	28
1.4.2	Modèles basés sur les approches non-locales . . . . .	29
1.4.3	Prise en compte de l'effet de la chaleur latente de transformation dans la modélisation du comportement des structures minces en AMF . . . . .	32
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>34</b>

---

## Résumé

Ce premier chapitre est subdivisé en quatre parties. Dans la première partie, une brève description du comportement des alliages à mémoire de forme est proposée. Elle est suivie dans la deuxième partie de la présentation des différentes approches proposées dans la littérature en vue de modéliser ce comportement. La troisième partie de ce chapitre est consacrée à la description des phénomènes instables observés lors de la transition de phase dans les structures minces en AMF. Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre, nous présenterons un résumé des travaux réalisés dans le but de modéliser ces phénomènes instables ; en particulier les notions de base d'une modélisation par une approche non-locale seront présentées.

## 1.1 Description des AMF

### 1.1.1 Généralités sur les AMF

Découverts dans les années 1930, les alliages à mémoire de forme (AMF) se distinguent des autres alliages par leurs comportements thermomécaniques tout à fait remarquables. L'effet mémoire de forme, qui a donné son nom à cette famille d'alliages, ne représente qu'un des nombreux comportements spécifiques de ces matériaux; il exprime leur aptitude à recouvrer totalement leur forme initiale, par un simple chauffage, même après une importante déformation. Ce comportement distinctif des AMF est la conséquence d'une transformation martensitique entre une phase mère austénitique stable à haute température et une phase produite appelée martensite métastable à basse température. La martensite formée se présente généralement sous forme de plaquettes appelées variantes de martensite.

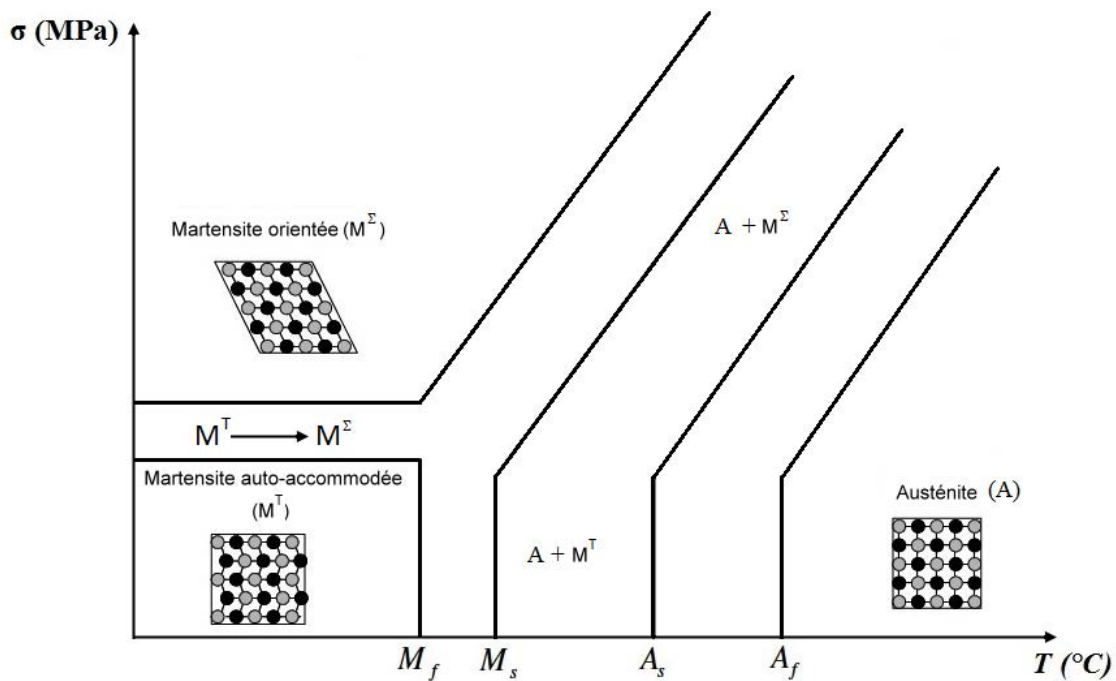


FIGURE 1.1 – Pseudo-diagramme de phase d'un alliage à mémoire de forme.

La transformation de phase dans les AMF est de type solide-solide, où les deux phases n'ont pas les mêmes structures cristallographiques : l'austénite est généralement cubique et la martensite est tétragonale, orthorhombique ou monoclinique. La transition d'une structure à l'autre se produit sans variation de volume, sans diffusion d'atomes et est quasi-instantanée. Elle est due à une déformation principalement déviatorique du réseau cristallin. Notons que cette transformation est du premier ordre, ne s'accompagne pas d'une variation de la composition chimique; et totalement réversible. Elle est ainsi qualifiée de transformation martensitique thermoélastique. Le concept de transformation martensitique thermoélastique, par opposition à la transformation martensitique dans les aciers, considérée comme un processus irréversible, est introduit en 1949 par Kurdjumov et Kandhros en se basant sur des observations expérimentales de la structure martensitique thermique réversible des alliages CuZn et CuAl [49].

Les deux variables thermodynamiques externes qui contrôlent la transformation martensitique



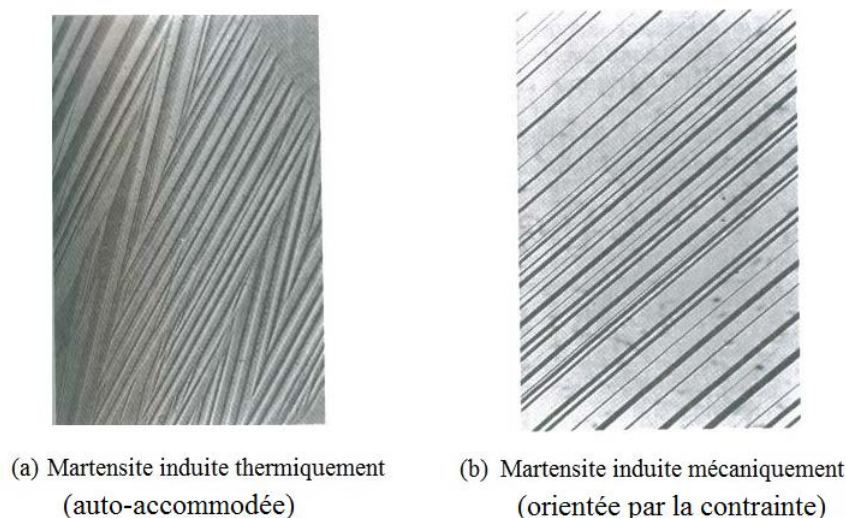


FIGURE 1.2 – Morphologie de la martensite induite : (a) thermiquement et (b) mécaniquement, d'après [64].

dans les alliages à mémoire de forme sont la température et la contrainte. Un pseudo-diagramme de transformation peut donc être établi dans l'espace contrainte-température. La figure 1.1 représente un exemple généralement admis de ce pseudo-diagramme. Elle montre en effet que la transformation martensitique se produit sous des conditions thermomécaniques spécifiques. En l'absence de contrainte, elle commence à la température " $M_s$ " ou "*Martensite start*" et se termine à la température " $M_f$ " ou "*Martensite finish*". Dans les mêmes conditions, l'austénite commence par se former à la température " $A_s$ " ou "*Austenite start*" et se termine à la température " $A_f$ " ou "*Austenite finish*".

Lorsque la martensite est formée en l'absence de contraintes, elle est appelée martensite thermique ou formée auto-accommodée avec des variantes de martensite ayant des directions et orientations différentes de telle sorte que la déformation résultante soit nulle. Lorsqu'une contrainte est appliquée à la martensite thermique, au-delà d'une valeur seuil appelée contrainte critique de réorientation, les variantes de martensite vont s'orienter dans la direction de la contrainte : il s'agit de la réorientation de la martensite. La martensite orientée peut également être créée directement à partir de l'austénite par l'application d'une contrainte.

Le retour à la phase austénitique se fait toujours soit, par une augmentation de température, soit par une simple décharge lorsque la température de l'essai est supérieure à la température " $A_f$ ". La figure 1.2, extraite de [64], montre la différence entre les variantes de martensite orientées et auto-accommodées dans un AMF à base de cuivre.

La description de la transformation de phase dans les alliages à mémoire de forme proposée ici est très succincte ; une explication plus détaillée de cette transformation ainsi que des différents mécanismes entrant en jeu est proposée dans les références suivantes : [10], [19], [31], [64].

Les alliages à mémoire de forme sont généralement constitués de deux, trois voire quatre composants. Selon leur composition, il existe trois grandes familles :

- alliages à base de nickel-titane (NiTi, NiTiCu...),
- les alliages à base de cuivre (Cu-Al-Be, Cu-Zn-Al),
- les alliages à base de fer (Fe-Mn-Si, Fe-Pt...).

Les propriétés physiques et mécaniques, les avantages et inconvénients, les comportements thermomécaniques de chaque famille constituent des éléments déterminants dans le choix de ces matériaux pour les applications qui couvrent désormais divers secteurs industriels tels que l'aéronautique, l'automobile, le biomédical. Les alliages à base de Nickel-Titane sont parmi les plus couramment utilisés ; c'est sur cette classe d'alliages que porte le présent travail.

### 1.1.2 Comportement thermomécanique des AMF

La transformation de phase martensitique thermoélastique dans les AMF induit une importante déformation inélastique réversible dans ces derniers et est à l'origine de leurs différents comportements macroscopiques. Dans le présent paragraphe nous allons décrire brièvement ces différents comportements.

#### La superélasticité

Le trajet de chargement correspondant de même que la courbe contrainte-déformation équivalente sont présentés sur les figures 1.3 (a) et (b). Lorsqu'on applique à une température supérieure à la température de fin de transformation inverse ( $T > A_f$ ), un chargement mécanique suffisamment élevé, des variantes de martensite orientées dans la direction de la contrainte vont se former laissant apparaître une importante déformation macroscopique due à la transformation de phase ②.

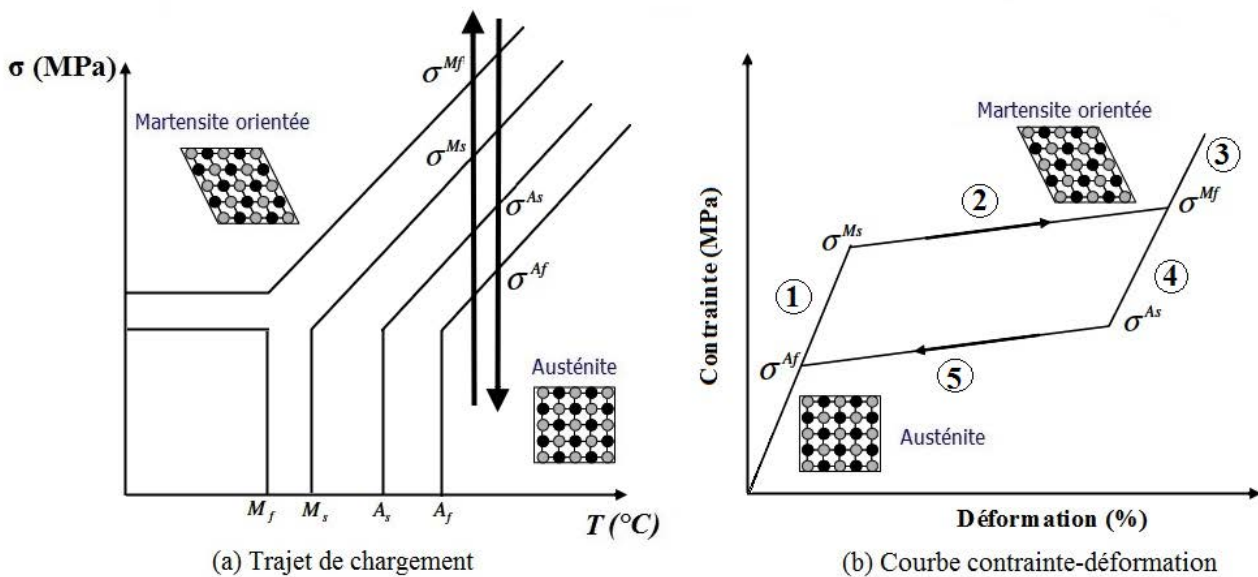


FIGURE 1.3 – Comportement superélastique d'un alliage à mémoire de forme : (a) Trajet de chargement et (b) réponse contrainte-déformation.

Après saturation de la transformation ③, on retrouve le comportement élastique de la martensite. Si on relâche la contrainte ④, la transformation de phase inverse se produit ; les variantes de martensite formées disparaissent progressivement au profit de l'austénite ⑤. La déformation de transformation est alors totalement récupérée et l'alliage retrouve son état austénitique initial. Ce type de chargement met en évidence le comportement superélastique d'un AMF. Comme l'indique la figure 1.3 (b), une dissipation d'énergie accompagne la transformation de phase et

laisse apparaître une hystérésis entre les transformations directe et inverse. Les contraintes de début et de fin de transformation martensitique sont respectivement notées :  $\sigma^{Ms}$  et  $\sigma^{Mf}$ . De même pendant la décharge, la transformation inverse débute à la contrainte  $\sigma^{As}$  et s'achève à la contrainte  $\sigma^{Af}$ , figure 1.3.

### L'effet mémoire de forme simple sens

Considérons un alliage à mémoire de forme dans un état purement austénitique ( $T > A_f$ ) ; un refroidissement en l'absence de contrainte et en dessous des températures de transformation directe  $M_s$  et  $M_f$  génère de la martensite sans induire de la déformation de transformation à l'échelle macroscopique (martensite auto-accommodée) ①, figure 1.4 (b).

Lorsqu'on applique par la suite un chargement mécanique au-delà d'une contrainte appelée contrainte limite de réorientation, le processus de réorientation des variantes de martensite va s'enclencher ② : certaines variantes mieux orientées par rapport à la contrainte appliquée croissent au détriment des autres. Une déformation macroscopique apparaît alors, liée au processus de réorientation des variantes. Lorsque la contrainte est relâchée, les variantes de martensite restent orientées et la déformation n'est pas récupérée ③. Lors d'un chauffage jusqu'à une température supérieure à  $A_f$  et en l'absence de contrainte, la transformation inverse se produit, la déformation disparaît et l'alliage retrouve la phase austénitique initiale ④. La figure 1.4 décrit le trajet de chargement thermomécanique, mettant en œuvre le comportement effet mémoire de forme simple sens, ainsi que le comportement correspondant dans l'espace température-déformation-contrainte d'un AMF.

### L'effet mémoire de forme double sens

Les alliages à mémoire de forme possèdent une forme stable à haute température. A basse température, ils existent sous une forme auto-accommodée (forme non stable ou métastable de la martensite). Comme le souligne le trajet de chargement décrivant l'effet mémoire simple sens (figure 1.4 (a)), l'application d'un chargement mécanique est nécessaire, à basse température, pour orienter les variantes auto-accommodées. Il est toutefois possible grâce à un "conditionnement" de donner deux formes stables aux AMF :

- une à haute température (forme austénitique),
- une à basse température (forme martensitique).

Le conditionnement consiste à soumettre l'alliage à un cycle thermique sous contrainte qui a pour but de générer des contraintes internes (précipités, dislocations, défauts...) au sein de l'alliage. Ce champ de contraintes internes a pour effet d'orienter les variantes qui se forment lors d'un refroidissement sans contraintes appliquées. Ainsi lors des cycles thermiques suivants à contrainte nulle, les variantes de martensite formées présenteront une orientation préférentielle conférant une forme stable à l'alliage à basse température.

### L'effet caoutchoutique

Ce type de comportement s'observe dans un alliage à mémoire de forme à l'état martensitique ( $T < M_f$ ). En effet lorsqu'on soumet l'alliage à un chargement cyclique à partir d'un état initial déformé, on observe un phénomène d'hystérésis, synonyme d'une dissipation d'énergie (voir figure 1.5). Selon [31], ce phénomène peut-être expliqué par le mouvement partiel réversible des interfaces. L'alliage peut dès lors être utilisé dans des dispositifs permettant d'atténuer les vibrations mécaniques ou d'amortir les chocs.

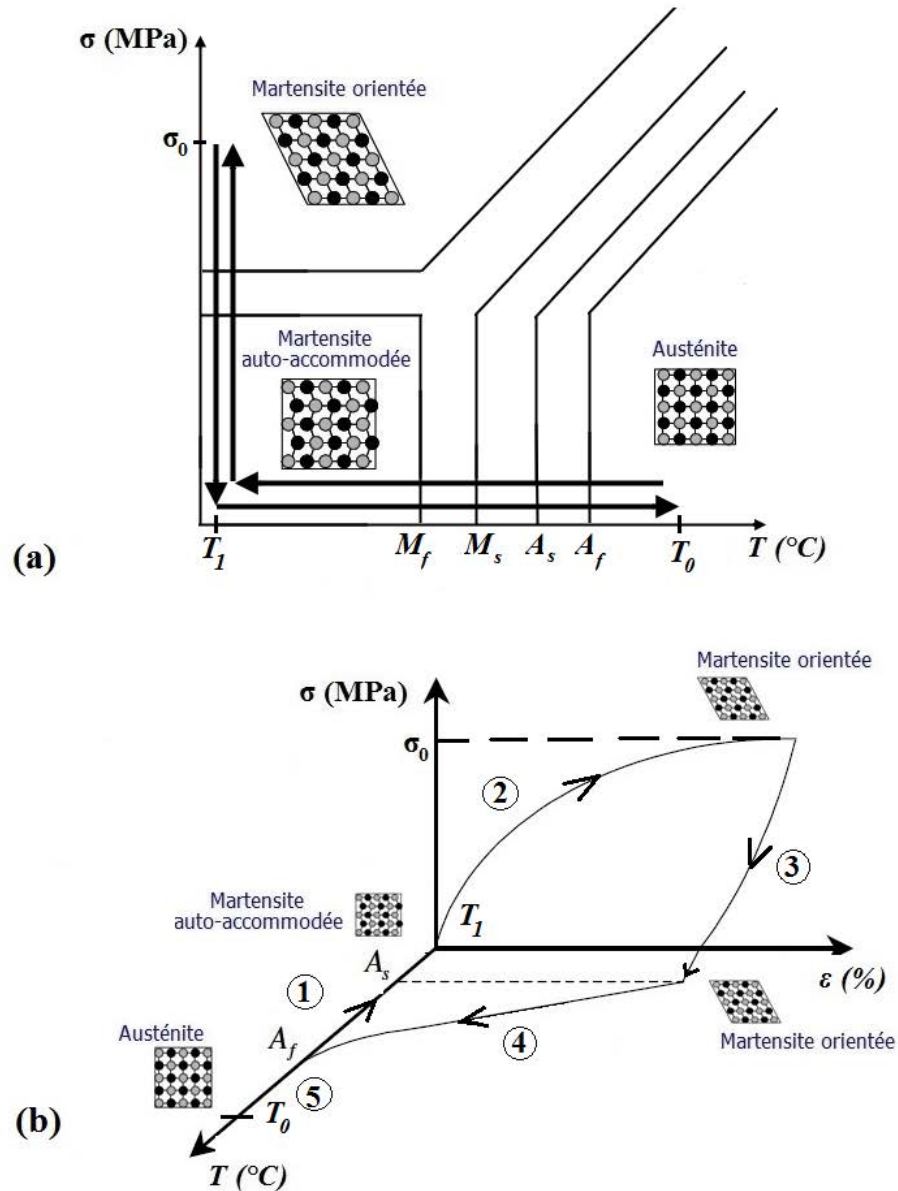


FIGURE 1.4 – Comportement effet mémoire de forme : (a) Trajet de chargement et (b) Comportement dans l'espace température-contrainte-déformation.

### 1.1.3 Applications industrielles des AMF : cas des micro-systèmes

Jugés exotiques à cause de leurs différents aspects comportementaux, les alliages à mémoire de forme sont restés longtemps après leur découverte, méconnus du monde industriel. Toutefois, après la découverte de l'effet mémoire de forme dans les années 1930 par Buehler et ses collègues, dans les alliages à base de nickel-titane, d'importantes investigations visant dans un premier temps, la maîtrise du comportement des AMF, ensuite leur élaboration et en dernier lieu, l'étude de leurs intérêts pratiques ont été menées et ont débouché sur des applications très diversifiées. De nos jours, ces applications sont devenues très nombreuses et se retrouvent dans

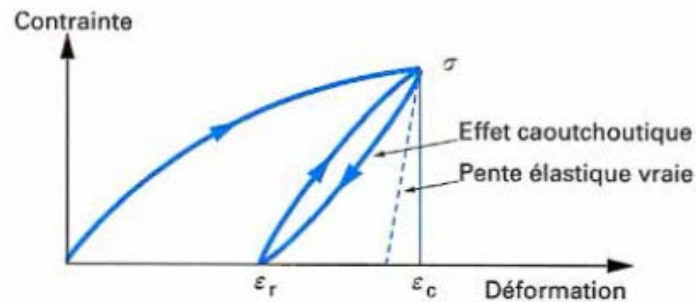


FIGURE 1.5 – Figure illustrant l’effet coaoutchoutique d’un AMF d’après [31].

divers secteurs industriels. On peut retrouver quelques exemples dans les références suivantes : [10], [19], [49], [64]. Les AMF sont des alliages à fort couplage thermomécanique ; ils peuvent absorber ou dissiper de l’énergie lorsqu’ils sont soumis à un cycle de chargement thermomécanique. Utilisés dans un mécanisme, ils sont capables, en plus de remplir les fonctions structurelles exigées, d’offrir des fonctionnalités supplémentaires d’ingénierie et participent directement à la fonctionnalité même du mécanisme : ils sont qualifiés de matériaux fonctionnels. En outre, ils offrent un rapport puissance mécanique/poids très élevé et sont capables de subir des traitements à l’échelle microscopique [6]. Il s’agit là d’un avantage indéniable qu’offrent ces matériaux dès lors que la réduction de la taille des applications devient un souci majeur de nos jours ; l’industrie des micro-systèmes leur porte ainsi un engouement tout à fait particulier. Les AMF sont désormais largement utilisés dans la conception des micro-systèmes ou micro-applications (micro-pompes, micro-actionneurs, micro-pinces etc...).

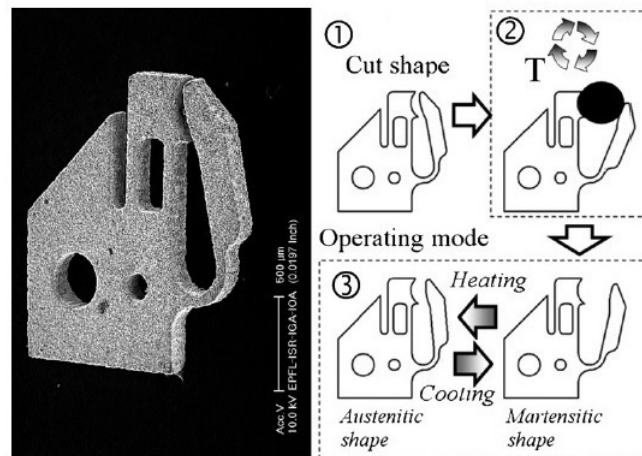


FIGURE 1.6 – Micrographie électronique d’une micro-pince pour la manipulation d’une lentille submillimétrique (à gauche). Forme souhaitée découpée au laser (1) et cycle thermomécanique sous contrainte constante (processus d’éducation) (2), principe de fonctionnement (3) (à droite), d’après [6].

La figure 1.6 extraite de [6] montre une micro-pince utilisée pour l’assemblage de lentilles

submillimétriques, il s'agit d'un dispositif de taille millimétrique constitué d'une seule pièce découpée au laser dans une feuille de tôle laminée de Ni-Ti-Cu d'environ  $180 \mu\text{m}$  d'épaisseur. Le principe de fonctionnement est le suivant : au refroidissement, les mors de la pince s'ouvrent ; ils se referment lorsque la température augmente. La source de chaleur est fournie par une fine couche résistive sur laquelle est collée la micro-pince. Le type de comportement exploité ici est l'effet mémoire double sens. Pour ce faire, la micro-pince a été déformée puis contrainte de manière à l'empêcher de retrouver sa forme initiale. Environ une centaine de cycles thermiques ont été ensuite effectués dans ces conditions, permettant d'alterner entre les deux formes martensitique et austénitique à donner ultérieurement à la micro-pince. Au cours du cyclage thermique, une accumulation de contrainte dans la charnière du doigt de la pince génère des défauts permanents et orientés ; ce traitement correspond à la phase de conditionnement du matériau de la pince. Il permet lors du refroidissement d'obtenir des variantes de martensite orientées et donc une forme martensitique stable.

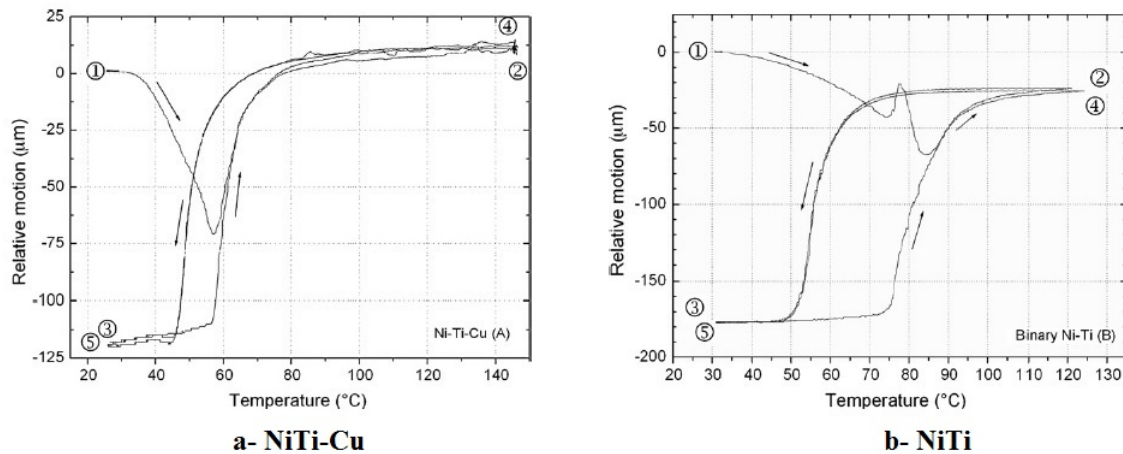


FIGURE 1.7 – Comportement dans un état hors équilibre d'un alliage NiTi-Cu (a) et d'un alliage NiTi (b) d'après [6].

De remarquables effets sont associés à la stabilité introduite par l'effet mémoire double sens. En effet, après le processus de conditionnement, des variantes de martensite non auto-accommodées apparaissent lors du refroidissement entraînant un changement de forme à l'échelle macroscopique. Toutefois, le matériau peut encore être déformé de façon isotherme dans cet état, introduisant les variantes de martensite formées dans une autre configuration métastable. Cette microstructure de la martensite qui ne peut apparaître qu'à la suite d'une déformation mécanique constitue un état dit de préparation du matériau, "artificiellement" introduit qui le met dans une sorte d'état hors équilibre. En d'autres termes, il s'agit d'un état qui apparaît en dehors des séquences de changement de forme spontané introduit par l'effet mémoire de forme double sens, non atteignable automatiquement et qui disparaît lors du chauffage. La figure 1.7 montre le comportement dans un état hors équilibre d'un alliage Ni-Ti-Cu et d'un alliage NiTi.

Les micro-pompes constituent également une grande partie des micro-applications utilisant les films minces d'AMF. Makino et. al [54] ont mené des études concernant la conception et la fabrication d'une micro-pompe à base d'AMF pouvant être utilisée en tant que composant pour la micro-fluidique ou dans les micro-systèmes de dosage. La figure 1.8 illustre le fonctionnement

de la micro-pompe. Les deux éléments principaux de la micro-pompe sont l'actionneur et la valve de contrôle.

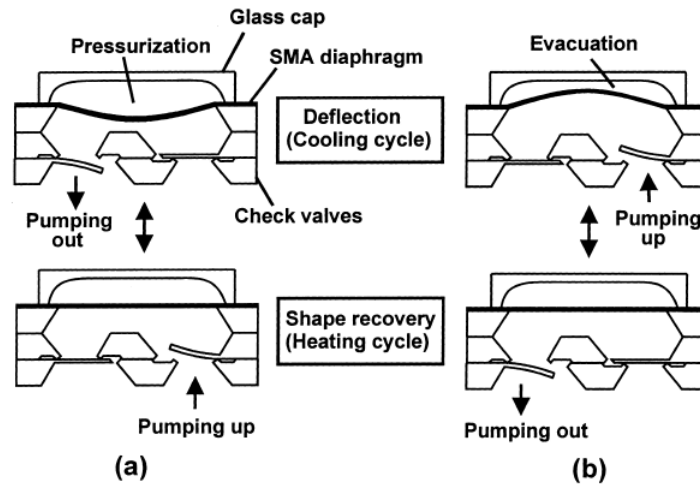


FIGURE 1.8 – Structure et fonctionnement d’une micro-pompe utilisant une membrane en alliage à mémoire de forme d’après [54].

L’actionneur est essentiellement constitué d’une membrane en Nickel-Titane d’une épaisseur d’environ  $6 \mu\text{m}$  et d’un flacon de verre, permettant de créer une chambre entre la membrane et le flacon. La forme plate représente la forme mémorisée de la membrane ; elle se déforme lorsqu’une pression de sollicitation est appliquée à la chambre à température ambiante. Grâce à un chauffage, la membrane retrouve sa forme initiale. La valve de contrôle est munie d’un système de deux clapets anti-retours qui sert à autoriser l’entrée et la sortie du fluide ; le mouvement des clapets s’effectue en concordance avec le mouvement de la membrane. En fonction de la manière dont on applique la pression, on dispose de deux possibilités d’actionnement pour la micro-pompe développée : un actionnement par “mise sous pression “ ou un actionnement par “dépression“.

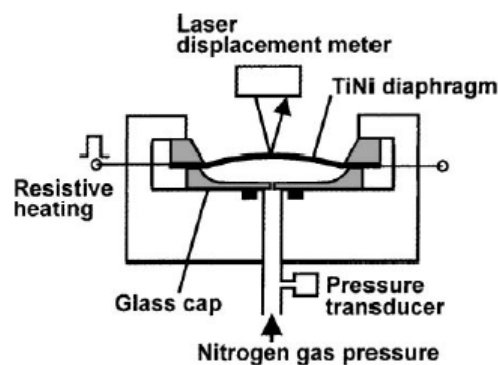


FIGURE 1.9 – Évaluation de la performance de l’actionneur d’après [54].

Dans le cas de la micro-pompe de type “mise sous pression”, la membrane se déforme vers l’extérieur lorsqu’elle est soumise à une pression, chassant ainsi le fluide vers l’extérieur. Grâce



à un chauffage, celle-ci reprend sa forme plate initiale, aspirant ainsi le fluide vers l'intérieur. L'opposé de cette opération est obtenu dans le cas d'un actionnement par "dépression" due au fait que la membrane se déforme vers l'intérieur sous une pression de sollicitation négative. Dans le cadre de ce travail, les auteurs ont développé la micro-pompe de type "mise sous pression". Pour ce faire, une étude préliminaire a été réalisée dans le but d'évaluer la performance de l'actionneur ; la figure 1.9 montre le schéma du dispositif mis en place. Elle permet de mesurer le déplacement du diaphragme durant des cycles thermiques de refroidissement et chauffage sous une pression de sollicitation constante de 200 kPa. Le diaphragme est chauffé par effet joule en appliquant un courant continu sous une tension donnée (une énergie de 1.6 J), par impulsions pendant 100 ms. Le refroidissement s'effectue à l'air libre.

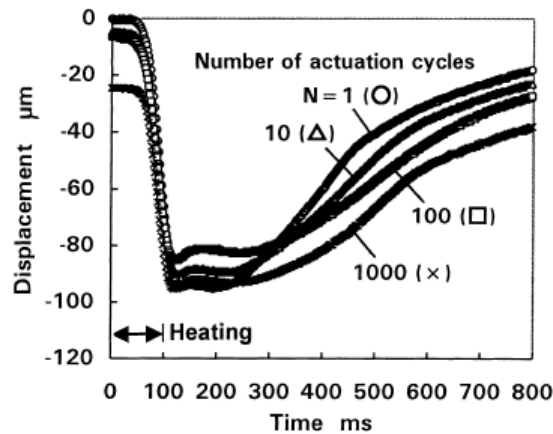


FIGURE 1.10 – Évaluation de la performance de l'actionneur d'après [54].

Après 200 cycles de refroidissement-chauffage (phase de conditionnement), sous les conditions de chargement indiquées, la réponse en déplacement de la membrane est mesurée et indiquée sur la figure 1.10 pour les cycles suivants. On peut remarquer que le diaphragme présente une bonne performance d'actionnement avec un déplacement d'environ  $90 \mu\text{m}$ . Une fois la performance de l'actionneur évaluée et la valve fabriquée, la micro-pompe est complètement montée et ses propriétés de pompage ont été testées.

Un test de pompage d'eau déminéralisée a été effectué à l'aide de la micro-pompe. Les mesures ont été réalisées sous une pression de sollicitation du diaphragme de l'ordre de 100 kPa et une pression de pompage retour nulle. Le chauffage de la membrane en NiTi a été réalisé en appliquant une énergie électrique de 2 J pendant 100 ms, suivi d'un refroidissement à l'air libre. La période du cycle d'actionnement est de 5s. Durant l'actionnement de la micro-pompe, le volume d'eau mesuré du côté de l'orifice de sortie est converti en flux volumique ; la figure 1.11 montre le premier résultat concernant la mesure du taux de pompage de la micro-pompe développée. Comme le montre la figure, un taux de pompage de  $0.4 \mu\text{l}$  par cycle correspondant à  $4.8 \mu\text{l}$  par minute a été enregistré.

Des investigations expérimentales et théoriques sont menées par Pan et Cho [62] concernant la conception d'un micro-amortisseur à l'aide de fils minces en NiTi. Un prototype du micro-amortisseur ainsi que ces principaux composants sont présentés sur la figure 1.12.

La conception du micro-amortisseur en AMF vise deux principaux objectifs : l'aptitude à récupérer complètement les déformations ce qui nécessite comme indiqué sur la figure 1.13 (a) le



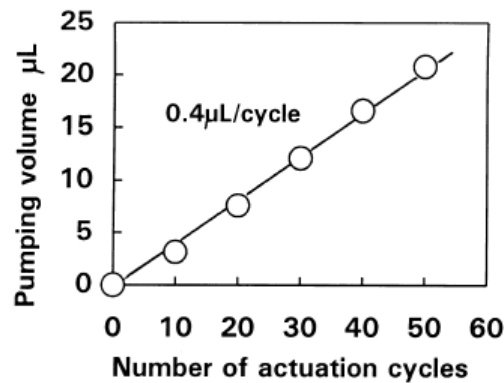


FIGURE 1.11 – Étude du taux de pompage de la micro-pompe d’après [54].

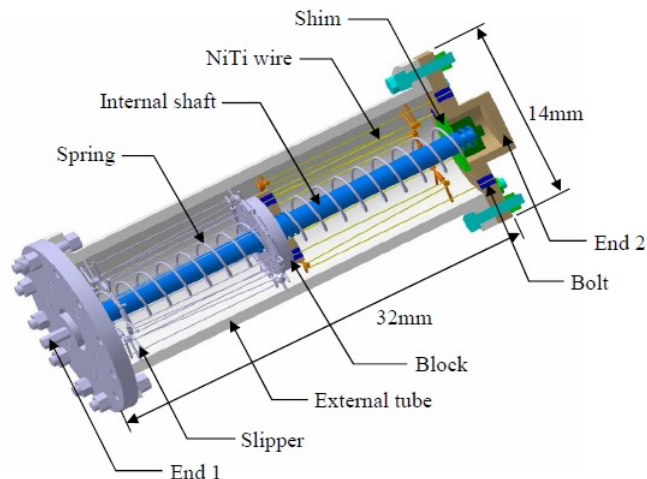


FIGURE 1.12 – Prototype d’un amortisseur en AMF, d’après [62].

passage par un même point origine sur la courbe force-déplacement à l’aller comme au retour et la capacité à dissiper de l’énergie comme l’indique la figure 1.13(b). Ainsi la figure 1.13 représente le modèle retenu pour l’étude et la conception du micro-amortisseur.

Les extrémités (1) et (2) de l’amortisseur sont respectivement reliées à l’arbre intérieur et le tube extérieur, afin de transmettre l’effort appliqué. Les fils en NiTi sont fixés mécaniquement par des boulons et reliés à l’arbre et au tube par les extrémités (1) et (2), respectivement. Deux ressorts comprimés sont insérés entre les bagues et les cales séparément. Les bagues sont placées au centre, autour de l’arbre interne et les cales servent de pont reliant les ressorts à l’arbre interne et le tube externe. Pour améliorer la dissipation de l’énergie et l’auto-centrage de l’amortisseur, les fils en NiTi ont été prédéformés d’environ 3% avant leur installation. Le micro-amortisseur ne supporte que des charges uni-axiales.

La configuration initiale du micro-amortisseur avant le chargement est présentée sur la figure

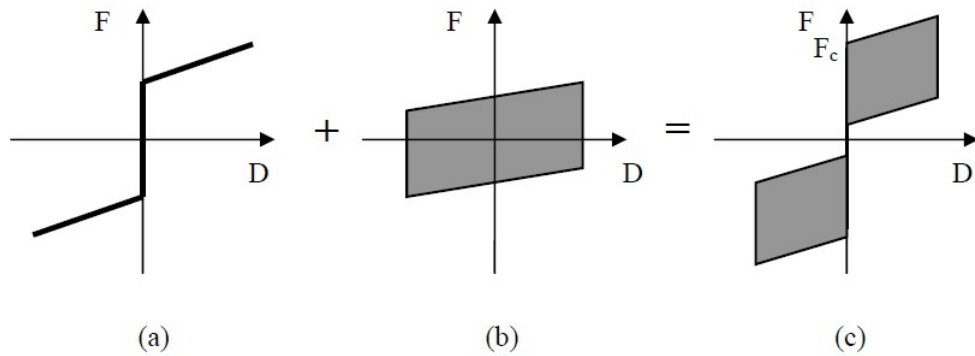


FIGURE 1.13 – Réalisation du dispositif d'amortissement : ressort - élément de recentrage (a), élément dissipateur d'énergie (b), amortisseur - dispositif fonctionnel complet d'après [62].

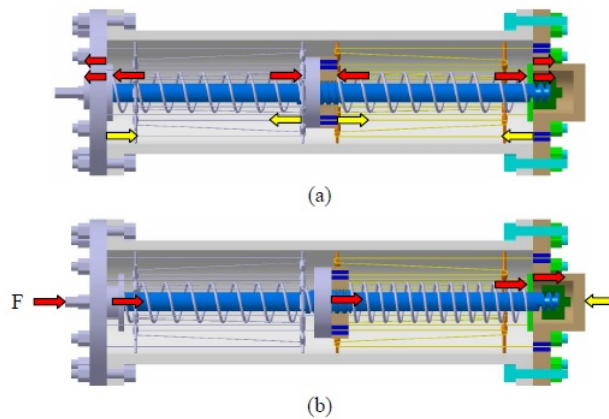


FIGURE 1.14 – Configuration du micro-amortisseur : avant chargement (a), après chargement (b), d'après [62].

1.14 (a). Les fils sont étirés par la bague et le tube externe. La force de réaction à cette compression du ressort est fournie sur un coté du ressort par l'arbre intérieur à travers la bague ; tandis que de l'autre côté, elle est fournie par l'arbre et le tube. Pour une meilleure compréhension, ces comportements sont schématiquement indiqués par des flèches sur la figure.

Lorsque le micro-amortisseur est poussé par une charge externe  $F$  ; le déplacement de l'arbre interne est limité jusqu'à ce que la charge appliquée dépasse la force critique  $F_c$ , représentée sur la figure 1.13 (c). Cette restriction de déplacement modifie la répartition de la force dans l'arbre et le tube sur le côté droit de l'amortisseur. Le schéma de principe de la force transmise à partir de l'extrémité gauche vers l'extrémité droite est montré par les flèches sur la figure 1.14 (b).

A ce stade, toutes les charges appliquées au cale sur le côté droit sont soutenues par le tube uniquement. Les fils de NiTi sont alors étirés sur le côté gauche et contractés sur le côté droit. Toutefois, tous ces fils sont toujours en traction. Sur la figure 1.13 (b), on peut observer une

déformation résiduelle dans les fils lorsque la charge est relâchée. Cette déformation crée une force différente portée par les deux ressorts qui oblige l'amortisseur à reprendre sa forme initiale après la décharge.

Un comportement similaire est observé au cours d'un processus de charge-décharge superélastique. A travers les cycles mécaniques de charge-décharge superélastiques, la transformation de phase dans les fils en AMF s'accompagne d'une conversion d'énergie mécanique en énergie thermique dissipée entraînant la réduction de la vibration des structures ou des appareils. Des investigations expérimentales ont été menées dans le but d'étudier les influences de la température, de la vitesse de déformation, et de l'amplitude de la déformation sur le comportement des fils. Ces études révèlent que la dissipation d'énergie des fils est peu dépendante de la température, mais fortement dépendante de la vitesse et des amplitudes de déformation. La raideur sécante et le facteur de perte du micro-amortisseur ont également été estimés et analysés. Il a été observé que la température et la vitesse ont une faible influence sur la raideur sécante alors qu'elle varie beaucoup avec l'amplitude de la déformation. Les influences de la température, de l'amplitude de déformation et des grandes vitesses de déformation sur le facteur de perte restent négligeables. Néanmoins le facteur de perte diminue d'environ 36% pour les faibles vitesses de déformation entre  $5.10^{-4}s^{-1}$  et  $0.01s^{-1}$ .

De nombreux autres exemples d'applications de taille fortement réduite et exploitant les propriétés des AMF sont disponibles dans la littérature ([75], [45], [48], etc...).

En raison de leur taille relativement réduite, les structures minces (films et fils) d'AMF entrant dans la fabrication de ces de micro-applications laissent apparaître des effets de taille et des phénomènes de localisation au cours de la transformation de phase. La mise en place de modèles de comportement capables de capter de tels phénomènes s'avère très utile pour le dimensionnement de ces applications; ce qui justifie l'importance du présent travail de thèse.

Dans la section suivante nous reviendrons plus en détails sur les influences des effets de taille et de la localisation de la transformation de phase sur le comportement des structures minces en AMF.

#### 1.1.4 Influence de la chaleur latente de transformation sur le comportement des AMF

Comme vu précédemment, la transformation de phase dans les alliages à mémoire de forme est de premier ordre au cours de laquelle une phase austénitique de degré de symétrie plus élevé se transforme en une phase martensitique de degré de symétrie moins élevé; elle s'accompagne donc d'une perte de symétrie cristallographique. Cette perte de symétrie est responsable d'une production ou d'une absorption de chaleur latente lors de la transformation de phase; voir la figure 1.15. La transformation de phase directe est donc associée à un phénomène exothermique et la transformation de phase inverse à un phénomène endothermique. Ces phénomènes modifient fortement le champ de température à l'intérieur du matériau et affectent directement son comportement mécanique si les échanges thermiques avec le milieu extérieur ne sont pas suffisants ([88], [81], [23], [56] [36]).

Des séries d'essais de traction uniaxiale sur un fil en NiTi ont été réalisées par Shaw and Kyriakides [81] dans deux milieux différents : air ambiant et eau portés respectivement à 10 et 70 °C. Au cours de ces essais, la variation de température de l'échantillon a été mesurée à l'aide d'un thermocouple. Ils ont remarqué que pour l'échantillon placé dans l'eau, la température mesurée localement en un point de l'échantillon varie peu (un pic de +2 °C dans l'eau portée à 70 °C respectivement lors de la charge et un pic de -2 °C lors de la décharge) ou presque

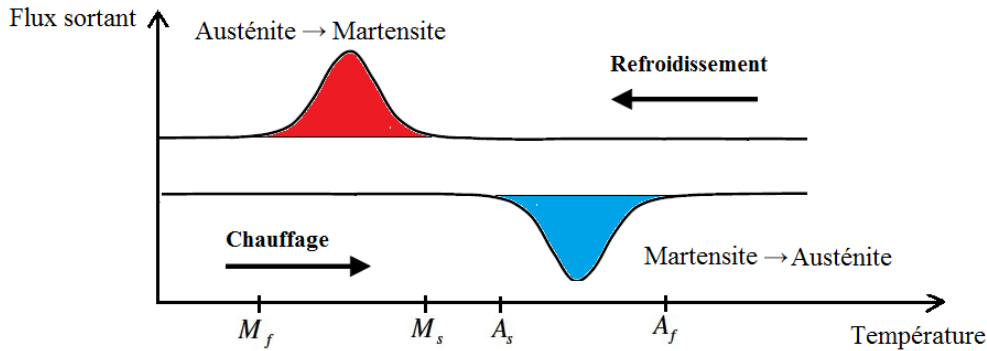


FIGURE 1.15 – Chaleur latente de transformation.

pas (pas de pic dans l'eau à 10°C). Pour l'échantillon placé dans l'air ambiant une variation de température plus importante a été notée ; les pics atteignent des valeurs comprises entre 6 et 8°C. Ces résultats sont reportés sur la figure 1.16. Ils ont donc déduit que l'eau agit comme un dissipateur de chaleur, et que l'air ambiant n'est clairement pas un milieu efficace pour les échanges de chaleur.

Les évolutions de température ou les hétérogénéités dans le champ de température du matériau dépendent donc des conditions d'échanges thermiques entre l'échantillon considéré et le milieu avoisinant ; ces échanges thermiques peuvent être influencés par plusieurs facteurs : la nature du milieu avoisinant (liquide ou gaz), le type de convection (naturelle ou forcée), la forme géométrique de l'échantillon etc. Sur le plan physique, ces échanges thermiques sont étroitement liés à un problème de diffusion de la chaleur qui est un phénomène dépendant du temps. La vitesse de déformation devient un paramètre important si l'on veut déterminer le comportement macroscopique résultant. Une représentation schématique de l'influence de ce paramètre sur la réponse contrainte-déformation d'une barre d'AMF est reportée sur la figure 1.17 proposée par [36]. Cette figure illustre en effet, les changements qu'on pourrait observer lors de la sollicitation de la barre en traction, dus à la vitesse de déformation et les conditions d'échanges thermiques dans le milieu. Dans [59], Ortin et Plane expliquent cette sensibilité de la réponse mécanique des AMF à la vitesse de déformation comme suit :

- Au cours de la transformation de phase directe, la température de l'alliage augmente à la suite d'une production de chaleur. La phase austénitique devient plus stable et nécessite une augmentation de la contrainte pour poursuivre la transformation.
- Au cours de la transformation inverse, à cause de la prédominance de la chaleur latente, la température de l'alliage décroît rendant la phase martensitique plus stable. Une diminution de la contrainte s'avère donc nécessaire pour poursuivre la transformation.

Entemeyer et al. [23] ont également interprété cette sensibilité en s'appuyant sur le caractère dépendant de la température du comportement superélastique : lors du chargement, la production de chaleur associée à la transformation de phase induite sous contrainte augmente la température à l'intérieur du matériau ; un niveau de contrainte plus élevé est alors nécessaire pour poursuivre la transformation. Cela entraîne une augmentation de la pente de transformation ; la figure 1.18 résume l'évolution observée sur les courbes contrainte-déformation liée à la présence d'un champ de température hétérogène dans le matériau. Des phénomènes similaires sont observés lors de la transformation inverse ; la disparition des variantes de martensite est associée à une absorption

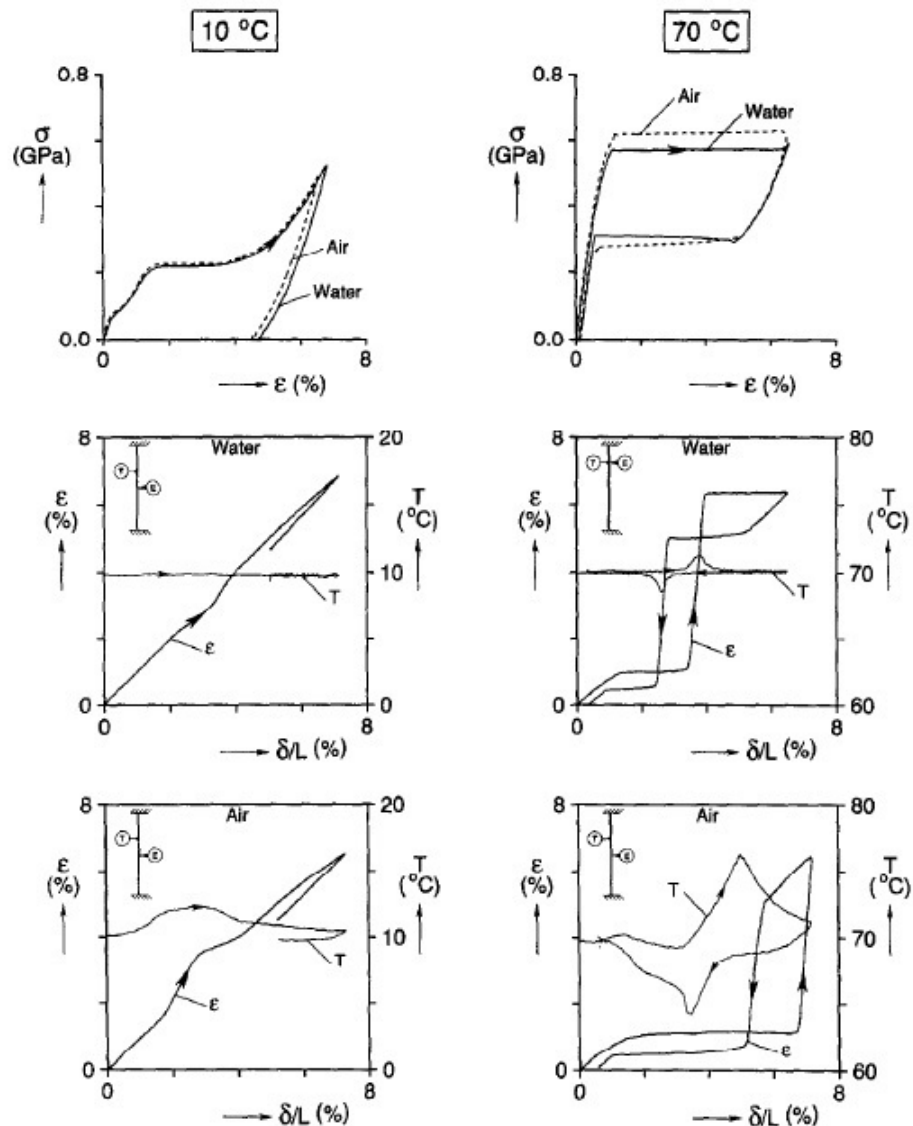


FIGURE 1.16 – Comparaison des courbes contrainte-déformation, évolution de la déformation et de la température au cours des expériences dans l'eau et dans l'air ( $\delta/L = 4.10^{-4}s^{-1}$ ), d'après [81].

de chaleur ce qui entraîne une baisse de la température. Un niveau de contraintes beaucoup plus faible est donc nécessaire pour poursuivre la transformation inverse.

En résumé de ce paragraphe, on note une forte sensibilité de la réponse mécanique des AMF à la vitesse de déformation due à la chaleur latente libérée ou absorbée lors de la transformation de phase.

La prise en compte de l'influence de la chaleur latente de transformation dans la modélisation du comportement des AMF et en particulier des structures minces en AMF fera l'objet du dernier chapitre de ce travail.

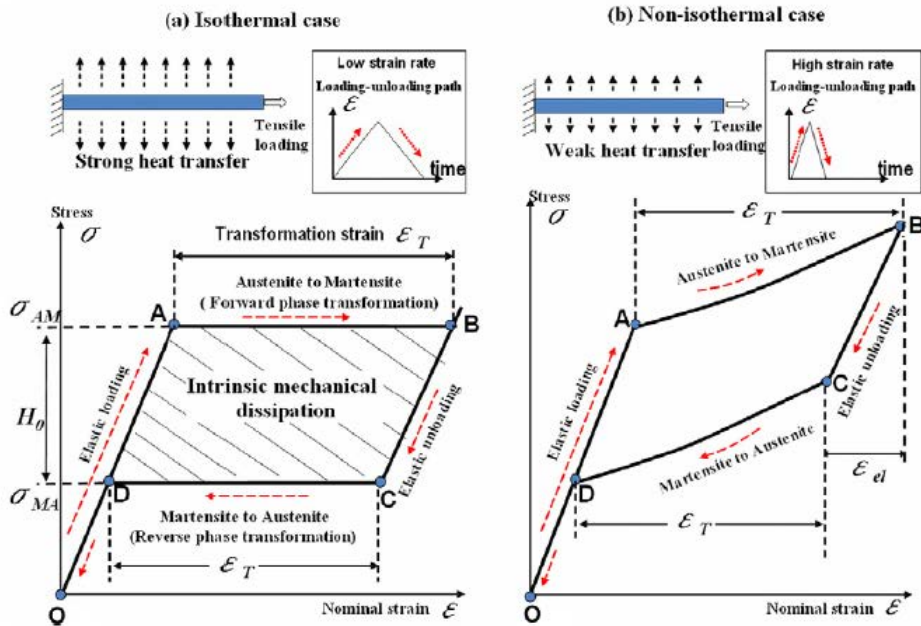


FIGURE 1.17 – Représentation schématique de la réponse contrainte-déformation d’une barre d’AMF : traction isotherme (faible vitesse de déformation et/ou forts échanges thermiques) (a) ; traction non-isotherme (vitesse de déformation élevée et/ou faibles échanges thermiques) (b), d’après [36].

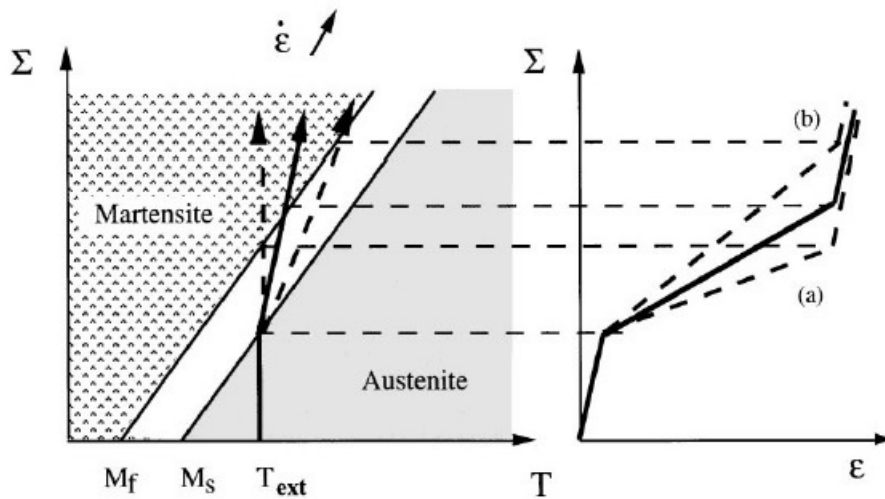


FIGURE 1.18 – Effet exothermique pour un chargement superélastique à la température  $T_{ext}$ . L’augmentation de la température nécessite une contrainte plus élevée pour poursuivre la transformation et engendre un effet de vitesse de déformation. Les conditions isothermique (a) et adiabatique (b) sont les limites inférieures et supérieures des courbes contrainte-déformation résultantes, d’après [23].

## 1.2 Instabilités liées à la transformation de phase dans les structures minces en AMF

Le développement d'applications en AMF de taille fortement réduite (micro-actionneurs, les micro-pompes ou micro-valves) souvent taillées dans des couches minces d'alliages à mémoire de forme, connaît un important essor de nos jours. Les films minces d'AMF sont le siège de certains phénomènes particuliers tels que les effets de taille et la localisation de la transformation qui ne doivent pas être négligés dans le processus de conception des applications utilisant ces matériaux. La présente section est consacrée à la description de ces phénomènes.

### 1.2.1 Effets de taille

Le comportement des structures minces en AMF peut être affecté à des échelles très fines (micrométrique ou nanométrique) par deux effets de taille possibles : un effet de taille extrinsèque relatif à la taille de la structure considérée et un effet de taille intrinsèque lié à la microstructure du matériau utilisé tel que la taille des grains. De nombreuses investigations expérimentales ont été menées dans le but d'analyser et de comprendre ces effets de taille.

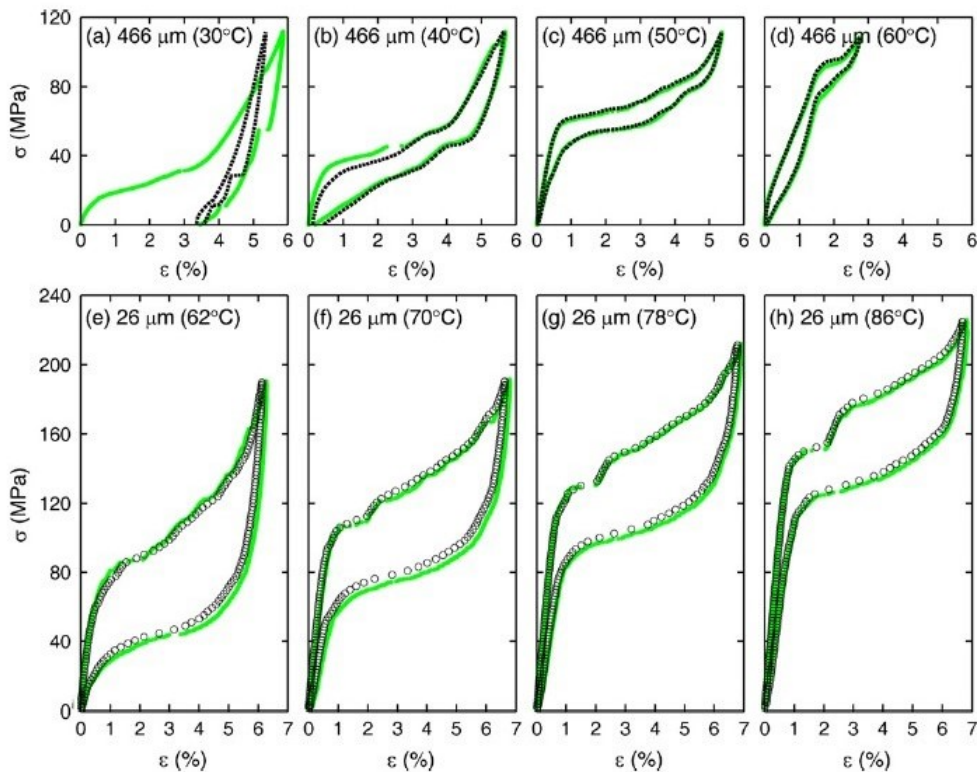


FIGURE 1.19 – Courbes contrainte-déformation à différentes températures pour un fil de diamètre important (a-d) et un fil de diamètre faible (e-h) sur deux cycles consécutifs.

Des investigations expérimentales visant à déterminer l'influence des effets de taille sur les propriétés superélastique et effet mémoire de forme dans des micro-fils d'alliage à mémoire de forme ont notamment été réalisées par Chen et Schuh [12]. Les fils sont polycristallins, à base de cuivre (Cu-Al-Ni), avec des grains présentant une structure de type bambou, de diamètres compris entre 20 et 500  $\mu\text{m}$ ; ils sont fabriqués à partir de la technique d'étirage de fils de Taylor



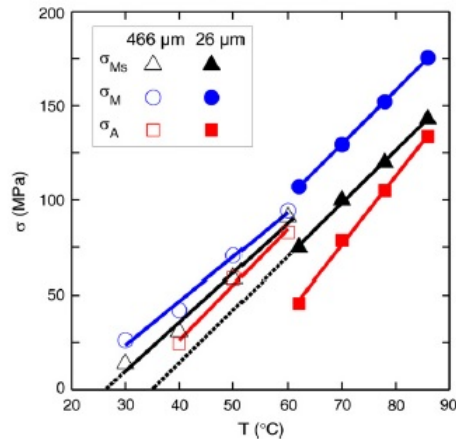


FIGURE 1.20 – Contrainte de début de transformation martensitique ( $\sigma_{Ms}$ ) en fonction de la température, ainsi que les contraintes moyennes de transformation ( $\sigma_M$  et  $\sigma_A$ ), pour le fil de diamètre 466  $\mu\text{m}$  (symboles creux), et le fil de diamètre 26  $\mu\text{m}$  (symboles pleins) extraites des tests présentées sur la figure 1.19

impliquant l'étirage à chaud d'un tube de verre adouci contenant l'alliage à l'état fondu. Les différents diamètres de fils sont obtenus en faisant varier la vitesse d'étirage ; plus la vitesse est grande, plus le fil est fin. Ces derniers sont ensuite recuits à 850 °C pendant une heure permettant à la fois de les austénitiser et de favoriser l'accroissement des grains puis trempés pour conserver l'état austénitique.

Deux groupes de fils : fils de diamètre important (diamètre  $d = 466 \mu\text{m}$  et  $A_f = 40^\circ\text{C}$ ) et fils de petit diamètre (diamètre  $d = 26 \mu\text{m}$  et  $A_f = 60^\circ\text{C}$ ) ont été testés en superlasticité sur une machine de traction dont la charge maximale est de 18N. Les courbes contrainte déformation obtenues pour différentes températures sont présentées sur la figure 1.19.

Sur les différentes courbes, les contraintes de début de transformation martensitique notées  $\sigma_{Ms}$ , les contraintes moyennes de début transformation directe et de transformation inverse, respectivement notées  $\sigma_M$  et  $\sigma_A$  ont été relevées pour chaque groupe de fils. Ces données ont permis de tracer l'évolution de la contrainte en fonction de la température (figure 1.20) pour chaque groupe de fils. Les mêmes tests ont été réalisés sur d'autres groupes de fils de diamètres compris entre 109  $\mu\text{m}$  et 31  $\mu\text{m}$  et ont abouti aux conclusions suivantes :

- les contraintes de début et de fin de transformation augmentent avec la température ;
- à partir d'un diamètre de 100  $\mu\text{m}$ , plus le diamètre des fils diminue, plus la température de transformation augmente ;
- les fils de diamètres plus faibles présentent une hystérésis moyenne en contrainte plus large que les gros fils comme indiqué sur la figure 1.21.

En effet mémoire de forme double sens assisté, des essais ont été réalisés sur sept groupes différents de fils de diamètres compris entre 90 et 26  $\mu\text{m}$ . Il en ressort une hystérésis en température d'environ 20 °C pour la plupart des fils ; voir la figure 9 de l'article (référence [12]) pour le fil de diamètre 26  $\mu\text{m}$ . Une différence de taille notable n'a pas été relevée sur les hystérésis en température des sept différents groupes de fils. Toutefois nous pouvons noter que cette hystérésis



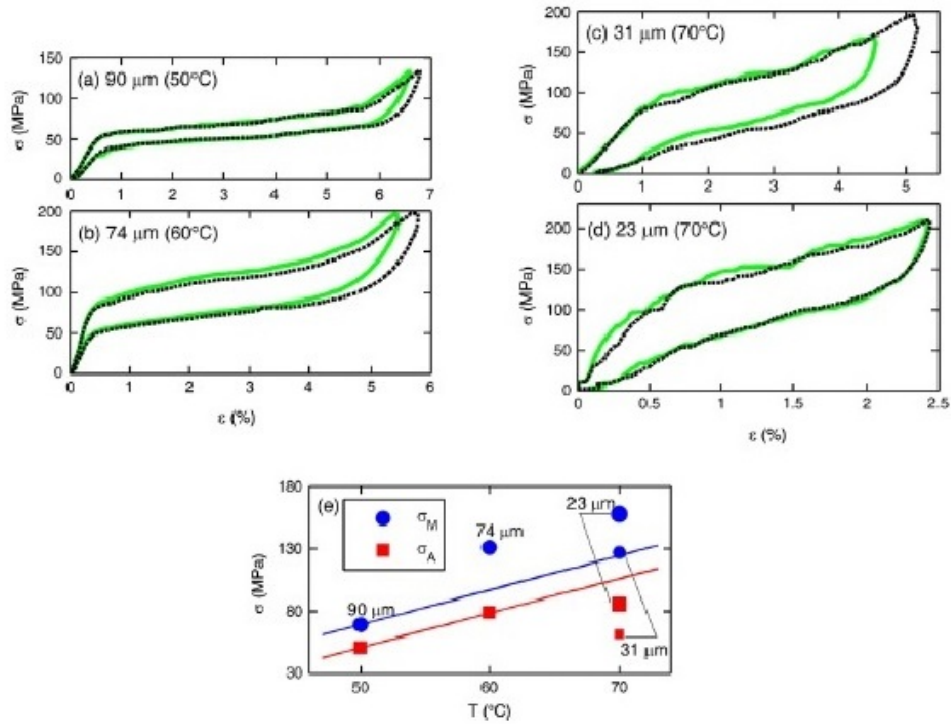


FIGURE 1.21 – Courbes de contrainte-déformation pour quatre micro-fils, montrant l’augmentation de la taille d’hystérésis lorsque le diamètre des fils diminue (a-d). Les courbes sont tracées pour deux chargements consécutifs. Diagramme contrainte-température des 4 micro-fils (e).

est relativement élevée en comparaison avec la taille de l’hystérésis généralement comprise entre 6 et 10 °C dans les monocristaux massifs du même alliage.

En conclusion de leurs travaux, les auteurs attribuent les origines possibles des effets de taille lors de la transformation de phase dans les structures minces à des facteurs dont les plus importants sont : l’énergie élastique stockée, le transfert de chaleur et les frottements internes. Ces facteurs affectent surtout les températures et les contraintes de transformation. L’énergie élastique étant totalement récupérable après la transformation inverse. Cette dernière ne contribue pas aux effets de tailles observés au niveau de l’hystérésis et de la dissipation.

D’autres travaux réalisés par Frick et al. [26] sur des micropiliers de NiTi avec des diamètres variant de 2  $\mu\text{m}$  à 200 nm montrent que la déformation de transformation en superélasticité des micropiliers a tendance à diminuer lorsque les diamètres diminuent jusqu’à disparaître totalement pour des micropiliers de diamètre inférieur à 200 nm. Il en ressort également de ces travaux que la contrainte d’écoulement ou de début de transformation est indépendante du diamètre des piliers (elle reste la même quelque soit le diamètre) et que l’orientation cristallographique a une importante influence vis-à-vis du comportement des piliers : cela est dû au fait que les micropiliers sont monocristallins. Toutefois, l’orientation cristallographique des micropiliers n’est pas à l’origine de la perte de la pseudoélasticité. Ce dernier résultat a été confirmé par les mêmes auteurs en étudiant le comportement superélastique dans des micropiliers ayant différentes orientations cristallographiques Frick et al. [27]. La figure 1.22 souligne les effets de taille observés ; elle montre bien que le pourcentage de déformation récupérable pour les deux premiers cycles de

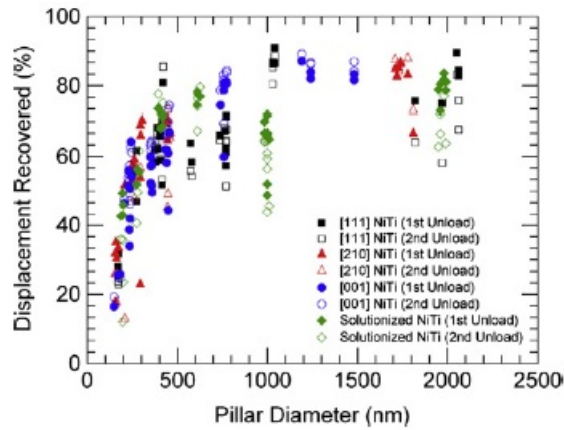


FIGURE 1.22 – Pourcentage de déplacement récupérable en fonction du diamètre des piliers pour le premier et le second cycle de décharge (respectivement symboles creux et pleins) pour les échantillons testés.

charge-décharge diminue pour tous les micropiliers testés dès que le diamètre est inférieur à 400 nm et indépendamment de leur orientation cristallographique.

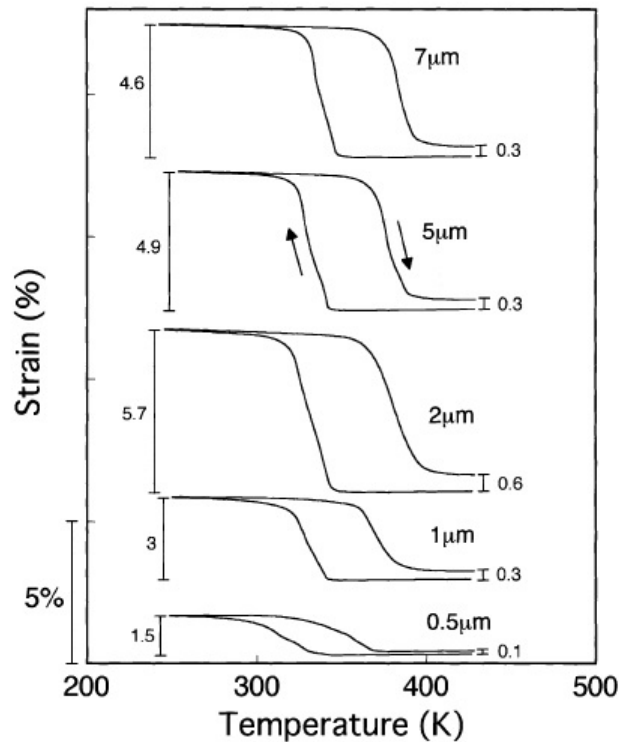


FIGURE 1.23 – Courbes déformation-température sous une contrainte constante de 100 MPa pour des films minces de NiTi de différentes épaisseurs d'après [39].

Ishida et Sato [39] ont réalisé des études relatives à l'influence de l'épaisseur des films minces

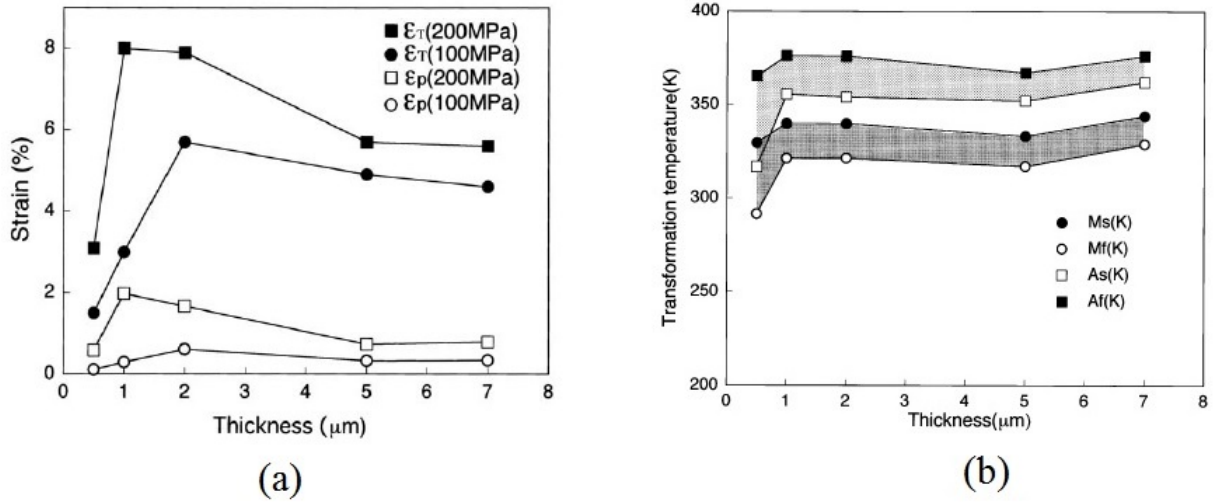


FIGURE 1.24 – Déformations de transformation et déformation plastique en fonction de l'épaisseur des films minces de NiTi (a). Températures de transformation en fonction de l'épaisseur des films minces de NiTi (b), d'après [39].

d'AMF sur leurs comportements macroscopiques. Quatre films minces de NiTi, tous de très faibles épaisseurs (0.5, 1, 2 et 7  $\mu\text{m}$ ) sont fabriqués par pulvérisation en utilisant un appareil magnétron de type carrousel. Les films sont ensuite soumis à un test de refroidissement-chauffage à contrainte constante. Lors du cycle thermique, le déplacement est mesuré avec une précision de 1  $\mu\text{m}$ . Plusieurs séries de mesures de la déformation et de la température sous divers niveaux de chargements mécaniques constants ont été effectuées pour chaque film. Les températures caractéristiques de la transformation de phase directe et inverse ont été déterminées par la méthode tangentielle sur chaque courbe température-déformation obtenue, puis tracées en fonction de la contrainte. La figure 1.23 présente les courbes température-déformation obtenues pour une contrainte constante de 100 MPa.

Des déformations plastiques peuvent apparaître lors de la transformation donnant lieu à une déformation résiduelle rémanente visible à la fin du cycle thermique. On observe clairement que l'épaisseur des films minces affecte la déformation de transformation et la déformation plastique résiduelle. Ces déformations présentent un maximum pour une épaisseur autour de 2  $\mu\text{m}$ . L'évolution des déformations de transformation et résiduelle sont tracées en fonction de l'épaisseur des films minces et reportées sur la figure 1.24(a). Au-delà d'une épaisseur de 5  $\mu\text{m}$ , ces déformations deviennent constantes. La figure 1.24 (b) montre l'évolution des températures de transformation en fonction de l'épaisseur du film mince à contrainte nulle. Une décroissance rapide de ces températures est observée pour des films d'épaisseur inférieure à 1  $\mu\text{m}$  ; au dessus de cette épaisseur elles semblent ne pas être affectées par l'épaisseur des films. Des analyses de ces travaux, il en ressort que les effets de taille observés dans les films minces sont dus à une résistance à la déformation provenant soit des interactions entre les grains situés au voisinage des surfaces des films minces, soit des couches surfaciques d'oxyde. Une illustration de ces effets est présentée sur la figure 1.25. Les résistances provenant des interactions entre les grains augmentent avec l'épaisseur des films tandis que celles provenant des couches surfaciques d'oxyde augmentent quand l'épaisseur des

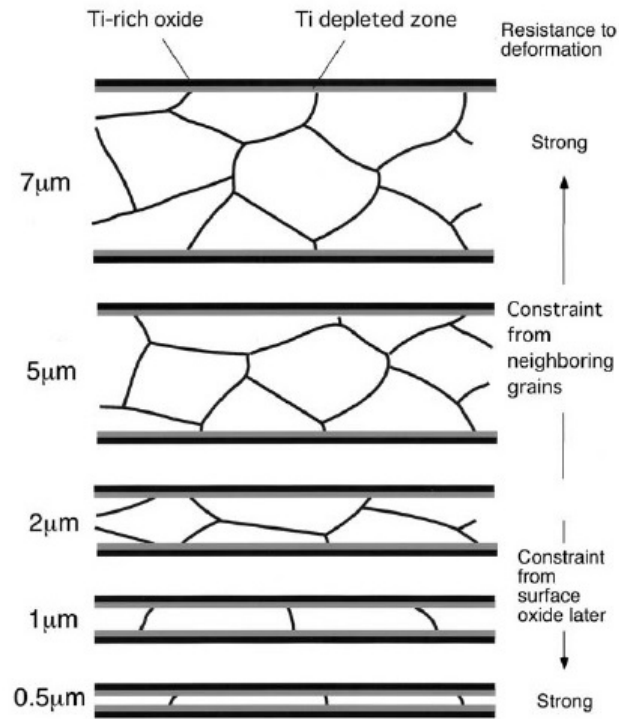


FIGURE 1.25 – Coupe de films minces de NiTi cristallisés montrant les mécanismes à l’origine de la résistance à la déformation, d’après [39].

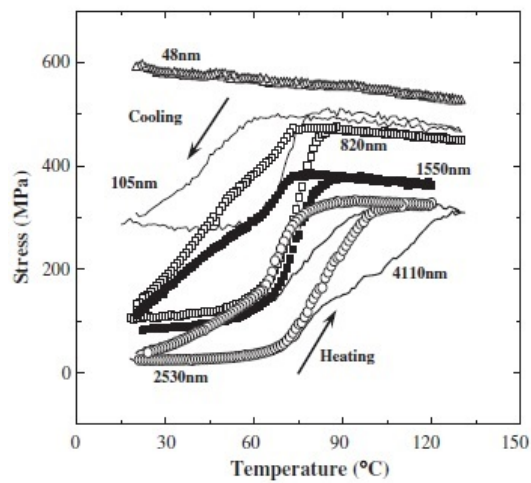


FIGURE 1.26 – Courbe déformation-température de films minces de NiTi d’épaisseurs différentes d’après [28].

films diminue. La décroissance des températures de transformation de phase observée pour les films d'épaisseur inférieure à  $1 \mu\text{m}$  est essentiellement due à l'oxydation des surfaces au cours des traitements thermiques.

Des observations similaires ont été faites par Fu et al [28] sur des films minces de NiTi à des échelles beaucoup plus fines. Les épaisseurs des films étudiés sont comprises entre 48 et 4110 nm. Les contraintes à l'origine de la perte de l'effet mémoire de forme sont les mêmes que celles retenues par Ishida et Sato [39]. Toutefois ils ont noté une absence totale d'effet mémoire de forme pour le film d'épaisseur la plus faible (48 nm) voire figure 1.26.

### 1.2.2 Phénomènes de localisation

De nombreuses études expérimentales réalisées sur des échantillons de taille très fine, et plus particulièrement sur des films et fils minces d'AMF, montrent que la réponse de ces derniers en présence d'une sollicitation mécanique, s'accompagne d'instabilités matérielles qui sont à l'origine d'un phénomène de localisation de la transformation de phase : nucléation de martensite dans le grain dont la structure cristalline est favorablement orientée par rapport à la direction du chargement. La germination de la martensite au sein de l'échantillon est marquée par une

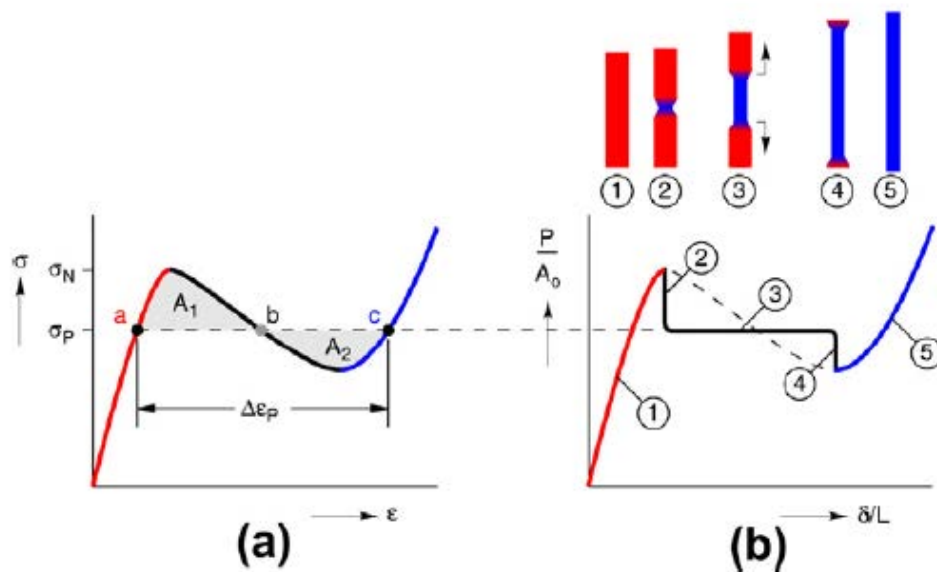


FIGURE 1.27 – Représentation schématique des réponses : (a) locale contrainte-déformation, (b) force-élongation globale. Configurations de l'échantillon avant, durant et après la transformation de phase martensitique [15].

augmentation du niveau de contraintes (pic de contrainte) avec l'apparition d'une bande de transformation macroscopique qui se propage ensuite sous une contrainte quasi-constante entraînant un phénomène d'adoucissement local. La figure 1.27 proposée par Churchill et al. [15], constitue une représentation schématique du comportement observé. Selon Shaw et Kyriakides [83], la localisation de la transformation de phase et sa propagation dans les échantillons fins d'AMF sont d'un point de vue macroscopique similaires à la formation des bandes de Luders dans les films et les fils en acier même si les mécanismes microstructuraux à l'origine des deux phénomènes sont différents.

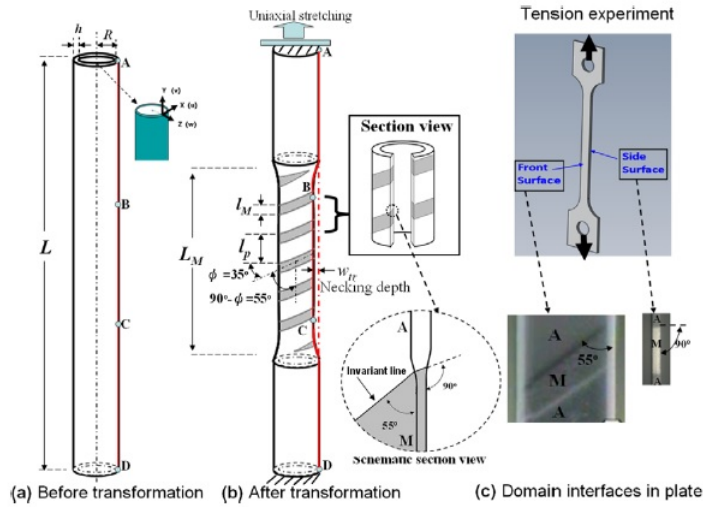


FIGURE 1.28 – Représentation schématique des bandes de transformation : (a) tube avant transformation, (b) présence d’un domaine ou bande de transformation martensitique de forme hélicoïdale dans le cas d’un tube, (c) bande de transformation dans le cas d’une plaque mince, d’après [33].

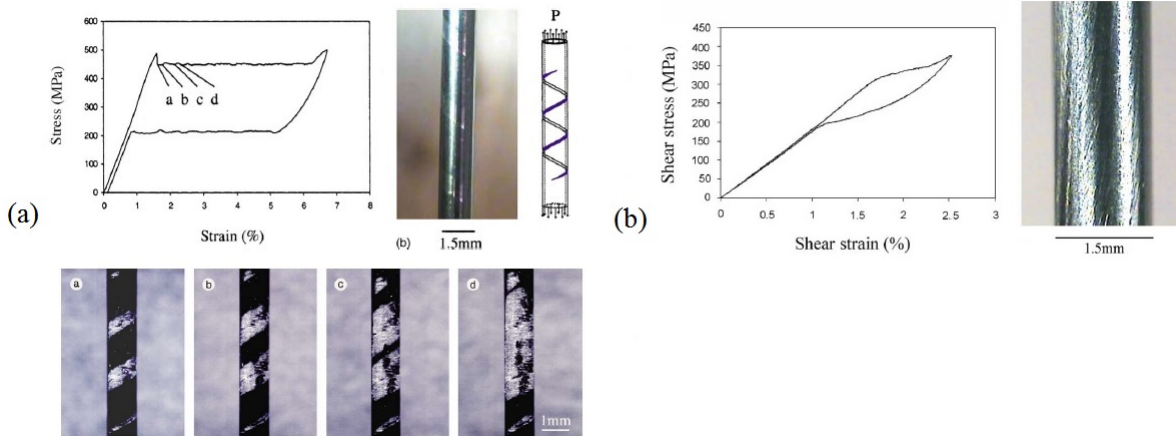


FIGURE 1.29 – Réponse contrainte-déformation et morphologie des tubes : (a) cas d’un chargement en traction, (b) cas d’une torsion pure, d’après [85].

La localisation de la transformation de phase peut être influencée par :

- des facteurs géométriques (forme de l’échantillon, rapports épaisseur/largeur, largeur/longueur, rayon/longueur etc.), voire les travaux de Shaw et Kyriakides [83], Dai et Cai [18], He et Sun ([32], [33], [34]). La figure 1.28 par exemple, montre l’évolution de la bande de transformation dans deux échantillons d’AMF de formes différentes : on observe une bande de

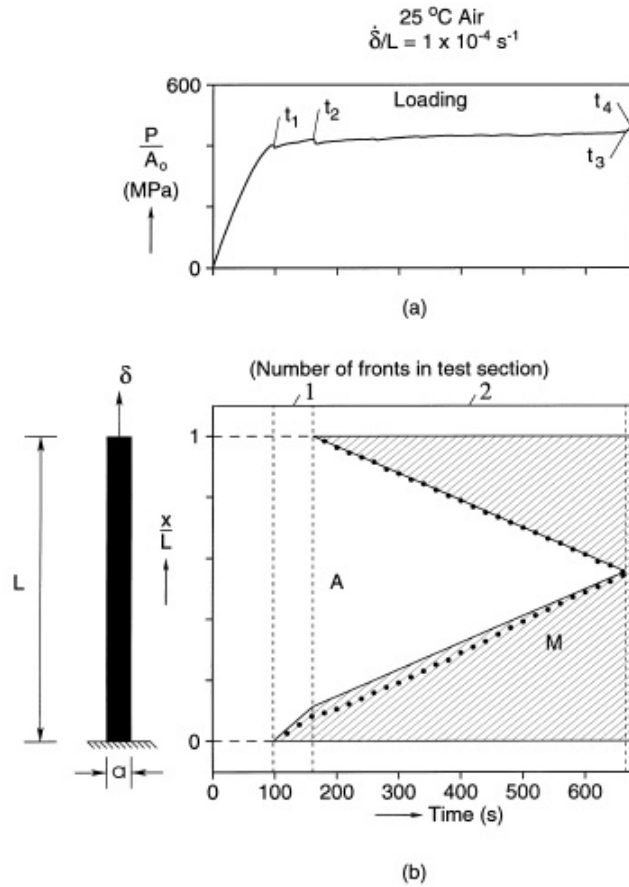


FIGURE 1.30 – Résumé d’une partie d’un test de traction uniaxiale à la vitesse  $\dot{\delta}/L = 10^{-4} s^{-1}$ , d’après [83].

forme hélicoïdale dans le cas du tube et une bande inclinée dans le cas de la plaque mince. Dans les deux cas, la bande de transformation est inclinée d’environ  $55^\circ$  par rapport à la direction du chargement.

- le type de chargement (traction, torsion etc.), Sun et Li [85] ont montré que la transition de phase dans un micro-tube d’AMF sollicité en traction s’accompagne d’un phénomène de localisation (nucléation et propagation dans le tube, d’une bande de martensite macroscopique de forme spirale) alors que sous une sollicitation en torsion pure, la transformation de phase dans le même micro-tube est homogène. Les courbes contrainte-déformation obtenues pour les deux types de chargement et la morphologie de la surface des tubes est présentée sur la figure 1.29.
- la microstructure du matériau (taille et orientation des grains etc.) peut aussi générer des hétérogénéités dans le champ de contrainte et provoquer une concentration de contraintes dans l’échantillon (Merzouki et al. [55]).
- la présence de défauts matériels et géométriques dans le matériau (zone affaiblie, présence de trous ou de rainures etc.). Ces défauts induisent une hétérogénéité dans le champ de déformation et un phénomène de localisation lors de la transformation de phase ; voire les

travaux de Murasawa et al. [58], Duval et al [20], Favier et al. [25].

Shaw et Kyriakides [83] ont montré que le nombre de nucléations ou de bandes de transformation est fortement lié à la vitesse de chargement appliquée ; la transformation de phase martensitique étant exothermique, lorsque les conditions environnementales ne permettent pas d'évacuer assez rapidement la quantité de chaleur libérée (cas des chargements rapides par exemple), il se produit un échauffement local au niveau de la bande de transformation rendant l'austénite plus stable au voisinage immédiat de celle-ci ; la transformation aura donc tendance à se déplacer dans une région moins chaude de l'échantillon laissant apparaître une nouvelle bande de transformation dès que la contrainte de nucléation sera atteinte dans cette région. Ainsi plus la vitesse de chargement est grande, plus ce phénomène va se répéter résultant donc à l'apparition de multiples fronts de transition ou de bandes de transformation. La figure 1.30 résume un test de chargement uniaxial réalisé par Shaw et Kyriakides [83]. On peut en effet noter l'apparition des bandes de transformation aux instants  $t_1$  et  $t_2$ . A partir de l'instant  $t_3$  la déformation redevient homogène dans la structure et l'instant  $t_4$  correspond à la fin du chargement.

### 1.3 Modélisation du comportement thermomécanique des AMF

Différents modèles thermomécaniques sont proposés dans la littérature pour la prédiction du comportement des alliages à mémoire de forme. Ces modèles sont construits soit par une analyse thermodynamique ou par une analyse phénoménologique. L'analyse thermodynamique nécessite la définition d'une énergie libre, des forces thermodynamiques, des différents critères d'activation et d'une cinétique d'évolution des différentes variables internes introduites dans le modèle. L'analyse phénoménologique quant à elle, repose sur la définition des surfaces de charge en se basant généralement sur des observations expérimentales et d'une cinétique d'évolution des variables internes du modèle.

On peut classer les modèles de comportement des AMFs en trois grands groupes :

- les modèles micromécaniques qui s'intéressent plus à la compréhension des phénomènes physiques à l'origine de la transformation de phase dans les alliages à mémoire de forme.
- les modèles macroscopiques qui se focalisent plus sur la description du comportement des alliages à mémoire de forme à l'échelle macroscopique. Ils peuvent être subdivisés en deux groupes :
  - les modèles basés sur la définition de l'énergie libre sur la base de considérations physiques ;
  - les modèles basés sur la théorie de la plasticité ;
- les modèles basés sur la dynamique moléculaire.

#### 1.3.1 Modèles micromécaniques

Les modèles micromécaniques se basent sur des observations faites à des échelles beaucoup plus fines que celles de leur utilisation ; la transformation de phase y est décrite à l'échelle du grain en considérant toutes les possibilités d'apparition de variantes de martensite. Chaque variante de martensite à l'intérieur du grain est caractérisée par sa fraction volumique et ses propriétés cristallographiques (la normale au plan d'habitat et direction de distorsion). L'expression de



l'énergie libre ainsi que les équations du modèle sont proposées à l'échelle du grain ou du cristal puis une technique d'homogénéisation est généralement adoptée pour déterminer le comportement macroscopique effectif. Les modèles micromécaniques les plus connus à ce jour apparaissent dans les années 1980 et 1990 ([65], [38], [53], [84], [29], [23],[86]). Ces modèles disposent d'un fort pouvoir prédictif à cause de la finesse de l'échelle de description des phénomènes. Cependant, ils comportent un très grand nombre de variables internes rendant difficile leur implémentation numérique dans les codes de calcul par éléments finis. De même, ils sont lourds en charge et temps de calcul et s'avèrent donc plus adaptés à la compréhension des mécanismes de la transformation de phase.

### 1.3.2 Modèles basés sur la définition de l'énergie libre

La spécificité de ces modèles réside dans la définition d'un potentiel thermodynamique de Gibbs ou de Helmholtz. Ce potentiel prend en compte les différents mécanismes pouvant exister au sein d'un polycristal d'AMF. Il s'exprime comme la somme de plusieurs énergies : mécanique, chimique et d'interaction, l'énergie d'interface étant souvent négligée. Les variables internes sont définies de manière globale ; ce sont la fraction volumique de martensite qui peut être décomposée en deux contributions : la fraction volumique de martensite orientée et la fraction volumique de martensite auto-accommodée, puis le tenseur définissant la direction de la déformation moyenne de transformation. Les forces motrices thermodynamiques associées aux différentes variables internes sont déduites de l'expression du potentiel thermodynamique construit. La transformation de phase dans les alliages à mémoire de forme étant décrite comme un phénomène dissipatif, une expression de la dissipation est introduite. Elle permet de définir la force critique associée à chaque force thermodynamique tout en prenant en compte le comportement hystérétique de la transformation de phase. La comparaison des forces motrices aux forces critiques et l'écriture des relations de cohérence permettent d'identifier les différents cas d'activation de la transformation de phase et ou de la réorientation des variantes puis de mettre en place les équations constitutives du modèle. Même si leur pouvoir prédictif se limite à une description quantitative du comportement macroscopique, ces modèles comportent un nombre réduit de variables internes et sont plus adaptés à une implémentation numérique dans des codes de calcul par éléments finis. Parmi ces modèles, on peut citer par exemple, [50], [74], [69], [69], [80]. Leur principale différence réside dans le type de variables internes employées, les spécificités de comportement prises en compte et dans l'expression de l'énergie libre.

### 1.3.3 Modèles basés sur la théorie de la plasticité

Ces modèles phénoménologiques se basent sur la définition de surfaces de charge associées à chaque variable interne ou aux différents processus physiques et considèrent l'écoulement normal aux surfaces de charges pour définir l'évolution de chaque variable interne ([76], [8], [63], [91], [77], [1], etc.). Les relations de cohérence viennent compléter ces conditions dans le but de dégager les différentes équations non-linéaires régissant le comportement thermomécanique des AMF. Ce type d'approche largement utilisé pour décrire le comportement des matériaux élastoplastiques s'adapte bien à la modélisation du comportement superélastique et présente une version étendue capable de prendre en compte le comportement effet mémoire de forme. Comme dans le cas des modèles basés sur la description macroscopique de l'énergie libre, ces modèles se prêtent bien à une implémentation numérique dans des codes de calcul par éléments finis mais la description des comportements reste globale.

Ces deux familles de modèles (basés sur la définition de l'énergie libre et sur la théorie de la plasticité) présentent des développements supplémentaires pour tenir compte des différentes spécificités des AMFs (saturation de la transformation de phase, boucles internes, dissymétrie traction-compression, etc...)

### 1.3.4 Modèles basés sur la dynamique moléculaire

Une interaction entre un groupe virtuel d'atomes est introduite dans le but de décrire la cinétique de la transformation de phase. Le choix du type d'atomes, les conditions initiales qui les animent et le choix du type d'interaction qui les lie constituent une étape importante de la modélisation basée sur la dynamique moléculaire [89]. Une fonction d'énergie potentielle permet de caractériser le type d'interaction entre les atomes du système moléculaire considéré. Les chargements mécaniques peuvent être modélisés par le contrôle du déplacement moyen d'un groupe d'atomes du système [79], par une application des conditions aux limites périodiques, par un couplage entre dynamique moléculaire et éléments finis [51] etc. Pour la modélisation des chargements thermiques, on peut agir sur les vitesses en utilisant des techniques de rééchelonnage par un coefficient pour initialiser la température du système ; une sollicitation plus progressive comme les solutions proposées par [7] est également possible. Un bon nombre de modèles de comportement dédié aux AMF et basés sur la dynamique moléculaire existe dans la littérature. Les références [61], [87], [78], [43], décrivent quelques-uns de ces modèles. Tout comme dans le cas des modèles micromécaniques, ces modèles possèdent un grand pouvoir prédictif ; ils peuvent également servir à la détermination de paramètres matériaux et à la validation de modèles. Toutefois, le nombre élevé de variables internes dont ils disposent rend difficile leur implémentation numérique dans des codes de calculs. A cet inconvénient s'ajoutent d'autres difficultés liées à la définition du système de travail (nombre d'espèces moléculaires ou atomiques nécessaires, l'identification des types de liaisons entre les espèces, etc...).

## 1.4 Modélisation du comportement thermomécanique instable des structures minces en AMF

Les phénomènes de localisation et les effets de taille ont fait l'objet de nombreuses études réalisées ces dernières décennies. Parmi les différents modèles proposés dans la littérature, nous pouvons citer les modèles basés sur la théorie de Landau-Ginzburg et les modèles non-locaux. Une brève description de ces modèles est proposé ici. La prise en compte du couplage thermomécanique dans la modélisation du comportement des AMF, second objectif du présent travail, est également présentée dans cette partie.

### 1.4.1 Modèles basés sur le potentiel de Landau-Ginzburg

Ces modèles dérivent de la théorie physique des transitions de phase et sont capables de décrire de façon cohérente l'ensemble des phénomènes accompagnant une transition de phase. Ils prévoient correctement les pics de contraintes observés au début des transformations directe et inverse ainsi que la propagation de la transformation sous une contrainte constante. En guise d'exemples nous pouvons citer les modèles proposés par He et Sun [32], [33], [34], Wang et Dai [90], Dai et Wang [17], Dai et Cai [18].

Les modèles proposés par He et Sun [32], [33], [34], sont basés sur la définition d'une fonction de densité d'énergie de déformation non convexe et d'une expression de l'énergie du gradient de déformation. Le modèle décrit correctement la morphologie et l'évolution des domaines ou

des bandes de transformation macroscopiques lors de la transition de phase. Le principe de minimisation de l'énergie permet de prédire la forme du domaine à l'équilibre ; les influences de la géométrie de l'échantillon (films ou tubes minces) et d'un paramètre de longueur relatif à la microstructure du matériau sur la forme des domaines également sont prises en compte. Toutefois, les auteurs ont précisé que si les réponses macroscopiques des AMF sont intrinsèquement liées à des phénomènes physiques impliquant des instabilités, des échanges de chaleur à différentes échelles temporelles, ou des interactions entre ces divers phénomènes physiques, ces derniers n'ont pas été pris en compte pour des raisons de simplicité.

Dans les références Wang et Dai [90], Dai et Wang [17], les auteurs proposent une description analytique des phénomènes instables observés dans les structures minces d'AMF. Ils développent des modèles 2D et 3D basés sur la définition d'une fonction d'énergie de déformation non convexe. En adoptant une méthode couplant les développements asymptotiques et en série avec l'hypothèse que l'épaisseur du film, sa largeur et sa déformation sont assez petites vis-à-vis de sa longueur, ils obtiennent une expression beaucoup plus simplifiée de cette énergie. Les équations d'équilibre sont ensuite obtenues en maximisant la dissipation de l'énergie totale et peuvent être résolues analytiquement sous des conditions aux limites appropriées. L'instabilité est alors modélisée comme le passage de la couche de configuration d'un mode de solution non triviale à un mode de solution triviale ou constante. Le critère d'instabilité de point limite est adopté pour déterminer le point de bifurcation.

### 1.4.2 Modèles basés sur les approches non-locales

Les approches non-locales sont largement utilisées dans la gestion des phénomènes d'adoucissement dans les modèles de plasticité et d'endommagement. En effet, les phénomènes d'adoucissement dans les matériaux sont dus à la présence de micro-défauts (micro-fissure, micro-cavité, imperfections etc...) qui affectent directement leur comportement macroscopique. Les modèles de plasticité standards échouent dans la description de tels phénomènes. Les limites rencontrées par ces modèles ont fait l'objet d'études dont celles réalisées par Jirásek et Bažant [40]. Les auteurs ont en effet expliqué en détail les phénomènes d'adoucissement observés dans les matériaux élasto-plastiques. En guise d'exemple, ils considèrent une barre de section  $A$  constante et de longueur  $L$  soumise à une traction uni-axiale comme l'indique la figure 1.31 (a). Le matériau est supposé élasto-plastique avec un adoucissement isotrope. La fonction de charge est donnée dans ce cas par la relation :

$$f(\sigma, \kappa) = |\sigma| - h(\kappa) = 0 \quad (1.1)$$

$\kappa$  représente la plasticité cumulée et  $h(\kappa)$  décrit l'évolution de la contrainte d'écoulement. Pour le cas simple d'un adoucissement linéaire, la réponse contrainte-déformation est présentée sur la figure 1.31 (b). La déformation  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$  correspondant à la contrainte initiale d'écoulement  $\sigma_0$  et  $E$  le module d'Young du matériau. La contrainte d'écoulement décroît ensuite linéairement jusqu'à une valeur nulle pour  $\varepsilon = \varepsilon_f$ . Notons que pour des valeurs  $\varepsilon > \varepsilon_f$ , la contrainte d'écoulement est nulle ; ce qui signifie une perte totale de cohésion dans le matériau.

Si la barre est sollicitée en traction par un déplacement  $u$  imposé, à l'une de ses extrémités, la réponse reste linéaire jusqu'au déplacement  $u = u_0 = L\varepsilon_0$ . A ce stade, la force  $F$  atteint sa valeur maximale  $F_0 = A\sigma_0$  (figure 1.31 (c)), à partir de laquelle le comportement de la barre se dégrade. Dans chaque section de la barre, la contrainte peut décroître aussi bien par augmentation ou diminution de la déformation. Une contrainte  $\bar{\sigma}$  donnée comprise entre 0 et  $\sigma_0$  peut être générée par une infinité de chemins de déformation limités par deux cas extrêmes : décharge élastique à partir du pic de contrainte à la déformation  $\varepsilon_u$  et le chemin correspondant

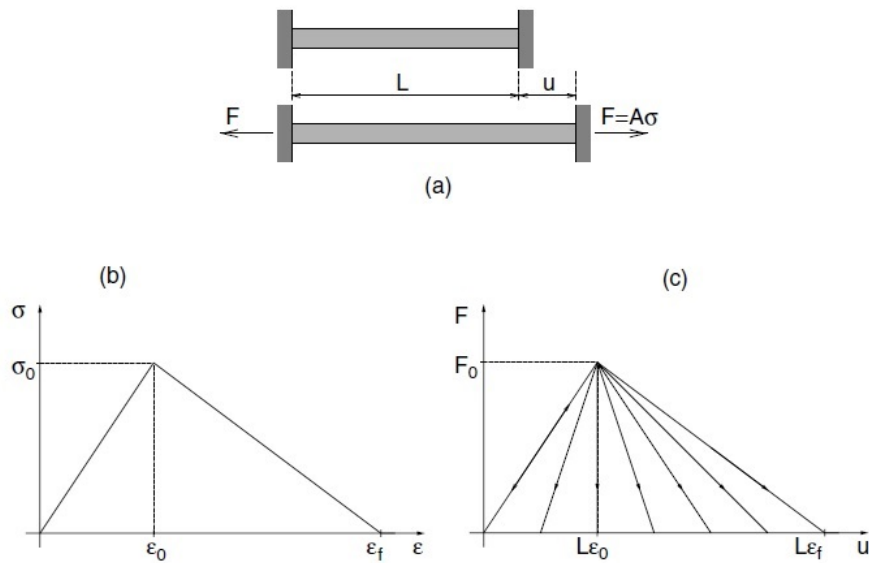


FIGURE 1.31 – Barre sollicitée en traction (a); courbe contrainte-déformation dans le cas d'un adoucissement linéaire (b); branches de bifurcation post-pic de la réponse force-déplacement de la barre, d'après [40].

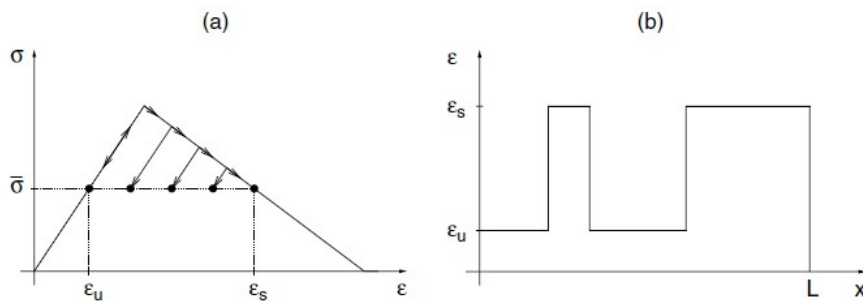


FIGURE 1.32 – Multiples valeurs de déformations correspondant à un même niveau de contrainte (a); Distribution de la déformation constante par morceaux (b), d'après [40].

à un adoucissement jusqu'à  $\epsilon_s$ . Ainsi le champ de déformation n'est pas uniforme dans la barre. Toute distribution de déformation constante comprise entre les déformations  $\epsilon_u$  et  $\epsilon_s$  représente une solution valide comme le montre la figure 1.32.

Numériquement, il a été constaté que la solution obtenue à partir de l'analyse de ces phénomènes par la méthode des éléments finis et en se basant sur une formulation mathématique continue en élasto-plasticité révèle une dépendance pathologique relative à la finesse et à l'orientation du maillage. La résolution numérique perd son objectivité dans ces conditions. Il a été toutefois identifié que cette dépendance de la solution au maillage n'est que la conséquence d'une formulation mathématique mal posée du problème conduisant à une perte d'ellipticité.

Dans la littérature de nombreuses approches ont été proposées conduisant à diverses stratégies pour résoudre les problèmes de localisation dans les matériaux élasto-plastiques. Parmi ces approches, les approches non-locales se révèlent très efficaces. Elles ont donné naissance aux modèles de plasticité dits non-locaux (Pijaudier-Cabot [72], Peerlings [67]). Les approches non-locales sont en principe applicables à tout type de modèle de comportement. Il faut pour cela, définir et introduire dans le modèle un limiteur de localisation. Il s'agit d'une information spatiale, généralement sous la forme "d'une longueur interne", liée à la microstructure du matériau [46]. Pour ce faire, les approches non-locales enrichissent le modèle de comportement par une ou plusieurs variables d'état non-locales correspondant à une moyenne pondérée spatiale sur un volume fini entourant le point matériel considéré. Soit  $\tau(x)$  un champ local au sein d'un domaine  $V$ ; le champ non-local est donné par :

$$\bar{\tau}(x) = \int_V \alpha_0(x, \xi) \tau(\xi) d\xi \quad (1.2)$$

$\alpha_0(x, \xi)$ , avec  $x$  le "récepteur" et  $\xi$  la "source", est une fonction de pondération non-locale, souvent prise égale à une distribution de Gauss (1.3) ou une fonction en forme de cloche (1.4) :

$$\alpha_0(r) = e^{-\frac{n_{dim} r^2}{2l^2}} \quad (1.3)$$

$$\alpha_0(r) = \begin{cases} (1 - (\frac{r^2}{R^2}))^2 & si \quad 0 \leq r \leq R \\ 0 & si \quad R \leq r \end{cases} \quad (1.4)$$

Dans les équations (1.3) et (1.4),  $r = \|x - \xi\|$ ;  $l$  est la longueur interne du milieu local et  $n_{dim}$  la dimension du problème.  $R$  dans l'équation (1.4) est un paramètre proportionnel à la longueur interne.

Si la longueur interne constitue un paramètre déterminant dans les modèles basés sur une approche non-locale, sa caractérisation reste toutefois difficile. Il peut-être relié dans le cas des matériaux composites à la taille moyenne des fibres dans la matrice; dans le cas des matériaux granulaires comme les bétons, il est relié à la taille des agrégats [9] ou encore à la taille des défauts dans les modèles d'endommagement. Dans le cas des matériaux métalliques comme les AMF, cette longueur interne est liée à la microstructure du matériau impliquant de ce fait des valeurs assez faibles. Elle peut-être déterminée par analyse inverse d'une courbe de traction réalisée sur des éprouvettes lisses et entaillées [9].

De nombreuses études numériques et analytiques ont été également réalisées dans le but de caractériser le paramètre de longueur interne. Jirásek et Bažant [40] ont montré à partir de problèmes unidimensionnels simples que pour bien capturer les phénomènes de localisation, il faut prendre la valeur du paramètre de longueur interne au moins égale à la taille des éléments ou de la maille. La même observation a été effectuée en 1D par Duval et al. [20]. Les auteurs ont remarqué que des oscillations peuvent apparaître dans les réponses (force-déplacement par exemple) d'une barre d'AMF sollicitée en traction lorsque la valeur du paramètre de longueur interne est inférieure à la taille des éléments.

Dans le cas multi-dimensionnel, Jirásek et Bažant [40] ont montré que la valeur du paramètre de longueur interne dépend non seulement de la taille de la maille mais également de la taille du défaut ainsi que de l'inclinaison de la bande de localisation. Ainsi dans le cas d'une bande se propageant le long de la diagonale d'un maillage régulier avec des éléments de forme carré, le paramètre de longueur interne peut prendre la valeur  $L_s = \sqrt{2}.h$ , avec  $h$  la longueur de l'élément.

Les phénomènes de localisation et d'effet de taille décrits dans les AMF pouvant s'apparenter aux phénomènes d'adoucissement observés dans les matériaux plastiques, nous adopterons

les solutions qu’offrent les approches non-locales pour étudier ces phénomènes dans le cas des AMF. Nous rappelons que ces notions ont été récemment introduites dans la modélisation des phénomènes de localisation dans les AMF superélastiques par Arnaud Duval [20] en 1D et 2D, et ont abouti à des résultats très encourageants. Dans le présent travail, la généralisation de la modélisation des phénomènes instables observés dans les structures minces en AMF par une approche non-locale est proposée. L’objectif visé consiste à proposer dans le cas 2D, non seulement une meilleure description du comportement superélastique mais également d’étendre l’approche aux autres aspects comportementaux des AMF tels que l’effet mémoire de forme et le comportement thermique à contrainte constante. De nombreuses simulations numériques seront également proposées afin de vérifier l’aptitude du modèle non-local proposé à être utilisé comme un outil efficace de dimensionnement d’applications utilisant les films minces en AMF.

### 1.4.3 Prise en compte de l’effet de la chaleur latente de transformation dans la modélisation du comportement des structures minces en AMF

La forte sensibilité du comportement mécanique des alliages à mémoire de forme à la température a été expliquée en détails dans les paragraphes précédents ; elle est essentiellement due au caractère exothermique de la transformation de phase directe et endothermique de la transformation de phase inverse. Ainsi d’importantes variations de température peuvent se produire lors de la transformation de phase dans les AMF.

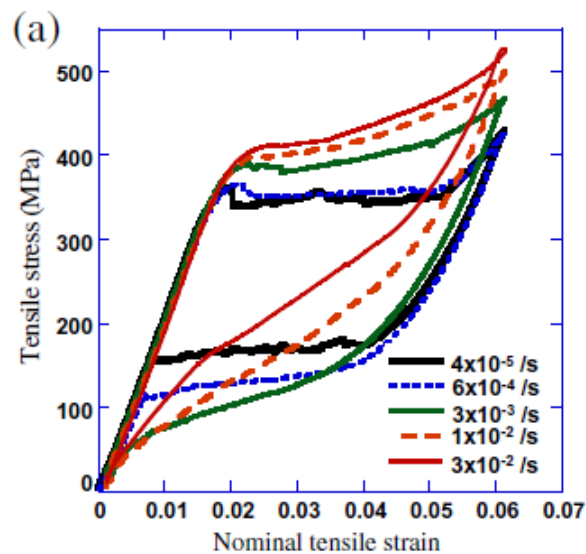


FIGURE 1.33 – Dépendance de la réponse contrainte-déformation d’un film en NiTi à la vitesse de chargement, d’après [35].

Ces variations affectent directement la réponse mécanique des AMF ; on note principalement une dépendance de cette réponse à la vitesse de chargement et aux conditions aux limites thermiques comme l’indique la figure 1.33 issue de travaux expérimentaux réalisés par He et al. [35]. Cette influence s’explique par le caractère transitoire du changement de température dans un tel milieu dépendant des conditions aux limites imposées. De nombreux autres exemples de travaux

expérimentaux ([71], [81], [88], etc...) confirment ce fort couplage thermomécanique dans les AMF et montrent l'importance de la prise en compte de ce couplage fort dans la modélisation de leur comportement. Toutefois, parmi les nombreux modèles dédiés à l'étude du comportement de ces matériaux, seuls quelques uns tiennent compte des effets de la chaleur latente de transformation. Nous présentons ici, en guise d'exemples, trois de ces modèles :

- le modèle phénoménologique 3D proposé par Daniel Christ et Stefanie Reese [13]. Il prend en compte les deux principales propriétés observées dans les AMF : la pseudoélasticité et l'effet mémoire de forme. La fraction volumique de martensite ( $Z$ ) est décomposée en fractions de martensite orientée ( $Z_o$ ) et auto-accommodée ( $Z_u$ ) :  $Z = Z_o + Z_u$ . La martensite orientée représente à la fois celle produite au cours d'une transformation de phase pseudoélastique et celle issue d'une réorientation de la martensite produite thermiquement (les auteurs considèrent ce phénomène comme une pseudoplasticité). Le modèle est établi dans le cadre de la théorie des grandes déformations basée sur la décomposition multiplicative du gradient de déformation en une part élastique et une part inélastique résultant de la transformation de phase ou de l'orientation des variantes de martensite. L'approche a été étendue à la prise en compte du couplage fort thermomécanique et des effets de la chaleur latente de transformation en appliquant l'équilibre de l'énergie interne.
- le modèle tridimensionnel proposé par Claire Morin et al. [56]. Il est basé sur une extension du modèle de Zaki et Moumni [91] dédié à l'étude du comportement des AMF ; le modèle initial ne gérant pas correctement le couplage thermomécanique observé dans les AMF, une modification a été apportée à l'énergie libre de Helmholtz afin de déduire l'équation de la chaleur, conformément aux principes fondamentaux de la thermodynamique. Un algorithme basé sur la technique du retour radial a ensuite été proposé pour la mise en œuvre numérique du modèle obtenu dans un code de calcul par éléments finis. Les effets de la vitesse de déformation sur le comportement mécanique d'un AMF superélastique ont été correctement prédits par le modèle. Cependant, dans le cas des résultats thermiques à grandes vitesses de déformation, seul un accord qualitatif a été obtenu. Les auteurs concluent que cette différence est due à des effets de localisation qui ne sont pas pris en compte dans leur modèle. Le modèle a été également exploité notamment dans le cadre des travaux de thèse de Mohamed Ould Moussa [60] pour l'étude du comportement dynamique des AMF.
- le modèle micro-macro proposé par Entemeyer et al. [23] pour l'étude de l'influence de la vitesse de déformation sur le comportement superélastique des alliages à mémoire de forme à base de cuivre. La cinétique d'évolution de la transformation martensitique par rapport à l'évolution de la température et de la contrainte a été étudiée. Par ailleurs à partir de l'expression de l'énergie libre de Helmholtz établie dans leur modèle et en prenant en compte l'équation de la chaleur proposée par Chrysochoos et Peyroux [14], les auteurs ont pu dégager une relation entre la variation de la température et la vitesse de production de la martensite. Les simulations numériques à partir de leur modèle montrent un bon accord avec les résultats expérimentaux issus de la littérature.

Un point commun à ces modèles extraits de la littérature concerne la mise en place de l'équation de la chaleur tenant compte d'une source de chaleur interne liée à la transformation de phase. Dans le cas du modèle proposé par Daniel Christ et Stefanie Reese [13] par exemple, cette équation est établie en prenant en compte les premier et second principes de la thermodynamique et l'expression de l'énergie libre de Helmholtz. Cette équation s'écrit :

$$c_d \dot{\theta} = \underbrace{\left( \mathbf{M} - \theta \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} - \chi_t \right) \cdot \mathbf{d}_t + \mathbf{M}_t \cdot \mathbf{d}_{td} - \Delta e_0 \dot{Z}}_{W_{int}} + \underbrace{\theta \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{C}}}_{W_{ext}} - Div Q \quad (1.5)$$

Où  $c_d$  est un paramètre matériau ;  $Q$  représente le vecteur flux de chaleur défini à partir de la loi de Fourier,  $\dot{\theta}$  représente la dérivée par rapport au temps de la température.  $\mathbf{S}$  définit le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff ;  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{M}_t$  sont les tenseurs de contrainte de Mandel et  $\chi_t$  est analogue au tenseur des contraintes de retour en durcissement cinématique. Pour plus de détails sur les expressions de ces tenseurs, nous recommandons au lecteur la référence [13].

$W_{int}$  représente la dissipation d'énergie due à l'évolution des variables internes et  $W_{ext}$  représente la dissipation liée à la vitesse de déformation extérieure ; elle peut-être négligée dans le cas de chargements très lents ou quasi-statiques.

Dans le présent travail, une expression de l'équation de la chaleur sera établie ; cette équation couplée aux différentes équations du modèle de comportement des AMF proposé lors de la thèse d'Arnaud Duval [19] serviront à l'étude des effets de la chaleur latente de transformation sur le comportement mécanique des AMF.

Notons qu'une extension basée sur les approches non-locales du modèle obtenu sera également effectuée afin de pouvoir prendre en compte les phénomènes de localisation de la transformation de phase dans l'étude de l'effet couplage fort thermomécanique dans les structures minces en AMF sur leur comportement macroscopique.

## 1.5 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons réalisé une étude bibliographique au sujet du comportement thermomécanique instable des structures minces en AMF. Les deux premières parties de ce chapitre ont été consacrées respectivement à la description des AMF et à un état de l'art sur les différents modèles de leur comportement proposés dans la littérature. La troisième partie décrit les instabilités de comportement liées à la transformation de phase dans les structures minces en AMF ; elle est suivie dans la quatrième partie d'une synthèse sur les différentes approches adoptées dans le but de modéliser ces phénomènes instables. Dans le second chapitre qui suit, nous allons présenter le modèle de comportement local des AMF. Une extension de ce modèle en non-local sera proposée plus tard (chapitre 3) dans le but d'étudier les différents phénomènes instables particuliers décrits dans ce chapitre.



# Modèle local du comportement thermomécanique des AMF

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>36</b>
<b>2.2</b>	<b>Mécanismes de déformation et choix des variables internes</b>	<b>36</b>
<b>2.3</b>	<b>Potentiel thermodynamique</b>	<b>38</b>
<b>2.4</b>	<b>Forces motrices thermodynamiques</b>	<b>41</b>
<b>2.5</b>	<b>Expressions de la dissipation</b>	<b>42</b>
<b>2.6</b>	<b>Modélisation et gestion numérique des limitations physiques</b>	<b>44</b>
<b>2.7</b>	<b>Conditions d'activations et lois d'évolution</b>	<b>45</b>
2.7.1	Transformation de phase	45
2.7.2	Orientation des variantes de martensite	45
2.7.3	Tableau récapitulatif des paramètres du modèle	46
<b>2.8</b>	<b>Implémentation numérique du modèle</b>	<b>47</b>
2.8.1	Définition des résidus	47
2.8.2	Méthode de résolution	47
2.8.3	Calcul des modules tangents cohérents	48
<b>2.9</b>	<b>Validation du modèle</b>	<b>50</b>
2.9.1	Validation du modèle de comportement sur des cas de chargement homogène	50
2.9.2	Application au calcul de structures : plaque trouée en AMF	54
<b>2.10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>60</b>

---

## Résumé

L'objectif du présent travail de thèse est de développer un modèle non-local de comportement des AMF spécialement dédié à l'étude du comportement des structures minces en AMF. Ce dernier pourrait également servir d'outil de dimensionnement d'applications de taille fortement réduite exploitant les propriétés des AMF. Le modèle non-local en question est obtenu comme une extension au cadre non-local d'un modèle de comportement local issu des travaux de thèse de Bertrand Peultier [70], d'Yves Chemisky [10], et d'Arnaud Duval [19]. Nous consacrons donc ce second chapitre à la description de ce modèle local de comportement des AMF. Son aptitude à décrire les différents comportements spécifiques des AMF sera illustrée à travers divers exemples de simulations numériques.

## 2.1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons vu que la transformation de phase dans les AMF confère à cette classe d'alliages, divers aspects comportementaux. Ces différents comportements doivent être pris en compte lors du développement d'un modèle de comportement macroscopique destiné à être implanté dans un code de calcul par éléments finis pour des études de structures complexes en AMF. Le modèle que nous allons présenter dans ce chapitre a été initialement développé par Bertrand Peultier [70] et amélioré par Yves Chemisky [10], et Arnaud Duval [19]. Il est construit à partir d'une approche thermodynamique en introduisant des variables internes permettant de décrire l'état du matériau. A partir du bilan thermodynamique des différents mécanismes pouvant induire une déformation à l'échelle macroscopique au sein d'un AMF, une expression d'un potentiel thermodynamique est proposée. Les forces motrices thermodynamiques associées aux variables internes et de contrôle sont alors déterminées en effectuant une différentiation du potentiel thermodynamique. Des critères de charge écrits en se basant sur une expression de la dissipation, complétés par des lois définissant la cinétique d'évolution des variables internes ont été mis en place afin de définir complètement le modèle de comportement. L'implémentation numérique et la capacité du modèle à prédire la réponse des AMF face à divers types de trajets de chargements thermomécaniques sont également présentés.

## 2.2 Mécanismes de déformation et choix des variables internes

Considérons un volume élémentaire représentatif (VER) d'un alliage à mémoire de forme polycristallin. Ce VER étant initialement, dans un état purement austénitique, l'application d'un chargement thermomécanique, va provoquer l'activation de la transformation de phase directe ou inverse et/ou la réorientation des variantes de martensite. On observe alors au niveau macroscopique une déformation du VER. En supposant un champ de température homogène et un comportement thermo-élastique identique pour les phases austénitique et martensitique, il est possible de décomposer la déformation macroscopique totale du VER sous la forme additive suivante :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{el} + \mathbf{E}^{th} + \mathbf{E}^{ine} \quad (2.1)$$

La déformation élastique  $\mathbf{E}^{el}$  et la déformation induite par dilatation thermique  $\mathbf{E}^{th}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{el} &= \mathbb{S} : \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{E}^{th} &= \boldsymbol{\alpha} \Delta T \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\mathbb{S}$  est le tenseur de souplesse d'ordre 4,  $\boldsymbol{\Sigma}$ , la contrainte moyenne définie sur tout le VER ;  $\boldsymbol{\alpha}$  est le tenseur de dilatation thermique isotrope et  $\Delta T$  est la différence entre la température actuelle du VER et la température de référence.

La déformation inélastique est prise dans le cas du présent modèle égale à la somme des déformations induites par la transformation de phase martensitique ( $E^T$ ) et la déformation d'accommodation des macles ( $E^{twin}$ ).

$$\mathbf{E}^{ine} = \mathbf{E}^T + \mathbf{E}^{twin} \quad (2.3)$$

La déformation de transformation macroscopique est la moyenne des déformations de transformation en tout point du VER. Si  $V$  est le volume total du VER et  $\boldsymbol{\varepsilon}^T(r)$  la déformation en un point ( $r$ ), elle s'exprime par la relation :

$$\mathbf{E}^T = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T(r) dV \quad (2.4)$$

Cette déformation est liée à la quantité de martensite de volume  $V_M$  produite au cours de la transformation de phase ; elle est nulle dans le volume  $V - V_M$  de la phase austénitique, ce qui permet de réécrire la relation intégrale (2.4) sous la forme :

$$\mathbf{E}^T = \frac{V_M}{V} \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \boldsymbol{\varepsilon}^T(r) dV \quad (2.5)$$

La relation (2.5) fait apparaître le rapport  $\frac{V_M}{V}$  représentant la fraction volumique de martensite dans le VER notée  $f$  et la variable tensorielle  $\frac{1}{V_M} \int_{V_M} \boldsymbol{\varepsilon}^T(r) dV$  représentant l'orientation moyenne de l'ensemble des variantes de martensite notée  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T$ .

Finalement la déformation de transformation macroscopique peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{E}^T = f \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \quad (2.6)$$

En utilisant les mêmes développements, il est possible d'écrire la déformation macroscopique d'accommodation des macles comme le produit de la fraction de martensite formée auto-accommodée  $f^{FA}$  ( $f^{FA} = \frac{V_{twi}}{V}$ , avec  $V_{twi}$  le volume de martensite formée auto-accommodée) et de la déformation moyenne d'accommodation des macles  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{tw}$ .

On obtient ainsi :

$$\mathbf{E}^{twi} = f^{FA} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{tw} \quad (2.7)$$

A partir des expressions des différentes déformations, on peut, en résumé, retenir quatre variables internes pour le présent modèle :

- la fraction volumique  $f$  de martensite
- la déformation moyenne de transformation  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T$
- la fraction volumique de martensite formée auto-accommodée  $f^{FA}$
- la déformation moyenne d'accommodation des macles  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{tw}$

La saturation de la transformation de phase martensitique impose des limitations physiques aux variables internes du modèle :

- les fractions volumiques de martensite  $f$  et de martensite formée auto-accommodée  $f^{FA}$  ne peuvent prendre que des valeurs comprises dans l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$0 \leq f \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq f^{FA} \leq 1 \quad (2.8)$$

- la transformation de phase martensitique dans les AMF induit essentiellement un cisaillement du réseau cristallographique et se produit sans variation de volume. La déformation de transformation et la déformation d'accommodation des macles sont donc déviatoriques ( $\bar{\varepsilon}_{kk}^T = \bar{\varepsilon}_{kk}^{twi} = 0$ ). De plus, la déformation moyenne de transformation équivalente au sens de Von Mises admet une valeur seuil notée  $\varepsilon_{MAX}^T$  :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^T = \sqrt{\frac{2}{3} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T} \leq \varepsilon_{MAX}^T \quad (2.9)$$

$\varepsilon_{MAX}^T$  dépend des paramètres matériaux  $\varepsilon_{SAT}^T$ ,  $\varepsilon_{SAT}^{TFA}$  et du ratio ( $\frac{f^{FA}}{f}$ ) des fractions volumiques  $f^{FA}$  et  $f$ .  $\varepsilon_{SAT}^T$  correspond à la valeur de saturation de la déformation de transformation pour la martensite formée orientée. Cette valeur dépend de la direction du chargement appliqué (traction ou compression), ce qui permet de prendre en compte dans le présent modèle, la dissymétrie entre la traction et la compression observée dans les AMF. De plus, elle dépend de l'histoire de la formation de la martensite. Ainsi, dans le cas d'un processus de réorientation où la martensite est initialement formée auto-accommodée, elle est supposée plus faible et devient dans ce cas :  $\varepsilon_{SAT}^{TFA}$ .

Notons qu'aucune limitation physique n'est imposée à la déformation moyenne d'accommodation des macles car cette limitation intervient à des niveaux de contraintes assez élevées où des déformations plastiques peuvent être générées et le présent modèle ne prend pas en compte de telles déformations.

Le modèle existe en version 3D et 2D contraintes planes. Le présent travail étant dédié à l'étude du comportement des films minces en AMF, nous n'utiliserons que la version 2D contraintes planes.

## 2.3 Potentiel thermodynamique

La transformation de phase dans les AMF se produit soit par un changement de température soit par une modification de l'état de contraintes. Le VER admet donc comme variables de contrôle, la température et la contrainte  $(T, \Sigma)$ . Le potentiel thermodynamique du VER est donc défini à partir de l'enthalpie libre de Gibbs.

Le VER étant polycristallin, il est constitué de plusieurs grains initialement dans une phase austénitique. Lors d'un chargement thermomécanique, la transformation de phase peut se produire au niveau de chaque grain ; le VER se retrouve dès lors dans un état biphasé. Son énergie libre est une somme de plusieurs contributions :

- l'énergie libre  $G_A$  de la phase austénitique
- l'énergie libre  $G_M$  de la phase martensitique
- l'énergie potentielle ou l'énergie due au chargement extérieur  $G_{ext}$
- l'énergie chimique de changement de phase  $G_{ch}$
- l'énergie liée à la chaleur spécifique de transformation de phase  $G_{cs}$
- l'énergie élastique du VER  $G_{int}$

Le potentiel thermodynamique  $G$  est la somme de toutes ces contributions :

$$G = G_A + G_M + G_{ext} + G_{ch} + G_{cs} + G_{int} \quad (2.10)$$

Les énergies  $G_{ext}$ ,  $G_M$ ,  $G_A$ ,  $G_{ch}$  et  $G_{cs}$  sont respectivement exprimées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} G_{ext} &= -\Sigma : E \\ G_M &= (U^M - TS^M)f \\ G_A &= (U^A - TS^A)(1-f) \\ G_{ch} &= (\Delta U - T\Delta S)f \\ G_{cs} &= C_v[(T - T_0) - T \log(\frac{T}{T_0})] \end{aligned} \quad (2.11)$$

$U^A$  et  $U^M$  représentent respectivement les énergies internes volumiques de l'austénite et de la martensite;  $S^A$  et  $S^M$ , les entropies volumiques de l'austénite et de la martensite.  $C_v$  est la chaleur spécifique à volume constant supposée identique pour l'austénite et la martensite.  $\Delta U = U^M - U^A$  et  $\Delta S = S^M - S^A$  sont respectivement les variations d'énergie interne et d'entropie volumiques entre la phase austénitique et la phase martensitique. En introduisant  $T_0 = \frac{\Delta U}{\Delta S}$  et  $B = -\Delta S$ , deux paramètres matériaux définissant respectivement la température d'équilibre de la transformation de phase et la variation linéaire de l'entropie autour de cette température d'équilibre, on peut écrire le potentiel thermodynamique du VER sous la forme suivante :

$$G = U^A - TS^A + B(T - T_0)f - \Sigma : E + C_v[T - T_0 - T \log(\frac{T}{T_0})] + G_{int} \quad (2.12)$$

L'énergie élastique  $G_{int}$  du VER introduite ici prend en compte les incompatibilités de déformations entre les phases austénitique et martensitique d'une part et d'autre part, entre les variantes de martensite. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} G_{int} &= \frac{1}{2V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(r) : \boldsymbol{\varepsilon}^e(r) dV \\ &= \frac{1}{2V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(r) : (\boldsymbol{\varepsilon}(r) - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}(r) - \boldsymbol{\varepsilon}^T(r) - \boldsymbol{\varepsilon}^{twin}(r)) dV \end{aligned} \quad (2.13)$$

En utilisant le lemme de Hill-Mandel [37] et en faisant l'hypothèse que les propriétés thermoélastiques sont identiques dans les deux phases, la relation (2.13) peut se mettre sous la forme :

$$G_{int} = \frac{1}{2} \Sigma : \mathbf{E} - \frac{1}{2} \Sigma : \mathbf{E}^{th} - \frac{1}{2V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(r) : (\boldsymbol{\varepsilon}^T(r) + \boldsymbol{\varepsilon}^{twin}(r)) dV \quad (2.14)$$

Dans l'équation (2.14), la contrainte locale  $\boldsymbol{\sigma}(r)$  peut être écrite comme la somme de la contrainte macroscopique  $\Sigma$  et d'une fluctuation locale  $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}(r)$  autour de  $\Sigma$  :

$$\boldsymbol{\sigma}(r) = \Sigma + \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}(r) \quad (2.15)$$

En introduisant la relation (2.15) dans l'équation (2.14), l'énergie  $G_{int}$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} G_{int} &= \frac{1}{2} \Sigma : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{th} - \mathbf{E}^T - \mathbf{E}^{twin}) - \frac{1}{2V} \int_V \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}(r) : (\boldsymbol{\varepsilon}^T(r) + \boldsymbol{\varepsilon}^{twin}(r)) dV \\ &= \frac{1}{2} \Sigma : \mathbb{S} : \Sigma - \frac{1}{2V} \int_V \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}(r) : (\boldsymbol{\varepsilon}^T(r) + \boldsymbol{\varepsilon}^{twin}(r)) dV \end{aligned} \quad (2.16)$$

La fluctuation locale  $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}(r)$  peut, elle-même, être décomposée en trois contributions à différentes échelles :  $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}_1$  pour les incompatibilités inter-granulaires,  $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}_2$  pour les incompatibilités entre les différentes variantes de martensite et  $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}_3$  entre les variantes de martensite auto-accommodées. De plus, il faut noter que la dépendance entre les fluctuations de contrainte  $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}_1$ ,  $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}_2$  et la déformation moyenne d'accommodation des macles est négligée; de même que celle entre la fluctuation de contrainte  $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}_3$  et la déformation moyenne de transformation. Ainsi la relation (2.16) devient :

$$G_{el} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{2V} \int_V \boldsymbol{\delta\sigma}_1(r) : \boldsymbol{\varepsilon}^T(r) dV - \frac{1}{2V} \int_V \boldsymbol{\delta\sigma}_2(r) : \boldsymbol{\varepsilon}^T(r) dV - \frac{1}{2V} \int_V \boldsymbol{\delta\sigma}_3(r) : \boldsymbol{\varepsilon}^{twin}(r) dV \quad (2.17)$$

La fluctuation de la contrainte  $\boldsymbol{\delta\sigma}_1$  apparaît lors de la transformation de phase entre les différents grains du VER. On suppose qu'elle évolue proportionnellement à la déformation moyenne de transformation  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T$ ; elle est alors exprimée en fonction de cette dernière à l'aide d'un facteur décroissant  $-H_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T}$  ( $H_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T} > 0$ ). On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2V} \int_V \boldsymbol{\delta\sigma}_1(r) : \boldsymbol{\varepsilon}^T(r) dV &= -\frac{1}{2V} \int_V -H_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T : \boldsymbol{\varepsilon}^T(r) dV \\ &= \frac{1}{2} f H_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \end{aligned} \quad (2.18)$$

La fluctuation du champ de contrainte  $\boldsymbol{\delta\sigma}_2$  est liée à l'incompatibilité entre les variantes de martensite produites au sein du grain. Des travaux réalisés par Siredey et al. [84] ont permis d'évaluer l'énergie élastique due à cette incompatibilité au sein d'un grain. Ici une approximation de cette énergie est faite sur tout le VER; on obtient la relation suivante :

$$-\frac{1}{2V} \int_V \boldsymbol{\delta\sigma}_2(r) : \boldsymbol{\varepsilon}^T(r) dV = \frac{1}{2} H_f f^2 \quad (2.19)$$

Où  $H_f$  représente un paramètre matériau permettant de prendre en compte les incompatibilités entre les différentes variantes de martensite. La fluctuation de contrainte  $\boldsymbol{\delta\sigma}_3$  est supposée proportionnelle à la déformation moyenne d'accommodation des macles. Un facteur de proportionnalité  $-H_{twin}$  avec  $H_{twin} > 0$  est introduit et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2V} \int_V \boldsymbol{\delta\sigma}_3(r) : \boldsymbol{\varepsilon}^{twin}(r) dV &= -\frac{1}{2V} \int_V -H_{twin} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{twin} : \boldsymbol{\varepsilon}^{twin}(r) dV \\ &= \frac{1}{2} f^{FA} H_{twin} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{twin} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{twin} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Finalement, l'expression de l'énergie élastique  $G_{int}$  est :

$$G_{int} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\Sigma} + \frac{1}{2} f H_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T + \frac{1}{2} H_f f^2 + \frac{1}{2} f^{FA} H_{twin} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{twin} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{twin} \quad (2.21)$$

En considérant les équations (2.12) et (2.21), l'expression du potentiel thermodynamique du VER en fonction des variables de contrôle  $(\boldsymbol{\Sigma}, T)$  et des variables internes  $(f, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T, f^{FA}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{twin})$  s'écrit :

$$\begin{aligned} G &= U^A - TS^A + B(T - T_0)f - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\alpha} \Delta T \\ &\quad - f \boldsymbol{\Sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T - f^{FA} \boldsymbol{\Sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{twin} + \frac{1}{2} H_f f^2 + \frac{1}{2} f H_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \\ &\quad + \frac{1}{2} f^{FA} H_{twin} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{twin} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{twin} + C_v [(T - T_0) - T \log(\frac{T}{T_0})] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Notons que dans le présent modèle, la fraction volumique de martensite formée auto-accommodée  $f^{FA}$  ainsi que son évolution sont complètement définies comme une fonction de la fraction volumique de martensite  $f$  et de l'orientation moyenne des variantes de martensite  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T$  [11]. Nous exploiterons cette hypothèse dans la section suivante consacrée à la détermination des forces motrices thermodynamiques associées à l'évolution des différentes variables du modèle.

## 2.4 Forces motrices thermodynamiques

Les forces motrices thermodynamiques associées aux différents phénomènes pris en compte sont obtenues à partir de l'expression du potentiel thermodynamique. En introduisant le potentiel  $G$  dans l'inégalité de Clausius-Duhem et en tenant compte de l'hypothèse concernant l'évolution de la fraction volumique de martensite formée auto-accommodée, nous pouvons écrire :

$$-\frac{\partial G}{\partial \Sigma} : \dot{\Sigma} - \frac{\partial G}{\partial T} \dot{T} - \frac{\partial G}{\partial f} \dot{f} - \frac{\partial G}{\partial \bar{\epsilon}^T} : \dot{\bar{\epsilon}}^T - \frac{\partial G}{\partial \bar{\epsilon}^{twin}} : \dot{\bar{\epsilon}}^{twin} - \mathbf{E} : \dot{\Sigma} - S^{VER} \dot{T} - \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{grad} T}{T} \geq 0 \quad (2.23)$$

Où  $S^{VER}$  représente l'entropie moyenne des phases austénitique et martensitique définie sur tout le VER et  $\vec{q}$  son flux de chaleur. En remplaçant les dérivées du potentiel  $G$  qui apparaissent dans l'inégalité (équation 2.23) par leurs expressions, on obtient :

$$\begin{aligned} (\mathbb{S} : \Sigma + \alpha \Delta T + f \bar{\epsilon}^T + f^{FA} \bar{\epsilon}^{twin} - \mathbf{E}) : \dot{\Sigma} + (S^A - Bf + \Sigma : \alpha - C_v \log \frac{T}{T_0} - S^{VER}) \cdot \dot{T} \\ (\Sigma \bar{\epsilon}^T - B(T - T_0) - H_f f - \frac{1}{2} H_{\bar{\epsilon}^T} \bar{\epsilon}^T : \bar{\epsilon}^T + \frac{\partial f^{FA}}{\partial f} (\Sigma : \bar{\epsilon}^{twin} - \frac{1}{2} H_{twin} \bar{\epsilon}^{twin} : \bar{\epsilon}^{twin})) \cdot \dot{f} \\ + f(\Sigma^d - H_{\bar{\epsilon}^T} \bar{\epsilon}^T) : \dot{\bar{\epsilon}}^T + f^{FA} (\Sigma^d - H_{twin} \bar{\epsilon}^{twin}) : \dot{\bar{\epsilon}}^{twin} - \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{grad} T}{T} \geq 0 \quad (2.24) \end{aligned}$$

Où  $\Sigma^d$  désigne le tenseur déviateur des contraintes.

De cette dernière relation, nous pouvons déduire les forces motrices thermodynamiques suivantes associées aux variables de contrôle et internes :

- la force élastique :  $\mathbf{F}_m^\Sigma = \mathbb{S} : \Sigma + \alpha \Delta T + f \bar{\epsilon}^T + f^{FA} \bar{\epsilon}^{twin} - \mathbf{E}$
- la force entropique :  $F_m^T = S^A - Bf + \Sigma : \alpha - C_v \log \frac{T}{T_0} - S^{VER}$
- la force motrice de transformation :  $F_m^f = \Sigma \bar{\epsilon}^T - B(T - T_0) - H_f f - \frac{1}{2} H_{\bar{\epsilon}^T} \bar{\epsilon}^T : \bar{\epsilon}^T + \frac{\partial f^{FA}}{\partial f} (\Sigma : \bar{\epsilon}^{twin} - \frac{1}{2} H_{twin} \bar{\epsilon}^{twin} : \bar{\epsilon}^{twin})$
- la force motrice d'orientation :  $\mathbf{F}_m^{\epsilon^T} = f(\Sigma^d - H_{\bar{\epsilon}^T} \bar{\epsilon}^T)$
- la force d'accommodation des macles  $\mathbf{F}_m^{\epsilon^{twin}} = f^{FA} (\Sigma^d - H_{twin} \bar{\epsilon}^{twin})$

La fraction volumique de martensite formée auto-accommodée étant définie comme une fonction de la fraction volumique de martensite  $f$ . Nous pouvons donc remplacer sa dérivée temporelle  $\dot{f}^{FA}$  par son expression en fonction de  $\dot{f}$ . Ainsi, il n'y a pas de force thermodynamique associée à l'évolution de la fraction volumique de martensite formée auto-accommodée. L'influence des termes relatifs à cette variable dans le potentiel de Gibbs défini est donc prise en compte dans l'expression de la force motrice de la transformation de phase. L'évolution de la fraction volumique de martensite formée auto-accommodée est donnée par la relation :

$$\dot{f}^{FA} = \begin{cases} \frac{\epsilon_{SAT}^T - \epsilon_{eq}^T}{\epsilon_{SAT}^T} \dot{f} & si \quad \dot{f} > 0 \\ \frac{f_r^{FA}}{f_r} \dot{f} & si \quad \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Où  $f_r^{FA}$  et  $f_r$  sont respectivement la quantité de martensite formée auto-accommodée et le volume de martensite présents au début de la transformation de phase inverse,  $\bar{\varepsilon}_{eq}^T$  est la norme prise au sens de Von Mises de la déformation moyenne de transformation (voir la relation 2.9).

L'équation (2.25) traduit l'idée selon laquelle l'évolution de la fraction volumique de martensite formée auto-accommodée dépend de l'histoire de la transformation de phase. Ainsi, au cours de la transformation de phase directe, elle est définie comme une fonction de la déformation moyenne de transformation équivalente, tandis que dans le cas de la transformation de phase inverse, elle est proportionnelle au ratio  $\frac{f_r^{FA}}{f_r}$  des fractions volumiques  $f_r^{FA}$  et  $f_r$  (dans le cas de la transformation de phase inverse, la quantité de martensite formée auto-accommodée qui disparaît est proportionnelle au volume de martensite qui disparaît [11]).

L'équilibre thermoélastique du VER est décrit à partir des forces thermodynamiques  $F_m^\Sigma$  et  $F_m^T$  respectivement liées à  $\Sigma$  et  $T$ . Ces forces n'admettent pas de valeur seuil car il s'agit d'un phénomène non dissipatif. Cet équilibre est supposé instantané et se traduit par :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_m^\Sigma &= \mathbf{0} \text{ d'où } \mathbf{E} = \mathbb{S} : \Sigma + \alpha \Delta T + f \bar{\varepsilon}^T + f^{FA} \bar{\varepsilon}^{twin} \\ F_m^T &= 0 \text{ d'où } S^{VER} = S^A - Bf + \Sigma : \alpha - C_v \log \frac{T}{T_0} \end{aligned} \quad (2.26)$$

## 2.5 Expressions de la dissipation

L'étude des alliages à mémoire de forme décrit le changement de phase dans ces derniers comme étant un mécanisme essentiellement dissipatif. Une dissipation d'énergie sous la forme d'une hystérésis est observée lors des transformations de phase directe et inverse, sous chargement mécanique (superélasticité) ou thermique (effet mémoire de forme). Il faut donc tenir compte des phénomènes dissipatifs lors de la modélisation des comportements spécifiques (superélasticité et effet mémoire de forme) des AMF. L'accommodation des macles est quant à elle considérée comme un phénomène non dissipatif. La dissipation totale est alors obtenue à partir de l'inégalité de Clausius Duhem (équation 2.23) en tenant compte de l'équilibre thermoélastique du VER (équation 2.25). Dans ce cas, son expression est donnée par la relation suivante :

$$\Phi_{totale} = F_m^f \dot{f} + \mathbf{F}_m^{\bar{\varepsilon}^T} : \dot{\bar{\varepsilon}}^T - \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{grad} T}{T} \geq 0 \quad (2.27)$$

Cette dissipation peut être décomposée en la somme d'une dissipation intrinsèque ou mécanique  $\Phi_m$  et d'une dissipation thermique  $\Phi_{th}$  telle que :

$$\begin{aligned} \Phi_m &= F_m^f \dot{f} + \mathbf{F}_m^{\bar{\varepsilon}^T} : \dot{\bar{\varepsilon}}^T \\ \Phi_{th} &= -\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{grad} T}{T} \end{aligned} \quad (2.28)$$

La dissipation produite par conduction thermique  $\Phi_{th}$  est toujours positive ou nulle. Elle est nulle dans le cas d'un champ de température homogène dans tout le VER et positive dans le cas contraire. La dissipation mécanique est écrite en fonction de forces critiques d'activation et de la dérivée temporelle des variables internes dissipatives choisies pour décrire le comportement inélastique du VER.

La variable  $\bar{\varepsilon}^T$  et la force thermodynamique  $\mathbf{F}_m^{\bar{\varepsilon}^T}$  étant des grandeurs tensorielles, le critère de réorientation des variantes de martensite est donc tensoriel. Il est remplacé par son équivalent scalaire comme en plasticité classique. On définit pour cela une grandeur scalaire  $F_{m-eg}^{\bar{\varepsilon}^T}$



représentant la norme au sens de Von Mises de la force thermodynamique liée au processus de réorientation par la relation :

$$F_{m-eq}^{\bar{\varepsilon}^T} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{F}_m^{\bar{\varepsilon}^T} : \mathbf{F}_m^{\bar{\varepsilon}^T}} \quad (2.29)$$

En tenant compte de l'équation (2.28), on peut donc réécrire la dissipation mécanique sous la forme suivante :

$$\Phi_m = F_m^f \dot{f} + F_{m-eq}^{\bar{\varepsilon}^T} \dot{\bar{\varepsilon}}_{eq}^T = F_{crit}^f \dot{f} + f F_{crit}^{\bar{\varepsilon}^T} \dot{\bar{\varepsilon}}_{eq}^T \quad (2.30)$$

La dissipation mécanique étant toujours positive ( $\Phi_m \geq 0$ ), les dissipations liées à la transformation de phase et au processus de réorientation sont nécessairement positives.

$$\begin{aligned} \Phi_f &= F_{crit}^f \dot{f} \geq 0 \\ \Phi_{\bar{\varepsilon}^T} &= f F_{crit}^{\bar{\varepsilon}^T} \dot{\bar{\varepsilon}}_{eq}^T \geq 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Pour décrire le processus d'orientation des variantes de martensite, une surface de charge associée à ce phénomène est définie en se basant sur un critère isotrope. On introduit ainsi un paramètre matériau constant  $F_{\bar{\varepsilon}^T}^{max}$  vérifiant la relation :

$$F_{m-eq}^{\bar{\varepsilon}^T} = f F_{\bar{\varepsilon}^T}^{max} \quad (2.32)$$

On obtient ainsi la force critique d'activation positive ( $F_{crit}^{\bar{\varepsilon}^T}$ ) associée à l'orientation des variantes de martensite :

$$F_{crit}^{\bar{\varepsilon}^T} = F_{\bar{\varepsilon}^T}^{max} \quad (2.33)$$

La dérivée temporelle de la fraction volumique de martensite ( $\dot{f}$ ) étant positive dans le cas de la transformation directe (austénite  $\rightarrow$  martensite) et négative dans le cas contraire, deux surfaces de charge sont alors définies pour le critère de transformation de phase. Selon le sens de la transformation de phase (directe ou inverse), deux expressions sont retenues pour la force critique de transformation.

$$\begin{aligned} F_{crit}^f &= F_f^{max} & \text{si } \dot{f} > 0 \\ F_{crit}^f &= -F_f^{max} & \text{si } \dot{f} < 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Où  $F_f^{max}$  (avec  $F_f^{max} > 0$ ) définit un paramètre matériau. Nous rappelons que cette écriture de la force critique de transformation correspond à celle proposée dans la thèse de Bertrand Peultier [70]. Dans le cadre des travaux de thèse d'Yves Chemisky [10] et d'Arnaud Duval [19], les auteurs ont pris en compte la différence observée entre les pentes de transformation lors des transformations de phase directe et inverse, ce qui a nécessité l'introduction de paramètres matériaux supplémentaires dans la définition de la force critique de transformation.

Notons que la force critique de transformation est négative dans le cas de la transformation inverse où la dérivée temporelle de la fraction volumique de martensite est négative afin de respecter la condition  $\Phi_f = F_{crit}^f \dot{f} \geq 0$ .

Par ailleurs, l'effet de la stabilisation de la martensite après une prédéformation est pris en compte dans le présent modèle. Ce phénomène a fait l'objet d'études réalisées par Liu et Favier [52], Popov et Lagoudas [73], il peut-être dû à une relaxation de l'énergie élastique stockée au

sein du matériau, ou à un travail mécanique dû à un frottement interne. Il s'apparente à un processus dissipatif et est introduit dans le présent modèle comme une dissipation additionnelle  $\Phi_{stab}$ , proportionnelle à la déformation moyenne de transformation équivalente. Son expression est donnée, en considérant un coefficient  $H_s$  strictement positif, par la relation :

$$\Phi_{stab} = -H_s \bar{\varepsilon}_{eq}^T \dot{f} \quad (2.35)$$

De ce fait, l'expression de la force critique de transformation (équation 2.34) est modifiée ; on obtient :

$$\begin{aligned} F_{crit}^f &= F_f^{max} - H_s \bar{\varepsilon}_{eq}^T & \text{si } \dot{f} > 0 \\ F_{crit}^f &= -F_f^{max} - H_s \bar{\varepsilon}_{eq}^T & \text{si } \dot{f} < 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

## 2.6 Modélisation et gestion numérique des limitations physiques

Les variables internes du modèle sont soumises à des limitations physiques imposées par la saturation de la transformation de phase. En effet, les valeurs prises par ces variables au cours de leur évolution sont comprises dans des intervalles précis. En vue de respecter ces conditions, trois multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ , et  $\lambda_2$  sont définis et introduits dans les expressions des forces thermodynamiques. Les deux premiers multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  permettent respectivement de prendre en compte les conditions  $f \geq 0$  et  $1 - f \geq 0$  que doit nécessairement vérifier la fraction volumique de martensite ; le troisième multiplicateur de Lagrange  $\lambda_2$  permet de satisfaire la condition  $\varepsilon_{MAX}^T - \bar{\varepsilon}_{eq}^T \geq 0$ , vérifiée par la déformation moyenne de transformation équivalente. Ces multiplicateurs de Lagrange sont par définition positifs ou nuls tels que :

1.  $\lambda_0 = 0$  si  $f \geq 0$ , et  $\lambda_0 > 0$  sinon, permet de satisfaire l'inégalité  $f \geq 0$
2.  $\lambda_1 = 0$  si  $f \leq 1$ , et  $\lambda_1 > 0$  sinon, permet de satisfaire l'inégalité  $1 - f \geq 0$
3.  $\lambda_2 = 0$  si  $\bar{\varepsilon}_{eq}^T \leq \varepsilon_{MAX}^T$ , et  $\lambda_2 > 0$  sinon, permet de satisfaire l'inégalité  $\varepsilon_{MAX}^T - \bar{\varepsilon}_{eq}^T \geq 0$

Les multiplicateurs de Lagrange définis sont pris en compte dans le modèle à travers les expressions des forces thermodynamiques  $F_m^f$  et  $\mathbf{F}_m^{\bar{\varepsilon}^T}$  ; celles-ci se trouvent alors modifiées. La fraction volumique de martensite étant par nature positive ( $0 \leq f \leq 1$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} F_{m-\lambda}^f &= F_m^f + \lambda_0 - \lambda_1 \\ \mathbf{F}_{m-\lambda}^{\bar{\varepsilon}^T} &= \frac{\mathbf{F}_m^{\bar{\varepsilon}^T}}{f} - \lambda_2 & \text{si } f \neq 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Comme on peut le remarquer, les multiplicateurs de Lagrange de part leur définition entraînent une discontinuité des expressions des forces thermodynamiques de transformation  $F_{m-\lambda}^f$  et d'orientation  $\mathbf{F}_{m-\lambda}^{\bar{\varepsilon}^T}$  aux points de saturation. Des difficultés de convergence lors de la résolution numérique des différentes équations constitutives du modèle peuvent alors apparaître quand on arrive aux points de saturation. Pour remédier à ce problème, une solution consiste à remplacer les multiplicateurs de Lagrange par des fonctions de pénalisation non-linéaires (fonctions de régularisation) et continues dans l'intervalle des variables auxquelles elles sont associées. Ainsi dans l'expression de la force de transformation  $F_{m-\lambda}^f$ ,  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  sont respectivement remplacés par  $\alpha_0 \frac{1-f}{f}$  et  $\alpha_1 \frac{f}{1-f}$ . Dans l'expression de  $\mathbf{F}_{m-\lambda}^{\bar{\varepsilon}^T}$ ,  $\lambda_2$  est remplacée par  $\alpha_2 \frac{\bar{\varepsilon}_{MAX}^T - \bar{\varepsilon}_{eq}^T}{\varepsilon_{MAX}^T - \bar{\varepsilon}_{eq}^T}$ .  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  sont trois paramètres positifs.

## 2.7 Conditions d'activations et lois d'évolution

### 2.7.1 Transformation de phase

En vue de prendre en compte les phénomènes de boucle interne, la force critique d'activation de la transformation de phase  $F_f^{crit}$  est redéfinie. On considère pour cela, deux paramètres matériaux :  $F_f^{max}$  et  $F_f^{min}$ , représentant respectivement les forces critiques maximale et minimale de transformation. Deux variables mémoires (pour tenir compte des précédents chargements)  $\gamma_f$  et  $F_f^{mem}$  sont également définies.  $\gamma_f$  décrit l'état de l'avancement de la transformation de phase durant une transformation directe ou inverse incomplète ;  $F_f^{mem}$  est une force thermodynamique mise en mémoire à chaque inversion du sens de la transformation. L'expression de la force critique d'activation établie dans l'équation (2.36) devient :

$$\begin{aligned} F_{crit}^f &= (1 - \gamma_f)F_f^{min} + \gamma_f F_f^{max} - H_s \bar{\varepsilon}_{eq}^T & \text{si } \dot{f} > 0 \\ F_{crit}^f &= -(1 - \gamma_f)F_f^{min} + \gamma_f F_f^{max} - H_s \bar{\varepsilon}_{eq}^T & \text{si } \dot{f} < 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

En considérant les expressions ci-dessus de la force critique de transformation  $F_{crit}^f$ , et de la force motrice de transformation  $F_{m-\lambda}^f$  nous pouvons écrire les critères d'activation de la transformation de phase :

- transformation directe austénite  $\rightarrow$  martensite si :

$$F_{m-\lambda}^f - (1 - \gamma_f)F_f^{mem} = (1 - \gamma_f)F_f^{min} + \gamma_f F_f^{max} - H_s \bar{\varepsilon}_{eq}^T \text{ et } \frac{d(F_{m-\lambda}^f - (1 - \gamma_f)F_f^{mem})}{dt} = 0. \text{ La dérivée temporelle de la fraction volumique de martensite est alors positive, } \dot{f} > 0.$$

- transformation inverse martensite  $\rightarrow$  austénite si :

$$F_{m-\lambda}^f - (1 - \gamma_f)F_f^{mem} = -((1 - \gamma_f)F_f^{min} + \gamma_f F_f^{max}) - H_s \bar{\varepsilon}_{eq}^T \text{ et } \frac{d(F_{m-\lambda}^f - (1 - \gamma_f)F_f^{mem})}{dt} = 0. \text{ La dérivée temporelle de la fraction volumique de martensite est alors négative, } \dot{f} < 0.$$

- transformation inactive dans les autres cas : la dérivée temporelle de la fraction volumique de martensite est alors nulle ( $\dot{f} = 0$ ).

### 2.7.2 Orientation des variantes de martensite

En tenant compte de la relation (équation 2.37), nous pouvons écrire les critères d'activation suivants :

- activation de l'orientation des variantes de martensite si :

$$F_{m-\lambda-eq}^{\bar{\varepsilon}^T} = F_{\bar{\varepsilon}^T}^{max} \text{ et } \frac{dF_{m-\lambda-eq}^{\bar{\varepsilon}^T}}{dt} > 0, \text{ l'orientation des variantes est activée ; la dérivée temporelle de la déformation moyenne de transformation évolue, } \dot{\bar{\varepsilon}}^T \neq 0.$$

- orientation des variantes de martensite inactive si :  $F_{m-\lambda-eq}^{\bar{\varepsilon}^T} < F_{\bar{\varepsilon}^T}^{max}$  ou si  $F_{m-\lambda-eq}^{\bar{\varepsilon}^T} = F_{\bar{\varepsilon}^T}^{max}$  et  $\frac{dF_{m-\lambda-eq}^{\bar{\varepsilon}^T}}{dt} \leq 0$

Lorsque le mécanisme d'orientation des variantes de martensite est activé, la vitesse de la déformation moyenne de transformation est déterminée à partir d'une règle de normalité par rapport à la force thermodynamique  $\mathbf{F}_m^{\varepsilon^T}$ . Cette règle s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}^T = \lambda_{\varepsilon^T} \frac{\partial F_{m-\lambda-eq}^{\varepsilon^T}}{\partial \mathbf{F}_{m-\lambda}^{\varepsilon^T}} \quad ; \quad \lambda_{\varepsilon^T} \geq 0 \quad (2.39)$$

$\lambda_{\varepsilon^T}$  représente l'amplitude de la vitesse de la déformation moyenne de transformation.  $F_{m-\lambda-eq}^{\varepsilon^T}$  correspond à la norme au sens de Von Mises de la force thermodynamique  $\mathbf{F}_{m-\lambda}^{\varepsilon^T}$  ( $F_{m-\lambda-eq}^{\varepsilon^T} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{F}_{m-\lambda}^{\varepsilon^T} : \mathbf{F}_{m-\lambda}^{\varepsilon^T}}$ ).

Dans le cas où l'orientation des variantes est inactive, des équations supplémentaires permettent de gérer l'évolution de la variable tensorielle  $\varepsilon^T$ . Ainsi, dans ce cas, si la transformation évolue dans le sens direct ( $\dot{f} > 0$ ), la martensite formée présente une structure auto-accommodée. La déformation de transformation macroscopique reste alors constante et sa variation est nulle. Si la transformation est activée dans le sens inverse ( $\dot{f} < 0$ ), la déformation moyenne de transformation est considérée constante et son évolution est nulle. Ces différentes équations de même que la prise en compte dans le présent modèle, de la dissymétrie traction-compression observée dans le comportement des AMF sont décrites en détail dans la référence [11] et dans les travaux de thèse d'Arnaud Duval [19] et d'Yves Chemisky [10].

### 2.7.3 Tableau récapitulatif des paramètres du modèle

Le développement du présent modèle a nécessité l'introduction de plusieurs paramètres matériaux dans ces équations. Dans ce paragraphe, un résumé de tous les paramètres matériaux du modèle ainsi que leur signification sont proposés dans le tableau (2.1).

TABLE 2.1 – Paramètres matériaux du modèle.

$E$ (MPa)	Module d'Young de l'austénite et de la martensite
$\nu$	Coefficient de poisson
$\alpha$ ( $^{\circ}$ C $^{-1}$ )	Coefficient de dilatation thermique de l'austénite et de la martensite
$\varepsilon_{trac}^T$	Valeur à saturation de la déformation de transformation en traction
$\varepsilon_{trac}^{TFA}$	Valeur à saturation de la déformation de transformation en traction à partir de la martensite présentant une structure auto-accommodée
$\varepsilon_{comp}^T$	Valeur à saturation de la déformation de transformation en compression
$B$ (MPa/ $^{\circ}$ C)	Paramètre lié à la pente de transformation dans le diagramme ( $\Sigma, T$ )
$M_s$ ( $^{\circ}$ C)	Température de début de transformation martensitique
$A_f$ ( $^{\circ}$ C)	Température de fin de transformation austénitique
$r_f$	Coefficient d'amplitude des boucles internes
$F_{\varepsilon^T}^{max}$ (MPa)	Contrainte de réorientation des variantes de martensite
$H_f$ (MPa)	Coefficient de pseudo-écrouissage de la transformation de phase
$H_{\varepsilon^T}$ (MPa)	Coefficient de pseudo-écrouissage de réorientation
$H_{twin}$ (MPa)	Coefficient de pseudo-écrouissage d'accommodation des macles
$H_s$ (MPa)	Coefficient de stabilisation de la martensite

La force critique maximale de transformation  $F_f^{max}$  est déterminée à partir des paramètres matériaux  $M_s$ ,  $A_f$  et  $B$  par la relation :

$$F_f^{max} = B \frac{A_f - M_s}{2} \quad (2.40)$$

Un coefficient  $r_f$ , introduit comme un paramètre matériau dans le présent modèle, permet de définir le ratio entre les forces critiques maximale et minimale ; il est défini par la relation :

$$r_f = 1 - \frac{F_f^{max}}{F_f^{min}} \quad (2.41)$$

## 2.8 Implémentation numérique du modèle

### 2.8.1 Définition des résidus

Le modèle de comportement des AMF décrit dans le précédent paragraphe présente différents cas d'activation possibles, correspondant chacun à un comportement donné. Chaque cas est régi par un système d'équations bien défini. Il a été jugé utile dans un souci d'alléger la gestion du choix du comportement et donc du choix du système d'équations à résoudre, de définir une méthode de résolution généralisée où les différentes équations du modèle sont exprimées en termes de résidus à équilibrer. On distingue au total 4 résidus :

- un résidu de transformation  $R_f$
- un résidu d'orientation  $R_{\bar{\varepsilon}^T}$
- un résidu d'écoulement de la déformation moyenne de transformation  $\mathbf{R}_{\Delta\bar{\varepsilon}^T}$
- un résidu élastique  $\mathbf{R}_s$

Le résidu  $R_f$  est exprimé en fonction de force motrice de transformation et sa valeur critique ;  $R_{\bar{\varepsilon}^T}$ , en fonction de la force motrice d'orientation et sa valeur critique.  $\mathbf{R}_{\Delta\bar{\varepsilon}^T}$  permet de gérer l'évolution de la déformation moyenne de transformation (sa vitesse et sa direction) et  $\mathbf{R}_s$  prend en compte les conditions d'équilibre thermoélastiques. On retrouve dans les expressions de ces résidus, deux catégories de variables : les variables de pilotage et les variables inconnues. Les variables de pilotage correspondent à la déformation totale ( $\mathbf{E}$ ) et la température ( $T$ ). Les variables inconnues sont : la contrainte ( $\Sigma$ ) et toutes les variables internes du modèle ( $f$ ,  $\bar{\varepsilon}^T$ ,  $\lambda_{\bar{\varepsilon}^T}$ , et  $\bar{\varepsilon}^{twin}$ ).

### 2.8.2 Méthode de résolution

Un schéma d'intégration implicite est choisi pour la résolution des équations du modèle, ce schéma garantit en effet une bonne précision et une stabilité inconditionnelle de la solution. Le système d'équations à résoudre est écrit sous la forme  $R(X, Y) = 0$  où  $X$  et  $Y$  sont deux vecteurs regroupant respectivement les variables inconnues et les variables de pilotage. Le système initialement à l'équilibre est déséquilibré par un incrément  $\Delta Y$  des variables de pilotage. L'incrément  $\Delta Y$  peut correspondre à un incrément de déformation et/ou de température. Le système déséquilibré s'écrit :

$$\mathbf{R}(X, Y + \Delta Y) \neq 0 \quad (2.42)$$

Le nouveau système  $\mathbf{R}(X + \Delta X, Y + \Delta Y) = 0$  doit alors être résolu afin de déterminer la valeur de l'incrément  $\Delta X$  des variables inconnues permettant de retrouver un état d'équilibre du système. Pour ce faire, un algorithme itératif de Newton Raphson est adopté. La démarche consiste à faire un développement de Taylor des différents résidus à l'ordre 1. Il est ensuite possible de déterminer les incréments des inconnues en fonction des variables de pilotage en résolvant la forme linéarisée. Le problème étant non-linéaire, plusieurs itérations sont a priori nécessaires avant de d'obtenir la bonne solution selon la précision désirée. L'algorithme se présente comme suit :

1. État d'équilibre initial :  $\mathbf{R}(X, Y) = 0$
2. Déséquilibre du système par un incrément  $\Delta Y$  des variables de pilotage  $\mathbf{R}(X, Y + \Delta Y) \neq 0$ . Trouver donc  $\Delta X$  vérifiant  $\mathbf{R}(X + \Delta X, Y + \Delta Y) = 0$
3. Développement de Taylor au premier ordre afin de proposer une correction  $\delta\Delta X$  :

$$\mathbf{R}(X + \Delta X^i, Y + \Delta Y) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta X} \delta\Delta X \approx 0$$

$J = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta X}$  correspond au jacobien du système, et  $i$ , l'itération en cours.

4. Par inversion, le calcul de la correction  $\delta\Delta X$  est effectué :
$$\delta\Delta X = J^{-1}(-\mathbf{R}(X + \Delta X^i, Y + \Delta Y))$$
5. Amortissement de la correction afin de respecter la limitation physique des variables internes. Pour cela, on introduit une variable  $\alpha$  prenant des valeurs comprises entre 0 et 1. La correction est alors multipliée par  $\alpha$  dans le cas d'un dépassement des bornes fixées aux variables internes. Si  $\alpha = 1$ , la correction n'est pas affectée et si  $\alpha = 0$ , la correction est annulée et l'état initial est conservé.
6. Mise à jour de l'incrément des variables inconnues :
$$\Delta X^{i+1} = \Delta X^i + \alpha\delta\Delta X$$
7. Retour à l'étape 2 tant que  $\mathbf{R}(X + \Delta X^{i+1}, Y + \Delta Y) \neq 0$  à un résidu numérique près.
8. Lorsque  $\mathbf{R}(X + \Delta X^{i+1}, Y + \Delta Y) = 0$ , calcul des modules tangents  $\frac{\partial \Delta X}{\partial \Delta Y}$  nécessaires dans le cadre d'un calcul de structures par la méthode des éléments finis.

### 2.8.3 Calcul des modules tangents cohérents

Afin de simuler la réponse de structures en AMF présentant une géométrie complexe et soumises à des sollicitations thermomécaniques complexes, le modèle de comportement développé est implémenté dans un logiciel de calcul par éléments finis, plus précisément dans Abaqus/Standard via la subroutine UMAT qui sert d'interface entre le logiciel et le modèle de comportement développé.

Comme indiqué précédemment (voir paragraphe 2.8.2), la résolution par la méthode des éléments finis nécessite le calcul des modules tangents mécanique  $\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \mathbf{E}}$  et thermique  $\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta T}$ . Ces derniers, calculés en même temps que les inconnues du problème, sont utilisés dans la résolution du problème de l'équilibre global de la structure étudiée. Le problème équilibré en fin d'incrément peut s'écrire :

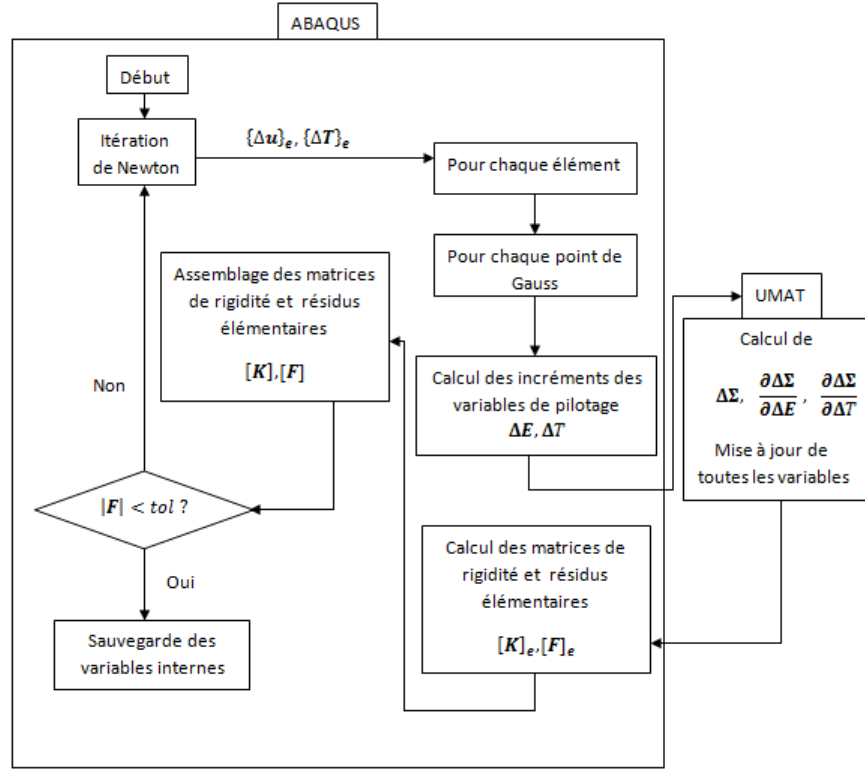


FIGURE 2.1 – Algorithme de résolution des équations par la méthode des éléments finis

$$\mathbf{R} = 0 \quad \text{et} \quad \delta \mathbf{R} = 0 \quad (2.43)$$

$\delta \mathbf{R}$  peut s'écrire en fonction des variables de contrôle et des variables inconnues :

$$J_X \delta \Delta X + J_Y \delta \Delta Y = 0 \quad (2.44)$$

où  $J_X = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta X}$  et  $J_Y = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta Y}$  sont respectivement les jacobiens associés aux variables inconnues et aux variables de contrôle. De cette relation nous pouvons déduire la correction des variables inconnues :

$$\delta \Delta X = -J_X^{-1} J_Y \delta \Delta Y \quad (2.45)$$

De même, la matrice contenant les opérateurs tangents de la loi de comportement s'écrit :

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial \Delta Y} = -J_X^{-1} J_Y \quad (2.46)$$

La relation (2.46) permet d'exprimer la variation des incréments des variables inconnues par rapport aux variables de pilotage. De la relation (2.46), les modules tangents cohérents utilisés pour le calcul des matrices de rigidité élémentaires au sein du logiciel Abaqus sont directement extraits. Un schéma expliquant les différentes étapes de la résolution des équations par la méthode des éléments finis est proposé à la figure 2.1.

Le modèle de comportement des AMF présenté dans ce chapitre existe en versions 3D et 2D. La version 2D en contraintes planes que nous utiliserons tout le long de ce travail de thèse est obtenue en effectuant des développements supplémentaires qui concernent notamment :

- la réécriture des grandeurs tensorielles (contrainte, déformations) en supposant un état plan de contraintes,
- la réécriture des forces thermodynamiques en adoptant la même hypothèse que précédemment.

La notation de Voigt en 2D contraintes planes a été également adoptée dans le but de réduire la quantité de mémoire nécessaire à la résolution des différentes équations du modèle. Le détail de tous ces développements est disponible dans la thèse d’Arnaud Duval [19].

## 2.9 Validation du modèle

Les différentes simulations que nous proposons ici visent d’une part à illustrer de manière succincte la capacité du modèle à décrire le comportement thermomécanique des AMF et d’autre part sa capacité à être utilisé comme un outil efficace de calcul de structures complexes ou de dimensionnement d’applications exploitant les propriétés inédites des AMF.

De nombreux autres exemples de simulations sont disponibles dans les références [10], [11], [19], [55]. Dans ces références, les diverses campagnes de simulations réalisées ont permis de valider le modèle puis de confronter des résultats expérimentaux avec les prédictions du modèle. Des essais expérimentaux ont été également réalisés en vue d’identifier les différents paramètres matériaux du modèle.

Pour toutes les présentes simulations, un jeu unique de paramètres matériaux, regroupé dans le tableau 2.2 a été utilisé. Ils sont extraits des références [10], [11], [19].

TABLE 2.2 – Valeurs des paramètres matériaux utilisés.

$E$ (MPa)	$\nu$	$\alpha$ ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )	$\varepsilon_{trac}^T$	$\varepsilon_{trac}^{TFA}$
39500	0.3	$8.10^{-6}$	0.056	0.053
$\varepsilon_{comp}^T$	$B$ (MPa/ $^{\circ}\text{C}$ )	$M_s$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$A_f$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$r_f$
0.044	0.235	-80	-2	0.25
$F_{\varepsilon T}^{max}$ (MPa)	$H_f$ (MPa)	$H_{\bar{\varepsilon}}$ (MPa)	$H_{twin}$ (MPa)	$H_s$ (MPa)
100	4	1000	40000	50

### 2.9.1 Validation du modèle de comportement sur des cas de chargement homogène

Dans cette section, divers exemples de simulations numériques sont présentés en vue d’étudier la capacité du modèle à prédire les différents comportements observés dans les AMF. Ces simulations regroupent notamment des essais de traction isotherme et des essais thermiques à contrainte constante sur un seul élément (chargement homogène) comme indiqué sur la figure figure 2.2 (a).

#### Simulation des essais de traction isotherme



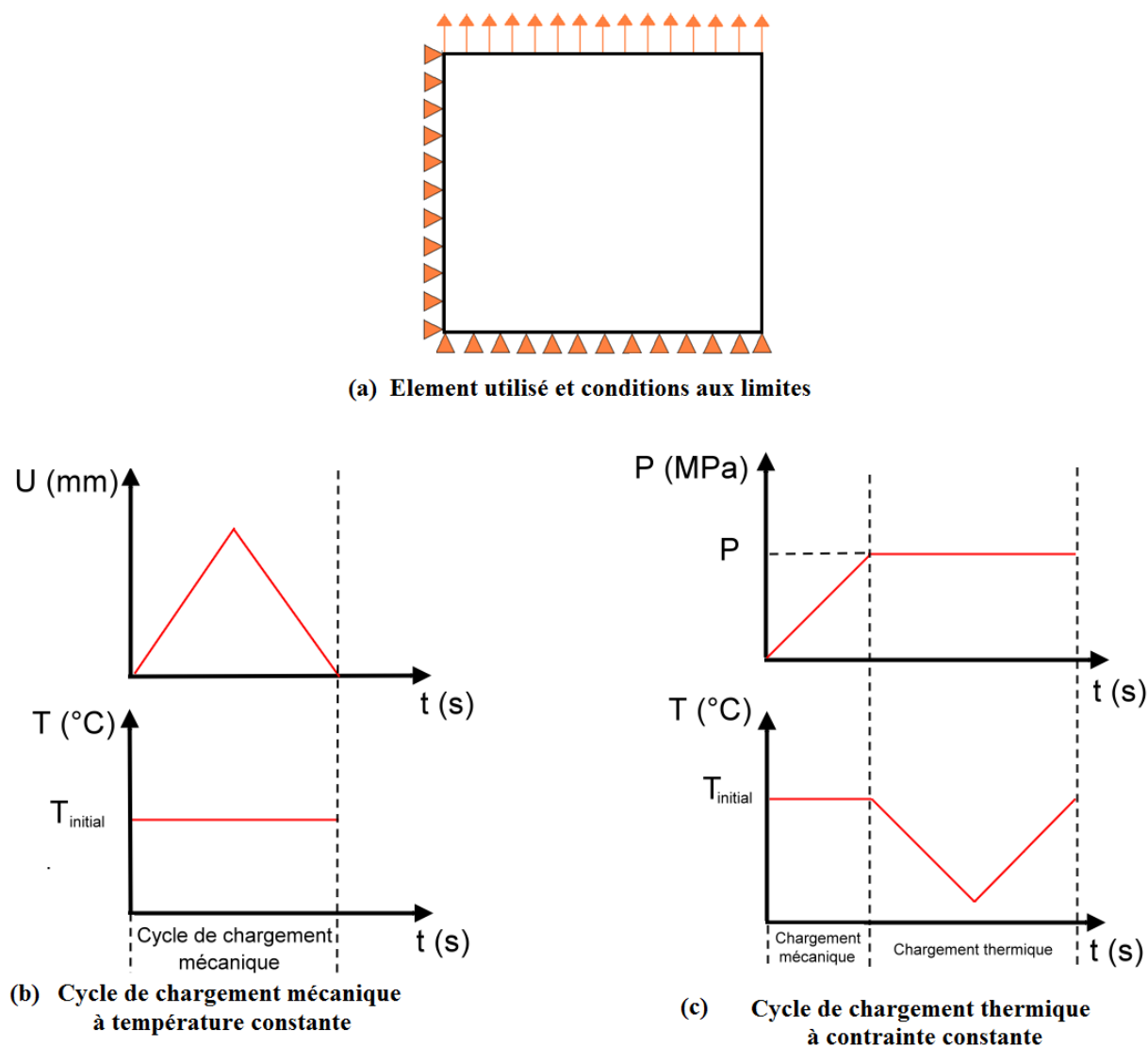


FIGURE 2.2 – Simulation des différents comportements observés dans les AMF

Un essai de traction uniaxiale en charge/décharge est appliqué à différentes températures constantes selon le chemin de chargement indiqué sur la figure 2.2 (b). Les essais sont réalisés à des températures de -20, -10, 0, 20, 40 et 60 ° C. La figure 2.3 montre les résultats de cette simulation. On peut effectuer les observations suivantes :

- Toutes les courbes montrent qu'il y'a eu transformation de phase et que la déformation de transformation atteint sa valeur de saturation en traction dans tous les cas. Cela est dû au fait que toutes les simulations sont réalisées à une température supérieure à la température de début de transformation martensitique ( $M_s$ ). En effet si elles étaient réalisées à des températures inférieures ou égales à  $M_s$ , la valeur de la déformation de transformation obtenue dépendrait de la quantité de martensite présente dans la structure avant le chargement mécanique ; cet effet étant pris en compte dans le modèle à travers la définition du paramètre  $\varepsilon_{MAX}^T$  défini par l'équation 2.9.

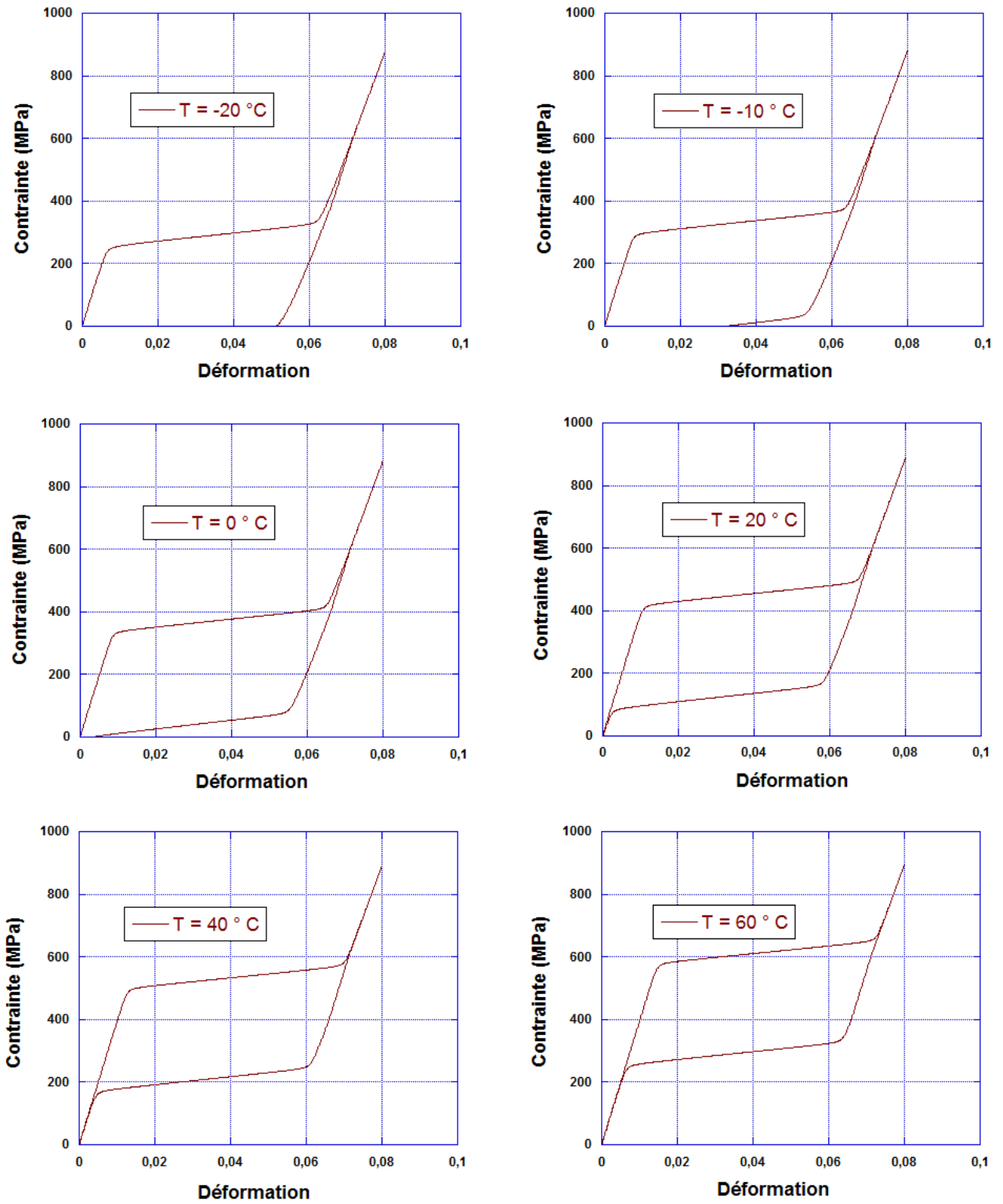


FIGURE 2.3 – Tests de traction à différentes températures

- Selon la température de la simulation on peut observer ou non une "réversibilité" de la transformation de phase. Elle est totale, pour les températures supérieures à la température de fin de transformation austénitique ( $A_f$ ), partielle pour les températures légèrement inférieures à  $A_f$ . Pour les températures assez faibles et très inférieures à  $A_f$ , aucune réversibilité n'a été observée.
- Les contraintes de début de transformation de phase ne restent pas constantes dans toutes les simulations. Elles dépendent de la température ; on peut remarquer une augmentation de sa valeur avec l'augmentation de la température à laquelle on réalise le chargement mécanique.

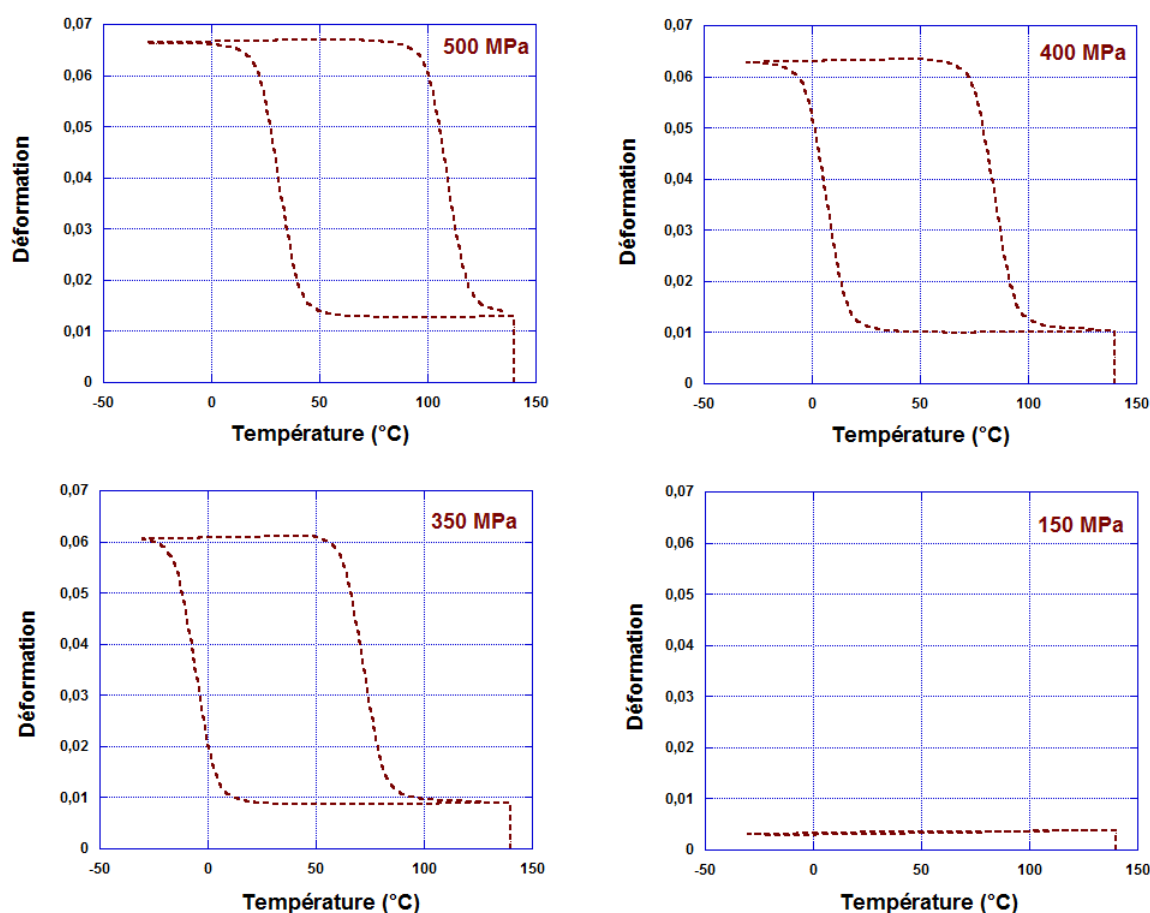


FIGURE 2.4 – Simulation du refroidissement-chauffage à contrainte constante

### Simulation des essais thermiques à contrainte constante

Dans les simulations suivantes, on applique un cycle de chargement thermique (voir figure 2.2 (c)) correspondant à un refroidissement suivi d'un chauffage, tout en maintenant un niveau de contrainte constante dans l'élément indiqué sur la figure (2.2 (a)). Pour différents niveaux de contrainte imposée (compris entre 150 et 500 MPa), les résultats sont présentés sur la figure 2.4. De ces résultats, il en ressort les analyses suivantes :

- Toutes les courbes présentent une importante variation de la déformation de transformation

en fonction de la température sauf pour le dernier cas où elle reste nulle. En effet pour ce dernier cas, la contrainte imposée (150 MPa) est bien inférieure à la contrainte critique de d'orientation des variantes de martensite (220 MPa). Le processus de réorientation n'étant pas activé, au cours du refroidissement, les variantes de martensite formées s'organisent entre elles de manière à avoir une déformation macroscopique nulle : c'est le phénomène d'auto-accommodation des variantes de martensite.

- Pour les trois premières simulations, le niveau de la déformation macroscopique obtenu augmente avec le niveau de contrainte imposé. En effet cette déformation dépend directement de l'orientation des variantes de martensite ; qui elle même dépend de la valeur atteinte par la norme de la déformation moyenne de transformation. Plus la contrainte augmente, plus cette norme augmente jusqu'à atteindre sa valeur de saturation.
- Les températures de transformation diffèrent avec la contrainte appliquée, plus la contrainte imposée est élevée, plus cette température est élevée.

Les différentes simulations réalisées dans ce paragraphe montrent que le modèle prédit efficacement le comportement des AMF en présence d'une sollicitation thermomécanique. De même la dépendance du comportement à la température est correctement reproduite. Une fois le modèle validé sur des cas simples de chargement mettant en œuvre les différents comportements observés dans les AMF, il est très utile de tester son aptitude sur des cas de chargements thermomécaniques complexes et sur des structures présentant une géométrie complexe ; ceci dans le but de vérifier sa fiabilité à être utilisé comme un outil de dimensionnement d'applications en AMF et de calculs de structures. C'est le principal objectif des simulations réalisées dans le paragraphe suivant.

### 2.9.2 Application au calcul de structures : plaque trouée en AMF

Les comportements superélastique et à effet mémoire d'une plaque mince rectangulaire trouée en AMF d'épaisseur 0,1 mm et dont les dimensions dans le plan sont indiquées sur la figure 2.5 (a) sont étudiés. Le maillage, les conditions aux limites appliquées ainsi que les éléments et lignes de sortie des résultats sont également mentionnés sur la figure 2.5 (b). Un raffinement du maillage est effectué autour du trou (zone la plus sollicitée de la plaque).

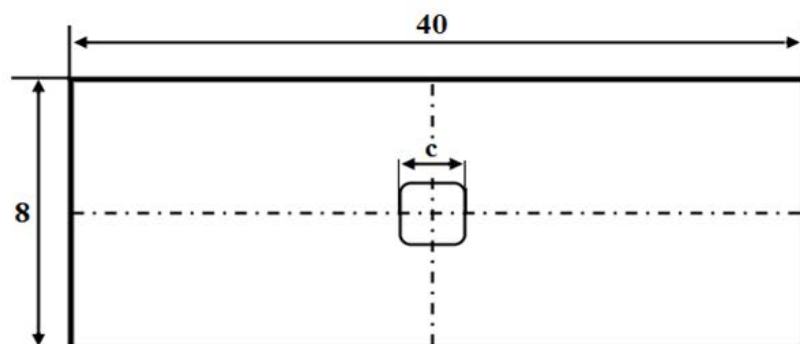
#### Comportement superélastique de la plaque

Un cycle de chargement mécanique en charge et décharge est appliqué à la structure maintenue à une température constante ( $T = 25^\circ \text{C}$ ) supérieure à la température de fin de transformation austénitique ( $A_f = -2^\circ \text{C}$ ) de la plaque. Il consiste en un déplacement imposé sur l'un des bords de la plaque pour obtenir un allongement nominal de 7 % suivi d'un relâchement.

La figure 2.6 montre la répartition de la fraction volumique de martensite au sein de la plaque pendant l'évolution du chargement.

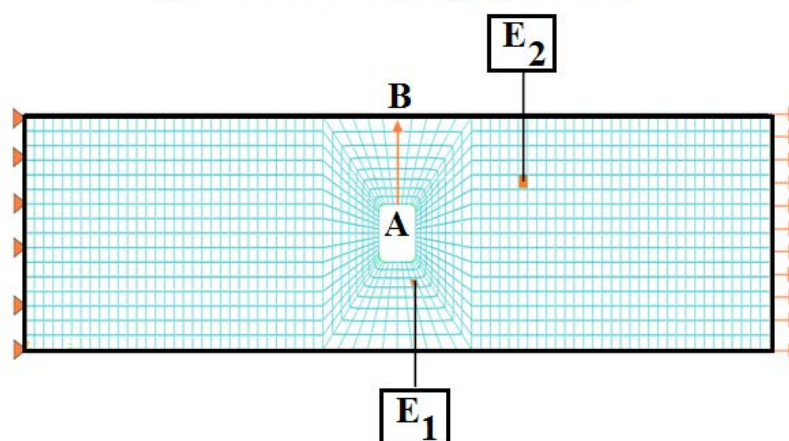
En effet, la présence du trou central impose une concentration de contraintes dans cette zone. La transformation de phase débute alors autour du trou ; elle évolue ensuite à partir de cet endroit sous la forme de deux bandes en croix, inclinées par rapport à la direction du chargement puis se propage de manière uniforme au reste de la plaque.

Sur la figure 2.7, on peut effectivement noter une augmentation très rapide de la quantité de martensite autour du trou même pour un niveau de déformation relativement faible (0,18 %). Pour les deux niveaux de déformation (0,18 % et 2,95 %), la fraction volumique de martensite a



$$c = 2$$

(a) Dimensions de la plaque en mm



(b) Maillage de la plaque - conditions aux limites  
lignes et éléments de sortie des résultats

FIGURE 2.5 – Plaque trouée en AMF étudiée

atteint sa valeur maximale au point A ; elle décroît ensuite au fur et à mesure que l'on s'éloigne du trou en suivant la ligne AB.

Ces différents résultats montrent un phénomène de diffusion de la transformation de phase sans aucun effet de localisation. Celui-ci se traduit par le fait qu'une augmentation du niveau de chargement mécanique provoque un accroissement progressif des bandes de transformation ainsi que du domaine transformé jusqu'à saturation de la transformation de phase dans toute la plaque.

La figure 2.8 présente la réponse globale force-déplacement de la structure. Celle-ci reproduit la réponse classique d'une structure AMF superélastique sollicitée en traction puis relâchée. Toute la déformation induite par la transformation de phase est récupérée lors de la décharge.

### Comportement à effet mémoire de forme de la plaque

La plaque précédente (figure 2.5) est maintenant soumise à un trajet de chargement thermo-mécanique identique à celui indiqué sur la figure 2.2 (c). Ce trajet de chargement met en œuvre le comportement thermique à contrainte constante. Tout en gardant le même maillage, on ap-

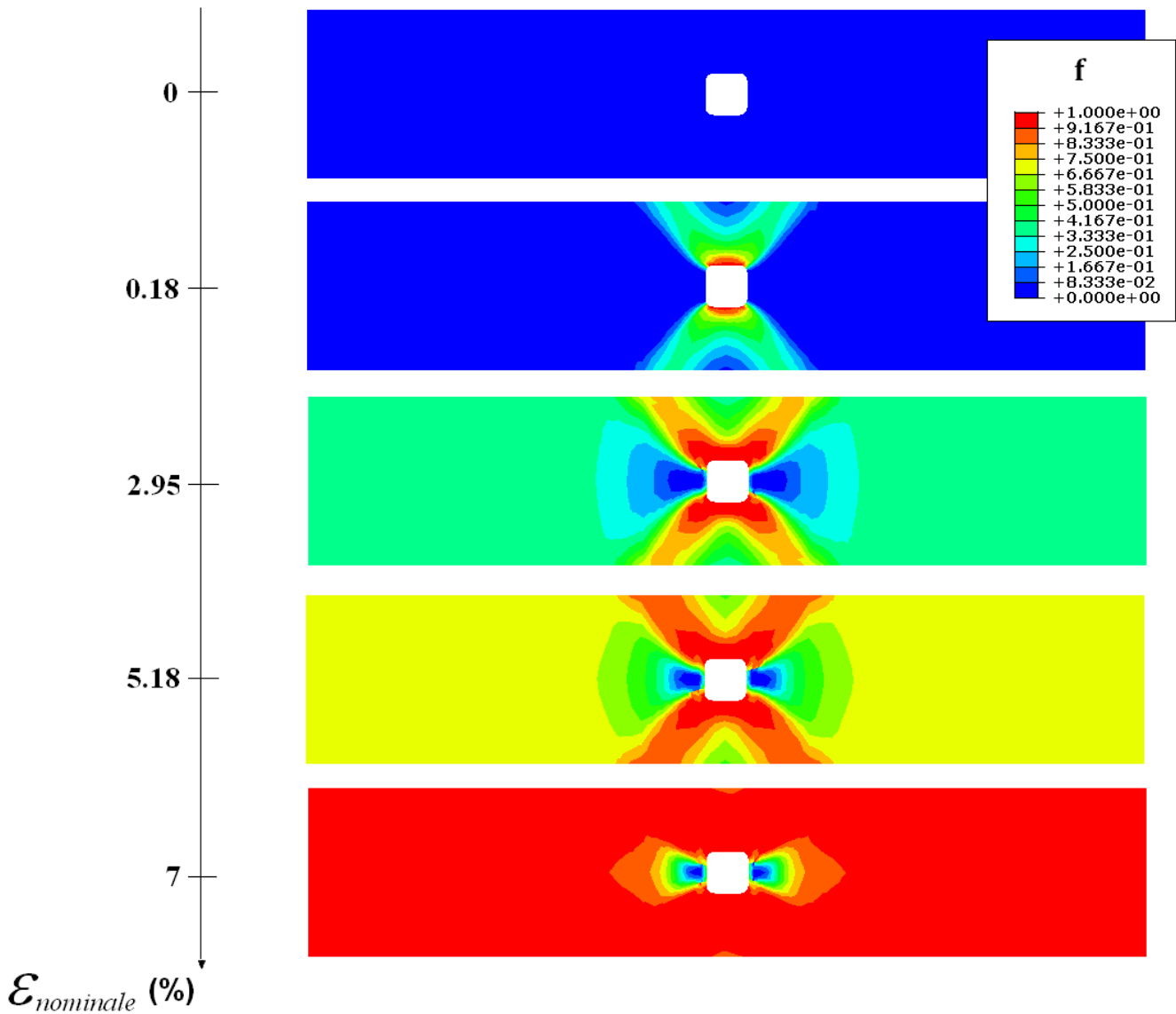


FIGURE 2.6 – Répartition de la fraction volumique pour différents niveaux de déformation

plique à la plaque à la température  $T = 140^\circ \text{C}$ , un chargement de traction jusqu'à atteindre une contrainte de 300 MPa. Elle est ensuite soumise à un cycle thermique de refroidissement-chauffage tout en maintenant le niveau de contrainte à 300 MPa.

La figure 2.9 montre la répartition de la fraction volumique de martensite en fonction de la température lors du refroidissement. Comme dans le cas de la superélasticité (figure 2.6), on peut remarquer que la transformation de phase débute autour du trou à cause de la concentration de la contrainte dans cet endroit. Deux bandes de transformation en croix et inclinées y apparaissent ; elles croissent avec le refroidissement de la plaque, induisant une propagation de la transformation de phase au reste de la plaque. La figure 2.10 montrant l'évolution de la fraction volumique de martensite le long de la ligne AB pour deux valeurs différentes de la température ( $T = -5$  et  $-15^\circ \text{C}$ ) confirme bien que la quantité de martensite reste plus importante au point A puis décroît

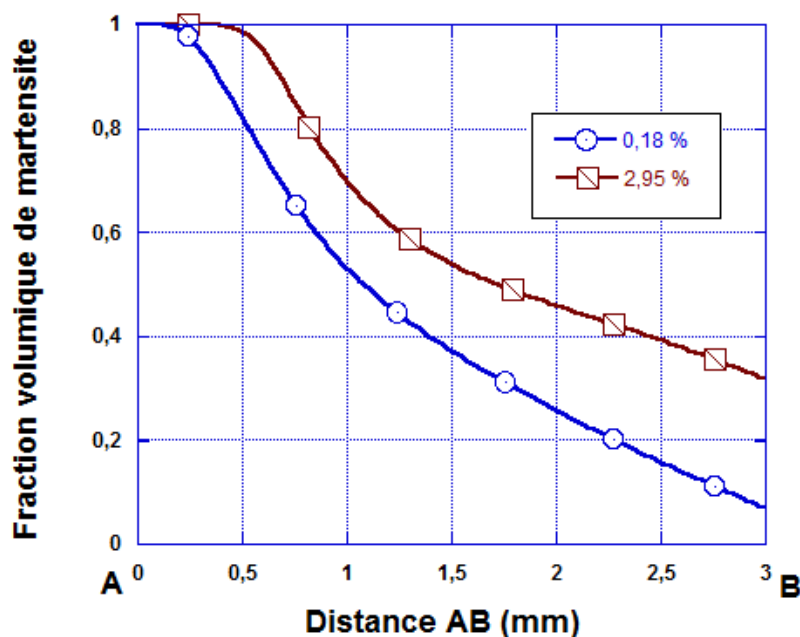


FIGURE 2.7 – Evolution de la fraction volumique de martensite le long de la ligne AB

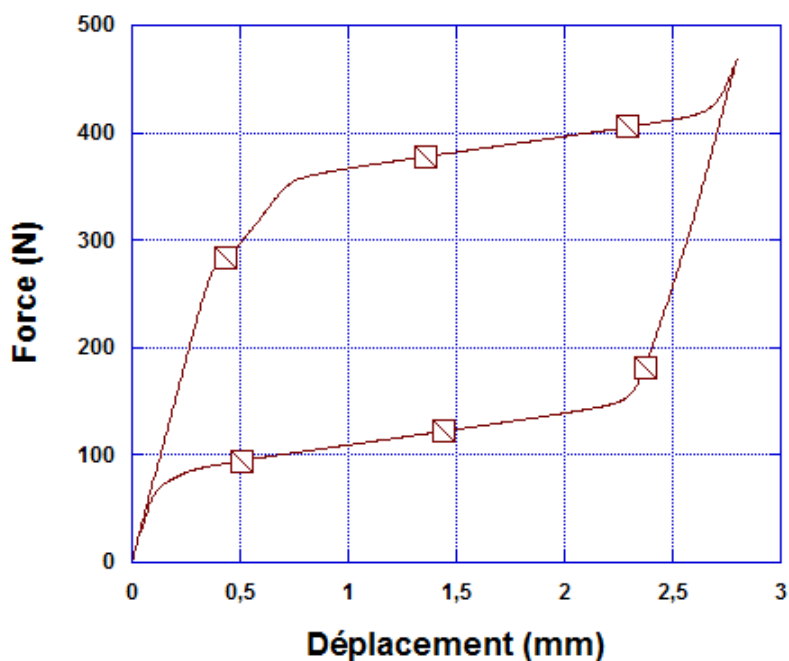


FIGURE 2.8 – Réponse force déplacement de la plaque trouée

lorsqu'on progresse vers le point B en suivant la ligne ; l'évolution de la quantité de martensite le long de la ligne reste évidemment plus importante pour la température  $T = -15^\circ \text{C}$ .

La déformation globale de la plaque ainsi que des éléments  $E_1$  et  $E_2$  en fonction de la tempé-

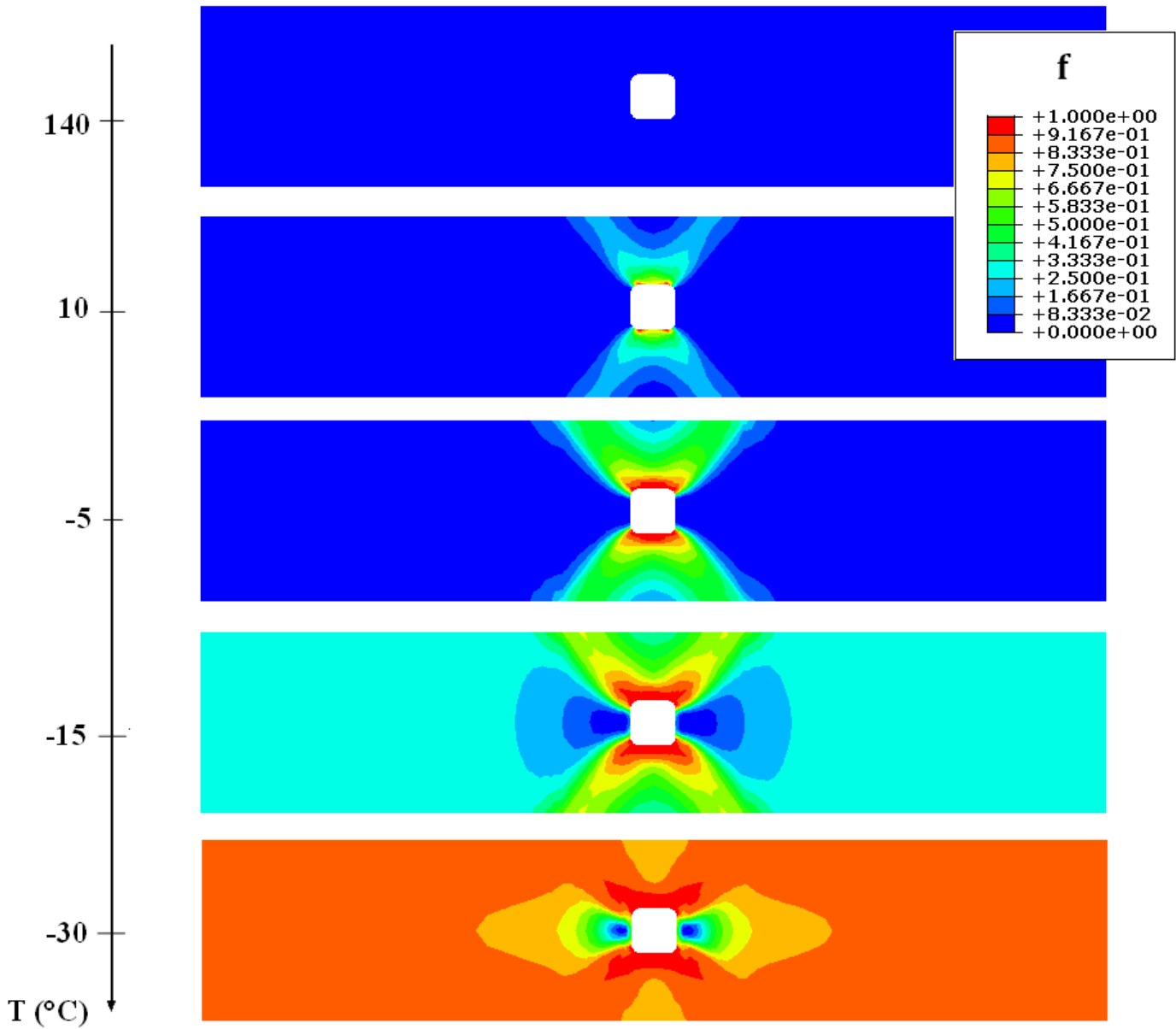


FIGURE 2.9 – Répartition de la fraction volumique de martensite dans la plaque en fonction de la température

rature de la plaque est présentée sur la figure 2.11 . Elle reproduit le comportement hystérétique classique des AMF durant un processus de refroidissement-chauffage à contrainte constante imposée. Comme le souligne cette figure, pour une même température donnée, la déformation globale de la plaque reste plus faible que la déformation locale dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  ; cela est due au fait que la quantité de martensite décroît lorsqu'on s'éloigne de la zone de concentration de contrainte (voir la figure 2.12 montrant l'évolution des fractions volumiques de martensite globale dans la plaque et locale dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  en fonction de la température).



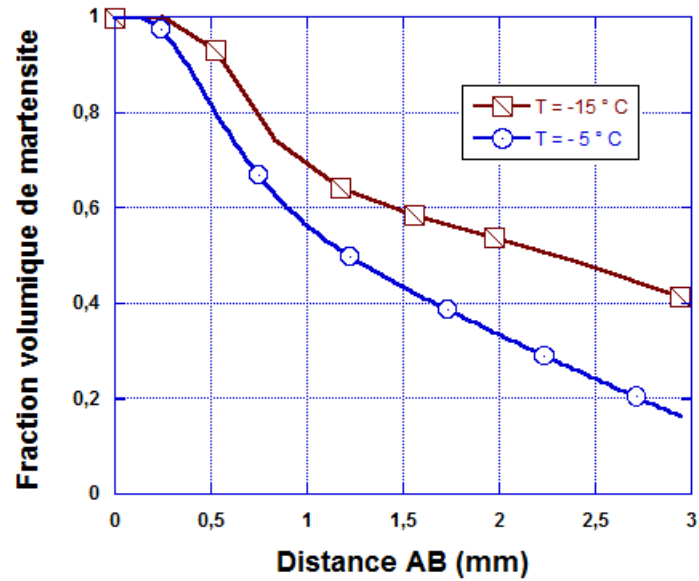


FIGURE 2.10 – Evolution de la fraction volumique de martensite le long de la ligne AB pour différentes températures

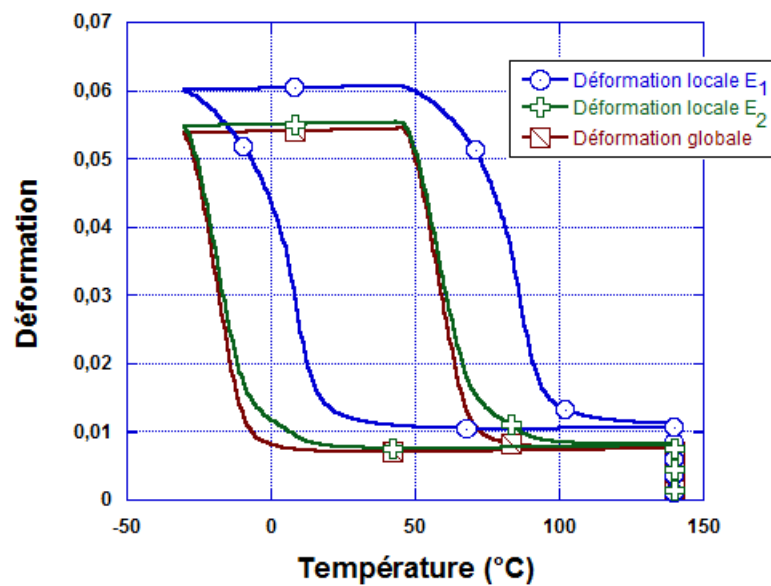


FIGURE 2.11 – Déformation locale dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  et globale en fonction de la température

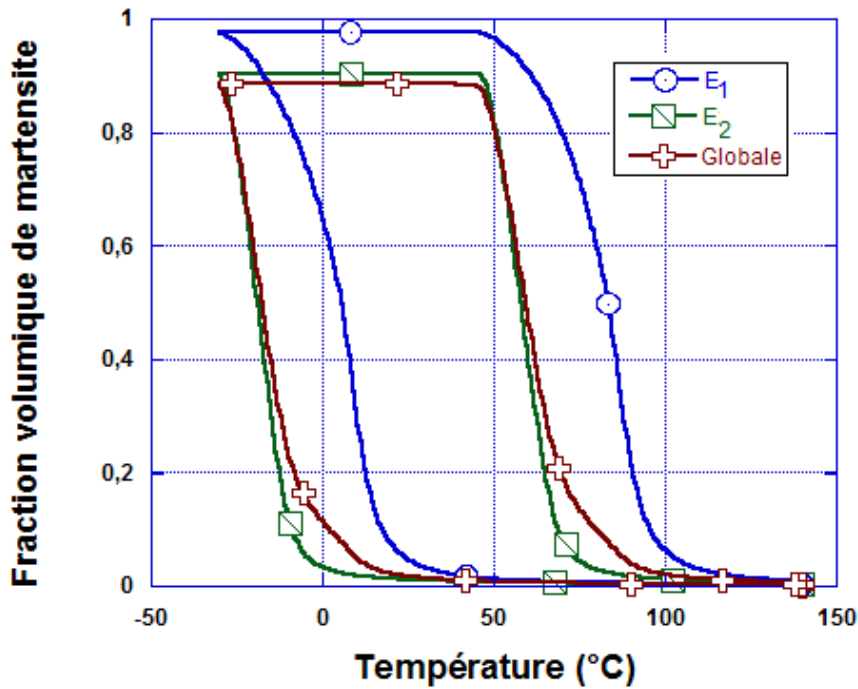


FIGURE 2.12 – Evolution des fractions volumiques de martensite globale dans la plaque et locale dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  en fonction de la température

Les deux cas d'étude montrant le comportement d'une plaque trouée mince soumise à des sollicitations thermomécaniques différentes nous rassurent sur la capacité du modèle de comportement présenté à être utilisé avec succès pour des applications complexes de calcul de structures. Ces deux exemples de simulations nous ont permis d'étudier la diffusion de la transformation de phase au sein d'une structure présentant une hétérogénéité du champ de contrainte.

## 2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle local de comportement thermomécanique des AMF issu des travaux de thèse de d'Arnaud Duval et de Yves Chemisky ([10],[19]). L'implémentation numérique du modèle dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus a également été décrite. Différents exemples de simulations ont permis de montrer l'aptitude du modèle à décrire le comportement thermomécanique des AMF.

Cependant, un tel modèle de comportement développé dans un contexte local, ne peut décrire correctement les instabilités de comportement observées dans les structures en AMF de taille fortement réduite telles que les phénomènes de localisation de la transformation de phase et les effets de taille.

Le chapitre suivant sera consacré à l'extension et à l'enrichissement du présent modèle en vue de le rendre applicable en présence de ces instabilités.

# Modèle non-local du comportement thermomécanique des AMF

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>62</b>
<b>3.2</b>	<b>Modélisation des instabilités dans les structures minces en AMF</b>	<b>62</b>
<b>3.3</b>	<b>Modélisation du comportement des structures minces en AMF basée sur une approche non-locale</b>	<b>63</b>
3.3.1	Sur la modélisation par une approche non-locale	63
3.3.2	Les formulations intégrales	64
3.3.3	Les formulations à gradient	65
3.3.4	Application de l'approche non-locale implicite à la modélisation du comportement des AMF	67
<b>3.4</b>	<b>Développement d'un élément fini 2D à contraintes planes basé sur le modèle non-local des AMF</b>	<b>68</b>
3.4.1	Équations du modèle non-local	69
3.4.2	Formulation faible	69
3.4.3	Formulation par éléments finis du problème non-local	70
<b>3.5</b>	<b>Validation numérique et discussions</b>	<b>73</b>
3.5.1	Simulation de la réponse d'une plaque en AMF superélastique avec un défaut matériel sollicitée en traction	73
3.5.2	Analyse de la transformation de phase dans une plaque mince trouée sous chargement thermomécanique	82
3.5.3	Analyse de l'influence de la taille du défaut sur le phénomène de localisation de la transformation de phase dans une plaque en AMF sous chargement thermomécanique	87
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>99</b>

---

## Résumé

En plus des comportements thermomécaniques spécifiques aux AMF, les structures minces en AMF sont le siège de certains phénomènes instables particuliers (voir chap. 1.3) qui font l'objet de recherches intensives. Ces phénomènes sont dus à des facteurs géométriques et matériels particulièrement difficiles à prendre en compte dans les modèles de comportement locaux.

Le présent chapitre est donc consacré au développement d'un modèle de comportement non-local capable de mettre en évidence de telles instabilités dans le comportement des structures minces en AMF.

### 3.1 Introduction

Le second chapitre a fait l'objet du modèle local de comportement thermomécanique des AMF. Dans ce chapitre, un modèle non-local du comportement des structures minces en AMF capable de capter les instabilités liées à la transformation de phase dans ces dernières est développé en exploitant les techniques issues de la formulation à gradient implicite. Le modèle est obtenu comme une extension au cadre non-local du modèle développé dans le second chapitre.

Après un bref rappel sur les phénomènes instables dans les AMF, nous décrirons de façon détaillée, la technique de modélisation basée sur une approche non-locale ainsi que l'utilisation de cette technique pour la modélisation du comportement des AMF. Le développement d'un élément fini spécial sur la base du modèle non-local obtenu sera ensuite présenté. Dans la dernière partie de ce chapitre, des exemples de simulations numériques mettant en œuvre les comportements superélastique et à effet mémoire de forme dans les AMF sont proposés ; ces simulations numériques ont permis de valider la capacité du modèle non-local développé à décrire les instabilités observées dans le comportement des structures minces en AMF.

### 3.2 Modélisation des instabilités dans les structures minces en AMF

En plus de présenter une transformation de phase martensitique réversible, les alliages à mémoire de forme sont des matériaux capables de développer un important travail mécanique. Ils sont de ce fait, particulièrement bien adaptés au développement de micro-systèmes, de micro-composants électroniques ou d'applications pour la microrobotique. L'avantage qu'offrent les AMF est qu'ils participent de manière intégrée à la fonctionnalité même du système, permettant ainsi de réduire à la fois l'encombrement et le coût des applications. Ils sont par exemple utilisés comme actionneurs pour les micro-pompes, les micro-pincettes, les micro-valves etc. Afin de maîtriser et d'optimiser la performance de ces micro-systèmes, la mise en place d'un outil de dimensionnement efficace, intégrant le comportement des films minces d'alliages à mémoire de forme s'avère indispensable. Comme indiqué dans le premier chapitre, une caractérisation expérimentale de ce comportement montre qu'en plus des spécificités du comportement propres aux AMF massifs, ces derniers laissent apparaître certains phénomènes particuliers tels que les effets de taille et les phénomènes de localisation de la transformation de phase qui doivent être pris en compte dans la modélisation de leur comportement. De tels phénomènes instables, peuvent être, en partie, dus soit à la présence d'un phénomène d'adoucissement (endommagement) dans le matériau (Jirásek et Bažant [40]), soit à des interactions complexes entre, les propriétés matérielles non-linéaires, la vitesse de chargement appliquée, le couplage thermomécanique, la géométrie et les dimensions de l'échantillon, etc.

Les phénomènes instables mentionnés ci-dessus ne peuvent pas être correctement décrits par les modèles continus standards, à l'instar de celui décrit dans le précédent chapitre. La raison vient du fait que ces modèles, développés dans un contexte local en se basant sur l'hypothèse d'un volume représentatif élémentaire uniforme, n'intègrent aucune information relative à une longueur caractéristique de la structure interne du matériau ; ce qui signifie que les hétérogénéités au sein du matériau ne sont pas suffisamment décrites. Ces échecs se traduisent généralement sur le plan numérique par une réponse de la structure qui présente plusieurs caractéristiques pathologiques :

1. Une forte dépendance des résultats vis à vis de la finesse et de l'orientation du maillage dans un calcul par éléments finis

2. Une localisation dans une zone de taille infiniment petite (obtenue par raffinement successif du maillage)
3. Un diagramme force-déplacement présentant un phénomène de bifurcation
4. Une quantité d'énergie totale dissipée nulle durant le processus de rupture

Ces caractéristiques pathologiques sont liées d'un point de vue mathématique à une perte d'ellipticité c'est à dire une non-unicité de la réponse du système matériel prédite par le modèle. Il existe dans la littérature des approches de modélisation permettant de résoudre ces inconvénients et de prendre en compte de tels phénomènes instables. Dans le cas des structures minces en AMF, parmi les approches proposées, l'on peut citer celles basées sur la théorie de Landau-Ginzburg et les modèles basés sur les approches non-locales (voir chap. 1.4). Dans le cadre du présent travail, nous adopterons les techniques issues des approches non-locales pour mettre en place un modèle non-local de comportement des AMF. Ces approches sont inspirées des travaux réalisés par Peerlings et al [66], [67], [68]; Engelen et al [21] en plasticité non-locale et endommagement. Il s'agit à travers ces techniques d'enrichir les modèles continus standards par des informations permettant de mieux décrire les hétérogénéités présentes au sein d'un matériau. Ces informations sont souvent introduites dans le modèles à travers des équations supplémentaires incorporant des paramètres matériaux additionnels. Concernant l'utilisation de ces approches appliquées à la modélisation du comportement des AMF, les premières bases ont été posées dans le cadre de la thèse d'Arnaud Duval [19], les résultats obtenus (1D et 2D contraintes planes) ont permis de valider l'efficacité de ces approches dans la prédiction des phénomènes instables observés dans les structures minces en AMF. Toutefois, ces premiers développements étaient limités au cadre superélastique avec l'hypothèse que la déformation de transformation reste orientée par le tenseur déviateur des contraintes, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour des trajets de chargements thermomécaniques complexes. Nous proposons ici, de poursuivre ces développements dans le cas 2D contraintes planes. Nous effectuerons une étude généralisée dans le but de prendre en compte les différents aspects comportementaux observés dans les AMF. Les développements effectués portent essentiellement sur les améliorations et modifications suivantes :

1. Une meilleure description du comportement hystérétique lors de la décharge superélastique.
2. L'introduction de la déformation moyenne de transformation en tant que variable interne pour décrire l'orientation de la quantité de martensite produite.
3. La prise en compte du comportement thermique homogène dans le but d'étudier la capacité du modèle à décrire le comportement des AMF sous n'importe quel type de chargement thermomécanique.

### 3.3 Modélisation du comportement des structures minces en AMF basée sur une approche non-locale

#### 3.3.1 Sur la modélisation par une approche non-locale

Apparue d'abord en élasticité, les approches non-locales ont été largement utilisées pour décrire les phénomènes d'écroutissage en plasticité et pour modéliser le comportement des matériaux à adoucissement. D'une manière générale, les théories non-locales, contrairement aux théories locales, abandonnent l'hypothèse selon laquelle la réponse en un point matériel d'un

domaine donné dépend uniquement de ce point ; elle dépend selon ces théories, non seulement de l'histoire du chargement en ce point mais également de l'histoire d'un certain voisinage autour ou même du domaine entier [41]. Le concept des modèles non-locaux consiste donc à prendre en compte l'influence d'un effet de voisinage spatial dans la description du comportement d'un point matériel. On est donc à même de développer à travers les théories non-locales, des modèles capables de décrire les interactions entre les points du domaine considéré. L'étendue de la zone d'interaction entre un point et son voisinage est déterminée à l'aide d'un paramètre de longueur interne qui caractérise également le degré d'hétérogénéité au sein du matériau. De façon évidente, les interactions sont d'autant plus faibles que les valeurs de ce paramètre sont plus grandes. On distingue notamment deux types de formulations non-locales :

- les formulations intégrales apparues dans les années 1960 (Eringen [24], Kroner [47])
- les formulations à gradient à partir des années 1980 (Zbib et Aifantis [93], Muhlhaus et Aifantis [57])

### 3.3.2 Les formulations intégrales

Les formulations intégrales utilisent le concept des modèles continus non-locaux. Elles remplacent généralement une ou plusieurs variables locales (typiquement les variables d'état) par leurs homologues non-locales, définies comme la moyenne spatiale, pondérée par une fonction poids sur un volume fini entourant le point considéré.

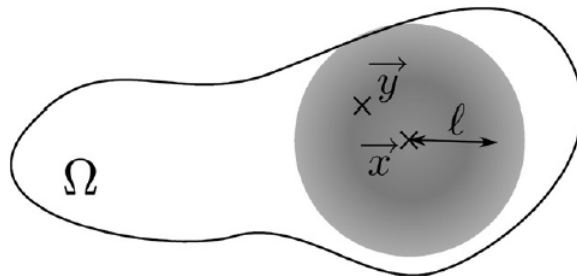


FIGURE 3.1 – Définition du domaine d'interaction entre un point matériel ( $\vec{x}$ ) et son voisinage décrit par le vecteur position  $\vec{y}$  d'après Duval et al. [20].

Ces formulations ont l'avantage d'être appliquées à tout type de modèle continu : modèle d'endommagement [4] et [72], modèles de plasticité [42], modèle microplans [5] etc. D'une manière générale, c'est la variable responsable de l'adoucissement dans le modèle qui est définie comme non-locale. Selon les modèles utilisés, cette variable peut correspondre soit à l'endommagement, à la déformation plastique, ou à la porosité.

Si  $\kappa$  représente la variable locale responsable de l'adoucissement dans un modèle donné, alors son équivalent non-locale en tout point  $\mathbf{x}$  du domaine considéré s'écrit de la manière suivante :

$$\bar{\kappa}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Psi(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \kappa(\mathbf{y}) d\Omega(\mathbf{y}) \quad (3.1)$$

$\mathbf{y}$  représente la position du volume infinitésimal  $d\Omega$ . La fonction  $\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  est la fonction poids qui dépend uniquement de la distance  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  ; elle définit l'influence du point situé à la

position  $\mathbf{y}$  sur la valeur du champ calculé en  $\mathbf{x}$ . Elle peut-être définie comme une fonction de type Gaussienne :

$$\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}l^3} \exp\left[-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{2l^2}\right] \quad (3.2)$$

La longueur caractéristique  $l$  qui apparaît explicitement dans la fonction poids représente le paramètre de longueur interne. Comme indiqué sur la figure (3.1), il détermine la taille du domaine qui contribue à la quantité non-locale  $\bar{\kappa}(\mathbf{x})$  et est lié aux échelles caractéristiques de la microstructure du matériau ou de la structure à analyser. Avec la définition intégrale (équation 3.1) et la fonction poids choisie, le comportement local est recouvré lorsque  $l \rightarrow 0$ . Le facteur  $\frac{1}{\Psi(\mathbf{x})}$  avec  $\Psi(\mathbf{x})$  une fonction de normation définie par :

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{y}) \quad (3.3)$$

permet de retrouver l'égalité  $\bar{\kappa}(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x})$  en l'absence de défauts dans le matériau, ce qui signifie que si le champ local est uniforme, le champ non-local sera lui aussi uniforme.

### 3.3.3 Les formulations à gradient

Tandis que, la non-localité est introduite dans le cas des formulations intégrales par des fonctions d'interactions spatiales, les formulations à gradients visent plutôt un enrichissement des modèles locaux par des termes de gradients d'ordres élevés, introduits dans les équations constitutives de la loi de comportement. Ces dernières peuvent-être considérées comme l'équivalent différentiel des formulations intégrales (Jirásek et Bažant [40]). On distingue essentiellement deux catégories de modèles à gradients :

1. Les modèles explicites qui enrichissent les modèles locaux en introduisant directement dans les équations constitutives ou les lois d'évolution de ces dernières, des termes faisant intervenir les gradients des variables internes.
2. Les modèles implicites qui enrichissent les modèles locaux par l'introduction d'un champ non-local défini de façon implicite par une équation aux dérivées partielles, où le champ local apparaît comme un terme source. Cette équation est résolue conjointement avec d'autres équations du modèle.

#### Formulation à gradient explicite

A partir de la formulation intégrale (équation 3.1), il est possible d'établir une relation en termes de gradients du champ local. Pour ce faire, on effectue la décomposition en série de Taylor de la variable locale  $\kappa$  au voisinage du point  $\mathbf{x}$  :

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{y}) = & \kappa(\mathbf{x}) + \frac{\partial \kappa}{\partial x_i}(y_i - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \kappa}{\partial x_i \partial x_j}(y_i - x_i)(y_j - x_j) \\ & + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \kappa}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_k - x_k) \\ & + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \kappa}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}(y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_k - x_k)(y_l - x_l) + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

La convention de sommation d'Einstein est appliquée aux indices  $i, j, k, l, \dots$ . En substituant la relation précédente dans l'équation intégrale (3.1), et en évaluant correctement les intégrales (en prenant  $\Omega = \mathbb{R}^2$  ou  $\Omega = \mathbb{R}^3$ ), on obtient :

$$\bar{\kappa}(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x}) + c(l)\nabla^2\kappa(\mathbf{x}) + d(l)\nabla^4\kappa(\mathbf{x}) + \dots \quad (3.5)$$

Où l'opérateur  $\nabla^n$  représente le Laplacien d'ordre  $n$  :

$$\nabla^2 = \sum_i \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) \quad \text{et} \quad \nabla^{2n} = (\nabla^2)^n \quad (3.6)$$

Les coefficients  $c(l)$  et  $d(l)$  de gradient d'ordre 2 et 4 sont homogènes à une puissance paire de la longueur caractéristique (puissance 2 et 4 respectivement). Leur valeur dépend de la fonction de pondération choisie. Les dérivées impaires ont disparu en raison de l'isotropie de la fonction Gaussienne. En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 4 dans l'expression (3.5) obtenue, on peut aboutir à une approximation du champ non-local :

$$\bar{\kappa}(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x}) + c(l)\nabla^2\kappa(\mathbf{x}) \quad (3.7)$$

La relation (3.7) montre bien que pour un champ local donné ainsi que ses dérivées de second ordre, le champ non-local peut-être directement évalué ; c'est pour cette raison qu'elle est considérée comme étant une formulation à gradient explicite. Tout comme dans le cas des formulations intégrales, notons que cette approximation explicite conserve la propriété selon laquelle, on retrouve le comportement local lorsque  $l \rightarrow 0$  ou en présence d'un champ local uniforme. En raison de la continuité de la variable locale  $\kappa(\mathbf{x})$ , la présence de la dérivée de second ordre dans l'expression (3.7), introduit, contrairement à la formulation non-locale décrite par l'équation (3.1), une certaine interaction spatiale dans le modèle. Toutefois, le rayon de la zone dans laquelle ont lieu ces interactions reste arbitrairement petit ; la formulation à gradient explicite est ainsi classée dans la catégorie des théories à non-localité faible. Elle est toutefois à l'origine des développements ayant abouti à la formulation implicite qui suit.

### Formulation à gradient implicite

Elle représente une alternative efficace pour améliorer le caractère faiblement non-local de la formulation à gradient explicite. Elle est obtenue en effectuant la série d'opérations suivantes :

1. On cherche dans un premier temps le Laplacien de la relation explicite (3.5) :

$$\nabla^2\bar{\kappa}(\mathbf{x}) = \nabla^2\kappa(\mathbf{x}) + c(l)\nabla^4\kappa(\mathbf{x}) + \dots \quad (3.8)$$

2. La relation (3.8) obtenue est ensuite multipliée par  $c(l)$  puis soustraite de l'équation (3.5) ; on obtient :

$$\bar{\kappa}(\mathbf{x}) - c(l)\nabla^2\bar{\kappa}(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x}) + [d(l) - c^2(l)]\nabla^4\kappa(\mathbf{x}) + \dots \quad (3.9)$$

3. Enfin, en négligeant les coefficient des termes d'ordre supérieur ou égal à 4, on peut écrire :

$$\bar{\kappa}(\mathbf{x}) - c(l)\nabla^2\bar{\kappa}(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x}) \quad (3.10)$$



L'équation (3.10) définit l'expression du champ non-local en formulation à gradient implicite. Elle est sous la forme d'une équation aux dérivées partielles (EDP) en termes de  $\bar{\kappa}$  et fait partie de la catégorie des théories à non-localité forte. L'approximation effectuée gagne en précision si la fonction de pondération est choisie de façon à vérifier la condition  $d(l) - c^2(l) = 0$ . Des travaux réalisés par Peerlings et ses collaborateurs [67] ont permis de montrer que la solution de cette EDP pour un champ local arbitraire  $\kappa(\mathbf{x})$  peut-être déterminée par la méthode des fonctions de Green :

$$\bar{\kappa}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \kappa(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{y}) \quad (3.11)$$

$G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  désigne la fonction de Green dont l'expression est la suivante :

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\rho l^2} \exp\left(-\frac{\rho}{l}\right) \quad (3.12)$$

$\rho$  désigne la distance entre deux points :  $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$ . L'expression (3.12) de la fonction de Green a été proposée par Zauderer [92]. Elle a la particularité d'impliquer  $c(l) = l^2$ . Il a été démontré que cette fonction de pondération permet de satisfaire également la relation  $d(l) - c^2(l) = 0$  (voir Engelen et al. [21]). Tout comme dans le cas des deux formulations précédentes, on retrouve le comportement local lorsque  $l \rightarrow 0$ .

### 3.3.4 Application de l'approche non-locale implicite à la modélisation du comportement des AMF

Le présent paragraphe est centré sur le développement d'un modèle de comportement thermo-mécanique non-local dédié à l'étude du comportement des structures minces en AMF en présence des phénomènes instables décrits dans le premier chapitre. Il est obtenu comme une extension au cadre non-local du modèle local décrit dans le chapitre 2. Tout en conservant les équations constitutives de ce dernier, les développements effectués ici visent à l'enrichir par des équations supplémentaires en se basant sur des techniques issues des approches non-locales. Les hétérogénéités observées dans le comportement des structures minces en AMF ayant pour origine la localisation de la transformation de phase qui se produit au sein de ces derniers, le choix a donc été porté sur la fraction volumique de martensite comme la variable responsable de l'adoucissement au sein des AMF. En suivant les différentes étapes de la formulation à gradient implicite, il a été démontré dans les travaux de thèse d'Arnaud Duval [19] que la contrepartie non-locale ( $\bar{f}(\mathbf{x})$ ) de la fraction volumique locale de martensite en un point matériel quelconque  $\mathbf{x}$  d'un domaine  $\Omega$  peut s'écrire :

$$\bar{f}(\mathbf{x}) - l^2 \nabla^2 \bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (3.13)$$

Où  $\nabla^2$  est l'opérateur défini par la relation (3.6). La relation (3.13) définit une équation aux dérivées partielles (EDP) dans laquelle la fraction volumique locale  $f(\mathbf{x})$  agit comme un terme source et le paramètre de longueur interne  $l$  (coefficient  $l^2$  du terme représentant le gradient de second ordre dans l'EDP) joue comme dans le cas des modèles non-locaux de plasticité avec endommagement, le rôle de limiteur de localisation. Ce paramètre caractérise la taille de la zone qui contribue à la description des hétérogénéités dans le milieu. D'un point de vue physique, il contrôle l'intensité des interactions entre le point matériel et son voisinage et améliore ainsi la description des états non homogènes de déformation. Pour résoudre l'équation (3.13), une condition aux limites de type Neumann sur la fraction volumique non-locale est posée :

$$\nabla \bar{f} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad (3.14)$$

Où  $\partial\Omega$  représente la frontière du domaine  $\Omega$ . Cette condition aux limites exprime le fait que le flux de la fraction volumique non-locale de martensite est nul sur le contour du domaine d'étude  $\Omega$ . Cette condition reste cohérente avec le fait que  $\bar{f} = f$  dans le cas d'une transformation de phase homogène et implique que la quantité totale de martensite reste identique dans le domaine  $\Omega$  pour les deux formulations locale et non-locale :

$$\int_{\Omega} \bar{f} d\Omega = \int_{\Omega} f d\Omega \quad (3.15)$$

Dans le but de modéliser les phénomènes d'adoucissement, l'expression de la force critique de transformation  $F_{crit}^f$  (équation (2.38)) associée à l'évolution de la fraction volumique locale de martensite est modifiée. Elle est désormais écrite en fonction de la variable non-locale et notée  $F_{crit-nonlocal}^f$ . Selon le sens de la transformation de phase nous avons :

$$\begin{cases} F_{crit-nonlocal}^f &= F_{crit}^f \exp[-\Lambda(H_{\bar{f}})\bar{f}] & \text{si } \dot{f} > 0 \\ F_{crit-nonlocal}^f &= F_{crit}^f \exp[-\Lambda(H_{\bar{f}})(1-\bar{f})] & \text{si } \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

$\Lambda(H_{\bar{f}})$  est une fonction du paramètre matériau  $H_{\bar{f}}$  permettant de décrire le taux d'adoucissement.  $\Lambda(H_{\bar{f}})$  peut avoir diverses expressions (linéaire, asymptotique etc.). Dans le cas où  $\Lambda(H_{\bar{f}})$  est linéaire, nous avons retenu l'expression :  $\Lambda(H_{\bar{f}}) = H_{\bar{f}}$ . La force critique de transformation s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} F_{crit-nonlocal}^f &= F_{crit}^f \exp[-H_{\bar{f}}\bar{f}] & \text{si } \dot{f} > 0 \\ F_{crit-nonlocal}^f &= F_{crit}^f \exp[H_{\bar{f}}(1-\bar{f})] & \text{si } \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Dans le cas asymptotique, la fonction  $\Lambda(H_{\bar{f}})$  s'écrit :  $\Lambda(H_{\bar{f}}) = \frac{H_{\bar{f}}}{H_{\bar{f}}+1}$ . La force critique de transformation devient :

$$\begin{cases} F_{crit-nonlocal}^f &= F_{crit}^f \exp\left[-\frac{H_{\bar{f}}}{H_{\bar{f}}+1}\bar{f}\right] & \text{si } \dot{f} > 0 \\ F_{crit-nonlocal}^f &= F_{crit}^f \exp\left[\frac{H_{\bar{f}}}{H_{\bar{f}}+1}(1-\bar{f})\right] & \text{si } \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Notons que le phénomène d'accommodation des macles de même que l'orientation des variantes de martensite restent définis comme dans le cas du modèle local. En effet, ces deux phénomènes sont définis à partir des déformations moyennes d'accommodation des macles et de transformation, introduites comme variables internes. Ainsi dans le cadre du présent modèle, leurs contreparties non-locales n'ont pas été définies. Tout comme dans le cas du modèle local, aucune force critique n'est associée au phénomène d'accommodation des macles et la force critique associée au phénomène d'orientation des variantes de martensite n'a pas été modifiée.

### 3.4 Développement d'un élément fini 2D à contraintes planes basé sur le modèle non-local des AMF

Le présent paragraphe est consacré au développement d'un élément fini spécial sur la base des équations du modèle non-local obtenu. En effet, la dépendance spatiale de certaines équations du modèle (notamment l'équation (3.13) issue de la formulation non-locale) proscrit toute possibilité d'utilisation d'un élément fini standard et donc le besoin de développer un élément fini adapté à notre problème. C'est l'objectif du présent paragraphe.

### 3.4.1 Équations du modèle non-local

Le tableau (3.1) résume les différentes équations du modèle non-local proposé. L'équation (3.13) donnant le champ non-local ( $\bar{f}(\mathbf{x})$ ) doit être résolue conjointement avec les autres équations du problème constitué des équations d'équilibre de champs de l'équilibre mécanique et des équations constitutives du modèle local. Nous adoptons ici la méthode des éléments finis qui se révèle particulièrement bien adaptée pour la résolution des problèmes d'une telle complexité. Pour ce faire, un élément fini spécial 2D en contraintes planes ayant 4 nœuds et 3 degrés de liberté par nœud à savoir la fraction volumique non-locale de martensite et les deux déplacements dans le plan a donc été développé et implanté dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus. La température est supposée homogène pour cet élément.

TABLE 3.1 – Equations constitutives du modèle de comportement non-local des AMF

- 
- Définition de la variable non-locale (EDP à résoudre) :  

$$\bar{f}(\mathbf{x}) - \ell^2 \nabla^2 \bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$
  - Équations d'équilibre mécanique en l'absence de forces volumiques :  

$$\nabla \cdot \Sigma = \mathbf{0}$$

Ces deux équations s'accompagnent des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla \bar{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \Sigma \cdot \mathbf{n} &= \{T\} \quad \text{sur } \partial\Omega^\Sigma \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^d \quad \text{sur } \partial\Omega^u \end{aligned}$$

Avec  $\partial\Omega^\Sigma \cap \partial\Omega^u = \emptyset$  et  $\partial\Omega^\Sigma \cup \partial\Omega^u = \partial\Omega$
  - Equations constitutives du modèle local :  

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{el} + \mathbf{E}^{th} + \mathbf{E}^T + \mathbf{E}^{twin} = \mathbb{S} : \Sigma + \alpha \Delta T + f \bar{\epsilon}^T + f^{FA} \bar{\epsilon}^{twin} \\ F_m^f &= \Sigma \bar{\epsilon}^T - B(T - T_0) - H_f f - \frac{1}{2} H_{\bar{\epsilon}^T} \bar{\epsilon}^T \bar{\epsilon}^T \\ \mathbf{F}_m^{\epsilon^T} &= f(\Sigma^d - H_{\bar{\epsilon}^T} \bar{\epsilon}^T) \\ \mathbf{F}_m^{\epsilon^{twin}} &= f^{FA}(\Sigma^d - H_{\bar{\epsilon}^{twin}} \bar{\epsilon}^{twin}) \end{aligned}$$
  - Conditions de saturation de la transformation de phase :  

$$\begin{aligned} f &\geq 0; 1 - f \geq 0 \\ \varepsilon_{MAX}^T - |\varepsilon_{ij}^T| &\geq 0 \end{aligned}$$
  - Compte tenu des conditions de saturation et des boucles internes :  

$$|F_{m-\lambda}^f - (1 - \gamma_f) F_f^{mem}| \leq F_{crit-nonlocal}^f \quad \text{et} \quad F_{m-\lambda-eq}^{\epsilon^T} \leq F_{\bar{\epsilon}^T}^{max}$$
- 

### 3.4.2 Formulation faible

Les équations du problème thermomécanique étudié sont indiquées dans le tableau (3.1). Dans le but de résoudre ces équations par la méthode des éléments finis, les équations de champs du problème doivent être réécrites sous leur forme faible. La méthode de Galerkin permet de résoudre ces opérations en introduisant les espaces de champs virtuels  $W_u$  et  $W_{\bar{f}}$  respectivement liés à l'espace des déplacements et à l'espace de la fraction volumique non-locale de martensite :

$$\begin{aligned} W_u &= \{\mathbf{w}_u \mid \mathbf{w}_u \in [C^0]^2\} \\ W_{\bar{f}} &= \{w_{\bar{f}} \mid w_{\bar{f}} \in [C^0]\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

En multipliant l'équation de l'équilibre mécanique par  $\mathbf{w}_u$  puis en intégrant sur le domaine  $\Omega$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \nabla \Sigma d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{w}_u \in W_u \quad (3.20)$$

En effectuant les mêmes opérations avec l'équation implicite donnant le champ non-local (on multiplie cette fois-ci par  $w_{\bar{f}}$ ), on obtient :

$$\int_{\Omega} w_{\bar{f}} (\bar{f} - l^2 \nabla^2 \bar{f}) d\Omega = \int_{\Omega} w_{\bar{f}} f d\Omega \quad \forall w_{\bar{f}} \in W_{\bar{f}} \quad (3.21)$$

En procédant par la suite à une intégration par parties de chacune des équations (3.20) et (3.21); en tenant compte du théorème de la divergence et des conditions aux limites respectives nous obtenons :

$$\int_{\Omega} [\nabla \mathbf{w}_u]^T : \Sigma d\Omega - \int_{\partial\Omega^{\Sigma}} \mathbf{w}_u \cdot \mathbf{T} d(\partial\Omega) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_u \in W_u \quad (3.22)$$

$$\int_{\Omega} (w_{\bar{f}} \bar{f} + l^2 \nabla w_{\bar{f}} \cdot \nabla \bar{f}) d\Omega - \int_{\Omega} w_{\bar{f}} f d\Omega = 0 \quad \forall w_{\bar{f}} \in W_{\bar{f}} \quad (3.23)$$

Les équations (3.22) et (3.23) représentent les formes faibles respectivement de l'équation de l'équilibre mécanique et de l'EDP définissant la fraction volumique non-local de martensite. La résolution de ces équations par la méthode des éléments finis est présentée de façon détaillée dans le paragraphe suivant.

### 3.4.3 Formulation par éléments finis du problème non-local

Un élément fini spécial 2D contraintes planes de forme quadrangulaire à quatre nœuds et quatre points d'intégration est développé en vue de la résolution des équations (3.21) et (3.22).

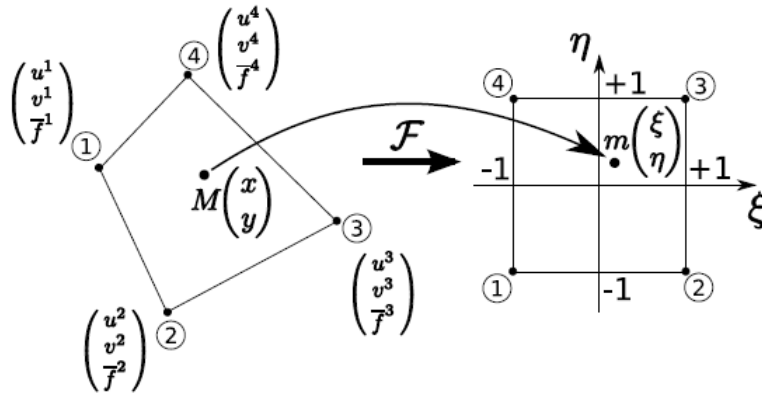


FIGURE 3.2 – Element quadrangulaire développé avec les degrés de liberté retenus, d'après [20].

Comme l'indique la figure (3.2), l'élément possède 3 degrés de libertés par nœud : les deux déplacements dans le plan et la fraction volumique non-local de martensite. En tout point de coordonnées  $(\xi, \eta)$  de l'élément de référence, les vecteurs déplacements approchés, réels et virtuels sont exprimés par :

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = [N^u]\{u\} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_u(\xi, \eta) = [N^u]\{w_u\} \quad (3.24)$$

De même les fractions volumiques non-locales  $\bar{f}(\xi, \eta)$  et  $w_{\bar{f}}(\xi, \eta)$  s'écrivent respectivement :

$$\bar{f}(\xi, \eta) = [N^{\bar{f}}]\{\bar{f}\} \quad \text{et} \quad w_{\bar{f}}(\xi, \eta) = [N^{\bar{f}}]\{w_{\bar{f}}\} \quad (3.25)$$

En 2D, le vecteur  $\{u\}$  possède 8 composantes (2 composantes par nœud) et le vecteur  $\{\bar{f}\}$ , 4 composantes :

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{u^1 \ v^1 \ u^2 \ v^2 \ u^3 \ v^3 \ u^4 \ v^4\}^T \\ \{\bar{f}\} &= \{\bar{f}^1 \ \bar{f}^2 \ \bar{f}^3 \ \bar{f}^4\}^T \end{aligned} \quad (3.26)$$

$[N^u]$  et  $[N^{\bar{f}}]$  représentent respectivement les matrices d'interpolation des déplacements et de la fraction volumique non-locale :

$$\begin{aligned} [N^u] &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \\ [N^{\bar{f}}] &= [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Où les  $N_i$  ( $i = 1$  à  $4$ ) sont les fonctions de formes linéaires définies par :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}; & N_2(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}; & N_4(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Le tenseur des déformations représenté ici par le vecteur  $\{E\}$ , et le vecteur gradient de la fraction volumique non-locale de martensite en tout point de l'élément de référence sont déterminés à partir des matrices  $[B^u]$  et  $[B^{\bar{f}}]$ , exprimées en fonction des dérivées des fonctions de formes et des vecteurs nodaux  $\{u\}$  et  $\{\bar{f}\}$  :

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{Bmatrix} = [B^u]\{u\} \quad \text{et} \quad \{\nabla \bar{f}\} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{,x} \\ \bar{f}_{,y} \end{Bmatrix} = [B^{\bar{f}}]\{\bar{f}\} \quad (3.29)$$

Le détail des calculs des matrices  $[B^u]$  et  $[B^{\bar{f}}]$  est donné en annexe A.

En prenant en compte les différents développements effectués auparavant et plus précisément les équations (3.24, 3.25, et 3.29), les formes faibles des équations du problème non-local (3.22, 3.23) peuvent être réécrites, aboutissant au système d'équations ci-après (3.30). C'est ce système qui sera résolu numériquement en adoptant une procédure itérative de Newton-Raphson :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_e} [B^u]^T \{\boldsymbol{\Sigma}(u, \bar{f})\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_e^\Sigma} [N^u]^T \{T\} d(\partial\Omega) = \{R_u^e(u, \bar{f})\} = 0 \\ (\int_{\Omega_e} ([N^{\bar{f}}]^T [N^{\bar{f}}] + l^2 [B^{\bar{f}}]^T [B^{\bar{f}}]) d\Omega) \{\bar{f}\} - \int_{\Omega_e} [N^{\bar{f}}]^T f(u, \bar{f}) d\Omega = \{R_{\bar{f}}^e(u, \bar{f})\} = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Avec  $\Omega_e$  le volume de l'élément fini et  $\partial\Omega_e^\Sigma$  son contour.

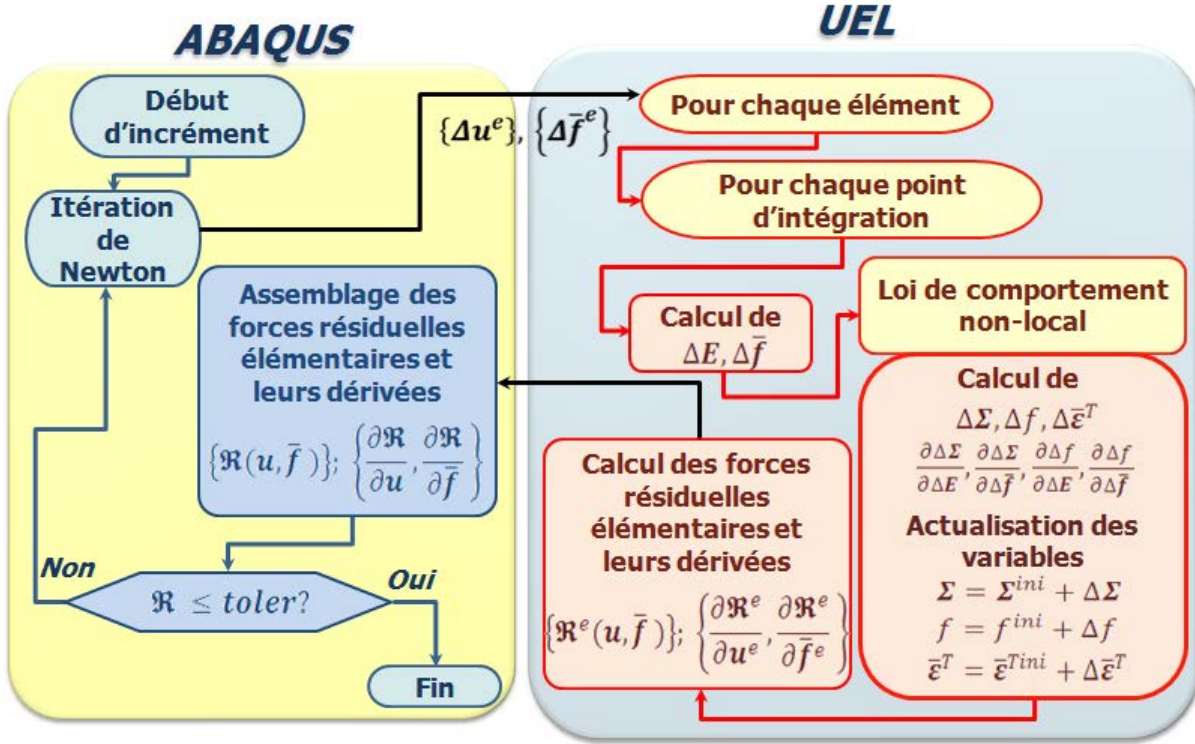


FIGURE 3.3 – Algorithme de résolution implémenté dans le logiciel Abaqus.

Comme indiqué dans le chapitre 2, la technique de résolution des équations par la méthode itérative de Newton-Raphson nécessite une linéarisation des résidus qui fait apparaître les opérateurs tangents de la loi de comportement. Dans le cas du système d'équations (3.30) où les résidus sont  $\{R_u^e(u, \bar{f})\}$  et  $\{R_f^e(u, \bar{f})\}$ , cette linéarisation est effectuée par rapport aux vecteurs des degrés de liberté ( $\{u\}$  et  $\{\bar{f}\}$ ) de l'élément développé et fait apparaître les opérateurs tangents suivants :

$$H^{uu} = \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta E}; \quad H^{u\bar{f}} = \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \bar{f}}; \quad H^{\bar{f}u} = \frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta E}; \quad H^{\bar{f}\bar{f}} = \frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta \bar{f}} \quad (3.31)$$

Tous ces opérateurs tangents sont directement extraits à partir de la résolution des équations constitutives du modèle non-local. Ces dernières sont implantées dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus via la routine utilisateur UEL. La résolution numérique des différentes équations a été programmée à l'aide du langage orienté objet C++ en se basant sur la librairie mathématique Simula+ [16].

L'algorithme de résolution est illustré sur la figure (3.3). A la fin de chaque incrément et donc au terme de chaque processus itératif, les valeurs de la contrainte, des variables internes du modèle, des opérateurs tangents sont mises à jour ; le vecteur des forces résiduelles élémentaires de même que leurs dérivées par rapport aux degrés de libertés de l'élément sont également calculées.

Dans la section suivante, la capacité du présent modèle non-local dans la prédiction du comportement thermomécanique hétérogène des structures minces en AMF est illustrée à travers différentes simulations numériques.

### 3.5 Validation numérique et discussions

Des simulations numériques vont permettre dans cette section d'évaluer l'efficacité du modèle non-local développé à prédire les phénomènes instables observés expérimentalement lors de la transformation de phase dans les structures minces en AMF. Nous utiliserons pour cela, l'élément fini 2D contraintes planes développé dans la section précédente puis implémenté dans Abaqus via la routine utilisateur UEL.

Dans toutes les simulations réalisées, l'état austénitique sera considéré comme l'état initial. L'un des principaux avantages du présent modèle non-local étant l'analyse de la transformation de phase sous n'importe quel type de chargement thermomécanique, l'évolution de l'état de la martensite pourra être décrite à travers l'application de différents types de trajets de chargements thermomécaniques.

#### 3.5.1 Simulation de la réponse d'une plaque en AMF superélastique avec un défaut matériel sollicitée en traction

Nous considérons ici le cas simple d'une plaque en AMF superélastique avec un défaut matériel sous la forme d'une inclusion rectangulaire au centre. Le défaut est pris en compte en modifiant les températures de début de transformation directe et de fin de transformation inverse au sein de l'inclusion. En notant  $M_s^d$  et  $A_f^d$  ces températures, nous avons  $M_s^d = -75^\circ \text{C}$  au lieu de  $-80^\circ \text{C}$  et  $A_f^d = -7^\circ \text{C}$  au lieu de  $-2^\circ \text{C}$ . Ceci implique une force critique de début de transformation plus faible dans cette zone. Cet exemple correspondant au cas spécifique d'un matériau présentant des hétérogénéités va nous permettre de juger de la capacité du modèle à décrire les phénomènes de localisation lors de la transformation de phase martensitique. Les tableaux 3.2 et 3.3 regroupent respectivement les paramètres matériaux utilisés pour la zone du défaut et pour le reste de la plaque. La géométrie ainsi que les dimensions dans le plan de la plaque sont indiquées sur la 3.4(a). La plaque a une épaisseur de 0.1 mm.

Pour des raisons de symétrie de la géométrie et du chargement appliqué, uniquement le quart de la plaque sera étudié dans un premier temps. La réponse de la plaque entière pourra être analysée par la suite. La figure 3.4(b) montre le chargement en traction appliqué à la plaque; le maillage, les conditions aux limites de même que la ligne (AB) de sortie des résultats sont indiquées sur la figure 3.4(c).

TABLE 3.2 – Valeurs des paramètres matériaux au sein du défaut.

$E$ (MPa)	$\nu$	$\alpha$ ( $^\circ \text{C}^{-1}$ )	$\varepsilon_{trac}^T$	$\varepsilon_{trac}^{TFA}$
39500	0.3	$8.10^{-6}$	0.056	0.053
$\varepsilon_{comp}^T$	$B$ (MPa/ $^\circ \text{C}$ )	$M_s$ ( $^\circ \text{C}$ )	$A_f$ ( $^\circ \text{C}$ )	$r_f$
0.044	0.28	-75	-7	0.25
$F_{\bar{\varepsilon}^T}^{max}$ (MPa)	$H_f$ (MPa)	$H_{\bar{\varepsilon}}$ (MPa)	$H_{twin}$ (MPa)	$H_s$ (MPa)
220	4	1000	40000	50

Tout en maintenant constante la température de la bande à  $25^\circ \text{C}$ , on applique à l'une de ses extrémités un déplacement jusqu'à atteindre une élongation globale de 7%. Pour cette simulation, l'expression de la force critique de la transformation de phase est celle proposée dans le cas où  $\Lambda(H_{\bar{f}})$  est linéaire (voir l'équation (3.17)).

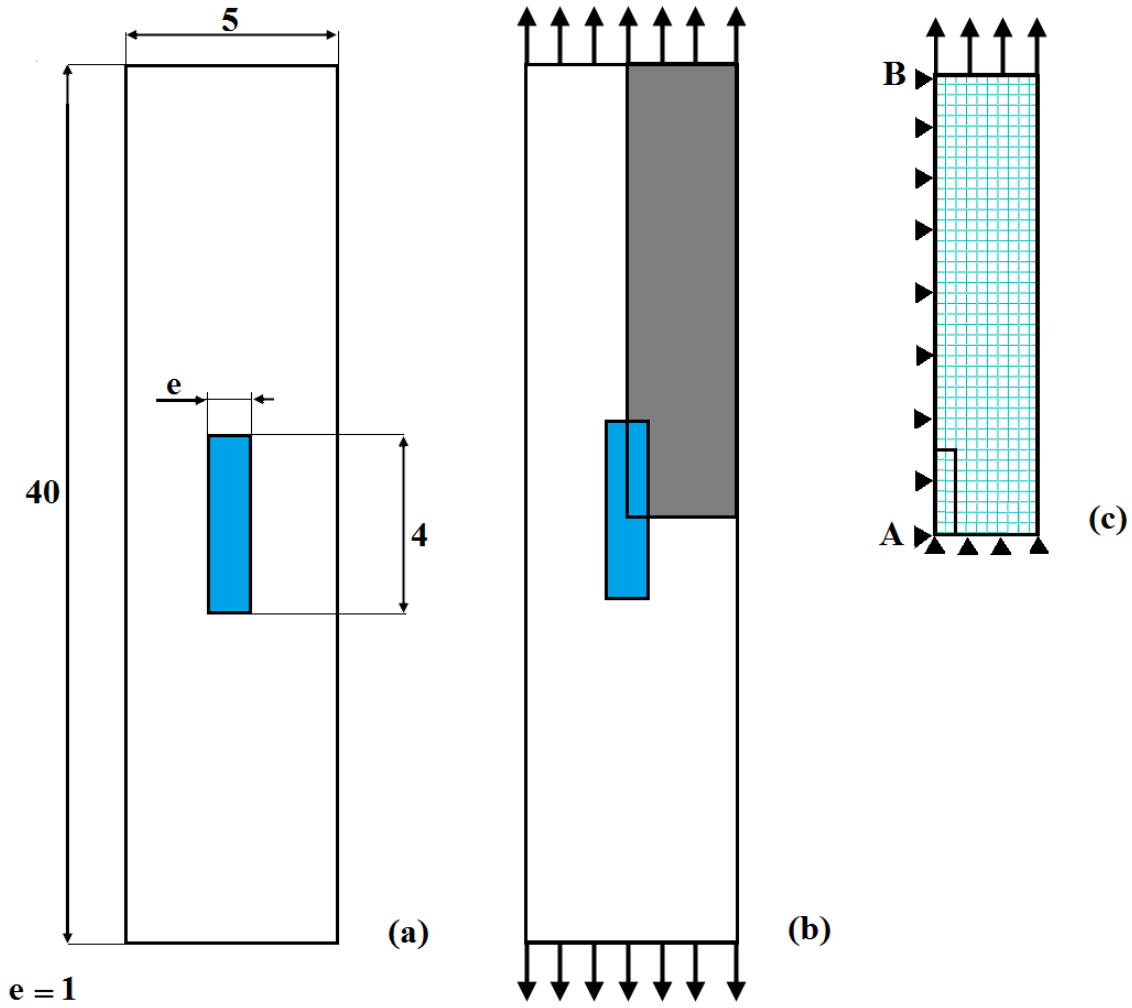


FIGURE 3.4 – Plaque étudiée en AMF : (a) Dimensions en millimètres, (b) Chargement mécanique appliqué (c) Maillage, conditions aux limites et ligne AB de sortie des résultats.

TABLE 3.3 – Valeurs des paramètres matériaux dans le reste de la plaque.

$E$ (MPa)	$\nu$	$\alpha$ ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )	$\varepsilon_{trac}^T$	$\varepsilon_{trac}^{TFA}$
39500	0.3	$8.10^{-6}$	0.056	0.053
$\varepsilon_{comp}^T$	$B$ (MPa/ $^{\circ}\text{C}$ )	$M_s$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$A_f$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$r_f$
0.044	0.28	-80	-2	0.25
$F_{\bar{\varepsilon}^T}^{max}$ (MPa)	$H_f$ (MPa)	$H_{\bar{\varepsilon}}$ (MPa)	$H_{twin}$ (MPa)	$H_s$ (MPa)
220	4	1000	40000	50

### Influence du paramètre $H_{\bar{f}}$

En vue d'étudier l'influence du paramètre matériau  $H_{\bar{f}}$  introduit dans l'expression de la force critique de transformation, nous effectuons dans un premier temps une série de simulations avec différentes valeurs de ce paramètre tout en considérant que la plaque est exempte de toute



imperfection ; il s'agit dans ce cas d'un problème purement homogène.

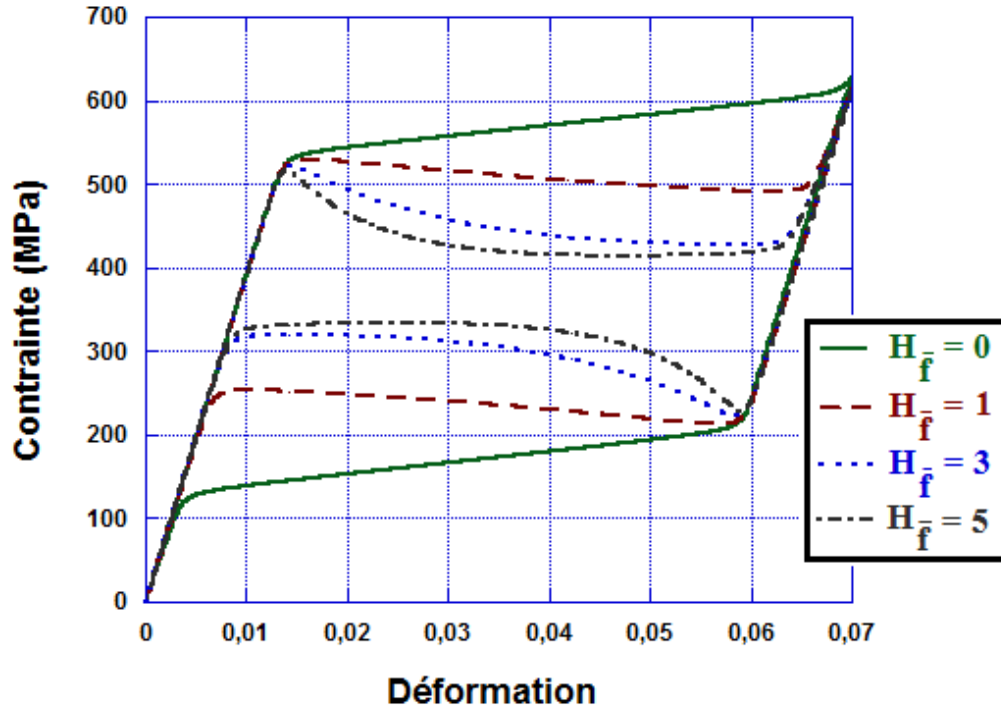


FIGURE 3.5 – Courbes contrainte-déformation globales  $(\frac{F}{S}, \frac{u}{L})$  pour différentes valeurs du paramètre  $H_{\bar{f}}$  (problème homogène, pas d'imperfection).

La figure 3.5 montre la réponse globale contrainte-déformation pour différentes valeurs du paramètre  $H_{\bar{f}}$ . On peut remarquer d'une manière générale que :

- lors de la transformation de phase directe, pour les valeurs non nulles de ce paramètre, les différentes courbes présentent une pente locale négative, traduisant le fait que la force de transformation diminue lorsque la fraction volumique de martensite augmente. Ce paramètre permet donc effectivement de prendre en compte les phénomènes d'adoucissement dans le modèle non-local développé. On notera que plus la valeur de ce paramètre augmente, plus la contrainte diminue très rapidement au cours la transformation de phase.
- Lors de la transformation de phase inverse, les courbes présentent une pente locale positive qui augmente avec les valeurs du paramètre  $H_{\bar{f}}$ . Cela s'explique par le fait que le modèle non-local tel qu'il est formulé impose que la force critique de transformation évolue de manière opposée à l'évolution de la fraction volumique de martensite. Ainsi, comme la fraction volumique de martensite diminue lors de la transformation de phase inverse, la force critique de transformation quant à elle, augmente.
- La taille de l'hystérésis diminue lorsque le paramètre  $H_{\bar{f}}$  augmente, ceci est dû au fait que, lorsque le paramètre  $H_{\bar{f}}$  augmente, la contrainte diminue rapidement lors de la transformation de phase directe et augmente rapidement lors de la transformation de phase inverse.

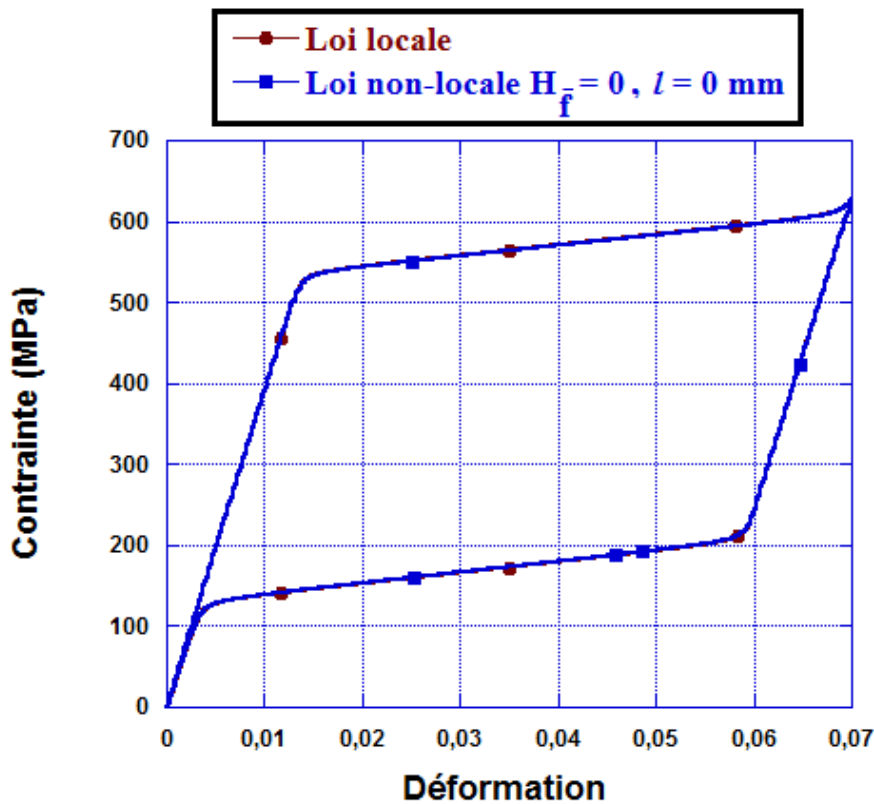


FIGURE 3.6 – Réponses loi locale et loi non-locale

Comme mentionné dans les paragraphes précédents, dans le cas particulier  $H_{\bar{f}} = 0$  et  $l = 0$  en l'absence de défaut dans la plaque, on retrouve le comportement local. La figure 3.6 confirme bien cette propriété. En effet, les réponses contrainte-déformation données par les modèles local et non-local pour  $H_{\bar{f}} = 0$  et  $l = 0$  sont parfaitement identiques.

#### Influence du paramètre de longueur interne $l$

La réponse globale de la bande en termes de contrainte-déformation et en présence de la zone de défaut est maintenant étudiée. Sur la figure 3.7, nous reportons l'évolution de la contrainte et de la déformation nominales, des fractions volumiques non-locales au sein de la zone de défaut et dans toute la plaque en fonction du temps. Nous pouvons effectuer les remarques suivantes :

- La déformation nominale augmente linéairement jusqu'à 7% dans la première moitié du temps total (temps de chargement) puis diminue jusqu'à atteindre une valeur nulle dans la seconde moitié du temps total (temps de décharge). Cette évolution correspond au chargement appliqué.
- Durant la première moitié du temps total, les fractions volumiques non-locales de martensite dans la zone de défaut et au sein de la plaque restent nulles dans la phase élastique de l'austénite. Cependant, dès le début de la transformation de phase, on peut noter une augmentation très rapide de cette fraction au sein de la zone de défaut (on atteint la saturation

déjà à 1.5% du temps de chargement) ; quant à l'évolution de cette fraction au sein de la plaque, elle reste linéaire et atteint la saturation vers la fin du chargement. Une évolution similaire est observée lors de la transformation de phase inverse : décroissance rapide de la fraction volumique non-locale dans la zone de défaut jusqu'à une valeur nulle dès le début, tandis qu'elle reste linéaire jusqu'à une valeur nulle vers la fin de la transformation pour toute la plaque.

- La contrainte nominale évolue linéairement durant la phase élastique de l'austénite, elle présente un pic au début de la transformation martensitique, puis reste constante durant toute la durée de la transformation. A la fin de la transformation elle évolue linéairement de nouveau dans la phase élastique de la martensite.

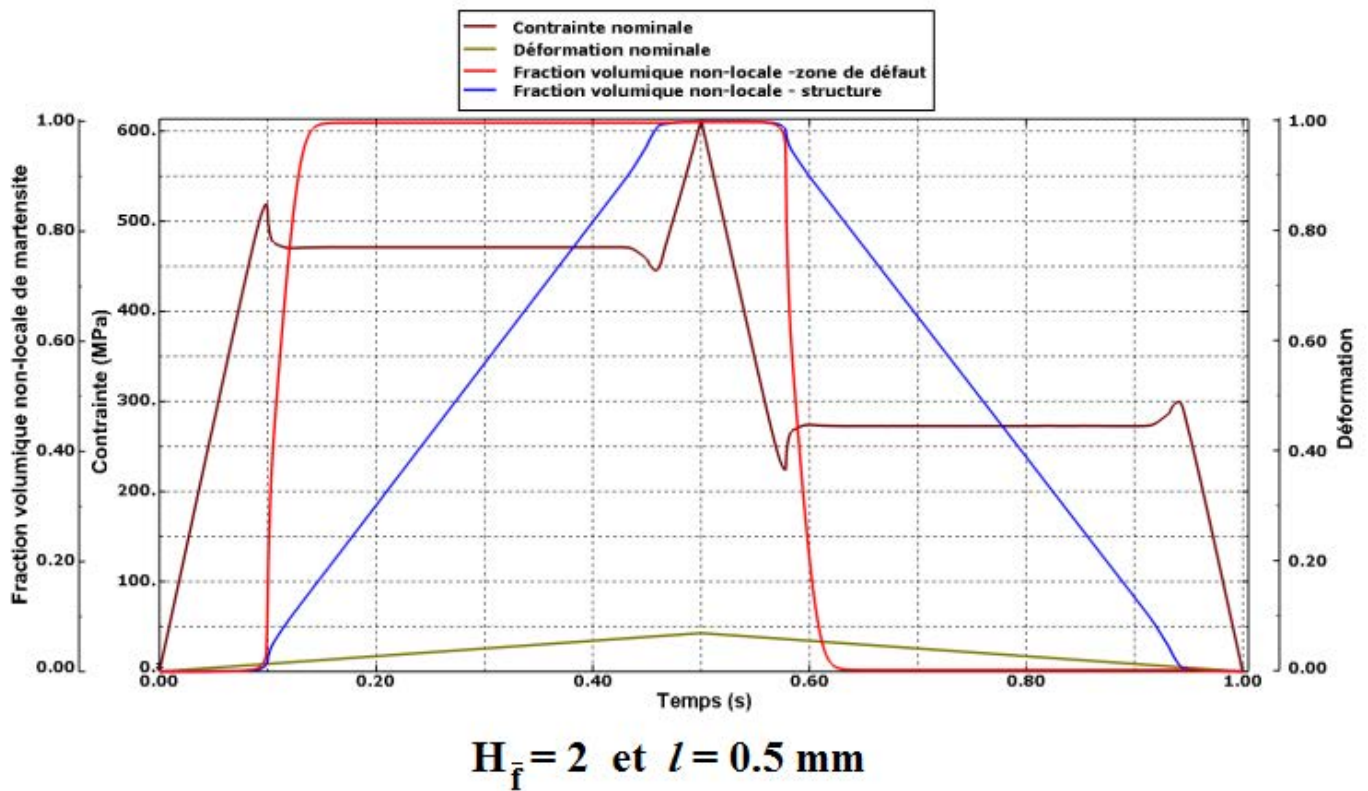


FIGURE 3.7 – Evolution en fonction du temps de la contrainte nominale, de la déformation nominale, des fractions volumiques non-locales dans la zone de défaut et au sein de la plaque pour  $l = 0.5$  mm et  $H_{\bar{f}} = 2$ .

La figure 3.8 montre pour  $H_{\bar{f}} = 2$  et pour trois valeurs (0.25, 0.5 et 1 mm) du paramètre de longueur interne  $l$ , la réponse contrainte-déformation du quart de la plaque.

On peut noter que pour ces différentes valeurs du paramètre de longueur interne, les courbes obtenues présentent quel que soit le sens de la transformation de phase : direct (austénite  $\rightarrow$  martensite) ou inverse (martensite  $\rightarrow$  austénite) les caractéristiques suivantes :

1. la présence d'un pic de contraintes au début de la transformation de phase ;

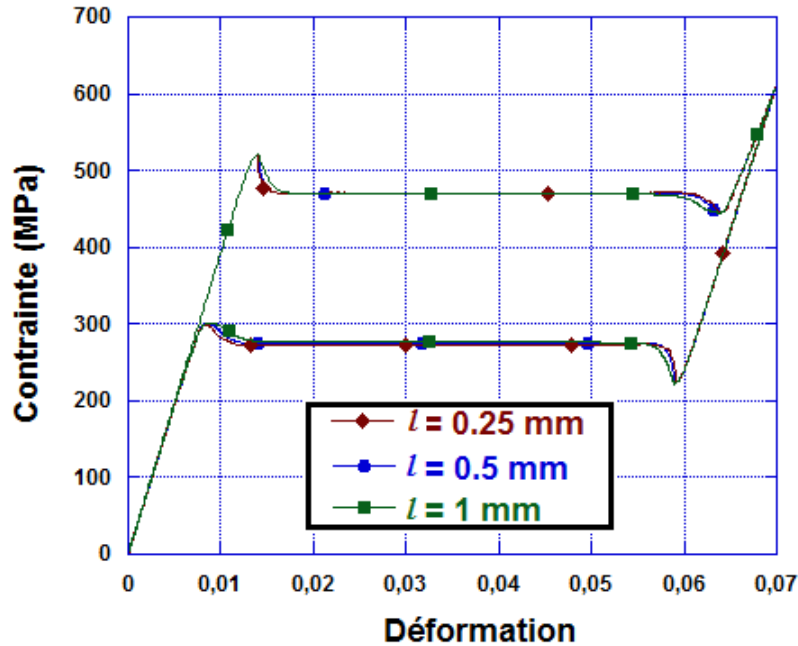


FIGURE 3.8 – Courbes contrainte-déformation nominales pour différentes valeurs du paramètre  $l$  ( $H_{\bar{f}} = 2$ ).

2. un plateau de transformation à contrainte constante correspondant à la propagation de la transformation au sein de la structure ;
3. un deuxième pic de contrainte à la fin de la transformation et juste avant la saturation due au rétablissement de la correspondance entre la mesure locale et sa contrepartie globale de la déformation

Sur la figure 3.9 obtenue pour  $l = 0.5$  mm et  $H_{\bar{f}} = 2$ , on peut remarquer, sauf pour les cas 0.5% de déformation correspondant au cas où la plaque est encore à l'état austénitique, et 7% de déformation, état totalement martensitique de la plaque, que la fraction volumique non-locale de martensite n'évolue pas de façon linéaire le long du chemin AB. Elle atteint des valeurs très élevées pour les différents niveaux de déformation (1.5, 3.5, et 5%) au sein de la zone de défaut (point A et son voisinage immédiat) puis décroît le long du chemin AB jusqu'à atteindre une valeur nulle quand on se rapproche du point B, traduisant ainsi des phénomènes de localisation de la transformation de phase.

L'évolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long du trajet AB observée pour une valeur  $l = 0.5$  mm du paramètre de longueur interne (figure 3.9) reste sensiblement identique lorsque ce paramètre prend des valeurs inférieures ou égales à au moins une dimension caractéristique de la zone de défaut (0.5 et 2 mm dans le cas de la présente étude). Cette tendance est illustrée sur la figure 3.10 qui montre l'évolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long du chemin AB pour différents niveaux de déformation et différentes valeurs du paramètre  $l$ .

Toutefois, ces effets de localisation de la transformation de phase s'atténuent progressivement et tendent vers le cas d'une transformation de phase homogène lorsque le paramètre de longueur

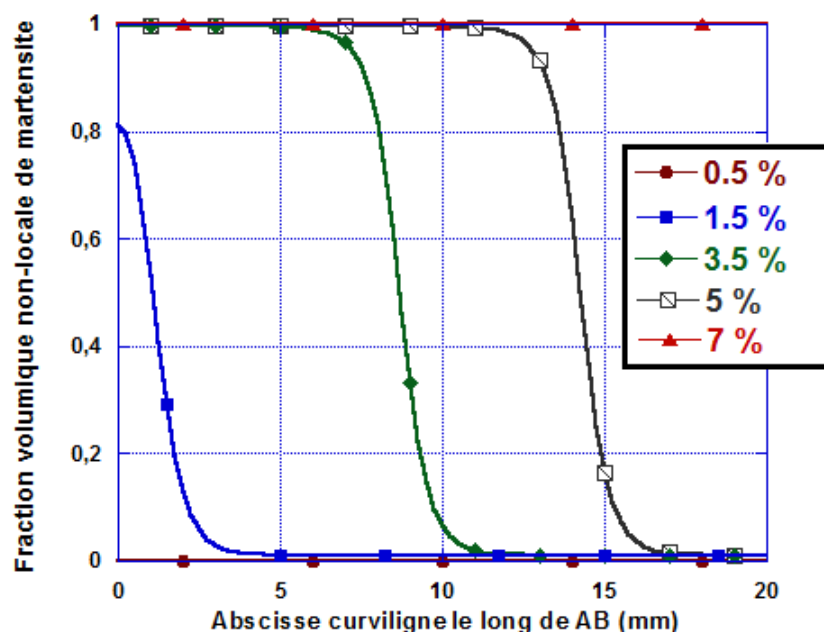


FIGURE 3.9 – Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long du chemin AB pour différents niveaux de déformation  $l = 0.5$  mm et  $H_f = 2$ .

interne prend des valeurs de plus en plus élevées devant la taille du défaut. C'est le cas par exemple pour  $l = 5$  mm sur la figure 3.10. En effet, on peut remarquer, comparativement aux autres valeurs de  $l$ , sauf pour le cas où la transformation de phase a atteint la saturation ( $\varepsilon_{nominale} = 7\%$ ), que pour  $l = 5$  mm, la variation de la fraction volumique non-locale de martensite est moins importante le long du chemin AB. Pour toutes ces raisons, le paramètre de longueur interne prend également le nom de "*limiteur de localisation*".

Les remarques précédentes s'imposent également au niveau des réponses globale-contraainte-déformation. En effet, pour des valeurs importantes du paramètre de longueur interne  $l$ , le pic de contrainte s'aplanit progressivement ; de même, le plateau de transformation disparaît progressivement au profit d'une pente locale négative comme indiqué sur la figure 3.11. Sur cette figure deux valeurs de 5 mm (supérieure à la taille du défaut) et 25 mm (supérieure à la taille du quart de la plaque modélisée) sont utilisées. Pour ces deux valeurs de  $l$ , on peut remarquer que les caractéristiques d'un phénomène de localisation indiquées précédemment ne sont pas correctement reproduites. On assiste dans ces cas à une transformation de phase homogène dans toute la structure, avec une force critique décroissante au cours de la transformation due à l'expression de cette dernière (voir l'équation 3.17).

La réponse de la plaque entière obtenue en supprimant les conditions aux limites de symétrie, initialement imposées, est présentée sur la figure 3.12. Le même chargement étant appliqué, nous avons reporté sur la figure 3.12 (a), la courbe contrainte-déformation ainsi que la distribution spatiale de la fraction volumique non-locale de martensite obtenue à différentes dates au sein de la plaque (isocouleurs numérotées de 1 à 9) durant le chargement. De même, la courbe expérimentale issue des travaux de He et Sun [34] obtenue à partir d'un essai de traction sur une plaque est

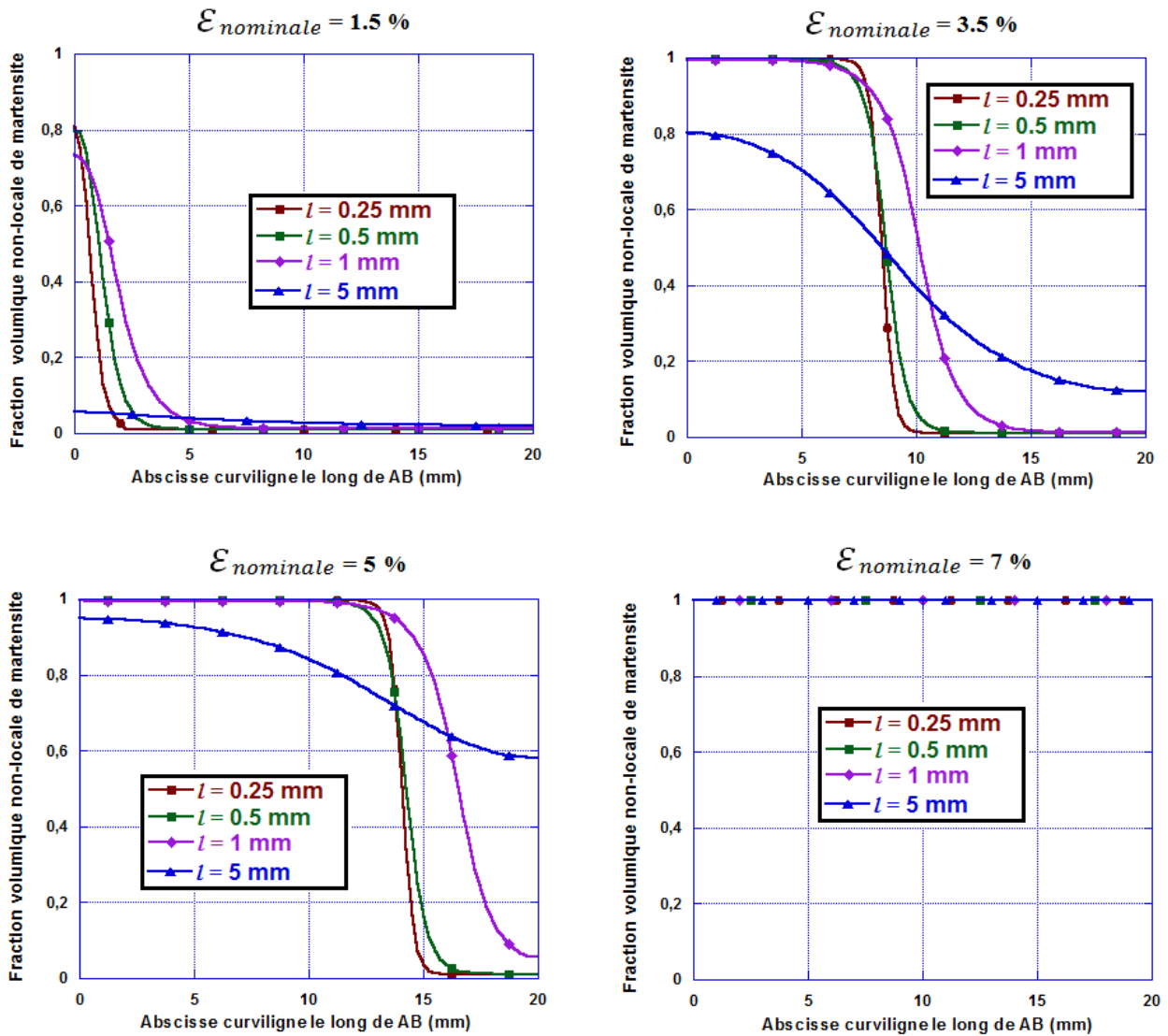


FIGURE 3.10 – Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long du chemin AB pour différents niveaux de déformation et différentes valeurs du paramètre de longueur interne ( $H_{\bar{f}} = 2$ ).

présentée sur la figure 3.12 (b). On peut déduire à partir d’une comparaison qualitative des deux figures, que le résultat numérique obtenu à partir du modèle non-local développé décrit correctement le comportement observé sur la courbe expérimentale. Le phénomène de nucléation avec la présence d’un pic de contrainte, la propagation de la transformation de phase à contrainte constante, l’inclinaison de la bande de localisation de la transformation de phase par rapport à la direction du chargement mécanique appliqué sont notamment bien reproduits par le modèle.

On peut subdiviser la courbe contrainte-déformation prédite par le modèle en plusieurs parties en suivant l’évolution de la fraction volumique non-locale de martensite au sein de la plaque :

- La première phase correspond à la phase élastique ; la plaque est à l’état austénitique

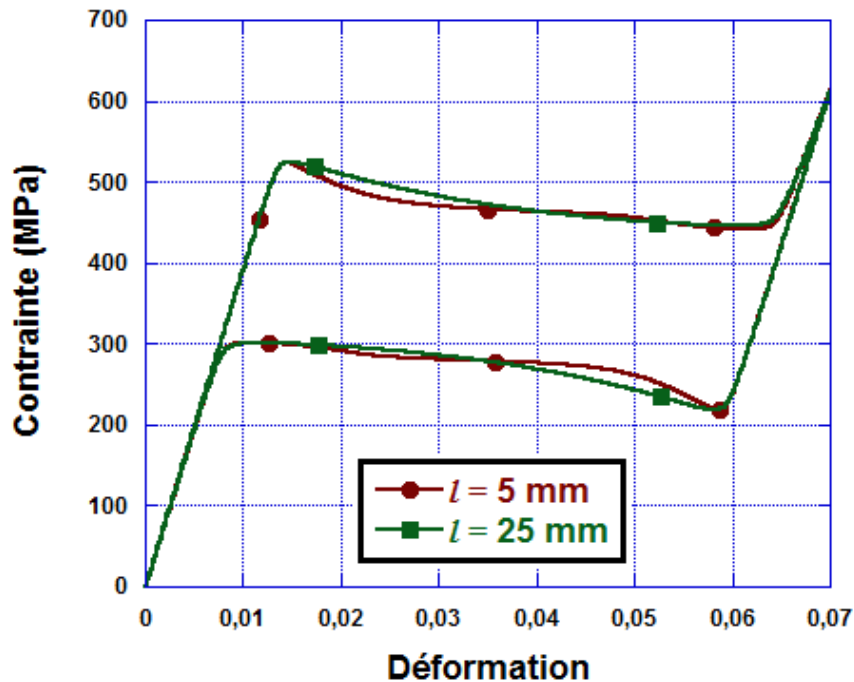


FIGURE 3.11 – Courbes contrainte-déformation pour  $l = 5$  mm et  $l = 25$  mm ( $H_{\bar{f}} = 2$ ).

(isocouleur 1); la courbe contrainte déformation évolue linéairement.

- Le début de transformation de phase indiqué par la chute de contrainte; on voit apparaître un premier domaine de martensite (isocouleur 2): c'est le phénomène de nucléation.
- L'évolution de la transformation de phase au sein de la zone du défaut qui correspond à la chute de contrainte sur la courbe contrainte-déformation (isocouleurs 3 et 4).
- La propagation de la transformation de phase au reste de la plaque qui se fait à contrainte constante. Cette partie de la courbe peut être divisée en deux parties distinctes séparées par un creux ou une zone convexe. En effet, on peut remarquer qu'à la fin de la transformation de phase dans la zone de défaut, la propagation de cette dernière ne se fait pas de manière symétrique au reste de la plaque; c'est à dire qu'elle n'évolue pas au même moment dans les deux directions séparées par la zone de défaut. Elle peut s'effectuer dans une direction comme dans l'autre jusqu'à saturation avant de recommencer dans l'autre direction. Dans le cas de la présente simulation, la propagation s'est d'abord effectuée dans la direction située au dessus de la zone de défaut (isocouleurs 5 et 6). La propagation dans la deuxième direction (isocouleur 8) n'a commencé qu'après saturation de la transformation dans la première direction. La zone creuse correspond à la fois à la saturation de la transformation de phase dans la première direction et au début de la transformation dans la deuxième direction (isocouleurs 7). Ces observations montrent qu'il y a une perte de symétrie dans la propagation de la transformation de phase dans le cas de la plaque entière. Cette perte de symétrie de la transformation de phase est causée par un très faible déséquilibre (écart



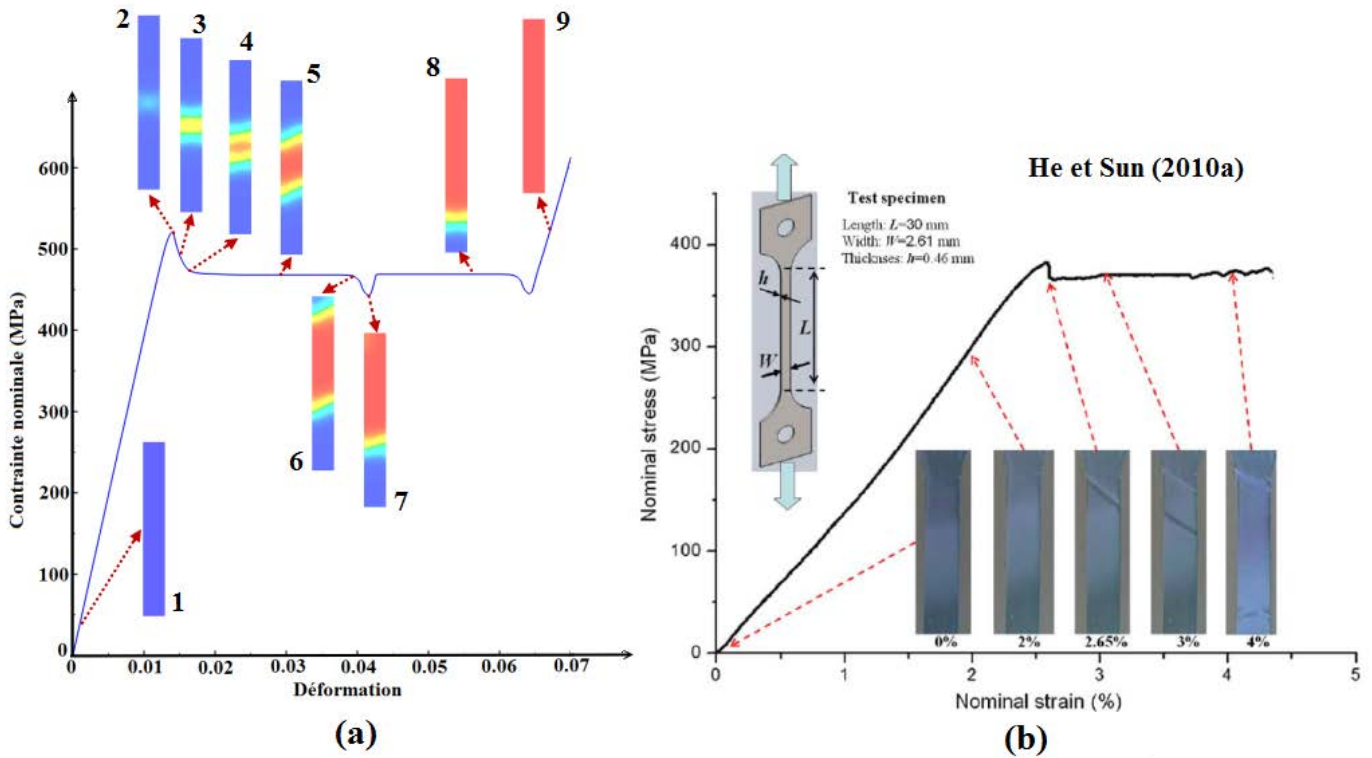


FIGURE 3.12 – Courbes contrainte-déformation et distribution de la fraction volumique non-locale dans la bande en AMF pour  $l = 1$  mm et  $H_{\bar{f}} = 2$ .

assez faible, de l'ordre de précision de la machine) des résidus numériques de part et d'autre de la zone de défaut qui font basculer la propagation de la transformation de phase dans une direction ou dans l'autre. Cette explication reste cohérente avec le fait que le creux disparaît totalement dans le cas du quart de la plaque (voir 3.8).

- la dernière partie correspond à la saturation complète de la transformation dans toute la plaque (isocouleur 9)

Les différents résultats issus des simulations numériques (quart de plaque et plaque entière) montrent que pour des valeurs du paramètre de longueur interne suffisamment faibles devant la taille du défaut, le modèle non-local développé capte de façon très précise les instabilités liées à la transformation de phase telles que les effets de taille et les phénomènes de localisation de la transformation de phase observés dans les structures minces en AMF.

### 3.5.2 Analyse de la transformation de phase dans une plaque mince trouée sous chargement thermomécanique

Dans cette section, nous allons tester l'aptitude du modèle non-local à prendre en compte des chargements complexes combinant à la fois mécanique et thermique. Le comportement superélastique étant largement vérifié dans la section précédente, l'objectif ici est de vérifier la capacité du modèle à décrire les autres comportements des AMF (effet mémoire de forme, refroidissement-chauffage sous contrainte constante etc.). L'expression de la force critique de la transformation de phase est la même (relation 3.17) que dans le cas de la simulation précédente.



Pour ce faire, nous reprenons l'exemple de la plaque trouée étudié dans la section 2.9.2 avec les mêmes paramètres matériaux auxquels nous rajouterons ceux liés à la formulation non-locale. Nous gardons le même maillage, les mêmes conditions aux limites, les mêmes éléments ( $E_1$  et  $E_2$ ) et ligne de sortie des résultats ainsi que le même chargement.

Pour  $H_{\bar{f}} = 0.5$  et  $l = 0.5$  mm, l'évolution de la fraction volumique non-locale de martensite lors du refroidissement est présentée sur la figure 3.13.

Due à une concentration de contrainte autour du trou central, la transformation de phase débute dans cette zone comme le confirme la figure 3.14 montrant l'évolution de la fraction volumique non-locale dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$ . Cette figure reproduit non seulement le comportement hystérétique classique des AMF obtenu lors d'un chargement de refroidissement-chauffage sous contrainte constante mais indique également que la transformation de phase débute beaucoup plus tôt dans l'élément  $E_1$  (autour de  $T = 50^\circ$  C), situé dans la zone de concentration de contrainte que dans l'élément  $E_2$  (autour de  $T = 15^\circ$  C), plus éloigné de cette zone. On voit alors apparaître autour du trou deux bandes inclinées (les bandes de localisation) par rapport à la direction du chargement. A partir des bandes de transformation évoluant dans la direction diagonale, la transformation de phase se propage au reste de la plaque jusqu'à la saturation.

L'évolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long du chemin AB est indiquée sur la figure 3.15. De même, les courbes contrainte-déformation globale et locales dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  ainsi que les isocouleurs montrant l'évolution de la transformation de phase à différents instants au sein de la zone affectée par la concentration de contrainte sont reportés sur la figure 3.16. Ces deux figures justifient également la présence d'instabilités au cours de la transformation de phase dans le cadre de la présente simulation et confirment l'aptitude du modèle non-local proposé à capter de tels phénomènes.

La figure 3.15 montre en effet que pour les valeurs ( $T = 10^\circ$  C et  $T = -5^\circ$  C), la fraction volumique non-locale de martensite varie de façon très significative le long du chemin AB, tandis que pour les températures ( $T = -15^\circ$  C et  $T = -30^\circ$  C), cette variation devient moins importante due à la saturation de la transformation de phase.

La figure 3.16 montre que les courbes contrainte-déformation globale et locale dans l'élément  $E_2$  sont pratiquement identiques alors que dans le cas de l'élément  $E_1$ , le niveau de contrainte atteint une valeur beaucoup plus élevée (supérieure à 400 MPa), comparativement à la contrainte constante imposée (300 MPa) avec la présence d'un léger pic de contraintes. On observe de même un plateau de transformation au niveau global et dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$ .

Quant à la déformation, elle reste supérieure dans l'élément  $E_1$  comparativement à l'élément  $E_2$  et à celle obtenue au niveau global comme l'indique la figure 3.17.

Notons que l'évolution de la transformation de phase reste très sensible au paramètre de longueur interne. On peut remarquer cela à travers l'évolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long du chemin AB pour différentes températures ( $T = 10^\circ$  C et  $T = -5^\circ$  C) et au sein de la plaque lors du refroidissement pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne. Ces évolutions sont respectivement indiquées sur les figures 3.15 et 3.18.

La figure 3.18 montre que l'effet de la localisation de la transformation de phase est plus marqué pour la plus faible valeur du paramètre de longueur interne ( $l = 0.5$  mm); il est moins important pour ( $l = 1$  mm) et disparaît totalement dans le cas ( $l = 5$  mm) laissant place à une transformation de phase diffuse sans aucun effet de localisation.

Les mêmes observations peuvent être effectuées sur l'évolution de la fraction volumique non-locale le long du chemin AB comme l'illustre la figure 3.15. Pour deux valeurs différentes de la température ( $T = 10^\circ$  C et  $T = -15^\circ$  C), la fraction volumique non-locale de martensite reste constante le long du chemin AB pour la valeur  $l = 5$  mm du paramètre de longueur interne, elle

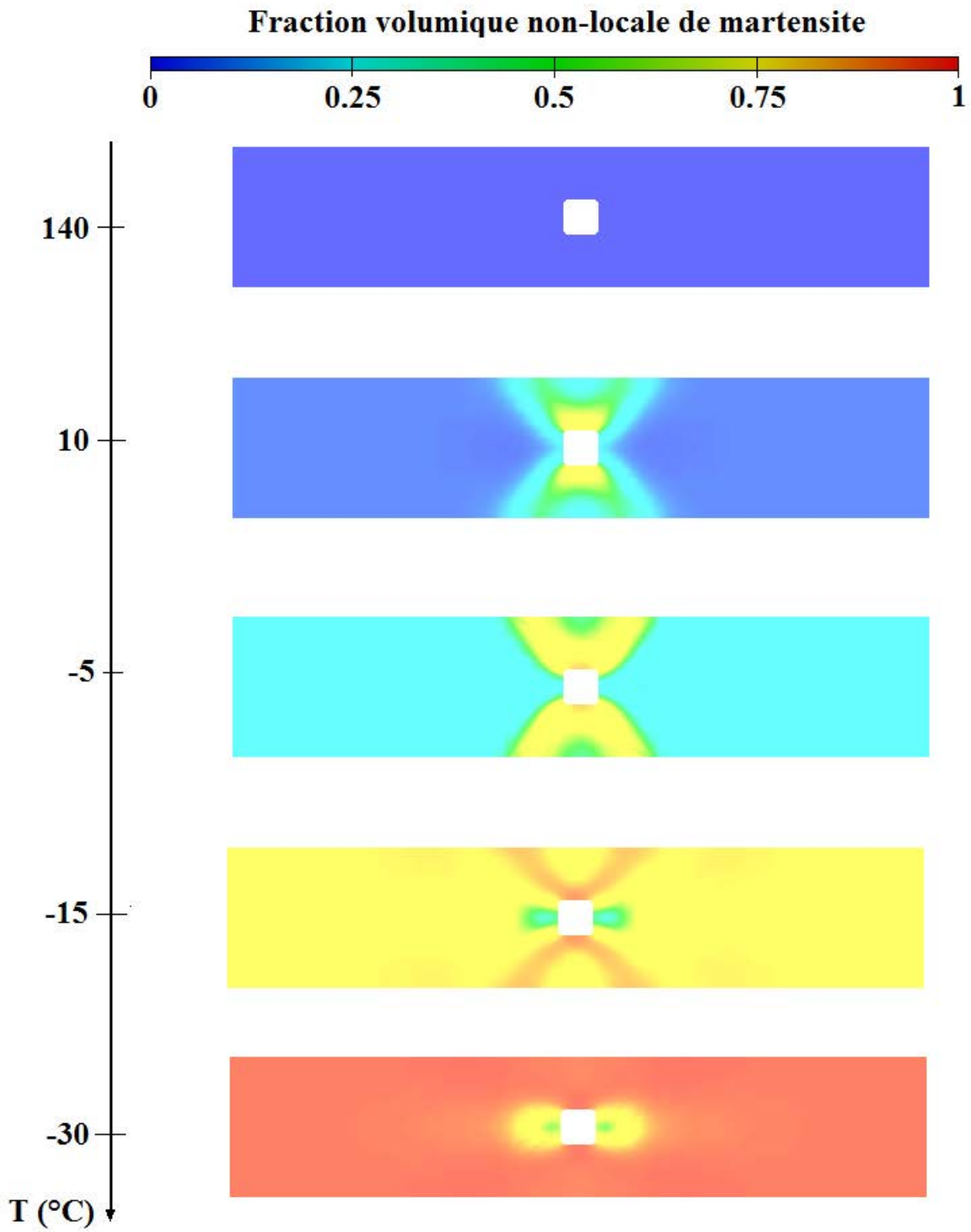


FIGURE 3.13 – Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite lors du refroidissement de la plaque  $l = 0.5$  mm et  $H_{\bar{f}} = 0.5$ .

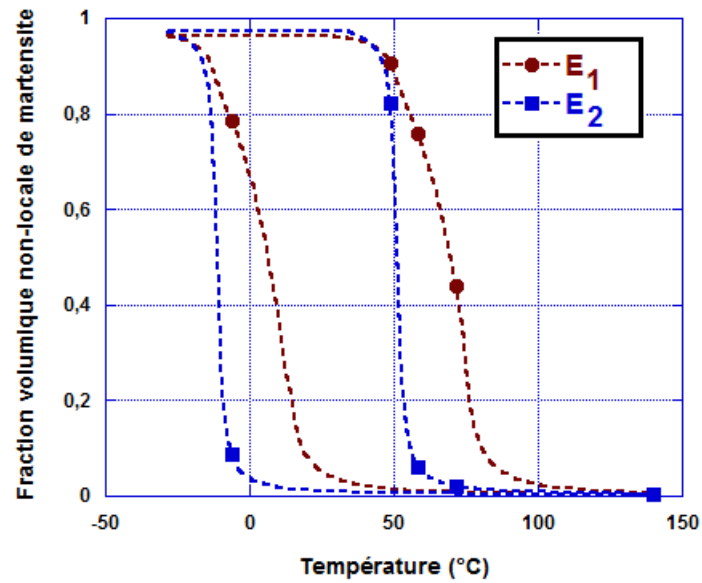


FIGURE 3.14 – Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite en fonction de la température dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  ( $l = 0.5$  mm et  $H_{\bar{f}} = 0.5$ ).

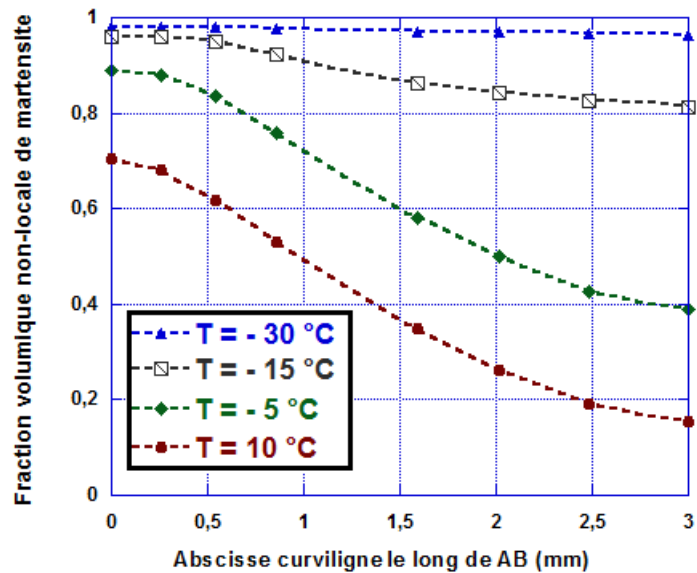


FIGURE 3.15 – Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long du chemin AB ( $l = 0.5$  mm et  $H_{\bar{f}} = 0.5$ ).

varie légèrement dans le cas  $l = 1$  mm et de manière significative pour  $l = 0.5$  mm.

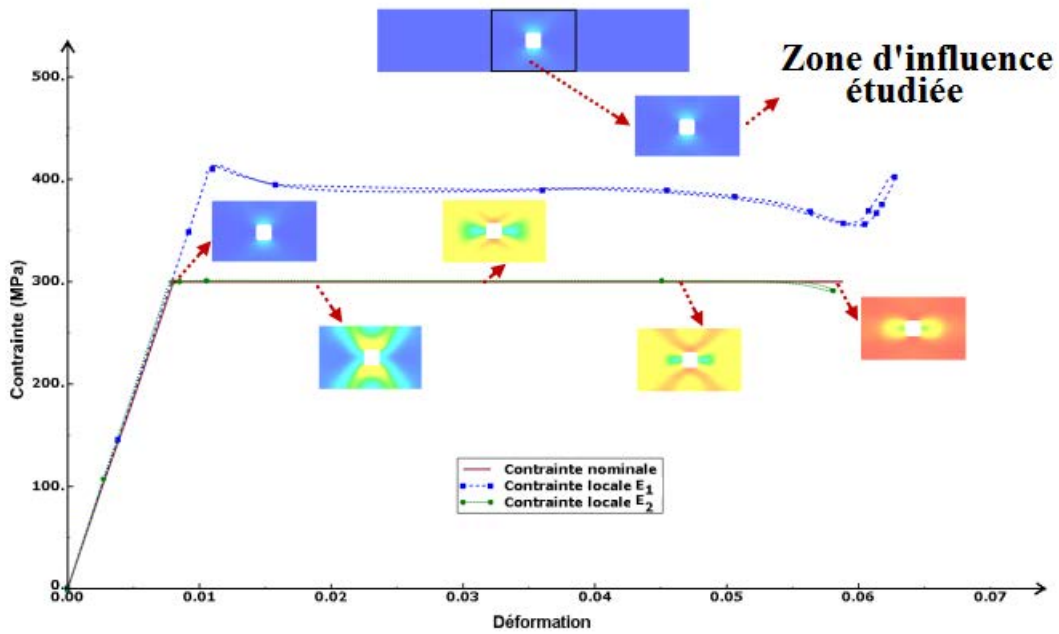


FIGURE 3.16 – Courbes contrainte-déformation globale et locales dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  ( $l = 0.5$  mm et  $H_{\bar{f}} = 0.5$ ).

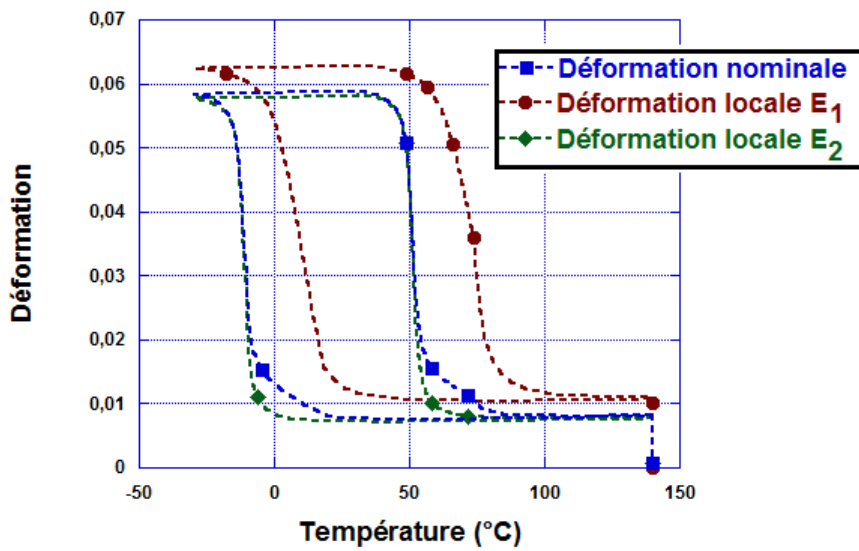


FIGURE 3.17 – Evolution de la déformation globale et locales dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  en fonction de la température ( $l = 0.5$  mm et  $H_{\bar{f}} = 0.5$ ).

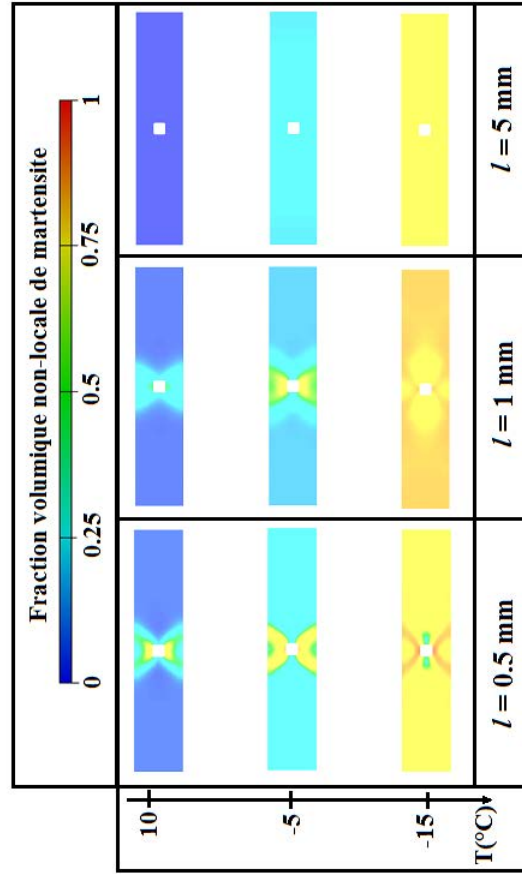


FIGURE 3.18 – Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long du chemin AB ( $l = 0.5$  mm et  $H_{\bar{f}} = 0.5$ ).

### 3.5.3 Analyse de l'influence de la taille du défaut sur le phénomène de localisation de la transformation de phase dans une plaque en AMF sous chargement thermomécanique

Les simulations numériques réalisées dans cette section ont pour but d'étudier l'influence des facteurs tels que la taille du défaut (géométrique ou matériel) sur le phénomène de la localisation de la transformation de phase. Elles sont issues de Armattoe et al. [2]. Dans toute cette partie, nous considérons une plaque carrée avec un défaut circulaire situé au centre de la plaque et de rayon  $r$  variable.

Le défaut peut être géométrique ou matériel. La géométrie de la plaque, de même que le chargement thermomécanique appliqué sont indiqués sur la figure 3.20. Les paramètres matériaux utilisés sont regroupés dans le tableau 3.4. Dans le cas du défaut matériel, l'adoucissement est pris en compte en augmentant la température de début de transformation martensitique des éléments situés à l'intérieur de la zone de défaut. En notant  $M_s^d$  cette température, nous avons  $M_s^d = -60^\circ \text{C}$  au lieu de  $M_s = -80^\circ \text{C}$ . Le défaut géométrique est défini par un trou circulaire. Comme indiqué sur la figure 3.20 (b), le chargement thermomécanique débute par l'application d'une contrainte constante de 300 MPa à une température de  $140^\circ \text{C}$ . Cette contrainte est ensuite maintenue constante durant l'application d'un cycle de chargement thermique (refroidissement

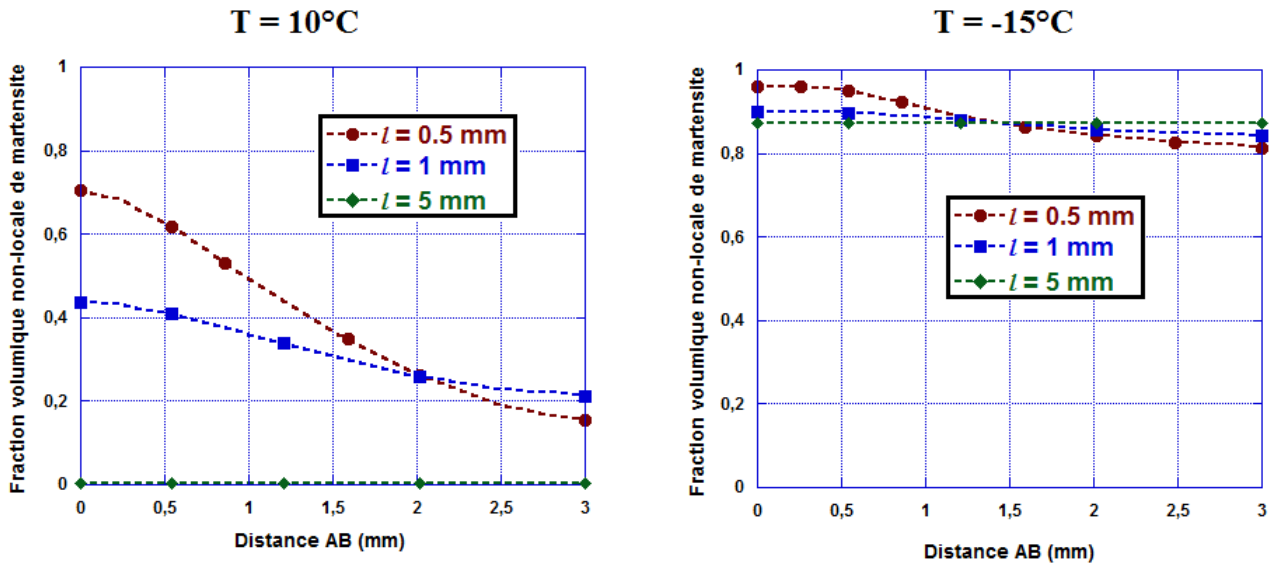


FIGURE 3.19 – Courbes contrainte-déformation globale et locales dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  ( $l = 0.5\text{ mm}$  et  $H_{\bar{f}} = 0.5$ ).

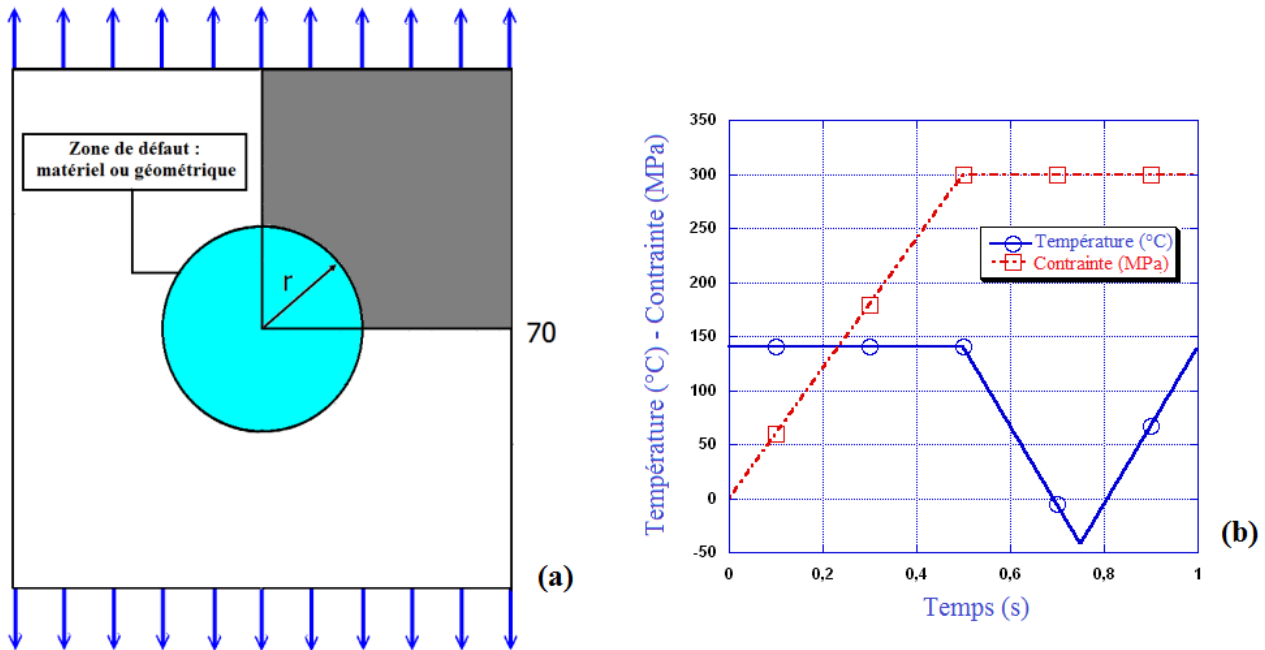


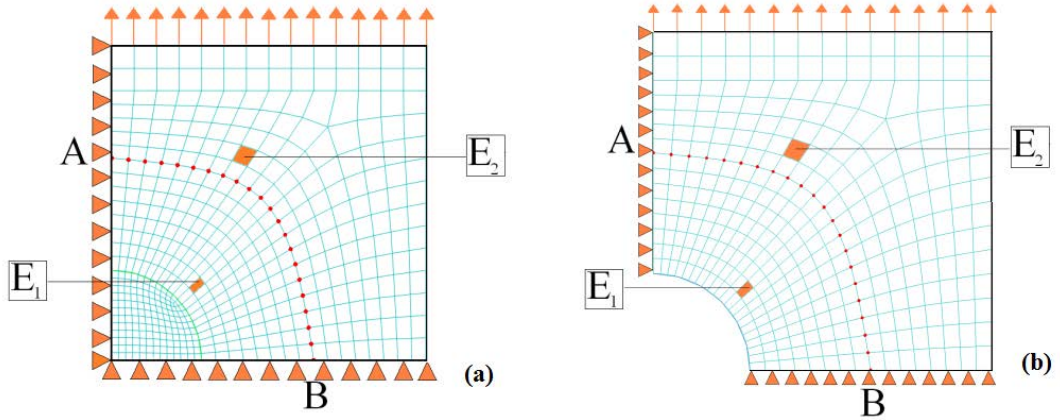
FIGURE 3.20 – Plaque étudiée : (a) dimensions en mm ; (b) chargement thermomécanique appliqué.

jusqu'à la température de  $-30^\circ\text{C}$  puis retour à la température initiale de  $140^\circ\text{C}$  par chauffage).

Pour des raisons de symétrie de la géométrie et du chargement appliqué, uniquement le quart de la plaque sera considéré. Le maillage, les conditions aux limites, les éléments  $E_1$  et  $E_2$  de même

TABLE 3.4 – Valeurs des paramètres matériaux.

$E$ (MPa)	$\nu$	$\alpha$ ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )	$\varepsilon_{trac}^T$	$\varepsilon_{trac}^{TFA}$
39500	0.3	$8.10^{-6}$	0.056	0.053
$\varepsilon_{comp}^T$	$B$ (MPa/ $^{\circ}\text{C}$ )	$M_s$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$A_f$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$r_f$
0.044	0.235	-80	-2	0.25
$F_{\varepsilon^T}^{max}$ (MPa)	$H_f$ (MPa)	$H_{\bar{\varepsilon}}$ (MPa)	$H_{twin}$ (MPa)	$H_s$ (MPa)
220	4	1000	40000	50

FIGURE 3.21 – Maillage - conditions aux limites - lignes et éléments  $E_1$  et  $E_2$  de sortie des résultats : (a) défaut matériel ; (b) défaut géométrique.

que la ligne AB de sortie des résultats sont indiqués sur les figure 3.21 (a) dans le cas avec un défaut matériel et 3.21 (b) dans le cas avec un défaut géométrique. Une étude de convergence du maillage a été réalisée en effectuant un raffinement progressif dans la zone de défaut et un maillage grossier loin de la zone de défaut. Un maillage optimal avec 490 éléments est obtenu dans le cas de la plaque avec un défaut matériel. Dans le cas avec un défaut géométrique, le nombre d'éléments est compris entre 338 et 389 en fonction du rayon du trou. Lors des différentes simulations, la force critique de transformation utilisée est donnée par la relation 3.18

### 3.5.3.a Analyse avec la loi de comportement local

Une première étude est réalisée à l'aide du modèle de comportement local présenté dans le chapitre 2 et implanté dans le logiciel Abaqus via la routine UMAT. Ce cas d'étude correspond également au modèle non-local avec  $l = 0$  et  $H_{\bar{f}} = 0$ . Nous avons considéré le cas de la plaque avec un défaut géométrique ; le maillage est réalisé avec les éléments finis à contrainte plane CPS4 standards d'Abaqus.

La figure 3.22 montre la distribution spatiale de la fraction volumique de martensite au sein de la plaque pour différentes valeurs du rayon du trou central. La transformation de phase débute autour du trou et se propage au reste de la plaque sous la forme d'une bande inclinée par rapport à la direction du chargement mécanique appliqué. Plus on refroidit la plaque, plus la zone transformée augmente faisant élargir la bande jusqu'à saturation de la transformation. Au chauffage, la transformation de phase inverse se produit et toute la quantité de martensite



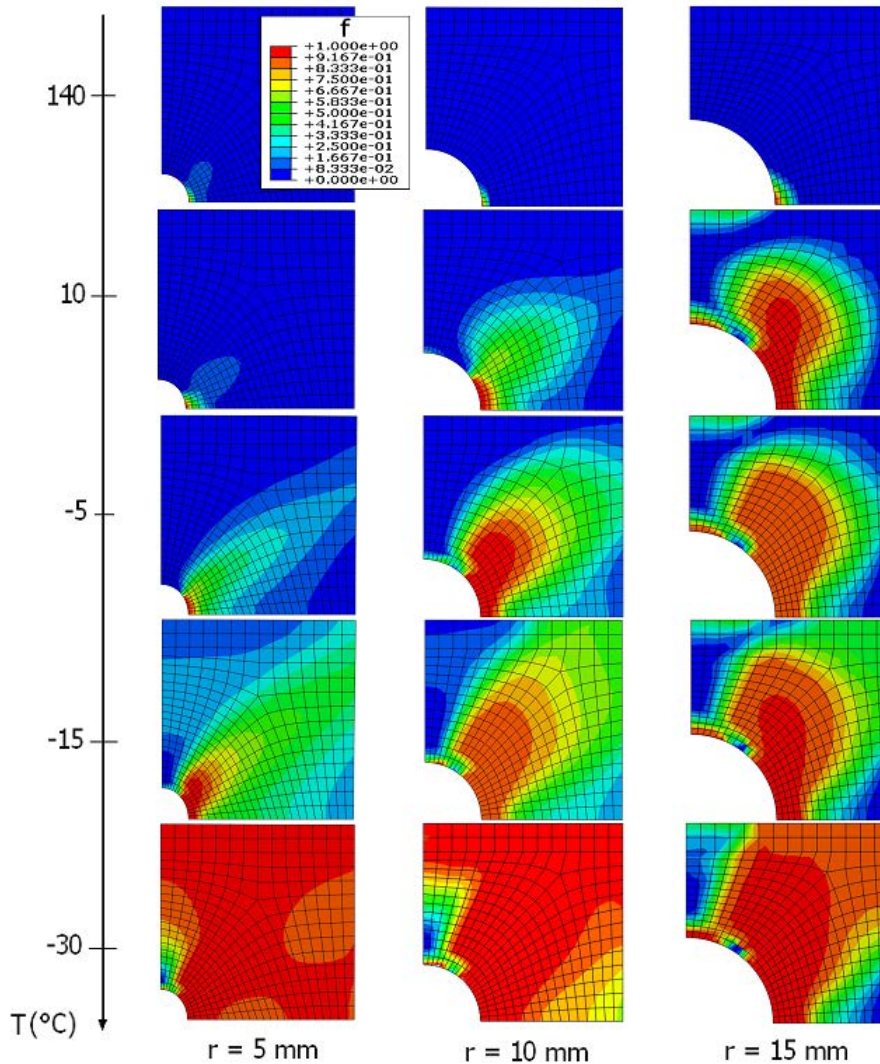


FIGURE 3.22 – Distribution de la fraction volumique locale de martensite pour différentes valeurs du rayon du trou dans le cas de la loi locale

produite est récupérée conformément à la physique étudiée.

La figure 3.23 montre l'évolution des déformations globale et locales (dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$ ) en fonction de la température. L'évolution de ces déformations traduit le comportement classique d'un AMF durant un processus de refroidissement-chauffage sous une contrainte imposée constante. On peut noter en particulier que le comportement hystérétique est bien reproduit. Pour une même température donnée au cours du refroidissement ou du chauffage, l'élément  $E_1$  atteint un niveau de déformation beaucoup plus élevé que dans l'élément  $E_2$  même si les deux éléments ont des fractions volumiques de martensite dans le même ordre de grandeur comme indiqué sur la figure 3.24. Cela s'explique par le fait que l'élément  $E_1$  est soumis à une plus forte concentration de contrainte que l'élément  $E_2$ . De plus, il est à noter à partir de la figure 3.23 que la déformation globale atteint un niveau plus faible que les déformations locales dans



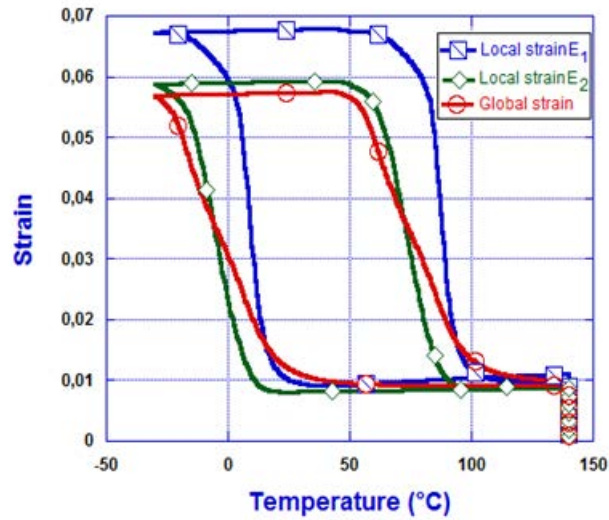


FIGURE 3.23 – Evolution des déformations globale et locales dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  en fonction de la température dans le cas de la loi locale (rayon du défaut géométrique  $r = 10$  mm).

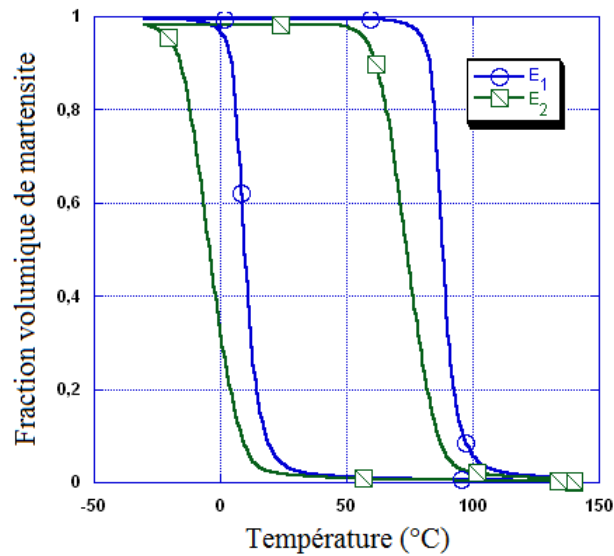


FIGURE 3.24 – Evolution de la fraction volumique de martensite dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  en fonction de la température dans le cas de la loi locale (rayon du défaut géométrique  $r = 10$  mm).

les éléments  $E_1$  et  $E_2$ . Cela s'explique par le fait que la quantité de martensite produite décroît lorsqu'on s'éloigne de la zone de concentration de contrainte comme l'indique les isocouleurs présentées sur la figure 3.22.

Les effets de la localisation de la transformation de phase ne pouvant être analysés à partir du modèle local de comportement, cette étude est réalisée dans la section suivante à partir du modèle non-local développé.

### 3.5.3.b Analyse avec la loi de comportement non-local

#### Cas de la plaque avec un défaut matériel

La distribution spatiale de la fraction volumique non-locale de martensite au sein de la plaque avec un défaut matériel pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne est présentée sur la figure 3.25. Le défaut matériel est représenté par une zone circulaire avec une température de début de transformation différente de celle du reste de la plaque. Durant le refroidissement, la transformation de phase débute dans la zone de défaut puis se propage au reste de la plaque.

Pour les valeurs  $l = 0.1$  mm et  $l = 1$  mm du paramètre de longueur interne, la propagation de la transformation de phase s'effectue d'abord sous la forme d'une bande diagonale qui s'élargit par la suite pour couvrir entièrement la plaque à la fin du refroidissement lorsque la transformation de phase atteint la saturation. Pour  $l = 10$  mm, l'effet de la localisation de la transformation de phase est complètement atténué. La transformation de phase se produit de manière diffuse et la bande de localisation disparaît complètement. De ces résultats, on peut noter que la taille de la zone d'interaction intégrant un point matériel donné, laquelle taille est contrôlée par la valeur du paramètre de longueur interne, joue un rôle important dans la réduction ou l'amplification de l'effet de la localisation de la transformation de phase au sein de la plaque.

La figure 3.26 illustre quantitativement les influences de la taille du domaine d'interaction. Elle montre en effet une très faible variation de la fraction volumique non-locale de martensite le long de AB pour  $l = 10$  mm. Toutefois, cette variation augmente de manière significative pour  $l = 0.1$  mm et  $l = 1$  mm. En outre, il a été remarqué que l'effet du domaine d'interaction devient faible lorsqu'on s'éloigne de la frontière qui délimite la zone de défaut circulaire. La figure 3.27 montre par exemple que l'évolution de la fraction volumique non-locale de martensite en fonction de la température dans l'élément  $E_1$  n'est pas sensible à la taille du domaine d'interaction.

#### Cas de la plaque avec un défaut géométrique

Les effets de la localisation de la transformation de phase due à la présence d'une concentration de contraintes induites par un défaut géométrique (trou circulaire) sont analysés. La figure 3.28 montre la répartition de la fraction volumique non-locale de martensite au sein de la plaque pour différentes valeurs du rayon du défaut géométrique. On peut observer à partir de cette figure que la bande inclinée de la localisation de la transformation de phase, débute autour du trou puis se propage dans une direction diagonale. Plus la taille du défaut (le rayon) est importante, plus la bande de localisation est large. La figure 3.29 montre qu'une augmentation de la valeur du paramètre de longueur interne atténue l'effet de la localisation et rend la transformation de phase plus diffuse.

De ces différentes simulations ; il ressort que la bande de localisation de la transformation de phase s'élargit au fur et à mesure que la température de la plaque diminue ; elle couvre entièrement la plaque lorsqu'on arrive à saturation. On peut également noter que plus la taille du défaut (le rayon du trou) est petite ou plus la valeur du paramètre de longueur interne est grande, plus il faut refroidir la plaque pour atteindre la saturation de la transformation de phase. Les figures 3.30 à 3.32 montrent l'évolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long de la ligne AB pour différentes valeurs de  $l$  et du défaut géométrique pour une température de  $-15^\circ$  C durant le refroidissement. La fraction volumique non-locale de martensite est fortement sensible à ces deux paramètres. En plus des effets précédemment mentionnés, pour des valeurs suffisamment grandes du paramètre de longueur interne ou des valeurs petites de la taille du défaut géométrique, la transformation de phase se produit de manière diffuse sans aucun effet de localisation. La figure 3.30 montre que pour une valeur donnée du rayon défaut, une augmentation de la taille du domaine d'interaction, fait baisser la valeur maximale de la fraction volumique non-locale de martensite et atténue son gradient ; ce qui aboutit à une courbe

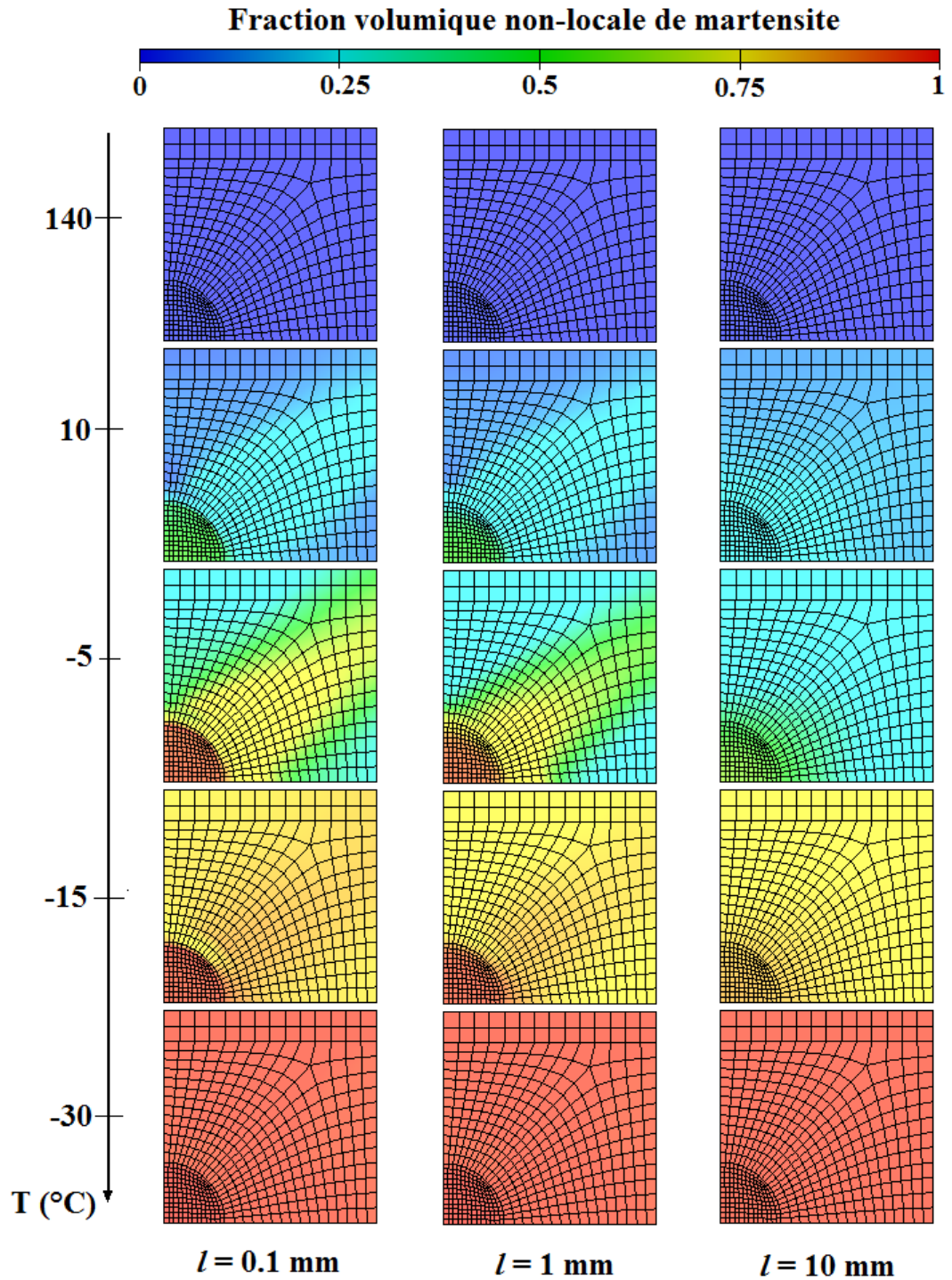


FIGURE 3.25 – Distribution spatiale de la fraction volumique non-locale de martensite pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne  $l$  (cas du défaut matériel avec un rayon de 10 mm).

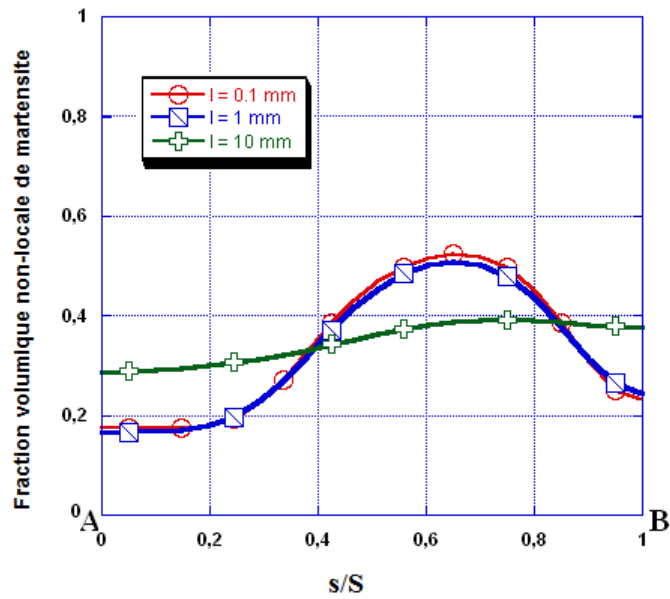


FIGURE 3.26 – Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite le long de la ligne AB pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne  $l$  (cas du défaut matériel avec un rayon de 10 mm).

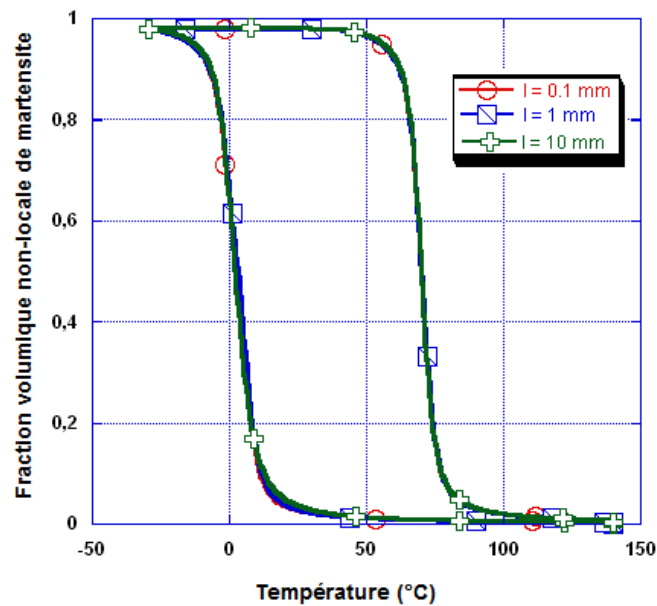


FIGURE 3.27 – Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite dans l'élément  $E_1$  pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne  $l$  (cas du défaut matériel avec un rayon de 10 mm).

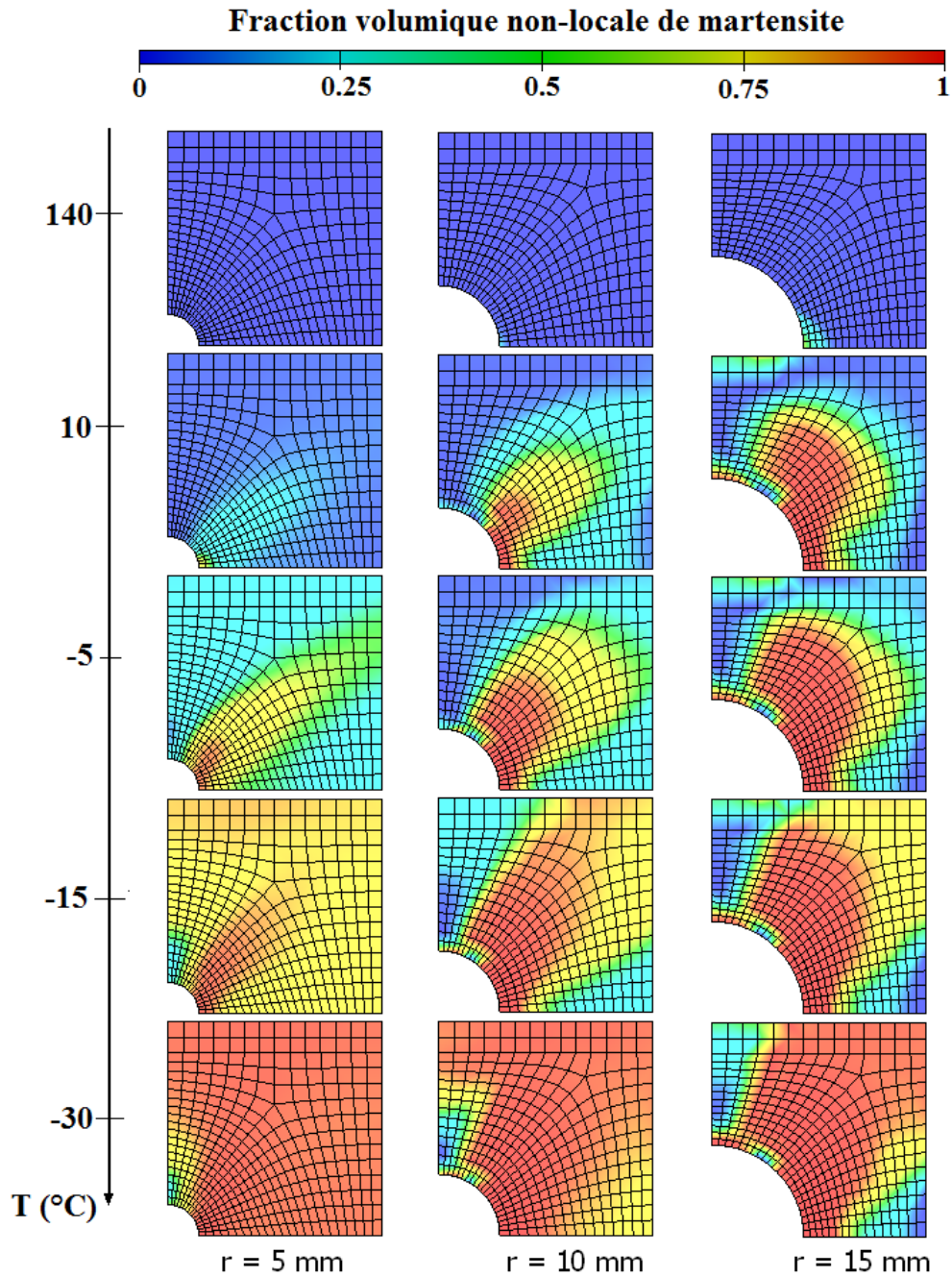


FIGURE 3.28 – Distribution spatiale de la fraction volumique non-locale de martensite durant le refroidissement pour différentes valeurs du défaut géométrique ( $l = 1 \text{ mm}$ ).

pratiquement aplani pour  $l = 10 \text{ mm}$ .

Les figures 3.31 et 3.32 illustrent que la fraction volumique non-locale de martensite le long de la ligne AB augmente avec la valeur du rayon du défaut géométrique indépendamment de la valeur du paramètre de longueur interne. Cela est en effet dû au fait que la distance entre le bord du trou et la ligne AB décroît lorsque le rayon du défaut augmente (la position de la ligne AB étant fixe). La ligne AB se trouve dans ce cas beaucoup plus affectée par l'effet de la

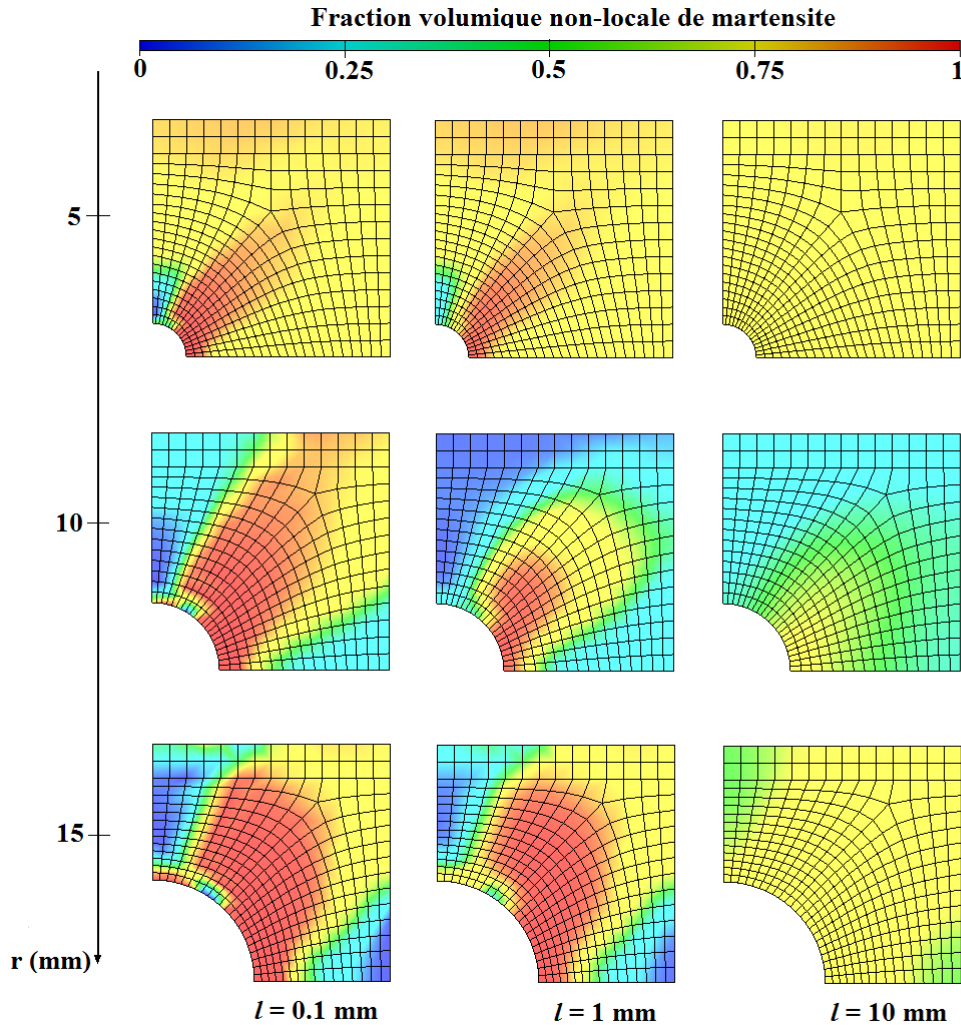


FIGURE 3.29 – Distribution spatiale de la fraction volumique non-locale de martensite pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne et du rayon du défaut géométrique pour  $T = -15^{\circ}\text{C}$ .

concentration de contrainte par exemple pour un rayon de 10 mm que pour un rayon de 5 mm.

Les figures 3.33 et 3.34 décrivent l'évolution de la fraction volumique non-locale de martensite en fonction de la température respectivement dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$ . De ces figures, on peut déduire qu'une augmentation de la valeur du paramètre de longueur interne décroît localement la quantité de martensite produite. Ce changement de comportement est la conséquence de l'atténuation des effets de la localisation de la transformation de phase lorsque la taille du domaine d'interaction augmente.

La figure 3.35 montre l'évolution de la déformation en fonction de la contrainte et de la température au sein de la plaque et dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  pour  $l = 0.1\text{ mm}$  et un rayon  $r = 10\text{ mm}$  du défaut géométrique. Même si la contrainte appliquée sur la plaque reste constante, la contrainte locale dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  est toutefois, influencée par le processus de la transformation de phase et la taille  $l$  du domaine d'interaction.

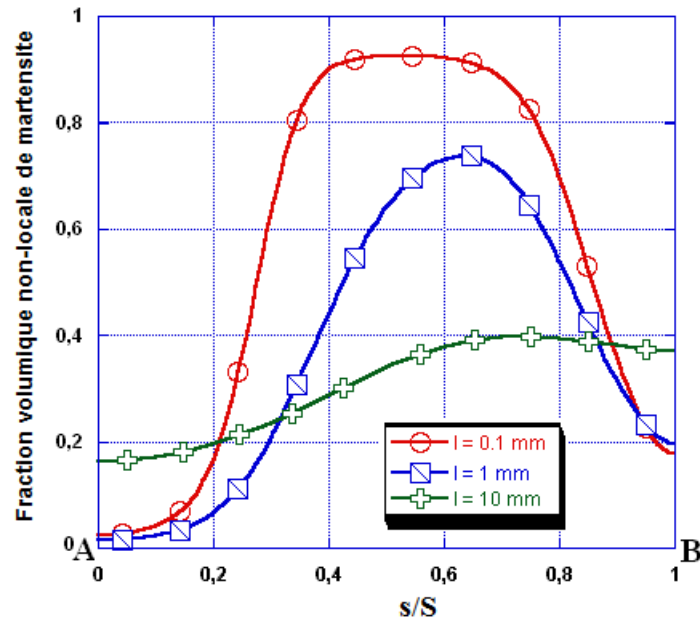


FIGURE 3.30 – Evolution de la fraction volumique non-locale le long de la ligne AB pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne et pour un rayon de 10 mm du défaut géométrique à  $T = -15^\circ \text{C}$ .

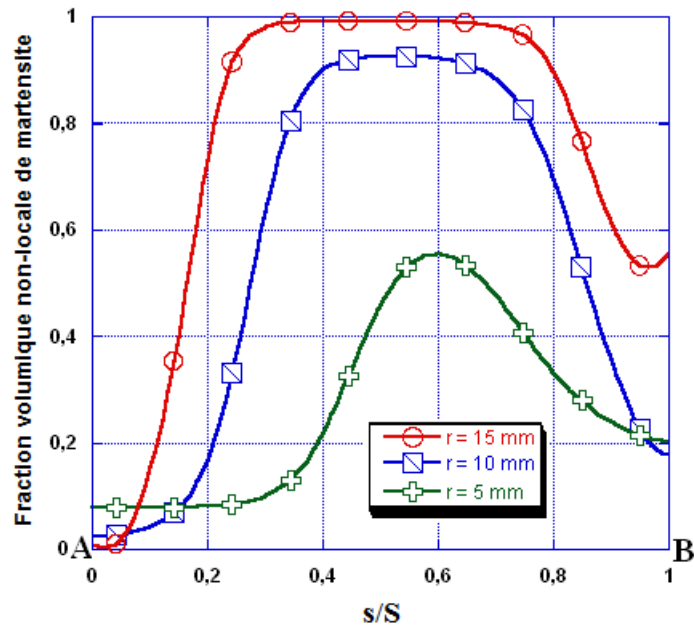


FIGURE 3.31 – Evolution de la fraction volumique non-locale le long de la ligne AB pour différentes valeurs du rayon du défaut géométrique à  $T = -15^\circ \text{C}$  ( $l = 0.1 \text{ mm}$ ).



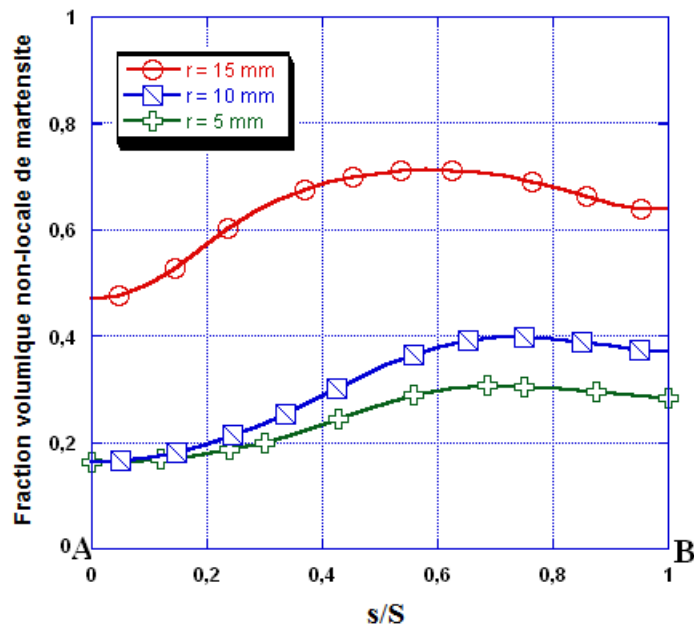


FIGURE 3.32 – Evolution de la fraction volumique non-locale le long de la ligne AB pour différentes valeurs du rayon du défaut géométrique à  $T = -15^\circ \text{C}$  ( $l = 10 \text{ mm}$ ).

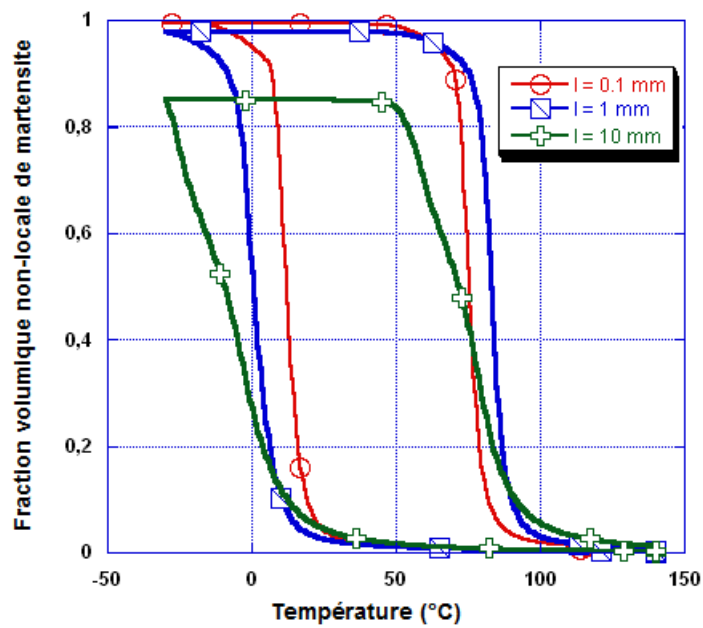


FIGURE 3.33 – Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite dans l'élément  $E_1$  pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne (rayon du défaut géométrique égal à  $10 \text{ mm}$ ).



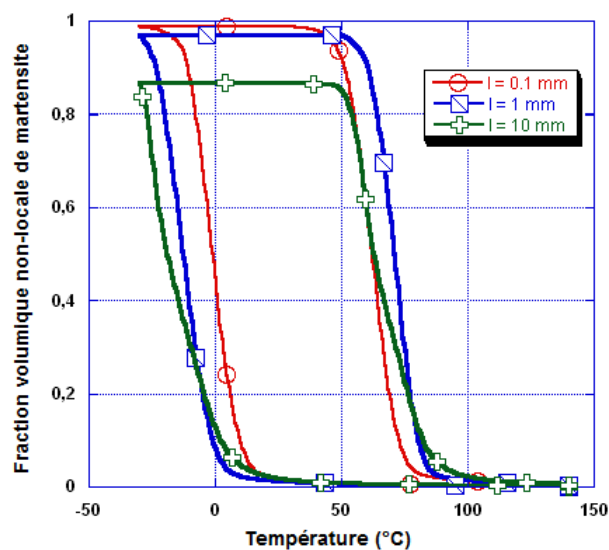


FIGURE 3.34 – Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite dans l'élément  $E_2$  pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne (rayon du défaut géométrique égal à 10 mm).

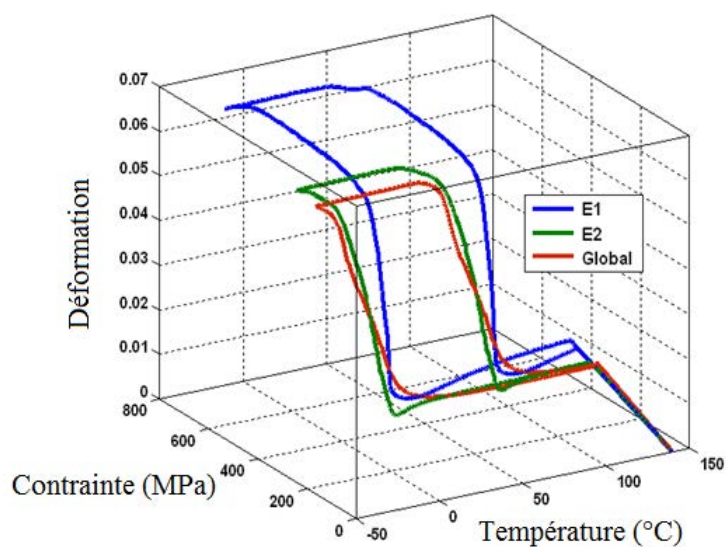


FIGURE 3.35 – Evolution des déformations globale et locales dans les éléments  $E_1$  et  $E_2$  en fonction de la contrainte et de la température (rayon du défaut géométrique égal à 10 mm et  $l = 0.1$  mm).

### 3.6 Conclusion

Le présent chapitre décrit de façon détaillée, le modèle non-local du comportement thermo-mécanique développé pour l'étude des instabilités accompagnant la transition de phase dans les

structures minces en AMF. La construction du modèle a nécessité le développement d'un élément fini à approche non-locale avec des degrés de liberté standards comme les deux déplacements dans le plan et non standards comme la fraction volumique non-locale de martensite. L'évolution de la fraction volumique non-locale est régit par une EDP incorporant le paramètre de longueur interne, caractéristique de la taille du domaine d'interaction entre un point matériel donné et son voisinage dans le milieu considéré.

Des simulations mettant en œuvre les différents comportements spécifiques des AMF (super-élasticité, effet mémoire de forme etc.) ont été réalisées et ont permis de montrer l'efficacité de l'approche proposée à décrire correctement les effets de taille et les phénomènes de localisation de la transformation de phase.

Dans le prochain chapitre, nous allons étendre l'approche non-locale proposée et l'adapter à des études faisant intervenir un champ de température non-uniforme et des phénomènes thermiques transitoires. Cette extension prendra en compte des effets de la chaleur latente de transformation dans la modélisation du comportement des AMF.

# Modèle non-local du comportement des AMF avec prise en compte des effets de la chaleur latente

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>102</b>
<b>4.2</b>	<b>Couplage thermomécanique dans les modèles de comportement des AMF</b>	<b>102</b>
4.2.1	Principaux concepts sur le couplage thermomécanique dans les AMF	102
4.2.2	Prise en compte des effets de la chaleur latente	103
<b>4.3</b>	<b>Elément fini 2D pour le couplage thermomécanique fort dans les AMF</b>	<b>106</b>
4.3.1	Equations du modèle pour le couplage thermomécanique dans les AMF	107
4.3.2	Formulation intégrale	107
4.3.3	Discrétisation spatiale	108
<b>4.4</b>	<b>Validation numérique et discussion</b>	<b>111</b>
4.4.1	Test de traction avec une température initiale uniforme imposée	113
4.4.2	Chargement de traction avec un champ de température non-uniforme	116
<b>4.5</b>	<b>Prise en compte de l'effet de la chaleur latente de transformation dans une approche non-locale</b>	<b>121</b>
4.5.1	Problème couplé thermomécanique non-local	121
4.5.2	Formulation faible	122
4.5.3	Discrétisation spatiale	123
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>126</b>

---

## Résumé

Un modèle local de comportement dédié à la prise en compte des effets de la chaleur latente de transformation de phase dans les AMF, ainsi que sa version non-locale sont proposés dans le présent chapitre. Le développement de ces modèles a nécessité la prise en compte de l'équation de la chaleur indispensable pour capturer les évolutions du champ de température au sein du matériau. L'implémentation numérique du modèle obtenu dans le code de calcul par éléments finis Abaqus, qui a requis le développement d'un élément fini spécial adapté au problème, a été également décrite. L'outil numérique qui a résulté de ces développements a été utilisé pour réaliser différents tests numériques. La capacité prédictive du modèle développé est analysée à la lumière des résultats numériques obtenus.

## 4.1 Introduction

Il existe dans la littérature un très grand nombre de modèles dédiés à l'étude du comportement thermomécanique des AMF. Toutefois, la plupart de ces modèles de comportement, à l'instar de celui présenté dans le second chapitre négligent les effets thermiques dus à la chaleur latente de transformation de phase (voir paragraphe 1.1.4), observés expérimentalement par de nombreux auteurs ([22], [71], [30],...), qui accompagnent la transition de phase dans les AMF. Ainsi, seul un nombre très restreint de modèles des AMF (voir quelques exemples dans le paragraphe 1.4.3) prennent en compte la variation de température induite par la chaleur latente de transformation. Or les AMF sont promis à une utilisation importante dans de nombreux secteurs industriels pour la conception de diverses applications et notamment celles de tailles fortement réduites. De plus, lorsque les conditions d'utilisation de ces AMF impliquent des sollicitations dynamiques, l'effet de la chaleur latente de transformation ne peut plus être négligé. Dans cette optique, la mise en place d'outils de dimensionnement capables de reproduire le plus fidèlement possible le comportement de ces matériaux et de prendre en compte la modification de la température causée par la chaleur latente de transformation devient indispensable.

Dans un souci de répondre à ces exigences, nous consacrons le présent chapitre au développement d'un modèle dédié à l'étude du comportement des structures minces en AMF avec la prise en compte du fort couplage thermomécanique dans ces structures. Ceci sera réalisé en deux étapes progressives : dans la première, nous procéderons à l'introduction du couplage thermomécanique dans le modèle local présenté dans le second chapitre en vue de prendre en compte les effets de la chaleur latente de transformation sur le comportement des AMF. Dans la deuxième étape, nous effectuerons une extension du modèle obtenu dans la première partie en se basant sur les approches non-locales.

## 4.2 Couplage thermomécanique dans les modèles de comportement des AMF

### 4.2.1 Principaux concepts sur le couplage thermomécanique dans les AMF

De nombreuses études expérimentales établissent une dépendance de la contrainte de début de transformation martensitique dans les échantillons d'AMF à la température de ces derniers. Ceci se traduit dans le diagramme de transformation ou au travers de la relation de Clausius-Clayperon [59]. La transformation de phase martensitique dans les AMF est une transition de phase du premier ordre à l'état solide avec production ou absorption d'une chaleur latente de transformation. Cette chaleur latente de transformation, est à l'origine d'un changement de température de l'échantillon. On observe dans ce cas, un auto-échauffement ou (auto-refroidissement) qui affecte directement la réponse mécanique de l'échantillon. Selon la géométrie et les vitesses de sollicitation, l'auto-échauffement peut même se produire localement à divers endroits de l'échantillon [82], entraînant ainsi une hétérogénéité du champ de température de ce dernier.

La prise en compte des effets thermiques liés à la transition de phase dans les AMFs, brièvement rappelés ci-dessus et détaillés dans le premier chapitre, doivent donc être considérés dans un modèle de comportement dédié aux AMF. Il sera alors possible de prendre en compte la distribution du champ de température par la résolution de l'équation de la chaleur, conjointement avec les équations de comportement du modèle.

Dans ce qui suit, l'équation de la chaleur, à résoudre simultanément avec les équations du modèle local présenté dans le second chapitre, est établie.

### 4.2.2 Prise en compte des effets de la chaleur latente

Pour tout domaine matériel  $\Omega$  quelconque, le premier principe de la thermodynamique stipule que la variation de l'énergie totale est égale à la somme du travail des efforts extérieurs appliqués sur  $\Omega$  et de la quantité de chaleur échangée par  $\Omega$ . Ce principe se traduit par la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}(E_{int} + K) = P_{ext} + Q \quad (4.1)$$

Où  $E_{int}$  représente l'énergie interne ;  $K$ , l'énergie cinétique ;  $P_{ext}$  est la puissance des efforts extérieurs et  $Q$  le taux de chaleur échangée.

En considérant l'énergie interne volumique  $U$  et la masse volumique  $\rho$  d'un point matériel du domaine  $\Omega$  ;  $\mathbf{v}$ , un champ de vitesses, les grandeurs extensives  $E_{int}$  et  $K$  s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} E_{int} &= \int_{\Omega} U d\Omega \\ K &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\Omega \end{aligned} \quad (4.2)$$

Le taux de chaleur  $Q$  comprend deux contributions : la chaleur créée dans le volume  $\Omega$  par les actions qui lui sont extérieures et la chaleur reçue par conduction au travers de la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . Les effets de la convection et du rayonnement étant négligés, on peut écrire :

$$Q = \int_{\Omega} r d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{q}$  représente le vecteur flux de chaleur et  $r$  la densité de chaleur.

La puissance réelle des efforts extérieurs s'écrit :

$$P_{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} dS \quad (4.4)$$

Dans l'équation (4.4),  $\mathbf{f}$  correspond aux forces de volume exercées par les systèmes extérieurs à  $\Omega$  ;  $\mathbf{T}$  représente le vecteur contrainte défini par :  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$  sur  $\partial\Omega$ , avec  $\boldsymbol{\Sigma}$  le tenseur des contraintes.

En remplaçant  $E$ ,  $K$ ,  $Q$ ,  $P_{ext}$  par leurs expressions et en utilisant le théorème de la divergence (théorème de Green-Ostrogradski), on obtient après quelques développements la relation suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} d\Omega + \int_{\Omega} r d\Omega - \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{q} d\Omega \quad (4.5)$$

$\mathbf{D}$  est le tenseur des taux de déformation qui dans l'hypothèse des petites déformations est égal au tenseur vitesse de déformation  $\dot{\mathbf{E}}$ . Dans ce cas, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} d\Omega + \int_{\Omega} r d\Omega - \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{q} d\Omega \quad (4.6)$$

La relation (4.6) est vérifiée quelque soit le domaine  $\Omega$  ; elle conduit à la forme locale du premier principe de la thermodynamique :

$$\dot{U} = \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + r - \text{div} \mathbf{q} \quad (4.7)$$

Dans toute la suite du présent développement, nous assimilons le point matériel à un VER d'AMF polycristallin d'énergie interne volumique  $U$  et de masse volumique  $\rho$ . Comme dans le second chapitre, le VER admet comme variables de contrôle, la contrainte et la température ( $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $T$ ). L'enthalpie libre volumique  $G$  du VER s'écrit :

$$G = U - TS - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} \quad (4.8)$$

où  $T$  est la température du VER et  $S$ , son entropie.

La dérivée temporelle de l'enthalpie libre  $G$  (relation (4.8)) fournit :

$$\dot{G} = \dot{U} - \dot{T}S - \dot{S}T - \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{\boldsymbol{\Sigma}} : \mathbf{E} \quad (4.9)$$

En se référant à la forme locale du premier principe de la thermodynamique (relation (4.7)), on peut alors écrire :

$$\dot{G} + \dot{T}S + \dot{S}T = r - \text{div} \mathbf{q} - \dot{\boldsymbol{\Sigma}} : \mathbf{E} \quad (4.10)$$

L'enthalpie libre  $G$  du VER n'est autre que l'énergie libre de Gibbs établie dans le second chapitre. Elle est fonction des variables de contrôle ( $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $T$ ) et de l'ensemble des variables internes  $V_k$  introduites pour décrire la transformation de phase au sein du VER. Nous rappelons que ces variables internes doivent respecter les conditions de saturation imposées par leurs limitations physiques naturelles (voir paragraphe 2.2). Ces conditions sont prises en compte par l'introduction de trois multiplicateurs de Lagrange ( $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ ). Il est possible de construire grâce au formalisme de Kuhn-Tucker, un Lagrangien en intégrant directement dans l'expression de l'enthalpie libre  $G$ , trois termes ( $m_0, m_1$ , et  $m_2$ ), dépendant des multiplicateurs de Lagrange introduits [70]. On obtient :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\Sigma}, T, V_k) = G(\boldsymbol{\Sigma}, T, V_k) + m_0 + m_1 + m_2 \quad (4.11)$$

En se référant au second chapitre (paragraphe 2.6) et en tenant compte des limitations physiques à respecter, les termes  $m_0, m_1$ , et  $m_2$  s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} f \geq 0 & : m_0 = -\lambda_0 f \\ 1 - f \geq 0 & : m_1 = -\lambda_1 (1 - f) \\ \bar{\varepsilon}_{MAX}^T - \bar{\varepsilon}_{eq}^T \geq 0 & : m_2 = -\lambda_2 (\bar{\varepsilon}_{MAX}^T - \bar{\varepsilon}_{eq}^T) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ainsi d'après l'équation (4.11), la relation (4.10) obtenue grâce au premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\dot{\mathcal{L}} + \dot{S}T + T\dot{S} = r - \text{div} \mathbf{q} - \dot{\boldsymbol{\Sigma}} : \mathbf{E} \quad (4.13)$$

Nous notons que l'entropie  $S$  est donnée par la relation :

$$S = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \quad (4.14)$$

Le second principe de la thermodynamique ou l'inégalité de Clausius-Duhem permet d'écrire :

$$D_T = T\dot{S} + \text{div} \mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} - r \geq 0 \quad (4.15)$$

où  $D_T$  représente la dissipation totale. En tenant compte de l'équation (4.13), nous pouvons réécrire cette dissipation sous la forme suivante :

$$D_T = -\dot{\Sigma} : \mathbf{E} - (\dot{\mathcal{L}} + \dot{T}S) - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (4.16)$$

On peut déduire de cette dernière équation que la dissipation totale  $D_T$  se décompose en deux contributions :

- la dissipation intrinsèque  $D_{int}$  :

$$D_{int} = -\dot{\Sigma} : \mathbf{E} - \dot{\mathcal{L}} - \dot{T}S \quad (4.17)$$

- la dissipation thermique  $D_{th}$  :

$$D_{th} = -\mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \quad (4.18)$$

Les deux dissipations intrinsèque et thermique sont positives. En exprimant la différentielle ( $\dot{\mathcal{L}}$ ) du Lagrangien, la dissipation intrinsèque peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} D_{int} &= -\dot{\Sigma} : \mathbf{E} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Sigma} : \dot{\Sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \dot{T} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_k} \odot \dot{V}_k - \dot{T}S \\ &= -\dot{\Sigma} : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \dot{\Sigma} + S\dot{T} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_k} \odot \dot{V}_k - \dot{T}S \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_k} \odot \dot{V}_k \end{aligned} \quad (4.19)$$

Où le symbole  $\odot$  définit soit un produit, soit un produit scalaire, soit un produit doublement contracté selon que  $V_k$  est un scalaire, un vecteur ou un tenseur.

En notant  $A_k = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_k}$ , la force thermodynamique liée à la variable  $V_k$ , nous obtenons l'expression suivante :

$$D_{int} = A_k \odot \dot{V}_k \quad (4.20)$$

La dissipation intrinsèque est donc le produit de la force thermodynamique liée à la variable interne  $V_k$  par la vitesse de cette dernière.

À partir de la relation (4.13) et de l'expression (4.20) définissant la dissipation intrinsèque, nous pouvons écrire :

$$T\dot{S} = r - \operatorname{div} \mathbf{q} + A_k \odot \dot{V}_k \quad (4.21)$$

En combinant (4.14) et (4.21), on aboutit à l'équation suivante :

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = r + A_k \odot \dot{V}_k + T \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T \partial \Sigma} : \dot{\Sigma} + T \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T \partial V_k} \odot \dot{V}_k + T \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T^2} \dot{T} \quad (4.22)$$

Le terme  $T \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T \partial \Sigma} : \dot{\Sigma}$  dans l'équation (4.22) permet de prendre en compte les effets thermoélastiques qui peuvent-être négligés [56] ; le terme  $T \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T^2} \dot{T}$  correspond au terme classique  $-\rho C_p \dot{T}$  où  $\rho$  désigne la masse volumique et  $C_p$ , la chaleur spécifique à pression constante supposée identique pour l'austénite et la martensite. Les variables internes retenues dans notre travail étant la fraction volumique de martensite et la déformation moyenne de transformation, nous avons :

$$\begin{aligned} A_k \odot \dot{V}_k &= A_f \dot{f} + A_{\bar{\varepsilon}_T} : \dot{\bar{\varepsilon}}_T \\ T \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T \partial V_k} \odot \dot{V}_k &= -T \frac{\partial A_f}{\partial T} \dot{f} - T \frac{\partial A_{\bar{\varepsilon}_T}}{\partial T} : \dot{\bar{\varepsilon}}_T \end{aligned} \quad (4.23)$$

La conduction thermique au sein du VER est prise en compte à travers la loi de Fourier ( $\mathbf{q} = -k\nabla T$ , avec  $k$  la conductivité thermique de l'AMF supposée identique pour l'austénite et la martensite).

En tenant compte des remarques précédentes et en remplaçant les différents termes de l'équation (4.22) par leurs expressions, on obtient l'équation de la chaleur sous la forme suivante :

$$\operatorname{div}(-k\nabla T) = -\rho C_p \dot{T} - \left[ \frac{\partial A_f}{\partial T} \dot{f} + \frac{\partial A_{\bar{\varepsilon}_T}}{\partial T} : \dot{\bar{\varepsilon}}_T \right] T + A_f \dot{f} + A_{\bar{\varepsilon}_T} : \dot{\bar{\varepsilon}}_T + r \quad (4.24)$$

Dans un premier temps, nous ne prendrons en compte que la dissipation liée à la transformation de phase. L'influence du terme relatif à la dissipation due à l'orientation des variantes de martensite dans l'équation (4.24) fera l'objet de développements futurs. Nous supposons également qu'il n'y a aucune source de chaleur externe ( $r = 0$ ). Ainsi l'équation (4.24) prend la forme simplifiée :

$$\operatorname{div}(-k\nabla T) = -\rho C_p \dot{T} - \left[ \frac{\partial A_f}{\partial T} \dot{f} \right] T + A_f \dot{f} \quad (4.25)$$

ou sous une forme plus condensée :

$$\operatorname{div}(-k\nabla T) = \beta_0 \dot{T} + \beta_1 T + \beta_2 \quad (4.26)$$

Avec  $\beta_0 = -\rho C_p$ ,  $\beta_1 = -\frac{\partial A_f}{\partial T} \dot{f}$  et  $\beta_2 = A_f \dot{f}$ .

Rappelons que dans l'équation (4.26), c'est la contribution  $(\beta_0 \dot{T} + \beta_1 T + \beta_2)$  située dans le membre de droite qui permet de prendre en compte l'évolution de la température du VER induite par la chaleur latente de la transformation de phase.

### 4.3 Élément fini 2D à contraintes planes pour l'étude des effets de la chaleur latente de transformation dans les AMF

Nous disposons maintenant d'un modèle de comportement pour les AMF qui tient compte des effets thermiques liés au processus de la transformation de phase. Il est constitué des équations du modèle local présenté dans le second chapitre et de l'équation de la chaleur (4.26). Pour exploiter ce modèle dans l'étude du comportement thermomécanique des structures en AMF avec prise en compte des effets de la chaleur latente de transformation, nous allons l'implémenter dans le logiciel Abaqus.

En effet, la méthode des éléments finis sera utilisée pour résoudre un tel problème ; à cette fin, un élément fini 2D en contraintes planes ayant 3 degrés de libertés (ddl) par nœud (les deux déplacements dans le plan et la température) sera développé. Le développement d'un tel élément fini est d'autant plus justifié que l'objectif final de notre étude est de proposer une extension en non-locale du modèle obtenu par l'ajout d'un quatrième ddl (la fraction volumique non-locale de martensite) à l'élément fini obtenu dans ce paragraphe.



### 4.3.1 Equations du modèle pour le couplage thermomécanique dans les AMF

Le problème thermomécanique à résoudre est composé de :

- l'équation de la chaleur (relation 4.26) et de l'équation d'équilibre mécanique (cas statique) avec l'hypothèse des forces volumiques nulles :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} = 0 \\ \operatorname{div}(-k \nabla T) = \beta_0 \dot{T} + \beta_1 T + \beta_2 \end{cases} \quad (4.27)$$

- complétée par les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{T}^\sigma && \text{sur } \Gamma^\Sigma \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^d && \text{sur } \Gamma^u \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= q^d && \text{sur } \Gamma^q \\ T &= T^d && \text{sur } \Gamma^T \\ T(\mathbf{x}, t = 0) &= T_0 && \forall \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (4.28)$$

Où  $\Gamma$  représente la frontière du domaine  $\Omega$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ ; avec  $\Gamma^u \cap \Gamma^\Sigma = \emptyset$  et  $\Gamma^u \cup \Gamma^\Sigma = \Gamma$ ;  $\Gamma^q \cap \Gamma^T = \emptyset$  et  $\Gamma^q \cup \Gamma^T = \Gamma$

- et du modèle de comportement non-linéaire de l'AMF dans sa forme locale décrite dans le chapitre 2 et dont les équations sont rappelées dans le tableau (3.1).

### 4.3.2 Formulation intégrale

Nous introduisons deux espaces de champs virtuels  $W_u$  et  $W_T$  respectivement associés aux espaces des déplacements et de la température :

$$\begin{aligned} W_u &= \{\mathbf{w}_u \mid \mathbf{w}_u \in [C^0]^2, \mathbf{w}_u = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma^u\} \\ W_T &= \{w_T \mid w_T \in [C^0], w_T = 0 \text{ sur } \Gamma^T\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

En multipliant l'équation mécanique du système d'équations (4.27) par  $\mathbf{w}_u$  et en intégrant sur tout le domaine  $\Omega$ , nous obtenons la forme faible de l'équation de l'équilibre mécanique :

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{w}_u \in W_u \quad (4.30)$$

De même, la forme faible de l'équation de la chaleur, est obtenue en multipliant l'équation de la chaleur du système d'équations (4.27) par  $w_T$  et en intégrant sur tout le domaine  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} w_T [\operatorname{div}(-k \nabla T)] d\Omega = \int_{\Omega} w_T (\beta_0 \dot{T} + \beta_1 T + \beta_2) d\Omega \quad \forall w_T \in W_T \quad (4.31)$$

En effectuant une intégration par parties des équations (4.30) et (4.31) puis en tenant compte du théorème de la divergence et des conditions aux limites thermiques et mécaniques exprimées par la relation (4.28), nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\int_{\Omega} [\nabla \mathbf{w}_u]^T : \boldsymbol{\Sigma} d\Omega - \int_{\Gamma^\Sigma} \mathbf{w}_u \cdot \mathbf{T}^\sigma d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{w}_u \in W_u \quad (4.32)$$

$$\int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla w_T d\Omega + \int_{\Gamma^q} q^d w_T d\Gamma = \int_{\Omega} w_T (\beta_0 \dot{T} + \beta_1 T + \beta_2) d\Omega \quad \forall w_T \in W_T \quad (4.33)$$

Dans la relation (4.33), la dérivée temporelle de la température ( $\dot{T}$ ) ainsi que celle de la fraction volumique de martensite ( $\dot{f}$ ) apparaissant dans les expressions de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont déterminées à partir de l'incrément de temps  $\Delta t$  par la méthode des différences finies :

$$\dot{T} = \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \dot{f} = \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta t} \quad (4.34)$$

où  $T_{n+1}$  et  $T_n$  correspondent aux valeurs de la température respectivement aux instants  $t_{n+1}$  et  $t_n$ ;  $f_{n+1}$  et  $f_n$  à celles de la fraction volumique de martensite respectivement aux mêmes instants.

### 4.3.3 Discrétisation spatiale

Le problème couplé thermomécanique à résoudre est défini par le système d'équations constitué des relations (4.32) et (4.33). En vue d'une résolution par la méthode des éléments finis, un élément fini de forme quadrangulaire (voir figure 4.1) est développé.

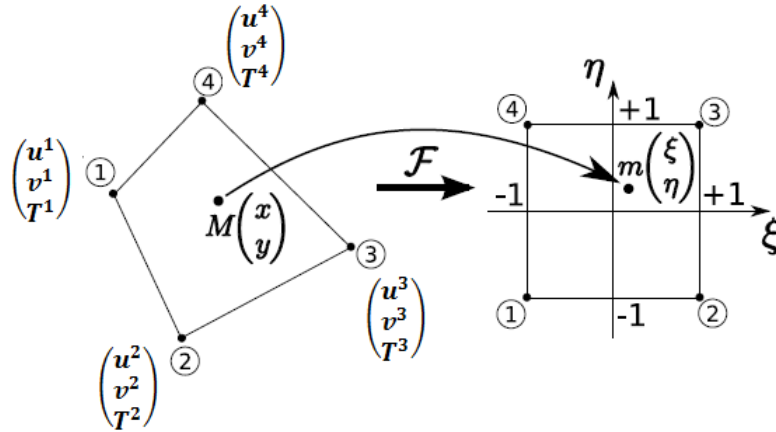


FIGURE 4.1 – Élément fini quadrangulaire développé avec les trois degrés de liberté retenus.

En tout point de l'élément de coordonnées  $(\xi, \eta)$  le vecteur déplacement et la température sont approximés à partir des déplacements et températures nodaux par les relations :

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = [N^u] \{u\} \quad \text{et} \quad T(\xi, \eta) = [N^{Th}] \{T\} \quad (4.35)$$

De même le vecteur déplacement virtuel  $\mathbf{w}_u$  et la température virtuelle  $w_T$  s'écrivent :

$$\mathbf{w}_u(\xi, \eta) = [N^u] \{w_u\} \quad \text{et} \quad w_T(\xi, \eta) = [N^{Th}] \{w_T\} \quad (4.36)$$

$[N^u]$  et  $[N^{Th}]$  sont respectivement les matrices d'interpolation des déplacements et de la température.

$$\begin{aligned} [N^u] &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \\ [N^{Th}] &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Où les  $N_i$  ( $i = 1$  à  $4$ ) sont les fonctions de formes linéaires dont les expressions sont connues (équation (3.28)).

Le tenseur des déformations et le gradient de température sont représentés par les vecteurs suivants :

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{Bmatrix} = [B^u]\{u\} \quad \text{et} \quad \{\nabla T\} = \begin{Bmatrix} T_{,x} \\ T_{,y} \end{Bmatrix} = [B^{Th}]\{T\} \quad (4.38)$$

Les quantités virtuelles  $[\nabla w_u]$  et  $\{\nabla w_T\}$  s'expriment par :

$$[\nabla w_u] = [B^u]\{w_u\} \quad \text{et} \quad \{\nabla w_T\} = [B^{Th}]\{w_T\} \quad (4.39)$$

Dans les relations (4.38) et (4.39), les matrices  $[B^u]$  et  $[B^{Th}]$  sont exprimées à partir des dérivées des fonctions de forme et des vecteurs nodaux  $\{u\}$ ,  $\{T\}$ .

En tenant compte des équations (4.34) à (4.39), on peut écrire les formes faibles des équations (4.32) et (4.33) à résoudre. On obtient :

$$\int_{\Omega_e} [B^u]^T : \{\Sigma(u, T)\} d\Omega - \int_{\Gamma_e^\Sigma} [N^u]^T \{T^\sigma\} d\Gamma = \mathbf{R}_e^u(u, T) = 0 \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} k[B^{Th}]^T [B^{Th}] \{T\}_{n+1} d\Omega - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T [N^{Th}] \left[ \beta_0 \left( \frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}_n}{\Delta t} \right) + \beta_1(u, T) \{T\}_{n+1} \right] \\ - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T \beta_2(u, T) d\Omega + \int_{\Gamma_e^q} [N^{Th}]^T q^d d\Gamma = \mathbf{R}_e^T(u, T) = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

où  $\Omega_e$  désigne le volume de l'élément fini et  $\Gamma_e$ , son contour. Le champ de température  $\{T\}_{n+1}$  à l'instant  $t = t_{n+1}$  est l'inconnue à déterminer,  $\{T\}_n$  étant connu.

Le système d'équations non-linéaires à résoudre peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_e^u(u, T) \\ \mathbf{R}_e^T(u, T) \end{Bmatrix} = \{\mathbf{R}_e(u, T)\} = \{0\} \quad (4.42)$$

Où  $\{\mathbf{R}_e(u, T)\}$  est un vecteur unique composé des résidus  $\mathbf{R}_e^u(u, T)$  et  $\mathbf{R}_e^T(u, T)$ . Nous utiliserons la méthode itérative de Newton-Raphson pour sa résolution.

En supposant qu'à l'instant  $t = t_n$  nous avons un système à l'équilibre exprimé par la relation :  $\mathbf{R}_e(\mathbf{d}_n) = \mathbf{0}$ , où  $\mathbf{d}_n$  désigne le vecteur des degrés de libertés (ddl)( $u, T$ ) de l'élément à l'instant  $t_n$ , le problème à résoudre consiste à trouver les valeurs des ddl à l'instant  $t_{n+1}$  c'est à dire le vecteur  $\mathbf{d}_{n+1}$ . Pour ce faire, nous effectuons à l'itération  $(k + 1)$ , une linéarisation qui nous permet de déterminer la correction  $\delta\Delta\mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)}$  de l'incrément  $\Delta\mathbf{d}_{n+1}^{(k)}$  des ddl. La relation linéarisée s'écrit :

$$\mathbf{R}_{e_{n+1}}^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{R}_{e_{n+1}}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} \delta\Delta\mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} \approx \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}_{e_{n+1}}^{(k)} = \mathbf{R}_e(\underbrace{\mathbf{d}_n + \Delta\mathbf{d}_{n+1}^{(k)}}_{\mathbf{d}_{n+1}^{(k)}}) \quad (4.43)$$

La correction  $\delta\Delta\mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)}$  du vecteur des ddl nodaux est donc déterminée à l'aide de la relation :

$$\delta\Delta\mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} = - \left[ \frac{\partial \mathbf{R}_{e_{n+1}}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} \right]^{-1} \mathbf{R}_{e_{n+1}}^{(k)} \quad (4.44)$$

Dans l'équation (4.43),  $\left[ \frac{\partial \mathbf{R}_{e_{n+1}}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} \right]$  représente la matrice tangente élémentaire à l'instant  $t = t_{n+1}$  et à l'itération  $k$ . Elle est fonction des sous-matrices suivantes :

$$\begin{aligned} [K^{uu}]_{n+1}^{(k)} &= \int_{\Omega_e} [B^u]^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}} \right]_{n+1}^{(k)} [B^u] d\Omega \\ [K^{uT}]_{n+1}^{(k)} &= \int_{\Omega_e} [B^u]^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial T} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{Th}] d\Omega \\ [K^{Tu}]_{n+1}^{(k)} &= - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T \left[ \left[ \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{E}} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{Th}] \{T\}_{n+1} \right] [B^u] \\ &\quad - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T \left[ \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{E}} \right]_{n+1}^{(k)} [B^u] \\ [K^{TT}]_{n+1}^{(k)} &= \int_{\Omega_e} k [B^{Th}]^T [B^{Th}] d\Omega - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T \left[ \left[ \frac{\partial \beta_1}{\partial T} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{Th}] \{T\}_{n+1} \right] [N^{Th}] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T [\beta_1]_{n+1}^{(k)} [N^{Th}] d\Omega - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T \left[ \frac{\partial \beta_2}{\partial T} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{Th}] d\Omega - \\ &\quad \int_{\Omega_e} \frac{\beta_0}{(\Delta t)_{n+1}} [N^{Th}]^T [N^{Th}] d\Omega \end{aligned} \quad (4.45)$$

Nous utiliserons les quadratures de Gauss pour le calcul des différentes matrices. Les expressions des matrices  $[K^{uu}]_{n+1}^{(k)}$  et de  $[K^{uT}]_{n+1}^{(k)}$  font apparaître les opérateurs tangents liés à l'évolution de la contrainte :  $\left[ \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}} \right]_{n+1}^{(k)}$  et  $\left[ \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial T} \right]_{n+1}^{(k)}$ .

Les variables  $\beta_1$  et  $\beta_2$  étant fonction de la dérivée temporelle de la fraction volumique de martensite ( $\dot{f}$ ), les matrices  $[K^{Tu}]_{n+1}^{(k)}$  et  $[K^{TT}]_{n+1}^{(k)}$  dépendent donc respectivement des opérateurs tangents liés à l'évolution de la fraction volumique de martensite :  $\left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{E}} \right]_{n+1}^{(k)}$  et  $\left[ \frac{\partial f}{\partial T} \right]_{n+1}^{(k)}$ .

Ces différents opérateurs tangents, de même que la contrainte et la fraction volumique de martensite, sont directement calculés à partir de la loi de comportement d'où l'intérêt d'un tel algorithme. Le modèle thermomécanique développé est implanté dans le logiciel Abaqus grâce à la routine utilisateur UEL. La routine actualise à la fin de chaque incrément la contrainte, les variables internes ainsi que les opérateurs tangents. Ces variables, mises à jour, servent ensuite à calculer le vecteur résidu élémentaire ainsi que la matrice de rigidité élémentaire nécessaires au code élément fini Abaqus pour déterminer après un assemblage sur tous les éléments, l'équilibre thermomécanique des structures étudiées. La figure 4.2 montre un résumé de la technique de résolution adoptée.

Dans le paragraphe suivant, nous utiliserons l'outil numérique obtenu pour étudier la réponse d'une bande d'AMF soumise à un chargement thermomécanique.

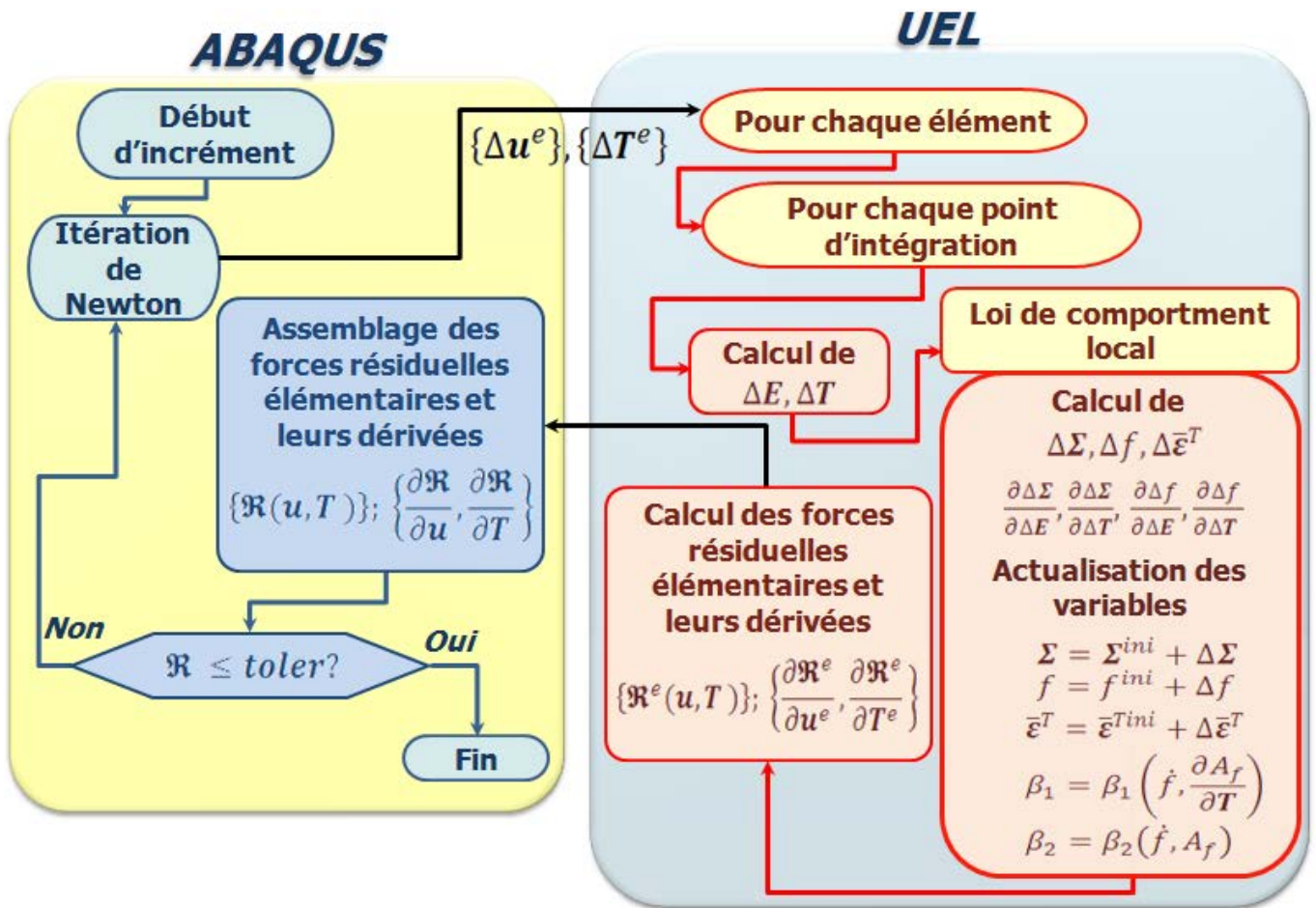


FIGURE 4.2 – Schéma de résolution du problème couplé thermomécanique implémenté dans Abaqus.

#### 4.4 Validation numérique et discussion

De manière à valider l'outil numérique mis en place dans la section précédente, nous proposons d'étudier la réponse d'une plaque en AMF soumise à deux types de sollicitations thermomécaniques :

- un chargement de traction avec une température initiale uniforme imposée,
- un chargement de traction avec un champ de température non uniforme. Ainsi, la température de la ligne AB (voir figure 4.3 (c)) est considérée constante au cours du chargement tandis qu'aux autres noeuds, la température peut évoluer au gré de l'histoire du chargement.

Nous étudierons notamment l'aptitude du modèle développé à décrire les effets thermiques accompagnant la transition de phase dans les AMF.

Les valeurs des paramètres matériaux sont indiquées dans le tableau 4.1; les paramètres matériaux liés à l'équation de la chaleur (relation (4.25)) tels que la conductivité thermique, la masse volumique et la chaleur spécifique à pression constante sont respectivement notées  $k$ ,  $\rho$  et  $C_p$ . Le même jeu de paramètres est retenu pour toutes les simulations numériques réalisées. L'épaisseur de la plaque est de 0.5 mm; ses dimensions dans le plan sont 100 mm  $\times$  12 mm (voir

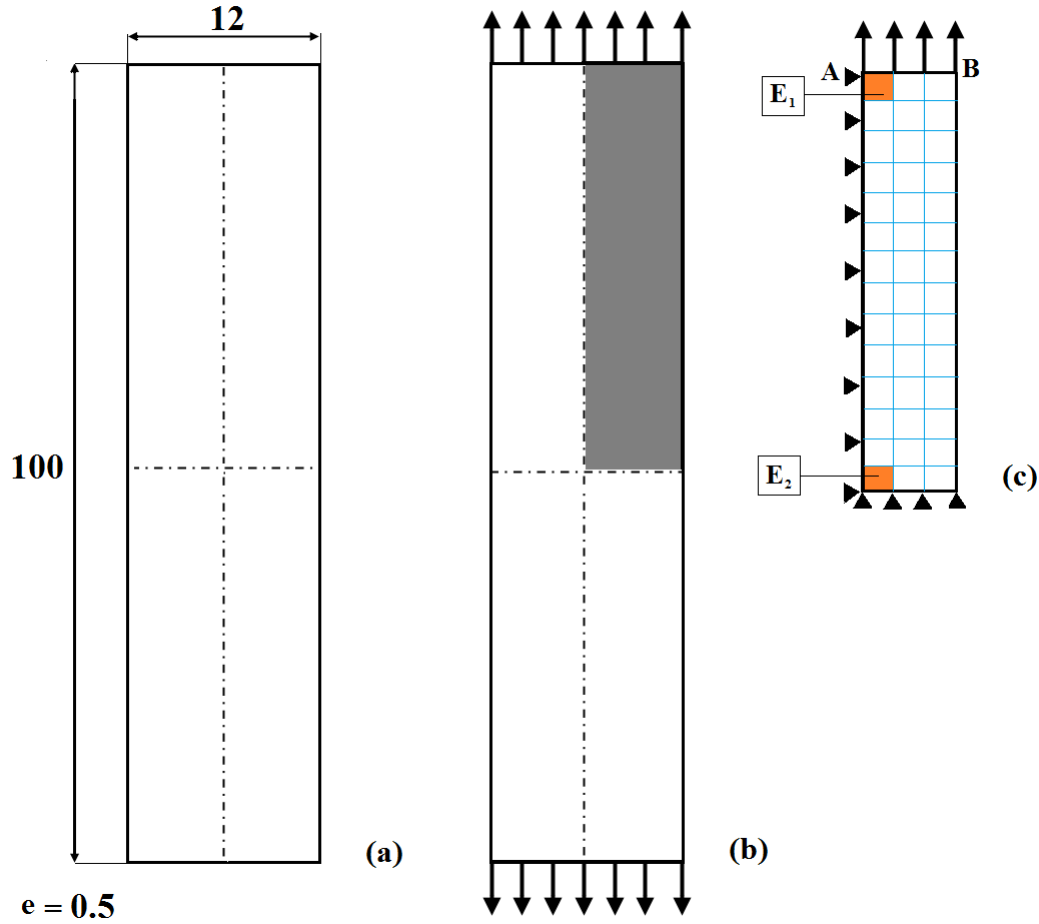


FIGURE 4.3 – Plaque étudiée en AMF : (a) Dimensions en mm ; (b) Chargement appliqué ; (c) Maillage, conditions aux limites et éléments de sortie des résultats.

TABLE 4.1 – Valeurs des paramètres matériaux.

$E$ (MPa)	$\nu$	$\alpha$ ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )	$\varepsilon_{trac}^T$	$\varepsilon_{trac}^{TFA}$	$\varepsilon_{comp}^T$
70000	0.3	$1.0610^{-5}$	0.056	0.053	0.044
$B$ (MPa/ $^{\circ}\text{C}$ )	$M_s$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$A_f$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$r_f$	$F_{\varepsilon T}^{max}$ (MPa)	$H_f$
0.28	-80	-2	0.25	220	4
$H_{\varepsilon}$ (MPa)	$H_{twin}$ (MPa)	$H_s$ (MPa)	$k$ (W/(m $^{\circ}\text{C}$ ))	$\rho$ (kg/m $^3$ )	$C_p$ (J/(kg $^{\circ}\text{C}$ ))
1000	40000	50	18.0	6500	440

figure 4.3 (a)). Pour des raisons de symétrie de la géométrie et du chargement appliqué, nous ne considérons que le quart de la plaque. Le maillage, les conditions aux limites ainsi que l'élément de sortie des résultats sont présentés sur la figure 4.3(c).

#### 4.4.1 Test de traction avec une température initiale uniforme imposée

Tout en imposant une température initiale uniforme, on applique à l'une des extrémités de la plaque un déplacement jusqu'à atteindre une élongation globale de 7 % puis on relâche la plaque pour revenir à l'état non déformé initial, l'autre extrémité de la plaque étant fixe. Le test est réalisé pour deux valeurs différentes de la température initiale (20° C et 70° C). Nous nous plaçons pour cette simulation dans un cas purement adiabatique, c'est à dire qu'il n'y a aucun transfert de chaleur entre la plaque et son voisinage. La vitesse de déformation imposée est de  $7 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  et l'incrément de temps correspond à 1% du temps total.

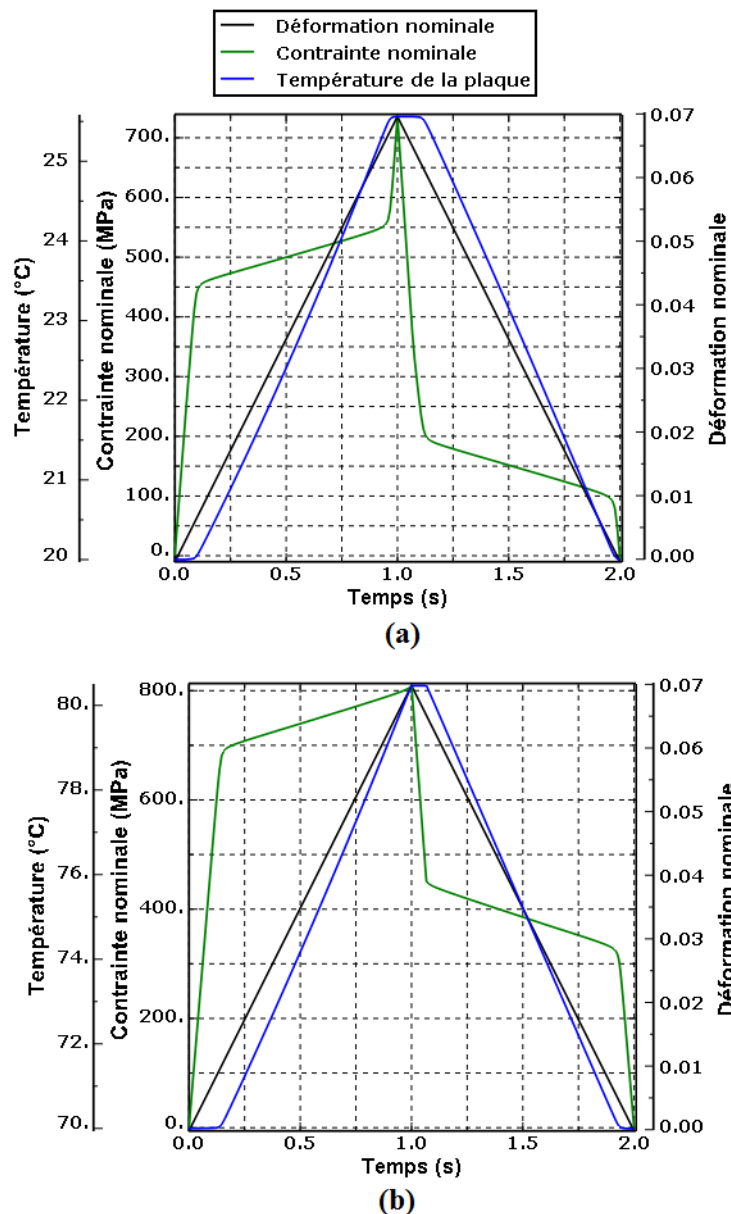


FIGURE 4.4 – Evolution dans le temps de la température de la plaque, de la contrainte et de la déformation nominales : (a) pour une température initiale de 20° C; (b) pour une température initiale de 70° C.

Les figures 4.4 (a) et (b) montrent l'évolution de la contrainte et de la déformation nominales ainsi que la variation de la température uniforme dans le temps pour les températures initiales de 20° C et 70° C respectivement. Dans les deux cas, on peut faire les remarques suivantes :

- Durant la phase élastique la contrainte augmente linéairement, la température de la plaque reste égale à sa valeur initiale ;
- Le début de la transformation de phase est marqué par un changement de pente dans l'évolution de la contrainte ; l'augmentation de la contrainte s'accompagne désormais d'une augmentation de la température de la plaque jusqu'à la fin de la transformation de phase. Ce résultat confirme la nature exothermique de la transformation de phase directe ;
- A la fin du chargement et après saturation de la transformation de phase, la décharge élastique depuis un état totalement martensitique de la plaque est marquée par une baisse de l'état de contrainte de la plaque. La contrainte diminue donc linéairement et la température reste constante durant cette phase ;
- Au début de la transformation de phase inverse, on observe un changement de pente dans l'évolution de la contrainte, la température de la plaque commence par diminuer avec la contrainte et ce, jusqu'à la fin de la transformation où elle retrouve sa valeur initiale. Cette baisse de température est associée au caractère endothermique de la transformation de phase inverse ;
- A la fin de la transformation inverse, on retrouve l'état austénitique de la plaque ; la contrainte diminue jusqu'à une valeur nulle, la température reste uniforme durant cette phase, égale à la température initiale imposée. On retrouve la même température initiale car nous avons négligé la dissipation de chaleur par convection (toute la quantité de chaleur est conservée au sein de la plaque).

Les figures 4.5 (a) et (b) permettent de comparer les réponses globales fournies par le présent modèle aux résultats obtenus à partir du modèle présenté dans le second chapitre où les effets de la chaleur latente de transformation ne sont pas considérés ; elles traduisent l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation pour les deux températures (20° C et 70° C). Dans les deux cas, on peut observer une pente locale de transformation plus élevée pour le modèle prenant en compte les effets de la chaleur latente de transformation. L'écart observé entre les pentes est dû au fait que la plaque étant initialement à l'état austénitique, si les effets de la chaleur latente de transformation sont pris en compte, la quantité de chaleur générée au cours de la transformation de phase va entraîner une élévation de la température de la plaque qui s'accompagne d'une augmentation de la contrainte. L'austénite devient dès lors plus stable, il est alors nécessaire de fournir une contrainte plus importante pour poursuivre la formation de la martensite au sein de la plaque. Notons aussi que l'écart obtenu entre les pentes à 70° C est plus important que celui obtenu à 20° C. Cela est dû au fait que plus la température est élevée plus l'austénite est stable.

Les figures 4.6 (a) et (b) montrent une comparaison comme dans le cas de la figure précédente, des variations de température observées au sein de la plaque à l'aide des deux modèles. Ces résultats viennent confirmer non seulement la cohérence des résultats des figures 4.5 (a) et (b) mais également le caractère exothermique de la transformation de phase directe et endothermique de la transformation de phase inverse. On note essentiellement une augmentation de température légèrement supérieure à 5° C dans le cas de la simulation réalisée à la température de 20° C ; dans le cas de la simulation à 70° C, l'augmentation de température enregistrée est d'environ



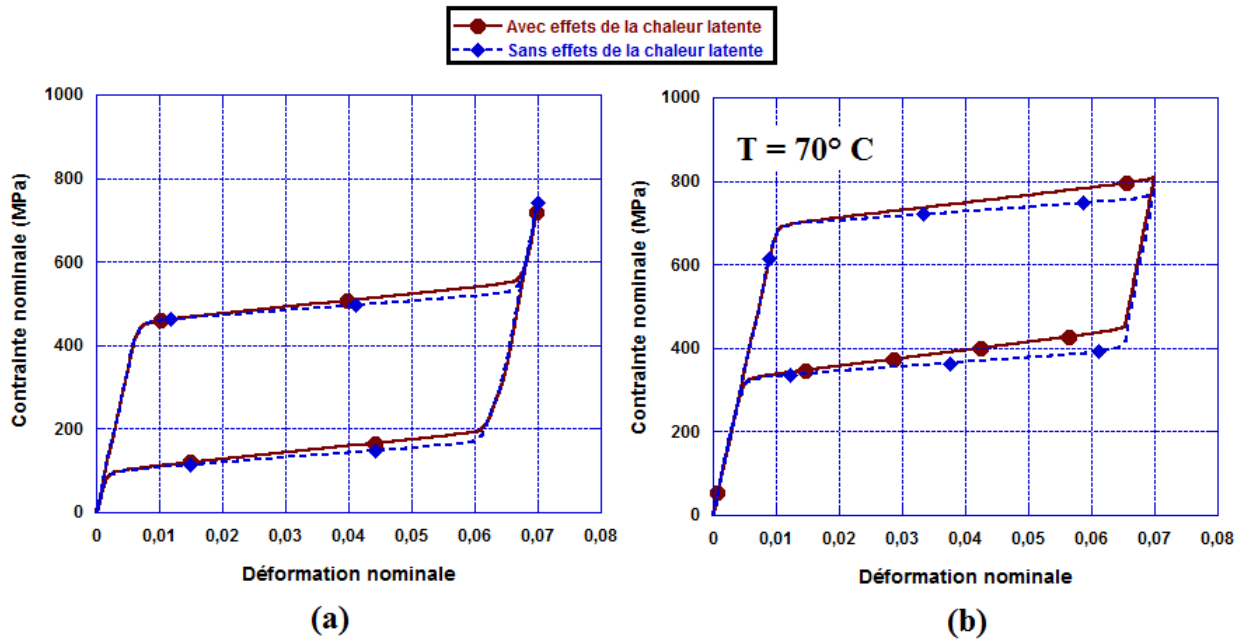


FIGURE 4.5 – Courbes contrainte-déformation nominales avec et sans prise en compte des effets de la chaleur latente de transformation : (a) pour une température initiale de  $20^\circ \text{C}$ ; (b) pour une température initiale de  $70^\circ \text{C}$ .

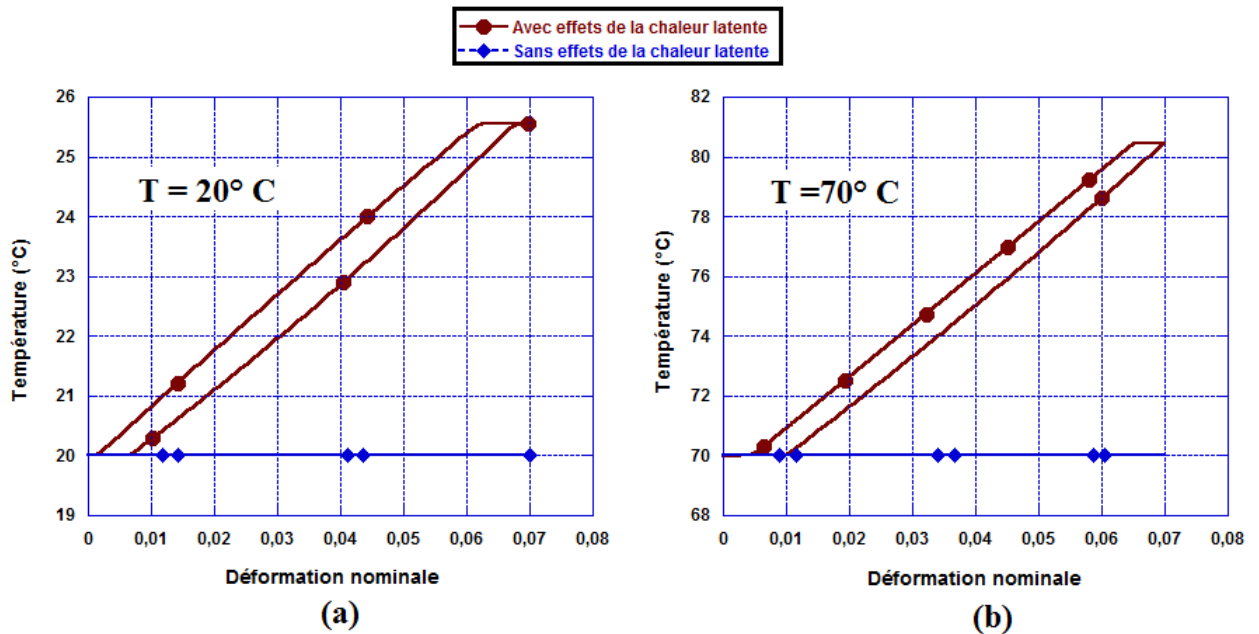


FIGURE 4.6 – Variation de la température de la plaque en fonction de la déformation nominale avec et sans prise en compte des effets de la chaleur latente de transformation : (a) pour une température initiale de  $20^\circ \text{C}$ ; (b) pour une température initiale de  $70^\circ \text{C}$ .

11° C. Le modèle initial (chapitre 2) ne prend pas en compte l'effet de la chaleur latente, ce qui explique la non variation de la température lors des transformations de phase directe et inverse.

#### 4.4.2 Chargement de traction avec un champ de température non-uniforme

Les simulations réalisées dans cette partie ont pour but d'analyser les influences de la vitesse de déformation sur la réponse mécanique de la plaque. Dans toutes les simulations réalisées, les conditions aux limites thermiques imposées sont telles que nous fixons la température de la ligne AB indiquée sur la figure 4.3 (c) à une valeur constante égale à 70° C durant toute la durée du chargement ; cette condition aux limites thermique impose un flux thermique local non nul sur cette ligne. Dans tout le reste de la plaque, le flux thermique est supposé nul ; la température peut évoluer en fonction de l'histoire du chargement.

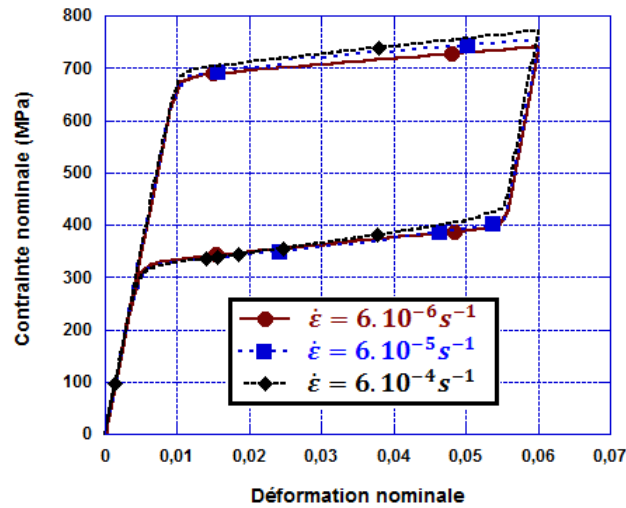


FIGURE 4.7 – Réponse contrainte-déformation nominale en fonction de la vitesse de déformation.

Les simulations sont réalisées pour trois vitesses de déformations différentes  $6 \times 10^{-6}$ ,  $6 \times 10^{-5}$ , et  $6 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Les figures 4.7 et 4.8 montrent respectivement la courbe contrainte-déformation nominale et la courbe de la variation de la température de la plaque pour les trois vitesses. On peut noter que les courbes contrainte-déformation nominales obtenues (figure 4.7) reproduisent le comportement classique des AMF d'une part et d'autre part que la vitesse de déformation influence l'allure des courbes. On peut en effet remarquer sur cette figure que la contrainte de début de transformation reste la même pour les trois vitesses de déformation ; toutefois, lors de la transition de phase, les courbes obtenues montrent que plus la vitesse de chargement est grande, plus la contrainte nécessaire pour poursuivre la transformation de phase est élevée.

Les courbes de la figure 4.8 traduisant l'évolution de la température de la plaque en fonction de la vitesse de déformation montrent que la transformation de phase directe s'accompagne d'une production de chaleur qui fait croître la température de la plaque. Durant la transformation de phase inverse, on assiste à un effet thermique contraire ; la température de la plaque diminue due à une absorption de la chaleur. Comme dans le cas de la réponse contrainte-déformation de la plaque, les variations de température enregistrées au sein de la plaque sont influencées par la vitesse de déformation. Si elles peuvent-être négligées dans le cas de la vitesse de déformation

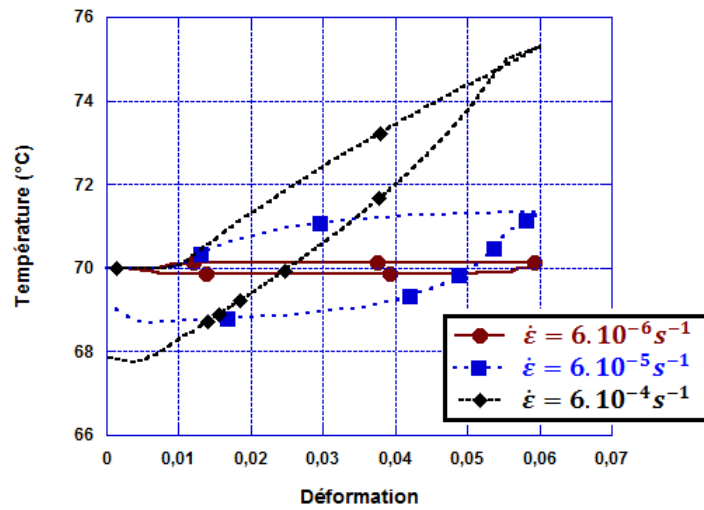
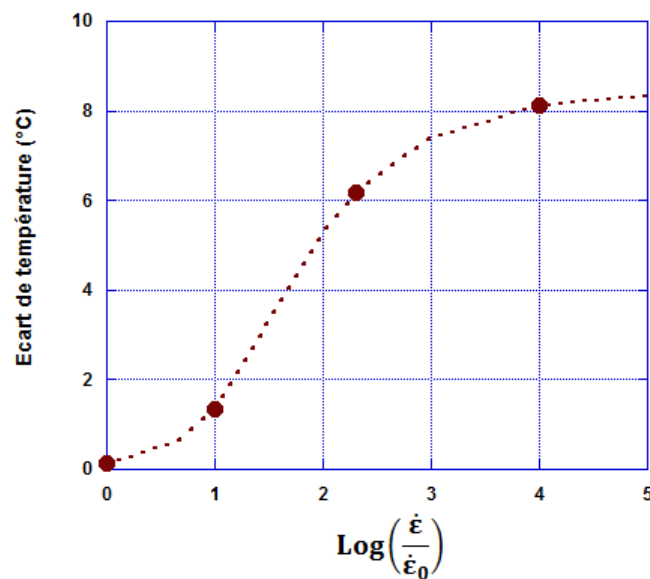


FIGURE 4.8 – Variation de la température de la plaque en fonction de la vitesse de déformation.

la plus faible ( $6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ), elles sont toutefois importantes pour les vitesses  $6 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  et  $6 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

FIGURE 4.9 – Variation de la température de la plaque en fonction de la vitesse de déformation (avec  $\dot{\epsilon}_0 = 6 \times 10^{-6}$  et  $\dot{\epsilon} \geq \dot{\epsilon}_0$ ).

Les figures 4.9 et 4.10 représentent respectivement les courbes des écarts observés pour la température de la plaque et la contrainte maximale atteinte en fonction du logarithme du rapport  $\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_0$ , entre les vitesses de déformation  $\dot{\epsilon}$  et  $\dot{\epsilon}_0$  lors de la transformation de phase directe.  $\dot{\epsilon}_0$  correspond à la vitesse de déformation de  $6 \times 10^{-6}$  et  $\dot{\epsilon} \geq \dot{\epsilon}_0$ . Ces courbes montrent que, plus la vitesse de déformation est grande, plus la température de la plaque augmente. De même, la

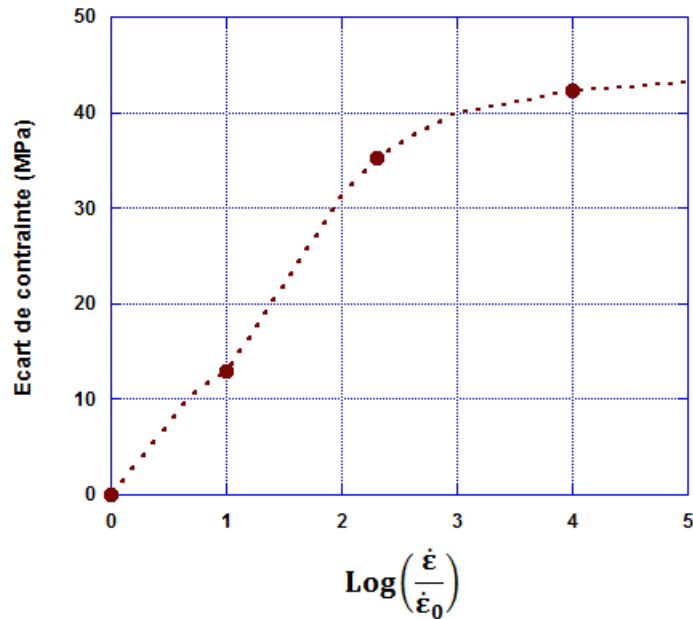


FIGURE 4.10 – Variation de la contrainte maximale atteinte au sein de la plaque en fonction de la vitesse de déformation.

contrainte de fin de transformation de phase augmente avec la vitesse de déformation. Ces observations restent cohérentes avec les résultats disponibles dans la littérature (voir par exemple les références [56], [13], [22],...).

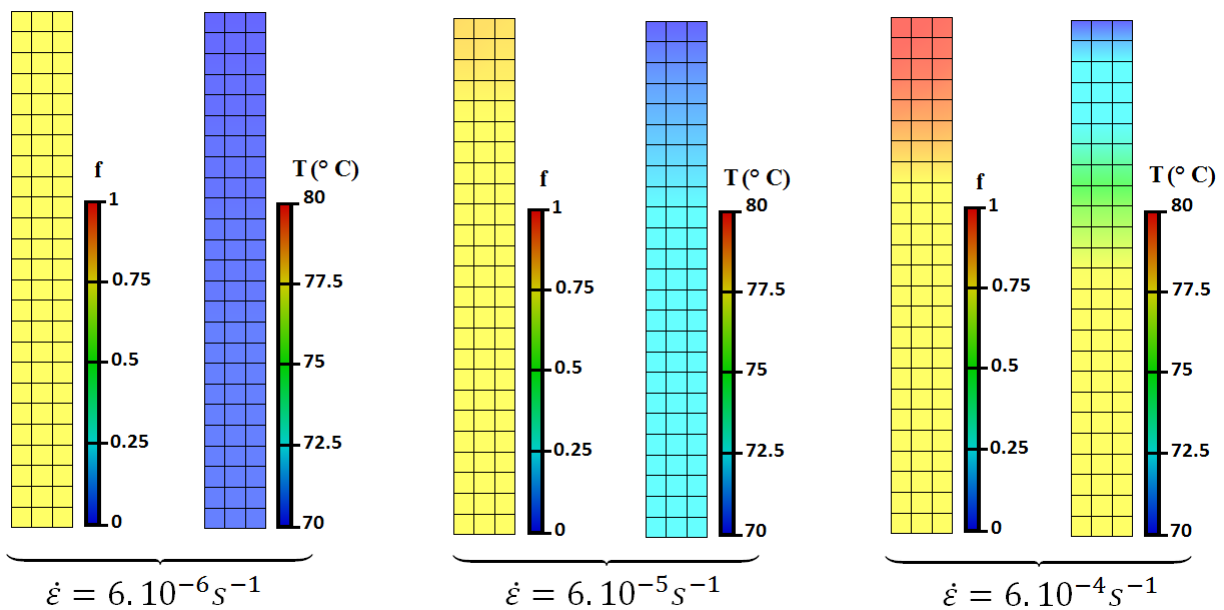


FIGURE 4.11 – Distribution spatiale de la fraction volumique de martensite et champ de température dans la plaque pour différentes vitesses de déformation.

Les conditions aux limites thermiques imposées dans ces simulations entraînent une hétérogénéité dans le champ de la température de la plaque lorsque la vitesse de déformation est élevée. Cette hétérogénéité influence en retour la transformation de phase au sein de la plaque ; cette dernière se produit de manière non uniforme. La figure 4.11 montre à la fin du chargement, la répartition de la fraction volumique de martensite dans la plaque, de même que son champ de température. Pour la vitesse de  $6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , la figure montre une distribution beaucoup plus uniforme, la température de la plaque est restée sensiblement égale à la température initiale, la transformation de phase est également uniforme. En revanche, on peut noter pour les vitesses de déformations de  $6 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  et  $6 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  une hétérogénéité dans le champ de température et dans les distributions de la quantité de martensite au sein de plaque. Pour ces deux cas, les isocouleurs de droite, représentant le champ de températures dans la plaque, montrent que la température du bord supérieur de la plaque (ligne AB) est restée fixe et égale à la température initiale imposée ( $70^\circ \text{ C}$ ) ; on observe alors une augmentation de la température à partir de cette ligne vers l'intérieur de la plaque au cours du chargement, créant ainsi un gradient de température dans la plaque. Le maximum de température est enregistré au milieu de la plaque. Les isocouleurs de gauche montrent la distribution spatiale de la fraction volumique de martensite au sein de la plaque. La quantité maximale de martensite se concentre au niveau du bord supérieur de la plaque avec un effet de gradient dans le reste de la plaque : la quantité de martensite diminue à l'intérieur de la plaque. Ces isocouleurs montrent une cohérence dans les résultats obtenus : plus la température est élevée, plus l'austénite est stable rendant la transformation de phase plus difficile. Ainsi la transformation de phase s'est produite beaucoup plus facilement dans les voisinages immédiats du bord supérieur de la plaque (on atteint la saturation) que dans les zones situées à l'intérieur de la plaque (on transforme beaucoup plus difficilement dans ces zones).

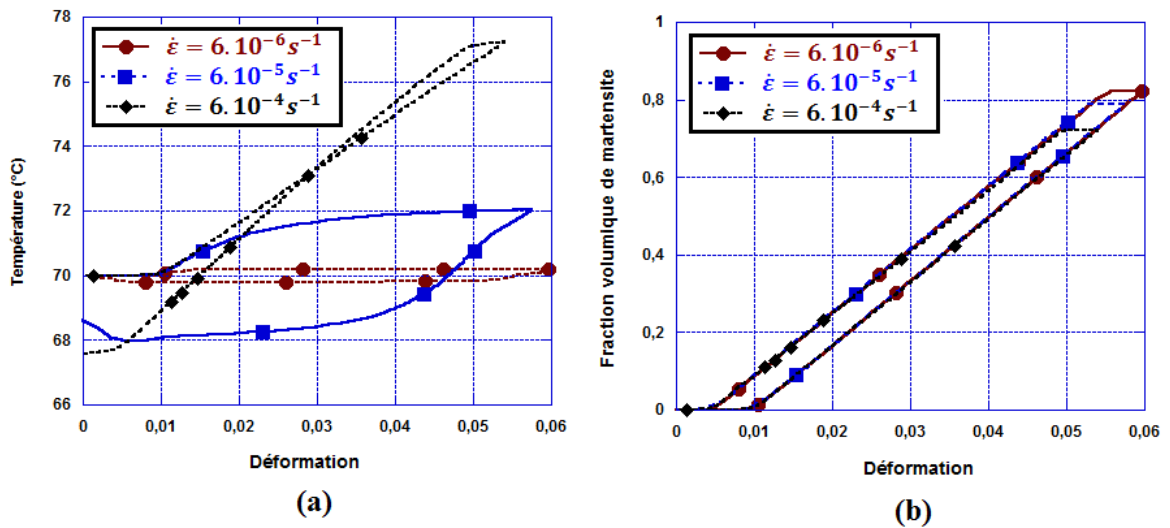


FIGURE 4.12 – Réponse dans l'élément  $E_2$  pour les différentes vitesses : (a) Variation de la température en fonction de la déformation ; (b) Evolution de la fraction volumique de martensite en fonction de la déformation.

En résumé, l'augmentation de la température est directement liée à l'augmentation de la vitesse de déformation : plus la vitesse de déformation augmente, plus la température augmente et moins on transforme. Les figures 4.12 (a) et (b) viennent confirmer ce résultat ; elles illustrent

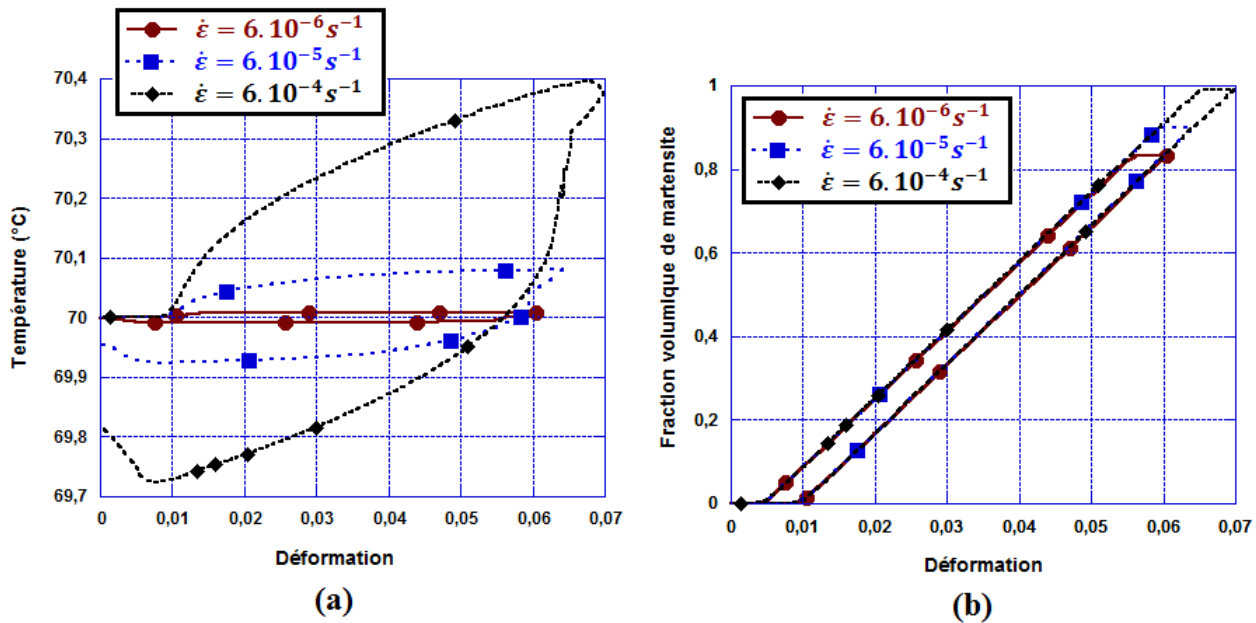


FIGURE 4.13 – Réponse dans l’élément E<sub>1</sub> pour les différentes vitesses : (a) Variation de la température en fonction de la déformation ; (b) Evolution de la fraction volumique de martensite en fonction de la déformation.

les évolutions dans l’élément E<sub>2</sub> (défini sur la figure 4.3) de la température et de la fraction volumique de martensite en fonction de la déformation pour les différentes vitesses de déformations. De la même manière, les figures 4.13 (a) et (b) reproduisent ces évolutions (respectivement la température et la fraction volumique de martensite en fonction de la déformation pour les différentes vitesses de déformation) dans l’élément E<sub>1</sub>. La température de la ligne AB étant maintenue fixe durant le chargement, tout se passe comme si on s’opposait à l’augmentation de la température dans l’élément E<sub>1</sub> ; on enregistre alors un très faible écart de température dans cet élément situé dans le voisinage immédiat de la ligne AB (un écart maximal d’environ 0.4° C pour la plus grande vitesse de déformation ( $6 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ )). La température n’augmentant pratiquement pas, la transformation de phase évolue beaucoup plus facilement ; plus la vitesse de déformation augmente plus on transforme dans l’élément E<sub>1</sub> contrairement à ce qui est observé dans l’élément E<sub>2</sub>.

Les courbes contrainte-déformation pour les différentes vitesses de déformation, associées respectivement aux éléments E<sub>1</sub> et E<sub>2</sub> sont indiquées sur les figures 4.14 (a) et (b). On note essentiellement un niveau de déformation plus important dans l’élément E<sub>1</sub> que dans l’élément E<sub>2</sub> ; de plus, l’augmentation de la vitesse de déformation n’influence pas la contrainte de transformation dans cet élément ; cette influence est cependant plus visible dans le cas de l’élément E<sub>2</sub>. Comme nous l’avons expliqué auparavant, l’augmentation de la vitesse de déformation favorise la transformation dans l’élément E<sub>1</sub>, ce qui explique le niveau de déformation plus élevé atteint au sein de cet élément. Sa température, présentant une très faible sensibilité à la vitesse de déformation, on n’observe donc pas une sensibilité de la contrainte de transformation à la vitesse de déformation au sein de cet élément. Quant à l’élément E<sub>2</sub>, sa température augmente avec la vitesse de déformation, c’est ce qui explique la sensibilité de la contrainte à la vitesse déformation au sein de cet élément.

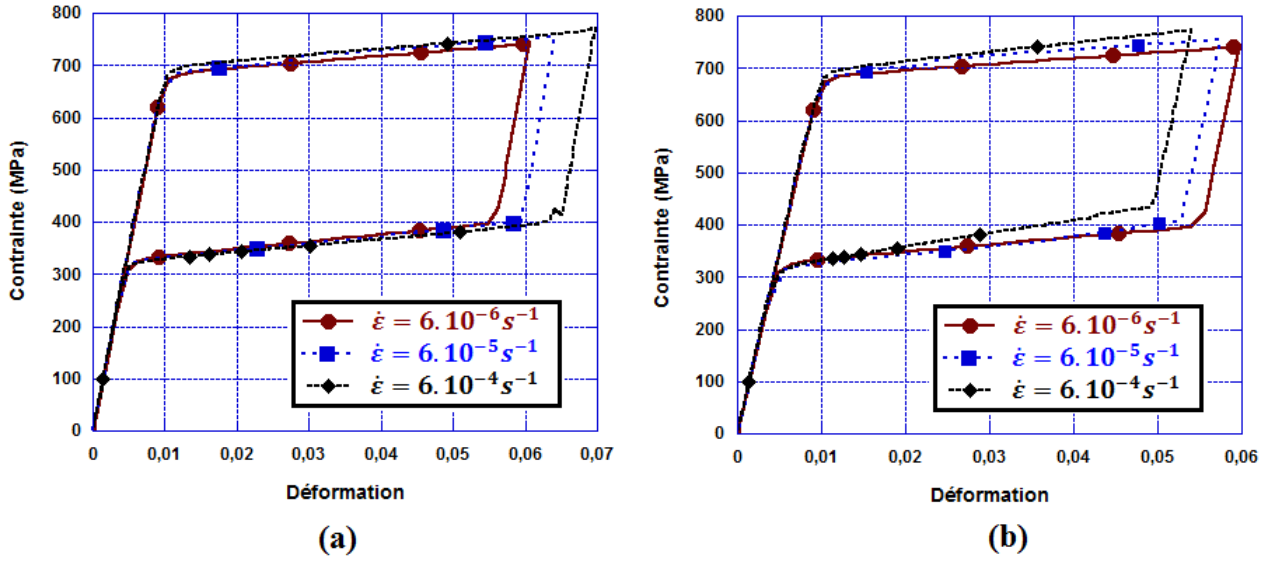


FIGURE 4.14 – Contrainte-déformation dans les éléments : (a)  $E_1$  ; (b)  $E_2$ .

Ces différents résultats montrent bien l'aptitude du modèle présenté dans la section 4.3 à la prise en compte des effets de modification de la température induite par la chaleur latente de transformation de phase. Dans la section suivante, nous proposons une extension non-locale de celui-ci.

## 4.5 Prise en compte de l'effet de la chaleur latente de transformation dans une approche non-locale

L'étude des instabilités dans les structures minces en AMF est le principal sujet abordé dans le présent travail de thèse. Comme indiqué dans le premier chapitre de ce document, ces instabilités se manifestent par des phénomènes de localisation qui se produisent au cours de la transformation de phase. La modélisation basée sur une approche non-locale constitue comme nous l'avons montré à travers de nombreux exemples dans le chapitre précédent, un outil efficace pour la description de telles instabilités. Toutefois, ce modèle, tel que présenté dans le chapitre 3, ne prend pas en compte la source de chaleur produite par la transformation de phase. Il ne peut donc pas être utilisé dans l'analyse du comportement des structures fines en AMF soumises à des sollicitations rapides où la chaleur latente de transformation n'aura pas le temps pour se dissiper. Pour outrepasser cette limitation, nous allons procéder comme dans la section 4.3 en résolvant simultanément les équations du modèle non-locale obtenu dans le chapitre 3, avec l'équation de la chaleur (relation 4.26).

### 4.5.1 Problème couplé thermomécanique non-locale

Le problème couplé thermomécanique non-locale à résoudre ici est constitué des équations de l'équilibre mécanique (dans le cas statique), de la chaleur (4.26), et de l'EDP définissant l'évolution de la fraction volumique non-locale de martensite (relation (3.14)), établie dans le

chapitre 3. Ainsi le nouveau système d'équations défini sur un domaine  $\Omega$  donné et traduisant le problème à résoudre est donné par :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \Sigma(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla(-k\nabla T(\mathbf{x})) = \beta_0 \dot{T}(\mathbf{x}) + \beta_1 T(\mathbf{x}) + \beta_2 \\ \bar{f}(\mathbf{x}) - l^2 \nabla^2 \bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.46)$$

Où  $\mathbf{x}$  représente un point matériel du domaine  $\Omega$ ;  $\beta_0 = -\rho C_p$ ,  $\beta_1 = -\frac{\partial A_f}{\partial T} \dot{f}$  et  $\beta_2 = A_f \dot{f}$ . Les valeurs de  $\beta_1(\mathbf{x})$ ,  $\beta_2(\mathbf{x})$  en tout point du domaine  $\Omega$  sont déterminées à partir du modèle de comportement non-local développé dans le chapitre 3, de même que la contrainte  $\Sigma(\mathbf{x})$  et la fraction volumique  $f(\mathbf{x})$ .

Le système d'équations (4.46) est complété par les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \Sigma \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{T}^\sigma \quad \text{sur } \Gamma^\Sigma \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^d \quad \text{sur } \Gamma^u \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= q^d \quad \text{sur } \Gamma^q \\ T &= T^d \quad \text{sur } \Gamma^T \\ T(\mathbf{x}, t=0) &= T_0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \nabla \bar{f} &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (4.47)$$

où  $\Gamma$  représente la frontière du domaine  $\Omega$  et de normale unitaire  $\mathbf{n}$ ; avec  $\Gamma^u \cap \Gamma^\Sigma = \emptyset$  et  $\Gamma^u \cup \Gamma^\Sigma = \Gamma$ ;  $\Gamma^q \cap \Gamma^T = \emptyset$  et  $\Gamma^q \cup \Gamma^T = \Gamma$

Les équations (4.46) et ((4.47) seront donc résolues conjointement avec les équations de la loi de comportement non-local (voir tableau (3.1)).

#### 4.5.2 Formulation faible

En vue d'établir la forme faible des équations du système (4.46) et (4.47), nous admettons l'existence de trois espaces de champs virtuels  $W_u$ ,  $W_T$  et  $W_{\bar{f}}$  respectivement associés aux espaces des déplacements, de la température et de la fraction volumique non-locale de martensite :

$$\begin{aligned} W_u &= \{\mathbf{w}_u \mid \mathbf{w}_u \in [C^0]^2, \mathbf{w}_u = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma^u\} \\ W_T &= \{w_T \mid w_T \in [C^0], w_T = 0 \text{ sur } \Gamma^T\} \\ W_{\bar{f}} &= \{w_{\bar{f}} \mid w_{\bar{f}} \in [C^0]\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

En multipliant les équations de l'équilibre mécanique et de l'équilibre thermique du système d'équations (4.46) respectivement par  $\mathbf{w}_u$  et  $w_T$ , nous obtenons les deux équations ci-dessous :

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \nabla \Sigma d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{w}_u \in W_u \quad (4.49)$$

$$\int_{\Omega} w_T [\nabla(-k\nabla T)] d\Omega = \int_{\Omega} w_T (\beta_0 \dot{T} + \beta_1 T + \beta_2) d\Omega \quad \forall w_T \in W_T \quad (4.50)$$

De même en multipliant par  $w_{\bar{f}}$  l'équation donnant le champ non-local  $\bar{f}(\mathbf{x})$  dans le système d'équations (4.46), on obtient :

$$\int_{\Omega} w_{\bar{f}} (\bar{f} - l^2 \nabla^2 \bar{f}) d\Omega = \int_{\Omega} w_{\bar{f}} f d\Omega \quad \forall w_{\bar{f}} \in W_{\bar{f}} \quad (4.51)$$



En effectuant une intégration par parties des équations (4.49), (4.50) et (4.51) qui tient compte des conditions aux limites imposées (4.47) et en appliquant le théorème de la divergence, on aboutit aux équations suivantes :

$$\int_{\Omega} [\nabla \mathbf{w}_u]^T : \Sigma d\Omega - \int_{\Gamma^{\Sigma}} \mathbf{w}_u \cdot \mathbf{T}^{\sigma} d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{w}_u \in W_u \quad (4.52)$$

$$\int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla w_T d\Omega + \int_{\Gamma^q} q^d w_T d\Gamma = \int_{\Omega} w_T (\beta_0 \dot{T} + \beta_1 T + \beta_2) d\Omega \quad \forall w_T \in W_T \quad (4.53)$$

$$\int_{\Omega} (w_{\bar{f}} \bar{f} + l^2 \nabla w_{\bar{f}} \cdot \nabla \bar{f}) d\Omega - \int_{\Omega} w_{\bar{f}} f d\Omega = 0 \quad \forall w_{\bar{f}} \in W_{\bar{f}} \quad (4.54)$$

Nous rappelons que dans l'équation (4.53) les dérivées  $\dot{T}$  de la température et  $\dot{f}$  de la fraction volumique locale de martensite apparaissant dans les variables  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont données par les relations (4.34).

### 4.5.3 Discrétisation spatiale

Dans la perspective de résoudre les équations du problème couplé thermomécanique non-local exprimées sous leur forme faible par les équations (4.52), (4.53) et (4.54) en 2D, un élément fini spécial ayant quatre degrés de liberté par noeud est développé. Il s'agit comme indiqué sur la figure 4.15 des deux déplacements dans le plan, de la température et de la fraction volumique non-locale de martensite.

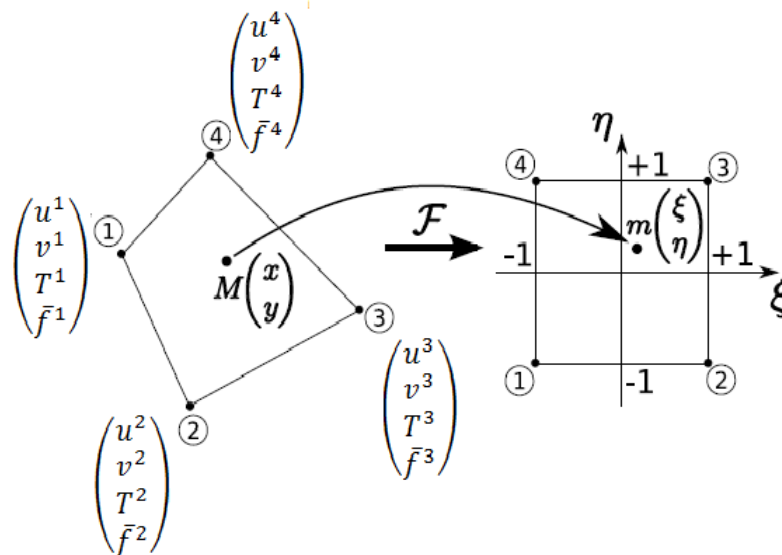


FIGURE 4.15 – Élément fini quadrangulaire développé avec les quatre degrés de liberté retenus (élément associé à un élément de référence).

Comme dans le cas des équations (3.23) à (3.27) et (4.35) à (4.38), le vecteur déplacement, la température et la fraction volumique non-locale de martensite en un point de l'élément de

référence de coordonnées  $(\xi, \eta)$  peuvent être évalués à partir des matrices des fonctions d'interpolation  $[N^u]$ ,  $[N^{\bar{f}}]$ ,  $[N^{Th}]$  et des vecteurs degrés de libertés nodaux :

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = [N^u]\{u\} \quad ; \quad T(\xi, \eta) = [N^{Th}]\{T\} \quad \text{et} \quad \bar{f}(\xi, \eta) = [N^{\bar{f}}]\{\bar{f}\} \quad (4.55)$$

De même, le vecteur déplacement virtuel, la température et la fraction volumique non-locale virtuelles sont données par :

$$\mathbf{w}_u(\xi, \eta) = [N^u]\{w_u\} \quad ; \quad w_T(\xi, \eta) = [N^{Th}]\{w_T\} \quad \text{et} \quad w_f(\xi, \eta) = [N^{\bar{f}}]\{w_{\bar{f}}\} \quad (4.56)$$

$[N^{\bar{f}}]$ ,  $[N^{Th}]$  et  $[N^u]$  sont les matrices d'interpolation dont les composantes sont les fonctions de forme ; elles sont respectivement données par les équations (3.27), (3.28) et (4.27).

Le vecteur gradient de la fraction volumique non-locale de martensite, le gradient de température, le tenseur des déformations (exprimé sous la forme d'un vecteur) ainsi que leurs correspondants virtuels sont connus et exprimés sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \{\nabla \bar{f}\} &= \begin{Bmatrix} \bar{f}_{,x} \\ \bar{f}_{,y} \end{Bmatrix} = [B^{\bar{f}}]\{\bar{f}\} \quad \text{et} \quad \{\nabla w_{\bar{f}}\} = \begin{Bmatrix} w_{\bar{f},x} \\ w_{\bar{f},y} \end{Bmatrix} = [B^{\bar{f}}]\{w_{\bar{f}}\} \\ \{\nabla T\} &= \begin{Bmatrix} T_{,x} \\ T_{,y} \end{Bmatrix} = [B^{Th}]\{T\} \quad \text{et} \quad \{\nabla w_T\} = \begin{Bmatrix} w_{T,x} \\ w_{T,y} \end{Bmatrix} = [B^{Th}]\{w_T\} \\ \{E\} &= \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{Bmatrix} = [B^u]\{u\} \quad \text{et} \quad \{\nabla w_u\} = [B^u]\{w_u\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Les matrices  $[B^{\bar{f}}]$ ,  $[B^{Th}]$ , et  $[B^u]$  sont déterminées à partir de la matrice des gradients des fonctions de forme et des vecteurs nodaux  $\{\bar{f}\}$ ,  $\{T\}$  et  $\{u\}$  respectivement.

En tenant compte des équations (4.55 à 4.57), nous pouvons réécrire les formes faibles (4.52 à 4.54) des équations du problème à résoudre de la manière suivante :

$$\int_{\Omega_e} [B^u]^T : \{\Sigma(u, T, \bar{f})\} d\Omega - \int_{\Gamma_e^\Sigma} [N^u]^T \{T^\sigma\} d\Gamma = \mathbf{R}_e^u(u, T, \bar{f}) = 0 \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} k[B^{Th}]^T [B^{Th}] \{T\}_{n+1} d\Omega - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T [N^{Th}] \left[ \beta_0 \left( \frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}_n}{\Delta t} \right) + \beta_1(u, T, \bar{f}) \{T\}_{n+1} \right] \\ - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T \beta_2(u, T, \bar{f}) d\Omega + \int_{\Gamma_e^q} [N^{Th}]^T q^d d\Gamma = \mathbf{R}_e^T(u, T, \bar{f}) = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\int_{\Omega_e} ([N^{\bar{f}}]^T [N^{\bar{f}}] + l^2 [B^{\bar{f}}]^T [B^{\bar{f}}]) d\Omega \{\bar{f}\} - \int_{\Omega_e} [N^{\bar{f}}]^T f(u, T, \bar{f}) d\Omega = \mathbf{R}_e^{\bar{f}}(u, T, \bar{f}) = 0 \quad (4.60)$$

Les trois équations (4.58) à (4.60) sont résolues simultanément ; on peut donc les mettre sous la forme d'un système unique d'équations à résoudre. Ce système est le suivant :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_e^u(u, T, \bar{f}) \\ \mathbf{R}_e^T(u, T, \bar{f}) \\ \mathbf{R}_e^{\bar{f}}(u, T, \bar{f}) \end{Bmatrix} = \{\mathbf{R}_e(u, T, \bar{f})\} = \{0\} \quad (4.61)$$

Le vecteur  $\{\mathbf{R}_e(u, T, \bar{f})\}$  est un vecteur résidu élémentaire constitué des résidus  $\mathbf{R}_e^u(u, T, \bar{f})$ ,  $\mathbf{R}_e^T(u, T, \bar{f})$ ,  $\mathbf{R}_e^{\bar{f}}(u, T, \bar{f})$ , respectivement liés aux équations de l'équilibre mécanique et thermique, et l'équation définissant la non-localité.

Tout comme dans le précédent paragraphe, le problème consiste à déterminer à chaque incrément, la correction  $\delta\Delta\mathbf{d}$  de l'incrément  $\Delta\mathbf{d}$  du vecteur des ddl qui permet de rétablir l'équilibre du vecteur résidu  $\{\mathbf{R}_e\}$ . Nous avons adopté la méthode itérative de Newton-Raphson pour la résolution des différentes équations. Nous pouvons résumer brièvement les étapes de cette résolution comme suit :

- le résidu  $\mathbf{R}_e$  étant "équilibré" à la fin de l'incrément  $n$  ( $\mathbf{R}_e(\mathbf{d}_n) = 0$ ), un incrément  $\Delta\mathbf{d}_{n+1}$  du vecteur des ddl permet de le déséquilibrer au début de l'incrément  $n + 1$ .
- Un développement de Taylor au premier ordre permet de calculer une correction  $\delta\Delta\mathbf{d}_{n+1}$  de l'incrément  $\Delta\mathbf{d}_{n+1}$ . Le problème étant non-linéaire, la valeur de la correction qui permet d'obtenir "l'équilibre" du résidu peut être déterminée au bout de plusieurs itérations. Le calcul de la correction nécessite de déterminer le vecteur résiduel nodal  $(\mathbf{R}_{e_{n+1}}^{(k)})$  (voir la relation (4.42) et la matrice tangente élémentaire  $\left(\left[\frac{\partial\mathbf{R}_{e_{n+1}}^{(k)}}{\partial\mathbf{d}_{n+1}^{(k)}}\right]\right)$  à l'instant  $t = t_{n+1}$  et à l'itération  $(k)$ . Cette matrice tangente élémentaire regroupe les sous-matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
 [K^{uu}]_{n+1}^{(k)} &= \int_{\Omega_e} [B^u]^T \left[ \frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\mathbf{E}} \right]_{n+1}^{(k)} [B^u] d\Omega \\
 [K^{uT}]_{n+1}^{(k)} &= \int_{\Omega_e} [B^u]^T \left[ \frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial T} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{Th}] d\Omega \\
 [K^{u\bar{f}}]_{n+1}^{(k)} &= \int_{\Omega_e} [B^u]^T \left[ \frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\bar{f}} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{\bar{f}}] d\Omega \\
 [K^{Tu}]_{n+1}^{(k)} &= - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T \left[ \left[ \frac{\partial\beta_1}{\partial\mathbf{E}} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{Th}] \{T\}_{n+1} \right] [B^u] \\
 &\quad - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T \left[ \frac{\partial\beta_2}{\partial\mathbf{E}} \right]_{n+1}^{(k)} [B^u] \\
 [K^{TT}]_{n+1}^{(k)} &= \int_{\Omega_e} k [B^{Th}]^T [B^{Th}] d\Omega - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T \left[ \left[ \frac{\partial\beta_1}{\partial T} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{Th}] \{T\}_{n+1} \right] [N^{Th}] d\Omega \\
 &\quad - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T [\beta_1]_{n+1}^{(k)} [N^{Th}] d\Omega - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T \left[ \frac{\partial\beta_2}{\partial T} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{Th}] d\Omega - \\
 &\quad \int_{\Omega_e} \frac{\beta_0}{(\Delta t)_{n+1}} [N^{Th}]^T [N^{Th}] d\Omega \\
 [K^{T\bar{f}}]_{n+1}^{(k)} &= - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T \left[ \left[ \frac{\partial\beta_1}{\partial\bar{f}} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{Th}] \{T\}_{n+1} \right] [N^{\bar{f}}] d\Omega \\
 &\quad - \int_{\Omega_e} [N^{Th}]^T \left[ \frac{\partial\beta_2}{\partial\bar{f}} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{\bar{f}}] d\Omega \\
 [K^{fu}]_{n+1}^{(k)} &= - \int_{\Omega_e} [N^{\bar{f}}]^T \left[ \frac{\partial f}{\partial\mathbf{E}} \right]_{n+1}^{(k)} [B^u] d\Omega
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K^{fT}]_{n+1}^{(k)} &= - \int_{\Omega_e} [N^{\bar{f}}]^T \left[ \frac{\partial f}{\partial T} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{Th}] d\Omega \\ [K^{f\bar{f}}]_{n+1}^{(k)} &= \int_{\Omega_e} ([N^{\bar{f}}]^T [N^{\bar{f}}] + l^2 [B^{\bar{f}}]^T [B^{\bar{f}}] - [N^{\bar{f}}]^T \left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{f}} \right]_{n+1}^{(k)} [N^{\bar{f}}]) d\Omega \end{aligned} \quad (4.62)$$

Le calcul des ces sous-matrices tangentes s'effectuera par la méthode de Gauss. Tous les opérateurs tangents apparaissant dans les expressions des sous-matrices sont directement extraits de la loi de comportement non-local. Les différentes équations du modèle couplé thermomécanique non-local obtenu sont implantées dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus via la routine utilisateur UEL. L'algorithme de résolution d'un tel problème est présenté dans la figure 4.16.

Compte tenu du temps imparti à ce travail, nous n'avons pas pu réaliser la programmation et l'exploitation de cet élément. Cette partie s'inscrit donc dans les perspectives du présent travail.

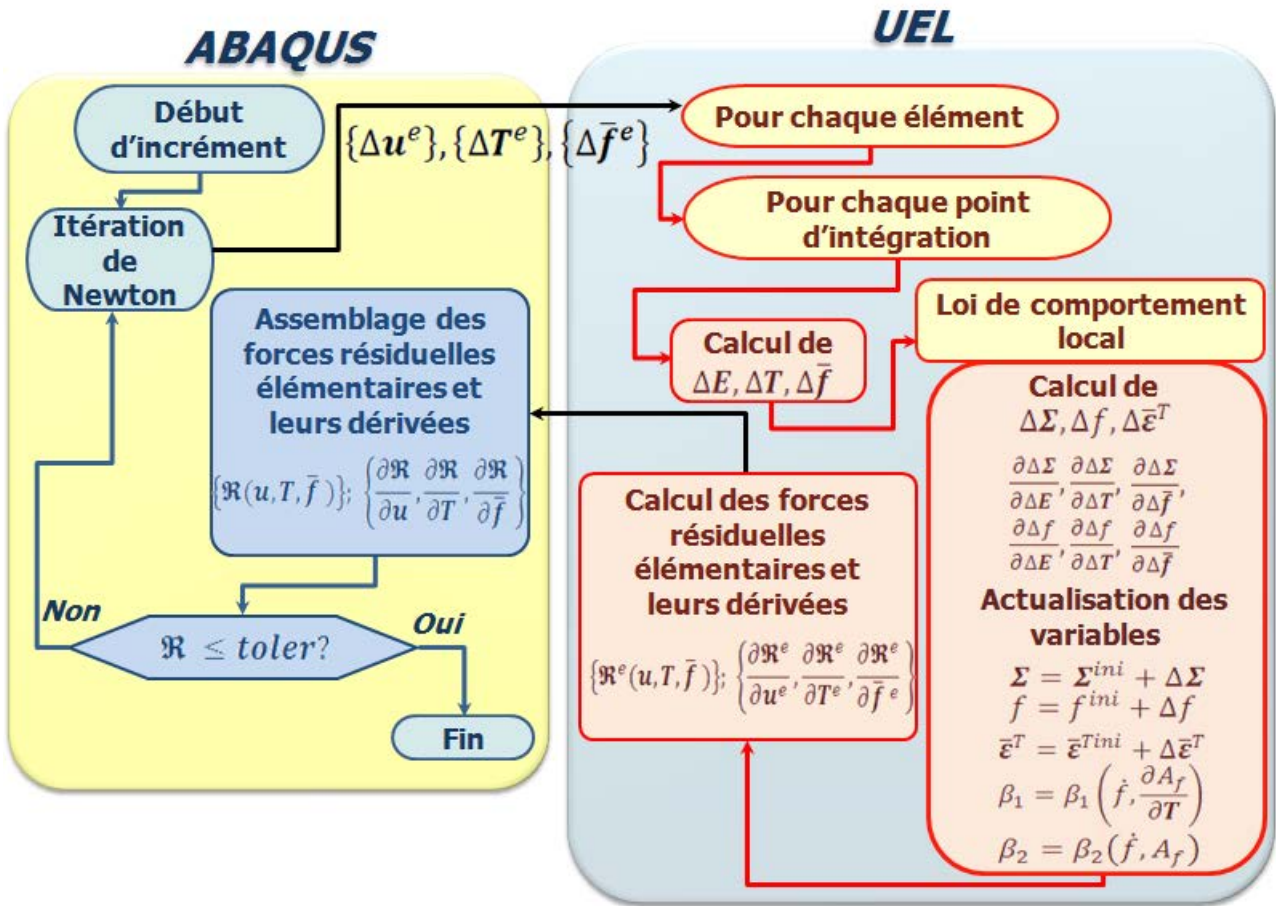


FIGURE 4.16 – Algorithme de résolution du problème couplé thermomécanique non-local.

## 4.6 Conclusion

Le présent chapitre était consacré à la prise en compte des effets de la chaleur latente de transformation de phase dans les modèles de comportement local et non-local développés respec-

tivement dans les chapitres 2 et 3. L'origine de ces effets étant la modification de la température induite par la chaleur latente. La mise en place de l'équation de la chaleur permettant de décrire le comportement thermique du matériau lors de la transformation de phase a été jugée nécessaire.

Le modèle couplé thermomécanique obtenu dans le cadre local a été implanté dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus. Les simulations réalisées dans le cas des conditions aux limites n'autorisant pas d'échange de chaleur avec l'extérieur donnent des résultats tout à fait cohérents et attestent de l'efficacité du modèle à décrire les effets thermiques accompagnant la transition de phase dans les AMF.

Des développements supplémentaires sont nécessaires en vue d'améliorer ce modèle et d'étendre ces capacités d'analyse à n'importe quel type de conditions aux limites thermiques imposées. L'implémentation du modèle établi dans le cadre non-local est également nécessaire pour ouvrir d'autres champs d'études et approfondir les études sur les phénomènes instables se produisant lors de la transformation de phase dans les AMF. Ces deux points que nous venons de soulever constituent les perspectives du travail réalisé dans ce chapitre. De plus, la confrontation des résultats issus des différentes simulations numériques à des résultats obtenus expérimentalement doit être réalisée ainsi que l'application à l'analyse d'une structure mince en AMF type actionneur ; ceci dans le but de valider l'approche proposée.



# Conclusion générale

Le présent travail de thèse s'inscrit dans le cadre général de la modélisation du comportement thermomécanique des films minces en AMF. En effet, due à leur taille relativement faible, il a été remarqué dans de nombreux travaux expérimentaux que la transition de phase dans les structures minces en AMF (films et fils) s'accompagne de certains phénomènes instables tels que la localisation de la transformation de phase. Le nombre restreint de modèles disponibles dans la littérature et consacrés à la description de ces phénomènes montre le besoin d'approfondir les études sur ce sujet et justifie également l'importance de réaliser des travaux de recherche sur la modélisation de ces phénomènes.

L'objectif de ces travaux, était de proposer un modèle non-local, de type gradient, du comportement thermomécanique des films minces en AMF ; capable de décrire, non seulement les différents comportements spécifiques aux AMF massifs, mais de prédire également de manière efficace les phénomènes instables observés dans les comportements des structures minces en AMF. Une extension du modèle non-local obtenu à la prise en compte des effets de la chaleur latente de transformation a été également effectuée. Les modèles développés serviront d'outil numérique d'aide à la conception et au dimensionnement par éléments finis d'applications de taille réduite et exploitant les propriétés des AMF, telles que les micro-systèmes (micro-amortisseurs, micro-actionneurs, etc.).

Le travail réalisé dans le présent document est scindé en plusieurs étapes. Dans la première, un modèle macroscopique du comportement thermomécanique des AMF initialement proposé par Bertrand Peultier [70], puis amélioré et reformulé dans le cadre des travaux de thèse d'Yves Chemisky [10], et Arnaud Duval, [19] est décrit. Les principaux mécanismes physiques observés dans les AMF tels que la transformation de phase, l'orientation des variantes de martensite et l'accommodation des macles ont été décrits. Au total quatre variables, associées chacune à un mécanisme physique donné sont considérées dans le modèle.

Une analyse thermodynamique a permis de mettre en place les différentes conditions d'activations et les cinétiques d'évolution des différentes variables internes. Différents effets et comportement caractéristiques des AMF tels que la dissymétrie traction-compression, les boucles internes ont été également pris en compte dans le modèle.

Le modèle a ensuite été implanté dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus et sa capacité à prédire la réponse des AMF a été validée sur différents trajets complexes de chargements thermomécaniques.

La deuxième étape du présent travail était consacrée au développement du modèle non-local du comportement thermomécanique des AMF. Ce modèle est obtenu comme une extension au cadre non-local du modèle local présenté dans la première étape. Pour ce faire, la technique dite de formulation à gradient implicite a été adoptée. Elle consiste à enrichir le modèle local par l'introduction d'une nouvelle variable, définie à l'aide de termes de gradient d'ordre supérieur

d'une variable interne déjà présente dans le modèle local. Ainsi, la contrepartie non-locale de la fraction volumique de martensite a été définie. Elle est déterminée à partir d'une EDP intégrant la fraction volumique locale de martensite comme terme source.

L'implantation du modèle non-local obtenu dans le logiciel Abaqus a nécessité le développement d'un élément fini spécial où la fraction volumique non-locale de martensite apparaît comme un ddl additionnel en plus des déplacements dans le plan. Cette implantation a été réalisée via la routine utilisateur UEL.

L'outil numérique obtenu a été validé sur des exemples de simulations numériques intégrant des structures présentant deux types de défauts (géométrique ou matériel) et sur divers trajets de chargements thermomécaniques mettant en oeuvre les différents comportements observés dans les AMF. La cohérence des résultats et l'efficacité du modèle non-local à décrire les instabilités de comportement accompagnant la transition de phase dans les films minces en AMF attestent de la fiabilité du modèle à être utilisé comme un outil de dimensionnement d'applications en AMF de taille relativement réduite telles que les micro-actionneurs.

Le travail associé à la dernière étape des développements était la prise en compte des effets de la chaleur latente de transformation dans la modélisation du comportement des AMF. L'objectif visé consiste à mettre en place un modèle de comportement des AMF, dans ses versions locale et non-locale, capable de décrire les modifications de température induite par la chaleur latente de transformation de phase.

L'équation de la chaleur nécessaire pour capturer les variations de température lors de la transition de phase a donc été établie. Le modèle local couplé a été implanté dans le logiciel Abaqus. Les premiers résultats dans le cadre de l'étude de l'influence des effets thermiques dus à la transformation de phase sur le comportement mécanique d'un AMF superélastique et dans des conditions thermiques où les échanges de chaleur avec l'environnement extérieur ne sont pas considérés, se révèlent très concluants et justifient de l'efficacité de l'approche proposée pour la description des effets de la chaleur latente de transformation dans le comportement des AMF.

Les perspectives des travaux réalisés dans le cadre de cette thèse sont nombreuses. Les toutes premières concernent le modèle du chapitre 4, dédié à la prise en compte des effets de la chaleur latente de transformation de phase. Ce dernier demande des développements supplémentaires liés à l'implantation de sa version non-locale dans un code de calcul par éléments finis, pour une meilleure exploitation et un pouvoir d'analyse plus étendu. Il est également nécessaire d'étendre les capacités d'analyse du modèle à la prise en compte du transfert de chaleur par convection et à des études impliquant la dynamique par l'introduction de la force d'accélération dans l'équation de l'équilibre mécanique.

Les travaux qui s'inscrivent à la suite de ces premières perspectives sont de nature expérimentale. En effet des campagnes d'essais expérimentaux sont en cours en vue de caractériser le paramètre de longueur interne lié à la microstructure du matériau et des facteurs géométriques. De même, une confrontation des résultats expérimentaux et numériques obtenus à partir des différents modèles proposés s'avère nécessaire. Enfin, les modèles doivent être appliqués à l'analyse d'une structure mince telle qu'une micro-pompe.



# A

## Calcul des matrices $[B^u]$ et $[B^{\bar{f}}]$

En tout point de coordonnées  $(\xi, \eta)$  de l'élément de référence, le vecteur déplacement est déterminé à partir de la relation suivante :

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = [N^u]\{u\} \quad (\text{A.1})$$

Avec :

$$\{u\} = \{u^1 \ v^1 \ u^2 \ v^2 \ u^3 \ v^3 \ u^4 \ v^4\}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(\xi, \eta) = [N^u]\{u\} \quad (\text{A.2})$$

La matrice d'interpolation des déplacements  $[N^u]$  est donnée par :

$$[N^u] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

où les fonctions  $N_i$  ( $i = 1$  à  $4$ ) sont les fonctions de formes linéaires définies par :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}; & N_2(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}; & N_4(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

L'équation de compatibilité de la déformation macroscopique s'écrit :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u}) \quad (\text{A.5})$$

En 2D contraintes planes, le vecteur représentant le tenseur des déformations s'exprime l'aide du gradient des déplacements par la relation :

$$\{E\} = \left\{ \begin{array}{c} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{array} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[M^E]} \left\{ \begin{array}{c} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{array} \right\} \quad (\text{A.6})$$

Pour exprimer le gradient du vecteur des déplacements dans l'élément de référence, on introduit le jacobien  $\mathcal{J}$  suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} = [\mathcal{J}] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (\text{A.7})$$

La relation inverse nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} = [\mathcal{J}]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} \quad (\text{A.8})$$

Le jacobien  $[\mathcal{J}]$  est calculé à partir des fonctions d'interpolation et des coordonnées nodales :

$$[\mathcal{J}] = \left[ \begin{array}{cccc} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \\ x^4 & y^4 \end{array} \right] \quad (\text{A.9})$$

Ainsi le gradient de déplacement dans l'élément spatial s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[ \begin{array}{cc} [\mathcal{J}]^{-1} & [0] \\ [0] & [\mathcal{J}]^{-1} \end{array} \right]}_{[M^T]} \left\{ \begin{array}{c} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{array} \right\} \quad (\text{A.10})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[ \begin{array}{cccccc} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{array} \right]}_{[M^{grad}]} \left\{ \begin{array}{c} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \\ u^3 \\ v^3 \\ u^4 \\ v^4 \end{array} \right\} \quad (\text{A.11})$$

La matrice  $[M^T]$  dans la relation (A.10) permet de prendre en compte la transformation de l'élément réel vers l'élément de référence.

En tenant compte des relations (A.6), (A.10) et (A.11), nous pouvons écrire :

$$\{E\} = \left\{ \begin{array}{c} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{array} \right\} = [M^E] [M^T] [M^{grad}] \left\{ \begin{array}{c} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \\ u^3 \\ v^3 \\ u^4 \\ v^4 \end{array} \right\} = [B^u] \left\{ \begin{array}{c} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \\ u^3 \\ v^3 \\ u^4 \\ v^4 \end{array} \right\} \quad (\text{A.12})$$

La matrice  $[B^u]$  reliant le vecteur représentant le tenseur des déformations au vecteur des déplacements nodaux est donc déterminée par la relation :

$$[B^u] = [M^E][M^T][M^{grad}] \quad (\text{A.13})$$

On procède de la même manière pour déterminer la matrice  $[B^{\bar{f}}]$ . En tout point de coordonnées  $(\xi, \eta)$  de l'élément de référence, la fraction volumique non-locale de martensite s'écrit :

$$\bar{f}(\xi, \eta) = [N^{\bar{f}}]\{\bar{f}\} \quad (\text{A.14})$$

Avec :

$$[N^{\bar{f}}] = [ \begin{array}{cccc} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{array} ] \quad \text{et} \quad \{\bar{f}\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{f}^1 \\ \bar{f}^2 \\ \bar{f}^3 \\ \bar{f}^4 \end{array} \right\} \quad (\text{A.15})$$

Le gradient de la fraction volumique non-locale de martensite est donné par la relation :

$$\{\nabla \bar{f}\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{f}_{,x} \\ \bar{f}_{,y} \end{array} \right\} = [\mathcal{J}]^{-1} \left[ \begin{array}{cccc} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{f}^1 \\ \bar{f}^2 \\ \bar{f}^3 \\ \bar{f}^4 \end{array} \right\} = [B^{\bar{f}}] \left\{ \begin{array}{c} \bar{f}^1 \\ \bar{f}^2 \\ \bar{f}^3 \\ \bar{f}^4 \end{array} \right\} \quad (\text{A.16})$$

La matrice  $[B^{\bar{f}}]$  est donc déterminée par la relation :

$$[B^{\bar{f}}] = [\mathcal{J}]^{-1} \left[ \begin{array}{cccc} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{array} \right] \quad (\text{A.17})$$



# Bibliographie

- [1] J. Arghavani, F. Auricchio, R. Naghdabadi, A. Reali, and S. Sohrabpour. A 3D phenomenological constitutive model for shape memory alloys under multiaxial loadings. *International Journal of Plasticity*, 26, pp. 976-991, 2010.
- [2] K. M. Armattoe, M. Haboussi, T. Ben Zineb. A 2D finite element based on a nonlocal constitutive model describing localization and propagation of phase transformation in shape memory alloy thin structures. *International Journal of Solids and Structures*, 51, pp. 1208-1220, 2014.
- [3] Z. P. Bažant and F. P. Lin Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 114, pp. 2493-2510, 1988.
- [4] Z. P. Bažant and J. Pijaudier-Cabot Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics ASME*, 55, pp. 287-294, 1988.
- [5] Z. P. Bažant and J. Ožbolt Nonlocal microplane model for fracture, damage and size effect in structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 116, pp. 2485-2505, 1990.
- [6] Y. Bellouard. Shape memory alloys for microsystems : A review from a material research perspective. *Material Science and Engineering A*, 481-482, pp. 582-589, 2008.
- [7] H. J. C. Berendsen, J. P. M. Postma, W. F. van Gunsteren, A. DiNola, and J. R. Haak. Molecular dynamics with coupling to an external bath. *Journal of Chemical Physics*, 81, pp. 3684-3690, 1984.
- [8] C. Bouvet, S. Calloch, and C. Lexcellent. A phenomenological model for pseudoelasticity of shape memory alloys under multiaxial proportional and nonproportional loadings. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 23, pp. 37-61, 2004.
- [9] M. Brunet. Mécanique des matériaux et des structures. URL <http://www.docinsa.insa-lyon.fr/polycop/download.php?id=172222&id2=0>, Edition 2011-2012.
- [10] Y. Chemisky. *Modélisation du comportement macroscopique des alliages à mémoire de forme - Application aux matériaux composites*. Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine de Metz, 2009.
- [11] Y. Chemisky, A. Duval, E. Patoor, and T. Ben Zineb. Constitutive model for shape memory alloys including phase transformation, martensitic reorientation and twins accommodation. *Mechanics of Materials*, 43, pp. 361-376, 2011.

- [12] Y. Chen and C. A. Schuh. Size effects in shape memory alloy microwires. *Acta Materialia*, 59, pp. 537-553, 2011.
- [13] D. Christ, and S. Reese. A finite element model for shape memory alloys considering thermomechanical couplings at large strains. *International Journal of Solids and Structures*, 46, pp. 3694–3709, 2009.
- [14] A. Chrysochoos, and R. Peyroux. Modélisation numérique des couplages en thermomécanique des solides. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 6, pp. 673-724, 1997.
- [15] C. B. Churchill, J. A. Shaw, and M. A. Iadicola. Tips and tricks for characterizing shape memory alloy wire : Part 2- Fundamental isothermal responses. *Experimental characterization of Active Material Series*, 33, pp. 51-62, 2009.
- [16] C. Collard et al. Simula+ project. <http://www.lpmm.fr/collard/simula%2B.html>.
- [17] H.-H. Dai and J. Wang. Instabilities induced by phase transformation fronts coalescence during the phase transitions in a thin SMA layer : Mechanism and analytical descriptions. *International Journal of Engineering Science*, 48, pp. 1146-1163, 2010.
- [18] H.-H. Dai and Z. Cai. An analytical study on the instability phenomena during the phase transitions in a thin strip under uniaxial tension. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60, pp. 691-710, 2012.
- [19] A. Duval. *Modélisation du comportement thermomécanique d'alliages à mémoire de forme. Application au dimensionnement de microsystèmes et extension en non-locale*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré Nancy 1, Nancy, 2009.
- [20] A. Duval, M. Haboussi, and T. Ben Zineb. Modelling of localization and propagation of phase transformation in superelastic SMA by a gradient nonlocal approach. *International Journal of Solids and Structures*, 48, pp. 1879–1893, 2011.
- [21] R.A.B. Engelen, M.G.D Geers, F.P.T Baaijens Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour. *International Journal of Plasticity*, 19, pp. 403-433, 2003.
- [22] D. Entemeyer. *Etude micromécanique du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme*. Thèse de doctorat, Université de Metz, 1996.
- [23] D. Entemeyer, E. Patoor, A. Eberhardt, and M. Berveiller. Strain rate sensitivity in superelasticity. *International Journal of Plasticity*, 16, pp. 1269-1288, 2000.
- [24] A. C. Eringen. A Unified Theory of Thermomechanical Materials. *International Journal of Engineering Science*, 4, pp. 179-202, 1966.
- [25] D. Favier, H. Louche, P. Schlosser, L. Orgéas, P. Vacher and L. Debove. Homogeneous and heterogeneous deformation mechanisms in an austenitic polycrystalline Ti-50.8 at.% Ni thin tube under tension. Investigation via temperature and strain fields measurements. *Acta Materialia*, 55, pp. 5310–5322, 2007.
- [26] C. P. Frick, S. Orso, and E. Arzt. Loss of pseudoelasticity in Nickel–Titanium sub-micron compression pillars. *Acta Materialia*, 55, pp. 3845–3855, 2007.

- 
- [27] C. P. Frick, B. G. Clark, S. Orso, P. Sonnweber-Ribic, and E. Arzt. Orientation-independent pseudoelasticity in small-scale NiTi compression pillars. *Scripta Materialia*, 59, pp. 7–10, 2008.
- [28] Y. Q. Fu, S. Zhang, M. J. Wu, W.M. Huang, H. J. Du, J.K. Luo, A. J. Flewitt, and W.I. Milne. On the lower thickness boundary of sputtered TiNi films for shape memory application. *Thin solid films*, 515, pp. 80-86, 2006.
- [29] X. Gao, M. Huang and L. C. Brinson. A multivariant micromechanical model for SMAs Part 1. Crystallographic issues for single crystal model. *International Journal Plasticity*, 16, pp. 1345-1369, 2000.
- [30] C. Grabe and O. T. Bruhns. On the viscous and strain rate dependent behavior of polycrystalline NiTi. *International Journal of Solids and Structures*, 45, pp. 1876-1895, 2008.
- [31] G. Guénil. *Techniques de l'ingénieur*, chapitre Alliages à mémoire de forme, pages M530 (1-14), 1995.
- [32] Y. J. He and Q. P. Sun. Effects of structural and material length scales on stress-induced martensite macro-domain patterns in tube configurations. *International Journal of Solids and Structures*, 46, pp. 3045-3060, 2009.
- [33] Y. J. He and Q. P. Sun. Scaling relationship on macroscopic helical domains in NiTi tubes. *International Journal of Solids and Structures*, 46, pp. 4242-4251, 2009.
- [34] Y. J. He and Q. P. Sun. Macroscopic equilibrium domain structure and geometric compatibility inelastic phase transition of thin plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52, pp. 198-211, 2010.
- [35] Y. J. He, H. Yin, R. Zhou, and Q. P. Sun. Ambient effect on damping peak of NiTi shape memory alloy. *Materials Letters* 64, pp. 1483-1486, 2010.
- [36] Y. J. He and Q.-P. Sun. On non-monotonic rate dependence of stress hysteresis of superelastic shape memory alloy bars. *International Journal of Solids and Structures*, 48, pp. 1688–1695, 2011.
- [37] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11, pp. 357-372, 1963.
- [38] M. Huang and L. C. Brinson. A multivariant model for single crystal shape memory alloy behavior. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46 (8), pp. 1379-1409, 1998.
- [39] A. Ishida and M. Sato. Thickness effect on shape memory behavior of Ti-50.0 at.%Ni thin film. *Acta Materialia*, 51, pp. 5571-5578, 2003.
- [40] M. Jirásek and Z. P. Bazant. *Inelastic analysis of structures*. Chapter 26, pp. 517-539. Wiley, 2002.
- [41] M. Jirásek. *Nonlocal theories in continuum mechanics*. *Acta Polytechnica*, 44, pp. 16-34, 2004.

- [42] M. Jirásek and S. Rolshoven *Comparison of integral-type nonlocal plasticity models for strain-softening materials*. International Journal of Engineering Science, 41, pp. 1553–1602, 2003.
- [43] O. Kastner, G. Eggeler, W. Weiss and G. J. Ackland. Molecular dynamics simulation study of microstructure evolution during cyclic martensitic transformations. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 59, pp. 1888-1908, 2011.
- [44] W. Khalil. *Développement d'outils de dimensionnement d'applications en alliages à mémoire de forme à base Fer : prise en compte du couplage transformation de phase - glissement plastique*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2012.
- [45] M. Kohl, E. Just, W. Pfleging and S. Miyazaki. SMA microgripper with integrated antagonism. Sensors and Actuators A, 83, pp. 208-213, 2000.
- [46] A. Krayani *Contribution à la modélisation non linéaire du comportement mécanique du béton et des ouvrages en béton armé et précontraint*. Thèse de doctorat, Ecole centrale de Nantes et Université de Nantes, 2007.
- [47] E. Kroner Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. International Journal of Solids and Structures, 3, pp. 731-742, 1967.
- [48] J. H. Kyung, B. G. Ko, Y. H. Ha, and G. J. Chung Design of a microgripper for micromanipulation of microcomponents using SMA wires and flexibles hinges. Sensors and Actuators A, 141, pp. 144-150, 2008
- [49] D.-C. Lagoudas. *Shape Memory Alloys - Modeling and Engineering Applications*. Springer. 2008.
- [50] S. Leclercq and C. LExcellent. A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 44 (6), pp. 953-980, 1996.
- [51] F. Legoll. *Méthodes moléculaires et multi-échelles pour la simulation numérique des matériaux*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2004.
- [52] Y. Liu and D. Favier. Stabilisation of martensite due to shear deformation via variant reorientation in polycrystalline NiTi. Acta Materialia, 48, pp.3489-3499, 2000.
- [53] Z. K. Lu and J. Weng. A self-consistent model for the stress-strain behavior of shape memory alloy polycrystals. Journal Acta Materialia, 46 (15), pp.5423-5433, 1998.
- [54] E. Makino, T. Mitsuya, and T. Shibata Fabrication of TiNi shape memory micro-pump. Sensors and Actuators A, 88, pp. 256-262, 2001
- [55] T. Merzouki, C. Collard, N. Bourgeois, T. Ben Zineb and F. Meraghni. Coupling between measured kinematic fields and multicrystal SMA finite element calculations. Mechanics of Materials, 42, pp. 72–95, 2010.
- [56] C. Morin, Z. Moumni, and W. Zaki. A constitutive model for shape memory alloys accounting for thermomechanical coupling. International Journal of Plasticity, 27, pp. 748–767, 2011.



- 
- [57] H. B. Muhlhaus, E. C. Aifantis. A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28, pp. 845–857, 1991.
- [58] G. Murasawa, S. Yoneyama, K. Miyata, A. Nishioka and T. Koda. Finite Element Analysis and Experimental Measurement of Deformation Behavior for NiTi Plate With Stress Concentration Part Under Uniaxial Tensile Loading. *Strain*, 47 (5), pp. 389–397, 2011.
- [59] J. Ortin, and A. Planes. Thermodynamics of thermoelastic martensitic transformations. *Acta Metallurgica*, 37(5), pp. 1433–1441, 1989.
- [60] M. Ould Moussa. *Modélisation du comportement dynamique non-linéaire des structures en matériaux à mémoire de forme*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, ParisTech, 2012.
- [61] S. Ozgen, and O. Adiguzel. Investigation of the thermoelastic phase transformation in a NiAl alloy by molecular dynamics simulation. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 65, pp. 861-865, 2004.
- [62] Q. Pan, and C. Cho. The investigation of a shape memory alloy micro-damper for MEMS Applications. *Sensors*, 7, pp. 1887-1900, 2007.
- [63] M. Panico, and L. C. Brinson. A three-dimensional phenomenological model for martensite reorientation in shape memory alloys. *Mechanics of Materials*, 55, pp. 2491-2511, 2007.
- [64] E. Patoor et M. Berveiller. *Technologie des alliages mémoire de forme*. *Traité des Nouvelles technologies*. Hermès. 1994.
- [65] E. Patoor, E. Eberhardt and M. Berveiller. Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys. *Journal de Physique IV*, C1-6, pp. 277–292, 1996.
- [66] R. H. J. Peerlings, R. De Borst and W. A. M Brekelmans. Wave propagation and localisation in non-local gradient enhanced damage models. *Journal de Physique IV*, 38, pp. 293-300, 1998.
- [67] R. H. J. Peerlings, M. G. D Geers, R. De Borst and W.A.M Brekelmans. A critical comparison of of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38, pp. 7723-7746, 2001.
- [68] R. H. J. Peerlings, L. H. Poh, M. G. D Geers. An implicit gradient plasticity-damage theory for predicting size effects in hardening and softening. *Engineering Fracture Mechanics*, 95, pp. 2-12, 2012.
- [69] B. Peultier, T. Ben Zineb, and E. Patoor. Macroscopic constitutive law of shape memory alloy thermomechanical behaviour. Application to structure computation by FEM. *Mechanics of Materials*, 38, pp. 510-524, 2006.
- [70] B. Peultier. *Alliages à mémoire de forme : modélisation et calcul de structures*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, Metz 2005.
- [71] R. Peyroux, A. Chrysochoos, C. Licht, and M. Lobel. Thermomechanical coupling and pseudoelasticity of shape memory alloys. *International Journal of Engineering Sciences*, 36 (4), pp. 489-509, 1998.

- [72] G. Pijaudier-Cabot and Z. P. Bažant. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 113, pp. 1512-1533, 1987.
- [73] P. Popov, and D. C. Lagoudas. A 3-D constitutive model for shape memory alloys incorporating pseudoelasticity and detwinning of self-accommodated martensite. *Mechanics of Materials*, 23, pp. 1679-1720, 2007.
- [74] B. Raniecki and C. Lexcellent. Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17 (2), pp. 185-205, 1998.
- [75] D. Reynaerls, J. Peirs, and H. Van Brussel. An implantable drug-delivery system based on shape memory alloy micro-actuation. *Sensors and Actuators A*, 61, pp. 455-462, 1997
- [76] G. Rio, D. Favier, and H. Desplats. Finite elements simulation of mechanical behaviour of shape memory alloys coupled with a non-stationary thermal field. *Journal de Physique IV*, 5, pp. 215-220, International Conference on Martensitic Transformation (ICOMAT 95), Lausanne, Switzerland, Aug. 20-25, 1995.
- [77] L. Saint-Sulpice, S. Arbab Chirani, and S. Calloch. A 3D super-elastic model for shape memory alloys taking into account progressive strain under cyclic loadings. *Mechanics of Materials*, 41, pp. 12-26, 2009.
- [78] K.I. Saito, and W. K. Liu. Molecular dynamics study of surface effect on martensitic cubic-to-tetragonal transformation in Ni–Al alloy. *Computational Materials Science*, 46, pp. 531-544, 2009.
- [79] T. Sato, K. Saitoh, and N. Shinke. Atomistic modelling of reversible phase transformations in Ni–Ti alloys : A molecular dynamics study. *Materials Science and Engineering A*, 481-482, pp. 250-253, 2008.
- [80] P. Sedlak, M. Frost, B. Benesova, T. Ben Zineb, and P. Sittner. Thermomechanical model for NiTi-based shape memory alloys including R-phase and material anisotropy under multi-axial loadings. *International Journal of Plasticity*, 39, pp. 132-151, 2012.
- [81] J. A. Shaw, and S. Kyriakides. Thermomechanical aspects of NiTi. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43 (8), pp. 1243-1281, 1995.
- [82] J. A. Shaw, and S. Kyriakides. On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a NiTi alloy. *Acta Materialia*, 45(2), pp. 683-700, 1997.
- [83] J. A. Shaw, and S. Kyriakides. Initiation and propagation of localized deformation in elasto-plastic strips under uniaxial tension. *International Journal of Plasticity*, 13 (10), pp. 837-871, 1998.
- [84] N. Siredey, E. Patoor, M. Berveiller, and E. Eberhardt. Constitutive equations for polycrystalline thermoelastic shape memory alloys. Part I. Intragranular interactions and behavior of the grain. *International Journal of Solids and Structures*, 36, pp. 4289-4315, 1999.

- 
- [85] Q. P. Sun, and Z. Q. Li. Phase transformation in superelastic NiTi polycrystalline micro-tubes under tension and torsion—from localization to homogeneous deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 3797–3809, 2002.
- [86] P. Thamburaja. Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53, pp. 825-856, 2005.
- [87] T. Uehara, C. Asai, and N. Ohno. Molecular dynamics simulation of shape memory behaviour using a multi-grain model. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17 (3), 2009.
- [88] J. Van Humbeeck and L. Delaey. The influence of strain-rates, amplitude and temperature on the hysteresis of a pseudoelastic Cu-Zn-Al single crystal. *Journal de Physique*, 42 (C5), pp. 1007-1011, 1981.
- [89] S. Vigneron. *Analyse thermomécanique multiéchelle de la transformation de phase dans les alliages à mémoire de forme*. Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, Montpellier, 2009.
- [90] J. Wang and H.-H. Dai. Phase transitions induced by extension in a slender SMA cylinder : Analytical solutions for the hysteresis loop based on a quasi-3D continuum model. *International Journal of Plasticity*, 26, pp. 467-487, 2010.
- [91] W. Zaki and Z. Moumni. A three-dimensional model of the thermomechanical behavior of shape memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55, pp. 2455-2490, 2007.
- [92] E. Zauderer *Partial differential equations for applied mathematics*. Wiley, Chichester, UK, 2nd edition, 1989.
- [93] H. M. Zbib and E. C. Aifantis. A gradient-dependent model for the Portevin-Le Chatelier effect. *Scripta Metallurgica*, 22, pp. 1331-1336, 1988.



## Résumé

Dans ce travail, des modèles thermomécaniques basés sur une approche non-locale sont proposés pour décrire le comportement des Alliages à Mémoire de Forme (AMF) avec la prise en compte des effets de la localisation et de la chaleur latente lors de la transformation de phase dans ces matériaux. Ces modèles sont obtenus comme des extensions d'un modèle local existant. Pour décrire la localisation de la transformation de phase et sa propagation, l'extension du modèle initial a consisté à le réécrire dans un contexte non-local par l'introduction d'une nouvelle variable, définie comme la contrepartie non-locale de la fraction volumique de martensite déjà présente dans le modèle local initial. L'exploitation de ce modèle a nécessité le développement d'un élément fini spécial dans ABAQUS avec la fraction volumique non-locale de martensite comme un degré de liberté supplémentaire. Les simulations réalisées montrent la pertinence d'une telle approche dans la description de la transformation de phase se produisant dans des structures minces en AMF, soumises à des chargements thermomécaniques, et présentant des défauts géométriques et/ou matériels. Pour arriver à décrire les effets de la chaleur latente, une équation d'équilibre thermique ayant comme terme source des contributions dépendant de la transformation de phase a été adjointe au modèle initial. Là encore, l'exploitation du modèle a nécessité le développement d'un élément fini qui prend en compte le couplage thermomécanique et qui considère la formulation proposée pour l'équilibre thermique. Les simulations numériques réalisées ont montré l'effet retardant sur la transformation de phase (directe ou inverse) de la chaleur latente, et le caractère hétérogène possible de la transformation dans ce cas. Ces effets sont d'autant plus importants que la vitesse de déformation thermomécanique est élevée.

**Mots-clés:** Alliages à mémoire de forme, Superélasticité, Effet mémoire de forme, Localisation, Modèle non-locaux à gradient, Éléments finis, Structures minces, Chaleur latente, Vitesse de déformation.

## Abstract

In this Phd thesis, thermo-mechanical models based on a nonlocal approach are proposed in order to describe the behavior of Shape Memory Alloys (SMA), taking into account localization and latent heat effects during phase transformation in these materials. These models are obtained as extensions of an existing local model. In order to describe the localization of phase transformation and propagation, the extension of the initial model consisted of rewriting this latter in a nonlocal context through the introduction of a new variable, defined as the nonlocal counterpart of the martensite volume fraction, already present in the initial local model. The use of this model has required the development of a specific finite element in ABAQUS with the nonlocal martensite volume fraction as an additional degree of freedom. The simulations show the relevance of such an approach in the description of the phase transformation occurring in thin SMA structures with geometrical and/or material defects subjected to thermo-mechanical loadings. To achieve the description of the latent heat effects, a heat balance equation with a source term depending on contributions of the phase transformation was added to the constitutive equations of the initial model. Even there, the use of the model required the development of a finite element which takes into account the thermo-mechanical coupling and considers the proposed formulation for the thermal balance. Numerical simulations have shown the delaying effect of the latent heat on (direct or reverse) phase transformation and the possible heterogeneous character of the phase transformation in this case. These effects are even more important as the strain rate is high.

**Keywords:** Shape memory alloys, Superelasticity, Shape memory effect, Localization, Nonlocal gradient model, Finite element, Thin structures, Latent heat, Strain rate.

