



**HAL**  
open science

# Étude du développement des instabilités dans un anneau en expansion dynamique

Skander El Maï

► **To cite this version:**

Skander El Maï. Étude du développement des instabilités dans un anneau en expansion dynamique. Matériaux. Université de Lorraine, 2014. Français. NNT : 2014LORR0076 . tel-01750799

**HAL Id: tel-01750799**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750799v1>**

Submitted on 30 May 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THESE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Spécialité : Science des matériaux

présentée par :

**SKANDER EL MAÏ**

---

## Étude du développement des instabilités dans un anneau en expansion dynamique

---

Thèse soutenue publiquement le 28 Avril 2014, à Metz devant le jury composé de :

M. J.F. Molinari	Professeur, EPFL, Lausanne	Président
M. F. Hild	Directeur de Recherche au CNRS, LMT, Cachan	Rapporteur
M. N. Jacques	Maître de Conférences HdR, ENSTA Bretagne, Brest	Rapporteur
M. H. Trumel	Ingénieur de Recherche, CEA-Le Ripault	Examinateur
M. P. Longère	Directeur de Recherche, ISAE, Toulouse	Examinateur
M. J. Petit	Ingénieur de Recherche, CEA-Gramat	Examinateur
M. S. Mercier	Professeur, Univ. Lorraine, Metz	Directeur de thèse
M. A. Molinari	Professeur, Univ. Lorraine, Metz	Codirecteur de thèse

*Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux  
Université Paul Verlaine - UMR CNRS 7239  
Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex, France*

*Université de Lorraine - Pôle M4 : matière, matériaux, métallurgie, mécanique*



# Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, la DGA (Direction Générale de l'Armement) et ses représentants, Bernard Vivien et Jean-Loup Heuzé, qui, malgré la difficile politique de rigueur budgétaire actuelle, a su maintenir le financement d'un PEA (Programme d'Études Amont) pour l'étude du comportement dynamique des matériaux (le PEA Codyma), dans lequel s'inscrit cette thèse. Ce PEA s'est déroulé sous la responsabilité et l'organisation de Didier Tournemine et de Christophe Pontiroli (Benjamin se joindra certainement à moi pour dire que ce dernier est un RT exemplaire).

Je me dois également, au même titre, de remercier le CEA d'avoir bien voulu accepter l'idée que je puisse, en tant qu'ingénieur de recherche, intégrer les travaux de ce PEA dans le cadre d'une thèse. Une grande partie de ce mérite, je pense, revient à Eric Buzaud (probablement appuyé d'arguments forts proposés par Jacques Petit) qui a défendu, à plusieurs reprises, cette thèse auprès de ses supérieurs hiérarchiques. Et je l'en remercie bien fort, en espérant qu'il ne le regrette pas au vu du résultat final.

Pour poursuivre cette partie de remerciements aux institutions (les personnes que j'ai citées jusqu'à présent n'étant évidemment pas considérées comme telles), j'ajouterai une pensée pour la société ITHPP qui a œuvré dans le développement des premiers prototypes de montage d'expansion d'anneaux.

Je listerai ici quelques collègues qui m'ont, chacun à leur manière, aidé au cours de cette thèse :

- L'équipe des sites (le LDM en particulier) : Jean-Louis Lhopitault, Frédérique

Sinatti, Jean-Jacques Royer (JJ pour les intimes), Alain Halgand qui profite de sa retraite aujourd'hui, Didier Capdeville pour son aide sur la prise vidéo, et leur chef Christian Le Gallic (le grand manitou du LPL).

- Le Bureau d'étude, Pascal Verdier en particulier qui a dessiné les différents montages, et l'Atelier central pour la fabrication de ces montages.
- La métrologie, en particulier Jérôme Luc et Bernard Crabos.
- Le Service Informatique (personnes de l'ombre sans qui pas gros chose ne serait possible aujourd'hui et que l'on ne cite pourtant que trop peu souvent).
- Enfin, Alain Fanget, Benjamin Erzar, Pierre-Yves Chanal, Julien Grunenwald, Patrick Hoffman et Jean-Pierre Percaille.

Je remercie grandement mes 3 encadrants, Sébastien Mercier, Alain Molinari et Jacques Petit, qui m'ont beaucoup appris sur la rigueur, la remise en question, le travail itératif jusqu'à obtention de bons résultats. Je n'ai pas toujours été très agréable avec eux, souvent borné et ancré dans mes convictions. Mais ils ont su m'accompagner malgré tout jusqu'à la fin en m'orientant, de manière insoupçonnée, sur le bon chemin.

Je n'oublie pas également tous mes amis, toute ma famille. J'ai bien évidemment une pensée toute particulière pour mes parents.

Enfin, je remercie très amoureusement ma belle compagne, Anna, qui nous a supportés, mon PC portable et moi-même, pendant de longues soirées de rédaction au cours de ces quelques derniers mois. Je la remercie pour toute sa bienveillance qui m'a grandement épaulé pendant ces moments pas toujours très agréables.

J'espère de tout coeur n'avoir oublié personne.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>23</b>
1.1	Expériences . . . . .	24
1.2	Modélisations . . . . .	27
1.2.1	Modélisations analytiques . . . . .	27
1.2.2	Modélisations numériques . . . . .	30
1.3	Objet de l'étude . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Théorie des processus stochastiques</b>	<b>35</b>
2.1	Introduction . . . . .	35
2.2	Processus stochastique - Variable aléatoire . . . . .	36
2.3	Caractérisation de différents rangs . . . . .	37
2.3.1	Caractérisation de rang 1 . . . . .	37
2.3.2	Caractérisation de rang $n$ . . . . .	38
2.4	Espérances, moments et corrélations . . . . .	39
2.4.1	Espérance de rang 1 et moments . . . . .	39
2.4.2	Espérance de rang 2 et Autocorrélation . . . . .	41
2.4.3	Stationnarité, homogénéité et ergodicité d'une fonction aléatoire	42
2.5	Processus périodique de puissance finie . . . . .	44
2.5.1	Énergie et puissance d'une fonction . . . . .	44
2.5.2	La décomposition spectrale . . . . .	45
2.5.3	Analyse harmonique des fonctions d'autocorrélation et d'au- tocovariance . . . . .	46

2.6	Conclusion . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Approche analytique des instabilités</b>	<b>51</b>
3.1	Introduction . . . . .	51
3.2	L'Analyse Linéaire de Stabilité . . . . .	52
3.2.1	Cas d'un barreau cylindrique . . . . .	52
3.2.2	Application au cas d'un barreau de cuivre . . . . .	56
3.2.3	Analyse dimensionnelle du problème d'extension d'un barreau	60
3.3	Évolution des modes d'instabilité . . . . .	67
3.3.1	Profil des instabilités . . . . .	67
3.3.2	Distribution de longueurs inter-strictions . . . . .	71
3.4	Conclusion . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Approche numérique des instabilités</b>	<b>97</b>
4.1	Introduction . . . . .	97
4.2	Configuration du problème étudié . . . . .	98
4.3	Temps de départ et nombre de strictions localisées . . . . .	102
4.3.1	Temps de départ des strictions localisées . . . . .	102
4.3.2	Nombre de strictions localisées . . . . .	105
4.4	Études paramétriques . . . . .	109
4.4.1	Effets de la longueur du barreau étudié, à $R_0$ inchangé . . . . .	111
4.4.2	Convergence au maillage . . . . .	113
4.4.3	Fluctuations stochastiques . . . . .	119
4.4.4	Dépendance à la taille des cellules de perturbation . . . . .	123
4.5	Distributions de longueurs inter-strictions . . . . .	125
4.6	Discussions . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Comparaisons analytique/numérique</b>	<b>133</b>
5.1	Introduction . . . . .	133
5.2	Définition de critères analytiques . . . . .	134



5.3	Temps d'apparition et nombre de localisations . . . . .	135
5.4	Distribution de fréquences de localisation . . . . .	137
5.5	Conclusion . . . . .	138
<b>6</b>	<b>Essais d'expansion d'anneaux</b>	<b>143</b>
6.1	Introduction . . . . .	143
6.2	Pré-dimensionnement . . . . .	145
6.2.1	Caractérisation du circuit RLC . . . . .	145
6.2.2	Résolution numérique du montage avec anneau . . . . .	148
6.3	Essais d'expansion d'anneaux . . . . .	157
6.3.1	Montage expérimental . . . . .	157
6.3.2	Métrologies associées . . . . .	157
6.3.3	Comparaison expérience/calcul . . . . .	160
6.3.4	Résultats vidéo . . . . .	164
6.4	Conclusion . . . . .	168
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>169</b>
<b>A</b>	<b>Accélération de l'anneau</b>	<b>177</b>
<b>B</b>	<b>Confrontation avec les résultats de Gourdin</b>	<b>179</b>
<b>C</b>	<b>Traitement des images d'expansion d'anneaux</b>	<b>183</b>



# Table des figures

1.1	Explosion d'un cylindre d'alliage AerMet <sup>®</sup> 100, 25 $\mu s$ après détonation. D'après <a href="#">Goto et al. (2008)</a> . . . . .	25
1.2	Expansion d'une coquille hémisphérique de tantale. D'après <a href="#">Mercier et al. (2010)</a> . . . . .	25
1.3	Montage expérimental d'expansion d'anneaux utilisé par <a href="#">Zhang et Ravi-Chandar (2006)</a> . . . . .	25
1.4	Superposition d'images prises à différents instants lors d'expansion d'anneaux d'aluminium, <a href="#">Zhang et Ravi-Chandar (2006)</a> . À gauche, la vitesse radiale maximale d'expansion est d'environ 80 $m/s$ , à droite, elle est d'environ 120 $m/s$ . . . . .	26
1.5	Exemple théorique de distribution de tailles de fragments. D'après <a href="#">Mott (1947)</a> . Le nombre de fragments est fonction du rapport $x/x_0$ . $x/x_0$ représente la longueur adimensionnelle. . . . .	28
1.6	Vitesse de déformation inélastique normée $q$ , d'un anneau en acier (A533 – B), en fonction du temps $t$ pour des angles $\theta \in [0^\circ, 22.5^\circ]$ obtenue numériquement par <a href="#">Sorensen et Freund (2000)</a> . La vitesse radiale d'expansion correspondante est d'environ 637 $m/s$ . Le graphe montre l'évolution du mode des instabilités depuis le mode initial (2 défauts) jusqu'au mode final (6 défauts). . . . .	31
1.7	Apparition naturelle de bandes de cisaillement adiabatique dans du TA6V4. Les simulations ont été réalisées par <a href="#">Petit (2010)</a> avec des fluctuations sur la limite d'élasticité du matériau. . . . .	32

- 3.1 Représentation schématique du barreau cylindrique, de longueur initiale  $2L_0$  et de rayon initial  $R_0$ . Des vitesses de  $\pm V_0$  sont appliquées aux extrémités  $Z = \pm L_0$ . La surface latérale  $R = R_0$  est libre. . . . . 52
- 3.2 Évolution des grandeurs  $\frac{\eta}{\dot{\varepsilon}_0}$  et  $\int_0^t \eta dt$  pour une vitesse de chargement de  $900 \text{ m/s}$ . La longueur initiale du barreau est  $2L_0 = 128.8 \text{ mm}$  et sa section initiale  $S_0 = \pi R_0^2 = 1 \text{ mm}^2$ . Le matériau est un cuivre décrit par une loi [Zerilli et Armstrong \(1987\)](#) modifiée, définie par l'équation (3.16), dont les paramètres sont présentés dans le tableau 3.1. . . . . 60
- 3.3 Évolution du mode dominant des instabilités suivant les grandeurs  $\frac{\eta}{\dot{\varepsilon}_0}$  et  $\int_0^t \eta dt$ . La configuration et les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2. . . . . 61
- 3.4 Évolution du temps  $t_{neck}$  normalisé en fonction du paramètre  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}}$ . Des critères de localisation  $\eta/\dot{\varepsilon} = 10$  et  $15$  sont adoptés. Le critère de Considère  $\varepsilon_{Cons.}$  est également représenté. Les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2. . . . . 64
- 3.5 Évolution du temps  $t_{neck}$  normalisé en fonction du paramètre  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}}$ . Des critères de localisation  $\int \eta dt = 1$  et  $2$  sont adoptés. Le critère de Considère  $\varepsilon_{Cons.}$  est également représenté. Les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2. . . . . 65
- 3.6 Évolution du nombre  $N_{neck}$  normalisé en fonction du paramètre  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}}$ . Des critères de localisation  $\eta/\dot{\varepsilon} = 10$  et  $15$  sont adoptés. Les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2. . . . . 65
- 3.7 Évolution du nombre  $N_{neck}$  normalisé en fonction du paramètre  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}}$ . Des critères de localisation  $\int \eta dt = 1$  et  $2$  sont adoptés. Les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2. . . . . 66
- 3.8 Évolution de la variable  $\exp(\int_0^t \eta dt)$  pour une vitesse de chargement de  $V_0 = 900 \text{ m/s}$ . La configuration et les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2. . . . . 70

3.9 Profils de la perturbation  $\delta S$  obtenus à partir de l'équation (3.38) à  $t = 5.1, 42.8, 58.5$  et  $72.1 \mu s$  pour une vitesse de chargement  $V_0=900 m/s$ . La configuration et les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2. . . . . . 73

3.10 Nombre de strictions  $n$  obtenu en fonction du nombre d'imperfections géométriques initial  $N$  introduites dans un anneau en acier en expansion dynamique à une vitesse de déformation initiale de  $\dot{\epsilon} = 33\,333 s^{-1}$ . 5 domaines sont identifiés : la région  $I$  et  $III$  où le nombre de strictions est constant et indépendant du nombre d'imperfections, la région  $II$  où le nombre de strictions est identique au nombre d'imperfections, et deux zones de transition (zones  $I$  et  $II$ ) entre les différentes régions. D'après [Rodríguez-Martínez et al. \(2013\)](#) 74

3.11 Profil de déformation plastique équivalente (a) dans la zone de transition  $I$  avec 12 imperfections initiales et (b) dans la zone de transition  $II$  avec 88 imperfections pour un anneau en acier en expansion dynamique à une vitesse de déformation initiale de  $\dot{\epsilon} = 33\,333 s^{-1}$ . D'après [Rodríguez-Martínez et al. \(2013\)](#) . . . . . 75

3.12 Détermination schématique des distances inter-strictions à partir d'une amplitude seuil de  $-\sigma_S/2$ . . . . . 77

3.13 Distributions des longueurs inter-strictions obtenues à  $t = 5.1, 42.8, 58.5$  et  $72.1 \mu s$ , pour une vitesse de chargement  $V_0=900 m/s$ , à partir d'amplitudes seuils correspondant à la valeur moyenne des fluctuations  $\langle \delta S \rangle = 0$ , à l'écart-type  $\langle \delta S \rangle = -\sigma_S$  et à  $\langle \delta S \rangle = -\sigma_S/2$ . Un ensemble de  $n = 10$  réalisations de phases  $\varphi_p$  est ici utilisé. . . . . 78

3.14 Distributions de longueurs inter-strictions pour une vitesse de chargement de  $V_0=900 m/s$  à  $t=58.5 \mu s$  pour une nouvelle série de 10 réalisations (valeurs  $\varphi_p$  différentes). La configuration et les paramètres matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2. . . . . 78

- 3.15 Comparaisons entre la distribution basée sur l'amplitude seuil  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$  et la fonction densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$  définie par l'Eq.(3.48). Deux représentations différentes sont utilisées pour  $f_{L_0}(l/L_0)$  : sous la forme d'un histogramme et sous la forme d'une courbe continue. L'approximation continue est en générale satisfaisante comme le montre le zoom. La configuration de la Figure 3.2 est adoptée. . . . . 83
- 3.16 Comparaisons entre les distributions de la Figure 3.13 et la fonction densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$  définie par l'équation (3.48). La configuration de la Figure 3.2 est adoptée. . . . . 84
- 3.17 Comparaisons entre la distribution moyenne basée sur les trois amplitudes seuils ( $\langle \delta S \rangle$ ,  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$  et  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S$ ) et la fonction densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$  définie par l'équation (3.48). La configuration de la Figure 3.2 est adoptée. . . . . 85
- 3.18 Profil de la fonction  $\delta S_0^p$  pour  $p_0=5$  et deux valeur de  $\alpha$  :  $\alpha=0.01$  et  $0.05$ . . . . . 86
- 3.19 Fluctuations de la section du barreau à partir d'une perturbation initiale définie par l'équation (3.52) et les paramètres :  $p_0 = 5$  et  $\alpha = 0.01$ . Les profils sont donnés à  $t = 5.1, 42.8, 58.5$  and  $72.1 \mu s$ . La configuration et les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2. . . . . 86

3.20 Densité spectrale normée des fluctuations de la section pour une perturbation initiale définie par l'équation (3.52) avec  $p_0 = 5$  et  $\alpha = 0.05$  à différents instants (a)  $t = 42.8 \mu s$ , (c)  $t = 58.5 \mu s$  et (e)  $t = 72.1 \mu s$ . La densité de probabilité des longueurs inter-strictions  $f_{L_0}(l/L_0)$  est également présentée aux mêmes instants (b, d, f). L'histogramme relatif à la distribution moyenne est obtenu en moyennant les estimations de longueurs inter-strictions basées sur les amplitudes seuil  $\langle \delta S \rangle$ ,  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$  et  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S$ . La fonction densité  $f_{L_0}(l/L_0)$  est obtenue à partir de la densité spectrale normée représentée en (a, c, e). La configuration de la Figure 3.2 est adoptée. . . . . 90

3.21 Densité spectrale normée des fluctuations de la section pour une perturbation initiale définie par l'équation (3.52) avec  $p_0 = 5$  et  $\alpha = 0.01$  à différents instants (a)  $t = 42.8 \mu s$ , (c)  $t = 58.5 \mu s$  et (e)  $t = 72.1 \mu s$ . La densité de probabilité des longueurs inter-strictions  $f_{L_0}(l/L_0)$  est également présentée aux mêmes instants (b, d, f). L'histogramme relatif à la distribution moyenne est obtenu en moyennant les estimations de longueurs inter-strictions basées sur les amplitudes seuil  $\langle \delta S \rangle$ ,  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$  et  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S$ . La fonction densité  $f_{L_0}(l/L_0)$  est obtenue à partir de la densité spectrale normée représentée en (a, c, e). La configuration de la Figure 3.2 est adoptée. . . . . 91

- 3.22 Densité spectrale normée des fluctuations de la section pour une perturbation initiale définie par l'équation (3.52) avec  $p_0 = 250$  et  $\alpha = 0.01$  à différents instants (a)  $t = 42.8 \mu s$ , (c)  $t = 58.5 \mu s$  et (e)  $t = 72.1 \mu s$ . La densité de probabilité des longueurs inter-strictions  $f_{L_0}(l/L_0)$  est également présentée aux mêmes instants (b, d, f). L'histogramme relatif à la distribution moyenne est obtenu en moyennant les estimations de longueurs inter-strictions basées sur les amplitudes seuil  $\langle \delta S \rangle$ ,  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$  et  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S$ . La fonction densité  $f_{L_0}(l/L_0)$  est obtenue à partir de la densité spectrale normée représentée en (a, c, e). La configuration de la Figure 3.2 est adoptée. . . . . 92
- 4.1 Représentation schématique du barreau cylindrique, de longueur initiale  $2L_0$  et de rayon initial  $R_0$ . Des vitesses de  $\pm V_0$  sont appliquées aux extrémités  $Z = \pm L_0$ . La surface latérale  $R = R_0$  est libre. . . . . 98
- 4.2 Évolution de la section du barreau pour  $V_0 = 150 \text{ m/s}$  et  $A = 5 \%$  à  $t = 180, 210, 240, 270 \mu s$  en fonction de l'abscisse lagrangienne  $X$ . . . . . 103
- 4.3 Strictions localisées et ondes de Mott dans le barreau en traction. La configuration de la Figure 4.1 est adoptée. . . . . 104
- 4.4 Densités spectrales moyennes de la section en fonction du nombre de simulations prises en compte. Des tirages aléatoires différents sont alors considérés (entre 1 et 5). Les résultats sont approchés par une loi du type loi Gamma. La vitesse de chargement vaut  $V_0 = 2100 \text{ m/s}$ . L'étude du profil de la section se fait à  $t = t_{neck}$  avec  $A = 1 \%$  et  $S = S_0$ . . . . . 108
- 4.5 Densités spectrales moyennes de la section pour 5 simulations utilisant des tirages aléatoires différents et loi Gamma approchée résultante pour des vitesses  $V_0 = 300, 600, 1050$  et  $2100 \text{ m/s}$  ( $A = 1 \%$ ,  $S = S_0$ ). 110



- 4.6 Évolution du temps d'apparition  $t_{neck}$  et de la fréquence des localisations  $\frac{N_{neck}}{2L}$  en fonction de la vitesse de déformation  $V_0 = L_0 \frac{V}{L}$ . 3 configurations avec des demi-longueurs de barreau de  $L_0$ ,  $2 L_0$  et  $4 L_0$  ont été testées ( $A = 1 \%$ ,  $S = S_0$ ). . . . . 113
- 4.7 Distributions aléatoires utilisées par [Bishop et Strack \(2011\)](#). R1 et R2 sont deux niveaux de raffinement du maillage. La rangée du haut représente les cas non corrélés, et la rangée du bas, les cas corrélés. . . 114
- 4.8 Maillages étudiés dans le cadre de l'étude de la convergence au maillage. Les barreaux utilisés ont une longueur double ( $4 L_0$ ). . . . . 115
- 4.9 Évolution du temps d'apparition  $t_{neck}$  et du nombre  $N_{neck}$  de localisations pour différents raffinements du maillage. La vitesse de chargement  $V_0$  varie de  $150 m/s$  à  $2100 m/s$ .  $A = 1\%$ ,  $S = S_0$ . . . . . 117
- 4.10 Évolution de  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$  en fonction de  $V_0$  et  $A$ . Le maillage est de  $32 \times 2400$  éléments (raffinement  $R_3$ . . . . . 118
- 4.11 Exemple de tirages aléatoires différents avec même amplitude  $A$  et même taille de cellule  $S_0$ . . . . . 120
- 4.12 Évolution de la valeur moyenne et de l'incertitude sur la moyenne de  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$ , pour des vitesses de chargement  $V_0 = 150 m/s$  et  $V_0 = 2100 m/s$  et des amplitudes de perturbation  $A$  de 1, 5, 10 et 20 %, en fonction du nombre de simulations à perturbations initiales aléatoires. . . . . 122
- 4.13 Tailles de cellules de perturbation étudiées :  $S_0$  est la taille de référence. Des réalisations avec la taille  $S_0/2$  et  $S_0/4$  sont aussi proposées. Le maillage présenté ici est le niveau  $R_3$ . Le barreau est de longueur double ( $4 L_0$ ). . . . . 123

4.14	Effets de la taille de cellule ( $S_0, S_0/2, S_0/4$ ) sur l'évolution de $t_{neck}$ et $N_{neck}$ , pour des vitesses de chargement de $V_0 = 150 m/s$ et $V_0 = 2100 m/s$ et des amplitudes de perturbation $A=1$ et 10 %, en fonction du nombre de simulations aléatoirement perturbées considérées. . . . .	124
4.15	Distributions de longueurs inter-strictions obtenues au temps $t_{neck}$ pour des vitesses de chargement de 300, 600, 1050 et 2100 $m/s$ et une amplitude de perturbation de $A = 1$ %. . . . .	127
4.16	Distributions de longueurs inter-strictions obtenues par tirages aléatoires représentatifs de 10 expériences de traction dynamique de barreau soumis à des vitesses de chargement de 300, 600, 1050 et 2100 $m/s$ et une amplitude de perturbation de $A = 1$ %. La fonction $F_X$ en trait continu représente le pourcentage de longueur cumulée. . . . .	128
4.17	Distributions de longueurs inter-strictions obtenues expérimentalement par <a href="#">Zhang et Ravi-Chandar (2006)</a> . Des lois de Weibull approximant les résultats ont été testées par ces auteurs. . . . .	129
5.1	Temps de début des strictions localisées $t_{neck}$ et nombre de strictions $N_{neck}$ déterminés, d'une part, par simulations numériques avec la taille de référence $S_0$ et différentes amplitudes de perturbation ( $A = 1, 5, 10$ et 20 %) et, d'autre part, par l'analyse linéaire de stabilité avec différents critères ( $\eta/\dot{\epsilon} = 10$ et 15 et $\int_0^t \eta dt = 1$ et 2). . . . .	136
5.2	Distributions de fréquences de strictions analytiques et numériques pour des vitesses de chargement de 300, 600, 1050 et 2100 $m/s$ . Les distributions numériques, en traits pleins, correspondent à la fonction Gamma pour une amplitude $A = 1$ % et des tailles de cellule de perturbation $S_0$ au temps $t_{neck}$ . Les distributions analytiques, en pointillés, sont déterminées à partir de la normalisation de la fonction $\left(\delta\hat{S}_0(\exp(\int \eta dt) - 1)\right)^2$ associé au bruit coloré utilisé au paragraphe 3.3.2, lorsque le critère $\int \eta dt = 1$ est atteint. . . . .	139

5.3 Distributions de longueurs inter-strictions analytiques et numériques pour des vitesses de chargement de 300, 600, 1050 et 2100  $m/s$ . Les distributions numériques, en traits pleins, correspondent à la fonction Gamma pour une amplitude  $A = 1 \%$  et des tailles de cellule de perturbation  $S_0$  au temps  $t_{neck}$ . Les distributions analytiques, en pointillés, sont déterminées à partir de la normalisation de la fonction  $(\delta\hat{S}_0 (\exp(\int \eta dt) - 1))^2$  associé au bruit coloré utilisé au paragraphe 3.3.2, lorsque le critère  $\int \eta dt = 1$  est atteint. . . . . 140

5.4 Vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$  le long de l'axe du barreau (en coordonnées Lagrangiennes) à  $t = 117, 135$  et  $153 \mu s$  pour une vitesse de chargement  $V_0 = 300 m/s$  ( $A = 1 \%$ ,  $S = S_0$ ). Pour ce cas particulier,  $t_{neck} = 156.6 \mu s$ . La moyenne  $\langle \dot{\epsilon}_p \rangle$  et la médiane  $(\dot{\epsilon}_p)_{med}$  sont également représentées par des droites horizontales. On peut constater, à  $t = 117 \mu s$ , que la moyenne et la médiane sont quasiment confondues, ce qui correspond à un comportement quasi-linéaire. Au cours de la déformation, la moyenne et la médiane sont de plus en plus distinctes, indiquant des effets non linéaires bien avant le temps  $t_{neck}$ . . . . . 141

5.5 Vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$  le long de l'axe du barreau (en coordonnées Lagrangiennes) à  $t = 30, 33$  et  $39 \mu s$  pour une vitesse de chargement  $V_0 = 2100 m/s$  ( $A = 1 \%$ ,  $S = S_0$ ). Pour ce cas particulier,  $t_{neck} = 38.7 \mu s$ . La moyenne  $\langle \dot{\epsilon}_p \rangle$  et la médiane  $(\dot{\epsilon}_p)_{med}$  sont également représentées par des droites horizontales. On peut constater, à  $t = 30 \mu s$ , que la moyenne et la médiane sont quasiment confondues, ce qui correspond à un comportement quasi-linéaire. Au cours de la déformation, la moyenne et la médiane sont de plus en plus distinctes, indiquant des effets non linéaires bien avant le temps  $t_{neck}$ . . . . . 142

6.1	Machine <i>CYCLOPE</i> (arrière plan) avec le dispositif d'implosion de tubes (premier plan) utilisé par Petit (2010). On peut voir les condensateurs de la machine en rouge. . . . .	146
6.2	Schéma électrique de l'essai d'expansion d'anneau (Zhang et Ravi-Chandar (2006)). . . . .	149
6.3	Champ magnétique axial $b_z$ généré par la bobine en fonction de la position $z$ pour différents rayons $r$ . . . . .	153
6.4	Champ magnétique radial $b_r$ généré par la bobine en fonction de la position $z$ pour différents rayons $r$ . . . . .	154
6.5	Comparaison des courants calculés analytiquement (en trait plein) et numériquement (résistivité électrique constante, $\rho_{e0}$ , et dépendante de la température, $\rho_e(T)$ ). Les résultats numériques avec une résistivité électrique constante se superposent parfaitement aux résultats analytiques. . . . .	156
6.6	Dispositif d'expansion d'anneaux développé durant la thèse pour s'adapter au moyen existant <i>CYCLOPE</i> . . . . .	158
6.7	Caméra Shimadzu HPV-1 généralement employée pour filmer l'expansion d'anneaux. . . . .	160
6.8	Lampe flash du type <i>Specialised-Imaging AD500</i> utilisée pour éclairer suffisamment l'expansion d'anneaux. . . . .	160
6.9	Vitesse d'expansion radiale de l'anneau au cours du temps pour une tension de charge de $1.5\text{ kV}$ . Les résultats expérimentaux sont représentés en trait plein, tandis que les résultats numériques sont en traits discontinus. Le signal de vitesse expérimental est interrompu vers $60\ \mu\text{s}$ . Le comportement du cuivre est décrit, dans le calcul numérique par un modèle de Zerilli-Arsmtrong modifié (voir l'équation (3.16)). .	162

- 6.10 Courant circulant dans la bobine et dans l'anneau pour une tension de charge de  $1.5\text{ kV}$ . Les résultats expérimentaux sont représentés en trait plein, tandis que les résultats numériques sont en traits discontinus. Le courant expérimental dans la bobine s'annule vers  $60\ \mu\text{s}$ . Il restera nul en raison de l'éclateur qui joue ici le rôle de diode. Le comportement du cuivre est décrit par un modèle de Zerilli-Arsmtrong modifié (voir l'équation (3.16)). . . . . 163
- 6.11 Vitesse de déformation de l'anneau au cours du temps pour une tension de charge de  $1.5\text{ kV}$ . Le comportement du cuivre est décrit par un modèle de Zerilli-Arsmtrong modifié (voir l'équation (3.16)). . . . 164
- 6.12 Déformation plastique dans l'anneau au cours de l'expansion pour une tension de charge de  $1.5\text{ kV}$ . Le comportement du cuivre est décrit par un modèle de Zerilli-Arsmtrong modifié (voir l'équation (3.16)). . . . 165
- 6.13 Rayon de l'anneau au cours du temps (trait plein) et limite correspondant à la déformation à rupture classique  $\varepsilon_{rupture} = 0.3$ . La tension de charge vaut  $1.5\text{ kV}$ . Le comportement du cuivre est décrit par un modèle de Zerilli-Arsmtrong modifié (voir l'équation (3.16)). . . . . 165
- 6.14 Température dans l'anneau : une part de l'échauffement est générée par effet Joule, l'autre part provient des déformations plastiques en condition adiabatique. La tension de charge est de  $1.5\text{ kV}$ . Le comportement du cuivre est décrit par un modèle de Zerilli-Arsmtrong modifié (voir l'équation (3.16)). . . . . 166
- 6.15 Séquence d'images d'un essai d'expansion d'anneau obtenues grâce à la caméra *Shimadzu*. Différentes étapes sont visibles : expansion homogène jusqu'à  $82\ \mu\text{s}$  ; apparition de striction à  $108\ \mu\text{s}$  ; premières ruptures à  $116\ \mu\text{s}$  (arcs électriques), fin de fragmentation à  $134\ \mu\text{s}$  et vol libre des fragments. Une striction interrompue est mise en évidence sur les zooms de gauche. . . . . 167

B.1	Comparaison des courants obtenus par <a href="#">Gourdin (1989)</a> et par notre modélisation 1D. Un bon accord jusqu'à $t = 22 \mu s$ est observé. Au-delà, en raison des essais avec charge creuse de <a href="#">Gourdin (1989)</a> , des différences notoires existent naturellement. . . . .	180
B.2	Comparaison des vitesses obtenues par <a href="#">Gourdin (1989)</a> et par notre modélisation 1D. Un bon accord jusqu'à $t = 22 \mu s$ est observé. Au-delà, en raison des essais avec charge creuse de <a href="#">Gourdin (1989)</a> , des différences notoires existent naturellement. . . . .	181
B.3	Comparaison des températures obtenues par <a href="#">Gourdin (1989)</a> et par notre modélisation 1D. Un bon accord jusqu'à $t = 22 \mu s$ est observé. Au-delà, en raison des essais avec charge creuse de <a href="#">Gourdin (1989)</a> , des différences notoires existent naturellement. . . . .	181
C.1	Traitement d'une image d'expansion d'anneau obtenue grâce à la caméra <i>Imacon 200</i> . Le premier traitement revient à extraire de l'image l'anneau. Le deuxième traitement vise à évaluer les contours de l'anneau.	184

# Liste des tableaux

3.1	Paramètres de la loi de Zerilli-Armstrong modifiée par <a href="#">Petit et Dequiedt (2006)</a> pour le cuivre d'étude. . . . .	58
3.2	Matrice des exposants aux dimensions pour $t_{neck}$ . $[L]$ est la dimension d'une longueur, $[M]$ la dimension d'une masse, et $[T]$ celle d'un temps. 61	
3.3	Synthèse des résultats des figures 3.20-3.22 en termes de longueur inter-striction sélectionnée pour $t = 72.1 \mu s$ . . . . .	89
4.1	Paramètres complémentaires de la loi de Zerilli-Armstrong modifiée par <a href="#">Petit et Dequiedt (2006)</a> pour le cuivre d'étude. . . . .	100





# Chapitre 1

## Introduction

La fragmentation de structures ductiles, en particulier métalliques, en expansion dynamique, est un sujet d'intérêt depuis de nombreuses décennies pour des applications variées tant dans le domaine aéronautique, de l'automobile que de la défense. La problématique a commencé à intéresser en particulier les chercheurs des années 1940, afin d'appréhender la génération de gerbes d'éclats issues de l'explosion de bombes, de missiles ou de mortiers. La principale contribution au sujet, dans ces années-là, a été apportée par [Mott \(1947\)](#). En plus des institutions de la Défense qui s'intéressent, encore aujourd'hui, à la caractérisation la plus précise possible de la fragmentation des armes et à la prédiction des gerbes d'éclats afin de dimensionner de nouveaux concepts d'arme, l'industrie civile se concentre également sur la problématique des dangers causés par la destruction brutale d'installations telles que des citernes sous pression. On pourra se référer à [Price \(2006\)](#) qui analyse l'explosion accidentelle de bouteilles d'acétylène sous pression ayant engendré de nombreux dégâts à Sydney en 1993. À ce jour, les concepteurs de ces systèmes (armements militaires ou conteneurs industriels) sont limités à l'utilisation de modèles purement empiriques et souhaiteraient pouvoir disposer d'outils prédictifs pour la fragmentation. Ce sujet de thèse s'intègre dans un cadre général lié à la compréhension de la formation des gerbes d'éclats et vise à mieux comprendre et à appréhender cette formation.

## 1.1 Expériences

De nombreuses études expérimentales bien documentées ont été conduites, depuis [Mott \(1947\)](#), pour comprendre le processus de fragmentation lors de l'expansion de structures métalliques, telles que des cylindres, des anneaux, et des coquilles sphériques ou hémisphériques. Ces structures en expansion étaient alors sollicitées par des charges explosives ou par des chargements d'origine électromagnétique suivant une mise en œuvre proche du procédé industriel de magnétoformage.

Concernant la voie expérimentale utilisant les charges explosives, l'expansion et la fragmentation de cylindres par explosifs ont été étudiées, par exemple, et pour ne citer que les études les plus connues, par [Taylor \(1963\)](#), [Olive et al. \(1979\)](#), [Hoggatt et Recht \(1968\)](#), [Fyfe et Rajendran \(1980\)](#), [Mock et Holt \(1983\)](#) et plus récemment par [Hiroe et al. \(2008\)](#), [Goto et al. \(2008\)](#), d'où est tirée l'image de la Figure 1.1, et [Besnard et al. \(2010\)](#). Les anneaux ont, quant à eux, fait l'objet d'études réalisées par [Hoggatt et Recht \(1969\)](#), [Goubot \(1994\)](#) et [Llorca et Juanicotena \(1997\)](#). Enfin les coquilles sphériques et hémisphériques ont été testées par [Slate et al. \(1967\)](#), [Juanicotena \(1998\)](#), et [Mercier et al. \(2010\)](#). Des images prises in situ permettent d'étudier la formation des strictions jusqu'à la rupture, voir Figure 1.2.

La seconde voie expérimentale concerne la mise en expansion par forces électromagnétiques et a été suivie notamment par [Niordson \(1965\)](#), [Wesenberg et Sagartz \(1977\)](#), [Grady et Benson \(1983\)](#), [Altynova et al. \(1996\)](#), [Grady et Olsen \(2003\)](#) et [Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#), ... Ces expériences ont alors porté essentiellement sur la mise en expansion d'anneaux ou de tubes. La configuration expérimentale utilisée par [Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#) et représentée sur la Figure 1.3 leur a permis d'obtenir les résultats d'expansion d'anneaux illustrés sur la Figure 1.4.

On n'oubliera pas néanmoins d'autres études plus spécifiques relatives à la fragmentation de jets de charges creuses telles que celles de [Karpp et Simon \(1976\)](#), [Chou et al. \(1977\)](#), ou encore [Petit et al. \(2005\)](#). Des processus similaires d'appari-

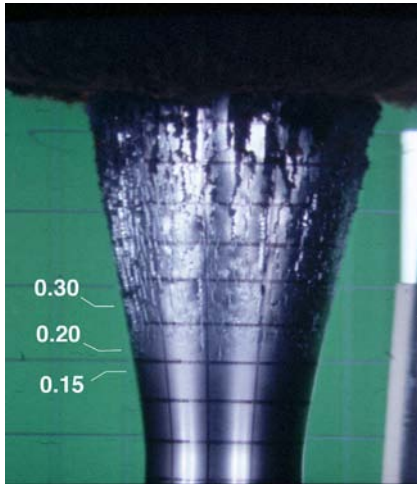


FIG. 1.1 – Explosion d'un cylindre d'alliage AerMet® 100, 25  $\mu s$  après détonation. D'après Goto et al. (2008).

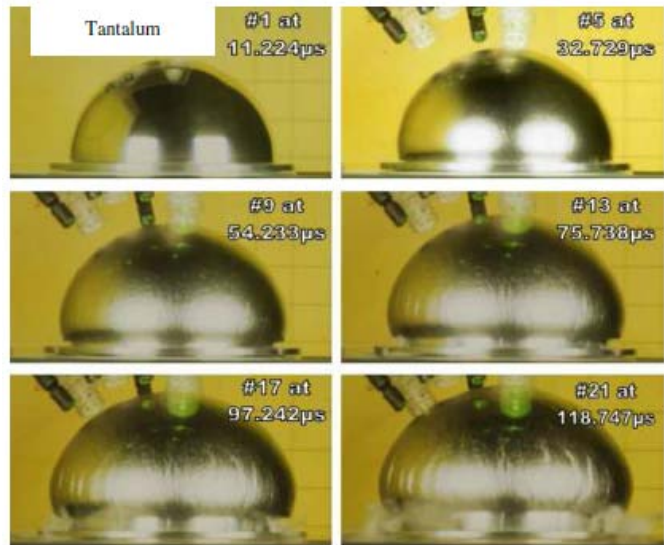


FIG. 1.2 – Expansion d'une coquille hémisphérique de tantale. D'après Mercier et al. (2010).

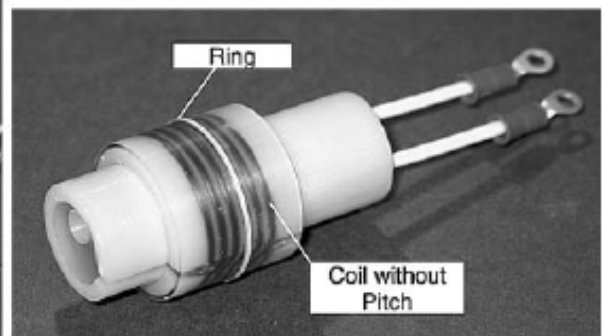
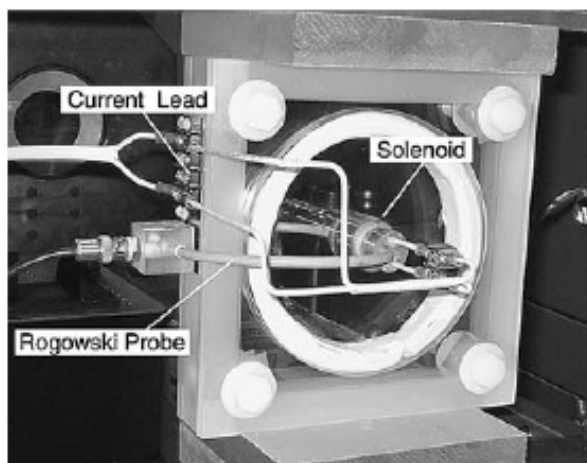


FIG. 1.3 – Montage expérimental d'expansion d'anneaux utilisé par Zhang et Ravi-Chandar (2006).

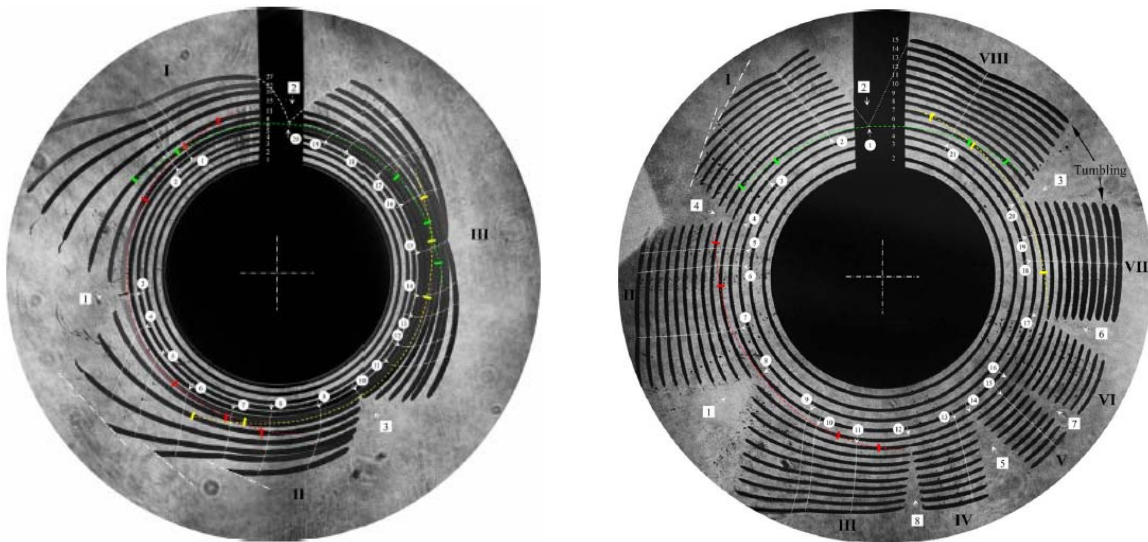


FIG. 1.4 – Superposition d’images prises à différents instants lors d’expansion d’anneaux d’aluminium, [Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#). À gauche, la vitesse radiale maximale d’expansion est d’environ  $80\text{ m/s}$ , à droite, elle est d’environ  $120\text{ m/s}$ .

tion d’instabilités et de fragmentation ont alors été observés par ces auteurs.

Toutes ces différentes campagnes expérimentales ont permis d’apporter des informations importantes sur les distributions de tailles de fragments, les déformations à striction et à rupture, le nombre de strictions et de fragments, ou encore sur le temps d’apparition des strictions ou des ruptures. À partir de leurs observations expérimentales sur des essais d’expansion d’anneaux de cuivre ou d’aluminium, [Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#), en particulier, ont pu mettre en évidence que la fragmentation se déroule en trois étapes. Premièrement, la structure étudiée se déforme de manière homogène. Par la suite, apparaît une multitude de zones de localisation sous forme de strictions. Enfin, une partie de celles-ci continue à se développer donnant alors lieu à des ruptures, engendrant ainsi des fragments. Les autres strictions sont interrompues pendant leur développement du fait des décharges élastiques causées par des strictions voisines.

Il apparaît donc évident que la prédiction du temps de départ des localisations multiples et des longueurs inter-strictions est fondamentale pour rendre compte clairement de la totalité du processus de développement des instabilités. Le processus

de fragmentation dépend fortement du processus précédent. Il se développe à partir des strictions établies les plus prononcées et interrompt le développement des autres. La bonne caractérisation du développement des instabilités est donc un pré-requis essentiel pour l'étude de la fragmentation dynamique des matériaux ductiles.

## 1.2 Modélisations

### 1.2.1 Modélisations analytiques

De nombreuses modélisations ont été proposées afin d'interpréter ces résultats expérimentaux. Les premières modélisations de distributions de tailles de fragments sont apparues suite aux travaux de [Mott \(1947\)](#) qui a développé une théorie basée sur une approche de rupture probabiliste associée au concept d'ondes de relaxation issues des zones de rupture. En effet, il a supposé que la rupture, lors de l'expansion d'un anneau, s'initie au niveau de défauts présents dans la matière. Ces défauts possèdent des seuils de rupture qui dépendent de la déformation suivant un processus aléatoire de Poisson. Lorsqu'un de ces défauts rompt, une onde de relaxation, aujourd'hui appelée onde de Mott, se propage le long de l'anneau en empêchant tout nouveau défaut atteint par cette onde de donner naissance à un nouveau site de rupture. À partir de cette approche, [Mott \(1947\)](#) a alors pu définir une distribution de tailles de fragments présentée sous forme d'un histogramme comme illustré sur la Figure 1.5.

[Grady \(1981\)](#) a, par la suite, revisité ce premier modèle en profitant du modèle de nucléation et de croissance de [Johnson et Mehl \(1939\)](#) pour établir une distribution analytique continue des tailles de fragments. Il a alors pu retrouver la distribution de fragments observée par [Wesenberg et Sagartz \(1977\)](#) lors de leurs expérimentations sur des anneaux d'aluminium. Mais ces modèles se basent sur une description empirique du processus d'initiation de sites de rupture et d'hypothèses simplificatrices du comportement élastoplastique de l'anneau pour évaluer la vitesse de propagation

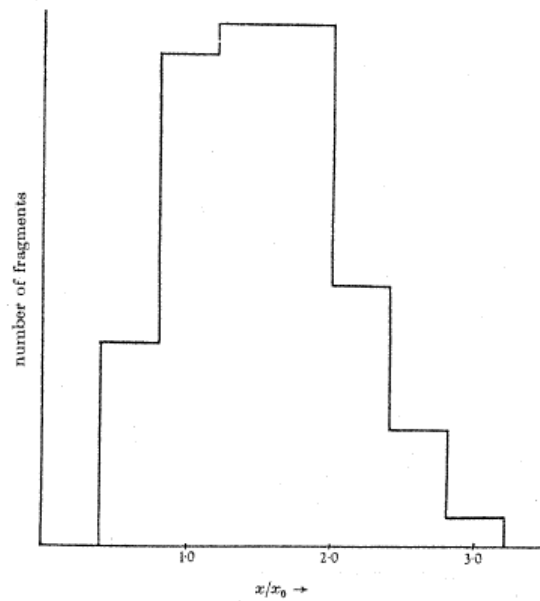


FIG. 1.5 – Exemple théorique de distribution de tailles de fragments. D’après [Mott \(1947\)](#). Le nombre de fragments est fonction du rapport  $x/x_0$ .  $x/x_0$  représente la longueur adimensionnelle.

des ondes de décharge. C’est pourtant, aujourd’hui, le modèle le plus couramment utilisé par les industriels pour leurs études de pré-dimensionnement.

Pour prédire les conditions d’apparition des instabilités, conduisant à la rupture, une autre voie a été développée, basée sur l’analyse de la stabilité de l’écoulement plastique. Cette voie a été ouverte par [Considère \(1885\)](#) qui s’est attaché le premier à étudier l’apparition du maximum de la force lors d’un essai de traction. Parmi les travaux majeurs de cette famille, nous pouvons citer ceux de [Hill et Hutchinson \(1975\)](#) qui ont analysé la bifurcation d’une plaque rectangulaire soumise à de la traction en déformation plane pour des matériaux dont le comportement est indépendant de la vitesse de chargement. [Hutchinson et Neale \(1977\)](#) ont étendu cette analyse aux matériaux dépendants de la vitesse de déformation. Ces deux travaux fondamentaux ont été développés pour des chargements quasi-statiques. [Fressengeas et Molinari \(1985\)](#) ont, par la suite, poursuivi les développements de [Hutchinson et Neale \(1977\)](#) en intégrant les effets d’inertie. Le comportement est viscoplastique décrit sous la forme d’une loi puissance. Dans ces travaux ([Hutchinson et Neale](#)

(1977) et Fressengeas et Molinari (1985)), l'étude de la bifurcation est alors remplacée par une analyse linéaire de stabilité. Fressengeas et Molinari (1985) ont alors mis en évidence que les effets d'inertie et de multi-dimensionnalité de l'écoulement plastique (conjointement à l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation du matériau) permettent de sélectionner un mode de perturbation de longueur d'onde bien définie. Shenoy et Freund (1999) ont revisité, via un nouveau formalisme élégant, les précédentes approches en vue notamment d'analyser la stabilité d'une plaque en déformation plane. Mercier et Molinari (2003) ont ensuite utilisé ce formalisme pour poursuivre les travaux de Fressengeas et Molinari (1994) et Jeanclaude et Fressengeas (1997). Ils ont alors proposé une synthèse sur l'extension dynamique des plaques et des cylindres pour à la fois des matériaux sensibles et non sensibles à la vitesse de déformation. Comme présenté précédemment, les essais se font essentiellement sur des structures présentant un rayon de courbure (anneaux, sphère, tube). Afin de quantifier l'effet de la courbure, Mercier et Molinari (2004) ont alors également analysé l'expansion de tubes. Ils ont alors observé que la courbure des tubes ou des anneaux affecte le profil des localisations en modifiant l'espacement inter-strictions. Malgré tout, lorsque le tube est suffisamment mince par rapport à son diamètre, la configuration plaque est tout à fait représentative. Cette condition est généralement satisfaite dans les expériences.

Grâce à l'analyse linéaire de stabilité, les différents effets de paramètres tels que la masse volumique, la sensibilité à la vitesse de déformation, à l'écrouissage et à l'adoucissement thermique, ou encore aux aspects de forme de la structure, peuvent ainsi être appréhendés. Par ailleurs, il est possible de connaître le taux de croissance de la perturbation au moins dans les premiers instants du chargement. Des tendances en accord avec les observations expérimentales ont d'ailleurs été régulièrement démontrées : un effet stabilisant de la masse volumique  $\rho$ , de la sensibilité à la vitesse de déformation  $m$  et à l'écrouissage  $n$ , et un effet déstabilisant de la sensibilité à la température  $q$  et de la limite d'écoulement  $\sigma_y$ . Néanmoins, l'une des

principales limites de ce type d'analyse concerne la prédiction du temps de départ des localisations multiples. [Fressengeas et Molinari \(1994\)](#) ont par exemple proposé de limiter le temps de l'analyse à l'instant du développement ultime d'une striction (l'aire devenant nulle) lors de l'expansion d'une plaque. Cependant, cette solution est une extrapolation linéaire trop ambitieuse en général. [Guduru et al. \(2006\)](#) ont donc proposé de définir un critère basé sur la prise en compte d'une valeur critique  $N_c$  du rapport entre le taux de croissance de la perturbation dominante et le taux de déformation nominal de la solution de base du problème. À l'aide d'une valeur d'environ 14 pour  $N_c$ , ils ont pu rendre compte des résultats expérimentaux de [Grady et Benson \(1983\)](#) sur du cuivre et de l'aluminium. Plus récemment, dans sa thèse, [Jouve \(2010\)](#) a adopté le même type de critère afin d'analyser les expériences d'expansion de cylindres réalisées par [Olive et al. \(1979\)](#). Une valeur de  $N_c = 10$  lui a alors permis de retrouver les résultats expérimentaux à la fois en termes de nombre de strictions et de temps de départ des strictions multiples. Il a également montré que le taux de croissance des perturbations prédit par l'analyse linéaire de stabilité et les calculs éléments finis qu'il a réalisés étaient en adéquation. Pour cela, il a superposé à la solution fondamentale calculée pour l'extension de plaques, des perturbations dont la forme est tirée de l'analyse linéaire de stabilité.

### 1.2.2 Modélisations numériques

Pour comprendre le processus de la fragmentation dynamique, de nombreux auteurs ont également recours à la simulation numérique. Par exemple, [Johnson \(1981\)](#) a simulé la fragmentation d'un anneau en expansion par une méthode des différences finies. La porosité initiale, suivant une distribution de Poisson, a été introduite dans son modèle afin de déclencher les instabilités. Il a alors constaté que la taille des fragments obtenus dépend de la porosité initiale. Plus tard, [Han et Tvergaard \(1995\)](#) ont proposé une étude numérique intéressante concernant l'expansion d'anneaux.



Ils ont introduit une perturbation sinusoïdale de la section de l’anneau pour initier le processus de striction multiple. Ils ont alors observé que le nombre de strictions dans l’anneau ne dépend pas des perturbation initiales, introduites dans les calculs, lorsque leur amplitude est suffisamment faible devant la section de l’anneau. Cette amplitude influera sur le temps d’apparition des strictions localisées. Plus tard, [Sorensen et Freund \(2000\)](#) et [Rodríguez-Martínez et al. \(2013\)](#) montreront, de manière plus détaillée, des résultats semblables (voir Figure 1.6).

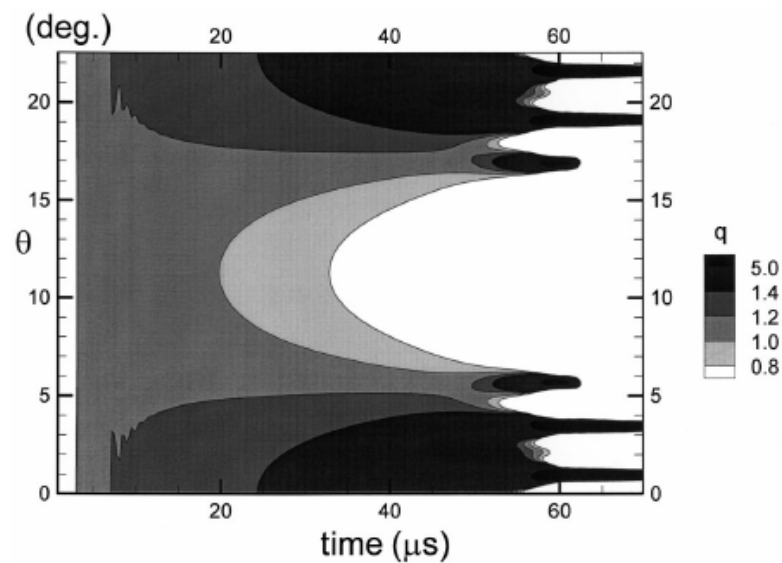


FIG. 1.6 – Vitesse de déformation inélastique normée  $q$ , d’un anneau en acier (*A533–B*), en fonction du temps  $t$  pour des angles  $\theta \in [0^\circ, 22.5^\circ]$  obtenue numériquement par [Sorensen et Freund \(2000\)](#). La vitesse radiale d’expansion correspondante est d’environ  $637\text{ m/s}$ . Le graphe montre l’évolution du mode des instabilités depuis le mode initial (2 défauts) jusqu’au mode final (6 défauts).

Un nombre important de simulations d’expansion d’anneaux ou de cylindres ont été réalisées ces dernières années. Pour initier les instabilités, certains auteurs, tels que [Guduru et Freund \(2002\)](#), [Becker \(2002\)](#), [Zhou et al. \(2006a\)](#), [Zhang et Ravi-Chandar \(2008\)](#) ou encore [Hopson et al. \(2011\)](#), ont introduit une imperfection géométrique ou matérielle aléatoire (souvent sur la porosité initiale ou la déformation à rupture). On pourra citer également les travaux de [Petit \(2010\)](#) qui est un des rares auteurs à proposer d’introduire des irrégularités sur la limite d’écoulement. Sans

idée de rapporter ces irrégularités à une représentation physique de la matière, elles permettent néanmoins d'interpréter l'effet de densités de dislocations ou d'orientations cristallines inhomogènes. La Figure 1.7 met en évidence l'apparition naturelle de bandes de cisaillement adiabatique dans le TA6V4 grâce aux simulations réalisées par [Petit \(2010\)](#). Pour d'autres, les erreurs numériques suffisent à déclencher la fragmentation. C'est le cas de [Pandolfi et al. \(1999\)](#), [Becker \(2002\)](#), [Rusinek et Zaera \(2007\)](#) et [Meulbroek et al. \(2008\)](#). L'ensemble de ces études ont permis d'obtenir des distributions de tailles de fragments ainsi que leur nombre, en fin de simulation, assez comparables aux observations expérimentales. Néanmoins, les perturbations ou le maillage, dans ces calculs, ont été calibrés pour cela. [Meulbroek et al. \(2008\)](#) ont d'ailleurs montré qu'il est difficile de restituer précisément la description du mécanisme de striction, même avec un maillage fin dans des simulations eulériennes avec croissance de porosité. Il semble donc peu probable que ces simulations puissent rester prédictives pour de larges variations de géométrie ou de vitesse d'expansion.

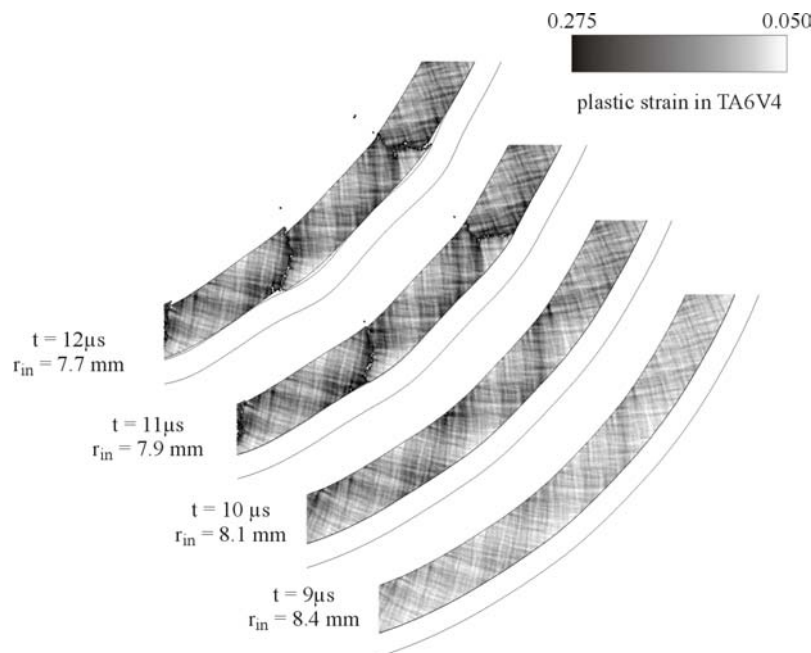


FIG. 1.7 – Apparition naturelle de bandes de cisaillement adiabatique dans du TA6V4. Les simulations ont été réalisées par [Petit \(2010\)](#) avec des fluctuations sur la limite d'élasticité du matériau.

## 1.3 Objet de l'étude

Au regard de cette multitude de travaux, la fragmentation a donc été étudiée sous différents angles grâce à des expérimentations, et des modélisations analytiques et numériques. Ce processus, qui est par nature vraisemblablement stochastique, est assez bien appréhendé dans sa globalité et des résultats probants ont été montrés. Pour autant, il reste encore un certain nombre de difficultés, la plus importante étant celle de démontrer les capacités prédictives des simulations. Il est, en particulier, surprenant de constater que les résultats numériques présentés ne sont issus, en général, que d'une unique réalisation de perturbations initiales. Ceci ne devait donc pas permettre de conclure précisément sur le nombre de strictions et de fragments. Concernant la modélisation, les approches de [Mott \(1947\)](#) et [Grady \(1981\)](#) permettent assez bien d'estimer les distributions de tailles de fragments mais sans analyser le développement des instabilités. Les modélisations issues d'une analyse linéaire de stabilité, jusqu'à présent, se limitent à évaluer le mode dominant lors de la striction multiple et d'estimer le temps de début des strictions localisées via un critère ad hoc. Cependant elles ne permettent pas de décrire la fragmentation finale et encore moins la distribution des tailles de fragments. La description déterministe du mode dominant lors des strictions multiples est critiquée par certains expérimentateurs, qui ont observé que les longueurs inter-strictions pouvaient également être représentées sous forme de distributions ([Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#)).

L'objet principal de ce travail de thèse consistera donc, en grande partie, à revisiter certaines approches analytiques et numériques de la striction et de la fragmentation multiple, en introduisant un aspect stochastique. Dans le deuxième chapitre, nous ferons donc une synthèse des outils mathématiques adaptés à l'étude des processus stochastiques. Ces outils seront, par la suite, exploités afin de réinterpréter, dans un premier temps, les résultats issus de l'analyse linéaire de stabilité. Il sera ainsi démontré que les résultats fournis par cette analyse peuvent apporter, dans

une certaine mesure, une représentation statistique des distributions de longueurs inter-strictions. Ces mêmes outils nous conduiront, dans un second temps, à développer des simulations numériques dans lesquelles des perturbations sont introduites sous forme de distribution aléatoire portant sur la limite élastique du matériau. Une définition du temps de départ des strictions localisées et du mode dominant des instabilités sera donnée, ce qui permettra notamment de quantifier l'effet de ces perturbations. Des comparaisons analytique/numérique seront alors réalisées sur le temps d'apparition et sur le nombre des strictions localisées. Ces comparaisons serviront, en particulier, à définir un critère adapté à l'apparition des strictions localisées dans une analyse linéaire de stabilité. Nous verrons également qu'il sera possible de comparer les résultats analytiques et numériques en termes de distributions de longueurs inter-strictions. Ces comparaisons illustreront en particulier les limites de l'approche analytique. Enfin, nous présenterons les premiers développements d'un moyen d'expérimentation d'expansion d'anneaux par forces électromagnétiques dont les résultats, analysés avec les mêmes outils probabilistes de post-traitement que ceux ayant servi aux simulations numériques, devraient prochainement permettre de réaliser des comparaisons expériences/calculs.

La thèse présente des avancées qui nécessitent encore quelques développements. Ils seront résumés dans les perspectives. L'objectif est de pouvoir bénéficier, à terme, d'un ensemble cohérent de méthodes qui incluront à la fois l'expérience, les analyses théoriques et les calculs numériques.

# Chapitre 2

## Théorie des processus stochastiques

### 2.1 Introduction

Une grandeur est dite déterministe lorsqu'elle est parfaitement connue, sans incertitude, sans imperfection. Or, lors d'expériences réelles ou numériques d'expansion d'anneaux, les longueurs inter-strictions et les longueurs de fragments sont variables. Les résultats sont généralement présentés sous forme d'histogrammes, ce qui permet une représentation statistique du processus de développement des instabilités et de fragmentation. Ce sont donc des processus stochastiques. Afin de quantifier la variabilité des résultats, ils peuvent être analysés sous deux approches différentes. La première est celle de la *statistique descriptive* dont l'objectif est de décrire et quantifier la variabilité observée sous forme d'histogrammes obtenus en général par des résultats expérimentaux. La seconde est la *statistique inférentielle* qui cherche à définir un *modèle de probabilité* permettant de représenter au mieux ces résultats. L'utilisation de lois de densité de probabilité fait partie de cette catégorie. Ce chapitre a donc pour objectif de présenter les concepts et outils théoriques utiles aux traitements statistiques et probabilistes du développement des instabilités et de la fragmentation. En particulier, nous caractériserons les processus stochastiques liés à ces deux phénomènes et nous présenterons la notion de densité spectrale de puissance, notion que nous utiliserons par la suite pour l'analyse de la section d'un anneau en expansion. Bien qu'une littérature abondante existe en mathématiques,

nous nous appuyerons sur un ouvrage plus récent de mécanique des fluides pour présenter rapidement les notions importantes. La plupart de ces concepts sont donc tirés de l'ouvrage de [Chassaing \(2000\)](#) qui décrit comment la description des turbulences en mécanique des fluides peut être abordée à partir de ces principes.

## 2.2 Processus stochastique - Variable aléatoire

La notion de variable aléatoire est associée à l'idée de "tirer au hasard" une grandeur scalaire et, par contraste, un processus stochastique, souvent appelé fonction aléatoire, est lié au fait de "tirer au hasard" une courbe associée à une grandeur. On peut ainsi considérer le nombre de strictions ou de fragments comme des variables aléatoires tandis que le profil de la section d'un anneau, à un instant  $t$  donné, représente une *réalisation* du processus associé. Un processus stochastique n'est, en réalité, qu'une famille paramétrée de variables aléatoires. Lorsque cette famille ne dépend que du temps ( $x(t)$ ), on appelle alors ce processus *processus aléatoire* ou *fonction aléatoire*. Lorsque les paramètres concernés sont des coordonnées spatiales ( $f(x, y, z)$ ), le processus stochastique est alors appelé *champ aléatoire spatial*. Enfin, lorsqu'il dépend à la fois du temps et de l'espace ( $f(x, t)$ ), c'est un processus *spatio-temporel*. Les processus d'instabilité et de fragmentation font partie de cette dernière famille. Par commodité de langage, nous n'utiliserons, par la suite, que le terme *fonction aléatoire*. En particulier, nous considérerons comme fonction  $f(x, t)$ , la section  $S(x, t)$  d'un barreau d'axe colinéaire à  $\vec{e}_x$  représentatif d'un anneau.

Une fonction aléatoire connue jusqu'à un instant  $t = t_1$  pourra, à un instant  $t_2 > t_1$ , être soit indépendante de toute l'évolution passée (c'est le cas, par exemple, des processus de Poisson), soit être dépendante de l'instant  $t_1$  (on parlera alors de processus de Markov). On pourra constater, au cours de la lecture de ce travail de thèse, que les processus de développement des instabilités et de fragmentation dépendent beaucoup de l'évolution passée. Pourtant, le début du processus de fragmentation est présenté, par [Mott \(1947\)](#) et [Grady \(1981\)](#), comme un processus de

type Poissonien, au sens où l'histoire du matériau avant l'apparition de la première rupture n'est pas considérée. La succession ultérieure des différentes ruptures est, par la suite, de type Markovien.

## 2.3 Caractérisation de différents rangs

Les caractérisations qui sont introduites dans cette partie seront définies pour des fonctions aléatoires dépendantes du temps  $t$ . On pourra aisément extrapoler ces caractérisations à toute autre dépendance, notamment spatiale.

### 2.3.1 Caractérisation de rang 1

On définit la *fonction de répartition de probabilité*  $F_X(x)$ , également appelée *fonction de probabilité cumulée*, d'une variable aléatoire  $X$ , la probabilité que  $X$  soit inférieure à la valeur  $x$  :

$$F_X(x) = \text{Prob}(X < x) \quad (2.1)$$

On pourra considérer, dans nos problématiques, que  $F_X$  est une fonction continue. Elle est donc différentiable et on peut définir la *densité de probabilité*  $p_X(x)$  telle que :

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{\text{Prob}[x < X < x + dx]}{dx} \geq 0 \quad (2.2)$$

Une variable aléatoire  $X$  sera alors complètement caractérisée par sa densité de probabilité. Ainsi, la grandeur  $p_X(x)dx$  correspond à la probabilité que la variable  $X$  ait une valeur comprise entre  $x$  et  $x + dx$ . Par définition, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1 \quad (2.3)$$

Une fonction aléatoire  $f(x, t)$  n'étant qu'une suite de variables aléatoires, on pourra, par exemple, fixer le temps  $t$  et définir une densité de probabilité  $p_X(x, t)$ , alors appelée *densité de probabilité de rang 1*, fonction unique du temps, telle que :

$$p_X(x, t)dx = \text{Prob}(x < X(t) < x + dx) \quad (2.4)$$

C'est donc la probabilité que  $X$ , à l'instant  $t$ , prenne une valeur comprise entre  $x$  et  $x + dx$ . Pour une fonction aléatoire dont les valeurs prises à deux instants  $t_1$  et  $t_2$  sont tout à fait indépendantes (comme pour les processus de Poisson), cette caractérisation au rang 1 suffit. Pour toute autre fonction aléatoire, il faut poursuivre l'analyse pour une caractérisation plus fine. En effet, la corrélation existante entre les valeurs prises par la fonction aléatoire en différents instants n'est pas prise en compte ici.

### 2.3.2 Caractérisation de rang $n$

On définit la densité de probabilité de rang 2, notée  $p_X(x_1, t_1; x_2, t_2)$ , comme la probabilité que la variable  $X_1$ , à  $t_1$ , ait une valeur comprise entre  $x_1$  et  $x_1 + dx_1$  et que la variable  $X_2$ , à  $t_2$ , ait une valeur comprise entre  $x_2$  et  $x_2 + dx_2$ . C'est une *probabilité conjointe* entre les deux variables  $X_1$  et  $X_2$ . On pourra retrouver la densité de probabilité de rang 1 de la variable  $X_1$  par la relation :

$$p_X(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2 \quad (2.5)$$

Cette densité de probabilité sera alors considérée comme *marginale* par rapport à la densité de probabilité conjointe. L'intérêt de cette formulation est qu'elle permet de préciser en particulier la distribution de probabilité de  $X$  à  $t_1 + dt$  à partir de la connaissance de la probabilité conjointe  $p_X(x_1, t_1; x_2, t_1 + dt)$ . Elle permet donc théoriquement d'accéder à des informations sur la continuité et sur le contenu fréquentiel de la fonction.

De façon générale, on définit la densité de probabilité de rang  $n$ , notée  $p_X(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ , comme la densité de probabilité conjointe entre les valeurs prises par la fonction aléatoire aux instants  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Cette manière de caractériser une fonction aléatoire est très complète mais très peu maniable. En pratique, il est difficile d'estimer précisément, à partir de résultats expérimentaux, des caractéristiques supérieures au rang 2.



## 2.4 Espérances, moments et corrélations

Afin de condenser la quantité d'information contenue dans les densités de probabilité de rang  $n$ , une notion statistique a été introduite : *l'espérance mathématique*. De la même manière que précédemment, on pourra alors définir les espérances mathématiques de rang 1 et 2 par :

$$E[f(t_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) p_X(x_1, t_1) dx_1 \quad (2.6)$$

et

$$E[f(t_1, t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) p_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.7)$$

L'espérance d'une variable peut donc être vue comme une moyenne pondérée par la fonction de distribution. Considérons, par exemple, une variable équiprobable sur un ensemble  $\{x \in [-L, L]\}$ , la fonction  $p_X$  est donc indépendante de  $x$  sur cet ensemble et nulle ailleurs, et l'espérance devient :

$$E[f_X] = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (2.8)$$

De façon plus générale, on pourra parler d'espérance mathématique de rang  $n$  en considérant les variables  $x_1, \dots, x_n$ . Mais il n'est pas nécessaire d'aller si loin, les deux premières espérances permettant de caractériser pleinement une fonction aléatoire.

### 2.4.1 Espérance de rang 1 et moments

La *moyenne*, que l'on appelle également *fonction moment d'ordre 1*, notée  $\mu_X$ , s'obtient à partir de l'espérance de la fonction  $f(x) = x$ , soit :

$$\mu_X(t) = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x, t) dx \quad (2.9)$$

On peut définir de la même manière les fonctions moment d'ordre  $n$ ,  $m_{n,X}(t)$ , en évaluant l'espérance de la fonction  $f(x) = x^n$ . Pour le moment d'ordre 2, par exemple,

qui est également appelé *carré moyen*, la grandeur à déterminer s'exprime par :

$$m_{2,X}(t) = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x, t) dx \quad (2.10)$$

Il est malheureusement difficile d'associer ces moments d'ordres supérieurs à 1 à une signification physique liée à la fonction aléatoire étudiée. On préférera alors exploiter les fonctions *moments centrés* d'ordre  $n$ , que l'on pourra noter  $\tilde{m}_{n,X}(t)$ , qui permettent d'évaluer différentes propriétés de la fonction aléatoire par rapport à sa moyenne. Ces moments centrés sont définis par l'espérance des fonctions  $f(x) = (x - \mu_X(t))^n$ , soit :

$$\tilde{m}_{n,X}(t) = E[(X - \mu_X(t))^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X(t))^n p_X(x, t) dx \quad (2.11)$$

Le moment centré d'ordre 2 correspond, par exemple, à la *variance*, ou au carré de *l'écart-type*, que l'on notera  $Var_X(t)$  ou  $\sigma_X^2(t)$ . On pourra remarquer la propriété suivante :

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 \quad (2.12)$$

La variance quantifie ainsi l'amplitude de la dispersion quadratique autour de la moyenne  $\mu_X(t)$ . Ces deux grandeurs ( $\sigma_X^2(t)$  et  $\mu_X(t)$ ) caractérisent parfaitement un processus de type gaussien. Pour les autres processus, il faut introduire les moments centrés d'ordre supérieur.

Les moments centrés d'ordre 3 et 4 permettent de représenter respectivement l'amplitude de la dissymétrie et de l'aplatissement d'une fonction aléatoire. On peut alors définir les coefficients de dissymétrie  $S_X(t)$  (skewness factor en anglais) et d'aplatissement  $F_X(t)$  (flatness factor ou kurtosis en anglais) suivants :

$$S_X(t) = \tilde{m}_{3,X}(t) / (\tilde{m}_{2,X}(t))^{\frac{3}{2}} \quad (2.13)$$

$$F_X(t) = \tilde{m}_{4,X}(t) / (\tilde{m}_{2,X}(t))^2 \quad (2.14)$$

Enfin, on notera la définition de la *fonction génératrice des moments*  $\phi$  définie

sur  $\mathbb{R}$  et à valeur dans  $\mathbb{C}$  par :

$$\phi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu x} p_X(x) dx \quad (2.15)$$

Cette fonction peut être considérée comme la moyenne ou l'espérance mathématique de la fonction  $f(x) = e^{2i\pi\nu x}$ . Elle s'identifie aussi à la transformée de Fourier de la fonction densité de probabilité  $p_X(x)$ . Dans ce cas, elle est également appelée *fonction caractéristique* de la fonction aléatoire associée à la densité de probabilité  $p_X(x)$ . La transformée de Fourier inverse donne aussi :

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} \phi(\nu) d\nu \quad (2.16)$$

La caractéristique fondamentale de la fonction génératrice des moments est qu'elle permet d'évaluer les moments de tout ordre par la relation :

$$m_n = (2\pi i)^{-n} \left( \frac{d^n \phi}{d\nu^n} \right)_{\nu=0} \quad (2.17)$$

où  $i^2 = -1$ .

### 2.4.2 Espérance de rang 2 et Autocorrélation

Pour rappel, l'espérance de rang 2 d'une fonction aléatoire  $f$  dépendant des variables aléatoires  $(x_1, t_1; x_2, t_2)$  aux instants  $t_1$  et  $t_2$  est déterminée par :

$$E[f(t_1, t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) p_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.18)$$

On remarquera qu'en définissant  $f(x_1, x_2) = x_1^2$ , l'espérance de rang 2 permet alors de retrouver le moment d'ordre 2,  $m_{2,X}(t)$ , de la fonction aléatoire.

En considérant, cette fois-ci, la fonction  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ , l'espérance de rang 2 sera alors appelée *fonction d'autocorrélation* de la fonction aléatoire étudiée entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ . Celle-ci est donc définie par :

$$R(t_1, t_2) = E[x_1 x_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.19)$$

On peut également définir la fonction d'autocorrélation centrée, appelée alors *fonction d'autocovariance*, par :

$$\begin{aligned} R_c(t_1, t_2) &= E[(x_1 - \mu_X(t_1))(x_2 - \mu_X(t_2))] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_X(t_1))(x_2 - \mu_X(t_2)) p_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Cette fonction représente l'autocorrélation des fluctuations autour de la valeur moyenne. Lorsque les instants  $t_1$  et  $t_2$  sont confondus, c'est-à-dire que  $x_1 = x_2$ , la fonction d'autocovariance est alors égale au carré de l'écart-type  $\sigma_X^2(t)$  (variance  $Var_X(t)$  ou moment centré d'ordre 2  $\tilde{m}_{2,X}(t)$ ).

### 2.4.3 Stationnarité, homogénéité et ergodicité d'une fonction aléatoire

Il reste néanmoins à connaître parfaitement l'évolution dans le temps d'un nombre important de réalisations  $x_i$ . Heureusement, plusieurs hypothèses, qui semblent généralement raisonnables, permettent de rendre les choses plus simples. La première de ces hypothèses est de considérer le processus stochastique comme stationnaire en temps. Une fonction aléatoire est ainsi dite stationnaire (respectivement homogène) lorsque ses probabilités de différents ordres sont indépendantes d'un changement d'origine de l'axe du temps (respectivement du repère spatial).

Au rang 1, cela revient à considérer que tous les moments  $m_{n,X}(t)$  (respectivement  $m_{n,X}(\vec{x})$ ) sont constants. Au rang 2, l'autocorrélation ou l'autocovariance ne dépend que de l'écart temporel (respectivement spatial)  $\Delta t = |t_2 - t_1| = \tau$  (respectivement  $\Delta \vec{x} = \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|$ ). Le développement des instabilités et la fragmentation d'un anneau ne sont pas à proprement parlé des processus stationnaires. On constatera qu'ils évoluent légèrement dans le temps. Par contre, en configuration lagrangienne, ils sont homogènes.

En pratique, deux types de moyenne peuvent être obtenus pour un processus stochastique stationnaire  $x(t)$ . La première, appelée moyenne statistique  $\langle X \rangle_N$  est

calculée à partir de  $N$  réalisations :

$$\langle x \rangle_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t) \quad (2.21)$$

Lorsqu'une infinité de réalisations est regardée à un instant  $t$  fixé, alors cela conduit à l'espérance mathématique :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle x \rangle_N(t) = \mu_x(t) \quad (2.22)$$

Cependant, d'un point de vue expérimental, il est parfois plus intéressant d'exprimer la moyenne d'une fonction aléatoire stationnaire en l'évaluant à partir d'une réalisation suffisamment longue plutôt qu'en estimant une statistique de la moyenne sur plusieurs réalisations. Cette moyenne temporelle est alors donnée par :

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (2.23)$$

Le *théorème d'ergodicité* postule que pour une fonction aléatoire ergodique ces deux moyennes, mais aussi toute espérance mathématique réalisée sur le même principe, sont égales à la limite des temps infinis et pour une infinité de réalisations. La caractérisation de la densité de probabilité d'une fonction aléatoire stationnaire, supposée ergodique, pourra alors être approchée à l'aide d'une seule réalisation sur une durée suffisamment longue. En découpant cette durée en un certain nombre de portions de durée  $T$  (suffisamment grande pour inclure toute périodicité potentielle), ces portions pourront par ailleurs être considérées comme autant de réalisations différentes d'un même processus stochastique.

En général, la plupart des processus stationnaires sont supposés être *ergodiques*. De même qu'en temporel, on pourrait définir une ergodicité spatiale. Considérons, par exemple, un barreau en traction de longueur initiale  $2L_0$  représentatif d'un anneau en expansion de périmètre  $2L_0$ . Intuitivement, on aurait tendance à considérer que les analyses des processus aléatoires associés au développement des instabilités et à la fragmentation faites sur un nombre  $N$  important de réalisations de barreaux

de dimension finie (de longueur  $2L_0$  au moins) ou sur une réalisation d'un barreau équivalent de dimension infinie sont identiques tant que les champs de contrainte, de déformation, et de vitesse de déformation sont identiques. Dans la suite, nous supposons que ces processus sont spatialement ergodiques.

## 2.5 Processus périodique de puissance finie

Les définitions et relations de ce paragraphe sont, en grande partie, tirées de l'ouvrage de Brémaud (1993) qui traite des signaux aléatoires. Les démonstrations pourront être trouvées en annexe de cet ouvrage.

### 2.5.1 Énergie et puissance d'une fonction

Une fonction  $f(x)$  est dite *stable* lorsqu'elle vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty \quad (2.24)$$

Cette même fonction sera dite d'*énergie finie* si elle vérifie également :

$$E = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (2.25)$$

Par ailleurs, une fonction  $f(x)$  est dite *périodique* de période  $2L > 0$  si pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x + 2L) = f(x) \quad (2.26)$$

Il apparaît évident que les fonctions périodiques ne sont ni stables ni d'énergie finie (sauf pour la fonction identiquement nulle). On dira alors que  $f(x)$  est *stable sur sa période* si :

$$\int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty \quad (2.27)$$

et qu'elle est d'*énergie finie sur sa période* si :

$$\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx < \infty \quad (2.28)$$

Dans ce cas, on pourra dire également que  $f(x)$  est de *puissance finie*.

### 2.5.2 La décomposition spectrale

Soit  $f(x)$  une fonction réelle stable, on peut alors définir la fonction  $\hat{f}(\nu)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , appelée *transformée de Fourier* (T.F.) de  $f(x)$ , par :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \quad (2.29)$$

Cette transformation permet une décomposition spectrale de  $f$ . Le module  $|\hat{f}(\nu)|$  et l'angle  $\varphi = \tan^{-1} \left( \Im(\hat{f}(\nu)) / \Re(\hat{f}(\nu)) \right)$  sont alors associés à l'amplitude et au déphasage de la composante spectrale de mode  $k = 2\pi\nu$ . La T.F.  $\hat{f}(\nu)$  est bornée par  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$  mais pas nécessairement intégrable. Néanmoins, si elle vérifie en outre la condition de stabilité :

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\nu)| d\nu < \infty \quad (2.30)$$

alors  $f(x)$  peut s'exprimer par une relation de réciprocity, appelée *transformée de Fourier inverse* ou *formule d'inversion de Fourier*, définie par :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu \quad (2.31)$$

Pour qu'une fonction aléatoire puisse être décomposée harmoniquement, il faut qu'elle respecte au moins la condition de stabilité. Pour un barreau de dimension finie, cette condition est respectée. Les moments statistiques de processus stochastiques sont, en règle générale, décomposables harmoniquement.

Les fonctions périodiques ne sont malheureusement pas intégrables non plus sur l'ensemble  $\mathbb{R}$ . Pour autant, elles sont souvent dites *harmonisables*, sous certaines conditions toujours rencontrées en pratique, car elles peuvent se décomposer selon :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\nu x} \hat{\mu}_f(d\nu) \quad (2.32)$$

où  $\hat{\mu}_f(d\nu)$  est une mesure signée sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire une somme de mesures de Dirac :

$$\hat{\mu}_f(d\nu) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \epsilon_{n/2L} \quad (2.33)$$

où  $2L$  est la période et  $\epsilon_{n/2L}$  la mesure de Dirac centrée en  $n/2L$ . Pour des raisons pratiques, on dit souvent, dans ce cas, que  $f(x)$  admet la transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(\nu - n/2L) \quad (2.34)$$

où  $\delta(x)$  est la pseudo-fonction de Dirac définie par :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0) \quad (2.35)$$

C'est une écriture purement formelle qui permet néanmoins de définir la transformée de Fourier d'un signal périodique  $f(x)$  de période  $2L$  stable sur sa période par la formule :

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) e^{-2i\pi \frac{n}{2L} x} dx \quad (2.36)$$

$\hat{f}_n$  est alors appelé le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f(x)$ . On montre alors que si  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n| < \infty$ , alors on a pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{2i\pi \frac{n}{2L} x} \quad (2.37)$$

### 2.5.3 Analyse harmonique des fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance

Si l'on suppose que les fonctions d'autocorrélation  $R(x_1, t_1; x_2, t_2) = R(\tau)$  et d'autocovariance  $R_c(x_1, t_1; x_2, t_2) = R_c(\tau)$  d'une fonction aléatoire stationnaire vérifient la condition (2.24), alors il est possible de les décomposer spectralement. Ce qui donne les relations pour  $R$  (les mêmes relations peuvent être obtenues pour  $R_c$ ) :

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu \quad (2.38)$$

$$\hat{R}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau \quad (2.39)$$

De la même manière que précédemment, on peut définir la décomposition spectrale de  $R$  et  $R_c$  si elles sont périodiques et vérifient la condition (2.27). Ces transformées



de Fourier sont toujours positives. On peut constater également, à partir des relations (2.10), (2.11), (2.19), (2.20) et (2.38), que pour  $\tau = t_2 - t_1 = 0$ , ces relations donnent :

$$R(\tau = 0) = m_{2,x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}(\nu) d\nu \quad (2.40)$$

$$R_c(\tau = 0) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_c(\nu) d\nu \quad (2.41)$$

Les transformées de Fourier des fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance peuvent respectivement s'interpréter comme une densité de répartition spectrale de l'énergie définie par la relation (2.25) dans le cas non périodique, ou de la puissance (Eq. (2.28)) dans le cas périodique, de la fonction aléatoire. Elle peut être également interprétée comme la répartition spectrale de la variance (dispersion autour de la moyenne).

En général, en théorie du signal d'origine électrique ou dans le domaine de la mécanique des fluides, ces transformées de Fourier sont interprétées en termes de densité spectrale d'énergie (de puissance dans le cas périodique). Celle-ci est exprimée soit par l'intermédiaire de l'intensité du courant ( $E(t)$  proportionnel à  $I(t) \times I(t)$ ), soit par l'intermédiaire de la vitesse associée à l'idée d'énergie cinétique par unité de masse ( $E(t)$  proportionnel à  $U(t) \times U(t)$ ). Si  $I(t)$  (respectivement  $U(t)$ ) admet une transformée de Fourier  $\hat{I}(\nu)$  ( $\hat{U}(\nu)$ ) et que la moyenne de cette énergie est "localisable" (la formule d'inversion de Fourier est valable), alors celle-ci est égale à la fonction d'autocorrélation en 0. On a donc :

$$\begin{aligned} R(0) = \mu_E &= \int_{-\infty}^{+\infty} c(\nu) d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dC(\nu) \end{aligned} \quad (2.42)$$

où  $c(\nu)$  et  $C(\nu)$  sont respectivement les fonctions densité et répartition spectrales d'énergie (de puissance dans le cas périodique). Dans ce cas, la moyenne de l'énergie

ou de la puissance (ohmique ou cinétique) peut s'obtenir par sommation des contributions relatives de chaque composante fréquentielle de la transformée de Fourier de l'intensité du courant ou de la vitesse, sans nécessité de prendre en compte des termes d'interaction entre composantes.

Dans ce travail de thèse, la grandeur étudiée concerne les fluctuations de section  $\delta S$  de l'anneau ou du barreau équivalent qui est  $2L$  périodique. Même si cette grandeur n'a pas d'énergie physique directement associée, on peut lier cette notion à la variance (moment centré d'ordre 2) de la section. L'autocorrélation du profil de fluctuation de section et la densité spectrale associée existent et permettent d'évaluer pleinement cette variance. Nous détaillerons ces concepts dans le chapitre 3.

## 2.6 Conclusion

Pour conclure ce second chapitre, nous synthétiserons simplement les éléments importants à retenir et anticiperons sur les observations à venir concernant les processus de développement des instabilités et de fragmentation.

Ainsi, avons-nous constaté, dans un premier temps, que ces deux processus peuvent être considérés comme des processus stochastiques pour lesquels il est alors possible d'appliquer les méthodes d'analyse stochastique. Nous avons mis en évidence que ce sont des processus spatio-temporels qui nécessitent donc d'être considérés à la fois dans le temps et dans l'espace. Par rapport au temps, ce sont des processus instationnaires de type markovien, c'est-à-dire que l'état à l'instant  $t + dt$  dépend de l'état à l'instant  $t$ . Ce sont donc des processus qui dépendent de toute l'histoire du problème. Par rapport à l'espace, on supposera qu'en représentation lagrangienne, ils sont homogènes d'ordre 2, c'est-à-dire que les moments  $m_n(\vec{x})$  sont constants et que les fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance ne dépendent que de l'écart spatial  $\Delta\vec{x} = \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|$  (dans un cas isotrope). Cette hypothèse impliquera deux conséquences importantes. D'une part, les processus de développement des instabilités et de fragmentation sont également supposés ergodiques. Il sera donc possible

de considérer de manière équivalente, dans une analyse statistique, un barreau de longueur infinie ou un nombre  $N$  suffisamment grand de barreaux de longueur finie  $2L$  adéquate.

Il sera montré, au Chapitre 3, que l'analyse linéaire de stabilité semble pouvoir être considérée comme une analyse statistique inférentielle, tandis que l'analyse numérique et expérimentale représente des statistiques descriptives. Au cours de ce travail de thèse, certaines notions présentées dans ce chapitre seront donc exploitées, en particulier la notion de densité spectrale. On notera toutefois qu'un grand nombre de méthodes d'analyse, présentées par [Chassaing \(2000\)](#) et utilisées dans le cadre des études des turbulences en mécanique des fluides, doivent être transposables à l'étude du développement des instabilités et de la fragmentation.



# Chapitre 3

## Approche analytique des instabilités

### 3.1 Introduction

Comme précisé dans l'introduction générale de ce rapport de thèse, de nombreux développements théoriques ont été apportés à l'étude du développement des instabilités lors des récentes décennies. Nous allons aborder, dans cette partie, le développement des instabilités lors de chargements dynamiques en utilisant une Analyse Linéaire de Stabilité de l'écoulement plastique. Son principe consiste à superposer à une configuration donnée des perturbations (qui peuvent être sous forme sinusoïdale). Un des objectifs premiers de cette analyse est d'étudier le taux de croissance de ces perturbations au cours du temps. Cette approche permet de mettre en évidence un mode dominant d'instabilité qui est proche de celui observé expérimentalement (voir notamment [Guduru et Freund \(2002\)](#), [Mercier et Molinari \(2004\)](#), [Mercier et al. \(2010\)](#) et [Rodríguez-Martínez et al. \(2013\)](#)). Or, lors d'un essai d'expansion d'anneau par exemple, on constate que la fréquence des instabilités n'est pas unique et que la distance interstriction varie et peut être représentée sous forme d'histogrammes. Nous montrerons, dans ce chapitre, que l'analyse linéaire de stabilité permet de décrire la contribution d'un ensemble de modes d'instabilités sur le profil d'un barreau (on suivra ici la section). À partir de ce résultat, il sera alors possible de définir une distribution de longueurs inter-strictions comparable aux résultats expérimentaux.

## 3.2 L'Analyse Linéaire de Stabilité

### 3.2.1 Cas d'un barreau cylindrique

#### Position du problème

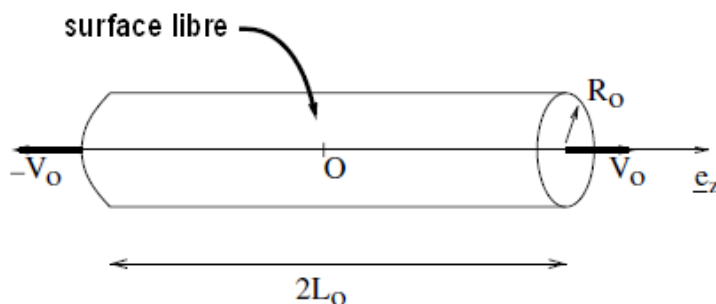


FIG. 3.1 – Représentation schématique du barreau cylindrique, de longueur initiale  $2L_0$  et de rayon initial  $R_0$ . Des vitesses de  $\pm V_0$  sont appliquées aux extrémités  $Z = \pm L_0$ . La surface latérale  $R = R_0$  est libre.

Considérons un barreau cylindrique de longueur initiale  $2L_0$  et de rayon initial  $R_0$  soumis à un chargement en vitesse constante  $v_z = \pm V_0$  à ses deux extrémités ( $Z = \pm L_0$ ). On adopte ici le système de coordonnées cylindriques, associé aux vecteurs de base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ . Les coordonnées lagrangiennes d'un point matériel sont notées  $(R, \theta, Z)$ . En configuration déformée à l'instant courant  $t$ , la position d'un point du barreau est donnée par :

$$r = r(R, Z, t) \quad z = z(R, Z, t) \quad (3.1)$$

La solution mécanique fondamentale correspondant à l'extension homogène du barreau peut être complètement déterminée comme l'ont montré [Jeanclaude et Fresengeas \(1997\)](#) ou [Mercier et Molinari \(2003\)](#). Notons  $\mathbf{x}^h$ ,  $\mathbf{v}^h$ ,  $\gamma^h$ ,  $T^h$ ,  $\sigma^h$  et  $\mathbf{T}^h$  la position, la vitesse, l'accélération, la température, le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur nominal des contraintes de la solution fondamentale.

A titre d'exemple, la position de la particule  $\mathbf{x}^h$  est définie par :

$$\begin{aligned} z^h &= Z/\epsilon' \\ r^h &= R\sqrt{\epsilon'} \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec

$$\epsilon' = \frac{1}{1 + \frac{V_0 t}{L_0}} \quad (3.3)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy correspondant est donné par :

$$[\sigma^{\mathbf{h}}] = \begin{bmatrix} -p^I & 0 & 0 \\ 0 & -p^I & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y - p^I \end{bmatrix}_{R,\theta,Z} \quad (3.4)$$

avec  $p^I$  la pression inertielle donnée par :

$$p^I = \frac{3}{8} \left( \frac{V_0}{L_0} \right)^2 \rho (\epsilon')^3 (R_0^2 - R^2) \quad (3.5)$$

où  $\rho$  est la masse volumique. Le matériau de cette étude est supposé thermo-viscoplastique. La contrainte d'écoulement plastique  $\sigma_y$  (au sens de von Misès) est décrite sous la forme générale suivante :

$$\sigma_y = \sigma_y(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, T) \quad (3.6)$$

où  $\dot{\varepsilon}_p$ ,  $\varepsilon_p$  et  $T$  sont la vitesse de déformation plastique effective, la déformation plastique effective et la température. Les déformations élastiques sont négligées dans cette approche. Une loi d'écoulement plastique de type von Misès est adoptée, de sorte que le déviateur du tenseur des contraintes de Cauchy  $\mathbf{s}$  est lié au tenseur taux de déformation viscoplastique  $\mathbf{D}$  par :

$$\mathbf{s} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_y}{\dot{\varepsilon}_p} \mathbf{D} \quad (3.7)$$

### Analyse linéaire de stabilité : théorie

Nous allons rappeler ici les principales étapes de l'analyse linéaire de stabilité. On pourra cependant obtenir plus de précisions dans les articles de [Shenoy et Freund \(1999\)](#), [Mercier et Molinari \(2003\)](#) ou encore [Mercier et al. \(2010\)](#).

Supposons qu'à un instant  $t_0$ , une perturbation de l'état fondamental est opérée.

Pour  $t \geq t_0$ , nous introduisons une perturbation en position qui respecte l'axisymétrie du problème :  $\delta x_r(R, Z, t)$ ,  $\delta x_z(R, Z, t)$ . Du fait de l'incompressibilité plastique, on introduit une fonction de courant  $\Phi(R, Z, t)$  telle que :

$$\delta x_r = \frac{\sqrt{\epsilon'}}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \quad \delta x_z = -\frac{1}{R\epsilon'} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \quad (3.8)$$

où  $\epsilon'$  est donné par la relation (3.3). Partant des équations (3.8), les perturbations en vitesse  $\delta \mathbf{v}$ , en accélération  $\delta \gamma$ , en température  $\delta T$ , en gradient de déformation  $\delta \mathbf{F}$ , en gradient de vitesse de déformation  $\delta \mathbf{L}$  et en tenseur taux de déformation  $\delta \mathbf{D}$ , peuvent être obtenues. La perturbation sur la contrainte nominale, définie par  $\delta \mathbf{T} = (\mathbf{F}^h + \delta \mathbf{F})^{-1} \cdot (\sigma^h + \delta \sigma) - \mathbf{F}^{h-1} \cdot \sigma^h$ , devient alors en chargement axisymétrique :

$$\begin{aligned} \delta T_{rr} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon'}} (\delta s_{rr} - \delta p + \frac{p^I}{\sqrt{\epsilon'}} \delta x_{r,R}) & \delta T_{rz} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon'}} (\delta s_{rz} - \epsilon' (\sigma_y^h - p^I) \delta x_{r,Z}) \\ \delta T_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon'}} (\delta s_{\theta\theta} - \delta p + \frac{p^I}{\sqrt{\epsilon'}} \frac{\delta x_r}{R}) & & \\ \delta T_{zr} &= \epsilon' (\delta s_{rz} + \frac{p^I}{\sqrt{\epsilon'}} \delta x_{z,R}) & \delta T_{zz} &= \epsilon' (\delta s_{zz} - \delta p - \epsilon' (\sigma_y^h - p^I) \delta x_{z,Z}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pour ce problème axisymétrique particulier, les contraintes déviatoires perturbées  $\delta s$  sont données par :

$$\begin{aligned} \delta s_{rr} &= \frac{2\sigma_y^h}{3\dot{\epsilon}_p^h} (\delta D_{rr} - \frac{\tilde{M}-1}{2} \delta D_{zz}) & \delta s_{\theta\theta} &= \frac{2\sigma_y^h}{3\dot{\epsilon}_p^h} (\delta D_{\theta\theta} - \frac{\tilde{M}-1}{2} \delta D_{zz}) \\ \delta s_{zz} &= \frac{2\tilde{M}}{3} \frac{\sigma_y^h}{\dot{\epsilon}_p^h} \delta D_{zz} & \delta s_{ij} &= \frac{2\sigma_y^h}{3\dot{\epsilon}_p^h} \delta D_{ij} \quad i \neq j \end{aligned} \quad (3.10)$$

avec

$$\tilde{M} = \tilde{m} + \dot{\epsilon}_p^h \left\{ \frac{\tilde{n}}{\eta \dot{\epsilon}_p^h} + \frac{\tilde{q} \tilde{C}}{T^h} \right\}$$

où  $\tilde{M}$  correspond à une sensibilité effective qui englobe les effets de sensibilité à la vitesse de déformation  $\tilde{m}$ , à l'écouissage  $\tilde{n}$  et à l'adoucissement thermique  $\tilde{q}$ . On notera ici que  $\dot{\epsilon}_p^h$ ,  $\dot{\epsilon}_p^h$  et  $T^h$  correspondent à la vitesse de déformation effective, à la déformation effective et à la température, de la solution fondamentale. Par ailleurs, les sensibilités à la vitesse de déformation  $\tilde{m}$ , à l'écouissage  $\tilde{n}$  et à la température  $\tilde{q}$  utilisés dans l'expression de  $\tilde{M}$  sont définis par :

$$\tilde{m} = \frac{\dot{\epsilon}_p^h}{\sigma_y^h} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \dot{\epsilon}_p} \quad \tilde{n} = \frac{\dot{\epsilon}_p^h}{\sigma_y^h} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \dot{\epsilon}_p} \quad \tilde{q} = \frac{T^h}{\sigma_y^h} \frac{\partial \sigma_y}{\partial T} \quad (3.11)$$



Enfin, le coefficient  $\tilde{C}$  permet de relier les perturbations en température  $\delta T$  aux perturbations sur la vitesse de déformation effective  $\delta \dot{\varepsilon}_p$  par :

$$\delta T = \tilde{C} \delta \dot{\varepsilon}_p \quad \text{avec} \quad \tilde{C} = \frac{\beta \sigma_y^h \dot{\varepsilon}_p^h}{\rho c_p \eta - \beta \tilde{q} \sigma_y^h \dot{\varepsilon}_p^h / T^h} \left\{ \frac{\tilde{m} + 1}{\dot{\varepsilon}_p^h} + \frac{\tilde{n}}{\eta \varepsilon_p^h} \right\} \quad (3.12)$$

où  $c_p$  la capacité calorifique massique à pression constante et  $\beta$  le coefficient de Taylor-Quinney. La relation (3.12) est déduite de l'équation de la chaleur en condition adiabatique.

À partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (perturbée), une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre définissant l'évolution de la fonction de courant  $\Phi$  est obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y^h}{3 \dot{\varepsilon}_p^h} \left( (3\tilde{M} - 1) \left( \dot{\Phi}_{,ZZRR} - \frac{\dot{\Phi}_{,ZZR}}{R} \right) + \epsilon'^3 \dot{\Phi}_{,ZZZZ} + \frac{1}{\epsilon'^3} \left( -3 \frac{\dot{\Phi}_{,R}}{R^3} + 3 \frac{\dot{\Phi}_{,RR}}{R^2} - 2 \frac{\dot{\Phi}_{,RRR}}{R} \right. \right. \\ \left. \left. + \dot{\Phi}_{,RRRR} \right) \right) = \rho \left[ \epsilon' \ddot{\Phi}_{,ZZ} - \frac{1}{\epsilon'^2} \left( \frac{\ddot{\Phi}_{,R}}{R} - \ddot{\Phi}_{,RR} \right) - \frac{V_0}{L_0} \left( \epsilon'^2 \dot{\Phi}_{,ZZ} + \frac{2}{\epsilon'} \left( \frac{\dot{\Phi}_{,R}}{R} - \dot{\Phi}_{,RR} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour l'extension d'un barreau cylindrique, d'après les travaux de [Jeanclaude et Fressegeas \(1997\)](#),  $\Phi$  est recherchée sous la forme :

$$\Phi(R, Z, t) = A R e^{\eta(t-t_0)} \sin(k Z) I_1(l R) \quad (3.14)$$

Dans cette relation,  $I_1$  est la fonction de Bessel modifiée du premier ordre,  $k$  et  $l$  sont respectivement les nombres d'onde longitudinaux et transversaux. Dans cette approche, la dépendance en temps de la perturbation est incluse dans le terme  $e^{\eta(t-t_0)}$  avec  $\eta$  supposé constant. Cette hypothèse est couramment appelée "théorie du coefficient figé", ou "frozen coefficient theory" en anglais.  $\eta$  est appelé taux de croissance de perturbation de mode  $k$  et est donné, par définition, par :  $\dot{\Phi}(R, Z, t) = \eta \Phi(R, Z, t)$ . À noter que lorsque  $t$  change, nous montrerons que  $\eta$  fluctue quand même.

Des conditions aux limites perturbées aux extrémités du barreau ( $\delta v_z(R, \pm L_0, t) = 0$  et  $\delta T_{zr}(R, \pm L_0, t) = 0$ ), on en déduit que les nombres d'onde solutions appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{K} = \left\{ k_p = p \frac{\pi}{L_0}, p \in \mathbb{N} \right\}$ . Les deux autres conditions aux

limites ( $\delta T_{rz} = 0$  et  $\delta T_{rr} = 0$ ) à la surface du barreau ( $R = R_0$ ) donnent :

$$\ddot{\Phi}_{,ZZ} + \frac{1}{\epsilon'^3} \left( \frac{\dot{\Phi}_{,R}}{R} - \dot{\Phi}_{,RR} \right) - 3 \dot{\epsilon}_p^h \Phi_{,ZZ} = 0 \quad (3.15a)$$

$$\begin{aligned} \frac{2 \sigma_y^h}{3 \dot{\epsilon}_p^h} \left( -\frac{3 \tilde{M} \epsilon'}{2} \frac{\dot{\Phi}_{,ZZR}}{R} + \epsilon' \frac{\dot{\Phi}_{,ZZ}}{R^2} - \frac{\dot{\Phi}_{,R}}{2 \epsilon'^2 R^3} + \frac{\dot{\Phi}_{,RR}}{2 \epsilon'^2 R^2} - \frac{\dot{\Phi}_{,RRR}}{2 \epsilon'^2 R} \right) \\ - \frac{3}{4} \left( \frac{V_0}{L_0} \right)^2 \rho \epsilon'^4 \Phi_{,ZZ} + \rho \left( 2 \frac{V_0}{L_0} \frac{\dot{\Phi}_{,R}}{R} + \frac{\ddot{\Phi}_{,R}}{\epsilon' R} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.15b)$$

Le taux de croissance  $\eta$  des perturbations est finalement obtenu à chaque instant  $t$  et pour tout nombre d'onde  $k \in \mathcal{K}$  en combinant les équations (3.13), (3.14) et (3.15). On peut se reporter à [Mercier et Molinari \(2003\)](#) pour plus de détails.

En conclusion, à chaque instant et pour chaque nombre d'onde  $k \in \mathcal{K}$ , nous pouvons calculer le taux de croissance de la perturbation. On montrera par la suite qu'au cours de la déformation, des modes préférentiels sont favorisés.

### 3.2.2 Application au cas d'un barreau de cuivre

Nous allons considérer ici un barreau de longueur  $2L_0 = 128.805 \text{ mm}$  et de section circulaire  $\pi R_0^2 = 1 \text{ mm}^2$ . Cette configuration est représentative d'un anneau en expansion de  $40 \text{ mm}$  de diamètre initial et d' $1 \text{ mm}^2$  de section.

Supposons également que ce barreau est soumis à une expansion à la vitesse constante de  $V_0 = 900 \text{ m/s}$  (vitesse de déformation nominale  $\frac{V_0}{L_0} \approx 14000 \text{ s}^{-1}$ ). Nous étudierons plus loin le rôle de la vitesse d'expansion sur le développement des instabilités en faisant varier la vitesse  $V_0$ . Le comportement du cuivre est modélisé à partir de la loi de comportement thermo-viscoplastique de [Zerilli et Armstrong \(1987\)](#) modifiée par [Petit et Dequiedt \(2006\)](#). Les dépendances à la déformation plastique  $\epsilon_p$ , à la vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$ , et à la température  $T$  sont considérées :

$$\sigma_y = \frac{G(p, T)}{G(p = 0 \text{ Pa}, T = 300 \text{ K})} (\sigma_0 + \sigma_2(\epsilon_p) + \sigma_3(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p, T)) \quad (3.16)$$

où

$$\sigma_2 = C_5 \varepsilon_{ra}^n \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{ra}} \right) \right]^n \quad (3.17a)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \sigma_{th} \left( 1 + \sqrt{1 + 4 \frac{C_d T \dot{\varepsilon}_p}{\sigma_{th}}} \right) \quad (3.17b)$$

$$\sigma_{th} = B_0 \varepsilon_r^m \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_r} \right) \right]^p \exp \left( (-\alpha_0 + \alpha_1 \log \dot{\varepsilon}_p) T \right) \quad (3.17c)$$

$$\varepsilon_r = \left[ \frac{\varepsilon_{r0}}{\exp \left( (-\alpha_0 + \alpha_1 \log \dot{\varepsilon}_p) T \right)} \right]^{\frac{1}{m-1}} \quad (3.17d)$$

Dans cet ensemble d'équations,  $\sigma_0$  est un seuil athermique,  $C_5$  et  $B_0$  des contraintes de référence,  $\varepsilon_{ra}$  et  $\varepsilon_{r0}$  des déformations de référence,  $n$ ,  $m$  et  $q$  des coefficients liés à l'écroutissage,  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  des coefficients d'activation thermique, et  $C_d$  un coefficient de viscosité qui permet de rendre compte du freinage visqueux des dislocations en grande vitesse de déformation.

Cette loi particulière permet donc de prendre en compte les effets de saturation de la densité des dislocations pour de grandes déformations plastiques, dont les contributions apparaissent dans les parties athermiques et thermiquement activées de la contrainte d'écoulement (respectivement dans  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ ).

Le terme  $G(p, T)$  représente le module de cisaillement dépendant de la pression ( $p = -\frac{tr\sigma}{3}$ ) et de la température. Il est modélisé à partir de la loi développée par [Preston et Wallace \(1992\)](#) :

$$G(p, \rho, T) = (G_0 + p \alpha_p) \left( 1 - \alpha \frac{T}{T_m(\rho)} \right) \quad (3.18)$$

où  $\rho$ ,  $T_m$  et  $\alpha$  sont la masse volumique, la température de fusion et un coefficient d'adoucissement thermique.  $\alpha_p$  caractérise la dépendance de  $G$  vis-à-vis de la pression. Le module de cisaillement de référence vaut dans ce cas  $G_0 = G(p = 0 \text{ Pa}, T = 0 \text{ K})$ . Dans les simulations numériques du chapitre 4, le module de cisaillement sera considéré dépendant de la pression, de la température et de la température de fusion. Dans l'analyse linéaire de stabilité, la masse volumique  $\rho$  est supposée constante ( $\rho = \rho_0$ ) et la dépendance de  $G$  par rapport à la pression est négligée

$G(0 \text{ Pa}, 300 \text{ K}) [\text{MPa}]$ $4.77 \times 10^4$	$G(0 \text{ Pa}, 0 \text{ K}) [\text{MPa}]$ $5. \times 10^4$	$\alpha$ 0.456	$\rho_0 [\text{kg.m}^{-3}]$ 8930	$c_p [\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}]$ 383	$\beta$ 1.
$T_m [\text{K}]$ 1667	$\sigma_0 [\text{MPa}]$ 59.24	$C_5 [\text{MPa}]$ 163.5	$\epsilon_{ra}$ 0.618	$n$ 0.779	$B_0 [\text{MPa}]$ 1232
$m$ 0.987	$p$ 0.695	$\alpha_0 [10^{-5}\text{K}^{-1}]$ 3.2	$\alpha_1 [10^{-6}\text{K}^{-1}]$ 1.67	$\epsilon_{r0}$ 1.01	$C_d$ 0.0

TAB. 3.1 – Paramètres de la loi de Zerilli-Armstrong modifiée par [Petit et Dequiedt \(2006\)](#) pour le cuivre d'étude.

( $\alpha_p = 0$ ). Ainsi la température de fusion est constante ( $T_m = T_m(\rho_0)$ ) et le module de cisaillement ne dépend ici que de la température  $T$ .

Tous les paramètres déterminés par [Petit et Dequiedt \(2006\)](#) pour le cuivre étudié dans ce travail de thèse sont résumés dans le tableau 3.1.

L'évolution du taux de croissance normé des perturbations  $\eta/\dot{\epsilon}$  (pour simplifier l'écriture, l'exposant  $h$  sera supprimé) est présentée sur la Figure 3.2(a) à différents instants  $t \in [45; 85\mu\text{s}]$ , avec  $\dot{\epsilon} = \frac{V_0}{L_0} \epsilon'$ . Comme déjà mentionné dans nombre d'articles, l'interaction entre l'inertie, dont l'effet limite le développement des faibles nombres d'onde, et la multidimensionnalité de l'écoulement plastique, qui limite le développement des grands nombres d'onde, conduit à la sélection d'un nombre d'onde particulier associé au maximum du taux de croissance. À chaque instant de la déformation, on peut donc définir un mode dominant évoluant au cours du chargement pour les instabilités, voir aussi [Mercier et Molinari \(2003\)](#). La Figure 3.2(a) confirme ce point. En effet, au cours du temps, le mode dominant se translate vers les grands nombres d'onde. À partir de ces résultats sur l'évolution du taux de croissance normé  $\eta/\dot{\epsilon}$  obtenus par analyse linéaire de stabilité, plusieurs auteurs, dont [Guduru et Freund \(2002\)](#) et [Jouve \(2010\)](#), ont cherché à relier ce mode dominant et le nombre de striction expérimental. Pour ce faire, ils ont proposé de définir un critère ad hoc, basé sur une valeur critique de  $\eta/\dot{\epsilon}$ . Cette approche considère ainsi que la fréquence d'apparition des striction est liée à la perturbation dont le taux de croissance atteint pour la première fois ce critère ad hoc à un instant donné. Elle peut donc être perçue comme une définition instantanée d'un mode dominant qui

conduit à la striction multiple. En considérant une valeur critique comprise entre 10 et 15, cette méthode permet alors de retrouver le nombre de strictions générées lors de l'expansion d'anneaux.

En regardant le problème sous un nouvel angle, et en remarquant que le taux de croissance évolue régulièrement dans le temps ainsi que le mode dominant associé, il est possible de considérer que la striction multiple est initiée par des modes particuliers de perturbation dont l'évolution, au cours de l'expansion, a permis d'atteindre une amplitude suffisante. Par conséquent, nous proposons de définir un critère alternatif sous la forme d'un indice qui permet de prendre en compte toute l'histoire du développement des perturbations en intégrant dans le temps le taux de croissance  $\eta$ .

La Figure 3.2(b) représente l'évolution de ce nouvel indice  $I = \int_0^t \eta dt$ . Celui-ci a déjà été proposé par [Fressengeas et Molinari \(1994\)](#) et [Petit et al. \(2005\)](#) sans toutefois l'utiliser sous la forme d'un critère d'apparition des strictions localisées. On remarquera également que les courbes de  $I$  en fonction du nombre d'onde  $k$  ont une forme semblable aux résultats de la Figure 3.2(a) représentant l'évolution du rapport normé  $\eta/\dot{\varepsilon}$ . De manière similaire, le maximum de ces nouvelles courbes évolue au cours du temps et est associé à un nombre d'onde croissant.

En comparant les résultats des Figures 3.2(a) et 3.2(b), il apparaît évident qu'à un instant  $t$  donné, le nombre d'onde dominant évalué à partir de la Figure 3.2(a) est plus grand que celui déterminé à partir de la Figure 3.2(b). Le nombre de strictions prévu par l'approche intégrale est donc plus petit que celui donné par le taux de croissance normé  $\eta/\dot{\varepsilon}$ . La Figure 3.3, représente l'évolution des modes dominants associés à ces deux grandeurs et permet de mieux se rendre compte de cet écart. De la même manière que nous pouvons définir un critère d'apparition des strictions sous la forme d'une valeur critique de  $\eta/\dot{\varepsilon}$ , nous définissons également un critère sous la forme d'une valeur critique de l'intégrale  $I$ .

La détermination de l'approche la plus appropriée sera faite par comparaison analytique/numérique dans le Chapitre 5 de ce rapport de thèse.

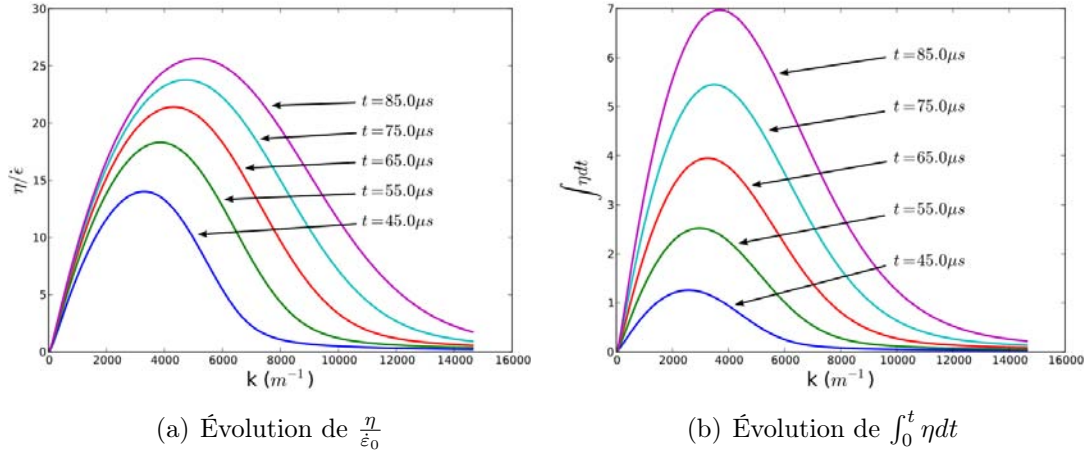


FIG. 3.2 – Évolution des grandeurs  $\frac{\eta}{\dot{\varepsilon}_0}$  et  $\int_0^t \eta dt$  pour une vitesse de chargement de  $900 \text{ m/s}$ . La longueur initiale du barreau est  $2L_0 = 128.8 \text{ mm}$  et sa section initiale  $S_0 = \pi R_0^2 = 1 \text{ mm}^2$ . Le matériau est un cuivre décrit par une loi [Zerilli et Armstrong \(1987\)](#) modifiée, définie par l'équation (3.16), dont les paramètres sont présentés dans le tableau 3.1.

### 3.2.3 Analyse dimensionnelle du problème d'extension d'un barreau

Il est intéressant de connaître l'effet des différents paramètres inhérents au problème des instabilités dans un barreau en traction. Pour ce faire, une analyse dimensionnelle du problème va être conduite.

Il faut commencer par recenser les grandeurs intervenant lors de cette extension. On peut ainsi considérer : la limite élastique initiale  $\sigma_y^0$  comme une variable **indépendante**, même si en toute rigueur, elle dépend de la déformation et de la température ; les différentes sensibilités  $\tilde{m}$ ,  $\tilde{n}$  et  $\tilde{q}$ , et la masse volumique  $\rho$ , comme **paramètres physiques** ; la longueur initiale  $L_0$  et le rayon initial  $R_0$  du barreau et la vitesse de chargement  $V_0$ , comme **données physiques**. Enfin, les variables **dépendantes** qui seront recherchées ici sont le temps de départ  $t_{neck}$  et le nombre  $N_{neck}$  des localisations. Un critère d'apparition est également nécessaire. Dans la

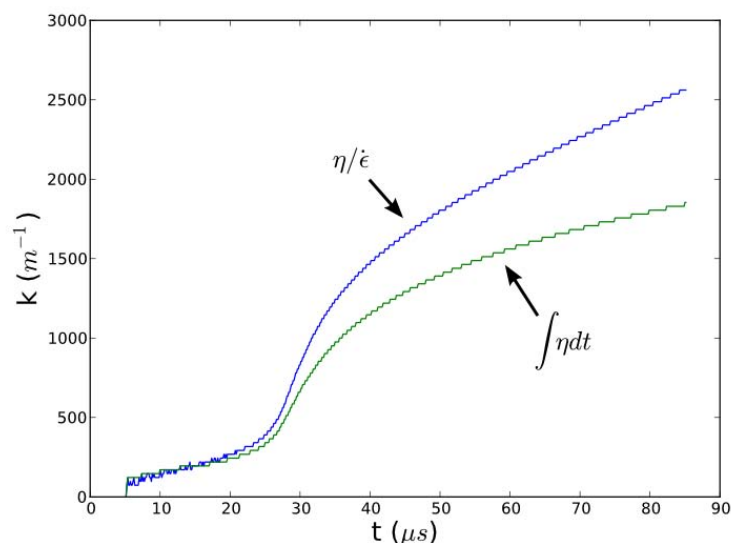


FIG. 3.3 – Évolution du mode dominant des instabilités suivant les grandeurs  $\frac{\eta}{\dot{\epsilon}_0}$  et  $\int_0^t \eta dt$ . La configuration et les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2.

	$t_{neck}$	$\sigma_y^0$	$\tilde{m}$	$\tilde{n}$	$\tilde{q}$	$\rho$	$L_0$	$R_0$	$V_0$	$Cr$
[L]	0	-1	0	0	0	-3	1	1	1	0
[M]	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
[T]	1	-2	0	0	0	0	0	0	-1	0

TAB. 3.2 – Matrice des exposants aux dimensions pour  $t_{neck}$ . [L] est la dimension d'une longueur, [M] la dimension d'une masse, et [T] celle d'un temps.

suite, on notera  $Cr$  cette variable qui pourra être  $\eta/\dot{\epsilon} = cst$  ou  $\int \eta dt = cst$ .

Le temps  $t_{neck}$  et le nombre  $N_{neck}$  peuvent finalement s'écrire sous forme de fonctions du type :

$$t_{neck} = f_t(\sigma_y^0; \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}, \rho; L_0, R_0, V_0, Cr) \quad (3.19)$$

$$N_{neck} = f_N(\sigma_y^0; \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}, \rho; L_0, R_0, V_0, Cr) \quad (3.20)$$

L'utilisation du théorème de Vaschy-Buckingham, autrement appelé théorème  $\pi$ , permet de transformer l'expression (3.19) en une relation entre un nombre réduit de combinaisons de ces paramètres. Le nombre de grandeurs considérées est de  $N = 10$ . Le rang  $r$  de la matrice des exposants aux dimensions, représenté par le tableau 3.2,

est de 3. La relation (3.19) peut donc se réduire à une fonction de  $N - r = 7$  paramètres adimensionnels. Nous pouvons proposer, par exemple, la relation :

$$\frac{t_{neck} V_0}{L_0} = F_t\left(\frac{\sigma_y^0}{\rho V_0^2}, \frac{R_0}{L_0}, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}, Cr\right) \quad (3.21)$$

dans laquelle apparaissent les grandeurs adimensionnelles  $\frac{t_{neck} V_0}{L_0}$ ,  $\frac{\sigma_y^0}{\rho V_0^2}$  et  $\frac{R_0}{L_0}$ . La première est la déformation conventionnelle associée à la déformation à striction  $\varepsilon_N$  via la relation  $t_{neck} \frac{V_0}{L_0} = \exp(\varepsilon_N) - 1$ , le rapport  $\frac{V_0}{L_0}$  étant égal à la vitesse de déformation initiale. La seconde rend compte de la compétition entre le comportement et l'inertie. Enfin, la dernière grandeur correspond au rapport de forme initial du barreau. De la même manière, il est également possible de transformer l'expression 3.20 en :

$$N_{neck} = F_N\left(\frac{\sigma_y^0}{\rho V_0^2}, \frac{R_0}{L_0}, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}, Cr\right) \quad (3.22)$$

Il faut noter que pour la loi de [Zerilli et Armstrong \(1987\)](#) modifiée, les coefficients  $\tilde{m}$ ,  $\tilde{n}$  et  $\tilde{q}$  ne sont pas rigoureusement constants. Par ailleurs, il est à noter qu'en doublant à la fois la longueur du barreau  $L_0$  et la vitesse de chargement  $V_0$ , le temps d'évolution des instabilités et le nombre de strictions par unité de longueur  $N_{neck}/L_0$  doivent être conservés. Par conséquent, les deux groupements  $\frac{\sigma_y^0}{\rho V_0^2}$  et  $\frac{R_0}{L_0}$  doivent se combiner de sorte que l'équation (3.21) devient :

$$\frac{t_{neck} V_0}{L_0} = F_t\left(\left[\frac{\sigma_y^0}{\rho V_0^2} \left(\frac{R_0}{L_0}\right)^2\right]^{-1/2}, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}, Cr\right) \quad (3.23)$$

De même en gardant  $\frac{V_0}{L_0}$  constant mais en changeant  $L_0$ , on doit avoir :

$$\frac{N_{neck} R_0}{L_0} = \tilde{F}_N\left(\left[\frac{\sigma_y^0}{\rho V_0^2} \left(\frac{R_0}{L_0}\right)^2\right]^{-1/2}, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}, Cr\right) \quad (3.24)$$

Pour estimer les temps d'apparition  $t_{neck}$  et le nombre  $N_{neck}$  des strictions, il est nécessaire d'adopter un critère. Deux choix s'offrent à nous : une valeur critique du rapport  $\eta/\dot{\varepsilon}$  ou une valeur critique de l'intégrale  $\int \eta dt$ . Deux valeurs pour chacun de ces deux types de critère ont donc été testées sur de nombreuses configurations. Plusieurs vitesses  $V_0$  allant de 75 à 5000 m/s, trois longueurs  $2 L_0$  de 128.8, 257.6 et



515.2 mm, et trois rayons  $R_0$  de 0.5642, 1.1284 et 2.2568 mm, ont ainsi été considérés pour cette analyse. La masse volumique  $\rho$  et la limite d'écoulement  $\sigma_y^0$  sont ici prises constantes ( $\rho = 8930 \text{ kg/m}^3$  et  $\sigma_y^0 = 59.24 \text{ MPa}$ ). Les Figures 3.4 et 3.5 présentent les courbes maîtresses obtenues pour le rapport  $\frac{t_{neck} V_0}{L_0}$  en fonction de  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}}$  en considérant respectivement les deux critères de localisation. On observe pour les deux figures un changement de régime pour une valeur  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}} \approx 15 \times 10^{-2}$ . Par ailleurs, les pentes observées sur les deux figures sont dépendantes de la valeur de  $\eta/\dot{\epsilon}$  et indépendantes de  $I$ . On notera enfin les temps normés donnés par le critère de Considère ( $\varepsilon_{Cons.}$ ) qui sont inférieurs à ceux obtenus à partir de  $I = 1$  et 2, mais compris entre ceux donnés par  $\eta/\dot{\epsilon} = 10$  et 15. Un critère sous forme intégrale semble donc être plus adapté.

Comme très souvent dans une analyse dimensionnelle, les deux grandeurs adimensionnelles d'intérêt ( $\frac{t_{neck} V_0}{L_0}$  et  $N_{neck}$ ) peuvent être exprimées sous forme de lois puissances des autres paramètres adimensionnels :

$$\frac{t_{neck} V_0}{L_0} = \left( \frac{R_0}{L_0} V_0 \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}} \right)^a g(\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}, Cr) \quad (3.25)$$

$$N_{neck} = \frac{L_0}{R_0} \left( \frac{R_0}{L_0} V_0 \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}} \right)^b h(\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}, Cr) \quad (3.26)$$

Afin d'évaluer correctement les coefficients  $a$  et  $b$ , une des solutions les plus avantageuses est de tracer l'évolution, en échelle logarithmique, des rapports  $\frac{t_{neck} V_0}{L_0}$  et  $\frac{N_{neck} R_0}{L_0}$  en fonction de  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}}$ . Les pentes obtenues correspondent alors aux valeurs de  $a$  et  $b$ .

Sur la Figure 3.5, deux régimes différents coexistent : un régime à faible inertie ( $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}} < 15 \times 10^{-2}$ ) pour lequel la pente  $a$  est d'environ 0.07 et un régime à haute inertie ( $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}} \geq 15 \times 10^{-2}$ ) pour lequel la pente  $a$  est d'environ 0.3 . Pour le barreau qui nous intéresse ( $\frac{R_0}{L_0} = \frac{0.5642}{64.4}$ ), la transition a lieu pour  $V_0 \approx 1400 \text{ m/s}$ . La différence de régime est marquée avec un rapport de valeurs de  $a$  d'environ 4.5. À titre indicatif, nous pouvons considérer une tendance moyenne de pente  $a$  égale

à environ 0.13. Il conviendra, dans le chapitre suivant, de confirmer cette tendance par des simulations aux éléments finis.

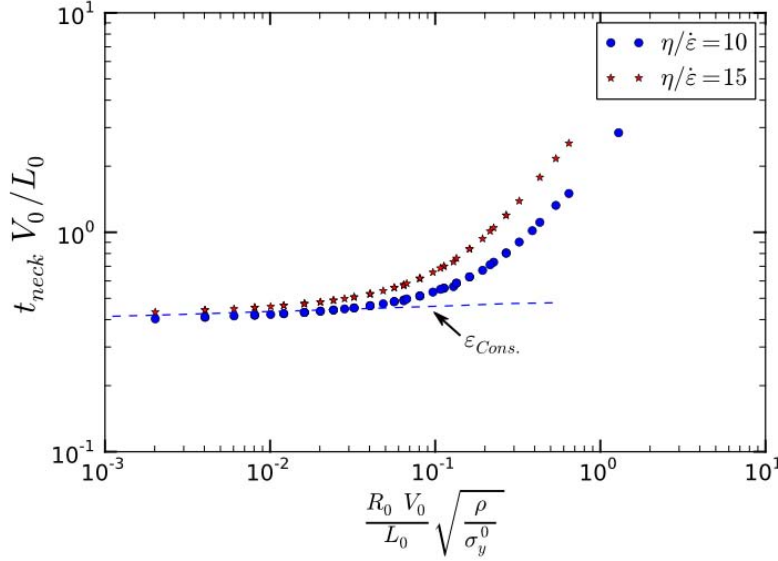


FIG. 3.4 – Évolution du temps  $t_{neck}$  normalisé en fonction du paramètre  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}}$ . Des critères de localisation  $\eta/\dot{\varepsilon} = 10$  et  $15$  sont adoptées. Le critère de Considère  $\varepsilon_{Cons.}$  est également représenté. Les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2.

Les Figures 3.6 et 3.7 présentent les évolutions du rapport  $\frac{N_{neck} R_0}{L_0}$  en fonction du rapport  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}}$  en considérant respectivement des critères de localisation de la forme  $\eta/\dot{\varepsilon}$  ou  $\int \eta dt$ . Nous observons à nouveau un effet lié à la valeur du critère  $\eta/\dot{\varepsilon}$  sur les pentes. Une transition est en effet observée pour un rapport  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}}$  variant en fonction de la valeur du critère choisie. Cet effet est malgré tout plus faible que pour le temps d'apparition  $t_{neck}$ . En considérant le critère de localisation sous forme intégrale, l'évolution du rapport  $\frac{N_{neck} R_0}{L_0}$ , en échelles logarithmiques, est quasi linéaire. La pente  $b$  déterminée par ces résultats est d'environ 0.4. L'influence de l'inertie, même si elle reste visible, est bien moins importante ici que pour le rapport précédent  $\frac{t_{neck} V_0}{L_0}$ .

Pour faire la synthèse de ces résultats, à partir des équations (3.25) et (3.26), pour le critère  $\int \eta dt = 1$ , nous pouvons finalement déterminer  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$  par les

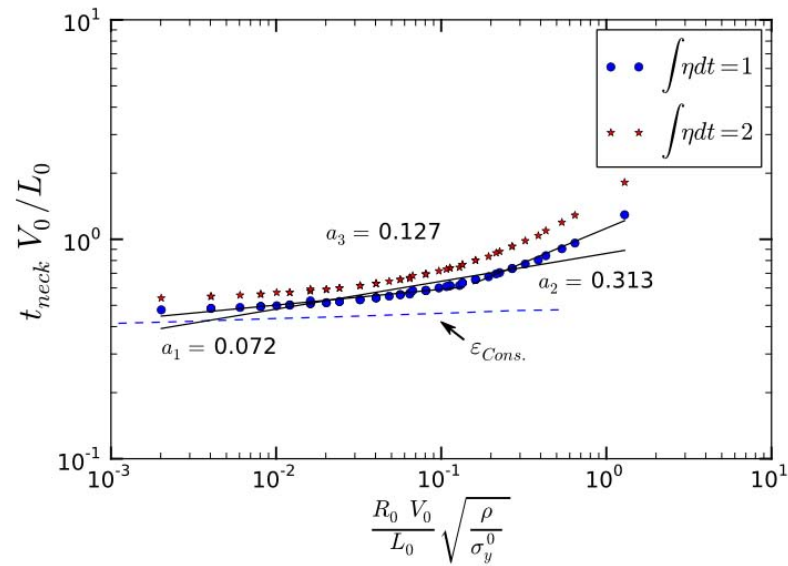


FIG. 3.5 – Évolution du temps  $t_{neck}$  normalisé en fonction du paramètre  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}}$ . Des critères de localisation  $\int \eta dt = 1$  et  $2$  sont adoptés. Le critère de Considère  $\varepsilon_{Cons.}$  est également représenté. Les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2.

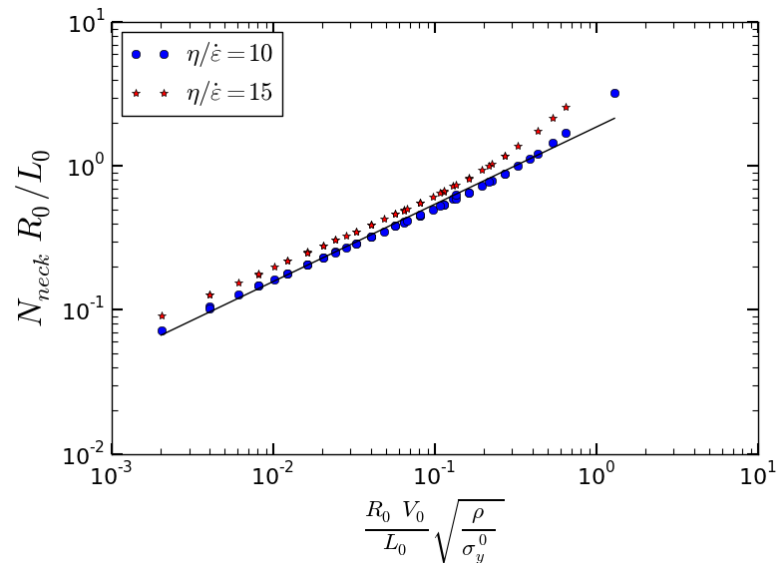


FIG. 3.6 – Évolution du nombre  $N_{neck}$  normalisé en fonction du paramètre  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}}$ . Des critères de localisation  $\eta/\dot{\varepsilon} = 10$  et  $15$  sont adoptés. Les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2.

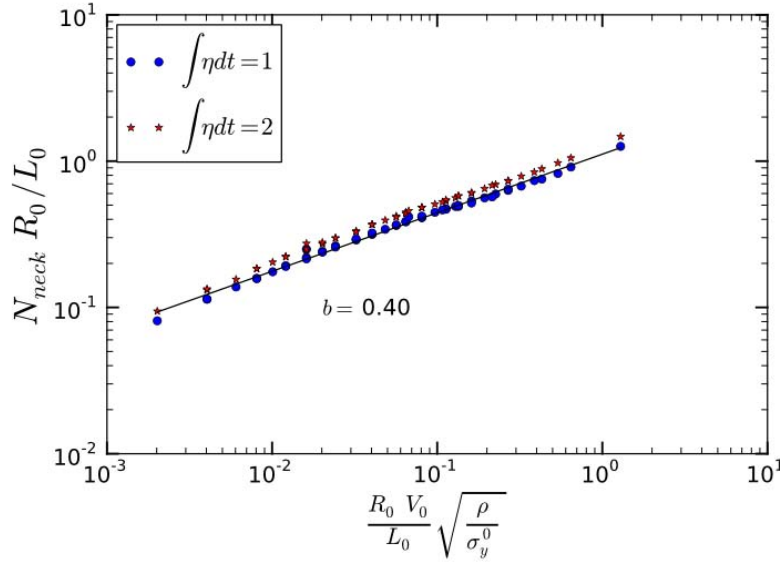


FIG. 3.7 – Évolution du nombre  $N_{neck}$  normalisé en fonction du paramètre  $\frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}}$ . Des critères de localisation  $\int \eta dt = 1$  et 2 sont adoptés. Les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2.

relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 t_{neck} &= R_0^{0.07} \left( \frac{L_0}{V_0} \right)^{0.93} \left( \frac{\sigma_y^0}{\rho} \right)^{-0.035} g(\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}, Cr) \text{ pour } \frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}} < 15 \times 10^{-2} \\
 &= R_0^{0.3} \left( \frac{L_0}{V_0} \right)^{0.7} \left( \frac{\sigma_y^0}{\rho} \right)^{-0.15} g(\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}, Cr) \text{ pour } \frac{R_0 V_0}{L_0} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_y^0}} \geq 15 \times 10^{-2}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$N_{neck} = \left( \frac{L_0}{R_0} \right)^{0.6} \left( \frac{\rho V_0^2}{\sigma_y^0} \right)^{0.2} h(\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}) \tag{3.28}$$

On pourra noter que Shenoy et Freund (1999) avaient déjà observé, à partir de leurs résultats analytiques, que le nombre de strictions dominant pouvait raisonnablement s'exprimer sous la forme :

$$N_{neck} = C \left( \frac{R_0}{L_0} \right)^{-1/2} \left( \frac{k}{\rho V_0^2} \right)^{-1/4} \tag{3.29}$$

où  $C$  est une constante de proportionnalité et  $k$  un coefficient du matériau homogène à  $\sigma_y^0$ . Cette relation est tout à fait comparable à celle que nous obtenons (Eq. (3.28)).

### 3.3 Évolution des modes d'instabilité

Nous avons présenté, ci-avant, l'analyse linéaire de stabilité classique. Le résultat principal déduit de cette analyse est une décomposition spectrale du taux de croissance instantané des perturbations. À partir de la définition d'un critère tel que ceux décrits précédemment, le mode dominant des instabilités est déterminé. Ce mode particulier est alors supposé caractériser un nombre de strictions représentatif pour le cas du barreau en traction. L'objet de cette partie est de mettre en évidence que la décomposition spectrale obtenue à partir de l'analyse linéaire de stabilité est encore plus riche en informations complémentaires. Nous montrerons, en particulier, qu'une distribution de longueurs inter-strictions peut être établie.

#### 3.3.1 Profil des instabilités

Considérons ici un barreau cylindrique de longueur  $2L_0$  et de rayon  $R_0$ . Au temps  $t_0 \geq 0$ , une perturbation de mode  $k_p \in \mathcal{K} = \left\{ k_p = p \frac{\pi}{L_0}, p \in \mathbb{N} \right\}$ , définie par les équations (3.8) et (3.14), est ajoutée de telle sorte que la section du barreau varie le long de l'axe  $Z$ . À  $t$  donné proche de  $t_0$ , la section correspondante peut être évaluée à partir de :

$$S(Z, t) = \pi (r_0(t) + \delta x_r^p(R_0, Z, t))^2 \quad (3.30)$$

avec

$$\delta x_r^p(R_0, Z, t) = k_p A_p \sqrt{\epsilon'} I_1(l R_0) e^{\eta(t-t_0)} \cos(k_p Z) \quad (3.31)$$

$\delta x_r^p(R_0, Z, t)$  représente la perturbation radiale de la section du barreau (pour  $r = R_0$ ). Comme l'amplitude  $A_p$  des perturbations est supposée petite devant la section fondamentale,  $S$  peut être approchée par :

$$S(Z, t) = \pi r_0^2(t) + 2\pi r_0(t) \delta x_r^p(R_0, Z, t) \quad (3.32)$$

La fluctuation de la section correspondante peut donc être estimée, pour un temps  $t$  proche de  $t_0$ , par :

$$\delta S^p(Z, t) = 2\pi r_0 \sqrt{\epsilon'} A_p k_p I_1(l R_0) e^{\eta(t-t_0)} \cos(k_p Z) \quad (3.33)$$

À partir de la relation  $R_0 = r_0 \sqrt{\epsilon'}$ , on a donc :

$$\delta S^p(Z, t) = \delta S_0^p e^{\eta(t-t_0)} \cos(k_p Z) \quad (3.34)$$

Le terme  $\delta S_0^p = 2\pi R_0 A_p k_p I_1(l R_0)$  représente l'amplitude initiale de la perturbation de mode  $p$  à  $t = t_0$ . Sous ce formalisme,  $\eta$  est le taux de croissance instantané de la perturbation. Ainsi, à  $t_0$ , par définition du taux de croissance instantané, nous obtenons :

$$\overbrace{\delta S^p(Z, t_0)} = \eta \delta S^p(Z, t_0) \quad (3.35)$$

Nous noterons que la relation (3.35) est valable à  $t_0$  (temps auquel les perturbations sont introduites) même lorsque  $\eta$  est supposé varier au cours du temps. Pour décrire l'évolution de l'amplitude de la perturbation, nous supposons que le taux de croissance  $\eta$  est calculé à chaque instant  $t_0$  à partir de l'analyse linéaire de stabilité. Comme l'ont proposé [Fressengeas et Molinari \(1994\)](#) et [Petit et al. \(2005\)](#), cette évolution peut alors être raisonnablement estimée, à partir de l'équation différentielle (3.35), par l'expression suivante :

$$\delta S^p(Z, t) = \delta S_0^p \exp \left[ \int_0^t \eta(k_p, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] \cos(k_p Z) \quad (3.36)$$

Considérons à présent un barreau cylindrique de longueur infinie, avec une perturbation initiale  $2L_0$  périodique, soumis à une vitesse de déformation de  $V_0/L_0$ . La section de ce barreau est alors supposée présenter une fluctuation initiale  $2L_0$  périodique qui peut se décomposer sous forme d'une série de Fourier :

$$\delta S_0(Z) = \sum_p \delta S_0^p \cos(k_p Z + \varphi_p) \quad (3.37)$$

où  $k_p \in \mathcal{K} = \left\{ k_p = p \frac{\pi}{L_0}, p \in \mathbb{N} \right\}$ . Les phases  $\varphi_p$  sont ici considérées comme des variables aléatoires indépendantes issues d'une distribution uniforme sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . La valeur des amplitudes  $\delta S_0^p$  sera donnée ci-après.

En nous basant sur une approximation linéaire, l'amplitude de la perturbation pour chaque nombre d'onde  $k_p$  est supposée croître indépendamment suivant la relation (3.36). Les fluctuations de la section, à tout instant  $t$ , seront donc données par :

$$\delta S(Z, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \delta S_0^p \exp \left[ \int_0^t \eta(k_p, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] \cos(k_p Z + \varphi_p) \quad (3.38)$$

La relation proposée ici pour décrire l'évolution des fluctuations de la section du barreau est une série de Fourier de période  $2L_0$ . Elle correspond à une estimation linéaire de l'évolution d'une perturbation  $2L_0$  périodique de la section d'un barreau de longueur infinie ou, de manière plus physique, de la section d'un anneau mince de périmètre  $2L_0$ , comme l'ont déjà établi [Fressengeas et Molinari \(1994\)](#) et [Petit et al. \(2005\)](#).

L'évolution temporelle précise de la section ne peut être obtenue que par des calculs prenant en compte les non-linéarités. Ce type de calcul a été poursuivi notamment par calculs analytiques pour des géométries simples par [Hutchinson et Neale \(1977\)](#), ou par calculs éléments finis par [Han et Tvergaard \(1995\)](#), ou encore [Rodríguez-Martínez et al. \(2013\)](#). Cependant, [Jouve \(2010\)](#) ayant contrôlé, au cours de sa thèse, que le taux de croissance d'une perturbation d'amplitude limitée, calculée par analyse linéaire de stabilité, correspondait au taux de croissance calculé par simulations éléments finis, il semble raisonnable de considérer que l'évolution de la section, caractérisée par l'équation (3.38), peut conduire à des résultats précis pour des temps faibles. Dans un contexte différent, une évaluation similaire a également été entreprise par [Zhou et al. \(2006b\)](#) qui ont montré qu'au début du développement des bandes de cisaillement adiabatique dans une plaque métallique, une analyse par transformée de Fourier des résultats numériques conduisait à des résultats comparable à ceux de l'analyse linéaire de stabilité. L'équation (3.38) n'est

néanmoins valable que sur des durées limitées au cours desquelles l'amplitude des perturbations reste faible devant la solution de base.

L'évolution des perturbations est donc fortement liée à celle de la fonction  $\exp\left[\int_0^t \eta dt\right]$  au cours du temps, représentée ici sur la Figure 3.8 en fonction du nombre d'onde  $k \in \mathcal{K}$  pour différents instants. Il apparaît clair, dans cette figure, que certains modes de perturbation ont un développement plus rapide, mettant ainsi en exergue un mode dominant. Il est logique que cette observation relative à la sélection d'un mode particulier de striction soit identique aux résultats classiques de l'analyse linéaire de stabilité. En effet, les résultats de la Figure 3.8 ne sont qu'une représentation exponentielle de ceux présentés sur la Figure 3.2(b). Cependant, l'équation (3.38) semble mettre en évidence que le processus de striction multiple est régi par l'histoire du développement de certains modes de perturbation dont l'amplitude croît alors rapidement.

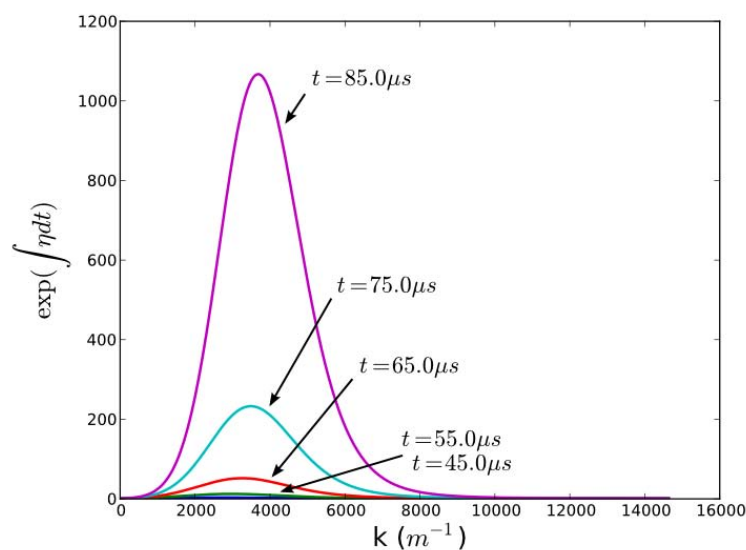


FIG. 3.8 – Évolution de la variable  $\exp(\int_0^t \eta dt)$  pour une vitesse de chargement de  $V_0 = 900 \text{ m/s}$ . La configuration et les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2.



### 3.3.2 Distribution de longueurs inter-strictions

En supposant connues les amplitudes initiales des perturbations  $\delta S_0^p$ , l'équation (3.38) permet alors d'estimer l'évolution des fluctuations de la section à chaque instant  $t$ . L'utilisation de phases  $\varphi_p$  aléatoires permet de considérer la section du barreau comme une fonction aléatoire. [Nayak \(1971\)](#) a montré, à partir d'une description similaire de la rugosité de surface, qu'il est alors possible de décrire la densité de probabilité des hauteurs de sommets d'une surface gaussienne.

Nous présenterons, dans les exemples des deux prochains paragraphes, des illustrations du développement des instabilités déterminés à partir de l'équation (3.38) avec des phases  $\varphi_p$  choisies aléatoirement et des amplitudes de perturbation initiales  $\delta S_0^p$  particulières. Ces exemples mettront en évidence qu'il est possible d'établir une distribution de longueurs inter-strictions.

#### Illustration 1 : perturbation initiale sous forme d'un bruit blanc

Considérons une distribution uniforme des amplitudes initiales,  $\delta S_{0_p} = \delta \hat{S}_0$  pour tous les nombres d'ondes  $k_p \in \mathcal{K}$ . C'est la définition d'un bruit blanc, cas théorique très utilisé pour illustrer certains principes en théorie du signal, mais non physique car il est associé à une énergie infinie. On pourra malgré tout utiliser ce signal particulier en considérant un nombre fini de nombre d'onde  $k_p = p \frac{\pi}{L_0}$  correspondant à des modes  $p \in [1, 300]$  par exemple. On parlera alors de bruit coloré. L'écart-type initial associé à cette perturbation est  $\sigma_{S_0} = \delta \hat{S}_0 \sqrt{300/2} \approx 12.25 \delta \hat{S}_0$  (voir plus loin l'équation (3.42) pour son calcul).

À partir d'un tirage aléatoire choisi pour les phases  $\varphi_p$  et en utilisant l'équation (3.38), il est alors possible d'illustrer une réalisation de l'évolution des fluctuations de la section du barreau au cours du chargement, lorsque les perturbations sont initiées à l'aide d'un bruit coloré d'amplitude  $\delta \hat{S}_0$ . Le profil des fluctuations de la section  $\delta S(Z, t)$  normé par l'écart-type initial  $\sigma_{S_0}$ , pour  $0 \leq Z \leq L_0$  et une vitesse

de chargement de  $V_0 = 900 \text{ m/s}$ , peut ainsi être obtenu aux instants  $t = 5.1, 42.8, 58.5$  et  $72.1 \mu\text{s}$  (voir Figure 3.9). On pourra constater, en particulier, à partir de ces différents profils, que la valeur moyenne des fluctuations  $\langle \delta S \rangle$  est bien nulle sur la longueur du barreau ( $2L_0$ ), et que le bruit initial diminue au cours du chargement, au profit de strictions de plus en plus régulières et marquées. Le déphasage introduit aléatoirement génère des strictions avec des amplitudes irrégulières. Sur la réalisation de la Figure 3.9, par exemple, la striction la plus marquée,  $\delta S_{min}$ , se situe à une position d'environ  $Z \approx 0.6 L_0$ .

Lors de l'analyse de résultats de simulations numériques, ces strictions sont en général comptabilisées visuellement car elles sont alors suffisamment détectables. C'est la méthode qu'ont poursuivie, par exemple, [Rodríguez-Martínez et al. \(2013\)](#). Cependant, leurs résultats montrent parfaitement l'effet de la fréquence de perturbations initiales unimodales sur la fréquence des strictions finales (voir Figure 3.10). Ils semblent être assez imprécis dans les zones de transition où le profil des perturbations est comparable à un profil réel multimodal (semblable à ceux de la Figure 3.9), comme l'illustre les profils de la Figure 3.11.

Dans notre approche, les strictions sont comptées en définissant un seuil en-dessous duquel toute fluctuation du profil étudié est supposée être une striction. C'est le traitement utilisé, par exemple, par [Zhou et al. \(2006a\)](#) et [Bishop et Strack \(2011\)](#) pour définir les strictions critiques qui sont supposées donner lieu à des zones de rupture. À partir de la représentation des fluctuations de la section de la Figure 3.9, il semble donc possible d'évaluer le nombre de strictions en utilisant une valeur seuil. En comptant le nombre d'intersections de la courbe des fluctuations avec le seuil, on peut en effet dénombrer une alternance de creux (associés ici à des strictions) et de sommets. Trois seuils différents sont représentés sur la Figure 3.9. L'un d'entre eux correspond au profil moyen des fluctuations ( $\langle \delta S \rangle = 0$ ). Il est donc représenté par la droite d'équation  $y = 0$ . Les deux autres seuils correspondent

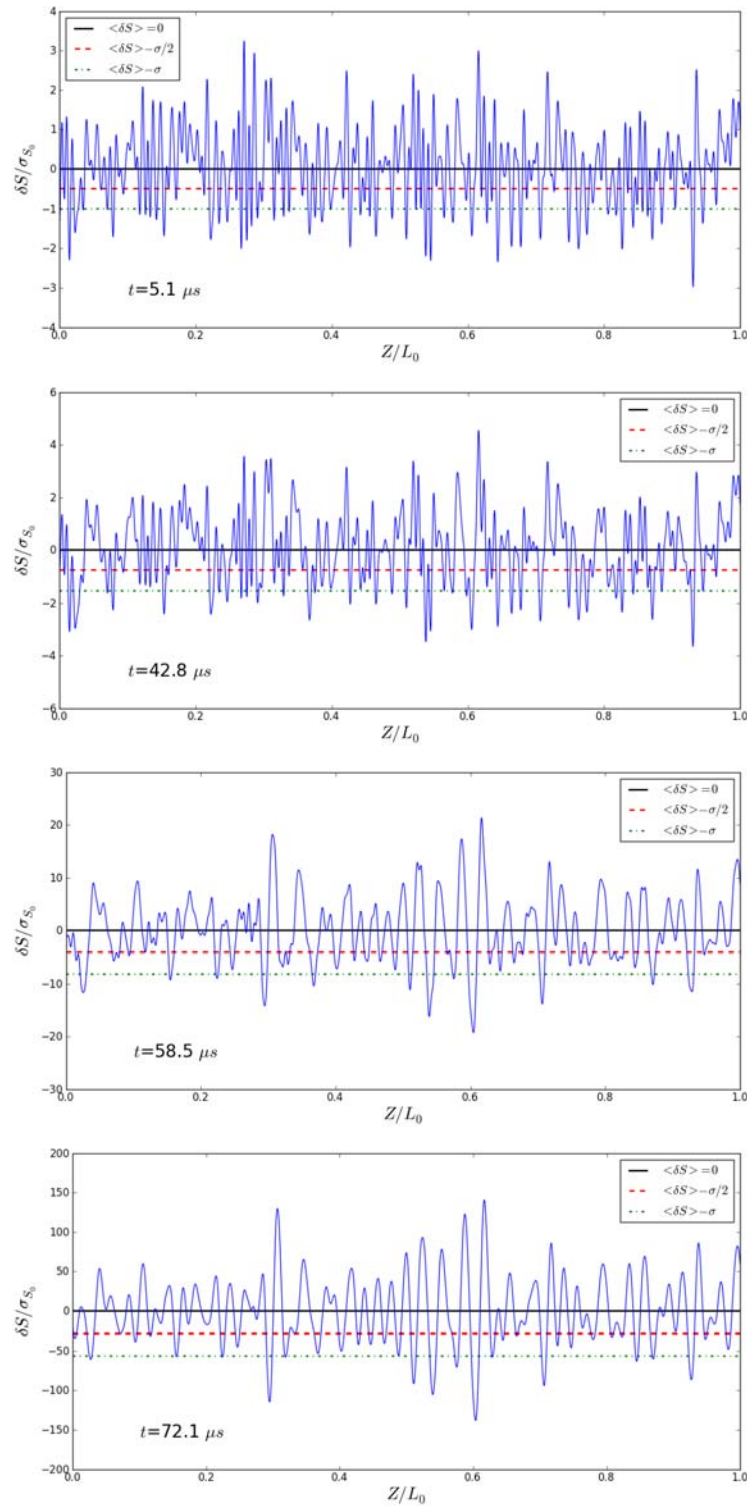


FIG. 3.9 – Profils de la perturbation  $\delta S$  obtenus à partir de l'équation (3.38) à  $t = 5.1$ ,  $42.8$ ,  $58.5$  et  $72.1 \mu s$  pour une vitesse de chargement  $V_0 = 900 \text{ m/s}$ . La configuration et les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2.

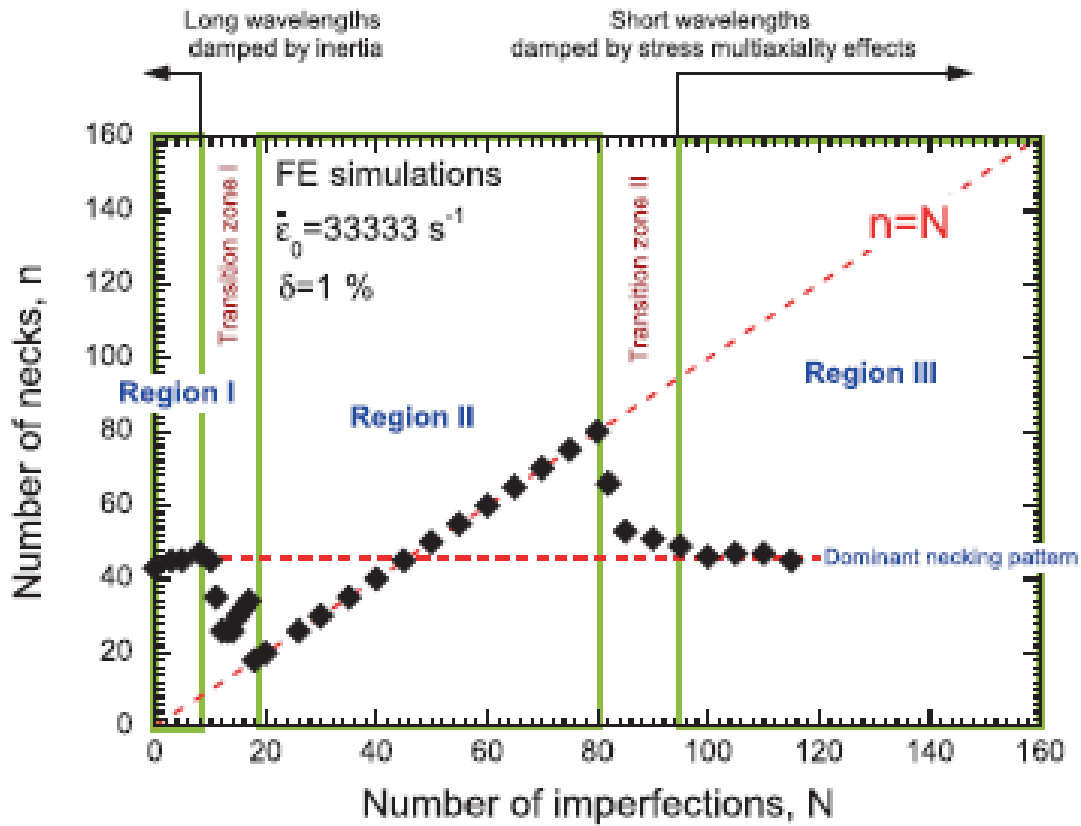


FIG. 3.10 – Nombre de strictions  $n$  obtenu en fonction du nombre d'imperfections géométriques initial  $N$  introduites dans un anneau en acier en expansion dynamique à une vitesse de déformation initiale de  $\dot{\epsilon} = 33\,333 \text{ s}^{-1}$ . 5 domaines sont identifiés : la région *I* et *III* où le nombre de strictions est constant et indépendant du nombre d'imperfections, la région *II* où le nombre de strictions est identique au nombre d'imperfections, et deux zones de transition (zones *I* et *II*) entre les différentes régions. D'après Rodríguez-Martínez et al. (2013)

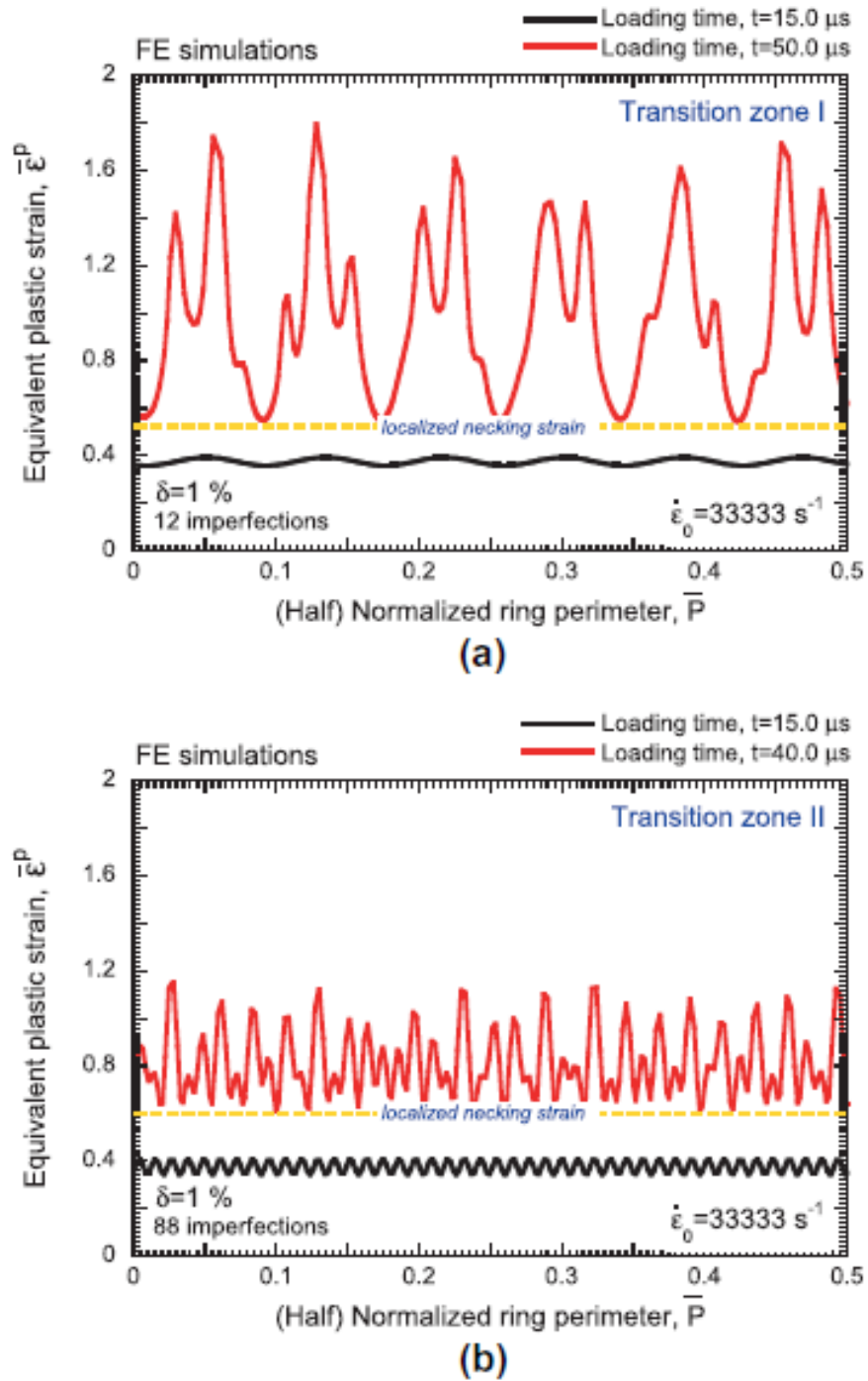


FIG. 3.11 – Profil de déformation plastique équivalente (a) dans la zone de transition *I* avec 12 imperfections initiales et (b) dans la zone de transition *II* avec 88 imperfections pour un anneau en acier en expansion dynamique à une vitesse de déformation initiale de  $\dot{\epsilon} = 33\,333 \text{ s}^{-1}$ . D'après Rodríguez-Martínez et al. (2013)

aux droites d'équation  $y = \langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$  et  $y = \langle \delta S \rangle - \sigma_S$ .  $\sigma_S$  est l'écart-type actuel du profil de section et dépend de l'évolution temporelle des fluctuations. Il apparaît évident, sur ces figures, que le nombre de strictions ainsi déterminé dépend fortement du seuil choisi.

Un second type de résultats peut également être obtenu à partir de ces profils. Il s'agit de la détermination des longueurs inter-strictions  $l$ . Ces longueurs inter-strictions, dans cette approche, seront mesurées par rapport à la configuration de référence. Nous définissons, pour cela, la longueur inter-strictions  $l$  comme la distance longitudinale lagrangienne entre les minima de deux strictions voisines, comme décrit sur la Figure 3.12 avec l'amplitude seuil  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$ . Nous avons constaté que les distributions de longueur inter-strictions évoluent en fonction du tirage aléatoire des phases  $\varphi_p$ . Pour limiter cette dépendance, nous avons alors utilisé la moyenne d'un ensemble suffisant de tirages aléatoires. Des histogrammes, déterminés par les 3 seuils évoqués précédemment, représentant les distributions de longueurs inter-strictions de profils obtenus à partir d'un ensemble (moyenne) de  $n = 10$  réalisations de phases  $\varphi_p$ , semblables à celui de la Figure 3.9, sont représentées sur la Figure 3.13. Ces histogrammes illustrent de manière évidente la forte dépendance à l'amplitude seuil choisie, en particulier pour les courtes et les longues distances inter-strictions. On pourra, par exemple, constater que l'amplitude seuil  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S$  fait apparaître des longueurs inter-strictions plus importantes que pour les deux autres seuils. Pourtant, les tendances observées sur la Figure 3.13 sont tout à fait comparables et donnent, pour toutes les amplitudes seuil, une longueur inter-strictions dominante semblable.

Nous avons vérifié que le nombre de réalisations  $n = 10$  était suffisant pour une représentation statistique correcte des distances inter-strictions. On notera en effet que les distributions obtenues sur la Figure 3.14, illustrant les histogrammes basés sur les trois amplitudes seuil précédentes à  $t = 58.5 \mu s$  pour un nouvel ensemble de 10 réalisations de phases  $\varphi_p$ , ne montrent que de légères différences par rapport

aux résultats de la Figure 3.13. La forme générale des distributions et la longueur inter-strictions dominante sont bien conservées.

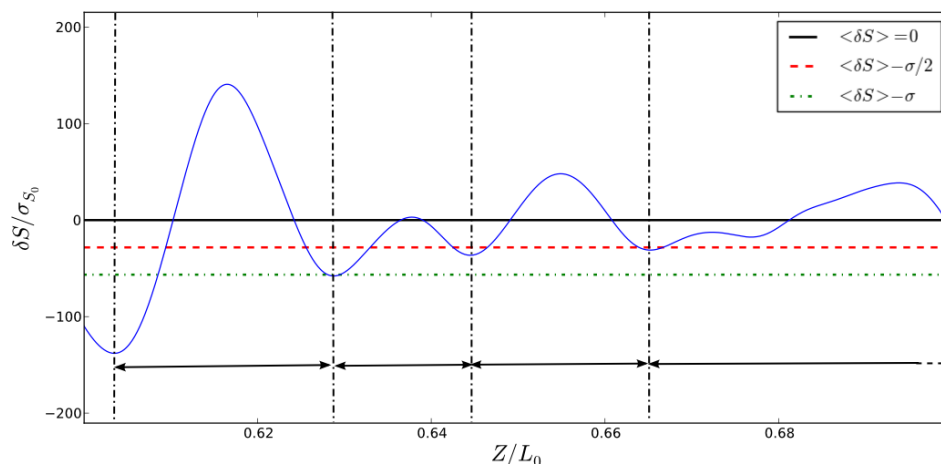


FIG. 3.12 – Détermination schématique des distances inter-strictions à partir d’une amplitude seuil de  $-\sigma_S/2$ .

### Densité spectrale et probabilité

Nous avons vu précédemment qu’une distribution de longueurs inter-strictions peut être définie en considérant une amplitude seuil. Les résultats obtenus peuvent néanmoins être affectés par la valeur choisie. Nous nous proposons ici de décrire une nouvelle méthodologie permettant d’établir une distribution plus précise des longueurs inter-strictions à partir de la fonction densité spectrale, en utilisant les résultats de l’analyse linéaire de stabilité.

Nous allons considérer, comme précédemment, que les fluctuations de la section dans le barreau en traction sont décrites, à chaque instant  $t$ , par la relation (3.38). À partir des travaux de [Nayak \(1971\)](#) et [Persson et al. \(2005\)](#) sur les rugosités de surface, la fonction densité spectrale  $C(t, k)$  des fluctuations de la section est déterminée par :

$$C(t, k) = \frac{1}{2} \sum_{i>0} \left| \delta S_{0_i} \exp \left[ \int_0^t \eta(k_i, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] \right|^2 \delta(k - k_i) \quad (3.39)$$

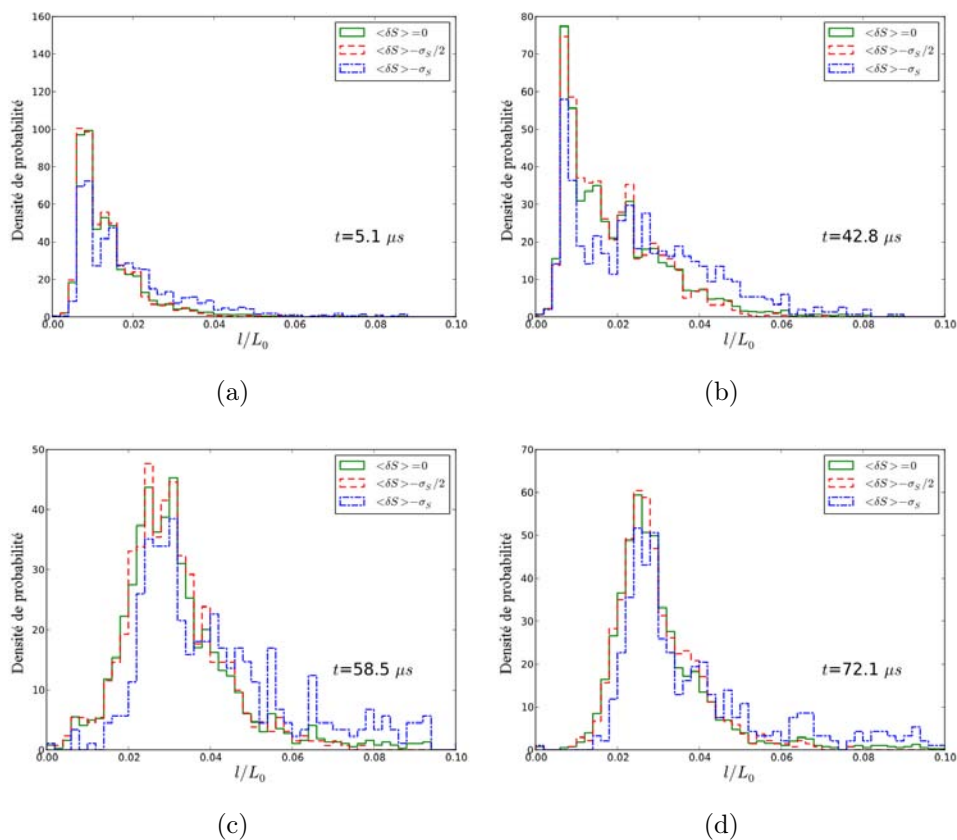


FIG. 3.13 – Distributions des longueurs inter-strictions obtenues à  $t = 5.1$ ,  $42.8$ ,  $58.5$  et  $72.1 \mu s$ , pour une vitesse de chargement  $V_0=900 m/s$ , à partir d’amplitudes seuils correspondant à la valeur moyenne des fluctuations  $\langle \delta S \rangle = 0$ , à l’écart-type  $\langle \delta S \rangle = -\sigma_S$  et à  $\langle \delta S \rangle = -\sigma_S/2$ . Un ensemble de  $n = 10$  réalisations de phases  $\varphi_p$  est ici utilisé.

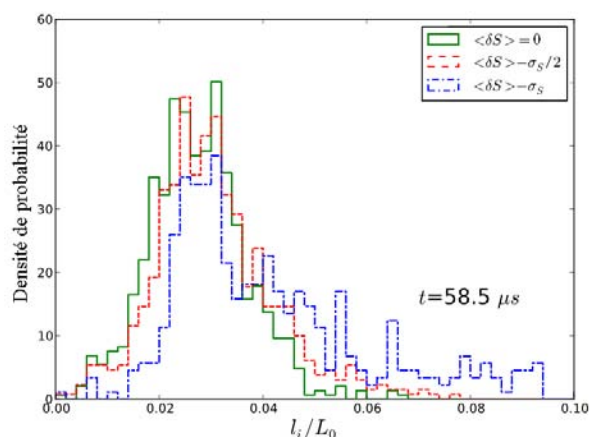


FIG. 3.14 – Distributions de longueurs inter-strictions pour une vitesse de chargement de  $V_0=900 m/s$  à  $t=58.5 \mu s$  pour une nouvelle série de 10 réalisations (valeurs  $\varphi_p$  différentes). La configuration et les paramètres matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2.



où  $\delta(k - k_i)$  représente la distribution Dirac centrée autour du nombre d'onde  $k_i \in \mathcal{K}$ .

Comme notre objectif est de décrire une distribution de longueurs inter-strictions  $l$ , nous allons identifier la longueur  $l$  à la longueur d'onde des perturbations et l'associer au nombre d'onde  $k$  via la relation  $k = \frac{2\pi}{l}$ . Nous rappelons au lecteur que cette longueur est lagrangienne et qu'elle est identifiée à partir de la configuration initiale. Grâce à ce changement de représentation, la densité spectrale (3.39) peut alors être exprimée en termes de distances inter-strictions suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{C}(t, l/L_0) &= C(t, \frac{2\pi}{l}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i>0} \left| \delta S_{0_i} \exp \left[ \int_0^t \eta(\frac{2\pi}{l_i}, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] \right|^2 \delta(l/L_0 - l_i/L_0) \end{aligned} \quad (3.40)$$

où  $l_i \in \mathcal{L} = \{l = \frac{2\pi}{k}, k \in \mathcal{K}\} = \{l_p = \frac{2L_0}{p}, p \in \mathbb{N}\}$ .

À partir des équations (3.39) et (3.40), on peut montrer, comme [Nayak \(1971\)](#), que l'écart-type des fluctuations de la section  $\sigma_S(t)$  s'exprime à tout instant  $t$  :

$$\begin{aligned} \sigma_S^2(t) &= \int_0^\infty C(t, k) dk = \int_0^\infty \tilde{C}(t, l/L_0) d(l/L_0) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i>0} \left| \delta S_{0_i} \exp \left[ \int_0^t \eta(k_i, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] \right|^2 \\ &= \sum_{i>0} w_i(t) \end{aligned} \quad (3.41)$$

où les termes  $w_i(t) = \frac{1}{2} \left| \delta S_{0_i} \exp \left[ \int_0^t \eta(k_i, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] \right|^2$  représentent la contribution à la variance  $\sigma_S^2$  supportée par la composante spectrale  $k_i$ , ou de manière équivalente dans notre approche, par la distance inter-strictions  $l_i \in \mathcal{L}$ . Pour la configuration avec le bruit coloré, la variance s'exprime donc :

$$\sigma_S^2(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=300} \left| \delta \hat{S}_0 \exp \left[ \int_0^t \eta(k_i, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] \right|^2 \quad (3.42)$$

Nous supposons alors que la normalisation de l'expression (3.40) par la variance  $\sigma_S^2$  donnée par l'équation (3.41) permet de représenter une *mesure de probabilité*

(parfois appelée également *fonction probabilité de masse*)  $m_{L_0}(t, l/L_0)$ . Cette mesure correspond à la probabilité d'avoir une longueur inter-strictions normée  $l/L_0$  dans un barreau infini avec des perturbations  $2L_0$  périodiques. Elle est définie par :

$$m_{L_0}(t, l/L_0) = \frac{\tilde{C}(t, l/L_0)}{\sigma_S^2} = \sum_{i>0} \frac{w_i(t)}{\sigma_S^2} \delta(l/L_0 - l_i/L_0) \quad (3.43)$$

La probabilité d'avoir une longueur inter-striction  $l$  dans l'intervalle  $]\hat{l}; \tilde{l}]$  est donnée par :

$$\mathcal{P}(\hat{l} < l \leq \tilde{l}) = \int_{]\hat{l}/L_0; \tilde{l}/L_0]} m_{L_0}(l/L_0) \frac{dl}{L_0} \quad (3.44)$$

Il est important de noter, ici, qu'il n'existe pas de définition physique claire de ce qu'est une striction. L'on ne peut donc se référer qu'à des hypothèses de travail pour caractériser les distances inter-strictions. Nous avons, par exemple, mentionné précédemment une première méthode (couramment employée pour traiter des résultats expérimentaux) permettant de déterminer les distances inter-strictions à partir d'un critère basé sur une amplitude seuil. Nous avons, ici, postulé l'existence et l'expression d'une mesure de probabilité pour les longueurs inter-strictions. Il reste donc à montrer que les hypothèses de travail ayant conduit à l'expression (3.43) permettent de caractériser correctement les distributions de longueurs inter-strictions sans définir de critère a priori.

Pour ce faire, il est essentiel de comparer cette nouvelle méthode utilisant la mesure de probabilité  $m_{L_0}(t, l/L_0)$  (3.43) au concept de distances inter-strictions basées sur des amplitudes seuil. Nous proposons donc d'approcher  $m_{L_0}(t, l/L_0)$  par une fonction densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$  qui permettra une représentation graphique sous forme d'histogrammes. Cette fonction densité sera donc définie uniforme par morceaux, avec des valeurs  $f_p$  sur les intervalles  $]l_{p+1}/L_0; l_p/L_0]$  ( $l_p, l_{p+1} \in \mathcal{L}$ ).  $f_{L_0}(l/L_0)$  est une approximation de la mesure  $m_{L_0}(l/L_0)$  dans le sens où la relation suivante :

$$\int_{]\hat{l}/L_0; \tilde{l}/L_0]} m_{L_0}(l/L_0) \frac{dl}{L_0} = \int_{]\hat{l}/L_0; \tilde{l}/L_0]} f_{L_0}(l/L_0) \frac{dl}{L_0} \quad (3.45)$$

n'est pas réellement satisfaite pour n'importe quel intervalle  $] \hat{l}/L_0 ; \tilde{l}/L_0 ]$ , mais uniquement pour les intervalles de la forme  $] l_{p+1}/L_0 ; l_p/L_0 ]$  définis précédemment. Cette condition implique en particulier :

$$\frac{w_p}{\sigma_S^2} = f_p \frac{l_p - l_{p+1}}{L_0} \quad (3.46)$$

En considérant que  $k_p L_0 = p \pi$ , il vient alors :

$$f_p = p(p+1) \frac{w_p}{2 \sigma_S^2} \quad (3.47)$$

Donc :

$$f_{L_0}(l/L_0) = \frac{p(p+1)}{2 \sigma_S^2} w_p \quad \text{pour } l \in ]l_{p+1} ; l_p] \quad (3.48)$$

Soit encore, pour le bruit coloré considéré précédemment :

$$f_{L_0}(l/L_0) = \frac{p(p+1)}{2} \frac{\left| \exp \left[ \int_0^t \eta(k_p, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] \right|^2}{\sum_{i=1}^{i=300} \left| \exp \left[ \int_0^t \eta(k_i, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] \right|^2} \quad \text{pour } l \in ]l_{p+1} ; l_p] \quad (3.49)$$

Alors que la mesure de probabilité  $m_{L_0}(t, l/L_0)$  considère une probabilité strictement nulle pour toute longueur  $l \in ]l_{p+1} ; l_p[$ , la fonction densité de probabilité  $f_{L_0}(t, l/L_0)$  considère une probabilité uniforme pour des longueurs  $l \in ]l_{p+1} ; l_p]$ . Nous insistons sur le fait que cette densité doit être perçue comme une approximation nécessaire à la représentation graphique des distributions de longueurs inter-strictions.

Pour des valeurs de  $p$  assez grandes, la fonction  $f_{L_0}$  peut être considérée comme quasi-continue comme l'illustre la Figure 3.15 qui présente deux représentations possibles de  $f_{L_0}$  (sous forme d'un histogramme ou sous forme d'une courbe continue approchée). Cette figure présente également l'histogramme obtenu à partir de l'amplitude seuil  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$ . Il en ressort qu'une longueur inter-strictions dominante  $l_{dom}$  apparaît à  $t = 72.1 \mu s$  :  $l_{dom}/L_0 \approx 0.025$ . On peut lui associer un nombre d'onde  $k_{dom} = \frac{2\pi}{l_{dom}} \approx 3900 m^{-1}$  et un mode  $p_{dom} = \frac{2L_0}{l_{dom}} \approx 80$ .

Des comparaisons entre la fonction densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$  et les histogrammes de la Figure 3.13, issus de la première illustration avec un bruit coloré, sont données sur la Figure 3.16. Le bruit coloré est limité aux 300 premiers

modes avec une amplitude uniforme  $\delta S_0^p = \delta \hat{S}_0$  pour tout  $p \in [1; p_{max} = 300]$ . Les longueurs inter-strictions admissibles dans cette approche sont donc telles que  $l/L_0 \in [2/p_{max} = 0.0067; 2]$ . D'après l'équation (3.49), la valeur initiale (à  $t = 0 \mu s$ ) de la fonction densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$  pour la longueur minimale est :

$$f_{L_0} \left( \frac{2}{p_{max}} \right) = \frac{p_{max} + 1}{2} = 150.5 \quad (3.50)$$

Ces caractéristiques sont bien retrouvées sur la Figure 3.16(a) à  $t = 5.1 \mu s$ . On pourra noter alors que pour un bruit blanc parfait ( $p_{max} \rightarrow +\infty$ ), il aurait été constaté que  $\lim_{l \rightarrow 0} f_{L_0}(l/L_0) = +\infty$ . On constate, par ailleurs, qu'à  $t = 42.8 \mu s$  (Figure 3.16(b)), un maximum local se développe grâce aux interactions entre inertie et effets multidimensionnels, qui forcent certains modes à croître plus rapidement. Pour  $t = 58.5$  ou  $72.1 \mu s$ , lorsque l'amplitude initiale des perturbations est identique ( $\delta S_0^p = \delta \hat{S}_0$ ), les figures 3.16(c) et 3.16(d) montrent que l'effet des perturbations initiales disparaît au profit d'une distribution de longueurs inter-strictions centrée autour d'une longueur dominante  $l_{dom}/L_0 \approx 0.025$  correspondant au mode dominant  $k_{dom} = \frac{2\pi}{l_{dom}} \approx 3900 m^{-1}$  visible sur la Figure 3.8.

Nous proposons enfin une amélioration de la représentation des distributions issues des amplitudes seuil. Il est en effet possible de considérer une distribution moyenne des trois précédentes. Un exemple de distribution moyenne est comparé à la densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$  sur la Figure 3.17. Une excellente corrélation est observée. Pour des raisons de confort graphique, une telle représentation sous forme de distribution moyenne sera par la suite utilisée.

Jusqu'ici, nous avons utilisé une perturbation sous forme d'un bruit coloré. Conformément aux résultats de l'analyse linéaire classique, la sélection d'une longueur inter-strictions dominante est ainsi uniquement associée à la croissance rapide du mode de perturbation associé. Nous allons maintenant considérer de nouvelles perturbations dont l'amplitude initiale est variable.

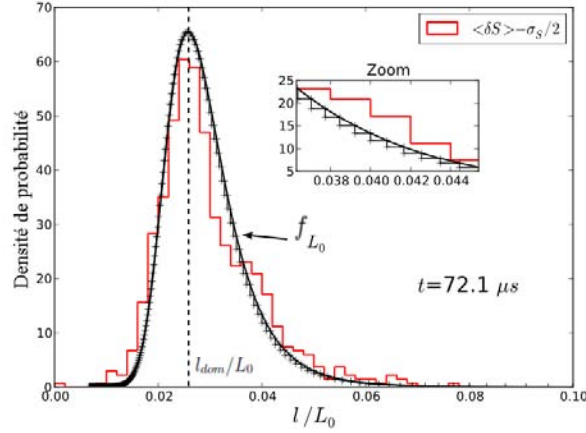


FIG. 3.15 – Comparaisons entre la distribution basée sur l’amplitude seuil  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$  et la fonction densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$  définie par l’Eq.(3.48). Deux représentations différentes sont utilisées pour  $f_{L_0}(l/L_0)$  : sous la forme d’un histogramme et sous la forme d’une courbe continue. L’approximation continue est en générale satisfaisante comme le montre le zoom. La configuration de la Figure 3.2 est adoptée.

### Illustration 2 : perturbation initiale sous forme d’un bruit d’amplitude en sinus cardinal

Nous avons précédemment ajouté au barreau cylindrique une perturbation initiale sous forme d’un bruit coloré. Tous les modes de perturbation considérés avaient alors même amplitude initiale. Nous nous proposons, ici, d’évaluer l’influence d’une perturbation dont les modes n’ont pas même amplitude.

Pour cela, nous considérons, dans cette partie, une perturbation initiale d’amplitude régie par une fonction sinus cardinal :

$$\delta S(Z, t = 0) = \sum_p \delta S_0^p \cos(k_p Z + \varphi_p) \quad (3.51)$$

où

$$\delta S_0^p = \left( \frac{\sin(\alpha \pi (p - p_0))}{\alpha \pi (p - p_0)} \right)^2 \quad (3.52)$$

et  $k_p \in \mathcal{K}$ . La densité spectrale initiale associée est donnée par :

$$C(k, t = 0) = \frac{1}{2} \sum_{p>0} \left| \frac{\sin(\alpha L_0 (k_p - k_0))}{\alpha L_0 (k_p - k_0)} \right|^4 \delta(k - k_p) \quad (3.53)$$

où  $k_0 = \frac{p_0 \pi}{L_0}$  et  $k_p \in \mathcal{K}$ . La Figure 3.18 décrit les amplitudes  $\delta S_0^p$  définies par l’expression (3.52) en fonction de la variable  $p$  lorsque  $p_0 = 5$  (ou de manière équivalente

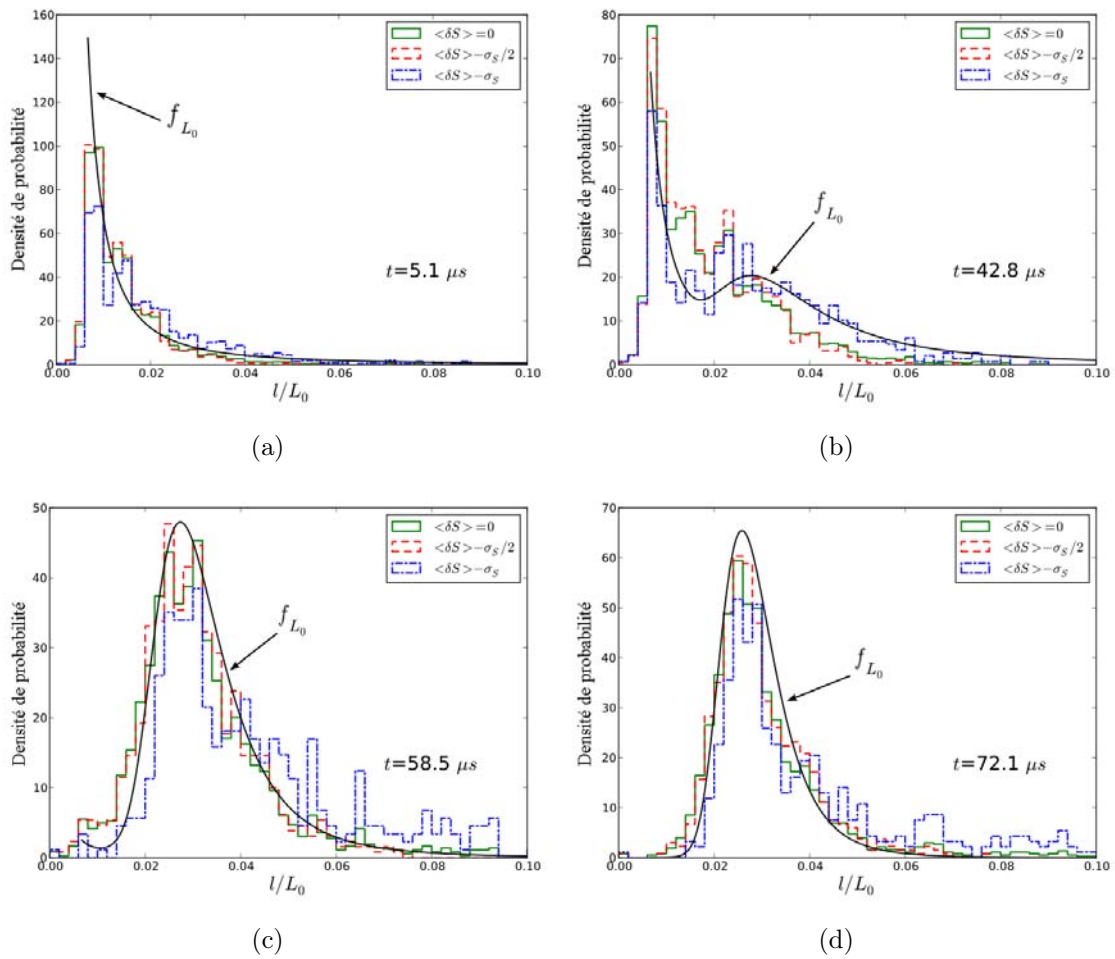


FIG. 3.16 – Comparisons entre les distributions de la Figure 3.13 et la fonction densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$  définie par l'équation (3.48). La configuration de la Figure 3.2 est adoptée.

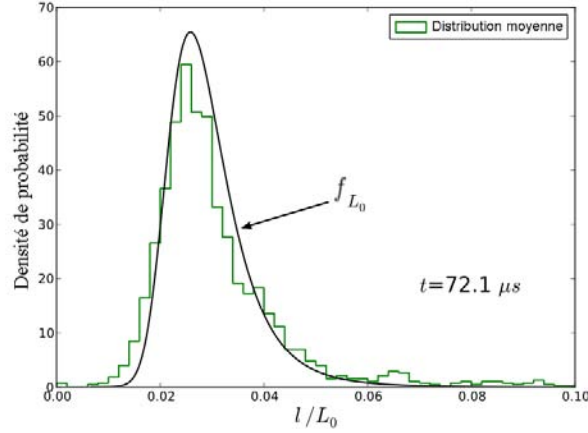


FIG. 3.17 – Comparaisons entre la distribution moyenne basée sur les trois amplitudes seuils ( $\langle \delta S \rangle$ ,  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$  et  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S$ ) et la fonction densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$  définie par l'équation (3.48). La configuration de la Figure 3.2 est adoptée.

$k_0 = \frac{5\pi}{L_0} \approx 244 \text{ m}^{-1}$ ) avec deux valeurs différentes de  $\alpha$  ( $\alpha = 0.01$  et  $\alpha = 0.05$ ). Cette figure montre que  $\delta S_0^p$  est maximal pour  $p = p_0$ , décroît en  $1/(\alpha \pi (p - p_0))^2$  et oscille à une fréquence qui dépend de  $\alpha$  : plus  $\alpha$  est grand, plus la fréquence est importante. Nous avons ainsi défini une situation pour laquelle la perturbation initiale est dominée par le nombre d'onde  $k_0 = \frac{p_0 \pi}{L_0}$ , tout en garantissant une amplitude initiale plus faible mais non nulle pour les autres modes. On constatera également que les amplitudes pour  $\alpha = 0.01$  sont plus importantes que pour  $\alpha = 0.05$ . En particulier, pour  $p_{dom} = 80$ , le rapport vaut  $\delta S_0^{p_{dom}}(\alpha = 0.01)/\delta S_0^{p_{dom}}(\alpha = 0.05) = 25$ . Nous verrons par la suite qu'un tel écart d'amplitude initiale conduit à des conséquences sur le développement des instabilités. Nous allons donc étudier la compétition qui peut exister entre l'amplitude initiale des différents modes et leur évolution liée au taux de croissance, déterminé par l'analyse linéaire de stabilité.

Nous adoptons la même configuration que celle de la Figure 3.2 ( $V_0 = 900 \text{ m/s}$ ,  $L_0 = 64.4 \text{ mm}$ ,  $\pi R_0^2 = 1 \text{ mm}^2$ ). La Figure 3.19 représente l'évolution dans le temps des fluctuations de la section du barreau normée  $\delta S(Z, t)/\sigma_{S0}$  à  $t = 5.1, 42.8, 58.5$  and  $72.1 \mu\text{s}$ . L'amplitude initiale des perturbations est caractérisée par l'équation

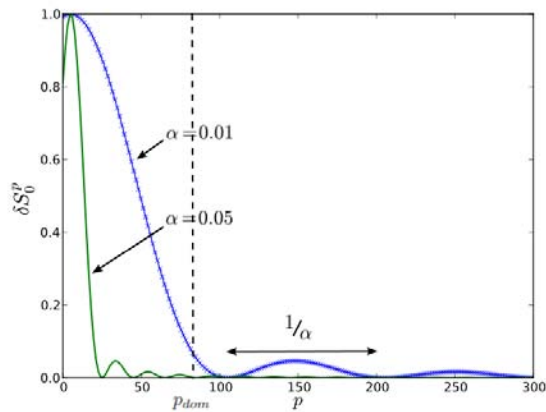


FIG. 3.18 – Profil de la fonction  $\delta S_0^p$  pour  $p_0=5$  et deux valeurs de  $\alpha$  :  $\alpha=0.01$  et  $0.05$ .

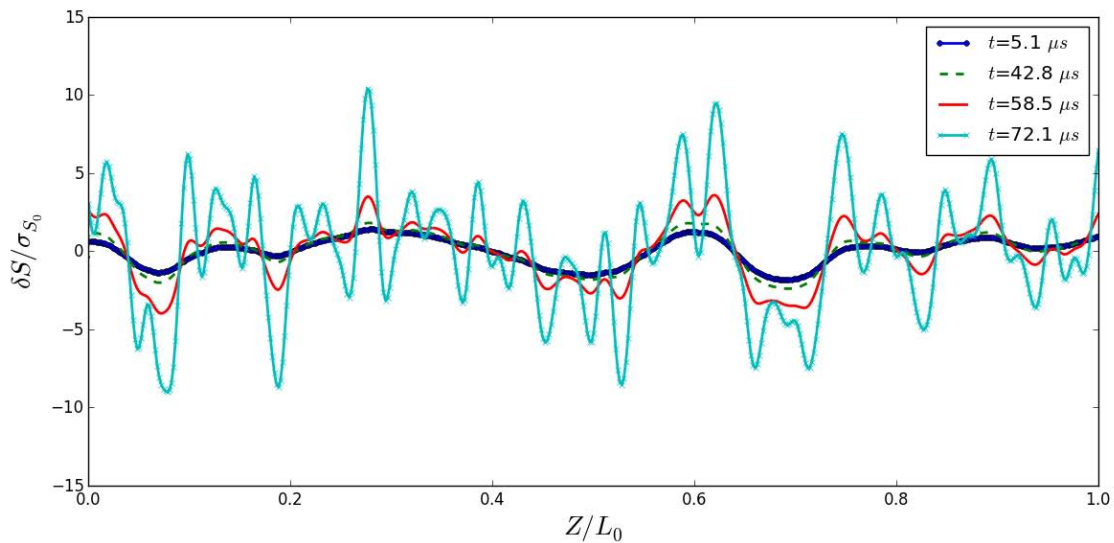


FIG. 3.19 – Fluctuations de la section du barreau à partir d'une perturbation initiale définie par l'équation (3.52) et les paramètres :  $p_0 = 5$  et  $\alpha = 0.01$ . Les profils sont donnés à  $t = 5.1, 42.8, 58.5$  and  $72.1 \mu s$ . La configuration et les paramètres du matériau sont les mêmes que ceux de la Figure 3.2.



(3.52) et les paramètres valent :  $p_0 = 5$  et  $\alpha = 0.05$ . Jusqu'à  $t = 42.8 \mu s$ , on constate que le nombre de strictions est faible (lié à  $p_0$ ). Par la suite, le profil de la section évolue, faisant apparaître davantage de fluctuations. Un mode de longueur d'onde plus courte que celle associée au mode initial  $p_0$  prend donc le dessus à partir de  $t > 58.5 \mu s$ . Cette tendance avait déjà été observée par Han et Tvergaard (1995) et plus récemment par Rodríguez-Martínez et al. (2013) à partir de simulations aux éléments finis. Ici, cette situation n'est révélée qu'à partir de l'utilisation de l'analyse linéaire de stabilité et de la loi d'évolution (3.38).

Des comparaisons des deux approches de caractérisation des longueurs inter-strictions (distribution moyenne basée sur les trois seuils précédents et fonction densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$  issue de la fonction densité spectrale) sont présentées sur les figures 3.20, 3.21 et 3.22, aux temps  $t = 42.8, 58.5$  and  $72.1 \mu s$ . Sur la partie gauche de ces trois figures, les densités spectrales  $C(t, k)$  des fluctuations de sections sont également représentées sous forme normée pour permettre le suivi de l'évolution à la fois dans le domaine spectrale et en longueurs inter-strictions.

Commençons par l'analyse de la Figure 3.20. Elle représente le cas  $p_0 = 5$  et  $\alpha = 0.05$ . Au début ( $t \leq 42.8 \mu s$ ), la densité spectrale présente des valeurs significatives pour les faibles nombres d'onde  $k$ . Cette situation est héritée de la perturbation initiale avec un nombre d'onde dominant  $k_0 \approx 244 m^{-1}$ . Au cours du temps, des modes à nombre d'onde plus grand évoluent plus rapidement suivant les résultats illustrés sur la Figure 3.8. En parallèle, comme l'illustrent simultanément et de manière parfaitement comparable la distribution moyenne basée sur les amplitudes seuils et la densité  $f_{L_0}(l/L_0)$ , de grandes longueurs inter-strictions prédominent sur les premiers instants en lien avec les perturbations initiales. Par la suite, au cours de la traction du barreau, des longueurs inter-strictions plus faibles, dont la principale est donnée par  $l_s/L_0 = 0.0365$ , prennent progressivement le dessus (voir Figure 3.20(f)). Toutefois cette longueur dominante à  $t = 72.1 \mu s$  n'est pas directement associée au mode dominant  $k = 580.4 m^{-1}$  donné par  $C(t, k)$ . Elle correspond plu-

tôt à  $k_s = 2675 \text{ m}^{-1}$ . Pour caractériser la longueur inter-strictions dominante (à un instant  $t$ ), il semble donc plus approprié de se baser sur la densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$ , plutôt que sur la densité spectrale  $C(t, k)$ .

Évaluons maintenant l'influence du paramètre  $\alpha$ . La Figure 3.21 présente des résultats obtenus avec  $\alpha = 0.01$  ( $p_0 = 5$ ). Nous avons déjà établi, à partir de la Figure 3.18, que les amplitudes initiales des modes de perturbation étaient plus importantes qu'avec  $\alpha = 0.05$ . Les instabilités évoluent, de ce fait, de manière plus rapide que précédemment, en se structurant rapidement autour d'une longueur inter-striction, à  $t = 72.1 \mu\text{s}$  (Figure 3.21(f)), de  $l_s/L_0 = 0.035$  (associée à  $p_0 = 57$ ) voisine de la précédente.

Étudions enfin le rôle joué par le paramètre  $p_0$ . Une valeur de  $p_0 = 250$  est maintenant utilisée avec  $\alpha = 0.01$ . Les résultats sont présentés sur la Figure 3.22. La densité spectrale  $C(t, k)$  et la densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$  évoluent encore de manière simultanée et cohérente l'une par rapport à l'autre. On constate également que la caractérisation à partir d'amplitudes seuils est en accord avec la fonction densité de probabilité  $f_{L_0}(l/L_0)$ . À  $t = 72.1 \mu\text{s}$  (Figure 3.22(f)), une longueur inter-striction  $l_s/L_0 = 0.0213$  est maintenant sélectionnée, valeur plus proche de  $l_{dom}/L_0 \approx 0.025$  que pour les deux situations précédentes.

Le tableau 3.3 fait la synthèse des différents résultats présentés sur les Figures 3.20-3.22 en termes de longueurs inter-strictions sélectionnées  $l_s$  à  $t = 72.1 \mu\text{s}$ . On peut constater que lorsque  $p_0$  est loin de  $p_{dom}$  (ici  $p_0 = 250$ ), la longueur sélectionnée  $l_s$  est proche de  $l_{dom}$ . À l'inverse, lorsque  $p_0$  est plus proche de  $p_{dom}$  ( $p_0 = 5$  avec  $\alpha = 0.01$ ), les perturbations initiales ont un effet non négligeable sur le profil final des instabilités en pouvant entraîner la sélection d'une longueur inter-strictions relativement éloignée de la longueur dominante  $l_{dom}$ . Les configurations que nous avons présentées ici illustrent bien la compétition qui peut exister entre amplitude initiale et taux de croissance de chaque mode de perturbation.

À partir de ces conclusions, les observations numériques de [Han et Tvergaard](#)

	Fig. 3.15	Fig. 3.20	Fig. 3.21	Fig. 3.22
$p_0$	-	5	5	250
$\alpha$	-	0.05	0.01	0.01
$l_s/L_0$	0.0258	0.0364	0.035	0.0213

TAB. 3.3 – Synthèse des résultats des figures 3.20-3.22 en termes de longueur interstriction sélectionnée pour  $t = 72.1 \mu s$ .

(1995), Sorensen et Freund (2000) et Rodríguez-Martínez et al. (2013) peuvent alors être interprétées comme suit. Tout d’abord, les perturbations sinusoïdales unimodales introduites par ces auteurs dans leur modèle numérique ne sont pas idéales (au moins à cause de la discrétisation de la géométrie). Des modes supplémentaires sont donc inévitablement introduits avec des amplitudes faibles. Ensuite, si l’on se place dans le domaine de validité de l’approche linéarisée des perturbations, ce qui est vraisemblable aux temps courts, l’amplitude de chaque mode va croître différemment au cours du chargement de telle manière qu’un mode d’instabilité sera sélectionné plus ou moins rapidement. Enfin, si les localisations des déformations plastiques s’initient suffisamment tardivement pour supprimer tout effet des perturbations initiales, leur mode sera éventuellement proche du mode dominant identifié par l’analyse linéaire de stabilité.

### 3.4 Conclusion

L’approche de l’analyse linéaire de stabilité a été largement utilisée pour étudier de nombreuses configurations menant au développement d’instabilités, que ce soit sous forme de strictions (instabilités géométriques) dans le cas, en particulier des anneaux en expansion, ou sous forme de bandes de cisaillement (instabilités matérielles). Nous avons cité, dans ce chapitre, de nombreux travaux traitant cette approche. À travers de multiples publications, l’analyse linéaire de stabilité a montré qu’elle permet de rendre compte d’un grand nombre de tendances : effets géométriques, effets de l’inertie, effets de la multidimensionnalité des contraintes, effets des

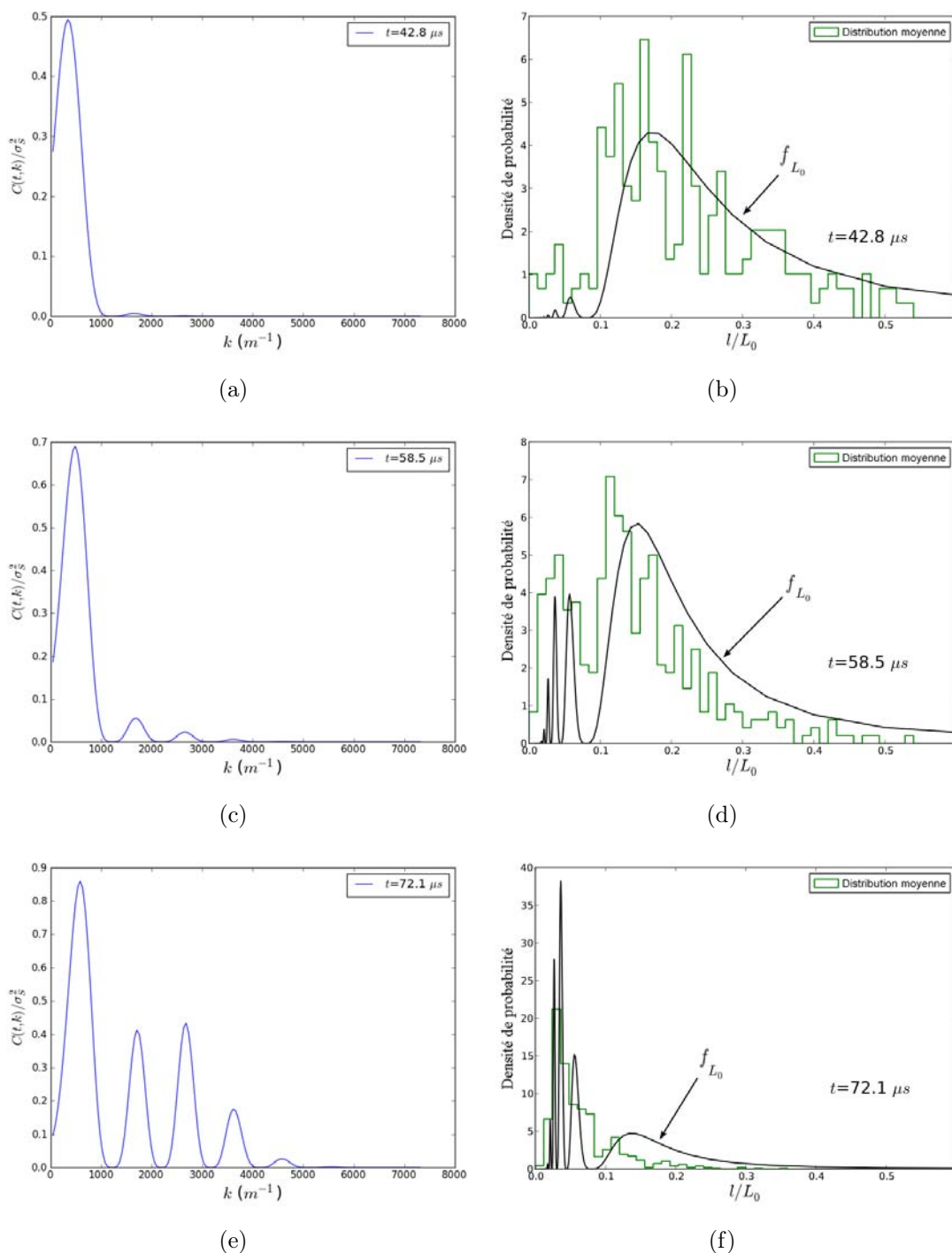


FIG. 3.20 – Densité spectrale normée des fluctuations de la section pour une perturbation initiale définie par l'équation (3.52) avec  $p_0 = 5$  et  $\alpha = 0.05$  à différents instants (a)  $t = 42.8 \mu s$ , (c)  $t = 58.5 \mu s$  et (e)  $t = 72.1 \mu s$ . La densité de probabilité des longueurs inter-strictions  $f_{L_0}(l/L_0)$  est également présentée aux mêmes instants (b, d, f). L'histogramme relatif à la distribution moyenne est obtenu en moyennant les estimations de longueurs inter-strictions basées sur les amplitudes seuil  $\langle \delta S \rangle$ ,  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$  et  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S$ . La fonction densité  $f_{L_0}(l/L_0)$  est obtenue à partir de la densité spectrale normée représentée en (a, c, e). La configuration de la Figure 3.2 est adoptée.

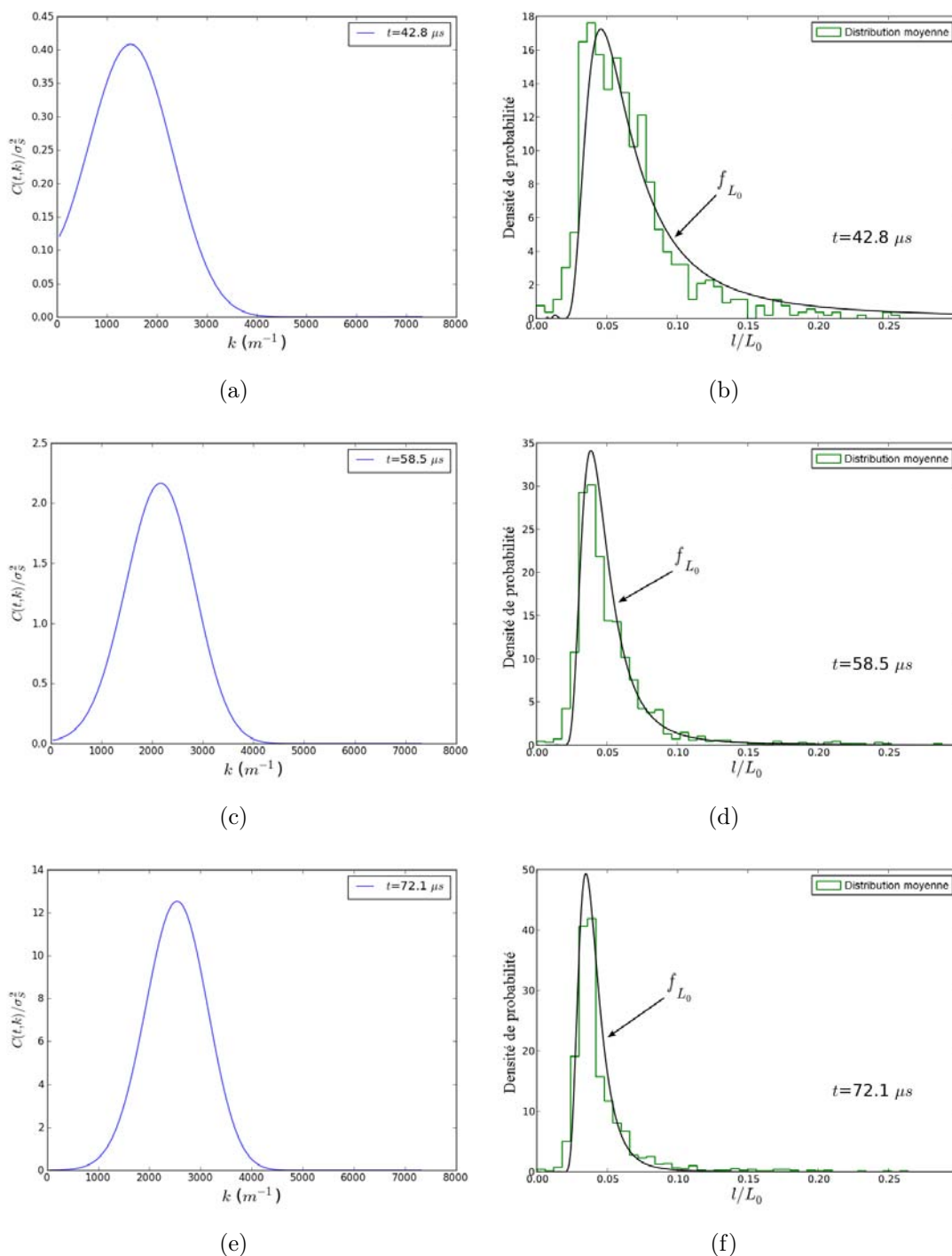


FIG. 3.21 – Densité spectrale normée des fluctuations de la section pour une perturbation initiale définie par l'équation (3.52) avec  $p_0 = 5$  et  $\alpha = 0.01$  à différents instants (a)  $t = 42.8 \mu s$ , (c)  $t = 58.5 \mu s$  et (e)  $t = 72.1 \mu s$ . La densité de probabilité des longueurs inter-strictions  $f_{L_0}(l/L_0)$  est également présentée aux mêmes instants (b, d, f). L'histogramme relatif à la distribution moyenne est obtenu en moyennant les estimations de longueurs inter-strictions basées sur les amplitudes seuil  $\langle \delta S \rangle$ ,  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$  et  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S$ . La fonction densité  $f_{L_0}(l/L_0)$  est obtenue à partir de la densité spectrale normée représentée en (a, c, e). La configuration de la Figure 3.2 est adoptée.

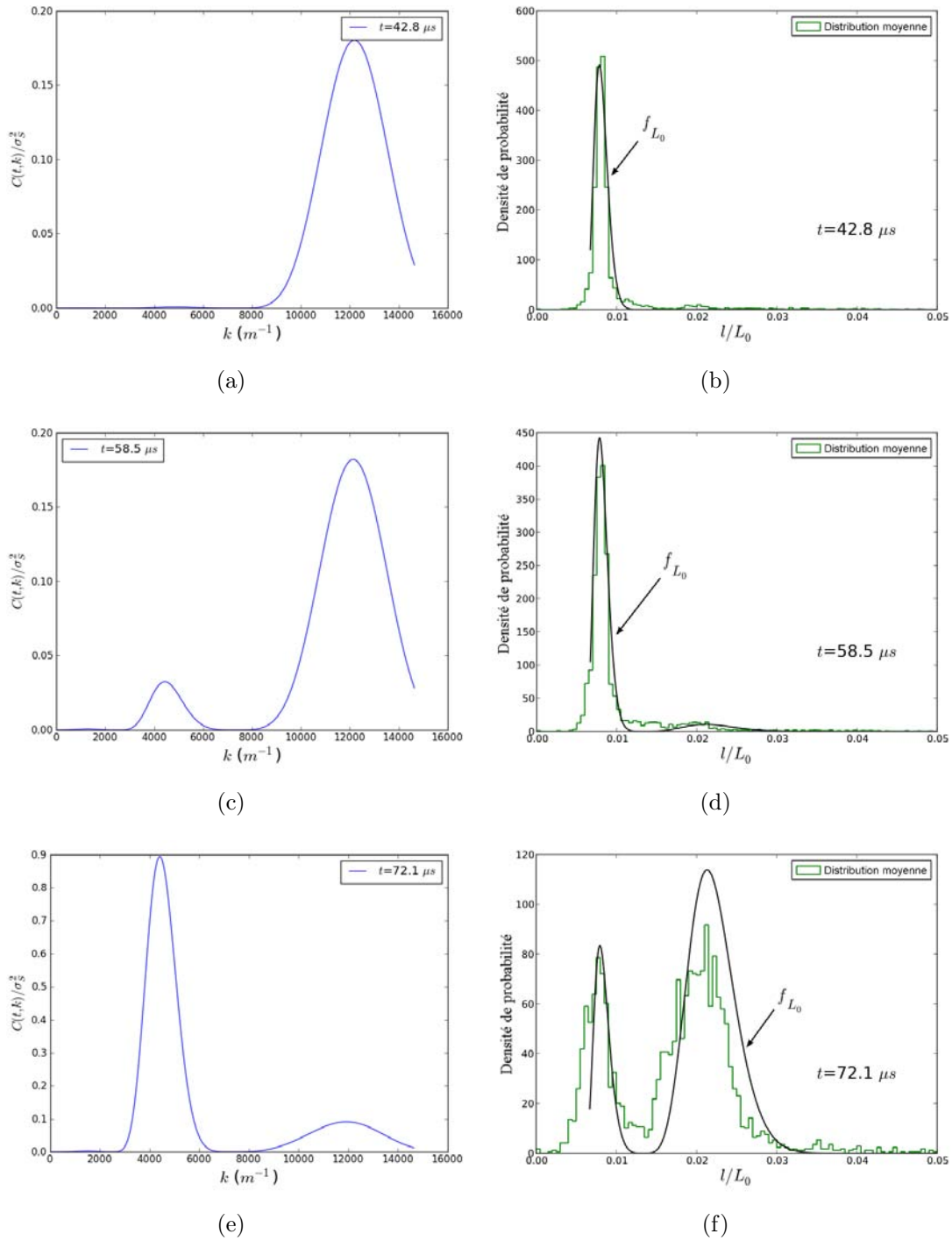


FIG. 3.22 – Densité spectrale normée des fluctuations de la section pour une perturbation initiale définie par l'équation (3.52) avec  $p_0 = 250$  et  $\alpha = 0.01$  à différents instants (a)  $t = 42.8 \mu s$ , (c)  $t = 58.5 \mu s$  et (e)  $t = 72.1 \mu s$ . La densité de probabilité des longueurs inter-strictions  $f_{L_0}(l/L_0)$  est également présentée aux mêmes instants (b, d, f). L'histogramme relatif à la distribution moyenne est obtenu en moyennant les estimations de longueurs inter-strictions basées sur les amplitudes seuil  $\langle \delta S \rangle$ ,  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S/2$  et  $\langle \delta S \rangle - \sigma_S$ . La fonction densité  $f_{L_0}(l/L_0)$  est obtenue à partir de la densité spectrale normée représentée en (a, c, e). La configuration de la Figure 3.2 est adoptée.

sensibilités à l'écroûissage, au taux de déformation et à la température, ...

Un résultat couramment mis en avant par les chercheurs, jusqu'à présent, concerne l'évaluation du mode dominant des instabilités, qui permet une comparaison quantitative avec les simulations numériques et les résultats expérimentaux. Pourtant, ces comparaisons vont rarement au-delà des tendances. Deux limitations en expliquent la raison :

1. Expérimentalement et numériquement, les résultats observés en termes de longueurs inter-strictions, dans le cadre d'une approche statistique descriptive, sont obtenus sous forme d'histogrammes montrant l'apparition de multiples modes d'instabilité. L'approche analytique ne propose jusqu'à présent qu'une description déterministe du problème en analysant le mode dominant instantané. Ces deux approches diffèrent par conséquent dans leur principe d'analyse.
2. L'analyse linéaire de stabilité ne contient pas intrinsèquement de critère permettant de déterminer la transition entre domaine linéaire et localisations (en strictions ou en bandes de cisaillement).

Dans ce chapitre, nous avons tenté de réconcilier l'approche analytique avec les approches expérimentales et numériques, pour le cas du développement des instabilités dans un barreau cylindrique en traction dynamique, en répondant à la première limitation. Sous certaines hypothèses d'amplitudes de perturbations faibles, nous avons en effet montré que l'analyse linéaire de stabilité semble pouvoir être, dans ce cas, considérée comme une représentation statistique inférentielle du processus de développement des instabilités. En d'autres termes, par l'intermédiaire de la fonction densité spectrale des fluctuations de section, par exemple, il est possible de décrire la distribution des longueurs inter-strictions au cours du temps. Cette distribution, prise au bon moment, pourrait alors être représentative du profil des strictions lorsque la transition entre le domaine linéaire et le début des localisations est atteinte.

La validité de cette approche a été éprouvée en comparant les résultats obtenus à des histogrammes issus de l'utilisation de valeurs seuil pour déterminer le nombre de strictions pour différentes configurations de perturbations initiales. Elle permet également d'éclairer les résultats obtenus notamment par [Rodríguez-Martínez et al. \(2013\)](#) par simulations numériques, illustrant l'extinction de certains modes de perturbations au profit du mode dominant des instabilités prédit par l'analyse linéaire de stabilité.

Cette approche mériterait, à l'avenir, d'être étendue à d'autres configurations. Il serait, en effet, intéressant d'étendre cette méthodologie au développement des instabilités dans une plaque en extension biaxiale.

Nous avons également abordé la problématique de la définition d'un critère permettant la détermination du début des localisations. Deux formes de critère ont alors été présentées : un critère sous la forme d'une valeur critique du rapport normé  $\eta/\dot{\epsilon}$ , et un critère sous la forme d'une valeur critique de l'intégrale  $\int \eta dt$ . Le premier type de critère établit ainsi que les localisations s'activent à partir d'un taux de croissance instantané, tandis que le second rend compte d'un effet d'histoire du développement des instabilités.

Une analyse dimensionnelle des résultats issus de l'analyse linéaire de stabilité, ainsi que le développement d'une loi d'évolution des perturbations sous forme d'une série de Fourier dans laquelle apparaît la grandeur intégrale sous forme exponentielle, montrent que le choix d'un critère de localisation sous forme intégrée semble plus adapté. Nous verrons, par la suite, dans le chapitre 5, qu'il sera possible, grâce à des comparaisons analytique/numérique, d'exprimer un critère déterminant la transition entre le domaine des faibles instabilités et les localisations. Ce critère sera évalué à partir de la relation :

$$\int \eta dt = cst \tag{3.54}$$



ou de manière équivalente :

$$\exp \left( \int \eta dt \right) = cst \quad (3.55)$$

Dans un futur plus ou moins proche, grâce au développement d'expériences adaptées qui seront présentées dans le Chapitre 6, la validation de ce critère devrait également se faire à partir de comparaisons analytique/expérimental.

Maintenant que nous avons présenté l'approche analytique et que nous avons montré qu'il semble possible de la considérer comme une approche statistique inférentielle, abordons maintenant l'approche statistique descriptive qui sera réalisée à partir de simulations numériques de barreaux cylindriques en traction dynamique.



# Chapitre 4

## Approche numérique des instabilités

### 4.1 Introduction

Comme décrit dans l'Introduction de ce rapport de thèse, de nombreuses études numériques ont été entreprises pour simuler la fragmentation de structures métalliques (plaques, tubes, anneaux, ...) : Pandolfi et al. (1999), Guduru et Freund (2002), Becker (2002), Zhou et al. (2006a), Rusinek et Zaera (2007), Meulbroek et al. (2008), Zhang et Ravi-Chandar (2008), Petit (2010) ou encore Hopson et al. (2011). La grande majorité de ces études se sont concentrées à reproduire les distributions de masse ou de longueur de fragments observées expérimentalement. Ces simulations ont d'ailleurs souvent conduit à des résultats assez comparables. Cependant peu d'entre elles se sont attachées à analyser proprement l'influence des perturbations introduites dans le modèle sur le développement des instabilités, en particulier sur le temps d'apparition des strictions localisées. Dans ce chapitre, nous allons donc montrer l'effet des perturbations sur le développement des instabilités. Plusieurs études paramétriques ont donc été réalisées. Pour les exploiter, il est nécessaire d'établir des critères permettant de comparer les simulations entre elles. À cette fin, nous définirons précisément ce que nous considérons sous le terme "temps d'apparition des strictions localisées", et nous décrirons une méthodologie nouvelle pour évaluer le mode de striction dominant. Nous montrerons également que ces "expériences numériques" peuvent s'inscrire dans une analyse statistique descriptive de ce processus,

ce qui permettra d'estimer une distribution de longueurs inter-strictions comparable à celle issue des expériences.

## 4.2 Configuration du problème étudié

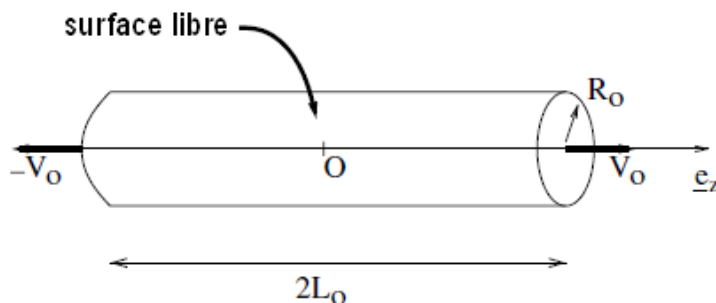


FIG. 4.1 – Représentation schématique du barreau cylindrique, de longueur initiale  $2L_0$  et de rayon initial  $R_0$ . Des vitesses de  $\pm V_0$  sont appliquées aux extrémités  $Z = \pm L_0$ . La surface latérale  $R = R_0$  est libre.

Nous avons modélisé en 3D la traction uni-axiale d'un barreau de cuivre en utilisant le code Lagrangien de dynamique rapide *Ouranos* développé par le *Commissariat à l'Énergie Atomique* (CEA). Le barreau est maillé à l'aide d'éléments hexaédriques à intégration réduite.  $32 \times 2400$  éléments sont utilisés pour la majeure partie de ce chapitre. Cette configuration est représentative d'une configuration d'expansion d'anneau lorsque sa courbure est négligée, autrement dit lorsque le rayon de la section de l'anneau est petit devant son diamètre. De même que dans l'approche analytique (Chapitre 3), nous allons considérer, le plus souvent, un barreau cylindrique de longueur initiale  $2L_0 = 128.805 \text{ mm}$  et de  $\pi R_0^2 = 1 \text{ mm}^2$  de section,  $R_0$  étant le rayon initial, soumis à différentes vitesses de chargement  $V_0$  allant de  $150 \text{ m/s}$  à  $2100 \text{ m/s}$ . La vitesse de déformation nominale  $\dot{\epsilon} = \frac{V_0}{L_0}$  varie de  $2330 \text{ s}^{-1}$  à  $32600 \text{ s}^{-1}$ .

A l'instant  $t = 0$ , le champ de vitesses est initialisé linéairement le long du barreau de telle sorte que :

$$V_z(Z) = Z \frac{V_0}{L_0} \quad (4.1)$$

Par ailleurs, le champ de contraintes est imposé pour être uniaxial, le matériau étant à sa limite d'écoulement statique initiale :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y(\epsilon_p = 0, \dot{\epsilon}_p = 0, T = T_0) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Plusieurs possibilités existent pour déclencher les instabilités : insérer des fluctuations d'ordre géométrique (voir [Zhou et al. \(2006a\)](#) et [Rodríguez-Martínez et al. \(2013\)](#)), ou considérer des fluctuations sur une caractéristique du matériau (voir [Zhang et Ravi-Chandar \(2008\)](#)). [Becker \(2002\)](#) a expérimenté les deux possibilités pour le cas de l'expansion d'un anneau sans observer de différences notables sur les résultats. Dans notre travail, les instabilités sont initiées à l'aide de perturbations aléatoires de la limite d'écoulement plastique instantané  $\sigma_y(t)$  du cuivre (en pratique, les coefficients  $\sigma_0$ ,  $C_2$  et  $B_0$  subissent cette fluctuation). Ainsi, la valeur de la contrainte d'écoulement, pour chaque maille du modèle numérique, sera comprise, de manière uniforme entre  $\sigma_y(t)(1 - A)$  et  $\sigma_y(t)(1 + A)$ , où  $A$  est l'amplitude de la perturbation choisie, et ce durant toute la durée simulée, même si la contrainte d'écoulement  $\sigma_y$  évolue au cours du chargement. Différentes amplitudes de perturbation ont été testées dans ce travail : 1 %, 5 %, 10 % et 20 %.

De même que dans le chapitre 3, la loi de comportement du cuivre que nous étudions est décrite par la loi de [Zerilli et Armstrong \(1987\)](#) modifiée par [Petit et Dequiedt \(2006\)](#) définie par la relation (3.16) avec les paramètres donnés dans le tableau 3.1. Les principales différences avec l'approche précédente est liée à la prise en compte, dans ce chapitre, de l'évolution de la pression  $p$  et de la masse volumique  $\rho$  au cours du chargement. Elles seront décrites par la loi d'état de [Murnaghan \(1951\)](#). Par ailleurs, la dépendance du module de cisaillement à la pression sera également considérée avec  $\alpha_p \neq 0$  (voir Eq.(3.18)). La température de fusion suit, quant à elle, la loi de Lindemann définie par :

$$T_m(\rho) = T_{m0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2(\Gamma_0 - a - 1/3)} e^{2a(1 - \rho_0/\rho)} \quad (4.3)$$

$\alpha_p$	$\Gamma_0$	$a$
1.36	1.97	1.5

TAB. 4.1 – Paramètres complémentaires de la loi de Zerilli-Armstrong modifiée par Petit et Dequiedt (2006) pour le cuivre d'étude.

où  $\rho_0$  est la masse volumique de référence à l'état ambiant ( $p = 0 \text{ Pa}, T = 300 \text{ K}$ ), et  $a$  et  $\Gamma_0$  sont des coefficients qui permettent de déterminer la valeur du coefficient de Grüneisen  $\Gamma$  donné par :

$$\Gamma = \Gamma_0 - a(1 - \rho_0/\rho) \quad (4.4)$$

L'ensemble des nouveaux paramètres pris en compte ici est donné dans le tableau 4.1.

La distribution de ces perturbations est, en réalité, quasi-aléatoire car la routine numérique les générant, pour deux maillages identiques, associe la même valeur de perturbation dans des mailles de même numéro. Les défauts, dans deux configurations différentes utilisant le même maillage, seront donc situés exactement aux mêmes endroits. Cette méthodologie permet ainsi de comparer ces deux configurations. Nous pouvons pour autant modifier l'ordre d'attribution des variables aléatoires par un simple décalage et ainsi générer différentes réalisations bien caractérisées.

Nous définissons également la taille des cellules de perturbation  $S$  comme le volume occupé par des mailles voisines ayant même perturbation de la contrainte d'écoulement. Si les perturbations sont distribuées aléatoirement avec une valeur par maille, la taille des cellules de perturbation sera donc égale au volume des mailles. Mais si elles sont distribuées par paquets de mailles voisines, alors cette taille sera égale à la somme des volumes des mailles de ces paquets. Nous avons testé des tailles de cellules de perturbation  $S$  différentes appliquées sur un maillage identique, voir la Figure 4.13. La taille de cellule  $S_0$  sera une taille de référence pour la suite de l'étude. Elle correspond à un regroupement de 4 éléments dans le maillage  $R_3$  de la Figure

4.8 (défini pour un barreau de longueur  $4L_0$ ). On constatera que la taille des cellules n'est pas parfaitement homogène dans la section, mais l'on pourra considérer, pour une évaluation quantitative, que  $S_0 \approx \frac{\pi R_0^2}{32} \times 4 \times 0.1 \text{ mm} \approx 13.5 \times 10^{-3} \text{ mm}^3$ . Nous verrons, par la suite, que ces exemples donneront des résultats différents en ce qui concerne le développement des instabilités. À notre connaissance, seuls [Bishop et Strack \(2011\)](#) ont abordé cet aspect particulier.

On notera enfin que des simulations sans perturbations ont été testées auparavant. Celles-ci n'ont montré aucun développement d'instabilités pour des étirements de barreaux très importants. Seules quelques petites irrégularités liées uniquement à des défauts d'origine purement numérique (précision du code de calcul et du maillage) sont apparues. Le maillage et les schémas utilisés dans ces simulations sur *Ouranos* ne permettent donc pas d'amorcer rapidement les instabilités contrairement aux simulations de [Becker \(2002\)](#) ou [Rusinek et Zaera \(2007\)](#).

Comme au chapitre 3, la grandeur suivie sera la fluctuation de la section au cours du chargement. Grâce à cette grandeur, on peut suivre, comme sur la Figure 4.2, l'évolution du processus du développement des instabilités et de la fragmentation. Il apparaît, en effet, que l'étirement du barreau s'accompagne, dans un premier temps, d'une étape stable pendant laquelle les perturbations initiales n'évoluent pas de manière conséquente. Les déformations et les contraintes sont alors quasi-homogènes dans le barreau (résultats non présentés). Cette étape va se prolonger jusqu'à l'apparition des premières strictions localisées qui vont concentrer les déformations en leur sein. Celles-ci vont alors poursuivre leur développement tout en relaxant leur voisinage, certaines allant jusqu'à la rupture, d'autres s'interrompant pendant leur développement à cause de la relaxation induite par une striction voisine plus précoce.

Dans notre analyse, ni endommagement ni critère de rupture n'ont été pris en compte. L'objectif du travail de thèse, en particulier dans ce chapitre, est principa-

lement axé sur le développement des instabilités notamment l'évaluation du temps de départ des instabilités localisées et du nombre de strictions. Nous ne nous attarderons pas sur l'aspect fragmentation. Les effets de la vitesse de chargement  $V_0$  et des caractéristiques des perturbations (amplitude  $A$  et taille des cellules  $S$ ) sont analysés dans la suite.

### 4.3 Temps de départ et nombre de strictions localisées

Afin de décrire correctement les effets de la vitesse de chargement  $V_0$  et des caractéristiques des perturbations ( $A$  et  $S$ ) sur le développement des instabilités, en comparant les résultats de différentes simulations, il est nécessaire de choisir des critères permettant d'étudier précisément le temps de départ et le nombre des strictions localisées, en particulier. Ces deux grandeurs doivent donc être définies à l'aide de critères et de méthodologies indépendants de l'opérateur. Nous décrirons ainsi, ici, les méthodologies choisies afin d'évaluer ces deux grandeurs caractéristiques.

#### 4.3.1 Temps de départ des strictions localisées

Afin de pouvoir réaliser des comparaisons avec l'analyse linéaire de stabilité dans le Chapitre 5, les résultats numériques doivent être exploités sur un domaine temporel où l'analyse linéaire des instabilités reste valable, donc sur des temps où le comportement non linéaire de la solution est peu marqué.

Considérons, dès lors, l'instant particulier où l'on voit apparaître la première relaxation élastique dans le barreau, soit, de manière équivalente, l'instant où l'on observe le premier élément du barreau dans lequel la vitesse de déformation plastique équivalente est nulle. On pourra constater que ce critère apparaît toujours près de la striction la plus développée. Cette striction aura alors tendance à engendrer,



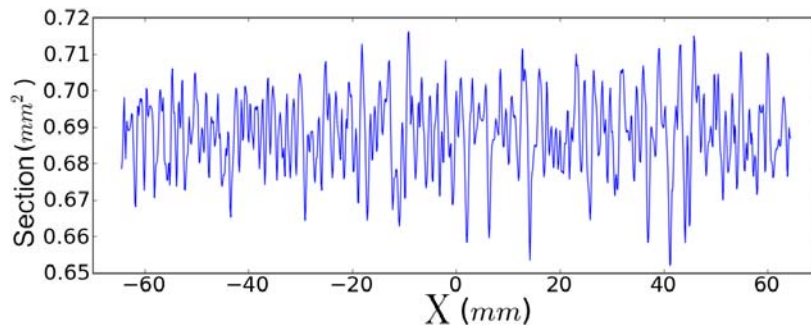
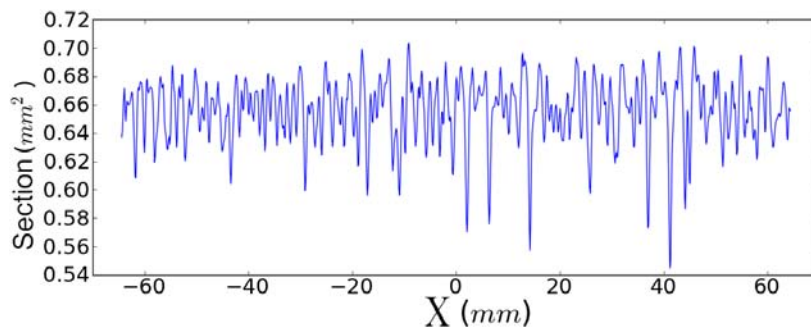
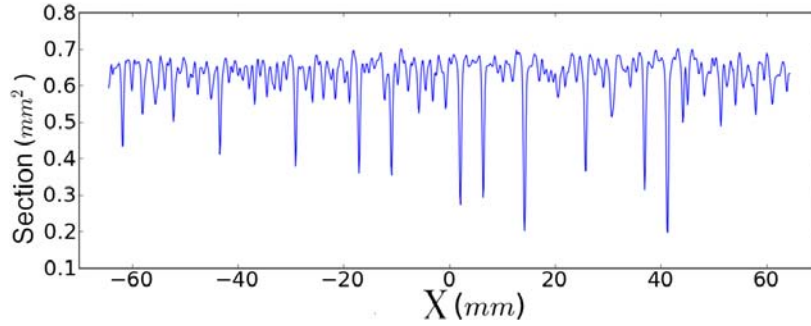
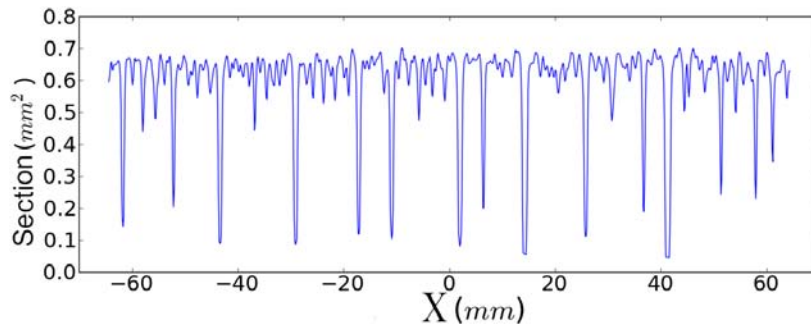
(a)  $t = 180 \mu s$ (b)  $t = 210 \mu s$ (c)  $t = 240 \mu s$ (d)  $t = 270 \mu s$ 

FIG. 4.2 – Évolution de la section du barreau pour  $V_0 = 150 \text{ m/s}$  et  $A = 5 \%$  à  $t = 180, 210, 240, 270 \mu s$  en fonction de l'abscisse lagrangienne  $X$ .

dans son voisinage, un front de relaxation qui tendra à interrompre le développement des instabilités dans ces zones relaxées. D'autres fronts de relaxation pourront apparaître, plus tard, à partir d'autres strictions suffisamment développées. Une illustration de ces phénomènes est représentée sur la Figure 4.3, où les zones en bleu sont caractérisées par une vitesse de déformation plastique nulle. [Zhou et al. \(2006a\)](#) avaient déjà observé, dans leurs simulations, ces décharges élastiques. Nous considérons donc que ce critère peut déterminer le démarrage des fortes instabilités, autrement appelées strictions localisées dans le cas de la traction d'un barreau ou de l'expansion d'un anneau. Nous définissons le temps associé comme l'instant de départ des strictions localisées  $t_{neck}$ .

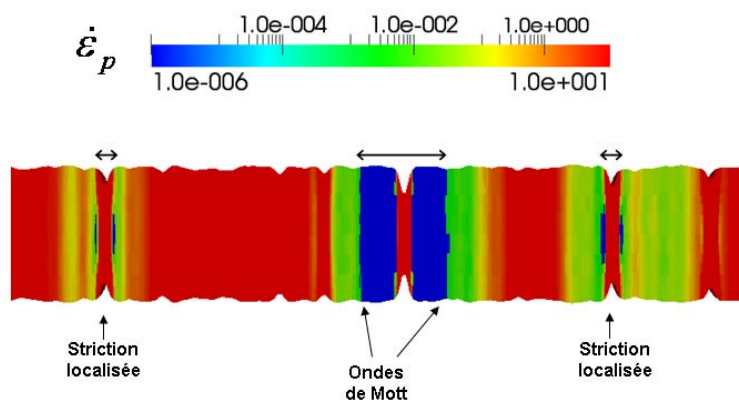


FIG. 4.3 – Strictions localisées et ondes de Mott dans le barreau en traction. La configuration de la Figure 4.1 est adoptée.

Les relaxations élastiques qui apparaissent au cours de la traction d'un barreau sont associées aux ondes de [Mott \(1947\)](#). Mott a, le premier, considéré la relaxation élastique dans le cas de l'expansion d'un anneau comme une onde se propageant dans un matériau supposé plastique parfait depuis des sites de rupture et interrompant la déformation plastique. Il a également estimé la propagation de ces ondes à partir d'un site rompu en établissant la relation entre la taille de la zone déchargée  $2x_i$  centrée autour de la rupture  $i$  et l'instant  $t$  :

$$x_i = \sqrt{2\sigma_y/\rho\dot{\epsilon}} (t - t_i)^{1/2} \quad t \geq t_i \quad (4.5)$$

où  $t_i$  est l'instant de cette  $i^e$  rupture. La limite d'écoulement  $\sigma_y$  considérée par Mott est constante (comportement élasto-plastique parfait). On trouve une relation similaire en diffusion de la chaleur, pour quantifier la zone thermiquement affectée. De ce fait, les ondes de Mott sont des ondes diffusives. Nous pouvons remarquer ici que la vitesse de propagation de l'onde ( $dx_i/dt$ ) ainsi définie tend vers l'infini lorsque  $t$  est proche de  $t_i$ .

En utilisant le critère de départ des strictions localisées définissant  $t_{neck}$  ( $\dot{\epsilon}_p = 0$ ), il sera alors possible d'évaluer les effets de la vitesse de chargement  $V_0$  et des caractéristiques de la perturbation ( $A$  et  $S$ ). Nous verrons en effet, par la suite, que ces dépendances peuvent être décrites par des lois puissances similaires à l'équation (3.27). Une relation pourra se mettre sous la forme :

$$t_{neck} = C(R_0, L_0, \sigma_{e0}, \rho_0, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}) V_0^a A^b \left(\frac{S}{S_0}\right)^c \quad (4.6)$$

dans laquelle  $C(R_0, L_0, \sigma_{e0}, \rho_0, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q})$  sera une fonction scalaire dépendant du matériau et des caractéristiques géométriques initiales (rayon  $R_0$ , longueur  $2L_0$ ) du barreau,  $a$ ,  $b$  et  $c$  étant des exposants qui seront déterminés plus loin.

### 4.3.2 Nombre de strictions localisées

À l'instant caractéristique du départ des instabilités localisées  $t_{neck}$  précédemment déterminé, il est maintenant important d'évaluer le mode dominant des instabilités ou le nombre de strictions localisées, pour une longueur  $2L_0$  choisie. Il semble cependant que cette détermination soit plus difficile à réaliser sans l'intervention d'un opérateur. À la différence de ce qui est fait pour  $t_{neck}$ , il est très difficile de définir une striction. En effet, comment peut-on différencier les défauts liés à la distribution initiale des perturbations, des strictions s'étant développées naturellement au cours de la déformation ? Nous avons constaté, dans le chapitre 3, que les perturbations initiales peuvent, en effet, altérer la densité spectrale associée au processus de développement des instabilités. Certains auteurs ont utilisé des seuils arbitraires

pour identifier, par exemple, les défauts critiques supposés donner naissance à des sites de rupture. C'est le cas, en particulier, de [Zhou et al. \(2006a\)](#) ou [Bishop et Strack \(2011\)](#). Nous avons montré, au chapitre 3, que cette méthode est légèrement imprécise et dépend du choix de la valeur seuil. Nous adopterons, par la suite, une méthode de traitement des résultats numériques, basées sur une analyse spectrale de la section du barreau, comme [Zhou et al. \(2006b\)](#).

Sur le principe évoqué pour l'approche analytique, il est, en effet, possible d'accéder aux modes dominants des instabilités obtenues par simulation numérique grâce à la méthode des densités spectrales, obtenues à partir de la transformée de Fourier de la section du barreau étudié. La fréquence donnant la réponse de plus forte amplitude, c'est-à-dire celle associée au maximum du spectre, est alors considérée comme étant le mode dominant des instabilités. Malheureusement, nous constaterons, par la suite, que les réponses spectrales obtenues sont bruitées. Il est légitime d'associer ce bruit aux  $\delta S_{0_p}$ , introduits dans l'équation (3.38) de l'approche analytique, qui dépendent fortement de la manière dont le barreau est perturbé. Par ailleurs, la précision de la transformée de Fourier est liée au nombre de points considérés. Nous utilisons, dans notre approche, 1000 points pour discrétiser la section du barreau. Il sera donc difficile d'évaluer un maximum précis pour les réponses spectrales.

Afin de passer outre ces difficultés, nous profiterons, tout d'abord, de l'avantage de l'hypothèse d'ergodicité spatiale du processus de développement des instabilités et nous utiliserons la méthode de *moyennage* (*ensemble average*) couramment employée en traitement du signal pour limiter le rapport signal/bruit. Nous allons, en effet, travailler sur la moyenne de plusieurs profils de section, obtenus à partir de plusieurs simulations perturbées, afin de réduire le bruit lié aux perturbations initiales. Par linéarité de la transformée de Fourier, la transformée de Fourier du profil moyen est égale à la transformée de Fourier moyenne. Celle-ci est alors moins bruitée également. La Figure 4.4 montre l'effet de la prise en compte de plusieurs réalisations (tirages aléatoires différents) sur la moyenne spectrale. Le bruit est en

effet réduit en fonction du nombre de simulations considéré. La densité spectrale sera alors approchée par le carré de la transformée de Fourier moyenne.

Nous supposerons ensuite que la densité spectrale issue du profil moyen converge vers une loi du type distribution Gamma définie par :

$$f_{\Gamma}(x, m, \sigma) = K \frac{m}{\sigma} \frac{1}{\Gamma(m)} \left( \frac{m x}{\sigma} \right)^{(m-1)} e^{-\frac{m x}{\sigma}} \quad (4.7)$$

où  $K$  est un facteur multiplicatif tenant compte de la variance  $\sigma_S^2$  de la section (voir chapitre 3), et  $m$  et  $\sigma$  sont respectivement les paramètres de forme et d'échelle de la loi de distribution Gamma initiale<sup>1</sup>. La fonction  $\Gamma$  utilisée dans cette loi est définie par :

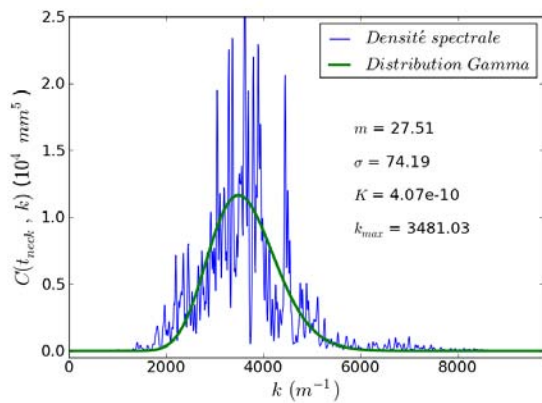
$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx \quad (4.8)$$

La fréquence associée au maximum de cette loi analytique sera donc supposée correspondre au mode dominant. D'autres distributions ont également été testées telles que la loi de Weibull ou la loi log-normale. Cependant, elles représentaient moins bien l'évolution des densités spectrales issues des simulations numériques que la loi Gamma.

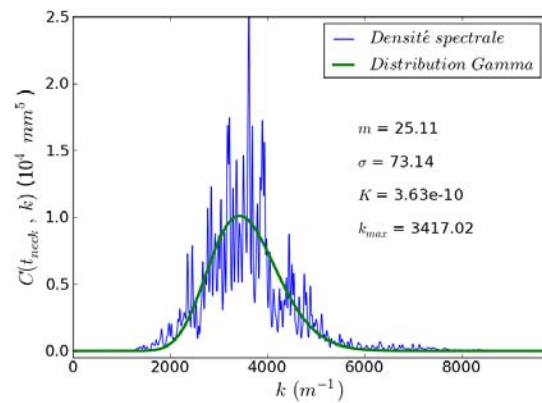
Comme nous n'utiliserons, en général, qu'un nombre relativement faible de simulations perturbées (5 en général) pour chaque configuration, l'hypothèse d'associer la distribution limite, correspondant en théorie à la moyenne d'un nombre infini de cas, à la distribution Gamma peut être considérée comme une hypothèse relativement forte. Cependant, l'on pourra constater que cette fonction, évaluée à l'instant  $t_{neck}$  déterminée au paragraphe précédent, reproduit parfaitement la forme de la densité spectrale pour différentes vitesses de chargement comme l'illustre la Figure 4.5. Sur cette figure, on constate que le mode dominant des instabilités croît lorsque la vi-

<sup>1</sup>La loi Gamma est une loi de densité de probabilité. On peut, en effet, montrer que :

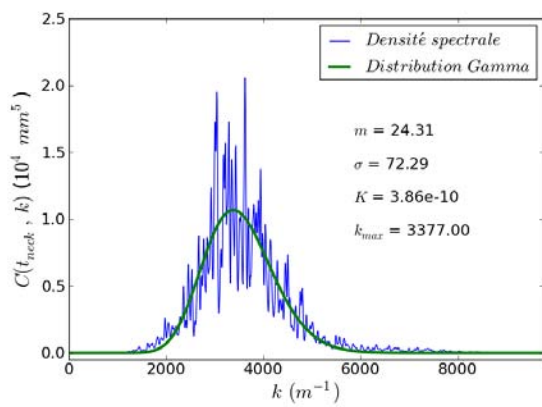
$$\int_0^{+\infty} \frac{m}{\sigma} \frac{1}{\Gamma(m)} \left( \frac{m x}{\sigma} \right)^{(m-1)} e^{-\frac{m x}{\sigma}} dx = 1$$



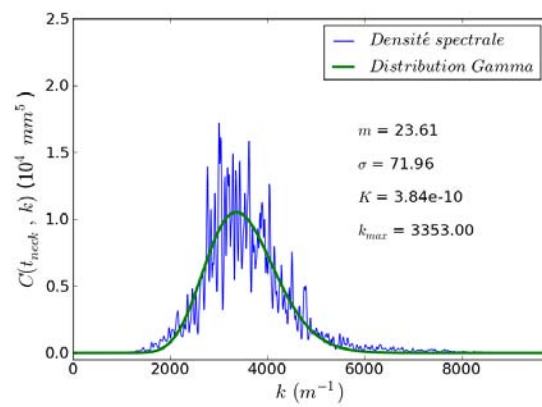
(a) 1 réalisation



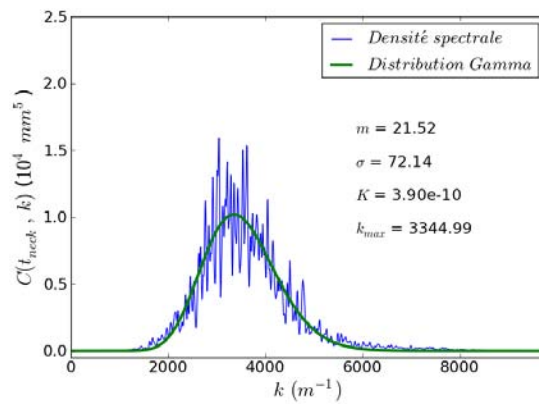
(b) 2 réalisations



(c) 3 réalisations



(d) 4 réalisations



(e) 5 réalisations

FIG. 4.4 – Densités spectrales moyennes de la section en fonction du nombre de simulations prises en compte. Des tirages aléatoires différents sont alors considérés (entre 1 et 5). Les résultats sont approchés par une loi du type loi Gamma. La vitesse de chargement vaut  $V_0 = 2100 \text{ m/s}$ . L'étude du profil de la section se fait à  $t = t_{neck}$  avec  $A = 1 \%$  et  $S = S_0$ .

tesse de sollicitation augmente. Ce résultat est conforme aux attentes. En utilisant les maxima de ces fonctions approchées, il semble donc possible de déterminer précisément le nombre d'onde dominant  $k_{neck}$  et donc un nombre de strictions associé  $N_{neck} = \frac{k_{neck} L_0}{\pi}$ , associé au départ des instabilités localisées, en fonction de la vitesse de chargement et des caractéristiques des perturbations initiales introduites dans le modèle numérique (amplitude  $A$  et taille des cellules  $S$ ). Nous montrerons alors que, de façon similaire au temps  $t_{neck}$ , ce nombre évolue suivant une loi mise sous la forme :

$$N_{neck} = C' (R_0, L_0, \sigma_{e0}, \rho_0, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}) V_0^{a'} A^{b'} S^{c'} \quad (4.9)$$

où  $C' (R_0, L_0, \sigma_{e0}, \rho_0, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q})$  est une fonction scalaire qui dépend du matériau et de la géométrie initiale du barreau.

Pour finir, une méthode basée sur l'utilisation de transformées de Fourier glissante a également été explorée pour déterminer le mode dominant des instabilités. Le principe de base de cette technique consiste à faire glisser une fenêtre de travail le long du profil étudié et d'explorer la réponse spectrale de la portion du profil ainsi encadrée, par transformée de Fourier. L'avantage de cette procédure est qu'elle procure naturellement une valeur moyenne et un écart-type du mode dominant. Cependant, la méthode de transformée de Fourier glissante a montré, dans cette étude, une dépendance trop importante à la largeur de la fenêtre utilisée, en particulier sur la valeur de l'écart-type, lorsque les vitesses de chargement sont faibles.

## 4.4 Études paramétriques

La simulation du développement des instabilités, en introduisant dans le modèle numérique des perturbations ou en profitant des arrondis numériques, n'est pas si évidente. Plusieurs exemples de ce type de simulation sont décrits dans les articles de Pandolfi et al. (1999), Becker (2002), Guduru et Freund (2002), Becker (2002), Zhou et al. (2006a), Rusinek et Zaera (2007), Zhang et Ravi-Chandar (2008), Meulbroek

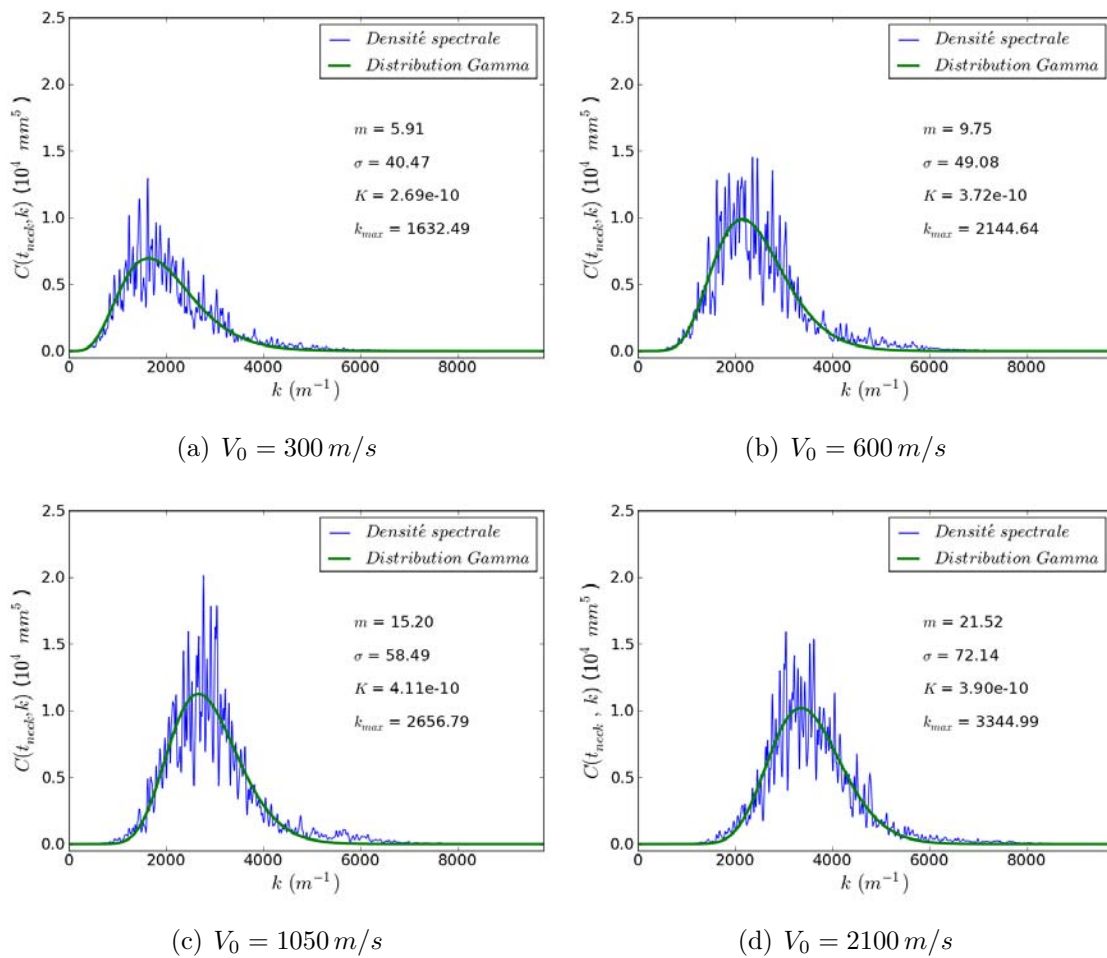


FIG. 4.5 – Densités spectrales moyennes de la section pour 5 simulations utilisant des tirages aléatoires différents et loi Gamma approchée résultante pour des vitesses  $V_0 = 300, 600, 1050$  et  $2100 \text{ m/s}$  ( $A = 1 \%$ ,  $S = S_0$ ).



et al. (2008), Petit (2010) ou encore Hopson et al. (2011).

Nous allons montrer que de nombreuses sources de variation du temps d'apparition et de la fréquence des localisations peuvent en effet être rencontrées. Les plus conséquentes sont liées à l'amplitude  $A$  et la taille  $S$  des perturbations, le tirage aléatoire utilisé, et la longueur du barreau étudié. Nous tenterons ici d'être le plus exhaustif possible dans la description des diverses origines de ces variations.

Concernant le temps d'apparition, il est d'ores et déjà possible de faire référence aux incertitudes liées à la discrétisation en temps des résultats de simulations. Dans tous les résultats qui seront présentés par la suite, la valeur de  $t_{neck}$  sera donnée avec une incertitude de moins de 0.5 % associée aux pas de temps des résultats de simulations. Cette incertitude sera donc sans conséquence sur l'analyse suivante.

#### 4.4.1 Effets de la longueur du barreau étudié, à $R_0$ inchangé

La première étude paramétrique se rapporte ici aux effets dus à la longueur du barreau étudié. En effet, pour vérifier l'ergodicité du problème stochastique du développement des instabilités, nous avons évalué les résultats obtenus pour différentes longueurs de barreau, lorsque la vitesse de déformation initiale  $\dot{\epsilon}_0 = V_0/L_0$  reste constante (le rayon  $R_0$  étant inchangé). Les modélisations théoriques du développement des instabilités sur un barreau en traction dynamique, telles que l'analyse linéaire de stabilité, considèrent, en effet, que les taux de croissance et les fréquences de localisation restent inchangés lorsque le rapport  $V_0/L_0$  est constant (à  $R_0$  fixé). Autrement dit, lorsque la longueur de barreau considérée est le double de la longueur de référence, il faut alors appliquer un chargement en vitesse double du chargement de référence, pour retrouver les résultats de référence. On notera donc, au passage, que ces modélisations supposent de manière implicite que le processus de développement des instabilités est ergodique. Toutefois, cela suppose donc que la longueur du barreau soit suffisante.

Comparons, en pratique, les résultats de simulations numériques pour différentes longueurs de barreau. Nous nous sommes limités, dans ce paragraphe, à une taille de cellule  $S = S_0$ , une amplitude de perturbation  $A = 1\%$ , et une unique réalisation des perturbations. En plus de la longueur de référence  $2L_0 = 128.805\text{ mm}$  sollicitée en traction à différentes vitesses  $V_0$ , des simulations numériques avec des demi-longueurs de  $L = 2L_0$  et  $L = 4L_0$  (c'est-à-dire en considérant des barreaux 2 fois et 4 fois plus longs) et des vitesses de chargement adaptées de  $V = 2V_0$  et  $V = 4V_0$  ont été réalisées. Si  $L = L_0$ , alors  $V = V_0$ . Les temps d'apparition et les fréquences des localisations ont été estimées à partir des méthodes décrites précédemment. Les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 4.6.

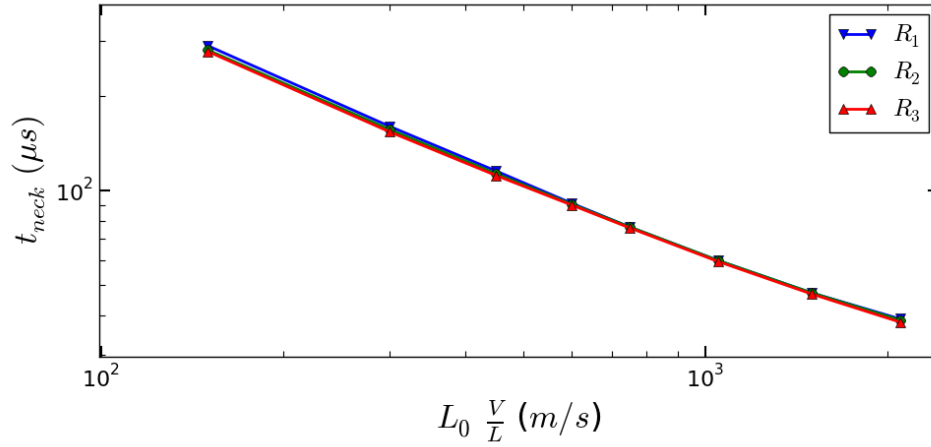
Ces résultats semblent bien montrer que l'ergodicité est respectée. Les temps d'apparition des localisations  $t_{neck}$  sont quasiment indépendants de la longueur de barreau traitée. Seuls quelques légers écarts peuvent être observés pour la longueur de référence lorsque les vitesses de chargement sont faibles (voir Figure 4.6(a)).

De la Figure 4.6(b), il apparaît que les fréquences de localisations  $\frac{N_{neck}}{2L}$  obtenues avec la demi-longueur de référence  $L_0$  sont légèrement plus importantes, notamment pour les faibles vitesses de chargement. Celles obtenues avec les demi-longueurs  $2L_0$  et  $4L_0$  sont quasiment superposées. L'origine de ces écarts n'est pas, pour l'instant, parfaitement élucidée. Les différences peuvent provenir d'effets liés aux conditions limites, d'aspects statistiques limités pour les petites longueurs, ou plus vraisemblablement de la limitation, pour les nombres d'onde faibles, de la méthodologie numérique permettant d'évaluer le nombre  $N_{neck}$ .

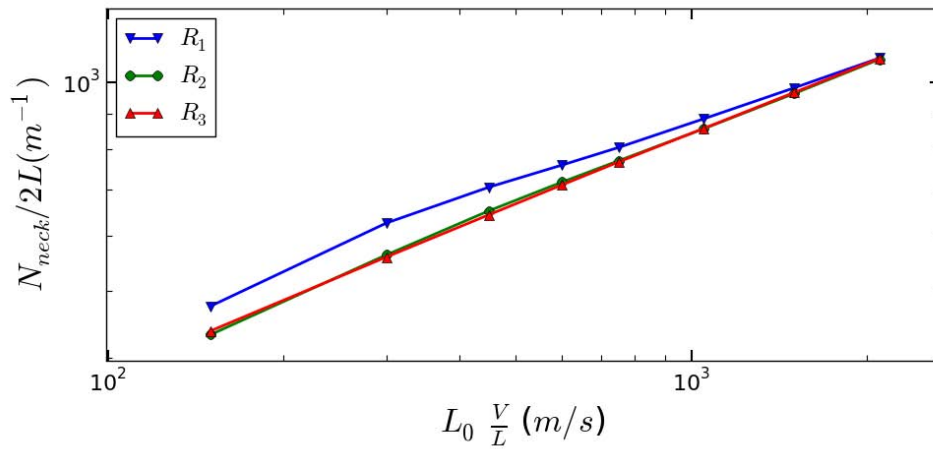
Dans cette étude, nous ne pourrions donc pas utiliser la longueur de référence pour décrire proprement les caractéristiques stochastiques du processus de développement des instabilités. Par ailleurs, les écarts entre les deux configurations les plus longues étant inférieurs à 2.5 % pour  $t_{neck}$  et 1.5 % pour  $N_{neck}$ , il semble raisonnable de travailler, par la suite, avec une longueur de barreau double de 257.6 mm.

Dorénavant, la configuration initiale du problème sera étudiée en utilisant une

configuration théoriquement équivalente, avec une demi-longueur double de  $2L_0$  et une vitesse de chargement appropriée  $2V_0$ . Les résultats seront toutefois représentés comme s'il s'agissait du problème initial avec  $L_0$  et  $V_0$ .



(a)



(b)

FIG. 4.6 – Évolution du temps d'apparition  $t_{neck}$  et de la fréquence des localisations  $\frac{N_{neck}}{2L}$  en fonction de la vitesse de déformation  $V_0 = L_0 \frac{V}{L}$ . 3 configurations avec des demi-longueurs de barreau de  $L_0$ ,  $2L_0$  et  $4L_0$  ont été testées ( $A = 1\%$ ,  $S = S_0$ ).

#### 4.4.2 Convergence au maillage

Classiquement, dans toute modélisation numérique par éléments finis, la question de l'indépendance des résultats vis-à-vis du maillage est cruciale. Dans leur article, Bishop et Strack (2011) ont réalisé une étude de convergence au maillage pour la

simulation du problème de la fragmentation d'un anneau en expansion. À notre connaissance, ce sont les seuls à avoir présenté ce type d'études avec autant de détails. Leur objectif était de vérifier la convergence en termes de distribution finale de tailles de fragments. Ils ont analysé deux types de champs de distributions aléatoires : le type *non corrélé*, pour lequel la distribution des perturbations aléatoires a été réalisée sur chaque élément de manière identique et indépendante; et le type *corrélé*, pour lequel la distribution s'est faite de manière identique et indépendante sur des cellules de taille définie à l'avance quel que soit le maillage. Autrement dit, comme l'illustre

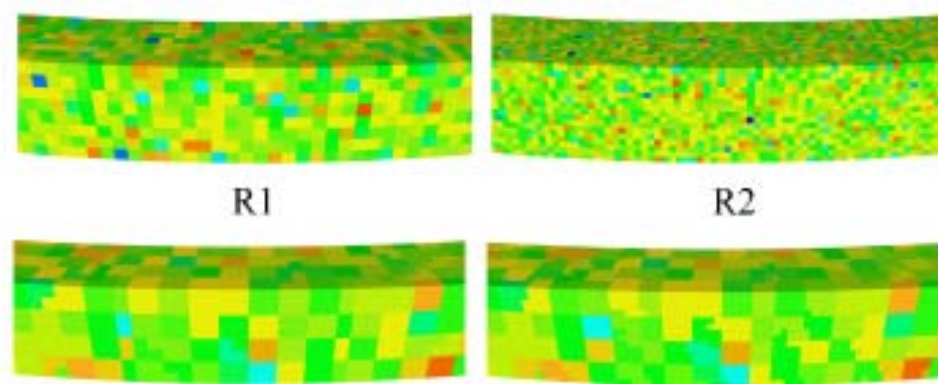


FIG. 4.7 – Distributions aléatoires utilisées par Bishop et Strack (2011). R1 et R2 sont deux niveaux de raffinement du maillage. La rangée du haut représente les cas non corrélés, et la rangée du bas, les cas corrélés.

la Figure 4.7, dans le cas non corrélé, la convergence au maillage de simulations perturbées s'est faite en distribuant sur chaque maille du modèle une valeur aléatoire différente, alors que dans le cas corrélé, la distribution des perturbations est choisie au niveau du maillage le plus grossier et le maillage est ensuite raffiné sans modifier la distribution initiale. Ils ont alors montré, d'une part, que quelque soit le type de distribution, la convergence au maillage est possible et qu'elle est plus rapide pour les cas corrélés que pour les cas non corrélés, et d'autre part, que les distributions finales convergées, obtenues dans les deux cas de figure, sont légèrement différentes. Dans les travaux de Bishop et Strack (2011), la convergence au maillage par rapport au temps d'apparition des instabilités ou de la rupture n'a pas été vérifiée.

Dans notre approche, la convergence au maillage a donc été étudiée en considérant le formalisme corrélé de Bishop et Strack (2011). Nous avons alors choisi une taille de cellule de référence  $S_0$ , une unique réalisation des perturbations, et nous avons étudié cinq raffinements de maillage présentés sur la Figure 4.8. Les observations de Bishop et Strack (2011) concernant la convergence des configurations corrélées ont été confirmées, d'après les résultats en termes de temps d'apparition  $t_{neck}$  et de nombre de localisations  $N_{neck}$ , représentés sur la Figure 4.9. La démarche corrélée peut permettre, par exemple, de représenter les hétérogénéités liées au matériau, la taille de cellule  $S_0$  étant alors associée à un paramètre physique, sans que le maillage ne vienne modifier cette source de perturbation.

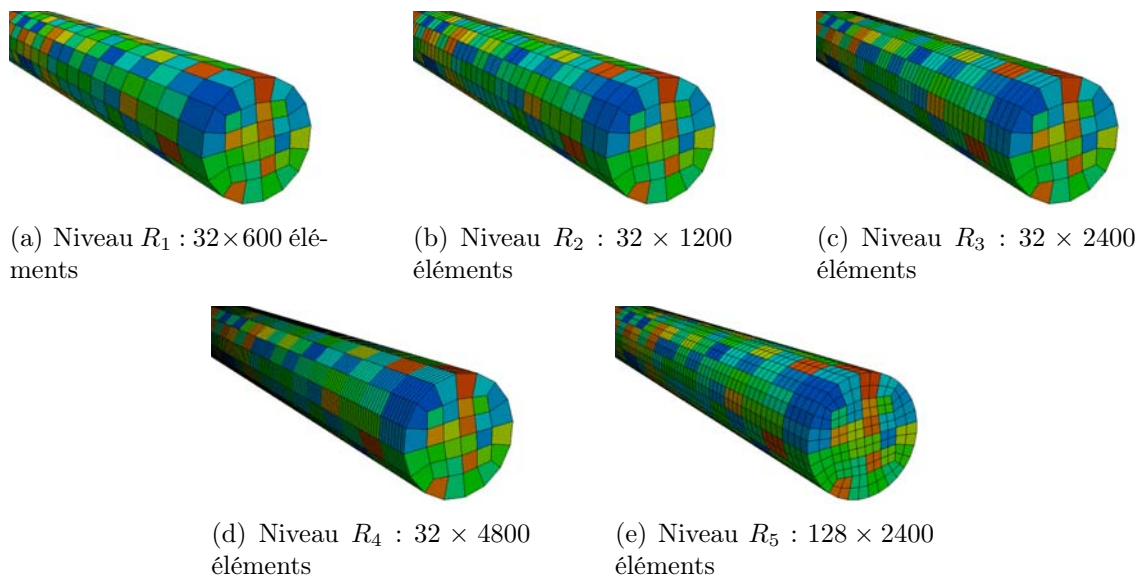


FIG. 4.8 – Maillages étudiés dans le cadre de l'étude de la convergence au maillage. Les barreaux utilisés ont une longueur double ( $4L_0$ ).

De faibles écarts sur les résultats sont en effet observés au-delà du raffinement de niveau 3. L'écart maximal (entre  $R_3$  et  $R_5$ ) pour le temps  $t_{neck}$  est observé pour  $V_0 = 2100 \text{ m/s}$  avec environ 10 % d'erreur. On remarquera également que pour des maillages suffisamment fins, en échelle logarithmique, le temps d'apparition  $t_{neck}$  et le nombre  $N_{neck}$  de localisations sont des fonctions linéaires de la vitesse de char-

gement. La vitesse de chargement  $V_0$  varie de  $150 \text{ m/s}$  à  $2100 \text{ m/s}$ . Les vitesses de déformation nominale testées sont donc comprises entre  $\dot{\epsilon} \in [2\,230; 32\,600] \text{ s}^{-1}$ . La dernière observation importante, qui peut être faite à partir de la comparaison entre les étapes de raffinement ( $R_3 \rightarrow R_4$ ) et ( $R_3 \rightarrow R_5$ ), est que le raffinement du maillage dans la direction axiale semble jouer un rôle prépondérant par rapport à celui réalisé transversalement. C'est donc bien la capacité à reproduire correctement les fluctuations de section le long du barreau au cours du développement des instabilités qui est recherchée à travers le raffinement du maillage

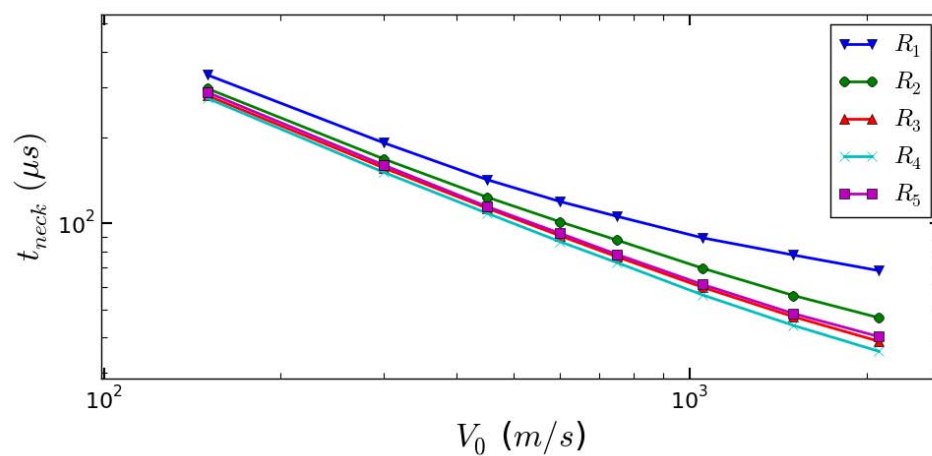
Le troisième niveau de raffinement  $R_3$  a finalement été choisi pour la poursuite de l'étude paramétrique<sup>2</sup>. Il offre en effet l'avantage de donner des résultats quasi-convergés, avec des temps de calcul encore raisonnables pour des calculs sur un seul processeur. La Figure 4.10 illustre l'évolution du temps d'apparition  $t_{neck}$  et du nombre  $N_{neck}$  de localisations en fonction de la vitesse de chargement  $V_0$  et de l'amplitude des perturbations  $A$ . Ces résultats montrent une évolution linéaire en échelle logarithmique des deux grandeurs caractéristiques en fonction à la fois de la vitesse de chargement et de l'amplitude des perturbations. Il est alors possible de représenter ces évolutions à l'aide des fonctions approchées suivantes :

$$\begin{cases} t_{neck}(\mu s) = C(R_0, L_0, \sigma_{e0}, \rho_0, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}) v_0^{-0.78} A^{-0.17} \\ N_{neck} = C'(R_0, L_0, \sigma_{e0}, \rho_0, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}) v_0^{0.33} A^{-0.06} \end{cases} \quad (4.10)$$

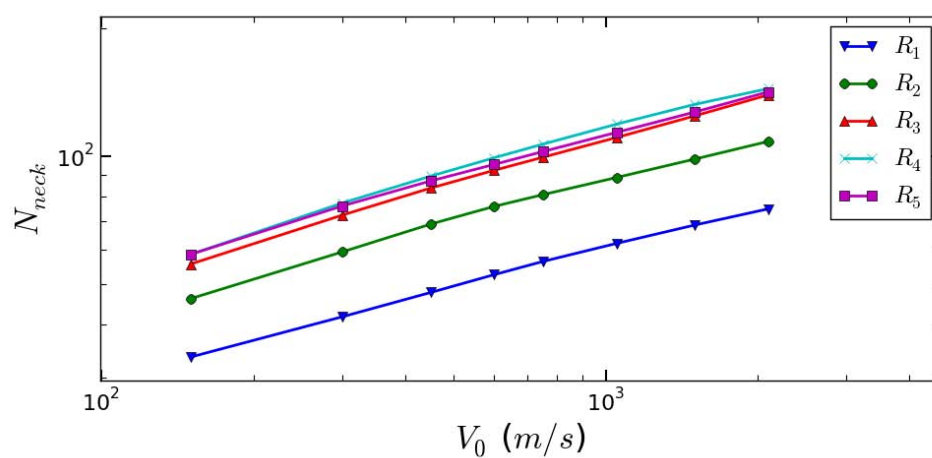
Concernant le temps  $t_{neck}$ , lorsque l'amplitude  $A$  augmente, les hétérogénéités sont plus prononcées. Les instabilités se développent donc plus vite. Ce résultat est cohérent. De nombreuses études avec des modèles à deux zones ont montré de telles tendances. Concernant le nombre de striction  $N_{neck}$ , on observe une faible dépendance à l'amplitude des défauts. Ce résultat permet d'imaginer qu'il est plus facile d'obtenir le nombre de striction que le temps d'apparition de ceux-ci. On constate dans la littérature que beaucoup de résultats sont exprimés en termes de nombre de

---

<sup>2</sup>Les résultats présentés jusque-là sont issus de simulations réalisées à l'aide du raffinement  $R_3$ .



(a)



(b)

FIG. 4.9 – Évolution du temps d'apparition  $t_{neck}$  et du nombre  $N_{neck}$  de localisations pour différents raffinements du maillage. La vitesse de chargement  $V_0$  varie de  $150 m/s$  à  $2100 m/s$ .  $A = 1\%$ ,  $S = S_0$ .

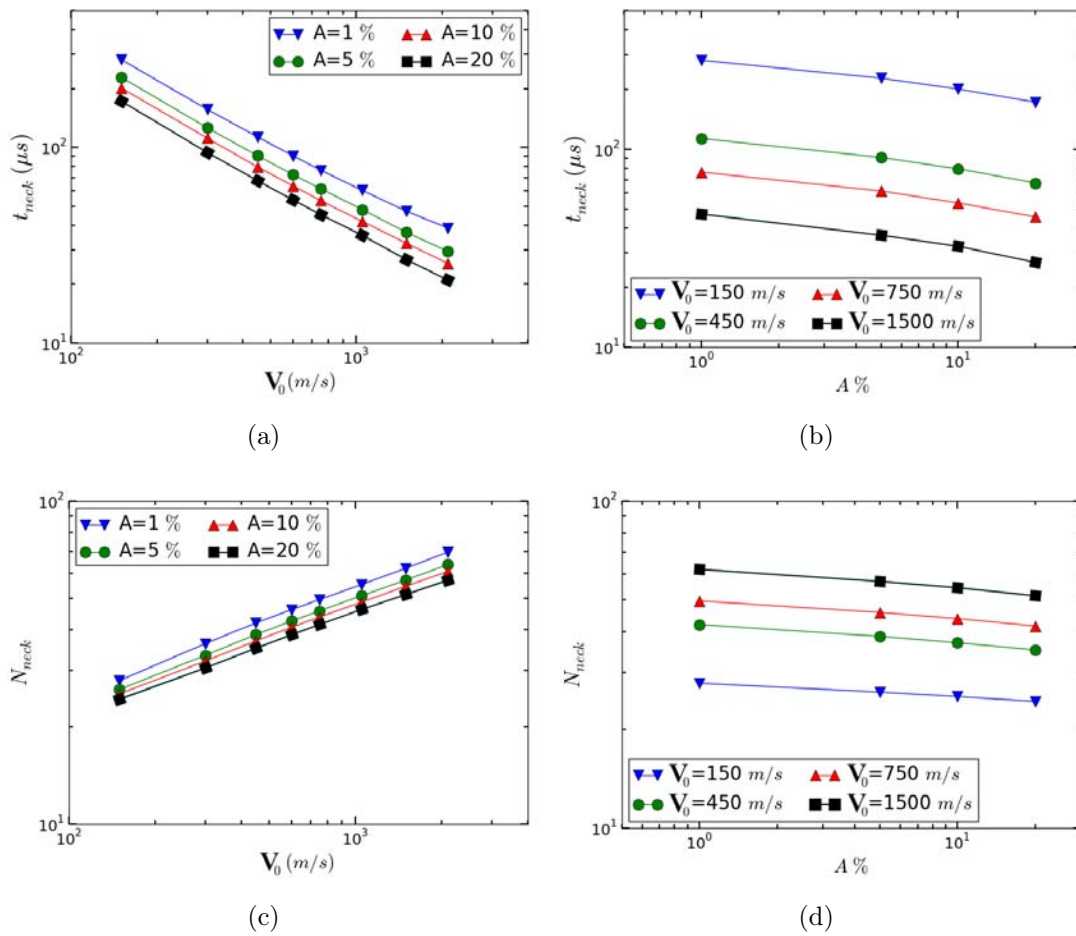


FIG. 4.10 – Évolution de  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$  en fonction de  $V_0$  et  $A$ . Le maillage est de  $32 \times 2400$  éléments (raffinement  $R_3$ ).



strictions. Mais peu d'études se concentrent sur la chronologie.

À noter toutefois que le raffinement  $R_3$  induit des tailles de maille de l'ordre de  $1\text{ mm}^3$ . La simulation de grandes structures avec cette taille de maille est aujourd'hui irréalisable avec les moyens de calcul actuels. L'utilisation des perturbations sur des configurations d'intérêt (fragmentation de charges militaires, de containers industriels sous pression, ...), avec un maillage plus grossier pour l'instant, aboutira donc à des résultats probablement imprécis (en particulier pour les temps à rupture). Le passage à d'autres approches numériques, approches semblables à celle de [Denoual et Hild \(2000\)](#) pour la fragmentation fragile, de type multi-échelle prenant en compte un Volume Élémentaire Représentatif par exemple, permettrait de contourner ces limitations.

### 4.4.3 Fluctuations stochastiques

Comme précisé précédemment, la procédure de distribution des perturbations dans le maillage génère des distributions quasi-aléatoires. Ainsi, dans toutes les simulations présentées jusqu'à présent, les perturbations étaient identiquement distribuées. Or nous avons déjà fait mention du fait que deux calculs pour une même configuration avec des perturbations issues de tirages aléatoires différents peuvent engendrer un développement des instabilités légèrement différent (voir Fig. 4.4). Nous avons alors utilisé cette particularité afin de justifier l'emploi de la loi Gamma sans pour autant avoir réalisé une évaluation quantitative de cet effet. Nous préciserons donc ici cet effet sur le temps d'apparition  $t_{neck}$  et le nombre  $N_{neck}$  de localisations, lorsque le maillage (Niveau 3 de raffinement) et la taille des cellules de perturbation (taille de référence  $S = S_0$ ) sont conservés.

12 simulations initialisées avec différentes distributions aléatoires de perturbations dans des cellules de taille  $S_0$  ont donc été testées pour plusieurs vitesses de chargement  $V_0$  et amplitudes  $A$ . La Figure 4.11 présente deux tirages aléatoires avec

même amplitude  $A$  et même taille de cellule  $S_0$ .

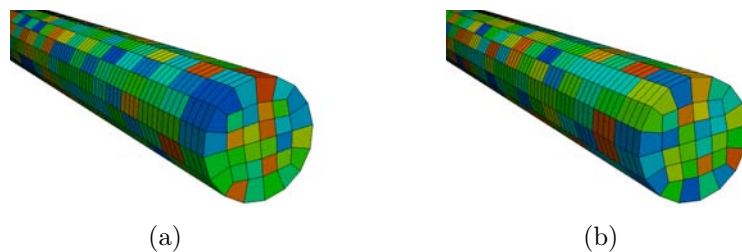


FIG. 4.11 – Exemple de tirages aléatoires différents avec même amplitude  $A$  et même taille de cellule  $S_0$ .

Ces 12 simulations peuvent représenter en quelque sorte, la variabilité expérimentale. En effet, 12 essais d'expansion d'anneaux réalisés à la même vitesse d'expansion présentent une légère variabilité du nombre de fragments obtenus (à titre d'exemple, on pourra se référer aux résultats de Grady et Olsen (2003)). Ainsi même pour la vitesse de chargement  $V_0$  et la même amplitude de perturbation  $A$ , les 12 simulations réalisées aboutissent à des temps d'apparition  $t_{neck}$  et à des nombres  $N_{neck}$  de localisations légèrement différents. Pour autant, comme illustré sur la Figure 4.12, il est possible de suivre l'évolution des valeurs moyennes  $\mu_t$  et  $\mu_N$  de ces deux grandeurs, en fonction du nombre de simulations considérées  $n_{sim}$ , données par :

$$\mu_t = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{i=1}^{n_{sim}} t_{neck}^i \quad (4.11a)$$

$$\mu_N = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{i=1}^{n_{sim}} N_{neck}^i \quad (4.11b)$$

L'évaluation de l'incertitude  $I_t$  et  $I_N$  sur ces moyennes peut également être estimée en fonction du nombre de simulations par les relations :

$$I_t = \frac{\sqrt{\frac{1}{n_{sim}-1} \sum_{i=1}^{n_{sim}} (t_{neck}^i - \mu_t)^2}}{\sqrt{n_{sim}}} \quad (4.12a)$$

$$I_N = \frac{\sqrt{\frac{1}{n_{sim}-1} \sum_{i=1}^{n_{sim}} (N_{neck}^i - \mu_N)^2}}{\sqrt{n_{sim}}} \quad (4.12b)$$

D'après le théorème de la limite centrale (parfois appelé théorie des grands nombres) qui montre que toute série de variables aléatoires indépendantes converge

vers une loi gaussienne, les incertitudes  $I_t$  et  $I_N$  doivent être vues comme une approximation de l'écart-type  $\sigma_G$  de cette loi gaussienne. Lorsque le nombre de tirages est grand, les valeurs définies par les équations (4.12) doivent donc tendre à indiquer un domaine de confiance de 68.27 % sur les moyennes  $\mu_t$  et  $\mu_N$  (probabilité cumulée des valeurs comprise entre  $\langle X_G \rangle - \sigma_G$  et  $\langle X_G \rangle + \sigma_G$  d'une variable gaussienne  $X_G$ ).

Ces deux grandeurs existent lorsque  $n_{sim} \geq 2$ . Les barres d'incertitudes présentées sur la Figure 4.12 illustrent les valeurs de  $I_t$  et  $I_N$ . Ce type de représentation est liée à l'approche statistique descriptive que nous avons abordée au Chapitre 2.

Ces résultats montrent que la moyenne  $\mu_t$  associée au temps d'apparition des localisations  $t_{neck}$  est correctement évaluée à partir d'un nombre relativement faible de tirages (environ 5 ou 6). Ces résultats sont obtenus pour les 2 vitesses de chargement et pour toutes les amplitudes de perturbation choisies. À l'inverse, l'évaluation de la valeur moyenne  $\mu_N$  du nombre de localisations  $N_{neck}$  est sujette à une dépendance plus importante pour chaque vitesse de chargement et chaque amplitude des perturbations. On pourra ainsi noter que le processus devient plus déterministe, à mesure que la vitesse de chargement est importante ou que l'amplitude des perturbations est faible. Dans le domaine de la fragmentation fragile, [Denoual et Hild \(2000\)](#) ont déjà observé cet effet de la vitesse de chargement à partir de simulations réalisées sur le principe des tirages de type Monte-Carlo. Ils ont en effet montré qu'en régime quasi-statique ou faiblement dynamique, la contrainte à rupture suit une loi statistique associée à une distribution de Weibull. En régime dynamique, associé à la fragmentation multiple, la contrainte à rupture tend à être connue de manière déterministe.

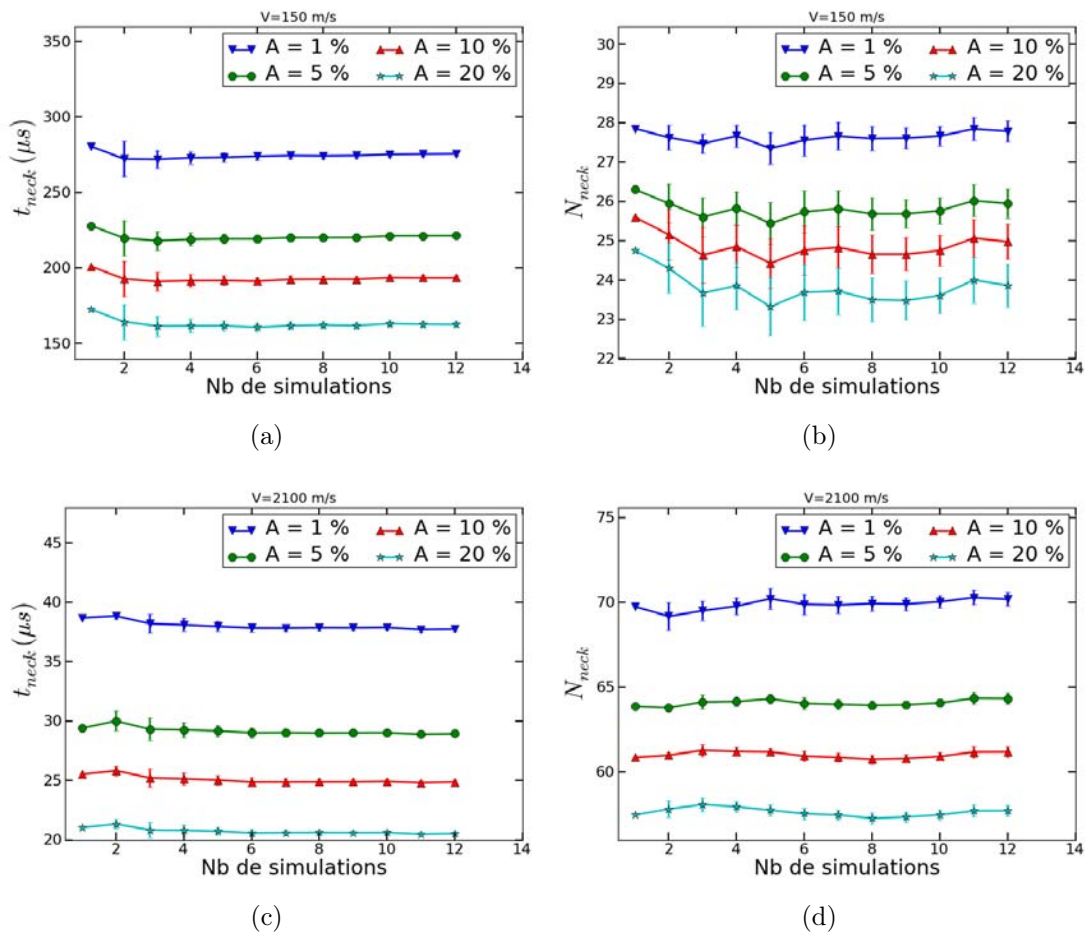


FIG. 4.12 – Évolution de la valeur moyenne et de l'incertitude sur la moyenne de  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$ , pour des vitesses de chargement  $V_0 = 150$  m/s et  $V_0 = 2100$  m/s et des amplitudes de perturbation  $A$  de 1, 5, 10 et 20 %, en fonction du nombre de simulations à perturbations initiales aléatoires.

#### 4.4.4 Dépendance à la taille des cellules de perturbation

Toutes les simulations numériques présentées auparavant ont été réalisées avec une taille fixe de cellules  $S = S_0$ . Cependant, d'après les conclusions de Bishop et Strack (2011), cette taille caractéristique des défauts introduits dans le maillage a également une influence sur le développement des instabilités. Par ailleurs, l'étude de la convergence au maillage a montré que le temps d'apparition  $t_{neck}$  et le nombre  $N_{neck}$  de strictions sont plus dépendants du raffinement de maillage dans la direction axiale que dans la direction transverse.

Dans cette partie de l'étude, nous allons donc évaluer les effets de la taille des cellules suivant l'axe du barreau. La taille de référence  $S_0$  sera alors divisée par deux puis par quatre comme illustré sur la Figure 4.13. Nous tiendrons compte des effets d'incertitudes stochastiques en considérant cinq tirages aléatoires différents pour chaque configuration. Seules deux vitesses de chargement  $V_0 = 150$  et  $2100$   $m/s$  et deux amplitudes de perturbation  $A = 1$  et  $10$  % seront ici présentées.

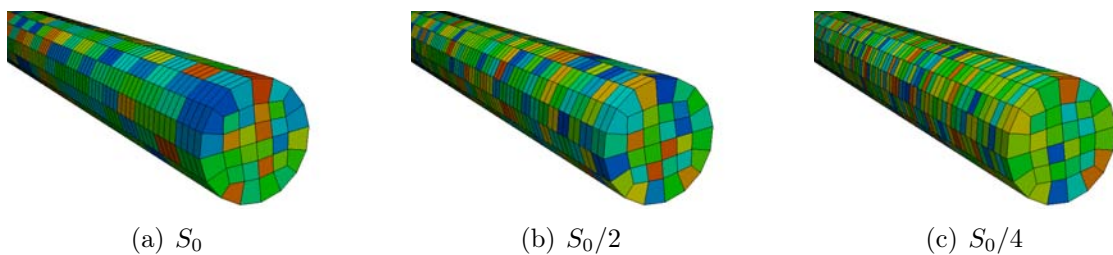


FIG. 4.13 – Tailles de cellules de perturbation étudiées :  $S_0$  est la taille de référence. Des réalisations avec la taille  $S_0/2$  et  $S_0/4$  sont aussi proposées. Le maillage présenté ici est le niveau  $R_3$ . Le barreau est de longueur double ( $4L_0$ ).

La Figure 4.14 illustre l'évolution de la valeur moyenne du temps d'apparition  $t_{neck}$  et du nombre  $N_{neck}$  de localisation en fonction du nombre de simulations utilisées. Celle-ci montre l'effet de la taille des cellules de perturbation sur les deux grandeurs caractéristiques. À partir des résultats, on peut alors proposer une ex-

pression de la dépendance de  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$  à cette taille de cellule :

$$\begin{cases} t_{neck} \propto \left(\frac{S}{S_0}\right)^{-0.05} \\ N_{neck} \propto \left(\frac{S}{S_0}\right)^{-0.03} \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $S_0$  est la taille de référence et  $S$  la taille considérée des cellules de perturbation.

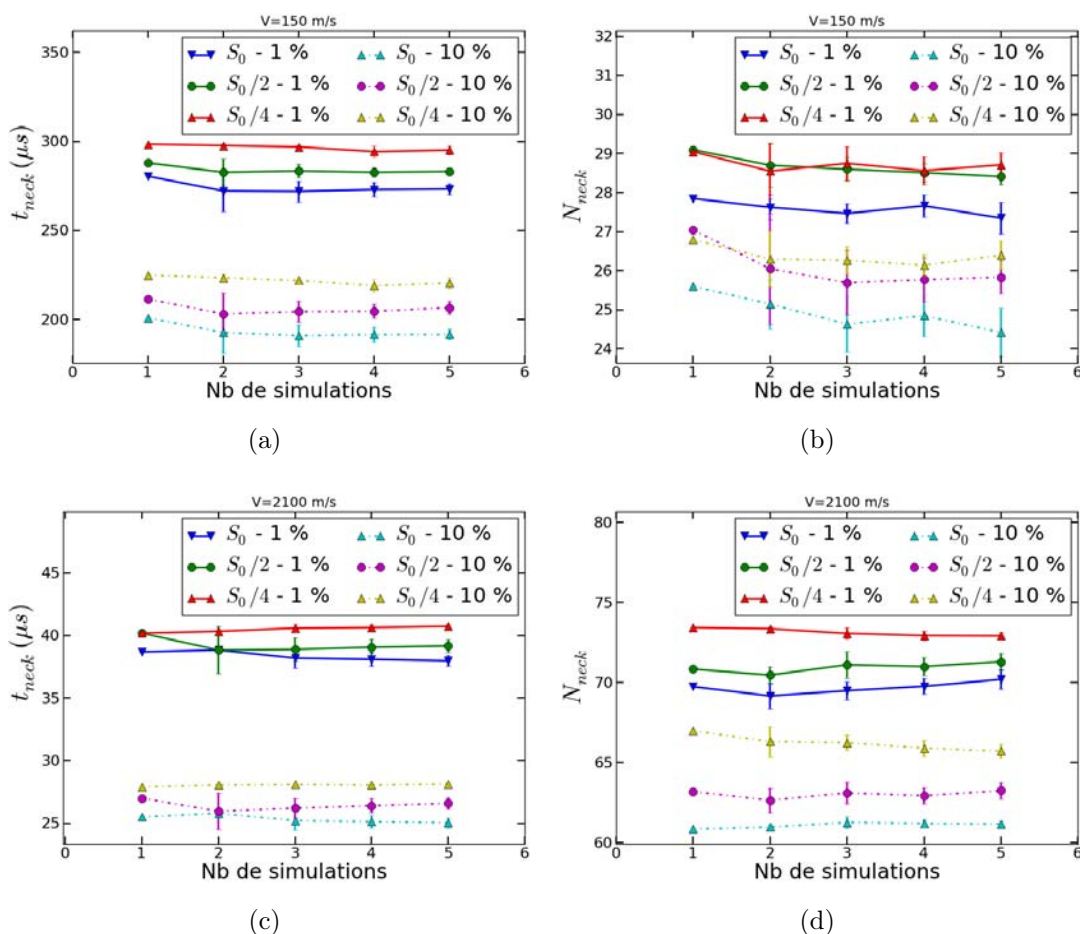


FIG. 4.14 – Effets de la taille de cellule ( $S_0$ ,  $S_0/2$ ,  $S_0/4$ ) sur l'évolution de  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$ , pour des vitesses de chargement de  $V_0 = 150$  m/s et  $V_0 = 2100$  m/s et des amplitudes de perturbation  $A=1$  et 10 %, en fonction du nombre de simulations aléatoirement perturbées considérées.

Les exposants sont très faibles (-0.05 et -0.03), indiquant un faible effet. Par exemple, entre la taille de référence  $S_0$  et la taille la plus petite  $S_0/4$ , seule une striction supplémentaire apparaît pour  $V_0 = 150$  m/s et 4 pour  $V_0 = 2100$  m/s. Dans tous les cas, une taille plus petite de taille de cellule entraîne un accroissement du

nombre de strictions et une augmentation de la stabilité. On rencontre des tendances similaires lors de la fragmentation de céramique de différentes nuances (Denoual et Hild (2000)). Plus la nuance est homogène (analogue à des cellules petites), plus la fragmentation sera associée à un nombre important de fissures. Lorsqu'une nuance est fortement hétérogène (analogue à des cellules de grande dimension), sa rupture est due à un nombre réduit de fissures assez marquées et apparaissant plus rapidement. La modification de la topologie de la fragmentation dans les céramiques est essentiellement liée aux volumes d'occultation au voisinage des fissures dans lesquels les contraintes sont relaxées : ils sont moins nombreux et plus grands pour les céramiques hétérogènes que pour les céramiques homogènes.

## 4.5 Distributions de longueurs inter-strictions

À partir de la transformée de Fourier moyenne relative à un nombre suffisant de simulations perturbées aléatoirement, nous avons montré que la densité spectrale de la section est bien décrite par la loi Gamma (voir Figure 4.4). À partir de cette loi, on peut alors établir une nouvelle distribution de longueurs ou de masses inter-strictions et construire, à l'aide de tirages aléatoires, un histogramme représentatif de résultats expérimentaux.

Comme au chapitre 3, la distribution Gamma, déterminée à partir de la densité spectrale de la section du barreau, peut être considérée comme représentative de la contribution de chaque fréquence spatiale ( $k$ ) de localisations à la variance dans le problème de barreau en traction. Rappelons ici les relations que nous avons établies au chapitre 3. Le nombre de strictions  $p$  associé au nombre d'onde  $k$  est tel que  $p = \frac{k_p L_0}{\pi}$ . La longueur inter-strictions correspondante  $l_p$  est donnée par  $l_p = \frac{2\pi}{k_p} = \frac{2L_0}{p}$ . Dans le présent chapitre, nous avons défini  $N_{neck}$  à partir du mode dominant  $k_{neck} = \frac{N_{neck}\pi}{L_0}$ . Il est donc possible de déduire de la loi Gamma une distribution de longueurs inter-strictions, ou de manière équivalente une distribution de masses inter-strictions.

La Figure 4.15 illustre les distributions numériques, obtenues à partir des lois Gamma, pour différentes vitesses de chargement, en fonction de longueurs inter-strictions normées par la longueur totale du barreau. Lorsque la vitesse augmente, la longueur inter-strictions la plus probable diminue tandis que la distribution se resserre.

Partant des lois de densité de probabilité établies, des tirages aléatoires peuvent être réalisés pour représenter de manière discrétisée ces lois probabilistes. On obtient alors une description statistique du processus aléatoire étudié. Supposons maintenant que les résultats obtenus à partir de 10 expériences de traction dynamique de barreau réalisées à des vitesses de chargement de  $V_0 = 300, 600, 1050$  et  $2100$   $m/s$  aboutissent à des strictions aléatoirement réparties suivant une distribution présentée en Figure 4.15. Les résultats associés en termes de longueurs inter-strictions peuvent être représentés sous forme d’histogrammes (voir Figure 4.16). Le cumul des longueurs inter-strictions ( $F_X$ ) obtenus pour ces 10 expériences virtuelles est également évalué. Cette fonction, normée, est une approximation de la probabilité cumulée qui peut être évaluée à partir de la Figure 4.15. On retrouve alors des tendances similaires à celles obtenues par [Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#) et représentées sur la Figure 4.17. Nous n’avons pas cherché à reproduire leurs essais par méconnaissance de certaines données. La comparaison avec des données expérimentales nécessite, en effet, la maîtrise de l’ensemble des étapes : caractérisation du comportement du matériau (statique et dynamique) / spécificités de l’expérience / modélisations analytique et numérique associées. Le CEA tente de proposer une approche exploitant l’ensemble de ces étapes. Cette thèse doit être vue comme une contribution et une étape dans la réalisation de cet objectif.

## 4.6 Discussions

L’utilisation d’un critère et d’une méthodologie numérique permettant de caractériser un temps d’apparition  $t_{neck}$  et un nombre de localisations  $N_{neck}$  a conduit à



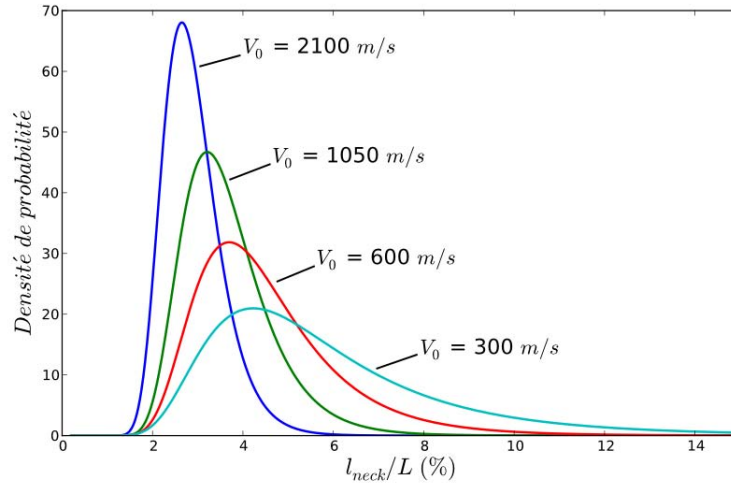


FIG. 4.15 – Distributions de longueurs inter-strictions obtenues au temps  $t_{neck}$  pour des vitesses de chargement de 300, 600, 1050 et 2100  $m/s$  et une amplitude de perturbation de  $A = 1 \%$ .

l'obtention de lois d'évolutions de ces deux grandeurs en fonction de la vitesse de chargement, de l'amplitude et de la taille des cellules de perturbations.

Cependant, en utilisant de nombreuses distributions aléatoires des perturbations, nous avons pu mettre en évidence des variations sur la valeur de  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$ . Les résultats obtenus ne peuvent donc être fournis qu'avec des barres de dispersion. La présentation des résultats de ces simulations numériques perturbées est tout à fait comparable à ce que peuvent présenter les expérimentateurs. Cette pratique fait partie de l'approche statistique descriptive.

Comme illustré sur la Figure 4.10, le temps d'apparition des localisations  $t_{neck}$  varie avec la vitesse de chargement  $V_0$  et l'amplitude des perturbations  $A$ , quelle que soit la distribution aléatoire utilisée (voir l'équation (4.10)). Nous avons également constaté que l'effet lié à la taille des cellules de perturbation était du même type. Malgré quelques incertitudes expérimentales sur le temps d'apparition des strictions lors d'essais d'expansion d'anneaux, [Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#) ont pu observer des tendances similaires en ce qui concerne le temps  $t_{neck}$  en fonction de la vitesse d'expansion. Même si la vitesse de chargement joue un rôle prépondérant sur le temps

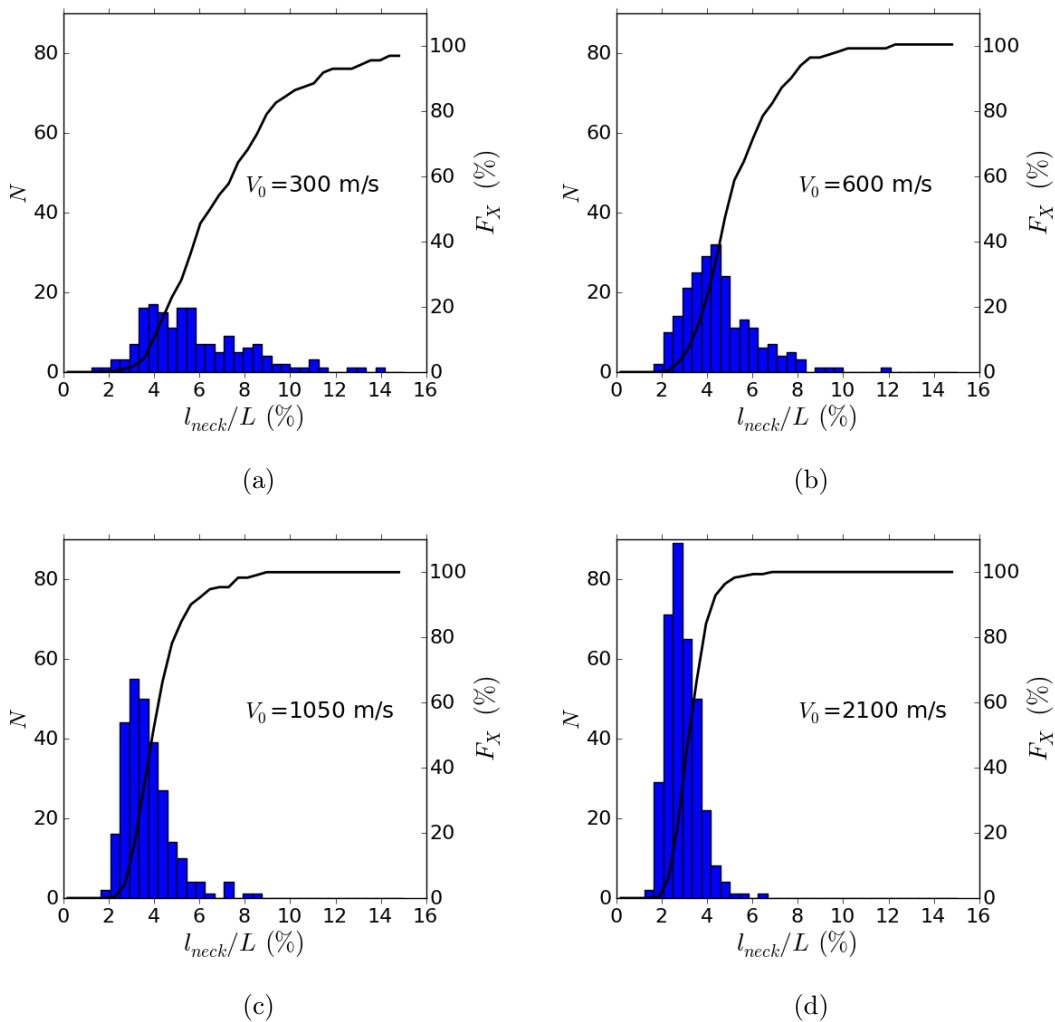


FIG. 4.16 – Distributions de longueurs inter-striations obtenues par tirages aléatoires représentatifs de 10 expériences de traction dynamique de barreau soumis à des vitesses de chargement de 300, 600, 1050 et 2100  $m/s$  et une amplitude de perturbation de  $A = 1$  %. La fonction  $F_X$  en trait continu représente le pourcentage de longueur cumulée.

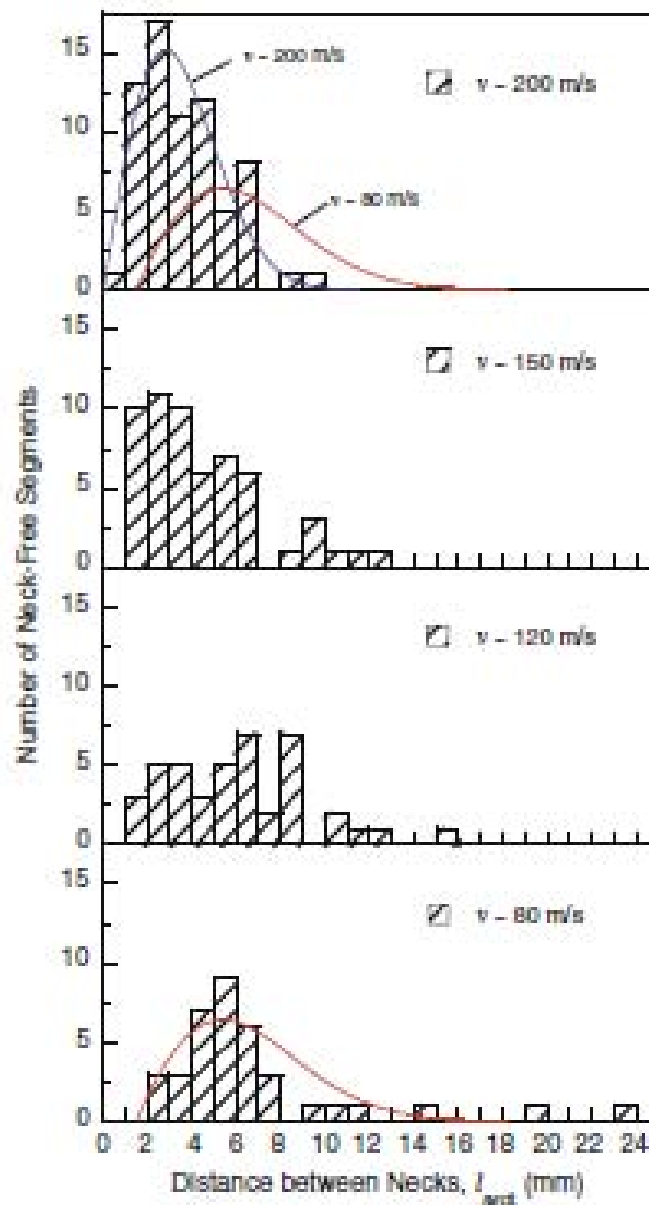


FIG. 4.17 – Distributions de longueurs inter-strictions obtenues expérimentalement par Zhang et Ravi-Chandar (2006). Des lois de Weibull approximant les résultats ont été testées par ces auteurs.

d'apparition des localisations, l'amplitude et la taille des cellules de perturbation ont également un effet qui ne peut être négligé, celui d'accélérer le développement des instabilités. La méthodologie permettant d'évaluer le nombre de localisations  $N_{neck}$  a également abouti à des résultats comparables.

En combinant les relations données par les équations (4.10) et (4.13), établies à partir de 8 vitesses de chargement  $V_0$ , 4 amplitudes de perturbation  $A$  et 3 tailles de cellules  $S$ , et en tenant compte des incertitudes sur les valeurs moyennes obtenues grâce à l'utilisation de 5 réalisations de perturbations, une loi générale peut alors être établie pour  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$  sous la forme :

$$\begin{cases} t_{neck}(\mu s) = C(R_0, L_0, \sigma_{e0}, \rho_0, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}) V_0^{-0.815 \pm 8 \cdot 10^{-3}} A^{-0.147 \pm 5 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{S}{S_0}\right)^{-0.079 \pm 9.5 \cdot 10^{-3}} \\ N_{neck} = C'(R_0, L_0, \sigma_{e0}, \rho_0, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{q}) V_0^{0.379 \pm 6 \cdot 10^{-3}} A^{-0.046 \pm 4 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{S}{S_0}\right)^{-0.057 \pm 8 \cdot 10^{-3}} \end{cases} \quad (4.14)$$

où  $L_0$  et  $R_0$  sont la demi-longueur et le rayon initiaux du barreau, et  $\frac{S}{S_0}$  une taille normalisée des cellules de perturbation. On pourra noter que les exposants associés à  $V_0$  pour  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$  sont comparables à ceux des lois d'évolution (3.27) et (3.28) obtenues par l'analyse dimensionnelle et l'analyse linéaire de stabilité. Nous illustrerons ces comparaisons ultérieurement au chapitre 5.

Ces lois montrent que le nombre de localisations dépend, en général, très peu des perturbations utilisées. Cette observation peut donc expliquer pourquoi la plupart des modèles numériques décrits dans la littérature permettent de retrouver des résultats cohérents en termes de distributions de striction et de fragments, quel que soit le type de perturbation utilisée (matériau, géométrique, numérique, ...). Le temps d'apparition des localisations est plus sensible à ces paramètres. Pour prédire précisément le développement des instabilités au cours de l'expansion d'une structure, instabilités qui vont conduire in fine à la distribution de fragments et à la vitesse d'éjection de ceux-ci, l'amplitude et la taille des cellules de perturbation doivent donc nécessairement être correctement établies à partir des équations (4.14).

Pour cela, en supposant possible la détermination du temps d'apparition et du nombre de localisations obtenus au cours d'essais d'expansion d'anneaux, il faudra pouvoir comparer ces données expérimentales à des valeurs de  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$ , obtenues numériquement à partir des procédures décrites dans ce chapitre, pour différentes valeurs d'amplitudes  $A$  et de tailles  $S$  de cellules de perturbation.

Ces comparaisons permettront, en effet, dans un premier temps, de valider le choix des critères et méthodologies utilisés pour la détermination de  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$ . Puis dans un second temps, après cette première validation, il sera alors possible, en connaissant les caractéristiques du matériau et la géométrie du barreau considéré, et en déterminant les temps d'apparition et le nombre de localisations sur des expériences réalisées à différentes vitesses de sollicitations, de définir rapidement la distribution des perturbations numériques nécessaires à la restitution la plus précise des observations expérimentales.

En attendant de tels résultats expérimentaux, une partie de la validation des choix qui ont été faits numériquement doit pouvoir être obtenue par comparaison avec des modélisations théoriques du développement des instabilités, telles que l'analyse linéaire de stabilité. Ce travail sera présenté dans le chapitre 5.

Enfin, la méthodologie utilisée pour évaluer  $N_{neck}$  a montré, de manière surprenante, que la distribution aléatoire uniforme, utilisée pour définir les perturbations dans les simulations numériques, conduit à une section (associée à une rugosité de surface) dont la représentation spectrale tend vers la loi Gamma au cours du développement des instabilités. Dans son livre, [Grady \(2006\)](#) a déjà mentionné cette distribution particulière. Il a néanmoins préféré l'utilisation de la loi de Weibull, voisine de la loi Gamma, pour décrire la distribution de défauts nécessaires à la restitution de la fragmentation dans son approche semi-empirique. Nous avons montré que la loi de distribution Gamma des fréquences de localisations permet aussi d'expliquer les distributions de longueurs inter-strictions particulières observées expérimentalement par [Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#) (voir Figure 4.16).

Dans ce chapitre, à travers les études paramétriques réalisées, nous avons tenté de lister, de manière la plus exhaustive possible, les sources d'aléas qui peuvent être rencontrées avec les simulations aléatoirement perturbées. Certaines sont liées aux procédures numériques ou aux méthodes de post-traitement permettant l'obtention de  $t_{neck}$  et  $N_{neck}$ , telles que la discrétisation temporelle des résultats numériques, les limitations de la méthode de transformée de Fourier pour les faibles nombres d'onde, ou encore l'effet du maillage. Ces sources d'incertitudes peuvent, en général, être minimisées au prix de temps de calculs très importants, encore non raisonnables à ce jour pour simuler des configurations complexes réalistes.

D'autres sources de fluctuation sont, néanmoins, intimement liées aux aspects stochastiques du processus étudié. En choisissant ainsi des caractéristiques de perturbations (taille de cellule et amplitude), une variabilité des valeurs de temps d'apparition et de nombre de localisations peut être constatée avec différents tirages aléatoires de perturbations, en particulier pour de faibles vitesses de sollicitation et de grandes amplitudes de perturbations. Pour s'assurer d'une bonne représentation du processus stochastique étudié, il est donc nécessaire de réaliser un nombre suffisant de simulations à tirage aléatoire variable. En fonction des conditions (vitesse de chargement et caractéristiques des perturbations), ce nombre pourra évoluer. Les résultats, présentés précédemment sur la Figure 4.12, pour une longueur de barreau choisie suffisamment grande, ont montré que dans le cas d'un barreau en traction 5 à 6 tirages différents suffisaient à évaluer correctement le temps d'apparition des localisations. Le nombre de ces localisations nécessiterait pourtant quelques tirages aléatoires supplémentaires.

# Chapitre 5

## Comparaisons analytique/numérique

### 5.1 Introduction

L'analyse linéaire de stabilité a été largement utilisée pour décrire les expériences d'expansion de structures et notamment pour comprendre les effets du comportement des matériaux, de la géométrie de la structure étudiée et du chargement considéré. À titre d'exemple, on pourra se référer aux travaux de [Shenoy et Freund \(1999\)](#), de [Grady et Olsen \(2003\)](#), ou encore de [Mercier et Molinari \(2004\)](#). Cependant, ces auteurs n'ont exploité que le mode dominant extrait de cette analyse.

Nous avons constaté, dans les chapitres précédents, que les approches analytiques et numériques peuvent être étudiées sous l'angle stochastique. Les résultats de ces deux approches peuvent conduire à des densités spectrales, à partir desquelles nous avons proposé de définir les fonctions de distribution des longueurs inter-strictions.

Dans une analyse dimensionnelle, au Chapitre 3, nous avons observé, en employant le critère  $\int_0^t \eta dt = 1$ , que la dépendance par rapport à la vitesse de chargement  $V_0$  du temps  $t_{neck}$  et du nombre de strictions  $N_{neck}$  associés est de type puissance :  $t_{neck}$  est environ proportionnel à  $V_0^{-0.7/0.9}$  et  $N_{neck}$  à  $V_0^{0.4}$ . Les résultats numériques du chapitre précédent ont montré le même type de dépendance :  $t_{neck}$  est environ proportionnel à  $V_0^{-0.8}$  et  $N_{neck}$  à  $V_0^{0.4}$ . Les approches numériques et analytiques fournissent des résultats en bonne concordance.

Dans ce chapitre, les deux approches seront donc comparées en termes de mode

dominant associé au nombre de strictions localisées  $N_{neck}$ . Les temps d'apparition associés seront également traités. Dans un second temps, distributions analytiques des instabilités, et distributions Gamma, évaluées à partir de l'analyse spectrale des résultats numériques, seront superposées. Toutefois, l'analyse linéaire de stabilité est limitée au domaine des faibles amplitudes des instabilités. Toute non linéarité n'est pas considérée. Par ailleurs, elle tient compte de certaines hypothèses telles l'incompressibilité (la dilatation thermique, en particulier, n'est pas considérée) qui ne sont pas strictement vraies. Nous nous attendons donc à constater de légères différences de résultats entre approches analytique et numérique.

## 5.2 Définition de critères analytiques

L'une des principales limitations de l'analyse linéaire de stabilité vient du fait qu'elle ne contient aucun critère intrinsèque permettant de définir l'apparition des strictions localisées. Pour y remédier, certains auteurs, tels que [Guduru et al. \(2006\)](#) ou [Jouve \(2010\)](#), ont utilisé des critères ad hoc de la forme  $G = \eta/\dot{\epsilon} = G_c$ . Ils ont ainsi permis de restituer les tendances, et notamment en termes de nombre de strictions, en fonction de la vitesse. Des différences notables avec l'expérience ont cependant été constatées. Le nombre de strictions obtenu est en effet souvent supérieur à celui des observations expérimentales.

Un autre critère intéressant, basé sur l'évaluation de la grandeur  $\exp(\int \eta dt)$  associée au mode dominant, a été utilisé par [Petit et al. \(2005\)](#) afin de décrire la fragmentation de jets de charges creuses.

Nous allons évaluer, dans cette partie, deux formes de critères différents :

1.  $\eta/\dot{\epsilon} = \text{cst}$  : cette forme de critère définit l'apparition des strictions localisées lorsque le taux de croissance du mode dominant des instabilités atteint une valeur critique de cet indicateur,
2.  $\int_0^t \eta dt = \text{cst}$  : cette forme de critère prend en compte l'histoire du développement des instabilités et définit l'apparition des strictions localisées lorsque la



valeur de cet indice  $I$  pour le mode dominant atteint une valeur critique.

Comme mentionné précédemment dans le chapitre 3 et illustré sur la Figure 3.3, ces deux critères donnent lieu à l'obtention de deux modes de localisation différents aux mêmes instants et pour une configuration identique. D'autre part, il a été montré qu'en se basant sur la deuxième approche, il était possible de définir la distribution de fréquences de localisation.

### 5.3 Temps d'apparition et nombre de localisations

Afin de comparer l'analyse linéaire de stabilité aux résultats numériques obtenus au Chapitre 4, deux valeurs pour chacun des deux critères analytiques étudiés ont été évaluées. Des valeurs de 10 et 15 pour la première forme de critère,  $\eta/\dot{\varepsilon} = \text{cst}$ , et des valeurs de 1 et 2 pour la seconde,  $\int_0^t \eta dt = \text{cst}$ , ont été choisies.

Les comparaisons en termes de temps d'apparition et de nombre de localisations sont décrites sur la Figure 5.1. Les courbes noires sont associées au premier critère analytique, les courbes rouges au critère  $\int_0^t \eta dt$ . Les symboles, représentés sur cette figure, illustrent l'évolution de la moyenne des résultats numériques issue de 5 tirages aléatoires différents, pour 4 amplitudes de perturbations, et les barres d'erreur associées correspondent aux incertitudes sur la moyenne. La taille de cellule étudiée ici est la taille de référence  $S_0$ .

Les tendances, qui sont mises en évidence à la fois pour les résultats numériques et les résultats analytiques sur la Figure 5.1, présentent un bon accord aux vitesses relativement faibles. Le formalisme intégral du critère analytique permet une meilleure restitution du nombre de strictions localisées  $N_{neck}$  obtenu numériquement que le critère plus classique  $\eta/\dot{\varepsilon} = \text{cst}$ . Ce dernier constat démontre l'importance de la prise en compte de l'histoire de l'évolution des perturbations pour décrire correctement le processus de localisation. Pour le mode dominant, nous constatons, sur la Figure 5.1, que les simulations numériques réalisées avec une amplitude de perturbation de

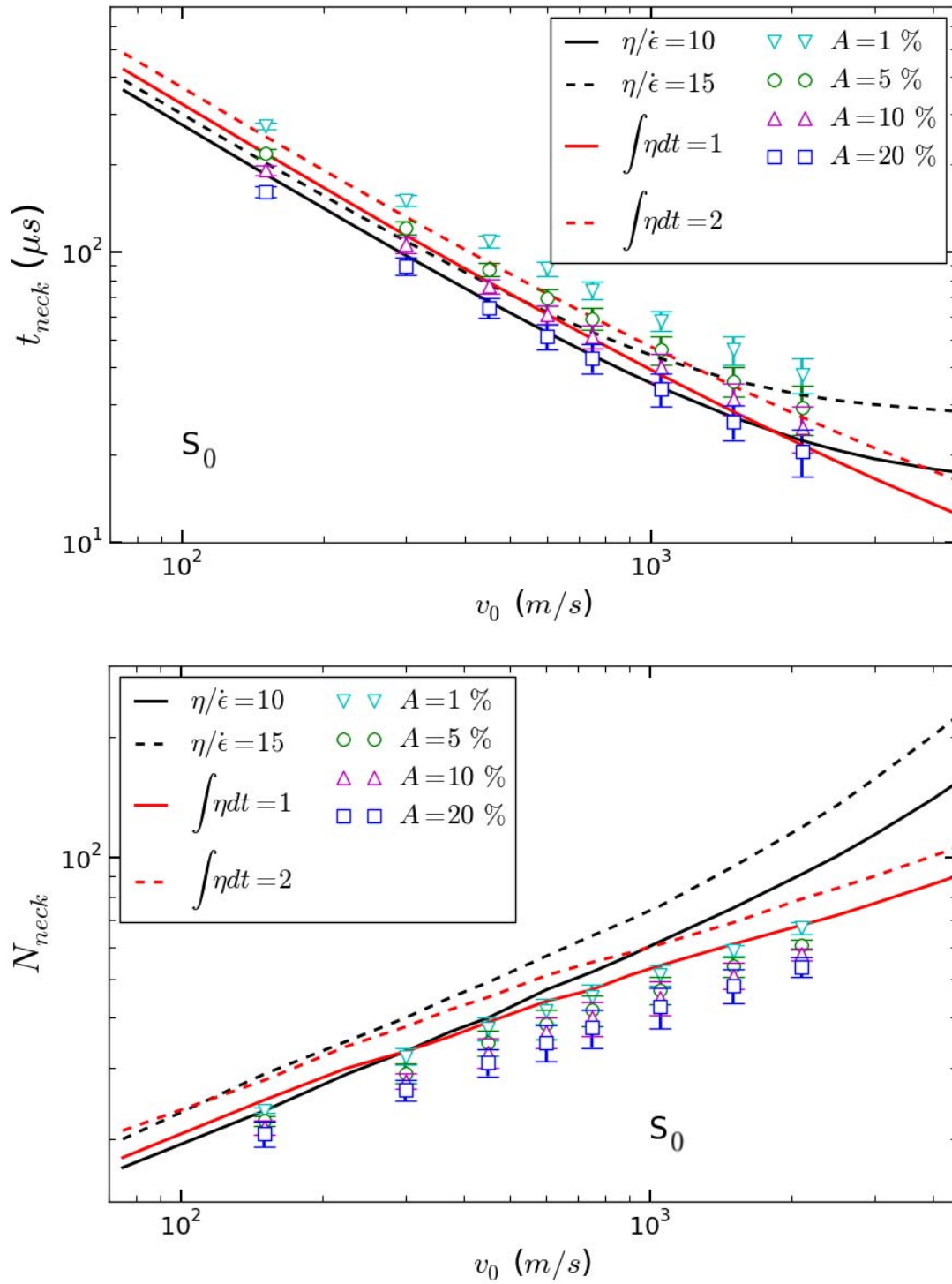


FIG. 5.1 – Temps de début des strictions localisées  $t_{neck}$  et nombre de strictions  $N_{neck}$  déterminés, d'une part, par simulations numériques avec la taille de référence  $S_0$  et différentes amplitudes de perturbation ( $A = 1, 5, 10$  et  $20\%$ ) et, d'autre part, par l'analyse linéaire de stabilité avec différents critères ( $\eta/\dot{\epsilon} = 10$  et  $15$  et  $\int_0^t \eta dt = 1$  et  $2$ ).

$A = 1$  % donnent des résultats très proches de ceux obtenus analytiquement avec le critère  $\int \eta dt = 1$ . Concernant le temps d'apparition  $t_{neck}$ , il est plus difficile de faire un choix sur le critère le plus adapté.

## 5.4 Distribution de fréquences de localisation

Nous avons par ailleurs démontré, au Chapitre 3, que l'analyse linéaire de stabilité permet d'aboutir à une fonction densité de probabilité pour les fréquences ou les longueurs inter-strictions. Par la suite, au Chapitre 4, nous avons mis en évidence que la densité spectrale, associée au profil de section du barreau en traction, peut être décrite par une distribution Gamma, permettant ainsi, de la même manière, de représenter la distribution des fréquences de localisation.

Des comparaisons de distributions obtenues, d'une part, à partir de simulations numériques avec 1 % d'amplitude de perturbation, et d'autre part, à partir de l'analyse linéaire de stabilité associée au critère  $\int \eta dt = 1$ , sont illustrées sur les Figures 5.2 (en termes de fréquences de strictions) et 5.3 (en termes de longueurs inter-strictions) pour des vitesses de chargement de 300, 600, 1050 et 2100  $m/s$ . La bonne correspondance des modes dominants est ici retrouvée. Pour la vitesse la plus faible, 300  $m/s$  ( $\dot{\epsilon} \approx 4600 s^{-1}$ ), les distributions analytiques et numériques sont quasiment superposées. L'écart entre les deux approches croît avec la vitesse de chargement.

Cette différence doit pouvoir s'expliquer par le développement non linéaire des instabilités, dans les simulations numériques, qui se produit avant l'instant  $t_{neck}$ , contrairement à l'approche linéaire qui ne peut tenir compte d'interactions entre les différents modes de perturbation. Ces développements non linéaires permettraient, en effet, d'expliquer une atténuation (relative) des perturbations de petits et grands nombres d'onde. Il semble, en effet, dans les simulations numériques, que les zones inter-strictions sont affectées bien avant la première relaxation élastique en y interrompant le développement des fluctuations. La vitesse de déformation plastique

chute en effet fortement dans ces régions, d'autant plus que la vitesse initiale de chargement est importante. Ce phénomène pourra être constaté sur les Figures 5.4 et 5.5 qui représentent la vitesse de déformation plastique, pour une vitesse de chargement de  $V_0 = 300$  et  $2100$   $m/s$ , à 2 instants différents précédant le temps  $t_{neck}$  et un instant voisin de  $t_{neck}$ . Les valeurs moyennes  $\langle \dot{\epsilon}_p \rangle$  et médianes  $(\dot{\epsilon}_p)_{med}$  de la vitesse de déformation plastique sont également représentées sur ces figures. La valeur médiane  $(\dot{\epsilon}_p)_{med}$  indique que 50% des vitesses de déformation sont inférieures à  $(\dot{\epsilon}_p)_{med}$ , les autres étant par conséquent supérieures. Lors de la croissance linéaire des instabilités, moyennes et médianes doivent être confondues. Il apparaît pourtant que ces deux caractéristiques statistiques divergent au cours de la déformation bien avant le temps  $t_{neck}$  dans les simulations numériques.

## 5.5 Conclusion

Il a été constaté, dans ce chapitre, lors de la comparaison entre les temps d'apparition et le nombre de strictions obtenus dans les chapitres 3 et 4, de bonnes corrélations lorsqu'un critère analytique de la forme  $\int \eta dt = cst$  est utilisé. Ceci montre que la prise en compte de l'histoire de l'évolution des perturbations semble nécessaire pour rendre compte correctement de la localisation.

Cette comparaison est d'autant plus satisfaisante qu'elle apparaît correcte même en termes de distribution de fréquence de localisations (ou de manière équivalente, en termes de longueurs inter-strictions). Les distributions obtenues pour de faibles vitesses de chargement  $V_0$  sont quasiment superposées. Des différences notables se font sentir lorsque  $V_0$  devient important.

Il apparaît, en effet, que le critère numérique aboutissant à l'obtention de  $t_{neck}$  est imparfait. Nous avons finalement montré qu'un développement non linéaire des instabilités avait déjà lieu avant  $t_{neck}$ . Ces non linéarités peuvent expliquer les différences observées entre les distributions de localisation analytiques et numériques.

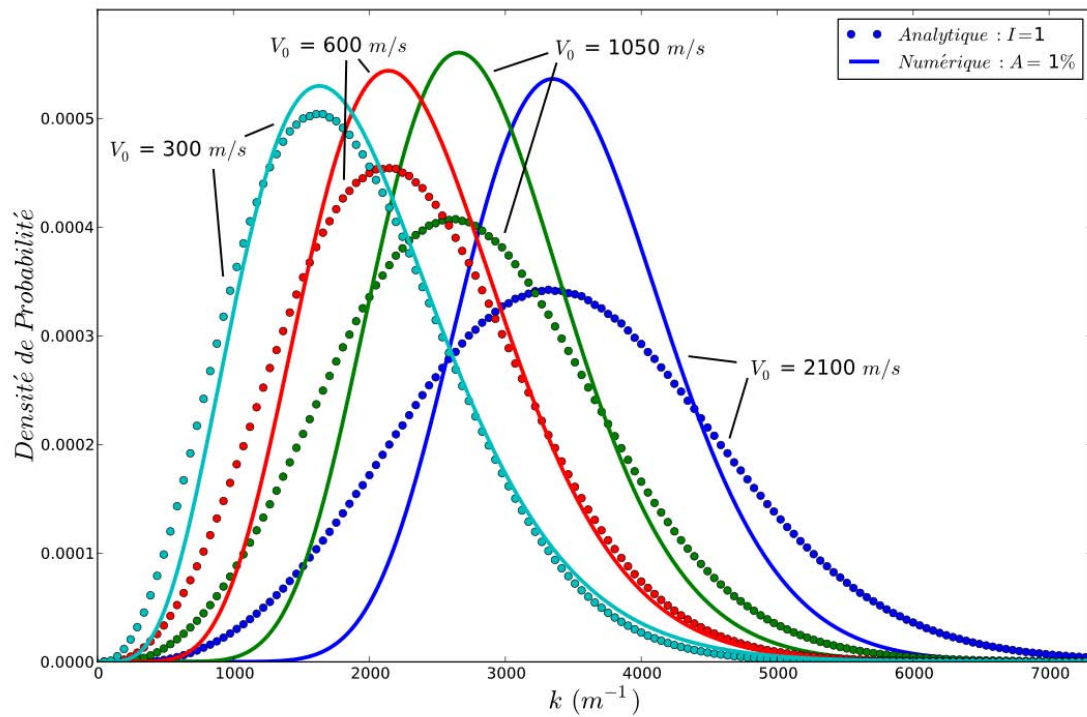


FIG. 5.2 – Distributions de fréquences de strictions analytiques et numériques pour des vitesses de chargement de 300, 600, 1050 et 2100  $m/s$ . Les distributions numériques, en traits pleins, correspondent à la fonction Gamma pour une amplitude  $A = 1\%$  et des tailles de cellule de perturbation  $S_0$  au temps  $t_{neck}$ . Les distributions analytiques, en pointillés, sont déterminées à partir de la normalisation de la fonction  $\left(\delta\hat{S}_0(\exp(\int \eta dt) - 1)\right)^2$  associé au bruit coloré utilisé au paragraphe 3.3.2, lorsque le critère  $\int \eta dt = 1$  est atteint.

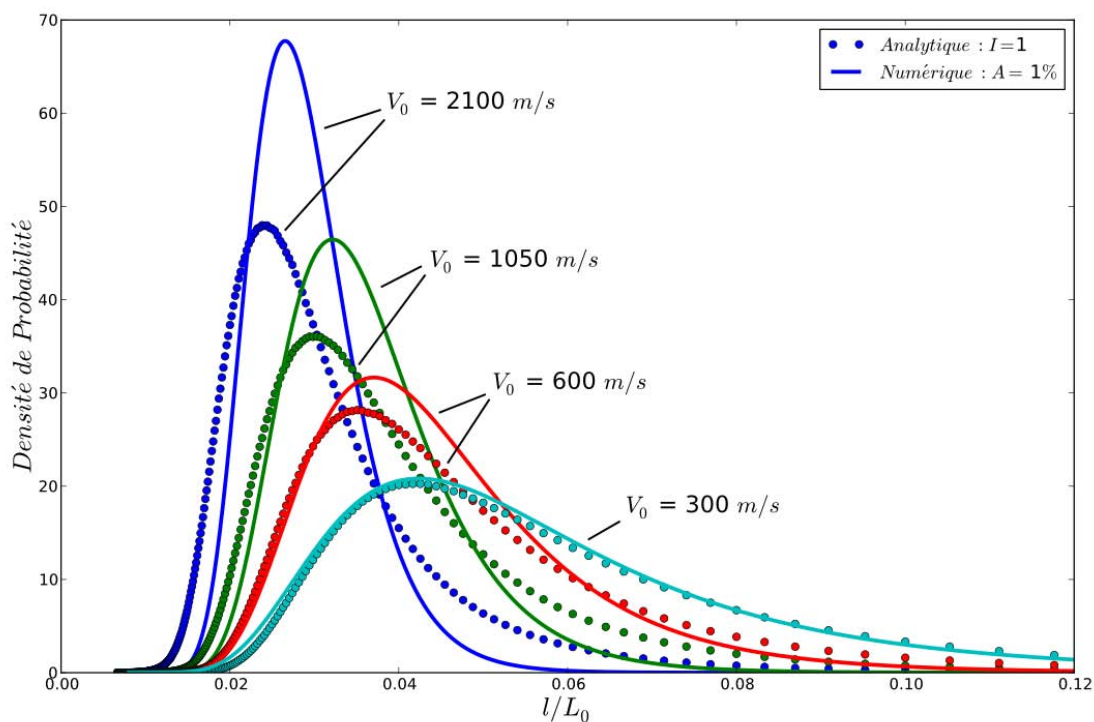
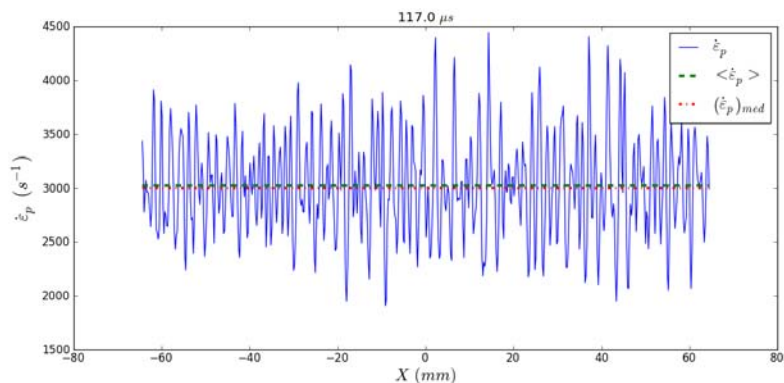
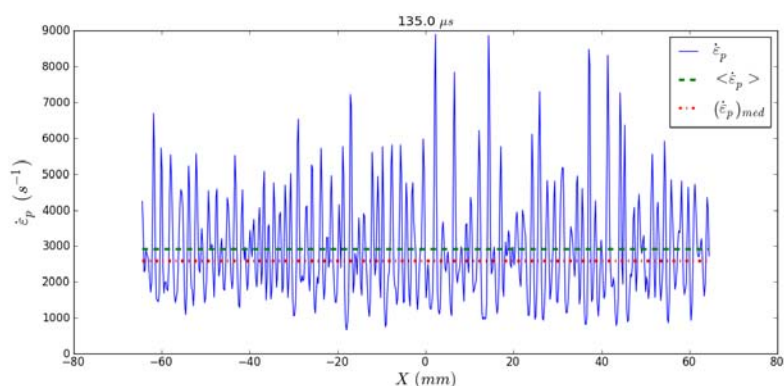


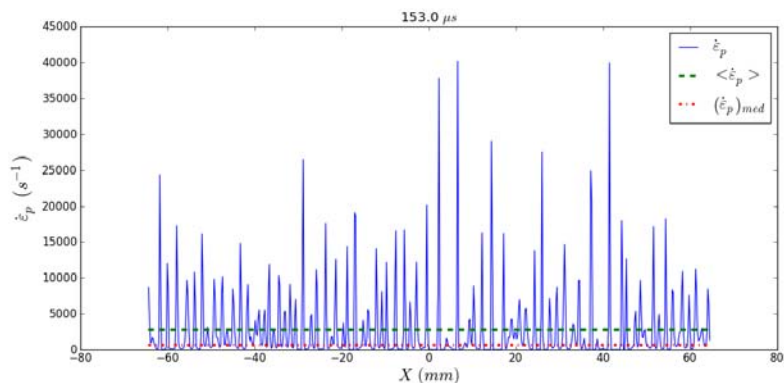
FIG. 5.3 – Distributions de longueurs inter-strictions analytiques et numériques pour des vitesses de chargement de 300, 600, 1050 et 2100  $m/s$ . Les distributions numériques, en traits pleins, correspondent à la fonction Gamma pour une amplitude  $A = 1 \%$  et des tailles de cellule de perturbation  $S_0$  au temps  $t_{neck}$ . Les distributions analytiques, en pointillés, sont déterminées à partir de la normalisation de la fonction  $(\delta \hat{S}_0 (\exp(\int \eta dt) - 1))^2$  associé au bruit coloré utilisé au paragraphe 3.3.2, lorsque le critère  $\int \eta dt = 1$  est atteint.



(a)

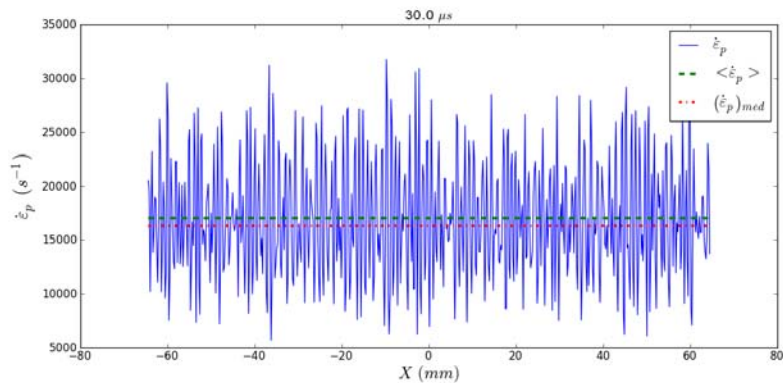


(b)

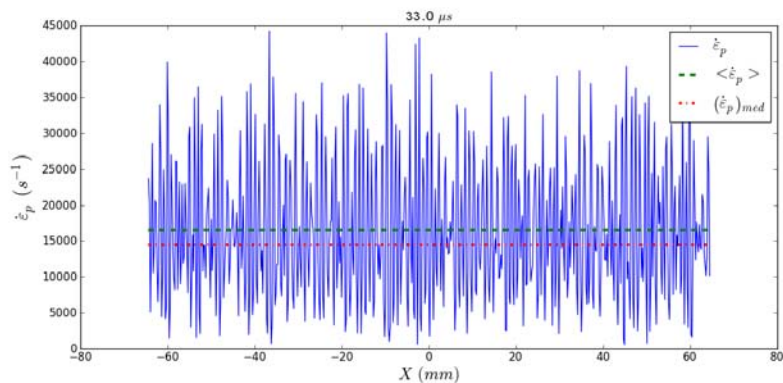


(c)

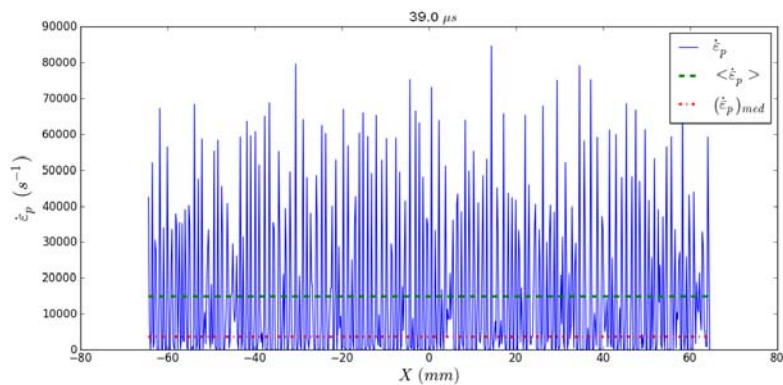
FIG. 5.4 – Vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$  le long de l'axe du barreau (en coordonnées Lagrangiennes) à  $t = 117, 135$  et  $153 \mu s$  pour une vitesse de chargement  $V_0 = 300 m/s$  ( $A = 1 \%$ ,  $S = S_0$ ). Pour ce cas particulier,  $t_{neck} = 156.6 \mu s$ . La moyenne  $\langle \dot{\epsilon}_p \rangle$  et la médiane  $(\dot{\epsilon}_p)_{med}$  sont également représentées par des droites horizontales. On peut constater, à  $t = 117 \mu s$ , que la moyenne et la médiane sont quasiment confondues, ce qui correspond à un comportement quasi-linéaire. Au cours de la déformation, la moyenne et la médiane sont de plus en plus distinctes, indiquant des effets non linéaires bien avant le temps  $t_{neck}$ .



(a)



(b)



(c)

FIG. 5.5 – Vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$  le long de l'axe du barreau (en coordonnées Lagrangiennes) à  $t = 30, 33$  et  $39 \mu s$  pour une vitesse de chargement  $V_0 = 2100 m/s$  ( $A = 1 \%$ ,  $S = S_0$ ). Pour ce cas particulier,  $t_{neck} = 38.7 \mu s$ . La moyenne  $\langle \dot{\epsilon}_p \rangle$  et la médiane  $(\dot{\epsilon}_p)_{med}$  sont également représentées par des droites horizontales. On peut constater, à  $t = 30 \mu s$ , que la moyenne et la médiane sont quasiment confondues, ce qui correspond à un comportement quasi-linéaire. Au cours de la déformation, la moyenne et la médiane sont de plus en plus distinctes, indiquant des effets non linéaires bien avant le temps  $t_{neck}$ .



# Chapitre 6

## Essais d'expansion d'anneaux

### 6.1 Introduction

Nous avons fait mention, dans l'introduction de ce rapport de thèse, de nombreux travaux expérimentaux dédiés à l'étude de la fragmentation dynamique. Afin de compléter les approches théoriques et numériques de cette thèse, nous avons développé un dispositif d'expansion d'anneaux par forces électromagnétiques.

En effet, si l'épaisseur est faible devant le rayon moyen, l'expansion d'anneaux permet de générer un chargement comparable au cas de la traction dynamique d'un barreau. Les résultats expérimentaux peuvent donc, dans une certaine mesure, être comparés aux résultats préalablement établis à partir des approches analytiques et numériques des chapitres 3 et 4. L'utilisation de forces électromagnétiques dans une étude expérimentale a, par ailleurs, de nombreux avantages par rapport à l'utilisation d'explosifs. Pour des raisons de sécurité évidentes, il est plus simple et plus rapide de mettre en œuvre des moyens d'essais électromagnétiques. Enfin, la visualisation par caméras rapides n'est pas entravée par l'apparition de produits de détonation. Il existe malgré tout un défaut majeur de cette méthode expérimentale. Elle implique la circulation d'un courant induit dans l'anneau d'étude, ce qui favorise les échauffements par effet Joule et modifie, par conséquent, l'état de la matière étudiée. Généré par les courants impulsionnels, cet échauffement se localise essentiellement sur la surface interne de l'anneau, conduisant à un fort gradient de température dans

la section de l'anneau.

Nous pouvons citer, parmi les expérimentateurs qui ont fait ce choix d'expérimentation, Niordson (1965), Wesenberg et Sagartz (1977), Grady et Benson (1983), Gourdin (1987), Gourdin (1989), Altynova et al. (1996), Grady et Olsen (2003) et Zhang et Ravi-Chandar (2006). Les premières études (en particulier Niordson (1965) et Gourdin (1989)) avaient pour objet principal l'étude du comportement dynamique des matériaux. La vitesse de déformation recherchée était alors de l'ordre de  $10^4 \text{ s}^{-1}$  avec des déformations importantes (plusieurs dizaines de pourcents). Ce type de régime ne peut être obtenu que par expansion de tubes ou d'anneaux par forces électromagnétiques ou par chargement explosif (en prenant alors des précautions importantes afin d'atténuer la propagation des ondes de choc dans l'éprouvette).

Nombreuses sont les études qui se sont concentrées sur l'évaluation des caractéristiques principales de la fragmentation : déformation moyenne à rupture, nombre et tailles de fragments, ... Seuls Altynova et al. (1996) et Zhang et Ravi-Chandar (2006) ont cherché à évaluer un nombre de strictions au cours de leurs essais. Néanmoins, ces auteurs n'ont déterminé ces strictions que visuellement. Cela introduit des biais liés à l'opérateur.

Enfin, les matériaux testés et présentés dans l'ensemble de ces études ont, en général, été caractérisés sous sollicitation quasi-statique et sont souvent modélisés à l'aide de lois de comportement simples. Cependant, Gourdin (1987) a montré que la fragmentation était très sensible aux caractéristiques du matériau testé, en particulier à la taille des grains. Par ailleurs, Petit et Dequiedt (2006) ont montré qu'en dynamique, dans certains matériaux, une saturation de la densité des dislocations est observée en grande déformation. Par ailleurs, le mouvement des dislocations à grande vitesse de déformation peut engendrer un "freinage visqueux". Afin de prendre en compte ces effets, ils ont modifié la loi initiale de Zerilli et Armstrong (1987). Le

comportement d'un cuivre OFHC, identifié à partir de cette nouvelle loi de comportement élasto-plastique, a été validé à l'aide d'essais d'impacts de Taylor symétriques. Ce matériau a, par la suite, fait l'objet de validations complémentaires par [Petit \(2010\)](#) obtenues à partir d'essais d'implosion électromagnétiques de tubes réalisés grâce au moyen *CYCLOPE* du *CEA-Gramat*. Les développements analytiques et numériques des précédents chapitres ont été conduits sur ce cuivre particulier dont le comportement est présenté par l'équation (3.16), avec les coefficients du tableau 3.1.

Pour réaliser des comparaisons essais/calculs, il nous est donc apparu indispensable de réaliser des essais d'expansion d'anneaux, semblables à ceux de la littérature, à partir de matériaux dont le comportement dynamique a été validé. Nous avons ainsi naturellement choisi comme matériau d'étude le même cuivre OFHC que celui utilisé par [Petit et Dequiedt \(2006\)](#). Le moyen *CYCLOPE*, mis en œuvre précédemment par [Petit \(2010\)](#), a également été adapté pour réaliser ces essais. Par ailleurs, les anneaux que nous avons choisis d'étudier ont un rayon intérieur de 20 mm et une section carrée de 1 mm de côté. Ce chapitre présente les premiers résultats des essais et les pistes d'amélioration afin de se prémunir des échauffements localisés.

## 6.2 Pré-dimensionnement

### 6.2.1 Caractérisation du circuit RLC

#### Caractéristiques RLC de la machine *CYCLOPE*

La machine *CYCLOPE* est un générateur de courant disposant de 40 condensateurs d'une capacité totale de  $487 \mu F$ , pouvant être chargés jusqu'à une tension de charge maximale de 25 kV. Elle délivre alors un courant d'intensité maximale de 5 MA à une fréquence d'environ 45 kHz. Lors des essais d'expansion d'anneaux, nous emploierons 20 condensateurs pour réduire le temps de montée du courant

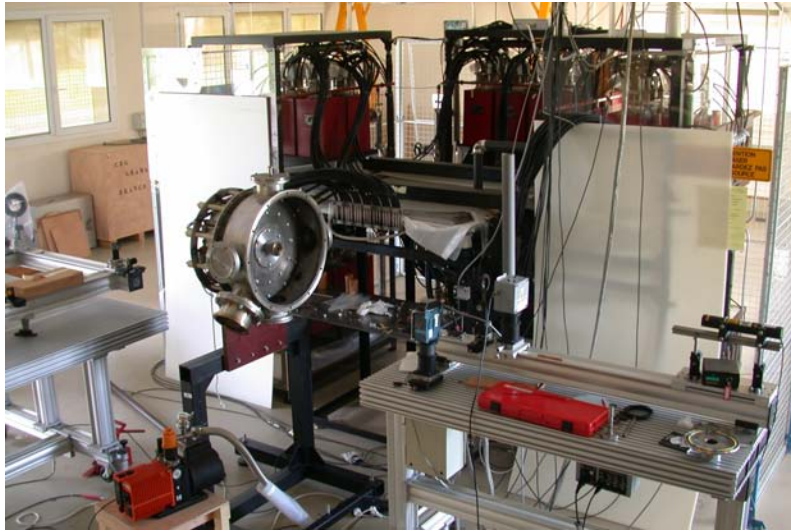


FIG. 6.1 – Machine *CYCLOPE* (arrière plan) avec le dispositif d'implosion de tubes (premier plan) utilisé par Petit (2010). On peut voir les condensateurs de la machine en rouge.

tout en conservant suffisamment d'énergie pour l'expansion d'anneaux. La capacité totale sera alors de  $243.5 \mu F$ . Lors des précédentes études réalisées avec cette machine, notamment les essais d'implosion de tube décrits par Petit (2010), l'outil mis en œuvre permettait d'obtenir des impulsions de courant avec un premier pic atteint en environ  $7 \mu s$ . Des caractéristiques "machine" ont alors été déterminées pour rendre compte des signaux de courant mesurés lors de ces essais. Les données de résistance  $R_{Cy}$ , d'inductance  $L_{Cy}$  et de capacité  $C_{Cy}$  (pour 20 condensateurs), ainsi caractérisées, sont :

$$\begin{cases} R_{Cy} = 1.9 \text{ m}\Omega \\ L_{Cy} = 32 \text{ nH} \\ C_{Cy} = 243.5 \mu F \end{cases}$$

### Caractéristiques RL de la bobine choisie

La bobine choisie, sur la base des expérimentations de Zhang et Ravi-Chandar (2006), comporte  $n = 4$  spires de rayon moyen  $r_s = 19 \text{ mm}$ . Le fil de cuivre a une section circulaire de  $1 \text{ mm}$  de diamètre. Des mesures au RLC-mètre sur cette bobine ont permis de déterminer les valeurs de l'inductance et de la résistance considérées

en série dans le circuit RLC. L'inductance  $L_b$  et la résistance  $R_b$  de la bobine ainsi mesurées sont :

$$\begin{aligned} L_b &\approx 1.23 \mu H \\ R_b &\approx 25 m\Omega \end{aligned} \tag{6.1}$$

Les inductances de la machine et de la bobine étant mises en série, le montage final aura donc une inductance de  $L_T = L_{Cy} + L_b \approx 1.26 \mu H$ . De la même manière, les résistances étant mises en série, le montage final aura une résistance de  $R_T = R_{Cy} + R_b \approx 27 m\Omega$ . Ces valeurs sont supérieures à celles intrinsèques à la machine *CYCLOPE*. Le courant généré par le montage sera donc principalement régi par les caractéristiques de la bobine.

### Modélisation analytique du circuit RLC

Connaissant les caractéristiques du circuit RLC de la machine *CYCLOPE* avec le dispositif expérimental, il est possible de donner l'évolution théorique du circuit et de la charge en négligeant l'effet de l'anneau, dans un premier temps. En effet, l'équation régissant le courant dans un circuit est donnée par :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R_c}{L_c} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{L_c C_c} q = 0 \tag{6.2}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} q : \text{la charge du condensateur à un instant } t \text{ donné (à } t = 0, q_0 = U_0 C_c), \\ L_c : \text{l'inductance du circuit,} \\ R_c : \text{la résistance du circuit,} \\ C_c : \text{la capacité du circuit,} \\ U_0 : \text{la tension de charge des condensateurs.} \end{array} \right.$$

Ainsi, en posant  $q(t = 0) = q_0$  et  $\frac{dq}{dt}|_{t=0} = 0$ , les solutions de cette équation sont :

– si  $\frac{R_c^2}{L_c^2} < \frac{4}{L_c C_c}$  :

$$\begin{cases} q = q_0 e^{-t/\tau} \left( \cos \omega t + \frac{1}{\omega \tau} \sin \omega t \right) \\ I = q_0 \frac{1}{L_c C_c \omega} e^{-t/\tau} \sin \omega t = \frac{U_0}{L_c \omega} e^{-t/\tau} \sin \omega t \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} I = -\frac{dq}{dt} \\ \tau = \frac{2L_c}{R_c} & : \text{ constante d'amortissement,} \\ \omega = \sqrt{\frac{1}{L_c C_c} - \frac{R_c^2}{4L_c^2}} & : \text{ pulsation,} \end{cases} \quad (6.3)$$

– si  $\frac{R_c^2}{L_c^2} > \frac{4}{L_c C_c}$  :

$$\begin{cases} q = q_0 \frac{1}{m_+ - m_-} (-m_- e^{m_+ t} + m_+ e^{m_- t}) \\ I = q_0 \frac{m_+ m_-}{m_+ - m_-} (e^{m_+ t} - e^{m_- t}) \end{cases}$$

avec

$$m_{\pm} = -\frac{R_c}{2L_c} \pm \sqrt{\frac{R_c^2}{4L_c^2} - \frac{1}{L_c C_c}}$$

À partir des caractéristiques  $R$ ,  $L$  et  $C$  du montage électrique, et de la tension de charge  $U_0$ , il est donc possible de décrire précisément l'évolution du courant en l'absence de l'anneau. De plus, cette modélisation ne prend pas en considération l'évolution de la résistivité électrique de la bobine en fonction de la température.

La solution du problème couplé ( $\{machine + anneau\}$ ) ne peut être obtenue analytiquement. Une solution numérique est donc recherchée.

## 6.2.2 Résolution numérique du montage avec anneau

### Modélisation et schéma numérique associé

La modélisation utilisée ici est basée sur l'analyse faite par [Gourdin \(1989\)](#) et [Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#). Le schéma de principe du montage est décrit sur la

Figure 6.2. Ces auteurs ont réalisé un nombre important d'expansion d'anneaux et ont justifié le dimensionnement de leur bobine à l'aide de modèles électriques basés notamment sur les travaux de Jackson (1975).

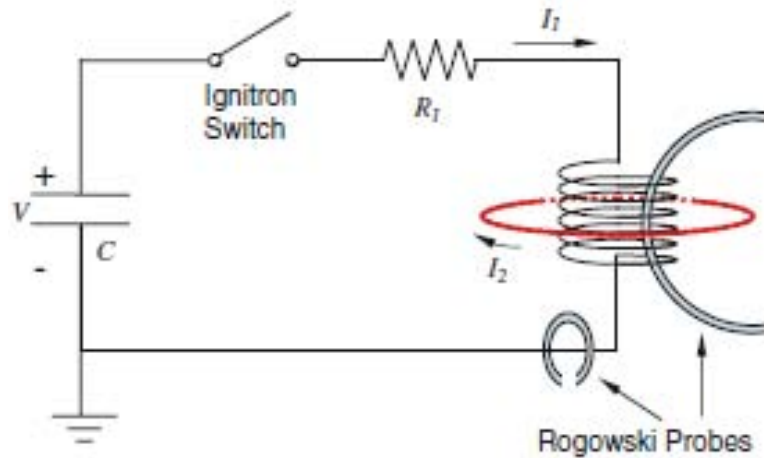


FIG. 6.2 – Schéma électrique de l'essai d'expansion d'anneau (Zhang et Ravi-Chandar (2006)).

En utilisant les lois de Kirchhoff, l'évolution du courant dans le circuit principal (machine *CYCLOPE* + bobine) est décrite à l'aide des équations (6.4) et (6.5), et celle du courant induit dans l'anneau à l'aide de l'équation (6.6).

$$C \frac{dV}{dt} = -I_1 \quad (6.4)$$

$$V = R_1 I_1 + L_{11} \frac{dI_1}{dt} + \frac{d(L_{12} I_2)}{dt} \quad (6.5)$$

$$R_2 I_2 + \frac{d(L_{22} I_2)}{dt} + \frac{d(L_{12} I_1)}{dt} = 0 \quad (6.6)$$

Il est important de noter qu'une densité de courant uniforme dans le circuit est considérée ici par hypothèse.

Dans ces équations,  $C$ ,  $V$ ,  $I_1$ ,  $R_1$  et  $L_{11}$  caractérisent le circuit principal (machine *CYCLOPE* + bobine) et correspondent, respectivement, à la capacité et à la tension aux bornes du condensateur, à l'intensité du courant, à la résistance et

à l'auto-inductance totale du circuit.  $R_2$ ,  $I_2$  et  $L_{22}$  sont relatifs, quant à eux, à la résistance, à l'intensité du courant et à l'auto-inductance de l'anneau. Enfin,  $L_{12}$  représente l'inductance mutuelle qui relie le circuit principal à l'anneau. Au cours de la déformation, le rayon  $r$  de l'anneau augmente. Ainsi, les termes  $L_{22}$  et  $L_{12}$  varient en fonction de  $r$ .

À partir des équations 6.4 à 6.6, l'évolution de  $I_1$  et  $I_2$  est obtenue :

$$\ddot{I}_1 = -\frac{R_1}{L_{11}}\dot{I}_1 - \frac{L_{12}}{L_{11}}\ddot{I}_2 - \frac{2\dot{I}_2\dot{r} + I_2\ddot{r}}{L_{11}}\frac{dL_{12}}{dr} - \frac{I_2\dot{r}^2}{L_{11}}\frac{d^2L_{12}}{dr^2} - \frac{I_1}{L_{11}C} \quad (6.7a)$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{R_2}{L_{22}}I_2 - \frac{L_{12}}{L_{22}}\dot{I}_1 - \frac{I_1\dot{r}}{L_{22}}\frac{dL_{12}}{dr} - \frac{I_2\dot{r}}{L_{22}}\frac{dL_{22}}{dr} \quad (6.7b)$$

Pour le calcul de l'auto-inductance de l'anneau  $L_{22}$ , [Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#) utilisent l'expression (6.8) tirée du AIP (American Institute of Physics) Handbook, 1972. Une autre expression illustrée par l'équation (6.9), tirée de l'ouvrage de [Knoepfel \(1970\)](#), peut être utilisée. Dans ces deux équations,  $r$  est le rayon de l'anneau,  $r_w = \sqrt{A/\pi}$  le rayon de sa section efficace et  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  la perméabilité magnétique du vide. Les valeurs obtenues à partir de ces deux expressions diffèrent légèrement. Nous avons choisi la formulation de l'AIP.

$$L_{22AIP} = \mu_0 r \left[ \ln \left( \frac{8r}{r_w} \right) - \frac{7}{4} \right] \quad (6.8)$$

$$L_{22K} = \mu_0 r \left[ \ln \left( \frac{4\pi r}{r_w} \right) - 2.45 \right] \quad (6.9)$$

[Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#) ont utilisé une formule proposée par [Jackson \(1975\)](#) pour calculer l'inductance mutuelle  $L_{12}$  entre la bobine et l'anneau. Cette expression, décrite par l'équation (6.10), est obtenue en considérant la bobine comme un alignement de  $n$  spires parallèles de rayon  $r_i$  placées à une distance  $z_i$  de l'anneau de rayon  $r$ . L'inductance mutuelle vaut alors :

$$L_{12Jackson} = 2\mu_0 \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{r_i r}}{k} \left[ \left( 1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right] \quad (6.10)$$



avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \sqrt{\frac{4r_i r}{(r_i + r)^2 + z_i^2}} \\ K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \\ E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \end{array} \right.$$

Grâce à cette inductance mutuelle, le courant induit dans l'anneau est couplé au circuit principal. Son évaluation est donc essentielle pour décrire correctement l'expansion de l'anneau en fonction du courant circulant dans la bobine.

Enfin, pour décrire le mouvement de l'anneau, le principe de conservation de l'énergie totale dans le système  $\{machine + bobine + anneau\}$  est adoptée :

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2} C V^2 + \int_0^t (R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 L_{ij} I_i I_j \\ & + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \int_0^t 2\pi A \dot{r} \sigma dt \end{aligned} \quad (6.11)$$

Le premier terme de cette équation correspond à l'énergie stockée dans les condensateurs de la machine, le second terme représente les dissipations par effet Joule dans l'ensemble du système, le troisième est l'énergie magnétique stockée dans le système (auto-inductions et induction mutuelle), le quatrième l'énergie cinétique (en supposant la bobine parfaitement immobile) dans lequel  $M$  est la masse de l'anneau, et le dernier l'énergie de déformation de l'anneau. Pour ce dernier terme, la déformation est homogène (avant striction) et l'état de contrainte uniaxial prévaut.

En dérivant cette expression par rapport au temps et en utilisant les équations (6.4) à (6.6) comme décrit dans l'Annexe A, l'accélération de l'anneau est donnée, en fonction des courants  $I_1$  et  $I_2$ , des valeurs d'inductance  $L_{12}$  et  $L_{22}$  et de la contrainte d'écoulement du matériau  $\sigma$ , par :

$$\ddot{r} = \frac{I_1 I_2}{2\pi r A \rho} \frac{dL_{12}}{dr} + \frac{I_2^2}{4\pi r A \rho} \frac{dL_{22}}{dr} - \frac{\sigma}{\rho r} \quad (6.12)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'anneau, ici du cuivre.

La dérivée  $\frac{dL_{12}}{dr}$  peut être évaluée à partir de l'équation (6.10). Cette relation est difficilement exploitable pour optimiser le montage. Pour contourner cette difficulté, Zhang et Ravi-Chandar (2006) (de la même manière que Gourdin (1989) quelques années auparavant), ont considéré que la bobine est un ensemble de spires parallèles indépendantes et que le champ d'induction magnétique  $b(r, z)$  produit par cette bobine, en n'importe quelle position  $z$ , est défini par la relation :

$$2\pi r \|\mathbf{b}(\mathbf{r}, \mathbf{z})\| = dL_{12}/dr$$

Le champ magnétique résultant  $b(r, z)$  est donc la somme des champs magnétiques  $b_i(r, z)$  créés par chacune des  $i$  spires tel que :

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i(\mathbf{r}, \mathbf{z})$$

Le champ magnétique  $\mathbf{b}_i(\mathbf{r}, \mathbf{z})$  considéré ainsi peut alors être calculé directement à l'aide de la loi de Biot et Savart en supposant les spires comme des fils, uniquement caractérisées par leur rayon moyen. Les composantes axiales et radiales de ce champ pour la  $i^e$  spire, d'après Jackson (1975), peuvent s'exprimer par :

$$b_i^z(r, z_i) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^\pi \frac{r_i^2 - r_i r \cos \theta}{(r^2 - 2 r_i r \cos \theta + r_i^2 + z_i^2)^{3/2}} d\theta \quad (6.13a)$$

$$b_i^r(r, z_i) = \frac{\mu_0}{2\pi} r z_i \int_0^\pi \frac{1}{(r^2 - 2 r_i r \cos \theta + r_i^2 + z_i^2)^{3/2}} d\theta \quad (6.13b)$$

Les composantes radiales et axiales du champ magnétique  $\mathbf{b}$  sont représentées sur les Figures (6.3) et (6.4) en fonction de la position  $z$ , pour différents rayons  $r$  et pour un nombre de spires  $n = 4$ .

Il est aisé de constater, à partir de la Figure (6.4), que la composante  $b^r$  s'annule en  $z = 0$ . Il est donc possible d'évaluer la dérivée de l'induction mutuelle  $L_{12}$ , lorsque

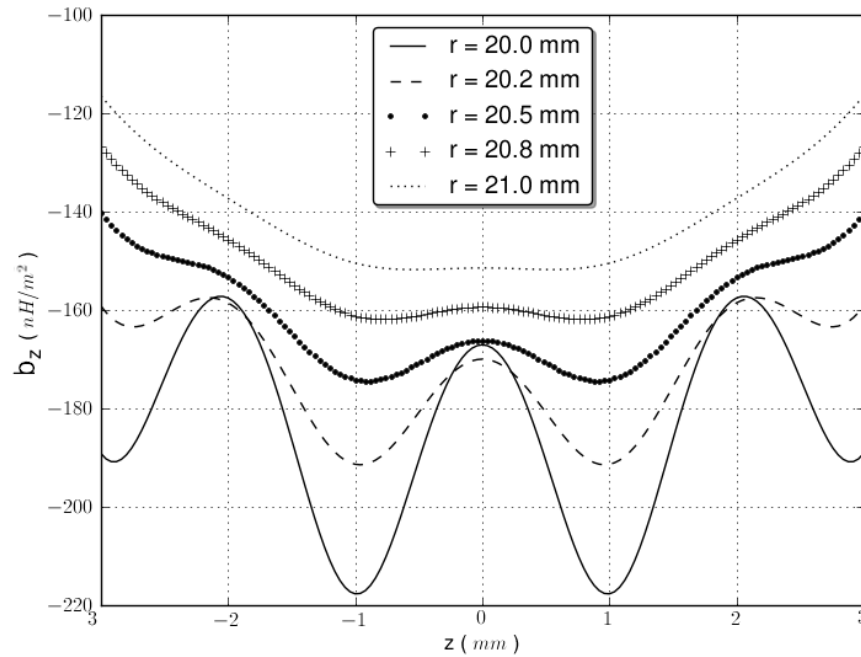


FIG. 6.3 – Champ magnétique axial  $b_z$  généré par la bobine en fonction de la position  $z$  pour différents rayons  $r$ .

l'anneau est placé au centre de la bobine ( $z = 0$ ), par :

$$\begin{aligned}
 \frac{dL_{12}}{dr} &= 2\pi r b^z(r, z = 0) \\
 &= 2\pi r \sum_i b_i^z(r, z = 0) \\
 &= \mu_0 r \sum_i \int_0^\pi \frac{r_i^2 - r_i r \cos \theta}{(r^2 - 2r_i r \cos \theta + r_i^2 + z_i^2)^{3/2}} d\theta
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

On constate alors également, sur la Figure (6.3), que la position  $z = 0$  est stable pour  $\|\mathbf{b}(\mathbf{r}, \mathbf{z})\|$ , ce qui permet d'assurer à l'anneau une expansion purement radiale. Un nombre pair de spires permet cette stabilité qui est d'autant plus assurée lorsque la concavité du champ est importante en  $z = 0$ , contrairement à un nombre de spires impair (voir l'article de [Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#) pour plus de précisions).

Enfin, lors du chargement, la bobine et l'anneau verront leur température évoluer. Les deux sous-systèmes seront en effet sujets à de l'échauffement par effet

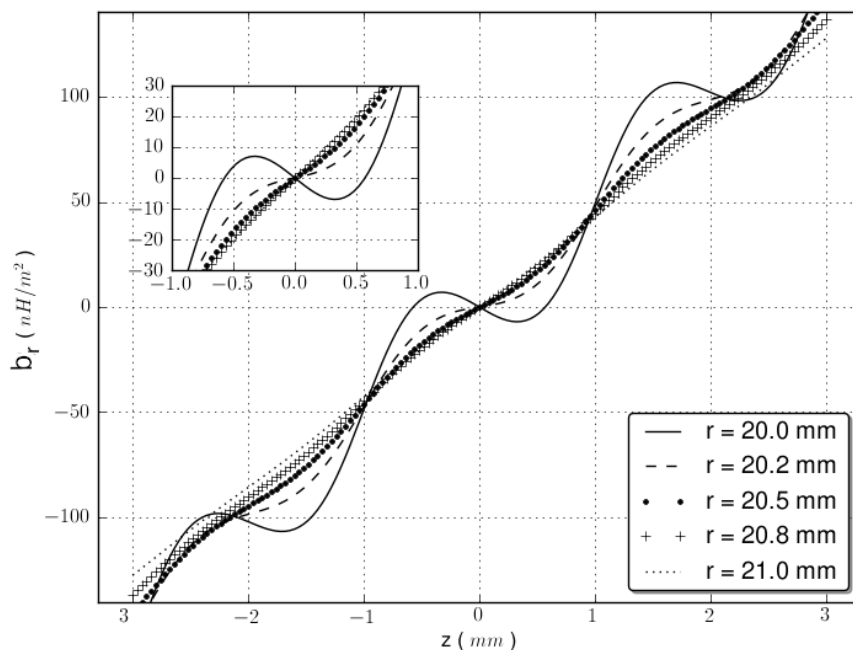


FIG. 6.4 – Champ magnétique radial  $b_r$  généré par la bobine en fonction de la position  $z$  pour différents rayons  $r$ .

Joule. La bobine étant supposée indéformable (hypothèse simplificatrice), seul l'anneau subira de l'échauffement par la conversion du travail plastique en chaleur. Le chargement étant supposé rapide (des vitesses de déformation de l'ordre de  $10^4 \text{ s}^{-1}$  sont recherchées), l'hypothèse d'adiabaticité sera donc adoptée. Comme considérées par Gourdin (1989), les températures de l'anneau et de la bobine,  $T_{ann}$  et  $T_{bob}$ , suivent :

$$\dot{T}_{ann} = \frac{R_2 I_2^2}{M c_p} + \frac{\sigma \dot{\epsilon}_p}{\rho c_p} \quad (6.15)$$

$$\dot{T}_{bob} = \frac{R_b I_1^2}{m_b c_p} \quad (6.16)$$

où  $c_p$  la capacité calorifique massique à pression constante, et  $m_b$  la masse de la bobine. On suppose ici que l'échauffement est uniforme dans l'anneau. En réalité, du fait d'un effet de peau du courant induit, ceci n'est pas valable. Dans une phase de pré-dimensionnement, cette démarche adoptée par Gourdin (1989) et Zhang et Ravichandar (2006) se comprend. Des calculs plus complexes ont également été conduits

sous LS-Dyna<sup>®</sup> (non présentés dans ce rapport de thèse). Pour l'anneau, on admet que le travail plastique est entièrement converti en chaleur. De nombreuses études infirment cette hypothèse. Conscients des limites du modèle, nous allons proposer néanmoins une résolution numérique du système.

Pour résoudre numériquement l'ensemble des équations (6.4)-(6.6), (6.12) et (6.15)-(6.16), il reste à décrire le comportement de l'anneau et à établir les conditions initiales de ce système d'équations.

À l'initialisation du calcul ( $t = 0$ ),  $r = r_0$ ,  $\dot{r} = 0$  et  $\ddot{r} = 0$ . Pour le circuit, nous considérons également les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} I_1 = I_2 = 0 \\ V = U_0 \end{cases}$$

Les équations différentielles du problème sont résolues en utilisant un schéma numérique de type Runge-Kutta d'ordre 4.

### Validation du circuit RLC sans anneau

Afin de valider le schéma numérique, nous avons simulé l'évolution du courant dans le circuit principal (machine *CYCLOPE* + bobine) et comparé ces résultats à ceux d'un calcul purement analytique réalisé à partir de l'expression du courant  $I$  déterminée précédemment (voir l'équation (6.3)).

Le modèle simulé est donc un simple circuit RLC dont les paramètres caractéristiques sont :

$$\begin{cases} R = R_{Cy} + R_b = 10.34 \text{ m}\Omega \\ L = L_{Cy} + L_b = 915 \text{ nH} \\ C = C_{Cy} = 243.5 \text{ }\mu\text{F} \\ U_0 = 1.5 \text{ kV} \end{cases}$$

La pulsation calculée à partir du modèle analytique est alors de  $\omega = 47 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ , soit une période d'environ  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 133.6 \text{ }\mu\text{s}$ , et un temps caractéristique  $\tau = 177 \text{ }\mu\text{s}$ .

Pour simuler le circuit RLC principal avec notre schéma numérique, il suffit d'annuler  $L_{12}$  et  $\frac{dL_{12}}{dr}$ . Aucun courant  $I_2$  ne sera alors généré. La Figure 6.5 illustre la comparaison des solutions analytiques et celles calculées à partir du modèle numérique avec et sans prise en compte de l'évolution de la résistivité électrique  $\rho_e$  en fonction de la température. Nous constatons que le schéma numérique reproduit parfaitement les résultats attendus lorsque la résistivité est constante. Ces résultats montrent aussi l'influence non négligeable de la température sur la résistivité.

Une validation du schéma numérique a également été entreprise à partir des résultats expérimentaux de [Gourdin \(1989\)](#). Les résultats sont présentés en Annexe B.

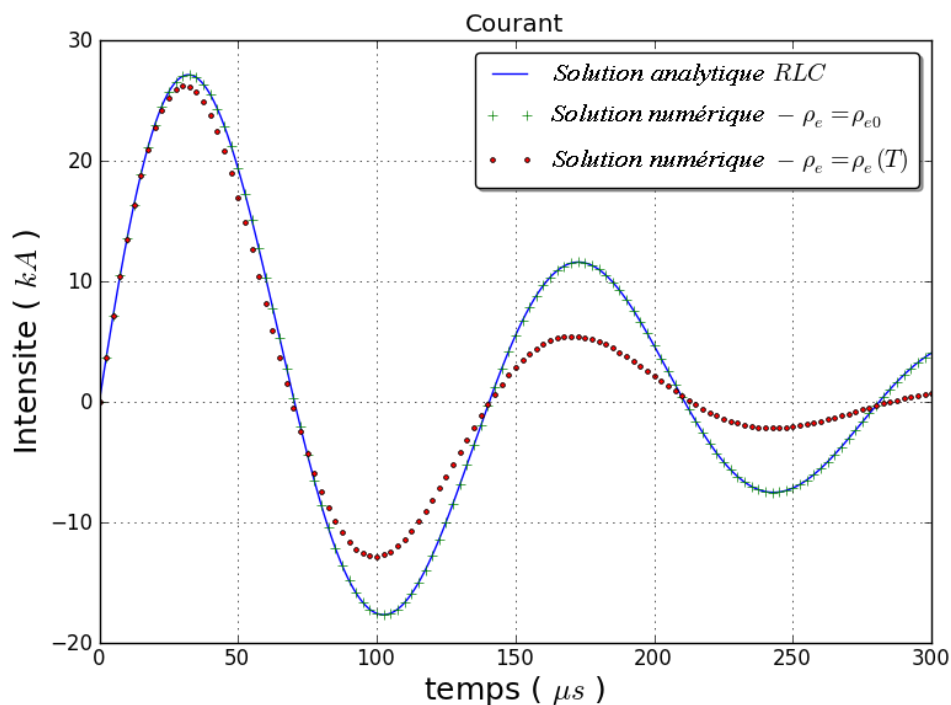


FIG. 6.5 – Comparaison des courants calculés analytiquement (en trait plein) et numériquement (résistivité électrique constante,  $\rho_{e0}$ , et dépendante de la température,  $\rho_e(T)$ ). Les résultats numériques avec une résistivité électrique constante se superposent parfaitement aux résultats analytiques.

## 6.3 Essais d'expansion d'anneaux

### 6.3.1 Montage expérimental

Dans le cadre de ce travail de thèse, un nouvel outil, illustré sur la Figure 6.6, a été conçu. Il est constitué en particulier d'un support d'anneaux de 40 *mm* de diamètre et d'une bobine dont l'inductance entraîne un ralentissement du front de montée du courant.

La machine *CYCLOPE* permet de délivrer un courant impulsionnel de forte intensité grâce à un système appelé éclateur. Ce système permet de déstabiliser les condensateurs afin qu'ils délivrent le courant à l'instant souhaité. Nous verrons cependant que l'éclateur permet également, pour une tension adéquate, de jouer un rôle de diode, empêchant ainsi tout retour inverse du courant. Les mesures de courants ne présenteront, en effet, qu'une demi-période, à l'image des résultats de Gourdin (voir B.1). De la même manière que dans l'Annexe B, des divergences seront donc observées entre le calcul numérique et les résultats expérimentaux.

### 6.3.2 Métrologies associées

Différents moyens métrologiques doivent être associés au dispositif d'expansion d'anneaux afin de connaître au mieux le chargement imposé, et permettre de récupérer les fragments en fin d'essai (grâce notamment à de la mousse AIREX).

En premier lieu, il est nécessaire d'avoir une évaluation correcte du courant délivré par la machine *CYCLOPE* et de celui circulant dans l'anneau pour rendre compte des conditions de chargement de l'anneau. Les mesures de courant sont réalisées à l'aide de boucles de Rogowsky.

La Figure 6.6 présente deux des quatre boucles utilisées dans nos essais. La boucle de droite permet ainsi d'évaluer le courant entrant dans la bobine au plus près du dispositif d'expansion d'anneaux. La seconde mesure le courant total circulant à la fois dans les  $n$  spires de la bobine et dans l'anneau. Ce courant total  $I_{tot}$

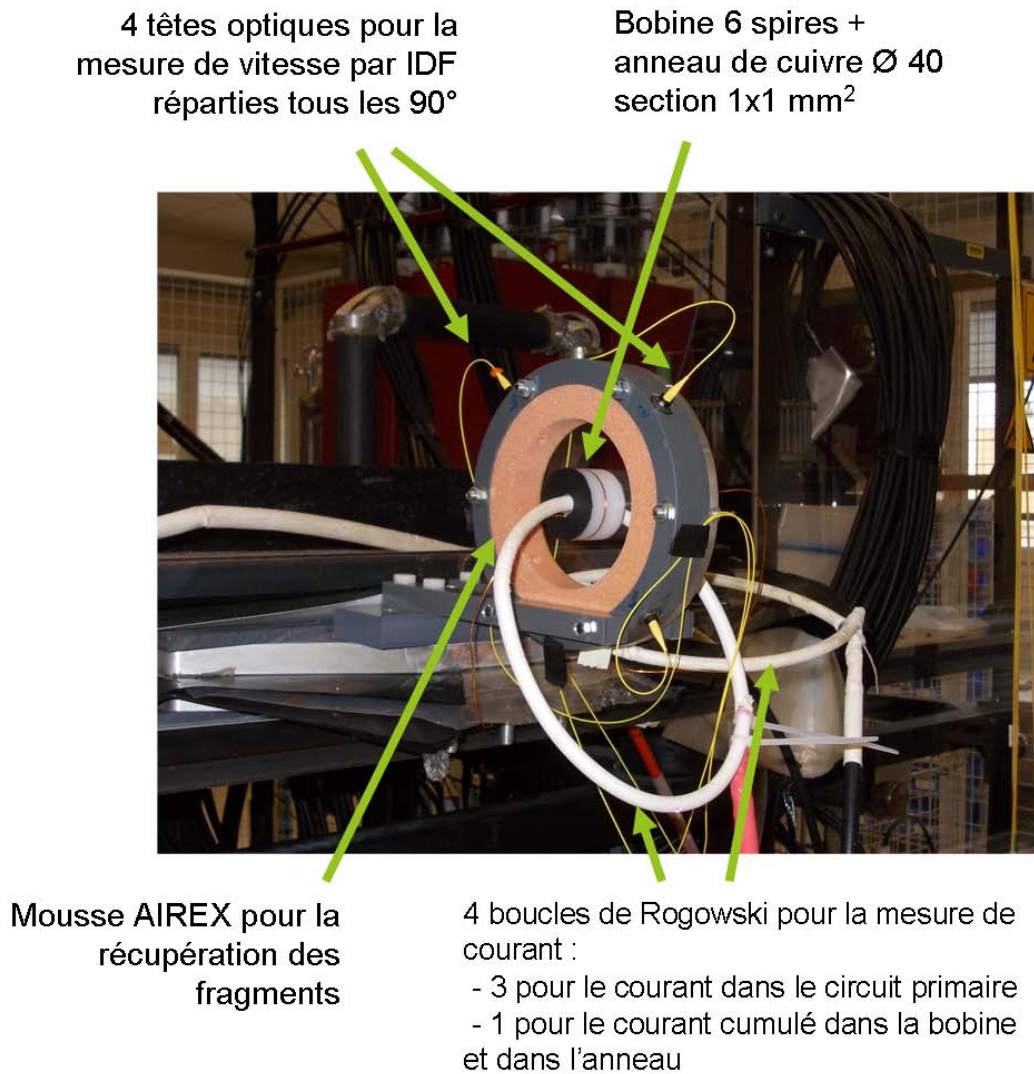


FIG. 6.6 – Dispositif d'expansion d'anneaux développé durant la thèse pour s'adapter au moyen existant *CYCLOPE*.



est défini, en théorie, par :

$$I_{tot} = n \times I_1 + I_2 \quad (6.17)$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont respectivement les courants générés par la machine *CYCLOPE* et le courant généré par induction dans l'anneau. Par différence, il est donc possible d'évaluer le courant circulant dans l'anneau.

L'évolution de l'anneau, au cours de son expansion, peut être obtenue par des mesures de vitesse. Ces mesures sont réalisées par des techniques d'Interférométrie Doppler Fibrée (IDF) à partir de quatre têtes optiques réparties tous les 90° autour de l'anneau, comme l'illustre la Figure 6.6. Nous vérifierons notamment, à partir de ces quatre points de mesure, que l'expansion d'anneau est homogène (axisymétrique) au début du chargement.

Afin d'évaluer l'état de l'anneau après fragmentation, il est nécessaire de récupérer tous les fragments sans les détériorer. Pour cela, nous utilisons une couronne de mousse *AIREX* comme récupérateur d'éclats. La Figure 6.6 décrit l'emplacement de cette couronne.

Enfin, l'ensemble du processus d'expansion / striction / fragmentation d'anneau est suivi par ombroscopie à l'aide d'une caméra numérique ultra rapide. La caméra que nous utilisons généralement, présentée sur la Figure 6.7, est de type *Shimadzu HPV-1* qui permet des cadences allant jusqu'à 1 million d'images par seconde. Dans nos essais, nous nous limiterons à une cadence de 500 000 images par seconde. Elle permet en outre d'enregistrer une centaine d'images avec une définition de  $320 \times 260$  pixels. Une autre caméra est parfois également exploitée en raison de sa grande résolution : la caméra *Imacon 200*. Cette caméra permet en effet de réaliser des images avec une résolution de  $1200 \times 980$  pixels et un temps inter-images pouvant être réduit à quelques nanosecondes. L'inconvénient majeur de cette caméra est qu'elle ne permet d'obtenir, au total, que 14 images.

Aux cadences importantes nécessaires au suivi de l'expansion d'anneaux, impliquant des temps d'exposition inférieurs à  $500 \text{ ns}$  (pour  $1/10 \text{ mm}$  de flou dynamique

à  $200\text{ m/s}$ ), il est nécessaire d'éclairer suffisamment le montage expérimental. Pour cela, nous utilisons une lampe flash de type *Specialised-Imaging AD500*, représentée sur la Figure 6.8, qui permet d'éclairer avec une puissance de l'ordre de  $500\text{ W}$ .

Grâce à des traitements d'images adéquats (encore en développement), nous devrions pouvoir accéder à l'évolution de l'épaisseur  $ep$  de l'anneau en fonction de l'angle circonférentiel  $\theta$  à différents instants. Au temps  $t$ , la fonction  $ep(\theta, t)$  pourra alors être étudiée de la même manière que les résultats de simulations numériques (cf. Chapitre 4) par transformée de Fourier pour estimer une densité spectrale et décrire ainsi une densité de probabilité de longueurs inter-strictions.

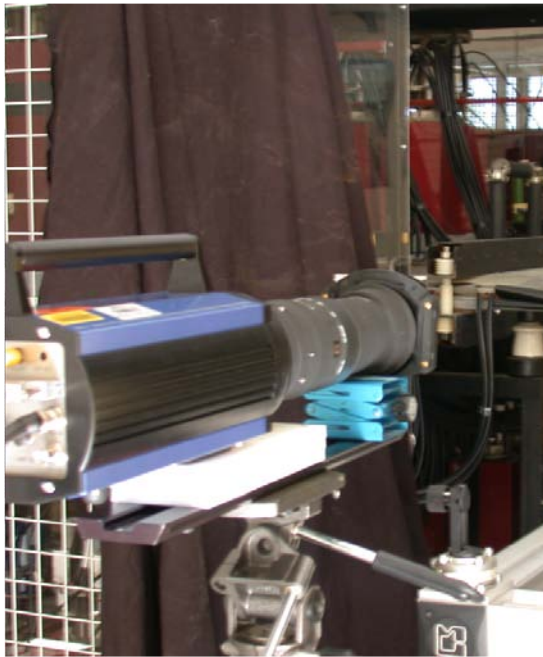


FIG. 6.7 – Caméra Shimadzu HPV-1 généralement employée pour filmer l'expansion d'anneaux.

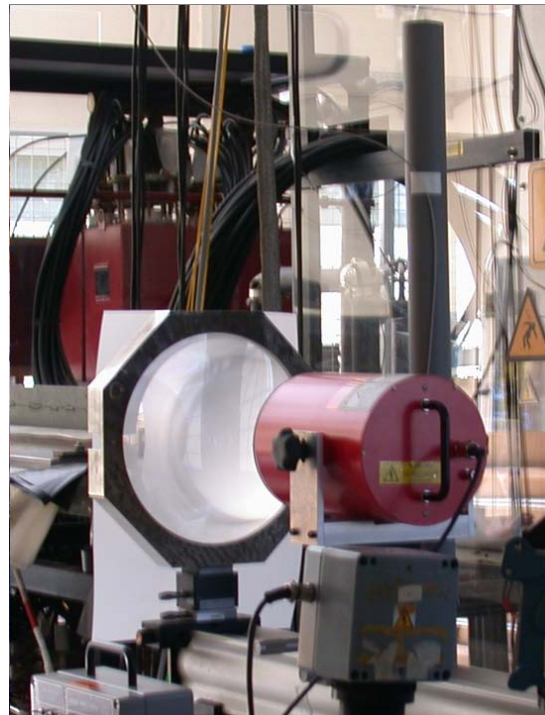


FIG. 6.8 – Lampe flash du type *Specialised-Imaging AD500* utilisée pour éclairer suffisamment l'expansion d'anneaux.

### 6.3.3 Comparaison expérience/calcul

Afin de valider le schéma numérique présenté précédemment et qui permettra par la suite de dimensionner la configuration expérimentale aboutissant à la vitesse

d'expansion souhaitée, il est nécessaire de comparer les résultats expérimentaux et numériques. Comme précisé précédemment, nous avons sélectionné un anneau de cuivre qui a un rayon moyen de  $20.5 \text{ mm}$ , et une section carrée de  $1 \times 1 \text{ mm}^2$ . La tension de charge aux bornes des condensateurs que nous avons choisie est  $U_0 = 1.5 \text{ kV}$ .

Pour les calculs numériques, nous avons considéré la loi de type [Zerilli et Armstrong \(1987\)](#) modifiée selon [Petit et Dequiedt \(2006\)](#) décrite par l'équation (3.16). Les caractéristiques du cuivre considérées sont définies dans le tableau 3.1. Nous avons également supposé une évolution de la masse volumique  $\rho$  du cuivre fonction de la température  $T$  suivant l'approximation polynomiale :

$$\rho = 9056.3 - 0.40335 T - 7.1257 \times 10^{-5} T^2$$

Cette approximation polynômiale a été établie à partir d'une isobare construite suivant la loi d'état de [Murnaghan \(1951\)](#) utilisée dans les simulations numériques du chapitre 4.

Nous pouvons donc comparer les vitesses d'expansion et les courants obtenus expérimentalement aux résultats du schéma numérique précédent. La Figure 6.9 présente la comparaison des vitesses d'expansion radiale expérimentales (en trait plein) et numériques (en trait discontinu). Une bonne superposition de la mise en vitesse est observée. Une divergence est par la suite constatée. La vitesse maximale atteinte par l'anneau est d'environ  $143 \text{ m/s}$  tandis que le calcul donne une vitesse maximale de  $152 \text{ m/s}$ . La décroissance de la vitesse due au travail des déformations plastiques est plus importante dans l'expérience. Malgré ces différences qu'il sera nécessaire de mieux comprendre, une bonne restitution est obtenue par le calcul. La Figure 6.10 présente la comparaison des courants circulant dans la bobine et dans l'anneau du montage expérimental (en trait plein) et calculés numériquement (en traits discontinus). On peut constater que le courant du circuit principal circulant dans l'anneau devient nul à partir d'environ  $60 \mu\text{s}$ . Ceci est dû à l'éclateur utilisé pour déclencher la décharge des condensateurs qui joue, par la suite, le rôle de diode

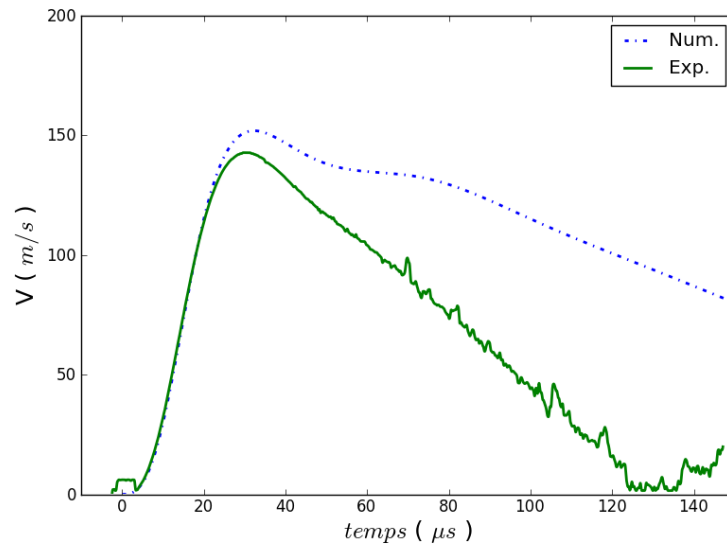


FIG. 6.9 – Vitesse d’expansion radiale de l’anneau au cours du temps pour une tension de charge de  $1.5\text{ kV}$ . Les résultats expérimentaux sont représentés en trait plein, tandis que les résultats numériques sont en traits discontinus. Le signal de vitesse expérimental est interrompu vers  $60\ \mu\text{s}$ . Le comportement du cuivre est décrit, dans le calcul numérique par un modèle de Zerilli-Arsmstrong modifié (voir l’équation (3.16)).

dans le circuit. Les courants sont correctement restitués par le calcul numérique. Une légère sous-estimation de l’intensité du courant est malgré tout observée. Ces résultats globalement satisfaisants permettent de valider la modélisation présentée au début de ce chapitre pour réaliser un pré-dimensionnement. Ces calculs donnent également accès aux déformations, aux vitesses de déformations, et aux températures dans l’anneau au cours du chargement.

La figure 6.11 décrit l’évolution de la vitesse de déformation moyenne dans l’anneau en fonction du temps, lorsque la tension de charge est de  $1.5\text{ kV}$ . Un pic apparaît à environ  $t = 30\ \mu\text{s}$  avec une valeur de vitesse de déformation d’environ  $6600\ \text{s}^{-1}$ . Cette valeur va progressivement chuter, lors du vol libre de l’anneau, du fait de la conversion de l’énergie cinétique en travail plastique.

La Figure 6.12 présente l’évolution de la déformation plastique au sein de l’anneau. En considérant, comme [Zhang et Ravi-Chandar \(2008\)](#), que la déformation à striction est d’environ 0.3, alors l’apparition des instabilités se produit à environ

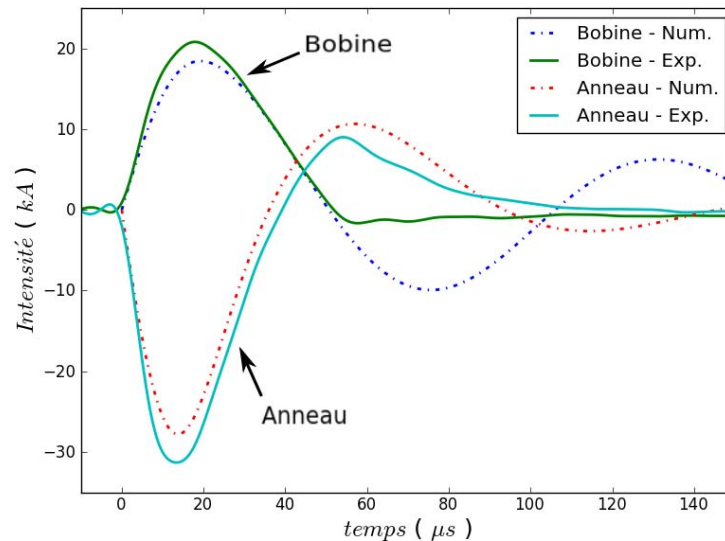


FIG. 6.10 – Courant circulant dans la bobine et dans l’anneau pour une tension de charge de  $1.5\text{ kV}$ . Les résultats expérimentaux sont représentés en trait plein, tandis que les résultats numériques sont en traits discontinus. Le courant expérimental dans la bobine s’annule vers  $60\ \mu\text{s}$ . Il restera nul en raison de l’éclateur qui joue ici le rôle de diode. Le comportement du cuivre est décrit par un modèle de Zerilli-Arsmstrong modifié (voir l’équation (3.16)).

$65\ \mu\text{s}$ . D’après la Figure 6.13 qui représente l’évolution du rayon de l’anneau au cours du chargement, l’anneau aura donc un rayon à striction d’environ  $27.5\text{ mm}$ . On peut remarquer, sur les mesures expérimentales, qu’à  $t = 65\ \mu\text{s}$ , lorsque la déformation plastique atteint la déformation à rupture, un courant d’une intensité supérieure à  $5\text{ kA}$  circule encore dans l’anneau.

Enfin, nous constaterons, à partir des résultats de la Figure 6.14, les contributions de l’effet Joule et du travail plastique à l’échauffement total dans l’anneau. L’élévation de la température, dans l’anneau, est en effet essentiellement dû à l’échauffement par effet Joule. Le comportement du cuivre et le développement des instabilités seront par conséquent affectés par cet effet particulier. Une élévation de  $160\text{ K}$  est observée. De fait, les simulations et les modélisations devront donc tenir compte de cette élévation de la température. Néanmoins, la loi d’évolution de la température dans l’anneau, décrite par l’équation (6.15), a été obtenue en supposant une répartition homogène du courant dans l’épaisseur de l’anneau. En réalité, le courant circule

préférentiellement près de la surface interne de l'anneau. L'échauffement par effet Joule donnera lieu à un gradient de température dans la section qui ne peut malheureusement pas être correctement pris en compte dans une approche analytique du développement des instabilités, telle que présentée dans le chapitre 3.

Nous savons donc que la comparaison expérience/analytique nécessitera une modification du montage expérimental permettant la réduction, voire l'élimination, des courants induits dans les anneaux d'études. Nous décrirons en conclusion la solution envisagée.

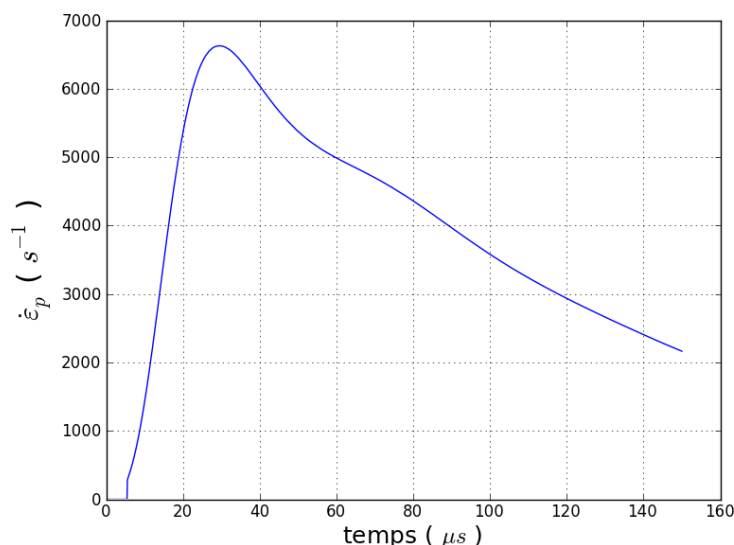


FIG. 6.11 – Vitesse de déformation de l'anneau au cours du temps pour une tension de charge de 1.5 kV. Le comportement du cuivre est décrit par un modèle de Zerilli-Arsmtrong modifié (voir l'équation (3.16)).

### 6.3.4 Résultats vidéo

Grâce à la caméra *Shimadzu HPV-1*, nous pouvons avoir accès à l'ensemble du processus d'expansion d'anneau : expansion homogène, développement des instabilités et apparition de strictions, fragmentation et vol libre des éclats. La Figure 6.15 illustre ces différentes étapes lors d'un exemple d'expérience d'expansion d'anneau que nous avons réalisées avant le développement de la modélisation numérique. Nous prions le lecteur de bien vouloir distinguer les résultats expérimentaux précédents de

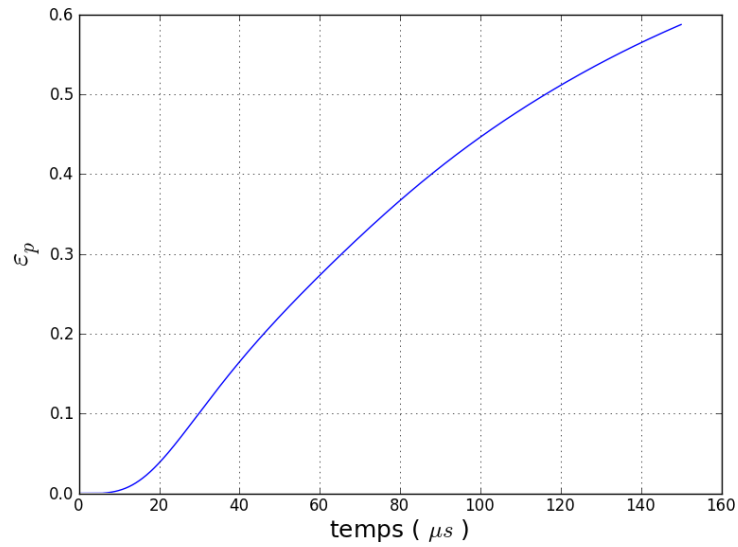


FIG. 6.12 – Déformation plastique dans l’anneau au cours de l’expansion pour une tension de charge de  $1.5\text{ kV}$ . Le comportement du cuivre est décrit par un modèle de Zerilli-Arsmtrong modifié (voir l’équation (3.16)).

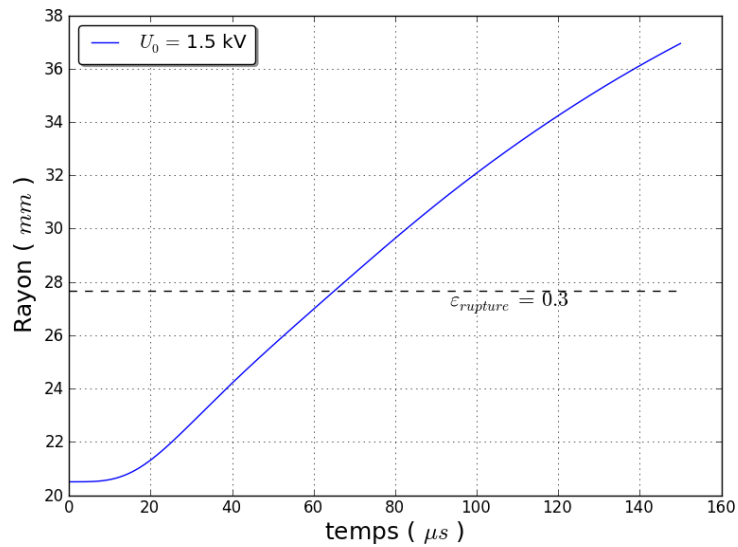


FIG. 6.13 – Rayon de l’anneau au cours du temps (trait plein) et limite correspondant à la déformation à rupture classique  $\epsilon_{rupture} = 0.3$ . La tension de charge vaut  $1.5\text{ kV}$ . Le comportement du cuivre est décrit par un modèle de Zerilli-Arsmtrong modifié (voir l’équation (3.16)).

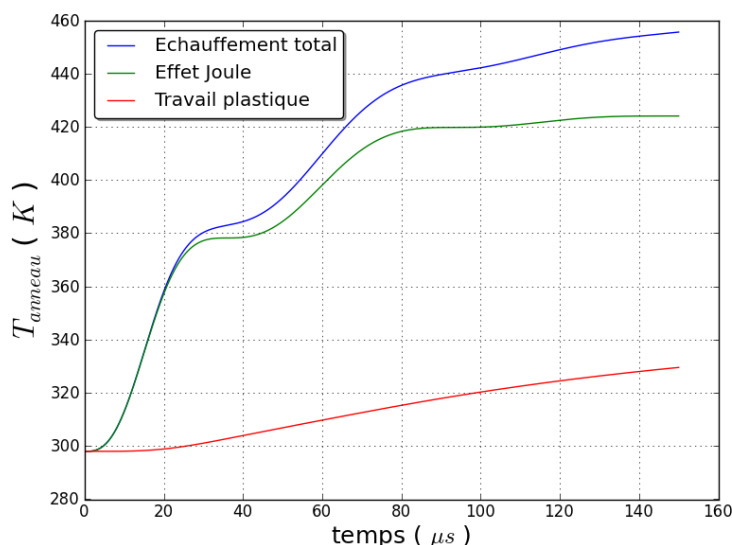


FIG. 6.14 – Température dans l’anneau : une part de l’échauffement est générée par effet Joule, l’autre part provient des déformations plastiques en condition adiabatique. La tension de charge est de  $1.5\text{ kV}$ . Le comportement du cuivre est décrit par un modèle de Zerilli-Arsmtrong modifié (voir l’équation (3.16)).

ceux présentés dans ce paragraphe. La bobine comportait 6 spires, la vitesse maximale d’expansion radiale atteinte par l’anneau était d’environ  $170\text{ m/s}$  à  $t \approx 50\ \mu s$ , et le cuivre utilisé n’a pas été caractérisé.

On peut cependant constater les différentes étapes :

- jusqu’à  $82\ \mu s$ , l’anneau se déforme de manière homogène,
- à  $108\ \mu s$ , des strictions sont visibles. Elles sont indiquées par les flèches rouges,
- à  $116\ \mu s$ , les premières ruptures apparaissent. Elles donnent lieu à des arcs électriques lumineux, du fait du passage d’un courant de forte intensité,
- à  $134\ \mu s$ , tous les fragments sont formés et poursuivent leur vol jusqu’à la fin de l’expérience.

Les zooms à gauche de l’image font apparaître que des strictions peuvent être interrompues au cours de leur développement comme le prévoyait [Mott \(1947\)](#).



D'autres résultats vidéo ont été obtenus à partir de la caméra *Imacon 200*. Comme le montre l'Annexe C, cela devrait permettre à l'avenir d'établir l'évolution de l'épaisseur de l'anneau et de traiter cette grandeur par transformée Fourier, de la même manière que dans les simulations numériques.

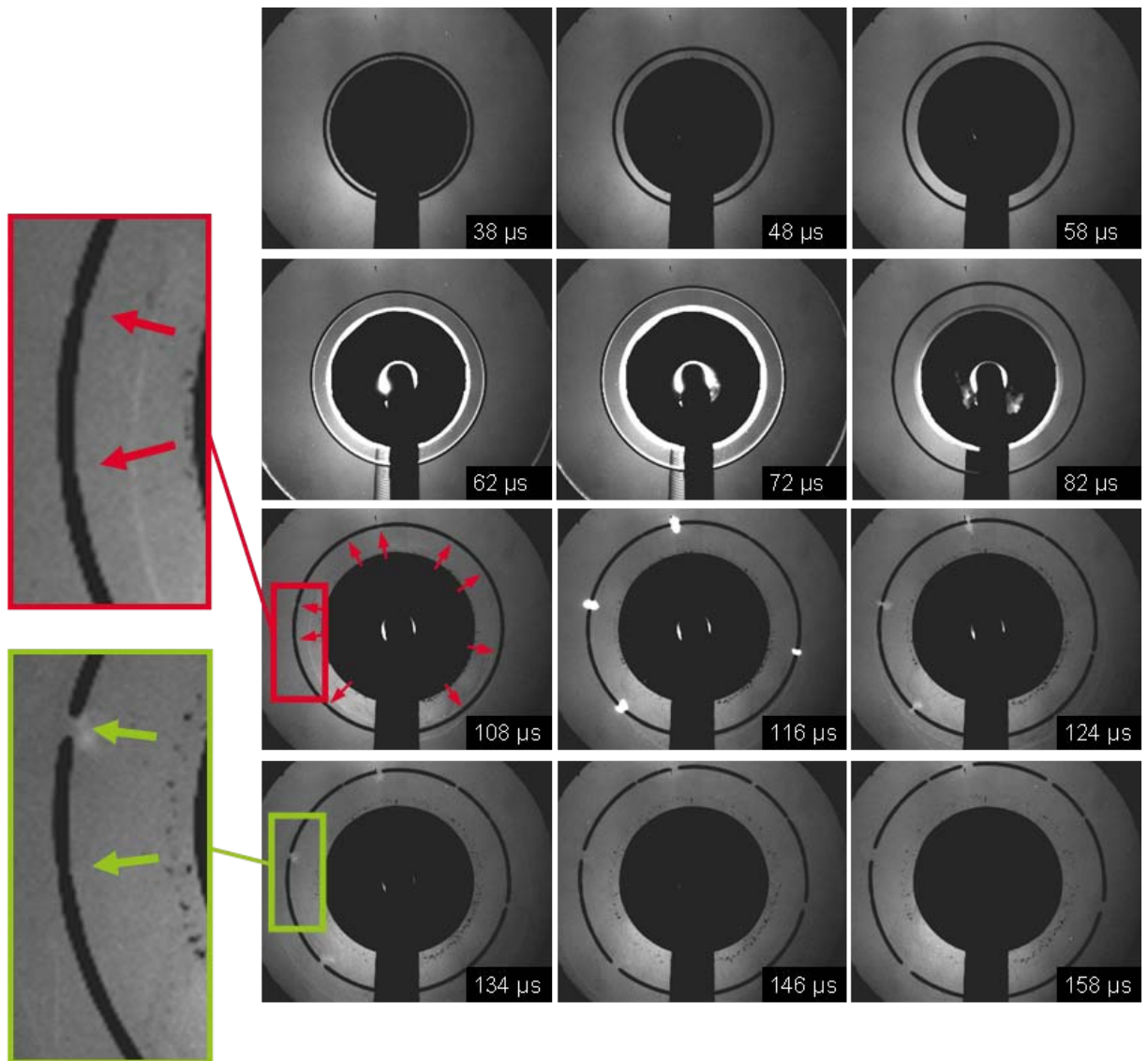


FIG. 6.15 – Séquence d'images d'un essai d'expansion d'anneau obtenues grâce à la caméra *Shimadzu*. Différentes étapes sont visibles : expansion homogène jusqu'à  $82 \mu s$  ; apparition de striction à  $108 \mu s$  ; premières ruptures à  $116 \mu s$  (arcs électriques), fin de fragmentation à  $134 \mu s$  et vol libre des fragments. Une striction interrompue est mise en évidence sur les zooms de gauche.

## 6.4 Conclusion

Nous avons développé, dans un premier temps, une modélisation numérique de la mise en expansion par forces électromagnétiques d'anneaux de cuivre. Cette modélisation, permettant de restituer notamment les courants dans le circuit principal et dans l'anneau d'étude et la mise en vitesse, et d'estimer l'échauffement moyen dans l'anneau, a pu être validée à de multiples reprises, en particulier, par comparaisons expériences / calculs. Les premiers essais d'expansion d'anneaux ont en effet permis de démontrer la bonne prédictibilité de notre algorithme.

Nous avons, pour autant, constaté qu'un courant important circulait dans l'anneau entraînant un fort échauffement par effet Joule et perdurant jusqu'aux premières ruptures. Celles-ci étaient en effet clairement visibles grâce à l'apparition d'arcs électriques très lumineux. Nous savons, par ailleurs, que le courant circule préférentiellement sur la surface interne de l'anneau. Il induit donc un gradient de température important qui ne peut pas être modélisé par l'analyse linéaire de stabilité. À noter que des calculs couplés thermique/mécanique/électro-magnétique, par éléments finis, existent mais sont aussi très instables. Prédire par ce type de code aux éléments finis, la striction multiple ne paraît pas possible encore à ce jour.

De fait, afin de réaliser, à l'avenir, des comparaisons expériences / calculs les plus fiables possibles, il sera donc nécessaire d'améliorer le montage pour réduire, voire éliminer, les courants induits dans l'anneau. Pour cela, nous envisageons de développer un système de "poussoir" semblable à celui développé par [Gourdin \(1989\)](#) pour l'expansion de matériaux faiblement ou non conducteurs. Ce système permettra non seulement d'exploiter correctement des essais d'expansion d'anneaux de cuivre, mais également d'envisager l'utilisation, dans le futur, d'autres matériaux plus adaptés aux problématiques visées, tels que les aciers des charges militaires.

# Chapitre 7

## Conclusions

Ce travail de thèse a permis de montrer que les processus de développement des instabilités et de localisation/fragmentation peuvent être étudiés sous un jour nouveau. En effet, il est possible d'aborder ces phénomènes en utilisant une approche statistique. Pour ce faire, une des principales hypothèses que nous avons dû utiliser est de considérer ces deux processus comme des processus spatialement homogènes et ergodiques en représentation lagrangienne. Autrement dit, nous avons supposé que ces processus pouvaient être décrits par une fonction aléatoire dépendant de la position lagrangienne axiale le long du barreau, cette fonction ayant les mêmes caractéristiques stochastiques que l'on considère un barreau infini ou un nombre important de barreaux de longueur finie.

Le module au carré de la transformée de Fourier d'une fonction aléatoire correspond à la densité spectrale, donnant ainsi une estimation de la décomposition fréquentielle de la variance du processus étudié. En normant la fonction densité spectrale par la variance, le résultat obtenu peut donc être assimilé aux distributions statistiques des contributions de chaque fréquence sur les fluctuations. Elle permet en outre d'identifier la loi de probabilité des longueurs inter-strictions.

Afin d'illustrer cette nouvelle interprétation de ces processus, nous développons une approche basée sur le triptique expérience / modélisation / simulation concernant le développement des instabilités et le phénomène de localisation dans un anneau de cuivre en expansion dynamique. Une configuration représentative de

barreaux cylindriques sollicités en traction dynamique à vitesse constante  $a$ , tout d'abord, été abordée à la fois dans une approche analytique et numérique. Une comparaison des résultats obtenus a ensuite été réalisée. L'approche expérimentale concernant des essais d'expansion d'anneaux par forces électromagnétiques est, quant à elle, en cours de développement.

Nous avons ainsi étudié, dans un premier temps, l'approche analytique du développement des instabilités. Cette approche s'appuie sur l'analyse linéaire de stabilité qui a été déjà largement utilisée dans la littérature pour décrire l'influence de différents paramètres, notamment des dimensions géométriques, de l'inertie, de la multidimensionnalité des contraintes et des différentes sensibilités (à l'écroûissage, à la vitesse de déformation et à la température). Ces tendances étaient souvent illustrées via l'évolution du mode dominant des instabilités au cours d'un chargement particulier, notamment la traction dynamique d'un barreau. Le mode dominant était couramment défini comme le mode ayant le taux de croissance instantané le plus grand et était associé à la fréquence des localisations.

Nous avons montré que l'analyse linéaire de stabilité peut être identifiée à une description spectrale de la croissance des instabilités au moins pour les premiers instants de la déformation. Il est en effet possible de reconstituer l'évolution globale d'une perturbation initiale, telle que la rugosité de surface, en sommant les contributions des différents modes de perturbation. Ces contributions dépendent alors du produit entre un terme d'amplitude initiale,  $\delta S_{0p}$  par exemple pour la fluctuation de section initiale associée au mode  $p$ , et un terme de croissance cumulée de la forme  $\exp\left[\int_0^t \eta dt\right]$ , où  $\eta$  est le taux de croissance du mode considéré. Nous avons alors montré que la fonction densité spectrale peut conduire, via un changement de variable  $l_p = \frac{2\pi}{k_p}$ , à une distribution statistique des longueurs inter-strictions. Nous pouvons donc identifier non seulement un mode dominant d'instabilité, mais également une densité de probabilité de longueurs inter-strictions. L'approche analytique apparaît donc de ce fait comme une approche statistique inférentielle du développement des

instabilités de faible amplitude. Lorsque la solution devient fortement non linéaire, l'analyse linéaire de stabilité n'est plus adaptée. Nous proposons d'associer cette limite à l'apparition des localisations. Un des principaux objectifs est alors de définir correctement cette limite.

La perturbation initiale, d'amplitude  $\delta S_{0_p}$  pour le mode  $p$ , joue un rôle important dans le processus de localisation finale. Jusqu'à présent, le passage du développement des instabilités aux localisations était considéré lorsqu'un taux de croissance normalisé critique  $\eta/\dot{\epsilon}$ , où  $\dot{\epsilon}$  est la vitesse de déformation de la solution de base (sans perturbation) est atteint. Nous pensons néanmoins que les instabilités se développent jusqu'à atteindre une croissance critique à partir de laquelle le profil des localisations est déterminé par le mode le plus développé. Afin de rendre compte de cette croissance critique, nous avons proposé un autre critère basé cette fois-ci sur une valeur critique de l'intégrale temporelle  $\int \eta dt$ . Ce principe, pris comme hypothèse dans le chapitre 3 de ce travail, a permis d'expliquer en particulier les observations numériques de [Rodríguez-Martínez et al. \(2013\)](#). Il a également servi à établir des lois d'évolution du temps d'apparition  $t_{neck}$  et du nombre  $N_{neck}$  des localisations en fonction des caractéristiques géométriques du barreau et de la vitesse de chargement. Cette hypothèse sera plus tard étayée par des comparaisons analytique/numérique (voir chapitre 5).

Dans un second temps, nous nous sommes concentrés sur l'étude du développement des instabilités obtenues par simulations numériques basées sur la méthode des éléments finis. Pour initier ces instabilités, nous avons choisi d'introduire des perturbations aléatoires sur la limite d'écoulement élastoplastique du cuivre. Une importante étude paramétrique a alors été réalisée afin d'étudier les effets de la longueur du barreau considérée, du maillage utilisé, du tirage aléatoire distribué dans les mailles, et de l'amplitude et de la taille des cellules des perturbations introduites, pour différentes vitesses de chargement.

Afin de pouvoir comparer le développement des instabilités des cas de cette étude, mais également, par anticipation, comparer les résultats numériques et analytiques voire plus tard expérimentaux, il a fallu définir des critères numériques d'apparition des localisations. Nous avons choisi de nous baser sur deux critères distincts : le premier concerne le temps d'apparition des localisations que nous appelons  $t_{neck}$ , et le second, le nombre de localisations déterminé à l'instant  $t_{neck}$  que nous appelons  $N_{neck}$ . Le temps d'apparition a été associé à l'instant d'apparition de la première décharge élastique dans le barreau. Le nombre de localisations a été, quant à lui, déterminé à partir du carré de la transformée de Fourier des fluctuations de la section du barreau, correspondant à une approximation de la densité spectrale, à l'instant  $t_{neck}$ . Il correspond ainsi au mode de plus grande amplitude. Par moyenne sur un nombre suffisant de réalisations (simulations avec perturbations), nous avons montré que cette densité spectrale peut être raisonnablement associée à une distribution du type Gamma. Le nombre  $N_{neck}$  correspond alors au maximum de cette distribution particulière. Par changement de variable ( $l_p = \frac{2\pi}{k_p}$ ) appliquée à la distribution Gamma, nous avons alors pu restituer des distributions de longueurs (ou de masses) inter-strictions d'aspect très similaire aux distributions expérimentales obtenues par [Zhang et Ravi-Chandar \(2006\)](#).

Les critères d'évaluation du développement des instabilités étant ainsi établis, nous avons tout d'abord vérifié l'ergodicité du problème. Pour cela, le temps d'apparition et la fréquence des localisations ont été évalués pour différentes longueurs de barreau soumis à la même vitesse de déformation initiale. Puisque ces deux caractéristiques restent invariantes pour une longueur de barreau suffisante, l'ergodicité associée au processus aléatoire de développement des instabilités, dans la configuration que nous avons étudiée, est supposée valable à partir de  $4 L_0 = 257.61 \text{ mm}$  pour un rayon initial  $R_0 = 0.5642 \text{ mm}$ . La suite de l'étude a été réalisée en utilisant une longueur de barreau de  $4 L_0$ . La convergence au maillage a, plus tard, été observée à la fois en termes de temps d'apparition et de fréquence des localisations à partir d'un

raffinement dont les mailles ont une taille d'environ  $0.1 \times 0.15 \times 0.15 \text{ mm}^3$ . Ce raffinement permet alors de décrire correctement des modes de localisations allant jusqu'à des fréquences de plus de 2000  $\text{Hz}$ . Mais la taille des mailles est très petite. Il sera donc difficile de simuler des configurations réelles en utilisant cette technique numérique. Nous avons également montré qu'en utilisant au moins 5 tirages aléatoires différents, l'évaluation d'un temps d'apparition et de fréquence des localisations peut être obtenu, en général, avec une bonne précision. Enfin, la synthèse des résultats de l'étude paramétrique a permis de proposer des lois d'évolution du temps d'apparition et du nombre de localisations, fonction de la vitesse de chargement, de l'amplitude et de la taille des cellules de perturbation. Nous avons constaté que l'influence de la vitesse de chargement ainsi déterminée est très proche de celle obtenue par analyse dimensionnelle dans notre approche analytique. Ces lois d'évolution laissent finalement entrevoir la possibilité, dans un futur plus ou moins proche, de caractériser par des essais d'expansion d'anneaux, par exemple, l'amplitude et la taille des cellules de perturbation représentatifs d'un matériau spécifique, comme nous aurions caractérisé les paramètres d'une loi d'écoulement plastique à partir d'essais de compression uni-axiale ou d'essais aux barres d'Hopkinson.

Le chapitre 5 est dévolu à la comparaison entre les deux approches numérique et analytique. Nous avons pu comparer les résultats numériques et analytiques en termes à la fois de temps d'apparition et de fréquence des localisations. Les résultats ont alors montré une bonne correspondance des tendances. Il semble malgré tout envisageable de calibrer correctement les perturbations numériques idéales à partir de ces simples comparaisons. Il a été possible, malgré tout, de constater que le formalisme intégral du critère analytique de localisation permet de mieux caractériser le phénomène de localisation pour les grandes vitesses de chargement.

Par ailleurs, il a été constaté un bon accord entre densités spectrales analytiques et numériques pour différentes vitesses de chargement. Mais les écart-types déduits

de la modélisation analytique sont plus grands que ceux de la modélisation numérique. Ceci peut s'expliquer par des évolutions non linéaires des instabilités dans les simulations numériques avant même l'apparition des localisations. Cet effet semble être prépondérant pour de grandes vitesses de chargement.

Afin de valider les différentes approches présentées dans les chapitres précédents, il est nécessaire d'obtenir des résultats expérimentaux. Une méthode permettant d'expérimenter des vitesses de chargement de cet ordre avec de grandes déformations, permettant d'obtenir des striction, est l'expansion d'anneaux par chargements explosifs ou électromagnétiques. Nous avons donc choisi de développer un moyen expérimental d'expansion d'anneaux par forces électromagnétiques pour des raisons de simplicité de mise en oeuvre par rapport à la solution par explosifs. Des premiers essais, réalisés à partir du moyen que nous avons développé, ont montré la faisabilité de mettre en expansion un anneau de cuivre à des vitesses de sollicitation importantes et aboutissant à la fragmentation dynamique. Cependant, les premiers résultats ont montré que l'anneau devait supporter le passage d'un courant électrique important au cours de l'essai, ce qui entraîne un échauffement hétérogène parasite. Nous poursuivons actuellement les développements afin de limiter voire annuler le passage de ce courant indésirable.

Par ailleurs, les premiers dépouillements d'images, obtenues par vidéo numérique ultra rapide (VNUR), permettent d'estimer l'évolution de l'épaisseur de l'anneau au cours du temps en fonction de l'angle circonférentiel  $\theta$  (voir Annexe C). L'objectif sera d'affiner ces mesures afin de réaliser des traitements par transformée de Fourier suivant les mêmes principes que l'approche numérique. Ceci permettra alors de réaliser des comparaisons directes de densités spectrales des fluctuations de section entre résultats analytiques, numériques et expérimentaux.

Les travaux développés au cours de cette thèse ont permis d'ouvrir la voie à une



nouvelle approche du développement des instabilités. De nombreuses perspectives de travaux sont donc imaginées. La principale voie d'amélioration concerne l'approche expérimentale qui nécessite d'être finalisée puis exploitée afin de comparer les approches numériques, analytiques et expérimentales. Ces comparaisons passeront également par l'adaptation des modélisations analytiques et numériques afin de rendre compte au mieux des configurations expérimentales étudiées. Il faudra, en particulier, rendre compte du chargement impulsionnel créé par le champ électromagnétique. Cette adaptation devrait s'obtenir sans grande difficulté.

D'autres perspectives sont, par ailleurs, envisagées. Nous souhaiterions mettre à profit la description des instabilités et de la fragmentation par l'approche statistique afin de décrire de manière plus fine la transition entre ces deux processus. Le passage à la rupture dynamique est également un point crucial à étudier. Les modèles d'endommagement/rupture dynamiques ont jusqu'à présent été calibrés et validés essentiellement sur des essais aux barres d'Hopkinson ( $\dot{\epsilon} \approx 10^3 \text{ s}^{-1}$ ) ou d'impacts plans ( $\dot{\epsilon} \approx 10^5 \text{ s}^{-1}$ ). Afin de combler le domaine des vitesses de déformation intermédiaires, nous souhaiterions réaliser des essais d'expansion d'anneaux pré-entaillés et comparer les résultats à des simulations numériques adaptées.

Pour concrétiser l'objectif final visé, celui de simuler des configurations complexes telles que le fonctionnement d'une charge militaire, en prenant en considération les limitations des moyens de calcul actuels, il sera également nécessaire d'évaluer les conséquences de l'emploi d'un maillage plus grossier que celui aboutissant à la convergence des résultats. Deux possibilités méritent d'être explorées. La première sera d'estimer les biais engendrés sur le développement des instabilités et de la fragmentation par une analyse paramétrique complète impliquant des maillages plus grossiers. La seconde pourrait naître du développement d'une approche multi-échelle qui permettra de rendre compte, par exemple, de l'existence de densités de localisations et de ruptures au sein d'un volume effectif représentatif, par exemple, d'un maillage grossier. Le comportement de ce volume effectif sera donc dégradé et une

loi d'endommagement homogénéisée peut être formulée. Ce type d'approche existe déjà pour la modélisation de la fragmentation de matériaux fragiles, comme celle basée sur les travaux de [Denoual et Hild \(2000\)](#).

Enfin, l'approche statistique et la description spectrale du développement des instabilités développées au cours de cette thèse présentent de nombreux points communs avec l'étude des turbulences en mécanique des fluides ou de la rugosité de surface en tribologie. La modélisation des turbulences, notamment par fermeture des systèmes d'équations des problèmes de dynamique des fluides comme l'approche  $k - \epsilon$ , par approche spectrale linéarisée ou faiblement non linéaire, par corrélations spatio-temporelles, a été largement étudiée ces 50 dernières années. Une adaptation de ces différentes approches au développement des instabilités dans les matériaux ductiles devrait être riche en enseignement. Des méthodes de type *LES* (Large Eddy Simulation) de la mécanique des fluides seraient notamment à étudier plus en détails.

# Annexe A

## Accélération de l'anneau

En dérivant l'expression de l'énergie totale (2.25) par rapport au temps, sa conservation conduit à :

$$\frac{dE}{dt} = CV\dot{V} + (R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} I_i I_j \right] + M \dot{r} \ddot{r} + 2\pi A \dot{r} \sigma = 0 \quad (\text{A.1})$$

Or :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} I_i I_j \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{d(L_{11} I_1^2)}{dt} + 2 \frac{d(L_{12} I_1 I_2)}{dt} + \frac{d(L_{22} I_2^2)}{dt} \right] \quad (\text{A.2})$$

En combinant les équations (6.4) et (6.5), il vient :

$$- CV\dot{V} = R_1 I_1^2 + L_{11} I_1 \dot{I}_1 + I_1 \frac{d(L_{12} I_2)}{dt} \quad (\text{A.3})$$

De l'équation (6.6), on obtient :

$$- R_2 I_2^2 = I_2 \frac{d(L_{22} I_2)}{dt} + I_2 \frac{d(L_{12} I_1)}{dt} \quad (\text{A.4})$$

En supposant  $L_{11} = \text{cste}$  et en combinant les équation (A.1) à (A.4), il vient

alors :

$$\begin{aligned}
M \dot{r} \ddot{r} + 2\pi A \dot{r} \sigma &= L_{11} I_1 \dot{I}_1 + I_1 \frac{d(L_{12} I_2)}{dt} + I_2 \frac{d(L_{22} I_2)}{dt} + I_2 \frac{d(L_{12} I_1)}{dt} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[ \frac{d(L_{11} I_1^2)}{dt} - 2 \frac{d(L_{12} I_1 I_2)}{dt} - \frac{d(L_{22} I_2^2)}{dt} \right] \\
&= I_1 \frac{d(L_{12} I_2)}{dt} + I_2 \frac{d(L_{22} I_2)}{dt} + I_2 \frac{d(L_{12} I_1)}{dt} \\
&\quad - I_1 \frac{d(L_{12} I_2)}{dt} - L_{12} I_2 \dot{I}_1 - \frac{1}{2} I_2 \left[ \frac{d(L_{22} I_2)}{dt} + L_{22} \dot{I}_2 \right] \\
&= I_2 \frac{d(L_{12} I_1)}{dt} - L_{12} I_2 \dot{I}_1 + \frac{1}{2} I_2 \frac{d(L_{22} I_2)}{dt} - \frac{1}{2} L_{22} I_2 \dot{I}_2 \quad (\text{A.5}) \\
&= I_2 \left[ L_{12} \dot{I}_1 + I_1 \dot{L}_{12} \right] - L_{12} I_2 \dot{I}_1 + \frac{1}{2} I_2 \left[ L_{22} \dot{I}_2 + I_2 \dot{L}_{22} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} L_{22} I_2 \dot{I}_2 \\
&= I_1 I_2 \dot{L}_{12} + \frac{1}{2} I_2^2 \dot{L}_{22} \\
&= I_1 I_2 \dot{r} \frac{dL_{12}}{dr} + \frac{1}{2} I_2^2 \dot{r} \frac{dL_{22}}{dr}
\end{aligned}$$

Avec l'hypothèse d'un anneau mince, la masse  $M$  vaut :

$$M = 2\pi r A \rho \quad (\text{A.6})$$

L'intégration de (A.6) dans (A.5) nous fournit finalement l'expression de l'accélération de l'anneau en fonction des courants  $I_1$  et  $I_2$ , des valeurs d'inductance  $L_{12}$  et  $L_{22}$  et de la contrainte d'écoulement du matériau  $\sigma$  :

$$\ddot{r} = \frac{I_1 I_2}{2\pi r A \rho} \frac{dL_{12}}{dr} + \frac{I_2^2}{4\pi r A \rho} \frac{dL_{22}}{dr} - \frac{\sigma}{r \rho} \quad (\text{A.7})$$

## Annexe B

# Confrontation avec les résultats de Gourdin

Dans son article, [Gourdin \(1989\)](#) a présenté des comparaisons expérience/calcul sur des essais d'expansion d'anneaux de cuivre. Le comportement de ce cuivre n'a pas été clairement explicité. Il semble, pour autant, avoir des propriétés assez voisines de la nuance que nous utilisons. Nous allons donc adopter les caractéristiques identifiées au tableau 3.1. Lors des essais mis en œuvre avec une tension de charge de 4 kV, les dimensions de la bobine et de l'anneau ainsi que la capacité de son générateur de courant ont permis à Gourdin d'obtenir des courants induits dans l'anneau de quelques 43.7 kA en environ 8  $\mu s$  à partir d'un courant dans la bobine de 22.5 kA (maximum pour  $t \approx 10 \mu s$ ), comme l'illustre la Figure B.1. Sous l'effet des courants induits, l'anneau se déforme jusqu'à des vitesses d'expansion d'environ 185 m/s après environ 18  $\mu s$  (cf. Figure B.2). [Gourdin \(1989\)](#) a également évalué, par calcul, l'échauffement subit par l'anneau à 125 K, comme représenté sur la Figure B.3. En fin de chargement, il a utilisé de petites charges creuses pour interrompre la circulation du courant dans la bobine après environ 22  $\mu s$ . Nos calculs ne permettent pas de rendre compte de ce phénomène. Les courants poursuivent alors leurs oscillations à l'image des résultats obtenus sur la Figure B.1. De fait, lors de la comparaison entre les résultats de [Gourdin \(1989\)](#) et ceux de nos calculs, des divergences au-delà de cet instant particulier sont constatées. Malgré cette difficulté, la modélisation présentée au chapitre 6 permet d'obtenir des courants maximum dans l'anneau de

45.3  $kA$  en 8  $\mu s$  et dans la bobine de 22.2  $kA$  à 10  $\mu s$  (Figure B.1), une vitesse d'expansion maximale de 180.7  $m/s$  à 19  $\mu s$  (Figure B.2), et un échauffement de l'anneau d'environ 125  $K$  également (Figure B.3).

Ces résultats tout à fait comparables à ceux de [Gourdin \(1989\)](#) permettent de valider notre modélisation.

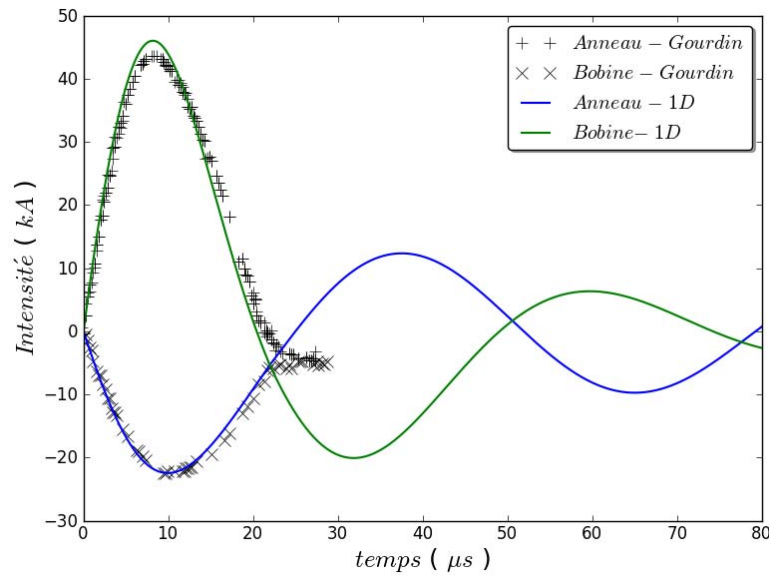


FIG. B.1 – Comparaison des courants obtenus par [Gourdin \(1989\)](#) et par notre modélisation 1D. Un bon accord jusqu'à  $t = 22 \mu s$  est observé. Au-delà, en raison des essais avec charge creuse de [Gourdin \(1989\)](#), des différences notoires existent naturellement.

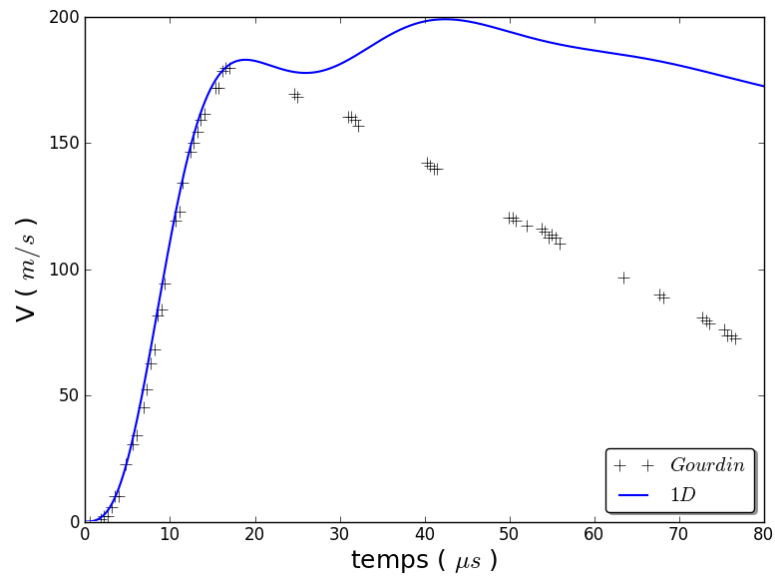


FIG. B.2 – Comparaison des vitesses obtenues par [Gourdin \(1989\)](#) et par notre modélisation 1D. Un bon accord jusqu'à  $t = 22 \mu s$  est observé. Au-delà, en raison des essais avec charge creuse de [Gourdin \(1989\)](#), des différences notoires existent naturellement.

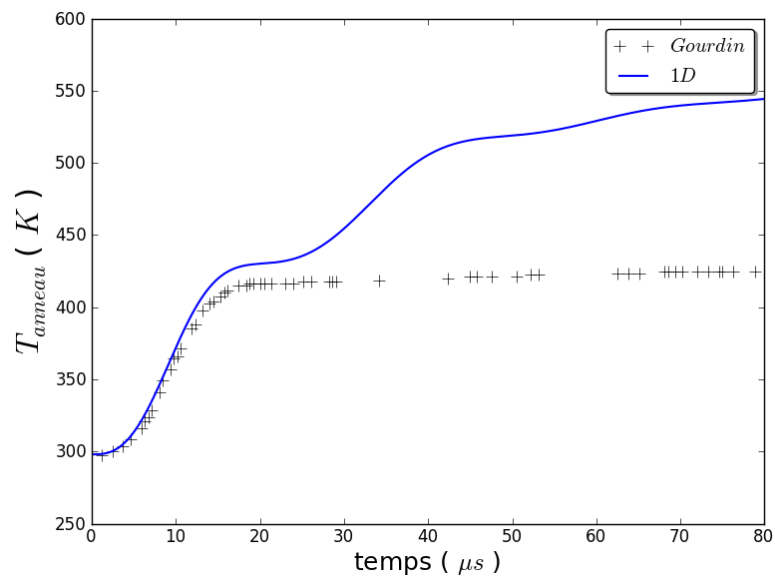


FIG. B.3 – Comparaison des températures obtenues par [Gourdin \(1989\)](#) et par notre modélisation 1D. Un bon accord jusqu'à  $t = 22 \mu s$  est observé. Au-delà, en raison des essais avec charge creuse de [Gourdin \(1989\)](#), des différences notoires existent naturellement.





## Annexe C

# Traitement des images d'expansion d'anneaux

Grâce à la caméra *Imacon 200*, qui a l'énorme avantage d'avoir une haute définition ( $1200 \times 980$  pixels), il est possible d'évaluer l'épaisseur  $ep$  de l'anneau à différents instants. Nous présentons ici les premiers résultats obtenus.

La Figure C.1(a) présente une image obtenue lors d'un essai d'expansion d'anneau. Il n'est pas aisé de visualiser la seule striction observée. Plusieurs traitements numériques de cette image ont été appliqués :

- Il est d'abord nécessaire de repérer le centre de la bobine représentée à l'aide d'une croix sur la Figure C.1(b).
- Un seuillage peut alors être réalisé pour extraire l'anneau de l'image initiale (voir Figure C.1(b)).
- Enfin, en parcourant l'image de la Figure C.1(b) par des rayons issus du centre de la bobine, il est possible d'établir la distance (en nombre de pixels) entre le centre et les contours de l'anneau (voir Figure C.1(c)).

Sur la Figure C.1(c), la striction est nettement identifiable.

On notera que les résultats présentés ici ne permettent pas, à proprement parler, d'obtenir une mesure de l'épaisseur de l'anneau. Il sera encore moins évident de réaliser un traitement de Fourier sur ces profils. Pour ce faire, il sera nécessaire de corriger les aberrations optiques et d'utiliser des mires calibrées pour déterminer des

distances vraies. Une résolution spatiale supérieure à celle de la caméra *Imacon 200* sera peut-être nécessaire. L'objectif de cette partie est essentiellement de montrer la faisabilité d'une telle procédure.

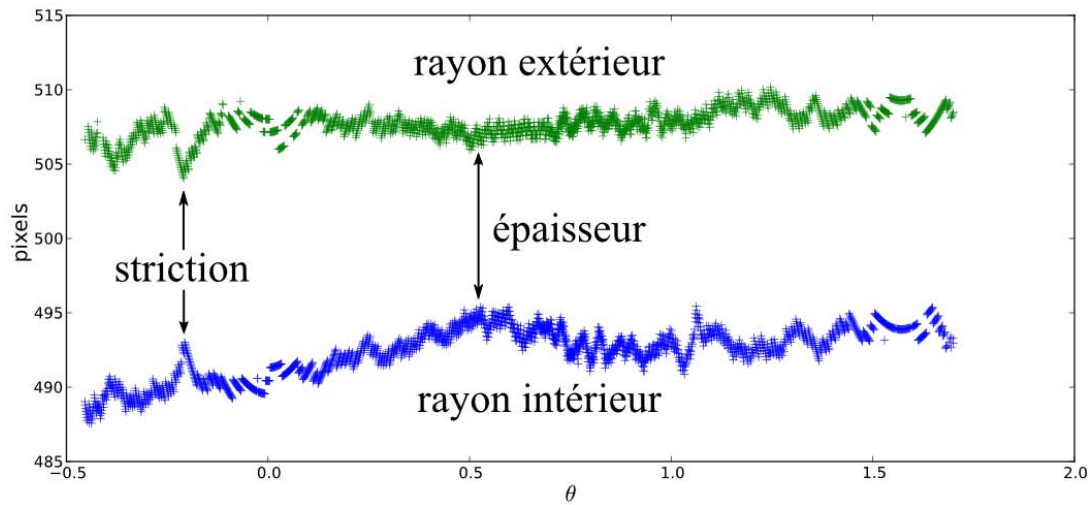
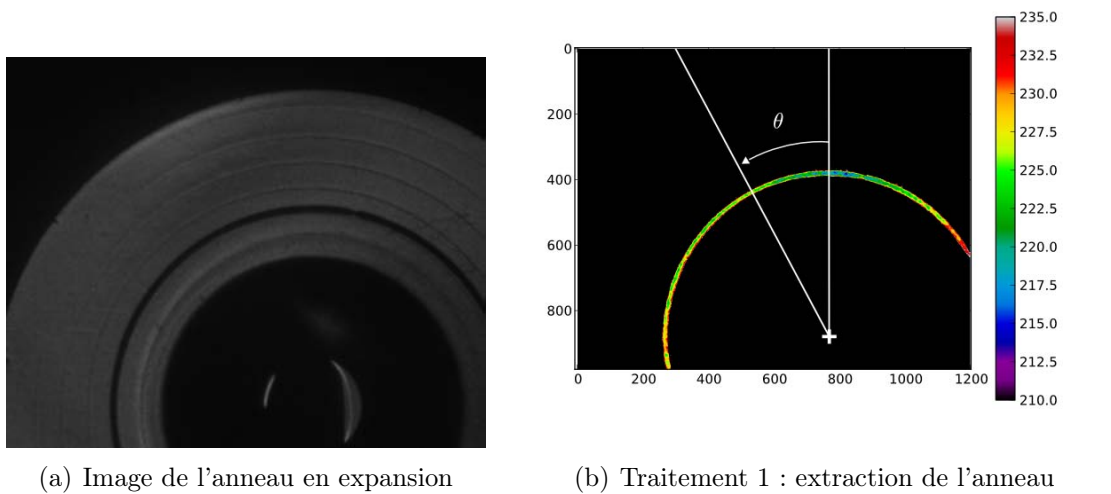


FIG. C.1 – Traitement d'une image d'expansion d'anneau obtenue grâce à la caméra *Imacon 200*. Le premier traitement revient à extraire de l'image l'anneau. Le deuxième traitement vise à évaluer les contours de l'anneau.

# Bibliographie

- Altynova, M., Hu, X., Daehn, G. S., 1996. Increased ductility in high velocity electromagnetic ring expansion. *Met. and Mat. Trans.* 27A, 1837–1844.
- Becker, R., 2002. Ring fragmentation predictions using the Gurson model with material stability conditions as failure criterion. *Int. J. Solids Struct.* 39, 3555–3580.
- Besnard, G., Lagrange, J.-M., Hild, F., Roux, S., Voltz, C., 2010. Characterization of necking phenomena in high-speed experiments by using a single camera. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*.
- Bishop, J., Strack, O., 2011. A statistical method for verifying mesh convergence in monte carlo simulations with application to fragmentation. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 88, 279–306.
- Brémaud, P., 1993. *Signaux Aléatoires*. Ellipses - École Polytechnique.
- Chassaing, P., 2000. *Turbulences en mécanique des fluides*. Collection Polytech.
- Chou, P. C., Carleone, J., Tanzio, C. A., Ciccarelli, R. D., 1977. Shaped charge jet breakup measurements and surface instability calculations. *Tech. Rep. BRL-CR-337*.
- Considère, A., 1885. Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions. *Annales des Ponts et Chaussées* 9 (34), 574–775.
- Denoual, C., Hild, F., 2000. A damage model for the dynamic fragmentation of brittle solids. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 183, 247–258.

- Fressengeas, C., Molinari, A., 1985. Inertia and thermal effects on the localization of plastic flow. *Acta Metall.* 33, 387–396.
- Fressengeas, C., Molinari, A., 1994. Fragmentation of rapidly stretching sheets. *Eur. J. Mech. A/Solids* 13, 251–268.
- Fyfe, I. M., Rajendran, A. M., 1980. Dynamic pre-strain and inertia effects on the fracture of metals. *J. Mech. Phys. Solids* 28, 17–26.
- Goto, D., Becker, R., Orzechowski, T., Springer, H., Sunwoo, A., Syn, C., 2008. Investigation of the fracture and fragmentation of explosively driven rings and cylinders. *Int. J. Impact. Eng.* 35, 1547–1556.
- Goubot, N., 1994. Application du test d'expansion d'anneau à l'étude du comportement dynamique du cuivre. Ph.d. thesis, Ecole des Mines de St Etienne, France.
- Gourdin, W., 1987. Metallurgical effects on the constitutive and fragmentation behavior of ofhc copper rings. Dans : Conference on Shock Compression of Condensed Matter.
- Gourdin, W. H., 1989. Analysis and assessment of electromagnetic ring expansion as a high-strain-rate test. *J. Appl. Phys.* 65, 411–422.
- Grady, D. E., 1981. Fragmentation of solids under impulsive stress loading. *J. Geophys. Res. B2* 86, 1047–1054.
- Grady, D. E., 2006. Fragmentation of Rings and Shells - The Legacy of N.F. Mott. Springer.
- Grady, D. E., Benson, D. A., 1983. Fragmentation of metal rings by electromagnetic loading. *Exp. Mech.* 12, 393–400.
- Grady, D. E., Olsen, M., 2003. A statistics and energy based theory of dynamic fragmentation. *Int. J. Impact. Eng.* 29, 293–306.

- Guduru, P., Bharathi, M., Freund, L., 2006. The influence of a surface coating on the high-rate fragmentation of a ductile material. *Int. J. Fract.* 137, 89–108.
- Guduru, P., Freund, L., 2002. The dynamics of multiple neck formation and fragmentation in high rate extension of ductile materials. *Int. J. Solids Struct.* 39, 5615–5632.
- Han, J., Tvergaard, V., 1995. Effect of inertia on the necking as a precursor to dynamic fracture. *Eur. J. Mech. A/Solids* 14, 287–307.
- Hill, R., Hutchinson, J. W., 1975. Bifurcation phenomena in the plane tension test. *J. Mech. Phys. Solids* 23, 239–264.
- Hiroe, T., Fujiwara, K., Hata, H., Takahashi, H., 2008. Deformation and fragmentation behaviour of exploded metal cylinders and the effects of wall materials, configuration, explosive energy and initiated locations. *Int. J. Impact Eng.* 35, 1578–1586.
- Hoggatt, C., Recht, R. F., 1968. Fracture behavior of tubular bombs. *J. Appl. Phys.* 39, 1856–1862.
- Hoggatt, C., Recht, R. F., 1969. Stress-strain data obtained at high rates using an expanding ring. *Exp. Mech.* 9, 441–448.
- Hopson, M., Scott, C., Patel, R., 2011. Computational comparisons of homogeneous and statistical descriptions of aermet100 steel subjected to high strain rate loading. *Int. J. Impact. Eng.* 38, 451–455.
- Hutchinson, J. W., Neale, K., 1977. Influence of strain rate sensitivity on necking under uniaxial tension. *Acta Metall.* 25, 839–846.
- Jackson, J., 1975. *Classical Electrodynamics*.
- Jeanclaude, V., Fressengeas, C., 1997. Dynamic necking of rods at high strain rates. *J. Phys. IV Colloque C3* 7, 699–704.

- Johnson, J. N., 1981. Dynamic fracture and spallation in ductile solids. *J. Appl. Phys.* 52(4), 2812–2825.
- Johnson, W., Mehl, R., 1939. Reaction kinetics in processes of nucleation and growth. *Trans. AIMME* 135, 414–458.
- Jouve, D., 2010. Etude analytique de l'instabilité plastique de striction pour une plaque sollicitée en traction biaxiale. Ph.d. thesis, Ecole Polytechnique, France.
- Juanicotena, A., 1998. Etude théorique et expérimentale du comportement viscoplastique des matériaux aux grandes déformations et grandes vitesses de déformation. Ph.d. thesis, Université de Metz, France.
- Karpp, R. R., Simon, J., 1976. An estimate of the strength of a copper shaped charge jet and the effect of strength on the breakup of a stretching jet. Tech. Rep. BRL-1983.
- Knoepfel, H., 1970. Pulsed High Magnetic Fields. North-Holland Publishing Company.
- Llorca, F., Juanicotena, A., 1997. Expanding ring test : numerical simulation - application to the analysis of experimental data. *J. Phys IV France* 7 3, 235–240.
- Mercier, S., Granier, N., Molinari, A., Llorca, F., Buy, F., 2010. Multiple necking during the dynamic expansion of hemispherical metallic shells, from experiments to modelling. *J. Mech. Phys. Sol.* 58 (7), 955–982.
- Mercier, S., Molinari, A., 2003. Predictions of bifurcation and instabilities during dynamic extension. *Int. J. Solids Struct.* 40, 1995–2016.
- Mercier, S., Molinari, A., 2004. Analysis of multiple necking in rings under rapid radial expansion. *Int. J. Impact Eng.* 30, 403–419.
- Meulbroek, J., Ramesh, K., Swaminathan, P., Lennon, A., 2008. C t h simulations of an expanding ring to study fragmentation. *Int. J. Impact. Eng.* 35(12), 1661–1665.

- Mock, W., Holt, W. H., 1983. Fragmentation behaviors of Armco iron and HF-1 steel explosive-filled cylinders. *J. Appl. Phys.* 54, 2344–2351.
- Mott, N., 1947. Fragmentation of shell cases. Dans : *Proceedings of The Royal Society. Series A.* pp. 300–308.
- Murnaghan, F., 1951. *Finite Deformation of an Elastic Solid.* Wiley.
- Nayak, P. R., 1971. Random process model of rough surfaces. *Transactions of the ASME - Journal of Lubrication Technology*, 398–407.
- Niordson, F. I., 1965. A unit for testing materials at high strain rates. *Exp. Mech.* 5, 29–32.
- Olive, F., Nicaud, A., Marilleau, J., Loichot, R., 1979. Rupture behaviour of metals in explosive expansion. *Inst. Phys. Conf. Ser.* 47, 242–251.
- Pandolfi, A., Krysl, P., Ortiz, M., 1999. Finite element simulation of ring expansion and fragmentation. *Int. J. Fract.* 95, 279–297.
- Persson, B., Albohr, O., Tartaglino, U., Volokitin, A., Tosatti, E., 2005. On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion. *J. Phys. : Condens. Matter* 17.
- Petit, J., 2010. *Materials under Extreme Loadings.* ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc., Ch. 14, pp. 313–332.
- Petit, J., Dequiedt, J., 2006. Constitutive relations for copper under shock wave loading : Twinning activation. *Mech. Mater.* 38 (3), 173 – 185.
- Petit, J., Jeanclaude, V., Fressengeas, C., 2005. Breakup of copper shaped-charge jets : Experiments, numerical simulations, and analytical modeling. *J. Appl. Physics* 98, 123521.

- Preston, D., Wallace, D., 1992. A model of the shear modulus. *Solid State Communication* 81(3), 277–281.
- Price, J., 2006. An acetylene cylinder explosion : A most probable cause analysis. *Eng. Failure Analysis* 13, 705 – 715.
- Rodríguez-Martínez, J., Vadillo, G., Zaera, R., Fernández-Sáez, J., 2013. On the complete extinction of selected imperfection wavelengths in dynamically expanded ductile rings. *Mechanics of Materials* 60, 107–120.
- Rusinek, A., Zaera, R., 2007. Finite element simulation of steel ring fragmentation under radial expansion. *Int. J. Impact Eng.* 34, 799–822.
- Shenoy, V. B., Freund, L. B., 1999. Necking bifurcations during high strain rate extension. *J. Mech. Phys. Solids* 47, 2209–2233.
- Slate, P., Billings, M., Fuller, P., 1967. The rupture behaviour of metals at high strain rates. *J. Inst. Metals* 95, 244–251.
- Sorensen, N., Freund, L., 2000. Unstable neck formation in a ductile ring subjected to impulsive radial loading. *International Journal of Solids and Structures* 37, 2265–2283.
- Taylor, G., 1963. The fragmentation of tubular bomb. Dans : Koistinen, D. P., Wang, N. M. (Eds.), *Scientific papers of G.I. Taylor Vol III*. Cambridge University Press, pp. 387–390.
- Wesenberg, D., Sagartz, M., 1977. Dynamic fracture of 6061-T6 aluminium cylinders. *J. Appl. Mech.* 44, 643–646.
- Zerilli, F., Armstrong, R., 1987. Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations. *J. Appl. Phys.* 61, 1816–1825.



- Zhang, H., Ravi-Chandar, K., 2006. On the dynamics of necking and fragmentation-I. Real-time and post-mortem observations in Al 6061-O. *Int. J. Fract.* 142, 183–217.
- Zhang, H., Ravi-Chandar, K., 2008. On the dynamics of necking and fragmentation-II. effect of material properties, geometrical constraints and absolute size. *Int. J. Fract.* 150, 3–36.
- Zhou, F., Molinari, J. F., Ramesh, K., 2006a. An elastic-visco-plastic analysis of ductile expanding ring. *Int. J. Impact Eng.* 33, 880–891.
- Zhou, F., Wright, T., Ramesh, K., 2006b. The formation of multiple adiabatic shear bands. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 54, 1376–1400.

## Étude du développement des instabilités dans un anneau en expansion dynamique

**Résumé :** L'Analyse Linéaire de Stabilité a été largement utilisée afin de décrire l'évolution du mode dominant des instabilités pour différentes configurations. Toutefois, plusieurs observations expérimentales et numériques ont démontré l'existence de distributions de longueurs inter-strictions, prémices aux distributions de tailles de fragments.

Une extension de cette utilisation classique de l'Analyse Linéaire de Stabilité dédiée à l'extension d'un barreau en traction a été proposée afin de rendre compte de la contribution de l'ensemble des modes de perturbation sur le profil final des strictions. Cette approche, correspondant physiquement au cas des anneaux fins en expansion, est à même de déterminer une distribution de longueurs inter-strictions.

En se basant sur les mêmes outils mathématiques que ceux ayant permis d'étendre l'analyse linéaire de stabilité, une nouvelle approche numérique a été suivie afin de déterminer le temps d'apparition et le nombre de strictions en fonction de la vitesse de chargement, de l'amplitude et de la taille de cellules de perturbations. Une comparaison, en termes de distribution de longueurs inter-strictions, a été par la suite obtenue entre résultats analytiques et numériques. De bonnes corrélations ont été observées.

Le développement d'un montage expérimental d'expansion d'anneaux par forces électromagnétiques a été entamé au cours de ce travail de thèse. Lors de sa finalisation, il devrait permettre une validation expérimentale des approches développées dans les domaines numériques et analytiques.

**Mots-clés :** Striction multiple, Instabilités plastiques, Cuivre, Expansion d'anneau, Densité de probabilité de longueur inter-strictions.

## Study of multiple necking during dynamic extension of ring

**Abstract :** Linear Stability Analysis has been widely used in order to describe the evolution of the dominant necking pattern in different configurations. However, experimental and numerical observations have demonstrated that a distribution of internecking lengths is obtained instead of a unique dominant pattern.

In this work, an extension of the classical Linear Stability Analysis applied to the dynamic extension of a round bar case has been developed to take into account the contribution of all perturbation modes on the final necking pattern. This approach, corresponding physically to the case of thin ring expansion, is able to determine a distribution on internecking distances.

Based on the same mathematical tools that was developed for the extension of the linear stability analysis, a new numerical approach has been followed to determine the number and the onset time of necking with respect to loading velocity, amplitude and cell size of the perturbations. A comparison, in terms of distributions of inter-necking distance, has been carried out between analytical and numerical results. Good correlations have been observed.

An electromagnetic ring expansion experimental device has been proposed during this work. With some additional development, it should enable to validate experimentally the working assumptions developed in the numerical and analytical studies.

**Keywords :** Dynamic multiple necking, Plastic flow instability, Copper, Ring expansion, Probability density of internecking distance.